

თეიმურაზ ბიორბაძე
მამული ბუჭუსიშვილი

გეომეტრია და სივრცის აღქმა
ალბათობა, მონაცემთა ანალიზი

ქუთაისი 2017

რედაქტორი: ივ. ჯაფარიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და
საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტის მათემატიკის
დეპარტამენტის პროფესორი **თეიმურაზ ვეფხვაძე**

რეცენზენტები: ივ. ჯაფარიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის მათემატიკის
დეპარტამენტის ხელმძღვანელი ასოც. პროფესორ
ომარ ფურთუხია
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
მათემატიკის დეპარტამენტის პროფესორი
თეიმურაზ სურგულაძე

ISBN 978-9941-408-03-8

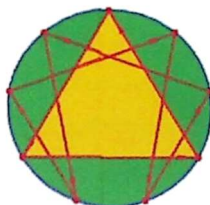
© აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა

"The Mathematical model can not be seen, they only exist in our imagination and they can be express by formulas."

Archimedes

„მათემატიკური მოდელი არაა ხედავად, ისინი მხოლოდ ჩვენს წარმოდგენებში არსებობენ და შეიძლება მათი ფორმულით გამოხატვა“.

არქიმედე



"Life is good for two things, doing mathematics and teaching it."

Simon Denis Poisson

„ცხოვრება საუცხოოა მხოლოდ ორი საგნის გამო – მათემატიკის შესწავლით და მათემატიკის სწავლებით“

საიმონ დენის პუასონი

ავტორებისაგან

წინამდებარე წიგნის ავტორები თ.გიორგაძე და მ. ბუჭუხიშვილი შევეცადეთ მოკრძალებული წვლილი შეგვეტანა გეომეტრიისა და ალბათობის ცნებების, პრაქტიკული და თეორიული მასალის სასწავლო, კონსტრუქტივისტულ და მეთოდურ ინტერპრეტაციაში, ნაშრომ „გეომეტრია და სივრცის აღქმა ალბათობა, მონაცემთა ანალიზი“-ის წარმოდგენილი სახით.

წიგნი შედგება ორი ნაწილისაგან, პირველი ნაწილი შედგება ორი თავისაგან: პლანიმეტრია და სტერეომეტრია, მეორე ნაწილიც ასევე შედგება ორი თავისაგან: ალბათობა და მონაცემთა ანალიზი. ნაშრომში წარმოვადგინეთ სავარჯიშოებისა და ტესტების სხვადასხვა ვარიანტები, სადაც მოცემულია მითითებები ამოცანებზე და ზოგიერთ შემთხვევაში აგებულია შესაბამისი ნახაზებიც.

გეომეტრიული მიმდინარეობა, რომლითაც შეისწავლება გეომეტრიული აგებანი, კონსტრუქციული გეომეტრიის სახელით არის ცნობილი. კონსტრუქციული გეომეტრიის ძირითადი ცნებაა ავაგოთ გეომეტრიული ფიგურა. ეს ცნება მიღებულია განსაზღვრის გარეშე და მისი კონკრეტული აზრი პრაქტიკიდან არის ცნობილი, მაგალითად: „დავხაზოთ“ (წირი), „გავავლოთ“ (წრფე), „აღვნიშნოთ“ (წერტილი) და ა.შ.

სწავლების პირველ ეტაპზე გეომეტრიული ფიგურების გაცნობის შემდეგ მოსალოდნელ შედეგებად შეიძლება განვიხილოთ მოს-

წავლეთა მიერ გარკვეული ზომისა და ფორმის ფიგურები საკუთარი ფანტაზიითა და დამოუკიდებლად დამზადების შემთხვევები.

სწავლების მომდევნო ეტაპზე შეიძლება განვიხილოთ სივრცული ფიგურების გამოყენებითი ხასიათი. რამდენადაც გეომეტრია, ალბათობა და მონაცემთა ანალიზი შეისწავლის როგორც თეორიული, ასევე კონკრეტული ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდებს, ამდენად მოსწავლეებს თავიდანვე უნდა შევუქმნათ წარმოდგენა სივრცული ფიგურების, ალბათური და სტატისტიკური წარმოდგენების პრაქტიკულ და გამოყენებით მნიშვნელობაზე.

პირველ თავში გადმოცემულია გეომეტრიის განვითარების ისტორიული ასპექტები, თვალსაჩინოაა განხილული ელემენტარული მათემატიკის ისეთი ცნებები, როგორებიცაა წერტილი, წრფე, ტეხილი და ა.შ. კუთხის ცნება, კუთხეთა სახეები და მათი გაზომვის პრობლემები. მკითხველისათვის საინტერესო იქნება ამ პარაგრაფში განხილული ამოცანა №4, რომელიც ეხება საათის ისრებს შორის კუთხის გამოთვლას, აქ მოყვანილი ფერადი ნახაზი თვალსაჩინოს ხდის ამოცანის ამოხსნას.

აღწერილია მოსწავლეთა აზროვნების განვითარების ხელშემწყობი თამაში «ტანგრამა», რომელიც შექმნა ჩინელმა მეცნიერმა ტანგმა. როდესაც განვიხილავთ წრეწირს, მის ელემენტებს და თვისებებს მკითხველს დააინტერესებს გვ.78-ზე ამოხსნილი პრაქტიკული ამოცანა. წმინდა მათემატიკური თვალსაზრისით საინტერესოა გეომეტრიული გარდაქმნები სიბრტყეზე. შესწავლილია სხვადასხვა გეომეტრიული გარდაქმნები და მათი თვისებები, თანაც ეს თვისებები ნაჩვენებია პრაქტიკულ მაგალითებზე. მოყვანილია ჰომოთეტიის, ფიგურათა მსგავსებისა და ფიგურათა ტოლობის საკითხები.

ნაშრომში განხილულია ელემენტარული მათემატიკისა და საერთოდ მათემატიკის ისეთი მნიშვნელოვანი საკითხები, როგორებიცაა ფარგლითა და სახაზავით აგების ამოცანები სიბრტყეზე და ოქროს კვეთა. მოყვანილია საინტერესო ფაქტები „ვეფხისტყაოსნის“ ლექსი-

კისა და ოქროს კვეთასთან მისი კავშირის შესახებ.

ფიგურათა ფართობები განიხილება ბრტყელი ფიგურების ფართობების კავშირით მისი შემადგენელი ნაწილების ფართობებთან. სხვადასხვა ფორმის ფიგურათა ფართობები გამოთვლილია პალეტის გამოყენებით. მოყვანილია ფიგურათა ფართობის გამოსათვლელი სტანდარტული ფორმულები და ისეთებიც, რომლებიც სკოლაში არ ისწავლება.

მეორე თავში განიხილება ძირითადი სტერეომეტრიული ცნებები, მრავალწახნაგები და მათი შლილები. ასეთ საკითხებს, როგორც ცნობილია ნაკლები ყურადღება ეთმობა სკოლაში. ასე, რომ ეს მასალა საინტერესო იქნება, როგორც მოსწავლეებისათვის ასევე მასწავლებლებისათვის. აქვე განხილულია ცილინდრის, კონუსის, სფეროს და ბირთვის თვისებები. მოცემულია ფიგურათა გვერდითი და სრული ზედაპირების გამოსათვლელი ფორმულები. მასალის თვალსაჩინოების მიზნით ავაგეთ ფერადი ნახაზები, რაც რა თქმა უნდა აადვილებს მასალის აღქმას და ათვისებას.

სწავლების პირველ საფეხურზე დიდი მნიშვნელობა ენიჭება ფიგურათა შლილებისა და მოდელების დამზადებას და მათ გამოყენებას. ამ მიზნით, თვალსაჩინოებისათვის აგებულია მრავალი გეომეტრიული ფიგურის ფერადი შლილი, ჩამოყალიბებულია სასარგებლო რეკომენდაციები სკოლის მასწავლებლებისათვის.

მოცემულ ნაწილში ასევე განხილულია სივრცული სხეულების მოცულობები და სივრცული სხეულის მოცულობის კავშირი სხეულის შემადგენელი ნაწილების მოცულობებთან.

მესამე თავი ეძღვნება ალბათობის თეორიის საკითხებს. ალბათობის თეორია არის მათემატიკური მეცნიერების დარგი, რომელიც სწავლობს მასობრივი შემთხვევითი მოვლენების კანონზომიერებებს. ალბათობის თეორიის მეთოდები თავისი ბუნებით გამოიყენება მხოლოდ მასობრივი შემთხვევითი მოვლენებისათვის; ისინი არ იძლევიან შესაძლებლობას ვიწინასწარმეტყველოთ ცალკეული შემ-

თხვევითი მოვლენის შედეგი, მაგრამ შესაძლებლობას იძლევიან ვიწინასწარმეტყველოთ ერთგვაროვან შემთხვევით მოვლენათა ერთობლიობის საშუალო შედეგი.

საზოგადოდ, ალბათობის თეორიის მეთოდების გამოყენების აზრი იმაში მდგომარეობს, რომ გვერდი ავუაროთ რთულ, ხშირ შემთხვევაში პრაქტიკულად შეუძლებელ ცალკეულ მოვლენათა შესწავლას, რომელზედაც მრავალი ფაქტორი მოქმედებს.

ნაშრომში და მოცემულ თავში ასევე განვიხილავთ ალბათობის კლასიკურ, სტატისტიკურ და გეომეტრიულ განსაზღვრებებს. ჩვენი აზრით მკითხველს დააინტერესებთ 3.4 - ში განხილული ისტორიული ამოცანა ქართული მხედრობის გამარჯვებების ალბათობების გამოსათვლელად როგორც მთლიანად, ასევე საუკუნეების მიხედვით ცალ - ცალკე.

ალბათობის გეომეტრიული განსაზღვრების შესწავლისას ტრადიციულ მაგალითებთან ერთად განხილულია მაგალითი R რადიუსიანი სფეროს შიგნით მოთავსებული r რადიუსიანი სფეროში წერტილის გაჩენის ალბათობის გამოთვლის შესახებ. ნაჩვენებია, რომ სხვადასხვა განზომილებებში შესაბამისი ალბათობები განსხვავებულია. ამავე თავში განხილულია ალბათობათა თვისებები და მიღებულია ფორმულები უთავსებად და თავსებად ხდომილობათა გაერთიანების ალბათობის გამოსათვლელად. საილუსტრაციო მაგალითებში გამოიყენება როგორც გეომეტრიული ინტერპრეტაცია ასევე ალგებრული მიდგომები.

პირობითი ალბათობის შესწავლისას (3.7 - ში) მოყვანილია გეომეტრიული სქემა, რომელიც თვალსაჩინოს და გააზრებულს ხდის ამ ცნებას და მის შესწავლას. ასევე გეომეტრიული სქემით არის ახსნილი ხდომილობათა დამოუკიდებლობისა და ალბათობათა ნამრავლის შესწავლა. საყოველთაოდაა ცნობილი, რომ სრული ალბათობისა და ბაიესის ფორმულები მიეკუთვნებიან ალბათობის თეორიის ძირითად დებულებათა სიმრავლეს, ნაშრომში მოცემულია ამ თეო-

რემების ინტერპრეტაციისა და დამტკიცების ერთ-ერთი მეთოდი.

ამავე თავში გადმოცემულია დამოუკიდებელ და განმეორებით ცდათა სერიების ცნება. აღწერილია ბერნულის სქემა და დამტკიცებულია ბერნულის ფორმულა, როგორც ცნობილია ამ საკითხებს აქვთ დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა.

მეოთხე თავი მონაცემთა ანალიზი. მათემატიკური სტატისტიკის ამოცანათა მოკლედ დახასიათება საკმაოდ ძნელია. მათემატიკური სტატისტიკა არსებითად იყენებს ალბათობის თეორიის მეთოდებს, სარგებლობს ანალოგიური ცნებებით, მაგრამ მიუხედავად ამისა, იგი გამოყოფილია როგორც დამოუკიდებელი მათემატიკური დარგი. ამის მიზეზს წარმოადგენს მათემატიკური სტატისტიკის ამოცანათა სპეციფიკური ხასიათი, რაც იმითაა განპირობებული, რომ გარკვეული აზრით, მათემატიკური სტატისტიკის ამოცანები ალბათობის თეორიის ამოცანების შებრუნებულია.

მეოთხე თავს ვიწყებთ მათემატიკური სტატისტიკის ძირითადი და საწყისი ცნებებით, სადაც გავარჩევთ მონაცემთა წარმოდგენის ხერხებს: სია, ცხრილი, სიხშირე, პიქტოგრამა». აღნიშნულია, რომ «სტატისტიკა (ლათინურად Cstatus – მდგომარეობა) არის მეცნიერება ცხოვრების სხვადასხვა მოვლენის თაობაზე მონაცემების შეგროვების, დამუშავებისა და ანალიზის შესახებ». განხილულია მონაცემთა ფარდობითი სიხშირე, ჰისტოგრამა და პოლიგონი. წარმოდგენილია წერტილოვანი, ხაზოვანი, ფოთლოვანი ღეროების მსგავსი, სვეტოვანი და წრიული დიაგრამები.

წიგნში ყოველი თავის ბოლოს მოცემულია სავარჯიშოები და ტესტები, რომლებიც საშუალებას აძლევს მკითხველს განამტკიცოს მოცემულ ნაშრომში გადმოცემული მასალის ცოდნა.

თ.გიორგაძის და მ. ბუჭუხიშვილის წიგნი «გეომეტრია და სივრცის აღქმა ალბათობა, მონაცემთა ანალიზი» განკუთვნილია დაწყებითი განათლების სპეციალობის სტუდენტებისათვის, საჯარო სკოლის მასწავლებლებისათვის, მასწავლებლებელთა სასერტიფი-

კაციო გამოცდების ჩაბარების მსურველთათვის და მათემატიკით დაინტერესებული პირებისათვის, რომელთაც სურვილი ექნებათ დამოუკიდებლად შეისწავლონ ელემენტარული გეომეტრიის, ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის ძირითადი საწყისი ელემენტები.

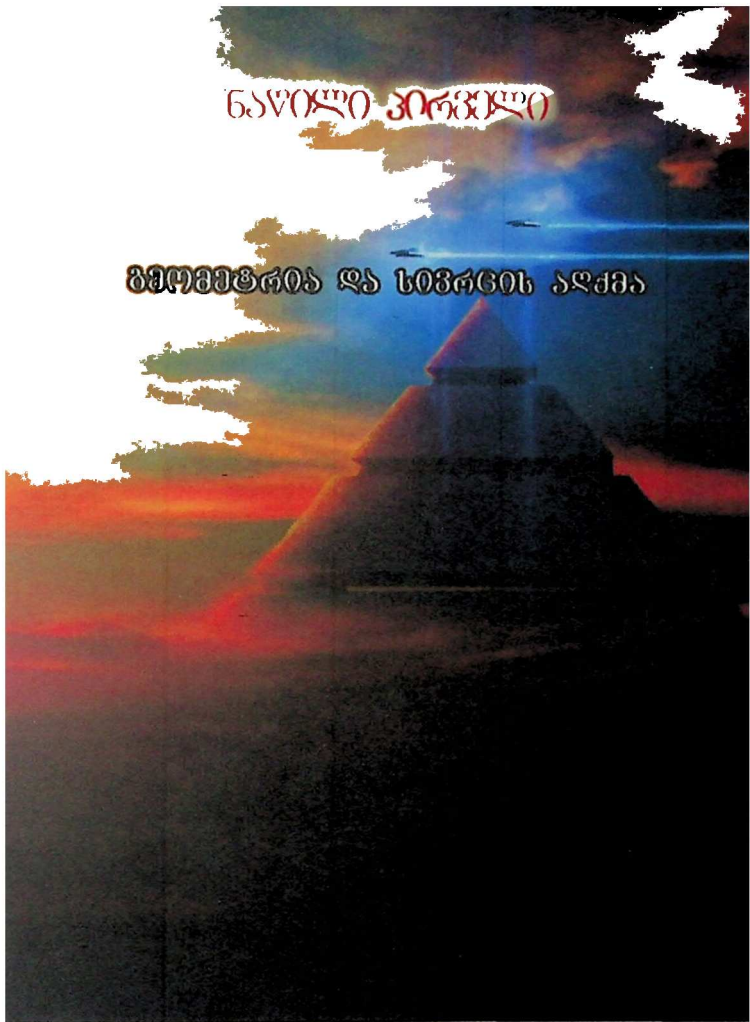
წიგნზე მუშაობისას დიდი დახმარება გაგვიწია პროფესორ თეიმურაზ ვეფხვაძის (გამოცემის რედაქტორი), პროფესორების: ომარ ფურთუხია, თეიმურაზ სურგულაძე (ნაშრომის რეცენზენტები), აკადემიურმა და საქმიანმა შენიშვნებმა, რისთვისაც მათ ვუხდით მადლობას.

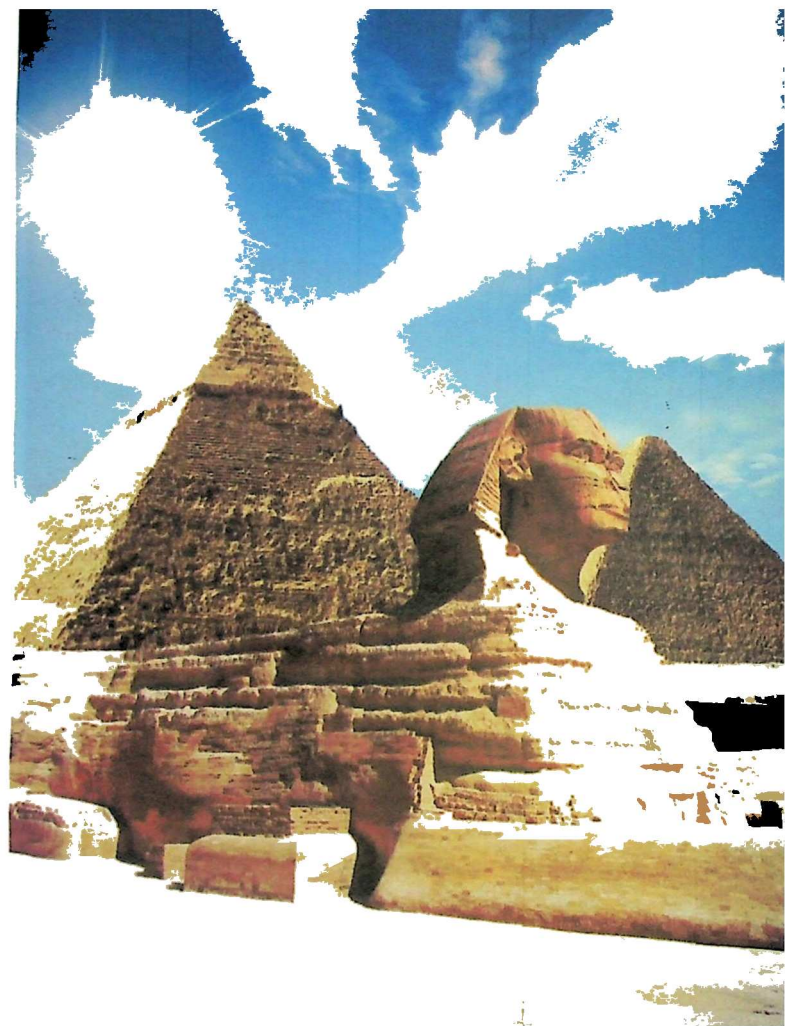
სახელმძღვანელოს ავტორები დიდი სიამოვნებით მიიღებენ ყველა საქმიან შენიშვნასა და მოსაზრებას.

თეიმურაზ გიორგაძე
მამული ბუჭუხიშვილი
2017 წელი

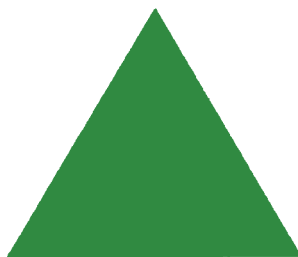
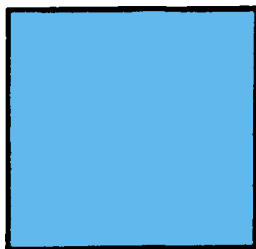
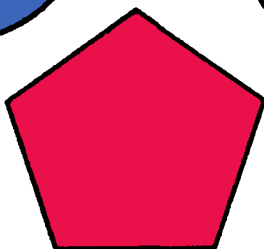
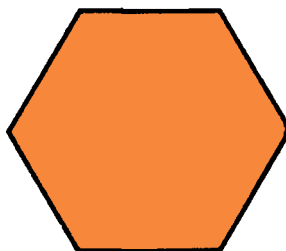
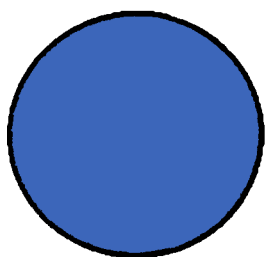
ნაწილი პირველი

გეოგრაფია და სივრცის აღქმა





თავი პირველი
კლასიფიკაცია



1.1. ისტორიული ცნობები გეომეტრიის წარმოშობის შესახებ; სიბრტყითი შიგნუბები: წარტილი; წრე; სხივი; მონაკვეთი; ტახტი

გეომეტრია ბერძნული სიტყვაა და ქართულად მიწისზომელობას ნიშნავს. ისტორიულად გეომეტრია მიწის ნაკვეთების გაზომვის შედეგად წარმოიშვა, მაგრამ დღეს გეომეტრია მიწისზომელობისაგან განყენებული მეცნიერებაა. გეომეტრია არის მეცნიერება, რომელიც სწავლობს სხეულთა (ფიგურათა) ფორმებსა და მათ სივრცით ურთიერთმიმართებებს.

გეომეტრია ორ ნაწილად იყოფა: პლანიმეტრია და სტერეომეტრია. პლანიმეტრია სიბრტყის გეომეტრიაა, ხოლო სტერეომეტრია კი - სივრცის; სიბრტყეზე მდებარე ფიგურებს, ჩვეულებრივ, ბრტყელ ფიგურებს უწოდებენ; სივრცულ გეომეტრიულ ფიგურებს კი - სხეულებს.

სანამ ბრტყელი და სივრცული გეომეტრიული ფიგურების განხილვას დავიწყებდეთ, განვიხილოთ მოკლე ისტორიული ცნობები გეომეტრიის წარმოშობის შესახებ.

ისტორიკოსი ჰეროდოტე, ფილოსოფოსი არისტოტელე და სხვა ძველბერძენი სწავლულები თვლიდნენ, რომ გეომეტრიის წარმოშობა ეგვიპტეში მოხდა. ევდემე როდოსელის მიხედვით შეიძლება ვთქვათ, რომ გეომეტრიული ცოდნა ეგვიპტეში არსებობდა 4000 წლის წინათ. ჩვენამდე მოაღწია არა მარტო ძველბერძენი სწავლულების შეფასებებმა, არამედ ეგვიპტური მათემატიკის ძეგლებმაც. მათგან ყველაზე ძველია პაპირუსი, რომელიც დაწერილია ჩვენს ერამდე დაახლოებით 1900 წელს. ამ პაპირუსში მოცემული 25 მათემატიკური ამოცანიდან 7 გეომეტრიულია. მეორე პაპირუსი, რომელიც ჩვენს ერამდე 1700 წელსაა დაწერილი და რინდის პაპირუსის სახელწოდებითაა ცნობილი, შეიცავს 84 მათემატიკურ ამოცანას, მათგან 20 გეომეტრიულია. პაპირუსების ტექსტებიდან ჩანს, რომ იმ დროს ეგვიპტელებს შეეძლოთ კვადრატის, მართკუთხედის, ტრაპეციისა და წრის ფართობის გამოანგარიშება. გეომეტრია, როგორც

პრაქტიკული მეცნიერება, ეგვიპტელებს ჰირდეობდათ არა მხოლოდ იმიტომ, რომ ნილოსის ადიდების შემდეგ აღედგინათ მიწის ნაკვეთების საზღვრები, არამედ იმისათვისაც, რომ ეწარმოებინათ სამეურნეო სამუშაოები, აეგოთ სარწყავი არხები, გრანდიოზული ტაძრები, პირამიდები, გრანიტისაგან გამოეკვეთათ განთქმული სფინქსები და ა.შ.

შემორჩენილ პაპირუსებში ძირითადად მხოლოდ ფართობებისა და მოცულობების გამოანგარიშებაზეა წარმოდგენილი ჩანაწერები; არ არის ცნობები იმის შესახებ, თუ როგორ მიიღეს ეგვიპტელებმა ეს წესები. ეგვიპტური გეომეტრიის უმაღლესი მიღწევაა კვადრატული ფუძის მქონე წაკვეთილი პირამიდის მოცულობის ზუსტი განსაზღვრა.

გეომეტრია პარალელურად ვითარდებოდა მსოფლიოს მრავალ რეგიონში, მრავალი ხალხის ყოფაში. არქეოლოგიური გათხრების დროს აღმოჩენილი „თიხის წიგნები“ შეიცავენ ცნობებს იმის შესახებ, რომ 4000 წლის წინათ საკმაოდ განვითარებული იყო შუმერულ-ბაბილონური მათემატიკური ცოდნა, მაგრამ ეს ძირითადად ეხება არითმეტიკასა და ალგებრას, რაც შეეხება გეომეტრიას, პროპორციული მონაკვეთებისა და პითაგორას თეორემის გარდა, ბაბილონელთა გეომეტრია ძირითადად დაიყვანებოდა რამდენიმე ფიგურის ფართობისა და მოცულობის გამოანგარიშებაზე.

ჩვენს ერამდე 1100 წლითაა დათარიღებული ძველი ჩინური მათემატიკურ-ასტრონომიული ხელნაწერი „ჩჟოუ-ზი“, სადაც მოცემულია პითაგორას თეორემა და მრავალი პრაქტიკული გეომეტრიული საკითხი. პრაქტიკული ხასიათი ჰქონდა ძველინდურ გეომეტრიასაც, რომლის განვითარებაც დაკავშირებულია როგორც ცხოვრებისეულ მოთხოვნილებებთან, ისე რელიგიურ წესებთან, მსხვერპლად შეწირვის კულტთან.

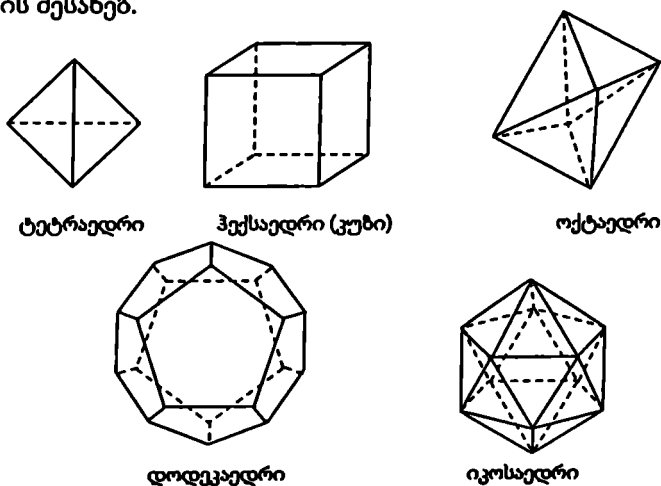
საზოგადოდ, გეომეტრიის ჩასახვაში განსაკუთრებული როლი ითამაშა პერიოდმა, რომელიც ჩვენს ერამდე მეოთხე ათასწლეულის ბოლოს და მესამე ათასწლეულს მოიცავს; ამ დროს ჩნდებიან ცივი-

ლიზაციები: ეგვიპტური (ნილოსის ნაპირებზე), შუმერულ-ბაბილო-
ნური (ტიგროსისა და ეფრატის ნაპირებზე), ინდური (ინდის ნაპი-
რებზე), მათ პირველებმა გაიარეს ზღვარი პირველყოფილ ცხოვრე-
ბასა და ცივილიზაციას შორის. მეორე ათასწლეულში აღმოცენდა
ბერძნული, მცირე აზიის, აღმოსავლეთ ხმელთაშუაზღვისპირეთის,
შუა მესოპოტამიის, შუა აზიის სამხრეთის, ირანის ნაწილის და ჩი-
ნური (ხუანხეს ნაპირებზე) ცივილიზაციები.

ყველა ამ ხალხმა გარკვეული წვლილი შეიტანა გეომეტრიული
ცოდნის აღმოცენებაში. ამ ცოდნის დაგროვებაში არც ისე მცირე
წვლილი მიუძღვის უძველეს ქართულ ტომებს, რაზეც მეტყველებს
საქართველოს ტერიტორიებზე წარმოებული არქეოლოგიური გათხ-
რების შედეგად აღმოჩენილი ნივთების შესწავლა, რომელთაც საკმა-
ოდ რთული გეომეტრიული ფორმები გააჩნიათ. ამ ნივთებს ვერ და-
ამზადებდა საზოგადოება, რომელსაც გეომეტრიული ცოდნა არ ექ-
ნებოდა.

გეომეტრია, როგორც მეცნიერება, ჩამოყალიბებას იწყებს ძველ
საბერძნეთში. თალეს მილეთელის (რომელიც ძველ საბერძნეთში
ცხოვრობდა ჩვენს ერამდე მეშვიდე საუკუნის ბოლოს და მეექვსე სა-
უკუნის დასაწყისში) სახელთანაა დაკავშირებული პირველი გეო-
მეტრიული დამტკიცებები. მას მიაწერენ ისეთი თეორემების დამ-
ტკიცებას, როგორიცაა თეორემები: ვერტიკალური კუთხეების ტო-
ლობის შესახებ, ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუ-
თხეების ტოლობის შესახებ, სამკუთხედების ტოლობის შესახებ და
სხვა. პითაგორა (ბერძენი მათემატიკოსი, რომელიც ცხოვრობდა
ჩვენს ერამდე მეექვსე საუკუნის ბოლოს და მეხუთე საუკუნის დასა-
წყისში) აწარმოებდა საინტერესო ექსპერიმენტს მათემატიკისა და
მუსიკის ერთმანეთთან კავშირის შესახებ. არსებობს მოსაზრება, რომ
იგი სიმძიმეს ჰკიდებდა სხვადასხვა სიმეზზე, რითაც არკვევდა
ტოლქმედი ძალების მათემატიკურ კავშირს, დამძიმებულ, ან დაგ-
რძელებულ სიმეზზე, ხელის ჩამოკერისას. მან აღმოაჩინა, რომ გარ-
კვეული სიგრძისა და მასზე ორჯერ გრძელი სიმის ჟღერადობა ჰარ-

მონიულ ტონალობას გადმოსცემდა. პითაგორამ თავისი სკოლა და-
არსა კრიტონში, იტალიაში. მისი მიზანი იყო ფიზიკურ სამყაროსა
და მათემატიკას შორის ურთიერთკავშირის კვლევა. ყველაზე დომი-
ნანტური იყო - „ყველაფერი არის რიცხვი“ - ანუ რეალობა. ყველა
ფიზიკური სხეული მათემატიკურად დაკავშირებულია ერთმანეთ-
თან. პითაგორელების ექსპერიმენტებმა გზა მისცა მრავალ აღმოჩე-
ნას, მათ შორის: „სამკუთხედის კუთხეების ჯამი უდრის ორ მართ
კუთხეს“ (180° -ს). პითაგორას თეორემა უცნობის არ იყო ბაბილონე-
ლებისათვის, მაგრამ პითაგორა პირველი იყო ვინც დაამტკიცა, რომ
მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზის კვადრატი უდრის კათე-
ტების კვადრატების ჯამს. ამასთანავე პითაგორამ 2 ათასი წლით ად-
რე კოლუმბამდე შემოგვთავაზა იდეა, რომ დედამიწა მრგვალია. პი-
თაგორამ ერთ-ერთმა პირველმა ააგო ხუთი წესიერი მრავალწახნაგა,
ესენია: ტეტრაედრი, ჰექსაედრი (კუბი), ოქტაედრი, დოდეკაედრი
და იკოსაედრი (ნახ.1). მასვე მიაწერენ სწავლებას ფიგურათა მსგავ-
სების შესახებ.



ნახ.1.

ჩვენს ერამდე მეოთხე საუკუნის ბოლოს ძველი საბერძნეთის მა-

თემატიკური მიღწევები სისტემაში მოიყვანა და იმ დროისათვის მეცნიერულად ჩამოაყალიბა ევკლიდემ თავის „საწყისებში“. „საწყისები“ ცამეტი წიგნისაგან შედგებოდა, პირველი ექვსი წიგნი პლანიმეტრიას ეხებოდა, მეშვიდე-მეათე - მოძღვრებას რიცხვის შესახებ, ხოლო დანარჩენი წიგნები - სტერეომეტრიას. აღსანიშნავია, ძველი სამყაროს უდიდესი მათემატიკოსი არქიმედე, რომელიც ცხოვრობდა კუნძულ სიცილიაზე ქალაქ სირაკუზაში, მისი შრომები დღესაც განსაკუთრებულ ინტერესს იწვევენ. ჰერონის ფორმულის, $S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$, დამტკიცება არქიმედეს ეკუთვნის.

გეომეტრიის განვითარების შემდგომი პერიოდი იწყება რენესანსის ეპოქის დროს და ემთხვევა ფერწერის ბრწყინვალე პერიოდს იტალიაში, ნიდერლანდებსა და გერმანიაში. ამ პერიოდში დაწერილმა შრომებმა, რომლებიც დაკავშირებული იყო ისეთ სახელებთან როგორიცაა: ალბერტ დიურერი (1471-1528); ლეონარდო და ვინჩი (1452-1518) და სხვა, საფუძველი ჩაუყარა გეგმილური გეომეტრიის შექმნას; ამ მხრივ უნდა აღინიშნოს დეზარგი (1593-1661), პასკალი (1623-1662), ჟერგონი (1771-1859), ბრიანშონი (1583-1864), პონსელე (1788-1867), განსაკუთრებული ადგილი უჭირავს გასპარ მონჟეს (1746-1818), რომელმაც შექმნა მხაზველობითი გეომეტრია. აღსანიშნავია, იტალიელი ბონავენტურა კავალიერი (1598-1647), მან პირველი ნაბიჯი გადადგა ანალიზური გეომეტრიის შექმნის საკითხში. ანალიზური გეომეტრიის შემქმნელები პიერ ფერმა (1601-1665) და რენე დეკარტია (1596-1656).

დავუბრუნდეთ ევკლიდეს „საწყისებს“. ამ შრომაში ევკლიდემ გეომეტრიის კურსი აქსიომატურად ააგო (იმ დროისათვის მკაცრად). პირველ წიგნს იგი განსაზღვრებებით იწყებს, შემდეგ მოჰყავს პოსტულატები და აქსიომები, ე.ი. ისეთი წინადადებები, რომლებიც მიიღება დაუმტკიცებლად. მეხუთე პომტულატი, რომელსაც პარალელობის აქსიომას უწოდებენ, ასეა ჩამოყალიბებული: „თუ წრფე გადაკვეთს ორ წრფეს და შექმნის მათთან შიგა ცალმხრივ კუთხეებს, რომლებიც ერთად ნაკლებია ორ მართზე (მართ კუთხეზე), მაშინ ეს

ორი წრფე საკმარისად გაგრძელებისას გადაკვეთს ერთმანეთს იმ მხრით, სადაც კუთხეები ერთად ორ მართზე ნაკლებია“. ეს აქსიომა სხვებზე უფრო რთულია, როგორც მასში აღწერილი ფაქტით, ისე ფორმულირებით, ამიტომ ცდილობდნენ მის დამტკიცებას, ე.ი. სურდათ ლოგიკურად გამოეყვანათ იგი სხვა აქსიომებიდან. მიუხედავად იმისა, რომ მეხუთე პოსტულატის დამტკიცების ცდები მარცხით მთავრდებოდა, ეს ცდები არ წყდებოდა. მათ უფრო ინტენსიური სახე მიიღეს მეთვრამეტე საუკუნეში. ეს იმით აიხსნება, რომ მეთექვსმეტე საუკუნიდან ყალიბდება ალგებრა. მის ნიადაგზე წარმოიშვა ანალიზური გეომეტრია, მას მოჰყვა დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის აღმოჩენა. ყოველივე ამან გამოიწვია მათემატიკის და, კერძოდ, გეომეტრიის სწრაფი განვითარება. ამიტომ მეხუთე პოსტულატის დამტკიცების სურვილიც გამძაფრდა. ეს იყო განვითარებით გამოწვეული აუცილებლობა. ამ საკითხის შესწავლის საქმე ახალ სიმაღლეზე ავიდა და მალე მიაღწია კიდევ თავის საბოლოო გადაწყვეტას.

აღმოჩნდა, რომ მეხუთე პოსტულატის დამტკიცება შეუძლებელია. ეს პოსტულატი გეომეტრიის განშტოების გამოსავალი წერტილი შეიქმნა. ეკვლიდეს „საწყისების“ პირველ წიგნში პირველი წინადადებები მტკიცდება ამ პოსტულატის დაუხმარებლად. 28-ე წინადადების შემდეგ წინადადებათა უმრავლესობა დამტკიცებულია ან მე-5 პოსტულატის საშუალებით, ანდა ამავე პოსტულატით დამტკიცებული სხვა წინადადებების საშუალებით.

ამრიგად, 29-ე წინადადებიდან დაწყებული გეომეტრია გაიყოფა ორ ნაწილად: პირველ ნაწილს ქმნის ის წინადადებები, რომლებიც მე-5 პოსტულატისაგან დამოუკიდებელი არიან. მათ ერთობლიობას ახლა უწოდებენ აბსოლუტურ გეომეტრიას, მეორეს შეადგენს ის წინადადებები, რომელთა დამტკიცება მე-5 პოსტულატის გარეშე შეუძლებელია, ეს წინადადებები ქმნიან ე.წ. საკუთრივ ევკლიდურ გეომეტრიას. ასე რომ, მე-5 პოსტულატი გეომეტრიას ყოფს ორ ნაწილად.

ლობაჩევსკის ნაშრომში „გეომეტრია“, რომლის დაბეჭდვა ნებადართული არ იყო, პირველად არის მკაფიოდ გამოყოფილი აბსოლუტური გეომეტრია საკუთრივ ევკლიდურისაგან. ევკლიდეს მე-5 პოსტულატის ნაცვლად ლობაჩევსკიმ მიიღო, რომ AB წრფის გარეთ მდებარე C წერტილზე ABC სიბრტყეზე გაივლის ერთ წრფეზე მეტი, რომელიც AB-ს არ გადაკვეთს. პირველი შეხედვით მოსალოდნელი იყო, რომ ასეთი უაზრო დაშვებით მიღებული დასკვნა მიგვიყვანდა აბსურდამდე, აბსოლუტურ გეომეტრიასთან წინააღმდეგობამდე, მაგრამ ლობაჩევსკის დასკვნები ისე ღრმად არის დამუშავებული, რომ არ იწვევს ასეთ წინააღმდეგობას. მართალია, ამ დასკვნებს მივყავართ ინტუიციურ წინააღმდეგობამდე, მაგრამ არ არის არავითარი ლოგიკური წინააღმდეგობა. პირიქით, მიმდევრობით ჩატარებული დასკვნები თანდათან ლაგდება როგორც დასრულებული ჰარმონიული მთელი, რომელსაც ლობაჩევსკიმ უწოდა „წარმოსახვითი“, ხოლო გაუსმა „არაევკლიდური გეომეტრია“.

მათემატიკოსები ფიქრობდნენ V პოსტულატი იყო სხვა აქსიომების შედეგი. ლობაჩევსკიმ შემოიღო საწინააღმდეგო წინადადება და განიხილა აქსიომათა ახალი სისტემა V პოსტულატის საწინააღმდეგო დებულებით. ააგო შესაბამისი გეომეტრიული სისტემა (აბსოლუტური გეომეტრიისა და V პოსტულატის საწინააღმდეგო დებულებით), რომელიც აღმოჩნდა არაწინააღმდეგობრივი, ამით დამტკიცდა V პოსტულატის დამოუკიდებლობა და ამასთანავე შექმნა ახალი გეომეტრია. გეომეტრია გაიყო ორ ნაწილად: აბსოლუტური გეომეტრია და V პოსტულატი ქმნის საკუთრივ ევკლიდურ გეომეტრიას, ხოლო აბსოლუტური გეომეტრია და V პოსტულატის საწინააღმდეგო დებულება ქმნის არაევკლიდურ გეომეტრიას.

1826 წლის 11 თებერვალს ლობაჩევსკიმ ყაზანის უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის სხდომაზე გააკეთა მოხსენება თემაზე, სახელწოდებით: „გეომეტრიის საწყისების ძირითადი განმარტება წრფეთა თეორემის მკაცრი დამტკიცებით“. ფაკულტეტმა ეს ნაშრომი სარეცენზიოდ კომისიას გადასცა; კომისიამ უარყოფი-

თი დასკვნა გამოიტანა, არც ნაშრომი დაუბრუნებიათ უკან და იგი დღესაც დაკარგულად ითვლება. 1829 წელს ნაშრომი ლობაჩევსკიმ მაინც გამოაქვეყნა უნივერსიტეტის ჟურნალ „ყაზანის მოამბეში“ სახელწოდებით: „გეომეტრიის საწყისების შესახებ“. იგი შეიცავს ლობაჩევსკის მიერ შექმნილ არაევკლიდური გეომეტრიის საწყისების გადმოცემას, მაგრამ რუსეთში ის ვერავინ გაიგო, ამიტომ ლობაჩევსკიმ შეადგინა მცირე თხზულება, სადაც უფრო გარკვევით იყო გადმოცემული ახალი გეომეტრიის მხოლოდ საწყისები. ეს ნაშრომი, შესრულებული 1840 წელს, მან გამოაქვეყნა ბერლინში გერმანულ ენაზე, ცალკე ბროშურად სათაურით: „გეომეტრიული გამოკვლევები პარალელურ წირთა თეორიაში“.

ამ ნაშრომით ლობაჩევსკიმ მიზანს მიაღწია, ე.ი. მან შეძლო მათემატიკური სამყაროსათვის გაეცნო თავისი იდეები, რომელშიც ადვილად გაერკვევა ყოველი ადამიანი, რომელსაც ზოგადი მათემატიკური განათლება აქვს.

ამ აღმოჩენებში თავიანთი წვლილი შეიტანეს იტალიელმა სწავლულმა ჯოვანი საკერიმ (1667-1733), შვეიცარიელმა მათემატიკოსმა და ფილოსოფოსმა იოჰან ლამბრეტიმ (1728-1777), ფრანგმა გეომეტრმა ადრიენ ლეჟანდრმა (1752-1833), უნგრელმა მათემატიკოსმა ფარკაშ ბოიამ (1775-1856), გერმანელმა მათემატიკოსმა ფრიდრიხ ვახტერმა (1792-1817); ესენი არაევკლიდური გეომეტრიის წინამორბედნი იყვნენ. არაევკლიდური გეომეტრიის ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად აღმომჩენები არიან გერმანელი კარლ გაუსი (1777-1855), უნგრელი იანოშ ბოია (1802-1860), რუსი ნიკოლოზ ლობაჩევსკი (1792-1856) და გერმანელი ბერჰარდ რიმანი (1826-1866).

ინტერესმოკლებული არ იქნება თუ გავეცნობით არაევკლიდური გეომეტრიის წარმოშობის ისტორიას. გაუსს ამ დარგში თავისი ნაშრომებიდან არცერთი არ გამოუქვეყნებია, იმიტომ, რომ ეს ამდენად პარადოქსული თეორიები, მისი აზრით, ფართო მასისათვის გაუგებარი იქნებოდა. გაუსს არა ერთხელ უთქვამს, რომ „კრაზანას ბუდეს“ ხელს ნუ ახლებთ, თორემ ის მწარედ დაკბენს ყველას, ვინც შე-

ეცდება მის შესხებას. ამ საკითხზე გაუსი დაწვრილებით წერს ტაუ-რინუსს, მაგრამ ამავე დროს სთხოვს მას ყოველივე ამის ფრიად საიდუმლოდ შენახვას. ამის შესახებ მან ბესელსაც მისწერა. მალე დადგა საიდუმლოების გამომჟღავნების დრო. 1832 წელს გამოქვეყნდა იანოშ ბოიას შედეგები თავისი მამის ფარკაშ ბოიას შრომებისადმი დანართის სახით. ამის შემდეგ გაუსი წერს ფარკაშ ბოიას მისი შვილის ნაშრომის შესახებ და გამოთქვამს აღტაცებას იმის გამო, რომ ამ ახალგაზრდამ მისი აღმოჩენა საყოველთაოდ მისაწვდომი გახადა, მაგრამ იანოშ ბოიას ეწყინა იმის გაგება, რომ მასზე ადრე იგი გაუსს აღმოუჩენია. ბოია იქამდე მივიდა, რომ ლობაჩევსკის ნაშრომის გამოქვეყნება გაუსის მოწყობილად ჩათვალა, რათა ამით გაუსს მისთვის შეურაცყოფა მიეყენებია, მაგრამ ლობაჩევსკის ნაშრომებს გაუსი გაეცნო 1841 წელს, მაშინ როცა ლობაჩევსკიმ ისინი პირველად 1829 წელს გამოაქვეყნა.

დღეს გეომეტრია ძალზე მრავალ დარგს შეიცავს. გეომეტრიის ისტორიაში განსაკუთრებული ადგილი უჭირავს გეომეტრიულ აგებათა ისტორიას. აგებაზე კლასიკურ ამოცანებთან მჭიდროდაა დაკავშირებული π რიცხვის ცნება. π რიცხვის ბუნებას მრავალი მათემატიკოსი სწავლობდა; საინტერესო აღმოჩენა გააკეთა 1400 წელს ინდოელმა მათემატიკოსმა მადჰავამ (1350-1425), მან დაადგინა რომ

$$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{4}{2n-1} + \dots; \pi \text{ რიცხვის სიმბოლოს}$$

შემოდება ეკუთვნის შვეიცარიელ მათემატიკოსს ლეონარდ ეილერს (1707-1783). 1767 წელს ლამბრეტმა დაამტკიცა π რიცხვის ირაციონალობა. გერმანელმა მათემატიკოსმა კარლ ლინდემანმა (1832-1939) დასვა საკითხი: π რიცხვი ალგებრული ირაციონალური რიცხვია, თუ არაალგებრული, ე.ი. ტრანსცენდენტული? 1873 წელს ფრანგმა მათემატიკოსმა შარლ ერმიტმა (1822-1901) დაამტკიცა e რიცხვის ტრანსცენდენტულობა. ლინდემანმა სრულყო ერმიტის მეთოდი და 1882 წელს დაამტკიცა π რიცხვის ტრანსცენდენტულობა ($e \approx 2,718281828...; \pi \approx 3,141592653...$).

საინტერესოა ვიცოდეთ, რომ იაპონიაში მცხოვრებმა აკირა ჰარა-გუჩიმ 2006 წელს ახალი მსოფლიო რეკორდი დაამყარა, მან ზეპირად დაიმახსოვრა π რიცხვის ასი ათასი ნიშანი მძიმის შემდეგ. იმისათვის, რომ ხმამაღლა წარმოეთქვა ეს მნიშვნელობა, მას დასჭირდა დაახლოებით 16 საათი.

ძირითად გეომეტრიულ ფიგურებს სიბრტყეზე წარმოადგენს წერტილი და წრფე. წერტილი და წრფე საწყისი ცნებებია. ყოველ ახალ გეომეტრიულ ცნებას, როგორც წესი, საწყისი ცნებებისა და ადრე შემოღებული ცნებების საშუალებით განვსაზღვრავთ ხოლმე.

წერტილებს ლათინური ანბანის დიდი ასოებით აღვნიშნავთ: A, B, C, D, E, F, G, H, K, ...

წრფეებს აღვნიშნავთ ლათინური ანბანის მცირე ასოებით: a, b, c, d, e, f, g, h, k, ...; ან ლათინური ანბანის ორი დიდი ასოთი.

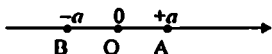
ზოგიერთი წინადადება მოკლედ ასე ჩაიწერება: მაგალითად, „A წერტილი ეკუთვნის a წრფეს“ - ჩავწერთ ასე $A \in a$; თუ A წერტილი არ ეკუთვნის a წრფეს, მაშინ ასე ჩაიწერება $A \notin a$.

განვიხილოთ წრფე და მასზე ორი A და B განსხვავებული წერტილი. ამ წრფეზე შეიძლება ავირჩიოთ ორი მიმართულება A-დან B-საკენ, ან B-დან A-საკენ. მათგან ერთ-ერთი, მაგალითად, A-დან B-საკენ, მივიღოთ დადებით მიმართულებად.

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლესა და აღებული



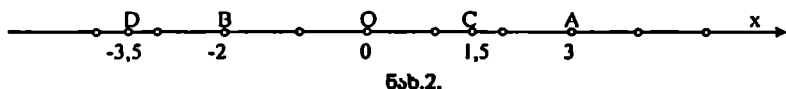
წრფის წერტილთა სიმრავლეს შორის შეიძლება დამყარდეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა: ნულს შევუსაბამოთ წრფის რომელიმე O წერტილი, რომელსაც სათავე ვუწოდოთ, რაიმე მონაკვეთის (მონაკვეთს შემდეგ განვიხილავთ) სიგრძე მივიღოთ სიგრძის ერთეულად. ყოველ ნამდვილ $\pm a$ ($a > 0$) რიცხვს შევუსაბამოთ წრფის წერტილი, რომელიც დაშორებულია სათავედან a მანძილით დადებითი მიმართულებით +a რიცხვისათვის და უარყოფითი მიმართულებით -a რიცხვისათვის. ცხადია, რომ ეს შესაბამი-



სობა ურთიერთცალსახაა, რადგან სათავე შესაბამემა ნულს, ხოლო ყოველი წერტილი,

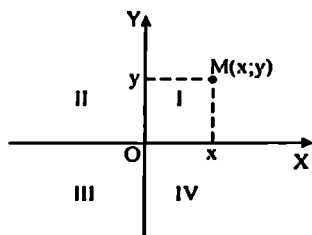
რომელიც სათვიდან a მანძილითაა დაშორებული, შეესაბამება $+a$ რიცხვს, თუ წერტილი სათავიდან დადებითი მიმართულებითაა და $-a$ რიცხვს – უარყოფითი მიმართულებით. განხილულ წრფეს ვუწოდოთ რიცხვითი წრფე, ანუ საკოორდინატო ღერძი. საკოორდინატო ღერძის რაიმე წერტილის შესაბამის რიცხვს, ამ წერტილის კოორდინატი ეწოდება.

თუ წერტილი მდებარეობს რიცხვით წრფეზე, მაშინ იგი შეიძლება დავახასიათოთ ერთი რიცხვით, ანუ მისი შესაბამისი კოორდინატით; მაგალითად, $A(3)$; $B(-2)$; $C(1,5)$; $O(0)$; $D(-3,5)$ წერტილები შესაბამისად შეიძლება გამოვსახოთ რიცხვით წრფეზე (ნახ.2).



ნახ.2.

ახლა განვიხილოთ სიბრტყეზე მდებარე ერთი და იგივე სიგრძის ერთეულის მქონე ორი ურთიერთმართობული OX და OY საკოორდინატო ღერძი (სიბრტყესა და მართობულ წრფეებს შემდეგ განვიხილავთ). OX ღერძს ვუწოდოთ აბცისთა ღერძი, ხოლო OY ღერძს – ორდინატთა ღერძი. საკოორდინატო ღერძები სიბრტყეს ყოფს ოთხ ნაწილად, რომელთაც მეოთხედები ეწოდება და ინომრებიან ისე როგორც ეს ნახაზზეა წარმოდგენილი. საკოორდინატო ღერძთა ასეთ სისტემას მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა ეწოდება, ხოლო ღერძების გადაკვეთის O წერტილს კოორდინატთა სათავე.

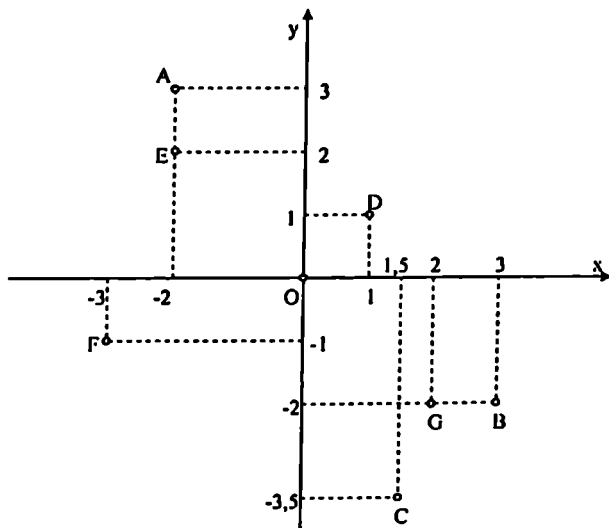


სიბრტყეზე აღებული ნებისმიერი M წერტილიდან OX და OY ღერძებისადმი გავავლოთ მართობები. OX ღერძისადმი გავლებული მართობის ფუძის კოორდინატი აღვნიშნოთ x -ით, ხოლო OY ღერძისადმი გავლებული მართობის ფუძის კოორდინატი კი y -ით. ამგვარად, სიბრტყის ნებისმიერ M წერტილს შეესაბამება ნამდვილ რიცხ-

ვთა გარკვეული $(x;y)$ წყვილი. x -ს ეწოდება M წერტილის აბცისა, ხოლო y -ს – ორდინატი, x -ს და y -ს ეწოდება M წერტილის კოორდინატები და წერენ $M(x;y)$.

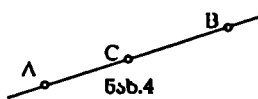
ვთქვათ, მოცემულია ნამდვილ რიცხვთა $(x;y)$ წყვილი. აბცისათა ღერძის x წერტილზე და ორდინატთა ღერძის y წერტილზე გავავლოთ შესაბამისად OX და OY ღერძების მართობული წრფეები. ცხადია, რომ მოცემული $(x;y)$ წყვილი შეესაბამება გავლებული მართობების გადაკვეთის M წერტილს. ამ წესით ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერ $(x;y)$ წყვილს შეესაბამება სიბრტყის გარკვეული წერტილი, რომლის კოორდინატებია x და y .

ამრიგად, სიბრტყის წერტილებსა და ნამდვილ რიცხვთა წყვილების სიმრავლეს შორის დამყარებულია ურთიერთცალსახა შესაბამისობა. ნამდვილ რიცხვთა ყველა შესაძლო წყვილების სიმრავლეს რიცხვითი სიბრტყე ეწოდება და იგი R^2 -ით აღინიშნება. სიბრტყეს, რომელზედაც არჩეულია კოორდინატთა სისტემა, საკოორდინატო სიბრტყე ეწოდება.



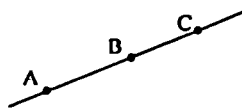
ნახ.3

წერტილები, რომლებიც ერთ სიბრტყეზეა, შეიძლება დავახასიათოთ ორი რიცხვით, რომლებიც მათ კოორდინატებს წარმოადგენენ დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში. მაგალითად, წერტილები $A(-2;3)$, $B(3;-2)$, $D(1;1)$, $O(0;0)$, $C(1,5;-3,5)$, $E(-2;2)$, $F(-3;-1)$, $G(2;-2)$ გამოვსახოთ შესაბამისად (ნახ.3).



AB მონაკვეთი ეწოდება წერტილების სიმრავლეს, რომელიც შედგება ორი A და B წერტილისა და მათ შორის მდებარე ყველა წერტილისაგან. მაგალითად, C წერტილი თუ A და B წერტილებს შორის მდებარეობს, მაშინ ამ წერტილიდან A და B წერტილებამდე მანძილების ჯამი ტოლია A და B წერტილებს შორის მანძილის. A და B წერტილებს შორის მანძილს AB მონაკვეთის სიგრძე ეწოდება (ნახ.4). ორი მონაკვეთი ერთმანეთის ტოლია, თუ მათი სიგრძეები ერთმანეთის ტოლია.

განვიხილოთ a წრფეზე მდებარე A , B და C წერტილები. B წერტილი მდებარეობს A და C წერტილებს შორის, ანუ A და C წერტილები მდებარეობენ B წერტილიდან სხვადასხვა მხარეს. B და C წერტილები მდებარეობენ A წერტილიდან ერთ მხარეს, ასევე A და B წერტილები მდებარეობენ ერთ მხარეს C წერტილიდან.



წრფეზე მდებარე სამი წერტილიდან ერთი და მხოლოდ ერთი მდებარეობს დანარჩენ ორს შორის.

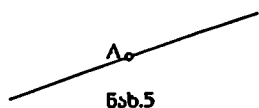
მონაკვეთი შეიძლება ასეც განვსაზღვროთ: მონაკვეთი ეწოდება წრფის ნაწილს, რომელიც შედგება ამ წრფის ორ მოცემულ წერტილს შორის მდებარე ყველა წერტილისაგან. მოცემულ წერტილებს მონაკვეთის ბოლოები ეწოდება.

მონაკვეთი აღინიშნება მისი ბოლოების მითითებით, მაგალითად, მონაკვეთი რომლის ბოლოებია A და B , ასე აღინიშნება – AB .

თუ B წერტილი მდებარეობს A და C წერტილებს შორის და გვაქვს, რომ AB მონაკვეთის სიგრძე a -ს ტოლია, BC მონაკვეთის სიგრძე b -ს ტოლია, ხოლო AC მონაკვეთის სიგრძე c არის, მაშინ

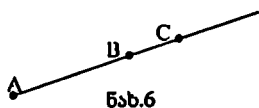
$c=a+b$, ან $a=c-b$, ან $b=c-a$.

წრფის ყოველი წერტილით ეს წრფე იყოფა ორ ნაწილად; თითო-



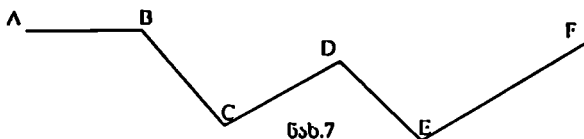
ეული ნაწილი ამ წერტილთან ერთად წარმოადგენს სხივს, რომლის სათავე ამ წერტილშია; ამ შემთხვევაში თითოეული სხივი მეორე სხივის დამატებითი სხივია (ნახ.5).

AB სხივი არის სიმრავლე A წერტილისა და მის ერთ მხარეს (B-ს მხარეს) მდებარე (AB წრფეზე) წერტილებისა, A ამ სხივის სათავეა, $C \in AB$ (ნახ.6).



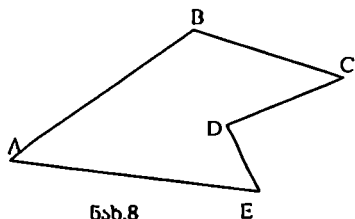
ტეხილი არის გეომეტრიული ფიგურა, რომელიც შედგება ერთმანეთთან ბოლოებით

შეერთებული მონაკვეთებისაგან, მასთან მეზობელი მონაკვეთები ერთ წრფეზე არ უნდა მდებარეობდეს. მონაკვეთების ბოლოები ტეხილის წვეროებს წარმოადგენენ, ხოლო თვით მონაკვეთებს ტეხილის გვერდები ან მდგენები ეწოდებათ (ნახ.7).

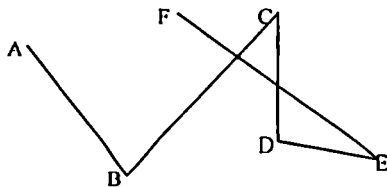


ნახ.7-ზე მოცემულია ABCDEF ტეხილი. თუ ტეხილის პირველი და ბოლო წერტილი ერთმანეთს ემთხვევა ტეხილს შეკრული, ანუ ჩაკეტილი ეწოდება (ნახ.8), თუ არ ემთხვევა, მაშინ ტეხილს ღია ეწოდება. ტეხილს შეიძლება გააჩნდეს თვითგადაკვეთის წერტილები, თუ მისი შემადგენელ ორ მონაკვეთს მაინც გააჩნია საერთო წერტილი, საერთო წვეროს გარდა (ნახ.9).

სიბრტყეზე მდებარე ორ წრფეს ეწოდება ერთმანეთის პარალელური, თუ მათ საერთო წერტილი არ გააჩნიათ. სიბრტყეზე მდებარე ორ წრფეს ეწოდება ურთიერთგადამკვეთი წრფეები, თუ მათ მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი გააჩნიათ.



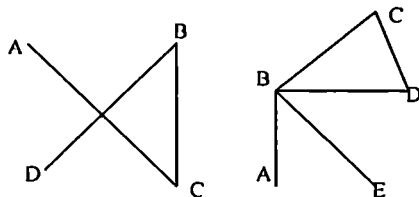
ნახ.8



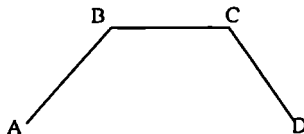
ნახ.9

შეიძლება გამოვყოთ ზოგიერთი ძირითადი თვისებები:

1. ყოველ ორ ერთმანეთისაგან განსხვავებულ წერტილზე ერთადერთი წრფე გადის (ორი წერტილი ერთადერთ წრფეს განსაზღვრავს).
2. ყოველ სამ წერტილზე, რომლებიც ერთ წრფეზე არ მდებარეობენ გადის ერთადერთი სიბრტყე (ერთ წრფეზე არამდებარე სამი წერტილი ერთადერთ სიბრტყეს განსაზღვრავს).
3. წერტილზე, რომელიც მოცემულ წრფეს არ ეკუთვნის, გადის ამ წრფის პარალელური ერთადერთი წრფე.



ეს ტეხილები არ არიან მარტივი ტეხილები



ეს ტეხილი მარტივი ტეხილია

ნახ.10

ტეხილის სიგრძე მისი გვერდების სიგრძეთა ჯამის ტოლია. ტეხილს მარტივი ეწოდება, თუ მის არამეზობელ გვერდებს საერთო წერტილი არ გააჩნიათ, ხოლო მეზობელი გვერდების საერთო წერტილები მხოლოდ ტეხილის წვეროებია (ნახ.10).

მარტივი ტეხილის სიგრძე არ არის ნაკლები მის ბოლოებს შორის მანძილზე. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ მარტივ ტეხილებს.

1.1.1. საპარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

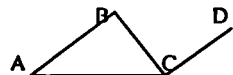
1. C წერტილი AB მონაკვეთის შიგა წერტილია. იპოვეთ AC და CB მონაკვეთების სიგრძეები, თუ AC მონაკვეთის სიგრძე 4 სმ-ით მეტია CB მონაკვეთის სიგრძეზე, ხოლო AB მონაკვეთის სიგრძე კი 26 სმ-ის ტოლია.
2. AB მონაკვეთის სიგრძე 45 სმ-ის ტოლია. M წერტილი AB მონაკვეთის შიგა წერტილია, მასთან $AM:MB=7:8$. იპოვეთ AM და MB მონაკვეთების სიგრძეები.
3. AB მონაკვეთის სიგრძეა 5,6 სმ. იპოვეთ მანძილი AB მონაკვეთის შუაწერტილიდან იმ წერტილამდე, რომელიც მას ყოფს შეფარდებით 5:2; ა) A წერტილიდან; ბ) B წერტილიდან.
4. ვთქვათ $AB=16,4$ სმ; $BC=4,4$ სმ; $CD=9,2$ სმ. რა უდიდესი მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს AD-მ?
5. ცნობილია, რომ $AB=20,2$ სმ; $BC=48,6$ სმ; $AC=28,4$ სმ. მდებარეობს თუ არა A წერტილი B-სა და C-ს შორის?
6. 60 სმ სიგრძის AB მონაკვეთის შიგნით აღებულია M წერტილი. K წერტილი აღებულია AM მონაკვეთის შიგნით ისე, რომ $KM = \frac{1}{3} AM$, ხოლო BM მონაკვეთის შიგნით აღებულია P წერტილი ისე, რომ $MP = \frac{1}{3} MB$. იპოვეთ KP.
7. 63 სმ სიგრძის CD მონაკვეთი გაყოფილია სამ ნაწილად, რომლებიც 2, 3 და 4-ის პროპორციულ ნაწილებს წარმოადგენენ. იპოვეთ კიდურა მონაკვეთების შუაწერტილებს შორის მანძილი.
8. AB მონაკვეთი 2:3:4 შეფარდებით გაყოფილია სამ ნაწილად. კიდურა მონაკვეთების შუაწერტილებს შორის მანძილი 30 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ AB მონაკვეთის სიგრძე.
9. MK მონაკვეთის სიგრძე 24 სმ-ია. A წერტილი MK წრფის წერტილია, რომელიც MK მონაკვეთის შიგნით არ მდებარეობს. იპოვეთ AK მონაკვეთის სიგრძე თუ ა) $MA=2KA$; ბ) $MA:KA=1:5$.
10. AB მონაკვეთი გაგრძელებულია BC მონაკვეთით ისე, რომ AC 5-ჯერ მეტია AB-ზე. იპოვეთ $AB:BC$ შეფარდება.

11. AB მონაკვეთი C წერტილით იყოფა 5:7 შეფარდებით A წერტილის მხრიდან, ხოლო D წერტილით 5:11 შეფარდებით, ასევე A წერტილის მხრიდან. CD მონაკვეთის სიგრძე ტოლია 10 სმ-ის. იპოვეთ AB მონაკვეთის სიგრძე.

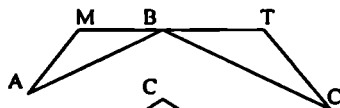
12. A, B და C წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობენ. BC-ს სიგრძე სამჯერ მეტია AC-ს სიგრძეზე, ხოლო AB-ს სიგრძე ნაკლებია BC-ს სიგრძეზე 2 სმ-ით. იპოვეთ AB-ს სიგრძე.

13. ცნობილია, რომ სიბრტყეზე მოცემული ხუთი A, B, C, D და E წერტილებიდან ორი a წრფის ერთ მხარეს მდებარეობს, ხოლო დანარჩენი სამი კი - მეორე მხარეს. რამდენჯერ შეიძლება გადაკვეთოს a წრფე ABCDE ტეხილმა?

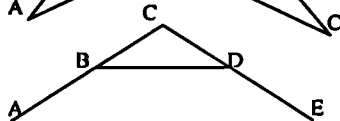
14. შეადარეთ ABCD ტეხილის სიგრძე ACD ტეხილის სიგრძეს.



15. შეადარეთ ABC ტეხილის სიგრძე AMTC ტეხილის სიგრძეს.



16. შეადარეთ ACE ტეხილის სიგრძე ABDE ტეხილის სიგრძეს.



17. რამდენ ნაწილად შეიძლება დაყოს სიბრტყე სამმა განსხვავებულმა წრფემ?

18. მოცემულია a წრფე და მასზე მდებარე წერტილები A, B, C და D. ჭეშმარიტია თუ არა გამონათქვამი?

ა) BA და CD სხივებს საერთო წერტილი არა აქვთ;

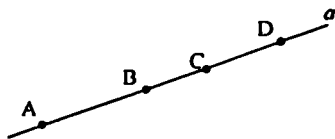
ბ) BA და CD დამატებითი სხივებია;

გ) AB და BC სხივები დამატებითი სხივებია;

დ) BA და BC სხივები დამატებითი სხივებია;

ე) CA და BD სხივების თანაკვეთა BC მონაკვეთია;

ვ) CA და DB სხივების თანაკვეთა სხივია.



19. MP მანძილი ნაკლებია PN მანძილზე



QN-ის 75%-ით, ხოლო PQ მანძილი QN-ის 25%-ია. იპოვეთ MN:MP შეფარდება.

20. მოცემულია n წერტილი, რომელთაგან ყოველი სამი ერთ წრფეს არ ეკუთვნის, რამდენი წრფე განისაზღვრება ამ წერტილებით?
21. მოცემული 6 წერტილიდან მხოლოდ ერთი სამეული ეკუთვნის ერთ წრფეს. რამდენი წრფე განისაზღვრება ამ 6 წერტილით?
22. C წერტილი ძევს A და B წერტილებს შორის; $AC:CB=3:1$, $AB=24$ სმ. იპოვეთ AB და BC მონაკვეთების შუაწერტილებს შორის მანძილი.
23. 22-ე ამოცანის პირობებით ვიპოვოთ AC და CB მონაკვეთების შუაწერტილებს შორის მანძილი.
24. 22-ე ამოცანის პირობებით ვიპოვოთ AB და AC მონაკვეთების შუაწერტილებს შორის მანძილი.
25. მატარებლით გზის $\frac{2}{3}$ ნაწილის გავლის შემდეგ მგზავრს ჩაეძინა და დარჩენილი მანძილის ნახევარი ძილში გაატარა. ამის შემდეგ მას გასავლელი დარჩა 12 კმ. ვიპოვოთ მთელი გზის სიგრძე.
26. მატარებლით გზის ნახევარი ნაწილის გავლის შემდეგ მგზავრს ჩაეძინა და დარჩენილი გზის $\frac{2}{3}$ ძილში გაატარა. ამის შემდეგ მას გასავლელი დარჩა 12 კმ. ვიპოვოთ მთელი გზის სიგრძე.
27. მატარებლით გზის ნახევარი ნაწილის გავლის შემდეგ მგზავრს ჩაეძინა და დარჩენილი გზის $\frac{1}{3}$ ძილში გაატარა. ამის შემდეგ მას გასავლელი დარჩა 12 კმ. ვიპოვოთ მთელი გზის სიგრძე.
28. მატარებლით გზის $\frac{1}{3}$ ნაწილის გავლის შემდეგ მგზავრს ჩაეძინა და დარჩენილი გზის ნახევარი ძილში გაატარა. ამის შემდეგ მას გასავლელი დარჩა 12 კმ. ვიპოვოთ მთელი გზის სიგრძე.
29. სიგრძის რა ერთეულს (კმ, მ, სმ, მმ) შეარჩევდით მანძილის გასაზომად:
 - ა) მთის სიმაღლის გასაზომად;
 - ბ) თბილისსა და ქუთაისს შორის მანძილის გასაზომად;

- გ) ქუჩის სიგანის გასაზომად;
 - დ) მაგიდის სიგრძის გასაზომად;
 - ე) თქვენი სიმაღლის წარმოსადგენად;
 - ვ) მკლავის სიგრძის წარმოსადგენად;
 - ზ) ოთახის სიგრძის წარმოსადგენად;
 - თ) ავტობუსების სიგრძის გასაზომად;
 - ი) საშლელის სიგრძის გასაზომად;
 - კ) ლარიანი მონეტის დიამეტრის გასაზომად;
 - ლ) 10 თეთრიანი მონეტის დიამეტრის გასაზომად.
30. ქვემოთ ჩამოთვლილი წინადადებებიდან რომელი მიგაჩნიათ შესაძლებლად და რომელი შეუძლებლად?
- ა) ჩემი სახლიდან უნივერსიტეტამდე მანძილი 10 მილიმეტრია;
 - ბ) ოთახის კარის სიმაღლე ორი კილომეტრია;
 - გ) ოთახის სიგანე სამი მეტრია;
 - დ) ჩემი სახელმძღვანელოს სიგანე 20 სანტიმეტრია;
 - ე) ჩემი ფეხის სიგრძე 1,5 მილიმეტრია;
 - ვ) ჩემი სიმაღლე 176 სანტიმეტრია.

1.1.2. ტესტი №1

1. ყოველ ორ სხვადასხვა წერტილზე შეიძლება გავავლოთ
 - ა) ორი წრფე; ბ) სამი წრფე;
 - გ) ერთადერთი წრფე; დ) უამრავი წრფე.
2. ყოველ წერტილზე
 - ა) მხოლოდ ორი წრფე გადის; ბ) მხოლოდ სამი წრფე გადის;
 - გ) ერთადერთი წრფე გადის; დ) უამრავი წრფე გადის.
3. რამდენი საერთო წერტილი შეიძლება ჰქონდეს ორ სხვადასხვა წრფეს?
 - ა) ერთი ან არცერთი; ბ) ორი; გ) სამი; დ) უამრავი.
4. რამდენი საერთო წერტილი შეიძლება ჰქონდეს ორ სხივს?

- ა) მხოლოდ ერთი ან არცერთი; ბ) ორი ან არცერთი;
 გ) ერთი, არცერთი, ან უამრავი; დ) მხოლოდ ერთი.
5. ერთ წრფეზე მოცემულია ორი სხივი. რა არ შეიძლება იყოს მათი თანაკვეთა?
 ა) წრფე; ბ) სხივი; გ) მონაკვეთი; დ) წერტილი;
 ე) ცარიელი სიმრავლე.
6. AB მონაკვეთი სამ ნაწილადაა გაყოფილი $2:8:11$ პროპორციით. განსაზღვრეთ მათ შორის უდიდესის სიგრძე, თუ დანარჩენი ორის შუაწერტილებს შორის მანძილი 10 სმ-ის ტოლია.
 ა) 15 სმ; ბ) 33 სმ; გ) 63 სმ; დ) 22 სმ; ე) 21 სმ.
7. A , B და C წერტილები ერთ წრფეზე არ მდებარეობენ, მათგან ორი წერტილი a წრფის ერთ მხარეს მდებარეობს, ხოლო ერთი წერტილი b წრფის მეორე მხარეს. რამდენჯერ შეიძლება ABC ტეხილმა გადაკვეთოს a წრფე?
 ა) მხოლოდ ერთხელ; ბ) არცერთხელ; გ) მხოლოდ ორჯერ;
 დ) ერთხელ ან ორჯერ; ე) შეუძლებელია განსაზღვრა.
8. ვთქვათ a და b პარალელური წრფეებია. მოცემულია წინადადებები:
 I. a და b იკვეთება;
 II. a -სა და b -ს საერთო წერტილი არა აქვს;
 III. a და b ერთ სიბრტყეზეა და საერთო წერტილი არა აქვს;
 IV. a და b ერთ სიბრტყეზე არ არის და საერთო წერტილი არა აქვს.
 ამ წინადადებებიდან ჭეშმარიტია:
 ა) I; ბ) I და II; გ) არცერთი; დ) II და III; ე) IV.
9. A , B და C წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობს, $AB=7$ სმ-ს და $BC=8$ სმ-ს. რას შეიძლება უდრიდეს AC ?
 ა) 23 სმ; ბ) 22 სმ; გ) 1 სმ; დ) 16 სმ; ე) 14 სმ.
10. $AB=7$ სმ და $BC=8$ სმ, რისი ტოლი შეიძლება იყოს AC ?
 ა) 23 სმ; ბ) 22 სმ; გ) 17 სმ; დ) 16 სმ; ე) 14 სმ.

1.2. კუთხე. კუთხეების სახეები მათი სიდიდის მიხედვით. კუთხეების სახეები ურთიერთმდებარეობის მიხედვით.

გეომეტრიის კურსის მკაცრად აგებისას უნდა გვექნოდეს ისეთი აქსიომები, რომლებიც:

1. არ უნდა იყოს წინააღმდეგობრივი, სხვა სიტყვებით, მათგან ლოგიკური მსჯელობის გზით არ უნდა მიიღებოდეს ორი ურთიერთსაწინააღმდეგო დებულება.
2. უნდა იყოს სრული, ე.ი. არ უნდა შეიძლებოდეს მისი შევსება სხვა აქსიომებით, რომლებიც არ ეწინააღმდეგება უკვე მიღებულს და არ გამომდინარეობს მისგან.

აქსიომა (ბერძნ. αξιωμα – „აღიარება“, „აღიარებული დებულება“, „ღირსება“, „პატივისცემა“, „ავტორიტეტი“) არის დებულება, რომლის ჭეშმარიტება თავისთავად ცხადია, უეჭველია და დასაბუთება არ ჭირდება.

ტერმინი – „აქსიომა“ პირველად შემოიღო არისტოტელემ და მათემატიკაში შევიდა ძველი საბერძნეთის ფილოსოფოსებისაგან. ეს ტერმინი მეცნიერებიდან სასაუბრო ენაშიც დამკვიდრდა, როგორც თავისთავად ცხადი დებულების სინონიმი.

აქსიომის დამოუკიდებლობის ცნება დაიბადა მეხუთე პოსტულატის დამტკიცების მცდელობის პროცესში. პირველსაწყისი ცნებების დამოუკიდებლობის კვლევა მომდინარეობს იტალიური მათემატიკურ-ლოგიკური სკოლიდან, რომლის წარმომადგენლები იყვნენ ჯ. პეანო და სხვ. აქსიომათა სისტემის სისრულისა და არაწინააღმდეგობრიობის ცნება გაფორმდა ჰილბერტის შრომებში.

ჰილბერტის შრომების შემდეგ (XIX–XX ს. მიჯნაზე) ჩამოყალიბდა შეხედულება, რომლის თანახმად მათემატიკური თეორიის აქსიომები, თავის მხრივ, განსაზღვრავენ ამ თეორიის ელემენტარულ ცნებებს და იმავდროულად ზუსტად და სრულად აღწერენ ამ ცნებებს შორის არსებულ დამოკიდებულებებს.

აქსიომების დაუმტკიცებლად მიღება არ ნიშნავს პრინციპულად

მათ დაუმტკიცებლობას, კერძოდ, აქსიომებად ახალ დებულებათა არჩევისას ძველი აქსიომები შეიძლება დამკიცდეს, როგორც თეორემები. ამ გარემოებათა გამო მათ შეიძლება აღარც მოვთხოვოთ თავისთავადი სიცხადე და სიმართლე. თუ აქსიომების ამორჩევა დისციპლინის დაფუძნების საჭიროებით არ არის ნაკარნახევი. ამიტომ აქსიომების არჩევის დროს გვაქვს გარკვეული თავისუფლება, რაც თეორიული, პრაქტიკული, პედაგოგიური თუ სხვა მოსაზრებითაა განპირობებული.

გეომეტრიის ლოგიკურად მკაცრი კურსი იგება შემდეგნაირად:

1. ჩამოთვლილია ძირითადი გეომეტრიული ცნებები, რომლებიც განსაზღვრების გარეშე შემოღებული.
2. ყველა სხვა გეომეტრიული ცნება ძირითადი ცნებების საშუალებითაა განსაზღვრული.
3. ჩამოყალიბებულია აქსიომები.
4. აქსიომებისა და განსაზღვრებათა საფუძველზე მტკიცდება დანარჩენი გეომეტრიული წინადადებები.

პლანიმეტრიის სამი ძირითადი ცნებაა: „წერტილი“, „წრფე“, „მანძილი“. ცნებების უმრავლესობა, რომლებიც პლანიმეტრიის კურსში განიხილება („წრეწირი“, „წრე“, „მონაკვეთი“, „სხივი“ და ა.შ.) მოცემულია განსაზღვრების მეშვეობით. შევნიშნოთ, რომ პლანიმეტრიის გადმოცემისას მხედველობაში მიიღება რომელიმე ერთი სიბრტყე. განიხილება მხოლოდ ამ სიბრტყის წერტილები. ამიტომ, განსაზღვრების თანახმად სიბრტყე არის ყველა განხილულ წერტილთა სიმრავლე (სტერეომეტრიაში „სიბრტყის“ ცნება შემოდის როგორც ერთ-ერთი ძირითადი ცნება).

მესამე პუნქტის შესასრულებლად საჭიროა იმ აქსიომების ჩამოთვლა, რომელთა საფუძველზე შეიძლება ავაგოთ პლანიმეტრიის ლოგიკურად მკაცრი კურსი. ეს სია მოყვანილია ქვემოთ. საჭიროა შევნიშნოთ, რომ პლანიმეტრიის აგებისას ვიყენებთ ლოგიკის წესებსა და სიმრავლეების თვისებებს, როგორც ჩვენთვის ცნობილ ფაქტებს. მას შემდეგ, რაც ერთ-ერთ აქსიომაში ნათქვამი იქნება, რომ

მანძილი ორ წერტილს შორის არის არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვი. ჩვენ გამოვიყენებთ აგრეთვე ნამდვილი რიცხვის თვისებებს, რომლებიც ალგებრის კურსში შეისწავლება.

მეოთხე პუნქტის შესასრულებლად, საჭიროა მიმდევრობით, ხარვეზების გარეშე, აქსიომების მეშვეობით დავამტკიცოთ ყველა გეომეტრიული ჭეშმარიტება. ეს დაიკავებდა საკმაოდ დიდ ადგილს. ელემენტარული გეომეტრიის ყველა ლოგიკურად მკაცრი კურსი საკმაოდ ძნელი შესასწავლია. ამიტომ სახელმძღვანელოში მთელი რიგი წინადადებებისა, მიღებულია დამტკიცების გარეშე. მათი როგორც თეორემების, დამტკიცება შეიძლება ქვემოთ ჩამოთვლილი თორმეტი აქსიომის მეშვეობით. აქსიომათა აღნიშნული სისტემა არის ერთ-ერთი შესაძლო ვარიანტი. ამ სისტემის თორმეტი აქსიომა გაყოფილია ხუთ ჯგუფად.

I. კუთვნილების აქსიომები:

აქსიომა I₁. ყოველი წრფე არის წერტილთა სიმრავლე.

აქსიომა I₂. ყოველი ორი წერტილისათვის არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი წრფე, რომელიც ამ წერტილებს შეიცავს.

აქსიომა I₃. არსებობს ერთი წრფე მაინც. ყოველ წრფეს ერთი წერტილი მაინც მიეკუთვნება.

II. მანძილის აქსიომები

ჩვენ ჩავთვლით, რომ წერტილებს შორის მანძილები – რიცხვებია. პრაქტიკული თვალსაზრისით ეს ნიშნავს, რომ ჩვენ უკვე ავირჩიეთ მანძილის საზომი ერთეული.

აქსიომა II₁. ყოველი ორი A და B წერტილებისათვის არსებობს არაუარყოფითი ნამდვილი $|AB|$ რიცხვი, რომელსაც A-დან B-მდე მანძილი ეწოდება. მანძილი ნულის ტოლია იმ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ A და B წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა.

აქსიომა II₂. A წერტილიდან B წერტილამდე მანძილი უდრის B წერტილიდან A წერტილამდე მანძილს: $|AB|=|BA|$.

აქსიომა II₃. ყოველი სამი A, B, C წერტილისათვის მანძილი A-დან C-

მდე არ აღემატება A -დან B -მდე და B -დან C -მდე მანძი-
ლების ჯამს: $|AC| \leq |AB| + |BC|$.

III. დალაგების აქსიომები

აქსიომა III₁. სამი წერტილი წრფეს ეკუთვნის მაშინ და მხოლოდ მა-
შინ, როცა ერთ-ერთი მათგანი ძვეს დანარჩენ ორს შო-
რის.

აქსიომა III₂. p წრფის ნებისმიერი O წერტილი p წრფის O წერტილი-
საგან განსხვავებულ წერტილთა სიმრავლეს ყოფს ორ
არაცარიელ ქვესიმრავლედ ისე, რომ O წერტილი ძვეს
ნებისმიერ ორ წერტილს შორის, რომლებიც განსხვავე-
ბულ ქვესიმრავლეებს ეკუთვნით.

აქსიომა III₃. ნებისმიერი არაუარყოფითი α რიცხვისათვის O სათავის
მქონე სხივზე არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი წერ-
ტილი, რომელიც O წერტილიდან დაშორებულია α მან-
ძლით.

აქსიომა III₄. ნებისმიერი წრფე სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლეს,
რომლებიც ამ წრფეს არ ეკუთვნიან, ყოფს ორ არაცარი-
ელ ამოზნექილ სიმრავლედ.

IV. გადაადგილების აქსიომა

აქსიომა IV. სხივების ნებისმიერი ორი O_1A_1 და O_2A_2 წვეტილებისათ-
ვის და მასთან მიმდებარე α_1 და α_2 ნახევარსიბრტყეები-
სათვის არსებობს ერთადერთი გადაადგილება, რომე-
ლიც O_1A_1 სხივს ასახავს O_2A_2 სხივზე, ხოლო α_1 ნახევარ-
სიბრტყეს – α_2 ნახევარსიბრტყეზე.

V. პარალელურ წრფეთა აქსიომა

აქსიომა V. სიბრტყის ნებისმიერ A წერტილზე გადის მოცემული p
წრფის პარალელური არაუმეტეს ერთი წრფე.

აქსიომატიკა არის ამა თუ იმ მათემატიკურ მეცნიერებათა აქსი-
ომათა სისტემა ძირითად ობიექტებთან (საგნებთან) და მათ შორის
ძირითად დამოკიდებულებებთან ერთად. მაგალითად, ყოველი გე-
ომეტრია განისაზღვრება თავისი აქსიომების მიღებით (ერთობლიო-

ბით). გვაქვს აფინური გეომეტრიის აქსიომები, ეკვლიდური გეომეტრიის აქსიომები, პრაქტიკული გეომეტრიის აქსიომები და სხვ. აქსიომატიკას უყენებენ სამ მოთხოვნას: არაწინააღმდეგობრიობას, დამოუკიდებლობას და სისრულეს. ცნობილია გეომეტრიის, არითმეტიკის, ალბათობათა თეორიის, სტატისტიკის და სხვა დისციპლინების აქსიომატიკა.

გეომეტრიის კურსის სხვადასხვა ხერხით აგებისას განუსაზღვრელ ცნებებად შეიძლება მივიღოთ სხვადასხვა ცნებები. გეომეტრიის ერთი ხერხით აგებისას მიღებული განუსაზღვრელი ცნებები შეიძლება განსაზღვრადი იყოს გეომეტრიის მეორე ხერხით აგების შემთხვევაში. მაგალითად, ა. პოგორელოვის სახელმძღვანელოში განუსაზღვრელი ცნებებია წერტილი, წრფე და სიბრტყე; წერტილების, წრფეებისა და სიბრტყეებისათვის მიკუთვნების მიმართება გამოიხატება სიტყვით „ეკუთვნის“; წრფეზე წერტილებისათვის რიგის მიმართება გამოიხატება სიტყვებით „მევს შორის“; შემოღებულია „სიგრძე“ მონაკვეთებისათვის და „გრადუსული ზომა“ კუთხეებისათვის. ყოველივე ის, რაც ცნობილია ამ ცნებათა შესახებ, აისახება აქსიომებში. ა. ალექსანდროვის სახელმძღვანელოში განუსაზღვრელი ცნებებია წერტილი, მონაკვეთი და სიბრტყე, ხოლო წრფე განისაზღვრება მონაკვეთების საშუალებით. გეომეტრიის კურსის აგებას საფუძვლად უდევს ორიგინალური აქსიომატიკა. სულ სხვა განუსაზღვრელი ცნებები და აქსიომათა სისტემაა შერჩეული მოიზის, დაუსნის და შოკეს გეომეტრიის სახელმძღვანელოებში.

მსგავსი მაგალითების მოყვანა მრავლად შეიძლება.

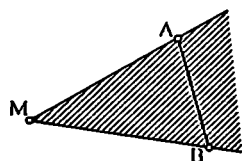
ჩვენ აქსიომატურ აგებასთან საქმე არ გვექნება, რადგან ჩვენ ვისაუბრებთ მხოლოდ გეომეტრიის ელემენტების შესახებ. ამ ელემენტების განხილვისას კი განსაზღვრის გარეშე მივიღებთ ცნებებს: წერტილი, წრფე, სიბრტყე, სივრცე; ე.ი. ეს გეომეტრიული ფიგურები ჩვენთვის განუსაზღვრელი იქნება.

გეომეტრიის შესწავლის ძირითადი ობიექტია გეომეტრიული ფიგურა. გეომეტრიული ფიგურა, როგორც წერტილთა სიმრავლე,

თვალსაჩინოდ წარმოგვიდგება როგორც ერთი მთლიანი (მონაკვეთი, სხივი, ტეხილი და სხვა), თუმცა, იგი შეიძლება განყენებულად გავიაზროთ როგორც წერტილებისაგან შემდგარი, შედგენილი. ცხადია, ფიგურა შეიცავს წერტილებს და იგი განისაზღვრება ამ წერტილებით; ე.ი. გეომეტრიული ფიგურა მოცემულია, ანუ განსაზღვრულია, თუ სივრცის ნებისმიერი წერტილისათვის შეგვიძლია პასუხი გავცეთ კითხვას: ეკუთვნის თუ არა ეს წერტილი ფიგურას. მაშასადამე, თუ ორი ფიგურა აგებულია სხვადასხვა ხერხით და შეიცავს ერთ და იმავე წერტილებს, მაშინ ეს ფიგურები ერთი და იგივეა. მაგალითად, ერთი წრეწირი სიბრტყეზე შეიძლება მოცემული იყოს სხვადასხვა ხერხით: ცენტრითა და რადიუსით, ან მასზე მდებარე სამი განსხვავებული წერტილით.

გეომეტრიული ფიგურები მრავალფეროვანია. თუ F_2 ფიგურა არის F_1 გეომეტრიული ფიგურის ნაწილი, მაშინ F_2 -იც გეომეტრიულ ფიგურას წარმოადგენს, ეს ფაქტი ჩაიწერება ასე $F_2 \subset F_1$. F_1 და F_2 გეომეტრიული ფიგურების გაერთიანება $F_1 \cup F_2$ ასევე გეომეტრიული ფიგურაა; იგივე ითქმის F_1 და F_2 ფიგურების $F_1 \cap F_2$ თანაკვეთის შესახებაც, თუ თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლე არ არის.

განვიხილოთ გეომეტრიული ფიგურა კუთხე.

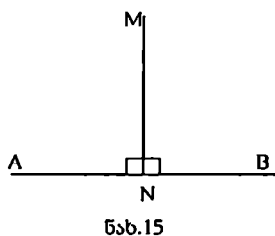
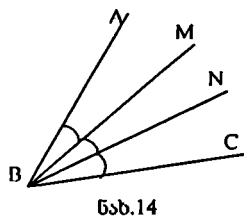
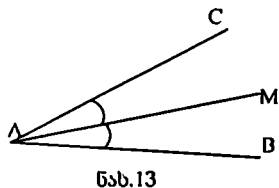
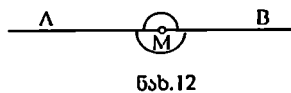


ნახ.11

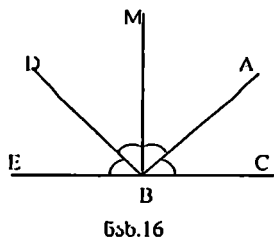
კუთხე სიბრტყის ერთ-ერთი ნაწილია, რომელიც საერთო სათავის მქონე სხივებითაა შემოსაზღვრული (თვით სხივები კუთხის ნაწილებია). ნახ.11-ზე გამოსახული MA და MB სხივები ორ კუთხეს ქმნის, MA და MB სხივები ამ კუთხის გვერდებია; $\angle AMB$ სიმბოლოთი აღ-

ვნიშნავთ იმ კუთხეს, რომელიც კუთხის გვერდებზე ნებისმიერად შერჩეული A და B წერტილებისათვის შეიცავს AB მონაკვეთს. ეს გეომეტრიული ფიგურა ნახ.11-ზე დაშტრიხულია. ამ კუთხეს ასეც აღვნიშნავთ $\angle M$. დამატებითი სხივებით შედგენილი კუთხეებიდან თითოეულს გაშლილი კუთხე ეწოდება (ნახ.12).

ნახ.13-ზე CAB კუთხეა გამოსახული, გავლებულია AM სხივი



მათი ზომები ტოლია.



ისე, რომ თუ წარმოვიდგენთ - CAB კუთხე გადაკეცილია AM სხივზე, მაშინ MAC კუთხე შეუთავსდება MAB კუთხეს. ამ შემთხვევაში ვამბობთ, AM არის CAB კუთხის ბისექტრისა, იგი ამ კუთხეს შუაზე ჰყოფს; $\angle CAM = \angle BAM$, ანუ CAM და BAM კუთხეები ტოლია.

ნახ.14-ზე ABC კუთხე სამ ტოლ ნაწილადაა დაყოფილი. თითოეული ეს კუთხე ($\angle ABM$, $\angle MBN$, $\angle NBC$) არის ABC კუთხის $\frac{1}{3}$ ნაწილი.

ნახ.14-დან შეიძლება დავასკვნათ, რომ $\angle ABN$ -ის ბისექტრისაა BM, ხოლო $\angle MBC$ -ს ბისექტრისაა BN.

თუ α გაშლილი კუთხის $\frac{1}{180}$ ნაწილია, მაშინ მას 1° -იანი კუთხე ეწოდება. გაშლილი კუთხის ზომა 180° -ია.

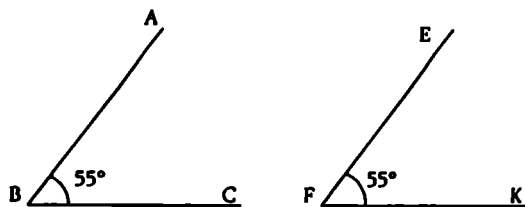
ნახ.15-ზე $\angle MNB$ და $\angle MNA$ კუთხეებიდან თითოეული გაშლილი კუთხის ნახევარია და თითოეული მათგანის ზომა 90° -ის ტოლია.

ორი კუთხე ერთმანეთის ტოლია, თუ

ნახ.16-ზე $\angle ABC$, $\angle MBA$, $\angle DBM$ და $\angle EBD$ ერთმანეთის ტოლია; მასთან თითოეული მათგანი გაშლილი კუთხის მეოთხედია, ამიტომ ყოველი მათგანის ზომა 45° -ის ტოლია.

ვთქვათ, $\angle ABC = 55^\circ$ და $\angle EFK = 55^\circ$, მა-

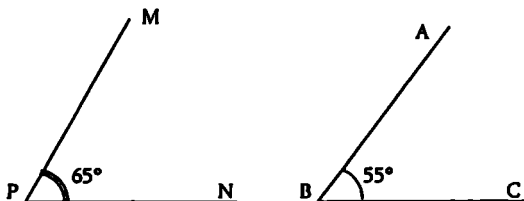
შინ რადგან მათი ზომები ტოლია, ამიტომ კუთხეებიც ერთმანეთის ტოლი იქნება (ნახ.17).



ნახ.17

დავუშვათ, $\angle MPN = 65^\circ$, ხოლო $\angle ABC = 55^\circ$ (ნახ.18); მაშინ, ვამბობთ, $\angle MPN$ მეტია $\angle ABC$ -ზე და ვწერთ $\angle MPN > \angle ABC$; ან $\angle ABC$ ნაკლებია $\angle MPN$ -ზე და ვწერთ $\angle ABC < \angle MPN$.

კუთხის გასაზომად გრადუსული ზომის გარდა გამოიყენება ზომის სხვადასხვა ერთეულები: მინუტი და სეკუნდი. ერთი მინუტი იწერება ასე $1'$, ხოლო ერთი სეკუნდი $1''$; მასთან $1^\circ = 60'$; ხოლო $1' = 60''$. შემოღებულია კუთხის ზომის კიდევ ერთი ერთეული რადიანი, $1 \text{ რად.} = \frac{180}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''$ და პირიქით $1' = \frac{\pi}{180} \text{ რად.} \approx 0,017 \text{ რად.}$, სადაც $\pi \approx 3,14$.



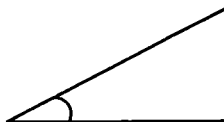
ნახ.18

კუთხეების სახეები მათი სიდიდის მიხედვით შემდეგია:

1. მახვილი კუთხე არის კუთხე, რომლის ზომა 90° -ზე ნაკლებია (გაშლილი კუთხის ნახევარზე ნაკლებია) ნახ.19.
2. მართი კუთხე არის კუთხე, რომლის ზომა 90° -ის ტოლია (გაშლი-

ლი კუთხის ნახევრის ტოლია) ნახ.20.

3. ზღაგვი კუთხე არის კუთხე, რომლის ზომა 90° -ზე მეტია (გაშლილი კუთხის ნახევარზე მეტია) ნახ.21.



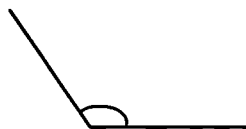
მასილი კუთხე

ნახ.19



მართი კუთხე

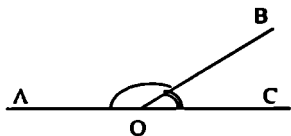
ნახ.20



ზღაგვი კუთხე

ნახ.21

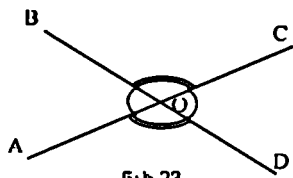
ეხლა განვიხილოთ კუთხეების სახეები მათი ურთიერთმდებარეობის მიხედვით.



ნახ.22

კუთხეებს ეწოდებათ მოსაზღვრე, თუ მათ ერთი გვერდი საერთო აქვთ, ხოლო დანარჩენი ორი - ერთმანეთის დამატებითი სხივებია (ნახ.22).

მოსაზღვრე კუთხეების ჯამი 180° -ის ტოლია. ნახ.22-ზე გამოსახული მოსაზღვრე კუთხეებისათვის გვაქვს $\angle BOC + \angle AOB = 180^\circ$.



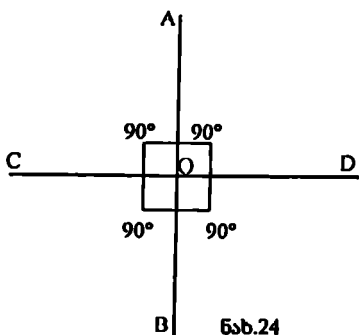
ნახ.23

კუთხეებს ეწოდებათ ვერტიკალური, თუ მათი გვერდები დამატებითი სხივებია (ნახ.23).

ნახ.23-ზე გამოსახული კუთხეებიდან $\angle AOB$ და $\angle COD$ ვერტიკალური კუთხეებია, ასევე ვერტიკალური კუთხეებია $\angle BOC$ და $\angle AOD$. ვერტიკალური კუთხეები ერთმანეთის ტოლია, ამრიგად $\angle AOB = \angle COD$ და $\angle BOC = \angle AOD$.

ნახ.23-ზე გვაქვს შემდეგი მოსაზღვრე კუთხეებიც: $\angle BOC$ და $\angle COD$; $\angle COD$ და $\angle AOD$; $\angle AOD$ და $\angle AOB$; $\angle AOB$ და $\angle BOC$.

ვთქვათ, AB და CD წრფეები იკვეთებიან O წერტილში და მათი გადაკვეთით მიიღება ოთხი ტოლი კუთხე (მიღებული კუთხეებიდან თითოეული 90° -ის ტოლია), მაშინ AB და CD მართობული



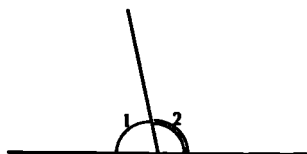
ნახ.24

წრფეებია და ვწერთ: $AB \perp CD$ (ნახ.24).

განვიხილოთ ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნის ნიმუში:

1. მოსაზღვრე კუთხეები ისე შეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც 7:8. იპოვეთ თითოეული მათგანი.

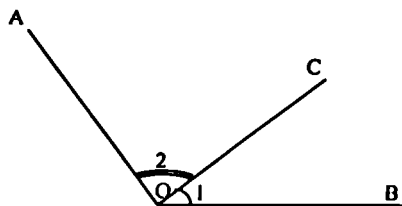
ამოხსნა. ეს კუთხეები შეიძლება ასე აღვნიშნოთ $\angle 1 = 7x$, ხოლო $\angle 2 = 8x$ (ნახ.25); მაშინ $7x + 8x = 180^\circ$ და $x = 12^\circ$; აქედან კი გვაქვს: $\angle 1 = 7 \cdot 12^\circ = 84^\circ$, ხოლო $\angle 2 = 8 \cdot 12^\circ = 96^\circ$.



ნახ.25.

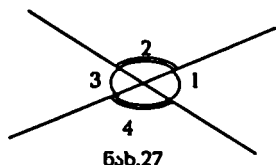
2. ვთქვათ, $\angle AOB = 140^\circ$, $\angle COB = 50^\circ$; იპოვეთ $\angle AOC$ (ნახ.26).

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $\angle 1 = \angle COB$ და $\angle 2 = \angle AOC$, მაშინ $\angle 1 + \angle 2 = \angle AOB$; თუ შევიტანთ შესაბამის მნიშვნელობებს ამოცანის პირობიდან გვექნება $50^\circ + \angle 2 = 140^\circ$, ამიტომ $\angle 2 = 140^\circ - 50^\circ$; ე.ი. $\angle 2 = \angle AOC = 90^\circ$.



ნახ.26

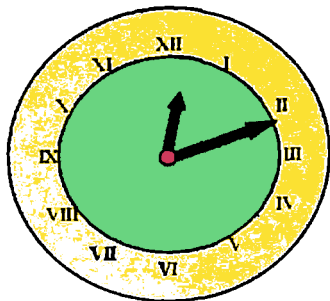
3. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული ოთხი კუთხიდან ერთ-ერთი 37° -ის ტოლია. იპოვეთ დანარჩენი კუთხეები (ნახ.27).



ნახ.27

ამოხსნა. დავუშვათ $\angle 1 = 37^\circ$, რადგან $\angle 1$ და $\angle 3$ ვერტიკალური კუთხეებია, ამიტომ $\angle 1 = \angle 3$, ე.ი. $\angle 3 = 37^\circ$. $\angle 1$ და $\angle 2$ მოსაზღვრე კუთხეებია, ამიტომ $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, აქედან გვაქვს $\angle 2 = 180^\circ - 37^\circ$, ე.ი. $\angle 2 = 143^\circ$. $\angle 2$ და $\angle 4$

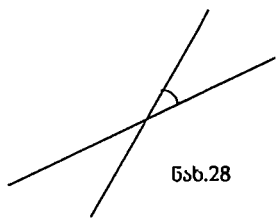
ერთმანეთის ტოლია, როგორც ვერტიკალური კუთხეები და ამიტომ გვექნება, რომ $\angle 4 = 143^\circ$.



4. იპოვეთ მექანიკური საათის ისრებს შორის კუთხე 12 საათსა და 12 წუთზე.

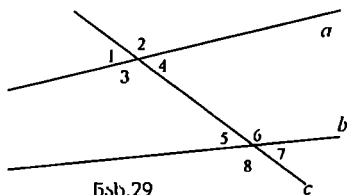
ამოხსნა. 12 საათის ნიშნულიდან წუთების ისარი 12 წუთში გადაადგილდება 72° -ით (1 წთ-ში გადაადგილდება 6° -ით). საათის ისარი 12-ჯერ ნელა მოძრაობს და გადაადგილდება 6° -ით. მაშასადამე საათის ისრებს შორის კუთხეა $72^\circ - 6^\circ = 66^\circ$.

ორ წრფეს შორის კუთხე ეწოდება ამ წრფეების გადაკვეთისას მიღებული ოთხი კუთხიდან უმცირესს (ნახ.28).



ნახ.28

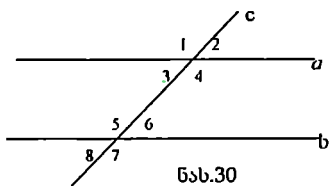
a და b წრფეების მესამე c წრფით გადაკვეთისას მიიღება რვა კუთხე (ნახ.29).



ნახ.29

ამ კუთხეებიდან $\angle 3$ და $\angle 6$, აგრეთვე $\angle 4$ და $\angle 5$ შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეების წყვილებია, ხოლო $\angle 3$ და $\angle 5$, ასევე $\angle 4$ და $\angle 6$ შიგა ცალმხრივად მდებარე კუთხეების წყვილებია. შემოკლებით ასე გამოვთქვამთ ხოლმე - შიგა ჯვარედინი კუთხეები, შიგა

ცალმხრივი კუთხეები.



ნახ.30

დავუშვათ a და b პარალელური წრფეებია, რომლებიც მესამე c წრფით იკვეთებიან (ნახ.30).

თუ ორი პარალელური წრფე იკვეთება მესამე წრფით, მაშინ შიგა ჯვარედინი კუთხეები ტოლია: $\angle 3 = \angle 6$ და

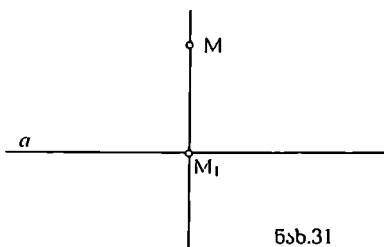
$$\angle 4 = \angle 5.$$

თუ ორი პარალელური წრფე იკვეთება მესამე წრფით, მაშინ შიგა ცალმხრივი კუთხეების ჯამი 180° -ის ტოლია: $\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$ და $\angle 4 + \angle 6 = 180^\circ$.

შეიძლება ჩამოვაცალიბოთ წრფეთა პარალელობის ნიშნები:

1. თუ ორი წრფის მესამეთი გადაკვეთისას მიღებული შიგა ჯვარედინი კუთხეები ტოლია, მაშინ ეს წრფეები პარალელურია.
2. თუ ორი წრფის მესამეთი გადაკვეთისას შიგა ცალმხრივი კუთხეების ჯამი 180° -ის ტოლია, მაშინ ეს წრფეები პარალელურია.

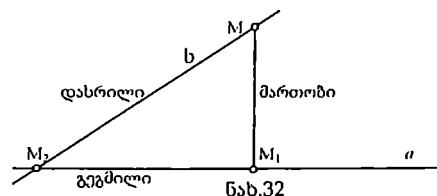
ყოველ M წერტილზე შეიძლება გავავლოთ ერთადერთი წრფე, რომელიც მოცემული a წრფის მართობულია. თუ ეს წრფე კვეთს a



ნახ.31

წრფეს M_1 წერტილში, მაშინ M_1 -ს ეწოდება M -ის გეგმილი (მართობული გეგმილი) a წრფეზე. MM_1 მონაკვეთს ეწოდება M წერტილიდან a წრფისადმი გავლებული მართობი. M -დან a წრფემდე მანძილი ეწოდება MM_1 მონაკვეთის სიგრძეს (ნახ. 31).

თუ M წერტილზე გავლებულია a წრფის მიმართ MM_1 მართო-



ნახ.32

ბული წრფე, მაშინ M წერტილზე გავლებული ნებისმიერი სხვა b წრფე არ არის მართობული a წრფის. აღნიშნული b წრფის a წრფესთან გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ M_2 -ით

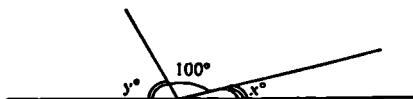
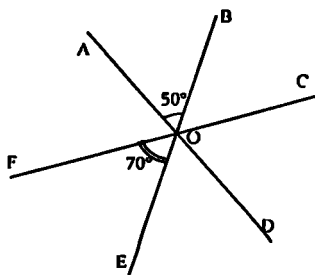
(ეგულისხმობთ, რომ b წრფე a წრფის პარალელური არ არის), მაშინ MM_2 მონაკვეთს ეწოდება დახრილი (M წერტილიდან a წრფის მიმართ გავლებული), M_2M_1 -ს ეწოდება MM_2 -ის გეგმილი a წრფეზე (ნახ. 32).

12.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული გეგმადინეოგისათვის

1. იპოვეთ შემდეგი კუთხეების მოსაზღვრე კუთხეები:

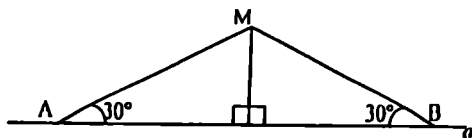
- ა) 35° ; ბ) 45° ; გ) 90° ; დ) 120° ; ე) 30° .

2. იპოვეთ მექანიკური საათის ისრებს შორის კუთხე 14 საათსა და 30 წუთზე.
3. იპოვეთ მექანიკური საათის ისრებს შორის კუთხე 13 საათსა და 15 წუთზე.
4. იპოვეთ მოსაზღვრე კუთხეები, თუ ერთი მათგანი ოთხჯერ მეტია მეორეზე.
5. რას უდრის კუთხე, თუ იგი თავის მოსაზღვრე კუთხეზე 24° -ით მეტია?
6. რას უდრის კუთხე, თუ იგი თავის მოსაზღვრე კუთხეზე 32° -ით ნაკლებია?
7. იპოვეთ კუთხე, რომელიც თავისი მოსაზღვრე კუთხის $\frac{2}{7}$ -ს უდრის.
8. ორი მოსაზღვრე კუთხიდან ერთი წარმოადგენს მეორის 20%-ს. იპოვეთ მათ შორის უდიდესი.
9. იპოვეთ მოსაზღვრე კუთხეები, თუ ერთი მათგანის $\frac{1}{3}$ ნაწილი ტოლია მეორის $\frac{1}{5}$ ნაწილის.
10. იპოვეთ მოსაზღვრე კუთხეები, თუ ერთი მათგანის $0,1$ ნაწილი 6° -ით მეტია მეორის $0,1$ ნაწილზე.
11. იპოვეთ კუთხეები, რომლებიც ორი წრფის გადაკვეთისას მიიღება, თუ ნებისმიერად აღებული სამი მათგანის ჯამი 270° -ის ტოლია.
12. მოცემულია $\angle AOB = 50^\circ$, $\angle FOE = 70^\circ$. იპოვეთ $\angle AOC$, $\angle BOD$, $\angle COE$ და $\angle COD$.
13. იპოვეთ კუთხე მოსაზღვრე კუთხეების ბისექტრისებს შორის.
14. იპოვეთ კუთხე x° და y° სიდიდის კუთხეების ბისექტრისებს

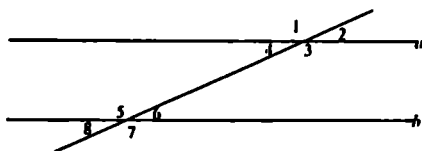


შორის.

15. a წრფიდან 10 სმ-ით დაშორებული M წერტილიდან გავლებული MA და MB დახრილები a წრფესთან ადგენენ 30° -იან კუთხეებს. იპოვეთ AMB ტეხილის სიგრძე.

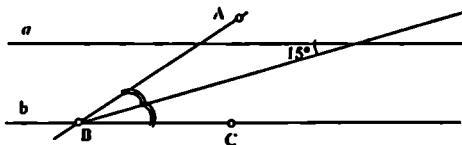


16. $\angle 2 = \angle 6 = 20^\circ$. იპოვეთ დანარჩენი ექვსი კუთხის ზომათა ჯამი. არის თუ არა a და b წრფეები პარალელური?



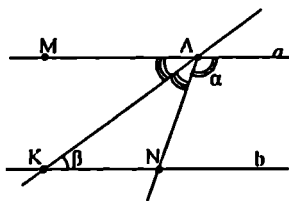
17. a და b პარალელური წრფეების c წრფით გადაკვეთისას მიღებული 8 კუთხიდან ორის ჯამი 80° -ია. იპოვეთ რვავე კუთხე.

18. $a \parallel b$, ABC კუთხის ბისექტრისის მიერ a წრფესთან შედგენილი კუთხე 15° -ია. იპოვეთ a და b წრფეების AB წრფით გადაკვეთისას მიღებული კუთხეების გრადუსული ზომები.



19. a და b წრფეები პარალელურია. AK არის MAN კუთხის ბისექტრისა. α კუთხის $\frac{1}{32}$ ნაწილი ტოლია

β კუთხის 0,5 ნაწილს. იპოვეთ α და β კუთხეები.



20. ვერტიკალური კუთხეების ჯამია 110° . იპოვეთ მათი საერთო მოსაზღვრე კუთხის გრადუსული ზომა.

21. $\angle AOC$ და $\angle BOC$ მოსაზღვრე კუთხეებია. $OD \perp OC$, $\angle AOD = 15^\circ$. იპოვეთ $\angle COB$ -ს გრადუსული ზომა.

22. OA და OB მართობული წრფეებია. OC სხივი გადის AOB კუ-

თხის გვერდებს შორის. იპოვეთ AOC და COB კუთხეების გრადუსული ზომა, თუ მათი სხვაობა 150° -ის ტოლია.

23. ორ პარალელურ წრფესა და მკვეთ წრფეს შორის ერთ-ერთი კუთხე 120° -ის ტოლია. იპოვეთ კუთხე ამ კუთხის ბისექტრისასა და მეორე პარალელურ წრფეს შორის.

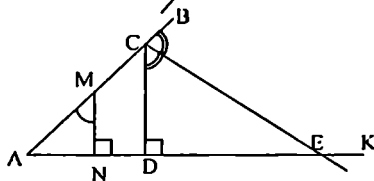
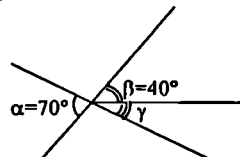
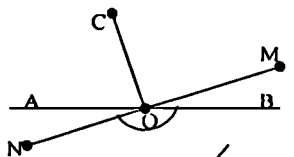
24. ორი პარალელური წრფის მესამით გადაკვეთისას მიღებული შიგა ცალმხრივი კუთხეების სხვაობა 40° -ის ტოლია. იპოვეთ კუთხე უმცირესი კუთხის ბისექტრისასა და მეორე პარალელურ წრფეს შორის.

25. $MN \perp OC$, $\angle NOB = 160^\circ$. იპოვეთ $\angle COB$.

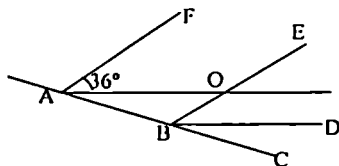
26. საერთო წვეროს მქონე ბლაგვი და მახვილი კუთხეების გვერდები მართობულია. ბლაგვი კუთხის ზომა 150° -ია. იპოვეთ მახვილი კუთხის ზომა.

27. თუ $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 40^\circ$. ვიპოვოთ γ კუთხის გრადუსული ზომა.

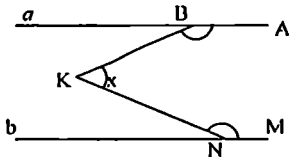
28. მოცემულია $CD \perp AK$, $MN \perp AK$, $\angle AMN = 42^\circ$, $CE \parallel BCD$ კუთხის ბისექტრისაა. იპოვეთ $\angle ACE$ -ს გრადუსული ზომა.



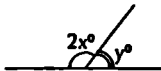
29. მოცემულია $AF \parallel BE$, $AO \parallel BD$, $\angle OAF = 36^\circ$, $\angle AOB$ ორჯერ მეტია $\angle CBD$ -ზე. იპოვეთ $\angle OBC$ -ს გრადუსული ზომა.



30. a და b პარალელური წრფეებია. რას უდრის x -ით აღნიშნული კუთხის გრადუსული ზომა, თუ $\angle ABK = 140^\circ$, ხოლო $\angle MNK = 150^\circ$.



1.2.2. ტესტი №2

1. მართი კუთხის ზომა:
ა) 90° -ის ტოლია; ბ) 90° -ზე მეტია;
გ) 90° -ზე ნაკლებია; დ) 180° -ის ტოლია.
2. მახვილი კუთხის ზომა:
ა) 90° -ის ტოლია; ბ) 90° -ზე მეტია;
გ) 90° -ზე ნაკლებია; დ) 180° -ის ტოლია.
3. გაშლილი კუთხის ზომა:
ა) 90° -ის ტოლია; ბ) 90° -ზე მეტია, მაგრამ 180° -ზე ნაკლები;
გ) 90° -ზე ნაკლებია; დ) 180° -ის ტოლია.
4. ბლაგვი კუთხის ზომა:
ა) 90° -ის ტოლია; ბ) 90° -ზე მეტია;
გ) 90° -ზე ნაკლებია; დ) 180° -ის ტოლია.
5. 1° -იანი კუთხე არის
ა) გაშლილი კუთხის ნახევარი; ბ) გაშლილი კუთხის $\frac{1}{180}$ ნაწილი;
გ) გაშლილი კუთხის $\frac{1}{90}$ ნაწილი; დ) გაშლილი კუთხის მეოთხედი.
6. თუ x და y ნატურალური რიცხვებია, მაშინ y შესაძლოა იყოს:
ა) 15; ბ) 35; გ) 40; დ) 45; ე) არცერთი აღნიშნულიდან.

7. ერთი წერტილიდან გატარებულია სამი სხვადასხვა სხივი. ყველა კუთხე, რომელიც მეზობელი სხივებითაა შექმნილი შეიძლება იყოს:
ა) მახვილი; ბ) ბლაგვი; გ) მართი;
დ) აღნიშნულთაგან არცერთი; ე) აღნიშნულთაგან ნებისმიერი.
8. ორი მოსაზღვრე კუთხიდან ერთი მათგანი 9° -ჯერ მეტია მეორეზე. მათ შორის უდიდესის გრადუსული ზომაა:
ა) 118° ; ბ) 172° ; გ) 156° ; დ) 162° ; ე) 168° .
9. თუ a და b წრფეების გადაკვეთისას შიგა ჯვარედინად მდებარე

კუთხეები ტოლია, მაშინ:

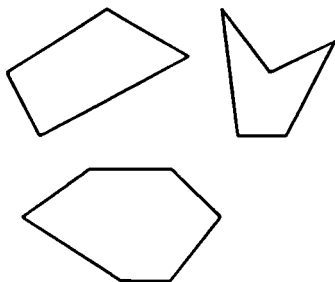
- ა) a და b არაპარალელური წრფეებია; ბ) $a \parallel b$; გ) a და b იკვეთება;
დ) ზოგიერთ შემთხვევაში $a \parallel b$, ზოგიერთ შემთხვევაში – არა.

10. ვერტიკალური კუთხეები:

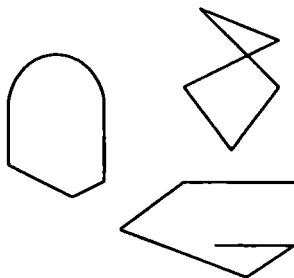
- ა) ერთმანეთის ტოლია; ბ) ერთმანეთის ტოლი არ არის;
გ) ზოგჯერ ერთმანეთის ტოლია, ზოგჯერ არა;
დ) ერთი მახვილია, ხოლო მეორე ბლაგვი.

13. მრავალკუთხედი, ამოზნექილი და არა ამოზნექილი მრავალკუთხედი. სამკუთხედი, სამკუთხედის სახეები, სამკუთხედის უტოლობა, პითაგორას თეორემა.

მარტივ შეკრულ ტეხილს მრავალკუთხედი ეწოდება. ტეხილის წვეროებს მრავალკუთხედის წვეროები ეწოდება; ტეხილის მდგენებს კი - მრავალკუთხედის გვერდები. მაგალითად, ნახ. 33-ზე გამოსახული ფიგურები მრავალკუთხედებია, ხოლო ნახ. 34-ზე გამოსახული ფიგურები მრავალკუთხედები არ არის.

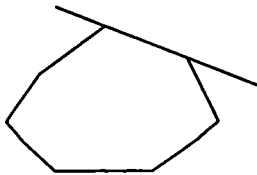


ნახ.33.

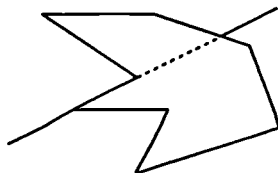


ნახ.34.

მრავალკუთხედს ამოზნექილი ეწოდება, თუ იგი მისი ყოველი გვერდის შემცველი წრფის ცალ მხარესაა მოთავსებული. არა ამოზნექილ მრავალკუთხედს ეს თვისება არ გააჩნია. მაგალითად, ნახ. 35-ზე გამოსახული ფიგურა ამოზნექილი მრავალკუთხედი, ხოლო ნახ. 36-ზე გამოსახული ფიგურა არ არის ამოზნექილი მრავალკუთხედი.

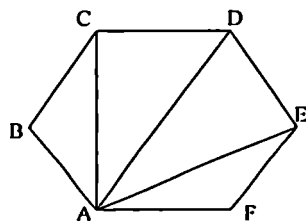


ნახ.35.



ნახ. 36.

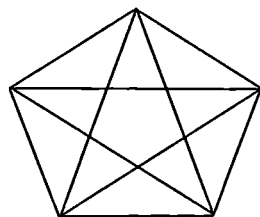
ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ამოზნექილ მრავალკუთხედებს. ნახ.37-ზე ABCDEF ექვსკუთხედია გამოსახული, იგი შეიძლება ასეც ჩავწეროთ BCDEFA. AB, BC, CD, DE, EF, FA მისი გვერდებია; A, B, C, D, E, F მისი წვეროებია, ხოლო $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D, \angle E, \angle F$ ექვსკუთხედის



ნახ. 37.

კუთხეებია. AC, AE და AD არის A წვეროდან გავლებული დიაგონალები. მრავალკუთხედის დიაგონალი მისი რომელიმე არამეზობელი წვეროების შემაერთებელ მონაკვეთს ეწოდება.

თუ მრავალკუთხედს n გვერდი აქვს მას n -კუთხედი ვუწოდოთ. n -კუთხედის ყოველი წვეროდან $n-3$ ოდენობის დიაგონალი შეიძლება გავავლოთ. სულ n -კუთხედში დიაგონალების ოდენობაა $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$. მაგალითად,



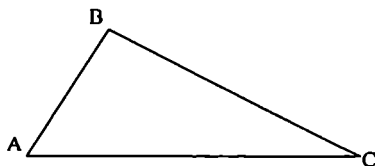
ნახ.38.

ხუთკუთხედში $\frac{5 \cdot (5-3)}{2} = 5$ დიაგონალია (ნახ. 38).

n -კუთხედის კუთხეების ჯამი $180^\circ(n-2)$ -ის ტოლია. თუ მრავალკუთხედის ყველა გვერდი და ყველა კუთხე ტოლია, მაშინ მას წესიერი მრავალკუთხედი ეწოდება. მრავალკუთხედის პერიმეტრი მისი გვერდების ჯამია.

მინიმალური მრავალკუთხედი არის სამკუთხედი; იგი ისეთი მრავალკუთხედი, რომელსაც სამი გვერდი და სამი კუთხე გააჩნია.

ნახ.39-ზე სამკუთხედია გამოსახული. A, B და C მისი წვეროებია. AB, BC და AC სამკუთხედის გვერდებია, $\angle BAC, \angle ACB$ და $\angle ABC$ სამკუთხედის კუთხეებია, ისინი თითო ასოთივე შეიძლება აღვნიშნოთ:

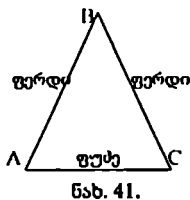
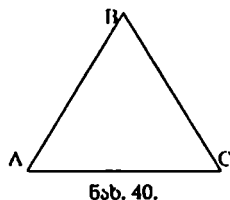


ნახ.39.

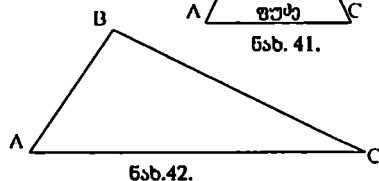
$\angle A, \angle B$ და $\angle C$. ABC სამკუთხედს ასეც აღნიშნავენ – $\triangle ABC$.

ტოლი გვერდების ოდენობის მიხედვით გვაქვს სამკუთხედების შემდეგი სახეები:

1. ტოლგვერდა სამკუთხედი ეწოდება სამკუთხედს, რომლის ყველა გვერდი ერთმანეთის ტოლია (ნახ. 40), $AB=BC=AC$.
2. ტოლფერდა სამკუთხედი ეწოდება ისეთ სამკუთხედს, რომელსაც ორი გვერდი ტოლი აქვს. ტოლ გვერდებს ფერდები ეწოდება, ხოლო მესამე გვერდს – ფუძე. ფუძესთან მდებარე კუთხეები ერთმანეთის ტოლია (ნახ.41).

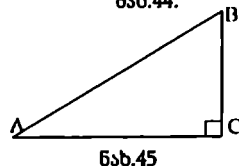
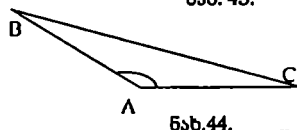
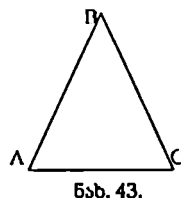


1. სამკუთხედს სხვადასხვაგვერდა ეწოდება, თუ მას განსხვავებული სიგრძის გვერდები აქვს (ნახ. 42).



კუთხეების მიხედვით გვაქვს სამკუთხედების შემდეგი სახეები:

1. თუ სამკუთხედს ყველა კუთხე მახვილი აქვს მას მახვილკუთხა სამკუთხედი ეწოდება (ნახ.43).
2. თუ სამკუთხედს ერთი კუთხე ბლაგვი აქვს მას ბლაგვკუთხა სამკუთხედი ეწოდება (ნახ.44).
3. თუ სამკუთხედს ერთი კუთხე მართი აქვს მას მართკუთხა სამკუთხედი ეწოდება (ნახ.45).



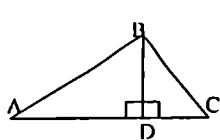
სამკუთხედის ელემენტებია: გვერდები, წვეროები, კუთხეები, სიმაღლეები, მედიანები, ბისექტრისები.

B წერტილიდან AC წრფეზე დაშვებული მართობი სამკუთხედის BD სიმაღლეა (ნახ. 46).

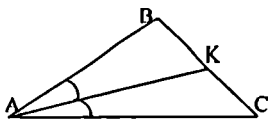
თუ AK სხივი A კუთხის ბისექტრისაა, მაშინ AK მონაკვეთი სამ-

კუთხედის ბისექტრისაა (ნახ. 47).

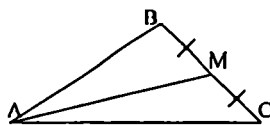
თუ M არის BC გვერდის შუა წერტილი. მაშინ AM მონაკვეთი სამკუთხედის მედიანაა (ნახ.48).



ნახ. 46

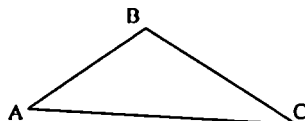


ნახ. 47



ნახ. 48

სამკუთხედის გვერდებისთვის გვაქვს (ნახ.49): $AB < BC + AC$, $BC < AC + AB$, $AC < AB + BC$; ე.ი. ყოველი გვერდის სიგრძე ნაკლებია დანარჩენი ორი გვერდის სიგრძეების ჯამზე.



ნახ. 49

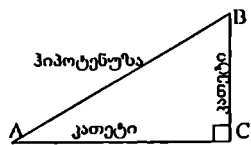
ყოველ სამკუთხედს გააჩნია სამი სიმაღლე, სამი ბისექტრისა და სამი მედიანა.

თუ ABC სამკუთხედი ბლაგვკუთხაა, მაშინ მისი სიმაღლე სამკუთხედის გვერდს შეიძლება არ კვეთდეს, მაგალითად, B წერტილიდან გავლებული სიმაღლე BD AC მონაკვეთს არ კვეთს (ნახ. 50).



ნახ. 50

ვთქვათ, ABC სამკუთხედი მართკუთხა სამკუთხედი, $\angle C = 90^\circ$, მაშინ მართი კუთხის მოპირდაპირე გვერდს ჰიპოტენუზა ეწოდება, ხოლო მართი კუთხის გვერდებს კათეტები (ნახ.51).

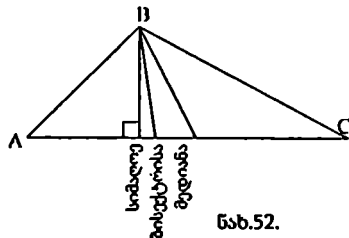


ნახ.51

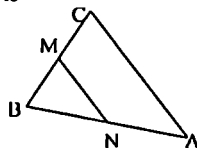
მართკუთხა სამკუთხედში B წვეროდან გავლებული სიმაღლე BC კათეტს ემთხვევა, ხოლო A წვეროდან გავლებული სიმაღლე AC კათეტს ემთხვევა (ნახ. 51).

თუ სამკუთხედში $AB < BC$, მაშინ B წვეროდან გავლებული სიმაღლის, ბისექტრისისა და მედიანას განლაგება სქემატურად ნახ.52-ზეა გამოსახული.

სამკუთხედში ნებისმიერი ორი გვერდის შუაწერტილების შემაერთებელ მონაკვეთს სამკუთხედის შუახაზი ეწოდება, იგი მესამე გვერდის პარალელური და მისი სიგრძის ნახევრის ტოლია. $\triangle ABC$ -ში MN შუახაზია, $MN \parallel AC$ და $MN = \frac{AC}{2}$ (ნახ.53).



ნახ.52.

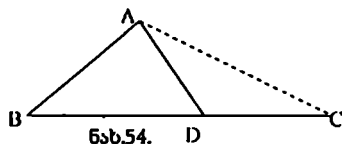


ნახ.53

ამოცანების ამოხსნის წიმუშები:

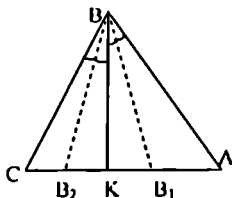
1. D წერტილი BC მონაკვეთს ეკუთვნის. ABD სამკუთხედი მახვილკუთხაა. რა სახისაა (კუთხეების მიხედვით) ADC სამკუთხედი?

ამოხსნა. რადგან $\angle ADB < 90^\circ$, ამიტომ $\angle ADC > 90^\circ$ (მათი ჯამი ხომ 180° -ია), ამიტომ $\triangle ADC$ ზღაგვეკუთხაა (ნახ. 54).



ნახ.54.

2. ABC სამკუთხედი მახვილკუთხაა, BK მისი სიმაღლეა. ABK და KBC კუთხეების ბისექტრისები BK სიმაღლესთან შესაბამისად 10° -იან და 12° -იან კუთხეებს ადგენენ. იპოვეთ ABC კუთხე (ნახ.55).



ნახ.55.

მოც: $\triangle ABC$

$BK \perp AC$

$\angle ABB_1 = \angle B_1BK = 10^\circ$

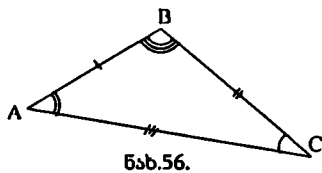
$\angle CBB_2 = \angle B_2BK = 12^\circ$

უნდა ვიპოვოთ $\angle ABC$

ამოხსნა: ცხადია, $\angle ABK = \angle ABB_1 + \angle B_1BK = 10^\circ + 10^\circ = 20^\circ$, ხოლო $\angle CBK = \angle CBB_2 + \angle B_2BK = 12^\circ + 12^\circ = 24^\circ$, რადგან $\angle ABC = \angle ABK + \angle CBK$ გვექნება, რომ $\angle ABC = 44^\circ$.

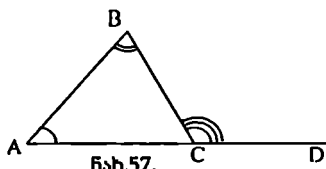
ვთქვათ, მოცემულია ABC სამკუთხედი, მის გვერდებს შორის არსებობს შემდეგი დამოკიდებულება $AB < BC < AC$; ანალოგიური დამო-

კიდებულია იარსებებს ამ გვერდების მოპირდაპირე მდებარე კუთხეებს შორის $\angle C < \angle A < \angle B$ (ნახ. 56).



ნახ.56.

განვიხილოთ სამკუთხედის თვისებები: სამკუთხედის კუთხეების ჯამი 180° -ის ტოლია, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$; სამკუთხედის გარე კუთხე მისი არამოსაზღვრე კუთხეების ჯამის ტოლია (ნახ. 57), $\angle BCD = \angle A + \angle B$.



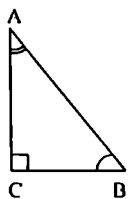
ნახ.57.

მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხეების ჯამი 90° -ია (ნახ.58), $\angle A + \angle B = 90^\circ$.

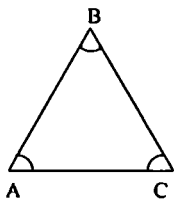
ტოლგვერდა სამკუთხედის ყველა კუთხე ტოლია და 60° -ს უდრის (ნახ.59).

ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხეები ერთმანეთის ტოლია, $\angle A = \angle C$ (ნახ.60).

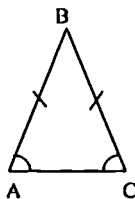
სამკუთხედის მედიანები ერთ წერტილში იკვეთება და ამ გადაკვეთის წერტილით თითოეული მედიანა იყოფა 2:1 შეფარდებით (წვეროს მხრიდან) (ნახ.61).



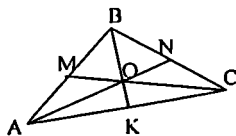
ნახ.58



ნახ.59



ნახ.60



ნახ.61

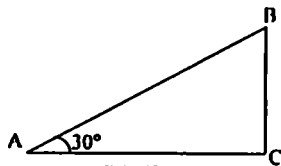
ნახ.61-ზე AN, BK და AC $\triangle ABC$ -ს მედიანებია ისინი იკვეთებიან O წერტილში და ადგილი აქვს შეფარდებებს: $AO:ON=2:1$, $CO:OM=2:1$ და $BO:OK=2:1$.

თუ ABC სამკუთხედი მართკუთხაა, მაშინ ჰიპოტენუზის კვადრანტი კათეტების კვადრატების ჯამის ტოლია. ამ თეორემას პითაგორას თეორემა ეწოდება. სამართლიანია შებრუნებული თეორემაც, თუ

სამკუთხედში ორი გვერდის კვადრატების ჯამი ტოლია მესამე გვერდის კვადრატის, მაშინ ეს სამკუთხედი მართკუთხაა.

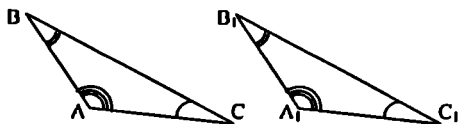
თუ მართკუთხა სამკუთხედში ერთ-ერთი მახვილი კუთხე 30° -ის ტოლია, მაშინ ამ გვერდის წინ მდებარე კათეტი ჰიპოტენუზის ნახევრის ტოლია (ნახ.62).

ნახ. 62-ზე $BC = \frac{1}{2} AB$.



ნახ.62.

განვიხილოთ სამკუთხედების ტოლობა და ტოლობის ნიშნები. ორი სამკუთხედი ტოლია, თუ მათი გვერდები და გვერდების მოპირდაპირე კუთხეები

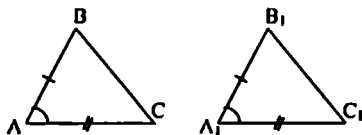


ნახ. 63.

ტოლია (ნახ.63). მაშასადამე, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, ნიშნავს, რომ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$; ამასთან $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

ორი სამკუთხედის ტოლობის დადგენა შეიძლება სამკუთხედების ტოლობის ნიშნებითაც:

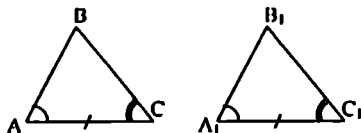
I ნიშანი: თუ ერთი სამკუთხედის ორი გვერდი და მათ შორის მდებარე კუთხე შესაბამისად ტოლია მეორე სამკუთხედის ორი გვერდისა და მათ შორის მდებარე კუთხის, მაშინ ეს სამკუთხედები ტოლია (ნახ. 64), მაშასადამე, თუ მაგალითად, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ და $\angle A = \angle A_1$, მაშინ $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.



ნახ.64.

II ნიშანი: თუ ერთი სამკუთხედის ერთი გვერდი და მასთან მდებარე ორი კუთხე შესაბამისად უდრის მეორე სამკუთხედის ერთ გვერდსა და მასთან მდებარე კუთხეებს, მაშინ ეს სამკუთხედები ერთმანეთის ტოლია.

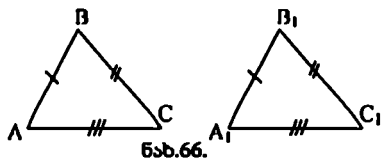
მაშასადამე, თუ მაგალითად,



ნახ.65.

$AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$ და $\angle C=\angle C_1$, მაშინ $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ (ნახ.65).

III ნიშანი: თუ ერთი სამკუთხედის სამი გვერდი შესაბამისად ტოლია მეორე სამკუთხედის სამი გვერდის, მაშინ ეს სამკუთხედები ტოლია (ნახ.66).

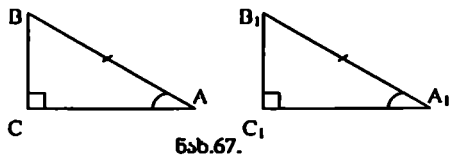


ნახ.66.

მაშასადამე, თუ მაგალითად, $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ და $BC=B_1C_1$, მაშინ $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

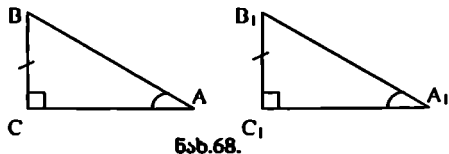
მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობას სხვა ნიშნებითაც დავადგენთ:

1. თუ ერთი მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა და ერთი მახვილი კუთხე შესაბამისად ტოლია მეორე მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზისა და ერთი მახვილი კუთხის, მაშინ ეს სამკუთხედები ტოლია. მაგალითად, $\angle C=\angle C_1=90^\circ$, $AB=A_1B_1$ და $\angle A=\angle A_1$, მაშინ $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ (ნახ.67).



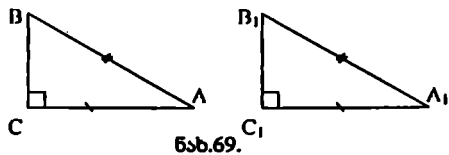
ნახ.67.

2. თუ ერთი მართკუთხა სამკუთხედის კათეტი და მისი მოპირდაპირე კუთხე შესაბამისად ტოლია მეორე მართკუთხა სამკუთხედის კათეტისა და მისი მოპირდაპირე კუთხის, მაშინ ეს სამკუთხედები ტოლია. მაგალითად, $\angle C=\angle C_1=90^\circ$, $BC=B_1C_1$ და $\angle A=\angle A_1$, მაშინ $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ (ნახ.68).



ნახ.68.

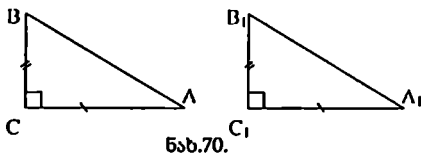
3. თუ ერთი მართკუთხა სამკუთხედის კათეტი და ჰიპოტენუზა ტოლია მეორე მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზისა და კათეტის, მაშინ ეს სამკუთხედები ერთმანეთის



ნახ.69.

ტოლია. მაგალითად, $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$, $AB = A_1B_1$ და $AC = A_1C_1$, მაშინ $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (ნახ.69).

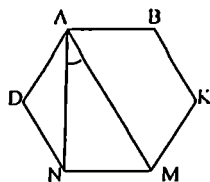
4. თუ ერთი მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები ტოლია მეორე მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების, მაშინ ეს სამკუთხედები



ტოლია. მაგალითად, $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$, $AC = A_1C_1$ და $BC = B_1C_1$, მაშინ $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (ნახ.70).

13.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. ხუთკუთხედის გვერდები ისე შეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც 2:3:7:1:5; პერიმეტრი 36დმ-ია. იპოვეთ გვერდები.
2. წესიერი ექვსკუთხედის პერიმეტრია 90 სმ. იპოვეთ ექვსკუთხედის ერთ გვერდზე აგებული წესიერი სამკუთხედის პერიმეტრი.
3. წესიერი მრავალკუთხედის კუთხეების ჯამი 1260°-ია. რისი ტოლია თითოეული კუთხე?
4. ხუთკუთხედის კუთხეები ისე შეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც 5:4:3:4:2. იპოვეთ ეს კუთხეები.
5. ასკუთხედის შიგნით აღებული P წერტილი შეაერთეს ასკუთხედის ყოველ წვეროსთან; ვიპოვოთ ა) რამდენი სამკუთხედი მიიღება? ბ) რას უდრის ასკუთხედის კუთხეების ჯამი? გ) რას უდრის სამკუთხედების კუთხეების ჯამი?
6. ხუთკუთხედის ოთხი გვერდიდან თითოეულის სიგრძე 24 სმ-ით ნაკლებია მეხუთე გვერდის სიგრძეზე. იპოვეთ ხუთკუთხედის უდიდესი გვერდის სიგრძე, თუ ხუთკუთხედის პერიმეტრი 874 სმ-ია.
7. იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხედის AM და AN

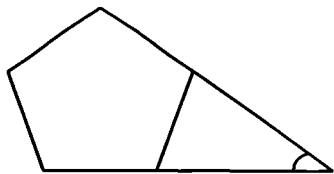


დიაგონალებს შორის კუთხე MAN.

8. წესიერი ხუთკუთხედის ორი გვერდი გააგრძელეს ურთიერთგადაკვეთამდე. იპოვეთ მიღებული კუთხე.

9. მრავალკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 3060° -ის ტოლია. რამდენი დიაგონალი ექნება ამ მრავალკუთხედს?

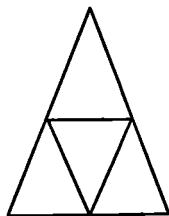
10. წესიერი n -კუთხედის კუთხეებისა და A წვეროსთან მდებარე ერთი გარე კუთხის გრადუსულ ზომათა ჯამი 780° -ია. რამდენი გვერდი აქვს ამ მრავალკუთხედს?



11. სამკუთხედის ორი გვერდი შესაბამისად ტოლია 18 სმ და 6 სმ-ის. რამდენი სანტიმეტრის ტოლი იქნება მესამე გვერდი, თუ მისი რიცხვითი მნიშვნელობა მთელი რიცხვის კვადრატია?

12. იპოვეთ ტოლფერდა სამკუთხედის უდიდესი შესაძლო პერიმეტრი, თუ მისი ფერდი 7 სმ-ია, ხოლო ფუძის სიგრძე მთელი რიცხვით გამოისახება სანტიმეტრებში.

13. ნახაზზე მოცემულია ოთხი ერთმანეთის ტოლი ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლებიც ერთად ადგენენ დიდ ტოლფერდა სამკუთხედს. ვიპოვოთ დიდი სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ ერთი პატარა სამკუთხედის პერიმეტრი 4 სმ-ია.

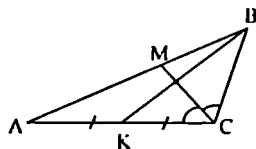


14. ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრი 10 სმ-ია. მის ფერდზე აგებული ტოლგვერდა სამკუთხედის პერიმეტრი 12 სმ-ია. იპოვეთ ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე.

15. ტოლფერდა სამკუთხედის მედიანა ყოფს ამ სამკუთხედის პერიმეტრს 30 სმ და 12 სმ-ის ნაწილებად. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები.

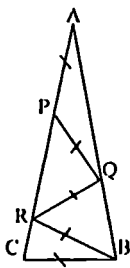
16. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები, თუ მათი გრადუსული ზომები ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც ა) $2:3:4$, ბ) $3:4:5$, გ) $11:3:4$, დ) $4:11:21$.

17. ABC სამკუთხედში AC გვერდი 2-ჯერ მეტია BC გვერდზე. იპოვეთ კუთხე BK მედიანასა და CM ბისექტრისას შორის.



18. სამკუთხედის წვეროდან გავლებული ბისექტრისა ფუძესთან ადგენს 75° -იან კუთხეს და ერთ-ერთი ფერდის ტოლია. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

19. მოცემულია ABC ტოლფერდა სამკუთხედი, $AB=BC$. P, Q და R წერტილები ისეა აღებული, რომ $AP=PQ=QR=RB=BC$. იპოვეთ $\angle A$.



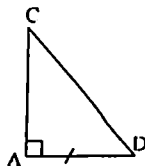
20. მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხე 45° -ის ტოლია. იპოვეთ ჰიპოტენუზა, თუ ჰიპოტენუზის და მასზე დაშვებული სიმაღლის ჯამია 18 სმ.

21. მართკუთხა სამკუთხედში ერთი მახვილი კუთხე 60° -ის ტოლია. მცირე კათეტი ტოლია 10 სმ-ის. იპოვეთ ჰიპოტენუზა.

22. ABC მართკუთხა სამკუთხედში $\angle A=35^\circ$. AC კათეტის შუამართობი ჰიპოტენუზას O წერტილში კვეთს. იპოვეთ $\angle OCB$.

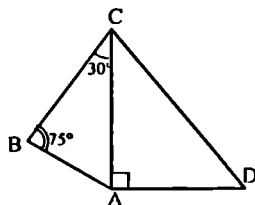
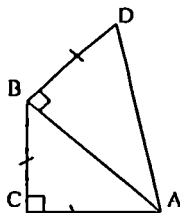
23. მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხე 50° -ის ტოლია. მართი კუთხის წვეროდან გავლებულია სიმაღლე და მედიანა. იპოვეთ კუთხე მათ შორის. (ვისარგებლოთ იმ ფაქტით, რომ მართკუთხა სამკუთხედში გავლებული მედიანა ჰიპოტენუზის ნახევრის ტოლია).

24. კედელზე მიდგმული კიბის ქვედა ბოლო 3მ-ის მანძილზეა დაშორებული კედლიდან. მიწის ზედაპირიდან რა მანძილით იქნება დაშორებული კიბის ზედა ბოლო, თუ კიბის სიგრძე 5 მ-ია?



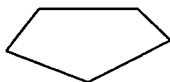
25. მართკუთხა სამკუთხედში კათეტების შეფარდება ტოლია $\frac{5}{12}$ -ის. ჰიპოტენუზა 13 სმ-ია. იპოვეთ კათეტები.

26. ნახაზზე მართი კუთხეები მონიშნულია. $AC=BC=BD=1$ სმ. იპოვეთ AD .
27. ტურისტებმა შეკრების A წერტილიდან იარეს 1800 მეტრი დასავლეთის მიმართულებით, შემდეგ 1,8 კმ ჩრდილოეთის მიმართულებით, შემდეგ აღმოსავლეთით - 600 მ და სამხრეთით - 200 მ, ამის შემდეგ მათ შეისვენეს მიღწეულ B წერტილში. რა მანძილია A -დან B წერტილამდე?
28. რას უდრის $\angle ADC$, თუ $BC=AD$, $CA \perp AD$, $\angle BCA=30^\circ$ და $\angle CBA=75^\circ$?
29. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები ტოლია 20 სმ-ის და 15 სმ-ის, რისი ტოლი იქნება იმ მართკუთხა სამკუთხედის პერიმეტრი, რომელსაც ორჯერ მეტი სიგრძის კათეტები აქვს?
30. მართკუთხა სამკუთხედის ერთი კათეტი 8 სმ-ის ტოლია, მეორე კათეტი მის 75%-ს უდრის. ვიპოვოთ ჰიპოტენუზა.



13.2. ტესტი №3

1. შემდეგი ფიგურებიდან რომელია მრავალკუთხედი?



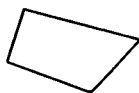
I



II



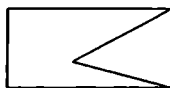
III



IV

ა) I და II; ბ) II და IV; გ) I და IV; დ) III; ე) II და III.

2. შემდეგი ფიგურებიდან რომელია ამოზნექილი მრავალკუთხედი?



I

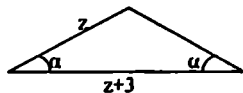


II



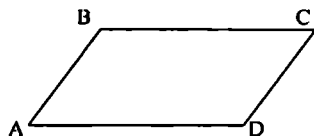
III

- ა) მხოლოდ I; ბ) მხოლოდ II; გ) I და II; დ) I და III; ე) მხოლოდ III.
3. მრავალკუთხედი, რომელსაც ყველაზე ცოტა ოდენობის გვერდები აქვს, არის
 ა) სამკუთხედი; ბ) ოთხკუთხედი;
 გ) ექვსკუთხედი; დ) ხუთკუთხედი.
4. თუ ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძესთან მდებარე კუთხე 15° -ია, მაშინ წვეროსთან მდებარე კუთხე იქნება:
 ა) 160° ; ბ) 150° ; გ) 140° ; დ) 130° ; ე) 145° .
5. ნახაზზე მოცემული სამკუთხედის პერიმეტრია 21 სმ, მაშინ ამ სამკუთხედის ფუძეა
 ა) 6სმ; ბ) 9სმ; გ) 12 სმ; დ) 10 სმ; ე) 8 სმ.
6. შემდეგი წინადადებებიდან რომლებია მართებული:
 I. სამკუთხედში ზღაგვი კუთხე მხოლოდ ერთი შეიძლება იყოს;
 II. სამკუთხედში არ შეიძლება იყოს მხოლოდ ერთი მახვილი კუთხე;
 III. შეიძლება სამკუთხედში იყოს მხოლოდ ერთი მართი კუთხე.
 ა) მხოლოდ III; ბ) მხოლოდ II; გ) მხოლოდ I;
 დ) მხოლოდ I და III; ე) სამივე.
7. თუ სამკუთხედში ყოველი მედიანა წარმოადგენს სიმაღლეს, მაშინ ეს სამკუთხედი არის:
 ა) ტოლფერდა; ბ) ტოლგვერდა; გ) მართკუთხა;
 დ) ზღაგვკუთხა; ე) არცერთი აღნიშნულთაგან.
8. 60 მ სიმაღლის კოშკი მინდვრის რომელიღაც წერტილიდან ჩანს 30° -იანი კუთხით. ვიპოვოთ მანძილი ამ წერტილიდან კოშკის უმაღლეს წერტილამდე.
 ა) 180 მ; ბ) 160 მ; გ) 150 მ; დ) 120 მ; ე) 100 მ.
9. მართკუთხა სამკუთხედში ერთი კათეტი ჰიპოტენუზის 80 %-ია. ვიპოვოთ ეს კათეტი და ჰიპოტენუზა, თუ მეორე კათეტი 6 მ-ია.
 ა) 8მ, 10მ; ბ) 7მ, 15მ; გ) 12მ, 15მ; დ) 16მ, 20მ; ე) 15მ, 20 მ.
10. ABC სამკუთხედში $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 70^\circ$. იპოვეთ A და C კუთხეების ბისექტრისებს შორის უმცირესი კუთხე.
 ა) 45° ; ბ) 50° ; გ) 55° ; დ) 60° ; ე) 65° .



14. პარალელოგრამი, პარალელოგრამის თვისებები. რომბი, მართკუთხედი, კვადრატი და მათი თვისებები. ტრაპეცია, ტრაპეციის თვისებები. ტანგრამი.

ოთხკუთხედს, რომლის მოპირდაპირე გვერდები პარალელურია, პარალელოგრამი ეწოდება. ნახ. 71-ზე ABCD პარალელოგრამია: $AB \parallel CD$ და $BC \parallel AD$.



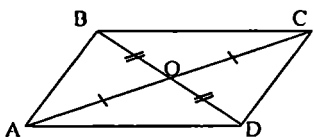
ნახ. 71.

პარალელოგრამის გვერდებისა და კუთხეების თვისებებია:

1. პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები ტოლია.
2. პარალელოგრამის მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია.
3. ერთ გვერდთან მდებარე კუთხეების ჯამი 180° -ის ტოლია.

მაშასადამე, თუ ABCD პარალელოგრამია, მაშინ $AB=CD$, $BC=AD$, $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$, $\angle A+\angle B=180^\circ$, $\angle B+\angle C=180^\circ$ (ნახ. 71).

4. პარალელოგრამის დიაგონალები გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა. მაშასადამე, თუ ABCD პარალელოგრამია, მაშინ $AO=OC$ და $BO=OD$ (ნახ.72).



ნახ. 72.

ოთხკუთხედი პარალელოგრამი რომ იყოს, საკმარისია:

- ა) მოპირდაპირე გვერდები ტოლი იყოს;
 - ბ) მოპირდაპირე გვერდების ერთი წყვილი იყოს ტოლი და პარალელური მონაკვეთების წყვილი;
 - გ) დიაგონალები გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფოდეს.
- ა), ბ) და გ) პირობებს პარალელოგრამის ნიშნებსაც უწოდებენ.

პარალელოგრამს, რომლის ყველა კუთხე მართია, მართკუთხედი ეწოდება.

მართკუთხედის თვისება, რომელიც მას სხვა სახის პარალელოგრამებისაგან გამოარჩევს არის ის, რომ მართკუთხედის დიაგონალები ტოლია: $AB=BD$, ამიტომ $AO=OB=OC=OD$ (ნახ. 73).

რომბი ეწოდება ისეთ პარალელოგრამს, რომლის ყველა გვერდი ტოლია.

რომბის თვისებები, რომლებიც მას სხვა სახის პარალელოგრამებისაგან გამოარჩევს არის ა) რომბის დიაგონალები ერთმანეთის მართობულია, ბ) რომბის დიაგონალები რომბის კუთხეთა ბისექტრისებია.

თუ $ABCD$ რომბია, მაშინ $AC \perp BD$; $\angle ABD = \angle DBC$, $\angle ADB = \angle BDC$, $\angle BAC = \angle CAD$, $\angle BCA = \angle DCA$ (ნახ. 74).

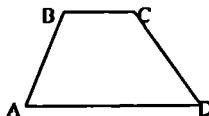
კვადრეტი არის რომბი, რომლის ყველა კუთხე მართია.

ყოველი კვადრეტი არის რომბი და ამიტომ, პარალელოგრამიც. ყოველი კვადრეტი არის მართკუთხედი. კვადრატს აქვს პარალელოგრამის, მართკუთხედის, რომბის თვისებები (ნახ. 75).

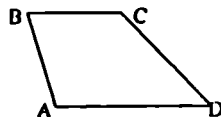
ეხლა განვიხილოთ ტრაპეცია.

ტრაპეცია არის ოთხკუთხედი, რომლის ორი მოპირდაპირე გვერდი პარალელურია, დანარჩენი ორი გვერდი კი არ არის პარალელური. ამრიგად, თუ $BC \parallel AD$, AB არ არის პარალელური CD -ს; მაშინ $ABCD$ ტრაპეციაა (ნახ. 76).

ტრაპეციას შეიძლება ჰქონდეს შემდეგი სახეც (ნახ. 77).



ნახ. 76

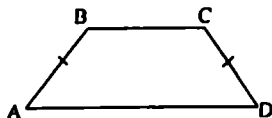


ნახ. 77

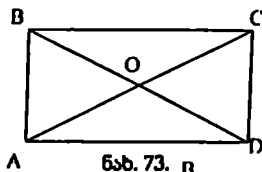
ტრაპეციის პარალელურ გვერდებს ფუძეები ეწოდება, არაპარალელურს – ფერდები.

ტრაპეციის ფერდების შუაწერტილების შემაერთებელ მონაკვეთს ტრაპეციის შუახაზი ეწოდება. იგი ფუძეების პარალელურია და მათი ჯამის ნახევრის ტოლია.

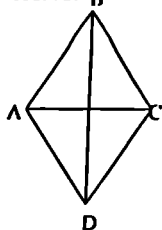
თუ ტრაპეციის ფერდები ტოლია, მაშინ ტრაპეციას ტოლფერდა ეწოდება



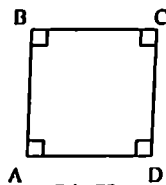
ნახ. 78



ნახ. 73.



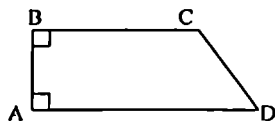
ნახ. 74.



ნახ. 75.

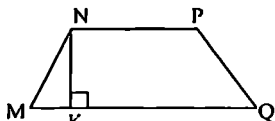
(ნახ. 78).

თუ ტრაპეციას ორი კუთხე მართი აქვს; მაშინ ასეთ ტრაპეციას მართკუთხა ტრაპედია ეწოდება. ABCD მართკუთხა ტრაპედიაა, მაშინ AB ფერდი ამ ტრაპედიის სიმაღლეა (ნახ. 79).



ნახ. 79

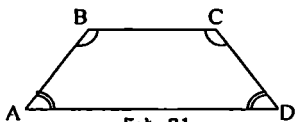
MNPQ ტრაპედიის N წვეროდან MQ ფუძეზე დაშვებული NK მართობი ტრაპეციის სიმაღლეა (ნახ. 80).



ნახ. 80

ტრაპეციის თვისებები:

ტოლფერდა ტრაპეციის თითოეულ ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია (ნახ.81).

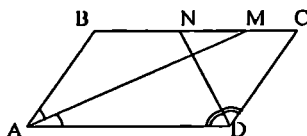


ნახ. 81

ნებისმიერი ტრაპეციის თითოეულ ფერდთან მდებარე კუთხეების ჯამი 180° -ის ტოლია.

ამოცანების ამოხსნის ნიშნუბი:

1. ABCD პარალელოგრამის A და D კუთხეების ბისექტრისები BC გვერდს M და N წერტილებში კვეთს. $AB=6$ სმ და $BC=8$ სმ. იპოვეთ MN (ნახ. 82).

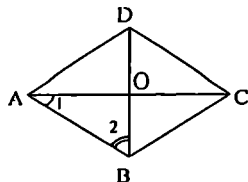


ნახ. 82

ამოხსნა. გავითვალისწინოთ შემდე-

გი ფაქტი: თუ AM არის A კუთხის ბისექტრისა, მაშინ $\triangle ABM$ ტოლფერდა სამკუთხედი (მართლაც, $\angle BAM = \angle MAD$, ხოლო $\angle MAD = \angle AMB$, მაშინ $AB=BM$). ტოლფერდაა DCN სამკუთხედიც. მაშასადამე, $BM=6$ სმ და $CN=6$ სმ, ხოლო $MN=6+6-8=4$ (სმ).

2. რომბის ერთი გვერდის მიერ დიაგონალებთან შედგენილი კუთხეები ისე შეეფარდე-

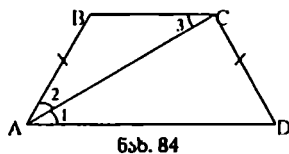


ნახ 83

ბიან ერთმანეთს, როგორც 4:5. იპოვეთ რომბის კუთხეები (ნახ 83).

ამოხსნა. $\angle AOB = 90^\circ$, მასთან $\angle 1 : \angle 2 = 4 : 5$; დაეუშვათ $\angle 1 = 4x$, ხოლო $\angle 2 = 5x$, $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ ე.ი. $4x + 5x = 90$, $x = 10$; ამიტომ $\angle 1 = 40^\circ$ და $\angle 2 = 50^\circ$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $\angle A = 80^\circ$ და $\angle B = 100^\circ$.

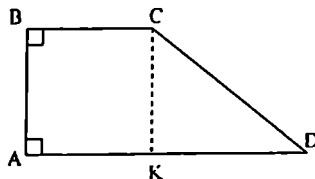
3. ABCD ტოლფერდა ტრაპეციაა. AC დიაგონალი A კუთხის ბისექტრისაა. ტრაპეციის პერიმეტრი 22 დმ-ია. დიდი ფუძისა და ფერდის შეფარდება 5:2. იპოვეთ ტრაპეციის გვერდები (ნახ. 84).



ნახ. 84

ამოხსნა. რადგან $\angle 1 = \angle 2$, მასთან $\angle 1 = \angle 3$, ამიტომ $\angle 2 = \angle 3$. მაშასადამე, $AB = BC$. მოცემულობიდან გვაქვს $AD : AB = 5 : 2$; თუ $AB = 2x$, მაშინ $BC = 2x$, $CD = 2x$ და $AD = 5x$; რადგან ამოცანის პირობიდან ტრაპეციის პერიმეტრი 22 დმ-ია, ამიტომ გვექნება: $11x = 22$, საიდანაც $x = 2$; ამრიგად, $AB = 4$ დმ, $BC = 4$ დმ, $CD = 4$ დმ და $AD = 10$ დმ.

4. მართკუთხა ტრაპეციის მახვილი კუთხე 30° -ია. ფერდების ჯამი 12 სმ-ია. იპოვეთ ტრაპეციის სიმაღლე (ნახ. 85).



ნახ. 85

ამოხსნა. ვთქვათ, $CK = x$, მაშინ $CD = 2x$; ამოცანის პირობიდან, ფერდების ჯამი 12 სმ-ია, გვაქვს $x + 2x = 12$, აქედან $x = 4$. მაშასადამე, $h = AB = CK = 4$ სმ.

განვიხილოთ ტანგრამი.

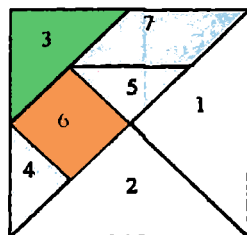
დაწყებით სკოლაში გეომეტრიული მასალის სწავლების ძირითადი მიზანია სივრცითი აზროვნების განვითარება. სივრცითი აზროვნების განვითარების ბაზას წარმოადგენს სივრცითი წარმოდგენები. სივრცითი აზროვნების შინაარსია სივრცითი სახეებით ოპერირება ხილულ ან წარმოსახვით სივრცეში (ან სიბრტყეებში). სტრუქტურულად სივრცითი აზროვნება წარმოიდგინება ორი სახით: 1. სივრცითი სახის შექმნა, 2. უკვე შექმნილი სახის გარდაქმნა დასახული

ამოცანის მიხედვით.

ამ მიზნის მიღწევის ერთ-ერთ მაგალითს წარმოადგენს ტანგრამა-მი და მისი გამოყენებით სხვადასხვა ფიგურების აწყობა.

თამაში „ტანგრამა“ შექმნა ჩინელმა მეცნიერმა ტა-ნგ-მა; მან კვადრატი დაყო შვიდ ნაწილად და თამაშს სახელიც მის პატივსაცემად ეწოდა.

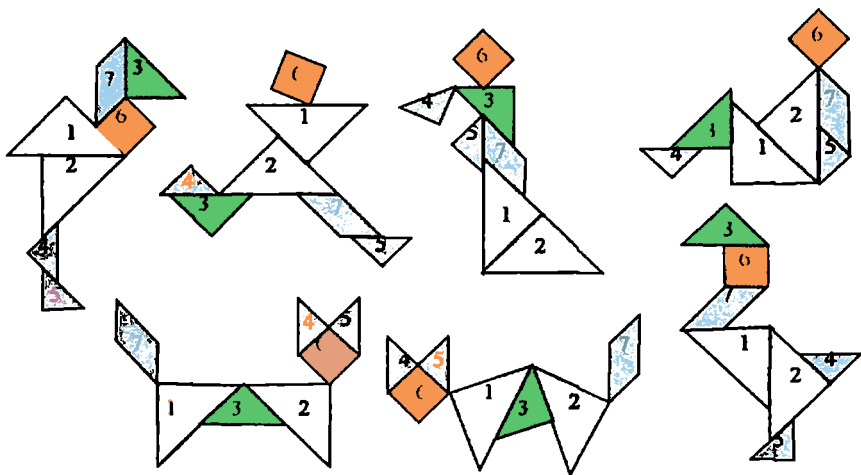
კვადრატის შვიდ ნაწილად დაყოფა ცნობილია უძველესი დროიდან. დაფუძვით, კვადრატი დაყოფილია შვიდ ნაწილად, ერთნაირი ნაწილები ერთი ფერით გამოვსახოთ და თითოეული ნაწილი დავნომროთ (ნახ. 86).



ნახ. 86

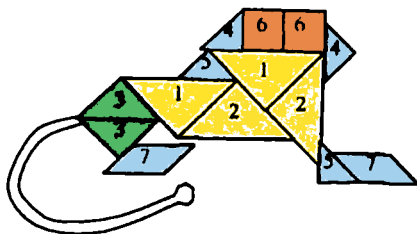
დავალბა: ამ შვიდი ნაწილით შევადგინოთ ფიგურები, მასთან ნაწილების თანაკვეთა შეიძლება იყოს მონაკვეთი, წერტილი, ან ცარიელი სიმრავლე; დაუშვებელია ნაწილების ერთმანეთზე ზედდება და ყოველ ფიგურაში უნდა იყოს მხოლოდ ეს შვიდი ნაწილი.

განვიხილოთ ამ წესით აგებული ზოგიერთი ფიგურა (ნახ. 87).



ნახ. 87

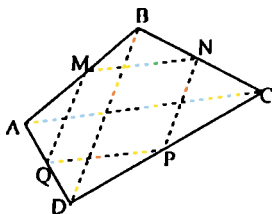
შეიძლება ფიგურა ავაგოთ ტანგრამის ორი კვადრატით; ამ შემთხვევაში ფიგურა უნდა შედგებოდეს ზუსტად თოთხმეტი ნაწილისგან (ნახ. 88).



ნახ. 88

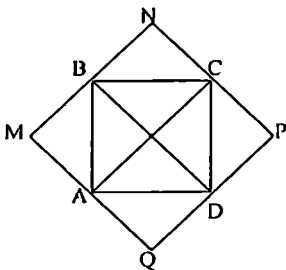
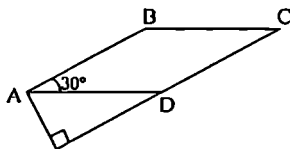
1.4.1. საპარკიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. ABCD ოთხკუთხედის დიაგონალები 8 სმ და 10 სმ-ია. იპოვეთ იმ ოთხკუთხედის პერიმეტრი, რომელიც მიიღება AB, BC, CD და AD შუაწერტილების მიმდევრობით შეერთებით, დაადგინეთ მიღებული ოთხკუთხედის სახე.
2. პარალელოგრამის მახვილი კუთხის ბისექტრისა პარალელოგრამის გვერდს 5 სმ-ის და 7 სმ-ის ტოლ ნაწილებად ყოფს. იპოვეთ პარალელოგრამის პერიმეტრი (განიხილეთ ორი შემთხვევა).
3. პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხის ბისექტრისა მოპირდაპირე გვერდს ყოფს 2:1 შეფარდებით ბლაგვი კუთხის წვეროდან. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდები, თუ მისი პერიმეტრი 40 სმ-ის ტოლია.
4. პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხის ბისექტრისა მოპირდაპირე გვერდს ყოფს 2:1 შეფარდებით მახვილი კუთხის წვეროდან. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდები, თუ მისი პერიმეტრი 40 სმ-ის

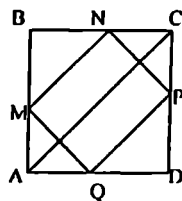


ტოლია.

5. ABCD პარალელოგრამის AC დიაგონალი 30 სმ-ია. ABC სამკუთხედის პერიმეტრია 84 სმ. იპოვეთ პარალელოგრამის პერიმეტრი.
6. MNPQ პარალელოგრამის დიაგონალები O წერტილში იკვეთება. MNO სამკუთხედის პერიმეტრი 42 სმ-ია. MP და NQ დიაგონალები შესაბამისად 30 სმ და 22 სმ-ია. იპოვეთ MN-ის სიგრძე.
7. პარალელოგრამის ერთ-ერთი დიაგონალი მისი ერთ-ერთი გვერდის ტოლია. პარალელოგრამის მახვილი კუთხე 40° -ია. იპოვეთ ამ დიაგონალის მიერ გვერდებთან შედგენილი კუთხეები.
8. რომბის მახვილი კუთხე 30° -ია. A წვეროდან CD წრფემდე მანძილი 5 სმ-ია. იპოვეთ რომბის პერიმეტრი.
9. რომბის ერთ-ერთი დიაგონალი გვერდის ტოლია. იპოვეთ რომბის კუთხეები.
10. რომბის პერიმეტრი 60 სმ-ის ტოლია, მისი ერთ-ერთი დიაგონალი 15 სმ-ია. იპოვეთ რომბის კუთხეები.
11. რომბის პერიმეტრი 24 სმ-ია, სიმაღლე - 3 სმ. იპოვეთ რომბის კუთხეები.
12. კვადრატის დიაგონალის სიგრძე 12 სმ-ია. კვადრატის წვეროებზე გავლებულია დიაგონალების პარალელური წრფეები. იპოვეთ მიღებული ოთხკუთხედის პერიმეტრი.
13. რომბის ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლე რომბის გვერდს შუაზე ყოფს. იპოვეთ დიაგონალების მიერ გვერდებთან შედგენილი კუთხეები.
14. იპოვეთ რომბის კუთხეები, თუ მისი ერთი წვეროდან გავლებული სიმაღლეები ერთმანეთთან ა) 40° -იან კუთხეს ადგენენ; ბ) 130° -იან კუთხეს ადგენენ.



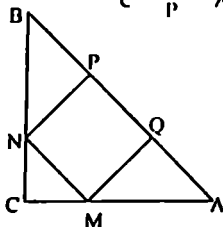
15. ABCD კვადრატის დიაგონალი 4 სმ-ია. კვადრატში ჩახაზულია MNPQ მართკუთხედი $MN \parallel AC$. იპოვეთ მართკუთხედის პერიმეტრი.



16. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის თითოეული კათეტი 20 სმ-ია. სამკუთხედში ჩახაზულია CMNP მართკუთხედი. იპოვეთ ამ მართკუთხედის პერიმეტრი.

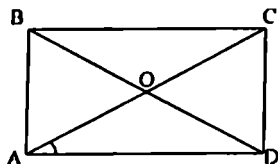


17. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედში კვადრატია ჩახაზული. კვადრატის პერიმეტრი 16 სმ-ია. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა.



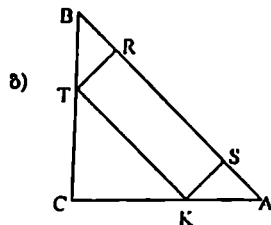
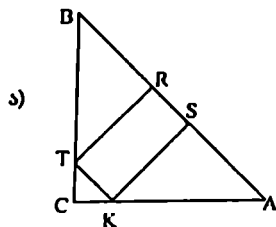
18. მართკუთხედის წვეროდან დიაგონალზე დაშვებული მართობი დიაგონალს ყოფს 1:3 შეფარდებით. დიაგონალების გადაკვეთის წერტილიდან დიდ გვერდზე დაშვებული მართობის სიგრძე 5 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ დიაგონალების სიგრძე.

19. ABCD მართკუთხედის AC დიაგონალის სიგრძე 12 სმ-ია და იგი დიდ გვერდთან 30° -იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ AOB სამკუთხედის პერიმეტრი.



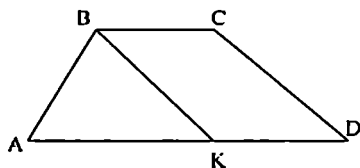
20. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზულია მართკუთხედი ისე, რომ მისი ორი წვერო ჰიპოტენუზაზე მდებარეობს, დანარჩენი ორი

კი კათეტებზე. ვიპოვოთ მართკუთხედის გვერდები, თუ ისინი ისე შეფარდებიან ერ-

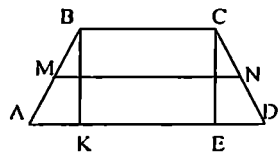


თმანეთს, როგორც 5:2; სამკუთხედის ჰიპოტენუზა კი 36 სმ-ის ტოლია. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

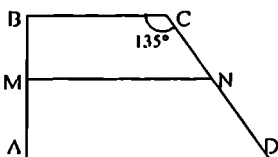
21. ტრაპეციის სამი მომდევნო კუთხე ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1:2:3. იპოვეთ ტრაპეციის უდიდესი კუთხე.
22. ტოლფერდა ტრაპეციის AC დიაგონალი A კუთხის ბისექტრისაა. ტრაპეციის პერიმეტრი 22 დმ-ია. დიდი ფუძის და ფერდის შეფარდებაა 5:2. იპოვეთ ტრაპეციის უდიდესი გვერდი.
23. ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალები ურთიერთმართობულია. ფუძეები ტოლია 3 სმ და 5 სმ-ის. ვიპოვოთ ამ ტრაპეციის სიმაღლე.
24. მართკუთხა ტრაპეციის ფუძეები 6 სმ და 8 სმ-ია. ტრაპეციის ერთი კუთხე 120° -ია. იპოვეთ ტრაპეციის დიაგონალები.
25. მართკუთხა ტრაპეციაში მცირე დიაგონალი დიდი ფერდის ტოლია. ტრაპეციის დიდი ფერდი არის a სმ, ხოლო მცირე ფუძე b სმ-ის ტოლია. იპოვეთ დიდი დიაგონალი.
26. ტრაპეციის ფერდები 7 სმ და 11 სმ-ია, ფუძეები 5 სმ და 15 სმ. მცირე ფუძის წვეროზე გავლებულმა წრფემ, რომელიც პარალელურია დიდი ფერდის, ტრაპეციიდან მოკვეთა სამკუთხედი. იპოვეთ ამ სამკუთხედის გვერდები.



27. ABCD ტოლფერდა ტრაპეციაში BC და AD ფუძეები შესაბამისად ტოლია 6 სმ-ის და 10 სმ-ის. იპოვეთ: ა) ტრაპეციის შუახაზი; ბ) AE მონაკვეთი.

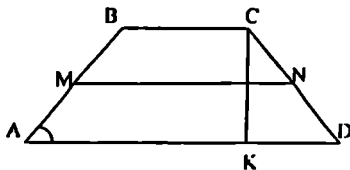


28. ტრაპეციის ფუძეები ტოლია 9 სმ და 15 სმ-ის. იპოვეთ მანძილი ტრაპეციის დიაგონალების შუაწერტილებს შორის.
29. მართკუთხა ტრაპეციაში ერთი კუთხე 135° -ის ტოლია. შუამონაკვეთის სიგ-



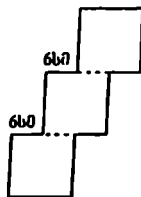
რმე 18 სმ-ია, ხოლო ფუძეები ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც 1:8. იპოვეთ ტრაპეციის მცირე ფერდი.

30. ტოლფერდა ტრაპეციაში მახვილი კუთხე 45° -ის ტოლია. ტრაპეციის სიმაღლე 12 სმ, ხოლო შუამონაკვეთი კი 21 სმ-ია. იპოვეთ ტრაპეციის დიდი ფუძე.



1.4.2. ტესტი №4

- პარაპლელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები
 - ტოლია; ბ) ტოლი არ არის; გ) პარალელური არ არის; დ) ზოგჯერ ტოლი არ არის; ე) აუცილებლად ერთმანეთის მართობულია.
- ყოველი რომში:
 - კვადრატია; ბ) პარალელოგრამია; გ) მართკუთხეა; დ) არატოლი გვერდების მქონე პარალელოგრამია; ე) არატოლი გვერდების მქონე ოთხკუთხეა.
- კვადრატის დიაგონალის მიერ გვერდთან შედგენილი კუთხის ზომაა
 - 30° ; ბ) 75° ; გ) 60° ; დ) 90° ; ე) 45° .
- ყოველი მართკუთხედი:
 - რომბია; ბ) კვადრატია; გ) პარალელოგრამია; დ) ისეთი რომბია, რომელიც პარალელოგრამი არ არის; ე) ისეთი კვადრატია, რომელიც პარალელოგრამი არ არის.
- ტრაპეციის ფერდის ბოლოებიდან გავლებულ ბისექტრისებს შორის კუთხე არის:
 - 30° ; ბ) 45° ; გ) 60° ; დ) 90° ; ე) 120° .
- სამი ტოლი კვადრეტი ერთმანეთზეა მოდებული, იპოვეთ მიღებული ფიგურის პერიმეტრი, თუ კვად-



რატის გვერდი 12 სმ-ის ტოლია.

ა) 90სმ; ბ) 100 სმ; გ) 120 სმ; დ) 140 სმ; ე) 144 სმ.

7. ტრაპეციის შუახაზი დიაგონალით იყოფა 3:4 შეფარდებით; მცირე ფუძე 8,1 სმ-ია. იპოვეთ დიდი ფუძე.

ა) 10,8 სმ; ბ) 5,4 სმ; გ) 8,1 სმ; დ) 18,9 სმ; ე) 15,1 სმ.

8. ტრაპეციის ფუძეები არის a და b , $a > b$. იპოვეთ მანძილი დიაგონალების შუაწერტილებს შორის.

ა) $\frac{a+b}{2}$; ბ) $\frac{a-b}{2}$; გ) $\frac{a}{2} + b$; დ) $a + \frac{b}{2}$; ე) $\frac{a+b}{3}$.

9. ABCD ოთხკუთხედისათვის მოცემულია ორი პირობა:

I. $BC \parallel AD$, II. AB არ არის პარალელური CD წრფის.

იმის გასარკვევად არის, თუ არა ABCD ოთხკუთხედი ტრაპეცია:

ა) საკმარისია I პირობა; ბ) საკმარისია II პირობა;

გ) საკმარისია I პირობა, II პირობა კი არ არის საკმარისი;

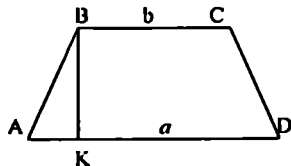
დ) საკმარისია ორივე პირობა ერთად;

ე) ორივე პირობა ერთად არ არის საკმარისი.

10. ABCD ტოლფერდა ტრაპეციაში BK სიმაღლეა. ფუძეები არის a და b . იპოვეთ KD.

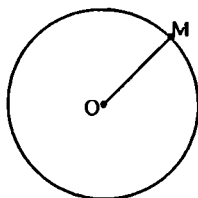
ა) $\frac{a+b}{2}$; ბ) $\frac{a-b}{2}$; გ) $\frac{3a-2b}{2}$;

დ) $\frac{a}{2} + b$; ე) $a + \frac{b}{2}$.



1.5. წრეწირი და წრე. სექტორი, სეგმენტი, წრეში ჩახსენული და შემოხსენული ფიგურები

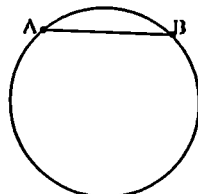
წრეწირი სიბრტყის იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილია, რომლებიც მოცემული წერტილიდან მოცემული მანძილითაა დაშორებული. მოცემულ წერტილს წრეწირის ცენტრი ეწოდება, მოცემული მანძილი კი - წრეწირის რადიუსს წარმოადგენს (ნახ. 89).



ნახ. 89.

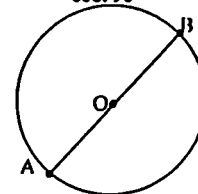
ნახ. 89-ზე გამოსახულია წრეწირი, რომლის ცენტრი O წერტილია, ხოლო OM მონაკვეთი მისი რადიუსია, M წერტილი წრეწირის წერტილია.

ქორდა არის მონაკვეთი, რომელიც წრეწირის ორ წერტილს აერთებს. ნახ. 90-ზე AB ქორდაა გამოსახული.



ნახ. 90

უდიდესი სიგრძის ქორდაა, ქორდა, რომელიც წრეწირის ცენტრზე გადის; მას წრეწირის დიამეტრს უწოდებენ; ე.ი. ცენტრზე გამავალ ქორდას წრეწირის დიამეტრი ეწოდება. ნახ. 91-ზე გამოსახულია AB დიამეტრი. $AB=2r$, სადაც r წრეწირის რადიუსია.

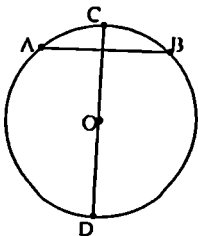


ნახ. 91

ქორდის მართობული CD დიამეტრი ამ ქორდას შუაზე ყოფს. შებრუნებით, ქორდის შუა წერტილზე გავლებული დიამეტრი ამ ქორდის მართობულია (ნახ. 92).

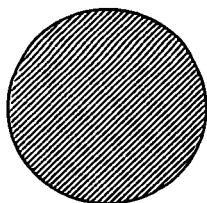
სიბრტყის ნაწილს, რომელიც წრეწირითაა შემოსაზღვრული, ამ წრეწირთან ერთად წრე ეწოდება (ნახ. 93).

სექტორი ორ რადიუსს შორის მოთავსებული წრის ნაწილია. ორი რადიუსით წრე ორ სექტორად იყოფა (ნახ. 94).

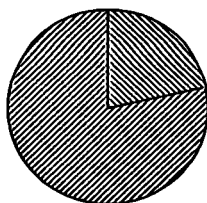


ნახ. 92

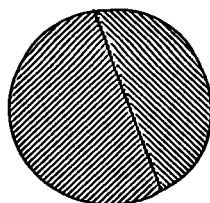
ქორდასა და მის მიერ მოჭიმულ წრეწირის რკალს შორის მოთავსებულ წრის ნაწილს სეგმენტი ეწოდება. ყოველი ქორდა წრეს ორ სეგმენტად ყოფს (ნახ. 95).



ნახ. 93

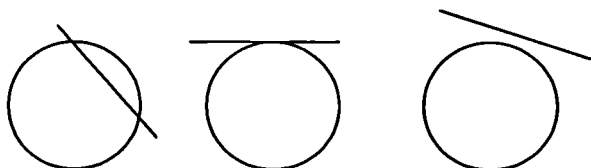


ნახ. 94



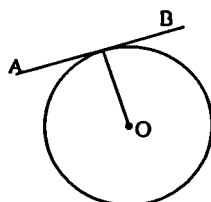
ნახ. 95

წრფეს წრეწირთან შეიძლება ჰქონდეს ორი საერთო წერტილი (წრფე კვეთს წრეწირს), ერთი საერთო წერტილი (წრფე წრეწირის მხებია), ან არ ჰქონდეს საერთო წერტილი (ნახ. 96).



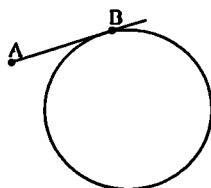
ნახ. 96

თუ წრფე წრეწირის მხებია, მაშინ იგი შეხების წერტილზე გავლებული რადიუსის მართობულია, $AB \perp OM$. შებრუნებით - თუ წრფე მართობულია რადიუსის და გადის რადიუსის იმ წერტილში, რომელიც წრეწირს ეკუთვნის, მაშინ ეს წრფე წრეწირის მხებია (ნახ. 97).



ნახ. 97

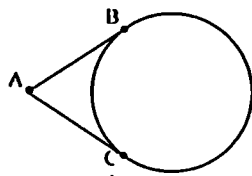
ნახ. 98-ზე A წერტილიდან გავლებულია წრეწირის მხები AB წრფე; ზოგჯერ მონაკვეთსაც ვუწოდებთ წრეწირის მხებს, ამ შემთხვევაში AB მონაკვეთივც წრეწირის მხებია.



ნახ. 98

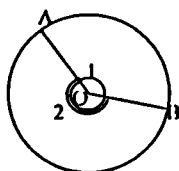
ერთი წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებული ორი მხები ტოლია - $AB=AC$ (ნახ. 99).

წრეწირის გრადუსული ზომა 360° -ია. ნახევარწრეწირის – 180° . ერთგრადუსიანი რკალი წრეწირის $\frac{1}{360}$ ნაწილია.



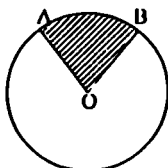
ნახ. 99

OA და OB რადიუსებით ორი კუთხე განისაზღვრება, პირველი – $\angle AOB$ 180° -ზე ნაკლებია და წრეწირის მცირე რკალს ეყრდნობა, მეორე – 180° -ზე მეტია და წრეწირის დიდ რკალს ეყრდნობა (ნახ.100).



ნახ. 100

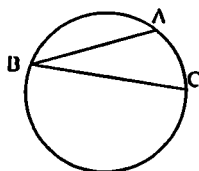
კუთხეს, რომლის წვერო წრეწირის ცენტრია, ცენტრალური კუთხე ეწოდება. რკალის გრადუსული ზომა მისი შესაბამისი ცენტრალური კუთხის გრადუსული ზომის ტოლია. თუ, მაგალითად, $\angle AOB = 80^\circ$, მაშინ $\cup AB = 80^\circ$ (ნახ. 101).



ნახ. 101

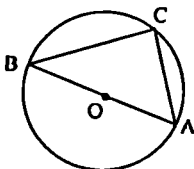
თუ რკალების გრადუსული ზომები ტოლია, მაშინ ეს რკალები ტოლია.

კუთხეს, რომლის წვერო წრეწირის ეკუთვნის და გვერდები კვეთს წრეწირს ჩახაზული კუთხე ეწოდება. ნახ. 102-ზე ABC ჩახაზული კუთხეა. ჩახაზული კუთხის ზომა იმ რკალის გრადუსული ზომის ნახევარია, რომელსაც ეს კუთხე მოიცავს $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$. ეს ტოლობა ნიშნავს, რომ თუ $\cup AC = 60^\circ$, მაშინ $\angle ABC = 30^\circ$.



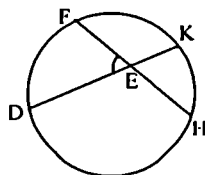
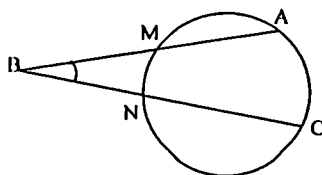
ნახ. 102

თუ ჩახაზული კუთხე დიამეტრს ეყრდნობა, მაშინ მისი ზომა 90° -ია, (ეს კუთხე 180° -იან რკალს ეყრდნობა) (ნახ. 103).



ნახ. 103

$\angle ABC$ და $\angle DEF$ წრეწირის მკვეთი კუთხეებია. პირველ შემთხვევაში მკვეთი კუთხის გვერდები კვეთს წრეწირს, წვერო წრეწირის გარეთაა; მეორე შემთხვევაში მკვეთი კუთხის გვერდები კვეთს წრეწირს, წვერო წრეწირის შიგნითაა (ნახ. 104).



ნახ. 104

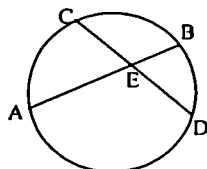
თუ მკვეთი კუთხის წვერო წრეწირის გარეთაა, მაშინ მისი ზომის
არის კუთხის გვერდებს შორის მოქცეული რკალების გრადუსული
ზომების ნახევარსხვაობა – $\angle B = \frac{1}{2}(\sphericalangle AC - \sphericalangle MN)$.

თუ მკვეთი კუთხის წვერო წრეწირის შიგნითაა, მაშინ მისი ზომა
კუთხის გვერდებზე გამავალ წრფეებს შორის მოქცეული რკალების
ზომათა ნახევარჯამის ტოლია –

$$\angle DEF = \frac{1}{2}(\sphericalangle FD + \sphericalangle KH).$$

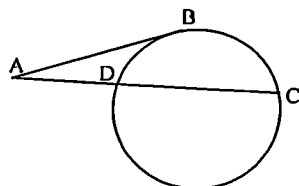
გადამკვეთი ქორდების თვისება: თუ წრეწი-
რის ორი ქორდა იკვეთება, მაშინ ერთი ქორდის
მონაკვეთების ნამრავლი მეორე ქორდის მონაკ-
ვეთების ნამრავლის ტოლია:

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED \text{ (ნახ. 105).}$$



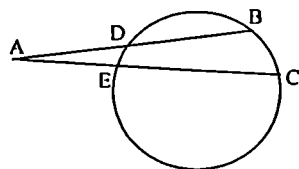
ნახ. 105

თუ რაიმე წერტილიდან წრეწირისად-
მი გავლებულია მხები და მკვეთი, მაშინ
მხების კვადრეტი მკვეთისა და მკვეთის
გარე ნაწილის ნამრავლის ტოლია:
 $AB^2 = AC \cdot AD$ (ნახ. 106).



ნახ. 106

თუ რაიმე წერტილიდან წრეწირისად-
მი ორი მკვეთია გავლებული, მაშინ ერთ-
ერთის ნამრავლი მის გარე ნაწილზე მეო-
რე მკვეთის მის გარე ნაწილზე ნამრავლის
ტოლია: $AB \cdot AD = AC \cdot AE$ (ნახ. 107).



ნახ. 107

წრეწირის სიგრძის შეფარდება დიამეტრთან ყველა წრეწირი-

სათვის ერთი და იგივე რიცხვია. ეს რიცხვი – π რიცხვი – ირაციონალური რიცხვია მუდამდებამდე სიზუსტით $\pi \approx 3,14$.

მაშასადამე, წრეწირის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით: $c=2\pi r$, სადაც r წრეწირის რადიუსია.

$$1^{\circ}\text{-იანი რკალის სიგრძე არის } \frac{c}{360}, \text{ ანუ } \frac{2\pi r}{360} = \frac{\pi r}{180}.$$

$$n^{\circ}\text{-იანი რკალის სიგრძე ასე გამოითვლება: } \ell = \frac{\pi r}{180} \cdot n.$$

მრავალკუთხედს ეწოდება წრეწირში ჩახაზული, თუ მისი ყველა წვერო წრეწირის ეკუთვნის. ამ შემთხვევაში ვიტყვით აგრეთვე, რომ წრეწირი შემოხაზულია მრავალკუთხედზე (ნახ. 108).

ნებისმიერ სამკუთხედზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა. შემოხაზული წრეწირის ცენტრი სამკუთხედის გვერდების შუამართოების გადაკვეთის წერტილია. შემოხაზული წრეწირის R რადიუსი შეიძლება ვიპოვოთ ფორმულებით:

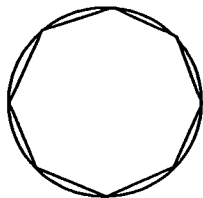
$$R = \frac{abc}{4S}, \quad 2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}; \text{ სადაც } a, b$$

და c სამკუთხედის გვერდებია, ხოლო S – ფართობი (ფართობის შესახებ შემდეგ ვისაუბრებთ) (ნახ. 109).

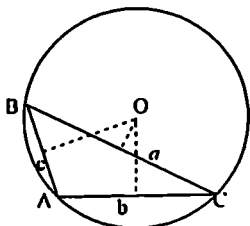
თუ სამკუთხედი წესიერია (ტოლგვერდაა), მაშინ $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$; სადაც a სამკუთხედის გვერდია (ნახ. 110).

თუ სამკუთხედი მართკუთხაა, მაშინ შემოხაზული წრის ცენტრი ჰიპოტენუზის შუაწერტილია და რადიუსი ჰიპოტენუზის ნახევარია

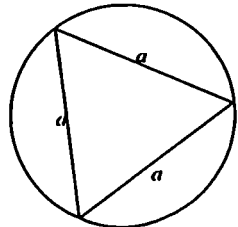
$$R = \frac{c}{2} \text{ (ნახ. 111).}$$



ნახ. 108

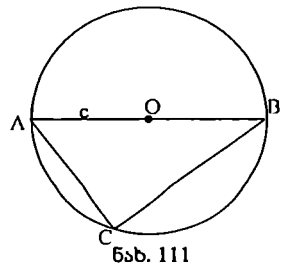


ნახ. 109



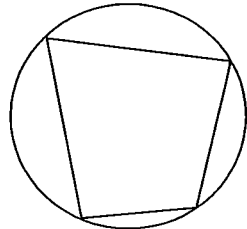
ნახ. 110

თუ წრეწირში ჩახაზულია ოთხკუთხედი, მაშინ მოპირდაპირე კუთხეების ჯამი 180° -ის ტოლია; შებრუნებით – თუ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე კუთხეების ჯამი არის 180° , მაშინ ოთხკუთხედზე შემოიხაზება წრეწირი (ნახ. 112).



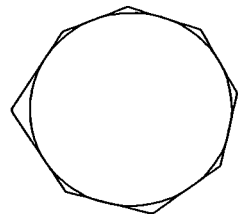
ნახ. 111

მრავალკუთხედს ეწოდება წრეწირზე შემოხაზული, თუ მისი ყოველი გვერდი ეხება წრეწირს, ამ შემთხვევაში ვამბობთ, აგრეთვე, წრეწირი ჩახაზულია მრავალკუთხედში (ნახ.113).



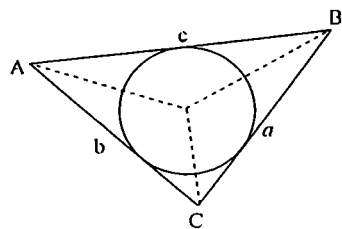
ნახ. 112

ნებისმიერ სამკუთხედში შეიძლება წრეწირის ჩახაზვა; სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილია, ჩახაზული წრეწირის r რადიუსი შეიძლება ვიპოვოთ ფორმულით: $r = \frac{2S}{a+b+c}$, სადაც S სამკუთხედის ფართობია, ხოლო a , b და c სამკუთხედის გვერდები (ნახ. 114).



ნახ. 113

თუ სამკუთხედი წესიერია, მაშინ $r = \frac{R}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, სადაც r ჩახაზული წრეწირის რადიუსია, R შემოხაზული წრეწირის რადიუსი, ხოლო a სამკუთხედის გვერდი.



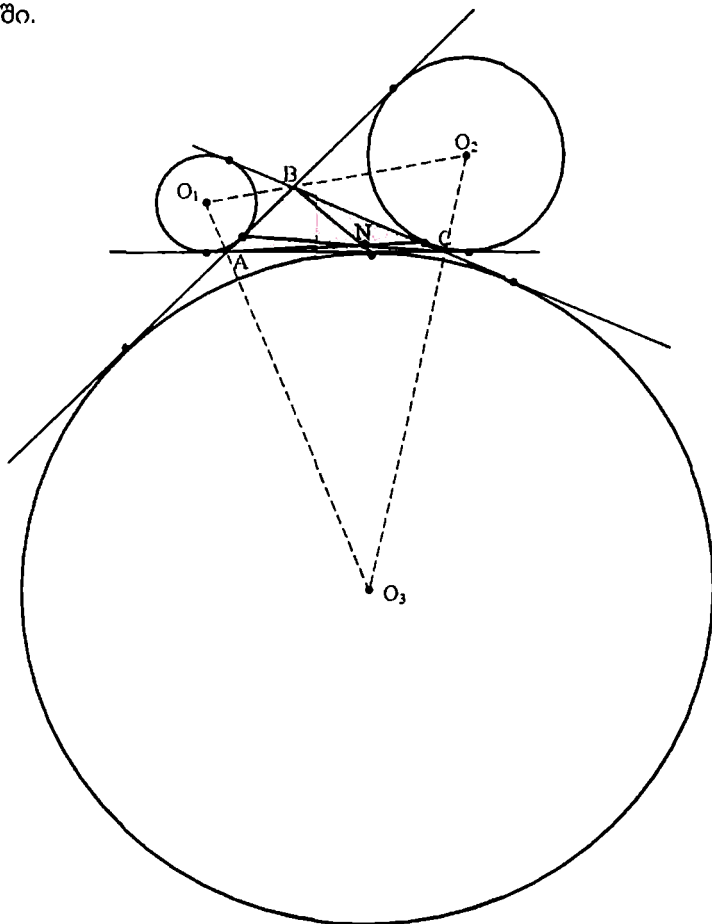
ნახ. 114

თუ სამკუთხედი მართკუთხაა, მაშინ $R = \frac{a+b-c}{2}$, სადაც a და b კათეტები, ხოლო c ჰიპოტენუსა.

სამკუთხედის გარეჩახაზული წრეწირები ეწოდება სამ წრეწირს, რომელთაგან თითოეული გარედან ეხება სამკუთხედის ერთ

გვერდს და დანარჩენი ორი გვერდის გაგრძელებას.

გარეჩახაზულის წრეწირის ცენტრი მდებარეობს ერთი შიგა კუთხის ბისექტრისისა და ორი დანარჩენი წვეროს გარეკუთხის ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილში. მაშასადამე, სამკუთხედის ექვსი ბისექტრისა – სამი შიგა და სამი გარე კუთხისა – იკვეთება სამ-სამად ოთხ წერტილში – ჩახაზული და გარეჩახაზული წრეწირების ცენტრებში.



მონაკვეთები, რომლებიც აერთებენ სამკუთხედის ყოველ წვეროს მოპირდაპირე გვერდის იმ წერტილთან, რომელშიც მას ეხება

გარეჩახაზული წრეწირი, იკვეთებიან ერთ წერტილში. ამ წერტილს ნეგელის წერტილი ეწოდება. ნახაზზე ნეგელის წერტილი N-ით არის აღნიშნული.

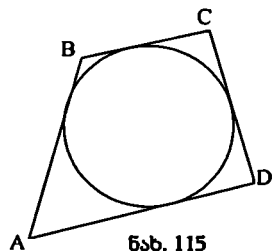
თუ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების ჯამი ტოლია, მაშინ მასში წრეწირი ჩაიხაზება; შებრუნებით – თუ ოთხკუთხედში წრეწირია ჩახაზული, მაშინ მისი მოპირდაპირე გვერდების ჯამი ტოლია (ნახ. 115).

გავიხსენოთ, წესიერი მრავალკუთხედი ეწოდება მრავალკუთხედს, რომლის კუთხეები ტოლია და გვერდებიც ტოლია.

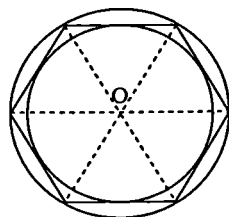
წესიერი მრავალკუთხედების მაგალითები:

1. წესიერი სამკუთხედი (ტოლგვერდა სამკუთხედი),
2. წესიერი ოთხკუთხედი (კვადრატი),
3. წესიერი ხუთკუთხედი,
4. წესიერი ექვსკუთხედი და ა.შ.

ნებისმიერი წესიერი მრავალკუთხედისათვის არსებობს ამ მრავალკუთხედში ჩახაზული და მრავალკუთხედზე შემოხაზული წრეწირები. ამ წრეწირების ცენტრები ემთხვევა ერთმანეთს და კუთხეების ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილია (ნახ. 116).



ნახ. 115



ნახ. 116

შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების რადიუსები, შესაბამისად R და r , შეიძლება ვიპოვოთ ფორმულებით:

$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}, \quad r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}};$$

სადაც a მრავალკუთხედის გვერდია, ხოლო n – გვერდების რიცხვი.

კერძოდ, თუ $n=3$, მაშინ $R = \frac{a/\sqrt{3}}{3}$ და $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$;

თუ $n=4$, მაშინ $R = \frac{a}{2}$ და $r = \frac{a}{2}$;

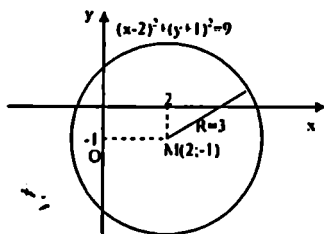
თუ $n=6$, მაშინ $R = a$, და $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

წრეწირის ზოგადი სახის განტოლებას მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში აქვს შემდეგი სახე:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, სადაც წერტილი $(a;b)$ წრეწირის ცენტრია, ხოლო R რადიუსი.

მაგალითად, ავაგოთ წრეწირი

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ (ნახ. 117).



ნახ. 117

საერთო ცენტრის მქონე წრეწირებს კონცენტრული წრეწირები ეწოდება.

განვიხილოთ ორი არაკონცენტრული წრეწირის ურთიერთმდებარეობის საკითხი. ვთქვათ, მოცემულია ორი წრეწირი ცენტრებით O და O_1 წერტილებში, რომელთა რადიუსებია a და b , ცენტრებს შორის მანძილი კი c -ს ტოლია.

O მივიღოთ XOY მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის სათავედ OO_1 წრფე – OX ღერძად. დადებით მიმართულებად ავირჩიოთ მიმართულება O -დან O_1 -საკენ. ამ სისტემაში წრეწირების განტოლება იქნება:

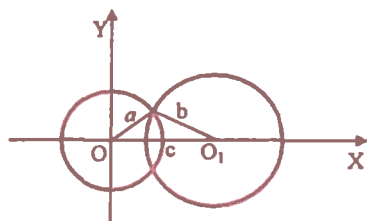
$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ და } (x-c)^2 + y^2 = b^2 \quad (*)$$

თუ წრეწირები ერთმანეთს გადაკვეთს, მაშინ გადაკვეთის წერტილის x და y კოორდინატები $(*)$ -ის ორივე განტოლებას აკმაყოფილებს და პირიქით, თუ $(*)$ განტოლებათა სისტემას აქვს ამონახსენი, ანუ არსებობს ისეთი x და y რიცხვები, რომლებიც ორივე განტოლებას აკმაყოფილებს, მაშინ x და y წრეწირების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებია. თუ წრეწირები ერთმანეთს გადაკვეთს, მაშინ ამ წრეწირებს იმდენი გადაკვეთის წერტილი აქვთ, რამდენი ამონახსენიც $(*)$ განტოლებათა სისტემას.

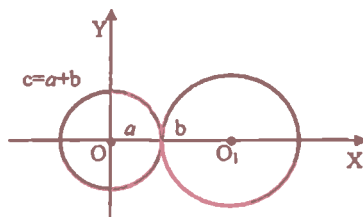
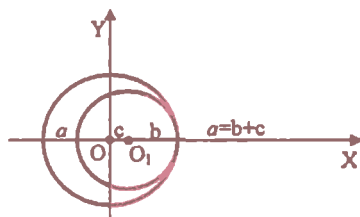
ამოვხსნათ (*) განტოლებათა სისტემა. მივიღებთ:

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \text{ და } y^2 = \frac{1}{4c^2}(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a).$$

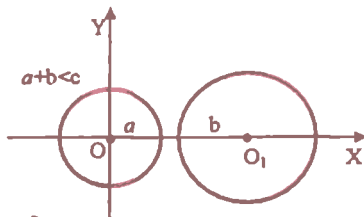
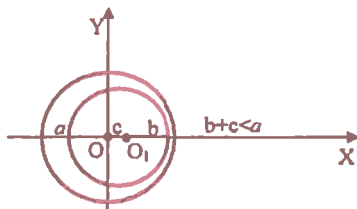
აქედან ჩანს, რომ თუ $a+c > b$, $a+b > c$ და $b+c > a$, მაშინ ტოლობის მარჯვენა მხარე დადებითია და მაშასადამე (*) სისტემას აქვს ამონახსენი. მასთან მას ორი ამონახსენი აქვს. შესაბამისად წრეწირები ორ წერტილში გადაკვეთს ერთმანეთს.



თუ $a+c-b$, $a+b-c$, $b+c-a$ თანამამრავლებიდან ერთი მაინც უდრის ნულს, მაშინ (*) სისტემას ერთი ამონახსენი აქვს. წრეწირები ეხებიან ერთმანეთს.



თუ $a+c-b$, $a+b-c$ ან $b+c-a$ თანამამრავლებიდან ერთ-ერთი მაინც უარყოფითია, მაშინ (*) სისტემას ამონახსენი არა აქვს და წრეწირები ერთმანეთს არ გადაკვეთს. შევნიშნოთ, რომ ერთდროულად ორი თანამამრავლი არ შეიძლება იყოს უარყოფითი, რადგან მაშინ მათი ჯამიც უარყოფითი იქნება, რაც შეუძლებელია.



განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

1. დავუშვათ, $a+c-b < 0$ და $a+b-c < 0$, გვექნება: $a+c-b+a+b-c=2a < 0$. ეს

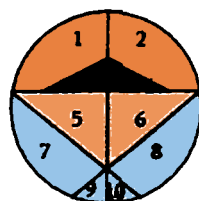
იმას ნიშნავს, რომ $a < 0$, რაც შეუძლებელია.

2. დავუშვათ, $a+c-b < 0$ და $b+c-a < 0$, მაშინ: $a+c-b+b+c-a=2c < 0$. აქედან, $c < 0$, რაც შეუძლებელია.

3. დავუშვათ, $a+b-c < 0$ და $b+c-a < 0$, ე.ი.: $a+b-c+b+c-a=2b < 0$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $b < 0$, რაც შეუძლებელია.

ამრიგად, თუ a , b და c რიცხვებიდან ერთ-ერთი დანარჩენი ორის ჯამზე მეტია, მაშინ წრეწირები ერთმანეთს არ გადაკვეთს; თუ ამ რიცხვებიდან ერთ-ერთი დანარჩენი ორის ჯამს უდრის, მაშინ წრეწირები ეხება ერთმანეთს; თუ ამ რიცხვებიდან თითოეული დანარჩენი ორი რიცხვის ჯამზე ნაკლებია, მაშინ წრეწირები ერთმანეთს ორ წერტილში გადაკვეთს.

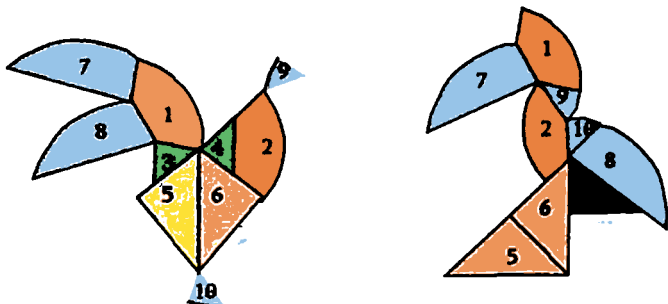
ტანგრამის მსგავსად შეიძლება წრეც დავყოთ ნაწილებად და ავაგოთ ფიგურები. წრე შეიძლება დავყოთ ათ ნაწილად, ტოლი ნაწილები ერთნაირი ფერით აღვნიშნოთ (ნახ.118).



ნახ. 118

დავალება: ამ ათი ნაწილით შევადგინოთ ფიგურები, მასთან ნაწილების თანაკვეთა შეიძლება იყოს მონაკვეთი, წერტილი ან ცარიელი სიზრავ-ლე; დაუშვებელია ნაწილების ერთმანეთზე ზედდება და ყოველ ფიგურაში უნდა იყოს მხოლოდ ეს ათი ნაწილი.

ამ წესით ავაგოთ ზოგიერთი ფიგურა (ნახ. 119).



ნახ. 119

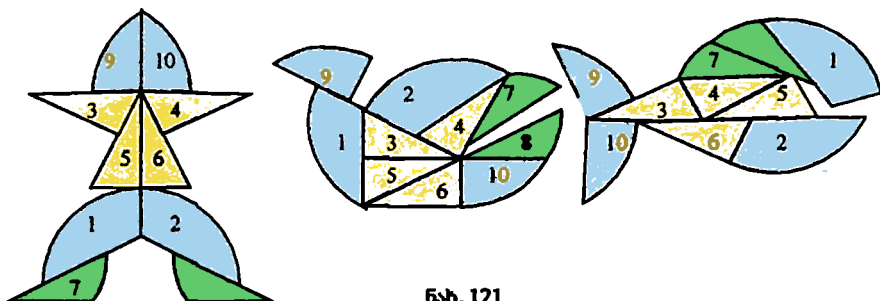
წრე ათ ნაწილად შეიძლება სხვა წესითაც დაეყუთ (ნახ. 120), ტოლი ნაწილები ამ შემთხვევაშიც ერთნაირი ფერით აღვნიშნოთ.

დავალება: ამ ათი ნაწილით შევადგინოთ ფიგურები, მასთან ნაწილების თანაკვეთა შეიძლება იყოს მონაკვეთი, წერტილი, ან ცარიელი სიმრავლე; დაუშვებელია ნაწილების ერთმანეთზე ზედდება და ყოველ ფიგურაში უნდა იყოს მხოლოდ ეს ათი ნაწილი.

ამ წესით ავაგოთ ზოგიერთი ფიგურა (ნახ. 121).



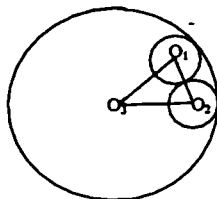
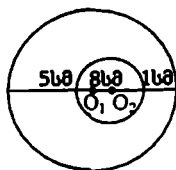
ნახ. 120



ნახ. 121

15.1. სამარჯოშოები პრაქტიკული მცადონეობისათვის

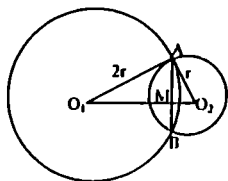
1. ერთი წრე მეორე წრის შიგნით არის. მათ ცენტრებზე გამავალი დიდი წრის დიამეტრი მცირე წრის წრეწირით იყოფა სამ ნაწილად; რომელთა სიგრძეებია 5 სმ, 8 სმ და 1 სმ. იპოვეთ ამ წრეების ცენტრებს შორის მანძილი.
2. ვთქვათ, ორი გადამკვეთი წრეწირის რადიუსებია 13 სმ და 15 სმ, საერთო ქორდა ტოლია 24 სმ-ის. იპოვეთ მათ ცენტრებს შორის მანძილი.
3. ორი პატარა წრეწირი შიგნიდან ეხება დიდ წრეწირს და ეხება ერთმანეთს გარედან (ორი წრეწირის შეხება ნიშნავს - მათ ერთი საერთო წერტილი აქვთ). პატარა წრეწირების რადიუსე-



ბია 3 სმ, დიდის - 15 სმ. იპოვეთ იმ სამკუთხედის პერიმეტრი, რომლის წვეროები ამ წრეწირების ცენტრებშია.

4. ერთი წრეწირი მეორე წრეწირის შიგნით მდებარეობს. მათი რადიუსებია 28 სმ და 12 სმ. ამ წრეწირების წერტილებს შორის უმოკლესი მანძილი 10 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ცენტრებს შორის მანძილი.

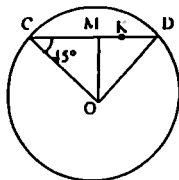
5. ორი წრეწირის ცენტრების შემაერთებელი მონაკვეთი წრეწირების საერთო ქორდით იყოფა მონაკვეთებად, რომელთა სიგრძეებია 2 სმ და 5 სმ. ერთ-ერთის რადიუსი 2-ჯერ მეტია მეორის რადიუსზე. იპოვეთ საერთო ქორდა. (მითითება: საერთო ქორდა მართობულია ცენტრებზე გამავალი წრფის).



6. მანძილი წრეწირის O წერტილიდან AB ქორდამდე 10 სმ-ია. ქორდის ბოლოებზე გავლებული რადიუსები მართ კუთხეს ადგენენ. იპოვეთ AB ქორდა.

7. მანძილი წრეწირის O ცენტრიდან ქორდამდე 8 სმ-ია. ქორდის ბოლოებზე გავლებული რადიუსები ერთმანეთთან 120° -იან კუთხეს ადგენენ. იპოვეთ რადიუსი.

8. მანძილი წრეწირის O ცენტრიდან CD ქორდამდე 9 სმ-ია. OCD კუთხე 45° -ის ტოლია. K წერტილი ეკუთვნის CD ქორდას და $CK=3KD$. იპოვეთ CK.

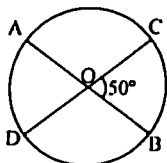


9. მანძილი წრეწირის ცენტრიდან ქორდამდე 15

სმ-ია. იპოვეთ ამ ქორდის სიგრძე, თუ იგი 90° -იან რკალს ჰქონავს.

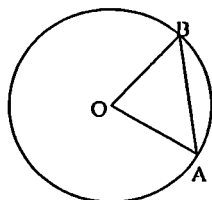
10. მოცემულია ორი კონცენტრული (საერთო ცენტრის მქონე) წრეწირი. იპოვეთ ამ წრეწირების რადიუსები; თუ დიდი წრეწირის დიამეტრი მცირე წრეწირით იყოფა 2 სმ, 8 სმ და 2 სმ-ის ტოლ ნაწილებად.

11. AB და CD წრეწირის დიამეტრებია, $\angle COB=50^\circ$. იპოვეთ DB, AD, AC და BC რკალების გრადუსული ზომები.



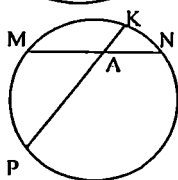
12. იპოვეთ კუთხე AB ქორდასა და მის ბოლოზე გავლებულ OA რადიუსს შორის, თუ AB რკალის გრადუსული ზომა 82° -ის ტოლია.

13. წრეწირი A, B და C წერტილებით გაყოფილია შეფარდებით 2:3:4. იპოვეთ ABC სამკუთხედის კუთხეები.

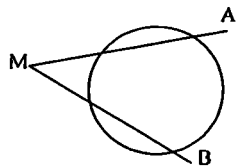


14. წრეწირის AD და BC ქორდები ერთმანეთს კვეთს. $\angle ABC=20^\circ$, $\angle ACD=40^\circ$, იპოვეთ $\angle CAD$.

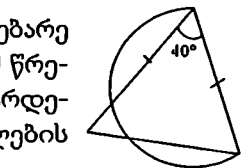
15. ცნობილია, რომ KN რკალის გრადუსული ზომა სამჯერ ნაკლებია MP რკალის გრადუსულ ზომაზე. $\angle KAN=40^\circ$. ვიპოვოთ KN რკალის გრადუსული ზომა.



16. AMB კუთხეში მოქცეული წრეწირის რკალების ზომებია 120° და 30° . იპოვეთ $\angle AMB$ -ს გრადუსული ზომა.



17. 50° -იანი კუთხის წვერო წრეწირის გარეთაა. ამ კუთხეში მოქცეული ერთი რკალის ზომა 20° -ია. იპოვეთ ამ კუთხეში მოქცეული მეორე რკალის ზომა.

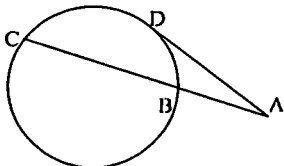


18. ტოლფერდა სამკუთხედის წვეროსთან მდებარე კუთხე 40° -ის ტოლია. ერთ-ერთი ფერდი იმ წრეწირის დიამეტრია, რომელიც დანარჩენი გვერდებით იყოფა სამ რკალად. იპოვეთ ამ რკალების გრადუსული ზომები.

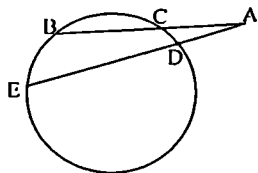
19. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი მასში ჩახაზულ წრეწირთან შეხების წერტილით იყოფა შეფარდებით 9:7. იპოვეთ ფუძისა და ფერდის შეფარდება.

20. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი მასში ჩახაზულ წრეწირთან შეხების წერტილით იყოფა 7სმ და 3 სმ ტოლ მონაკვეთებად. ვიპოვოთ ამ სამკუთხედის პერიმეტრი.

21. წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებულია AD მხები (D შეხების წერტილი) და AC მკვეთი. $AD=12$ სმ. მკვეთის შიგა მონაკვეთის – BC-ს სიგრძე 10 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ მკვეთის სიგრძე.



22. A წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებულია ორი მკვეთი – AB, რომელიც წრეწირს კვეთს B და C წერტილში და AE,



- რომელიც წრეწირს კვეთს E და D წერტილში. ცნობილია, რომ $BC=12$ სმ, $AC=3$ სმ და $AD=2$ სმ; იპოვეთ ED-ს სიგრძე.
23. წესიერ ექვსკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის სიგრძე ტოლია 32π სმ-ის. იპოვეთ ამ ექვსკუთხედში ჩახაზული წრის რადიუსი.
 24. ტოლფერდა ტრაპეცია წრეწირზეა შემოხაზული. ტრაპეციის ბლაგვი კუთხე 120° -ის ტოლია, ხოლო დიდი ფუძე 12 სმ-ია. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.
 25. წრეწირში, რომლის დიამეტრი 16 სმ-ის ტოლია, ჩახაზულია კვადრატის. ვიპოვოთ კვადრატის პერიმეტრი.
 26. იპოვეთ იმ წრეწირის სიგრძე, რომელიც შემოხაზულია კვადრატზე, რომლის პერიმეტრი 12 სმ-ის ტოლია.
 27. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეებია 2 სმ და 6 სმ. ამ ტრაპეციაში შეიძლება ჩაიხაზოს წრეწირი. იპოვეთ ტრაპეციაზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.
 28. ABCD ოთხკუთხედი ჩახაზულია წრეწირში. $\angle A=70^\circ$. იპოვეთ $\angle C$.
 29. გამოარკვეთ ორი წრეწირის ურთიერთმდებარეობა, თუ
 - ა) ცენტრებს შორის მანძილი არის 10 სმ, ხოლო რადიუსები 8 სმ და 2 სმ;
 - ბ) ცენტრებს შორის მანძილი არის 4 სმ, ხოლო რადიუსები 11 სმ და 17 სმ;
 - გ) ცენტრებს შორის მანძილი არის 12 სმ, ხოლო რადიუსები 5 სმ და 3 სმ.
 30. ვთქვათ, წრეწირის 120° -იანი რკალის სიგრძე არის $\frac{4\pi}{3}$ სმ. ვიპოვოთ ამ წრეწირის რადიუსი.

1.5.2. ტესტი №5

1. თუ მოცემულია წრეწირი და წრფე, მაშინ შეუძლებელია, რომ
 - ა) მათ ჰქონდეთ საერთო წერტილი;
 - ბ) მათ ჰქონდეთ ორი საერთო წერტილი;
 - გ) მათ ჰქონდეთ სამი საერთო წერტილი;
 - დ) არ ჰქონდეთ საერთო წერტილი;
 - ე) შესრულდეს ერთი მაინც ზემოთ ჩამოთვლილი შემთხვევები-

დან.

2. მოცემულია წრეწირი რადიუსით 5 სმ და წერტილი, რომელიც ცენტრიდან დაშორებულია 6 სმ-ით, მაშინ:
 - ა) წერტილი მოთავსებულია წრეწირის შიგა არეში;
 - ბ) წერტილი მოთავსებულია წრეწირზე;
 - გ) წერტილი მოთავსებულია წრეწირის გარე არეში;
 - დ) არცერთი აღნიშნულთაგან; ე) შეუძლებელია განსაზღვრა.
3. წერტილები კოორდინატებით (2; -1) და (-2;2) წარმოადგენენ კვადრატის მოპირდაპირე წვეროებს. იპოვეთ ამ კვადრატზე შემოხაზული წრეწირის დიამეტრი.
 - ა) 5; ბ) $\sqrt{5}$; გ) 2,5; დ) 3; ე) 2.
4. თუ წრეწირის AB ქორდა 12 სმ-ია და ამ ქორდაზე O ცენტრიდან დაშვებული OC მართობი 8 სმ-ია. მაშინ წრეწირის რადიუსი ტოლია
 - ა) 8სმ-ის; ბ) 6 სმ-ის; გ) 10 სმ-ის; დ) 13 სმ-ის; ე) 20 სმ-ის.
5. წრეწირის AO რადიუსი 3,6 სმ-ია (O ცენტრია). AB ქორდაა, $\angle AOB=120^\circ$. იპოვეთ მანძილი O ცენტრიდან AB ქორდამდე.
 - ა) 2 სმ; ბ) 1,8 სმ; გ) 3 სმ; დ) 0,8 სმ; ე) 1 სმ.
6. თუ წრეწირის ცენტრი მდებარეობს M (1; -2) წერტილში, ხოლო მისი რადიუსია $R=3$; მაშინ ამ წრეწირის განტოლებაა:
 - ა) $(x-1)^2+y^2=9$; ბ) $x^2+y^2=9$; გ) $x^2+(y+2)^2=9$; დ) $x^2-y^2=9$;
 - ე) $(x-1)^2+(y+2)^2=9$.
7. ნებისმიერ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი ამ სამკუთხედის
 - ა) სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილია;
 - ბ) გვერდების შუამართობების გადაკვეთის წერტილია;
 - გ) ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილია;
 - დ) მედიანების გადაკვეთის წერტილია;
 - ე) შეუძლებელია განსაზღვრა.
8. ნებისმიერ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი ამ სამკუთხედის
 - ა) სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილია;
 - ბ) გვერდების შუამართობების გადაკვეთის წერტილია;
 - გ) ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილია;
 - დ) მედიანების გადაკვეთის წერტილია;
 - ე) შეუძლებელია განსაზღვრა.

9. მართკუთხა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი
- ა) მცირე კათეტის შუაწერტილია;
 - ბ) დიდი კათეტის შუაწერტილია;
 - გ) სამკუთხედის შიგა არეში მდებარეობს;
 - დ) ჰიპოტენუზის შუაწერტილია;
 - ე) შეუძლებელია განსაზღვრა.
10. ნებისმიერ ტოლფერდა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი
- ა) ფუძისადმი გავლებულ სიმაღლეს ეკუთვნის;
 - ბ) ფუძესთან მდებარე ერთ-ერთი კუთხის ბისექტრისას ეკუთვნის;
 - გ) ფერდისადმი გავლებულ სიმაღლეს ეკუთვნის;
 - დ) ფერდისადმი გავლებულ მედიანას ეკუთვნის;
 - ე) შეუძლებელია განსაზღვრა.

1.6. გეომეტრიული გარდაქმნები სიბრტყეზე; მოძრაობა,
ღერძული და ცენტრული სიმეტრიები, მობრუნება,
პარალელური გადატანა.

M სიმრავლის იმავე M სიმრავლეზე ბიექციურ (ურთიერთცალსახა) ასახვას ეწოდება M სიმრავლის გარდაქმნა. მაშასადამე, M სიმრავლის გარდაქმნა არის ისეთი ასახვა M სიმრავლისათვის, თვით ამ M სიმრავლეზე, როცა M სიმრავლის განსხვავებულ ელემენტებს ამავე სიმრავლის განსხვავებული ელემენტები შეესაბამება. თუ M არის სიბრტყის წერტილთა სიმრავლე, მაშინ მის გარდაქმნას გეომეტრიული გარდაქმნა ეწოდება.

თუ გეომეტრიული გარდაქმნა ისეთია, რომ სიბრტყის ყოველ A წერტილს შეესაბამება იგივე A წერტილი, მაშინ ამ გეომეტრიულ გარდაქმნას იგიური გარდაქმნა ეწოდება. მაშასადამე, თუ I იგიური გარდაქმნაა, მაშინ ყოველი x წერტილისათვის $I(X)=X$.

ყოველი f გარდაქმნისათვის არსებობს შექცეული გარდაქმნა f^{-1} (თუ რაიმე X წერტილისათვის $f(X)=X'$, მაშინ $f^{-1}(X')=X$).

f გეომეტრიულ გარდაქმნას ეწოდება გადაადგილება (მოძრაობა, იზომეტრიული ასახვა), თუ სიბრტყის ყოველ X და Y წერტილებს შორის მანძილი ტოლია მათ სახეებს შორის მანძილის – ანუ, თუ $X'=f(X)$ და $Y'=f(Y)$, მაშინ $XY=X'Y'$.

გადაადგილებებია: ღერძული სიმეტრია, ცენტრული სიმეტრია, პარალელური გადატანა, მობრუნება.

არსებობს გეომეტრიული გარდაქმნა, რომელიც არ არის გადაადგილება, იგი ჰომოთეტიის გარდაქმნაა. ჰომოთეტია და გადაადგილება მსგავსების გარდაქმნის კერძო შემთხვევებია. მსგავსების გარდაქმნა K კოეფიციენტით ($K \neq 0$) არის სიბრტყის გარდაქმნა, როცა ნებისმიერ X და Y წერტილებს შეესაბამება ისეთი X' და Y' წერტილები, რომ $X'Y'=XY \cdot K$.

ეხლა ჩვენ განვიხილავთ გადაადგილებებს. რაც შეეხება ჰომოთეტიის გარდაქმნას – მასზე შემდეგ გვექნება საუბარი.

ჩამოვთვალოთ გადაადგილების თვისებები:

ა) იგიური გარდაქმნა გადაადგილებაა;

ბ) ორი გადაადგილების კომპოზიცია (თანმიმდევრობით ჩატარება)

გადაადგილებაა;

გ) გადაადგილების შექცეული ასახვა გადაადგილებაა;

დ) თუ A' , B' და C' არის შესაბამისად A , B და C წერტილების სახეები რაიმე გადაადგილების დროს და A , B და C ერთ წრფეს ეკუთვნის, ისე რომ B არის A -სა და C -ს შორის, მაშინ A' , B' და C' წერტილებიც ეკუთვნის ერთ რაიმე წრფეს, ამასთან B' არის A' -სა და C' -ს შორის.

ე) გადაადგილებისას: მონაკვეთი აისახება მონაკვეთზე, სხივი აისახება სხივზე, წრფე აისახება წრფეზე, ფიგურა – მის ტოლ ფიგურაზე. მსგავსების გარდაქმნის თვისებებია:

ა) იგიური ასახვა მსგავსების გარდაქმნაცაა ($K=1$);

ბ) მსგავსების გარდაქმნების კომპოზიცია მსგავსების გარდაქმნაა;

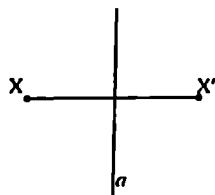
გ) მსგავსების გარდაქმნის შექცეული ასახვა მსგავსების გარდაქმნაა;

დ) მსგავსების გარდაქმნისას ყოველი სამი A , B და C წერტილი, რომლებიც ერთ წრფეს ეკუთვნის, აისახება ერთ წრფეზე მდებარე A' , B' და C' წერტილებზე. ამასთანავე, თუ B არის A -სა და C -ს შორის, მაშინ B' არის A' -სა და C' -ს შორის.

ე) მსგავსების გარდაქმნისას – მონაკვეთი აისახება მონაკვეთზე, სხივი აისახება სხივზე, წრფე აისახება წრფეზე, პარალელური წრფეები აისახება პარალელურ წრფეებზე, კუთხე აისახება მის ტოლ კუთხეზე, წრეწირი – წრეწირზე, ნებისმიერი ორი მონაკვეთის სიგრძე-თა შეფარდება მსგავსების გარდაქმნისას არ იცვლება.

განვიხილოთ ღერძული სიმეტრია.

X და X' წერტილებს a წრფის მიმართ სიმეტრიული ეწოდება, თუ ეს წრფე XX' მონაკვეთის მართობულია და მის შუა წერტილზე გადის (ნახ. 122).



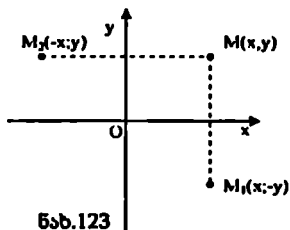
ნახ. 122

სიმეტრია a ღერძის მიმართ ეწოდება სიბრტყის თავის თავზე ასახვას, რომელიც სიბრტყის ყოველ წერტილს ასახავს მის სიმეტრიულ წერტილზე (a წრფის მიმართ). ამ ასახვას ასე ჩავწერთ S_a .

ღერძული სიმეტრია არის გადაადგილება, ამიტომ ღერძულ სიმეტრიას აქვს გადაადგილების ყველა თვისება. ამასთანავე,

1. ღერძული სიმეტრიის უძრავი წერტილები (წერტილები, რომლებიც თავის თავზე აისახება) მხოლოდ ის წერტილებია, რომლებიც სიმეტრიის ღერძზეა.
2. ყოველი წრფე, რომელიც მართობულია სიმეტრიის ღერძის, თავის თავზე აისახება.
3. თუ S_n ღერძული სიმეტრიაა, მაშინ კომპოზიცია $S_n \circ S_n$ არის იგიური ასახვა.

OX ღერძის მიმართ ღერძული სიმეტრიისას $M(x;y)$ წერტილი აისახება $M_1(x;-y)$ წერტილზე; ხოლო OY ღერძზე ღერძული სიმეტრიისას $M(x;y)$ წერტილი აისახება $M_2(-x;y)$ წერტილზე (ნახ.123).



თუ ფიგურა თავის თავზე აისახება რაიმე სიმეტრიის ღერძის მიმართ, მაშინ ვიტყვით, რომ ფიგურა სიმეტრიულია თავისი თავის ამ ღერძის მიმართ, აღნიშნულ ღერძს სიმეტრიის ღერძი ეწოდება.

მოძრაობა, ეს არის ევკლიდეს სივრცის გარდაქმნა, რომელიც ინარჩუნებს მანძილს ორ წერტილს შორის. მოძრაობას ეწოდება საკუთრივი (პირველი გვარის მოძრაობა) ან არასაკუთრივი (მეორე გვარის მოძრაობა), იმის მიხედვით, ინარჩუნებს თუ არა სივრცე ორიენტაციას (ორიენტაცია არის წრფეზე მიმართულების ცნების განზოგადება უფრო რთული სტრუქტურის გეომეტრიულ ფიგურებზე. განიხილავენ ორიენტაციას წრფეზე, წირზე, სიბრტყეზე, ზედაპირზე და სივრცეში. ვექტორის ორიენტაცია განიხილება იმ წრფის მიმართულებით, რომელზეც ეს ვექტორი მდებარეობს, და ამ წრფეზე მიმართულების მითითებით. ფრანგულად orientation ნიშნავს „მითითებას“, „ორიენტაციას“. სიტყვა წარმოიშვა ფრანგული orient-დან, რომელიც ისევე როგორც ლათინური oriens, ნიშნავს „აღმოსავლეთს“ (აგრეთვე „ამომავალ მზეს“). სიბრტყის ზედაპირის ორიენტაციის ცნებას პირველად ვხვდებით გრასმანის (1844), გაუსის, შემდეგ ლი-ს და კლაინის (1872) შრომებში. შემდგომში თეორია

განავითარა ლაგერმა (1880); ამასთანავე, ორიენტირებულ სიბრტყეს, სფეროს, ზედაპირს მან უწოდა semi-plan, semi-sphere, semi-surface, ტერმინი plan orientee შემოიღო სტეფანოსმა (1883). 1875 წელს კლაინმა თავის სტატიაში შემოიღო ზედაპირზე ნორმალის ფუძის უწყვეტი გადაადგილების ხერხი, რომელიც ითვლება კლასიკურ ხერხად. კოორდინატთა სისტემის მიმართ გამოყენებული ტერმინი „ორიენტაცია“ გამოჩნდა შტაუდეს შრომებში).

საკუთრივი მოძრაობა სიბრტყეზე შეიძლება მოცემული იყოს დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატებში ფორმულებით (ფორმულა ეს არის სიმბოლური ჩანაწერი, შემდგარი ციფრებისაგან, ასოებისა და სპეციალური ნიშნებისაგან, რომლებიც დალაგებული არიან გარკვეული თანმიმდევრობით და გამოსახავენ რომელიმე ინფრმაციას, წინადადებას. ფორმულის საშუალებით შეიძლება ჩაიწეროს საკმაოდ რთული წინადადებები კომპაქტური და მოხერხებული ფორმით. ზოგიერთი ფორმულა გამოხატავს სავსებით განსაზღვრულ კონკრეტულ მსგელობას და ამიტომ არის ან ჰემმარიტი (მაგ. $2 \times 2 = 4$) ან მცდარი (მაგ. $2 \times 2 = 5$), ან დამოკიდებულია მასში შემავალი ცვლადების მნიშვნელობაზე (მაგ. $ax^2 + bx + cx < 0$). თავდაპირველად ლათინურ ტერმინს – formula-ს ჰქონდა გეომეტრიული შინაარსი; მას ფუძედ აქვს forma, რაც ნიშნავს „ნორმას“, „ნიმუშს“, „მასშტაბს“, „ფორმას“, „წესს, რომლის მიხედვითაც რაიმეს აკეთებენ“):

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi + a,$$

$$y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi + b.$$

სადაც a და b პარამეტრები ახასიათებს სიბრტყის პარალელურ გადაადგილებას (a, b) ვექტორით (ვექტორის შესახებ ვისაუბრებთ შემდეგ), ხოლო φ პარამეტრი – სიბრტყის მობრუნებას კოორდინატთა სათავის გარშემო.

არასაკუთრივი მოძრაობა სიბრტყეზე დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატებში მოცემულია ფორმულებით:

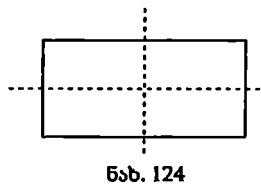
$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi + a,$$

$$y' = x \sin \varphi - y \cos \varphi + b.$$

განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითი:

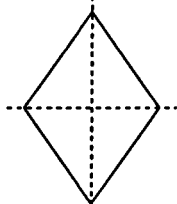
მაგალითი 1. წრფეს უსასრულოდ ბევრი სიმეტრიის ღერძი აქვს – თვით ეს წრფე და ნებისმიერი წრფე, რომელიც მისი მართობულია.

მაგალითი 2. მართკუთხედს, თუ ის კვადრატს არ წარმოადგენს, მხოლოდ ორი სიმეტრიის ღერძი აქვს – გვერდების შუამართობები (ნახ. 124).



ნახ. 124

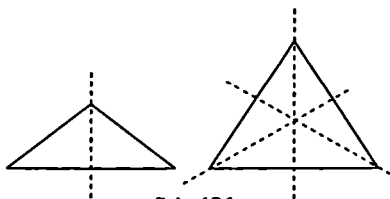
მაგალითი 3. რომბის დიაგონალებზე გამავალი წრფეები რომბის სიმეტრიის ღერძებია (ნახ. 125).



ნახ. 125

მაგალითი 4. წრეწირი (წრე) სიმეტრიულია მის ცენტრზე გამავალი ნებისმიერი წრფის მიმართ.

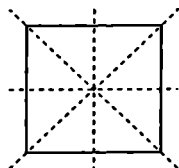
მაგალითი 5. სამკუთხედს მხოლოდ მაშინ გააჩნია სიმეტრიის ღერძი, როცა ის ტოლფერდაა – ტოლფერდა სამკუთხედის წვეროზე გავლებული ფუძის მართობული წრფე სამკუთხედის სიმეტრიის ღერძია. ტოლ-



ნახ. 126

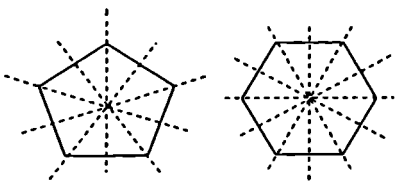
გვერდა სამკუთხედს სამი სიმეტრიის ღერძი აქვს (ნახ. 126).

მაგალითი 6. კვადრატს ოთხი სიმეტრიის ღერძი აქვს – დიაგონალებზე გავლებული წრფეები და გვერდების შუა მართობები (ნახ. 127).



ნახ. 127

მაგალითი 7. წესიერ ხუთკუთხედს გააჩნია ხუთი სიმეტრიის ღერძი, წესიერ ექვსკუთხედს ექვსი, წესიერ შვიდკუთხედს შვიდი და ა.შ. წესიერ n კუ-

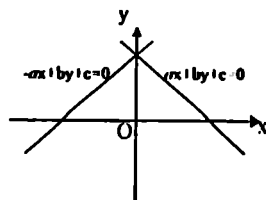


ნახ. 128

თხედს n ოდენობის სიმეტრიის ღერძი აქვს (ნახ. 128).

მაგალითი 8. თუ OY ღერძის მიმართ სიმეტრიისას $M(x;y)$ წერტილი აისახება $M'(x';y')$ -ზე, მაშინ

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

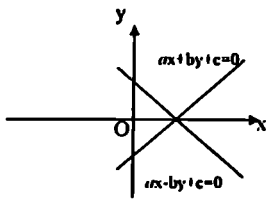


ნახ. 129

მაშასადამე, OY ღერძის მიმართ სიმეტრიისას $ax+by+c=0$ ($a^2+b^2 \neq 0$) წრფე აისახება $-ax+by+c=0$ წრფეზე (ნახ. 129).

მაგალითი 9. თუ OX ღერძის მიმართ სიმეტრიისას $M(x;y)$ წერტილი აისახება $M'(x';y')$ -ზე, მაშინ

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$



ნახ. 130

მაშასადამე, ამ სიმეტრიისას $ax+by+c=0$ წრფე აისახება $ax-by+c=0$ წრფეზე (ნახ. 130).

მაგალითი 10. თუ $y=x$ წრფის მიმართ სიმეტრიისას $M(x;y)$ წერტილი აისახება $M'(x';y')$ -ზე, ე.ი. $M(x;y) \rightarrow M'(x';y')$, მაშინ $x'=y$ და $y'=x$. მაშასადამე, ამ სიმეტრიისას $ax+by+c=0$ წრფე აისახება $bx+ay+c=0$ წრფეზე; კერძოდ, $y=kx+l$ წრფე აისახება $y = \frac{1}{k}x - \frac{l}{k}$ წრფეზე.

ეხლა განვიხილოთ ცენტრული სიმეტრია.

X' წერტილს ეწოდება X წერტილის სიმეტრიული O წერტილის (ცენტრის) მიმართ, თუ O წერტილი XX' მონაკვეთის შუაწერტილია.

მაგალითად, სააკორდინატო სიბრტყის $M'(-x;-y)$ წერტილი სიმეტრიულია $M(x;y)$ წერტილის კოორდინატთა სათავეს მიმართ.

სიბრტყის ყოველ M წერტილს შეეუსაბამოთ ამავე სიბრტყის O წერტილის მიმართ მისი სიმეტრიული M' წერტილი. ასახვის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე სიბრტყის წერტილთა სიმრავლეა. ამ ასახვას O წერტილის მიმართ ცენტრული სიმეტრია

ეწოდოთ. მას ავლნიშნავთ S_0 -ით.

ცენტრული სიმეტრია გადაადგილებაა - ამ ასახვით ორ წერტილს შორის მანძილი არ იცვლება. ამრიგად, ცენტრულ სიმეტრიას აქვს გადაადგილების ყველა თვისება. ამასთანავე, ცენტრული სიმეტრიის დროს გვაქვს:

1. უძრავი წერტილი ერთადერთია - მხოლოდ სიმეტრიის ცენტრი.
2. ცენტრზე გამავალი ყოველი წრფე თავის თავზე აისახება.
3. სხივი აისახება მის საწინააღმდეგოდ მიმართულ სხივზე.
4. წრფე, რომელიც ცენტრზე არ გადის, აისახება მის პარალელურ წრფეზე.
5. S_0 ცენტრული სიმეტრიისას $S_0^2 S_0$ კომპოზიცია იგიური ასახვაა.

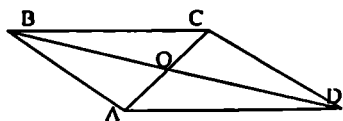
თუ F ფიგურა რაიმე S_0 ცენტრული სიმეტრიისას F' -ზე აისახება, მაშინ F' -ს ეწოდება F -ის ცენტრულ-სიმეტრიული ფიგურა A წერტილის მიმართ. თუ F' ცენტრულ-სიმეტრიულია F -ის A წერტილის მიმართ, მაშინ F არის ცენტრულ-სიმეტრიული F' -ის A წერტილის მიმართ.

თუ ფიგურა რაიმე S_0 ცენტრული სიმეტრიისას თავის თავზე აისახება, მაშინ ფიგურას ცენტრულ-სიმეტრიული ფიგურა ეწოდება, ხოლო O წერტილს - ფიგურის სიმეტრიის ცენტრი.

განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითი:

მაგალითი 1. ყოველი პარალელოგრამი

ცენტრულ-სიმეტრიულია დიაგონალების გადაკვეთის წერტილის მიმართ (ნახ.131).



ნახ.131.

მაგალითი 2. ყოველი მონაკვეთი ცენტრულ-სიმეტრიულია მისი შუა წერტილის მიმართ.

არსებობს კიდევ სამი გადაადგილება, როცა AB მონაკვეთი თავის თავზე აისახება: სიმეტრია AB წრფის მიმართ, სიმეტრია AB მონაკვეთის შუა მართობის მიმართ, იგიური გარდაქმნა.

მაგალითი 3. კოორდინატა სათავის მიმართ ცენტრული სიმეტრი-
ისას $M(x;y)$ წერტილი აისახება $M'(-x;-y)$ წერტილზე;
 $ax+by+c=0$ წრფე აისახება $-ax+by-c=0$ წრფეზე; $y=kx+l$
წრფე $-y=kx-l$ წრფეზე.

განვიხილოთ მობრუნება.

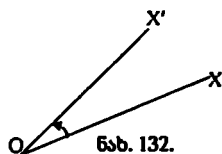
ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია O წერტილი. ვიტყვი, რომ X' წერტილი მიღებულია X წერტილისაგან საათის ისრის მიმართულე-
ბით (ან საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით) α ($0 \leq \alpha \leq 180^\circ$)
კუთხით მობრუნებისას, თუ

1. $OX=OX'$,
2. $\angle X'OX=\alpha$
3. OX' სხივი მიიღება OX სხივისაგან საათის ისრის მიმართულე-
ბით (ან საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით) მობრუნე-
ბისას.

ამრიგად, მობრუნება განსაზღვრულია, თუ ვიცით:

1. O წერტილი (მობრუნების ცენტრი),
2. α კუთხე (მობრუნების კუთხე $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$),
3. მობრუნების მიმართულება.

ნახ.132-ზე ის შემთხვევაა გამოსახული,
როცა მობრუნება საათის ისრის საწინააღმდე-
გო მიმართულებით ხდება.



ნახ. 132.

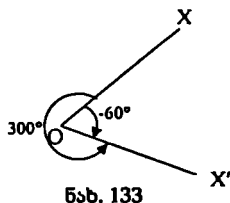
α კუთხის სიდიდე შეიძლება რადიანებშიც იყოს მოცემული.
ამასთანავე, შევთანხმდეთ: საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართუ-
ლებით მობრუნება დადებითად მივიჩნიოთ, ხოლო საათის ისრის
მიმართულებით მობრუნება - ურყოფითად.

თუ, მაგალითად, ვიტყვი, რომ გვაქვს მობრუნება $\alpha = -120^\circ$ -ით,
ეს იმას ნიშნავს, რომ გვაქვს მობრუნება საათის ისრის მიმართულე-
ბით და $\angle X'OX = 120^\circ$ -ს.

ნებისმიერი რიცხვისათვის შეიძლება განვიხილოთ მობრუნება
ისეთი კუთხით, რომლის გრადუსული ზომა მოცემული რიცხვით
გამოისახება, ამასთანავე, $\beta = \alpha + 360^\circ$ -ი (სადაც n მთელია და

$180^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$), კუთხით მობრუნება O ცენტრის გარშემო α კუთხით მობრუნებად მივიჩნიოთ იგივე O ცენტრის გარშემო.

მაგალითად, 300° -ით მობრუნება იგივეა, რაც -60° -ით მობრუნება - X წერტილი ერთსა და იმავე X' წერტილზე აისახება (ნახ. 133).



ნახ. 133

ჩამოვთვალოთ მობრუნების თვისებები:

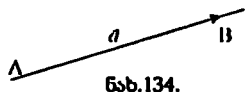
1. მობრუნებისას წერტილის სახე წერტილია, სხივის სახე სხივია, წრფე აისახება წრფეზე, ფიგურა - მის ტოლ ფიგურაზე.
2. მობრუნების უძრავი წერტილი არის მობრუნების ცენტრი.
3. მობრუნება არ ცვლის ფიგურის ორიენტაციას.
4. წრფე, რომელიც მობრუნების ცენტრზე გადის, აისახება წრფეზე, რომელიც ასევე მობრუნების ცენტრზე გადის.
5. მობრუნება არის გეომეტრიული გარდაქმნა.
6. მობრუნება არის გადაადგილება.
7. O ცენტრის გარშემო α კუთხით მობრუნების შექცეული ასახვაა მობრუნება O ცენტრის გარშემო - α კუთხით.
8. თუ მობრუნებისას a წრფე აისახება a' წრფეზე, მაშინ a წრფესა და a' წრფეს შორის კუთხე მობრუნების კუთხის ტოლია. მობრუნებას α კუთხით O ცენტრის გარშემო ასე ჩავწერთ R_O^α .
9. ორი მობრუნების კომპოზიცია მობრუნებაა; ამასთანავე, $R_O^\alpha R_O^\beta = R_O^{\alpha+\beta}$. $R_O^\alpha R_O^{-\alpha}$ არის იგიური ასახვა.

პარალელური გადატანის განხილვამდე ვისაუბროთ ვექტორის შესახებ.

ზოგიერთი სიდიდე სავსებით განისაზღვრება თავისი რიცხვითი მნიშვნელობით (მაგალითად, სიგრძე, კუთხის ზომა, ტემპერატურა); ასეთ სიდიდეებს სკალარული სიდიდეები ეწოდება. ზოგიერთ სიდიდეს რიცხვითი მნიშვნელობის გარდა ახასიათებს მიმართულებაც, ასეთ სიდიდეებს ვექტორულ სიდიდეებს, ანუ ვექტორებს ვუწოდებთ. მაგალითად, ძალა, სიჩქარე, აჩქარება ვექტორული

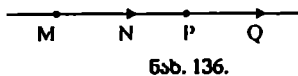
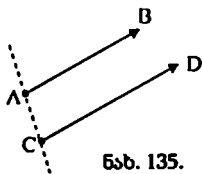
სიდიდეება.

ვექტორულ სიდიდეს მიმართული მონაკვეთით გამოვსახავთ (ნახ. 134) ვექტორის ერთ-ერთი ბოლო - A წერტილი - საწყისი წერტილია (სათავე), მეორე ბოლო - B წერტილი - ბოლო წერტილია. ამ ვექტორს ასე ჩავწერთ $\vec{AB}$. $\vec{AB}$ ვექტორის სიგრძე (მოდული) ეწოდება AB მონაკვეთის სიგრძეს, მას ასე ჩავწერთ - $|\vec{AB}|$. ვექტორები ერთი ასოს გამოყენებითაც შეიძლება ჩაიწეროს: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{k}$.



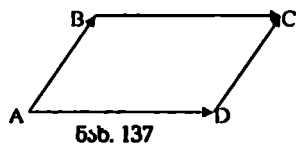
შევთანხმდეთ, რომ იმ ვექტორსაც განვიხილავთ, რომლის ბოლო და სათავე ერთმანეთს ემთხვევა. თუ A რაიმე წერტილია, მაშინ $\vec{AA}$ ვექტორი ნულოვანია. მას ასეც ჩავწერთ: $\vec{0}$, მისი მოდულიც 0 -ია - $|\vec{0}| = 0$. რაიმე გარკვეული მიმართულება ამ ვექტორს არა აქვს, იგი ნებისმიერი მიმართულების ვექტორად შეიძლება მივიჩნიოთ.

ნახ. 135-ზე გამოსახული ორივე ვექტორისათვის - AB და CD სხივები AC წრფით შემოსაზღვრულ ერთ-ერთ ნახევარსიბრტყეშია. თუ ამასთანავე $AB \parallel CD$, მაშინ $\vec{AB}$ და $\vec{CD}$ ვექტორებს თანამიმართულს ვუწოდებთ და ჩავწერთ $\vec{AB} \uparrow \vec{CD}$. თანამიმართულია, აგრეთვე, ნახ. 136-ზე წარმოდგენილი MN და PQ მიმართული მონაკვეთებით გამოსახული ვექტორებიც.



თუ ვექტორები ერთ წრფეზე ან პარალელურ წრფეებზეა განლაგებული და ისინი არ არიან თანამიმართული, მაშინ მათ საწინააღმდეგოდ მიმართულ ვექტორებს ვუწოდებთ. თუ ორი არანულოვანი ვექტორი თანამიმართულია და მათი სიგრძეები ტოლია, მაშინ ამ

ვექტორებს ტოლი ვექტორები ეწოდება. თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ტოლი ვექტორებია, მაშინ ჩაწერთ $\vec{a} = \vec{b}$. მაგალითად, თუ ABCD პარალელოგრამია, მაშინ $\vec{AB} = \vec{DC}$ და $\vec{BC} = \vec{AD}$ (ნახ. 137).

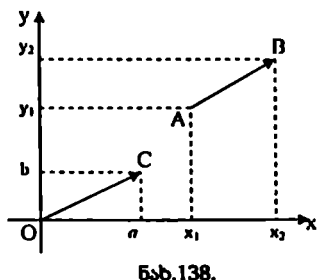


ყოველ წერტილზე შეიძლება მოვდოთ მოცემული ვექტორის ტოლი ერთადერთი ვექტორი.

თუ $A=(x_1; y_1)$ და $B=(x_2; y_2)$, მაშინ $\vec{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია $x_2 - x_1$ და $y_2 - y_1$ და ვწერთ: $\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ ან ასე $\vec{AB} (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

ტოლ ვექტორებს ტოლი კოორდინატები აქვთ და პირიქით - ტოლი კოორდინატების მქონე ვექტორები ტოლია.

თუ $\vec{AB}$ ვექტორს სათავეზე მოვდებთ - $\vec{AB} = \vec{OC}$ და $C=(a; b)$, მაშინ $a = x_2 - x_1$ და $b = y_2 - y_1$. ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელი ფორმულის გამოყენებით შეიძლება ვიპოვოთ $\vec{AB}$ ვექტორის სიგრძე - $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (ნახ.138).



მაშასადამე, თუ $\vec{AB} = (m; n)$, მაშინ

$$|\vec{AB}| = \sqrt{m^2 + n^2}$$

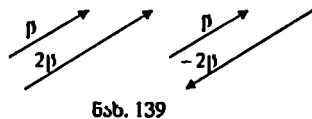
თუ $\vec{p} \neq \vec{0}$ და $k \neq 0$, მაშინ $k\vec{p}$ ვექტორისა და k რიცხვის ნამრავლი არის ვექტორი (იგივე $k\vec{p}$ -თი აღვნიშნოთ), რომელიც ასე განისაზღვრება:

$$1. |k\vec{p}| = |k| \cdot |\vec{p}|;$$

2. თუ $k > 0$, მაშინ $k\vec{p}$ და $\vec{p}$ ვექტორები თანამიმართული ვექტორებია, თუ $k < 0$, მაშინ $k\vec{p}$ ვექტორი და $\vec{p}$ ვექტორი საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორებია.

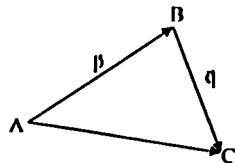
მაგალითად, ვთქვათ, $\vec{p}$ ვექტორი გავამრავლოთ 2-ზე; მაშინ

$\vec{p}$ ვექტორი და $2\vec{p}$ ვექტორი თანამიმართული ვექტორებია, ხოლო თუ $\vec{p}$ ვექტორს გავამრავლებთ -2 -ზე, მაშინ $\vec{p}$ ვექტორი და $-2\vec{p}$ ვექტორი საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორები არიან (ნახ. 139).



ნახ. 139

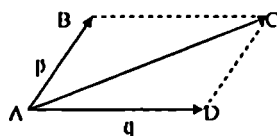
განვიხილოთ ვექტორების შეკრება. ვთქვათ, A წერტილზე მოვდეთ $\vec{p}$ ვექტორი და $\vec{p} = \vec{AB}$. B წერტილზე მოვდოთ $\vec{q}$ ვექტორი და $\vec{q} = \vec{BC}$, მაშინ $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორების ჯამი $\vec{AC}$ ვექტორია (ნახ. 140).



ნახ. 140

ამრიგად, $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ ან $\vec{p} + \vec{q} = \vec{AC}$. შეკრების ეს წესი ვექტორთა შეკრების სამკუთხედის წესია.

ნახ. 141-ზე $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორები პარალელოგრამის წესითაა შეკრებილი (ABCD პარალელოგრამია); $\vec{AC} = \vec{p} + \vec{q}$, ამავე შედეგს მოგვცემს სამკუთხედის წესით შეკრებაც, $\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC} = \vec{q} + \vec{p}$.



ნახ. 141

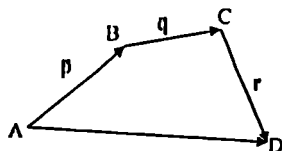
თუ $\vec{p} = \vec{0}$, ან $k=0$, მაშინ $k\vec{p} = \vec{0}$. $(-1) \cdot \vec{p}$ ვექტორი არის $\vec{p}$ ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი, მას ასე ჩავწერთ: $-\vec{p}$.

ჩამოვთვალოთ ვექტორზე მოქმედების თვისებები:

ნებისმიერი $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ ვექტორებისათვის და λ , μ რიცხვებისათვის გვაქვს:

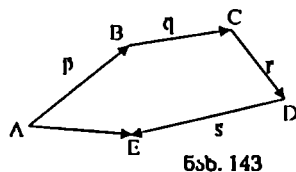
1. $\vec{p} + \vec{q} = \vec{q} + \vec{p}$; 2. $(\vec{p} + \vec{q}) + \vec{r} = \vec{p} + (\vec{q} + \vec{r})$; 3. $\vec{p} + \vec{0} = \vec{p}$; 4. $\vec{p} + (-\vec{p}) = \vec{0}$;
5. $\lambda(\vec{p} + \vec{q}) = \lambda\vec{p} + \lambda\vec{q}$; 6. $(\lambda + \mu)\vec{p} = \lambda\vec{p} + \mu\vec{p}$;
7. $1 \cdot \vec{p} = \vec{p}$; 8. $\lambda(\mu\vec{p}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{p}$.

მაშასადამე, სამი ვექტორის ჯამი შეიძლება ასე განვსაზღვროთ: $\vec{p} + \vec{q} + \vec{r} = (\vec{p} + \vec{q}) + \vec{r} = \vec{p} + (\vec{q} + \vec{r})$; $\vec{AD} = \vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$ (ნახ. 142).



ნახ. 142

ანალოგიურად, შეიძლება განვსაზღვროთ ოთხი და მეტი ვექტორის ჯამი, $\vec{AE} = \vec{p} + \vec{q} + \vec{r} + \vec{s}$ (ნახ. 143).



თუ ვექტორები კოორდინატებითაა მოცემული, მაშინ გვაქვს:

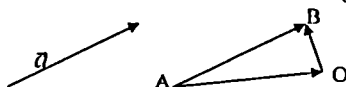
1. ვექტორის რიცხვზე გამრავლებისას ვექტორის კოორდინატები მრავლდება ამ რიცხვზე; თუ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ და m ნებისმიერი რიცხვია, მაშინ $m\vec{a} = (ma_1; ma_2)$.
2. ვექტორების შეკრებისას შესაბამისი კოორდინატები იკრიბება; თუ $\vec{a} = (x_1; y_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2)$, მაშინ $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$.
 $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სხვაობას ასე განვსაზღვრავთ:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

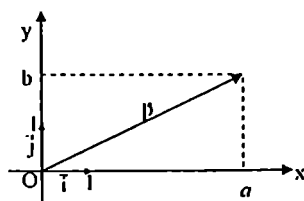
ცხადია, $\vec{a} = \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ (O სიბრტყის ნებისმიერი წერტილია).

მართლაც, $-\vec{OA} = \vec{OA}$ და

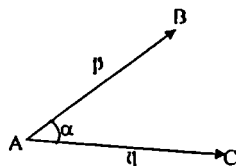
$$\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{OB} + (-\vec{OA}) = \vec{OB} + \vec{AO} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{AB} \quad (\text{ნახ. 144}).$$



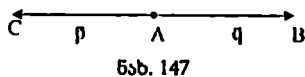
საკოორდინატო ღერძების ორტეზი (მგეზავები) ვუწოდოთ $\vec{i} = (1; 0)$ და $\vec{j} = (0; 1)$ ვექტორებს. თუ $\vec{p} = (a; b)$, მაშინ $\vec{p} = a\vec{i} + b\vec{j}$. $\vec{p}$ ვექტორის ასეთი სახით წარმოდგენას ეწოდება ვექტორის საკოორდინატო ღერძების მიმართ დაშლა (ნახ. 145).



განვიხილოთ კუთხე ორ ვექტორს შორის. მოვდოთ $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორები A წერტილში: $\vec{p} = \vec{AB}$, $\vec{q} = \vec{AC}$. $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორებს შორის კუ-

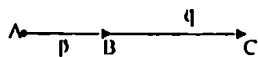


თხე ვუწოდოთ AB და AC სხივებს შორის კუთხეს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ (ნახ. 146).



ნახ. 147

ნახ.147-ზე წარმოდგენილ საწინააღმდეგოდ მიმართულ ვექტორებს შორის კუთხე 180° -ის ტოლია.



ნახ. 148

ნახ.148-ზე წარმოდგენილია თანამიმართული ვექტორები: $\vec{p} = \vec{AB}$, $\vec{q} = \vec{AC}$. $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორებს შორის კუთხე 0° -ია.

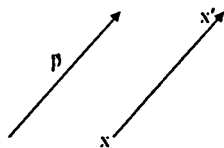
განვიხილოთ პარალელური გადატანა.

პარალელური გადატანა არის სიბრტყის თავის თავზე ასახვა, რომელიც ყოველ X წერტილს ისეთ X' წერტილზე ასახავს, რომ

1. XX' სხივს მოცემული მიმართულება აქვს; 2. XX' მონაკვეთს მოცემული სიგრძე აქვს. მაშასადამე, თითოეული პარალელური გადატანა სავსებით განისაზღვრება თავისი მიმართულებით და იმ საერთო მანძილით, რომელზედაც იგი სიბრტყის ნებისმიერ წერტილს გადაადგილებს - ე.ი. განისაზღვრება ვექტორით, რომელსაც აღნიშნული მიმართულება აქვს და სიგრძე გადაადგილების მანძილის ტოლია.

შეიძლება ასეც ვთქვათ, პარალელური გადატანა $\vec{p}$ ვექტორით ყოველ X წერტილს ასახავს ისეთ X' წერტილზე, რომლისთვისაც $\vec{XX'} = \vec{p}$ (ნახ. 149).

თუ $\vec{p}$ ვექტორის კოორდინატებია a და b , ე.ი. $\vec{p} = (a; b)$, მაშინ $x' - x = a$ და $y' - y = b$, საიდანაც $x' = x + a$ და $y' = y + b$. ამ ფორმულებით პარალელური გადატანა კოორდინატებითაა წარმოდგენილი.



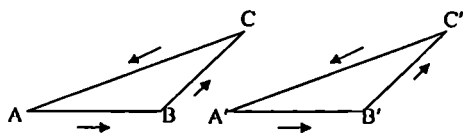
ნახ. 149

პარალელური გადატანა გადაადგილებაა - ე.ი. პარალელური გადატანისას არ იცვლება რა წერტილს შორის მანძილი. წარმოვადგინოთ, $\vec{p}$ ვექტორით პარალელური გადატანის ზოგიერთი სხვა თვისება:

1. ყოველი წრფე, რომელიც $\vec{p}$ -ს პარალელურია, თავის თავზე აისა-

- ხება; ხოლო წრფე, რომელიც $\vec{p}$ -ს პარალელური არ არის, აისახება ამ წრფის პარალელურ წრფეზე.
2. მონაკვეთი, რომელიც $\vec{p}$ -ს პარალელურია, აისახება ამ მონაკვეთზე გამავალი წრფის მონაკვეთზე.
 3. მონაკვეთი, რომელიც $\vec{p}$ -ს პარალელური არ არის, აისახება ამ მონაკვეთის პარალელურ მონაკვეთზე.
 4. სხივი აისახება მის თანამიმართულ სხივზე.
 5. ფიგურის ორიენტაცია არ იცვლება.

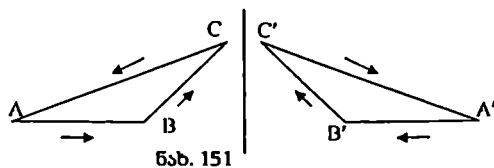
მაგალითად, ვთქვათ ABC სამკუთხედის გარშემო შემოვლის მიმართულება $A \rightarrow B \rightarrow C$ თანმიმდევრობით განისაზღვრა და ასეთი შემოვლა საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით მოძრაობისას ხდება, მაშინ ABC სამკუთხედის სახის – $A'B'C'$ სამკუთხედის შემოვლის მიმართულებაც – $A' \rightarrow B' \rightarrow C'$ გვაძლევს საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით შემოვლას (ნახ. 150).



ნახ. 150

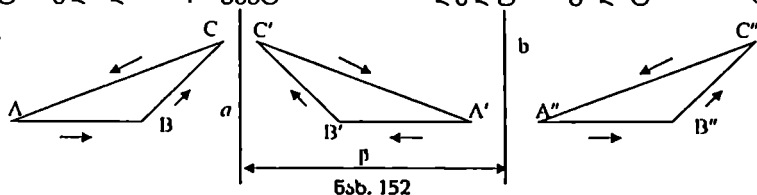
ნახ. 151-დან ჩანს, რომ ღერძული სიმეტრიისას ფიგურა ორიენტაციას იცვლის.

თუ განვიხილავთ a და b პარალელური წრფეების მიმართ ღერძულ სიმეტრიათა კომპოზიციას, მაშინ მივიღებთ პარალელურ გადატანას $A''B''C''$ მიიღება ABC



ნახ. 151

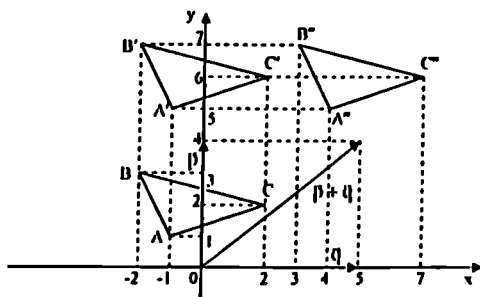
სამკუთხედიდან $2\vec{p}$ ვექტორით პარალელური გადატანისას (ნახ. 152).



ნახ. 152

ორი პარალელური გადატანისას კომპოზიცია კი კვლავ პარალელური გადატანაა - თუ პირველი პარალელური გადატანა ხდება $\vec{p}$ ვექტორით, ხოლო მეორე - $\vec{q}$ ვექტორით, მაშინ პარალელურ გადატანათა კომპოზიცია ხორციელდება $(\vec{p} + \vec{q})$ ვექტორით.

მაგალითად, ვთქვათ, დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მოცემულია სამკუთხედი ABC , რომლის წვეროების კოორდინატებია $A(-1;1)$, $B(-2;3)$ და $C(2;2)$. მოვახდინოთ ამ



ნახ. 153

სამკუთხედის პარალელური გადატანა ჯერ $\vec{p}(0;4)$ ვექტორით და შემდეგ $\vec{q}(5,0)$ ვექტორით, რაც იმას ნიშნავს, რომ $\triangle ABC$ შეიძლება პარალელურად გადავიტანოთ ამ ვექტორების ჯამით, ანუ $\vec{p} + \vec{q} = (5;4)$ ვექტორით (ნახ.153).

1.6.1. საპარაქიშოები პრაქტიკული მეთოდებისათვის

1. იპოვეთ $x=7$ და $x=-1$ წრფეებით შექმნილი ზოლის სიგანე და დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომლის მიმართაც ერთი წრფე მეორის სიმეტრიულია.
2. არსებობს თუ არა: ა) წრფე, რომელიც ცენტრული სიმეტრიით თავის თავზე აისახება? ბ) სხივი, რომელიც ცენტრული სიმეტრიით თავის თავზე აისახება? გ) წერტილი, რომელიც ცენტრული სიმეტრიით თავის თავზე აისახება?
3. მოცემულია $ABCDEF$ ექვსკუთხედი, რომლის წვეროს კოორდინატებია: $A(2; 4)$, $B(-1; 3)$, $C(-4; 0)$, $D(-4; -3)$, $E(2; -3)$, $F(3; 0)$. იპოვეთ ამ ექვსკუთხედის სიმეტრიული ექვსკუთხედი: ა) აბსცისათა ღერძის მიმართ; ბ) ორდინატთა ღერძის მიმართ; გ) $y=x$ წრფის მი-

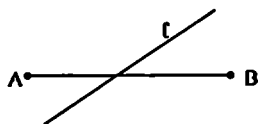
მართ; დ) $y = -x$ წრფის მიმართ.

4. $A(4;2)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი აბსცისათა ღერძის მიმართ არის B წერტილის სიმეტრიული წერტილი ორდინატთა ღერძის მიმართ. იპოვეთ B წერტილის კოორდინატები.

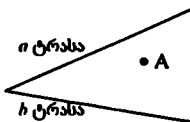
5. საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია $M(3;5)$ წერტილი. იპოვეთ ის წერტილი, რომელიც მიიღება M წერტილისაგან გარდაქმნათა კომპოზიციით - სიმეტრია y ღერძის მიმართ და სიმეტრია $x=5$ წრფის მიმართ.

6. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც სიმეტრიულია $y=2x+3$ წრფის: ა) OX ღერძის მიმართ; ბ) $Y=-X$ წრფის მიმართ.

7. ℓ წრფე კვეთს AB მონაკვეთს. იპოვეთ ℓ წრფეზე ისეთი C წერტილი, რომ ACB კუთხის ბისექტრისა ℓ წრფეზე მდებარეობდეს.



8. ორი ავტოტრასა მახვილი კუთხით იკვეთება. კუთხის შიგნით გვაქვს A წერტილი. როგორ ვიპოვოთ ტრასებზე M და N წერტილები (პუნქტები) ისე, რომ $AMNA$ გზის სიგრძე უმცირესი იყოს?



9. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც არის $3x+4y-12=0$ წრფის სიმეტრიული $A(1;2)$ წერტილის მიმართ.

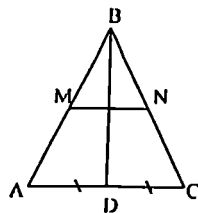
10. ვთქვათ, $A(1;2)$ წერტილი აისახა $A(2;-1)$ წერტილზე R_0^α მობრუნებით. იპოვეთ α , თუ $-180^\circ < \alpha < 0$.

11. $A(4;2)$, $B(7;4)$, $C(6;1)$ წერტილები სამკუთხედის წვეროებია. კოორდინატთა სათავის გარშემო მობრუნებისას A აისახა $A'(-4;-2)$ წერტილზე. რა წერტილებზე აისახება B და C წვეროები?

12. ვთქვათ, საკოორდინატო სიბრტყის $M(a;0)$ წერტილი ($a \neq 0$) $R_0^{30^\circ}$ მობრუნებისას აისახა X წერტილზე, ხოლო $R_0^{-45^\circ}$ მობრუნებისას - Y წერტილზე (O კოორდინატთა სათავეა). იპოვეთ მობრუნება, რომლითაც X აისახება Y -ზე.

13. კოორდინატთა სათავის გარშემო $R_0^{90^\circ}$ მობრუნებისას $A(2;4)$ წერტილი აისახა A' წერტილზე. იპოვეთ AA' -ის სიგრძე.

14. ცნობილია, რომ საკოორდინატო სიბრტყეზე (1;0) წერტილი სათავის გარშემო 135°-იანი კუთხით მობრუნებისას A წერტილში აისახა, ხოლო -135°-იანი მობრუნებით B წერტილში. C და D წერტილები შესაბამისად A და B წერტილების სიმეტრიული წერტილებია სათავის მიმართ. იპოვეთ A, B, C და D წერტილების კოორდინატები.
15. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც მიიღება $y=3x-1$ წრფისაგან კოორდინატთა სათავის გარშემო მობრუნებისას: ა) 90°-ის ტოლი კუთხით; ბ) -90°-ის ტოლი კუთხით.
16. მოცემულია ABC სამკუთხედის წვეროები: A(1;3), B(5;7) და C(3;-4) იპოვეთ: ა) $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ და $\vec{BC}$ ვექტორების კოორდინატები; ბ) დასახელებული ვექტორების სიგრძეები.
17. მოცემულია $\vec{a}(3;4)$ და $\vec{b}(-1;3)$ ვექტორები, იპოვეთ:
 ა) $\vec{a} + \vec{b}$; $-2\vec{a}$; $3\vec{b}$; $2\vec{a} + 4\vec{b}$; $\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{a} - 2\vec{b}$ ვექტორების კოორდინატები; ბ) $|\vec{a}|$; $|\vec{b}|$; $|3\vec{a}|$; $|-2\vec{b}|$; $|\vec{a} + \vec{b}|$.
18. მოცემულია წერტილები: A(2;0), B(8;4), C(8;0) იპოვეთ:
 ა) $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ და $\vec{AC}$ ვექტორების კოორდინატები; ბ) იპოვეთ დასახელებული ვექტორების სიგრძეები; გ) იპოვეთ x და y რიცხვები, თუ $\vec{AM} = \vec{BC}$ და $M=(x; 5-y)$.
19. მოცემულია წერტილები: A(2;-7), B(1;3), C(4;1). ცნობილია, რომ იპოვეთ D წერტილის კოორდინატები.
20. ცნობილია ABCD პარალელოგრამის სამი წვერო: A(8;-1), B(2;9), C(11;32). იპოვეთ მეოთხე წვეროს კოორდინატები.
21. მოცემულია A(4;4) და B(7;1) წერტილები. C და D წერტილები შესაბამისად OY და OX ღერძებს ეკუთვნიან, მასთან $\vec{AB} = \vec{CD}$. იპოვეთ C და D წერტილების კოორდინატები.
22. ცნობილია, რომ C წერტილი ძევს წრფეზე, რომლის განტოლებაა $y=x$ დაშორებულია



$A(6;1)$ წერტილიდან 5 ერთეულის ტოლი მანძილით. იპოვეთ C წერტილის კოორდინატები.

23. ABC სამკუთხედში MN შუახაზია. $AD=DC$, $\vec{AB} = p$, $\vec{BC} = q$. გამოსახეთ $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორებით: ა)

$\vec{AD}$; ბ) $\vec{MN}$; გ) $\vec{AN}$; დ) $\vec{BD}$.

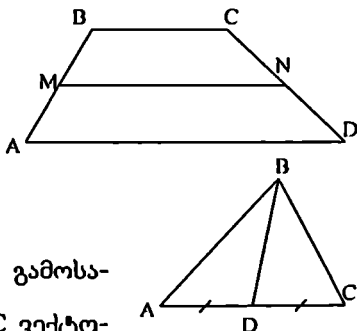
24. $ABCD$ ტრაპეციაა. MN შუახაზია.

$\vec{BC} = p$, $\vec{AD} = q$. გამოსახეთ $\vec{p}$ და $\vec{q}$

ვექტორებით: ა) $\vec{MN}$; ბ)

$\vec{MN} - \vec{BC}$; გ) $\vec{CD} - \vec{BA}$.

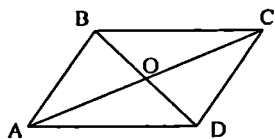
25. ABC სამკუთხედში BD მედიანაა. გამოსახეთ $\vec{BD}$ ვექტორი $\vec{p} = \vec{AB}$ და $\vec{q} = \vec{BC}$ ვექტორებით.



26. $ABCD$ პარალელოგრამია. იპოვეთ k რიცხვი, თუ

ა) $\vec{AB} + \vec{BO} = k \cdot \vec{AC}$; ბ) $\vec{AD} + \vec{DO} = k \cdot \vec{CA}$;

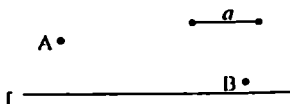
გ) $(\vec{AO} + \vec{OD}) + \vec{DC} = k \cdot \vec{CA}$.



27. T პარალელური გადატანით $y=-2x+1$ წრფე აისახება $y=-2x+3$ წრფეზე. T პარალელური გადატანით რა წრფეზე აისახება $y=x+5$ წრფე?

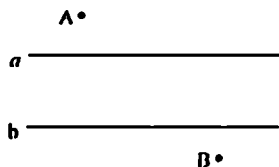
28. $C(-1;4)$, $D(3;8)$ და $E(6;10)$ სამკუთხედის წვეროებია. პარალელური გადატანა მოცემულია $\vec{DK}$ ვექტორით, სადაც $K=(0;5)$. რა წერტილებზე აისახება C და E წერტილები?

29. სიბრტყეზე მოცემულია a სიგრძის მონაკვეთი, ℓ წრფე, A და B წერტილები. სად უნდა ავიღოთ ℓ წრფეზე a სიგრძის მონაკვეთი - მაგალითად, MF , რომ $AM+BF$ მანძილი უმცირესი იყოს?



30. A და B წერტილებით ორი პუნქტია გამოსახული, a და b პარა-

ლელური წრფეებით მდინარის ნაპირე-
ბი. სად უნდა ავაგოთ მდინარეზე ნაპი-
რების მართობულად MN ხიდი ისე,
რომ A-დან B-მდე მანძილი ხიდის გავ-
ლით - AMNB ტეხილის სიგრძე - უმცო-
რესი იყოს?



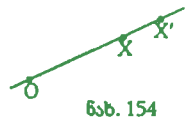
1.6.2. ტესტი №6

1. თუ A და B წერტილები სიმეტრიულია a წრფის მიმართ, მაშინ
 - ა) AB წრფე a წრფის პარალელურია;
 - ბ) a არის A წერტილზე AB-ს მართობულად გავლებული წრფე;
 - გ) a არის AB მონაკვეთის შუამართობი;
 - დ) A და B წერტილები a წრფის ერთ მხარეს მდებარეობენ;
 - ე) a არის B წერტილზე AB-ს მართობულად გავლებული წრფე.
2. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძისადმი გავლებული ბისექტრისის შემცველი წრფე ამ სამკუთხედის
 - ა) სიმეტრიის ღერძია; ბ) სიმეტრიის ღერძი არ არის;
 - გ) სიმეტრიის ღერძი შეიძლება არ იყოს;
 - დ) სიმეტრიის ღერძის მართობულია;
 - ე) სიმეტრიის ღერძთან 45° -იან კუთხეს ადგენს.
3. $D(5;3)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი OY ღერძის მიმართ არის:
 - ა) $D'(-5;-3)$; ბ) $D'(-5;3)$; გ) $D'(3;5)$; დ) $D'(5;-3)$; ე) $D'(3;-5)$.
4. ABCD პარალელოგრამის სიმეტრიის ცენტრია
 - ა) A წერტილი; ბ) B წერტილი; გ) C წერტილი; დ) D წერტილი;
 - ე) AC და BD დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი.
5. O წერტილის მიმართ ცენტრული სიმეტრიისას უძრავი წერტი-
ლია:
 - ა) O-საგან განსხვავებული ნებისმიერი წერტილი;
 - ბ) სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი;
 - გ) O წერტილი;

- დ) O წერტილიდან ორი ერთეულით დაშორებული ნებისმიერი წერტილი;
- ე) O წერტილიდან ერთი ერთეულით დაშორებული ნებისმიერი წერტილი.
6. თუ $M(a;b)$ წერტილი არის $M(-3;5)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი კოორდინატთა სათავის მიმართ, მაშინ
- ა) $a=-3, b=5$; ბ) $a=-3, b=-5$; გ) $a=3, b=5$; დ) $a=3, b=-5$; ე) $a=-5, b=3$.
7. ვთქვათ, პარალელური გადატანა მოცემულია ფორმულით:
 $(x;y) \rightarrow (x-5; y+3)$. იპოვეთ წერტილი, რომელიც მიიღება $(3;-5)$ წერტილისაგან მოცემული პარალელური გადატანისას:
- ა) $(8;-8)$, ბ) $(2;2)$, გ) $(-2;-2)$, დ) $(2;-2)$, ე) $(-2;2)$.
8. $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორებით პარალელურ გადატანათა კომპოზიცია არის
- ა) ღერბული სიმეტრია; ბ) ცენტრული სიმეტრია;
- გ) პარალელური გადატანა $\vec{p} + \vec{q}$ ვექტორით;
- დ) პარალელური გადატანა $\vec{p} - \vec{q}$ ვექტორით;
- ე) პარალელური გადატანა არ არის.
9. ცენტრული სიმეტრია არის
- ა) მობრუნება 60° -ით; ბ) მობრუნება 90° -ით;
- გ) მობრუნება 180° -ით; დ) მობრუნება 45° -ით;
- ე) მობრუნება 120° -ით.
10. მობრუნება O ცენტრის გარშემო საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით 30° -იანი კუთხით შეიძლება ასე ჩავწეროთ:
- ა) $R_0^{30^\circ}$; ბ) $R_0^{-30^\circ}$; გ) $R_0^{60^\circ}$; დ) $R_0^{-60^\circ}$; ე) $R_0^{120^\circ}$

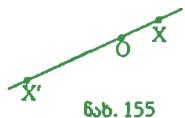
1.7. ჰომოთეტია, გეომეტრიულ ფიგურათა მსგავსება. ფიგურათა ტოლობა

ჰომოთეტია O ცენტრითა და K ($K \neq 0$) კოეფიციენტით ეწოდება სიბრტყის თავის თავზე ასახვას, როცა ყოველ X წერტილს შეესაბამება ისეთი X' წერტილი, რომ $\overrightarrow{OX'} = K \cdot \overrightarrow{OX}$ (1). მაშასადამე, თუ $K > 0$, მაშინ X' ეკუთვნის OX სხივს და $OX' = K \cdot OX$. ნახ. 154-ზე ის შემთხვევაა გამოსახული, როცა $K > 1$.



ნახ. 154

თუ $K < 0$, მაშინ X' ეკუთვნის OX სხივის დამატებით სხივს და $OX' = |K| \cdot OX$ (ნახ. 155).



ნახ. 155

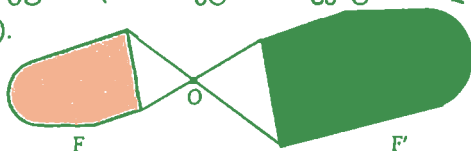
თუ $K = -1$, მაშინ, ცხადია X' არის X -ის სიმეტრიული წერტილი O ცენტრის მიმართ. ცენტრული სიმეტრია ჰომოთეტიის კერძო შემთხვევაა: ჰომოთეტია $K = -1$ კოეფიციენტით ცენტრული სიმეტრიაა.

თუ $K = 1$, მაშინ X' წერტილი ეკუთვნის OX სხივს და $OX' = OX$; ე.ი. X' ემთხვევა X -ს. ჰომოთეტია, რომლის კოეფიციენტი ერთის ტოლია, იგიური ასახვაა.

თუ H არის ჰომოთეტია O ცენტრითა და K კოეფიციენტით, მაშინ მისი შექცეული ასახვა H^{-1} არის ჰომოთეტია O ცენტრითა და $\frac{1}{K}$ კოეფიციენტით.

ჰომოთეტიას O ცენტრითა და K კოეფიციენტით ასე ჩავწერთ: H_O^K .

ვთქვათ, ჰომოთეტიისას (O ცენტრითა და K კოეფიციენტით) F ფიგურა აისახება F' ფიგურაზე, მაშინ ვიტყვით, რომ F ფიგურა ჰომოთეტიურია F' ფიგურის (ჰომოთეტიის O ცენტრითა და K კოეფიციენტით) (ნახ. 156).

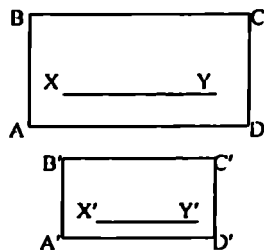


ნახ. 156.

ჩამოვთვალეთ ჰომოთეტიის თვისებები:

1. ჰომოთეტიის ცენტრი უძრავი წერტილია - ჰომოთეტიისას ის თავის თავზე აისახება.
2. უძრავი წრფეები ჰომოთეტიის ცენტრზე გამავალი წრფეებია. სხვა ნებისმიერი წრფე აისახება ამავე წრფის პარალელურ წრფეზე.
3. კუთხე მის ტოლ კუთხეზე აისახება.
4. თუ $K > 0$, მაშინ სხივი აისახება მის თანამიმართულ სხივზე, თუ $K < 0$ - საწინააღმდეგოდ მიმართულ სხივზე.
5. ჰომოთეტიის მოცემისათვის საკმარისია მითითებული იყოს ცენტრი და წერტილთა წყვილი $(A; A')$, სადაც A' სახეა A წერტილისა - A' წერტილი OA წრფეზეა.
6. (1) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ გვაქვს ჰომოთეტია ცენტრით კოორდინატთა სათავეში, $X=(x;y)$, $X'=(x';y')$ და X აისახება X' -ზე, მაშინ $x'=kx$, $y'=ky$, თუ ჰომოთეტიის ცენტრის კოორდინატებია a და b , მაშინ $x'-a=k(x-a)$ და $y'-b=k(y-b)$, ანუ $x'=k(x-a)+a$ და $y'=k(y-b)+b$. თუ ჰომოთეტიის კოეფიციენტია k და $X \rightarrow X'$, $Y \rightarrow Y'$, მაშინ $\vec{X'Y'} = k \cdot \vec{XY}$.

ფიგურებს შეიძლება ჰქონდეს ერთი და იგივე ფორმა, მაგრამ ზომები - განსხვავებული. მაგალითად, ერთი და იგივე ფოტოსურათი ორი სხვადასხვა ზომით შეიძლება იყოს წარმოდგენილი - ისინი მსგავსი ფიგურებია - შესაბამისი $ABCD$ და $A'B'C'D'$ მართკუთხედების სიგანეების შეფარდება სიგ-



ნახ. 157

რძეების შეფარდების ტოლია. მაგალითად, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{2}{3}$ (ნახ.157).

შეიძლება ასეც ვთქვათ, არსებობს ამ ფიგურებს წერტილთა ისეთი შესაბამისობა, რომლის დროს მანძილები ერთი და იმავე შეფარდებით იცვლება. კერძოდ, თუ პირველი სურათის X წერტილს მეორე სურათის X' წერტილი შეესაბამება, Y -ს - Y' , მაშინ $\frac{X'Y'}{XY}$ შეფარდე-

ბა იმავე რიცხვის - $\frac{2}{3}$ -ის ტოლი იქნება (ნახ. 157).

ABC სამკუთხედი მსგავსია $A'B'C'$ სამკუთხედის, თუ სრულდება პირობები: გვაქვს შესაბამისობა წვეროებს შორის - $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$, $C \rightarrow C'$; ისეთი, რომ შესაბამისი გვერდები პროპორციულია:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \text{ და შესაბა-}$$

მისი კუთხეები ტოლია:

$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C'.$$

ეწერთ: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (სამკუთხედი ABC მსგავსია სამ-

კუთხედი $A'B'C'$ -ის). თუ $\frac{AB}{A'B'} = K$, მაშინ K-ს მსგავსების კოეფიციენ-

ტი ეწოდება (ნახ. 158).

ანალოგიურად, მრავალკუთხედები მსგავსია, თუ მათი შესაბამისი კუთხეები ტოლია და შესაბამისი გვერდები პროპორციული.

მაგალითად, $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$, თუ

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} \text{ და}$$

მასთან $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$,

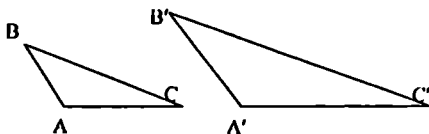
$\angle D = \angle D'$, $\angle E = \angle E'$. თუ $\frac{AB}{A'B'} = K$, მაშინ K

ამ მრავალკუთხედების მსგავსების კოეფიციენტი (ნახ. 159).

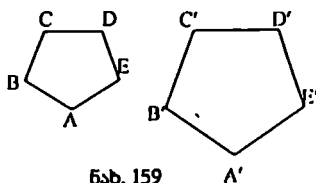
თუ ABC სამკუთხედი მსგავსია $A'B'C'$ სამკუთხედის, მაშინ $A'B'C'$ სამკუთხედიც მსგავსია ABC სამკუთხედის, ამიტომ ვიტყვი - ეს სამკუთხედები მსგავსია.

გვაქვს სამკუთხედების მსგავსების შემდეგი ნიშნები:

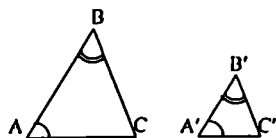
I ნიშანი: თუ ერთი სამკუთხედის ორი კუთხე მეორე სამკუთხედის ორი კუთხის ტოლია, მაშინ ეს სამკუთხედები მსგავსია;



ნახ. 158



ნახ. 159

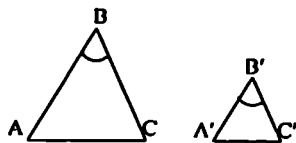


ნახ. 160

ე.ი. თუ $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, მაშინ $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (ნახ. 160).

II ნიშანი: თუ ერთი სამკუთხედის ორი გვერდი პროპორციულია მეორე სამკუთხედის შესაბამისი გვერდების, ამ გვერდებს შორის კუთხეები კი ტოლია,

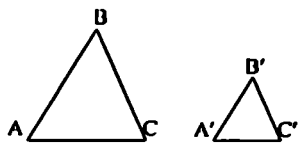
მაშინ ეს სამკუთხედები მსგავსია; ე.ი. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$, $\angle B = \angle B'$, მაშინ $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (ნახ. 161).



ნახ. 161

III ნიშანი: თუ ერთი სამკუთხედის გვერდები პროპორციულია მეორე სამკუთხედის გვერდების, მაშინ ეს სამკუთხედები მსგავსია; ე.ი. თუ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$,

მაშინ $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (ნახ. 162).



ნახ. 162

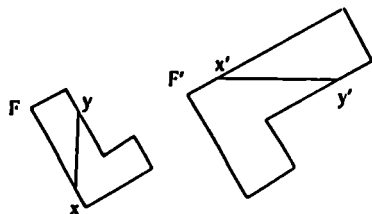
მსგავსი მრავალკუთხედების პერიმეტრების შეფარდება ტოლია შესაბამისი გვერდების შეფარდების, ფართობების შეფარდება - შესაბამისი გვერდების შეფარდების კვადრატის.

F და F' ფიგურებს ეწოდება ტოლი, თუ მოძრაობით ერთი მათგანი მეორეში გადადის. ფიგურათა ტოლობის აღნიშვნისათვის ჩვეულებრივი ტოლობის „=" ნიშანი გამოიყენება. $F=F'$ ჩანაწერი ნიშნავს F და F' ფიგურების ტოლობას.

სამკუთხედების ტოლობის ჩანაწერში: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ - იგულისხმება, რომ ის წვეროები, რომლებიც მოძრაობისას ერთმანეთს შეუთავსდება, შესაბამის ადგილებზეა ჩაწერილი. შეიძლება ჩვენება, რომ ამ პირობებში სამკუთხედების ტოლობა, რომელიც მოძრაობისას მათი შეთავსებით განისაზღვრება და ტოლობა, როგორც ჩვენ ის აქამდე გვესმოდა ერთსა და იგივეს გამოხატავს. იგივე შეიძლება ითქვას სხვა გეომეტრიული ფიგურების შესახებ.

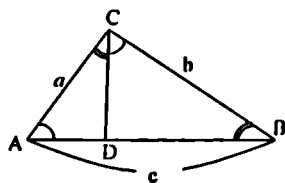
ჩვენ ადრე შევეხეთ მსგავსების გარდაქმნას: F ფიგურის ისეთ გარდაქმნას F' ფიგურად, როცა მისი ნებისმიერი X და Y წერტილები გადადის ისეთ X' და Y' წერტილებში, ისე რომ $XY = K \cdot X'Y'$ ($K > 0$);

ამასთან K რიცხვი ყველა X და Y წერტილისათვის ერთიდაიგივეა, მსგავსების გარდაქმნა ეწოდება (ნახ.163). K რიცხვს მსგავსების კოეფიციენტი ეწოდება. ე.ი. მსგავსების გარდაქმნა წერტილებს შორის მანძილს ერთიდამივე რიცხვჯერ ცვლის. იგიური გარდაქმნა მსგავსების გარდაქმნის კერძო შემთხვევაა (როცა $K=1$). ჰომოთეტიაც მსგავსების გარდაქმნაა.



ნახ. 163

თუ ABC სამკუთხედი მართკუთხაა და CD - ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლეა $CD=h$, მაშინ $\triangle ACD \sim \triangle CBD$, $\triangle ACD \sim \triangle ABC$, $\triangle CDB \sim \triangle ACB$ (ნახ. 164).



ნახ.164

ამ სამკუთხედების მსგავსების შედეგებია შემდეგი თანაფარდობები: $a^2=c \cdot AD$; $b^2=c \cdot BD$; $h^2=AD \cdot DB$; $ab=ch$; $\frac{a^2}{b^2} = \frac{AD}{DB}$. პირველი სამი ტოლობა შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ: მართკუთხა სამკუთხედის თითოეული კათეტი ჰიპოტენუზისა და ჰიპოტენუზაზე ამ კათეტის გეგმილის საშუალო გეომეტრიულია; ასევე გვაქვს - მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზისადმი გავლებული სიმაღლე ჰიპოტენუზაზე კათეტების გეგმილების საშუალო გეომეტრიულია.

ტრიგონომეტრია არის მათემატიკის დარგი, რომელიც შეისწავლის დამოკიდებულებას სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებსა და კუთხეების სიდიდეებს შორის, აგრეთვე ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებებს, დამოკიდებულებას მათ შორის და მათ გამოყენებას გეომეტრიაში. ტრიგონომეტრია იყოფა ბრტყელ, ანუ წრფივ და სფერულ ტრიგონომეტრიად.

სიტყვა „ტრიგონომეტრია“ წარმოდგება ბერძნული სიტყვიდან $\tauριγωνον$ - „სამკუთხედი“ და $μετρεω$ - „ვზომავ“. პირდაპირ თარ-

გმანით – „მეცნიერება სამკუთხედების გაზომვის შესახებ“. ტერმინი ტრიგონომეტრია პირველად გვხვდება გერმანელი ღვთისმეტყველისა და მათემატიკოსის ბართლომეუს პიტოსკუსის წიგნის სათაურში – „Trigonometria sive de solutione triangularum tractatus brevis et perspicuus“ (1595). თვით მეცნიერება ჩამოყალიბდა უძველეს დროში ასტრონომიასთან ერთად. მუდმივრადიუსიან წრეში სხვადასხვა კუთხის შესაბამისი ქორდებისათვის პირველი ცხრილი შეადგინა ბერძენმა ასტრონომმა და მათემატიკოსმა გიპარხმა (II ს. ჩვ.წ.აღ-მდე). სფერული ტრიგონომეტრიის ძირითადი თეორემები აღმოაჩინეს შუა საუკუნეების აღმოსავლეთის მეცნიერებმა ალ-ბათანიმ (IX ს.), იბნ არაკმა ხორეზმიდან (X ს.), აბუ-ლ-ვაფამ ხორეზმიდან (X ს.), ალ-ხოჯანიმ (X ს.) და ბხასკარამ (XII ს.). სფერული ტრიგონომეტრიის სისტემა პირველად ჩამოაყალიბა ნასირ ად-დინ ატ-ტუსიმ (XIII ს.), მან პირველმა განაცალკევა ტრიგონომეტრია, როგორც მეცნიერება ასტრონომიისაგან.

ტრიგონომეტრიის, როგორც მათემატიკის ცალკე განშტოების განვითარებაზე ძალიან დიდი გავლენა მოახდინა რეგიომონტანამ, მისი „ხუთი წიგნი ყველა სახის სამკუთხედების შესახებ“ (1462-1464) – ტრიგონომეტრიის სრული შესავალია, პირველი სახელმძღვანელოა ტრიგონომეტრიაში. აქ სისტემატურად გადმოცემულია იმ დროისათვის დაგროვილი მასალა, შევსებული ორიგინალური დამტკიცებებით და მაგალითებით.

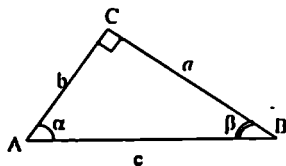
ტრიგონომეტრიის სამუშაო ფორმულები (სიტყვიერი ფორმულირებით) დადგენილია შემდეგი მათემატიკოსების მიერ: სინუსების თეორემა აღმოაჩინა ბრაჰმაგუტამ VII ს-ში, ხოლო შემდეგ ალ-ბათანიმ IX ს-ში; კოსინუსების თეორემა დაამტკიცა ბირუნიმ (X ს.) და შემდგომში კვლავ აღმოაჩინა ვიეტამ (XVI ს.); ტანგენტების თეორემა მიიღო რეგიომონტანამ (XV ს.); ფინკემ და ვიეტამ ჩამოაყალიბეს კოტანგენტების თეორემა; ვიეტამ გამოიყვანა აგრეთვე ფორმულები $\sin nx$ და $\cos nx$ -სათვის, როცა $n \leq 10$; გამოსახულება $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ -სათვის გამოიყვანა აბუ-ლ-ვაფამ, ხოლო $\lg 2\alpha$ -სათვის – რობერვალმა;

ფორმულები, რომლებიც $\sin 2\alpha$ და $\cos 2\alpha$ -ს გამოსახავს $\operatorname{tg} \alpha$ -ს საშუალებით, მიიღო ლამბერტომ (1765); ტრიგონომეტრიაში მნიშვნელოვანი შედეგები მიიღეს ნ. კოპერნიკმა, ტ. ბრაჰემ, ი. კეპლერმა (XVI ს.).

ტრიგონომეტრიაში დიდი განახლება მოახდინა ეილერმა, რომელმაც ტრიგონომეტრიას მისცა თანამედროვე სახე. მისი წყალობით მიღებულ იქნა თანამედროვე აღნიშვნები $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$. ეილერმა პირველმა აღნიშნა სამკუთხედის კუთხეები დიდი ასოებით, ხოლო მათი მოპირდაპირე გვერდები – შესაბამისი პატარა ასოებით. მან პირველმა დაიწყო ტრიგონომეტრიული ხაზების, როგორც კუთხის ფუნქციების განხილვა, უშვებდა, რომ $R=1$. მხოლოდ მან შეიტანა სიცხადე სხვადასხვა მეოთხედში ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნიშნების საკითხში და მოგვცა დაყვანის ფორმულები („ანალიზის შესავალი“, 1748).

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განსაზღვრება, რომლებშიც ისინი დაკავშირებულნი არიან მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებთან და არა წრის ხაზებთან, მოგვცა რეტიკმა (1551).

დაეუშვათ, ABC მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები: $a=BC$, $b=AC$; ხოლო ჰიპოტენუზა – $c=AB$, α კათეტის მოპირდაპირე კუთხეა α , b კათეტის – β (ნახ.165).



ნახ.165

α მახვილი კუთხის ოთხი ტრიგონომეტრიული ფუნქცია – სინუსი ($\sin$), კოსინუსი ($\cos$), ტანგენსი (tg), კოტანგენსი (ctg) – ასე განისაზღვრება:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}; \cos \alpha = \frac{b}{c}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

მამასადამე, მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხის სინუსი არის ამ კუთხის მოპირდაპირე კათეტის შეფარდება ჰიპოტენუზასთან, ხოლო კოსინუსი – მიმდებარე კათეტის შეფარდება ჰიპოტენუზასთან; ტანგენსი არის მოპირდაპირე კათეტის შეფარდება მიმდებარე

რე კათეტთან, კოტანგენსი - მიმდებარე კათეტის შეფარდება მოპირ-
დაპირესთან.

ცხრილში განვიხილოთ ზოგიერთი კუთხის ტრიგონომეტრიუ-
ლი ფუნქციების მნიშვნელობები:

ფუნქცია \ α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

α და $90^\circ - \alpha$ კუთხეებს დამატებითი კუთხეები ეწოდება, ამასთანავე $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$, $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$, $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$.

α კუთხის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის კავშირების დადგენის მიზნით გავიხსენოთ პითაგორას თეორემა: $a^2 + b^2 = c^2$. აქედან ვღებულობთ: $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, მაშინ გვქვია: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

ძირითადი ტრიგონომეტრიული თანაფარდობებია:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = 1.$$

1.7.1. საპარაქიშოები პრაქტიკული მემცადინეობისათვის

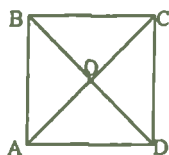
1. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელზეც აისახება $y = -2x$ წრფე H_0^3 (O კოორდინატთა სათავეა) ჰომოთეტიისას.
2. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელზეც აისახება $y = -2x + 1$ წრფე H_0^3 (O კოორდინატთა სათავეა) ჰომოთეტიისას.

3. ვთქვათ, $A(3;1)$, $B(7;-2)$. იპოვეთ კოორდინატა სათავის მიმართ AB მონაკვეთის ჰომოთეტიით მიღებული მონაკვეთის სიგრძე, თუ ჰომოთეტიის კოეფიციენტი $K = -\frac{1}{2}$.

4. იპოვეთ $A(0;5)$, $B(3;0)$, $C(-3;2)$ და $E(-2;-3)$ წერტილების ჰომოთეტიური წერტილები, ჰომოთეტიისას რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეა და კოეფიციენტი 2-ის ტოლია.

5. ცნობილია, რომ $A(2;3)$ წერტილი აისახება $A'(4;6)$ წერტილზე ჰომოთეტიით, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეა. იპოვეთ ჰომოთეტიის კოეფიციენტი.

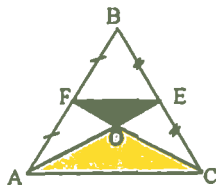
6. O არის $ABCD$ კვადრატის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი. იპოვეთ იმ ჰომოთეტიის კოეფიციენტი, რომლის ცენტრი O წერტილია და რომელიც AOB სამკუთხედს ასახავს COD სამკუთხედზე.



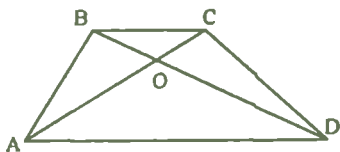
7. $A'B'C'$ სამკუთხედი ABC სამკუთხედის ჰომოთეტიურია $K=2,4$ კოეფიციენტით. ABC სამკუთხედის გვერდებია 10 სმ, 12სმ, 15სმ. იპოვეთ $A'B'C'$ სამკუთხედის პერიმეტრი.

8. $ABCD$ კვადრატის გვერდი 2,5 სმ-ია. იპოვეთ $A'B'C'D'$ კვადრატის პერიმეტრი, რომელიც $ABCD$ კვადრატის ჰომოთეტიურია ცენტრით დიაგონალების გადაკვეთის წერტილში და $K=-2$ კოეფიციენტით.

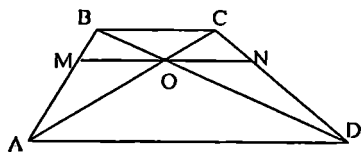
9. AE და CF არის ABC სამკუთხედის მედიანები, O - მედიანების გადაკვეთის წერტილია, H ჰომოთეტიურია, რომელიც FOE სამკუთხედს AOC სამკუთხედზე ასახავს, ცენტრით O წერტილში. იპოვეთ H და H^{-1} (H -ის შუქცეული) ჰომოთეტიების კოეფიციენტები.



10. $ABCD$ ტრაპეციის ($BC \parallel AD$) AC და BD დიაგონალები O წერტილში იკვეთება. $AO=12$ სმ, $OC=9$ სმ.

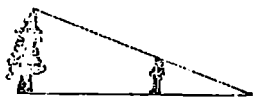


ფუძეების ჯამი 35 სმ-ია. იპოვეთ ფუძეები.

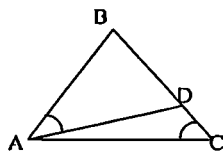


11. ტრაპეციის ფუძეები 4 სმ და 6 სმ-ია. იპოვეთ დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე ფუძეების პარალელურად გავლებული წრფის MN მონაკვეთი, რომელიც ტრაპეციაშია მოქცეული.

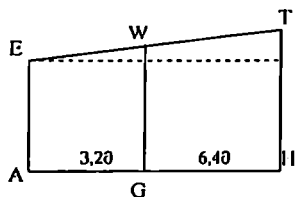
12. ხის ჩრდილის სიგრძე 10,5მ-ია. 1,8მ სიმაღლის ადამიანისა - 2,1მ. იპოვეთ ხის სიმაღლე.



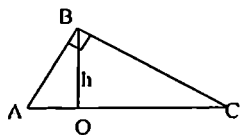
13. D წერტილი ABC სამკუთხედის BC გვერდს ეკუთვნის. ცნობილია, რომ $\angle BAD = \angle ACD$, $BC = 9$ სმ, $AB = 6$ სმ. იპოვეთ BD და DC.



14. თომა აკვირდება ხის კენწეროს (T წერტილს). მისი თვალი E წერტილითაა წარმოდგენილი. GW კედლის სიმაღლე 1,92 მ-ია. თომა კედლიდან 3,2 მ-ის დაშორებით დგას. თომას სიმაღლე 1,76 მ-ია. იპოვეთ ხის სიმაღლე.



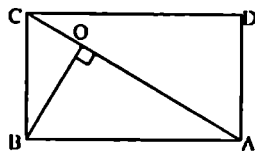
15. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების შეფარდებაა $\frac{3}{7}$. ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე 42 სმ-ია. იპოვეთ კათეტების გეგმილები ჰიპოტენუზაზე.



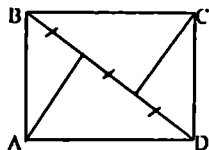
16. $\angle B = 90^\circ$, BO სიმაღლეა, $BC = 6$ სმ, $AC = 9$ სმ. იპოვეთ BO, AB, AO და OC.

17. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი და ფუძე შესაბამისად 5-ისა და 8-ის პროპორციულია, ხოლო სიმაღლე 7,2 სმ-ია. იპოვეთ ამ სამკუთხედის პერიმეტრი.

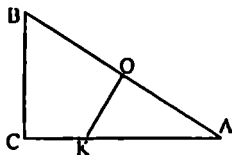
18. მართკუთხედის B წვეროდან დიაგონალზე დაშვებულია $BO=8$ სმ მართობი, $\frac{CO}{OA} = \frac{1}{4}$. იპოვეთ მართკუთხედის პერიმეტრი.



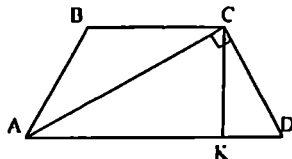
19. მართკუთხედის A და C წვეროდან დაშვებული მართობები დიაგონალს სამ ტოლ ნაწილად ყოფს. $AB=19\sqrt{2}$ სმ. იპოვეთ AD.



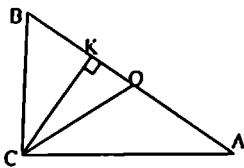
20. $\angle C=90^\circ$, $AB=34$ სმ, $BC=16$ სმ, $BO=AO$, $KO \perp AB$. იპოვეთ OK.



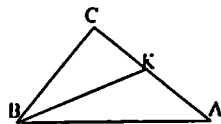
21. ტოლფერდა ტრაპეციაში დიაგონალი ფერდის მართობულია. C წერტილიდან გავლებული CK სიმაღლე დიდ ფუძეს 4 სმ და 16 სმ სიგრძის მონაკვეთებად ყოფს. იპოვეთ BC და AB.



22. $\angle C=90^\circ$, CK სიმაღლეა, CO მედიანა, $BC = 12\sqrt{41}$ სმ, $\frac{CK}{CO} = \frac{40}{41}$. იპოვეთ CK და CO.



23. ABC სამკუთხედში BK ბისექტრისაა; $AC=CB=10$ სმ, $AB=12$ სმ. იპოვეთ CK და AK. (ვისარგებლოთ ბისექტრისის თვისებით, თუ BK ბისექტრისაა, მაშინ $BC:BA=CK:KA$).

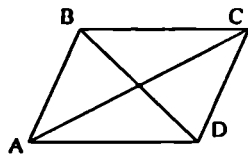


24. ტოლფერდა ტრაპეციაში დიაგონალი ფერდის მართობულია. დიაგონალის სიგრძე 12 სმ-ია. დიდ ფუძეზე ფერდის გეგმილი 7 სმ-ია. იპოვეთ ტრაპეციის დიდი ფუძე და სიმაღლე.
25. რომბის დიაგონალები ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც 24:7. რომბის პერიმეტრი 10 მ-ია. იპოვეთ რომბის დიაგონალები.

26. მართკუთხა ტრაპეციის მახვილი კუთხე 30° -ია. მცირე ფუძე და მცირე ფერდი, შესაბამისად 4 სმ და 3 სმ-ია. იპოვეთ ტრაპეციის პერიმეტრი.

27. მართკუთხა სამკუთხედში ერთ-ერთი კუთხის სინუსი $\frac{\sqrt{2}}{2}$ -ის ტოლია. ამ კუთხის მოპირდაპირე კათეტი 10,8 სმ-ია. იპოვეთ ჰიპოტენუსისადმი გავლებული მედიანა.

28. პარალელოგრამის გვერდები 3 სმ და $\sqrt{17}$ სმ-ის ტოლია, დიდი დიაგონალი 6 სმ-ია. ვიპოვოთ მცირე დიაგონალი (ვისარგებლოთ პარალელოგრამის თვისებით: პარალელოგრამის გვერდების კვადრატების გაორკეცებული ჯამი დიაგონალების კვადრატების ჯამის ტოლია, $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$).



29. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუსა 1მ-ის ტოლია. ერთ-ერთი მახვილი კუთხის სინუსი 0,6-ის ტოლია. იპოვეთ კათეტები.

30. მართკუთხა სამკუთხედში დიდი კათეტის სიგრძე 40 დმ-ია. მისი მოპირდაპირე კუთხის კოსინუსი $\frac{1}{\sqrt{5}}$ -ია. იპოვეთ ჰიპოტენუსა და მეორე კათეტი.

1.7.2. ტესტი №7

1. თუ X' ჰომოთეტიურია X წერტილის H_K^X ჰომოთეტიისას და X' ეკუთვნის OX სხივის დამატებით სხივს, მაშინ:

ა) $K > 1$; ბ) $0 < K < 1$; გ) $K < 0$; დ) $K = 1$; ე) $K > 0$.

2. ჰომოთეტია, რომლის კოეფიციენტი $K = -1$ არის:

ა) იგიური ასახვა; ბ) ღერძული სიმეტრია;

გ) პარალელური გადატანა; დ) ცენტრული სიმეტრია;

ე) მობრუნება $\alpha = 90^\circ$ კუთხით.

3. ჰომოთეტია, რომლის კოეფიციენტი $K=1$ არის:
 ა) იგიური ასახვა; ბ) ღერძული სიმეტრია;
 გ) პარალელური გადატანა; დ) ცენტრული სიმეტრია;
 ე) მობრუნება $\alpha=-90^\circ$ კუთხით.
4. ვთქვათ H_6^K ჰომოთეტია გადაადგილება (მოძრაობა), მაშინ:
 ა) $K=2$; ბ) $K=3$; გ) $K=\pm 1$; დ) $K=\pm 2$; ე) $K=\pm 3$.
5. თუ $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, მაშინ $\sin \alpha =$
 ა) $\frac{3}{5}$; ბ) $\frac{2}{5}$; გ) $\frac{2}{3}$; დ) $\frac{3}{4}$; ე) $\frac{4}{5}$.
6. თუ $\lg \alpha = \frac{3}{4}$, მაშინ $\sin \alpha =$
 ა) $\frac{3}{5}$; ბ) $\frac{4}{5}$; გ) $\frac{3}{4}$; დ) $\frac{2}{5}$; ე) $\frac{1}{5}$.
7. თუ $\lg \alpha = \sqrt{3}$, მაშინ $\operatorname{ctg} \alpha =$
 ა) $\sqrt{3}$; ბ) $\frac{1}{3}$; გ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; დ) 3; ე) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
8. მართკუთხა ტრაპეციის დიაგონალი ფერდის მართობულია და 15სმ-ის უდრის, ტრაპეციის მახვილი კუთხე α -ს ტოლია, მასთან $\cos \alpha = \frac{3}{5}$; მაშინ ტრაპეციის მცირე ფერდი ტოლია:
 ა) 25 სმ-ის; ბ) 9სმ-ის; გ) 15სმ-ის; დ) 18 სმ-ის; ე) 10 სმ-ის.
9. მოცემულია: I. $\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; II. $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; III. $\lg 45^\circ = 1$;
 IV. $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}$. მათგან ჭეშმარიტია:
 ა) მხოლოდ I; ბ) II და III; გ) მხოლოდ III; დ) მხოლოდ IV;
 ე) I და IV.
10. თუ $\sin \alpha = 0,6$, მაშინ $\operatorname{ctg} \alpha =$
 ა) $\frac{4}{3}$; ბ) $\frac{3}{4}$; გ) 0,6; დ) 0,8; ე) 0,5.

1.8. გეომეტრიული აგებები ფარგლით და სახაზავით, გეომეტრიული აგების ამოცანა, ოპროს კვითა

გეომეტრიულმა აგებებმა მათემატიკოსთა ყურადღება მიიპყრო ჯერ კიდევ ჩვენს ერამდე VI-V საუკუნეების ძველ საბერძნეთში. ამ საკითხით დაინტერესებული იყო თითქმის ყველა უდიდესი გეომეტრი: პითაგორა, ჰიპოკრატე, ევკლიდე, არქიმედე, აპოლონიოსი, პაპე და მრავალი სხვა. პითაგორას სკოლაში დაძლიეს ისეთი რთული ამოცანა, როგორიც წესიერი ხუთკუთხედის აგებაა.

იმ დროიდან მოყოლებული არ დამცხრალა ინტერესი გეომეტრიული აგებებისადმი. აქ აღსანიშნავია სახელები: დეკარტე, ფერმა, ნიუტონი, პასკალი, ეილერი, გაუსი, მასკერონი, მორი, შტეინერი, პონსელე და მრავალი სხვა.

აგების ამოცანებში მოითხოვება გეომეტრიული ფიგურების აგება მოცემული სახაზავი ხელსაწყოების მეშვეობით. უმეტესად ასეთი ხელსაწყოებია სახაზავი და ფარგალი. ამოცანის ამოხსნისას არსებითია არა იმდენად ფიგურის აგება, რამდენადაც იმის დადგენა, თუ როგორ უნდა ავაგოთ და შესაბამისი დამტკიცება. ამოცანა ამოხსნილად ჩაითვლება, თუ დადგენილია ფიგურის აგების ხერხი და დამტკიცებულია, რომ მითითებული აგების შესრულების შედეგად მართლაც მოთხოვნილი თვისებების მქონე ფიგურა მიიღება.

სახაზავით, როგორც ნებისმიერი გეომეტრიულ აგებათა ხელსაწყოთი, შეიძლება გავავლოთ ნებისმიერი წრფე (მოცემულ წერტილზე შეიძლება ნებისმიერი წრფის გავლება). სახაზავით, აგრეთვე, შეიძლება მოცემულ ორ წერტილზე გავავლოთ მათზე გამავალი წრფე. სხვა ოპერაციების შესრულება სახაზავით არ შეიძლება. კერძოდ, სახაზავით არ შეიძლება მონაკვეთის გადაზომვა, თუნდაც ამ სახაზავს დანაყოფები ჰქონდეს.

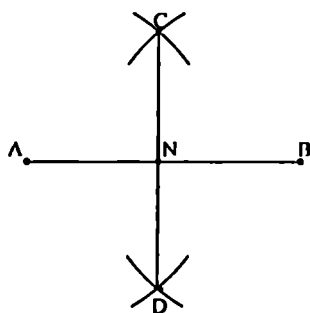
ფარგლით, როგორც გეომეტრიულ აგებათა ინსტრუმენტით, შეიძლება მოცემული ცენტრისა და მოცემული რადიუსის მქონე წრეწირის აგება. კერძოდ, ფარგლით შეიძლება მოცემულ წრფეზე მოცე-

მული წერტილიდან მოცემული სიგრძის მონაკვეთის გადაზომვა.

გეომეტრიულ აგებებზე ამოცანებს დიდი მრავალფეროვნება ახასიათებს. ჩვენ განვიხილოთ მხოლოდ უმარტივესი მათგანი თეორიული დასაბუთების გარეშე.

1. მოცემული მონაკვეთი გავყოთ შუაზე.

ამოხსნა. AB მონაკვეთის A და B ბოლოებიდან ნებისმიერი, მაგრამ AB მონაკვეთის ნახევარზე მეტი რადიუსით შემოვხაზოთ ორ-ორი რკალი, რომლებიც მოგვცემს კვეთის C და D წერტილებს. C და D წერტილები შეერთების შემდეგ გადაკვეთს AB მონაკვეთს, CD მონაკვეთის და AB მონაკვეთის გადაკვეთის N წერტილი საძიებელი წერტილია, ე.ი. $AN=NB$ (ნახ. 166).

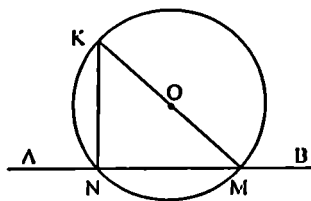


ნახ. 166

2. წრფის N წერტილიდან ამ წრფისადმი აღვმართოთ მართობი.

ამოხსნა. აგება შეიძლება შევასრულოთ წინა ამოხსნაში მოცემული წესის მიხედვით. ამისათვის მოცემულ წრფეზე N წერტილიდან ფარგლით გადავზომოთ ტოლი AN და NB მონაკვეთები, შემდეგ კი გავიმეოროთ იგივე აგება, რაც წინა შემთხვევაში გვქონდა.

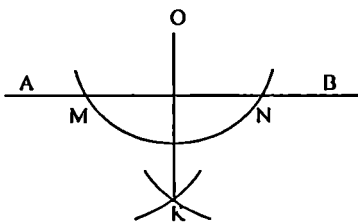
შეიძლება მოვიქცეთ შემდეგნაირადაც: ავიღოთ წრფეზე არამდებარე ნებისმიერი O წერტილი და მისგან ON რადიუსით შემოვხაზოთ წრეწირი, რომელიც წრფეს გადაკვეთს N და M წერტილებში. გავავლოთ MOK დიამეტრი, K წერტილი შევაერთოთ N წერტილთან; მივიღებთ, რომ $KN \perp AB$, რადგან KNM ჩახაზული კუთხეა და ეყრდნობა დიამეტრს (ნახ. 167).



ნახ. 167

3. AB წრფეზე მის გარეთ მდებარე O წერტილიდან დავუშვათ მასზე მართობი.

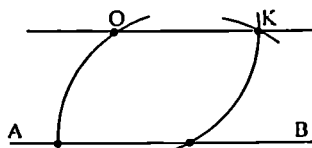
ამოხსნა. O წერტილიდან (ნახ. 168) შემოვხაზოთ რკალი ისე, რომ AB წრფე გადაიკვეთოს ორ M და N წერტილში. M და N წერტილებიდან შემოვხაზოთ რკალები ისეთი რადიუსით, რომ რკალებმა ერთმანეთი გადაკვეთონ K წერტილში. შევაერთოთ O და K წერტილი, მივიღებთ $OK \perp AB$.



ნახ. 168

4. მოცემული O წერტილიდან, რომელიც AB წრფეზე არ მდებარეობს, გავავლოთ ამ წრფის პარალელური წრფე.

ამოხსნა. O წერტილიდან ნებისმიერი რადიუსით, მაგრამ ისე, რომ მან გადაკვეთოს AB წრფე, შემოვხაზოთ რკალი, AB წრფესთან მისი გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ N -ით (ნახ. 169). N წერტილიდან NO რადიუსით მოვხაზოთ



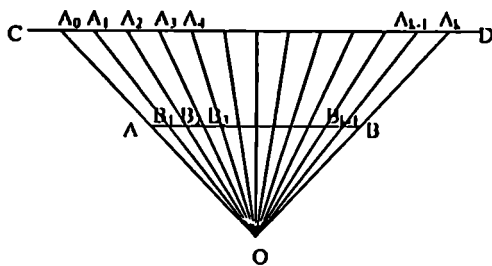
ნახ. 169

რკალი, რომელიც AB წრფეს გადაკვეთს M წერტილში. MO რადიუსით N წერტილიდან შემოვხაზოთ რკალი, რომელიც O -დან შემოწერილ რკალს K წერტილში გადაკვეთს. შევაერთოთ O და K წერტილები, მივიღებთ $OK \parallel AB$.

5. AB მონაკვეთი დავყოთ მოცემული ოდენობის ტოლ მონაკვეთებად.

ამოხსნა. გავავლოთ AB მონაკვეთის პარალელური CD წრფე და მასზე ნებისმიერი მისი წერტილიდან გადავზომოთ მოცემული ოდენობის ნებისმიერი სიგრძის ტოლი მონაკვეთები. მონაკვეთების ბოლოები აღვნიშნოთ წერტილებით; მაგალითად, $A_0, A_1, A_2, \dots, A_k$. A_0 წერტილი შევაერთოთ A წერტილთან, ხოლო A_k წერტილი B წერტილთან. A_0A წრფის და A_kB წრფის გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ O -თი. O წერტილთან რიგრიგობით შევაერთოთ $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{k-1}$ წერტილები. ამ შეერთების შედეგად მიღებული მონაკვეთები AB მონაკვეთს შესაბამისად დაყოფს მოცემული ოდენო-

ბის ტოლ მონაკვეთებად: $AB_1=B_1B_2=B_2B_3=B_3B_4=\dots=B_{K-1}B$ (ნახ.170).



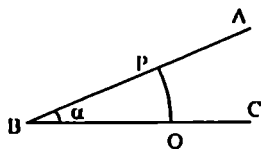
ნახ.170.

6. AB მონაკვეთი დავყოთ მოცემული მონაკვეთების პროპორციულ ნაწილებად.

აგება ანალოგიურია მეხუთე ამოცანის, მხოლოდ CD წრფეზე უნდა გადავზომოთ მოცემული მონაკვეთების ტოლი მონაკვეთები.

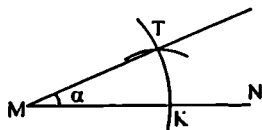
7. MN სხივის M სათავეზე ავაგოთ მოცემული α კუთხის ტოლი კუთხე.

ვთქვათ, მოცემულია $\angle ABC = \alpha$ (ნახ.171). B წვეროდან გადავზომოთ რკალი ნებისმიერი რადიუსით, ისე რომ მოცემული კუთხის გვერდები გადაკვეთოთ.



ნახ.171

ვთქვათ, P და Q გადაკვეთის წერტილებია. ისეთივე რკალი მოვზომოთ M წერტილიდან და MN სხივთან მისი გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ K-თი. K წერტილიდან PQ-ს ტოლი რადიუსით შემოვწეროთ რკალი, რკალების გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ T-თი, მიღებული TMK კუთხე მოცემული α კუთხის ტოლი იქნება (ნახ. 172).

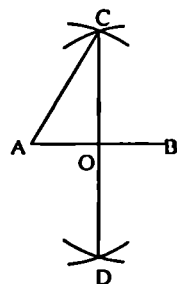


ნახ.172

8. ავაგოთ 30° -ის ტოლი კუთხე.

ამოხსნა. ნებისმიერი AB მონაკვეთის A და B ბოლოებიდან შემოვხაზოთ ორ-ორი რკალი რადიუსით $R=AB$. მივიღებთ კვეთის C

და D წერტილებს (ნახ. 173). CD მონაკვეთი AB მონაკვეთს O წერტილში გადაკვეთს, რითაც მას შუაზე გაყოფს. შევეერთოთ C წერტილი A წერტილთან, $\angle CAO = 60^\circ$, $\angle AOC = 90^\circ$, ხოლო $\angle ACO = 30^\circ$.



ნახ. 173

9. ავაგოთ 45° -ის ტოლი კუთხე.

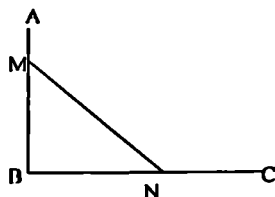
ამოხსნა. ABC მართი კუთხის გვერდებზე გადავზომოთ ტოლი მონაკვეთები $BM = BN$. შევაერთოთ M და N წერტილები. $\angle BMN = \angle BNM = 45^\circ$ (ნახ. 174).

10. მოცემული ABC კუთხე გავყოთ შუაზე.

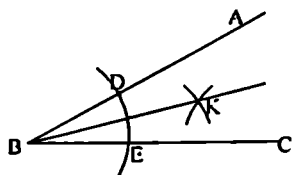
ე.ი. ავაგოთ ამ კუთხის ბისექტრისა.

ამოხსნა. მოცემული კუთხის B წვეროდან ნებისმიერი რადიუსით შემოვხაზოთ რკალი გვერდებთან მისი კვეთის წერტილები აღვნიშნოთ D და E წერტილებით.

D და E წერტილებიდან შემოვხაზოთ რკალები ერთი და იგივე რადიუსით, ისე რომ რკალებმა ერთმანეთი გადაკვეთონ. გადაკვეთის K წერტილი შევეერთოთ B წერტილთან. BK ABC კუთხის ბისექტრისაა (ნახ. 175).



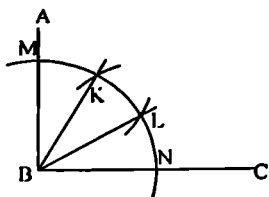
ნახ. 174



ნახ. 175

11. მოცემული მართი კუთხე გავყოთ სამ ტოლ ნაწილად.

ამოხსნა. ნებისმიერი რადიუსით (ნახ.176) B წერტილიდან შემოვხაზოთ რკალი, ისე რომ გადაიკვეთოს მართი კუთხის გვერდები. კვეთის წერტილები აღვნიშნოთ M და N წერტილებით. იგივე რადიუსით M და N წერტილებიდან რკალებით გადავკვეთოთ MN რკალი K და L წერტილებში. შევეერთოთ მიღებული წერტილები B-სთან. გვაქვს

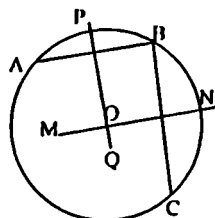


ნახ. 176

$$\angle MBK = \angle KBL = \angle LBN = 30^\circ.$$

12. ერთ წრფეზე არამდებარე სამ მოცემულ წერტილზე გავავლოთ წრეწირი.

ამოხსნა. ავაგოთ AB და BC მონაკვეთების შუაწერტილებზე პერპენდიკულარები (ამოცანა 1). ამ პერპენდიკულარების კვეთის O წერტილი იქნება საძიებელი წრეწირის ცენტრი (ნახ. 177). OA რადიუსით შემოვხაზოთ წრეწირი.



ნახ. 177

13. ვიპოვოთ მოცემული წრეწირის ცენტრი.

ამოხსნა. მოცემულ წრეწირზე ერთმანეთისაგან დაშორებით შევარჩიოთ სამი განსხვავებული წერტილი. შემდეგ შევასრულოთ იგივე აგებანი, რაც წინა ამოცანის ამოხსნის დროს გვქონდა.

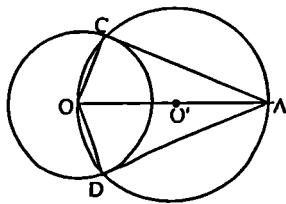
14. მოცემული რკალი გავყოთ შუაზე.

ამოხსნა. შევარჩიოთ რკალის ბოლოები. მიღებული მონაკვეთი გავყოთ შუაზე (ამოცანა 1), მოცემული რკალიც შუაზე გაიყოფა.

15. მოცემულ A წერტილზე გავავლოთ მოცემული წრეწირის მხები.

ამოხსნა. განვიხილოთ ორი შემთხვევა: ა) წერტილი ეკუთვნის წრეწირს. ამ შემთხვევაში გავავლოთ AO რადიუსი და A წერტილზე ამ რადიუსისადმი ავაგოთ მართობი. მიღებული წრფე იქნება მოცემული წრეწირის მხები.

ბ) A წერტილი წრეწირის გარეთაა. შევაერთოთ O და A წერტილები მონაკვეთით და გავყოთ ეს მონაკვეთი შუაზე. მიღებული O' წერტილიდან $R=OO'=O'A$ რადიუსით შემოვხაზოთ წრეწირი. იგი მოცემულ წრეწირს გადაკვეთს ორ C და D წერტილში. AC და AD წრფეები იქნება საძიებელი მხებები, რადგან $\angle OCA = \angle ODA = 90^\circ$, როგორც დიამეტრზე დაყრდნობილი ჩახაზული კუთხეები.



16. ავაგოთ კვადრატი მისი AB გვერდის მიხედვით.

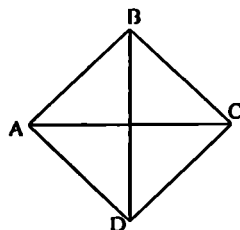
ამოხსნა. AB გვერდს ბოლოებზე აღვმართოთ მართობები და მათზე A და B წერტილებიდან გადავზომოთ AB -ს ტოლი მონაკვეთები. მიღებული C და D წერტილები შევაერთოთ.

17. ავაგოთ კვადრატი მისი AC დიაგონალის მიხედვით.

ამოხსნა. მოცემული AC მონაკვეთი გავყოთ შუაზე და მის შუა O წერტილზე გავავლოთ AC -ს მართობული წრფე. O წერტილიდან ამ მართობული წრფის ორივე მხარეზე გადავზომოთ AC -ს ნახევრის ტოლი მონაკვეთები. ვთქვათ, მიღებული მონაკვეთების ბოლოებია B და D . შევაერთოთ A, B, C და D წერტილები (ნახ. 179).

18. ავაგოთ სამკუთხედი მისი სამი გვერდის მიხედვით.

ამოხსნა. ავიღოთ მოცემული უდიდესი მონაკვეთი და მისი ბოლოებიდან დანარჩენი ორი მონაკვეთის ტოლი რადიუსით შემოვხაზოთ რკალები ისე, რომ ისინი გადაიკვეთოს. მიღებული წერტილი შევაერთოთ პირველად აღებული მონაკვეთის ბოლოებთან.



ნახ. 179

ცხადია, ამოცანა არ ამოიხსნება, როცა ორი მცირე მონაკვეთის სიგრძეთა ჯამი უდიდესი მონაკვეთის სიგრძეზე ნაკლებია, ან მისი ტოლია.

19. ავაგოთ სამკუთხედი ერთი გვერდითა და მასთან მდებარე ორი კუთხით.

ამოხსნა. ავიღოთ მოცემული გვერდი და მისი ბოლოებიდან ავაგოთ მოცემული კუთხეები (ამოცანა 7). აგებული კუთხეების გვერდები გავაგრძელოთ გადაკვეთამდე. (კუთხეები გადავზომოთ მოცემული გვერდის შემცველი წრფის ერთ მხარეს).

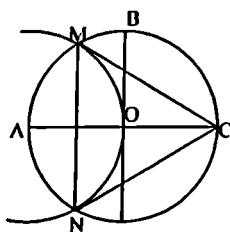
20. ავაგოთ სამკუთხედი ორი გვერდითა და მათ შორის მდებარე კუთხით.

ამოხსნა. ავიღოთ მოცემული მონაკვეთებიდან ერთ-ერთი და მისი რომელიმე ბოლოდან ავაგოთ მოცემული კუთხე (ამოცანა 7). ამ კუთხის მეორე გვერდზე კუთხის წვეროდან გადავზომოთ მეორე

მონაკვეთის ტოლი მონაკვეთი. ორივე მონაკვეთის თავისუფალი ბოლოების შეერთება მოგვცემს სამიეზელ სამკუთხედს.

21. ავაგოთ წესიერი სამკუთხედი.

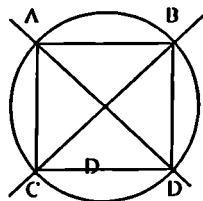
ამოხსნა. ავიღოთ ორი ურთიერთმართობული წრფე და მათი გადაკვეთის O წერტილიდან შემოვხაზოთ წრე-წირი ნებისმიერი რადიუსით. აღვნიშნოთ კვეთა წრფეებთან A, B, C და D წერტილებით. A წერტილიდან იმავე რადიუსით შემოვხაზოთ რკალი წრეწირის ორ წერტილში გადაკვეთამდე. გადაკვეთის წერტილები აღვნიშნოთ M და N ასოებით. M, N და C წერტილების შეერთებით მივიღებთ წესიერ სამკუთხედს (ნახ.180).



ნახ. 180

22. ავაგოთ წესიერი ოთხკუთხედი.

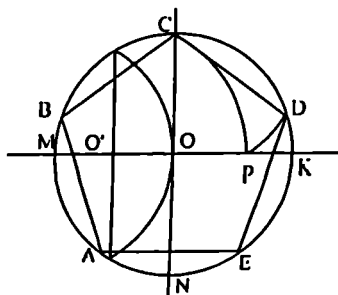
ამოხსნა. ავიღოთ ორი ურთიერთმართობული წრფე. მათი გადაკვეთის O წერტილიდან შემოვხაზოთ ნებისმიერი რადიუსით წრეწირი. მისი კვეთა წრფეებთან აღვნიშნოთ A, B, C და D წერტილებით. ამ წერტილების შეერთებით მივიღებთ წესიერ ოთხკუთხედს (ნახ.181).



ნახ. 181

23. ავაგოთ წესიერი ხუთკუთხედი.

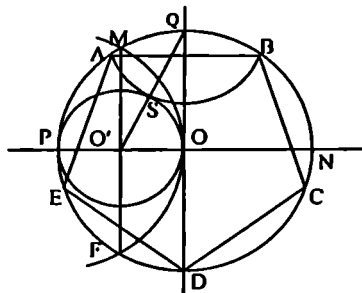
ამოხსნა. ავიღოთ ორი ორი ურთიერთმართობული წრფე. მათი გადაკვეთის O წერტილიდან ნებისმიერი რადიუსით შემოვხაზოთ წრეწირი. წრფეებთან მისი კვეთის წერტილები აღვნიშნოთ M, C, K და N -ით. MO რადიუსი გავეყოთ შუაზე. M წერტილიდან OM რადიუსით შემოვხაზოთ რკალი წრეწირის ორ წერტილში გადაკვეთამდე. გადაკვეთის წერტილები შევაერთოთ. OM მონაკვეთის O' შუაწერტი-



ნახ. 182

ლიდან $O'C$ რადიუსით შემოვხაზოთ რკალი OK რადიუსის გადაკვეთამდე. მიღებული წერტილი აღვნიშნოთ P -თი. C წერტილიდან CP რადიუსით შემოვწეროთ რკალი წრეწირის D წერტილში გადაკვეთამდე. CD მონაკვეთი საძიებელი ხუთკუთხედის გვერდია. C წერტილიდან გადავზომოთ CD -ს ტოლი მონაკვეთები წრეწირზე; მიღებული A, B, C, D, E წერტილები შევაერთოთ. მივიღებთ წესიერ ხუთკუთხედს (ნახ. 182).

24. წესიერი ხუთკუთხედი შეიძლება სხვაგვარადაც ავაგოთ. ავიღოთ ორი ურთიერთმართობული წრფე და მათი გადაკვეთის O წერტილიდან ნებისმიერი რადიუსით შემოვხაზოთ წრეწირი. თანაკვეთაში მიღებული წერტილები აღვნიშნოთ P, Q, N და D -თი. P წერტილიდან იმავე რადიუსით შემოვხაზოთ რკალი წრეწირის გადაკვეთამდე. კვე-



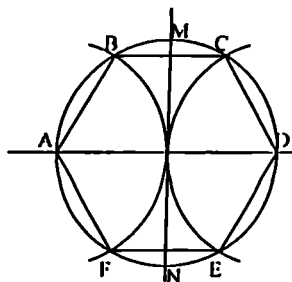
ნახ. 183

თაში მიღებული წერტილები აღვნიშნოთ M და F -ით. M -ისა და F -ის შეერთებით OP რადიუსის კვეთის წერტილი O' -ით აღვნიშნოთ, იგი OP რადიუსს შუაზე ჰყოფს. O' წერტილიდან OP რადიუსის ნახევრით შემოვხაზოთ წრეწირი და O' წერტილი შევაერთოთ Q -სთან, კვეთაში მიიღება S წერტილი. Q წერტილიდან QS რადიუსით შემოვხაზოთ რკალი პირველად შემოხაზული წრეწირის გადაკვეთამდე. გადაკვეთის წერტილები აღვნიშნოთ A -თი და B -თი. AB მონაკვეთი იქნება საძიებელი ხუთკუთხედის გვერდი. წრეწირზე B წერტილიდან AB -ს ტოლი რადიუსით გადავზომოთ რკალები. მიღებული A, B, C, D და E წერტილები შევაერთოთ, წრეწირში ჩაიხაზება წესიერი ხუთკუთხედი (ნახ. 183).

25. ავაგოთ წესიერი ექვსკუთხედი.

ამოხსნა. ავიღოთ ორი ურთიერთმართობული წრფე და მათი თანაკვეთის O წერტილიდან შემოვხაზოთ წრეწირი ნებისმიერი რადიუსით. A, M, D და N -ით აღვნიშნოთ წრეწირის კვეთის წერტილები

წრფეებთან. A და D წერტილებიდან იმავე რადიუსით შემოვხაზოთ რკალები წრეწირის გადაკვეთამდე. მიღებული წერტილები აღვნიშნოთ B, C, E, F-ით. A, B, C, D, E და F წერტილების შეერთებით მივიღებთ წესიერ ექვსკუთხედს, იგი წრეწირშია ჩახაზული (ნახ. 184).



ნახ. 184

განვიხილოთ გეომეტრიული აგების ამოცანის ამოხსნის ეტაპები. აგებაზე ამოცანის ამოხსნა ჩვეულებრივ შედგება ოთხი ეტაპისაგან: ანალიზი, აგება, დამტკიცება და გამოკვლევა. განვიხილოთ ცალ-ცალკე.

1. ანალიზი. ამ ეტაპზე ხორციელდება ამოცანის ამოხსნის ძიება. მისი საბოლოო მიზანია იმ ძირითადი ელემენტარული აგებების თანმიმდევრობის, ალგორითმის დადგენა, რომელსაც მივყავართ საძიებელი ფიგურის აგებამდე. ამ ეტაპზე უნდა დავუშვათ, რომ ფიგურა აგებულია და ვეძებოთ კავშირები ნახაზში საძიებელ და მოცემულ ფიგურებს შორის.

2. აგება. ამ ეტაპზე ხორციელდება ის ალგორითმი, რომელიც დადგინდა ანალიზის შემდეგ. აგება ხორციელდება ჩვენს მიერ შერჩეული ინსტრუმენტების დახმარებით.

3. დამტკიცება. ამ ეტაპის მიზანია დამტკიცება იმისა, რომ წინა ეტაპზე აგებული ფიგურა მართლაც საძიებელია, ე.ი. აკმაყოფილებს ამოცანაში მოთხოვნილ ყველა პირობას.

4. გამოკვლევა. ამოხსნის ამ ეტაპზე ირკვევა, აქვს თუ არა ამოცანას ამოხსნა ყოველთვის; თუ ყოველთვის არა აქვს, მაშინ კონკრეტულად რომელი მონაცემების დროს და, როცა აქვს, რამდენი ამონახსნი გააჩნია. აგებული ფიგურები სხვადასხვა ფიგურებად ითვლება, თუ ისინი ტოლი არ არის, ან მათი მდებარეობაა სხვადასხვა.

საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ ერთი მაგალითი.

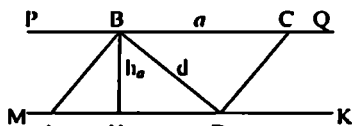
ამოცანა. ავაგოთ პარალელოგრამი მისი a ფუძით, h , სიმაღლითა და ერთ-ერთი d დიაგონალით.

პირობის თანახმად, მოცემულია მონაკვეთები, $\frac{h_a}{d}$
რომლებიც წარმოადგენენ პარალელოგრამის ფუძეს, $\frac{d}{a}$
სიმაღლეს და დიაგონალს (ნახ.185).

1. ანალიზი. შევადგინოთ ნახაზი-ილუსტრაცია. ნახ. 185

ჩავთვალოთ, რომ პარალელოგრამი ABCD უკვე აგე-

ბულია. ნახაზზე აღვნიშნოთ მოცე-
მული ელემენტები: $BC=a$, $BH=h_a$,
 $DB=d$ (ნახ. 186).



ნახ. 186

დავადგინოთ პარალელოგრამის
ელემენტებს შორის კავშირი და და-
მოკიდებულებები. აღვნიშნოთ, რომ

მოპირდაპირე გვერდები AD და BC მდებარეობენ პარალელურ
წრფეებზე, რომელთა შორის მანძილი h_a -ს ტოლია; ამიტომ შეიძლე-
ბა ავაგოთ ABD სამკუთხედი და შემდეგ შევაკვსოთ იგი ABCD პარა-
ლელოგრამამდე. ვღებულობთ საძიებელი ფიგურის აგების შემდეგ
ალგორითმს.

1. ვიღებთ PQ და MK პარალელურ წრფეებს ისე, რომ მათ შორის
მანძილი h_a -ს ტოლია.

2. MK წრფეზე ვაგებთ AD მონაკვეთს, რომლის სიგრძე a -ს ტო-
ლია.

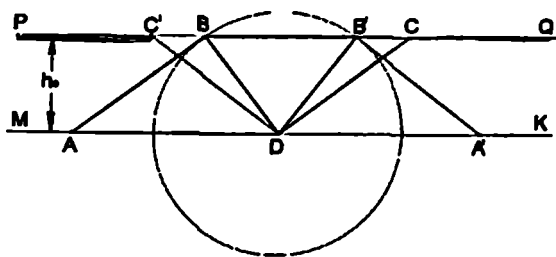
3. D წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან d -ს ტოლი რადიუსით
შემოვხაზავთ წრეწირს და ვღებულობთ PQ წრფესთან მისი გადაკვე-
თის B წერტილს.

4. BQ სხივზე ფარგლით მოვზომავთ $BC=a$ მონაკვეთს.

5. ვაგებთ AB და CD მონაკვეთებს.

ამით ანალიზი დასრულდა და ვიწყებთ ფიგურის აგებას.

2. აგება. ფიგურის აგების ალგორითმის ყველა ეტაპს ვასრულებთ
ფარგლითა და სახაზავით უშუალოდ ნახაზზე მოცემული ელემენ-
ტების გამოყენებით (ნახ. 187).



ნახ. 187.

3. დამტკიცება. განვიხილოთ $ABCD$ ოთხკუთხედი, მისი მოპირდაპირე გვერდები ($AD \parallel BC$) პარალელურია, რადგან მდებარეობენ MK და PQ პარალელურ წრფეებზე: ეს გვერდები აგების თანახმად ტოლია: $AD=BC=a$. მაშასადამე, $ABCD$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, რომელშიც $AD=a$, $DB=d$, სიმაღლე კი არის h , რადგან MK და PQ პარალელურ წრფეებს შორის მანძილი ტოლია h -სი (აგების თანახმად). ამგვარად $ABCD$ არის საძიებელი პარალელოგრამი.

4. გამოკვლევა. შევამოწმოთ $ABCD$ პარალელოგრამის აგების შესაძლებლობა უშუალოდ ალგორითმის ნაბიჯების მიხედვით.

1. MK და PQ პარალელური წრფეები, რომელთა შორის მანძილი h -ს ტოლია, ყოველთვის შეიძლება ავაგოთ და ისიც ერთადერთი სახით.

2. MK წრფეზე $AD=a$ მონაკვეთის აგებაც ყოველთვის შესაძლებელია და A -დან D -სკენ მიმართული ისიც ერთადერთი სახით.

3. D წერტილიდან d რადიუსით გავლებულ წრეწირს PQ წრფესთან საერთო წერტილები ექნება მხოლოდ მაშინ, როცა $d \geq h$, თუ $d=h$, მაშინ მიიღება ერთი საერთო წერტილი B , თუ $d > h$, (ჩვენი შემთხვევა), მაშინ მიიღება ორი საერთო წერტილი B და B' (ამ შემთხვევაში აგებული $A'B'C'D$ ოთხკუთხედიც პარალელოგრამია და იგი ტოლია $ABCD$ პარალელოგრამის). შევნიშნოთ, რომ როცა $d < h$, მაშინ აგებას ვერ შევასრულებთ, რადგან ასეთი პარალელოგრამი არ იარსებებს.

4. 5. ეს აგებები ყოველთვის ცალსახადაა შესაძლებელი.

ამგვარად, ამოხსნა შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, თუ $d \geq l_0$, თუ $d = l_0$, მაშინ ამოცანას ერთი ამონახსნი აქვს. თუ $d > l_0$, მაშინ ამოცანას ორი ამონახსნი გააჩნია.

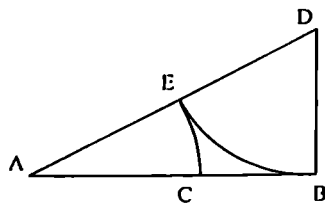
განვიხილოთ ოქროს კვეთა. აგებაზე ამოცანების განხილვისას ძნელია გვერდი აუარო ისეთ საკითხს, როგორიცაა ოქროს კვეთა. სანამ ფარგლითა და სახაზავით ავაგებთ მონაკვეთის ოქროს კვეთას, მანამდე მოკლედ დავახასიათოთ, თუ რა არის ოქროს კვეთა.

მიიჩნევენ, რომ C წერტილი AB მონაკვეთს ოქროს პროპორციით ჰყოფს, ან სხვაგვარად, AB მონაკვეთის ოქროს კვეთას ახდენს, თუ $AC:AB=BC:AC$.

ამგვარად, ოქროს კვეთა არის მონაკვეთის ისეთი გაყოფა ორ ნაწილად, რომ მონაკვეთის დიდი ნაწილი ისე შეეფარდება მთელ მონაკვეთს, როგორც მცირე ნაწილი შეეფარდება დიდს. გეომეტრიაში ოქროს კვეთას საშუალო და კიდურა შეფარდებით გაყოფასაც უწოდებენ.

მოვახდინოთ მონაკვეთის ოქროს კვეთა ფარგლითა და სახაზავით.

ავილოთ AB მონაკვეთი და მისი ერთ-ერთი ბოლოდან, მაგალითად, B -დან აღვმართოთ BD მართობი. D წერტილი ისე ავილოთ, რომ BD -ს სიგრძე AB მონაკვეთის სიგრძის ნახევრის ტოლი იყოს. შევეერთოთ A და D წერტილები. მივიღებთ ABD მართკუთხა სამკუთხედს. D წერტილი მივიჩნიოთ ცენტრად და შემოვხაზოთ რკალი DB რადიუსით ჰიპოტენუზის გადაკვეთამდე. მივიღებთ E წერტილს. ამჯერად A წერტილი მივიჩნიოთ ცენტრად და შემოვხაზოთ რკალი



ნახ. 188

AE რადიუსით AB მონაკვეთის გადაკვეთამდე. მივიღებთ C წერტილს. C წერტილი AB მონაკვეთის ოქროს კვეთას ახდენს (ნახ.88).

ვაჩვენოთ, რომ C წერტილი, მართლაც AB მონაკვეთის ოქროს კვეთას ახდენს.

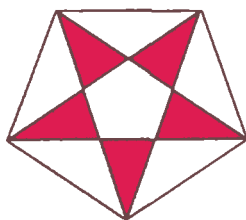
პითაგორას თეორემის თანახმად გვაქვს: $(AE+ED)^2=AB^2+BD^2$, ხოლო აგების თანახმად: $AE=AC$, $ED=BD=\frac{AB}{2}$. ამ ტოლობებიდან ვღებულობთ: $AC^2+AC \cdot AB=AB^2$, საიდანაც $AC^2=AB(AB-AC)$. საბოლოოდ გვაქვს: $AC^2=AB \cdot BC$, ან რაც იგივეა $AC:AB=BC:AC$.

თუ a მთელი AB მონაკვეთის სიგრძეა, $x=AC$ – მისი დიდი ნაწილია (ნახ.190), მაშინ მონაკვეთის ოქროს კვეთა შეიძლება ჩაეწეროს პროპორციით: $a:x=x:(a-x)$. ეს პროპორცია ჩაიწერება განტოლების სახით: $x^2+ax-a^2=0$, რომლის ამოხსნა გვაძლევს მონაკვეთის დიდი ნაწილის სიგრძეს: $x=a/2: (\sqrt{5}-1) \approx 0,62a$, მაშინ მონაკვეთის მცირე ნაწილი ტოლი იქნება: $a-x=a-\frac{\sqrt{5}-1}{2}a=\frac{3-\sqrt{5}}{2}a \approx 0,38a$.

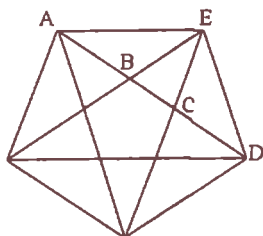
დოდეკაედრის წახნაგები წარმოადგენენ წესიერ ხუთკუთხედებს. წესიერი ხუთკუთხედების დიაგონალები ქმნიან ვარსკვლავისებურ ხუთკუთხედს (ნახ.189). ეს ფიგურა, როგორც ჯანმრთელობის სიმბოლო, ჯანმრთელობის ამულეტად ითვლებოდა. პითაგორელებმა სწორედ ეს სიმბოლო აირჩიეს თავიანთი კავშირის საცნობო ნიშნად. ხუთქიმიანი ვარსკვლავი – პენტოგრამა – თავისი ფორმის სრულყოფით ყოველთვის იქცევა ადამიანთა ყურადღებას. თანამედროვე სახელმწიფოების მრავალ დროშაზე და გერბზეა გამოსახული ხუთქიმიანი ვარსკვლავი.

პენტოგრამაში აღინიშნება მისი შემადგენელი მონაკვეთების შეფარდებათა საოცარი მუდმივობა. მართლაც, $AD:AC=AC:CD=AB:BC=AD:AE=AE:EC$. ამ

ფიგურის სიმეტრიულობის გამო ეს შეფარდებები შეიძლება საკმაოდ გავაგრძელოთ. როგორც ნახაზიდან ჩანს, AD მონაკვეთს C წერტილი ყოფს ისეთ ორ არატოლ ნაწილად, რომ დიდი AC ნაწილი ისე



ნახ.189



შეეფარდება მცირე CD ნაწილს, როგორც მთელი AD მონაკვეთი – დიდ AC ნაწილს.

თუ აღვნიშნავთ $AD=a$, $AC=b$, მაშინ $CD=a-b$ და გვექნება $a:b=b:(a-b)$; საიდანაც $a^2-ab-b^2=0$. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $a:b=AD:AC=\Phi$, მაშინ მივიღებთ: $\Phi^2-\Phi-1=0$; საიდანაც Φ -ს აქვს ერთადერთი დადებითი მნიშვნელობა: $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,618034\dots$; ხშირად განიხილავენ სიდიდეს: $\varphi = \frac{1}{\Phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,618034\dots$

Φ რიცხვის მნიშვნელობა შეიძლება მიახლოებით გამოისახოს $2\ 3\ 5\ 8\ 13$
 $3'\ 5'\ 8'\ 13'\ 21'\dots$ წილადებითაც, სადაც 2,3,5,8,13,21,... – ფიბონაჩის რიცხვებია (ფიბონაჩის რიცხვები – რიცხვითი მიმდევრობა 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,... რომლის წევრები შედგენილია რეკურენტული წესით $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$, როცა $a_0=a_1=1$, სადაც ყოველი შემდგომი რიცხვი ტოლია წინა ორი რიცხვის ჯამის. იტალიელმა მათემატიკოსმა ლეონარდო ფიბონაჩიმ (პიზანელმა) ეს მიმდევრობა შემოიღო კუპდღლების გამრავლების ამოცანასთან დაკავშირებით. 1225 წელს ქ. პიზაში იმპერატორის თანდასწრებით, ერთ-ერთი ტურნირის დროს, იმ დროისათვის ცნობილ მათემატიკოს ფიბონაჩის დაუსვეს ამოცანა: იპოვეთ სრული კვადრატი, რომელიც სრული კვადრატი დარჩება როგორც მისი 5-ით გადიდების, ასევე მისი 5-ით შემცირების შემდეგაც. გარკვეული დროის შემდეგ ფიბონაჩიმ იპოვა ამოცანის პასუხი:

$$\begin{pmatrix} 41 \\ 12 \end{pmatrix}^2 - 5 = \begin{pmatrix} 31 \\ 12 \end{pmatrix}^2, \quad \begin{pmatrix} 41 \\ 12 \end{pmatrix}^2 + 5 = \begin{pmatrix} 49 \\ 12 \end{pmatrix}^2$$

ეს ამოცანა რომ ჩავწეროთ ზოგადი სახით, მივიღებთ სამ რიცხვს:

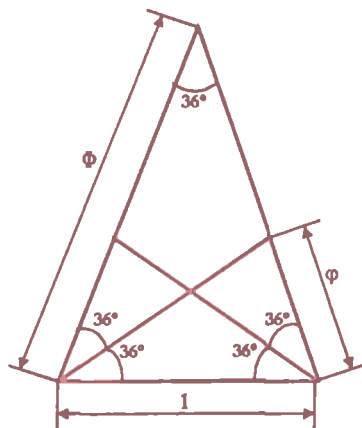
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^2 - z; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^2; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^2 + z, \quad \text{რომლებიც წარმოადგენენ სრულ}$$

კვადრატებს და არითმეტიკული პროგრესიის მიმდევრობით წევ-

რებს სხვაობით z . ამ რიცხვებს ფიბონაჩის რიცხვები ეწოდებათ.

აღნიშვნები Φ და ϕ შემოღებულია ძველი ბერძენი მოქანდაკის ფიდიას პატივსაცემად, რომელიც ცხოვრობდა ძვ.წ.ად. V საუკუნეში და ხელმძღვანელობდა ათენში პარფენონის ტაძრის მშენებლობას, რომლის პროპორციებში მარვალჯერაა გამოყენებული ϕ რიცხვი.

არსებობს „ოქროს სამკუთხედიც“, რომელიც წარმოადგენს წესიერი ვარსკვლავისებური ხუთკუთხედის ნაწილს. ასეთია ტოლფერდა სამკუთხედი, სადაც ფერდის სიგრძის შეფარდება ფუძის სიგრძესთან უდრის Φ -ს. ასეთი სამკუთხედის შესანიშნავი თვისება ის არის, რომ ფუძესთან მდებარე კუთხეების ბისექტრისების სიგრძე თვით ფუძის სიგრძის ტოლია. ამ სამკუთხედში წვეროსთან მდებარე კუთხე 36° -ის ტოლია (ნახ.190).



ნახ.190

არსებობს „ოქროს კუბოიდი“. ის არის მარკუთხა პარალელეპიპედი (პარალელეპიპედის შესახებ ვისაუბრებთ შემდეგ), რომლის წიბოებია Φ , 1 და ϕ . მისი ზედაპირის ფართობია 4Φ , ხოლო დიაგონალი 2-ის ტოლია.

ვარსკვლავისებური ხუთკუთხედი ბაბილონურ ნახატებშიც არსებობს.

მრავალი მკვლევარის თვალსაზრისით, Φ რიცხვით გამოსახული თანაფარდობა (არქიტექტურაში, მხატვრობაში) ყველაზე სასიამოვნოა თვალისათვის. ლეონარდო და ვინჩი თვლის, რომ ადამიანის სხეულის იდეალური პროპორციები დაკავშირებული უნდა იყოს Φ რიცხვთან. ლეონარდო და ვინჩიმ თავისი ცნობილი „ჯოკონდას“ კომპოზიციაში გამოიყენა „ოქროს სამკუთხედები“.

აღორძინების ეპოქაში ეს ტერმინი დიდი პოპულარულობით სარგებლობდა მხატვრების, მოქანდაკეებისა და არქიტექტორების

წრეში. ასე, მაგალითად, მხატვრულ პეიზაჟებში ჰორიზონტის ხაზი ტილოს (ნახატს) სიმაღლეში ყოფს დაახლოებით 5 შეფარდებით, ასეთივე შეფარდებით ირჩევენ სურათის ზომებს: სიგანის შეფარდება სიმაღლესთან უდრიდა 5 რიცხვს. ასეთ მართკუთხედს „ოქროს მართკუთხედს“ უწოდებენ.

პირველი ლიტერატურული წყარო, რომელშიც მონაკვეთის ოქროს კვეთით დაყოფა გვხვდება, ევკლიდეს ცნობილი „საწყისებია“ (III საუკუნე ჩვენს ერამდე). „საწყისების“ უკვე მეორე წიგნში ევკლიდე აგებს ოქროს კვეთას; რასაც შემდგომში იყენებს წესიერი ხუთკუთხედისა და წესიერი ექვსკუთხედის ასაგებად. ოქროს კვეთა გამოყენებულია სტერეომეტრიაშიც - წესიერი მრავალწახნაგების ასაგებად. ამასთან, უდავოა, რომ ოქროს კვეთას ევკლიდემდეც იცნობდნენ. კერძოდ, იგი ცნობილი იყო პითაგორასა და მისი მოწაფეებისათვის (VI საუკუნე ჩვენს წელთაღრიცხვამდე).

შუა საუკუნეებში კვლავ გავრცელდა ინტერესი ოქროს კვეთისადმი. მას ხშირად იყენებდნენ არა მარტო გეომეტრიაში, არამედ ხელოვნებასა და განსაკუთრებით არქიტექტურაში. XV საუკუნის დასასრულს დაიწერა სპეციალური წიგნი ოქროს კვეთის შესახებ. მისი ავტორი იმ დროის ერთ-ერთი უდიდესი მათემატიკოსი ლუკა პაჩიოლი იყო, ამ წიგნის დაწერის ერთ-ერთი სულისჩამდგმელი და მისი გამფორმებელი იყო გენიალური ლეონარდო და ვინჩი. სხვათა შორის, თვით ტერმინი „ოქროს კვეთა“ ლეონარდოს მიერაა შემოღებული.

აზომვის შედეგად ხელოვნებათმცოდნეებმა დაადგინეს, რომ ბევრ ხუროთმოძღვრულ შედევრში სწორედ ოქროს კვეთის პროპორციაა გამოყენებული. ქართველი მხატვრის სერგო ქობულაძის გამოკვლევაში დასაბუთებულია, რომ მცხეთის ჯგერის ტაძარი ოქროს კვეთის პროპორციის მიხედვით არის აგებული.

ოქროს კვეთა გამოიყენა სერგო ქობულაძემ, როდესაც თბილისის ოპერისა და ბალეტის თეატრისათვის 1961 წელს მოხატა სცენის საზეიმო დეკორაციული ფარდა. ეს ფარდა თეატრში

გაჩენილმა ხანძარმა შთანთქა.

არც კომპოზიტორები და პოეტები დარჩენილან „გულგრილნი“ ოქროს კვეთის მიმართ. ცნობილია, მაგალითად, რომ გამოჩენილმა უნგრელმა კომპოზიტორმა ბელა ბარტოკმა ბევრი თავისი მუსიკალური ნაწარმოების შექმნა ოქროს კვეთაზე დააფუძნა. რაც შეეხება პოეტებს, აკადემიკოსი გიორგი წერეთელი აღნიშნავს, რომ „პოეზიაში რუსთაველი პირველია მსოფლიოში და შეიძლება ერთადერთი, რომელმაც ოქროს კვეთაზე ააგო ესოდენ დიდი მოცულობის პოეტური ნაწარმოები. მისი პოემის 1587 სტროფიდან 863 ოქროს კვეთაზეა აგებული“.

„ვეფხისტყაოსანში“ სულ 1587 სტროფია. თითოეულ სტროფში - ოთხი სტრიქონი, ანუ კარედი. კარედი იყოფა ორ ნახევარკარედად - თითოეულში 8 მარცვალა. საგულისხმოა, რომ ნახევარკარედების საზღვარი სიტყვათგასაყარია - არ გვაქვს არც ერთი შემთხვევა, როცა სიტყვის ნაწილი ერთ ნახევარკარედშია მოთავსებული, ნაწილი - მეორეში. ნახევარკარედი თავის მხრივ ორ სეგმენტად იყოფა, თანაც სეგმენტებად დაყოფა ორგვარია:

A: სიმეტრიული, როცა ნახევარკარედში ორი თანაბარი ზომის სეგმენტია ოთხ-ოთხი მარცვლით თითოეულში.

B: ასიმეტრიული, როცა ნახევარკარედი ორი სხვადასხვა ზომის კენტმარცვლიანი სეგმენტისაგან შედგება.

საგულისხმოა, რომ A და B ტიპის სეგმენტების მონაცვლეობა ნახევარკარედის, კარედისა ან მთელი სტროფის ფარგლებში არსად არ გვხვდება. ისინი შეიძლება მონაცვლეობდნენ მხოლოდ სტროფების მიხედვით და ამის შესაბამისად ქმნიან მაღალ ან დაბალ შაირს (A - მაღალს, B - დაბალს).

მაღალი შაირის შემთხვევაში, როგორც ითქვა, ნახევარკარედში ორი თანაბარი ზომის სეგმენტია და თითოეულში ოთხი მარცვალა. ეს სიმბოლურად შეიძლება ასე ჩავეწეროთ: (4;4||4;4). განვიხილოთ ორი მაგალითი პოემიდან:

1.8.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. კუთხე გავყოთ ოთხ ტოლ ნაწილად.
2. კუთხის გვერდებს შორის გამავალი სხივის (სხივის სათავე კუთხის წვეროს ემთხვევა) მოცემულ წერტილზე გაავლეთ კუთხის გვერდების გადამკვეთი წრფე ისე, რომ მანძილი ამ წერტილიდან კუთხის გვერდების გადაკვეთის წერტილებამდე ტოლი იყოს.
3. ააგეთ სამკუთხედი ორი გვერდისა და შემოხაზული წრეწირის რადიუსის მიხედვით.
4. ააგეთ სამკუთხედი ორი გვერდისა და უდიდესი მათგანის მოპირდაპირე კუთხის მიხედვით, თუ $a=6\text{სმ}$, $b=4\text{სმ}$, ხოლო $\alpha=70^\circ$.
5. ააგეთ ტოლფერდა სამკუთხედი ფერდისა და ფუძესთან მდებარე კუთხის მიხედვით.
6. ააგეთ მართკუთხა სამკუთხედი კათეტისა და ერთ-ერთი მახვილი კუთხის მიხედვით.
7. ააგეთ მართკუთხა სამკუთხედი ჰიპოტენუზისა და მახვილი კუთხის მიხედვით.
8. ააგეთ მართკუთხა სამკუთხედი კათეტების ჯამისა და ჰიპოტენუზის მიხედვით.
9. ააგეთ მართკუთხა სამკუთხედი ერთ-ერთი კათეტისა და მეორე კათეტისა და ჰიპოტენუზის ჯამის მიხედვით.
10. ააგეთ სამკუთხედი, თუ მოცემულია მისი ორი კუთხე და პერიმეტრი.
11. ააგეთ სამკუთხედი ABC, თუ მოცემულია $\angle B$, AC გვერდი და B წვეროდან AC გვერდზე დაშვებული სიმაღლე.
12. ააგეთ სამკუთხედი ორი გვერდითა და ერთი მათგანისადმი გავლებული მედიანის მიხედვით.
13. ააგეთ ტოლფერდა სამკუთხედი მისი ფუძის და ფერდების მედიანების მიხედვით.
14. ააგეთ სამკუთხედი ორი გვერდისა და მესამე გვერდის მედიანის მიხედვით.

15. ააგეთ ABC სამკუთხედი, თუ მოცემულია $\angle B$, BC გვერდზე დაშვებული სიმაღლე და AC გვერდის მედიანა.
16. ააგეთ სამკუთხედი მისი სამი მედიანის მიხედვით.
17. ააგეთ პარალელოგრამი მისი გვერდებისა და ერთ-ერთი სიმაღლის მიხედვით.
18. ააგეთ პარალელოგრამი მისი დიაგონალებისა და ერთ-ერთი გვერდის მიხედვით.
19. ააგეთ სამკუთხედი ორი გვერდისა და ამ გვერდებს შორის გამავალი სამკუთხედის ბისექტრისის მიხედვით.
20. ააგეთ ტრაპეცია მისი ოთხი გვერდის მიხედვით.
21. ააგეთ ტრაპეცია მისი ფუძეების, ერთ-ერთი ფერდისა და სიმაღლის მიხედვით.
22. ააგეთ ტრაპეცია მისი ფუძეების და დიაგონალების მიხედვით.
23. მოცემულ ორ წერტილზე გაავლეთ მოცემული რადიუსის წრეწირი.
24. წრეწირის შიგნით მდებარე წერტილზე გაავლეთ ქორდა ისე, რომ იგი ამ წერტილით შუაზე გაიყოს.
25. მოცემულ წერტილზე გაავლეთ წრფე, რომელსაც მოცემული წრეწირი მოცემული სიგრძის ქორდას ჩამოჭრის.
26. გაავლეთ მოცემული ორი წრეწირის საერთო გარე მხეები.
27. გაავლეთ მოცემული ორი წრეწირის საერთო შიგა მხეები.
28. ააგეთ ტოლფერდა სამკუთხედი მისი ფუძისა და ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსის მიხედვით.
29. იპოვეთ წრეწირის მოცემულ წერტილზე გამავალ ქორდათა შუაწერტილების გეომეტრიული ადგილი.
30. ააგეთ მოცემული ორი გადამკვეთი წრფისა და მოცემული წრეწირის მხეები წრეწირი.

1.8.2. ტესტი №8

1. შეიძლება თუ არა წრფის გარეთ მდებარე წერტილიდან ამ წრფეზე დაეუშვათ მართობი?
 - ა) არ შეიძლება; ბ) შეიძლება დაეუშვათ ორი მართობი;
 - გ) შეიძლება დაეუშვათ ერთადერთი მართობი;
 - დ) ზოგჯერ შეიძლება, ზოგჯერ არა;
 - ე) შეიძლება უამრავი მართობის დაშვება.
2. შეიძლება თუ არა წრფის გარეთ მდებარე წერტილზე გავავლოთ ამ წრფის პარალელური წრფე?
 - ა) შეიძლება გავავლოთ ერთადერთი წრფე; ბ) არ შეიძლება;
 - გ) ზოგჯერ შეიძლება, ზოგჯერ არა;
 - დ) შეიძლება გავავლოთ ორი წრფე;
 - ე) შეიძლება გავავლოთ უამრავი წრფე.
3. შეიძლება თუ არა ერთ წრფეზე არამდებარე სამ მოცემულ წერტილზე წრეწირის გავლება?
 - ა) შეიძლება უამრავი წრეწირის გავლება; ბ) არ შეიძლება;
 - გ) შეიძლება ორი წრეწირის გავლება;
 - დ) ზოგჯერ შეიძლება, ზოგჯერ არა;
 - ე) შეიძლება გავავლოთ ერთადერთი წრეწირი.
4. შეიძლება თუ არა სამკუთხედის აგება, თუ მოცემულია მისი ორი გვერდის სიგრძე?
 - ა) შეიძლება მხოლოდ ორი სამკუთხედის აგება; ბ) არ შეიძლება;
 - გ) შეიძლება მხოლოდ სამი სამკუთხედის აგება;
 - დ) ზოგჯერ შეიძლება, ზოგჯერ არა;
 - ე) შეიძლება უსასრულო ოდენობის სამკუთხედის აგება.
5. შეიძლება თუ არა სამკუთხედის აგება, თუ მოცემულია მისი ორი კუთხე?
 - ა) შეიძლება მხოლოდ ორი სამკუთხედის აგება;
 - ბ) შეიძლება მხოლოდ სამი სამკუთხედის აგება; გ) არ შეიძლება;
 - დ) ზოგჯერ შეიძლება, ზოგჯერ არა;

- ე) შეიძლება უსასრულო ოდენობის სამკუთხედის აგება.
6. AB მონაკვეთის შუაწერტილის პოვნისათვის მისი ბოლოებიდან უნდა შემოვხაზოთ რკალები, რომელთა რადიუსები
- ა) ერთმანეთის ტოლი არ არის;
 - ბ) ერთმანეთის ტოლია, მაგრამ მონაკვეთის ნახევარზე ნაკლები;
 - გ) ერთმანეთის ტოლია და მასთან მონაკვეთის ნახევრის ტოლიცაა;
 - დ) ერთმანეთის ტოლია და მონაკვეთის ნახევარზე მეტია.
7. გეომეტრიული აგების ამოცანის ამოხნის ეტაპებია:
- ა) მხოლოდ აგება; ბ) მხოლოდ ანალიზი;
 - გ) მხოლოდ გამოკვლევა;
 - დ) ანალიზი, აგება, დამტკიცება, გამოკვლევა.
8. პარალელოგრამის აგების ამოცანას მისი a ფუძით, h_a სიმაღლით და ერთ-ერთი d დიაგონალით აქვს (თუ $d > h_a$).
- ა) ერთადერთი ამონახსნი; ბ) მხოლოდ ორი ამონახსნი;
 - გ) უამრავი ამონახსნი;
 - დ) შეუძლებელია აგება (ამონახსნი არა აქვს).
9. პარალელოგრამის აგების ამოცანას მისი a ფუძით, h_a სიმაღლით და ერთ-ერთი d დიაგონალით აქვს (თუ $d = h_a$).
- ა) ერთადერთი ამონახსნი; ბ) მხოლოდ ორი ამონახსნი;
 - გ) უამრავი ამონახსნი; დ) ამონახსნი არა აქვს.
10. თუ C წერტილი AB მონაკვეთს ოქროს პროპორციით ჰყოფს, მაშინ
- ა) $AC=CB$; ბ) $AC=\frac{1}{2}BC$; გ) $AC=AB:CB$; დ) $AC:AB=BC:AC$;
 - ე) $AC:AB=AC:BC$.

19. ბრტყელი ფიგურის ფართობი, ტოლი ფიგურების ფართობების ტოლობა. ბრტყელი ფიგურის ფართობის კავშირი მისი შემადგენელი ნაწილების ფართობებთან.

ბრტყელი ფიგურის ფართობის ცნების შემოტანამდე გავარკვიოთ თუ რა არის სიდიდე და კერძოდ სკალარული სიდიდე.

ჯერ კიდევ უძველესი დროიდან ადამიანის პრაქტიკული მოღვაწეობა მეცნიერებისაგან მოითხოვდა სხვადასხვა (მაგრამ ერთგვაროვანი) ობიექტების ფიზიკურ, გეომეტრიულ და სხვა თვისებათა თანაზომადობას. ასეთმა თანაზომადობამ (შედარებამ) ბუნებრივად მიგვიყვანა განსახილველი სიმრავლის ყოველი ელემენტის რიცხვის შეთანადების მათემატიკურ კონსტრუქციამდე, ამასთან, ეს რიცხვი ამ ელემენტს ახასიათებს გარკვეული თვალსაზრისით. ასეთ კონსტრუქციებს წარმოადგენს სიგრძის, ფართობის, მასის, ტემპერატურის და სხვათა გაზომვის ხერხები. ამ კონსტრუქციებში განსახილველი სიმრავლის ერთი რომელიმე ელემენტი შეირჩევა და დაერქმევა ერთეულის სახელი, დანარჩენი ელემენტები კი იზომება ამ ერთეულის საშუალებით ჩვეულებრივი წესით, რის შედეგადაც მიიღება ნამდვილი რიცხვი, რომელიც მათ ახასიათებთ.

ზემოთხსენებული კონსტრუქციები შეიძლება საფუძვლად დაედოს მათემატიკურ აბსტრაქციებს, რომლებსაც მივყავართ სიდიდის მათემატიკურ ცნებამდე, დადებით სიდიდეებს ქვემოთ მოყვანილი აქსიომები განსაზღვრავს.

სიდიდე ითვლება მოცემულად, თუ მოცემულია ობიექტების სიმრავლე და ამ სიმრავლეზე ტოლობის მიმართება ($=$), მეტობის მიმართება ($>$), ნაკლებობის მიმართება ($<$) და შეკრების ოპერაცია, ამასთან:

1. ნებისმიერი $a, b \in A$ -სათვის ადგილი აქვს ერთს შემდეგი სამიდან ან $a=b$, ან $a<b$, ან $a>b$.
2. თუ $a<b$ და $b<c$, მაშინ $a<c$ (ტრანზიტულობა).
3. ნებისმიერი $a, b \in A$ -სათვის არსებობს ცალსახად განსაზღვრული $c=a+b$.

4. $a+b=b+a$ (შეკრების კომუტაციურობა).
5. $a+(b+c)=(a+b)+c$ (შეკრების ასოციაციურობა).
6. $a+b>a$ (შეკრების მონოტონიურობა).
7. თუ $a>b$, მაშინ არსებობს ერთი და მასთან მხოლოდ ერთი სიდიდე $c \in A$, რომლისთვისაც $b+c=a$ (გამოკლების შესაძლებლობა).
8. როგორც არ უნდა იყოს $a \in A$ სიდიდე და ნატურალური რიცხვი n , მოიძებნება ისეთი $b \in A$ სიდიდე, რომ $n \cdot b=a$ (გაყოფის შესაძლებლობა).
9. როგორც არ უნდა იყოს სიდიდეები $a, b \in A$, მოიძებნება ისეთი $n \in \mathbb{N}$, რომ $nb > a$ (არქიმედეს, ან ევდოქსის აქსიომა).

1-9 აქსიომებზე აგებული სიდიდის ცნება სრულად არ აღწერს მონაკვეთების სიგრძეთა გაზომვას, რადგანაც არსებობს უთანაზომო მონაკვეთები. ამ მხრივ 1-9 აქსიომები ივსება შემდეგი აქსიომით:

10. ვთქვათ, სიდიდეთა მიმდევრობას $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n, \dots$; $a_i \in A$ სადაც $i=1, 2, \dots, n, \dots$ ახასიათებს თვისება $a_1 < a_2 < \dots < a_i < \dots < a_n < \dots$, ხოლო მიმდევრობას $b_j \in A$, სადაც $j=1, 2, \dots, n, \dots$ ახასიათებს თვისება $b_1 < b_2 < \dots < b_j < \dots < b_n < \dots$, ამასთან $a_i < b_j$ ნებისმიერი $i, j \in \mathbb{N}$ -სათვის, დავუშვათ, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სათვის სრულდება პირობა $|a_n - b_n| < \varepsilon$, მაშინ არსებობს ერთადერთი ელემენტი $c \in A$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს $a_i < c$, $c < b_j$ ნებისმიერი i და j -სათვის $\mathbb{N}$ სიმრავლიდან.

თვისებები 1-10 იძლევა დადებით სკალარულ სიდიდეთა სისტემის თანამედროვე ცნებას.

სკალარულია ისეთი სიდიდე, რომელიც ხასიათდება მხოლოდ რიცხვით, მიმართულების ან რომელიმე სხვა შეფასების გათვალისწინების გარეშე. ასეთი სიდიდეებია, მაგალითად, ფართობი, მოცულობა, ტემპერატურა და სხვა.

ცნობილია, რომ ობიექტებისა და მოვლენების ყველა თვისების გაზომვა არ შეგვიძლია. მაგალითებად შეგვიძლია დავასახელოთ მრავალი ცნება ფსიქოლოგიიდან, პედაგოგიკიდან, ბიოლოგიიდან და ა.შ. ასეთებია: ნებისყოფა, სიმამაცე, ძლიერება, სიყვარული, გე-

მოვწება, შიში, გულადობა და სხვა. ზოგჯერ ამ ცნებებსაც სიდიდეებს უწოდებენ, მაგრამ სხვა სიდიდეებისაგან განსხვავებით მათ ლიტერატურული სიდიდეები ჰქვია. ასეთ სიდიდეთა შედარება მხოლოდ ინტუიციურ დონეზე ხდება. თუ ამბობენ, რომ პეტრე უფრო მამაცია, ვიდრე პავლე, მაშინ სიმამაცის ხასრისზე მსჯელობენ მხოლოდ პეტრესა და პავლეს ქცევის მიხედვით, მათ მიერ ამ სიმამაცის გამომჟღავნების მიხედვით. ვერ შევძლებთ შევარჩიოთ სიმამაცის, სიძულვილის, ან სიყვარულის საზომი ერთეულები და ამიტომ არ შეიძლება გაიზომოს ეს სიდიდეები, შეფასდეს ისინი რაიმე რიცხვებით.

სკალარულ სიდიდეებს შორის გამოიყოფა ადიციური და არაადიციური, უწყვეტი და დისკრეტული, დეტერმინირებული და შემთხვევითი სიდიდეები.

სკალარული სიდიდეები ხასიათდებიან შემდეგი თვისებებით:

1. თუ მოცემულია ობიექტების რომელიმე სიმრავლე $a, b, c, \dots$; მაშინ მათგან ნებისმიერი ორისათვის შესაძლებელია მხოლოდ ერთი, შემდეგი სამი მიმართებიდან: $a=b$, $a<b$, $a>b$.
2. ტოლობის მიმართება აკმაყოფილებს პირობებს:
 სიმეტრიულობა: $a=b \Rightarrow b=a$;
 რეფლექსურობა: $a=a$;
 ტრანზიტულობა: $a=b \wedge b=c \Rightarrow a=c$
3. უტოლობის მიმართება აკმაყოფილებს პირობებს:
 ასიმეტრიულობა: $a>b \Rightarrow b<a$;
 ტრანზიტულობა: $a>b \wedge b>c \Rightarrow a>c$

სკალარულ სიდიდეთა მაგალითებს, სიგრძის, ფართობისა და მოცულობის გარდა, წარმოადგენს აგრეთვე სხეულის ტემპერატურა, მასა, სიმკვრივე და სხვა.

ადიციური სიდიდეები ხასიათდებიან შემდეგი თვისებებით.

სკალარულ სიდიდეთა მოცემული სიმრავლისათვის განსაზღვრულია შეკრების ოპერაცია, რომელიც გვაძლევს საშუალებას ამ სიმრავლის a და b ორი ელემენტით ცალსახად განვსაზღვროთ მესა-

მე c ელემენტი, რომელიც ამავე სიმრავლეს ეკუთვნის. c -ს ეწოდება a -სა და b -ს ჯამი და სიმბოლურად ჩაიწერება: $a+b=c$. ჯამი ემორჩილება კანონებს:

კომუტატიურობა: $a+b=b+a$;

ასოციაციურობა: $a+(b+c)=(a+b)+c$;

მონოტონურობა: თუ $a+b=c$, მაშინ $c>a$ და $c>b$.

ადიციური სიდიდის მაგალითია სიგრძე, ფართობი, მოცულობა და სხვა. სიდიდეები: სხეულის სიმკვრივე, ტემპერატურა, მართალია სკალარული სიდიდეებია, მაგრამ ადიციურს არ წარმოადგენენ. თუ მაგალითად, ერთმანეთს შევურევთ ორ ჭიქა წყალს, ერთს ტემპერატურით 30° , ხოლო მეორეს ტემპერატურით 80° , მაშინ შედეგში არ გვექნება 110° -ის მქონე წყალი.

სკალარულ-ადიციური უწყვეტი სიდიდე ხასიათდება შემდეგნაირად:

იმისათვის, რომ სკალარულ-ადიციური სიდიდე იყოს უწყვეტი, აუცილებელია და საკმარისია შესრულდეს შემდეგი პირობები:

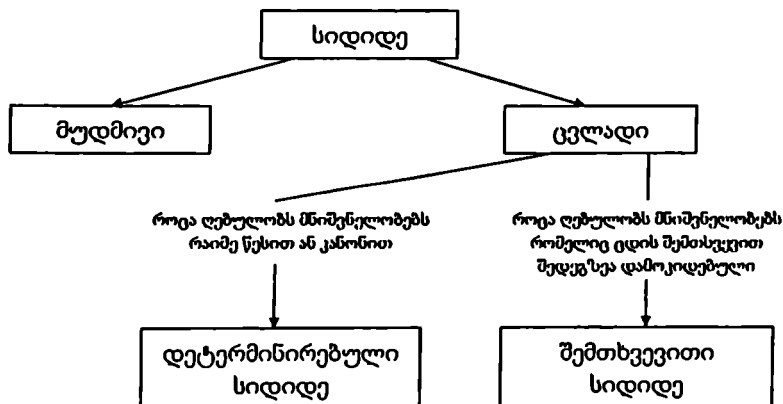
1. არქიმედეს აქსიომა. თუ $a>b$, მაშინ ყოველთვის მოიძებნება ისეთი n ნატურალური რიცხვი, რომ $nb>a$, სადაც $nb=\underbrace{b+b+\dots+b}_{n\text{-ჯერ}}$
2. მოცემული სიმრავლის ნებისმიერი a ელემენტისა და n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვისათვის ცალსახად განისაზღვრება ისეთი b ელემენტი, რომ $b=a/n$. ეს არის ნებისმიერი ელემენტის რაგინდ მცირე ნაწილებად უსასრულო დაყოფის შესაძლებლობა.
3. კანტორის განზოგადოებული აქსიომა. გვაქვს მოცემული სიმრავლის ელემენტების ორი მიმდევრობა $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$; და $a'_1, a'_2, \dots, a'_n, \dots$; რომლებიც აკმაყოფილებს პირობებს:
 - ა) $a_p < a'_q$ (ნებისმიერი p და q -სათვის);
 - ბ) $a_{n+1} > a_n$ და $a'_{n+1} < a'_n$;
 - გ) მოცემული სიმრავლის ნებისმიერი k ელემენტისათვის არსებობს ისეთი $n \in \mathbb{N}$, რომ $a'_n - a_n < k$, მაშინ არსებობს ერთადერთი ელემენტი a , რომელიც პირველი მიმდევრობის ყველა წევრზე

მეტია და მეორე მიმდევრობის ყველა წევრზე ნაკლები.

უწყვეტი სიდიდის უმარტივესი მაგალითია სიგრძე. ადვილი საჩვენებელია, რომ სიგრძისათვის სრულდება ყველა ის პირობა, რომელიც ზემოთ იყო მოცემული.

უნდა აღინიშნოს, რომ უწყვეტ სიმრავლეს უპირისპირდება დისკრეტული სიმრავლე, რომელიც შედგება ცალკეული დაუყოფელი ელემენტებისაგან. ასეთ სიმრავლეთა მაგალითებია წიგნების სიმრავლე ბიბლიოთეკაში, ვარსკვლავების სიმრავლე გალაქტიკაში და სხვა.

სკალარული სიდიდეები შეიძლება გავყოთ მუდმივ სიდიდეებად და ცვლად სიდიდეებად. ავაგოთ შემდეგი სქემა:



მუდმივი სიდიდეა, მაგალითად, დღე-ღამეში საათების ოდენობა. დეტერმინირებული სიდიდეა მუდმივი სიჩქარის შემთხვევაში გავლილი გზის სიგრძე, იგი ტოლია სიჩქარის ნამრავლისა დროის იმ მონაკვეთზე, რომლის განმავლობაშიც ამ გზის გავლა მოხდა – $s=vt$. შემთხვევითი სიდიდის მაგალითია წლის განმავლობაში წვიმიანი დღეების ოდენობა.

ფიგურის ფართობი ეწოდება არაუარყოფით სიდიდეს, რომელიც ყოველი ბრტყელი ფიგურისათვის განსაზღვრულია ისე, რომ:

1. ტოლ ფიგურებს ტოლი ფართობები გააჩნიათ;
2. თუ ფიგურა შედგება ფიგურების სასრული რაოდენობისაგან, მაშინ მისი ფართობი ამ ფიგურათა ფართობების ჯამის ტოლია.

ფიგურის ფართობი სკალარულ-ადიციური უწყვეტი სიდიდეა (იგი შეიძლება იყოს დეტერმინირებული სიდიდე, ხოლო ზოგჯერ შემთხვევით სიდიდესაც წარმოადგენს) და ამიტომ აკმაყოფილებს ასეთი სიდიდეების ყველა თვისებას.

თუ ფიგურის ფართობის განსაზღვრას შევადარებთ მონაკვეთის სიგრძის განსაზღვრასთან, ვნახავთ, რომ ფართობი ხასიათდება იგივე თვისებებით, რითაც ხასიათდება სიგრძე, მაგრამ ისინი მოცემულია სხვადასხვა სიმრავლეზე. სიგრძე – მონაკვეთების სიმრავლეზე, ხოლო ფართობი – ბრტყელი ფიგურების სიმრავლეზე.

F ფიგურის ფართობი აღვნიშნოთ $S(F)$ სიმბოლოთი.

ფიგურის ფართობის გასაზომად უნდა შემოვიღოთ ფართობის ერთეული. ჩვეულებრივ ფართობის ერთეულად მიღებულია ისეთი კვადრატი, რომლის გვერდის სიგრძე ერთეულის ტოლია. e გვერდის მქონე კვადრატის ფართობი აღინიშნება e^2 -ით. ე. ი. თუ კვადრატის გვერდის სიგრძეა n , მაშინ მისი ფართობი იქნება n^2 .

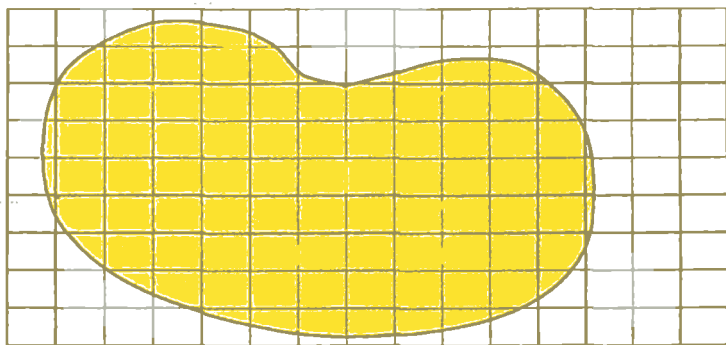
ფიგურის ფართობის გაზომვა მდგომარეობს ამ ფიგურის ფართობისა და ერთეული e^2 კვადრატის ფართობის ჯერად შედარებაში. ამ შედარების შედეგი არის ისეთი x რიცხვი, რომ $S(F) = x e^2$. ნამდვილ x რიცხვს ფართობის რიცხვითი მნიშვნელობა ეწოდება.

განვიხილოთ ფართობის გაზომვის ზოგიერთი ხერხი.

ერთ-ერთი ასეთი ხერხი, რომელიც უშუალოდ ემყარება ფართობის განსაზღვრას, არის ფართობის განსაზღვრა პალეტის საშუალებით. პალეტი არის კვადრატების ბადე, რომელიც დახაზულია გამჭირვალე მასალაზე.

დაეუშვათ, ბრტყელ F ფიგურაზე, რომელიც უნდა გაიზომოს, დადებულია e გვერდის მქონე კვადრატების ბადე – პალეტი. მაშინ შეიძლება გამოიყოს კვადრატები, რომლებიც მთლიანად ფიგურის შიგნითაა მოთავსებული და კვადრატები, რომლებსაც ფიგურის

საზღვარი რაიმე ნაწილს მოკვეთს. ვთქვათ, პირველი სახის კვადრატების რაოდენობაა m , ხოლო მეორისა n . ცხადია, ფიგურის ფართობი დააკმაყოფილებს პირობას $me^2 < S(F) < (m+n)e^2$ (ნახ.191).



ნახ.191.

m იქნება ფართობის ნაკლებობით მიახლოება, ხოლო $(m+n)$ იქნება ფართობის მეტობით მიახლოება. ცხადია, ფართობის გაზომვის შედეგი მით უფრო ზუსტი იქნება, რაც უფრო ნაკლებია ფართობის ერთეულის გვერდი. შეიძლება დავსვათ კითხვა: არსებობს თუ არა ისეთი ნამდვილი რიცხვი, რომელიც მეტია ნაკლებობით აღებულ ყოველ მიახლოებაზე? ამასთან, ეს რიცხვი იქნება ფართობის ზუსტი რიცხვითი მნიშვნელობა. მათემატიკაში დამტკიცებულია, რომ ნებისმიერი ფართობის ნებისმიერი ერთეულისათვის ასეთი რიცხვი არსებობს და იგი ერთადერთია.

საზოგადოდ, პალეტიტ ფართობის მიახლოებითი გაზომვის დროს იქცევინა შემდეგნაირად: ითვლიან ფიგურის საზღვრით გადაკვეთილ კვადრატებს და მთლიანად ფიგურის შიგნით მოთავსებული კვადრატების ოდენობას უმატებენ გადაკვეთილი კვადრატების ოდენობის ნახევარს.

რატომ იქცევინა ასე?

ვთქვათ m არის F ფიგურის შიგნით მოთავსებული კვადრატების ოდენობა, ხოლო n არის ფიგურის საზღვრის მიერ გადაკვეთილი კვადრატების ოდენობა; მაშინ $me^2 < S(F) < (m+n)e^2$. F ფიგურის ფართო-

ზის მიახლოებითი მნიშვნელობის საპოვნელად საჭიროა ვიპოვოთ მისი ზედა და ქვედა მიახლოებების საშუალო არითმეტიკული: ე.ი. $S(F) = \frac{m + (m + n)}{2} e^2$, გარდაქმნის შემდეგ გვაქვს: $S(F) = \left(m + \frac{n}{2}\right) e^2$.

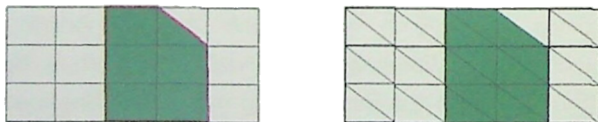
პალეტის გამოყენებით ფართობების გაზომვა მიახლოებითია და მას აქვს შეზღუდული გამოყენება, ამიტომ მათემატიკაში უძველესი დროიდან ემებდნენ ფართობის გაზომვის ისეთ ხერხებს, რომლებიც დაკავშირებული იყო ფიგურის ისეთ ელემენტებთან, როგორიცაა: სიმაღლე, გვერდი, რადიუსი და ა.შ.

ჩამოვყალიბოთ ფართობთა შედარებისა და მათზე მოქმედების ზოგიერთი წესი.

თუ ფიგურები ტოლია, მაშინ ტოლია მათი ფართობების რიცხვითი მნიშვნელობები (ფართობის ერთი და იგივე ერთეულის დროს).

თუ F ფიგურა შედგენილია $F_1, F_2, \dots, F_n$ ფიგურებისაგან, მაშინ F ფიგურის ფართობის რიცხვითი მნიშვნელობა ტოლია $F_1, F_2, \dots, F_n$ ფიგურების ფართობთა რიცხვითი მნიშვნელობების ჯამის (ფართობის ერთი და იგივე ერთეულის დროს).

ფართობის ერთეულის შეცვლისას ფართობის რიცხვითი მნიშვნელობაც იცვლება, იგი იზრდება იმდენჯერ, რამდენჯერაც ახალი ერთეული ნაკლებია ძველთან შედარებით, ან მცირდება იმდენჯერ, რამდენჯერაც ახალი ერთეული მეტია ძველთან შედარებით. მაგალითად, ნახ.192-ზე ფიგურა კვადრატული ერთეულით გაზომვისას

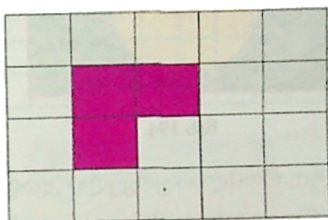
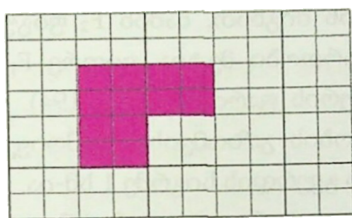


ნახ.192.

$5\frac{1}{2}$ -ის ტოლია, თუ კვადრატულ ერთეულს ორჯერ შევამცირებთ (ერთეულად გამოვიყენებთ ამ კვადრატული ერთეულის დიაგონალ-

ლით გაყოფის შედეგად მიღებულ მართკუთხა სამკუთხედს, რომელიც მისი ფართობის ნახევარს უდრის) მაშინ ფიგურის ფართობის გამომსახველი რიცხვი 2-ჯერ გაიზრდება და იგი 11 სამკუთხა ერთეულის ტოლი გახდება.

ნახ.193-ზე ფიგურა კვადრატული ერთეულით გაზომვისას 12-ის ტოლია, თუ კვადრატულ ერთეულს ოთხჯერ გავზრდით, მაშინ ახალ ერთეულში გაზომვისას ფიგურის ფართობის გამომსახველი რიცხვი ოთხჯერ შემცირდება და იგი 3-ის ტოლი გახდება ახალი ერთეულის მიმართ.



ნახ.193.

ტოლი ფიგურების მქონე ფიგურებს ტოლდები ეწოდება.

ტოლ მართკუთხედებს ტოლი ფართობები აქვს.

თუ მრავალკუთხედი დაყოფილია რამდენიმე მრავალკუთხედად ისე, რომ მათ საერთო შიგა წერტილები არა აქვთ, მაშინ მოცემული მრავალკუთხედის ფართობი დაყოფის შედეგად მიღებული მრავალკუთხედების ფართობთა ჯამის ტოლია.

ისეთ ორ მრავალკუთხედს, რომელთა დაშლა შეიძლება ერთნაირი ოდენობის წყვილ-წყვილად ტოლ და თანაუკვეთ მრავალკუთხედებად, ტოლშედგენილი ეწოდება.

თუ ორი ფიგურა ტოლშედგენილია მესამე ფიგურასთან, მაშინ ეს ფიგურები ტოლშედგენილია. მაშასადამე, ტოლშედგენილობის მიმართება ტრანზიტულია.

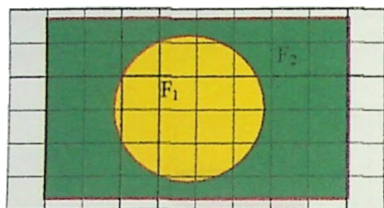
ცხადია, რომ ტოლშედგენილი ფიგურები ტოლდებია. პირიქითაც, ტოლდები ფიგურები ტოლშედგენილია.

ფიგურის ფართობის გასაზომად იყენებენ საზომთა მეტრულ

სისტემას, სახელდობრ:

1 კვადრატული კილომეტრი (კმ^2)=1000000 კვადრატულ მეტრს (მ^2); 1 მ^2 =100 დ მ^2 ; 1 დ მ^2 =100 ს მ^2 ; 1 მ^2 =10000 ს მ^2 ; 1 ჰა=10000 მ^2 ; 1 ჰა=100 არი; 1 არი=100 მ^2 .

დაწყებით სკოლაში მოსწავლეებს ფართობის შესახებ ეძლევათ მხოლოდ პირველადი ცნობები. ფართობის შესახებ წარმოდგენა მათ



ნახ.194.

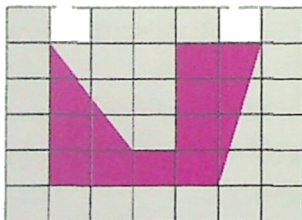
ექმნებათ ფიგურათა შედარების საფუძველზე. მაგალითად, თუ F_1 ფიგურა მდებარეობს F_2 ფიგურის შიგნით, მაშინ F_2 ფიგურის ფართობი მეტია, ვიდრე F_1 ფიგურის ფართობი (ნახ.194). ფართობის გაზომვისას გამოიყენება

პალეტი, რომლის ყოველი კვადრატის გვერდის სიგრძე 1 სმ-ია.

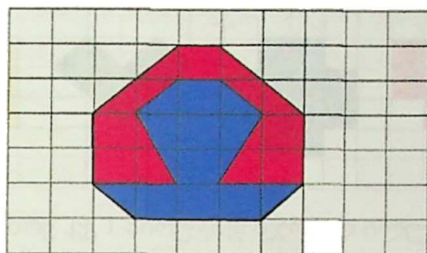
მართკუთხედის ფართობს თავდაპირველად მოსწავლეები ზომავენ ერთეული კვადრატების უშუალო დათვლით ან პალეტის საშუალებით, შემდეგ კი გვერდების რიცხვითი მნიშვნელობების გადამრავლებით.

19.1. საპარჯიშოები პრაქტიკული მეთოდებისათვის

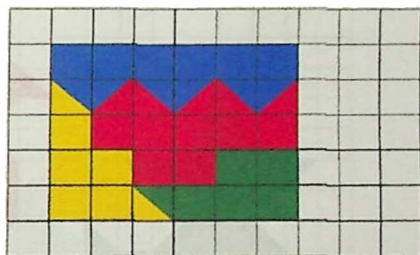
1. ვიპოვოთ ფერადი ფიგურის ფართობი.



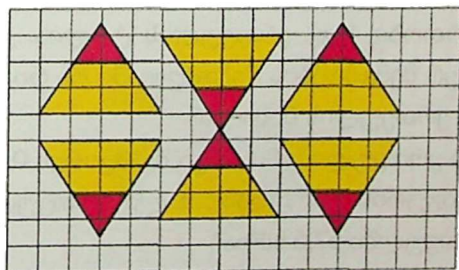
2. ნახაზზე ლურჯი ფერით მოცემულია F_1 ფიგურა, ხოლო წითელი ფერით F_2 ფიგურა. ვიპოვოთ და ერთმანეთს შევადაროთ $S(F_1)$ და $S(F_2)$.



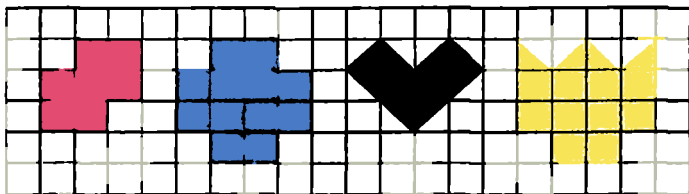
3. ნახაზზე მწვანე ფერით მოცემულია F_1 ფიგურა, წითელი ფერით – F_2 ფიგურა, F_3 ფიგურის ფერი ლურჯია, ხოლო F_4 ფიგურა კი – ყვითელია. ვიპოვოთ და ერთმანეთს შევადაროთ მათი ფართობები: $S(F_1)$, $S(F_2)$, $S(F_3)$ და $S(F_4)$.



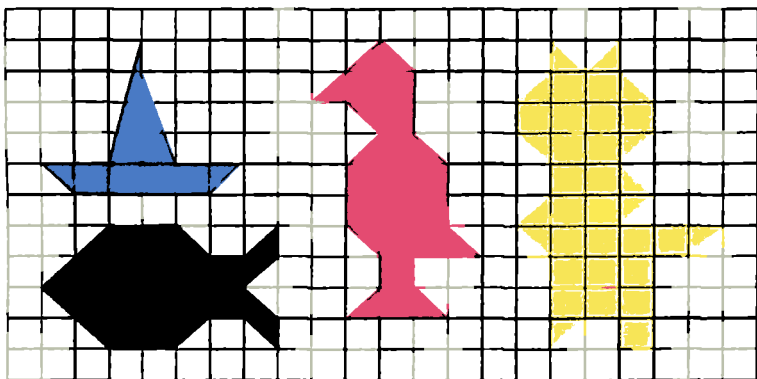
4. ნახაზზე მოცემულია სამკუთხედები. დავალაგოთ ეს სამკუთხედები ისე, რომ მივიღოთ ექვსკუთხედი, ხოლო წითლად გაფერადებული კუთხეებიდან კიდეც ერთი ექვსკუთხედი. მთლიანი ექვსკუთხედი აღვნიშნოთ F_1 -ით, ხოლო წითელი ექვსკუთხედი F_2 -ით, ვიპოვოთ $S(F_1)$ და $S(F_2)$.



5. შემდეგი ფიგურებიდან იპოვეთ ტოლი ფართობის მქონე ფიგურები, თუ წითელ ფიგურას აღვნიშნავთ F_1 -ით, ლურჯს – F_2 -ით, მწვანეს – F_3 -ით, ხოლო ყვითელს – F_4 -ით.



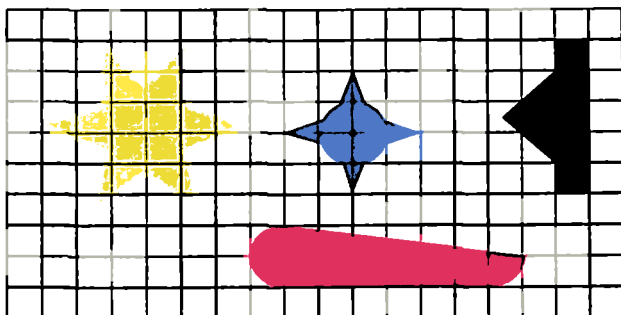
6. ნახაზზე მოცემული ლურჯი ფიგურის 1 კვ. ერთეული ღირს 4 ლარი, წითლის – 3 ლარი, მწვანის – 1 ლარი, ხოლო ყვითლის – 2 ლარი. რომელი ფიგურა არის ყველაზე ძვირი და რომელი იაფი?



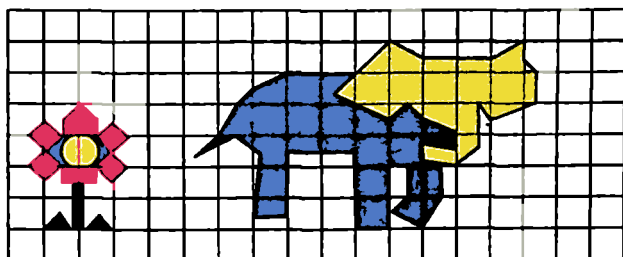
7. ფიგურის ფართობი ტოლია 14 კვ. ერთეულის. კვადრატული ერთეულის 7-ჯერ გაზრდის შემთხვევაში რა რიცხვს გაუტოლდება იგი ახალი კვადრატული ერთეულის მიმართ?
8. ფიგურის ფართობი 4 კვ. ერთეულის ტოლია. კვადრატული ერთეულის 3-ჯერ შემცირების შემთხვევაში რა რიცხვს გაუტოლდება იგი ახალი ერთეულის მიმართ?
9. კვადრატული ერთეული სმ²-ია, იგი შეამცირეს 0,1 სმ²-ით. რას გაუტოლდება ფიგურის ფართობი ახალი ერთეულის მიმართ, თუ იგი ძველ ერთეულში 57,6 სმ²-ია?
10. კვადრატული ერთეული 1 დმ²-ია, იგი გაზარდეს 0,1 დმ²-ით. რას

გაუტოლდება ფიგურის ფართობი ახალი ერთეულის მიმართ, თუ იგი ძველი ერთეულის მიმართ 17,6 დმ²-ია?

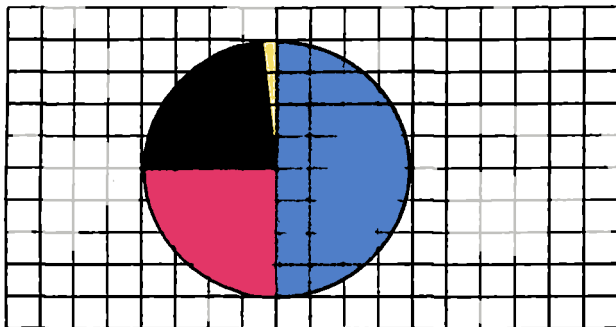
11. კვადრატული ერთეული 1 სმ²-ია, იგი ჯერ შეამცირეს 100-ჯერ, ხოლო შემდეგ გაზარდეს 10000-ჯერ. როგორ შეიცვლება ფიგურის ფართობის გამომსახველი რიცხვი, რომელიც 20 სმ²-ის ტოლია?
12. რამდენი არის ტოლია 5,4 ჰა?
13. რამდენი ჰა-ს ტოლია 7600 არი?
14. რამდენი მ²-ის ტოლია 0,029 კმ²?
15. რამდენი ჰექტარია 4 კმ²?
16. რამდენი დმ²-ის ტოლია 12 მ²?
17. 150 არის ფართობს დავუმატოთ 50 არის მქონე ფართობი, რამდენი ჰექტარი იქნება მიღებული ფართობი?
18. რამდენი დმ²-ის ტოლი იქნება 150 სმ²-ისა და 250 სმ²-ის ჯამი?
19. იპოვეთ ნახაზზე მოცემული ფიგურების ფართობთა ჯამი.



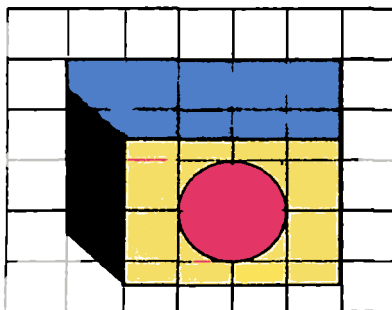
20. იპოვეთ ნახაზზე მოცემული ფიგურების ფართობთა ჯამი



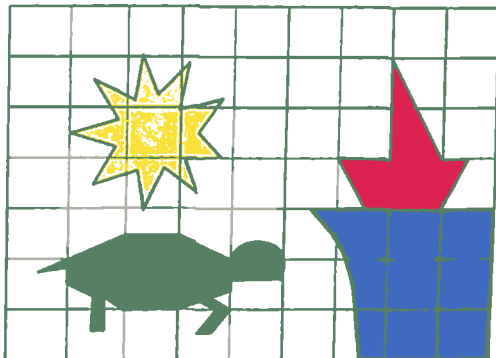
21. ნახაზზე მოცემულია მსოფლიო ოკეანეების განაწილება წრიული დიაგრამის სახით. წყნარი ოკეანე აღნიშნულია ლურჯი ფერით, ატლანტიკის ოკეანე – წითელი ფერით, ინდოეთის ოკეანე – მწვანე ფერით, ხოლო ჩრდილოეთ ყინულოვანი ოკეანე – ყვითელი ფერით. კვადრატული ერთეულის გამოყენებით დავადგინოთ თითოეული ოკეანის ფართობი, თუ მთლიანად ოკეანეების ფართობების ჯამი 360 მლნ კმ²-ია და ვიპოვოთ თითოეული ოკეანის პროცენტული წილი.



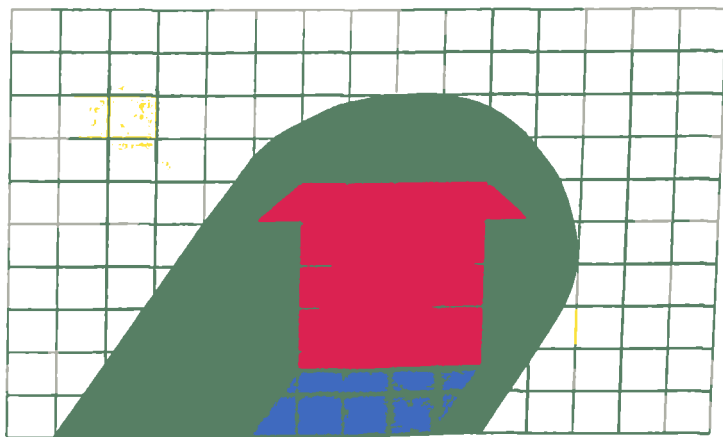
22. ნახაზზე პალეტის საშუალებით ვიპოვოთ როგორც მთლიანი ფიგურის ფართობი, ისე მისი გაფერადებული ნაწილების ფართობები და შევადაროთ ერთმანეთს. მთლიანი ფიგურა აღვნიშნოთ F-ით, წითელი ფიგურა F_1 -ით, ყვითელი ფიგურა F_2 -ით, მწვანე ფიგურა F_3 -ით, ხოლო ლურჯი კი – F_4 -ით.



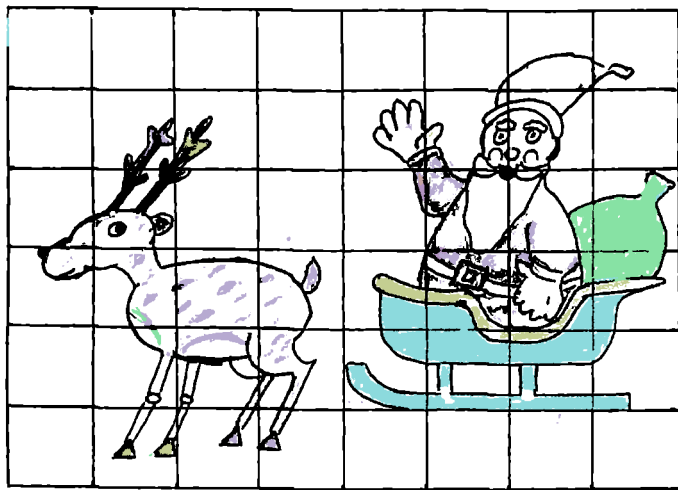
23. ნახაზზე პალეტის საშუალებით ვიპოვოთ ფიგურების ფართობები და დავალაგოთ ისინი ზრდის მიხედვით: ლურჯი ფიგურა აღნიშნულია F_1 -ით, წითელი – F_2 -ით, მწვანე – F_3 -ით, ხოლო ყვითელი კი – F_4 -ით.



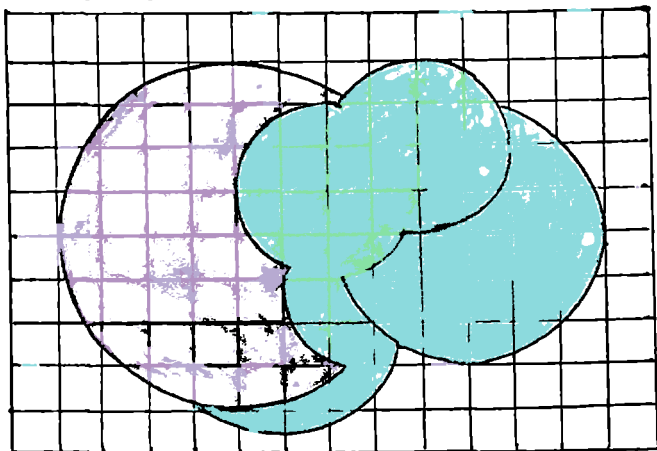
24. ნახაზზე პალეტის საშუალებით ვიპოვოთ ფიგურების ფართობები და დავალაგოთ ისინი კლებადობის მიხედვით. ლურჯი ფერით აღნიშნულია F_1 ფიგურა, წითელი ფერით – F_2 ფიგურა, მწვანე ფერით – F_3 ფიგურა, ხოლო ყვითელი ფერით – F_4 ფიგურა.



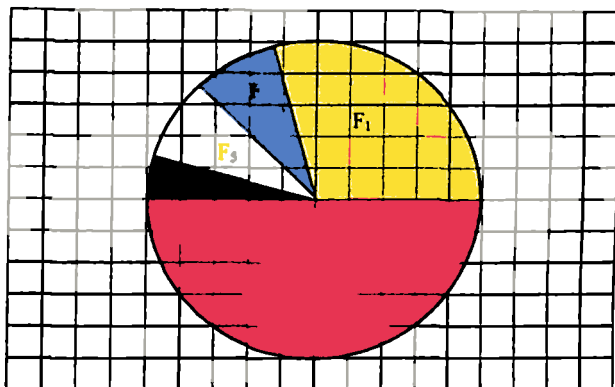
25. ნახაზზე „სანტა კლაუსის“ ფიგურა საახალწლო ხურჯინთან ერთად აღვნიშნოთ F_1 -ით, მარხილი – F_2 -ით, ხოლო ირემი – F_3 -ით. ვიპოვოთ მათი ფართობები და დავალაგოთ ზრდის მიხედვით.



26. ნახაზზე მოცემული ლურჯი ფიგურა აღვნიშნოთ F_1 -ით, ვარდისფერი – F_2 -ით, ხოლო მწვანე – F_3 -ით. ვიპოვოთ მათი ფართობები და დავალაგოთ კლებადობის მიხედვით.



27. წრიულ დიაგრამაზე წარმოდგენილია დედამიწის ხმელეთის ზედაპირის (მიახლოებით 150 მლნ კმ²) განაწილება მსოფლიო კონტინენტების მიხედვით. F₁-ით აღნიშნულია აზია, F₂-ით – ამერიკა, F₃-ით – აფრიკა, F₄-ით – ავსტრალია, F₅-ით – ანტარქტიდა, ხოლო F₆-ით – ევროპა. იპოვეთ თითოეულის ფართობი.



28. წინა ამოცანის მიხედვით წარმოვადგინოთ მსოფლიო კონტინენტების პროცენტული განაწილება.

29. შეავსეთ ცხრილი:

კმ ²	ჰექტარი	არი	მ ²	დმ ²
0,04				
	500			
		5000		

30. შეავსეთ ცხრილი:

მ ²	დმ ²	სმ ²
		100000
	400	
10000		

1.9.2. ტესტი №9

1. თუ კვადრატის გვერდი 5 მ-ია, მაშინ მისი ფართობია:
ა) 5 მ²; ბ) 10 მ²; გ) 15 მ²; დ) 20 მ²; ე) 25 მ².
2. კვადრატის პერიმეტრი 16 სმ-ია, მაშინ მისი ფართობია:
ა) 4 სმ²; ბ) 8 სმ²; გ) 12 სმ²; დ) 16 სმ²; ე) 20 სმ².
3. თუ კვადრატის ფართობი 1,69 სმ²-ია, მაშინ მისი პერიმეტრია:
ა) 5,2 სმ; ბ) 1,3 სმ; გ) 2,6 სმ; დ) 3,9 სმ; ე) 52 სმ.
4. თუ კვადრატის თითოეულ გვერდს ორჯერ გავზრდით, მაშინ მისი ფართობი
ა) 2-ჯერ გაიზრდება; ბ) არ გაიზრდება; გ) 4-ჯერ გაიზრდება;
დ) 8-ჯერ გაიზრდება; ე) 16-ჯერ გაიზრდება.
5. პალეტის საშუალებით შეიძლება გაიზომოს:
ა) ტემპერატურა; ბ) სიმკვრივე; გ) ფართობი;
დ) სიჩქარე; ე) დრო.
6. ვთქვათ m არის F ფიგურის შიგნით მოთავსებული კვადრატების ოდენობა, ხოლო n არის ფიგურის საზღვრის მიერ გადაკვეთილი კვადრატების ოდენობა. კვადრატები პალეტის ფიგურაზე დადების შემდეგ მიიღებიან (კვადრატის გვერდის სიგრძე e -ს ტოლია). მაშინ ფიგურის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:
ა) $\frac{m+n}{2}e^2$; ბ) $\frac{(m+n)^2}{2}e^2$; გ) $\frac{m^2+n}{2}e^2$; დ) $\left(m+\frac{n}{2}\right) \cdot e^2$;
ე) $(m^2+n^2) \cdot e^2$.
7. თუ F_1 ფიგურა F_2 ფიგურის ტოლია, მაშინ შესაბამისად მათი ფართობებისათვის $S(F_1)$ და $S(F_2)$ -სათვის გვაქვს:
ა) $S(F_1) > S(F_2)$; ბ) $S(F_1) = \frac{1}{2} S(F_2)$; გ) $\frac{1}{2} S(F_1) = S(F_2)$;
დ) $S(F_1) = S(F_2)$; ე) $S(F_1) < S(F_2)$.
8. კვადრატული ერთეული e -ს ტოლია. ფიგურის ფართობი ამ ერთეულის მიმართ ne^2 -ის ტოლია. კვადრატული ერთეული 3-ჯერ შეამცირეს, როგორ შეიცვლება ფიგურის ფართობის გამომსახვე-

ლი რიცხვი ახალი ერთეულის მიმართ?

- ა) იგივე დარჩება; ბ) სამჯერ გაიზრდება;
გ) სამჯერ შემცირდება; დ) შეუძლებელია ამ რიცხვის პოვნა;
ე) ორჯერ შემცირდება.

9. კვადრატული ერთეული e -ს ტოლია. ფიგურის ფართობი ამ ერთეულის მიმართ $1e^2$ -ის ტოლია. კვადრატული ერთეული 3 -ჯერ გაზარდეს, როგორ შეიცვლება ფიგურის ფართობის გამომსახველი რიცხვი ახალი ერთეულის მიმართ?

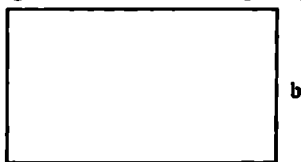
- ა) იგივე დარჩება; ბ) სამჯერ გაიზრდება;
გ) სამჯერ შემცირდება; დ) შეუძლებელია ამ რიცხვის პოვნა;
ე) ორჯერ შემცირდება.

10. რამდენი ჰექტარია 1 კმ^2 -ში?

- ა) $1 \text{ კმ}^2 = 1000 \text{ ჰა}$; ბ) $1 \text{ კმ}^2 = 100 \text{ ჰა}$; გ) $1 \text{ კმ}^2 = 10 \text{ ჰა}$;
დ) $1 \text{ კმ}^2 = 10000 \text{ ჰა}$; ე) $1 \text{ კმ}^2 = 100000 \text{ ჰა}$.

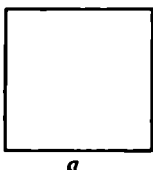
1.10. კვადრატის, მართკუთხედის, სამკუთხედის, პარალელოგრამის, რომბის, ტრაპეციის და წრის ფართობები

როგორც ადრე აღვნიშნეთ, თუ კვადრატის გვერდი ერთეული სიგრძისაა (მაგალითად 1 სმ, 1 დმ, ...), მაშინ ამ კვადრატის ფართობი ფართობის ზომის ერთეულია.



ნახ.195

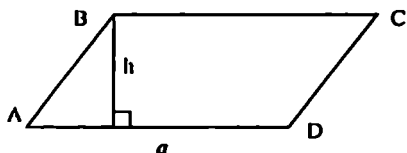
მართკუთხედის ფართობი შეიძლება ფორმულით ვიპოვოთ. ერთ-ერთ გვერდს ვუწოდოთ ფუძე, მის მართობ გვერდს – სიმაღლე. თუ ფუძეა a , ხოლო სიმაღლე – b , მაშინ ფართობი ასე გამოითვლება $S=ab$ (ნახ.195).



ნახ.196

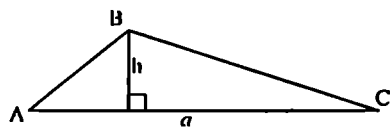
თუ $a>b$, მაშინ ზოგჯერ a -ს უწოდებენ მართკუთხედის სიგრძეს, ხოლო b -ს მართკუთხედის სიგანეს.

თუ კვადრატის გვერდის სიგრძე a ერთეულია, მაშინ მისი ფართობი $S=a^2$ (ნახ.196).



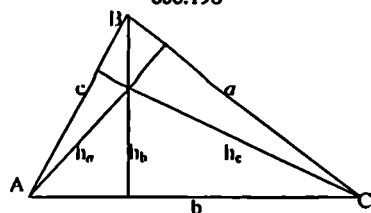
ნახ.197

პარალელოგრამის ფართობი ამ პარალელოგრამის ფუძისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია: $S=ah$ (ნახ.197).



ნახ.198

სამკუთხედის ფართობი მისი ფუძისა და ამ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ნახევრის ტოლია: $S=\frac{1}{2}ah$ (ნახ.198).



ნახ.199

მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი კათეტების ნამრავლის ნახევრის ტოლია. ეს ფართობი ჰიპოტენუზისა და ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ნახევრის ტოლიცაა.

თუ სამკუთხედის გვერდებია a, b, c ; სიმაღლეები – h_a, h_b, h_c , შიგა კუთხეები – A, B, C , ჩახაზული წრის რადიუსი – r , შემოხაზული წრის რადიუსი – R , ნახევარპერიმეტრი – $p = \frac{a+b+c}{2}$ (ნახ.199) და სამკუთხედის ფართობს S -ით აღვნიშნავთ, გვექნება მისი გამოსათვლელი შემდეგი ფორმულები:

$$1. S = \frac{1}{2} a \cdot h_a; \quad S = \frac{1}{2} b \cdot h_b; \quad S = \frac{1}{2} c \cdot h_c.$$

$$2. S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (ჰერონის ფორმულა);}$$

$$3. S = \frac{1}{2} a \cdot b \sin C; \quad S = \frac{1}{2} b \cdot c \sin A; \quad S = \frac{1}{2} c \cdot a \sin B.$$

$$4. S = r \cdot p; \quad S = \frac{abc}{4R}.$$

$$5. S = \frac{r}{\sqrt{3}} (h_a + h_b + h_c)$$

$$6. S = \frac{1}{2} \sqrt{2h_a h_b h_c R}.$$

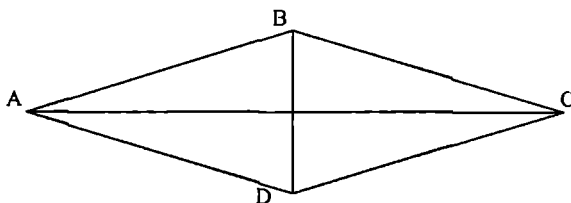
$$7. S = \frac{P}{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}}$$

$$8. S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)}}$$

წესიერი სამკუთხედის ფართობი: $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, ან $S = \frac{3 \sqrt{3}}{4} R^2$, ან

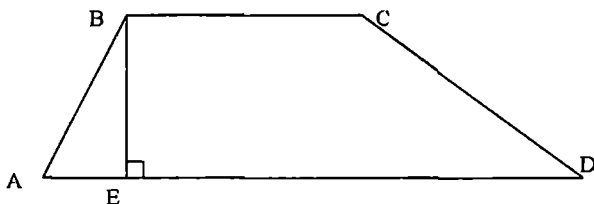
$S = 3 \sqrt{3} r^2$, სადაც a სამკუთხედის გვერდია, R – შემოხაზული წრეწირის რადიუსი, ხოლო r – ჩახაზული წრის რადიუსი.

რომბის ფართობი შეიძლება ასე გამოვთვალოთ: რომბის ფართობი დიაგონალების ნამრავლის ნახევრის ტოლია, $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ (ნახ.200).



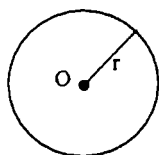
ნახ.200

ტრაპეციის ფართობი ფუძეების ჯამის ნახევრისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია $S = \frac{1}{2}(BC+AD) \cdot BE$ (ნახ.201).

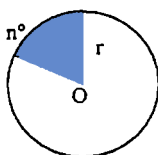


ნახ.201

თუ წრის რადიუსი არის r , მაშინ მისი ფართობი გამოითვლება ფორმულით: $S = \pi r^2$ (ნახ.202).



ნახ.202

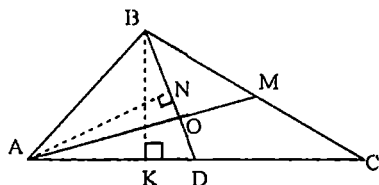


ნახ.203

თუ სექტორის ცენტრალური კუთხე ტოლია n° -ის, მაშინ მისი ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S = \frac{\pi r^2}{360} n \quad (\text{ნახ.203}).$$

განვიხილოთ ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნის წიმუში:



ნახ.204

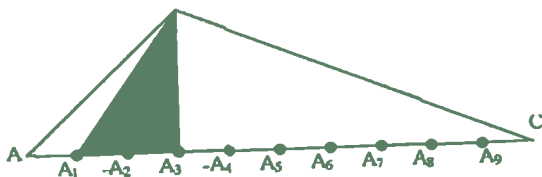
1. სამკუთხედის ფართობი 144 სმ²-ია. BD მედიანაა. O წერტილი მედიანების გადაკვეთის წერტილია. იპოვეთ AOD სამკუთხედის ფართობი.

ამოხსნა. რადგან ABD და DBC სამკუთხედებს საერთო სიმაღლე

აქვთ – BK და $AD=DC$, ამიტომ $S_{ABD}=S_{BDC}=72$ სმ².

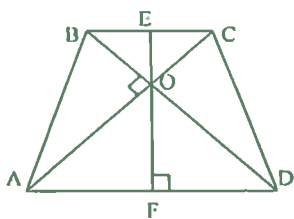
მედიანების თვისების თანახმად $OD=\frac{1}{3}BD$. რადგან AOD და ABD სამკუთხედებს საერთო სიმაღლე აქვთ A წვეროდან გავლებული AN, ამიტომ $S_{AOD}=\frac{1}{3}S_{ABD}=\frac{1}{3}\cdot 72=24$ სმ².

2. ABC სამკუთხედის ფართობი 45 სმ²-ია. AC გვერდი $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9$ წერტილებით 10 ტოლ ნაწილადაა გაყოფილი. იპოვეთ A_1BA_9 სამკუთხედის ფართობი (ნახ.205).



ნახ.205

ამოხსნა. ცხადია $S_{A_1BA_9}=\frac{1}{5}S_{ABC}=9$ სმ².



3. ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალები მართობულია. სიმაღლე არის h. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

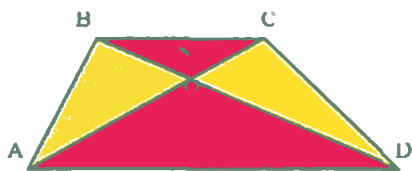
ამოხსნა. ცხადია, $OF=\frac{1}{2}AD$ (მედიანა

ჰიპოტენუზის ნახევარია) და $OE=\frac{1}{2}BC$.

$$h=\frac{1}{2}(BC+AD). S=\frac{1}{2}(BC+AD)\cdot h=h^2. S=h^2.$$

4. ABCD ტრაპეციის დიაგონალები O წერტილში იკვეთება. BOC სამკუთხედის ფართობი არის S_1 , AOD სამკუთხედის ფართობი არის S_2 . იპოვეთ ABCD ტრაპეციის ფართობი (ნახ.206).

ამოხსნა. ცხადია, $S_{ABC}=S_{BDC}$ – ამ სამკუთხედების BC ფუძეზე დაშვებული სიმაღლეები ტოლია. ამიტომ $S_{AOB}=S_{COD}$. აღვნიშნოთ ეს



ნახ.206

ფართობი x -ით. ცხადია,

$$\frac{x}{S_2} = \frac{BO}{OD}; \quad \frac{BO}{OD} = \frac{S_1}{x}.$$

აქედან

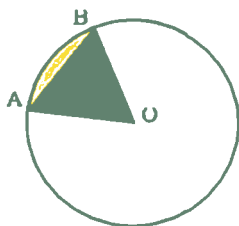
$$\frac{x}{S_2} = \frac{S_1}{x} \quad \text{გვაქვს } x = \sqrt{S_1 S_2}.$$

მაშასადამე,

$$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$$

5. წრის რადიუსი 1 დმ-ია. ამ წრეში მოთავსებული AOB სექტორის ცენტრალური კუთხე 60° -ის ტოლია. ვიპოვოთ ამ სექტორში მოთავსებული AB სეგმენტის ფართობი (ნახ.207).

ამოხსნა. AOB სექტორის ფართობია $S_1 = \frac{\pi r^2 \cdot 60}{360} = \frac{\pi}{6}$ დმ². AOB



ნახ.207

სამკუთხედის ფართობია $S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ დმ². მაშინ AB

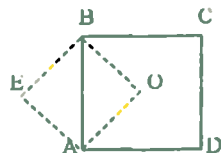
სეგმენტის

ფართობი

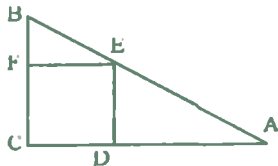
$$S = S_1 - S_2 = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12} \text{ დმ}^2.$$

1.10.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მაცადინეობისათვის

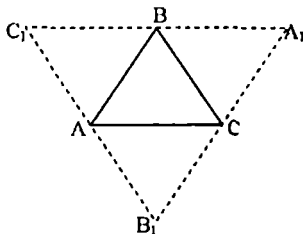
1. ABCD კვადრატის დიაგონალი 4,8 სმ-ია. მისი AB გვერდი AOB კვადრატის დიაგონალია. იპოვეთ AOB-ს ფართობი.



2. ABC სამკუთხედში CDEF კვადრატია ჩახაზული. $\angle A = 30^\circ$. $AE = 6$ სმ. იპოვეთ ჩახაზული კვადრატის ფართობი.

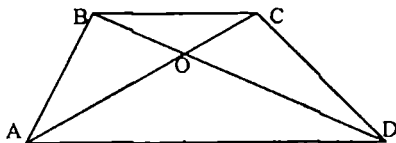


3. ABC ტოლგვერდა სამკუთხედი. მის თითოეულ გვერდზე სამკუთხედის გარეთ აგებულია ტოლგვერდა სამკუთხედები. ABC-ს ფართობია S. იპოვეთ $A_1B_1C_1$ ფიგურის ფართობი.



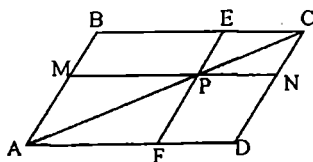
4. მართკუთხედის გვერდებია 2,5 მ და 0,4 მ. იპოვეთ ამ მართკუთხედის ტოლდიდი კვადრატის ფართობი და პერიმეტრი.
5. კვადრატის ფართობი 15 სმ^2 -ია. იპოვეთ მისი ტოლდიდი იმ მართკუთხედის პერიმეტრი, რომლის სიგრძე სიგანეზე 2,4-ჯერ მეტია.

6. ABCD ტრაპეციის AC და BD დიაგონალები O წერტილში იკვეთება. $BO:OD=3:4$. AOD სამკუთხედის ფართობი 42 სმ^2 -ია. იპოვეთ AOB სამკუთხედის ფართობი.

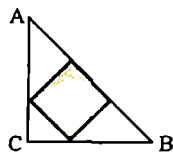


7. პარალელოგრამის სიმაღლეები 12 სმ და 30 სმია. პერიმეტრი 112 სმ. იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი.
8. პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებულ სიმაღლეებს შორის კუთხე 30° -ია. გვერდები 8 სმ და 15 სმ-ია. იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი.

9. ABCD პარალელოგრამის AC დიაგონალის რაიმე P წერტილზე გავლეს პარალელოგრამის გვერდების პარალელური MN და EF წრფეები. FPNP პარალელოგრამის ფართობი 50 სმ^2 აღმოჩნდა. იპოვეთ MBEP ოთხკუთხედის ფართობი.

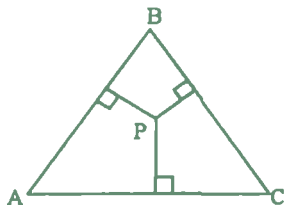


10. ტოლგვერდა მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული კვადრატის ორი წვერო ჰიპოტენუზაზეა, დანარჩენი ორი – კათეტებზე. ჰიპოტენუზა-



ზა 12,6 სმ-ია. იპოვეთ კვადრატის ფართობი.

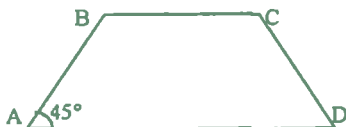
11. ABC ტოლგვერდა სამკუთხედი, მისი სიმაღლე 12 სმ-ია. იპოვეთ ამ სამკუთხედის წებისმიერი შიგა P წერტილიდან სამკუთხედების გვერდებამდე მანძილების ჯამი.



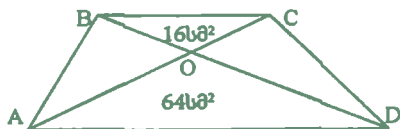
12. ტრაპეციის ფართობი 108 სმ²-ია, სიმაღლე – 12 სმ, ფუძეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:3. იპოვეთ ფუძეები.

13. ტრაპეციის ფართობი 72 დმ²-ია, სიმაღლე – 7,2 დმ. იპოვეთ შუა ხაზი.

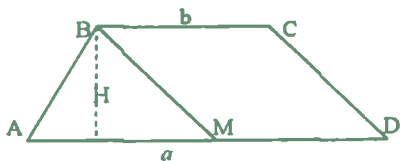
14. ABCD ტოლფერდა ტრაპეციის A კუთხე 45°-ის ტოლია. AD=2BC, BC=8 სმ. იპოვეთ ABCD ტრაპეციის ფართობი.



15. ABCD ტრაპეციის დიაგონალები O წერტილში იკვეთება. BOC-ს ფართობი 16 სმ²-ია, AOD-ს ფართობი – 64 სმ². იპოვეთ ABCD ტრაპეციის ფართობი.



16. ABCD ტრაპეციის ფუძეებია a და b , $BM \parallel CD$. იპოვეთ $S_{ABCD} : S_{BCDM} : S_{ABM}$.

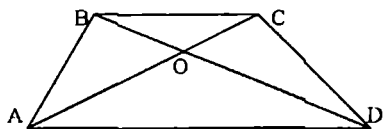


17. M წერტილი ABCD ტრაპეციის AB ფერდის შუაწერტილია, AD და BC ტრაპეციის ფუძეებია. ტრაპეციის ფართობი 20 კვადრატული ერთეულია. იპოვეთ CMD სამკუთხედის ფართობი.

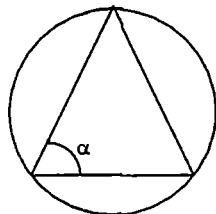


18. ABCD ტრაპეციის ფართობი 324 სმ²-ია. AC და BD დიაგონალები

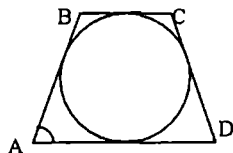
O წერტილში იკვეთება. AOD სამკუთხედის ფართობი 4-ჯერ მეტია BOC-ს ფართობზე. იპოვეთ AOD-ს ფართობი.



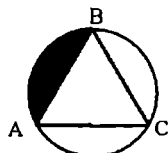
19. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხე არის α , $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. იპოვეთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ფართობის შეფარდება სამკუთხედის ფართობთან.



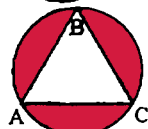
20. ტოლფერდა ტრაპეციაში ჩახაზულია წრეწირი. ამ ტრაპეციის მახვილი კუთხის სინუსი $\frac{\pi}{4}$ -ის ტოლია. იპოვეთ ამ ტრაპეციის ფართობის შეფარდება ჩახაზული წრეწირით შემოსაზღვრული წრის ფართობთან.



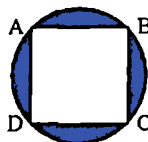
21. ABC წესიერი სამკუთხედი. მასზე შემოხაზულია წრეწირი. იპოვეთ AB ქორდით შემოსაზღვრული სეგმენტების ფართობების შეფარდება.



22. წესიერი ABC სამკუთხედი ჩახაზულია წრეწირში. წრეწირის რადიუსი 8 სმ-ია. იპოვეთ წითელი ფერით მოცემული ნაწილის ფართობი.



23. ABCD კვადრატია. წრეწირის რადიუსი 8 სმ-ია. იპოვეთ ფერადი ნაწილის ფართობი.



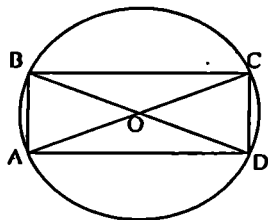
24. წრეზე შემოხაზულია კვადრატი, რომლის ფართობი ტოლია 100 სმ²-ის. იპოვეთ ფერადი ნაწილის ფართობი.



25. წრეში, რომლის რადიუსი 5 სმ-ია, მოთავსებულია მეორე წრე, რომლის რადიუსი 3 სმ-ია. იპოვეთ ფერადი ნაწილის ფართობი.



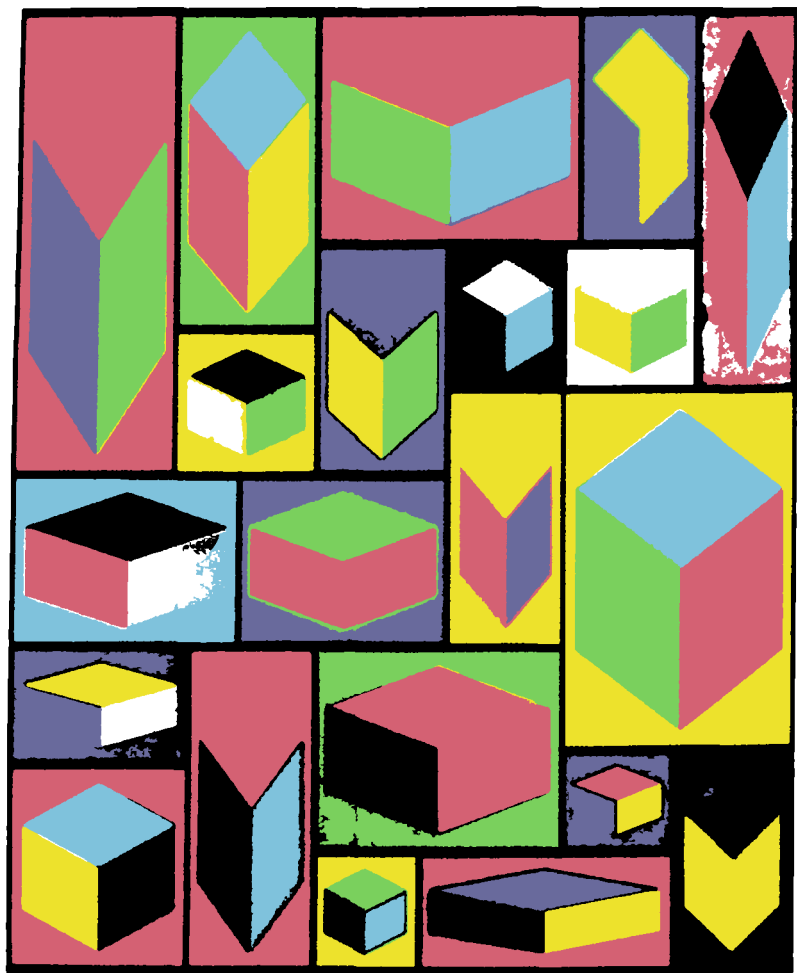
26. რომის გვერდია 10 სმ, მახვილი კუთხე – 60° . იპოვეთ ჩახაზული წრის ფართობი.
27. მართკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის სიგრძე 10π სმ-ია. მართკუთხედის პერიმეტრი 24 სმ-ს უდრის. იპოვეთ მართკუთხედის ფართობი.
28. კვადრატის ფართობია 4π სმ². რისი ტოლია მისი ტოლდიდი წრის დიამეტრი?
29. რას უდრის იმ წრეწირის რადიუსი, თუ შესაბამისი წრის ფართობი რიცხობრივად ტოლია წრეწირის სიგრძის?
30. წრეწირის სიგრძე 8 π მ-ია. იპოვეთ ამ წრეწირით შემოსაზღვრული წრის ფართობი.



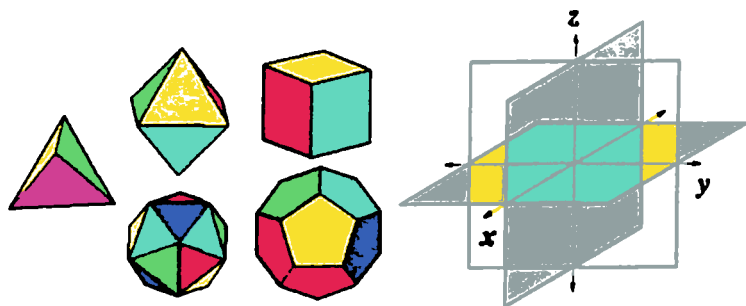
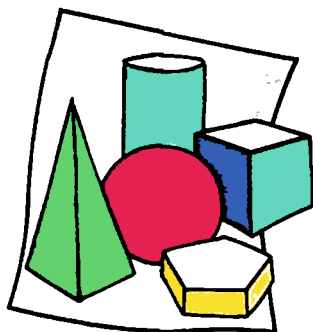
1.10.2. ტესტი №10

1. თუ მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები 6 სმ და 8 სმ-ია, მაშინ მისი ფართობი არის:
ა) 48 სმ²; ბ) 24 სმ²; გ) 36 სმ²; დ) 12 სმ²; ე) 14 სმ².
2. პარალელოგრამის ფართობი 48 სმ²-ია, ფუძე – 12 სმ. იპოვეთ ამ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე.
ა) 10 სმ; ბ) 3 სმ; გ) 6 სმ; დ) 8 სმ; ე) 4 სმ.
3. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა არის c : ამ სამკუთხედის ფართობია:
ა) $\frac{1}{2}c^2$; ბ) $\frac{1}{4}c^2$; გ) $\frac{1}{8}c^2$; დ) $\frac{1}{6}c^2$; ე) $\frac{1}{9}c^2$
4. ნებისმიერი სამკუთხედის სამი მედიანით დაყოფისას შექმნილი ექვსივე სამკუთხედი
ა) ტოლდიდია; ბ) ტოლია;
გ) განსხვავებული ფართობებისა; დ) ტოლფერდაა;
ე) მართკუთხაა.

5. თუ მართკუთხედსა და პარალელოგრამს ტოლი გვერდები აქვს, პარალელოგრამის მახვილი კუთხე 30° -ია, მაშინ
- მათი ფართობები ტოლია;
 - პარალელოგრამის ფართობი მართკუთხედის ფართობზე მეტია;
 - მართკუთხედის ფართობი პარალელოგრამის ფართობზე ორჯერ მეტია;
 - მართკუთხედის ფართობი პარალელოგრამის ფართობზე სამჯერ მეტია;
 - მართკუთხედის ფართობი პარალელოგრამის ფართობზე ოთხჯერ მეტია.
6. ტრაპეციის შუახაზი 12 სმ-ია, სიმაღლე – 5 სმ. იპოვეთ მისი ფართობი:
- 30 სმ²;
 - 60 სმ²;
 - 45 სმ²;
 - 64 სმ²;
 - 120 სმ².
7. ტრაპეციის ფუძეები 22 სმ და 18 სმ-ია. სიმაღლე მათი საშუალო არითმეტიკულია, მაშინ მისი ფართობია:
- 424 სმ²;
 - 1600 სმ²;
 - 400 სმ²;
 - 200 სმ²;
 - 99 სმ².
8. რამდენჯერ გაიზრდება წრის ფართობი, თუ მის რადიუსს ორჯერ გავზრდით?
- 2-ჯერ;
 - 8-ჯერ;
 - 16-ჯერ;
 - 4-ჯერ;
 - 1,5-ჯერ.
9. წრის სექტორის ცენტრალური კუთხე 60° -ია. მისი ფართობია $\frac{2\pi}{3}$ სმ², მაშინ ამ წრის რადიუსია:
- 2 სმ;
 - 1 სმ;
 - 3 სმ;
 - 4 სმ;
 - 1,5 სმ.
10. წრის დიამეტრი 24 სმ-ია, მაშინ მისი ფართობია:
- 1,4π სმ²;
 - 144π სმ²;
 - 576π სმ²;
 - 7π სმ²;
 - 14π სმ².



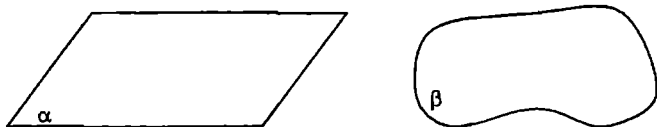
တၢ်ဒၣ် ခိၣ်ကွၢ် နီၣ်ကွၢ်ကိၣ်ကွၢ်



2.1. სივრცული სხეულები, მრავალწახნაბა, მრავალწახნაბას წვერო, წიგო, წახნაბი. კავშირი მრავალწახნაბას შემადგენელი ნაწილების რაოდენობებს შორის, ეილერის თეორემა

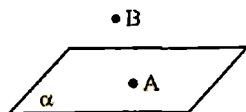
ერთ-ერთი სივრცული ფიგურა სიბრტყეა. სიბრტყე წერტილები-საგან შედგება. სიბრტყეზე წარმოდგენას გვიქმნის მაგალითად, მაგიდის ზედაპირი, ტბის ზედაპირი, თუ წარმოვიდგენთ, რომ ისინი უსასრულოდაა განვფენილი.

ნახ.208-ზე სიბრტყე ორი სხვადასხვა სახითაა გამოსახული. ისინი α და β ასოებითაა აღნიშნული.



ნახ.208

თუ A წერტილი α სიბრტყეს ეკუთვნის, ხოლო B წერტილი ამ სიბრტყეს არ ეკუთვნის, მაშინ ჩავწერთ: $A \in \alpha$ და $B \notin \alpha$ (ნახ.209).



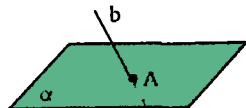
ნახ.209

თუ წრფის რაიმე ორი წერტილი ეკუთვნის სიბრტყეს, მაშინ ეს წრფე სიბრტყეზე მდებარეობს – სიბრტყე გადის ამ წრფეზე, $a \subset \alpha$ (ნახ.210).



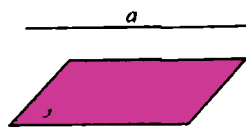
ნახ.210

თუ b წრფეს და α სიბრტყეს მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი აქვს, მაშინ წრფე კვეთს სიბრტყეს (ნახ.211).



ნახ.211

თუ a წრფესა და α სიბრტყეს საერთო წერტილი არა აქვს, მაშინ a წრფე α სიბრტყის პარალელურია, $a \parallel \alpha$ (ნახ.212).



ნახ.212

ვთქვათ, A , B და C წერტილები ერთ წრფეს არ ეკუთვნის, მაშინ არსებობს ერთადერთი α სიბრტყე, რომელიც გადის ამ წერტილებზე –

ყოველ სამ წერტილზე, რომლებიც ერთ წრფეს არ ეკუთვნის, გადის ერთადერთი სიბრტყე. A, B და C წერტილებზე გადის α სიბრტყე. ამ სიბრტყეს ასევე ჩავწერთ: ABC სიბრტყე (ნახ.213).



თუ ერთ სიბრტყეზე მდებარე ორ წრფეს საერთო წერტილი არა აქვს, მაშინ ამ წრფეებს პარალელური წრფეები ეწოდება: $a \parallel b$ (ნახ.214).

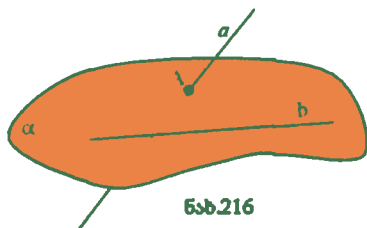


სივრცეში წერტილზე, რომელიც მოცემულ წრფეს არ ეკუთვნის, შეიძლება გავავლოთ ერთადერთი წრფე, რომელიც მოცემული წრფის პარალელურია.



თუ ორ წრფეს საერთო წერტილი აქვს, მაშინ ეს წრფეები გადამკვეთი წრფეებია. გადამკვეთ წრფეებზე შეიძლება ერთადერთი სიბრტყის გავლება (ნახ.215).

თუ a და b წრფეებს საერთო წერტილი არა აქვს და არ არსებობს სიბრტყე, რომელიც ამ წრფეებზე ერთდროულად გადის, მაშინ ასეთ წრფეებს აცდენილი წრფეები ეწოდება (ნახ.216).



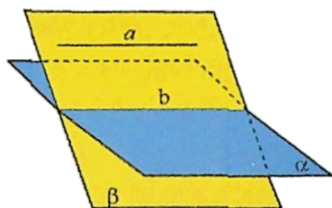
თუ მონაკვეთები პარალელურ წრფეებზე მდებარეობენ, მათ პარალელური მონაკვეთები ვუწოდოთ.

თუ ორი წრფე მესამე წრფის პარალელურია, მაშინ ისინი ურთიერთპარალელურია. მაგალითად, თუ $a \parallel c$ და $b \parallel c$, მაშინ $a \parallel b$; ეს არის წრფეთა პარალელობის ნიშანი.

თუ წრფესა და სიბრტყეს საერთო წერტილი არ აქვს, მაშინ ვიტყვით, რომ წრფე სიბრტყის პარალელურია: $a \parallel \alpha$.

წრფისა და სიბრტყის პარალელობის ნიშანი: თუ წრფე α სიბრტყეზე არ მდებარეობს და ამ სიბრტყეზე მდებარე რაიმე წრფის პარალელურია, მაშინ ეს წრფე α სიბრტყის პარალელურია.

თუ b წრფე α სიბრტყეზეა, $a \parallel b$ და a არ მდებარეობს α -ზე, მაშინ $a \parallel \alpha$. ეს დებულება შეიძლება ასეც ჩამოვყალიბოთ: ვთქვათ, α სიბრტყე არ გადის a წრფეზე. β სიბრტყე კი გადის a წრფეზე და კვეთს α -ს b წრფეზე. თუ $a \parallel b$, მაშინ $a \parallel \alpha$ (ნახ.217).



ნახ.217

სწორია შეზრუნებული დებულებაც: თუ a წრფე მდებარეობს β სიბრტყეზე, α სიბრტყეზე კი არ მდებარეობს, α და β , იკვეთება b წრფეზე და $a \parallel b$, მაშინ $a \parallel \alpha$.

თუ ორი სიბრტყე ერთმანეთს კვეთს, მაშინ კვეთა წრფეს წარმოადგენს. თუ ორ სიბრტყეს საერთო აქვს სამი წერტილი, რომლებიც ერთ წრფეზე არ მდებარეობენ, მაშინ მათ ყველა წერტილი საერთო აქვთ. ე.ი. სიბრტყეები ერთმანეთს ემთხვევა.

ორ სიბრტყეს ერთმანეთის პარალელური ეწოდება, თუ ისინი ერთმანეთს არ კვეთენ და მას ასე ჩავწერთ: $\alpha \parallel \beta$ (ნახ.218). ორი სიბრტყე პარალელურია, თუ ერთი მათგანი მეორეზე მდებარე ორი ურთიერთგადამკვეთი წრფის პარალელურია.

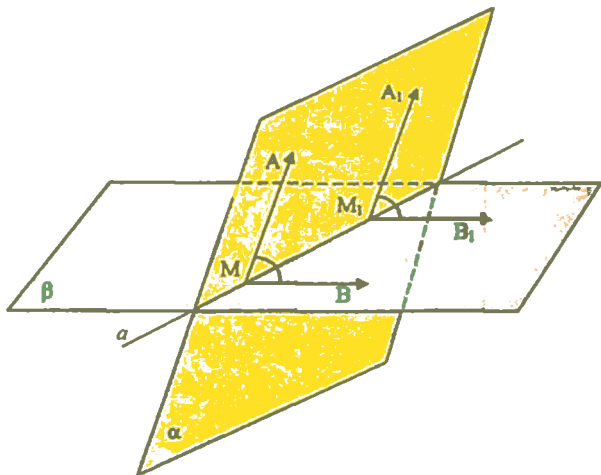


ნახ.218

თუ სიბრტყეზე მდებარე ორი გადამკვეთი წრფე შესაბამისად პარალელურია მეორე სიბრტყეზე მდებარე ორი გადამკვეთი წრფის, მაშინ ეს სიბრტყეები პარალელურია – ეს არის ორი სიბრტყის პარალელობის ნიშანი.

ვთქვათ, α და β გადამკვეთი სიბრტყეებია – ისინი a წრფეზე იკვეთება. ამ სიბრტყეებით სივრცე იყოფა 4 ნაწილად, თითოეულ მათგანს შემომსაზღვრელ ნახევარსიბრტყეებთან ერთად ორწახნაგა კუთხე ეწოდება. ნახევარსიბრტყეებს ეწოდება წახნაგები. M წერტილი ერთ-ერთი ორწახნაგა კუთხის წახნაგების საერთო საზღვარს – a წრფეს – ორწახნაგა კუთხის წიბოს ეკუთვნის. წახნაგებზე გავლებუ-

ლია a წრფის მართობული MA და MB სხივები; AMB კუთხეს ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე ეწოდება. თუ წიბოზე სხვა M_1 წერტილს ავიღებთ და ანალოგიურად ავაგებთ $\angle A_1M_1B_1$ -ს, მაშინ $\angle A_1M_1B_1 = \angle AMB$ – ხაზოვანი კუთხის სიდიდე M წერტილის (წვეროს) შერჩევაზე არ არის დამოკიდებული.



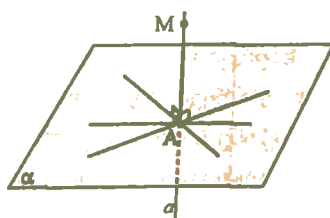
ორწახნაგა კუთხის ზომა მისი ხაზოვანი კუთხის ზომაა.

ორ სიბრტყეს მართობული ეწოდება, თუ მათ შორის კუთხე 90° -ის ტოლია.

ორი სიბრტყის მარვობულობის პირობა: თუ α სიბრტყე გადის β სიბრტყის მართობულ წრფეზე, მაშინ α სიბრტყე მართობულია β სიბრტყის და ვწერთ $\alpha \perp \beta$.

წრფეზე არამდებარე წერტილზე შეიძლება მოცემული წრფის პარალელური წრფის გავლება და მასთან მხოლოდ ერთის. წრფეზე არამდებარე წერტილზე შეიძლება მოცემული წრფის მართობული წრფის გავლება და მასთან მხოლოდ ერთის.

სიბრტყეზე არამდებარე წერტილზე შეიძლება მოცემული სიბრტყის მართობული წრფის გავლება და მასთან მხოლოდ ერთის (ნახ.219). სიბრტყეზე არამდებარე წერტილზე შეიძლება მოცემული სიბრტყის პარალელური სიბრტყის გავლება და მასთან მხოლოდ ერთის.



ნახ.219

თუ წრფე კვეთს სიბრტყეს და მისი მართობული არ არის, მაშინ წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხე ეწოდება ამ წრფესა და სიბრტყეზე მის გეგმილს შორის კუთხეს.

ყოველი სიბრტყე სივრცეს ყოფს ორ ნაწილად, რომელთაგან თითოეულს ნახევარსივრცე ეწოდება. ცხადია, თვით გამყოფი სიბრტყე ნახევარსივრცის საზღვარია.

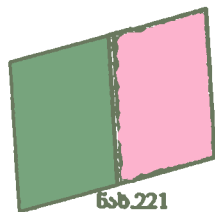
საერთო საზღვრის მქონე ორი ნახევარსიბრტყე სივრცეს ყოფს ორ ნაწილად, რომელთაგან თითოეულს ორწახნაგა კუთხე ეწოდება (ნახ.220).



ნახ.220

ნახევარსიბრტყეებს ეწოდება ორწახნაგა კუთხის წახნაგები, ხოლო მათ საერთო საზღვარს (წრფეს) – ორწახნაგა კუთხის წიბო. ცხადია, რომ წახნაგებისა და წიბოს გაერთიანება არის ორწახნაგა კუთხის საზღვარი.

თუ ნახევარსიბრტყეები ერთი სიბრტყის ნაწილია, მაშინ ორწახნაგა კუთხეს გაშლილი ორწახნაგა კუთხე ეწოდება (ნახ.221).

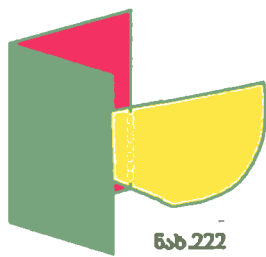


ნახ.221

ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში ორწახნაგა კუთხე ნახევარსივრცეს ემთხვევა.

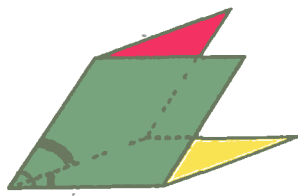
ორწახნაგა კუთხის წიბოს მართობული სიბრტყე წახნაგებს ორ სხივზე გადაკვეთს (ნახ.222).

ამ სხივებით შექმნილ კუთხეს ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე ეწოდება და როგორც აღვნიშნეთ ორწახნაგა კუთხის ზომად მიღებულია მისი შესაბამისი ხაზოვანი კუთხის ზომა.



ნახ.222

სივრცის იმ ნაწილს, რომელიც შემოსაზღვრულია საერთო წვეროსა და წყვილ-წყვილად საერთო გვერდების მქონე სამი ბრტყელი კუთხით, სამწახნაგა კუთხე ეწოდება (ნახ.223). ბრტყელი კუთხეების საერთო წვეროს სამწახნაგა კუთხის წვერო ეწოდება, გვერდებს – წიბოები,



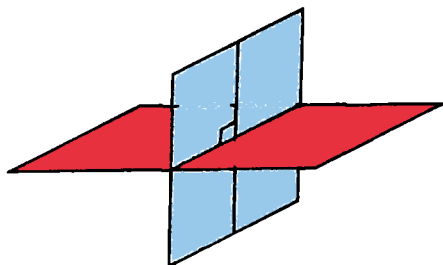
ნახ.223

ხოლო ბრტყელ კუთხეებს – წახნაგები.

ორწახნაგა კუთხეებს, რომლებიც იქმნება სამწახნაგა კუთხის შიგნითა წახნაგებით და მათი გაგრძელებით, ეწოდება სამწახნაგა კუთხის ორწახნაგა კუთხეები. ანალოგიურად მიიღება ოთხწახნაგაც, ხუთწახნაგაც და, საზოგადოდ, მრავალწახნაგა კუთხეები. მრავალწახნაგა კუთხის საზღვარი ბრტყელი კუთხეებია.

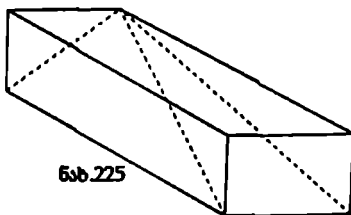
ორ სიბრტყეს შორის კუთხე ეწოდება ამ სიბრტყეთა გადაკვეთისას მიღებული ოთხი ორწახნაგა კუთხიდან უმცირესს.

ორ სიბრტყეს ურთიერთმართობული ეწოდება, თუ ისინი თანაკვეთისას მართ ორწახნაგა კუთხეს ქმნიან. როგორც აღვნიშნეთ, თუ სიბრტყე გადის მეორე სიბრტყის მართობულ წრფეზე, მაშინ ეს სიბრტყეები ურთიერთმართობულია (ნახ.224).



ნახ.224

მრავალწახნაგა ფიგურა, ან უბრალოდ, მრავალწახნაგა, ეწოდება სივრცის იმ ნაწილს, რომლის საზღვარი (რომელიც მასვე ეკუთვნის) შედგება სასრული რაოდენობის ბრტყელი მრავალკუთხედებისაგან. ყოველ მრავალკუთხედს მრავალწახნაგას წახნაგი ეწოდება, მრავალკუთხედების გვერდებს – მრავალწახნაგას წიბოები, ხოლო წვეროებს – მრავალწახნაგას წვეროები (ნახ.225).

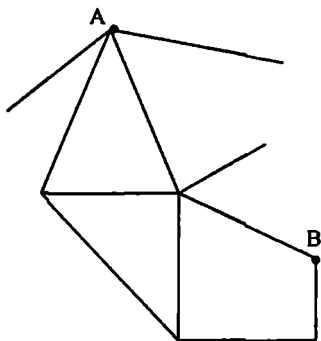


ნახ.225

მრავალწახნაგას მიღება შეიძლება ნახევარსივრცეთა თანაკვეთის შედეგადაც. მრავალწახნაგას ამოზნექილი ეწოდება, თუ იგი მისი ნებისმიერი წახნაგის მომცველი სიბრტყის ერთ მხარეს მდებარეობს. ამოზნექილი მრავალკუთხედის ანალოგიურად, ამოზნექილი მრავალწახნაგას ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებელი მონაკ-

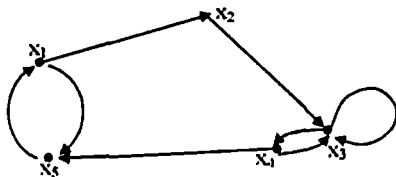
ვეთი მთლიანად ეკუთვნის ამ მრავალწახნაგას.

ფიგურას, რომელიც შედგება წერტილების (წვეროების) და მათი დამაკავშირებელი მონაკვეთებისაგან (წიბოებისაგან) ეწოდება გრაფი. მარშრუტი, ანუ გზა, რომელიც აერთებს გრაფის ორ წვეროს, ეწოდება მისი წიბოების ისეთ თანმიმდევრობას, რომელშიც თითოეულ ორ წიბოს აქვს საერთო დამასრულებელი წვერო და, ამასთანავე, პირველი წიბო გადის I წვეროდან, ხოლო ბოლო შედის მეორე წვეროში.

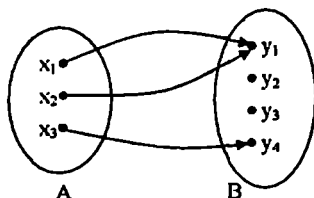


გრაფი დაკავშირებულია, თუკი მისი წვეროების ნებისმიერი წყვილი ერთმანეთს უკავშირდება. მარშრუტს ეწოდება ჯაჭვი, თუკი მისი თითოეული წიბო მასში მონაწილეობს მხოლოდ ერთხელ. ჯაჭვს, რომლის საწყისი და ბოლო წვერო ერთმანეთს ემთხვევა, ციკლი ეწოდება. გრაფის წვეროს ეწოდება ლუწი, თუ მასში შემავალი წიბოების რიცხვი ლუწია. წიბოების რიცხვი, რომელიც გრაფის წვეროში ერთიანდება არის ამ წვეროს ხარისხი. გრაფი სასრულია, თუ მისი წვეროების რიცხვი სასრულია.

თუ ყოველი წიბო რკალია, ანუ მითითებულია საწყისი და ბოლო წერტილები, მაშინ გრაფს ორიენტირებული გრაფი ეწოდება. თუ რომელიმე ორი წვერო რამდენიმე წიბოთია შეერთებული, ასეთ წიბოს ჯერადი წიბო ეწოდება. შეიძლება მოხდეს, რომ ზოგიერთი წიბო იწყებოდეს და მთავრდებოდეს ერთ წვეროში, ასეთ წიბოს მარყუჟი ეწოდება.



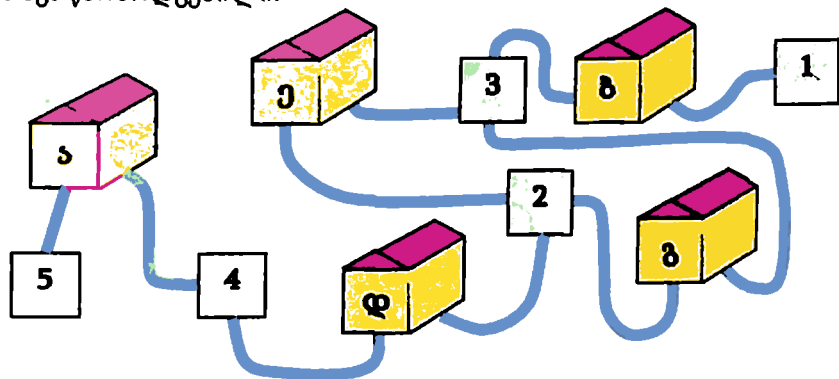
ცხადია, სასრული A და B სიმრავლეებს შორის ნებისმიერი დამოკიდებულება ისეთი ორიენტირებული გრაფით გამოი-



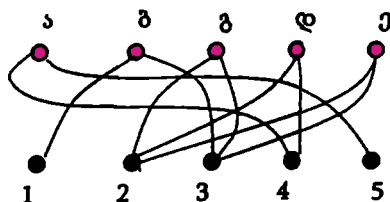
სახეზე, რომელიც არც მარყუქებს შეიცავს და არც ჯერად წიბოებს.

მრავალი ამოცანის ამოხსნისას გრაფები თვალსაჩინოდ წარმოგვიდგენს ამოცანის პირობას. ეს განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია, როცა გრაფს მრავალი წვერო აქვს. ასეთი გრაფის განხილვაზე დაიყვანება მრავალი პრაქტიკული ამოცანა. მაგალითად, ეკონომიკაში – ტრანსპორტის მოძრაობის ნაკადების ყველაზე ხელსაყრელი ვარიანტების შერჩევისას; ქიმიასა და ბიოლოგიაში – მოლეკულებისა და მათი ბმების შესწავლისას; ელექტრონიკაში – სქემების შედგენისას; მშენებლობაში – ძირითად საქმეთა დაგეგმვისა და მათი შესრულების უმოკლესი დროის ძიებისას.

მაგალითი 1. სოფლის ხუთმა მოსახლემ ხეხილის ხუთი ბაღი შეიძინა. მათ გადაწყვიტეს ისე გაენაწილებინათ ეს ბაღები, რომ ყოველი მოსახლე თავის სახლიდან თავის ბაღში სხვისი ბაღის გაუვლელად მისულიყო ბილიკების, ბაღებისა და სახლების განლაგება სქემაზეა წარმოდგენილი.

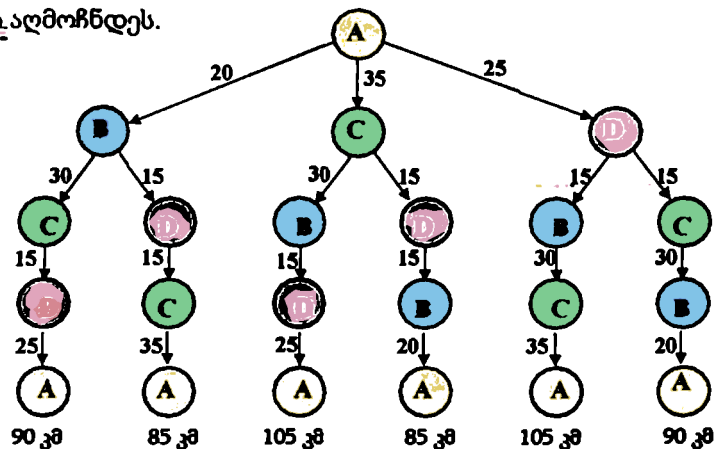
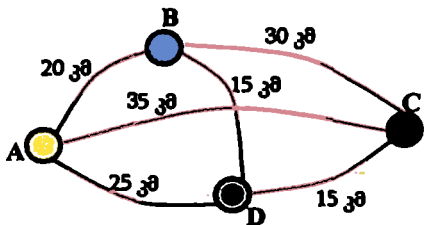


გამოვსახოთ ამოცანის პირობის შესაბამისი გრაფი. ამ გრაფს 10 წვერო და 10 წიბო აქვს. ამოცანის ამოსახსნელად უნდა შევარჩიოთ 5 ისეთი წიბო, რომლებსაც საერთო წვერო არა აქვთ. 5 და 1 წერტილებისათვის ერთადერთი არჩევანი გვაქვს: 1 – ბ და 5 – ა. ახ-



ლა უკვე ოთხისათვის რჩება ერთადერთი არჩევანი: 4 – დ. შემდეგ კი ან 2 – ე და 3 – გ უნდა ავირჩიოთ, ან 2 – გ და 3 – ე. სხვა ამონახსნი ამოცანას არა აქვს.

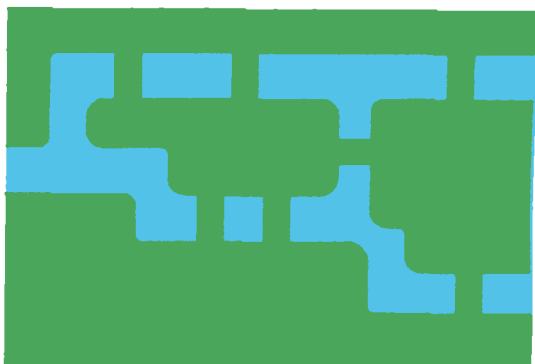
მაგალითი 2. ტურისტული მარშრუტი A ქალაქიდან იწყება და იმ იმავე A ქალაქში უნდა დასრულდეს. გზად ტურისტებმა უნდა მოინახულონ B, C და D ქალაქები. ცნობილია, რომ ყოველი ორი ქალაქი ერთმანეთს უშუალოდ (სხვა ქალაქზე გაუვლელადაც) უკავშირდება ერთადერთი გზით და ამ გზის სიგრძე გრაფზეა მითითებული. შემოვლისას რა მარშრუტი უნდა აირჩიონ ტურისტებმა, რომ გავლილი გზა უმოკლესი აღმოჩნდეს.



განვიხილოთ გრაფი, რომელზეც ყველა შესაძლო მარშრუტი და ამ მარშრუტის სიგრძეა წარმოდგენილი. ამრიგად, უმოკლესი მარშრუტებია: $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A$ და $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A$. ამ გზებით გასავლელია 85 კმ.

გრაფთა თეორიის ჩამოყალიბება უკავშირდება ქალაქ კენიგსბერგს (დღევანდელი კალინინგრადი). ქალაქის მოსახლეობაში პოპულარული იყო ერთ-ერთი გასართობი: სეირნობისას ცდილობ-

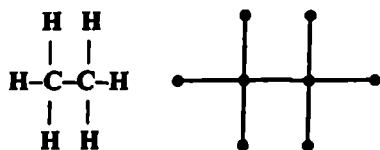
დნენ ქალაქის შვიდი-
ვე ხიდი მინიმუმ და
მაქსიმუმ ერთხელ გა-
დაეკვეთათ. ამ გასარ-
თობით იქამდე იყვნენ
დაკავებული, სანამ
ლეონარდ ეილერმა
1736 წელს არ სცადა ამ
პრობლემის გადაუჭ-
რელობის დამტკიცე-



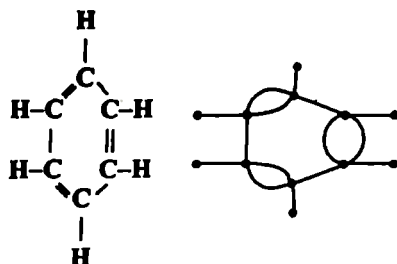
ბა. მან ხმელეთის ყველა ცალკეული ნაწილები აღიქვა წვეროებად, ხოლო ამ ნაწილების შემაერთებელი ხიდები – წიბოებად. საბოლოოდ ეილერმა მიიღო წიბოებისა და წვეროებისაგან შემდგარი სურათი, რასაც შემდგომში ეილერის გრაფი ეწოდა.

როგორც აღვნიშნეთ, გრაფს გეომეტრიული ფიგურით წარმოვადგენთ – წერტილებითა და ამ წერტილთა შემაერთებელი წირებით (წიბოებით) შედგენილი ფიგურით, რომელშიც შეერთებული შეიძლება იყოს: მოცემულ წერტილთა (წვეროების) ყოველი წყვილი, ან მხოლოდ მათი ნაწილი, რომელიმე წერტილი – თავის თავთან; ამასთანავე რაიმე ორი წერტილი შეიძლება რამდენიმე წირითაც იყოს შეერთებული.

მაგალითი 3. შეიძლება შესაბამისი გრაფით გამოვსახოთ ქიმიური ნაერთის C_2H_6 (მეთანის) სტრუქტურული ფორმულა. ატომები წერტილებით არის გამოსახული, კავშირები – წირებით.

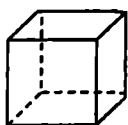


მაგალითი 4. ბენზოლის სტრუქტურული ფორმულა შესაბამისი გრაფითაა გამოსახული.

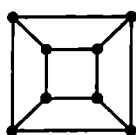


მაგალითი 5. მრავალწახნაგას

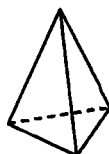
წვეროებსა და წიბოებს შორის კავშირებიც შეიძლება სიბრტყეზე გრაფით გამოვსახოთ.



კუბი



კუბის
შესაბამისი
გრაფი



პირამიდა



პირამიდის
შესაბამისი
გრაფი

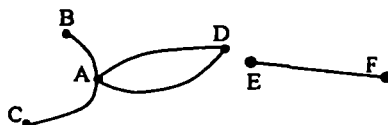
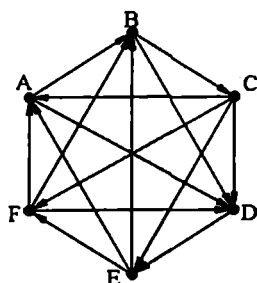
მაგალითი 6. ვთქვათ, ტურნირი ნარდში ერთ წრედ ჩატარდა და მასში მონაწილეობდა ექვსი მოთამაშე. მოთამაშეები აღვნიშნოთ: A, B, C, D, E და F-ით. შეხვედრათა შედეგები ცხრილი წარმოვადგინოთ:

	A	B	C	D	E	F
A		1	0	1	0	0
B	0		1	1	0	1
C	1	0		1	1	1
D	0	0	0		1	0
E	1	1	0	0		1
F	1	0	0	1	0	

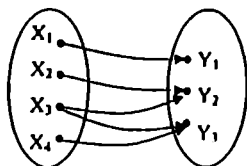
1 აღნიშნავს მოგებას, ხოლო 0 – წაგებას. ამ შედეგებით წარმოვადგინოთ ე.წ. ორიენტირებული გრაფი, რომელიც ცხრილის შესაბამისადაა შედგენილი – ისრები მიმართულია მოგებულისა და წაგებულისაკენ.

მაგალითი 7. გრაფის საშუალებით შეიძლება წარმოდგენილი იქნას საავტომობილო გზების ქსელი (მაგალითად, A, B, C, D, E და F – 6 ქალაქს შორის).

მაგალითი 8. გრაფით სიმრავლეებს შორის შესაბამისობებიც შე-

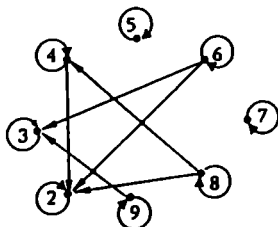


იმლება გამოვსახოთ. ამჯერად წერტილთა სიმრავლე ორი ნაწილისაგან შედგება. ერთი ნაწილი პირველი სიმრავლის ელემენტებია, მეორე ნაწილი – მეორის. პირველი სიმრავლის ელემენტები – X_1, X_2, X_3 და X_4 წერტილებითაა წარმოდგენილი, მეორე სიმრავლის ელემენტები – Y_1, Y_2 და Y_3 წერტილებით. ეს შესაბამისობა სიმრავლეებზე ორიენტირებული გრაფითაა გამოსახული.



თუ გვაქვს შესაბამისობა რაიმე X სიმრავლესა და ამავე X -ს შორის, მაშინ გრაფი შეიძლება მარყუჟსაც შეიცავდეს, ანუ წიბოს, რომელიც რაიმე წვეროს თავის თავთან აერთებს. რომელიმე ორი A და B წვერო შეიძლება შეერთებული იყოს ორი ისრით – $A \rightarrow B$ და $B \rightarrow A$.

მაგალითი 9. ვთქვათ, $X = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ და X -ის ყოველ x ელემენტს შეესაბამება ამავე X -ის y ელემენტი (ერთი ან რამდენიმე), შემდეგი თვისების მიხედვით: „ x უნაშთოდ იყოფა y -ზე“. ეს შესაბამისობა შეიძლება გრაფის სახით გამოვსახოთ.



გრაფის ცნება შეიძლება აღვწეროთ სიმრავლეთა თეორიის გამოყენებით. თავდაპირველად განვსაზღვროთ მარტივი გრაფი.

მარტივი გრაფი არის სიმრავლეთა წყვილი: (V, E) , სადაც

1. V არის არაცარიელი სიმრავლე, მის ელემენტებს წერტილებს ან წვეროებს ვუწოდებთ.

2. E არის V -ს რაიმე ორელემენტიანი ქვესიმრავლეების სიმრავლე. ამ ელემენტების თითოეულ წყვილს (ორელემენტიან ქვესიმრავლეს) გრაფის წიბო ეწოდება.

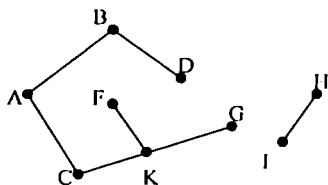
გრაფი აღვნიშნოთ – G ასოთი, ვწერთ: $G = (V; E)$.

მაგალითად, სურათზე გამოსახულია მარტივი გრაფი, რომელშიც $V = \{A; B; C; D; K; F; G; H; I\}$ – წვეროების სიმრავლეა.

$E = \{(A, B); (A, C); (B, D); (C, K); (K, F); (K, G); (H, I)\}$ – წიბოების

სიმრავლეა.

(A, B) წიბოზე ვიტყვი, რომ ის აკავშირებს (აერთებს) A და B წვეროებს. ამრიგად, ჩვენ წარმოვადგინეთ – გრაფის ცნების – ახლებური განსაზღვრება ერთ კერძო შემთხვევაში.

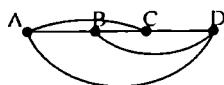
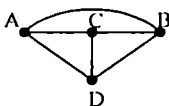
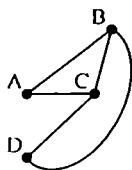
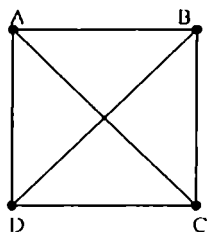


ყურადღება მივაქციოთ შემდეგი გარემოებას – E ორელემენტიან სიმრავლეთა სიმრავლეა – მარტივ გრაფში წვეროთა ყოველ წყვილს ერთადერთი წიბო შეიძლება აკავშირებდეს ერთმანეთთან; ამასთანავე, არ არსებობს მარყუჟი – მარტივ გრაფში ყოველი წვერო თავის თავთან არ არის დაკავშირებული. თუ ამ ორ შეზღუდვას მოვხსნით, მივიღებთ უფრო ზოგად ცნებას – გრაფის ცნებას.



ამ შემთხვევაში შეიძლება გვქონდეს მარყუჟი და ე.წ. ჯერადი წიბო – წიბო მეორედ მოდის – აქ E არის წყვილების რაღაც მიმდევრობა (წყვილები შეიძლება გამეორდეს). ორიენტირებულ გრაფში თითოეული წყვილი დალაგებული წყვილია.

გრაფის, კერძოდ, მარტივი გრაფის ზემოთმოყვანილი განსაზღვრების მიხედვით შესაძლებელია, რომ ერთი და იგივე გრაფი სხვადასხვანაირად წარმოვადგინოთ. სურათზე მოცემულია გრაფის სხვადასხვა გამოსახულება.

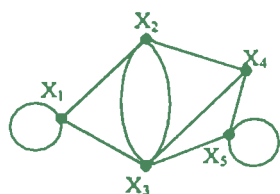


გრაფის განსაზღვრებიდან ვღებულობთ, რომ შეიძლება რომელიმე წვერო არ იყოს მოცემული წიბოს ბოლო – არ იყოს ამ წიბოს ინციდენტური (ინციდენტურობა (ინციდენტობა)) – გეომეტრიული

ტერმინი, რომელიც გამოიყენება გეომეტრიული ობიექტებს (წერტილებს, წრფეებს, სიბრტყეებს) შორის მიკუთვნების (კავშირი, შეერთება) დამოკიდებულების აღსანიშნავად. ინციდენტურობის თვისებები ხასიათდებიან ე.წ. მიკუთვნების აქსიომებით. ტერმინი წარმოდგენილია ლათინური *incido*-დან, რომელიც „შემთხვევით რამეში, ან რამეზე ვარდნას“, „შემთხვევით მომხდარს“, „სადმე მოხვედრას“ უკავშირდება (აღნიშნავს). სახელწოდება გრასმანმა შემოიღო, შემდეგ ინციდენტობის დამოკიდებულება შეისწავლა შუბერტმა, რომელსაც ეკუთვნის „შუბერტის ინციდენტობის თეორემა“ (1876). ინციდენტობის აქსიომათა ერთ-ერთი პირველი ჯგუფი ჩამოაყალიბა იტალიელმა მათემატიკოსმა პიერიმ (1899). თუ წვერო არც ერთი წიბოს ინციდენტური არ არის, მას იზოლირებული წვერო ეწოდება. თუ G გრაფის რომელიმე წვერო n ცალი წიბოს ინციდენტურია (n ცალი წიბო თავს იყრის ამ წვეროში), მაშინ n -ს ამ წვეროს ხარისხი ეწოდება.

გრაფის წარმოდგენა შეიძლება სათანადო მართკუთხოვანი ცხრილით. თუ წვეროებია $X_1, X_2, \dots, X_n$; მაშინ გრაფს წარმოვადგენთ ცხრილით, რომელშიც რაიმე i -ური სტრიქონისა და k -ური სვეტის გადაკვეთაზე წარმოდგენილი რიცხვი გვიჩვენებს X_i და X_k წვეროების შემაერთებელი წიბოების ოდენობას.

მაგალითად, სურათზე წარმოდგენილ გრაფს შეესაბამება ცხრილი:



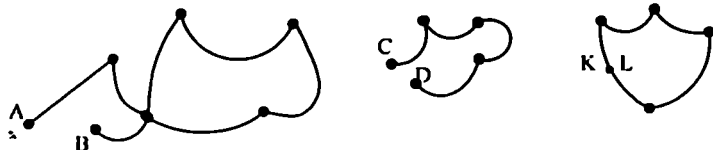
						ჯამი
	1	1	1	0	0	3
	1	0	2	1	0	4
	1	2	0	1	1	5
	0	1	1	0	1	3
	0	0	1	1	1	3
ჯამი	3	4	5	3	3	

სანამ გრაფთა თეორიის მნიშვნელოვან დებულებას – ეილერის თეორემას ჩამოვაყალიბებთ, მანამდე კიდევ ერთხელ, რამდენიმე

ცნებას მოვიყვანთ.

განვიხილავთ სასრულ გრაფებს – წვეროების სიმრავლე სასრულოა.

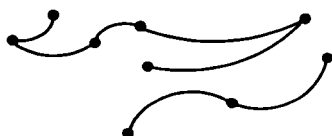
ჯაჭვი (საწყისი M_1 და ბოლო M_n წვეროებით) ეწოდება განსხვავებული წიბოების რაიმე $M_1M_2, M_2M_3, \dots, M_{n-1}M_n$ მიმდევრობას. თუ M_1 და M_n ერთმანეთს ემთხვევა ჯაჭვს ეწოდება ციკლი.



ამ სურათზე A და B, C და D, K და L წერტილები ჯაჭვით უკავშირდება ერთმანეთს, K და L-ის დამაკავშირებელი ჯაჭვი ციკლს წარმოადგენს.



ბმული გრაფი



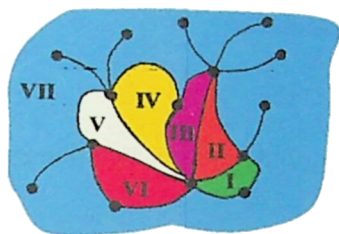
არ არის ბმული, თუმცა იგი შედგება ორი ბმული ნაწილისაგან

თუ გრაფის წვეროთა ყოველი წყვილისათვის არსებობს მათი დამაკავშირებელი ჯაჭვი, მაშინ გრაფს ბმული ეწოდება.

ნებისმიერ გრაფს ვუწოდოთ ბრტყელი გრაფი, თუ შეიძლება მისი სიბრტყეზე გამოსახვა ისე, რომ წიბოებს წვეროების გარდა საერთო წერტილები არ ჰქონდეს, გრაფის წვეროებს შეესაბამებოდეს სიბრტყის სხვადასხვა წერტილები და ეს წერტილები გრაფის წიბოთა შესაბამისი წირებისათვის შეიძლება მხოლოდ ბოლოებს წარმოადგენდეს.

ა) სურათზე გამოსახულია ბრტყელი ბმული გრაფი, რომელიც სიბრტყეს ყოფს 7 ნაწილად. VII ნაწილი უსასრულოა – ის ლურჯადაა გაფერადებული. თითოეული ნაწილი გრაფის წახნაგია (წახნა-

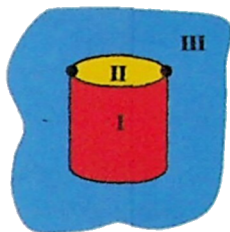
გის ნებისმიერი ორი წერტილი შეიძლება შევადროთ წირით, რომელიც მთლიანად ამ წახნაგშია). ამ გრაფს 15 წვერო და 20 წიბო აქვს: $15+7-20=2$. ბ) სურათზე გამოსახულ ბრტყელ ბმულ გრაფს 4 წახნაგი, 7 წვერო და 9 წიბო აქვს; მაშასადამე – $7+4-9=2$. გ) სურათზე გამოსახულ გრაფს 3 წახნაგი, 2 წვერო და 3 წიბო გააჩნია: ამ შემთხვევაშიც – $2+3-3=2$.



ა)



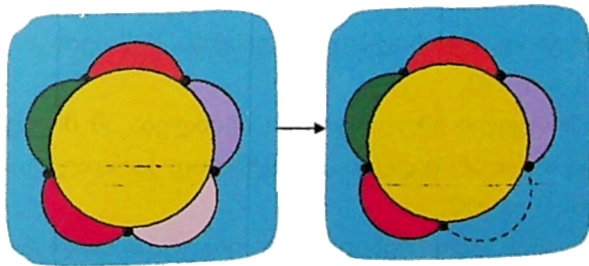
ბ)



გ)

ჩამოვყალიბოთ ეილერის თეორემა: ვთქვათ, G ბრტყელი ბმული გრაფია, v , e და f , შესაბამისად, არის ამ გრაფის წვეროების, წიბოებისა და წახნაგების ოდენობები, მაშინ $v+f-e=2$.

ეილერის თეორემის დასაბუთების პროცესის წარმოსადგენად გრაფში ისეთი ცვლილებები შევიტანოთ, რომლებიც $v+f-e$ გამოსახულების მნიშვნელობას არ ცვლის. ა) შემთხვევაში „ამოვადგეთ“ ერთი წიბო, ამით წახნაგების რიცხვი ერთით შემცირდა, წვეროების

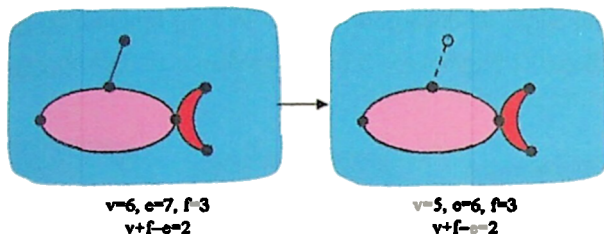


$v=5, e=10, f=7$
 $v+f-e=2$

ა)

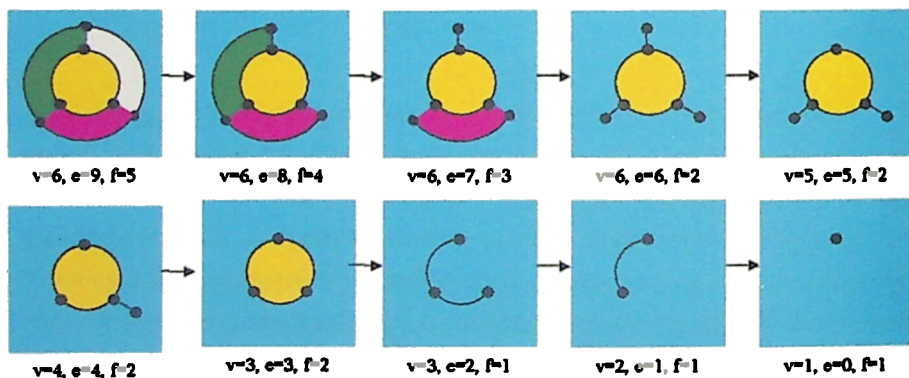
$v=5, e=9, f=6$
 $v+f-e=2$

რიცხვი უცვლელია. ბ) შემთხვევაში ამოვადეთ „დაკიდული“ წვე-
რო სათანადო წიბოსთან ერთად, წახნაგების რიცხვი უცვლელია.
ორივე შემთხვევაში $v+f-e$ არ იცვლება.



ბ)

ამ მოქმედებათა მიმდევრობით ჩატარების ერთი შემთხვევა
სურათზეა გამოსახული:



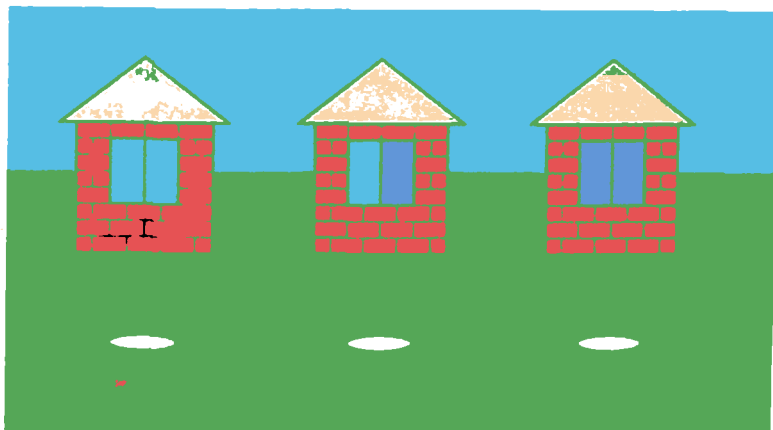
ბრტყელი გრაფი წერტილად გარდაიქმნა, მისთვის კი – $v=1, e=0, f=1$ და გვაქვს: $v+f-e=2$.

ყოველი ბრტყელი ყმული გრაფი შეიძლება ამ მოქმედების შე-
დეგად (როცა $v+f-e$ არ იცვლება). წერტილად გარდაიქმნათ: წერტი-
ლისათვის კი – $v+f-e=2$.

ამ დებულების გამოყენებით შეიძლება ერთი ძველებური ამოცა-
ნის ამოხსნა განვიხილოთ.

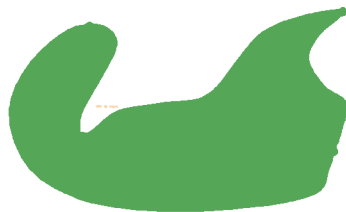
შეიძლება თუ არა, რომ სამი სახლიდან სამი ჭისკენ გზები ისე

გავიყვანოთ, რომ ყოველი სახლი დაკავშირებული იყოს სამივე კასთან და გზები არ გადაიკვეთოს?



სხვაგვარად რომ ვთქვათ, დასმულია ამოცანა: არსებობს თუ არა რაიმე ბრტყელი გრაფი, რომელსაც 9 წიბო და 6 წვერო აქვს. თუ ასეთი გრაფი არსებობს, მაშინ გვექნება: $6+f-9=2$ და $f=5$.

ყოველი წახნაგი ამ ხუთიდან შემოსაზღვრული უნდა იყოს 4 წიბოთი მაინც (სურათზე ორი სახლის ორ კასთან დაკავშირებისას მიღებული ერთი შესაძლო წახნაგია გამოსახული), ამიტომ წიბოების რიცხვი უნდა იყოს არანაკლები $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ -ისა (ყოველი წიბო მხოლოდ ორი წახნაგის „საზიარო“ წიბო შეიძლება იყოს). მივიღეთ წინააღმდეგობა, ამიტომ ამოცანას ამონახსნი არა აქვს.

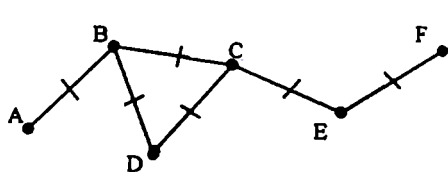


ყოველი ბრტყელი ბმული გრაფისათვის ჰემმარიტია შემდეგი დებულებებიც წვეროების ხარისხების შესახებ (წვეროს ხარისხი ამ წვეროს ინციდენტური წიბოების რიცხვია):

ა) წვეროების ხარისხების ჯამი ორჯერ მეტია წიბოების ოდენობაზე;

ბ) კენტი ხარისხის მქონე წვეროების ოდენობა ლუწია.

სურათზე წარმოდგენილია ა) დებულების დასაბუთების პროცე-



სი. ყოველი წიბო ორ ნაწილად არის გაყოფილი – ყოველი ნახევარი ერთადერთ წვეროს შეიცავს; თუ რაიმე წვეროს ხარისხი არის n , მაშინ ის n ინცი-

დენტურია ზუსტად n ნახევრის; მაშასადამე, ხარისხების ჯამი ლუწი რიცხვია – ის წიბოების ნახევრების ოდენობის ტოლია – წიბოების ოდენობაზე ორჯერ მეტია.

ბ) არის ა)-ს უშუალო შედეგი, რადგან წვეროების ხარისხების ჯამი (ის ლუწი რიცხვია) ორ ნაწილად შეიძლება წარმოვადგინოთ – „კენტი“ წვეროების ხარისხების ჯამად (კენტი ხარისხების მქონე წვეროების ხარისხების ჯამად) და „ლუწი“ წვეროების ხარისხების ჯამად. ეს მეორე ჯამი კი, ცხადია, ლუწია, მაშასადამე პირველი ნაწილიც ლუწია.

ჭეშმარიტია შემდეგი წინადადება: იმ ადამიანების ოდენობის რიცხვი, რომელთაგან თითოეულს კენტი რაოდენობის მეგობარი ჰყავს, ლუწია.

გრაფთა თეორიის ერთ-ერთი საინტერესო პრობლემა ოთხი ფერის ამოცანაა – შეიძლება თუ არა ნებისმიერი რუკა ისე გავაფერადოთ ოთხი ფერით, რომ არცერთი ორი მეზობელი (საერთო საზღვრის – წიბოს მქონე) ქვეყანა (წახანაგი) ერთი ფერის არ იყოს?

ეს პრობლემა დიდი ხნის განმავლობაში იყო ამოუხსნელი; ოთხი ფერის ამოცანის ამოხსნა მხოლოდ მძლავრი კომპიუტერული სისტემის გამოყენებით გახდა შესაძლებელი. შეიძლება ასეც ითქვას: ამ ცნობილი პრობლემის ამოხსნა მათემატიკოსთა და პროგრამისტთა ერთობლივი ძალისხმევით, მძლავრი ტექნიკური უზრუნველ-



ყოფის საფუძველზე მოხდა – რუკის აღნიშნული წესით გაფერადება შესაძლებელია.

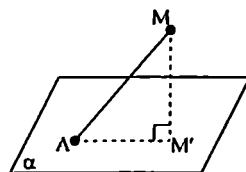
განვიხილოთ ეილერის მახასიათებელი ზოგიერთი მრავალწახნაგასათვის (მრავალწახნაგებს განვიხილავთ შემდეგ).

მრავალწახნაგას ტიპი	წვეროების ოდენობა	წიბოების ოდენობა	წახნაგების ოდენობა	ეილერის მა- ხასიათებე- ლი
ტეტრაედრი	4	6	4	2
ოქტაედრი	6	12	8	2
პარალელე- პიპედი	8	12	6	2
n-კუთხა პი- რამიდა	$n+1$	$2n$	$n+1$	2
n-კუთხა პრიზმა	$2n$	$3n$	$n+2$	2

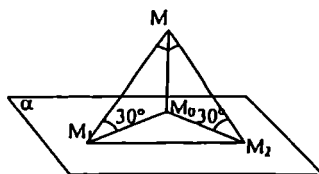
მრავალწახნაგათა სახეები ძალზე მრავალფეროვანია. ჩვენ განვიხილავთ მათგან მხოლოდ უმარტივეს ამოზნექილ მრავალწახნაგებს.

2.1.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული გეგმარებისათვის

1. სიბრტყიდან 30 სმ-ის ტოლი მანძილით დაშორებული წერტილიდან გავლებულია დახრილი. იპოვეთ ამ დახრილის სიგრძე, თუ მისი გეგმილი სიბრტყეზე 40 სმ-ის ტოლია.

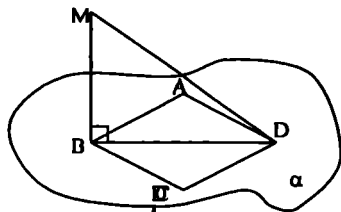


2. მოცემული წერტილი სიბრტყიდან დაშორებულია $5/2$ სმ-ით. ამ წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი ტოლი დახრილი, რომლებიც სიბრტყესთან 30° -იან კუთხეს ადგენენ, ხოლო ურთიერთშორის – 90° -ს. იპოვეთ მანძილი დახ-

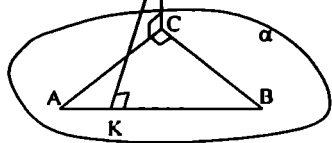


რილების ფუძეებს შორის.

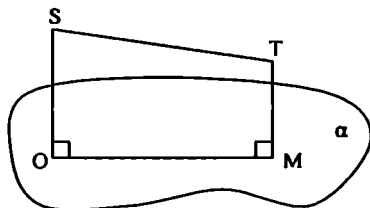
3. მოცემული წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი დახრილი, რომელთა სიგრძეებია 3 სმ და 4 სმ. პირველის გეგმილი სიბრტყეზე 1,8 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ მეორე დახრილის გეგმილი.



4. ABCD კვადრატი მდებარეობს α სიბრტყეში. BM α -ს მართობულია. იპოვეთ DM, თუ კვადრატის გვერდი $\sqrt{12}$ სმ-ის ტოლია, ხოლო BM=5 სმ.

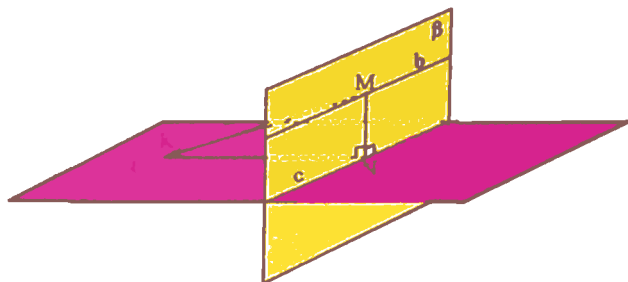


5. ABC მართკუთხა სამკუთხედი α სიბრტყეში მდებარეობს. $\angle ACB=90^\circ$, AC=8 დმ, BC=6 დმ, CD α სიბრტყის მართობულია, იპოვეთ CD, თუ D წერტილიდან AB გვერდამდე მანძილი 5 დმ-ია.



6. S და T წერტილებიდან α სიბრტყეზე დაშვებულია მართობები. იპოვეთ მანძილი S და T წერტილებს შორის, თუ მართობების სიგრძეებია 15 მ და 10 მ, მათ ფუძეებს შორის მანძილია – 12 მ, ხოლო ST მონაკვეთი სიბრტყეს არ კვეთს.
7. მონაკვეთი კვეთს სიბრტყეს. მისი ბოლოები სიბრტყიდან დაშორებულია 4 სმ-ით და 1 სმ-ით. იპოვეთ მანძილი ამ მონაკვეთის შუაწერტილიდან სიბრტყემდე.
8. მონაკვეთი კვეთს სიბრტყეს. მონაკვეთის ბოლოებიდან სიბრტყემდე მანძილებია 3 მ და 5 მ, ხოლო სიბრტყეზე მონაკვეთის გეგმილის სიგრძეა 6 მ. იპოვეთ მონაკვეთის სიგრძე.
9. ურთიერთმართობული α და β სიბრტყეები ერთმანეთს c წრფეზე კვეთს. α სიბრტყეში გავლებულია a წრფე ($a \parallel c$), ხოლო β სიბრტყეში k – b წრფე ($b \parallel c$). იპოვეთ მანძილი a და b წრფეებს შორის, თუ მანძილი a და c წრფეებს შორის 1,5 მ-ია, ხოლო მანძილი b და c

წრფეებს შორის – 0,8 მ-ია.

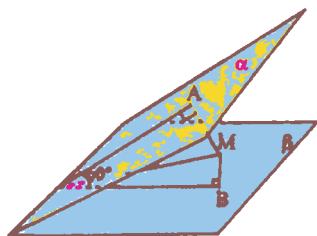


10. იპოვეთ ორწახნაგა კუთხის სიდიდე, თუ მის ერთ წახნაგზე აღებული წერტილი ორჯერ მეტი მანძილითაა დაშორებული წიბოდან, ვიდრე მეორე წახნაგიდან.

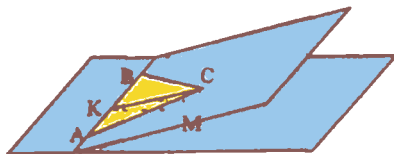


11. 30° -იანი ორწახნაგა კუთხის ერთ წახნაგზე აღებულია წერტილი, რომელიც მეორე წახნაგიდან დაშორებულია 17,2 სმ-ით. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან წიბომდე.
12. 45° -იანი ორწახნაგა კუთხის ერთ წახნაგზე მოცემულია წერტილი, რომელიც მეორე წახნაგიდან დაშორებულია $5\sqrt{2}$ სმ-ით. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან წიბომდე.

13. 60° -იანი ორწახნაგა კუთხის შიგნით აღებული წერტილი ორივე წახნაგიდან 15 სმ-ით არის დაშორებული. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან წიბომდე.

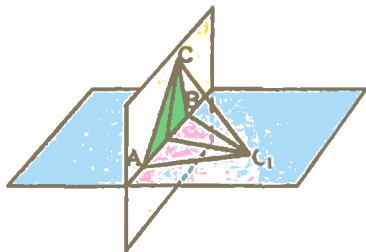


14. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების სიგრძეები 7 მ და 24 მ-ია. იპოვეთ მანძილი მართი

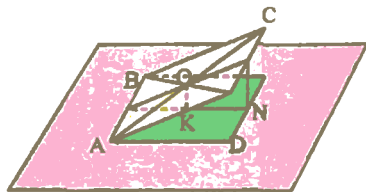


კუთხის წვეროდან იმ სიბრტყეზე, რომელიც ჰიპოტენუზაზე გადის და სამკუთხედის სიბრტყესთან 30° -იან კუთხეს ადგენს.

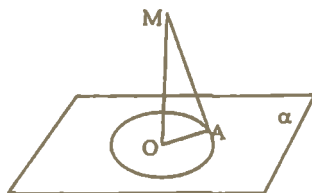
15. ორ მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედს საერთო ჰიპოტენუზა აქვთ და მათი სიბრტყეები ურთიერთმართობულია. იპოვეთ მანძილი მართი კუთხის წვეროებს შორის, თუ ჰიპოტენუზის სიგრძე $5\sqrt{2}$ სმ-ია.



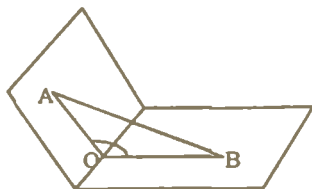
16. პარალელოგრამის გვერდზე გაგლეხულია სიბრტყე, რომელიც პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდიდან დაშორებულია 10 სმ-ით. იპოვეთ მანძილი პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილიდან ამ სიბრტყემდე.



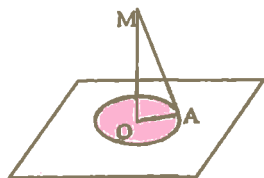
17. წრეწირი, რომლის ცენტრია O წერტილი, რადიუსი კი 12 სმ-ია, ძევს α სიბრტყეზე. O წერტილი M წერტილის გეგმილია α სიბრტყეზე. M-დან α სიბრტყემდე მანძილი 35 სმ-ია: იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან წრეწირის რაიმე წერტილამდე.



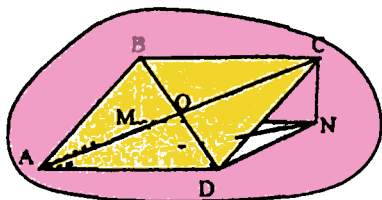
18. AOB არის 120° -იანი ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე. $OA=OB=12$ სმ. იპოვეთ AB.



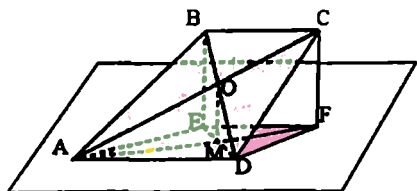
19. წრის ცენტრიდან მისი სიბრტყისადმი აღმართული მართობის სიგრძე 20 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი ამ მართობის ბოლოდან წრეწირის რომელიმე წერტილამდე, თუ ამ წრის ფართობი 84π სმ²-ის ტოლია.



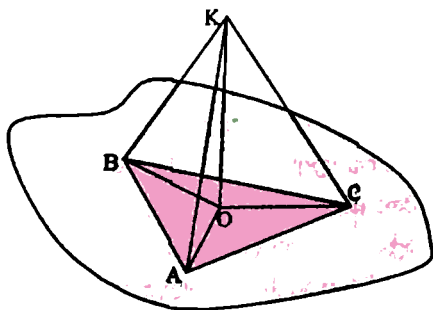
20. სიბრტყე გადის რომბის ერთ-ერთ გვერდზე და 4 სმ-ით დაშორებულია რომბის მეორე გვერდიდან. რომბის დიაგონალების გეგმილები ამ სიბრტყეზე შესაბამისად ტოლია 8 სმ და 2 სმ-ის. იპოვეთ რომბის გვერდების გეგმილები ამ სიბრტყეზე.



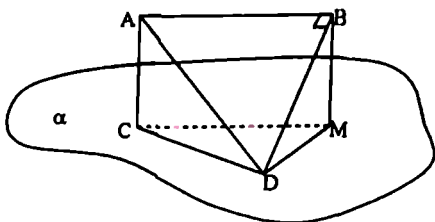
21. α სიბრტყე გადის ABCD ტრაპეციის AD ფუძეზე და BC წრფიდან დაშორებულია 5 სმ-ით. იპოვეთ ტრაპეციის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილიდან α სიბრტყემდე მანძილი, თუ ფუძეების შეფარდებაა $AD:BC=3:2$.



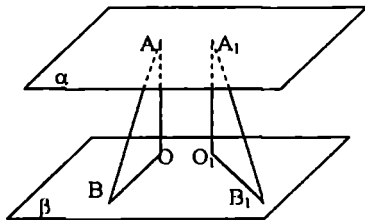
22. K წერტილიდან ABC სამკუთხედის სიბრტყემდე მანძილი 27 სმ-ის ტოლია. AK, BK და CK მონაკვეთების AO, BO და CO გეგმილები α სიბრტყეზე ერთმანეთის ტოლია და 36 სმ-ს უდრის. იპოვეთ AK, BK და CK მონაკვეთების სიგრძეები.



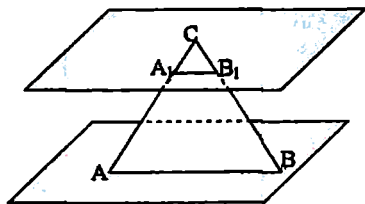
23. α სიბრტყის პარალელური AB მონაკვეთის ბოლოებიდან ამ სიბრტყისადმი გავლებულია AC მართობი და BD დახრილი, ისე რომ $AB \perp BD$. ვიპოვოთ AD მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AB=12$ სმ, $AC=4$ სმ, ხოლო $MD=3$ სმ-ს.



24. ორ პარალელურ სიბრტყეს შორის მოქცეული ორი მონაკვეთის სიგრძეები შესაბამისად 51 სმ-ის და 53 სმ-ის ტოლია, ხოლო ერთ-ერთ სიბრტყეზე მათი გეგმილების სიგრძეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 6:7. იპოვეთ სიბრტყეებს შორის მანძილი.



25. მოცემულია ABC სამკუთხედი. AB წრფის პარალელური სიბრტყე ამ სამკუთხედის AC გვერდს კვეთს A_1 წერტილში, ხოლო BC გვერდს – B_1 წერტილში. იპოვეთ A_1B_1 მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AB=15$ სმ, $AA_1:AC=2:3$.



26. მრავალკუთხედში წვეროების ოდენობა ტოლია წახნაგების ოდენობის, ხოლო წიბოების ოდენობა 6-ია. ვიპოვოთ წვეროების და წახნაგების ოდენობა.
27. მრავალკუთხედში წიბოების ოდენობა ორჯერ მეტია წვეროების ოდენობაზე, ხოლო წახნაგების ოდენობა 14-ია. რამდენი წვერო და რამდენი წიბო აქვს ამ მრავალკუთხედს?
28. მრავალკუთხედს წვეროების და წახნაგების ოდენობა ტოლი აქვს, ხოლო წიბოების ოდენობაა 8. რამდენი წვერო და რამდენი წახნაგი აქვს მრავალკუთხედს?
29. მრავალკუთხედში წვეროების, წიბოების და წახნაგების ოდენობის ჯამი 26-ის ტოლია. წიბოების ოდენობა ორჯერ მეტია წახნაგების ოდენობაზე. რამდენი წიბო, წვერო და წახნაგი აქვს ამ მრავალკუთხედს?
30. მრავალკუთხედს 26 წახნაგი და 48 წვერო აქვს. რამდენი წიბო აქვს ამ მრავალკუთხედს.

2.1.2. ტესტი №11

1. მოცემულია წინადადებები:

I. წრფის გეგმილი სიბრტყეზე შეიძლება იყოს წერტილი;

II. წრფის გეგმილი სიბრტყეზე შეიძლება იყოს წრფე;

III. ნებისმიერი წრფის გეგმილი სიბრტყეზე წრფეა.

მათგან ჭეშმარიტია:

ა) მხოლოდ I; ბ) მხოლოდ II; გ) მხოლოდ III; დ) I და II.

2. ვთქვათ, α არის წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხე, მაშინ

ა) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$; ბ) $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$; გ) $\alpha > 180^\circ$; დ) $\alpha > 90^\circ$.

3. თუ ერთ სიბრტყეზე მდებარე ორი ურთიერთგადამკვეთი წრფე მეორე სიბრტყეზე მდებარე ორი ურთიერთგადამკვეთი წრფის პარალელურია, მაშინ ეს სიბრტყეები

ა) იკვეთება; ბ) არ არის პარალელური; გ) პარალელურია; დ) მართობულია.

4. ერთ წრფეზე არამდებარე სამ წერტილზე

ა) ერთადერთი სიბრტყე გადის;

ბ) ორი განსხვავებული სიბრტყე გადის;

გ) მხოლოდ სამი ერთმანეთისაგან განსხვავებული სიბრტყე გადის;

დ) უამრავი სხვადასხვა სიბრტყე გადის.

5. თუ წრფე ორი პარალელური სიბრტყიდან ერთ-ერთის მართობულია, მაშინ ეს წრფე

ა) მეორე სიბრტყის მართობულიცაა;

ბ) მეორე სიბრტყეს არ კვეთს;

გ) მეორე სიბრტყის პარალელურია;

დ) მეორე სიბრტყის მართობული არ არის.

6. თუ ორის სიბრტყე ერთი და იმავე წრფის მართობულია, მაშინ ეს სიბრტყეები

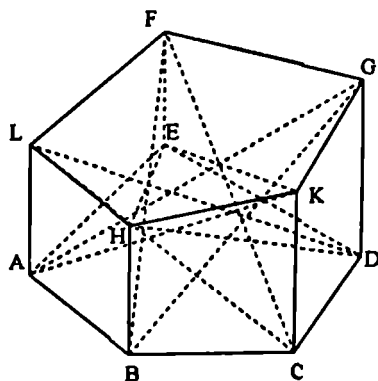
ა) იკვეთება; ბ) არ არის პარალელური; გ) მართობულია;

დ) პარალელურია.

7. ორ სხვადასხვა სიბრტყეს შორის კუთხის სიდიდე შეიძლება იყოს
 ა) 90° -ზე ნაკლები; ბ) 90° -ზე მეტი; გ) 180° -ზე მეტი; დ) 0° .
8. თუ α და β სიბრტყეებს შორის კუთხე 90° -ის ტოლია, მაშინ
 ა) $\alpha \perp \beta$; ბ) $\alpha \parallel \beta$; გ) α არ არის მართობული β სიბრტყის;
 დ) ზოგჯერ α არ არის β სიბრტყის მართობული.
9. თუ a წრფე კვეთს α სიბრტყეს და გადაკვეთის წერტილზე გამავალი და α სიბრტყეში მდებარე რაიმე b და c წრფეების მართობულია, მაშინ
 ა) $a \parallel \alpha$; ბ) $a \parallel b$; გ) $a \perp \alpha$; დ) $a \parallel c$.
10. ამოზნექილი მრავალწახნაგას წვეროების ოდენობასა და წახნაგების ოდენობის ჯამს გამოკლებული წიბოების ოდენობა ტოლია:
 ა) 1-ის; ბ) 0-ის; გ) 3-ის; დ) 2-ის.

22. კუბი, მართი პრიზმა, პარალელეპიპედი, მართი პარალელეპიპედი, მართკუთხა პარალელეპიპედი, პირამიდა და მათი ფიგურები

მრავალწახნაგა სივრცული ფიგურაა, რომელიც მრავალკუთხედეებითა შემოსაზღვრული. ნახ.226-ზე გამოსახული მრავალწახნაგა – შვიდწახნაგაა. იგი შვიდი მრავალკუთხედით შემოსაზღვრული ფიგურაა.



ნახ.226

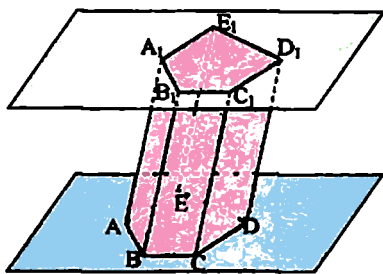
მრავალკუთხედები მრავალწახნაგას წახნაგებია. ნახ.226-ზე გამოსახული შვიდწახნაგას წახნაგებია: ABCDE, LHKGF, ALHB, BHKC, CKGD, DGFE, EFLA. წახნაგების წვეროებს მრავალწახნაგას წვეროები ეწოდება, ჩვენ შემთხვევაში წვეროებია: A, B, C, D, E, F, G, K, H, L. წახნაგების გვერდებს მრავალწახნაგას წიბოები ეწოდება. ნახ.226-ზე გამოსახული მრავალწახნაგას წიბოებია: AB, BC, CD, DE, EA, AL, BH, CK, DG, EF, LH, HK, KG, FG, FL. თუ გავიხსენებთ ეილერის მახასიათებელს, მართლაც, წახნაგების ოდენობა შვიდია, წვეროების ოდენობა ათია, ხოლო წიბოების ოდენობა კი – თხუთმეტი და გვაქვს: $7+10-15=2$. A და G წვეროები ერთსა და იმავე წახნაგს არ ეკუთვნის – მათ შემაერთებელ მონაკვეთს მრავალწახნაგას დიაგონალი ეწოდება. ნახ.226-ზე გამოსახული შვიდწახნაგას დიაგონალებია: AG, AK, BF, BG, CL, CF, DL, DH, EK და EH.

პრიზმა მრავალწახნაგას კერძო სახეა. პრიზმის ორი წახნაგი პარალელურ სიბრტყეზე მდებარე n -კუთხედებია – მათ პრიზმის ფუძეები ეწოდება; დანარჩენი n წახნაგი პარალელოგრამია, მათ გვერდითი წახნაგები ეწოდება (ნახ.227).

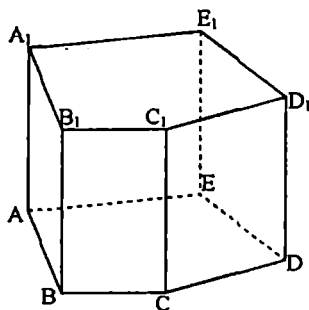
ნახ.227-ზე გამოსახული პრიზმის ფუძეებია $ABCDE$ და $A_1B_1C_1D_1E_1$ ხუთკუთხედები. გვერდითი წახნაგები პარალელოგრამებია: AA_1B_1B , BB_1C_1C , CC_1D_1D , DD_1E_1E და EE_1A_1A .

თუ პრიზმის გვერდითი წახნაგები მართკუთხედებია, მაშინ ასეთ პრიზმას მართკუთხა პრიზმა ეწოდება (ნახ.228).

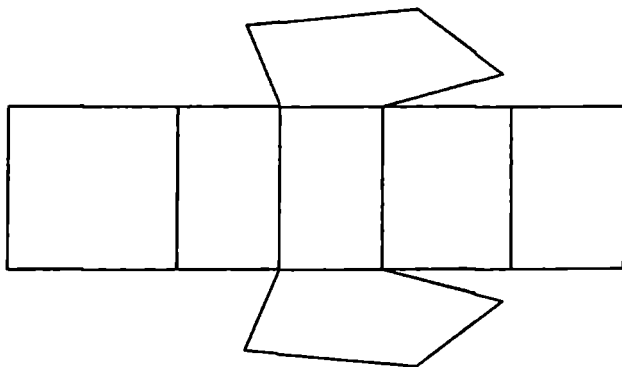
თუ წარმოვიდგენთ, რომ ამ მრავალწახნაგას მოდელი მუყაოსაგან არის დამზადებული, მაშინ იგი შეიძლება რამოდენიმე წიბოზე გაიჭრას და გაიშალოს ისე, რომ მრავალკუთხედის მოდელად გარდაიქმნას. ამ მრავალკუთხედს მრავალწახნაგას ზედაპირის შლილი ეწოდება. მას ზოგჯერ მრავალწახნაგას შლილსაც ეუწოდებთ (ნახ.229). ცხადია, მოდელი წიბოებზე სხვადასხვა წესით შეიძლება ჩაიჭრას – სხვადასხვა შლილს მივიღებთ.



ნახ.227



ნახ.228



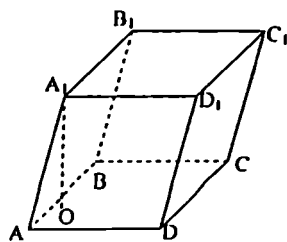
ნახ.229

პრიზმის კერძო სახეა პარალელებიპედი – პრიზმა, რომლის ყველა წახნაგი პარალელოგრამია (ნახ.230).

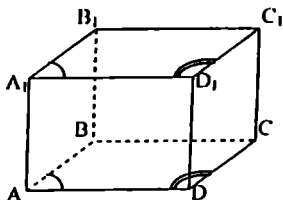
თუ პარალელებიპედის ყველა გვერდითი წახნაგი მართკუთხედი, ხოლო ფუძეები პარალელოგრამები (რომლებიც მართკუთხედს არ წარმოადგენენ), მაშინ მას მართი პარალელებიპედი ეწოდება (ნახ.231).

პარალელებიპედს, რომლის ყველა წახნაგი მართკუთხედი, მართკუთხა პარალელებიპედი ეწოდება. მართკუთხა პარალელებიპედი ნახაზზე მართი პარალელებიპედის მსგავსად გამოისახება (ნახ.232).

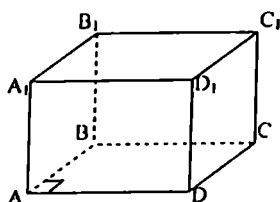
განსხვავებულად შეიძლება წარმოვადგინოთ პარალელებიპედის, მართი პარალელებიპედის და მართკუთხა პარალელებიპედის შლილები (ნახ.233).



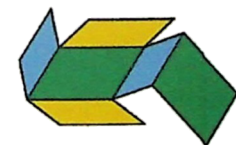
ნახ.230



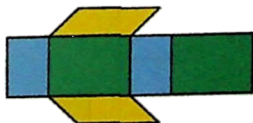
ნახ.231



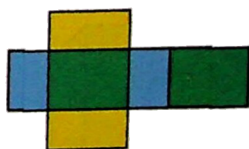
ნახ.232



პარალელებიპედის შლილი



მართი პარალელებიპედის შლილი



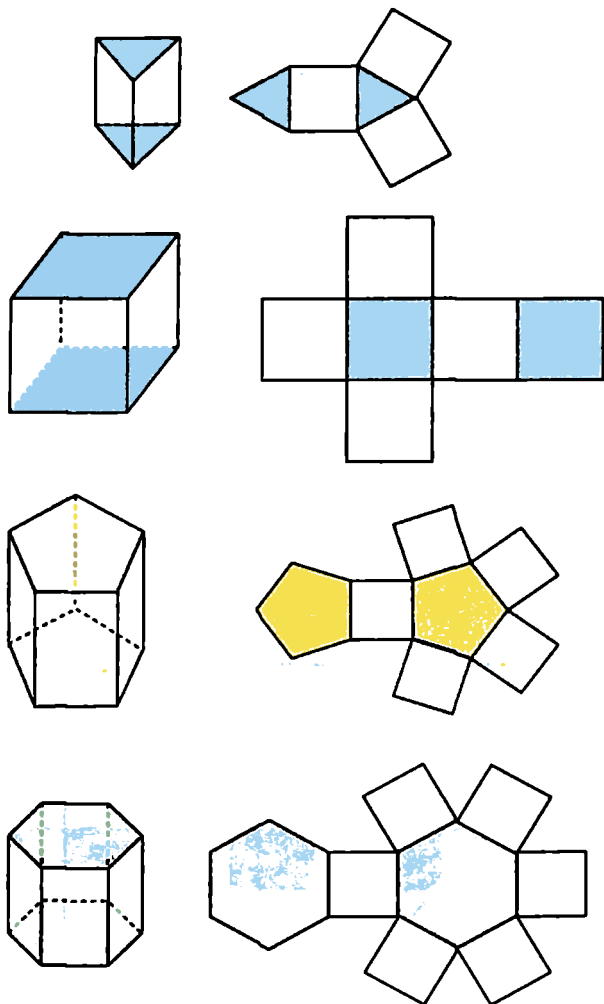
მართკუთხა პარალელებიპედის შლილი

ნახ.233.

როგორც აღვნიშნეთ, თუ პრიზმის გვერდითი წახნაგები მართკუთხედებია, მას მართი პრიზმა ეწოდება. მართ პრიზმას, რომლის ფუძეები წესიერი მრავალკუთხედებია, წესიერი პრიზმა ეწოდება.

ნახ.234-ზე გამოსახულია წესიერი სამკუთხა, ოთხკუთხა, ხუთ-

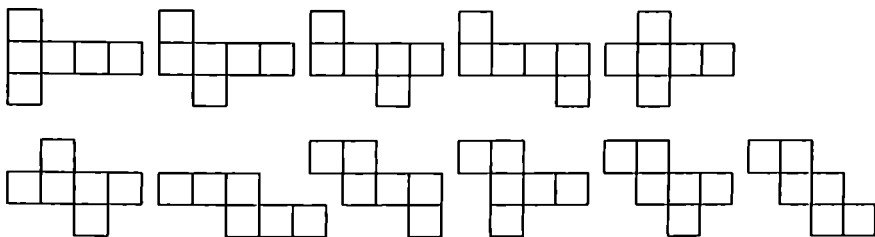
კუთხა და ექვსკუთხა პრიზმები და მათი შლილები.



ნახ.234.

კუბი წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის კერძო სახეა – მისი ყველა წახნაგი კვადრატია. კუბის 11 სხვადასხვა შლილი არსებობს. ექვს შლილში კუბის ოთხი წახნაგი შეიძლება ერთ „მწკრივში“ გამოვსახოთ, ოთხ შლილში, ყოველ მწკრივში არაუმეტეს სამი წახნაგია, ერთ

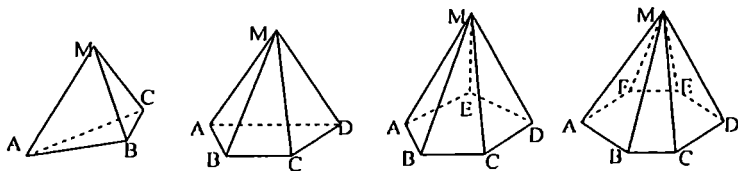
შლილში – არა უმეტეს ორი წახნაგია (ნახ.235).



ნახ.235

პირამიდა არის მრავალწახნაგა, რომლის ერთი წახნაგი (ფუძე) n -კუთხედიანია, დანარჩენი n წახნაგი (გვერდითი წახნაგები) – საერთო წვეროს მქონე სამკუთხედებია. ამ საერთო წვეროს პირამიდის წვერო ეწოდება.

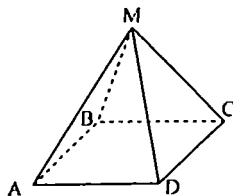
ნახ.236-ზე $n=3$, $n=4$, $n=5$ და $n=6$ შემთხვევებია გამოსახული, შესაბამისად გვაქვს – სამკუთხა, ოთხკუთხა, ხუთკუთხა და ექვსკუთხა პირამიდები.



ნახ.236.

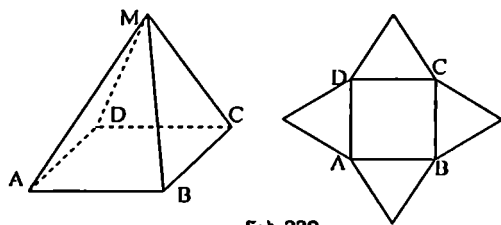
ნახ.237-ზე $MABCD$ პირამიდაა გამოსახული. MA , MB , MC და MD გვერდითი წიბოებია, M – წვერო, $ABCD$ ფუძეა, MAB , MBC , MDC და MAD სამკუთხედები გვერდითი წახნაგებია.

თუ პირამიდას ყველა გვერდითი წიბო ტოლია, ფუძე კი წესიერი მრავალკუთხედიანია, მაშინ პირამიდას წესიერი პირამიდა ეწოდება.



ნახ.237

თუ MABCD წესიერი პირამიდაა, მაშინ ABCD კვადრატია, ხოლო ოთხი გვერდითი წახნაგი (MAB, MBC, MDC და MAD სამკუთხედები) ტოლი ტოლფერდა სამკუთხედებია.



ნახ.239

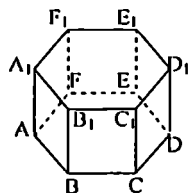
ნახ.238-ზე გამოსახულია აღნიშნული პირამიდა და მისი შლილი.

პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი არის გვერდითი წახნაგების ფართობების ჯამი. მართი პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი გამოითვლება ფორმულით: $S_{\text{გვ}} = P \cdot H$ (1). P -თი აღნიშნულია ფუძის პერიმეტრი, ხოლო H გვერდითი წიბოა (გვერდითი წიბო მართი პრიზმის სიმაღლეცაა).

მაგალითად, კუბის გვერდითი ზედაპირის ფართობის ფორმულაა: $S_{\text{გვ}} = 4a^2$, სადაც a კუბის წიბოს სიგრძეა.

ნახ.240-ზე მართი ექვსკუთხა პრიზმაა გამოსახული.

მისი გვერდითი ზედაპირის ფართობი (1) ფორმულით შეიძლება ვიპოვოთ. თუ ეს პრიზმა წესიერია, მაშინ $S_{\text{გვ}} = 6aH$, სადაც a - ფუძის გვერდია, ხოლო H - გვერდითი წიბო.



ნახ.240

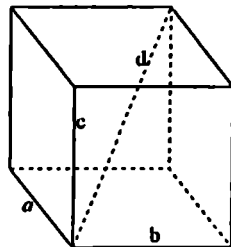
პრიზმის სრული ზედაპირის ფართობი მისი ყველა წახნაგის ფართობების ჯამია, რადგან მართი პრიზმის ფუძეები ტოლი მრავალკუთხედებია, ამიტომ $S_{\text{სრ}} = S_{\text{გვ}} + 2Q$, სადაც Q ფუძის ფართობია, ე.ი. $S_{\text{სრ}} = PH + 2Q$. მაგალითად, წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის შემთხვევაში გვაქვს $S_{\text{სრ}} = 6aH + 3a^2 \sqrt{3} / 2$, რადგან წესიერი ექვსკუთხედის ფართობი ტოლია $a^2 \sqrt{3} / 2$ -ის.

თუ კუბის წიბო არის a , მაშინ, ცხადია $S_{\text{სრ}} = 6a^2$.

მართი პარალელებიპედის შემთხვევაში: $S_{\text{სრ}} = 2aH + 2bH + 2Q$, a და b ფუძის გვერდებია (ფუძე პარალელოგრამია), Q ფუძის ფართობია.

მართკუთხა პარალელეპიპედის შემთხვევაში $S_{\text{პ}} = 2aH + 2bH + 2ab$.

მართკუთხა პარალელეპიპედს გააჩნია კიდევ ერთი თვისება: თუ მართკუთხა პარალელეპიპედის განზომილებებია a , b და c (ერთი წვეროდან გამოსული წიბოები), მაშინ ამ პარალელეპიპედის d დიაგონალი ასე გამოითვლება: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (ნახ.241).



ნახ.241

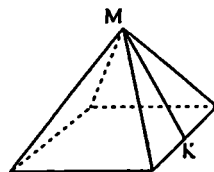
პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი მისი გვერდითი ზედაპირის ფართობისა და ფუძის ფართობის ჯამის ტოლია: $S_{\text{პ}} = S_{\text{გვ}} + S_{\text{ფ}}$.

თუ პირამიდა წესიერია, მაშინ ფუძე წესიერი n -კუთხედი და ყველა გვერდითი წახნაგი ტოლი ტოლფერდა სამკუთხედი. თითოეული გვერდითი წახნაგის სიმაღლეს, რომელიც პირამიდის წვეროდანაა გავლებული, პირამიდის აპოთემა ეწოდება. ნახ.242-ზე MK აპოთემა.

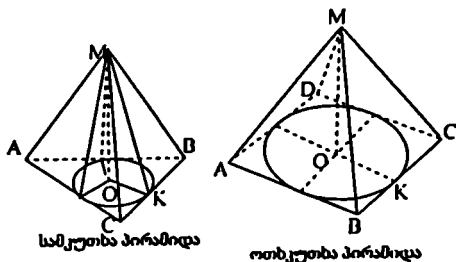
ამ შემთხვევაში: $S_{\text{გვ}} = \frac{1}{2} n a \cdot MK$, ანუ $S_{\text{გვ}} = \frac{1}{2} P \cdot MK$, სა-

დაც P ფუძის პერიმეტრია, ხოლო MK კი აპოთემა.

გვერდითი წახნაგების სიმაღლეები იმ შემთხვევაშიც არის ტოლი, როცა პირამიდის ფუძის გვერდებთან ორწახნაგა კუთხეები ტოლია (ნახ.243), პირამიდის სიმაღლე ფუძის ცენტრში ეშვება და $S_{\text{გვ}} = \frac{1}{2} P \cdot MK$, სადაც P – ფუძის პერიმეტრია.



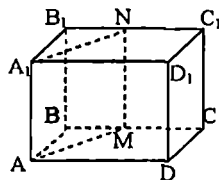
ნახ.242



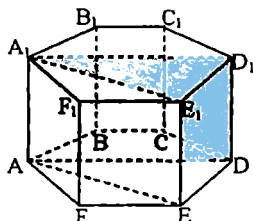
ნახ.243

2.2.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული გეგმადინოზისათვის

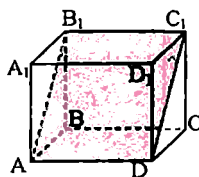
1. მართკუთხა პარალელებიპედის წიბოები: $AA_1=10$ სმ, $AD=8$ სმ, $AB=3$ სმ. M და N შესაბამისად BC და B_1C_1 -ის შუა წერტილებია. იპოვეთ AA_1NM მართკუთხედის ფართობი.



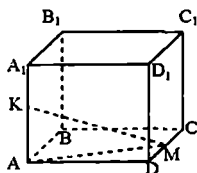
2. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის გვერდითი წახნაგის ფართობი არის Q . იპოვეთ დიაგონალური კვეთების – AA_1E_1E და AA_1D_1D მართკუთხედების ფართობები.



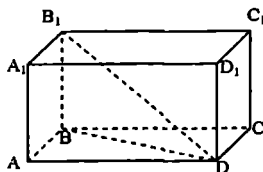
3. კუბის AB_1C_1D კვეთის ფართობი $16\sqrt{2}$ სმ² ია. იპოვეთ კუბის წიბო და დიაგონალი.



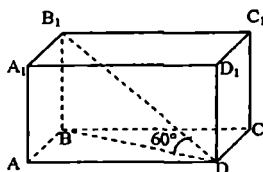
4. იპოვეთ მანძილი კუბის მოპირდაპირე წახნაგების არაპარალელური გვერდების შუაწერტილებს შორის, თუ კუბის წიბო 2 სმ-ის ტოლია.



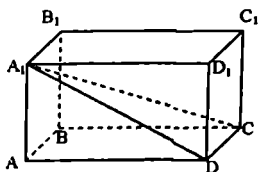
5. მართკუთხა პარალელებიპედის ფუძის გვერდებია 4 სმ და 3 სმ. პარალელებიპედის სიმაღლე 12 სმ-ია. იპოვეთ ამ პარალელებიპედის დიაგონალის სიგრძე.



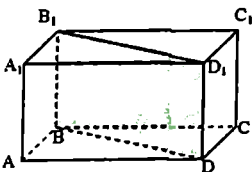
6. მართკუთხა პარალელებიპედის დიაგონალი მისი ფუძის სიბრტყესთან 60° -იან კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პარალელებიპედის სიმაღლე, თუ ფუძის გვერდები ტოლია 1 დმ-ის და 2 დმ-ის.



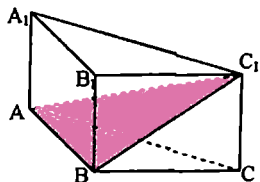
7. მართკუთხა პარალელეპიპედში A_1C მისი დიაგონალია, ხოლო A_1D – ერთ-ერთი წახნაგის დიაგონალი. იპოვეთ $DC:A_1C$, თუ $A_1D:A_1C=4:5$.



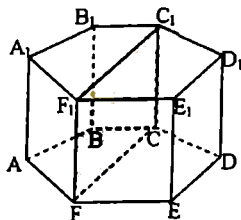
8. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდები 6 მ და 8 მ-ია, მათ შორის კუთხე $\alpha=30^\circ$, გვერდითი წიბო – 5 მ. იპოვეთ პარალელეპიპედის სრული ზედაპირის ფართობი და მცირე დიაგონალური კვეთის ფართობი.



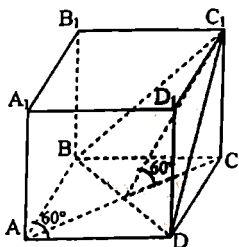
9. წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდი 2 დმ-ია, ხოლო გვერდითი წიბო – 1 დმ. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გადის ქვედა ფუძის გვერდზე და ზედა ფუძის წვეროზე.



10. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის უდიდესი დიაგონალური კვეთის ფართობი 1 მ²-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.



11. მოცემულია მართი პრიზმა, $ABCD$ რომბია: $AD=a$, $\angle BAD=60^\circ$, BD ფუძის დიაგონალზე და C_1 წერტილზე გავლებულია სიბრტყე. კვეთაში მიღებულ $\triangle BC_1D$ -სა და $ABCD$ ფუძეს შორის კუთხე 60° -ია. იპოვეთ პრიზმის სრული ზედაპირის ფართობი და კვეთის ფართობი.



12. მართი პრიზმის ფუძე ტოლფერდა ტრაპეციაა, რომლის ფუძეების სიგრძეები 5 სმ და 3 სმ-ია, ხოლო მახვილი კუთხე 60° -ის ტოლია. პრიზმის ქვედა ფუძის დიდ ფუძეზე და ზედა ფუძის მცირე ფუძეზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც ფუძის სიბ-

რტყისადმი 60° -ით არის დახრილი. იპოვეთ კვეთის ფართობი და პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

13. მართი პრიზმის ფუძე წრეწირზე შემოხაზული ტრაპეცია, რომლის შუახაზი 4 მ-ის ტოლია, ხოლო პრიზმის სიმაღლე 6 მ-ია. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

14. მართკუთხა პარალელებიპედის განზომილებათა შეფარდებაა: 2:3:4, ხოლო დიაგონალი $d = \sqrt{29}$ სმ. იპოვეთ მართკუთხა პარალელებიპედის სრული ზედაპირის ფართობი.

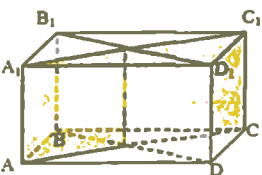
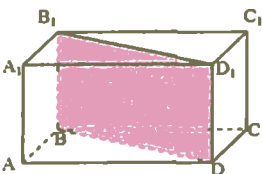
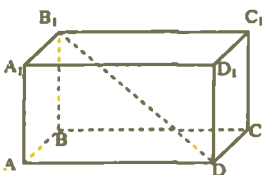
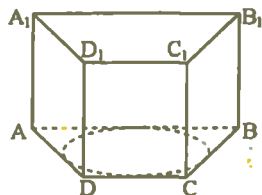
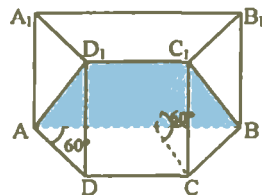
15. მარკუთხა პარალელებიპედის დიაგონალური კვეთა კვადრატია, რომლის ფართობი 25 სმ²-ია. იპოვეთ პარალელებიპედის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ ფუძის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3:4.

16. მართი პარალელებიპედის ფუძე რომბია. მისი დიაგონალური კვეთის ფართობებია 20 დმ² და 15 დმ². იპოვეთ პარალელებიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17. პარალელებიპედის წახნაგები ტოლი რომბებია $4\sqrt{3}$ მ-ის ტოლი გვერდითა და 60° -იანი მახვილი კუთხით. იპოვეთ პარალელებიპედის სრული და გვერდითი ზედაპირების ფართობები.

18. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ მისი ფუძის დიაგონალი $3\sqrt{2}$ სმ-ია, ხოლო სიმაღლე 4 სმ-ის ტოლია.

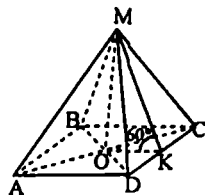
19. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი



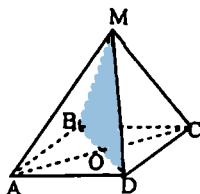
32 მ²-ია, ხოლო სრული ზედაპირის ფართობი კი 40 მ²-ის ტოლია. იპოვეთ სიმაღლე.

20. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის დიაგონალი 9 სმ-ის ტოლია. სრული ზედაპირის ფართობი კი 144 სმ²-ია. იპოვეთ ფუძის გვერდი და წიბო.

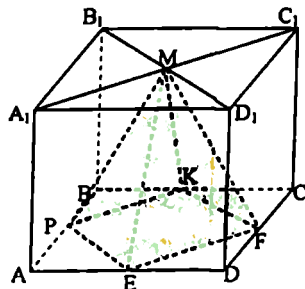
21. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლე $2\sqrt{15}$ სმ-ია. პირამიდის აპოთემა ფუძის სიბრტყისადმი დახრილია 60° -იანი კუთხით. იპოვეთ გვერდითი წიბო.



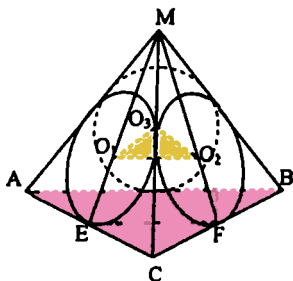
22. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდის სიგრძე 8 სმ-ია, ხოლო დიაგონალური კვეთის ფართობი $2\sqrt{34}$ სმ²-ის ტოლია. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.



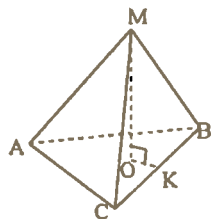
23. კუბის ზედა ფუძის ცენტრი და ქვედა ფუძის გვერდების შუაწერტილები ამ კუბში ჩახაზული პირამიდის წვეროებია. კუბის წიბო a -ს ტოლია. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.



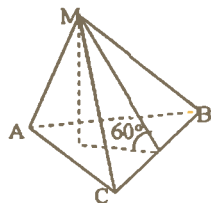
24. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო ფუძის გვერდის ტოლია. გვერდითი წახნაგების ცენტრები შეერთებულია ერთმანეთთან. იპოვეთ მიღებული სამკუთხედის ფართობის შეფარდება პირამიდის ფუძის ფართობთან.



25. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის სიმაღლე, თუ ფუძის გვერდის სიგრძეა 13 სმ და გვერდითი ზედაპირის ფართობი ორჯერ მეტია ფუძის ფართობზე.



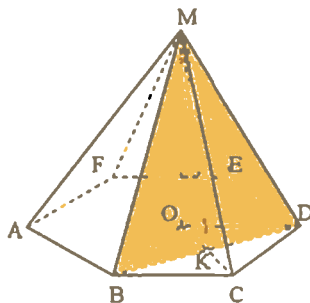
26. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ პირამიდის ფუძის გვერდი a -ს ტოლია, ხოლო ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხე 60° -ია.



27. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის სიმაღლე $\sqrt{39}$ სმ-ის ტოლია, ხოლო ფუძის გვერდი კი 12 სმ-ია. იპოვეთ მცირე დიაგონალური კვეთის ფართობი.

28. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის სიმაღლე 6 სმ-ია, გვერდითი წიბო – 10 სმ. იპოვეთ გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

29. პირამიდის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედია. ამ სამკუთხედის კათეტები 3 სმ და 4 სმ-ია. ყველა აპოთემა ერთმანეთის ტოლია და 7 სმ-ს უდრის. ვიპოვოთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი.



30. პირამიდის ფუძე ტოლფერდა სამკუთხედია, რომლის ფერდები 5 სმ-ის ტოლია, ხოლო ფუძე 2 სმ-ია. აპოთემა, რომელიც ფუძეზე გადის 4 სმ-ის ტოლია, დანარჩენი აპოთემები მასზე ორჯერ ნაკლებია. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

2.2.3. ტესტი №12

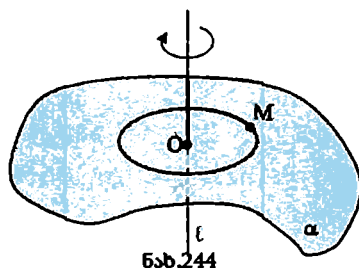
1. წახნაგების რა უმცირესი რაოდენობა შეიძლება ჰქონდეს პრიზმას?

ა) 6; ბ) 5; გ) 4; დ) 9; ე) 3.

2. რამდენი წვერო აქვს სამკუთხა პრიზმას?
 ა) 6; ბ) 5; გ) 4; დ) 3; ე) 9.
3. რამდენი წიბო აქვს ოთხკუთხა პრიზმას?
 ა) 6; ბ) 5; გ) 8; დ) 12; ე) 9.
4. შეიძლება თუ არა ხუთწახნაგას ერთ-ერთი წახნაგი ხუთკუთხედი იყოს?
 ა) შეიძლება; ბ) შეიძლება ზოგიერთი სახის პრიზმისათვის;
 გ) არ შეიძლება; დ) შეიძლება ზოგიერთი სახის პირამიდისათვის
5. თუ მართკუთხა პარალელებიპედის განზომილებებია a , b და c , მაშინ მისი დიაგონალია
 ა) $a^2+b^2+c^2$; ბ) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; გ) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; დ) $a+b+c$.
6. პარალელებიპედის ფუძეები
 ა) ტრაპეციებია; ბ) ხუთკუთხედებია;
 გ) პარალელოგრამებია; დ) სამკუთხედებია.
7. ნებისმიერი მართი პარალელებიპედის ფუძეები
 ა) ტრაპეციებია; ბ) პარალელოგრამებია;
 გ) ხუთკუთხედებია; დ) სამკუთხედებია.
8. მართკუთხა პარალელებიპედის ფუძეები
 ა) მართკუთხედებია; ბ) ექვსკუთხედებია;
 გ) სამკუთხედებია; დ) ტრაპეციებია.
9. რამდენი წახნაგი აქვს ექვსკუთხა პირამიდას?
 ა) 6; ბ) 3; გ) 5; დ) 8; ე) 7.
10. ნებისმიერი პირამიდის ფუძე შეიძლება იყოს
 ა) მხოლოდ ნებისმიერი პარალელოგრამი;
 ბ) მხოლოდ ნებისმიერი რომბი;
 გ) ნებისმიერი მრავალკუთხედი;
 დ) მხოლოდ ნებისმიერი კვადრატი;
 ე) მხოლოდ ნებისმიერი ტრაპეცია.

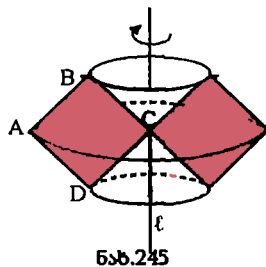
2.3. ცილინდრი, კონუსი, სფერო, ბირთვი, მათი შლილები, გვერდითი ზედაპირისა და სრული ზედაპირის ზართოვები

ვთქვათ α სიბრტყეს მისი მართობული ℓ წრფე O წერტილში კვეთს. M წერტილი α სიბრტყეს ეკუთვნის. განვიხილოთ α სიბრტყეზე წრეწირი, რომლის რადიუსი OM -ის ტოლია. ცხადია, შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ ეს წრეწირი მიიღება M წერტილის ბრუნვით ℓ ღერძის გარშემო α სიბრტყეზე (ნახ.244).



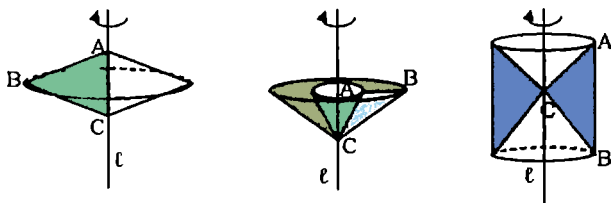
ნახ.244

ვთქვათ, რაიმე ფიგურა ℓ წრფეზე გამავალ სიბრტყეზე მდებარეობს. მაგალითად ეს ფიგურა $ABCD$ კვადრატია. ამ კვადრატის ყოველი წერტილი ℓ წრფის გარშემო ბრუნვისას წრეწირს შემოწერს. ამ წრეწირების წერტილებისაგან შედგენილ ფიგურას ეწოდება $ABCD$ კვადრატის ℓ ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ფიგურა – ბრუნვის ფიგურა (ბრუნვის სხეული) (ნახ.245).



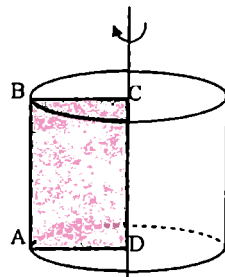
ნახ.245

ნახ.246-ზე გამოსახულია სხვადასხვა ბრუნვის ფიგურა.



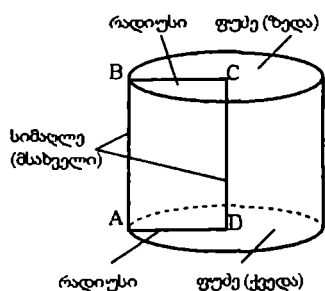
ნახ.246.

ცილინდრი ეწოდება ბრუნვის ფიგურას, რომელიც მიიღება მართკუთხედის ბრუნვით ამ მართკუთხედის ერთ-ერთი გვერდის შემცველი წრფის გარშემო. ნახ.247-ზე გამოსახულია ის შემთხვევა, როცა ბრუნვა CD გვერდის (წრფის) გარშემო ხდება. AD, AB და BC გვერდებით შედგენილი ტეხილი ამ ბრუნვისას ქმნის ფიგურას, რომელსაც ცილინდრის ზედაპირი ეწოდება.



ნახ.247

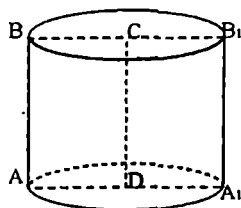
როდესაც ცილინდრის მოდელს ვაკვირდებით, ცილინდრის ზედაპირს ვხედავთ. AB გვერდის ბრუნვით მიიღება ცილინდრის გვერდითი ზედაპირი, BC და AD გვერდებით კი – ცილინდრის ფუძეები, წრეები. AB მსახველია, მსახველია ნებისმიერი მონაკვეთი, რომელიც AB-ს პარალელურია და ფუძეების წრეწირთა ორ წერტილს აერთებს.



ნახ.248

ნახ. 248-ზე მოცემულია ცილინდრი და აღნიშნულია მისი მახასიათებელი შემადგენელი ნაწილები.

ნახ. 249-ზე წარმოდგენილია ცილინდრის კვეთა სიბრტყით, რომელიც მსახველსა და ფუძის ცენტრზე გადის, ასეთ კვეთას ღერძული კვეთა ეწოდება. ABB_1A_1 მართკუთხედი წარმოადგენს მოცემული ცილინდრის ღერძულ კვეთას.



ნახ.249

წარმოვადგინოთ ცილინდრი და მისი ზედაპირის შლილი. ეს შლილი მართკუთხედისა და ორი წრისაგან შედგება. ამ შლილის ფართობი ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობია: $S_{სრ} = S_{გვ} + 2S_{ფ}$. (ნახ.250).

გვერდითი ზედაპირი მართკუთხედი, რომლის გვერდებია $2\pi R$ და H (R – ფუძის რადიუსია, H – ცილინდრის სიმაღლე). ამრიგად,

$$S_{\text{გვ}}=2\pi RH, S_{\text{ფ}}=\pi R^2, S_{\text{სრ}}=2\pi RH+2\pi R^2$$

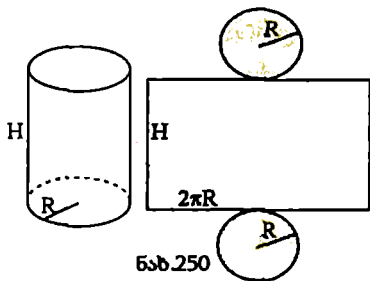
კონუსი არის ბრუნვის ფიგურა, რომელიც მიიღება მართკუთხა სამკუთხედის ბრუნვით ამ სამკუთხედის ერთ-ერთი კათეტის შემცველი წრფის გარშემო. ნახ.251-ზე გამოსახული ABC სამკუთხედი ბრუნავს BC კათეტის შემცველი ℓ წრფის გარშემო. ამ ბრუნვისას მეორე კათეტი AC წრეს ქმნის, იგი კონუსის ფუძეს წარმოადგენს, AB ჰიპოტენუზა გვერდით ზედაპირს ქმნის. AB-ს კონუსის მსახველს უწოდებენ. საზოგადოდ, კონუსის მსახველი ეწოდება ნებისმიერ მონაკვეთს, რომელიც კონუსის B წვეროს ფუძის წრეწირის წერტილთან აერთებს.

ნახ.252-ზე გამოსახულია კონუსი. NA, NB, NK, NM კონუსის მსახველებია, NO კონუსის სიმაღლეა, მონაკვეთს, რომელიც კონუსის წვეროს ფუძის ცენტრთან აერთებს, კონუსის სიმაღლე ეწოდება.

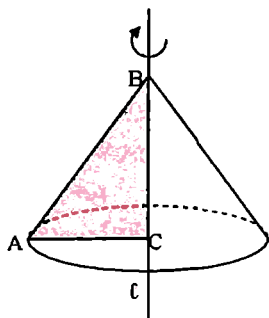
ნახ.253-ზე კონუსი და მისი გვერდითი ზედაპირის შლილია წარმოდგენილი – გვერდითი ზედაპირის შლილი არის წრის სექტორი, რომლის ფართობი კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობია: $S=\pi R \ell$.

ნახ.254-ზე კონუსის

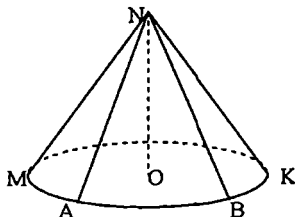
სრული ზედაპირის შლილია წარმოდგენილი. მისი ფართობი კონუსის ზედაპირის ფართობია (სრული ზედაპირის ფართობი):



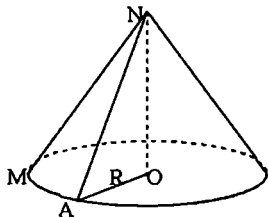
ნახ.250



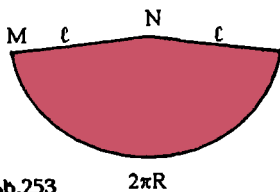
ნახ.251



ნახ.252



ნახ.253



2πR

$$S_{\text{სფ}} = \pi Rl + \pi R^2$$

კონუსის ღერძული კვეთა არის სამკუთხედი, რომელიც მიიღება კონუსის კვეთით მის სიმაღლესა და მსახველზე გამავალი სიბრტყით.

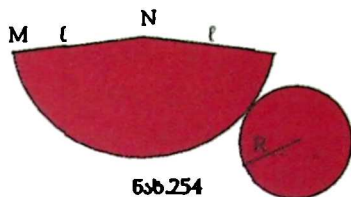
MNK სამკუთხედი კონუსის ღერძული კვეთაა – მისი ფუძე კონუსის ფუძის დიამეტრია, ხოლო სიმაღლე კონუსის სიმაღლის ტოლია (ნახ.255).

ცილინდრის მკვეთი სიბრტყე, რომელიც ცილინდრის ღერძის მართობულად არის გავლებული, ცილინდრის გვერდით ზედაპირს გადაკვეთს წრეწირზე, რომელიც ფუძის წრეწირის ტოლია (ნახ.256).

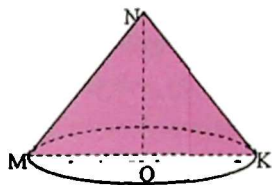
პრიზმას ეწოდება ცილინდრში ჩახაზული, თუ მისი ფუძეები ცილინდრის ფუძეებში ჩახაზული მრავალკუთხედებია, პრიზმის გვერდითი წიბოები კი ცილინდრის მსახველებს წარმოადგენენ (ნახ.257).

პრიზმას ეწოდება ცილინდრზე შემოხაზული, თუ მისი ფუძეები ცილინდრის ფუძეებზე შემოხაზული მრავალკუთხედებია. შემოხაზული პრიზმის გვერდითი წახნაგები ეხებიან ცილინდრის გვერდით ზედაპირს (ნახ.258).

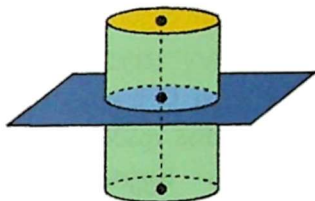
კონუსის მკვეთი სიბრტყე, რომელიც კონუსის ღერძის მართობულად არის გავლებული, კონუსს კვეთს წრეზე, ხოლო გვერდით ზედაპირს - წრეწირზე, რომლის ცენტრი კონუსის ღერძზე მდებარეობს (ნახ.259).



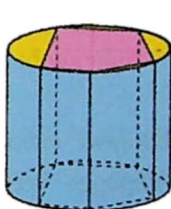
ნახ.254



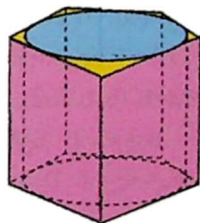
ნახ.255



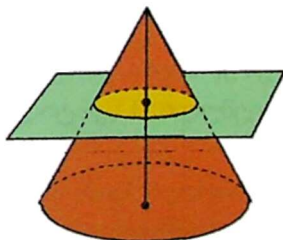
ნახ.256



ნახ.257

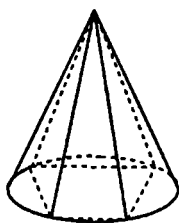


ნახ.258



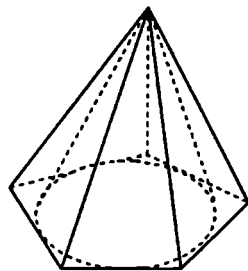
ნახ.259

პირამიდას კონუსში ჩახაზული ეწოდება, თუ მისი ფუძე კონუსის ფუძის წრეწირში ჩახაზული მრავალკუთხედია, ხოლო წვერო კონუსის წვეროს ემთხვევა, კონუსში ჩახაზული პირამიდის გვერდითი წიბოები კონუსის მსახველებია (ნახ.260).



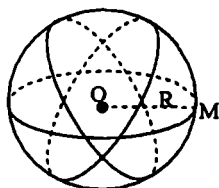
ნახ.260

პირამიდას კონუსზე შემოხაზული ეწოდება, თუ მისი ფუძე კონუსის ფუძეზე შემოხაზული მრავალკუთხედია, ხოლო წვერო კონუსის წვეროს ემთხვევა. შემოხაზული პირამიდის გვერდითი წახნაგების სიბრტყეები კონუსის გვერდითი ზედაპირის მხეები სიბრტყეებია (ნახ.261).



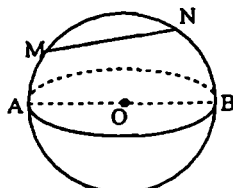
ნახ.261

სივრცის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც O წერტილიდან ერთი და იმავე R მანძილითაა დაშორებული სფერო ეწოდება. O წერტილს სფეროს ცენტრი ეწოდება. OM მონაკვეთს (M სფეროს ნებისმიერი წერტილია) რადიუსი ეწოდება: $OM=R$ (ნახ.262).



ნახ.262

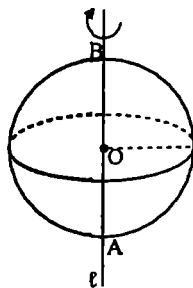
სფეროს ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებელ მონაკვეთს, სფეროს ქორდა ეწოდება. ცენტრზე გამავალ ქორდას დიამეტრი ეწოდება. AB დიამეტრია, $AB=2R$, MN ქორდაა (ნახ.263).



ნახ.263

ბირთვი სივრცის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს ეწოდება, რომელთაგან თითოეულის დაშორება მოცემული O წერტილიდან R მანძილს არ აღემატება.

ბირთვი შეიძლება მივიღოთ ნახევარწრის ბრუნვით იმ ღერძის გარშემო, რომელიც ნახევარწრის დიამეტრზე გადის. ფიგურა, რომელიც ნახევარწრეწირის ბრუნვით მიიღება არის სფერო – ბირთვის ზე-



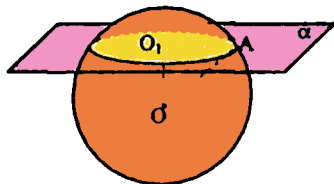
ნახ.264

დაპირი (ნახ. 264).

სფეროს რადიუსს, ცენტრს, ქორდას, დიამეტრს შესაბამისი ბირთვის რადიუსი, ცენტრი, ქორდა და დიამეტრი ეწოდება. ბირთვის ყველა იმ წერტილს, რომელიც ბირთვის ზედაპირს – სფეროს არ ეკუთვნის – ბირთვის შიგა წერტილი ეწოდება.

თუ სფეროს რადიუსი R -ის ტოლია, მაშინ მისი S ფართობი გამოითვლება ფორმულით: $S=4\pi R^2$.

ვთქვათ, ბირთვი გადაკვეთილია α სიბრტყით (ნახ. 265). კვეთაში წრე მიიღება. ამ წრის ცენტრი – O_1 წერტილი არის ბირთვის O ცენტრიდან მკვეთ სიბრტყეზე დაშვებული მართობის ფუძე.

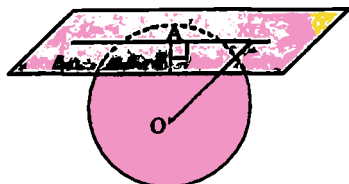


ნახ.265

ვთქვათ, A წერტილი ბირთვის ზედაპირის ის წერტილია, რომელიც α სიბრტყეს ეკუთვნის, მაშინ $OA^2=OO_1^2+O_1A^2$. მაშასადამე $R^2=h^2+r^2$, h არის მანძილი ბირთვის ცენტრიდან მკვეთ სიბრტყემდე, R – ბირთვის რადიუსია, ხოლო r – კვეთაში მიღებული წრის რადიუსი.

ვთქვათ, სიბრტყე გადის ბირთვის A წერტილზე OA რადიუსის მართობულად. ამ სიბრტყეს ბირთვის მხები სიბრტყე ეწოდება; A წერტილს – შეხების წერტილი. მხებ სიბრტყეს ბირთვის ზედაპირთან ერთადერთი საერთო წერტილი აქვს – A წერტილი.

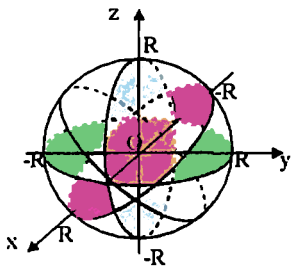
A წერტილზე გამავალ ნებისმიერ წრფეს, რომელიც α სიბრტყეს ეკუთვნის, ამ წერტილში ბირთვის მხები (ბირთვის ზედაპირის მხები) წრფე ეწოდება. მხებ წრფესაც ბირთვთან მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი აქვს (ნახ.266).



ნახ.266

კოორდინატები საშუალებას იძლევა რიცხვებით, განტოლებებით, უტოლობებით ან მათგან შედგენილი სისტემებით სივრცეში წარმოვადგინოთ წერტილთა სიმრავლეები. თუ კოორდინატთა სის-

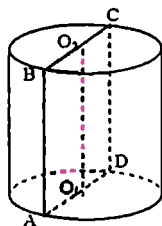
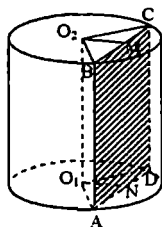
ტემის სათავე სფეროს ცენტრია, მაშინ სფეროს განსაზღვრების თანახმად $M(x;y;z)$ წერტილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ ეკუთვნის მას, როცა $x^2+y^2+z^2=R^2$ (1) (სადაც R სფეროს რადიუსია). (1) განტოლება სფეროს განტოლებას (ნახ.267), ბირთვი მოიცემა უტოლობით $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ თუ სფეროს ცენტრი $C(a;b;c)$ წერტილშია, მაშინ სფეროს განტოლებას აქვს სახე: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$



ნახ.267

2.3.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

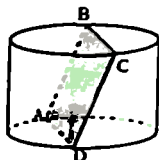
1. ცილინდრის ფუძის რადიუსი 2 დმ-ის ტოლია, სიმაღლე კი 3 დმ-ია. იპოვეთ ღერძული კვეთის დიAGONალი.
2. ცილინდრის სიმაღლეა 6 სმ, ფუძის რადიუსი – 5 სმ. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გავლებულია ცილინდრის ღერძის პარალელურად, მისგან 4 სმ-ის მანძილზე.
3. რამდენჯერ მეტია ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი მისი ღერძული კვეთის ფართობზე?
4. რამდენჯერ მეტია ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი მისი გვერდითი ზედაპირის ფართობზე, თუ ცილინდრის სიმაღლე ფუძის რადიუსის ტოლია?
5. იპოვეთ ცილინდრის სიმაღლე, თუ მისი გვერდითი ზედაპირის ფართობია 8π სმ², ფუძის ფართობი – 4π სმ².
6. ცილინდრის ღერძული კვეთა კვადრატს წარმოადგენს. ამ ცილინდრის სიმაღლე 4 სმ-ია. იპოვეთ ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.



7. ცილინდრის სიმაღლე 10 სმ-ით მეტია მისი ფუძის რადიუსზე. იპოვეთ ფუძის რადიუსი, თუ ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი 144π სმ²-ია.

8. რამდენი პროცენტით გაიზრდება ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი ფუძის რადიუსი და სიმაღლე შესაბამისად 10%-ით და 20%-ით გაიზრდება?

9. ცილინდრის სიმაღლე 4 სმ-ია, ფუძის რადიუსი – 14 სმ. ABCD კვადრატია (B და C ზედა ფუძის წრეწირს ეკუთვნის, A და D ქვედა ფუძის წრეწირს). იპოვეთ კვადრატის გვერდი.

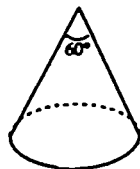


10. ცილინდრის ღერძული კვეთის ფართობი Q-ს ტოლია. იპოვეთ გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

11. კონუსის სიმაღლე 6 სმ-ია, ფუძის რადიუსი – 8 სმ. იპოვეთ გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

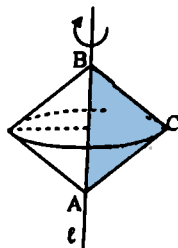
12. კონუსის სიმაღლე 4 სმ-ია, მსახველი – 5 სმ. იპოვეთ სრული ზედაპირის ფართობი.

13. კონუსის მსახველთა შორის უდიდესი კუთხე 60° -ის ტოლია. იპოვეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირისა და სრული ზედაპირის ფართობთა შეფარდება.



14. იპოვეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი ფუძის ფართობი 9π მ²-ია, ღერძული კვეთის ფართობი კი – 12 მ².

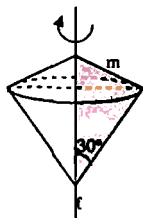
15. კონუსის სიმაღლე მისი ფუძის დიამეტრის ტოლია. იპოვეთ კონუსის ფუძის ფართობის შეფარდება კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობთან.



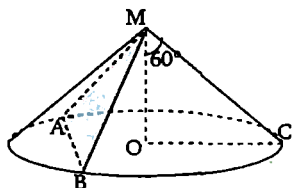
16. ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდი a -ს ტოლია. იგი ბრუნავს მისი ერთ-ერთი გვერდის გარშემო. იპოვეთ მიღებული ფიგურის ზედაპირის ფართობი.

17. მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტი ტოლია m -ის და ამ

კათეტის მოპირდაპირე კუთხე 30° -ის, ბრუნავს $\frac{3}{4}$ -პოტენუზის გარშემო. იპოვეთ იმ ფიგურის ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება მოცემული სამკუთხედის კათეტებით შედგენილი ტეხილის ბრუნვით.

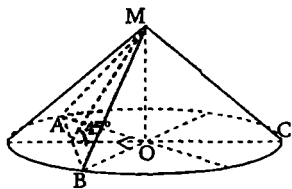


18. კონუსის სიმაღლე H -ის ტოლია. კუთხე სიმაღლესა და მსახველს შორის 60° -ია. იპოვეთ ორ ურთიერთმართობულ მსახველზე გამავალი კვეთის ფართობი.

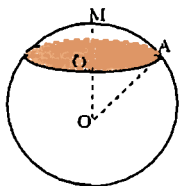


19. კონუსის ფუძის ფართობი 9π სმ²-ის ტოლია, ხოლო მსახველი – 5 სმ-ია. იპოვეთ ღერძული კვეთის ფართობი.

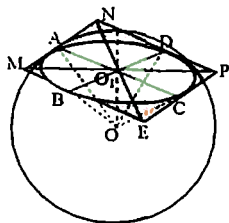
20. კონუსის წვეროდან ფუძისადმი 45° -იანი კუთხით გავლებულია სიბრტყე, რომელიც კვეთს ფუძის წრეწირის მეოთხედს. კონუსის სიმაღლე 10 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ კვეთის ფართობი.



21. ბირთვის რადიუსი 26 სმ-ია. ერთ-ერთი რადიუსის შუაწერტილზე ამ რადიუსის მართობულად გავლებულია სიბრტყე. იპოვეთ კვეთის ფართობი.



22. ვთქვათ, რომბის თითოეული გვერდის შემცველი წრფე ბირთვის მხები წრფეა, რომბის დიაგონალები შესაბამისად ტოლია 30 სმ-ის და 40 სმ-ის. ბირთვის რადიუსი 20 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი ბირთვის ცენტრიდან რომბის სიბრტყემდე.



23. ბირთვს კვეთს სიბრტყე, რომელიც ცენტრიდან 12 სმ-ითაა დაშორებული. კვეთაში მიღებული წრის რადიუსი 20 სმ-ია. იპოვეთ ბირთვის ზედაპირის (სფეროს ფართობი).

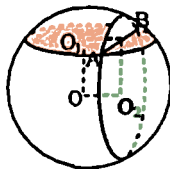
24. ორი სფეროს ზედაპირების ფართობების შეფარდებაა 9:4.

იპოვეთ ამ სფეროების რადიუსების შეფარდება.

25. ბირთვის რადიუსის შუაწერტილზე გავლებულია ამ რადიუსის მართობული სიბრტყე. იპოვეთ მიღებული კვეთისა და უდიდესი კვეთის (ბირთვის ცენტრზე გამავალი სიბრტყით კვეთის) ფართობების შეფარდება.

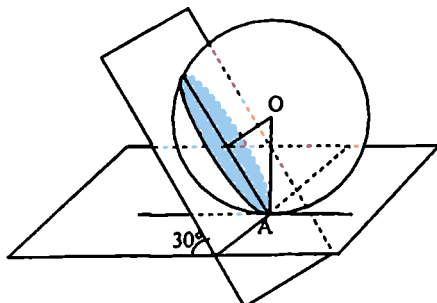
26. ბირთვის ზედაპირზე მოცემულია სამი წერტილი – A , B და C , $AB=3$ სმ, $AC=3$ სმ, $BC=4$ სმ. ბირთვის რადიუსი 6,5 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი ბირთვის ცენტრიდან A , B და C წერტილებზე გამავალ სიბრტყემდე.

27. ბირთვის რადიუსი 14 სმ-ია. მის ზედაპირზე მოცემულია ორი ტოლი წრეწირი, რომლებსაც AB საერთო ქორდა აქვთ, $AB=4$ სმ. ცნობილია, რომ

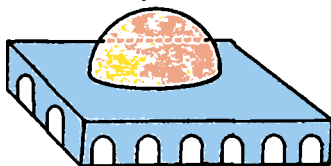


წრეწირების სიბრტყეები მართობულია. იპოვეთ წრეწირების რადიუსები.

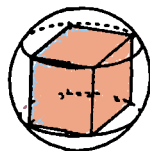
28. ბირთვის რადიუსი არის R . ბირთვის A წერტილზე გავლებულია ორი სიბრტყე – პირველი მხები სიბრტყეა, მეორე კი კვეთს ბირთვს და მხებ სიბრტყესთან 30° -იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ კვეთის ფართობი.



29. საკონცერტო დარბაზის გუმბათს ნახევარსფეროს ფორმა აქვს. მისი ზედაპირის ფართობი 900 მ²-ია. იპოვეთ გუმბათის სიმაღლე.



30. კუბის რვავე წვერო ბირთვის ზედაპირს ეკუთვნის (კუბი ჩახაზულია ბირთვში). კუბის წიბო a -ს ტოლია. იპოვეთ ბირთვის რადიუსი.



2.3.2. ტესტი №13

1. თუ ცილინდრის სიმაღლეა H , ფუძის რადიუსი – R , მაშინ ამ ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობია
ა) $2\pi RH$; ბ) $2\pi RH + \pi R^2$; გ) $2\pi RH + 2\pi R^2$;
დ) $\pi RH + \pi R^2$; ე) $\pi RH + 2\pi R^2$.
2. მართკუთხედის ბრუნვით ამ მართკუთხედის ერთ-ერთი გვერდის შემცველი წრფის გარშემო მიიღება
ა) ცილინდრი; ბ) სფერო; გ) ბირთვი;
დ) ბრუნვის ფიგურა არ მიიღება; ე) კონუსი.
3. თუ ცილინდრის სიმაღლეა H , ფუძის რადიუსი – R , მაშინ ამ ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობია
ა) $2\pi R^2$; ბ) $2\pi RH$; გ) πRH ; დ) $2\pi RH + \pi R^2$; ე) $2\pi RH + 2\pi R^2$.
4. მართკუთხა სამკუთხედის ბრუნვით ამ სამკუთხედის ერთ-ერთი კათეტის შემცველი წრფის გარშემო მიიღება
ა) ცილინდრი; ბ) სფერო; გ) ბირთვი;
დ) ბრუნვის ფიგურა არ მიიღება; ე) კონუსი.
5. კონუსის სრული ზედაპირის ფართობი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით (თუ ამ კონუსის მსახველი l -ია, ხოლო ფუძის რადიუსი კი R)
ა) $2\pi Rl$; ბ) $\pi Rl + \pi R^2$; გ) $2\pi Rl + 2\pi R^2$;
დ) $\pi Rl + 2\pi R^2$; ე) $2\pi Rl + \pi R^2$.
6. კონუსის მსახველი l -ის ტოლია, ხოლო ფუძის რადიუსი კი – R , მაშინ ამ კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობია
ა) $2\pi Rl$; ბ) $\pi Rl + \pi R^2$; გ) πRl ; დ) $\pi Rl + 2\pi R^2$; ე) $2\pi Rl + \pi R^2$.
7. ნახევარწრის ბრუნვით იმ ღერძის გარშემო, რომელიც ამ ნახევარწრის დიამეტრზე გადის, მიიღება
ა) ცილინდრი; ბ) მხოლოდ სფერო; გ) კონუსი;
დ) ბირთვი; ე) ბრუნვის ფიგურა არ მიიღება.

8. ნახევარწრეწირის ბრუნვით იმ ღერძის გარშემო, რომელიც ამ ნახევარწრეწირის დიამეტრზე გადის, მიიღება
- ა) ცილინდრი; ბ) სფერო; გ) კონუსი;
 დ) ბირთვი; ე) ბრუნვის ფიგურა არ მიიღება.
9. თუ სფეროს რადიუსი R -ის ტოლია, მაშინ მისი ფართობი გამოითვლება ფორმულით:
- ა) πR^2 ; ბ) $2\pi R^2$; გ) $3\pi R^2$; დ) $4\pi R^2$; ე) $\frac{1}{2} \pi R^2$.
10. ბირთვის მხებ სიბრტყეს ამ ბირთვის ზედაპირთან
- ა) უამრავი საერთო წერტილი აქვს;
 ბ) ორი საერთო წერტილი აქვს;
 გ) სამი საერთო წერტილი აქვს;
 დ) შეხების წერტილი არა აქვს;
 ე) ერთადერთი საერთო წერტილი აქვს.

2.4. შიგურათა მოძელების დამზადება დაწყებით სკოლაში

საშუალებანი გეომეტრიულ ფიგურათა და მათი თვისებების შესწავლისათვის გულისხმობს მოსწავლეთა მომზადებას გეომეტრიის სისტემატური კურსის შესწავლისათვის. დაწყებით სკოლაში ხდება მოსწავლეებში მართკუთხედის, მრავალკუთხედის, სამკუთხედის, კუთხის, წრის, წრეწირის, რადიუსის, დიამეტრის, ცენტრის, მონაკვეთის, წრფის, სხივის, ტეხილის და ა.შ. ცნებების ფორმირება. ფიგურები და მათი ელემენტები შეიძლება გამოყენებულ იქნას პირველი ათეული რიცხვების შესწავლისას, როგორც სათვლელი მასალა. თვლას ექვემდებარება როგორც თვით ფიგურები, ისე მათი ელემენტები: წვეროები, კუთხეები, გვერდები. ეს არის არითმეტიკული და გეომეტრიული მასალების კავშირის ერთი მომენტი.

გეომეტრიული მასალა ხშირად შეიძლება იყოს ამა თუ იმ მათემატიკური კანონზომიერების, კავშირის, დამოკიდებულების თვალსაჩინო ილუსტრაცია. გეომეტრიულ ცნებათა ფორმირება ხდება ამ ცნებათა შესაბამისი ფიგურების მოდელების მეშვეობით. ყოველი ფიგურა უნდა იყოს წარმოდგენილი სხვადასხვა ზომის, სხვადასხვა მასალისაგან დამზადებული მოდელით, რომ მოსწავლემ შეიმეცნოს: ფიგურის დასახელება დამოკიდებულია მხოლოდ მის ფორმაზე.

ამის გამო, გეომეტრიულ ცნებათა ფორმირებისას გამოყენებულ თვალსაჩინოების საშუალებას სპეციფიკური დანიშნულება გააჩნია. გეომეტრიის ელემენტების შესწავლისას თვალსაჩინოების ერთ-ერთი საშუალებაა ნახაზი დაფაზე და რვეულში.

დაწყებითი სკოლის ყოველ საკლასო ოთახში აუცილებლად კედელზე უნდა ეკიდოს ინსტრუქციული ცხრილი: „დახაზე სწორად“ და „გაზომე სწორად“. ეს ორი ცხრილი დახმარებას გაუწევს მასწავლებელს მოსწავლეებთან მიმართებაში, მათში საჭირო ჩვევების ჩამოყალიბებასა და ფორმირებაში.

მოსწავლეები ეცნობიან კუთხეების სხვადასხვა სახეს, ადარებენ მათ სიდიდის მიხედვით. ღებულობენ წარმოდგენას კუთხეზე, რო-

გორც ფიგურის ელემენტზე. ამ თვალსაზრისით თვალსაჩინოების ეფექტური საშუალებაა მალკა. მალკა წარმოადგენს ორ თამასას, დამაგრებულს ერთმანეთთან ხრახნით. მალკის თამასები იშლება, ქმნის ნებისმიერი სიდიდის კუთხეს. ამასთან აქ მნიშვნელობა აქვს კუთხის მიღების პროცესის გაგებასაც.

გეომეტრიულ ფიგურათა მოდელები შეიძლება დაამზადოს თვით მასწავლებელმა. ეს მოდელებია: სამკუთხედები, კვადრატები, მართკუთხედები, ხუთკუთხედები, ექვსკუთხედები, რვაკუთხედები, ვარსკვლავები, წრეები, ტრაპეციები და ა.შ. ეს მოდელები ისე უნდა იყოს დამზადებული, რომ გამოდგეს ნებისმიერ სასწავლო სიტუაციაში. მაგალითად, მართკუთხედების მოდელებს უნდა ერთოს ისეთებიც, რომელთაც ტოლი ფართობები აქვთ, მაგრამ სხვადასხვა პერიმეტრები და ა.შ.

საკლასო ოთახში აუცილებლად უნდა იყოს სახაზავი მოწყობილობები: ხისგან დამზადებული სახაზავი, რომელიც დაყოფილია დეციმეტრებად და სანტიმეტრებად, საკლასო კუთხედები (სამკუთხედები, რომლებიც შეიცავს 45° , 45° , 90° ; 30° , 60° , 90° ; 60° , 60° , 60° კუთხეებს), საკლასო და მოსწავლის ფარგალი.

დაწყებით სკოლაში შეისწავლება სიგრძის, მასის, ტევადობის და დროის გაზომვა. ამ სიდიდეთა შესწავლისათვის აუცილებელია სკოლას ჰქონდეს საზომ ხელსაწყოთა კომპლექტი და საცნობარო ხასიათის შესაბამისი თვალსაჩინოების საშუალებანი.

მოსწავლის სახაზავი (30 სმ) არის ხელსაწყო, რომლის დახმარებითაც სრულდება მთელი მხაზველობითი მუშაობა რვეულში სწავლების ყველა წლის მანძილზე.

საკლასო ხის მეტრი განკუთვნილია საკლასო მუშაობისათვის. მას და სადემონსტრაციო მეტრს, ფერადი სკალით, აქვს დანაყოფები დეციმეტრებად და სანტიმეტრებად. კლასში ყველა გაზომვითი და მხაზველობითი სამუშაო ტარდება ხის მეტრის საშუალებით.

საზომი ლენტი (სანტიმეტრებიანი) შეუცვლელია სწრაფი გაზომვის დროს, განსაკუთრებით მაშინ, როცა გასაზომია მრუდი.

გარდა ამისა, ასეთი ლენტის პორტატულია და იგი გამოდგება ექსკურსიებზე, სასკოლო ეზოში გაზომვითი სამუშაოების ჩატარებისას და ა.შ.

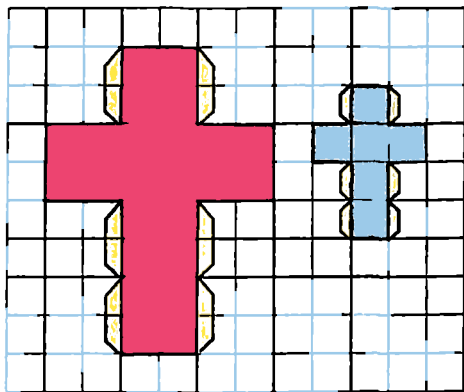
რულეტი ძალზე მოხერხებულია გაზომვითი სამუშაოების შესრულებისას როგორც შენობაში, ისე შენობის გარეთ, განსაკუთრებით მაშინ, როცა მუშაობა წარმოებს ღია ადგილზე, მინდორში.

პალეტი მზადდება გამჭვირვალე ფირფიტისაგან და ფართობის გაზომვისათვის ძალზე მოსახერხებელია.

საზომი ტოლჩების კომპლექტში უნდა შედიოდეს უპირველეს ყოვლისა „ლიტრი“. ტევადობის გასაზომად იყენებენ წყალს ან ქვიშას.

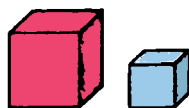
სასწორი მიზანშეწონილია სკოლაში იყოს ორი სახის – სკალიანი და თეფშიანი. აქვე საჭიროა საწონების მთელი კომპლექტი.

პირველადი გაცნობა მოსწავლეებისათვის სივრცული გეომეტრიული ფიგურების მოდელების დამზადებისას უნდა დავიწყოთ მარტივი გეომეტრიული ფიგურებით. სივრცული ფიგურებიდან პირველად უნდა დავამზადებინოთ კუბის მოდელი. მოსწავლეებს შეიძლება საკმაო დრო დასჭირდეთ იმისათვის, რომ აკურატულად დაამზადონ ეს მოდელი. ამ ფიგურის მოდელი შედარებისათვის დავამზადებინოთ ორი, ერთი დიდი ზომის, მეორე კი – მცირე.



ნახ.268

ნახ.268-ზე გამოსახული კუბის მოდელის შლილები აკურატულად გამოვკრათ და შესაბამისად შევაწებოთ ამისათვის სპეციალურად მონიშნულ ადგილებზე. მივიღებთ შესაბამისი კუბების მოდე-

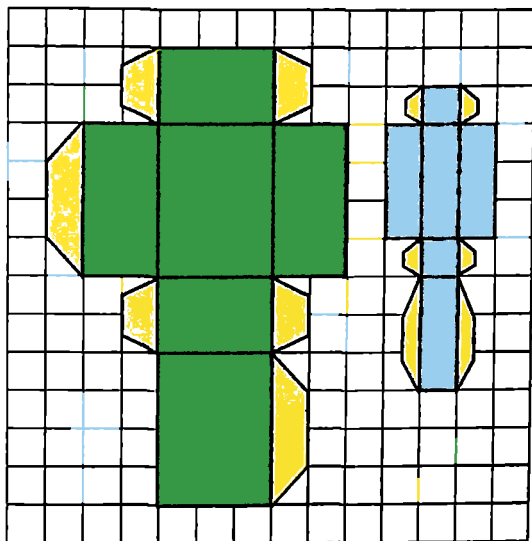


ნახ.269

ლებს (ნახ.269).

კუბის მოდელის დამზადების შემდეგ შეიძლება დავამზადოთ მართკუთხა პარალელეპიპედის მოდელი. ნახ.270-ზე გამოსახულია ამ მოდელის შლილი (ამ შემთხვევაშიც შეიძლება დავამზადოთ ორი სხვადასხვა ზომის მოდელი).

თუ მართკუთხა პარალელეპიპედის შლილებს გამოვჭერთ და



ნახ.270



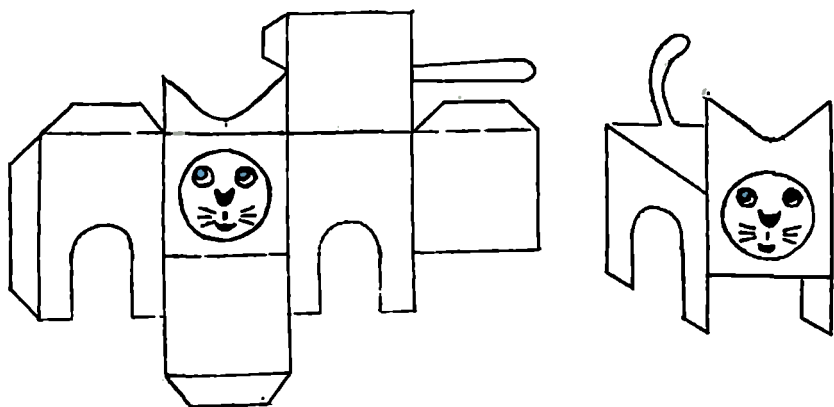
ნახ.271

შესაბამის ადგილებზე შევაწებებთ, მივიღებთ მართკუთხა პარალელეპიპედის მოდელს (ნახ.271).

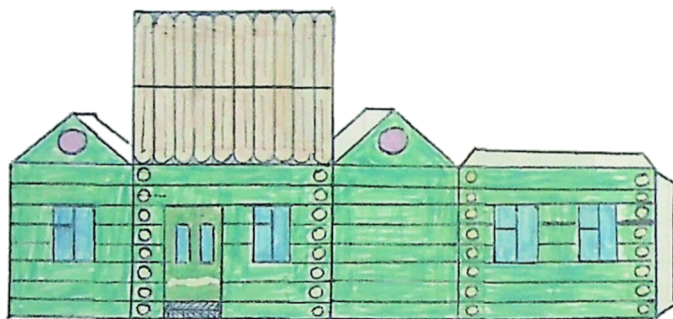
ამ მოდელების მიხედვით მოსწავლეებს შეიძლება მივცეთ დავალება, მათ ააგონ ფიგურა „კატის“ შლილი და მოდელი (ნახ.272).

ასევე შეიძლება მოსწავლეებს ავაგებინოთ „სახლის“ შლილი და მოდელი (ნახ.273).

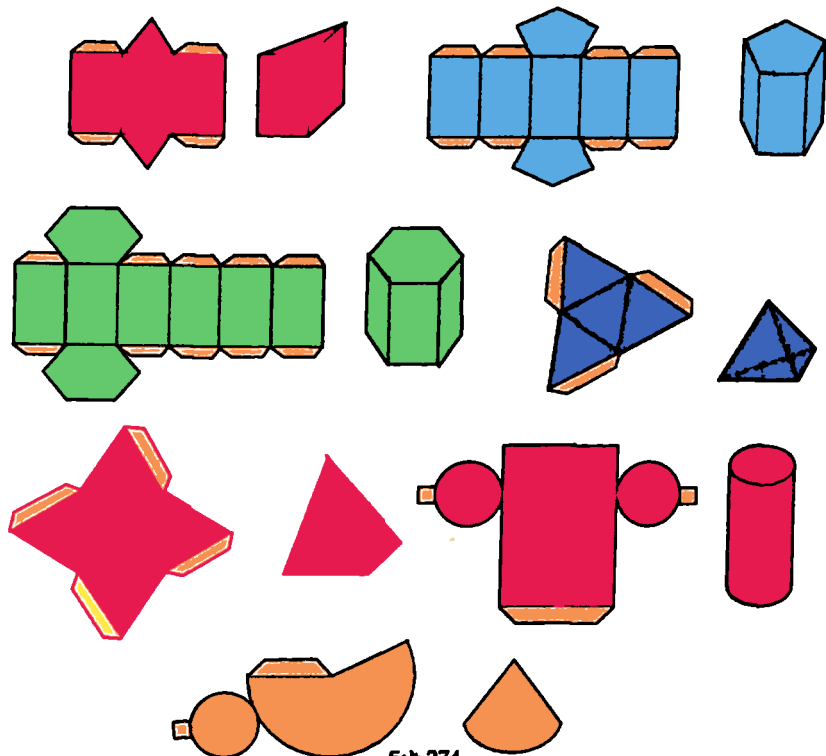
ამ მოდელების შემდეგ მოსწავლეებთან შეიძლება შემოვიტანოთ პრიზმების, პირამიდების, ცილინდრების, კონუსების შლილები და მათგან დავამზადოთ შესაბამისი ფიგურები (ნახ.274).



Биб.272.

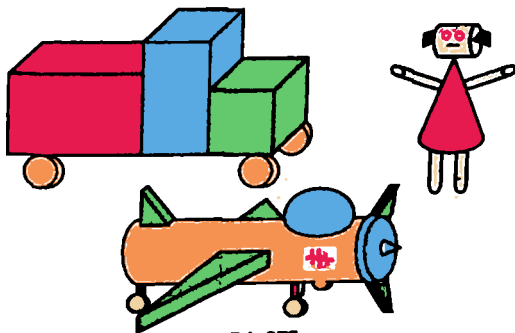


Биб.273.



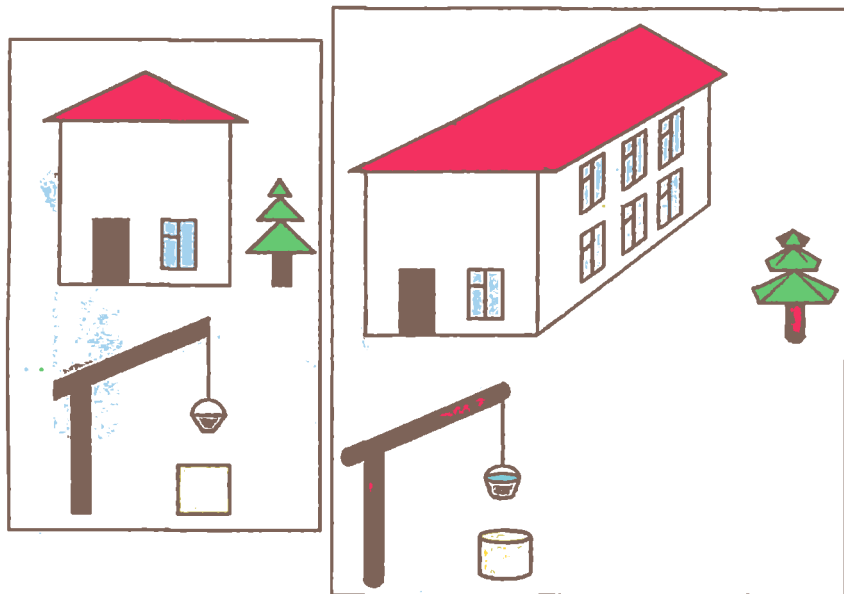
ნახ.274.

როდესაც მოსწავლეები შეძლებენ ფიგურათა მოდელების კარგად აგებას, მათ შეიძლება მიეცეთ ისეთი ფიგურების აგება, რომლებიც შედგებიან მათთვის ცნობილი ფიგურებისაგან (ნახ.275).



ნახ.275.

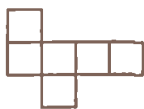
ბრტყელი და სივრცული ფიგურების უკეთ წარმოდგენისათვის მოსწავლეებს შეიძლება მიეცეთ აგრეთვე სურათები, ისე რომ ერთ სურათზე წარმოდგენილი იყოს ბრტყელი ფიგურები, ხოლო მეორეზე სივრცული (ნახ.276).



ნახ.276

2.4.1. საშარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

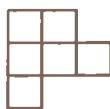
1. ნახაზზე მოცემული ოთხი შლილიდან რომელი არის კუბის შლილი?



I



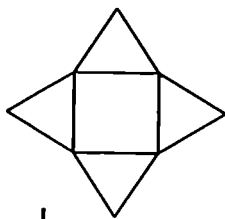
II



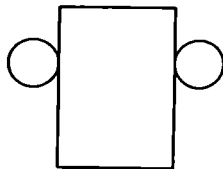
III



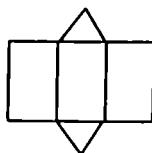
IV



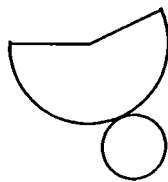
I



II



III

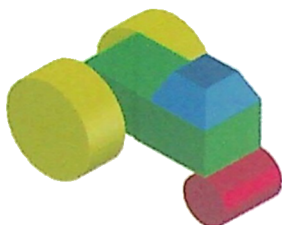


IV

ამ ნახაზის მიხედვით ვუპასუხოთ შემდეგ კითხვებს:

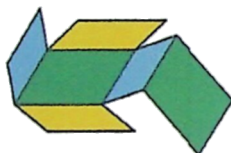
2. რომელია ბრუნვის ფიგურების შლილები?
3. რომელია მრავალწახნაგას შლილები?
4. რომელია ცილინდრის შლილი?
5. რომელია პირამიდის შლილი?
6. რომელია პრიზმის შლილი?
7. რომელია კონუსის შლილი?
8. რამდენი მართკუთხედი აქვს ექვსკუთხა მართი პრიზმის შლილს?
9. რამდენი პარალელოგრამი აქვს ექვსკუთხა პრიზმის შლილს?
10. რამდენი მართკუთხედი ექნება ხუთკუთხა პრიზმის შლილს (თუ პრიზმა მართი არ არის)?
11. შეიძლება თუ არა ცილინდრის შლილს ტრაპეცია ჰქონდეს?
12. შეიძლება თუ არა კონუსის შლილს ფუძის შლილის ფართობი და გვერდითი ზედაპირის ფართობი ტოლი ჰქონდეს?
13. რამდენი სამკუთხედი აქვს წესიერი სამკუთხა პირამიდის შლილს?
14. რამდენი სამკუთხედი აქვს წესიერი ხუთკუთხა პირამიდის შლილს?
15. შეიძლება თუ არა ცილინდრის შლილს ფუძეების შლილების ფართობთა ჯამი ტოლი ჰქონდეს გვერდითი ზედაპირის შლილის ფართობის?
16. შეიძლება თუ არა პირამიდის გვერდითი ზედაპირის შლილის ფართობი ტოლი იყოს ფუძის შლილის ფართობის?
17. შეიძლება თუ არა პრიზმის გვერდითი ზედაპირის შლილის

- ფართობი ტოლი იყოს ფუძეების შლილების ფართობთა ჯამის?
18. რამდენი სამკუთხედი და რამდენი ოთხკუთხედი აქვს სამკუთხა პრიზმის შლილს?

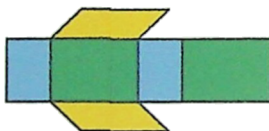


ნახაზის მიხედვით ვუპასუხოთ შემდეგ კითხვებს:

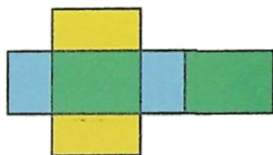
19. რამდენი ფიგურისაგან შედგება ნახაზზე მოცემული ფიგურა?
20. რამდენი ცილინდრია მოცემულ ფიგურაში?
21. რამდენი მართკუთხა პარალელოპიპედი მოცემულ ფიგურაში?
22. რამდენი მრავალწახნაგაა მოცემულ ფიგურაში?



I



II



III

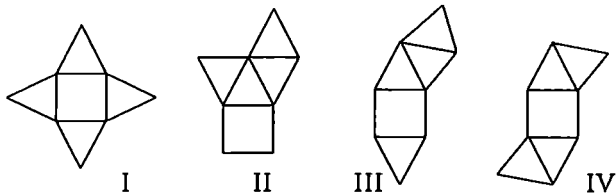
ნახაზის მიხედვით ვუპასუხოთ შემდეგ კითხვებს:

23. რომელია მართკუთხა პარალელოპიპედის შლილი?
24. რომელია პარალელოპიპედის შლილი?
25. რომელია მართი პარალელოპიპედის შლილი?
26. რამდენი მართკუთხედი აქვს I შლილში?
27. რამდენი მართკუთხედი აქვს მეორე შლილში?
28. რამდენი მართკუთხედი აქვს მესამე შლილში?
29. რამდენი არამართკუთხა პარალელოგრამა აქვს მეორე შლილში?
30. რამდენი არამართკუთხა პარალელოგრამა აქვს პირველ შლილში?

2.4.3. ტესტი №14

1. ყოველი მართკუთხა პარალელეპიპედის შლილში
 - ა) ყველა ფიგურა მართკუთხედია;
 - ბ) მხოლოდ ოთხი მართკუთხედია;
 - გ) მხოლოდ ორი მართკუთხედია;
 - დ) ყველა ფიგურა ყოველთვის რომბია.
2. მართი პარალელეპიპედის შლილში
 - ა) ორი წრეა; ბ) ორი სამკუთხედია;
 - გ) ოთხი მართკუთხედია; დ) მხოლოდ სამი მართკუთხედია.
3. სამკუთხა პირამიდის შლილში
 - ა) ყველა ფიგურა სამკუთხედია; ბ) ყველა ფიგურა კვადრატია;
 - გ) ერთი ფიგურა წრეა; დ) ერთი ფიგურა ტრაპეციაა.
4. ოთხკუთხა პირამიდის შლილში
 - ა) ყველა ფიგურა ოთხკუთხედია;
 - ბ) ერთი ოთხკუთხედია და ოთხი სამკუთხედი;
 - გ) ყველა ფიგურა სამკუთხედია; დ) ერთი ფიგურა წრეა.
5. ცილინდრის შლილში
 - ა) მხოლოდ ერთი წრეა; ბ) ორი წრეა;
 - გ) არცერთი ფიგურა წრე არ არის; დ) ყველა ფიგურა წრეა.
6. კონუსის შლილში
 - ა) ერთი წრეა; ბ) ორი წრეა;
 - გ) არცერთი ფიგურა წრე არ არის; დ) ყველა ფიგურა წრეა.
7. ხუთკუთხა პრიზმის შლილში
 - ა) მხოლოდ ერთი ხუთკუთხედია;
 - ბ) ყველა ფიგურა ხუთკუთხედია;
 - გ) ორი ფიგურა ხუთკუთხედია, ხოლო ხუთი ფიგურა ოთხკუთხედი;
 - დ) ყველა ფიგურა ოთხკუთხედია.
8. სამკუთხა პრიზმის შლილში
 - ა) ყველა ფიგურა სამკუთხედია;

- ბ) ყველა ფიგურა ოთხკუთხედიანია;
 გ) ორი ფიგურა სამკუთხედიანია, ხოლო სამი ფიგურა ოთხკუთხედიანია;
 დ) ორი ფიგურა ოთხკუთხედიანია, ხოლო სამი ფიგურა სამკუთხედიანია.
9. ნახაზზე მოცემული ფიგურებიდან პირამიდის შლილი შეიძლება იყოს



- ა) მხოლოდ I; ბ) III; გ) I, II, IV; დ) მხოლოდ I და II.
10. მრავალწახნაგას ერთ-ერთი წახნაგი ექვსკუთხედიანია. წიბოთა რა უმცირესი ოდენობა შეიძლება ჰქონდეს ამ მრავალწახნაგას?
- ა) 12; ბ) 10; გ) 8; დ) 6; ე) 7.

2.5. სივრცული სხეულების მოცულობა და მისი გაზომვა, კავშირი სხეულის მოცულობასა და მისი შემადგენელი სხეულის მოცულობებს შორის

სივრცული სხეულის მოცულობა ეწოდება არაუარყოფით სიდიდეს, რომელიც ყოველი სივრცული სხეულისათვის განსაზღვრულია ისე, რომ:

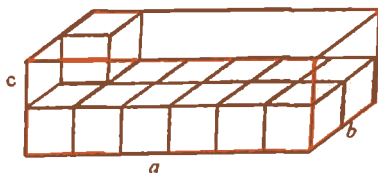
1. ტოლ სხეულებს ტოლი მოცულობები გააჩნია;
2. თუ სხეული დაყოფილია რამდენიმე სხეულად (ანუ მოცემული სხეულის ყოველი წერტილი ერთ-ერთ ასეთ სხეულს მაინც ეკუთვნის) და ამ ნაწილებიდან ნებისმიერ ორს საერთო შიგა წერტილი არ გააჩნია, მაშინ მოცემული სხეულის მოცულობა მისი ყველა ასეთი ნაწილის მოცულობების ჯამის ტოლია.

სხეულის მოცულობა სკალარულ-ადიციური უწყვეტი სიდიდეა და, მაშასადამე, აკმაყოფილებს ასეთი სიდიდის ყველა თვისებას.

სიგრძე, ფართობი და მოცულობა განსაზღვრის მიხედვით ერთმანეთის მსგავსია (ისინი ხასიათდებიან მსგავსი თვისებებით), მაგრამ ისინი მოცემულია სხვადასხვა სიმრავლეზე: სიგრძე – მონაკვეთების სიმრავლეზე, ფართობი – ბრტყელ ფიგურათა სიმრავლეზე, მოცულობა კი – სივრცული სხეულების სიმრავლეზე.

სივრცის (სივრცის წერტილთა სიმრავლის) თავის თავზე ასახვას, რომელიც მანძილს არ ცვლის გადაადგილება ეწოდება. ე.ი. f ასახვა გადაადგილებაა, თუ ყოველი ორი A და B წერტილისათვის, როცა $A'=f(A)$, $B'=f(B)$, მაშინ $A'B'=AB$. Q' ფიგურას ეწოდება Q ფიგურის ტოლი, თუ არსებობს გადაადგილება, რომელიც Q -ს ასახავს Q' -ზე.

სივრცული სხეულის მოცულობის გასაზომად შემოტანილია მოცულობის საზომი ერთეული: მოცულობის ზომის ერთეულია იმ კუბის მოცულობა, რომლის წიბოს სიგრძე ერთი ერთეულია (ნახ.277).

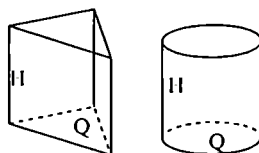


ნახ.277

ნახ.277-ზე მართკუთხა პარალელებიპედიამ გამოსახული, მისი განზომილებებია $a=6$ ერთ., $b=2$ ერთ., $c=2$ ერთ. მის ფუძეზე 12 ერთეულოვანი კუბია, თითოეულის მოცულობა კუბური ერთეულის ტოლია. კუბების მეორე ასეთი შრე შეავსებს ამ ფიგურას. ამრიგად, მართკუთხა პარალელებიპედი შედგება 24 ერთმანეთის ტოლი კუბისაგან ($6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$). მაშასადამე, პარალელებიპედის მოცულობა 24 კუბური ერთეულის ტოლია.

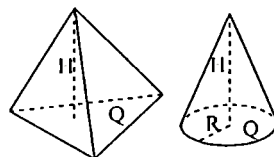
საზომთა მეტრულ სისტემაში გვაქვს მოცულობის საზომი ერთეულები: 1 მ³, 1 დმ³, 1 სმ³. 1 მ³=1000 დმ³, 1 დმ³=1000 სმ³, ხოლო 1 მ³=1000000 სმ³.

პრიზმისა და ცილინდრის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით: $V=Q \cdot H$, სადაც Q ფუძის ფართობია, ხოლო H სიმაღლე (ნახ.278).



ნახ.278

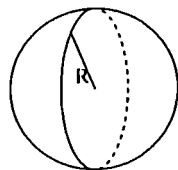
პირამიდისა და კონუსის მოცულობები გამოითვლება ფორმულით: $V = \frac{1}{3} QH$, სადაც Q ფუძის ფართობია, H – სიმაღლე. კერძოდ, კონუსის მოცულობის გამოსათვლელად შეიძლება ვისარგებლოთ ფორმულით $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$,



ნახ.279

სადაც R – ფუძის რადიუსია, H – სიმაღლე (ნახ.279).

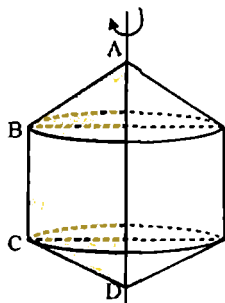
ბირთვის მოცულობა – $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, სადაც R – ბირთვის რადიუსია (ნახ.280).



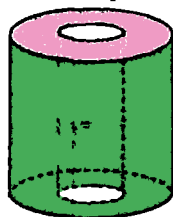
ნახ.280

2.5.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მათემატიკისათვის

1. ტოლფერდა ABCD ტრაპეცია ბრუნავს მისი დიდი ფუძის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა და ზედაპირის ფართობი, თუ ტრაპეციის ფუძეები 10 სმ-ის და 8 სმ-ის ტოლია, ამასთან ცნობილია, რომ მოცემულ ტრაპეციაში შეიძლება წრეწირის ჩახაზვა.

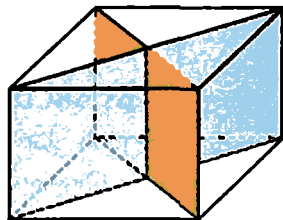


2. ცილინდრის მოცულობა 35π მ³-ის ტოლია, ღერძული კვეთის ფართობია – 8 მ². იპოვეთ ცილინდრის ფუძის დიამეტრი.
3. ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის შლილი a გვერდის მქონე კვადრატია. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა.
4. ცილინდრის ფორმის ნაკეთობის გასწვრივ, ასევე ცილინდრის ფორმის სიცარიელე გაბურღეს. ვიპოვოთ ცილინდრის დარჩენილი ნაწილის მოცულობა, თუ ცილინდრის რადიუსი 5 დმ-ია, ხოლო გაბურღული ცილინდრის რადიუსი კი 2 დმ-ის ტოლია, მასთან ცილინდრების სიმაღლე 8 დმ-ია.

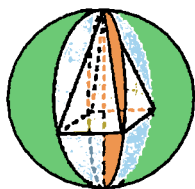


5. სამი ლითონის ბირთვი, რომელთა რადიუსები შესაბამისად ტოლია 3 სმ-ის, 4 სმ-ის და 5 სმ-ის, გადაადნეს და მიიღეს ახალი ბირთვი. ვიპოვოთ მიღებული ბირთვის რადიუსი.
6. მართი პრიზმის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კატეტები შესაბამისად ტოლია 6 სმ-ის და 8 სმ-ის. დიდი გვერდითი წახნაგის ფართობი 20 სმ²-ის ტოლია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.
7. მართ სამკუთხა პრიზმაში ფუძის გვერდები 4 სმ-ის, 5 სმ-ის და 7 სმ-ის ტოლია, ხოლო გვერდითი წიბო ფუძის დიდი სიმაღლის ტოლია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.
8. მართი პარალელებიპედის ფუძე რომბია, რომლის ფართობი 4

დმ²-ია, დიაგონალური კვეთის ფართობები შესაბამისად 12 დმ²-ის და 24 დმ²-ის ტოლია. იპოვეთ მართი პარალელეპიპედის მოცულობა.

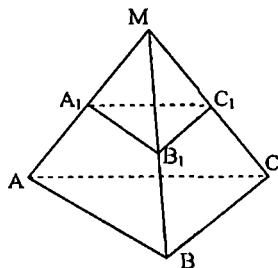


9. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი a -ს ტოლია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ მისი დიაგონალური კვეთა ფუძის ტოლდიდია.

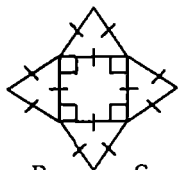


10. სფეროში ჩახაზულია წესიერი ოთხკუთხა პირამიდა, რომლის სიმაღლეს სფეროს ცენტრი ყოფს ორ ნაწილად: 4 სმ და 5 სმ-ის სიგრძის მონაკვეთებად. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

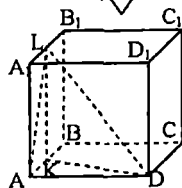
11. A_1 , B_1 და C_1 შესაბამისად MA , MB და MC წიბოების შუაწერტილებია. იპოვეთ $MA_1B_1C_1$ და $MABC$ პირამიდების მოცულობების შეფარდება.



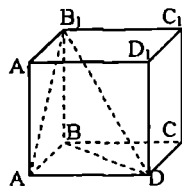
12. ნახაზზე მრავალწახნაგას შლილია წარმოდგენილი. ტოლი მონაკვეთები მონიშნულია და თითოეული 9 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ამ მრავალწახნაგას მოცულობა.



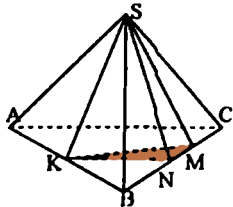
13. $ABCA_1B_1C_1D_1$ კუბის წიბო 6 სმ-ის ტოლია. K წერტილი AB -ს შუაწერტილია, ხოლო L წერტილი A_1B_1 -ის შუაწერტილი. იპოვეთ $LAKD$ პირამიდის მოცულობა.



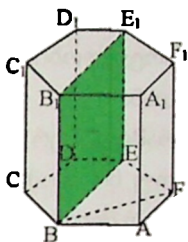
14. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის დიაგონალი $B_1D=7$ სმ, გვერდითი წახნაგის დიაგონალი $AB_1=5$ სმ. იპოვეთ B_1ABD პირამიდისა და $ABCA_1B_1C_1D_1$ პრიზმის მოცულობა.



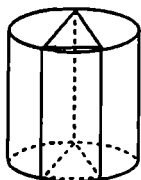
15. ცნობილია, რომ $SABC$ პირამიდის მოცულობა 64 სმ^3 -ია, K წერტილი AB -ს შუა წერტილია, N წერტილი BC -ს შუა წერტილია, M წერტილი CN -ის შუა წერტილია. იპოვეთ $SKMN$ პირამიდის მოცულობა.



16. წესიერ ექვსკუთხა პრიზმაში უდიდესი დიაგონალური კვეთის ფართობი $- S_{\text{დიagonal}} = 16 \text{ მ}^2$. ფუძის მცირე დიაგონალი 4 მ -ის ტოლია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.



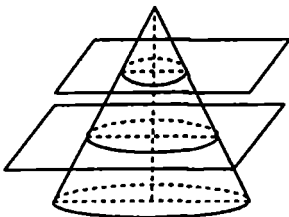
17. ცილინდრში ჩახაზული წესიერი სამკუთხა პრიზმის მოცულობა V -ს ტოლია. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა.



18. კონუსის ფუძის ფართობი $36\pi \text{ სმ}^2$ -ის ტოლია, სრული ზედაპირის ფართობი $96\pi \text{ სმ}^2$ -ია. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

19. იპოვეთ იმ ბირთვის მოცულობა, რომლის ზედაპირის ფართობი $400\pi \text{ სმ}^2$ -ია.

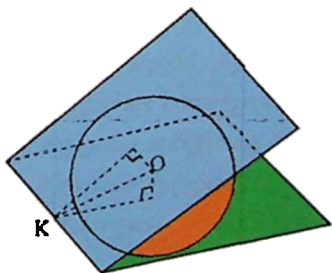
20. კონუსის მოცულობა V -ს ტოლია, კონუსი გადაკვეთილია ფუძის პარალელური ორი სიბრტყით, რომლებიც სიმაღლეს სამ ტოლ ნაწილად ჰყოფს. იპოვეთ კვეთებს შორის მოთავსებული კონუსის ნაწილის მოცულობა.



21. ცნობილია, რომ ბირთვის მოცულობა და ზედაპირის ფართობი ერთი და იმავე რიცხვით გამოისახება. იპოვეთ ამ ბირთვის რადიუსი.

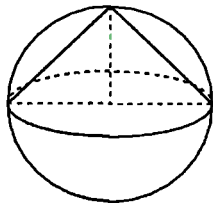
22. ბირთვის მოცულობა $\frac{32}{3}\pi \text{ სმ}^3$ -ია.

მანძილი ბირთვის ცენტრიდან ორწახნაგა კუთხის წიბომდე 4 სმ -ია

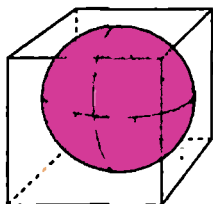


($OK=4$ სმ). იპოვეთ ორწახნაგა კუთხის სიდიდე.

23. ბირთვში ჩახაზულია კონუსი, რომლის ფუძე ბირთვის დაგონალური კვეთაა. ვიპოვოთ ბირთვის მოცულობის შეფარდება კონუსის მოცულობასთან.



24. კუბში ჩახაზულია ბირთვი. იპოვეთ ბირთვის მოცულობის შეფარდება კუბის მოცულობასთან.

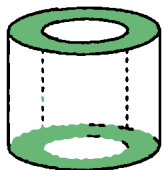


25. რამდენჯერ შემცირდება კონუსის მოცულობა, თუ მის სიმაღლეს 2-ჯერ, ხოლო დიამეტრს 3-ჯერ შევამცირებთ?

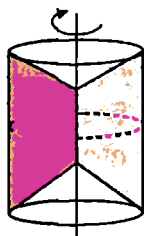
26. ცილინდრის ღერძული კვეთა არის კვადრეტი, რომლის დიაგონალის სიგრძე $6\sqrt{2}$ სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა.

27. როგორ შეიცვლება ცილინდრის მოცულობა, თუ ფუძის რადიუსს ორჯერ გავზრდით, ხოლო სიმაღლეს ორჯერ შევამცირებთ?

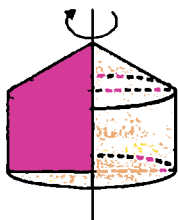
28. ლითონის სხეულს ნახაზზე მოცემული ფორმა აქვს (R რადიუსის მქონე ცილინდრიდან ამოჭრილია r რადიუსის ფუძის მქონე ცილინდრი). ვიპოვოთ $R:r$, თუ მოცემული სხეულის მოცულობა მცირე ცილინდრის მოცულობის ტოლია.



29. ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის ფუძეები ტოლია 2 სმ და 3 სმ-ის, ხოლო მახვილი კუთხე 60° -ია, ბრუნავს მცირე ფუძის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.



30. მართკუთხა ტრაპეცია ბრუნავს მისი დიდი-ფუძის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა, თუ ტრაპეციის ფუძეები 10 სმ და 8 სმ-ის ტოლია, ხოლო ფართობი 36 სმ²-ია.



2.5.2. ტესტი №15.

1. თუ მართკუთხა პარალელეპიპედის განზომილებებია a , b და c , მაშინ მისი მოცულობა $V=$
 ა) $a^2+b^2+c^2$; ბ) a^2+bc ; გ) abc ; დ) $a+b+c$; ე) $a^3+b^3+c^3$;
2. თუ ცილინდრის ფუძის რადიუსი არის R , სიმაღლე – H , მაშინ მოცულობა არის
 ა) $2\pi R^2H$; ბ) πR^2H ; გ) $\frac{1}{3}\pi R^2H$; დ) $\frac{1}{4}\pi R^2H$; ე) πRH^2 .
3. თუ კონუსის ფუძის რადიუსია R , სიმაღლე – H , მაშინ მოცულობა არის
 ა) $2\pi R^2H$; ბ) πR^2H ; გ) $\frac{1}{3}\pi R^2H$; დ) $\frac{1}{4}\pi R^2H$; ე) $\frac{1}{3}\pi RH^2$.
4. თუ ბირთვის რადიუსი R -ის ტოლია, მაშინ ბირთვის მოცულობა არის
 ა) $\frac{3}{4}\pi R^3$; ბ) $4\pi R^3$; გ) πR^3 ; დ) $\frac{4}{3}\pi R^3$; ე) $\frac{1}{3}\pi R^3$.
5. თუ ორი მართი პარალელეპიპედის ფუძეები ტოლია და ამ პარალელეპიპედების გვერდითი ზედაპირის ფართობებიც ტოლია, მაშინ მათი მოცულობები
 ა) ტოლი არ არის; ბ) ტოლია; გ) შეიძლება ტოლი არ იყოს;
 დ) სმ³-ით გამოისახება ყოველთვის;
 ე) ყოველთვის მ³-ით გამოისახება.
6. 10 დმ³=
 ა) 10^{-1} მ³; ბ) 10^{-2} მ³; გ) 10^2 მ³; დ) 10^{-3} მ³; ე) 10^3 მ³.
7. 100 დმ³=
 ა) 1000 სმ³; ბ) 1000000 სმ³; გ) 10000 სმ³; დ) 100 სმ³; ე) 10 სმ³.
8. 2000 სმ³=
 ა) 2 დმ³; ბ) 20 დმ³; გ) 200 დმ³; დ) $0,2$ დმ³; ე) $0,02$ დმ³.
9. მასწავლებელს სურს აუხსნას მოსწავლეებს ნაშთიანი გაყოფა და ახსნას იწყებს პრაქტიკული ამოცანების განხილვით. რომელი ამოცანაა ამისათვის უფრო მიზანშეწონილი?

ა) მატარებელი ყოველ საათში გადის 80,5 კმ-ს. რა მანძილს გაივლის იგში 4 საათში?

ბ) წარმოადგინეთ დმ³-ისა და მ³-ის საშუალებით 5125 დმ³.

გ) რამდენი დმ³-ია 1 მ³-ში?

დ) რამდენი სმ³-ია 1 დმ³-ში?

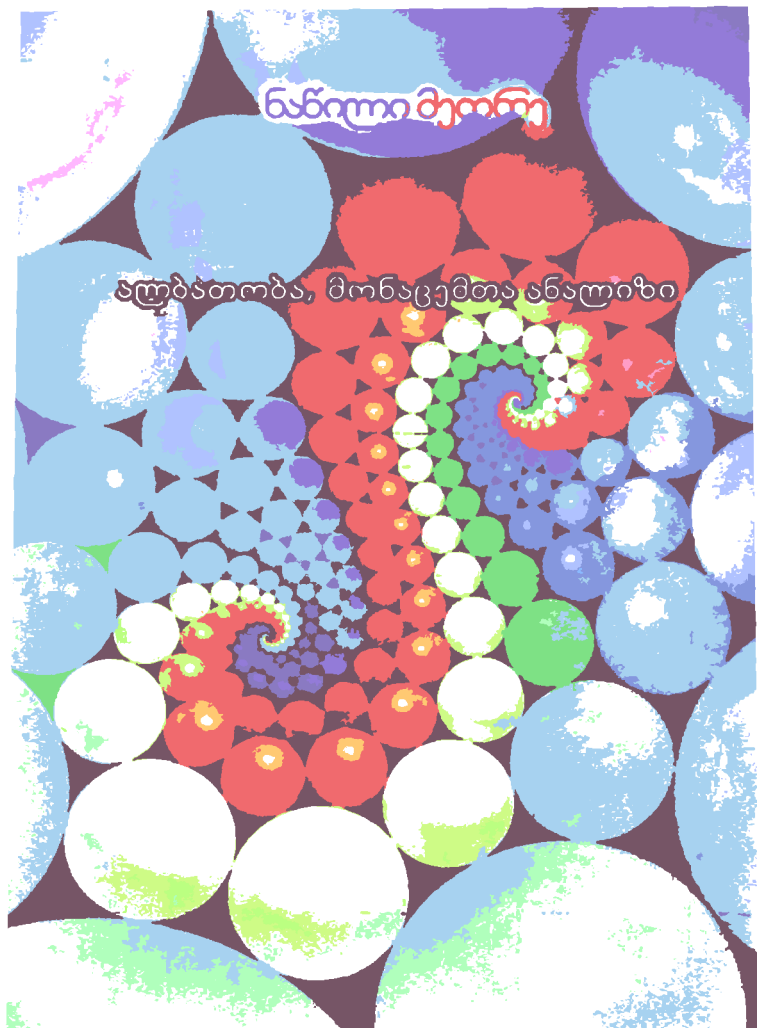
ე) რამდენი ჭიქა წყლით შეიძლება აივსოს ბოთლი, რომელიც იტევს 1000 სმ³-ს, თუ ამ ჭიქის მოცულობა 200 სმ³-ია?

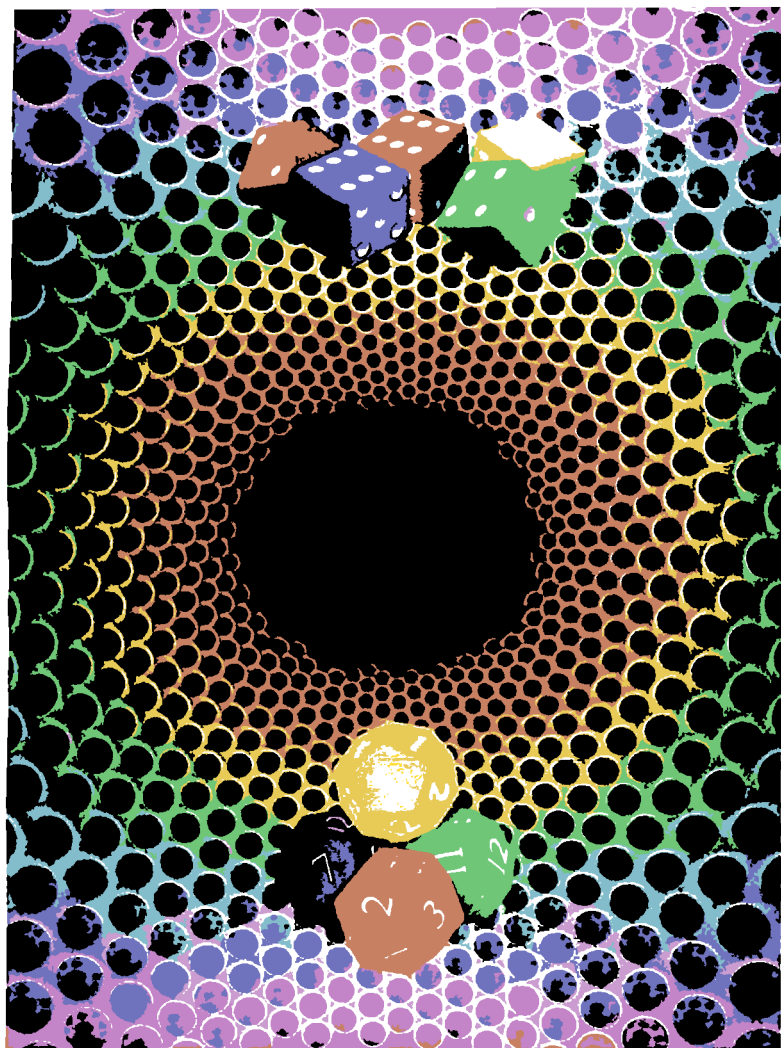
10. თუ $1 \text{ სმ}^3 = x \text{ დმ}^3$, მაშინ $x =$

ა) 10^3 ; ბ) 10^{-3} ; გ) 10^{-4} ; დ) 10^{-2} ; ე) 10^4 .

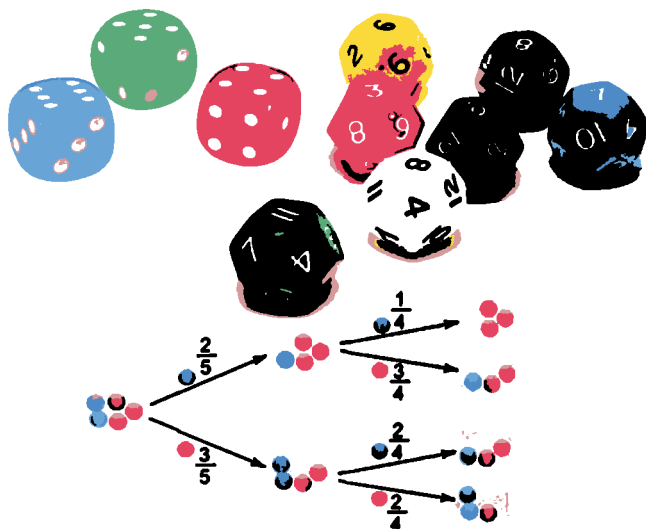
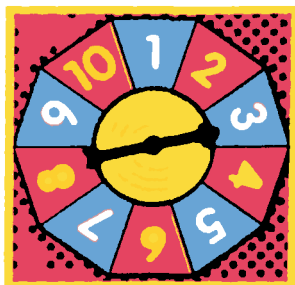
ნაწილი მეორე

სტრუქტურა, მონაცემთა ანალიზი





თავი მესამე პლასტიკა



3.1. ისტორიული ცნობები ალბათობის თეორიის წარმოშობის შესახებ

ალბათობის თეორია არის მათემატიკური მეცნიერების დარგი, რომელიც სწავლობს მასობრივი შემთხვევითი მოვლენების კანონზომიერებებს.

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება ისეთი მოვლენები, რომლებზედაც მოქმედებს უამრავი ფაქტორი, რომელთა მხედველობაში მიღება და დამუშავება მათემატიკის ე.წ. კლასიკური აპარატით ყოვლად შეუძლებელია. თეორიულად უსაზღვროდ შეგვიძლია გავზარდოთ თითოეული ამოცანის ამოხსნის სიზუსტე, მხედველობაში მივიღოთ სულ ახალი და ახალი ფაქტორები, მაგრამ პრაქტიკულად ჩვენ წავწყდებით ისეთ სირთულეებს, რომელთა განხორციელება რეალურად შეუძლებელია.

ცხადია, უნდა არსებობდეს პრინციპული განსხვავება ძირითადი და მეორეხარისხოვანი ფაქტორების შესწავლის მეთოდებს შორის. განუსაზღვრელობის, სირთულის, მრავალმიზეზობრიობის ელემენტები, რომლებიც შემთხვევით მოვლენებს ახასიათებენ, თხოულობენ სპეციალური მეთოდების შექმნას ამ მოვლენების შესასწავლად.

ასეთი მეთოდების დამუშავება ხდება სწორედ ალბათობის თეორიაში, რომლის შესწავლის საგანსაც წარმოადგენს შემთხვევითი მოვლენების დროს არსებული სპეციფიკური კანონზომიერებანი.

პრაქტიკა გვიჩვენებს, რომ თუ დავაკვირდებით ერთგვაროვან შემთხვევით მოვლენათა ერთობლიობას, შეგვიძლია აღმოვაჩინოთ გარკვეული კანონზომიერებანი, რომლებიც სწორედ მასობრივი მოვლენებისათვის არის დამახასიათებელი. ამ კანონზომიერების შემჩნევა ყოველთვის შესაძლებელი იქნება, როდესაც განვიხილავთ ერთგვაროვან მასობრივ მოვლენებს. ამ შემთხვევაში შემჩნეული კანონზომიერება სრულებით არ ახასიათებს ინდივიდუალური თავისებურების იმ ცალკეულ მოვლენას, რომელიც განხილულ ერთობ-

ლიობაში შედის. ეს ინდივიდუალური თავისებურებანი მთლიანად ერთობლიობაში როგორღაც ერთმანეთს აბათილებენ, ფარავენ და მთელი მასის საშუალო შედეგი სრულიადაც არ იქნება შემთხვევითი. სახელდობრ, მასობრივ შემთხვევით მოვლენათა მდგომარეობა, რომელიც ცდებისა და დაკვირვებების საშუალებით მრავალჯერ დადასტურებულია, კვლევის ალბათური მეთოდების გამოყენების ბაზას წარმოადგენს.

ალბათობის თეორიის მეთოდები თავისი ბუნებით გამოიყენება მხოლოდ მასობრივი შემთხვევითი მოვლენებისათვის; ისინი არ იძლევიან შესაძლებლობას ვიწინასწარმეტყველოთ ცალკეული შემთხვევითი მოვლენის შედეგი, მაგრამ შესაძლებლობას იძლევიან ვიწინასწარმეტყველოთ ერთგვაროვან შემთხვევით მოვლენათა ერთობლიობის საშუალო შედეგი. რაც უფრო მეტი იქნება ერთობლიობაში ერთგვაროვან შემთხვევით მოვლენათა რაოდენობა, მით უფრო ზუსტად და გარკვევით ვლინდება ერთობლიობისათვის დამახასიათებელი ზოგადი ნიშანთვისება.

საზოგადოდ, ალბათობის თეორიის მეთოდების გამოყენების აზრი იმაში მდგომარეობს, რომ გვერდი ავუაროთ რთულ, ხშირ შემთხვევაში პრაქტიკულად შეუძლებელ, ცალკეულ მოვლენათა შესწავლას, რომელზედაც მრავალი ფაქტორი მოქმედებს და პირდაპირ შევისწავლით მასობრივ შემთხვევით მოვლენათა მმართველი კანონები.

ასეთი კანონების ცოდნა შესაძლებლობას იძლევა შემთხვევით მოვლენათა სფეროში არა მარტო გარკვეული მეცნიერული წინასწარმეტყველებებისა, არამედ რიგ შემთხვევებში გვეხმარება მოვლენათა მსვლელობისათვის მიზანშეწონილი მიმართულების მიცემაში, მათდამი კონტროლის გაწევაში და შემთხვევითობის სფეროს შეზღუდვაში.

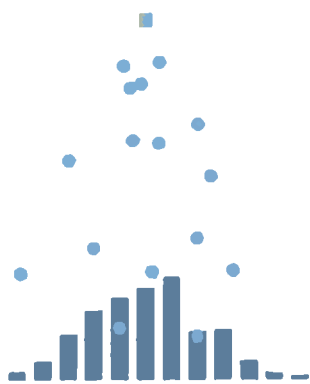
ალბათური, ანდა სტატისტიკური მეთოდი არამცთუ ეწინააღმდეგება ზუსტ მეცნიერებაში ე.წ. კლასიკურ მეთოდებს, არამედ წარმოადგენს მათ განვითარებას, რაც შესაძლებლობას იძლევა უფრო

ღრმა ანალიზი გავუკეთოთ მოვლენას, რომელსაც თან ახლავს შემთხვევითობის ელემენტები.

ალბათობის თეორიის კანონები რეალურ სტატისტიკურ კანონებს ასახავენ, რომლებიც მასობრივ შემთხვევით მოვლენათა ბუნებას ახასიათებენ. ამ მოვლენების შესასწავლად ალბათობის თეორია მათემატიკურ მეთოდებს იყენებს და მათემატიკის ერთ-ერთ ისეთ განყოფილებას წარმოადგენს რომელიც ლოგიკურად ისევე ზუსტია და მკაცრი, როგორც მათემატიკის სხვა დარგები.

შემთხვევითი მოვლენა გამოწვევის არ არის რეალურ სამყაროში. შემთხვევით მოვლენათა შესწავლისადმი მათემატიკურ მიდგომას პასკალამდე და ფერმამდე დიდი ხნით ადრეც ცდილობდნენ. ყოველ შემთხვევაში ბევრ ჩინეთსა და რომში იყენებდნენ შემთხვევით მოვლენათა სიხშირის მდგრადობის ფაქტებს, დაკავშირებულს დემოგრაფიულ მონაცემებსა და მონაცემებთან დიდი ქალაქების სხვადასხვა მოხმარების სფეროდან.

პირველად ვინ ან როდის ჩაატარა ცდები მონეტაზე უცნობია, მაგრამ მეცნიერებმა შემთხვევითი მოვლენების მოდელირება დაიწყეს, ასე მაგალითად ფრანგმა ბუნებისმეტყველმა ჟ.ლ. ბუფონმა (1707-1798) 4040-ჯერ ააგდო მონეტა და დათვალა გერბის მოსვლის რაოდენობა, რომელიც 2048-ის ტოლი აღმოჩნდა. მათემატიკოსმა კ. პირსონმა (1857-1936) მონეტა ააგდო 24000-ჯერ, გერბი მოვიდა 12012-ჯერ. მაშასადამე, მონეტის აგდების შედეგები მიუხედავად იმისა, რომ ეს აგდებები შემთხვევითია, არაერთხელ გამეორების შედეგად ემორჩილებიან ობიექტურ კანონს.



ნახ.281.

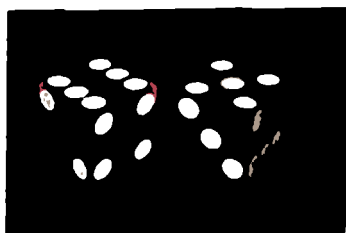
განვხილოთ სხვა უფრო რთული მაგალითი, რომელსაც გალტო-

ნის დაფა ეწოდება. (ნახ.281). დაფა განლაგებულია ვერტიკალურად, ზედა რეზერვუარიდან მასში ბურთულები ვარდება და ლაგდება, ქვემოთ, სხვადასხვა სათავსოში. ყოველი ბურთულა ხვდება გზაში დაბრკოლებას და შემთხვევით მიემართება ან მარცხნივ, ან მარჯვნივ. ბურთულები სათავსოში გროვდებიან, ამასთან ბურთულა შეიძლება მოხვდეს სათავსოს ნებისმიერ ადგილას. მიუხედავად ამისა ბურთულების განლაგება (სიმეტრიულია, რომლის დროსაც სათავსოს ცენტრალურ ნაწილში ისინი უფრო მეტია, ვიდრე განაპირა ადგილებში), რომელიც ექსპერიმენტიდან ექსპერიმენტამდე მეორდება ადასტურებს, რომ არსებობს მათი განაწილების ობიექტური კანონი.

ამრიგად, შემთხვევითობები რაღაც კანონზომიერებებს ემორჩილებიან. იბადება კითხვა, როგორ აღვწეროთ ეს კანონზომიერებები მათემატიკურად? როგორ დავსვათ მათემატიკური ამოცანა?

დამწყებთათვის განსაკუთრებულ ინტერესს იწვევს აზარტული თამაშების ამოცანები. ამისათვის თვალსაჩინოდ გამოიყენებდნენ მონეტას და კამათელს. ალბათობის თეორიის შექმნაში ასევე დიდი როლი მიუძღვის სიცოცხლის ხანგრძლივობაზე დაკვირვებას, მოსახლეობის აღწერის შედეგების ანალიზს, დაზღვევის პრაქტიკას. ჩვენ ბუნებრივია დავიწყოთ მარტივი ამოცანებით.

აზარტულ თამაშს მიეკუთვნება ექვსწახნაგა კამათლის გაგორება. სიტყვა «აზარ» არაბულია და ნიშნავს «რთულს». ასე არაბები უწოდებდნენ რამდენიმე კამათლის გაგორებისას მოსულ ქულათა კომბინაციას. მაგალითად ორი კამათლის გაგორებისას ძნელად («აზარ») ითვლებოდა ორი ქულის, ან თორმეტი ქულის მოსვლა (აზარტი ფრანგულად შემთხვევითს ნიშნავს - *le hasard*).



1494 წელს იტალიელმა მათემატიკოსმა ლ. პაჩიოლიმ (1454-1514) გამოაქვეყნა მათემატიკური შრომა, სადაც განხილული იყო

შემდეგი სიტუაცია: ორი მოთამაშე შეთანხმდა ეთამაშათ კამათელი შემდეგი პირობით. ჩამოსულ ფსონს წაიღებდა ის მოთამაშე, რომელიც პირველად მოიგებდა m პარტიას. მაგრამ თამაში შეწყდა იმ მომენტში, როცა პირველმა მოიგო a ($a < m$), ხოლო მეორემ b ($b < m$) პარტია. სამართლიანად გავყოთ ჩამოსული ფსონი.

თვითონ პაჩიოლიმ ზუსტი ამოხსნა ვერ მოძებნა. მან შემოგვთავაზა თანხის გაყოფა შეფარდებით $a:b$.

50 წლის შემდეგ მეორე იტალიელმა მათემატიკოსმა დ. კარდანომ (1501-1576) სამართლიანად უარყო პაჩიოლის რეკომენდაცია, მაგრამ ვერც თვითონ ამოხსნა იგი. გავიდა კიდევ 100 წელზე მეტი და 1654 წელს ამოცანა ბოლოს და ბოლოს ამოიხსნა ორი დიდი ფრანგი მათემატიკოსის ბ. პასკალის (1623-1662) და პ. ფერმას (1601-1665) მიერ. კონკრეტულ რიცხვით მაგალითზე ვნახოთ როგორ ამოხსნა ამოცანა ბ. პასკალმა. ვთქვათ, $m=4$, $a=3$ და $b=2$.

დავუშვათ, რომ თამაში შეწყდა, მაშინ როცა A მოთამაშემ მოიგო სამი პარტია, ხოლო B-მ ორი, შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

1. თუ მომდევნო პარტიას მოიგებს A მოთამაშე, მაშინ იგი როგორც სასურველი $m=4$ პარტიების რიცხვის მოგებით, მთლიანად მიიღებს ჩამოსულ ფსონს.

2. ხოლო თუ მომდევნო პარტიას მოიგებს B მოთამაშე, მაშინ სამართლიანია რომ მთელი ფსონი გაიყოს შუაზე და თითოეულმა მოთამაშემ მიიღოს თანაბარი თანხა, რადგანაც ორივეს სამ-სამი მოგება ექნებათ.

ორივე ამ შემთხვევის შესაძლებლობა თანაბრად მოსალოდნელია.

ამრიგად, A მოთამაშეს შეუძლია მოიგოს მთლიანი თანხა, ან მისი ნახევარი, ე.ი. საშუალოდ

$$\frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}.$$

B მოთამაშის შესაძლებლობები კი უფრო მოკრძალებულია, მან შეიძლება საერთოდ ვერაფერი ვერ მოიგოს, ან უკეთეს შემთხვევაში

მოიგოს ფსონის ნახევარი, ე.ი. საშუალოდ

$$\frac{0 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}.$$

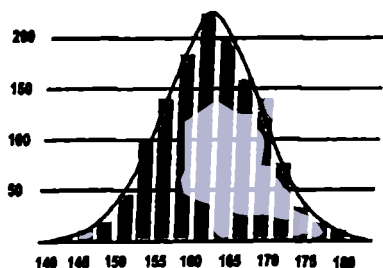
ამიტომ, სამართლიანია ფსონი გაიყოს შეფარდებით 3:1 (და არა 3:2, როგორც ამას გვთავაზობდა პაჩიოლი).

აქ ჩვენ პირველად ვხვდებით შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს.

ალბათობის თეორიის, როგორც მეცნიერების, ჩასახვა და განვითარება მე-17 საუკუნის მეორე ნახევრიდან იწყება. ამ მეცნიერების პირველი საწყისები დაკავშირებულია ბ. პასკალის, პ. ფერმას, კ. ჰიუგენსის (1629-1695) და განსაკუთრებით ი. ბერნულის (1654-1705) სახელთან. იმ პერიოდში აღმოჩენილი ბერნულის თეორემა (დიდრიცხვთა კანონის უმარტივესი შემთხვევა) უძვირფასეს საგანბურს წარმოადგენს ალბათობის თეორიაში.

ალბათობის თეორიის განვითარების შემდგომ პერიოდად შეიძლება ჩაითვალოს მე-18 საუკუნის მეორე ნახევარი და მე-19 საუკუნის დასაწყისი. ამ პერიოდში მოღვაწეობდნენ გამოჩენილი მეცნიერები ა. მუავრი (1667-1754), პ. ლაპლასი (1749-1827) კ. გაუსი (1777-1855) და ს. პუასონი (1781-1840). მათ მკაცრი მათემატიკური აპარატის გამოყენებით დიდად გაამდიდრეს ახალი დებულებებით ალბათობის თეორია.

1718 წელს ლონდონში გამოვიდა წიგნი, იმ დროისათვის ცოტა უცნაური სახელწოდებით «სწავლება შემთხვევებზე», მისი ავტორი იყო ფრანგი მათემატიკოსი ა. მუავრი, მან პირველად მიაქცია ყურადღება და თეორიულად ჩამოაყალიბა შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი, რომელსაც შემდგომში ნორმალური განაწილება ეწოდა.



მუავრმა სიმაღლეში გაზომა შემთხვევით შერჩეული 1375 ქალი. შედეგები სქემატურად გამოსახა.

ზარისმაგვარი მრუდი მიახლოებით გამოსახავს სიმაღლეთა განაწილებას, რომელიც უახლოვდება $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ფუნქციის გრაფიკს,

სადაც $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828...$

ნორმალური განაწილების კანონს დიდი გამოყენება აქვს. აღმოჩნდა, რომ ასე ნაწილდება გაზის მოლეკულათა სიჩქარე, ახალშობილთა მასა და სხვა შემთხვევითი სიდიდეები.

ალბათობის თეორიის საფუძვლებს მიუძღვნა გამოკვლევა ფრანგმა მათემატიკოსმა პ. ლაპლასმა წიგნში «ალბათობის ანალიზური თეორია».

გავიდა რამდენიმე ათეული წელი და ინტერესი ალბათობის თეორიის მიმართ შენელდა. მე-19 საუკუნის მეორე ნახევარში და მე-20 საუკუნის დასაწყისში მრავალმა მათემატიკოსმა ინტერესი დაკარგა ალბათობის თეორიის მიმართ, რადგან მას არ თვლიდნენ მათემატიკურ დისციპლინად.

რით აიხსნება ეს? მიზეზი ბევრია. ჩვენ მოვიყვანოთ ზოგიერთ მათგანს.

ლაპლასის მიერ ხდომილობის ალბათობა განისაზღვრებოდა ფორმულით: $P(A) = \frac{m}{n}$, სადაც n ტოლშესაძლებელ ხდომილობათა საერთო რიცხვია, ხოლო m - იმ ხდომილობათა რიცხვი, როცა ხდება საჭირო შედეგი (ჩვენთვის «სასურველი ხდომილობა»). მაგალითად, ვთქვათ, გვაინტერესებს «ორი კამათელის აგდების შემთხვევაში ქულათა საერთო რაოდენობა იყოს 6» - ეს ხდომილობა აღვნიშნოთ A -თი.

მოვიყვანოთ ორი კამათელის აგდების ყველა შესაძლო შემთხვევა. გვაქვს შემდეგი ტოლშესაძლებელი შედეგები:

I კამათ. II კამათ.	I კამათ. II კამათ.	I კამათ. II კამათ.	I კამათ. II კამათ.	I კამათ. II კამათ.	I კამათ. II კამათ.
1 1	2 1	3 1	4 1		6 1
1 2	2 2	3 2		5 2	6 2
1 3	2 3		4 3	5 3	6 3
1 4		3 4	4 4	5 4	6 4
	2 5	3 5	4 5	5 5	6 5
1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6

როგორც ვხედავთ, ყველა შესაძლო შემთხვევათა რაოდენობა 36-ის ტოლია. A ხდომილობის მოხდენის შემთხვევები სპეციალურადაა გამოყოფილი. თუ შევთანხმდებით და A ხდომილობის აღბათობას აღვნიშნავთ $P(A)$ -თი, მაშინ ლაპლასის მიხედვით გვექნება:

$$P(A) = \frac{5}{36}.$$

როგორც ვხედავთ ყველფერი წესრიგშია, მაგრამ იზადება კითხვა როდის და რომელი შემთხვევითი ხდომილობები ჩაითვლებიან ტოლშესაძლებლად?

იზადება ბავშვი, გოგონა და ბიჭუნა ტოლშესაძლებელი ხდომილობაა (როგორც მონეტის აგდებისას, საფასურის ან გერბის მოსვლა), მაგრამ ირკვევა, რომ დაბადების სტატისტიკა ყოველთვის არ ეთანხმება ჩვენს დაშვებას. მოვიყვანოთ ზოგიერთი სტატისტიკური მასალა:

ქვეყანა	წელი	დაბადებული ბავშვების რაოდენობა	მათ შორის ბიჭი	მათ შორის გოგო	ბიჭების დაბადების წილი
პოლონეთი	1927	958 733	496 544	462 189	0,518
შვედეთი	1936	88 273	45 682	42 591	0,517

მაშასადამე, თუ სხვადასხვა დროს, სხვადასხვა ქვეყანაში ბიჭები იზადებიან უფრო მეტი, ვიდრე გოგონები, ე.ი. ბიჭების დაბადების ალბათობა უფრო მეტია, ვიდრე გოგონების, ხდომილობის, «დაბა-

და ბიჭი», ალბათობა მეტია, $\frac{1}{2}$ -ზე.

ასეთი ფაქტებით, სადაც ობიექტური რეალობა განსხვავდებოდა ადამიანის გათვლებისაგან, იქმნებოდა ეჭვი ალბათობის თეორიის სრულყოფილების შესახებ.

დიდი წვლილი მიუძღვით ალბათობის თეორიის ჩამოყალიბებასა და შექმნაში მათემატიკოსებს; ვ. ბუნიაკოვსკის (1801-1889), პ. ჩებიშევის (1821-1894), ა. მარკოვის (1956-1922) და ა. ლიაპუნოვის (1857-1918).

ალბათობის ცნების ლოგიკური დახასიათება თანდათან უმჯობესდებოდა. ალბათობის კლასიკური განსაზღვრების ნაცვლად წამოყენებული იყო ალბათობის სტატისტიკური განსაზღვრება. მართალია, ის ძველი განსაზღვრების ზოგიერი ნაკლისაგან გათავისუფლდა, მაგრამ თავისი ახალი მნიშვნელოვანი ხარვეზებით აღინიშნა, რომელთა შორის მთავარი ის იყო, რომ ალბათობის ცნება თავისი შინაგანი შინაარსიდან იფიტებოდა და მისი როლი მხოლოდ გარეგან აღწერას უკავშირდებოდა.

ალბათობის ცნებისათვის მტკიცე ლოგიკური საფუძვლის დადგენა შესაძლებელი გახდა მას შემდეგ, რაც შეიქმნა ალბათობის თეორიის აქსიომატიკა. ეს საქმე დაიწყო აკადემიკოსმა ს. ბერშტეინმა (1880-1968), ხოლო ალბათობის თეორიის აქსიომატიკის თანამედროვე სახის შექმნა აკადემიკოს ა. კოლმოგოროვის (1903-1987) დამსახურებას წარმოადგენს.

ალბათობის თეორიის მნიშვნელობა მეცნიერებაში იწვევს ზოგიერთი ფილოსოფოსის და მათემატიკოსის მხრივ უკიდურესობაში მოქცევას. ისინი ცდილობენ მთელი მეცნიერებისათვის ალბათობის თეორიის აბსოლუტიზაციას და თვით შემეცნებისათვის მხოლოდ ალბათი ხასიათის მინიჭებას. ამ მიდგომის ფილოსოფიური დასაყრდენი არის აგნოსტიციზმი და რელატივიზმი. ის თავს იჩენს ალბათობისადმი თვით ლოგიკის დამორჩილების მიდრეკილებაში. ამით ალბათობის თეორია ერთგვარად ზარალდება. ეს თეორია გარკვეულ

ნამდვილ ცოდნას გვაძლევს და ის ნამდვილი, საგნობრივი ლოგიკის გამოყენებას გულისხმობს. ყოველი ცოდნა რომ მხოლოდ ალბათი იყოს, მაშინ თვით ამ გარემოების ცოდნასაც ძალა დაეკარგებოდა. ბ. რასელი (1872-1970) ერთ-ერთ ლექციაზე 1929 წელს აღნიშნავდა: «ალბათობა თანამედროვე მეცნიერების ყველაზე მნიშვნელოვანი ცნებაა, თუმცა არავინ იცის ზუსტად, თუ რას ნიშნავს ის». რასაკვირველია, ყოველგვარი ცოდნის ალბათად გამოცხადება ალბათობის შესახებ ცოდნასაც დააზიანებს. ალბათობის თეორიის დიდი ხვედრითი წონა თანამედროვე მეცნიერებაში, ამ თეორიის სირთულე და დიდი მოცულობა, მისი ისტორიული განვითარების თავისებურებასთან ერთად, საკმაოდ ძნელ ამოცანად ხდის ალბათობის კურსის შედგენას. ამ კურსში ასახული უნდა იყოს ალბათობის თეორიის თანამედროვე შეხედულება, მაგრამ არ შეიძლება მთლად უგულვე-ბელვყოთ განვლილი საფეხურები, რომელთა გარეშე ამ თეორიის გაგება ძალიან ძნელი იქნება.

რასაკვირველია, ალბათობის თეორიის არსი და მნიშვნელობა კიდევ უფრო გამოჩნდება მათემატიკური სტატისტიკის დაუფლე-ბის შემდეგ, რაც ალბათობის თეორიის კურსის შესწავლას უნდა მოსდევდეს.

3.1.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. ნიკამ შოკოლადის 3 ერთნაირი ფილა იყიდა, თამრიკომ კი - 5 ასე-თივე ფილა. თამრიკომ 90 თეთრით მეტი გადაიხადა, ვიდრე ნი-კამ. რამდენი თეთრი ღირებულება ერთი ფილა შოკოლადი?
2. კახამ 67 ცალი ფანქარი ერთნაირ კოლოფებში უნდა ჩააწყოს. ერთ კოლოფში მხოლოდ 12 ცალი ფანქარი ეტევა. სულ ცოტა, რამდენი კოლოფი დასჭირდება კახას ფანქრების ჩასაწყობად?
3. ბატონ სულხანს ორი შვილიშვილი ჰყავს: შალვა და ანა. ანა ბაბუას დღეგამოშვებით ესტუმრება ხოლმე, ხოლო შალვა კი - მხოლოდ

- შაბათობით. 10 თებერვალს ბატონ სულხანს ორივე შვილიშვილი ესტუმრა. ამ თვის კიდევ რომელ რიცხვში ესტუმრება ბატონ სულხანს ორივე შვილიშვილი?
4. მაღაზიამ ერთ დღეს 8 ცალი მაცივარი, 12 ცალი სარეცხი მანქანა და 30 ცალი გაზქურა გაყიდა. რამდენი პროცენტი გაყიდულ ნივთებს შორის გაზქურის წილი?
 5. უდიდესი მარტივი რიცხვი, რომელზეც 24 იყოფა არის?
 6. რამდენი ერთნაირი დიამეტრის ფოლადის ბირთვი უნდა გადავადნოთ, რომ მივიღოთ ორჯერ დიდი დიამეტრის ბირთვი?
 7. ზამთარში თვითმფრინავის ბილეთის ფასი 20%-ით შემცირდა. რამდენი პროცენტით უნდა გაიზარდოს თვითმფრინავის ბილეთის ფასი ზამთრის შემდეგ, რომ იგი თავდაპირველ ფასს გაუტოლდეს?
 8. თერთმეტი რიცხვითი მონაცემის საშუალო არითმეტიკული არის 14. ამ რიცხვებიდან ცხრა მონაცემის საშუალო არითმეტიკულია 16. რისი ტოლია დანარჩენი ორი რიცხვის საშუალო არითმეტიკული?
 9. როდესაც აქილევსი კუს გამოეკიდა, მათ შორის მანძილი 54 მეტრის ტოლი იყო. მას შემდეგ რაც მათ შორის მანძილი 9-ჯერ შემცირდა, კუ მიხვდა, რომ ის მდევარს თავს ვერ დააღწევდა და გაჩერდა. რა მანძილი გაიარა კუმ დევნის დაწყებიდან, თუ მისი სიჩქარე 17-ჯერ ნაკლებია აქილევსის სიჩქარეზე და ისინი ერთი მიმართულებით მოძრაობდნენ.
 10. კლასში გოგონების რაოდენობა სამჯერ მეტია ბიჭების რაოდენობაზე. კლასის მოსწავლეთა რამდენ პროცენტს შეადგენენ გოგონები?
 11. ხუთი რიცხვის საშუალო არითმეტიკული 300-ის ტოლია. ამ რიცხვებიდან ერთ-ერთი უდრის 900-ს. რისი ტოლი აღმოჩნდება დანარჩენი ოთხი რიცხვის საშუალო არითმეტიკული?
 12. ხუთი კალათბურთელი თამაშის დაწყების წინ ერთ რიგად დაეწყო. თითოეული კალათბურთელი გვერდით მდგომისაგან და-

- შორებულია ერთი ნაბიჯით. რამდენი ნაბიჯია ამ რიგის სიგრძე?
13. კატამ და ძაღლმა ერთდროულად დაიწყეს ძეხვის ჭამა მოპირდაპირე მხრეებიდან. თუ კატა მხოლოდ თავის წილს შეჭამს, მაშინ ძაღლს დარჩება 300 გრამით მეტი, ვიდრე კატამ შეჭამა; ხოლო თუ ძაღლი შეჭამს მხოლოდ თავის წილს, მაშინ კატას დარჩება 100 გრამით მეტი, ვიდრე ძაღლმა შეჭამა. რამდენი გრამი ძეხვი დარჩება, თუ ძაღლიც და კატაც მხოლოდ თავიანთ წილს შეჭამენ?
 14. ჯგუფში 37 სტუდენტია. მინიმუმ რამდენი სტუდენტი იქნება დაბადებული ერთსა და იმავე თვეში?
 15. ოთხ ყუთში ბურთულებია ჩაყრილი, იქნება თუ არა რომელიმე ყუთში 5-ზე მეტი ბურთულა, თუ ბურთულების რაოდენობა სულ 21-ის ტოლია.
 16. სამ ბავშვს არათანაბრად აქვთ ნიგვზის კაკლები. ყოველმა მათგანმა რომ რიგრიგობით აძლიოს ორ დანარჩენს იმდენი კაკალი, რამდენიც თითოეულს აქვს იმ მომენტში, მაშინ თითოეულ ბავშვს საბოლოოდ 8-8 კაკალი აღმოაჩნდება. რამდენი ნიგვზის კაკალი აქვს თითოეულ ბავშვს?
 17. ყუთში მხოლოდ 7 წითელი და 5 ლურჯი ბურთულაა. ბურთულების რა უმცირესი რაოდენობა უნდა ამოვიღოთ ალაღბედზე ყუთიდან, რომ მათ შორის იყოს ორივე ფერის თითო ბურთულა მაინც?
 18. ყუთში მხოლოდ 8 თეთრი, 5 მწვანე, 4 წითელი და 7 ლურჯი ბურთულაა. ბურთულების რა უმცირესი რაოდენობა უნდა ამოვიღოთ ალაღბედზე ყუთიდან, რომ მათ შორის იყოს ყველა ფერის თითო ბურთულა მაინც?
 19. კალათაში 20 წითელი და 15 ყვითელი ვაშლია. ვაშლების რა უდიდესი რაოდენობა უნდა ამოვიღოთ ალაღბედზე კალათიდან, რომ მასში დარჩეს თითოეული ფერის თითო ვაშლი მაინც?
 20. ყუთში აწყვია 38 წითელი, 41 თეთრი, 32 ლურჯი და 42 მწვანე ბურთულა. მინიმუმ რამდენი ბურთულა უნდა ამოვიღოთ ყუ-

თიდან ალაღბედზე, ისე რომ ამოღებულ ბურთულებს შორის აცილებლად იყოს 10 ერთნაირი ფერის ბურთულა?

21. კოლოფში 8 ლურჯი, 6 წითელი, 5 მწვანე და 4 ყვითელი ფანქარია. მინიმუმ რამდენი ფანქარი უნდა ამოვიღოთ ალაღბედზე ყუთიდან, ისე რომ მათ შორის, აუცილებლად იყოს თითოეული ფერის სამ-სამი ფანქარი მაინც?
22. უჯრაში 9 წყვილი შავი და 7 წყვილი თეთრი წინდაა. მინიმუმ რამდენი ცალი წინდა უნდა ამოვიღოთ ალაღბედზე უჯრიდან, ისე რომ მათგან აუცილებლად შედგეს ერთი წყვილი წინდა მაინც?
23. ყუთში არის 6 წყვილი შავი და 7 წყვილი თეთრი ერთი და იმავე ზომის ფეხსაცმელი. მინიმუმ რამდენი ფეხსაცმელი უნდა ამოვიღოთ ალაღბედზე ყუთიდან, ისე რომ მათგან აუცილებლად შეიძლებოდეს 1 წყვილი ფეხსაცმელის შედგენა?
24. რიცხვი 6 ორი კენტი დადებითი რიცხვის ჯამის სახით შეიძლება სამნაირად წარმოვადგინოთ: $6 = 1 + 5 = 3 + 3 = 5 + 1$. რამდენნაირად შეიძლება წარმოვადგინოთ ორი კენტი დადებითი რიცხვის ჯამის სახით რიცხვი 86?
25. რამდენი 0-ით ბოლოვდება 1-დან 28-მდე ყველა მთელი რიცხვის ნამრავლი?

400 ადამიანს სთხოვეს ფილმის რამდენიმე ჟანრიდან დაესახელებინათ მათთვის ყველაზე საყვარელი ერთი ჟანრი. ამის მიხედვით შედგა შემდეგი ცხრილი:

ფილმის ჟანრი	მამაკაცები	ქალები	სულ
კომედია	64	56	120
დრამა	12	32	44
მელოდრამა	16	64	80
დეტექტივი	60	24	84
სამეცნიერო-პოპულარული	48	24	72
სულ	200	200	400

მოცემული ცხრილის მიხედვით უპასუხეთ შემდეგ კითხვებს

26. რა ჟანრი უყვართ მამაკაცებს ყველაზე ნაკლებად?

27. გამოკითხულთა რამდენ პროცენტს უყვარს სამეცნიერო-პოპულარული ჟანრის ფილმები?
28. ქალების რა ნაწილს უყვარს დეტექტივი?
29. ფილმის რომელი ჟანრია ყველაზე პოპულარული გამოკითხულთა შორის?
30. რამდენჯერ აღემატება მელოდრამის მოყვარულ ქალთა რაოდენობა ამავე ჟანრის მოყვარულ მამაკაცთა რაოდენობას?

3.1.2. ტესტი №1

1. ასათნის ღერების რაოდენობა ერთ კოლოფში კენტია, მეორეში - ლუწი. ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან, რომელი არ შეიძლება იყოს ორივე კოლოფში ასათნის ღერების საერთო რაოდენობის გამომსახავი რიცხვი?
 - ა) 85; ბ) 89; გ) 95; დ) 98; ე) 101.
2. რამდენი კილოგრამითაა ნაკლები 12 კგ-ის $\frac{3}{4}$ ნაწილი 12 კილოგრამზე?
 - ა) 1 კგ; ბ) 2კგ; გ) 3 კგ; დ) 4 კგ; ე) 5 კგ.
3. მაღაზიაში თეთრი ბურთი 6 ლარი ღირს, წითელი კი - 9 ლარი. დათოს სულ 53 ლარი აქვს, რამდენი უდიდესი რაოდენობის თეთრი ბურთის ყიდვა შეუძლია მას, თუ მთელ თანხას ბურთების ყიდვაზე დახარჯავს მაქსიმალურად?
 - ა) 4; ბ) 8; გ) 7; დ) 1; ე) 5.
4. ერთი წრის რადიუსი მეორე წრის რადიუსის 40%-ს შეადგენს. პირველი წრის ფართობი მეორე წრის ფართობის რამდენ პროცენტს შეადგენს?
 - ა) 16%; ბ) 20%; გ) 34%; დ) 40%; ე) 62%.
5. საჭადრაკო ტურნირში 5 მოჭადრაკე მონაწილეობდა. ყოველმა მოჭადრაკემ თითო პარტია ითამაშა თითოეულ სხვა მოჭადრაკეს-

თან. სულ რამდენი საკადრაკო პარტია გათამაშებულა ამ ტურ-
ნირზე?

ა) 20; ბ) 10; გ) 8; დ) 4; ე) 5.

6. სასწავლებელში 500 სტუდენტი. ყოველი სტუდენტი ვალდებულია ისწავლოს ინგლისური ან გერმანული ენა. ამ სასწავლებლის 350 სტუდენტი სწავლობს ინგლისურს, 300 სტუდენტი კი გერმანულს. სტუდენტთა რამდენი პროცენტი სწავლობს ორივე ენას, ინგლისურსაც და გერმანულსაც?

ა) 30%; ბ) 35%; გ) 40% 9 დ) 55%; ე) 65%.

7. შეძენილი ხილის 40% ვაშლია; ვაშლების 30% წითელია. შეძენილი ხილის რამდენ პროცენტს შეადგენს წითელი ვაშლები?

ა) 75%; ბ) 5%; გ) 48%; დ) 10%; ე) 12%.

8. მოცემული რიცხვის 12-ზე გაყოფისას ნაშთი 4-ის ტოლია. რისი ტოლი იქნება ნაშთი იმავე რიცხვის 6-ზე გაყოფისას?

ა) 1; ბ) 2; გ) 3; დ) 4; ე) 5.

9. გვაქვს მხოლოდ 1, 4, 6 და 11 კილოგრამიანი თითო საწონი. ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რამდენკილოგრამიანი ნივთის აწონას ვერ შევძლებთ თეფშებიან სასწორზე ერთი აწონით, თუ მხოლოდ ამ საწონებს გამოვიყენებთ?

ა) 21; ბ) 8; გ) 19; დ) 13; ე) 15.

10. გასათიბი იყო მართკუთხედის ფორმის სათიბი. მთიბავს 12 საათიანი მუშაობის შემდეგ გასათიბი დარჩა სათიბის 2-ჯერ ნაკლები სიგრძისა და 2-ჯერ ნაკლები სიგანის მართკუთხედის ფორმის ნაწილი. რამდენი საათი დასჭირდება მთიბავს დარჩენილი ნაწილის გასათიბად, თუ იგი იმავე ტემპით გააგრძელებს მუშაობას?

ა) 3; ბ) 10; გ) 6; დ) 2; ე) 4.

3.2. კომბინატორული ამოცანები; ჯამისა და ნამრავლის წესი; წყობა; ბადანაცვლება და ჯუშდება

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება შემთხვევები, როცა საჭიროა რაიმე ობიექტთა სიმრავლიდან გამოვყოთ მისი ქვესიმრავლე, დავალაგოთ ამა თუ იმ სიმრავლის ელემენტები სხვადასხვა რიგით და ა.შ. ასე მაგალითად, საამქროს უფროსი მენეჯერი ანაწილებს სხვადასხვა სამუშაოს თანამშრომლებს შორის; ოფიცერი დავალებებს აძლევს ჯარისკაცებს; მოჭადრაკე - სხვადასხვა შესაძლო სვლებიდან ცდილობს ამოიცნოს უკეთესი. რამდენადაც ამ ხასიათის ამოცანებში საუბარია სამუშაოთა ამა თუ იმ კომბინაციებზე, ასეთი სახის ამოცანებს კომბინატორულ ამოცანებს უწოდებენ.

მათემატიკის იმ ნაწილს, რომელიც კომბინატორულ ამოცანებს შეისწავლის, კომბინატორიკა ეწოდება. არსებითად კომბინატორიკა შეისწავლის სასრულ სიმრავლეებს, მათ ქვესიმრავლეებს, ასახვას და აგრეთვე სასრული სიმრავლეებიდან შედგენილ კომბინაციებს. ამიტომ კომბინატორიკა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც სასრულ სიმრავლეთა თეორიის ნაწილი.

კომბინატორული ამოცანების უმრავლესობის ამოხსნა ემყარება ორ მარტივ წესს, რომელთაც უწოდებენ ჯამისა და ნამრავლის წესს. ჯამის წესი საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ ორი სასრული სიმრავლის გაერთიანების ელემენტთა რიცხვი, ხოლო ნამრავლის წესი - მათი დეკარტული ნამრავლის ელემენტთა რიცხვი.

სასრული X სიმრავლის ელემენტთა რიცხვი აღვნიშნოთ $n(X)$ -ით. მაგალითად, თუ $X = \{a, b, c, d, e, f, g, k\}$, მაშინ $n(X) = 8$.

ვთქვათ, X შეიცავს m ელემენტს, Y კი p ელემენტს, ე.ი. $n(X) = m$, ხოლო $n(Y) = p$. ვიპოვოთ რამდენ ელემენტს შეიცავს მათი გაერთიანება $X \cup Y$; ცალსახად ამ კითხვაზე პასუხი შეიძლება გავცეთ მაშინ, როცა $X \cap Y = \emptyset$; ამ შემთხვევაში $X \cup Y$ შეიცავს $m+p$ რამდენობის ელემენტს. მაგალითად

$X = \{a, b, c, d\}$; $Y = \{e, f, g\}$, მაშინ

$X \cup Y = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ და იგი შეიცავს

$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) = 4 + 3 = 7$ ელემენტს.

სიმბოლურად ეს შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

თუ $X \cap Y = \emptyset \Rightarrow n(X \cup Y) = n(X) + n(Y)$; იგულისხმება რომ X და Y სიმრავლეები სასრულია.

ამ წესს კომბინატორიკაში ჯამის წესს უწოდებენ.

იმ შემთხვევაში, როცა $X \cap Y \neq \emptyset$ საქმე უფრო რთულდება; მაგალითად, $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ და $Y = \{d, e, f, g, k, l, i, t\}$; ცხადია, ამ სიმრავლეების გაერთიანება $X \cup Y = \{a, b, c, d, e, f, g, k, l, i, t\}$ შედეგება არა $6+8=14$ ელემენტისაგან, არამედ 11 ელემენტისაგან; ეს იმით აიხსნება, რომ ელემენტები d, e , და f შედიან როგორც X , ასევე Y სიმრავლეშიც, ამიტომ $6+8$ ჯამიდან უნდა გამოვაკლოთ 3; ე.ი. $X \cap Y$ სიმრავლის ელემენტთა რიცხვი.

საზოგადოდ, ნებისმიერი სასრული X და Y სიმრავლეებისათვის, როცა $X \cap Y \neq \emptyset$, სამართლიანია ტოლობა $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$. ამგვარად, ორი სასრული სიმრავლის გაერთიანების ელემენტთა რიცხვი ტოლია ამ სიმრავლეთა ელემენტების რიცხვთა ჯამი შემცირებული მათი თანაკვეთის ელემენტთა რიცხვით.

ახლა გავნიხილოთ ნამრავლის წესი; კომბინატორიკის მეორე ძირითადი წესი საშულებას გვაძლევს გავარკვეოთ იმ კომბინაციების რიცხვი, რომლებიც შეიძლება შევადგინოთ მოცემული სასრული სიმრავლეების ელემენტებისაგან.

ვთქვათ, მოცემულია $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_m\}$ და $Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_k\}$ სიმრავლეები. შევადგინოთ ყველა შესაძლო (x_i, y_j) წყვილები ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, k$) მოცემული სასრული X და Y სიმრავლეების ელემენტებისაგან, ეს წყვილები დავწეროთ შემდეგი სახით:

$$m \left[\begin{array}{cccc} (x_1, y_1) & (x_1, y_2) & (x_1, y_3), \dots; & (x_1, y_k) \\ (x_2, y_1) & (x_2, y_2) & (x_2, y_3), \dots; & (x_2, y_k) \\ (x_3, y_1) & (x_3, y_2) & (x_3, y_3), \dots; & (x_3, y_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_m, y_1) & (x_m, y_2) & (x_m, y_3), \dots; & (x_m, y_k) \end{array} \right] k$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ჩანაწერი შედგება m სტრიქონისაგან, რომელთაგან თითოეული შეიცავს k რაოდენობის წყვილს; ე.ი. სულ წყვილთა რაოდენობა არის $m \cdot k$. სიმბოლურად შეიძლება ეს დებულება ასე ჩავეწეროთ:

$$n(X \times Y) = n(X) \cdot n(Y)$$

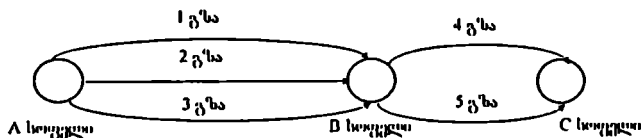
ამრიგად, თუ A ობიექტი შეიძლება ავარჩიოთ m ხერხით, ხოლო თითოეულ ამ არჩევანთან ერთად მეორე B ობიექტი შეიძლება ავარჩიოთ (A ობიექტის არჩევისაგან დამოუკიდებლად) k ხერხით, მაშინ « A და B » ობიექტების წყვილი შეიძლება ავირჩიოთ $m \cdot k$ ხერხით. უფრო ზოგადად კი:

$$n(X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots \times X_m) = n(X_1) \cdot n(X_2) \cdot n(X_3) \cdot \dots \cdot n(X_m),$$

ამ დებულებას კომბინატორიკაში ნამრავლის წესს უწოდებენ.

განვიხილოთ მაგალითი:

A სოფლიდან B სოფელში მიდის სამი გზა, B სოფლიდან C სოფელში კი ორი გზა. რამდენ ხერხით (გზით) შეგვიძლია მივიდეთ A სოფლიდან C სოფელში, B სოფლის გავლით?



ცხადია, A სოფლიდან C სოფელში B -ს გავლით მოხვედრა შეგვიძლია შემდეგი გზებით: $\langle 1; 4 \rangle$, $\langle 1; 5 \rangle$, $\langle 2; 4 \rangle$, $\langle 2; 5 \rangle$, $\langle 3; 4 \rangle$, $\langle 3; 5 \rangle$ ე.ი. სულ $3 \times 2 = 6$ ხერხით.

უფრო რთულია იმ კომბინატორული ამოცანების ამოხსნა, რომ-

ლებშიც ვიყენებთ როგორც ნამრავლის, ასევე ჯამის წესს; მაგალითად, დომინოს 28 ქვიდან რამდენი ხერხით შეიძლება ავარჩიო ორი ქვა ისე, რომ ისინი მიუერთდნენ ერთმანეთს (ე.ი. ქულათა რომელიმე ერთიდაიგივე რიცხვი შეგხვდეს ორთავე ქვაზე)?

თავდაპირველად ავარჩიოთ ერთი ქვა. ეს შეიძლება გავაკეთოთ 28 ხერხით, მასთან 7 შემთხვევაში არჩეული ქვა იქნება «წყვილი» (ე.ი. შემდეგი სახის ქვა: 00, 11, 22, 33, 44, 55, 66); ხოლო 21 შემთხვევაში - ქვა იქნება სხვადასხვა ქულათა რიცხვით (მაგალითად; 01, 02, 03, 04, 05, 06, 12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56). პირველ შემთხვევაში მეორე ქვა შეიძლება ავარჩიოთ 6 ხერხით (მაგალითად, პირველად ავიღე ქვა 11, მაშინ მეორედ შემიძლია ავიღო ერთ-ერთი ქვა შემდეგი ქვებიდან 01, 12, 13, 14, 15, 16). მეორე შემთხვევაში კი მეორე ქვა შეიძლება ავარჩიოთ 12 ხერხით (მაგალითად ქვისათვის 35 მოიძებნება ქვები 03, 13, 23, 33, 34, 36, 05, 15, 25, 45, 55, 56). ნამრავლის წესით პირველ შემთხვევაში ვღებულობთ $7 \cdot 6 = 42$ ამონაკრეფს, ხოლო მეორე შემთხვევაში $21 \cdot 12 = 252$ ამონაკრეფს, მაშინ ჯამის წესის გამოყენებით ვღებულობთ $42 + 252 = 294$ წყვილის შერჩევის ხერხს.

შევნიშნოთ, რომ ჩატარებულ მსჯელობაში მხედველობაში მიღებული იყო დალაგებაც, რომლითაც ვირჩევდით ქვებს, ამიტომ თითოეული წყვილი ქვა გვხვდებოდა ორჯერ (მაგალითად, პირველად 01 და 16; ხოლო მეორედ 16 და 01), თუ დალაგებას მხედველობაში არ მივიღებთ, მაშინ მივიღებთ ორჯერ ნაკლებ არჩევის ხერხს ე.ი. $294 : 2 = 147$ ხერხს.

ყველა იმ ერთგვაროვან ობიექტთა ერთობლიობას, საიდანაც ხდება შერჩევა გენერალური ერთობლიობა ეწოდება, ხოლო შემთხვევით შერჩეულ ელემენტთა ერთობლიობას, რომელთა შესწავლის საფუძველზე კეთდება დასკვნა გენერალური ერთობლიობის შესახებ, შერჩევითი ერთობლიობა, ანუ შერჩევა (ამოკრეფა) ეწოდება.

გენერალური ერთობლიობა განმეორების გარეშე - ეს ერთი სასრული კლასის ობიექტების რიცხვის სხვადასხვა ელემენტთა ნაკრე-

ბია. სასრული სიმრავლის ელემენტები შეიძლება დავალაგოთ სხვადასხვა რიგით, იმის მიხედვით, თუ სიმრავლის რომელ ელემენტს ავირჩევთ პირველ ელემენტად, რომელს მეორედ და ა.შ.

საზოგადოდ, სასრულ X სიმრავლეს ეწოდება დალაგებული, თუ მისი ელემენტები რაიმე წესითაა დანომრილი: $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ დალაგებული სიმრავლის აღსანიშნავად მის ელემენტებს ვათავსებთ მრგვალ ფრჩხილებში მოცემული რიგის მიხედვით.

ერთი და იგივე სიმრავლე შეიძლება დავალაგოთ სხვადასხვა ხერხით; მაგალითად, კლასის მოსწავლეთა სიმრავლე შეიძლება დავალაგოთ წლოვანებით, სიმაღლით, წონით, ანბანის მიხედვით და სხვ.

წყობა განმეორების გარეშე n ელემენტისაგან m ელემენტად ეწოდება ისეთ m ელემენტიან ამონაკრეფებს, რომლებიც არჩეულია გენერალური ერთობლიობის n რაოდენობის ელემენტებისაგან განმეორების გარეშე, ისე რომ ისინი განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან ან ელემენტების შემადგენლობით, ან მათი დალაგების რიგით.

მოვიყვანოთ მახასიათებელი მაგალითი წყობისა განმეორების გარეშე - ერთობლიობა ყველა ორნიშნა ნომრისა, სადაც თითოეულ მათგანში არ მეორდებიან ციფრები.

წყობა და რაოდენობას n ელემენტისაგან m ელემენტად აღნიშნავენ ასე A_n^m (ფრანგული სიტყვიდან «arrangement»). შევეცადოთ განვსაზღვროთ ეს რიცხვი.

ვთქვათ, გვაქვს n რაოდენობის ელემენტი. პირველი ელემენტი შეიძლება ავარჩიოთ n ხერხით. მეორის არჩევა მოგვიწევს დარჩენილი $(n-1)$ ელემენტისაგან, ამიტომ მეორე ელემენტი შეიძლება ავარჩიოთ $(n-1)$ ხერხით; მაშინ წყვილი ელემენტი, ნამრავლის წესით, შეიძლება შევადგინოთ $n(n-1)$ ხერხით. მესამე ელემენტის არჩევა გვიხდება დარჩენილი $(n-2)$ ელემენტისაგან, იგი შეიძლება შევარჩიოთ $(n-2)$ ხერხით; მაშინ, ისევ ნამრავლის წესის გამოყენებით, ელემენტთა სამეული შეიძლება შევარჩიოთ $n(n-1)(n-2)$ ხერხით. ანალოგიურად, ოთხეული შეიძლება შევარჩიოთ $n(n-1)(n-2)(n-3)$ ხერხით, ხოლო წყობა n ელემენტისაგან m ელემენტად $n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-(m-1))$

ხერხით. ამრიგად,

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-m+1) \quad (1).$$

თუ (1) ფორმულას გარდაექმნით, კერძოდ, მის მარჯვენა მხარეს გავმრავლებთ და გავყოფთ ნამრავლზე

$(n-m)(n-m-1)(n-m-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ მივიღებთ

$$A_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)(n-m)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1};$$

ნამრავლს $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n$ ეწოდება n რიცხვის ფაქტორიალი და აღინიშნება სიმბოლოთი $n!$, ამასთანავე ჩათვლილია, რომ $0! = 1$; მაშინ (1) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (2).$$

იმ შემთხვევაში, როცა $m=n$, წყობები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან მხოლოდ ელემენტთა დალაგების რიგით, ასეთ წყობებს ეწოდებათ გადანაცვლება განმეორების გარეშე.

გადანაცვლება n ელემენტისაგან განმეორების გარეშე ეწოდება წყობას n ელემენტისაგან n ელემენტად განმეორების გარეშე, ე.ი. წყობები ამ შემთხვევაში ერთიმეორისაგან განსხვავდებიან მხოლოდ ელემენტების დალაგების რიგით.

მახასიათებელი მაგალითი გადანაცვლებისა განმეორების გარეშე - ერთობლიობა ყველა ათნიშნა ნომრების, რომელთაგან თითოეულში არ მეორდებიან ციფრები.

n მოცულობის გადანაცვლებათა რიცხვი აღვნიშნოთ P_n სიმბოლოთი (ფრანგული სიტყვიდან «permutation»), მაშინ, (1) ფორმულიდან გვექნება

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ ე.ი. } P_n = n! \quad (3).$$

წყობათა შორის n ელემენტისაგან m ელემენტად ($m < n$) განმეორების გარეშე შეგვძლია გამოვყოთ ისეთი წყობები, რომლებიც განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან მხოლოდ და მხოლოდ ერთი ელემენტით მაინც, ასეთ წყობებს უწოდებენ ჯუფდებებს განმეორების გარეშე.

ამრიგად, ჯუფდება n ელემენტისაგან m ელემენტად ($m < n$), გან-

მეორების გარეშე, ეწოდება ისეთ წყობებს n ელემენტისაგან m ელემენტად, განმეორების გარეშე, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან მხოლოდ ერთი ელემენტით მაინც.

ჯუფდებათა რიცხვს აღნიშნავენ C_n^m სიმბოლოთი (ფრანგული სიტყვიდან «combinaison»). ცხადია, რომ როცა $m=n$, მაშინ $C_n^m = 1$.

მახასიათებელი მაგალითი ჯუფდებისა განმეორების გარეშე - ვიპოვოთ 5 კაცისაგან 3 კაციანი დელეგაციის არჩევის ყველა შესაძლო ვარიანტი.

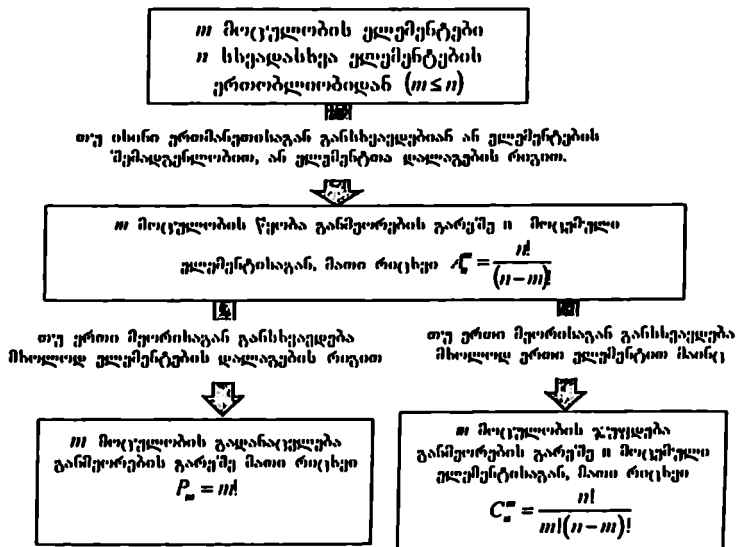
თუ C_n^m ჯუფდებათა რიცხვს გავამრავლებთ P_m გადანაცვლებათა რიცხვზე, მაშინ მივიღებთ A_n^m რიცხვს ე.ი. $C_n^m \cdot P_m = A_n^m$, აქედან კი

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} \quad (4),$$

თუ (4)-ში გავითვალისწინებთ (2) და (3) ფორმულებს მივიღებთ:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!} \quad (5).$$

შეიძლება მიღებული შედეგები გამოვსახოთ შემდეგი სქემით:



გენერალური ერთობლიობა განმეორებით - ეს არის n სხვადასხვა კლასის ელემენტთა ნაკრები, სადაც ელემენტები, რომლებიც ერთსა და იგივე კლასს ეკუთვნიან, ითვლებიან ერთგვაროვნად:

$$\underbrace{a, a, a, \dots, a}_I \text{ კლასი} \quad \underbrace{b, b, b, \dots, b}_{II} \text{ კლასი} \quad \underbrace{l, l, l, \dots, l}_{III} \text{ კლასი}$$

იგულისხმება, რომ ელემენტების რიცხვი თითოეული ამ n კლასიდან შემოუსაზღვრელია.

m მოცულობის ამონაკრეფი განმეორებით ვუწოდოთ განმეორებითი გენერალური ერთობლიობის ნებისმიერი m ელემენტების ჯგუფს.

წყობები განმეორებით ელემენტთა n რაოდენობის კლასიდან m ელემენტად ეწოდება ისეთ ამონაკრეფებს, რომლებიც შეიცავენ m რაოდენობის ელემენტებს და ისინი არჩეული არიან ელემენტების მოცემული n რაოდენობის კლასიდან (რომლებიც წარმოადგენენ გენერალურ ერთობლიობას განმეორებით) და განსხვავდებიან ერთმანეთსაგან ან ელემენტთა შემადგენლობით ან ელემენტთა დალაგების რიგით.

ასეთი წყობების რიცხვი აღვნიშნოთ $\bar{A}_n^m$ სიმბოლოთი, გვაქვს

$$\bar{A}_n^m = n^m \quad (6).$$

მაგალითად, რამდენი სამნიშნა რიცხვის დაწერა შეგვიძლია ციფრებით 2 და 5. ამ შემთხვევაში $n=2$ ხოლო $m=3$ და $\bar{A}_2^3 = 2^3 = 8$, მართლაც, გვაქვს შემდეგი სამნიშნა რიცხვები: 222, 225, 252, 522, 255, 525, 552, 555.

განმეორებითი გადანაცვლებები ელემენტთა n რაოდენობის სხვადასხვა კლასიდან K ელემენტად ეწოდება K მოცულობის ისეთ განმეორებით წყობებს, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან მხოლოდ და მხოლოდ ელემენტების დალაგების რიგით, როცა i -ური ($i=1, 2, \dots, n$) კლასიდან თითოეულ ამონაკრეფში მონაწილეობს K_i რაოდენობის ელემენტი (მასთან $K_1 + K_2 + \dots + K_n = K$), ასეთი გადანაცვლებების რიცხვი აღვნიშნოთ $P_{K_1, K_2, \dots, K_n}$ -ით, გვაქვს

$$P_{K_1, K_2, \dots, K_n} = \frac{K!}{K_1! K_2! \dots K_n!} \quad (7).$$

მაგალითად, პრეფერანსის თამაშის დროს ზანქოს 32 სათამაშო ქაღალდიდან სამი მოთამაშიდან თითოეულს ურიგდება 10 სათამაშო ქაღალდი, ხოლო მაგიდაზე კი რჩება ორი სათამაშო ქაღალდი. რამდენნაირად შეიძლება მოხდეს ეს?

ამოხსნა: ცხადია ამ შემთხვევაში გვაქვს განმეორებითი გადა-
ნაცვლებები და მათი რიცხვი იქნება

$$P_{10,10,10,2} = \frac{32!}{10!! 0!! 0!! 2!} = 2753294408504640.$$

ჯუფდებები, განმეორებით ელემენტა n განსხვავებული კლასიდან m ელემენტად, ეწოდება ისეთ განმეორებით წყობებს n კლასიდან m ელემენტად, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან მხოლოდ და მხოლოდ ერთი ელემენტით მაინც. ასეთი ჯუფდებების რიცხვი აღვნიშნოთ C_n^m სიმბოლოთი, გვაქვს

$$C_n^m = P_{m,n-1} = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!} \quad (8).$$

მაგალითად, მაღაზიაში იყიდება ორი სახის, თეთრი და წითელი ბურთები, რეზოს დაავალეს ყყიდა 4 ცალი ბურთი, რამდენნაირად შეეძლო მას ეს გაკეთებინა?

ამოხსნა. ცხადია, გვაქვს განმეორებითი ჯუფდება, n კლასი შედგები ორი სახის ელემენტისაგან (თეთრი და წითელი ბურთები $n=2$, ხოლო რეზომ კი უნდა იყიდოს $m=4$ ბურთი), ამრიგად გვაქვს:

$$C_2^4 = P_{4,1} = \frac{5!}{4!!} = 5. \text{ მართლაც, გვაქვს შემდეგი შემთხვევები:}$$

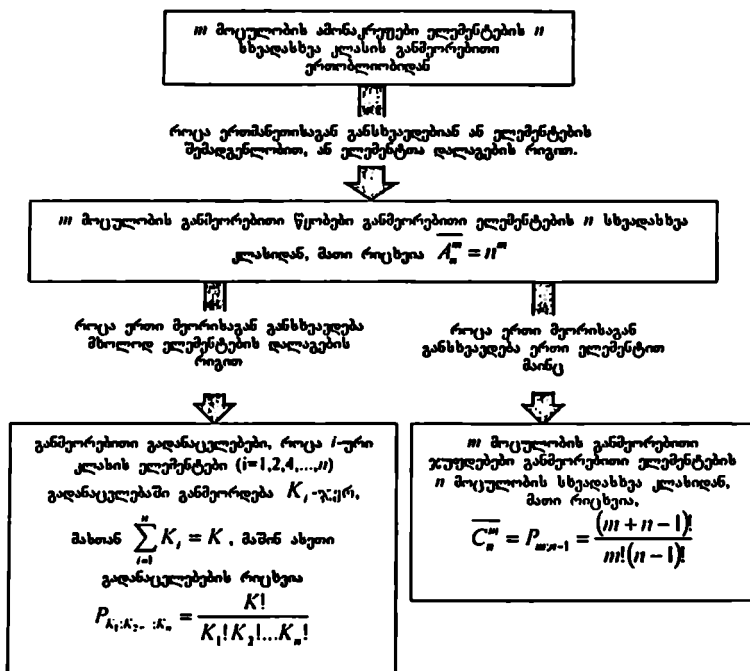
1. (○, ○, ○, ○); 2. (●, ●, ●, ●); 3. (○, ●, ●, ●); 4. (○, ○, ○, ●);
5. (○, ○, ●, ●).

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი; ყვავილების მაღაზიაში იყიდება 6 სახის ყვავილი. დათოს დაავალეს ყყიდა 10 ყვავილისაგან შემდგარი თაიგული. რამდენნაირად შეეძლო დათოს შეერჩია თაიგული?

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $n=6$; ხოლო $m=10$, გვაქვს განმეორებითი

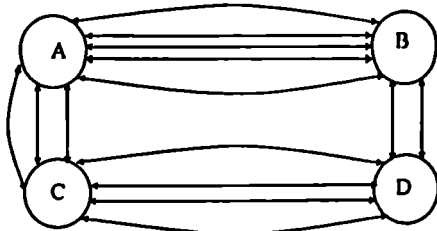
ჯუფდება 6 კლასიდან 10 ელემენტად; $C_{10,3}^6 = P_{10,3} = \frac{15!}{10!5!} = 3003$.

ჩვენი მსჯელობები შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგი სქემის საშუალებით:



3.2.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მეთოდინეობისათვის

1. რამდენი ხერხით შეიძლება თიკამ შეარჩიოს სამოსი, თუ მას აქვს სამი სხვადასხვა ჯინსის შარვალი, 4 მაისური და ორი წყვილი თეთრი და შავი ფეხსაცმელი?
2. A ქალაქიდან B-ში 5 გზა მიდის, ხოლო C-ში 3 გზა. B ქა-



- ლაქიდან D-მდე მისასვლელი 2 გზა არსებობს, ხოლო C-დან D-ში კი 4 გზა. B-დან C-ში მისასვლელი გზა კი არ არსებობს. რამდენი სხვადასხვა გზითაა შესაძლებელი (მხოლოდ აღნიშნული გზების საშუალებით) A ქალაქიდან D-ში ჩასვლა?
3. რამდენნაირად შეიძლება დავაღოთ 14 წიგნი თაროზე ა) თუ მათ განლაგებას არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს? ბ) თუ მათგან რომელიღაც ორი აუცილებლად გვინდა, რომ ერთმანეთის გვერდით მოხვდეს?
 4. სულ რამდენი ხუთნიშნა რიცხვი შეიძლება შევადგინოთ, ისე რომ ა) ციფრები არ გავიმეოროთ; ბ) ციფრების გამეორება შესაძლებელი იყოს?
 5. სილამაზის კონკურსში მონაწილეობს 15 გოგონა. პირველი სამი პრიზის განაწილების რამდენი შესაძლო ვარიანტი არსებობს?
 6. პიანინოს კლავიატურა 88 კლავიშისგან შედგება. რამდენნაირი მუსიკალური ფრაზაა შესაძლებელი შევადგინოთ 6 ნოტისაგან, თუ ფრაზაში ერთი და იგივე ნოტი არ მეორდება?
 7. რამდენნაირადაა შესაძლებელი 7 ადამიანი დავსვათ 7 სხვადასხვა სკამზე?
 8. რამდენი ოთხნიშნა რიცხვი არსებობს, რომელთა ჩანაწერში არ გვხვდება ციფრები 0 და 5?
 9. რამდენი განსხვავებული ოთხნიშნა რიცხვი შეიძლება დავწეროთ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 და 8 ციფრებით, ისე რომ თითოეული რიცხვი შეიცავდეს მხოლოდ ერთ 1-იანს, ხოლო ნებისმიერი სხვა ციფრი შეიძლება შეგვხვდეს რამდენიმეჯერ?
 10. რამდენნაირად შეუძლია მწვრთნელს დააკომპლექტოს გუნდი (შეარჩიოს 11 მოთამაშე) 20 ფეხბურთელიდან?
 11. იპოვეთ $(x+x^2)^n$ დაშლის იმ წევრის კოეფიციენტი, რომელიც შეიცავს x^m -ს.
 12. რამდენი ხერხით შეიძლება დავყოთ 15 მოსწავლე 2 ჯგუფად ისე რომ ერთ ჯგუფში იყოს 4, ხოლო მეორეში კი 11 მოსწავლე?
 13. ჩაცმულობის რამდენი კომბინაცია შეიძლება შედგეს 8 ბლუზის,

7 ქვედა კაბისა და 8 შარვლისაგან?

14. მაია ბებოს უნდა, რომ თომას ორი სათამაშო უყიდოს. რამდენნაირად შეიძლება შეარჩიოს ბებომ სათამაშოები, თუ მაღაზიაში 20 სხვადასხვანაირი მანქანა, 5 სახის ბურთი და 10 სხვადასხვანაირი სათამაშო თოფია? შეიძლება ორივე სათამაშო ერთი სახის იყოს.
15. რამდენი განსხვავებული წრფე გაივლება სიბრტყის 10 წერტილზე, რომელთაგან არც ერთი სამი ერთ წრფეზე არ მდებარეობს (ორ წერტილზე ერთადერთი წრფე გადის)?
16. რამდენი განსხვავებული წრეწირი გაივლება სიბრტყის 10 წერტილზე, რომელთაგან არც ერთი სამი ერთ წრფეზე არ მდებარეობს და არც ერთი ოთხი ერთ წრეწირზე არ მდებარეობს (სამ წერტილზე ერთადერთი სიბრტყე გადის)?
17. რამდენნაირადაა შესაძლებელი ოთხმა მეგობარმა გაინაწილოს 28 წიგნი, ისე რომ თითოეულს შვიდი წიგნი შეხვდეს?
18. რამდენი სხვადასხვა ანაგრამა (სიტყვა) მიიღება ასოების ყველა შესაძლო გადანაცვლებით სიტყვაში «ალბათობა»?
19. ცნობილია, რომ 4 სტუდენტიდან არც ერთს არ მიუღია გამოცაზე «ფრიადისა» და «ძალიან კარგის» გარდა სხვა შეფასება; რამდენი ვარიანტი გვექნება?
20. დათოს დაავალეს აკვარიუმისათვის ეყიდა 5 ცალი თევზი; ზოო-მაღაზიაში კი იყიდება მხოლოდ 3 სახეობის თევზი. თევზების ყიდვის რამდენი ვარიანტი ექნება დათოს?
21. 10 კანდიდატისაგან უნდა შეირჩეს სამკაციანი გუნდი, რამდენი ხერხით შეიძლება ამის გაკეთება?
22. რადენი ექვსნიშნა რიცხვი შეიძლება შევადგინოთ, რომლის ყველა ციფრი კენტიანია?
23. რამდენი ხუთნიშნა რიცხვი შეიძლება შევადგინოთ, ისე რომ ყველ კენტ ადგილზე იდგეს კენტი ციფრი და ლუწ ადგილზე კი ლუწი ციფრი?
24. რამდენი განსხვავებული რვანიშნა რიცხვი შეიძლება შევადგი-

- ნოთ ბარათებით რომლებსაც აწერია ციფრები: 2; 2; 5; 5; 5; 7; 8; 9?
25. რამდენნაირად შეიძლება დავაწყოთ მწკრივში 5 წითელი; 3 თეთრი და 4 ლურჯი ბურთი?
 26. ლიფტი, რომელშიც 9 მგზავრია, შეიძლება გაჩერდეს 10 სართულიდან რომელიმეზე. მგზავრები გამოდიან 2; 3 და 4 კაცისაგან შემდგარ ჯგუფებად სხვადასხვა სართულზე. რამდენნაირადაა ეს შესაძლებელი?
 27. რამდენნაირად შეიძლება გავანაწილოთ 9 სხვადასხვა წიგნი 3 ჩანთაში; ისე რომ ჩანთებში შესაბამისად მოხვდეს 2, 3 და 4 წიგნი?
 28. რამდენი ხერხით შეიძლება დაიყოს 16 კაციანი ჯგუფი, ისე რომ I ჯგუფში იყოს 5 კაცი, II-ში 7, ხოლო III-ში კი - 4 კაცი?
 29. რამდენი $^*17^*$ სახის რიცხვი არსებობს ისეთი, რომ შესრულდება უტლობა $^*17^* > 5431$ (* -ის ადგილზე ჩასვით ციფრები).
 30. მაკამ 5 სხვადასხვა მაისურიდან და 10 სხვადასხვა ჯინსის შარვიდან უნდა შეარჩიოს 3 მაისური და 2 ჯინსის შარვალი. სამოსის შერჩევის რამდენი ვარიანტი აქვს მაკას?

3.2.2. ტესტი №2

1. რამდენნაირად შეიძლება შევარჩიოთ 5 თანამშრომლიდან დირექტორი და მისი მოადგილე?
 - ა) 25; ბ) 20; გ) 24; დ) 15; ე) 10.
2. რამდენი, ერთმანეთისაგან განსხვავებული ციფრებით შედგენილი, სამნიშნა რიცხვი არსებობს, რომლებიც მხოლოდ 2; 3; 4 და 5 ციფრებისაგანაა შედგენილი?
 - ა) 20; ბ) 21; გ) 22; დ) 24; ე) 15.
3. რამდენი ოთხნიშნა ერთმანეთისაგან განსხვავებული რიცხვი შეიძლება შევადგინოთ მხოლოდ 0, 1, 2 ციფრებისაგან, თუ რიცხვში ერთი და იგივე ციფრის გამეორება რამდენიმეჯერაა შესაძლებელი?

ლი?

ა) 24; ბ) 48; გ) 30; დ) 81; ე) 54.

4. დედამ იყიდა 2 ცალი ვაშლი; 3 ცალი მსხალი და 4 ცალი ატამი; 9 დღის განმავლობაში იგი ყოველდღე აძლევს შვილს ერთ ცალ ხილს. რამდენი ხერხით შეუძლია მას შვილს გაუნაწილოს ხილი ცხრა დღის განმავლობაში?

ა) 2592; ბ) 1728; გ) 1260; დ) 2754; ე) 1870.

5. მილიონზე ნაკლები რამდენი რიცხვი არსებობს, რომელიც შედგენილია მხოლოდ 8 და 9 ციფრებით?

ა) 126; ბ) 128; გ) 145; დ) 64; ე) 81.

6. გვაქვს ოც-ოცი ცალი 10-თეთრიანი, 20-თეთრიანი და 50-თეთრიანი; რამდენი ხერხით შეიძლება მათგან ავარჩიოთ 20 მონეტა?

ა) 1140; ბ) 231; გ) 1600; დ) 100; ე) $\frac{80!}{20!}$.

7. 12 კალათბურთელიდან რამდენნაირად შეუძლია მწვრთნელს გამოიყვანოს მოედანზე სათამაშოდ სასტარტო ხუთეული?

ა) 120; ბ) 5040; გ) 95040; დ) 1440; ე) 792.

8. მოთამაშე სათამაშო მაგიდაზე აგორებს ჯერ თეთრ კამათელს, ხოლო შემდეგ შავს. რამდენ შემთხვევაში მოვა თეთრ კამათელზე უფრო მეტი ქულა, ვიდრე შავზე?

ა) 18; ბ) 30; გ) 16; დ) 15; ე) 19.

9. რამდენი ხუთნიშნა რიცხვის შედგენა შეგვიძლია ციფრებით 1, 2, 3, 4, 5, იმ პირობით, რომ რიცხვებში ციფრები არ გამეორდებიან?

ა) 3125; ბ) 120; გ) 240; დ) 720; ე) 625.

10. ბანქოში 32 სათამაშო ქაღალდია, არიგებენ 3 სათამაშო ქაღალდს. რამდენ შემთხვევაში აღმოჩნდება მათ შორის ერთი ტუზი?

ა) 6; ბ) 1512; გ) 27; დ) 1728; ე) 4960.

3.3. ხდომილობა, მოქმედებანი ხდომილობაზე, ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრცე

ალბათობის თეორია თანამედროვე მათემატიკის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი დარგია, რომელსაც უდიდესი პრაქტიკული გამოყენება გააჩნია. საზოგადოდ, რეალური სამყაროს კანონზომიერებათა შესწავლისას მათემატიკას გამორჩეული ადგილი უკავია. ამასთან აღსანიშნავია, რომ მათემატიკას საქმე აქვს არა რეალურ მოვლენებთან, არამედ მათ მათემატიკურ მოდელებთან. მათემატიკის კავშირი გარე სამყაროსთან ხორციელდება შემდეგ ეტაპებად. თავდაპირველად ხდება შესასწავლი მოვლენის მეორეხარისხოვანი მხარეებისაგან გათავისუფლება და ძირითად კანონზომიერებებზე დაყრდნობით მათემატიკური მოდელის აგება. ამ მოდელში ხდება მათემატიკური ცნებების, განსაზღვრებების და აქსიომების ჩამოყალიბება. შემდეგ ამ აქსიომებზე დაყრდნობით მტკიცდება გარკვეული დებულებები, თეორემები და ბოლოს, მიღებული მათემატიკური შედეგების ინტერპრეტაცია ხდება ისევ საწყისი რეალური ცნებების საშუალებით. ამით შესაძლებლობა გვეძლევა პრაქტიკულად გამოვიყენოთ ის შედეგები, რომლებიც მიღებულია მათემატიკური მოდელის მეშვეობით. პრაქტიკული დასკვნები მით უფრო საიმედოა, რაც უფრო უკეთ ასახავს აგებული მოდელი რეალური მოვლენის არსებით მხარეებს.

ალბათობის თეორია შეისწავლის შემთხვევითი ექსპერიმენტების მათემატიკურ მოდელებს. ამასთანავე, ალბათობის თეორიას საქმე აქვს არა ნებისმიერ შემთხვევით ექსპერიმენტთან, არამედ, ისეთ ექსპერიმენტებთან, რომელთაც გააჩნიათ სიხშირის სტატისტიკური მდგრადობის თვისება.

პრაქტიკაში ხშირად საქმე გვაქვს ისეთ ცდასთან (დაკვირვებასთან, ექსპერიმენტთან), რომლის «ერთსა და იმავე» პირობებში გამოორებისას ვლერულობთ სხვადასხვა შედეგს. შედეგთა ამ სხვადასხვაობას იწვევს ის გარემოება, რომ პრაქტიკულად შეუძლებელია ყველა იმ პირობათა ერთობლიობის გამოვლენა, რომლებიც განაპირობებენ,

მოცემული ცდის შედეგებს. შემთხვევითი ექსპერიმენტი¹ (ცდა) ეწოდება პირობათა რაიმე S კომპლექსის განხორციელებას. იგულისხმება, რომ:

1. ექსპერიმენტის ჩატარებამდე შესაძლებელია ყველა შესაძლო ურთიერთგამომრიცხავი შედეგის მითითება.

2. ექსპერიმენტის ჩატარებამდე შეუძლებელია მისი შედეგის ცალსახად განსაზღვრა;

3. შესაძლებელია ექსპერიმენტის მრავალჯერადი გამეორება.

ექსპერიმენტი აღიწერება (აღწერის დეტალიზაციის დონეს ექსპერიმენტის მიზანი განაპირობებს) მისი ურთიერთგამომრიცხავი შედეგების სრული ჩამონათვალით. ამ შედეგებს ელემენტარული ხდომილობები ეწოდება, ხოლო მათ სრულ ერთობლიობას - ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე (სიტყვა «სივრცე» ამ კონტექსტში ტრადიციული და სავესებით ბუნებრივია, ვინაიდან ექსპერიმენტის ყოველ შედეგს შეესაბამება ელემენტალურ ხდომილობათა სივრცის გარკვეული ელემენტი და პირიქით. სივრცის ელემენტს წერტილს უწოდებენ). ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე Ω ასოთი აღინიშნება, თვით ელემენტარული ხდომილობა კი - ω ასოთი უინდექსოდ ან ინდექსით.

ვთქვათ, ექსპერიმენტი მდგომარეობს სიმეტრიული მონეტის აგდებაში. ვაკვირდებით, რა «მოდის» დავარდნილ მონეტაზე. ამ ექსპერიმენტის შედეგებია; «საფასურის მოსვლა» (იგი აღვნიშნოთ ω_0 -ით) და «გერბის მოსვლა» (იგი აღვნიშნოთ ω_1 -ით). ცხადია, სახეზეა ზემოთ ჩამოთვლილი სამივე პირობა. ამ მაგალითისათვის ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე იქნება $\Omega = \{\omega_0; \omega_1\}$.

აგორებენ ერთ კამათელს, ცდას ექვსი შედეგი შეიძლება ჰქონდეს (გლუვ ზედაპირზე ზედა წახნაგის დაფიქსირების შემდეგ მასზე წერტილების რაოდენობის მიხედვით); თუ 1-იანის მოსვლას აღვნიშნავთ ω_1 -ით, 2-იანის მოსვლას ω_2 -ით და ა.შ. მაშინ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე იქნება $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \omega_4; \omega_5; \omega_6\}$.

¹ ზელსართაი „შემთხვევითი“ შემდგომში ხშირად გამოტოვებული იქნება

აგდებენ ორ სხვადასხვა მონეტას. აქ ოთხი შესაძლო შედეგია და ელემენტარულ ხდომილობად ითვლება წყვილი $(a_i; a_j)$ რომელიც აღნიშნავს პირველ მონეტაზეც «საფასური მოვიდა» და მეორეზეც; ამიტომ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეს ექნება სახე: $\Omega = \{(a_0; a_0); (a_0; a_1); (a_1; a_0); (a_1; a_1)\}$.

აგორებენ ორ გარჩევად კამათელს (ან ორჯერ აგორებენ ერთ კამათელს); ყოველ მოსალოდნელ შედეგს შეესაბამება წყვილი $(a_i; a_j)$ ($i = 1; 2; \dots; 6; j = 1; 2; \dots; 6$). ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე $\Omega = \{(a_i; a_j) | i = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, \dots, 6\} = \{(a_1; a_1); (a_1; a_2); (a_1; a_3); (a_1; a_4); (a_1; a_5); (a_1; a_6); (a_2; a_1); (a_2; a_2); (a_2; a_3); (a_2; a_4); (a_2; a_5); (a_2; a_6); (a_3; a_1); (a_3; a_2); (a_3; a_3); (a_3; a_4); (a_3; a_5); (a_3; a_6); (a_4; a_1); (a_4; a_2); (a_4; a_3); (a_4; a_4); (a_4; a_5); (a_4; a_6); (a_5; a_1); (a_5; a_2); (a_5; a_3); (a_5; a_4); (a_5; a_5); (a_5; a_6); (a_6; a_1); (a_6; a_2); (a_6; a_3); (a_6; a_4); (a_6; a_5); (a_6; a_6)\}$.

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი, მონეტას აგდებენ გერბის პირველ გამოჩენამდე, ამ შემთხვევაში ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეა: $\Omega = \{a_1; (a_0; a_1); (a_0; a_0; a_1); (a_0; a_0; a_0; a_1); \dots\}$. განსხვავებით წინა მაგალითებისაგან რომლებშიც Ω შეიცავდა ელემენტთა სასრულ რაოდენობას, ამ მაგალითში Ω უსასრულოა, მაგრამ თვლადი, ანუ ისეთი, რომ შესაძლებელია ელემენტების გადანომრა.

შემდეგი მაგალითი, მსროლელი ესვრის წრიული ფორმის სამიზნეს, რომელსაც ყოველი გასროლისას ახვედრებს, ასე წარმოვადგინოთ: დავუშვათ რომ წრის რადიუსია R და სამიზნის სიბრტყეში შემოღებულია კოორდინატთა XOY სისტემა, რომლის სათავე წრის ცენტრშია. ცდის თითოეულ შედეგს (სამიზნის განსაზღვრულ წერტილში მოხვედრას) შევუსაბამოთ ამ წერტილის შესაბამისი კოორდინატები, მაშინ Ω წარმოადგენს ყველა ისეთი რიცხვითი წყვილის ერთობლიობას, რომელიც შემდეგნაირად ჩაიწერება: $\Omega = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$. ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე ამ შემთხვევაშიც უსასრულოა, მაგრამ არაა თვლადი.

ელემენტარული ხდომილობების რაიმე ერთობლიობას, შედგენილ ხდომილობას, ანუ უბრალოდ ხდომილობას უწოდებენ. ამრი-

გად, ხდომილობა ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის ქვესიმ-
რავლეა.

ვიტყვი, რომ ცდის შედეგად ხდება A ხდომილობა, თუ ცდას მოჰყვა ისეთი ω ელემენტარული ხდომილობა, რომელიც A -ს ეკუთ-
ვნის. შემთხვევითი ექსპერიმენტის განსაზღვრიდან ცხადია, რომ Ω -
ს ყოველი ქვესიმრავლე A , გარდა თვით Ω -სი და შეუძლებელი
ხდომილობისა (რომელიც არცერთ ელემენტარულ ხდომილობას არ
შეიცავს), შემთხვევითი ხასიათისაა, ანუ შემთხვევითი ხდომილო-
ბაა. ექსპერიმენტის ჩატარებამდე ვერ ვიტყვით, მოხდება თუ არა A ,
რაც შეეხება Ω -ს, იგი ცდის ყოველი ჩატარებისას ხდება, ანუ აუცი-
ლებელი ხდომილობაა, ხოლო $\emptyset$ წარმოადგენს შეუძლებელ ხდომი-
ლობას, რომელიც ცდის არცერთი ჩატარებისას არ მოხდება.

როგორც ვხედავთ, ხდომილობა სხვა არაფერია, თუ არა სიმრავ-
ლეთა თეორიის ძირითადი ობიექტი - სიმრავლე; ამიტომ ოპერაციე-
ბი შემთხვევით ხდომილობებზე ზუსტად იმდაგვარად განიმარტე-
ბა, როგორც ჩვეულებრივ სიმრავლეებზე. უბრალოდ ამ ოპერაციებს
სიმრავლეთა თეორიისაგან განსხვავებული სახელები ჰქვია (თუმცა,
ჩვენ ხშირად მივმართავთ სიმრავლეთა თეორიის ენასაც).

A და B ხდომილობათა $A \cup B$ ჯამი (ანუ გაერთიანება) ეწოდება
ისეთი ω ელემენტარული ხდომილობების ერთობლიობას, რომლე-
ბიც ეკუთვნის ერთს მაინც A და B ხდომილობათაგან, (ან მხოლოდ
 A -ს, ან მხოლოდ B -ს, ან A -სა და B -ს ერთად).

A და B ხდომილობათა $A \cap B$ ნამრავლი (ანუ თანაკვეთა) ეწო-
დება ისეთი ω -ების ერთობლიობას, რომლებიც ეკუთვნეიან A -სა და
 B -ს ერთად. თუ $A \cap B = \emptyset$, მაშინ ვიტყვით, რომ A და B ხდომილო-
ბები უთავსებადია (ისინი არ ხდება ერთად). A და B ხდომილობე-
ბის ნამრავლს აღნიშნავენ ასეც $A \cdot B$, ხოლო უთავსებად A და B ხდო-
მილობების ჯამს კი $A+B$ სიმბოლოთი.

A და B ხდომილობათა $A \setminus B$ სხვაობა ეწოდება ისეთი ω -ების ერ-
თობლიობას, რომლებიც ეკუთვნის A -ს და არ ეკუთვნის B -ს.

A -ს საწინააღმდეგო ხდომილობაა $\bar{A} = \Omega \setminus A$.

ცხადია, რომ $A \setminus B = A \cap \bar{B} = A \cdot \bar{B}$ - ხოლო $(\bar{\bar{A}}) = A$.

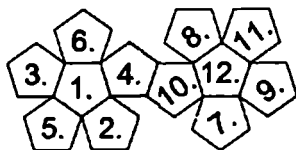
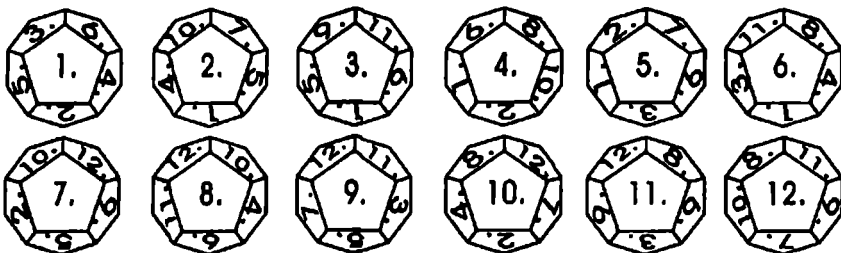
ამბობენ, რომ A ხდომილობა იწვევს B -ს (თუ მოხდა A , მომხდარა B ხდომილობაც) და წერენ $A \subset B$, თუ A -ში შემავალი ყოველი ელემენტარული ხდომილობა შედის B -შიც.

ორ ხდომილობას ეწოდება ტოლი, თუ $A \subset B$ და $A \supset B$, ე.ი. ჩართვები ერთდროულად სრულდება.

აღნიშვნები	სიმრავლეთა თეორიის ენა	ალბათობის თეორიის ენა
Ω	სივრცე	აუცილებელი ხდომილობა
$\emptyset$	ცარიელი სიმრავლე	შუუძლებელი ხდომილობა
$\omega \in A$	ω ეკუთვნის A სიმრავლეს	ხდება A ხდომილობა
$\bar{A}$	A სიმრავლის დამატება	A -ს საწინააღმდეგო ხდომილობა (A ხდომილობა არ ხდება)
$A \cap B$	A და B სიმრავლეების თანაკვეთა	A და B ხდომილობების ნამრავლი (თანაკვეთა) (A და B ხდომილობები ერთდროულად ხდება)
$A \cup B$	A და B სიმრავლეების გაერთიანება	A და B ხდომილობების ჯამი (გაერთიანება) (ხდება ერთი მაინც A და B ხდომილობებიდან)
$A \setminus B$	A და B სიმრავლეების სხვაობა	A და B ხდომილობების სხვაობა (ხდება A ხდომილობა და არ ხდება B ხდომილობა)
$A \subset B$	A სიმრავლე შედის B სიმრავლეში	A ხდომილობა იწვევს B ხდომილობას

განვიხილოთ მაგალითი: ვთქვათ, აგორებენ წესიერ თორმეტწახნაგა კამათელს, იგი წარმოადგენს წესიერ დოდეკედრს, რომელიც ერთგვაროვანი მასალისაგან არის დამზადებული და მისი გეომეტრიული ცენტრი ემთხვევა სიმძიმის ცენტრს. ცდა ტარდება გლუვ ზედაპირზე, რომელიც ასევე ერთგვაროვანი მასალისაგან არის დამზადებული. ცდის შედეგად ითვლება თორმეტწახნაგა კამათლის სიბრტყეზე დაფიქსირების შემდეგ ზედა წახნაგზე დაწერილი რიცხვის მოსვლა. კამათლის მოდელი და შლილი წარმოდგენი-

ლია ნახაზზე.



A ხდომილობა: «კამათელზე მოსულია კენტი რიცხვი», ხოლო B კი - «კამათალზე მოსულია 3-ის ჯერადი რიცხვი».

A ხდომილობა იქნება $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_7, \omega_9, \omega_{11}\}$, ხოლო B ხდომილობა კი - $B = \{\omega_3, \omega_6, \omega_9, \omega_{12}\}$. ჩამოთვლილი ოპერაციებისათვის მივიღებთ:

$A \cup B$ ნიშნავს კამათელზე კენტი ან სამის ჯერადი რიცხვის მოსვლას, $A \cup B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_9, \omega_{11}, \omega_{12}\}$.

$A \cap B$ ნიშნავს კამათელზე ერთდროულად კენტი და სამის ჯერადი რიცხვის მოსვლას ე.ი. $A \cap B = \{\omega_3, \omega_9\}$.

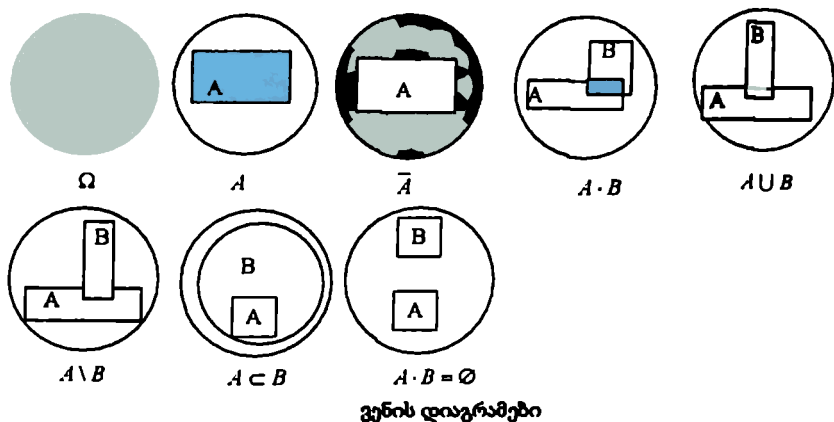
კენტის საწინააღმდეგო ლუწი რიცხვია და ამიტომ $\bar{A} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_8, \omega_{10}, \omega_{12}\}$.

სამის ჯერადის საწინააღმდეგო სამის არაჯერადი რიცხვებია ე.ი. $\bar{B} = \{\omega_1, \omega_5, \omega_7, \omega_9, \omega_{11}\}$.

$A \setminus B$ ნიშნავს კენტი, მაგრამ არა სამის ჯერადი რიცხვის მოსვლას, მაშასადამე, $A \setminus B = \{\omega_1, \omega_5, \omega_7, \omega_{11}\}$; ხოლო $B \setminus A$ სამის ჯერადი არა კენტი რიცხვებია ე.ი. $B \setminus A = \{\omega_6, \omega_{12}\}$.

თუ წარმოვიდგენთ, რომ წრიდან შემთხვევით ვირჩევთ წერ-

ტილს, მაშინ ელემენტარული ხდომილობები ამ წრის წერტილებია; აუცილებელი ხდომილობაა მთელი წრე, ხოლო სხვა ხდომილობები ამ წრის ქვესიმრავლეებია. ზემოთ ჩამოთვლილი ოპერაციები შეიძლება თვალსაჩინოდ გამოვსახოთ ე.წ. ვენის (Venn) დიაგრამების საშუალებით.



ვთქვათ, შემთხვევით ექსპერიმენტს ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცე შეესაბამება და $A \subset \Omega$. ამ ექსპერიმენტის n -ჯერ ჩატარებისას A ხდომილობის სიხშირე $V_n(A)$ იმ ცდათა რაოდენობაა, რომელთაც მოჰყვა A ხდომილობის მოხდენა. ცხადია, რომ ყოველი n -სათვის $0 \leq V_n(A) \leq n$, $V_n(\Omega) = n$, $V_n(\emptyset) = 0$.

თუ გვაქვს, რომ A და B ხდომილობები უთავსებადია (ანუ $A \cdot B = \emptyset$ ე.ი. არ არსებობს არცერთი ცდა, რომლის მოსალოდნელი შედეგის შედეგად დამდგარი ელემენტარული ხდომილობა A -საც ეკუთვნის და B -საც), მაშინ

$$V_n(A+B) = V_n(A) + V_n(B).$$

თუ შემოვიღებთ $f_n(A) = \frac{V_n(A)}{n}$ ფარდობით სიხშირეს, მაშინ სიხ-

შირეთა ჩამოთვლილი თვისებები მოგვცემს შემდეგ თვისებებს, რომლებიც სამართლიანია ნებისმიერი n -ისათვის:

1. ნებისმიერი ხდომილობისათვის $0 \leq f_n(A) \leq 1$

2. $f_n(\Omega) = 1$, $f_n(\emptyset) = 0$;

3. თუ $AB = \emptyset$ მაშინ $f_n(A+B) = f_n(A) + f_n(B)$.

ფარდობით სიხშირეთა შესანიშნავი და უმთავრესი თვისებაა მათი მდგრადობა, რაც შემდეგში მდგომარეობს: თუ დავაკვირდებით ფარდობითი სიხშირის ყოფაქცევას ექსპერიმენტის გამეორებათა ზრდის კვალობაზე, უამრავი მაგალითია იმისა, რომ $f_n(A)$ მცირედ იცვლება ცდათა საკმაოდ დიდი რაოდენობის მიღწევის შემდეგ და მრავალი ცდისაგან შემდგარი ერთი სერიიდან სხვა ასეთივე სერიაზე გადასვლისას.

ფარდობითი სიხშირის მდგრადობა გვაფიქრებინებს დავუშვათ, რომ $f_n(A)$ ზომავს ობიექტურად არსებულ $P(A)$ რიცხვს - A ხდომილობის ალბათობას, რომელიც მოცემულ ცდაში ხდომილობის მოხდენის შესაძლებლობის ხარისხის მახასიათებელია: $f_n(A) \approx P(A)$.

ბუნებრივია ვიფიქროთ, რომ გაზომვის სიზუსტე და საიმედოობა იზრდება ცდათა რაოდენობის ზრდისას, რაზეც მეტყველებს შემდეგი მაგალითები:

ვთქვათ, A ხდომილობა ნიშნავს დავარდნილ მონეტაზე «მოვიდა» გერბი $A = \{\omega_1\}$. ჩამოვთვალოთ $f_n(A)$ -ს გაზომვის ზოგიერთი შედეგი:

ა) $n=4040$, $V_n(A)=2048$, $f_n(A)=0,507$ (ჟ. ბიუფონი).

ბ) $n=24000$, $V_n(A)=12012$, $f_n(A)=0,505$ (კ. პირსონი)\

გ) $n = 1000$ ცდიან 10 სერიაში $f_n(A)$ აღმოჩნდა შესაბამისად 0,502; 0,497; 0,529; 0,504; 0,476; 0,507; 0,527; 0,528; 0,504; 0,529 (ჯ. კერიხი).

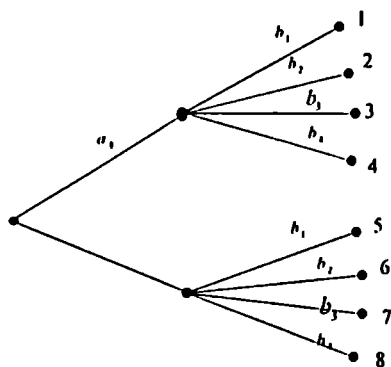
ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის წარმოდგენისათვის ხშირად სასარგებლოა ხის მსგავსი (ხისებრი) დიაგრამის ანუ დენდროგრამის გამოყენება.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითები:

1. მამაკაცს აქვს 2 პერანგი და 4 ჰალსტუხი. შევადგინოთ პერანგისა და ჰალსტუხის შერჩევის ვარიანტების ელემენტარულ ხდომი-

ლობათა სივრცე.

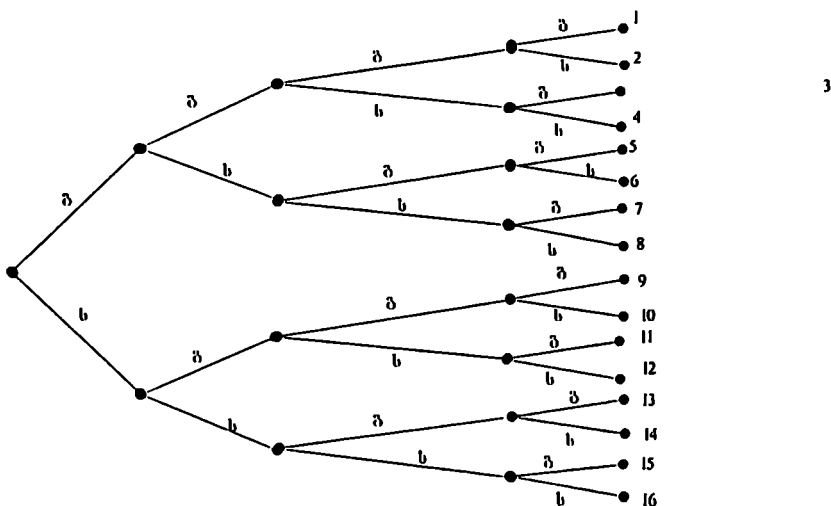
თუ a_1 და a_2 აღნიშნავს პერანგებს, ხოლო b_1, b_2, b_3, b_4 - ჰალსტუხებს, მაშინ პერანგისა და ჰალსტუხის არჩევის სხვადასხვა გზა შეიძლება შემდეგი დენდროგრამით ავსახოთ:



ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეა

$\Omega = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_1, b_4), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_2, b_4)\}$, იგი შეიცავს $2 \cdot 4 = 8$ ელემენტარულ ხდომილობას.

2. ავაგოთ მონეტის 4-ჯერ აგდების შესაბამისი დენდროგრამა, «გერბის მოსვლა» აღვნიშნოთ გ-თი, ხოლო «საფასურის მოსვლა» კი ს-თი.



როგორც დენდროგრამიდან ჩანს ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე შედგება 16 ელემენტარული ხდომილობისაგან. თითოეული ელემენტარული ხდომილობა კი შედგება ოთხეულისაგან.

1. ორშვილიან ოჯახებში ვიწერთ ბავშვების სქესს და ვალაგებთ ასაკის მიხედვით. ავაგოთ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე.
2. სამშვილიან ოჯახებში ვიწერთ ბავშვების სქესს. ავაგოთ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე.
3. რიგრიგობით აგდებენ 5-თეთრიან, 10-თეთრიან და 20 თეთრიან თითო მონეტას და ასეთივე მიმდევრობით იწერენ გერბისა და საფასურის მოსვლათა მიმდევრობას. ჩამოთვალეთ ელემენტარული ხდომილობები.
4. აგორებენ წესიერ თორმეტწახნაგა კამათელს და აგდებენ წესიერ მონეტას; ჩამოთვალეთ ელემენტარული ხდომილობები
5. აგორებენ წესიერ კამათელს და სამის ჯერადი რიცხვის მოსვლის შემთხვევაში აგებენ წესიერ მონეტას; ჩამოთვალეთ ელემენტარული ხდომილობები.
6. აგდებენ წესიერ მონეტას და გერბის მოსვლის შემთხვევაში აგორებენ წესიერ კამათელს, ჩამოთვალეთ ელემენტარული ხდომილობები.
7. ერთ ყუთში 2 თეთრი და 3 წითელი ბურთულაა, რომლებიც ზომით ზუსტად ერთნაირია, მაგრამ აქვთ ნომრები, თეთრებს აწერიან 1 და 2, ხოლო წითლებს 1, 2 და 3. მეორე ყუთში ერთი თეთრი და ერთი შავი ზუსტად ერთნაირი ბურთულაა. ცდა მდგომარეობს შემდეგში; ალაღბედზე ჯერ პირველი ყუთიდან ამოაქვთ ერთი ბურთულა, ხოლო შემდეგ მეორე ყუთიდან, ასევე ალაღბედზე, ერთი ბურთულა. ჩამოთვალეთ ელემენტარული ხდომილობები.
8. ერთ ყუთში ზუსტად ერთი და იგივე ზომის 2 თეთრი (თეთრი ბურთულები დანომრილია 1 და 2-ით) და ერთი შავი ფერის ბურთულაა, ხოლო მეორეში კი ერთი თეთრი და ერთი შავი იმავე ზომის ბურთულებია. ცდა მდგომარეობს შემდეგში; პირველი ყუთიდან ალაღბედზე იღებენ ერთ ბურთულას და დებენ მეორე ყუთ-

ში, ამის შემდეგ მეორე ყუთიდან ალაღბედზე იღებენ ერთ ბურთულას. ხდომილობაა «მეორე ყუთიდან ამოღებულია თეთრი ბურთულა». ვიპოვოთ ხდომილობის ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილობები.

9. ზონდოს ჯიბეში აქვს ერთი 5-თეთრიანი, ერთი 10-თეთრიანი, ერთი 20-თეთრიანი და ერთი 50-თეთრიანი მონეტა. მას ჯიბიდან ალაღბედზე ამოაქვს 2 ცალი მონეტა. ჩამოთვალეთ ელემენტარული ხდომილობები.
10. აგორებენ ორ გარჩევად კამათელს. A ხდომილობაა - «კამათლებზე მოსული ქულების ჯამი არ აღემატება 4-ს», ხოლო B ხდომილობაა - «კამათლებზე მოსული ქულების სხვაობა არ აღემატება 1-ს». ვიპოვოთ ელემენტარული ხდომილობები, რომლებიც ხელშემწყობია $A \cap B$ ხდომილობის.
11. დომინოს სრული კომპლექტიდან (28 სათამაშო ქვა) ალაღბედზე ამოაქვთ ერთი ქვა. A ხდომილობაა - «ამოღებულ ქვაზე ქულების ჯამი 8-ის ტოლია». B ხდომილობაა - «ამოღებულ ქვაზე ქულები ერთმანეთის ტოლია» ვიპოვოთ ელემენტარული ხდომილობების რაოდენობა, რომელიც ხელშემწყობია $A \setminus B$ ხდომილობის.
12. ხისაგან დამზადებული კუბი, რომლის ყველა წახნაგი შეღებილია, 27 ტოლ ნაწილად დახერხეს. მიღებული პატარა კუბები კარგად აურიეს და ალაღბედზე ამოიღეს ერთი მათგანი. A_0 ხდომილობაა - «ამოღებული კუბი შეუღებავია», A_1 ხდომილობაა - «ამოღებულ კუბს შეღებილი აქვს მხოლოდ ერთი წახნაგი», A_2 ხდომილობაა - «ამოღებულ კუბს შეღებილი აქვს ორი წახნაგი» და A_3 ხდომილობაა - «ამოღებულ კუბს შეღებილი აქვს სამი წახნაგი». რამდენი ელემენტარული ხდომილობისაგან შედგებიან A_0, A_1, A_2 და A_3 ხდომილობები?
13. ხისაგან დამზადებული კუბი, რომლის ყველა წახნაგი შეღებილია, 64 ტოლ ნაწილად დახერხეს. მიღებული პატარა კუბები კარგად აურიეს და ალაღბედზე ამოიღეს ერთი მათგანი. A_0 ხდომილობაა - «ამოღებული კუბი შეუღებავია», A_1 ხდომილობაა -

«ამოღებულ კუბს შეღებილი აქვს ერთი წახნაგი», A_2 ხდომილობაა - «ამოღებულ კუბს შეღებილი აქვს ორი წახნაგი» და A_3 ხდომილობაა - «ამოღებულ კუბს შეღებილ აქვს სამი წახნაგი». რამდენი ელემენტარული ხდომილობისაგან შედგებიან A_0 , A_1 , A_2 და A_3 ხდომილობები?

14. ხისაგან დამზადებული კუბი, რომლის ყველა წახნაგი შეღებილია, 125 ტოლ ნაწილად დახერხეს. მიღებული პატარა კუბები კარგად აურიეს და ალაღბედზე ამოიღეს ერთი მათგანი. A_0 ხდომილობაა - «ამოღებული კუბი შეღებილი არ არის», A_1 ხდომილობაა - «ამოღებულ კუბს შეღებილი აქვს ერთი წახნაგი», A_2 ხდომილობაა - «ამოღებულ კუბს შეღებილი აქვს ორი წახნაგი» და A_3 ხდომილობაა - «ამოღებულ კუბს შეღებილ აქვს სამი წახნაგი». რამდენი ელემენტარული ხდომილობისაგან შედგებიან A_0 , A_1 , A_2 და A_3 ხდომილობები?

15. ხისაგან დამზადებული კუბი, რომლის ყველა წახნაგი შეღებილია, 1000 ტოლ ნაწილად დახერხეს. მიღებული პატარა კუბები კარგად აურიეს და ალაღბედზე ამოიღეს ერთი მათგანი. A_0 ხდომილობაა - «ამოღებული კუბი შეღებილი არ არის», A_1 ხდომილობაა - «ამოღებულ კუბს შეღებილი აქვს ერთი წახნაგი» A_2 ხდომილობაა - «ამოღებულ კუბს შეღებილი აქვს ორი წახნაგი» და A_3 ხდომილობაა - «ამოღებულ კუბს შეღებილი აქვს სამი წახნაგი». რამდენი ელემენტარული ხდომილობისაგან შედგებიან A_0 , A_1 , A_2 და A_3 ხდომილობები?

16. ყუთში 2 თეთრი, 2 წითელი და ერთი შავი ფერის ზუსტად ერთნაირი ზომის ბურთულებია. ცდა მდგომარეობს შემდეგში: ყუთიდან ალაღბედზე ამოაქვთ ორი ბურთულა. A ხდომილობაა - «ამოღებული ორივე ბურთულა ერთნაირი ფერისაა», B ხდომილობაა - «ამოღებულია მხოლოდ წითელი ფერის ბურთულები», C ხდომილობაა - «ამოღებული ბურთულები სხვადასხვა ფერისაა». რამდენი ელემენტარული ხდომილობისაგან შედგებიან A , B , C , $A \cup B$, $A \cap C$, $A \cap B$, $B \cup C$.

17. A ხდომილობაა - „მოხვედრა პირველი გასროლით“, B ხდომილობაა - „მოხვედრა მეორე გასროლით“. რაში მდგომარეობს ხდომილობები $A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A}$, $\bar{B}$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$?
18. ყუთში სამი ფერის ბურთულებია: თეთრი, შავი და წითელი. აღვნიშნოთ ხდომილობები: A - «ალალბედზე ამოღებული ბურთულა თეთრია», B - «ალალბედზე ამოღებული ბურთულა შავია», C - «ალალბედზე ამოღებული ბურთულა წითელია.» ვიპოვოთ $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cup B \cup C$, $(A \cap B) \cap C$, $A \cup C$.
19. ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეა ყველა ოთხნიშნა ნატურალური რიცხვების ერთობლიობა. A ხდომილობაა - „ოთხნიშნა რიცხვები, რომელთა პირველი ციფრია 2; 4 ან 5; ხოლო მეორე და მესამე ციფრები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან 2-ით, მე-4 ციფრი კი 1-ია“; რამდენი ელემენტარული ხდომილობისაგან შედგება A?
20. ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეა ყველა სამნიშნა ნატურალური რიცხვების ერთობლიობა. A ხდომილობაა - «სამნიშნა რიცხვები, რომლებიც ჩაწერილია მხოლოდ 2; 3; 0. 5 ციფრებისაგან», B ხდომილობა A-ს გამომწვევი ხდომილობაა და მასში ციფრები მეორდებიან (მაგალითად 223, 200, 555 და ა.შ.) რამდენი ელემენტარული ხდომილობისაგან შედგება B ხდომილობა და $\bar{B}_A$ ხდომილობა?
21. ხარისხის სახელმწიფო ინსპექტორი სასურსათო მაღაზიაში რძის პროდუქტებს ამოწმებს. ცნობილია, რომ რძის 20 პაკეტიდან ორი ამჟავებულია. ინსპექტორი ამ ოცი პაკეტიდან ალაღბედზე, დალაგებულად, ირჩევს ორ პაკეტს. A ხდომილობაა - «აღებული ორი პაკეტიდან არცერთი არ იქნება ამჟავებული», B ხდომილობაა - «აღებული ორი პაკეტიდან მხოლოდ ერთია ამჟავებული», C ხდომილობაა - «აღებული ორი პაკეტიდან ორივე ამჟავებულია». რამდენი ელემენტარული ხდომილობისაგან შედგებიან A, B და C ხდომილობები?
22. მოცემულია $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$; $A = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$;

$B = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$. იპოვეთ $A \cdot B$, $A \cup B$, $\bar{A}$, $\bar{B}$, $B \setminus A$.

23. მოცემულია A და B ხდომილობები, მასთან ცნობილია, რომ $B \subset A$, იპოვეთ მათი ჯამი და ნამრავლი.
24. A არის ხდომილობა - «ლატარიაში მოგებულია 10 ლარი», B არის ხდომილობა - «ლატარიაში მოგებულია 20 ლარი», C არის ხდომილობა - «ლატარიაში მოგებულია 25 ლარი». რას ნიშნავს ხდომილობა - $A+B+C$ და ხდომილობა - $A \cdot B \cdot C$?
25. A არის ხდომილობა - «კამათელზე მოვიდა კენტი რიცხვი», B არის ხდომილობა - «კამათელზე მოვიდა 3-იანი», C არის ხდომილობა - «კამათელზე მოვიდა 5-იანი», რას ნიშნავს ხდომილობები: $A \cdot B \cdot C$, $A \cdot \bar{B}$, $A\bar{C}$, $B\bar{C}$?
26. აგორებენ თორმეტწახნაგა კამათელს, A ხდომილობაა - «კამათელზე მოსულია სამის ჯერადი რიცხვი», B ხდომილობაა - «კამათელზე მოსულია 4-ის ჯერადი რიცხვი», C ხდომილობაა - «კამათელზე მოსულია 6-ის ჯერადი რიცხვი», და D ხდომილობაა - «კამათელზე მოსულია 7-ზე არანაკლები რიცხვი». რას ნიშნავს ხდომილობები: $A \cdot B \cdot C \cdot D$, $A \cdot \bar{D}$, $A \cdot C$, $A + B + C + D$, $(A + B) \cdot C$, $(A + D) \cdot (B + C)$?
27. განსაზღვრეთ A და B ხდომილობები, თუ $A \cup B = \bar{A}$.
28. განსაზღვრეთ A და B ხდომილობები, თუ $AB = \bar{A}$.
29. რამდენი სამნიშნა რიცხვი არსებობს, რომლის პირველი და მეორე ციფრები განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან 3-ით?
30. რამდენი ისეთი ოთხნიშნა რიცხვი არსებობს, რომლის პირველი და მეორე, აგრეთვე მესამე და მეოთხე ციფრები ერთმანეთის ტოლია (ოთხივე ციფრი ერთმანეთის ტოლი არ არის)?

3.3.2. ტესტი №3

1. ექიმი ატარებს ექსპერიმენტს ერთ-ერთი დაავადების ერთდროულად 3 წამლით მკურნალობის შესასწავლად. ამ სამ წამალს იგი ირჩევს ალაღბედად იმ ექვსი წამლიდან, რომელიც რეკომენდებულია ამ ავადმყოფობის განკურნებისათვის. რამდენი ელემენტარული ხდომილობისაგან შედგება ამ ექსპერიმენტის შესაბამისი ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე?

ა) 4; ბ) 6; გ) 8; დ) 9; ე) 11.

2. ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე Ω წარმოადგენს ორნიშნა რიცხვების ერთობლიობას. A ხდომილობაა - «შემთხვევით დასახელებული რიცხვი ჩანაწერში არ შეიცავს არცერთ ორიანს». ვიპოვოთ A ხდომილობის ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა.

ა) 18; ბ) 90; გ) 80; დ) 81; ე) 72.

3. ვაგორებთ თორმეტწახნაგა კამათელს; A ხდომილობაა - «კამათელზე მოსულია ლუწი რიცხვი», B ხდომილობაა - «კამათელზე მოსულია ხუთის ჯერადი რიცხვი», მაშინ ხდომილობა $A \cdot B$ არის კამათელზე მოსულია

ა) ხუთიანი; ბ) ხუთის ჯერადი რიცხვი;

გ) ათიანი; დ) ლუწი რიცხვი; ე) შეუძლებელი ხდომილობა.

4. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9\}$ არის ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე. $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_7, \omega_9\}$; $B = \{\omega_1, \omega_4, \omega_6\}$; $C = \{\omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_7\}$, მაშინ $A \cup B \cup C = D$ ხდომილობაა

ა) $D = \{\omega_6, \omega_8\}$; ბ) $D = \{\omega_6\}$; გ) $D = \{\omega_8\}$; დ) $D = \emptyset$; ე) $D = \Omega$

5. ურნაში ორი თეთრი და სამი შავი ბირთვია. ცდა მდგომარეობს შემდეგში; ურნიდან ალაღბედზე იღებენ ორ ბირთვს დაბრუნების გარეშე. A ხდომილობაა - «ორივე ბირთვი თეთრია». B ხდომილობაა - «ორივე ბირთვი შავი», ხოლო C ხდომილობაა - «ბირთვები სხვადასხვა ფერისა». ვიპოვოთ Ω ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის ელემენტების რაოდენობა, აგრეთვე A, B და C ხდომი-

მილობების ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილობათა რაოდენობები

- ა) $(5; 1; 2; 2)$, ბ) $(10; 2; 4; 4)$,
გ) $(15; 3; 6; 6)$, დ) $(20; 2; 6; 12)$, ე) $(10; 1; 3; 6)$.

6. ექსპერიმენტი წარმოადგენს ორი კამათლის ერთდროულად გაგორებისას მოსულ რიცხვებზე დაკვირვებას. A ხდომილობაა - «კამათლებზე მოსული ქულების ჯამი 5-ის ტოლია». A ხდომილობის ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა ტოლია

- ა) 2-ის; ბ) 3-ის; გ) 4-ის; დ) 5-ის; ე) 6-ის.

7. ექსპერიმენტი წარმოადგენს ორი კამათლის ერთდროულად გაგორებისას მოსულ რიცხვებზე დაკვირვებას. A ხდომილობაა - «კამათლებზე მოსული ქულების სხვაობის მოდული 5-ის ტოლია». A ხდომილობის ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა ტოლია

- ა) 6-ის; ბ) 5-ის; გ) 4-ის; დ) 3-ის ე) 2-ის.

8. ბანქოს 52 კარტისაგან შედგენილი დასტიდან ალალბედზე იღებენ ორ კარტს. რამდენი ელემენტისაგან შედგება ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე?

- ა) A_{52}^2 ; ბ) C_{52}^2 ; გ) $52! \cdot 2!$; დ) $52! \cdot 50!$; ე) $50!$

9. განსაზღვრეთ A და B ხდომილობები, თუ $AB = A$

- ა) $A \subset B$; ბ) $A = \Omega$, $B = \emptyset$; გ) $B \subset A$;
დ) $B = A$; ე) $A = \bar{B}$.

10. თუ $A \subset B$, მაშინ აუცილებლად

- ა) $A \cup B = \Omega$; ბ) $A \cup B = \emptyset$; გ) $A \cup B = B$;
დ) $A \setminus B = B$; ე) $A \cdot B = \emptyset$.

3.4. ხდომილობის ალბათობა, ხდომილობის ალბათობის კლასიკური და სტატისტიკური განსაზღვრა

დავუშვათ, შეიძლია ასონიშანი «თ», «ბ», «ი», «ლ», «ი» «ს», «ი» ცალ-ცალკე დავწერეთ მუყაოს ზუსტად ერთნაირ ნაჭრებზე, ჩავაწყოთ ისინი აბგაში და კარგად ავურიოთ; ამის შემდეგ ამოვიღოთ ნაჭრები, შემთხვევით, ალაღბედზე და დავალაგოთ ერთმანეთის გვერდით იმ თანმიმდევრობით, როგორც ამოვიღეთ აბგიდან. შედეგად მივიღეთ სიტყვა «თბილისი», რა საზომით შეიძლება მიღებული ფაქტი ჩავთვალოთ საოცრებად?

ვთქვათ, დასმულია ასეთი კითხვა: რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ მომენტიდან თბილისში დაბადებული პირველი ბავშვი გოგონა იქნება? ამასთან დავსვათ მეორე კითხვა: რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ მომენტიდან თბილისში დაბადებული პირველი 10 ბავშვი, ათივე გოგონა იქნება? აქ, ცხადია, რომ მეორე ხდომილობის მოხდენა პირველი ხდომილობის მოხდენასაც ნიშნავს. მეორე კითხვაში მოთხოვნილია ერთი გოგონას შემდეგ, ზედიზედ, კიდევ 9 გოგონას დაბადება. ცხადია, მეორე ხდომილობა უფრო ნაკლებად მოსალოდნელია; ამგვარად, მისი ალბათობა უფრო ნაკლები იქნება, ვიდრე პირველისა. ისე კი ორივე ხდომილობა შესაძლებელია.

ეს მაგალითი არკვევს ალბათობის ორი არსებით მომენტს: პირველი მომენტი იმაში მდგომარეობს, რომ ორივე ხდომილობიდან თითოეული შეიძლება მოხდეს (პირველი ბავშვი შეიძლება გოგონა იყოს და შეიძლება პირველი 10 ბავშვი ყველა გოგონა იყოს). ეს მომენტი წმინდა თვისობრივია. მეორე მომენტი იმაში მდგომარეობს, რომ პირველი ხდომილობა უფრო მოსალოდნელია, ვიდრე მეორე ხდომილობა. ეს მომენტი რაოდენობრივია. პირველი ხდომილობის ალბათობა მეტია მეორის ალბათობაზე.

ალბათობის კლასიკური განსაზღვრა

განვიხილოთ მაგალითი: ვაგორებთ კამათელს, მასზე შეიძლება მოვიდეს ერთი, ორი, სამი, ოთხი, ხუთი ან ექვსი ქულა; თითოეული ამ ხდომილობათაგანი ელემენტარულია და ისინი ერთად ქმნიან

ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეს. იქნებთან თუ არა ეს ელემენტარული ხდომილობები ტოლშესაძლებელი? რა მდგომარეობამ უნდა განაპირობოს ეს? ეს რთული კითხვაა. ჩვენ რა თქმა უნდა შეიძლება დავუმატოთ, რომ ეს ელემენტარული ხდომილობები მაშინ იქნებთან ტოლშესაძლებელი, როცა კამათელი იქნება აბსოლუტურად ზუსტი კუბი, რომლის სიმძიმის ცენტრი ემთხვევა მის გეომეტრიულ ცენტრს და აგრეთვე ის დამზადებული იქნება იდეალურად ერთგვაროვანი მასალისაგან, მასთან მისი გაგორება ხდება, შემთხვევით, ერთი და იგივე წესის მიხედვით. ეს როცა იმდენად ბევრია, რომ ძნელია ყველას გათვალისწინება. უმჯობესია, თუ ინტუიციურად ჩამოვაყალიბებთ შემდეგ ასეთ განსაზღვრას: ტოლშესაძლებელ ელემენტარულ ხდომილობებად ჩავთვალოთ ისეთი ელემენტარული ხდომილობები, რომელთაგან ნებისმიერი, მეორე ხდომილობასთან შედარებით, არ ფლობს არავითარ უპირატესობას, მოხდეს უფრო ხშირად, მრავალჯერადი ცდების შედეგად, რომლებსაც ვატარებთ ერთნაირ პირობებში.

ხდომილობის აღნიშვნა	ხდომილობის შინაარსი	ელემენტარული ხდომილობების რიცხვი, რომელიც ხელშემწყობია მოცემული ხდომილობის
A	მოვიდა ქულათა ლუწი რიცხვი	3
B	მოვიდა სამზე ნაკლები ქულა	2
C	მოვიდა ხუთზე ნაკლები ქულა	4
D	მოვიდა ხუთზე არაუმეტესი ქულა	5
G	მოვიდა სამზე არანაკლები ქულა	4
V	მოვიდა ექვსზე მეტი ქულა	0
U	მოვიდა ექვსზე არაუმეტესი ქულა	6

ცხრილში განხილული ხდომილობები წარმოადგენენ ტოლშესაძლებელ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის ქვესივრცეს, რომელიც განსაზღვრულია კამათლის გაგორების ცდებით.

ეს ცხრილი გვიჩვენებს ამ ხდომილობების გაჩენის არაერთგვაროვან შესაძლებლობებს ერთი ცდისას; უფრო შესაძლებელია ის

ხდომილობა, რომლის მოხდენასაც ხელს უწყობს მოცემული ტოლშესაძლებელ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის დიდი რიცხვი. ეს რიცხვები შეიძლება იყვნენ, მოცემული ცდებით, სხვადასხვა ხდომილობების შესაძლო გაჩენის რიცხვითი საზომები.

მაგრამ როგორ შევადაროთ ერთმანეთს A_1 და B_1 ხდომილობების მოხდენის შესაძლებლობები, რომლებიც დაკავშირებული არიან ელემენტარულ ხდომილობათა სხვადასხვა სივრცეებთან?

ვთქვათ, ერთ ყუთში 10 შავი ფერი ბურთულაა, რომლებიც დანომრილია ლუწი რიცხვებით 2, 4, 6, ..., 18, 20; ხოლო მეორე ყუთში - 8 თეთრი ფერის ბურთულაა, რომლებიც დანომრილია რიცხვებით 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. თითოეული ყუთიდან ალაღბედზე ამოაქვთ ერთი ბურთულა. ვთქვათ, A_1 ხდომილობაა - «შავი ფერის ბურთულას ნომერი 3-ის ჯერადი რიცხვია», B_1 ხდომილობა კი - «თეთრი ფერის ბურთულას ნომერი არ აღემატება 5-ს». ამ ხდომილობებიდან რომელია უფრო შესაძლებელი?

A_1 ხდომილობის მოხდენის ხელშემწყობია 3 ტოლშესაძლებელი ხდომილობა (6; 12.; 18), ასევე, B_1 ხდომილობის ხელშემწყობია სამი ტოლშესაძლებელი ხდომილობა (1; 3; 5). შეიძლება A_1 და B_1 ხდომილობები ტოლშესაძლებელი ხდომილობებია? ამ კითხვაზე პასუხის გაცემა იმ შემთხვევაში შეგვეძლება თუ გვეცოდინება ყველა ტოლშესაძლებელ ელემენტარულ ხდომილობათა რიცხვი, რომელიც დაკავშირებულია შავი ფერის ბურთულის ამოღების ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცესთან და აგრეთვე გვეცოდინება ყველა ტოლშესაძლებელ ელემენტარულ ხდომილობათა რიცხვი, რომელიც დაკავშირებულია თეთრი ფერის ბურთულების ამოღების ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცესთან.

სრული ინფორმაცია ამ ხდომილობების შესახებ შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგ ცხრილის სახით:

ხდომი- ლობა	ხდომილობის შინაარსი	ელემენტარულ ხდომი- ლობათა სივრცის რიცხვი	მოცემული ხდომილობის გაჩენის ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილობათა რიცხვი	შეფარდება
A_1	შავი ფერის ბურთულაზე 3-ის ჯერადი რიცხვის მოსვლა	10	3	0,3
B_1	თეთრი ფერის ბურთულაზე მოსული რიცხვი არ აღემატება 5-ს	8	3	0,375

ამ მონაცემების შემდეგ რთული არ არის დასკვნების გაკეთება:

ა) B_1 ხდომილობის მოხდენა უფრო მეტადაა მოსალოდნელი ვიდრე A_1 ხდომილობის.

ბ) რაიმე H ხდომილობის მოხდენის შესაძლებლობა უმჯობესია $\frac{m}{n}$ შეფარდებით გავზომოთ, სადაც n - ყველა ტოლშესაძლო ელემენტარული ხდომილობების რაოდენობის რიცხვია, ხოლო m კი - იმ ტოლშესაძლებელ ხდომილობათა რაოდენობის რიცხვია, რომლებიც ხელშემწყობია H ხდომილობის მოხდენისა.

ხდომილობის მოხდენის ამ მოსახერხებელ საზომს მიღებულია ამ ხდომილობის ალბათობა ვუწოდოთ, იგი აღინიშნება სიმბოლოთი:

$$P(H) = \frac{m}{n} \quad (1).$$

განსაზღვრა: H ხდომილობის ალბათობა ეწოდება წილადს, $P(H) = \frac{m}{n}$

სადაც n არის Ω სივრცის ელემენტთა რაოდენობა, ხოლო m არის იმ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა, რომლებიც ეკუთვნიან H -ს (იგულისხმება, რომ ყველა ელემენტარული ხდომილობა ტოლშესაძლებელ

ლია).

ამ განსაზღვრას შემთხვევითი ხდომილობის ალბათობის კლასიკური განსაზღვრა ეწოდება.

შეიძლება ვიპოვოთ ამ ლექციის დასაწყისში დასმულ ამოცანაში სიტყვა «თბილისი»-ს დაწერის ალბათობა, იგი ტოლი იქნება:

$$P = \frac{3!}{7!} = \frac{6}{5040} = \frac{1}{840}.$$

ალბათობის კლასიკური განსაზღვრა ყოველთვის არ გამოდგება. იგულისხმება რომ m და n სასრული რიცხვებია. შეიძლება შემდეგი არსებითი შენიშვნის გაკეთება: საერთოდ, ბუნებაში და საზოგადოდ ასეთი ერთნაირად შესაძლებელი ხდომილობები იშვიათად გვხვდება; ასეთი ხდომილობანი ხშირად აზარტულ თამაშობებში გვხვდება და თუ, მაგალითად, კამათელიც არაწესიერია, ამ შემთხვევაშიც არ გამოდგება ალბათობის კლასიკური განსაზღვრა.

ალბათობის სტატისტიკური განსაზღვრა

როგორც აღვნიშნეთ, ალბათობის ცნების კლასიკური განსაზღვრის მიდგომისას იგი დაიყვანება უფრო მარტივ ცნებაზე - ელემენტარულ ხდომილობათა ტოლშესაძლებლობაზე, ხოლო ეს ცნება კი დაფუძნებულია ადამიანის ინტუიციურ წარმოდგენასთან, ცდების იმ პირობებთან, რომლებიც თითქოს უეჭველად განსაზღვრავენ ამ ტოლშესაძლებლობას, მაგრამ ყოველი ცდა არ ექვემდებარება ასეთ წარმოსახვას. მაგალითად, შეუძლებელია ტოლშესაძლებელ ხდომილობებად ჩავთვალოთ ცდების შედეგები, რომლებიც დაკავშირებული არიან არაწესიერი კამათლის გაგორებასთან, კერძოდ, ისეთი კამათლის გაგორებასთან, რომლის სიმძიმის ცენტრი არ ემთხვევა მის გეომეტრიულ ცენტრს.

როგორ მოვიქცეთ ამ შემთხვევაში, რა თქმა უნდა არას გვარგებს მოგონება წესიერ კამათელზე, რომელზეც როგორც ცნობილია, მაგალითად, 6-იანის მოსვლის ალბათობა $\frac{1}{6}$ -ის ტოლია.

დავუშვათ, არაწესიერი კამათელი გავაგორეთ n -ჯერ და გაირ-

კვა, რომ ექვსიანი მოვიდა m -ჯერ. $\frac{m}{n}$ შეფარდებას ვუწოდოთ ექვსი-
ანის მოვლის სტატისტიკური სიხშირე. ასეთი ცდების სერიის ჩატა-
რების შემდეგ შეიძლება მოხდეს, რომ

კამათლის n -ჯერ გაგორებისას ექვსიანი მოვიდა m_1 -ჯერ;

სტატისტიკური სიხშირეა $\bar{P}_1 = \frac{m_1}{n}$;

კამათლის $(n+1)$ -ჯერ გაგორებისას ექვსიანი მოვიდა m_2 -ჯერ;

სტატისტიკური სიხშირეა $\bar{P}_2 = \frac{m_2}{n+1}$;

კამათლის N -ჯერ გაგორებისას ექვსიანი მოვიდა m_n -ჯერ;

სტატისტიკური სიხშირეა $\bar{P}_N = \frac{m_n}{N}$.

რას შევნიშნეთ? სტატისტიკური სიხშირეებისათვის
 $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_N$ დამახასიათებელი იქნება მდგრადობა: ისინი, ცდების
რიცხვის ზრდასთან ერთად, ძალიან მიუახლოვდებიან P ალბათო-
ბას, წესიერი კამათლის შემთხვევაში ისინი ძალზე ახლოს იქნებიან
 $P = \frac{1}{6}$ ალბათობასთან.

მაგრამ არაწესიერი კამათლის შემთხვევაში სტატისტიკური სიხ-
შირეები თავს მოიყრიან რომელიმე უცნობ P რიცხვთან. ეს უცნობი
რიცხვი ამ შემთხვევაში ითამაშებს იგივე როლს რასაც წესიერი კა-
მათლის გაგორებისას ასრულებს $\frac{1}{6}$. ლოგიკურია, ეს უცნობი რიცხვი
ჩავთვალოთ ექვსიანის მოსვლის ალბათობად არაწესიერი კამათლის
გაგორებისას. ცხადია, სხვადასხვა არაწესიერი კამათლებისათვის ეს
 P რიცხვი იქნება სხვადასხვა.

ვთქვათ, $\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n+1}, \dots, \frac{m_n}{n+N-1}$ - სტატისტიკური სიხშირეებია A

ხდომილობის მოხდენისა, ცდათა რომელიმე სერიაში, ცდები რა
თქმა უნდა ტარდება ერთსა და იგივე პირობებში (მაგალითად, ერ-

თსა და იმავე კამათელს აგდებენ ერთი და იგივე სიმაღლიდან).

განსაზღვრა: A ხდომილობის ალბათობა ეწოდება იმ უცნობ P რიცხვს, რომლის გარშემოც იკრიბებიან, ცდების რიცხვის გაზრდის შედეგად, A ხდომილობის მოხდენის სტატისტიკურ სიხშირეთა მნიშვნელობები.

ამ განსაზღვრას შემთხვევითი ხდომილობის ალბათობის სტატისტიკური განსაზღვრა ეწოდება.

ხდომილობის ალბათობა შეიძლება მიახლოებით გავნსაზღვროთ ნებისმიერად მაღალი სიზუსტით, ჩავატარებთ რა საკმარის დიდი რაოდენობის ცდებს და დავთვლით ხდომილობის მოხდენის სიხშირეს ცდათა ამ ერთობლიობაში.

მაგალითად, ვთქვათ, მსროლელი ესერის სამიზნეს. როგორ შევაფასოთ მოხვედრების ალბათობა? თუ ხდომილობები «მოხვედრა» და «აცდენა» ტოლშესაძლებელია, მაშინ მივიღებთ რომ P («მოხვედრა») = P («აცდენა») = $\frac{1}{2}$

მაგრამ ისინი შეიძლება არ იყვნენ ტოლშესაძლებელი. ვთქვათ, მერაბი ხშირად ვარჯიშობს სროლაში და ყოველი ასი გასროლისას მიზანს ახვედრებს 80-90-ჯერ, ხოლო მამუკა იშვიათად ვარჯიშობს სროლაში და ყოველი ასი გასროლიდან მიზანს ახვედრებს 30-40-ჯერ. ცხადია, რომ მერაბის შესაძლებლობა მოახვედროს მიზანში უფრო მეტია, ვიდრე მამუკასი. როგორ შევაფასოთ მათი სხვადასხვა შესაძლებლობანი? პრაქტიკული ცდების შედეგები გამოვსახოთ ცხრილის საშუალებით და ვთქვათ გვაქვს შემდეგი მონაცემები:

გასროლათა რაოდენობა	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
მერაბის მიერ მოხვედრათა რაოდენობის რიცხვი	8	17	26	33	41	49	56	65	72	81
მამუკას მიერ მოხვედრათა რაოდენობის რიცხვი	3	5	8	12	15	19	22	25	28	31

ცხრილიდან ცხადია, რომ როგორც მერაბის, ასევე მამუკას სა-

მოზნეში მოხვედრათა რიცხვის შეფარდება ჩატარებულ გასროლათა რიცხვთან იცვლება. ეს შეფარდებები გარკვეულწილად დამოკიდებული არიან ჩატარებულ გასროლათა რიცხვთან, მასთან შეიმჩნევა, რომ ეს შეფარდებები თითოეული მსროლელისათვის ახლომახლო დგას განსაზღვრული რიცხვის ირგვლივ: მერაბისათვის ეს რიცხვია 0,8; ხოლო მამუკასათვის კი - 0,3. ეს რიცხვები ლოგიკურია მივიღოთ მსროლელთა მიერ ჩატარებული სროლების მოხვედრების ალბათობის შეფასებად. ეს შეფასება მით უფრო საიმედოა, რაც მეტი ცდაა ჩატარებული მათი მნიშვნელობის დასადგენად.

ვთქვათ, I ცდათა რიცხვია, რომელთა ჩატარების დროს A ხდომილობა შეიძლება მოხდეს, ან არ მოხდეს, ხოლო K რიცხვია, რომელიც აღნიშნავს თუ ჩატარებულ ცდებში რამდენჯერ მოხდა A ხდომილობა. შეფარდებას ეწოდება A ხდომილობის მოხდენის სტატისტიკური სიხშირე, მას აღვნიშნავთ:

$$P_i\{A\} = \frac{K}{I} \quad (2).$$

ინდექსი შემოაქვთ, რათა ხაზი გაესვას სტატისტიკური სიხშირის კავშირს ჩატარებულ ცდათა რიცხვთან. პრაქტიკა გვარწმუნებს იმაში, რომ როცა ზუსტად ვიცით ხდომილობის $P(A)$ ალბათობა კლასიკური გაგებით, ცდათა საკმაოდ დიდი I რაოდენობის რიცხვის დროს გვაქვს: $P_i\{A\} \approx P(A)$.

ამ მიახლოებითმა ტოლობამ მიიღო თეორიული დასაბუთება, (1) ფორმულიდან გამომდინარეობს შემდეგი შედეგები:

1. აუცილებელი ხდომილობის ალბათობა 1-ის ტოლია, ე.ი.

$$P(U) = \frac{n}{n} = 1;$$

2. შეუძლებელია ხდომილობის ალბათობა 0-ის ტოლია ე.ი.

$$P(V) = \frac{0}{n} = 0,$$

შენიშვნა: თუ $P(A) = 0$ ეს იმას ნიშნავს, რომ A ხდომილობა შეუძლობელია.

3. ნებისმიერი A ხდომილობის ალბათობა აკმაყოფილებს უტო-

ლობას $0 \leq P(A) \leq 1$, რადგან $0 \leq m \leq n$.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი: 1) როგორ დავადგინოთ მიახლოებით ტბაში თევზების რაოდენობა?

ვთქვათ, ტბაში x თევზია. გადავაგდეთ ზადე და, დავუშვათ, დავიჭირეთ n ცალი თევზი. თითოეული მათგანი დავნიშნოთ და გავუშვათ უკანვე ტბაში. რამდენიმე დღის შემდეგ ზუსტად ისეთივე ამინდში და იგივე ადგილზე ჩავკიდოთ ისევ ის ზადე. დავუშვათ, რომ ამჯერად ზადეში აღმოჩნდა m ცალი თევზი, რომელთაგან k ცალი დანიშნულია. A -თი აღვნიშნოთ ხდომილობა - «დაჭერილი თევზი დანიშნულია». მაშინ (2) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$P_m\{A\} \approx \frac{k}{m}$. თუ ტბაში x თევზია და ჩვენ მასში გავუშვათ n დანიშნული თევზი, მაშინ (1) ფორმულით გვექნება $P(A) = \frac{n}{x}$. რადგან

$$P_m\{A\} \approx P(A), \text{ მაშინ } x \approx \frac{mn}{k}$$

2) საქართველოს სახელმწიფომ, XI საუკუნიდან XVIII საუკუნის ჩათვლით, სანამდე ის რუსეთის კოლონია გახდებოდა, გადაიხადა 589 ბრძოლა, მათგან 456-ჯერ დაამარცხა მოწინააღმდეგე. საუკუნეების მიხედვით ეს მონაცემები ასე იცვლებოდა: XI საუკუნეში ჩაატარა 18 ბრძოლა გაიმარჯვა 11-ჯერ, XII საუკუნეში ჩაატარა 128, გაიმარჯვა 124-ჯერ, XIII საუკუნეში გადაიხადა 34, გაიმარჯვა 17-ჯერ, XIV საუკუნეში გადაიხადა 23, გაიმარჯვა 14-ჯერ, XV საუკუნეში გადაიხადა 28, გაიმარჯვა 18-ჯერ, XVI საუკუნეში გადაიხადა 70, გაიმარჯვა 49-ჯერ, XVII საუკუნეში გადაიხადა 28, გაიმარჯვა 21-ჯერ, ხოლო XVIII საუკუნეში 260-ჯერ გავიდა საბრძოლოდ და გაიმარჯვა 202-ჯერ. შევაფასოთ ქართული მხედრობის გამარჯვების ალბათობა ამ პერიოდში მთლიანად და საუკუნეების მიხედვით ცალ-ცალკე.

ამოხსნა: შემოვიღოთ აღნიშვნები; A -თი აღვნიშნოთ მთელ პერიოდში საქართველოს სარდლობის გამარჯვების ხდომილობა, ხოლო შესაბამისად A_1 -ით XI საუკუნეში გამარჯვების ხდომილობა, A_2 -ით XII, A_3 -ით XIII, A_4 -ით XIV, A_5 -ით XV, A_6 -ით XVI, A_7 -ით XVII,

As-ით XVIII საუკუნეებში გამარჯვების ხდომილობები.

ამოცანის პირობის გათვალისწინებით შესაბამისი ალბათობები იქნება:

$$P(A) = \frac{456}{589} \approx 0,774; \quad P(A_1) = \frac{11}{18} \approx 0,611; \quad P(A_2) = \frac{124}{128} \approx 0,969;$$

$$P(A_3) = \frac{17}{34} \approx 0,5; \quad P(A_4) = \frac{14}{23} \approx 0,609; \quad P(A_5) = \frac{18}{28} \approx 0,643;$$

$$P(A_6) = \frac{49}{70} \approx 0,7; \quad P(A_7) = \frac{21}{28} \approx 0,75; \quad P(A_8) = \frac{202}{260} \approx 0,777.$$

3.4.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მენეჯმენტისათვის

1. განყოფილებაში 15 ჯარისკაცი გამოიძახეს, მათ შორის არის და-თოც. საპატიო ყარაულისათვის ალაღბედზე შერჩეული უნდა იქნას ხუთი ჯარისკაცი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ საპატიო ყარაულის ჯარისკაცთა შორის დათოც აღმოჩნდება.
2. ხუთკაციანი კომიტეტი უნდა შედგეს 15 კანდიდატისაგან, რომელთა შორის 6 მამაკაცი და 9 ქალია. რა არის ალბათობა იმისა, რომ კომიტეტში 3 მამაკაცი და 2 ქალი მოხვდება?
3. აგორებენ თორმეტწახნაგა და ჩვეულებრივ კამათლებს, A ხდომილობაა - «კამათლებზე მოსული ქულების ჯამი არანაკლებია 14-ზე»; ვიპოვოთ $P(A)$.
4. 12 სტუდენტს შორის 8 გოგონაა. ამ ჯგუფიდან ალაღბედზე აარჩიეს 9 სტუდენტი, ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის 7 გოგონა იქნება.
5. მუყაოს 5 ნაჭერზე წერია ასოები: ა, ა, ა, ბ, რ. ამ ნაჭერებიდან ალაღბედზე ამოაქვთ ოთხი ნაჭერი და ერთმანეთის გვერდით ალაგებენ. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მიიღება სიტყვა «აბრა».
6. დომინოს სრული სათამაშო კომპლექტიდან (28 სათამაშო ქვა) ალაღბედზე იღებენ ერთ ქვას, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მასზე მოსული ქულათა ჯამი არანაკლები იქნება 8-ზე?

7. მოცემულია 4 მონაკვეთი, რომელთა სიგრძეებია 2, 5, 6 და 10 ერთეული. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათგან ალაღბედზე აღებული სამი მონაკვეთისაგან შესაძლებელია სამკუთხედის აგება?
8. ყუთში ერთიდან ხუთამდე დანომრილი 5 ზუსტად ერთნაირი ბურთულაა. ალაღბედზე ერთმანეთის მიყოლებით ამოაქვთ ორი ბურთულა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ პირველად ამოღებულ ბურთულაზე ეწერება მეტი ნომერი, ვიდრე მეორეზე.
9. სამი მოთამაშე თამაშობს ბანქოს. თითოეულს 10-10 კარტი აქვს, მაგიდაზე 2 კარტია. ერთ-ერთი მოთამაშე ხედავს, რომ მას ხელში 6 ჯვრის მასტის კარტი აქვს, ხოლო დანარჩენი ოთხი სხვა მასტისაა. იგი აგდებს ორ კარტს ამ ოთხეულიდან და იღებს დარჩენილ 2 კარტს, რომელიც მაგიდაზე იმყოფებოდა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მოთამაშემ მაგიდიდან აიღო ორივე ჯვრის მასტის კარტი.
10. ათი პიროვნება ალაღბედზე ჯდება ათადგილიანი მრგვალი მაგიდის გარშემო. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ A და B პიროვნება ერთმანეთის გვერდით დაჯდება.
11. ათი პიროვნება ალაღბედზე ჯდება მართკუთხოვანი მაგიდის ერთ მხარეს, სადაც 10 ადგილია. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ A და B პიროვნება ერთმანეთის გვერდით დაჯდება.
12. ყუთში მოთავსებულია 40 ბირთვი, რომლებიც დანომრილია 1-დან 40-მდე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ალაღბედზე ამოღებული ბირთვის ნომერი არ გაიყოფა არც 2-ზე და არც 3-ზე.
13. ყუთში მოთავსებულია 20 ბირთვი, რომლებიც დანომრილია 1-დან 20-მდე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ბირთვის ნომერი არ იქნება მარტივი რიცხვი.
14. მიზანში სროლისას მოხვედრის ფარდობითი სიხშირეა 0,85. იპოვეთ მოხვედრათა რიცხვი, თუ სულ 120-ჯერ ისროლეს.
15. სამ კალათში ალაღბედზე ანაწილებენ სამ ბურთს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამ განაწილების შემდეგ ერთი კალათი დარჩება ცარიელი.

16. n რაოდენობის კალათში ალაღბედზე ანაწილებენ n რაოდენობის ბურთს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამ განაწილების შემდეგ ერთი კალათი დარჩება ცარიელი.
17. ავტომატქანების სადგომზე ერთმანეთის გვერდით განთავსებულია 12 მანქანის ადგილი. ერთხელ აღმოჩნდა ერთმანეთის გვერდით ოთხი თავისუფალი ადგილი. შევაფასოთ, გამოწვევასია, ეს შემთხვევა, თუ ხშირად მოხდება?
18. ერთ ოჯახში 6 და ცხოვრობს, ისინი რიგრიგობით რეცხავენ ჭურჭელს. ყოველი დამტკრეული 4 თეფშიდან 3 უმცროსი დის ანგარიშზე მოდის, ამიტომ მას «მსხვერველას» სახელით მოიხსენიებენ; სამართლიანია თუ არა ეს?
19. მოცემულია ციფრები 1, 2 და 3. ამ ციფრებისაგან ადგენენ ორნიშნა რიცხვებს; რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათგან შემთხვევით შერჩეული რიცხვი მარტივია?
20. ყუთში 28 მწვანე, 32 ლურჯი, 12 თეთრი და 8 წითელი ბურთია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორ შემთხვევით შერჩეულ ბურთებს შორის ორივე ერთი ფერის იქნება?
21. ყუთში აწყვია 15 დეტალი მათგან 10 შეღებილია. ამწყობი ალაღბედზე იღებს სამ დეტალს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სამივე შეღებილია.
22. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალაღბედზე დასახელებული ორნიშნა რიცხვის ციფრთა ჯამი 12-ის ტოლია?
23. მაღაზიაში იყიდება სამი სახის წითელი, თეთრი და მწვანე ბურთი. სანდროს დაავალეს ეყიდა ოთხი ბურთი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სანდროს მიერ ნაყიდ ბურთებში მხოლოდ ორია ერთი ფერისა, დანარჩენი ორი კი მისგან განსხვავებული სხვადასხვა ფერისაა.
24. 100 კაციანი ჯგუფიდან 70 ფლობს ინგლისურს, 45 - ფრანგულს, ხოლო 23 ამ ენებიდან ორივეს; დანარჩენი გერმანულს. ამ ჯგუფიდან ალაღბედზე გამოიძახეს ერთი პიროვნება, ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ იგი გერმანულად საუბრობს.
25. შემთხვევით ასახელებენ ნატურალურ რიცხვს, რომელიც არ აღე-

- მატება 25-ს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ რიცხვის 7-ზე გაყოფისას ნაშთში მიიღება 2, 4 ან 6?
26. სროლის ჩატარების შემდეგ მიზანში მოხვედრის ფარდობითი სიხშირე 0,6-ის ტოლი აღმოჩნდა. რამდენ გასროლას ჰქონდა ადგილი თუ ცნობილია, რომ მიზანს 12-ჯერ აცდა?
27. 10 ბურთულას ნებისმიერად ათავსებენ ოთხ ყუთში. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ პირველ ყუთში მოთავსდება ერთი ბურთულა, მეორეში ორი, მესამეში სამი, ხოლო მეოთხეში კი ოთხი ბურთულა.
28. საკალათბურთო შეჯიბრისათვის 18 გუნდი უნდა დაყონ ორ ცხრაგუნდიან ჯგუფად. ამ 18 გუნდს შორის 5 არის ძლიერი გუნდი; ა) ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ხუთივე ძლიერი გუნდი ერთ ჯგუფში მოხვდება, თუ წილისყრას ალაღბედზე ჩავატარებთ; ბ) ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ერთ ჯგუფში მოხვდება სამი ძლიერი გუნდი ხოლო მეორეში კი ორი ძლიერი, თუ წილისყრას ალაღბედზე ვატარებთ.
29. ხისგან დამზადებული კუბი, რომლის ყველა წახნაგი შეღებილია, 216 ტოლ ნაწილად დახერხეს. მიღებული პატარა კუბები კარგად აურიეს და ალაღბედზე ამოიღეს ერთი მათგანი, ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებულ კუბს არცერთი წახნაგი არა აქვს შეღებილი?
30. 10 დეტალს შორის სამი წუნდებულია. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ალაღბედზე შერჩეულ ოთხ დეტალს შორის არცერთი არ იქნება წუნდებული.

3.4.2. ტესტი №4

1. ყუთში, ერთმანეთისაგან მხოლოდ ფერით განსხვავებული, 5 თეთრი და 15 წითელი ბურთულაა, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალაღბედზე ამოღებული ბურთულა თეთრი ფერის იქნება?
- ა) $\frac{1}{3}$; ბ) $\frac{2}{3}$; გ) $\frac{3}{4}$; დ) $\frac{4}{5}$; ე) $\frac{1}{4}$.

2. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალაღბედზე დასახელებული ორნიშნა რიცხვი მარტივი იქნება?
- ა) $\frac{4}{15}$; ბ) $\frac{23}{90}$; გ) $\frac{7}{30}$; დ) $\frac{11}{45}$; ე) $\frac{13}{45}$.
3. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთი კამათლის გაგორებისას 4-ზე მეტი რიცხვი მოვა?
- ა) $\frac{1}{3}$; ბ) $\frac{2}{3}$; გ) $\frac{1}{2}$; დ) $\frac{5}{6}$; ე) $\frac{1}{6}$.
4. სექტემბრის თვეში თბილისში მზიანი დღეების ფარდობითი სიხშირე 0,8-ის ტოლია. რამდენი მზიანი დღე იქნება სექტემბრის თვეში თბილისში?
- ა) 25; ბ) 24; გ) 27; დ) 28; ე) 29.
5. 1978 წლის სექტემბრის თვეში თბილისში 3 დღე იყო წვიმიანი, 2 დღე მშრალი, მაგრამ ღრუბლიანი, დანარჩენი კი მზიანი. იპოვეთ მზიანი დღეების ფარდობითი სიხშირე.
- ა) $\frac{5}{6}$; ბ) $\frac{4}{5}$; გ) $\frac{9}{10}$; დ) $\frac{14}{15}$; ე) $\frac{29}{30}$.
6. ვთქვათ, Ω არის აუცილებელი ხდომილობა, მაშინ მისი ალბათობა არის
- ა) 9; ბ) 1; გ) 0,4; დ) 0,3; ე) 0,2.
7. ვთქვათ, V არის შეუძლებელი ხდომილობა მაშინ მისი ალბათობაა
- ა) 0; ბ) 1; გ) 0,5; დ) 0,3; ე) 0,2.
8. ვთქვათ, A ხდომილობის ალბათობა არის 0,3; მაშინ მისი საწინააღმდეგო ხდომილობის ალბათობაა $P(A) =$
- ა) 0,3; ბ) 0; გ) 1; დ) 0,7; ე) 0,5.
9. ხდომილობის ალბათობა არ შეიძლება ტოლი იყოს
- ა) 0; ბ) 1; გ) 0,4; დ) 0,5; ე) 1,1.
10. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის გაგორებისას მოსული რიცხვების ჯამი არის 13?
- ა) 1; ბ) 0; გ) $\frac{12}{13}$; დ) $\frac{1}{6}$; ე) $\frac{5}{6}$.

3.5. ალბათობის გეომეტრიული განსაზღვრა

ალბათობის კლასიკური განსაზღვრება მოითხოვს, რომ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე შედგებოდეს სასრული რაოდენობის ტოლშესაძლებელი ხდომილობებისაგან. პრაქტიკაში კი ხშირად ვხვდებით ცდებს, რომელთა ტოლშესაძლებელ შედეგთა სიმრავლე უსასრულოა. ასეთ შემთხვევაში სარგებლობენ ალბათობის გეომეტრიული განსაზღვრებით. განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი:

ვთქვათ, სიბრტყეზე გვაქვს Ω არე, რომელიც შეიცავს უფრო მცირე ფართობის მქონე A არეს. საძიებელია ალბათობა იმისა, რომ Ω არიდან ალაღბედზე აღებული წერტილი მოთავსებული იქნება A არეშიც. იგულისხმება, რომ Ω არის ყველა წერტილს არჩევის თანაბარი შესაძლებლობა გააჩნია და ამ წერტილის Ω არის რაიმე გარკვეულ ნაწილში მოხვედრის ალბათობა პროპორციულია ამ ნაწილის ზომის. მაშინ სამეზნე ალბათობა ტოლი იქნება წილადის:



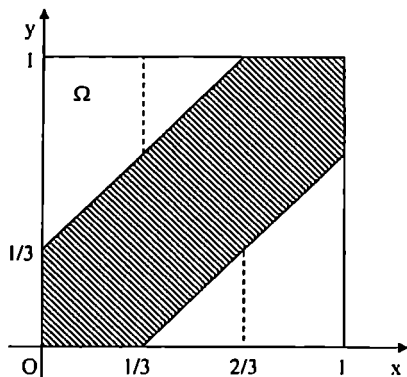
$$P(A) = \frac{\Omega \text{ არის ფართობი}}{\Omega \text{ არის ფართობი}} = \frac{m}{n} \quad (1).$$

განსაზღვრა: თუ Ω სივრცე წარმოადგენს სასრულ მონაკვეთს (ფიგურას, სხეულს) მაშინ $A (A \subset \Omega)$ ხდომილობის გეომეტრიული ალბათობა ეწოდება ამ ხდომილობის შესაბამისი მონაკვეთის სიგრძის (ფიგურის ფართობის, სხეულის მოცულობის) შეფარდებას სივრცის შესაბამისი მონაკვეთის სიგრძესთან (ფიგურის ფართობთან, სხეულის მოცულობასთან).

განვიხილოთ მაგალითი:

ორი პირი შეთანხმდა გარკვეულ ადგილზე შეხვდეს ერთმანეთს 18-დან 19 საათამდე. თითოეული შემთხვევით მომენტში მიდის და მეორეს ელოდება 20 წუთის მანძილზე. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ეს პირები ერთმანეთს შეხვდებიან.

თუ, $18+x$ პირველი პირის მოსვლის მომენტი, ხოლო $18+y$ მეორე პირისა (სადაც x და y საათებში იზომება), მაშინ, ელემენტარული ხდომილობის როლში შეგვიძლია ავირჩიოთ $(x;y)$ წერტილი, რომელიც Ω ერთეულოვან კვადრატს ავსებს. ცხადია, რომ ჩვენთვის საინტერესო ხდომილობა არის სიმრავლე:



$A = \left\{ (x;y) : |x - y| \leq \frac{1}{3} \right\} \cap \Omega$. ამრიგად, ყოველი ფიქსირებული x -ისათვის $0 \leq x \leq 1$, $x - \frac{1}{3} \leq y \leq x + \frac{1}{3}$.

როცა $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$, $y = x - \frac{1}{3}$ წრფის მაგიერ ქვედა საზღვრის როლში იქნება 0 ღერძი, $0 \leq y \leq x + \frac{1}{3}$; ხოლო როცა $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$, ზედა საზღვარი $y = x + \frac{1}{3}$ წრფის მაგივრად იქნება $y = 1$ წრფე.

დაშტრიხული არე, ცხადია, ტოლდღია ორი კვადრატის სხვაობისა, რომელთაგან ერთი ერთეულოვანია, მეორის გვერდი კი არის $\frac{2}{3}$, საბოლოოდ გვექნება, $P(A) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

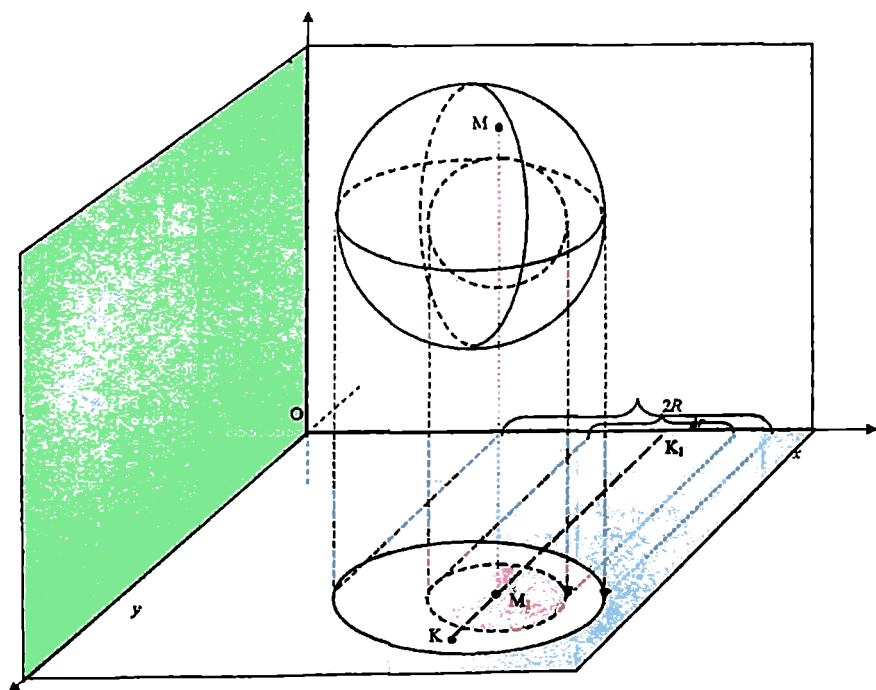
განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი: ვთქვათ, სივრცეში არის სფერო რომლის რადიუსია R , ხოლო მის შიგნით კი მოთავსებულია r რადიუსის მქონე მცირე სფერო. R რადიუსიან სფეროში ალაღბედზე ჩნდება წერტილი, ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ეს წერტილი r რადიუსიან სფეროშიც აღმოჩნდება; აქვე XOY სიბრტყეზე განვიხილოთ ამ პროცესის გეგმილი და ასევე OX ღერძზე განვიხილოთ შესაბამისი გეგმილი.

სივრცეში საძებნი ალბათობა $P(A) = \frac{r^3}{R^3}$, ხოლო სიბრტყეზე გეგ-

მილისათვის ალბათობა $P(A_1) = \frac{r^2}{R^2}$ და ბოლოს OX ღერძზე კი

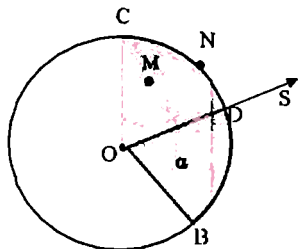
$$P(A_2) = \frac{r}{R}.$$

მართლაც, სივრცეში არსებობს წერტილი რომელიც არ ხვდება R რადიუსიანი სფეროს შიგნით, მაშინ როცა იგი იმყოფება R რადიუსიან სფეროში, გეგმილზე კი ჩანს თითქოს M წერტილი r რადიუსიან სფეროშია, მისი M_1 გეგმილიდან გამომდინარე. ანალოგიურად, K წერტილი XOY სიბრტყეზე მოთავსებულია R რადიუსიანი წრის შიგნით, ისე რომ არ არის r რადიუსის მქონე წრის შიგა არეში, მაშინ როცა OX ღერძზე იქმნება ილუზია თითქოს K წერტილი r რადიუსიანი წრის შიგნით მოთავსდა. ამის გამო სხვადასხვა განზომილებებში შესაბამისი ალბათობები სხვადასხვაა.



განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი:

ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია წრე და განსაზღვრულია მისი BOC სექტორი. $\angle BOC = \alpha$, განვიხილოთ A_1 , A_2 და A_3 ხდომილობების ალბათობები, რომლებიც მდგომარეობენ შემდეგში.



წრეში შემთხვევით ვარდება M წერტილი, A_1 ხდომილობაა - «M წერტილის მოხვედრა BOC სექტორში». წრეწირის რკალზე შემთხვევით ვარდება N წერტილი, A_2 ხდომილობაა - «N წერტილის მოხვედრა BDC რკალში». O წერტილში (წრის ცენტრში) მოდებულია OS ვექტორი, რომელიც მოძრაობს შემთხვევით, A_3 ხდომილობაა - «OS ვექტორის მოხდერა α კუთხეში».

ვთქვათ, $OC = R$ წრეწირის რადიუსია, მაშინ

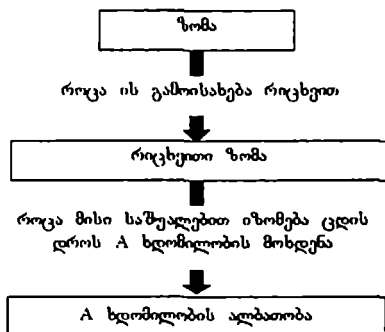
$$P(A_1) = \frac{\text{BOC სექტორის ფართობი}}{\text{წრის ფართობი}} = \frac{0,5R^2\alpha}{\pi R^2} = \frac{\alpha}{2\pi},$$

$$P(A_2) = \frac{\text{BOC სიგრძე}}{\text{წრეწირის სიგრძე}} = \frac{R\alpha}{2\pi R} = \frac{\alpha}{2\pi},$$

$$P(A_3) = \frac{\alpha}{2\pi}.$$

ცხადია, რომ $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3)$.

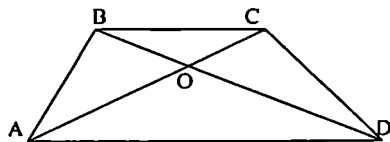
ამა თუ იმ მიდგომით ალბათობის ცნების მიმართ იკვეთება ერთი საერთო საფუძველი: ალბათობა - ეს სპეციალური ზომაა.



3.5.1. საპარჯიშოები პრაქტიკული მცადონოებისათვის

1. ქარიშხალმა დააზიანა ელექტრო გადამცემი ხაზი 120-ე და 290-ე კილომეტრებს შორის. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ დაზიანება მოხდა ხაზის 200-დან 250-მდე კილომეტრს შორის?
2. 20 სმ სიგრძის მონაკვეთზე მოთავსებულია 7 სმ სიგრძის მეორე მონაკვეთი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ დიდ მონაკვეთზე ალაღბედზე დასმული წერტილი მცირე მონაკვეთშიც მოხვდება.
3. $\angle$ სიგრძის AB მონაკვეთზე ალაღბედზე აღებულია ორი განსხვავებული წერტილი C და D. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მიღებული სამი მონაკვეთისაგან სამკუთხედი აიგება?
4. 10 სმ სიგრძის მონაკვეთზე მოთავსებულია 1 სმ სიგრძის მეორე მონაკვეთი, იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ დიდ მონაკვეთზე ალაღბედზე დასმული წერტილი მცირე მონაკვეთზე არ მოხვდება.
5. AB მონაკვეთზე ალაღბედზე ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ვირჩევთ ორ წერტილს M-სა და N-ს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ M წერტილი აღმოჩნდება A-სთან უფრო ახლოს, ვიდრე N?
6. ორ ნამდვილ x და y რიცხვებს ალაღბედზე ვირჩევთ ისე, რომ $|x| < 3$ და $|y| < 5$. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ეს რიცხვები დადებითი იქნება?
7. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ რიცხვით წრფეზე OA მონაკვეთზე შემთხვევით შერჩეული წერტილი ამ მონაკვეთის შუა წერტილიდან არაუმეტეს 0,1 ერთეულითაა დაშორებული.
8. მონაკვეთი ხუთ ტოლ ნაწილადაა დაყოფილი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ მონაკვეთზე შემთხვევით შერჩეული წერტილი შუა ნაწილში არ მოხვდება.
9. ვთქვათ, ხდომილობა არის სიგნალი, რომელიც პირველიდან ხუთ საათამდე უეცრად გაისმის. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სიგნალი 2 საათის შემდეგ 20 წუთის ინტერვალში (2 საათიდან 2 სთ. 20 წთ-მდე) გაჟღერდება.

10. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ $(0;1)$ შუალედიდან აღებული რიცხვის ათობით ჩანაწერში მძიმის შემდეგ პირველი ციფრი მარტივ რიცხვს გამოსახავს.
11. წრეში ჩახაზულია კვადრეტი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ წრეში შემთხვევით ჩაგდებული წერტილი კვადრატის შიგნით მოხვდება?
12. კვადრატში ჩახაზულია წრე. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ კვადრატში შემთხვევით დასმული წერტილი მოთავსდება წრეში.
13. 1 მ სიგანისა და 2 მ სიგრძის მაგიდაზე მოთავსებულია 10 სმ სიგანისა და 20 სმ სიგრძის ფურცელი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მაგიდაზე ალაღბედზე დასმული წერტილი ფურცელზე არ მოხვდება.
14. წრეში ჩახაზულია წესიერი სამკუთხედი. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ წრეში შემთხვევით დასმული წერტილი სამკუთხედშიც მოხვდება.
15. ABCD ტრაპეციაა, $\frac{AD}{BC} = K$, $K > 1$ ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ BCD სამკუთხედში შემთხვევით შერჩეული წერტილი COD სამკუთხედშიც მოხვდეს.
16. ნამდვილი x და y რიცხვები
მოიცემა სისტემით:
$$\begin{cases} -1 < x < 10 \\ -2 < y < 6 \end{cases}$$
 ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული რიცხვები, რომლებიც ამ სისტემას აკმაყოფილებს, $xy > 0$ პირობასაც აკმაყოფილებს.
17. საღამოს 8 საათიდან დროის 20 წუთიან მონაკვეთში თემო ტელეფონით ურეკავს მაიას და 2 წუთიან მონაკვეთში ელოდება პასუხს. დროის იმავე 20 წუთიან მონაკვეთში მაია შემთხვევით შეივლის შინ მხოლოდ 5 წუთით და ამ დროის განმავლობაში დაე-



ლოდება ტელეფონის ზარს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის საუბარი შედგება?

18. მარი და ქეთი შეთანხმდნენ 16 საათიდან 17 საათამდე შუალედში შეხვდნენ ერთმანეთს. რა დროის განმავლობაში უნდა დაელოდოს პირველად მისული მეორეს, რომ დაქალები 0,75-ზე მეტი ალბათობით შეხვდნენ ერთმანეთს?
19. MN ABC სამკუთხედის შუახაზია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ABC სამკუთხედში ალაღბედზე შერჩეული წერტილი BMN სამკუთხედშიც მოხვდება?
20. ორ ნამდვილ x და y რიცხვს შემთხვევით ვირჩევთ ისე, რომ $x^2 + y^2 < 100$. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შერჩეული x და y რიცხვთა წყვილი აგრეთვე დააკმაყოფილებს $25 < x^2 + y^2 < 64$ ორმაგ უტოლობას?
21. კუბში ჩახაზულია სფერო. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ კუბში შემთხვევით დასმული წერტილი მოთავსდება სფეროს შიგნით (ბირთვში).
22. სფეროში ჩახაზულია კუბი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სფეროში შემთხვევით გაჩენილი წერტილი მოთავსდება კუბის შიგა არეშიც.
23. R რადიუსიან სფეროში მოთავსებული კუბი, რომლის წიბო α -ს ტოლია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ R რადიუსიან სფეროს შიგნით (ბირთვში) ალაღბედზე დასმული წერტილი კუბის შიგა არეშიც მოხვდება.
24. კუბში ჩახაზულია ცილინდრი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ კუბის შიგა არეში შემთხვევით დასმული წერტილი მოთავსდება ცილინდრის შიგა არეშიც.
25. კუბში ჩახაზულია კონუსი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ კუბის შიგა არეში შემთხვევით დასმული წერტილი მოთავსდება კონუსის შიგა არეშიც.
26. სფეროში ჩახაზულია კონუსი, ისე რომ კონუსის ფუძე სფეროს დიამეტრალური კვეთის წრეწირს ემთხვევა. იპოვეთ ალბათობა

იმისა, რომ სფეროს შიგნით (ბირთვში) შემთხვევით დასმული წერტილი მოთავსდება კონუსის შიგა არეშიც.

27. ცილინდრში ჩახაზულია სფერო. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ცილინდრის შიგა არეში შემთხვევით დასმული წერტილი მოთავსდება სფეროს შიგა არეშიც (ბირთვშიც).
28. ცილინდრის სიმაღლე 10 სმ-ია, ხოლო ფუძის რადიუსი ტოლია 5-სმ-ის. ცილინდრის ზედაპირზე შემთხვევით ჩნდება წერტილი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ იგი გვერდით ზედაპირზე გაჩნდა.
29. კონუსის მსახველი $l=5$ სმ-ს, ხოლო ფუძის რადიუსი $R=4$ სმ-ს. კონუსის ზედაპირზე შემთხვევით ჩნდება წერტილი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ იგი ფუძის ზედაპირზე გაჩნდა.
30. ცილინდრის სიმაღლე 6სმ-ია, ხოლო ფუძის რადიუსი ტოლია 4 სმ-ის. ცილინდრის ზედაპირზე შემთხვევით ჩნდება წერტილი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ იგი რომელიმე ფუძის ზედაპირზე გაჩნდა.

3.5.2. ტესტი №5

1. მონაკვეთი სამ ტოლ ნაწილადაა დაყოფილი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ მონაკვეთზე შემთხვევით შერჩეული წერტილი შუა ნაწილში მოხვდება.

ა) $\frac{1}{3}$; ბ) $\frac{1}{2}$; გ) $\frac{1}{4}$; დ) $\frac{2}{3}$; ე) $\frac{1}{5}$.

2. ალბათობა იმისა, რომ d სიგრძის მონაკვეთზე შემთხვევით შერჩეული წერტილი მოხვდეს ამავე მონაკვეთზე მდებარე m სიგრძის მონაკვეთზე გამოითვლება ფორმულით:

ა) $m-d$; ბ) $m+d$; გ) $\frac{d}{m}$; დ) $\frac{m}{d}$; ე) $\frac{m}{m+d}$.

3. ABC სამკუთხედის AC გვერდზე შერჩეულია M წერტილი ისე, რომ $AM:MC=2:5$ იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ABC სამკუთხედ-

ში შემთხვევით შერჩეული წერტილი AMB სამკუთხედს ეკუთვნის.

ა) $\frac{2}{3}$; ბ) $\frac{2}{5}$; გ) $\frac{1}{4}$; დ) $\frac{3}{8}$; ე) $\frac{2}{7}$.

4. ალბათობა იმისა, რომ S ფართობის მქონე ფიგურაში ალაღბედზე შერჩეული წერტილი მოხვდეს ამ ფიგურის იმ ნაწილში, რომლის ფართობია s , მოიცემა ფორმულით.

ა) $S \cdot s$; ბ) $\frac{S}{s}$; გ) $\frac{s}{S}$; დ) $\frac{s}{S+s}$; ე) $\frac{S}{S+s}$.

5. სიბრტყეზე აღებულია R რადიუსიანი წრე და წერტილი, რომელიც წრეწირის ცენტრიდან $2R$ მანძილითაა დაშორებული. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ A წერტილზე შემთხვევით გავლებულმ წრფე მოცემულ წრეს გადაკვეთს?

ა) $\frac{1}{2}$; ბ) $\frac{1}{6}$; გ) $\frac{2}{3}$; დ) $\frac{5}{6}$; ე) 0 .

6. მართკუთხა სამკუთხედში, რომლის კათეტებია 3 და 4 , ჩახაზულია წრე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სამკუთხედის შიგა არეში შემთხვევით აღებული წერტილი არ იქნება ჩახაზული წრის წერტილი.

ა) $\frac{\pi}{6}$; ბ) $\frac{6-\pi}{6}$; გ) $\frac{1}{6}$; დ) $\frac{2}{\pi}$; ე) $\frac{3}{\pi}$.

7. ალბათობა იმისა, რომ V მოცულობის მქონე სხეულში შემთხვევით შერჩეული წერტილი მოხვდეს ამ სხეულის იმ ნაწილში, რომლის მოცულობაა v , მოიცემა ფორმულით:

ა) $v+V$; ბ) $V-v$; გ) $\frac{v}{V}$; დ) $\frac{v}{V+v}$; ე) $\frac{v}{V-v}$.

8. სფეროში, რომლის რადიუსია R , მოთავსებულია r რადიუსის მქონე მცირე სფერო. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ R რადიუსიანი სფეროს შიგნით ალაღბედზე გაჩენილი წერტილი მოთავსდება r რადიუსიან მცირე სფეროს შიგნითაც.

ა) $\frac{r}{R}$; ბ) $\frac{r^2}{R^2}$; გ) $\frac{r}{R^2}$; დ) $\frac{r^3}{R^3}$; ე) $\frac{r^3}{R}$.

9. კუბში რომლის წიბო 4 სმ-ის ტოლია მოთავსებულია კუბი რომლის წიბო 3 სმ-ის ტოლია. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ დიდი ზომის კუბის შიგა არეში ალაღბედზე გაჩენილი წერტილი არ მოთავსდება მცირე ზომის კუბის შიგა არეში.

ა) $\frac{27}{64}$; ბ) $\frac{37}{64}$; გ) $\frac{47}{64}$; დ) $\frac{57}{64}$; ე) $\frac{17}{64}$.

10. მართკუთხა პარალელებიპედის განზომილებებია: სიგრძე არის 4 მეტრი, სიგანე 3 მეტრი, ხოლო სიმაღლე 2 მეტრი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამ სხეულის ზედაპირზე შემთხვევით გაჩენილი წერტილი მის გვერდით ზედაპირზე აღმოჩნდება.

ა) $\frac{5}{13}$; ბ) $\frac{2}{7}$; გ) $\frac{1}{6}$; დ) $\frac{9}{13}$; ე) $\frac{7}{13}$.

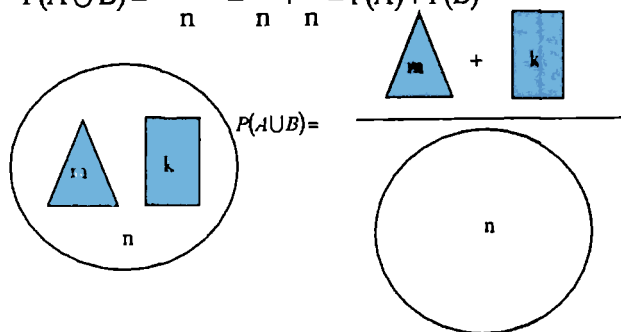
3.6. ალგათობის თვისებები, უთავსებად და თავსებად ხდომილობათა გაერთიანების ალგათობა

ვთქვათ, A ხდომილობის მოხდენის ხელშემწყობ ტოლშესაძლებელ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობის გამომსახველი რიცხვია - m , ხოლო B ხდომილობის მოხდენის ხელშემწყობ ტოლშესაძლებელ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობის რიცხვი კი - k , A და B ხდომილობები უთავსებადია. დავუშვათ n საერთო რიცხვია ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის ყველა ტოლშესაძლებელ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობისა, მაშინ გვაქვს:

$$P(A) = \frac{m}{n}; \quad P(B) = \frac{k}{n}.$$

უთავსებად ხდომილობათა გაერთიანება ნიშნავს: «ადგილი აქვს ან A ან B ხდომილობას». ამ ხდომილობის ხელშემწყობ ხდომილობათა რიცხვი ტოლია $m+k$, ამიტომ გვქეწება:

$$P(A \cup B) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B)$$



ფორმულას შეიძლება მივცეთ გეომეტრიული ინტერპრეტაცია, სადაც შესაბამისად n წრის ფართობია, m - მასში მოთავსებული სამკუთხედის ფართობი, ხოლო k კი წრეში მოთავსებული მართკუთხედის ფართობი, როგორც ნახაზიდან ჩანს სამკუთხედსა და მართკუთხედს საერთო წერტილი არ გააჩნიათ.

ეს ფორმულა შეიძლება განვაზოგადოთ უთავსებად ხდომილობათა ნებისმიერი სასრული რიცხვისათვის:

წყვილ-წყვილად უთავსებად ხდომილობათა გაერთიანების ალბათობა ტოლია ამ ხდომილობათა ალბათობების ჯამის.

განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითი:

1. მფრინავს სამხედრო-სასწავლო მეცადინეობის დროს დაევალა «განადგურებინა» სამი ერთმანეთის გვერდით განლაგებული მოწინააღმდეგის სამხედრო საწყობები. თვითმფრინავის ბორტზე არის ერთი ბომბი, ხოლო პირველ საწყობზე ბომბის მოხვედრის ალბათობა ტოლია 0,01-ის; მეორეზე - 0,008-ის; ხოლო მესამეზე კი - 0,045-ის, ნებისმიერი მოხვედრა დეტონაციის საფუძველზე იწვევს დანარჩენი საწყობების აფეთქებასაც. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მოწინააღმდეგის საწყობები განადგურებულია.

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

A - «საწყობები განადგურებულია»,

A_1 - «ბომბი მოხვდა I საწყობს»,

A_2 - «ბომბი მოხვდა II საწყობს»,

A_3 - «ბომბი მოხვდა III საწყობს».

რადგან საწყობების გასანადგურებლად საკმარისია ერთ-ერთს მაინც მოხედეს ბომბი, ამიტომ გვექნება:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3.$$

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \\ = 0,01 + 0,008 + 0,045 = 0,063.$$

2. პოლიციის სამმებრო განყოფილებაში მოვიდა შეტყობინება, იმის თაობაზე რომ ხუთმა უცნობმა პირმა გაძარცვა ბანკი; თანხა გაინაწილეს და დანაშაულის ადგილიდან გაუჩინარდნენ. პოლიციის კომისარმა, რომელიც საქმეს იძიებდა, თვითმხილველებთან საუბრისას დაადგინა რომ დამნაშავენი იმყოფებიან საერთაშორისო თვითმფრინავის სალონში. აეროპორტში მისვლისას კომისარს აუხსნეს, რომ თვითმფრინავი, რომლის სალონში იმყოფება 40 მგზავრი ნახევარ საათში უნდა გაფრინდეს, ყველა მგზავრის გაჩხრეკა გამოიწვევს რეისის დაგვიანებას და საერთაშორისო სკანდალს; მაგრამ კომისარმა აუხსნა აეროპორტის ხელმძღვანელობას, რომ მისთვის

საკმარისია მხოლოდ 6 მგზავრის გაჩხრეკა და თვითმფრინავს შემდეგ შეუძლია განახორციელოს შესაბამისი რეისი. მართლაც, ჩხრეკისას ერთ-ერთ მგზავრს აღმოაჩნდა ბანკიდან ნაძარცვი თანხის ბანკნოტები და მისი თითების ანაბეჭდიც დაემთხვა ბანკიდან აღებულ ანაბეჭდს. მან დაასახელა თანამონაწილენი და საძიებო საქმეც დამთავრდა.

რით ხელმძღვანელობდა კომისარი, რისკით, თუ წინასწარგათვლილი ანგარიშით?

ამოხსნა: სანამ უშუალოდ კითხვას ვუპასუხებდეთ მანამდე განვიხილოთ ასეთი ამოცანა:

ვთქვათ, ყუთში ძეგს n რაოდენობის ზუსტად ერთნაირი ზომის ბურთულა; მათგან m რაოდენობის ბურთულა თეთრი ფერისაა, ხოლო $n-m$ რაოდენობის კი, შავი ფერის. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან შემთხვევით ამოღებულ r რაოდენობის ბურთულებს შორის k რაოდენობის ბურთულა აღმოჩნდება თეთრი ფერის.

თუ r რაოდენობის ბურთულას შორის k რაოდენობის ბურთულა იქნება თეთრი ფერის; მაშინ $r-k$ რაოდენობის ბურთულა იქნება შავი ფერის. რადგან ყუთში m თეთრი ბურთულაა მათგან k რაოდენობის ბურთულა შეიძლება ავარჩიოთ C_m^k ხერხით, ხოლო შესაბამისად $n-m$ რაოდენობის შავი ფერის ბურთულიდან $r-k$ ოდენობის შავი ფერის ბურთულა შეიძლება ავარჩიოთ C_{n-m}^{r-k} ხერხით. ამონაკრეფთა რიცხვი, რომელიც ხელშემწყობია მოცემული ხდომილობის იქნება შემდეგი ნამრავლი $C_m^k \cdot C_{n-m}^{r-k}$. რადგან n ელემენტიდან r ელემენტი შეიძლება ავარჩიოთ C_n^r ხერხით, ამიტომ გვექნება:

$$P («r \text{ ბურთულას შორის } k \text{ თეთრი ფერისაა}») = \frac{C_m^k \cdot C_{n-m}^{r-k}}{C_n^r}$$

ამ ალბათობების ერთობლიობას ეწოდება ჰიპერგეომეტრიული განაწილება. მისი გამოყენების საშუალებით შეიძლება ავხსნათ პოლიციის კომისრის მოქმედება, რომელმაც დანაშაული გახსნა.

ვთქვათ, ხდომილობაა - «შემთხვევით გამოძახებულ 6 მგზავრს შორის ერთი მაინც დამნაშავეა».

A_1 ხდომილობა - «გამოძახებულ 6 მგზავრს შორის 1 დამნაშავეა».

A_2 ხდომილობა - «გამოძახებულ 6 მგზავრს შორის 2 დამნაშავეა».

A_3 ხდომილობა - «გამოძახებულ 6 მგზავრს შორის 3 დამნაშავეა».

A_4 ხდომილობა - «გამოძახებულ 6 მგზავრს შორის 4 დამნაშავეა».

A_5 ხდომილობა - «გამოძახებულ 6 მგზავრს შორის 5 დამნაშავეა».

ცხადია, ხდომილობები A_1, A_2, A_3, A_4 და A_5 წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელია და მასთან $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$ ამიტომ

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5),$$

გვაქვს:

$$P(A_1) = \frac{C_5^1 \cdot C_{35}^5}{C_{40}^6} \approx 0,4192,$$

$$P(A_2) = \frac{C_5^2 \cdot C_{33}^4}{C_{40}^6} \approx 0,1364,$$

$$P(A_3) = \frac{C_5^3 \cdot C_{31}^3}{C_{40}^6} \approx 0,017,$$

$$P(A_4) = \frac{C_5^4 \cdot C_{29}^2}{C_{40}^6} \approx 0,0008,$$

$$P(A_5) = \frac{C_5^5 \cdot C_{27}^1}{C_{40}^6} \approx 0,00001.$$

ამრიგად, $P(A) \approx 0,5734$ ალბათობა იმისა, რომ 6 შემთხვევით არჩეულ მგზავრს შორის, 40 მგზავრიდან, აღმოჩნდება ერთი მაინც დამნაშვე უფრო მეტია ვიდრე $\frac{1}{2}$. აქედან გამომდინარე პოლიციის კომისარს აუცილებელ შემთხვევაში შეძლება ალბათობის თეორიის ელემენტების გამოყენება.

პიპერგეომეტრიული განაწილება შეიძლება წარმატებით იქნას გამოყენებული ბევრ პრაქტიკულ სიტუაციაში: ინფექციურ დაავადებათა გავრცელების გამოსაკვლევადა, ნაკეთობების ხარისხის კონტროლირებისას და სხვა.

3. აგდებენ ორ მონეტას, ვიპოვოთ ალბათობა, იმისა, რომ ერთ-

ერთი მათგანზე მაინც მოვა გერბი.

ამოხსნა: აღვნიშნოთ შემდეგი ხდომილობები:

A - «გერბის მოსვლა პირველ მონეტაზე»,

B - «გერბის მოსვლა მეორე მონეტაზე».

ამჯერადაც გვიხდება $C = A \cup B$ ხდომილობის აღბათობის პონა, მაგრამ ამ შემთხვევაში $P(C) \neq P(A) + P(B)$, რადგან A და B ხდომილობები თავსებადია, ამიტომ ამ შემთხვევაში დაგვჭირდება მოვებნოთ ამოხსნის სხვა გზა.

ვთქვათ, $\bar{C}$ ხდომილობაა - «არცერთ მონეტაზე გერბი არ მოვიდა». ცხადია, $P(\bar{C}) = \frac{1}{4}$; რადგან ორი მონეტის აგდებისას ადგილი

აქვს მხოლოდ შემდეგ ხდომილობებს: «პირველ მონეტაზე გერბი მოვიდა და მეორეზეც», «პირველ მონეტაზე მოვიდა გერბი, ხოლო მეორეზე კი საფასური», «პირველ მონეტაზე მოვიდა საფასური ხოლო მეორეზე კი გერბი» და «არცერთი გერბი არ მოვიდა,» ანუ «ორივე მონეტაზე მოვიდა საფასური».

ხდომილობა $C \cup \bar{C}$ წარმოადგენს აუცილებელ ხდომილობას, ამიტომ $C \cup \bar{C} = \Omega$; მასთან C და $\bar{C}$ ხდომილობები უთავსებადია, მაშინ გვექნება:

$$P(\Omega) = P(C \cup \bar{C}) = P(C) + P(\bar{C}).$$

რადგან $P(\Omega) = 1$, ხოლო $P(\bar{C}) = \frac{1}{4}$, ამიტომ

$$P(C) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

თავსებად ხდომილობათა გაერთიანების აღბათობა

ვთქვათ, A ხდომილობის მოხდენის ტოლშესაძლებელ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობის რიცხვი ტოლია m-ის, ხოლო B ხდომილობის კი k-სი. დავუშვათ, რომ $m+k$ ხდომილობებს შორის არსებობს l რაოდენობის ისეთი ხდომილობები, რომლებიც ხელშეწყობია როგორც A ხდომილობის გაჩენისა ასევე B ხდომილობის გაჩენისაც. თუ n - საერთო რიცხვია Ω ელემენტარულ ხდომილობათა

სივრცის ტოლშესაძლებელ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობისა, მაშინ გვექნება:

$$P(A) = \frac{m}{n}; \quad P(B) = \frac{k}{n}, \quad P(A \cap B) = \frac{\ell}{n}.$$

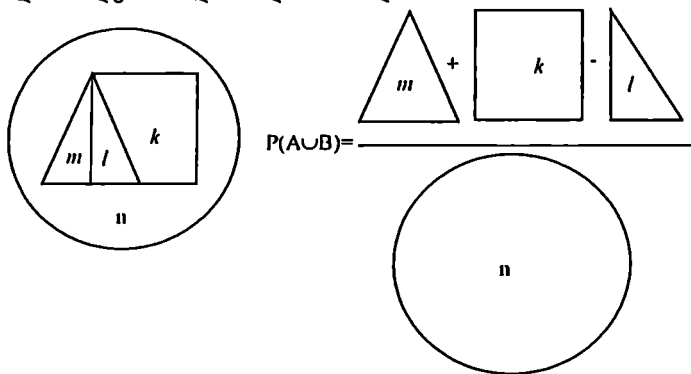
ამ შემთხვევაში ჩანაწერი $A \cup B$ აღნიშნავს: «ხდება ან A ხდომილობა, ან B ხდომილობა, ან ერთიც და მეორეც ერთდროულად». ასეთი ხდომილობის მოხდენის ხელშემწყობ ტოლშესაძლებელ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობის რიცხვი იქნება $(m + k - \ell)$. ამიტომ გვექნება:

$$P(A \cup B) = \frac{m + k - \ell}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} - \frac{\ell}{n}$$

თუ ჩავსვამთ შესაბამის მნიშვნელობებს მაშინ მივიღებთ:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ფორმულის საფუძველზე ჩამოვაცალიბოთ შემდეგი წესი: ორი თავსებადი ხდომილობის გაერთიანების ალბათობა ტოლია ამ ხდომილობების ალბათობების ჯამს გამოკლებული მათი ერთდროულად მოხდენის ხდომილობის ალბათობა.



ფორმულას შეიძლება მივცეთ გეომეტრიული ინტერპრეტაცია, სადაც შესაბამისად n წრის ფართობია, m მასში მოთავსებული ტოლფერდა სამკუთხედის ფართობი, k წრეში მოთავსებული მართკუთხედის ფართობი, ხოლო ℓ - კი მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი, რომელიც შედგება ტოლფერდა სამკუთხედისა და მართკუ-

თხედის საერთო წერტილებისაგან.

განვიხილოთ მაგალითები:

1. აგორებენ ორ კამათელს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ერთ-ერთ მათგანზე მაინც მოვა ექვსი ქულა.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ ხდომილობები:

A - «პირველი კამათლის გაგორებისას, მასზე მოვა ექვსიანი».

B - «მეორე კამათლის გაგორებისას, მასზე მოვა ექვსიანი»..

ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ $C = A \cup B$ ხდომილობის ალბათობა.

რადგან A და B თავსებადი ხდომილობებია, მასთან

$$P(A) = \frac{1}{6}; \quad P(B) = \frac{1}{6}; \quad P(A \cap B) = \frac{1}{36};$$

$$\text{აქედან } P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

2. ვთქვათ, A, B და C - თავსებადი ხდომილობებია. დავამტკიცოთ:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) + P(A \cap B \cap C) - \\ - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C).$$

აღვნიშნოთ, $A \cup B = D$, მაშინ

$$P(A \cup B \cup C) = P(D \cup C) = P(D) + P(C) - P(D \cap C) = \\ = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) = \\ = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \\ = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + \\ + P((A \cap C) \cap (B \cap C)) = P(A) + P(B) + P(C) + \\ + P(A \cap B \cap C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C).$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა. დამტკიცებისას ვისარგებლეთ შემდეგი ტოლობით $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.

3. ქუდის მოძებნის ამოცანა. იანვრის ერთი საღამოს რამდენიმე მეგობარი ერთად შეიკრიბა, რადგან ძალზე ციოდა, ამიტომ თითოეულმა მათგანმა შემოსასვლელში დატოვა თავისი ქუდი და მოსასხამებით დასხდნენ სასაუბროდ სასტუმრო ოთახში. ლამით შუქი ჩაქრა, მეგობრები დაიშალნენ და შემთხვევით დაიხურეს ის ქუდი რომელიც ხელში მოხვდათ. მათ გადაწყვიტეს მეორე დღეს კვლავ შეკრე-

ბილიყვენ და თავთავიანთი ქუდეზი დაებრუნებინათ ერთმანეთი-სათვის; ერთ-ერთმა მათგანმა სანუგეშოდ თქვა: «ვიმედოვნებ, ერთ-ერთმა ჩვენთაგანმა მაინც დაიხურა ეხლა თავისი ქუდი».

გამოვარკვიოთ, რამდენად საფუძვლიანი იყო მისი წინადადება.

ამოხსნა: დავნომროთ საღამოს შეკრებილი მეგობრები: 1, 2, 3, ..., n. ვთქვათ, A_i ხდომილობაა ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) - « i მეგობარმა დაიხურა თავისი ქუდი» მაშინ ხდომილობა $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$ აღნიშნავს - «ყოველ შემთხვევაში ერთმა მეგობარმა მაინც დაიხურა თავისი ქუდი». რადგან ხდომილობები $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ არ არიან უთავსებადი ამიტომ $P(A)$ -ს გამოთლა რამდენადმე რთულდება.

ვთქვათ, A_1 და A_2 ხდომილობები თავსებადი ხდომილობებია, მაშინ ფორმულის ძალით $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ თუ A_1, A_2 და A_3 ხდომილობები - თავსებადი ხდომილობებია მაშინ გვაქვს:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$P(A_1 \cup A_2)$ და $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ შედარება გვკარნახობს, რომ

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = S_{1n} - S_{2n} + S_{3n} - S_{4n} + \dots + (-1)^{n+1} S_{nn} \quad (1),$$

სადაც,

$$S_{1n} = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n),$$

$$S_{2n} = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + \dots + P(A_{n-1} \cap A_n),$$

$$S_{3n} = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \dots + P(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n),$$

$$S_{nn} = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n).$$

ჩვენი დაშვების ჭეშმარიტება შევამოწმოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით. დავუშვათ, რომ ფორმულა ჭეშმარიტია, და განესაზღვროთ:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}).$$

ვთქვათ, ხდომილობა $B = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, მაშინ

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}) &= P(B \cup A_{n+1}) = P(B) + P(A_{n+1}) - P(B \cap A_{n+1}) = \\
&= S_{1n} - S_{2n} + \dots + (-1)^{n+1} S_{nn} + P(A_{n+1}) - P(B \cap A_{n+1}) = (S_{1n} + P(A_{n+1})) - \\
&- (S_{2n} + P(A_1 \cap A_{n+1}) + P(A_2 \cap A_{n+1}) + \dots + P(A_n \cap A_{n+1})) + \\
&+ (S_{3n} + P(A_1 \cap A_2 \cap A_{n+1}) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_{n+1}) + \dots + P(A_{n-1} \cap A_n \cap A_{n+1})) - \\
&- \dots + (-1)^{n+2} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1}) = S_{1,n+1} - S_{2,n+1} + S_{3,n+1} - \\
&- S_{4,n+1} + \dots + (-1)^{n+2} S_{n+1,n+1};
\end{aligned}$$

რაც ამტკიცებს ფორმულის სამართლიანობას.

რამდენადაც n რაოდენობის ქუდი n რაოდენობის მეგობარმა თავიანთ თავებზე შეიძლება დაიხურონ $n!$ ხერხით, ხოლო იმ შემთხვევაში თუ რომელმე i -ური ნომრის მეგობარი თავზე მოირგებს თავის ქუდს, მაშინ დანარჩენები ქუდებს თავზე დაიხურავენ $(n-1)!$ ხერხით, ამიტომ

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

თუკი ორი მეგობარი (i -ური და j -ური ნომრების) თავთავიანთ ქუდებს დაიხურავენ, მაშინ დანარჩენები ქუდს თავზე დაიხურავენ $(n-2)!$ ხერხით. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)},$$

შესაბამისად,

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)},$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = \frac{1}{n!}$$

S_{1n} ჯამს გააჩნია n წევრი, ამიტომ

$$S_{1n} = \frac{1}{n} \cdot n = 1,$$

S_{2n} ჯამს გააჩნია C_n^2 წევრი, ამიტომ

$$S_{2n} = \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2!} = \frac{1}{2!},$$

ანალოგიურად,

$$S_{3n} = \frac{1}{3!}; \quad S_{4n} = \frac{1}{4!}; \dots; S_{nn} = \frac{1}{n!}.$$

მიღებულ მნიშვნელობებს თუ გავითვალისწინებთ (1) ფორმულაში, მაშინ გვექნება რომ

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$$

როგორი იქნება დამოკიდებულება $P(A)$ -სა და n -ს შორის? შევავსოთ შემდეგი ცხრილი:

n	3	4	5	6	7	100
P(A)	0,66667	0,625	0,63333	0,63196	0,63214	0,63212

შედეგები მოულოდნელია; ალბათობა იმისა, რომ სამი კაციდან ერთი მაინც მოირგებს თავზე თავის ქუდს, თითქმის, იგივეა რაც ალბათობა იმისა, რომ ასი კაციდან ერთი მაინც მოირგებს თავზე თავის ქუდს. ერთ შემთხვევაშიც და მეორეშიც ალბათობები ახლოს დგანან $\frac{2}{3}$ -თან. ამიტომ დავასკვნით, რომ ნათქვამი წინადადება საფუძვლიანია.

3.6.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მცვაწინეობისათვის

1. ყუთში მოთავსებულია 40 ბურთულა, რომელთაგან 10 თეთრია, 20 შავი, 4 წითელი და 6 ლურჯი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან ალაღბედზე ამოღებულ ბურთულა ან შავი, ან წითელი ფერის იქნება.
2. R რადიუსიან წრეში მოთავსებულია ორი r რადიუსიანი წრე, რომელთაც ერთმანეთთან საერთო წერტილი არ გააჩნიათ, ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ R რადიუსიან წრეში შემთხვევით გაჩენილი წერტილი მოხვდება r რადიუსიან ერთ-ერთ წრეში მაინც.
3. ერთ ყუთში 2 თეთრი და 3 შავი ბურთულაა, მეორეში 1 თეთრი, 1

- შავი და 3 წითელი ბურთულა. ორივე ყუთის ბურთულები მოათავსეს ერთ დიდ ყუთში და იქიდან ალაზხედზე ამოიღეს ერთი ბურთულა, ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბურთულა არ იქნება შავი ფერის.
4. მაღაზიაში მიიტანეს I ხარისხის 1000, II ხარისხის 900 და III ხარისხის 1100 ნაკეთობა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ნაკეთობა ან I ხარისხის, ან III ხარისხის იქნება?
 5. ალბათობა იმისა, რომ პირველი მსროლელი სამიზნეს მოახვედრებს 0,8-ის ტოლია, მეორე მსროლელისათვის იგივე ალბათობა უდრის 0,9-ს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე მსროლელის მიერ თითოჯერ გასროლის შემდეგ სამიზნე დაზიანდება, თუ ცნობილია, რომ სამიზნის დასაზიანებლად მიზანში ერთხელ მოხვედრაა საკმარისი?
 6. ლითონის ფული მიმდევრობით ააგდეს სამჯერ. A ხდომილობაა - «პირველად აგდებისას მოვიდა გერბი», B ხდომილობაა - «საფასურის ერთხელ მაინც მოსვლა». იპოვეთ A და B ხდომილობების ალბათობები.
 7. ერთდროულად ააგდეს მონეტა და გააგორეს კამათელი. A ხდომილობაა - «მონეტაზე გერბის მოსვლა», B ხდომილობაა - კამათელზე მოსულია კენტი რიცხვი. იპოვეთ A და B ხდომილობების ალბათობები.
 8. ერთდროულად გააგორეს ჩვეულებრივი და თორმეტწახნაგა კამათელი, A ხდომილობაა - «ჩვეულებრივ კამათელზე ლუწი რიცხვის მოსვლა», B ხდომილობაა - «თორმეტწახნაგა კამათელზე ლუწი რიცხვის მოსვლა». იპოვეთ A და B ხდომილობების ალბათობები.
 9. სამი მსროლელისათვის მიზანში მოხვედრების ალბათობა თითოეულისათვის შესაბამისად 0,9-ის ტოლია. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მიზანში ერთი გასროლა მაინც მოხვდება, თუ თითოეული მათგანი მხოლოდ ერთ გასროლას აკეთებს.
 10. სამი მსროლელისათვის მიზანში მოხვედრების ალბათობა თი-

თოეულისათვის შესაბამისად 0,9-ის ტოლია. მათ თითოჯერ ეს-
როლეს მიზანს; ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სამიზნეს მხო-
ლოდ ერთი გასროლა მოხვდა.

11. ამწყობმა საამქრომ მიიღო ერთიდაიგივე დეტალების ორი პარ-
ტია: 200 დეტალი, რომელთაგან 4 არასტანდარტულია და 100
დეტალი, რომელთაგან 5 არასტანდარტულია. რას უდრის ალბა-
თობა იმისა, რომ თითოეული პარტიიდან ალაღბედზე აღებუ-
ლი თითო დეტალიდან ერთი მაინც სტანდარტული იქნება?
12. ორი მონადირე ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ესვრის კურ-
დღელს. კურდღელი კვდება, თუ მას მოხვდება თუნდაც ერთი
ტყვია. ალბათობა იმისა, რომ კურდღელს მოახვედრებს პირვე-
ლი მონადირე ტოლია 0,2-ის, ხოლო მეორე რომ მოახვედრებს -
0,15-ის. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მონადირეების თითო-
ჯერ გასროლის შემდეგ კურდღელი მოკვდება.
13. წრეში მოთავსებულია კვადრეტი და წესიერი სამკუთხედი, მათ
საერთო წერტილი არა აქვთ (მათი ფართობია S , S_1 და S_2) ვიპო-
ვოთ ალბათობა იმისა, რომ წრეში შემთხვევით გაჩენილი წერ-
ტილი კვადრატში ან სამკუთხედში მაინც მოხვდება.
14. წესიერი ABC სამკუთხედი BD მედიანით გაყოფილია ორ ტოლ
სამკუთხედად, მასში აგრეთვე ჩახაზულია წრე. ვიპოვოთ ალბა-
თობა იმისა, რომ ABC სამკუთხედში შემთხვევით გაჩენილი
წერტილი მასში ჩახაზულ წრეში, ან ABD სამკუთხედში მაინც,
მოხვდება.
15. მონაკვეთზე, რომლის სიგრძე 20 სმ-ის ტოლია, მოთავსებულია
12 სმ სიგრძის და 7 სმ სიგრძის ორი მონაკვეთი, რომელთაც სა-
ერთო წერტილი არ გააჩნიათ. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ
20 სმ-იან მონაკვეთზე შემთხვევით გაჩენილი წერტილი ან 12 სმ-
იანი ან 7 სმ-იანი მონაკვეთებიდან ერთ-ერთზე მაინც მოხვდება.
16. 20 სმ-იან მონაკვეთზე მოთავსებულია 12 სმ და 7 სმ სიგრძის მო-
ნაკვეთები, რომელთაც გააჩნიათ 5 სმ-ის სიგრძის ტოლი საერთო
მონაკვეთი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ 20 სმ-იან მონაკვეთ-

ზე შემთხვევით გაჩენილი წერტილი ან 12 სმ-იანი ან 7 სმ-იანი მონაკვეთებიდან ერთ-ერთზე მაინც მოხვდება.

17. სფეროში, რომლის რადიუსი R -ის ტოლია, მოთავსებულია ორი r რადიუსის მქონე სფერო, მასთან მცირე სფეროებს ერთმანეთთან საერთო წერტილი არ გააჩნიათ. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ R რადიუსიანი სფეროს შიგნით (ბირთვში), შემთხვევით, გაჩენილი წერტილი რომელიმე მცირე სფეროს შიგნით მაინც მოხვდება.
18. ერთი მსროლელი ყოველი 100 გასროლიდან საშუალოდ 90-ჯერ ახვედრებს მიზანში, მეორე კი იმავე პირობებში - 70-ჯერ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სამიზნე დაზიანდება, თუ ორივე მსროლელი თითოჯერ ესვრის მას.
19. ორი მსროლელი ესვრის ერთ სამიზნეს. პირველი სამიზნეს დაზიანებს 0,6-ის ტოლი, ხოლო მეორე კი - 0,9-ის ტოლი ალბათობით. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე მსროლელის მიერ ერთდროულად გასროლის შედეგად სამიზნეს მხოლოდ ერთი გასროლა მოხვდება.
20. ხიდის დასანგრევად საკმარისია მას მოხვდეს ერთი ყუმბარა. ვიპოვოთ ხიდის დანგრევის ალბათობა, თუ მას თითოჯერ ესვრიან ოთხი სხვადასხვა მხრიდან, რომელთა მოხვედრების ალბათობები შესაბამისად ტოლია 0,3-ის; 0,4-ის, 0,5-ის და 0,6-ის.
21. ხელსაწყო შედგება 3 ურთიერთდამოუკიდებლად მომუშავე ელემენტებისაგან. ელემენტების მწყობრიდან გამოსვლის ალბათობები შესაბამისად ტოლია 0,2; 0,02 და 0,15-ის. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ხელსაწყო მწყობრიდან გამოვა, თუ ამისათვის საკმარისია ერთი ელემენტის მწყობრიდან გამოსვლა მაინც.
22. სფეროში მოთავსებულია ნახევარსფერო (იგივე ფუძის დიამეტრის მქონე, რაც სფეროს გააჩნია) და ჩახაზულია კუბი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სფერო შიგნით (ბირთვში) შემთხვევით გაჩენილი წერტილი აღმოჩნდება ნახევარსფეროს შიგა არეში, ან

კუბის შიგა არეში მაინც.

23. კუბის წახნაგებზე ჩახაზულია წრეები. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ კუბის ზედაპირზე შემთხვევით გაჩენილი წერტილი არ აღმოჩნდება არცერთი წრის შიგა წერტილი.
24. კონუსის (რომლის მსახველი ფუძის რადიუსზე 2-ჯერ მეტია) ფუძეში ჩახაზულია კვადრატის. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ კონუსის ზედაპირზე, შემთხვევით, გაჩენილი წერტილი კვადრატის შიგა არეშიც მოხვდება.
25. ცილინდრის (რომლის სიმაღლე ფუძეების რადიუსის ტოლია) ფუძეებში ჩახაზულია წესიერი სამკუთხედები. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ცილინდრის ზედაპირზე შემთხვევით გაჩენილი წერტილი რომელიმე სამკუთხედის შიგა წერტილიც აღმოჩნდება.
26. წესიერი ტეტრაედრის წახნაგებზე ჩახაზულია წრეები. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ტეტრაედრის ზედაპირზე შემთხვევით გაჩენილი წერტილი რომელიმე წრის შიგა არეშიც აღმოჩნდება.
27. წესიერი ტეტრაედრის წახნაგები შეღებილია შემდეგი წესით: პირველი წახნაგი თეთრი ფერისაა, მეორე წითელი ფერის, მესამე მწვანე, ხოლო მეოთხე წახნაგზე გვხვდება სამივე ფერი თეთრიც, წითელიც და მწვანეც, ტეტრაედრის ალაღბედზე აგორებენ გლუვ ზედაპირზე, ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ზედაპირზე დაფიქსირების შემდეგ ქვემოთ აღმოჩნდება წახნაგი, რომელზეც წითელი ფერი იქნება.
28. წესიერი ტეტრაედრის წახნაგები შეღებილია შემდეგი წესით: თეთრი, წითელი, მწვანე და მეოთხე წახნაგზე გვხვდება სამივე ფერი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ტეტრაედრის გლუვ ზედაპირზე, ალაღბედზე გაგორების შედეგად ქვემოთ აღმოჩნდება წახნაგი, რომელზეც იქნება წითელი, ან მწვანე ფერი.
29. 20 სმ სიგრძის AB მონაკვეთზე შემთხვევით იღებენ M წერტილს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ M წერტილი A -დან დაშორებულია არაუმეტეს 8სმ-ით, ხოლო AB მონაკვეთის შუაწერტილი-

დან კი 6 სმ-ზე მეტი მანძილი.

30. დომინოს სათამაშო ქვების სრული კომპლექტიდან ალაღბედზე იღებენ ერთ ქვას. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ აღებულ ქვაზე ქულათა ჯამი იქნება არაუმეტეს სამისა, ან არანაკლებ 10-ისა.

3.6.2. ტესტი №6

- ერთი მსროლელისათვის მიზანში მოხვედრის ალბათობაა p , მეორისათვის q . რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მიზანში ერთი გასროლა მაინც მოხვდება?
ა) $p+q$; ბ) pq ; გ) $(1-p)(1-q)$; დ) $p+q-pq$; ე) $p(1-q)$.
- ბანქოს სრული კომპლექტიდან (52 სათამაშო ქაღალდი-კარტი) ალაღბედზე იღებენ ერთ კარტს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ იგი იქნება რომელიმე ორიანი, ან ჯვრის მასტის.
ა) $\frac{17}{52}$; ბ) $\frac{4}{13}$; გ) $\frac{1}{13}$; დ) $\frac{1}{4}$; ე) $\frac{1}{3}$.
- ბანქოს 36 კარტიანი სათამაშო კომპლექტიდან ალაღბედზე იღებენ ერთ კარტს, ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ იგი ან ტუზია, ან ქალი, ან წითელი ფერის მასტის.
ა) $\frac{7}{16}$; ბ) $\frac{17}{36}$; გ) $\frac{5}{12}$; დ) $\frac{5}{18}$; ე) $\frac{11}{18}$.
- ბანქოს 32 კარტიანი სათამაშო კომპლექტიდან ალაღბედზე იღებენ ერთ კარტს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული კარტი იქნება აუცილებლად რომელიმე რიცხვით (შვიდიანი, რვანი, ცხრიანი, ან ათიანი), ან ჯვრის მასტის.
ა) $\frac{5}{8}$; ბ) $\frac{3}{8}$; გ) $\frac{1}{2}$; დ) $\frac{2}{3}$; ე) $\frac{1}{3}$.
- ვთქვათ, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$. იპოვეთ $P(A \cap B)$
ა) $\frac{3}{20}$; ბ) $\frac{1}{4}$; გ) $\frac{1}{5}$; დ) $\frac{1}{25}$; ე) $\frac{1}{20}$.

6. თუ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, მაშინ აუცილებლად

ა) $P(A+B)=P(A)+P(B)$, ბ) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A \cdot B)$,

გ) $P(A \cap B)=0$, დ) $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ ე) $P(A+B)=P(A) \cdot P(B)$.

7. თუ A და B ხდომილობა არათავსებადია, მაშინ არ არის სწორი, რომ

ა) $P(A+B)=P(A)+P(B)$, ბ) $P(A \cap B) \neq 0$, გ) $P(A \cap B)=0$,

დ) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A \cdot B)$,

ე) სწორია ყველა, გარდა ბ)-სი.

8. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ რომელიმე შემთხვევით შერჩეული წლის იანვრის თვეში იქნება 5 კვირადღე.

ა) $\frac{4}{7}$; ბ) $\frac{3}{7}$; გ) $\frac{5}{7}$; დ) $\frac{2}{7}$; ე) $\frac{6}{7}$.

9. აგორებენ ჩვეულებრივ და თორმეტწახნაგა კამათელს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ერთ-ერთ კამათელზე მოსული რიცხვი ერთით მეტი იქნება მეორე კამათელზე მოსულ რიცხვზე.

ა) $\frac{11}{72}$; ბ) $\frac{13}{72}$; გ) $\frac{7}{36}$; დ) $\frac{5}{36}$; ე) $\frac{5}{18}$.

10. აგორებენ ჩვეულებრივ და თორმეტწახნაგა კამათელს, ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ერთ-ერთ კამათელზე მოსული რიცხვი ორით მეტი იქნება მეორე კამათელზე მოსულ რიცხვზე.

ა) $\frac{11}{16}$; ბ) $\frac{11}{36}$; გ) $\frac{5}{18}$; დ) $\frac{5}{36}$; ე) $\frac{2}{9}$.

3.7. პირობითი ალბათობა

ყუთიდან, რომელშიც a რაოდენობის თეთრი ფერის და b რაოდენობის შავი ფერის ბურთულაა, შემთხვევით, ერთმანეთის მიყოლებით, იღებენ ორი ბურთულას.

განვიხილოთ ხდომილობები:

A - «პირველად ამოღებული ბურთულა თეთრი ფერისაა»,

B - «მეორედ ამოღებული ბურთულა თეთრი ფერისაა».

ცხადია, რომ $P(A) = \frac{a}{a+b}$, რას უდრის B ხდომილობის ალბათობა?

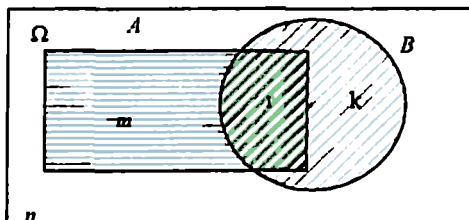
თუ A ხდომილობა მოხდა, მაშინ ყუთში დარჩენილ $a+b-1$ ბურთულას შორის იქნება $a-1$ თეთრი ფერის ბურთულა, ამიტომ ალბათობა იმისა, რომ მეორედ ამოღებული ბურთულა თეთრი ფერის იქნება ტოლია $\frac{a-1}{a+b-1}$, ხოლო თუ A ხდომილობა არ მოხდა, მაშინ დარჩენილ $a+b-1$ ბურთულას შორის a რაოდენობის თეთრი ფერის ბურთულა იქნება, ამიტომ ალბათობა იმისა, რომ მეორე ბურთულა თეთრი იქნება ტოლია $\frac{a}{a+b-1}$. ჩვენ მოვხვდით ისეთ სიტუაციაში, სადაც B ხდომილობის მოხდენა დამოკიდებულია იმაზე მოხდა თუ არა A ხდომილობა. ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ B ხდომილობა დამოკიდებულია A ხდომილობაზე, ხოლო B ხდომილობის ზემოთ მოყვანილი ალბათობები პირობითი ალბათობებია.

ვიპოვოთ ასეთი ხდომილობების ალბათობების გამოთვლის ხერხი.

B ხდომილობის მოხდენის პირობითი ალბათობა, იმ პირობით, რომ მოხდა A ხდომილობა, აღვნიშნოთ $P_A(B)$.

A ხდომილობის ხელშემწყობია m რაოდენობის ელემენტარული ხდომილობა, B ხდომილობისა k რაოდენობის ხდომილობა, ხოლო $A \cap B$ ხდომილობისა r - რაოდენობის ხდომილობა (ცხადია, რომ $r \leq k$, $r \leq m$), თუ მოხდა A ხდომილობა ეს იმას ნიშნავს, რომ მოხდა

ერთ-ერთი ხდომილობათაგანი, რომელიც ხელისშემწყობია A ხდომილობის მოხდენისა. ამ პირობასთან ერთად B ხდომილობის ხელისშემწყობია r და მხოლოდ r რაოდენობის ელემენტარული ხდომილობები, რომლებიც ხელისშემწყობია აგრეთვე $A \cap B$ ხდომილობისა (გეომეტრიული ინტერპრეტაცია წარმოდგენილია ნახაზზე).



ამრიგად,

$$P_A(B) = \frac{r}{m} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{m}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (1)$$

ზუსტად ასევე გამომდინარეობს, რომ $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

ამ ფორმულების საფუძველზე ვპოულობთ, რომ

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A) \text{ და } P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B),$$

$$\text{ე.ი. } P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A) = P(A) \cdot P_A(B) \quad (2)$$

ამ ფორმულის საფუძველზე ჩამოვყალიბოთ ალბათობათა ნამრავლის წესი:

ორი ხდომილობის გადაკვეთის ალბათობა ტოლია ერთ-ერთი ხდომილობის ალბათობის ნამრავლისა მეორე ხდომილობის პირობით ალბათობაზე იმ პირობით, რომ პირველი უკვე მოხდა.

შენიშვნა: ფორმულებს (1) და (2) მხოლოდ მაშინ აქვთ ადგილი, როცა აზრი აქვთ ხდომილობებს A_B და B_A (A ხდომილობას B პირობით და B ხდომილობას A პირობით), ხოლო მათ მაშინ აქვთ აზრი როცა A და B ხდომილობები თავსებადია.

განვიხილოთ მაგალითები:

1. ყუთში a რაოდენობის თეთრი და b რაოდენობის შავი ფერის ბურთულაა ($a \geq 2$ და $b \geq 2$). ყუთიდან თანამიმდევრობით იღებენ ორ ბურთულას, ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე ამოღებული ბურთულა იქნება თეთრი ფერის.

ამოხსნა: აღვნიშნოთ ხდომილობები:

A - «პირველად ამოღებული ბურთულა თეთრი ფერისაა»,

B - «მეორედ ამოღებული ბურთულა თეთრი ფერისაა».

ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ $P(A \cap B)$. გვაქვს:

$$P(A) = \frac{a}{a+b}; \quad P_A(B) = \frac{a-1}{a+b-1}.$$

(2) ფორმულის თანახმად ვიპოვოთ:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}.$$

2. დაამტკიცეთ: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3)$ თუ A_1, A_2 და A_3 ხდომილობები თავსებადია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $A_1 \cap A_2 = B$

$$\begin{aligned} \text{მაშინ } P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P((A_1 \cap A_2) \cap A_3) = P(B \cap A_3) = \\ &= P(B) \cdot P_B(A_3) = P(A_1 \cap A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \end{aligned}$$

რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

3.7.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მემცადინეობისათვის

1. იპოვეთ ლუწი რიცხვის მოსვლის ალბათობა თორმეტწახნაგა კამათლის გაგორების შემთხვევაში. თუ ცნობილია, რომ კამათლის გაგორებისას მოვიდა 3-ის ჯერადი რიცხვი.
2. ყუთში 9 წითელი და 12 ლურჯი ბურთულაა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მეორედ ამოღებული ბურთულა იქნება წითელი ფერის, თუ პირველად ამოღებულ ბურთულას, რომელიც ლურჯი ფერისაა, ყუთში არ აბრუნებენ.
3. თბილისში ივლისის თვეში წვიმიან დღეთა საშუალო რაოდენობა ორის ტოლია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 2017 წლის 15 და

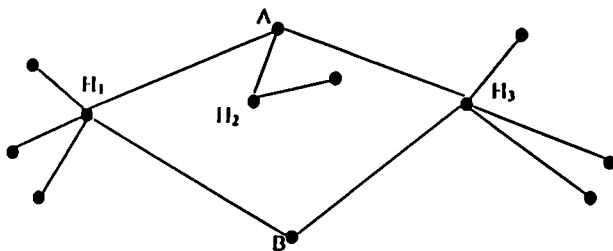
16 ივლისს წვიმიანი ამინდი იქნება, თუ ცნობილია, რომ 15 ივლისამდე პროგნოზით, წვიმა არაა მოსალოდნელი?

4. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ანზანიდან ალაღბედზე ამოჩეული სამი ასოთი დაიწერება სიტყვა «მთა»?
5. ყუთში 6 თეთრი და 4 წითელი ბურთულაა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალაღბედზე ამოღებული ოთხი ბურთულიდან პირველი ორი წითელი იქნება, დანარჩენი ორი კი თეთრი? (ამოღებულ ბურთულებს ყუთში არ აბრუნებენ).
6. ყუთში 2 თეთრი და 3 წითელი ბურთულაა. ალაღბედზე ერთმანეთის მიყოლებით ყუთიდან იღებენ ორ ბურთულას (ამოღებულ ბურთულებს ყუთში არ აბრუნებენ). A ხდომილობაა - «ამოღებული ბურთულები ერთი ფერისაა», ხოლო B ხდომილობა კი არის «ამოღებული ბურთულები სხვადასხვა ფერისაა». რომელია მეტი $P(A)$, თუ $P(B)$?
7. ყუთში 2K რაოდენობის ბურთულაა, მათგან ნახევარი წითელი ფერისაა, ხოლო ნახევარი ლურჯი. ალაღბედზე ერთმანეთის მიყოლებით ყუთიდან იღებენ ორ ბურთულას (ყუთში ჩაუბრუნებლად). A ხდომილობაა - «ამოღებული ბურთულები ერთნაირი ფერისაა», B ხდომილობა კი - «ბურთულები სხვადასხვა ფერისაა.» ვიპოვოთ $P(A)$, $P(B)$ და შევადაროთ ერთმანეთს.
8. ყუთში 10 თეთრი და 13 შავი ბურთულაა. ყუთიდან მასში ჩაუბრუნებლად, ერთმანეთის მიყოლებით ალაღბედზე ამოაქვთ ორი ბურთულა. A ხდომილობაა - «ამოღებული ბურთულები ერთნაირი ფერისაა», B ხდომილობა კი - «ამოღებული ბურთულები სხვადასხვა ფერისაა.» შევადაროთ $P(A)$ და $P(B)$.
9. ყუთში 7 წითელი და 3 თეთრი ბურთულაა. ყუთიდან ალაღბედზე ამოაქვთ ორი ბურთულა (ყუთში ჩაუბრუნებლად), A ხდომილობაა - «ამოღებული ბურთულები ერთნაირი ფერისაა», B ხდომილობა კი - «ამოღებული ბურთულები სხვადასხვა ფერისაა.» ვიპოვოთ $P(A)$, $P(B)$ და შემდეგ შევადაროთ ერთმანეთს.
10. ყუთში 5 ლურჯი და 2 ყვითელი ბურთულაა. ყუთიდან მასში ჩაუბრუნებლად ალაღბედზე ამოაქვთ ორი ბურთულა. A ხდომი-

ლობა - «ამოღებული ბურთულები ერთნაირი ფერისაა», B ხდომილობა კი - «ამოღებული ბურთულები სხვადასხვა ფერისაა». ვიპოვოთ $P(A)$, $P(B)$ და შემდეგ შევადაროთ ერთმანეთს.

11. ყუთში 3 წითელი, 3 თეთრი და 3 ლურჯი ბურთულაა. ყუთიდან, მასში ჩაუბრუნებლად, ალაღბედზე, მიყოლებით ამოაქვთ სამი ბურთულა. A ხდომილობა - «ან სამივე ამოღებული ბურთულა ერთი ფერისაა, ან ყველა სხვადასხვა ფერისაა», B ხდომილობა კი - «ამოღებულ სამ ბურთულას მხოლოდ ორი ფერი გააჩნია». ვიპოვოთ $P(A)$, $P(B)$ და შემდეგ შევადაროთ ერთმანეთს.
12. აგორებენ თორმეტწახნაგა კამათელს და მასზე მარტივი რიცხვის მოსვლის შემთხვევაში აგორებენ ჩვეულებრივ კამათელს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ჩვეულებრივ კამათელზეც მარტივი რიცხვი მოვა.
13. ბანქოს 36 კარტიანი დასტიდან ალაღბედზე ამოიღეს ორი კარტი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე ჯვრის მასტის იქნება.
14. ალბათობა იმისა, რომ ხარატი სტანდარტულ დეტალს გამოჩარხავს 0,8-ის ტოლია. ხოლო ალბათობა იმისა, რომ ზეინკალი ააწყობს სტანდარტულ ხელსაწყოს 0,9-ს უდრის. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ხარატისა და ზეინკლის ერთობლივი მუშაობით დამზადებული ხელსაწყო სტანდარტული იქნება?
15. ერთ ყუთში 6 თეთრი და 4 შავი ბურთულაა, მეორეში კი - 7 თეთრი და 3 შავი. პირველი ყუთიდან ალაღბედზე ამოაქვთ ერთი ბურთულა და დებენ მეორე ყუთში; თუ იგი შავი აღმოჩნდება, მაშინ მეორე ყუთიდანაც ასევე ალაღბედზე ამოაქვთ ერთი ბურთულა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მეორე ყუთიდან ამოღებული ბურთულა თეთრი ფერის იქნება.
16. ყუთში 6 თეთრი, 4 შავი და 5 წითელი ბირთვია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სამი ბირთვის ალაღბედზე რიგრიგობით ამოღებისას გვექნება ბირთვების მიმდევრობა: «წითელი», «შავი», «თეთრი», თუ ბირთვების ამოღება ხდება: ა) დაბრუნებით; ბ) დაბრუნების გარეშე. ისარგებლეთ დენდროგრამის მეთოდით.

17. ორი მოთამაშიდან ერთი სამ მონეტას აგდებს, მეორე ორს. მოგებულია ის, ვისაც მეტჯერ მოუვა გერბი. A ხდომილობაა - «იგებს პირველი მოთამაშე», B ხდომილობაა - «იგებს მეორე მოთამაშე», ხოლო C ხდომილობაა - «ყაიმი, არ იგებს არც ერთი». ვიპოვოთ $P(A)$, $P(B)$ და $P(C)$.
18. სამი ხარატი ამზადდება ერთი და იგივე დასახელების, ერთი და იგივე რაოდენობის დეტალებს. დამზადებული დეტალებიდან ზოგიერთი დეფექტიანი აღმოჩნდა, რის გამოც ხარატებმა უნდა გადაიხადონ 105 ლარი ჯარიმა. გაანაწილეთ ჯარიმა ხარატებს შორის, თუ ცნობილია, რომ ხარატების მიერ დეფექტიანი დეტალების დამზადების ალბათობები შესაბამისად 0,01; 0,02; და 0,03-ის ტოლია.
19. სამმა ზეინკალმა დაამზადა ახალი პროდუქციის ერთი და იგივე რაოდენობა; ამ პროდუქციის მაღალი ხარისხის მიღწევისათვის გამოიყო პრემია 5600 ლარი. გაანაწილეთ ეს პრემია ზეინკლებს შორის, თუ ალბათობა იმისა, რომ ზეინკლები მაღალი ხარისხის პროდუქციას დაამზადებენ შესაბამისად არის 0,9; 0,94 და 0,96-ის ტოლი.
20. ტურისტი გზათა ყოველ გასაყარზე თანაბარი ალბათობით ირჩევს გზის გაგრძელებას (ოღონდ უკან არ ბრუნდება). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ იგი A პუნქტიდან მივა B პუნქტში, თუ გზათა სქემა შემდეგია:



21. ნაკეთობა აკმაყოფილებს სტანდარტს 0,96 ალბათობით. გამარტივებული კონტროლის პროცედურა დადებით შედეგს იძლევა 0,98 ალბათობით სტანდარტული ნაკეთობისათვის, ხოლო 0,05

ალბათობით ასეთივე შედეგს არასტანდარტული ნაკეთობისათვის. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ნაკეთობა, რომელიც ამ პროცედურას წარმატებით გაივლის, სტანდარტულია.

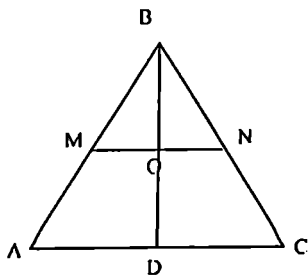
22. მაგიდაზე დევს 25 ბილეთი, რომელთაგან 5 მომგებიანია. მერაბს წილად ხვდა პატივი, აერჩია, პირველად გავიდოდა ბილეთის ასაღებად, თუ მეორედ. რომელ შემთხვევაში მეტია ალბათობა მომგებიანი ბილეთის ასაღებად?

23. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სამი კამათლის გაგორებისას ერთ-ერთ მათგანზე მაინც მოვა ექვსიანი, თუ ცნობილია, რომ სამივეზე სხვადასხვა რიცხვი მოვიდა.

24. ხარისხის სახელმწიფო ინსპექტორი სასურსათო მაღაზიაში ამოწმებს რძის პროდუქტებს. ცნობილია, რომ რძის 20 პაკეტიდან 2 ამჟავებულია. ინსპექტორი ამ 20 პაკეტიდან ალაღბედზე ირჩევს გასასინჯად ორ პაკეტს. როგორია ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის ა) არცერთი არ იქნება ამჟავებული, ბ) მხოლოდ ერთია ამჟავებული, გ) ორივე ამჟავებული იქნება.

25. ურნაში 4 თეთრი და 3 შავი ბირთვია. ურნიდან ალაღბედზე რიგრიგობით იღებენ ბირთვებს მანამ, სანამ არ ამოვა თეთრი ბირთვი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) თეთრი ბირთვი ამოვა პირველივე ამოღებაზე, ბ) თეთრი ბირთვი ამოვა მეორე ამოღებაზე, გ) თეთრი ბირთვი ამოვა მესამე ამოღებაზე, დ) თეთრი ბირთვი ამოვა მეოთხე ამოღებაზე, დაახლოებით შესაბამისი დენდროგრამა და იპოვეთ მიღებული ალბათობების ჯამი.

26. ABC ტოლგვერდა სამკუთხედში რომლის გვერდი 4 სმ-ის ტოლია გავლებულია BD სიმაღლე და MN შუახაზი, რომელიც AC-ს



პარალელურია. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა რომ წერტილი რომელიც შემთხვევით გაჩნდა ABD სამკუთხედში აღმოჩნდება MBO

სამკუთხედის შიგა არეშიც.

27. სათამაშო დომინოს 28 ქვიდან ალაღბედზე ამოიღეს ერთი ქვა, რომლის ერთ მხარეს ერთი ქულა არის, ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამ ქვაზე მეორე მხარეზე ექვსი ქულა იქნება.
28. ყუთში 12 წითელი, 1 მწვანე და 2 თეთრი ბურთულაა, ყუთიდან ალაღბედზე იღებენ 2 ბურთულას, ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე თეთრია, თუ ცნობილია, ამოღებულ ბურთულებს შორის არცერთი არაა წითელი.
29. ყუთში 3 თეთრი და 1 წითელი ბურთულაა, ყუთიდან ალაღბედზე ამოაქვთ ორი ბურთულა. რომელს უფრო მეტი ალბათობა აქვს A ხდომილობას - «ორივე ბურთულა თეთრია», თუ B ხდომილობას - «ერთი თეთრია და ერთი წითელი»?
30. აგდებენ მონეტას და გერბის მოსვლის შემთხვევაში აგორებენ კამათელს, ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ კამათელზე მოსული ქულა არანაკლებია 5-ის.

3.7.2. ტესტი №7

1. მონეტა ისეა გაღუნული, რომ საფასურის მოსვლის ალბათობა მონეტის აგდებისას 3-ჯერ მეტია გერბის მოსვლის ალბათობაზე. რისი ტოლია საფასურის მოსვლის ალბათობა?

ა) $\frac{1}{4}$; ბ) $\frac{1}{3}$; გ) $\frac{1}{2}$; დ) $\frac{3}{4}$; ე) $\frac{1}{6}$.

2. ვთქვათ, ექიმი 5 წამლიდან 3-ის გამოკვლევას ატარებს. ეს სამი წამალი ხუთიდან შემთხვევით შეირჩევა. წამლები გადავნიშნოთ: 1, 2, 3, 4, 5. რა არის ალბათობა იმისა, რომ შეირჩევა წამლები - 3 და 5?

ა) $\frac{9}{10}$; ბ) $\frac{3}{10}$; გ) $\frac{7}{10}$; დ) $\frac{2}{5}$; ე) $\frac{3}{5}$.

3. ურნაში n რაოდენობის ბირთვია. ისინი გადანომრილია რიცხვებით 1, 2, 3, ..., n . ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ერთმანეთის მი-

ყოლებით ყველა ბირთვის თითო-თითოდ (დაბრუნების გარეშე) ამოღებისას ბირთვები ნომრების კლების მიხედვით იქნება ამოღებული.

$$\text{ა) } \frac{1}{n!}; \quad \text{ბ) } \frac{1}{n}; \quad \text{გ) } \frac{1}{n(n-1)}; \quad \text{დ) } \frac{1}{n(n-1)(n-2)}; \quad \text{ე) } \frac{1}{(n-1)}.$$

4. სპორტსმენის მიერ ყოველი გასროლისას სამიზნეში მოხვედრის ალბათობა 0,7-ის ტოლია. სპორტსმენი სამიზნეს ესვრის და აცილების შემთხვევაში აკეთებს მეორე გასროლას. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა რომ მეორე გასროლისას სამიზნე დაზიანდება.

$$\text{ა) } 0,3; \quad \text{ბ) } 0,7; \quad \text{გ) } 0,21; \quad \text{დ) } 0,09; \quad \text{ე) } 0,49.$$

5. სპორტსმენის მიერ ყოველი გასროლისას სამიზნეში მოხვედრების ალბათობა 0,8-ის ტოლია. სპორტსმენი სამიზნეს მეორედ ესვრის, თუ მან პირველი მოახვედრა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სპორტსმენმა სამიზნეს მეორედ ესროლა.

$$\text{ა) } 0,8; \quad \text{ბ) } 0,2; \quad \text{გ) } 0,64; \quad \text{დ) } 0,04; \quad \text{ე) } 0,16.$$

6. კამათელი ისეა დამზადებული, რომ ყოველი რიცხვის მოსვლის ალბათობა ამ რიცხვის პროპორციულია. თუ P_n არის n რიცხვის ($n=1,2,3,4,5,6$) მოსვლის ალბათობა, მაშინ

$$\text{ა) } P_n = \frac{1}{36} \cdot n; \quad \text{ბ) } P_n = \frac{1}{2} \cdot n; \quad \text{გ) } P_n = \frac{1}{6} \cdot n; \quad \text{დ) } P_n = \frac{1}{7} \cdot n; \quad \text{ე) } P_n = \frac{1}{21} \cdot n.$$

7. მონაკვეთებიდან, რომელთა სიგრძეებია 1 სმ, 3 სმ, 5 სმ და 7 სმ შემთხვევით ვირჩევთ სამ მონაკვეთს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შერჩეული მონაკვეთების საშუალებით აიგება სამკუთხედი, თუ ერთ-ერთი შერჩეული მონაკვეთის სიგრძე 7 სმ-ია?

$$\text{ა) } \frac{1}{4}; \quad \text{ბ) } \frac{2}{3}; \quad \text{გ) } \frac{1}{2}; \quad \text{დ) } \frac{3}{4}; \quad \text{ე) } \frac{1}{3}.$$

8. ვთქვათ, $P(B) = \frac{1}{4}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$. იპოვეთ $P(\overline{A \cap B})$.

$$\text{ა) } \frac{3}{20}; \quad \text{ბ) } \frac{4}{5}; \quad \text{გ) } \frac{1}{5}; \quad \text{დ) } \frac{1}{20}; \quad \text{ე) } \frac{1}{4}.$$

9. ვაგდებთ მონეტას და გერბის მოსვლის შემთხვევაში ვიმეორებთ ცდას. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მეორე ცდის შემთხვევაში

მონეტაზე საფასური მოვა.

ა) $\frac{1}{2}$; ბ) $\frac{1}{4}$; გ) $\frac{1}{3}$; დ) $\frac{2}{3}$; ე) $\frac{3}{4}$.

10. ურნაში 5 ბირთვია, ისინი გადანომრილია რიცხვებით 1, 2, 3, 4, 5. ალაღბედზე ერთმანეთის მიყოლებით ვიღებთ სამ ბირთვს (ამოღებულ ბირთვებს უკან არ აბრუნებენ). ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებულია კენტი ნომრის ბირთვები.

ა) 0,5; ბ) 0,4; გ) 0,1; დ) 0,2; ე) 0,3.

3.8. შემთხვევით ხდომილობათა დამოუკიდებლობა და ალბათობათა ნამრავლი

B ხდომილობას ეწოდება დამოუკიდებელი A ხდომილობისაგან, თუ მისი მოხდენის ალბათობა და მისი მოხდენის პირობითი ალბათობა პირობაში, რომ მოხდა A ხდომილობა ერთი და იგივეა ე.ი.

$$P_A(B) = P(B).$$

იმ შემთხვევაში, როცა B ხდომილობა დამოუკიდებელია A ხდომილობისაგან $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$ ფორმულა ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$ და $P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$ ფორმულების შეპირისპირებით დავრწმუნდებით იმაში, რომ დამოუკიდებლობა ორმხრივია, თუ B ხდომილობა არ არის დამოკიდებული A ხდომილობაზე, ასევე არ იქნება დამოკიდებული A ხდომილობაც B ხდომილობაზე, ე.ი. $P_A(B) = P(B)$ და $P_B(A) = P(A)$.

ამ ფორმულების საფუძველზე ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი წესი:

ორი დამოუკიდებელი ხდომილობის გადაკვეთის ალბათობა ტოლია ამ ხდომილობების ალბათობების ნამრავლის.

A და B ხდომილობების დამოუკიდებლობა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ასეც:

A და B ხდომილობებს ეწოდებათ დამოუკიდებელი მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (1).$$

ზემოთ განსაზღვრული ხდომილობების დამოუკიდებლობა უფრო ახლოა ინტუიციურ წარმოდგენასთან ვიდრე (1) ფორმულით განსაზღვრული

საჭიროა დავიმახსოვროთ: დამოუკიდებელი ხდომილობები შესაბამისი ალბათობებით არ იქნებიან უთავსებადი.

ვთქვათ, $P(A) \neq 0$ და $P(B) \neq 0$ (*)

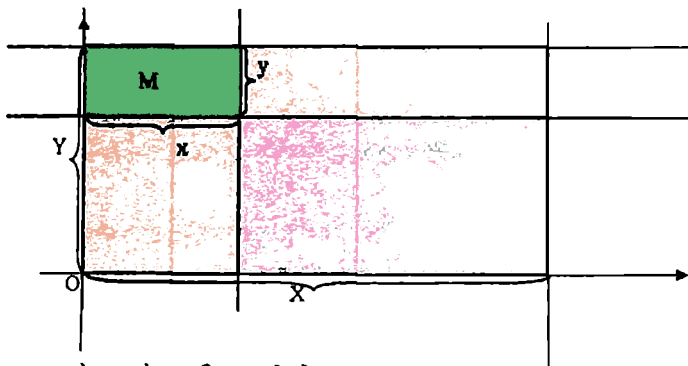
როგორც ცნობილია, უთავსებად ხდომილობათა გადაკვეთა $A \cap B = \emptyset$ შეუძლებელი ხდომილობაა. აქედან გამომდინარე უთავსებადი ხდომილობებისათვის გაქვს:

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$$

(1) ფორმულის თანახმად, ყოველ შემთხვევაში, ერთი მაინც ალბათობა $P(A)$, ან $P(B)$ უნდა იყოს 0-ის ტოლი. ეს კი ეწინააღმდეგება (*) პირობას. რაც ამტკიცებს იმ ფაქტს, რომ დამოუკიდებელი ხდომილობები, შეიძლება იყვნენ თავსებადი.

შეიძლება მოვიყვანოთ შემდეგი მაგალითი, როცა დამოუკიდებლობის ინტუიციურ წარმოდგენას მივყავართ ხდომილობათა ნამრავლის ფორმულამდე.

ვთქვათ, M წერტილი შემთხვევით ვარდება მართკუთხედში, რომლის ზომებია X და Y . ამ მართკუთხედის გვერდები პარალელურია საკოორდინატო ღერძებისა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ წერტილი ჩავარდება მართკუთხედში ზომებით x და y , რომლის გვერდები ასევე პარალელურია საკოორდინატო ღერძებისა?



ვთქვათ, ხდომილობებია:

A - « M წერტილი ჩავარდა ზოლში, რომლის სიგანე ტოლია x -ის.

ცხადია, $P(A) = \frac{x}{X}$.

B - « M წერტილი ჩავარდა ზოლში, რომლის სიგანე ტოლია y -ის.

$$\text{ცხადია, } P(B) = \frac{y}{Y}.$$

გვექნება:

$$\begin{aligned} P(\text{«M წერტილი ჩავარდა პატარა მართკუთხედში»}) &= P(A \cap B), \\ \text{მასთან } P(\text{«M წერტილი ჩავარდა პატარა მართკუთხედში»}) \\ &= \frac{xy}{XY} = \frac{x}{X} \cdot \frac{y}{Y} = P(A) \cdot P(B). \end{aligned}$$

$$\text{აქედან კი გვაქვს } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

რამდენიმე ხდომილობას ეწოდება დამოუკიდებელი (ან ერთობლივად დამოუკიდებელი), თუ ნებისმიერი მათგანი დამოუკიდებელი იქნება დანარჩენი ნებისმიერი ერთობლიობისაგან. ხდომილობათა დამოუკიდებულებისათვის საკმარისი არ არის, რომ ისინი იყვნენ წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელნი.

მოვიყანოთ ასეთი მაგალითი (ბერშტეინის მაგალითი): ერთგვაროვანი მასალისაგან დამზადებული ტეტრაედრის სამ წახნაგზე აწერია ციფრები 1, 2, 3 ხოლო მეოთხე წახნაგზე კი ეს სამივე ციფრი ერთად. A_i იყოს ხდომილობა, რაც იმაში მდგომარეობს, რომ შეთხვევით ზემოთ ასროლილი ტეტრაედრი დაეცემა წახნაგზე რომელსაც აწერია ციფრი i ($i = 1, 2, 3$).

ჯერ გამოვიკვლიოთ არიან თუ არა ეს ხდომილობები წყვილ-წყვილად დამოკიდებულნი. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}; \quad P(A_1 A_2) = \frac{1}{4}; \quad P(A_1 A_3) = \frac{1}{4};$$

$$P(A_2 A_3) = \frac{1}{4};$$

და რადგან სრულდება პირობები:

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2); \quad P(A_1 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3);$$

$P(A_2 A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3)$; ამიტომ ხდომილობათა წყვილები A_1 და A_2 ; A_1 და A_3 ; A_2 და A_3 ; ყოფილან დამოუკიდებლები.

ახლა გამოვიკვლიოთ ამ ხდომილობათა ერთობლივად დამოუკიდებლობა. რადგან $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$,

$$\text{ხოლო } P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

ამიტომ $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$ და ეს ხდომილობები არ ყოფილან ერთობლივად დამოუკიდებლები, მიუხედავად მათი წყვილ-წყვილად დამოუკიდებლობისა.

ხდომილობათა ერთობლიობის დამოუკიდებლობისათვის ადგილი უნდა ჰქონდეს ტოლობას:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

განვიხილოთ მაგალითები:

1. ვთქვათ, A, B, და C თავსებადი და დამოუკიდებელი ხდომილობებია, დავამტკიცოთ, რომ $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

დამტკიცება: დავუშვათ, რომ $A \cap B = D$ მაშინ $P(A \cap B \cap C) = P(D \cap C) = P(D) \cdot P(C) = P(A \cap B) \cdot P(C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

2. მაღაზიაში შესული მამაკაცი რაიმეს ყიდულობს 0,1-ის ტოლი ალბათობით, ხოლო მანდილოსანი კი - 0,6-ის ტოლი ალბათობით. მაღაზიაში შევიდა ერთი მამაკაცი და ორი მანდილოსანი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ერთ-ერთი პირი მაინც იყიდის რაიმეს.

ამოხსნა: აღვნიშნოთ ხდომილობები:

A - «ყიდულობს მამაკაცი»,

B₁ - «ყიდულობს პირველი მანდილოსანი»,

B₂ - «ყიდულობს მეორე მანდილოსანი».

თუ C-თი აღვნიშნავთ ხდომილობას - «ერთ-ერთი პირი მაინც იყიდის რაიმეს», მაშინ $C = A \cup B_1 \cup B_2$, გვექნება:

$$P(C) = P(A) + P(B_1) + P(B_2) - P(A \cap B_1) - P(A \cap B_2) - P(B_1 \cap B_2) + P(A \cap B_1 \cap B_2)$$

A, B₁ და B₂ ხდომილობები დამოუკიდებელია, მაშინ გვექნება:

$$P(C) = P(A) + P(B_1) + P(B_2) - P(A) \cdot P(B_1) - P(A) \cdot P(B_2) - P(B_1) \cdot P(B_2) + P(A) \cdot P(B_1) \cdot P(B_2)$$

ამოცანის პირობიდან ვიცით, რომ

$$P(A) = 0,1; P(B_1) = P(B_2) = 0,6; \text{ ამიტომ გვექნება:}$$

$$P(C) = 0,1 + 0,6 + 0,6 - 0,1 \cdot 0,6 - 0,1 \cdot 0,6 - 0,6 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0,6 \cdot 0,6 = 0,856$$

წინასწარ საჭიროა სხვაობის ალბათობის ფორმულა:

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) \quad (*)$$

3. თუ A და B ხდომილობები დამოუკიდებელია, მაშინ $-$ ხდომილობები A და $\bar{B}$ ასევე დამოუკიდებელია.

დამტკიცება: მართლაც, რადგან A და B ხდომილობები დამოუკიდებელია, მაშინ გვექნება, რომ $P_A(B) = P(B)$ და $P_A(\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{P(A \setminus B)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - P(AB) = 1 - P(B) = P(\bar{B})$.

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ A და B ხდომილობები დამოუკიდებელია, მაშინ დამოუკიდებელი იქნებიან ხდომილობები B და A , აგრეთვე $\bar{A}$ და $\bar{B}$.

4. შევალთ დე მერეს ამოცანა. XVII საუკუნის შუალედში ფრანგი არისტოკრატი შევალთ დე მერე, რომელიც აზარტული თამაშების დიდი მოყვარული იყო, ასეთ წინააღმდეგობას წააწყდა.

დე მერემ პარტნიორებს შესთავაზა თამაში შემდეგი პირობებით: იგი ორ კამათელს აგორებდა 24-ჯერ და მოიგებდა თუ, ერთხელ მაინც, ორივე კამათელზე ერთდროულად მოვიდოდა ექვსიანი, ხოლო მისი მოწინააღმდეგე კი ოთხ კამათელს აგორებდა ერთხელ და მოიგებდა თუ ერთ-ერთ კამათელზე მაინც მოვიდოდა ექვსიანი.

ერთი შეხედვით თითქოს დე მერე უფრო მომგებიან პოზიციაში იყო, ვიდრე მისი მოწინააღმდეგე, მაგრამ ეს ასე არ იყო. დე მერე უფრო ხშირად აგებდა, ვიდრე იგებდა. გაცეხულმა მერემ მიმართა ცნობილ მათემატიკოსს ბლეზ პასკალს, რომელთანაც ის მეგობრობდა.

გავერკვეთ იმაში, თუ როგორი პასუხი გასცა მას ბ. პასკალმა.

ვთქვათ, A -თი აღვნიშნოთ ხდომილობა - «2 კამათლის 24-ჯერ გაგორებისას ერთხელ მაინც მოვა წყვილი ექვსიანი»; ხოლო B -თი აღვნიშნოთ ხდომილობა - «ოთხი კამათლის ერთდროულად გაგორებისას ერთ-ერთი მათგანზე მაინც მოვა ექვსიანი».

A ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობაა $\bar{A}$ - «ორი კამათლის 24-ჯერ გაგორებისას არც ერთხელ არ მოვა წყვილი ექვსიანი».

A_j -თი ($j=1,2,3,...,24$) აღვნიშნოთ ხდომილობა - «2 კამათლის j -ჯერ გაგორებისას არც ერთხელ არ მოვა წყვილი ექვსიანი». ცხადია, რომ

$$A = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_{24}.$$

რადგანაც ხდომილობები $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_{24}$ ერთობლივად დამოუკიდებელია, ამიტომ

$$P(A) = P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_{24}) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) \dots P(\bar{A}_{24})$$

ასევე ცხადია, რომ

$$P(\bar{A}_1) = P(\bar{A}_2) = P(\bar{A}_3) = \dots = P(\bar{A}_{24})$$

ამიტომ $P(\bar{A})$ ალბათობა შეიძლება გამოვსახოთ ასე:

$$P(\bar{A}) = (P(\bar{A}_1))^{24}$$

გამოვთვალოთ $P(\bar{A})$. ორი კამათლის გაგორებისას შეიძლება მოხდეს $n=36$ ტოლშესაძლებელი სხვადასხვა ელემენტარული ხდომილობა. $\bar{A}$ ხდომილობის ხელშემწყობია $m=35$ რაოდენობის ხდომილობა, ამიტომ

$$P(\bar{A}_1) = \frac{35}{36}; \quad P(\bar{A}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

მაშასადამე, შევალიე დე მერეს წარმატების ალბათობა ტოლია:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,491404.$$

ახლა გამოვთვალოთ მისი მოწინააღმდეგის წარმატების ალბათობა. ვთქვათ, B ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობაა $\bar{B}$ - «ოთხი კამათელის ერთდროულად გაგორებისას არც ერთ მათგანზე არ მოვიდა ექვსიანი».

ვთქვათ, B_i ხდომილობაა «ექვსიანი არ მოვიდა i -ურ კამათელზე» ($i=1,2,3,4$) მაშინ $\bar{B} = \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3 \cap \bar{B}_4$.

რადგანაც ხდომილობები $\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3, \bar{B}_4$ ერთობლივად დამოუკიდებელია, ამიტომ

$$P(\bar{B}) = P(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3 \cap \bar{B}_4) = P(\bar{B}_1) \cdot P(\bar{B}_2) \cdot P(\bar{B}_3) \cdot P(\bar{B}_4).$$

ცხადია, რომ $P(\bar{B}_1) = P(\bar{B}_2) = P(\bar{B}_3) = P(\bar{B}_4)$, $P(\bar{B}) = (P(\bar{B}_1))^4$.

ერთი კამათელის გაგორებისას შეიძლება მოხდეს $n=6$ სხვადასხვა ხდომილობა. $\bar{B}_1$ ხდომილობის ხელშემწყობია $m=5$ ხდომილობა, მაშინ

$$P(\bar{B}_1) = \frac{5}{6}, \text{ ხოლო } P(B) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

ამრიგად, შევალთ დე მერეს მოწინააღმდეგის წარმატების ალბათობა ტოლია:

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,517747.$$

აღმოჩნდა, რომ $P(A) < P(B)$. რა თქმა უნდა, დაკვირვებებმა მიიღო მეცნიერული ახსნა.

3.8.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

- 10 მგზავრიდან თითოეულმა შემთხვევით შეარჩია 20-ვაგონიანი მატარებლის თითო ვაგონი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ყველა მგზავრი სხვადასხვა ვაგონში მოხვდება?
- მარიამი 30 წიგნიანი თაროდან ალაღბედზე იღებს სამ წიგნს. მას ამ 30 წიგნიდან 10 წაკითხული აქვს, ხოლო გიორგი 25 წიგნიანი თაროდან ალაღბედზე იღებს ორ წიგნს, მას ამ 25 წიგნიდან წაკითხული აქვს 8 წიგნი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მარიამსაც წაკითხული აქვს აღებული სამი წიგნი და მასთან გიორგისაც წაკითხული აქვს აღებული ორივე წიგნი.
- მსროლელი, რომელსაც 3 ვაზნა აქვს, მიზანში ესერის პირველ მოხვედრამდე. ყოველი გასროლისას მოხვედრის ალბათობა 0,8-ს უდრის. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი სამივე ვაზნას დახარჯავს.
- მსროლელი, რომელსაც 4 ვაზნა აქვს, მიზანში ესერის პირველ მოხვედრამდე. ყოველი გასროლისას მოხვედრის ალბათობა 0,8-ს უდრის. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი სამიზნეს

მოახვედრებს მხოლოდ მეოთხე გასროლისას.

5. ორი მსროლელი ისვრის ერთ მიზანში. ალბათობა იმისა, რომ პირველი მსროლელი მიზანში მოახვედრებს 0,5-ის ტოლია, ხოლო მეორე მსროლელისათვის მიზანში მოხვედრის ალბათობა 0,4-ის ტოლია. მსროლელებმა თითოეუროს ესროლეს მიზანს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ა) სამიზნეს არცერთი გასროლა არ მოხვდა; ბ) სამიზნეს ერთი გასროლა მოხვდა; გ) სამიზნეს ორივე გასროლა მოხვდა.
6. მიზანში ესვრიან 4-ჯერ. ყოველი გასროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობა 0,3-ის ტოლია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მიზანს მოხვდება არანაკლებ ერთი და არაუმეტეს სამი გასროლა.
7. მონეტას აგდებენ სამჯერ. და მასთან აგორებენ თორმეტწახნაგა კამათელს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მონეტაზე ორჯერ მოვა გერბი და მასთან კამათელზე მოსული ქულა არ იქნება სამის ჯერადი.
8. მონეტას აგდებენ სამჯერ და მასთან აგორებენ თორმეტწახნაგა კამათელს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მონეტაზე არანაკლებ ორისა მოვა გერბი და მასთან კამათელზე მოსული ქულა არ იქნება სამის ჯერადი.
9. მსროლელი, რომელსაც ექვსი ვაზნა აქვს, ესვრის მიზანში პირველ მოხვედრადმე. ყოველი გასროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობა 0,2-ის ტოლია. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მსროლელს მხოლოდ ერთი ვაზნა დარჩება დაუხარჯავი.
10. ბანქოს ორი დასტიდან, რომელთაგან ერთი შეიცავს 36 კარტს, ხოლო მეორე კი - 52 კარტს, ალალებდზე იღებენ თითო-თითო კარტს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე ჯერის მასტის იქნება.
11. ბანქოს ორი დასტა, რომელთაგან ერთი შეიცავს 36 კარტს, ხოლო მეორე კი - 52 კარტს, ერთად აურიეს და იქიდან ერთმანეთის მიყოლებით ალალებდზე ამოიღეს ორი კარტი (კარტებს უკან დასტაში არ აბრუნებენ). ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე

ჯვრის მასტის იქნება.

12. ერთ ყუთში 2 თეთრი და 3 შავი ბურთულაა, მეორეში კი 4 თეთრი და ერთი შავი. თითოეული ყუთიდან ალაღბედზე ამოაქვთ ერთი ბურთულა, ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე ბურთულა თეთრი ფერის იქნება.
13. ერთ ყუთში 2 თეთრი და 3 შავი ბურთულაა, მეორეში კი 4 თეთრი და ერთი შავი. ორივე ყუთის ბურთულები ერთად მოათავსეს ურნაში და ამის შემდეგ ურნიდან ალაღბედზე ერთმანეთის მიყოლებით (ურნაში ჩაუბრუნებლად) ამოიღეს ორი ბურთულა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე თეთრი ფერის იქნება.
14. ერთ ყუთში 2 თეთრი და 1 წითელი ბურთულაა, მეორეში კი - 2 თეთრი და 2 წითელი ბურთულა. პირველი ყუთიდან ალაღბედზე ამოაქვთ ერთი ბურთულა და ათავსებენ მეორე ყუთში. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამის შემდეგ მეორე ყუთიდან ალაღბედზე ამოღებული ბურთულა წითელი ფერის იქნება.
15. R რადიუსიან წრეში ჩახაზულია კვადრატია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ წრეში ალაღბედზე აღებული ორი წერტილიდან ორივე კვადრატში მოხვდება?
16. კვადრატში ჩახაზულია წრე. რას უდრის ალბათობა იმისა რომ კვადრატში ალაღბედზე აღებული ორი წერტილიდან ორივე წრეში მოხვდება?
17. აგორებენ ორ კამათელს. იპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ჯამში არ მიიღება რიცხვი 7.
18. აგორებენ ორ თორმეტწახნაგა კამათელს. იპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ჯამში არ მიიღება რიცხვი 13.
19. ყუთში მოთავსებულია, ზუსტად ერთნაირი, დანომრილი ბურთულები 1, 2, 3, 4, 5 ნომრების შესაბამისად. ყუთიდან დაუბრუნებლად ერთმანეთის მიყოლებით ალაღბედზე ამოაქვთ ორი ბურთულა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებულ ბურთულებს შორის ერთს 3-ზე მეტი ნომერი ექნება, ხოლო მეორე კი - 3-ზე ნაკლები.

20. ნაკრძალში 20 ირემია, მათგან 7 დაიჭირეს დალი დაადეს და ისევ ტყეში გაუშვეს. გარკვეული დროის შემდეგ იმ 20-დან 4 კვლავ დაიჭირეს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის 2 დალდასმული იქნება?
21. ყუთში ჩოგბურთის ექვსი სათამაშო ბურთი დევს. თამაშისათვის ამოაქვთ სამი ბურთი, თამაშის დამთავრების შემდეგ ბურთებს კვლავ ყუთში აბრუნებენ. ნათამაშებ და უთამაშებელ ბურთებს ერთმანეთისაგან ვერ არჩევენ. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორი თამაშის შემდეგ ყუთში არ დარჩება უთამაშებელი ბურთი.
22. ბანქოს დასტიდან რომელიც 36 კარტისაგან შედგება ალაღბედზე ამოაქვთ 4 კარტი. A ხდომილობაა - «ამოღებულ 4 კარტში ერთი კარტი მაინცაა ჯვრის მასტის», ხოლო B ხდომილობაა «ამოღებულ 4 კარტში ერთი კარტი მაინცაა აგურის მასტის». $C = A \cup B$, ვიპოვოთ C ხდომილობის ალბათობა.
23. ორ ბურთულას ალაღბედზე აგორებენ ოთხი ლუზისაკენ, რომლებიც ერთმანეთისაგან თანაბარი მანძილით დაშორებული და წრფივად განლაგებული არიან. ბურთულას რომელიმე ლუზაში ჩავარდნის ალბათობა $\frac{1}{4}$ -ის ტოლია (ბურთულები აუცილებლად ვარდებიან რომელიმე ლუზაში და შეიძლება ერთსა და იმავე ლუზაში ორივე ბურთულა ჩავარდეს). ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ბურთულები მეზობელ ლუზებში ჩავარდნენ.
24. ყუთში 3 შავი და 1 თეთრი ბურთულაა. ოთხ მოთამაშეს ალაღბედზე რიგრიგობით ამოაქვთ თითო ბურთულა. ამოღებულ ბურთულებს უკან არ აბრუნებენ. მოგებულია ის მოთამაშე ვინც პირველად ამოიღებს თეთრ ბურთულას. რიგის მიხედვით რომელ მოთამაშეს ექნება მოგების ყველაზე დიდი ალბათობა?
25. ყუთში 3 შავი და 1 თეთრი ბურთულაა. ორი მოთამაშე ალაღბედზე რიგრიგობით იღებს თითო ბურთულას. ამოღებულ ბურთულებს ყუთში აბრუნებენ. მოგებულია ის მოთამაშე ვინც პირველად ამოიღებს თეთრ ბურთულას. რომელ მოთამაშეს ექნება მო-

გების მეტი შანსი, ვინც პირველად იწყებს ბურთულების ამოღებას, თუ ვინც მეორედ იწყებს ბურთულების ამოღებას?

26. ლოტოს კოჭებიდან, რომლებიც გადანომრილია 1-დან 90-მდე, ალაღბედზე ამოაქვთ ორი კოჭი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ერთ კოჭზე დაწერილი ნომერი მეტია 45-ზე, ხოლო მეორე კოჭზე დაწერილი ნომერი ნაკლებია 45-ზე.
27. ჭადრაკის სრული კომპლექტიდან ალაღბედზე ამოაქვთ ორი ფიგურა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ერთი ფიგურა თეთრი იქნება, მეორე კი შავი.
28. ერთ ყუთში 2 თეთრი და 1 შავი ბურთულაა, მეორეში 1 თეთრი და ორი შავი. ყუთებიდან ალაღბედზე ამოაქვთ თითო ბურთულა და თუ ორივე თეთრია აგდებენ მონეტას. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მონეტაზე გერბი მოვა.
29. ყუთში 3 თეთრი, 2 შავი და 4 წითელი ბურთულაა, ყუთიდან ალაღბედზე ერთმანეთის მიყოლებით ამოაქვთ ბურთულები, ინიშნავენ ფერს და ალაგებენ ერთმანეთის გვერდით. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ თეთრი ფერის ბურთულა ამოვა უფრო ადრე. ვიდრე შავი ფერის.
30. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სამი მონეტის აგდებისას ერთზე გერბი მოვა დანარჩენ ორზე კი საფასური.

3.8.2. ტესტი №8

1. ერთ ყუთში a რაოდენობის თეთრი და b რაოდენობის შავი ბურთულაა, ხოლო მეორე ყუთში კი c რაოდენობის თეთრი და d რაოდენობის შავი ბურთულა. თითოეული ყუთიდან ალაღბედზე ამოაქვთ თითო ბურთულა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე ბურთულა ერთი ფერისაა.

$$a) \frac{ac}{(a+c)(b+d)}; \quad b) \frac{a}{(a+c)(b+d)}; \quad c) \frac{ac}{(a+b)(c+d)};$$

$$\text{დ) } \frac{ac + bd}{(a+b)(c+d)}; \quad \text{ე) } \frac{ac}{bd}.$$

2. ერთ ყუთში a რაოდენობის თეთრი და b რაოდენობის შავი ბურთულაა. ხოლო მეორე ყუთში კი - c რაოდენობის თეთრი და d რაოდენობის შავი ბურთულა. თითოეული ყუთიდან ალაღბედზე ამოაქვთ თითო ბურთულა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბურთულები სხვადასხვა ფერისაა.

$$\text{ა) } \frac{ad + bc}{(a+b)(c+d)}; \quad \text{ბ) } \frac{ad}{(a+b)(c+d)}; \quad \text{გ) } \frac{ad + bc}{ab(c+d)};$$

$$\text{დ) } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}; \quad \text{ე) } \frac{a+b}{c+d}.$$

3. ბარაზნიან რევოლვერს გააჩნია შვიდი ბუდე. ორი ბუდე ცარიელია, ხოლო ხუთ ბუდეში თითოეულში არის ტყვია. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორჯერ ალაღბედზე დატრიალების შემდეგ რევოლვერი არცერთხელ არ გაისვრის.

$$\text{ა) } \frac{20}{49}; \quad \text{ბ) } \frac{4}{49}; \quad \text{გ) } \frac{25}{49}; \quad \text{დ) } \frac{24}{49}; \quad \text{ე) } \frac{2}{49}.$$

4. ბარაზნიან რევოლვერს გააჩნია შვიდი ბუდე. მათგან 5 ბუდე დატენილია, ხოლო 2 ცარიელი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორჯერ ალაღბედზე დატრიალების შემდეგ რევოლვერი ორივეჯერ გაისვრის.

$$\text{ა) } \frac{2}{49}; \quad \text{ბ) } \frac{4}{49}; \quad \text{გ) } \frac{10}{21}; \quad \text{დ) } \frac{25}{49}; \quad \text{ე) } \frac{20}{49}.$$

5. ერთ-ერთ სკოლაში 30 მასწავლებელი მუშაობს მათგან 20 ქალია, 10 - მამაკაცი, შემთხვევით ხდება 5 მასწავლებლის შერჩევა. რა არის ალბათობა იმისა, რომ შერჩეულთა შორის ზუსტად 2 მამაკაცია?

$$\text{ა) } \frac{C_{20}^5}{C_{30}^5}; \quad \text{ბ) } \frac{C_{10}^2 C_{20}^3}{C_{30}^5}; \quad \text{გ) } \frac{C_{20}^2}{C_{30}^5}; \quad \text{დ) } \frac{C_{10}^2 C_{20}^3}{C_{30}^5}; \quad \text{ე) } \frac{C_{10}^2}{C_{30}^5}.$$

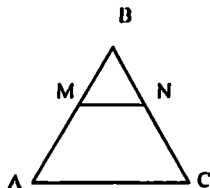
6. სპორტსმენი ხუთჯერ ესვრის სამიზნეს. თითოეული ნასროლის მოხვედრის ალბათობა არის P . რა არის ალბათობა იმისა, რომ

პირველი სამი გასროლა წარმატებული იქნება დანარჩენი ორი კი არა?

- ა) P^3 ; ბ) $P^3(1-P)^2$; გ) $P^2(1-P)^2$ დ) $P(1-P)$; ე) $10P^3(1-P)^2$.

7. $MN \parallel AC$; $\frac{MB}{AB} = \frac{1}{3}$. რა არის ალბათობა იმისა,

რომ ABC სამკუთხედში შემთხვევით შერჩეული ორი წერტილი ორივე $AMNC$ ტრაპეცი-
აში მოხვდება?



- ა) $\frac{16}{81}$; ბ) $\frac{25}{81}$; გ) $\frac{64}{81}$; დ) $0,16$; ე) $\frac{8}{9}$.

8. რა არის იმის ალბათობა, რომ ოთხი მონეტის ერთდროულად აგდების შემდეგ ორი მონეტა გერბით დაეცემა, დანარჩენი ორი - საფასურით?

- ა) $\frac{1}{4}$; ბ) $\frac{3}{8}$; გ) $\frac{1}{2}$; დ) $\frac{5}{8}$; ე) $\frac{3}{16}$.

9. თუ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, მაშინ აუცილებლად $P_A(B) =$

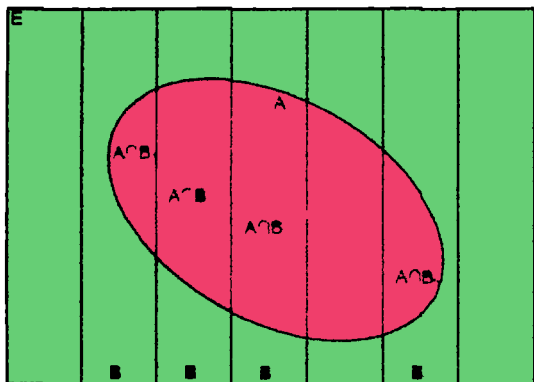
- ა) $P(A \cap B)$; ბ) $P(B)$; გ) $P(A)$; დ) $1 - P(A)$; ე) $1 - P(B)$.

10. თუ B აუცილებელი ხდომილობაა, მაშინ ნებისმიერი A ხდომილობისათვის $P_B(A) =$

- ა) $P(A \cap B)$; ბ) $P(B)$; გ) $1 - P(B)$; დ) $1 - P(A)$; ე) $P(A)$.

3.9. სრული ალბათობის ფორმულა, ბაიესის ფორმულა

ვთქვათ, მოითხოვება ვიპოვოთ A ხდომილობის ალბათობა, რომელიც ხდება ერთ-ერთ ხდომილობასთან ერთად, $B_1, B_2, \dots, B_n$ წყვილ-წყვილად უთავსებადი ხდომილობებიდან.



თუ A ხდომილობა მოხდა ერთ-ერთ $B_1, B_2, \dots, B_n$ ხდომილობასთან ერთად, ეს იმას ნიშნავს, რომ მოხდა ერთ-ერთი $A \cap B_1, A \cap B_2, \dots, A \cap B_n$ უთავსებადი ხდომილობებიდან.

ამრიგად, $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$.

ხდომილობები $A \cap B_1, A \cap B_2, \dots, A \cap B_n$ უთავსებადია იმიტომ, რომ უთავსებადია ხდომილობები $B_1, B_2, \dots, B_n$, მაშინ გვქვს:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) + \dots + P(A \cap B_n),$$

$$P(A \cap B_1) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A),$$

$$P(A \cap B_2) = P(B_2) \cdot P_{B_2}(A),$$

$$P(A \cap B_n) = P(B_n) \cdot P_{B_n}(A),$$

ამიტომ

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A).$$

ეს ტოლობა მოკლედ შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A) \quad (1).$$

(1) ტოლობას სრული ალბათობის ფორმულა ეწოდება. ამ ფორმულის საშუალებით შეიძლება მივიღოთ, რომ

$$P_A(B_j) = \frac{P(B_j) \cdot P_{B_j}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)},$$

სადაც $j = 1, 2, \dots, n$. ამ ფორმულას ბაიესის ფორმულა ეწოდება.

ვაჩვენოთ მისი სამართლიანობა, მართლაც გვაქვს

$$P(A \cap B_j) = P(B_j) \cdot P_{B_j}(A) \text{ და } P(A \cap B_j) = P(A) \cdot P_A(B_j),$$

$$\text{რაც იგივეა } P_A(B_j) = \frac{P(B_j) \cdot P_{B_j}(A)}{P(A)}.$$

თუ გავითვალისწინებთ $P(A)$ -ს მნიშვნელობას (1) ფორმულიდან მივიღებთ ბაიესის ფორმულის მოკლე ჩანაწერს:

$$P_A(B_j) = \frac{P(B_j) \cdot P_{B_j}(A)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)} \quad (2)$$

განვიხილოთ ზოგიერთი ამოცანა:

1. მონადირემ სამჯერ ესროლა ტახს, პირველი გასროლის მოხვედრის ალბათობა ტოლია 0,4-ის; მეორის - 0,5; ხოლო მესამის კი - 0,7-ის. ერთი მოხვედრით ტახის მოკვლის ალბათობა ტოლია 0,2-ის; ორით - 0,6-ის; ხოლო სამი მოხვედრით კი ტახი უეჭველად კვდება. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მონადირემ ტახი მოკლა.

ამოხსნა: განვიხილოთ უთავსებადი ხდომილობები:

A_0 - «აუცდენა»,

A_1 - «ერთი მოხვედრა»,

A_2 - «ორი მოხვედრა»,

A_3 - «სამი მოხვედრა».

ვთქვათ, B_1, B_2 და B_3 ხდომილობებია:

B_1 - «მოხვედრება პირველი გასროლით»,

B_2 - «მოხვედრება მეორე გასროლით»,

B_3 - «მოხვედრება მესამე გასროლით».

A-თი აღენიშნოთ ტახის მოკვლის ალბათობა, მაშინ სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად გვექნება.

$$P(A) = P(A_0) \cdot P_{A_0}(A) + P(A_1) \cdot P_{A_1}(A) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(A) + P(A_3) \cdot P_{A_3}(A).$$

გავიხსენოთ რომ B_1, B_2 და B_3 ხდომილობების საწინააღმდეგო ხდომილობებს აღენიშნავთ $\bar{B}_1, \bar{B}_2$ და $\bar{B}_3$ სიმბოლოებით, მაშინ გვაქვს:

$$A_0 = \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3,$$

$$A_1 = (B_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3) \cup (\bar{B}_1 \cap B_2 \cap \bar{B}_3) \cup (\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap B_3),$$

$$A_2 = (B_1 \cap B_2 \cap \bar{B}_3) \cup (B_1 \cap \bar{B}_2 \cap B_3) \cup (\bar{B}_1 \cap B_2 \cap B_3),$$

$$A_3 = B_1 \cap B_2 \cap B_3.$$

რადგან ხდომილობები B_1, B_2 და B_3 ერთობლივად დამოუკიდებელია, ამიტომ ერთობლივად დამოუკიდებელი იქნება $\bar{B}_1, \bar{B}_2$ და $\bar{B}_3$ ხდომილობებიც და მივიღებთ:

$$P(A_0) = P(\bar{B}_1) \cdot P(\bar{B}_2) \cdot P(\bar{B}_3),$$

$$P(A_1) = P(B_1) \cdot P(\bar{B}_2) \cdot P(\bar{B}_3) + P(\bar{B}_1) \cdot P(B_2) \cdot P(\bar{B}_3) + P(\bar{B}_1) \cdot P(\bar{B}_2) \cdot P(B_3),$$

$$P(A_2) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(\bar{B}_3) + P(B_1) \cdot P(\bar{B}_2) \cdot P(B_3) + P(\bar{B}_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3),$$

$$P(A_3) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3).$$

ამოცანის პირობიდან ცნობილია, რომ

$$P(B_1) = 0,4; \quad P(B_2) = 0,5; \quad P(B_3) = 0,7.$$

$$\text{აქედან კი ვიპოვოთ } P(\bar{B}_1) = 0,6; \quad P(\bar{B}_2) = 0,5; \quad P(\bar{B}_3) = 0,3;$$

ამიტომ

$$P(A_0) = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = 0,09;$$

$$P(A_1) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,36;$$

$$P(A_2) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,41;$$

$$P(A_3) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,14.$$

ამოცანის პირობიდან აგრეთვე გვაქვს, რომ

$$P_{A_0}(A) = 0; \quad P_{A_1}(A) = 0,2; \quad P_{A_2}(A) = 0,6; \quad P_{A_3}(A) = 1.$$

თუ ამ შედეგებს ჩავსევამთ სრული ალბათობის ფორმულაში მა-

შინ გვექნება:

$$P(A) = 0,09 \cdot 0 + 0,36 \cdot 0,2 + 0,41 \cdot 0,6 + 0,14 \cdot 1 = 0,458.$$

2. ავადმყოფი გრძნობს ძლიერ ტკივილებს გულის არეში, რაც სტატისტიკურად 50%-ის შემთხვევაში შეიძლება გამოიწვიოს K დაავადებამ, 30%-ის შემთხვევაში L დაავადებამ, ხოლო 20%-ის შემთხვევაში M დაავადებამ. ექიმთან მკურნალობის შემთხვევაში K დაავადების განკურნების ალბათობა 0,7-ის ტოლია; L-ისა 0,8-სა; ხოლო M-ის კი 0,9-ის. ავადმყოფი ექიმმა განკურნა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ავადმყოფს ჰქონდა K დაავადება?

ამოხსნა: შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

B_1 -ით აღვნიშნოთ ხდომილობა - «ავადმყოფს ჰქონდა K დაავადება»;

B_2 -ით «ავადმყოფს ჰქონდა L დაავადება»;

B_3 -ით «ავადმყოფს ჰქონდა M დაავადება»;

A-თი- «ავადმყოფი განიკურნა».

მაშინ ამოცანის პირობიდან გამომდინარე გვაქვს:

$$P(B_1) = 0,5; P(B_2) = 0,3; P(B_3) = 0,2. \text{ აგრეთვე გვექნება, რომ } P_{B_1}(A) = 0,7; P_{B_2}(A) = 0,8; P_{B_3}(A) = 0,9.$$

ჩვენ უნდა ვიპოვოთ ხდომილობის: «ავადმყოფი განიკურნა და მაშინ მას ჰქონდა K დაავადება», ალბათობა ე.ი. $P_A(B_1)$, ვისარგებლოთ ბაიესის ფორმულით:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)},$$

თუ მასში შევიტანთ შესაბამის მნიშვნელობებს მივიღებთ:

$$P_A(B_1) = \frac{0,5 \cdot 0,7}{0,5 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,9} = \frac{5}{11}.$$

3.9.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. გვაქვს სამი ერთნაირი მაგიდა. თითო მაგიდას სამი უჯრა აქვს. პირველი მაგიდის სამივე უჯრაში ოქროს კოვზები დევს. მეორე მაგიდის ერთ უჯრაში ოქროს კოვზებია, დანარჩენ ორში კი - ვერცხლის კოვზები. მესამე მაგიდის ორ უჯრაში ოქროს კოვზებია, მესამე უჯრაში - ვერცხლის კოვზები. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული მაგიდის ერთ-ერთი უჯრიდან ოქროს კოვზი ამოვიღეთ?
2. აქვთ 10 ზუსტად ერთნაირი ყუთი. მათგან 4 ერთნაირი შემადგენლობისაა, მათში 5 თეთრი და 5 ლურჯი ბურთულაა. 3 ყუთში, თითოეულში 3 თეთრი, 4 ლურჯი და 3 წითელი ბურთულაა. 2 ყუთში, თითოეულში 8 თეთრი და 2 წითელი ბურთულაა, ხოლო 1 ყუთში კი 1 თეთრი 5 ლურჯი და 4 წითელი ბურთულაა. ალალბედზე აირჩიეს ერთი ყუთი, ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ იქიდან შემთხვევით ამოღებული ბურთულა ა) თეთრი ფერისაა; ბ) ლურჯი ფერისაა; გ) წითელი ფერისაა.
3. ყუთში რომელშიც ორი დეტალი იყო, ჩაუმატეს იმავე დასახელების ერთი სტანდარტული დეტალი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამის შემდეგ ყუთიდან ალალბედზე ამოღებული ერთი დეტალი სტანდარტული იქნება, თუ ყუთში თავდაპირველად არსებულ დეტალებზე სტანდარტულობის შესახებ ყველა ჰიპოთეზა თანაბარმოსალოდნელია.
4. საწყობში მოიტანეს ერთი დასახელების 1000 დეტალი, მათ შორის 300 დამზადებულია A ქარხანაში, 200 - B ქარხანაში, ხოლო 500 - C ქარხანაში. ცნობილია, რომ A ქარხანაში მზადდება საშუალოდ 95% სტანდარტული დეტალი, B ქარხანაში - 90%, ხოლო C ქარხანაში კი - 85%. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე აღებული დეტალი სტანდარტული იქნება?
5. სამი ქვემეხისაგან შედგენილმა ბატარეამ ერთდროულად გაისროლა. პირველი ქვემეხი მიზანში ახვედრებს 0,2-ის ტოლი ალბათო-

- ბით, მეორე - 0,4-ის, ხოლო მესამე კი - 0,3-ის ტოლი ალბათობით. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სამიზნეში ორი გასროლა მოხვდა.
6. ერთ ყუთში მოთავსებულია 10 თეთრი და 5 შავი მხოლოდ ფერით განსხვავებული ბურთულა, მეორეში კი 20 თეთრი და 5 შავი. თითოეული ყუთიდან ალაღბედზე იღებენ თითო ბურთულას და შემდეგ ამ ორიდან შემთხვევით ირჩევენ ერთს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ა) არჩეული ბურთულა თეთრი ფერისაა; ბ) არჩეული ბურთულა შავი ფერისაა.
 7. აგორებენ თორმეტწახნაგა კამათელს, თუ მასზე მოვიდა 5-ის ჯერადი რიცხვი, მაშინ ბურთულა ალაღბედზე ამოაქვთ ყუთიდან, რომელშიც 3 თეთრი და 7 შავი ბურთულაა; თუ კამათელზე მოსული რიცხვი 5-ზე გაყოფისას ნაშთს გვაძლევ 1-ს, მაშინ ბურთულა ასევე ალაღბედზე ამოაქვთ მეორე ყუთიდან, რომელშიც 4 თეთრი, 3 წითელი და 3 შავი ბურთულაა; ხოლო თუ კამათელზე მოვა აღნიშნული რიცხვებიდან განსხვავებული რიცხვი, მაშინ ბურთულა ალაღბედზე ამოაქვთ ყუთიდან, რომელშიც 2 თეთრი და 8 წითელი ბურთულაა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ა) ამოღებული ბურთულა თეთრია; ბ) ამოღებული ბურთულა შავია; გ) ამოღებული ბურთულა წითელია.
 8. ერთ ყუთში 2 თეთრი და 3 წითელი ბურთულაა, მეორეში 2 თეთრი და 2 წითელი. მესამეში კი 3 თეთრი და ერთი წითელი. პირველი ყუთიდან ალაღბედზე ამოღებული ბურთულა გადადეს მეორე ყუთში, ამის შემდეგ მეორედან ასვე ალაღბედზე ამოღებული ბურთულა გადადეს მესამეში, და ბოლოს მესამე ყუთიდან ალაღბედზე ამოღებული ერთი ბურთულა გადადეს პირველში. ა) ბურთულათა როგორი შემადგენლობაა ყველაზე მეტად მოსალოდნელი პირველ ყუთში? ბ) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ყუთებში ბურთულათა შემადგენლობა (ფერები) არ შეცვლილა?
 9. აგორებენ თორმეტწახნაგა კამათელს, თუ მასზე მოვიდა მარტივი რიცხვი, მაშინ აგორებენ ჩვეულებრივ კამათელს, ხოლო წინააღ-

მდეგ შემთხვევაში აგდებენ მონეტას. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ა) ჩვეულებრივ კამათელზეც მარტივი რიცხვი მოვა; ბ) მონეტაზე გერბი მოვა.

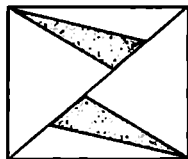
10. ქანჩებს სამი მანქანა ამზადებს. პირველი იძლევა პროდუქციის 20%-ს. მეორე - 30%-ს, მესამე კი - 50%-ს. დეფექტის წილი პირველი მანქანის პროდუქციაში არის 5%, მეორისაში - 2%, ხოლო მესამეს პროდუქციაში კი - 1%. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ საერთო პროდუქციის საწყობიდან შემთხვევით აღებული ქანჩი დეფექტურია.
11. ვთქვათ, ორ ერთნაირ ყუთში დევს ერთნაირი ზომის მხოლოდ ფერით განსხვავებული ბურთულები, პირველში 6 თეთრი და 4 წითელი ბურთულა, ხოლო მეორეში 12 თეთრი და 8 წითელი ბურთულა. ალაღბედზე ირჩევენ ერთ ყუთს, იქიდან რიგრიგობით ამოაქვთ 3 ბურთულა და ინიშნავენ ფერს, ამოღებულ ბურთულას კვლავ ყუთში აბრუნებენ. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ა) ამოღებული ბურთულები მხოლოდ თეთრი ფერისაა; ბ) ამოღებული ბურთულები მხოლოდ წითელი ფერისაა.
12. ყუთში ერთნაირი ზომის ხუთი ბურთულაა, რომლებსაც გააჩნიათ ნომრები, 1, 2, 3, 4 და 5. ყუთიდან ალაღბედზე ამოაქვთ (ამოღებულ ბურთულას უკან არ აბრუნებენ) ორი ბურთულა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბურთულების ნომრებს შორის განსხვავება არანაკლებია ორის.
13. ხუთი მსროლელიდან ორისათვის მიზანში მოხვედრის ალბათობა 0,7-ის ტოლია, სამისათვის კი 0,2-ის. რა უფრო მოსალოდნელია ალაღბედზე არჩეული მსროლელი მიზანში მოახვედრებს, თუ არა?
14. ჯგუფში 60% ვაჟია. ვაჟების 80%-ს და გოგონების 75%-ს აქვთ აბონემენტი. ჯგუფიდან ალაღბედზე გამოიძახეს ერთი სტუდენტი. რა უფრო მოსალოდნელია, ის რომ მას აქვს აბონემენტი, თუ არა?
15. ჯგუფში 80% გოგონაა. გოგონების 60% დაოჯახებულია, ხოლო

ვაჟების კი - 50%. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ალაღბედზე გამოძახებული სტუდენტი დაოჯახებულია.

16. ალბათობა იმისა, რომ პირველი მსროლელი მიზანი დააზიანებს 0,6-ის ტოლია, ხოლო მეორისათვის - 0,7. ორივე მსროლელმა ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად გაისროლა, რის შედეგადაც მიზანი დაზიანდა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მიზანი პირველმა მსროლელმა დააზიანა?
17. გზაზე, სადაც ბენზინის გასამართი სადგურია, გავლილ სატვირთო ავტომობილთა რიცხვის შეფარდება მსუბუქ ავტომობილთა რიცხვთან $\frac{2}{3}$ -ის ტოლია. ალბათობა იმისა, რომ გამვლელი ავტომობილი ბენზინით გაიმართება, სატვირთო ავტომობილები-სათვის 0,1-ის ტოლია, ხოლო მსუბუქისათვის 0,2-ის. გასამართ სადგურთან მივიდა ავტომანქანა, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ეს ავტომანქანა სატვირთოა?
18. მეთევზეს სათევზაოდ სამი ადგილი აქვს შერჩეული. ამ ადგილებზე იგი თევზაობს ერთნაირი ალბათობით. ალბათობა იმისა, რომ იგი პირველ ადგილზე თევზს დაიჭერს $\frac{1}{3}$ -ის ტოლია. მეორე ადგილზე თევზის დაჭერის ალბათობა $\frac{1}{2}$ -ის ტოლია, ხოლო მესამეზე $\frac{1}{4}$ -ის. ცნობილია, რომ მეთევზემ სამჯერ ისროლა ანკესი და ამოიყვანა მხოლოდ ერთი თევზი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ იგი თევზაობდა ა) პირველ ადგილზე, ბ) მეორე ადგილზე, გ) მესამე ადგილზე.
19. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ 5 მოქალაქიდან ერთი მაინც დაბადებული იქნება გაზაფხულის რომელიმე თვეში (მარტი, აპრილი, ან მაისი).
20. სიმპტომები რომელიც ავადმყოფს აღენიშნება შეიძლება გამოიწვიოს K დაავადებამ 50%-ის შემთხვევაში, R დაავადებამ 30%-ის შემთხვევაში და L დაავადებამ 20%-ის შემთხვევაში. ავადმყოფი ოჯახის ექიმმა განკურნა. K დაავადების განკურნების ალბათობა 0,7-ის ტოლია, R-ის 0,8-ის, ხოლო L-ის კი 0,9-ის, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ავადმყოფს ჰქონდა ა) K დაავადება? ბ) R

დაავადება? გ) L დაავადება?

21. კვადრატის დიაგონალი დაყოფილია 5 ტოლ ნაწილად. მასში მოთავსებულია ორი სამკუთხედი, ისე რომ ამ სამკუთხედების ფუძეები დიაგონალის მეხუთედი ნაწილებია, ხოლო წვეროები კვადრატის წვეროებს ემთხვევა. ნახაზზე ისინი ლურჯი ფერითაა მოცემული. კვადრატში ალაღბედზე ჩნდება წერტილი, თუ ეს წერტილი რომელიმე ფერადი სამკუთხედის შიგა არეშიც გაჩნდა აგორებენ ორ თორმეტწახნაგა კამათელს, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში ორ ჩვეულებრივ კამათელს, ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ კამათლებზე მოსული ქულების ჯამი მარტივი რიცხვია.



22. წინა 21-ე ამოცანის პირობაში, კამათლებზე მოსული რიცხვების ჯამი, ვთქვათ არის მარტივი რიცხვი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ისინი მოსულია თორმეტწახნაგა კამათლების გაგორების შემდეგ.
23. ვთქვათ, 5 მოქალაქიდან 3 ქალბატონია, ხოლო 2 მამაკაცი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ა) მათგან შემთხვევით შერჩეული მოქალაქე იანვარში იქნება დაბადებული, ბ) თუ შემთხვევით შერჩეული მოქალაქე დაბადებულია იანვარში, მაშინ იგი ქალბატონია.
24. 18 მსროლელიდან 5 სამიზნეში ახვდერებს 0,8-ის ტოლი ალბათობით, 7 - 0,7-ის ტოლი ალბათობით; 4 - 0,6-ის ტოლი ალბათობით, ხოლო 2 კი - 0,5-ის ტოლი ალბათობით. ალაღბედზე არჩეულმა მსროლელმა მიზნაში ვერ მოახვედრა. რომელი ჯგუფიდანაა ყველაზე უფრო მოსალოდნელი ეს მსროლელი?
25. 8 შაშხანიდან 2-ს ოპტიკური სამიზნე აქვს. ალბათობა იმისა, რომ სამიზნე დაზიანდება, ოპტიკურ სამიზნიანი შაშხანისათვის 0,9-ის ტოლია, ხოლო ჩვეულებრივისათვის - 0,7-ის. სამიზნე დაზიანდა პირველივე გასროლის შედეგად. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ გასროლა მოხდა ოპტიკურ სამიზნიანი შაშხანიდან?

26. ხუთი ყუთიდან 2 არის A შემადგენლობის (4 თეთრი და 1 შავი ბურთულა), 2 არის B შემადგენლობის (2 თეთრი და 3 შავი ბურთულა), ხოლო ერთი C შემადგენლობისა (1 თეთრი და 4 შავი ბურთულა). შემთხვევით არჩეული ყუთიდან ამოღებულია თეთრი ბურთულა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ყუთი C შემადგენლობისაა?
27. წრეში ჩახაზულია კვადრატი. თუ წრეში შემთხვევით გაჩენილი წერტილი აღმოჩნდება კვადრატის შიგა არეშიც, მაშინ აგორებენ თორმეტწახნაგა კამათელს, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში აგორებენ ჩვეულებრივ კამათელს, ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ კამათელზე მოვა სრული კვადრატი.
28. მაღაზიაში იყიდება სხვადასხვა ფერის ერთნაირი სანთებელები. თეთრი სანთებელები შეადგენს მთელი სანთებელების 20%-ს, წითელი - 30%-ს, ლურჯი - 40%-ს, ხოლო ყვითელი კი - 10%-ს, თეთრი სანთებელების - 20% უხარისხოა, წითელი სანთებელების - 15%-ია უხარისხო, ლურჯის - 25%, ხოლო ყვითელის კი 10%-ია უხარისხო, ალალბედზე ყიდულობენ ერთ სანთებელას, იგი ხარისხიანი აღმოჩნდა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ იგი არის ა) თეთრი ფერის; ბ) წითელი ფერის; გ) ლურჯი ფერის; დ) ყვითელი ფერის.
29. წინა 28-ე ამოცანის პირობებში ნაყიდი სანთებელა აღმოჩნდა უხარისხო. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ იგი არის ა) თეთრი ფერის, ბ) წითელი ფერის, გ) ლურჯი ფერის დ) ყვითელი ფერის.
30. ყუთში არის სამი ერთნაირი ბურთულა, რომლებიც დანომრილია 1, 2 და 3 რიცხვებით. ცდა მდგომარეობს შემდეგში: ყუთიდან ალალბედზე ამოაქვთ ერთმანეთის მიყოლებით ორი ბურთულა და ინიშნავენ მათ ნომრებს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ პირველად ამოღებული ბურთულას ნომერი მეტია მეორედ ამოღებული ბურთულას ნომერზე. განვიხილოთ ორი შემთხვევა: ა) ამოღებულ ბურთულას უკან აბრუნებენ; ბ) ამოღებულ

3.9.2. ტესტი №9

1. სრული ალბათობის ფორმულა:

$$\begin{aligned} \text{ა) } P(A) &= \sum_{i=1}^n P(B_i); & \text{ბ) } P(A) &= \sum_{i=1}^n P(B_i) - 1; & \text{გ) } P(A) &= \frac{\sum_{i=1}^n P(B_i)}{2}; \\ \text{დ) } P(A) &= \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A); & \text{ე) } P(A) &= \frac{P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}. \end{aligned}$$

2. ბაიესის ფორმულა:

$$\begin{aligned} \text{ა) } P(A) &= \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A); & \text{ბ) } P_i(B_k) &= \frac{P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}; \\ \text{გ) } P(A) &= \sum_{i=1}^n P(B_i); & \text{დ) } P(A) &= P(B_k) - \sum_{i=1}^n P(B_i); & \text{ე) } P(A) &= 1 - \sum_{i=1}^n P(B_i). \end{aligned}$$

3. სიმპტომები, რომელიც პაციენტს აღენიშნება, შეიძლება გამოწვეული ყოფილიყო 30%-ით A დაავადების შემთხვევაში ან 70%-ით B დაავადების შემთხვევაში. A დაავადების განკურნების ალბათობა 0,8-ის ტოლია, ხოლო B დაავადების განკურნების ალბათობა კი - 0,7-ია. ექიმმა პაციენტი განკურნა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ პაციენტს ჰქონდა B დაავადება.

$$\text{ა) } \frac{24}{73}; \quad \text{ბ) } \frac{49}{73}; \quad \text{გ) } 0,73; \quad \text{დ) } 0,27; \quad \text{ე) } \frac{27}{73}.$$

4. 10 ყუთიდან 2 ერთნაირი შემადგენლობისაა, თითოეულში ორი თეთრი და 8 შავი ბურთულა; ხოლო დანარჩენ რვა ყუთში, რომლებიც ასევე ერთნაირი შემადგენლობისაა მოთავსებულია 6 თეთრი და 4 შავი ბურთულა თითოეულში. ალაღბედზე შეარჩიეს ერთი ყუთი და იქიდან ასევე ალაღბედზე ამოიღეს ერთი ბურთულა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბურთულა თეთრი ფერისაა.

ა) 0,48; ბ) 0,5; გ) 0,6; დ) 0,98; ე) 0,52.

5. ერთ ყუთში 2 თეთრი და 3 წითელი ბურთულაა, მეორეში კი - 2 თეთრი, 1 წითელი და 2 ლურჯი. ალაღბედზე ირჩევენ ერთ ყუთს და იქიდან შემთხვევით ამოაქვთ ერთი ბურთულა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბურთულა თეთრი ფერისაა.

ა) 0,4; ბ) 0,6; გ) 0,5; დ) 0,2; ე) 0,3.

6. აგორებენ თორმეტწახნაგა კამათელს. თუ მასზე მოვიდა მარტივი რიცხვი აგდებენ 10-თეთრიან მონეტას, თუ არა მაშინ აგდებენ 20-თეთრიან მონეტას. ვიპოვოთ ა) ალბათობა იმისა, რომ მონეტაზე მოვა გერბი; ბ) ალბათობა იმისა, რომ თორმეტწახნაგა კამათელზე მოსულია მარტივი რიცხვი, თუ ცნობილია, რომ მოვიდა გერბი.

ა) $\frac{1}{2}, \frac{7}{12}$; ბ) $\frac{1}{2}, \frac{11}{12}$; გ) $\frac{1}{2}, \frac{5}{12}$; დ) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$; ე) $\frac{1}{2}, \frac{5}{7}$.

7. დათოს სახლთან ახლოს ექვსი მაღაზიაა. ალბათობა იმისა, რომ საჭირო პროდუქტი იქნება მაღაზიაში - პირველი მაღაზიისათვის ტოლია 0,4-ის; მეორისათვის - 0,5-ის; მესამისათვის - 0,6-ის, მეოთხისათვის - 0,3-ის; მეხუთისათვის - 0,7-ის; ხოლო მეექვსისათვის - 0,8-ის. დათო აგორებს კამათელს და იმის მიხედვით თუ რა რიცხვი მოვიდა კამათელზე მიდის შესაბამისი ნომრის მქონე მაღაზიისაკენ. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ დათო იმყოფებოდა მეოთხე მაღაზიაში, თუ ცნობილია, რომ მან საჭირო პროდუქტი მოიტანა.

ა) $\frac{1}{33}$; ბ) $\frac{3}{25}$; გ) $\frac{1}{11}$; დ) $\frac{1}{6}$; ე) $\frac{2}{11}$.

8. კლასში 20 გოგონა და 10 ბიჭია. გაკვეთილისათვის მოუმზადებელია 4 გოგონა და 3 ბიჭი. მასწავლებლის მიერ გაძახებულმა ბავშვმა გაკვეთილი არ იცის. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ გაძახებული ბავშვი ბიჭია.

ა) $\frac{7}{30}$; ბ) $\frac{7}{10}$; გ) $\frac{2}{15}$; დ) $\frac{4}{7}$; ე) $\frac{3}{7}$.

9. ალბათობა იმისა, რომ პირველი მსროლელი მიზანს დააზიანებს 0,1-ის ტოლია, ხოლო მეორისათვის - 0,2-ის. ორივე მსროლელმა

ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად გაისროლა, რის შედეგადაც მიზანი დაზიანდა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მიზანი პირველმა მსროლელმა დააზიანა.

ა) 0,5; ბ) $\frac{1}{3}$; გ) 0,25; დ) $\frac{5}{14}$; ე) $\frac{1}{6}$.

10. ყუთში, რომელშიც ერთი დეტალი იყო, ჩაუმატეს იმავე დასახელების ერთი სტანდარტული დეტალი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამის შემდეგ ყუთიდან ალაღბედზე ამოღებული დეტალი სტანდარტული იქნება, თუ ყუთში თავდაპირველად არსებულ დეტალზე სტანდარტულობის შესახებ ყველა ჰიპოთეზა თანაბარმოსალოდნელია.

ა) $\frac{3}{4}$; ბ) $\frac{1}{4}$; გ) $\frac{1}{2}$; დ) $\frac{1}{3}$; ე) $\frac{2}{3}$.

3.10. დამოუკიდებელ, განმეორებით ცდათა სერიას, ბერნულის სქემა, ბერნულის ფორმულა

ალბათობის თეორიას მაშინ ექნება პრაქტიკული ღირებულება და ნამდვილი აზრი, თუ ის დაკავშირებული იქნება ისეთ ცდებთან, ან მოვლენებთან, რომელთა რეალურად, ან აზრობრივად შესრულება შესაძლებელია.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითები: ლითონის ფულის მრავალჯერადი აგდება, რადიოაქტიური ატომის არსებობის ხანგრძლივობაზე დაკვირვება, გარკვეული ჯგუფის შერჩევა და მათ შორის ცაციათა («მემარცხენთა») დათვლა, წარმოების პროდუქციის ხარისხის შერჩევითი კონტროლი, ახალშობილთა სქესი, მიკროსკოპის მხედველობის არეში მოლექულათა რაოდენობაზე დაკვირვება და სხვა. როგორც ვხედავთ, ყველა მოყვანილი მაგალითი საკმაოდ განუსაზღვრელია და იმისათვის, რომ თეორიას ზუსტი აზრი მიეცეთ, საჭიროა ვიცოდეთ, თუ რა გვესმის განხილულ ცდებში ან დაკვირვებებში.

შეუცდომლად შეუძლებელია განისაზღვროს რომელიმე პიროვნების სიცოცხლის ხანგრძლივობა, თუმცა, საჭიროა ამ სიდიდის ზუსტად გამოსახვა. ამ შემთხვევაში შეიძლება ვიკითხოთ, რომელი რიცხვი გამოდგება ადამიანის სიცოცხლის ხანგრძლივობის განსაზღვრავად? არსებობს თუ არა მაქსიმალური ასაკი, რომლის შემთხვევაში სიცოცხლე შეუძებელია, თუ ასაკისათვის შეიძლება ნებისმიერი მნიშვნელობის აღება? ცხადია, ვერ დავუშვებთ, რომ ადამიანი 1000 წლამდე იცოცხლებს. ამ რიცხვს, რა თქმა უნდა დამზღვევი ორგანოები არავითარ შემთხვევაში არ მიიღებენ სიცოცხლის ხანგრძლივობის საზღვრად. იმ ფორმულების საფუძველზე, რომელზედაც დამყარებულია სიკვდილიანობის სტატისტიკის თანამედროვე ცხრილები, ცნობილია, რომ იმ ადამიანთა წილი, რომლებიც 1000 წლამდე ცხოვრობენ გამოისახება ფარდობით $1:10^{10}$, გამყოფი რიცხვი იწერება 10^{27} მილიარდი ნიშნით. ამ მტკიცებას ბიოლოგიის ან სოციოლოგიის თვალსაზრისით არავითარი აზრი არა აქვს, მაგრამ თუ

მას წმინდა სტატისტიკის თვალსაზრისით განვიხილავთ, მაშინ ვნახავთ, რომ ის ცდებს არ ეწინააღმდეგება. 100 წლის განმავლობაში 10¹⁰-ზე ნაკლები ადამიანი იბადება და რომ გავამტყუნოთ ზემოთ მოცემული სტატისტიკური დასკვნა დაგვჭირდება 10¹⁰ საუკუნე, რაც დედამიწის ასაკს 10¹⁰-ჯერ აღემატება. ცხადია, ის უმნიშვნელო წილი, რომელიც ალბათობას გამოსახავს, პრაქტიკულად შეუძლებელია და იგი შეუძლებლობას შევუსაბამოთ ე.ი. სინამდვილეში ვერცერთი ადამიანი 1000 წლის ასაკამდე ვერ მიაღწევს და ამიტომ შეგვიძლია ვიფიქროთ, რომ ჩვენი დაშვება უაზროა. სინამდვილეში ჩვენი დაშვება სავსებით მისაღებია და იგი ხელს შეგვიწყობს მთელი რიგი ფორმულების გამარტივებაში. გარდა ამისა, თუ გამოვიცხადებთ, რომ ადამიანს 1000 წლის ასაკამდე ცხოვრება შეუძლია, მაშინ კიდევ უფრო მეტ წინააღმდეგობას წავაწყდებით. რადგანაც, მაშინ ჩვენ იძულებულები ვიქნებით დავეშვათ მაქსიმალური ასაკის არსებობა. უხერხულიცაა, რომ ვთქვათ ადამიანის სიცოცხლის ხანგრძლივობა არის a წელიწადი და მას არ შეუძლია იცოცხლოს a წელიწადი და 5 წამი, ამას სჯობია ადამიანის სიცოცხლის ხანგრძლივობის მაქსიმუმი არც იყოს განსაზღვრული.

ყოველი თეორია აუცილებლად მოიცავს თავის თავში გარკვეულ გამარტივებებს და ეს უკანასკნელნი იმდენად ბუნებრივია, რომ მათზე არც საუბრობენ. ჩვენი გამარტივება ცდათა და დაკვირვებათა შესაძლო შედეგებს ეხება, თუ გვინდა ცდის აბსტრაქტული მოდელის აგება, მაშინ დავადგინოთ თუ რას წარმოადგენს დამოუკიდებელ, განმეორებით, ცდათა სერია.

ი. ბერნულის ფორმულა

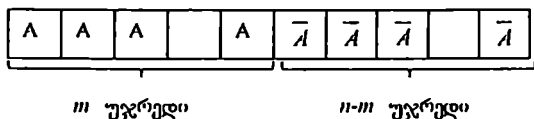
რამდენჯერმე ავაგდოთ მონეტა. მეოთხე ცდაზე გერბის მოსვლა არ არის დამოკიდებული პირველი, მეორე და მესამე ცდების შედეგებისაგან, ჩვენ ამ შემთხვევაში საქმე გვაქვს დამოუკიდებელ ცდებთან.

ვთქვათ, რომელიმე ერთგვაროვან ცდის ჩატარების დროს A

ხდომილობის მოხდენის ალბათობაა p , ხოლო არ მოხდენის ალბათობა $q=1-p$.

რისი ტოლი იქნება ალბათობა, იმისა რომ n განმეორებითი ცდების ჩატარების შემდეგ A ხდომილობა მოხდება m -ჯერ? ეს ხდომილობა ჩავწეროთ ასე: « $S_n=m$ ». ვეძებთ $P(S_n=m)$; ეს ხდომილობა მდგომარეობას იმაში, რომ n დამოუკიდებელი ცდების ჩატარების შედეგად A ხდომილობა მოხდეს ზუსტად m -ჯერ და არ მოხდეს $(n-m)$ -ჯერ. წარმოვიდგინოთ n რაოდენობის უჯრედი, მათგან m რაოდენობის უჯრედში ჩავწეროთ A , ხოლო $(n-m)$ რაოდენობის უჯრედში $\bar{A}$. მაგალითად, ერთ-ერთი ასეთი წარმოდგენა, რომელსაც ვუწოდებთ B_1 ხდომილობა გამოსახულია ნახაზზე.

B_1 ხდომილობაა -



ასეთი ხდომილობები, როცა m რაოდენობის უჯრედში ჩაწერილია A , ხოლო $(n-m)$ რაოდენობის უჯრედში კი $\bar{A}$ შეიძლება მოხდეს იმდენი რამდენი განმეორებითი გადანაცვლება შეიძლება მოხდეს A ხდომილობიდან m უჯრედსა და $\bar{A}$ ხდომილობიდან $(n-m)$ უჯრედს შორის. თუ ასეთი ხდომილობების რიცხვს აღვნიშნავთ N -ით, მაშინ გვექნება:

$$N = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m \quad (1)$$

ჩვენთვის საინტერესო „ $S_n = m$ “ ხდომილობა წარმოადგენს N რაოდენობის $B_1, B_2, B_3, \dots, B_N$ ხდომილობების გაერთიანებას. ისინი ტოლშესაძლებელი და წყვილ-წყვილად უთავსებადია, ამიტომ

$$P(S_n = m) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + \dots + P(B_N) = NP(B_1) \quad (2)$$

ამასთანავე გაქვს, რომ

$$B_1 = \underbrace{A \cap A \cap A \cap \dots \cap A}_m \cap \underbrace{\bar{A} \cap \bar{A} \cap \bar{A} \cap \dots \cap \bar{A}}_{(n-m)}.$$

რადგანაც ცდები ერთობლივად დამოუკიდებელია და $P(A) = p$,
 $P(A) = q$, ამიტომ ვწერთ:

$$P(B_1) = \underbrace{P(A) \cdot P(A) \cdot P(A) \cdot \dots \cdot P(A)}_{m-\text{ჯერ}} \cdot \underbrace{P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) \cdot \dots \cdot P(\bar{A})}_{(n-m)\text{-ჯერ}} =$$

$$= (P(A))^m \cdot (P(\bar{A}))^{n-m}$$
(3)

თუ (1) და (3) შედეგებს ჩავსვამთ, (2) ფორმულაში, ვპოულობთ:

$$P(S_n = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$
(4)

ამ ალბათობების ერთობლიობას ეწოდება ალბათობის ბინომური განაწილება, (4) ფორმულას ეწოდება ი. ბერნულის ფორმულა, ხოლო აღწერილ სქემას – ბერნულის სქემა.

(4) ფორმულის დახმარებით შეიძლება ვიპოვოთ ისეთი m_0 , რომელსაც უდიდესი $P(S_n = m_0)$ ალბათობა შეესაბამება. ასეთ m_0 -ს უალბათეს რიცხვს უწოდებენ.

$$\text{რადგანაც } \frac{P(S_n = m)}{P(S_n = m-1)} = 1 + \frac{(n+1) \cdot p - m}{mq},$$

ამიტომ $P(S_n = m) > P(S_n = m-1)$, როცა $m < (n+1) \cdot p$,

$P(S_n = m) < P(S_n = m-1)$, როცა $m > (n+1) \cdot p$,

$P(S_n = m) = P(S_n = m-1)$, როცა $m = (n+1) \cdot p$,

თუ $(n+1) \cdot p$ - მთელი რიცხვია.

ამიტომ m_0 უალბათესი მნიშვნელობა აკმაყოფილებს პირობებს

$$(n+1) \cdot p - 1 \leq m_0 \leq (n+1) \cdot p.$$

რადგანაც $p = 1 - q$, ამიტომ

$$np - q \leq m_0 \leq np + p.$$

განვიხილოთ მაგალითები:

1. წყალქვეშა ნავი აწარმოებს შეტევას კრეისერზე და მისი მიმართულებით ზედიზედ უშვებს ოთხ ტორპედოს. თითოეული ტორპედოს მოხვედრების ალბათობა დაახლოებით $\frac{3}{4}$ -ის ტოლია. ნებისმიერი ტორპედო ერთი და იგივე ალბათობით შეიძლება მოხვდეს კრეისერის 10 განყოფილებიდან ერთ-ერთს. თუ დაზიანდება ორი განყოფი-

ფილება მაინც, მაშინ კრეისერი იძირება. ვიპოვოთ კრეისერის ჩაძირვის ალბათობა.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ ხდომილობები:

A_0 - «აცდა ყველა ტორპედო»,

A_1 - «მოხვდა ერთი ტორპედო»,

A_2 - «მოხვდა ორი ტორპედო»,

A_3 - «მოხვდა სამი ტორპედო»,

A_4 - «მოხვდა ოთხი ტორპედო»,

A - «კრეისერი ჩაიძირა».

(4) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$P(A_1) = C_4^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{3}{64}; \quad P(A_2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{27}{128};$$

$$P(A_3) = C_4^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{27}{64}; \quad P(A_4) = C_4^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{81}{256};$$

$$P(A_0) = C_4^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}.$$

შესაბამისად გვექნება:

$$P_{A_0}(A) = 0; \quad P_{A_1}(A) = 0; \quad P_{A_2}(A) = 1 - \frac{1}{10} = 0,9; \quad P_{A_3}(A) = 1 - \frac{1}{10^2} = 0,99;$$

$$P_{A_4}(A) = 1 - \frac{1}{10^3} = 0,999.$$

სრული ალბათობის ფორმულით გვექნება:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_0) \cdot P_{A_0}(A) + P(A_1) \cdot P_{A_1}(A) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(A) + P(A_3) \cdot P_{A_3}(A) + \\ &+ P(A_4) \cdot P_{A_4}(A) = \frac{1}{256} \cdot 0 + \frac{3}{64} \cdot 0 + \frac{27}{128} \cdot 0,9 + \frac{27}{64} \cdot 0,99 + \\ &+ \frac{81}{256} \cdot 0,999 \approx 0,92. \end{aligned}$$

როგორც ვხედავთ, კრეისერს ძალზე მცირე შანსი რჩება გადარჩენისათვის.

2. თენგო და ნიკა თამაშობენ «ორთაბრძოლას». ამ თამაშის არსი მდგომარეობს შემდეგში: თითოეულ მათგანს აქვს 40 ცალი ასანთის

ღერი, აგდებენ მონეტას, გერბის მოსვლის შემთხვევაში თენგო გვერდზე გადადებს ერთ ცალ ასათნის ღერს - დაილუპაა მისი ჯარისკაცი, ხოლო თუ მოვიდა საფასური იგივეს აკეთებს ნიკა, მაშინ მას ელუპება ჯარისკაცი. თამაში გრძელდება მანამ, სანამ ერთ-ერთ მათგანს არ დაეღუპება ყველა ჯარისკაცი.

ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ერთ-ერთი ბიჭის დამარცხების შემთხვევაში მეორეს დარჩება 20 ცალი ასანთის ღერი.

ვთქვათ, A ხდომილობაა - «პირველი ყუთის დაცარიელების შემთხვევაში მეორეში დარჩება m რაოდენობის ასათნის ღერი».

აღვნიშნოთ ხდომილობები:

B_1 - «ასანთის ღერი ამოღებულია I ყუთიდან»,

B_2 - «ასათნის ღერი ამოღებულია II ყუთიდან».

რადგან მონეტა სიმეტრიულია, ამიტომ $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$; თუ I

ყუთის დაცარიელების შემდეგ II ყუთში დარჩა m რაოდენობის ასათნის ღერი, მაშინ მონეტის $(2n-m)$ -ჯერ აგდების შედეგად მოვიდა n -ჯერ გერბი, ხოლო $(n-m)$ -ჯერ საფასური, მაშასადამე, B_1 ხდომილობა მოხდა n -ჯერ $(2n-m)$ რაოდენობის ცდის ჩატარებისას, მაშინ (4) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$P(A) = C_{2n-m}^n \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^{n-m}} = C_{2n-m}^n \frac{1}{2^{2n-m}}.$$

ბიჭების თამაშის პირობის თანახმად

$$P(A) = C_{60}^{40} \frac{1}{2^{60}} \approx 0,01.$$

3. ადამიანი 0,2-ის ტოლი ალბათობით შეიძლება იყოს შავგვრემანი; 0,3-ის ტოლი ალბათობით წაბლისფერთმიანი; 0,4-ის ტოლი ალბათობით ქერა; ხოლო 0,1-ის ტოლი ალბათობით კი წითური. შემთხვევით შევარჩიოთ 6 ადამიანისაგან შემდგარი ჯგუფი. ვიპოვოთ შემდეგ ხდომილობათა ალბათობები: A - «ჯგუფის შემადგენლობაში არანაკლებ 3-ისა ქერაა»; B - «ჯგუფის შემადგენლობაში ერთი მაინც წითურია», C - «ჯგუფის შემადგენლობაში ქერებისა და წაბლისფერთმიანების რაოდენობა ერთმანეთის ტოლია».

ამოხსნა:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (C_6^0 \cdot (0,4)^0 \cdot (0,6)^6 + C_6^1 \cdot (0,4)^1 \cdot (0,6)^5 + \\ + C_6^2 \cdot (0,4)^2 \cdot (0,6)^4) = 1 - ((0,6)^6 + 6 \cdot (0,4)^1 \cdot (0,6)^5 + 15 \cdot (0,4)^2 \cdot (0,6)^4) \approx 0,455;$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - (1 - 0,1)^6 \approx 0,468.$$

რაც შეეხება C ხდომილობის ალბათობას, სანამ მის ამოხსნას შევუდგებოდეთ, მანამდე გავერკვეთ შემდეგში:

ბერნულის სქემა წარმოადგენდა ორშედეგიან დამოუკიდებელ ცდათა მიმდევრობას, მის განზოგადებას წარმოადგენს m -შედეგიან ($m > 2$) დამოუკიდებელ ცდათა მიმდევრობა.

ვთქვათ, რაიმე ცდის შედეგებია $A_1, A_2, \dots, A_m$ ხოლო მათი შესაბამისი ალბათობები $P_1, P_2, \dots, P_m$ (სადაც $P_i = P(A_i)$; $i = 1, 2, 3, \dots, m$) მასთან $P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_m = 1$. დავუშვათ, ამ ცდის n -ჯერ განმეორებისას A_1 ხდომილობას ადგილი ჰქონდა n_1 -ჯერ და ა.შ. A_m -ს n_m -ჯერ, მასთან გვაქვს, რომ $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_m = n$; აღვნიშნოთ ამ ხდომილობის ალბათობა $P_n(n_1, n_2, \dots, n_m)$ -თი; მაშინ გვექნება:

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_m!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \dots p_m^{n_m} \quad (5).$$

დავუბრუნდეთ C ხდომილობის ალბათობის გამოთვლას, შემოვიღოთ აღნიშვნები:

C_0 -ით აღვნიშნოთ ხდომილობა - „ჯგუფის შემადგენლობაში არც ერთი ქერა და არც ერთი წაბლისფერთმიანი არ არის“; C_1 -ით „ჯგუფის შემადგენლობაში ერთი ქერა და ერთი წაბლისფერთმიანია“; C_2 -ით - „ჯგუფის შემადგენლობაში ორი ქერა და ორი წაბლისფერთმიანია“; C_3 -ით - „ჯგუფის შემადგენლობაში სამი ქერა და სამი წაბლისფერთმიანია“.

$$\text{მაშინ გვექნება: } P(C) = P(C_0) + P(C_1) + P(C_2) + P(C_3)$$

$$P(C_0) = (1 - (0,4 + 0,3))^6 = (1 - 0,7)^6 \approx 0,0007;$$

$$P(C_1) = P_6(1, 1, 4) = \frac{6!}{1!1!4!} (0,3)^1 \cdot (0,4)^1 \cdot (1 - 0,7)^4 \approx 0,0292;$$

$$P(C_2) = P_6(2, 2, 2) = \frac{6!}{2!2!2!} (0,3)^2 \cdot (0,4)^2 \cdot (1-0,7)^2 \approx 0,1166;$$

$$P(C_3) = P_6(3, 3, 0) = \frac{6!}{3!3!0!} (0,3)^3 \cdot (0,4)^3 \cdot (1-0,7)^0 \approx 0,0346;$$

$$\text{ამიტომ } P(C) \approx 0,0007 + 0,0292 + 0,1166 + 0,0346 \approx 0,181.$$

3.10.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მენეჯინგისათვის

1. მონეტას აგდებენ ხუთჯერ. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ გერბი მოვა ზუსტად სამჯერ.
2. თორმეტწახნაგა კამათელს აგორებენ სამჯერ. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მასზე მარტივი რიცხვი მოვა ზუსტად ორჯერ?
3. კამათლის სამჯერ გაგორებისას რა უფრო მოსალოდნელია, ექვსიანის ერთხელ მაინც მოსვლა, თუ არმოსვლა?
4. კამათლის ოთხჯერ გაგორებისას რა უფრო მოსალოდნელია, ექვსიანის ერთხელ მაინც მოსვლა, თუ არმოსვლა?
5. მსროლელი მიზანში ისვრის 3-ჯერ, მიზანში მოხვედრის ალბათობა ერთი გასროლისას 0,8-ის ტოლია. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი ორჯერ მოახვედრებს და ერთხელ ააცდენს.
6. ოჯახში 5 ბავშვია, ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის 3 გოგონა და 2 ვაჟია, თუ გოგონას და ვაჟის დაბადების ალბათობები ერთმანეთის ტოლია და 0,5-ს უდრის.
7. მცენარის თესლის აღმოცენების უნარი 90%-ის ტოლია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ დათესილი 4 თესლიდან აღმოცენდება ა) არცერთი; ბ) ერთი; გ) ორი; დ) სამი; ე) ოთხივე.
8. ალბათობა იმისა, რომ ლატარიის ბილეთი მოიგებს უდრის 0,1-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 6 ბილეთიდან მოიგებს არანაკლებ ორისა და არაუმეტეს ოთხისა.
9. ქარხნის მიერ გამოშვებული ნაკეთობების 5% დეფექტურია. შემოწმებისას დეფექტიანი ნაკეთობების 80%-ს თვლიან წუნდებულად. ამ პროცედურის შემდეგ შეირჩა 100 ნაკეთობა. A ხდომი-

ლობა - «შერჩეული ასივე ნაკეთობა ვარგისიანი», B ხდომილობა - «შერჩეული ასი ნაკეთობიდან არაუმეტეს ორისა დეფექტიანია». ვიპოვოთ A და B ხდომილობების ალბათობები.

10. მონეტას აგდებენ ხუთჯერ. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ გერბი მოვა არანაკლებ ორისა და არაუმეტეს ოთხისა.
11. კამათელს აგორებენ სამჯერ. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მასზე ხუთიანი მოვა არანაკლებ ორისა.
12. კამათელს აგორებენ სამჯერ. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მასზე ერთიანი მოვა არაუმეტეს ერთისა.
13. ყუთში 8 ბირთვია; აქედან 5 თეთრი და 3 შავი ფერისაა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 4 ცდისას შავი ბირთვი ამოღებულ იქნება 3-ჯერ, თუ ამოღებულ ბირთვებს უკანვე აბრუნებენ.
14. ყუთში 8 ბირთვია, აქედან 5 თეთრი და 3 შავი ფერისაა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 4 ცდისას თერთი ბირთვი ამოღებული იქნება 3-ჯერ, თუ ამოღებულ ბირთვებს უკანვე აბრუნებენ.
15. მსროლელი მიზანში ისვრის 4-ჯერ. ყოველი გასროლის მიზანში მოხვედრის ალბათობა 0,4-ის ტოლია. ყოველი მოხვედრისას მსროლელს ეთვლება 5 ქულა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი დააგროვებს ა) 15 ქულას; ბ) 15-ზე არანაკლებ ქულას.
16. მონადირე ესვრის ნადირს და 4-ზე მეტ გასროლას ვერ ასწრებს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ნადირს ორი გასროლა მაინც მოხვდება, თუ მოხვედრის ალბათობა გასროლისას უდრის 0,3-ს.
17. ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტი ჩააბარებს გამოცდას 0,6-ია. იპოვეთ უაღმათესი რიცხვი იმ სტუდენტებისა, რომლებიც ჩააბარებენ გამოცდას, თუ ჯგუფში 25 სტუდენტია.
18. იპოვეთ ხდომილობის მოხდენის ალბათობა, თუ ცნობილია, რომ 38 დამოუკიდებელ ექპერიმენტში ამ ხდომილობის მოხდენის უაღმათესი რიცხვი 23-ის ტოლია (დაამრგვალეთ მეთაქვამდე).
19. სამიზნეს ესვრიან 4-ჯერ, თითოეული გასროლისას მოხვედრის ალბათობა 0,2-ის ტოლია. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სა-

მიზნეს ა) ოთხივე გასროლა აცდება; ბ) მოხვდება ერთხელ; გ) მოხვდება ორჯერ; დ) მოხვდება სამჯერ; ე) ოთხივე გასროლა მოხვდება.

20. ალბათობა იმისა, რომ ხარატის მიერ დამზადებული დეტალი არასტანდარტულია უდრის 0,1-ს. იპოვეთ არასტანდარტული დეტალების უაღმათესი რიცხვი, თუ ხარატმა 30 დეტალი დაამზადა.
21. თორმეტწახნაგა კამათელს აგორებენ 2-ჯერ. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ერთხელ მაინც მოვა სამის ჯერადი რიცხვი.
22. თორმეტწახნაგა კამათელს აგორებენ 3-ჯერ. ვიპოვოთ სამის ჯერადი ქულის მოსვლის უაღმათესი რიცხვი.
23. თორმეტწახნაგა კამათელს აგორებენ 3-ჯერ. ვიპოვოთ მარტივი რიცხვის მოსვლის უაღმათესი რიცხვი.
24. ჩვეულებრივ კამათელს აგორებენ 3-ჯერ. ვიპოვოთ მარტივი რიცხვის მოსვლის უაღმათესი რიცხვი.
25. მონეტას აგდებენ 10-ჯერ. ვიპოვოთ გერბის მოსვლის უაღმათესი რიცხვი.
26. მონეტა ისეა გაღუნული, რომ საფასურის მოსვლის ალბათობა მონეტის აგდებისას ოთხჯერ მეტია გერბის მოსვლის ალბათობაზე. ეს მონეტა ააგდეს 10-ჯერ. ვიპოვოთ გერბის მოსვლის უაღმათესი რიცხვი.
27. ალბათობა იმისა, რომ ავტომანქანა სტანდარტული იქნება ტოლია 0.7-ის. შერჩეულია 10 ავტომობილი, ვიპოვოთ მათი სტანდარტულობის უაღმათესი რიცხვი.
28. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 5 ავტომანქანიდან ზუსტად ოთხი იქნება სტანდარტული, თუ ცნობილია, რომ ამ მარკის ავტომობილთა სტანდარტულობის ალბათობა მუდმივია და 0,9-ს უდრის?
29. სამიზნეში მოხვედრის ალბათობა ყოველი გასროლისას 0,8-ის ტოლია. სამიზნეს ესროლეს 80-ჯერ, ვიპოვოთ მოხვედრათა რაოდენობის უაღმათესი რიცხვი.

30. რას უფრო მეტი ალბათობა აქვს თორმეტწახნაგა კამათელზე 6-იანის არმოსვლას, თუ ჩვეულებრივ კამათელზე 5-იანის არმოსვლას?

3.10.2. ტესტი №10

1. ბერნულის ფორმულა:

ა) $C_n^k p^k$; ბ) $C_n^k q^k$; გ) $C_n^k p^k q^{n-k}$; დ) $C_n^k p^k q^{n-k}$; ე) $C_n^k p^{n-k} q^k$.

2. უალბათესი რიცხვი K_0 მოთავსებულია შემდეგ შუალედებში:

ა) $np - q \leq K_0 \leq np + p$; ბ) $np \leq K_0 \leq nq$;

გ) $np \leq K_0 \leq nq + 1$; დ) $p \leq K_0 \leq q$ ე) $p \leq K_0 \leq p + q$.

3. მონეტა ააგდეს 6-ჯერ. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ 4-ჯერ მოვა გერბი

ა) $\frac{13}{64}$; ბ) $\frac{2}{3}$; გ) $\frac{17}{64}$; დ) $\frac{27}{64}$; ე) $\frac{15}{64}$.

4. მონეტა ააგდეს 6-ჯერ. ვიპოვოთ გერბის მოსვლის უალბათესი რიცხვი.

ა) 2; ბ) 3; გ) 4; დ) 5; ე) 6.

5. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ხდომილობა, რომლის მოხდენის ალბათობა ყოველ ექსპერიმენტში 0,7-ის ტოლია, ხუთჯერ ჩატარებულ ექსპერიმენტში მოხდება არანაკლებ ოთხჯერ.

ა) 0,2401; ბ) 0,16807; გ) 0,36015; დ) 0,52822; ე) 0,60534.

6. მცენარის თესლის აღმოცენების უნარი 70%-ის ტოლია. ვიპოვოთ 4 დათესილი თესლის აღმოცენების უალბათესი რიცხვი.

ა) 1; ბ) 3; გ) 2; დ) 0; ე) 4.

7. მონეტა ისეა გაღუნული, რომ საფასურის მოსვლის ალბათობა ხუთჯერ მეტია გერბის მოსვლის ალბათობაზე. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამ მონეტის ექვსჯერ აგდებისას გერბი მოვა არანაკლებ ორისა და არაუმეტეს ოთხისა.

ა) $\frac{625}{11664}$; ბ) $\frac{6125}{23328}$; გ) $\frac{125}{15552}$; დ) $\frac{9375}{46656}$; ე) $\frac{1625}{7776}$

8. ყუთში 3 თეთრი და ერთი წითელი ფერის ბურთულაა. ყუთიდან ალაღბედზე ამოაქვთ ერთი ბურთულა ინიშნავენ მის ფერს და კვლავ ყუთში აბრუნებენ. ვიპოვოთ ასი ჩატარებული ცდის შემთხვევაში თეთრი ბურთულის ამოღების უაღბათესი რიცხვი.

ა) 60; ბ) 70; გ) 77; დ) 75; ე) 80.

9. მონეტას აგდებენ 3-ჯერ და კამათელს აგორებენ ორჯერ. რას უფრო მეტი ალბათობა აქვს გერბის ერთხელ მაინც მოსვლას, თუ ექვსიანის არცერთხელ მოსვლას?

ა) გერბის ერთხელ მაინც მოსვლას;

ბ) ექვსიანის არცერთხელ მოსვლას;

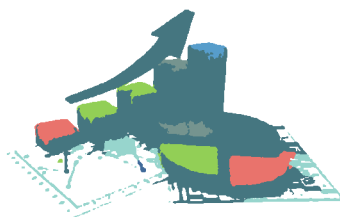
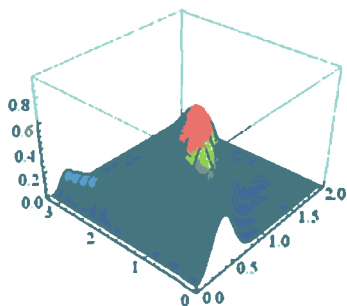
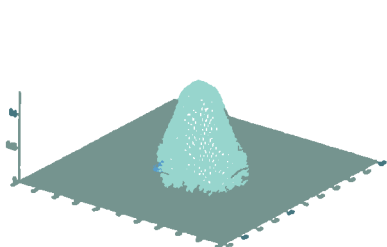
გ) შეუძლებელია განსაზღვრა;

დ) ორივე ალბათობა ერთმანეთის ტოლია.

10. კამათლის ექვსჯერ გაგორების შემთხვევაში ვიპოვოთ ექვსიანის მოსვლის უაღბათესი რიცხვი.

ა) 0; ბ) 1; გ) 2; დ) 3; ე) 6.

თავი მეოთხე მონაცემთა ანალიზი



4.1. მათემატიკური სტატისტიკის საბანი და ძირითადი ამოცანები

მათემატიკური სტატისტიკის ამოცანათა მოკლედ დახასიათება საკმაოდ ძნელია. მათემატიკური სტატისტიკა არსებითად იყენებს ალბათობის თეორიის მეთოდებს, სარგებლობს ანალოგიური ცნებებით, მაგრამ მიუხედავად ამისა, იგი გამოყოფილია, როგორც დამოუკიდებელი მათემატიკური დარგი. ამის მიზეზს წარმოადგენს მათემატიკური სტატისტიკის ამოცანათა სპეციფიკური ხასიათი, რაც იმითაა განპირობებული, რომ გარკვეული აზრით, მათემატიკური სტატისტიკის ამოცანები ალბათობის თეორიის ამოცანების შებრუნებულია. კერძოდ, თუ ალბათობის თეორიაში მოცემულად ითვლება შემთხვევითი მოვლენის მოდელი და მის საფუძველზე კეთდება დასკვნა ამ მოვლენის რეალური მიმდინარეობის შესახებ, მათემატიკურ სტატისტიკაში განიხილება შემთხვევითი მოვლენის კონკრეტული რეალიზაციები და მათი საშუალებით იგება ამ მოვლენის შესაბამისი ალბათური მოდელი.

მაგალითისათვის განვიხილოთ ცდათა მიმდევრობა, რომელშიც ვაკვირდებით რაიმე A ხდომილობის მოხდენა-არმოხდენას. ჩვენი მიზანია დაკვირვებათა საფუძველზე ვიპოვოთ A ხდომილობის უცნობი $P=P(A)$ ალბათობა. ბუნებრივია, რომ უცნობი $P(A)$ ალბათობის შეფასებად ავიღოთ $P^* = \frac{m}{n}$ სიდიდე, სადაც n არის ჩატარებულ ცდათა რიცხვი, ხოლო m არის A ხდომილობის მოხდენათა რაოდენობა ჩატარებულ n ცდის დროს. ($P^* = \frac{m}{n}$ სიდიდეს ხდომილობის სტატისტიკური ალბათობა ეწოდება). უცნობ პარამეტრთა სტატისტიკური შეფასება წარმოადგენს მათემატიკური სტატისტიკის ერთ-ერთ ძირითად ამოცანას. საზოგადოდ, მათემატიკურ სტატისტიკას განმარტავენ, როგორც მათემატიკის დარგს, რომელიც მეცნიერული და პრაქტიკული დასკვნებისათვის შეისწავლის სტატისტიკურ მონაცემთა სისტემატიზაციის, ანალიზის და გამოყენების მეთოდებს.

მათემატიკური სტატისტიკის კვლევის ერთ-ერთ ძირითად მეთოდს წარმოადგენს ე.წ. შერჩევითი მეთოდი.

განსაზღვრა 1. ერთგვაროვან ობიექტთა ერთობლიობის ზოგადი თვისებების კვლევის სტატისტიკურ მეთოდს, რომლის საფუძველია ამ ობიექტთა მხოლოდ ნაწილის შერჩევა და შესწავლა, შერჩევითი მეთოდი ეწოდება.

განსაზღვრა 2. ყველა იმ ერთგვაროვან ობიექტთა ერთობლიობას საიდანაც ხდება შერჩევა, გენერალური ერთობლიობა ეწოდება, ხოლო შემთხვევით შერჩეულ ელემენტთა ერთობლიობას, რომელთა შესწავლის საფუძველზე კეთდება დასკვნა გენერალური ერთობლიობის შესახებ, შერჩევითი ერთობლიობა, ანუ შერჩევა ეწოდება.

შერჩევის ელემენტთა რაოდენობას შერჩევის მოცულობა ეწოდება.

პოპულაციის სრულ აღწერას ჩვენ შერჩევის გამოყოფას და მის შესწავლას ვამჯობინებთ, თუნდაც იმიტომ, რომ ნაწილის დაკვირვება უფრო იაფია, ვიდრე მთელისა, თუმცა ხარჯების ეკონომიის გარდა შერჩევის უპირატესობას სხვა მოტივებიც განაპირობებენ.

ინფორმაციის დროულად მოპოვება მხოლოდ შერჩევის მეშვეობით შეიძლება; მაგალითად, პოლიტიკური ხასიათის გამოკითხვისას, როცა საჭიროა განისაზღვროს ვისკენ იხრება ამომრჩეველთა სიმბთიები, დროის ფაქტორი გადამწყვეტი მნიშვნელობისაა. საქმე ისაა, რომ ამომრჩეველთა ნება ხშირად თვით არჩევნებამდეც კი მერყეობს და ამიტომ ყოველი გამოკითხვა (თუ ის სწრაფად ტარდება) მხოლოდ იმ მოკლე პერიოდს ასახავს, როცა ის შედგა. აქ სრული აღწერის ჩატარება კიდევ რომ იყოს შესაძლებელი, მისი შედეგები ვერ იქნებოდა ადეკვატური საზოგადოებრივი აზრის მნიშვნელოვანი ცვლილებების გამო იმ ხნის განმავლობაში, რაც სრულ აღწერას ჭირდება. ზუსტად ასევე მუშაობს დროის ფაქტორი მარკეტინგულ გამოკვლევებშიც. არასოდეს არაა იმის საშუალება, რომ რაიმე ახალი პროდუქტის, ან მომსახურების ახალი სახეობის თაობაზე მოსახლე-

ობის 100%-ს შეექმნას აზრი. თუკი შერჩევამ ცხადი სურათი დახატა, ეს საკმაო საფუძვლად ითვლება დასკვნების გამოსატანად.

თუ პოპულაცია დიდი მოცულობისაა, ელემენტარული ერთეულიდან ინფორმაციის აღება ძალზე იაფიც რომ იყოს, სრულ აღწერას აზრი მაინც არ ექნება და შერჩევით უნდა დაგვამყოფილდეთ. ასეთივე დასკვნებამდე მივალთ, თუ პოპულაციის ერთეულების უმეტესობა მიუღწევადია. გასათაველისწინებელია არა მარტო ფიზიკური მიუღწევადობა: შესაძლოა ერთეულის გამოკვლევა იმდენად ძვირი იყოს, რომ შესაბამისი ელემენტარული ერთეული მიუღწევადად ჩავთვალოთ.

ზოგჯერ თვით დაკვირვების აქტიც კი სპობს ელემენტარულ ერთეულს. ასათნის კოლოფის ხარისხზე ყველაზე უფრო საიმედო დასკვნას მაშინ გამოვიტანთ, თუკი ყოველი ღერის ხარისხში დავრწმუნდებით, მაგრამ შედეგად ცარიელი კოლოფი დავგრჩება. არავინ ამოწმებს ყოველ საავტომობილო ძრავას, ან ყოველი ტელევიზორის კონესკოპს გაანგარიშებული სამუშაო ვადის ტოლფასი დატვრითვის მიცემით. სრული აღწერის მაგივრად, მსგავს სიტუაციებში იძულებული ვართ მხოლოდ შერჩევას მივმართოთ.

შერჩევა შეიძლება იყოს უფრო ზუსტი, ვიდრე სრული აღწერა. ცუდად ჩატარებულ სრულ აღწერას შეიძლება მოჰყვეს ბევრად უფრო არასაიმედო შედეგი, ვიდრე ზედმიწევნით ჩატარებულ შერჩევას, რაზეც შემდეგი მაგალითი მეტყველებს.

აშშ-ში 1940 და 1950 წლებში ჩატარებულ სრულ აღწერებს შორის აღმოჩნდა ორი საკვირველი განსხვავება. 1950 წელს წინა აღწერასთან შედარებით 20-ჯერ გაიზარდა 14 წლის ასაკში დაქვრივებული გოგონების რაოდენობა და ამდენჯერვე გახშირდა ინდიელთა განქორწინების (რაც ძლიერ იშვიათია) ფაქტები. ეს ცვლილებები აუხსნელი აღმოჩნდა სოციოლოგიური არგუმენტებით. მონაცემების მოპოვებისა და დამუშავების პროცესის ანალიზის შედეგად დადგინდა, რომ ეს იყო პერფორატებზე ინფორმაციის არასწორად გადატანის შედეგი.

შერჩევას ეწოდება წარმომადგენლობითი, ანუ რეპრეზენტაციული, თუ იგი კარგად წარმოადგენს პოპულაციის პროპორციებს.

შერჩევის წესი განსაზღვრავს შერჩევითი ერთობლიობის ადევნატურობას. მიღებული შერჩევის რეპრეზენტაციულობას ხელს უშლის შერჩევის ცდომილება.

შერჩევის შემთხვევითი ცდომილება ეს ის განსხვავებაა შერჩევა-სა და პოპულაციას შორის, რომელსაც განაპირობებენ მხოლოდ შერჩევაში მონაწილე კონკრეტული ელემენტარული ერთეულები. ასეთი ცდომილება ძალიან ადვილი წარმოსადგენია; თუ მაგალითად, ყუთში 35 ბურთულაა 7 სხვადასხვა ფერისა, თითოეული 5-5 ოდენობით; მაშინ დავუშვათ, 5 ელემენტიან შერჩევაში შეიძლება ყველა ბურთულა წითელი ფერის აღმოჩნდა და აქედან გაკეთებული დასკვნა, იმის თაობაზე, რომ ყუთში ბურთულების უმეტესობა წითელია, სწორი არ იქნება. შემთხვევითი ცდომილებიდან თავის დაღწევის მთავარი საშუალებაა შერჩევის მოცულობის გაზრდა.

შერჩევის სისტემატური ცდომილება ანუ (მის მიერ დასახატავი ჭეშმარიტი სურათის) ჩანაცვლება (მცდარი სურათით) ესაა ტენდენცია არჩეულ იქნას გარკვეული კერძო თვისებების მქონე ელემენტარული ერთეულები. ამგვარი ცდომილება, ცხადია, შერჩევის ცუდი დაგეგმვის შედეგია. განვიხილოთ პოლიტიკური აზრის გამოკითხვის შემდეგი კლასიკური მაგალითი.

1936 წელს აშშ-ში გაზეთმა Literary Digest-მა მოაწყო ამომრჩეველთა გამოკითხვა. არჩევნებში დემოკრატი ფრანკლინ დ. რუზველტი გამოდიოდა რესპუბლიკელი ალფრედ გ. ლანდონის წინააღმდეგ. რამდენიმე მილიონი გამოკითხულის რეაქცია იყო საფუძველი იმისა, რომ გაზეთმა გამოაცხადა, ლანდონი სარეკორდო შედეგით გაიმარჯვებსო. მოხდა სრულიად საპირისპირო, რუზველტმა მოიპოვა აშშ-ს ისტორიაში უდიდესი გამარჯვება. გამოკვლევის მცდარი შედეგი შემდგომ კვალიფიცირებული იყო როგორც შერჩევის ჩანაცვლება.

საქმე ისაა, რომ გაზეთმა შერჩევა მოაწყო თავისი ხელმომწერე-

ბის სიებიდან და სატელეფონო წიგნებიდან. ამერიკის ისტორიაში დიდი დეპრესიის სახელით ცნობილი პერიოდის მკაცრ პირობებში ორივე ეს წყარო შეიცავდა იმ წარმატებული პირების დისპროპორციულ რაოდენობას, რომელთაც მოსწონდათ რესპუბლიკელთა პლატფორმა. ვინაიდან უკმაყოფილო უმრავლესობას, რომელიც ცალსახად რუზველტს ამჯობინებდა, არც ტელეფონი გააჩნდა და არც გაზეთზე ხელმოწერა, იგი შერჩევაში ადეკვატურად არ იყო წარმოდგენილი.

შერჩევის ჩანაცვლების თავიდან აცილება სტატისტიკოსის ძირითადი ამოცანაა.

ცდომილების კიდევ ერთი წყაროა გაზომვის ან გამოკითხვის ცდომილება, რომელიც შეიძლება შეგვხვდეს როგორც სრული აღწერის, ისე შერჩევითი გამოკვლევის დროს.

არსებობს შერჩევის მიღების სხვადასხვა ხერხი, რომლებიც ან შემთხვევითი ხასიათისაა და ექვემდებარება ალბათობის თეორიის მეთოდებით შესწავლას, ან არაა ასეთი ხასიათის და ამდენად მათთვის ზუსტი თეორია არ არსებობს. ჯერ ჩამოვთვალოთ ისეთი ხერხები, რომელთაც არა აქვთ შემთხვევითი ხასიათი.

1. შერჩევა იფარგლება პოპულაციის მხოლოდ მისაწვდომი ნაწილით (მისაწვდომი შერჩევა). ამის მაგალითია რკინიგზის ღია ვაგონიდან ქვანახშირის ამოღება მხოლოდ 15-20 სანტიმეტრის სიღრმიდან.

2. შერჩევა უწესრიგოდ წარმოებს (უწესრიგო შერჩევა). მაგალითად თუ მკვლევარს სჭირდება ათი ბოცვერი და ლაბორატორიაში მდებარე გალიიდან იგი მხოლოდ მათ დაიჭერს, რომლებიც ხელში მოხვდება.

3. მიზანმიმართული შერჩევა. მცირე, მაგრამ არაერთგვაროვანი პოპულაციის გამოსაკვლევად ათვალისწინებენ მთელ პოპულაციას და ირჩევენ ტიპობრივი ერთეულების მცირე რაოდენობას ე.ი. ისეთ ერთეულებს, რომლებიც პასუხობენ საშუალო წარმოდგენას პოპულაციის შესახებ. ამგვარ მეთოდს მიზანმიმართული შერჩევა ეწოდება.

შერჩევის გამოყოფის სამივე ეს ხერხი იძლევა ჩანაცვლებას, მაგრამ ზოგჯერ შერჩევითი გამოკვლევის სხვა საშუალება არ არსებობს; ჩამოთვლილი არაშემთხვევითი მეთოდები შესაბამის პირობებში შეიძლება სასარგებლოც აღმოჩნდეს, თუნდაც წინასწარი ინფორმაციის მოპოვებისათვის, მაგრამ შერჩევითი მეთოდების განვითარება ამ მეთოდებს არ უკავშირდება, ვინაიდან ისინი არ შეიცავენ შემთხვევითი (ალბათური) შერჩევის ელემენტებს.

შერჩევის უმნიშვნელოვანესი სახეობაა შემთხვევითი შერჩევა, «შერჩევა» გულისხმობს რაიმე წესს - უკეთესის, ან უარესის შერჩევას. ნუ ჩავთვლით «შემთხვევით შერჩევას» აბსურდულ კომბინაციად, რადგან ჯერჯერობით «შერჩევა» ითვლება sample-ს ქართულ ეკვივალენტად (საყოველთაოდ მიღებული უკეთესი შესატყვისი სიტყვის უქონლობის გამო; სინამდვილეში sample ნიშნავს ნიმუშს, სინჯს) და გაიგება როგორ პოპულაციის ნაწილი.

შემთხვევითი შერჩევა გულისხმობს, რომ პოპულაციის ყოველი ელემენტისათვის განსაზღვრულია შერჩევაში მოხვედრის შანსი (ანუ ალბათობა, შესაძლებლობის ხარისხი; ამიტომ შემთხვევით შერჩევას ალბათურ შერჩევასაც უწოდებენ).

მარტივი შემთხვევითი შერჩევა. როდესაც შერჩევის გეგმა ისეთია, რომ პოპულაციის ყოველი ელემენტისათვის შერჩევაში მოხვედრის შანსი ერთნაირია, ამბობენ, რომ გვაქვს მარტივი შემთხვევითი შერჩევა, მარტივი შემთხვევითი შერჩევა ლატარიის პრინციპით ეწყობა.

შერჩევა შემთხვევითი რიცხვების გამოყენებით. თუ პოპულაცია დანომრილია, იქიდან მარტივი შემთხვევითი შერჩევის მოწყობა იოლდება ე.წ. შემთხვევითი რიცხვების მეშვეობით. შემთხვევითი რიცხვები არის 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ციფრების შემთხვევითი მიმდევრობა, სადაც თითოეული ციფრი დაახლოებით ერთნაირი სიხშირით ჩნდება.

სისტემატური შემთხვევითი შერჩევა. თუ პოპულაციის ერთეულები გადანომრილია, შემთხვევითი რიცხვების დიდი რაოდენობის

ამოწერის ან კომპიუტერული გენერაციის მაგივრად შეგვიძლია ავირჩიოთ შემთხვევითი ციფრი და ამ ნომრიანი ერთეულიდან დაწყებული ავირჩიოთ ყოველი მე-10 ერთეული. ეს იქნება ე.წ. სისტემატური შერჩევა (ძველ რომში გავრცელებული იყო დეციმაციის მეთოდი, რომელიც გულისხმობდა რაიმე დანაშაულის გამო, მწკრივში მდგარი, ყოველი მეათე ჯარისკაცის დასჯას). ამრიგად, სისტემატური შერჩევა მიიღება ერთი ერთეულის შემთხვევითი შერჩევით და დანარჩენების როლში ამ ერთეულიდან გარკვეული ბიჯით დაშორებული ნომრების მქონე ერთეულების გამოყოფით მანამ, სანამ ერთეულების საჭირო რაოდენობა არ დაგროვდება. თუ ბიჯი არის K , პირველი ელემენტი ამოიღება შემთხვევით $1, 2, \dots, K$ ნომრიანი ერთეულებიდან და თუ მისი ნომერია a , მაშინ სისტემატური შერჩევაა $a, a + K, \dots, a + nK$, სადაც n შერჩევის მოცულობაა.

განშრევებული შემთხვევითი შერჩევა. ზოგჯერ ჩვენი ამოცანაა უზრუნველყოთ შერჩევაში პოპულაციის სხვადასხვა ჯგუფის წარმომადგენლობა. ამისათვის გამოყოფა ისე უნდა მოხერხდეს, რომ ამ ჯგუფების პროპორციები შერჩევაში ისეთივე იყოს, როგორც პოპულაციაშია. პოპულაციის თითოეულ ჯგუფს შრეს უწოდებენ, ხოლო მიღებულ შერჩევას - განშრევებულ შერჩევას. განშრევებას მაშინ მიმართავენ, როდესაც პოპულაცია არაერთგვაროვანია. განშრევება ისე უნდა მოეწყოს, რომ შრეები თანაუკვეთი გამოვიდნენ, როგორც კი პოპულაცია შრეებად დაიყოფა, ჩვენ შეგვიძლია თითოეულ შრეში მარტივი შემთხვევითი შერჩევა მოვაწყოთ.

კლასტერული შემთხვევითი შერჩევა. შემთხვევითი შერჩევის კიდევ ერთი ფორმა გამოიყენება უპირატესად მომხმარებელთა აზრის გამოკითხვისას, რომელიც უფრო ეკონომიურია; მაგალითად, უკეთესია რომ გამომკითხველმა ქალაქის შემთხვევით არჩეულ უბანში 50 ოჯახი კარდაკარ დაიაროს, ვიდრე ქალაქის მასშტაბით 50 შემთხვევით არჩეულ ოჯახს ესტუმროს. თუ პოპულაციას დავყოფთ თანაუკვეთ ნაწილებად - კლასტერებად (ვთქვათ, ქალაქის მცხოვრებლებს გეოგრაფიული სიახლოვის მიხედვით უბნებად დავ-

ყოფთ), მაშინ შემთხვევითი შერჩევა შეიძლება ჯერ კლასტერის ან კლასტერების შემთხვევით შერჩევაში მდგომარეობდეს, ხოლო შემდეგ თითოეული შერჩეული კლასტერის სრულ აღწერაში. ამგვარ შერჩევას კლასტერული შერჩევა ეწოდება (ზოგჯერ კლასტერს ბუდეს უწოდებენ, ხოლო კლასტერულ შერჩევას - ბუდობრივ შერჩევას).

სისტემატური შერჩევა კლასტერულის კერძო შემთხვევაა. თუ k არის სისტემატური შერჩევის ბიჯი და პოპულაციის ყველა $N = mk$ ერთეული გადანომრილია, მაშინ გვაქვს k კლასტერი და სისტემატური შერჩევა ნიშნავს კლასტერებიდან ერთ-ერთის შემთხვევით შერჩევას და მის სრულ აღწერას.

კლასტერული შერჩევა ეკონომიურია, მაგრამ მას ხშირად თან სდევს ჩანაცვლება, ვინაიდან სოციალური გამოკვლევისას, მეზობლობის პრინციპით შედგენილ კლასტერში, შეიძლება ერთგვაროვანი შედეგები მივიღოთ და ამით პოპულაციის ადეკვატური სურათი არ გამოვიდეს, ვინაიდან განსხვავებული დაკვირვება სწორედ იმ კლასტერში დარჩეს, რომელიც არ არჩეულა.

ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას, რომ განშრეეებული და კლასტერული შერჩევა ორივე ყოფს პოპულაციას ჯგუფებად, მაგრამ თუ შრე ერთგვაროვანი ელემენტებისაგან შედგება კლასტერის აგების პრინციპია მეზობლობა და სიახლოვე, განშრეეებულ შერჩევაში ყველა შრე მონაწილეობს, კლასტერში კი მხოლოდ რამდენიმე კლასტერია წარმოდგენილი, ოღონდ სრულად. თუ განშრეეებული შერჩევა ახერხებს ჩანაცვლების ელიმინირებას (გამორიცხვას), კლასტერული შერჩევის უპირატესობა მხოლოდ ეკონომიურობაშია.

4.1.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მეთოდებისათვის

ცხრილში მოცემულია ერთ-ერთი სუპერმარკეტის მიერ ივნისი-სექტემბრის თვეებში რეალიზებული პროდუქციის რაოდენობა კილოგრამებში.

პროდუქტი \ თვეები	ბოსტნეული	ძეხვეული	საკონდიტრო ნაწარმი	ხილი
ივნისი	500	320	150	380
ივლისი	620	260	120	430
აგვისტო	610	200	90	300
სექტემბერი	770	240	100	380

ვუპასუხოთ შემდეგ კითხვებს:

1. რომელ თვეში გაიყიდა ყველაზე დიდი რაოდენობის ბოსტნეული?
2. რომელ თვეში გაიყიდა ყველაზე დიდი რაოდენობის ძეხვეული?
3. რომელ თვეში გაიყიდა ყველაზე მცირე რაოდენობის საკონდიტრო ნაწარმი?
4. რომელ თვეში გაიყიდა ყველაზე დიდი რაოდენობის ხილი?
5. რამდენჯერ ნაკლები ბოსტნეული გაიყიდა ივნისის თვეში დანარჩენ თვეებთან შედარებით (ჯამში)?
6. რამდენჯერ მეტი საკონდიტრო ნაწარმი გაიყიდა ივნისის თვეში სექტემბერთან შედარებით?
7. აგვისტოს თვეში გაყიდული პროდუქტის რამდენ პროცენტს შეადგენს ხილი?
8. რომელ თვეში გაიყიდა მეტი პროდუქტი, რომელში ნაკლები და რამდენით?
9. პროდუქტები დავალაგოთ პოპულარულობის მიხედვით.
10. რომელ თვეში და რომელი პროდუქტი გაიყიდა ყველაზე ნაკლები?

ცხრილში მოცემულია 2012-15 წლების აგვისტოს თვეში ქუთაისის მოსახლეობის რამდენი პროცენტი დარჩა ქალაქში და რამდენი

პროცენტი ისვენებდა ქალაქის გარეთ.

წელი	ქალაქში დამრჩენები	დამსვენებლები			
		ზღვაზე	მთაში	რაიონებში	საზღვარგარეთ
2012	62	10	5	20	3
2013	60	10	5	22	3
2014	63	8	4	23	2
2015	64	7	6	19	4

გუპასუხოთ შემდეგ კითხვებს:

11. რამდენი პროცენტით მეტი იყო ქალაქში დამრჩენი, ვიდრე დამსვენებული 2012 წელს?
12. პროცენტულად, წლების მიხედვით, რომელი მაჩვენებელი იკლებს?
13. რომელ წელს იყო ყველაზე ნაკლები დამსვენებული პროცენტულად რაიონში?
14. რომელ წელს იყო 4-ჯერ მეტი დამსვენებული ზღვაზე, ვიდრე საზღვარგარეთ?
15. რომელი კატეგორიის და რომელ წლებში იყო დამსვენებელთა პროცენტული რაოდენობა უცვლელი?
16. დამვენებლეთა რა ნაწილი იყო წასული საზღვარგარეთ 2015 წელს?
17. რომელ წელს წავიდა 4-ჯერ მეტი დამსვენებული რაიონში, ვიდრე მთაში?
18. რომელ წელს იყო ზღვაზე ორჯერ ნაკლები დამსვენებული, ვიდრე რაიონში?
19. რომელ წელს იყო ქალაქში დამრჩენების პროცენტული რაოდენობა 6-ჯერ მეტი ზღვაზე დამსვენებლებზე?
20. ცხრილის მიხედვით რა დასკვნას გააკეთებდით?

ფეხბურთში, FIFA-ს ეგიდით, ჩატარებულ მსოფლიო ჩემპიონატებში, გამარჯვებული ქვეყნებისათვის შევადგინოთ შემდეგ ცხრილი:

კონტინენტი	ქვეყანა	გამარჯვებათა რაოდენობა
ამერიკის	ურუგვაი	2
ამერიკის	ბრაზილია	5
ამერიკის	არგენტინა	2
ევროპის	იტალია	4
ევროპის	გერმანია	4
ევროპის	ინგლისი	1
ევროპის	საფრანგეთი	1
ევროპის	ესპანეთი	1

ვუპასუხოთ შემდეგ კითხვებს:

21. პროცენტულად რამდენი გამარჯვება მოიპოვეს ამერიკის კონტინენტის ქვეყნებმა?
22. რამდენია ბრაზილიის პროცენტული წილი საერთო გამარჯვებებში?
23. რამდენია ბრაზილიის წილი ამერიკის კონტინენტის ქვეყნების მიერ მოპოვებულ გამარჯვებებში?
24. რამდენია იტალიისა და გერმანიის, ერთად აღებული, წილი ევროპის ქვეყნების მიერ მოპოვებულ გამარჯვებებში?
25. სულ რამდენი მსოფლიო ჩემპიონატია ჩატარებული ფეხბურთში FIFA-ს ეგიდით?
26. ევროპის რამდენით მეტ ქვეყანას აქვს მოპოვებული გამარჯვება ამერიკის ქვეყნებთან შედარებით?
27. სულ რამდენი ქვეყანას აქვს მოგებული მსოფლიო ჩემპიონატი ფეხბურთში?
28. რამდენია ინგლისის, საფრანგეთის და ესპანეთის, ერთად აღებული, წილი საერთო გამარჯვებებში?
29. რამდენია ურუგვაისა და არგენტინის, ერთად აღებული, პროცენტული წილი საერთო გამარჯვებებში?
30. რამდენია იტალიისა და გერმანიის, ერთად აღებული, პროცენტული წილი საერთო გამარჯვებებში?

4.1.2. ტესტი №1

1. შემდეგი შერჩევებიდან რომელია შერჩევის ჩანაცვლება?

- ა) მარტივი შემთხვევითი შერჩევა;
- ბ) მიზანმიმართული შერჩევა;
- გ) სისტემატური შემთხვევითი შერჩევა;
- დ) განშრეეებული შერჩევა.

2. შემდეგი შერჩევებიდან რომელი არაა შერჩევის ჩანაცვლება?

- ა) მისაწვდომი შერჩევა;
- ბ) უწყსრიგო შერჩევა;
- გ) შერჩევა შემთხვევითი რიცხვების გამოყენებით;
- დ) მიზანმიმართული შერჩევა.

3. ჩამოთვლილია ორი სიტუაცია: 1. შესამოწმებელია იმ კოსმოსური ხომალდის კომპონენტების ხარისხი, რომელიც ადამიანებითურთ უნდა გაფრინდეს კოსმოსში. 2. იმისათვის, რომ გააუმჯობესოს პაციენტების მომსახურება, სავადმყოფოს ადმინისტრაციას სურს შეისწავლოს ნამკურნალები პირების აზრი. რომელ შემთხვევაში რა აჯობებს, სრული აღწერა, თუ შერჩევა?

- ა) 1-ში სრული აღწერა; 2-ში შერჩევა;
- ბ) ორივეში სრული აღწერა;
- გ) 1-ში შერჩევა; 2-ში სრული აღწერა;
- დ) ორივეში შერჩევა.

იანვრის თვეში ტანსაცმლის მაღაზიამ გაყიდა 25 შარვალი 10 პერანგი, 5 ლაზადა და 20 კოსტუმი. უპასუხეთ შემდეგ კითხვებს:

4. გაყიდულ შარვლებსა და კოსტუმებს შორის რამდენია შარვლის წილი?

- ა) $\frac{1}{4}$; ბ) $\frac{1}{5}$; გ) $\frac{4}{5}$; დ) $\frac{5}{9}$; ე) $\frac{4}{9}$.

5. გაყიდულ საქონელს შორის რამდენია პერანგის წილი?

- ა) $\frac{1}{5}$; ბ) $\frac{1}{6}$; გ) $\frac{2}{7}$; დ) $\frac{1}{9}$; ე) $\frac{4}{7}$.

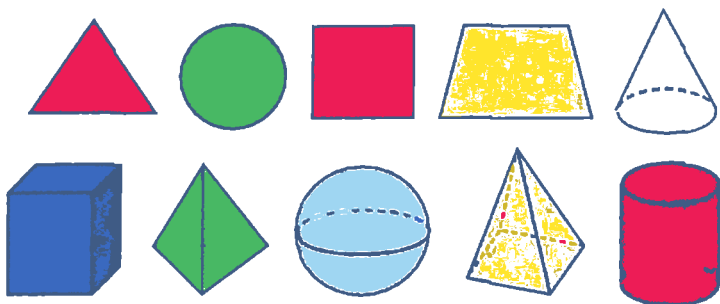
6. რამდენჯერ ნაკლები ლაზადა გაიყიდა ვიდრე კოსტუმი?

- ა) 15-ჯერ; ბ) 5-ჯერ; გ) 2-ჯერ; დ) 4-ჯერ.

7. სულ რა რაოდენობის საქონელი გაიყიდა?

- ა) 50; ბ) 60; გ) 55; დ) 45; ე) 40.

მოცემულია შემდეგ ფიგურები:



ვუპასუხოთ შემდეგ კითხვებს:

8. მთელი ფიგურების ოდენობის რამდენი პროცენტია ბრტყელი ფიგურები?

- ა) 4%; ბ) 40%; გ) 3%; დ) 50%; ე) 45%.

9. სივრცული ფიგურების რამდენი პროცენტია ბრუნვითი ფიგურები?

- ა) 3%; ბ) 50%; გ) 30%; დ) 35%; ე) 40%.

10. რამდენჯერ მეტია სივრცული ფიგურების ოდენობა ბრტყელ ფიგურებზე?

- ა) 1,5-ჯერ; ბ) 2-ჯერ; გ) 2,5-ჯერ; დ) 4-ჯერ; ე) 3-ჯერ.

4.2. მონაცემთა წარმოდგენის ხერხები: სია, ცხრილი, სიხშირე, პიკტოგრამა

სტატისტიკა (ლათინურად Status - მდგომარეობა) არის მეცნიერება ცხოვრების სხვადასხვა მოვლენის თაობაზე მონაცემების შეგროვების, დამუშავების და ანალიზის შესახებ. მაგალითად, ეკონომიკური სტატისტიკა შეისწავლის სხვადასხვა საქონელზე მოთხოვნების საკითხებს, ფასების ცვლილებებს, პროდუქტების წარმოების ზრდისა და შემცირების ტენდენციებს. სამედიცინო სტატისტიკა შეისწავლის წამლების მოქმედების და მკურნალობის მეთოდების ეფექტურობის საკითხებს. არსებობს კიდევ დემოგრაფიული სტატისტიკა, ფინანსური სტატისტიკა, ბიოლოგიური სტატისტიკა და სხვა.

სტატისტიკური მონაცემების რაოდენობა, როგორც წესი, დიდია, ამიტომ მათი დამუშავებისა და ანალიზის გასაადვილებლად გამოიყენება თვალსაჩინოდ წარმოდგენის ხერხები.

მონაცემთა შეგროვების დროს მნიშვნელოვანია შესაფერისი საშუალების შერჩევა. ზოგჯერ მონაცემთა ერთობლიობიდან შესაბამისი სიდიდეების ამოკრეფა დაგვიკვირდება, ზოგჯერ საჭიროა გაზომვების ჩატარება. მაგალითად, ბინის გარემონტების დროს საჭირო მასალის ოდენობის დადგენა ოთახების ზომების შესახებ მონაცემთა შეგროვებით იწყება. უშუალო დაკვირვებით შეიძლება საღებავის ფერის შერჩევა, ზოგიერთ ოთახში ღია ფერია საჭირო, ზოგიერთში კი მუქი, ასევე გასათვალისწინებელია ავეჯი და მათი შესაბამისობაც შერჩეულ ფერებთან და ა.შ.

ყველა ამ მონაცემს ჩამოვწერთ სიის სახით, ე.ი. შევადგენთ საჭირო მასალის სიას, რომელიც შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ცხრილის სახით, რომელსაც საჭირო მასალების რაოდენობასა (სიხშირეს) და შესაძლო ფასებსაც მივუწერთ, მაშინ მაღაზიაში გვიადვილდება ჩაწერილი მონაცემების მიხედვით მოქმედება.

მონაცემების შეგროვების შემდეგ მოხერხებულ წარმოდგენას დიდი მნიშვნელობა აქვს. მოხერხებული სახით ჩაწერა გვუმარჯობა

სწრაფად გავერკვეთ მონაცემებში და დასმულ კითხვებზე პასუხები თვალსაჩინოდ წარმოვადგინოთ.

ვთქვათ, გსურთ გაარკვიოთ თქვენს თანაკურსელებში რომელი მუსიკაა უფრო პოპულარული. ვაწარმოებთ სიით გამოკითხვას და მიღებულ შედეგებს ცხრილით წარმოვადგენთ. ყოველი გამოკითხული სტუდენტის შემდეგ დასახელებული მიმდინარეობის სტრიქონში თითო მონაკვეთს ვხაზავთ, ყოველ ხუთეულს კი (თვლის გაიოლების მიზნით) ასე წარმოვადგენთ: $\overline{\text{||||}}$. ყოველი სტრიქონის ბოლოში მონაკვეთების საერთო ოდენობა (სიხშირეა) მითითებული. ეს რიცხვი გვიჩვენებს მოცემული მიმდინარეობა რამდენჯერ (რა სიხშირით) იყო დასახელებული. ვთქვათ, მივიღეთ შემდეგი შედეგები:

მუსიკის ჟანრის დასახელება	ერთეულები	სიხშირე
კლასიკური	$\overline{\text{ }}$ 	8
ხალხური	$\overline{\text{ }}$ $\overline{\text{ }}$ $ $	11
როკი	$\overline{\text{ }}$ 	9
რეპი	$\overline{\text{ }}$ 	7
არცერთი დასახელებულიდან	 	2

ვთქვათ, მარიამი დეიდას კვირაობით ეხმარება ნაყინის გაყიდვაში. დილით ერთი საათის განმავლობაში ვაჭრობის შედეგები შეიძლება აღვადგინოთ მისი ჩანახატებიდან. სადაც ნახატი $\square$ - ნიშნავს ორ ნაყინს, ხოლო ნახატი L - ერთ ნაყინს.

ნაყინის სახეობა	ერთეულები	სიხშირე
შოკოლადის	$\square\square\square\square$	8
ნაღების	$\square\square\square\text{L}$	7
ხილის	$\square\square$	4
ნიგეზიანი	$\square\square\text{L}$	5

პირობითი ნიშნებით, ან ნახატების გამოყენებით შესრულებულ ჩანაწერს პიქტოგრამა ეწოდება. Pictus ლათინურად ნახატს ნიშნავს, Gramina - ბერძნულად ჩაწერას, ასოს, ნიშნავს.

ვთქვათ, სპორტულ მაღაზიაში სამი ზომის ველოსიპედი იყიდება. გამოვიყენოთ შემდეგი პიქტოგრამა:

-

მარტი

ველოსიპედების ზომები	ოდენობის პიქტოგრამა	სიხშირე
პატარა	☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ::	54
საშუალო	☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒	58
დიდი	☒ ☒ ☒ ☒	39

აპრილი

ველოსიპედების ზომები	ოდენობის პიქტოგრამა	სიხშირე
პატარა	☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ . :	63
საშუალო	☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ .	71
დიდი	☒ ☒ ☒ : !	35

შახტო

ველოსიპედების ზომები	ოდენობის პექტორამა	სიხშირე
კატარა	მ მ მ მ მ მ მ მ მ მ :	92
საშუალო	მ მ მ მ მ მ მ მ : I	66
დიდი	მ მ მ მ II	47

ვთქვათ, პურის საცხობი ოთხი ქარხნის მიერ გაყიდული პურის ოდენობა პიქტოგრამის სახითაა წარმოდგენილი (☉ – ნიშნავს 2 ათას პურს, ☹ – ათას პურს):

პურის ქარხნები	პიქტოგრამა	სიხშირე
I ქარხანა	☹☹☹☹☹☹	11000
II ქარხანა	☹☹☹☹	8000
III ქარხანა	☹☹☹☹☹	9000
IV ქარხანა	☹☹☹☹☹☹	12000

უპასუხეთ შემდეგ კითხვებს:

- სულ რამდენი პური გაუყიდა ოთხივე ქარხანას?
- რომელმა ქარხანამ გაყიდა ყველაზე მეტი რაოდენობის პური?
- პროცენტულად რამდენია I და III ქარხნების მიერ გაყიდული პურის ოდენობაში III ქარხნის მიერ გაყიდული პურის ოდენობა?
- პროცენტულად რამდენია II ქარხნის მიერ გაყიდული პურის ოდენობა ოთხივე ქარხნის მიერ გაყიდული პურის ოდენობასთან?
- რომელმა ქარხნებმა გაყიდეს მეტი ოდენობის პური – I და III ერთად, თუ II და IV ერთად?
- დავალაგოთ ქარხნები გაყიდული პურის პროცენტული კლების მიხედვით.

დიზაინის სასკოლო წრეში მოეწყო მოსწავლეთა გამოკითხვა საყვარელი ფერის შესახებ (პიქტოგრამა: ⊕ – აღნიშნავს 4 მოსწავლეს, ⊕ – აღნიშნავს 3 მოსწავლეს, ⊕ – აღნიშნავს 2 მოსწავლეს, ⊕ – აღნიშნავს 1 მოსწავლეს). მიიღეს შემდეგი ცხრილი:

ფერი	პიქტოგრამა	სიხშირე
ლურჯი	⊕ ⊕ ⊕ ⊕	16
მწვანე	⊕ ⊕ ⊕	10
წითელი	⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕	19
ყვითელი	⊕ ⊕	7
სხვა ფერები	⊕ ⊕ ⊕ ⊕	13

უპასუხეთ შემდეგ კითხვებს:

11. სულ რამდენი მოსწავლე იქნა გამოკითხული?
12. რომელი ფერია ყველაზე უფრო პოპულარული?
13. რომელი ფერია ყველაზე უფრო არაპოპულარული?
14. მოსწავლეთა რამდენ პროცენტს მოსწონს სხვა ფერები?
15. დალაგეთ ფერები მოწონების ზრდის მიხედვით.
16. რამდენჯერ აღემატება წითელი ფერის მოყვარულთა რაოდენობა ყვითელი ფერის მოყვარულთა რაოდენობას?
17. რამდენით მეტია წითელი ფერის მოყვარულთა რაოდენობა ყვითელი ფერის მოყვარულთა რაოდენობაზე?
18. რამდენი პროცენტია წითელი და ყვითელი ფერების მოყვარულთა რაოდენობა ერთად, მოსწავლეთა საერთო რაოდენობისა?
19. რამდენჯერ ნაკლებია მწვანე ფერის მოყვარულთა რაოდენობა ლურჯი ფერის მოყვარულთა რაოდენობაზე?

ავტომობილების ერთ-ერთ სამრეცხაოში კვირის განმავლობაში გარეცხილი ავტომობილების ოდენობები ცხრილითაა წარმოდგენილი: (პიქტოგრამა:  - აღნიშნავს 5 ავტომობილს,  - აღნიშნავს 4 ავტომობილს,  - აღნიშნავს 3 ავტომობილს,  - აღნიშნავს 2 ავტომობილს,  - აღნიშნავს 1 ავტომობილს).

ავტომობილის მარკა	პიქტოგრამა	სიხშირე
«მერსედესი»	 	10
«ოპელი»	    	21
«აუდი»		4
«ფორდი»	  	7
«ტოიოტა»	  	8

უპასუხეთ შემდეგ კითხვებს:

21. სულ რამდენი მანქანა იმყოფებოდა სამრეცხაოში კვირის განმავლობაში?
22. რამდენჯერ მეტი იყო «ოპელის» მარკის ავტომობილების ოდენობა «მერსედესის» მარკის ავტომობილების ოდენობაზე?
23. დავალაგოთ სხვადასხვა მარკის ავტომობილების ოდენობები

პროცენტული ზრდის მიხედვით.

24. რამდენჯერ მეტი იყო «მერსედესის» ავტომობილების ოდენობა «აუდის» მარკის ავტომობილების ოდენობაზე?
25. რამდენით მეტი იყო «ოპელის» მარკის ავტომობილების ოდენობა «აუდის» მარკის ავტომობილების ოდენობაზე?
26. რამდენით მეტია, ან ნაკლები «ოპელისა» და «აუდის» ავტომობილების ოდენობა ერთად, დანარჩენი მარკის ავტომობილების ოდენობაზე?

მაღაზიაში ერთ დღეს წყვილი ფეხსაცმელების გაყიდვის შედეგები შემდეგი ცხრილითაა წარმოდგენილი:

გაყიდული წყვილი ფეხსაცმელების ზომები	პიქტოგრამა	სიხშირე
38-40		?
41-42	?	30
43-44	?	33
45	?	19

დაასრულეთ ცხრილის შევსება და უპასუხეთ შემდეგ კითხვებს:

27. სულ რამდენი წყვილი ფეხსაცმელი გაიყიდა?
28. რა ზომის წყვილი ფეხსაცმელები გაიყიდა ყველაზე მეტი რაოდენობის?
29. რა ზომის წყვილი ფეხსაცმელები გაიყიდა ყველაზე ნაკლები რაოდენობის?
30. გაყიდული 41-42 ზომის წყვილი ფეხსაცმელების რაოდენობა რა წილია სულ გაყიდული წყვილი ფეხსაცმელების საერთო რაოდენობისა?

4.2.2. ტესტი №2

1. პიქტოგრამა ნიშნავს

- ა) სიხშირეს; ბ) პროდუქტის სახეობას;
- გ) პროდუქტების სიას;
- დ) პირობითი ნიშნებით, ან ნახატების გამოყენებით შესრულებულ ჩანაწერს.

2. სიხშირის რიცხვი გვიჩვენებს

- ა) მოცემული მიმდინარეობა რამდენჯერ იყო დასახელებული;
- ბ) პროდუქტების სიას; გ) პროდუქტის სახეობას;
- დ) პირობითი ნიშნებით, ან ნახატების გამოყენებით შესრულებულ ჩანაწერს.

პიქტოგრამით მოცემულია ოთხი რადიო არხის მსმენელთა ოდენობები (■) - ორი ათასი მსმენელი, (■) - ათასი მსმენელი)

რადიო არხები	პიქტოგრამა	სიხშირე
I არხი	■ ■ ■ ■	7 000
II არხი	■ ■	4 000
III არხი	■ ■ ■	6 000
IV არხი	■ ■	3 000

ამ ცხრილის მიხედვით უპასუხეთ შემდეგ კითხვებს:

3. რამდენი პროცენტია I არხის მსმენელთა ოდენობა?

- ა) 40%; ბ) 35%; გ) 60%; დ) 15%.

4. რამდენი პროცენტით მეტია II არხის მსმენელთა ოდენობა IV არხის მსმენელთა ოდენობაზე?

- ა) 15%-ით; ბ) 20%-ით; გ) 5%-ით; დ) 10%-ით.

5. რამდენია წილი II და III არხის მსმენელთა ერთად აღებული ოდენობისა საერთო მსმენელების ოდენობასთან შეფარდებით?

- ა) $\frac{2}{5}$; ბ) $\frac{3}{5}$; გ) $\frac{1}{2}$; დ) $\frac{3}{10}$.

6. ოჯახში ხუთი ბავშვია, მომდევნო ასაკებს შორის სხვაობა სამ-სამი

წელია. რამდენი წლისაა ყველაზე უმცროსი ბავშვი, თუ მისი ასაკი ყველაზე უფროსის ასაკზე 7-ჯერ ნაკლებია?

ა) 3 წლის; ბ) 1 წლის; გ) 4 წლის; დ) 2 წლის.

ცხრილში მოცემულია ერთ-ერთ მაღაზიაში თებერვლის თვის განმავლობაში გაყიდული წიგნების ოდენობა თემატიკის მიხედვით (პიქტოგრამა: $\square$ - 10 წიგნი; $\blacksquare$ - 5 წიგნი)

თემატიკა	პიქტოგრამა	სიხშირე
საბავშვო ლიტერატურა	$\square\square\square$	20
დეტექტივი	$\square\square \blacksquare$	15
რომანი	$\square\square\square\square\square\square\blacksquare$	45
სამეცნიერო ლიტერატურა	$\square\square$	10

ცხრილის მიხედვით უპასუხეთ შემდეგ კითხვებს:

7. რამდენი პროცენტია გაყიდული რომანების რაოდენობის წილი გაყიდული წიგნების საერთო რაოდენობისა?

ა) 50%; ბ) 45%; გ) 40%; დ) 55%.

8. რამდენჯერ მეტია ერთად აღებული დეტექტივისა და რომანების ოდენობა საბავშვო ლიტერატურისა და სამეცნიერო ლიტერატურის ოდენობაზე?

ა) 3-ჯერ; ბ) მათი რაოდენობები ტოლია;

გ) 1,5-ჯერ; დ) 2-ჯერ.

9. რამდენია საბავშვო ლიტერატურის ოდენობის წილი წიგნების საერთო ოდენობასთან?

ა) 0,2; ბ) $\frac{2}{9}$; გ) $\frac{1}{9}$; დ) $\frac{1}{3}$.

10. რამდენია სამეცნიერო ლიტერატურის წილი წიგნების საერთო ოდენობასთან შედარებით?

ა) 0,2; ბ) $\frac{2}{9}$; გ) $\frac{1}{9}$; დ) $\frac{1}{3}$.

4.3. მონაცემთა ფარდობითი სიხშირე, პისტოგრამა, პოლიგონი

აღწერითი სტატისტიკის მეთოდები ქმნიან საფუძველს მათემატიკური სტატისტიკის უფრო რთული მეთოდების გამოყენებისათვის. ამ მეთოდთა ძირითადი დანიშნულებაა მთელი პოპულაციის შესახებ დასაბუთებული სტატისტიკური დასკვნების გამოტანა ამ პოპულაციიდან აღებული შერჩევის საფუძველზე.

მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდები ფაქტობრივად ალბათობის თეორიაზეა დაფუძნებული. ალბათობის თეორია წარმოადგენს ხიდს აღწერითი სტატისტიკისა და სტატისტიკური დასკვნების თეორიის მეთოდებს შორის.

მონაცემთა დამუშავების განხორციელებას ემსახურება მათი რიცხვითი მახასიათებლების შესწავლა. ერთ-ერთი რიცხვითი მახასიათებელია სიხშირე - რიცხვი, რომელიც გვიჩვენებს მონაცემთა ერთობლიობაში რამდენჯერ გვხვდება დასახელებული მონაცემი (ან დასახელებული თვისების მქონე მონაცემი), მის შესახებ ჩვენ საუბარი გვექონდა.

მონაცემთა ფარდობითი სიხშირე კი არის მონაცემის სიხშირის ოდენობის შეფარდება მონაცემთა საერთო ოდენობასთან.

განვიხილოთ მაგალითები:

მაგალითი 1. მარიამს და თომას დაავალეს ჩაეტარებინათ გამოკითვა, რათა დაედგინათ - რამდენშვილიანი ოჯახები ცხოვრობენ მათ საცხოვრებელ კორპუსში; ისინი მიღებულ შედეგს თანმიმდევრობით წერდნენ: 1; 1; 2; 2; 3; 3; 2; 2; 2; 2; 3; 3; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 3; 2; 3; 2; 2; 2; 3; 2; 2; 2; 4; 4; 2; 3; 2; 3; 2; 2; 5; 2; 2; 3. ამ მონაცემების მიხედვით შევადგინოთ ცხრილი:

ოჯახში შვილების ოდენობა	1	2	3	4	5
სიხშირე	6	24	15	4	1

ამ ცხრილის მიხედვით შეიძლება დავადგინოთ, რომ ორშვილიანი ოჯახების ოდენობა არის 24, ანუ ამ მონაცემის სიხშირე არის 24, რაც სხვა მონაცემების სიხშირეებზე მეტია. ამ მონაცემთა ფარდობითი

სიხშირეებია, შესაბამისად: 0,12; 0,48; 0,3; 0,08; 0,02. თუ ამ მონაცემებს პროცენტებით გამოვსახავთ, მაშინ ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

ოჯახში შვილების ოდენობა	1	2	3	4	5
ფარდობითი სიხშირე (პროცენტებში)	12%	48%	30%	8%	2%

ხშირად მონაცემთა დასამუშავებლად - მოსაწესრიგებლად ხელსაყრელია არა ცალკეული მონაცემების წარმოდგენა, არამედ მათი რაიმე ნიშნით დაჯგუფება. ამ შემთხვევაში ყოველ ჯგუფს შევუსაბამებთ სიხშირეს (დაჯგუფებულ სიხშირეს - რიცხვს, რომელიც გვიჩვენებს მოცემულ ჯგუფში მონაცემების ოდენობას).

მაგალითი 2. ვთქვათ, საკალათბურთო ტურნირში მონაწილე კალათბურთელების სიმაღლეები დაჯგუფებულია ინტერვალების მიხედვით: 180 სმ - 185 სმ; 186 სმ - 190 სმ; 191 სმ - 195 სმ; 196 სმ - 200 სმ და 201 სმ - 210 სმ. ვთქვათ, პირველ ჯგუფში 12 სპორტსმენის მონაცემია, ანუ შესაბამისი დაჯგუფებული სიხშირე 12-ია, მეორე ჯგუფში - 18; მესამეში - 24; მეოთხეში - 22; მეხუთეში - 14. შევადგინოთ სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი:

სიმაღლე (სმ)	180-185	186-190	191-195	196-200	201-210
სიხშირე	12	18	24	22	14
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{6}{45}$	$\frac{9}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{11}{45}$	$\frac{7}{45}$

სიხშირეთა წარმოდგენილ ცხრილს ზოგჯერ სიხშირეთა ინტერვალურ ცხრილს უწოდებენ - მონაცემები დაჯგუფებულია ინტერვალებში და მოცემულია ამ ინტერვალებში მონაცემთა ოდენობები. ინტერვალების ოდენობაზე მნიშვნელოვნადაა დამოკიდებული მონაცემთა წარმოდგენის ხარისხი - თუ ინტერვალების ოდენობა მცირეა, მაშინ განაწილების ცალკეული დეტალები შეიძლება ვერ გავითვალისწინოთ, თუ ინტერვალების ოდენობა ძალიან დიდია, მაშინ დაჯგუფებამ შეიძლება აზრიც დაკარგოს.

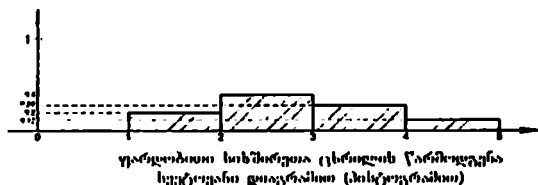
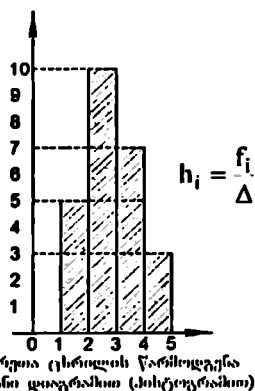
მაგალითი 3. ერთ-ერთი სკოლის ოცდახუთი მეოთხეკლასელის ჩანთების აწონვამ შემდეგი შედეგები მოგვცა (თითოეული ჩანთის

წონა კგ-ითაა მოცემული): 2,25; 2,55; 1,85; 2,6; 3,15; 1,9; 3,1; 4,35; 1,25; 2,7; 2,3; 3,35; 3; 2,4; 2,5; 2,25; 2,75; 1,65; 3,55; 4,3; 3,8; 3,95; 4,4; 2,85; 1,85. აქ თითოეული მონაცემის სიხშირე არის 1 ან 2. ამ შემთხვევაში საინტერესო დასკვნების გაკეთების კარგ შესაძლებლობას მოგვცემს მონაცემთა წარმოდგენა ინტერვალური ცხრილით. 1-დან 5 კგ-მდე ინტერვალის 4 ტოლ ინტერვალად დავყოთ, მაშინ სიხშირეთა ცხრილი ასე წარმოგვიდგება:

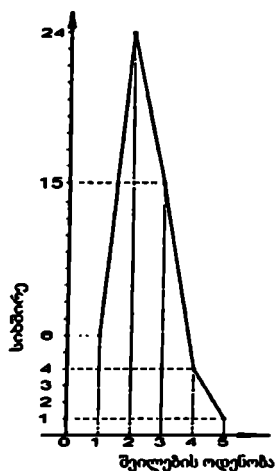
ჩანთის მასა (კგ)	სიხშირე	ფარდობითი სიხშირე
1-დან 2-მდე	5	0,2
2-დან 3-მდე	10	0,4
3-დან 4-მდე	7	0,28
4-დან 5-მდე	3	0,12

თუ მონაცემი ხვდება ორი ინტერვალის საზღვარზე, მაშინ იგი ერთ-ერთს უნდა მივაკუთვნოთ (ვთქვათ, მარჯვენა ინტერვალს). მაგალითად, ერთ-ერთი ჩანთის წონაა 3 კგ, მას მივაკუთვნებთ ინტერვალს «3-დან 4-მდე».

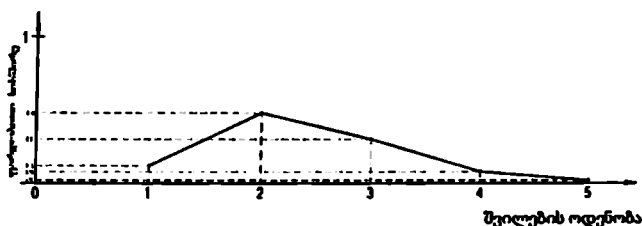
ცხრილი შეიძლება თვალსაჩინოდ წარმოვადიგნოთ დიაგრამით - სვეტოვანი დიაგრამით, მას სიხშირეთა (ან ფარდობით სიხშირეთა) ჰისტოგრამა ეწოდება: ჰორიზონტალურ ღერძზე მოვნიშნავთ ინტერვალებს და მათზე ავაგებთ მართკუთხედებს რომელთა სიმაღლეები ინტერვალის სიგრძის სიდიდეჯერ შემცირებული სიხშირეების (ან ფარდობითი სიხშირეების) შესაბამისია.



სიხშირეთა ცხრილი, რომელიც პირველ მაგალითშია მოცემული შეიძლება თვალსაჩინოდ წარმოვადგინოთ სიხშირეთა პოლიგონით - ტეხილით; ჰორიზონტალურ ღერძზე წარმოვადგენთ მონაცემებს, ვერტიკალურ ღერძზე კი - სიხშირეებს (ან ფარდობით სიხშირეებს); მათ შესაბამის წერტილებს შევაერთებთ მონაკვეთებით, მიიღება სიხშირეთა პოლიგონი (ან ფარდობით სიხშირეთა პოლიგონი).



სიხშირეთა ცხრილის წარმოდგენა პოლიგონით



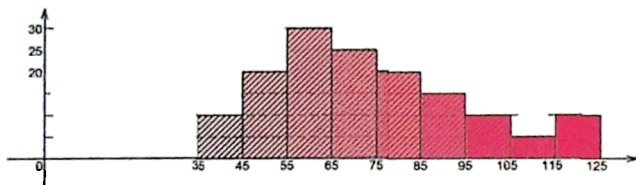
ფარდობით სიხშირეთა ცხრილის წარმოდგენა პოლიგონით

4.3.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მეთოდებისათვის

კამათელი გააგორეს 20-ჯერ, რიცხვი 1 მოვიდა 5-ჯერ; 2-2-ჯერ, 3-4-ჯერ; 4-ერთხელ; 5-ორჯერ; 6-6-ჯერ.

1. შეადგინეთ ამ რიცხვების მოსვლის სიხშირეთა ცხრილი.
2. შეადგინეთ ამ რიცხვების მოსვლის ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი.
3. ააგეთ ამ რიცხვების მოსვლის სიხშირეთა პოლიგონი.

4. ააგეთ ამ რიცხვების მოსვლის ფარდობით სიხშირეთა პოლიგონი.
5. სვეტოვანი დიაგრამა (პისტოგრამა) აგებულია ერთ-ერთი სამშენებლო კომპანიის მიერ აშენებულ სახლში ყველა ბინის ფართობის მიხედვით. შეადგინეთ სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა ცხრილები.

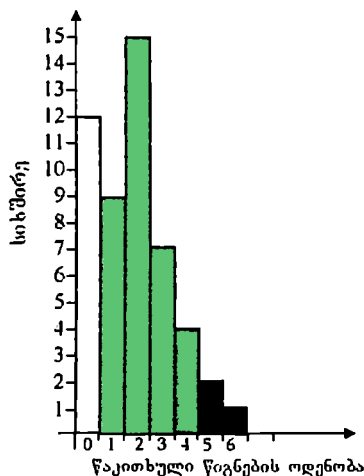


ერთ-ერთი ოჯახის თვიური დანახარჯები შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ: კვება - 35%; ტანსაცმელი - 5%; ჯანმრთელობა - 10%; ტრანსპორტი - 12%; განათლება - 8%; გადასახადები - 20%; სხვა ხარჯები - 10%. პასუხი გავცეთ შემდეგ კითხვებს:

6. გამოთვალეთ ოჯახის მთლიანი თვიური დანახარჯი, თუ ცნობილია, რომ განათლებაზე დაიხარჯა 192 ლარი.
7. რამდენ ლარს დახარჯავს ტრანსპორტში მთელი თვის განმავლობაში ოჯახი, თუ ცნობილია, რომ ჯანმრთელობისათვის იგი მთელი თვის განმავლობაში ხარჯავს 240 ლარს?
8. რა თანხა ჯდება მთელი თვის განმავლობაში ოჯახის კვება, თუ ცნობილია, რომ თვის გადასახადები 480 ლარს შეადგენს?
9. შევადგინოთ ოჯახის თვიური დანახარჯების სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა ცხრილები.

10. ავაგოთ ოჯახის თვიური დანახარჯების სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა პოლიგონი.

50 მოსწავლეს დაუსვეს შეკითხვა: რამდენი წიგნი წაიკითხეს ზაფხულის არდადეგებზე? პასუხების მიხედვით შედგენილია სვეტოვანი დიაგრამა:



პასუხი გავცეთ შემდეგ კითხვებს:

11. რამდენ მოსწავლეს არ წაუკითხავს არცერთი წიგნი?
12. რამდენ წიგნს ასახელებდნენ ყველაზე ხშირად მოსწავლეები?
13. რამდენით მეტია იმ მოსწავლეთა რაოდენობა, რომლებმაც 3 წიგნი წაიკითხეს იმ მოსწავლეთა რაოდენობაზე, რომლებმაც წაიკითხეს არანაკლებ 5 წიგნისა?
14. რამდენია ფარდობითი წილი იმ მოსწავლეების რაოდენობისა, რომლებმაც წაიკითხეს არანაკლებ 3 წიგნისა, იმ მოსწავლეთა რაოდენობასთან, რომლებმაც წაიკითხეს არაუმეტეს 2 წიგნისა?
15. მოსწავლეთა რამდენმა პროცენტმა წაიკითხა 1 წიგნი?
16. მოსწავლეთა რამდენმა პროცენტმა წაიკითხა არანაკლებ ორისა და არაუმეტეს ოთხი წიგნისა?
17. რამდენი პროცენტით მეტია იმ მოსწავლეთა რაოდენობა, რომლებსაც არცერთი წიგნი არ წაუკითხავს, იმ მოსწავლეთა რაოდენობაზე, რომლებმაც წაიკითხეს არანაკლებ ხუთი წიგნისა?
18. რამდენმა მოსწავლემ წაიკითხა 2 ან მეტი წიგნი?
19. შეადგინეთ წაკითხული წიგნების სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი.
20. ააგეთ წაკითხული წიგნების სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირე-

თა პოლიგონი.

ცხრილში მოცემულია მონაცემები ძირითად ნავთობმომპოვებელ ქვეყნებში ნავთობის ყოველდღიური მოპოვების შესახებ (1 ბარელი - 159 ლიტრია)

ქვეყნები	დღიური მოპოვება (მლნ. ბარელი)
საუდის არაბეთი	10,4
რუსეთი	9,3
აშშ	8,7
ირანი	4,1
მექსიკა	3,8

პასუხი გავცეთ შემდეგ კითხვებს:

- სად უფრო მეტ ნავთობს მოიპოვებენ დღიურად ამერიკის კონტინენტზე, ახლო აღმოსავლეთის ქვეყნებში, თუ რუსეთში?
- შევადგინოთ ქვეყნების პროცენტული წილი დღიურ ნავთობმოპოვებაში.
- პროცენტული მაჩვენებლით შევადგინოთ ქვეყნების დღიური ნავთობმოპოვების ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი.

ცხრილით მოცემულია ერთ-ერთი დაწესებულების თანამშრომელთა განაწილება სამუშაო სტაჟის მიხედვით:

სამუშაო სტაჟი	არაუმეტეს 3 წელი	4 წელი	5 წელი	6 და მეტი წელი
ფარდობითი სიხშირე (%)	8	12	16	64

პასუხი გავცეთ შემდეგ კითხვებს:

- რამდენი თანამშრომელია სულ დაწესებულებაში, თუ თანამშრომელთა რაოდენობა, რომელთა სტაჟი არაუმეტესია 3 წლის, არის 4?
- რამდენი თანამშრომელია სულ დაწესებულებაში, თუ თანამშრომელთა რაოდენობა, რომელთა სამუშაო სტაჟია 4 წელი, არის 15?
- რამდენი თანამშრომელია სულ დაწესებულებაში, თუ თანამშრო-

- მელთა რაოდენობა, რომელთა სამუშაო სტაჟია 5 წელი, არის 12?
27. რამდენი თანამშრომელია სულ დაწესებულებაში, თუ თანამშრომელთა რაოდენობა, რომელთა სამუშაო სტაჟი 6 და მეტი წელია, არის 16?
28. ვთქვათ, რიცხვითი მონაცემებია 2; 2; 2; 3; 3; 5; 5; 5; 5; 5. ვიპოვოთ ამ მონაცემებში შესაბამისად 2-ის, 3-ის და 5-ის სიხშირეები და ფარდობითი სიხშირეები.
29. წინა 28 ამოცანაში 2-ის, 3-ის და 5-ის ფარდობითი სიხშირეები გამოვსახოთ პროცენტებით.
30. კამათლის 12-ჯერ გაგორებისას რიცხვი 5 მოვიდა 3-ჯერ, ვიპოვოთ მისი მოსვლის ფარდობითი სიხშირე.

4.3.2. ტესტი №3

- მონაცემის ფარდობითი სიხშირე არის
 - ა) რიცხვი, რომელიც გვიჩვენებს მონაცემთა ერთობლიობაში რამდენჯერ გვხვდება დასახელებული მონაცემი;
 - ბ) პიქტოგრამა;
 - გ) პოლიგონი;
 - დ) ამ მონაცემის სიხშირის შეფარდება მონაცემთა საერთო რაოდენობასთან.
- სვეტოვანი დიაგრამა, რომლის ჰორიზონტალურ ღერძზე მოვნიშნავთ ინტერვალებს და მათზე ავაგებთ მართკუთხედებს, რომელთა სიმაღლეები სიხშირეების (ან ფარდობითი სიხშირეების) შესაბამისია არის
 - ა) ჰისტოგრამა; ბ) პოლიგონი; გ) პიქტოგრამა; დ) სია.
- ტეხილი, რომლისთვისაც ჰორიზონტალურ ღერძზე წარმოდგენილია მონაცემები, ხოლო ვერტიკალურ ღერძზე კი ამ მონაცემების სიხშირეები (ან ფარდობითი სიხშირეები) არის
 - ა) ჰისტოგრამა; ბ) პოლიგონი; გ) პიქტოგრამა; დ) სია.

თორმეტწახნაგა კამათლის 20-ჯერ გაგორებისას მივიღეთ შემდეგი შედეგები: 10; 2; 8; 9; 11; 12; 3; 12; 12; 6; 2; 1; 6; 1; 11; 12; 4; 7; 5; 12. პასუხი გავცეთ შემდეგ კითხვებს:

4. 12-ის მოსვლის ფარდობითი სიხშირეა:

ა) 4; ბ) 12; გ) 0,25; დ) 0,2; ე) 0,12

5. 12-ის მოსვლის სიხშირეა:

ა) 5; ბ) 4; გ) 12; დ) 0,25; ე) 0,2

6. რომელი რიცხვები უფრო ხშირად მოვიდა არაუმეტეს ექვსისა, თუ არანაკლებ შვიდისა?

ა) მოვიდა ტოლი რაოდენობით; ბ) არაუმეტეს ექვსისა;

გ) არანაკლებ შვიდისა; დ) შეუძლებელია განსაზღვრა.

7. 3-ის ჯერადები უფრო ხშირად მოვიდა, თუ 4-ის?

ა) მოვიდა ტოლი რაოდენობით;

ბ) 3-ის ჯერადები; გ) 4-ის ჯერადები;

დ) შეუძლებელია განსაზღვრა.

8. მარტივი რიცხვები უფრო ხშირად მოვიდა, თუ შედგენილი?

ა) მარტივი; ბ) შედგენილი;

გ) მოვიდა ტოლი რაოდენობით;

დ) შეუძლებელია განსაზღვრა.

9. 5-ის ჯერადი რიცხვების ფარდობითი სიხშირის პროცენტული მაჩვენებელია:

ა) 0,2; ბ) 2%; გ) 10%; დ) 5%.

10. ლუწი რიცხვები უფრო ხშირად მოვიდა, თუ კენტი?

ა) მოვიდა ტოლი რაოდენობით; ბ) ლუწი;

გ) კენტი; დ) შეუძლებელია განსაზღვრა.

4.4. დიაგრამა – წერტილოვანი, ხაზოვანი, ფოთლოვანი დეროების მსგავსი, სპეტიოვანი, წრიული

მონაცემთა თვალსაჩინო წარმოდგენისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ სკალა, გეგმა, რუკა.

სკალა სხადასხვა სახეობის მზომ ხელსაწყოზე ერთმანეთის მიმდევრობით გამოსახული დანაყოფებისა და რიცხვების ერთობლიობაა. სკალა ლათინური სიტყვაა და კიბეს ნიშნავს. სახაზავი შტრიხებით (ნიშნებით) ტოლ ნაწილადაა დაყოფილი - აქ მცირე დანაყოფის სიგრძე 1მმ-ია, ერთეული მონაკვეთის სიგრძე 1სმ-ია, სახაზავზე სკალაა გამოსახული. ცნობილია თერმომეტრის სკალა, საათის სკალა, სპიდომეტრის (ავტომობილის სიჩქარის მაჩვენებლის) სკალა, რომელსაც ხშირად წრიული ფორმა აქვს და ყოველი დანაყოფი - 10 კმ/სთ სიჩქარეს უდრის.

დედამიწის ზედაპირის ნაწილი შემცირებული სახით რუკაზე გამოისახება. ბინაში ოთახების განლაგება შემცირებული სახით -სათანადო გეგმით გამოისახება. გეგმაზე მოცემული ნებისმიერი მონაკვეთის სიგრძის შეფარდებას ამ მონაკვეთით გამოხატულ რეალურ სიგრძესთან მასშტაბი ეწოდება. თუ რუკაზე მასშტაბი რიცხვების შეფარდებითაა მოცემული, მაგალითად - 1:1000000 - ეს ნიშნავს, რომ ამ რუკაზე 1 სმ სიგრძის მონაკვეთი 1 000 000 სმ სიგრძის რეალურ მონაკვეთს შეესაბამება; თუ ასეთ რუკაზე ორი ქალაქი ერთმანეთს 20 სმ სიგრძის მონაკვეთით უკავშირდება მაშინ მასშტაბის განსაზღვრების თანახმად, ვიპოვით ქალაქებს შორის მანძილს: $\frac{1}{1000000} = \frac{20}{x}$, $x = 20000000$; ე.ი. ქალაქებს შორის რეალური მანძილი 20 000 000სმ-ია, ანუ 200კმ. ზოგჯერ მცირე ზომის საგნები გადიდებული სახით გამოისახება. მაგალითად, 1 სმ სიგრძის მონაკვეთი შეიძლება 0,1 მმ სიგრძის მონაკვეთს გამოსახავდეს, მაშინ მასშტაბი შეიძლება ასე ჩავწეროთ: 1:0,01 (ან 100:1).

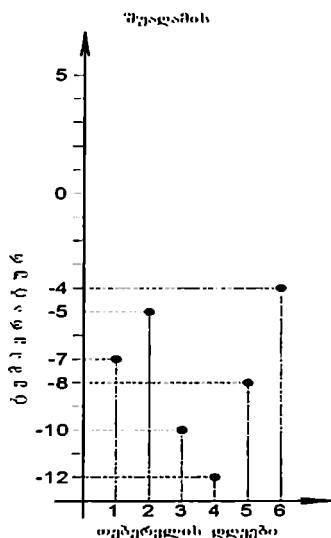
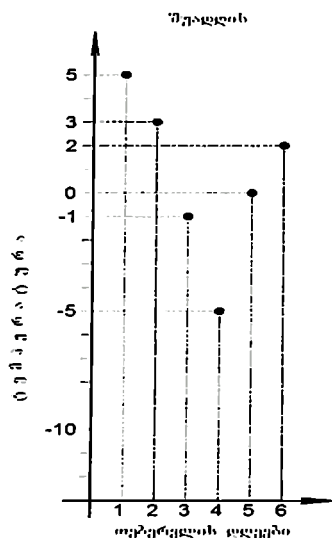
მონაცემები შეიძლება წარმოვადგინოთ აგრეთვე წერტილოვანი და ხაზოვანი დიაგრამებით.

განვიხილოთ მაგალითები:

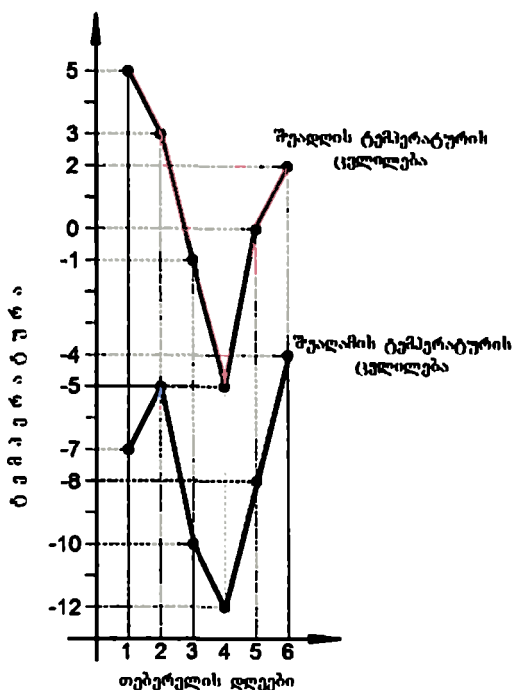
მაგალითი 1. ცხრილით წარმოდგენილია გუდაურში 1 თებერვლიდან 6 თებერვლამდე შუადღისა და შუალამის შესაბამისი გარემოს ტემპერატურათა მონაცემები:

დღე-ღამის შუალედები	შუადღის ტემპერატურა	შუალამის ტემპერატურა
1 თებერვალი	5°	-7°
2 თებერვალი	3°	-5°
3 თებერვალი	-1°	-10°
4 თებერვალი	-5°	-12°
5 თებერვალი	0°	-8°
6 თებერვალი	2°	-4°

ეს მონაცემები შეიძლება წერტილოვანი დიაგრამებით წარმოვადგინოთ.



ამ მონაცემთა ორივე ერთობლიობა შეიძლება ხაზოვანი დიაგრამის სახით წარმოვადგინოთ; ეს დიაგრამა უკეთ წარმოადგენს დღეების მიხედვით ტემპერატურის ცვლილებას.



მაგალითი 2. ცხრილით წარმოდგენილია ერთ-ერთი სამშობიარო სახლის ახალშობილთა სარეგისტრაციო წიგნის ერთ-ერთი გვერდი.

დაბადების თარიღი	დაბადებულის სახელი	სქესი
01.01.2016	მარიამი	გოგონა
01.01.2016	თორნიკე	ვაჟი
01.01.2016	თომა	ვაჟი
02.01.2016	გიორგი	ვაჟი
03.01.2016	თინათინი	გოგონა
03.01.2016	ქეთევანი	გოგონა
03.01.2016	გიორგი	ვაჟი
03.01.2016	მერაბი	ვაჟი
05.01.2016	სალომე	გოგონა
05.01.2016	გიორგი	ვაჟი
07.01.2016	ქეთევანი	გოგონა

07.01.2016	მარიამი	გოგონა
07.01.2016	გიორგი	ვაჟი
07.01.2016	ქეთევანი	გოგონა
07.01.2016	დავითი	ვაჟი
10.01.2016	დავითი	ვაჟი
11.01.2016	ქეთევანი	გოგონა
14.01.2016	გიორგი	ვაჟი
14.01.2016	მარიამი	გოგონა
14.01.2016	ლევანი	ვაჟი

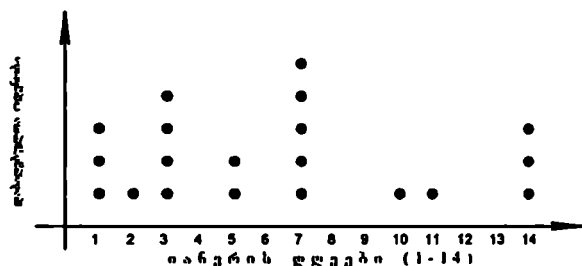
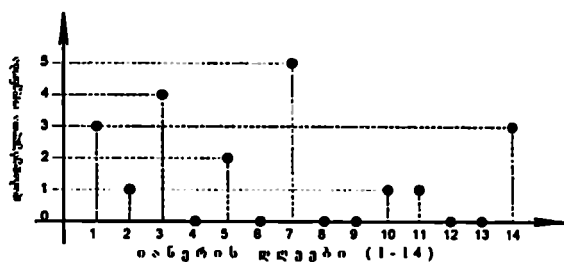
ამ ცხრილის მიხედვით შეიძლება შევადგინოთ კიდევ სამი ცხრილი:

დაბადების თარიღი	დაბადებულთა ოდენობა
01.01.2016	3
02.01.2016	1
03.01.2016	4
04.01.2016	0
05.01.2016	2
06.01.2016	0
07.01.2016	5
08.01.2016	0
09.01.2016	0
10.01.2016	1
11.01.2016	1
12.01.2016	0
13.01.2016	0
14.01.2016	3

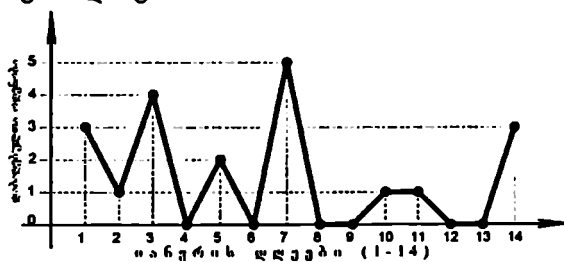
დაბადებულის სახელი	დაბადებულთა ოდენობა
ქეთევანი	4
მარიამი	3
თორნიკე	1
თომა	1
გიორგი	5
თინათინი	1
მერაბი	1
სალომე	1
დავითი	2
ლევანი	1

დაბადებულის სქესი	დაბადებულთა ოდენობა
ვაჟი	11
გოგონა	9

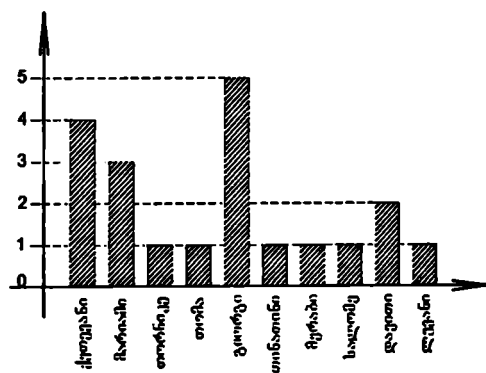
ამ ცხრილების მიხედვით შეიძლება ავაგოთ დიაგრამები:
წერტილოვანი დიაგრამა (ორი სახით)



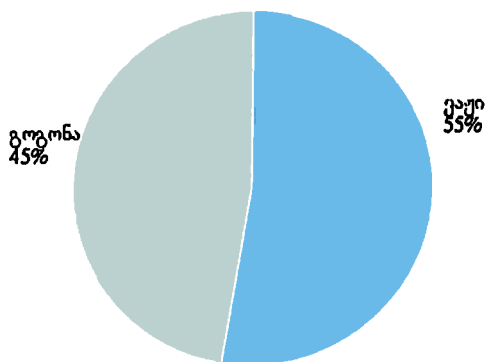
ხაზოვანი დიაგრამა



სვეტოვანი დიაგრამა



წრიული დიაგრამა დაბადებულთა სქესი



ხაზოვანი დიაგრამა მეტწილად მაშინ გამოიყენება, როცა სურთ დროის მიხედვით სიდიდის ცვლილება წარმოადგინონ - ჰორიზონტალურ წრფეზე გამოსახება დროის მომენტები, ვერტიკალურზე - სიდიდის მნიშვნელობები (ჩვენ შემთხვევაში ახალდაბადებულთა რაოდენობა); შემდეგ მიღებულ წერტილებს ვაერთებთ მონაკვეთებით.

სვეტოვანი დიაგრამის ჰორიზონტალურ წრფეზე წარმოადგენენ რაიმე ნიშნის (ჩვენთან - სახელების) სხვადასხვა მნიშვნელობას, ყოველი მნიშვნელობის გასწვრივ აიგება სვეტი, რომლის სიმაღლე ჩვენთვის საინტერესო სიდიდის ტოლია (ჩვენთან ახალდაბადებულთა რაოდენობა).

სვეტოვან დიაგრამაზე კარგად ჩანს სიდიდეებს შორის რაოდენობრივი თანაფარდობები.

თვალსაჩინოებით გამოირჩევა წრიული დიაგრამა. წრე სექტორებად ისეა დაყოფილი, რომ სექტორების ცენტრალური კუთხეები (და შესაბამისად რკალები) მათ მიერ წარმოდგენილი მონაცემების (ჩვენთან - ახალდაბადებულთა სქესის) რაოდენობის პროპორციულია.

ზოგჯერ, მონაცემებში არსებული ინფორმაციის სრულად ასახვის მიზნით, ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამა გამოიყენება; რაც გულისხმობს მოცემული რიცხვებიდან ათობითი ნიშნის გამოყოფას (ფოთლები) და დანარჩენი ნიშნების შესაბამისი რიცხვების ზრდის მიხედვით ამოწერას თითოჯერ ზემოდან ქვემოთ ვერტიკალურად (ვერტიკალური ღერო), ხოლო შემდეგ ვერტიკალურ ღეროზე დატანილი ფიქსირებული პირველი რამდენიმე საერთო ათობითი ნიშნის გვერდით, ამ რიცხვების ბოლო ათობითი ნიშნების (ფოთლების) ამოწერას რიგრიგობით ჰორიზონტალურად (ჰორიზონტალური ღერო).

განვიხილოთ მაგალითი:

ერთ-ერთმა გამოცემლობამ აღრიცხა სექტემბრის პირველი ორი კვირის განმავლობაში დისტრიბუტორების მიერ გატანილი მე-6 კლასის სახელმძღვანელოების ოდენობები: 155; 161; 167; 154; 155; 155; 171; 173; 182; 198; 203; 204; 157; 207; 203; 192; 174; 183; 182; 171.

ფოთლები (ბოლო ათობითი ნიშანი)

15	5, 4, 5, 5, 7	
16	1, 7,	
17	1, 3, 4, 1	ჰორიზონტალური ღეროები (15 5 ნიშნავს 155-ს)
18	2, 3, 2	
19	8, 2	
20	3, 4, 7, 3	

მთლიანად სურათი არსებითად ჰისტოგრამის სახეს იღებს (თუ სურათს საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით 90°-ით მოვაბრუნებთ). ცხადია, რომ ათობითი ნიშნების დიდი რაოდენობისათვის ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამა შეიძლება რთული ასაგები შეიქმნეს. ამგვარი დიაგრამა თვალსაჩინოა და ზოგ სიტუაციაში აადვილებს გამოთვლებს. მაშინ, როცა ჰისტოგრამის აგებისას მონაცემებში არსებული ინფორმაცია სრულად არ იწახება, ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამა არ კარგავს არცერთ მონა-

ცემს და ამის გარდა ჰისტოგრამის ფორმასაც იძენს. ეს დიაგრამა ე.წ. მონაცემთა დაზვერვითი ანალიზის ერთ-ერთი იარაღია; ამ დარგის შემქმნელია ცნობილი ამერიკელი სტატისტიკოსი ჯ. ტიუკი.

4.4.1. საპარჯიშოები პრაქტიკული მემცადინეობისათვის

1. რუკის მასშტაბია 1:500000, ვიპოვოთ 1სმ-ის შესაბამისი რეალური მანძილი.
2. ბინის გეგმაზე 4 სმ მონაკვეთით 6 მ სიგრძის მონაკვეთია გამოსახული. ვიპოვოთ ამ გეგმის მასშტაბი.
3. 2 მმ სიგრძის ჭიანჭველა სურათზე 3 სმ-ია. ვიპოვოთ ამ სურათის მასშტაბი.
4. ორ ქალაქს შორის მანძილი 120 კმ-ია, რუკაზე კი ამ ქალაქებს შორის მანძილი არის 6 სმ. ვიპოვოთ შესაბამისი მასშტაბი.
5. უწერილესი სისხლძარღვის - კაპილარის სიგრძე 0,5 მმ-ია, სურათზე კაპილარის გამოსახულება 1,5 სმ სიგრძისაა. იპოვეთ სურათის მასშტაბი.

ცხრილით მოცემულია სიმღერის შემსწავლელ ერთ-ერთ ჯგუფში 37 ბავშვის ასაკის მიხედვით განაწილება:

ასაკი	5	6	7	8	9
ბავშვების ოდენობა	9	10	5	6	7

ამ ცხრილის მიხედვით შეადგინეთ:

6. წერტილოვანი დიაგრამა.
7. ხაზოვანი დიაგრამა.
8. სვეტოვანი დიაგრამა.
9. წრიული დიაგრამა.

ცხრილით მოცემულია ბიბლიოთეკიდან ერთ-ერთი სამუშაო კვირის დღეებში გატანილი და დაბრუნებული წიგნების ოდენობები:

კვირის დღეები	გატანილი წიგნების ოდენობები	დაბრუნებული წიგნების ოდენობები
ორშაბათი	17	8
სამშაბათი	22	29
ოთხშაბათი	25	20
ხუთშაბათი	10	33
პარასკევი	27	14
ჯამი	101	104

ამ ცხრილის მიხედვით შეადგინეთ:

10. წერტილოვანი დიაგრამა.
11. ხაზოვანი დიაგრამა.
12. სვეტოვანი დიაგრამა.
13. გატანილი და დაბრუნებული წიგნების ოდენობების წრიული დიაგრამა
14. კონფერენციის 240 მონაწილიდან 72 ზურბაიჯანიდანაა, 96 - სომხეთიდან, 12 - თურქეთიდან, 60 - საქართველოდან. გამოსახეთ პროცენტულად მონაწილეთა ოდენობები ქვეყნების მიხედვით და მიღებული მონაცემებით შეადგინეთ წრიული დიაგრამა.
15. ერთიანი ეროვნული გამოცდებისათვის მზადების პერიოდში ჩატარდა მოსამზადებელი წერა მათემატიკაში. შედეგები ასეთი იყო: 0-29 ქულა მიიღო მოსწავლეთა საერთო ოდენობის 12%-მა; 30-59 ქულა - 55%-მა; 60-84 ქულა - 29%-მა, 85-100 ქულა - 4%-მა. შეადგინეთ მოსწავლეთა ნიშნების განაწილების სვეტოვანი დიაგრამა.
16. წინა 15 ამოცანის მოანცემებით შეადგინეთ მოსწავლეთა ნიშნების განაწილების წრიული დიაგრამა.

ცხრილით მოცემულია დედამიწის ხმელეთის ზედაპირის ფართობის განაწილება კონტინენტების მიხედვით:

კონტინენტები	ფართობი
აფრიკა	29, 22 მლნ კმ ²
ავსტრალია	7, 56 მლნ კმ ²
სამხრეთ ამერიკა	18, 13 მლნ კმ ²
ჩრდილოეთ ამერიკა	20, 36 მლნ კმ ²
ევრაზია	53, 44 მლნ კმ ²
ანტარქტიდა	12, 40 მლნ კმ ²

უპასუხეთ შემდეგ კითხვებს:

17. დედამიწის ხმელეთის რამდენი პროცენტია ევრაზიის ფართობი?
18. მიახლოებით რამდენი კვდარატული კილომეტრია დედამიწის ხმელეთის ფართობი?
19. გამოვთვალოთ კონტინენტების პროცენტული წილები დედამიწის ხმელეთის მთელ ფართობთან მიმართებაში.
20. ააგეთ კონტინენტების მიხედვით ფართობების განაწილების სვეტოვანი დიაგრამა.
21. ააგეთ კონტინენტების მიხედვით ფართობების განაწილების წრიული დიაგრამა.
22. ცნობილია, რომ ევროპის ხმელეთის ფართობი დედამიწის მთელი ხმელეთის ფართობის მიახლოებით 7%-ია. რამდენი პროცენტია აზიის ფართობი?

შედგენილია ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამა (9||4 ნიშნავს 94-ს):

5		1, 3, 1, 5, 7, 5
6		1, 2, 1, 3
7		2, 8, 1
8		1, 9, 8, 6
9		4, 3, 5

უპასუხეთ შემდეგ კითხვებს:

23. რამდენი მონაცემია წარმოდგენილი?
24. რომელი მონაცემია უმცირესი?
25. რომელი მონაცემია უდიდესი?
26. რამდენი მონაცემია 62-ზე მეტი?
27. რამდენი მონაცემია 71-ზე ნაკლები?
28. რამდენი მონაცემია 55-სა და 86-ს შორის?

ერთ-ერთ ბანკში ვაკანტური თანამდებობის დასაკავებლად მოწყობილ კონკურსში 25 ახალგაზრდა მონაწილეობდა. ტესტირების შედეგად მიღებული ქულებია: 78, 96, 85, 75, 92, 86, 97, 67, 83, 87, 80, 90, 85, 86, 69, 93, 78, 93, 67, 86, 63, 69, 99, 87, 47. ააგეთ:

29. სიხშირეთა ჰისტოგრამა 6 ქვეინტერვალით.

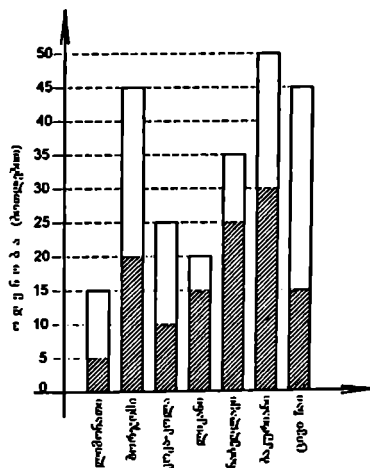
30. ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამა.

4.4.2. ტესტი №4

1. მოძრავი ავტომობილის სპიდომეტრი 1 საათისა და 30 წუთის განმავლობაში 70 კმ-ს უჩვენებდა. ეს ნიშნავს, რომ ავტომობილმა ამ დროში გაიარა

ა) 105 კმ; ბ) 70 კმ; გ) 130 კმ; დ) 140 კმ; ე) 115 კმ.

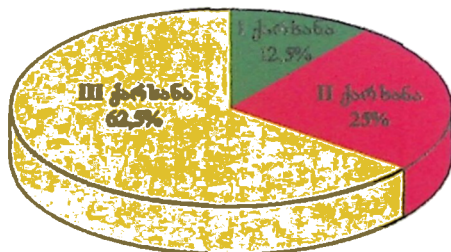
სვეტოვანი დიაგრამით ერთ-ერთი მაღაზიის მიერ 3 ივნისს და 4 ივნისს გაყიდული სასმელებია წარმოდგენილი (3 ივნისს გაყიდული სასმელები დაშტრიხული მართკუთხედებითაა წარმოდგენილი).



ამ დიაგრამის მიხედვით სწორი პასუხი გავცეთ შემდეგ კითხვებს:

2. რომელი სასმელი გაიყიდა ყველაზე მეტი 4 ივნისს?
 - ა) ბორჯომი; ბ) კოკა-კოლა; გ) ბაკურიანი;
 - დ) ცივი ჩაი; ე) ნაბეღლავი.
3. რომელი სასმელებია 3 და 4 ივნისს გაყიდული ტოლი რაოდენობით?
 - ა) ლიმონათი და ლიკანი; ბ) ნაბეღლავი და ბაკურიანი;
 - გ) ბორჯომი და ცივი ჩაი; დ) კოკა-კოლა და ლიკანი;
 - ე) ბორჯომი და ბაკურიანი.
4. რამდენი ბოთლი ლიკანი გაიყიდა 4 ივნისს?
 - ა) 20 ბოთლი; ბ) 15 ბოთლი;
 - გ) 5 ბოთლი; დ) შეუძლებელია განსაზღვრა.
5. რომელი სასმელია ყველაზე უფრო პოპულარული?
 - ა) ბორჯომი; ბ) ბაკურიანი; გ) ცივი ჩაი; დ) ნაბეღლავი.
6. რომელი სასმელია არაპოპულარული?
 - ა) ლიმონათი; ბ) კოკა-კოლა; გ) ლიკანი; დ) ნაბეღლავი.

სამი ქარხნის მიერ გაყიდული პურის ოდენობა (პროცენტებით) წრიული დიაგრამითაა წარმოდგენილი:



ამ დიაგრამის მიხედვით სწორი პასუხი გავცეთ შემდეგ კითხვებს:

7. რამდენჯერ მეტი პური გაუყიდა III ქარხანას, ვიდრე I ქარხანას?

ა) 5-ჯერ; ბ) 4-ჯერ; გ) 3-ჯერ; დ) 4,5-ჯერ.

8. რამდენი პროცენტით მეტი პური გაუყიდა III ქარხანას, ვიდრე I და II ქარხანას ერთად?

ა) 50%-ით; ბ) 25%-ით; გ) 37,5%-ით; დ) 45%-ით.

ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამით 20 სტუდენტის შესასებაა წარმოდგენილი (მაქსიმალური შეფასებაა 100 ქულა), მათემატიკის გამოცდის შედეგების მიხედვით (4||7 47-ს აღნიშნავს).

4||7, 9

5||2, 1, 2

6||4, 5, 3, 4

7||1, 2, 1, 3, 8

8||8, 9, 7, 2

9||3, 5

ამ დიაგრამის მიხედვით სწორი პასუხი გავცევთ შემდეგ კითხვებს:

9. რამდენმა სტუდენტმა მიიღო 71-ზე ნაკლები ქულა

ა) 8 სტუდენტმა; ბ) 9 სტუდენტმა;

გ) 13 სტუდენტმა; დ) 18 სტუდენტმა.

10. რამდენმა სტუდენტმა მიიღო 60-ზე მეტი და 80-ზე ნაკლები ქულა?

ა) 8 სტუდენტმა; ბ) 9 სტუდენტმა;

გ) 13 სტუდენტმა; დ) 18 სტუდენტმა.

4.5. მონაცემთა საშუალო, მოდა, მედიანა, დიაპაზონი, დისპერსია, საშუალო კვადრატული გადახრა

ჩვენ განვიხილეთ მონაცემთა ერთობლიობის (პოპულაციის) ის რიცხვითი მახასიათებლები, რომლებიც ცხრილებით და შესაბამისი დიაგრამებით იყო წარმოდგენილი. ეხლა განვიხილავთ სხვა რიცხვით მახასიათებლებს.

რიცხვით მონაცემთა საშუალო ეწოდება ყველა მოცემული რიცხვის ჯამის შეფარდებას ამ მონაცემთა ოდენობასთან.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

($x_1, x_2, \dots, x_n$ მოცემული რიცხვებია, $\bar{x}$ - ამ რიცხვების არითმეტიკული საშუალოა, სტატისტიკაში $\bar{x}$ - არის $x_1, x_2, \dots, x_n$ მონაცემთა საშუალო). ეს მახასიათებელი ხშირად გამოიყენება; მაგალითად, - «საშუალო შემოსავალი», «საშუალო შეფასება», «საშუალო ხელფასი», «საშუალო სიმაღლე» და ა.შ.

განვიხილოთ მაგალითები:

მაგალითი 1. ვთქვათ, მოსწავლის შეფასება პირველ ტრიმესტრში იყო: 10, 6, 8, 8, 10, 10, 10, 8, 10, 10. ვიპოვოთ საშუალო ქულა:

$$\bar{x} = \frac{10 + 6 + 8 + 8 + 10 + 10 + 10 + 8 + 10 + 10}{10} = 9$$

საშუალო ქულა არც ერთ შეფასებას არ ემთხვევა; რა ნიშნით შეიძლება შევადგათ მოსწავლე პირველ ტრიმესტრში? მიღებული საშუალოს მიხედვით, ეს შეფასება შეიძლება იყოს 9 ქულა. თუმცა, შეიძლება 10 ქულის დაწერაც. 10 ქულა ხომ ყველაზე ხშირად გვხვდება მონაცემებში; ასეთ რიცხვით მახასიათებელს მოდა ეწოდება.

რიცხვითი მონაცემი მოდა ეწოდება იმ რიცხვს, რომელიც მონაცემებში ყველაზე ხშირად გვხვდება. ჩვენს მაგალითში მოდა არის 10. რიცხვით მონაცემებს შეიძლება რამდენიმე მოდა ჰქონდეს.

მაგალითად, 47; 46; 50; 51; 47; 52; 51; 49; 45; 43; 53 - აქ ორი მოდა გვაქვს, 47 და 51; თითოეული მათგანი 2-ჯერ გვხვდება, დანარჩენები კი - ერთხელ.

10; 9; 12; 7; 8 - მონაცემთა ერთობლიობაა, რომელსაც მოდა არა აქვს - არცერთი რიცხვი აქ არ გვხვდება უფრო ხშირად, ვიდრე სხვა რომელიმე.

მონაცემთა ერთობლიობის კიდევ ერთი მახასიათებელია მედიანა.

ვთქვათ, მონაცემები ზრდის მიხედვითაა დალაგებული (შეიძლება კლების მიხედვითაც დავალაგოთ). თუ მონაცემთა ოდენობა კენტია, მაშინ მედიანა «შუა» რიცხვია; ხოლო თუ მონაცემთა ოდენობა ლუწია, მაშინ მედიანა ორი «შუა» რიცხვის საშუალოა.

მაგალითი 2. ვთქვათ, შვიდი სხვადასხვა საწარმოს მიერ გამოშვებული პროდუქციის მოცულობები პროპორციულია რიცხვების: 4, 3; 5; 1; 2; 6 და 98-ის. საწარმოთა ამ ჯგუფის მიერ გამოშვებული პროდუქციის შესაფასებლად ვიპოვოთ რიცხვების საშუალო: $(4+3+5+1+2+6+98):7=119:7=17$. ეს საშუალო შვიდი რიცხვიდან ექვსზე მეტია, ამიტომ იგი კარგად ვერ აღწერს მონაცემთა ერთობლიობას. ამ მონაცემებს მოდა არ გააჩნიათ. დავალაგოთ რიცხვები ზრდის მიხედვით - 1; 2; 3; 4; 5; 6; 98.

აქ შუა რიცხვი არის 4. ეს რიცხვიც არ არის მწკრივის საუკეთესო მახასიათებელი, თუმცა, იგი შეიძლება მივიჩნიოთ უკეთეს მაჩვენებლად, ვიდრე საშუალოა. საშუალო რომ არ არის მოცემულ მონაცემთა საუკეთესო მაჩვენებელი იქიდანანაც ჩანს, რომ ერთი რიცხვის (98-ის) ამოგდების შემდეგ საშუალო მკვეთრად იცვლება (იგი 3,5-ის ტოლი ხდება).

მაგალითი 3. მაღაზიაში ლურსმნები წონით იყიდება. ერთ კილოგრამში ლურსმნების რაოდენობის შეფასების მიზნით გადაწყვიტეს გაეგოთ ერთი ლურსმნის წონა. აწონეს 8 ლურსმანი. აწონვის შედეგებმა (გრამებში) მოგვცა შემდეგი მონაცემები: 4,47; 4,44; 4,64; 4,32; 4,45; 4,54; 4,56; 4,32.

რომელი მახასიათებლით შეიძლება უკეთესად შევაფასოთ ერთი ცალი ლურსმნის წონა?

ვიპოვოთ სამივე მახასიათებელი: $\bar{x}$ (საშუალო), Mo (მოდა), Me

(მედიანა).

$$\bar{x} = 4,47; \quad Mo = 4,32; \quad Me = 4,46.$$

მათგან ამოცანის პირობის მიხედვით, ყველაზე კარგი მახასიათებელი საშუალოა, მედიანაც შეიძლება გამოვიყენოთ ერთი ცალი ლურსმნის წონის შესაფასებლად. მოდა კი ნაკლებად შეიძლება გამოვიყენოთ, რადგან მხოლოდ ორ რიცხვია ერთნაირი და 4,32 არ შეიძლება რაიმე კანონზომიერებას იძლეოდეს.

თუ მონაცემები სიხშირეთა ცხრილითაა მოცემული, მაშინ როგორ გამოვთვალოთ მახასიათებლები?

ვთქვათ, მონაცემებია $x_1; x_2; x_3; \dots; x_k$; შესაბამისი სიხშირეებია $n_1; n_2; n_3; \dots; n_k$; ხოლო ფარდობითი სიხშირეები კი – $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$; მაშინ ცხადია,

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 + \dots + x_k \cdot n_k}{k};$$

$$\bar{x} = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + \dots + x_k \cdot f_k.$$

მონაცემთა მოდის დასადგენად უნდა ვიპოვოთ ამ მონაცემთა სიხშირეებს შორის მაქსიმალური მნიშვნელობები და შევარჩიოთ მათი შესაბამისი მონაცემები.

საშუალოს, მოდასა და მედიანას ცენტრალური ტენდენციის საზომებს ან «საშუალო» საზომებსაც უწოდებენ.

ახლა განვიხილოთ გაფანტულობის საზომები:

მონაცემთა გაბნევის დიაპაზონი ეწოდება ამ მონაცემებიდან უდიდესისა და უმცირესის სხვაობას.

პლანეტა მერკურიზე საშუალო ტემპერატურა $+15^{\circ}$ -ია. ამ მონაცემების მიხედვით შეიძლება შეგვექმნას შთაბეჭდილება, რომ მერკურიზე ზომიერი ჰავაა. სინამდვილეში ტემპერატურა ამ პლანეტაზე -150° -დან $+350^{\circ}$ -მდე მერყეობს. მერკურის კლიმატს უკეთესად დაახასიათებს გაბნევის დიაპაზონი: $350^{\circ} - (-150^{\circ}) = 500^{\circ}$. ცხადია, ტემპერატურის ასეთი ცვლილების პირობები არ შეიძლება ჩაითვალოს ზომიერ კლიმატად, ადამიანის საცხოვრებლად ხელსაყრელ გარემოდ.

გაბნევის დიაპაზონი ადვილად გამოითვლება, თუმცა, ყოველ-

თვის არ იძლევა საკმარის ინფორმაციას მონაცემთა მწკრივის შესახებ. ამიტომ უფრო ხშირად გაფანტულობის სხვა სტატისტიკური მაჩვენებელი - საშუალო კვადრატული გადახრა (სტანდარტული გადახრა) გამოიყენება.

ვთქვათ, მონაცემთა მწკრივია:

$$x_1; x_2; \dots; x_n.$$

ვპოულობთ ამ მონაცემთა საშუალოს:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i, \text{ ე.ი. } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

ვპოულობთ თითოეული რიცხვისა და ამ საშუალოს სხვაობას:

$$x_1 - \bar{x}; \quad x_2 - \bar{x}; \dots; x_n - \bar{x}.$$

ვპოულობთ მიღებული სხვაობების კვადრატების საშუალოს

$$D = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$\text{ამ რიცხვს დისპერსია ეწოდება, მაშინ } D = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n}.$$

ვპოულობთ კვადრატულ ფესვს ნაპოვნი საშუალოდან (დისპერსიიდან):

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n}}.$$

მიღებულ რიცხვს ეწოდება მონაცემთა საშუალო კვადრატული გადახრა (სტანდარტული გადახრა). ამ რიცხვით ვპოულობთ საშუალოდან გადახრას - საშუალოს მიმართ მონაცემების სიახლოვეს.

დისპერსიის ნაცვლად თითოეული რიცხვისა და საშუალოს სხვაობების საშუალო რომ გამოგვეთვალა ნულს მივიღებდით. მართლაც,

$$\frac{(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x})}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n - n \cdot \bar{x}}{n} = \bar{x} - \bar{x} = 0.$$

მაგალითი 4. ვთქვათ, მოსწავლის შეფასება მეორე ტრიმესტრში იყო 6, 9, 10, 10, 9, 10, 10, 10, 10, 10. ამ მონაცემებით შევავსოთ ცხრილი:

შეფასება	სიხშირე	ფარდობითი სიხშირე
6	1	0,1
9	2	0,2
10	7	0,7
სულ	10	1

გაზნევის დიაპაზონი: $10 - 6 = 4$. მოდა და მედიანა ერთმანეთის ტოლია და 10-ს უდრის. გამოვთვალოთ საშუალო:

$$\bar{x} = \frac{6 + 9 + 10 + 10 + 9 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10}{10} = 9,4.$$

საშუალო კვადრატული გადახრა სხვადასხვა ხერხით შეიძლება გამოვთვალოთ:

I ხერხი:

სიხშირეები

$$D = \frac{(6 - 9,4)^2 \cdot 1 + (9 - 9,4)^2 \cdot 2 + (10 - 9,4)^2 \cdot 7}{10} = 1,44;$$

მაშასადამე, $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{1,44} = 1,2.$

II ხერხი:

$$D = (6 - 9,4)^2 \cdot 0,1 + (9 - 9,4)^2 \cdot 0,2 + (10 - 9,4)^2 \cdot 0,7 = 1,44$$

ფარდობითი სიხშირეები

მაშასადამე, $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{1,44} = 1,2.$

4.5.1. საპარჯიშოები პრაქტიკული მენეჯინგისათვის

1. სტადიონზე გამართულ ოთხ თამაშზე მაყურებელთა ოდენობები იყო 24 532; 18 711; 22 871; 24 334. რისი ტოლია ამ თამაშებზე საშუალო დასწრება?
2. ბოლო ხუთ დღეში მაიას მიერ დახარჯული თანხებია: 19 ლარი, 25 ლარი, 17 ლარი, 24 ლარი და 25 ლარი. გამოთვალეთ ამ მონაცემების დიაპაზონი და საშუალო.
3. სატელევიზიო კონკურსის ოთხმა მონაწილემ შემდეგი შეფასებები მიიღო:
 A მონაწილე - 1; 1; 2; 1; 2; 1; 1; 1; 2.
 B მონაწილე - 1; 1; 2; 2; 2; 2; 1; 1; 1.
 C მონაწილე - 1; 1; 2; 3; 1; 1; 1; 1; 1.
 D მონაწილე - 1; 1; 4; 3; 2; 1; 1; 3; 2.

ამ მონაცემებში თითოეული რიცხვი ჟიურის წევრის მიერ მონაწილისათვის მიანიჭებულ ადგილს ნიშნავს, ანუ რაც უფრო მცირეა რიცხვები, მით მაღალია შეფასება. ა) იპოვეთ რიცხვთა თითოეული ერთობლიობის მოდა, მედიანა და საშუალო. ბ) გაანაწილეთ მონაწილეები ადგილების მიხედვით.

4. ერთ-ერთი კომპანიის ხელმძღვანელმა შეარჩია ერთ-ერთი თვის 21 სამუშაო დღე და აღწერა ამ პერიოდში თანამშრომელთა მიერ სამსახურის გაცდენის დღეების სიხშირეები და დაგროვილი სიხშირეები (რაიმე მონაცემისათვის დაგროვილი სიხშირე მიიღება ყველა იმ მონაცემის სიხშირის შეკრებით, რომელიც არ აღემატება მითითებულ მონაცემებს).

გაცდენების ოდენობა	0	1	2	3	4
დღეების ოდენობა	2	8	6	3	2
დაგროვილი სიხშირეები	2	10	16	...	...

ა) დაასრულეთ დაგროვილ სიხშირეთა ჩანაწერი.

ბ) რამდენია იმ დღეთა ოდენობა როცა ორზე მეტი გაცდენა არ აღრიცხულა?

გ) შეადგინეთ სიხშირეთა ცხრილი წერტილოვანი და ხაზოვანი

დიაგრამებით.

დ) იპოვეთ გაცდენების მოდა, მედიანა და საშუალო.

5. ვთქვათ, მოცემულია მონაცემთა ორი შერჩევა:

A	8	9	10	10	13	10
B	1	5	10	16	18	10

ა) იპოვეთ თითოეულის მოდა მედიანა, საშუალო და დიაპაზონი;

ბ) იპოვეთ თითოეული შერჩევის საშუალო კვადრატული გადახრა.

6. 10 სპორტსმენი სროლაში ეჯიბრება ერთმანეთს. 10 გასროლის მიხედვით არსებული შედეგები წარმოდგენილია ცხრილით:

სპორტსმენის ნომერი	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
მიზანში მოხვედრათა ოდენობა	8	4	9	9	7	8	5	8	6	7

გამოთვალეთ ამ მონაცემების საშუალო, მოდა, მედიანა, გაბნევის დიაპაზონი, დისპერსია და საშუალო კვადრატული გადახრა.

7. ლეონელ მესის მიერ 16 მატჩში გატანილი გოლების ოდენობებია: 0, 2, 1, 1, 0, 3, 3, 4, 0, 2, 2, 2, 1, 3, 1, 1. იპოვეთ საშუალო, მოდა, მედიანა, გაბნევის დიაპაზონი, დისპერსია და საშუალო კვადრატული გადახრა.

8. ცნობილია, რომ 11,2; 3; 3,2; 13,14; 8,4; x რიცხვების მედიანა არის 8. იპოვეთ x .

9. ცნობილია, რომ x ; $2x-1$; $2x$; $3x+1$ რიცხვების საშუალო არის 6. იპოვეთ x .

10. გამოთვალეთ 23; 20; 22; 40; 25; 27; 39 რიცხვითი მონაცემების საშუალო კვადრატული გადახრა.

11. შუბის ტყორცნაში პირველ სამ ადგილზე გასულთა შედეგები (მეტრებში, ერთეულებამდე დამრგვალებული) 7 ცდის მიხედვით ასეთია:

I ადგილი	84	85	81	80	91	85	85
II ადგილი	86	87	90	86	85	83	89
III ადგილი	84	83	79	80	84	86	80

- ა) იპოვეთ თითოეული სპორტსმენის შედეგების საშუალო, მოდა და მედიანა;
- ბ) ანიჭებს თუ არა უმაღლესი საშუალო შედეგი უმაღლეს ადგილს?

12. მსროლელის მიერ 8 გასროლით მიღებული ქულები მოცემულია ცხრილის სახით:

გასროლის ნომერი	1	2	3	4	5	6	7	8
ქულების ოდენობა	10	9	9	7	8	6	9	8

გამოთვალეთ ამ მონაცემების საშუალო, მოდა, მედიანა, გაბნევის დიაპაზონი და საშუალო კვადრატული გადახრა.

13. ცხრილით მოცემულია ნავთობის მთელი მარაგის ოდენობები უდიდესი მარაგის ქვეყნებში:

ქვეყნები	ნავთობის მარაგი (მილიარდი ბარელი)
საუდის არაბეთი	267
რუსეთი	60
აშშ	21
ირანი	132
მექსიკა	13
კანადა	179
კუვეიტი	104
ერაყი	115
გაერთიანებული ემირატები	98
ვენესუელა	79

შეადგინეთ წრიული დიაგრამა და იპოვეთ მარაგის საშუალო.

14. კალათბურთელმა ზაზა ფაჩულიამ პირველ ხუთ თამაშში შემდეგი რაოდენობის ქულები მოუტანა თავის გუნდადს: 16; 15; 17; 17; 20. ვიპოვოთ ამ ქულების საშუალო, მოდა, მედიანა, გაბნევის დიაპაზონი და საშუალო კვადრატული გადახრა.
15. ერთ-ერთი კორპორაციის მენეჯერმა შეისწავლა ბოლო ხუთი წლის განმავლობაში ორი სხვადასხვა მიმართულებით ჩადებული ინვესტიციებიდან მიღებული მოგებები და ასეთი მონაცემები მიიღო:

წლები	A მიმართულება	B მიმართულება
5 წლის წინ	11,3%	9,4%
4 წლის წინ	12,5%	17,1%
3 წლის წინ	13%	13,3%
2 წლის წინ	12%	10%
1 წლის წინ	12,2%	11,2%

- ა) იპოვეთ საშუალო წლიური მოგება (პროცენტებში) თითოეული მიმართულებით;
- ბ) იპოვეთ საშუალო კვადრატული გადახრები;
- გ) რომელი მიმართულებითაა ინვესტიციები უფრო მეტ რისკთან დაკავშირებული?

16. ზრდის მიხედვით დალაგებული მონაცემთა ერთობლიობა ცხრილითაა მოცემული:

მონაცემი	x_1	3	5	6,5	9	x_6
სიხშირე	3	4	9	1	5	2

იპოვეთ x_1 და x_6 , თუ ცნობილია, რომ ამ ერთობლიობის დიაპაზონია 8,5; ხოლო საშუალოა 5,75.

17. ყველა მონაცემი 2-ჯერ გაზარდეს. შეიცვლება თუ არა (როგორ) საშუალო, მოდა, მედიანა, დიაპაზონი?
18. მონაცემებიდან თითოეული 35-ით გაზარდეს. როგორ შეიცვლება გაზრდის დიაპაზონი და საშუალო კვადრატული გადახრა?
19. რიცხვები დალაგებულია ზრდის მიხედვით. მათი რაოდენობა არის 30. მეთხუთმეტე რიცხვია 18, მეთექვსმეტე - 20. იპოვეთ მედიანა.
20. ვთქვათ, მონაცემთა რაოდენობა არის 11. ზრდის მიხედვით დალაგებისას მეექვსე რიცხვი აღმოჩნდა 19. შეიძლება თუ არა მედიანის დასახელება?
21. ვთქვათ, რიცხვითი მონაცემების საშუალოა 12, დიაპაზონი - 7,2. რა შუალედს ეკუთვნის ეს მონაცემები?

მოცემულია ერთ-ერთი ორგანიზაციის 25 თანამშრომლის ხელფასების (ლარებში) სიხშირეთა ცხრილი:

ხელფასი	172	225	270	290	418	460	802
სიხშირე	8	5	3	4	1	2	2

უპასუხეთ შემდეგ კითხვებს:

22. იპოვეთ ამ ორგანიზაციის თანამშრომლების საშუალო ხელფასი.
23. იპოვეთ ამ მონაცემების მოდა და მედიანა.
24. იპოვეთ ამ მონაცემების დიაპაზონი.
25. იპოვეთ ამ მონაცემების სტანდარტული გადახრა.

ყოველწლიურად ამერიკის შეერთებულ შტატებში სხვადასხვა ქვეყნებიდან საცხოვრებლად ბევრი ადამიანი ჩადის. ერთ-ერთი წლის მონაცემები რამდენიმე ასეთი ქვეყნის შესახებ ცხრილითაა მოცემული:

ქვეყნები	ემიგრანტთა ოდენობა
ჩინეთი	43 800
კუბა	28 500
ინდოეთი	45 800
რუსეთი	22 700
მექსიკა	160 500
ფილიპინები	58 900

უპასუხეთ შემდეგ კითხვებს:

26. იპოვეთ ამ მონაცემების საშუალო და მედიანა.
27. რა რიცხვი «მოქმედებს განსაკუთრებულად» საშუალოზე და არ მოქმედებს მედიანაზე?
28. გამოცდების წარმატებით დასრულებისათვის საჭიროა 5 გამოცდის საშუალო 81 ქულაზე ნაკლები არ იყოს. მარიამმა პირველ მეორე, მესამე და მეოთხე გამოცდებზე შესაბამისად 70, 76, 83 და 80 ქულები მიიღო შესაბამისად (მაქსიმალური შეფასებაა 100 ქულა). იპოვეთ მე-5 გამოცდაზე მოსაპოვებელ ქულათა ის უმცირესი

სი რაოდენობა, რომელიც საკმარისი იქნება გამოცდების წარმატებით დასრულებისათვის.

29. რისი ტოლია იმ მონაცემთა საშუალო, რომლის საშუალო კვადრატული გადახრა ნულია? რა მონაცემებისათვის არის საშუალო კვადრატული გადახრა ნული?

30. პურის ქარხანამ 10 დღიანი მუშაობის შედეგების მიხედვით დაადგინა წუნდებული პურების ოდენობები:

დღეები	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
წუნდებული პურების ოდენობა	15	11	5	8	8	10	10	8	9	10

შეადგინეთ ამ მონაცემთა ერთობლიობის სიხშირეთა ცხრილი და იპოვეთ სტანდარტული გადახრა.

4.5.2. ტესტი №5

1. მონაცემთა საშუალო $\bar{x} =$

ა) $\sum_{i=1}^n x_i$; ბ) x_i ; გ) $\sum_{i=1}^n x_i$; დ) x_n .

2. რიცხვითი მონაცემი მოდა ეწოდება იმ რიცხვს, რომელიც მონაცემებში

- ა) იშვიათად გვხვდება;
- ბ) ყველაზე ხშირად გვხვდება;
- გ) პირველად გვხვდება.

3. რიცხვით მონაცემებს შეიძლება არ ჰქონდეს

- ა) გაბნევის დიაპაზონი; ბ) საშუალო;
- გ) მოდა; დ) მედიანა.

4. ვთქვათ, რიცხვითი მონაცემებია: 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2. თუ 2-ს შევცვლით 3-ით, მაშინ

- ა) საშუალო არ შეიცვლება; ბ) მოდა არ შეიცვლება;
- გ) მოდა შეიცვლება; დ) მედიანა არ შეიცვლება.

5. თუ ერთმანეთისაგან განსხვავებული a , b და c რიცხვების საშუალო არის b , მაშინ $3b - a - b =$

ა) $c - a$; ბ) c ; გ) $c + a$; დ) $c - b$.

6. რიცხვითი მონაცემებია 1; 2; 2; 7. იპოვეთ სტანდარტული გადახრა

ა) $\sqrt{\frac{21}{4}}$; ბ) $\sqrt{\frac{11}{2}}$; გ) $\sqrt{\frac{11}{4}}$; დ) $\sqrt{\frac{21}{8}}$

7. რიცხვითი მონაცემებია: 11; 18; 26; 28; 32; 39; 35; 32; 45. ამ მონაცემთა მოდია:

ა) 18; ბ) 35; გ) 39; დ) 32.

8. წინა მაგალითის მონაცემების გაბნევის დიაპაზონია:

ა) 28; ბ) 34; გ) 32; დ) 35.

9. ვთქვათ რიცხვითი მონაცემებია 6, 5, 5, 6, 8, 9, 4, 3, 6 ამ მონაცემების მედიანაა:

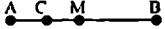
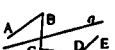
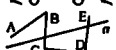
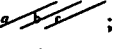
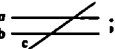
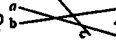
ა) 5; ბ) 6; გ) 4; დ) 8; ე) 5,5.

10. თუ მონეტის ორმოცჯერ აგდებისას გერბი მოვიდა 16-ჯერ; მაშინ მისი მოსვლის ფარდობითი სიხშირეა:

ა) 16; ბ) 0,4; გ) 0,5; დ) 0,8; ე) 5,5.

პასუხები

1.1.1.

1. $AC=15$ სმ; $CB=11$ სმ. 2. $AM=21$ სმ; $MB=24$ სმ. 3. ა)  1,5 სმ.
 ბ)  1,2 სმ. 5. მდებარეობს, რადგან $AB+AC=BC$. 6. $KP=20$ სმ.
 7. 42 სმ. 8. $AB=45$ სმ. 9. ა) $AK=48$ სმ; ბ) $AK=30$ სმ. 10. $AB:BC=1:4$. 11. $AB=96$ სმ.
 12. $AB=4$ სმ. 13. a წრფე $ABCDE$ ტეხილმა შეიძლება გადაკვეთოს ერთხელ
 ; შეიძლება გადაკვეთოს ორჯერ  ; შეიძლება გადაკვეთოს სამჯერ  და შეიძლება გადაკვეთოს ოთხჯერ 
 14. $ABCD$ ტეხილის სიგრძე მეტია ACD ტეხილის სიგრძეზე. 15. ABC ტეხილის სიგრძე ნაკლებია $AMTC$ ტეხილის სიგრძეზე. 16. ACE ტეხილის სიგრძე მეტია $ABDE$ ტეხილის სიგრძეზე. 17. ოთხ ნაწილად, თუ წრფეები ურთიერთპარალელურია  ; ექვს ნაწილად  ან  ; შეიძ. ნაწილად  18. ა) ჭეშმარიტი; ბ) მცდარი; გ) მცდარი; დ) ჭეშმარიტი; ე) ჭეშმარიტი; ვ) ჭეშმარიტი. 19. $MN:MP=7:2$. 20. $\frac{n(n-1)}{2}$. 21. 13.
22. 9 სმ. 23. 12 სმ. 24. 3 სმ. 25. 72 კმ. 26. 72 კმ. 27. 36 კმ. 28. 36 კმ. 29. ა) მეტრი; ბ) კილომეტრი; გ) მეტრი; დ) მეტრი; ე) სანტიმეტრი; ვ) სანტიმეტრი; ზ) მეტრი; თ) მეტრი; ი) მილიმეტრი; კ) მილიმეტრი; ლ) მილიმეტრი.
 30. ა) შეუძლებელია; ბ) შეუძლებელია; გ) შესაძლებელია; დ) შესაძლებელია; ე) შეუძლებელია; ვ) შესაძლებელია.

1.2.1.

1. ა) 145° ; ბ) 135° ; გ) 90° ; დ) 60° ; ე) 150° . 2. 105° . 3. $52^\circ 30'$. 4. 144° და 36° .
 5. 102° -ს. 6. 74° -ს. 7. 40° . 8. 150° . 9. $67^\circ 30'$ და $112^\circ 30'$. 10. 120° და 60° .
 11. ოთხივე კუთხე ერთმანეთის ტოლია და თითოეული 90° -ს უდრის.
 12. $\angle AOC=120^\circ$; $\angle BOD=130^\circ$; $\angle COE=110^\circ$; $\angle COD=60^\circ$. 13. 90° . 14. 140° .
 15. AMB ტეხილის სიგრძეა 40 სმ. 16. 680° , $a \parallel b$. 17. ოთხი კუთხიდან თითოეულის ზომაა 40° , ხოლო დანარჩენი ოთხიდან თითოეულის ზომაა 140° . 18. ოთხი კუთხე ერთმანეთის ტოლია და მათი ზომები ტოლია 30° -ის, ასევე ტოლია დანარჩენი ოთხი კუთხე და თითოეულის ზომა ტოლია 150° -ის. 19. $\alpha=160^\circ$; $\beta=10^\circ$. 20. 125° . 21. $\angle COB=75^\circ$. 22. $52^\circ 30'$ და $37^\circ 30'$.
 23. 60° . 24. 35° . 25. 110° . 26. 30° . 27. $\gamma=30^\circ$. 28. $\angle ACE=111^\circ$. 29. $\angle OBC=54^\circ$.
 30. $x=70^\circ$.

1.3.1.

1. 4 დმ, 6 დმ, 14 დმ, 2 დმ, 10 დმ. 2. 45 სმ. 3. 140° . 4. 150° , 120° , 90° , 150° , 60° . 5. ა) 100 სამკუთხედი; ბ) $180^\circ 98'$; გ) $180^\circ 100'$. 6. 194 სმ. 7. 30° . 8. 36° . 9. მრავალკუთხედს ექნება 152 დიაგონალი. 10. 6. 11. 16 სმ-ის. 12. 27 სმ. 13. 8 სმ. 14. 2 სმ. 15. 20 სმ, 20 სმ და 2 სმ. 16. ა) 40° , 60° , 80° ; ბ) 45° , 60° , 75° ; გ) 110° , 30° , 40° ; დ) 20° , 55° , 105° . 17. 90° . 18. 75° , 60° , 45° . 19. 20° . 20. 12 სმ. 21. 20 სმ. 22. $\angle OCB = 55^\circ$. 23. 10° . 24. 4 მ-ით. 25. 5 სმ და 12 სმ. 26. $\frac{1}{3}$ სმ. 27. A-დან B წერტილამდე 2 კმ-ია. 28. 45° . 29. 120 სმ. 30. პიპოტენუზა 10 სმ-ის ტოლია.

1.4.1.

1. 18 სმ, მიღებული ოთხკუთხედი MNPQ პარალელოგრამია. 2. პირველ შემთხვევაში პარალელოგრამის პერიმეტრი 34 სმ-ის ტოლია, ხოლო მეორეში – 38 სმ-ის. 3. პარალელოგრამის გვერდები ტოლია: 5 სმ, 5 სმ, 15 სმ და 15 სმ-ის. 4. პარალელოგრამის გვერდები ტოლია: 8 სმ, 8 სმ, 12 სმ და 12 სმ-ის. 5. 108 სმ. 6. $MN = 16$ სმ. 7. 40° და 100° . 8. 40 სმ. 9. 60° , 60° , 120° , 120° . 10. 60° , 60° , 120° , 120° . 11. 30° , 30° , 150° , 150° . 12. 48 სმ. 13. 30° და 60° . 14. ა) 40° , 40° , 140° , 140° ; ბ) 130° , 130° , 50° , 50° . 15. 8 სმ. 16. 40 სმ. 17. 12 სმ. 18. 20 სმ. 19. 18 სმ. 20. ა) 15 სმ და 6 სმ; ბ) 20 სმ და 8 სმ. 21. 144° . 22. 10 დმ. 23. 4 სმ. 24. $4\sqrt{3}$ სმ და $2\sqrt{19}$ სმ. 25. $\sqrt{a^2 + 3b^2}$ სმ. 26. 7 სმ, 11 სმ, 10 სმ. 27. ა) 8 სმ, ბ) 8 სმ. 28. 3 სმ. 29. 28 სმ. 30. 33 სმ.

1.5.1.

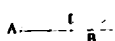
1. 2 სმ. 2. 14 სმ ან 4 სმ (განიხილება ორი შემთხვევა). 3. 18 სმ. 4. $OO_1 = 28 - 10 - 12 = 6$ სმ. 5. $AM = x$, $AB = 2x$, $(2x)^2 - 5^2 = r^2 - 2^2$, $r^2 = 7$, $AB = 2x = 2\sqrt{r^2 - 4} = 2\sqrt{3}$, ე.ი. $AB = 2\sqrt{3}$ სმ. 6. 20 სმ. 7. 16 სმ. 8. $CK = 13,5$ სმ. 9. 30 სმ. 10. $r = 4$ სმ, $R = 6$ სმ. 11. $\angle ODB = 130^\circ$; $\angle OAD = 50^\circ$; $\angle OAC = 130^\circ$; $\angle OBC = 50^\circ$. 12. $\angle OAB = 49^\circ$. 13. $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 80^\circ$, $\angle C = 40^\circ$. 14. $\angle CAD = 120^\circ$. 15. $\angle KMN = 20^\circ$. 16. $\angle AMB = 75^\circ$. 17. 80° . 18. 100° , 40° , 40° . 19. 7:8, ან 9:8 (განიხილება ორი შემთხვევა). 20. 26 სმ ან 34 სმ (განიხილება ორი შემთხვევა). 21. 18 სმ. 22. $ED = 20,5$ სმ. 23. $8\sqrt{3}$ სმ. 24. $2\sqrt{3}$ სმ. 25. $32\sqrt{2}$ სმ. 26. $2\sqrt{3}\pi$ სმ. 27. შემოვიღოთ აღნიშვნები $B-M-C$, $A-N-K-D$, $M-N$, $N-K$, $M-K$, $R=NC=ND$, $R^2=x$, $h_1 = \sqrt{x-1}$, $h_2 = \sqrt{x-9}$, 

$h_1+h_2=h$, $h=\sqrt{12}$, ვწერთ განტოლებას: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-9}=\sqrt{12}$, საიდაც $x=\frac{28}{3}$;

ამრიგად $R=\frac{2\sqrt{21}}{3}$ სმ. 28. $\angle C=110^\circ$. 29. ა) წრეწირები გარედან ეხება ერთ-მანეთს; ბ) ერთი წრეწირი მეორეს შიგნითაა; გ) წრეწირებს საერთო წერტილი არა აქვს და ერთი მეორეს გარეთაა. 30. წრეწირის რადიუსი ტოლია 2 სმ-ის.

1.6.1.

1. სიგანე 8 ერთეულია; წრფეები ერთმანეთის სიმეტრიულია $x=3$ წრფის მიმართ. 2. ა) სიმეტრიის ცენტრზე გამავალი ნებისმიერი წრფე ცენტრული სიმეტრიით თავის თავზე აისახება; ბ) არ არსებობს; გ) სიტმეტრიის ცენტრი ერთადერთი წერტილია, რომელიც ცენტრული სიმეტრიით თავის თავზე აისახება. 3. ა) აბსცისათა ღერძის მიმართ მოცემულის სიმეტრიული ექვსკუთხედის წვეროს კოორდინატებია: $A'(2;-4)$; $B'(-1;-3)$; $C'(-4;0)$; $D'(-4;3)$; $E'(2;3)$; $F'(3;0)$; ბ) ორდინატთა ღერძის მიმართ მოცემულის სიმეტრიული ექვსკუთხედის წვეროს კოორდინატებია: $A'(-2;4)$; $B'(1;3)$; $C'(4;0)$; $D'(4;-3)$; $E'(-2;-3)$; $F'(-3;0)$; გ) $y=x$ წრფის მიმართ მოცემულის სიმეტრიული ექვსკუთხედის წვეროს კოორდინატებია: $A'(4;2)$; $B'(3;-1)$; $C'(0;-4)$; $D'(-3;-4)$; $E'(-3;2)$; $F'(0;-3)$; დ) $y=-x$ წრფის მიმართ მოცემულის სიმეტრიული ექვსკუთხედის წვეროს კოორდინატებია: $A'(-4;-2)$; $B'(-3;1)$; $C'(0;4)$; $D'(3;4)$; $E'(3;-2)$; $F'(0;3)$. 4. $B(-4;-2)$. 5. $(13;5)$. 6. ა) $y=2x-3$; ბ) $y=0,5x+1,5$. 7. ვიპოვოთ A წერტილის სიმეტრიული წერტილი



ლ წრფის მიმართ A' , შემდეგ B წერტილი შევაერთოთ A' წერტილთან. ლ წრფის და $A'B$ წრფის გადაკვეთის წერტილი არის საძიებელი C წერტილი, რომელზეც გამავალი ლ წრფე $\angle ACB$ -ს ბისექტრისაა. 8. ვიპოვოთ A წერტილის სიმეტრიული წერტილი a ტრასის მიმართ A' და ვიპოვოთ A წერტილის სიმეტრიული წერტილი b ტრასის მიმართ A'' . შევაერთოთ A' და A'' წერტილები მონაკვეთით. $A'A''$ მონაკვეთის გადაკვეთის წერტილები a ტრასასთან M და b ტრასასთან N საძიებელი წერტილებია. AMNA გზის სიგრძე უმცირესია.



9. $3x+4y-10=0$. 10. $\alpha=-90^\circ$. 11. $B'(-7;-4)$, $C'(-6;-1)$. 12. R_0^{-75} 13. $2\sqrt{10}$.

$$14. \quad A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$15. \quad \text{ა) } y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}; \quad \text{ბ) } y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}. \quad 16. \quad \text{ა) } \vec{AB} = (4; 4), \quad \vec{AC} = (2; -7),$$

$$\vec{BC} = (2; -11); \quad \text{ბ) } |\vec{AB}| = 4\sqrt{2}, \quad |\vec{AC}| = \sqrt{53}, \quad |\vec{BC}| = 5\sqrt{5}. \quad 17. \quad \text{ა) } (2; 7); (-6; -8);$$

$$(-3; 9); (2; 20); (4; 1); (5; -2); \quad \text{ბ) } 5; \sqrt{10}; 15; 2\sqrt{10}; \sqrt{53}. \quad 18. \quad \text{ა) } \vec{AB} = (6; 4),$$

$$\vec{BC} = (0; -4), \quad \vec{AC} = (6; 0); \quad \text{ბ) } |\vec{AB}| = 10, \quad |\vec{BC}| = 4, \quad |\vec{AC}| = 6; \quad \text{გ) } x = 2, \quad y = 9.$$

$$19. \quad D(3; 11). \quad 20. \quad D(17; 22). \quad 21. \quad C(0; 3), \quad D(3; 0). \quad 22. \quad C(1; 1) \quad \text{ა) } C(6; 6).$$

$$23. \quad \text{ა) } \vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{q}); \quad \text{ბ) } \vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{q}); \quad \text{გ) } \vec{AN} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q}; \quad \text{დ) } \vec{BD} = \frac{1}{2}(\vec{p} - \vec{q}).$$

$$24. \quad \text{ა) } \vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{q}); \quad \text{ბ) } \vec{MN} - \vec{BC} = \frac{1}{2}(\vec{p} - \vec{q}); \quad \text{გ) } \vec{CD} - \vec{BA} = \vec{q} - \vec{p}.$$

$$25. \quad \vec{BD} = \frac{1}{2}(\vec{q} - \vec{p}). \quad 26. \quad \text{ა) } k = \frac{1}{2}; \quad \text{ბ) } k = -\frac{1}{2}; \quad \text{გ) } k = -1. \quad 27. \quad T \quad \text{პარალელური}$$

გადატანით $y = x + 5$ წრფე აისახება $y = x + 7$ წრფეზე. 28. C წერტილი აისახება $C'(-4; 1)$ წერტილზე, ხოლო E წერტილი აისახება $E'(3; 7)$ წერტილზე.

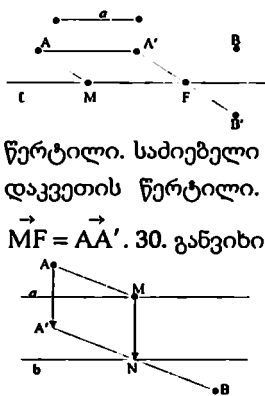
29. ნახაზის მიხედვით განვიხილოთ პარალელური გადატანა $\vec{AA'}$ ვექტორით, რომელიც ℓ წრფის პარალელურია, მიმართულია B წერტილის მხარეს და $|\vec{AA'}| = a$. ავავოთ

ℓ წრფის მიმართ B წერტილის სიმეტრიული B' წერტილი. საძიებელი მონაკვეთის F ბოლო არის ℓ და $A'B'$ წრფეების გადაკვეთის წერტილი. M წერტილი ისე შევარჩიოთ ℓ წრფეზე, რომ

$\vec{MF} = \vec{AA'}$. 30. განვიხილავთ პარალელურ გადატანას $\vec{MN}$ ვექტორით და ავავებთ A წერტილის სახეს - A' -ს ამ პარალელური გადატანისას. AMNB ტეხილის ნაცვლად ვი-

ხილავთ მის ტოლ ტეხილს - $AA'NB$ -ს. ეს უკანასკნელი მაშინაა უმცირესი სიგრძის, როცა A' , N და

B წერტილები ერთ წრფეს ეკუთვნის - ხიდი უნდა აიგოს $A'B$ წრფისა და მდინარის b ნაპირის გადაკვეთის წერტილზე.

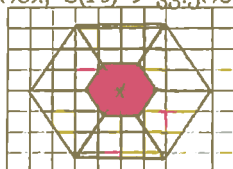


1.7.1.

1. $y=-2x$. 2. $y=-2x+3$. 3. 2,5. 4. $A'(0;10)$, $B'(6;0)$, $C'(-6;4)$, $E'((-4;-6)$. 5. $k=2$.
6. $k=-1$. 7. 88,8 სმ. 8. 20 სმ. 9. $k_1=-2$; $k_2=-\frac{1}{2}$. 10. $BC=15$ სმ; $AD=20$ სმ.
11. $MN=4,8$ სმ. 12. 9 მ. 13. $BD=4$ სმ; $DC=5$ სმ. 14. 2,24 მ. 15. 18 სმ და 98 სმ.
16. $BO=2\sqrt{5}$ სმ, $AB=3\sqrt{5}$ სმ, $AO=5$ სმ, $OC=4$ სმ. 17. 43,2 სმ. 18. $24\sqrt{5}$ სმ.
19. 38 სმ. 20. $9\frac{1}{15}$ სმ. 21. $BC=12$ სმ; $AB=4\sqrt{5}$ სმ. 22. $CK=60$ სმ; $CO=61,5$ სმ.
23. $CK=4\frac{6}{11}$ სმ; $AK=5\frac{5}{11}$ სმ. 24. 16 სმ; $3\sqrt{7}$ სმ. 25. 4,8 მ; 1,4 მ.
26. $(17+3\sqrt{3})$ სმ. 27. $5,4\sqrt{2}$ სმ. 28. 4 სმ. 29. 0,6 მ და 0,8 მ. 30. $20\sqrt{5}$ დმ და 20 დმ.

1.9.1.

1. 12 კვ.ერთ. 2. $S(F_1)=10$ კვ.ერთ., $S(F_2)=10$ კვ.ერთ., $S(F_1)=S(F_2)$.
3. $S(F_1)=5,5$ კვ.ერთ., $S(F_2)=9,5$ კვ.ერთ., $S(F_3)=9$ კვ.ერთ., $S(F_4)=6$ კვ.ერთ., $S(F_1)<S(F_4)<S(F_3)<S(F_2)$.
4. $S(F_1)=41$ კვ.ერთ., $S(F_2)=8$ კვ.ერთ.



5. $S(F_1)=7$ კვ.ერთ., $S(F_2)=12$ კვ.ერთ., $S(F_3)=6$ კვ.ერთ., $S(F_4)=12$ კვ.ერთ., ამიტომ $S(F_2)=S(F_4)$.
6. ლურჯი ფიგურა ღირს 34 ლარი, წითელი – 57 ლარი, მწვანე – 19 ლარი, ხოლო ყვითელი კი – 58 ლარი, ამიტომ ყველაზე ძვირია ყვითელი, ხოლო ყველაზე იაფი მწვანე ფიგურა.
7. გაუტოლდება 2-ს.
8. გაუტოლდება 12-ს.
9. 64 სმ². 10. 16 დმ². 11. ჯერ გახდება 2000 დმ², ხოლო შემდეგ 0,2 დმ².
12. 540 არი. 13. 76 ჰა. 14. 29000 მ². 15. 400 ჰა.
16. 1200 დმ². 17. 2 ჰა. 18. 4 დმ². 19. 38,5 კვ.ერთ. 20. 37 კვ.ერთ. 21. წყნარი ოკეანის ფართობია 180 მლნ კმ²; ატლანტიკის ოკეანის ფართობია 90 მლნ კმ²; ინდოეთის ოკეანის ფართობია 75 მლნ კმ²; ხოლო ჩრდილოეთ ყინულოვანი ოკეანის ფართობია 15 მლნ კმ²; პროცენტებში შესაბამისად 50%, 25%, 21%, 4%.
22. $S(F)=22$ კვ.ერთ., $S(F_1)=2$ კვ.ერთ., $S(F_2)=10$ კვ.ერთ., $S(F_3)=3$ კვ.ერთ., $S(F_4)=7$ კვ.ერთ., გვაქვს $S(F)=S(F_1)+S(F_2)+S(F_3)+S(F_4)$.
23. $S(F_1)=8$ კვ.ერთ., $S(F_2)=3$ კვ.ერთ., $S(F_3)=6$ კვ.ერთ., $S(F_4)=5$ კვ.ერთ., გვაქვს

$S(F_2)$, $S(F_4)$, $S(F_3)$, $S(F_1)$. 24. $S(F_1)=6,5$ კვ.ერთ., $S(F_2)=19$ კვ.ერთ., $S(F_3)=33$ კვ.ერთ., $S(F_4)=5$ კვ.ერთ., $S(F_3)$, $S(F_2)$, $S(F_1)$, $S(F_4)$. 25. $S(F_1)=7$ კვ.ერთ., $S(F_2)=4$ კვ.ერთ., $S(F_3)=7,5$ კვ.ერთ., $S(F_2)$, $S(F_1)$, $S(F_3)$. 26. $S(F_1)=18$ კვ.ერთ., $S(F_2)=32,5$ კვ.ერთ., $S(F_3)=24,5$ კვ.ერთ., $S(F_2)$, $S(F_3)$, $S(F_1)$. 27. $S(F_1)=45$ მლნ კმ², $S(F_2)=43,5$ მლნ კმ², $S(F_3)=30$ მლნ კმ², $S(F_4)=7,5$ მლნ კმ², $S(F_5)=13,5$ მლნ კმ², $S(F_6)=10,5$ მლნ კმ². 28. აზია – 30%, ამერიკა – 29%, აფრიკა – 20%, ავსტრალია – 5%, ანტარქტიდა – 9%, ევროპა – 7%.

1.10.1.

1. 5,76 სმ². 2. 9 სმ². 3. 4S. 4. 1 მ²; 4 მ. 5. 17 სმ. 6. 31,5 სმ². 7. 480 სმ². 8. 60 სმ². 9. 50 სმ². 10. 17,64 სმ². 11. 12 სმ. 12. 7,2 სმ; 10,8 სმ. 13. 10 სმ. 14. 48 სმ². 15. 144 სმ². 16. $S_{ABCD}:S_{BCDM}:S_{ABM}=(a+b):2b:(a-b)$. 17. 10 კვ.ერთ. 18. 144 სმ². 19. $625\pi:432$. 20. $16:\pi^2$. 21. $\frac{4\pi-3}{8\pi+3}\sqrt{3}$. 22. $(64\pi-48\sqrt{3})$ სმ². 23. $64(\pi^2-2)$ სმ². 24. $25(4-\pi)$ სმ². 25. 16π სმ². 26. $18,75\pi$ სმ². 27. 22 სმ². 28. 4 სმ. 29. $R=2$. 30. 16π მ².

2.1.1

1. 50 სმ. 2. 20 სმ. 3. 3,2 სმ. 4. 7 სმ. 5. 1,4 დმ. 6. 13 მ. 7. 1,5 სმ. 8. 10 მ. 9. 1,7 მ. 10. 30°. 11. 34,4 სმ. 12. 10 სმ. 13. 30 სმ. 14. 3,36 მ. 15. 5 სმ. 16. 5 სმ. 17. 37 სმ. 18. $12\sqrt{3}$ სმ. 19. 22 სმ. 20. 3 სმ, 5 სმ, 3 სმ, 5 სმ. 21. 3 სმ. 22. 45 სმ. 23. 13 სმ. 24. 4 სმ. 25. 5 სმ. 26. წვეროების ოდენობაც 4-ია და წახნაგების ოდენობაც 4-ია. 27. წვეროების ოდენობა 12-ია, ხოლო წიბოების ოდენობა 24. 28. მას აქვს 5 წვერო და 5 წახნაგი. 29. მრავალკუთხედს აქვს 12 წიბო, 8 წვერო და 6 წახნაგი. 30. მრავალკუთხედს აქვს 72 წიბო.

2.2.1.

1. 50 სმ². 2. $S_{AA_1D_1D} = 2Q$; $S_{AA_1E_1E} = \sqrt{3}Q$. 3. წიბო–4 სმ, დიაგონალი– $4\sqrt{3}$ სმ. 4. $\sqrt{6}$ სმ. 5. 13 სმ. 6. 3 დმ. 7. $DC:A_1C=3:5$. 8. $S_{\Delta A} = 188$ მ², $S_{DB_1D_1D} = 10\sqrt{25-12\sqrt{3}}$ მ². 9. 2 დმ². 10. 3 მ². 11. $S_{\Delta A} = 2\sqrt{21}a^2$, $S_{BDC_1} = \sqrt{3}a^2$. 12. $8\sqrt{3}$ სმ², $S_{\Delta A} = 36$ სმ². 13. 96 სმ². 14. 52 სმ². 15. 94 სმ². 16. 50 დმ². 17. $S_{\Delta A} = 9$ მ²; $S_{\Delta B} = 6$ მ². 18. 66 სმ². 19. 4 მ. 20. ფუძის გვერდია 6 სმ, წიბო – 3 სმ; ან ფუძის გვერდი ტოლია 4 სმ-ის, ხოლო წიბო კი – 7 სმ. 21. 10 სმ.

22. 72 სმ². 23. $\frac{3}{2}a^2$. 24. მითითება: $\Delta MEF \sim \Delta MO_1O_2$, გვაქვს $EF:O_1O_2 = EM:O_1M$, O_1M შემოხაზული წრეწირის რადიუსია, ამიტომ $O_1M = \frac{a}{\sqrt{3}}$, ხოლო $EF = \frac{a}{2}$ და $EM = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, მაშინ $\frac{a}{2}:O_1O_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a:\frac{a}{\sqrt{3}}$, აქედან $O_1O_2 = \frac{a}{3}$; ე.ი. $S_{O_1O_2O_3} = \frac{a^2}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$ და $S_{ABC} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$, მაშასადამე $S_{O_1O_2O_3}:S_{ABC} = 1:9$. 25. 6,5 სმ. 26. $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. 27. 90 სმ². 28. $48\sqrt{2}$ სმ². 29. 48 სმ². 30. 14 სმ².

2.3.1.

1. 5 დმ. 2. 36 სმ². 3. π -ჯერ. 4. 2-ჯერ. 5. $H=2$ სმ. 6. 16π სმ². 7. 4 სმ. 8. 32%-ით. 9. 20 სმ. 10. $\pi \cdot Q$. 11. 80π სმ². 12. 24π სმ². 13. $S_{\Delta A}:S_{\Delta B}=2:3$. 14. 15π სმ². 15. $S_{\Delta A}:S_{\Delta B}=1:\sqrt{5}$. 16. $\pi \cdot \sqrt{3}a^2$. 17. $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2}m^2\pi$. 18. $2H^2$. 19. 12 სმ². 20. $100\sqrt{2}$ სმ². 21. 507π სმ². 22. $OO_1=16$ სმ. 23. 2176π სმ². 24. 3:2. 25. $\frac{3}{4}$. 26. $\sqrt{\frac{191}{5}}$ სმ. 27. 10 სმ. 28. $\frac{\pi R^2}{4}$. 29. $15\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ მ. 30. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

2.4.1.

1. III. 2. II და IV. 3. I და III. 4. II. 5. I. 6. III. 7. IV. 8. 6. 9. 6. 10. არცერთი. 11. არ შეიძლება. 12. შეიძლება, თუ ფუძის რადიუსი მსახველის ტოლია. 13. 4. 14. 5. 15. შეიძლება, თუ ფუძის რადიუსი სიმაღლის ტოლია. 16. არ შეიძლება. 17. შეიძლება. 18. სამი ოთხკუთხედი და ორი სამკუთხედი. 19. შედგება ხუთი ფიგურისაგან. 20. 3. 21. 1. 22. 2. 23. III. 24. I. 25. II. 26. არცერთი. 27. 4. 28. 6. 29. 2. 30. 6.

2.5.1.

1. $\frac{400}{3}\pi$ სმ³, 34 $\cdot 80\pi$ სმ². 2. 17,5 მ. 3. $\frac{\pi}{4}a^3$. 4. 168π დმ³. 5. 6 სმ. 6. 48 სმ³. 7. 48 სმ³. 8. 24 დმ³. 9. $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$. 10. 54 სმ³. 11. $\frac{1}{8}$. 12. $\frac{243\sqrt{2}}{2}$ სმ³. 13. 18 სმ³. 14. პირამიდის მოცულობა ტოლია 4 სმ³-ის, ხოლო პრიზმის მოცულობა

24 სმ³-ია. 15. 8 სმ³. 16. 48 მ³. 17. $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ V. 18. 96π სმ³. 19. $\frac{4000}{3}\pi$ სმ³. 20. $\frac{7}{27}$ V
 21. R=3. 22. 60°. 23. $V_6:V_3=4:1$. 24. $\pi:6$. 25. 18-ჯერ. 26. 54π სმ³. 27. გაიზრდა-
 ბა ორჯერ. 28. $\frac{R}{r} = \sqrt{2}$. 29. $\frac{5}{4}\pi$ სმ³. 30. $\frac{416}{3}\pi$ სმ³.

3.1.1.

1. 45 თ. 2. 6 კოლოფი. 3. 24 თებერვალს. 4. 60%. 5. 3. 6. 8. 7. 25%-ით. 8. 5.
 9. 3 მ; მითითება: $\frac{54-54:9+x}{17y} = \frac{x}{y}$, სადაც x კუს მიერ გავლილი
 მანძილია, ხოლო y კუს სიჩქარე. 10. 75%. 11. 150. 12. 4 ნაბიჯი. 13. 200
 გრამი. 14. 4 სტუდენტ-ი. 15. კი. 16. 13; 7; 4. 17. 8 ბურთულა. 18. 21
 ბურთულა. 19. 14 ვაშლი. 20. 37 ბურთულა. 21. 22 ფანქარი. 22. 3 წინდა.
 23. 14 ფეხსაცმელი. 24. 43. 25. 6-ით. 26. დრამა. 27. 18%. 28. $\frac{3}{25}$. 29.
 კომედია. 30. 4-ჯერ.

3.2.1.

1. 24 ხერხით. 2. $5 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 22$ გზით. 3. ა) 14!; ბ) $2 \cdot 13!$. 4. ა) $A_{10}^5 - A_9^5 = 27216$;
 ბ) $9 \cdot 10^4$. 5. 2730. 6. $A_{88}^6 = 83 \cdot 84 \cdot 85 \cdot 86 \cdot 87 \cdot 88$. 7. 5040 ვარიანტი. 8. 4096
 ოთხნიშნა რიცხვი. 9. 1372 ოთხნიშნა რიცხვი. 10. $A_{20}^{11} = \frac{20!}{9!}$.
 11. $C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = 35$. 12. 1365 ხერხით. 13. $8 \cdot 7 + 8 \cdot 8 = 120$ ვარიანტი.
 14. $C_{35}^2 = 595$. 15. $C_{10}^2 = 45$. 16. ყოველი სამი წერტილი, რომელიც ერთ
 წრეზე არ ძეგს განსაზღვრავს ერთადერთ წრეწირს, ამიტომ $C_{10}^3 = 120$.
 17. $C_{28}^7 \cdot C_{21}^7 \cdot C_{14}^7 \cdot C_7^7 = \frac{28!}{(7!)^4}$. 18. $\frac{8!}{3!2!} = 3360$. 19. $A_2^4 = 2^4 = 16$.
 20. $C_3^5 = P_{3,2} = \frac{7!}{5!2!} = 21$. 21. $C_{10}^3 = 120$. 22. $5^6 = 15625$. 23. $5^5 = 3125$.
 24. $\frac{8!}{2!3!} = 3360$. 25. $\frac{12!}{5!3!4!} = 27720$. 26. $C_9^2 \cdot C_7^3 \cdot C_4^4 \cdot A_{10}^3 = \frac{10!}{4}$
 27. $\frac{9!}{2!3!4!} = 1260$. 28. $\frac{16!}{5!7!4!} = 1441440$. 29. 40. 30. 450.

3.3.1.

11. 2. 12. 1, 6, 12, 8. 13. 8; 24; 24; 8. 14. 27; 54; 36; 8. 15. 512; 384; 96; 8. 19. 48.
20. 30; 18. 21. 306; 72; 2. 27. A=∅; B=Ω. 28. A=Ω; B=∅. 29. 130. 30. 81.

3.4.1.

$$1. 1 - \frac{C_{14}^5}{C_{15}^5} = \frac{1}{3}. \quad 2. \frac{C_6^3 \cdot C_9^2}{C_{15}^5}. \quad 3. P(A) = \frac{5}{24}. \quad 4. P(A) = \frac{C_8^7 \cdot C_4^2}{C_{12}^9}. \quad 5. \frac{A_3^2}{A_5^4} = \frac{1}{20}.$$

$$6. \frac{9}{28}. \quad 7. 0,5. \quad 8. 0,5. \quad 9. \frac{1}{C_{22}^2} = \frac{1}{231}. \quad 10. \frac{28! \cdot 10}{10!} = \frac{2}{9}. \quad 11. \frac{28! \cdot 9}{10!} = \frac{1}{5}. \quad 12. \frac{13}{40}.$$

$$13. 0,6. \quad 14. 102. \quad 15. \frac{2}{3}. \quad 16. \frac{C_n^2 \cdot n!}{n^n}. \quad 17. \frac{9!4!}{12!} = \frac{1}{55} \text{ ალბათობა ძალზე მცირეა,}$$

ამიტომ ეს შემთხვევა შეიძლება გამოწვევას გამოწვევას ჩვეულებრივად. 18. სამართ-
ლიანია, რადგან უმცროსი დის მიერ ჭურჭლის გატეხვის ალბათობა 0,75-
ის ტოლია, ხოლო დანარჩენი დების კი 0,05-ს არ აღემატება. 19. $\frac{4}{9}$.

$$20. \frac{C_{28}^2 + C_{32}^2 + C_{12}^2 + C_8^2}{C_{80}^2} = \frac{121}{395}. \quad 21. \frac{C_{10}^3 \cdot C_5^0}{C_{15}^3} = \frac{24}{91}. \quad 22. \frac{7}{90}. \quad 23. \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

$$24. 0,08. \quad 25. 0,44. \quad 26. 30. \quad 27. \frac{12!3!4!}{10!} = \frac{1}{12600}. \quad 28. \text{ა) } \frac{2 \cdot C_{13}^4}{C_{18}^9} = \frac{1}{34};$$

$$\text{ბ) } \frac{C_5^3 \cdot C_{13}^6 + C_5^2 \cdot C_{13}^7}{C_{18}^9} = \frac{12}{17}. \quad 29. \frac{64}{216} = \frac{8}{27}. \quad 30. \frac{C_7^4 \cdot C_3^0}{C_{10}^4} = \frac{1}{6}.$$

3.5.1.

$$1. \frac{5}{17}. \quad 2. 0,35. \quad 3. 0,25. \quad 4. 0,9. \quad 5. 0,5. \quad 6. 0,25. \quad 7. 0,2. \quad 8. 0,8. \quad 9. \frac{1}{12}. \quad 10. 0,4. \quad 11. \frac{2}{\pi}.$$

$$12. \frac{\pi}{4}. \quad 13. 0,99. \quad 14. \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}. \quad 15. \frac{k}{k+1}. \quad 16. \frac{31}{44}. \quad 17. \frac{251}{800}. \quad 18. \text{ნახევარ საათზე მე-}$$

$$\text{ტი. } 19. 0,25. \quad 20. 0,39. \quad 21. \frac{\pi}{6}. \quad 22. \frac{2}{\sqrt{3}\pi}. \quad 23. \frac{3a^3}{4\pi R^3}. \quad 24. \frac{\pi}{4}. \quad 25. \frac{\pi}{12}. \quad 26. 0,25.$$

$$27. \frac{2}{3}. \quad 28. \frac{2}{3}. \quad 29. \frac{4}{9}. \quad 30. 0,4.$$

3.6.1.

1. 0,6. 2. $\frac{2r^2}{R^2}$. 3. 0,6. 4. 0,7. 5. 0,98. 6. $P(A) = \frac{1}{2}; P(B) = \frac{7}{8}$.
 7. $P(A) = \frac{1}{2}; P(B) = \frac{1}{2}$. 8. $P(A) = \frac{1}{2}; P(B) = \frac{1}{2}$. 9. 0,999. 10. 0,027. 11. 0,999.
 12. 0,32. 13. $\frac{S_1 + S_2}{S}$. 14. $\frac{\sqrt{3}\pi + 9}{18}$. 15. 0,95. 16. 0,7. 17. $\frac{2r^3}{R^3}$. 18. 0,97. 19. 0,42.
 20. 0,916. 21. 0,3336. 22. $\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4\pi}$. 23. $\frac{4-\pi}{4}$. 24. $\frac{2}{3\pi}$. 25. $\frac{3}{8\pi}$. 26. $\frac{\pi}{3}$.
 27. 0,5. 28. 0,75. 29. 0,2. 30. $\frac{5}{14}$.

3.7.1.

1. 0,5. 2. 0,45. 3. $\frac{1}{465}$. 4. $\frac{1}{32736}$. 5. $\frac{1}{14}$. 6. $P(B) > P(A)$. 7. $P(A) = \frac{K-1}{2K-1}$;
 $P(B) = \frac{K}{2K-1}$; $P(A) < P(B)$. 8. $P(A) < P(B)$. 9. $P(A) = \frac{8}{15}; P(B) = \frac{7}{15}$;
 $P(A) > P(B)$. 10. $P(A) = \frac{11}{21}; P(B) = \frac{10}{21}$; $P(A) > P(B)$. 11. $P(A) = \frac{5}{14}; P(B) = \frac{9}{14}$;
 $P(A) < P(B)$. 12. $\frac{5}{24}$. 13. $\frac{2}{35}$. 14. 0,72. 15. $\frac{14}{55}$. 16. ა) $\frac{8}{225}$; ბ) $\frac{4}{91}$. 17. $P(A) = 0,5$;
 $P(B) = 0,1875$; $P(C) = 0,3125$. 18. 17,5 ლარი; 35 ლარი; 52,5 ლარი. 19. 1800
 ლარი; 1880 ლარი; 1920 ლარი. 20. $\frac{1}{6}$. 21. 0,9388. 22. ორივე შემთხვევაში
 ალბათობები 0,2-ის ტოლია. 23. 0,5. 24. ა) $\frac{153}{190}$; ბ) $\frac{36}{150}$; გ) $\frac{1}{190}$. 25. ა) $\frac{4}{7}$;
 ბ) $\frac{2}{7}$; გ) $\frac{4}{35}$; დ) $\frac{1}{35}$; $\frac{4}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{35} + \frac{1}{35} = 1$. 26. 0,25. 27. $\frac{1}{7}$. 28. $\frac{1}{3}$. 29. ორივე
 ალბათობა ერთმანეთის ტოლია და უდრის 0,5-ს. 30. $\frac{1}{6}$.

3.8.1.

1. $\frac{20!}{10!20!^{10}}$. 2. $\frac{2}{725}$. 3. 0,04. 4. 0,0064. 5. 0,3; 0,5; 0,2. 6. 0,7518. 7. 0,25. 8. $\frac{1}{3}$.

9. 0,08192. 10. $\frac{1}{16}$. 11. $\frac{7}{116}$. 12. 0,32. 13. $\frac{1}{3}$. 14. $\frac{7}{15}$. 15. $\frac{4}{\pi^2}$. 16. $\frac{\pi^2}{16}$. 17. $\frac{5}{6}$.
 18. $\frac{11}{12}$. 19. 0,4. 20. $\frac{C_7^2 \cdot C_{13}^2}{C_{20}^4}$. 21. 0,05. 22. $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{4}{77} = \frac{73}{77}$.
 23. $\frac{3}{8}$. 24. ყველა მოთამაშის შანსი თანაბარია და იგი 0,25-ის ტოლია. 25.
 ვინც პირველად იწყებს ბურთულების ამოღებას მისი შანსია $\frac{4}{7}$, ხოლო
 მეორის – $\frac{3}{7}$. 26. $\frac{C_{44}^1 C_{45}^1}{C_{90}^2}$. 27. $\frac{C_{16}^1 C_{16}^1}{C_{32}^2} = \frac{16}{31}$. 28. $\frac{1}{9}$. 29. 0,6. 30. 0,375.

3.9.1.

1. $\frac{2}{3}$. 2. ა) 0,46; ბ) 0,37; გ) 0,17. 3. $\frac{2}{3}$. 4. 0,89. 5. 0,188. 6. ა) $\frac{11}{15}$; ბ) $\frac{4}{15}$.
 7. ა) $\frac{32}{120}$; ბ) $\frac{23}{120}$; გ) $\frac{65}{120}$. 8. ა) 2 თეთრი და 3 წითელი ბურთულა; ბ) 0,336.
 9. ა) $\frac{5}{24}$; ბ) $\frac{7}{24}$. 10. 0,021. 11. ა) 0,216; ბ) 0,064. 12. 0,6. 13. მოხვედრის
 ალბათობაა 0,4; აცდენის კი – 0,6. 14. აბონენტის ქონის ალბათობაა 0,78;
 არქონის კი – 0,22. 15. 0,58. 16. $\frac{6}{13}$. 17. 0,25. 18. ა) $\frac{256}{715}$; ბ) $\frac{216}{715}$; გ) $\frac{243}{715}$.
 19. $\frac{781}{1024}$. 20. ა) $\frac{5}{11}$; ბ) $\frac{24}{77}$; გ) $\frac{18}{77}$. 21. $\frac{97}{240}$. 22. $\frac{17}{97}$. 23. ა) $\frac{1}{12}$; ბ) $\frac{3}{5}$. 24. 5
 მსროლელისთვის აცდენის ალბათობაა $\frac{10}{57}$; შვიდისათვის – $\frac{21}{57}$; ოთხი-
 სათვის – $\frac{16}{57}$, ხოლო ორისათვის – $\frac{10}{57}$, ამიტომ მსროლელი, რომელმაც
 მიზანს ვერ მოახვედრა უფრო მოსალოდნელია მეორე ჯგუფიდან – შვი-
 დეულიდან. 25. 0,3. 26. $\frac{1}{13}$. 27. $\frac{2\pi-1}{6\pi}$. 28. ა) $\frac{32}{161}$; ბ) $\frac{51}{161}$; გ) $\frac{60}{161}$; დ) $\frac{18}{161}$.
 29. ა) $\frac{8}{39}$; ბ) $\frac{9}{39}$; გ) $\frac{20}{39}$; დ) $\frac{2}{39}$. 30. ა) $\frac{1}{3}$; ბ) $\frac{1}{2}$.

3.10.1.

1. $\frac{5}{16}$. 2. $\frac{175}{576}$. 3. არმოსვლის ალბათობა მეტია $\frac{125}{216} > \frac{91}{216}$. 4. ერთხელ მაინც მოსვლის ალბათობა მეტია $\frac{671}{1296} > \frac{625}{1296}$. 5. 0,384. 6. 0,3125.
7. ა) 0,0001; ბ) 0,0036; გ) 0,0486; დ) 0,2916; ე) 0,6561. 8. 0,11421.
9. $P(A)=(1-0,05-0,8)^{100}=0,96^{100}$; $P(B)=0,96^{100}+C_{100}^{99} \cdot 0,96^{99} \cdot 0,04^1 + C_{100}^{98} \cdot 0,96^{98} \cdot 0,04^2$. 10. $\frac{25}{32}$. 11. $\frac{2}{27}$. 12. $\frac{25}{27}$. 13. $\frac{135}{1024}$. 14. $\frac{375}{1024}$.
15. ა) 0,1536; ბ) 0,1792. 16. 0,3483. 17. $14,6 \leq K \leq 15,5$, ამიტომ $K=15$. 18. 0,6.
19. ა) 0,4096; ბ) 0,4096; გ) 0,1536; დ) 0,0256; ე) 0,0016. 20. $K=3$. 21. $\frac{5}{9}$.
22. $K=1$. 23. $K=1$. 24. $K=1$, ან $K=2$. 25. $K=5$. 26. $K=2$. 27. $K=7$. 28. 0, 32805.
29. $K=64$. 30. თორმეტწახნაგა კამათელზე 6-ანის არმოსვლის ალბათობა $\frac{11}{12}$ -ის ტოლია, ხოლო ჩვეულებრივ კამათელზე 5-ანის არმოსვლა $\frac{5}{6}$ -ს უდრის, ცხადია $\frac{11}{12} > \frac{5}{6}$.

4.1.1

1. სექტემბერში. 2. ივნისში. 3. აგვისტოში. 4. ივლისში. 5. 4-ჯერ. 6. 1,5-ჯერ. 7. 25%. 8. სექტემბერში გაიყიდა ყველაზე მეტი პროდუქტი 1490 კგ, ხოლო აგვისტოში ყველაზე ნაკლები 1200 კგ, რომელიც 1490 კგ-ზე ნაკლებია 290 კგ-ით. 9. ბოსტნეული, ხილი, ძეხვეული, საკონდიტრო ნაწარმი. 10. აგვისტოში საკონდიტრო ნაწარმი 90 კგ. 11. 24%-ით. 12. ზღვაზე დამსვენებლების. 13. 2015. 14. 2014. 15. 2012-2013 წლებში ზღვაზე, მთაში და საზღვარგარეთ დამსვენებელთა პროცენტული შემადგენლობა უცვლელი იყო: 10, 5 და 3. 16. $\frac{1}{9}$. 17. 2012. 18. 2012.
19. 2013. 20. აგვისტოს თვეში, 2012-2015 წლებში მკვეთრი ცვლილებები არ ფიქსირდება ქალაქ ქუთაისში დამრჩენებისა და დამსვენებლების სხვადასხვა კატეგორიების პროცენტულ მაჩვენებლებს შორის. 21. 45%.
22. 25%. 23. $\frac{5}{9}$. 24. $\frac{8}{11}$. 25. 20. 26. 2. 27. 8. 28. 0,15. 29. 20%. 30. 40%.

4.2.1.

1. 18. 2. ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას. 3. $1\frac{4}{7}$ -ჯერ. 4. 2-ჯერ.
5. 40000. 6. IV ქარხანამ. 7. 45%. 8. 20%. 9. მათ გაყიდეს ტოლი ოდენობის 20-20 ათასი პური. 10. IV ქარხანამ – 30%, I ქარხანამ – 27,5%, III ქარხანამ – 22,5%, II ქარხანამ – 20%. 11. 65. 12. წითელი. 13. ყვითელი. 14. 20%-ს.
15. ყვითელი ფერი, მწვანე ფერი, სხვა ფერები, ლურჯი ფერი, წითელი ფერი. 16. $2\frac{5}{7}$ -ჯერ. 17. 12-ით. 18. 40%. 19. 1,6-ჯერ. 20. 1,9-ჯერ. 21. 50.
22. 21-ჯერ. 23. „აუდი“ – 8%, „ფორდი“ – 14%, „ტოიოტა“ – 16%, „მერსედესი“ – 20%, „ოპელი“ – 42%. 24. 2,5-ჯერ. 25. 17-ით. 26. მათი ოდენობები ტოლია 25-25-ის. 27. 103. 28. 43-44 ზომის – 33 წყვილი. 29. 45 ზომის – 19 წყვილი. 30. $\frac{30}{103}$.

4.3.1.

6. 2400 ლარი. 7. 288 ლარს. 8. 840 ლარი. 11. 12. 12. 2. 13. 4-ით. 14. $\frac{7}{18}$.
15. 18%. 16. 52%. 17. 18%-ით. 18. 29. 21. ახლო აღმოსავლეთის ქვეყნებში (საუდის არაბეთი, ირანი) მოიპოვებენ მეტ ნავთობს დღიურად $10,4+4,1=14,5$ მლნ ბარელი, ამერიკის კონტინენტზე (აშშ, მექსიკა) მოიპოვებენ 12,3 მლნ ბარელს, ხოლო რუსეთში კი – 9,3 მლნ ბარელს. 22. საუდის არაბეთი – 29%, რუსეთი – 26%, აშშ – 24%, ირანი – 11%, მექსიკა – 10%. 24. 50. 25. 125. 26. 75. 27. 25. 28. 3; 2; 5; 0,3; 0,2; 0,5. 29. 30%, 20%, 50%. 30. 0,25.

4.4.1.

1. 5 კმ. 2. 1:150. 3. 15:1. 4. 1:200000. 5. 30:1. 14. აზერბაიჯანიდან მონაწილეობს 30%, სომხეთიდან – 40%, თურქეთიდან – 5%, საქართველოდან 25%. 17. 38%. 18. 141 მლნ კმ². 19. აფრიკა – 21%, ავსტრალია – 5%, სამხრეთ ამერიკა – 13%, ჩრდილოეთ ამერიკა – 14%, ევრაზია – 38%, ანტარქტიდა – 9%. 22. 31%. 23. 20. 24. 51. 25. 95. 26. 11. 27. 10. 28. 9.

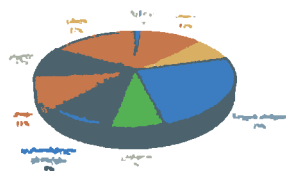
4.5.1.

1. 22612. 2. 8 ლარი, 22 ლარი. 3. ა) A მონაწილის მოდაა – 1, მედიანა – 1, საშუალო კი – 1,3; B მონაწილისათვის მოდაა – 1, მედიანა – 1, საშუალო – 1,4; C მონაწილისათვის მოდაა – 1, მედიანა – 1, საშუალო – 1,3; D მონაწი-

ლისათვის მოდა – 1, მედიანა – 2, საშუალო – 2; ბ) I–C, II–A, III–B, IV–D.
 4. ა) 19, 21; ბ) 16; დ) მოდა – 1, მედიანა – 2, საშუალო – 1,76. 5. ა) A მონაცემის მოდა – 10, მედიანა – 10, დიაპაზონია – 5; B მონაცემის მოდა – 10, მედიანა – 10, საშუალო – 10, დიაპაზონია – 17; ბ) $\sigma_A \approx 1,53$, $\sigma_B \approx 5,86$.
 6. $x=7,1$, $M_o=8$, $M_e=7,5$; გაბნევის დიაპაზონია – 5; $D=2,506$;
 $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{2,508} \approx 1,58$. 7. $x=1,625$, $M_o=1$, $M_e=1,5$; გაბნევის დიაპაზონია – 4; $D=1,359375$; $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{1,359375} \approx 1,16592$. 8. $x=7,6$. 9. $x=3$. 10. $\sigma \approx 7,56$.
 11. ა)

ადგილები	საშუალო	მოდა	მედიანა
I ადგილი	≈ 84	85	85
II ადგილი	≈ 87	86	86
III ადგილი	≈ 82	84	84

ბ) უმაღლესი საშუალო შედეგი სპორტის ამ სახეობაში უმაღლეს ადგილს არ ანიჭებს. 12. მონაცემების საშუალო – 8,75, მოდა – 9, მედიანა – 8,5, დიაპაზონი – 4, ხოლო საშუალო კვადრატული გადახრა $\sigma \approx 1,3$.
 13. საშუალო 106,8 მილიარდი ზარელი.



14. $\bar{x}=17$, $M_o=17$, $M_e=17$; დიაპაზონია 4, ხოლო საშუალო კვადრატული გადახრა კი ტოლია $\sigma \approx 1,67$. 15. ა) A მიმართულებით საშუალო წლიური მოგება 12,2%, B მიმართულებითაც საშუალო წლიური მოგება იგივეა 12,2%; ბ) $\sigma_A \approx 0,56$, $\sigma_B \approx 2,8$; გ) B მიმართულებით ინვესტირება მეტ რისკთან არის დაკავშირებული. 16. $x_1=2,5$; $x_o=11$. 17. ყველა მონაცემი ორჯერ გაიზრდება, მათ შორის მოდაც, თუ ის არსებობს. 18. არცერთი არ შეიცვლება. 19. $M_e=19$. 20. შეიძლება $M_e=19$. 21. [8,4; 15,6]. 22. 296,52 ლარი. 23. მოდა – 172 ლარი, მედიანა – 225 ლარი. 24. 630 ლარი. 25. $\sigma \approx 171$. 26. საშუალო – 60053, მედიანა – 44800. 27. მექსიკის მონაცემების ამოღების შემთხვევაში, საშუალო მკვეთრად შეიცვლება, იგი გახდება 39940, ხოლო მედიანა, რომელიც უმნიშვნელოდ შეიცვლება, ტოლი იქნება 43800-ის. 28. 96 ქულა. 29. ყველა მონაცემი ერთმანეთის ტოლია, საშუალო თვით ამ მონაცემს უდრის.

30.

წუნდებული პურების ოდენობა x	5	8	9	10	13	15
დღეების ოდენობა (სიხშირე)	1	3	1	3	1	1
$x - \bar{x}$	-4,4	-1,4	-0,4	0,6	1,6	5,6
$(x - \bar{x})^2$	19,36	1,96	0,16	0,36	2,56	31,36

საშუალო $\bar{x}=9,4$; სტანდარტული გადახრა $\approx 3,05$.

ლიტერატურა

1. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მეზონია, ლ. ქურჩიშვილი. მათემატიკა, II კლასის სახელმძღვანელო, „ინტელექტი“, თბილისი, 2011.
2. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მეზონია, ლ. ქურჩიშვილი. მათემატიკა, III კლასის სახელმძღვანელო (I, II ნაწ.), „ინტელექტი“, თბილისი, 2011.
3. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მეზონია, ლ. ქურჩიშვილი. მათემატიკა, IV კლასის სახელმძღვანელო (I, II ნაწ.), „ინტელექტი“, თბილისი, 2011.
4. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ლ. ქურჩიშვილი, ი. მეზონია. გავიმეოროთ მათემატიკა (II ნაწ.). „ინტელექტი“, თბილისი 2009.
5. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ლ. ქურჩიშვილი, ი. მეზონია. მოვემზადოთ მათემატიკაში. „უსტარი“, თბილისი 2013.
6. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მეზონია, ლ. ქურჩიშვილი. მათემატიკა X კლასის სახელმძღვანელო. „ინტელექტი“, თბილისი, 2013.
7. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მეზონია, ლ. ქურჩიშვილი. მათემატიკა XI კლასის სახელმძღვანელო. „ინტელექტი“, თბილისი, 2007.
8. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მეზონია, ლ. ქურჩიშვილი. მათემატიკა XII კლასის სახელმძღვანელო. „ინტელექტი“, თბილისი, 2012.
9. ი. კოლმოგოროვი, ა. სემიონოვიჩი, რ. ჩერკასოვი. გეომეტრია 6-8. „განავლება“, თბილისი, 1983.
10. ა. ბენდუქიძე. მათემატიკა სერიოზული და სახალისო. „ნაკადული“, თბილისი, 1988.
11. თ. გიორგაძე. გეომეტრიის გამოყენების ზოგიერთი პრაქტიკული ასპექტი, აწეს გამომცემლობა, ქუთაისი 2014.
12. თ. გიორგაძე. გრაფიკული პროპედევტიკისათვის დაწყებით კლასებში, „ინტელექტი“, თბილისი 1997.
13. თ. გიორგაძე, მ. ბუჭუხიშვილი. სწავლებაში წრფის შემოტანის ერთ-ერთი ასპექტი. პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „გონი“ №4. ქუთაისი 2016.
14. მ. ბუჭუხიშვილი. მათემატიკის დაწყებითი კურსის მეთოდური საფუძვლები – 5 (გეომეტრია და სივრცითი აღქმა), სალექციო კურსი, ელექტრული ვერსია <http://www.oc.atsu.ac.ge/course/view.php?id=17>.

2014 წ.

15. გ. მანია. ალბათობის თეორიის კურსი. თბილისი, 1963.
16. ი. სხირტლაძე, თ. ტულუში, ა. ოსიძე, ა. ცივაძე, მ. ნადარეიშვილი. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა. თბილისი, 1990.
17. ნ. ლაზრიევა, მ. მანია, გ. მარი, ა. მოსიძე, ა. ტორონჯაძე, თ. ტორონჯაძე, თ. შერვაშიძე. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა ეკონომისტებისათვის. ფონდი „ევრაზია“. თბილისი, 2000.
18. ო. ფურთუხია. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა. თბილისი, 2007.
19. ო. ფურთუხია. აღწერითი სტატისტიკა, ალბათობა, სტატისტიკური დასკვნის თეორია. თსუ, თბილისი, 2008.
20. ო. ფურთუხია. ალბათურ-სტატისტიკური ამოცანები. თსუ, თბილისი, 2015.
21. ო. ფურთუხია. პირობითი ალბათობის ცნება და მისი გამოყენება. სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი მათემატიკა №2, თსუ, თბილისი, 2014.
22. ე. ნადარაია, გ. სოხაძე. ენტროპია – განუსაზღვრელობის ზომა. სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი მათემატიკა №1, თსუ, თბილისი, 2013.
23. რ. ტყეშელაშვილი. ალბათობა და სტატისტიკა მოსწავლეობისათვის. მეთოდური ჟურნალი „მათემატიკა“, თბილისი, 1998.
24. თ. გიორგაძე. ალბათობის თეორიის ელემენტები. აწსუ, ქუთაისი, 2003.
25. თ. გიორგაძე. თორმეტწახნაგა კამათელი. სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი მათემატიკა №3, თსუ, თბილისი, 2015.
26. თ. გიორგაძე. ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის ელემენტები. აწსუ, ქუთაისი, 2016.
27. А.П. Стойлова. Математика. М., 2005.
28. Виленкин Н.Я. Комбинаторика, Наука, М., 1965.
29. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Мир, М., 1984, т.1-2.
30. А.Н. Ширяев. Вероятность. Наука, М., 1980.

31. В.Е. Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей, М., 1988.
32. <http://www.referat.ru>.

სარჩევი

ავტორების სახელი	3
ნაწილი 1. გეომეტრია და სივრცის აღქმა	9
თავი I. პლანიმეტრია	11
1.1. ისტორიული ცნობები გეომეტრიის წარმოშობის შესახებ; სივრცითი ფიგურები; წერტილი; წრე; სხივი; მონაკვეთი; ტენილი	12
1.1.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის	27
1.1.2. ტესტი №1	30
1.2. კუთხე. კუთხეების სახეები მათი სიდიდის მიხედვით. კუთხეების სახეები ურთიერთმდებარეობის მიხედვით.	32
1.2.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის	43
1.2.2. ტესტი №2	47
1.3. მრავალკუთხედი, ამოწმები და არა ამოწმები მრავალკუთხედი. სამკუთხედი, სამკუთხედის სახეები, სამკუთხედის უტოლობა, პითაგორას თეორემა.	49
1.3.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის	57
1.3.2. ტესტი №3	60
1.4. პარალელოგრამი, პარალელოგრამის თვისებები. რომბი, მართკუთხედი, კვადრეტი და მათი თვისებები. ტრაპეცია, ტრაპეციის თვისებები. ტანგრამი.	62
1.4.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის	67
1.4.2. ტესტი №4	71
1.5. წრეწირი და წრე. სექტორი, სეგმენტი, წრეში ჩახაზული და შემოხაზული ფიგურები	73
1.5.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის	84
1.5.2. ტესტი №5	87
1.6. გეომეტრიული გარდამხედი სივრცე; მოძრაობა, ღებულ და ცენტრული სიმეტრიები, მობრუნება, პარალელური გადატანა.	90
1.6.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის	105
1.6.2. ტესტი №6	109
1.7. პრემიტი, გეომეტრიულ ფიგურათა მსგავსება. ფიგურათა ტოლობა	111
1.7.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის	118

1.7.2. ტესტი №7	122
1.8. გეომეტრიული აბეგები უარბლით და სახაზავით, გეომეტრიული აბების ამოცანა, ოძროს კვეთა	124
1.8.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მცადინეობისათვის	143
1.8.2. ტესტი №8	145
1.9. ბრტყელი ფიგურის უართობი, ტოლი ფიგურების უართობების ტოლობა. ბრტყელი ფიგურის უართობის ქაფშირი მისი შემადგენელი ნაწილების უართობებთან.	147
1.9.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მცადინეობისათვის	156
1.9.2. ტესტი №9	164
1.10. ლექცია №10. კვადრატის, მართკუთხედის, სამკუთხედის, პარალელოგრამის, ორმგის, ტრაპეციის და წრის უართობები	166
1.10.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მცადინეობისათვის	170
1.10.2. ტესტი №10	174
თავი II. სტიმეომეტრია	177
2.1. სივრცითი სხეულები, მრავალწახნაბა, მრავალწახნაბას წვერო, წიბო, წახნაბი. ქაფშირი მრავალწახნაბას შემადგენელი ნაწილების რაოდენოებებს შორის, ვილერის თეორემა	178
2.1.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მცადინეობისათვის	197
2.1.2. ტესტი №11	203
2.2. კუბი, მართი პრიზმა, პარალელეპიპედი, მართი პარალელეპიპედი, მართკუთხა პარალელეპიპედი, პირამიდა და მათი ფლილები	205
2.2.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მცადინეობისათვის	212
2.2.2. ტესტი №12	216
2.3. ცილინდრი, კონუსი, სფერო, ბირთვი, მათი ფლილები, გვერდითი ზედაპირისა და სრული ზედაპირის უართობები	218
2.3.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მცადინეობისათვის	224
2.3.2. ტესტი №13	228
2.4. ფიგურათა მოდელების დამზადება დაწყებით სკოლაში	230
2.4.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მცადინეობისათვის	236
2.4.2. ტესტი №14	239

2.5. სივრცული სხეულების მოცულობა და მისი ბაზოვმა, კავშირი სხეულის მოცულობასა და მისი შემაღბენელი სხეულის მოცულობებს შორის	241
2.5.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მცადინეობისათვის	243
2.5.2. ტესტი №15	247
ნაწილი მეორე. ალგებრა, მონაცემთა ანალიზი	249
თავი III. ალგებრის თეორია	251
3.1. ისტორიული ცნობები ალგებრის თეორიის წარმოშობის შესახებ	252
3.1.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მცადინეობისათვის	261
3.1.2. ტესტი №1	265
3.2. კომბინატორული ამოცანები; ჯამისა და ნამრავლის წესი; წყობა; ბადანაცვლება და ჯუფდება	267
3.2.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მცადინეობისათვის	276
3.2.2. ტესტი №2	279
3.3. ხდომილობა, მოქმედებანი ხდომილობებზე, ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე	281
3.3.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მცადინეობისათვის	290
3.3.2. ტესტი №3	295
3.4. ხდომილობის ალგებრა, ხდომილობის ალგებრის კლასიკური და სტატისტიკური ბანსაზღვრა	297
3.4.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მცადინეობისათვის	306
3.4.2. ტესტი №4	309
3.5. ალგებრის შემოქმედითი ბანსაზღვრა	311
3.5.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მცადინეობისათვის	315
3.5.2. ტესტი №5	318
3.6. ალგებრის თვისებები, უთავსებად და თავსებად ხდომილობათა გაერთიანების ალგებრა	321
3.6.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მცადინეობისათვის	330
3.6.2. ტესტი №6	335
3.7. პირობითი ალგებრა	337
3.7.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მცადინეობისათვის	339
3.7.2. ტესტი №7	344
3.8. შემთხვევით ხდომილობათა დამოუკიდებლობა და ალგებრათა ნამრავლი	347

3.8.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მეთადინეოებისათვის	353
3.8.2. ტესტი №8	357
3.9. სრული ალბათობის შორმულა, ბაიესის შორმულა	360
3.9.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მეთადინეოებისათვის	364
3.9.2. ტესტი №9	370
3.10. დამოუკიდებელ, განმეორებით, ცდათა სერია, ბერნულის სქემა, ბერნულის შორმულა	373
3.10.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მეთადინეოებისათვის	380
3.10.2. ტესტი №10	383
თავი IV. მონაცემთა ანალიზი	385
4.1. მათემატიკური სტატისტიკის საბანი და კირითადი ამოცანები	386
4.1.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მეთადინეოებისათვის	394
4.1.2. ტესტი №1	397
4.2. მონაცემთა წარმოდგენის ხერხები: სია, ცხრილი, სიხშირე, პიქტოგრამა	399
4.2.2. სავარჯიშოები პრაქტიკული მეთადინეოებისათვის	402
4.2.2. ტესტი №2	406
4.3. მონაცემთა შარდოებითი სიხშირე, პისტოგრამა, კოლიგონი	408
4.3.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მეთადინეოებისათვის	411
4.3.2. ტესტი №3	415
4.4. დიბრამა – წერტილოვანი, ხაზოვანი, შოთლოვანი დეროების მსბავსი, სვეტოვანი, წრიული	417
4.4.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მეთადინეოებისათვის	424
4.4.2. ტესტი №4	427
4.5. მონაცემთა საშუალო, მოდა, მედინა, დიაპაზონი, დისპერსია, საშუალო კვადრატული ბადახრა	430
4.5.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მეთადინეოებისათვის	435
4.5.2. ტესტი №5	440
პასუხები	442
ლიტერატურა	455



• დაიბადა 1958წელს, 1979 წელს დაამთავრა ქუთაისის პედაგოგიური ინსტიტუტის (ახლანდელი უნივერსიტეტი) ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი.

• 1999წელს ივ. ჯავახიშვილის სახელობის, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის p.h.d 0102 e №3 სადისერტაციო საბჭოს გადაწყვეტილებით, მიენიჭა პედაგოგიკის (13.00.02) მეცნიერებათა კანდიდატის სამეცნიერო ხა-

რისი.

• 1985-1989 წლებში მუშაობდა ქუთაისის ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა-ინტერნატში მათემატიკის სალექციო კურსის მასწავლებლად.

• 1980-1991 წლები ქუთაისის ნ. მუსხელიშვილის სახელმწიფო პოლიტექნიკურ ინსტიტუტში უმაღლესი მათემატიკის კათედრაზე ასისტენტი.

• 1985-2005 წლებში მუშაობდა გეოფიზიკის ინსტიტუტში შავი ზღვის მათემატიკური მოდელირების ლაბორატორიაში მეცნიერ-მუშაკის თანამდებობაზე.

• 1991-1993 წლები ქუთაისის აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტში მათემატიკის კათედრაზე უფროსი ლაბორანტი.

• 1993-1999 წლები ქუთაისის აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტში მათემატიკის კათედრაზე მასწავლებლი.

• 1999-2006 წლები ქუთაისის აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტში მათემატიკის კათედრაზე დოცენტი (კონკურსით არჩეული).

• 2011-2014 წლები ქუთაისის აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტში მოწვეული სპეციალისტი.

• 2014 დღემდე ქუთაისის აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი.

გამოქვეყნებული აქვს 10 წიგნი და 60-ზე მეტი სამეცნიერო სტატია, მოპოვებული აქვს საავტორო უფლება ორ გამოგონებაზე.

• ყავს მეუღლე, სამი შვილი და შვილიშვილი



• დაიბადა 1958 წელს, 1982 წელს დაამთავრა ქუთაისის პედაგოგიური ინსტიტუტის (ახლანდელი უნივერსიტეტი) ფიზიკა-მატემატიკის ფაკულტეტი.

• 1999 წელს ივ. ჯავახიშვილის სახელობის, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ph.d 0102 c №3 სადისერტაციო საბჭოს გადაწყვეტილებით, მიენიჭა პედაგოგიკის (13.00.02) მეცნიერებათა კანდიდატის სამეცნიერო ხარისხი.

2004 წელს ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პროფესორთა საბჭოს გადაწყვეტილებით მიენიჭა დოცენტის სამეცნიერო-პედაგოგიური წოდება. სპეციალობა მატემატიკის სწავლების მეთოდика..

• 1985 წლიდან მუშაობს ქუთაისის აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტში

• 1985-1993 ალ. წულუკიძის სახელობის ქუთაისის სახელმწიფო პედაგოგიური ინსტიტუტის, ტექნიკური დისციპლინების კათედრის სასწავლო ლაბორატორიის პრაქტიკულის მასწავლებელი

• 1987-1990წწ ალ. წულუკიძის სახელობის ქუთაისის სახელმწიფო პედაგოგიური ინსტიტუტის, ფიზიკა-მატემატიკის ფაკულტეტის დეკანის მოადგილე

• 1990-1992 ალ. წულუკიძის სახელობის ქუთაისის სახელმწიფო პედაგოგიური ინსტიტუტის, (1991 წლიდან აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის) მეორად პროფესორთა ფაკულტეტის დეკანის მოადგილე

• 1993-1995 აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ტექნიკური დისციპლინების კათედრის მასწავლებელი

• 1995-2000 ქუთაისის ხელოვნებისა და პედაგოგიკის ინსტიტუტის პედაგოგიური ფაკულტეტის დეკანი

• 2000-2002 აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სწავლების მეთოდикаთა კათედრის მასწავლებელი

• 2002-2006 აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სწავლების მეთოდикаთა კათედრის დოცენტი

• 2006-2009 აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სწავლების მეთოდикаთა დეპარტამენტის ასოცირებული პროფესორი, ტრანსფერებისა და კრედიტების დაგროვების ევროპული სისტემის (ECTS) კოორდინატორი

• 2011 წ. - დღემდე აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სწავლების მეთოდикаთა დეპარტამენტის ხელმძღვანელი

• 2014 წ. - დღემდე აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი

• 2014 წ. - დღემდე. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პედაგოგიური ფაკულტეტის ხარისხის უზრუნველყოფის სამსახურის უფროსი

• გამოქვეყნებული აქვს ხუთი წიგნი, 50-ზე მეტი სამეცნიერო სტატია, მოპოვებული აქვს საავტორო უფლება სამ გამოგონებაზე.

• დაჯილდოებულია ღირსების ორდენით

• ყავს მეუღლე და ქალიშვილი

**კომპიუტერული უზრუნველყოფა და დაკაზადონება
ლევან იოზაძე**

**ქაღალდის ზომა 1/16
ნაბეჭდი თაზახი 15,75
ტირაჟი 100**

**დაიბეჭდა ი.მ ნათია ტორაძის მიერ
ქ. ქუთაისი, ახალგაზრდობის გამზირი 25-ა
ტელ.: 599 18 20 98; 592 02 25 55
E-mail: levanistamba@mail.ru**