

მალხაზ მუმლაძე

ზოგადი ტოპოლოგია და
დიფერენციალური გეომეტრია

მალხაზ მუმლაძე

ზოგადი ტოპოლოგია და დიფერენციალური გეომეტრია

გორი 2015

ISBN 978-9941-0-8357-0

რედაქტორის წინასიტყვობა

სახელმძღვანელო,- „ზოგადი ტოპოლოგია და დიფერენციალური გეომეტრია“, შედგება ორი ნაწილისაგან: ზოგადი ტოპოლოგია, დიფერენციალური გეომეტრია. პირველი ნაწილი,- ზოგადი ტოპოლოგია, მოიცავს ისეთ საკითხებს, როგორებიცაა: ტოპოლოგიური სტრუქტურები, ტოპოლოგიური სივრცეები, ტოპოლოგიური ოპერაციები, მეტრიკული სტრუქტურები, მეტრიკული სივრცეები, უწყვეტი ასახვები, ტოპოლოგიურ სივრცეთა განცალკევება, ტოპოლოგიური კონსტრუქციები, ტოპოლოგიურ სივრცეთა ბმულობა, კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეები, ლოკალურად კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეები, პარაკომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეები, ერთეულის დაყოფა, ასახვათა სივრცეები, ტოპოლოგიურ სივრცეთა განზომილებები.

სახელმძღვანელოში საკმაო სისრულითაა გადმოცემული ზოგადი ტოპოლოგიის ეს ძირითადი საკითხები. ყველა საკითხი გადმოცემულია სწორი მეთოდოლოგიური თანმიმდევრობით, კომპაქტურად, მაგრამ ამომწურავად.

სახელმძღვანელოს მეორე ნაწილი,- დიფერენციალური გეომეტრია, აგებულია პირველი ნაწილის საფუძველზე. იწყება ტოპოლოგიური მრავალსახეობის ცნებით, და მოიცავს ისეთ საკითხებს, როგორებიცაა დიფერენციალური სტრუქტურები და დიფერენციალური მრავალსახეობები, დიფერენცირებადი და გლუვი ასახვები, რიმანის და ფსევდორიმანის მეტრიკები, რიმანის ფსევდორიმანის მრავალსახეობები, ევკლიდური და არაევკლიდური მეტრიკები მრავალსახეობებზე, წირთა თეორია, ზედაპირთა თეორია, ზედაპირები როგორც დიფერენცირებადი მრავალსახეობები, ტენზორები, ტენზორული ველები, ტენზორთა დიფერენცირება, ტენზორის კოვარიანტული წარმოებული, დიფერენცირებადი მრავალსახეობები აფინური ბემებით, პარალელური გადატანა, გეოდეზიური წირები მრავალსახეობაზე და ზედაპირზე, აფინური ბმის სიმრუდის ტენზორი, სკალარული სიმრუდე და სიმრუდე ორგანზომილებიანი მიმართულებებით, დადებით და უარყოფით მუდმივ სიმრუდიანი ზედაპირები და მათი კლასიფიკაცია, დიფერენციალური ფორმები, მათი დიფერენცირება და ინტეგრება, სტოქსის ფორმულა. აქაც ყველა საკითხი გადმოცემულია სწორი მეთოდოლოგიური თანმიმდევრობით, კომპაქტურად და ამომწურავად. სახელმძღვანელოში განხილულია ბევრი ამოცანა და მაგალითი, როგორც ზოგადი ტოპოლოგიიდან ასევე დიფერენციალური გეომეტრიიდან. სახელმძღვანელოს ბოლოში მოყვანილია ამოცანათა კრებული, როგორც ზოგად ტოპოლოგიაში ასევე დიფერენციალურ გეომეტრიაში.

სახელმძღვანელო მთავრდება გამოყენებული და თემებთან დაკავშირებული ლიტერატურის ვრცელი ჩამონათვალით.

სახელმძღვანელო სრულიად შეესაბამება გორის სახელმწიფო სასწავლო უნივერსიტეტის მათემატიკის სპეციალობის საგანმანათლებლო პროგრამას, გამოადგება ყველას, ვინც ტოპოლოგიისა და დიფერენციალური გეომეტრიის საკითხების შესწავლით არის დაინტერესებული.

რედაქტორი: გორის სახელმწიფო სასწავლო უნივერსიტეტის პროფესორი

ზურაბ ზურაბიძე

ნაწილი I

ზოგადი ტოპოლოგია

ზოგიერთი ცნება სიმრავლეთა თეორიიდან

$A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A = B$ სიმბოლოები გამოსახავენ ორი სიმრავლის გაერთიანებას, თანაკვეთას, ერთი სიმრავლის დამატებას მეორეში, ორი სიმრავლის ტოლობას. თუ a ელემენტი შედის A სიმრავლეში მაშინ წერენ $a \in A$ წინააღმდეგ შემთხვევაში $a \notin A$. თუ B წარმოადგენს A სიმრავლის ქვესიმრავლეს მაშინ წერენ $B \subset A$ წინააღმდეგ შემთხვევაში $B \not\subset A$.

როდესაც $B \subset A, C \subset A$ ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

ამ ტოლობებს *დე-მორგანის ფორმულებს* უწოდებენ.

განვიხილოთ სიმრავლე $\{a, b\}$, ამ სიმრავლიდან წარმოიქმნება ორი სიმრავლე: $\{a, \{a, b\}\}$, $\{b, \{a, b\}\}$. ამ სიმრავლეებს $\{a, b\}$ სიმრავლისაგან წარმოიქმნულ *დალაგებულ წყვილებს* უწოდებენ. ისინი აღინიშნება შესაბამისად: (a, b) და (b, a) . ერთელემენტური სიმრავლე $\{a\}$ ასევე წარმოიქმნის დალაგებულ წყვილს $\{a, \{a\}\}$. ეს დალაგებული წყვილი აღინიშნება ასე: (a, a) . (a, b) დალაგებულ წყვილში a -ს უწოდებენ დალაგებული წყვილის პირველ კომპონენტს, b -ს ხეობა დალაგებული წყვილის მეორე კომპონენტს. (a, a) დალაგებულ წყვილში პირველი და მეორე კომპონენტი ერთმანეთს ემთხვევა. A და B სიმრავლეთა *დეკარტის ნამრავლი* ეწოდება ისეთ დალაგებულ წყვილთა სიმრავლეს, რომლის პირველი კომპონენტიც ეკუთვნის A სიმრავლეს, მეორე კომპონენტი კი B სიმრავლეს. ეს დეკარტის ნამრავლი აღინიშნავენ ასე: $A \times B$. მაშასადამე,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

A და B სიმრავლეებზე განსაზღვრული *ბინარული (ორადგილიანი) მიმართება* ეწოდება, ამ სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლის რაიმე ქვესიმრავლეს.

A და B სიმრავლეებზე განსაზღვრული ბინარული $f \subset A \times B$ მიმართებას ეწოდება *ასახვა* A სიმრავლიდან B სიმრავლეში, თუ ამ მიმართებას აქვს შემდეგი თვისებები:

1. ყოველი $a \in A$ ელემენტისთვის არსებობს ისეთი $b \in B$ ელემენტი, რომ $(a, b) \in f$

2. თუ $(a, b_1) \in f$ და $(a, b_2) \in f$, მაშინ $b_1 = b_2$. თუ $(a, b) \in f$, მაშინ ვწერთ $b = f(a)$.

ასახვას A სიმრავლიდან B სიმრავლეში აღნიშნავენ ასე: $f: A \rightarrow B$. A სიმრავლეს ასახვის განსაზღვრის არც ეწოდება, ხოლო B სიმრავლეს ასახვის ჩნიშვნელობათა არე. თუ $C \subset A$ მაშინ $f(C) = \{f(c) \mid c \in C\} \subset B$ სიმრავლეს $C \subset A$ სიმრავლის ანასახვი ან მეორენაირად $C \subset A$ სიმრავლის სახე ეწოდება f ასახვის დროს. თუ $D \subset B$, მაშინ

$f^{-1}(D) = \{a \in A \mid f(a) \in D\} \subset A$ სიმრავლეს $D \subset B$ სიმრავლის წინასახე ეწოდება.

ასახვას $f: A \rightarrow B$ ეწოდება *ინექცია*, თუ $a, b \in A, a \neq b$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $f(a) \neq f(b)$.

ასახვას $f: A \rightarrow B$ ეწოდება *სიურექცია* ანუ "ზე" ასახვა, თოო ყოველი $b \in B$

ელემენტისათვის არსებობს ისეთი $a \in A$ ელემენტი, რომ $f(a) = b$.

ასახეებს რომელიც ერთდროულად ინექცია (ცავა) და სიურექცია (ცავა) ბიექციაა ანუ ურთიერთცალსახა ასახვას უწოდებენ.

ორი $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ ასახვის კომპოზიცია ეწოდება ასახვას $h: A \rightarrow C$, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით: $h(a) = g(f(a))$. მოცემული f და g ასახვის კომპოზიცია h აღინიშნება ასე: $g \circ f$

ყოველი $f: A \rightarrow B$ ბიექციისათვის არსებობს ასახვა $f^{-1}: B \rightarrow A$ რომელსაც მოცემული ბიექციის შებრუნებული ასახვა ეწოდება.

ასახვას $Id_A: A \rightarrow A$, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით: $Id(a) = a, a \in A$ A სიმრავლის თავისთავზე იდენტური ასახვა ეწოდება. ცხადია $f: A \rightarrow B$ ბიექციისათვის

$$f \circ f^{-1} = Id_B; f^{-1} \circ f = Id_A.$$

აღვილია ვაჩვენოთ, რომ თუ $f: A \rightarrow B$ რაიმე ასახვაა და $C, D \in A, E, F \subset B$, მაშინ ასხვის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს:

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
2. $f^{-1}(E \cup F) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$,
3. $f^{-1}(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$, 4. $f^{-1}(E \setminus F) = f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F)$.

განვიხილოთ ბინარული მიმართება $I \subset A \times A$, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისებები:

1. ყოველი $a \in A$ ელემენტისათვის წყვილი $(a, a) \in I$.
2. თუ წყვილი $(a, b) \in I$, მაშინ წყვილი $(b, a) \in I$.
3. თუ წყვილი $(a, b) \in I$, წყვილი $(b, c) \in I$, მაშინ წყვილი $(a, c) \in I$

ასეთ ბინარულ მიმართებას A სიმრავლეზე განსაზღვრული ეკვივალენტობის მიმართება ეწოდება. თუ $(a, b) \in I$, მაშინ წერენ $a \approx b$. ეკვივალენტობის მიმართება A სიმრავლეს ყოყს ურთიერთთანაუკვეთ კლასებად. a ელემენტის ეკვივალენტური ელემენტების ერთობლიობა, კლასი სლინიშნება ასე: $[a]$.

განვიხილოთ სიმრავლეა რაიმე ერთობლიობა $\mathfrak{M}$ განესაზღვროთ ამ ერთობლიობაში ეკვივალენტობის მიმართება $I \subset \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ შემდეგნაირად: ორი $A, B \in \mathfrak{M}$ სიმრავლისთვის წყვილი $(A, B) \in I$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც არსებობს ბიექცია: $f: A \rightarrow B$.

ცხადია ასეთაირად განსაზღვრული ბინარული მიმართება ეკვივალენტობის მიმართებაა.

თუ $\mathfrak{M}$ სიმრავლეა მთელი ერთობლიობაა, მაშინ $A \times (B \times C)$ სიმრავლიდან $(A \times B) \times C$ სიმრავლეში არსებობს $f((a, (b, c))) = ((a, b), c)$ ფორმულით განსაზღვრული ბიექცია $f: A \times (B \times C) \rightarrow (A \times B) \times C$. მაშასადამე $A \times (B \times C)$ სიმრავლე $(A \times B) \times C$ სიმრავლის ეკვივალენტურია, ისინი შეიძლება გადგივიეოთ. ეს გაიგივება საშუალებას გვაძლევს განესაზღვროთ: სამი A, B, C სიმრავლის დეკარტის ნამრავლი

$$A \times B \times C = A \times (B \times C) = (A \times B) \times C,$$

ოთხი სიმრავლის დეკარტის ნამრავლი

$$A \times B \times C \times D = A \times (B \times C \times D) = (A \times B \times C) \times D,$$

და ასე შემდეგ n სიმრავლის დეკარტის ნამრავლი

$$\underbrace{A \times B \times C \times \dots \times E \times F}_n = A \times \underbrace{(B \times C \times \dots \times E \times F)}_{n-1} = \underbrace{(A \times B \times C \times \dots \times E)}_{n-1} \times F$$

$A_1, A_2, \dots, A_n$, სიმრავლეებზე განსაზღვრული, *n* ადგილიანი მიმართება ეწოდება $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ სიმრავლის ნებისმიერ R ქვესიმრავლეს.

A უწოდებენ *სასრულ სიმრავლეს*, თუ იგი ეკუთვნის ელემენტური არაა თავისი რაიმე $B \subset A, B \neq A$ ქვესიმრავლის.

A და B სიმრავლეებს უწოდებენ *ტოლი სიმძლავრის სიმრავლეებს*, თუ ეს სიმრავლეები ერთმანეთის ეკვივალენტურია. ერთმანეთის ეკვივალენტურ სიმრავლეთა კლასს *კარდინალური რიცხვი*, ანუ ამ კლასში შემავალ სიმრავლეთა სიმძლავრე ეწოდება. სიმრავლეს, რომლის სიმძლავრეც ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის სიმძლავრის ტოლია, *თელადი სიმრავლე* ეწოდება. თუ სიმრავლე თელადი არაა, მაშინ მას *არათელადი სიმრავლე* ეწოდება.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის სიმძლავრე აღინიშნება ასე: $\aleph_0$ (ალეფ ნოლი).

რაიმე A სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე აღინიშნება ასე: 2^A . თუ A სიმრავლის შესაბამისი კარდინალური რიცხვია $\aleph$, მაშინ 2^A სიმრავლის შესაბამისი კარდინალური რიცხვი აღინიშნება ასე: $2^\aleph$.

თეორემა (კანტორ-ბერშტეინის თეორემა): ვთქვათ A და B რაიმე სიმრავლეებია. თუ არსებობენ ბიექციები $f: A \rightarrow B' \subset B$ და $g: B \rightarrow A' \subset A$, მაშინ A და B ერთი და იგივე სიმძლავრის სიმრავლეებია.

კარდინალურ რიცხვთა სიმრავლეში განსაზღვრება გამრავლების და შეკრების აღებერბული ოპერაციები: თუ A სიმრავლის შესაბამისი კარდინალური რიცხვია α , B სიმრავლის შესაბამისი კარდინალური რიცხვი β , მაშინ $\alpha + \beta = \gamma$ სადაც γ $A \cup B$ სიმრავლის შესაბამისი კარდინალური რიცხვია.

თუ A სიმრავლის შესაბამისი კარდინალური რიცხვია α , B სიმრავლის შესაბამისი კარდინალური რიცხვი β , მაშინ $\alpha \times \beta = \gamma$ სადაც γ $A \times B$ სიმრავლის შესაბამისი კარდინალური რიცხვია.

აქსიომების აქსიომა: სიმრავლეთა ყოველი $\{A_i\}_{i \in I}$ ერთობლიობისათვის, სადა I რაიმე სიმრავლეა, არსებობს ისეთი ასახვა $f: S \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$, რომ $f(s) \in A_i$, ყოველი $s \in S$ ინდექსისათვის.

განვიხილოთ კიდევ ერთი ბინარული მიმართება $\Pi \subset A \times A$, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისებები:

1. ყოველი $a \in A$ ელემენტისათვის წყვილი $(a, a) \in \Pi$
2. თუ წყვილი $(a, b) \in \Pi$, წყვილი $(b, a) \in \Pi$, მაშინ $a = b$
3. თუ წყვილი $(a, b) \in \Pi$, წყვილი $(b, c) \in \Pi$, მაშინ წყვილი $(a, c) \in \Pi$.

ასეთ ბინარულ მიმართებას A სიმრავლეზე განსაზღვრული *ნაწილობრივი დალაგების მიმართება* ეწოდება. თუ $(a, b) \in \Pi$, მაშინ წერენ $a \leq b$.

თუ დამატებით, ყოველი ორი $a, b \in A$ ელემენტისათვის, ან $(a, b) \in \Pi$, ან $(b, a) \in \Pi$, მაშინ $\Pi \subset A \times A$ მიმართებას A სიმრავლეზე განსაზღვრული *წრფივად დალაგების* მიმართება ეწოდება.

თუ A სიმრავლეზე განსაზღვრულია რაიმე ნაწილობრივად დალაგების $\Pi \subset A \times A$ მიმართება, მაშინ ამბობენ, რომ A სიმრავლე *ნაწილობრივად დალაგებულია*. ხოლო თუ ეს

მიმართება წრფივად დალაგების მიმართებაა, მაშინ ამბობენ, რომ A სიმრავლე წრფივად დალაგებულია.

ცხადია ნაწილობრივად ან წრფივად დალაგებული სიმრავლის ყოველი არაცარიელი ქვესიმრავლე ასევე ნაწილობრივად ან წრფივად დალაგებულია, შესაბამისად.

თუ A სიმრავლეზე განსაზღვრულია ნაწილობრივად დალაგების და $B \subset A$ რაიმე ქვესიმრავლეა, მაშინ B ქვესიმრავლეს ეწოდება A სიმრავლის წრფივად დალაგებული ნაწილი, თუ ყოველი ორი $a, b \in B$ ელემენტისათვის, ან $(a, b) \in \Pi$, ან $(b, a) \in \Pi$.

ვთქვათ A რაიმე სიმრავლეა, $M(A)$ იყოს A სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე. ამ სიმრავლეში შეიძლება შევიტანოთ ნაწილობრივი დალაგების მიმართება ასეთნაირად: ყოველ ორი $X, Y \in M(A)$ სიმრავლისათვის $X \leq Y$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $X \subset Y$ ასეთნაირად განსაზღვრული მიმართება ცხადია, ნაწილობრივად დალაგების მიმართება $M(A)$ სიმრავლეში. ამ დალაგების მიმართებას $\subset$ მიმართებით განსაზღვრული დალაგების მიმართება ეწოდება.

კანტორ ბერშტეინის თეორემიდან გამომდინარე, კარდინალურ რიცხვითა ერთობლიობა შეიძლება ნაწილობრივად დავალაგოთ: თუ A სიმრავლის შესაბამისი კარდინალური რიცხვია α , B სიმრავლის შესაბამისი კარდინალური რიცხვი β , $\alpha \leq \beta$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც არსებობს ბიექცია $f: A \rightarrow B' \subset B$.

მტკიცდება, რომ $\aleph$ და $2^{\aleph}$ კარდინალური რიცხვებისთვის $\aleph \neq 2^{\aleph}$, $\aleph \leq 2^{\aleph}$

$a_0 \in A$ ელემენტს ნაწილობრივად დალაგებულ A სიმრავლეში ეწოდება ამ სიმრავლის მაქსიმალური ელემენტი, თუ $a_0 \leq a \in A$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $a_0 = a$.

$a_0 \in A$ ელემენტს ნაწილობრივად დალაგებულ A სიმრავლეში ეწოდება ამ სიმრავლის მინიმალური ელემენტი, თუ $a_0 \geq a \in A$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $a_0 = a$.

ვთქვათ A სიმრავლე ნაწილობრივ დალაგებული სიმრავლეა $B \subset A$ მისი ქვესიმრავლე. ამ ქვესიმრავლეს ეწოდება ზეზღაღწევიდან შემოსაზღვრული, თუ არსებობს ისეთი $a \in A$ ელემენტი, რომ $b \leq a (a \leq b)$, ყოველი $b \in B$ ელემენტისათვის.

ასეთ $a \in A$ ელემენტს $B \subset A$ ქვესიმრავლის ზედა(ქვედა) საზღვარი ეწოდება.

$a_0 \in A$ ელემენტს ეწოდება $B \subset A$ ქვესიმრავლის ზუსტი ზედა(ქვედა) საზღვარი, თუ ამ ქვესიმრავლის ნებისმიერი a ზედა(ქვედა) საზღვრისათვის, $a_0 \leq a (a \leq a_0)$.

ცორნის ლემა: თუ ნაწილობრივად დალაგებული A სიმრავლის ყოველი წრფივად დალაგებულ B ნაწილისათვის არსებობს ისეთი ელემენტი $a_0 \in A$, რომ $b \leq a_0$ ყოველი $b \in B$ ელემენტისათვის, მაშინ A სიმრავლეში არსებობს მაქსიმალური ელემენტი.

ვთქვათ A რაიმე სიმრავლეა და F თვისება, რომელიც შეიძლება გააჩნდეს A სიმრავლის ქვესიმრავლეებს. ვიტყვი, რომ F თვისება სასრულობისათვისაა, თუ იგი გააჩნია ცარიელ ქვესიმრავლეს, ამასთან, ეს თვისება გააჩნია რაიმე $B \subset A$ ქვესიმრავლეს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც იგი გააჩნია B სიმრავლის ყოველ სასრულ ქვესიმრავლეს.

ტეხნიკური-ტეხნიკის ლემა: ვთქვათ მოცემულია რაიმე A სიმრავლე და მისი ქვესიმრავლეების რაიმე სასრულო ხასიათის F თვისება. მაშინ ყოველი $B \subset A$ ქვესიმრავლე, რომელსაც ეს თვისება გააჩნია, შედის $C \subset A$ ქვესიმრავლეში, რომელსაც გააჩნია F თვისება და რომელიც წარმოადგენს მაქსიმალურ ელემენტს A სიმრავლის ქვესიმრავლეთა

სიმრავლეში, რომელიც დალაგებულია $\subset$ მიმართებით განსაზღვრულ ნაწილობრივად დალაგების მიმართებით.

ეთქვით A, B ორი ნაწილობრივად დალაგებული სიმრავლეა და $f: A \rightarrow B$, რაიმე ასახეა. ვითქვით, რომ f ასახეა ინახავს დალაგებას, თუ სრულდება პირობა: f ინექციაა და თუ $a, b \in A; a \leq b$, მაშინ $f(a) \leq f(b)$.

თუ $f: A \rightarrow B$ ბიექციაა და ინახავს დალაგებას, მაშინ A და B სიმრავლეებს *იზომორფული ნაწილობრივად დალაგებული სიმრავლეები* ეწოდება. $f: A \rightarrow B$ ასახეას კი *იზომორფიზმი* (ცხადია ნაწილობრივად დალაგებულ სიმრავლეთა იზომორფიზმი) ეკვიალენტობის მიმართებაა.

თუ A და B სიმრავლეები წრფივად დალაგებული სიმრავლეებია, $f: A \rightarrow B$ სიურექციაა და ინახავს დალაგებას, მაშინ A და B სიმრავლეებს *მსგავსი სიმრავლეები* ეწოდება.

თუ A და B სიმრავლეები წრფივად დალაგებული მსგავსი სიმრავლეებია, მაშინ არსებობს ბიექცია $f: A \rightarrow B$, რომელიც ინახავს დალაგებას. აქედან გამომდინარე $f: A \rightarrow B$ წრფივად დალაგებული სიმრავლეების იზომორფიზმია.

ეს იზომორფიზმი წრფივად დალაგებულ სიმრავლეთა ერთობლიობაზე განსაზღვრავს ეკვიალენტობის მიმართებას. ეს ერთობლიობა ამ ეკვიალენტობის მიმართებით იყოფა კლასებად. თითოეულ ამ კლასს მასში შემავალი *სიმრავლის რიგობრივი ტიპი* ეწოდება.

მსგავს წრფივად დალაგებულ სიმრავლეებს ერთიდა იგივე რიგობრივი ტიპი აქვთ და მათ ცალსახად შეესაბამება ერთი კარდინალური რიცხვი. ამ კარდინალურ რიცხვს *რიგობრივი ტიპის კარდინალური რიცხვი* ეწოდება.

წრფივად დალაგებულ სიმრავლეს ეწოდებენ *სრულად დალაგებულს*, თუ მის ყოველ არაცარიელ ქვესიმრავლეს გააჩნია მინიმალური ელემენტი.

თეორემა (ცერმელოს თეორემა): ყოველი სიმრავლე სრულად შეიძლება დავაგავოთ.

თეორემა: ამორსევის აქსიომა, ცორნის ლემა, ტეხიმიულერ-ტიუსის ლემა, ცერმელოს თეორემა ერთმანეთის ეკვიალენტური დებულებებია.

სრულად დალაგებული A სიმრავლის $[A]$ რიგობრივი ტიპს *რიგობრივი რიცხვი* ეწოდება.

რიგობრივი რიცხვების სიმრავლეში განისაზღვრება შეკრების და გამრავლების ალგებრული ოპერაციები ეთქვით $\alpha = [A], \beta = [B]$. ზოგადობის დაურღვევლად ვიგულისხმით, რომ $A \cap B \neq \emptyset$, ნაწილობრივად დალაგებით $A \cup B$ სიმრავლე ასეთნაირად: $a \leq b$, თუ $a, b \in A$ და $a \leq b$, ან $a, b \in B$ და $a \leq b$, ან $a \in A$ და $b \in B$. თუ A და B წრფივად დალაგებული სიმრავლეებია, მაშინ $A \cup B$ სიმრავლეც წრფივად დალაგებული სიმრავლე იქნება.

განესაზღვროთ $\alpha = [A], \beta = [B]$ რიგობრივი რიცხვების ჯამი ასეთნაირად: $\alpha + \beta = \gamma$. სადაც $\gamma = [A \cup B]$.

ადვილია ჩვენება, რომ ასეთნაირად განსაზღვრული რიგობრივი რიცხვების შეკრების ოპერაცია კორექტულია.

ახლა განვიხილოთ დეკარტის ნამრავლი $A \times B$, შევიტანოთ მასში ნაწილობრივი დალაგების მიმართება შემდეგნაირად:

$(a, b) \leq (c, d)$ თუ $b \leq d$, ან თუ $b = d$ და $a \leq c$. თუ A და B წრფივად დალაგებული სიმრავლეებია, მაშინ $A \times B$ სიმრავლეც წრფივად დალაგებული სიმრავლე იქნება.

განესაზღვროთ $\alpha = [A], \beta = [B]$ რიგობრივი რიცხვების ნამრავლი ასე: $\alpha \times \beta = \gamma$,

სადაც $\gamma = [A \times B]$.

ადვილია ნეგება, რომ ასეთნაირად განსაზღვრული რიგობრივი რიცხვების გამრავლების ოპერაცია კორექტულია.

რიგობრივი ტიპების ერთობლიობაში შეიძლება შევიტანოთ დალაგების მიმართება.

მართლაც, თუ $\alpha = [A], \beta = [B]$ რაიმე ორი რიგობრივი ტიპია, ნათვალთ, რომ $\alpha \leq \beta$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ არსებობს ისეთი $b_0 \in B$ ელემენტი, რომ A და $\{b \in B | b \leq b_0\}$ სიმრავლეები მსგავსია.

მტკიცდება, რომ რიგობრივი ტიპთა სიმრავლეში ასეთნაირად განსაზღვრული დალაგების მიმართება წრფივად დალაგების მიმართებაა.

მტკიცდება ასევე, რომ ყოველი წრფივად დალაგებული A სიმრავლე რომლის რიგობრივი ტიპიცაა $[A]$, $\{|C| : |C| \leq |A|, |C| \neq |A|\}$ სიმრავლის მსგავსია.

α რიგობრივი რიცხვს ეწოდებს *ზღვრული რიგობრივი რიცხვი*, თუ ყოველი $\beta \leq \alpha$ რიგობრივი რიცხვისათვის არსებობს ისეთი რიგობრივი რიცხვი γ , რომ $\beta \leq \gamma \leq \alpha$

β რიგობრივი რიცხვს ეწოდება *α რიგობრივი რიცხვის წინა რიცხვი* თუ არ არსებობს ისეთი γ რიგობრივი რიცხვი, რომ $\beta \leq \gamma \leq \alpha$ ასეთ შემთხვევაში წერენ $\alpha = \beta + 1$. ასეთ შემთხვევაში α რიგობრივი რიცხვის β *რიგობრივი რიცხვის მემკვიდრე* ეწოდება.

ყოველი α რიგობრივი რიცხვისათვის და არაუარყოფითი მთელი n რიცხვისათვის ინდუქციით განსაზღვრება $\alpha + n$ რიგობრივი რიცხვი: $\alpha + 0 = \alpha$, $\alpha + n = \alpha + (n-1) + 1$.

მტკიცდება, რომ ყოველი α რიგობრივი რიცხვი სათვის გვაქვს $\alpha = \beta + n$. სადაც β ზღვრული რიგობრივი რიცხვია.

ეთქვათ α რაიმე რიგობრივი რიცხვია. α ტიპის *ტრანსფინიტური მიმდევრობა* A სიმრავლეში ეწოდება ასახვას $f: W(\alpha) \rightarrow A$, სადაც $W(\alpha)$ ისეთი β

რიგობრივი რიცხვების სიმრავლეა, რომლებისათვისაც ადგილი აქვს პირობას:

$\beta \leq \alpha, \beta \neq \alpha$. ეთქვათ მოცემულია წრფივად დალაგებული A სიმრავლეა და F რაიმე დებულებაა რომელიც შეეხება ყოველ $a \in A$ ელემენტს.

ეთქვათ მოცემული F დებულება ჭეშმარიტია A სიმრავლის მინიმალური ელემენტისათვის და ჭეშმარიტია ყოველი $a \in A$ ელემენტისათვის თუ F ჭეშმარიტია ყოველი $b \leq a, b \in A, b \neq a$ ელემენტისათვის. მაშინ F ჭეშმარიტია A სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტისათვის.

მართლაც, თუ A სიმრავლეში არსებობენ ელემენტები, რომლებისათვის F არაა ჭეშმარიტი, ამ ელემენტთა სიმრავლეს უნდა გააჩნდეს მინიმალური ელემენტი. ეთქვათ ეს ელემენტია a^* ყოველი $b \in A, b \leq a^*, b \neq a^*$ ელემენტისათვის F

ჭეშმარიტია, ამიტომ იგი ჭეშმარიტი უნდა იყოს a^* ელემენტისათვის. მივიღეთ წინააღმდეგობა, მაშასადამე F ჭეშმარიტია A სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტისათვის.

მოუყვანილი მსჯელობა წარმოადგენს საფუძველს დებულებათა დამტკიცების იმ მეთოდისა, რომელსაც *ტრანსფინიტური ინდუქციის მეთოდი* ეწოდება.

§1. ტოპოლოგიური სტრუქტურა,

ტოპოლოგიური სივრცე

ეთქვას, X რაიმე სიმრავლეა, $T(X)$ მისი ქვესიმრავლეების ისეთი ოჯახი, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისებები:

1. $X \in T(X)$.

2. $\emptyset \in T(X)$, სადაც $\emptyset$ ცარიელი სიმრავლეა.

3. თუ $O_1, O_2 \in T(X)$, მაშინ $O_1 \cap O_2 \in T(X)$.

4. თუ $O_i \in T(X), i \in A$, სადაც A ინდექსთა სიმრავლეა, მაშინ $\bigcup_i O_i \in T(X)$.

ასეთ $T(X)$ ოჯახს უწოდებენ *ტოპოლოგიურ სტრუქტურას* X სიმრავლეში.

ასეთი $T(X)$ ოჯახი შეიძლება იყოს სხვადასხვა, შესაბამისად ერთ და იგივე სიმრავლეში შეიძლება განისაზღვროს სხვადასხვა ტოპოლოგიური სტრუქტურა.

სიმრავლეს ტოპოლოგიური სტრუქტურით უწოდებენ *ტოპოლოგიურ სივრცეს* ამგვარად ტოპოლოგიური სივრცე წარმოადგენს წყვილს $(X; \tau)$, სადაც τ რაიმე ტოპოლოგიური სტრუქტურაა. შემდეგ, თუ აუცილებელი არ იქნება, ტოპოლოგიური სივრცის აღსანიშნავად გამოვიყენებთ წყვილის პირველ კომპონენტს X -ს.

მაგალითები:

1. ეთქვას R რიცხვითი ღერძია, $T(R)$ იყოს მისი ისეთი ქვესიმრავლეთა ოჯახი, რომელიც შედგება ინტერვალისაგან და ამ ინტერვალთა ნებისმიერი გაერთიანებებისაგან. ადვილია იმის შემჩნევა, რომ $T(R)$ წარმოადგენს ტოპოლოგიურ სტრუქტურას.

2. ეთქვას X რაიმე სიმრავლეა, $T(X) = \{X, \emptyset\}$; ქვესიმრავლეთა ოჯახი, რომელიც შედგება მხოლოდ ორი ქვესიმრავლისაგან: ივით X -საგან და ცარიელი ქვესიმრავლისაგან. აქაც ადვილია იმის შევნიშვნა, რომ $T(X) = \{X, \emptyset\}$ ტოპოლოგიური სტრუქტურაა. ამ ტოპოლოგიურ სტრუქტურას ეწოდება *ანტიდისკრეტული ტოპოლოგიური სტრუქტურა*.

3. ეთქვას X რაიმე სიმრავლეა $T(X) = M(X)$, სადაც $M(X)$ X სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა ოჯახია, ცხადია

$T(X) = M(X)$ წარმოადგენს ტოპოლოგიურ სტრუქტურას. ამ ტოპოლოგიურ სტრუქტურას *დისკრეტული ტოპოლოგიური სტრუქტურა* ეწოდება.

თუ $\{\tau = T(X)\}$ ყველა შესაძლო ტოპოლოგიურ სტრუქტურათა სიმრავლეა X -ში, მაშინ ამ სიმრავლეზე შეიძლება განისაზღვროს ნაწილობითი დალაგების მიმართება. ვიტყვი, რომ $\tau_1 \leq \tau_2$ თუ $T_1(X) \subset T_2(X)$. თუ $\tau_1 \leq \tau_2$, მაშინ ამბობენ, რომ τ_2 უფრო ძლიერი ტოპოლოგიური სტრუქტურაა ვიდრე τ_1 .

ცხადია X -ში შესაძლო ყველა ტოპოლოგიურ სტრუქტურათა შორის ყველაზე ძლიერია დისკრეტული ტოპოლოგიური სტრუქტურა, ყველაზე სუსტია ანტიდისკრეტული ტოპოლოგიური სტრუქტურა.

$(X, \tau = T(X))$ სივრცეში ნებისმიერ $O \in T(X)$ ქვესიმრავლეს უწოდებენ *ღია ქვესიმრავლეს* ამ ტოპოლოგიურ სივრცეში, ხოლო ნებისმიერ $F \subset X$ სიმრავლეს, რომელიც წარმოადგენს

რაივე ღია ქვესიმრავლის დამატებას X -ში ეწოდება *ჩაკეტილი სიმრავლე* ამავე სივრცეში. ჩაკეტილ სიმრავლეთა ოჯახი X სივრცეში აღინიშნება $F(X)$ -ით.

თეორემა 11 ჩაკეტილ სიმრავლეების ოჯახს X ტოპოლოგიურ სივრცეში აქვს შემდეგი თვისებები:

$$1. X \in F(X).$$

$$2. \emptyset \in F(X).$$

$$3. \text{თუ } F_1, F_2 \in F(X), \text{ მაშინ } F_1 \cup F_2 \in F(X).$$

$$4. \text{თუ } F_i \in F(X), i \in B, \text{ სადაც } B \text{ ინდექსთა რაივე სიმრავლეა, მაშინ } \bigcap_i F_i \in F(X).$$

დამტკიცება: 1. $X = X \setminus \emptyset$ ამიტომ X ჩაკეტილი ქვესიმრავლეა.

$$2. \emptyset = X \setminus X, \text{ ამიტომ } \emptyset \text{ ჩაკეტილი ქვესიმრავლეა.}$$

3 რადგან F_1, F_2 ჩაკეტილი ქვესიმრავლეებია, ამიტომ არსებობენ შესაბამისად ისეთი ღია ქვესიმრავლეები O_1, O_2 რომელთათვისაც $O_1 \cap O_2 = F_1 \cup F_2$, დე მორგანის ფორმულით, $F_1 \cup F_2 = (X \setminus O_1) \cup (X \setminus O_2) = X \setminus (O_1 \cap O_2)$, ამიტომ იგი იქნება ჩაკეტილი.

4. ასევე $F_i = X \setminus O_i, O_i \in T(X)$, დე მორგანის ფორმულით $\bigcap_i F_i = \bigcap_i (X \setminus O_i) = X \setminus \bigcup_i O_i$, ამიტომ რადგან $\bigcup_i O_i$ ღია ქვესიმრავლეა, $\bigcap_i F_i$ ქვესიმრავლე იქნება ჩაკეტილი.

თუ $T(X)$ ჩაკეტილ სიმრავლეთა ოჯახია, მაშინ მისი ელემენტების $(X, \tau = T(X))$

ტოპოლოგიური სივრცეში დამატებით მიღებული ოჯახი ერთხვევად $T(X)$ ტოპოლოგიურ სტრუქტურას, ამიტომ ტოპოლოგიური სტრუქტურა სიმრავლეში შეიძლება განისაზღვროს მისი სტრუქტურის ელემენტების ოჯახის ტოპოლოგიური, რომელსაც ეწევა ჩაკეტილ სიმრავლეთა ოჯახს სტრუქტურის ტოპოლოგიური.

თუ $(X, \tau = T(X))$ ტოპოლოგიური სივრცეა, მაშინ X სიმრავლის ელემენტებს ტოპოლოგიური სტრუქტურა წერტილური ეწოდება.

X ტოპოლოგიური სივრცის რაივე $x \in X$ წერტილის მიდამო ეწოდება: ისეთ $A \subset X$ ქვესიმრავლეს, რომელშიც არსებობს ქვესიმრავლე $O \subset A$, ისეთი, რომ $x \in O$. $x \in X$ წერტილის მიდამო აღინიშნება ასე: $U(x)$ ან ასე: $\mathcal{U}(x)$. (ცხადია, ღია ქვესიმრავლე მიდამოა თავის ყველა წერტილისა. თუ $U(x)$ ღიაა, მაშინ მას ეწოდება $x \in X$ წერტილის ღია მიდამო.

თეორემა 12 ტოპოლოგიურ სივრცეში $x \in X$ წერტილის მიდამოს აქვს შემდეგი თვისებები: 1. თუ $U(x)$ $x \in X$ წერტილის მიდამოა, მაშინ $x \in U(x)$ 2. თუ $U(x) \cap V(x) = x$ წერტილის მიდამოებია, მაშინ მისი მიდამოა თანაკვეთაც $U(x) \cap V(x)$.

3. თუ $U(x)$ x წერტილის რაივე მიდამოა, მაშინ მისი მიდამოა ნებისმიერი $A \subset X$ ქვესიმრავლეც, რომლისთვისაც $U(x) \subset A$.

4. თუ $U(x)$ x წერტილის რაივე მიდამოა, მაშინ არსებობს ისეთი $V \subset U(x)$ ქვესიმრავლეც, რომ $U(x)$ მიდამოა ნებისმიერი $y \in V$ წერტილისათვის.

დამტკიცება: 1. პირდაპირ გამომდინარეობს მიდამოს განსაზღვრებიდან. 2. არსებობენ ისეთი ღია ქვესიმრავლეები $O_1 \subset U(x), O_2 \in V(x)$, რომ $x \in O_1, x \in O_2$ ამიტომ $x \in O_1 \cap O_2 \subset U(x) \cap V(x)$; $O_1 \cap O_2$ კი ღია.

3. ცხადია. 4. თუ $U(x)$ x წერტილის რაიმე მიდამოა, მაშინ არსებობს ისეთი $O \subset U(x)$ ღია ქვესიმრავლე, რომ $x \in O$. ღია სიმრავლე კი მიდამოა თავისი ყველა წერტილისა, ამიტომ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $V = O$

ეთქვათ, X სიმრავლეში ყოველი $x \in X$ ელემენტისათვის გამოყოფილია ქვესიმრავლეების ისეთი ოჯახი $\{U(x)\}$, რომელსაც აქვს წერტილის მიდამოს ოთხი თვისება.

განვიხილოთ ქვესიმრავლეთა ოჯახი X სიმრავლეში:

$$T(X) = \{O \subset X \mid x \in O \Rightarrow \exists U(x) \in \{U(x)\} \wedge U(x) \subset O\} \cup \emptyset$$

ანუ ისეთი ოჯახი, რომელიც შედგება ისეთი ქვესიმრავლეებისაგან, რომლებიც თავის ყოველ ელემენტთან ერთად შეიცავს ამ ელემენტისათვის გამოყოფილ ქვესიმრავლეთა ოჯახის რომელიმე ელემენტს, როგორც ქვესიმრავლეს, ამასთან ეს ოჯახი შეიცავს ასევე ცარიელ სიმრავლესაც.

თეორემა 13. $T(X) = \{O \subset X \mid x \in O \Rightarrow \exists U(x) \in \{U(x)\} \wedge U(x) \subset O\}$ წარმოადგენს ტოპოლოგიურ სტრუქტურას X სიმრავლეში.

დამტკიცება: ნებისმიერი წერტილის მიდამო X ტოპოლოგიურ სივრცეში ქვესიმრავლეა ამ სივრცისა, ამიტომ X -ი ყოველი მისი წერტილისათვის გამოყოფილ სიმრავლეთა ოჯახში შედის.

$X \subset X$, ამიტომ $X \in T(X)$. განსაზღვრის გამო $\emptyset \in T(X)$. თუ $O_1, O_2 \in T(X)$, მაშინ $x \in O_1 \cap O_2$ წერტილისათვის არსებობენ შეზამისად $U_1(x) \in \{U(x)\}$, $U_2(x) \in \{U(x)\}$ ისეთი, რომ $U_1(x) \subset O_1, U_2(x) \subset O_2$. ვინაიდან $U_1(x) \cap U_2(x) \subset O_1 \cap O_2$ და $U_1(x) \cap U_2(x) \in \{U(x)\}$ ამიტომ $O_1 \cap O_2 \in T(X)$.

ყოველ $O_i \in T(X), i \in A$ და $x \in \bigcup_i O_i$, მაშინ გეოსონის რომელიმე O_i სიმრავლეს, ეს იმას ნიშნავს, რომ არსებობს $U(x) \subset O_i$, $U(x) \in \{U(x)\}$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\bigcup_i O_i \in T(X)$. თეორემა დამტკიცდა.

დამტკიცებული თეორემა გვიჩვენებს, რომ ტოპოლოგიური სტრუქტურის შერჩევა სიმრავლეში შესაძლებელია თუ მის ყველა ელემენტს შევსაბამებთ მიდამოთა სისტემას, ანუ ისეთ ოჯახს ქვესიმრავლეებისა რომლის ელემენტებსაც ექნებათ მიდამოს ზემოთ მოყვანილი თვისებები. X ტოპოლოგიურ სივრცეში.

ეთქვათ $A \subset X$ რაიმე ქვესიმრავლეა X ტოპოლოგიურ სივრცეში.

განვიხილოთ მისი ქვესიმრავლეების ოჯახი $T(A) = \{O_A \subset A \mid O_A = O \cap A, O \in T(X)\}$. ამ ოჯახს აქვს შემდეგი თვისებები:

1. $\emptyset \in T(A)$.

2. $A \in T(A)$.

3. თუ $O_A' \in T(A), O_A'' \in T(A)$, მაშინ $O_A' \cap O_A'' \in T(A)$.

4. თუ $O_A \in T(A), i \in I$, სადაც I ინდექსთა რაიმე სიმრავლეა, მაშინ $\bigcup_i O_A \in T(A)$.

პირველი ორი თვისება ცხადია. $O_1' \cap O_2' = (O_1 \cap A) \cap (O_2 \cap A) = (O_1 \cap O_2) \cap A \in T(A)$. რადგან $O_1, O_2 \in T(X)$. $O_1 \cap O_2 \in T(X)$. $\cup O_1' = \cup (O_1 \cap A) = (\cup O_1) \cap A \in T(A)$. რადგან $O_i \in T(X)$, $\cup O_i \in T(X)$.

ამგვარად, $T(A)$ ოჯახ აქვს ყველა ის თვისება რაც უნდა ჰქონდეს ტოპოლოგიურ სტრუქტურას $A \subset X$ სიმრავლეში. $\tau_A = T(A)$ ტოპოლოგიურ სტრუქტურას უწოდებენ $\tau = T(X)$ ტოპოლოგიური სტრუქტურით ინდუცირებულ ტოპოლოგიურ სტრუქტურას A ქვესიმრავლეში. ხოლო წყვილს (A, τ_A) უწოდებენ (X, τ) ტოპოლოგიური სივრცის ქვესივრცეს.

§ 2. ტოპოლოგიური ოპერაციები

ვთქვათ. $A \subset X$ რაიმე ქვესიმრავლეა X ტოპოლოგიურ სივრცეში, $x \in X$ წერტილს ეწოდება A ქვესიმრავლის *შეხების წერტილი*, თუ მისი ნებისმიერი მიდამო $U(x)$ პკვეთს მოცემულ ქვესიმრავლეს.

$x \in A$ წერტილს ეწოდება A ქვესიმრავლის *ზღვართი წერტილი* თუ x -ის ნებისმიერი მიდამო შეიცავს A -ს ერთ წერტილს მაინც, რომელიც განსხვავდება x წერტილისაგან.

$x \in A$ წერტილს ეწოდება A ქვესიმრავლის *იზოლირებული წერტილი* თუ არსებობს მისი ისეთი მიდამო, რომელიც შეიცავს მხოლოდ x წერტილს.

$A \subset X$ ქვესიმრავლის ყველა შეხების წერტილთა სიმრავლეს ეწოდება A ქვესიმრავლის *ჩაკეტვა* X ტოპოლოგიურ სივრცეში. A ქვესიმრავლის ჩაკეტვა აღინიშნება ასე $\overline{A}$ ცხადია $A \subset \overline{A}$

თეორემა 2.1. ქვესიმრავლეთა ჩაკეტვას X ტოპოლოგიურ სივრცეში აქვს შემდეგი თვისებები:

$$1. \overline{\emptyset} = \emptyset.$$

$$2. \overline{X} = X$$

$$3. \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$4. \overline{\overline{A}} = \overline{A}.$$

დამტკიცება: 1. ცხადია. 2. X ტოპოლოგიურ სივრცის ყველა წერტილი მისი შეხების წერტილია, სხვაშეხების წერტილები თავის შიგნით მას არ გააჩნია, ამიტომ $\overline{X} = X$

3. ვთქვათ, $x \in \overline{A \cup B}$, მაშინ მისი ნებისმიერი მიდამო პკვეთს $A \cup B$ სიმრავლეს. ესეიგი პკვეთს ან A -ს ან B -ს. შეიძლება დავუშვათ, რომ ორი მიდამოდან $U(x), V(x)$ ერთი პკვეთს მხოლოდ ერთ ქვესიმრავლეს, მეორე მხოლოდ მეორეს. ამ მიდამოთა თანაკვეთა $U(x) \cap V(x)$ ასევე მიდამოა x წერტილის, თუ $U(x) \cap V(x)$ პკვეთს A -ს, მაშინ x იქნება მისი შეხების

წერტილი და $x \in \overline{A \cup B}$. თუ $U(x) \cap V(x)$ აკვეთს B -ს, მაშინ x იქნება მისი შეხების

წერტილი და $x \in \overline{A \cup B}$. თუ x -ის ყველაზღვრით არსებობს A და B ქვესიმრავლეს კვეთს

ან მხოლოდ ერთ მსოფლიან, მაშინაც $x \in \overline{A \cup B}$ მაშასადამე, $\overline{A \cup B} \subset \overline{A \cup B}$

ეთქვას, $x \in \overline{A \cup B}$, მაშინ x იქნება ან A -ს ან B -ს შეხების წერტილი. ეს კი ნიშნავს

იმას, რომ x იქნება $A \cup B$ ქვესიმრავლის შეხების წერტილი, $x \in \overline{A \cup B}$ და მაშასადამე,

$\overline{A \cup B} \subset \overline{A \cup B}$. საბოლოოდ კი გვექნება $\overline{A \cup B} = \overline{A \cup B}$

4. $\overline{A \subset A}$ ვაჩვენოთ პირიქით. ეთქვას, $x \in \overline{A}$, მაშინ x -ის ნებისმიერი მიდამო აკვეთს $\overline{A}$ ქვესიმრავლეს. დაუშვათ არსებობს x -ის ისეთი მიდამო, რომელიც არ აკვეთს A ქვესიმრავლეს, მაშინ არსებობს x -ის ასეთი ღია მიდამოც $U(x)$. ეს ღია მიდამო აკვეთს $\overline{A}$ ქვესიმრავლეს. ეთქვას, $y \in U(x) \cap \overline{A}$, $U(y)$ მიდამოა y წერტილისთვისაც, ამასთან y შეხების წერტილია A ქვესიმრავლისათვის და ამიტომ მისი ყოველი მიდამო, მათ შორის $U(x)$ -ც აკვეთს A ქვესიმრავლეს. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $x \in \overline{A}$, მაშასადამე, $\overline{A} \subset \overline{A}$. აქედან საბოლოოდ

გვექნება: $\overline{A} = \overline{A}$. თეორემა დაბრუნდა.

თეორემა 22. თუ $A \subset X$ მაშინ, $\overline{A}$ ჩაკეტილი სიმრავლეა X ტოპოლოგიურ სივრცეში.

დამტკიცება: ეთქვას, B იმ წერტილების სიმრავლეა, რომლებიც არ წაერთმეოვნენ A ქვესიმრავლის შეხების წერტილებს. ყოველ ასეთ წერტილს გააჩნია ღია მიდამო, რომელიც არ აკვეთს A ქვესიმრავლეს. ამ მიდამოების თანაკვეთა $\bigcup U_x(x)$ ტოლია B ქვესიმრავლის,

ამიტომ B ღიაა. აქედან გამომდინარე, მისი დახატება $\overline{A}$ იქნება ჩაკეტილი. თეორემა დაბრუნდა.

თეორემა 23. $A \subset X$ ქვესიმრავლის ჩაქცევა არის მინიმალური ყველა იმ სიმრავლეთა შორის, რომლებიც მოიცავენ A -ს.

დამტკიცება: $\overline{A}$ -ს მინიმალურობა ნიშნავს იმას, რომ იგი შედის ყველა აღნიშნული ტიპის ჩაკეტილ ქვესიმრავლეში. დაუშვათ საწინააღმდეგო, ეთქვას, F ისეთი ჩაკეტილი

ქვესიმრავლეა, რომ $A \subset F \subset A \cup F$, მაშინ არსებობს $x \in \overline{A} \wedge x \notin F$. F ჩაკეტილია, ამიტომ, ვინაიდან ჩაკეტილი ქვესიმრავლის ყველა შეხების წერტილი მას ეკუთვნის x არაა მისი შეხების წერტილი. აქედან გამომდინარე, x არც A ქვესიმრავლის შეხების წერტილია.

ამგვარად მივიღეთ წინააღმდეგობა, მაშასადამე, ჩვენი დაშვება არ არის სწორი და $\overline{A}$ იქნება მინიმალური. თეორემა დაბრუნდა.

$\overline{A}$ ქვესიმრავლის აგებას ჩაკეტვის ტოპოლოგიური ოპერაცია ეწოდება. $x \in A$ წერტილს ეწოდება A სიმრავლის **დაგროვების წერტილი**, თუ $x \in A \setminus \{x\}$. A სიმრავლის დაგროვების წერტილთა ერთობლიობას აღნიშნავენ ასე: A' ამ სიმრავლეს ხშირად A სიმრავლის წარმოებულ სიმრავლეს უწოდებენ.

$A \subset X$ ქვესიმრავლის შიგა წერტილი X ტოპოლოგიურ სივრცეში ეწოდება მის ისეთ x ელემენტს, რომელსაც გააჩნია ისეთი მდამო $U(x)$, რომელიც მთლიანად შედის A ქვესიმრავლეში, ანუ $U(x) \subset A$.

$A \subset X$ ქვესიმრავლის შიგა ნაწილი X ტოპოლოგიურ სივრცეში, ეწოდება მისი შიგა წერტილების სიმრავლეს, A ქვესიმრავლის შიგა ნაწილი აღინიშნება ასე $Int A$ ცხადია $Int A \subset A$.

თეორემა 2.4. ქვესიმრავლეთა შიგა ნაწილს ტოპოლოგიურ სივრცეში აქვს შემდეგი თვისებები:

$$1. \emptyset = Int \emptyset.$$

$$2. X = Int X$$

$$3. Int(A \cap B) = Int A \cap Int B.$$

$$4. Int Int A = Int A.$$

დამტკიცება: 1. ცხადია. 2. X ღია ქვესიმრავლეა X ტოპოლოგიურ სივრცეში, ამიტომ იგი თავისი ყველა წერტილის მდამოა, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $X = Int X$ 3. ვთქვათ, $a \in Int(A \cap B)$, მაშინ არსებობს $U(x)$, რომელიც შედის ქვესიმრავლეში $A \cap B$. აქედან კი გამოდინარეობს, რომ $U(x) \subset A \wedge U(x) \subset B$. ეს კი თავის მხრივ იმას ნიშნავს, რომ $x \in Int A, x \in Int B$, ანუ $x \in Int A \cap Int B$. მაშასადამე

$Int(A \cap B) \subset Int A \cap Int B$. ვთქვათ ესლა $x \in Int A \cap Int B$, მაშინ არსებობს $U(x)$, ისეთი რომ $U(x) \subset Int A \wedge U(x) \subset Int B$. ამის გამო $U(x) \subset Int A \cap Int B$. ვინაიდან $Int A \subset A, Int B \subset B$, ამიტომ $Int A \cap Int B \subset A \cap B$. ყოველივე ამის გამო $x \in Int(A \cap B)$. მაშასადამე, $Int A \cap Int B \subset Int(A \cap B)$. საბოლოოდ კი გვექნება:

$Int(A \cap B) = Int A \cap Int B$. 4. $Int Int A \subset Int A$. ვთქვათ $x \in Int A$, მაშინ არსებობს $U(x)$, რომელიც მთლიანად შედის A ქვესიმრავლეში. განვიხილოთ გაერთიანება $\bigcup U_x(x)$,

$\bigcup U_x(x) \subset Int A \wedge Int A \subset \bigcup U_x(x)$, ამიტომ $\bigcup U_x(x) = Int A$ აქედან გამოდინარეობს შედეგი: $Int A$ ღია სიმრავლეა. ღია სიმრავლი ყველა წერტილი კი მისი შიგა წერტილია, ამიტომ $x \in Int Int A$. მაშასადამე $Int A \subset Int Int A$ საბოლოოდ კი გვექნება $Int Int A = Int A$. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 2.5. $Int A$ მაქსიმალური ქვესიმრავლეა A -ს ყველა ღია ქვესიმრავლეთა შორის.

დამტკიცება: $Int A$ -ს მაქსიმალურობა ნიშნავს იმას, რომ იგი მოიცავს A -ს ყველა ღია ქვესიმრავლეს, მართლაც, ვთქვათ $\bigcup O_\alpha$ არის A -ს ყველა ღია ქვესიმრავლეთა გაერთიანება, იგი ცხადია მაქსიმალური ღია ქვესიმრავლეა A სიმრავლეში, $\bigcup U_\alpha(x) = Int A$ ასევე ღია ქვესიმრავლეა და ცხადია, $\bigcup U_\alpha(x) = Int A \subset \bigcup O_\alpha$. თუ $x \in \bigcup O_\alpha$, მაშინ $x \in O_\alpha$, რომელიც α -სათვის. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $x \in Int A$. ასახადამე, $\bigcup O_\alpha \subset Int A$. საბოლოოდ გვექნება

$\bigcup O_\alpha = Int A$. თეორემა დამტკიცდა.

ტოპოლოგიურ სივრცეში A ქვესიმრავლის შიგა ნაწილის აგებას Int ანუ შიგა ნაწილის აღების ტოპოლოგიური ოპერაცია ეწოდება.

$\overline{A \setminus IntA} = FrA$ ქვესიმრავლეს A ქვესიმრავლის საზღვარი ეწოდება.

თეორემა 2.6. FrA ნაკეტილი ქვესიმრავლეა.

დამტკიცება: ქვესიმრავლე $X \setminus FrA = X \setminus (\overline{A \setminus IntA}) = (X \setminus \overline{A}) \cup IntA$, ვინაიდან $\overline{A}$ ნაკეტილია და $IntA$ ღია, არის ღია. მაშასადამე FrA ნაკეტილი ქვესიმრავლეა. თეორემა დამტკიცდა.

A ქვესიმრავლეს ეწოდება ყველგან მკერძი X ტოპოლოგიურ სივრცეში თუ $\overline{A} = X$. A ქვესიმრავლეს ეწოდება არსად მკერძი X ტოპოლოგიურ სივრცეში, თუ $\overline{X \setminus A} = X$.

$B \subset X$ ქვესიმრავლეს ეწოდება ყველგან მკერძი $A \subset X$ ქვესიმრავლეში თუ $\overline{A \cap B} = \overline{B}$.

$B \subset X$ ქვესიმრავლეს ეწოდება არსად მკერძი $A \subset X$ ქვესიმრავლეში, თუ $\overline{A \cap B} \subset B$.

$A \subset X$ სიმრავლეს უწოდებენ თავის თავში მკერძს თუ $\overline{A} = A'$ ნაკეტილ, თავისთავში მკერძ სიმრავლეს სრულყოფილი სიმრავლე ეწოდება. სიმრავლეს, რომელიც არ შეიცავს არცერთ არაცარიელ, თავისთავში მკერძ სიმრავლეს გაიშვიათებულ სიმრავლეს უწოდებენ.

ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება სეპარაბელური, თუ იგი შეიცავს ყველგან მკერძ, თელად ქვესიმრავლეს. მაგალითად, R რიცხვითი ღერძი სეპარაბელური სივრცეა $Q \subset R$ ყველგან მკერძი რაციონალურ რიცხვთა შესაბამის წერტილთა ყველგან მკერძი ქვესიმრავლით.

ბორელის სიმრავლეები. ბორელის სიმრავლეთა ოჯახი X ტოპოლოგიურ სივრცეში ეწოდება ამ სივრცის ქვესიმრავლეთა ისეთ უმცირეს Σ ოჯახს რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

B1. Σ ოჯახი შეიცავს X სივრცის ყველა ღია ქვესიმრავლეს.

B2. თუ $A \in \Sigma$, მაშინ $X \setminus A \in \Sigma$

B3. თუ $A_i \in \Sigma; i = 1, 2, 3, \dots$, მაშინ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$.

ისეთი უმცირესი Σ ოჯახის არსებობა X ტოპოლოგიურ სივრცეში, რომელიც აკმაყოფილებს მოყვანილ პირობებს გამომდინარეობს იქედან, რომ ყველა ისეთი ოჯახის თანაკრება, რომელიც ამ პირობებს აკმაყოფილებს. წარმოადგენს ასევე პირობების დამაკმაყოფილებელ ოჯახს.

ცხადია, რომ ბორელის სიმრავლეთა ოჯახი შეიძლება განვსაზღვროთ ასედაც: ბორელის სიმრავლეთა ოჯახი X ტოპოლოგიურ სივრცეში ეწოდება ამ სივრცის ქვესიმრავლეთა ისეთ უმცირეს Σ ოჯახს რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

B'1. Σ ოჯახი შეიცავს X სივრცის ყველა ნაკეტილ ქვესიმრავლეს.

B'2. თუ $A \in \Sigma$, მაშინ $X \setminus A \in \Sigma$

B'3. თუ $A_i \in \Sigma; i = 1, 2, 3, \dots$, მაშინ $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$.

ისმის ასეთი კითხვა: არსებობენ თუ არა X ტოპოლოგიურ სივრცეში ისეთი სიმრავლეები, რომლებიც არ წარმოადგენენ ბორელის სიმრავლეებს? ცხადია ამ კითხვაზე პასუხი

დამოკიდებულია X სივრცეზე. მაგალითად, ღისკრეტული ტოპოლოგიური სივრცის ყველა ქვესიმრავლე ბორელისაა, ანტიდისკრეტული ტოპოლოგიური სივრცის არცერთი საკუთრივი ქვესიმრავლე კი ბორელის სიმრავლე არ არის.

ბორელის სიმრავლეებს შორის აღსანიშნავია სიმრავლეები რომლებიც წარმოადგენენ

ღია სიმრავლეების თვალად თანაკეთებს, ან ჩაკეტილი სიმრავლეების თვალად გაერთიანებებს. პირველი ტიპის სიმრავლეები იწოდებიან G_f -*სიმრავლეებად*, მეორე ტიპის სიმრავლეები იწოდებიან F_g -*სიმრავლეებად*.

ადვილია დაგამტკიცოთ, რომ ორი G_f -სიმრავლის გაერთიანება ასევე G_f -სიმრავლეა; ორი F_g -სიმრავლის თანაკეთა ასევე F_g -სიმრავლეა.

ასევე ადვილია ვაჩვენოთ, რომ: F_g -სიმრავლეთა თვალადი გაერთიანება ასევე F_g -სიმრავლეა; G_f -სიმრავლეთა თვალადი თანაკეთა ასევე G_f -სიმრავლეა.

ტოპოლოგიურ სივრცეს უწოდებენ *სრულყოფილ ტოპოლოგიურ სივრცეს*, თუ მისი ყოველი ჩაკეტილი ქვესიმრავლე G_f -სიმრავლეა.

§3. ტოპოლოგიური სივრცის ბაზა

და წინა ბაზა

ღია ქვესიმრავლეთა ოჯახის, $B(X) = \{B_\alpha\}$, X ტოპოლოგიურ სივრცეში ეწოდება ამ *სივრცის* ბაზა, თუ ყოველი $O \in T(X)$ ღია ქვესიმრავლე წარმოდგინდება ასე $O = \bigcup_{\alpha} B_\alpha$, $B_\alpha \in B(X)$,

ანუ მოცემული სივრცის ყველა ღია ქვესიმრავლე წარმოადგენს აღნიშნული ოჯახის ელემენტთა გაერთიანებას.

თეორემა 3.1. იმისათვის, რომ $B(X) = \{B_\alpha\}$ იყოს X ტოპოლოგიურ სივრცეში ბაზა,

აუცილებელი და საკმარისია ყოველი $x \in X$ წერტილისა და მისი მომცემი ღია $O \in T(X)$

ქვესიმრავლისათვის არსებობდეს $B_\alpha \in B(X)$ ელემენტი, ისეთი, რომ $x \in B_\alpha \subset O$.

დამტკიცება: ჯერ დაემატვით პირობის აუცილებლობა.

ყოველთა, $B(X) = \{B_\alpha\}$ ბაზაა, მაშინ $O = \bigcup_{\alpha} B_\alpha$, $B_\alpha \in B(X)$, აქედან გამომდინარეობს, რომ $x \in B_\alpha \subset O$, $B_\alpha \in B(X)$ აუცილებლობა დამტკიცდა.

ახლა დაგამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის არსებული $B_\alpha \in B(X)$ ელემენტი აღვნიშნოთ B_α , ითგანვიხილოთ $\bigcup_{\alpha} B_\alpha$, $x \in O$. იგი ცხადია ემთხვევა O .

მაშასადამე O წარმოადგენს $B(X) = \{B_\alpha\}$ -ს ელემენტების გაერთიანებას. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 3.2 თუ $B(X) = \{B_\alpha\}$ ბაზაა X ტოპოლოგიურ სივრცეში მაშინ მას აქვს შემდეგი

თვისებები: 1. $X = \bigcup_{\alpha} B_\alpha$, 2. თუ $x \in B_\alpha$, $\cap B_\alpha$, მაშინ არსებობს B_α , ისეთი, რომ

$x \in B_\alpha \subset B_\alpha \cap B_\alpha$.

დამტკიცება: $X \in T(X)$, ამიტომ პირველი თვისება ცხადია.

რაც შეეხება მეორე თვისებას, $B_\alpha \cap B_\alpha$ ღია ქვესიმრავლეა, ამიტომ $B_\alpha \cap B_\alpha = \bigcup_{\alpha} B_\alpha$, $x \in B_\alpha$,

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $B_\alpha \subset B_\alpha \cap B_\alpha$. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 3.3. თუ $B(X) = \{B_\alpha\}$ ქვესიმრავლეთა ისეთი ოჯახია X სიმრავლეში, რომელსაც აქვს თვისებები: 1. $X = \bigcup_{\alpha} B_\alpha$, 2. თუ $x \in B_{\alpha_1} \cap B_{\alpha_2}$, მაშინ არსებობს B_{α_3} , ისეთი, რომ

$x \in B_{\alpha_3} \subset B_{\alpha_1} \cap B_{\alpha_2}$, მაშინ არსებობს ერთადერთი ტოპოლოგიური სტრუქტურა X სიმრავლეში, რომლის ბაზისაც წარმოადგენს მოცემული ოჯახი.

დამტკიცება: განვიხილოთ ოჯახი $T(X) = \{ \bigcup_{\alpha} B_\alpha \mid B_\alpha \in B(X) \}$. ეს ოჯახი წარმოადგენს

ტოპოლოგიურ სტრუქტურას, მართლაც, პირველი თვისების გამო $X \in T(X)$. $\Theta = \bigcup_{j \in \Theta} B_j$,

ამიტომ $\Theta \in T(X)$. ასევე, თუ $O_j = \bigcup_{\alpha_j} B_{\alpha_j} \in T(X)$, $j \in A$, მაშინ $\bigcup_j O_j = \bigcup_j \bigcup_{\alpha_j} B_{\alpha_j} \in T(X)$. ასევე,

თუ $O_1 = \bigcup_{\alpha_1} B_{\alpha_1}$, $O_2 = \bigcup_{\alpha_2} B_{\alpha_2}$, მაშინ $O_1 \cap O_2 = \bigcup_{\alpha_1} B_{\alpha_1} \cap \bigcup_{\alpha_2} B_{\alpha_2} = \bigcup_{\alpha_1, \alpha_2} B_{\alpha_1} \cap B_{\alpha_2}$, აქედან, თუ $x \in O_1 \cap O_2$,

მაშინ $x \in B_{\alpha_1} \cap B_{\alpha_2}$, $B(X) = \{B_\alpha\}$ ოჯახის მეორე თვისების ძალით არსებობს $B_x \subset B_{\alpha_1} \cap B_{\alpha_2}$,

ისეთი, რომ $B_x \in B(X)$, $x \in B_x$. $\bigcup_{x \in O_1 \cap O_2} B_x = O_1 \cap O_2$, მაშასადამე, $O_1 \cap O_2 \in T(X)$. ტოპოლოგიური

სტრუქტურის ერთადერთობა ცხადია. თეორემა დამტკიცდა.

ქვესიმრავლეების ოჯახს, $PB(X) = \{F_\beta\}$, X ტოპოლოგიურსიცევში ეწოდება **წინაბაზა**, თუ

მისი ბაზის $B(X) = \{B_\alpha\}$ ყოველი ელემენტი $B_\alpha = \bigcap_{i=1}^{n_\alpha} F_{\beta_i}$, სადაც n_α რაიმე ნატურალური რიცხვია

თეორემა 3.4. თუ $PB(X) = \{F_\beta\}$, ქვესიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახია X სიმრავლეში, მაშინ არსებობს ისეთი ერთადერთი ტოპოლოგიური სტრუქტურა ამ სიმრავლეში, რომლის წინაბაზისაც წარმოადგენს ეს ოჯახი.

დამტკიცება: ვთქვათ $T(X) = \{O \subset X \mid O = \bigcup_{\alpha} \bigcap_{i=1}^{n_\alpha} F_{\beta_i}, F_{\beta_i} \in PB(X)\}$. ვაჩვენოთ, რომ ეს

ოჯახი წარმოადგენს ტოპოლოგიურ სტრუქტურას, მართლაც, X სიმრავლე სეიძლება წარმოადგინოთ როგორც $PB(X) = \{F_\beta\}$ ოჯახის ცარიელი ქვესიმრავლის ელემენტების თანაკვეთა, ამიტომ $X \in T(X)$. ცარიელი სიმრავლე ცხადია, ეკუთვნის $T(X)$ ოჯახს.

თუ $O_1 = \bigcup_{\alpha_1} \bigcap_{i=1}^{n_{\alpha_1}} F_{\beta_i}$, $O_2 = \bigcup_{\alpha_2} \bigcap_{i=1}^{n_{\alpha_2}} F_{\beta_i} \in T(X)$, მაშინ $O_1 \cap O_2 = \bigcup_{\alpha_1} \bigcap_{i=1}^{n_{\alpha_1}} F_{\beta_i} \cap \bigcup_{\alpha_2} \bigcap_{i=1}^{n_{\alpha_2}} F_{\beta_i} = \bigcup_{\alpha_1, \alpha_2} \bigcap_{i=1}^{n_{\alpha_1} + n_{\alpha_2}} F_{\beta_i}$

სადაც $\lambda = \alpha_1$, თუ $i \leq n_{\alpha_1}$, და $\lambda = \alpha_2$, თუ $n_{\alpha_1} < i \leq n_{\alpha_1} + n_{\alpha_2}$, აქ ყოველი $F_{\beta_i} \in PB(X)$, ამიტომ $O_1 \cap O_2 \in T(X)$.

თუ $O_l = \bigcup_{i=1}^{n_l} F_{\beta_i} \in T(X)$, $l \in A$, სადაც A ინდექსთა რაღაც სიმრავლეა, მაშინ

$$\bigcup_l O_l = \bigcup_l \bigcup_{i=1}^{n_l} F_{\beta_i} = \bigcup_{j=1}^{n_j} F_{\beta_j}$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\bigcup_i O_i \in T(X)$. ტოპოლოგიური სტრუქტურის ერთადერთობა ცხადია.

თეორემა დამტკიცდა.

3.2. თეორემით განისაზღვრება ის პირობები რასაც უნდა აკმაყოფილებდეს ქვესიმრავლეა ოჯახი, რომ ისიცოცხლებას.

ქვესიმრავლეა ყველა ოჯახი სიმრავლეში ვერ იქნება რომელიმე ტოპოლოგიური სტრუქტურის ბაზა ამ სიმრავლეში, სხვანაირად არის საქმე წინაბაზის შემთხვევაში, როგორც 3.4 თეორემა გვიჩვენებს. ქვესიმრავლეა ნებისმიერი ოჯახი შეიძლება იყოს წინაბაზა რომელიმე ტოპოლოგიური სტრუქტურისა მოცემულ სიმრავლეში.

ეთქვან, $\{U_\alpha(x)\}$ x წერტილის მიდამოთა ოჯახია X ტოპოლოგიურ სივრცეში. ვუწოდოთ ამ ოჯახს x წერტილის მიდამოთა ფუნდამენტური სისტემა, თუ ამ წერტილის ნებისმიერი $U(x)$ მიდამოსათვის არსებობს $U_\alpha(x) \in \{U_\alpha(x)\}$ მიდამო ისეთი, რომ $U_\alpha(x) \subset U(x)$. ვიტყვი, რომ X ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს თელადობის პირველ აქსიომას, თუ მის ყველა წერტილს გააჩნია მიდამოთა თელადი ფუნდამენტური სისტემა.

ვიტყვი, რომ X ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს თელადობის მეორე აქსიომას, თუ მას გააჩნია თელადი ბაზა

თეორემა 3.3. თუ X ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს თელადობის მეორე აქსიომას, მაშინ ის აკმაყოფილებს თელადობის პირველ აქსიომასაც.

დამტკიცება. განვიხილოთ X ტოპოლოგიური სივრცის დაფიქსირებულ თელად ბაზაში შემავალი უფრო ის ღია ქვესიმრავლე, რომელიც მოიცავს რაიმე $x \in X$ წერტილს. ეს ღია სიმრავლეები წარმოადგენენ ამ წერტილის მიდამოებს, მათი რაოდენობა თელადია თეორემის პირობით. 3.1. თეორემის ძალით, თუ $x \in O$ რაიმე ღია ქვესიმრავლეა, მაშინ არსებობს x წერტილის მომცემი დაფიქსირებული ბაზიდან V სიმრავლე ისეთი, რომ $V \subset O$. წერტილის ნებისმიერი მიდამო კი შეიცავს ამ წერტილის მომცემელ ღია სიმრავლეს. ს კი ამტკიცება თეორემა.

ყველა სივრცე არ აკმაყოფილებს თელადობის პირველ ან მეორე აქსიომას, მაგალითად დისკრეტული სივრცე რომლის წერტილების სიმრავლეც არათელადია.

ასახვას, $f: N \rightarrow X$, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლიდან X ტოპოლოგიურ სივრცეში ეწოდება წერტილთა მიმდევრობა ამ სივრცეში.

უაქტიურად მიმდევრობა X ტოპოლოგიურ სივრცეში ეს არის ამ სივრცის წერტილების ნატურალური რიცხვებით გადანომრილი ერთობლიობა: $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\} = \{x_n\}$. მ ერთობლიობის ელემენტებს მიმდევრობის წევრები ეწოდებათ. $\{x_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი ეწოდება მიმდევრობის ზღვარი ეწოდება X ტოპოლოგიური სივრცის ისეთ x წერტილს, რომლის ნებისმიერი მიდამო $U(x)$ მოიცავს მოცემული მიმდევრობის ყველა წევრს დაწყებული რაიმე x_{n_0} წევრიდან.

იმდევრობის ზღვარი აღინიშნება ასე: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

თეორემა 3.5. თუ X ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს თელადობის პირველ აქსიომას და $A \subset X$; $x_0 \in \bar{A}$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც x_0 წარმოადგენს A ქვესიმრავლის წერტილებისაგან შედგენილი მიმდევრობის ზღვარს.

დამტკიცება: პირობის საკმარისობა პირდაპირ გამომდინარეობს ზღერის განსაზღვრებიდან. რაც შეეხება პირობის აუცილებლობას, ვთქვათ, $x_0 \in \bar{A}$, თუ $x_0 \in A$, მაშინ მუდმივი მიმდევრობის $\{x_n = x_0\}$ ზღვარია x_0 , ამ შემთხვევაში პირობის აუცილებლობა დამტკიცებული იქნება. თუ $x_0 \in \bar{A} \setminus A$ და $\{U_n(x_0)\}$ წარმოადგენს x_0 წერტილის მიდამოთა ფუნდამენტურ სისტემას, მაშინ მიმდევრობა, მაშინ $\{x_n\}$ მიმდევრობის, სადაც $x_n \in A \cap U_n(x_0)$ ზღვარი იქნება x_0 . მართლაც, თუ ზოგადობის დაურღვევლად დავუშვებთ, რომ $U_{n+1}(x_0) \subset U_n(x_0)$, მაშინ x_0 ნებისმიერი $V(x_0)$ მიდამო $\{x_n\}$ მიმდევრობის ყველა წევრს დაწყებულს რაიმე x_{n_0} წვერიდან რადგან $U_n(x_0)$ ჩვენი მიმდევრობის ყველა წევრს მოიცავს დაწყებულს x_n წვერიდან. თეორემა დამტკიცდა.

§ 4. უწყვეტი ასახვები

ასახვას $f: X \rightarrow Y$ X ტოპოლოგიური სივრციდან Y ტოპოლოგიურ სივრცეში ეწოდება **უწყვეტი ასახვა**, თუ ყოველი $O \subset Y$ ღია ქვესიმრავლისათვის $f^{-1}(O)$ ღიაა X ტოპოლოგიურ სივრცეში.

სახვის უწყვეტობა შეიძლება განისაზღვროს ასეც:

ასახვას $f: X \rightarrow Y$ X ტოპოლოგიური სივრციდან Y ტოპოლოგიურ სივრცეში ეწოდება **უწყვეტი ასახვა**, თუ ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის და $f(x)$ წერტილის ყოველი $U(f(x))$ მიდამოსათვის არსებობს $x \in X$ წერტილის ისეთი მიდამო $U(x)$ რომ $f(U(x)) \subset U(f(x))$.

წყვეტობის ეს განსაზღვრებები ერთმანეთის ეკვივალენტურია. მართლაც, თუ ასახვა უწყვეტია პირველი განსაზღვრებით, $x \in X$ და $U(f(x))$ $f(x)$ -ის ნებისმიერი მიდამო (ზოგადობის დაურღვევლად შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ იგი ღიაა), მაშინ $f^{-1}(U(f(x)))$ იქნება ღია, იგი წარმოადგენს $x \in X$ წერტილის მიდამოს და $f(f^{-1}(U(f(x)))) \subset U(f(x))$. ეს სკი იმას ნიშნავს, რომ ასახვა უწყვეტია მეორე განსაზღვრებით.

გაჩვენოთ პირიქით, ვთქვათ, ასახვა უწყვეტია მეორე განსაზღვრებით, მაშინ თუ $O \subset Y$ ღიაა იგი მიდამოა ყოველი $f(x)$ წერტილისა, სადაც $x \in f^{-1}(O)$. ყოველი $x \in f^{-1}(O)$ წერტილისათვის და $f(x)$ წერტილის ყოველი O მიდამოსათვის არსებობს მიდამო $U(x)$, ისეთი, რომ $f(U(x)) \subset O$. განვიხილოთ $\bigcup_{x \in f^{-1}(O)} U(x)$ იგი ღიაა ქვესიმრავლეა X სივრცეში და $f^{-1}(O) = \bigcup_{x \in f^{-1}(O)} U(x)$. მაშასადამე უწყვეტია პირველი განსაზღვრებითაც.

ცხადია პირველი განსაზღვრების ეკვივალენტური იქნება უწყვეტობის ასეთი განსაზღვრებაც: ასახვას $f: X \rightarrow Y$, X ტოპოლოგიური სივრციდან Y ტოპოლოგიურ სივრცეში ეწოდება.

უწყვეტი, თუ ყოველი ჩაკეტილი $F \subset Y$ ქვესიმრავლისათვის $f^{-1}(F) \subset X$ ჩაკეტილი ქვესიმრავლეა X ტოპოლოგიურ სივრცეში.

უწავებ ასახვათა კომპოზიცია უწყვეტი ასახვაა, მართლაც, თუ $h: X \rightarrow Z$ წარმოადგენს $f: X \rightarrow Y \wedge g: Y \rightarrow Z$ უწყვეტი ასახვების კომპოზიციას, ანუ $h = f \circ g$ $h(x) = g(f(x))$ და $O \subset Z$ ღია ქვესიმრავლეა, მაშინ $g^{-1}(O)$ ღია იქნება Y სივრცეში, $f^{-1}(g^{-1}(O))$ კი ღია იქნება X სივრცეში. საბოლოოდ $h = f \circ g$ იქნება უწყვეტი.

უწყვეტ $f: X \rightarrow Y$ ასახვას X ტოპოლოგიური სივრციდან Y ტოპოლოგიურ სივრცეში ეწოდება ღია ასახვას, თუ ყოველი $O \subset X$ ღია სიმრავლისთვის $f(O) \subset Y$ ღია სიმრავლეა.

უწყვეტ $f: X \rightarrow Y$ ასახვას, X ტოპოლოგიური სივრციდან Y ტოპოლოგიურ სივრცეში ეწოდება ჩაკეტილი ასახვას, თუ ყოველი $F \subset X$ ჩაკეტილი სიმრავლისთვის $f(F) \subset Y$ ჩაკეტილი სიმრავლეა.

$f: X \rightarrow Y$ ასახვას, X ტოპოლოგიური სივრციდან Y ტოპოლოგიურ სივრცეში ეწოდება პოშუპოროფიზმი, თუ იგი ურთიერთსაღივსაა და უწყვეტია თავის შებრუნებულ $f^{-1}: Y \rightarrow X$ ასახვასთან ერთად.

აღვიწილი საჩვენებელია, რომ ყოველი ურთიერთცალსახა, უწყვეტი, ღრია ასახვა პოშუპოროფიზმი იქნება.

პოშუპოროფიზმი იქნება აგრეთვე ურთიერთცალსახა, უწყვეტი, ჩაკეტილი ასახვაც.

ორ ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება პოშუპოროფუელი, თუ მათშიორის არსებობს პოშუპოროფიზმი.

ცხადია, სივრცეთა პოშუპოროფუელობა ექვივალენტობის მიმართებაა.

ამ თვისებას, რომელიც ხაერტოთა პოშუპოროფუელი ტოპოლოგიური სივრცეებისათვის ტოპოლოგიური ინვარიანტ ეწოდება.

მაგალითად, სივრცეთა ღრია, ჩაკეტილობა და ანტიდისკრეტულობა ტოპოლოგიური ინვარიანტებია.

ნათვარტიყის დარგი ტოპოლოგია შეისწავლის ტოპოლოგიურ ინვარიანტებს.

ასახვას $f: A \rightarrow X$, თუ იგი უწყვეტია და $f: A \rightarrow f(A)$ პოშუპოროფიზმია, პოშუპოროფუელი ჩაკეტილი ეწოდება.

თუ $f: A \rightarrow X$, $A \subset X$, $f(x) = x$, როდესაც $x \in A$. მაშინ მას იგივეური ჩაკეტილი ეწოდება.

თუ $A \subset X$, და $f: X \rightarrow A$ ასახვა ისეთია, რომ $I \circ f = I$, სადაც $I: A \rightarrow X$ იგივეური ჩაკეტილია, მაშინ მას რეტრაქტია, ხოლო $A \subset X$ ქვესიმრავლეს რეტრაქტი ეწოდება.

§ 5. მეტრიკული სტრუქტურა, მეტრიკული სივრცე

უთქვამთ, X რაიმე სიმრავლეა, $d: X \times X \rightarrow R^+$ ასახვას, სადაც $R^+ = \{t \in R \mid t \geq 0\}$ არაუარყოფით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა, ეწოდება მეტრიკულ სტრუქტურას X სიმრავლეში, თუ მას აქვს შემდეგი თვისებები:

$$1. d(x, x) = 0.$$

$$2. d(x, y) = d(y, x).$$

$$3. d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (\text{ანუ } d(x, y) = 0, \text{ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც } x = y).$$

$$4. d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z).$$

X სიმრავლეს $d: X \times X \rightarrow R^+$ მეტრიკული სტრუქტურით *მეტრიკული სივრცე* ეწოდება. იგი აღინიშნება $(X; d)$ წყვილის სახით, სადაც d მეტრიკული სტრუქტურაა

განივილით მეტრიკული სივრცის მაგალითები:

1. (R, d) , სადაც R რიცხვითი ღერძის წერტილების სიმრავლეა, $d(x, y) = |x - y|$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ მეტრიკული სტრუქტურის ყველა მოთხოვნა შესრულებულია.

2. $(R^n; d)$ სადაც $R^n = \{ (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \mid x_i \in R \}$, $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$ ვაჩვენოთ, რომ ასეთი d ასახვა მეტრიკული სტრუქტურაა: 1-3 თვისებები რომ სრულდება ცხადია, რაც შეეხება მე-4 თვისებას, თუ გამოვიყენებთ *კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობას* [3]:

$$(\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \times \sum_{i=1}^n b_i^2,$$

მივიღებთ უტოლობას

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

თუ შევივიღებთ აღნიშვნებს: $y_i - x_i = a_i$, $z_i - y_i = b_i$, მივიღებთ $z_i - x_i = a_i + b_i$, აქედან კი ვღებულობთ:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - x_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2}$$

ღაც უნდა დაგვემეტიცუბინარაც.

3. $(C[a, b], d)$. სადაც $C[a, b]$ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლეა, $d(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|$. ამ მაგალითისათვის ოთხივე თვისების ჩვენება ელემენტარულია.

4. (l_2, d) , სადაც

$$y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots).$$

ადვილი სანახევრელია, რომ მოქრები $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2$ კრებადი. თუ $n = \overline{1, k}$ გვაქვს:

$$\sqrt{\sum_{n=1}^k (x_n - z_n)^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^k (x_n - y_n)^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^k (y_n - z_n)^2}$$

თუ გადავალთ ზღვარზე როდესაც $k \rightarrow \infty$ მივიღებთ უტოლობას რომელიც გვიჩვენებს, რომ მე-4 თვისებას ადვილი აქვს, დანარჩენი თვისებებიც ცხადია.

5. $(C[a, b], d')$, სადაც $d'(x, y) = (\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx)^{\frac{1}{2}}$. იმის შემოწმება, რომ სრულდება

მეტრიკული სტრუქტურის მე-4ე მოთხოვნა დამყარებულია ასევე კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობაზე:

$$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx \times \int_a^b g(x)^2 dx [3].$$

სხვა მოთხოვნების შესრულების ჩვენება იოლია.

6. (l_p, d) , სადაც $l_p = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) \mid x_n \in R, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \leq \infty\}$, ხოლო მეტრიკული სტრუქტურა

განისაზღვრება ასე $d(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ l_p სივრცეში მეტრიკული სტრუქტურის თვისებების

შესამოწმებლად უნდა გამოვიყენოთ *მინკოვსკის უტოლობა* [3]:

$$\left(\sum_{n=1}^k |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^k |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^k |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $k \rightarrow \infty$, მივიღებთ:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ამ უტოლობით კი მტკიცდება სრულდება მეტრიკული სტრუქტურის მე-4-ე მოთხოვნა, სხვა მოთხოვნების შესრულების ჩვენება იოლია.

7. $(C[a, b], d^*)$, სადაც $d^*(x, y) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ *მინკოვსკის ინტეგრალური უტოლობა* [3]:

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

გვაძლევს საშუალებას დავამტკიცოთ მეტრიკული სტრუქტურის მე-4-ე მოთხოვნა, დანარჩენი მოთხოვნების დამტკიცება აქაც იოლია.

8. (l^∞, d) , სადაც $l^\infty = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) \mid x_n \in [0, 1]\}$, ხოლო მეტრიკული სტრუქტურა

განისაზღვრება ასე: $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |x_n - y_n|$, მჭკრივი ცხადია კრებადია, რადგან $|x_n - y_n| \leq 1$. მე-

4-ე მოთხოვნა აქ სრულდება ტრივიალურად.

შემდეგში, როდესაც გაუიგებრობას არ გამოიწვევს, მეტრიკულ სივრცეს აღვნიშნავთ არა წვეილის სახითარამედ წვეილის პირველი კომპონენტით.

X მეტრიკულ სივრცეში: *ბაქტილი ბირთვი* ცენტრით x_0 და რადიუსით r , ეწოდება

ქვესიმრავლეს: $\overline{B}_r^x = \{x \in X \mid d(x_0, x) \leq r\}$, *ღია ბირთვი*, ცენტრით x_0 და რადიუსით r , ეწოდება

ქვესიმრავლეს: $B_r^x = \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\}$. *სფერო*, ცენტრით x_0 და რადიუსით r ეწოდება X

მეტრიკულ სივრცეში ქვესიმრავლეს: $S_r^x = \{x \in X \mid d(x_0, x) = r\}$.

თუ $A \subset X$ რაიმე ქვესიმრავლეა, მაშინ მისი *ღია მეტრი* ეწოდება რიცხვს

$$\text{diam} A = \sup_{x, y \in A} \{d(x, y)\}.$$

მანილი $A \subset X$ ქვესიმრავლიდან $x \in X$ *წერტილამდე* ეწოდება რიცხვს: $d(x, A) = \inf_{y \in A} \{d(x, y)\}$.

მანილი $A \subset X, B \subset X$ ქვესიმრავლეებს შორის ეწოდება რიცხვს: $d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \{d(x, y)\}$.

ვთქვათ, $A \subset X$, $B(A, r) = \bigcup_{x \in A} B'_x$ სიმრავლეს უწოდებენ r რადიუსისა და ბირთვს A სიმრავლის ირგვლივ.

თუ $x_1 \in B'_x$, მაშინ $B'_x \subset B'_{x_1}$ როდესაც $r_1 = r - d(x_0, x_1)$. მართლაც, თუ $x \in B'_x$, მაშინ $d(x_0, x) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x) < d(x_0, x_1) + r - d(x_0, x_1) = r$.

ვთქვათ ახლა, $\{B'_x\}_{x \in X}^{rad, r}$ ღია ბირთვების ოჯახია მოცემულ მეტრიკულ სივრცეში. ვაჩვენოთ, რომ მას აქვს ტოპოლოგიური სივრცის ბაზის ორივე თვისება: 1. $X = \bigcup_{x \in X} B'_x$ ცხადია,

2. თუ $x \in B'_x \cap B'_{x_2}$, მაშინ არსებობს B'_{x_3} ისეთი, რომ $x \in B'_{x_3} \subset B'_x \cap B'_{x_2}$. მართლაც, თუ $x \in B'_x$, მაშინ $B'_x \subset B'_{x_3}$, სადაც $r_3 = r_1 - d(x_1, x)$. ასევე, თუ $x \in B'_{x_2}$, მაშინ $B'_x \subset B'_{x_3}$, სადაც $r_4 = r_2 - d(x_2, x)$. თუ $r_0 = \min\{r_3, r_4\}$, მაშინ $x = x_0 \in B'_{x_0} \subset B'_x \cap B'_{x_2}$. მაშასადამე განხილულ ოჯახს ბაზის ორივე თვისება აქვს.

$\{B'_x\}_{x \in X}^{rad, r}$ ოჯახისათვის, 3.3 თეორემის თანახმად არსებობს, ტოპოლოგიური სტრუქტურა X სიმრავლეში, რომლის ბაზაცაა მოცემული ოჯახი.

ასეთ ტოპოლოგიურ სტრუქტურას $d: X \times X \rightarrow R^+$ მეტრიკული სტრუქტურით ინდექსირებული ტოპოლოგიური სტრუქტურა ეწოდება. იგი აღინიშნება ასე: τ_d ამგვარად, თუ გვაქვს მეტრიკული სივრცე (X, d) , მაშინ გვექნება ტოპოლოგიური (X, τ_d) სივრცეც, ინდექსირებული ტოპოლოგიური სტრუქტურით.

(X, τ) ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება მეტრიკული, თუ არსებობს ისეთი მეტრიკული სტრუქტურა $d: X \times X \rightarrow R^+$ რომლისგანაც ინდექსირებული ტოპოლოგიური სტრუქტურა τ_d ემთხვევა τ ტოპოლოგიურ სტრუქტურას. ახე $\tau_d = \tau$

მეტრიკული სივრცის შიგნითაა R რიცხვითი ღერძი ტოპოლოგიური სტრუქტურა რომლის ბაზაცაა $B(K) = \{(a, b)\}$. იგი მეტრიკულია მეტრიკული სტრუქტურით: $d(x, y) = |x - y|$ ამ მეტრიკული სტრუქტურით ღია ბირთვებს წარმოადგენენ ინტერვალები $(a, b) \in B(R) = \{(a, b)\}$.

თეორემა 5.1. ყველა სეპარაბელური მეტრიკული ტოპოლოგიური სივრცე თვლიდება სიხშირით და პირქით: ყველა თვლიდა სიხშირით მეტრიკული ტოპოლოგიური სივრცე სეპარაბელურია.

დამტკიცება: ვთქვათ, X სეპარაბელური მეტრიკული სივრცეა d მეტრიკული სტრუქტურაა მასზე. A თვლიდა ყველაზე მეტრიკული ქვესიმრავლე. განვიხილოთ ღია ბირთვა ისეთი ოჯახი $\{B'_x\}_{x \in A}^{rad, r}$, სადაც $x_i \in A$ და p ნებისმიერი რაციონალური რიცხვია.

დავუშვათ $x \in X$ და O ისეთი ღია ქვესიმრავლეა, რომ $x \in O$. r იყოს ისეთი რაციონალური რიცხვი, რომ $B'_x \subset O$. B'_x გადაკვეთს A სიმრავლეს ნებისმიერი r რიცხვისათვის.

განვიხილოთ ღია ბირთვი B'_x . ცხადია $B'_x \subset B'_x$ და $B'_x \cap A = \emptyset$.

ეთქვას ახლა, $x_r \in B_1^r \cap A$. ცხადია $d(x, x_r) < \frac{r}{3}$. ცხადია ასევე, ღია ბირთვი $B_{x_r}^r$, სადაც

$\frac{r}{3} < p < \frac{r}{2}$ და p რაციონალური რიცხვია, შეიცავს x წერტილს და $B_{x_r}^p \subset O$. ეს კი იმას

ნიშნავს, რომ $\{B_{x_r}^p\}$ ბაზაა. რადგან ეს ოჯახი თელადია, თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცდა.

დავამტკიცოთ თეორემის მეორე ნაწილიც, ეთქვას $B(X)$ თელადი ბაზაა მეტრიკებად ტოპოლოგიურ სივრცეში. ამოვიღოთ ბაზის თითოეული ღია სიმრავლიდან ერთი წერტილი. მიღებული A სიმრავლე იქნება ყველგან მკვრივი X სივრცეში და თელადი. თეორემა დამტკიცდა.

(X, d) , მეტრიკულ სივრცეში მიმდევრობა ეწოდება ასახვას $f: N \rightarrow X$, სადაც N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა. (X, d) , მეტრიკული სივრცის x წერტილს ეწოდება $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots$ მიმდევრობის ზღვარი, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ ნამდვილი რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნომერი n_ε , რომ, თუ $n \geq n_\varepsilon$, მაშინ $d(x, x_n) \leq \varepsilon$. თუ x მოცემული მიმდევრობის ზღვარია, მაშინ ისევე როგორც ზღვრისთვის ტოპოლოგიურ სივრცეში ეწეროთ $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

თუ x წარმოადგენს (X, d) მეტრიკულ სივრცეში მოცემული $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots$ მიმდევრობის ზღვარს, მაშინ იგი ზღვარია აგრეთვე იგივე მიმდევრობისა (X, r_x) ტოპოლოგიურ სივრცეში. ზარსთადაც, თუ x ზღვარია მეტრიკული აზრით, მაშინ x წერტილის ნებისმიერი მიდამო $U(x)$ (X, r_x) ტოპოლოგიურ სივრცეში მოიცავს მოცემულ: მიმდევრობის ყველა წევრს დაწესებული რომელიმე ნომრისა წევრიდან. ყინაიდან x წერტილის ნებისმიერი მიდამო $U(x)$ მოიცავს ღია ბირთვის (გნტრით) ამ x წერტილში და რადიუსით რაღაც $\varepsilon > 0$. თუ x ზღვარია ტოპოლოგიური აზრით, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი n_ε , რომ $d(x, x_n) \leq \varepsilon$, თუ $n \geq n_\varepsilon$. ყინაიდან ღია ბირთვი B_x^ε წარმოადგენს x წერტილის მიდამოს (X, r_x) ტოპოლოგიურ სივრცეში და დაწესებული რომელიმე n_ε ნომრისა წევრიდან მიმდევრობის ყველა წევრი მოთავსდება ამ მიდამოში.

მეტრიკულ სივრცეში მიმდევრობის ზღვარი შეიძლება განისაზღვროს სხვაანაირადაც: (X, d) მეტრიკულ სივრცის x წერტილს ეწოდება ამ სივრცის $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots$ წერტილების მიმდევრობის ზღვარი, თუ რიცხვითი $\{d(x, x_n)\}$ მიმდევრობის ზღვარი უდრის ნოლს, ანუ $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = 0$.

მეტრიკულ სივრცეში განსაზღვრული მიმდევრობის ზღვრის ორივე ცნება ერთმანეთის ეკვივალენტურია. მართლაც, განვიხილოთ რიცხვითი მიმდევრობა

$\{x_n\}$, რომლისთვისაც $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, მაშინ, თუ x ზღვარია ზღვრის ცნების პირველი

განსაზღვრით, ყოველი ε_n რიცხვისათვის უნდა არსებობდეს ნომერი n_ε , ისეთი, რომ

$d(x, x_n) \leq \varepsilon_n$, თუ $n \geq n_\varepsilon$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = 0$. ეთქვას ახლა x ზღვარია

ზღვრის მეორე განსაზღვრებით, მაშინ სრულდება პირობა, რომ $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = 0$, ესეგიც ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ნომერი n_ε , ისეთი, რომ $d(x, x_n) \leq \varepsilon$, თუ $n \geq n_\varepsilon$, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

ცხადია, თუ მიმდევრობას მეტრიკულ სივრცეში აქვს ზღვარი ის იქნება ერთადერთი, ვინაიდან ყოველი ორი წერტილისათვის მეტრიკულ სივრცეში არსებობენ ღია ბირთვები, ცენტრებით ამ წერტილებში, რომლებიც ერთმანეთსარ აკვეთენ.

მიმდევრობას $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ მეტრიკულ (X, d) სივრცეში ეწოდება **ფუნდამენტალური**, იუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნომერი n_ε , რომ , თუ $m, n \geq n_\varepsilon$, მაშინ $d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$.

მეტრიკულ სივრცეს ეწოდება **სრული**, თუ მასში ყველა ფუნდამენტალურ მიმდევრობას გააჩნია ზღვარი.

$(\bar{X}, \bar{d})$ მეტრიკული ეწოდება (X, d) მეტრიკული სივრცის გასრულება, თუ:

$$1. \bar{X} \subset \bar{X}$$

$$2. \bar{d}|_{X \times X}: X \times X \rightarrow R^+ \text{ შეზღუდვა ემთხვევა } d: X \times X \rightarrow R^+ \text{ მეტრიკულ სტრუქტურას.}$$

$$3. X \text{ ქვესიმრავლე ყველგან მკერძოა } (\bar{X}, \tau_{\bar{d}}) \text{ ტოპოლოგიურ სივრცეში.}$$

შტკიცდება, რომ ყველა მეტრიკული სივრცისათვის არსებობს გასრულება [3].

$f: (X, d) \rightarrow (X, d)$ ასახვას ეწოდება **კუმშვადი ასახვა**, თუ $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$, სადაც $\alpha < 1$ დადებითი ნამდვილი რიცხვაა.

თეორემა 2.2. (კუმშვადი ასახვის პრინციპი) თუ $(\bar{X}, \bar{d})$ სრული მეტრიკული სივრცეა და $f: (X, d) \rightarrow (X, d)$ კუმშვადი ასახვაა. მაშინ არსებობს ამ ასახვის მიმართ უძრავი წერტილი $x \in X$ ანუ $f(x) = x$ და ეს წერტილი ერთადერთია.

დამტკიცება: ვთქვათ, $x_0 \in X$, განვისიღოთ მიმდევრობა

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots,$$

ეს მიმდევრობა ფუნდამენტალურია, მართლაც, თუ $m > n$, მაშინ

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &= d(f^n(x_0), f^n(x_0)) \leq \alpha^n d(x_0, x_{m-n}) \leq \alpha^n (d(x_2, x_1) + d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n})) \\ &= \alpha^n d(x_0, x_1) (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^{m-n-1}) = \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

რადგან $\alpha < 1$, მიღებული ტოლობის მარჯვენა მხარე n -ის გაზრდით შეიძლება გაეხადოს ნებისმიერ რიცხვზე ნაკლები, ეს ნიშნავს, რომ მიმდევრობა არის ფუნდამენტალური და რადგან ჩვენი მეტრიკული სივრცე სრულია მას აქვს ზღვარი. ვთქვათ, ეს ზღვარია $x \in X$ წერტილი, მაშინ

$$d(f(x), f(x_n)) \leq \alpha d(x, x_n), d(f(x), f(x_n)) = d(f(x), x_{n+1}) \leq \alpha d(x, x_n).$$

თუ გადავალთ ზღვარზე უტოლობაში, $d(f(x), x_{n+1}) \leq \alpha d(x, x_n)$, როდესაც n მიისწრაფვის უსასრულობისკენ მივიღებთ: $d(f(x), x_{n+1}) = 0$. მაშასადამე, $f(x) = x$.

ვთქვათ, არსებობს მეორე $y \in X$ წერტილი, ისეთი რომ $f(y) = y$, მაშინ

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \leq \alpha d(x, y), \alpha < 1 \text{ და ამიტომ } d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y. \text{ თეორემა დამტკიცდა}$$

(A, d_A) მეტრიკულ სივრცეს ეწოდება (X, d) მეტრიკული სივრცის ქვესივრცე, თუ $A \subset X$ და $d_A = d|_{A \times A}$; $A \times A \rightarrow R^+$ d_A მეტრიკულ სტრუქტურას ეწოდება d მეტრიკული სტრუქტურით ინდუცირებული მეტრიკული სტრუქტურა $A \subset X$ ქვესიმრავლეზე.

ურთიერთცალსახა $f: (X, d') \rightarrow (Y, d'')$ ასახვას ეწოდება იზომეტრია, თუ

$$d'(x_1, x_2) = d''(f(x_1), f(x_2)),$$

(ცხადია იზომეტრია პოპოლოგიზმი (X, τ_X) და (Y, τ_Y) ტოპოლოგიურ სივრცეებს შორის.

R მეტრიკულ სივრცეს ეწოდება იზომეტრიული, თუ მათ შორის არსებობს იზომეტრია.

იმ თვისებას, რომელიც საერთოა იზომეტრიული სივრცეებისთვის მეტრიკული ინვარიანტ ეწოდება.

თუ $\varepsilon > 0$ რაიმე ნამდვილი რიცხვია, მაშინ (X, d) მეტრიკული სივრცის $A \subset X$ ქვესიმრავლეს ეწოდება ε მკვრივი ამ სივრცეში, თუ (X, d) სივრცის ყოველი $x \in X$ წერტილის არსებობს წერტილი $x' \in A$ ისეთი, რომ $d(x, x') < \varepsilon$. ასეთა $A \subset X$ ქვესიმრავლეს ეწოდება ε ბადე (X, d) მეტრიკულ სივრცეში.

(X, d) მეტრიკულ სივრცეს ეწოდება სრულად შემოსაზღვრული, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისთვის არსებობს სასრული ε ბადე ამ სივრცეში

§ 6. სივრცეთა განცალკევადობა

ვიტყვი, რომ X ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს განცალკევადობის T_0 აქსიომას თუ მისი ნებისმიერი ორი განსხვავებული x_1, x_2 წერტილიდან ერთერთისათვის არსებობს მიდამო, რომელიც შეორეს არ მოიცავს.

ასეთ ტოპოლოგიურ სივრცეებს კოლმოგოროვის სივრცეებად უწოდებენ.

ვიტყვი, რომ X ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს განცალკევადობის T_1 აქსიომას, თუ მისი ნებისმიერი ორი განსხვავებული x_1, x_2 წერტილიდან თითოეულს გააჩნია მიდამო, რომელიც შეორეს არ მოიცავს.

თეორემა: 6.1 X ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს განცალკევადობის T_1 აქსიომას, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ყოველი წერტილი $x \in X$ ჩაკეტილი სიმრავლეა ამ სივრცეში.

დამტკიცება: დაემატიცთ თეორემის პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ყოველი წერტილი $x \in X$ ჩაკეტილი სიმრავლეა. ავიღოთ ნებისმიერი ორი წერტილი $x_1, x_2 \in X$

$\{x_1\} = \overline{\{x_1\}}$, ამიტომ არსებობს x_2 -ს ისეთი მიდამო, $U(x_2)$ რომ $U(x_2) \cap \{x_1\} = \emptyset$.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ არსებობს x_1 -ს ისეთი მიდამო, $U(x_1)$ რომ $U(x_1) \cap \{x_2\} = \emptyset$.

დაემატიცთ თეორემის პირობის აუცილებლობა. ავიღოთ ნებისმიერი $x \in X$ წერტილი და განვიხილოთ სიმრავლე $\{x\}$ როგორი სხვა $x' \in X$ წერტილიც უნდა ავიღოთ, თეორემის პირობით მას ექნება მიდამო $U(x')$, რომელიც არ მოიცავს x წერტილს, მაშასადამე $\{x\}$ სიმრავლის შეხების წერტილები, მხოლოდ ამ სიმრავლის ელემენტებია. მაშასადამე $\{x\}$ ჩაკეტილი სიმრავლეა. თეორემა დამტკიცდა.

ვითყვეთ, რომ X ტოპოლოგიური სივრცე აქმაუყიფილებს განცალგბადობის T_1 აქსიომას, თუ მისი ნებისმიერი ორი განსხვავებული x_1, x_2 წერტილიდან თითოეულს გაანზია ისეთი $u(x_1)$ და $u(x_2)$ მიღამო, რომ $u(x_1) \cap u(x_2) = \emptyset$.

ასეთ ტოპოლოგიურ სივრცეებს პაუზდორფის ტოპოლოგიური სივრცეები ეწოდებათ. ცხადია ყოველი მეტრიკული სივრცე მეტრიკით ინდუცირებული ტოპოლოგიური სტრუქტურით პაუზდორფის სივრცეა.

ვთქვათ, X ტოპოლოგიური სივრცეა განვიხილოთ დეკარტის ნამრავლი $X \times Y$, შევიტანოთ მასში ტოპოლოგიური სტრუქტურა რომლის წინაბაზასაც წარმოადგენს ქვესიმრაველთა ოჯახი $B(X \times Y) = \{U \times X \subset X \times X, X \times V\}$, სადაც $U \in T(X)$, $V \in T(Y)$ წარმოადგენენ X და Y სივრცეების ნებისმიერად აღებულ ღია სიმრავლეებს.

თეორემა 6.2 X ტოპოლოგიური სივრცე პაუზდორფისაა, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც დიაგონალი $\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$ ჩაკეტილი ქვესიმრავლეა $X \times X$ სივრცეში.

დამტკიცება: ვთქვათ, X ტოპოლოგიური სივრცე პაუზდორფისაა, განვიხილოთ სიმრავლე $M = X \times X \setminus \Delta$. ვთქვათ, $(x_0, y_0) \in M$, მაშინ $x_0 \neq y_0$. $u(x_0)$ და $u(y_0)$ იყოს $x_0 \in X, y_0 \in X$ წერტილების ურთიერთთანაუყვეთი მიღამოები, შესაბამისად.

აღვილი მისახედრია, რომ $u(x_0) \times u(y_0)$ წარმოადგენს $(x_0, y_0) \in M$ წერტილის მიღამოს, რომელიც მოდიანად შედის M სიმრავლეში. ეს კი ნიშნავს, რომ M ღიაა და მაშასადამე Δ ჩაკეტილია.

ვთქვათ Δ ჩაკეტილია $X \times X$ სივრცეში, მაშინ $M = X \times X \setminus \Delta$ ღიაა. ვთქვათ ასევე $x_0 \in X, y_0 \in X$ და $x_0 \neq y_0$. მაშინ ცხადია $(x_0, y_0) \in M$. $U \times V$ სახის სიმრავლეები, სადაც $U \in T(X), V \in T(Y)$ შეადგენენ ბაზისს $X \times X$ სივრცეში, ამიტომ მოიძებნება:

$U_0 \subset U \subset X$, რომ $(x_0, y_0) \in U_0 \times V_0 \subset M$ და $(U_0 \times V_0) \cap \Delta = \emptyset$, აქედან კი უამრბდინარეოს $U_0, V_0 \subset X$ წარმოადგენენ $x_0 \in X, y_0 \in X$ წერტილების თანაუყვეთ მიღამოებს.

მაშასადამე X ტოპოლოგიური სივრცე პაუზდორფისაა. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 6.3 თუ $f, g: X \rightarrow Y$ ორი უწყვეთ ასახვია X ტოპოლოგიური სივრციდან პაუზდორფის ტოპოლოგიურ სივრცეში, მაშინ $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ სიმრავლე ჩაკეტილია X სივრცეში.

დამტკიცება: განვიხილოთ უწყვეტი $h: X \rightarrow Y \times Y$, რომელიც განსაზღვრულია ფორმულით $h(x) = (f(x), g(x))$. h ასახვა წარმოადგენს f და g ასახვების დიაგონალს. ამიტომ იგია უწყვეტი. ცხადია $A = h^{-1}(\Delta)$, სადაც $\Delta \subset Y \times Y$ დიაგონალი $Y \times Y$ ნამრაველში. რადგან Y პაუზდორფისაა, წინა თეორემის თანახმად Δ ჩაკეტილია, აქედან გამომდინარე ჩაკეტილი იქნება A სიმრავლეც. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 6.4 თუ უწყვეტი ასახვები პაუზდორფის სივრცეში ერთმანეთს ემთხვევა ყველგან მკეროე ქვესიმრავლეზე, მაშინ ეს ასახვები ერთმანეთს ემთხვევა ყველგან.

დამტკიცება: ასეთ შემთხვევაში, სიმრავლე სადაც ასახვები ერთმანეთს ემთხვევიან ჩაკეტილია წინა თეორემის თანახმად. ყველგან მკეროე ჩაკეტილი სიმრავლე კი მხოლოდ მთელი სივრცეა თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 6.5. X ტოპოლოგიური სივრცედან Y პაუზდორფის ტოპოლოგიურ სივრცეში უწყვეტი $f: X \rightarrow Y$ ასახვის გრაფიკი $G = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ ჩაკეტილი ქვესიმრავლეა $X \times Y$ სივრცეში.

დამტკიცება: განვიხილოთ ორი ასახვა $\varphi, g: X \times Y \rightarrow Y$, რომლებიც განსაზღვრულია ფორმულებით: $\varphi(x, y) = y$, $g(x, y) = f(x)$. ცხადია ეს ასახვები უწყვეტია. ქვესიმრავლე $X \times Y$ სივრცეში, სადაც ეს ასახვები ერთმანეთს ემთხვევიან, წინა თეორემის თანახმად, ჩაკეტილია. მაგრამ ეს სიმრავლეა, მასთანავე, ემთხვევა f ასახვის $G = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ გრაფიკს. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 6.6. იმისათვის, რომ X ტოპოლოგიური სივრცე იყოს პაუზდორფის, აუცილებელია და საკმარისი ამ სივრცის ორი განსხვავებული x_1, x_2 წერტილისათვის არსებობდეს ისეთი ორი უწყვეტი $f: X \rightarrow Y$ ასახვა Y პაუზდორფის ტოპოლოგიურ სივრცეში, რომ $f(x_1) \neq f(x_2)$.

დამტკიცება: თეორემის პირობის აუცილებლობა იქედან ჩანს, რომ Y სივრცის როლში შეგვიძლია ავიღოთ X სივრცე, f ასახვის როლში კი იგივეურ Id_X ასახვა. ასეთ შემთხვევაში $Id(x_1) \neq Id(x_2)$.

დავამტკიცოთ თეორემის პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, $x_1, x_2 \in X$ განსხვავებული წერტილებია. $f: X \rightarrow Y$, $f(x_1) \neq f(x_2)$ უწყვეტი ასახვა. განვიხილოთ $f(x_1)$ და $f(x_2)$ წერტილების არაგადამკეცი დია მიდამოები $u(f(x_1))$ და $u(f(x_2))$. ცხადია $U = f^{-1}(u(f(x_1)))$ და $V = f^{-1}(u(f(x_2)))$ სიმრავლეები წარმოადგენენ $x_1, x_2 \in X$ წერტილების თანაუქვეთ მიდამოებს. თეორემა დამტკიცდა.

ვრცეით. რომ X ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს **განცალდებლობის** T_2 აქსიომას, ანუ იმის ნებისმიერი ჩაკეტილი F სიმრავლისათვის და $x \notin F$ წერტილისათვის არსებობენ ისეთი $u(F)$ და $u(x)$ მიდამოები, რომ $u(F) \cap u(x) = \emptyset$.

თეორემა 6.7. იმისათვის, რომ X ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებდეს განცალდებლობის T_2 აქსიომას, აუცილებელი და საკმარისია მისი ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისათვის და ამ წერტილის ნებისმიერი $u(x)$ მიდამოსათვის არსებობდეს x წერტილის ისეთი მიდამო $v(x)$, რომ $\overline{v(x)} \subset u(x)$.

დამტკიცება: დავამტკიცოთ თეორემის პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, X ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს განცალდებლობის T_2 აქსიომას. ავიღოთ ნებისმიერი $x \in X$ წერტილი და მისი ნებისმიერი დია მიდამო $u(x)$. $X \setminus u(x)$ ჩაკეტილი სიმრავლეა X ტოპოლოგიური სივრცეში, $x \notin X \setminus u(x)$. არსებობენ ისეთი მიდამოები $v(x)$, $u(X \setminus u(x))$, რომ $v(x) \cap u(X \setminus u(x)) = \emptyset$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $v(x) \subset u(x)$. $v(x)$ სიმრავლის არცერთი შეხების წერტილი არ ეკუთვნის $X \setminus u(x)$ სიმრავლეს, ამიტომ ისინი ეკუთვნიან $u(x)$ -ს, ანუ $\overline{v(x)} \subset u(x)$.

დავამტკიცოთ თეორემის პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, F ნებისმიერი ჩაკეტილი სიმრავლეა და $x \notin F$ ნებისმიერი წერტილი. სიმრავლე $X \setminus F$ დია სიმრავლეა, ამიტომ იგი

წარმოადგენს x . წერტილის მიდამოს. თეორემის პირობით, არსებობს x წერტილის ისეთი მიდამო $v(x)$, რომ $v(x) \subset X \setminus F$ განვიხილოთ სიმრავლე $X \setminus v(x)$ იგი ღია სიმრავლეა, $F \subset (X \setminus v(x))$. $v(x) \cap (X \setminus v(x)) = \emptyset$, მაშასადამე არსებობენ x -ის მიდამო $v(x)$ და F -ის მიდამო $X \setminus v(x)$, რომლებიც ერთმანეთს არ ჰკვეთენ. ესეიგი

X ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს განცალკევადობის T_3 აქსიომას. თეორემა დამტკიცდა.

ეიტყვით, რომ X ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს განცალკევადობის T_4 აქსიომას, თუ მისი ნებისმიერი ორი ჩაკეტილი ურთიერთ თანაუკვეთი $F_1, F_2 \subset X$ სიმრავლისათვის არსებობენ ისეთი $u(F_1)$ და $u(F_2)$ მიდამოები, რომ $u(F_1) \cap u(F_2) = \emptyset$

თეორემა 6.8 იმისათვის, რომ X ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებდეს განცალკევადობის T_4 აქსიომას, აუცილებელი და საკმარისია მისი ნებისმიერი $F \subset X$ ჩაკეტილი სიმრავლისათვისა და ამ სიმრავლის ნებისმიერი $u(F)$ მიდამოსათვის არსებობდეს F ქვესიმრავლის ისეთი მიდამო $v(F)$, რომ $v(F) \subset u(F)$.

დამტკიცება: დაემატევიტ თეორემის პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, X ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს განცალკევადობის T_4 აქსიომას. ავიღოთ ნებისმიერი $F \subset X$ ჩაკეტილი სიმრავლე და მისი ნებისმიერი ღია მიდამო $u(F)$. $X \setminus u(F)$ ჩაკეტილი სიმრავლეა X ტოპოლოგიური სივრცეში, $F \subset X \setminus u(F)$. არსებობენ ისეთი მიდამოები $v(F)$, $u(X \setminus u(F))$, რომ $v(F) \cap u(X \setminus u(F)) = \emptyset$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $v(F) \subset u(F)$. $v(F)$ სიმრავლის არცერთი შეხების წერტილი არ ეკუთვნის $X \setminus u(F)$ სიმრავლეს, ამიტომ ისინი ეკუთვნიან $u(F)$ -ს, ანუ $v(F) \subset u(F)$.

დაემატევიტ თეორემის პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, $F_1, F_2 \subset X$ ნებისმიერი ორი ურთიერთ თანაუკვეთი ჩაკეტილი სიმრავლეა. სიმრავლე $X \setminus F_1$ ღია სიმრავლეა, ამიტომ იგი წარმოადგენს F_2 სიმრავლის მიდამოს. თეორემის პირობით, არსებობს F_2 სიმრავლის ისეთი მიდამო $v(F_2)$, რომ $v(F_2) \subset X \setminus F_1$. განვიხილოთ სიმრავლე $X \setminus v(F_2)$ იგი ღია სიმრავლეა, $F_1 \subset (X \setminus v(F_2))$. $v(F_2) \cap (X \setminus v(F_2)) = \emptyset$, მაშასადამე არსებობენ F_2 -ის მიდამო $v(F_2)$ და F_1 -ის მიდამო $X \setminus v(F_2)$, რომლებიც ერთმანეთს არ ჰკვეთენ. ესეიგი X ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს განცალკევადობის T_4 აქსიომას. თეორემა დამტკიცდა. ასახეას $f: X \rightarrow R$ სადაც R რიცხვითი სიმრავლეა ფუნქცია ეწოდება. ცხადია ფუნქცია უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რნამდელი რიცხვისათვის და ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისათვის არსებობს ამ წერტილის ისეთი $u_\varepsilon(x)$ მიდამო, რომ ყველა $y \in u_\varepsilon(x)$ წერტილისთვის $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

ეიტყვით, რომ X ტოპოლოგიური სივრცის ორი ურთიერთ თანაუკვეთი $A, B \subset X$ ჩაკეტილი სიმრავლე ფუნქციონალურად განცალკევადია, თუ არსებობს ისეთი $f: X \rightarrow [0, 1]$ უწყვეტი ფუნქცია, რომ $f(A) = 0$ და $f(B) = 1$.

ვიტყვი, რომ X ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს განცალკეადობის $T_{\frac{1}{2}}$ აქსიომას

თუ მისი ნებისმიერი ჩაკეტილი F სიმრავლე და $x \in F$ წერტილი ფუნქციონალურად განცალკეადი სიმრავლეები არიან.

თეორემა 6.9. თუ X ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს განცალკეადობის $T_{\frac{1}{2}}$

აქსიომას, მაშინ იგი აკმაყოფილებს განცალკეადობის T_3 აქსიომასაც.

დამტკიცება: განვიხილოთ ჩაკეტილი სიმრავლე $F \subset X$ და წერტილი $x \in F, x \in F$

თეორემის პირობის თანახმად არსებობს ისეთი $f: X \rightarrow [0,1]$ უწყვეტი ფუნქცია, რომ

$$f(x) = 0 \text{ და } f(F) = 1. \text{ ვთქვათ, } \varepsilon < \frac{1}{2}. f^{-1}[0, \varepsilon] \text{ ღია სიმრავლეა } X\text{-ში და } x \in f^{-1}[0, \varepsilon],$$

ამიტომ იგი x წერტილის მიდამოა. $f^{-1}(\varepsilon, 1]$ ასევე ღია სიმრავლეა, $F \subset f^{-1}(\varepsilon, 1]$, ამიტომ

იგი F სიმრავლის მიდამოა. $f^{-1}[0, \varepsilon] \cap f^{-1}(\varepsilon, 1] = \emptyset$, ეს ტოლობა კი ამტკიცებს თეორემას.

ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება **რეგულარული**, თუ იგი აკმაყოფილებს განცალკეადობის T_1 და T_3 აქსიომებს.

ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება **სრულად რეგულარული**, ანუ ტიხონოვის სივრცე, თუ იგი აკმაყოფილებს განცალკეადობის T_1 და $T_{\frac{1}{2}}$ აქსიომებს.

ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება **ნორმალური**, თუ იგი აკმაყოფილებს განცალკეადობის T_1 და T_4 აქსიომებს.

ცხადია, სრულად რეგულარული სივრცე რეგულარულიც არის.

თეორემა 6.10. მეტრიზებადი ტოპოლოგიური სივრცე ნორმალურია.

ამტკიცება: ვთქვათ, X ნორმალურ ტოპოლოგიური სივრცეში ტოპოლოგიური სტრუქტურა განისაზღვრება d მეტრიკული სტრუქტურით. ვთქვათ A, B ურთიერთ თანაუკვეთი

ქვესიმრავლეებია X სივრცეში. ვთქვათ, $x \in A$. განვიხილოთ რიცხვი, $l_1 = \inf_{y \in B} \{d(x, y)\}$. ეს

რიცხვი ნულზე მეტია, წინააღმდეგ შემთხვევაში x იქნებოდა A სიმრავლის შეხების წერტილი. ეს კი არ შეიძლება, რადგან B ჩაკეტილია.

განვიხილოთ ღია სიმრავლე $U(A) = \bigcup_{x \in A} B_x^{\frac{l_1}{2}}$, ცხადია $A \subset U(A)$. ანალოგიურად ავაგოთ

$$U(B) = \bigcup_{y \in B} B_y^{\frac{l_2}{2}}, \text{ სადა } l_2 = \inf_{x \in A} \{d(x, y)\} > 0. \text{ ვაჩვენოთ, რომ } U(A) \cap U(B) = \emptyset, \text{ მართლაც,}$$

დაეუშვათ არსებობს $z_0 \in U(A) \cap U(B)$, მაშინ $z_0 \in B_{x_0}^{\frac{l_1}{2}}$ და $z_0 \in B_{y_0}^{\frac{l_2}{2}}$ რომელიც $x_0 \in A, y_0 \in B$ წერტილებია. თვის.

$$d(x_0, y_0) \leq d(x_0, z_0) + d(z_0, y_0) \leq \frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{2}.$$

ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $l_1 > l_2$. მაშინ გვექნება

$d(x_0, y_0) < l_1$. მეორე მხრივ $d(x_0, y_0) \geq \inf_{y \in B} \{d(x_0, y)\} = l_1$ და ამიტომ $d(x_0, y_0) \geq l_1$. ესეიგი

ერთდროულად გვაქვს $d(x_0, y_0) < l_1$ და $d(x_0, y_0) \geq l_1$, რაც არ შეიძლება. მაშასადამე ჩვენ დაშვება არ ყოფილა სწორი. თეორემა დაბტკიცდა.

თეორემა 6.11. (ურთისონის ლემა) თუ X ტოპოლოგიური სივრცე ნორმალურია, მაშინ მასში ნებისმიერი ორი ურთიერთ თანაუქვეთი $A, B \subset X$ ჩაკეტილი სიმრავლე ფუნქციონალურად განცალკევდება.

დამტკიცება: უნდა დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი ორი ჩაკეტილი ურთიერთ თანაუქვეთი $A, B \subset X$ სიმრავლისთვის არსებობს ისეთი $f: X \rightarrow [0, 1]$ ფუნქცია, რომ $f(A) = 0$

და $f(B) = 1$. ამისათვის მოვიქცეთ ასე: ყოველ წილადს $r = \frac{k}{2^n}; k = 0, 1, 2, \dots, 2^n$ შევესაბამოთ

ღია სიმრავლე $O(r)$ ისე, რომ სრულდებოდეს პირობები:

1. $A \subset O(0)$;

2. $\overline{O(r)} \subset O(r')$, თუ $r < r'$;

3. $O(1) = X \setminus B$

შესაბამისობა ავაგოთ ინდუქციის წესით ნატურალური რიცხვის მიმართ.

თუ $n = 0$, მაშინ k რიცხვი ღებულობს მხოლოდ ერთ მნიშვნელობას $k = 1$. ასეთ შემთხვევაში $r = 1$

$O(0)$ იყოს A სიმრავლის ის ღია $u(A)$ მიდგომა, რომლის ჩაკეტვაც შედის $X \setminus B$ ღია სიმრავლეში. რადგანაც X ტოპოლოგიური სივრცე ნორმალურია ამიტომ ასეთი ღია $u(A)$ მიდგომა არსებობს. $O(1)$ იყოს $X \setminus B$, ასეთ შემთხვევაში $\overline{O(0)} \subset O(1)$.

დაეუშვათ გვქვას შესაბამისობა ატებულა $n-1$ ნატურალური რიცხვისათვის.

ჩვენი ამოცანაა განსაზღვროთ $O(\frac{k}{2^n})$ კენტი k რიცხვებისათვის, რადგან თუ $k = 2^m$

მაშინ $O(\frac{k}{2^n}) = O(\frac{2^m}{2^n}) = O(\frac{1}{2^{n-m}})$ უკვე განსაზღვრულია ჩვენი დაშვებით.

ეთქვათ, k რიცხვია, მაშინ $k-1$ და $k+1$ ღუწი რიცხვები იქნებიან და შესაბამისად

განსაზღვრული იქნება $O(\frac{k-1}{2^n})$ და $O(\frac{k+1}{2^n})$ ღია სიმრავლეები. ჩვენი დაშვებით

$$\overline{O(\frac{k-1}{2^n})} \subset O(\frac{k+1}{2^n}).$$

რადგან X ნორმალურია $O(\frac{k-1}{2^n})$ ჩაკეტილი, არსებობს ისეთი ღია O სიმრავლე, რომ

$$\overline{O(\frac{k-1}{2^n})} \subset O \subset O(\frac{k+1}{2^n}).$$

ჩათვალო ეს ღია სიმრავლე $O(\frac{k}{2^n})$ სიმრავლედ. ამგვარად n რიცხვისათვისაც ავაგოთ

შესაბამისობა $r = \frac{k}{2^n}; k = 0, 1, 2, \dots, 2^n$ რიცხვებსა და ღია $O(\frac{k}{2^n})$ სიმრავლეებს შორის.

დავუშვათ

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in O(0) \\ \sup \{r \mid x \in X \setminus O(r)\}, & \text{if } x \notin O(0) \end{cases}.$$

თუ $x \in A$, მაშინ $f(x) = 0$, თუ $x \in B$, მაშინ $f(x) = 1$.

f უწყვეტი ასახეა. ამის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი n

ნატურალური რიცხვისათვის და ნებისმიერი x წერტილისათვის არსებობს ისეთი მიდამო $u_{\frac{1}{2^n}}(x)$, რომ თუ $y \in u_{\frac{1}{2^n}}(x)$, მაშინ $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2^n}$.

ვთქვათ, r ორობითი წილადია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $f(x) < r < \frac{1}{2^{n+1}} + f(x)$,

ცხადია ასეთი წილადი არსებობს. დავუშვათ $H = O(r) \setminus O(r - \frac{1}{2^n})$. ჩათვალოთ $O(s) = \emptyset$,

როდესაც $s < 0$ და $O(s) = X$, როდესაც $s > 1$.

$x \in H$, რადგან $f(x) < r$ უტილობიდან გამომდინარეობს, რომ $x \in O(r)$. $r - \frac{1}{2^{n+1}} < f(x)$

უტილობიდან კი გამომდინარეობს, რომ $y \in X \setminus O(r - \frac{1}{2^{n+1}}) \subset \overline{X \setminus O(r - \frac{1}{2^n})}$

ამას გარდა თუ $y \in H$ მაშინ $y \in O(r)$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $f(y) \leq r$

აქედან. თავის მხრივ, გამომდინარეობს, რომ $y \in X \setminus O(r - \frac{1}{2^n}) \subset X \setminus O(r - \frac{1}{2^{n+1}})$.

ამიტომ $r - \frac{1}{2^n} \leq f(y)$ და საბოლოოდ გვექნება $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2^n}$.

თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 6.12. ყოველი ნორმალური ტოპოლოგიური სივრცე სრულად რეგულარულია.

ამტკიცება: ურისონის ლემის თანახმად, ყოველი ორი ურთიერთ არა გადაკვეთი სიმრავლე ნორმალურ სივრცეში ფუნქციონალურად განცალკევებულია. ნორმალურ სივრცეში სრულდება გარცალკევადობის T_1 აქსიომა, ამიტომ წერტილი ჩაკეტილი სიმრავლეა. ეს კი ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 5.13. ვთქვათ f უწყვეტი ფუნქციაა, რომელიც განსაზღვრულია ნორმალური ტოპოლოგიური X სივრცის რაიმე F ჩაკეტილ ქვესიმრავლეზე და აკმაყოფილებს პირობას: $|f(x) - c| < \delta$. მაშინ არსებობს უწყვეტი g ფუნქცია, განსაზღვრული მთელ X სივრცეზე, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს: $|g(x)| \leq \frac{1}{3}\delta$ ყველა $x \in X$ წერტილისთვის,

$|g(x) - f(x)| \leq \frac{2}{3}\delta$ ყველა $x \in F$

დამტკიცება: ვთქვათ $A = \{x \in F \mid f(x) \leq -\frac{1}{3}\delta\}$, $B = \{x \in F \mid f(x) \geq \frac{1}{3}\delta\}$, $J = \{y \in R \mid y \leq \frac{1}{3}\delta\}$.

A და B სიმრავლეები ჩაკეტილია, და ისინი არ გადაიკვეთებიან. ურისონის ლემის თანახმად არსებობს უწყვეტი ასახვა $g': X \rightarrow [0,1]$, ისეთი, რომ $g'(A) = 0, g'(B) = 1$.

განივილით ასახვა, $\varphi: [0,1] \rightarrow J$, განსაზღვრული ფორმულით $\varphi(x) = \frac{2}{3}cx - \frac{1}{2}$

კომპოზიციისთვის $g = \varphi \circ g': X \rightarrow J$, ადგილი აქვს ტოლობებს $g(A) = -\frac{1}{3}, g(B) = \frac{1}{3}$.

აქედან გამომდინარე g ასახვა აკმაყოფილებს ყველა საჭირო მოთხოვნებს. თორომა დამტკიცდა.

იქვეით $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ მიმდევრობაა, რომლის წევრებიც X ტოპოლოგიური სივრცეზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციებია.

უწყვეტ ფუნქციათა $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ მიმდევრობას ეწოდება *თანაბრად კრებადი* რაიმე $f: X \rightarrow R$ ფუნქციისაკენ, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რნამდვილი რიცხვისათვის არსებობს ისეთი n_ε ნომერი, რომ ყველა $n > n_\varepsilon$ ნატურალური რიცხვისათვის და ნებისმიერი $x \in X$

წერტილისათვის $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

თეორემა 6.14. თუ უწყვეტ ფუნქციათა $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ მიმდევრობა თანაბრად იკრება რაიმე $f: X \rightarrow R$ ფუნქციისაკენ, მაშინ f ფუნქცია უწყვეტია.

დამტკიცება: თუ ფუნქციათა $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი n_ε ნომერი, რომ ყველა $n > n_\varepsilon$ ნატურალური

რიცხვისათვის ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისათვის $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

f_n უწყვეტი ფუნქციაა, ამიტომ $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის და ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისათვის არსებობს ამ წერტილის ისეთი $u_\varepsilon(x)$ მიდამო, რომ $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$,

როდესაც $y \in u_\varepsilon(x)$. ამიტომ

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

როდესაც $y \in u_\varepsilon(x)$. თეორემა დამტკიცდა

უწყვეტ ფუნქციათა $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ მიმდევრობისაგან შედგენილ მწკრივს ეწოდება *თანაბრად კრებადი*, თუ ამ მწკრივის კერძო ჯამების მიმდევრობა თანაბრად კრებადია.

თეორემა 6.15. (ტიტცეს თეორემა) თუ f უწყვეტი ფუნქციაა, რომელიც განსაზღვრულია ნორმალური ტოპოლოგიური X სივრცის რაიმე A ჩაკეტილ ქვესიმრავლეზე, მაშინ არსებობს ისეთი უწყვეტი f^* ფუნქცია განსაზღვრული მთელ X სივრცეზე, რომ $f^*|_A = f$ უფრო მეტიც, თუ $|f(x)| \leq c', c' > 0$ ყველა $x \in A$ წერტილისათვის, მაშინ $|f^*(x)| \leq c'$ ყველა $x \in X$ წერტილისათვის.

დამტკიცება: განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $|f(x)| \leq c'$ ანაგოთ ინდუქციით უწყვეტი ფუნქციები: $g_1, g_2, \dots, g_n$. ისეთი, რომ $|g_n(x)| \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}c'$ ყველა $x \in X$ წერტილისათვის და

$$|f(x) - \sum_{i=1}^n g_i(x)| \leq (\frac{2}{3})^n c', \text{ როდესაც } x \in A.$$

g_1 ფუნქციის ასაგებად გამოვიყენოთ წინა 5.7. თეორემა, როდესაც $c = c'$ ამ შემთხვევაში $|g_1(x)| \leq \frac{1}{3}c'$ ყველა $x \in X$ წერტილისათვის და $|f(x) - g_1(x)| \leq \frac{2}{3}c'$ ყველა $x \in F$ წერტილისათვის.

ეთქვას, $g_1, g_2, \dots, g_{n-1}$ უკვე ატებულია, თუ ახლა 5.7. თეორემას გამოვიყენებთ

$f(x) - \sum_{i=1}^{n-1} g_i(x)$ ფუნქციის მიმართ როდესაც $c = (\frac{2}{3})^{n-1}c'$ მივიღებთ g_n ფუნქციას რომელიც დააკმაყოფილებს უტოლობებს:

$$|g_n(x)| \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}c' \quad |f(x) - \sum_{i=1}^n g_i(x)| \leq (\frac{2}{3})^n c'$$

ამგვარად, ჩვენ ავაგეთ ყველა უწყვეტი $g_1, g_2, \dots, g_n$ ფუნქცია. $|g(x)| \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}c'$, ამიტომ

მკერავი $\sum_{i=1}^n g_i(x)$ იქნება თანაბრად კრებადი, მისი ჯამი $f^*(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x)$ უწყვეტი ფუნქცია

იქნება. თუ გადავალთ ზღვარზე $|f(x) - \sum_{i=1}^n g_i(x)| \leq (\frac{2}{3})^n c'$ უტოლობაში, მივიღებთ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - \sum_{i=1}^n g_i(x)| = 0, \text{ ეს კი ნიშნავს, რომ } f^*|_A = f$$

$$|f^*(x)| = |\sum_{i=1}^n g_i(x)| \leq \sum_{i=1}^n |g_i(x)| \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{i-1}c' = \sum_{i=1}^n \frac{2^{i-1}}{3^i} \frac{1}{2}c' = \frac{1}{2}c' \leq c'$$

მაშასადამე, $|f^*(x)| \leq c'$ ყველა $x \in X$ წერტილისათვის.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა როცა $f(x)$ არ არის შემოსაზღვრული. რიცხითი ლერძი R პოზიტივობის მქონე $I_0 = (-1, 1)$ ინტერვალის, ეთქვას ეს პოზიტივობის h .

$h \circ f$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია, ამიტომ არსებობს f^* ფუნქცია რომელიც ასევე შემოსაზღვრულია და $f^*|_A = h \circ f$ ეთქვას $B = \{-1, 1\}$ ორწერტილიანი ქვესიმრავლე $\bar{I}_0$ სიმრავლიდან $H = f^{-1}(B)$ ნაკეტილი ქვესიმრავლე X სიმრავლეში. $H \cap A = \emptyset$, ამიტომ ურისონის ლემის ძალით, არსებობს ისეთი უწყვეტი $g: X \rightarrow [0, 1]$ ასახვა, რომ

$g(H) = 0$ და $g(A) = 1$. $\varphi = g \circ f^*: X \rightarrow (0, 1)$ ფუნქციის და h^{-1} ფუნქციის კომპოზიციით

მიღებული $\phi = h^{-1} \circ \varphi$ ფუნქცია იქნება $f: X \rightarrow R$ ფუნქციის გაგრძელება, ანუ $\phi|_A = f$ **თეორემა 6.16. (ურისონის თეორემა)** იმისათვის, რომ თელად ბაზისიანი სივრცე იყოს მეტრიზებადი, აუცილებელი და საკმარისია იგი იყოს ნორმალური.

დამტკიცება: დავამტკიცოთ თეორემის პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ თვლად ბაზისიანი სივრცე მრტრიზებადია, მაშინ 6.5. თეორემის თანახმად იგი იქნება ნორმალური.

დავამტკიცოთ თეორემის პირობის საკმარისობა. ვთქვათ $B(X)$ თვლადი ბაზისი ტოპოლოგიურ სივრცეში. რადგან სივრცე ნორმალურია იგი იქნება სრულად რეგულარულიც და რეგულარულიც.

ვთქვათ, x წერტილი ეკუთვნის X ტოპოლოგიური სივრცის ბაზისის, რომელიმე ღია $O \in B(X)$ სიმრავლეს. სივრცის რეგულარულობის გამო, არსებობს $V \in B(X)$ ღია სიმრავლე, ისეთი, რომ $x \in V$ და $\bar{V} \subset O$. ვთქვათ ბაზისის ელემენტები გადანომრილია $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$,

განვიხილოთ წყვილები $(\bar{V}_i, U_j)$, სადაც $(\bar{V}_i \subset U_j)$. განიხილული წყვილების სიმრავლეც

თვლადია. ვთქვათ, წყვილების ეს სიმრავლეც გადანომრილია $(\bar{V}_1, U_1), (\bar{V}_2, U_2), \dots, (\bar{V}_n, U_n), \dots$

განვიხილოთ სიმრავლე $X \setminus U_n$ იგი ნაკტილი სიმრავლეა, $\bar{V}_n \cap (X \setminus U_n) = \emptyset$ ყოველი n -ისათვის. იმის გამო, რომ სივრცე ნორმალურია, ურისონის ლემიდან გამოიმდინარე, არსებობს უწყვეტი ფუნქცია $f_n: X \rightarrow [0, 1]$, სადაც $f(U_n) = 0$ და $f(X \setminus U_n) = 1$.

განესაზღვროთ მეტრიკა X სივრცეში შემდეგნაირად:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_n(y)| 2^{-n}$$

ყოველი n ნატურალური რიცხვისათვის $|f_n(x) - f_n(y)| \leq 1$, ამიტომ $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_n(y)| 2^{-n}$

მწკრივი თანაბრად კრებადია.

ადვილი საჩვენებელია, რომ ასეთნაირად განსაზღვრული ფუნქცია $d: X \rightarrow R^+$...აყოფილებს საჩკუსიდის აქსიომის მოთხოვნას. იგი სიმეტრიულია და $d(x, x) = 0$.

დასამტკიცებელია. მიიღოთ ის, რომ $d(x, x) = 0$. როდესაც $x \neq y$, განვიხილოთ სინამ

$X \setminus \{y\} = V$ იგი ღია სიმრავლეა. ვთქვათ, U_j ბაზისის ის ელემენტია, რომელსაც ეკუთვნის წერტილი და $U_j \subset V$ რადგან X სრულად რეგულარულია, ამიტომ არსებობს ბაზისის ისეთი U_j ელემენტი, რომ $x \in U_j$ და $\bar{U}_j \subset U_j$. განვიხილოთ (U_j, U_j) წყვილის შესაბამისი ურისონის ფუნქცია f რომლისთვისაც $f(\bar{U}_j) = 0, f(X \setminus U_j) = 1$, აქედან გამოიმდინარე, $d(x, y) > 0$.

განვიხილოთ ახლა, რომ $Id: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau_d)$, სადაც τ თავიდან მოცემული ტოპოლოგიური სტრუქტურაა, τ_d აგებული მეტრიკური სტრუქტურით ინდუცირებული ტოპოლოგიური სტრუქტურა, იგივერი ასახვა X სივრცეში. მართლაც, ვთქვათ $x_0 \in X$ და $\varepsilon > 0$ ნებისმიერი რიცხვია. ავიღოთ B_{ε}^d ღია ბირთვი (X, d) მეტრიკულ სივრცეში.

$d(x_0, y)$, როგორც ერთი ცვლადის ფუნქცია, უწყვეტია. ეს გამოიმდინარეობს

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_n(y)| 2^{-n}$$

მწკრივის თანაბრად კრებადობიდან.

რადგან $d(x_0, y)$ უწყვეტი ფუნქცია, ამიტომ მოიძებნება $x_0 \in X$ წერტილის ისეთი მიდამო U_{ε} , რომ თუ $y \in U_{\varepsilon}$, მაშინ

$$|d(x_0, y) - d(x_0, x_0)| \leq d(y, x_0) < \varepsilon.$$

აქედან გამოიშინარება, რომ $y \in B_{x_0}^r$ ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $Id: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau_r)$ უწყვეტი ფუნქციაა.

ახლა ვანგვით პირიქით, ანუ ვანგვით, რომ $Id: (X, \tau_r) \rightarrow (X, \tau)$ უწყვეტი ფუნქციაა. დაუშვათ წინააღმდეგი, ექვით, x_0 წერტილის რაიმე დაფიქსირებული $U(x_0) \in B(X)$ მიდამოსათვის არ არსებობს ისეთი ε_0 რიცხვი, რომ $B_{x_0}^{\varepsilon_0} \subset U(x_0)$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ როგორც არ უნდა იყოს m რიცხვი, ყოველთვის მოიძებნება x_m წერტილი, რომელიც

აკმაყოფილებს პირობებს: $x_m \in B_{x_0}^{\frac{1}{2^m}}$, $x_m \in X \setminus U(x_0)$. X სივრცის ნორმალურობის გამო

$B(X)$ -ში არსებობს ისეთი V სიმრავლე, რომ $x_0 \in V$, $\bar{V} \subset U(x_0)$ და $(\bar{V}, U(x))$ წვეილს შეესაბამება ურისონის ფუნქცია f_x . ცხადია ყველა m რიცხვითვის $f_x(x_m) = 1, f_x(x_0) = 0$ და

$$d(x_m, x_0) = \sum_{n=1}^m |f_n(x_m) - f_n(x_0)| \cdot 2^{-n} \geq 2^{-k} |f_k(x_m) - f_k(x_0)| = 2^{-k}$$

ექვით, $m > k$. მაშინ $d(x_m, x_0) \geq 2^{-m}$ აქედან გამოიშინარება $x_m \notin B_{x_0}^{\frac{1}{2^m}}$ და $x_m \in X \setminus U(x)$. ეს

ნიშნავს იმას, რომ x_m ერთდროულად არ შეიძლება ეკუთვნოდეს $B_{x_0}^{\frac{1}{2^m}}$

სიმრავლესაც და $X \setminus U(x)$ სიმრავლესაც. მივიღეთ წინააღმდეგობა, მენი დაშვება არ ყოფილა სწორი. მაშასადამე $Id: (X, \tau_r) \rightarrow (X, \tau)$ ასახვა ყოფილა უწყვეტი. საბოლოოდ შეგვიძლია დასკვნით, რომ $\tau = \tau_r$. რაც ამტკიცებს თეორემას.

ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება *მრუდყოფილად ნორმალური* თუ იგი ნორმალურია და ყოველი მისი ჩაკერული სიმრავლე წარმოადგენს G_δ სიმრავლეს.

ცხადია ტოპოლოგიური სივრცე იქნება მრუდყოფილად ნორმალური, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ იგი ნორმალურია და მისი ყოველი ღია ქვესიმრავლე წარმოადგენს F_σ სიმრავლეს. **თეორემა 1.16.** X ნორმალური ტოპოლოგიური სივრცის A ქვესიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინ წარმოადგენს ჩაკერულ G_δ სიმრავლეს, თუ არსებობს ისეთი უწყვეტი ასახვა $f: X \rightarrow I$, რომ $A = f^{-1}(0)$.

დამტკიცება: ერთწერტილიანი $\{0\} \subset I$ სიმრავლე წარმოადგენს G_δ სიმრავლეს და ამიტომ $f^{-1}(0)$ სიმრავლეც იქნება G_δ სიმრავლე.

ექვით, A ჩაკერული G_δ სიმრავლეა ნორმალურ X სივრცეში. ამ სიმრავლის დამატება

ცხადია F_σ სიმრავლესა, ანუ $X \setminus A = \bigcup_{i=1}^\infty F_i$, სადაც $i = 1, 2, 3, \dots$ ურისონის ლემის თანახმად

ყოველი $i = 1, 2, 3, \dots$ ინდექსითვის არსებობს უწყვეტი ისეთი ფუნქცია $f_i: X \rightarrow I$, რომ $f_i(x) = 0$, როდესაც $x \in A$ და $f_i(x) = 1$, როდესაც $x \in F_i$.

6.14. თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ფორმულით განსახდურული X ფუნქცია უწყვეტია X სივრცეზე. $x \in A$ წერტილისთვის $f(x) = 0$.

თუ $x \notin A$, მაშინ არსებობს ისეთი i ინდექსი, რომ $x \in F_i$ და ამიტომ $f(x) \geq \frac{1}{2^i}, f_i(x) = \frac{1}{2^i} > 0$

მაშასადამე $A = f^{-1}(0)$. თეორემა დამტკიცდა

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს:

თეორემა 6.17. X ნორმალური ტოპოლოგიური სივრცის A ქვესიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინ წარმოადგენს ღია F_σ სიმრავლეს, თუ არსებობს ისეთი უწყვეტი ასახვა $f: X \rightarrow I$,

რომ $A = f^{-1}((0,1])$.

ტოპოლოგიური სივრცის ფუნქციონალურად ჩაკეტილი ქვესიმრავლე ეწოდება მის ისთ F ქვესიმრავლეს, რომლისთვისაც არსებობს უწყვეტი $f: X \rightarrow [0,1]$ ასახვა, რომელისთვისაც $f^{-1}(0) = F$ (ცხადია ფუნქციონალურად ჩაკეტილი სიმრავლე ჩაკეტილია X ტოპოლოგიური სივრცეში).

ფუნქციონალურად ჩაკეტილი ქვესიმრავლის დამატებას X სივრცეში ფუნქციონალურად ღია ქვესიმრავლე ეწოდება.

თეორემა 6.18. ყოველი ორი ფუნქციონალურად ჩაკეტილი თანაუქვეთი A და B ფუნქციონალურად განცალკევადია და ამ სიმრავლეებისათვის არსებობს ისეთი უწყვეტი ასახვა $f: X \rightarrow I$, რომ $A = f^{-1}(0), B = f^{-1}(1)$.

დამტკიცება: ვთქვათ $g, h: X \rightarrow I$ ისეთი უწყვეტი ასახვებია, რომ $A = g^{-1}(0), B = h^{-1}(0)$.

რადგან $A \cap B = \emptyset$, ამიტომ $f(x) = \frac{g(x)}{g(x) + h(x)}$ ასახვა უწყვეტია და იგი ფუნქციონალურად

განცალკევებს A და B სიმრავლეებს. თეორემა დამტკიცდა

თეორემა 6.19. ვედენისთვის თეორემა ვთქვათ X წარმოადგენს T_1 სივრცეს, მაშინ შემდეგი დებულებები ერთმანეთის ეკვივალენტურია:

1. X სრულყოფილად ნორმალურია.
2. X სივრცის ღია ქვესიმრავლე ფუნქციონალურად ღიაა.
3. X სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე ფუნქციონალურად ჩაკეტილია.
4. ყოველი ორი ჩაკეტილი თანაუქვეთი A და B სიმრავლისთვის არსებობს ისეთი უწყვეტი ასახვა $f: X \rightarrow I$, რომ $A = f^{-1}(0), B = f^{-1}(1)$.

დამტკიცება: 1-ლი პირობიდან 6.16. თეორემის საფუძველზე გამომდინარეობს მე-2-ე პირობა.

6.17. თეორემის საფუძველზე მე-2-ე პირობიდან გამომდინარეობს მე-3-ე პირობა.

6.18. თეორემის საფუძველზე მე-3-ე პირობიდან გამომდინარეობს მე-4-ე პირობა.

(ცხადია მე-4-ე პირობიდან გამომდინარეობს 1-ლი პირობა. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 6.20. მეტრიკული X სივრცის ყოველი ჩაკეტილი F ქვესიმრავლე ფუნქციონალურად ჩაკეტილია და წარმოადგენს G_δ სიმრავლეს.

დამტკიცება: ვთქვათ ρ რაიმე მეტრიკაა X სივრცეზე, ვაჩვენოთ, რომ ასახვა $f: X \rightarrow I$, რომელიც განსახდურულია ფორმულით $f(x) = \rho(x, F)$ უწყვეტი ფუნქციაა. ვთქვათ $x, y \in X$ და განვიხილოთ სიდიდე

$$|\rho(x, F) - \rho(y, F)|.$$

ადგილი აქვს უტოლობას $\rho(x, F) \leq \rho(x, a) \leq \rho(x, y) + \rho(y, a)$, სადაც a ნებისმიერი წერტილია F სიმრავლეში. ამ უტოლობიდან გამომდინარეობს, უტოლობა $\rho(x, F) \leq \rho(x, y) + \rho(y, F)$. მაშასადამე $\rho(x, F) - \rho(y, F) \leq \rho(x, y)$. ანალოგიურად გვექნება $\rho(y, F) - \rho(x, F) \leq \rho(x, y)$. საბოლოოდ $|\rho(x, F) - \rho(y, F)| \leq \rho(x, y)$. ეს კი ნიშნავს, რომ $f: X \rightarrow I$ ასახვა უწყვეტია.

თუ F ნაკეტილია მაშინ $F = \bar{F}$ ეაწევნოთ, რომ $\bar{F} = \{x | \rho(x, F) = 0\}$. წერტილი ეკუთვნის F სიმრავლის ნაკეტვას ρ მეტრიკით ინდუცირებული ტოპოლოგიური სტრუქტურის დროს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ არსებობს F სიმრავლის წერტილთა ისეთი მიმდევრობა, რომლის ზღვარიც მოცემული წერტილია. რადგან $f: X \rightarrow I$ ასახვა უწყვეტია, და ამ ასახვისთვის კი გვაქვს $f^{-1}(0) = F$, მაშასადამე F ფუნქციონალურად უწყვეტია. ამასთან $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-1}([0, \frac{1}{2^i}])$ და $f^{-1}([0, \frac{1}{2^i}])$ ღია სიმრავლეა ყოველი $i = 1, 2, 3, \dots$ ინდექსისთვის. ეს კი

ნიშნავს, რომ F წარმოადგენს G_δ სიმრავლეს. თეორემა დაამტკიცდა.

წინა თეორემიდან და ვედენისოვის თეორემიდან გამომდინარეობს:

თეორემა 621. ყოველი მეტრიზებადი სივრცე სრულყოფილად ნორმალურია.

ტოპოლოგიურ თვისებას ეწოდება *მემკვიდრეობითი*, თუ იგი ახასიათებს ყოველ ქვესივრცეს იმ ტოპოლოგიურ სივრცეში, რომელსაც ეს თვისება გააჩნია.

თუ ტოპოლოგიური თვისება არ არის მემკვიდრეობითი, მაგრამ იგი ახასიათებს რაიმე კონკრეტულ ტოპოლოგიური სივრცის ნებისმიერ ქვესივრცეს, მაშინ ამბობენ, რომ ეს სივრცე *მემკვიდრეობით ფლობს* მოცემულ თვისებას.

მაგალითად: პირველი და მყორე თვლადობის აქსიომების შესრულება, განცალკევადობის

$T_1 \leq 3 \frac{1}{2}$ აქსიომების შესრულება მემკვიდრეობითი თვისებებია; მაგრამ სეპარაბელურობა ან

ნორმალურობა არ არის მემკვიდრეობითი თვისება.

ვედენისოვის თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი:

თეორემა 622. სრულყოფილად ნორმალურობა მემკვიდრეობითი თვისებაა.

ორ ქვესიმრავლეს A და B ქვესიმრავლეს X ტოპოლოგიური სივრცეში ეწოდება

განცალკეული, თუ $A \cap B = \emptyset$ და $\bar{A} \cap B = \emptyset$. კერძოდ ყოველი ორი ჩაკეტილი, თანაუქვეთი სიმრავლე განცალკეულია. განცალკეულობა ასევე ყოველი ორი ღია თანაუქვეთი ქვესიმრავლეს.

თეორემა 623. ყოველი T_1 თვისების მქონე X ტოპოლოგიური სივრცისათვის შემდეგი

პირობები ერთმანეთის ეკვივალენტურია:

1. X ტოპოლოგიური სივრცე მემკვიდრეობით ნორმალურია.
2. ყოველი ღია ქვესიმრავლე X სივრცეში ნორმალური ქვესივრცეა.
3. ყოველი ორი განცალკეული A და B ქვესიმრავლისათვის X ტოპოლოგიური სივრცეში მოიძებნება ისეთი ღია სიმრავლეები $U, V \subset X$, რომ $A \subset U, B \subset V$ და $U \cap V = \emptyset$.

დამტკიცება: ცხადია 1-ლი პირობიდან გამომდინარეობს მე-2-ე პირობა. ვაჩვენოთ, რომ მე-2-ე პირობიდან გამომდინარეობს მე-3-ე პირობა. მართლაც, ვთქვათ A და B განცალკეული ქვესიმრავლეებია X ტოპოლოგიურ სივრცეში. დაუშვათ $M = X \setminus (\bar{A} \cap \bar{B}) \subset X$ ცხადია, $A, B \subset M$. A და B სიმრავლეების ჩაკეტვები არ გადაიკვეთება M სიმრავლესთან.

აქედან გამომდინარე, რადგან M ნორმალურია, არსებობენ ისეთი ლია $U, V \subset M$ სიმრავლეები M ქვესივრცეში, რომ $A \subset U, B \subset V$ და $U \cap V = \emptyset$. რადგან M ლია X ტოპოლოგიური სივრცეში, ამიტომ $U, V \subset M$ სიმრავლეები ლია იქნება X სივრცეშიც. ახლა ეანვენით, რომ მე-3-ე პირობიდან გამომდინარეობს 1-ლი პირობა.

უთქვამთ, M ნებისმიერი ქვესივრცეა. X ტოპოლოგიურ სივრცეში და $A, B \subset M$ ურთიერთ თანაუკვეთი ნაკეტილი ქვესიმრავლეები M -ში. ცხადია A და B განცალკეული ქვესიმრავლეებია X -ში თეორემის პირობის თანახმად, არსებობენ ისეთი ლია $U, V \subset X$ სიმრავლეები, რომ $A \subset U, B \subset V$ და $U \cap V = \emptyset$. თანაკვეთები $U \cap M$ და $V \cap M$ ლია M ქვესივრცეში, ისინი არ გადაიკვეთებიან და შეიცავენ A და B სიმრავლეებს. შესაბამისად, თეორემა დამტკიცდა.

§7. ტოპოლოგიური კონსტრუქციები

7.1. ტოპოლოგიურ სივრცეთა პირდაპირი ჯამი და ნამრავლი

ეთქვამთ, ტოპოლოგიურ სივრცეთა ისეთი ოჯახია, რომ $X_\alpha \cap X_{\alpha'} = \emptyset$ როდესაც $\alpha \neq \alpha'$ ტოპოლოგიურ სივრცეთა ამ ოჯახის პირდაპირი ჯამი ეწოდება $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ სიმრავლეს ისეთი ტოპოლოგიური სტრუქტურით, რომლის ლია სიმრავლეთა ოჯახი შედგება ისეთი ქვესიმრავლეებისაგან, რომელთა თანაკვეთია თითოეულ X_α სიმრავლესთან ლია (X_α, τ_α) სივრცეში.

ტოპოლოგიურ სივრცეთა ოჯახის პირდაპირი ჯამი აღინიშნება ასე: $\bigoplus_{\alpha \in A} (X_\alpha, \tau_\alpha)$

ესქვამთ, ახლა $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ ტოპოლოგიური ნებისმიერი ოჯახია, განვიხილოთ ასახვათა სიმრავლეები:

$$\begin{aligned} \prod_{\alpha \in A} X_\alpha &= \{f: A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \mid f(\alpha) \in X_\alpha\}, \\ (p_\alpha: \prod_{\alpha \in A} X_\alpha &\rightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha) \mid p_\alpha(f) = f(\alpha)) \end{aligned}$$

შევიტანთ $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ სიმრავლეში ისეთი ტოპოლოგიური სტრუქტურა, რომელიც ეწედაზე

სუსტია იმ ტოპოლოგიურ სტრუქტურათა შორის, რომლებსაიდანაც თითოეული p_α ასახვა უწყვეტია.

$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ სიმრავლეს ასეთი ტოპოლოგიური სტრუქტურით $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ ტოპოლოგიურ სივრცეთა ოჯახის პირდაპირ(ტიხონოვის) ნამრავლს უწოდებენ. იგი აღინიშნება ასე: $\prod_{\alpha \in A} (X_\alpha, \tau_\alpha)$.

$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ სიმრავლე შეიძლება გავაიგიოთ $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ სიმრავლის $\{x_\alpha \mid x_\alpha \in X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ სახის ქვესიმრავლეების სიმრავლესთან. მაშინ $p_\alpha\{x_\alpha\} = x_\alpha$ და $\prod_{\alpha \in A} (X_\alpha, \tau_\alpha)$ სივრცეში

ტოპოლოგიური სტრუქტურის ერთერთი წინაბაზა იქნება: $\{p_\alpha^{-1}(O_\alpha) \mid O_\alpha \in \mathcal{T}(X_\alpha)\}_{\alpha \in A}$.

აქ წინადაზის კანონიკური წინადაზა ეწოდება $\prod_{\alpha \in A} (X_\alpha, \tau_\alpha)$ პირდაპირ ნამრავლში.

ცხადია $\prod_{\alpha \in A} (X_\alpha, \tau_\alpha)$ სივრცეში, კანონიკური წინადაზის შესაბამისი ბაზა $B(\prod_{\alpha \in A} (X_\alpha, \tau_\alpha))$

შედგება ისეთი სიმრავლეებისაგან $\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$, სადაც $Y_\alpha \neq X_\alpha$ მხოლოდ სასრული რაოდენობის

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ინდექსებისათვის. ხოლო $Y_\alpha = X_\alpha, \alpha \in T(X_\alpha)$ ყველა $i = 1, 2, \dots, k$ ინდექსისათვის.

თეორემა 7.1. თუ $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ ტიხონოვის ნამრაველია, $Y_\alpha \subset X_\alpha, \alpha \in A$, მაშინ $\prod_{\alpha \in A} \bar{Y}_\alpha = \overline{\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha}$.

დამტკიცება ვთქვათ, $y \in \overline{\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha}$, მაშინ მისი ნებისმიერი მიდამო გადაჰყვება $\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ სიმრავლეს.

წერტილის ნებისმიერ მიდამოს აქვს სახე $U(y) = \bigcup_{\beta=1}^k p_{\alpha_i}^{-1}(U(y_{\alpha_i}))$, სადაც თითოეული $p_{\alpha_i}^{-1}(U(y_{\alpha_i}))$

წარმოადგენს $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ სივრცის კანონიკური წინადაზის ელემენტს.

განვიხილოთ ინდექსი, β' რომლისთვისაც

$$\bigcap_{i=1}^{k'} p_{\alpha_i}^{-1}(U(y_{\alpha_i})) \cap \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha \neq \emptyset.$$

$\bigcap_{i=1}^{k'} p_{\alpha_i}^{-1}(U(y_{\alpha_i}))$ თანაქვეთაში შეზღავდნი თითოეული სიმრავლე $p_{\alpha_i}^{-1}(U(y_{\alpha_i}))$ გადაჰყვება $\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$

სიმრავლეს. აქირითა მათგან ნებისმიერი $p_{\alpha_i}^{-1}(U(y_{\alpha_i}))$ ცხადია, $y \in p_{\alpha_i}^{-1}(U(y_{\alpha_i})) \cap \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$

$p_{\alpha_i}(y) = y_{\alpha_i} \in U(y_{\alpha_i})$. რადგან $U(y_{\alpha_i})$ წარმოადგენს y_{α_i} წერტილის ნებისმიერად არჩეულ

მიდამოს X_{α_i} სივრცეში ამიტომ $y \in \bar{Y}_{\alpha_i}$. ეს კი ნიშნავს, რომ $y \in \prod_{\alpha \in A} \bar{Y}_\alpha$.

მეორეაქვს, $\prod_{\alpha \in A} \bar{Y}_\alpha \subset \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$. ვთქვათ, ახლა $y \in \prod_{\alpha \in A} \bar{Y}_\alpha$, მაშინ ნებისმიერი $\alpha \in A$ ინდექსისათვის

$y_\alpha \in \bar{Y}_\alpha$. y_α წერტილის ნებისმიერი $U(y_\alpha)$ მიდამოსათვის $Y_\alpha \cap U(y_\alpha) \neq \emptyset$ განვიხილოთ

y -ის ნებისმიერი მიდამოს აქვს სახე: $U(y) = \bigcup_{\beta=1}^k p_{\alpha_i}^{-1}(U(y_{\alpha_i}))$, ამიტომ ამ მიდამოებისათვის

$U(y) \cap \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha \neq \emptyset$. ეს კი ნიშნავს $y \in \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$. ქედან გამოჰდინარეობს, რომ

$$\prod_{\alpha \in A} \bar{Y}_\alpha \subset \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha.$$

მაშასადამე, საბოლოოდ გვექვება:

$$\prod_{\alpha \in A} \bar{Y}_\alpha \subset \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha, \quad \prod_{\alpha \in A} \bar{Y}_\alpha \subset \overline{\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha}.$$

ანუ

$$\prod_{\alpha \in A} \bar{Y}_\alpha = \overline{\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha}.$$

თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 7.1* თუ Y_α ჩაკეტილი ქვესიმრავლეა X_α ტოპოლოგიურ სივრცეში თითოეული $\alpha \in A$ ინდექსისათვის, მაშინ $\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ ჩაკეტილი ქვესიმრავლეა $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ ტოპოლოგიურ სივრცეში და

პირიქით: თუ $\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ ჩაკეტილი ქვესიმრავლეა $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ ტოპოლოგიურ სივრცეში, მაშინ Y_α

ჩაკეტილი ქვესიმრავლეა X_α ტოპოლოგიურ სივრცეში თითოეული $\alpha \in A$ ინდექსისათვის.

დამტკიცება: რადგან Y_α ჩაკეტილია, ამიტომ $Y_\alpha = \bar{Y}_\alpha$. წინა თეორემა ან გამომდინარეობს,

რომ $\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha = \prod_{\alpha \in A} \bar{Y}_\alpha = \overline{\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha}$. ეს კი ნიშნავს რომ $\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ ჩაკეტილი ქვესიმრავლეა $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$

სივრცეში.

ეთქვამთ, ახლა $\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ ჩაკეტილი ქვესიმრავლეა $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ სივრცეში, მაშინ $\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha = \overline{\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha} = \prod_{\alpha \in A} \bar{Y}_\alpha$.

ეთქვამთ, y_α წარმოადგენს Y_α სიმრავლის 'შეხების წერტილს' და $y_\alpha \in Y_\alpha$. თუ $y = \prod_{\alpha \in A} \bar{y}_\alpha$ და

$p_\alpha(y) = y_\alpha$ მაშინ $y \in \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ რაც შეუძლებელია უკანასკნელი ტოლობის გამო. მაშასადამე

$y_\alpha = p_\alpha(y) \in Y_\alpha$. მივიღეთ წინააღმდეგობა, ჩვენი დაშვება, რომ შეხების წერტილი y_α არ

ეკუთვნის Y_α სიმრავლეს არ ყოფილა სწორი. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ Y_α სიმრავლეს ეკუთვნის თავისი ყველა შეხების წერტილი და ამიტომ იგი ცაკეტილია. თეორემა დამტკიცდა

თეორემა 7.1. $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \dots, (X_n, d_n), \dots$ მეტრიკულ სივრცეება მიმდევრობაა და თითოეულ

X_n სივრცეში მეტრიკა d_n შემოსაზღვრულია რიცხით 1, მაშინ $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x_n, y_n)$

სადაც $x = \{x_n\}, y = \{y_n\}, n = 1, 2, \dots, \infty$, მეტრიკით ინდუცირებული ტოპოლოგიური სტრუქტურა

$\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ სიმრავლეში ემთხვევა $\prod_{n \in \mathbb{N}} (X_n, \tau_{d_n})$ პირდაპირი ნამრავლის ტოპოლოგიურ

სტრუქტურას.

დამტკიცება: იმის გამო, რომ ტოპოლოგიური სტრუქტურა $\prod_{n \in \mathbb{N}} (X_n, \tau_{d_n})$ პირდაპირ ნამრავლში

ყველაზე სუსტია იმ ტოპოლოგიურ სტრუქტურებს შორის, რომლებსითვისაც

$p_n : \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \rightarrow (X_n, \tau_{d_n}), n = 1, 2, \dots, \infty$ ასახვები უწყვეტია, ასახვა

$p_n : (\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n, \tau_d) \rightarrow (X_n, \tau_{d_n})$ იქნება უწყვეტი. ამიტომ საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ თუ

ქვესიმრავლე $O \subset \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ღიაა d მეტრიკით ინდუცირებულ ტოპოლოგიურ სტრუქტურაში.

ანუ $(\prod_{n \in N} X_n, r_d)$ სივრცეში ატი ღია იქნება $\prod_{n \in N} (X_n, r_{d_n})$ პირდაპირ ნამრავლში. ავიღოთ

ნებისმიერი წერტილი $x = \{x_n\} \in O$ არსებობს ისეთი r , რომ

$x \in B'_r$. თუ გავიხსენებთ კანონიკური წინაბაზის ცნებას, თეორემის დასამტკიცებლად

საკმარისია ვიპოვოთ ისეთი k რიცხვი და ღია სიმრავლეები $B_n \subset X_n, n = 1, 2, \dots, k$,

რომ $x \in \bigcap_{n=1}^k p_n^{-1}(B_n) \subset B'_r \subset O$

ვთქვათ, k ისეთი რიცხვია, რომ $\sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2} r$. n ინდექსის ყოველი $n = 1, 2, \dots, k$

მნიშვნელობისთვის დაეუწეათ $B_n = B_{r_n}^{\frac{r}{2}} = \{z \in X_n \mid d_n(x_n, z) < \frac{r}{2}\}$. ყოველი $y \in \bigcap_{n=1}^k p_n^{-1}(B_n)$

წერტილისთვის გვაქვს $d_n(x_n, y_n) < \frac{r}{2}$, როდესაც $n \leq k$

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

კინაღან

$$x \in \bigcap_{n=1}^k p_n^{-1}(B_n) \subset B'_r \subset O.$$

რაც ამტკიცებს თეორემას

ვთქვათ, (X, d) მეტრიკული სივრცეა, განვიხილოთ X სიმრავლე მეტრიკული სტრუქტურით

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \text{ წახდია ამ მეტრიკულ სივრცეში მანძილი ყოველ ორ წერტილს შორის}$$

ნაკლებია ერთზე. ტოპოლოგიური სივრცე (X, r_d) პოპოლოგიურულია $(X, r_{d'})$ სივრცის. ამიტომ
თუ გვაქვს მეტრიკულ სივრცეთა რაიმე მიმდევრობა:

$(X_1, d_1), (X_2, d_2), \dots, (X_n, d_n), \dots$, მაშინ $\prod_{n \in N} (X_n, r_{d_n})$ ტოპოლოგიური სივრცე პოპოლოგიურულია

$$\text{იქნება } (\prod_{n \in N} X_n, r_{d'}) \text{ სივრცის, სადაც } d'(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d'_n(x_n, y_n).$$

72. ასახვათა ოჯახის დიაგონალი

ვთქვათ, ახლა მოცემული გვაქვს ასახვათა ოჯახი $\{f: X \rightarrow Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$. ასახვათა ამ ოჯახის

დიაგონალი ეწოდება ასახვას $\Delta_f^X: X \rightarrow \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით:

$$\Delta_f^X(x) = (\varphi: A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha \text{ სადაც } \varphi: A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha \text{ ისეთი ასახვაა რომლისთვისაც}$$

$$\varphi(\alpha) = f_\alpha(x), \text{ სხვათაშორის } \Delta_f^X(x) = \{y_\alpha\}_{\alpha \in A}, \text{ სადაც } y_\alpha = f_\alpha(x).$$

ვიტყვიან, რომ ასახვათა $\{f: X \rightarrow Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ოჯახი განაცალკევს წერტილებს, თუ X სივრცის

ყოველი ორი განსხვავებული x, y წერტილისათვის არსებობს ისეთი $f_\alpha: X \rightarrow Y_\alpha$. ასახვა

მოცემული ოჯახიდან, რომ $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$.

ვიტყვი, რომ ასახვათა $\{f: X \rightarrow Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ოჯახი განაცალებს წერტილებს და ჩაკეტილ სიმრავლეებს, თუ X სივრცის ნებისმიერი F ჩაკეტილი სიმრავლისა და $x \notin F$ წერტილისათვის არსებობს ისეთი $f_\alpha: X \rightarrow Y_\alpha$ ასახვა მოცემული ოჯახიდან, რომ $f_\alpha(x) \notin \overline{f_\alpha(F)}$.

თეორემა 7.2. თუ X ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს განცალგებლობის T_0 აქსიომას, ამასთან $\{f: X \rightarrow Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ოჯახი განაცალებს წერტილებს და ჩაკეტილ სიმრავლეებს, მაშინ იგი განაცალებს წერტილებსაც.
დამტკიცება: მართლაც თუ $x \neq y$ მათი არსებობსაწ წერტილებიდან ერთერთის ისეთი მიდამო, რომელიც მეორეს არ შეიცავს, ვთქვათ, ასეთ მიდამო წარმოადგენს რაიმე O

ღია სიმრავლეს. აღენიშნოთ z -ით ის წერტილი x, y წერტილებს შორის, რომელიც არ ეკუთვნის $F = X \setminus O$ ჩაკეტილ სიმრავლეს. თუ $f_\alpha(z) \notin \overline{f_\alpha(F)}$, რომელია

f_α -სათვის, მაშინ $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$. რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

თეორემა 7.3. თუ ასახვა $f: X \rightarrow Y$ ურთიერთცალსახაა და $\{f\}$ ერთელმენტიანი ოჯახი განაცალებს წერტილებს დამატებით სიმრავლეებს, მაშინ აუცილებლობით ჩადგება.

დამტკიცება: საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ყოველი ჩაკეტილი $F \subset X$ სიმრავლისთვის ადგილი აქვს თანაფარდობას

$$f(F) = f(X) \setminus \overline{f(F)}.$$

ცხადია, ამ ტოლობის მარცხენა მხარე მარჯვენა მხარის ქვესიმრავლეა.

თუ $y = f(x) \in f(X) \setminus \overline{f(F)}$, მაშინ $x \notin F$ და $y = f(x) \notin \overline{f(F)}$. აქედან გამომდინარეობს, რომ * ტოლობის მარჯვენა მხარე მარცხენა მხარის ქვესიმრავლეა. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 7.4. უწყვეტ ასახვათა ოჯახის $\{f: X \rightarrow Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ დიაგონალი $\Delta_f: X \rightarrow \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$

უწყვეტი ასახვაა.

დამტკიცება: განვიხილოთ ასახვა $p_\alpha \circ \Delta_f$. თუ α -სათვის განხილული ასახვა უწყვეტია მაშინ Δ_f უწყვეტია. მართლაც $\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ სივრცეში კანონიკური წინაბაზაა $\{p_\alpha^{-1}(O_\alpha)\}$.

თუ $p_\alpha \circ \Delta_f$ ასახვა უწყვეტია, მაშინ $(p_\alpha \circ \Delta_f)^{-1}(O_\alpha)$ ღიაა X ში

ღია სიმრავლეს $\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ სივრცეში აქვს სახე $\bigcup_{\gamma \in I} p_\gamma^{-1}(O'_\gamma)$. აქედან გამომდინარე,

$$(\Delta_f)^{-1}\left(\bigcup_{\gamma \in I} p_\gamma^{-1}(O'_\gamma)\right) = \bigcup_{\gamma \in I} (p_\gamma \circ \Delta_f)^{-1}(O'_\gamma).$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეს ღია სიმრავლეა.

მეორე მხრივ $f_\alpha(x) = (p_\alpha^{-1} \circ f_\alpha)(x)$ ამიტომ $p_\alpha \circ \Delta_f$ ასახვა უწყვეტია. მაშასადამე უწყვეტი იქნება Δ_f ასახვაც. თეორემა დამტკიცდა.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა, რომელსაც დიდი ტექნიკური მნიშვნელობა აქვს.

თეორემა 7.5. თეორემა დიაგონალურ ასახვაზე თუ უწყვეტ ასახვათა ოჯახი $\{f: X \rightarrow Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ განაცალებს წერტილებს, მაშინ დიაგონალი $\Delta_f: X \rightarrow \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ ინექციური ასახვაა; თუ ამასთან, ასახვათა ოჯახი განაცალებს წერტილებს და ჩაკეტილ სიმრავლეებს, მაშინ, დიაგონალი პოშიომორფული ჩადგმა.

დამტკიცება: თუ ასახვათა $\{f: X \rightarrow Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ოჯახი განაცალებს წერტილებს, მაშინ X სივრცის ყოველი ორი განსხვავებული x, y წერტილისათვის არსებობს ისეთი $f_\alpha: X \rightarrow Y_\alpha$ ასახვა მოცემული ოჯახიდან, რომ $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$. ეს კინიშნავს, რომ ასახვათა ასეთი ოჯახის დიაგონალი ინექციაა.

თუ ასახვათა ოჯახი განაცალებს წერტილებს და ჩაკეტილ სიმრავლეებს, მაშინ ზრთი ასახვისგან შედგენილი ოჯახს: $\{\Delta_f\}$ ასევე აქვს ეს თვისება. წინააღმდეგ შემთხვევაში, თუ $f(x) \in \overline{f(F)}$, რომელიც ჩაკეტილი $F \subset X$ სიმრავლისთვის, მაშინ

$f_\alpha(x) = p_\alpha(f(x)) \in p_\alpha(\overline{f(F)}) \subset \overline{p_\alpha f(F)} = \overline{f_\alpha(F)}$ ეს კი ნიშნავს იმას, რომ ასახვათა მოცემული ოჯახი არ განაცალებს წერტილებს და ჩაკეტილ სიმრავლეებს. დამტკიცება დამთავრდება 7.3. თეორემის გამოყენებით.

უთქვამთ $I = [0,1]$ ერთეულოვანი სეგმენტია განვიხილოთ ინდექსთა სიმრავლე A მისი შესაბამისი კარდინალური რიცხვი $\text{card } A$. პირდაპირ(ტინსონოვის) ნამრავლს $\prod_{\alpha \in A} (I_\alpha, \tau)$ სადაც $I_\alpha = I$ τ ჩვეულებრივი ტოპოლოგიური სტრუქტურაა $I = [0,1]$ სეგმენტზე.

ტიხონოვის კუბი ეწოდება, აგი აღინიშნება ასე $I^{\text{თქვამთ}}$.

თუ A ოცნადი სიმრავლეა, მაშინ $I^{\text{თქვამთ}}$ ტიხონოვის კუბს **პილბერტის კუბი** ეწოდება. იგი აღინიშნება ასე I^* ან ასე I^* .

თეორემა 7.6. ყოველი სრულად რეკულარული X ტოპოლოგიური სივრცე პოშიომორფულად ჩადგმება ტიხონოვის კუბში.

დამტკიცება: განვიხილოთ უწყვეტ ასახვათა მთელი ოჯახი $\{f_\alpha: X \rightarrow [0,1]\}$, რადგან X სრულად რეკულარულია ამიტომ ასახვათა ეს ოჯახი განაცალებს წერტილებს და ჩაკეტილ სიმრავლეებს. თუ გაეთვალისწინებთ 7.5. თეორემას, ასახვათა მოცემული ოჯახის დიაგონალი უნდა იყოს პოშიომორფული ჩადგმა $\Delta_f: X \rightarrow \prod_{\alpha} I_\alpha$, სადაც $I_\alpha = [0,1]$. თეორემა დამტკიცდა.

7.4. ფაქტორსივრცე

უთქვამთ, X ტოპოლოგიური სივრცეა, და $\approx$ რაიმე ეკვივალენტობის მიმართება X სიმრავლეზე, ხოლო $X_\approx$ ეკვივალენტობის კლასთა სიმრავლე. განვიხილოთ ასახვა

$p: X \rightarrow X_\approx$ განსაზღვრული ფორმულით: $p(x) = [x]$. შევიტანოთ $X_\approx$ სიმრავლეში ისეთი ტოპოლოგიური სტრუქტურა რომელიც მაქსიმალურია ყველა იმ ტოპოლოგიურ სტრუქტურათა შორის, რომლებსაც დროსაც p ასახვა უწყვეტია.

ასეთ ტოპოლოგიურ სტრუქტურას უწოდებენ $\approx$ ეკვივალენტობის მიმართებით განსაზღვრული ფაქტორ ტოპოლოგიური სტრუქტურას, აღვნიშნოთ იგი $\tau_\approx$ სიმბოლოთი.

$([X], \tau_\approx)$ ტოპოლოგიურ სივრცეს უწოდებენ $\approx$ ეკვივალენტობის მიმართებით განსაზღვრულ

X ტოპოლოგიური სივრცის ფაქტორ ტოპოლოგიური სივრცეს. $p: X \rightarrow X_*$ ასახვას *კანონიკური პროექცია* ეწოდება.

მაგალითი: ვთქვათ X ტოპოლოგიური სივრცეა და $A \subset X$ მისი რაიმე ქვესიმრავლე. შევიტანოთ X სივრცეში ეკვივალენტობის მიმართება: $x \approx y$ თუ $x, y \in A$, $x \approx x$ თუ $x \in X \setminus A$. ამ ეკვივალენტობის მიმართებით განესაზღვროთ X სივრცის ფაქტორსივრცე აღენიშნოთ იგი X_* სიმბოლოთი.

უწყვეტ $s: X_* \rightarrow X$ ასახვას ეწოდება X სივრცის კვეთა $\approx$ ეკვივალენტობის მიმართების დროს, თუ კომპოზიცია $p \circ s = Id_{X_*}$, სადაც $p: X \rightarrow X_*$ კანონიკური პროექციაა.

თეორემა 7.7. თუ პაუზდორფის X ტოპოლოგიურ სივრცეს გააჩნია კვეთა რაიმე $\approx$ ეკვივალენტობის მიმართების დროს, მაშინ X_* პაუზდორფის ტოპოლოგიური სივრცეა.

დამტკიცება: კვეთა $s: X_* \rightarrow X$ ინექციაა. ნ.ნ. თეორემიდან გამომდინარე X_* უნდა იყოს პაუზდორფის.

მაგალითი: ვთქვათ X ტოპოლოგიური სივრცეა და $A \subset X$ მისი რაიმე ქვესიმრავლე. შევიტანოთ X სივრცეში ეკვივალენტობის მიმართება: $x \approx y$ თუ $x, y \in A$, $x \approx x$ თუ $x \in X \setminus A$. ამ ეკვივალენტობის მიმართებით განსაზღვრული ფაქტორსივრცე აღენიშნოთ X_* სიმბოლოთი.

7.5. ტოპოლოგიურ სივრცეთა პირდაპირი და შებრუნებული სპექტრები

A სიმრავლეს ეწოდებენ *მიმართულ სიმრავლეს*, თუ მასზე განსაზღვრულია ბინარული მიმართება $<$, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისებები:

1. ყოველი $\alpha \in A$ ელემენტისთვის წყვილი $(\alpha, \alpha) \in <$.
2. $\alpha, \beta, \gamma \in A$ ელემენტებისთვის, თუ წყვილი $(\alpha, \beta) \in <$, წყვილი $(\beta, \gamma) \in <$, მაშინ წყვილი $(\alpha, \gamma) \in <$.
3. ყოველი ორი $\alpha, \beta \in A$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი $\gamma \in A$ ელემენტი, რომ $(\alpha, \gamma) \in <$ და $(\beta, \gamma) \in <$.

როდესაც $(\alpha, \beta) \in <$, წერენ: $\alpha < \beta$.

ვთქვათ, A მიმართული სიმრავლეა, შევუსაბამოთ მის ყოველ α ელემენტს ტოპოლოგიური სივრცე X_α , ხოლო ყოველ ორ $\alpha < \beta$ ელემენტს A სიმრავლიდან უწყვეტი ასახვა

$\pi_\beta^\alpha: X_\alpha \rightarrow X_\beta$, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისებები:

1. A სიმრავლის ყოველი α ელემენტისათვის $\pi_\alpha^\alpha = Id_{X_\alpha}$.
2. A სიმრავლის ყოველი სამი $\alpha < \beta < \gamma$ ელემენტისათვის $\pi_\gamma^\beta \circ \pi_\beta^\alpha = \pi_\gamma^\alpha$.

$(X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, A)$ სამეულს A მიმართულ სიმრავლეზე განსაზღვრული *ტოპოლოგიურ სივრცეთა პირდაპირი სპექტრი* ან *ტოპოლოგიურ სივრცეთა ინდექსიური სისტემა* ეწოდება. $X_\alpha, \alpha \in A$

სივრცეებს *პირდაპირი სპექტრის ელემენტები* ეწოდება, $\pi_\beta^\alpha: X_\alpha \rightarrow X_\beta$ ასახვებს კი

პირდაპირი სპექტრის პროექციები, ხოლო A სიმრავლეს *ინდექსთა სიმრავლე* ეწოდება. თუ მოცემული გვაქვს ორი პირდაპირი სპექტრი ერთ და იგივე ინდექსთა სიმრავლეზე:

$(X_\sigma, \pi_\sigma^a, A); (Y_\sigma, \pi_\sigma^a, A)$. ერთი სპექტრიდან მეორეზე ასახვა ეწოდება ასახვათა ოჯახს: $\{f_\sigma\}_{\sigma \in A}$ სადაც $f_\sigma: X_\sigma \rightarrow Y_\sigma$ და სრულდება პირობა $f_\sigma \circ \pi_\sigma^a = \pi_\sigma^a \circ f_\sigma$ ანუ რაც ნიშნავს იმას, რომ კომუტაციურია დიაგრამა:

$$\begin{array}{ccc} X_\sigma & \xrightarrow{f_\sigma} & Y_\sigma \\ \downarrow \pi_\sigma^a & & \downarrow \pi_\sigma^a \\ X_\sigma & \xrightarrow{f_\sigma} & Y_\sigma \end{array}$$

ტოპოლოგიურ სივრცეთა პირდაპირი $(X_\sigma, \pi_\sigma^a, A)$ სპექტრის ზღვარი ეწოდება $(\oplus X_\sigma)/\sim$, ფაქტორსივრცეს. სადაც $\oplus X_\sigma$ სივრცეთა $\{X_\sigma\}_{\sigma \in A}$ ოჯახის პირდაპირი ჯამია, $\sim$ კი ეკვივალენტობის მიმართება, რომელიც განსაზღვრულია ასე: $x_\sigma \sim x_\rho$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ არსებობს ისეთი γ ინდექსი, რომ $\pi_\gamma^a(x_\sigma) = \pi_\gamma^a(x_\rho)$. ცხადია ასეთად განსაზღვრული მიმართება აკმაყოფილებს ეკვივალენტობის მიმართების ყველა პირობას და ფაქტორსივრცე კორექტულად არის განსაზღვრული. მოცემული პირდაპირი სპექტრის ზღვარი აღინიშნება ასე $\varinjlim (X_\sigma, \pi_\sigma^a, A)$, ან ასე $\varinjlim X_\sigma$.

ყოველი $\alpha \in A$ ინდექსისთვის კორექტულად განისაზღვრება ასახვა: $I_\alpha: X_\alpha \rightarrow (\oplus X_\sigma)/\sim$, $I_\alpha(x_\alpha) = [x_\alpha]$, $x_\alpha \in X_\alpha$.

ელემენტარულად მტკიცდება შემდეგი თეორემა:

თეორემა 7.8. ტოპოლოგიურ სტრუქტურა ტოპოლოგიურ სივრცეთა პირდაპირი სპექტრის ზღვარში, ემთხვევა იმ მაქსიმალურ ტოპოლოგიურ სტრუქტურას $(\oplus X_\sigma)/\sim$, სინრაელეში, რომელიც მაქსიმალურია ყველა იმ ტოპოლოგიურ სტრუქტურათა შორის, რომლების დროსაც თითოეული $I_\alpha: X_\alpha \rightarrow (\oplus X_\sigma)/\sim$ ასახვა უწყვეტია.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $I_\alpha: X_\alpha \rightarrow (\oplus X_\sigma)/\sim$ ასახვა ღიაა.

თეორემა 7.9. ვთქვათ $f = \{f_\sigma: X_\sigma \rightarrow Y_\sigma\}_{\sigma \in A}$ ასახვა $(X_\sigma, \pi_\sigma^a, A)$ პირდაპირი სპექტრიდან $(Y_\sigma, \pi_\sigma^a, A)$ პირდაპირ სპექტრში. f_σ უწყვეტია ყოველი $\alpha \in A$ ინდექსისათვის. მაშინ არსებობს უწყვეტი ასახვა $\tilde{f}: \varinjlim X_\sigma \rightarrow \varinjlim Y_\sigma$ პირველი სპექტრის ზღვრიდან მეორე სპექტრის ზღვარში, რომლისთვისაც ადგილი აქვს ტოლობას: $\tilde{f} \circ I_\alpha = I'_\alpha \circ f_\alpha$, ანუ კომუტაციურია დიაგრამა:

$$\begin{array}{ccc} X_\sigma & \xrightarrow{f_\sigma} & \varinjlim X_\sigma \\ \downarrow f_\sigma & & \downarrow \tilde{f} \\ Y_\sigma & \xrightarrow{I'_\sigma} & \varinjlim Y_\sigma \end{array}$$

დამტკიცება: ვთქვათ, $\xi \in \varinjlim X_\sigma$ ნებისმიერი ელემენტია, $x_\alpha \in \xi$ მისი ნებისმიერი

წარმომადგენელი. ცხადია $I_\alpha(x_\alpha) = \xi$. ვთქვათ $y_\alpha = f_\alpha(x_\alpha)$, შევუსაბამოთ ξ ელემენტს

$\eta \in \lim_{\rightarrow} Y_\alpha$ ელემენტი, რომელიც განისაზღვრება ასე: $\eta = I' (y_\alpha) = [y_\alpha] = [f_\alpha(x_\alpha)]$.

შევამოწმოთ, რომ აგებული შესაბამისობა არ არის დამოკიდებული ξ კლასის წარმომადგენლის შერჩევაზე. ვთქვათ, $x_\beta \in \xi$ კლასის სხვა ელემენტი. $x_\alpha \approx x_\beta$ ამიტომ არსებობს ისეთი γ , რომ $\pi_\gamma^\alpha(x_\alpha) = \pi_\gamma^\beta(x_\beta)$. თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს ეიმოქმედებთ f_γ სახელით, მივიღებთ $f_\gamma(\pi_\gamma^\alpha) = f_\gamma(\pi_\gamma^\beta)$. აქედან $f_\gamma \circ \pi_\gamma^\alpha = \pi_\gamma^\beta \circ f_\gamma$ და

$f_\gamma \circ \pi_\gamma^\beta = \pi_\gamma^\beta \circ f_\beta$ ტოლობების ძალით მივიღებთ $\pi_\gamma^\alpha(f_\alpha(x_\alpha)) = \pi_\gamma^\beta(f_\beta(x_\beta))$, მაშასადამე $f_\alpha(x_\alpha) \approx f_\beta(x_\beta)$, ეს კი ნიშნავს, $\tilde{f}$ შესაბამისობა კორექტულად არის აგებული.

ვაჩვენოთ, რომ $\tilde{f}$ ასახვა უწყვეტია. ვთქვათ, $O \in \lim_{\rightarrow} Y_\alpha$ რაიმე ღია ქვესიმრავლეა

$\lim_{\rightarrow} Y_\alpha$ სივრცეში და $\tilde{f}^{-1}(O)$ არ არის ღია $\lim_{\rightarrow} X_\alpha$ სივრცეში. $f_\alpha^{-1}((I_\alpha')^{-1}(O))$ ღიაა X_α სივრცეში. $\tilde{f} \circ I_\alpha = I_\alpha' \circ f_\alpha$, ამიტომ $I_\alpha^{-1}(\tilde{f}^{-1}(O)) = f_\alpha^{-1}((I_\alpha')^{-1}(O))$. მაშასადამე $I_\alpha^{-1}(\tilde{f}^{-1}(O))$ ღია სიმრავლეა. როგორც ვიცით I_α ასახვა ღიაა, ამიტომ ღია იქნება $I_\alpha(I_\alpha^{-1}(\tilde{f}^{-1}(O))) \subset \tilde{f}^{-1}(O)$ სიმრავლეც $\lim_{\rightarrow} X_\alpha$ სივრცეში. $\tilde{f}^{-1}(O) = \bigcup_{\alpha \in B \subset A} I_\alpha(I_\alpha^{-1}(\tilde{f}^{-1}(O)))$.

სადაც B რაღაც ქვესიმრავლეა ინდექსთა A სიმრავლეში, თითოეული i ინდექსისთვის, როგორც ვნახეთ, $I_\alpha(I_\alpha^{-1}(\tilde{f}^{-1}(O)))$ ღია სიმრავლეა, ამიტომ $\tilde{f}^{-1}(O)$ ღიაა

$\lim_{\rightarrow} X_\alpha$ სივრცეში. აშასადამე $\tilde{f}$ უწყვეტია. თვორემა დამტკიცდა.

ზემოთ აგებულ $\tilde{f} : \lim_{\rightarrow} X_\alpha \rightarrow \lim_{\rightarrow} Y_\alpha$ ასახვას უწოდებენ $f = \{f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ პირდაპირ

სპექტრთა ასახვის ზღვარს და მას აღნიშნავენ ასე: $\lim_{\rightarrow} f_\alpha$.

ვთქვათ, A მიმართული სიმრავლეა, და $A' \subset A$ მისი ქვესიმრავლე, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისება: თუ $\alpha \in A$, მაშინ არსებობს ისეთი $\beta \in A'$ რომ $\alpha < \beta$. ასეთ $A' \subset A$ ქვესიმრავლეს A სიმრავლის კოფინალური ნაწილი ეწოდება.

თეორემა 7.10. თუ A' ქვესიმრავლე A სიმრავლის კოფინალური ნაწილია და $(X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, A); (X'_\alpha, \pi_\beta^{\alpha'}, A')$ ტოპოლოგიურ სივრცეთა პირდაპირი სპექტრები, სადაც

$X_\alpha = X'_\alpha, \pi_\beta^\alpha = \pi_\beta^{\alpha'}$ როდესაც $\alpha, \beta \in A'$, მაშინ არსებობს პომეომორფიზმი

$f : \lim_{\rightarrow} X'_\alpha \rightarrow \lim_{\rightarrow} X_\alpha$.

დამტკიცება: ვთქვათ, $\bar{X} = \lim_{\rightarrow} X_\alpha$, განვიხილოთ პირდაპირი სპექტრი $(X_\alpha = \bar{X}, \pi_\beta^\alpha = Id_{\bar{X}}, A')$,

ცხადია ამ სპექტრის ზღვარი $\bar{X}$ სივრცეა. არსებობს ასახვა $h = \{h_\alpha : X'_\alpha \rightarrow \bar{X}\}_{\alpha \in A'}$

$(X'_\alpha, \pi_\beta^{\alpha'}, A')$. სპექტრიდან $(X_\alpha = \bar{X}, \pi_\beta^\alpha = Id_{\bar{X}}, A')$ სპექტრში, რომელიც განისაზღვრება

შემდეგნაირად: $h_\alpha(x_\alpha) = [x_\alpha]$, $h_\beta \circ \pi_\beta^{\alpha'} = Id_{\bar{X}} \circ I_\alpha$ განვიხილოთ ამ ასახვის ზღვარი $\lim_{\rightarrow} h_\alpha$, ეს

ასახვა სიურექციაა. მართლაც, ვინაიდან $\xi \in \bar{X}$ წარმოდგენს კლასს, რომელიც შედგება X_α ,

$\alpha \in A$ სივრცეთა ელემენტებისგან და A' ქვესიმრავლე A სიმრავლის კოფინალური

ნაწილია, ამიტომ ξ კლასში აუცილებლად შევა ელემენტი $x_\alpha \in X'_\alpha, \alpha \in A'$. ამ ფაქტიდან კი გამოძინარეობს, რომ $\lim h_\alpha$ ასახვა სიურექციაა.

ახლა განვიხილოთ $\lim X'_\alpha$ სიურცის ორი სხვადასხვა ელემენტი ξ_1, ξ_2 . ვთქვათ, ამ კლასების წარმომადგენლებია $x_\alpha \in X'_\alpha, x_\beta \in X'_\beta$, სადაც $\alpha, \beta \in A'$ $h_\alpha(x_\alpha) = [x_\alpha] = \xi_1$, $h_\beta(x_\beta) = [x_\beta] = \xi_2$. ეს კი ნიშნავს, რომ $\lim h_\alpha$ ინექციაც არის. მაშასადამე $\lim h_\alpha$ ბიექციაა.

როგორც ვიცით $I_\alpha: X'_\alpha \rightarrow \lim X'_\alpha$ ღია ასახვაა ამიტომ $\lim h_\alpha$ ასახვის ურწევებობა იგივენაირად მტკიცდება იგივენაირად მტკიცდება, როგორც წინა თეორემაში პირდაპირ სპრეტრთა ასახვის ზღერის ურწევებობა.

$(X'_\alpha, \pi_\alpha, A')$ პირდაპირი სპექტრის ზღერის ტოპოლოგიური სტრუქტურა უფრო სუსტია ვიდრე $(X_\alpha, \pi_\alpha, A)$ პირდაპირი სპექტრის ტოპოლოგიური სტრუქტურა, ამიტომ $\lim h_\alpha$ ასახვის შებრუნებული ასახვაც ურწევია. ეს კი ნიშნავს, რომ $\lim h_\alpha$ პომეომორფიზმი; ნათუვალთ ეს პომეომორფიზმი საძიებელ $f: \lim X'_\alpha \rightarrow \lim X_\alpha$ პომეომორფიზმად, თეორემა დამტკიცდა.

მაგალითი: განვიხილოთ $\{S^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ სეკენცია ოჯახი. ყოველი p ნატურალური რიცხვისათვის არსებობს ასახვა: $\pi_{n,p}: S^n \rightarrow S^{n+p}$. რომელიც განსაზღვრულია ყოველგვარად:

$$\pi_{n,p}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_p). \text{ ცხადია } \pi_n'' = Id_{S^n} \circ \pi_{n,p}'' \circ \pi_{n+p}'' = \pi_{n+p}''.$$

$(S', \pi_{n,p}', N')$ ცხადია წარმომადგენს ტოპოლოგიურ სიურცეთა პირდაპირ სპექტრს. ამ სპექტრის ზღერი $\lim S'$ აღინიშნება ასე: S' და მას უწოდებენ უსასრულო განზომილებიან სფეროს.

ვთქვათ, A მიმართული სიმრავლეა. შევესაბამოთ მის ყოველ α ელემენტს ტოპოლოგიური სიურცე X_α , ხოლო ყოველ ორ $\alpha < \beta$ ელემენტს A სიმრავლიდან ურწევტი ასახვა $\pi_\alpha^\beta: X_\beta \rightarrow X_\alpha$. რომელსაც აქვს შემდეგი თვისებები:

1. A სიმრავლის ყოველი α ელემენტისათვის $\pi_\alpha'' = Id_{X_\alpha}$.

A სიმრავლის ყოველი სამი $\alpha < \beta < \gamma$ ელემენტისათვის $\pi_\alpha'' \circ \pi_\beta'' = \pi_\alpha''$.

$(X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, A)$ სამეულს A მიმართულ სიმრავლეზე განსაზღვრული ტოპოლოგიურ სიურცეთა შებრუნებულისპექტრი ან ტოპოლოგიურ სიურცეთა პროექციული (სპექტრი) სისტემა ეწოდება.

$X_\alpha, \alpha \in A$ სიურცეებს შებრუნებული სპექტრის ელემენტები ეწოდება, $\pi_\alpha'': X_\beta \rightarrow X_\alpha$ ასახვებს კი შებრუნებული სპექტრის პროექციები, ხოლო A სიმრავლეს ინდექსთა სიმრავლე ეწოდება.

თუ მოცემული გვაქვს ორი შებრუნებული სპექტრი ერთ და იგივე ინდექსთა სიმრავლეზე:

$(X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, A); (Y_\alpha, \pi'_\alpha{}^\beta, A)$. ერთი სექტრიდან მეორეზე ასახვა ეწოდება ასახვათა ოჯახს: $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$. სადაც $f_\alpha: X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$ და სრულდება პირობა $f_\alpha \circ \pi_\alpha^\beta = \pi'_\alpha{}^\beta \circ f_\beta$ ანუ რაც ნიშნავს იმას, რომ კომუტაციურია დიაგრამა:

$$\begin{array}{ccc} X_\alpha & \xrightarrow{f_\alpha} & Y_\alpha \\ \uparrow \pi_\alpha^\beta & & \uparrow \pi'_\alpha{}^\beta \end{array}$$

$$X_\beta \xrightarrow{f_\beta} Y_\beta$$

განვიხილოთ პირდაპირი(ტიხონოვის) ნამრავლი $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. გამოვეთ ამ ნამრავლიდან

ელემენტების სიმრავლე $H = \{x_\alpha \mid x_\alpha = \pi_\alpha^\beta(x_\beta), \alpha < \beta\}$. ამ სიმრავლეს მოცემული

შებრუნებული სექტრის ძაფების სიმრავლეს უწოდებენ. ძაფების $H \subset \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ სიმრავლეს,

ტოპოლოგიურ სივრცეთა **შებრუნებული სექტრის ელემენტთა** პირდაპირი ნამრავლიდან ინდუცირებული ტოპოლოგიური სტრუქტურით, ტოპოლოგიურ სივრცეთა მოცემული **შებრუნებული სექტრის ზღვარი** ეწოდება. ამ ზღვარს აღნიშნავენ ასე $\lim X_\alpha$.

$p_\alpha: \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow X_\alpha$ პროექციების $\pi_\alpha = p_\alpha|_H \rightarrow X_\alpha$ შეზღუდვას $H \subset \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ ქვესიმრავლეზე

ტოპოლოგიურ სივრცეთა **შებრუნებული სექტრის ზღვრის კანონიკურ პროექციებს** უწოდებენ. ცხადია კანონიკური პროექციები ღია ასახვებია.

ცხადია ყოველი ორი $\alpha \leq \beta, \alpha, \beta \in A$ ინდექსისათვის

$$\begin{array}{ccc} \lim X_\alpha & \xrightarrow{H} & \lim X_\alpha \\ \downarrow \pi_\alpha & & \downarrow \pi_\beta \end{array}$$

$$X_\alpha \xleftarrow{\pi'_\alpha} X_\beta$$

დიაგრამა კომუტაციურია, ანუ $\pi_\alpha^\beta \circ \pi_\beta = \pi_\alpha$.

თუ მოცემული გვაქვს ორი **შებრუნებული სექტრი** ერთ და იგივე ინდექსთა სიმრავლეზე:

$(X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, A); (Y_\alpha, \pi'_\alpha{}^\beta, A)$. ერთი სექტრიდან მეორეზე ასახვა ეწოდება ასახვათა ოჯახს: $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$,

სადაც $f_\alpha: X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$ და სრულდება პირობა $f_\alpha \circ \pi_\alpha^\beta = \pi'_\alpha{}^\beta \circ f_\beta$ ანუ რაც ნიშნავს იმას, რომ კომუტაციურია დიაგრამა:

$$\begin{array}{ccc} X_\alpha & \xrightarrow{f_\alpha} & Y_\alpha \\ \uparrow \pi_\alpha^\beta & & \uparrow \pi'_\alpha{}^\beta \end{array}$$

$$X_\beta \xrightarrow{f_\beta} Y_\beta$$

თეორემა 7.11. ვთქვათ, $f = \{f_\alpha: X_\alpha \rightarrow Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ასახვა $(X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, A)$ **შებრუნებული სექტრიდან** $(Y_\alpha, \pi'_\alpha{}^\beta, A)$ პირდაპირ სექტრში. f_α უწყვეტია ყოველი $\alpha \in A$

ინდექსისათვის. მაშინ არსებობს უწყვეტი ასახვა $\tilde{f}: \varinjlim X_\alpha \rightarrow \varinjlim Y_\alpha$ პირველი სპექტრის ზღერიდან მეორე სპექტრის ზღერში, რომლისთვისაც ადგილი აქვს ტოლობას:

$$f_\alpha \circ \pi_\alpha = \pi'_\alpha \circ \tilde{f}, \text{ ანუ კომუტაციურია დიაგრამა:}$$

$$\begin{array}{ccc} X_\alpha & \xleftarrow{\pi_\alpha} & \varinjlim X_\alpha \\ \downarrow f_\alpha & & \downarrow \tilde{f} \\ Y_\alpha & \xleftarrow{\pi'_\alpha} & \varinjlim Y_\alpha \end{array}$$

დამტკიცება: განესაზღვროთ $\tilde{f}$ ასახვა ფორმულით: $f(\{x_\alpha\}) = \{f_\alpha(x_\alpha)\}$.

ეს ასახვა კორექტულად არის განსაზღვრული. მართლაც, ვთქვათ $\alpha < \beta$ და $x_\alpha = \pi_\alpha^\beta(x_\beta)$, რადგან $f_\alpha \circ \pi_\alpha^\beta = \pi_\alpha'^\beta \circ f_\beta$ ამიტომ $\pi_\alpha'^\beta(f_\beta(x_\beta)) = f_\alpha(x_\alpha)$. ეს კი ნიშნავს, რომ $\tilde{f}$ ასახვა კორექტულადაა განსაზღვრული.

ვჩვენებთ, რომ $\tilde{f}$ ასახვა უწყვეტია. ვთქვათ $O \subset \varinjlim Y_\alpha$ ღია ქვესიმრავლეა. რადგან კანონიკური პროექცია ღია ასახვაა, ამიტომ $\pi'_\alpha(O)$ ღიაა Y_α სივრცეში. $\pi'_\alpha \circ \tilde{f} = f_\alpha \circ \pi_\alpha$, $f_\alpha \circ \pi_\alpha$ უწყვეტი ასახვაა, ამიტომ $(f_\alpha \circ \pi_\alpha)^{-1} = (\pi_\alpha'^{-1} \circ f_\alpha^{-1})(O)$ ღიაა $\varinjlim X_\alpha$ სივრცეში. $(\pi_\alpha'^{-1} \circ f_\alpha^{-1})(O) = \tilde{f}^{-1}(O)$. მაშასადამე $\tilde{f}$ ასახვა უწყვეტია. თეორემა დამტკიცდა.

$\tilde{f}$ ასახვას *შებრუნებულ სპექტრთა ასახვის ზღვარს* უწოდებენ. მას აღნიშნავენ ასე: $\varprojlim f_\alpha$.

თეორემა 7.12. თუ A' ქვესიმრავლე A სიმრავლის კოფინალური ნაწილია და $(X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, A): (X'_\alpha, \pi_\alpha'^\beta, A')$ ტოპოლოგიურ სივრცეთა შებრუნებული სპექტრები, სადაც $X_\alpha = X'_\alpha, \pi_\alpha^\beta = \pi_\alpha'^\beta$ როდესაც $\alpha, \beta \in A'$, მაშინ არსებობს პოპოგომორფიზმი $f: \varinjlim X'_\alpha \rightarrow \varinjlim X_\alpha$.

დამტკიცება: ვთქვათ, $\bar{X} = \varprojlim X_\alpha$, განვიხილოთ შებრუნებული სპექტრი

$(X_\alpha = \bar{X}, \pi_\alpha^\beta = Id_{\bar{X}}, A')$. ცხადია ამ სპექტრის ზღვარი $\bar{X}$ სივრცეა. არსებობს ასახვა $(\bar{X}, \pi_\alpha^\beta, A')$ სპექტრიდან $(X'_\alpha, \pi_\alpha'^\beta, A')$ სპექტრში, რომელიც წარმოადგენს კანონიკურ პროექციითა თუგახს $\pi = \{\pi_\alpha: \bar{X} \rightarrow X'_\alpha\}_{\alpha \in A'}$.

ვჩვენებთ, რომ ამ ასახვის ზღვარი პოპოგომორფიზმია. ვთქვათ $\{x_\alpha\}$ ძაფია $\bar{X}$ სივრცეში, მაშინ $\pi_\alpha: (\{x_\alpha\}) = x_\alpha \in X'_\alpha$. $(\pi_\alpha'^\beta \circ \pi_\beta)(\{x_\alpha\}) = \pi_\alpha(\{x_\alpha\}) = x_\alpha$ ყველა $\alpha \in A$ ინდექსისათვის. ვთქვათ, $\tilde{f} = \varprojlim \pi_\alpha, \alpha \in A'$, მაშინ $\tilde{f}(\{x_\alpha\}) = \{\pi_\alpha(x_\alpha)\}$. ვჩვენებთ, რომ $\tilde{f}$ ინექციაა. მართლაც, თუ $\{x'_\alpha\}, \{x''_\alpha\} \in \bar{X}$ ისეთი ორი სხვადასხვა ძაფია, რომ არსებობს $\alpha' \in A'$ და $x_{\alpha'}^1 \neq x_{\alpha'}^2$, მაშინ $\tilde{f}(\{x'_\alpha\}) \neq \tilde{f}(\{x''_\alpha\})$. თუ $\{x'_\alpha\}, \{x''_\alpha\} \in \bar{X}$ ისეთი ორი ძაფია, რომ $x_\alpha^1 = x_\alpha^2$ ყოველი $\alpha \in A'$ ინდექსისათვის, მაშინ A' ქვესიმრავლის კოფინალურობის გამო $x_\alpha^1 = x_\alpha^2$

ყოველი $\alpha \in A \setminus A'$ ინდექსისათვისაც, ამ შემთხვევაში $\tilde{f}(\{x'_\alpha\}) = \tilde{f}(\{x''_\alpha\})$, მაშასადამე $\tilde{f}$ ინექციაა.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $\tilde{f}$ სიურექციაა. ვთქვათ, $\{x_\alpha\}$ ძაფია $\varprojlim X'_\alpha$ სიურციდან. $\tilde{f}^{-1}(\{x_\alpha\})$

სიმრავლე არაცარიელია, იგი შედგება ისეთი ძაფებისაგან, რომლებშიც $\alpha \in A'$ ინდექსის შესაბამის პოზიციაში $\{x_\alpha\}$ ძაფის კომპონენტები ღებანან. ასეთი ძაფები არსებობენ A' ქვესიმრავლის კოფინალურობის გამო.

ვთქვათ, $\alpha_1, \alpha_2 \in A'$, $\alpha_1 < \beta < \alpha_2$ და $\beta \in A$: თუ x_{α_1} ღებას α_1 პოზიციაში, x_{α_2} კი α_2 პოზიციაში, მაშინ იარსებებს ისეთი x_β , რომელიც β პოზიციაშია და ცალსახად არის განსაზღვრული: $x_\beta = \pi_\beta^\alpha(x_{\alpha_1})$. ეს კი ნიშნავს, რომ $\tilde{f}$ სიურექციაა, საბოლოოდ კი ბიექცია. ვაჩვენოთ, რომ $\tilde{f}$ კომეომორფიზმია. $\tilde{f}$ რომ უწყვეტია ეს ცხადია. ვაჩვენოთ, რომ $\tilde{f}^{-1}$ ასახეაც უწყვეტია. განვიხილოთ დიაგრამა:

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim X'_\alpha & \xrightarrow{\tilde{f}} & \varprojlim X''_\alpha \\ \downarrow \tilde{f}^{-1} & & \downarrow \pi'_\alpha \\ \bar{X} & \xrightarrow{\pi} & X_\alpha \end{array}$$

ეს დიაგრამა კომუტაციურია, π'_α , როგორც ვიცით ღიაა, π_α უწყვეტია, ამიტომ $\tilde{f}^{-1}$ უწყვეტია. თეორემა დამტკიცდა.

§8. ტოპოლოგიურ სიურცეთა ბმულობა

X ტოპოლოგიურ სიურცეს ეწოდება *ბმული*, თუ მას ვერ წარმოვადგენთ, ორი $O_1, O_2 \subset X$ არაცარიელი. ურთიერთ არა გადაშეკევი, ღია ქვესიმრავლის გაერთიანების სახით. ცხადია O_1, O_2 სიმრავლეები ნაკეტილ ქვესიმრავლეებიცაა.

X ტოპოლოგიურ სიურცის რაიმე $A \subset X$ ქვესიმრავლეს ეწოდება *ბმული*, თუ იგი ბმულია როგორც ქვესიურცე.

X ტოპოლოგიურ სიურცეს ეწოდება *ლოკალურად ბმული*, თუ მისი ნებისმიერი x წერტილისათვის და ამ წერტილის ნებისმიერი $U(x)$ მიდამოსათვის არსებობს ისეთი სიმრავლე $C \subset U(x)$, რომ C ბმული ქვესიურცეა X სიურცეში და $x \in \text{int } C$.

მაგალითი: ორი ურთიერთ არა გადაშეკევი სეგმენტის $[a, b] \cup [c, d]$ გაერთიანება ლოკალურად ბმული ტოპოლოგიური სიურცეა, მაგრამ იგი არ არის ბმული.

X ტოპოლოგიურ სიურცის *ბმულობის კომპონენტი* $x \in X$ წერტილში ეწოდება მისი ყველა იმ ბმული ქვესიურცის გაერთიანებას, რომლებიც შეიცავენ x წერტილს.

ცხადია, ორი განსხვავებული $x_1, x_2 \in X$ წერტილის შესაბამისი ბმულობის კომპონენტები ერთმანეთს არ ჰკევენ ან ერთმანეთს უმთხვევიან. აქედან გამომდინარეობს, რომ X

ტოპოლოგიური სივრცის წერტილების შესაბამისი ბჰულობის კომპონენტები. შეადგენენ ამ სივრცის დაყოფას. ამ დაყოფის ელემენტებს X სივრცის ბჰულობის კომპონენტები ეწოდება.

თეორემა 1. X ტოპოლოგიური სივრცის ბჰულობის კომპონენტები ნაკეტილი, ბჰული ქვესიმრავლეებია.

დამტკიცება: ვთქვათ. $A \subset X$ ყუელან ჩვერივი ქვესიმრავლეა რაიმე $B \subset X$ ქვესიმრავლეში. მაშინ თუ A ბჰული სიმრავლეა, ბჰული იქნება B სიმრავლეც. მართლაც, ვთქვათ, B არ არის ბჰული, მაშინ $B = F_1 \cup F_2$, სადაც F_1, F_2 ნაკეტილი არაცარიელი ქვესიმრავლეებია B ქვესივრცეში. $A \subset B$, ამიტომ $A \subset F_1$ ან $A \subset F_2$. ვთქვათ $A \subset F_1$.

მაშინ, რადგან F_1 ნაკეტილია, $\bar{A} = B$ და $\bar{A}$ ის მინიმალური ნაკეტილი სიმრავლეა, რომელიც A სიმრავლეს მოიცავს, ამიტომ $\bar{A} \subset F_1$. აქედან გამომდინარე $B = F_1$ და $F_2 = \emptyset$. მეიღუთ წინააღმდეგობა, ჩვენი დაშვება, რომ $B = F_1 \cup F_2$, სადაც F_1, F_2 ნაკეტილი არაცარიელი ქვესიმრავლეებია, არ ყოფილა სწორი. მაშასადამე B ბჰულია. რადგან X სივრცის ნებისმიერი x წერტილის ბჰულობის კომპონენტი C_x წარმოადგენს მოცემული სივრცის მაქსიმალურ ბჰულ ქვესიმრავლეს, რომელიც x წერტილს შეიცავს, ამიტომ $\bar{C}_x$ უნდა იყოს ბჰული. მაგრამ, რადგან C_x მაქსიმალური ბჰული ქვესიმრავლეა ამიტომ $C_x = \bar{C}_x$. მაშასადამე C_x ნაკეტულია. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 2. იმისათვის, რომ X ტოპოლოგიური სივრცე იყოს ლოკალურად, ბჰული აუცილებელი და საკმარისია მისი ყოველი ღია ქვესიმრავლის კომპონენტები ღია იყვნენ X სივრცეში.

დამტკიცება: თეორემის პირობის აუცილებლობის დამტკიცება. ვთქვათ, X სივრცე ლოკალურად ბჰულია და O მისი ღია ქვესიმრავლე. განვიხილოთ $x \in O$ წერტილი. x წერტილისათვის O მიდამოა. არსებობს ისეთი C ბჰული სიმრავლე, რომ $C \subset O$ და $x \in \text{int } C$. რადგან C ბჰულია, ამიტომ არსებობს O სიმრავლის ისეთი ბჰულობის კომპონენტი O_1 , რომ $C \subset O_1$. რადგან $x \in \text{int } C$, ამიტომ $x \in O_1$. $\text{int } C$ ღია სიმრავლეა და ამიტომ წარმოადგენს x წერტილის მიდამოს. მაშასადამე x წერტილი O_1 სიმრავლის შიგა წერტილია. O_1 სიმრავლის სხვა წერტილებისათვისაც, ანალოგიურად არსებობენ ბჰული სიმრავლეები, რომლებიც შედიან O_1 სიმრავლეში და რომელთა შიგა ნაწილებიც მოიცავენ ამ წერტილებს. მაშასადამე O_1 სიმრავლის ყოველი წერტილი მისი შიგა წერტილია. ესკი ნიშნავს, რომ O_1 ღიაა.

თეორემის პირობის საკმარისობის დამტკიცება. ვთქვათ, სრულდება თეორემის პირობა, მაშინ ნებისმიერი $x \in X$ წერტილის ნებისმიერი $u(x)$ მიდამოს ბჰულობის კომპონენტები უნდა იყვნენ ღია X სივრცეში. ვთქვათ O_1 ისეთი კომპონენტია, რომ $x \in O_1$. $O_1 \subset u(x)$, $x \in \text{int } O_1 = O_1$. აქედან გამომდინარეობს, რომ საძიებელ ბჰულ C სიმრავლედ შეიძლება ჩავთვალოთ O_1 სიმრავლე. თეორემა დამტკიცდა.

სივრცეთა ბჰულობა და ლოკალურად ბჰულობა ტოპოლოგიური ინვარიანტებია,

მართლაც, ადვილი დასაჩივია, რომ არ არსებობს ჰომეომორფიზმი ბმულ და არაბმულ სივრცეებს შორის; ასევე არ არსებობს ჰომეომორფიზმი ლოკალურად ბმულ და ლოკალურად არაბმულ სივრცეებს შორის.

ვიტყვი, რომ X ტოპოლოგიური სივრცე *წრფივად ბმულია*, თუ ამ სივრცის ნებისმიერი ორი x_1, x_2 წერტილისათვის არსებობს ისეთი უწყვეტი ასახვა $\omega: [0,1] \rightarrow X$, რომ $\omega(0) = x_1, \omega(1) = x_2$.

$\omega: [0,1] \rightarrow X$ ფუნქციას რომდისთვისაც $\omega(0) = x_1, \omega(1) = x_2$, x_1, x_2 წერტილების შემადგენელი წარმოტრეპტორია ეწოდება.

ტოპოლოგიური სივრცის ქვესიმრავლეს ეწოდება ბმული, თუ იგი ბმულია როგორც ქვესიმრავლე.

მაგალითები: წრფივად ბმულია ტოპოლოგიური სივრცე R (რიცხვითი დერძი); წრფივად ბმულია ტოპოლოგიური სივრცე R^n (ეგლიდეს სივრცე);

წრფივად ბმულია ტოპოლოგიური სივრცე ანტიდისკრეტული ტოპოლოგიური სტრუქტურით. ცხადია თუ სივრცე ბმული არ არის, წრფივად ბმული ვერ იქნება. წრფივად ბმული სივრცე კი ყოველთვის ბმულია.

არსებობენ ბმული, წრფივად არა ბმული ტოპოლოგიური სივრცეები. ასეთი სივრცის

მაგალითია სივრცე რომელიც შედგება სიბრტყეზე $y = \sin \frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკისა და Y

დერძის $[-1,1]$ სეგმენტის გაერთიანებისაგან.

ეს სივრცე ბმულია, მაგრამ არ არის წრფივად ბმული, ვინაიდან გრაფიკზე არსებული ისეთი ორი წერტილისათვის, რომელიც Y დერძის მარჯვნივ და მარცხნივ მდებარეობენ, არ არსებობს უწყვეტი წილი, რომელიც ამ წერტილებს შეაერთებს.

ვიტყვი, რომ X ტოპოლოგიური სივრცე *ლოკალურად წრფივად ბმულია*, თუ მისი ნებისმიერი x წერტილისათვის და მისი ნებისმიერი $u(x)$ მდამოსათვის არსებობს ამავე წერტილის ისეთი ზიდაში $v(x)$, რომ როგორც უნდა იყოს $y \in v(x)$ წერტილი, არსებობს უწყვეტი წილი $\omega: [0,1] \rightarrow u(x)$, რომელიც აერთებს x და y წერტილებს.

X ტოპოლოგიური სივრცის $A \subset X$ ქვესიმრავლეს ეწოდება მაქსიმალური წრფივად ბმული ქვესიმრავლე, თუ X სივრცის ნებისმიერი ბმული ქვესიმრავლე, რომელიც მოიცავს A სიმრავლეს, ემთხვევა მას.

X სივრცის მაქსიმალურ წრფივად ბმულ ქვესიმრავლეებს ამ სივრცის წრფივად ბმულობის კომპონენტები ეწოდება.

თეორემა 8.3. იმისთვის, რომ X ტოპოლოგიურ სივრცე იყოს ლოკალურად წრფივად ბმული, აუცილებელია და საკმარისი, მისი ღია სიმრავლეთა წრფივად ბმულობის კომპონენტები ღია იყვნენ X სივრცეში.

დამტკიცება: დაეამტკიცოთ თეორემის პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, X სივრცე ლოკალურად წრფივად ბმულია და O მისი ღია ქვესიმრავლეა. განვიხილოთ ამ ღია ქვესიმრავლის რომელიმე წრფივად ბმულობის კომპონენტი O_1 . ვთქვათ $x \in O_1$, მაშინ $x \in O$ და ამიტომ მოიძებნება x წერტილის ისეთი ზიდაში $v(x)$, რომ როგორც უნდა იყოს $y \in v(x)$ წერტილი, არსებობს უწყვეტი წილი $\omega: [0,1] \rightarrow O$, რომელიც აერთებს x და y წერტილებს ანუ $\omega(0) = x, \omega(1) = y$. რადგან O , წრფივად ბმულობის კომპონენტია, ამიტომ

$\alpha[0,1] \subset \mathcal{O}$. ეს კი ნიშნავს, რომ $\nu(x) \subset \mathcal{O}$. მაშასადამე $\mathcal{O}$, სიმრავლის ნებისმიერ x წერტილს აქვს მიდამო, რომელიც მთლიანად შედის ამ სიმრავლეში. ეს კი ნიშნავს, რომ $\mathcal{O}$, ლია.

თეორემის პირობის საკმარისობის დამტკიცება. ვთქვათ, სერულდება თეორემის პირობა, და $x \in X$ სივრცის ნებისმიერი წერტილია, $u(x)$ მისი ნებისმიერი ღია მიდამო. ვთქვათ $x \in \mathcal{O}$, და $\mathcal{O}$, წარმოადგენს $u(x)$ ღია მიდამოს ბმულობის კომპონენტს, მაშინ იგი ღია უნდა იყოს X სივრცეში. რადგან $\mathcal{O}$, ლია, იგი წარმოადგენს x წერტილის მიდამოს. $\mathcal{O}$, შეგვიძლია ნაუთვალაო საძიებელ $\nu(x)$ მიდამოდ, მართლაც, იმის გამო, რომ $\mathcal{O}$, წრფივად ბმულია, ნებისმიერი $y \in \nu(x)$ წერტილისათვის უნდა არსებობდეს წირი $\omega: [0,1] \rightarrow \mathcal{O}$, რომელიც აერთებს x და y წერტილებს. თეორემა დამტკიცდა.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს რამოდენიმე შედეგი:

შედეგი 8.1. ლოკალურად წრფივად ბმული სივრცის ყოველი ღია ქვესიმრავლე ლოკალურად წრფივად ბმულია.

შედეგი 8.2. ლოკალურად წრფივად ბმული სივრცე ლოკალურად ბმულია.

შედეგი 8.3. ბმული, ლოკალურად წრფივად ბმული სივრცე წრფივად ბმულია.

შედეგი 8.4. ლოკალურად წრფივად ბმულ სივრცეში ბმულობის და წრფივად ბმულობის კომპონენტები ერთმანეთს ემთხვევა.

§9. კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეები

X ტოპოლოგიური სივრცის **დაფარვა** ეწოდება მისი ქვესიმრავლეების ისეთ $\{A_\alpha\}$ ოჯახს, რომ $X = \bigcup A_\alpha$.

დაფარვას ეწოდება **ღია**, თუ მისი ყოველი ელემენტი ღია ქვესიმრავლეა.

დაფარვას ეწოდება **ჩაკეტილი**, თუ მისი ყოველი ელემენტი ჩაკეტილი ქვესიმრავლეა.

დაფარვას ეწოდება **სასრული**, თუ დაფარვის ელემენტების რაოდენობა სასრულია.

დაფარვას ეწოდება **თვლადი**, თუ დაფარვის ელემენტების რაოდენობა თვლადია.

დაფარვას ეწოდება **ლოკალურად სასრული**, თუ ტოპოლოგიური სივრცის ყოველ წერტილს გააჩნია მიდამო, რომელიც გადაკვეთს დაფარვის მხოლოდ სასრული რაოდენობის ელემენტებს.

დაფარვას ეწოდება **წერტილოვნად სასრული**, თუ ტოპოლოგიური სივრცის ყოველი წერტილი ეკუთვნის ამ დაფარვის მხოლოდ სასრული რაოდენობის ელემენტებს.

ცხადია ყოველი ლოკალურად სასრული დაფარვა წარმოადგენს წერტილოვნად სასრულ დაფარვას. მაგრამ ყოველი წერტილოვნად სასრული დაფარვა არ წარმოადგენს ლოკალურად სასრულ დაფარვას, მართლაც, $[0,1]$ სეგმენტის დაფარვა, რომელიც შედგება თვითონ ამ

სეგმენტისაგან და $[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]$ სეგმენტებისაგან წერტილოვნად სასრულია, მაგრამ არ არის ლოკალურად სასრული.

X ტოპოლოგიური სივრცის $\{B_\beta\}$ დაფარვას ეწოდება ამავე სივრცის $\{A_\alpha\}$ დაფარვის **ქვედაფარვა**, თუ $\{B_\beta\} \subset \{A_\alpha\}$.

$\{B_\beta\}$ დაფარვის ეწოდება $\{A_\alpha\}$ დაფარვაში ჩაწერილი, თუ $\{B_\beta\}$ დაფარვის ყოველი B_β ელემენტისათვის არსებობს $\{A_\alpha\}$ დაფარვის ისეთი ელემენტი A_α , რომ $B_\beta \subset A_\alpha$.

X ტოპოლოგიური სივრცის ეწოდება *კომპაქტური*, თუ ამ სივრცის ნებისმიერი ღია $\{O_\alpha\}$ დაფარვიდან შეიძლება გამოვყოთ სასრული $\{O_{\alpha_i}\}_{i=1}^k$ ქვედაფარვა.

ტოპოლოგიური სივრცის ქვესიმრავლეთა $\{A_\alpha\}$ ოჯახს ეწოდება *ცენტრირებული*, თუ ამ ოჯახის ნებისმიერი სასრული $\{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^k \subset \{A_\alpha\}$ ქვეოჯახის ელემენტების თანაკეთა

არატარიელია: $\bigcap_{i=1}^k A_{\alpha_i} \neq \emptyset$.

თეორემა 9.1. იმისათვის, რომ X ტოპოლოგიური სივრცე იყოს კომპაქტური, აუცილებელი და საკმარისია მისი ჩაკეტილი ქვესიმრავლეებისაგან შედგენილ, ნებისმიერ ცენტრირებულ ოჯახს პკონდეს არატარიელი თანაკეთა.

დამტკიცება. დავთვალოთ პირობის აუცილებლობის დამტკიცება. ვთქვათ, X კომპაქტურია და $\{F_\alpha\}$ მისი ჩაკეტილი ქვესიმრავლეებისაგან შედგენილი ცენტრირებული ოჯახი. დაეუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $\bigcap_{\alpha} F_\alpha = \emptyset$. განვიხილოთ ღია სიმრავლეთა ოჯახი $\{X \setminus F_\alpha\}$. ეს ოჯახი ფარავს X სივრცეს, მართლაც, $\bigcup_{\alpha} (X \setminus F_\alpha) = X \setminus \bigcap_{\alpha} F_\alpha = X \setminus \emptyset = X$ რადგან X კომპაქტურია, ამიტომ განხილული დაფარვიდან გამოიყოფა სასრული $\{X \setminus F_{\alpha_i}\}_{i=1}^k$ დაფარვა.

$X = \bigcup_{i=1}^k (X \setminus F_{\alpha_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^k F_{\alpha_i}$ აქედან გამომდინარეობს, რომ $\bigcap_{i=1}^k F_{\alpha_i} = \emptyset$ მაგრამ $\{F_\alpha\}$

ცენტრირებულია და ამიტომ $\bigcap_{i=1}^k F_{\alpha_i} \neq \emptyset$. მაშასადამე, ჩვენი დაშვება არ ყოფილა სწორი,

$\bigcap_{\alpha} F_\alpha \neq \emptyset$.

თეორემის პირობის საკმარისობის დამტკიცება. ვთქვათ, სრულდება თეორემის პირობა, და $\{O_\alpha\}$ რაიმე ღია დაფარვაა. დაეუშვათ ამ დაფარვიდან არ გამოიყოფა სასრული ქვედაფარვა. განვიხილოთ ჩაკეტილ სიმრავლეთა ოჯახი $\{X \setminus O_\alpha\}$. ეს ოჯახი ცენტრირებულია, მართლაც

$\bigcap_{i=1}^k (X \setminus O_{\alpha_i}) = X \setminus \bigcup_{i=1}^k O_{\alpha_i} \neq \emptyset$. თეორემის პირობის თანახმად

$\bigcap_{\alpha} (X \setminus O_\alpha) \neq \emptyset$. მაგრამ $\emptyset \neq \bigcap_{\alpha} (X \setminus O_\alpha) = X \setminus \bigcup_{\alpha} O_\alpha = \emptyset$. მივიღეთ წინააღმდეგობა, ჩვენი დაშვება

არ ყოფილა სწორი. $\{O_\alpha\}$ დაფარვიდან გამოიყოფა სასრული ქვედაფარვა და ამიტომ X კომპაქტურია. თეორემა დამტკიცდა.

X ტოპოლოგიური სივრცის $A \subset X$ ქვესიმრავლეს ეწოდება *კომპაქტური ქვესიმრავლე*, თუ იგი კომპაქტურია როგორც ქვესივრცე.

X ტოპოლოგიური სივრცის ღია ქვესიმრავლეთა $\{O_\alpha\}$ ოჯახს ეწოდება $A \subset X$ ქვესიმრავლის დაფარვა, თუ $A \subset \bigcup_{\alpha} O_\alpha$

თეორემა 9.2. X ტოპოლოგიური სივრცის $A \subset X$ ქვესიმრავლე კომპაქტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც X სივრცის ღია სიმრავლეებისაგან შედგენილი A

ქვესიმრავლის $\{O_\alpha\}$ დაფარვიდან გამოიყოფა სასრული ქვედაფარვა.

დამტკიცება: ვთქვათ, A კომპაქტურია და $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$. განვიხილოთ A ქვესივრცის ღია სიმრავლეების ოჯახი $\{O_\alpha \cap A\}$. ეს ოჯახი ფარავს A ქვესივრცეს, მისგან გამოიყოფა სასრული ქვედაფარვა $\{O_\alpha \cap A\}_{\alpha \in I}$. X სივრცის ღია სიმრავლეებისაგან შედგენილი $\{O_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ოჯახი ცხადია ფარავს A ქვესიმრავლეს. ამგვარად A სიმრავლის $\{O_\alpha\}$ დაფარვიდან ჩვენ გამოიყვანეთ სასრული $\{O_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ქვედაფარვა.

ვთქვათ, ახლა სრულდება თეორემის პირობა. განვიხილოთ A ქვესივრცის ნებისმიერი ღია დაფარვა $\{O_\alpha^i\}$ მისი ღია ქვესიმრავლეებით, $\{O_\alpha^i = A \cap O_\alpha \mid O_\alpha \in T(X)\}$.

X ტოპოლოგიური სივრცის $\{O_\alpha\}$ ღია ქვესიმრავლეთა ოჯახი ფარავს A სიმრავლეს. თეორემის პირობის თანახმად, მისგან გამოიყოფა A სიმრავლის სასრული ქვედაფარვა $\{O_\alpha\}_{\alpha \in I}$. A სიმრავლის ღია სიმრავლეების სასრული ოჯახი $\{O_\alpha^i = O_\alpha \cap A\}_{\alpha \in I}$ წარმოადგენს $\{O_\alpha^i = O_\alpha \cap A\}$ ოჯახის ქვეოჯახს. მაშასადამე, A ქვესივრცის ნებისმიერი $\{O_\alpha^i\}$ დაფარვიდან ჩვენ გამოიყვანეთ სასრული $\{O_\alpha^i\}_{\alpha \in I}$ ქვედაფარვა, ეს კი ნიშნავს, რომ A კომპაქტური ქვესივრცეა. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 2.3. თუ $f: X \rightarrow Y$ ასახვაა კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცისა ნებისმიერ ტოპოლოგიურ სივრცეში, მაშინ $f(X)$ კომპაქტური ქვესიმრავლეა Y სივრცეში. **დამტკიცება:** განვიხილოთ $f(X)$ სიმრავლის ნებისმიერი ღია $\{O_\alpha\}$ დაფარვა. ღია სიმრავლეთა $\{f^{-1}(O_\alpha)\}$ ოჯახი ფარავს კომპაქტურ X სივრცეს, მისგან გამოიყოფა სასრული ქვედაფარვა $\{f^{-1}(O_\alpha)\}_{\alpha \in I}$. ოჯახი $\{O_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ცხადია ფარავს $f(X)$ სიმრავლეს. მგვარად, $f(X)$ ქვესიმრავლის ნებისმიერი ღია დაფარვიდან ჩვენ გამოიყვანეთ სასრული ქვედაფარვა, თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 2.4. კომპაქტური სივრცის ნაქვეტილი ქვესიმრავლე კომპაქტურია.

დამტკიცება: ვთქვათ $A \subset X$ ნაქვეტილი ქვესიმრავლეა X კომპაქტურ სივრცეში. განვიხილოთ A ქვესივრცის ნაქვეტილი ქვესიმრავლეებისაგან შედგენილი ცენტრირებული ოჯახი. ამ ოჯახის ნებისმიერი ელემენტი ნაქვეტილია X სივრცეში და მაშასადამე, იგი წარმოადგენს ნაქვეტილი ქვესიმრავლეებისგან შედგენილ ცენტრირებულ ოჯახს X სივრცეში. რადგან X კომპაქტურია ამიტომ ამ ცენტრირებული ოჯახის ელემენტების თანაკვეთა არაცარიელია, ეს კი ნიშნავს, რომ A კომპაქტურია. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 2.5. პაუზდორფის სივრცის ყოველი კომპაქტური ქვესიმრავლე ნაქვეტილია.

დამტკიცება: ვთქვათ, A პაუზდორფის X სივრცის კომპაქტური ქვესიმრავლეა.

პაუზდორფის X სივრცის ყოველ ორი x და y წერტილს გააჩნიათ თანაუკვეთი $u_x(x)$ და $u_x(y)$ ღია მიდამოები, შესაბამისად.

განვიხილოთ $\bigcup_{x \in A} u_x(y)$ სიმრავლე, $A \subset \bigcup_{x \in A} u_x(y)$ რადგან A კომპაქტურია, ამიტომ

არსებობს მისი $\{u_{x_i}(y)\}$ დაფარვის სასრული $\{u_{x_i}(y)\}_{i=1}^k$ ქვედაფარვა. $\bigcap_{i=1}^k u_{x_i}(x) \cap \bigcap_{i=1}^k u_{x_i}(y) = \emptyset$.

აღენიშნოთ $\bigcup_{i=1}^k u_{x_i}(x)$ ღია სიმრავლე $v(x)$ -ით, იგი x წერტილის ღია მიდამოა. რადგან

$\bigcup_{i=1}^k u_{x_i}(y_i)$ ღია სიმრავლეა და $A \subset \bigcup_{i=1}^k u_{x_i}(y_i)$, ამიტომ იგი წარმოადგენს A სიმრავლის მიდამოს, აღენიშნოთ ეს სიმრავლე $u_x(A)$ -ით. როგორც ვნახეთ $v(x) \cap u_x(A) = \emptyset$, მაშასადამე x არ არის A სიმრავლის შეხების წერტილი.

რადგან x ნებისმიერი ისეთი წერტილია, რომელიც არ ეკუთვნის A სიმრავლეს, ამიტომ A ჩაკეტილია. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 9.6. პაუზდორფის კომპაქტური სივრცე ნორმალურია.

დამტკიცება: ვთქვათ, X კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეა, $A, B \subset X$ მისი თანაუკეთი, ჩაკეტილი ქვესიმრავლეები. $x \in A$ წერტილისათვის და B სიმრავლისთვის, როგორც წინა თეორემის დამტკიცებისას, ავაგოთ თანაუკეთი $v(x)$ და $v_x(B)$ მიდამოები. განვიხილოთ სიმრავლე $\bigcup_{x \in A} v(x)$, იგი ღიაა და $A \subset \bigcup_{x \in A} v(x)$. რადგან A კომპაქტურია არსებობს მისი

სასრული დაფარვა $\{v(x_i)\}_{i=1}^n$. გაერთიანება $\bigcup_{i=1}^n v(x_i)$ ღია სიმრავლეა. $A \subset \bigcup_{i=1}^n v(x_i)$ ამიტომ იგი წარმოადგენს A სიმრავლის ღია მიდამოს აღენიშნოთ იგი $v(A)$ სიმრავლით.

სიმრავლე $\bigcup_{i=1}^k u_{x_i}(B)$ ასევე ღიაა და $B \subset \bigcup_{i=1}^k u_{x_i}(B)$, ამიტომ იგი B სიმრავლის მიდამოა,

აღენიშნოთ იგი $u(B)$ სიმრავლით. ცხადია $v(A) \cap u(B) = \emptyset$. ეს კი ნიშნავს, რომ X ნორმალური ტოპოლოგიური სივრცეა. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 9.7. ტიხონოვის თეორემა. კომპაქტურ სივრცეთა პირდაპირი ნამრავლი კომპაქტურია.

დამტკიცება: განვიხილოთ ქვესიმრავლეა $\{P_\sigma^{-1}(O_\alpha)\}_{\sigma \in A, \alpha \in I(\sigma)}$ ოჯახი $\prod_{\sigma \in A} X_\sigma$ სიმრავლეში.

სადაც $T(X_\sigma)$ წარმოადგენს, X_σ სივრცის ღია სიმრავლეა ოჯახს.

თუ ჩავთვლით $\{P_\sigma^{-1}(O_\alpha)\}_{\sigma \in A, \alpha \in I(\sigma)}$ ოჯახს წინააღმდეგ, მაშინ $\prod_{\sigma \in A} X_\sigma$ სიმრავლეში

განესაზღვრათ ტოპოლოგიურ სტრუქტურას. ღია სიმრავლეა ბაზას ამ შემთხვევაში წარმოადგენს ოჯახი $\{P_\sigma^{-1}(O_{\alpha_i}) \cap P_{\sigma_1}^{-1}(O_{\alpha_1}) \cap \dots \cap P_{\sigma_k}^{-1}(O_{\alpha_k})\}_{\sigma \in A, \alpha_i \in I(\sigma_i), i=1, \dots, k}$ ეს ოჯახი იგივეა რაც

$\{\prod_{\sigma \in A} Y_\sigma \mid Y_\sigma = X_\sigma, \alpha \neq \alpha_i; Y_{\alpha_i} = O_{\alpha_i}, O_{\alpha_i} \in T(X_{\alpha_i}), \alpha = \alpha_i, i = \overline{1, k}\}$ ოჯახი. ცხადია იგი წარმოადგენს

ბაზას ტიხონოვის ტოპოლოგიური სტრუქტურისათვის $\prod_{\sigma \in A} X_\sigma$ სიმრავლეში.

ვთქვათ, ახლა, $S = \{F_\beta\}$ წარმოადგენს ჩაკეტილ სიმრავლეთა რაიმე ცენტრირებულ ოჯახს

$\prod_{\sigma \in A} X_\sigma$ ტიხონოვის ნამრაველში. ტეიხმიულერ-ტიუკის ლემის ძალით არსებობს $\prod_{\sigma \in A} X_\sigma$

სიმრავლის ქვესიმრავლეა მაქსიმალური ცენტრირებული $\bar{S}$ ოჯახი, რომელიც მოიცავს $\bar{S}$ ოჯახს. $\bar{S}$ ოჯახის მაქსიმალურობიდან გამომდინარე, ყოველი ქვესიმრავლე, რომელიც მოიცავს ამ ოჯახის რაიმე ელემენტს, თვითონაც შედის ამავე ოჯახში და ასევე, თუ ორი სიმრავლე ეკუთვნის ამ ოჯახს, მაშინ მათი თანაკვეთაც შედის ამავე ოჯახში. $\bar{S}$ ოჯახის

პროექცია, თითოეულ X_σ სივრცეში, განსაზღვრავს ცენტრირებულ ოჯახს $\{P_\sigma(F)\}_{F \in \bar{S}}$.

$\{P_\sigma(F)\}_{F \in \bar{S}}$ ოჯახი ნაკეტულ სიმრავლეთა ცენტრირებული ოჯახი იქნება X_σ სივრცეში და რადგან ეს სივრცე კომპაქტურია, ამიტომ $\bigcap_{F \in \bar{S}} P_\sigma(F) \neq \emptyset$. ვთქვათ x_σ^0 ეკუთვნის ამ თანაკვეთას.

$\prod_{\sigma \in A} X_\sigma$ სიმრავლის იმ ელემენტს: $\{x_\sigma\}_{\sigma \in A}$, რომლისთვისაც $x_\sigma = x_\sigma^0$, ბჭეს ის თვისება, რომ $x_\sigma^0 \in X_\sigma$ წერტილის ყოველი ღია $U(x_\sigma^0)$ მიდამო გადაკვეთს $P_\sigma(F)$ სიმრავლეს ყოველი $F \in \bar{S}$ ელემენტისათვის. ეს თვისება ეკვივალენტურია იმის, რომ $P_\sigma^{-1}(U(x_\sigma^0)) \in \bar{S}$ ასეთი სახის სიმრავლეთა სასრული თანაკვეთა

$$P_{\sigma_1}^{-1}(U(x_{\sigma_1}^0)) \cap P_{\sigma_2}^{-1}(U(x_{\sigma_2}^0)) \cap \dots \cap P_{\sigma_n}^{-1}(U(x_{\sigma_n}^0)),$$

$\bar{S}$ ოჯახის მაქსიმალურობიდან გამომდინარე, ასევე ეკუთვნის $\bar{S}$ ოჯახს. მაშასადამე

$\{x_\sigma^0\}_{\sigma \in A} \in \prod_{\sigma \in A} X_\sigma$ წერტილის ღია * მიდამო, რომელიც ამავე დროს ტიხონოვის ტოპოლოგიური

სტრუქტურის ბაზის ელემენტსაც წარმოადგენს, ეკუთვნის $\bar{S}$ ოჯახს.

იმის გამო, რომ ყოველი $P_\sigma^{-1}(U(x_\sigma^0)), i = 1, k$ სიმრავლე გადაკვეთს $\bar{S}$ ოჯახის ყველა

ელემენტს. $\{x_\sigma^0\}_{\sigma \in A}$ წერტილის * მიდამოც გადაკვეთს $\bar{S}$ ოჯახის ყველა ელემენტს.

აქედან გამომდინარე $\{x_\sigma^0\}_{\sigma \in A} \in \bar{F}$ ყოველი $F \in \bar{S}$ სიმრავლისათვის.

ეს კი აბრკივებს თეორემას, ვინაიდან $\bar{S}$ ოჯახის ელემენტთა თანაკვეთა, ასეთ შემთხვევაში, იქნება არაცარიელი.

თეორემა 9.8. ეკელიდეს R^n სივრცის ყველა შემოსაზღვრული ნაკეტილი ქვესიმრავლე კომპაქტურია.

დამტკიცება: თუ A შემოსაზღვრული ნაკეტილი ქვესიმრავლეა R^n სივრცეში, მაშინ $P_i|_A: A \rightarrow R$ ასახვისათვის, სადაც $P_i: R^n \rightarrow R, i = \overline{1, n}$ პროექციაა, $d(x, y) \leq d(P_i(x), P_i(y))$.

ამ უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $P_i(A)$ შემოსაზღვრული სიმრავლეა R სივრცეში და

მაშასადამე მოიძებნება ისეთი სეგმენტი $[a_i, b_i]$, რომ $a_i \leq P_i(A) \leq b_i$. ცხადია, $A \subset \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$.

ამიტომ თუ დაემატიცებთ, რომ $[a_i, b_i]$ სეგმენტი კომპაქტურია, 9.4. და 9.5. თეორემების ძალით, თეორემა დამტკიცებული იქნება.

განვიხილოთ ნებისმიერი $[a, b] \subset R$ სეგმენტი და მისი რაიმე $\{O_\sigma\}$ ღია დაფარვა. აღვნიშნოთ c სიმბოლოთი იმ $x \in [a, b]$ რიცხვების ზუსტი ზედა საზღვარი, რომლებსთვისაც $[a, x]$ სეგმენტი დაიფარება $\{O_\sigma\}$ დაფარვის სასრული ქვედაფარვით.

ასეთი $x \in [a, b]$ რიცხვების სიმრავლე არაცარიელია, რადგან მას ეკუთვნის, მაგალითად, a რიცხვი. ვთქვათ $c \in O_\sigma \in \{O_\sigma\}$, განვიხილოთ ისეთი, $d \in [a, b]$, რომ $[d, c] \subset O_\sigma$. ასეთი d ცხადია არსებობს.

$[a, d]$ სეგმენტი, რადგან $d < c$, დაიფარება $\{O_\sigma\}$ დაფარვის სასრული ქვედაფარვით.

ვთქვათ, ეს ქვედაფარვაა $\{O_\sigma\}_{\sigma=1}^k$. ოჯახი $\{O_\sigma\}_{\sigma=1}^k \cup \{O_\sigma\}$ სასრულია და ფარავს $[a, c]$

სედმენტს. თუ $c = b$, მაშინ თეორემა დამტკიცებული იქნება, თუ $c < b$, მაშინ არსებობს ისეთი $\lambda \in O_\infty$, რიცხვით, რომ $[c, \lambda] \subset O_\infty$. აქედან გამომდინარე, $[c, \lambda]$ სეგმენტი უნდა დაიფაროს $\{O_\alpha\}_{\alpha \in I} \cup \{O_\infty\}$ სასრული ოჯახით. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ c არ არის იმ $x \in [a, b]$ რიცხვების ზუსტი ზედა საზღვარი, რომლებისთვისაც $[a, x]$ სეგმენტი დაიფარება $\{O_\alpha\}$ დაფარვის სასრული ქედაფარვით. ამ გეარად, ჩვენი დაშეება, რომ $c < b$, არ ყოფილა სწორი, მაშასადამე $c = b$. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 9.9. ვეიერშტრასის განზოგადებული თეორემა. კომპაქტურ X სივრცეზე განსაზღვრული, უწყვეტი $f: X \rightarrow R$ ფუნქცია მიადევს თავის მაქსიმალურ და მინიმალურ მნიშვნელობებს.

დამტკიცება: 9.3 თეორემის ძალით $f(X)$ კომპაქტური ქვესიმრავლეა R სივრცეში. აქედან გამომდინარე, რადგან იგი შეიძლება დაიფაროს სასრული რაოდენობის სასრული ინტერვლებით, იგი შემოსაზღვრულიც უნდა იყოს. მაშასადამე არსებობს ისეთი სეგმენტი $[a, b]$, რომ $f(X) \subset [a, b]$.

ვთქვათ, $\alpha = \sup_{x \in X} f(x)$ და $\beta = \inf_{x \in X} f(x)$. R პაუზდორფის სივრცეა, ამიტომ 9.5. თეორემის

ძალით, $f(X)$ ჩაკეტილი ქვესიმრავლეა და მაშასადამე მისი ყველა შეხების წერტილი მასვე ეკუთვნის. რიცხვები α და β წარმოადგენენ $f(X)$ სიმრავლის შეხების წერტილებს და მაშასადამე $\alpha \in f(X), \beta \in f(X)$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ არსებობენ წერტილები $x_1, x_2 \in X$, რომლებისთვისაც $\alpha = f(x_1)$ და $\beta = f(x_2)$. შესაბამისად, თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 9.10. ტიხონოვის კუბი სრულად რეგულარულია.

დამტკიცება: როგორც ვიცით, $I_\sigma = [0, 1]$ სეგმენტი პაუზდორფის კომპაქტური და აქედან გამომდინარე ნორმალური სივრცეა.

ვაჩვენოთ, რომ ტიხონოვის კუბი პაუზდორფის სივრცეა. მართლაც ავიღოთ ნებისმიერი ორი წერტილი: $x = \{x_\alpha\} \in \prod_{\alpha \in A} I_\alpha$; $y = \{y_\alpha\} \in \prod_{\alpha \in A} I_\alpha$. განვიხილოთ მათი $P_\alpha^{-1}(u(x_\alpha)), P_\alpha^{-1}(u(y_\alpha))$

მიდამოები, სადაც $u(x_\alpha)$ და $u(y_\alpha)$ წარმოადგენენ $x_\alpha \in I_\alpha = I$ და $y_\alpha \in I_\alpha = I$ წერტილებს თანაუკვეთ მიდამოებს. ცხადია $P_\alpha^{-1}(u(x_\alpha)) \cap P_\alpha^{-1}(u(y_\alpha)) = \emptyset$. მაშასადამე $\prod_{\alpha \in A} I_\alpha$

პაუზდორფის სივრცეა. კომპაქტურ სივრცეა ტიხონოვის ნამრაველი კომპაქტური, პაუზდორფის კომპაქტური სივრცე ნორმალურია. პაუზდორფის ნორმალური სივრცე კი სრულად რეგულარული. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 9.11. ყოველი პაუზდორფის კომპაქტური სივრცე ჩაიდგმება ტიხონოვის კუბში.

დამტკიცება: პაუზდორფის კომპაქტური სივრცე სრულად რეგულარულია და ამიტომ 7.6. თეორემის ძალით ჩაიდგმება ტიხონოვის კუბში.

თეორემა 9.12. თუ ტოპოლოგიური სივრცე ჩაიდგმება ტიხონოვის კუბში, მაშინ იგი სრულად რეგულარულია.

დამტკიცება: ზემოთ ვაჩვენეთ, რომ ტიხონოვის კუბი სრულად რეგულარულია. ცხადია სრულად რეგულარული იქნება მისი ნებისმიერი ქვესიმრავლე. თუ f წარმოადგენს X ტოპოლოგიური სივრცის პოთენციურ ფუნქციას $\prod_{\alpha \in A} I_\alpha$ ტიხონოვის კუბში, მაშინ $f(X)$

იქნება სრულად რეგულარული. რადგან $f: X \rightarrow f(X)$ პომეომორფიზმია, ამიტომ X სივრცეც იქნება სრულად რეგულარული. თეორემა დამტკიცდა.

§10. კომპაქტურ მეტრიზებად სივრცეთა თვისებები

თეორემა 10.1. თელადბაზისიანი მეტრიზებადისივრცე წაიდგმება პილბერტის კუბში.

დამტკიცება: ვთქვათ X მეტრიზებადი სივრცის თელადი ბაზისია $B(X)$. განვიხილოთ ამ ბაზისის ელემენტთა ისეთი (V, U) წყვილები, რომლებსთვისაც სრულდება პირობა: $\bar{V} \subset U$ (ცხადია ასეთი წყვილების სიმრავლე თელადია. გადავწოდოთ ამ სიმრავლის ელემენტები:

$$(V_1, U_1), (V_2, U_2), \dots, (V_n, U_n), \dots$$

ყოველი მეტრიზებადი სივრცე ნორმალურია, ამიტომ ურისონის ლემის თანახმად, არსებობენ უწყვეტი ასახვები $f_n: X \rightarrow [0, 1]$, რომლებისთვისაც ადგილი აქვს პირობებს:

$f_n(\bar{V}_n) = \{0\}$, $f_n(X \setminus U_n) = \{1\}$. უწყვეტ ასახვათა განხილული ოჯახი $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ განაცადებს წერტილებს, წერტილებს და ჩაკეტილ სიმრავლეებს. მართლაც, ვთქვათ F ჩაკეტილი სიმრავლეა X სივრცეში და $x \notin F$ ყოველი ღია U სიმრავლისთვის $B(X)$ ოჯახიდან, რომელიც შეიცავს x წერტილს და არ შეიცავს F სიმრავლის წერტილებს, არსებობს V სიმრავლე ამევე ოჯახიდან, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: $x \in \bar{V} \subset U$ ($\bar{V}, U$)

წყვილისთვის არსებობს ფუნქცია $f_n: X \rightarrow [0, 1]$, რომლისთვისაც

$$f_n(\bar{V}) = \{0\}; f_n(X \setminus U) = \{1\} \quad x \in \bar{V}, F \subset X \setminus U,$$

ამიტომ

$$f_n(x) = 0, f_n(x) \notin f_n(F) = \{1\}$$

აქედან გამოდინარე, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ოჯახის დიაგონალი $\Delta_f: X \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} I_n$ პომეომორფული

ჩადგმა, ეს კი ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 10.2 ყოველი კომპაქტური მეტრიზებადი სივრცე სრულად შემოსასწავრულია და სეპარაბელური

დამტკიცება: ვთქვათ $\varepsilon > 0$ რაიმე რიცხვია, დაეფაროთ კომპაქტური მეტრიზებადი X სივრცე შესაბამისი მეტრიკით განსაზღვრულ ღია ბირთვთა $\{B_\varepsilon^f\}_{f \in X}$ ოჯახით. მ დაფარვიდან, სივრცის კომპაქტურობის გამო გამოიყოფა სასრული ქვედაფარვა $\{B_{x_i}^f\}_{i=1, \dots, k}$. ცხადია სიმრავლე $\{x_i\}_{i=1, \dots, k}$ წარმოადგენს ε ბადეს. რადგან ε ნებისმიერად ავირჩიეთ, ამიტომ თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია.

რაიმე ნატურალური $n \in \mathbb{N}$ რიცხვისთვის განვიხილოთ ღია დაფარვა $\{B_\varepsilon^f\}_{f \in X}$. ვთქვათ

$\{B_{x_i}^f\}_{i=1, \dots, k}$ წარმოადგენს განხილული დაფარვის სასრულ ქვედაფარვას. სიმრავლე $\{x_i\}_{i=1, \dots, k}$

წარმოადგენს $\frac{1}{n}$ მკერე ქვესიმრავლეს X სივრცეში.

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_i\}_{i=1, k_n}$ სიმრავლე თვლადია, ვთქვათ, $x \in X$ და $u(x)$ ამ წერტილის ნებისმიერი

მიღამოა. ცხადია, არსებობს ისეთი $n' \in N$ ნატურალური რიცხვი, რომ $B_x^{\frac{1}{n'}} \subset u(x)$.

$\{x_i\}_{i=1, k_n}$ სიმრავლე $\frac{1}{n'}$ მკერძია X სივრცეში. ამიტომ არსებობს ისეთი $x_r \in X$, რომ

$d(x_r, x) < \frac{1}{n'}$. მაშასადამე $x_r \in B_x^{\frac{1}{n'}} \subset u(x)$. მაგრამ, მეორე მხრივ $x_r \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_i\}_{i=1, k_n}$, ამიტომ

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_i\}_{i=1, k_n} = X$ თეორემის მეორე ნაწილიც დამტკიცდა.

თეორემა 10.3 კომპაქტურ მეტრიზებად სივრცეს გააჩნია თვლადი ბაზა.

დამტკიცება: კომპაქტური მეტრიზებადი სივრცე, წინა თეორემის ძალით, სეპარაბელურია, სეპარაბელური მეტრიზებადი სივრცე კი, 5.1 თეორემის ძალით, თვლადბაზისიანია. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 10.4. ყოველი კომპაქტური მეტრიზებადი სივრცე ჩაიდგება პილბერტის კუბში.

დამტკიცება: ყოველი კომპაქტური მეტრიზებადი სივრცე თვლადბაზისიანია, თვლადბაზისიანი მეტრიზებადი სივრცე კი 10.1. თეორემის ძალით, ჩაიდგება პილბერტის კუბში. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 10.5. იმისათვის, რომ კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცე იყოს მეტრიზებადი, აუცილებელი და საკმარისია, მას ჰქონდეს თვლადი ბაზა.

დამტკიცება: თეორემის პირობის აუცილებლობის დამტკიცება. ვთქვათ, კომპაქტური სივრცე მეტრიზებადია. მაშინ იგი 10.2. თეორემის ძალით სეპარაბელურია, 5.1 თეორემის ძალით კი თვლადბაზისიანი.

თეორემის პირობის საკმარისობის დამტკიცება. ვთქვათ, კომპაქტურ სივრცეს გააჩნია თვლადი ბაზა, პაუზდორფის კომპაქტური სივრცე 9.6. თეორემის ძალით ნორმალურია.

ნორმალური თვლადბაზისიანი ტოპოლოგიური სივრცე კი, ურისონის 6.16. თეორემის ძალით, მეტრიზებადია. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 10.6. პილბერტის კუბი მეტრიზებადი სივრცეა.

დამტკიცება: პილბერტის კუბი $I^{\aleph_0} = \prod_{n \in N} I_n$ ტიხონოვიის თეორემის ძალით კომპაქტურია.

ამიტომ თეორემის დასამტკიცებლად, ურისონის თეორემიდან გამომდინარე, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ იგი თვლად ბაზისიანია. $PLB(I^{\aleph_0}) = \{P_n^{-1}(O_n) \subset I^{\aleph_0} \mid O_n \in T(I_n)\}_{n \in N}$ ოჯახი წარმოადგენს კანონიკურ წინაბაზას პილბერტის კუბში. I სეგმენტი სეპარაბელური კომპაქტური სივრცეა, ამიტომ მას გააჩნია თვლადი ბაზა $B(I)$. განვიხილოთ სიმრავლეთა ოჯახი:

$$A(I^{\aleph_0}) = \{P_n^{-1}(O_n) \subset I^{\aleph_0} \mid O_n \in B(I)\}_{n \in N}$$

(ცხადია ეს ოჯახი თვლადია.

ვთქვათ, $O \in B(I^{\aleph_0})$ პილბერტის კუბის ბაზის ელემენტია. იგი შეიძლება წარმოვიდგინოთ ასე:

$$O = \bigcap_{n=1}^k P_n^{-1}(O_n). \text{ მეორე მხრივ, } O_n = \bigcup_r O'_n, \text{ სადაც } O'_n \in B(I), \text{ ამიტომ}$$

$$O = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n^{-1}(\bigcup_{r=1}^{\infty} O_n^r) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{r=1}^{\infty} P_n^r(O_n^r) = \bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n^{-1}(O_n^r)$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $O \in B(I^{\aleph_0})$ სიმრავლე მიიღება $A(I^{\aleph_0})$ ოჯახის ელემენტების სასრული თანაკეცების გაერთიანებით. აქედან გამომდინარე, $PB(I^{\aleph_0})$ კანონიკური წინაბაზით და $A(I^{\aleph_0})$ ოჯახით, როგორც წინაბაზით, განსაზღვრული ტოპოლოგიური სტრუქტურები $I^{\aleph_0}$ პილბერტის კუბში ერთმანეთს ემთხვევა. რადგან $A(I^{\aleph_0})$ თელადია მისგან წარმოქმნილი ბაზაც თელადი იქნება. მაშასადამე პილბერტის კუბში არსებობს თელადი ბაზია, რაც ამტკიცებს თეორემას.

შენიშვნა: ეს თეორემა პირდაპირ გამომდინარეობს 7.1 თეორემიდანაც.

თეორემა 10.7. კომპაქტური მეტრიზებადი სივრცე სრულია.

დამტკიცება: ვთქვათ, $\{x_n\}$ კოშის მიმდევრობაა X მეტრიზებად ტოპოლოგიურ სივრცეში.

განვიხილოთ ჩაკეტილი სიმრავლეები: $F_i = \overline{\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}, \dots\}}, i = \overline{1, \infty}$. ცხადია $F_{i+1} \subset F_i$. $\{F_i\}$

ცენტრირებული ოჯახია, ამიტომ მისი ელემენტების თანაკეცაა $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ არაცარიელია. თუ

$x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$, მაშინ $x \in F_i, i = \overline{1, \infty}$ და მისი ნებისმიერი მიდამო გადაკვეთს

$$\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}, \dots\}, i = \overline{1, \infty}$$

სიმრავლეს.

ენიყენოთ, რომ $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ წერტილი ერთადერთია. მართლაც, რადგან $\{x_n\}$ კოშის

მიმდევრობაა, F_i სიმრავლის დიამეტრი $diam F_i$ მიისწრაფვის ნულისაკენ, მაშასადამე $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$

სიმრავლე შედგება ერთადერთი x წერტილისაგან. აქედან გამომდინარე $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. თეორემა დამტკიცდა.

ვთქვათ, X კომპაქტური მეტრიკული სივრცეა და $\{O_\sigma\}$ მისი რაიმე ღია დაფარვა, ყოველი $x \in X$ წერტილისთვის ავირჩიოთ ისეთი $\varepsilon_x > 0$ რიცხვი, რომ ღია ბირთვი $B_{\varepsilon_x}^{x,x}$ მთლიანად შედიოდეს მოცემული დაფარვის რაიმე ელემენტში. ცხადია $\{B_{\varepsilon_x}^{x,x}\}_{x \in X}$ ოჯახი წარმოადგენს X სივრცის ღია დაფარვას. ამ დაფარვიდან ცხადია გამოიყოფა სასრული ქვედაფარვა ანუ რაც იგივეა: არსებობენ ისეთი წერტილები $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$, რომ $X = B_{\varepsilon_1}^{x_1} \cup B_{\varepsilon_2}^{x_2} \cup \dots \cup B_{\varepsilon_k}^{x_k}$ განვიხილოთ რიცხვი $\varepsilon = \{\varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{x_2}, \dots, \varepsilon_{x_k}\}$, ადვილია იმის მიხედვით, რომ $\{B_{\varepsilon}^{x_i}\}_{i=1}^k$ წარმოადგენს X სივრცის ღია დაფარვას, რომელიც ნაწერილია $\{O_\sigma\}$ დაფარვაში.

ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვს, რომლისთვისაც X კომპაქტური მეტრიკული სივრცის $\{B_{\varepsilon}^{x_i}\}_{i=1}^k$ დაფარვა ნაწერილია ამავე სივრცის ღია $\{O_\sigma\}$ დაფარვაში, $\{O_\sigma\}$ დაფარვის **ღებების რიცხვი** ეწოდება. როგორც ვაჩვენეთ, ყოველი კომპაქტური მეტრიკული სივრცის ნებისმიერი ღია დაფარვისათვის არსებობს ღებების რიცხვი.

ასახევა $f: (X, \sigma) \rightarrow (Y, \rho)$ ერთი მეტრიკული სივრცეიდან მეორეში ვწოდება **თანაბრად უწყვეტი** σ, ρ მეტრიკული სტრუქტურების მიმართ, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ ნამდვილი რიცხვისათვის არსებობს $\delta_\varepsilon > 0$ ნამდვილი რიცხვი, რომ $\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$ ნებისმიერი ორი $x', x'' \in X$ წერტილისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $\sigma(x', x'') < \delta_\varepsilon$.

თეორემა 10.8. ყოველი უწყვეტი ასახვა კომპაქტური მეტრიკული სივრცეიდან მეტრიკულ სივრცეში $f: (X, \sigma) \rightarrow (Y, \rho)$ თანაბრად უწყვეტია.

დამტკიცება: ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის δ_ε იყოს X სივრცის $\{f^{-1}(B_\varepsilon^{\frac{\varepsilon}{2}})\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ დაფარვის ლებეგის რიცხვი. თუ $\sigma(x', x'') < \delta_\varepsilon$, მაშინ მოიძებნება ისეთი $y \in Y$ წერტილი, რომ

$x' \in B_x^{\delta_\varepsilon} \subset f^{-1}(B_y^{\frac{\varepsilon}{2}})$. აქედან გამომდინარე $\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$. თეორემა დამტკიცდა.

თელადად კომპაქტური სივრცეები. ტოპოლოგიურ სივრცეს ვწოდება **თელადად კომპაქტური** თუ მისი ნებისმიერი თელადი დაფარვიდან გამოიყოფა სასრული ქვედაფარვა.

თეორემა 10.8. ტოპოლოგიურ სივრცე თელადად კომპაქტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ამ სივრცის წერტილთა ნებისმიერ უსასრულო ქვესიმრავლეს გააჩნია ზღვართი წერტილი.

დამტკიცება: თეორემის პირობის აუცილებლობის დამტკიცება. ვთქვათ, X ტოპოლოგიური სივრცე თელადად კომპაქტურია, მაგრამ მის რაიმე უსასრულო A ქვესიმრავლეს არ გააჩნია ზღვართი წერტილი. თუ A ქვესიმრავლეს არ გააჩნია ზღვართი წერტილი, მაშინ ზღვართი წერტილი არ გააჩნია მის არცერთ თელად ქვესიმრავლეს $F_i = \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}, \dots\}, i = \overline{1, \infty}$.

რადგან F_i სიმრავლეს არ გააჩნია ზღვართი წერტილი, ამიტომ იგი იქნება ჩაკეტილი. აქედან გამომდინარე $\{F_i\}$ წარმოადგენს ჩაკეტილ სიმრავლეთა ცენტრირებულ ოჯახს. ამ ოჯახის ელემენტთა თანაკეცთა ცარიელია, წინააღმდეგ შემთხვევაში სწორედ ან თანაკეცთის წერტილები იქნებოდნენ F_i სიმრავლეთა ზღვართი წერტილები. თუ $\{F_i\}$ ოჯახის თანაკეცთა ცარიელია, მაშინ $\{X \setminus F_i\}_{i=\overline{1, \infty}}$ წარმოადგენს X სივრცის ღია დაფარვას, მართლაც

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus F_i) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = X.$$

რადგან X თელადად კომპაქტურია, ამიტომ $\{X \setminus F_i\}_{i=\overline{1, \infty}}$ ოჯახიდან გამოიყოფა სასრული

ქვედაფარვა $\{X \setminus F_i\}_{i=\overline{1, k}}$. რადგან $\{F_i\}$ ცენტრირებული ოჯახია $\bigcap_{i=1}^k F_i \neq \emptyset$. აქედან

გამომდინარე $\bigcup_{i=1}^k (X \setminus F_i) = X \setminus \bigcap_{i=1}^k F_i \neq X$. მაშასადამე,

$$\{X \setminus F_i\}_{i=\overline{1, k}}.$$

ვერ იქნება ქვედაფარვა. მივიღეთ წინააღმდეგობა, ჩვენი დაშვება, რომ X ტოპოლოგიური სივრცეში არსებობს უსასრულო A ქვესიმრავლე, რომელსაც არ გააჩნია ზღვართი წერტილი, არ ყოფილა სწორი. თეორემის პირობის აუცილებლობა დამტკიცდა.

დავამტკიცოთ თეორემის პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, სრულდება თეორემის პირობა და ვთქვათ, $\{F_i\}$ ჩაკეტილ სიმრავლეთა რაიმე თელადი ცენტრირებული ოჯახია X სივრცეში.

განვიხილოთ სიმრავლეები: $\Phi_1 = F_1, \Phi_2 = F_1 \cap F_2, \dots, \Phi_i = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_i, \dots$

ცხადია, $\Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \dots \supset \Phi_i \supset \dots$ და $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \Phi_i$. თუ $\Phi_k = \Phi_{k+1} = \dots$ მაშინ $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$ და სივრცე იქნება თვლად კომპაქტური.

განსხვავებულ შემთხვევაში, ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ვივთხოვოთ, რომ Φ_i სიმრავლეები წყილ-წყილად ერთმანეთისგან განსხვავდებიან, ანუ $\Phi_i \neq \Phi_j, i \neq j$.

ვთქვათ, $x_i \in \Phi_i \setminus \Phi_{i+1}$. $\{x_i\}$ მიმდევრობა შეიცავს უსასრულოდ ბევრ განსხვავებულ წერტილებს. რადგან ყველა უსასრულო სიმრავლეს გააჩნია ზრვართი წერტილი, $\{x_i\}$ მიმდევრობასაც უნდა გააჩნდეს ასეთი წერტილი.

ვთქვათ ეს წერტილია x_0 . რადგან Φ_i შეიცავს ყველა $\{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots\}$ წერტილს, ამიტომ x_0 ზღვართი წერტილი იქნება Φ_i სიმრავლისათვისაც. Φ_i ჩაკეტილი სიმრავლეა, ამიტომ მისი ზღვართი წერტილები მასშივე შედიან, მაშასადამე, $x_0 \in \Phi_i, i = 1, \infty$.

$\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \Phi_i \neq \emptyset$, მაშასადამე, $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$. რადგან $\{F_i\}$ ჩაკეტივ სიმრავლეთა თვლადი (ცენტრირებული ოჯახია, ამიტომ X თვლად კომპაქტურია. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 10.9. თვლად ბახისიანი სივრცეებისათვის კომპაქტურობა და თვლად კომპაქტურობა ერომანეთს ემთხვევა.

დამტკიცება: ვთქვათ X თვლად ბახისიანი თვლად კომპაქტური სივრცეა და $\{O_\alpha\}$ მისი რაიმე ღია დაფარვა. ყოველი $O_\alpha = \bigcup_{\beta} O_\alpha^\beta, O_\alpha^\beta \in B(X)$, სადაც $B(X)$ თვლადი ბახია.

აქედან გამომდინარე $\{O_\alpha\}$ დაფარვიდან გამოიყოფა თვლადი $\{O_\alpha\}_{\alpha=1, \infty}$ ქვედაფარვა. რადგან X თვლად კომპაქტური სივრცეა $\{O_\alpha\}_{\alpha=1, \infty}$ დაფარვიდან გამოიყოფა $\{O_{\alpha_k}\}_{k=1, \infty}$ სასრულო ქვედაფარვა. $\{O_{\alpha_k}\}_{k=1, \infty}$ წარმოადგენს $\{O_\alpha\}$ დაფარვის ქვედაფარვასაც ამიტომ X კომპაქტურია.

თუ X სივრცე კომპაქტურია, მაშინ ცხადია, იგი იქნება თვლად კომპაქტურიც. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 10.10. სრული და სრულად შემოსაზღვრული მეტრიკული სივრცე კომპაქტურია. **დამტკიცება:** ვთქვათ, სრულდება თეორემის პირობა, მაშინ სივრცე იქნება სეპარაბელური, მართლაც, თუ X მეტრიკული სივრცე სრულად შემოსაზღვრულია, მაშინ ნებისმიერი

ნატურალური $n \in \mathbb{N}$ რიცხვისთვის არსებობს $\frac{1}{n}$ მკერვი ქვესიმრავლე $\{x_i\}_{i=1, \infty} X$ სივრცეში.

$\bigcup_{i=1}^{\infty} \{x_i\}_{i=1, \infty}$ სიმრავლე თვლადია. ვთქვათ, $x \in X$ და $u(x)$ ამ წერტილის ნებისმიერი

მიდამოა. ცხადია არსებობს ისეთი $n' \in \mathbb{N}$ ნატურალური რიცხვი, რომ $B_{n'}^{\frac{1}{n}} \subset u(x)$.

თუ $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$ სიმრავლე $\frac{1}{n'}$ მკერძია X სივრცეში მაშინ არსებობს ისეთი $x_i \in X$, რომ

$$d(x_i, x) < \frac{1}{n'}. \text{ მაშასადამე } x_i \in B_{\frac{1}{n'}} \subset u(x). \text{ მაგრამ, მეორე მხრივ } x_i \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_i\}_{i=1, \dots, n}, \text{ ამიტომ}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_i\}_{i=1, \dots, n} = X$$

რადგან X სეპარაბელურია, 5.1 თეორემიდან გამომდინარე, იგი იქნება თვლადბაზისიანი. ამიტომ თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვჩვენოთ, რომ სივრცე თვლადბაზისიანია.

10.8. თეორემის თანახმად, სივრცე თვლადბაზისიანია კომპაქტური იქნება, თუ მის ყოველ უსასრულო ქვესიმრავლეს გააჩნია ზღვართი წერტილი. ეს იგივეა, რომ X სივრცის წერტილების ნებისმიერ $\{x_n\}$ მიმდევრობას გააჩნდეს ზღვართი წერტილი.

X სივრცის იმ წერტილების ირგვლივ, რომლებიც შეადგენენ 1- ბადეს, ავსებთ ღია ბირთვები რადიუსით 1.

ამ ბირთვებიდან, იმის გამო, რომ მათი რიცხვი სასრულია, ამოვირჩიოთ B_1 ბირთვი, რომელიც შეიცავს $\{x_n\}$ მიმდევრობის $\{x_n^1\}$ უსასრულო ქვემიმდევრობას.

შემდეგ, იმ წერტილების ირგვლივ, რომლებიც შეადგენენ $\frac{1}{2}$ ბადეს, ავსებთ ღია ბირთვები

რადიუსით $\frac{1}{2}$. ვთქვათ B_2 არის ბირთვი რომელიც შეიცავს $\{x_n^1\}$ მიმდევრობის უსასრულო $\{x_n^2\}$ ქვემიმდევრობას.

გაუგავრძელოთ ეს პროცესი. იმ წერტილების ირგვლივ, რომლებიც შეადგენენ $\frac{1}{2^k}$

ბადეს, ავსებთ ღია ბირთვი B_k , რომელიც შეიცავს $\{x_n^{k-1}\}$ მიმდევრობის უსასრულო ქვემიმდევრობას და ასე შერდევ.

განვიხილოთ ჩაკეტილი ბირთვები A_k . რომლებსაც აქვთ იგივე ცენტრები რაც B_k ბირთვებს, მაგრამ მათზე ორჯერ მეტი რადიუსი. ცხადია

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_k \supset \dots$$

ამოვიღოთ A_1 ბირთვიდან $\{x_n\}$ მიმდევრობის ერთი $x_{n_1} \in B_1$ ელემენტი, A_2

ბირთვიდან $x_{n_2} \in B_2$ და ასე შემდეგ. მივიღებთ ფუნდამენტალურ მიმდევრობას $\{x_{n_k}\}$. რადგან X სივრცე სრულია, ამიტომ არსებობს $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$. ცხადია x_0

იქნება $\{x_n\}$ მიმდევრობის ზღვართი წერტილიც, ეს კი ნიშნავს იმას, რომ ნებისმიერ უსასრულო ქვესიმრავლეს X სივრცეში გააჩნია ზღვართი წერტილი და მაშასადამე იგი თვლადბაზისიანია. ეს კი ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 10.11. თვლადბაზისიან კომპაქტურ მეტრიზებადი სივრცე კომპაქტურია.

დამტკიცება: ჯერ ვაჩვენოთ, რომ თვლადბაზისიან კომპაქტურ მეტრიკული სივრცე სრულად შემოსაზღვრულია. დავეუშვათ წინააღმდეგობა. ვთქვათ, თვლადბაზისიან კომპაქტურ X სივრცე არ

არის სრულად შემოსახლერული, მაშინ არსებობს ერთი მაინც ε_0 რიცხვი, რომლისთვისაც არ არსებობს ε_0 -ბადე.

დავაფიქსიროთ $x_1 \in X$ წერტილი. ვთქვათ x_2 ისეთი წერტილი, რომ $d(x_1, x_2) > \varepsilon_0$. ასეთი წერტილი არსებობს, წინააღმდეგ შემთხვევაში $\{x_1\}$ სიმრავლე იქნებოდა ε_0 -ბადე; ასევე იარსებებს ისეთი წერტილი x_3 , რომ $d(x_1, x_3) > \varepsilon_0, d(x_2, x_3) > \varepsilon_0$. წინააღმდეგ შემთხვევაში $\{x_1, x_2\}$ იქნებოდა ε_0 -ბადე და ასე შემდეგ. შეიძლება ავაგოთ წერტილთა უსასრულო სიმრავლე $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$, რომლისათვისაც $d(x_i, x_j) > \varepsilon_0, i, j = 1, 2, \dots, i < j$.

რადგან სივრცე თვლადად კომპაქტურია, ამიტომ $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$ სიმრავლეს უნდა ჰქონდეს ზღვარითი წერტილი, მაგრამ ეს სიმრავლე დისკრეტულია და მას არ შეიძლება ჰქონდეს ზღვარითი წერტილი. მივიღეთ წინააღმდეგობა, მაშასადამე, ჩვენი დაშვება არ ყოფილა სწორი და სივრცე სრულად შემოსახლერულია. რადგან სივრცე სრულად შემოსახლერულია, ამიტომ როგორც წინა თეორემაშია, იგი იქნება თვლადაზისიანი. თვლადაზისიანი, თვლადადკომპაქტური სივრცე კი კომპაქტურია. თეორემა დამტკიცდა.

§11. ლოკალურად კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეები

ტოპოლოგიურ სივრცეს ვწოდებთ *ლოკალურად კომპაქტურ*, თუ მის ყოველ წერტილს გააჩნია მიდამო, რომლის ჩაკეტივაც კომპაქტურია.

თეორემა 11.1 ყოველი ლოკალურად კომპაქტური ჰაუსდორფის სივრცე სრულად რეგულარულია.

დამტკიცება ვთქვათ, $x \in X$ ლოკალურად კომპაქტური X სივრცის რაიმე წერტილია ხოლო F ამ სივრცის რაიმე ჩაკეტილი ქვესიმრავლე, რომელიც არ შეიცავს მოცემულ წერტილს.

განვიხილოთ x წერტილის ის $u(x)$ მიდამო, რომლის $\overline{u(x)}$ ჩაკეტივაც კომპაქტურია.

$F_0 = (\overline{u(x)} \setminus u(x)) \cup (\overline{u(x)} \cap F)$ სიმრავლე ჩაკეტილია $\overline{u(x)}$ ქვესივრცეში, $x \in \overline{u(x)} \setminus F_0$. რადგან $\overline{u(x)}$ კომპაქტურია, ამიტომ ტიხონოვის სრულად რეგულარული სივრცეცაა. აქედან

გამომდინარე, არსებობს ისეთი უწყვეტი ასახვა $f_1: \overline{u(x)} \rightarrow [0, 1]$, რომ $f_1(x) = 0, f_1(F_0) = \{1\}$.

განვიხილოთ მუდმივი ფუნქცია $f \neq X \setminus u(x) \rightarrow [0, 1]$, სადაც $f_2(y) = 1$, როდესაც $y \in \overline{u(x)} \setminus u(x)$. ფუნქცია

$$f(y) = \begin{cases} f_1(y), & y \in u(x) \\ f_2(y), & y \in X \setminus u(x) \end{cases}$$

რადგან $\overline{u(x)} \cap (X \setminus u(x)) = \overline{u(x)} \setminus u(x) \subset F_0$, $f_1(\overline{u(x)} \cap (X \setminus u(x))) = \{1\}$ და $f_2(\overline{u(x)} \cap (X \setminus u(x))) = \{1\}$ უწყვეტია. ამასთან $f(x) = 0$ და $f(F) = \{1\}$. ეს კი ამტკიცებს თეორემას.

მაგალითები ლოკალურად კომპაქტური სივრცის მაგალითებია: R რიცხვითი ღერძი, R^n ეკლიდეს სივრცე.

X ტოპოლოგიური სივრცის კომპაქტიფიკაცია ეწოდება (Y, c) წყვილს, რომელშიც Y პაუსდორფის კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეა, $c: X \rightarrow Y$ ისეთი პოთენციალი ჩადგმა, რომ $\overline{c(X)} = Y$

თეორემა 11.2 X ტოპოლოგიურ სივრცეს გააჩნია კომპაქტიფიკაცია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ იგი სრულად რეგულარულია.

დამტკიცება: თეორემის პირობის საკმარისობის დამტკიცება. ყოველი სრულად რეგულარული სივრცე ჩაიდგმება ტიხონოვის კუბში, ტიხონოვის კუბი კომპაქტურია, მისი ნებისმიერი ჩაკეტილი სიმრავლეც კომპაქტურია, ამიტომ თუ

$$f: X \rightarrow \prod_{\alpha} I_{\alpha} \text{ პოთენციალი ჩადგმა, მაშინ } (\overline{f(X)}, c) \text{ წყვილი სადაც } c: f(X) \rightarrow \overline{f(X)},$$

იგიური ჩადგმა იქნება საძიებელი კომპაქტიფიკაცია.

თეორემის პირობის აუცილებლობის დამტკიცება. თუ X სივრცეს გააჩნია კომპაქტიფიკაცია (Y, c) , მაშინ რადგან Y კომპაქტურია არსებობს $f: Y \rightarrow \prod_{\alpha} I_{\alpha}$ პოთენციალი ჩადგმა.

რადგან ტიხონოვის კუბი სრულად რეგულარულია, სრულად რეგულარული იქნება მისი ქვესიმრავლე $f(c(X)) \subset f(Y)$. X სივრცე კი პოთენციალი $f(c(X))$ სივრცისა. თეორემა დამტკიცდა.

შემდგომ X ტოპოლოგიური სივრცის (Y, c) კომპაქტიფიკაციას აღვნიშნავთ ასე: CX

ვთქვათ, გვაქვს X ტოპოლოგიური სივრცის ორი კომპაქტიფიკაცია: C_1X, C_2X ;

თუ არსებობს ისეთი პოთენციალი: $f: C_1X \rightarrow C_2X$, რომ დიაგრამა

$$\begin{array}{ccc} C_1X & \xrightarrow{\quad} & C_2X \\ c_1 \uparrow & & c_2 \uparrow \end{array}$$

$$X \xrightarrow{\quad} X$$

კომუტაციურია, ანუ: $f \circ c_1 = Id \circ c_2 = c_2$, მაშინ C_1X, C_2X კომპაქტიფიკაციებს **ეკვივალენტური კომპაქტიფიკაციები** ეწოდება.

$CX \setminus X$ სიმრავლეს CX კომპაქტიფიკაციის ნაზრდი ეწოდება.

თუ არსებობს ისეთი უწყვეტი $f: C_1X \rightarrow C_2X$ ასახვა, რომ $f \circ c_1 = c_2$, მაშინ ამბობენ, რომ C_2X კომპაქტიფიკაცია ნაკლებია ან ტოლი C_1X კომპაქტიფიკაციაზე და წერენ $C_2X \leq C_1X$ ადვილია მიხედვით, რომ "≤" დალაგების მიმართებაა X ტოპოლოგიური სივრცის კომპაქტიფიკაციათა სიმრავლეში.

თეორემა 11.3. C_1X, C_2X კომპაქტიფიკაციები ეკვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $C_1X \leq C_2X$ და $C_2X \leq C_1X$

დამტკიცება: თეორემის პირობის აუცილებლობის დამტკიცება. თუ C_1X, C_2X კომპაქტიფიკაციები ეკვივალენტურია, მაშინ არსებობს ისეთი პოთენციალი $f: C_1X \rightarrow C_2X$, რომ $f \circ c_1 = c_2$. რადგან f პოთენციალია, ამიტომ არსებობს მისი შებრუნებული $f^{-1}: C_2X \rightarrow C_1X$ პოთენციალი. ამ პოთენციალისთვის კი სრულდება პირობა: $f^{-1} \circ c_2 = c_1$. თეორემის პირობის აუცილებლობა დამტკიცდა. თეორემის პირობის

საკმარისობის დამტკიცება. უთქვათ, $C_1X \leq C_2X$ და $C_2X \leq C_1X$, მაშინ არსებობენ ისეთი უწყვეტი $f_1: C_1X \rightarrow C_2X$, $f_2: C_2X \rightarrow C_1X$ ასახვები, რომ $f_2 \circ c_2 = c_1$ და $f_1 \circ c_1 = c_2$.

ვანეროთ, რომ f_1, f_2 პომეომორფული ასახვებია.

იმის გამო, რომ სივრცის კომპაქტიფიკაცია სრულად რეგულარული სივრცეა, f_1, f_2 ასახვები პაუზდორფის კომპაქტურ სივრცეს პაუზდორფის კომპაქტურ სივრცეში ასაყვენ. აქედან გამომდინარე ეს ასახვები ჩაკეტვითი ასახვებია და მათი პომეომორფულობის დფასამტკიცებლად საკმარისია ვანეროთ, რომ ისინი ურთიერთცალსახაა.

ცხადია, ასახვა $f_2 \circ f_1: C_1X \rightarrow C_1X$ აკმაყოფილებს პირობას: $f_2 \circ f_1 \circ c_1 = c_1$, ამიტომ, თუ $x \in c_1(X)$, მაშინ $f_2 \circ f_1(x) = x$ ეს კი ნიშნავს რომ $f_2 \circ f_1|_{c_1(X)} = Id_{c_1(X)}$. რადგან $c_1(X)$ სიმრავლე ყველგან მკვერთია C_1X სივრცეში, ამიტომ $B \subset C_1X$ სიმრავლეს, რომლისთვისაც სრულდება პირობა $f_2 \circ f_1(x) = Id_{c_1(X)}(x)$, $x \in B$, აქვს თვისება: $c_1(X) \subset B \subset C_1X = \overline{c_1(X)}$. B

ჩაკეტვითი სიმრავლეა, ამის დასამტკიცებლად ვანეროთ, რომ $C_1X \setminus B$ ღიაა, მართლაც: $C_1X \setminus B$ სიმრავლე შედგება ისეთი ელემენტებისაგან რომლებზედაც $f_2 \circ f_1 \neq Id_{c_1(X)}$; რადგან C_1X პაუზდორფის სივრცეა, ყოველი $x \in C_1X \setminus B$ წერტილისათვის არსებობენ მიდამოები $u(f_2 \circ f_1(x))$ და $u(Id_{c_1(X)}(x))$, რომლებიც ერთმანეთს არ ჰკვეთენ; ამ მიდამოთა წინა სახეები $f^{-1}(u(f_2 \circ f_1(x)))$, $f^{-1}(u(Id_{c_1(X)}(x)))$ ერთმანეთს ჰკვეთენ და ეს გადაკვეთა წარმოადგენს x წერტილის ისეთ მიდამოს, რომელიც მთლიანად შედის $C_1X \setminus B$ სიმრავლეში; ეს კი ნიშნავს, რომ $C_1X \setminus B$ ღიაა.

რადგან B ჩაკეტვითია $B = \overline{c_1(X)}$, მაშასადამე $f_2 \circ f_1 = Id_{c_1(X)}$ მთელ C_1X სივრცეზე. ასევე შეიძლება ვანეროთ, რომ $f_1 \circ f_2 = Id_{c_2(X)}$ მთელ C_2X სივრცეზე.

თორემა დამტკიცდა.

თეორემა 11A. (აღქმსანდროვის თეორემა). ყოველ ლოკალურად კომპაქტურ და არაკომპაქტურ პაუზდორფის X სივრცეს გააჩნია კომპაქტიფიკაცია aX , რომლის ნაზრდიც ერთი წერტილისაგან შედგება და ეს კომპაქტიფიკაცია მინიმალურია X სივრცის კომპაქტიფიკაციათა სიმრავლეში.

დამტკიცება: განვიხილოთ ნებისმიერი წერტილი $\Omega \notin X$ ეთქვათ $aX = X \cup \{\Omega\}$, ამ სიმრავლეში ღია სიმრავლეებად ჩათვალოთ მისი ის ქვესიმრავლეები, რომლებსაც აქვთ სახე: $\{\Omega\} \cup (X \setminus F)$, სადაც F კომპაქტური ქვესიმრავლეა X სივრცეში და ის ქვესიმრავლეები, რომლებიც ღიაა X სივრცეში. aX ასეთი ტოპოლოგიური სტრუქტურით პაუზდორფის სივრცეა და $\alpha: X \rightarrow aX$, $\alpha(x) = x$ პომეომორფული ჩადგმაა. ვანეროთ, რომ aX კომპაქტური სივრცეა; ეთქვათ, $\{O_\alpha\}$ ამ სივრცის ნებისმიერი ღია დაფარვაა. არსებობს ამ დაფარვის ელემენტი O_{α_0} , რომელიც შეიცავს Ω წერტილს. $F = X \setminus O_{\alpha_0}$ კომპაქტური ქვესიმრავლეა.

ამიტომ არსებობს ისეთი ქვედაფარვა $\{O_\alpha\}_{\alpha \in I}$, რომ $F \subset \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$. ღია სიმრავლეთა $\{O_\alpha\}_{\alpha \in I}$

ოჯახი ფარავს aX სიმრავლეს, ეს ოჯახი $\{O_\alpha\}$ ოჯახის ქვეოჯახია, მაშასადამე aX კომპაქტურია. ვანეროთ, რომ $CX \geq aX$ ნებისმიერი სხვა CX

კომპაქტიფიკაციისთვის, მართლაც ასახეა $f: CX \rightarrow \alpha X$, რომელიც განისაზღვრება ასე:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \circ c^{-1}(x), & x \in CX \\ \Omega, & x \in CX \setminus c(X) \end{cases}$$

აკმაყოფილებს პირობას $f \circ c = \alpha$ და უწყვეტია. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 11.5. თუ A ლოკალურად კომპაქტური ყველგან მკერძი ქვესიმრავლეა X მაუზდორფის სივრცეში მაშინ A ღიაა X სივრცეში.

დამტკიცება: განვიხილოთ A სიმრავლის რაიმე x წერტილი, არსებობს ამ წერტილის ისეთი $U(x)$ მიდამო A ქვესივრცეში, რომლის ჩაკეტვაც ამ ქვესივრცეში კომპაქტურია. ეს ჩაკეტვა კომპაქტურია X სივრცეშიც და ამიტომ ჩაკეტილი სიმრავლეა ამ სივრცეში. $U(x) = O \cap A$, სადაც O რაიმე ღია სიმრავლეა $\overline{U(x)}$ ჩ $\overline{O} = \overline{A \cap O}$, მართლაც $\overline{A \cap O} \subset \overline{A \cap O} = X \cap \overline{O} = \overline{O}$

$x \in O$, წერტილისათვის გვაქვს: $x \in \overline{O} = \overline{A \cap O}$, $\overline{U(x)} = \overline{A \cap O} = \overline{O}$, $\overline{U(x)} \subset A$, ამიტომ $\overline{O} \subset A$ და მით უმეტეს $O \subset A$. O ღიაა და ამიტომ წარმოადგენს x წერტილის მიდამოს. რადგან x წერტილი ნებისმიერად არის არჩეული A ღია სიმრავლეა. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 11.6. ლოკალურად კომპაქტური სივრცის ნაზრდი მისი რომელიმე...

კომპაქტიფიკაციისას ჩაკეტილი სიმრავლეა.

დამტკიცება: წინა თეორემის თანახმად $c(X)$ ღიაა CX სივრცეში. აქედან გამომდინარე ნაზრდი $CX \setminus c(X)$ ჩაკეტილია. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 11.7. X სივრცის კომპაქტიფიკაციისთვის მიუღი ოჯახის ყოველ არაცარიელ $\{C_{\alpha_p} X\}_{p \in B} \subset \{C_{\alpha_p} X\}_{\alpha \in A}$ ქვეოჯახის გააჩნია ზუსტი ზედა საზღვარი " $\leq$ " დალაგების მიმართ.

დამტკიცება: განვიხილოთ ტიხონოვის ნამრავლი $\prod_{p \in B} C_{\alpha_p} X$ და ასახეა $\Delta_{C_{\alpha_p}} : X \rightarrow \prod_{p \in B} C_{\alpha_p} X$

რადგან თითოეული $C_{\alpha_p} X \rightarrow C_{\alpha_p}$ პოტენციური ჩადგმა, ამიტომ იგი განაცადლებს წერტილებს, წერტილებს და ჩაკეტილ სიმრავლეებს. მართლაც, წერტილებს რომ განაცადლებს ცხადია; ვინეფთ, რომ განაცადლებს წერტილებს და ჩაკეტილ სიმრავლეებს, ამისათვის განვიხილოთ $F \subset X$ ჩაკეტილი სიმრავლე და წერტილი $x \in X$, $x \notin F$ დაეუშვათ

$c_{\alpha_p}(x) \in \overline{c_{\alpha_p}(F)}$, მაშინ $c_{\alpha_p}(x) \in \overline{c_{\alpha_p}(F)} \setminus c_{\alpha_p}(F)$ აქედან გამომდინარე $c_{\alpha_p}(x)$ არ ეკუთვნის $c_{\alpha_p}(X)$ სიმრავლეს, წინააღმდეგ შემთხვევაში $f(F)$ ვერ იქნება ჩაკეტილი $f(X)$ -ში; მაგრამ $f(F)$ ჩაკეტილია. მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე ჩვენი დაშვება არ ეყოფილა სწორი, მაშასადამე $c_{\alpha_p}(x) \notin \overline{c_{\alpha_p}(F)}$.

ასახეათა ოჯახის დიაგონალის შესახებ თეორემის თანახმად $\Delta_{C_{\alpha_p}} : X \rightarrow \prod_{p \in B} C_{\alpha_p} X$

პოტენციური ჩადგმა.

ეაჩვენოთ, რომ $\Delta CX = (\overline{\Delta C_{\alpha_p}(X)}, \Delta_{C_{\alpha_p}})$ წარმოადგენს $\{C_{\alpha_p} X\}_{p \in B}$ ოჯახის ზუსტ ზედა საზღვარს, მართლაც, რადგან $P_{\alpha_p} : \prod_{p \in B} C_{\alpha_p} X \rightarrow C_{\alpha_p} X$ პროექცია აკმაყოფილებს პირობას:

$P_{\alpha_p} \circ \Delta_{C_{\alpha_p}} = c_{\alpha_p}$, ამიტომ $C_{\alpha_p} \leq \Delta CX$. ეთქვას CX რომელიმე სხვა კომპაქტიფიკაციაა და

$C_{\alpha_p} X \leq CX$ ყველა β ინდექსისთვის. ეს ნიშნავს, რომ არსებობენ ისეთი ასახვები $f_\beta: CX \rightarrow C_{\alpha_p} X, \beta \in B$, რომ $f_\beta \circ c = c_{\alpha_p}$ (ცხადია ასახვა Δf_β აქმაუფილებს პირობას $\Delta f_\beta \circ c = \Delta c_{\alpha_p}$ ეს კი ნიშნავს, რომ $\Delta CX \leq CX$ და მაშასადამე $\Delta CX = (\overline{\Delta c_{\alpha_p}}(X), \Delta c_{\alpha_p})$ ყოფილა ზუსტი ზედა საზღვარი $\{C_{\alpha_p} X\}_{\beta \in B}$ ოჯახისთვის. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 11.8 ყოველი სრულად რეგულარული სივრცისათვის არსებობს მაქსიმალური კომპაქტიფიკაცია "z" დალაგების მიმართ.

დამტკიცება: სრულად რეგულარული სივრცეებისათვის, ცხადია კომპაქტიფიკაციითა სიმრავლე არაცარიელია, ამიტომ თუ განვიხილავთ ამ სიმრავლის წრფივად დალაგებულ ქვესიმრავლეებს, თითოეულ მათგანს, წინა თეორემის საფუძველზე ექნება ზუსტი ზედა საზღვარი. აქედან გამომდინარე, ცოცხლის ღემის თანახმად, სრულად რეგულარული სივრცის კომპაქტიფიკაციითა სიმრავლეს უნდა გააჩნდეს მაქსიმალური ელემენტი. თეორემა დამტკიცდა.

სრულად რეგულარული სივრცის კომპაქტიფიკაციითა სიმრავლის მაქსიმალურ ელემენტს ამ სივრცის *ჩეხის კომპაქტიფიკაცია* ეწოდება.

თეორემა 11.9 პაუზდორფის ტოპოლოგიური სივრცე ლოკალურად კომპაქტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც იგი ჰომეომორფულია პაუზდორფის რაიმე კომპაქტური სივრცის ღია ქვესიმრავლისა.

დამტკიცება: თეორემის პირობის აუცილებლობის დამტკიცება. ვთქვათ, X ლოკალურად კომპაქტური სივრცეა. როგორც ვიცით ლოკალურად კომპაქტური სივრცე სრულად რეგულარულია და ამიტომ არსებობს მისი კომპაქტიფიკაცია CX იგი პაუზდორფის სივრცეა ამიტომ 11.5. თეორემის თანახმად X ღია ქვესიმრავლეა CX სივრცეში

თეორემის პირობის საკმარისობის დამტკიცება. ვთქვათ, X პაუზდორფის ტოპოლოგიური სივრცე რაიმე პაუზდორფის კომპაქტური სივრცის ღია O ქვესიმრავლის ჰომეომორფულია. კომპაქტური სივრცე სრულად რეგულარულია ამიტომ ნებისმიერ $x \in O$ წერტილს გააჩნია ისეთი $v(x)$ მიდამო, რომ $v(x) \subset O$. რადგან $v(x)$ ჩაკეტილი სიმრავლეა ქვესიმრავლეა კომპაქტურ სივრცეში ამიტომ იგი იქნება კომპაქტური. ეს კი ამტკიცებს თეორემას.

საკუთრივი და სრულყოფილი ასახვები

უწყვეტ ასახვას $f: X \rightarrow Y$ ეწოდება *საკუთრივი ასახვა*, თუ Y სივრცის ნებისმიერი კომპაქტური ქვესიმრავლის წინასახე კომპაქტურია.

მაგალითი: ადვილი მისახვედრია, რომ ყოველი უწყვეტი ასახვა კომპაქტური სივრციდან პაუზდორფის სივრცეში საკუთრივია.

თეორემა 11.10. თუ არსებობს $f: X \rightarrow Y$ საკუთრივი ასახვა X სივრცისა ლოკალურად კომპაქტურ Y სივრცეში, მაშინ X სივრცე ასევე ლოკალურად კომპაქტურია.

დამტკიცება: ვთქვათ $x_0 \in X$ ნებისმიერი წერტილია და $y_0 = f(x_0)$. Y სივრცის ლოკალურად კომპაქტურობის გამო, არსებობს y_0 წერტილის ღია მიდამო $u(y_0)$, რომლის ჩაყება $\overline{u(y_0)}$, კომპაქტურია. $f^{-1}(u(y_0))$ ღია სიმრავლე და $f^{-1}(\overline{u(y_0)})$ ჩაკეტილი კომპაქტური ქვესიმრავლეა X სივრცეში. $f^{-1}(u(y_0)) \subset f^{-1}(\overline{u(y_0)})$, ამიტომ $\overline{f^{-1}(u(y_0))} \subset f^{-1}(\overline{u(y_0)})$. $f^{-1}(\overline{u(y_0)})$ ჩაკეტილია და კომპაქტური, ამიტომ მისი ჩაკეტილი

ქვესიმრავლეც კომპაქტური იქნება X სივრცეში. მაშასადამე $f^{-1}(u(y_0))$ წარმოადგენს $x_0 \in X$ წერტილის ისეთ მიდამოს, რომლის $\overline{f^{-1}u((y_0))}$ ჩაკეტვაც კომპაქტურია. ეს კი ამტკიცებს თეორემას.

უწყვეტ ჩაკეტილ ასახვას $f: X \rightarrow Y$ ერთი პაუზდორფის ტოპოლოგიური სივრციდან მეორე ტოპოლოგიურ სივრცეში ეწოდება **სრულყოფილი ასახვა**, თუ Y სივრცის ნებისმიერი წერტილის წინასახე კომპაქტურია.

მაგალითი: ცხადია ყოველი უწყვეტი, ჩაკეტილი ინექციური ასახვა პაუზდორფის სივრციდან სრულყოფილია. პაუზდორფის სივრცის ყოველი პოპოპორფული ჩადგმა სრულყოფილია.

ყოველი უწყვეტი ასახვა კომპაქტური პაუზდორფის სივრცისა პაუზდორფის სივრცეში სრულყოფილია. მართლაც, თუ $A \subset X$ ჩაკეტილი ქვესიმრავლეა X სივრცეში, მაშინ იგი იქნება კომპაქტურიც. აქედან გამომდინარე ნებისმიერი უწყვეტი $f: X \rightarrow Y$ ასახვისათვის $f(A) \subset Y$ ქვესიმრავლე იქნება კომპაქტური და რადგან Y პაუზდორფისაა ჩაკეტილიც.

წერტილი Y პაუზდორფის სივრცეში ჩაკეტილი ქვესიმრავლეა, ამიტომ მისი წინასახე $f^{-1}(y)$ ჩაკეტილი სიმრავლეა X სივრცეში და ამის გამო კომპაქტურიც.

თეორემა III.1. იმისათვის, რომ უწყვეტი $f: X \rightarrow Y$ ასახვა X ლოკალრად კომპაქტური პაუზდორფის სივრცისა Y ლოკალრად კომპაქტური პაუზდორფის სივრცეში იყოს სრულყოფილი, აუცილებელი და საკმარისია იგი იყოს საკუთრივი.

ამტკიცება: პირობის აუცილებლობა დამტკიცება: ვთქვათ, f სრულყოფილია და $B \subset Y$ კომპაქტური სქვესიმრავლეა, რადგან Y პაუზდორფისაა B იქნება ჩაკეტილი. მისი წინასახე $f^{-1}(B)$ იქნება ჩაკეტილი. რადგან B კომპაქტურია მისი ცაკეტილი ქვესიმრავლეების ყოველ ცენტრირებულ ოჯახსევენება არაცარიელი თანაკვეთა. განვიხილოთ $f^{-1}(B)$ სიმრავლის ჩაკეტილი სიმრავლეებისაგან შედგენილი ცენტრირებული ოჯახი $\{F_\alpha\}$. ოჯახი $\{f(F_\alpha)\}$ შედგება B სიმრავლის ჩაკეტილი ქვესიმრავლეებისაგან და წარმოადგენს ცენტრირებულ ოჯახს. ამ ოჯახის თანაკვეთა არაცარიელი უნდა იყოს. ვთქვათ, y წერტილი ეკუთვნის ამ თანაკვეთას, მაშინ მისი წინასახე $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(B)$ და კომპაქტურია, $\{F_\alpha \cap f^{-1}(y)\}$ ოჯახი კი ცენტრირებული, მართლაც $\bigcap_{\alpha=1}^k F_\alpha \neq \emptyset$ და $y \in \bigcap_{\alpha=1}^k f(F_\alpha)$, ამიტომ

$$\bigcap_{\alpha=1}^k (F_\alpha \cap f^{-1}(y)) \neq \emptyset.$$

ამ ცენტრირებული ოჯახს, რადგან $f^{-1}(y)$ კომპაქტურია. აქვს არაცარიელი თანაკვეთა აქედან გამომდინარე არაცარიელი თანაკვეთა ექნება $\{F_\alpha\}$ ცენტრირებულ ოჯახსაც, რაც ნიშნავს, რომ $f^{-1}(B)$ კომპაქტურია. პირობის აუცილებლობა დამტკიცდა.

თეორემის პირობის საკმარისობის დამტკიცება: ვთქვათ, სრულდება თეორემის პირობა, მაშინყოველი $y \in Y$ წერტილისათვის, რადგან იგი კომპაქტურია, წინასახე $f^{-1}(y)$ იქნება კომპაქტური.

ვამყენოთ ახლა, რომ f ასახვა ჩაკეტილია. მართლაც განვიხილოთ ჩაკეტილი ქვესიმრავლე $F \subset X$ მისი ანასახის- $f(F)$ წერტილებს გააჩნიათ მიდამოები $u(y), y \in f(F)$, რომელთა $\overline{u(y)}, y \in f(F)$ ჩაკეტვებიც კომპაქტურებია. $f^{-1}(\overline{u(y)}), y \in f(F)$ ჩაკეტილი კომპაქტური

ქვესიმრავლეებია X სიერცეში პირიბის ძალით. ქედან გამომდინარე $F \cap f^{-1}(\overline{u(y)}), y \in f(F)$ ნაკეტილი კომპაქტური ქვესიმრავლეები იქნებიან. ასახვა $f|_{F \cap f^{-1}(\overline{u(y)})}: F \cap f^{-1}(\overline{u(y)}) \rightarrow Y$

სრულყოფილია ამიტომ იქნება ნაკეტილიც. ცხადია $F = \bigcup_{y \in f(F)} (F \cap f^{-1}(\overline{u(y)}))$. ვთქვათ ახლა

$z \in f(F)$ წარმოადგენს $f(F)$ სიმრავლის შეხების წერტილს თუ $u(z)$ წარმოადგენს z ისეთ ღია მიდამოს, რომლის ნაკეტვაც კომპაქტურია, ჩვენი საჭიროებასათვის, ზოგადობის დაურღვევლად. შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ამ წერტილის ყველა მიდამო ასეთია, ეინაიდან ყოველ მიდამოსათვის არსებობს უფრო მცირე მიდამო რომლის ნაკეტვაც კომპაქტურია. ყოველი ასეთი მიდამო წარმოადგენს რომელიღაც $y' \in f(F)$ წერტილის ასეთივე მიდამოს, ანუ $u(z) = u(y')$ ზოგადობის დაურღვევლად შედგომლია ჩავთვალოთ, რომ ამ მიდამოს $\overline{u(y')}$

ნაკეტვა შედის $\{\overline{u(y)}\}, y \in f(F)$ ამ ოჯახში.

$F \cap f^{-1}(\overline{u(y')}) = F \cap f^{-1}(\overline{u(z)})$. $f(F \cap f^{-1}(\overline{u(z)}))$ ნაკეტილი კომპაქტური სიმრავლეა;

$f^{-1}(y') \subset f^{-1}(u(y'))$, ასევე $f^{-1}(z) \subset f^{-1}(u(z)) = f^{-1}(u(y'))$; $f^{-1}(u(y'))$ ღიაა X სიერცეში,

ამიტომ იგი წარმოადგენს $f^{-1}(z)$ ნაკეტილი სიმრავლის მიდამოს; ეს მიდამო ცხადია ქვეთის F სიმრავლეს მათ ექნებათ საერთო ქვესიმრავლე $f^{-1}(y') \subset f^{-1}(u(y'))$, აქედან გამომდინარეობს,

რომ $u(z) \cap f(F \cap f^{-1}(u(z))) \neq \emptyset$. ახლა განვიხილოთ z წერტილის სხვა ნებისმიერი ღია

$u'(z) \subset u(z)$ მიდამო, როგორც აღვნიშნეთ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ მისი ნაკეტვა $\overline{u'(z)}$

კომპაქტურია. ეს ზღამაც მიდამოა, რომელიმე $y'' \in f(F)$ წერტილისთვის $u'(z) = u'(y'')$ და

$f^{-1}(u'(z)) = f^{-1}(u'(y'')) \subset f^{-1}(u(y'')) = f^{-1}(u(z))$. ქედან გამომდინარეობს

$F \cap f^{-1}(\overline{u'(z)}) \subset F \cap f^{-1}(\overline{u(z)})$ და $f(F \cap f^{-1}(\overline{u'(z)})) \subset f(F \cap f^{-1}(\overline{u(z)}))$. ასეთნაირად ავაგებთ

წერტილი მიდამოთა სისტემას დავინახეთ, რომ ყველა მათგანი გადაკვეთს ნაკეტილ $f(F \cap f^{-1}(\overline{u(z)}))$ სიმრავლეს. ეს კი ნიშნავს, რომ $z \in f(F \cap f^{-1}(\overline{u(z)}))$.

$f(F) = f(\bigcup_{y \in f(F)} (F \cap f^{-1}(\overline{u(y)}))) = \bigcup_{y \in f(F)} f(F \cap f^{-1}(\overline{u(y)}))$. ქედან გამომდინარეობს, რომ თუ z

წარმოადგენს $f(F)$ სიმრავლის შეხების წერტილს მაშინ იგიმასვე ეკუთვნის, ეს კი ნიშნავს, რომ $f(F)$ ნაკეტილია. თეორემა დამტკიცდა.

§12. პარაკომპაქტური სიერცეები, ერთეულის დაყოფა

ტოპოლოგიურ სიერცეს ეწოდება *პარაკომპაქტური*, თუ მის ყოველ ღია დაფარვაში შეიძლება ჩავეწროთ ლოკალურად სასრული ღია დაფარვა.

ცხადია ყოველი კომპაქტური სიერცე პარაკომპაქტურია.

თეორემა 12.1 ყოველი მეტრიზებადი ტოპოლოგიური სიერცე პარაკომპაქტურია.

დამტკიცება: ვაჩვენოთ, რომ მეტრიზებადი ტოპოლოგიური სიერცის ყოველი ღია დაფარვაში ჩაიწერება ლოკალურად სასრული ღია დაფარვა.

ვთქვათ, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ მეტრიზებადი ტოპოლოგიური X სიერცის რაიმე ღია დაფარვაა,

მეტრიკა X სიერცეზე, " $<$ " სრული დალაგების მიმართება S სიმრავლეზე. შესაველში განხილული სიმრაველთა თეორიის ერთერთი თეორემის თანახმად, ასეთი დალაგების

მიმართება S სიმრავლეზე არსებობს. განესაზღვროთ ინდექსით ოჯახი $\mathfrak{M}_i = \{V_{i,s}\} = \{\cup B_i^{\frac{1}{2^s}}\}$

, სადაც გაერთიანება აიღება ყველა იმ $c \in X$ წერტილების მიმართ, რომლებიც აკმაყოფილებენ მოთხოვნებს:

1. s ისეთი უმცირესი ელემენტია S სიმრავლეში, რომ $c \in U_s$,

2. $c \notin V_{i,j}$, როდესაც $j < i$ და $i \in S$.

3. ყოველი ღია $B_i^{\frac{1}{2^s}}$ ბირთვი U_s , ღია სიმრავლის ქვესიმრავლეა.

განსაზღვრიდან ჩანს, რომ ყოველი $V_{i,j}$ სიმრავლე ღიაა, მე-3-ე მოთხოვნა გვიჩვენებს, რომ $V_{i,j} \subset U_s$.

ეთქვათ, $x \in X$, ამოვირჩიოთ ისეთი უმცირესი $s \in S$, რომ $x \in U_s$, და ისეთი ნატურალური

რიცხვი i , რომ $B_i^{\frac{1}{2^s}} \subset U_s$. ცხადია, რომ ან $x \in V_{i,j}$, $j < i$, $i \in S$ ან $x \in V_{i,j}$. აქედან გამომდინარე,

$\mathfrak{M} = \bigcup_{i \in S} \mathfrak{M}_i$ წარმოადგენს X სიერცის ღია დაფარვას ჩაწერილს $\{U_s\}_{s \in S}$ დაფარვაში.

ვანევენოთ, რომყოველი i ნატურალური რიცხვისთვის ადგილი აქვს შემდეგ ფაქტს: თუ

$x_1 \in V_{i,j_1}$, $x_2 \in V_{i,j_2}$ და $s_1 \neq s_2$. მაშინ $\rho(x_1, x_2) > \frac{1}{2^{s_1}}$. მართლაც, ვთქვათ, $s_1 < s_2$. V_{i,j_1} და V_{i,j_2}

სიმრავლეების განსაზღვრის თანახმად, მოიძებნება ისეთი c_1 და c_2 წერტილები X სიერცეში,

რომლებიცაკმაყოფილებენ ზერით მოქვანილ 1,2,3 მოთხოვნებს, ამასთან $x_k \in B_k^{\frac{1}{2^{s_k}}}$, $k=1,2$. მე-3-ე

მოთხოვნიდან გამომდინარეობს, რომ $B_k^{\frac{1}{2^{s_k}}} \subset U_{s_k}$, 1-ლი მოთხოვნიდან გამომდინარეობს, რომ

$c_2 \notin U_{s_1}$, ამიტომ $\rho(c_1, c_2) \geq \frac{3}{2^{s_1}}$. მგვარად,

$$\rho(x_1, x_2) \geq \rho(c_1, c_2) - \rho(c_1, x_1) - \rho(c_2, x_2) \geq \frac{1}{2^{s_1}}.$$

ახლა ვანევენოთ, რომ ყოველი $i \in S$ ინდექსისათვის და k, j ნატურალურ რიცხვთა

წყვილისათვის ადგილი აქვს შემდეგ ფაქტს: თუ $B_i^{\frac{1}{2^s}} \subset V_{i,j}$, მაშინ

$B_i^{\frac{1}{2^{s+i}}} \cap V_{i,j} = \emptyset$, სადაც $i \geq j+k$ და $s \in S$. მართლაც, ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის

არსებობენ ისეთი k, j ნატურალური რიცხვები და $i \in S$ ინდექსი, რომ $B_i^{\frac{1}{2^{s+i}}} \subset V_{i,j}$ და ამგვარად

$B_i^{\frac{1}{2^{s+i}}}$ ბირთვი გადააკვეთს არაუმეტეს $j+k-1$ ელემენტს $\mathfrak{M}$ დაფარვიდან.

მე-2 პირობიდან გამომდინარეობს, რომ c წერტილები, რომლებიც მონაწილეობენ $V_{i,j}$ სიმრავლის განსაზღვრაში, არ ეკუთვნიან $V_{i,j}$ სიმრავლეს, როდესაც $i \geq j+k$. რადგან

$B_i^{\frac{1}{2}} \subset U_{j+k}$, ამიტომ $\rho(x, c) > \frac{1}{2^k}$ ყოველასათვის c წერტილისათვის. $j+k \geq k+1$ და $i \geq k+1$

უტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $B_i^{\frac{1}{2^{k+1}}} \cap B_j^{\frac{1}{2}} = \emptyset$.

ეს კი ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 122. ვთქვათ X პარაკომპაქტური სივრცეა და $A, B \subset X$ მისი ორი

ურთიერთარათანამკვეთი ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. თუ ყოველი $x \in B$ წერტილისათვის არსებობენ ისეთი ღია სიმრავლეები U_x, V_x , რომ $A \subset U_x, x \in V_x; U_x \cap V_x = \emptyset$, მაშინ მოიძებნებიან ისეთი სიმრავლეები U, V , რომ $A \subset U, B \subset V$ და $U \cap V = \emptyset$.

დამტკიცება: $\{V_x\}_{x \in B} \cup (X \setminus B)$ წარმოადგენს X სივრცის ღია დაფარვას. რადგან სივრცე პარაკომპაქტურია, ამიტომ ამ დაფარვაში ჩაიწერება ლოკალურად ხასრული დაფარვა. ვთქვათ ეს დაფარვა $\{W_s\}_{s \in S_0}$. თუ $S_0 = \{s \in S \mid W_s \cap B \neq \emptyset\}$, მაშინ იმის გამო, რომ $W_s \subset V_x, A \subset U_x$ და ყოველი $s \in S_0$ ინდექსისათვის გვექნება $A \cap \overline{W_s} = \emptyset$. ვთქვათ, $x \in \overline{W_s}$, მაშინ რადგან

$\{W_s\}_{s \in S_0}$ ლოკალურად ხასრული დაფარვაა არსებობს x წერტილის ისეთი მიდამო $u(x)$, რომელიც აკეთოს მხოლოდ ხასრული რაოდენობის $W_s \in \{W_s\}_{s \in S_0}$ ელემენტებს, აქედან გამომდინარე $x \in \overline{W_s}$, სადაც $S'_0 \subset S_0$ ხასრულია. ვინაიდან $x \in u(x), u(x) \cap \bigcup_{s \in S'_0, S'_0} W_s = \emptyset$,

ამიტომ $u(x) \cap \overline{\bigcup_{s \in S'_0, S'_0} W_s} = \emptyset$ და აქედან გამომდინარე $x \notin \overline{\bigcup_{s \in S'_0, S'_0} W_s}$.

$x \in \overline{W_s} = \overline{W_s} \cup \overline{\bigcup_{s \in S'_0, S'_0} W_s}$, ამიტომ $x \in \overline{W_s} = \bigcup_{s \in S'_0} \overline{W_s} \subset \bigcup_{s \in S'_0} \overline{W_s}$ და მაშასადამე

$\overline{\bigcup_{s \in S_0} W_s} \subset \bigcup_{s \in S_0} \overline{W_s}$. $W_s \subset \overline{W_s}$, აქედან $\overline{W_s} \subset \overline{\overline{W_s}} = \overline{W_s}$ და $\overline{W_s} \subset \overline{\bigcup_{s \in S_0} W_s}$ საბოლოოდ

გვექნება, $\overline{\bigcup_{s \in S_0} W_s} = \bigcup_{s \in S_0} \overline{W_s}$. უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\bigcup_{s \in S_0} \overline{W_s}$ ჩაკეტილია.

გაჩიხილით ღიაა სიმრავლეები $U = X \setminus \bigcup_{s \in S_0} \overline{W_s}$, $V = \bigcup_{s \in S_0} W_s$. გვექნება:

$A \subset U = X \setminus \bigcup_{s \in S_0} \overline{W_s}$, $B \subset V = \bigcup_{s \in S_0} W_s$ და $U \cap V = \emptyset$. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 123. პაუხლიორფის პარაკომპაქტური სივრცე ნორმალურია.

დამტკიცება: თუ წინა თეორემაში A სიმრავლის მაგიერად ვიგულისხმებთ წერტილს, მივიღებთ, რომ პაუხლიორფის პარაკომპაქტური სივრცე რეგულარულია. რადგან სივრცე რეგულარულია, მაშინ მისი ნებისმიერი ორი A, B ჩაკეტილი თანაუკვეთი ქვესიმრავლისთვის სრულდება თეორემის პირობა, აქედან გამომდინარე, თუ რთხელ კიდევ გამოვიყენებთ დამტკიცებულ თეორემას, ავაგებთ A, B სიმრავლეების თანაუკვეთი მიდამოებს. თეორემა დამტკიცდა.

ვთქვათ, $\{f_i \mid f_i : X \rightarrow [0, 1]\}_{i \in S}$ უწყვეტ ასახვათა ოჯახია. ამ ოჯახს უწოდებენ

ერთეულის დაყოფას X სივრცეში, თუ თითოეული $x \in X$ წერტილისათვის $f_i(x) \neq 0$

მხოლოდ ინდექსთა თელადი ქვესიმრავლის $S' = \{s_1, s_2, \dots, s_n, \dots\} \subset S$ ელემენტებისთვის, ამასთან

დაფიქსირებული $x_0 \in X$ წერტილისათვის მწკრივი $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_0)$ კრებადია და მისი ჯამი ტოლია 1-ის.

ეს კრებადობა ცხადია აბსოლუტური იქნება, ამიტომ მნიშვნელობა არ ააქვს მწკრივის წევრთა რიგს.

ვიტყვი, რომ *ერთეულის დაყოფა* X სივრცეში *ლოკალურად სასრულია*, თუ ამ სივრცის $\{f_i^{-1}([0,1])\}_{i \in A}$ დაფარვა ლოკალურად სასრულია.

სხვანაირად ეს ნიშნავს, რომ ნებისმიერი $x_0 \in X$ წერტილისათვის არსებობს ისეთი მიდამო $u(x_0)$ და ინდექსთა სასრული რაოდენობა $S_0 = \{s_1, s_2, \dots, s_k\} \subset S$, რომ $f_i(x) \neq 0$, $\sum_{i \in S_0} f_i(x) = 1$

როდესაც $s_i \in S_0$, $x \in u(x_0)$ და $f_i(x) = 0$, როდესაც $s \in S \setminus S_0$.

თეორემა 12.4. თუ X რეგულარული ტოპოლოგიური სივრცის ყოველ ღია დაფარვაში შეიძლება ჩაეწვროთ ლოკალურად სასრული დაფარვა (ნებისმიერი სიმრავლეებით), მაშინ ამ სივრცის ყოველ $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ღია დაფარვისათვის შეიძლება მოეძებნოს ისეთი ლოკალურად სასრული ჩაკეტილი დაფარვა $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$, რომ $F_\alpha \subset O_\alpha$.

დამტკიცება: ვთქვათ, $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ X სივრცის რაიმე ღია დაფარვაა. X სივრცის რეგულარულობის გამო არსებობს ისეთი ღია დაფარვა $\{W_\beta\}_{\beta \in B}$, რომ დაფარვა $\{\bar{W}_\beta\}_{\beta \in B}$, ჩაწერილია $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ დაფარვაში განვიხილოთ ლოკალურად სასრული დაფარვა $\{U_i\}_{i \in I}$, რომელიც თეორემის პირობის ძალით, ჩაწერილია $\{W_\beta\}_{\beta \in B}$ დაფარვაში. ყოველი $i \in I$ ინდექსისათვის ამოვირჩიოთ ისეთი ინდექსი $\alpha(i) \in A$, რომ $U_i \subset O_{\alpha(i)}$. ვთქვათ $F_\alpha = \bigcup_{\alpha(i)=\alpha} \bar{U}_i$, ეს სიმრავლე, როგორც 12.2. თეორემის დამტკიცებისას ვაჩვენეთ, ჩაკეტილია, აქედან გამომდინარე ჩაკეტილ სიმრავლეთა ოჯახი $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ X სივრცის ლოკალურად სასრული ჩაკეტილი დაფარვაა, $F_\alpha \subset O_\alpha$, $\alpha \in A$. თეორემა დამტკიცდა.

ამბობენ, რომ *ერთეულის დაყოფა* $\{f_i, f_i : X \rightarrow [0,1]\}_{i \in A}$ *გვემდებარება* რაიმე ღია $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ დაფარვას, თუ დაფარვა $\{f_i^{-1}([0,1])\}_{i \in A}$ ჩაწერილია $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ დაფარვაში.

თეორემა 12.5. პარაკომპაქტური, T_1 ტოპოლოგიური X სივრცის ყოველი ღია დაფარვისთვის არსებობს მასზე დაქვემდებარებული ერთეულის დაყოფა.

დამტკიცება: ვთქვათ, $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ X სივრცის ნებისმიერი ღია დაფარვაა, ამ დაფარვაში ჩაწერება ლოკალურად სასრული ღია დაფარვა $\{U_\beta\}_{\beta \in B}$. წინა თეორემის თანახმად, მოიძებნება ისეთი ჩაკეტილი $\{F_\beta\}_{\beta \in B}$ დაფარვა, რომ $F_\beta \subset U_\beta$ ყველა $\beta \in B$ ინდექსისათვის. ურისონის ლემის თანახმად, შეიძლება მოეძებნოს ისეთი ფუნქცია $g_\beta : X \rightarrow [0,1]$, რომ $g_\beta(x) = 0$, როდესაც $x \in X \setminus U_\beta$ და $g_\beta(F_\beta) = \{1\}$.

რადგან $\{U_\beta\}_{\beta \in B}$ ლოკალურად სასრულია, ამიტომ $g(x) = \sum_{\beta \in B} g_\beta(x)$ ფორმულით

განსაზრებული ფუნქცია იქნება უწყვეტი. ადვილი დასაწახია, რომ ოჯახი $\{f_\beta\}_{\beta \in B}$, სადაც

$f_g = \frac{g_g}{g}$ წარმოადგენს ერთეულის დაყოფას X სივრცეში, რომელიც ექვემდებარება $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ დაფარვას. თეორემა დამტკიცდა.

§13. ასახვათა სივრცეები

ეთქვას, X რაიმე სიმრავლეა, Y რაიმე ტოპოლოგიური სივრცე განვიხილოთ ასახვათა სიმრავლე $\Psi(X, Y)$ -ს სიმრავლე იგივეა რაც ტიხონოვის ნამრავლი $\prod_{x \in X} Y_x$, სადაც $Y_x = Y$

აქედან გამომდინარე, ასახვათა $\Psi(X, Y)$ სიმრავლეში გვექნება ტიხონოვის ნამრავლის ტოპოლოგიური სტრუქტურა, რომელსაც **წერტილოვანი კრებადობის ტოპოლოგიური სტრუქტურა** ეწოდება.

ეთქვას, X რაიმე სიმრავლეა, (Y, d') რაიმე მეტრიკული სივრცე $\Phi(X, Y)$ იყოს $f: X \rightarrow Y$ შემოსაზღვრული ასახვების სიმრავლე. ამ აიმრავლეში, შეიძლება შევიტანოთ მეტრიკული სტრუქტურა

$$d: \Phi(X, Y) \times \Phi(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

რომელიც განისაზღვრება ფორმულით: $d(f_1, f_2) = \sup_{x \in X} \{d'(f_1(x), f_2(x))\}$.

ცხადია, ასეთნაირად განსაზღვრული მანძილი ასახვათა შორის, სასრული რიცხვია, მართლაც, თუ X' ფიქსირებული წერტილია, მაშინ

$$d(f_1, f_2) \leq \sup_{x \in X'} \{d'(f_1(x), f_1(x'))\} + \sup_{x \in X'} \{d'(f_1(x'), f_2(x'))\} + \sup_{x \in X'} \{d'(f_2(x') - f_2(x))\}$$

და ან უტოლობის მარჯვენა მხარეს სასრული რიცხვია.

1. ცხადია $d(f_1, f_2) = d(f_2, f_1)$.

2. ცხადია ასევე: $d(f_1, f_2) = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $f_1 = f_2$

3. $d(f_1, f_2) + d(f_2, f_3) \geq d(f_1, f_3)$, მართლაც,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in X} \{d'(f_1(x), f_2(x))\} + \sup_{x \in X} \{d'(f_2(x), f_3(x))\} &\geq \sup_{x \in X} \{d'(f_1(x), f_2(x))\} + \sup_{x \in X} \{d'(f_2(x), f_3(x))\} \geq \\ &\geq \sup_{x \in X} \{d'(f_1(x), f_3(x))\} \end{aligned}$$

მეშასადავს. განსაზღვრული მეტრიკული სტრუქტურა აკმაყოფილებს ყველა საჭირო მოთხოვნებს.

ამ მეტრიკული სტრუქტურით ინდუცირებულ ტოპოლოგიურ სტრუქტურას **თანაბარი კრებადობის ტოპოლოგიური სტრუქტურა** ეწოდება.

ეთქვას, Y^X წარმოადგენს X ტოპოლოგიური სივრციდან Y ტოპოლოგიურ სივრცეში უწყვეტ ასახვათა სიმრავლეს, ცხადია $Y^X \subset \Psi(X, Y)$ და $Y^X \subset \Phi(X, Y)$, ამიტომ, უწყვეტ ასახვათა სიმრავლეში გვექნება როგორც წერტილოვანი კრებადობის ასევე, თუ X კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეა და Y მეტრიკული სივრცე, თანაბარი კრებადობის ტოპოლოგიური სტრუქტურები.

Y^X სიმრავლეში შეგვიძლია განვსაძღვროთ კიდევ ერთი ტოპოლოგიური სტრუქტურა შემდეგნაირად: ამ ტოპოლოგიური სტრუქტურის წინაბაზა იყოს

სიმრაველთა ოჯახი

$$\Pi B(Y^X) = \{ \{f \in Y^X \mid f(C) \subset O\} \}_{C \in K(X), O \in T(Y)},$$

სადაც $K(X)$ კომპაქტურ ქვესიმრაველთა ოჯახია X სივრცეში, $T(X)$ ღია სიმრაველთა ოჯახი Y სივრცეში.

ასეთ ტოპოლოგიურ სტრუქტურას Y^X სიმრავლეში *კომპაქტურ-ღია ტოპოლოგიური სტრუქტურა* ეწოდება.

თეორემა 13.1. Y^X ტოპოლოგიურ სივრცეში, წერტილოვანი ტოპოლოგიური სტრუქტურით, ქვესიმრაველთა ოჯახი $\Pi B(Y^X) = \{ \{f \in Y^X \mid f(A) \subset O\} \}_{A \in F(X), O \in T(Y)}$, სადაც $F(X)$

სასრულ ქვესიმრაველთა ოჯახია X სივრცეში, $T(Y)$ კი ღია სიმრაველთა ოჯახი Y

სივრცეში, წარმოადგენს წინაბაზას Y^X ტოპოლოგიურ სივრცეში, წერტილოვანი ტოპოლოგიური სტრუქტურით.

დამტკიცება: ყველა ღია ქვესიმრავლე Y^X სივრცეში, წერტილოვანი კრებადობის ტოპოლოგიური სტრუქტურის დროს, წარმოიდგინება როგორც გაერთიანება

$Y^X \cap P_{x_1}^{-1}(O_1) \cap P_{x_2}^{-1}(O_2) \cap \dots \cap P_{x_k}^{-1}(O_k)$, $O_i \in T(X)$, $i = 1, 2, \dots, k$, სადაც $T(X)$ სიმრაველთა ოჯახი Y სივრცეში.

$$Y^X \cap P_x^{-1}(O) = M(\{x\}, O) = \{f \in Y^X \mid f(\{x\}) \subset O, \{x\} \subset X, O \in T(O)\},$$

ამიტომ

$$Y^X \cap P_{x_1}^{-1}(O) \cap P_{x_2}^{-1}(O) \cap \dots \cap P_{x_k}^{-1}(O) = M(A, O) = \{f \in Y^X \mid f(A) \subset O,$$

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}, O \in T(X)\}.$$

ცხადია, ყველა ღია სიმრავლე $\prod_{x \in X} Y_x$ ტიხონოვის ნაშრაველში, სადაც $Y_x = Y$ წარმოიდგინება,

როგორც $M(A, O)$ სახის სიმრავლეების სასრული თანაკეცების

გაერთიანება. ეს ნიშნავს, რომ

$$\Pi B(Y^X) = \{ \{f \in Y^X \mid f(A) \subset O\} \}_{A \in F(X), O \in T(Y)}$$

ოჯახი წარმოადგენს წინაბაზას Y^X სივრცეში წერტილოვანი კრებადობის ტოპოლოგიური სტრუქტურით.

ამ თეორემის საფუძველზე შეიძლება დაემატიციოთ

თეორემა 13.2. კომპაქტურ ღია ტოპოლოგიური სტრუქტურა Y^X სიმრავლეში უფრო ძლიერია, ვიდრე წერტილოვანი კრებადობის ტოპოლოგიური სტრუქტურა.

დამტკიცება: ტოპოლოგიურ სივრცეში ყოველი სასრული ქვესიმრავლე კომპაქტურია. ამ ფაქტიდან და წინა თეორემიდან გამომდინარეობს თეორემის დამტკიცება.

თეორემა 13.3. თუ $A \subset Y$ ჩაკეტილი ქვესიმრავლეა, მაშინ სიმრავლე

$M(C, A) = \{f \in Y^X \mid f(C) \subset A\}$, სადაც C რაიმე კომპაქტური ქვესიმრავლეა, ჩაკეტილია კომპაქტურ-ღია ტოპოლოგიური სტრუქტურის დროს.

დამტკიცება: განვიხილოთ ისეთი წერტილი $f \in Y^X$, რომელიც არ ეკუთვნის $M(C, A)$ სიმრავლეს. ასეთი f ასახვისთვის $f(C) \not\subset A$, აქედან გამომდინარე არსებობს ისეთი

წერტილი $x \in C$, რომ $f(x) \notin A$. $X \setminus A$ ღიაა, $\{x\}$ კომპაქტური სიმრავლეა, განვიხილოთ ღია

$M(\{X\}, X \setminus A)$ სიმრავლე Y^X სივრცეში. ცხადია $f \in M(\{X\}, X \setminus A)$ და ამიტომ $M(\{X\}, X \setminus A)$ სიმრავლე წარმოადგენს f წერტილის მადამოს. $M(\{X\}, X \setminus A) \cap M(C, A) = \emptyset$, გაიყოს, რომ f წერტილი არ წარმოადგენს $M(C, A)$ სიმრავლის შეხების წერტილს. მაშასადამე, $M(C, A)$ სიმრავლის შეხების წერტილები მხოლოდ მაშინ შემავალი წერტილებია, ეს კი ნიშნავს, რომ იგი ჩაკეტილი სიმრავლეა Y^X სივრცეში კომპაქტურ ღია ტოპოლოგიური სტრუქტურის დროს.

თეორემა 13.4. ვთქვათ, X ტოპოლოგიური სივრცეა, $C \subset X$ მისი კომპაქტური ქვესიმრავლე. თუ მივაწერთ ყოველ $f \in I^X$ ფუნქციას $\theta(f) = \sup_{x \in C} f(x)$ რიცხვს, მივიღებთ $\theta: I^X = I$ უწყვეტ

ფუნქციას კომპაქტურ-ღია ტოპოლოგიური სტრუქტურის დროს I^X სივრცეში.

დამტკიცება: როგორც არ უნდა იყოს $(\alpha, \beta) \subset R$ ინტერვალი $\theta^{-1}((\alpha, \beta) \cap I)$

ღია იქნება I^X სივრცეში. მართლაც, C კომპაქტური ქვესიმრავლეა, ამიტომ θ -სახეა ამ ქვესიმრავლეზე მიღწევს თავის მაქსიმალურ და მინიმალურ მნიშვნელობებს. აქედან გამომდინარე, $\sup_{x \in C} f(x) < \beta$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $f(x) < \beta$ ყოველი

$x \in C$ ამგვარად $A = \{t \in [0, 1] \mid t \leq \alpha\}$, $B = \{t \in [0, 1] \mid t < \beta\}$ სიმრავლეებისთვის გვექნება $\theta^{-1}(I \cap (\alpha, \beta)) = (I^X \setminus M(C, A)) \cap M(C, B)$. აქედან, წინა თეორემის საფუძველზე გამომდინარეობს, რომ $\theta^{-1}(I \cap (\alpha, \beta))$ ღია ქვესიმრავლეა. ეს კი ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 13.5. თუ Y ტიხონოვის სივრცეა, მაშინ Y^X სივრცე კომპაქტურ ღია ტოპოლოგიური სტრუქტურის დროს ასევე ტიხონოვისაა.

დამტკიცება: საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $f_0 \in Y^X$ წერტილისათვის და მისი ნებისმიერი $M(C, O)$ მიდამოსათვის, სადაც $C \subset X$ კომპაქტური ქვესიმრავლეა ხოლო $O \subset Y$ ღია ქვესიმრავლე. არსებობს ისეთი უწყვეტი ფუნქცია $F: Y^X \rightarrow [0, 1]$, რომ $F(f_0) = 0$ და $F(Y^X \setminus M(C, O)) = \{1\}$.

რადგან $C \subset X$ კომპაქტური ქვესიმრავლეა, ამიტომ $f(C)$ კომპაქტური იქნება Y სივრცეში. $Y \setminus O$ ჩაკეტილია Y სივრცეში.

არსებობს ისეთი უწყვეტი ასახვა $g: Y \rightarrow [0, 1]$, რომ

$$g(f_0(C)) = \{0\}, g(Y \setminus O) = \{1\}.$$

მართლაც, ყოველი $y \in f_0(C)$ წერტილისათვის და $Y \setminus O$ ჩაკეტილი სიმრავლისათვის არსებობს ისეთი ასახვა $\varphi_y: f_0(C) \rightarrow [0, 1]$, რომ $\varphi_y(y) = 0, \varphi_y(Y \setminus O) = \{1\}$. განვიხილოთ $f_0(C)$ სიმრავლის ღია მიდამო $\bigcup_{y \in f_0(C)} \varphi_y^{-1}([0, \frac{1}{2}])$, რადგან $f_0(C)$ კომპაქტურია, ამიტომ არსებობენ ისეთი

$y_1, y_2, \dots, y_l$ წერტილები $f_0(C)$ სიმრავლეში, რომ $f_0(C) \subset \bigcup_{i=1}^l \varphi_{y_i}^{-1}([0, \frac{1}{2}])$. ფუნქცია

$\bar{g}(y) = \min\{\varphi_{y_1}(y), \varphi_{y_2}(y), \dots, \varphi_{y_l}(y)\}$ უწყვეტია $f_0(C)$ სიმრავლეზე, ცხადია $f_0(C) \subset \bar{g}^{-1}([0, 1])$.

საძიებელი g ფუნქციის როლში, თუ მივიღებთ $g(y) = 2\{\max\{\bar{g}(y) - \frac{1}{2}, 0\}$ ფუნქციას, ენახათ, რომ იგი აკმაყოფილებს საჭირო მოთხოვნებს.

დაეუბრუნდეთ ისევ თეორემის დამტკიცებას, დაეუშვათ, რომ $F(f) = \sup_{x \in C} g(f(x))$

ყველა $f \in Y^X$ ფუნქციისათვის. იმის გამო, რომ $\theta(g \circ f) = \sup_{x \in C} g(f(x))$, წინა თეორემის ძალით,

გამოდის, რომ F უწყვეტი ფუნქციაა. ცხადია $F(f_0) = 0$.

როდესაც $f \notin M(C, O)$, მაშინ მოიძებნება ისეთი წერტილი $x \in C$, რომ $f(x) \in O$.

აქედან გამომდინარე $g(f(x)) = 1$, მაშასადამე $F(Y^X \setminus M(C, O)) = \{1\}$. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 13. თუ X კომპაქტური სივრცეა, (Y, d') მეტრიკული, მაშინ Y^X სივრცეში კომპაქტურ-ღია და თანაბარი კრებადობის ტოპოლოგიური სტრუქტურები ერთმანეთს ემთხვევა.

დამტკიცება: ჯერ ვაჩვენოთ, რომ ყოველი ღია სიმრავლე თანაბრად კრებადობის ტოპოლოგიური სტრუქტურის დროს ღიაა კომპაქტურ-ღია ტოპოლოგიურ სტრუქტურაშიც. ცხადია ამისთვის საკმარისი იქნება, თუ ყოველ $f_0 \in Y^X$ და $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობდნენ ისეთი $C_1, C_2, \dots, C_k$ კომპაქტური ქვესიმრავლეები X სივრცეში და ისეთი ღია $O_1, O_2, \dots, O_k$ ქვესიმრავლეები Y სივრცეში, რომ

$$f_0 \in M(C_1, O_1) \cap M(C_2, O_2) \cap \dots \cap M(C_k, O_k) \in B_{f_0}^\varepsilon,$$

სადაც $B_{f_0}^\varepsilon$ ღია ბირთვია Y^X სივრცეში თანაბრად კრებადობის ტოპოლოგიური სტრუქტურის დროს.

X კომპაქტური სივრცეა, f_0 უწყვეტი. განვიხილოთ $f(X) \subset Y$ კომპაქტური ქვესიმრავლის

დაფარვა Y სივრცის იმ ღია ქვესიმრავლეებით, რომელთა დიამეტრიც ნაკლებია $\frac{\varepsilon}{2}$. ამ

დაფარვიდან გამოიყოფა სასრული ქვედაფარვა, რომლის ელემენტთა წინასახეები $G_1, G_2, \dots, G_k$ ცხადია ფარავენ X სიმრავლეს.

$$\text{diam}(f_0(G_i)) < \frac{\varepsilon}{2}, i = 1, 2, \dots, k. \text{ ვთქვათ, } C_1 = \overline{G_1}, C_2 = \overline{G_2}, \dots, C_k = \overline{G_k} \text{ და } O_i = B_{f_0(G_i)}^{\frac{\varepsilon}{2}}, i = 1, 2, \dots, k,$$

სადაც $x_i \in G_i$ რაიმე წერტილია.

რადგანაც $\text{diam}(f_0(G_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$, ამიტომ $x \in C$, წერტილისათვის გვექნება უტოლობა

$$d'(f_0(x), f_0(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2}. \text{ ამ უტოლობიდან ვღებულობთ } f_0(x) \in O_i, \text{ ანუ } f_0 \in M(C_i, O_i) \text{ ყოველი } i$$

ინდექსისათვის $i = 1, 2, \dots, k$, მაშასადამე $f_0 \in \bigcap_{i=1}^k M(C_i, O_i)$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $\bigcap_{i=1}^k M(C_i, O_i) \subset B_{f_0}^\varepsilon$. დაეუშვათ $f \in \bigcap_{i=1}^k M(C_i, O_i)$, მაშინ ყოველი $x \in C$,

წერტილისათვის გვაქვს $f(x) \in O_i$ და $d'(f(x), f_0(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$. რადგან $\text{diam}(f_0(C_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$ ამიტომ

$$d'(f(x), f_0(x_i)) \leq d'(f(x), f_0(x_i)) + d'(f_0(x_i), f_0(x)) < \varepsilon. \text{ ეს კი ნიშნავს, რომ } f \in B_{f_0}^\varepsilon, \text{ ე.ი.}$$

$\bigcap_{i=1}^k M(C_i, O_i) \subset B_{f_0}^\varepsilon$, მაშასადამე, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ ყოველი ღია სიმრავლე თანაბარი

კრებადობის ტოპოლოგიური სტრუქტურის დროს ღიაა კომპაქტურ-ღია ტოპოლოგიური სტრუქტურის დროსაც Y^X სიმრავლეში.

ახლა ვაჩვენოთ პირიქით, თუ $U \subset Y^X$ სიმრავლე ღიაა კომპაქტურ-ღია ტოპოლოგიური სტრუქტურის დროს, იგი ღია იქნება თანაბარი კრებადობის ტოპოლოგიური სტრუქტურის დროსაც Y^X სიმრავლეში.

ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია გვულისხმოდ, რომ $U = M(C, O)$.

სადაც $C \subset X$ კომპაქტურია, $O \subset Y$ ღია. ვთქვათ $f_0 \in M(C, O)$, ვიპოვოთ ისეთი $\varepsilon > 0$, რომ $B_{f_0}^\varepsilon \subset M(C, O)$. დავუშვათ $\varepsilon = \inf_{y \in O} (d(f_0(x), Y \setminus O))$, სადაც $d(f_0(x), Y \setminus O) = \min_{y \in Y \setminus O} d'(f_0(x), y)$.

რადგან $f_0(x) \in O$ ყველა $x \in C$ წერტილისათვის, ამიტომ $d(f_0(x), Y \setminus O) > 0$. რადგან C კომპაქტურია და d უწყვეტი $x \in C$ ცვლადის მიმართ, ამიტომ d მიაღწევს თავის უმცირეს მნიშვნელობას C სიმრავლეზე. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\varepsilon > 0$.

ვთქვათ, $f \in B_{f_0}^\varepsilon$ და $f \notin M(C, O)$. ეს ნიშნავს, რომ რომელიმე $x_0 \in C$ წერტილისათვის $f(x) \in Y \setminus O$. მაშინ

$$\varepsilon \leq d(f_0(x_0), Y \setminus O) \leq d'(f_0(x_0), f(x_0)) < \varepsilon$$

მაშასადამე $\varepsilon < \varepsilon$ მივიღეთ წინააღმდეგობა, ჩვენი დაშვება არ ყოფილა სწორი, ე.ი. $f \in B_{f_0}^\varepsilon$ ეს კი ნიშნავს, რომ $M(C, O)$ ღია ყოფილა თანაბარი კრებადობის ტოპოლოგიურ სტრუქტურაში. თეორემა დამტკიცდა.

წინაკომპაქტური ქვესიმრავლეები

A ქვესიმრავლეს X ტოპოლოგიურ სივრცეში ეწოდება **წინაკომპაქტური**, თუ

$\bar{A}$ კომპაქტური ქვესიმრავლეა.

მაგალითი: წინაკომპაქტური ქვესიმრავლის მაგალითია რაციონალურ წერტილთა სიმრავლე $[a, b]$ სეგმენტში.

X მეტრიკული სივრცის Y მეტრიკულ სივრცეში $f: X \rightarrow Y$ ასახვას ეწოდება **თანაბრად უწყვეტი**, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ $d_1(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$, როდესაც $d_1(x_1, x_2) < \delta$; $x_1, x_2 \in X$.

თეორემა B3. უწყვეტი ასახვა კომპაქტური მეტრიკული სივრცისა მეტრიკულ სივრცეში თანაბრად უწყვეტია.

დამტკიცება: ვთქვათ, უწყვეტი $f: X \rightarrow Y$ ასახვა X კომპაქტური მეტრიკული სივრცის Y მეტრიკულ სივრცეში არ არის თანაბრად უწყვეტი, მაშინ არსებობს ისეთი ნამდვილი $\varepsilon > 0$ რიცხვი, რომ ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის მოიძებნება

ისეთი x_n' , x_n'' წერტილები X სივრცეში, რომლისთვისაც $d_1(x_1, x_2) < \frac{1}{n}$ და

$d_1(f(x_1), f(x_2)) > \varepsilon$. განვიხილოთ $\{x_n'\}$ მიმდევრობა. ამ მიმდევრობიდან X სივრცის კომპაქტურობის გამო გამოიყოფა კრებადი $\{x_n'\}$ ქვემიმდევრობა, რომლის ზღვარიც რაიმე $x \in X$ წერტილია. ანალოგიურად $\{x_n''\}$ მიმდევრობიდანაც გამოიყოფა კრებადი ქვემიმდევრობა $\{x_n''\}$, რომლის ზღვარიც იგივეა. მაგრამ, ამ დროს უნდა შესრულდეს ერთი მაინც ორი უტოლობიდან:

$$d_2(f(x), f(x'_n)) \geq \frac{\varepsilon}{2}; d_2(f(x), f(x'_n)) \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

ეს კი ეწინააღმდეგება f ასახვის უწყვეტობას. მაშასადამე $f: X \rightarrow Y$ ყოფილა თანაბრად უწყვეტი თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 13.7. იმისათვის, რომ ქვესიმრავლე A იყოს წინაკომპაქტური X სრულ მეტრიკულ სივრცეში, აუცილებელი და საკმარისია იგი იყოს სრულად შემოსაზღვრული.

დამტკიცება: თეორემის პირობის აუცილებლობის დამტკიცება. ვთქვათ, $A \subset X$ წინაკომპაქტურია. მაშინ $\bar{A}$ კომპაქტურია და 10.2. თეორემის გამო იგი იქნება სრულად შემოსაზღვრული და სრული. თუ $\bar{A}$ სრულად შემოსაზღვრულია, სრულად შემოსაზღვრული იქნება A სიმრავლეც.

თეორემის პირობის საკმარისობის დამტკიცება. ვთქვათ, A სრულად შემოსაზღვრულია. მაშინ $\bar{A}$ სიმრავლეც სრულად შემოსაზღვრულია. $\bar{A}$ სიმრავლე წაკეტილია სრულ მეტრიკულ სივრცეში, ამიტომ იგი თავადაც იქნება სრული. რადგან $\bar{A}$ სრულია და სრულად შემოსაზღვრულია, სრულად შემოსაზღვრულია 10.10 თეორემის თანახმად იქნება კომპაქტური. თეორემა დამტკიცდა.

ვთქვათ X, Y მეტრიკული სივრცეებია, Y^X ტოპოლოგიური სივრცე კომპაქტურ-ლია ტოპოლოგიური სტრუქტურით, $D \subset Y^X$, უწყვეტ ასახვათა ოჯახია.

ვიტყვი, რომ უწყვეტ ასახვათა ოჯახი **თანაბარხარისხოვნად უწყვეტია**, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ ყოველი ორი x' და x'' წერტილისთვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ $d_1(x_1, x_2) < \delta$ პირობას და ყოველი $f \in D$ ასახვისათვის ადგილი აქვს უტოლობას $d_2(f(x_1), f(x_2))$.

თეორემა 13.8 თუ Y სრული მეტრიკული სივრცეა მაშინ. Y^X სივრცეა თანაბარი კრებადობის ტოპოლოგიური სტრუქტურით, მაშინ Y^X სრულია.

დამტკიცება: ვთქვათ $\{f_n\}$ ფუნდამენტური მიმდევრობაა მაშინ $\varepsilon > 0$ ნამდვილი რიცხვისათვის არსებობს ისეთი n_0 ნატურალური რიცხვი, რომ $d(f_{n_0}, f_m) = \sup_{x \in X} \{d'(f_{n_0}(x), f_m(x))\} < \varepsilon$

როდესაც $m, n > n_0$. განვიხილოთ მიმდევრობა

$\{f_n(x)\}$. ეს მიმდევრობაც კოშის მიმდევრობაა, იგი თანაბრად იკრებება. ვთქვათ

$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, მაშინ 6.14. თეორემის ძალით, f უწყვეტი ფუნქციაა. ცხადია f

წარმოადგენს $\{f_n\}$ ფუნდამენტური მიმდევრობის ზღვარს. მაშასადამე Y^X სივრცეა თანაბარი კრებადობის ტოპოლოგიური სტრუქტურით სრულია. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 13.9. (არცეფლას განზოგადებული თეორემა) თუ (X, d_1) და (Y, d_2) კომპაქტური

მეტრიკული სივრცეებია. Y^X სივრცეა თანაბარი კრებადობის ტოპოლოგიური სტრუქტურით, მაშინ იმისათვის, რომ $D \subset Y^X$ იყოს წინაკომპაქტური, აუცილებელი და საკმარისია D ოჯახი იყოს თანაბარხარისხოვნად უწყვეტი.

დამტკიცება: თეორემის პირობის აუცილებლობის დამტკიცება. ვთქვათ, D წინაკომპაქტურია, მაშინ იგი წინა ორი თეორემის ძალით იქნება სრულად შემოსაზღვრული. ამის გამო,

ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის იარსებებს $\frac{\varepsilon}{3}$ ბაღე: $f_1, f_2, \dots, f_k$ ყოველი $f_i, i = 1, 2, \dots, k$ ასახვა

თანაბრად უწყვეტია X სივრცეზე, ანუ $\frac{\varepsilon}{3}$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ

ყოველი ორი $f, x_1, x_2 \in X$ წერტილისათვის რომლებსთვისაც სრულდება $d_1(x_1, x_2) < \delta$,

პირობა, ადგილიაქვს $d_2(f, (x_1), f, (x_2)) < \frac{\varepsilon}{3}$ უტოლობას. ვთქვათ $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k\}$ და

$f \in D$ ამოვიჩინოთ ისეთი f , რომ

$$d_2(f, f_i) = \sup_{x \in X} \{d_2(f(x), f_i(x))\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

როდესაც $d_1(x_1, x_2) < \delta$, მაშინ

$$d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq d_2(f(x_1), f_i(x_1)) + d_2(f_i(x_1), f_i(x_2)) + d_2(f_i(x_2), f(x_2)) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \text{ ეს}$$

კინიშნავს, რომ D ოჯახი თანაბარხარისხვნად უწყვეტია.

თეორემის პირობის საკმარისობის დამტკიცება. ვთქვათ, $F(X, Y)$ ყველა ასახვათა სიმრავლეა X კომპაქტური მეტრიკული სივრციდან Y კომპაქტურ მეტრიკულ სივრცეში. უწყვეტ ასახვათა სიმრავლე Y^X ქვესიმრავლეა ამ სიმრავლეში.

$F(X, Y)$ სრული მეტრიკული სივრცეა თანაბარი კრებადობის ტოპოლოგიური სტრუქტურის დროს. მართლაც, თუ $\{f_n\}$ ნებისმიერი ფუნდამენტალური მიმდევრობაა $F(X, Y)$ სივრცეში, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის იარსებებს ისეთი n_ε ნატურალური რიცხვი, რომ

$$d(f_n, f_m) = \sup_{x \in X} \{d_2(f_n(x), f_m(x))\} < \varepsilon, \text{ როდესაც } m, n > n_\varepsilon. \text{ აქედან გამომდინარეობს, რომ}$$

$$d_2(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon \text{ ყოველი } x \in X \text{ წერტილისათვის, როდესაც } m, n > n_\varepsilon. \text{ ეს ნიშნავს, რომ}$$

$\{f_n(x)\}$ ფუნდამენტური მიმდევრობაა Y კომპაქტურ სივრცეში. Y სივრცე მისი

კომპაქტურობის გამო სრულია, ამიტომ არსებობს ზღვარი $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ვთქვათ ეს ზღვარია

$y \in Y$ წერტილი განვიხილოთ ასახვა $f: X \rightarrow Y$, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით

$$f(x) = y = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x). \text{ ასეთიანად განსაზღვრული ასახვა იქნება } \{f_n\} \text{ ფუნდამენტალური}$$

მიმდევრობის ზღვარი.

ვთქვათ, $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots \in Y^X$ სიმრავლე თანაბრად კრებადი მიმდევრობაა. ამ მიმდევრობის

ზღვარი 6.14. თეორემის ძალით უწყვეტი ფუნქციაა, ამიტომ Y^X სიმრავლე ჩაკეტილია $F(X, Y)$ სივრცეში.

ვთქვათ $\varepsilon > 0$ რაიმე რიცხვია, ავირჩიოთ ისეთი $\delta > 0$, რომ $d_1(x', x'') < \delta$ უტოლობიდან

გამომდინარეობს უტოლობა $d_2(f(x'), x'') < \varepsilon$.

ნებისმიერი $f \in D$ და ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისათვის X სივრცე შეიძლება

წარმოუდგინოთ, როგორც გაერთიანება ისეთი არათანამკვეთი E_i სიმრავლეებისა, რომ თუ

$x', x'' \in E$, მაშინ $d_1(x', x'') < \delta$ ამ წარმოდგენისთვის საჭიროა შევარჩიოთ ისეთი წერტილები

$x_1, x_2, \dots, x_n$, რომლებიც შეადგენენ $\frac{\delta}{2}$ ბადეს X სივრცეში და ჩაეთვალოთ, რომ

$$E_i = B_{x_i}^{\frac{\delta}{2}} \setminus \bigcup_{j \neq i} B_{x_j}^{\frac{\delta}{2}}$$

განვიხილოთ $\frac{\delta}{2}$ ბადე $y_1, y_2, \dots, y_m$ Y სივრცეში და ვთქვათ L ასახვების სიმრავლეა

რომლებიც E_i დებულობენ $y_i, i = 1, 2, \dots, m$ მნიშვნელობებს. ასეთი ასახვების რიცხვი ცხადია სასრულია. ვანიშნოთ, რომ ისინი შეადგენენ 2ε ბადეს D სიმრავლის მიმართ $F(X, Y)$ სივრცეში. მართლაც, ვთქვათ $f \in D$, ყოველი $x_i = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ წერტილისათვის მოიძებნება ისეთი $y_i = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, რომ $d_2(f(x_i), y_i) < \varepsilon$. დაეუშვათ ფუნქცია $g \in L$ ისეთია, რომ $g(x_i) = y_i$, მაშინ

$$d_2(f(x), g(x)) \leq d_2(f(x), g(x_i)) + d_2(f(x_i), g(x_i)) + d_2(g(x_i), g(x)) < 2\varepsilon.$$

თუ i ისეა არჩეული, რომ $x \in E_i$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ L წარმოდგენს 2ε ბადეს D სიმრავლის მიმართ $F(X, Y)$ სივრცეში. რადგან ε ნებისმიერად იყო არჩეული, ამიტომ D სრულად შემოსაზღვრულია და 13.7. თეორემის თანახმად წინააღმდეგობრივი. თეორემა დამტკიცდა.

გამოთვლის და ექსპონენციალური ასახვები. ვთქვათ X, Y, Z ტოპოლოგიური სივრცეები.

ასახვას $\Omega: Y^X \times X \rightarrow Y$, სადაც Y^X ასახვათა სივრცეა რომელიმე ზემოთ განხილული ტოპოლოგიური სტრუქტურით და რომელიც განისაზღვრება ფორმულით:

$$\Omega(f, x) = f(x)$$

გამოთვლის ასახვა ეწოდება.

განვიხილოთ სივრცეები $Y^{Z \times X}$ და $(Y^X)^Z$, ორივე მათგანი ასევე შეიძლება სამივე სახის ზემოთ განსაზღვრული ტოპოლოგიური სტრუქტურით ან მათი რაიმე კომბინაციით იქონი წარმოდგენილი.

ასახვას: $\Delta: Y^{Z \times X} \rightarrow (Y^X)^Z$, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით:

$$((\Delta(f))(z))(x) = f(z, x).$$

ექსპონენციალური ასახვა ეწოდება. ცხადია ექსპონენციალური ასახვა ურთიერთცალსახა ასახვაა.

ტოპოლოგიურ სტრუქტურას Y^X ასახვათა სივრცეზე ეწოდება *საკუთრივი*, თუ

ყოველი Z ტოპოლოგიური სივრცისათვის და ნებისმიერი $f \in Y^{Z \times X}$ ასახვისთვის $\Delta(f)$ ასახე ეკუთვნის $(Y^X)^Z$ სივრცეს.

ტოპოლოგიურ სტრუქტურას Y^X ასახვათა სივრცეზე ეწოდება *დასაშვები*,

თუ ყოველი Z ტოპოლოგიური სივრცისათვის და ნებისმიერი $g \in (Y^X)^Z$ ასახვისთვის $\Delta^{-1}(g)$ ასახვა ეკუთვნის $Y^{Z \times X}$ სივრცეს.

ტოპოლოგიურ სტრუქტურას Y^X ასახვათა სიერცეზე ეწოდება *მისაღები*, თუ იგი საკუთრივ არის და დასაშვებიც ერთდროულად.

თეორემა 13.10. ტოპოლოგიურ სტრუქტურას Y^X ასახვათა სიერცეზე დასაშვებია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც გამოთვლის ასახვა $\Omega: Y^X \times X \rightarrow Y$ უწყვეტია.

დამტკიცება: თეორემის პირობის აუცილებლობის დამტკიცება. თუ ტოპოლოგიური

სტრუქტურა Y^X ასახვათა სიერცეზე დასაშვებია, მაშინ $Z = Y^X$

სიერცისათვის და $g = Id_Y$, ასახვისათვის ასახვა $\Delta^{-1}(g): Y^X \times X \rightarrow Y$ უწყვეტია, ვინაიდან

$((\Delta(\Omega))(f))(x) = \Omega(f, x) = f(x)$, ანუ $\Delta(\Omega) = Id_{Y^X}$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\Omega = \Delta^{-1}(g)$, ეს კი ნიშნავს, რომ Ω უწყვეტია.

თეორემის პირობის საკმარისობის დამტკიცება. თუ გამოთვლის ასახვა $\Omega: Y^X \times X \rightarrow Y$

უწყვეტია, მაშინ თითოეული Z ტოპოლოგიური სიერცისათვის და ყოველი $g \in (Y^X)^Z$

ასახვისათვის ასახვა $\Delta^{-1}(g)$ უწყვეტია, ვინაიდან

$$\Delta^{-1}(g) = \Omega(g \times Id_X): Z \times X \rightarrow Y$$

მართლაც ყოველი $(z, x) \in Z \times X$ წერტილისათვის გვაქვს:

$$((\Delta(\Omega(g \times Id_X)))(z))(x) = (\Omega(g \times Id_X))(z, x) = \Omega((g(z), x)) = (g(z))(x),$$

ამგვარად $\Delta(\Omega(g \times Id_X)) = g$ და $\Delta^{-1}(g) = \Omega(g \times Id_X)$. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 13.11. ტოპოლოგიურ სიერცეთა ყოველი X, Y წყვილისათვის და ყოველი ორი τ_1, τ_2

ტოპოლოგიური სტრუქტურისათვის Y^X სიერცეში, ადგილი აქვს შემდეგ წინადადებებს:

1. თუ ტოპოლოგიური სტრუქტურა τ_1 საკუთრივია და $\tau_2 \leq \tau_1$, მაშინ

ასევე საკუთრივია.

2. თუ ტოპოლოგიური სტრუქტურა τ_1 დასაშვებია და $\tau_1 \leq \tau_2$, მაშინ τ_2 ასევე დასაშვებია.

3. თუ ტოპოლოგიური სტრუქტურა τ_1 საკუთრივია, τ_2 სტრუქტურა კი დასაშვებია, მაშინ $\tau_1 \leq \tau_2$.

4. Y^X სიერცეში არსებობს არაუმეტეს ერთი მისაღები ტოპოლოგიური სტრუქტურა.

დამტკიცება: 1-ლი და მე-2-ე წინადადება უშუალოდ გამომდინარეობს საკუთრივი და დასაშვები ტოპოლოგიური სტრუქტურების განსაზღვრებიდან. მე-4-ე წინადადება

გამომდინარეობს მე-3-ე წინადადებიდან. ყოქმათ τ_1 საკუთრივი ტოპოლოგიური სტრუქტურაა,

τ_2 სტრუქტურა კი დასაშვებია. აღვნიშნოთ ტოპოლოგიური სიერცე (Y^X, τ_1) ასე: $Y_{\tau_1}^X$, (Y^X, τ_2)

სიერცე კი ასე: $Y_{\tau_2}^X$

საკუთრივი და დასაშვები ტოპოლოგიური სტრუქტურების განსაზღვრებებს მივყავართ შემდეგ მიმართულებამდე:

$$\Delta(Y_{\tau_2}^{Y_{\tau_1}^X}) \subset (Y_{\tau_1}^X)^{Y_{\tau_2}^X} \text{ და } \Delta^{-1}\left((Y_{\tau_1}^X)^{Y_{\tau_2}^X}\right) \subset Y_{\tau_2}^{Y_{\tau_1}^X \times X}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $Id_{Y_{\tau_2}^X} = \Delta \circ \Delta^{-1}(Id_{Y_{\tau_2}^X}) \in (Y_{\tau_1}^X)^{Y_{\tau_2}^X}$ ეს კი ნიშნავს, რომ

$\tau_1 \leq \tau_2$. თეორემა დამტკიცდა.

ამ თეორემიდან და იმ ფაქტიდან, რომ $f: X \rightarrow \prod_{s \in S} Y_s$ ასახვა ტოპოლოგიური სივრცისა

ტოპოლოგიურ სივრცეთა პირდაპირ ნამრაველში, უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $p_s \circ f: X \rightarrow \prod_{s \in S} Y_s \rightarrow Y_s$ კომპოზიცია უწყვეტია ყოველი $s \in S$ ინდექსისათვის,

გამომდინარეობს რომ Y^X სივრცეში წერტილოვანი კრებადობის ტოპოლოგიური სტრუქტურა საკუთრივია. მართლაც, $\Delta(f)$ უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $p_{x_0} \circ \Delta(f)$ უწყვეტია ნებისმიერი $x_0 \in X$ წერტილისათვის. $((\Delta(f))(z))(x) = f(z, x)$ ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$(p_{x_0} \circ \Delta(f))(z) = f(z, x_0).$$

ამიტომ, თუ $f \in Y^{Z \times X}$, მაშინ $\Delta(f) \in (Y^X)^Z$

ეს კი ნიშნავს, რომ წერტილოვანი კრებადობის ტოპოლოგიური სტრუქტურა საკუთრივია.

13.10. თეორემიდან კი გამომდინარეობს, რომ Y^X სივრცეში თანაბარი კრებადობის ტოპოლოგიური სტრუქტურა დასაშვებია.

თეორემა 13.12. ვთქვათ X, Y, Z ტოპოლოგიური სივრცეებია, Y^X სივრცეა კომპაქტურ-ღია ტოპოლოგიური სტრუქტურით. თუ ასახვა $f: Z \times X \rightarrow Y$ უწყვეტია, მაშინ ასახვა $\tilde{f}: Z \rightarrow Y^X$ განსაზღვრული $\tilde{f}(z)(x) = f(z, x)$ ფორმულით, უწყვეტია.

ასევე, თუ $g: Z \rightarrow Y^X$, სადაც X პაუნდორფის ლოკალურად კომპაქტური სივრცეა, უწყვეტია, მაშინ ასახვა $\tilde{g}: Z \times X \rightarrow Y$, განსაზღვრული $\tilde{g}(z, x) = g(z)(x)$ ფორმულით, უწყვეტია.

დამტკიცება: საკმარისი დაემატეცით, რომ ყოველი $z_0 \in Z$ წერტილისათვის, $C \subset X$ კომპაქტური ქვესიმრავლისათვის და მოცემული $U \subset Y$ ღია სიმრავლისთვის არსებობს ისეთი $u(z_0)$ ღია მიდამო, რომ $\tilde{f}(u(z_0)) \subset M(C, U)$. მართლაც, ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის დაეფიქსიროთ ისეთი მიდამოები $u(z_0)$ და $v(x)$, რომ $f(u(z_0) \times v(x)) \subset U$ გამოვეყოთ $\{v(x)\}_{x \in C}$ დაფარვიდან C კომპაქტური ქვესიმრავლის სახსრული ქვედაფარვა $\{v(x_i)\}_{i=1,2,\dots,k}$.

ცხადია $u(z_0) = \bigcap_{i=1}^k u_{x_i}(z_0)$ წარმოადგენს $z_0 \in Z$ წერტილის მიდამოს და

$$f(u(z_0) \times C) \subset \bigcup_{i=1}^k f(u_{x_i}(z_0) \times v(x_i)) \subset U$$

ამ მიმართებიდან გამომდინარეობს $\tilde{f}(u(z_0)) \subset M(C, U)$.

რომ დაემატეცით თეორემის მეორე ნაწილი, საჭიროა მოცემული $(z_0, x_0) \in Z \times X$ წერტილისათვის და $\tilde{g}(z_0, x_0)$ წერტილის მოცემული $u(\tilde{g}(z_0, x_0))$ მიდამოსათვის ვიპოვოთ $x_0 \in X$ წერტილის ისეთი მიდამო $v(x_0)$, რომ $\overline{v(x_0)} \subset (g(z_0))^{-1}(u(\tilde{g}(z_0, x_0)))$ და $z_0 \in Z$ წერტილის ისეთი მიდამო $u(z_0)$, რომ $g(u(z_0)) \subset M(\overline{v(x_0)}, u(\tilde{g}(z_0, x_0)))$.

$v(x_0)$ მიდამოს არსებობა, განპირობებულია იმით, რომ X სივრცე პაუნდორფისაა და ლოკალურად კომპაქტური. მართლაც, ღია ქვესიმრავლე ლოკალურად კომპაქტური სივრცისა ლოკალურად კომპაქტურია, აქედან გამომდინარე X სივრცის ნებისმიერი წერტილის მიდამო

მოიცავს ამავე წერტილის ისეთ მიდამოს, რომლის ჩაკეტივაც თავიდან მოცემულ მიდამოში შედის.

$u(z_0) \times v(x_0)$ წარმოადგენს (z_0, x_0) წერტილის მიდამოს და $\bar{g}(u(z_0) \times v(x_0)) \subset \mathcal{M}(\bar{g}(z_0, x_0))$. ეს კი ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 13.13 ყოველი X, Y, Z ტოპოლოგიური სივრცისათვის, ექსპონენციალური ასახვა

$\Delta: Y^{Z \times X} \rightarrow (Y^X)^Z$ სივრცეებისა კომპაქტურ-ლია ტოპოლოგიური სტრუქტურით, უწყვეტია.

თუ X პაუზდორფის ლოკალურად კომპაქტური სივრცეა, მაშინ ექსპონენციალური ასახვა კომპოზიციურია.

დამტკიცება: ცხადია $\Delta: Y^{Z \times X} \rightarrow (Y^X)^Z$ ასახვას $f \in Y^{Z \times X}$ ელემენტი გადაყავს $\bar{f} \in (Y^X)^Z$ ელემენტში. ამიტომ მის უწყვეტობას განაპირობებს ის, რომ ამ ასახვის დროს,

$M(C, M(C', U'))$ სიმრავლის წინასახე, სადაც

$$C \in K(Z); C' \in K(X); U' \in T(Y),$$

ემთხევა $M(C \times C', U')$ სიმრავლეს, რომელიც იმის გამო, რომ $C \times C' \in K(Z \times X)$, ღიაა.

დაეუშვათ, რომ X ლოკალურად კომპაქტური პაუზდორფის სივრცეა, მაშინ მოცემული

$g_0 \in (Y^X)^Z$ წერტილისათვის, მოცემული $Q \in K(Z \times X)$ კომპაქტური სიმრავლისათვის, $g_0(Q)$

სიმრავლის მოცემული $u(g_0(Q))$ მიდამოსათვის და მოცემული $q = (q^1, q^2) \in Q$

წერტილისათვის არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო $u(q^1) \times v(q^2)$, რომ $\overline{v(q^2)}$

კომპაქტურია და $\bar{g}_0(u(q^1) \times v(q^2)) \subset \mathcal{M}(g_0(Q))$.

რადგან Q კომპაქტურია იგი შეიძლება დაფაროს სიმრავლეთა სასრული

ოჯახით: $\{u(q_i^1) \times v(q_i^2)\}_{i=1,2,\dots,k}$. სიმრავლე

$$o(g_0) = \bigcap_{i=1}^k M(p(Q) \cap u(q_i^1), \overline{M(v(q_i^2), \mathcal{M}(g_0(Q)))}),$$

სადაც $p: Z \times X \rightarrow Z$ ასეთი ასახვაა, წარმოადგენს g_0 წერტილის მიდამოს, და ამ წერტილის

ანასახი $\bar{g}_0, \Delta^{-1}: (Y^X)^Z \rightarrow Y^{Z \times X}$ ასახვის დროს ეკუთვნის $M(Q, \mathcal{M}(g_0(Q)))$ ღია სიმრავლეს.

მაშასადამე Δ^{-1} უწყვეტია. თეორემა დამტკიცდა.

§14. ტოპოლოგიურ სივრცეთა განზომილება

14.1. მცირე ინდექსური განზომილება ind . ეთქვას X რაიმე რეგულარული

ტოპოლოგიური სივრცეა, $n \geq -1$ არაუარყოფითი მთელი რიცხვი, მაშინ ჩავთვალოთ, რომ მოცემული ტოპოლოგიურისივრცის მცირე ინდექსური განზომილება:

1. $indX = -1$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $X = \emptyset$.

2. $indX \leq n$, თუ ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის და ამ წერტილის ყოველი $u(x)$

მიდამოსათვის არსებობს ისეთი O ღია სიმრავლე, რომ $x \in O \subset u(x)$ და

$indFrO \leq n-1$.

3. $\text{ind}X = n$, თუ $\text{ind}X \leq n$ და $\text{ind}X \leq n-1$ უტოლობას არ აქვს ადგილი.

4. $\text{ind}X = \infty$, თუ $\text{ind}X \leq n$ უტოლობას არ აქვს ადგილი არცერთი არაუარყოფითი მთელი n რიცხვისათვის.

ტოპოლოგიური სივრცის ind მცირე ინდუქციურ განზომილებას, მეორეხარისხად *მენგერ-ურისონის* განზომილებასაც უწოდებენ. ცხადია კომპოზირებადი სივრცეებს ერთი და იგივე მცირე ინდუქციური განზომილება აქვთ.

რადგან X რეგულარული სივრცეა, ამიტომ მე-2-ე პირობის შესრულების დროს $x \in O \subset u(x)$ მოთხოვნა შეიძლება შეიცვალოს $x \in \overline{O} \subset u(x)$ მოთხოვნით.

ამგეარად, უტოლობა $\text{ind}X \leq n \geq 0$ ნიშნავს, რომ X სივრცის ყოველი x წერტილი შეიძლება გამოყვით ყოველი მისი არშემკვეთი ჩაკეტილი $F \subset X$ სიმრავლისაგან ისეთი ქვესიმრავლით, რომლის მცირე ინდუქციური განზომილებაც არ აღემატება $n-1$ -ს. მცირე ინდუქციური განზომილების განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ $\text{ind}X \leq n \geq 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც X სივრცეში არსებობს ისეთი $B(X)$, რომლის ყოველი $O \in B(X)$ სიმრავლისათვის $\text{ind}FrO \leq n-1$.

რადგან X სივრცე რეგულარულია, ამიტომ მისი ყოველი $M \subset X$ ქვესიმრავლეც რეგულარული ქვესივრცე იქნება.

თეორემა 14.1. ყოველი რეგულარული X სივრცისა და მისი რაიმე $M \subset X$ ქვესიმრავლისათვის $\text{ind}M \leq \text{ind}X$

დამტკიცება: ცხადია, უტოლობა სრულდება თუ $\text{ind}X = -1$ ან $\text{ind}X = \infty$.

ეთქვას, თეორემა დამტკიცებულია ყოველი იმ X სივრცისათვის, რომლისათვისაც $\text{ind}X \leq n-1$. განვიხილოთ ისეთი რეგულარული X სივრცე, რომლისათვისაც $\text{ind}X \leq n$ და მისი ნებისმიერი $M \subset X$ ქვესიმრავლეც. ეთქვას $x \in M$ და $u(x)$ მისი ნებისმიერი ღია მიდამო M ქვესივრცეში. ეთქვას აგრეთვე, O' ისეთი ნებისმიერი ღია სიმრავლე X სივრცეში, რომ $u(x) = O' \cap M$ რადგან $\text{ind}X \leq n$, ამიტომ მოიძებნება ისეთი ღია სიმრავლე $O \subset X$, რომ $x \in O \subset O'$ და $\text{ind}FrO \leq n-1$.

$M \cap O$ სიმრავლე M ქვესივრცეში.

წარმოადგენს $x \in M \cap O \subset u(x)$ წერტილის მიდამოს, მისი საზღვარი

$$Fr(M \cap O) = M \cap \overline{M \cap O} \cap \overline{M \cap O}$$

M ქვესივრცეში წარმოადგენს O სიმრავლის X სივრცეში საზღვრის ქვესივრცეს, ამიტომ ინდუქციის დაშვების და $\text{ind}FrO \leq n-1$ უტოლობის ძალით: $\text{ind}M \leq n$. თეორემა დამტკიცდა.

14.2. დიდი ინდუქციური განზომილება. ეთქვას X რაიმე ნორმალური ტოპოლოგიური სივრცეა, $n \geq -1$ არაუარყოფითი მთელი რიცხვი, მაშინ ჩაეთვალოთ, რომ მოცემული ტოპოლოგიური სივრცის დიდი ინდუქციური განზომილება:

1. $\text{Ind}X = -1$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $X = \emptyset$.

2. $\text{Ind}X \leq n$, თუ ყოველი $F \subset X$ ჩაკეტილი ქვესიმრავლისათვის, და ამ ქვესიმრავლის ყოველი $u(F)$ მიდამოსათვის არსებობს ისეთი O ღია სიმრავლე, რომ $F \subset O \subset u(F)$ და $\text{Ind}FrO \leq n-1$.

3. $\text{Ind}X = n$, თუ $\text{Ind}X \leq n$ და $\text{Ind}X \leq n-1$ უტოლობას არ აქვს ადგილი.

4. $\text{Ind}X = \infty$, თუ $\text{Ind}X \leq n$ უტოლობას არ აქვს ადგილი არცერთი არაუარყოფითი მთელი n რიცხვისათვის.

IndX დიდ ინდუქციურ განზომილებას მფორენიარად *ბრანუნების განზომილებასაც* უწოდებენ. ცხადია პომეომორფულ სიერცეებს ერთიდა იგივე დიდი ინდუქციური განზომილება აქვთ.

რადგან X ნორმალურია მე-2-ე პირობის შესრულების დროს $F \subset O \subset u(F)$ მოთხოვნა შეიძლება შეიცვალოს $F \subset \bar{O} \subset u(F)$ მოთხოვნით. ამგვარად თუ A და $B \in X$ ტოპოლოგიური სიერცის ორი ურთიერთ არათანამკვეთი ნაკეტილი ქვესიმრავლეებია, მაშინ ისინი შეიძლება ერთმანეთისაგან განვაცალკევოთ სიმრავლით, რომლის დიდი ინდუქციური განზომილებაც არ აღემატება $n-1$ -ს. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 142. თუ X ნორმალური ტოპოლოგიური სიერცეა, მაშინ $\text{ind}X \leq \text{Ind}X$.

დამტკიცება: ცხადია. უტოლობა სრულდება თუ $\text{ind}X = -1$ ან $\text{Ind}X = \infty$.

ეთქვას, $\text{Ind}X \leq n$, ვიყვნეთ რომ $\text{ind}X \leq n$.

დავუშვათ თეორემას ადგილი აქვს ყოველი X სიერცისათვის რომელთათვისაც $\text{Ind}X \leq n-1$; ნორმალურ სიერცეში წერტილი ნაკეტილი სიმრავლეა, რადგან $\text{Ind}X \leq n$, ამიტომ ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის და მისი ნებისმიერი $u(x)$ მიდამოსათვის არსებობს ისეთი O ღია სიმრავლე, რომ $x \in O \subset u(x)$ და $\text{Ind}FrO \leq n-1$.

ჩვენ დაშვების გამო $\text{ind}FrO \leq \text{Ind}FrO \leq n-1$. აქედან კი გამომდინარეობს $\text{ind}X \leq n$ და მაშასადამე, $\text{ind}X \leq \text{Ind}X$. თეორემა დამტკიცდა

თეორემა 143. X ნორმალური ტოპოლოგიური სიერცის M ნაკეტილი ქვესიმრავლისათვის ადგილი აქვს უტოლობას $\text{Ind}M \leq \text{Ind}X$

დამტკიცება: ცხადია თეორემა სამართლიანია როდესაც $X = \emptyset$ ან $\text{Ind}X = \infty$.

რადგან M ნაკეტილია ოგი ჩვენება ნორმალური ქვესიერცე X სიერცეში.

ეთქვას, F ნაკეტილი ქვესიმრავლეა M ქვესიერცეში და $u(F)$ მისი ღია მიდამო ამავე ქვესიერცეში. O იყოს ისეთი ღია ქვესიმრავლე X სიერცეში, რომ $u(F) = M \cap O$.

F ნაკეტილია X სიერცეშიც, $F \subset O$ ამიტომ არსებობს ისეთი $O' \subset X$ ღია სიმრავლე, რომ $F \subset O' \subset O$ და $\text{Ind}FrO' \leq n-1$. $F \subset M \cap O' \subset O$ და

$$Fr(M \cap O') = M \cap \overline{M \cap O'} \cap \overline{M \cap O'} \subset FrO'$$

$\text{Ind}FrO' \leq n-1$. თუ დავუშვებთ, რომ თეორემა სამართლიანია როდესაც $\text{Ind}X \leq n-1$, მაშინ გვაქვია $\text{Ind}Fr(M \cap O') \leq \text{Ind}FrO' \leq n-1$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\text{Ind}M \leq n$, მაშასადამე $\text{Ind}M \leq \text{Ind}X$ თეორემა დამტკიცდა.

143. ნებისმიერ განზომილება. ეთქვას $A = \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ წარმოადგენს X ტოპოლოგიური სიერცის ქვესიმრავლეთა რაიმე ოჯახია. ვიტყვი, რომ ამ ოჯახის რიგი არის n თუ n წარმოადგენს იმ უდიდეს რიცხვს, რომლისთვისაც არსებობს ამ ოჯახში შემავალი $n+1$ უცმრტი, რომელთა თანაკვეთაც არსებობს; ან ვიტყვი, რომ მოცემული ოჯახის რიგი არის უცმრტო, თუ ასეთი უდიდესი მთელი რიცხვი არ არსებობს.

განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ქვესიმრავლეთა ოჯახის რიგი არის n , მაშინ

ყოველი $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \in \mathcal{A}$ ინდუქსიისათვის $\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i = \emptyset$.

ცხადია, თუ ქვესიმრავლეა $A = \{A_s\}_{s \in S}$ ოჯახი შედგება მხოლოდ ცარიელი სიმრავლისაგან, მაშინ ამ ოჯახის რიგია -1 , ხოლო თუ $A = \{A_s\}_{s \in S}$ შედგება ურთიერთთანაუკვეთი სიმრავლეებისაგან, მაშინ მისი რიგი იქნება 0

ეთქვას, ახლა X ტოპოლოგიის სივრცეა და $n \geq -1$ მთელი რიცხვი.

მაშინ ნათქვამია, რომ მოცემული სივრცის *ჩეხ-ლებების განზომილება*:

- $\dim X \leq n$, თუ ყოველ ფუნქციონალურად ღია სასრულ დაფარვაში შეიძლება ჩაეწეროს ისეთი სასრული ფუნქციონალურად ღია დაფარვა, რომლის რიგიც ნაკლებია ან ტოლი n რიცხვზე
- $\dim X = n$, თუ $\dim X \leq n$ და $\dim X \leq n-1$ უტოლობას არ აქვს ადგილი.
- $\dim X = \infty$, თუ $\dim X \leq n$ უტოლობას არ აქვს ადგილი არცერთი არაუარყოფითი მთელი n რიცხვისათვის.

ცხადია კომპორმორფულ სივრცეებს ერთიდა იგივე ჩეხ-ლებების განზომილება აქვთ. ცხადია ასევე, რომ $\dim X = -1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $X = \emptyset$.

X სივრცის ქვესიმრავლეა $A = \{A_s\}_{s \in S}$ ოჯახის გაბერვა ეწოდება ამავე სივრცის ქვესიმრავლეა $\{B_s\}_{s \in S}$ ისეთ ოჯახს, რომ:

- $A_s \subset B_s, s \in S$
- როგორც უნდა იყოს ინდექსთა სასრული ერთობლიობა: $s_1, s_2, \dots, s_m \in S$,
 $A_{s_1} \cap A_{s_2} \cap \dots \cap A_{s_m} = \emptyset$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $B_{s_1} \cap B_{s_2} \cap \dots \cap B_{s_m} = \emptyset$.

თეორემა 14.4. X ტოპოლოგიური(ნორმალური ტოპოლოგიური) სივრცის ფუნქციონალურად ნაკეტილი(ნაკეტილ) სიმრავლეა $\{F_i\}_{i=1}^k$ სასრული ოჯახისთვის არსებობს ამ ოჯახის გაბერვა $\{U_i\}_{i=1}^k$, რომელიც შედგება ფუნქციონალურად ღია სიმრავლეებისაგან. ამას გარდა, თუ X სივრცის ფუნქციონალურად ღია (ღია) სიმრავლეებისაგან შედგენილი $\{V_i\}_{i=1}^k$ ისეთი ოჯახია, რომ $F_i \subset V_i, i=1,2,\dots,k$, მაშინ $\{U_i\}_{i=1}^k$ ოჯახი ისე შეიძლება შევარჩიოთ, რომ $\bar{U}_i \subset V_i, i=1,2,\dots,k$

დაპრტიკება: გაერთიანება S_1 ყველა $F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \dots \cap F_{s_m}$ სახის სიმრავლეებისა, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას: $F_1 \cap F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \dots \cap F_{s_m} = \emptyset$. წარმოადგენს ფუნქციონალურად ნაკეტილ(ნაკეტილ) სიმრავლეს, რომელიც არ გადაიკეცება F_1 სიმრავლესთან. ურისონის ლემიდან გამომდინარე, არსებობს ისეთი უწყვეტი $f_1: X \rightarrow [0,1]$ ფუნქცია, რომ $f_1(F_1) = \{0\}$ და $f_1(S_1) = \{1\}$.

ადგილი დასანახია, რომ ოჯახი $\{K_1, F_2, F_3, \dots, F_k\}$, სადაც $K_1 = f_1^{-1}([0, \frac{1}{2}])$, წარმოადგენს $\{F_i\}_{i=1}^k$ ოჯახის გაბერვას. დაეუშვათ, რომ ყოველი $i=1,2,\dots,j$ ინდექსისათვის განსაზღვრულია ისეთი უწყვეტი $f_i: X \rightarrow [0,1]$ ასახვა, რომ $f_i(F_i) = \{0\}$ და ოჯახი

$$\{K_1, K_2, \dots, K_j, F_{j+1}, \dots, F_k\}.$$

სადაც $K_i = f_i^{-1}([0, \frac{1}{2}])$, წარმოადგენს $\{F_i\}_{i=1}^k$ ოჯახის გაბერვას. ეთქვას, S_{j+1} წარმოადგენს

$$\{K_1, K_2, \dots, K_j, F_{j+1}, \dots, F_k\}$$

ოჯახის ელემენტების ისეთი თანაკეთების გაერთიანებას, რომლებიც არ გადაიკვეთებიან F_{j+1} სიმრავლესთან. ცხადია ეს გაერთიანება ფუნქციონალურად ჩაკეტილი (ჩაკეტილი) სიმრავლეა. ამ ფაქტის გამო არსებობს ისეთი უწყვეტი $f_{j+1}: X \rightarrow [0,1]$ ასახვა, რომ $f_{j+1}(F_{j+1}) = \{0\}$ და $f_{j+1}(S_{j+1}) = \{1\}$.

აღიღი დასანახია, რომ

$$\{K_1, K_2, \dots, K_j, K_{j+1}, F_{j+2}, \dots, F_k\}$$

ოჯახი, სადაც $K_{j+1} = f_{j+1}^{-1}([0, \frac{1}{2}])$, წარმოადგენს $\{F_i\}_{i=1}^k$ ოჯახის გაბერვას. ამგვარად, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ყოველი $i \leq k$ ინდექსისათვის განსაზღვრულია ისეთი უწყვეტი $f_i: X \rightarrow [0,1]$ ასახვა, რომ $f_i(F_i) = \{0\}$ და $\{K_i\}_{i=1}^k$ ოჯახი, სადაც $K_i = f_i^{-1}([0, \frac{1}{2}])$, წარმოადგენს $\{F_i\}_{i=1}^k$ ოჯახის გაბერვას.

(ცხადია, ამ შემთხვევაში $\{U_i\}_{i=1}^k$ ოჯახი, სადაც $U_i = f_i^{-1}([0, \frac{1}{2}])$ წარმოადგენს $\{F_i\}_{i=1}^k$ ოჯახის საძიებელ გაბერვას. თეორემის მეორე ნაწილის დასამტკიცებლად $U_i = f_i^{-1}([0, \frac{1}{2}])$ სიმრავლე

შევიკვალოთ $g_i^{-1}([0, \frac{1}{2}])$ სადაც $g_i: X \rightarrow [0,1], i = 1, 2, \dots, k$ რაიმე უწყვეტი ასახვაა, რომელიც

აქმაყოფილებს პირობას: $g_i(F_i) = \{0\}$ და $g_i(X \setminus (U_i \cup V_i)) = \{1\}$, თეორემა დამტკიცდა.

X ტოპოლოგიური სივრცის რაიმე $\{A_i\}_{i \in I}$ დაფარვის შეკუმშვა ეწოდება ამ სივრცის ყოველ $\{B_i\}_{i \in I}$ დაფარვას, რომელიც აქმაყოფილებს პირობას $B_i \subset A_i$.

ცხადია, დაფარვის შეკუმშვის რიგი არ აღემატება მიცემული დაფარვის რიგს. **თეორემა 14.5.** X ტოპოლოგიური (ნორმალური ტოპოლოგიური) სივრცის ყოველ ფუნქციონალურად ღია (ღია), სასრული $\{U_i\}_{i=1}^k$ დაფარვას გააჩნია შეკუმშვები: $\{F_i\}_{i=1}^k, \{W_i\}_{i=1}^k$, რომლებიც შედგებიან ფუნქციონალურად ჩაკეტილი და ფუნქციონალურად ღია სიმრავლეებისაგან, შესაბამისად, ამასთან $F_i \subset W_i \subset U_i$, როდესაც $i = 1, 2, \dots, k$.

დამტკიცება: $\{X \setminus U_i\}_{i=1}^k$ ოჯახი შედგება ფუნქციონალურად ჩაკეტილი (ჩაკეტილი)

სიმრავლეებისაგან. წინა თეორემის თანახმად, არსებობს ამ ოჯახის გაბერვა

$\{V_i\}_{i=1}^k$, რომელიც შედგება ფუნქციონალურად ღია სიმრავლეებისაგან. $\{X \setminus V_i\}_{i=1}^k$ ოჯახი

წარმოადგენს $\{U_i\}_{i=1}^k$ დაფარვის შეკუმშვას, რომელიც შედგება ფუნქციონალურად ჩაკეტილი

სიმრავლეებისაგან. $\{W_i\}_{i=1}^k$ შეკუმშვის არსებობა გამომდინარეობს ურისონის ლემიდან.

როდესაც სივრცე ნორმალურია, ჩაშენ ფუნქციონალურად ღია სიმრავლე ღია სიმრავლეა და პირიქით. აქედან გამომდინარე, თეორემა საბოლოოდ დამტკიცდა.

თეორემა 14.6. ყოველი X ტიხონოვის სივრცისათვის შემდეგი პირობები ერთმანეთის ეკვივალენტურია:

$$1. \dim X \leq n.$$

2. X სიერცის ყოველ სასრულ ფუნქციონალურად ღია დაფარვას გააჩნია ფუნქციონალურად ღია შეკუმშვა, რომლის რიგიც არ აღემატება n -ს.
3. X სიერცის ყოველ სასრულ ფუნქციონალურად ღია დაფარვას გააჩნია ფუნქციონალურად ჩაკეტილი შეკუმშვა, რომლის რიგიც არ აღემატება n -ს.
4. X სიერცის ყოველ სასრულ ფუნქციონალურად ღია დაფარვაში, შეიძლება ჩაეწეროს ფუნქციონალურად ჩაკეტილი დაფარვა, რომლის რიგიც არ აღემატება n -ს.

დამტკიცება: ვთქვათ, $\{U_i\}_{i=1}^k$ ტიხონოვის X სიერცის ნებისმიერი, სასრული, ფუნქციონალურად ღია დაფარვაა და $\dim X \leq n$. განვიხილოთ X სიერცის ფუნქციონალურად ღია $\{V_j\}_{j=1}^m$ დაფარვა, რომლის რიგიც ნაკლებია ან ტოლი n -ზე. ყოველი $j < m$ ინდექსისთვის ამოვირჩიოთ ინდექსი $i(j) < k$, ისე რომ

$$V_j \subset U_{i(j)}, \quad \{W_i\}_{i=1}^k \text{ ოჯახი, სადაც } W_i = \bigcup_{j(i)=i} V_j, \text{ წარმოადგენს } \{U_i\}_{i=1}^k \text{ დაფარვის}$$

ფუნქციონალურად ღია შეკუმშვას, რომლის რიგიც ნაკლებია ან ტოლი n -ზე. ამგვარად 1-ლი პირობიდან გამომდინარეობს მე-2-ე პირობა, წინა თეორემის საფუძველზე გვაქვს, რომ მე-2-ე პირობიდან გამომდინარეობს მე-3-ე პირობა, ცხადია, მე-3-ე პირობიდან გამომდინარეობს მე-4-ე პირობა, 14.4. თეორემის საფუძველზე კი გვაქვს, რომ მე-4-ე პირობიდან გამომდინარეობს 1-ლი პირობა. თეორემა დამტკიცდა.

14.4., 14.5., 14.6. თეორემებიდან გამომდინარეობს:

თეორემა 14.7. ყოველი ნორმალური X ტოპოლოგიური სიერცისათვის შემდეგი პირობები ეკვივალენტურია:

1. $\dim X \leq n$.
2. X სიერცის ყოველ სასრულ ღია დაფარვაში ჩაიწერება ისეთი სასრული ღია დაფარვა, რომლის რიგიც არ აღემატება n -ს.
3. X სიერცის ყოველ სასრულ ღია დაფარვას გააჩნია ღია შეკუმშვა, რომლის რიგიც არ აღემატება n -ს.
4. X სიერცის ყოველ სასრულ ღია დაფარვას გააჩნია ჩაკეტილი შეკუმშვა, რომლის რიგიც არ აღემატება n -ს.
5. X სიერცის ყოველ სასრულ ღია დაფარვაში ჩაიწერება ისეთი სასრული ჩაკეტილი დაფარვა, რომლის რიგიც არ აღემატება n -ს.

თეორემა 14.8. თუ X ტიხონოვის სიერცის M ქვესიერცე ისეთია, რომ ყოველი უწყვეტი $f: M \rightarrow [0,1]$ ასახვა შეიძლება გაგრძელებული იქნას მთელ X სიერცეზე, მაშინ $\dim M \leq \dim X$

დამტკიცება: ვთქვათ X ტიხონოვის სიერცეა და $\dim X \leq n$, M კი ისეთი ქვესიერცე, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემის პირობებს. განვიხილოთ M ქვესიერცის ნებისმიერი ფუნქციონალურად ღია, სასრული $\{U_i\}_{i=1}^k$ დაფარვა. 14.5. თეორემის თანახმად, არსებობს ამ დაფარვის ფუნქციონალურად ჩაკეტილი $\{F_i\}_{i=1}^k$ შეკუმშვა.

ურისონის ლემის ძალით, ყოველი $i = 1, 2, \dots, k$ ინდექსისათვის არსებობს ისეთი უწყვეტი $f_i: M \rightarrow [0,1]$ ასახვა, რომ

$$f_i(M \setminus U_i) = \{0\}, \quad f_i(F_i) = \{1\}.$$

ვთქვათ $\tilde{f}_i: X \rightarrow [0,1]$ წარმოადგენს $f_i: M \rightarrow [0,1]$ სახეის გავრცელებას მთელ

X სივრცეზე. 0-ი სიმრავლეები შეადგენენ

X სივრცის ფუნქციონალურად ღია დაფარვას. * ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$M \cap \tilde{f}_i^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) \subset U_i, i = 1, 2, \dots, k; M \cap_{i=1}^k \tilde{f}_i^{-1}([0, 1)) = \emptyset.$$

რადგან $\dim X \leq n$, ამიტომ ზემოთ აგებულ დაფარვაში შეიძლება ჩაეწეროს სასრული ფუნქციონალურადღია დაფარვა, რომლის რიგიც არ აღემატება n -ს.

** მიმართებებიდან გამომდინარეობს, რომიმ ჩაწერილი დაფარვის ელემენტების თანავეთები M სიმრავლესთან შეადგენენ M ქვესივრცის ფუნქციონალურად ღია დაფარვას, რომელიც ჩაწერილია $\{U_j\}_{j=1}^k$ დაფარვაში

ცხადია ჩაწერილი დაფარვის რიგი არ აღემატება n -ს, ამიტომ $\dim M \leq n$ და მაშასადამე $\dim M \leq \dim X$. თეორემა დაბტკიცდა.

თეორემა 14.9. თუ ნორმალურ ტოპოლოგიურ X სივრცეს გააჩნია ისეთი თვლადი ჩაკეტილი $\{F_j\}_{j=1}^n$ დაფარვა, რომ $\dim F_j \leq n, j = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$

მაშინ $\dim X \leq n$.

დამტკიცება: ვთქვათ $\{U_j\}_{j=1}^k$ X სივრცის ნებისმიერი სასრული ღია დაფარვაა.

ინდექსიურად განვსაზღვროთ სასრულ ღია დაფარვათა მიმდევრობა: $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_n, \dots$, სადაც $\Omega_j = \{U_{j_i}\}_{i=1}^k$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\bar{U}_{j_i} \subset U_{j_{i+1}}, \text{ როდესაც } j \geq 1 \text{ და } U_{j_0} \subset U_{j_1}.$$

2. $\{\bar{U}_{j_i} \cap F_{j_i}\}_{i=1}^k$, სადაც $F_0 = \Omega$ დაფარვის რიგი არ აღემატება n -ს.

დავუშვათ. $U_{j_0} = U_i, i = 1, 2, \dots, n, \dots$ როდესაც $j = 0$, მაშინ 1-ლი და მე-2-ე პირობები სრულდება. დავუშვათ უკვე აგებულა $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_j$ დაფარვები, სადაც $j < m \leq 1$.

14.7 თეორემის თანახმად, $\{F_m \cap U_{m-1}\}_{i=1}^k$ დაფარვას გააჩნია ღია შეკუმშვა $\{V_i\}_{i=1}^k$,

რომლის რიგიც არაღემატება n -ს. ადვილია შევნიშნოთ, რომ ოჯახი $\{W_i\}_{i=1}^k$, სადაც

$W_i = (U_{m-1} \setminus F_m) \cup V_i$, წარმოადგენს X სივრცის ღია დაფარვას, რომლის რიგიც არ აღემატება n -ს. 14.5. თეორემის თანახმად არსებობს $\{W_i\}_{i=1}^k$ დაფარვის ისეთი ღია შეკუმშვა

$\Omega_m = \{U_m\}_{i=1}^k$, რომ $\bar{U}_m \subset W_i$, როდესაც $i = 1, 2, \dots, k$. ცხადია Ω_m დაფარვა, როდესაც $j = m$, აკმაყოფილებს მაშინ 1-ლი და მე-2-ე პირობებს.

ამგვარად, ინდექსით ავაგეთ სასრულ ღია დაფარვათა მიმდევრობა: $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_n, \dots$, რომელიც აკმაყოფილებს საჭირო პირობებს.

ყოველი $x \in X$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი $i(x) \leq k$ ინდექსი, რომ $x \in U_{i(x)}$

სირავლეების უსასრულო რაოდენობას. აქედან გამომდინარე 1-ლი პირობის ძალით $x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} U_{j(i)}$

თუ გაითვალისწინებთ 1-ლ და მე-2-ე პირობებს, დავასკვნით, რომ $\{\bigcap_{j=1}^{\infty} \bar{U}_{j(i)}\}_{i=1}^k$ ოჯახი

წარმოადგენს $\{U_i\}_{i \in I}$ დაფარვის ჩაკეტილ შეკუმშვას, რომლის რიგიც არ აღემატება n -ს. მაშასადამე $\dim X \leq n$. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 14.10. ვთქვათ $U = \{U_i\}_{i \in I}$ ნორმალური ტოპოლოგიური X სივრცის რაიმე ღია დაფარვაა. ამასთან არსებობს X სივრცის ისეთი ლოკალურად სასრული ჩაკეტილი $\Phi = \{F_i\}_{i \in I}$ დაფარვა, რომლის ელემენტთა განზომილებაც არ აღემატება n -ს და ამ დაფარვის ყოველი ელემენტი გადაიკვეთება U ოჯახის მხოლოდ სასრული რაოდენობის ელემენტებთან, მაშინ U დაფარვას გააჩნია შეკუმშვა რომლის რიგიც არ აღემატება n -ს. **დამტკიცება:** მიუერთოთ Φ ოჯახს $F_0 = \emptyset$ სიმრავლე ტრანსფინიტურ მიმდევრობაში: $F_0, F_1, F_2, \dots, F_\alpha, \dots, \alpha \leq \xi$. ამის შემდეგ განვსაზღვროთ ტრანსფინიტური ინდუქციით ისეთ ღია დაფარვათა ტრანსფინიტური მიმდევრობა: $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_\alpha, \dots, \alpha \leq \xi$, სადაც

$\Omega_\alpha = (U_\alpha)_{\alpha \in I}; U_0 = U$, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

1. $U_\alpha \subset U_\beta$, როდესაც $\beta < \alpha$.
2. $\{U_\alpha \cap F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ოჯახის რიგი არ აღემატება n -ს.
3. $U_\beta \setminus U_\alpha \subset \bigcup_{\beta \leq \gamma < \alpha} F_\gamma$, თუ $\beta < \alpha$.

როდესაც $\alpha = 0$, მაშინ 1-ლი, მე-2-ე და მე-3-ე პირობა სრულდება.

დავეუქათ აგებულია $\Omega_\alpha, \alpha < \alpha_0 \leq I$ დაფარვა, რომელიც აკმაყოფილებს აღნიშნულ პირობებს. ვჩვენოთ, რომ $U'_{\alpha_0} = \bigcap_{\alpha < \alpha_0} U_\alpha; \alpha \in I$ სიმრავლეა ოჯახი წარმოადგენს X სივრცის ღია დაფარვას. მართლაც, როდესაც $\alpha_0 = \alpha_1 + 1$, მაშინ

$U'_{\alpha_0} = U_{\alpha_1}$ და აქედან გამომდინარე, შეიძლება დავეუქვათ, რომ α_0 ზღვარიით რიგობრივი რიცხვია.

ყოველ $x \in X$ წერტილს აქვს მიდამო $u(x)$, რომელიც გადაიკვეთება Φ დაფარვის სასრული რაოდენობის ელემენტებთან. ცხადია მოიძებნება ისეთი $\beta < \alpha_0$, რომ $u(x) \cap F_\gamma = \emptyset$ ყოველი $\gamma, \beta \leq \gamma < \alpha_0$ რიგობრივი რიცხვისათვის.

რადგან Ω_β წარმოადგენს X სივრცის დაფარვას, ამიტომ არსებობს $s \in I$ ინდექსი, რომლისთვისაც $x \in U_\beta$. მე-3-ე პირობიდან გამომდინარეობს, რომ

$u(x) \cap U_\beta \subset U_\alpha \subset U_{\alpha_0}$, როდესაც $\beta \leq \alpha < \alpha_0$. ამგვარად $x \in u(x) \cap U_\beta \subset U'_{\alpha_0}$. აქედან გამომდინარე, $\{U'_{\alpha_0}\}_{\alpha \in I}$ X სივრცის ღია დაფარვაა. $F_\alpha \subset X$ ქვესივრცის

$\{F_\alpha \cap U'_{\alpha_0}\}_{\alpha \in I}$ დაფარვას გააჩნია ღია შეკუმშვა და რადგან 1-ლი პირობის ძალით ამ დაფარვის არაცარიელი ელემენტების რიცხვი სასრულია მას დაფარვის რიგი არ აღემატება n -ს.

$\Omega_{\alpha_0} = \{U'_{\alpha_0}\}_{\alpha \in I}$, სადაც $U_{\alpha_0} = (U'_{\alpha_0} \setminus F_\alpha) \cup U_s$, X სივრცის ღია დაფარვაა, რომელიც აკმაყოფილებს 1-ლ, მე-2-ე და მე-3-ე პირობებს როდესაც $\alpha = \alpha_0$.

ამგვარად მიმდევრობა $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_\alpha, \dots, \alpha \leq \xi$ აგებულია. მე-2-ე პირობიდან გამომდინარეობს, რომ Ω_ξ დაფარვის რიგი არ აღემატება n -ს. Ω_ξ წარმოადგენს

$U = \{U_s\}_{s \in S}$ დაფარვის შეკუმშვას. ეს კი ამტკიცებს თეორემას.

14.9. და 14.7. თეორემებიდან გამომდინარეობს:

თეორემა 14.11. თუ ნორმალური ტოპოლოგიური X სივრცისათვის არსებობს ლოკალურად სასრული ჩაკეტილი $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ დაფარვა და $\dim F_\alpha \leq n$ ყოველი

$\alpha \in A$ ინდექსისათვის, მაშინ $\dim X \leq n$

თეორემა 14.12. დაუკერის თეორემა. ყოველი ნორმალური

ტოპოლოგიური X სივრცისთვის შემდეგი პირობები ერთმანეთის ეკვივალენტურია:

1. $\dim X \leq n$.

2. X სივრცის ყოველ ლოკალურად სასრულ ღია დაფარვას გააჩნია ღია შეკუმშვა, რომლის რიგიც არ აღემატება n -ს.

3. X სივრცის ყოველ ლოკალურად სასრულ ღია დაფარვაში შეიძლება ჩაეწეროს ღია დაფარვა, რომლის რიგიც არ აღემატება n -ს.

დამტკიცება: ვაჩვენოთ, რომ 1-ლი პირობიდან გამომდინარეობს მე-2-ე პირობა. ვთქვათ $\dim X \leq n$ და $\Omega = \{U_s\}_{s \in S}$ X სივრცის რაიმე ლოკალურად სასრული ღია დაფარვაა. Φ -ით აღენიშნოთ S სიმრავლის არაცარიელ სასრულ ქვესიმრავლეთა ოჯახი. ყოველი $T \in \Phi$ ელემენტისათვის განვიხილოთ ჩაკეტილი სიმრავლე $F_T = \bigcap_{s \in T} \overline{U_s}$, $\bigcap_{s \in T} (X \setminus U_s)$. 14.8 თეორემის თანახმად $\dim F_T \leq n$. $\{F_T\}_{T \in \Phi}$ ოჯახი წარმოადგენს X სივრცის ჩაკეტილ დაფარვას, ამასთან ამ დაფარვის თითოეული ელემენტი გადაკვეთს $\Omega = \{U_s\}_{s \in S}$ ოჯახის ელემენტების სასრულ რაოდენობას.

$\{F_T\}_{T \in \Phi}$ ლოკალურად სასრული დაფარვაა. მართლაც, ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის მოიძებნება $u(x)$ მდამო და ისეთი სასრული ქვესიმრავლე $S(x) \subset S$ რომ $u(x) \cap U_s = \emptyset$, როდესაც $s \notin S(x)$. ცხადია, $u(x) \cap \overline{U_s} = \emptyset$, $s \notin S(x)$.

ამგვარად, თუ $u(x) \cap F_T \neq \emptyset$, მაშინ $T \subset S(x)$. ეს კი აჩვენებს, რომ $\{F_T\}_{T \in \Phi}$ ოჯახი ლოკალურად სასრულია. წინა თეორემიდან კი გამომდინარეობს, რომ $\Omega = \{U_s\}_{s \in S}$ დაფარვას ღია შეკუმშვა, რომლის რიგიც არ აღემატება n -ს. ამგვარად, 1-ლი პირობიდან გამომდინარეობს მე-2-ე პირობა.

ცხადია მე-2-ე პირობიდან გამომდინარეობს მე-3-ე პირობა.

ასევე ადვილად მტკიცდება, რომ მე-3-ე პირობიდან გამომდინარეობს 1-ლი პირობა. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 14.13. თუ ნორმალური ტოპოლოგიური X სივრცის სიმრავლეთა ყოველი ჩაკეტილი A, B წველისათვის, რომლებიც ერთმანეთს არ ჰკვეთენ, მოიძებნება ისეთი $W \subset X$ სიმრავლე, რომ $A \subset W \subset \overline{W} \subset X \setminus B$ და $\dim Fr W \leq n-1$, მაშინ $\dim X \leq n$.

დამტკიცება: ვთქვათ, $\{U_i\}_{i=1}^k$ წარმოადგენს X სივრცის ნებისმიერ სასრულ ღია დაფარვას და $\{A_i\}_{i=1}^k$ კი მის ჩაკეტილ შეკუმშვას.

განვიხილოთ ისეთი ღია სიმრავლეები $W_i \subset X; i = 1, 2, \dots, k$, რომ $A_i \subset W_i \subset \overline{W_i} \subset U_i$ და $\dim FrW_i$, ასეთი სიმრავლეების არსებობა განპირობებულია თეორემის პირობით. რადგან $F = \bigcup_{i=1}^k FrU_i$ სიმრავლეს ნორმალურია, ამიტომ 14.9 თეორემის ძალით $\dim F \leq n-1$. 14.4. და 14.5 თეორემების ძალით არსებობს X სივრცის ღია სიმრავლეთა ისეთი ოჯახი $\{V_i\}_{i=1}^k$, რომ $\overline{V_i} \subset U_i, i = 1, 2, \dots, k$, $F \subset V = \bigcup_{i=1}^k V_i$ და $\{\overline{V_i}\}_{i=1}^k$ ოჯახის რიგი არ აღემატება n -ს.

სიმრავლეები: $F_1, F_2, \dots, F_k, \overline{V_1}, \overline{V_2}, \dots, \overline{V_k}$, სადაც $F_i = \overline{W_i} \setminus (V \cup \bigcup_{j \neq i} W_j)$, შეადგენენ ჩაკეტილ დაფარვას, რომელიც ჩაწერილია $\{U_i\}_{i=1}^k$ დაფარვაში. 14.7. თეორემიდან გამომდინარე, ჩვენი თეორემის დასამტკიცებლად, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ამ ჩაწერილი დაფარვის რიგი არ აღემატება n -ს. ეს კი გამომდინარეობს იქედან, რომ $\{\overline{V_i}\}_{i=1}^k$ ოჯახის რიგი არ აღემატება $n-1$ -ს დაადგილი აქვს მიმართებებს:

$$F_i \cap F_j \subset \overline{W_j} \cap (\overline{W_j} \setminus (V \cup W_j)) \subset (X \setminus V) \cap FrW_j = \emptyset,$$

როდესაც $j < i \leq k$. თეორემა დამტკიცდა.

თუ გამოვიყენებთ ინდუქციას $IndX$ განზომილების მიმართ და წინა თეორემას მივიღებთ შემდეგ თეორემას:

თეორემა 14.14. ყოველი ნორმალური ტოპოლოგიური X სივრცისათვის ადგილი აქვს უტოლობას: $\dim X \leq IndX$

§15. განზომილება მეტრიზებად სივრცეებში

15.1 $indX, IndX$ და $\dim X$ განზომილებათა ურთიერთმიმართება მეტრიზებად სივრცეებში.

თეორემა 15.1. ყოველი სეპარაბელური მეტრიკული სივრცისათვის $\dim X \leq indX$
დამტკიცება: როგორც ცნობილია, ყოველ სეპარაბელურ მეტრიკულ სივრცეს გააჩნია თვლადი ბაზა. ამიტომ მისი ყოველი დაფარვიდან, გამოიყოფა თვლადი ქვედაფარვა, რომელიც შედგება ბაზის ელემენტებისაგან. ყოველი მეტრიკული სივრცე ნორმალურია. ამიტომ ყოველი ორი ურთიერთ თანაკვეთი ჩაკეტილი A და B სიმრავლისათვის არსებობენ მიდამოები $u(A)$ და $u(B)$ შესაბამისად, რომლებიც ერთმანეთს არ კვეთენ. $u(A) \subset X \setminus u(B)$, $X \setminus u(B)$ ჩაკეტილი სიმრავლეა, ამიტომ $\overline{u(A)} \subset X \setminus u(B) \subset X \setminus B$.

$$u(A) = \bigcup_{i \in M \subset N} O_i, \text{ სადაც } O_i \in B(X). \text{ აქედან გამომდინარე გვაქვს: } Fr u(A) \subset \bigcup_{i \in M \subset N} Fr O_i.$$

ამ ფორმულიდან 14.8 და 14.9. თეორემებდან, ინდუქციით $indX$ -ის მიმართ, თეორემა ადვილად მტკიცდება.

თეორემა 15.2. ყოველი მეტრიზებადი ტოპოლოგიური X სივრცისათვის შემდეგი პირობები ეკვივალენტურია:

1. $\dim X \leq n$

2. ყოველი ρ მეტრიკისათვის X სივრცეში არსებობს ლოკალურად სასრული ღია ისეთი მიმდევრობა $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_i, \dots$, რომ Ω_i დაფარვის რიგი არ აღემატება n -ს. ყოველი $U \in \Omega_i$ ელემენტისათვის დიამეტრი $\delta(U) < \frac{1}{i}$ და ყოველი $U \in \Omega_{i+1}$ ელემენტისათვის მოიძებნება ისეთი $V \in \Omega_i$, რომელიც შეიცავს $\bar{U}$

3. X სივრცეში არსებობს მეტრიკა ρ და ღია დაფარვების ისეთი მიმდევრობა

$\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_i, \dots$, რომლის რიგიც არ აღემატება n -ს, $\delta(W) < \frac{1}{i}$ ყოველი $W \in \Sigma_i$

ელემენტისათვის და Σ_{i+1} დაფარვა ჩაწერილია Σ_i დაფარვაში.

დამტკიცება: დავამტკიცოთ, რომ 1-ლი პირობიდან გამომდინარეობს მე-2-ე პირობა.

$\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_i, \dots$ მიმდევრობა ავაგოთ ინდუქციით. ვთქვათ $k=1$, ან $k>1$

შეზღუდვისთვის უკვე აგებულია დაფარვები $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{k-1}$. ყოველი $x \in X$ წერტილისთვის

განვიხილოთ მისი ისეთი მიდამო $u(x)$, რომლისთვისაც $\delta(u(x)) < \frac{1}{k}$ და თუ $k>1$, $u(x)$ შედის

Ω_{k-1} დაფარვის რომელიმე ელემენტში. იმის გამო, რომ 12.1. თეორემიდან გამომდინარე,

ყოველი მეტრიკაზე სივრცე პარაკომპაქტურია, 14.11. თეორემის ძალით, $\{u(x)\}_{x \in X}$ დაფარვაში შეიძლება ჩაეწეროს ლოკალურად სასრული Ω_k დაფარვა, რომლის რიგიც არ აღემატება n -ს. ამგვარად მივიღებთ $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k, \dots$ მიმდევრობას, რომელიც აკმაყოფილებს მე-2-ე პირობას. ცხადია თეორემის მე-2-ე პირობიდან გვამომდინარეობს მე-3-ე პირობა.

დასამტკიცებელი დარჩა, რომ თეორემის მე-3-ე პირობიდან გამომდინარეობს 1-ლი პირობა.

ყოველი $i \in \mathbb{N}$ ნატურალური რიცხვისათვის განვიხილოთ ისეთი ასახვა $f_i^{(1)}: \Sigma_{i+1} \rightarrow \Sigma_i$, რომ ყოველი $W \in \Sigma_{i+1}$ ელემენტისათვის $W \subset f_i^{(1)}(W)$. დაეწმუთ

$$f_i^k = f_i^{(1)} \circ f_{i+1}^{(2)} \circ \dots \circ f_{i+k-1}^{(1)},$$

როდესაც $i < k$ და $f_i^k(W) = W$, $W \in \Sigma_i$, ელემენტისათვის.

ცხადია,

$$W \subset f_i^k(W)$$

ყოველი $W \in \Sigma_k$ ელემენტისათვის და $i \leq k$ რიცხვისათვის.

ვთქვათ, $\{H_j\}_{j=1}^i$ X სივრცის ნებისმიერი სასრული ღია დაფარვაა. $X_1, X_2, \dots$ სიმრავლეები, სადაც X_k წარმოადგენს ისეთი $W \in \Sigma_k$ სიმრავლეების გაერთიანებას, რომელთათვისაც არსებობს ისეთი $j \leq i$ ინდექსი, რომ გაერთიანება $W_0 \in \Sigma_k$ ელემენტებისა, რომელთა თანაკეობა $W \in \Sigma_k$ ელემენტთან არაღარაღიარდება: $Si(W, \Sigma_k)$, შედის H_j დაფარვაში, შეადგენენ X სივრცის დაფარვას.

ყოველი $k=1, 2, \dots$ ინდექსისათვის განვიხილოთ Σ_k დაფარვის ქვეოჯახები

$$\Phi_k = \{W \in \Sigma_k \mid W \cap X_k \neq \emptyset\},$$

$$\Psi_k = \{V \in \Phi_k \mid V \cap (\bigcup_{j \neq k} X_j) = \emptyset\}$$

ყოველი $W \in \Phi_k$ ელემენტისათვის გვაქვს $f_k^i(W) \cap (\bigcup_{j \neq k} X_j) = \emptyset$. აღვნიშნოთ

$i(W)$ -ით ის უდიდესი მთელი $i \leq k$ რიცხვი, რომლისთვისაც $f_k^i(W) \cap (\bigcup_{j \neq k} X_j) = \emptyset$.

უაჩვენოთ, რომ $f_{i(W)}^k(W) \cap X_{i(W)} \neq \emptyset$. მართლაც თუ $i(W) < k$, მაშინ ტოლობა

$f_{i(W)}^k(W) \cap X_{i(W)} = \emptyset$ წინააღმდეგობაშია $i(W)$ რიცხვის მაქსიმალურობას, და თუ $i(W) = k$,

მაშინ $f_{i(W)}^k(W) \cap X_{i(W)} = f_k^k(W) \cap X_k = W \cap X_k \neq \emptyset$ აზგეარად

$$f_{i(W)}^k(W) \in \Psi_{i(W)}.$$

ყოველი $V \in \Psi_i$ ელემენტისათვის.

განვიხილოთ ღია სიმრავლე:

$$V^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\{W \cap X_k \mid W \in \Phi_k, f_k^i(W) = V, i(W) = i\}).$$

რადგან $V \cap X_k \neq \emptyset$, X_k სიმრავლის განსაზღვრიდან გამოჰდინარე, მოიძებნებიან ისეთი $W \in \Sigma_i$ და $j(V) \leq i$ რომლებსთვისაც $V \cap W \neq \emptyset$ და $St(W, \Sigma_i) \subset H_{i(V)}$. * მიმართებიდან გამოჰდინარე, გვაქვს $V^* \subset V$ და აზგეარად $V^* \subset H_{i(V)}$. რადგან $\Psi_i \cap \Psi_j = \emptyset$, როდესაც $i \neq j$, ამიტომ $V^* \subset H_{i(V)}$ სიმრავლე და $j(V)$ მთელი რიცხვი

კორექტულად არიან განსაზღვრულნი ყოველი $V \in \Psi = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Psi_i$ სიმრავლისთვის.

თეორემის დამტკიცებისათვის უაჩვენოთ, რომ $\{V_j\}_{j=1}^l$ ოჯახი, სადაც

$$V_j = \cup \{V^* \mid V^* \in \Psi, j(V^*) = j\} \subset H_j,$$

ფარავს X სივრცეს და მისი როგი არ აღემატება n რიცხვს, ან უაჩვენოთ ამ წინადადების ეკვივალენტური წინადადება:

$\Psi^* = \{V^* \mid V^* \in \Psi\}$ წარმოადგენს X სივრცის დაფარვას რომლის როგი არ აღემატება n რიცხვს.

ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისათვის განვიხილოთ ისეთი k მთელი რიცხვი რომ

$$x \in X_k \setminus \bigcup_{j < k} X_j, \quad ***$$

და სიმრავლე $W \in \Sigma_k$, რომელიც ასევე შეიცავს x წერტილს. რადგანაც $W \cap X_k \neq \emptyset$ ამიტომ $W \in \Phi_k$. ** და *** მიმართებებიდან გამოჰდინარეობს, რომ

$$x \in W \cap X_k \subset f_{i(W)}^k(W) \in \Psi^*;$$

აზგეარად Ψ^* ოჯახი ფარავს X სივრცეს.

განვიხილოთ ნებისმიერი არაკარიელი თანაკვეთა $V_1^* \cap V_2^* \cap \dots \cap V_m^*$, სადაც $V_i \in \Psi_m$ და $V_i \neq V_j$, როდესაც $i \neq j$. ავიღოთ ამ თანაკვეთის x წერტილი. Ψ_m ოჯახის

განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ მთელი k რიცხვი *** ფორმულიდან აკმაყოფილებს უტოლობას $m_i \leq k$, როდესაც $i = 1, 2, \dots, h$.

** ფორმულის ძალით არსებობენ ისეთი $W_i \in \Phi_k$ სიმრავლეები, რომ

$$f_m^k(W_i) = V_i, i(W_i) = m_i$$

და $x \in W_i \cap X_k$. რადგან $x \in X_k$, *** ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ $k \leq k_i$. ყველა $U_1, U_2, \dots, U_k$ სიმრავლე, სადაც $U_i = f_m^k(W_i) \in \Sigma_k$, შეიცავს x წერტილს, აქედან გამომდინარე, იმის გათვალისწინებით, რომ Σ_k დაფარვის რიგი არ აღემატება n რიცხვს, თეორემის საბოლოოდ დასამტკიცებლად საკმარისია ეჩვენოთ, რომ $U_i \neq U_j$, როდესაც $i \neq j$. U_i სიმრავლე მიეკუთვნება Φ_k ოჯახს და $i(U_i) = i(W_i) = m_i$, $i(W_i)$ რიცხვის განსაზღვრის თანახმად. აქედან გამომდინარე $U_i \neq U_j$, როდესაც $m_i \neq m_j$. როდესაც $m_i = m_j$, ასევე გვაქვს $U_i \neq U_j$, რადგან ამ დროს

$$f_{m_i}^k(U_i) = f_{m_i}^k(W_i) = V_i \neq V_j = f_{m_j}^k(W_j) = f_{m_j}^k(U_j).$$

თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 15.3. (კატეტო-ფორიტას თეორემა) ყოველი მეტრიკული სივრცისათვის ადგილი აქვს ტოლობას: $\text{Ind}X = \dim X$

დამტკიცება: 14.13. თეორემის ძალით, საკმარისია ეჩვენოთ, რომ $\text{Ind}X \leq \dim X$

ცხადია, შეიძლება დაეუშვათ, რომ $\dim X < \infty$. გამოვიყენოთ ინდუქცია $\dim X$ სიდიდის მიმართ: თუ $\dim X = -1$, მაშინ $X = \emptyset$ და აქედან გამომდინარე $\text{Ind}X = \dim X$ დაეუშვათ დასამტკიცებელ უტოლობას ადგილი აქვს ყველა იმ მეტრიზებადი X სივრცისათვის რომლისთვისაც $\dim X \leq n-1$, სადაც n რაიმე ნატურალური რიცხვია.

განვიხილოთ ნებისმიერი მეტრიზებადი სივრცე, რომლისთვისაც $\dim X = n$, ჩაკეტილი ქვესიმრავლე $A \subset X$ და ისეთი ღია $V \subset X$ სიმრავლე, რომ $A \subset V$ ვთქვათ σ რაიმე მეტრიკა X სივრცეზე, ხოლო $f: X \rightarrow [0, 1]$ ისეთი უწყვეტი ასახვა, რომ $f(A) = \{0\}$, $f(B) = \{1\}$, სადაც $B = X \setminus V$. $\rho(x, y) = \sigma(x, y) + |f(x) - f(y)|$ ფორმულა განსაზღვრავს ახალ მეტრიკას X სივრცეზე.

15.2. თეორემის თანახმად არსებობს X სივრცის ისეთი ლოკალურად სასრული დაფარვების მიმდევრობა: $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k, \dots$, რომ მისი რიგი არ აღემატება n რიცხვს და $\delta_\rho(U) < \frac{1}{i}$, ყველა

$U \in \Omega$, ელემენტისათვის, სადაც $\delta_\rho(U)$ წარმოადგენს U სიმრავლის დიამეტრს ρ მეტრიკის მიმართ; ამასთან ყველა $U \in \Omega_{i+1}$ ელემენტისათვის მოიძებნება ისეთი $V \in \Omega_i$, რომ $\overline{U} \subset V$

დაეუშვათ $K_0 = A$ და $M_0 = B$ და როდესაც $i \geq 1$, მაშინ $K_i = X \setminus H_i$, $M_i = X \setminus G_i$, სადაც:

$$H_i = \cup \{U \in \Omega_i \mid \overline{U} \cap M_{i-1} \neq \emptyset\}$$

$$G_i = \cup \{U \in \Omega_i \mid \overline{U} \cap M_{i-1} = \emptyset\}.$$

განვიხილოთ მიმდევრობები $K_0, K_1, K_2, \dots$ და $M_0, M_1, M_2, \dots$ ამ მიმდევრობებს აქვთ შემდეგი თვისება: თუ $U \in \Omega_i$ და $\bar{U} \cap M_{i-1} \neq \emptyset$, მაშინ $\bar{U} \cap K_{i-1} = \emptyset$. მართლაც, თუ $i=1$, მაშინ ρ მეტრიკის განსაზღვრებიდან გამომდინარე, არცერთი სიმრავლე, რომლის დიამეტრიც ნაკლებია 1-ზე არ გადაკვეთს ერთდროულად A და B სიმრავლეებს; თუ $i>1$ და $U \in \Omega_i, \bar{U} \cap M_{i-1} \neq \emptyset$, მაშინ ყოველი $V \in \Omega_{i-1}$ ელემენტისათვის, რომელიც მოიცავს $\bar{U}$ სიმრავლეს, გვაქვს $V \cap M_{i-1} \neq \emptyset$. ამგვარად $V \in G_{i-1}$ და მაშასადამე $V \in H_{i-1}$. ეს კი ნიშნავს, რომ $\bar{U} \cap K_{i-1} = \emptyset$.

H_i და G_i სიმრავლეების განსაზღვრებიდან, Ω_i დაფარვითაა ლოკალურად სასრულობიდან და ზემოთ ნათქვამისაგან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ისეთი $U \in \Omega_i$, ელემენტისათვის, რომლისთვისაც $\bar{U} \cap M_{i-1} \neq \emptyset, \bar{U} \cap K_{i-1} \neq \emptyset$, ადგილი აქვს ტოლობას $G_i \cap M_{i-1} = \emptyset = H_i \cap K_{i-1}$, ყოველი $i=1, 2, \dots$ ინდექსისათვის.

უკანასკნელი ტოლობები განაპირობებენ $K_{i-1} \subset X \setminus \bar{H}_i = \text{Int} K_i$, და $M_{i-1} \subset X \setminus \bar{G}_i = \text{Int} M_i$,

მიმართებებს, ამას გარდა, რადგან $G_i \cup H_i = X$, ამიტომ $K_i \cap M_i = \emptyset$. მაშასადამე $K = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$,

და $M = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$ ღია თანაუკვეთი სიმრავლეებია და ისინი მოიცავენ A და B სიმრავლეებს, შესაბამისად.

ამგვარად გვექნება: $A \subset K \subset V$ და $\text{Fr} K \subset L = X \setminus (K \cup M)$. დამტკიცების დასამთავრებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\dim L \leq n-1$, მართლაც, 14.3. თეორემის და ინდექსიური დაშვების საფუძველზე, აქედან გამომდინარეობს, რომ $\text{Ind Fr} K \leq \text{Ind} L \leq \dim L \leq n-1$.

რადგან $K \cup M = \bigcup_{i=1}^{\infty} (M_i \cup K_i)$, ამიტომ $L = \bigcap_{i=1}^{\infty} L_i$, სადაც

$$L_i = X \setminus (M_i \cup K_i) = G_i \cap H_i, i=1, 2, \dots$$

$\Sigma_i = \{U \cap L_i \mid U \in \Omega_i, \bar{U} \cap M_{i-1} \neq \emptyset\}$ ოჯახი წარმოადგენს $L \subset H_i$ სივრცის ღია დაფარვას, ამ დაფარვის რიგი არ აღემატება $n-1$ -სხეობა, ვინაიდან ყოველი $x \in L \subset L_i \subset G_i$, წერტილი ეკუთვნის ერთ მაინც ისეთ $U \in \Omega_i$, ღია სიმრავლეს, რომლისთვისაც $\bar{U} \cap M_{i-1} = \emptyset$. თუ $U \in \Omega_{i+1}$ და $\bar{U} \cap M_{i-1} \neq \emptyset$, მაშინ ყოველი $V \in \Omega_i$, სიმრავლისთვის, რომელიც მოიცავს $\bar{U}$ ნაქვეყნას, გვექნება $V \cap M_i \neq \emptyset$ და მაშასადამე $V \notin G_i$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\bar{V} \cap M_i \neq \emptyset$, ეს კი ნიშნავს, რომ $V \cap L \in \Sigma_i$, და ამგვარად Σ_{i+1} დაფარვა ჩაწერილია Σ_i

დაფარვაში. ცხადია ყოველი $W \in \Sigma_i$, ელემენტისათვის $\delta_p(W) < \frac{1}{i}$, ამიტომ წინა თეორემიდან

გამომდინარე, $\dim L \leq n-1$. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 15.4. ყოველი სეპარაბელური მეტრიკული სივრცისათვის $\text{ind} X = \text{Ind} X = \dim X$

დამტკიცება: 15.1 თეორემიდან გვაქვს $\dim X \leq \text{ind} X$ 14.2 თეორემიდან კი $\text{ind} X \leq \text{Ind} X$. თუ

გავითვალისწინებთ წინა თეორემას გვექნება: $\text{Ind} X = \dim X \leq \text{ind} X$ მაშასადამე,

$\text{ind} X = \text{Ind} X = \dim X$ თეორემა დამტკიცდა.

ყოველი ქვესივრცე ისეთი მეტრიზებადი X სივრცისა, რომელიც აკმაყოფილებს 15.2. თეორემის მე-3-ე პირობას, ასევე აკმაყოფილებს ამ პირობას, ამიტომ 15.2. და 15.3. თეორემებიდან გამომდინარეობს:

თეორემა 15.6 ყოველი M ქვესივრცისათვის ადგილი აქვს $IndM \leq IndX$ უტოლობას.

X ტოპოლოგიური სივრცის ისეთ დაფარვას, რომელიც წარმოადგინდება ლოკალურად სასრული დაფარვების თვლადი ოჯახის გაერთიანების სახით, σ -ლოკალურად სასრულ დაფარვა ეწოდება.

14.9. , 14.11. და 15.3. თეორემიდან გამომდინარეობს:

თეორემა 15.7. თუ X მეტრიზებადი ტოპოლოგიური სივრცეს გააჩნია ისეთი $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ σ -ლოკალურად სასრულ ჩაკეტილი დაფარვა, რომ $IndF_\alpha \leq n$ ყოველი $\alpha \in A$ ინდექსისთვის, მაშინ $IndX \leq n$.

თეორემა 15.8 თუ X მეტრიზებად სივრცეს გააჩნია σ -ლოკალურად სასრულ ჩაკეტილი ბაზა, რომელსაც შედგება ღია-ჩაკეტილი სიმრავლეებისაგან, მაშინ $IndX \leq 0$.

დამტკიცება: ვთქვათ $\mathfrak{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{B}_i$, სადაც $\mathfrak{B}_i$ ლოკალურად სასრული ოჯახებია, წარმოადგენს ბაზას მოცემულ ტოპოლოგიურ სივრცეში. განვიხილოთ ნებისმიერი ჩაკეტილი $A \subset X$ და ღია $V \subset X, A \subset V$ სიმრავლეები. ყოველი $i = 1, 2, 3, \dots$ ინდექსისათვის დაეუშვათ:

$$V_{2i} = \{U \in \mathfrak{B}_i \mid U \subset V\}.$$

$$V_{2i+1} = \{U \in \mathfrak{B}_i \mid U \cap A = \emptyset\}.$$

ეს სიმრავლეები ღია-ჩაკეტილია და აკმაყოფილებს პირობებს:

$$V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_{2i}, \quad X \setminus A = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_{2i+1}.$$

ამგვარად $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ წარმოადგენს X სივრცის დაფარვას. $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ ოჯახი, სადაც $U_i = V_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} V_j$ ასევე წარმოადგენს X სივრცის დაფარვას, რომელიც შედგება წვეილ-

წვეილად თანაუწყვეთი ღია-ჩაკეტილი სიმრავლეებისაგან. V_{2i}, V_{2i+1} სიმრავლეების განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ $U = \bigcup \{U_i \mid U_i \subset V\}$ სიმრავლე ღია-ჩაკეტილია და აქვს თვისება: $A \subset U \subset V$ ეს კი Ind განზომილების განსაზღვრასთან ეროად ამტკიცებს თეორემას.

თეორემა 15.9. ვთქვათ X მეტრიზებადი სივრცეა და $Z \subset X$ მისი რაიმე ქვესივრცე. თუ $IndZ \leq 0$, მაშინ ყოველი ჩაკეტილი $A \subset X$ სიმრავლისთვის და ღია $V, A \subset V$ სიმრავლითვის, მოიძებნება ისეთი ღია $U \subset X$ სიმრავლე, რომ $A \subset U \subset \overline{U} \subset V$ და $Z \cap FrU = \emptyset$.

დამტკიცება: განვიხილოთ ღია სიმრავლეები $W_1, W_2 \subset X$, რომლებისთვისაც ადგილი აქვს პირობას:

$$A \subset W_1 \subset \overline{W_1} \subset W_2 \subset \overline{W_2} \subset V$$

რადგანაც $IndZ = 0$, ამიტომ მოიძებნება ისეთი ღია-ჩაკეტილი U_0 ქვესიმრავლე Z ქვესივრცეში, რომ $Z \cap \overline{W_1} \subset U_0 \subset Z \cap W_2$. აქედან ცხადია

$$Z \setminus U_0 \subset Z \setminus (Z \cap W_1) = Z \setminus W_1 \subset X \setminus W_1 \text{ და } \overline{U_0} \subset \overline{W_2}.$$

აღვილად მოწმდება, რომ $A \cup U_0$ სიმრავლე და $[(X \setminus V) \cup (Z \setminus V)]$ ერთმანეთს არ აკვეთს. ყოველი მეტრიზებადი სივრცე 6.21. თეორემის გამო სრულყოფილად ნორმალურია, ამიტომ იგი იქნება მეტრიზირებადი ნორმალურიც. 6.23 თეორემიდან კი გამომდინარეობს ისეთი ღია $U \subset X$ სიმრავლის არსებობა, რომ $A \cup U_0 \subset U$ და $\overline{U} \cap [(X \setminus V) \cup (Z \setminus U_0)] = \emptyset$. ცხადია ასეთი U სიმრავლე აკმაყოფილებს საჭირო მოთხოვნებს.

თეორემა 15.10. ეთქვას X ნორმალური ტოპოლოგიური სივრცეა და $\{U_s\}_{s \in S}$ მისი წერტილოვნად სასრული ღია დაფარვა. მაშინ არსებობს X სივრცის ისეთი ღია დაფარვა $\{V_s\}_{s \in S}$, რომ $\overline{V_s} \subset U_s$, ყოველი $s \in S$ ინდექსისათვის.

დამტკიცება: ეთქვას Φ წარმოადგენს ისეთი $g: S \rightarrow T(X)$ ასახვების ოჯახს, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$g(s) = U_s, \text{ ან } \overline{g(s)} \subset U_s,$$

$$\bigcup_{s \in S} g(s) = X.$$

დაედაგოთ Φ ოჯახი შემდეგნაირად: $g: S \rightarrow T(X)$ თუ ყოველი ისეთი $s \in S$ ინდექსისათვის, რომლისთვისაც $g_1(s) \neq U_s$, ადგილი აქვს ტოლობას $g_1(s) = g_2(s)$.

ეჩვენოთ, რომ ყოველი წრფივად დალაგებული $\Phi_0 \subset \Phi$ ქვესიმრავლისთვის

$$g_0(s) = \bigcap_{g \in \Phi_0} g(s), \quad s \in S \text{ ფორმულა განსაზღვრავს } \Phi \text{ ოჯახის კლემენტს.}$$

მართლაც, * პირობა ცხადია სრულდება. ეთქვას $x \in X$, რადგან $\{U_s\}_{s \in S}$ წერტილოვნად სასრული ღია დაფარვაა, ამიტომ არსებობს ისეთი სასრული $S_0 = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ სიმრავლე, რომ $x \in U_{s_i}, i = 1, 2, \dots, k$ და $x \notin U_s$, ყოველი

$$s \in S \setminus S_0 \text{ ინდექსისათვის. თუ } g_0(s_i) = U_{s_i}, \text{ რომელიდაც } s_i \in S_0, \text{ მაშინ } x \in g_0(s_i) \subset \bigcup_{s \in S_0} g_0(s).$$

ანალოგიურად, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ყოველი

$$i = 1, 2, \dots, k \text{ ინდექსისათვის მოიძებნება ისეთი } g_i \in \Phi_0, \text{ რომ } g_i(s_i) \neq U_{s_i}. \text{ რადგან } \Phi_0 \text{ წრფივად დალაგებულია, ამიტომ არსებობს ისეთი } j \leq k, \text{ რომ } g_i \leq g_j, \text{ როდესაც } i = 1, 2, \dots, k. **$$

პირობის გათვალისწინებით g_j ასახვისთვის, ელემენტობა, რომ $x \in g_j(s_i) = g_0(s_i)$, რომელიდაც $s_i \in S_0$ ინდექსისათვის.

ამ პირობებში, ცორონის დემიდან გამომდინარე, Φ ოჯახში უნდა არსებობდეს მაქსიმალური ელემენტი g .

თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ეჩვენოთ, რომ $\overline{g(s)} \subset U_s$, ყოველი $s \in S$ ინდექსისათვის.

დაეუშვათ $g(s_0) \cap (X \setminus U_{s_0}) \neq \emptyset$. $A = X \setminus \{g(s) \mid s \in S \setminus \{s_0\}\} \subset g(s_0)$ სიმრავლე ჩაკეტილია. X სიმრავლის ნორმალურობიდან გამომდინარე, არსებობს ისეთი ღია სიმრავლე V , რომ $A \subset V \subset \overline{V} \subset g(s_0)$. * პირობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$g(s_0) = U_{s_0}, \text{ ამიტომ}$$

$$g_0(s) = \begin{cases} V, & s = s_0, \\ g(s), & s \neq s_0. \end{cases}$$

ფორმულა განსაზღვრავს ისეთ $g_0 \in \Phi$ ფუნქციას, რომ $g \leq g_0$ და $g \neq g_0$. ეს კი

ეწინააღმდეგება g ელემენტის მაქსიმალურობას და უწევნებს, რომ $\overline{g(s)} \in U$, ყოველი $s \in S$ ინდექსისათვის. თორემ დაიტკიცდა.

თეორემა 15.11. ყოველი X მეტრიზებადი სივრცისა და ყოველი არაუარყოფითი მთელი $n \geq 0$ რიცხვისათვის შეძლები პირობები ეკვივალენტურია:

1. $IndX \leq n$.

2. X სივრცეს გააჩნია ისეთი σ -ლოკალურად სასრული ბაზა, რომ $IndFrU \leq n-1$ ყოველი U სიმრავლისათვის ამ ბაზიდან.

$X = Y \cup Z$, სადაც $IndY \leq n-1$ და $IndZ \leq 0$

დამტკიცება: ვაჩვენოთ, რომ 1-ლი პირობიდან გამომდინარეობს მე-2-ე პირობა.

უთქვათ. X მეტრიზებადი სივრცეა, $IndX \leq n$ და ρ ნებისმიერი მეტრიკა მოცემულ სივრცეზე, რომელსგან ინდუცირებული ტოპოლოგიური სტრუქტურაც ემთხვევა, თავიდან არსებული. 12.1. თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი მეტრიზებადი სივრცე პარაკომპაქტურიადა ყოველი $i = 1, 2, 3, \dots$ მთელი რიცხვისათვის არსებობს ლოკალურად

სასრული დაფარვა $\Omega_i = \{V_s\}_{s \in S_i}$, რომლის ელემენტების დიამეტრი $diam(V_s) < \frac{1}{i}$, ყველა $s \in S_i$,

ინდექსისთვის. რადგან ყოველი ლოკალურად სასრული დაფარვა წერტილოვნად სასრულიც არის, ამიტომ წინა თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $i = 1, 2, 3, \dots$ ინდექსისთვის მოიძებნება Ω_i დაფარვის ჩაკეტილი შეკუმშვა. რადგანაც $IndX \leq n$, ამიტომ ყოველი $s \in S_i$ ინდექსისთვის არსებობს ისეთი ღია სიმრავლე $U_s \subset X$, რომ $F_i \subset U_s \subset V_s$ და $IndFrU_s \leq n-1$.

$\Omega_i = \{V_s\}_{s \in S_i}$ ოჯახი წარმოადგენს ლოკალურად სასრულ ღია დაფარვას, რომლის

ელემენტთა დიამეტრებიც არ აღემატებიან $\frac{1}{i}$ რიცხვს. ამგვარად $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ წარმოადგენს σ

ლოკალურ ბაზას X სივრცეში.

ახლა დაემატევიოთ, რომ მე-2-ე პირობიდან გამომდინარეობს მე-3-ე პირობა.

15.7. თეორემიდან გამომდინარე $Y = \cup \{FrU \mid U \in \Omega\} \subset X$ ქვესივრცე აკმაყოფილებს

$IndY \leq n-1$ უტოლობას და $Z = X \setminus Y$ ქვესივრცეს გააჩნია σ -ლოკალურად სასრული ბაზა: $\{Z \cap U \mid U \in \Omega\}$, შედგენილი ღია-ჩაკეტილი სიმრავლეებისაგან. ეს კი 15.8. თეორემის

სა-ფუძველზე ნიშნავს, რომ $IndZ \leq 0$.

ის ფაქტი, რომ მე-3-ე პირობიდან გამომდინარეობს 1-ლი პირობა ადვილად მტკიცდება 15.10. და 14.3. თეორემების საფუძველზე. თეორემა დამტკიცდა.

ბოლო თეორემიდან გამომდინარეობს:

თეორემა 15.12. (გაშლის თეორემა) მეტრიზებადი X ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს $IndX \leq n \geq 0$ უტოლობას, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $X = Z_1 \cup Z_2 \cup \dots \cup Z_{n+1}$, სადაც $IndZ_i \leq 0, i = 1, 2, 3, \dots, n+1$.

ამ თეორემიდან თავის მხრივ გამომდინარეობს:

თეორემა 15.13. (შეკრების თეორემა). მეტრიკული სივრცის ყოველი ორი X, Y ქვესივრცისათვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$Ind(X \cup Y) = IndX + IndY + 1$$

თეორემა 15.14. (გამოყოფის თეორემა) ვთქვათ X მეტრიზებადი ტოპოლოგიური სივრცეა და M მისი ქვესივრცე. თუ $IndM \leq n \geq 0$, მაშინ, ყოველი $A \subset X$ ჩაკეტილი სიმრავლისათვის და ნებისმიერი ღია $V \subset X$, $A \subset V$ სიმრავლისათვის მოიძებნება ისეთი $U \subset X$ ღია სიმრავლე, რომ $A \subset U \subset \overline{U} \subset V$ და $Ind(M \cap FrU) \leq n-1$.

დამტკიცება: 15. 11. თეორემიდან გამომდინარე გვაქვს: $M = Y \cup Z$, სადაც $IndY \leq n-1$ და $IndZ \leq 0$. იმის გამო, რომ $M \cap FrU \subset M \setminus Z \subset Y$ და 14.3. თეორემიდან გამომდინარე $Ind(M \cap FrU) \leq n-1$, ისეთი U ღია სიმრავლე, როგორიც 15.9. თეორემაშია, აკმაყოფილებს ამ თეორემის მოთხოვნებსაც. თეორემა დამტკიცდა.

წინა თეორემებიდან გამომდინარეობს:

თეორემა 15.15. X მეტრიზებადი ტოპოლოგიური სივრცის ჩაკეტილ, ურთიერთ თანაუკვეთ ქვესიმრაველთა წყვილების: $(A_1, B_1), (A_2, B_2), \dots, (A_{n+1}, B_{n+1})$ ერთობლიობისათვის, სადაც

$IndX \leq n \geq 0$, მოიძებნება ისეთი ღია $U_1, U_2, \dots, U_{n+1}$ სიმრავლეები, რომ $A_i \subset U_i \subset \overline{U_i} \subset X \setminus B_i, i = 1, 2, \dots, n+1$ და $FrU_1 \cap FrU_2 \cap \dots \cap FrU_{n+1} = \emptyset$.

მაგალითი: ნამდვილ რიცხვთა R ღერძის ან S' წრეწირის თითოეული x წერტილის ნებისმიერი V მიდამოსათვის მოიძებნება $U \subset V$ მიდამო, რომლის საზღვარი FrU შედგება მხოლოდ ორი წერტილისაგან $\{\alpha, \beta\}$, ამიტომ $ind\{\alpha, \beta\} \leq 0$ და აქედან გამომდინარე $indR \leq 1$

და $indS' \leq 1$ რადგან R და S' სეპარაბელური მეტრიკული სივრცეებია. ამიტომ $indR = IndR = \dim R \leq 1; indS' = IndS' = \dim S' \leq 1$. 14.3. თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ $IndI \leq 1$, სადაც $I = [0, 1]$ ინტერვალია. ასევე გვაქვს: $indI = IndI = \dim I \leq 1$.

R^n სივრცის ან S^n სფეროს თითოეული x წერტილის ნებისმიერი V მიდამოსათვის მოიძებნება $U \subset V$ მიდამო, რომლის საზღვარი FrU მომართულიაა S^{n-1} , ამიტომ თუ გამოვიყენებთ ინდუქციას n რიგების მიმართ. მივიღებთ:

$$indR^n = IndR^n = \dim R^n \leq n,$$

$$indS^n = IndS^n = \dim S^n \leq n.$$

ასევე გვაქვს: $indI^n = IndI^n = \dim I^n \leq n$.

15.2. გეომეტრიული სიმძლევსი, ბრაუერის თეორემა უბრალო წერტილის შესახებ, R^n სივრცის განზომილება

ვეკლიდეს მეტრიკულ R^n სივრცეში განსაზღვრული აღებურული ოპერაციებს:

$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ და $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ წერტილების ჯამი $x + y = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n\}$;

$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ წერტილისა და $\lambda \in R$ ნამდვილი რიცხვის ნამრავლი $\lambda x = \{\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n\}$.

წერტილი R^n -ში, რომლის ყველა კოორდინატი ნულია აღემატება 0-ით, მანძილი $\rho(0, X)$ კი აღემატება $|x|$ -ით.

ცხადია:

$$|x - y| = \rho(x, y), \quad |\lambda x| = |\lambda| \|x\| \quad \text{და} \quad |x + y| \leq |x| + |y|.$$

$x^0, x^1, \dots, x^k \in R^n$ წერტილებზე ვიტყვი, რომ ისინი იმყოფებიან ზოგად მდგომარეობაში, თუ $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = 0, \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0, \lambda_i \geq 0, i = 0, 1, 2, \dots, k$ პირობებიდან გამომდინარეობს $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_k = 0$.

ვთქვათ $v_0, v_1, \dots, v_m$ ეკლდებს R^n სივრცის ზოგად მდგომარეობაში მყოფი წერტილებია. R^n სივრცის იმ ქვესივრცეებს, რომელიც შედგება

$x = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$ სახის წერტილებისაგან, სადაც $\lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$ ნამდვილი რიცხვები ამაყოფილებენ პირობას: $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$, ეწოდებენ *m* განზომილებიან გეომეტრიულ სიმპლექსს.

$v_0, v_1, \dots, v_m$ წერტილებს სიმპლექსის წვეროები ეწოდება. ამ წვეროების მქონე სიმპლექსი აღინიშნება ასე: $v_0 v_1 \dots v_m$. ცხადია სიმპლექსი ცალსახად განისაზღვრება თავისი წვეროებით, იგი დამოკიდებული არ არის $\{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ სიმრავლის დალაგებაზე.

განვიხილოთ $\{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ სიმრავლის $\{v_k, v_{j_1}, \dots, v_{j_k}\}, 0 \leq k \leq m$ ქვესიმრავლე. ცხადია

$\in R^n$ წერტილები იმყოფებიან ზოგად მდგომარეობაში და განსაზღვრავენ

სიმპლექსს. ასეთ სიმპლექსს $v_0 v_1 \dots v_m$ სიმპლექსის k

განზომილებიანი წახნაგი ეწოდება. როდესაც $k = 0$, ასეთი წახნაგები წარმოადგენენ სიმპლექსის წვეროებს. რადგან $k \leq m$, ამიტომ სიმპლექსი თავისი თავის წახნაგსაც წარმოადგენს. ცხადია $v_1 v_{j_1} \dots v_{j_k}$ წახნაგი წარმოადგენს $v_0 v_1 \dots v_m$ სიმპლექსის ქვესიმრავლეს, რომელიც შედგება ისეთი $x = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$ წერტილებისაგან რომლებისათვისაც $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ და $\lambda_j = 0$ თუ $j \neq j_1, i = 0, 1, 2, \dots, k$.

$v_0 v_1 \dots v_m$ სიმპლექსი $x = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$ წერტილისათვის $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ რიცხვებს მისი ბარიცენტრული კოეფიციენტი ეწოდება. x წერტილის i -ური ბარიცენტრული კოორდინატი λ_i ხშირად აღინიშნება ასე: $\lambda_i(x), i = 0, 1, 2, \dots, m$.

თეორემა 15.16. ყოველი $m+1$ ზოგად მდგომარეობაში მყოფი $v_0, v_1, \dots, v_m \in R^n$

წერტილისათვის $\sigma = v_0 v_1 \dots v_m$ გეომეტრიული სიმპლექსი წარმოადგენს R^n სივრცის კომაქტურ ქვესივრცეებს, ამასთან ბარიცენტრული კოორდინატები $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ წარმოადგენენ უწყვეტ ფუნქციებს σ სიმრავლიდან $[0, 1]$ სეგმენტში.

დამტკიცება: ვთქვათ $\delta_{ij} = 1$ თუ $i \neq j$ და $\delta_{ii} = 0$.

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_m \in R^{m+1}$ წერტილები, სადაც $a_j = \{\delta_{ij}\}$ იმყოფებიან ზოგად მდგომარეობაში, ამიტომ $\Delta = a_0 a_1 a_2 \dots a_m$ სიმპლექსი განსაზღვრულია კორექტულად. ამ სიმპლექსის ბარიცენტრული კოორდინატები ემთხვევა მის წვერებზე კოორდინატებს R^{m+1} სივრცეში.

$\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1, \lambda_i \geq 0, i = 0, 1, 2, \dots, m$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ Δ შემოსაზღვრული ნაეკვტილი სიმრავლეა R^{m+1} სივრცეში, ამიტომ 9.8. თეორემის თანახმად, იქნება კომპაქტური.

განვიხილოთ ასახვა $f: \Delta \rightarrow R^n$, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით:

$$f(x) = x_0 v_0 + x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_m v_m, \text{ სადაც } x = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_m\} \in R^{m+1}$$

ადვილია იმის მიხედვით, რომ ეს ასახვა უწყვეტია. რადგან $v_1, v_2, \dots, v_m \in R^n$ წერტილები იყოფებიან ზოგად მდგომარეობაში, ამიტომ $f|_{\Delta}$ წარმოადგენს ინექციას და $f(a_j) = v_j, j = 0, 1, 2, \dots, m$ და f პოემოროფულად ასახავს

Δ სიმპლექსს σ სიმპლექსზე. ეს კი ნიშნავს, რომ σ კომპაქტური ქვესიმრავლეა R^n სივრცეში.

$\lambda_j: \sigma \rightarrow [0, 1]$ ასახვა ყოველ $x \in \sigma$ წერტილს შეუსაბამებს მის j -ურ ბარიცენტრულ კოორდინატს და გამოისახება ფორმულით: $\lambda_j = p_{j-1}(f|_{\Delta})^{-1}(x)$, სადაც $p_j: R^n \rightarrow R$ პროექცია j -ურ ღერძზე. აქედან გამომდინარე $\lambda_j, j = 0, 1, 2, \dots, m$ უწყვეტი ასახვაა. თეორემა დამტკიცდა.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი ორი m განზომილებიანი გეომეტრიული სიმპლექსი ერთმანეთის პოემოროფულია.

$\sigma \in R^n$ გეომეტრიული სიმპლექსის *სიმპლიციალური დაყოფა* ეწოდება სიმპლექსთა ნებისმიერ $\Sigma = \{\sigma_i\}_{i=1}^l$ ოჯახს, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ მოთხოვნებს:

$$1. \sigma = \bigcup_{i=1}^l \sigma_i.$$

2. ყოველი ორი $i, j \leq l$ ინდექსისთვის $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ ან წარმოადგენს σ_i და σ_j სიმპლექსების საერთო წახნაგს.

3. ყოველი $i = 1, 2, \dots, l$ ინდექსისათვის σ_i სიმპლექსის ყოველი წახნაგი ეკუთვნის Σ ოჯახს.

$\tau = \max\{\delta(\sigma_1), \delta(\sigma_2), \dots, \delta(\sigma_l)\}$ რიცხვს, სადაც $\delta(\sigma_i)$ სიმრავლის დიამეტრია, $\Sigma = \{\sigma_i\}_{i=1}^l$ *სიმპლიციალური დაყოფის სიგანე* ეწოდება.

ყოველი $\sigma = v_0 v_1 \dots v_m$ სიმპლექსისათვის $b(\sigma) = \frac{1}{m+1} v_0 + \frac{1}{m+1} v_1 + \dots + \frac{1}{m+1} v_m$ წერტილს ამ სიმპლექსის *ბარიცენტრი* ეწოდება. ცხადია $b(\sigma) \in \sigma$ და $b(\sigma)$ არ ეკუთვნის σ სიმპლექსის არცერთ $m-1$ განზომილების წახნაგს.

თეორემა 15.17. ვთქვათ $\sigma = v_0 v_1 v_2 \dots v_m$, რაიმე სიმპლექსია, მაშინ მისი განსხვავებული წახნაგების ყოველი კლებადი $\sigma_0 \supset \sigma_1 \supset \sigma_2 \supset \dots \supset \sigma_k$ მიმდევრობისათვის

$b(\sigma_1), b(\sigma_2), b(\sigma_3), \dots, b(\sigma_k)$ წერტილები იყოფებიან ზოგად მდგომარეობაში;

$$\Delta = b(\sigma_1) b(\sigma_2) \dots b(\sigma_k)$$

სახის სიმპლექსთა ოჯახი კი წარმოადგენს σ სიმპლექსის Σ სიმპლიციალურ დაყოფას; ყოველი $\omega \in \Sigma$ სიმპლექსი, რომლის განზომილებაცაა $m-1$, წარმოადგენს წახნაგს ერთი ან

ორი m განზომილებიანი სიმპლექსისა Σ ოჯახიდან, იმის მიხედვით არის თუ არა ω სიმპლექსი σ სიმპლექსის $m-1$ განზომილებიანი წახნაგი.

დამტკიცება: განსხვავებული წახნაგების ყოველი კლებადი მიმდევრობა

$$\sigma_0 \supset \sigma_1 \supset \sigma_2 \supset \dots \supset \sigma_k$$

შეიძლება შევევსოთ წახნაგთა

$$\sigma_0 \supset \sigma_1 \supset \sigma_2 \supset \dots \supset \sigma_m$$

მიმდევრობაზე, რომელიც შედგება $m+1$ წევრისაგან, სადაც $\sigma_0 = v_0 v_1 \dots$

$\sigma_0 = v_1 v_2 \dots v_m$, $\sigma_2 = v_2 v_1 \dots v_m$, ..., $\sigma_m = v_m$ და $i_0, i_1, \dots, i_m$ წარმოადგენს $0, 1, 2, \dots, m$ რიცხვთა რაიმე დალაგებას. თეორემის პირველი ნაწილის დსდამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $b(\sigma_1), b(\sigma_2), \dots, b(\sigma_m)$ წერტილები იმყოფებიან ზოგად მდგომარეობაში. განვიხილოთ წრფივი კომბინაცია

$$\mu_0 b(\sigma_0) + \mu_1 b(\sigma_1) + \dots + \mu_m b(\sigma_m).$$

ბარიცენტრის განსაზღვრების გამოვლისწინებით * ჯამი შეიძლება წარმოვადგინოთ $v_1, v_2, \dots, v_m$ წერტილების წრფივი კომბინაციის სახით:

$$\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m.$$

სადაც

$$\lambda_j = \sum_{k=0}^j \frac{1}{(m+1)-k} \mu_k, j = 0, 1, 2, \dots, m.$$

ამას გარდა

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^i \frac{1}{(m+1)-k} \mu_k = \sum_{k=0}^m \sum_{j=k}^m \frac{1}{(m+1)-k} \mu_k = \sum_{k=0}^m \mu_k.$$

თუ * წრფივი კომბინაცია ნულის ტოლია და $\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_m = 0$, მაშინ, რადგან

ზოგად მდგომარეობაშია, *** ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\lambda_j = 0, j = 0, 1, 2, \dots, m. \quad ** \text{ ტოლობის გამოყენებით ვხედავთ, რომ } \mu_0 = 0, \mu_1 = 0, \dots, \mu_m = 0.$$

აქედან გამომდინარე $b(\sigma_1), b(\sigma_2), \dots, b(\sigma_m)$ წერტილები ზოგად მდგომარეობაში იმყოფებიან და კორექტულად განსაზღვრავენ $\Delta = b(\sigma_1)b(\sigma_1)b(\sigma_2) \dots b(\sigma_m)$ სიმპლექსს.

ყოველი სიმპლექსი Σ ოჯახიდან წარმოადგენს რომელიმე $\Delta = b(\sigma_1)b(\sigma_1)b(\sigma_2) \dots b(\sigma_m)$ სახის სიმპლექსის წახნაგს. *, *** ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $\Delta = b(\sigma_1)b(\sigma_1)b(\sigma_2) \dots b(\sigma_m)$ სიმპლექსი წარმოადგენს σ სიმპლექსის ქვესიმრავლეს. ვაჩვენოთ, რომ ეს ქვესიმრავლე ემთხვევა

$$\{x \in \sigma \mid \lambda_0(x) \leq \lambda_1(x) \leq \dots \leq \lambda_m(x)\}$$

სიმრავლეს.

** ტოლობიდან გამომდინარე, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ყოველი x წერტილი

*** სიმრავლიდან შეიძლება წარმოვადგინოთ * სახით ისეთნაირად, რომ

$\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_m = 1, \mu_j \geq 0, j = 0, 1, \dots, m$. ამას ადვილად დავეინახეთ თუ μ_j კოეფიციენტებს

განვსაზღვრავთ შემდეგნაირად:

$$\mu_0 = (m+1)\lambda_n(x), \quad \mu_1 = ((m+1)-1)(\lambda_n(x) - \lambda_{n-1}(x)), \quad \mu_j = ((m+1)-j)(\lambda_j(x) - \lambda_{j-1}(x)),$$

$$\mu_m = ((m+1)-m)(\lambda_m(x) - \lambda_{m-1}(x)).$$

* * * * *

* * * * * ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\Delta = b(\sigma_1)b(\sigma_2)...b(\sigma_m)$ სიმპლექსის წახნაგების განსაზღვრისათვის * * * * * სიმრავლის განმსაზღვრელ პირობებს დაეუმატოს რამოდენიმე $\lambda_j(x) = \lambda_{j-1}(x), 1 \leq j \leq m$ სახის პირობა და შესაძლებელია $\lambda_n(x) = 0$ პირობაც.

იმის გამო, რომ ასეთი პირობებით განსაზღვრული წახნაგის გადაკეთვა სხვა

$$\Delta' = b(\sigma'_0)b(\sigma'_1)...b(\sigma'_m)$$

სიმპლექსთან, რომელიც შეესაბამება $0, 1, 2, \dots, m$ რიცხვების სხვა $i'_0, i'_1, \dots, i'_m$ დალაგებას, განისაზღვრება მსგავსი პირობებით ან ცარიელია, Σ ოჯახი აკმაყოფილებს სიმპლისიალური დაყოფის განსაზღვრებას მე-2-ე პირობას. რადგან σ წარმოადგენს * * * * * სახის სიმრავლეს, Σ ოჯახი აკმაყოფილებს ამ განსაზღვრების 1-ლ პირობაც. რაც შეეხება სიმპლისიალური დაყოფის განსაზღვრებას მე-3-ე პირობას, იგი გამომდინარეობს Σ ოჯახის განსაზღვრებიდან. მაშასადამე Σ ოჯახი წარმოადგენს $\sigma = v_0 v_1 v_2 \dots v_m$ სიმპლექსის სიმპლიციალურ დაფარვას.

ახლა განვიხილოთ ნებისმიერი $(m-1)$ განზომილებიანი $\omega = b(\sigma_0)b(\sigma_1)...b(\sigma_{m-1}) \in \Sigma$ სიმპლექსი თუ ეს სიმპლექსი შედის $\sigma = v_0 v_1 v_2 \dots v_m$ სიმპლექსის რომელიმე $(m-1)$

განზომილებიან წახნაგში ანუ $\sigma_0 \neq \sigma$, მაშინ

ω წარმოადგენს ზუსტად ერთი m განზომილებიანი სიმპლექსის წახნაგს Σ ოჯახიდან და ეს წახნაგი იქნება $\omega = b(\sigma)b(\sigma_0)b(\sigma_1)...b(\sigma_{m-1})$. მეორე მხრივ, თუ ω არ მდებარეობს σ სიმპლექსის არცერთ $(m-1)$ განზომილებიან წახნაგზე, ანუ $\sigma_0 = \sigma$; მაშინ ან მოიძებნება ისეთი $j \leq m-1$ ინდექსი, რომ სიმპლექსი σ_j მიიღება σ_{j-1} სიმპლექსისაგან ორი წვეროს ამოგდებათ, ან σ_{m-1} ერთგანზომილებიანი სიმპლექსია. ადვილად მოწმდება, რომ ორივე შემთხვევაში ω წარმოადგენს Σ ოჯახის ზუსტად ორი m განზომილებიანი სიმპლექსის საერთო წახნაგს. თეორემა დამტკიცდა.

ამ თეორემი დროს განსაზღვრულ Σ სიმპლიციალური დაყოფას σ სიმპლექსის **ბარიცენტრული დაყოფა** ეწოდება. ყოველი ნატურალური l რიცხვისათვის განვსაზღვროთ σ სიმპლექსის l -ური **ბარიცენტრული დაყოფა** შემდეგნაირად:

1-ლი ბარიცენტრული დაყოფა იყოს σ სიმპლექსის ბარიცენტრული დაყოფა; თუ σ სიმპლექსის j -ური დაყოფა $\Sigma' = \{\sigma_i\}_{i=1}^{k_j}$ ცნობილია, მაშინ მისი $j+1$ -ური ბარიცენტრული

დაყოფა განისაზღვრება, როგორც $\Sigma'^{j+1} = \bigcup_{i=1}^{k_j} \Sigma_i$, სადაც Σ_i წარმოადგენს σ_i სიმპლექსის 1-ლ

ბარიცენტრულ დაყოფას. σ_i სიმპლექსის ყოველი σ' წახნაგისთვის და Σ_i ბარიცენტრული დაყოფის ყოველი σ'' ელემენტისათვის $\sigma' \cap \sigma''$ თანაკვეთა ან ცარიელია, ან წარმოადგენს σ' სიმპლექსის წახნაგს და ეკუთვნის σ' სიმპლექსის ბარიცენტრულ დაყოფას. ამ ფაქტებიდან

ადვილი დასაწახიია, რომ $\Sigma'^{j+1} = \bigcup_{i=1}^{k_j} \Sigma_i$ წარმოადგენს σ სიმპლექსის სიმპლიციალურ დაყოფას.

უთქვამთ, $\sigma = v_0 v_1 v_2 \dots v_m \in R^n$ რაიმე სიმპლექსია, $x = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$, სადაც

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1, \lambda_j \geq 0, j = 0, 1, \dots, m$$

ამ სიმპლექსის წერტილი და $y \in R^n$

განვიხილოთ, რომ

$$\rho(x, y) = \max_{j \in m} \{\rho(v_j, y)\} \quad * * * * *$$

$$\rho(x, y) = |x - y| \leq \left| \sum_{j=0}^n \lambda_j v_j - \sum_{j=0}^n \lambda_j y \right| = \left| \sum_{j=0}^n \lambda_j (v_j - y) \right| \leq \sum_{j=0}^n \lambda_j |v_j - y| \leq \max_{j \in m} \{v_j - y\} \sum_{j=0}^n \lambda_j =$$

მართლაც.

$$\max_{j \in m} \{\rho(v_j, y)\}$$

თეორემა 15.18. ყოველი $\sigma = v_0 v_1 v_2 \dots v_m \in R^n$ სიმპლექსის დიაგეტრი ტოლია მისი წევრობის $\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_m\} \subset R^n$ სიმრავლის დიაგეტრისა.

დამტკიცება. ვთქვათ, $x, y \in \sigma$ მაშინ $\rho(x, y) = \max_{j \in m} \{\rho(x, v_j)\}$. თუ ერთხელ კიდევ გაითვალისწინებთ * * * * * ტოლობას გვექნება

$$\rho(x, y) = \max_{j \in m} \{\rho(x, v_j)\} \leq \max_{j \in m} \{\rho(v_j, v_j)\}.$$

ამგვარად $\rho(x, y) = \max_{i, j \in m} \{\rho(x, v_j)\}$, მაშასადამე $\delta(v_0 v_1 \dots v_m) = \delta(\{v_0, v_1, \dots, v_m\})$.

თეორემა 15.19. ყოველი $\sigma = v_0 v_1 v_2 \dots v_m$ m განზომილებიანი სიმპლექსის ბარიცენტრული დაყოფის სიგანე არ აღემატება $\frac{m}{m+1} \delta(\sigma)$.

დამტკიცება. წინა თეორემიდან გამომდინარე:

$$b(\sigma_j) = \frac{1}{j+1} (v_0 + v_1 + \dots + v_j),$$

$$b(\sigma_k) = \frac{1}{k+1} (v_0 + v_1 + \dots + v_k),$$

სახის ორ წერტილს შორის მანძილი, სადაც $k < j \leq m$ და $i_0, i_1, \dots, i_m$ წარმოადგენს $0, 1, \dots, m$ რიცხვების რაიმე დალაგებას, არ აღემატება $\frac{m}{m+1} \delta(\sigma)$ რიცხვს. * * * * * ტოლობიდან

გამომდინარე $\rho(b(\sigma_k), b(\sigma_j)) \leq \rho(v_i, b(\sigma_j))$, როდესაც $l \leq k < j$. აქედან გამომდინარე

$$\rho(b(\sigma_k), b(\sigma_j)) \leq \rho(v_i, b(\sigma_j)) = |b(\sigma_j) - v_i| = \left| \frac{1}{j+1} (v_0 + v_1 + \dots + v_j) - v_i \right| =$$

$$= \frac{1}{j+1} \left| \sum_{l=0}^j (v_l - v_i) \right| \leq \frac{1}{j+1} \sum_{l=0}^j |v_l - v_i| \leq \frac{1}{j+1} \delta(\sigma) \leq \frac{m}{m+1} \delta(\sigma).$$

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს

თეორემა 15.20. ყოველი σ სიმპლექსისათვის და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიპოვება ისეთი l ნატურალური რიცხვი, რომ σ სიმპლექსის l -ური ბარიცენტრული დაყოფის სიგანე არ აღემატება ε რიცხვს.

თეორემა 15.21. (შპერნერის ლემა.) ვთქვათ Σ წარმოადგენს m განზომილებიანი

$\sigma = v_0 v_1 v_2 \dots v_m$ სიმპლექსის l -ურ ბარიცენტრულ დაყოფას და V ყველა სიმპლექსის წევრობის სიმრავლეა Σ ოჯახიდან, თუ ფუნქცია $h: V \rightarrow \{0, 1, \dots, m\}$ აკმაყოფილებს

მოთხოვნას $h(v) \in \{i_0, i_1, \dots, i_s\}$ როდესაც $v \in v_0 v_1 \dots v_s$, მაშინ Σ ოჯახის იმ სიმპლექსების რაოდენობა, რომლის წვერობზედაც h ფუნქცია ღებულობს მნიშვნელობას 0-დან

m -მდე, კენტია.

დამტკიცება: გამოვიყენოთ ინდუქცია m -ის მიმართ. თუ $m=0$ თეორემა სრულდება, რადგანაც $\Sigma = \{v_0\}$ და $h(a_0) = 0$. დაეუშვათ, თეორემას ადგილი აქვს ყველა m რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $m < n$.

განვიხილოთ ნებისმიერი n განზომილებიანი სიმპლექსი: $\sigma = v_0 v_1 v_2 \dots v_n$, მისი l -ური

ბარიცენტრული დაყოფა Σ' და ფუნქცია h , რომელიც აკმაყოფილებს თეორემის პირობებს. აღვნიშნოთ Σ'' -ით Σ' ოჯახის იმ სიმპლექსების ერთობლიობა, რომელთა განზომილებაცაა $n-1$ და რომელთა წვერობებზეც h ღებულობს ყველა მნიშვნელობებს 0-დან $n-1$ -მდე.

ცხადია, $\sigma = v_0 v_1 v_2 \dots v_n$ სიმპლექსის ერთადერთ $n-1$ განზომილებიან წახნაგს, რომელიც

შეიცავს Σ' ოჯახის სიმპლექსებს წარმოადგენს წახნაგი $\Delta = v_0 v_1 v_2 \dots v_{n-1}$. ინდუქციური

დაშვების თანახმად, იმ სიმპლექსების რიცხვი Σ'' ოჯახიდან, რომლებიც მდებარეობენ $\Delta = v_0 v_1 v_2 \dots v_{n-1}$ სიმპლექსში, კენტია. აღვნიშნოთ ეს რიცხვი a -ით.

განვალაგოთ Σ' ოჯახის ყველა n განზომილებიანი სიმპლექსი $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ მიმდევრობით.

ყოველი $j \leq r$ ინდუქსიისთვის b_j იყოს σ_j სიმპლექსის იმ წახნაგთა რაოდენობა, რომლებიც

ეკუთვნის Σ'' , ხოლო N_j -ით აღვნიშნოთ h ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე σ_j სიმპლექსის წვერობებზე.

ადვილია შემოწმება, რომ: ა) თუ $N_j = \{0, 1, \dots, n\}$, მაშინ $b_j = 1$.

ბ) თუ $N_j = \{0, 1, \dots, n-1\}$, მაშინ $b_j = 2$. გ) თუ $\{0, 1, \dots, n-1\} \subset N_j$, მაშინ $b_j = 0$.

c იყოს იმ სიმპლექსების რაოდენობა Σ' ოჯახში, რომელთა წვერობებზეც h ფუნქცია ღებულობს ყველა მნიშვნელობას 0-დან n -მდე. ა), ბ) და გ) ფაქტების ძალით არსებობს ისეთი მთელი რიცხვი d_1 , რომ

$$\text{დ) } c - (b_1 + b_2 + \dots + b_r) = 2d_1.$$

თუ შევსაბამებთ ყოველ σ_j სიმპლექსს მის b_j რაოდენობის წახნაგს, რომლებიც

მიეკუთვნებიან Σ'' ოჯახს, მაშინ ყოველი $a \in \Sigma''$ სიმპლექსი 15.19. თეორემიდან

გამომდინარე, იქნება შესაბამისი ერთი ან ორი σ_j სიმპლექსისა იმისაგან დამოკიდებულებით შედის თუ არა a სიმპლექსი σ სიმპლექსის რომელიმე $n-1$ განზომილებიან წახნაგში.

შესაბამისად არსებობს ისეთი მთელი რიცხვი d_2 , რომ

$$\text{ე) } a - (b_1 + b_2 + \dots b_r) = 2d_2.$$

დ) და ე) ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ $c - a = 2(d_1 - d_2)$. აქედან გამოდის, რომ c კენტი რიცხვია. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 15.22. ვთქვათ $\{F_i\}_{i=0}^{\infty}$ წარმოადგენს $\sigma = v_0 v_1 v_2 \dots v_{\infty}$ სიმპლექსის ჩაკეტილ სიმრავლეს: ოჯახს. თუ ამ სიმპლექსის ყოველი $\Delta = v_i v_j \dots v_k$ წახნაგისთვის ადგილი აქვს $\Delta \subset F_i \cup F_j \cup \dots \cup F_k$ მიმართებას, მაშინ $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{\infty} \neq \emptyset$.

დამტკიცება: დაეუშვათ, რომ $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{\infty} = \emptyset$. $\{U_i\}_{i=0}^{\infty} = \{\sigma \setminus F_i\}_{i=0}^{\infty}$ წარმოადგენს $\sigma = v_0 v_1 v_2 \dots v_{\infty}$ სიმპლექსის ღია დაფარვას. რადგან σ კომპაქტურია, ლებეგის თეორემა დაფარვის შესახებ გვაძლევს უფლებას, ვთქვათ: არსებობს ისეთი $\varepsilon > 0$ რიცხვი, σ სიმპლექსის რომ ყოველი ქვესიმრავლე, რომლის დიამეტრიც ნაკლებია $\varepsilon > 0$ რიცხვზე, მოთავსებულია რომელიღაც U_i სიმრავლეში და ცხადია არ გადაჰყვებს F_i სიმრავლეს.

15.20. თეორემის თანახმად მოიძებნება ისეთი ნატურალური l რიცხვი, რომ σ სიმპლექსის Σ' ბარიცენტრული დაყოფის სიგანე ნაკლები იქნება $\varepsilon > 0$ რიცხვზე. აღენიშნოთ Σ' ოჯახის ყველა სიმპლექსის წვეროების სიმრავლე V -ით. ყოველი $v \in V$ წვეროსათვის σ სიმპლექსის იმ წახნაგთა თანაკვეთა, რომლებიც შეიცავენ ამ წვეროს, წარმოადგენს σ სიმპლექსის წახნაგს, ანუ მას ექნება სახე: $v_k v_l \dots v_m$. რადგან $v \in v_k v_l \dots v_m$, ამიტომ თეორემის პირობის თანახმად მოიძებნება ისეთი $j \leq k$, რომ $v \in F_j$.

თუ დავეუშვათ, რომ $h(v) = i$, მაშინ V სიმრავლეზე განვსაზღვრავთ ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს შერევის ლემის პირობას. მაშასადამე მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი სიმპლექსი $\omega = v_1 v_2 \dots v_m \in \Sigma'$, რომ $h(v_i) = i$, როდესაც $i = 0, 1, 2, \dots, m$. ამგვარად $v_i \in F_i$ და მით უმეტეს $\omega \cap F_i \neq \emptyset$, როდესაც $i = 0, 1, 2, \dots, m$.

რადგან $\omega = v_1 v_2 \dots v_m$ დიამეტრი $\delta(\omega) < \varepsilon$ მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე ჩვენი დაშვება $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{\infty} = \emptyset$ არ ყოფილა სწორი. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 15.23. (ბრაუერის თეორემა უბრავე წერტილის შესახებ). ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის და ყოველი უწყვეტი $f: I^n \rightarrow I^n$ ასახვისათვის არსებობს ისეთი წერტილი $x \in I^n$, რომ $f(x) = x$.

დამტკიცება: I^n კუბი მოთავსებულია $\sigma = v_0 v_1 \dots v_n \subset R^n$ სიმპლექსში, სადაც $v_0 = (0, 0, \dots, 0)$ კოორდინატა სათავეში მოთავსებული წვეროა, $v_j = \underbrace{(0, 0, \dots, 0, n, 0, 0, \dots, 0)}_{j-1}$. რომ არსებობდეს

ისეთი უწყვეტი ასახვა $f: I^n \rightarrow I^n$, რომ

$f(x) \neq x, x \in I^n$, მაშინ $\tilde{f}: \sigma \rightarrow I^n; \tilde{f}|_{\sigma} = f$ უწყვეტი ასახვისთვის, რომელიც არსებობს ტიტცეს თეორემის, და იმ ფაქტის ძალით, რომ ასახვა $\tilde{f}: \sigma \rightarrow I^n$ უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც უწყვეტია $\sigma \xrightarrow{f} I^n \xrightarrow{\text{წერტილი}} I^n = I$ კომპოზიცია, ადგილი ექნება მიმართებას $\tilde{f}(x) \neq x, x \in \sigma$. აქედან გამომდინარე საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ ყოველი $\tilde{f}: \sigma \rightarrow \sigma$ ასახვისათვის არსებობს ისეთი წერტილი $x \in \sigma$, რომ $\tilde{f}(x) = x$.

ყოველი $x \in \sigma$, წერტილისთვის

$$x = \lambda_0(x)v_0 + \lambda_1(x)v_1 + \dots + \lambda_n(x)v_n,$$

სადაც

$$\lambda_0(x) + \lambda_1(x) + \dots + \lambda_n(x) = 1; \lambda_j(x) \geq 0, j = 0, 1, \dots, n.$$

ცხადია ასევე

$$f(x) = \lambda_0(\tilde{f}(x))v_0 + \lambda_1(\tilde{f}(x))v_1 + \dots + \lambda_n(\tilde{f}(x))v_n.$$

სადაც

$$\lambda_0(\tilde{f}(x)) + \lambda_1(\tilde{f}(x)) + \dots + \lambda_n(\tilde{f}(x)) = 1; \lambda_j(\tilde{f}(x)) \geq 0, j = 0, 1, \dots, n.$$

რადგან λ_i და $\tilde{f}$ ასახვები უქვევებია, ყოველი $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ინდექსისათვის

$$F_i = \{x \in \sigma \mid \lambda_i(\tilde{f}(x)) \leq \lambda_i(x)\}$$

სიმრავლე ჩაკეტილია. ვაჩვენოთ, რომ $\{F_i\}_i^n$ ოჯახი აკმაყოფილებს 15.22. თეორემის პირობებს. მართლაც, ვთქვათ $v_0, v_1, \dots, v_n$ წარმოადგენს σ სიმკვლეის რომელიმე წახნაგს და $x \in v_0, v_1, \dots, v_n$. მაშინ

$$\lambda_0(x) + \lambda_1(x) + \dots + \lambda_n(x) = 1; \lambda_j(x) \geq 0, j = 0, 1, \dots, n$$

და ადგილი აქვს:

$$\lambda_0(\tilde{f}(x)) + \lambda_1(\tilde{f}(x)) + \dots + \lambda_n(\tilde{f}(x)) \leq \lambda_0(x) + \lambda_1(x) + \dots + \lambda_n(x) = 1;$$

უტოლობას.

მაშასადამე, $\lambda_j(\tilde{f}(x)) \leq \lambda_j(x)$ ერთი მაინც $j \leq k$ ინდექსისთვის და მაშინ $x \in F_i$, აზგუარად $v_0, v_1, \dots, v_k \subset F_{i_0} \cup F_{i_1} \cup \dots \cup F_{i_k}$ და 15.22. თეორემის ძალით $F_{i_0} \cap F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} \neq \emptyset$. თუ $x \in F_{i_0} \cap F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$, მაშინ $F_i; i = 0, 1, \dots, n$ სიმრავლეების განსახლების ძალით

$$\lambda_0(\tilde{f}(x)) \leq \lambda_0(x), \lambda_1(\tilde{f}(x)) \leq \lambda_1(x), \dots, \lambda_n(\tilde{f}(x)) \leq \lambda_n(x).$$

მაგრამ ** და **** ტოლობების გამო, $\lambda_j(\tilde{f}(x)) < \lambda_j(x); j = 0, 1, 2, \dots, n$ მკაცრ უტოლობებს ადგილი არ ექნება, მაშასადამე

$$\lambda_0(\tilde{f}(x)) = \lambda_0(x), \lambda_1(\tilde{f}(x)) = \lambda_1(x), \dots, \lambda_n(\tilde{f}(x)) = \lambda_n(x). \quad \text{*****}$$

*, *** და ***** ფორმულებიდან კი გამოდინარეობს, რომ $\tilde{f}(x) = x$.

თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 15.24. ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის $\text{ind} R^n = \text{Ind} R^n = \dim R^n = n$.

დამტკიცება: როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ, ერთერთ მაგალითში, $\text{Ind} I^n \leq n$. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\text{Ind} I^n > n-1$. დაეუწვათ $\text{Ind} I^n \leq n-1$, $A_i = \{x_j \in I^n \mid x_i = 0\}$ და $B_i = \{x_j \in I^n \mid x_i = 1\}$. 15.15. თეორემიდან გამოდინარეობს, რომ არსებობენი სეთი ღია სიმრავლეები: $U_1, U_2, \dots, U_n$, რომ

$$A_i \subset U_i \subset \overline{U_i} \subset I^n \setminus B_i, i = 1, 2, \dots, n \quad \text{Fr} U_1 \cap \text{Fr} U_2 \cap \dots \cap \text{Fr} U_n = \emptyset.$$

განვიხილოთ ასახვა

$$f_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\rho(x, FrU_i)}{\rho(x, FrU_i) + \rho(x, A_i)} + \frac{1}{2}, & x \in \overline{U_i} \\ -\frac{1}{2} \frac{\rho(x, FrU_i)}{\rho(x, FrU_i) + \rho(x, B_i)} + \frac{1}{2}, & x \in I^n \setminus U_i \end{cases}$$

ადეილი შესაძლებელია, რომ ასე განსაზღვრული $f_i: I^n \rightarrow I$ ასახვა, სადაც ρ ნეულებრივი მეტრიკაა I^n ეკლიდეს კუბში, უწყვეტია ყოველი $i = 1, 2, \dots, n$ ინდექსისათვის. ცხადია,

$$f_i^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = FrU_i, f_i(A_i) = \{1\}, f_i(B_i) = \{0\}.$$

• და • ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ დიაგონალური ასახვა

$$f = f_1 \Delta f_2 \Delta \dots \Delta f_n : I^n \rightarrow I^n \text{ არ მიიღებს } \gamma = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) \in I^n$$

განვიხილოთ ასახვა $g: I^n \rightarrow I^n$, სადაც $g(x) = p(f(x))$ და p ცენტრალური პროექციაა

$I^n \setminus \{y\}$ სიბრავლისა y წერტილიდან I^n კუბის საზღვარზე ანუ $B = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cup B_i)$ სიბრავლეზე.

ასახვა g აკმაყოფილებს $g(I^n) \subset B$ პირობას და ასევე • ფორმულებიდან ჩეორე და მესამის ძალით: $g(A_i) \subset B_i, g(B_i) \subset A_i$ პირობებს.

აქედან გამომდინარე g ასახვას არ გააჩნია უძრავი წერტილი, ანუ არცერთი $x \in I^n$ წერტილისათვის $g(x) \neq x$. ეს ფაქტი ეწინააღმდეგება ბრაუერის თეორემას უძრავი

წერტილის შესახებ. მაშასადამე ჩვენი დაშვება, რომ $Ind I^n \leq n-1$ არ ყოფილა სწორი.

ამგვარად $Ind I^n > n-1$. რადგან $Ind I^n > n-1$ და $Ind I^n \leq n$, ამიტომ $Ind I^n = n$.

$Ind R^n \leq n$, $Ind I^n \leq Ind R^n$, აქედან გამომდინარე $Ind R^n = n$.

რადგან R^n სეპარაბელური მეტრიკული სივრცეა ამიტომ $ind R^n = Ind R^n = \dim R^n = n$. თეორემა დამტკიცდა

იმის გამო, რომ $Ind I^n = n$ და $I^n \subset R^n$ ჩაკეტილი ქვესიბრავლეა, ამასთან I^n სეპარაბელური მეტრიკული სივრცეა ადგილი ექნება ტოლობებს:

$$ind I^n = Ind I^n = \dim I^n = n.$$

იმის გამო, რომ $I^n \subset S^n$ ჩაკეტილი ქვესიბრავლეა, ამასთან S^n სეპარაბელური მეტრიკული სივრცეა, ადგილი ექნება ტოლობებს:

$$ind S^n = Ind S^n = \dim S^n = n.$$

ნაწილი 2

დიფერენციალური გეომეტრია

§1. ტოპოლოგიური და დიფერენცირებადი მრავალსახეობები

პაუხდორფის ტოპოლოგიურ X სივრცეს, რომლის თითოეულ წერტილს გააჩნია ეკლიდეს $E_n \approx R_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in R, i = 1, 2, \dots, n\}$ სივრცის რაიმე ღია ქვესიმრავლის პოპომორფული მიდამო, n განზომილებიანი ტოპოლოგიური მრავალსახეობა საზღვრის გარეშე ეწოდება. ხოლო, პაუხდორფის ტოპოლოგიურ სივრცეს, რომლის თითოეულ წერტილს გააჩნია ეკლიდეს $E_n^+ \approx R_n^+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n \mid x_n \geq 0\}$ ნახევარსივრცის რაიმე ღია ქვესიმრავლის პოპომორფული მიდამო n განზომილებიანი საზღვრიანი ტოპოლოგიური მრავალსახეობა ეწოდება. აღნიშნული $O \subset N_n, Q \subset E_n^+$ ღია ქვესიმრავლეებისაგან და $\phi: U \rightarrow O$ $\phi: V \rightarrow Q$ პოპომორფიზმებისაგან შედგენილ წყვილებს: (ϕ, O) , (ϕ, Q) ლოკალურ რუკებს უწოდებენ აქ განსაზღვრულ მრავალსახეობებზე, შესაბამისად.

შემდგომ n განზომილებიან მრავალსახეობებს აღვნიშნავთ ასე $M^n, L^n, \dots$

ეთქვას, M^n წარმოადგენს n განზომილებიანი ტოპოლოგიური მრავალსახეობას საზღვრით, ეთქვას, $x \in M^n$ ისეთი წერტილია ამ მრავალსახეობაში, რომ არსებობს ლოკალური რუკა (V, ϕ) , სადაც $x \in V$ და $\phi(x) \in E_{n-1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_n = 0\} \subset E_n^+$. საზღვრიანი M^n მრავალსახეობის ასეთი წერტილებისაგან შედგენილ სიმრავლეს ამ მრავალსახეობის საზღვარი ეწოდება. იგი აღინიშნება ასე: ∂M^n ამ სიმრავლის წერტილებს მრავალსახეობის საზღვრის წერტილები, ხოლო $M^n \setminus \partial M^n$ სიმრავლის წერტილებს მრავალსახეობის შიგა წერტილები ეწოდებათ.

თეორემა 1.1 n განზომილებიანი საზღვრიანი M^n მრავალსახეობის ∂M^n საზღვარი $n-1$ განზომილებიანი მრავალსახეობაა საზღვრის გარეშე.

დამტკიცება: $x \in \partial M^n$ ეთქვას იგი ისეთი წერტილია ამ მრავალსახეობაში, რომ არსებობს ლოკალური რუკა (V, ϕ) , სადაც $x \in V$ და $\phi(x) \in E_{n-1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_n = 0\} \subset E_n^+$. განვიხილოთ სიმრავლე $\phi(V) \cap E_{n-1}$. რადგან $\phi(V)$ ღიაა E_n^+ -ში, ამიტომ $\phi(V) \cap E_{n-1}$ ღიაა E_{n-1} სივრცეში.

განვიხილოთ სიმრავლე $\phi^{-1}(\phi(V) \cap E_{n-1}) \subset \partial M^n$ ეს სიმრავლე, იმის გამო, რომ ϕ

პოპომორფიზმია, $\phi(V) \cap E_{n-1}$ კი ღიაა ქვესიმრავლეა E_{n-1} სივრცეში, ღია იქნება M^n

ტოპოლოგიური სივრცის ∂M^n ქვესივრცეში. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 1.2. თუ M^n საზღვრიანი (საზღვრის გარეშე) ტოპოლოგიური მრავალსახეობაა, მაშინ მისი თითოეული წერტილისათვის არსებობს მიდამო, რომელიც პოპომორფულია ეკლიდეს $E_n^+(E_n)$ სივრცის.

დამტკიცება: როგორც ვიცით, $E_n^+(E_n)$ სივრცეში ღიაა ის O სიმრავლე, რომელის ყოველი $o \in O$ წერტილისთვის არსებობს ღია ბირთვი B_o' , რომელიც მთლიანად შედის მოცემულ სიმრავლეში. როგორც ვიცით, ღია B_o' ბირთვი პოპომორფულია E_n სივრცის, ამიტომ ამ ბირთვში არსებობს ქვესიმრავლე, რომელიც პოპომორფული იქნება E_n^+ სივრცის. ეთქვას

ახლა $x \in M''$ და (V, ϕ) ისეთი ლოკალური რუკაა, რომ $x \in V$ განვიხილოთ ღია ბირთვი $B_{\alpha+1} \subset \phi(V)$. ამ ბირთვში ცხადია იარსებებს ისეთი ღია ქვესიმრავლე $O^*(O)$, რომელიც მომეზომორობულია $E_n^+(E_n)$ სივრცის და რომელიც შეიცავს $\phi(x)$ წერტილს. თუ განვიხილავთ $\phi^{-1}(O^*) \cap \phi^{-1}(O) \subset M''$ ქვესიმრავლეს, დაინახავთ, რომ იგი წარმოადგენს $x \in M''$ წერტილის ისეთ მიდამოს, რომელიც მომეზომორობულია $E_n^+(E_n)$ სივრცის. თეორემა დამტკიცდა.

ეთქვათ. M'' n განზომილებიანი ტოპოლოგიური მრავალსახეობაა სახლერით, ან სახლერის ვარეშე. განვიხილოთ ამ მრავალსახეობის ორი ლოკალური რუკა: $(U, \phi), (V, \phi)$. ამ ლოკალურ რუკებს უწოდებენ k რიგამდე შეთანხმებულ რუკებს, თუ ასახვა:

$$\phi \circ \phi^{-1}|_{\phi(U \cap V)}: \phi(U \cap V) \rightarrow E_n^+(E_n)$$

k რიგამდე უწყვეტად წარმოებადია.

ეთქვათ, მოცემულია M'' ტოპოლოგიური მრავალსახეობის ლოკალურ რუკათა ოჯახი: $\{(U_\sigma, \phi_\sigma)\}$. თუ ეს ისეთი ოჯახია, რომ $\bigcup_\sigma U_\sigma = M''$ და ამ ოჯახიდან ამორჩეული ლოკალურ

რუკათა ყოველი წყვილი: $(U_{\sigma_i}, \phi_{\sigma_i}), (U_{\sigma_j}, \phi_{\sigma_j})$ k რიგამდე შეთანხმებულია, მაშინ მას M''

ტოპოლოგიური მრავალსახეობის C^k კლასის დიფერენცირებად ატლასს უწოდებენ.

M'' ტოპოლოგიური მრავალსახეობის C^k კლასის დიფერენცირებად ორ ატლასს უწოდებენ *გეოვალენტურ ატლასებს*, თუ მათი გაერთიანებით მიღებული ატლასი ასევე C^k კლასის დიფერენცირებად ატლასია

M'' ტოპოლოგიური მრავალსახეობის ატლასების გეოვალენტობის კლასს ამ მრავალსახეობაზე C^k კლასის დიფერენცირებად სტრუქტურას უწოდებენ, ხოლო

M'' ტოპოლოგიურ მრავალსახეობას C^k კლასის დიფერენცირებადი სტრუქტურით C^k კლასის n განზომილებიანი დიფერენცირებად მრავალსახეობას უწოდებენ.

თუ $k = \infty$ მაშინ ასეთ C^k კლასის n განზომილებიანი დიფერენცირებად მრავალსახეობას *გლუვი მრავალსახეობა* ეწოდება.

k რიგამდე უწყვეტად წარმოებად ასახვებს $\phi_{\sigma_i} \circ \phi_{\sigma_j}^{-1}|_{\phi_{\sigma_j}(U \cap V)}: \phi_{\sigma_i}(U \cap V) \rightarrow E_n^+(E_n)$ ერთი ლოკალური რუკიდან მეორეზე გადასვლის ასახვები, სხვანაირად, ლოკალურ რუკათა შეცვლის ასახვები ეწოდებათ. ამ ასახვათა *აკობის მატრიცა*:

$$M_{\sigma_i \sigma_j}(x) = \left(\frac{\partial(\phi_{\sigma_i} \circ \phi_{\sigma_j}^{-1})}{\partial x_i} \right) \Big|_{\phi_{\sigma_j}(x)},$$

სადაც $\phi_{\sigma_j}(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in U_{\sigma_i} \cap U_{\sigma_j}$. მისი დეტერმინანტს: $|M_{\sigma_i \sigma_j}(x)|$

დიფერენცირებადი სტრუქტურის აკობიანი ეწოდება მრავალსახეობის $x \in M''$ წერტილში.

რადგან ϕ_{σ} მომეზომორობებია, ამიტომ $|M_{\sigma \sigma}(x)| \neq 0$.

C^k კლასის n განზომილებიანი დიფერენცირებად მრავალსახეობას უწოდებენ

ორიენტირებულს, თუ $|M_{\sigma \sigma}(x)| > 0$ ყოველი σ, α , ინდექსებისათვის.

ეთქვათ, მოცემულია n განზომილებიანი M'' და m განზომილებიანი L''

C^k კლასის დიფერენცირებადი მრავალსახეობები.

M^n მრავალსახეობის L^m მრავალსახეობაში C^k კლასის დიფერენცირებადი ასახვა
 $f: M^n \rightarrow L^m$

ეწოდება ასახვას, თუ C^k კლასის დიფერენცირებადი ატლასთა ნებისმიერი წყვილისათვის: $\{(U_\sigma, \varphi_\sigma)\}, \{(V_\beta, \phi_\beta)\}$, სადაც $\{(U_\sigma, \varphi_\sigma)\}$ ატლასია M^n მრავალსახეობაზე და $\{(V_\beta, \phi_\beta)\}$ ატლასია L^m მრავალსახეობაზე, ასახვა

$$\phi_\beta \circ f \circ \varphi_\sigma^{-1} \Big|_{\varphi_\sigma(f^{-1}(V_\beta) \cap U_\sigma)}: \varphi_\sigma(f^{-1}(V_\beta) \cap U_\sigma) \rightarrow E_n^*(E_n)$$

C^k კლასის დიფერენცირებადი ასახვაა, ანუ მას გააჩნია k რიგამდე უწყვეტი წარმოებული. თუ M^n და L^m გლუვი მრავალსახეობებია, მაშინ $f: M^n \rightarrow L^m$ ასახვას ეწოდება **გლუვი ასახვა**, თუ

$$\phi_\beta \circ f \circ \varphi_\sigma^{-1} \Big|_{\varphi_\sigma(f^{-1}(V_\beta) \cap U_\sigma)}$$

ასახვა წარმოებადია ნებისმიერ რიგამდე.

თუ M^n და L^m გლუვი მრავალსახეობებია, მაშინ გლუვ ასახვას $f: M^n \rightarrow L^m$ ეწოდება **დიფეომორფიზმი** თუ f ჰომეომორფიზმია და f^{-1} ასევე გლუვია.

თუ არსებობს დიფეომორფიზმი $f: M^n \rightarrow L^m$, მაშინ M^n და L^m გლუვ მრავალსახეობებს **დიფეომორფული მრავალსახეობები ეწოდებათ**.

(ახალია დიფეომორფული მრავალსახეობების განზომილებები ერთმანეთს ემთხვევა, ანუ $n = m$).

გლუვი მრავალსახეობის მაგალითებია: ევკლიდეს სივრცე E_n , ამ სივრცის ღია

ქვესიმრავლეები. ეთქვათ $(U_\sigma, \varphi_\sigma)$ ლოკალური რუკაა M^n მრავალსახეობაზე. $\varphi_\sigma^{-1}: E_n \rightarrow U_\sigma$

ასახვას $U_\sigma \subset M^n$ სიმრავლეში შეაქვს კოორდინატთა ერთი ფიქსირებული სისტემა

$x_1^\sigma, x_2^\sigma, \dots, x_n^\sigma$. ეთქვათ, ახლა (U_β, ϕ_β) მეორე ისეთი ლოკალური რუკაა M^n მრავალსახეობაზე, რომ $U_\sigma \cap U_\beta \neq \emptyset$, სადაც $\emptyset$ (ვარიელი სიმრავლეა.

ანალოგიურად წინა შემთხვევისა $\varphi_\beta^{-1}: E_n \rightarrow U_\beta$ ასახვას შეაქვს კოორდინატთა ერთი

ფიქსირებული $x_1^\beta, x_2^\beta, \dots, x_n^\beta$ სისტემა $U_\beta \subset M^n$ სიმრავლეში. ამგვარად $U_\sigma \cap U_\beta \neq \emptyset$ სიმრავლეზე გვექნება კოორდინატთა ორი სხვადასხვა სისტემა.

$(U_\sigma, \varphi_\sigma)$ ლოკალური რუკიდან (U_β, ϕ_β) ლოკალურ რუკაზე გადასვლის ასახვა

$$\phi_\beta \circ \varphi_\sigma^{-1} \Big|_{\varphi_\sigma(U_\sigma \cap U_\beta)}$$

განსაზღვრავს კოორდინატთა ამ სისტემებს შორის ურთიერთდამოკიდებულებას.

ეს ურთიერთდამოკიდებულება ასე გამოისახება:

$$x_1^\sigma = x_1^\sigma(x_1^\beta, x_2^\beta, \dots, x_n^\beta), \quad x_1^\beta = x_1^\beta(x_1^\sigma, x_2^\sigma, \dots, x_n^\sigma),$$

$$x_1^\sigma = x_2^\sigma(x_1^\beta, x_2^\beta, \dots, x_n^\beta), \quad x_2^\beta = x_2^\beta(x_1^\sigma, x_2^\sigma, \dots, x_n^\sigma),$$

$$x_n^\sigma = x_n^\sigma(x_1^\beta, x_2^\beta, \dots, x_n^\beta), \quad x_n^\beta = x_n^\beta(x_1^\sigma, x_2^\sigma, \dots, x_n^\sigma).$$

კოორდინატთა ამ გარდაქმნების იაკობიანები $x \in M^n$ წერტილში არანულოვანია:

$$\left(\frac{\partial x_i^\sigma}{\partial x_j^\beta} \right) \Big|_{\varphi_\beta(x)} \neq 0, \quad \left(\frac{\partial x_i^\beta}{\partial x_j^\sigma} \right) \Big|_{\varphi_\sigma(x)} \neq 0,$$

სადაც i სტრიქონების და j სუბეტიების ინდექსებია.

ეთქვას, $(U_\sigma, \varphi_\sigma)$ და (U_β, φ_β) ლოკალური რუკებია M^n დიფერენცირებად მრავალსახეობაზე, $x \in U_\sigma \cap U_\beta$. M^n დიფერენცირებადი მრავალსახეობის მხები ვექტორი x წერტილში ეწოდება x ვექტორს, რომლის $\xi_1^\sigma, \xi_2^\sigma, \dots, \xi_n^\sigma$ კოორდინატები $(U_\sigma, \varphi_\sigma)$ ლოკალური რუკით $U_\sigma \cap U_\beta$ სიმრავლეზე განსაზღვრულ კოორდინატთა $x_1^\sigma, x_2^\sigma, \dots, x_n^\sigma$ სისტემაში გამოისახება იგივე x ვექტორის $\xi_1^\beta, \xi_2^\beta, \dots, \xi_n^\beta$ კოორდინატებით (U_β, φ_β) ლოკალური რუკით იგივე $U_\sigma \cap U_\beta$ სიმრავლეზე განსაზღვრულ კოორდინატთა $x_1^\beta, x_2^\beta, \dots, x_n^\beta$ სისტემაში შემდეგნაირად:

$$\xi_1^\sigma = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i^\sigma}{\partial x_i^\beta} \Big|_x \xi_i^\beta,$$

$$\xi_2^\sigma = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i^\sigma}{\partial x_i^\beta} \Big|_x \xi_i^\beta,$$

$$\xi_n^\sigma = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i^\sigma}{\partial x_i^\beta} \Big|_x \xi_i^\beta$$

ასეთ ვექტორთა ერთობლიობა $T_x M^n$ ცხადია ნაეჭილია ვექტორთა შეკრებისა და ვექტორის რიცხვზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ. ამიტომ ეს ერთობლიობა წარმოადგენს n განზომილებია წრფივ სივრცეს, რომელსაც M^n

დიფერენცირებადი მრავალსახეობის $x \in M^n$ წერტილში მხები სივრცე ეწოდება.

ეთქვას, ახლა $f: M^n \rightarrow L^m$ რაიმე გლუვი ასხეა M^n გლუვი მრავალსახეობისა L^m გლუვ მრავალსახეობაში, $\{(U_\sigma, \varphi_\sigma)\}$ და $\{(V_\beta, \phi_\beta)\}$ კი გლუვი ატლასები ამ მრავალსახეობებში. იაკობის მატრიცა:

$$R_{\sigma\beta}(x) = \left(\frac{\partial(\phi_\beta \circ f \circ \varphi_\sigma^{-1})}{\partial x_i} \right) \Big|_{\varphi_\sigma(x)}, x \in f^{-1}(V_\beta) \cap U_\sigma$$

წარმოადგენს $n \times m$ რიგის მატრიცის და განსაზღვრავს წრფივი სივრცეების

$df: T_x M^n \rightarrow T_{f(x)} L^m$ წრფივ ასახვას. მას $f: M^n \rightarrow L^m$ ასახვის დიფერენციალი ეწოდება.

გლუვი ასახვას $f: M^n \rightarrow L^m$ უწოდებენ *იმპერსიას*. ანუ M^n გლუვი მრავალსახეობის *გლუვი ჩაძირვას* $x \in M^n$ წერტილში, თუ $df: T_x M^n \rightarrow T_{f(x)} L^m$ მონომორფიზმია. ცხადია იმპერსიას ადგილი ექნება იმ შემთხვევაში, როდესაც $n \leq m$ და $R_{\sigma\theta}(x)$ მატრიცის რანგი ტოლია n -ის.

გლუვი ასახვას $f: M^n \rightarrow L^m$ უწოდებენ *სუბმერსიას* $x \in M^n$ წერტილში, თუ $df: T_x M^n \rightarrow T_{f(x)} L^m$ ეპიმორფიზმია. ცხადია სუბმერსიას ადგილი აქვს იმ შემთხვევაში, როდესაც $n \geq m$ და $R_{\sigma\theta}(x)$ მატრიცის რანგი ტოლია m -ის.

$f: M^n \rightarrow L^m$ ასახვას უწოდებენ იმპერსიას(სუბმერსიას) თუ იგი იმპერსია(სუბმერსია)ა M^n მრავალსახეობის თითოეულ წერტილში.

გლუვი L^m მრავალსახეობას ეწოდება M^n გლუვი მრავალსახეობის ქვემრავალსახეობა, თუ სიმრავლურად $L^m \subset M^n$ და იგივეური ჩადგმა $i: L^m \rightarrow M^n$ იმპერსიაა ყოველ $x \in L^m$ წერტილში.

თეორემა 1.3. თუ $f: M^n \rightarrow N^m$, $g: N^m \rightarrow L^k$, $h: M^n \rightarrow L^k$ გლუვი ასახვებია, ამასთან $h = g \circ f$, მაშინ $dh = dg \circ df$

დამტკიცება: მართლაც, ეთქვათ: (U, φ) , (V, ϕ) , (W, ξ) ლოკალური რუკებია M^n , N^m , L^k მრავალსახეობებზე, შესაბამისად; ამასთან $f(U) \subset V$ და $g(V) \subset W$ ეთქვათ: $\tilde{f}$, $\tilde{g}$, $\tilde{h}$ ასახვები წარმოადგენენ f , g , h ასახვებს ლოკალურ კოორდინატებში. ეთქვათ, ასევე: $p \in U$, $f(p) = q \in V$, $x = \varphi(p)$, $y = \tilde{f}(x)$, $q = \phi^{-1}(y)$, $z = \tilde{h}(x) = \tilde{g}(\tilde{f}(x))$.

რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამო:

$$\left(\frac{\partial(z_i)}{\partial x_k} \right) \Big|_p = \left(\frac{\partial z_i}{\partial y_j} \right) \Big|_q \cdot \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_k} \right) \Big|_p$$

dh ასახვას განსაზღვრავს $\left(\frac{\partial(z_i)}{\partial x_k} \right) \Big|_p$ მატრიცი, dg ასახვას - $\left(\frac{\partial z_i}{\partial y_j} \right) \Big|_q$ მატრიცი, ხოლო df

ასახვას: $\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_k} \right) \Big|_p$ მატრიცი, მაშასადამე $dh = dg \circ df$ თეორემა დამტკიცდა.

ახლა განვიხილოთ გლუვი მრავალსახეობის ერთი მაგალითი: k *განზომილებიანი არაგადამტარებელი ზედაპირი* n *განზომილებიანი ევკლიდეს* E_n *სივრცეში* ეწოდება მის წერტილთა იმ ერთობლიობას, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებებს:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$f_{n-k}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0;$$

სადაც $1 \leq k \leq n-1$, $f_i, i = 1, 2, \dots, n-k$ ცალევი ფუნქციებია და $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i=1, \dots, n-k; j=1, \dots, n}$ მატრიცის რანგი

ზედაპირის ყოველ წერტილში ტოლია $n-k$ -ის.

თეორემა 1.4. თუ უკანასკნელი განტოლებათა სისტემით მოცემული ზედაპირის ნებისმიერ

$x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ წერტილში $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i=1, \dots, n-k; j=1, \dots, n}$ მატრიცის რომელიმე მინორი $J_{j_1, j_2, \dots, j_{n-k}}$, რომელიც

შედგება $j_1, j_2, \dots, j_{n-k}$ ნომრის სვეტებისაგან განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ ეს ზედაპირი წარმოადგენს k განზომილებიან გლუვ მრავალსახეობას.

დამტკიცება: რადგან $J_{j_1, j_2, \dots, j_{n-k}}$ მინორი ნულისაგან განსხვავებულია. თუ გამოვიყენებთ მათემატიკური ანალიზში ცნობილ არაცხადი ფუნქციის შესახებ თეორემას და გამოვსახებთ $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{n-k}}$ ცვლადებს დანარჩენი ცვლადების საშუალებით მივიღებთ:

$$x_{j_1} = \phi_1(y_1, y_2, \dots, y_k),$$

$$x_{j_2} = \phi_2(y_1, y_2, \dots, y_k),$$

$$x_{j_{n-k}} = \phi_{n-k}(y_1, y_2, \dots, y_k);$$

სადაც ცვლადთა სისტემა $y_1, y_2, \dots, y_k$ მიღებულია ცვლადთა $x_1, x_2, \dots, x_n$ სისტემიდან

$x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{n-k}}$ ცვლადების ამოღებით, ხოლო ფუნქციები $\phi_i, i = 1, 2, \dots, n-k$ გლუვია.

განვიხილოთ $U_{j_1, j_2, \dots, j_{n-k}}$ იმ წერტილთა ერთობლიობა, რომელშიც მინორი $J_{j_1, j_2, \dots, j_{n-k}}$ განსხვავდება ნულისაგან, რადგან ეს მინორი თავისი არგუმენტის გლუვ ფანქციას წარმოადგენს, ამიტომ განხილული სიმრავლე ღიაა. **ტოლობებს ცხადია, ადგილი აქვს $U_{j_1, j_2, \dots, j_{n-k}}$ სიმრავლის ყოველ

წერტილში. ასეთი სიმრავლეების ოჯახი, იმის გამო, რომ $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i=1, \dots, n-k; j=1, \dots, n}$ მატრიცის რანგი

ყოველ წერტილში ტოლია $n-k$ -ის, ფარავს ჩვენ ზედაპირს.

განვიხილოთ მეორე სიმრავლე $U_{i_1, i_2, \dots, i_{n-k}}$, რომელიც შედგება იმ წერტილებისაგან რომელთადაც $J_{i_1, i_2, \dots, i_{n-k}}$ მინორი განსხვავებულია ნულისაგან. როგორც ზემოთ

შეგვიძლია დაწეროთ

$$x_{i_1} = \phi_1(z_1, z_2, \dots, z_k),$$

$$x_{i_2} = \phi_2(z_1, z_2, \dots, z_k),$$

$$x_{i_{n-k}} = \phi_{n-k}(z_1, z_2, \dots, z_k);$$

სადაც ცვლადთა სისტემა $z_1, z_2, \dots, z_k$ მიღებულია ცვლადთა $x_1, x_2, \dots, x_n$ სისტემიდან

$x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-k}}$ ცვლადების ამოღებით, ხოლო ფუნქციები $\phi_i, i = 1, 2, \dots, n-k$ გლუვია.

თუ $U_{j_1 j_2 \dots j_{n-1}} \cap U_{j_1 j_2 \dots j_{n-1}} \neq \emptyset$, მაშინ ამ თანაქვეთაზე გვაქვს კოორდინატთა გარდაქმნის(ერთი ლოკალური რუკიდან მეორეზე გადასვლის)გადასვლის)

ფუნქციები $(y) \rightarrow (z)$ და $(z) \rightarrow (y)$

$$y_1 = z_1 (= x_1),$$

$$y_{j_1-1} = z_{j_1-1} (= x_{j_1-1}),$$

$$\phi_1(y_1, y_2, \dots, y_k) = z_{j_1} (= x_{j_1}),$$

$$y_{j_1} = z_{j_1+1} (= x_{j_1+1}),$$

$$y_{j_1-2} = z_{j_1-1} (= x_{j_1-1}),$$

$$y_{j_1-1} = \phi_1(z_1, z_2, \dots, z_k) (= x_{j_1}),$$

$$y_{j_1} = z_{j_1} (= x_{j_1+1}),$$

$$y_k = z_k (= x_k);$$

სადაც $1 < j_1 < s_1 < j_2 < s_2 < j_3 < \dots$

ჩხადია, ეს გადასვლის ფუნქციები ურთიერთშეცვევადია, და შესაბამისი იაკობიანები, ამის გამო ნულისაგან განსხვავებულია. თეორემა დამტკიცდა.

აღვილია, აღნიშნული იაკობიანების გამოთვლაც: $(y) \rightarrow (z)$ გადასვლის იაკობიანი იქნება:

$$J_{(y) \rightarrow (z)} = \pm \frac{J_{j_1 j_2 \dots j_{n-1}}}{J_{j_1 j_2 \dots j_{n-1}}},$$

ხოლო, $(z) \rightarrow (y)$ გადასვლისა:

$$J_{(z) \rightarrow (y)} = \pm \frac{J_{j_1 j_2 \dots j_{n-1}}}{J_{j_1 j_2 \dots j_{n-1}}}.$$

შენიშვნა: ჩვენ განვიხილეთ ისეთი ზედაპირი რომლისთვისაც

$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i=1, n-k; j=1, n}$ მატრიცის რანგი ყოველ წერტილში ტოლია $n-k$ -ის. შეგვეძლო განგვეხილა

ის შემთხვევაც, როდესაც ამ მატრიცის რანგი რაიმე წერტილში არ არის $n-k$ -ს ტოლი, მაშინ ასეთ წერტილს ზედაპირზე *განსაკუთრებული წერტილი* ეწოდება, ხოლო ზედაპირს- *განსაკუთრებული ზედაპირს მოცემულ წერტილში*. თუ ზედაპირზე განსაკუთრებული წერტილები არ არის, მაშინ ამ ზედაპირს *არაგანსაკუთრებული ზედაპირი* ეწოდება.

ზედაპირის, როგორც მრავალსახეობის მხები ვექტორი მის რაიმე x წერტილში არის ისეთი ვექტორი, რომლის კოორდინატებიც ერთი ლოკალური რუკიდან მეორეზე გადასვლისას იცვლებიან შემდეგნაირად:

$$\xi_j' = \sum_{i=1}^k \frac{\partial z_i}{\partial y_j} \Big|_x \xi_i, j = 1, 2, \dots, k.$$

განვიხილოთ ვექტორი $(\frac{\partial f_l}{\partial x_1}, \frac{\partial f_l}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_l}{\partial x_n})$, $l = 1, 2, \dots, n-k$ და მისი სკალარული ნამრავლი

ერთერთ მხებ ვექტორთან. თუ $\xi_1^z, \xi_2^z, \dots, \xi_k^z$ ამ ვექტორის კოორდინატებია პირველი ლოკალური რუკით განსაზღვრულ $z_1, z_2, \dots, z_k$ კოორდინატთა სისტემაში, მაშინ ეს ვექტორი შეგვიძლია ჩავთვალოთ R^n ის იმ ელემენტად, რომელიც მიიღება $x_1, x_2, \dots, x_n$ ვექტორიდან $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-k}}$ კოორდინატების ამოღებით და მათ მაგივრად ნულების ჩაწერით, ხოლო დანარჩენი კოორდინატების შესაბამისი სიმბოლოების შეცვლით $\xi_1^z, \xi_2^z, \dots, \xi_k^z$ სიდიდეებით ინდექსთა ზრდის შენახვით განსაზღვრული შესაბამისობით. ასეთ შემთხვევაში სკალარულ ნამრავლს ექნება სახე:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_l}{\partial x_j} \xi_j^z = \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_l}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_s} \xi_s^y,$$

სადაც $y_1, y_2, \dots, y_k$ მეორე ლოკალური რუკის კოორდინატთა სისტემაა, ხოლო $\xi_1^y, \xi_2^y, \dots, \xi_k^y$ მოცემული მხები ვექტორის კოორდინატები ამ სისტემაში.

თუ z , სიმბოლოს შეეცვლით x , სიმბოლოთი და ჩავთვალოთ, რომ

$x_{i_1} = z_{i_1}, x_{i_2} = z_{i_2}, \dots, x_{i_{n-k}} = z_{i_{n-k}}$ გვექნება:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_l}{\partial x_j} \xi_j^z = \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_l}{\partial y_s} \xi_s^y$$

თუ y , სიმბოლოს შეეცვლით x , სიმბოლოთი და ჩავთვალოთ, რომ

$x_{i_1} = y_{i_1}, x_{i_2} = y_{i_2}, \dots, x_{i_{n-k}} = y_{i_{n-k}}$ გვექნება: $\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_l}{\partial x_j} \xi_j^z = \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_l}{\partial x_s} \xi_s^y$, ანუ $\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_l}{\partial x_j} (\xi_j^z - \xi_j^y) = 0$. ვექტორი

$(\frac{\partial f_l}{\partial x_1}, \frac{\partial f_l}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_l}{\partial x_n})$, საზოგადოდ არანულოვანია, ამიტომ ნულის ტოლია

$(\xi_1^z - \xi_1^y, \xi_2^z - \xi_2^y, \dots, \xi_n^z - \xi_n^y)$ ვექტორი, რაც ნიშნავს, რომ

$\xi_i^z = \xi_i^y$ რაც არ შეიძლება, რადგან $\xi_i^z, \xi_i^y, i = 1, 2, \dots, n$ სხვადასხვა ლოკალური რუკებით განსაზღვრული კოორდინატთა სისტემის კოორდინატებია ზედაპირზე, როგორც

მრავალსახეობაზე. აქედან გამომდინარე, $\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_l}{\partial x_j} \xi_j^z = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_l}{\partial x_j} \xi_j^y = 0$.

ასეა, თუ ერთ შემთხვევაში x , სიმბოლოს შეეცვლით z , სიმბოლოთი და მეორე შემთხვევაში y , სიმბოლოთი, მივიღებთ, რომ ზედაპირის მხები ვექტორები უნდა აკმაყოფილებდნენ შემდეგ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემებს:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_l}{\partial x_j} \xi_j^z = 0, l = 1, 2, \dots, n-k,$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_l}{\partial y_j} \xi_j^y = 0, l = 1, 2, \dots, n-k.$$

პირიქით, თუ ექვტორის კოორდინატები ამ განტოლებათა სისტემებს აკმაყოფილებენ, მაშინ ცხადია, ამ კოორდინატებს შორის არსებობს დამოკიდებულება:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \xi_j^* = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \xi_j^* = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \xi_j^*.$$

საიდანაც გამოდინარეობს, რომ

$$\xi_j^* = \sum_{i=1}^m \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \Big|_x \xi_j^*, j = 1, 2, \dots, k.$$

განვიხილოთ M'' მრავალსახეობის მხები სიბრტყე $T_x M''$

მის რაიზე $x \in M''$ წერტილში. ვთქვათ $\tau = (0, e_1, e_2, \dots, e_n)$ კოორდინატთა სისტემა, ანუ არაგადამგვარებული რეპერია ამ მხებ სიბრტყეში. როგორც ვიცით, ყოველი ორი ასეთი რეპერი τ_1, τ_2 ერთმანეთთან დაკავშირებულია წრფივი არაგადამგვარებული გარდაქმნით:

$$\tau_1 = A \tau_2,$$

სადაც A არაგადამგვარებული მატრიცია. თუ ამ მატრიცის $|A|$ დეტერმინანტი დადებითია, მაშინ ამბობენ, რომ რეპერები ერთნაირი ორიენტაციისაა. თუ $|A| < 0$, მაშინ-ერთმანეთის საპირისპირო ორიენტაციის. ცხადია მრავალსახეობის თითოეულ $x \in M''$ წერტილში გვაქვს მხები რეპერების ორი კლასი, თითოეულ მათგანში შემავალი რეპერები ერთნაირი ორიენტაციისაა.

რამდენადაც $T_x M''$ სივრცის თითოეული რეპერი x წერტილიდან შეიძლება უწყვეტად გადავიტანოთ ამ წერტილის მახლობელ რომელიმე წერტილში, ამიტომ შეგვიძლია ვიღლაპირაკოთ რეპერთა ორიენტაციის კლასების უწყვეტ დამოკიდებულობაზე მრავალსახეობის წერტილებთან.

ახლა განვიხილოთ მრავალსახეობათა ორიენტირებულობის მეორე განსაზღვრება: *მრავალსახეობას ეწოდება ორიენტირებული*, თუ მის ყოველ წერტილში არჩეულია რეპერთა ორიენტაციის ისეთი კლასები, რომ წერტილებსა და რეპერთა ორიენტაციის კლასებს შორის შესაბამისობა უწყვეტია. თუ მრავალსახეობის ყოველ წერტილს შეიძლება უწყვეტად შევესაბამოთ რეპერთა ორიენტაციის კლასი, მაშინ მრავალსახეობას *ორიენტირებადი მრავალსახეობა* ეწოდება.

შეიძლება ვანეწნოთ, რომ ადრე მოყვანილი განსაზღვრება მრავალსახეობის ორიენტირებულობისა ეკვივალენტურია ახლახანს მოყვანილი განსაზღვრებისა. მართლაც, თუ მრავალსახეობა ორიენტირებულია პირველი განსაზღვრებით, მაშინ მის ყოველ $x \in M''$ წერტილში მაორიენტირებელი რეპერად ჩათვალთ ის რეპერი, რემელის $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$

ექვტორებიც წარმოადგენენ იმ (U, ϕ) ლოკალური რუკის $x_1, x_2, \dots, x_n$ საკოორდინატო ღერძების ორტებს, რომელშიდაც მდებარეობს x წერტილი. რადგან ამ შემთხვევაში გადასვლის ფუნქციების იაკობიანი დადებითია, რეპერი, რომლის ექვტორებიც წარმოადგენენ მეორე ლოკალური რუკის $(V, \phi), x \in U \cap V$ $y_1, y_2, \dots, y_n$ საკოორდინატო ღერძების ორტებს:

$e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ პირველი რეპერის ორიენტაციისაა. ეს კი ნიშნავს, რომ მრავალსახეობა ორიენტირებულია მეორე განსაზღვრებითაც.

ვთქვათ, ახლა მრავალსახეობა ორიენტირებულია მეორე განსაზღვრებით, ანუ მრავალსახეობის თითოეულ x წერტილში დაფიქსირებულია რეპერთა ორიენტაციის კლასი,

ისე, რომ შესაბამისობა უწყვეტია. განვიხილოთ x წერტილის საკმარისად მცირე ε მიდამო და ამ მიდამოში შევიტანოთ ისეთი კოორდინატები $z_1, z_2, \dots, z_n$, რომ $z_1, z_2, \dots, z_n$

საკოორდინატო ღერძების ორტეხისაგან შედგენილი ევქლიდესი $e_1, e_2, \dots, e_n$ სისტემა წარმოადგენდეს იგივე ორიენტაციის რეპერს როგორცაა x წერტილის ε მიდამოს ყოველ წერტილში დაფიქსირებული მაორიენტირებული რეპერები. ასეთი მცირე ε მიდამო არსებობს, რადგან მრავალსახეობის წერტილებში დაფიქსირებული რეპერთა მაორიენტირებული კლასები უწყვეტად არიან დამოკიდებული ამ წერტილებზე. თუ მრავალსახეობის ყოველ წერტილს ამ წესით დაუკავშირებთ საკოორდინატო სისტემებს, მაშინ ენიადან მრავალსახეობის ყოველ წერტილში არჩეული კოორდინატთა სისტემის ორტეხისაგან წარმოდგენილი რეპერი იგივე ორიენტაციისაა რაც მაორიენტირებულ რეპერთა კლასში შემავალი რეპერები. მივიღებთ მრავალსახეობის დაფარვას ისეთი ლოკალური რუკებით რომლებშიც გადასვლის იაკობიანები დადებითი იქნება. ამგვარად დაფარვით ის რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

თეორემა 15 არაგანსაკუთრებული გლუვი ზედაპირი M^k განსაზღვრულია განტოლებათა სისტემით n განზომილებიან სივრცეში, წარმოადგენს ორიენტირებულ გლუვ მრავალსახეობას.

დამტკიცება: განვიხილოთ ასეთი ზედაპირის, როგორც მრავალსახეობის რაიმე x წერტილში მხები სივრცის $r = (O, e_1, e_2, \dots, e_k)$ რეპერი. ცხადია n ევქლიდესისაგან შედგენილი სისტემა:

$$\tilde{r} = (e_1, e_2, \dots, e_k, \text{grad}f_1, \text{grad}f_2, \dots, \text{grad}f_{n-k}) \quad \text{წრფივად დამოუკიდებელია, მართლაც სისტემები } e_1, e_2, \dots, e_k, \text{ grad}f_1, \text{grad}f_2, \dots, \text{grad}f_{n-k}$$

ცალცალკე წრფივად დამოუკიდებელია და როგორც ზემოთ ვნახეთ $e_i, i = 1, 2, \dots, k$,

$\text{grad}f_j, j = 1, 2, \dots, n-k$ ევქლიდესისაგან შედგენილი წყვილები ურთიერთორთოვანია. ეს კი

ნიშნავს მთელი სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობას. დაეაფიქსირიოთ M^k ზედაპირის თითოეულ წერტილში მხები რეპერების ორიენტაციის კლასი ისე, რომ

$\tilde{r} = (e_1, e_2, \dots, e_k, \text{grad}f_1, \text{grad}f_2, \dots, \text{grad}f_{n-k})$ ევქლიდესით წარმოდგენილი რეპერის ორიენტაცია ემთხვეოდეს E_n სივრცის სტანდარტულ $(O, e_1, e_2, \dots, e_n)$ რეპერს. ცხადია, ეს კლასები ცხადია, უწყვეტად დამოკიდებული შესაბამის წერტილებზე. თეორემა დამტკიცდა.

მაგალითი: განვიხილოთ $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 1$ განტოლებით განსაზღვრული n

განზომილებიანი ზედაპირი $n+1$ განზომილებიან E_{n+1} ევკლიდეს სივრცეში რომელსაც n

განზომილებიანი სფერო ეწოდება. იგი აღინიშნება ასე: S^n

ცხადია, ეს ზედაპირი არაგანსაკუთრებულია, და ამიტომ ორიენტირებადია.

შევიტანოთ სფეროზე ლოკალური კოორდინატები, ეთქვას U_N წარმოადგენს არეს $S^n \setminus \{N\}$

სფეროზე, სადაც N ისეთი წერტილია სფეროზე რომლის კოორდინატები E_{n+1} სივრცეში დაფიქსირებულ კოორდინატთა სისტემაში $\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, 1$ -ია, ხოლო, U_S წარმოადგენს $S^n \setminus \{S\}$ არეს, სადაც S წერტილია სფეროზე კოორდინატებით $\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, -1$.

ეს არეები ცხადია ფარავენ სფეროს და წარმოადგენენ ღია სიმრავლეებს შევიტანოთ U_N არეში ლოკალურ კოორდინატთა სისტემა

$y_1^N, y_2^N, \dots, y_n^N$, რიმიელიც მიიღება მისი წერტილების პროექციით $x_{n+1} = 0$ განტოლებით განსაზღვრულ სიბრტყეზე E_{n+1} სივრცეში ეგრეთწოდებული *სტერეოგრაფიული პროექციის* დროს. ასეთი პროექციის დროს U_N არის x წერტილს შეესაბამება $x_{n+1} = 0$ განტოლებით განსაზღვრულ სიბრტყეზე მდებარე ის $N(x)$ წერტილი, რომელიც მდებარეობს N წერტილზე და x წერტილზე გაშვებული წრფის აღნიშნულ სიბრტყესთან გადაკვეთით. სწორედ ამ წერტილის კოორდინატები უნდა მივიღოთ x წერტილის ლოკალურ კოეფიციენტებად U_N არეში.

ანალოგიურად შეიძლება შევიტანოთ ლოკალური კოორდინატა $y_1^S, y_2^S, \dots, y_n^S$, სისტემა U_S არეშიადაც, თუ N წერტილს შევცვლით S წერტილით.

x წერტილის შესაბამის წერტილები:

$$N(x) = (y_1^N(x), y_2^N(x), \dots, y_n^N(x)), \quad S(x) = (y_1^S(x), y_2^S(x), \dots, y_n^S(x))$$

შესაბამისი სტერეოგრაფიული პროექციების დროს, $x_{n+1} = 0$ სიბრტყეზე მდებარეობენ სფეროს ცენტრიდან გამოშვებულ ერთ და იმავე სხივზე. ამასთან $\overline{N(x)} \cdot \overline{S(x)} = 1$. ამის გამო, ერთი ლოკალური კოორდინატებიდან მეორეზე გადასვლის ფუნქციებს ექნება სახე:

$$y_i^S = \frac{y_i^N}{\sum_{k=1}^n (y_k^N)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

S^N სფერო E_{n+1} სივრცეს ყოფს ორ თანაუკვეთ ნაწილებად: ეს ნაწილები შედგება E_{n+1} სივრცის იმ წერტილებისაგან რომლის კოორდინატები ევკლიდეს მოცემულ სივრცეში დაფიქსირებულ კოორდინატთა სისტემაში აკმაყოფილებენ უტოლობებს:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 - 1 < 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 - 1 > 0, \quad \text{შესაბამისად.}$$

ბმულ $n-1$ განზომილებიან ქვემრავალსახეობას ევკლიდეს E_n სივრცეში უწოდებენ ორმხრივს თუ მის ყოველ წერტილში არსებობს მხები სივრცის ვექტორების ორთოგონალური ვექტორი E^n ვექტორულ სივრცეში და წერტილების და ვექტორების ეს შესაბამისობა ცალსახაა და უწყვეტი.

ასეთ ქვემრავალსახეობას სხვანაირად *ორმხრივ ჰიპერზედაპირს* უწოდებენ.

თეორემა 1.6. ორმხრივი M ჰიპერზედაპირი E_n სივრცეში ორიენტირებადი.

დამტკიცება: ვთქვათ, n ერთეულოვანი ნორმალთა ორმხრივ ჰიპერზედაპირის რაიმე $x \in M$ წერტილში. განვიხილოთ $T_x M$ სივრცის ისეთი რეპერის განმსაზღვრელი ვექტორთა სისტემა $\tau = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ რომლის ორიენტაცია ისეთია, რომ ვექტორთა $\tilde{\tau} = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, n)$ სისტემით განსაზღვრული რეპერი იგივე ორიენტაციისაა როგორი ორიენტაციისაც არის E_n სივრცის სტანდარტ ული რეპერი. ამგვარად ჰიპერზედაპირის წერტილებს უწყვეტად შევუსაბამეთ რეპერთა ორიენტაციის კლასები. რაც ნიშნავს ზედაპირის ორიენტირებულობას. თეორემა დამტკიცდა.

განვიხილოთ გლუვ მრავალსახეობათა რამოდენიმე მაგალითი:

E^{-1} სივრცის ექვტორებს შორის შევიტანით ეკვივალენტობის მიმართება: $x \approx y$, თუ $y = \lambda x$. ამ ეკვივალენტობის მიმართებით განსაზღვრული კლასების სიმრავლე აღენიშნოთ RP^n -ით და ეუწოდოთ მას n განზომილებიანი პროექციული სივრცე. ამ სივრცეში ტოპოლოგიურ სტრუქტურად თელიან E^{-1} სივრციდან ინდუცირებულ ფაქტორტოპოლოგიურ სტრუქტურას.

ცხადია RP^n სივრცე შეიძლება გაგვიგვივოთ E_{n+1} სივრცეში დაფიქსირებული კოორდინატთა სისტემის სათავეზე გამავალი წრფეების სიმრავლესთან.

ყოველი ასეთი წრფე გადაკვეთს S^n სფეროს, რომლის ცენტრიც კოორდინატთა სათავეში იმყოფება, ორ სხვადასხვა დიამეტრალურად მოპირდაპირე წერტილში. აქედან გამომდინარე, RP^n სიმრავლე შეიძლება გაგვიგვივოთ S^n სფეროს დიამეტრალურად მოპირდაპირე წერტილთა წყვილების სიმრავლესთან. სხვანაირად, შეიძლება ითქვას, რომ RP^n სიმრავლე მიიღება S^n სფეროდან დიამეტრალურად მოპირდაპირე წერტილების გაიგივებით.

შვეიტანოთ დიფერენცირებადი სტრუქტურა RP^n პროექციულ სივრცეში.

განვიხილოთ $U_q \subset RP^n$ არე, რომელიც შედგება ექვტორთა იმ კლასებისაგან რომელთა q ნომრის კოორდინატიც ტოლია შვეიტანოთ ამ არეში ლოკალური კოორდინატები:

$$x_1^q = \frac{y_1}{y_q}, x_2^q = \frac{y_2}{y_q}, \dots, x_{q-1}^q = \frac{y_{q-1}}{y_q}, x_q^q = \frac{y_{q+1}}{y_q}, \dots, x_n^q = \frac{y_{n+1}}{y_q}.$$

ასეთი $U_q, q = 1, 2, \dots, n+1$ არეები ფარავენ მთელ პროექციულ სივრცეს.

U_1 არეში გვექნება

$$x_1^1 = \frac{y_{n+1}}{y_1}, x_2^1 = \frac{y_{n+1}}{y_1}, \dots, x_q^1 = \frac{y_{q+1}}{y_1}, \dots, x_n^1 = \frac{y_{n+1}}{y_1}$$

კოორდინატები.

U_2 არეში გვექნება

$$x_1^2 = \frac{y_1}{y_2}, x_2^2 = \frac{y_2}{y_2}, \dots, x_q^2 = \frac{y_{q+1}}{y_2}, \dots, x_n^2 = \frac{y_{n+1}}{y_2}$$

კოორდინატები.

არეთა $U_1 \cap U_2$ თანაკვეთაზე კი გვექნება გადასვლის

$$(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1) \rightarrow (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)$$

ფუნქციები:

$$x_1^2 = \frac{1}{x_1^1}, x_2^2 = \frac{x_2^1}{x_1^1}, x_3^2 = \frac{x_3^1}{x_1^1}, \dots, x_n^2 = \frac{x_n^1}{x_1^1}.$$

ამ გადასვლის ფუნქციათა იაკობიანი იქნება:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{(x_1')^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{x_2'}{(x_1')^2} & \frac{1}{x_1'} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{x_3'}{(x_1')^2} & 0 & \frac{1}{x_1'} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{(x_1')^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{x_1'} \end{pmatrix} = -\frac{1}{(x_1')^{n+1}} \neq 0.$$

ანალოგიურად შეიძლება მივიღოთ გადახდის ფუნქციები სხვა $U, \cap U$, თანაკვეთებისთვის. მრავალსახეობას ეწოდება *კომპაქტური მრავალსახეობა* თუ იგი კომპაქტურია, როგორც ტოპოლოგიური სივრცე.

კომპაქტურ მრავალსახეობას საზღვრის გარეშე, *ჩაკეტილი მრავალსახეობა* ეწოდება.

თეორემა 1.7. ყოველი კომპაქტური გლუვი M^n მრავალსახეობა გლუვად ჩაიდგმება საკმარისად დიდი განზომილების ევკლიდეს E_m სივრცეში.

დამტკიცება: დაეფიქსიროთ ამ მრავალსახეობის სასრული ატლასი $\{(U_i, \phi_i)\}_{i=1,2,\dots,l}$.

მრავალსახეობის კომპაქტურობის გამო ასეთი ატლასი არსებობს. ყოველი i ინდექსისათვის ავაგოთ ასახვები:

$$\phi_i : M^n \rightarrow S^n, i = 1, 2, \dots, l,$$

რომლებსაც U_i სიმრავლე მომეოზორფულად გადაწყაეთ $S^n \setminus \{x\}$, სადაც, $x \in S^n$. სიმრავლეში, ხოლო $M^n \setminus U_i$ გადაწყაეთ x წერტილში.

ცხადია ეს ასახვები შეგვიძლია ჩავთვალოთ ისეთ გლუვ ასახვებად, რომლებსაც $U_i, i = 1, 2, \dots, l$ სიმრავლეებზე გააჩნიათ არაგადატარებული დიფერენციალები, შესაბამისად. ამ ასახვების გამოყენებით ავაგოთ გლუვი ასახვა:

$$\phi : M^n \rightarrow E_m,$$

სადაც $m = (n+1)l$ და $\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_l(x))$.

ეს ასახვა წარმოადგენს გლუვ ჩადგმას, მართლაც, რადგან $d_x \phi_i; i = 1, 2, \dots, l$

მონოზორფიზმებია, ამიტომ თუ $x \in U_i$, მაშინ

$$d_x \phi : T_x M^n \rightarrow T_{\phi(x)} E_m$$

მონომორფიზმია. $\phi(x) \neq \phi(y)$. როდესაც $x \neq y; x, y \in U_i$, აქედან გამოდინარე, თუ

$x \neq y; x, y \in M^n$ მაშინ $\phi(x) \neq \phi(y)$. თეორემა დამტკიცდა.

§2. რიმანის(ფსევდორიმანის) მრავალსახეობა,

რიმანის(ფსევდორიმანის) მეტრიკა M'' დიფერენცირებად მრავალსახეობაზე ეწოდება ამ მრავალსახეობის თითოეულ წერტილში მსებ სივრცეზე მოცემულ დადებითად განსაზღვრულ(არაგადავარებული) კვადრატულ ფორმას:

$g_x : T_x M'' \rightarrow R$ რომელთა შესაბამისი სიმეტრიული $(g_{pq}^x)_{p,q=\overline{1,n}}$ მატრიცები $(U_{\sigma_i}, \varphi_{\sigma_i})$

ლოკალური რუკიდან $(U_{\sigma_i}, \varphi_{\sigma_i})$ ლოკალურ რუკაზე გადასვლისას

გარდაიქმნებიან შემდეგნაირად:

$$g_{pq}^x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial x_i^{\sigma_j}}{\partial x_p^{\sigma_i}} \right) g_{ij}^{\sigma_j} \frac{\partial x_j^{\sigma_i}}{\partial x_q^{\sigma_i}},$$

სადაც $(g_{pq}^x)_{p,q=\overline{1,n}}$ კვადრატული ფორმის მატრიცია $(U_{\sigma_i}, \varphi_{\sigma_i})$ ლოკალური რუკის კოორდინატებში.

მატრიცულად ეს ტოლობა ჩაიწერება ასე:

$$(g_{pq}^x) = \left(\frac{\partial x_i^{\sigma_j}}{\partial x_p^{\sigma_i}} \right) (g_{ij}^{\sigma_j}) \left(\frac{\partial x_j^{\sigma_i}}{\partial x_q^{\sigma_i}} \right); i, k, p, q = \overline{1, n}.$$

$\left(\frac{\partial x_i^{\sigma_j}}{\partial x_p^{\sigma_i}} \right); p, i = \overline{1, n}$ მატრიცში i სვეტების ინდექსია, p - სტრიქონების, ხოლო $\left(\frac{\partial x_i^{\sigma_j}}{\partial x_q^{\sigma_i}} \right); q, k = \overline{1, n}$

მატრიცში k სტრიქონების ინდექსია, q - სვეტების. პირველი მატრიცი მეორის

ტრანსპონირებულია.

მრავალსახეობას რიმანის(ფსევდორიმანის) მეტრიკით **რიმანის(ფსევდორიმანის)**

მრავალსახეობა ეწოდება.

მეგალითა 1. როგორც ვიცით, ეეკლიდეს სივრცე E_n წარმოადგენს გლუვ მრავალსახეობას.

დავაფიქსიროთ მის თითოეულ x წერტილში მსებ სივრცეზე განსაზღვრული კვადრატული

ფორმა $g_x : T_x E_n \rightarrow R$, რომლის $(g_{ik}^x)_{i,k=\overline{1,n}}$ მატრიცები E_n -ში არსებულ კოორდინატთა

სისტემაში შემდეგი სახისაა: $g_{ik}^x = 0$, თუ $i \neq k$ და $g_{ik}^x = 1$, თუ $i = k$. შემდეგ ენახათ, რომ ასეთი მეტრიკით განსაზღვრული მანძილი ორ წერტილს შორის ემთხვევა ეეკლიდეს სივრცეში სეკულებრივად განსაზღვრულ მანძილს ამ წერტილებს შორის.

2. მიჩოესკის სივრცე R_n^{p-1} ასევე გლუვი მრავალსახეობაა. დავაფიქსიროთ მის თითოეულ x წერტილში მსებ სივრცეზე განსაზღვრული კვადრატული ფორმა $g_x : T_x E_n \rightarrow R$, რომლის $(g_{ik}^x)_{i,k=\overline{1,n}}$ მატრიცები E_n -ში არსებულ კოორდინატთა სისტემაში შემდეგი სახისაა: $g_{ik}^x = 0$, თუ $i \neq k$, $g_{ik}^x = 1$, თუ $i = k, < n$ და $g_{nn}^x = -1$.

3. როგორც ზემოთ ენახეთ, ყოველი არაგანსაკუთრებული ზედაპირი ეეკლიდეს სივრცეში წარმოადგენს გლუვ მრავალსახეობას. აქედან გამომდინარე ასეთ ზედაპირზე შეიძლება განსაზღვრული იყოს რიმანის(ფსევდორიმანის) მეტრიკა.

თუ რიმანის(ფსევდორიმანის) მეტრიკის განმსაზღვრელი კვადრატული ფორმა ყოველ წერტილში შესაბამისი ლოკალური რუკის შერჩევით შესაძლებელია დაეფიქსიროთ კანონიკურ

სახემდე მაშინ ამბობენ, რომ ზედაპირზე განსაზღვრულია *ვეკლიდეს(ფსევდოვეკლიდეს) მეტრიკა*: თუ კანონიკური სახეა

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_n^2 - \text{ვეკლიდეს მეტრიკა, ხოლო თუ ნორმალური სახეა}$$

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_p^2 - \eta_{p+1}^2 - \dots - \eta_n^2 - \text{ფსევდოვეკლიდეს მეტრიკა.}$$

რიმანის(ფსევდორიმანის) მეტრიკის განმსაზღვრელი კვადრატული ფორმები მრავალსახეობის წერტილთა მიდამოებში კოორდინატთა გარდაქმნით ყოველთვის არ ღაცუნება ნორმალურ სახემდე, ამიტომ მეტრიკა ყოველთვის არ იქნება ევკლიდური(ფსევდოვეკლიდური).

M^n მრავალსახეობაზე მდებარე *გლუვი პარამეტრიზებული წირი* ეწოდება წვეილს: (I, γ) , სადაც I რაიმე ინტერვალაა E_1 რიცხვით ღერძზე, $\gamma: I \rightarrow M^n$ კი I ინტერვალის, როგორც მრავალსახეობის გლუვი ჩაძირვა M^n მრავალსახეობაში. ეთქვათ, (U, φ) რაიმე ლოკალური რუკაა M^n მრავალსახეობაზე. წირს $(I, \tilde{\gamma})$, სადაც $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma: I \rightarrow \varphi(U) \subset E_n$ სიერცის $\varphi(U)$ არეზე, რომელიც ასევე მრავალსახეობაა, ეწოდება (I, γ) წირის შინაგანი პარამეტრიზაცია (U, φ) ლოკალური რუკის კოორდინატებში. ცხადია, $\tilde{\gamma}(t)$ წერტილის კოორდინატები $\varphi(U)$ არეში ემთხვევიან $\gamma(t)$ წერტილის ლოკალურ კოორდინატებს U ღია სიმრავლეში.

თუ, I ინტერვალში ლოკალურ რუკად ჩათვლით წვეილს (I, Id_I) , სადაც $Id_I: I \rightarrow E_1$ იგივეური ჩადგმაა, მაშინ $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma \circ Id_I$, და აქედან გამომდინარე, $\tilde{\gamma}$ გლუვი ასახეა.

ეთქვათ ახლა, M^n მრავალსახეობაზე განსაზღვრულია რიმანის მეტრიკა და (I, γ) გლუვი პარამეტრიზებული წირია ამ მრავალსახეობაზე. განვიხილოთ, ამ წირის შინაგანი პარამეტრიზაცია $(I, \tilde{\gamma})$, $\tilde{\gamma}: I \rightarrow E_n$ რაიმე ლოკალური რუკის კოორდინატებში, მაშასადამე გვაქვს: $\tilde{\gamma}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$. ვექტორი

$$\left(\frac{du_1(t)}{dt}, \frac{du_2(t)}{dt}, \dots, \frac{du_n(t)}{dt} \right) \Big|_{t=t_0} \text{ წარმოადგენს } M^n \text{ მრავალსახეობის მხებ ვექტორს } x = \gamma(t_0)$$

$$\text{წერტილში. მართლაც, } \frac{du_i}{dt} \Big|_{t=t_0} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial v_j} \right) \frac{dv_j}{dt} \Big|_{t=t_0}, \text{ სადაც } \tilde{\gamma}(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)) \text{ } (I, \gamma) \text{ წირის}$$

შინაგანი პარამეტრიზაციაა სახე (V, ϕ) ლოკალური რუკით განსაზღვრულ კოორდინატებში. აღვნიშნოთ (I, γ) გლუვი პარამეტრიზებული წირის მხები ვექტორი M^n რიმანის მრავალსახეობის $x = \gamma(t)$ წერტილში ასე: $T_{\gamma(t)}$.

განვიხილოთ ფუნქცია $\tilde{g}: I \rightarrow R$, რომელიც განისაზღვრება ასე: $\tilde{g}(t) = g_{\gamma(t)}(T_{\gamma(t)})$.

ეს ასახეა პარამეტრის ყოველ t მნიშვნელობას შეუსაბამებს რიმანის M^n მრავალსახეობაზე მდებარე გლუვი პარამეტრიზებული (I, γ) წირის $x = \gamma(t)$ წერტილში მხებ ვექტორზე მეტრიკის განმსაზღვრელი კვადრატული ფორმის მნიშვნელობას.

$\tilde{g}$ ფუნქცია გლუვია, მართლაც, (U, φ) ლოკალური რუკით განსაზღვრულ კოორდინატებში

$$\begin{aligned}\bar{g}(t) &= g_{\tau(t)}\left(\frac{du_1(t)}{dt}, \frac{du_2(t)}{dt}, \dots, \frac{du_n(t)}{dt}\right) = \sum_{i,j} \frac{du_i(t)}{dt} \frac{du_j(t)}{dt} g_{ij}(\gamma(t)) = \\ &= \sum_{i,j} \frac{du_i(t)}{dt} \frac{du_j(t)}{dt} (g_{ij} \circ \gamma)(t).\end{aligned}$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეს ყველა შესაყრები გლუვი ფუნქციაა, ამიტომ მარცხენა მხარე იქნება გლუვი.

(I, γ) გლუვი პარამეტრიზებული წირის $\gamma(t_0)$ და $\gamma(t_1)$ წერტილებს შორის მოთავსებული რკალის სიგრძე ეწოდება რიცხვს:

$$L_\gamma^h(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\bar{g}(t)} dt$$

ეთქვას, გლუვი პარამეტრიზებული (I, γ) წირისათვის $\gamma(I) \subset U$, სადაც U (U, φ) ლოკალური რუკის პირველი კომპონენტი.

ამ წირის შინაგანი პარამეტრიზაცია იქნება $\tilde{\gamma}(t) = (\varphi \circ \gamma)(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$, ხოლო g_{ij} ლოკალურ კოორდინატებში მიიღებს სახეს $\tilde{g}_{ij} = g_{ij} \circ \varphi^{-1}$, ამიტომ $(\tilde{g}_{ij} \circ \gamma)(t) = ((\tilde{g}_{ij} \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma))(t)$. აქედან გამომდინარე, $\bar{g}$ ფუნქციას ლოკალურ კოორდინატებში ექნება სახე

$$\begin{aligned}\bar{g}(t) &= \sum_{i,j} \frac{du_i(t)}{dt} \frac{du_j(t)}{dt} ((\tilde{g}_{ij} \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma))(t) = \sum_{i,j} \frac{du_i(t)}{dt} \frac{du_j(t)}{dt} (\tilde{g}_{ij} \circ \tilde{\gamma})(t) = \\ &= \sum_{i,j} \frac{du_i(t)}{dt} \frac{du_j(t)}{dt} \tilde{g}_{ij}(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)).\end{aligned}$$

შესაბამისად:

$$L_\gamma^h(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i,j} \frac{du_i(t)}{dt} \frac{du_j(t)}{dt} \tilde{g}_{ij}(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)) dt.$$

ეთქვას, გვაქვს უწყვეტი ასახვა $\gamma: I \rightarrow M^n$ და $I = [\alpha, \beta]$ შუალედის დაყოფა $t_0 = \alpha, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n = \beta$ წერტილებით. თუ თითოეული $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}: [t_{i-1}, t_i] \rightarrow M^n, i = 1, 2, \dots, n$ ასახვა გლუვია, მაშინ $\gamma: I \rightarrow M^n$ ასახვას **ნაჭერ-ნაჭერ გლუვ პარამეტრიზებულ წირს** უწოდებენ M^n მრავალსახეობაზე. ნაჭერ-ნაჭერ გლუვი პარამეტრიზებული წირის სიგრძედ შეიძლება ჩაეთვალოს ამ წირის გლუვი ნაწილების სიგრძეთა ჯამი. ნაჭერ-ნაჭერ გლუვი პარამეტრიზებული წირის ცნება საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვორო მანძილის ცნება მოცემული მრავალსახეობის ორ x_1 და x_2 წერტილებს შორის:

$$d(x_1, x_2) = \inf\{l(\gamma_\theta) \mid \gamma_\theta(\alpha) = x_1, \gamma_\theta(\beta) = x_2\},$$

სადაც $\{l(\gamma_\theta) | \gamma_\theta(\alpha) = x_1, \gamma_\theta(\beta) = x_2\}$ იმ რიცხვების სიმრავლეა, რომლებიც წარმოადგენენ x_1 წერტილის x_2 წერტილთან შემავრთებელი ყველა ნაჭერ-ნაჭერ გლუვი პარამეტრიზებული წირის სიგრძეებს.

ასეთნაირად განსაზღვრული მანძილის ცნება აკმაყოფილებს მეტრიკული სტრუქტურის ყველა თვისებას:

1. $d(x, x) = 0$ ეს ტოლობა უშუალოდ გამოჰდინარეობს ორ წერტილს შორის მანძილის ცნებიდან.
2. $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$, მართლაც განვიხილოთ ნაჭერ-ნაჭერ გლუვი პარამეტრიზებული წირთა ოჯახი $\{\bar{\gamma}_\theta(t) = \gamma_\theta(-t + \alpha + \beta)\}$, ცხადია, ამ ოჯახში შედის ყველა ის წირი, რომელიც აერთებს x_2 წერტილის x_1 წერტილთან, ამასთან $l(\gamma_\theta) = l(\bar{\gamma}_\theta)$. აქედან გამოჰდინარეობს, რომ $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$.
3. $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$. მართლაც, ეთქვათ $\gamma_1: [\alpha, \beta] \rightarrow M^n$ და $\gamma_2: [\eta, \delta] \rightarrow M^n$ ნაჭერ-ნაჭერ გლუვი პარამეტრიზებული წირებია M^n მრავალსახეობაზე, $\gamma_1(\alpha) = x_1, \gamma_2(\delta) = x_3$ და $\gamma_1(\beta) = \gamma_2(\eta) = x_2$. განვიხილოთ ნაჭერ-ნაჭერ გლუვი პარამეტრიზებული წირი $\gamma_3: [\alpha, \beta + \delta - \eta] \rightarrow M^n$, რომელიც განსაზღვრულია ასე:

$$\gamma_3(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \alpha \leq t \leq \beta, \\ \gamma_2(t + \eta - \beta), & \beta \leq t \leq \beta + \delta - \eta. \end{cases}$$

ცხადია, γ_3 წირი აერთებს x_1 წერტილს x_3 წერტილთან და $l(\gamma_3) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$.

ამ უტოლობიდან კი ადვილად მივიღებთ უტოლობას: $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$.

მართლაც, ეთქვათ, $d(x_1, x_3) > d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$, მაშინ ნებისმიერი γ ნაჭერ-ნაჭერ გლუვი პარამეტრიზებული წირის სიგრძე, რომელიც აერთებს x_1 წერტილს x_3 წერტილთან მეტია x_1, x_2 და x_2, x_3 წერტილების შემავრთებელი რომელიმე $\gamma_\theta, \gamma_\theta$ ნაჭერ-ნაჭერ გლუვი პარამეტრიზებული წირის სიგრძეების ჯამზე. აქედან გამოჰდინარე $d(x_1, x_3) = \inf_{\gamma_\theta, \gamma_\theta} \{l(\gamma_\theta) + l(\gamma_\theta)\}$, სადაც $\gamma_\theta, \gamma_\theta$ იცვლებიან

x_1, x_2 და x_2, x_3 წერტილების შემავრთებელი $\gamma_\theta, \gamma_\theta$ ნაჭერ-ნაჭერ გლუვი პარამეტრიზებული წირის სიმრავლეში. ამგვარად მივიღებთ, რომ $d(x_1, x_3) = d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$, მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე $d(x_1, x_3) > d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$ უტოლობა არ არის სამართლიანი. აქედან გამოჰდინარე $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$.

4. $d(x_1, x_2) = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $x_1 = x_2$. ამ თვისების დამტკიცება გაცილებით რთულია ეიდრე წინა სამის, ამიტომ მის დამტკიცებას აქ არ შევეცდებით. მტკიცდება ასევე, რომ ტოპოლოგიური სტრუქტურა რიმანის მრავალსახეობაზე ინდუცირებული ასეთი მეტრიკული სტრუქტურით ემთხვევა მასში თავიდან არსებულ ტოპოლოგიურ სტრუქტურას.

დიფერენციალური: $f: M^n \rightarrow L^n$ ორ რიმანის მრავალსახეობას შორის უწოდებენ *იზომეტრიას*, თუ იგი ინახავს მანძილს, ანუ: $d(x, y) = d(f(x), f(y))$ ყოველი ორი $x, y \in M^n$ წერტილისთვის.

გლეუ ჩადგმას $f: M^n \rightarrow L^n, m \geq n$ რომელიც ინახავს მანძილს *იზომეტრიულ ჩადგმას* უწოდებენ.

შეიძლება დავსვათ კითხვა: ჩადგმება თუ არა ყოველი რიმანის მრავალსახეობა ეპკლიდეს სიერცეში? პასუხი დადებითია, მტკიცდება რომ ყოველი n განზომილებიანი M^n რიმანის მრავალსახეობა იზომეტრიულად ჩადგმება $E_{\frac{n(n+1)}{2}, n}$ ეპკლიდეს სიერცეში.

ეს პასუხი გამომდინარეობს ამერიკელი მათემატიკოსის ჯ. ნეშის და რუსი მათემატიკოსების მლ. გრომოვისა და ვ.ა. როხლინის შრომებიდან.

§3. რიმანის(ფსევდორიმანის) მეტრიკათა მაგალითები

ვთქვათ ახლა, M^n გლეუი მრავალსახეობა წარმოადგენს ზედაპირს E_m ეპკლიდეს სიერცეში და ვთქვათ ეს ზედაპირი მოცემულია პარამეტრული განტოლებებით:

$$x_l = x_l(z_1, z_2, \dots, z_m), l = 1, 2, \dots, m.$$

წირი $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow E_m$ ეპკლიდეს სიერცეში, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით:

$$x_l(t) = x_l(z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t)), t \in [\alpha, \beta], l = 1, 2, \dots, m$$

ცხადია, ისეთია, რომ მისი ეველა წერტილი მდებარეობს მოცემულ ზედაპირზე. ეს წირი ჩაწერილია არა მოცემული ზედაპირის, როგორც მრავალსახეობის ლოკალურ კოორდინატებში, არამედ E_m ეპკლიდეს სიერცის კოორდინატთა სისტემაში. ამ წირის სიგრძე, როგორც მატემატიკური ანალიზიდანაა ცნობილი, ამ წირის სიგრძე E_m სიერცეში გამოითვლება ფორმულით:

$$l_\sigma(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\sum_{i=1}^m x'_i(t)^2} dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\sum_{i,j} \sum_{l=1}^m \frac{\partial x_l}{\partial z_i} \frac{\partial x_l}{\partial z_j} z'_i(t) z'_j(t)} dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\sum_{i,j=1}^m g_{ij} z'_i(t) z'_j(t)} dt,$$

სადაც

$$g_{ij} = \sum_{l=1}^m \frac{\partial x_l}{\partial z_i} \frac{\partial x_l}{\partial z_j}.$$

ამ ფორმულებიდან ჩანს, რომ $g_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, m$ წარმოადგენს დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმის მატრიცის ელემენტებს. ცხადია ეს ელემენტები უწყვეტად არიან დამოკიდებული ზედაპირის წერტილებზე და ამიტომ $(g_{ij}), i, j = 1, 2, \dots, m$ მატრიცი განსაზღვრავს რიმანის მეტრიკას მოცემულ ზედაპირზე. ამ მეტრიკას ზედაპირზე *ეპკლიდეს მეტრიკით ინდუცირებული მეტრიკა* ეწოდება.

ვთქვათ, მოცემულია ორგანზომილებიანი ზედაპირი სამ განზომილებიან E_3 ეპკლიდეს სიერცეში:

$$x_l = x_l(z_1, z_2), l = 1, 2, 3.$$

ამ ზედაპირზე მოთავსებული წირის:

$$\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow E_3, x_l(t) = x_l(z_1(t), z_2(t)), t \in [\alpha, \beta], l = 1, 2, 3$$

რკალის სიგრძე

$$l_\sigma^\beta(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + x_3'(t)^2} dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\sum_{l=1}^3 \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial x_l}{\partial z_i} \frac{\partial x_l}{\partial z_j} z_i'(t) z_j'(t)} dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij} z_i'(t) z_j'(t)} dt$$

თუ E_3 სივრციდან ინდუცირებული მეტრიკა ევკლიდური მეტრიკაა ამ ზედაპირზე, მაშინ ამ ზედაპირზე არსებობს ლოკალურ კოორდინატთა სისტემა y_1, y_2

რომელშიდაც $\sum_{i,j=1}^2 g_{ij} dy_i dy_j$ კვადრატული ფორმა მიიღებს კანონიკურ სახეს:

$$\sum_i (dy_i)^2 = (dy_1)^2 + (dy_2)^2.$$

ამ შემთხვევაში

$$(g_{ij})_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

აქედან გამომდინარე, მოცემული წირის რკალის დიფერენციალის კვადრატი

$$(dl)^2 = (dy_1)^2 + (dy_2)^2.$$

სოლო რკალის სიგრძე:

$$l_\sigma^\beta(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(dy_1)^2 + (dy_2)^2}$$

თუ y_1, y_2 კოორდინატებს შევცვლით პოლარული კოორდინატებით: r, φ ,

$y_1 = r \sin \varphi, y_2 = r \cos \varphi$, მაშინ გვექნება:

ამ შემთხვევაში

$$(g'_{ij})_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix},$$

$$(dl)^2 = (dy_1)^2 + (dy_2)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\varphi)^2$$

და

$$l_\sigma^\beta(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(dr)^2 + r^2 (d\varphi)^2}$$

ეთქვათ ახლა, სამგანზომილებიანი ზედაპირი მოცემულია E_4 -ში, თუ ამ შემთხვევაში რიმანის მეტრიკაზედაპირზე ევკლიდურია, მაშინ ამ ზედაპირზე მდებარე $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow E_4$ წირის რკალის სიგრძე ტოლი იქნება:

$$\begin{aligned}
 l_a^F(\gamma) &= \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + x_3'(t)^2 + x_4'(t)^2} dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial z_j} \frac{\partial x_i}{\partial z_j} z_j'(t) z_j'(t)} dt = \\
 &= \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} z_i'(t) z_j'(t)} dt = \int_a^b \sqrt{(dy_1)^2 + (dy_2)^2 + (dy_3)^2},
 \end{aligned}$$

რიზანის მეტრიკის განმსაზღვრელი კვადრატული ფორმის მატრიცა

$$(g_{ij})_{i,j=1,2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ხოლო რკალის დიფერენციალის კვადრატი

$$(dl)^2 = (dy_1)^2 + (dy_2)^2 + (dy_3)^2.$$

თუ გადავალთ სფერულ კოორდინატებზე: r, φ, θ

$$y_1 = r \sin \theta \cos \varphi, y_2 = r \sin \theta \sin \varphi, y_3 = r \cos \theta,$$

მაშინ

$$(dl)^2 = (dy_1)^2 + (dy_2)^2 + (dy_3)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2,$$

$$l_a^F(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2},$$

ხოლო

$$(g'_{ij})_{i,j=1,2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

როგორც ეხედაეთ, ყველა განხილულ შემთხვევაში რკალის დიფერენციალი მარტივად გამოისახება საკოორდინატო ცვლადების დიფერენციალებით.

ეთქვით, S^2 წარმოადგენს ზედაპირს E_3 სივრცეში განსაზღვრული განტოლებით:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2,$$

იხე ეს ზედაპირი წარმოადგენს სფეროს რადიუსით: R .

სფერულ კოორდინატებში: r, φ, θ ეს ზედაპირი მოიცემა განტოლებით:

$$r = R.$$

ცხადია, φ, θ წარმოადგენენ ლოკალურ კოორდინატებს ამ ზედაპირზე. ეს ზედაპირი

არაგანსაკუთრებულია ყველა მის წერტილში, სადაც $\theta = 0$ და $\theta = \pi$

სფერული კოორდინატებისათვის E_3 სივრცეში წირის რკალის დიფერენციალის კვადრატი

$$(dl)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2.$$

ამ ზედაპირზე $(dr)^2 = 0$, ამიტომ $(dl)^2 = R^2(d\theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi$.

განვიხილოთ მოცემული სფეროს სტერეოგრაფიული პროექცია სიბრტყეზე:

წერტილს სფეროზე, რომლის ლოკალური კოორდინატებიცაა: (φ, θ) , შეესაბამეთ წერტილი პოლარული (r, φ) კოორდინატებით $x_3 = 0$ განტოლებით განსაზღვრულ სიბრტყეზე E_3 ,

სივრცეში, სადაც $r = R \csc \frac{\theta}{2}$, $\varphi = \varphi$.

ფორმულაში:

$$(dl)^2 = R^2(d\theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2$$

θ სიდიდის მაგიერად შევითანოთ $2 \arccsc r$, გვექნება:

$$\begin{aligned} (dl)^2 &= R^2(d(2 \arccsc r))^2 + R^2 \sin^2(2 \arccsc r)(d\varphi)^2 = R^2(-2 \frac{1}{1+r^2})^2(dr)^2 + R^2 \sin^2(2 \arccsc r)(d\varphi)^2 = \\ &= \frac{4R^2}{(R^2 + r^2)^2} ((dr)^2 + r^2(d\varphi)^2) = \frac{4R^2}{(R^2 + x_1^2 + x_2^2)^2} (dx_1^2 + dx_2^2). \end{aligned}$$

ეს ნიშნავს, რომ E_3 დან ინდექსირებული რიმანის მეტრიკა ევკლიდური ვერ იქნება, რადგან ლოკალური კოორდინატების გარდაქმნით ვერ მოხერხდება

$$(dl)^2 = \frac{4R^2}{(R^2 + x_1^2 + x_2^2)^2} (dx_1^2 + dx_2^2)$$

კვადრატული ფორმის დაყენება კანონიკურ სახეზე.

E_n ევკლიდეს სივრცე, როგორც ცნობილია არის კოორდინატული R^n სივრცე, მეტერიკული

სტრუქტურით $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$; $x, y \in R^n$ როგორც ზემოთ

აღვნიშნეთ ამ სივრცეში წირის რკალის დიფერენციალის კვადრატი ტოლია

$$(dl)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \dots + (dx_n)^2\text{-ის.}$$

გზლა განვიხილოთ, სიდიდე:

$$d(x, y) = \sqrt{-(x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 - \dots - (x_{n-1} - y_{n-1})^2 + (x_n - y_n)^2}; x, y \in R^n$$

ამ სიდიდეს უწოდებენ *მინკოვსკის ფსევდომეტრიკულ სტრუქტურას* R^n სივრცეში, როგორც

ეხედავთ, იგი შეიძლება იყოს ნამდვილიც, წარმოსახვითი კომპლექსურიც და ნულიც. R^n

სივრცეს მასში დაფიქსირებული მინკოვსკის ფსევდომეტრიკული სტრუქტურით *მინკოვსკის*

სივრცეს უწოდებენ იგი აღინიშნება ასე: $R^n_{\mu-1}$. მინკოვსკის სივრცე გლუვი მრავალსახეობის

მაგალითს წარმოადგენს. გლუვი მრავალსახეობა ასევე მინკოვსკის სივრცის ყოველი ღია

ქვესიმრავლეც ამ სივრცეში ტიხონოვის ტოპოლოგიური სტრუქტურის დრის.

წირის რკალის დიფერენციალის კვადრატი მინკოვსკის სივრცეში ტოლია სიდიდის:

$$(dl)^2 = -(dx_1)^2 - (dx_2)^2 - \dots - (dx_{n-1})^2 + (dx_n)^2 \text{ მინკოვსკის სივრცეში, ისევე როგორც ევკლიდეს სივრცეში}$$

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$f_{n-k}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0;$$

ტიპის განტოლებათა სისტემით განისაზღვრება ზედაპირი, რომელიც ცხადია, შესაბამისი პირობების შემთხვევაში ასევე მრავალსახეობა იქნება.

ეთქვით, ახლა, $R_{1,2}$ მინკოვსკის სივრცეში მოცემულია ზედაპირი განტოლებით:

$$-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = R^2$$

ეს ზედაპირი, როგორც ანალიზური გეომეტრიიდან არის ცნობილი წარმოადგენს ორკალთა მიკერბოლოიდს.

გადავიდეთ ევრეთწოდებულ ფსევდოსფერულ კოორდინატებზე მინკოვსკის სივრცეში: ρ, χ, φ ,

$$x_1 = \rho \sinh \chi \cos \varphi,$$

$$x_2 = \rho \sinh \chi \sin \varphi,$$

$$x_3 = \rho \cosh \chi$$

სადაც: $-\infty < \rho < \infty$, $0 \leq \chi \leq \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

ფსევდოსფერულ კოორდინატებში ფსევდოსფეროს განტოლება იქნება: $\rho = R$ ზედა კალთისათვის $\rho = -R$, ქვედა კალთისათვის. ადვილი საჩვენებელია, რომ წირის რკალის ღიფურენციალის კუადრატს ამ კოორდინატებში ექნება სახე:

$$(dl)^2 = (d\rho)^2 - \rho^2((d\chi)^2 + \sinh^2 \chi (d\varphi)^2).$$

აქედან გამოდინარე, ფსევდოსფეროზე, რომელზედაც $\rho = \pm R$ მუდმივია, გვექნება:

$$(dl)^2 = -R^2((d\chi)^2 + \sinh^2 \chi (d\varphi)^2).$$

აქაც როგორც სფეროს შემთხვევაში, განვიხილოთ ფსევდოსფეროს სტერეოგრაფიული პროექცია სიბრტყეზე: წერტილს, რომელს ფსევდოსფერული კოორდინატებიცაა: χ, φ , შევუსაბამოთ წერტილი, რომელიც მდებარეობს $x_3 = 0$ განტოლებით განსაზღვრულ სიბრტყეზე მინკოვსკის $R_{1,2}$ სივრცეში და წარმოადგენს $(0, 0, R)((0, 0, -R))$ წერტილიდან გამომავალი და ფსევდოსფეროს მოცემულ წერტილზე გამავალი სხივის თანაკვეთას ამ სიბრტყესთან. ეთქვით სიბრტყის ამ წერტილის პოლარული (r, φ) კოორდინატებია, სადაც $r = \frac{R \sinh \chi}{\cosh \chi + 1}$ და $\varphi = \varphi$.

აქედან მარტივი გამოთვლებით შევიძლია მივიღოთ:

$$(dl)^2 = \frac{4R^2}{(R^2 - r^2)^2} ((dr)^2 + r^2 (d\varphi)^2), r^2 < R^2$$

თუ $y_1 = r \sin \varphi$, $y_2 = r \cos \varphi$, მაშინ

ესკუადრატულ ფორმას მიიღებს სახე:

$$(dl)^2 = \frac{4R^2}{(R^2 - y_1^2 - y_2^2)^2} ((dy_1)^2 + (dy_2)^2), y_1^2 + y_2^2 < R^2$$

(y_1, y_2) კოორდინატები ფსევდოსფეროზე, როგორც მრავალსახეობაზე, ცხადია, წარმოადგენენ ლოკალურ კოორდინატებს. უკანასკნელ კვადრატულ ფორმის დაყვანა ლოკალური კოორდინატების გარდაქმნით კანონიკურ სახემდე შეუძლებელია. ეს კი ნიშნავს, რომ მიჩიკესის სიერცის ფსევდომეტრიკული სტრუქტურით ფსევდოსფეროზე ინდუცირებული ფსევდორიმანის მეტრიკა არაა ფსევდოევკლიდური. ამ მეტრიკას *ლობაჩევსკის მეტრიკას* უწოდებენ, ხოლო ფსევდოსფეროს მიჩიკესის სიერცეში ასეთი მეტრიკით-*ლობაჩევსკის სიერცეს*.

§ 4. პარამეტრიზირებული წირი ევკლიდეს სიერცეში

როგორც წინა პარაგრაფში იყო აღნიშნული, ყოველი რიმანის მრავალსახეობა იზომეტრიულად ჩაიდგმება საკმარისად მაღალი განზომილების ევკლიდეს სიერცეში და რიმანის მეტრიკა ამ მრავალსახეობაზე იქნება ევკლიდეს მეტრიკული სტრუქტურით ინდუცირებული. აქედან გამომდინარე, რიმანის მრავალსახეობაზე მდებარე წირების შესწავლის ამოცანა ეკვივალენტური იქნება შესაბამის ევკლიდეს სიერცეში შესაბამისი წირების შესწავლისა. ევკლიდეს სიერცეში წირების შესწავლის ამოცანა უფრო ფართოა ვიდრე რიმანის მრავალსახეობაზე მდებარე წირების შესწავლის ამოცანა. ამ პარაგრაფში განვიხილავთ სწორედ ევკლიდეს სიერცეში მდებარე წირებს.

პარამეტრიზებული გლუვი წირი ევკლიდეს n განზომილებიან E_n სიერცეში ეწოდება გლუვ ნაძირვას $\gamma: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow E_n$, სადაც $\langle \alpha, \beta \rangle$ რაიმე შუალედიან რიცხვით ღერძზე; იგი შეიძლება იყოს ღია ინტერვალის- (α, β) , ჩაკეტილი ინტერვალის- $[\alpha, \beta]$, და ნახევრად ჩაკეტილი- $[\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta]$ ინტერვალზეც.

პარამეტრიზებული გლუვი წირის ჩასაწერად მოხერხებულია მისი წარმოდგენა *ვექტორული განტოლებით*:

$r = r(t)$, სადაც $r: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow E^n$ ისეთი ასახვაა E^n ევკლიდეს ვექტორულ სიერცეში, რომ

$r(t) \in E^n$ $\lambda(t)$ წერტილის რადიუსვექტორია ევკლიდეს E_n წერტილოვან სიერცეში დაფიქსირებულ რაიმე კოორდინატთა სისტემაში. მაშასადამე:

$$r(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in E^n$$

მაშასადამე, პარამეტრიზირებული წირი ეს არის წყვილი $(I, r = r(t))$, სადაც

$$I = \langle \alpha, \beta \rangle, \quad r: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow E^n$$

$\gamma(\langle \alpha, \beta \rangle) \subset E_n$ წერტილების სიმრავლეს $\gamma: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow E_n$ *პარამეტრიზებული წირის ტანი*

ეწოდება იგი აღინიშნება ას: $|\gamma|$, ცხადია $\gamma(\langle \alpha, \beta \rangle) \approx r(\langle \alpha, \beta \rangle)$, ამიტომ გამოვიყენებთ $|r|$ აღნიშვნასაც.

პარამეტრიზებულ წირს ეწოდება ბრტყელი, თუ მისი ტანი E_n სიერცის რომელიმე ორგანზომილებიან სიბრტყეზე მდებარეობს.

პარამეტრიზებულ $(I, r = r(t))$ წირს ევკლიდეს სიერცეში ეწოდება *რეგულარული* $r(t_0)$

წერტილში, თუ $r'(t)|_{t=t_0} \neq 0$, სადაც $r'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t))$.

პარამეტრიზებულ წირს ეწოდება რეგულარული. თუ იგი რეგულარულია თავის ყველა წერტილში.

შემდგომ, როდესაც $r(t_0)$ წერტილში პარამეტრიზებული წირის რაიმე თვისებაზე გვეყენება საუბარი, ვიყუევთ, რომ წირის ეს თვისება გააჩნია $t = t_0$ წერტილში, მაგრამ ვიგულისხმებთ $r(t_0)$ წერტილს.

($I, r = r(t)$) პარამეტრიზებულ წირს ეწოდება მარტივი, თუ $t_1, t_2 \in I, t_1 \neq t_2$, მაშინ $r(t_1) \neq r(t_2)$; პარამეტრიზებულ წირს ეწოდება მარტივი, თუ $r(\alpha) = r(\beta)$; თუ $r(t_1) = r(t_2)$, მაშინ ამაზონ, რომ წირი პკვეთს თავის თავს.

თეორემა 4.1. თუ პარამეტრიზებული გლუვი წირი ($I, r = r(t)$) რეგულარულია, მაშინ ყოველი $t_0 \in I$ წერტილისთვის არსებობს მისი ისეთი მიდამო $W \subset I$, რომ $r|_W: W \rightarrow r(W)$ დიფეომორფიზმია.

დამტკიცება: რადგან $r'(t)|_{t=t_0} \neq 0$, ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია დაეუშვათ, რომ $x_1'(t)|_{t=t_0} \neq 0$. მათემატიკურ ანალიზში ცნობილ, შექცეული ფუნქციის შესახებ თეორემის თანახმად. არსებობს $x_1 = x_1(t)$ ფუნქციის შებრუნებული ფუნქცია $t = f(x_1)$, რომელიც განსაზღვრულია და გლუვია $x_1 = x_1(t)|_{t=t_0}$ წერტილის რაიმე V მიდამოში. ეთქვას $W = f(V)$. ვაჩვენოთ, რომ

$r|_W: W \rightarrow r(W)$ დიფეომორფიზმია. მართლაც, $r|_W = i \circ x_1$, სადაც

$$x_1|_W: W \rightarrow V, x_1(t) \in V; i: V \rightarrow r(W), i(x_1(t)) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).$$

ამიტომ $r|_W$ იქნება გლუვი, ურთიერთცალსახა ასახვა. $(r|_W)^{-1}: r(W) \rightarrow W$ წარმოადგენს კომპოზიციას $f \circ p|_{r(W)}: r(W) \rightarrow W$, სადაც $p: E_n \rightarrow E_1$. ამ კომპოზიციაში შემავალი თითოეული ასახვა გლუვია, ამიტომ კომპოზიციაც გლუვი იქნება. მაშასადამე $r|_W$ და $(r|_W)^{-1}$ გლუვი ურთიერთშებრუნებული ასახვებია, და ამიტომ $r|_W: W \rightarrow r(W)$ დიფეომორფიზმია. თეორემა დამტკიცდა.

($I, r = r(t)$) პარამეტრიზებული წირის მხები ვექტორი $t = t_0$ წერტილში ეწოდება

ვექტორს $r'(t) = (\frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(t)}{dt})$. თუ t_0 წერტილში წირი რეგულარულია, მაშინ

წრფეს, რომელიც გადის $r(t_0) \in r|$ წერტილზე და პარალელურია $r'(t)|_{t=t_0}$ ვექტორის,

ეწოდება მოცემული პარამეტრიზებული წირის მხები წრფე $t = t_0$ წერტილში. ცხადია, პარამეტრიზებული წირის მხები წრფის განტოლება იქნება:

$$R(r) = r(t)|_{t=t_0} + \sigma r'(t)|_{t=t_0}.$$

პარამეტრიზირებულ ($I, r = r(t)$) და ($S, \rho = \rho(s)$) წირებს ეწოდება გეგიალენტური

პარამეტრიზებული წირები, თუ არსებობს პარამეტრის გარდაქმნა, ანუ ისეთი დიფეომორფიზმი $\lambda: I \rightarrow S$, რომ $r = \rho \circ \lambda$.

პარამეტრიზირებულ ($S, \rho = \rho(s)$) წირს უწოდებენ ნატურალურად ანუ ბუნებრივად

პარამეტრიზებული, თუ $\rho(s)$ ვექტორის სიგრძე $\|\rho(s)\| = 1$ ყოველ $t \in I$ წერტილში.

შემდგომ ყველგან, ნებისმიერი v ვექტორის სიგრძეს აღვნიშნავე ასე: $\|v\|$, ხოლო ნატურალურ პარამეტრს- s სიმბოლოთი.

პარამეტრიზირებული l წირის l_1 და l_2 წერტილებს შორის მოქცეული რკალის სიგრძე ეწოდება რიცხვს:

$$l_h^+(r) = \int_{l_1}^{l_2} \|r'(t)\| dt$$

თეორემა 4.2. ეკვივალენტურ პარამეტრიზებული წირების შესაბამის წერტილებს შორის მოქცეული რკალების სიგრძეები ერთმანეთის ტოლია.

დამტკიცება: თუ $(I, r = r(t))$ და $(S, \rho = \rho(s))$ ეკვივალენტური პარამეტრიზირებული წირებია, მაშინ არსებობს ისეთი დიფეომორფიზმი $\lambda: I \rightarrow S$, რომ $r(t) = \rho(\lambda(t))$. აქედან გამოძიწნარე:

$$l_h^+(r) = \int_{l_1}^{l_2} \|r'(t)\| dt = \int_{l_1}^{l_2} \|\rho'(\lambda(t))\lambda'(t)\| dt = \int_{l_1}^{l_2} \|\rho'(\lambda(t))\| \cdot |\lambda'(t)| dt = \int_{l_1}^{l_2} \|\rho'(s)\| ds = l_h^+(\rho).$$

სადაც $s_1 = \lambda(t_1)$, $s_2 = \lambda(t_2)$, $s_1 < s_2$. რადგან λ დიფეომორფიზმია და $s_1 < s_2$, ამიტომ $\lambda'(t) > 0$, $|\lambda'(t)| = \lambda'(t)$ და $|\lambda'(t)| dt = ds$.

თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 4.3. ყოველი პარამეტრიზებული რეგულარული $(I, r = r(t))$ წირისათვის არსებობს მისი ეკვივალენტური ბუნებრივად პარამეტრიზებული $(S, \rho = \rho(s))$ წირი.

დამტკიცება: განვსაზღვროთ ასახვა $\lambda: I \rightarrow R$ სადაც R ნამდვილ რიცხვთა სიბრტყეა ფორმულით:

$$\lambda(t) = \int_a^t \|r'(\tau)\| d\tau.$$

ცვალია λ გლუვი და ურთიერთცალსახა ასახვა, ამასთან იგი ზრდადია რადგან

$\lambda'(t) = \|r'(t)\| > 0$. განვიხილოთ ასახვა $\lambda^{-1}: \lambda(I) \rightarrow I$, ეს ასახვა ასევე ურთიერთცალსახაა და

გლუვი. მაშასადამე, ასახვა $\lambda: I \rightarrow \lambda(I)$ დიფეომორფიზმია. ცხადია, პარამეტრიზირებული წირი: $(S, \rho = \rho(s) = r(\lambda^{-1}(s)))$ ეკვივალენტურია $(I, r = r(t))$ პარამეტრიზირებული წირისა და ამასთან იგი ბუნებრივად ეპარამეტრიზებულია. მართლაც,

$$\begin{aligned} \|\rho'(s)\| &= \|r'(\lambda^{-1}(s))(\lambda^{-1}(s))'\| = \|r'(\lambda^{-1}(s))\| \frac{1}{\lambda'(\lambda^{-1}(s))} = \frac{\|r'(\lambda^{-1}(s))\|}{\left(\int_a^{\lambda^{-1}(s)} \|r'(\tau)\| d\tau\right)'} = \\ &= \|r'(\lambda^{-1}(s))\| \cdot \frac{1}{\|r'(\lambda^{-1}(s))\|} = 1. \end{aligned}$$

მაგალითი: პარამეტრიზებული წირი: $R, r(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $b \in R$, რომელსაც ხრახნულ წირს უწოდებენ წარმოადგენს რეგულარულ წირს; მისი ბუნებრივი პარამეტრიზაცია

განხორციელება $\lambda: R \rightarrow R$ პარამეტრის გარდაქმნით, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით:

$$s = \lambda(t) = \int_t^1 \|r'(r)\| dr = \int_t^1 \|(a \cos r, a \sin r, br')\| dr = \int_t^1 \sqrt{(-a \sin r)^2 + (a \cos r)^2 + b^2} dr = \\ = \int_t^1 \sqrt{a^2 + b^2} dr = \sqrt{a^2 + b^2} t.$$

აქედან გამომდინარე, მოცემული წირის ბუნებრივი პარამეტრიზაცია იქნება:

$$(R, \rho = \rho(s) = (r \circ \lambda^{-1})(s) = r(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}})).$$

ანუ

$$(R, \rho = \rho(s) = (a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}})).$$

პარამეტრიზირებულ $(I, r = r(t))$ წირს ეწოდება **ბირგულარული** $t = t_0$ წერტილში, თუ ვექტორები $r'(t)|_{t=t_0}, r''(t)|_{t=t_0}$ არაკოლინეარული ვექტორებია.

სიბრტყეს, რომელიც გადის $r(t)|_{t=t_0}$ წერტილზე და $r'(t)|_{t=t_0}, r''(t)|_{t=t_0}$ ვექტორებზე

მოცემული პარამეტრიზირებული წირის მიმხედ სიბრტყეს უწოდებენ $t = t_0$ წერტილში. ცხადია ამ სიბრტყის განტოლება იქნება:

$$[R(r) - r(t)|_{t=t_0}, r'(t)|_{t=t_0}, r''(t)|_{t=t_0}] = 0.$$

სადაც კვადრატული ფრჩხილები აღნიშნავს სამი ვექტორის შერეულ ნამრავლს, ხოლო $R(r)$ ამ სიბრტყის ცვლადი წერტილია.

თეორემა 4.4. გეოდეზიკური პარამეტრიზირებული წირების მიმხედ სიბრტყეები შესაბამის წერტილებში ერთმანეთს ემთხვევა.

დამტკიცება: ვთქვათ, $(I, r = r(t))$ და $(J, \rho = \rho(\tau))$ გეოდეზიკური პარამეტრიზირებული წირებია. მაშინ $r(t) = \rho(\lambda(t))$, სადაც $\lambda: I \rightarrow J$ პარამეტრის გარდაქმნაა. გვაქვს:

$$r'(t) = \rho'(\lambda(t))\lambda'(t), \quad r''(t) = \rho''(\lambda(t))(\lambda'(t))^2 + \rho'(\lambda(t))\lambda''(t).$$

რადგან $\lambda: I \rightarrow J$ დიფერენცირებადი $\lambda'(t) \neq 0$, ამიტომ ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებელი

$r'(t)|_{t=t_0}, r''(t)|_{t=t_0}; \rho'(\tau)|_{\tau=\lambda(t_0)}, \rho''(\tau)|_{\tau=\lambda(t_0)}$ სისტემების წრფი გარსები: $L(r'(t)|_{t=t_0}, r''(t)|_{t=t_0}), L(\rho'(\tau)|_{\tau=\lambda(t_0)}, \rho''(\tau)|_{\tau=\lambda(t_0)})$ ერთმანეთს ემთხვევიან. $(I, r = r(t))$ და $(J, \rho = \rho(\tau))$ წირებს მიმხედ სიბრტყეები $t = t_0, \tau = \lambda(t_0)$ წერტილებში, შესაბამისად, ამ წრფივი გარსებით განსაზღვრული სიბრტყეებია ეკლიდეს E_* სივრცეში ამიტომ ისინი ერთმანეთს დამთხვევიან. თეორემა დამტკიცდა.

ვთქვათ, მოცემულია რეგულარული პარამეტრიზირებული წირი $(I, r = r(t))$ და $(S, \rho = \rho(s))$ მისი გეოდეზიკური ბუნებრივად პარამეტრიზირებული წირია, რომელიც მიღება $\lambda: I \rightarrow S, s = \lambda(t)$ პარამეტრის გარდაქმნით.

$\rho'(s)$ ვექტორი მართობულია $\rho''(s)$ მართლაც, $\|\rho'(s)\| = \sqrt{(\rho'(s) \cdot \rho'(s))} = 1$ და თუ ამ ტოლობას გაავარაუბებთ მივიღებთ:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(\rho'(s) \cdot \rho'(s))}} \cdot (\rho'(s) \cdot \rho'(s))' = \frac{1}{2} ((\rho''(s) \cdot \rho'(s)) + (\rho'(s) \cdot \rho''(s))) = (\rho''(s) \cdot \rho'(s)) = 0.$$

სკალარული ნამრავლის $(\rho'(s) \cdot \rho'(s))$ ნულთან ტოლობა, კი ნიშნავს $\rho'(s)$, $\rho''(s)$ ვექტორების მართობულობას.

უთქვამთ, ახლა $(S_1, \rho_1 = \rho_1(s_1))$ მოცემული წირის მეორე ბუნებრივი პარამეტრიზაციაა, რომელიც მიიღება $\lambda_1 : I \rightarrow S_1, s_1 = \lambda_1(t)$. განვიხილოთ პარამეტრის გარდაქმნა:

$\lambda_2 : S \rightarrow S_1, s_1 = \lambda_2(s)$ რომელიც წარმოადგენს $\lambda_1 \circ \lambda^{-1}$ კომპოზიციას. გვექმნება:

$$I = \|\rho'(s)\| = \|\rho_1(\lambda_2(s))'\| = \|\rho_1'(\lambda_2(s))\lambda_2'(s)\| = \|\lambda_2'(s)\|.$$

რადგან $\|\rho_1'(\lambda_2(s))\| = 1$ და $\|\rho_1'(\lambda_2(s))\| \|\lambda_2'(s)\| = 1$, ამიტომ $|\lambda_2'(s)| = 1$. ეს კი ნიშნავს, რომ $\lambda_2(s) = \pm t$ და $s_1 = \lambda_2(s) = \pm s + s_0$. აქედან კი გამოდინარეობს, რომ

$$\rho''(s) = \rho_1''(\lambda_2(s))(\lambda_2'(s))^2 + \rho_1'(\lambda_2(s))\lambda_2''(s) = \rho_1''(s_1).$$

ამგვარად ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ პარამეტრიზირებული წირის კეიველენტიური ბუნებრივად პარამეტრიზირებული წირებისათვის $\rho''(s)$ ვექტორი ერთი და იგივეა.

$\rho''(s)$ ვექტორს უწოდებენ $(I, r = r(t))$ რეგულარული პარამეტრიზირებული წირის სიმრუდის ვექტორს, $t = \lambda^{-1}(s)$ წერტილში. ხოლო ამ ვექტორის სიგრძეს- $\|\rho''(s)\|$ კი ამ წირის სიმრუდეს $t = \lambda^{-1}(s)$ წერტილში. იგი აღინიშნება $k(t)$ სიმბოლოთი.

ცხადია, ბირეგულარული პარამეტრიზირებული წირის სიმრუდის ვექტორი მოცემულ წერტილში მდებარეობს ამ წერტილში წირის მიმხედ სიბრტყეში. ცხადია, ასევე, რომ წირის სიმრუდის ვექტორი და მხები ვექტორი მოცემულ წერტილში ურთიერთმართობულია. წირის რაიმე წერტილში სიმრუდის ვექტორის მიმართულების ერთეულოვან ვექტორს, რომელიც მიმხედ სიბრტყეში მდებარეობს მთავარ ნორმალს უწოდებენ. ამ ვექტორს აღნიშნავენ $\nu(t)$

სიმბოლოთი, ცხადია $\nu(t) = \frac{\rho''(s)}{\|\rho''(s)\|}$, $s = \lambda(t)$. ბირეგულარული წირის რაიმე წერტილში მხები

ვექტორის მიმართულების ერთეულოვან ვექტორს აღნიშნავენ $\tau(t)$. ცხადია, $\tau(t) = \frac{r(t)}{\|r(t)\|}$. ეს

ვექტორიც ცხადია მიმხედ სიბრტყეში მდებარეობს.

განვიხილოთ ერთეულოვანი ვექტორი $\beta(t) = \tau(t) \times \nu(t)$, ეს ვექტორი პერპენდიკულარული იქნება პარამეტრიზირებული წირის I წერტილზე გასული მიმხები სიბრტყის, მას პარამეტრიზებული წირის ბინორმალს უწოდებენ მოცემულ წერტილში. ცხადია:

$$\tau(t) = \nu(t) \times \beta(t), \quad \nu(t) \times \tau(t) = \beta(t).$$

განვიხილოთ $\tau(t)$, $\nu(t)$, $\beta(t)$ ერთეულოვან ვექტორთა მარჯვენა ორიენტაციის სისტემა და ამ სისტემით განსაზღვრული რეპერი $(r(t), \tau(t), \nu(t), \beta(t))$. ამ რეპერს $(I, r = r(t))$ ბირეგულარული პარამეტრიზირებული წირის ფრენის რეპერი უწოდება.

განვიხილოთ ფრენის რეპერის ვექტორთა წარმოებულები ბუნებრივი პარამეტრით.

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{\frac{dr'(t)}{dt}}{\frac{\|r'(t)\|}{dt} \frac{dt}{ds}} = \left(\frac{r''(t) \|r'(t)\|}{\|r'(t)\|^2} - \frac{r'(t) \|r'(t)\|'}{\|r'(t)\|^2} \right) \frac{dt}{ds} = \left(\frac{r''(t)}{\|r'(t)\|} - \frac{(r'(t) \cdot r''(t))}{\|r'(t)\|^3} r'(t) \right) \frac{dt}{ds} =$$

$$= \frac{r''(t)}{\|r'(t)\|^2} - \frac{(r'(t) \cdot r''(t))}{\|r'(t)\|^4} r'(t).$$

მეორე მხეი, თუ $(S, \rho = \rho(s))$ მოცემული წირის რაიმე ბუნებრივი პარამეტრიზაციაა, მაშინ $r(t) = \rho(\lambda(t))$ და აქედან გამომდინარე გვექნება:

$$r'(t) = \rho'(\lambda(t))\lambda'(t), \quad r''(t) = \rho''(\lambda(t))(\lambda'(t))^2 + \rho'(\lambda(t))\lambda''(t),$$

სადაც $s = \lambda(t)$ პარამეტრის გარდაქმნაა. რადგან $\|\rho'(\lambda(t))\| = 1$, ამიტომ პირველი ტოლობიდან გამომდინარეობს $|\lambda(t)| = \|r'(t)\|$ და გვაქვს $\rho''(\lambda(t)) = \frac{r''(t)}{\|r'(t)\|^2} - \frac{(r'(t) \cdot r''(t))}{\|r'(t)\|^4} r'(t)$.

ამ უკანასკნელი ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\frac{d\tau(t)}{ds} = \rho''(\lambda(t)) = k(t)v(t),$$

სადაც $k(t)$ წირის სიმრუდეა t წერტილში, $v(t)$ -მთავარი ნორმალის.

ესლა გამოვთვალოთ $\frac{d\beta(t)}{ds}$.

$$\frac{d\beta(t)}{ds} = \frac{d}{ds}(\tau(t) \times v(t)) = \frac{d\tau(t)}{ds} \times v(t) + \tau(t) \times \frac{dv(t)}{ds} =$$

$$= k(t)v(t) \times v(t) + \tau(t) \times \frac{dv(t)}{ds} = \tau(t) \times \frac{dv(t)}{ds}.$$

ამ ტოლობიდან ჩანს, რომ $\frac{d\beta(t)}{ds}$ ვექტორი მართობულია $\tau(t)$ ვექტორის, $\frac{d\beta(t)}{ds}$ ვექტორი

ასევე პერპენდიკულარულია $\beta(t)$ ვექტორის, აქედან ღი გამომდინარეობს, რომ $\frac{d\beta(t)}{ds}$

პარალელურია $v(t)$ მთავარი ნორმალის.

ეს ფაქტი ჩაწეროთ ასე:

$$\frac{d\beta(t)}{ds} = -\chi(t)v(t),$$

სადაც $\chi(t)$ ისეთი სიდიდეა, რომ $|\chi(t)| = \left\| \frac{d\beta(t)}{ds} \right\|$.

ასლა გამოვთვალოთ $\frac{dv(t)}{ds}$.

$$\frac{dv(t)}{ds} = \frac{d\beta(t)}{ds} \times \tau(t) + \beta(t) \times \frac{d\tau(t)}{ds} = -\chi\chi(t)v(t) \times \tau(t) + \beta(t) \times k(t)v(t) =$$

$$= \chi(t)\beta(t) - k(t)\tau(t).$$

საბოლოოდ

გვექნება:

$$\begin{cases} \frac{d\tau(t)}{ds} = k(t)v(t) \\ \frac{dv(t)}{ds} = \chi(t)\beta(t) - k(t)\tau(t) \\ \frac{d\beta(t)}{ds} = -\chi(t)v(t) \end{cases}$$

უკანასკნელ ტოლობებს *ფრენეს ფორმულები* ეწოდება.

ფრენეს ფორმულებში შემაჯავდ $\chi(t)$ სიდიდეს *პარამეტრიზირებული წირის გრესა* ეწოდება t .

როდესაც პარამეტრიზირებული წირი არ არის მოცემული ბუნებრივი პარამეტრიზაციით, მაშინ ფრენეს ფორმულები არ იძლევა საშუალებას გამოვიყენოთ წირის სიმრუდე და გრესა. გამოვიყენოთ და გრესის საანგარიშო ფორმულები, ნებისმიერად პარამეტრიზირებული წირისათვის.

ეთქვათ, მოცემულია ბუნებრივად პარამეტრიზირებული წირი $(I, r = r(t))$. გაეწარმოოთ $r(t)$ ვექტორი რაიმე ბუნებრივი პარამეტრით:

$$\frac{dr(t)}{ds} = \frac{dr(t)}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{dr(t)}{dt}}{\|r'(t)\|} = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \tau(t),$$

$$\frac{d^2r(t)}{ds^2} = \frac{d\tau(t)}{ds} = k(t)v(t).$$

გამოეთვალეთ ნამრავლები:

$$\begin{aligned} \frac{dr(t)}{ds} \times \frac{d^2r(t)}{ds^2} &= \tau(t) \times k(t)v(t) = k(t)\beta(t), \\ \left[\frac{dr(t)}{ds} \cdot \frac{d^2r(t)}{ds^2} \cdot \frac{d^3r(t)}{ds^3} \right] &= \left(\tau(t) \times k(t)v(t) \right) \cdot \frac{d^3r(t)}{ds^3} = \\ &= (k(t)\beta(t) \cdot (k'(t)v(t) + k(t)(-k(t)\tau(t) + \chi(t)\beta(t))) = \\ &= (k(t)\beta(t) \cdot (-k^2(t)\tau(t) + k(t)\chi(t)\beta(t))) = k^2(t)\chi(t). \end{aligned}$$

მეორე მხრივ:

$$\begin{aligned} \frac{dr(t)}{ds} &= \frac{dr(t)}{dt} \frac{dt}{ds}, \\ \frac{d^2r(t)}{ds^2} &= \frac{d^2r(t)}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{dr(t)}{dt} \frac{d^2t}{ds^2}, \\ \frac{d^3r(t)}{ds^3} &= \frac{d^3r(t)}{dt^3} \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 + \frac{d^2r(t)}{dt^2} 2 \frac{d^2t}{ds^2} \frac{dt}{ds} + \frac{d^2r(t)}{dt^2} \frac{dt}{ds} \frac{d^2t}{ds^2} + \frac{d^3t}{ds^3} \frac{dr(t)}{ds} = \\ &= \frac{d^3r(t)}{dt^3} \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 + 3 \frac{d^2r(t)}{dt^2} \frac{d^2t}{ds^2} \frac{dt}{ds} + \frac{dr(t)}{dt} \frac{d^3t}{ds^3}. \end{aligned}$$

ტოლობათა პირველი და მეორე ჯგუფებიდან მივიღებთ:

$$\frac{dr(t)}{ds} = \tau(t) = \frac{dr(t)}{dt} \frac{dt}{ds},$$

აქედან გვექნება:

$$\left| \frac{dt}{ds} \right| = \frac{1}{\| r'(t) \|}.$$

$$\frac{dr(t)}{ds} \times \frac{d^2 r(t)}{ds^2} = k(t) \beta(t) = \left(\frac{dr(t)}{dt} \times \frac{d^2 r(t)}{dt^2} \right) \left(\frac{dt}{ds} \right)^3.$$

აქედან გვექნება:

$$k(t) = \frac{\| r'(t) \times r''(t) \|}{\| r'(t) \|^3}.$$

$$\left[\frac{dr(t)}{ds} \cdot \frac{d^2 r(t)}{ds^2} \cdot \frac{d^3 r(t)}{ds^3} \right] = k^2(t) \chi(t) = \left[\frac{dr(t)}{dt} \cdot \frac{d^2 r(t)}{dt^2} \cdot \frac{d^3 r(t)}{dt^3} \right] \left(\frac{dt}{ds} \right)^6.$$

აქედან გვექნება:

$$\chi(t) = \frac{[r'(t) \cdot r''(t) \cdot r'''(t)]}{k(t) \| r'(t) \|^6} = \frac{[r'(t) r''(t) r'''(t)]}{\frac{\| r'(t) \times r''(t) \|^2}{\| r'(t) \|^6} \| r'(t) \|^6} = \frac{[r'(t) \cdot r''(t) \cdot r'''(t)]}{\| r'(t) \times r''(t) \|^2}.$$

მაშასადამე, საბოლოოდ ($I, r = r(t)$) პარამეტრიზებული წირისათვის გვაქვს სიმრუდისა და გრეხის საანგარიშო ფორმულები:

$$k(t) = \frac{\| r'(t) \times r''(t) \|}{\| r'(t) \|^3}$$

და

$$\chi(t) = \frac{[r'(t) \cdot r''(t) \cdot r'''(t)]}{\| r'(t) \times r''(t) \|^2}.$$

ზემოთ ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ პარამეტრიზებული წირის სიმრუდის ევქლიდისი არ არის დამოკიდებული მის ბუნებრივ პარამეტრიზაციაზე. რადგან ეკვივალენტურ პარამეტრიზებულ წირებს ეკვივალენტური ბუნებრივი პარამეტრიზაციები აქვთ, აქედან გამომდინარე, ეკვივალენტურ პარამეტრიზირებულ წირებს შესაბამის წერტილებში ერთნაირი სიმრუდის ევქტორები და სიმრუდეები ექნებათ.

ახლა ვაჩვენოთ, თუ როგორი გრეხა აქვთ ეკვივალენტურ პარამეტრიზირებულ წირებს შესაბამის წერტილებში.

თეორემა 4.5. თუ ($I, r = r(t)$) და ($J, \rho = \rho(l)$) ეკვივალენტური პარამეტრიზირებული წირებისათვის პარამეტრის გარდაქმნა $\lambda: I \rightarrow J$ ისეთია, რომ $\lambda'(t) > 0, t \in I$, მაშინ ამ წირების შესაბამის წერტილებში: $t, l = \lambda(t)$ ფრენებს რეპერები ერთმანეთს ემთხვევიან, ხოლო, თუ $\lambda'(t) < 0, t \in I$, მაშინ შესაბამის წერტილებში ფრენებს რეპერების სათავეები და მეორე ევქტორები ერთმანეთს ემთხვევიან, პირველი და მესამე ევქტორები კი ერთმანეთის მოპირდაპირეა.

დამტკიცება: რადგან $r(t) = \rho(\lambda(t))$, ამიტომ ფრენებს რეპერების სათავეები: $r(t), \rho(l)$ ერთმანეთს ემთხვევიან. რადგან როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ: ეკვივალენტურ პარამეტრიზირებულ წირებს ერთი და იგივე სიმრუდის ევქტორები აქვთ. ამიტომ ორივე შემთხვევაში ფრენებს რეპერთა

მეორე ვექტორები $\nu_1(t), \nu_2(t)$ ერთმანეთს დაემთხვევიან. $r'(t) = \rho'(\lambda(t))\lambda'(t)$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $\lambda'(t) > 0, t \in I$, მაშინ წირის მიხედვით ვექტორები და ფრენის რეპერის პირველი ვექტორები: $\tau_1(t), \tau_2(t)$ შესაბამის წერტილებში ერთმანეთს დაემთხვევიან, ხოლო თუ $\lambda'(t) < 0, t \in I$, მაშინ ამ ვექტორებს ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულებები ექნებათ.

$\beta_1(t) = \tau_1(t) \times \nu_1(t), \beta_2(t) = \tau_2(t) \times \nu_2(t)$ ამიტომ როდესაც $\lambda'(t) > 0, t \in I$, ფრენის რეპერის მესამე ვექტორები, ანუ ბინორმალური: $\beta_1(t), \beta_2(t)$ ეკვივალენტური პარამეტრიზირებული წირების შესაბამის წერტილებში ერთიდა იგივე იქნება, ხოლო როდესაც $\lambda'(t) < 0, t \in I$, მაშინ ამ ვექტორებს $\beta_1(t), \beta_2(t)$, რადგან $\tau_1(t) = -\tau_2(t)$, ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულებები ექნებათ. თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 4.6. თუ $(I, r = r(t))$ და $(J, \rho = \rho(l))$ ეკვივალენტური პარამეტრიზირებული წირებისათვის პარამეტრის გარდაქმნა $\lambda: I \rightarrow J$ ისეთია, რომ $\lambda'(t) > 0, t \in I$, მაშინ ამ წირების შესაბამის წერტილებში: $t, l = \lambda(t)$ გრეხა: $\chi_1(t), \chi_2(t)$ ერთმანეთის ტოლია.

დამტკიცება: ვთქვათ $(r(t), \tau_1(t), \nu_1(t), \beta_1(t))$, $(\rho(l), \tau_2(l), \nu_2(l), \beta_2(l))$ მოცემული წირების ფრენის რეპერებია შესაბამის $t, l = \lambda(t)$ წერტილებში. წინა თეორემის თანახმად:

$$\nu_1(t) = \nu_2(\lambda(t)), \quad \beta_1(t) = \beta_2(\lambda(t))$$

გაუწარმოოთ $\beta_1(t)$ და $\beta_2(\lambda(t))$ რაიმე ბუნებრივი s პარამეტრით:

$$\frac{d\beta_1(t)}{ds} = -\chi_1(t)\nu_1(t), \quad \frac{d\beta_2(l)}{ds} = -\chi_2(l)\nu_2(\lambda(t)).$$

მეორე მხრივ:

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_1(t)}{ds} &= \frac{d\beta_1(t)}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\beta_2(\lambda(t))}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\beta_2(\lambda(t))}{dl} \frac{dl}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\beta_2(\lambda(t))}{dl} \frac{dl}{ds} = \\ &= \frac{d\beta_2(\lambda(t))}{ds} = -\chi_2(\lambda(t))\nu_2(\lambda(t)) = -\chi_2(\lambda(t))\nu_1(t) = -\chi_2(t)\nu_1(t). \end{aligned}$$

მაშასადამე, 2. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $\chi_1(t) = \chi_2(t)$.

მაგალითი 1. გამოიყენებოდა ჰიპოთეზის წირის $r = r(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ სირულუ და გრეხა. ამისათვის გამოვიყენოთ $r'(t), r''(t), r'''(t)$ წარმოებულები:

$$r'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b),$$

$$r''(t) = (-a \cos t, -a \sin t, 0),$$

$$r'''(t) = (a \sin t, -a \cos t, 0).$$

აქედან გამომდინარე:

$$k(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} j & k \\ -a \sin t & a \cos t & b \\ a \sin t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix} \right\|}{(\sqrt{a^2 + b^2})^3} = \frac{\sqrt{a^2(a^2 + b^2)}}{(\sqrt{a^2 + b^2})^3} = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

$$\chi(t) = \frac{[r'(t) \cdot r''(t) \cdot r'''(t)]}{\|r'(t) \times r''(t)\|^2} = \frac{\begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \\ a \sin t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix}}{a^2(a^2 + b^2)} = \frac{b(a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t)}{a^2(a^2 + b^2)} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

2. გამოთვალეთ წრეწირის $r = r(t) = (R \sin t, R \cos t, 0)$ სიგრძე და გრესა.

ჯერ გამოთვალეთ $r'(t), r''(t), r'''(t)$ წარმოებულები:

$$r'(t) = (R \cos t, -R \sin t, 0),$$

$$r''(t) = (-R \sin t, -R \cos t, 0),$$

$$r'''(t) = (-R \cos t, R \sin t, 0).$$

აქედან გამოვძინარე:

$$k(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} j & k \\ R \cos t & -R \sin t & b \\ -R \sin t & -R \cos t & 0 \end{vmatrix}^2}}{(\sqrt{R^2})^3} = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R}.$$

$$\chi(t) = \frac{[r'(t) \cdot r''(t) \cdot r'''(t)]}{\|r'(t) \times r''(t)\|^2} = \frac{\begin{vmatrix} R \cos t & -R \sin t & 0 \\ -R \sin t & -R \cos t & 0 \\ -R \cos t & R \sin t & 0 \end{vmatrix}}{R^2} = 0.$$

მივიღეთ, რომ წრეწირის გრესა ნულის ტოლია, ეს მოსალოდნელიც იყო, რადგან წრეწირი ბრტყელი წირია, ბრტყელი წირებისათვის კი ბინორმალური $\beta(t)$ მუდმივი სიდიდეა და ჟრენეს

$$\frac{d\beta(t)}{ds} = -\chi(t)\nu(t) \text{ ფორმულაზე გვექნება } \frac{d\beta(t)}{ds} = 0 = -\chi(t)\nu(t), \text{ ანუ } \chi(t) = 0.$$

საინტერესოა რამდენად განსაზღვრავს პარამეტრიზირებულ წირს მის თითოეულ წერტილში სიგრძისა და გრესის ცოდნა. ამ საკითხზე პასუხს იძლევიან თეორემები, რომლებიც განიხილეთ აქვემოთ.

თეორემა 4.7. ეთქვათ, $f(s)$, $g(s)$ გლუვი, რაიმე $S = \langle a, b \rangle$ შუალედზე განსაზღვრული

ფუნქციებია, $f(s) > 0$, მაშინ არსებობს ბუნებრივად პარამეტრიზირებული ისეთი წირი

$(S, \rho = \rho(s))$ რომლის სიმრუდეს და გრეხას წირის თითოეულ $s \in S$ წერტილში წარმოადგენენ შესაბამისად სიდიდეები:

$f(s), g(s)$.

ღაშტკიცება: ვთქვათ, $(\rho(s_0), T(s_0), N(s_0), B(s_0))$ მარჯვენა ორიენტაციის $\rho(s_0)$

რადიუსვექტორის ბოლო წერტილში მოდებული ორთონორმირებული რეპერია, $s_0 \in S$.

განვიხილოთ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} T'(s) = f(s)N(s), \\ N'(s) = -f(s)T(s) + g(s)B(s), \\ B'(s) = -g(s)N(s). \end{cases}$$

$T(s), N(s), B(s)$ ვექტორუნიციების მიმართ.

ეს სისტემა მატრიცულად ჩაიწერება ასე:

$$X'(s) = A(s)X(s),$$

$$\text{სადაც } X(s) = \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix} \text{ და } A(s) = \begin{pmatrix} 0 & f(s) & 0 \\ -f(s) & 0 & g(s) \\ 0 & -g(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

როგორც დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიიდან არის ცნობილი მოცემულ სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი:

$$X(s) = \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix}.$$

რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს:

$$X(s_0) = \begin{pmatrix} T(s_0) \\ N(s_0) \\ B(s_0) \end{pmatrix}.$$

ვაჩვენოთ, რომ ყოველი $s \in S$ პარამეტრის მნიშვნელობისათვის ეს ამონახსნი შეადგენს ვექტორთა ორთონორმირებულ სისტემას.

$T(s)$ ვექტორის კოორდინატებია: $(T_1(s), T_2(s), \dots, T_n(s))$.

$N(s)$ ვექტორის კოორდინატებია: $(N_1(s), N_2(s), \dots, N_n(s))$.

$B(s)$ ვექტორის კოორდინატებია: $(B_1(s), B_2(s), \dots, B_n(s))$.

ცნობილია, რომ $X(s)$ მატრიცის ელემენტებისაგან შედგენილი სისტემა მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის ორთონორმირებული, როდესაც

$$X(s) = \begin{pmatrix} T(s), \\ N(s), \\ B(s) \end{pmatrix}$$

ამონახსნის ვექტორები შეადგენენ ვექტორთა ორთონორმირებულ სისტემას ყოველი $s \in S$ წერილისათვის
უთქვამთ ახლა,

$$\rho(s) = \rho(s_0) + \int_a^s T(\tau) d\tau,$$

სადაც $\rho(s_0)$ ($\rho(s_0), T(s_0), N(s_0), B(s_0)$) რეპერის სათავეა, $T(s)$ კი $(\rho(s), T(s), N(s), B(s))$ ცელადი რეპერის პირველი ვექტორი, ინტეგრალი კი დებულობს ვექტორულ მნიშვნელობას.

ვაჩვენოთ, რომ უკანასკნელი განტოლებით მოცემული ($S, \rho = \rho(t)$) პარამეტრიზირებული წირის სიმრუდე ტოლია $f(s)$ -ის მართლაც, $\frac{d\rho(s)}{ds} = T(s)$, $\frac{d^2\rho(s)}{ds^2} = \frac{dT(s)}{ds} = f(s)N(s)$, აქედან გამომდინარე, რადგან $\| \frac{d\rho(s)}{ds} \| = 1$ წირი იქნება ბუნებრივად პარამეტრიზირებული და მისი

სიმრუდე თითოეულ წერტილში იქნება $\| \frac{d^2\rho(s)}{ds^2} \| = f(s)$. ამასთან $\frac{d\rho(s)}{ds} \times \frac{d^2\rho(s)}{ds^2} \neq 0$ და

მაშასადამე მოცემული პარამეტრიზირებული წირი ბირეგულარულიც იქნება.

ახლა ვაჩვენოთ ამ წირის გრესა ტოლია $g(s)$ -ის მართლაც,

$$\begin{aligned} \frac{d^3\rho(s)}{ds^3} &= \frac{d(f(s)N(s))}{ds} = \frac{df(s)}{ds} N(s) + f(s) \frac{dN(s)}{ds} = \\ &= \frac{df(s)}{ds} N(s) + f(s)(-f(s)T(s) + g(s)B(s)) \\ \chi(t) &= \frac{\left[\frac{d\rho(s)}{ds} \cdot \frac{d^2\rho(s)}{ds^2} \cdot \frac{d^3\rho(s)}{ds^3} \right]}{\left\| \frac{d\rho(s)}{ds} \times \frac{d^2\rho(s)}{ds^2} \right\|^2} = \frac{(f(s))^3 g(s)}{(f(s))^2} = g(s). \end{aligned}$$

თეორემა დამტკიცდა.

$$\rho(s) = \rho(s_0) + \int_a^s T(\tau) d\tau$$

განტოლებას პარამეტრიზირებული წირის ნატურალურ განტოლებას უწოდებენ.

თეორემა 4.8. თუ $(I, r_1 = r_1(t))$ და $(I, r_2 = r_2(t))$ პარამეტრიზირებული წირებია პარამეტრთა ერთიდაიგივე სიმრავლით. ამასთან $k_1(t) = k_2(t)$, $\chi_1(t) = \chi_2(t)$ და $\|r'_1(t)\| = \|r'_2(t)\|$, მაშინ

არსებობს E_n ევკლიდესის სივრცის ისეთი მოძრაობა: $D: E_n \rightarrow E_n$, რომ $D \circ r_1 = r_2$.

დამტკიცება: დაუფიქსიროთ ნებისმიერი წერტილი $t_0 \in I$ და ვთქვათ $D: E_n \rightarrow E_n$, ისეთი მოძრაობაა, რომელსაც გადაწყავს $(r_1(t_0), r_1(t_0), \nu_1(t_0), \beta_1(t_0))$ ფრენეს რეპერი

$(r_2(t_0), r_2(t_0), v_2(t_0), \beta_2(t_0))$ ფრენებს რეპერში. როგორც (კნობოლია, ასეთი მოძრაობა არსებობს და ის ერთადერთია. უოქვათ $r_3(t) = (D \circ r_1)(t)$ და $k_3(t)$, $\chi_3(t)$ სიმრუდე და გრესა

$(I, r_3 = r_3(t))$ პარამეტრიზირებული წირისა.

მაშინ, რადგან D მოძრაობაა: $k_1(t) = k_3(t)$, $\chi_1(t) = \chi_3(t)$. ამას გარდა $\|r_1(t)\| = \|r_3(t)\|$.

ეს კი ნიშნავს, რომ ვექტორფუნქციები: $r_3(t)$, $v_3(t)$, $\beta_3(t)$ წარმოადგენენ

$$\begin{cases} r'(t) = \|r_1'(t)\| k_1(t) v(t), \\ v'(t) = -\|r_1'(t)\| k_1(t) \tau(t) + \|r_1'(t)\| \beta(t), \\ \beta'(t) = -\|r_1'(t)\| \chi_1(t) v(t). \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემის ამონახსნს. რადგან $(I, r_2 = r_2(t))$, $(I, r_3 = r_3(t))$ წირების ფრენებს რეპერები ერთმანეთს ემთხვევიან $t_0 \in I$ წერტილში და მოცემულ განტოლებათა სისტემას $t = t_0$, $r_1 = r(t_0)$, $v_1 = v(t_0)$, $\beta_1 = \beta(t_0)$ საწყის პირობებში აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

რადგან $k_1(t) = k_2(t)$, $\chi_1(t) = \chi_2(t)$, $\|r_1'(t)\| = \|r_2'(t)\|$ ამიტომ გვექნება $r_2(t) = r_3(t)$, ანუ

$$\frac{r_2'(t)}{\|r_2'(t)\|} = \frac{r_3'(t)}{\|r_3'(t)\|}. \text{ ასევე, რადგან } \|r_2'(t)\| = \|r_3'(t)\|,$$

ამიტომ $r_2'(t) = r_3'(t)$. მაშასადამე $r_2'(t) - r_3'(t) = 0$ და ყველა $t \in I$ წერტილისთვის, სადაც C მუდმივი სიდიდეა. რადგან, $r_2(t_0) - r_3(t_0) = 0$ ამიტომ $r_2(t) = r_3(t)$ ყველა $t \in I$ წერტილისთვის. მაშასადამე ადგილი აქვს ტოლობას: $D \circ r_1 = r_2$.

D მოძრაობა დამოკიდებული არ არის $t = t_0$ წერტილის ამორჩევაზე. მართლაც, $r_2(t) = r_3(t)$ ტოლობის გამო $(I, r_1 = r_1(t))$ წირის ფრენებს რეპერი $t = t_1$ წერტილში D მოძრაობას გადაჰყავს $(I, r_2 = r_2(t))$ წირის $t = t_1$ წერტილში ფრენებს რეპერში. თორემა დამტკიცდა.

§ 5. პარამეტრიზირებული ზედაპირი ეკელიდეს სივრცეში

m განზომილებიანი პარამეტრიზებული გლუვი ზედაპირი ეკელიდეს E_n , $n > m$ სივრცეში

ეწოდება წვეილს (U, γ) , სადაც $\gamma: U \rightarrow E_n$ წარმოადგენს გლუვ ჩაძირვას $U \subset E_n$ ბმული არის E_n ეკელიდეს სივრცეში. თუ წერტილს ეკელიდეს E_n სივრცეში გაეაიგივეებთ ამავე წერტილის რადიუსექტორთან რომელიმე დაფიქსირებულ კოორდინატთა სისტემაში, მაშინ პარამეტრიზირებული ზედაპირი შეიძლება წარმოეადგინოთ $(U, r = r(x))$ წვეილის სახით, სადაც $r: U \rightarrow E^n$ ვექტორფუნქციაა, რომელიც მნიშვნელობას ღებულობს ეკელიდეს n განზომილებიან ექტორულ სივრცეში.

თუ $x \in U$ წერტილის კოორდინატებია $x_1, x_2, \dots, x_n$ და $r(x)$ ვექტორის კოორდინატები $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ მაშინ

$$y_1 = y_1(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$y_2 = y_2(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$y_n = y_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

თავისი არგუმენტების გლუვი ფუნქციებია.

$r = r(x)$ ტოლობას პარამეტრიზირებული გლუვი ზედაპირის ვექტორული განტოლება ეწოდება.

თუ $x^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ წერტილში

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

იაკობის მატრიცის რანგი ტოლია m -ის, მაშინ იუწყებულ ზედაპირს ეწოდება

არაგანსაკუთრებული $r(x^0)$ წერტილში. ზოგიჯერ გამოიყენება: „ $r(x^0)$ წერტილში“ მკაფიოდ ეხსმარება გამოთქმას: „ x^0 წერტილში“.

მათემატიკური ანალიზიდან ცნობილ შეკვეთვლი ფუნქციის შესახებ თეორემის მიხედვით, თუ x^0 წერტილში იაკობის მატრიცის რანგი ტოლია m -ის,

მაშინ არსებობს x^0 წერტილის ისეთი მდგომარეობა $u(x^0)$, რომ $r|_{u(x)}: u(x) \rightarrow r(u(x))$

დიფეომორფიზმია.

სიმრავლეს $r(U) \subset E^n$ გლუვი პარამეტრიზირებული ზედაპირის ტანი ეწოდება. იგი

აღინიშნება ასე: $|r|$.

($U, r = r(x)$) გლუვ პარამეტრიზირებულ ზედაპირს ეწოდება მარტივი, თუ $r: U \rightarrow E^n$

წარმოადგენს გლუვ ჩადგმას. მარტივი გლუვი პარამეტრიზირებული ზედაპირის ტანი ცხადია, წარმოადგენს გლუვ მრავალსახეობას.

მაგალითები. 1. $U = E_2$. $r(x_1, x_2) = r^0 + ax_1 + bx_2$, სადაც $a \cdot b \neq 0$ წარმოადგენს სიბრტყეს E_3 -

ში.

$$2. U = \{(x_1, x_2) \in E_2 \mid -\frac{\pi}{2} < x_1 < \frac{\pi}{2}; 0 < x_2 < 2\pi\},$$

$$r = r(x_1, x_2) = (r \sin x_1 \cos x_2, r \sin x_1 \sin x_2, r \cos x_1). \text{ სფერო } E_3\text{-ში.}$$

3. $z = f(x, y)$ ფუნქციის გრაფიკი, თუ ფუნქცია განსაზღვრულია რაიმე არეზე ორგანოზომილებიან E_2 სივრცეში. წარმოადგენს ორგანოზომილებიან ზედაპირს E_3 -ში. ამ ზედაპირის ევქტორული განტოლება იქნება: $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$.

ეთქვით ახლა ზედაპირის $x^0 \in U$ წერტილში $\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_m)}$ იაკობის მატრიცის რანგი ტოლია m -ის, მაშინ ევქტორები:

$$r_1 = \frac{\partial r}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \right),$$

$$r_2 = \frac{\partial r}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y_n}{\partial x_2} \right),$$

$$r_m = \frac{\partial r}{\partial x_m} = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_m}, \frac{\partial y_2}{\partial x_m}, \dots, \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \right)$$

ქმნიან ევქტორთა წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას. ამ ევქტორთა წრფივი გარსი წარმოადგენს m განზომილებიან ევქტორულ სივრცეს, მას ეწოდება მოცემული

$S = (U, r = r(x))$ ზედაპირის მხები სივრცე $x^0 \in U$ წერტილში, მის ელემენტებს კი ზედაპირის მხები ევქტორები ამავე წერტილში. ზედაპირის მხები სივრცე აღინიშნება ასე: $T_{x^0}S$.

$S_1 = (U, r = r(x))$, $S_2 = (\Omega, \theta = \theta(\xi))$ გლუვ პარამეტრიზებულ ზედაპირებს მიეფასებენ უწოდებენ, თუ არსებობს ისეთი $\varphi: U_1 \rightarrow U_2$ დიფეომორფიზმი, რომ $r(x) = \theta(\varphi(x))$. $\lambda: U_1 \rightarrow U_2$ დიფეომორფიზმს კი ეწოდებენ პარამეტრთა გარდაქმნას. ცხადია, პარამეტრთა გარდაქმნის

იაკობიანი $J = \det \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right)_{i,j=1,2,\dots,m} \neq 0$, -იაკობის მატრიცის დეტერმინანტი, ნულისაგან

განსხვავებულია.

განივილით $\xi^0 = \varphi(x^0)$ წერტილში $S_2 = (\Omega, \theta = \theta(\xi))$ ზედაპირის მხები სივრცის წარმოქმნილი ევქტორები:

$$\theta_1 = \frac{\partial \theta}{\partial \xi_1} = \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1}, \frac{\partial y_2}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial y_n}{\partial \xi_1} \right),$$

$$\theta_2 = \frac{\partial \theta}{\partial \xi_2} = \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_2}, \frac{\partial y_2}{\partial \xi_2}, \dots, \frac{\partial y_n}{\partial \xi_2} \right),$$

$$\theta_m = \frac{\partial \theta}{\partial \xi_m} = \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_m}, \frac{\partial y_2}{\partial \xi_m}, \dots, \frac{\partial y_n}{\partial \xi_m} \right).$$

ამ ევქტორების საშუალებით r_j , $j = 1, 2, \dots, m$ ევქტორები გამოისახება შემდეგნაირად:

$$r'_j = \frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_j} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial \theta}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j}.$$

თითოეული r_j , $j = 1, 2, \dots, m$ ვექტორის i -ური კოორდინატი $i = 1, 2, \dots, n$ გამოითვლება

ფორმულით:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \frac{\partial y_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_j} + \frac{\partial y_i}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j}.$$

მიღებული ფორმულებიდან ჩანს, რომ ეკვივალენტურ პარამეტრიზებულ ზედაპირებს ერთიდა იგივე ჩახედი სივრცე აქვთ შესაბამის წერტილებში.

ვითქვით, რომ პარამეტრიზირებული გლუვი $(I, \rho = \rho(I))$ წირი მდებარეობს

პარამეტრიზირებულ გლუვ $S = (U, r = r(x))$ ზედაპირზე, თუ $\rho(I) \subset r(U)$.

თეორემა 5.1. თუ პარამეტრიზირებული გლუვი $(I, \rho = \rho(I))$ წირი მდებარეობს პარამეტრიზირებულ გლუვ $S = (U, r = r(x))$ ზედაპირზე, მაშინ U არეში არსებობს ისეთი ერთადერთი გლუვი პარამეტრიზირებული $(J, \tilde{\rho} = \tilde{\rho}(I))$ წირი, რომ $J \subset I$ და $\rho(I) = r(\tilde{\rho}(I))$. პირიქით, ყოველი პარამეტრიზირებული გლუვი $(J, \tilde{\rho} = \tilde{\rho}(I))$ წირი

U არეში, განსაზღვრავს პარამეტრიზირებულ გლუვ წირს $S = (U, r = r(x))$ ზედაპირზე. ამასთან, თუ $(I, \rho = \rho(I))$ რეგულარულია, მაშინ $(J, \tilde{\rho} = \tilde{\rho}(I))$ წირიც რეგულარულია.

დამტკიცება: ვთქვათ, $I_0 \in I$ რეგულარული წერტილია $(I, \rho = \rho(I))$ წირზე. და $\rho(I_0)$ არაგანსაკუთრებული წერტილია $S = (U, r = r(x))$ ზედაპირზე. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, არსებობს $r^{-1}(\rho(I_0)) \in U$ წერტილის ისეთი მიდამო $u(r^{-1}(\rho(I_0)))$, რომ

$r|_{u(r^{-1}(\rho(I_0)))} : u(r^{-1}(\rho(I_0))) \rightarrow r(u(r^{-1}(\rho(I_0))))$ დიფეომორფიზმია. განვიხილოთ, თანაკვეთა

$I' \cap \rho^{-1}(r(u(r^{-1}(\rho(I_0)))) = J$, სადაც I' წარმოადგენს I_0 წერტილის იმ მიდამოს რომელზედაც

ρ ასახვის შეზღუდვა პოიმორფიზმია. ცხადია, წყვილი: $(J, \tilde{\rho} = (r^{-1}|_{r(u(r^{-1}(\rho(I_0)))})} \circ \rho|_I)(I)$

წარმოადგენს პარამეტრიზირებული წირს U არეში, და $\rho(I) = r(\tilde{\rho}(I))$, როდესაც $I \in J$.

$\tilde{\rho} = r^{-1}|_{r(u(r^{-1}(\rho(I_0))))} \circ \rho|_I$ ასახეა გლუვია J შუალედზე, რადგან $r^{-1}|_{r(u(r^{-1}(\rho(I_0))))} : \rho|_I$ ასახეები

გლუვია თავიანთ განსაზღვრის არეებზე.

$$\tilde{\rho}(I) = (x_1(I), x_2(I), \dots, x_m(I)), \quad \frac{d\tilde{\rho}(I)}{dt} = \left(\frac{dx_1(I)}{dt}, \frac{dx_2(I)}{dt}, \dots, \frac{dx_m(I)}{dt} \right).$$

$$\rho(I) = r(\tilde{\rho}(I)) = r(x_1(I), x_2(I), \dots, x_m(I)).$$

აქედან გამომდინარე:

$$\frac{d\rho(I)}{dt} = \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{dx_1(I)}{dt} + \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{dx_2(I)}{dt} + \dots + \frac{\partial r}{\partial x_m} \frac{dx_m(I)}{dt}.$$

ამ ვექტორის i -ური $i = 1, 2, \dots, n$ კოორდინატი

$$\frac{dy_i(I)}{dt} = \frac{\partial y_i}{\partial x_1} \frac{dx_1(I)}{dt} + \frac{\partial y_i}{\partial x_2} \frac{dx_2(I)}{dt} + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial x_m} \frac{dx_m(I)}{dt}.$$

უკანასკნელი ტოლობებიდან ჩანს, თუ $\frac{d\bar{\rho}}{dt} \neq 0$ მაშინ $\frac{d\rho}{dt} \neq 0$ და პირიქით. თეორემა

დამტკიცდა.

როგორც ვხედავთ, ზედაპირზე მდებარე წირის მხები ვექტორი, წირის თითოეულ წერტილზე წარმოადგენს ზედაპირის შესაბამის წერტილში მხები სიბრტყის საბაზისო ვექტორების წრფივი კომბინაციას, ამიტომ ავიღოთ მდებარეობს ამ სივრცეში.

$(J, \bar{\rho} = \bar{\rho}(r))$ წირის $(I, \rho = \rho(r))$ წირის შინაგან პარამეტრიზაციას უწოდებენ.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ეკვივალენტურ პარამეტრიზებულ $S_1 = (U, r = r(x))$,

$S_2 = (\Omega, \sigma = \sigma(\xi))$ ზედაპირებზე მდებარე $(I, \rho = \rho(r))$ და $(I, \sigma = \sigma(r) = \sigma(\varphi(\bar{\rho}(r))))$

პარამეტრიზირებული წირებისათვის $\frac{d\rho(r)}{dt}$, $\frac{d\sigma(r)}{dt}$ ვექტორები ერთმანეთთან

დაკავშირებული არიან შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(r)}{dt} &= \frac{d\sigma(\varphi(\bar{\rho}(r)))}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi_1} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_m} \frac{dx_m}{dt} \right) = \\ &= \frac{\partial \theta}{\partial \xi_1} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_m} \frac{dx_m}{dt} \right) + \dots + \frac{\partial \theta}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial \xi_m}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \xi_m}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \xi_m}{\partial x_m} \frac{dx_m}{dt} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \theta}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_1} \right) \frac{dx_1}{dt} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \theta}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_2} \right) \frac{dx_2}{dt} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_m} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_m} + \dots + \frac{\partial \theta}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_m} \right) \frac{dx_m}{dt} = \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial r}{\partial x_m} \frac{dx_m}{dt} = \frac{d\rho(r)}{dt} \right) \end{aligned}$$

$$\text{მაშასადამე, } \frac{d\rho(r)}{dt} = \frac{d\sigma(r)}{dt}.$$

განვიხილოთ ვექტორი p , რომელიც მოთავსებულია $(U, r = r(x))$ პარამეტრიზირებული ზედაპირის $T_x S$ მხებ სივრცეში. ვიყენოთ, რომ არსებობს პარამეტრიზირებული წირი რომელიც მდებარეობს მოცემულ ზედაპირზე და რომლის მხები ვექტორიც $\rho(r_0) = x^0$ წერტილში ტოლია p ვექტორის.

ადგილი აქვს ტოლობას $p = \frac{\partial r}{\partial x_1} \alpha_1^0 + \frac{\partial r}{\partial x_2} \alpha_2^0 + \dots + \frac{\partial r}{\partial x_m} \alpha_m^0$, სადაც $\alpha_i^0, i = 1, 2, \dots, m$ რაიმე

რიცხვებია. და თუ $(I, \rho = \rho(t))$ საძიებელი პარამეტრიზირებული წირია, ტოლობას:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} = \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{dx_1(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} + \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{dx_2(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} + \dots + \frac{\partial r}{\partial x_m} \frac{dx_m(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} = p$$

თუ განვიხილავთ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1(t)}{dt} = \alpha_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = \alpha_2(t), \\ \vdots \\ \frac{dx_m(t)}{dt} = \alpha_m(t) \end{array} \right.$$

მაშინ ამ განტოლებათა სისტემას $\alpha_i(t)|_{t=t_0} = \alpha_i^0, i=1,2,\dots,n$ საწყის პირობებში ექნება ერთადერთი ამონახსნი $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$, რომელიც განსაზღვრული იქნება t_0 წერტილის რაიმე I მიდამოში.

$(U, r = r(x))$ ზედაპირზე მდებარე პარამეტრიზირებული

$$(I, \rho = \rho(t) = r(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)))$$

წირისათვის ადგილი აქვს ტოლობას ტოლობას:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} = \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{dx_1(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} + \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{dx_2(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} + \dots + \frac{\partial r}{\partial x_m} \frac{dx_m(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} = p.$$

ამიტომ აგებული წირი საძიებელი წირია.

წნ. პარამეტრიზირებული ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმა.

ზედაპირის შინაგანი გეომეტრია

როგორც წინა პარაგრაფში ვნახეთ $\frac{d\rho(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$. ამ ტოლობიდან კი ჩანს, რომ $\frac{d\rho(t)}{dt}$

ვექტორი წარმოადგენს $\frac{\partial r}{\partial x_i}, i=1,2,\dots,n$ ვექტორების წრფივ კომბინაციას, ეს ვექტორები კი

ზედაპირის მხეც $T_{\rho(t)}$ სივრცეში მდებარეობენ, ამიტომ $\frac{d\rho(t)}{dt}$ ვექტორი ზედაპირის მხეცში

ვექტორია. $\rho(t)$ ვექტორის დიფერენციალისთვის გვაქვს:

$$d\rho(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial r}{\partial x_i} dx_i(t).$$

როგორც ვიცით, $(I, \rho = \rho(t))$ პარამეტრიზირებული გლუვი წირის $t = \alpha$ და $t = \tau$ წერტილებს შორის მოთავსებული რკალის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით:

$$s(\tau) = \int_{\alpha}^{\tau} \|\rho'(t)\| dt.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$ds(r) = \| \rho'(r) \| dr = \| d\rho(r) \|.$$

თუ $(I, \rho = \rho(r))$ წირი მდებარეობს $S = (U, r = r(x))$ პარამეტრიზირებულ ზედაპირზე, მაშინ რადიან E_n ეკლიდეს წერტილოვან სივრცეში მდებარე ზედაპირის მხები სივრცეები

თითოეულ მის წერტილში წარმოადგენენ E^n ეკლიდეს ევქტორული სივრცის ქვესივრცეებს. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ზედაპირზე მდებარე წირის მხები ევქტორი მის რაიმე წერტილში ამ ზედაპირის შესაბამის წერტილში მხებ სივრცეში მდებარეობს, ამიტომ

$$(ds(r))^2 = \| d\rho(r) \|^2 = \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial r}{\partial x_i} dx_i + \sum_{j=1}^n \frac{\partial r}{\partial x_j} dx_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g_{ij} dx_i dx_j,$$

სადაც

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_j} \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, m$$

$\frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_j} \in E^n$ ევქტორების სკალარული ნამრავლია E^n ეკლიდეს ევქტორულ სივრცეში.

წინა ტოლობის მარჯვენა მხარეს S პარამეტრიზირებული ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმა ეწოდება. ეს კვადრატული ფორმა ცხადია დადებითადაა განსაზღვრული, იგი აღინიშნება ასე: $G(x, dx)$. ამ აღნიშვნაში ზოგჯერ შეიძლება x სიმბოლოს ნაცვლად ჩაეწეროს $r(x) = M$ იმისათვის, რომ უფრო ზუსტად მიუთითოთ ის წერტილი, რომელზე გაჩაღდა მხებ სივრცეზედაც ეხილათ კვადრატულ ფორმას. ასეთ შემთხვევაში აღნიშვნას ეძღება სახე $G(M, dx)$.

თუ ცნობილია ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმა, ანუ თუ ცნობილია g_{ij} კოეფიციენტები, როგორც ფუნქციები ზედაპირის წერტილებისა, მაშინ ამ ზედაპირზე მდებარე ყოველი $(I, \rho = \rho(r))$ წირის რკალის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით:

$$l_a^k(\rho) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g_{ij}(\rho(r)) x'_i(t) x'_j(t)} dt$$

თუ პარამეტრიზირებული $S = (U, r = r(x))$ ზედაპირის რაიმე $r(x_0) = M$ წერტილში გადაიკეულება ამ ზედაპირზე მდებარე ორი $(I, \rho_1 = \rho_1(r))$, $(I, \rho_2 = \rho_2(r))$ პარამეტრიზირებული წირი, მაშინ კუთხე ამ ორი წირის შორის, ანუ კუთხე ამ წირების $r(x_0) = M$ წერტილში მხებ წრფეებს შორის გამოითვლება ფორმულით:

$$\cos \omega = \frac{(d\rho_1 \cdot d\rho_2)}{\|d\rho_2\| \cdot \|d\rho_1\|} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g_{ij}(M) dx_i^1 dx_j^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g_{ij}(M) dx_i^1 dx_j^1} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g_{ij}(M) dx_i^2 dx_j^2}}.$$

ამ ფორმულის მარჯვენა მხარეს, მრიცხველში ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმით განსაზღვრული ორადწრფივი ფორმაა. ეს ფორმა წარმოადგენს სკალარულ ნამრავლს $T_M S$ მხებ სივრცეში ინდუცირებულს E_n წერტილოვანი ეკლიდეს სივრცის შესაბამისი E^n ევქტორული სივრციდან. მართლაც, თუ $T_M S$ სივრცეში მოცემულია ორი ევქტორი, მაშინ

როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ, ეს ვექტორები შეიძლება ჩაითვალოს ამ ზედაპირზე მდებარე პარამეტრიზირებული $(I, \rho_1 = \rho_1(t))$, $(J, \rho_2 = \rho_2(t))$ წირების მსგებ ვექტორებად, გვეყენება:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m g_{ij}(M) \frac{dx_i^1}{dt} \frac{dx_j^2}{dt} &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) \frac{dx_i^1}{dt} \frac{dx_j^2}{dt} = \\ &= \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{dx_i^1}{dt} \cdot \sum_{j=1}^m \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{dx_j^2}{dt} \right) = \left(\frac{d\rho_1(t)}{dt} \cdot \frac{d\rho_2(t)}{dt} \right) \end{aligned}$$

სადაც $\left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_j} \right)$, $i, j = 1, 2, \dots, m$ სკალარული ნამრავლია E^n ევკლიდეს ვექტორულ სივრცეში.

გლუვი პარამეტრიზირებული $S = (U, r = r(x))$ ზედაპირის მოცულობა ეწოდება რიცხვს:

$$V = \int_U \sqrt{|g_{ij}|} dx_1 dx_2 \dots dx_m.$$

ეთქვას, $S_1 = (U_1, r_1 = r_1(x))$ და $S_2 = (U_2, r_2 = r_2(x))$ გლუვი პარამეტრიზირებული ზედაპირებია. თეორემა 6.1. ეკვივალენტურ პარამეტრიზირებულ ზედაპირებს ერთნაირი მოცულობები აქვთ.

დამტკიცება: ეთქვას, $S_1 = (U_1, r_1 = r_1(x))$ და $S_2 = (U_2, r_2 = r_2(x))$ ეკვივალენტური გლუვი პარამეტრიზირებული ზედაპირებია და $\lambda: U_1 \rightarrow U_2$ შესაბამისი პარამეტრთა გარდაქმნა, რომლის იაკობის მატრიცია:

$$J = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \right)_{i,j=1,2,\dots,m}$$

სადაც k სტრიქონების ინდექსია l სვეტების.

$$y(x_1, x_2, \dots, x_m) = \lambda(x(x_1, x_2, \dots, x_m)), \quad r_1(x) = r_2(\lambda(x)).$$

r_1, r_2 ვექტორფუნქციების სრული დიფერენციალებია:

$$dr_1 = \sum_{i=1}^m \frac{\partial r_1}{\partial x_i} dx_i,$$

$$dr_2 = \sum_{i=1}^m \frac{\partial r_2}{\partial \alpha_i} d\alpha_i.$$

აქედან გამოიმდინარე:

$$\|dr_1\|^2 = (dr_1 \cdot dr_1) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m g_{ij} dx_i dx_j,$$

სადაც $(g_{ij})_{i,j=1,2,\dots,m}$ წარმოადგენს S_1 ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმის მატრიცს.

$$\|dr_2\|^2 = (dr_2 \cdot dr_2) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \bar{g}_{ij} d\alpha_i d\alpha_j,$$

სადაც $(\bar{g}_{ij})_{i,j=1,2,\dots,m}$ წარმოადგენს S_2 ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმის მატრიცს.

მაშასადამე. $\|dx\|^2, \|dx\|^2$ სიდიდეები წარმოადგენენ პირველი და მეორე უვლადპირების პირველ კვადრატულ ფორმებს.

ჩაწერით მატრიცულად ეს კვადრატული ფორმები

$$\|dx\|^2 = (dx_i)'(g_{ij})(dx_j), \quad i, j, = 1, 2, \dots, m$$

$$\|dx\|^2 = (dx_i)'(\bar{g}_{ij})(dx_j), \quad i, j, = 1, 2, \dots, m.$$

ამ ტოლობებში პირველი თანამართლები წარმოადგენენ მესამე თანამართლებების, ერთსევეტიანი მატრიცების ტრანსპონირებით მიღებულ ერთსტრიქონიან მატრიცებს.

$$dx_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) dx_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial r_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \right) dx_j.$$

აქედან გამომდინარეობს ვექტორთა ტოლობა:

$$\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) = \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial r_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \right)_{i=1,2,\dots}$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეს მდგომი ვექტორი წარმოადგენს ნამრავლს

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_m} & \frac{\partial y_2}{\partial x_m} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{\partial r_i}{\partial y_k} \right)_{i=1,2,\dots,m}$$

რომელშიდაც პირველი თანამართლები პარამეტრთა გარდაქმნის J იაკობის მატრიცის ტრანსპონირებული J' მატრიცია, მეორე თანამართლები კი ერთსევეტიანი მატრიცია, რომელიც შედგება S_2 უვლადპირის მხები სივრცის საბაზისო ვექტორებისაგან.

მაშასადამე $\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) = J' \left(\frac{\partial r_i}{\partial y_k} \right)_{i=1,2,\dots,m}$ სადაც k სევეტების ინდექსია.

$$dx_i = (dx_1, dx_2, \dots, dx_m) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial r_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial r_i}{\partial x_2} \\ \dots \\ \frac{\partial r_i}{\partial x_m} \end{pmatrix} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_m) \cdot J \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial r_i}{\partial y_1} \\ \frac{\partial r_i}{\partial y_2} \\ \dots \\ \frac{\partial r_i}{\partial y_m} \end{pmatrix} =$$

$$= (dy_1, dy_2, \dots, dy_m)(J')^{-1} J' \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial y_1} \\ \frac{\partial r_2}{\partial y_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial r_2}{\partial y_m} \end{pmatrix} = dr_2.$$

მაშასადამე, მივიღეთ: $dr_1 = dr_2$. აქედან კი გამოიმდინარეობს:

$$\|dr_1\|^2 = (dr_1 \cdot dr_1) = (dr_2 \cdot dr_2) = \|dr_2\|^2.$$

ეს ტოლობა გეჩვენებს, რომ ეკვივალენტურ ზედაპირებს ერთი და იგივე პირველი კვადრატული ფორმები აქვთ შესაბამისი წერტილებში.

dr_1 ვექტორის კოორდინატებს $\frac{\partial r_1}{\partial x_1}, \frac{\partial r_1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial r_1}{\partial x_m}$ ბაზისში წარმოადგენენ $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$. ხოლო,

dr_2 ვექტორის კოორდინატებს-

$dy_1, dy_2, \dots, dy_m$. $dr_1 = dr_2$. ამასთან

$$\begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ \vdots \\ dy_m \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_m \end{pmatrix}.$$

როგორც ვნახეთ, $\|dr_1\|^2 = \|dr_2\|^2$ აქედან გამოიმდინარეობს:

$$\|dr_1\|^2 = \|dr_2\|^2 = (dy_i)'(g_y)(dy_j) = (dx_i)'J'(\bar{g}_y)J(dx_j)$$

$j = 1, 2, \dots, m$.

სადაც $J' = \left(\frac{\partial y_k}{\partial x_i} \right)_{i,k=1,2,\dots,m}$, სადაც k სვეტების ინდექსია. $J = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,2,\dots,m}$ სადაც p სვეტების

ინდექსია.

აქედან გამოიმდინარეობს $(g_y) = J' \cdot (\bar{g}_y) \cdot J$.

S_1 ზედაპირის მოცულობაა:

$$\int_{U_1} \sqrt{|g_y|} |dx_1 dx_2 \dots dx_m| = \int_{U_1} \sqrt{|J'(\bar{g}_y)J|} |dx_1 dx_2 \dots dx_m| = \int_{U_1} \sqrt{|\bar{g}_y|} |J| |dx_1 dx_2 \dots dx_m|.$$

S_2 ზედაპირის მოცულობაა: $\int_{U_2} \sqrt{|g_y|} |dy_1 dy_2 \dots dy_m|$.

მათემატიკური ანალიზიდან ვიცით, რომ:

$$dx_1 dx_2 \dots dx_m = J | dx_1 dx_2 \dots dx_m,$$

ამიტომ საბოლოოდ გვექნება:

$$\int_{U_1} \sqrt{|g_y|} dx_1 dx_2 \dots dx_m = \int_{U_2} \sqrt{|\bar{g}_y|} |dx_1 dx_2 \dots dx_m|.$$

თეორემა დამტკიცდა.

ამ თეორემის დამტკიცებისას ასევე ვანგვეთ, რომ გეგმადენტურ ზედაპირებს შესაბამის წერტილებში ერთნაირი პირველი კუადრატული ფორმები აქვთ.

თუ $S = (U, r = r(x))$ პარამეტრიზირებული ზედაპირი ორგანზომილებიანია, ანუ $U \subset E_2$, მაშინ ამ ზედაპირის მხები სივრცე ნებისმიერ წერტილში იქნება ორგანზომილებიანი, ვინაიდან ეს სივრცე იწნება წარმოქმნილი ორი ვექტორის:

$$\frac{\partial r}{\partial x_1}, \frac{\partial r}{\partial x_2} \text{ წრფევი კომბინაციებით. ასეთი ზედაპირის პირველი კუადრატული ფორმის მატრიცი}$$

მეორეგისაა:

$$E = g_{11} = \left(\frac{\partial r}{\partial x_1}, \frac{\partial r}{\partial x_1} \right), \quad F = g_{12} = g_{21} = \left(\frac{\partial r}{\partial x_1}, \frac{\partial r}{\partial x_2} \right), \quad G = g_{22} = \left(\frac{\partial r}{\partial x_2}, \frac{\partial r}{\partial x_2} \right).$$

მაშასადამე, $G(x, dx) = E dx_1^2 + 2F dx_1 dx_2 + G dx_2^2$.

$g = (g_{ij})_{i,j=1,2}$ მატრიცის დეტერმინანტი $|g| = EG - F^2$ ორგანზომილებიანი პარამეტრიზებული ზედაპირის მოცულობა (ფართობი)

$$V = \int_U \sqrt{EG - F^2} dx_1 dx_2$$

ამ ზედაპირზე წირის რკალის სიგრძე ტოლია:

$$l_a^b = \int_a^b \sqrt{E dx_1^2 + 2F dx_1 dx_2 + G dx_2^2}$$

მაგალითი. სფერო E_3 -ში:

$$r = r(\varphi, \theta) = (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta),$$

სადაც $U = \{(\varphi, \theta) | 0 < \varphi < 2\pi, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$.

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi} = (-R \sin \theta \sin \varphi, R \sin \theta \cos \varphi, 0),$$

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = (R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, -R \sin \theta).$$

$$E = \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}, \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right) = -R^2 \sin^2 \theta, \quad F = \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}, \frac{\partial r}{\partial \theta} \right) = 0, \quad G = \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}, \frac{\partial r}{\partial \theta} \right) = R^2,$$

აქედან შევიძლია დავწეროთ:

$$G(x, dx) = ds^2 = R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + R^2 d\theta^2.$$

ახლა განვიხილოთ, ისეთი პარიზირებული ზედაპირი $S = (U, \gamma = \gamma(x))$ სადაც $\gamma: U \rightarrow E_n$ წარმოადგენს გლუვ ჩაღმას.

ასეთ პარამეტრიზირებულ ზედაპირებს, როგორც ვიცით მართე პარამეტრიზირებულ ზედაპირებს უწოდებენ. ცხადია ასელი ზედაპირის ტანი $\gamma' = \gamma'(U)$ წარმოადგენს ქვემრავალსახეობას E_n მრავალსახეობაში. თუ მართეი ზედაპირების ჩასაწერად გამოვიყენებთ ვექტორულ ფორმას, მაშინ ცხადია მართეი პარამეტრიზირებული ზედაპირი იქნება წყვილი $S = (U, r = r(x))$, სადაც $r: U \rightarrow E^n$ წარმოადგენს ასევე გლუვ ჩაღმას, ოღონდ ევკლიდეს ვექტორულ სივრცეში, რომელიც იმის გამო, რომ შეგვიძლია გავაიგიოთ E_n სივრცის წერტილები მათ რადიუსვექტორებთან რომელშიც დაფიქსირებულ კოორდინატთა სისტემაში. ასევე შეიძლება ჩაითვალოს გლუვ მრავალსახეობად.

აქედან გამომდინარე შეიძლება ზედაპირებისათვის შეიძლება შემოვიტანოთ იზომეტრიულობის ცნება:

ორი მართე პარამეტრიზირებულ ზედაპირს: $S_1 = (U_1, r_1 = r_1(x))$, $S_2 = (U_2, r_2 = r_2(x))$ ეწოდება *იზომეტრიული* თუ არსებობს ამ ზედაპირთა ტანებს შორის ისეთი დიფეომორფიზმი $f: r_1 \rightarrow r_2$, რომ მისი დიფერენციალი:

$$f_*: T_{M_1}|_{r_1} \rightarrow T_{f(M_1)}|_{r_2}$$

იზომეტრიაა, ანუ ისეთი წრფივი ურთიერთცალსახა ასახვა, რომელიც ინახავს ვექტორების სკალარულ ნამრავლს.

ასეთ f დიფეომორფიზმს *იზომეტრიას* უწოდებენ.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ მართეი ზედაპირები იგივე რიმანის მრავალსახეობებია, მაშინ ცხადია, ასეთნაირად განსაზღვრული ზედაპირთა იზომეტრია იგივეა რაც ზემოთ მოყვანილ განსაზღვრება იზომეტრიისა რიმანის მრავალსახეობებისათვის.

თეორემა 6.2. იმისათვის, რომ $f: r_1 \rightarrow r_2$ დიფეომორფიზმი წარმოადგენდეს იზომეტრიას $S_1 = (U_1, r_1 = r_1(x))$ და $S_2 = (U_2, r_2 = r_2(x))$ პარამეტრიზებულ ზედაპირებს შორის, აუცილებელი და საკმარისია იგი ინახავდეს ზედაპირზე მდებარე პარამეტრიზირებული წირის რკალის სიგრძეს.

დამტკიცება: თეორემის პირობის აუცილებლობის დამტკიცება.

ვთქვათ $f: r_1 \rightarrow r_2$ იზომეტრიაა და $(I, \rho = \rho(t))$ წირი დევს S_1 ზედაპირზე, t_1, t_2 წერტილებით განსაზღვრული წირის რკალის სიგრძე ამ ზედაპირზე გამოითვლება ფორმულით

$$l_h^1(\rho) = \int_{t_1}^{t_2} \|\rho'(t)\| dt.$$

$(I, \rho = \rho(t))$ წირი f დიფეომორფიზმით გადადის S_2 ზედაპირზე მდებარე $(I, (f \circ \rho)(t))$ წირში. ამ წირისათვის ივე t_1, t_2 წერტილებით განსაზღვრული წირის რკალის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით:

$$l_h^1(f \circ \rho) = \int_{t_1}^{t_2} \|(f \circ \rho)'(t)\| dt.$$

$$f_* : T_{\rho(t)} | r_1 \mapsto T_{f(t, \rho(t))} | r_2 |$$

ასახავს $\rho'(t)$ ვექტორი გადასაყვას $(f \circ \rho)'(t)$ ვექტორში. რადგან f_* იზომეტრიაა, ამიტომ $\|\rho'(t)\| = \|(f \circ \rho)'(t)\|$, აქედან გამოიმდინარეობს, რომ:

$$I'_t(\rho) = \int_{t_0}^t \|\rho'(t)\| dt = \int_{t_0}^t \|(f \circ \rho)'(t)\| dt = I'_{f(t)}(f \circ \rho).$$

ამით თეორემის პირობის აუცილებლობა დამტკიცდა.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემის პირობის საკმარისობა.

ვთქვათ, $f : |r_1| \mapsto |r_2|$ დიფეომორფიზმი ინახავს რკალის სიგრძეს.

რეგულარული ვიწრო, ყოველი ვექტორი ზედაპირის მხებ სივრცეში წარმოადგენს ზედაპირზე მდებარე რომელიმე წირის მხებ ვექტორს. ვთქვათ, $T_{x_0} |r_1|$ წარმოადგენს S_1

პარამეტრიზირებული ზედაპირის მხებ სივრცეს M წერტილში და $\xi \in T_{x_0} |r_1|$ რაიმე ვექტორია ამ სივრცეში. თუ $(I, \rho = \rho(t))$ ისეთი პარამეტრიზირებული წირია რომელიც მდებარეობს S_1 ზედაპირზე და რომლის მხები ვექტორიც t_0 წერტილში, $\rho(t_0) = M$, ემთხვევა ξ ვექტორს, ანუ $\rho'(t_0) = \xi$.

პირობის ძალით

$$I'_{t_0}(\rho) = \int_{t_0}^t \|\rho'(\tau)\| d\tau = \int_{t_0}^t \|(f \circ \rho)'(\tau)\| d\tau = I'_{f(t_0)}(f \circ \rho).$$

$t \in [t_0, t_1]$ ნებისმიერი წერტილისათვის. ამ ტოლობის ორივე მხარის t პარამეტრით გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\|\rho'(t)\| = \|(f \circ \rho)'(t)\|.$$

აქედან $t = t_0$ წერტილისთვის გვექნება:

$$\|\xi\| = \|f_*(\xi)\|.$$

ამგვარად, f_* წრფივი იზომეტრიაა და აქედან გამოიმდინარე $f_* : |r_1| \mapsto |r_2|$ დიფეომორფიზმიც იზომეტრია იქნება. თეორემა დამტკიცდა.

ამ თეორემიდან და იზომეტრიის განსაზღვრებიდან გამოიმდინარეობს:

შედეგი: იზომეტრიული პარამეტრიზირებული ზედაპირების პირველი კვადრატული ფორმები შესაბამის წერტილებში ერთმანეთს სმთხვევიან.

ზედაპირის იმ თვისებებს, რომლებიც არ იცვლებიან იზომეტრიული ასახვების დროს **პარამეტრიზირებული ზედაპირის შინაგანი ინვარიანტები** ეწოდება. გეომეტრიის იმ ნაწილს კი რომელი ამ ინვარიანტებს შეისწავლის **ზედაპირთა შინაგანი გეომეტრია** ეწოდება.

§7. პარამეტრიზირებული ზედაპირის მეორე კვადრატული ფორმა,

ზედაპირის გაუსისა და საშუალო სიმრუდეები

თუკათ, $S = (U, r = r(x))$ n განზომილბიანი ზედაპირია E_{n+1} ეკლიდეს სიერცეში. მოცემული ზედაპირის ნორმალის მის $M = r(x_0)$ წერტილში ეწოდება N ვექტორს, რომელიც $T_{x_0}S$ მხევი სიერცის $\frac{\partial r}{\partial x_1}, \frac{\partial r}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial r}{\partial x_n}$ საბაზისო ვექტორების ორთოგონალურია.

ეს ვექტორი ცხადია ტოლია

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} \times \frac{\partial r}{\partial x_2} \times \dots \times \frac{\partial r}{\partial x_n}$$

ვექტორული ნამრავლის.

S ზედაპირის $M = r(x_0)$ წერტილში ნორმალის გამოსათვლელად ვიყენებთ ცნობილ ფორმულას:

$$N = \frac{\partial r}{\partial x_1} \times \frac{\partial r}{\partial x_2} \times \dots \times \frac{\partial r}{\partial x_n} = \begin{vmatrix} e_1 & \dots & e_{n+1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i e_i \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial y_1}{\partial x_{i+1}} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_i}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_i}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial y_i}{\partial x_{i+1}} & \dots & \frac{\partial y_i}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial y_n}{\partial x_{i+1}} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

სადაც x აზვები i -ური სვეტის ელემენტების თავზე ნიშნავს იმას, რომ ეს სვეტი ამოღებულია $n \times (n+1)$ რიგის მატრიციდან, $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ $r(x)$ ვექტორის კოორდინატებია $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ კი E^{n+1} სიერცის საბაზისო ვექტორები. თუ მოვახდენთ N ვექტორის ნორმირებას ანუ თოუ ამ ვექტორს გავამრავლებთ მისი სიგრძის შებრუნებულ რიცხვზე მივიღებთ ერთეულოვან ვექტორს- n . შემდეგ ზედაპირის ნორმალის როლში ყოველთვის ვიგულისხმებთ ამ ერთეულოვან ვექტორს. თუ

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} \times \frac{\partial r}{\partial x_2} \times \dots \times \frac{\partial r}{\partial x_n}$$

ნამრაველში რომელიმე ორ თანამრაველს ადგილებს შეუცვლით მივიღებთ საწინააღმდეგო მიმართულების ვექტორს, ამიტომ შეგვიძლია ეთქვას, რომ $\frac{\partial r}{\partial x_1}, \frac{\partial r}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial r}{\partial x_n}$.

ვექტორები ზედაპირის ნორმალს განსაზღვრავენ ± 1 კოეფიციენტის სიზუსტით. ცხადია, ნორმალის ზედაპირის წერტილთან უწყვეტად არის დაკავშირებული, ანუ $n(x)$ $x \in U$ არგუმენტის უწყვეტი ფუნქციაა.

რადგან ჩვენ ვიხილავთ გლუვ პარამეტრიზებულ ზედაპირებს, ამიტომ $r(x)$ ვექტორ ფუნქციას მგორე რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულებაც ექნება $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადების მიმართ.

ეთქვას გლუვი პარამეტრიზირებული წირი $(I, \rho = \rho(t))$ მდებარეობს $S = (U, r = r(x))$ გლუვ პარამეტრიზირებულ ზედაპირზე. ეთქვას აღნიშნული პარამეტრიზირებული წირი მოცემულია ასეთ განტოლებით $\rho(t) = r(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, სადაც $\tilde{\rho}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ წირის შინაგანი პარამეტრიზაციაა. გამოვთვალოთ ამ წირის სიმრუდის ვექტორი მის რომელიმე წერტილში.

ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ წირი ბუნებრივად პარამეტრიზირებულია. როგორც ვიცით, $(I, \rho = \rho(s) = r(\tilde{\rho}(s)))$ წირის სიმრუდის ვექტორი ტოლია

$$\frac{d^2 \rho(s)}{ds^2} = \frac{d^2 r(\tilde{\rho}(s))}{ds^2}$$

ვექტორის.

თუ ეს ვექტორი არ უდრის ნულს, მაშინ

$$\frac{d^2 \rho(s)}{ds^2} = \frac{d^2 r(\tilde{\rho}(s))}{ds^2} = \frac{d\tau(s)}{ds} = k(s)\nu(s),$$

სადაც $\tau(s)$ წირის ერთეულოვანი მხები ვექტორია, $\nu(s)$

კი წირის მთავარი ნორმალის. როგორც ვიცით $\nu(s)$ ვექტორი მდებარეობს ამ წირის $\rho(s)$ წერტილზე გაშვებულ მიმხებ სიბრტყეში.

რადგან $(I, \rho = \rho(s))$ წირი მდებარეობს $S = (U, r = r(x))$ ზედაპირზე, ამიტომ

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r(\tilde{\rho}(s))}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{dr(\tilde{\rho}(s))}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{d^2 x_i}{ds^2} \end{aligned}$$

თუ $\frac{d^2 \rho(s)}{ds^2}$ ვექტორს გაჟამრავლებთ სკალარულად $\rho(s)$ წერტილზე გამავალ ზედაპირის n ნორმალზე მივიღებთ:

$$\left(\frac{d^2 \rho(s)}{ds^2} \cdot n \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} \cdot n \right) \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} \cdot n \right) = b_{ij}$, გვექნება:

$$\left(\frac{d^2 \rho(s)}{ds^2} \cdot n \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds}.$$

განვიხილოთ სიდიდე: $B(x, dx) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} dx_i dx_j$, ეუწოდოთ მას *პარამეტრიზირებული*

ზედაპირის მეორე კვადრატული ფორმა. როგორც ვიცით, ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმა $G(x, dx) = ds^2$, ამიტომ

$$\left(\frac{d^2 \rho(s)}{ds^2} \cdot n \right) = \frac{B(x, dx)}{G(x, dx)}.$$

ამ ფორმულას *მენეს ფორმულას* უწოდებენ. ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს შემდეგი შედეგები:

ა) თუ $B(x, dx)$ არ უდრის ნულს $dx = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ ვექტორისთვის, მაშინ ცხადია,

$$\frac{d^2 \rho(s)}{ds^2} \neq 0. \text{ ასეთ შემთხვევაში}$$

$$\frac{d^2 \rho(s)}{ds^2} = k(s) \nu(s)$$

და აქედან გამომდინარე $k(s) \neq 0$.

ბ) თუ ზედაპირზე მდებარე პარამეტრიზირებული წირები ერთ წერტილში იკვეთებიან და ამ წერტილში მათი მიმხედები სიბრტყეები ერთმანეთს ეთხვევიან, ამასთან $B(x, dx) \neq 0$, მაშინ ამ წირების გადაკვეთის წერტილში მათი სიმრუდეები ერთი და იგივეა.

$$\text{გ) } \left(\frac{d\rho^2(s)}{ds^2} \cdot n \right) = (k(s)\nu(s) \cdot n) = k(s)(\nu(s) \cdot n) = k(s) \cos(\nu(s)^{\wedge} n)$$

სადაც $\nu(s)^{\wedge} n$ აღნიშნავს კუთხეს $\nu(s)$ და n ვექტორებს შორის.

აქედან გამომდინარე, თუ $B(x, dx) \neq 0$, მაშინ ზედაპირზე მდებარე მოცემულ წერტილზე გამავალ ყველა ისეთ პარამეტრიზირებულ წირს შორის, რომელთა მხები ვექტორები ამ წერტილში ერთი და იგივეა, მინიმალური სიმრუდე აქვს იმ წირს, რომლის მიმხედი სიბრტყეც შუიკავს ზედაპირის n ნორმალს მოცემულ წერტილში და $|\cos(\nu(s)^{\wedge} n)| = 1$. ცხადია, ასეთი იქნება ზედაპირზე მდებარე ის პარამეტრიზირებული წირი, რომელიც მიიღება ზედაპირის იმ ორგანოზომილებიანი სიბრტყით გაკვეთით, რომელიც გადის ზედაპირის n ნორმალზე მოცემულ

x წერტილში და $\frac{d\rho(s)}{ds} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds}$ ვექტორზე, სადაც ($I = \rho = \rho(s)$) ერთეობი წირია

ზედაპირის მოცემულ წერტილზე გამავალი ერთ და იგივე მხები ვექტორის მქონე წირებიდან.

ცხადია, $\frac{d\rho(s)}{ds} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds}$ ვექტორი პარალელურია $d\rho(s) = dr = \sum_{i=1}^n \frac{\partial r}{\partial x_i} dx_i$ ვექტორს.

წირს, რომელიც აღნიშნული კვეთით მიიღება ზედაპირის ნორმალური კვეთა ეწოდება.

ცხადია, ზედაპირის x წერტილზე გამავალი ნორმალური კვეთის სიმრუდე ამ წერტილში ტოლია

$$K_n(x) = \frac{|B(x, dx)|}{G(x, dx)}$$

არაუარყოფითი რიცხვის.
რიცხვს

$$K_n(x, dx) = \frac{B(x, dx)}{G(x, dx)}$$

ეწოდება $S = (U, r = r(x))$ პარამეტრიზირებული ზედაპირის ნორმალური სიმრუდე x წერტილში, ამ წერტილში ზედაპირის მხებ სივრცეში მდებარე $dx = dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ ვექტორის მიმართულებით, ანუ იმ ვექტორის მიმართულებით რომლის კოორდინატებიც

$$\frac{\partial r}{\partial x_1}, \frac{\partial r}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial r}{\partial x_n} \text{ ბაზისში } dx_1, dx_2, \dots, dx_n \text{ დიფერენციალებია.}$$

როგორც ფორმულიდან ჩანს $K_n(x, dx)$ სიდიდემ, განსხვავებით $K_n(x)$ სიდიდისა შეიძლება მიიღოს უარყოფითი მნიშვნელობაც, იგი დადებითია, თუ ზედაპირის მოცემულ წერტილში ნორმალური კვეთის მთავარი ნორმალი ემთხვევა ზედაპირის ნორმალს ამავე წერტილში და უარყოფითია, როდესაც ეს ვექტორები ურთიერთსაპირისპირო მიმართულებასაა.

ცხადია, ზედაპირზე მდებარე $(I = \rho = \rho(s))$ პარამეტრიზირებული წირის სიმრუდე $\rho(s) = x$ წერტილში დაკეშირებული იქნება ამ წერტილში წირის მხები ვექტორის მიმართულებით გაზოგადი ნორმალური კვეთის სიმრუდესთან შემდეგი ფორმულით:

$$|k(s) \cos(\nu(s)^{\wedge} n)| = K_n(x).$$

დაუებრუნდეთ ფორმულას:

$$K_n(x, dx) = \frac{B(x, dx)}{G(x, dx)}.$$

წრფივი აღგებრიდან ცნობილია, რომ ნებისმიერ ვექტორულ სივრცეში არსებობს ბაზისი, რომელშიც მოცემული ორი კვადრატული ფორმიდან პირველს ექნება ნორმალური სახე, ხოლო მეორეს კანონიკური სახე.

ამიტომ, ზედაპირის x წერტილში მხები სივრცის $\frac{\partial r}{\partial x_1}, \frac{\partial r}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial r}{\partial x_n}$ ბაზისიდან შეგვიძლია

გადავიდეთ მის ისეთ $e_1, e_2, \dots, e_n$ ბაზისზე რომელშიდაც ზედაპირის პირველ და მეორე კვადრატულ ფორმებს აქვთ ნორმალური და კანონიკური სახეები შესაბამისად:

$$G(x, dx) = \sum_{j=1}^n \xi_j^2, \quad B(x, dx) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2$$

ამ შემთხვევაში, თუ ზოგადობის დაურღვევლად ჩავთვლით, რომ $e_1, e_2, \dots, e_n$ ორთონორმირებული ბაზისია გვექნება:

$$K_n(x, dx) = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2}{\sum_{j=1}^n \xi_j^2} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\xi_i^2}{\sum_{j=1}^n \xi_j^2} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cos^2 \varphi_i,$$

φ , სადაც არის კუთხე $d\mathbf{r}$ ვექტორსა და e , საბაზისო ვექტორს შორის.

მიმართულებებს, რომელსაც განსაზღვრავენ ასეთი $e_1, e_2, \dots, e_n$ ბაზისის ვექტორები უწოდებენ $S = (U, r = r(x))$ ზედაპირის მთავარ მიმართულებებს x წერტილში. $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ რიცხვები წარმოადგენენ ზედაპირის ნორმალურ სიმრუდეებს x წერტილში შესაბამისი მთავარი მიმართულებებით. მათ ზედაპირის მთავარ სიმრუდეებს უწოდებენ x წერტილში.

$$K_n(x, dx) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cos^2 \varphi_i$$

ფორმულას კი ეილერის ფორმულა ეწოდება.

თუ პარამეტრიზირებულ ზედაპირზე მდებარე x წერტილში ყველა λ_i კოეფიციენტს ერთი და იგივე ნიშანი აქვთ და ისინი განსხვავდებიან ნულისაგან, მაშინ ამ წერტილს ზედაპირის ელიფსური წერტილი ეწოდება.

თუ პარამეტრიზირებულ ზედაპირზე მდებარე x წერტილში λ_i კოეფიციენტებიდან ზოგი დადებითია ზოგი უარყოფითი და ყველა მათგანი განსხვავდებიან ნულისაგან მაშინ ამ წერტილს ზედაპირის ჰიპერბოლური წერტილი ეწოდება.

თუ პარამეტრიზირებულ ზედაპირზე მდებარე x წერტილში λ_i კოეფიციენტებს შორის ერთი მინუს ტოლია ნულის, მაშინ ამ წერტილს ზედაპირის პარაბოლური წერტილი ეწოდება.

თუ პარამეტრიზირებულ ზედაპირზე მდებარე x წერტილში λ_i კოეფიციენტები ყველა ნულის, ტოლია მაშინ ამ წერტილს ზედაპირის გაბრტყელების წერტილი წერტილი ეწოდება.

$$H_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{ რიცხვს, სადაც } \lambda_i, i = 1, 2, \dots, n \text{ ამ ზედაპირის მთავარი სიმრუდეებია } x$$

წერტილში ეწოდება $S = (U, r = r(x))$ ზედაპირის საშუალო სიმრუდე x წერტილში.

$$G_i = \prod_{i=1}^n \lambda_i \text{ რიცხვს, სადაც } \lambda_i, i = 1, 2, \dots, n \text{ ამ ზედაპირის მთავარი სიმრუდეებია } x \text{ წერტილში}$$

ეწოდება $S = (U, r = r(x))$ ზედაპირის სრული ანუ გაუსის სიმრუდე x წერტილში. მაგალითები.

1. ეთქვათ, $S = (U, r = r(x))$ ზედაპირი წარმოადგენს სიბრტყეს E_3 სივრცეში ასეთ

შემთხვევაში: $U = E_2, r = r_0 + ax_1 + bx_2, (x_1, x_2) \in U$.

ამ ზედაპირზე ყველა ნორმალური კვეთა წრფეა, ამიტომ მისი სიმრუდეები ყველა მთავარი მუხარტულებით ნულის ტოლია. აქედან გამომდინარე, ამ ზედაპირის საშუალო და გაუსის სიმრუდეები ყველა წერტილში ნულის ტოლია.

2. სფერო E_3 სივრცეში:

$$r(x) = \{R \sin x_1 \cos x_2, R \sin x_1 \sin x_2, R \cos x_1\},$$

$$U\{(x_1, x_2) | -\frac{\pi}{2} \leq x_1 \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x_2 \leq 2\pi\}.$$

სფეროს ყველა ნორმალური კვეთა წარმოადგენს წრეწირის რადიუსით R , ამიტომ რადგან ჩვენი სფერო ორგანოზომილებიანი ზედაპირია:

$$H_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R},$$

$$G_1 = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{R} \frac{1}{R} = \frac{1}{R^2}.$$

პარამეტრიზირებული $S = (U, r = r(x))$ ზედაპირის რაიმე x წერტილში მხეხ $T_x S$ სივრცეში

არსებული თითოეულ $dx = dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ ვექტორის მიმართულების $\sqrt{\left| \frac{1}{K_n(x, dx)} \right|}$ სიგრძის

ვექტორი მოედოთ x წერტილს, მაშინ ამ ვექტორების ბოლოები ქმნიან $D = (U, \rho = \rho(x))$ ზედაპირს E_{n+1} სივრცეში მდებარე, x წერტილზე გამავალი $T_x S$ ვექტორული სივრცით განსაზღვრულ n განზომილებიან ქვესივრცეში. მისი განტოლებაცა იქნება:

$$\rho = \rho(x) = \frac{dx}{\|dx\| \sqrt{\left| \frac{1}{K_n(x, dx)} \right|}}.$$

აქედან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\|\rho(x)\| = \sqrt{\left| \frac{1}{K_n(x, dx)} \right|}.$$

ანუ

$$\|\rho(x)\| \sqrt{|K_n(x, dx)|} = 1.$$

აქედან გვექნება:

$$\|\rho(x)\| \sqrt{\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i \cos^2 \varphi_i \right|} = 1,$$

$$\left\| \rho(x) \right\|^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \cos^2 \varphi_i = 1,$$

$$\left| \sum_{i=1}^n \|\rho(x)\|^2 \lambda_i \cos^2 \varphi_i \right| = 1,$$

$$\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i^2 \right| = 1,$$

ანუ $B(x, dx) = \pm 1$.

ამგვარად, ვექტორების ბოლო წერტილებით წარმოქმნილი $D = (U, \rho = \rho(x))$ ზედაპირი მეორე რიგის ზედაპირია ან ასეთ ზედაპირთა წყვილი. მას $S = (U, r = r(x))$ ზედაპირის **დოუპენის ინდიკატრისი** ეწოდება ზედაპირის x წერტილში.

ცხადია, თუ საქმე გვაქვს ორგანოზომილებიან პარამეტრიზირებულ ზრდაპირთან, მაშინ დოუპენის ინდიკატრისი ამ ზედაპირის ელიფსურ წერტილში ელიფსია; პიკერბოლურ წერტილში - პიკერბოლთა წყვილი; პარაბოლურ წერტილში, თუ ეს წერტილი არ არის ზედაპირის გაბრტყელების წერტილი, - წრფეთა წყვილი.

პარამეტრიზირებული ზედაპირის მოცემულ წერტილში მსხვილი სივრცის იმ ვექტორებით განსაზღვრულ მიმართულებას, რომლებზედაც ზედაპირის მეორე კვადრატული ფორმა ნულის ტოლია, ამ ზედაპირის მოცემულ წერტილში *ასიმპტოტური მიმართულება* ეწოდება. ამ მიმართულებების ვექტორები მდებარეობენ ზედაპირის მოცემულ წერტილში დიუკენის ინდიკატრისას ასიმპტოტებზე.

გამოვიყენოთ პარამეტრიზებული ზედაპირის საშუალო და გაუსის სიმრუდეთა საანგარიშო ფორმულები.

ეთქვას, მოცემულია $S = (U, r = r(x))$ პარამეტრიზირებული წირი.

ამ ზედაპირის ნორმალური სიმრუდე მის რაიმე x მწერტილში

$dx = dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ მიმართულებით ტოლია:

$$K_n(x, dx) = \frac{B(x, dx)}{G(x, dx)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cos^2 \varphi_i,$$

სადაც $\varphi_i = dx^i e_i$.

როგორც წრფივი აღგებრიდან ვიცით, ევკლიდეს ვექტორულ სივრცეზე განსაზღვრული ორი $A(x, x), B(x, x)$ კვადრატული ფორმისათვის, რომელთაგან უკანასკნელი დადებითად განსაზღვრულია, არსებობს ორთონორმირებული ბაზისი $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ რომელშიდაც ამ კვადრატულ ფორმებს აქვთ კანონიკური და ნორმალური სახეები შესაბამისად:

$$A(x, x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2, \quad B(x, x) = \sum_{i=1}^n \xi_i^2.$$

პირველი კვადრატული ფორმის λ_i კოეფიციენტები

განისაზღვრება, როგორც

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & \dots & a_{1n} - \lambda b_{1n} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & a_{22} - \lambda b_{22} & \dots & a_{2n} - \lambda b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - \lambda b_{n1} & a_{n2} - \lambda b_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda b_{nn} \end{vmatrix}$$

მრავალწევრის ფესვები, სადაც $(a_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$ $A(x, x)$ კვადრატული ფორმის მატრიცია, ხოლო

$(b_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$ - $B(x, x)$ კვადრატული ფორმის მატრიცია.

ჩვენ შემთხვევაში $A(x, x)$ კვადრატული ფორმის როლში გვაქვს $B(x, dx)$ -ზედაპირის მეორე კვადრატული ფორმა, ხოლო $B(x, x)$ კვადრატული ფორმის მატრიცის როლში გვაქვს $G(x, dx)$ -ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმა.

$B(x, dx)$ კვადრატული ფორმის კანონიკური სახის კოეფიციენტების მოსაძებნად უნდა ამოვხსნათ განტოლება:

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda g_{11} & b_{12} - \lambda g_{12} & \dots & b_{1n} - \lambda g_{1n} \\ b_{21} - \lambda g_{21} & b_{22} - \lambda g_{22} & \dots & b_{2n} - \lambda g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} - \lambda g_{n1} & b_{n2} - \lambda g_{n2} & \dots & b_{nn} - \lambda g_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

სადაც $(b_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$ კვადრატული ფორმის მატრიცია $(g_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$ კი $G(x, dx)$ კვადრატული ფორმის მატრიცია.

ცნობილია, რომ ამ განტოლებას აქვს n ნამდვილი ფესვი.

სწორედ ეს ფესვები წარმოადგენენ $B(x, dx)$ კვადრატული ფორმის კანონიკური სახის კოეფიციენტებს, ანუ მოცემული ზედაპირის მთავარ სიმრუდეებს x წერტილში.

უთქვამთ, უკანასკნელი განტოლების მარცხენა მხარეს მდგომი მრავალწევრი წარმოადგენილია სტანდარტული სახით:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = a_0 (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n).$$

თუ $\lambda = 0$, მაშინ უკანასკნელი ტოლობიდან გვექნება:

$$a_n = (-1)^n a_0 \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n,$$

ანუ $a_n = (-1)^n a_0 G_x$.

შეორე მხრივ, როდესაც $\lambda = 0$, $a_n = (b_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$.

თუ $|(b_{ij} - \lambda g_{ij})|_{i,j=1,2,\dots,n}$ მრავალწევრს გაუყოფთ λ^n -ზე და გადავალთ ზღვარზე როდესაც $\lambda \rightarrow \infty$, მივიღებთ:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{ij}}{\lambda} - g_{ij} \right| = |(-g_{ij})| = (-1)^n |(g_{ij})|_{i,j=1,2,\dots,n}.$$

შეორე მხრივ

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n}{\lambda^n} = a_0.$$

მაშასადამე, $a_0 = (-1)^n |(g_{ij})|_{i,j=1,2,\dots,n}$. საბოლოოდ გვექნება:

$$G_x = \frac{a_n}{(-1)^n a_0} = \frac{|(b_{ij})|}{|(g_{ij})|}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

რაც შეეხება ზედაპირის საშუალო სიმრუდეს M წერტილში,

$$H_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{1}{n} \operatorname{Sp} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

სადაც Sp აღნიშნავს *კვადრატული მატრიცის კვადს*. კვადრატული მატრიცის კვალი მის დიაგონალზე მდგომი ელემენტების ჯამია, იგი არ იცვლება მატრიციდან მის მსგავს მატრიცზე გადასვლის დროს.

ეინაიდან კვადრატულ ფორმის მატრიცები სხვადასხვა ბაზისებში მსგავსი მატრიცებია, ამიტომ:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = b_{11} + b_{22} + \dots + b_{nn}.$$

საბოლოოდ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$G_M = \begin{vmatrix} b_{ij} \end{vmatrix}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad H_M = \frac{1}{n} Sp \begin{vmatrix} b_{ij} \end{vmatrix}_{i,j=1,2,\dots,n},$$

სადაც $(b_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$ *კვადრატული ფორმის მატრიცია*, $(g_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$ კი $G(x, dx)$ კვადრატული ფორმის მატრიცია.

თუ $S = (U, r = r(x))$ ორგანოზომილებიანი პარამეტრიზირებული ზედაპირია E_n ეკლიდეს

სივრცეში მაშინ $b_{ij} = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} \cdot n \right)_{i,j=1,2}$ შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$b_{11} \equiv L, \quad b_{12} = b_{21} = M, \quad b_{22} = N.$$

მაშინ ორგანოზომილებიანი პარამეტრიზირებული ზედაპირის მეორე კვადრატული ფორმას ზედაპირის რაიმე x წერტილში ექნება სახე:

$$B(x, dx) = Ldx_1^2 + 2Mdx_1dx_2 + Ndx_2^2,$$

ხოლო მის მატრიცსსახე:

$$B = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

ამ მატრიცის დეტერმინანტია $|B| = LN - M^2$

რადგან მოცემული პარამეტრიზირებული ორგანოზომილებიანი ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმა იგივე წერტილში არის

$$G(x, dx) = Edx_1^2 + 2Fdx_1dx_2 + Gdx_2^2,$$

ამიტომ $G_x = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$ და $H_x = Sp \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$.

§8. თეორემები მატრიც პარამეტრიზირებულ ზედაპირებზე

ეთქვანთ მოცემულია $(U, r = r(x))$ მარტივი პარამეტრიზირებული ზრდაპირი დაეაფიქსიროთ ამ ზედაპირის ორიენტაცია მის ყოველ წერტილში ამ წერტილებსაგან უწყვეტად დამოკიდებული ნორმალის დაფიქსირებით:

$$\bar{n} = \frac{\frac{\partial r}{\partial x_1} \times \frac{\partial r}{\partial x_2} \times \dots \times \frac{\partial r}{\partial x_n}}{\left\| \frac{\partial r}{\partial x_1} \times \frac{\partial r}{\partial x_2} \times \dots \times \frac{\partial r}{\partial x_n} \right\|}.$$

ზედაპირის კოველ x წერტილში შეიძლება დაეფიქსიროს რეპერი: $(x, \frac{\partial r}{\partial x_1}, \frac{\partial r}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial r}{\partial x_n}, \bar{n})$,

რომელსაც მოცემული პარამეტრიზირებული ზედაპირის ნატურალური რეპერი ეწოდება.

გამოვსახოთ ამ რეპერის ვექტორთა კერძო წარმოებულები: $\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j}, i, j = 1, 2, \dots, n$ ამავე

რეპერის ვექტორების წრფივი კომბინაციების საშუალებით:

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n d_i^k \frac{\partial r}{\partial x_k} + d_i \bar{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial r}{\partial x_k} + p_{ij} \bar{n}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

ამ ფორმულებიდან მეორეს გაუხის ფორმულა ეწოდება, ვაჩვენოთ, რომ ამ წრფივი კომბინაციების კოეფიციენტები გამოისახება მოცემული ზედაპირის პირველი და მეორე კვადრატული ფორმის კოეფიციენტების საშუალებით.

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n d_i^k \frac{\partial r}{\partial x_k} + d_i \bar{n} \quad \text{ტოლობის ორივე მხარის } \bar{n} \text{ ვექტორზე სკალარულად გამრავლებით}$$

მივიღებთ

$$(\bar{n} \cdot \frac{\partial \bar{n}}{\partial x_i}) = (\bar{n} \cdot (\sum_{k=1}^n d_i^k \frac{\partial r}{\partial x_k} + d_i \bar{n})).$$

$$\bar{n} \text{ ვექტორის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ } (\bar{n} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i}) = 0$$

ასევე, თუ ზოგადობის დაურღვევლად ეივლისისჩმებთ, რომ $i = 1$ მაშინ

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2} \times \frac{\frac{\partial r}{\partial x_2} \times \frac{\partial r}{\partial x_3} \times \dots \times \frac{\partial r}{\partial x_n}}{\left\| \frac{\partial r}{\partial x_1} \times \frac{\partial r}{\partial x_2} \times \dots \times \frac{\partial r}{\partial x_n} \right\|} + \frac{\partial r}{\partial x_1} \times \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\frac{\partial r}{\partial x_2} \times \frac{\partial r}{\partial x_3} \times \dots \times \frac{\partial r}{\partial x_n}}{\left\| \frac{\partial r}{\partial x_1} \times \frac{\partial r}{\partial x_2} \times \dots \times \frac{\partial r}{\partial x_n} \right\|} \right),$$

აქედან გვეჩნება

$$\begin{aligned} d_i = (\bar{n} \cdot \frac{\partial \bar{n}}{\partial x_i}) &= (\bar{n} \cdot (\frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2} \times \frac{\frac{\partial r}{\partial x_2} \times \frac{\partial r}{\partial x_3} \times \dots \times \frac{\partial r}{\partial x_n}}{\left\| \frac{\partial r}{\partial x_1} \times \frac{\partial r}{\partial x_2} \times \dots \times \frac{\partial r}{\partial x_n} \right\|}) + \\ &+ (\bar{n} \cdot (\frac{\partial r}{\partial x_1} \times \frac{\partial}{\partial x_1} (\frac{\frac{\partial r}{\partial x_2} \times \frac{\partial r}{\partial x_3} \times \dots \times \frac{\partial r}{\partial x_n}}{\left\| \frac{\partial r}{\partial x_1} \times \frac{\partial r}{\partial x_2} \times \dots \times \frac{\partial r}{\partial x_n} \right\|}))) =, \end{aligned}$$

$$= (\bar{n} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1} \left(- \frac{\partial x_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} \right) \right) +$$

$$+ \frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2} \times (\bar{n} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x_1} \times \frac{\partial x_1}{\partial x_1} \times \dots \times \frac{\partial x_1}{\partial x_1}) = 0.$$

მაშასადამე $d_i = 0, i = 1, 2, \dots, n.$

აქედან გამოდგინარე * ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n a_i^* \frac{\partial r}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

მიღებულ ფორმულას *გაინვარტენის ფორმულა* ეწოდება.

როგორც ვიცით, ზედაპირის პირველი კუადრატული ფორმის კოეფიციენტებია

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_j} \right), \quad \text{რაც შეეხება ზედაპირის მეორე კუადრატული ფორმის კოეფიციენტებს}$$

$$b_i = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_i} \cdot \bar{n} \right), \quad \text{ისინი შეიძლება წარმოვადგინოთ ასე:}$$

$$b_i = \left(- \frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \bar{n}}{\partial x_i} \right) = \left(- \frac{\partial \bar{n}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} \right) = b_{ii}.$$

მართლაც

$$b_{ij} = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \bar{n} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial r}{\partial x_j} \cdot \bar{n} \right) - \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \bar{n}}{\partial x_j} \right) = \left(- \frac{\partial r}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \bar{n}}{\partial x_i} \right).$$

$$b_i = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_i} \cdot \bar{n} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot \bar{n} \right) - \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \bar{n}}{\partial x_i} \right) = \left(- \frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \bar{n}}{\partial x_i} \right)$$

თუ ** ტოლობის ორივე მხარეს გაავრცელებთ სკალარულად $\bar{n}$ ვექტორზე ჩაჯდებით

$$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \bar{n} \right) = \sum_{i=1}^n (\Gamma_{ij}^* \frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot \bar{n}) + (p_{ij} \bar{n} \cdot \bar{n}) = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

მაშასადამე $p_{ij} = b_{ij}.$

თუ * ტოლობის ორივე მხარეს სკალარულად გაავრცელებთ $\frac{\partial r}{\partial x_j}$

ვექტორზე, მივიღებთ:

$$\left(\frac{\partial \bar{n}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i}\right) = \sum_{k=1}^n a_i^k \left(\frac{\partial r}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i}\right) + d_i'(\bar{n} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i}) = \sum_{k=1}^n a_i^k g_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

აქედან გამოდინარე:

$$-b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_i^k g_{kj}.$$

ვთქვათ $(g^y)_{k,j=1,2,\dots,n}$ მატრიცი წარმოადგენს $(g_y)_{i,j=1,2,\dots,n}$ მატრიცის შებრუნებულს, მაშინ

$$\sum_{k=1}^n g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j = \begin{cases} 1, i=j \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

გაუმარაველოთ $-b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_i^k g_{kj}$ ტოლობის ორივე მხარე g^y სიდიდეზე გამოვახდინოთ აჯამება j ინდექსით. მივიღებთ:

$$\sum_{j=1}^n -b_{ij} g^{jj} = \sum_{k=1}^n a_i^k \sum_{j=1}^n g_{kj} g^{jj} = \sum_{k=1}^n a_i^k \delta_k^j.$$

ამ ტოლობიდან კი გამოდინარეობს, რომ

$$a_i^k = -\sum_{j=1}^n b_{ij} g^{jk}$$

ეს კი ნიშნავს, რომ a_i^k გამოვსახეთ $(b_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$ ზედაპირის მეორე კვადრატული ფორმის მატრიცის და $(g^{jk})_{k,j=1,2,\dots,n}$ მატრიცის ელემენტების საშუალებით, რომელებიც თავის მხრივ გამოისახებიან $(g_{jk})_{k,j=1,2,\dots,n}$ მატრიცის ელემენტებით.

გაუმარაველოთ ** ტოლობის ორივე მხარე სკალარულად $\frac{\partial r}{\partial x_i}$ ვექტორზე, მივიღებთ:

$$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i}\right) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \left(\frac{\partial r}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i}\right) + p_{ij}(\bar{n} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i}) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k g_{ik}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i}\right) = \Gamma_{ij}.$$

მაშასადამე

$$\Gamma_{ij} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k g_{ik}, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n.$$

გავაწარმოოთ

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_j}\right)$$

ტოლობა x_j ცვლადით, მივიღებთ:

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} \right).$$

თუ გავითვალისწინებთ წინა აღნიშვნებს, გვექნება:

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_j} = \Gamma_{j,l} + \Gamma_{j,l}.$$

ამ ტოლობიდან i, j, l ინდექსთა ორჯერ ციკლური გადაადგილებით მივიღებთ:

$$\frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} = \Gamma_{i,l} + \Gamma_{i,j},$$

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} = \Gamma_{j,l} + \Gamma_{i,j}.$$

თუ წინა ტოლობას გამოვაკლებთ უკანასკნელ ორს, მივიღებთ:

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_l} = \Gamma_{i,l} - \Gamma_{i,j} + \Gamma_{i,l} - \Gamma_{j,l} - \Gamma_{i,l} - \Gamma_{i,j}.$$

რადგან $\Gamma_{j,l} = \Gamma_{l,j}$, ამიტომ წინა ტოლობიდან გვექნება:

$$-2\Gamma_{i,l} = \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_l},$$

ანუ

$$\Gamma_{i,l} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_l} - \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} \right).$$

ამგვარად $\Gamma_{i,l}$ სიდიდეებიც გამოვსახეთ ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებით.

ახლა განვიხილოთ Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ სიდიდეები. გავამრავლოთ

$$\Gamma_{ij} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k g_{kk}$$

ტოლობის ორივე მხარე g^{kk} -ზე და ავჯამოთ მიღებული ტოლობის ორივე მხარე l ინდექსით, მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^n g^{il} \Gamma_{ij} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \sum_{l=1}^n g_{kk} g^{il} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \delta_k^l = \Gamma_{ij}^l, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n.$$

მაშასადამე:

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{l=1}^n \Gamma_{il,j} g^{lk}, \quad i, l, k = 1, 2, \dots, n.$$

აქედან და ერთ-ერთი წინა ტოლობიდან გვექნება

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij} g^k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n g^k \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_j} \right), \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n. \quad \bullet$$

ამგვარად Γ_{ij}^k სიდიდეებიც გამოვსახეთ ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებით.

საბოლოოდ დამტკიცდა თეორემა:

თეორემა 8.1. ყოველი მარტივი პარამეტრიზირებული ორიენტირებული $(U, r = r(x))$ ზედაპირის ნატურალური რეპერის ექვტორები აკმაყოფილებენ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g^{ik} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial r}{\partial x_k} + b_{ij} \bar{n},$$

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial x_i} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} g^{jk} \frac{\partial r}{\partial x_k}.$$

რომელში შემავალი განტოლების მარჯვენა მხარეები გამოვსახულია მოცემული ზედაპირის პირველი და მეორე კვადრატული ფორმების კოეფიციენტებით.

სიმბოლოებს Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2, \dots, n$, $\Gamma_{ij}^j = i, j, l = 1, 2, \dots, n$ *მეორე და პირველი გვარის*

კრისტოფელის სიმბოლოებს უწოდებენ, შესაბამისად.

მიღებული განტოლებათა სისტემა გეიჩენებს, რომ პარამეტრიზირებული ზედაპირის პირველ და მეორე კვადრატულ ფორმებს შორის არსებობს ურთიერთდამოკიდებულება.

თეორემა 8.2 $\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^3 r}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$, $\frac{\partial^2 \bar{n}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \bar{n}}{\partial x_i \partial x_j}$ ტოლობები ეკვივალენტურია ტოლობების:

$$\partial_i \Gamma_{ij}^m - \partial_j \Gamma_{im}^m + \sum_{l=1}^n (\Gamma_{ij}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{im}^l \Gamma_{jl}^m) = \sum_{l=1}^n (b_{ij} b_{lm} - b_{il} b_{jm}) g^{lm},$$

$$\sum_{m=1}^n \Gamma_{ij}^m b_{ml} - \sum_{m=1}^n \Gamma_{im}^m b_{mj} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_l} - \frac{\partial b_{il}}{\partial x_j} = 0.$$

ამ ტოლობებიდან პირველს *გაუსის განტოლებას* უწოდებენ.

მეორეს კი *პეტერსონ-კოდაცის განტოლებას*.

დამტკიცება წინა თეორემაში მოყვანილ განტოლებებში $\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j}$

და $\frac{\partial \bar{n}}{\partial x_i}$ სიდიდეები შეეცვალოთ შესაბამისად სიდიდეებით: $\frac{\partial^2 r}{\partial x_m \partial x_k}$, $\frac{\partial \bar{n}}{\partial x_k}$, ამის შემდეგ კი

გაეწარმოეთ პირველი განტოლების ორივე მხარე და გამოვიყენოთ კრისტოფელის ერთი სიმბოლო, მივიღებთ:

$$\frac{\partial^3 r}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \sum_{m=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (\Gamma_{ij}^m \frac{\partial r}{\partial x_m}) + \sum_{m=1}^n \Gamma_{ij}^m \frac{\partial^2 r}{\partial x_m \partial x_k} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k} \bar{n} + b_{ij} \frac{\partial \bar{n}}{\partial x_k}$$

$$\frac{\partial^3 r}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k} = \sum_{m=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (\Gamma_{ij}^m \frac{\partial r}{\partial x_m}) + \sum_{m=1}^n \Gamma_{ij}^m \sum_{l=1}^n \Gamma_{lk}^m \frac{\partial r}{\partial x_l} + \sum_{m=1}^n \Gamma_{ij}^m b_{mk} \bar{n} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k} \bar{n} - \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n b_{ij} b_{ml} g^{lm} \frac{\partial r}{\partial x_m} =$$

$$\sum_{m=1}^n (\frac{\partial}{\partial x_k} \Gamma_{ij}^m + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^m - \sum_{l=1}^n b_{ij} b_{ml} g^{lm}) \frac{\partial r}{\partial x_m} + (\sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l b_{lk} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}) \bar{n}.$$

ასევე მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial^3 r}{\partial x_i \partial x_k \partial x_j} = \sum_{m=1}^n (\frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^m + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^m - \sum_{l=1}^n b_{ik} b_{lj} g^{lm}) \frac{\partial r}{\partial x_m} + (\sum_{m=1}^n \Gamma_{ik}^m b_{mj} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial x_j}) \bar{n}.$$

ტოლობიდან: $\frac{\partial^3 r}{\partial x_i \partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^3 r}{\partial x_i \partial x_k \partial x_j} = 0$ გამომდინარეობს წინა ტოლობებში ნულთან ტოლობა

$\frac{\partial r}{\partial x_m}$ ვექტორთან და $\bar{n}$ ვექტორთან მდებარე კოეფიციენტებისა:

$$\sum_{m=1}^n (\frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^m + \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l \Gamma_{li}^m - \sum_{l=1}^n b_{jk} b_{li} g^{lm}) = 0.$$

$$\sum_{m=1}^n (\frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^m + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^m - \sum_{l=1}^n b_{ik} b_{lj} g^{lm}) = 0.$$

$$\sum_{m=1}^n \Gamma_{ij}^m b_{mk} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k} = 0,$$

$$\sum_{m=1}^n \Gamma_{ik}^m b_{mj} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial x_j} = 0.$$

ცხადია $\frac{\partial r}{\partial x_m}$ ვექტორთან კოეფიციენტების ნულთან ტოლობა ეკვივალენტურია გაუსის

განტოლებისა, ხოლო $\bar{n}$ ვექტორთან მდებარე კოეფიციენტების კი პეტერსონ კოდაცის განტოლებისა.

ასევე, თუ გავიხსენებთ • ტოლობას ადვილად დავინახავთ, რომ

$$\frac{\partial^2 \bar{n}}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 \bar{n}}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \text{ ტოლობა ეკვივალენტურია პეტერსონ-კოდაცის განტოლებისა. თეორემა}$$

დამტკიცდა.

თეორემა 8.3. იზომეტრიული მარტივი პარამეტრიზებული ზედაპირების გულის სიმრუდე შესაბამის წერტილებში ერთი და იგივეა.

დამტკიცება: როგორც ზემოთ ეახენეთ, იზომორფული პარამეტრიზებული ზედაპირების პირველი კვადრატული ფორმები ერთი და იგივეა შესაბამის წერტილებში

როგორც ზემოთ ვნახეთ, ზედაპირის მეორე კვადრატული ფორმის კოეფიციენტები გამოისახებიან პირველი კვადრატული ფორმის კოეფიციენტების საშუალებით.

პარამეტრიზირებული ზედაპირის გაუსის სიმრუდე კი, როგორც ვიცით, გამოითვლება

ფორმულით: $G_M = \frac{|b_y|}{|g_y|}$. აქედან გამომდინარე, მარტივი იზომეტრიული პარამეტრიზირებული

ზედაპირების გაუსის სიმრუდე შესაბამის წერტილებში ერთიდა იგივე იქნება.

თეორემა 8.4 (მონე) ეთქვას, $U \subset E_n$ არეა ევკლიდეს სივრცეში $g_y: U \rightarrow R$ და $b_y: U \rightarrow R$ ვლუვი ფუნქციები ამ არეზე $i, j = 1, 2, \dots, n$, ამასთან $g_y = g_\mu$, $b_y = b_\mu$ და მატრიცა $(g_y)_{i,j=1,2,\dots,n}$

დადებითად განსაზღვრული. თუ $\Gamma_\mu^k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n g^{\mu j} \left(\frac{\partial g_y}{\partial x_i} + \frac{\partial g_\mu}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_j} \right)$, $i, k = 1, 2, \dots, n$

სიდიდეებისთვის ადგილი აქვს გაუსისა და პეტერსონ -კოდაცის ტოლობებს, მაშინ არსებობს $x^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in U$ წერტილის მიდამო $V \subset U$ და პარამეტრიზირებული ზედაპირი $(V, r = r(x))$, რომლისთვისაც მატრიცები: $(g_y)_{i,j=1,2,\dots,n}$ და $(b_y)_{i,j=1,2,\dots,n}$ წარმოადგენენ, შესაბამისად, პირველი და მეორე კვადრატული ფორმის მატრიცებს.

დამტკიცება $(g_y)_{i,j=1,2,\dots,n}$ მატრიცის შებრუნებული მატრიცი აღენიშნოთ ასე: $(g^y)_{i,j=1,2,\dots,n}$. იგი არსებობს რადგან $(g_y)_{i,j=1,2,\dots,n}$ დადებითად განსაზღვრული მატრიცია.

$$\Gamma_\mu^k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n g^{\mu j} \left(\frac{\partial g_y}{\partial x_i} + \frac{\partial g_\mu}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_j} \right), \quad i, k = 1, 2, \dots, n$$

გამოვიყენოთ ეს აღნიშვნა და განვიხილოთ კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება თა სისტემა:

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \sum_{\mu=1}^n \Gamma_\mu^j X_\mu + b_j N,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x_j} = - \sum_{i=1}^n \sum_{\mu=1}^n b_j g^{\mu i} X_\mu, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad 0$$

სადაც: საძიებელი $X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $X_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $N(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ევქლორფუნქციებია. როგორც კერძო წარმოებულებიან განტოლებათა თეორიიდან არის ცნობილი, უკანასკნელი განტოლებათა სისტემას ამონახსნი, მოცემული საწყისი პირობებისთვის არსებობს, თუ სრულდება პირობები

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 X_i}{\partial x_k \partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 N}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 N}{\partial x_i \partial x_j}.$$

ეს პირობები როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ ეკვივალენტურია გაუსისა და პეტერსონ-კოლაცის პირობებისა, რომლებიც სრულდება თეორემის პირობებიდან გამომდინარე.

მაშასადამე, არსებობს $x^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in U$ წერტილის მიდამო $W \subset U$ და მასზე განსაზღვრული $X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $X_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $N(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ვექტორფუნქციები, რომლებიც

წარმოადგენენ მოცემული განტოლებათა სისტემის ამონახსნის მოცემულ $X_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = X_i^0$, $X_2(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = X_2^0, \dots, X_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = X_n^0$, $N(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = N^0$ თუ ეს საწყისი მნიშვნელობანი ისეა არჩეული, რომ სკალარული ნამრავლები: $(X_i^0 \cdot X_j^0) = g_{ij}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, $(X_i^0 \cdot N^0) = 0$, $\|N\| = 1$, ხოლო შერეული ნამრავლები $[X_i \cdot X_j \cdot N] > 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$

ახლა განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = X_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \diamond \diamond$$

რომელშიც საძიებელი ფუნქციაა $r = r(x) = r(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

ამ სისტემის ინტეგრების პირობას აქვს სახე:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 r}{\partial x_j \partial x_i}.$$

$(g_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$ მატრიცის სიმეტრიულობის გამო $\Gamma_\mu^i = \Gamma_\mu^i$, ამას გარდა

$b_j = b_\mu$. აქედან გამომდინარე $X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $X_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

ვექტორფუნქციები, რომლებიც წარმოადგენენ $\diamond$

სისტემის ამონახსნის კომპონენტებს, აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \quad \text{რომლებიც ეკვივალენტურია პირობებისა} \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 r}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \text{რამდენადაც} \quad \frac{\partial r}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}.$$

ამგეარად, არსებობს $x^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in U$ წერტილის მიდამო $V \subset U$

რომელზედაც განსაზღვრულია $\diamond \diamond$ სისტემის ამონახსნი $r = r(x) = r(x_1, x_2, \dots, x_n)$, რომელიც

აკმაყოფილებს პირობას:

$$r(x^0) = r(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = r^0$$

ვარგეზით, რომ ფუნქცია ($V, r = r(x)$) წარმოადგენს საძიებელ პარამეტრიზირებულ ზედაირს.

ამისათვის საჭიროა შევამოწმოთ, რომ $\frac{\partial r}{\partial x_1} \times \frac{\partial r}{\partial x_2} \times \dots \times \frac{\partial r}{\partial x_n} \neq 0$ და (g_y) , (b_y) მატრიცები

წარმოადგენენ ამ ზედაირის პირველი და მეორე კვადრატული ფორმების მატრიცებს. თუ

ვანებებთ, რომ $g_y = (\frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_j})$ მაშინ (g_y) მატრიცის დადებითად განსაზღვრულობიდან

გამომდინარეობს $\frac{\partial r}{\partial x_1} \times \frac{\partial r}{\partial x_2} \times \dots \times \frac{\partial r}{\partial x_n} \neq 0$ პირობაც.

($V, r = r(x)$) პარამეტრიზირებული ზედაირის პირველი და მეორე კვადრატული ფორმების გამოსათვლელად განვიხილოთ

ფუნქციები: $(X_i \cdot X_j)$, $(X_i \cdot N)$, $(N \cdot N)$, სადაც $X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $X_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots$,

$X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $N(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ვექტორფუნქციები წარმოადგენენ 0 განტოლებათა სისტემის

ამონახსნს. თუ ამ ფუნქციებს გავეწარმოებთ და გავითვალისწინებთ 0 განტოლებებს, მივიღებთ კერძოწარმოებულებიდან დიფერენციალურ განტოლებებათა სისტემას:

$$\partial_i(X_j \cdot X_k) = \sum_{l=1}^n \Gamma'_{ik}(X_j \cdot X_l) + \sum_{l=1}^n \Gamma'_{jk}(X_l \cdot X_i) + b_{ik}(N \cdot X_j) + b_{jk}(N \cdot X_i),$$

$$\partial_i(N \cdot X_j) = -\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} g^{kl}(X_l \cdot X_j) + \sum_{l=1}^n \Gamma'_{jl}(X_l \cdot N) + b_{jl}(N \cdot N),$$

$$\partial_i(N \cdot N) = -2 \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} g^{kl}(X_l \cdot N).$$

ადვილია შევამოწმოთ, რომ $(X_i \cdot X_j) = g_{ij}$, $(X_i \cdot N) = 0$, $(N \cdot N) = 1$ წარმოადგენენ მოცემული

სისტემის ამონახსნს. მართლაც, უკანასკნელი განტოლებებისთვის ეს ცხადია, მეორე განტოლებისთვის გვაქვს

$$-\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} g^{kl} g_{jl} + b_{jl} = -b_{jl} + b_{jl} = 0.$$

თუ გაეზრადლებთ

$$\Gamma'_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n g^{kj} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \right), \quad i, l, k = 1, 2, \dots, n$$

ტოლობებს g_{ij} სიდიდეებზე და მოეახდენთ აჯამებას l ინდექსის მიმართ, გვექნება:

$$\sum_{l=1}^n \Gamma'_{ik} g_{jl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \right), \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n.$$

ანალოგიურად

$$\sum_{i=1}^n \Gamma'_{jk} g_{ii} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} \right), \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_{i=1}^n \Gamma'_{jk} g_{ii} + \sum_{i=1}^n \Gamma'_{ik} g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}.$$

ეს ნიშნავს, რომ $(X_i \cdot X_j) = g_{ij}$, $(X_i \cdot N) = 0$, ფუნქციები მოცემული სისტემის პირველ

განტოლების ამონახსნსაც წარმოადგენენ.

საწყის $x^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ წერტილში გვაქვს:

$$(X_i^0 \cdot X_j^0) = g_{ij}^0, \quad (X_i^0 \cdot N^0) = 0, \quad (N^0 \cdot N^0) = 1,$$

$$[X_i^0 \cdot X_j^0 \cdot N^0] > 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

მოცემულ საწყის პირობებში სისტემის ამონახსნის ერთადერთობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$(X_i \cdot X_j) = g_{ij}, \quad (X_i \cdot N) = 0, \quad (N \cdot N) = 1, \quad [X_i \cdot X_j \cdot N] > 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

ამგვარად, 00 ტოლობის ძალით X_i , X_j ვექტორები წარმოადგენენ მოძრავი ბაზისის

ელემენტებს, აქედან გამომდინარე მოცემული ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმის მატრიცი იქნება $(g_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$

ასევე გვქმნება, რომ N ვექტორი წარმოადგენს ზედაპირის ერთეულთან ნორმალს. რომელიც განსაზღვრავს ზედაპირის ორიენტაციას.

რაც შეეხება ზედაპირის მეორე კვადრატულ ფორმას, მისი მატრიცის ელემენტებს წარმოადგენენ ფუნქციები

$$\left(-\frac{\partial N}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) = \left(-\frac{\partial N}{\partial x_i} \cdot X_j \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ij} g^{jk} (X_k \cdot X_j) =$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ij} g^{jk} g_{jk} = \sum_{j=1}^n b_{ij} \delta_j^j = b_{ii}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

თეორემა დამტკიცდა.

თეორემა 3.5. თუ

$$(U, r = r(x_1, x_2, \dots, x_n)), \quad (V, \rho = \rho(y_1, y_2, \dots, y_n))$$

n განზომილებიანი მარტივი გლუვი, ორიენტირებული, პარამეტრიზირებული ზედაპირები სივრცეში და $F: r \mapsto \rho$ ამ ზედაპირების ტანთა დიფეომორფიზმი, რომელიც ინახავს ზედაპირის პირველ და მეორე კვადრატულ ფორმებს და ზედაპირის ორიენტაციას, მაშინ

არსებობს ევკლიდეს E_{n+1} სივრცის ერთადერთი ისეთი საკუთრივი მოძრაობა $D: E_{n+1} \rightarrow E_{n+1}$, რომ $D|_{\rho} = F$

დამტკიცება: დიფეომორფიზმისაგან კვადრატული ფორმის შენახვა ნიშნავს, რომ $(U, r = r(x_1, x_2, \dots, x_n))$ ზედაპირის ნებისმიერი x წერტილისათვის, და ყოველი $dx \in T_x S_1$ ვექტორისთვის $G_1(x, dx) = G_2(F(x), dF(dx))$, სადაც $G_1(x, dx)$ პირველი ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმაა, $G_2(x, dx)$ კი მეორე ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმაა, dF კი $F: |r| \rightarrow |\rho|$ დიფეომორფიზმის დიფერენციალი. ანალოგიურადაა საქმე ზედაპირების მეორე კვადრატული ფორმებისათვისაც. განვიხილოთ პარამეტრიზირებული ზედაპირი:

$$(U, \bar{\rho} = F \circ r(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

და ნებისმიერი $x^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ წერტილი U არეში. ცხადია, $|\rho| \neq \bar{\rho}$.

ნატურალური რეპერის $\frac{\partial r}{\partial x_1}, \frac{\partial r}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial r}{\partial x_n}$ ვექტორები წარმოადგენენ

$$r' = r(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

საკოორდინატო წირების მხებ ვექტორებს.

$F: |r| \rightarrow |\rho|$ დიფეომორფიზმს $(U, r = r(x_1, x_2, \dots, x_n))$ ზედაპირის საკოორდინატო წირები:

$$r' = r(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

გადაჰყავს

$(U, \bar{\rho} = F \circ r(x_1, x_2, \dots, x_n))$ პარამეტრიზებული ზედაპირის საკოორდინატო წირებში.

აქედან და ასახვის დიფერენციალის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ $dF(\frac{\partial r}{\partial x_i}) = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_i}$.

თეორემის პირობის ძალით, აქედან გამომდინარეობს, რომ $(U, r = r(x_1, x_2, \dots, x_n))$ და

$(U, \bar{\rho} = F \circ r(x_1, x_2, \dots, x_n))$ ზედაპირების პირველი და მეორე კვადრატული ფორმები ერთმანეთს ემთხვევა. მართლაც, მაგალითად პირველი კვადრატული ფორმებისთვის გვაქვს:

$$g'_{ij} = (\frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_j}) = (dF(\frac{\partial r}{\partial x_i}) \cdot dF(\frac{\partial r}{\partial x_j})) = (\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j}) = g''_{ij}$$

ანალოგიურად არის საქმე მეორე კვადრატული ფორმებისთვისაც.

განვიხილოთ ეგრეთწოდებული **დარბუს რეპერტი** $(U, r = r(x_1, x_2, \dots, x_n))$ ზედაპირის $r(x^0)$

წერტილში: $(r(x^0), e_1, e_2, \dots, e_n, n)$,

რომელიც შედგება ისეთ ვექტორთა ორთონორმირებული სისტემისაგან, რომელთა მიმართულებებიც ვითხვეიან პარამეტრიზირებული ზედაპირის მთავარ მიმართულებებს.

F ინახავს ზედაპირის პირველ კვადრატულ ფორმას და ორიენტაციას. აქედან გამომდინარე მისი დიფერენციალი შეინახავს ვექტორთა სიგრძეებს. მათ სკალარულ ნამრავლებს და აქედან გამომდინარე მათ შორის კუთხეებსაც. ამიტომ

$$(\bar{\rho}(x^0), dF(e_1), dF(e_2), \dots, dF(e_n), n_2),$$

სადაც

$$n_2 = \frac{(dF(\frac{\partial r}{\partial x_1}) \times dF(\frac{\partial r}{\partial x_2}) \times \dots \times dF(\frac{\partial r}{\partial x_n}))|_{x=x^0}}{\|dF(\frac{\partial r}{\partial x_1}) \times dF(\frac{\partial r}{\partial x_2}) \times \dots \times dF(\frac{\partial r}{\partial x_n})|_{x=x^0}\|},$$

ასევე დარბუს რეპერი იქნება.

აქედან გამომდინარე არსებობს მოძრაობა $D: E_{n+1} \rightarrow E_{n+1}$, რომელსაც გადაჰყავს $r(x^0)$

წერტილი $\bar{\rho}(x^0)$ წერტილში და რომლის ერთგეაროვანი ნაწილიც $B: E^{n+1} \rightarrow E^{n+1}$

წარმოადგენს იზომეტრიას რომელსაც გადაჰყავს $(e_1, e_2, \dots, e_n, n_2)$ ვექტორთა სისტემა ვექტორთა $(dF(e_1), dF(e_2), \dots, dF(e_n), n_2)$ სისტემაში.

განვიხილოთ ზედაპირი, რომელიც მიიღება $(U, r = r(x_1, x_2, \dots, x_n))$ ზედაპირისაგან D საკუთრივი მოძრაობით. როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, ევკლიდეს სივრცის იზომეტრიული გარდაქმნების დროს ხდება ამ სივრცეში მოთავსებული ზედაპირების პირველი და მეორე კვადრატული ფორმების შენახვა. აქედან გამომდინარე $(U, \tilde{r} = D \circ r(x_1, x_2, \dots, x_n))$

პარამეტრიზირებული ზედაპირი ისეთი, იქნება, რომ მისი პირველი და მეორე კვადრატული ფორმების მატრიცები დაემთხვევა $(U, r = r(x_1, x_2, \dots, x_n))$ და $(V, \rho = \rho(y_1, y_2, \dots, y_n))$

ზედაპირების პირველი და მეორე კვადრატული ფორმების მატრიცებს. ეს დამთხვევა

განაპირობებს იმას, რომ $\frac{\partial \tilde{r}}{\partial x_i} = \tilde{n}$, $\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y_i} = n_2$, სადაც $\tilde{n} = B(n_2)$ ფუნქციები წარმოადგენენ ზემოთ

გამოყვანილი

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij}^1 \frac{\partial r}{\partial x_j} + d_i \tilde{n}, i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{\nu=1}^n \Gamma_{ij}^{\nu} \frac{\partial r}{\partial x_\nu} + p_{ij} \tilde{n}; i, j = 1, 2, \dots, n.$$

განტოლებათა სისტემის ამონახსნებს. ხოლო $x^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ წერტილში არსებული

$$\frac{\partial \tilde{r}}{\partial x_i}|_{x=x^0} = B\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)|_{x=x^0} = \frac{\partial \rho}{\partial y_i}|_{y=y^0}.$$

ტოლობები, რომლებიც საწყის პირობებს წარმოადგენენ, განაპირობებენ ამ ამონახსნების ერთადერთობას.

ამგვარად, $\frac{\partial \bar{r}}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\bar{r}(x) = \bar{p}(x)$. აქედან კი გამოდინარეობს, რომ

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{r}_i(x) - r_i(x)) = 0, i = 1, 2, \dots, n \text{ და } \bar{r}(x) - \bar{p}(x) = c \text{ წარმოადგენს მუდმივ ფუნქციას. რადგან}$$

$\bar{r} - \bar{p}|_{x=x_0} = 0$, ამიტომ $C = 0$ და აქედან გამოდინარეობს, $\bar{r}(x) = \bar{p}(x)$. ეს კი ნიშნავს, რომ

$$D \circ r(x) = F \circ r(x).$$

ამგვარად, დამტკიცდა, რომ $(U, r = r(x_1, x_2, \dots, x_n))$ პარამეტრიზირებული ზედაპირისათვის არსებობს ისეთი საკუთრივი მოძრაობა: $D: E_{n+1} \rightarrow E_{n+1}$, რომ

$$D(r(x)) = F(r(x)), \quad D(r(U)) = \bar{p}(U) = \rho(V). \text{ ეს მოძრაობა ცხადია, ცალსახად განისაზღვრება}$$

$x^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ წერტილის ამორჩევით და რამდენადაც

$$B\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right) = dF\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad B(n_i) = n_i, \quad D \text{ მოძრაობის აგებიდან გამოდინარეობს, ეს მოძრაობა}$$

განსაზღვრულია ცალსახად, $x^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ წერტილის ამორჩევისგან დამოუკიდებლად.

დამტკიცებულიდან გამომდინარე, ცხადია, ნებისმიერი ისეთი $(U, r_1 = r_1(x_1, x_2, \dots, x_n))$ მარტივი, გლუვი, ბმული პარამეტრიზირებული ზედაპირისათვის, რომლისათვისაც $r(U) = r_1(U)$ და ორიენტაციაც იგივეა, რაც $(U, r = r(x_1, x_2, \dots, x_n))$ ზედაპირის, არსებობს საკუთრივი ანალოგიურად აგებული მოძრაობა $D_1: E_{n+1} \rightarrow E_{n+1}$, რომ $D_1(r_1(x)) = F(r_1(x))$.

აღვილი საჩვენებელია, რომ ასეთი $(U, r_1 = r_1(x_1, x_2, \dots, x_n))$ ზედაპირი $(U, r = r(x_1, x_2, \dots, x_n))$

ზედაპირის ეკვივალენტური ზედაპირია პარამეტრთა $\lambda = r_1^{-1} \circ r: U \rightarrow U_1$ გარდაქმნით.

როგორც ზემოთ ეჩვენეთ, ეკვივალენტური ზედაპირების პირველი კვადრატული ფორმები ერთმანეთს ემთხვევიან შესაბამის წერტილებში. ამიტომ, რადგან ზედაპირის მეორე კვადრატული ფორმის მატრიცის ელემენტები გამოისახება მისი პირველი კვადრატული ფორმის მატრიცის ელემენტებით, ადვილი უნდა აჩვენდეს ტოლობას:

$$\frac{B(x, dx)}{G(x, dx)} = \frac{B_1(z = \lambda(x), dz)}{G_1(z = \lambda(x), dz)}.$$

უკანასკნელი უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ეკვივალენტური ზედაპირების მთავარი მიმართულებები ერთმანეთს ემთხვევიან.

დავაფიქსიროთ ისეთი $z^0(z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0) \in U_1$ წერტილი რომ $r_1(z^0) = r(x^0)$ და $r_1(z^0) \in r(U) = r_1(U)$ წერტილში დარბუს რეპერი $(r_1(z^0), e_1^1, e_2^1, \dots, e_n^1, n_1)$, ზემოთ ნათქვამის გამო, ეს რეპერი დამთხვევია $(U, r = r(x_1, x_2, \dots, x_n))$ ზედაპირის დარბუს რეპერს $(r(x^0), e_1, e_2, \dots, e_n, n_1)$.

$r(x^0)$ წერტილში. აქედან გამოდინარეობს $dF(e_1^1) = dF(e_1), dF(e_2^1) = dF(e_2), \dots, dF(e_n^1) = dF(e_n)$ ვთქვათ ახლა, $B_1: E^{n+1} \rightarrow E^{n+1}$ წარმოადგენს D_1 მოძრაობის ერთგვაროვან ნაწილს, იგი ცხადია განისაზღვრება $(r_1(z^0), e_1^1, e_2^1, \dots, e_n^1, n_1)$, $(F \circ r_1(z^0), dF(e_1^1), dF(e_2^1), \dots, dF(e_n^1), n_1)$ რეპერთა წყვილისაგან, სადაც $n_1(U, \bar{p}_1 = F \circ r_1(z_1, z_2, \dots, z_n))$ პარამეტრიზირებული ზედაპირის

ნორმალა $F \circ f_i(z)|_{z=z_0}$. წერტილში. აქედან გამოჰდინარე $B: E^{n+1} \rightarrow E^{n+1}$ და $B_i: E^{n+1} \rightarrow E^{n+1}$ იზომორფიზმები ერთმანეთს ემთხვევა და მაშასადამე $D_i = D$.

როგორც ენახეთ, ისეთი მოძრაობა, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემის პირობებს არსებობს, მისი აგების პროცესი დამოკიდებული არ არის არც პარამეტრიზირებული ზედაპირზე წერტილის დაფიქსირებაზე, არც მოცემული პარამეტრიზირებული ზედაპირის ეკვივალენტური ზედაპირების კლასში ზედაპირის დაფიქსირებაზე.

უთქვამთ ახლა D_i ნებისმიერი ისეთი მოძრაობაა რომელიც აკმაყოფილებს თეორემის პირობას: $D_i|_{t=0} = F$ აქედან და ზემოთ ნათქვამიდან გამოჰდინარე, ამ მოძრაობის

ერთგვაროვანი ნაწილი შეიძლება აგებული იქნას $(U, r = r(x_1, x_2, \dots, x_n))$ ზედაპირზე რაიმე წერტილის დაფიქსირებით და ისეთივე მოქმედებებით როგორს ზემოთ. ეს კი ნიშნავს, რომ $D_i = D$.

თეორემა დამტკიცდა.

ამ თეორემისა და წინა 5.4. თეორემის საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ, რომ თუ $U \subset E$,

არეა ევკლიდეს სივრცეში $g_j: U \rightarrow R; i, j = 1, 2, \dots, n$ და $b_j: U \rightarrow R; i, j = 1, 2, \dots, n$ გლუვი ფუნქციები ამ არეზე და ამასთან სრულდება 5.4. თეორემის პირობები, მაშინ არსებობს პარამეტრიზირებული ზედაპირი $(U, r = r(x))$, რომლის პირველი და მეორე კუადრატული ფორმების მატრიცები შედგებიან g_j და b_j ელემენტებისაგან და

თუ ზოგადობის დაურღვევლად ჩავთვლით, რომ $(U, r = r(x))$ მარტივი პარამეტრიზირებული ზედაპირია, მაშინ იგი ერთადერთი იქნება E_{n+1} , $r(U) \subset E_{n+1}$ ემკლიდეს სივრცის საკუთარ

მოძრაობამდე სიხუსტით.

n განზომილებიანი გლუვი ზედაპირი E_{n+1} სივრცეში ეწოდება ამ სივრცის ისეთ S

ქვესიმრავლეს, რომელიც ნებისმიერ $a \in S$ წერტილისთვის არსებობს W მიდამო E_{n+1}

სივრციდან ინდუცირებულ ტოპოლოგიურ სტრუქტურაში და გლუვი მარტივი

პარამეტრიზირებული ზედაპირი $(U, r = r(x))$, რომლისთვისაც $r(U) = W$

$(U, r = r(x))$ პარამეტრიზირებულ ზედაპირს S ზედაპირის *ლოკალური პარამეტრიზაცია* ეწოდება, ხოლო $r(U) \subset S$ სიმრავლეს - *პარამეტრიზაციის არე*.

ცხადია გლუვი n განზომილებიანი გლუვი ზედაპირი E_{n+1} სივრცეში, გლუვ

მრავალსახეობას წარმოადგენს.

თუ $(U, r = r(x))$ და $(V, \rho = \rho(y))$ წარმოადგენენ S ზედაპირის *ლოკალურ*

პარამეტრიზაციებს, და $W = r(U) \cap \rho(V) \neq \emptyset$, მაშინ გვაქვს ამ ზედაპირის ორი

პარამეტრიზაცია, რომლებიც ერთმანეთის ეკვივალენტურია. მართლაც, განვიხილოთ

პარამეტრიზირებული ზედაპირები $(r^{-1}(W), r|_{r^{-1}(W)} = r|_{r^{-1}(W)}(x))$, $(\rho^{-1}(W), \rho|_{\rho^{-1}(W)} = \rho|_{\rho^{-1}(W)}(y))$.

ეს ზედაპირები ერთმანეთის ეკვივალენტური ზედაპირებია პარამეტრის გარდაქმნით

$\lambda = (\rho|_{\rho^{-1}(W)})^{-1} \circ r|_{r^{-1}(W)}$. მაშასადამე ამ პარამეტრიზირებული ზედაპირების პირველი და მეორე

კუადრატული ფორმები ერთიდა იგივე უნდა იყოს. აქედან გამოჰდინარე, S ზედაპირისათვის

მოცემულ $a \in S$ წერტილში შეიძლება განესაზღვროთ ამ ზედაპირის *მხები სივრცე*

ზედაპირის პირველი და მეორე კუადრატული ფორმები, ზედაპირის მთავარი და ახიმტოტური

მიმართულებები, გაუსის და საშუალო სიმრუდეები, როგორც ისეთი გლუვი პარამეტრიზირებული ($U, r = r(x)$) ზედაპირის მხები სივრცე, პირველი და მეორე კვადრატული ფორმები, ზედაპირის მთავარი და ასიმპტოტური მიმართულებები, გაუსის და საშუალო სიმრუდეები a წერტილში, რომლისთვისაც $a \in r(U)$.

ცხადია ყოველი მარტივი პარამეტრიზირებული ზედაპირის ტანი ზედაპირს წარმოადგენს. აქედან გამომდინარე, ზედაპირის ყოველი ლოკალური პარამეტრიზაციის არე ზედაპირია.

რადგან გლუვი ზედაპირი გლუვი მრავალსახეობაა. აქედან გამომდინარე, ისევე როგორც მარტივ ზედაპირებისთვის. ზედაპირებისთვისაც გვექნება დიფეომორფულობის და იზომეტრიულობის ცნებები.

თეორემა 85 თუ S_1 და S_2 n განზომილებიანი გლუვი, ორიენტირებული, ბმული

ზედაპირებია სივრცეში და $F: S_1 \rightarrow S_2$ ამ ზედაპირების დიფეომორფიზმი, რომელიც ინახავს ზედაპირის პირველ და მეორე კვადრატულ ფორმებს და ზედაპირის თრივი მოძრაობა $D: E_{n+1} \rightarrow E_{n+1}$, რომ $D|_{S_1} = F$

დატკიცება: აქაც როგორც ზემოთ, დიფეომორფიზმისაგან კვადრატული ფორმის შენახვა ნიშნავს, რომ ($U, r = r(x_1, x_2, \dots, x_n)$) ზედაპირის ნებისმიერი x წერტილისათვის, და ყოველი $dx \in T_{S_1}$ ვექტორისთვის $G_1(x, dx) = G_2(F(x), dF(dx))$, სადაც $G_1(x, dx)$ პირველი ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმაა, $G_2(x, dx)$ კი მეორე ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმა, dF კი $F: S_1 \rightarrow S_2$ დიფეომორფიზმის დიფერენციალი. ასევე ზედაპირების მეორე კვადრატული ფორმებისათვისაც.

ეთქვას, ($U, r = r(x_1, x_2, \dots, x_n)$) S_1 ზედაპირის ორიენტაციასთან შეთანხმებულირაიმე რაიმე ლოკალური პარამეტრიზაციაა, მაშინ ($U, \rho = F \circ r(x_1, x_2, \dots, x_n)$) წარმოადგენს S_2 ზედაპირის ლოკალურ პარამეტრიზაციას. ცხადია, $F|_{r^{-1}}: r^{-1} \rightarrow |\rho|$ დიფეომორფიზმია და ამ პარამეტრიზაციითა ტანები დიფეომორფული მრავალსახეობებია. წინა თეორემის თანახმად არსებობს ერთადერთი ისეთი საკუთრივი მოძრაობა $D: E_{n+1} \rightarrow E_{n+1}$, რომ $D|_{r^{-1}} = F|_{r^{-1}}$.

ეთქვას, ახლა ($U, r_1 = r_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$) S_1 ზედაპირის მეორე ზედაპირის ორიენტაციასთან შეთანხმებული ლოკალური პარამეტრიზაციაა და ($U, \rho_1 = F \circ r_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$) S_2 ზედაპირის შესაბამისი ლოკალურ პარამეტრიზაცია, ამ შემთხვევაში $F|_{r_1^{-1}}: r_1^{-1} \rightarrow |\rho_1|$ ასევე დიფეომორფიზმია და წინა თეორემის თანახმად არსებობს ერთადერთი ისეთი საკუთრივი მოძრაობა $D_1: E_{n+1} \rightarrow E_{n+1}$, რომ $D_1|_{r_1^{-1}} = F|_{r_1^{-1}}$.

ეთქვას, $|r| \cap |r_1| = W \neq \emptyset$. ავირჩიოთ W სიმრავლეში ისეთი სამი $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ წერტილი, რომელთა შესაბამისი რადიუსვექტორები E_{n+1} სივრცეში დაფიქსირებული რომელიმე კოორდინატთა სისტემაში არაკოლინეარულია, ხოლო $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, a_{n+1} = a_1 + n(a_i)$ ვექტორები, სადაც $n(a_i)$ ზედაპირის ნორმალაა a_i წერტილში, არაკომპლანარული. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვივთქვათ, რომ ასეთი წერტილები არსებობენ. ცხადია $D(a_i) = D_1(a_i), i = 1, 2, \dots, n+2$, აქედან გამომდინარე

$D = D_1$. ამგვარად, თუ $\{(U_k, r_k = r_k(x_1, x_2, \dots, x_n))\}_{k \in A}$ S_1 ზედაპირის ლოკალური პარამეტრიზაციათა ისეთი ოჯახია რომელთა პარამეტრიზაციის არეებიც ფარავენ ამ ზედაპირს. რადგან ზედაპირი ბრუნულია, ამიტომ მისი ყოველი ორი წერტილი შეიძლება შეეჯეროს პარამეტრიზირებული წირით. ეთქვას ამ წირის ერთი ბოლო მდებარეობს პარამეტრიზაციის $r_k(U_k)$ არეში, ხოლო მეორე ბოლო-პარამეტრიზაციის $r_{k'}(U_{k'})$ არეში. რადგან მოცემული წერტილების შემაერთებელი წირის ტანი კომპაქტურია, ამიტომ არსებობს პარამეტრიზაციის არეთა სასრული მიმდევრობა რომელიც ფარავს წირის ტანს. ეთქვას ეს მიმდევრობა:

$$r_{k'}(U_{k'}) = r_{k_1}(U_{k_1}), r_{k_2}(U_{k_2}), \dots, r_{k_i}(U_{k_i}) = r_{k'}(U_{k'}).$$

ცხადია, ზოგადობის დაურღვეველად შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ამ მიმდევრობის ყოველი ორი მეზობელი წევრი ერთმანეთს კვეთს. ეს კი ნიშნავს, რომ მათი შესაბამის ევკლიდეს სივრცის საკუთარი მოძრაობები ერთმანეთს ემთხვევა. აქედან გამომდინარე ერთმანეთს დაემთხვევა $(r_{k_1}(U_{k_1}))$ და $(r_{k'}(U_{k'}))$ არეების შესაბამისი საკუთრივი მოძრაობებიც. რადგან წერტილებს ნებისმიერად ვაფიქსირებთ, ეს ნიშნავს, რომ S_1 ზედაპირის ყოველი ლოკალური პარამეტრიზაციით განსაზღვრული ევკლიდეს სივრცის მოძრაობა ერთი და იგივე იქნება. რადგან $D|_{\alpha_1} = F|_{\alpha_1}$, ამიტომ $D|_{\alpha_1} = D|_{\alpha'_1} = F$ თეორემა დამტკიცდა.

§9. გეოდეზიური წირი ზედაპირზე და მასთან დაკავშირებული კოორდინატა სისტემები

ეთქვას, მოცემულია n - განზომილებიანი პარამეტრიზირებული $(U, r=r(x))$ ზედაპირი E_{n+1} ევკლიდეს სივრცეში. ბუნებრივად პარამეტრიზირებული წირი $(I, \rho = \rho(s))$ მდებარეობს ამ ზედაპირზე. ამ წირის სიმრუდის ევქტორი

$$\frac{d^2 \rho(s)}{ds^2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 r(x(s))}{\partial x_i \partial x_j} \frac{dx_i(s)}{ds} \frac{dx_j(s)}{ds} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial r(x(s))}{\partial x_i} \frac{d^2 x_i(s)}{ds^2}.$$

თუ გავიხსენებთ გაუსის ფორმულას $\frac{\partial^2 r(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial r(x)}{\partial x_k} + b_{ij} \bar{n}$, სადაც $\bar{n}$ პარამეტრიზირებული

ზედაპირის ნორმალია, გვექნება:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \rho(s)}{ds^2} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial r(x)}{\partial x_k} + b_{ij} \bar{n} \frac{dx_i(s)}{ds} \frac{dx_j(s)}{ds} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial r(x(s))}{\partial x_k} \frac{d^2 x_i(s)}{ds^2} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i(s)}{ds} \frac{dx_j(s)}{ds} + \frac{d^2 x_i(s)}{ds^2} \right) \frac{\partial r(x)}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{dx_i(s)}{ds} \frac{dx_j(s)}{ds} \bar{n}. \end{aligned}$$

მიღებული ტოლობის მარჯვენა მხარის პირველ შესაკრებს $(I, \rho = \rho(s))$ წირის გეოდეზიური სიმრუდე ეწოდება, ხოლო მეორე შესაკრებს ამ წირის იძულებითი სიმრუდე s პარამეტრის მნიშვნელობით განსაზღვრულ წერტილში.

პარამეტრიზირებულ $(I, \rho = \rho(s))$ წირს უწოდებენ გეოდეზიურ წირს პარამეტრიზირებულ $(U, r = r(x))$ ზედაპირზე თუ მისი გეოდეზიური სიმრუდე ნულის ტოლია.

თუ წირი გეოდეზიურია მაშინ ადგილი უნდა აქონდეს ტოლობებს:

$$\frac{d^2 x_k(s)}{ds^2} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i(s)}{ds} \frac{dx_j(s)}{ds}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

ეს ტოლობები წარმოადგენენ მეორე რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას. მას გეოდეზიური წირის განტოლებები ეწოდება.

ჩვეულებრივ განტოლებათა თეორიიდან გამომდინარეობს, რომ ზედაპირის მოცემულ $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ წერტილში მოცემული $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ მიმართულებით მხოლოდ ერთი გეოდეზიური წირი გადის.

ვთქვათ, ახლა n - განზომილებიანი პარამეტრიზირებული $(U, r = r(x))$ ზედაპირზე, რომელიც მოთავსებულია $n+1$ განზომილებიან ევკლიდეს სივრცეში გამოყოფილია

$(n-1)$ განზომილებიანი გლუვი ზედაპირი $(V, l = l(x) \in r(U))$. აღვნიშნოთ ეს ზედაპირები P_n და L_{n-1} სიმბოლოებით შესაბამისად. L_{n-1} ზედაპირის ყოველ M წერტილში გვაქვს ამ ზედაპირის ორთოგონალური მიმართულება, რომელიც P_n ზედაპირზე მდებარეობს. აღვნიშნოთ $\gamma(M)$ სიმბოლოთი ის გეოდეზიური წირი, რომელიც მდებარეობს P_n ზედაპირზე და ორთოგონალურად გადაკვეთს L_{n-1} ზედაპირს M წერტილში. გადავდოთ L_{n-1} ზედაპირს თითოეული M წერტილიდან გამომავალ $\gamma(M)$ გეოდეზიურ წირზე ω სივრცის რკალი. ასეთი რკალების ბოლო წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს უწოდებენ L_{n-1} ქვეზედაპირის გეოდეზიურ პარალელს ω მანძილზე და აღვნიშნავენ ასე: L_{n-1}^ω .

თეორემა 9.1. L_{n-1} ზედაპირის ნებისმიერ M_0 წერტილში არსებობს მიდამო $V(M_0)$ რომელშიც ქვეზედაპირი L_{n-1}^ω გადაკვეთს ყველა $\gamma(M)$ გეოდეზიურ წირს მართი კუთხით, ნებისმიერი $M \in V(M_0)$ წერტილისათვის.

დამტკიცება: L_{n-1} ზედაპირი ზოგადად მოიცემა $n-1$ პარამეტრიან: განტოლებათა სისტემით:

$$u_1 = u_1(r_1, r_2, \dots, r_{n-1})$$

$$u_2 = u_2(r_1, r_2, \dots, r_{n-1})$$

$$u_n = u_n(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}),$$

ამასთან იაკობის მატრიცის $\frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(r_1, r_2, \dots, r_{n-1})}$ რანგი M_0 წერტილში და ამ წერტილის რომელიმე

მიდამოში ტოლია $n-1$ -ის.

დაეუშაოთ M_0 წერტილში ნულისაგან განსხვავებულია მინორი:

$$\begin{array}{c} \frac{\partial u_1}{\partial \tau_1} \frac{\partial u_2}{\partial \tau_1} \dots \frac{\partial u_n}{\partial \tau_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial \tau_2} \frac{\partial u_2}{\partial \tau_2} \dots \frac{\partial u_n}{\partial \tau_2} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial u_1}{\partial \tau_{n-1}} \frac{\partial u_2}{\partial \tau_{n-1}} \dots \frac{\partial u_n}{\partial \tau_{n-1}} \end{array} .$$

მაშინ შექცეული ფუნქციის შესახებ თეორემის თანახმად შესაძლებელი იქნება $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$ პარამეტრების გამოსახვა $u_2, u_3, \dots, u_n$ სიდიდეების საშუალებით.

ამის შემდეგ, თუ თითოეულ τ_i პარამეტრის გამოსახულებას ჩავსვათ ჩვენი სისტემის პირველ განტოლებაში მივიღებთ L_{n-1} ქვეზედაპირის განტოლებას:

$$u_1 = \varphi(u_2, u_3, \dots, u_{n-1}).$$

რამდენადაც

$$\frac{\partial(v_1, v_2, \dots, v_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})}$$

მატრიცის იაკობიანი იგიურად ერთი ტოლია, M_0 წერტილის მიდამოს ნებისმიერი $M \in V(M_0)$ წერტილის მდებარეობის განმსაზღვრელ პარამეტრებად შეგვიძლია ჩავთვალოთ სიდიდეები

$$v_1 = u_1 - \varphi(u_2, u_3, \dots, u_{n-1}), \quad v_2 = u_2, \dots, v_n = u_n.$$

$\frac{\partial r(M_0)}{\partial v_2}, \frac{\partial(M_0)}{\partial v_3}, \dots, \frac{\partial(M_0)}{\partial v_n}$ ვექტორები წარმოადგენენ $v_2, v_3, \dots, v_n$ პარამეტრების საკოორდინატო

წირების მსებ ვექტორებს, შესაბამისად, რომლებიც გადიან L_{n-1} ზედაპირზე, რომლის განტოლებაცაა: $v_1 = 0$.

ახლა განვიხილოთ, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის ყველანაირი კრებული $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ რიცხვებისა, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$|\alpha_1| < \varepsilon, \quad |\alpha_2 - v_2^0| < \varepsilon, \dots, |\alpha_n - v_n^0| < \varepsilon,$$

სადაც $v_2^0 = u_2^0, \dots, v_n^0 = u_n^0$. შევეუსაბამოთ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ რიცხვების თითოეულ კრებულს წერტილი M , რომელიც მდებარეობს P_n ზედაპირზე შემდეგი წესით: ვიღებთ L_{n-1} ზედაპირზე M' წერტილს კოორდინატებით: $v_1 = 0, v_2 = \alpha_2, v_3 = \alpha_3, \dots, v_n = \alpha_n$, შემდეგ $\lambda(M')$ გეოდეზიურ წირზე ეპოულობთ M წერტილს რომელიც M' წერტილიდან α_1 სიგრძის რკალით არის დაშორებული. M წერტილის $v_1, v_2, \dots, v_n$ კოორდინატები წარმოადგენენ α_1 ცვლადის და $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ პარამეტრების

დოფერენცირებად ფუნქციებს, ამიტომ $\frac{\partial(v_1, v_2, \dots, v_n)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})}$ მატრიცის იაკობიანი წარმოადგენს

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ცვლადების უწყვეტ ფუნქციას. ვაჩვენოთ, რომ იგი არ უდრის ნულს M_0 წერტილში.

ამისათვის უნდა ვაჩვენოთ, რომ ვექტორები: $\frac{\partial r(M_0)}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial(M_0)}{\partial \alpha_2}, \dots, \frac{\partial(M_0)}{\partial \alpha_n}$ წრფივად

დამოუკიდებელნი არიან. ვექტორები: $\frac{\partial r(M_0)}{\partial \omega_2}, \frac{\partial r(M_0)}{\partial \omega_3}, \dots, \frac{\partial r(M_0)}{\partial \omega_n}$ ემთხვევიან ვექტორებს:

$\frac{\partial r(M_0)}{\partial \omega_2}, \frac{\partial r(M_0)}{\partial \omega_3}, \dots, \frac{\partial r(M_0)}{\partial \omega_n}$, რომლებიც მდებარეობენ L_{n-1} ქვეზედაპირის მხებ სიბრტყეში და

წრფივად დამოუკიდებელნი არიან. ვექტორს $\frac{\partial r(M_0)}{\partial \omega_1}$ აქვს ერთი ტოლი სიგრძე და

მიმართულია L_{n-1} ქვეზედაპირის ორთოგონალურად და ამიტომ წრფივად დამოუკიდებელია $\frac{\partial r(M_0)}{\partial \omega_2}, \frac{\partial r(M_0)}{\partial \omega_3}, \dots, \frac{\partial r(M_0)}{\partial \omega_n}$ ვექტორებისაგან.

ყოველივე ამის გამო, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ სიდიდეები შეიძლება ჩავთვალოთ პარამეტრებიად M_0 წერტილის მიდამოში. რამდენადაც ω_1 რკალის სიგრძეა, კოორდინატა ამ სისტემაში

ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმისათვის გვექნება: $g(\omega) = \left(\frac{\partial r}{\partial \omega_1}\right)^2 = 1$.

აქედან გამომდინარე, გეოდეზიური წირის ზოგად განტოლებას:

$$\frac{d^2 \omega_s}{ds^2} = - \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{d\omega_i}{ds} \frac{d\omega_j}{ds}$$

დააკმაყოფილებს ფუნქციათა სისტემა: $\omega_1 = s, \omega_2 = C_1, \omega_3 = C_2, \dots, \omega_n = C_n$. თუ მათ

ჩავსვათ მოცემულ განტოლებაში, მივიღებთ, რომ $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ კოორდინატა სისტემაში

სიდიდეები Γ_{11}^s ტოლია ნულის. აქედან გამომდინარე,

$$\Gamma_{11,s} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{11}^k g_{ks} = 0; \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

რადგან $\Gamma_{11,s} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{1s}}{\partial \omega_1} + \frac{\partial g_{1s}}{\partial \omega_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial \omega_s} \right)$ და $\frac{\partial g_{11}}{\partial \omega_s} = 0$, ამიტომ ფუნქცია $g_{1s}(\omega)$ იქნება ნულის ტოლი

თითოეულ ისეთ წირზე რომლებზედაც $\omega_2, \dots, \omega_n$ სიდიდეები მუდმივი სიდიდეებია ანუ თითოეულ $\gamma(M')$ გეოდეზიურ წირზე. ასევე, რადგან $\gamma(M')$ გეოდეზიურ წირი M' წერტილში ორთოგონალურია L_{n-1} ქვეზედაპირის და $g_{1s}(0) = 0$, ამიტომ $g_{1s}(\omega_1) = 0$, ω_1 სიდიდის ყოველი მნიშვნელობისათვის. ეს კი ნიშნავს, რომ $\gamma(M')$ გეოდეზიურ წირი ორთოგონალური იქნება L_{n-1}^{ω} გეოდეზიური პარალელის.

თეორემა დამტკიცდა.

P_n ზედაპირის M_0 წერტილის მიდამოში ამ თეორემის დამტკიცებისას აგებული

კოორდინატა $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ სისტემას უწოდებენ *ნახევრად გეოდეზიურ კოორდინატა სისტემას* L_{n-1} ბაზით.

თეორემა 92 P_n ზედაპირის ორ საკმარისად ახლო მდებარე A და B წერტილების შემართებული გეოდეზიური γ წირის რკალი უმცირესი სიგრძისაა ამ წირის რაიმე მცირე მიდამოში მდებარე A და B წერტილების შემართებული ნებისმიერი წირის რკალებს შორის.

დამტკიცება: გავატაროთ A წერტილზე L_{n-1} ქვეზედაპირი γ გეოდეზიური წირის

ორთოგონალურად და ჩაეთვალოდ იგი ბაზად ნახევრად გეოდეზიური კოორდინატთა სისტემისა A წერტილის რაიმე მიდამოში. ამ სისტემაში γ წირი იქნება ერთერთი საკოორდინატო წირი. ჩაეთვალოთ, რომ B წერტილი და A და B წერტილების შემავრთებელი რაიმე β წირი მოთავსებულია P_n ზედაპირის იმ მცირე არეში რომელშიდაც მოქმედებს აგებული კოორდინატთა სისტემა. β წირის შესაბამისი რკალის სიგრძე მოიცემა ფორმულით:

$$l(\beta) = \int_A^B dl(\beta) = \int_A^B \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\omega) d\omega_i d\omega_j} = \int_A^B \sqrt{d\omega_1^2 + \sum_{i,j=2}^n g_{ij}(\omega) d\omega_i d\omega_j}$$

უკანასკნელი ტოლობა გამოიშინარეობს იქედან, რომ $g_{11} = 1$; $g_{1s} = 0$, $s = 2, 3, \dots, n$.

კვადრატული მატრიცი ($g_{ij}(\omega)$); $i, j = 2, 3, \dots, n$ დადებითადაა განსაზღვრული, ამიტომ

$$l(\beta) \geq \int_A^B d\omega_1 = \omega_1(B) - \omega_1(A) = l(\gamma).$$

თეორემა დამტკიცდა.

ზემოთ ნაჩვენები იყო, რომ ნახევრად გეოდეზიურ კოორდინატებში კრისტოფელის პირველი და მეორე გეარის სიმბოლოებისთვის გვაქვს: $\Gamma_{11s} = 0$, $\Gamma_{11}^1 = 0$. გამოვთვალოთ მეორე რიგის P_2 ზედაპირისათვის ამ სიმბოლოების დანარჩენი მნიშვნელობანი.

Γ_{12s} , Γ_{21s} , Γ_{22s} , Γ_{12}^1 , Γ_{21}^1 , Γ_{22}^1 , $k, s = 1, 2$. როგორც ნაჩვენები იყო, ასეთი ზედაპირის პირველი კუადრატული ფორმას ნახევრად გეოდეზიურ კოორდინატებში აქვს სახე:

$$ds^2 = d\omega_1^2 + g_{22}(\omega_1, \omega_2) d\omega_2^2$$

ამის გამო პირველი გეარის კრისტოფელის სიმბოლოებისათვის

$$\Gamma_{s,s}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ss}}{\partial \omega_1} + \frac{\partial g_{ss}}{\partial \omega_1} - \frac{\partial g_{ss}}{\partial \omega_1} \right)$$

არანულოვანი იქნება მხოლოდ ისინი რომელთა ინდექსებში: i, j, s ორი მაინც ტოლია 2-ის.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს: $g_{22}(\omega_1, \omega_2) = G$, $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = u$. გვექნება:

$$\Gamma_{121} = \Gamma_{211} = 0, \quad \Gamma_{122} = \Gamma_{212} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial \omega}, \quad \Gamma_{221} = -\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial \omega}, \quad \Gamma_{222} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}.$$

რაც შეეხება კრისტოფელის მეორე გეარის სიმბოლოებს, თუ გამოვიყენებთ ფორმულას:

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{s=1}^2 \Gamma_{ijs} g^{sk} \text{ და გავითვალისწინებთ, რომ } (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \text{ მატრიცის შებრუნებული}$$

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/G \end{pmatrix} \text{ მატრიცია, გვექნება:}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12,2} g^{22} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial \omega}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial \omega}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}.$$

ახლა, ნახევრად გეოდეზიური კოორდინატებში გამოყუთვალთ ორგანზომილებიანი P_2 ზედაპირის სრული ანუ გაუსის სიმრუდე. ამისათვის გამოყუთვალთ ამ ზედაპირის მეორე კვადრატული ფორმის მატრიცის დეტერმინანტი:

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

ეს დეტერმინანტი გაუსის თეორემის თანახმად, პირველი კვადრატული ფორმის საშუალებით, შეგვიძლია გამოვსახოთ შემდეგი ფორმულით:

$$B = \sum_{s=1}^2 \left(\frac{\partial \Gamma_{11}^s}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma_{12}^s}{\partial \omega} + \sum_{p=1}^2 (\Gamma_{11}^s \Gamma_{1p}^s - \Gamma_{12}^s \Gamma_{1p}^s) \right) g_{s2}.$$

ამ ფორმულაში არანულოვანი წევრებია მხოლოდ ისინი რომელთათვისაც $s=2$, $p=2$.

აქედან გამომდინარე გვექნება:

$$B = -G \left(\frac{1}{2} \frac{G_{\omega}}{G} \right) - G \left(\frac{1}{2} \frac{G_{\omega}}{G} \right)^2 = -\frac{G}{2} \frac{G G_{\omega} - G_{\omega}^2}{G^2} - \frac{G_{\omega}^2}{4G} = -\frac{G_{\omega\omega}}{2} + \frac{1}{4} \frac{G_{\omega}^2}{G},$$

სადაც $G_{\omega} = \frac{\partial G}{\partial \omega}$.

ამგვარად ზედაპირის გაუსის(სრული) სიმრუდე ზედაპირის რაიმე M წერტილში ტოლი იქნება

$$G_M = \frac{B}{G} = -\frac{G_{\omega\omega}}{2G} + \frac{1}{4} \frac{G_{\omega}^2}{G}$$

სიდიდის.

ორგანზომილებიანი ზედაპირის სრული სიმრუდე სხვანაირადაც შეიძლება გამოვსახოთ:

$$(\sqrt{G})_{\omega} = \frac{1}{2} \frac{G_{\omega}}{\sqrt{G}}, \quad (\sqrt{G})_{\omega\omega} = \frac{1}{4} \frac{G_{\omega}^2}{\sqrt{G}} + \frac{1}{2} \frac{G_{\omega\omega}}{\sqrt{G}}, \quad \frac{(\sqrt{G})_{\omega\omega}}{\sqrt{G}} = -\frac{1}{4} \frac{G_{\omega}^2}{G^2} + \frac{1}{2} \frac{G_{\omega\omega}}{G} = -G_M.$$

მაშასადამე გვაქვს:

$$G_M = -\frac{(\sqrt{G})_{\omega\omega}}{\sqrt{G}}.$$

საბოლოოდ შეიძლება დავასკვნათ, რომ ნახევრად გეოდეზიურ კოორდინატებში

ორგანზომილებიანი ზედაპირისათვის ფუნქცია $\sqrt{G}$ დაკავშირებულია სრულ სიმრუდესთან დიფერენციალური განტოლებით:

$$(\sqrt{G})_{\omega\omega} + G_M \sqrt{G} = 0.$$

განვიხილოთ ორგანზომილებიანი ზედაპირი P_2 რომლის თითოეულ M წერტილში

ცნობილია სრული სიმრუდე G_M . ზედაპირზე დაფიქსირებულ M_0 წერტილის მიდამოში

შევიტანოთ ნახევრად გეოდეზიური კოორდინატთა სისტემა რომლის ბაზაც იქნება

გეოდეზიური წირი L , ხოლო პარამეტრი ამ წირის გასწვრივ $\omega_1 = u$, არის მისი რკალის

სიგრძე ათვლილი M_0 წერტილიდან. ზედაპირის პირველ კვადრატულ ფორმას აგებულ

კოორდინატთა სისტემაში ექნება სახე:

$$ds^2 = d\omega^2 + G(\omega, u) du^2,$$

$$a_j \omega = \omega_j, \quad G(\omega, u) = 1, \quad \sqrt{G(\omega, u)} = 1$$

თუ გეოდეზიური წირის განტოლებაში:

$$\frac{d^2 \omega_j}{ds^2} = - \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{d\omega_i}{ds} \frac{d\omega_j}{ds}$$

ჩაესვამთ ცნობილ ფუნქციებს: $\omega_1 = 0, \omega_2 = s$, მივიღებთ $\Gamma_{22}^1(0, u) = \Gamma_{22}^2(0, u) = 0$, აქედან

$$\Gamma_{22}^1(0, u) = g_{11} \Gamma_{22}^1(0, u) + g_{12} \Gamma_{22}^2(0, u) = 0. \text{ რადგან } \Gamma_{22}^1(0, u) = \frac{1}{2} G_u(0, u), \text{ გვექნება:}$$

$$G_u(0, u) = 0, \quad (\sqrt{G(0, u)})_u = 0.$$

თუ ახლა $(\sqrt{G})_{\omega\omega} + G_M \sqrt{G} = 0$ განტოლებაში G_M -ს ჩავთვლით ω , u არგუმენტების

ცნობილ ფუნქციად, ხოლო $(\sqrt{G})$ -ს იგივე არგუმენტების საძიებელ ფუნქციად, მაშინ

$$G(\omega, u) = 1, \quad \sqrt{G(\omega, u)} = 1; G_u(0, u) = 0, \quad (\sqrt{G(0, u)})_u = 0 \text{ საწყისი პირობებისათვის გვექნება}$$

ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს აღვადგინოთ $G(0, u)$

ფუნქცია M_0 წერტილის შესაბამის მიდამოში.

ყოველივე ეს საშუალებას გვაძლევს დავასკენათ, რომ თუ ორ $P_2, \bar{P}_2$ ორგანზომილებიან ზედაპირს $M_0, \bar{M}_0$ წერტილების მიდამოებში, შესაბამისად, ნახევრად გეოდეზიურ

კოორდინატთა სისტემებში $G_M, G_{\bar{M}}$ შესაბამისი სრული სიმრუდეები გამოისახებიან კოორდინატთა ერთიადიგივე ფუნქციებით, მაშინ ზედაპირითა აღნიშნული მიდამოები იზომეტრიულია და ეს იზომეტრია მოიცემა ასახვით, რომელიც ინახავს ნახევრადგეოდეზიურ კოორდინატებს.

ცხადია ადგილი აქვს შებრუნებულ დებულებასაც: თუ $P_2, \bar{P}_2$ ორგანზომილებიან ზედაპირს $M_0, \bar{M}_0$ წერტილების მიდამოები იზომეტრიულია, მაშინ ამ მიდამოებში ერთნაირი

ნახევრადგეოდეზიური კოორდინატების მქონე $M, \bar{M}$ წერტილებში სრული სიმრუდეები ერთნაირია, ანუ ეს სიმრუდეები მოიცემა ნახევრად გეოდეზიური კოორდინატების ერთნაირი ფუნქციებით.

§10. მუდმივი სიმრუდის მქონე ორგანზომილებიანი

ზედაპირები

განვიხილოთ ისეთი ზედაპირები რომელთა გაუსის სიმრუდე მუდმივი სიდიდეა:

მაგალითი 1. სიბრტყე რომლის პარამეტრიზაციაა $(U, r = r(x_1, x_2) = x_1 i_1 + x_2 i_2$, სადაც i_1, i_2

ვექტორთა რაიმე წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა ეკელიდეს E_3 სივრცეში. ცხადია, ამ

ზედაპირის ნორმალური სიმრუდე ნებისმიერი dx მიმართულებით ნულის ტოლია, ამიტომ ნებისმიერ წერტილში მისი გაუსის სიმრუდე იქნება ნულის ტოლი.

მაგალითი 2. სფერო ეკელიდეს E_3 სივრცეში. რომლის პარამეტრიზაციაა:

$$(U, r = r(x_1, x_2) = (R \cos x_1 \sin x_2, R \sin x_1 \sin x_2, R \cos x_2)),$$

სადაც

$$U = \{(x_1, x_2) | 0 \leq x_1 \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq x_2 \leq \frac{\pi}{2}\}$$

ცხადია ამ სფეროს ნებისმიერ წერტილში ნორმალური სიმრუდე ნებისმიერი dx

მიმართულებით არის $\frac{1}{R}$. ქედან გამოდინარე მისი გაუსის სიმრუდე G_M ნებისმიერ M

წერტილში ტოლი იქნება $\frac{1}{R^2}$ სიდიდის.

მაგალითი 3. ფსევდოსფერო ეგლიდეს E_3 სივრცეში. ამ ზედაპირის პარამეტრიზაციაა:

$$(U, r = r(x_1, x_2)) = (R \sin x_1 \cos x_2, R \sin x_1 \cos x_2, R(\ln \frac{x_1}{2} + \cos x_1)),$$

სადაც

$$U = \{(x_1, x_2) | 0 \leq x_2 \leq 2\pi, \frac{\pi}{2} \leq x_1 \leq \pi\},$$

ხოლო R - ფსევდოსფეროს რადიუსი ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

ადვილად გამოთვლით, რომ ამ ზედაპირის პირველი და მეორე კუადრატული ფორმების კოეფიციენტები, შესაბამისად ტოლია:

$$E = R^2 \cos^2 x_1, \quad F = 0, \quad G = R^2 \sin^2 x_1, \quad L = -R \cos x_1, \quad M = 0, \quad N = R \sin x_1.$$

შესაბამისი ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ: $G_M = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{R^2}$

ახლა განვიხილოთ განტოლება: $(\sqrt{G})_{\omega\omega} + G_M \sqrt{G} = 0$. ეს განტოლება ერთმანეთთან აკავშირებს ზედაპირის სრულ სიმრუდეს G_M და $G(\omega, u)$ ფუნქციას ბაზისური გეოდეზიური წირის საწყის პირობებთან: $G(\omega, u) = 1, (\sqrt{G(0, u)})_{\omega} = 0$. თუ $G_M = \text{const}$ გვექნება შემდეგი ამონახსნები:

$$a) G_M = 0, \quad G(\omega, u) = 0, \quad ds^2 = d\omega^2 + du^2,$$

$$b) G_M > 0, \quad (\sqrt{G(\omega, u)}) = \cos(\sqrt{G_M} \omega), \quad ds^2 = d\omega^2 + \cos^2(\sqrt{G_M} \omega) du^2$$

$$g) G_M < 0, \quad (\sqrt{G(\omega, u)}) = \operatorname{ch}(\sqrt{-G_M} \omega), \quad ds^2 = d\omega^2 + \operatorname{ch}^2(\sqrt{-G_M} \omega) du^2$$

(ცხადია, ა) შემთხვევაში საქმე გვაქვს ზედაპირთან რომელიც ლოკალურად იზომეტრიული იქნება სიბრტყის. ბ) შემთხვევაში, თუ გავიხსენებთ სფეროს პირველ კუადრატულ ფორმას დაინახავთ, რომ ზედაპირი ლოკალურად იზომორფულია ისეთი სფეროსი რომლის რადიუსიც

$R = \frac{1}{\sqrt{G_M}}$. გ) შემთხვევაში, თუ ასევე გავიხსენებთ ფსევდოსფეროს პირველ კუადრატულ

ფორმას დაინახავთ, რომ ზედაპირი ლოკალურად იზომორფულია ისეთი ფსევდოსფეროსი,

რომლის რადიუსიც $R = \frac{1}{\sqrt{-G_M}}$.

ქედან გამოდინარე ადგილი აქვს თეორემას:

თეორემა 10.1. ყოველი ორგანზომილებიანი ზედაპირი რომლის გაუსის G_M სიმრუდეც მუდმივი სიდიდეა ლოკალურად იზომორფულია სიბრტეცის, თუ $G_M = 0$; სფეროსი, თუ $G_M > 0$; ფსევდოსფეროსი, თუ $G_M < 0$.

§11. ტენზორის ცნება, მოქმედებანი ტენზორებზე

ეთქვათ, V^n n -განზომილებიანი ევქტორული სივრცეა, $e_1, e_2, \dots, e_n$ და $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ რაიმე ორი ბაზისი მასთან, როგორც ევითი ყოველი $x \in V^n$ ევქტორი თითოეულ ამ ბაზისში წარმოდგენება

ასე: $x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i$ ან ასე $x = \sum_{i=1}^n \xi'^i e'_i$, შესაბამისად.

შენიშვნა: შემდეგ ჯამის აღმნიშვნელ $\sum$ ნიშანს აღარ დავწერთ თუ აჯამების ინდექსი ამ ნიშნის ქვეშ გვხვდეს ორჯერ ერთი ქვემოთ ერთი ზემოთ, მაგალითად:

$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i$ ჯამი ჩაიწერება ასე: $x = \xi^i e_i$.

$e_1, e_2, \dots, e_n$ ბაზისიდან $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ ბაზისზე გადასვლის მატრიცი აღენიშნოთ ასე: (p'_i) . აქედან გამომდინარე $e'_i = p'_i e_i$. $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ ბაზისიდან $e_1, e_2, \dots, e_n$ გადასვლის მატრიცი აღენიშნოთ ასე: (p_i) , მაშინ გვექნება $e_i = p_i p'_i$. (p'_i) მატრიცი (p_i) მატრიცის შებრუნებულია. ერთეულიანი მატრიცის ელემენტები აღინიშნება *კრონეკერის*

$$\delta_i^k = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

სიმბოლოთი. მაშასადამე $(p'_i)(p_i) = (\delta_i^i)$.

ყოველი მთელი $m \geq 0$ და $s \geq 0$ რიცხვებისათვის m -ჯერ კოვარიანტული და s -ჯერ კონტრავარიანტული ტენზორი ეწოდება n^{m+s} რაოდენობის $T_{i_1 i_2 \dots i_m}^{j_1 j_2 \dots j_s}$ ნამდვილი რიცხვებისაგან შედგენილ ერთობლიობას, რომელიც დაკავშირებულია V^n ევქტორული სივრცის რაიმე $e_1, e_2, \dots, e_n$ ბაზისთან და ამ ბაზისიდან სხვა $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ ბაზისზე გადასვლისას გარდაიქმნება შემდეგი ფორმულის მიხედვით:

$$T_{i'_1 i'_2 \dots i'_m}^{j'_1 j'_2 \dots j'_s} = p_{i'_1}^{i_1} p_{i'_2}^{i_2} \dots p_{i'_m}^{i_m} p_{j'_1}^{j_1} p_{j'_2}^{j_2} \dots p_{j'_s}^{j_s} T_{i_1 i_2 \dots i_m}^{j_1 j_2 \dots j_s}.$$

ჯამის ნიშნებს თუ გამოვიყენებთ გვექნება:

$$T_{i'_1 i'_2 \dots i'_m}^{j'_1 j'_2 \dots j'_s} = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_s=1}^n p_{i'_1}^{i_1} p_{i'_2}^{i_2} \dots p_{i'_m}^{i_m} p_{j'_1}^{j_1} p_{j'_2}^{j_2} \dots p_{j'_s}^{j_s} T_{i_1 i_2 \dots i_m}^{j_1 j_2 \dots j_s}$$

$m+s$ რიცხვს ტენზორის რანგი ეწოდება. თუ $m+s=0$

მაშინ ტენზორის რანგი ნულოვანია და ტენზორი წარმოადგენს რიცხვს, რომელიც ბაზისზე არ არის დამოკიდებული. თითოეულ $T_{i'_1 i'_2 \dots i'_m}^{j'_1 j'_2 \dots j'_s}$ რიცხვს ტენზორის მდგენელი ეწოდება. ორ

ტენზორს $T = \{T_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_n}\}$, $Q = \{Q_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_n}\}$ უწოდებენ ტოლს, თუ მათი შესაბამისი მდგენელები ტოლია, ანუ $T_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_n} = Q_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_n}$. აქ მნიშვნელობა აქვს ინდექსთა რიგს კერძოდ, $T \neq Q$, თუ $T_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_n} \neq Q_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_n}$.

ტენზორს $T = \{T_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_n}\}$ ეწოდება *სიმეტრიული ქვედა ინდექსების მიმართ*, თუ

$$T_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_n} = T_{i_2 i_1 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_n}.$$

ტენზორს $T = \{T_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_n}\}$ ეწოდება *ანტისიმეტრიული ქვედა ინდექსების მიმართ*, თუ

$$T_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_n} = -T_{i_2 i_1 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_n}.$$

ანალოგიურად განიშარტება ტენზორის სიმეტრიულობა და ანტისიმეტრიულობა ზედა ინდექსების მიმართაც.

მაგალითი 1 ეთქვათ, რაიმე ვექტორის კოორდინატთა ერთობლიობა რაიმე $e_1, e_2, \dots, e_n$ ბაზისში $\xi = \{\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n\}$ -ია. ახალ $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ ბაზისზე გადასვლისას მოცემული ვექტორის კოორდინატები იცვლება $\xi' = p'_i \xi^i$ ფორმულის საშუალებით, ეს კი ნიშნავს, რომ ვექტორი ერთჯერ კონტრავარიანტული ტენზორია.

მაგალითი 2 წრფივი გარდაქმნის მატრიცი. ეთქვათ $e_1, e_2, \dots, e_n$ ბაზისში რაიმე წრფივი ოპერატორის მატრიცია (a'_j), ხოლო იგივე ოპერატორის მატრიცი $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$

ბაზისში არის (a'_j) როგორც ვიცით (a'_j) = (p'_i)(a'_j)(p'_j). აქედან კი გამოიმდინარეობს $a'_j = p'_i p'_j a'_j$. ეს კი ნიშნავს, რომ წრფივი ოპერატორის მატრიცი ერთჯერ კონტრავარიანტული და ერთჯერ კოვარიანტული ტენზორია.

მაგალითი 3 ეთქვათ, $e_1, e_2, \dots, e_n$ ბაზისში რაიმე კვადრატული ფორმის მატრიცია (g_{ij}), ხოლო იგივე ფორმის მატრიცი $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ ბაზისში არის (g'_{ij}).

როგორც ცნობილია (g'_{ij}) = (p'_i)(g_{ij})(p'_j) აქედან გამოიმდინარეობს ტოლობა

$g'_{ij} = p'_i p'_j g_{ij}$, ეს კი ნიშნავს, რომ კვადრატული ფორმის მატრიცი ორჯერ კოვარიანტული ტენზორია.

მაგალითი 4. ერთეულოვანი მატრიცი $\delta = \{\delta^i_j\}$ წარმოადგენს ასევე ტენზორს

$\delta^i_j = p'_i p'_j \delta^i_j$ ეს ტენზორი ერთჯერ კოვარიანტული ერთჯერ კონტრავარიანტულია.

ტენზორებზე განსაზღვრულია შემდეგი ალგებრული ოპერაციები:

1. **ტენზორისა და რიცხვის ნამრავლი** $kT = Q$ სადაც $Q = \{kT_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_n}\}$.

2. **ტენზორითა ჯამი** განისაზღვრება ერთი და იგივე ტიპის ტენზორთა ჯამი. თუ მოცემულია $T = \{T_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_n}\}$, $Q = \{Q_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_n}\}$ ერთიდა იგივე ტიპის ტენზორი, მაშინ მათი ჯამი არის რიცხვთა ერთობლიობა $T + Q = \{T_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_n} + Q_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_n}\}$, რომელიც ცხადია ტენზორია.

3. **ტენზორთა ნამრავლი**: $T = \{T_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_n}\}$, $Q = \{Q_{p_1 p_2 \dots p_n}^{i_1 i_2 \dots i_n}\}$ ტენზორების ნამრავლი არის რიცხვთა

ერთობლიობა $T \times Q = \{T_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_n} \cdot Q_{p_1 p_2 \dots p_n}^{i_1 i_2 \dots i_n}\}$. ეს ერთობლიობა სხვაანაირადაც შეიძლება ჩაეწეროს

$T \times Q = \{L_{i_1 i_2 \dots i_m p_1 p_2 \dots p_k}^{j_1 j_2 \dots j_l j_m j_{m+1} \dots j_{m+k}}\}$, სადაც $L_{i_1 i_2 \dots i_m p_1 p_2 \dots p_k}^{j_1 j_2 \dots j_l j_m j_{m+1} \dots j_{m+k}} = T_{i_1 i_2 \dots i_m}^{j_1 j_2 \dots j_l} \cdot Q_{p_1 p_2 \dots p_k}^{j_{m+1} j_{m+2} \dots j_{m+k}}$ ნამრავლი იქნება $s+l$ ჯერ კონტრავარიანტული და $m+k$ ჯერ კოვარიანტული ტენზორი

4. ტენზორის შეზღუდვა ზედა და ქვედა ინდექსების მიმართ: ვთქვათ მოცემულია ტენზორი $T = \{T_{i_1 i_2 \dots i_m}^{j_1 j_2 \dots j_l}\}$, ამ ტენზორის შეზღუდვა i_p და j_l ინდექსების მიმართ არის ტენზორი

$$Q = \{T_{i_1 i_2 \dots i_{m-1} i_m q_1 q_2 \dots q_k}^{j_1 j_2 \dots j_l j_{m+1} j_{m+2} \dots j_{m+k}}\} = \left\{ \sum_{q=1}^n T_{i_1 i_2 \dots i_{m-1} i_m q_1 q_2 \dots q_k}^{j_1 j_2 \dots j_l j_{m+1} j_{m+2} \dots j_{m+k}} \right\}. \text{ იგი იქნება } s-l \text{ ჯერ კონტრავარიანტული და } m-l$$

ჯერ კონტრავარიანტული ტენზორი.

ახლა განვიხილოთ რამოდენიმე მნიშვნელოვანი ტენზორი.

ბიექტორი: ვთქვათ, ξ და η რაიმე ორი ვექტორია, ორჯერ კონტრავარიანტულ

ტენზორს $F = \{F^{\alpha\beta}\} = \{\xi^{\alpha}\eta^{\beta} - \xi^{\beta}\eta^{\alpha}\}$ უწოდებენ ξ და η ვექტორებისაგან წარმოქმნილ ბიექტორს. ამ ტენზორის მდგენელები ცხადია წარმოდგენენ

$$\begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \dots & \xi^n \\ \eta^1 & \eta^2 & \dots & \eta^n \end{pmatrix}$$

მატრიცის ორგანოზომილებიან მინორებს, ამიტომ ბიექტორი არ შეიცვლება თუ η ვექტორს დაუვრიატებთ ξ ვექტორს გამრავლებულს რაიმე რიცხზე. ქედან გამომდინარე ბიექტორი ცალსახად არ განსაზღვრავს მის წარმომქმნელ ვექტორებს. გავარკვიოთ რა აქვთ საერთო ერთიდა იგივე ბიექტორის განმსაზღვრელ ვექტორთა წყვილებს.

ვთქვათ, r ვექტორი მდებარეობს ξ და η ვექტორებით განსაზღვრულ სიბრტყეში, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას $r = k_1 \xi + k_2 \eta$. რაც ნიშნავს რაიმე

$$\begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \dots & \xi^n \\ \eta^1 & \eta^2 & \dots & \eta^n \\ r^1 & r^2 & \dots & r^n \end{pmatrix}$$

მატრიცის დეტერმინანტ ტოლია ნულის.

თუ გაეშლით ამ დეტერმინანტს ბოლო სტრიქონის მიხედვით ენახათ, რომ r ვექტორი ცალსახად განისაზღვრება წინა ორსტრიქონიანი მატრიცის ორგანოზომილებიანი მინორების საშუალებით. მეგარად ბიექტორი ცალსახად განსაზღვრავს სიბრტყეს, რომელიც გადის ბიექტორის განმსაზღვრელ ვექტორებზე.

ξ და η ვექტორებს თუ შევცვლით მათი წრფივი კომბინაციებით

$$p = k_{11}\xi + k_{12}\eta$$

$$q = k_{21}\xi + k_{22}\eta$$

გვექნება:

$$\{p'q' - p'q'\} = \begin{vmatrix} p' & p' \\ q' & q' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi' & \xi' \\ \eta' & \eta' \end{vmatrix} = \det(k_{ij}) \{\xi' \eta' - \xi' \eta'\}.$$

ვექტორთა წყვილებს: ξ, η და p, q ვუწოდოთ ტოლდონი, თუ $\det(k_{ij}) = 1$.

ტოლდონი წყვილებით წარმომქმნილი ბიექტორები ერთმანეთს ეთხევეა. აქედან გამომდინარე შეიძლება ვთქვათ, რომ ვექტორთა წყვილების სიმრავლე შეიძლება დავეყოს კლასებად

რიმლებშიდაც შედიან ერთმანეთის ტოლდინი ვექტორები და ბიექტორი ცალსახად განსაზღვრავს ტოლდინი ვექტორების კლასს.

მეტრიკული ტენზორი ეთქვამთ $G(x, y) = \sum_{i=1}^n g_i \xi^i \eta^i$ ორადწრფივი ფორმა, სადაც $x = \xi^i e_i$,

$y = \eta^j e_j$, $G(x, y) = G(y, x)$ და $G(x, x) > 0$, როდესაც $x \neq 0$. როგორც ზემოთ მოყვანილ მაგალითში, კვადრატული ფორმის მატრიცა იყო ორჯერ კოვარიანტული

ტენზორი. ასევე მოყვანილი ორად წრფივი ფორმის $g = (g_{ij})$ მატრიცაც იქნება ორჯერ კოვარიანტული ტენზორი. ამ ტენზორს **მეტრიკულ ტენზორსაც** უწოდებენ.

რადგან $G(x, x) > 0$, ამიტომ $|g_{ij}| \neq 0$. ქვედან გამომდინარეობს, რომ არსებობს (g_{ij}) მატრიცის შებრუნებული $g^{-1} = (g^{ij})$ მატრიცა. ცხადია ტენზორი g^{-1} ორჯერ კონტრავარიანტულია.

თუ მოცემული გვაქვს ტენზორი $\{T_{ij}^k\}$, მაშინ ტენზორებს:

$\{T_{ij}^k\} = \{T_{ij}^k g_{kl}\}$, $\{T_{ij}^k\} = \{T_{ij}^k g^{kl}\}$, $\{T_{ij}^k\} = \{T_{ij}^k g^{kl}\}$ ეწოდება $\{T_{ij}^k\}$ ტენზორი შეუღლებული ტენზორები (g_{ij}) ტენზორის მიმართ.

როგორც ცნობილია ξ და η ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$S^2 = \begin{vmatrix} g_{ik} \xi^i \xi^k & g_{ij} \xi^i \eta^j \\ g_{ik} \eta^i \xi^k & g_{ij} \eta^i \eta^j \end{vmatrix} = g_{ik} g_{jl} \xi^i \eta^j \begin{vmatrix} \xi^k & \xi^l \\ \eta^i & \eta^j \end{vmatrix}.$$

თუ ადგილებს სეეუცვლით i და j ასევე k და l ინდექსებს მივიღებთ:

$$S^2 = g_{jl} g_{ik} \xi^i \eta^j \begin{vmatrix} \xi^j & \xi^i \\ \eta^j & \eta^i \end{vmatrix} = -g_{ik} g_{jl} \xi^i \eta^j \begin{vmatrix} \xi^i & \xi^j \\ \eta^j & \eta^i \end{vmatrix}.$$

ამ ტოლობიდან და წინა ტოლობიდან გამომდინარეობს:

$$2S^2 = g_{ik} g_{jl} \begin{vmatrix} \xi^i & \xi^j \\ \eta^i & \eta^j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi^k & \xi^l \\ \eta^k & \eta^l \end{vmatrix}.$$

თუ უკანასკნელ ტოლობაში ადგილებს შეეუცვლით k და l ინდექსებს მივიღებთ:

$$2S^2 = g_{ik} g_{jl} \begin{vmatrix} \xi^i & \xi^j \\ \eta^i & \eta^j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi^j & \xi^k \\ \eta^j & \eta^k \end{vmatrix} = -g_{ik} g_{jl} \begin{vmatrix} \xi^i & \xi^j \\ \eta^i & \eta^j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi^k & \xi^l \\ \eta^k & \eta^l \end{vmatrix}.$$

საბოლოოდ ვღებულობთ:

$$4S^2 = \begin{vmatrix} g_{ik} & g_{il} \\ g_{jk} & g_{jl} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi^i & \xi^j \\ \eta^i & \eta^j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi^k & \xi^l \\ \eta^k & \eta^l \end{vmatrix}$$

ამ ტოლობიდან ჩანს, რომ იმ პარალელოგრამის ფართობი, რომელიც მოცემული ბიექტორის განმსაზღვრელ ξ და η ვექტორებზეა აგებული, ცალსახად განისაზღვრება ამ ბიექტორით. ფართობის ამ მნიშვნელობას **ბიექტორის ფართობი** ეწოდება. ბიექტორს, რომლის ფართობიც

ერთის ტოლია, *ეთეულუიანი ბიექტორი* ეწოდება. ყოველი ბიექტორი მიიღება ერთეულუიანი ბიექტორისაგან რაიმე N რიცხვზე გამრავლებით.

ამავე ტოლობის მარჯვენა მხარეს მდგომი პირველი თანამართავი წარმოადგენს $G = \{G_{j,k}\} = \{g_{jk}g_{jk} - g_{jk}g_{jk}\}$ ტენზორის მდგენელს. ამ ტენზორს *წარმოებული მეტრიკული ტენზორი* ეწოდება. ეს ტენზორი ანტისიმეტრიულია i, j ინდექსების მიმართ და ასევე ანტისიმეტრიულია k, l ინდექსების მიმართ და არ იცვლება i ინდექსის k ინდექსით და j ინდექსის l ინდექსით ერთდროულად შეცვლისას. ეს ტენზორი აკმაყოფილებს ასევე ევრეთწოდებულ *რჩის ტოლობას*:

$$G_{j,k} + G_{k,l} + G_{l,j} = 0.$$

ამის დამტკიცება იოლია, თუ V ვექტორულ სივრცეში განვიხილავთ ისეთ ბაზისს, რომელშიდაც $g_{jj} = \delta_j$ სადაც $\delta_j = 0$, როდესაც $i \neq j$ და $\delta_j = 1$, როდესაც $i = j$.

ოთხჯერ კოვარიანტულ $T = \{T_{j,k,l}\}$ ტენზორს უწოდებენ *რჩის ტიპის ტენზორს*, თუ სრულდება შემდეგი თანაფარდობები:

$$T_{j,k,l} = -T_{j,l,k},$$

$$T_{j,k,l} = T_{k,l,j},$$

$$T_{j,k,l} + T_{k,l,j} + T_{l,j,k} = 0.$$

ვთქვათ, V ვექტორული სივრცეა V^* მისი შეუღლებული სივრცე ანუ $f: V \rightarrow R$

წრფივი ასახვების ვექტორული სივრცე. ამ სივრცეში თუ V ვექტორული სივრცეში ბაზისია $e_1, e_2, \dots, e_n$, ბაზისად შეიძლება ჩაეთვალოთ წრფივი წრფივი ასახვების ერთობლიობა $\{f_i\}$

რომელათათვისაც ადგილი აქვს ტოლობას: $f_i(a) = \xi_1$, ნებისმიერი $a = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \dots + \xi^n e_n$

ვექტორისათვის. მართლაც ნებისმიერი წრფივი $f: V \rightarrow R$ ასახვისათვის

$$f(a) = \xi^1 f(e_1) + \xi^2 f(e_2) + \dots + \xi^n f(e_n) = f_1(a)f(e_1) + f_2(a)f(e_2) + \dots + f_n(a)f(e_n).$$

ადვილია იმის ჩვენება, რომ $\{f_i\}$ წრფივად დამოუკიდებელი სისტემაა.

ენახოთ როგორ იცვლება $f: V \rightarrow R$ წრფივი ასახვის ერთსტრიქონიანი მატრიცი

$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$, სადაც $\eta_i = f(e_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. $e_1, e_2, \dots, e_n$ ბაზისიდან $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ ბაზისზე

გადასვლისას. $e'_i = p'_i e_i$, ვთქვათ, $(\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_n)$ წარმოადგენს $f: V \rightarrow R$ წრფივი ასახვის

მატრიცს $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ ბაზისში. $\eta'_i = f(e'_i)$, $i' = 1, 2, \dots, n$, აქედან გამომდინარე:

$\eta'_i = f(p'_i e_i)$, $i' = 1, 2, \dots, n$ ანუ $\eta'_i = p'_i \eta_i$, $i' = 1, 2, \dots, n$. ეს ნიშნავს, რომ $f: V \rightarrow R$ ასახვის

მატრიცი ერთჯერ კოვარიანტული ტენზორია. ეს მატრიცი ერთსტრიქონიანი ამიტომ იგი ვექტორს წარმოადგენს V სივრცის რაიმე დაფიქსირებულ ბაზისში ამ ვექტორის კოორდინატების გარდაქმნა ბაზისის შეცვლისას ისე არ ხდება, როგორც ჩვენს მიერ ადრე განხილულ მაგალითში, სადაც ვექტორი ერთჯერ კონტრაგირანტულ ტენზორს წარმოადგენს. ასეთი ტიპის ვექტორებს, რომლებიც ერთჯერ კოვარიანტულ ტენზორებს წარმოადგენენ

კოვექტორებს უწოდებენ. $f: V \rightarrow R$ წრფივი ასახვა მის შესაბამის კოვექტორთან შეიძლება

გაუაიგივოთ, ამიტომ V^* ვექტორულ სივრცეს *კოვექტორთა სივრცე* შეიძლება ეწოდოს.

ასახვას $f: V_1 \times V_2 \times \dots \times V_m \rightarrow R$ უწოდებენ m - წრფივს, თუ იგი წრფივია თითოეულ თანამარაველზე.

განვიხილოთ $m+s$ -ად წრფივი ასახვა:

$$f: \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_m \times \underbrace{V' \times V' \times \dots \times V'}_s \rightarrow R$$

$\underbrace{V \times V \times \dots \times V}_m \times \underbrace{V' \times V' \times \dots \times V'}_s$ სივრცის ბაზისის ელემენტები აღვნიშნოთ ასე:

$e_1, e_2, \dots, e_m, f_1, f_2, \dots, f_s$. მაშინ f ასახვა შეიძლება წარმოვადგინოთ ასე:

$$f(a) = \sum_{e_1, e_2, \dots, e_m, f_1, f_2, \dots, f_s} f_{e_1, e_2, \dots, e_m, f_1, f_2, \dots, f_s}(a) f(e_1, e_2, \dots, e_m, f_1, f_2, \dots, f_s).$$

განვიხილოთ რიცხვთა ერთობლიობა $\{\eta_{e_1, e_2, \dots, e_m, f_1, f_2, \dots, f_s}\}$, სადაც თითოეული

$\eta_{e_1, e_2, \dots, e_m, f_1, f_2, \dots, f_s} = f(e_1, e_2, \dots, e_m, f_1, f_2, \dots, f_s)$. ენახოთ როგორ შეიცვლება

რიცხვთა $\{\eta_{e_1, e_2, \dots, e_m, f_1, f_2, \dots, f_s}\}$ ერთობლიობა, ახალ $e'_1, e'_2, \dots, e'_m, f'_1, f'_2, \dots, f'_s$,

ბაზისზე გადასვლისას: $\eta'_{e'_1, e'_2, \dots, e'_m, f'_1, f'_2, \dots, f'_s} = f(e'_1, e'_2, \dots, e'_m, f'_1, f'_2, \dots, f'_s)$,

$e'_i = p^i_{j_1} e_{j_1}$, $f'_i(a) = f_{j'_1}(\xi^{j'_1}_{i'} e'_{i'}) = \xi^{j'_1}_{i'} = p^{j'_1}_{i_1} \xi^{i_1}_{j_1}(a)$, აქედან გამომდინარე,

$\eta'_{e'_1, e'_2, \dots, e'_m, f'_1, f'_2, \dots, f'_s} = p^{j'_1}_{i_1} p^{j'_2}_{i_2} \dots p^{j'_m}_{i_m} p^{j'_1}_{i'_1} p^{j'_2}_{i'_2} \dots p^{j'_s}_{i'_s} \eta_{e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_m}, f_{j'_1}, f_{j'_2}, \dots, f_{j'_s}}$ ეს კი ნიშნავს, რომ

რიცხვთა $\{\eta_{e_1, e_2, \dots, e_m, f_1, f_2, \dots, f_s}\}$ ერთობლიობა m - ჯერ კოვარიანტული და s - ჯერ

კონტრავარიანტული ტენზორია. ყოველივე აქედან შეიძლება დაეასკენათ, რომ m - ჯერ

კოვარიანტული და s - ჯერ კონტრავარიანტული ტენზორი უაქტიურად არის

$m+s$ -ად წრფივი ასახვა:

$$f: \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_m \times \underbrace{V' \times V' \times \dots \times V'}_s \rightarrow R$$

§12. ტენზორული ველი მრავალსახეობაზე

უთქვით, ახლა M^n n -განზომილებიანი გლუვი მრავალსახეობაა, ($I = (a, b)$, $x = x(t)$) გლუვი

წირი ამ მრავალსახეობაზე, რომელიც გადის რაიმე $A \in M^n$, ხოლო რიცხვთა კრებული $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$ წარმოადგენს მხებ ვექტორს მოცემული წირისა A წერტილში. როგორც ვიცით A წერტილზე გამავალი წირების მხები ვექტორები შეადგენენ n -განზომილებიან ვექტორულ სივრცეს. ამ სივრცეს მრავალსახეობის მხები სივრცე ეწოდება A წერტილში ზემოთ იგი ჩვენ აღვნიშნეთ აღვნიშნეთ $T_A M^n$ სიმბოლოთი. ამ სივრცის ერთერთ ბაზისად შეიძლება ჩავთვალოთ ვექტორთა სისტემა: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ რომელთაგან თითოეული

$\xi_j = (\xi^1_j, \xi^2_j, \dots, \xi^n_j) = x^1_j(t_0) + \delta^1_{j'} t, \xi^2_j = x^2_j(t_0) + \delta^2_{j'} t, \dots, \xi^n_j = x^n_j(t_0) + \delta^n_{j'} t$, ξ_j წარმოადგენს A წერტილზე

გამავალი რაიმე $x_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$ წირის მხებ ვექტორს ამ წერტილში.

კოორდინატთა ყოველი გარდაქმნა $x' = x'(x^1, x^2, \dots, x^n)$ განსაზღვრავს $T_x M^n$ სივრცის წრფივ გარდაქმნას. $x', i' = 1, 2, \dots, n$ კოორდინატთა სისტემაში:

$$\xi'_{j'} = \frac{dx'_{j'}(t_0)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x'_{j'}(t_0)}{\partial x^i} \frac{dx^i(t_0)}{dt}$$

სადაც

$$p'_{i'} = \frac{\partial x'_{i'}(t_0)}{\partial x^{i'}}, \quad \frac{dx'_{i'}(t_0)}{dt} = \xi'_{i'}$$

რომ დაეკავშიროთ ეს შედეგი ტენზორულ გარდაქმნასთან საჭიროა დაეწეროთ საბაზისო ვექტორების გარდაქმნის ფორმულებიც.

თუ $x', i' = 1, 2, \dots, n$ კოორდინატთა სისტემას შეესაბამება იმ საბაზისო ვექტორები სისტემა, რომლებიც წარმოადგენენ $x_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$ წირების მსებ ვექტორებს:

$\xi_j = (\xi^1_j = x^1_j(t_0) + \delta^1_j t, \xi^2_j = x^2_j(t_0) + \delta^2_j t, \dots, \xi^n_j = x^n_j(t_0) + \delta^n_j t)$, მაშინ $x', i' = 1, 2, \dots, n$ კოორდინატთა სისტემას შეესაბამება $x'_{j'}(t)$, $j' = 1, 2, \dots, n$ წირების მსები ვექტორებისაგან შედგენილი სისტემა:

$$\xi_{j'} = (\xi^1_{j'} = x^1_{j'}(t_0) + \delta^1_{j'} t, \xi^2_{j'} = x^2_{j'}(t_0) + \delta^2_{j'} t, \dots, \xi^n_{j'} = x^n_{j'}(t_0) + \delta^n_{j'} t, j' = 1, 2, \dots, n)$$

აქედან გამომდინარე, თუ

$$\xi_{j'} = \sum_{i=1}^n p'_{i'} \xi_{i'}$$

მაშინ

$$\xi'_{j'} = \sum_{i=1}^n p'_{i'} p'_{j'}$$

და $\xi'_{j'} = 0$, თუ $i' \neq j'$, $\xi'_{j'} = 1$, თუ $i' = j'$ საბოლოოდ გვეჩვენება:

$$(p'_{i'})'(p'_{j'}) = E,$$

რაც ნიშნავს იმას, რომ $(p'_{i'})$, წარმოადგენს $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n$ ბაზისიდან $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ბაზისზე გადასვლის მატრიცს ხოლო $(p'_{j'})$ მატრიცი $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ბაზისიდან $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n$ ბაზისზე

გადასვლის მატრიცი. $p'_{i'} = \frac{\partial x'_{i'}(t_0)}{\partial x^{i'}}$, $p'_{j'} = \frac{\partial x'_{j'}(t_0)}{\partial x^{j'}}$ თუ განვიხილავთ ნებისმიერ მსებ ვექტორს

ξ , მაშინ მისი კოორდინატები $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n$ ბაზისში

$$\xi' = \frac{dx'(t_0)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x'(t_0)}{\partial x^i} \frac{dx(t_0)}{dt} = p'_i \xi^i$$

ეს კი ნიშნავს, რომ მსები ვექტორი კონტრაგარიანტული ტენზორია.

თუ მრავალსახეობის ყოველ $A \in M^n$ წერტილში მოცემულია ერთი და იგივე $m+s$ რანგის ტენზორი, რომელთა მდგენელებიც წარმოადგენენ A არგუმენტის გლეუ ფუნქციებს, მაშინ ამბობენ, რომ მრავალსახეობაზე განსაზღვრულია $m+s$ რანგის ტენზორული ველი.

ვთქვათ. $f: M^n \rightarrow R$ რაიმე გლუვი ფუნქციაა. ეს ფუნქცია მრავალსახეობაზე განსაზღვრავს ნულოვანი რანგის ტენზორულ ველს. შევუსაბამოთ ყოველ $x \in M^n$ წერტილს სიდიდეთა კრებული $(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n})$. შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ეს კრებული წარმოადგენს ერთჯერ კოვარიანტულ ტენზორულ ველს როგორც ზემოთ ვნახეთ, ერთხელ კოვარიანტული ტენზორი ეს არის კოვექტორი. $(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n})$ ტენზორულ ველს $f: M^n \rightarrow R$ სკალარული ველის გრადიენტი ეწოდება.

M^n მრავალსახეობაზე განსაზღვრული რაიმე $T(x) = \{T_{i_1, \dots, i_n}^{j_1, \dots, j_n}(x)\}$ ტენზორული ველის მდგენელები წარმოადგენენ x წერტილის კოორდინატების გლუვ ფუნქციებს, მაგრამ მათი კერძო წარმოებულები ტენზორებს აღარ შეადგენენ. მართლაც,

თუ $T(x) = \{T_{i_1, \dots, i_n}^{j_1, \dots, j_n}(x)\}$ გლუვი ტენზორული ველია, მაშინ $\frac{\partial T_{i_1, \dots, i_n}^{j_1, \dots, j_n}(x)}{\partial x^r}$ სიდიდეების გარდაქმნა ერთი ლოკალური რუკიდან მეორეზე გადასვლისას ხდება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{i_1, \dots, i_n}^{j_1, \dots, j_n}(x)}{\partial x^r} &= \frac{\partial}{\partial x^r} (p'_1 \dots p'_n p^1_{i_1} \dots p^1_{i_n} T_{i_1, \dots, i_n}^{j_1, \dots, j_n}) = p'_1 \dots p'_n p^1_{i_1} \dots p^1_{i_n} \frac{\partial T_{i_1, \dots, i_n}^{j_1, \dots, j_n}}{\partial x^r} p'_r + \\ &= p'_1 p'_2 \dots p'_n p^1_{i_1} \dots p^1_{i_n} T_{i_1, \dots, i_n}^{j_1, \dots, j_n} + \dots + p^1_{i_1} \dots p^1_{i_n} p^1_{i_1} \dots p^1_{i_n} T_{i_1, \dots, i_n}^{j_1, \dots, j_n} p'_r. \end{aligned}$$

$$\text{აქ } p'_r = \frac{\partial^2 x}{\partial x^r \partial x^r}.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში რომ შედიოდეს მხოლოდ პირველი შესაკრები, მაშინ ტენზორული ველის კერძო წარმოებული ასევე ტენზორული ველი იქნებოდა, მაგრამ ეს ასე არ არის ამიტომ ტენზორული ველის კერძო წარმოებული ტენზორი არ არის.

§13. მრავალსახეობა აფინური ბმიო

ვთქვათ M^n n - განზომილებიანი გლუვი მრავალსახეობაა. რიცხვთა ერთობლიობას $\{\Gamma_y^x(x)\}$, რომლებიც წარმოადგენენ $\Gamma_y^x: M^n \rightarrow R$ გლუვი ასახვების მნიშვნელობებს $x \in M^n$ წერტილში, რომლებიც ერთი ლოკალური რუკიდან მეორეზე გადასვლისას გარდაიქმნებიან ფორმულით:

$$\Gamma'_{r'} = p'_1 p'_j p^j_1 \Gamma_y^x + p^x_{i'} p^i_{r'},$$

სადაც $p'_{r'} = \frac{\partial^2 x}{\partial x^r \partial x^r}$, უწოდებენ აფინურ ბმის კოეფიციენტებს, ხოლო გლუვ ასახვათა

ერთობლობას $\{\Gamma_y^x\}$ - აფინურ ბმას M^n მრავალსახეობაზე.

ორ გლუვ მრავალსახეობას: M^n , $\tilde{M}^n$ აფინური ბმებით: $\{\Gamma_y^x\}$, $\{\tilde{\Gamma}_y^x\}$ უწოდებენ აფინურად კავშირდებულს, თუ M^n -ზე და $\tilde{M}^n$ -ზე არსებობენ ისეთი კოორდინატთა სისტემები,

რომ Γ_{μ}^{λ} , $\tilde{\Gamma}_{\mu}^{\lambda}$ წარმოადგენენ ამ კოორდინატების ერთსა და იგივე ზუნქციებს.

აფინურ ბმას $\Gamma = \{\Gamma_{\mu}^{\lambda}\}$ მრავალსახეობაზე უწოდებენ *სიმეტრიულს* თუ $\Gamma_{\mu}^{\lambda}(x) = \Gamma_{\mu}^{\lambda}(x)$

ყველა კოორდინატთა სისტემაში. სხვაობები $S_{\mu}^{\lambda}(x) = \Gamma_{\mu}^{\lambda}(x) - \Gamma_{\mu}^{\lambda}(x)$ შეადგენენ ტენზორს

$$\begin{aligned} S = \{S_{\mu}^{\lambda}\}. \quad \text{მართლაც, } S_{i'j'}^k &= \Gamma_{i'j'}^k - \Gamma_{i'j'}^k = p_{i'}^p p_{j'}^q p_k^r \Gamma_{pq}^r - p_{i'}^p p_{j'}^q p_k^r \Gamma_{pq}^r = \\ &= p_{i'}^p p_{j'}^q p_k^r (\Gamma_{pq}^r - \Gamma_{pq}^r) + p_k^r (p_{i'}^p p_{j'}^q - p_{i'}^p p_{j'}^q) = \\ &= p_{i'}^p p_{j'}^q p_k^r (\Gamma_{pq}^r - \Gamma_{pq}^r) = p_{i'}^p p_{j'}^q p_k^r S_{pq}^r. \quad S = \{S_{\mu}^{\lambda}\} \quad \text{ტენზორულ ველს აფინური ბმის გრეზას უწოდებენ.} \end{aligned}$$

თუ $S_{\mu}^{\lambda}(x) = 0$, მთელ მრავალსახეობაზე, მაშინამოვბენ, რომ მრავალსახეობაზე გვაქვს აფინური ბმა გრეზის გარეშე. ცხადია, აფინური ბმის გრეზა ანტისიმეტრიული ტენზორიული ველია: $S_{\mu}^{\lambda}(x) = -S_{\mu}^{\lambda}(x)$.

უთქვათ, ახლა M^n რიმანის მრავალსახეობაა, მაშინ მასზე გვაქვს ტენზორიული ველი $g(x) = \{g_{\mu\nu}(x)\}$. განესაზღვროთ აფინური ბმა ამ მრავალსახეობაზე შემდეგნაირად:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = g^{\lambda\sigma} \Gamma_{\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \right),$$

სადაც

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \right).$$

ადვილია იმის შემოწმება, რომ ამ ფორმულით მართლაც აფინური ბმა მიიღება. ასეთ აფინურ ბმას *რიმანის ბმა* ეწოდება. იგი ცხადია სიმეტრიული ბმაა. ცხადია რიმანის მრავალსახეობაზე ასეთნაირად განსაზღვრული ბმის გრეზა ნოლია.

უთქვათ, $L = (I = (a, b), x = x(t))$ რაიმე პარამეტრიზირებული გლუვი წირია M^n გლუვ მრავალსახეობაზე. $A = x(t_0)$ კი წერტილი ამ წირზე. რომელიც შეესაბამება პარამეტრის t_0 მნიშვნელობას. ვიტყვი, რომ ცვლადი *ვექტორი* $\xi(t)$ *პარალელურად გადაიტანება* L წირის *გასწვრივ*, თუ ამ ვექტორის კოორდინატები აკმაყოფილებენ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{d\xi^k(t)}{dt} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^k(x) \xi^i(t) \frac{dx^j}{dt}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

სადაც $\{\Gamma_{ij}^k\}$ აფინური ბმაა მრავალსახეობაზე.

ამ განტოლებათა სისტემის წრფივობიდან გამომდინარეობს, რომ პარალელური გადატანისას ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა გადადის წრფივად დამოუკიდებელ სისტემაში.

ვიტყვი, რომ აფინური ბმას M^n გლუვ მრავალსახეობაზე აქვს *აბსოლუტური პარალელიზმის თვისება*, თუ ვექტორის პარალელური გადატანისას ჩაკეტილი კონტურის(ჩაკეტილი გლუვი წირის) გასწვრივ ვექტორი უბრუნდება თავის საწყის მდგომარეობას.

E_n სივრცეში, რადგან იგი რიმანის მრავალსახეობაა, გვაქვს რიმანის ბმა. ეს ბმა, როგორც ზემოთ ენახეთ დაკავშირებულია მეტრიკულ ტენზორთან $g_{\mu\nu}$. E_n -ში არსებობს კოორდინატთა

სისტემა. რომელშიც მერტიულ ფორმას აქვს სახე $(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2$, ანუ ამ კოორდინატთა სისტემაში $g_{\mu\nu}$ ტენზორის ყველა თითოეული მდგენელი ან ნოლია ან ერთი.

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ აფინური ბაზის ყველა Γ_{μ}^{λ} კოეფიციენტი ამ კოორდინატთა სისტემაში იქნება ნულის ტოლი. ასეთ შემთხვევაში:

$$\frac{d\xi^k(t)}{dt} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^k(x) \xi^i(t) \frac{dx^j}{dt}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

სისტემა მიიღებს სახეს:

$$\frac{d\xi^k(t)}{dt} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

სიდანაც გვექნება: $\xi^k = \text{const}$. რაც ნიშნავს, რომ პარალელური გადატანისას ვექტორის კოორდინატები არ იცვლება.

ამ ტოლობას თუ აქვს ადგილი ერთ კოორდინატთა სისტემაში, მაშინ მას ადგილი ექნება სხვა კოორდინატთა სისტემაშიც, რაც ნიშნავს იმას, რომ E_n სივრცეში რიმანის ბაზის აქვს აბსოლუტური პარალელიზმის თვისება.

თეორემა B.1 თუ აფინურ ბაზის $\Gamma = \{\Gamma_{\mu}^{\lambda}\}$ გლუვ M^n მრავალსახეობაზე აქვს შემდეგი თვისებები: 1. Γ სიმეტრიულია, 2. Γ -ს აქვს აბსოლუტური პარალელურობის თვისება, მაშინ M^n მრავალსახეობა აფინურად ეკვივალენტურია ევკლიდეს n -განზომილებიანი $E_n = R_n$ სივრცისა.

დამტკიცება: თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვიპოვოთ M^n მრავალსახეობაზე ისეთი კოორდინატთა სისტემა რომელშიც $\Gamma_{\mu}^{\lambda}(x) = 0$. ამისათვის $T_x M^n$ მხეზე სივრცეში დაეაფიქსიროთ ბაზისი $e_1, e_2, \dots, e_n$ და გადავიტანოთ მისი თითოეული ვექტორი პარალელურად.

რადგან ბაზის M^n მრავალსახეობაზე გააჩნია აბსოლუტური პარალელიზმის თვისება, ამიტომ რომელი წირის გასწვრივაც არ უნდა გადავიტანოთ ვექტორი $A \in M^n$ წერტილიდან $B \in M^n$ წერტილში, შედეგი იქნება ერთი და იგივე. მგვარად, $e_1, e_2, \dots, e_n$ სისტემის პარალელირად გადატანით მიღებული $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ ვექტორთა სისტემა განსაზღვრული იქნება იქნება ცალსახად და წარმოადგენს $B \in M^n$ წერტილში მრავალსახეობის მხეზე $T_x M^n$ სივრცის ბაზისს. $e'_i, i = 1, 2, \dots, n$ ვექტორის კოორდინატები თავიდან მოცემული ლოკალური რუკის

კოორდინატთა $x^1, x^2, \dots, x^n$ სისტემაში აღენიშნოთ ასე: $\xi^k, k = 1, 2, \dots, n$. თითოეული მათგანი წარმოადგენს ფუნქციას $\xi^k(x^1, x^2, \dots, x^n)$ რომელიც აკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{d\xi^k(t)}{dt} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^k(x) \xi^i(t) \frac{dx^j}{dt}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

რაც იგივეა:

$$\frac{\partial \xi^k(t)}{\partial x^j} = - \sum_{i=1}^n \Gamma_{ij}^k(x) \xi^i(t), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

კოორდინატთა ახალი $x', i' = 1, 2, \dots, n$ სისტემა აეგოთ შემდეგნაირად: განვიხილოთ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა:

$$\frac{\partial x^k}{\partial x'^s} = \xi_s^k(x^1, x^2, \dots, x^n); k, s = 1, 2, \dots, n,$$

სადაც $x', i' = 1, 2, \dots, n$ ფორმალური დამოუკიდებელი ცვლადებია.

ეანენოთ, რომ განტოლებათა ამ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $x^k(A) = 0$ საწყის პირობებში:

$$x_1 = \phi^1(x^1, x^2, \dots, x^n), \dots, x^n = \phi^n(x^1, x^2, \dots, x^n).$$

რომელიც განსაზღვრულია $\{(x^1, x^2, \dots, x^n)\}$ სივრცის კოორდინატთა სათაეის რაღაც მიდამოში. ამისათვის ვარევნოთ, რომ სრულდება *ფრობენიუსის თეორემის* პირობა, რომელსაც ჩვენი შემთხვევისათვის აქვს სახე:

$$\sum_{p=1}^n \frac{\partial \xi_r^k}{\partial x^p} \xi_r^p = \sum_{p=1}^n \frac{\partial \xi_r^k}{\partial x^p} \xi_r^p; k, r, l = 1, 2, \dots, n.$$

როგორც ზემოთ ვნახეთ $\frac{\partial \xi_r^k}{\partial x^l} = -\sum_{i=1}^n \Gamma_{li}^k(x) \xi_i^r$, $k = 1, 2, \dots, n$, აქედან გამოვძინარე:

$$\sum_{p=1}^n \frac{\partial \xi_r^k}{\partial x^p} \xi_r^p = -\sum_{p=1}^n \sum_{i=1}^n \Gamma_{pi}^k(x) \xi_i^r \xi_r^p; k, r, l = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{p=1}^n \frac{\partial \xi_r^k}{\partial x^p} \xi_r^p = -\sum_{p=1}^n \sum_{i=1}^n \Gamma_{pi}^k(x) \xi_i^r \xi_r^p; k, r, l = 1, 2, \dots, n.$$

აგრამ, რადგან $\Gamma_{pi}^k = \Gamma_{pi}^k$, ამიტომ

$$\sum_{p=1}^n \sum_{i=1}^n \Gamma_{pi}^k(x) \xi_i^r \xi_r^p = \sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^n \Gamma_{ri}^k(x) \xi_i^r \xi_r^p = \sum_{p=1}^n \sum_{i=1}^n \Gamma_{pi}^k(x) \xi_i^r \xi_r^p; k, r, l = 1, 2, \dots, n.$$

ეს კი ნიშნავს ფრობენიუსის პირობის შესრულებას.

მაშასადამე, განტოლებათა * სისტემას * * საწყის პირობებში აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

ცხადია ადგილი აქვს ტოლობას.

$$\det \left\| \frac{\partial x^k}{\partial x'^s} \right\| = \det \left\| \xi_s^k(x^1, x^2, \dots, x^n) \right\| \neq 0,$$

ქედან გამოვძინარე, კოორდინატთა სათაეის რაღაც მიდამოში არსებობს შექცეული ფუნქციები

$$x^r = \phi^r(x^1, x^2, \dots, x^n), \dots, x^n = \phi^n(x^1, x^2, \dots, x^n),$$

რაც ამტკიცებს იმას, რომ სიდიდეები $x', i' = 1, 2, \dots, n$ ლოკალურად მაინც წარმოადგენენ

ახალ კოორდინატთა სისტემას M^n მრავალსახეობაზე.

ახალ კოორდინატებში

$$\xi_r^k = p_k^r \xi_i^k = \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \xi_i^k = \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x'^r} = \delta_r^k,$$

ეს ნიშნავს, რომ პარალელურად გადატანილი ვექტორები განსაზღვრავენ ისეთ $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ ბაზისს $T_x M^n$ მხეზე სივრცეში, რომ e'_j ვექტორის კოორდინატებია

$$\delta_j^{k'}, k' = 1, 2, \dots, n$$

ახალ კოორდინატებში ვექტორის პარალელური გადატანის პირობა:

$$\frac{dx^{k'}(t)}{dt} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^{k'}(x) \xi_j^i(t) \frac{dx^j}{dt}, \quad k' = 1, 2, \dots, n,$$

მაგრამ $\xi_j^{k'} = \delta_j^{k'}$. ამიტომ გვექნება: $\sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^{k'} dx^j = 0$, რადგან dx^j ნებისმიერადაა აღებული

ამიტომ $\Gamma_{ij}^{k'} = 0$. მაშასადამე, არსებობს ისეთი კოორდინატთა სისტემა M^n მრავალსახეობაზე რომელშიაც აფინური ბმის კოეფიციენტები ნულის ტოლი რაც უნდა დაგვეჩვენო. *წილის გლუვ მრავალსახეობაზე აფინური ბმით, რომლის მხეზე ვექტორიც პარალელური გადატანისას ამ წილის ნებისმიერ წერტილში რჩება ამავე წილის მხეზე ვექტორად, ეწოდება გეოდეზიური წირი გლუვ მრავალსახეობაზე.*

ვთქვათ, $G = (I, x = x(t))$ გეოდეზიური წირია M^n მრავალსახეობაზე, $x(t_0) = A$ წერტილია მასზე, $\xi_0(a^1, a^2, \dots, a^n)$, სადაც $a^i = \frac{dx^i(t)}{dt}, i = 1, 2, \dots, n$, მხეზე ვექტორი წირის A წერტილში, ხოლო $\xi(t)(\xi^1(t), \xi^2(t), \dots, \xi^n(t))$ წარმოადგენს ξ_0 ვექტორის მოცემული წირის გასწვრივ

პარალელურად გადატანის შედეგს. $\xi'(t) = \lambda(t) \frac{dx'(t)}{dt}$, სადაც $\lambda(t)$ რაიმე რიცხვითი მარაველია. შევიტანოთ G წირზე ისეთი ახალი პარამეტრი τ , რომ $dt = \lambda(t) d\tau$ ამ

პარამეტრისათვის $\tau_0 = \tau(t_0) = 0$. თუ გადავალთ ამ ახალ პარამეტრზე, გვექნება: $\xi'(\tau) = \frac{dx'(\tau)}{d\tau}$

ეს კი ნიშნავს, რომ $\xi_0(a^1, a^2, \dots, a^n)$ მხეზე ვექტორი გადაიტანება პარალელურად τ პარამეტრით პარამეტრიზირებულ G წირის გასწვრივ მხეზე ვექტორში.

τ პარამეტრის ეწოდება G გეოდეზიური წირის კანონიკური პარამეტრი.

თუ ჩავსვათ $\xi'(\tau) = \frac{dx'(\tau)}{d\tau}$ სიდიდეს ვექტორთა პარალელური გადატანის განტოლებათა

სისტემაში მივიღებთ:

$$\frac{d^2 x(\tau)}{d\tau^2} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^k(x) \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

გეოდეზიური წირის კანონიკურ განტოლებას.

შენიშვნა მიღებული განტოლება ფორმალურად დაემთხვა ზედაპირის გეოდეზიური წირის განტოლებას, რომლის გამოყენებისას ჩვენ არ გამოვიყენებთ აფინური ბმის ცნება. მაგრამ არაგანსაკუთრებული წერტილის მიდამოში ზედაპირი რიმანის მრავალსახეობაა და მასზე გაქვს რიმანის ბმა, რომელს კოეფიციენტთა მნიშვნელობანი ფაქტორად წარმოადგენს კრისტოფელის პირველი გვარის სიმბოლოთა მნიშვნელობებს ზედაპირზე, რომელებიც განისაზღვრება კრისტოფელის მეორე გვარის სიმბოლოთა მნიშვნელობანი ზედაპირზე მოთავსებული გეოდეზიური წირის განმსაზღვრელ განტოლებათა სისტემაში.

დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნის არსებობის და ერთადერთობის თეორემის გამოყენებით ადვილი დასამტკიცებელია შემდეგი თეორემა:

თეორემა B2: გლუვ M^n მრავალსახეობაზე აფინური ბმით, რომლის კოეფიციენტებიც Γ_{ij}^k

უწყვეტი ფუნქციებია, ყოველ $A \in M^n$ წერტილზე ნებისმიერი მიმართულებით გაივლის მხოლოდ ერთი გეოდეზიური წირი.

ეიტყვით, რომ **ტენზორი** $T(x) = \{T_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n}(x)\}$ **პარალელურად გადაიტანება** $L = (I, x = x(I))$

წირის გასწვრივ, თუ ამ ტენზორის მდგენელები აკმაყოფილებენ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{dT_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n}}{dt} = (\Gamma_{i_1 i_2}^{k_1} T_{k_1 i_3 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} + \Gamma_{i_1 i_3}^{k_2} T_{i_2 i_3 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} + \dots + \Gamma_{i_1 i_n}^{k_n} T_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}^{j_1 \dots j_n} - \Gamma_{i_1 i_2}^{k_1} T_{i_1 i_3 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} - \Gamma_{i_1 i_3}^{k_2} T_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} - \dots - \Gamma_{i_1 i_n}^{k_n} T_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}^{j_1 \dots j_n}) \frac{dx^i}{dt},$$

$$i_1, i_2, \dots, i_n = 1, 2, \dots, n; j_1, j_2, \dots, j_n = 1, 2, \dots, n.$$

ეს განსაზღვრება არ ეხება ნულოვანი რანგის ტენზორების პარალელურ გადატანას. ამ შემთხვევაში ნულოვანი რანგის ტენზორი, ეს არის რიცხვი, რომელიც მრავალსახეობის რაიმე A წერტილს შეესაბამება კოორდინატთა სისტემისგან დამოუკიდებლად. ამ ტენზორის პარალელური გადატანით მრავალსახეობის რაიმე B წერტილში მიიღება ტენზორი, რომელიც წარმოადგენს იგივე რიცხვს კოორდინატთა სისტემებისგან დამოუკიდებლად.

ეიტყვით, რომ **ტენზორული ველი მრავალსახეობაზე** $T(x) = \{T_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n}(x)\}$ **ინვარიანტულია**

$L = (I, x = x(I))$ **წირის გასწვრივ პარალელური გადატანის დროს** თუ ნებისმიერი A წერტილისთვისათვის L წირზე პარალელური გადატანის შედეგი $T(x)$ ემთხვევა $T(A)$ ტენზორს.

ცხადია, ინვარიანტულ ტენზორულ ველს წარმოადგენს ნულოვანი რანგის ტენზორული ველი. ახლა დაამტკიცოთ, რომ რიმანის M^n მრავალსახეობაზე მეტრიკული ფორმა g_x

ინვარიანტულია პარალელური გადატანისას მთელ M^n მრავალსახეობაზე. მართლაც, აღენიშნათ $\tilde{g}_x(x)$ სიმბოლოთი $g_y(A)$ ტენზორის პარალელური გადატანის შედეგი. ზოგადი ფორმულიდან გამომდინარეობს:

$$d\tilde{g}_y = (\Gamma_{ij}^k g_{ij} + \Gamma_{jk}^i g_{ij}) dx^k = (\Gamma_{ij}^k + \Gamma_{jk}^i) dx^k = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} dx^k = dg_{ij}.$$

ეს კი გეჩვენებს, რომ სიდიდე $\tilde{g}_y(x)$ რომელიც ემთხვევა $g_x(x)$ სიდიდეს $x = A$ წერტილში, ემთხვევა $g_y(x)$ სიდიდეს ნებისმიერ $x \in M^n$ წერტილში, რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

ეთქვით, ახლა მოცემულია ტენზორული ველი $T(x) = \{T_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n}(x)\}$ ამ **ტენზორული ველის აბსოლუტური დიფერენციალი** ეწოდება სიდიდეს:

$$DT_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} = dT_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} - (\Gamma_{i_1 i_2}^{k_1} T_{k_1 i_3 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} + \Gamma_{i_1 i_3}^{k_2} T_{i_2 i_3 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} + \dots + \Gamma_{i_1 i_n}^{k_n} T_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}^{j_1 \dots j_n} - \Gamma_{i_1 i_2}^{k_1} T_{i_1 i_3 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} - \Gamma_{i_1 i_3}^{k_2} T_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} - \dots - \Gamma_{i_1 i_n}^{k_n} T_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}^{j_1 \dots j_n}) dx^i$$

თეორემა B3. $T(x) = \{T_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n}(x)\}$ ტენზორული ველის აბსოლუტური დიფერენციალი ივყევ აგებულია ტენზორული ველია.

დამტკიცება: თეორემა დავამტკიცოთ ერჯერ კოვარიანტული და ერთჯერ კონტრავარიანტული T_i^k ტენზორისათვის. განვიხილოთ ბმის კოეფიციენტების გარდაქმნის ფორმულიდან მიღებული ცნობილი ფორმულა:

$$p'_{i'q} - \Gamma_{i'q}^{j'} p_j^j = -p'_{i'} p_q^q \Gamma_{i'q}^{j'},$$

თუ დაშტრიხულ ინდექსებს შეეცვლით დაუშტრიხავენით, გვექნება:

$$p_{iq}^j + p_{i'}^j p_q^q \Gamma_{i'q}^{j'} = \Gamma_{iq}^{j'} p_j^j$$

ამ ფორმულებიდან გვექნება:

$$\begin{aligned} DT_i^j &= dT_i^j - (\Gamma_{i'q}^{k'} T_k^j - \Gamma_{k'q}^{i'} T_i^j) dx^{q'} = d(p_i^j p_j^j T_i^j) - (\Gamma_{i'q}^{k'} T_k^j - \Gamma_{k'q}^{i'} T_i^j) dx^{q'} = \\ &= p_i^j p_j^j dT_i^j + p_{i'q}^j p_q^q dx^{q'} p_j^j T_i^j + p_{i'q}^j p_q^q dx^{q'} T_i^j - (\Gamma_{i'q}^{k'} p_i^j p_j^j T_k^j - \Gamma_{k'q}^{i'} p_i^j p_j^k T_i^j) p_q^q dx^{q'} = \\ &= p_i^j p_j^j dT_i^j + (p_{i'q}^j - \Gamma_{i'q}^{k'} p_i^k) p_q^q p_j^j T_i^j dx^{q'} + (p_{i'q}^j + \Gamma_{k'q}^{i'} p_k^j p_q^q) p_i^j T_i^k dx^{q'} = p_i^j p_j^j (dT_i^j - \Gamma_{i'q}^{k'} T_k^j dx^{q'} + \\ &+ \Gamma_{k'q}^{i'} T_i^k dx^{q'}) = p_i^j p_j^j DT_i^j \end{aligned}$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ ტენზორული ვეილს აბსოლუტური დიფერენციალი იგივე აგებულების ტენზორული ველია.

T_i^j ტენზორის აბსოლუტური დიფერენციალი ძეიძლება ასედაც ჩაეწეროს:

$$DT_i^j = \nabla_q T_i^j dx^q, \text{ სადაც } \nabla_q T_i^j = \frac{\partial T_i^j}{\partial x^q} - (\Gamma_{iq}^{k'} T_k^j - \Gamma_{k'q}^{i'} T_i^k) \text{ გამოსახულებას წარმოადგენს } T_i^j$$

ტენზორული ველის **აბსოლუტურ ანუ კოვარიანტულ წარმოებულს** x_q **კოორდინატი**.

$\nabla_q T_i^j$ სიდიდეები შეადგენენ ტენზორს, რომელსაც ერთით მეტი კოვარიანტული ინდექსი აქვს ვიდრე T_i^j ტენზორს. მაშასადამე ტენზორის კოვარიანტული წარმოებული იგივე ტიპის ტენზორი არ არის განსხვავებით ტენზორის აბსოლუტური დიფერენციალისა.

§14. სიმრუდის ტენზორი მრავალსახეობაზე აფინური ბმით.

ვთქვათ M^n გლუვი მრავალსახეობაა Γ_n^i აფინური ბმით და მასში გამოყოფილი

ორგანზომილებიანი სარამეტრიზირებული ზედაპირით $P_2 = (U \subset R^2, x = x(u, v))$ რომელზედაც მოთავსებულია წერტილი $A(u_0, v_0)$. აღვნიშნოთ d სიმბოლოთი $T(x)$ ტენზორული ველის ჩვეულებრივი დიფერენციალი u საკოორდინატო წირის გასწვრივ. ამ დროს ცხადია v კოორდინატი მუდმივად ითვლება.

$$dT = \frac{\partial T}{\partial u} du = \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u} du.$$

ანალოგიურად, აღვნიშნოთ $\tilde{d}$ სიმბოლოთი $T(x)$ ტენზორული ველის ჩვეულებრივი დიფერენციალი u საკოორდინატო წირის გასწვრივ. ამ დროს ცხადია v კოორდინატი მუდმივად ითვლება.

$$\tilde{d}T = \frac{\partial T}{\partial v} dv = \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial v} \tilde{d}v.$$

d და $\tilde{d}$ დიფერენციალები ერთმანეთთან კომუტირებენ, მართლაც:

$$\tilde{d}(dT) = \tilde{d}\left(\frac{\partial T}{\partial u} du\right) = \frac{\partial^2 T}{\partial u \partial v} du \tilde{d}v.$$

$$d(\tilde{d}T) = d\left(\frac{\partial T}{\partial v} dv\right) = \frac{\partial^2 T}{\partial v \partial u} \tilde{d}v du.$$

აღვნიშნოთ აღნიშნული დიფერენციალების შესაბამისი აბსოლუტური დიფერენციალები D და $\tilde{D}$ სიმბოლოებით. ეს დიფერენციალები საზოგადოდ ერთმანეთთან არ კომუტირებენ გამოთვალაოთ სიდიდე $D\tilde{D} - \tilde{D}D$, რომელსაც D და $\tilde{D}$ სიდიდეთა კომუტატორი ეწოდება.

ექვტორული $\xi = (\xi^i(x))$ ველისათვის

$$\begin{aligned} \tilde{D}(D\xi^i) &= \tilde{D}(d\xi^i + \Gamma_{\mu\nu}^i \xi^\mu dx^\nu) = \tilde{d}(d\xi^i + \Gamma_{\mu\nu}^i \xi^\mu dx^\nu) + \Gamma_{\mu\nu}^i (d\xi^\mu + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \xi^\rho dx^\sigma) \tilde{d}x^i = \tilde{d}(d\xi^i) + \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^i}{\partial x^j} \tilde{d}x^j \xi^\mu dx^\nu + \\ &\Gamma_{\mu\nu}^i \tilde{d}\xi^\mu dx^\nu + \Gamma_{\mu\nu}^i \tilde{d}(dx^\nu) + \Gamma_{\mu\nu}^i d\xi^\mu \tilde{d}x^i + \Gamma_{\mu\nu}^i \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \xi^\rho dx^\sigma \tilde{d}x^i \end{aligned}$$

თუ d და $\tilde{d}$ დიფერენციალებს ადგილებს შევუცვლით მივიღებთ $D(\tilde{D}\xi^i)$ სიდიდეს.

თუ $\tilde{D}(D\xi^i)$ სიდიდეს გამოვაკლებთ $D(\tilde{D}\xi^i)$ სიდიდეს მივიღებთ:

$$\begin{aligned} D(\tilde{D}) - \tilde{D}(D)(\xi^i) &= \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^i}{\partial x^j}\right) \xi^\mu dx^\nu \tilde{d}x^i + (\Gamma_{\mu\nu}^i \Gamma_{\rho\sigma}^\mu - \Gamma_{\rho\sigma}^i \Gamma_{\mu\nu}^\mu) \xi^\rho dx^\sigma \tilde{d}x^i = \\ &= \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^i}{\partial x^j} + \Gamma_{\mu\nu}^i \Gamma_{\rho\sigma}^\mu - \Gamma_{\rho\sigma}^i \Gamma_{\mu\nu}^\mu\right) \xi^\rho dx^\sigma \tilde{d}x^i. \end{aligned}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$R_{\mu\nu}^i = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^i}{\partial x^j} + \Gamma_{\mu\nu}^i \Gamma_{\rho\sigma}^\mu - \Gamma_{\rho\sigma}^i \Gamma_{\mu\nu}^\mu$$

მაშინ გვქვია: $(D(\tilde{D}) - \tilde{D}(D)(\xi^i)) = R_{\mu\nu}^i \xi^\mu dx^\nu \tilde{d}x^i$.

უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა მხარეს ერთჯერ კონტრაგირიანტული ტენზორია. მარჯვენა მხარეს ξ^i , dx^i , $\tilde{d}x^i$ სიდიდეები ასევე ტენზორებია, ისინი შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერად, ვინაიდან $\xi = (\xi^i(x))$ ვექტორისა და u, v კოორდინატების არჩევა ჩვენი ნებაა. ამ უაქტებზე დაყრდნობით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$R_{\mu\nu}^i = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^i}{\partial x^j} + \Gamma_{\mu\nu}^i \Gamma_{\rho\sigma}^\mu - \Gamma_{\rho\sigma}^i \Gamma_{\mu\nu}^\mu$$

სიდიდეები შეადგენენ სამჯერ კოვარიანტულ და ერთჯერ კონტრაგირიანტულ ტენზორს, ეს ტენზორი ანტისიმეტრიულია i და j ინდექსების მიმართ:

$$R_{\mu\nu}^i = -R_{\nu\mu}^i$$

მას უწოდებენ სიმრუდის ტენზორს M^* გლუვი მრავალსახეობისა Γ_μ^i აფინური ბაზით.

თეორემა 14.1. Γ_μ^i აფინური ბაზის, M^* გლუვი მრავალსახეობაზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ აქვს აბსოლუტური პარალელიზმის თვისება, თუ მის თითოეულ წერტილში სიმრუდის ტენზორი ნულის ტოლია.

დამტკიცება პირობის აუცილებლობის დამტკიცება: დაეუშვათ M'' გლუვი მრავალსახეობაზე Γ''_y აფინური ბმა ისეთია, რომ ადგილი აქვს აბსოლუტურ პარალელიზმს. მაშინ თუ $A \in M''$ წერტილს მოვდებთ რაიმე ξ ვექტორს, მისი პარალელური გადატანებით A წერტილს რაიმე მიდამოში მივიღებთ ცალსახად განსაზღვრულ ვექტორულ ველს $\xi(x)$. თუ ახლა ამ ველს გამოვიყენებთ სიმრუდის ტენზორის ასაგებად და გავითვალისწინებთ, რომ პარალელურად გადატანადი ვექტორებისათვის აბსოლუტური დიფერენციალები ნულის ტოლია გვექნება $D\xi = 0$ და $\tilde{D}\xi = 0$. ქედან გამომდინარე

$$(D(\tilde{D}) - \tilde{D}(D)(\xi')) = R'_{y,k} \xi^k dx^i \tilde{dx}^j$$

ტოლობის მარცხენა ნაწილი ნულის ტოლი იქნება. რადგან ξ ვექტორი ნებისმიერად ავირჩიეთ, ამიტომ $R'_{y,k} \xi^k dx^i \tilde{dx}^j$ სიდიდის ნულთან ტოლობიდან გვექნება: $R'_{y,k}(A) = 0$ ნებისმიერ $A \in M''$ წერტილში.

პირობის საკმარისობის დამტკიცება: ვთქვათ, $R'_{y,k}(A) = 0$ ნებისმიერ $A \in M''$ წერტილში.

განვიხილოთ ისეთი გლუვი წირების ოჯახი რომლებიც აერთებენ A წერტილს რაიმე $B \in M''$ წერტილთან. ვთქვათ, ამ ოჯახის ყოველ წირს შეესაბამება τ პარამეტრი, რომელიც იცვლება $[0,1]$ სეგმენტში და ამ წირის ყოველ წერტილს t პარამეტრი, რომელიც იცვლება ასევე $[0,1]$ სეგმენტში, მაშინ რომელიმე $([0,1], x = x(t))$ წირის წერტილის i -ური კოორდინატისათვის გვექნება: $x' = x'(t, \tau), i = 1, 2, \dots, n$. ასევე გვექნება $x(0, \tau) = A, x(1, \tau) = B$. განვიხილოთ რაიმე ξ ვექტორი A წერტილში და ვაჩვენოთ, რომ ამ ვექტორის პარალელურად გადატანის შედეგი $x' = x'(t, \tau), i = 1, 2, \dots, n$ წირის გასწვრივ B წერტილში არაა დამოკიდებული τ პარამეტრზე. D სიმბოლოთი აღენიშნოთ აბსოლუტური დიფერენციალი $x' = x'(t, \tau = \text{const}), i = 1, 2, \dots, n$ წირის გასწვრივ, ხოლო $\tilde{D}$ სიმბოლოთი აღენიშნოთ აბსოლუტური დიფერენციალი $x' = x'(t = \text{const}, \tau), i = 1, 2, \dots, n$ წირის გასწვრივ. რადგან ξ ვექტორი გადაიტანება პარალელურად, ამიტომ $D\xi = 0$.

$R'_{y,k} = 0$ პირობიდან კი გამომდინარეობს, რომ $D\tilde{D}\xi = 0$. ეს კი ნიშნავს, რომ $\tilde{D}\xi$ ვექტორი პარალელურად გადაიტანება ოჯახის თითოეული წირის გასწვრივ. როდესაც $t = 0$, მაშინ ვექტორი $\xi = \xi(0, \tau)$, წერტილი $A = x(0, \tau)$ ფაქტიურად არაა დამოკიდებული τ პარამეტრზე. აქედან გამომდინარე როდესაც $t = 0$ გვექნება:

$$\tilde{D}\xi^k = d\xi^k - \Gamma_{ij}^k \xi^i(0, \tau) \frac{dx^j}{d\tau} d\tau = 0.$$

ეს კი ნიშნავს, რომ $\tilde{D}\xi(1, \tau)$ ვექტორი ტოლი იქნება ნულის. მეორე მხრივ, ასევე გვაქვს:

$$\tilde{D}\xi^k(1, \tau) = d\xi^k(1, \tau) - \Gamma_{ij}^k \xi^i(1, \tau) \tilde{dx}^j = 0$$

და რადგან მოცემულ შემთხვევაში $\tilde{dx}_j = 0$, $\tilde{D}\xi^k(1, \tau) = 0$ ტოლობიდან გამომდინარეობს

$d\xi^k(1, \tau)$ სიდიდის ნულთან ტოლობა, საიდანაც საბოლოოდ გამომდინარეობს, რომ $\xi^k(1, \tau)$ დამოკიდებული არ არის τ პარამეტრზე. თეორემა დამტკიცდა.

ამ თეორემიდან და 13.1 თეორემიდან გამომდინარეობს თეორემა:

თეორემა 14.2. M'' გლუვი მრავალსახეობა Γ_y^k აფინური ბმით მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის ექვიდენტ n -განზომილებიანი სივრცის აფინურად ეკვივალენტური, თუ მისი სიმრუდის ტენზორი და გერზის ტენზორი ნულის ტოლია მრავალსახეობის ყოველ წერტილში.

ახლა განვიხილოთ საკითხი იმის შესახებ, თუ როგორ იცვლება ექვტორის კოორდინატები გლუვ M'' მრავალსახეობის ნაქეტილ წირის გსწვრივ პარალელურად გადატანისას საწყის წერტილში დაბრუნების დროს.

ეთქვას, აფინური ბმა მრავალსახეობაზე ასევე გლუვია და მრავალსახეობაში გამოყოფილია ორგანოზომილებიანი ზედაპირი P განსაკუთრებული წერტილების გარეშე:

$$P = (\Omega, x = x(u, v)); \Omega \subset R_2.$$

გადავიტანოთ ξ ექვტორი პარალელურად P ზედაპირზე მდებარე L წირების გასწვრივ რომელიმე გადიან A წერტილზე და რომელთა ფორმალური სიგრძე s ანუ ინტეგრალი

$$\int_L \sqrt{du^2 + dv^2}$$

ნაკლებია რაიმე მუდმივ h სიდიდეზე.

ყოველი ასეთი წირი მდებარეობს P ზედაპირზე მდებარე A წერტილის რაიმე $U(A)$ მიდამოში, რომელიც განსაზღვრულია

$$|u - u(A)| < h, |v - v(A)| < h$$

უტოლობებით. ყოველ ასეთ წირზე $x'(s)$ კოორდინატები აკმაყოფილებენ უტოლობებს:

$$|dx'| = \left| \frac{\partial x_i}{\partial u} du + \frac{\partial x_i}{\partial v} dv \right| \leq 2C_1 ds,$$

სადაც $C_1 = \max \left\{ \left| \frac{\partial x_i}{\partial u} \right|, \left| \frac{\partial x_i}{\partial v} \right| \right\}$, აქედან გამომდინარე x' კოორდინატის ნაზრდისათვის მიიღება უტოლობა:

$$|\Delta x'(s)| = |x'(s) - x'(0)| \leq 2C_1 s \leq 2C_1 h,$$

სადაც $(x^1(0), x^2(0), \dots, x^n(0)) = A$.

$\Gamma_y^k(x)$ კოეფიციენტები ამ წირებზე აკმაყოფილებენ უტოლობას:

$$|\Gamma_y^k(x)| \leq C_2,$$

ფრო ზუსტად $|\Gamma_y^k(x) - \Gamma_y^k| \leq C_3 s \leq C_3 h$, კიდევ უფრო ზუსტად

$$|\Gamma_y^k(x) - \Gamma_y^k - \frac{\partial \Gamma_y^k}{\partial x^m}(0) \Delta x^m| \leq C_4 s \leq C_4 h,$$

სადაც C_3 და C_4 მუდმივი სიდიდე ფასდება $\Gamma_y^k(x)$ ფუნქციების პირველი და მეორე

წარმოებულებით $U(A)$ მიდამოში.

ξ ექვტორის პარალელური გადატანით მიღებული $\xi(s)$ ექვტორის მდგენელები აკმაყოფილებენ უტოლობა:

$$|\xi'(s)| \leq C, |\xi'(0)| = C, \sqrt{\sum_{j=1}^n |\xi^j(0)|^2}$$

მართლაც, $|\xi'(s)|^2 = \sum_{j=1}^n (\xi_j'(s))^2$, აქედან გამოიმდინარე:

$$d|\xi'(s)|^2 = d \sum_{j=1}^n (\xi_j'(s))^2 = 2 \sum_{j=1}^n \xi_j'(s) d\xi_j'(s) = -2 \sum_{i,j,k=1}^n \xi_j'(s) \Gamma_{jk}^i \xi_k' \frac{dx'}{ds} ds.$$

თუ ჩავთვლით, რომ $|\Gamma_{jk}^i(x)| \leq C$, შემოსაზღვრული ფუნქციებია მივიღებთ:

$$|\sum_{j=1}^n \Gamma_{jk}^i(x) \xi_k' \frac{dx'}{ds}| \leq C^{-1} \sum_{j=1}^n |\Gamma_{jk}^i(x)| \leq nC, C^{-1} = C_6,$$

სადაც C ისეთი მუდმივია, რომ $|ds| \geq C \max_j |dx'|$, სადაც s ისეთი პარამეტრია, რომ

$$ds^2 = \sum_{j=1}^n (dx_j')^2, \quad 0 \leq s \leq h.$$

ასევე ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\sum_{i,j=1}^n |\xi_j'(s) \xi_i'(s)| \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n ((\xi_j'(s))^2 + (\xi_i'(s))^2) \leq n |\xi'(s)|^2$$

აქედან გამოიმდინარე, $|d(|\xi'(s)|^2)| \leq C_7 |\xi'(s)|^2 ds$, სადაც $C_7 = nC_6$, ანუ

$$|\frac{d \ln |\xi'(s)|^2}{ds}| \leq C_7.$$

საბოლოოდ გვქვია: $|\xi'(s)|^2 \leq |\xi'(0)|^2 e^{C_7 s} \leq |\xi'(0)|^2 e^{C_7 h}$, სადაც $|\xi'(0)|^2 = |\xi'|^2$

თუ ჩავთვლით, რომ $C_7 = e^{C_7 h}$, მაშინ უკანასკნელი უტოლობა კი ამტკიცებს დასამტკიცებელ

$|\xi'(s)| \leq C, |\xi'(0)| = C, \sqrt{\sum_{j=1}^n |\xi_j'(0)|^2}$ უტოლობას, რომლისგანაც თავის მხრივ გამოიმდინარეობს

$|d\xi_j'(s)| = |\Gamma_{jk}^i \xi_k' dx'| \leq C_8 |\xi'| ds$ უტოლობა. ამ უტოლობიდან კი გამოიმდინარეობს უტოლობა,

$$|\Delta \xi_j'| = |\xi_j'(s) - \xi_j'(0)| \leq C_8 |\xi'| s \leq C_8 |\xi'| h.$$

ახლა დავამტკიცოთ უტოლობა:

$$I(s) = \left| \int_0^s \Gamma_{jk}^i(x) \xi_k' \frac{dx'}{ds} ds - \Gamma_{jk}^i(0) \xi_k' \Delta x_j' \right| \leq C_9 s^2 |\xi'|.$$

მართლაც, $\Delta x_j' = \int_0^s dx_j'$, ამიტომ

$$\begin{aligned} I(s) &= \left| \int_0^s \Gamma_{jk}^i(x) \xi_k' dx_j' - \Gamma_{jk}^i(0) \xi_k' \Delta x_j' \right| = \left| \int_0^s (\Gamma_{jk}^i(x) \xi_k' - \Gamma_{jk}^i(0) \xi_k') dx_j' \right| \\ &= \left| \int_0^s [(\Gamma_{jk}^i(x) - \Gamma_{jk}^i(0)) \xi_k' + \Gamma_{jk}^i(0) (\xi_k'(x) - \xi_k')] dx_j' \right| \end{aligned}$$

თუ გავითვალისწინებთ წინა შეფასებებს, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$I(s) \leq \int_0^s (C_3 C_8 |\xi'| + C_2 C_8 |\xi'| s) dx_j' \leq C_9 s^2 |\xi'|.$$

ეთქვით ახლა, L ნაკვეთილი წირია P ზედაპირზე, რომელიც იწყება A წერტილიდან და ბრუნდება ისევ A წერტილში. ამ წირიის ფორმალური სიგრძე $\int_L \sqrt{du^2 + dv^2}$ ნაკლები ან ტოლი იქნება h სიდიდეს. მოვლათ ნებისმიერი მხები ξ ექვტორი A წერტილს და გადავიტანოთ იგი პარალელურად, მოცემული შეკრული წირის ფასწერზე A წერტილში. თუ M^n მრავალსახეობას არ გააჩნია აბსოლუტური პარალელიზმის თვისება, მაშინ A წერტილში დაბრუნებისას ξ ექვტორი მიიღებს ნაზრდს. მისი ξ^k კოორდინატის სრული ნაზრდი გამოისახება ფორმულით:

$$\Delta \xi^k = \oint_L d\xi^k = - \oint_L \Gamma_{ij}^k(x) \xi^i dx^j$$

* უტოლობის ძალით

$$\Gamma_{ij}^k(x) = \Gamma_{ij}^k(0) + \frac{\partial \Gamma_{ij}^k(0)}{\partial x^m} \Delta x^m + O(x^2),$$

** უტოლობის ძალით კი

$$\xi^p(x) = \xi^p - \int_0^x \Gamma_{ij}^p(x) \xi^i dx^j = \xi^p - \Gamma_{ij}^p(0) \xi^i \Delta x^j + O(x^2).$$

ამ ტოლობებიდან გვექნება:

$$\begin{aligned} \Delta \xi^k &= \oint_L [\Gamma_{ij}^k(0) + \frac{\partial \Gamma_{ij}^k(0)}{\partial x^m} \Delta x^m + O(x^2)] \times [\xi^p - \Gamma_{lm}^p(0) \xi^l \Delta x^m + O(x^2)] dx^j = -\Gamma_{ij}^k(0) \xi^i \oint_L dx^j - \\ &- \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^m} \xi^i \oint_L \Delta x^m dx^j + \Gamma_{lm}^k(0) \Gamma_{ij}^l(0) \xi^i \oint_L \Delta x^m dx^j O(h^3) \end{aligned}$$

უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები ტოლია ნულის, ამიტომ გვექნება:

$$\Delta \xi^k = (-\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^m} \xi^i + \Gamma_{lm}^k(0) \Gamma_{ij}^l(0) \xi^i) \oint_L \Delta x^m dx^j + O(h^3).$$

თუ გამოვიყენებთ გრინის ფორმულას [16] ორგანზოიმილებიან P ზედაპირზე, რომელიც ლოკალურად სიბრტყის ჰომეომორფულია, გვექნება:

$$\begin{aligned} \oint_L \Delta x^m dx^j &= \oint_L \Delta x^m (\frac{\partial x^j}{\partial u} du + \frac{\partial x^j}{\partial v} dv) = \iint_G [\frac{\partial}{\partial u} (\Delta x^m \frac{\partial x^j}{\partial v}) - \frac{\partial}{\partial v} (\Delta x^m \frac{\partial x^j}{\partial u})] du dv = \\ &= \iint_G (\frac{\partial \Delta x^m}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} - \frac{\partial \Delta x^m}{\partial v} \frac{\partial x^j}{\partial u}) du dv = [\frac{\partial \Delta x^m(0)}{\partial u} \frac{\partial x^j(0)}{\partial v} - \frac{\partial \Delta x^m(0)}{\partial v} \frac{\partial x^j(0)}{\partial u}] \iint_G du dv + O(h) \iint_G du dv \end{aligned}$$

სიდიდე: $\frac{\partial \Delta x^m(0)}{\partial u} \frac{\partial x^j(0)}{\partial v} - \frac{\partial \Delta x^m(0)}{\partial v} \frac{\partial x^j(0)}{\partial u}$ წარმოადგენს $\frac{\partial x(0)}{\partial u}, \frac{\partial x(0)}{\partial v}$ ექვტორებით წარმოქმნილ

ბიექტორს. აღვნიშნოთ იგი x^{mj} G არე შემოსაზღვრული L წირით, ამიტომ ამ არეში u და

რპარამეტრები არ აღემატება h სიდიდეს, ამიტომ $\sigma = \iiint_G dudv$ არის მეორე რიგის მცირე ელდრე h . ქედან გამომდინარე*** ტოლობა ჩაიწერება ასე:

$$\Delta \xi^k = [\Gamma_{lm}^p(0)\Gamma_{p'l}^k(0) - \frac{\partial \Gamma_{p'l}^k(0)}{\partial x^m}] \xi'^l x''^m \sigma + O(h^3).$$

თუ ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეს m და j ინდექსებს ადგილებს შევუცვლით და გაეზარდებთ -1 -ზე, x''^j ბიექტორის ანტისიმეტრიულობის გამო, ეს მხარე არ შეიცვლება, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\Delta \xi^k = \frac{1}{2} [\Gamma_{lm}^p(0)\Gamma_{p'l}^k(0) - \Gamma_{lj}^p(0)\Gamma_{p'm}^k(0) + \frac{\partial \Gamma_{p'm}^k}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma_{p'l}^k(0)}{\partial x^m}] \xi'^l x''^m \sigma + O(h^3),$$

ამგეარად,

$$\Delta \xi^k = \frac{1}{2} R_{mj,l}^k \xi'^l x''^m \sigma + O(h^3).$$

მაშასადამე, შესამე რიგამდე სიმცირის სიზუსტით ეექტორის მობრუნება ჩაკეტილი წირის გასწვრივ პარალელური გადატანისას გამოისახება უკანასკნელი ფორმულით, რომელშიც მთავარი თანამარაგელია სიმრუდის ტენზორი $R_{mj,l}^k$.

ახლა განვიხილოთ სიმრუდის ტენზორი რიმანის მრავალსახეობაზე. რიმანის მრავალსახეობაზე გაექს კანონიკური აფინური ბმა განსაზღვრული ფორმულით:

$$\Gamma_{ij}^k = g^{kl} \Gamma_{ij,l} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right), \text{ სადაც } \Gamma_{ij,s} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s} \right).$$

ეს ბმა სიმეტრიულია. შესაბამისი სიმრუდის ტენზორიც:

$$R_{ij,k}^l = \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^l}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^p \Gamma_{pk}^l - \Gamma_{kj}^p \Gamma_{pi}^l,$$

ამელაენებს გარკვეული ტიპის სიმეტრიის თვისებებს.

განვიხილოთ ოთხჯერ კოვარიანტული ტენზორი:

$$R_{ij,\mu}^s = R_{ij,\mu}^s g_{sl} = \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x^s} - \frac{\partial \Gamma_{lj}^s}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^p \Gamma_{pk}^l - \Gamma_{kj}^p \Gamma_{pi}^l \right) g_{sl}.$$

ამ ტენზორს **რიმანის ტენზორს** უწოდებენ, პირდაპირი გამოთვლებით შეიძლება ეანეწოთ, რომ იგი რიმანის ტიპის ტენზორია.

სკალარულ სიდიდეს:

$$K = \frac{1}{4} x''(A) x''(A) R_{ij,\mu}^s(A)$$

უწოდებენ **რიმანის M^n მრავალსახეობის სიმრუდეს x'' ერთეულოვანი ბიექტორით განსაზღვრულ ორგანზომილებიანი მიმართულებით A წერტილში.**

ერთეულოვანი x'' ბიექტორის მაგიერად თუ ავიღებთ ნებისმიერ იგივე სიბრტყის განმსაზღვრელ ბიექტორს რომელსაც იგივე x'' სიმბოლოთი აღვნიშნავთ მაშინ წინა

ფორმულა მიიღებს სახეს: $K = \frac{1}{4S^2} x''(A) x''(A) R_{ij,\mu}^s$, სადაც S წარმოადგენს ნებისმიერად

აღებული მოცემული ორგანზომილებიანი ბიექტორის ფართობს. უკანასკნელი ფორმულიდან მივიღებთ:

$$K = \frac{R_{ij, kp}(A)x^i(A)x^{kp}(A)}{G_{ij, kp}(A)x^i(A)x^{kp}(A)}.$$

გამოთვალათ რიმანის M^n მრავალსახეობის სიმრუდე ორგანზომილებიანი მიმართულებით, რომელიც განისაზღვრება ორგანზომილებიანი ზედაპირით ამ მრავალსახეობაში:

$$P_{12} = \{x \in M^n \mid x^1 = u, x^2 = v, x^3 = 0, \dots, x^n = 0\}.$$

ბიექტორი ასეთ შემთხვევაში შესაბამისი x^i ბიექტორი განისაზღვრება

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

მატრიცის მიხედვით. ამ ბიექტორის მდგენელები არანულოვანია მხოლოდ მაშინ, როდესაც $i=1, j=2$ ან $i=2, j=1$. ასეთ შემთხვევებში $x^{12} = 1, x^{21} = -1$, აქედან გამოდინარე:

$$K = \frac{R_{12,12} + R_{21,21} - R_{12,21} - R_{21,12}}{G_{12,12} + G_{21,21} - G_{12,21} - G_{21,12}}.$$

რადგან $\{R_{ij, kp}\}$ და $\{G_{ij, kp}\}$ ტენზორები ანტისიმეტრიული არიან ინდექსთა პირველი და მეორე წევრის მიმართ ამიტომ გვექნება:

$$K = \frac{R_{12,12}}{G_{12,12}}.$$

თუ რიმანის M^n მრავალსახეობა ორგანზომილებიანია, მაშინ პრდაპირი გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ უკანასკნელ ფორმულაში მარჯვენა მხარის მრიცხველი ტოლია ორგანზომილებიანი ზედაპირის მეორე კვადრატული ფორმის მატრიცის დეტერმინანტის, ხოლო მნიშვნელი - პირველი კვადრატული ფორმის დეტერმინანტის. ქედან გამოდინარე, შეგვიძლია დავასკენათ, რომ ორგანზომილებიანი ზედაპირის გაუსის სიმრუდე მოცემულ წერტილში ემთხვევა ამ ზედაპირის სიმრუდეს ორგანზომილებიანი მიმართულებით ამავე წერტილში.

ამ ფაქტს ზოგადად ადგილი არ აქვს, უფრო მაღალი განზომილების რიმანის მრავალსახეობებისთვის [16].

რიმანის M^n მრავალსახეობაში შეიძლება განისაზღვროს ორგანზომილებიანი ზედაპირების ფართობები. ეთქვას, $P = (\Omega, x = x(u, v))$; $\Omega \subset R_2$ ორგანზომილებიანი ზედაპირია M^n

მრავალსახეობაში. ამ ზედაპირისთვის გვაქვს $dS = \sqrt{EG - F^2} du dv$ სადაც $E = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}\right)$,

$F = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}\right)$, $G = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}\right)$ ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებია.

თუ u, v კოორდინატა სისტემიდან გადავალთ u', v' კოორდინატა სისტემაზე გვექნება

$$dS = \sqrt{EG - F^2} du dv = \sqrt{EG' - F'^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{vmatrix} du' dv'$$

თუ ახალ კოორდინატებს ისე შევარჩევთ, რომ

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u'}{\partial u} & \frac{\partial u'}{\partial v} \\ \frac{\partial v'}{\partial u} & \frac{\partial v'}{\partial v} \end{array} \right| = \sqrt{EG - F^2},$$

მაშინ $ds = du'dv'$ ეს შერწყმა მოვხადინოთ ასე: ეთქვას, $u' = \varphi(u, v)$, $v' = \psi$, მაშინ

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u'}{\partial u} & \frac{\partial u'}{\partial v} \\ \frac{\partial v'}{\partial u} & \frac{\partial v'}{\partial v} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ 0 & 1 \end{array} \right| = \frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

ანუ $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \sqrt{EG - F^2} du dv$, ამ ტოლობიდან კი გამოიმდინარეობს $\varphi(u, v) = \int \sqrt{EG - F^2} du$

განვიხილოთ თუ რა სახეს მიიღებს **** ფორმულა ამ კოორდინატთა სისტემაში.

ამ შემთხვევაში ინტეგრალი $\sigma = \iint_G du dv$ წაერმოადგენს ფართობს L წირით შემოსაზღვრული

G არისა. ახალ u', v' კოორდინატებში ეს ფართობი იქნება ერთის ტოილი, ამიტომ x''

ბივექტორი, რომელიც წარმოქმნილია $\frac{\partial x(A)}{\partial u'}$, $\frac{\partial x(A)}{\partial v'}$ ვექტორებით იქნება ერთეულოვანი.

$\frac{\partial x(A)}{\partial u'}$, $\frac{\partial x(A)}{\partial v'}$ ვექტორებით განსაზღვრულ სიბრტყეზე ავირჩიოთ კუთხის ასოელის დადებითი

მიმართულება'' პარამეტრის ზრდის მიმართულებიდან v' ზრდის მიმართულებისაკენ.

მოცემულ სიბრტყეში დადებითი ერთეულოვანი ξ ვექტორი და ვექტორი η რომელიც მიიღება ξ ვექტორისაგან დადებითი მიმართულებით 90° კუთხით მობრუნებით.

ξ ვექტორის პარალელური გადატანით ჩაკეტილი L წირის გასწვრივ ვდებულობთ $\xi + \Delta \xi$ ვექტორს, სადაც $\Delta \xi$ იგივე ნაზრდია რაც **** ფორმულაში. წარმოვადგინოთ ეს ნაზრდი როგორც $\Delta \xi = \Delta_1 \xi + \Delta_2 \eta + \Delta_3 \zeta$ წრფივი კომბინაციის სახით, სადაც ζ წვენი ერთეულოვანი ბივექტორის სიბრტყის მართობი ვექტორია.

(ცხადი,

$$\Delta_1 = (\xi \cdot \Delta \xi) = g_{\mu\nu} \xi^\mu \Delta \xi^\nu = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \xi^\mu R_{\nu\mu}^\lambda \xi^\lambda \sigma + O(h^3) = \frac{1}{2} \xi^\mu R_{\mu\nu}^\lambda \xi^\lambda \sigma + O(h^3).$$

რადგან ფორმულაში შემაღალი რიგის ტენზორი ანტისიმეტრიულია l და p ინდექსების მიმართ, ხოლო ტოლობის მარჯვენა ნაწილი- სკალარული ნამრავლი კომუტაციურია, ამიტომ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის პირველი შესაკრები ნულის ტოილ უნდა იყოს. ამგვარად $\Delta_1 = O(h^3)$.

უპიკოთ კუთხე ξ ვექტორსა და $\Delta \xi$ ვექტორის x'' ბივექტორის სიბრტყეზე პროექციას შორის დადებითი მიმართულებით. ეს პროექცია ცხადია ტოლია $\Delta \xi = \Delta_1 \xi + \Delta_2 \eta$ ვექტორის. თუ საიქებელ კუთხეს აღვნიშნავთ α სიმბოლოთი, გვექნება:

$$tg\alpha = \frac{\Delta_2}{1+\Delta_1} = \frac{\Delta_2}{1+O(h^3)} = \frac{(\eta \cdot \Delta\xi)}{1+O(h^3)} = \left(\frac{1}{2}\eta'' R_{y,p}\xi' x''\sigma + O(h^3)\right) \frac{1}{1+O(h^3)} = \frac{1}{2}\eta''\xi' R_{y,p}x''\sigma + O(h^3).$$

ბიექტორი $\xi'\eta' - \xi''\eta''$ განსაზღვრავს იგივე სიბრტყეს რასაც ბიექტორი. ეს ბიექტორიც ერთეულოვანია, ეს კი ნიშნავს, რომ იგი ერთხვევა x'' ბიექტორს. თუ გაეთვალისწინებთ რიხის ტენზორის ანტისიმეტრიულობას l და p ინდექსების მიმართ, მათ ადგილებს შეეცვლით, როგორც ზემოთ ავიღებთ ნახევარჯამებს მიღებული ტოლობებისა, მივიღებთ:

$$tg\alpha = \frac{1}{4}x''x'' R_{y,p}\sigma + O(h^3).$$

მცირე კუთხეებისთვის $\alpha = \arctg(tg\alpha) = tg\alpha + O(tg^3\alpha)$, ამიტომ

$$\alpha = \frac{1}{4}x''x'' R_{y,p}\sigma + O(h^3).$$

თუ მიღებულ ტოლობას გაეყოფთ σ სიდიდეზე და გადავალთ ზღვარზე, როდესაც L კონტური მოიჭიმება A წერტილში, მივიღებთ:

$$\lim_{L \rightarrow A} \frac{\alpha}{\sigma} = \frac{1}{4}x''x'' R_{y,p}.$$

უკანასკნელი ფორმულა გვეუბნება, რომ რიხის M'' მრავალსახეობის სიმრუდე x'' ერთეულოვანი ბიექტორით განსაზღვრულ ორგანოზომილებიანი მიმართულებით ტოლია ჩაკეტილ კონტურზე ექვტორის პარალელური გადატანისას შობრუნების კუთხის ამ კონტურით შემოსაზღვრული ორგანოზომილებიანი არიის ფართობთან ფარდობის ზღვრისა, როდესაც კონტური მოიჭიმება პარალელური გადატანის საწყისი წერტილისაკენ.

განვიხილოთ მაგალითები ისეთი რიხისმრავალსახეობებისა, რომელთა სიმრუდეებიც მუდმივი სიდიდეებია

მაგალითი 1. ვთქვათ, $L = (\Omega \subset E_n, x = x(u_1, u_2, \dots, u_n))$, წარმოადგენს n - განზომილებიან

ზედაიორს $n+1$ განზომილებიან ევკლიდეს E_{n+1} სივრცეში. ეს ზედაიორი

არაგანსაკუთრებული წერტილის მიდამოში წარმოადგენს n - განზომილებიან გლეუ მრავალსახეობას E_{n+1} სივრციდან ინდუცირებული მეტრიკით. ვიპოვოთ ამ ზედაიორის K სიმრუდე ორგანოზომილებიანი მიმართულებით, რომელიც განსაზღვრულია x'' ბიექტორით. ზემოთ მოყვანილი ფორმულით

$$K = \frac{R_{y,p}x''x''}{G_{y,p}x''x''}.$$

ასეთ შემთხვევაში რიხის $R_{y,p}$ ტენზორის მდგენელები წარმოადგენენ L ზედაიორის მეორე კვადრატული ფორმის $B_{y,p}$ მინორებს. ამიტომ გვექნება:

$$K = \frac{B_{y,p}x''x''}{G_{y,p}x''x''}.$$

გამოეთვალათ ეს სიმრუდე როდესაც L ზედაიორი წარმოადგენს r რადიუსიან სფეროს

ცენტრით კოორდინატთა სათავეში $L = (\Omega \subset E_n, x = x(u_1, u_2, \dots, u_n); \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (x'(u_1, u_2, \dots, u_n))^2} = r)$

ამ სფეროს რადიუსეპქტორი x ცხადია მისი $\bar{n}$ ნორმალის პროპორციულია ანუ $x = r\bar{n}$ გაინგარტენის ფორმულიდან გამომდინარეობს:

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial u_i} = b'_i \frac{\partial x}{\partial u_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$\frac{\partial x}{\partial u_i} = r \frac{\partial \bar{n}}{\partial u_i}$, ამიტომ $\frac{\partial \bar{n}}{\partial u_i} = b'_i / r \frac{\partial \bar{n}}{\partial u_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. ქედან კი გამომდინარეობს, რომ $b'_i / r = \delta'_i$

ზედაპირის მეორე კეადრატული ფორმის კოეფიციენტები b_{ij} დაკავშირებულია b'_i სიდიდეებთან

ფორმულით $b_{ij} = -\sum_{k=1}^n b'_i b'_j g_{kj}$, მაგრამ რადგან $b'_i / r = \delta'_i$, ამიტომ $b_{ij} = -\frac{1}{r} g_{ij}$.

მაშასადამე, მეორე კეადრატული ფორმის კოეფიციენტები პირველი კეადრატული ფორმის

კოეფიციენტების პროპორციულია, ამიტომ $R_{ij, \mu} = \frac{1}{r^2} G_{ij, \mu}$. თუ გავითვალისწინებთ ამ ტოლობას,

გეექნება: $K = \frac{1}{r^2}$. მეგვარად $n+1$ განზომილებიან ევკლიდეს სფერცეში r რადიუსიანი სფეროს სიმრუდე მის ნებისმიერ წერტილში და ნებისმიერი ორგანზომილებიანი მიმართულებებით ერთი და იგივეა და უდრის $\frac{1}{r^2}$ -ს.

ზოგადად, რიმაინის მრავალსახეობას M^n ეწოდება *მუდმივი სიმრუდის* თუ მისი სიმრუდე ნებისმიერ წერტილში ნებისმიერი ორგანზომილებიანი მიმართულებით

$$K = \frac{R_{ij, \mu} x^{ij} x^{\mu}}{G_{ij, \mu} x^{ij} x^{\mu}},$$

მუდმივი სიდიდეა. ამ შემთხვევაში ადგილი აქვს ტოლობას: $R_{ij, \mu} = K G_{ij, \mu}$.

მართლაც, ტენზორი $T_{ij, \mu} = R_{ij, \mu} - K G_{ij, \mu}$, ასევე რიჩის ტოპის ტენზორია, ყოველი x''

ბიექტორისათვის ადგილი აქვს ტოლობას: $T_{ij, \mu} x^{ij} x^{\mu} = 0$ ეს კი ნიშნავს, რომ ყოველ $x \in M^n$ წერტილში $T_{ij, \mu}(x) = 0$. მაშასადამე $R_{ij, \mu} = K G_{ij, \mu}$ ტოლობა სწორია.

თეორემა 14.3. რიმაინის მრავალსახეობა M^n , რომლის სიმრუდეც მუდმივია: $K = \frac{1}{r^2}$, $r > 0$

ლოკალურად იზომეტრიულია სფეროსი რადიუსით r , რომელიც მოთავსებულია E_{n+1} ევკლიდეს სფერცეში.

დამტკიცება: ლოკალურად იზომეტრიულობა ნიშნავს იმას, რომ მრავალსახეობის ნებისმიერ წერტილს გააჩნია მიდამო, რომელიც იზომეტრიულია სფეროს წერტილის რაიმე მიდამოსი.

განვიხილოთ ტენზორი $b_{ij} = \frac{1}{r} g_{ij}$, სადაც g_{ij} მეტრიკული ტენზორია M^n მრავალსახეობაზე.

ვაჩვენოთ, რომ მატრიცები $(g_{ij}(x))$ და $(b_{ij}(x))$ აკმაყოფილებენ ბონეს თეორემის ყველა პირობებს, ანუ აკმაყოფილებენ გაუსისა და პეტერსონ-კოდაცის განტოლებებს. მართლაც,

b_{ij} სიდიდეების განსაზღვრიდან და $R_{ij, \mu} = K G_{ij, \mu}$ ტოლობიდან $B_{ij, \mu}$ მინორებისათვის:

$B_{y,\mu} = \frac{1}{r^2} (g_{\mu} g_{\mu} - g_{\mu} g_{\mu}) = \frac{1}{r^2} G_{y,\mu} = R_{y,\mu}$. ეს კი ნიშნავს რომ კმაყოფილდება გაუსის განტოლება.

პეტერსონ კოდაცის განტოლებას:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \Gamma_{ik}^j b_{ij} - \Gamma_{ij}^k b_{ik}.$$

თუაქ ჩავსვამთ b_{ij} -ს მნიშვნელობას: $b_{ij} = \frac{1}{r} g_{ij}$, გვექნება:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \Gamma_{ik,j} - \Gamma_{ij,k}$$

სადაც

$$\Gamma_{ik,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right),$$

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right).$$

თუ გამოვაცლებთ პირველ ტოლობას მეორეს ენახავთ, რომ ადგილი აქვს

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \Gamma_{ik,j} - \Gamma_{ij,k} \text{ ტოლობას, ანუ კმაყოფილდება პეტერსონ-კოდაცის განტოლება.}$$

ზოგჯერ თეორემიდან გამომდინარე ექვლიდეს E_{n+1} სივრცეში არსებობს ზედაპირი

$$L = (\Omega \subset E_n, x = x(u_1, u_2, \dots, u_n)).$$

რომლის პირველი კვადრატული ფორმაა $\sum_{i=1}^n g_{ij} du_i du_j$, ხოლო მეორე კვადრატული ფორმა

$$\sum_{i=1}^n b_{ij} du_i du_j. \text{ ამ ზედაპირისთვის } a_j^i = -g^{ik} b_{ij} = -g^{ik} \frac{1}{r} g_{ij} = -\frac{1}{r} \delta_j^i, \text{ სადაც } \delta_j^i \text{ კრონეკერის}$$

სიმბოლოა, ხოლო a_j^i ვაინგარტენის $\frac{\partial \bar{m}}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^n a_j^i \frac{\partial x}{\partial u_i}$, $j = 1, 2, \dots, n$. ფორმულაში შემავალი

კოეფიციენტები.

$$\text{აქედან გამომდინარე } \frac{\partial \bar{m}}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{r} \delta_j^i \frac{\partial x}{\partial u_j} = -\frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial u_i}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \text{ ანუ } \frac{\partial}{\partial u_i} (\bar{m} + \frac{1}{r} x) = 0.$$

აქედან კი გვექნება: $\bar{m} + \frac{1}{r} x = \text{const} = \frac{1}{r} x_0$, რადგან $\bar{m}$ ერთეულიწიანი ნორმალია, ამიტომ

$r\bar{m} = (x - x_0)$ ტოლობიდან გამომდინარეობს ტოლობა $|x - x_0| = r$ ეს კი ნიშნავს, რომ ასეთი $L = (\Omega \subset E_n, x = x(u_1, u_2, \dots, u_n))$, ზედაპირი r რადიუსის მქონე სფეროა.

რადგან რიმანიის M^n მრავალსახეობის ფიქსირებულ წერტილის მიდამოს და შესაბამისად აგებულ $L = (\Omega \subset E_n, x = x(u_1, u_2, \dots, u_n))$. ზედაპირს ვართია იგივე კვადრატული ფორმები აქვთ, ამიტომ ისინი იზომეტრიულნი იქნებიან. ეს კი ამტკიცებს თეორემას.

ახლა განვიხილოთ $(x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_n)^2 - (x_{n+1})^2 = -\rho^2, \rho > 0$ განტოლებით განსაზღვრული H ჰიპერბოლოიდი $n+1$ განზომილებიან ექვლიდეს E_{n+1} სივრცეში.

კუადრატული ფორმა $(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \dots + (dx_n)^2 - (dx_{n+1})^2$ პიკერბოლიოიდის მხებ ეპქტორებზე დადებითად განსაზღვრულია, მართლაც H პიკერბოლიოიდზე გვაქვს:

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + \dots + x_n dx_n - x_{n+1} dx_{n+1} = 0,$$

აქედან კოშონიუნიაკოვსკის უტოლობით გვექნება:

$$(x_{n+1})^2 (dx_{n+1})^2 = (x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + \dots + x_n dx_n)^2 \leq [(x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_n)^2] \cdot [(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \dots + (dx_n)^2] = [(x_{n+1})^2 - \rho^2][(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \dots + (dx_n)^2]$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ: $[(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \dots + (dx_n)^2](x_{n+1})^2 \geq (x_{n+1})^2 (dx_{n+1})^2$ აქედან კი საბოლოოდ გვექნება: $(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \dots + (dx_n)^2 - (dx_{n+1})^2 \geq 0$, რაც ნიშნავს კუადრატული ფორმის დადებითად განსაზღვრულობას.

ამ კუადრატული ფორმის საშუალებით პიკერბოლიოიდზე განისაზღვრება მეტრიკა, რომელიც ინდუცირებულია

$$\langle x, y \rangle = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1})$$

ფსევდისკალარული ნამრავლით.

ვთქვათ L ნებისმიერი ისეთი n განზომილებიანი ზედაპირია ეკლიდეს E_{n+1} სივრცის $\langle x, x \rangle < 0$ უტოლობით განსაზღვრულ კონუსში, რომლისთვისაც ადგილი აქვს

$$(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \dots + (dx_n)^2 - (dx_{n+1})^2 \geq 0$$

უტოლობას, მაშასადამე ფსევდოსკალარული ნამრავლი $\langle x, y \rangle$ აინდუცირებს ჩვენს ზედაპირზე დადებითად განსაზღვრულ მეტრიკას. ასეთ ზედაპირზე m ფსევდონორმალისათვის ადგილი აქვს უტოლობას $\langle m, m \rangle$, წინააღმდეგ შემთხვევაში კუადრატული ფორმა $\langle x, x \rangle$, რომელიც დადებითად განსაზღვრულია n განზომილებიან მხებ სიბრტყეზე და არაუარყოფითად განსაზღვრული ამ სიბრტყის ფსევდოორთოგონალურ m ვექტორზე, იქნებოდა დადებითად განსაზღვრული მთელ E_{n+1} სივრცეზე, რაც ასე არ არის.

ვიკოვით L ზედაპირის სიმრუდე ორგანზომილებიანი მიმართულებებით $[dx, dy]$ ამისათვის დაეწერით გაუსისა და ვაინგარტენის ფორმულები ზედაპირის აღმწერით

$$x = x(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

რადიუსეპქტორისათვის.

$$\text{ვთქვათ } x_y = \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} = \Gamma_{ij}^k x_k + \beta_{ij} m, \quad m_i = \frac{\partial m}{\partial u_i} = a_i^k x_k + b_i y = \langle x_y, m \rangle, \text{ როგორც ზედაპირისათვის}$$

ეკლიდეს სივრცეში, აქაც გვექნება: $\langle x_y, m \rangle = 0$ და $\langle m_j, x_i \rangle + \langle m, x_k \rangle = 0$. აქედან გამომდინარე,

$$b_y = -\langle m_j, x_i \rangle = -\langle a_j^k x_k, x_i \rangle = -a_j^k g_{ik}.$$

ამ ცოლობების გათვალისწინებით:

$$\beta_{\mu\nu} b_\mu - \beta_{\nu\mu} b_\nu = \sum_{p=1}^{n-1} \left(\Gamma_{\mu\nu}^p \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^p}{\partial u_j} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^p}{\partial u_i} + \sum_{s=1}^{n-1} (\Gamma_{\mu\nu}^s \Gamma_{\mu\nu}^p - \Gamma_{\mu\nu}^s \Gamma_{\mu\nu}^p) \right) g_{ps}.$$

მიღებული ტოლობის მარჯვენა ნაწილი წარმოადგენს $R_{\mu\nu}$ სიმრუდის ტენზორს.

ჩაესვით მარცხენა მხარეს β_y სიდიდითა მნიშვნელობანი, რომლებიც

განსხვავებით ეკლიდური შემთხვევისა, როდესაც $\beta_y = (x_y, m) = b_y$,

განისაზღვრება ფორმულით: $b_y = \langle x_y, m \rangle = \beta_n \langle m, m \rangle = -\beta_y$.

ამგვარად, იმ კვადრატული ფორმის i, k სტრიქონებზე და j, l სვეტებზე განსაზღვრული მინორის მაგიერად, რომელიც გვქონდა ეკლიდურ შემთხვევაში, გვუძნება იგივე მინორი, მაგრამ უარყოფითი ნიშნით. მაშასადამე

$R_{y, \mu} = -B_{y, \mu}$, სადაც $B_{y, \mu}$ მოცემული ზედაპირის მეორე კვადრატული ფორმის

მინორებია. მაგვარად, მოცემული n განზომილებიანი L ზედაპირის

სიმრუდისათვის x'' ბიექტორით განსაზღვრული ორგანზომილებიანი მიმართულებით გვექნება:

$$K = -\frac{B_{y, \mu}[dx, dy]''[dx, dy]''}{G_{y, \mu}[dx, dy]''[dx, dy]''}.$$

მაგალითი 2 განვიხილოთ ფსევდოსფერო $L = \{x \in E_{n+1} | \langle x, x \rangle = -\rho^2, \rho > 0\}$.

გვაქვს $x = \rho m$, აქედან $x_i = \rho m_i = \rho a_i^j x_j$. ასე, რომ: $a_i^j = \frac{1}{\rho} \delta_i^j$. ქედან კი ეღებულობთ

$b_y = \langle x_y, m \rangle = -a_i^j g_{jk} = -\frac{1}{\rho} g_{ij}$. ამგვარად, $B_{y, \mu} = \frac{1}{\rho^2} G_{y, \mu}$, საბოლოოდ კი გვექნება:

$$K = -\frac{1}{\rho^2}$$

როგორც ენახეთ ფსევდოსფერო არის ზედაპირი ანუ რიმანის მრავალსახეობა, რომლის სიმრუდეც ნებისმიერ წერტილში, ნებისმიერი ორგანზომილებიანი მიმართულებით არის მუდმივი უარყოფითი რიცხვი.

ეთქათახლა, მოცემულია რიმანის მრავალსახეობა M^n , რომლის სიმრუდეც ყოველ წერტილში, ნებისმიერი ორგანზომილებიანი მიმართულებით, არის მუდმივი

უარყოფითი რიცხვი: $K = -q^2, q > 0$. ეიშვენოთ, რომ ასეთი რიმანის მრავალსახეობა $L \subset E_{n+1}$ ფსევდოსფეროს ლოკალურად იზომეტრიულია.

განვიხილოთ ბონეს თეორემა ზედაპირისათვის E_{n+1} სივრცეში რიმანის იმ მეტრიკით, რომელიც ინდუცირებულია

$$\langle x, x \rangle = (x_1 x_1 + x_2 x_2 + \dots + x_n x_n - x_{n+1} x_{n+1})$$

კვადრატული ფორმით.

თეორემა 14.4. ეთქვათ, მოცემული $n \times n$ მატრიცებით $G = (g_{ij}(u))$ და $B = (b_{ij}(u))$, სადაც

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ წარმოადგენს ეკლიდეს n განზომილებიანი სივრცის რაიმე ქვესივრცის

$D \subset E_n$ ცვლად ელემენტს, აკმაყოფილებენ

$$b_{ik} b_{jl} - b_{jk} b_{il} = \sum_{p=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^p}{\partial u_j} - \frac{\partial \Gamma_{il}^p}{\partial u_i} + \sum_{q=1}^{n-1} (\Gamma_{ik}^p \Gamma_{jl}^q - \Gamma_{jk}^p \Gamma_{il}^q) \right) g_{pq},$$

სადაც

$$\Gamma_{ij}^p g_{rk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{rk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right)$$

და

$$\sum_{p=1}^{n-1} \Gamma_{ij}^p g_{rk} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial u_k} = \sum_{p=1}^{n-1} \Gamma_{ik}^p g_{pj} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial u_j}$$

პირობებს, მაშინ E_{n+1} სივრცეში არსებობს n განზომილებიანი ზედაპირი

$$L = \{x \in E_{n+1} \mid x = x(u_1, u_2, \dots, u_n)\}$$

ფსევდოსკალარული $\langle x, y \rangle$ ნამრავლით ინდუცირებული დადებითად განსაზღვრული მეტრიკით, რომლის პირველი კვადრატული ფორმის მატრიცის წარმოდგენს $G = (g_{ij}(u))$, ხოლო მეორე კვადრატული ფორმის მატრიცის- $B = (b_{ij}(u))$.

დამტკიცება: ეს თეორემა მტკიცდება ისევე, როგორც ბონეს თეორემა, იმ განსხვავებით, რომ ამ შემთხვევაში $\beta_{ij} = -b_{ij}$.

რიმანის M^n მრავალსახეობის სიმრუდენ ნებისმიერი ორგანზომილებიანი მიმართულებებით მოიცემა ფორმულით

$$K = \frac{R_{ij,kl} x^j x^k}{G_{ij,kl} x^j x^k} = -q^2, q > 0,$$

აქედან, როგორც ზემოთ $R_{ij,kl} = -q^2 G_{ij,kl}$. დაწესებით $b_{ij} = -q g_{ij}$ და ვაჩვენოთ, რომ იმ ფორმებისათვის რომელთა მატრიცებიცაა $G = (g_{ij}(u))$ და $B = (-q g_{ij}(u))$, ადგილი აქვს 14.4 თეორემის პირობებს. მართლაც,

$$b_{ij} b_{kl} - b_{ik} b_{jl} = q^2 (g_{ij} g_{kl} - g_{ik} g_{jl}) = q^2 G_{ij,kl} = -R_{ij,kl}.$$

მეორე პირობა

$$\sum_{p=1}^{n-1} \Gamma_{ij}^p g_{rk} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial u_k} = \sum_{p=1}^{n-1} \Gamma_{ik}^p g_{pj} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial u_j}$$

მტკიცდება ზუსტად ისე როგორც მუდმივი დადებითი სიმრუდის შემთხვევაში.

რადგან 14.4 თეორემის პირობებს ადგილი აქვს ჩვენს შემთხვევაში, ამიტომ არსებობს ზედაპირი

$$L = \{x \in E_{n+1} \mid x = x(u_1, u_2, \dots, u_n)\}$$

მეტრიკით რომელიც ინდუცირებულია ფსევდოსკალარული $\langle x, y \rangle$ ნამრავლით და რომლის პირველი და მეორე კვადრატული ფორმების მატრიცებიცაა $G = (g_{ij}(u))$ და $B = (-q g_{ij}(u))$, შესაბამისად.

ამ ზედაპირისათვის $a_j^i g_{jk} = -b_{jk} = q g_{jk}$. ქედან გამომდინარე $m_j = a_j^i x_k = q x_j$, სადაც

$$m_j = \frac{\partial m}{\partial u_j} \quad \text{ესკი გვაძლევს ტოლობას } m = q(x)_j = 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

მაშასადამე აქედან კი ვღებულობთ $\langle x - x_0, x - x_0 \rangle = \left\langle \frac{m}{q}, \frac{m}{q} \right\rangle = -\frac{1}{q^2}$.

$\langle x - x_0, x - x_0 \rangle = -\frac{1}{q^2}$ განტოლებით განსაზღვრული ზედაპირი წარმოადგენს x_0 ეპეტორით

წანაცვლებულ ფსევდოსფეროს, ამიტომ რიზანის M'' მრავალსახეობის ლოკალურ იზომეტრიულობას ეკვლიდეს E_{n+1} სივრცეში

$$\langle x, x \rangle = -\frac{1}{q^2}$$

განტოლებით განსაზღვრული ფსევდოსფეროსთან, რომელზედაც მეტრიკა ინდუცირებულია ფსევდოსკალარული $\langle x, y \rangle$ ნამრავლით.

მაშასადამე, რიზანის მრავალსახეობა, რომლის სიმრუდე მუდმივია და უარყოფითი ყოველ წერტილში ნებისმიერი ორგანზომილებიანი მიმართულებით, ლოკალურად იზომორფულია

ეკვლიდეს $n+1$ სივრცის $\langle x, x \rangle = -\frac{1}{q^2}$ განტოლებით განსაზღვრული ფსევდოსფეროსი

$\langle x, y \rangle = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1})$ ფსევდოსკალარული ნამრავლით ინდუცირებული მეტრიკით.

§15. დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა მრავალსახეობებზე

ეთქვას, V^n n - განზომილებიანი წრფივი სივრცეა. განვიხილოთ ასახვა

$f: \underbrace{V^n \times V^n \times \dots \times V^n}_k \rightarrow R$, ამ ასახვას უწოდებენ k - ჯერად წრფი ფორმას, თუ ადგილი აქვს

ტოლობას: $f(x_1, x_2, \dots, \alpha x + \beta x', \dots, x_k) = \alpha^k f(x_1, x_2, \dots, x_k) + \beta^k f(x_1, x_2, \dots, x', \dots, x_k)$ ყოველი

$i = 1, 2, \dots, k$ ნატურალური ნომერისათვის. თუ x_i ეპეტორის კოორდინატები V^n -ში დაფიქსირებულ რაიმე $e_1, e_2, \dots, e_n$ ბაზისში $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ

$$\begin{aligned} f(x'_1 e_1 + x'_2 e_2 + \dots + x'_n e_n, x'_2 e_1 + x'_2 e_2 + \dots + x'_n e_n, \dots, x'_1 e_1 + x'_2 e_2 + \dots + x'_n e_n) = \\ = \sum_{i_1, \dots, i_k} x'_1{}^{i_1} x'_2{}^{i_2} \dots x'_k{}^{i_k} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}) \end{aligned}$$

სადაც თითოეული $i_j, j = 1, 2, \dots, k$ ღებულობს ერთმანეთისაგან განსხვავებულ მნიშვნელობას $\{1, 2, \dots, n\}$ სიმრავლიდან.

k - ჯერად წრფი ფორმები შეიძლება შევყიროთ და გაავრცელოთ რაიმე რიცხვზე, ამ ოპერაციების შედეგად ისევე k - ჯერად წრფი ფორმებს მივიღებთ.

ადგილია ჩვენება, რომ k - ჯერად წრფი ფორმები შეადგენენ ეპეტორულ სივრცეს.

ამ სივრცეში ბაზისის შეადგენენ ის ფორმები რომელთათვისაც $e_1, e_2, \dots, e_n$ ბაზისის მხოლოდ

ეპეტორების ერთი ფიქსირებული დალაგებული $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}$ კრებულებზე აქვთ 1- ის ტოლ

მნიშვნელობა სხვაგან კი ნულია. აღვნიშნოთ ამ ბაზისის ელემენტები ასე: $e_1 \otimes e_2 \otimes \dots \otimes e_k$.

ასეთი ფორმების მნიშვნელობა ნებისმიერ ეპეტორთა დალაგებულ კრებულზე (კორტეჟზე)

$(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ტოლია ნამრავლის $x'_1 x'_2 \dots x'_k$. k - ჯერად წრფი ფორმების ეპეტორული სივრცის

განზომილება $e_i \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_k}$ ფორმების რაოდენობა, რომელიც (ცხადია) ტოლია (ცხადია) n^k რიცხვის. ეს f ფორმა k -ჯერად წრფივ ფორმების სივრცეში ნაიწერება ასე:

$$f = \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1, \dots, i_k} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_k}$$

სადაც

$$f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \dots, e_{i_q}, \dots, e_{i_k}) = a_{i_1, \dots, i_k}$$

ადვილად შეგვიძლია შევამოწმოთ, რომ $e_1, e_2, \dots, e_n$ ბაზისიდან

სხვა ბაზისზე გადასვლისას k -ჯერად წრფივ ფორმების

$$f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \dots, e_{i_q}, \dots, e_{i_k}) \equiv a_{i_1, \dots, i_k}$$

კოვარიანტები გარდაიქმნებიან ისე როგორც k -ჯერ კოვარიანტული ტენზორის მდგენელები. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ k -ჯერად წრფივ ფორმები წარმოადგენენ k -ჯერ კოვარიანტული $\{T_{i_1, \dots, i_k}\}$ ტენზორებს.

k -ჯერად წრფივ ფორმას უწოდებენ *სიმეტრიულს*, თუ

$$f(x_1, \dots, x_p, \dots, x_q, \dots, x_k) = f(x_1, \dots, x_q, \dots, x_p, \dots, x_k),$$

თუ და *ანტისიმეტრიულს* (იძიბსიმეტრიულს), თუ

$$f(x_1, \dots, x_p, \dots, x_q, \dots, x_k) = -f(x_1, \dots, x_q, \dots, x_p, \dots, x_k),$$

ცადია თუ $k > 1$ მაშინ ანტისიმეტრიული k -ჯერადი წრფივი ფორმა იგივერად ნულია რადგან აუცილებლად გვექნება ორი ერთიდა იგივე მნიშვნელობის სხვადასხვა ინდექსი.

ეთქვათ M^n რაიმე n განზომილებიანი დიფერენცირებადი მრავალსახეობაა.

მის ყოველ x წერტილში გვაქვს მხები $T_x M^n$ სივრცე. ეს სივრცე შედგება x გამავალი მრავალსახეობაზე მდებარე წირების მხები ვექტორებისაგან, თუ ამ წერტილში დაეფიქსირებთ რომელიმე ლოკალურ რუკას კოორდინატებით $x^1, x^2, \dots, x^n$ მაშინ მხებ $T_x M^n$ სივრცეში გვექნება ბაზისი $e_1, e_2, \dots, e_n$ რომელიც შედგება იმ წირების მხებ ვექტორებისაგან, რომლებიც მიიღება მრავალსახეობაზე ლოკალური რუკის ყველაკოორდინატის დაფიქსირებით გარდა ერთისა და ამ დაფიქსირებული კოორდინატის ცვლილებით, აქედან გამომდინარე ბაზისის ვექტორების მიმართულება დამოუკიდებელია

$$(dx^1, 0, 0, \dots, 0), (0, dx^2, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, dx^n)$$

ვექტორების მიმართულებას ხოლო ნებისმიერი მიმართულების განმსაზღვრელი იქნება

$$(dx^1, dx^2, \dots, dx^n)$$

ვექტორი.

შეგვიძლია განვიხილოთ k -ჯერ წრფივი ფორმა:

$$f: \underbrace{T_x M^n \times T_x M^n \times \dots \times T_x M^n}_k \rightarrow R,$$

$$f(dx_1^1 e_1 + dx_1^2 e_2 + \dots + dx_1^n e_n, dx_2^1 e_1 + dx_2^2 e_2 + \dots + dx_2^n e_n, \dots, dx_k^1 e_1 + dx_k^2 e_2 + \dots + dx_k^n e_n) = \sum_{i_1, \dots, i_k} dx_1^{i_1} dx_2^{i_2} \dots dx_k^{i_k} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$$

აქ

$$e_i \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_k} (dx_1^1 e_1 + dx_1^2 e_2 + \dots + dx_1^n e_n, dx_2^1 e_1 + dx_2^2 e_2 + \dots + dx_2^n e_n, \dots, dx_k^1 e_1 + dx_k^2 e_2 + \dots + dx_k^n e_n) = dx_1^{i_1} dx_2^{i_2} \dots dx_k^{i_k}$$

და

$$f(e_1, \dots, e_p, \dots, e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \equiv a_{i_1, \dots, i_n}.$$

მაშასადამე ჩვენი k -ჯერ წრფივი ფორმა $f = \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1, \dots, i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}$

ასეთ k -ჯერად წრფივ ფორმას, თუ იგი ინვარიანტულია, ანუ ინარჩუნებს ჩაწერის ფორმას კოორდინატთა ერთი სისტემიდან მეორეზე გადასვლისას k -ჯერად *დიფერენციალურ ფორმას* უწოდებენ. იგი შეიძლება ასედაც წაეწეროს

$$f(x, dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1, \dots, i_k}(x) dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_k},$$

სადაც $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_k} = dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_k}$.

თუ კოეფიციენტები $a_{i_1, \dots, i_k}(x)$ r -ჯერ დიფერენცირებადი ფუნქციებია, მაშინ ამ დიფერენციალურ ფორმას უწოდებენ *დიფერენცირებადს r რიგამდე*, თუ ეს კოეფიციენტები დიფერენცირებადია ნებისმიერ რიგამდე დიფერენციალურ ფორმას უწოდებენ *გლუვს*. *დიფერენციალურ ფორმას უწოდებენ ირიბსიმეტრიულს (ანტისიმეტრიულს)*, თუ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\begin{aligned} & \sum_{(i_1, \dots, i_p, \dots, i_q, \dots, i_k)} a_{(i_1, \dots, i_p, \dots, i_q, \dots, i_k)}(x) dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_p} \dots dx^{i_q} \dots dx^{i_k} = \\ &= - \sum_{(i_1, \dots, i_p, \dots, i_q, \dots, i_k)} a_{(i_1, \dots, i_p, \dots, i_q, \dots, i_k)}(x) dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_p} \dots dx^{i_q} \dots dx^{i_k}, \end{aligned}$$

სადაც σ გაირბენს $(i_1, \dots, i_k)$ ინდექსთა გადანაცვლებების S_k სიმრავლეს. როგორც ვიცით გადანაცვლებაში სხვადასხვა წევრების მნიშვნელობანი განსხვავებულია. დიფერენციალური ფორმის * ზოგადი ჩაწერისას არ ვგულისხმობ, რომ $i_1, \dots, i_k$ ერთობლიობაში ერთნაირი მნიშვნელობის წევრები არ არის, მაგრამ ირიბსიმეტრიული ფორმების ჩაწერისას $i_1, \dots, i_k$ ერთობლიობაში რომელიმე ორი წევრის მნიშვნელობა ერთმანეთს თუ ემთხვევა, მაშინ ფორმა ნულის ტოლი უნდა იყოს სხვათადას არ შეიძლება.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign} \sigma dx^{i_{\sigma 1}} dx^{i_{\sigma 2}} \dots dx^{i_{\sigma k}}$,

ირიბსიმეტრიული დიფერენციალური ფორმისათვის ჩვენ მივიღებთ ჩაწერას.

$$\sum_{(i_1, \dots, i_k)} a_{(i_1, \dots, i_k)} dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_k} = \sum_{(i_1, \dots, i_k)} b_{(i_1, \dots, i_k)} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

ცხადია, სიდიდე $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ ირიბსიმეტრიულია კომპონენტთა გადანაცვლების მიმართ: $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} \wedge dx^{i_{q+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = -dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p+1}} \wedge dx^{i_p} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} \wedge dx^{i_{q+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$

მაგალითი 1. ვთქვათ მოცემული გვაქვს ირიბსიმეტრიული დიფერენციალური ფორმა

$$\begin{aligned} & \sum_{(i_1, \dots, i_k)} a_{(i_1, \dots, i_k)} dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_k} = \sum_{(i_1, \dots, i_k)} b_{(i_1, \dots, i_k)} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_k)} a_{(i_1, \dots, i_k)} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign} \sigma dx^{i_{\sigma 1}} dx^{i_{\sigma 2}} \dots dx^{i_{\sigma k}} \end{aligned}$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეს გვაქვს

$$\sum_{(i_1, \dots, i_k)} a_{(i_1, \dots, i_k)} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign} \sigma dx^{i_{\sigma 1}} dx^{i_{\sigma 2}} \dots dx^{i_{\sigma k}} = \sum_{\sigma \in S_k} b_{(i_1, \dots, i_k)} \text{sign} \sigma dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad \text{აქედან კი გამოვძინაროვს,}$$

რომ $a_{(i_1, \dots, i_k)} = \text{sign} \sigma_{(12, \dots, n)}$, როდესაც $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$.

ამგვარად ჩვენ გვაქვს ერთადერთი ბაზისური ფორმა

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign} \sigma dx^{i_{\sigma 1}} dx^{i_{\sigma 2}} \dots dx^{i_{\sigma n}},$$

რომლის კომპონენტებიც $\varepsilon_{(i_1, \dots, i_r)} = \varepsilon_{i_1 \dots i_r}$, სადაც σ გადაინაცვლება $1, 2, \dots, n$ მიმდევრობისთვის.

მაშასადამე $a_{(i_1, \dots, i_r)} = \varepsilon_{(i_1, \dots, i_r)} a_{(1, 2, \dots, n)}$.

ირიბსიმეტრიული $\omega = \sum_{(i_1 < \dots < i_r)} a_{(i_1, \dots, i_r)}(x) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$ დიფერენციალური ფორმის

კოფიციენტები შეიძლება არ წარმოადგენდნენ კოვარიანტული ტენზორის მდგენელებს. მაგალითად, თუ $\omega = \sum_{(i_1 < \dots < i_r)} a_{(i_1, \dots, i_r)}(x) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$

ირიბსიმეტრიული დიფერენციალური ფორმაა, რომლის კოფიციენტებიც ტენზორის

მდგენელებს წარმოადგენენ, ხოლო $\partial \omega = \sum_{(i_1 < \dots < i_r)} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{(i_1, \dots, i_r)}(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$ ამ

ფორმის დიფერენციალი. კოფიციენტებში $\frac{\partial a_{(i_1, \dots, i_r)}(x)}{\partial x^j}$, როგორც ვიცით უკვე აღარ

წარმოადგენენ კოვარიანტული ტენზორის მდგენელებს, მაგრამ $\partial \omega$ წარმოადგენს $k+1$ ჯერად დიფერენციალურ ფორმას. მართლაც: რადგან $a_{(i_1, \dots, i_r)}$ ტენზორის მდგენელებს წარმოადგენენ

$$\frac{\partial a_{(i_1, \dots, i_r)}(x)}{\partial x^j} = p_{i_1}^j p_{i_2}^j \dots p_{i_r}^j \frac{\partial a_{(i_1, \dots, i_r)}(x)}{\partial x^j} + p_{i_1}^j p_{i_2}^j \dots p_{i_r}^j a_{(i_1, \dots, i_r)}(x) + \dots + p_{i_1}^j p_{i_2}^j \dots p_{i_{r-1}}^j p_{i_r}^j a_{(i_1, \dots, i_r)}(x),$$

სადაც $p_{i_1}^j = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^j}$. აქედან გამომდინარე

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{(i_1, \dots, i_r)}(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} &= \frac{\partial a_{(i_1, \dots, i_r)}(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} + \\ p_{i_1}^j p_{i_2}^j \dots p_{i_r}^j a_{(i_1, \dots, i_r)}(x) p_{i_1}^j p_{i_2}^j \dots p_{i_r}^j dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} &+ \dots + p_{i_1}^j p_{i_2}^j \dots p_{i_{r-1}}^j p_{i_r}^j a_{(i_1, \dots, i_r)}(x) \times \\ \times p_{i_1}^j p_{i_2}^j \dots p_{i_r}^j dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} &= \\ = \frac{\partial a_{(i_1, \dots, i_r)}(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} &+ p_{i_1}^j p_{i_2}^j \dots p_{i_r}^j a_{(i_1, \dots, i_r)}(x) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} + \dots \\ \dots + p_{i_1}^j p_{i_2}^j \dots p_{i_r}^j a_{(i_1, \dots, i_r)}(x) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{r-1}} \wedge dx^{i_r} \end{aligned}$$

კოფიციენტები უკანასკნელი ტოლობის მეორე შესაკრებთან- $p_{i_1}^j p_{i_2}^j \dots p_{i_r}^j a_{(i_1, \dots, i_r)}(x)$ სიმეტრიულია j და $i_1, i_2, \dots, i_r$ მიმართ, ამ ფაქტიდან და $dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$ ფორმის ანტისიმეტრიულობიდან გამომდინარეობს, რომ ეს მეორე შესაკრები ნულის ტოლია. იგივეა იმისთვის, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ i ნულის ტოლი იქნება ყველა მომდევნო შესაკრებიც. მაშასადამე,

$$\sum_{i_1 < \dots < i_r} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{(i_1, \dots, i_r)}(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \sum_{(i_1 < \dots < i_r)} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{(i_1, \dots, i_r)}(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

რაც აჩვენებს იმას, რომ $\partial \omega$ დიფერენციალური ფორმაა.

უბრალოდ, ახლა $\omega = \sum_{(i_1 < \dots < i_r)} a_{(i_1, \dots, i_r)}(x) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$ ანტისიმეტრიული დიფერენციალური

ფორმის $a_{(i_1, \dots, i_r)}(x)$ კოფიციენტები არ წარმოადგენენ კოვარიანტული ტენზორის მდგენელებს.

რადგან კოფიციენტები $b_{(i_1, \dots, i_r)}$

$$\omega = \sum_{(i_1 < \dots < i_r)} a_{(i_1, \dots, i_r)} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \sum_{(i_1, \dots, i_r)} b_{(i_1, \dots, i_r)} dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_r}$$

დიფერენციალურ ფორმაში ანტისიმეტრიულობის პირობას აკმაყოფილებენ, ამიტომ:

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{(i_1 i_2 \dots i_k)} a_{(i_1 i_2 \dots i_k)}(x) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \sum_{(i_1 i_2 \dots i_k)} b_{(i_1 i_2 \dots i_k)}(x) dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_k} = \\ &= \sum_{(i_1 i_2 \dots i_k)} \sum_{\sigma \in S_k} b_{(i_1 i_2 \dots i_k)}(x) \text{sign} \sigma dx^{i_{\sigma(1)}} \dots dx^{i_{\sigma(k)}} = \sum_{(i_1 i_2 \dots i_k)} k! b_{(i_1 i_2 \dots i_k)}(x) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \end{aligned}$$

მაშასადამე, $a_{(i_1 i_2 \dots i_k)} = k! b_{(i_1 i_2 \dots i_k)}$, როდესაც $i_1 < i_2 < \dots < i_k$.

აქედან გამომდინარე აღვიღოთ მიხედვით, რომ $b_{i_1 i_2 \dots i_k} = \frac{1}{k!} \text{sign} \sigma_{(i_1 i_2 \dots i_k)}$ ნებისმიერი

$\sigma = (i_1 i_2 \dots i_k) \in S_k$ გადანაცვლებისთვის.

კოეფიციენტები $b_{(i_1 i_2 \dots i_k)} = \frac{1}{k!} \text{sign} \sigma_{(i_1 i_2 \dots i_k)}$ წარმოადგენენ k -ჯერ კოვარიანტული ტენზორის

მდგენელებს ამიტომ $\partial \omega = \sum_{i_1 i_2 \dots i_k} \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_{(i_1 i_2 \dots i_k)}(x)}{\partial x^j} dx^j dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_k}$ გამოსახულება ინვარიანტულია კოორდინატთა გარდაქმნისას და წარმოადგენს ანტისიმეტრიულ დიფერენციალურ ფორმას.

$$\frac{\partial b_{(i_1 i_2 \dots i_k)}(x)}{\partial x^j} = \frac{1}{k!} \text{sign} \sigma \frac{\partial a_{(i_1 i_2 \dots i_k)}(x)}{\partial x^j},$$

ამიტომ

$$\begin{aligned} \partial \omega &= \sum_{(i_1 i_2 \dots i_k)} \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_{(i_1 i_2 \dots i_k)}(x)}{\partial x^j} dx^j dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_k} = \\ &= \sum_{(i_1 i_2 \dots i_k)} \sum_{j=1}^n \frac{1}{k!} \text{sign} \sigma \frac{\partial a_{(i_1 i_2 \dots i_k)}(x)}{\partial x^j} dx^j dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_k} = \\ &= \sum_{(i_1 i_2 \dots i_k)} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{(i_1 i_2 \dots i_k)}(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \end{aligned}$$

რაც ნიშნავს იმას, რომ

$$\partial \omega = \sum_{(i_1 i_2 \dots i_k)} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{(i_1 i_2 \dots i_k)}(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

წარმოადგენს ანტისიმეტრიულ დიფერენციალურ ფორმას.

აღვიღოთ მიხედვით, რომ დიფერენცირების ოპერაცია დიფერენციალური k რიგის ფორმებისათვის: ω_1, ω_2 და ნამდვილი: α_1, α_2 რიცხვებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\partial(\alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2) = \alpha_1 \partial \omega_1 + \alpha_2 \partial \omega_2.$$

ორი ანტისიმეტრიული

$$\omega_1 = \sum_{(i_1 i_2 \dots i_k)} a_{(i_1 i_2 \dots i_k)}(x) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \omega_2 = \sum_{(j_1 j_2 \dots j_m)} b_{(j_1 j_2 \dots j_m)}(x) dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_m}$$

დიფერენციალური ფორმის ანტისიმეტრიული ტენზორული ნამრავლი (გარე ნამრავლი) $\omega_1 \wedge \omega_2$ ეწოდება დიფერენციალურ ფორმას

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_{(i_1 i_2 \dots i_k)} \sum_{(j_1 j_2 \dots j_m)} a_{(i_1 i_2 \dots i_k)}(x) b_{(j_1 j_2 \dots j_m)}(x) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_m}$$

ანტისიმეტრიული ტენზორილი ნამრავლის დიფერენციალისთვის გვაქვს ფორმულა:

$$\partial(\omega_1 \wedge \omega_2) = \partial\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge \partial\omega_2$$

$$\begin{aligned} \partial(\omega_1 \wedge \omega_2) &= \sum_{(i_1 < i_2 < \dots < i_k)} \sum_{(j_1 < j_2 < \dots < j_m)} \sum_{s=1}^n \frac{\partial(a_{(i_1 i_2 \dots i_k)}(x) b_{(j_1 j_2 \dots j_m)}(x))}{\partial x^s} dx^s \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_m} = \\ &= \sum_{(i_1 < i_2 < \dots < i_k)} \sum_{(j_1 < j_2 < \dots < j_m)} \sum_{s=1}^n \frac{\partial a_{(i_1 i_2 \dots i_k)}(x)}{\partial x^s} b_{(j_1 j_2 \dots j_m)}(x) dx^s \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_m} + \\ &+ \sum_{(i_1 < i_2 < \dots < i_k)} \sum_{(j_1 < j_2 < \dots < j_m)} \sum_{s=1}^n a_{(i_1 i_2 \dots i_k)}(x) \frac{\partial b_{(j_1 j_2 \dots j_m)}(x)}{\partial x^s} dx^s \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_m} = \\ &= \sum_{(i_1 < i_2 < \dots < i_k)} \sum_{(j_1 < j_2 < \dots < j_m)} \sum_{s=1}^n \frac{\partial a_{(i_1 i_2 \dots i_k)}(x)}{\partial x^s} b_{(j_1 j_2 \dots j_m)}(x) dx^s \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_m} + \\ &+ (-1)^k \sum_{(i_1 < i_2 < \dots < i_k)} \sum_{(j_1 < j_2 < \dots < j_m)} \sum_{s=1}^n a_{(i_1 i_2 \dots i_k)}(x) \frac{\partial b_{(j_1 j_2 \dots j_m)}(x)}{\partial x^s} dx^s \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_m} = \\ &= \partial\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge \partial\omega_2. \end{aligned}$$

თეორემა 15.1. ყოველი ანტისიმეტრიული დიფერენციალური ω ფორმისათვისადგილი აქვს ტოლობას $\partial(\partial\omega) = 0$.

დამტკიცება: რადგან $dx^j \wedge dx^s = -(dx^s \wedge dx^j)$, ამიტომ

$$\begin{aligned} \partial(\partial\omega) &= \sum_{(i_1 < i_2 < \dots < i_k)} \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial^2 a_{(i_1 i_2 \dots i_k)}(x)}{\partial x^j \partial x^s} dx^j \wedge dx^s \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \\ &= \sum_{(i_1 < i_2 < \dots < i_k)} \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial^2 a_{(i_1 i_2 \dots i_k)}(x)}{\partial x^j \partial x^s} (dx^j \wedge dx^s + dx^s \wedge dx^j) \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = 0 \end{aligned}$$

თეორემა დამტკიცდა.

უთქვამთ. ახლა I^k ერთეულფორმანი კუბია ექვლიდეს k განზომილებიან R_k

სივრცეში განსაზღვრული უტოლობებით:

$$0 \leq u^1 \leq 1; 0 \leq u^2 \leq 1; \dots; 0 \leq u^k \leq 1.$$

ამ კუბზე განსაზღვრული უწყვეტი $f(u)$ ფუნქციისათვის არსებობს რიმანის ინტეგრალი:

$$\int_{\mu'} f(u) du = \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i) |\delta_i|,$$

სადა $\Delta = \{\delta_i\}$ წარმოადგენს I^k კუბის დაყოფას მცირე $\delta_i, i=1, 2, \dots, n_1$ კუბიკებად;

$|\delta_i|$ წარმოადგენს δ_i კუბიკის მოცულობას; $d(\Delta)$ წარმოადგენს Δ დაყოფის ელემენტების მაქსიმალურ დიამეტრს, $\xi_i \in \delta_i$. ყოველთვის შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ δ_i კუბიკი განსაზღვრება $h_1, h_2, \dots, h_k$ ექვტორებით, რომლებიც გამოდიან $\xi_i \in \delta_i$ წერტილიდან.

აქედან გამომდინარე რიმანის ჯამი $\sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i) |\delta_i|$ შეიძლება ჩავთვალოთ იმ

$$\omega(u, u_1, u_2, \dots, u_k) = f(u) du^1 \wedge du^2 \wedge \dots \wedge du^k \quad \omega(u, du_1, du_2, \dots, du_k) =$$

ანიტისიმეტრიული დიფერენციალური ფორმის მნიშვნელობის ტოლად, რომელიც განსაზღვრულია ექვტორებზე:

$$du^1 = h_1, \quad du^2 = h_2, \dots, du^k = h_k$$

და $u = \xi_i$.

ამგვარად ჩვენ ბუნებრივად შეგვიძლია განვსაზღვროთ k -ჯერ წრფივი ანტისიმეტრიული დიფერენციალური ფორმისათვის ინტეგრალი:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} f(u) du^1 \wedge du^2 \wedge \dots \wedge du^k = \int_{\gamma} f(u) du$$

ამ ინტეგრალს აქვს ყველა ის თვისება რაც ჩვეულებრივ ინტეგრალს გააჩნია.

ეთქვათ, ახლა M^n გლუვი მრავალსახეობაა, გლუვ ჩაძირვას $\varphi: I^k \rightarrow M^n$ ეწოდება

k განზომილებიანი გლუვი დასაშვები პარამეტრიზირებული ზედაპირი მოცემულ მრავალსახეობაზე.

ლოკალურად k განზომილებიანი გლუვი დასაშვები პარამეტრიზირებული ზედაპირი M^n მრავალსახეობაზე მოიცემა განტოლებებით:

$$x_1 = \varphi_1(u_1, u_2, \dots, u_k)$$

$$x_2 = \varphi_2(u_1, u_2, \dots, u_k)$$

$$x_n = \varphi_n(u_1, u_2, \dots, u_k)$$

ორ k განზომილებიანი გლუვ დასაშვებ პარამეტრიზირებული

$$S_1 = (I^k, x = \varphi_1(u), u \in I^k), S_2 = (I^k, x = \varphi_2(v), v \in I^k)$$

ზედაპირს M^n მრავალსახეობაზე ეწოდებენ გეგმულ ელემენტებს, თუ არსებობს ისეთი

დიფეომორფიზმი $\nu: I^k \rightarrow I^k$, რომ $\varphi_1(u) = \varphi_2(\nu(u))$

რადგან პარამეტრიზირებული ზედაპირი მრავალსახეობაზე გლუვი ჩაძირვაა, ამიტომ მისი იაკობის მატრიცის:

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_k)}$$

რანგი k -ს ტოლია.

ზოგადი, k -ჯერ წრფივი ირიბსიმეტრიული $\omega = \sum_{(i_1 < i_2 < \dots < i_k)} a_{(i_1 \dots i_k)}(x) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$

დიფერენციალური ფორმისათვის ინტეგრალი $S = (I^k, x = \varphi(u), u \in I^k)$ გლუვ დასაშვებ პარამეტრიზირებულ ზედაპირზე განისაზღვრება ასე:

$$\begin{aligned} \int_S \omega &= \int_S \sum_{(i_1 < i_2 < \dots < i_k)} a_{(i_1 \dots i_k)}(x) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \\ &= \int_{I^k} \sum_{(i_1 < i_2 < \dots < i_k)} a_{(i_1 \dots i_k)}(\varphi(u)) \sum_{j_1=1}^k \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{j_1}} du^{j_1} \wedge \sum_{j_2=1}^k \frac{\partial x^{i_2}}{\partial u^{j_2}} du^{j_2} \wedge \dots \wedge \sum_{j_k=1}^k \frac{\partial x^{i_k}}{\partial u^{j_k}} du^{j_k}. \end{aligned}$$

რადგან ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ტენზორულად ინვარიანტული გამოსახულებაა, ინტეგრალი არ უნდა იყოს დამოკიდებული M^n მრავალსახეობაზე კოორდინატთა შერჩევაზე, ანუ მისი მნიშვნელობა არ უნდა იცვლებოდეს ერთი ლოკალური რუკიდან მეორეზე გადასვლისას. მართლაც

$$\begin{aligned}\int \omega &= \int_S \sum_{(i_1, \dots, i_k)} a_{(i_1, \dots, i_k)}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \int_S \sum_{(i_1, \dots, i_k)} \frac{1}{k!} \text{sign} \sigma_{(i_1, \dots, i_k)}(x) dx^{i_1} \dots dx^{i_k} \\ &= \int_S \sum_{(i_1, \dots, i_k)} \left(\sum_{(r_1, \dots, r_k)} \frac{\partial x^{r_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{r_k}}{\partial x^{i_k}} \frac{1}{k!} \text{sign} \sigma'_{(r_1, \dots, r_k)}(x') \right) dx^{i_1} \dots dx^{i_k} \\ &= \int_S \sum_{(i_1, \dots, i_k)} \frac{1}{k!} \text{sign} \sigma'_{(i_1, \dots, i_k)}(x') \sum_{(r_1, \dots, r_k)} \frac{\partial x^{r_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{r_k}}{\partial x^{i_k}} dx^{r_1} \dots dx^{r_k} = \\ &= \int_S \sum_{(r_1, \dots, r_k)} \frac{1}{k!} \text{sign} \sigma'_{(r_1, \dots, r_k)}(x') \sum_{(i_1, \dots, i_k)} \frac{\partial x^{r_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{r_k}}{\partial x^{i_k}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{r_1}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{r_k}} dx^{r_1} \dots dx^{r_k} \\ &= \int_S \sum_{(r_1, \dots, r_k)} \frac{1}{k!} \text{sign} \sigma'_{(r_1, \dots, r_k)}(x') dx^{r_1} \dots dx^{r_k} = \int_S \sum_{(r_1, \dots, r_k)} a_{(r_1, \dots, r_k)}(x') dx^{r_1} \wedge \dots \wedge dx^{r_k}.\end{aligned}$$

მაშასადამე, ინტეგრალის სიდიდე დამოკიდებული არ არის კოორდინატთა კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე.

ეთქვათ ახლა მოცემულია ორი ერთმანეთის ეკვივალენტური დასაშვები პარამეტრიზირებული

ზედაპირი: $S_1 = (I^k, x = \varphi_1(u), u \in I^k)$, $S_2 = (I^k, x = \varphi_2(v), v \in I^k)$,

ვაჩვენოთ რომ დიფერენციალური ფორმის ინტეგრალები ასეთ ზედაპირებზე ერთმანეთის ტოლია, მართლაც:

$$\begin{aligned}\int \omega &= \int_S \sum_{(i_1, \dots, i_k)} a_{(i_1, \dots, i_k)}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \int_{S_1} \sum_{(i_1, \dots, i_k)} \frac{1}{k!} \text{sign} \sigma_{(i_1, \dots, i_k)}(x) dx^{i_1} \dots dx^{i_k} \\ &= \int \sum_{j^1, \dots, j^k} \frac{1}{k!} a_{(j^1, \dots, j^k)}(\varphi(u)) \text{sign} \sigma \sum_{(i_1, \dots, i_k)} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{j^1}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial u^{j^k}} du^{j^1} \dots du^{j^k} = \int \sum_{j^1, \dots, j^k} \frac{1}{k!} a_{(j^1, \dots, j^k)}(\varphi(u)) \det \left(\frac{\partial x^{i^1}}{\partial u^{j^1}} \right) du^{j^1} \dots du^{j^k} = \\ &= \int \sum_{j^1, \dots, j^k} \frac{1}{k!} a_{(j^1, \dots, j^k)}(\varphi(u)) \det \left(\frac{\partial x^{i^1}}{\partial v^{j^1}} \right) \det \left(\frac{\partial v^{j^1}}{\partial u^{j^1}} \right) du^{j^1} \dots du^{j^k} = \int \sum_{j^1, \dots, j^k} \frac{1}{k!} a_{(j^1, \dots, j^k)}(\phi(v)) \det \left(\frac{\partial x^{i^1}}{\partial v^{j^1}} \right) dv^{j^1} \dots dv^{j^k} = \\ &= \int \sum_{j^1, \dots, j^k} \frac{1}{k!} a_{(j^1, \dots, j^k)}(\phi(v)) \text{sign} \sigma \sum_{(i_1, \dots, i_k)} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial v^{j^1}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial v^{j^k}} dv^{j^1} \dots dv^{j^k} = \int_{S_2} \sum_{(i_1, \dots, i_k)} \frac{1}{k!} \text{sign} \sigma_{(i_1, \dots, i_k)}(x) dx^{i_1} \dots dx^{i_k} = \\ &= \int \sum_{(i_1, \dots, i_k)} a_{(i_1, \dots, i_k)}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \int \omega\end{aligned}$$

კუბი I^k წარმოადგენს დასაშვებ გლუვ k განზომილებიან პარამეტრიზირებულ ზედაპირს R_n ევკლიდეს სივრცეში, იგი მოიცავს განტოლებებით:

$$x^1 = u^1, \dots, x^k = u^k, x^{k+1} = 0, \dots, x^n = 0; \quad 0 \leq u^i \leq 1, i = 1, 2, \dots, k$$

უფველი $i = 1, 2, \dots, k$ ინდექსისათვის განტოლებათა სისტემებით:

$$x^1 = u^1, \dots, x^{i-1} = u^{i-1}, x^i = 0, x^{i+1} = u^{i+1}, \dots, x^k = u^k, x^{k+1} = 0, \dots, x^n = 0$$

$$x^1 = u^1, \dots, x^{i-1} = u^{i-1}, x^i = 1, x^{i+1} = u^{i+1}, \dots, x^k = u^k, x^{k+1} = 0, \dots, x^n = 0$$

განისაზღვრებიან დასაშვები გლუვი $k-1$ განზომილებიანი პარამეტრიზებული ზედაპირები

R_n ეკლიდეს სივრცეში, აღენიშნოთ ისინი $I_{i,0}^k$ და $I_{i,1}^k$ სიმბოლოებით,

შესაბამისად განვიხილოთ წაბი $\partial I^k = \sum_{i=1}^k \sum_{\sigma=0}^1 (-1)^{i\sigma} I_{i,\sigma}^k$, ეუწოდოთ მას I^k კუბის, როგორც დასაშვები გლუვი k განზომილებიანი პარამეტრიზებული ზედაპირის საზღვარი.

$$S = (I^k, x = \varphi(u), u \in I^k)$$

უთქვამთ ახლა, გლუვი დასაშვები k განზომილებიანი პარამეტრიზებული ზედაპირია, მისი საზღვარი ∂S განესაზღვროთ ასე:

$$\partial S = \partial(\varphi(I^k)) = \sum_{i=1}^k \sum_{\sigma=0}^1 (-1)^{i\sigma} \varphi(I_{i,\sigma}^k)$$

მტკიცდება ძალზედ მნიშვნელოვანი, ეგრეთწოდებული სტოქსის განზოგადებული თეორემა [14,16]:

თეორემა 152. : თუ ω წარმოადგენს გლუვი $k-1$ -ჯერ წრფივ დიფერენციალურ ფორმას M^n გლუვი მრავალსახეობაზე და S დასაშვები გლუვი k განზომილებიანი პარამეტრიზებული ზედაპირია M^n -ზე, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_S \partial \omega = \int_{\partial S} \omega$$

სავარჯიშოები ზოგად ტოპოლოგიაში

1. ვთქვათ C^n კომპლექსურ რიცხვთა დალაგებული $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ კრებულების სიმრავლე, ყოველი ორი $z' = (z'_1, z'_2, \dots, z'_n), z'' = (z''_1, z''_2, \dots, z''_n) \in C^n$ ელემენტისათვის განესაზღვროთ სიდიდე
$$d(z', z'') = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z'_i - z''_i|^2}$$
 დაამტკიცეთ რომ (C^n, d) მეტრიკული სივრცეა.
2. ვთქვათ $\mathfrak{U} = \{F\}$ წარმოადგენს (M, d) მეტრიკული სივრცის სასრულ დიამეტრიან ჩაკეტილი სიმრავლეების ოჯახს. განესაზღვროთ სიდიდეები: $d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y), x \in M, F \in \mathfrak{U}$ და $\tilde{d}(F_1, F_2) = \max\{\sup_{x \in F_1} d(x, F_2), \sup_{x \in F_2} d(x, F_1)\}$. დაამტკიცეთ, რომ $(\mathfrak{U}, \tilde{d})$ მეტრიკული სივრცეა.
3. მოვიყვანოთ ისეთი B'_1 ღია ბირთვის მაგალითი $(\mathfrak{U}, \tilde{d})$ მეტრიკულ სივრცეში, რომლის ჩაკეტილი $(\mathfrak{U}, r_{\mathfrak{U}})$ ტოპოლოგიურ სივრცეში არ ემთხვევა $\overline{B'_1}$ ჩაკეტილ ბირთვს.
4. შეიძლება თუ არა ბირთვი დიდი რადიუსით, $(\mathfrak{U}, \tilde{d})$ მეტრიკულ სივრცეში, მთლიანად მოთავსდეს ბირთვში უფრო მცირე რადიუსით?
5. ვთქვათ F, G ჩაკეტილი და ღია სიმრავლეებია შესაბამისად ნებისმიერ ტოპოლოგიურ სივრცეში. დაამტკიცეთ, რომ $F \setminus G$ ჩაკეტილია და $G \setminus F$ ღიაა ამ სივრცეში.
6. ვთქვათ G ღია, ხოლო F ჩაკეტილი სიმრავლეებია რაიმე ტოპოლოგიურ სივრცეში. დაამტკიცეთ, რომ თუ $F \cap G = \emptyset$ მაშინ $F \cap \overline{G} = \emptyset$, სადაც $\emptyset$ ცარიელი სიმრავლეა.
7. დაამტკიცეთ, რომ E^n ევკლიდეს სივრცეში ღია ბირთვის ჩაკეტილი ემთხვევა იგივე ცენტრისა და რადიუსის ჩაკეტილ ბირთვს.
8. დაამტკიცეთ, რომ ტოპოლოგიურ სივრცეში ნებისმიერი ორი M, N ქვესიმრავლისათვის ადგილი აქვს მიმართებას $\overline{M \cap N} \subset \overline{M} \cap \overline{N}$ ანევენთ მაგალითზე როდის არ აქვს ტოლობა ადგილი.
9. აჩვენეთ, რომ ღია სიმრავლეა სისტემა $\mathcal{S}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ წარმოადგენს ბაზას X ტოპოლოგიურ სივრცეში, თუ ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის სისტემა $\mathcal{S}_x$, რომელიც შედგება $\mathcal{S}$ სისტემის ისეთი ღია ქვესიმრავლეებისაგან, რომლებიც მოიცავენ აღნიშნულ წერტილს, წარმოადგენს ამ წერტილის მიდამოთა ფუნდამენტალურ სისტემას.
10. დაამტკიცეთ, რომ თელადბაზისიან ტოპოლოგიურ სივრცეებში იზოლირებული წერტილების სიმრავლე არაუმეტეს თელადია.
11. დაამტკიცეთ, რომ თუ ტოპოლოგიური სივრცე თელადბაზისიანია, მაშინ როგორც არ უნდაიყოს მისი არათელადი ბაზა $\mathcal{S}$, მასში აუცილებლად მოიძებნება ისეთი თელადი ქვესისტემა $\mathcal{S}_0$, რომელიც ასევე ბაზა იქნება მოცემული სივრცისა.
12. დაამტკიცეთ, რომ თუ რაიმე ტოპოლოგიურ სივრცეში M ისეთი ქვესიმრავლეა, რომ მისი საზღვარი $FrM = \emptyset$ მხოლოდ მაშინ როდესაც M ერთდროულად ცაკეტილიც არის და ღიაც.
13. თუ $M \subset N$ ქვესიმრავლეებია რაიმე X ტოპოლოგიურ სივრცეში, მაშინ $\text{int}_X M \subset \text{int}_N M$ სადაც $\text{int}_X M$ და $\text{int}_N M$ რარმოადგენენ M შიგა ნაწილებს X და N სივრცეების მიმართ, შესაბამისად.

13. დაამტკიცეთ რომ ტოპოლოგიურ სივრცეში სასრული გ-ერთიანება არსად მეკრევი ქვესიმრავლეებისა ისევე არსად მეკრევი.

14. დაამტკიცეთ, რომ თუ ქვესიმრავლე ტოპოლოგიურ სივრცეში ღიაა ან ნაკეტილია, მაშინ მისი საზღვარი არსად მეკრევი.

15. დაამტკიცეთ, რომ წვეილწვეილად თანაუკვეთი ბირთვების ნებისმიერი ოჯახი E'' ეკლიდეს სივრცეში არაუმეტეს თელადი.

16. დაამტკიცეთ, რომ M სერცე შემოსაზღერული $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ მიმდერობებისა მეტრიკით $d(x'_1, x'_2) = \sup_n |x'_n - x''_n|$ არასეპარაბელურია.

17. დაამტკიცეთ, თუ სეპარაბელური მეტრიკული სივრცის ქვესიმრავლე M არათელადია მაშინ არათელადია ამ სიმრავლის წარმოებული სიმრავლე $M' = \overline{\text{int } M}$.

18. ეთქვათ $\tilde{R}'' = R'' \setminus \{0\}$ დაამტკიცეთ, რომ $\tilde{R}''$ პომომორფულია: ა) $S^{-1} \times (0, \infty)$ პირდაპირი ნამრავლის, ბ) $S^{-1} \times (-\infty, \infty)$ პირდაპირი ნამრავლის.

19. დაამტკიცეთ, რომ არაუმეტეს თელადი პირდაპირი ნამრავლი $\prod_{n \in N} X_n$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ აკმაყოფილებს თელადობის პირველ აქსიომას, თუ თვითოეული X_n ასეთია.

20. დაამტკიცეთ, რომ არაუმეტეს თელადი პირდაპირი ნამრავლი $\prod_{n \in N} X_n$ მაშინ და მხოლოდ მაშინასეპარაბელური, თუ თვითოეული X_n სეპარაბელურია.

21. დაამტკიცეთ, რომ C'' პომომორფულია R^{2n} -ის.

22. დაამტკიცეთ, რომ თვითოეული თანამამრავლი X_i ტიხონოვის $\prod_{i \in I} X_i$ ნამრავლში წარმოადგენს რეტრაქტს ამ ნამრავლის მიმართ.

23. დაამტკიცეთ, რომ თუ μ რაღაც კარდინალური რიცხვია, თვითოეული X_i სივრცის ბაზის სიმძლავრე $\text{card} B(X_i) \leq \mu$ და $\text{card} I \leq \mu$ მაშინ ტიხონოვის $\prod_{i \in I} X_i$ ნამრავლის ბაზის სიმძლავრე $\text{card} B(\prod_{i \in I} X_i) \leq \mu$.

24. დაამტკიცეთ, რომ თუ S'' სფეროს ეკვატორს მოვკიმათ ერთ წერტილის მაშინ მიღებული სფეროთა თაიგული $S'' \vee S''$ პომომორფული იქნება $S'' / \sim$ ჯაქტორსივრცის.

25. ეთქვათ თვითოეული X_α სივრცე $\{X_\alpha, p_\alpha, A\}$ შებრუნებულ სექტრში თელად ბაზისიანია და A შეიცავს ნატურალური რიცხვთა მწერიის იზომორფულ კოფინალურ ნაწილს, მაშინ ამ სექტრის ზღვარი $\varprojlim \{X_\alpha, p_\alpha, A\}$ ასევე თელად ბაზისიანია.

26. ეთქვათ $\{X_\alpha, p_\alpha, A\}$ შებრუნებულ სექტრია, $\{X'_\alpha, p'_\alpha, A\}$ მისი ქვესექტრი, ისეთი, რომ $p_\alpha(X_\alpha) \subset X'_\alpha$, მაშინ ზღვარი $\varprojlim \{X_\alpha, p_\alpha, A\}$ პომომორფულია $\varprojlim \{X'_\alpha, p'_\alpha, A\}$ ზღვრის.

27. დაამტკიცეთ, რომ X ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს განცალკეულობის T_0 კსიომას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ამ სივრცის ორი ნებისმიერი სხედასხვა წერტილიდან ერთი მაინც არ ეკუთვნის მეორის ნაკეტვას.

28. დამტკიცეთ, რომ X ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს განცალკეულობის T_1 აქსიომას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $X \otimes X$ პირდაპირი ნამრავლის დიაგონალი $\Delta = \{(x, x)\}$ წარმოადგენს ღია სიმრავლეთა რაიმე ოჯახის თანაკვეთას.
29. დამტკიცეთ, რომ განცალკეულობის $T_0, T_1, T_2, T_3, T_{\frac{1}{2}}$ შემკიდრეობითაა, ანუ თუ სივრცეს გააჩნია რომელიმე ეს თვისება მაშინ ეს თვისება გააჩნია მისნებისმიერ ქვესივრცესაც.
30. დამტკიცეთ, რომ X პაუსდორფისაა, მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ ნებისმიერი წერტილი $x \in X$ წარმოადგენს ამ წერტილის ყველა ჩაკეტილი მიდამოს თანაკვეთას.
31. დამტკიცეთ, რომ X პაუსდორფისაა, მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ ნებისმიერი წერტილის $x \in X$ გააჩნია მიდამო რომელიც ასევე პაუსდორფისაა.
32. თუ X'' წარმოადგენს X ტოპოლოგიური სივრცის დეკარტის რაიმე ხარისხს ტიხონოვის ტოპოლოგიით, მაშინ ამ ხარისხის პაუსდორფულობა ეკვივალენტურია $\Delta = \{(x, x, \dots, x)\}$ დიაგონალის ჩაკეტილობის X'' სივრცეში.
33. დამტკიცეთ, რომ პაუსდორფის სივრცეში ნებისმიერი რეტრაქტი ჩაკეტილია.
35. დამტკიცეთ, რომ პაუსდორფის სივრცეში წერტილთა ყოველი ხასრული სიმრავლის ელემენტებს გააჩნიათ წვილ-წვილად არათანამკვეთი მიდამოები.
36. დამტკიცეთ, რომ პაუსდორფის სივრცეში ყოველ მიმდევრობას გააჩნია მხოლოდ ერთი ზღვარი.
37. ვთქვათ, მოცემულია $f: X \rightarrow Y$ ასახვა. R_f ეკვივალენტობის მიმართებაა X სივრცეზე განსაზღვრული შემდეგნაირად: $x_1 \approx x_2$ თუ $f(x_1) = f(x_2)$, დამტკიცეთ რომ თუ X სივრცე პაუსდორფისაა პაუსდორფის იქნება X/R_f ფაქტორსივრცეც.
38. დამტკიცეთ, რომ თუ X ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს განცალკეულობის T_c და T_1 აქსიომებს, მაშინ ის რეგულარულია.
39. დამტკიცეთ, რომ X აკმაყოფილებს განცალკეულობის T_3 აქსიომას, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც იგი ემთხვევა თავისი ყველა ჩაკეტილი მიდამოს თანაკვეთას.
40. დამტკიცეთ, რომ X აკმაყოფილებს განცალკეულობის T_4 აქსიომას, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ორი თანაკვეთი ჩაკეტილი F_1, F_2 ქვესიმრავლისთვის არსებობს ღია სიმრავლე U , ისეთი რომ $F_1 \subset U$ და $F_2 \cap \bar{U} = \emptyset$.
41. დამტკიცეთ, რომ X აკმაყოფილებს განცალკეულობის T_4 აქსიომას, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ორი ღია G_1, G_2 , $G_1 \cup G_2 = X$ ქვესიმრავლისთვის არსებობენ ჩაკეტილი $F_1 \subset G_1$ და $F_2 \subset G_2$ სიმრავლეები U , ისეთი რომ $F_1 \cup F_2 = X$
42. სამიუელენტიან სიმრავლეში შეიტანეთ ისეთი ტოპოლოგიური სტრუქტურა რომელიც დააკმაყოფილებს T_3 აქსიომას და არ დააკმაყოფილებს T_2 აქსიომას.
43. ოთხი ელემენტიან სიმრავლეში შეიტანეთ ისეთი ტოპოლოგიური სტრუქტურა რომელიც დააკმაყოფილებს T_4 აქსიომას და არ დააკმაყოფილებს T_3 აქსიომას.
44. მოიყვანეთ ისეთი T_2 სივრცის მაგალითი, რომელიც ნორმალური არაა.
45. დამტკიცეთ, რომ ყოველი თელადი რეგულარული სივრცე ნორმალურია.

46. დაამტკიცეთ, რომ λ -სუზდორფის სივრცეში ყოველი ორ თანაუკვეთ კომპაქტურ ქვესიმრავლეს გააჩნია თანაუკვეთი მიდამოები.
47. დაამტკიცეთ, რომ რეგულარულ სივრცეში სივრცეში ყოველი ორ თანაუკვეთ ჩაკეტილ ქვესიმრავლეს, რომელთაგან ერთი კომპაქტურია გააჩნია თანაუკვეთი მიდამოები.
48. დაამტკიცეთ, რომ თელადად კომპაქტური სივრცის ნებისმიერი ჩაკეტილი ქვესიმრავლე თელადად კომპაქტურია.
49. დაამტკიცეთ, რომ კომპაქტური მეტრიკული სივრცის იზომეტრია თავის საკუთრივ ნაწილზე არ არსებობს.
50. დაამტკიცეთ, რომ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე რიცხვითი ღერძიდან ინდუცირებული ტოპოლოგიური სტრუქტურით, არცერთი სრული მეტრიკული სივრცის პოიკომორფული არ არის.
51. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი ლოკალურად კომპაქტური λ -სუზდორფის ტოპოლოგიური სივრცე ღიაა ყოველ თავის λ -სუზდორფის კომპაქტიფიკაციაში.
52. დაამტკიცეთ, რომ λ -სუზდორფის ლოკალურად კომპაქტური სივრცის ყოველი ღია ქვესიმრავლე ლოკალურად კომპაქტურია.
53. ეთქვას X ბმული ტოპოლოგიური სივრცეა. უწვევტი ასახვა $f: X \rightarrow R$ დებულობს როგორც დადებით ასევე უარყოფით მნიშვნელობებს. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს ისეთი $x_0 \in X$ წერტილი, რომ $f(x_0) = 0$.
54. დაამტკიცეთ, რომ X ბმული ტოპოლოგიური სივრცეა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ნებისმიერი უწვევტი ფუნქცია $f: X \rightarrow R$ ნებისმიერ მის ორ მნიშვნელობასთან ერთად დებულობს ამ მნიშვნელობებს შორის მოთავსებულ ყველა მნიშვნელობას.
55. დაამტკიცეთ, რომ თუ სრულად რეგულარული ბმული ტოპოლოგიური სივრცე შეიცავს ორ წერტილს მაინც, მაშინ მისი სიმძალე კონტინუუმზე არააყლებია.
56. დაამტკიცეთ, რომ თუ M და N ბმული ქვესიმრავლეებია X ტოპოლოგიური სივრცეში და $M \cap N \neq \emptyset$, მაშინ $M \cup N$ ბმულია.
57. დაამტკიცეთ, რომ თუ M და N ჩაკეტილი ქვესიმრავლეებია X ტოპოლოგიური სივრცეში, $M \cup N$ და $M \cap N$ ბმული სიმრავლეებია, მაშინ $M \cap N$ ბმულია.
58. დაამტკიცეთ, რომ თუ X პარაკომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეა, მაშინ ცილინდრი $X \times I$ ნორმალურია.
59. დაამტკიცეთ, რომ პირველ არათელად ω_1 რიგობრივ რიცხვზე ნაკლები რიგობრივი რიცხვების სიმრავლე ინტერვალბით როგორც ბაზით წარმოქმნილი ტოპოლოგიური სტრუქტურით არაა პარაკომპაქტური.
60. დაამტკიცეთ, რომ თუ X პარაკომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეა, მაშინ მისი ყოველი F_σ ტიპის ქვესიმრავლე პაქარაკომპაქტურია.

სავარჯიშოები დიფერენციალურ გეომეტრიაში.

1. M წერტილი თანაბრად მოძრაობს ON წრფეზე, რომელიც თანაბრად ბრუნავს O წერტილის გარშემო. შეადგინეთ წერტილის ტრაექტორიის განტოლება (ხრახნული წირი).

2. OL წრე თანაბარი კუთხური α სიქარით ბრუნავს O წერტილის ირგვლივ, M წერტილი მოძრაობს OL წრეზე სიქარით, რომელიც პროპორციულია $|OM|$ მანძილის. შეადგინეთ წერტილის ტრაექტორიის განტოლება (აღიარებული სივრცე).
3. α რადიუსის წრე მიგორავს წრეზე სრიალის გარეშე. შეადგინეთ იმ M წერტილის ტრაექტორიის განტოლება, რომელიც ხისტადა მიმაგრებული წრეზე და წრის ცენტრიდან დაშორებულია d მანძილით (ციკლოიდა).
4. r რადიუსის წრეწირი მიგორავს სრიალის გარეშე R რადიუსიან წრეწირზე გარედან. შეადგინეთ იმ M წერტილის ტრაექტორიის განტოლება, რომელიც მდებარეობს მგორავ წრეწირზე (ეპიციკლოიდა).
5. r რადიუსის წრეწირი მიგორავს სრიალის გარეშე R რადიუსიან წრეწირზე შიგნიდან. შეადგინეთ იმ M წერტილის ტრაექტორიის განტოლება, რომელიც მდებარეობს მგორავ წრეწირზე (ჰიპოციკლოიდა).
6. იპოვეთ წირი, რომელიც მოცემულია განტოლებით $r = r(t)$, $c < t < d$, თუ ვიცით, რომ $r' = \lambda(t)a$. $\lambda(t) > 0$, სადაც $\lambda(t)$ უწყვეტი ფუნქციაა, a კი არანულოვანი მუდმივი ვექტორი.
7. იპოვეთ წირი, რომელიც მოცემულია განტოლებით $r = r(t)$, $-\infty < t < \infty$, თუ ვიცით, რომ $r'' = a$, სადაც a არანულოვანი მუდმივი ვექტორია
8. აჩვენეთ, რომ $F = k \frac{mr}{\|r\|^3}$ ცენტრალური ძალის გაღვნიტ M წერტილი მოძრაობს მეორე რიგი წირზე.
8. ლამტიკეთ, რომ ელექტრონის მოძრაობა მუდმივ მაგნიტურ ველში განისაზღვრება დიფერენციალური განტოლებით: $r''(t) = r'(t) \times H$, სადაც $H = \text{const}$ მაგნიტური ველის დაძაბულობაა. აჩვენეთ, რომ ამ დროს ელექტრონი მოძრაობს ხრახნულ წირზე.
9. რა კუთხით გადაიკეთებიან წირები: $x^2 + y^2 = 8$, $y^2 = 2x$.
10. რა კუთხით გადაიკეთებიან წირები: $x^2 + y^2 = 8x$, $y^2 = \frac{x^3}{2-x}$.
11. რა კუთხით გადაიკეთებიან წირები: $x^2 = 4y$, $y = \frac{8}{x^2 + 4}$.
12. იპოვეთ შემდეგი პარამეტრიზირებული წირების ეკვივალენტური ბუნებრივად პარამეტრიზირებული წირები და სიგრძეები:
- ა) $y = a \operatorname{ch}(\frac{x}{a})$, ბ) $y = x^{\frac{3}{2}}$, გ) $y = x^2$, დ) $y = \ln x$, ე) $r = a(1 + \cos \phi)$,
- ვ) $r(t) = (a(t - \sin t), a(t - \cos t))$, ზ) $r(t) = (a(\cos t + t \sin t), a(\sin t - t \cos t))$, თ) $y = e^x$
13. იპოვეთ სმდეგი პარამეტრიზირებული წირის სიგრძე:
- $$x = -f'(\alpha) \sin \alpha - f''(\alpha) \cos \alpha$$
- $$y = f'(\alpha) \cos \alpha - f''(\alpha) \sin \alpha$$
14. Oz ღერძის ირგვლივ ბრუნავს წრეწირი, რომელიც მოცემულია განტოლებით $x = a + b \cos v$, $z = b \sin v$, $0 < b < a$. შეადგინეთ ამ ბრუნვითი ზედაპირის განტოლება.
15. შეადგინეთ იმ ზედაპირის (კატენოიდი) განტოლება, რომელიც მიიღება $y = a \operatorname{ch}(\frac{x}{a})$

ჯაჭეწირის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო.

16. შეადგინეთ იმ ზედაპირის (ფსევდოსფერო) განტოლება, რომელიც მიიღება

$$y = (a \ln t g(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}) - a \sin t, a \cos t); -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \quad \text{წირის(ტრაქტრისის) ბრუნვითისი ასიმპტოტის}$$

გარშემო.

17. გამოთვალეთ მეტრიკა სტიანდარტულ ერთეულოვან სფეროზე E^3 -ში:

ა) ღეკარტის კოორდინატებში,

ბ) სფერულ კოორდინატებში.

18. გამოთვალეთ მეტრიკა სტიანდარტულ ერთეულოვან $t^2 - x^2 - y^2 = 1$ ფსევდოსფეროზე $R_{1,2}^3$ -ში კოორდინატებით t, x, y :

ა) ღეკარტის კოორდინატებში x, y ,

ბ) კოორდინატებში φ, χ , სადაც ρ, φ, χ სფერული კოორდინატებია $R_{1,2}^3$ -ში.

19. გამოთვალეთ შემდეგი პარამეტრიზირებული წირების სიმრუდები:

ა) $y = \sin x$ (სინუსოიდა) წვეროებში,

ბ) $y = a \operatorname{ch}(\frac{x}{a})$ (ჯაჭე წირი),

გ) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (ღეწნისკატა),

ღ) $r = a(1 + \cos \varphi)$ (კარდიოიდა),

ე) $r = a\varphi$ (არქიმედეს სირალი),

ე) $r(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$ (ასტროიდა),

ზ) $r(t) = (a(t - \sin t), a(t - \cos t))$ (ციკლოიდა).

20. იპოვეთ a და b ნახევარღერძების მქონე ელიფსის სიმრუდე წვეროებში.

21. იპოვეთ იმ პარამეტრიზირებული წირის სიმრუდე, რომელიც მოცემულია განტოლებით:

$$F(x, y) = 0$$

22. იპოვეთ იმ პარამეტრიზირებული წირის სიმრუდე, რომელიც მოცემულია დიფერენციალური განტოლებით: $p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$.

23. შეცვალეთ პარამეტრი $r(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ სრახნულ წირზე ნატურალური პარამეტრით.

24. შეცვალეთ პარამეტრი $r(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ წირზე ნატურალური პარამეტრით.

25. შეცვალეთ პარამეტრი $r(t) = (cht, sh t, t)$ სრახნულ წირზე ნატურალური პარამეტრით.

26. იპოვეთ სიმრუდე და გრესა შემდეგი პარამეტრიზირებული წირების:

ა) $r(t) = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$,

ბ) $r(t) = (2t, \ln t, t^2)$,

გ) $r(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t)$,

ღ) $r(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$,

ე) $r(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$.

27. იპოვეთ სიმრუდე და გრესა პარამეტრიზირებული წირისა, რომელიც მოცემულია განტოლებებით:

$$x^2 + z^2 - y^2 = 1.$$

$$y^2 - 2x + z = 0$$

$M(1,1,1)$ წერტილში.

28. იპოვეთ სიმრუდე და გრესხა პარამეტრიზირებული წირისა, რომელიც მოცემულია განტოლებებით:

$$x + shx = \sin y + y,$$

$$z + e^z = x + \ln(1+x) + 1 = 0$$

$M(0,0,0)$ წერტილში.

29. იპოვეთ ფრენის რეპერი

$$y = y(x),$$

$$z = z(x)$$

პარამეტრიზირებული წირისათვის.

30. იპოვეთ ფრენის რეპერი $r(t) = (t^2, 1-t, t^3)$ პარამეტრიზირებული წირისათვის.

იპოვეთ ხრახნული წირის ფრენის რეპერი.

31. დაწერეთ შემდეგი წირების ნატურალური განტოლებები:

$$a) \quad x = a \cos^3 t,$$

$$y = a \sin^3 t;$$

$$b) \quad y = x^{\frac{1}{2}};$$

$$g) \quad y = x^2;$$

$$d) \quad y = \ln x;$$

$$e) \quad y = e^x;$$

$$e) \quad x = a(\ln t g \frac{t}{2} + \cos t),$$

$$y = a \sin t;$$

$$ზ) \quad r(t) = a(1 + \cos \varphi);$$

$$x = a(\cos t + t \sin t)$$

$$თ) \quad y = a(\sin t - t \cos t)$$

32. დაამტკიცეთ, რომ $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$ ბრტყელი პარამეტრიზირებული წირია.

დაამტკიცეთ, რომ სერეული ნამრავლი $[\gamma, \beta, \frac{d}{ds} \beta] = \chi$, სადაც γ მთავარი ნორმალა, β

ბინორმალა, χ წირის გრესხა.

33. დაამტკიცეთ, რომ თუ წირი რეგულარულია და მისი სიმრუდე ნოლის ტოლია მაშინ ეს წირი წრფეა.

34. დაამტკიცეთ, რომ თუ წირის ბინორმალა მუდმივია, მაშინ წირი ბრტყელია

35. დაამტკიცეთ, რომ თუ წირი ბირეგულარულია და მისი გრესხა ნოლის ტოლია მაშინ ეს წირი ბრტყელია.

36. გამოვთვალოთ შემდეგი პარამეტრიზირებული ზედაპირების პირველი კვადრატული ფორმები:

ა) $r = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v)$ (სფერო),

ბ) $r = (a \cos u \cos v, b \sin u \cos v, c \sin v)$ (ელიფსოიდი),

გ) $r = (a v \cos u, a v \sin u, c v)$ (კონუსი),

დ) $r = (a \cos u, a \sin u, c v)$ (ცილინდრი).

37. გამოვთვალოთ შემდეგი პარამეტრიზირებული ზედაპირების პირველი კვადრატული ფორმები:

ა) $r = \rho(s) + \lambda e$, $e = \text{const}$, (ცილინდრული ზედაპირი),

ბ) $r = v \rho(s)$ (კონუსური ზედაპირი),

გ) $r = \rho(s) + \gamma(s) \cos \varphi + \beta(s) \sin \varphi$ (არხული ზედაპირი)

დ) $r = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \phi(v))$ (ბრუნვითი ზედაპირი),

ე) $r = ((a + b \cos v) \cos u, (a + b \cos v) \sin u, b \sin v)$ (ტორი),

ვ) $r = (v \cos u, v \sin u, kv)$ (პელიკოიდი),

ზ) $r = \rho(s) + \lambda \gamma(s)$ (მთავარ ნორმალთა ზედაპირი),

თ) $r = \rho(s) + \lambda \beta(s)$ (ბინორმალთა ზედაპირი).

38. იპოვეთ პარამეტრიზირებული

$$x = a \sin u \cos v,$$

$$y = a \sin u \sin v,$$

$$z = a \left(\ln \frac{u}{2} + \cos u \right).$$

ზედაპირის (ბელტრამის ფსევდოსფეროს) პირველი კვადრატული ფორმა.

39. იპოვეთ კუთხე $v = u + 1$, $u = 3 - u$ წირებს შორის, რომლებიც მდებარეობენ ზედაპირზე:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = u^2$$

40. სიბრტყეზე კოორდინატებით (u, v) მოცემულია მეტრიკა $ds^2 = du^2 + 2du^2 + 2dv^2$ იპოვეთ კუთხე $v = 2u$ და $v = -2u$ წირებს შორის.

იპოვეთ კუთხე $v = 2u + 1$ და $v = -2u + 1$ წირებს შორის სიბრტყეზე კოორდინატებით (u, v) თუ მეტრიკა მოცემულია მატრიცით:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

41. შეამოწმეთ, რომ სიბრტყეზე კოორდინატებით (u, v) მატრიცი

$$G = \frac{R^2}{(1 + u^2 + v^2)^2} \begin{pmatrix} 1 + v^2 & -uv \\ -uv & 1 + u^2 \end{pmatrix}$$

განსაზღვრავს მეტრიკას და იპოვეთ $v = u$ წირის სიგრძე.

42. შეამოწმეთ, რომ სიბრტყეზე კოორდინატებით (u, v) მატრიცი

$$G = \frac{R^2}{(1-u^2-v^2)^2} \begin{pmatrix} 1+v^2 & -uv \\ -uv & 1+u^2 \end{pmatrix}$$

განსაზღვრავს მეტრიკას და იპოვეთ $v=0$ წირის სიგრძე, როდესაც $-1 < u < 1$.

43. მოცემულია ზედაპირი $r = (u \sin v, u \cos v, v)$ იპოვეთ $0 < u < \sqrt{1-v}, 0 < v < v_0$.

მრუდწირული სამკუთხედის:

ა) ფართობი,

ბ) გვერდების სიგრძე,

გ) კუთხეების სიდიდე.

44. იპოვეთ შემდეგი პარამეტრიზებული ზედაპირების მეორე კუადრატული ფორმები:

$r = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v)$ (სფერო),

ბ) $r = (a \cos u \cos v, b \sin u \cos v, c \sin v)$ (ელიფსოიდი),

გ) $r = (a \cos u, b \sin u, cv)$ (კონუსი),

დ) $r = (a \cos u, a \sin u, cv)$ (ცილინდრი).

45. დაამტკიცეთ, რომ სიბრტყის ნებისმიერი პარამეტრიზაციისას მისი მეორე კუადრატული ფორმა უდერის ნოლს.

46. ვთქვათ მოცემულია ბრენითი ზედაპირი $r(u, \varphi) = (x(u), \rho(u) \cos \varphi, \rho(u) \sin \varphi)$.

იპოვეთ:

ა) ამ ზედაპირის მეორე კუადრატული ფორმა,

ბ) გაუსის სიმრუდე,

გ) საშუალო სიმრუდე.

47. დაამტკიცეთ, რომ თუ ზედაპირის გაუსის და საშუალო სიმრუდეები ნულია, მაშინ ეს ზედაპირი სიბრტყეა ან მისი ნაწილი.

48. ვთქვათ წირი მოცემულია $\rho = \rho(s)$ ბენებრივი პარამეტრიზაციით, და $r(s)$ მისი ერთეულოვანი მხები ვექტორია. იპოვეთ ამ წირის ერთეულოვანი მხები ვექტორებით აღწერილი ზედაპირის $r(s, u) = \rho(s) + ur(s)$, $u > 0$ გაუსისა და საშუალო სიმრუდეები, თუ ამ წირის სიმრუდე და გრეხა ყველგან განსხვავებულია ნულისაგან.

49. იპოვეთ $z = f(x, y)$ ზედაპირის გაუსის სიმრუდე და გრეხა.

50. იპოვეთ სიმრუდეები მთავარი მიმართულებებით $y = xtg \frac{z}{a}$ განტოლებით მოცემული ზედაპირისათვის.

51. იპოვეთ გაუსის და საშუალო სიმრუდეები ზედაპირისათვის:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = u + v$$

52. იპოვეთ გაუსის და საშუალო სიმრუდეები ზედაპირისათვის:

$$x = 3u + 3uv^2 - u^3, \quad y = v^3 - 3v - 3u^2v, \quad z = 3(u^2 - v^2)$$

5 განსაზღვრეთ

$$a) T_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad b) T_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \text{ ტენზორთა ვალენტობები იმ წერტილებში, სადაც } f \text{ ფუნქციის}$$

გრადიენტ ნულის ტოლია,

ბ) T_{ij}' წრფივი ოპერატორის მატრიცის კომპონენტები,

გ) T_{ij} ორადწრფივი ფორმის მატრიცის კომპონენტები.

53. ვაჩვენოთ, რომ

$$\delta_i^j = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

ტენზორის ვალენტობაა (1,1)

54. ვაჩვენოთ, თუ რომ მატრიცი $g_{ij}(x)$ არაგადავარებული, სიმეტრიული და დადებითად განსაზღვრულია $x_1, x_2, \dots, x_n$ კოორდინატთა სისტემაში, მაშინ იგი ასეთივე იქნება ამ კოორდინატთა სისტემის ნებისმიერი რეგულარული გარდაქმნით მიღებულ კოორდინატთა სისტემაში.

55. განსაზღვრეთ V_n^m ტენზორთა ექვტორული სივრცის განზომილება.

56. დაამტკიცეთ, რომ $(2,0)$ ვალენტობის ტენზორი ცალსახად წარმოდგინება სიმეტრიული და ირიბსიმეტრიული ტენზორების ჯამის სახით. აჩვენეთ, რომ $(3,0)$ ვალენტობის ტენზორებისათვის ეს ასე არაა.

57. თუ რიცხვთა კრებული $S^{i_1 \dots i_p}$ ისეთია რომ ფიქსირებული $q < p$ ნატურალური რიცხვისათვის

$S^{i_1 \dots i_p} T_{j_1 \dots j_q}$ ტენზორია ნებისმიერი $T_{j_1 \dots j_q}$ სახის ტენზორისათვის, მაშინ

$S^{i_1 \dots i_p}$ ტენზორია.

58. დაამტკიცეთ, რომ თუ g_{ij} სიმეტრიული ტენზორია b^{ij} ირიბსიმეტრიული, მაშინ

$$g_{ij} b^{ij} = 0.$$

59. იპოვეთ $T_{21}^1 = e_1 \otimes e^1 \otimes e^2 + e_2 \otimes e^1 \otimes e^2$ კოორდინატები ბაზისში

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

60. იპოვეთ $(e_1 + e_2) \otimes (e_1 - e_2)$ კოორდინატები.

61. გამოიყენეთ $e_3 \otimes e^1$ ტენზორით განსაზღვრული წრფივი ოპერატორი $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ ექვტორზე.

62. დაამტკიცეთ, რომ თუ Γ_μ^k და Y_μ^k ბმებია გლეუ მრავალსახეობაზე, მაშინ

ა) $\Gamma_\mu^k + Y_\mu^k$ ბმაა ამავე მრავალსახეობაზე.

ბ) თუ Γ_μ^k და Y_μ^k ბმებს აქვთ ერთიდა იგივე გეოდეზიურები, მაშინ $\alpha \Gamma_\mu^k + \beta Y_\mu^k$ ბმასაც იგივე გეოდეზიური აქვს, თუ $\alpha + \beta = 1$,

გ) ვაჩვენოთ, რომ ორი ბმის სხვაობა (გრეზა) $\Gamma_\mu^k - Y_\mu^k$ (1,2) ტიპის ტენზორია დაყველა

(1.2) ტიპის ტენსორი შეიძლება ორი ბმის სხვაობად წარმოვადგინოთ.

63. ვანეწით, რომ კოვარიანტული წარმოებული რაიმე წირის გასწვრივ დამოკიდებულია მხოლოდ ბმათა კოეფიციენტების მნიშვნელობაზე ამ წირზე.

64. გამოვთვალოთ კრისტოფელის კოეფიციენტები ევკლიდის მეტრიკისა პოლარულ კოორდინატებში სიბრტყეზე.

65. გამოვთვალოთ კრისტოფელის სიმბოლოები მეტრიკისათვის

$$ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2).$$

66. გამოვთვალოთ კრისტოფელის სიმბოლოები სფეროზე მეტრიკისათვის

$$a) ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad b) ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

67. გამოვთვალოთ კრისტოფელის სიმბოლოები ლობანეცკის სიბრტყეზე მეტრიკისათვის

$$a) ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \quad b) ds^2 = \frac{4(dr^2 + r^2 d\varphi^2)}{(1 - r^2)^2}.$$

68. გამოვთვალოთ კრისტოფელის სიმბოლოები

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, hv)$$

ჰელსკოიდისათვის.

69. გამოვთვალოთ კრისტოფელის სიმბოლოები

$$r(u, v) = (ach \frac{u}{a} \cos v, ash \frac{u}{a} \sin v, u)$$

კატენოიდზე.

70. გამოვთვალოთ, რა კუთხით შემობრუნდება მხები ვექტორი სფეროზე პარალელური გადატანის დროს:

a) $\theta = \theta_0$ ანუ პარალელის გასწვრივ.

b) $\varphi = \varphi_2$ ანუ მერიდიანის გასწვრივ.

71. გამოვთვალოთ, რა კუთხით შემობრუნდება მხები ვექტორი ბრუნვით ზედაპირზე პარალელური გადატანის დროს პარალელის გასწვრივ.

a) $\theta = \theta_0$ ანუ პარალელის გასწვრივ.

b) $\varphi = \varphi_2$ ანუ მერიდიანის გასწვრივ.

72. დაამტკიცეთ:

$$a) \Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^j} \ln g = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \ln \sqrt{g};$$

$$b) \nabla_j T^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} T^i),$$

$$c) \nabla_j T^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} T^i) + \Gamma_{jk}^i T^k$$

73. დაამტკიცეთ, რომ გეოდეზიური წირი ორგანზომილებიან ზედაპირზე ევკლიდეს E^3 სივრცეში სრულად ხასიათდება მისი გეოდეზიური სიმრუდის ნულთან ტოლობით თვითოეულ წერტილში

74. დაამტკიცეთ, რომ სიბრტყის გეოდეზიური წირები მხოლოდ წრეებია.

75. დაამტკიცეთ, რომ მერიდიანები ბრუნვით ზედაპირზე წარმოადგენენ გეოდეზიურ წირებს.
 76. დაამტკიცეთ, რომ პარალელი ბრუნვით ზედაპირზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება გეოდეზიური, როდესაც მერიდიანის მხები ზედაპირის ყველა წერტილში პარალელურია ბრუნვის ღერძისა.

77. იპოვეთ გეოდეზიურიები:

ა) ორ განზომილებიანი სფეროსი,

ბ) ცილინდრული ზედაპირის E^3 -ში,

გ) წრიული კონუსის $x^2 + y^2 = z^2$

78. იპოვეთ $r = (v \cos u, v \sin u, kv)$ პელიკოიდი გეოდეზიური წირები

79. იპოვეთ გეოდეზიური წირები ზედაპირისა $dz^2 = v(du^2 + dv^2)$ პირველი კეადრატული ფორმით.

80. იპოვეთ $r = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ხრახნული წირის გეოდეზიური სიმრუდე

$r = (v \cos u, v \sin u, kv)$ პელიკოიდეზე.

81. გამოთვალეთ სკალარული სიმრუდე:

ა) R რადიუსიანი სფეროსი E_3 -ში,

ბ) T^2 ტორისა E_3 -ში, როგორც ბრუნვითი ზედაპირისა.

გ) T^2 ტორისა $E_4 = C^2(z, w)$ -ში, რომელიც მოცემულია განტოლებებით: $|z|^2 + |w|^2 = 1$, $|z| = |w|$.

დ) ლობანეცის სიბრტყის,

ე) სწორი წრიული კონუსისა E_3 -ში,

ვ) ცილინდრული ზედაპირისა E_3 -ში,

ზ) R რადიუსიანი S^n სფეროსი E^{n+1} -ში.

82. გამოთვალეთ სიმრუდის ტენზორი S^2 სფეროსი სფერულკოორდინატებში.

83. დაამტკიცეთ, რომ, რიჩის ტენზორი ორგანზომილებიანი ზედაპირებისათვის პროპორციულია მეტრიკული ტენზორის.

84. დაამტკიცეთ, რომ ევკლიდეს სამგანზომილებიანი სივრცის ორგანზომილებიანი ზედაპირის სიმრუდის ტენზორი გამოითვლება ფორმულით:

$$R_{\mu\nu}^{\lambda} = K(g_{\mu\nu}g^{\lambda\lambda} - g_{\mu\lambda}g^{\lambda\nu}).$$

85. დაამტკიცეთ, რომ თუ დიფერენციალური ფორმები $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p \in V'$ წრფივად

დამოკიდებულია, მაშინ ფორმა $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \wedge \phi_p = 0$.

86. გამოთვალეთ შემდეგი დიფერენციალური ფორმების გარე დიფერენციალი:

ა) $z^2 dx \wedge dy + (z^2 + 2y) dx \wedge dz$,

ბ) $13x dx + y^2 dy + xyz dz$,

გ) $(x + 2y^3)(dz \wedge dx + \frac{1}{2} dy \wedge dz)$

დ) $(x dx + y dy) / x^2 + y^2$

87. ვანიენოთ, რომ გრინის სტოქსის და გაუს-ოსტროგრადის ფორმულები E_3 წარმოადგენენ კერძო შემთხვევას სტოქსის განზოგადებული ფორმულისა გლეუ მრავალსახეობაზე.

88. გამოთვალეთ ინტეგრალი $\Omega = x^2 dx \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$ დიფერენციალური ფორმისა

$x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$ განტოლებებით განსაზღვრულ ზედაპირზე მდებარე

$-1 < u < 1$, $-1 < v < 1$ კუადრატზე. კოორდინატთა სისტემა (u, v) იგულისხმება დადებითად ორიენტირებული.

89. ვიპოვოთ ფუნქციის გრადიენტ სფერულ კოორდინატებში:

ა) $u(r, \theta, \varphi) = r^2 \cos \theta$,

ბ) $u(r, \theta, \varphi) = 3r^2 \sin \theta + e^r \cos \varphi - r$.

90. გამოთვალეთ ეპტორული ველის დივერგენცია, და როტორი სივრცეში ეკლიდეს და სფერულ კოორდინატებში.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. П.С. Александров, Б.А.Пасиньков Введение в теорию размерности. Москва, „Наука“, 1973 г.
2. А.В. Архангельский В.М. Пономарев Основы общей топологии в задачах и упражнениях. Москва, „Наука“, 1974 г.
3. Д.Ж. Келли Общая топология. Москва, „Наука“, 1981 г.
5. Р. Энгелькинг Общая топология. Москва, „Мир“, 1986 г.
6. А.С. Мищенко, А.Т.Фоменко Курс дифференциальной геометрии и топологии. Учебник, Москва, „Наука“, 1980 г.
7. П.С. Александров Введение в общую теорию множеств и функций Москва, „Гостехиздат“, 1948 г.
8. А.Н. Колмогоров, С. В. Фомин Элементы теории функции и функционального анализа. Москва, „Наука“, 1971 г.
9. К. Куратовский Топология. т. 1,2, Москва, „Мир“, 1966 г.
10. Дифференциальная геометрия. под редакцией А.С. Феденко, Минск, издательство БГУ 1982 г.
11. И.Я. Бекельман, А.П. Вернер, Б.Е. Кантор Введение в дифференциальную геометрию в «целом». Москва, „Наука“, 1973 г.
12. С. Стернберг Лекции по дифференциальной геометрии. Москва, „Мир“, 1970 г.
13. Б.А. Дубровин, А.П. Новиков, А.Т. Фоменко Современная геометрия методы и приложения. Москва, „Наука“, 1986 г.
14. М.М. Постников Гладкие многообразия. Москва, „Наука“, 1987 г.
15. В.И. Смирнов Курс высшей математики. т.2. Москва, „Наука“, 1974 г.
16. Г.Е. Шилов Математический анализ функций нескольких вещественных переменных. Москва, „Наука“, 1972 г.
17. Четырехмерная риманова геометрия. Семинар Артура Бессе 1978-79 гг. Москва, „Мир“, 1985 г.
18. Дж. Бим, П. Ерлих Глобальная лоренцева геометрия. Москва, „Мир“, 1985 г.
19. А.С. Мищенко, Ю.П. Соловьев Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. Москва, “Физматлит” 2001г.
20. Сборник задач по дифференциальной геометрии. Под редакцией А.С.Феденко, Москва, “Наука” 1979 г.
21. Manfredo do Carmo Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, 1976.
22. Manfredo do Carmo Riemannian geometry 1932.
23. Walter Poor Differential geometric structures 1982.
24. John M. Lee Riemannian manifolds 1997.
25. Serge Lang Fundamentals of differential geometry 1999
26. John M. Lee Introduction to topological manifolds 2000.
27. John M. Lee Introduction to smooth manifolds 2002.
28. Shlom Sternberg Curvature in mathematics and physics 2012.
29. Peter Petersen Riemannian geometry 1998.
30. Michael S. Searcoid Metric Spaces 2006.
31. William A. Sutherland Introduction to Metric and Topological Spaces 1975.
32. I.M. Singer Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry 1976.
33. Theodore W. Gamelin Introduction to Topology 1983.
34. James R. Munkres Topology 1999.
35. George F. Simmons Introduction to Topology and Modern Analysis 1963.

- 36. Lynn Arthur Steen Counterexamples in Topology 1970.
- 37. John G. Hocking Topology 1961.
- 38. Klaus Jänich Topology 1980.
- 39. Glen E. Bredon Topology and Geometry 1993.
- 40. M.A. Armstrong Basic Topology 1979.
- 41. Theodor Brocker Introduction to Differential Topology 1982.
- 42. Victor W. Guillemin Differential Topology 1974.

შინაარსი

ნაწილი I

ტოპოლოგია

ზოგიერთი ცნება სიმრავლეთა თეორიიდან	2
§1. ტოპოლოგიური სტრუქტურა, ტოპოლოგიური სივრცე	8
§2. ტოპოლოგიური ოპერაციები	11
§3. ტოპოლოგიური სივრცის ბაზა და წინა ბაზა	15
§4. უწყვეტი ასახვები	18
§5. მეტრიკული სტრუქტურა, მეტრიკული სივრცე	19
§6. სივრცეთა განცალგებლობა	25
§7. ტოპოლოგიური კონსტრუქციები	38
§8. ტოპოლოგიურ სივრცეთა ბმულობა	50
§9. კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეები	53
§10. კომპაქტურ მეტრიზებად სივრცეთა თვისებები	59
§11. ლოკალურად კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეები	65
§12. პარაკომპაქტური სივრცეები, ერთეულის დაყოფა	71
§13. ასახვათა სივრცეები	75
§14. ტოპოლოგიურ სივრცეთა განზომილება	85
§15. განზომილება მეტრიზებად სივრცეებში	94

ნაწილი 2

დიფერენციალური გეომეტრია

§1. ტოპოლოგიური და დიფერენცირებადი მრავალსახეობები	112
§2. რიმანის(ფსევდორიმანის) მრავალსახეობა	125
§3. რიმანის(ფსევდორიმანის) მეტრიკათა მაგალითები	129
§4. პარამეტრიზირებული წირი ევკლიდეს სივრცეში	134
§5. პარამეტრიზირებული ზედაპირი ევკლიდეს სივრცეში	147
§6. პარამეტრიზირებული ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმა, ზედაპირის შინაგანი გეომეტრია	152
§7. პარამეტრიზირებული ზედაპირის მეორე კვადრატული ფორმა, ზედაპირის გაუსისა და საშუალო სიმრუდეები	160
§8. თეორემები მატრიუ პარამეტრიზირებულ ზედაპირებზე	168
§9. გეოდეზიური წირი ზედაპირზე და მასთან დაკავშირებული კოორდინატთა სისტემები	184
§10. მუდმივი სიმრუდის მქონე ორგანზომილებიანი ზედაპირები	190

§11. ტენზორის ცნება, მოქმედებანი ტენზორებზე-----	192
§12. ტენზორული ველი მრავალსახეობაზე-----	197
§13. მრავალსახეობა აფინური ბმით-----	199
§14. სიმრუდის ტენზორი მრავალსახეობაზე აფინური ბმით-----	205
§15. დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა მრავალსახეობებზე-----	220
სავარჯიშოები ზოგად ტოპოლოგიაში-----	229
სავარჯიშოები დიფერენციალურ გეომეტრიაში-----	232
გამოყენებელი ლიტერატურა-----	242