

თეიმურაზ ბიორბაძე
მამული გუჭუხიშვილი
შალვა კირთაძე

კანონზომიერებები და ალგებრა

ქუთაისი 2020

სახელმძღვანელო მომზადებულია აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სწავლების მეთოდოლოგია დეპარტამენტში

წიგნი განკუთვნილია: უნივერსიტეტის ინტეგრირებული საბაკალავრო სამაგისტრო და დაწყებითი განათლების საბაკალავრო სპეციალობის სტუდენტებისათვის; მასწავლებლის სასერთიფიკაციო გამოცდების ჩაბარების მსურველთათვის, ასევე, საჯარო სკოლის მათემატიკის მასწავლებლებისთვის და მათემატიკით დაინტერესებული პირებისათვის.

რედაქტორი: ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის მათემატიკურ განათლებაში სამეცნიერო-კვლევითი ინსტიტუტის დირექტორი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი **თეიმურაზ გეფხვაძე**

რეცენზენტები: ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მათემატიკის დეპარტამენტის ხელმძღვანელი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი **ვლადიმერ ბალაძე**
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი **ქეთევან შაგვულიძე**
ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი **დადი მახარაძე**

წიგნი გამოიცა აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სარედაქციო-საგამომცემლო საბჭოს გადაწყვეტილებით და გამოდის პედაგოგიური ფაკულტეტის დაფინანსებით.

ISBN 978-9941-408-12-0

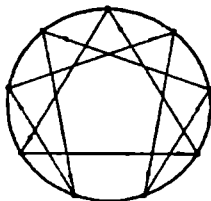
© აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა

"The Mathematical model can not be seen, they only exist in our imagination and they can be express by formulas."

Archimedes

„მათემატიკური მოდელი არაა ხეივანად დასაწერად, ისინი არსებობს მხოლოდ ჩვენს გონებაში და მათი გამოხატვა შეუძლებელია მათი ფორმალურობით გამოხატვა“

არქიმედე



"Life is good for two things, doing mathematics and teaching it."

Simon Denis Poisson

„სიკეთეა საკუთარი გონებით რაღაცის გაკეთება და მათთვის სწავლება“

სიმონ დენის პუასონი

აპტორეზისაგან

Y

წინამდებარე წიგნის ავტორები, თ.გიორგაძე, მ. ბუჭუხიშვილი, შ. კირთაძე, შეეცადეთ მოკრძალებული წვლილი შეგვეტანა ალგებრის საწყისი ელემენტების, მისი სწავლების მეთოდებისა და ზოგიერთი აქტუალური სიახლეების, სტუდენტებისა და მასწავლებლებისათვის გასაცნობად, ნაშრომ „კანონზომიერებები და ალგებრა“ წარმოდგენილი სახით.

სახელმძღვანელოში გადმოცემულია ალგებრის განვითარების ისტორიული ასპექტები, თვალსაჩინოდაა განხილული ელემენტარული მათემატიკის ცნებები.

წმინდა მათემატიკური თვალსაზრისით საინტერესოა ალგებრული გარდაქმნები და მათი თვისებები, თანაც ეს თვისებები ნაჩვენებია პრაქტიკულ მაგალითებზე.

ნაშრომში განხილულია, ელემენტარული მათემატიკისა და საერთოდ მათემატიკის ისეთი მნიშვნელოვანი საკითხები, როგორებიცაა: საინტერესო რიცხვები მათემატიკაში, სრულყოფილი რიცხვები, მეგობრული რიცხვები, სიმეტრიული ნამრავლები, ფიგურული რიცხვები, სამკუთხა რიცხვები, კვადრატული რიცხვები, ხუთკუთხა რიცხვები. აქვე განვიხილავთ: მთელ, რაციონალურ, ირაციონალურ და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეებს და ალგებრულ მოქმედებებს მათზე, ვახდენთ შესაბამის თვალსაჩინო ინტერპრეტაციებს.

სახელმძღვანელოში ასევე განხილულია რიცხვითი გამოსახულებები, განტოლებები, უტოლობები, განტოლებათა სისტემები, უტოლობათა სისტემები მათი ერთობლიობები, ამოხსნის გზები და ხერხები. აქვე ვიხილავთ ასახვებს, ფუნქციებს (წრფივი, წილად-

წრფივი და კვადრატული) და მათი გრაფიკების აგების ხერხებს.

წიგნში ასევე განხილულია: მიმდევრობები, პროგრესიები (არიით-მეტიკული, გეომეტრიული), აგრეთვე, მოდულური არითმეტიკის ელემენტები, სიდიდეები და მათი გაზომვა. ნაშრომს თან ერთვის ვრცელი საცნობარო მასასაღა საზომი ერთეულების შესახებ.

ნაშრომში ყოველი პარაგრაფის ბოლოს წარმოვადგინეთ სავარ-ჯიშოებისა და ტესტების სხვადასხვა ვარიანტები, სადაც მოცემუ-ლია მითითებები ზოგიერთი სავარჯიშოს ამოხსნაზე და საჭიროე-ბის შემთხვევაში აგებულია შესაბამისი ნახაზებიც. წიგნს თან ერ-თვის პრაქტიკული სავარჯიშოების პასუხები.

თეიმურაზ გიორგაძე
მამული ბუჭუხიშვილი
შალვა კირთაძე
2020 წელი

§1. ისტორიული ცნობები ალგებრის წარმოშობის შესახებ

ალგებრა – მათემატიკის ერთ-ერთი დარგია, რომელიც შეისწავლის სხვადასხვა სიდიდეებზე მოქმედებების ზოგად თვისებებს და ამ მოქმედებებთან დაკავშირებული განტოლებების ამოხსნას. ალგებრა აღმოცენდა არითმეტიკული ამოცანების ამოხსნის ზოგადი მეთოდების ძიების შედეგად. ალგებრის ამოცანები და მათი ამოხსნის მეთოდები ცნობილია უძველესი დროიდან.

ეს მეთოდები ითვალისწინებს განტოლებათა შედგენასა და ამოხსნას, რისთვისაც ალგებრაში ასოით აღნიშვნებს მიმართავენ. ეს საშუალებას იძლევა რიცხვებზე მოქმედებათა თვისებები გამოთვლისათვის უფრო მოხერხებული ფორმით გამოვსახოთ. სარგებლობს რა ასოითი აღნიშვნებით, ალგებრა შეისწავლის რიცხვითი სისტემების ზოგად თვისებებს და განტოლებათა საშუალებით ამოცანების ამოხსნის ზოგად მეთოდებს.

ალგებრის, მისი მეთოდებისა და სიმბოლიკის განვითარებამ დიდი გავლენა მოახდინა მათემატიკის ახალი დარგების, კერძოდ, მათემატიკური ანალიზის განვითარებაზე. კლასიკური ალგებრის აპარატის გამოყენება შესაძლებელია ყველგან, სადაც კი გვხვდება რიცხვთა გამრავლებისა და შეკრების ანალოგიური მოქმედებები. ეს მოქმედებები სრულიად სხვადასხვა ბუნების ობიექტებშიც შეიძლება წარმოებდეს.

ალგებრა თანამედროვე გაგებით, შეიძლება განისაზღვროს, როგორც მეცნიერება ამა თუ იმ ბუნების ობიექტებისაგან შედგენილი სისტემების შესახებ, რომლებშიც დადგენილი ოპერაციები თავისი თვისებებით მეტნაკლებად მსგავსია რიცხვთა შეკრებისა და გამრავლების მოქმედებებისა. ასეთ ოპერაციებს ალგებრული ოპერაციები ეწოდებათ.

ალგებრის სათავეები უძველესი დროიდან მომდინარეობს. ჯერ კიდევ 4000 წლის წინათ ბაბილონელმა სწავლულებმა იცოდნენ კვადრატული განტოლების ამოხსნა; ასევე ხსნიდნენ ორი განტოლებისაგან შედგენილ სისტემას. ისინი არ იყენებდნენ ასოით აღნიშვნებს და განტოლებები იწერებოდა სიტყვიერ

რი ფორმით.

უმარტივესი ალგებრული ოპერაციები - არითმეტიკული მოქმედებები ნატურალურ და დადებით რაციონალურ რიცხვებზე გეხვედება ადრინდელ მათემატიკურ ტექსტებში. ალგებრული იდეებისა და სიმბოლიკის განვითარებაზე მნიშვნელოვანი გავლენა მოახდინა ძველი ბერძენი მათემატიკოსის - დიოფანტეს „არითმეტიკაში“ (III ს. ჩვ. ერამდე).

არც ბაბილონელები და არც ძველი ბერძნები არ იხილაუდნენ უარყოფით რიცხვებს.

ჩვენს წელთაღრიცხვამდე 2000 წლის წინ ჩინელებიც ხსნიდნენ პირველი ხარისხის განტოლებებს და მათ სისტემებს, აგრეთვე კვადრატულ განტოლებებს. მათთვის ცნობილი იყო უარყოფითი და ირაციონალური რიცხვები. ვინაიდან ჩინურ დამწერლობაში ყოველი ნიშანი რაიმე ცნებას გამოხატავს, ამიტომ ჩინურ ალგებრაში არ იყო „შემოკლებული“ აღნიშვნები.

შემოკლებულ აღნიშვნებს ფართოდ იყენებდნენ ინდოელი მათემატიკოსები, როგორც უცნობი სიდიდეების, ისე მათი ხარისხების აღსანიშნავად, ოღონდ, ეს აღნიშვნები წარმოადგენდნენ შესაბამისი სიდიდეების სახელების პირველ ასოებს. ინდოელი მათემატიკოსები ფართოდ იყენებდნენ ირაციონალურ და უარყოფით რიცხვებს. უარყოფით რიცხვებთან ერთად ისინი იყენებდნენ ნულსაც, რომელიც ადრე აღნიშნავდა რიცხვის არ არსებობას.

ინდოელი ავტორები ალგებრის საკითხებს იყენებდნენ ასტრონომიულ თხზულებებში. დამოუკიდებელ დისციპლინად ალგებრა შეიქმნა არაბი სწავლულების მიერ. ალგებრის, როგორც დამოუკიდებელი მეცნიერების ფუძემდებლად უნდა ჩაითვალოს შუასაუკუნეების მეცნიერი მუჰამედ ალ-ხორეზმი (ხორეზმელი).

პირველი წიგნი ალგებრაში - „მოკლე წიგნი ალ-ჯაბრის და ალ-მუკაბალას აღრიცხვის შესახებ“ - დაწერა არაბმა მეცნიერმა მუჰამედ ალ-ხორეზმმა (825). ამასთანავე, სიტყვა „ალ-ჯაბრი“ აღნიშნავდა მაკლების გადატანის ოპერაციას ერთი მხრიდან მეორეში; სიტყვასიტყვით მისი მნიშვნელობაა „შეესება“, „აღდგენა“, ეს ტერმინი ეწოდა მეცნიერებასაც. იგი ევროპაში გამოიყენეს უკვე XVIII საუკუნიდან. ზოგჯერ ალგებრაისტებს უწოდებ-

დნენ ქირურგებსაც, რომლებიც აღადგენდნენ სხეულის მოტეხილ ან ტრამეირებულ ნაწილს. ნიუტონი ალგებრას უწოდებდა „ზოგად არითმეტიკას“ (1707). ალხორეზმის წიგნს, როგორც სახელმძღვანელოს, განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს მათემატიკის ისტორიაში. სწორედ მისი გავლენით ალგებრა გაფორმდა, როგორც მეცნიერება განტოლებათა ამოხსნის შესახებ.

XII საუკუნეში ალ-ხორეზმის „ალგებრა“ ცნობილი გახდა ევროპაში და იგი ითარგმნა. ამ დროიდან იწყება ალგებრის განვითარება ევროპის ქვეყნებში, თუმცა, არც თუ სწრაფი ტემპით.

ალგებრული მოქმედებების ადრე არსებული უზარმაზარი სიტყვიერი აღწერილობის მაგივრად XV საუკუნის ბოლოს მათემატიკურ ნაწარმოებებში გაჩნდა ამჟამად მიღებული „+“ და „-“ ნიშნები, შემდეგ ხარისხის და ფესვის ნიშნები, ფრჩხილები. XVI საუკუნის ბოლოს ფ. ვიეტიმ პირველმა დაიწყო ამოცანაში მოცემული როგორც უცნობი, ასევე ცნობილი სიდიდეების ასოით აღნიშვნა. XVII საუკუნის შუა წლებში ძირითადად ჩამოყალიბდა თანამედროვე ალგებრული სიმბოლიკა, რითაც თითქმის დამთავრდა ალგებრის „წინაისტორია“. სიმბოლური აღნიშვნების შემოტანას დიდი მნიშვნელობა ჰქონდა. ფორმულათა ენამ განაპირობა უმაღლესი მათემატიკის სწრაფი განვითარება. თანამედროვე მათემატიკაში ალგებრა გასცდა ელემენტარული მათემატიკის საზღვრებს – ეს არის მეცნიერება, რომელიც შეისწავლის სიმბოლური ფორმებით ჩაწერილ ოპერაციებს.

სიდიდეებზე მოქმედების მრავალი თვისება, წესი და ალგებრული ხერხები იცოდნენ ძველი საბერძნეთის მეცნიერებმა; თუმცა ყოველივეს ისინი გამოხატავდნენ გეომეტრიული ხერხებით. „გეომეტრიული“ ალგებრის კვალი დღესაც ჩანს ტერმინებში – რიცხვის „კუადრატი“, რიცხვის „კუბი“ და ა.შ. გეომეტრიული ფორმებიდან ალგებრის გათავისუფლების პროცესი და ასოითი სიმბოლიკის შექმნა ჯერ კიდევ ძველ საბერძნეთში დაიწყო (დიოფანტე და სხვ.), გაგრძელდა ინდოეთში და შუა საუკუნეების ევროპაში.

ალგებრაში ასოით სიმბოლოებზე ოპერაციების შემოღება ნიშნავდა ცულადი სიდიდეების მათემატიკის დასაწყისს.

მათემატიკა წარმოუდგენელია სპეციალური აღნიშვნების

(სიმბოლოების) გარეშე. მათემატიკური სიმბოლოები საშუალებას იძლევიან განვაზოგადოდ ესა თუ ის მათემატიკური დებულება, წესი, თეორემა და სხვ.

ასოებისა და მათემატიკური ნიშნების გამოყენება დაიწყო მათემატიკის ხანგრძლივი განვითარების შედეგად. იგი არსებითად მხოლოდ XV ს-ში დამკვიდრდა. მანამდე ყველა სიდიდე და მოქმედება, ამოცანის პირობა და პასუხი თითქმის მხოლოდ სიტყვიერად გამოიხატებოდა. ამიტომ, იმ დროის ალგებრას რიტორიკულს, ანუ სიტყვიერს უწოდებენ.

XV საუკუნის მეორე ნახევარში იტალიაში, გერმანიაში და ევროპის სხვა ქვეყნებში შემოდებულ იქნა ზოგიერთი ალგებრული სიმბოლიკა და დაიწყო ასოთა გამოყენება. მათემატიკოსები ცდილობდნენ შეემცირებინათ სიმბოლოების რიცხვი და შემოედოთ ერთგვაროვანი აღნიშვნები. სიტყვების შემოკლებისა და სხვადასხვა ნიშნების გამოგონების შედეგად დიდი ძვრები მოხდა სიმბოლოების შემოღებაში. ამაში დიდი როლი შეასრულა გერმანელი მათემატიკოსის მიხეილ შტიფელის წიგნმა „სრული არითმეტიკა“ (1544). შტიფელი იყო თვითნასწავლი მათემატიკოსი; მიუხედავად ამისა, იგი იცნობდა თავისი დროის ყველა მათემატიკურ მიღწევას. მან პირველმა შემოიღო ფესვის ნიშანი მთელი მანვენებლით, შემოიღო მრგვალი ფრჩხილები და სიმბოლოები მრავალი უცნობისათვის.

წიგნის ბეჭდვის გამოგონებამ დიდი გავლენა მოახდინა მათემატიკის განვითარებაზე. პირველი ნაბეჭდი მათემატიკური თხზულება იყო ლუკა პაჩიოლის „არითმეტიკის, გეომეტრიის, შეფარდების და პროპორციების ცოდნის ნაკრები (ჯამი)“, სადაც შემოტანილმა აღნიშვნებმა ფართო გავრცელება ჰპოვეს, მაგრამ მაინც მოუხერხებელნი იყვნენ. ამიტომ მათემატიკოსები განაგრძობდნენ უფრო მოხერხებული და მარტივი აღნიშვნების ძიებას. განსაკუთრებით აღსანიშნავია ფრანგი მედიცინის ბაკალავრის ნიკოლა შუკეს, იტალიელი რაფაელ ბომბელის, ნიდერლანდელი მათემატიკოსის სიმონ სტევენის და სხვათა ღვაწლი. ყოველივე დაავირობინა ფრანსუა ვიეტის ტრაქტატმა „ანალიზური ხელოვნების შესავალი“. ეს იყო გადამწყვეტი ნაბიჯი გადადგმული რიტორიკული ალგებრიდან ახალ, სიმბოლურ ალგებრაზე.

ალგებრული სიმბოლოების შემქმნელად ითვლება გამოჩენილი ფრანგი მათემატიკოსი, პროფესიით იურისტი, ფრანსუა ვიეტი. იგი ჯერ კიდევ ახალგაზრდობაში გაეცნო სამყაროს აგების კოპერნიკისეულ სისტემას და ასტრონომიით დაინტერესდა. მან განიზრახა დიდი ასტრონომიული ტრაქტატის დაწერა, რომელსაც მთელი თავისი ცხოვრება მოანდომა. ასტრონომიის შესასწავლად ვიეტის მიერ ჩატარებულმა ალგებრულმა გამოკვლევებმა მნიშვნელოვანი შედეგები მოგვცა, რამაც საფუძველი დაუდო ალგებრის შემდგომ განვითარებას. მან თავისი იდეები ჩამოაყალიბა დიდ ნაშრომში „ანალიზური ხელოვნების შესავალი“ (ასევე მოიხსენიებენ: „ანალიზის ხელოვნება, ანუ ახალი ალგებრა“, ტურინი, 1591 წ.), რომელიც იქცა ალგებრაში ყოველისმომცველი ტრაქტატის საწყისად. მართალია, ვიეტის სიმბოლიკას ჰქონდა ზოგიერთი ნაკლი, მაგრამ, მიუხედავად ამისა, ეს იყო უდიდესი წინგადადგმული ნაბიჯი.

ვიეტი ცდილობდა შეექმნა ახალი მეცნიერება, რომელსაც ანალიზურ ხელოვნებას უწოდებდა. მისი აზრით ეს მეცნიერება უნდა ფლობდეს გეომეტრიის სიმკაცრეს და ალგებრის ოპერატიულობას; ასეთი მეცნიერების წინაშე უძღურია ნებისმიერი ამოცანა. მართალია, ვიეტიმ წიგნი ვერ დაამთავრა, მაგრამ ძირითადი ნაწილი დაწერილი იყო. ამ ძირითადმა ნაწილმა განსაზღვრა ახალი დროის მთელი მათემატიკის განვითარება.

თავისი ახალი სიმბოლური ალგებრა (*logistica speciosa*) ვიეტიმ დაუპირისპირა ადრინდელ რიცხვით ალგებრას (*logistica numerosa*). ვიეტი თვლიდა, რომ პირველია ალგებრა, რომელიც საშუალებას იძლევა ვიმოქმედოთ საგანთა მთელ რიგ კლასებზე; მეორეა არითმეტიკა, რომელიც მოქმედებს უბრალოდ რიცხვებზე.

ძველი ბერძნების გეომეტრიული ალგებრის შესაბამისად, ვიეტიმ ყველა შესაძლო სიდიდე დაჰყო საფეხურებად. პირველ საფეხურს მან მიაკუთვნა „სიგრძე“, ანუ ერთი განზომილების სიდიდე. ისინი შეიძლება შეკრიბო ან გამოაყლო – დიდი სიდიდან პატარა სიდიდე. ამ ორი ოპერაციის შედეგად მიიღება იმავე საფეხურის სიდიდე. თუ გადავამრავლებთ პირველი საფეხურის ორ სიდიდეს, შედეგად მივიღებთ „ფართობს“ - მეორე სა-

ფეხურის სიდიდეს, ანუ ორი განზომილების სიდიდეს. შემდეგი საფეხური იყო „მოცულობა“ შესამე განზომილების სიდიდებით. ასეთი საფეხურები ვიეტიმ მიიღო უამრავი, უფრო მაღალი განზომილების სიდიდებით. შემდეგ, ვიეტიმ ყველა სიდიდე აღნიშნა ანბანის ასოებით. რადგანაც სიდიდეები არიან ცნობილნი და უცნობები, ამიტომ ცნობილების აღსანიშნავად მან შეარჩია თანხმონები – B, C, D, ... ; უცნობები აღნიშნა ხმოვანი ასოებით: A, E, ... ; საძიებელი სიდიდე – N (Numerus) ასოთი, მისი კვადრატით – Q (Quadratus) ასოთი, კუბი – C (Cubus) ასოთი. იგი ასე წერდა:

$$NC - 3N \text{ aequatur } 1, \text{ ე.ი. } x^3 - 3x = 1.$$

ამ აღნიშვნების შედეგად ვიეტის შექმლო განტოლებები პარამეტრებით ჩაეწერა (და არა კონკრეტული რიცხვითი მნიშვნელობებით), ე.ი. ამოცანათა მთელი კლასი, რომლებიც შეიძლება ამოიხსნას ერთი წესის დახმარებით. აქ განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ის, რომ განტოლებებთან ერთად შეიძლება ფორმულაც ჩაიწეროს.

მათემატიკური ფორმულები – ეს არ არის მხოლოდ თეორემების მოკლე ჩაწერა, ფორმულებზე შეიძლება იმოქმედო და მიიღო ახალი ფორმულები და დამოკიდებულებები. ასე რომ ასოთი აღრიცხვა საშუალებას იძლევა მსჯელობა შეეცვალოთ მექანიკური მოქმედებებით (გამოთვლებით); როგორც ლაიბნიცი შენიშნავს, იგი „განტვირთავს წარმოსახვას“.

ახლა ძნელია მათემატიკის წარმოდგენა ფორმულების გარეშე, მაგრამ იგი ასეთი იყო ვიეტამდე. შემდგომ XVII საუკუნეში, უკანასკნელი „შტრიხი“ დაუმატა რენე დეკარტმა თავის „გეომეტრიაში“, სადაც მან უარი თქვა ერთგვაროვნობის პრინციპზე.

ინგლისელი ჰარიოტი დიდ ასოებს ცვლის პატარა ასოებით. დეკარტმა წამოაყენა წინადადება, ცნობილი რიცხვები აღინიშნოს ლათინური ანბანის საწყისი ასოებით – a, b, c, ... ; ხოლო უცნობები – ლათინური ანბანის ბოლო ასოებით – x, y, z. დღეისათვის ჩვენ თითქმის ამ აღნიშვნებს ვიყენებთ.

უნდა აღინიშნოს ერთი მნიშვნელოვანი გარემოება. ხშირ

შემთხვევაში ახალი მათემატიკური სიმბოლოების გაერცელება-გამოყენებას ხელს უწყობდა ან უშლიდა სასტამბო (ტიპოგრაფიული) მოწყობილობების შესაბამისი ასო-ნიშნების არსებობის დონე. ახალი სიმბოლოების შემოღება ბევრჯერ ვერ განხორციელდა, რადგან ამისათვის პირველ ყოვლისა სტამბები უნდა აღჭურვილიყვნენ სათანადო ნიშნებით, რაც ხშირად ტექნიკურად რთულად განსახორციელებელი იყო. ზოგიერთი ნიშანი პრივილეგირებული ხდებოდა გარკვეული პირობების შედეგად. მაგალითად, მათემატიკის ისტორიის ზოგიერთი მკვლევარის აზრით, x ნიშნის უპირატესობა y და z ნიშნებთან შედარებით იმის შედეგია, რომ ლათინურ და ფრანგულ ენებში ასო x უფრო ხშირად იხმარება, ვიდრე y და z ასოები; ამიტომ სტამბებს x ასოს მარაგი უფრო მეტი ჰქონდათ, ვიდრე y და z ასოებისა. ამის გამო, მათემატიკურ შრომებში უცნობის აღმნიშვნელად უმეტესად x -ის გამოყენება დაიწყეს.

აღგებრული სიმბოლიკის შექმნა, რომელსაც ადგილი ჰქონდა იტალიაში, გერმანიაში, საფრანგეთში. ნიდერლანდებში და ინგლისში ძირითადად XVII ს-ში დამთავრდა. აღგებრული სიმბოლიკის განვითარებასა და სრულყოფას დიდად შეუწყო ხელი რენე დეკარტის, ისააკ ნიუტონის, ლეონარდ ეილერისა და სხვა მეცნიერთა შრომებმა.

მათემატიკურ სიმბოლოებს შეთანადებული აქვს ნებისმიერი ბუნების სხვა ობიექტი. როგორც მისი მნიშვნელობა. აუცილებელი არ არის, რომ სიმბოლო ჰგავდეს თავის მნიშვნელობას. სიმბოლოს მნიშვნელობა შეიძლება იყოს როგორც ფიზიკური საგანი ან მოვლენა, ისე აზროვნებისეული ობიექტი – საგანთა თვისება, მათ შორის არსებული მიმართება, საგნობრივი ვითარება. სიმბოლიკა ქმნის ცოდნის დაგროვების, შენახვისა და გადაცემის საშუალებას.

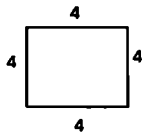
ციფრები (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) არის რიცხვების გამომსახველი პირობითი ნიშნები. მათემატიკის ისტორიაში ცნობილია მრავალი სხვადასხვა ციფრი, რომლებიც დროთა განმავლობაში სხვადასხვანაირად იცვლებოდა.

ინდოელი მათემატიკოსები ნიშანს, რომელიც აღნიშნავდა რაიმე თანრიგის არარსებობას, უწოდებდნენ სიტყვას „სუნია“ – ცარიელი. არაბებმა ეს ტერმინი გადათარგმნეს და მიიღეს სიტყვა „სიფრ“ – ნული. აქედან წარმოიშვა სიტყვა „ციფრი“, რომელიც შევიდა ევროპულ ლიტერატურაში. ეს სიტყვა თავდაპირველად აღნიშნავდა ნულს, შემდგომში (უკვე XV საუკუნიდან) ამ სიტყვას უწოდებდნენ ყველა რიცხვით ნიშანს. გაერცვლებული სახელწოდება „არაბული ციფრები“ ისტორიულად მცდარია, რადგან თელის ჩვენეულ ათობით სისტემას თავისი საწყისი სინამდვილეში ინდოეთში აქვს.

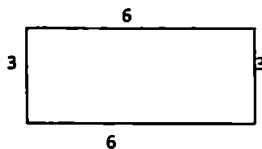
თავისთავად ყველა რიცხვი შესანიშნავია. ავიღოთ თუნდაც 2, აღსანიშნავია, რომ ეს, ერთადერთი ლუწი მარტივი რიცხვია. ავიღოთ 3, ეს რიცხვი გარდა იმისა, რომ პირველი კენტი მარტივი რიცხვია, იგი ერთადერთია, რომელიც მისი წინა ორი რიცხვის ჯამს უდრის: $1+2=3$.

ავიღოთ რიცხვთა წყვილი – 16 და 18, ისინი ერთი შეხედვით, ასე ეთქვათ, ჩვეულებრივი რიცხვებია. მართალია, 16 სრული კვადრატია, მაგრამ ასეთი ხომ უამრავი რიცხვია და ეს არ არის საბაბი, რომ 16-ს რაიმე უპირატესობა მივანიჭოთ სხვა რიცხვებთან შედარებით. განვიხილოთ შემდეგი გეომეტრიული ამოცანა: იპოვეთ მართკუთხედი, რომლის გვერდების სიგრძეები მთელი რიცხვებია და გარდა ამისა, მისი ფართობისა და პერიმეტრის გამომსახველი რიცხვები ერთმანეთის ტოლია. ასეთი მართკუთხედი ორად ორია: ერთი კვადრატი, რომლის ფართობი და პერიმეტრი 16-ის ტოლია, მეორე – მართკუთხედი, რომლის სიგრძეა 6 ერთეული და სიგანე კი – 3 ერთეული.

ი.ი. ფართობიცა და პერიმეტრიც 18-ია.



$$S=16 \text{ და } P=16$$



$$S=18 \text{ და } P=18$$

კიდევ მრავალი მსგავსი მაგალითის მოყვანა შეიძლება, როცა რიცხვი, ან რიცხვები გამოირჩევიან სხვა რიცხვებისაგან, ჩვენ მოვიყვანეთ ზოგიერთი საინტერესო რიცხვები, რომლებსაც აქვთ სპეციფიკური მახასიათებელი თვისებები:

1. **სრულყოფილი რიცხვები.** მოელ დადებით რიცხვს, რომელიც ტოლია ყველა თავისი გამყოფების ჯამისა ერთის ჩათვლით, გარდა თვით ამ რიცხვისა, სრულყოფილი რიცხვი ეწოდება.

მაგალითად, ერთეულებში სრულყოფილი რიცხვია 6:

$$6=1+2+3;$$

ათეულებში ერთადერთი სრულყოფილი რიცხვია 28:

$$28=1+2+4+7+14;$$

ასეულებში 496:

$$496=1+2+4+8+16+31+62+124+248$$

ათასეულებში ერთადერთი სრულყოფილი რიცხვია 8128:

$$8128=1+2+4+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4064.$$

პირველი მნიშვნელოვანი ნაბიჯი სრულყოფილი რიცხვების თეორიის ასაგებად ჯერ კიდევ ევკლიდემ გადადგა, რომელმაც თავის „საწყისებში“ (წიგნი IX) მოგვცა „სრულყოფილი რიცხვების“ მოსაძებნი ფორმულა. თუ ჯამი $P=1+2+2^2+2^3+\dots+2^{n-1}=2^n-1$ მარტივი რიცხვია, მაშინ $2^n-1(2^n-1)$ ყოველთვის იქნება სრულყოფილი რიცხვი. მაგალითად, თუ $n=5$, მაშინ $2^5-1=31$ მარტივი რიცხვია და მაშასადამე $2^5-1(2^5-1)=16\cdot 31=496$ იქნება სრულყოფილი რიცხვი.

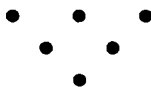
2^n-1 სახის მარტივ რიცხვებს ეწოდება XVIII საუკუნის ფრანგი მათემატიკოსის მარენ მერსენის რიცხვები.

მეხუთე სრულყოფილი რიცხვი 33550336 (როცა $n=12$) მხოლოდ XV საუკუნეში აღმოაჩინეს შემდგომი სრულყოფილი რიცხვები აღმოაჩინა მერსენმა. ევკლიდეს ფორმულით მოძებნილი

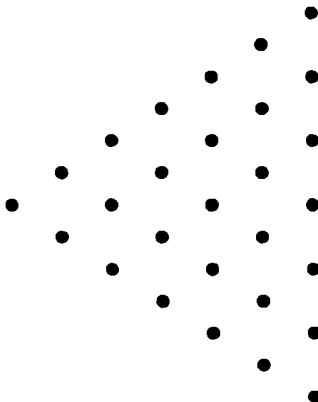
ყველა სრულყოფილი რიცხვი ღუწია. არსებობს თუ არა კენტი სრულყოფილი რიცხვი – უცნობია.

1957 წლისათვის უდიდესი ცნობილი სრულყოფილი რიცხვი იყო $2^{3216} \cdot (2^{3217} - 1)$. ელექტრული პროგრამის დახმარებით მოიძებნა დიდი სრულყოფილი რიცხვები: მაგალითად, 1962 წელს რიცხვი $2^{4422} \cdot (2^{4423} - 1)$, ხოლო 1965 წელს რიცხვი $2^{11212} \cdot (2^{11213} - 1)$.

სრულყოფილ რიცხვებს გააჩნიათ მთელი რიგი შესანიშნავი თვისებები. მაგალითად, ყველა სრულყოფილი რიცხვი „სამკუთხაა“; ეს ნიშნავს, რომ თუ ავიღებთ სრულყოფილი რიცხვის ტოლი ოდენობის ბურთულებს, ისინი შეიძლება ისე დავალაგოთ, რომ ტოლგვერდა სამკუთხედი მივიღოთ. მაგალითად, 6-თვის გვაქვს:



ასევე, 28-ისთვის გვექნება:



ე.ი. ყოველი სრულყოფილი რიცხვი $(1+2+3+\dots+n)$ ჯამის სახისაა.

ასევე ადვილი შესამჩნევია, რომ ყოველი სრულყოფილი რიცხვი, გარდა 6-ისა, არის კერძო ჯამი კენტი რიცხვების კუბების ჯამის მწკრივისა:

$$1^3+3^3+5^3+7^3+...$$

კიდევ ერთი თვისება; სრულყოფილი რიცხვების გამოყოფა შეგროვებული მნიშვნელობების ჯამი, თვით სრულყოფილი რიცხვის, როგორც თავის თავის გამოყოფის ჩათვლით, ყოველთვის 2-ის ტოლია. მაგალითად, 6-თვის გვაქვს:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{6+3+2+1}{6} = \frac{12}{6} = 2;$$

ხოლო 28-თვის:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = \frac{28+14+7+4+2+1}{28} = \frac{56}{28} = 2$$

2. მეგობრული რიცხვები. ისეთი ნატურალური რიცხვების წყვილს, რომელთაგან თითოეული ტოლია მეორის გამოყოფების ჯამისა მეგობრული რიცხვები ეწოდებათ. მაგალითად, 220 და 284:

$$220=1+2+4+71+142;$$

$$284=1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110.$$

ერთხელ პითაგორას ჰკითხეს – თუ ვის თვლიდა იგი თავის მეგობრად?! პითაგორამ უპასუხა: „იმას, ვინც არის ჩემი მეორე „მე“, როგორც რიცხვები 220 და 284“.

1747–1750 წლებში ლეონარდ ეილერმა ჩაატარა რიცხვების უნიკალური კვლევა და თავისი მეთოდით აღმოაჩინა 60 ახალი წყვილი მეგობრული რიცხვებისა.

ამჟამად ცნობილია დაახლოებით 1100 წყვილი მეგობრული რიცხვებისა.

20000-ის ფარგლებში მეგობრულ რიცხვთა წყვილებია:

$$220=2^2 \cdot 5 \cdot 11 \quad 284=2^2 \cdot 71;$$

$$1184=2^5 \cdot 37 \quad 1210=2 \cdot 5 \cdot 11^2;$$

$$2620=2^2 \cdot 5 \cdot 131 \quad 2924=2^2 \cdot 17 \cdot 43;$$

$$5020=2^2 \cdot 5 \cdot 251 \quad 5564=2^2 \cdot 13 \cdot 107;$$

$$6232=2^3 \cdot 19 \cdot 41 \quad 6368=2^5 \cdot 199;$$

$$10744=2^3 \cdot 17 \cdot 79 \quad 10856=2^3 \cdot 23 \cdot 59;$$

$$12285=3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \quad 14595=3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 139;$$

$$17296=2^4 \cdot 23 \cdot 47 \quad 18416=2^4 \cdot 1151.$$

3. სიმეტრიული ნამრავლები. დავაკვირდეთ შემდეგ ტოლო-

ბებს:

$$12 \cdot 42 = 24 \cdot 21,$$

$$102 \cdot 402 = 204 \cdot 201,$$

$$1002 \cdot 4002 = 2004 \cdot 2001,$$

$$10002 \cdot 40002 = 20004 \cdot 20001.$$

როგორც ვხედავთ, ციფრები ტოლობის ნიშნიდან სიმეტრიულადაა დალაგებული. სიმეტრიულ ტოლობათა ეს რიგი შეიძლება უსასრულოდ გავაგრძელოთ, თუ შევნიშნავთ, რომ ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$ რიცხვისათვის გვაქვს:

$$(10^n + 2) \cdot (4 \cdot 10^n + 2) = (2 \cdot 10^n + 4) \cdot (2 \cdot 10^n + 1).$$

შეიძლება მივიღოთ შემდეგი სიმეტრიული ნამრავლებიც:

$$26 \cdot 31 = 13 \cdot 62$$

$$206 \cdot 301 = 103 \cdot 602$$

$$2006 \cdot 3001 = 1003 \cdot 6002$$

$$20006 \cdot 30001 = 10003 \cdot 60002$$

სიმეტრიულ ტოლობათა ეს რიგიც შეიძლება უსასრულოდ გავაგრძელოთ, თუ შევნიშნავთ, რომ ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$ რიცხვისათვის გვაქვს:

$$(2 \cdot 10^n + 6) \cdot (3 \cdot 10^n + 1) = (10^n + 3) \cdot (6 \cdot 10^n + 2).$$

ეთქვას, $\overline{a00\dots 0b}$, $\overline{c00\dots 0d}$, $\overline{d00\dots 0c}$ და $\overline{b00\dots 0a}$ ოთხი $(n+1)$ -ნიშნა რიცხვებია. როგორ უნდა შეირჩეს a , b , c და d ციფრები, რომ ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის გვექონდეს:

$$\overline{a00\dots 0b} \cdot \overline{c00\dots 0d} = \overline{d00\dots 0c} \cdot \overline{b00\dots 0a}.$$

ცხადია, ეს ტოლობა შეიძლება ასეც ჩაეწეროს:

$$(10^n a + b)(10^n c + d) = (10^n d + c)(10^n b + a).$$

თუ ამ ტოლობას გარდაექმნით მივიღებთ:

$$(10^{2n} - 1) \cdot ac = (10^{2n} - 1) \cdot bd.$$

რადგან $10^{2n} - 1 \neq 0$, ამიტომ საბოლოოდ გვაქვს: $ac = bd$.

შეიძლება მოექცეზნოთ რიცხვთა სხვა წყვილებიც – მაგალითად, $28 \cdot 41 = 14 \cdot 82$, $63 \cdot 12 = 21 \cdot 36$, $48 \cdot 21 = 12 \cdot 84$, $31 \cdot 39 = 93 \cdot 13$ და ა.შ.

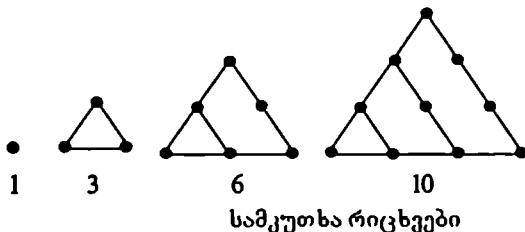
4. **ფიგურული რიცხვები.** პითაგორელები რიცხვებს გამოსახადნენ წერტილების სახით, რომლებსაც აჯგუფებდნენ გეომეტრი-

ულ ფიგურებად. ასე წარმოიშვა „ფიგურული რიცხვების“ ცნება. ამით ისინი ასახავენ კავშირს რიცხვებსა და სივრცის არეს შორის – გეომეტრია ემორჩილება არითმეტიკას. ფიგურულ რიცხვებს პითაგორელების შემდგომ შეისწავლიდნენ ბერძენი მათემატიკოსები – ერატოსფენი, პიპსიკლი, ნიკომახი, დიოფანტე და სხვ.

სამკუთხა რიცხვები – მიიღებიან ნატურალური რიცხვების თანმიმდევრობითი შეკრების შედეგად:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

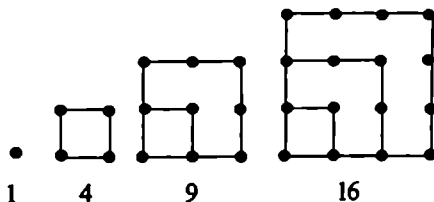
$$(\text{შემოვიღოთ აღნიშვნა} - T_n = \frac{n(n+1)}{2})$$



ფრანგმა მათემატიკოსმა ლიუკამ გამოთქვა მოსაზრება, რომ სამკუთხა რიცხვების განხილვაზე ადამიანი მივიდა ფრინველთა გუნდის გადაფრენაზე დაკვირვების შედეგად, როცა გადაფრენისას ფრინველები სამკუთხედის ფორმით განლაგდებიან.

კვადრატული რიცხვები არიან რიცხვები, რომლებიც კვადრატის ფართობს გამოსახავენ, ისინი მიიღებიან კენტი რიცხვების მიმდევრობითი შეკრების შედეგად:

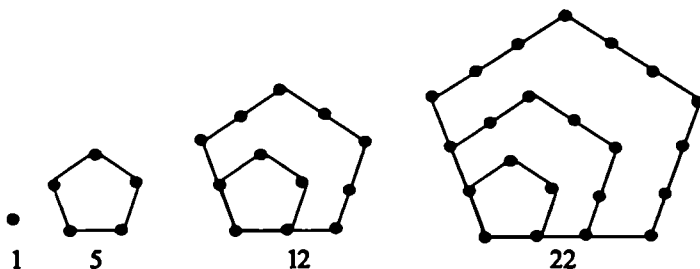
$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad (\text{აღენიშნოთ} - Q_n = n^2)$$



კვადრატული რიცხვები.

ხუთკუთხა რიცხვები:

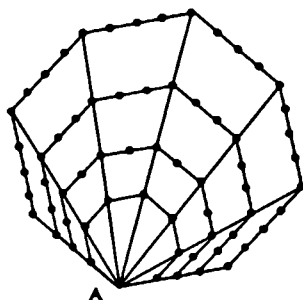
$$1+4+7+\dots+(3n-1)=\frac{n(3n-1)}{2} \quad (\text{აღენიშნოთ} - P_n=\frac{n(3n-1)}{2})$$



ხუთკუთხა რიცხვები.

ანალოგიურად მიიღება გამოსახულებანი სხვა მრავალკუთხა რიცხვებისთვისაც. ამოვხსნათ ზოგადი ამოცანა – ვიპოვოთ ნებისმიერი n -კუთხა რიცხვის ფორმულა.

ეთქვას $F_n^{(k)}$ არის n -ური k -კუთხა რიცხვი. განვიხილოთ მისი წარმომქმნელი წესიერი k -კუთხედი.



ამ წესიერი k -კუთხედის ერთ-ერთი A წვეროდან გავევლოთ დიაგონალები. ცხადია, გვექნება $k-3$ ოდენობის დიაგონალი, რომელიც აღებულ k -კუთხედს $k-2$ ოდენობის სამკუთხედად ჰყოფს. თითოეული ეს სამკუთხედი n -ურ სამკუთხა T_n რიცხვთან არის დაკავშირებული. ე.ი. სულ $(k-2) \cdot T_n$ წერტილი უნდა გექონდეს, მაგრამ არ უნდა დაგვაფიქვდეს, რომ ზოგიერთი წერტილი, სახელდობრ დიაგონალებზე მდებარე წერტილები ორჯერ დავთვა-

ლეთ – ყოველი დიაგონალი ხომ ორი მეზობელი სამკუთხედის გვერდია, ხოლო A წერტილი, რომელიც ყველა სამკუთხედს ეკუთვნის $(k-2)$ -ჯერ არის სათვალავში აღებული. მაშასადამე, დავაზუსტოთ წერტილთა რაოდენობა – k -კუთხედში თითოეულ დიაგონალზე n წერტილია, თუ მათ A წერტილს ჩამოვაშორებთ $n-1$ წერტილი დარჩება. გამოდის, რომ $(n-1) \cdot (k-3)$ წერტილი ორ-ორჯერაა დათვლილი, ხოლო A წერტილი $(k-2)$ -ჯერ არის სათვალავში აღებული. მაშასადამე, წერტილთა საერთო რაოდენობა რომ მივიღოთ $(k-2) \cdot T_n$ -ს უნდა გამოვაკლოთ $(n-1) \cdot (k-3)$ და $(k-3)$ -ის ჯამი; მაშასადამე $F_n^{(k)}$ -თვის გვაქვს:

$$F_n^{(k)} = (k-2) \cdot T_n - [(n-1) \cdot (k-3) + k-3] = (k-2) \cdot T_n - n \cdot (k-3).$$

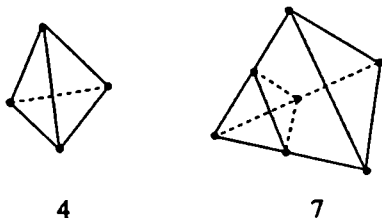
თუ აქ გავითვალისწინებთ, რომ $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ გვექნება:

$$F_n^{(k)} = \frac{n}{2} ((k-2) \cdot n - k + 4).$$

თუ ამ ფორმულაში k -ს მიეცემთ, კერძოდ, $k=3,4,5,\dots$ მნიშვნელობებს, შესაბამისად T_n -ის, Q_n -ის P_n -ის და ა.შ. ფორმულებს მივიღებთ. მაგალითად, ექვსკუთხა მეხუთე რიცხვი იქნება ($k=6$, $n=5$):

$$F_5^{(6)} = \frac{5}{2} \cdot ((6-2) \cdot 5 - 6 + 4) = 45.$$

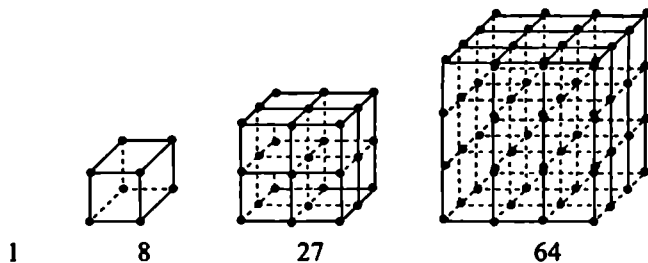
არსებობენ ეგ. წოდ. სივრცული ფიგურული რიცხვებიც – ტეტრაედრული რიცხვები – $3n-2$ სახის ნატურალური რიცხვებია, ე.ი. რიცხვები: 1, 4, 7, 10,



ტეტრაედრული რიცხვები წარმოადგენენ ფიგურული რიცხვების კერძო შემთხვევას და შეადგენენ მესამე რიგის არიომეტი-

კულ მწკრივს. სახელწოდება წარმოიშვა იქიდან, რომ მათი საშუალებით გამოისახება ბურთულების რიცხვი, რომლებიც სივრცეში ეწყობა ტეტრაედრის ფორმით.

კუბური რიცხვები: 1, 8, 27, 64, $n^3, \dots$



მათი საშუალებით შეიძლება გამოვსახოთ ბურთულების რიცხვი, რომლებიც სივრცეში ეწყობა კუბის ფორმით.

5. საშუალო. ეთქვას, მოცემულია $a_1, a_2, \dots, a_n$ რიცხვები ამ სასრულ მიმდევრობას მოკლედ a რიცხვები ეწოდოთ. მათ შორის უმცირესი m -ით, ხოლო უდიდესი M -ით აღვნიშნოთ $m = \min(a_1, a_2, \dots, a_n)$ და $M = \max(a_1, a_2, \dots, a_n)$. ყოველ μ რიცხვს, რომელიც $m \leq \mu \leq M$ უტოლობას აკმაყოფილებს a რიცხვების საშუალო ეწოდება.

ამ განსაზღვრებაში არაფერია ნათქვამი a რიცხვების შესახებ. საერთოდ, ეს რიცხვები ნებისმიერია; ამასთანავე, ზოგიერთი საშუალო მხოლოდ დადებითი a რიცხვებისათვის არის განსაზღვრული, ამიტომ ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმობთ, რომ ყველა a რიცხვი დადებითია.

მოცემული a რიცხვების საშუალო არითმეტიკული ეწოდება $A(a)$ რიცხვს, რომელიც ტოლია ამ რიცხვების ჯამი გაყოფილი მათი ოდენობის რიცხვზე:

$$A(a) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

დავამტკიცოთ, რომ $A(a)$ არის a რიცხვების საშუალო, მართლაც გვაქვს:

$m \leq a_1 \leq M, m \leq a_2 \leq M, \dots, m \leq a_n \leq M$, ამიტომ სამართლიანია:

$$nm \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq nM.$$

ამრიგად, $m \leq A(a) \leq M$, ე.ი. $A(a)$ a რიცხვების საშუალოა და მას საშუალო არითმეტიკულს უწოდებენ.

თუ უტოლობებს:

$$m \leq a_1 \leq M, m \leq a_2 \leq M, \dots, m \leq a_n \leq M$$

გადავამრავლებთ, მივიღებთ:

$$m^n \leq a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \leq M^n$$

რადგან a რიცხვები დადებითია, ამიტომ

$$m \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq M$$

აქედან ჩანს, რომ $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$ არის საშუალო, მას საშუალო გეომეტრიული ეწოდება და $G(a)$ -თი აღვნიშნოთ:

$$G(a) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

ცხადია, საშუალო გეომეტრიულის განსაზღვრისას არსებითია, რომ ყველა a რიცხვი დადებითია (ყოველ შემთხვევაში არაუარყოფითი).

მოცემული a რიცხვების საშუალო ჰარმონიული $H(a)$ შემდეგი ტოლობით განისაზღვრება:

$$H(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

ის, რომ $H(a)$ საშუალოა, შეიძლება მაგალითად ასე დამტკიცდეს:

რადგან ყველა a დადებითია, ამიტომ

$$\frac{1}{m} \geq A\left(\frac{1}{a}\right) \geq \frac{1}{M}, \text{ ან რაც იგივეა}$$

$$m \leq \frac{1}{A\left(\frac{1}{a}\right)} \leq M, \text{ მაგრამ ცხადია, რომ}$$

$$\frac{1}{A\left(\frac{1}{a}\right)} = H(a) \text{ და მაშასადამე, წინა უტოლობათა ძალით:}$$

$$m \leq H(a) \leq M.$$

ვინაიდან a რიცხვები დადებითია, ამიტომ სამართლიანია

$m^2 \leq a_1^2 \leq M^2, m^2 \leq a_2^2 \leq M^2, \dots, m^2 \leq a_n^2 \leq M^2$; აქედან ჯერ გვაქვს:

$nm^2 \leq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \leq nM^2$; ხოლო შემდეგ $m \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \leq M$

$$M_2(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \quad \text{ამ რიცხვს } a \text{ რიცხვების საშუა-}$$

ლო კვადრატული ეწოდება.

სხვათა შორის $M_2(a)$ რიცხვი ნებისმიერი a რიცხვებისათვის შეიძლება მოიძებნოს, ოღონდ $M_2(a)$ ამ შემთხვევაში არის არა a რიცხვების საშუალო კვადრატული, არამედ მათი მოდულების საშუალო კვადრატული:

$$M_2(a) \leq \sqrt{\frac{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2}{n}}.$$

ე.ი. $M_2(a)$ ამ შემთხვევაში $|a|$ რიცხვების საშუალოა. საშუალოებს შორის არსებობს შემდეგი დამოკიდებულება:

$$m \leq H(a) \leq G(a) \leq A(a) \leq M_2(a) \leq M$$

ამასთანავე ტოლობას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა a რიცხვი ერომანეთის ტოლია.

მაგალითად: $a_1=2; a_2=3; a_3=5; a_4=6$; ამ რიცხვებისათვის გვექნება: $m=2; M=6$;

$$A(a) = \frac{2+3+5+6}{4} = 4; \quad G(a) = \sqrt[4]{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} \approx 3,66;$$

$$H(a) = \frac{4}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}} = 3\frac{1}{3}; \quad M_2(a) = \sqrt{\frac{2^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2}{4}} \approx 4,3$$

$$(ცხადია გვაქვს $2 < 3\frac{1}{3} < 3,66 < 4,3 < 6$).$$

საშუალო ხარისხოვანი (r რიგის საშუალო) ეწოდება $M_r(a)$ -ს,

$$\text{სადაც } M_r(a) = \sqrt[r]{\frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n}}.$$

r ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი რიცხვია. ვაჩვენოთ, რომ $M_r(a)$ არის a რიცხვების საშუალო.

მართლაც, ეთქვათ ჯერ რომ $r > 0$, გვაქვს:

$$m' \leq a'_1 \leq M', \quad m' \leq a'_2 \leq M', \dots, m' \leq a'_n \leq M',$$

$$nm' \leq a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n \leq nM',$$

$$m \leq \left(\frac{a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n}{n} \right)^{\frac{1}{r}} \leq M.$$

ანალოგიურად, თუ $r < 0$, მაშინ $m' \geq a'_1 \geq M'$,

$$m' \geq a'_2 \geq M', \dots, m' \geq a'_n \geq M',$$

$$nm' \geq a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n \geq nM',$$

$$m \geq \left(\frac{a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n}{n} \right)^{\frac{1}{r}} \geq M.$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $r < 0 \Rightarrow m \leq M_r(a) \leq M$,

ამრიგად: $M_r(a) = \sqrt[r]{\frac{a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n}{n}}$ არის a რიცხვების საშუალო,

მას r რიგის საშუალო ეწოდება. ეს საშუალო არის არა მარტო კვადრატული, არამედ არითმეტიკული და აგრეთვე ჰარმონიული საშუალოების განზოგადოებაც. მართლაც ცხადია, რომ

$$M_1(a) = A(a), \quad M_{-1}(a) = H(a)$$

თუ $r=0$, მაშინ $M_r(a)$ განსაზღვრული არ არის – ზემოთ დაწვრილი $M_r(a)$ -ს გამოსათვლელი ფორმულა აზრს კარგავს. ამასთანავე, ზღვართა თეორიის ზოგიერთი ფორმულის გამოყენებით შეიძლება დამტკიცდეს, რომ როცა r ნულისაკენ მიისწრაფვის $M_r(a)$ -ს აქვს ზღვარი და იგი $G(a)$ -ს ტოლია. ამიტომაც პირობითად შეიძლება მივიღოთ, რომ $M_0(a) = G(a)$. ამრიგად, თუ $r \neq 0$

$$M_r(a) = \left(\frac{a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n}{n} \right)^{\frac{1}{r}}, \text{ ხოლო თუკი } r=0, \text{ მაშინ } M_r(a) = G(a). \text{ შეიძლება დავწეროთ, რომ}$$

$$M_{-1}(a) \leq M_0(a) \leq M_1(a) \leq M_2(a)$$

ე.ი. r -ის ზრდასთან ერთად $M_r(a)$ -ც იზრდება (ეს შედეგი შეიძლება განზოგადდეს ნებისმიერი r და s რიცხვებისათვის: თუ $r < s \Rightarrow M_r(a) \leq M_s(a)$, ამასთანავე, ტოლობას მაშინ და მხოლოდ მაშინ აქვს ადგილი, როცა ყველა a რიცხვი ერთმანეთის ტოლია).

შეიძლება გავეცნოთ კიდევ ერთ საშუალოს – აწონილ საშუალოს. ეთქვას, a რიცხვებთან ერთად მოცემულია დადებითი $p_1, p_2, \dots, p_n$ რიცხვები. აღვნიშნოთ:

$$A_p(a) = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n}{p}$$

$A_p(a)$ -ს a რიცხვების აწონილი საშუალო ეწოდება. ადვილად დაერწმუნდებით იმაში, რომ $A_p(a)$ მართლაც a რიცხვების საშუალოა:

$mp_1 \leq a_1 p_1 \leq Mp_1, mp_2 \leq a_2 p_2 \leq Mp_2, mp_n \leq a_n p_n \leq Mp_n$, აქედან გვაქვს:

$m(p_1 + p_2 + \dots + p_n) \leq a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n \leq M(p_1 + p_2 + \dots + p_n)$,

ე.ი. $m \leq \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \leq M$. ტოლობას მაშინ აქვს ადგილი,

თუ ყველა a რიცხვი ერთმანეთის ტოლია.

სახელწოდება, აწონილი საშუალო, მექანიკური შინაარსის საფუძველზე წარმოიშვა. თუ რიცხვითი ღერძის $a_1, a_2, \dots, a_n$ წერტილებში შესაბამისად $p_1, p_2, \dots, p_n$ მასებია მოთავსებული, მაშინ $A_p(a)$ არის a რიცხვების საშუალო არითმეტიკული – $A(a)$, თუ ყველა p ტოლია.

6. რიცხვებთან დაკავშირებული ცრურწმენები და ხატოვანი გამონათქვამები.

არსებობს მრავალი ცნობა სხვადასხვა რიცხვების სიმბოლურ მნიშვნელობასთან დაკავშირებულ მოვლენაზე: ზოგჯერ ასეთი რიცხვი ხდებოდა რაიმე ცრურწმენის საფუძველი, რაც ზოგიერთი ხალხის ენაში დღესაც არის შემორჩენილი.

ბაბილონელი ასტრონომები (იგივე ასტროლოგები) დაკვირვებას ახდენდნენ შეიდი ციური სხეულის (მზე, მთვარე, მერკური, ვენერა, მარსი, იუპიტერი და სატურნი) მოძრაობაზე და ამის მიხედვით წინასწარმეტყველებდნენ მომავალზე. შესაძლოა აქედან დაიწყო რიცხვი 7-ის განსაკუთრებული როლი. ამის მაგალითი მრავალია: ებრაელთა „ძველ აღქმაში“ განსაკუთრებული როლი აქვს რიცხვს 7-ს შეიდი, რომელიც მათ უდიდეს რიცხვად მიაჩნდათ; ბერძნებისათვის – სამყაროს შეიდი საოცრება; ფრანგი ყველაზე დამაჯერებელ მტკიცებულებას ამბობს სიტყვებით – „მტკიცება, როგორც შეიდი“; რუსებს აქვთ გამონათქვამი – „შეი-

დი ძიძის ხელში ბავშვი ბრმა გამოვაო“.

გალილეის მოწინააღმდეგეებს მოჰყავდათ სხვადასხვა ფაქტი (მაგალითად, ცხოველის თავში არის შვიდი ფანჯარა, არსებობს მხოლოდ შვიდი მეტალი, ცისარტყელას აქვს შვიდი ფერი და სხვა) და ამის საფუძველზე ასაბუთებდნენ, რომ არსებობს მხოლოდ შვიდი პლანეტა.

ხალხის წარმოდგენით ცა იყო შვიდი ერთიმეორეზე წამოდგმული ფენა; სულ უკანასკნელ მეშვიდე (ცაზე, ანუ ყველაზე მაღლა სუფედა ღმერთი, აქ იყო მისი ტახტი, ხოლო მეშვიდე ცის იქით არაფერი არ იყო. აქედან გვაქვს – მეშვიდე ცამდე მიღწეული – ე.ი. ღმერთთან ასული, უზომოდ ბედნიერი, გახარებული, მეტისმეტად კმაყოფილი, უნეტარესი, ამიტომ არსებობს გამოთქმა: „სიხარულისაგან მეშვიდე ცაზეაო“. ვეფხისტყაოსანში – 1309-ე სტროფში გვხვდება: „რისხვით მობრუნდა ბორბალი ჩვენზედა ცისა შვილისა“.

საქართველოში, კერძოდ, ქართლ-კახეთში შემორჩენილია გამოთქმები „შვიდმაისის წვიმაზე“, რომლის მიხედვითაც, თუ მაისის შხაჟუნა წვიმა ემოხვეოდა შვიდ რიცხვს, მაშინ იგი ღიდად სასარგებლო იყო მოსავლისათვის (არსებობს დღესასწაული – შვიდმაისობა, გორთან სოფელ ხიდისთავში). პოეტ გიორგი ლეონიძეს აქვს ერთი ასეთი სტრიქონი: „შვიდი მაისის წვიმით მოვრალი“. არსებობს ანდაზური გამოთქმა: „შვიდი ფეხი ყანა გქონდესო და შვიდ მაისის წვიმა მოხვდესო, იმედი გქონდესო“.

ანტიკურ საბერძნეთში გავრცელებული იყო ცრურწმენა ლუწ და კენტ რიცხვებზე. მაგალითად, კენტი რიცხვები სიმბოლურად მამრობითის (მამაკაცის) საწყისი იყო, ხოლო ლუწი რიცხვები – მდედრობითისა (ქალისა). ასე რომ, რიცხვი 5, როგორც პირველი მამრობითი რიცხვისა (ერთი დაკავშირებული იყო ღმერთთან) და პირველი მდედრობითი რიცხვის ჯამი – ცოლქმრობის, ანუ კავშირის სიმბოლური ნიშანი იყო. შესაძლოა, ამის შედეგიც იყო, რომ პითაგორელთა კავშირის სიმბოლური ნიშანი იყო წრეში ჩახაზული ხუთქიმიანი ვარსკვლავი – პენტოგრამა.

არანაკლებ გავრცელებულია ცრურწმენები 13 რიცხვზე. ჩვენთვის უცნობია საიდან დაედო „ტაბუ“ ამ რიცხვს, თითქოს 13

ნაესი რიცხვია. არსებობს ცრურწმენის მრავალი შესაძლო ახსნა: მაგალითად, „ახალ აღქმაში“ წერია, რომ საიდუმლო სერობას ესწრებოდა 13 სტუმარი და მეცამეტე იუდა (მოღალატე) იყო; ზოგიერთ ქვეყანაში ითვლიდნენ დუჟინობით (რომელიც შედგებოდა 12 საგნისაგან), ხოლო 13 საგნის ერთობლიობას უწოდებდნენ „ეშმაკის დუჟინას“, ე.ი. ზედმეტ საგანს.

ამერიკის ზოგიერთი ქალაქის ქუჩებში არ არის სახლი 13 ნომრით, ასევე მაღლივ სახლებში არ არის მეცამეტე სართული, ხოლო ზოგიერთ სასტუმროში ოთახი მეცამეტე ნომრით. მრავალ თვითმფრინავში არ არის ადგილი 13 ნომრით, ასევე მრავალ გემზე არ არსებობს 13 ნომრის კაიუტა. 1930 წელს ლონდონის ხელმძღვანელობამ, მოსახლეობის მნიშვნელოვანი ნაწილის თხოვნით, სახლებიდან ჩამოხსნა მეცამეტე ნომრები.

არც ბიზანტიაში და არც დასავლეთში არ აგებდნენ ტაძრებს 13 გუმბათით. ძველ რუსეთში კი, პირიქით, ეს არა მარტო დასაშვები, არამედ დაკანონებული იყო. პირველი ტაძარი 13 გუმბათით მუხის ხისაგან აგებული იყო ნოვგოროდში 939 წელს (სოფიის ტაძარი). ასეთივე ტაძარი აიგო პოლოცკში. კიევში აგებული ტაძარი ასევე ცამეტგუმბათიანია. ძველ რუსეთში ასეთი ტაძრების აგება მიმართული იყო რუსეთის კულტურული და პოლიტიკური ერთიანობის იდეის გამოსახატად და ადამიანთა ცრურწმენის გასაფანტად.

არც ქართველებმა დატოვეს უყურადღებოდ 13 რიცხვი და არსებობს გამოთქმა: „მეცამეტე გოჭი“ – ეს სახელი მიეკუთვნება ადამიანს, რომელიც არის მეტიჩარა, არამკითხე მოამბე, ვინც სხვის საქმეში ერება, უმაქნისია, არაფერშია გამოსადეგი არც თავისთვის და არც სხვებისთვის.

აღმოსავლეთის ხალხების თქმულებებში განსაკუთრებულ როლს ასრულებს რიცხვი ორმოცი. შუა აზიის ხალხებში გავრცელებული იყო რწმენა, რომ არსებობს საიდუმლო თემი – „ჩილტანი“, რომელიც შედგება ორმოცი ადამიანისაგან და ისინი ფლობენ ზებუნებრივ თვისებებს. გადმოცემის თანახმად „ჩილტანს“ სათავეში ედგა (ხელმძღვანელობდა) უხუცესთა შვიდეული. რომელიმე წევრის გამოკლების შემთხვევაში „ჩილტანი“ შეივსებოდა ორმოც წევრამდე. ანალოგიური დამოკიდებულებაა

რიცხვი 40-ის მიმართ საფრანგეთშიც, სადაც „საფრანგეთის მწერალთა აკადემია“, ანუ „ორმოცი უკვდავის აკადემია“ შედგება ორმოცი საუკეთესო ფრანგი მწერლისაგან, რომლებიც თავისი წევრების რაიმე მიზეზით გამოკლების შემთხვევაში არჩევის გზით თავიანთ „აკადემიას“ შეავსებენ ორმოცამდე.

საინტერესო მოსაზრება არსებობდა რიცხვ 33-თან დაკავშირებით – პითაგორელები მას თვლიდნენ უმაღლეს რიცხვად, ის იყო წმინდა რიცხვი, რომელიც აღნიშნავდა ღვთიურ ჭეშმარიტებას.

ქვემოთ მოვიყვანოთ რიცხვებთან დაკავშირებული გამოთქმები, რომლებშიც ხატოვნადაა ასახული ქართველი ხალხის გონებრივი თუ სულიერი გამოცდილება.

ივანე ჯავახიშვილი შენიშნავს, რომ „ძველად საქართველოში ზოგჯერ სარგებლობდნენ თელის ცხრაობითი სისტემითაც“, ამიტომ ქართველთა შორეულ წინაპრებს, უნდა ეიფიქროთ, რომ თვით ცხრა – უკვე ბევრის, მრავალის, მრავალფერის აღმნიშვნელ ცნებად მიაჩნდათ. ქართულში ამის დამადასტურებელი მრავალი მაგალითის მოტანა შეიძლება, მაგალითად:

ცხრათვალა მზე – მეტად მცხუნვარე, ძალზე მოკაშკაშე მზე.

„თავს გადგას თოვლის გვირგვინი,

ზედ ცხრა მზის თვალი ტრიალებს“ (შიო მღვიმელი).

ცხრათავიანი დევი – ყოვლად ძლიერი ზღაპრული პერსონაჟი.

ცხრა თვალი უნდა გქონდეს და ცხრა ყური – ყველაფერს უნდა ხედავდე და ისმენდე, არაფერი გამოგრჩეს დაუნახავი და გაუგონებელი, მეტისმეტი სიფრთხილე გმართებს.

სიხარულით მეცხრე ცაზეა – ძალზე გახარებულია.

ცხრაკლიტული – უამრავი გასაღებით დაკეტილი, მეტად საგულდაგულოდ ჩარაზული.

ცხრა მთას იქით – ძალზე შორს.

ცხრამუცელა – გაუმაძლარი, ბევრის მჭამელი, ღორმუცელა.

ცხრა პირი ტყაყი გააძრეს – ძალიან დატანჯეს, გააწვალეს.

ცხრა უღელი ხარიც ველარ დააყენებს – მეტად ღონიერია, ევრაეინ მოერევა.

ცხრა დღის სავალზე – მეტად შორი გზა.

ცხრა ენა გამოიბა – ბევრი იყბედა, ეინ იცის, რას მიედმო-
დება.

შოთა რუსთაველს აქვს ერთი ასეთი სტრიქონი:

„უბრძანა ცხრათა ხადუშთა დადგომა მცველად კარისად“ –
აქ ცხრა გამოხატავს ცხრაზე მეტს, სიმრავლეს; ე.ი. უამრავი კა-
რის მცველი დააყენა. („ვეფხისტყაოსანი“-ს 81-ე სტროფში
გვხვდება აღგებრული ამოცანა:

„ორთავე ერთგან მოკლული ყველაი ასჯერ ოცია,

მაგრა აეთანდილს ოცითა უფროსი დაუხოცია;

არ დასცთობია ერთიცა, რაც ოდენ შეუტყორცნია,

თქვენი მრავალი მიწითა დასვრილი დაგვიხოცია“.)

ცხრა რიცხვთან დაკავშირებულია მეზღვაურებში გავრცელე-
ბული ცრურწმენა, თითქოს მეცხრე ტალღა საბედისწერო იყოს.

ათასი – ქართულში გამომხატველია ძალზე ბევრის, უსაზ-
ღვროსი:

ათასად იჭრებოდა – ერთი კაცის მიერ მრავალგვარი საქმიან-
ობისათვის ხელის მოკიდება.

ათასი გზა აქვს – მრავალ გასაჭირს უნდა გასცეს პასუხი,
ბევრი მოთხოვნილება უნდა დააკმაყოფილოს.

ათასი რომ თქვა, მაინც არ მჯერა – რაც არ უნდა ბევრი
მელაპარაკო, რაც უნდა დაუსრულებლად მიმტკიცო, ვერ დამარ-
წმუნებთ.

ათასი თოკიდან გამომძვრალი – მეტად გამოცდილი, ბევრი
გაჭირვების მნახველი და გადარჩენილი.

ათასში ერთხელ – მეტად იშვიათად.

ათი თითი სამყოფი იყო ჩამოსათვლელად – სულ ცოტა იყო,
სულ რამდენიმე.

ორ ნაბიჯზეა – სულ ახლოა, აქვეა.

არც მეტი, არც ნაკლები; სწორედ იმდენი უნდა იყოს რაც
საჭიროა – ასე გამოთქვამენ, როცა რიცხვის, სიგრძის, რაოდენ-
ობის, წონისა თუ სხვა რამის დაზუსტება სურთ.

რიცხვთა თეორია არის მათემატიკის დარგი, რომელიც შეის-
წავლის მთელი რიცხვების თვისებებს. რიცხვთა თეორიის საკი-
თხებს შეისწავლიდნენ ისეთი მათემატიკოსები, როგორებიც იყ-
ვნენ საბერძნეთში ევკლიდე, ერატოსფენი, დიოფანტე, ჩინეთში

სუნ-ძი (II-VI საუკუნეებს შორის), ცინ ძიუ-შაო (XIII ს.), ინდოეთ-ში ბრაჰმავაჟუტა (VII ს.) და ბხასკარა (XII ს.). ევროპაში რიცხვთა თეორიის ინტენსიური განვითარება იწყება ფერმას შრომებით (XVII ს.). ამ საქმეში უდიდესი ღვაწლი მიუძღვის ლ. ეილერს, რომელმაც საფუძველი ჩაუყარა რიცხვთა ანალიზურ თეორიას. გოლდბახის მიერ ეილერისადმი მიწერილი წერილის შემდეგ დაისვა სამი ცნობილი პრობლემა (მათგან პირველი ორი გოლდბახის სახელთანაა დაკავშირებული):

1. ყოველი კენტი რიცხვი, დაწყებული 7-დან, არის სამი მარტივი რიცხვის ჯამი.
2. ლუწი რიცხვი, დაწყებული 4-დან, არის ორი მარტივი რიცხვის ჯამი.
3. კენტი რიცხვი არის $P+2K^2$ სახის ჯამი (სადაც K – მთელი რიცხვია, ხოლო P – მარტივი). ამ პრობლემებიდან პირველი 1937 წელს ამოხსნა ი. ვინოგრადოვმა, ხოლო დანარჩენი ორი დღემდე გადასაწყვეტია.

რიცხვთა თეორიის განვითარებაზე დიდი გავლენა მოახდინეს ჟ. ლაგრანჟის, ა. ლეჟანდრის, კ. გაუსის შრომებმა. შემდგომი განვითარება დაკავშირებულია პ. დირიხლეს, ლ. კრონეკერის, ჟ. ლიუვილის, ბ. რიმანის, რ. დედეკინდის, დ. ჰილბერტის, პ. ჩე-ბიშევის, ა. მარკოვის, ი. ვინოგრადოვის, კ. მარჯანიშვილის და სხვ. სახელებთან.

§2. მთელ რიცხვთა სიმრავლე, მისი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია და არითმეტიკული მოძმელებები მთელ რიცხვებზე

კაცობრიობის ცნობიერებაში არც ერთი ცნება არ ყალიბდებოდა იმდენი ხნის განმავლობაში, როგორც ნატურალური რიცხვის ცნება. მეცნიერული გამოკვლევებიდან შეიძლება დავასკვნათ, რომ რიცხვის ცნების განვითარება დასაბამიდანვე მიდიოდა ორი გზით. პირველი გზა განაპირობა იმან, რომ უძველესი ადამიანი ბუნების მოვლენების რაოდენობრივ მხარეს უკავშირებდა თავისი სხეულის ზოგიერთ ნაწილებს: თითებს, ხელებს, თვალებს, ყურებს და ა.შ. ცნობები ამის შესახებ შემოგვინახა მსოფლიოს თითქმის ყველა ხალხის ენამ. უძველესი ხალხი თავდაპირველად მივიდა ერთისა და ხუთის ცნებამდე. რიცხვის ცნების განვითარების ამ ეტაპის კვალი შემორჩენილია კავკასიურ ენებშიც; მაგალითად, რიცხვითი სახელი ხუთი შემდეგნაირად გამოითქმის: ქართულად – ხუთი, მეგრულად – ხუთი, აფხაზურად – ხუბა, ყაბარდოულად – ტხუ, რუთულურად – ხუდ, ყუბაჩურად – ხუ, ხინალულურად – ფხუ და ა.შ. გარკვევით ჩანს, რომ ამ რიცხვის სახელებში ფუძეა „ხუ“, მეგრულად „ხუ“ აღნიშნავს პეშეს (შექმნილს ხუთი თითით). ქართულ ენაში რიცხვითი სახელი „ხუთი“ შეიძლება დაეუკავშიროთ ხელს.

რიცხვის ცნების ისტორიული განვითარების მეორე გზა წარმოშობილია მოგვიანებით (პირველთან შედარებით), იგი უკავშირდება პირველყოფილ ბინალურ და ტერნარულ აზროვნებას, მასში გვაქვს ოპერაციების ადციურობისა და მულტიპლიკაციურობის ჩანასახები. მოვიყვანოთ მაგალითი რამდენიმე ტომის ენიდან: გენდე (პაპუასური ენა) – მანრო – 1, ოროი – 2, ოროგუმაგო – 3(2+1), ოროი ოროი – 4(2+2), ოროი ოროი მაგა – 5(2+2+1), ოროი ოროი ოროი – 6(2+2+2); ბაკირი (ტომი ამაზონკაზე) – ტოკალე – 1, აჰაგე – 2, აჰაგე ტოკალე – 3(2+1), აჰაგე აჰაგე – 4(2+2), აჰაგე აჰაგე ტოკალე – 5(2+2+1), აჰაგე აჰაგე აჰაგე – 6(2+2+2); ანალოგიურ სურათს აქვს ადგილი ადელაიდას რაიონის ერთ-ერთი ავსტრალიური ტომის მეტყველებაში, ტორესის სრუტის ჩრდილოეთის ტომების, ბუშმენების და მრავალ სხვათა ენაში.

აღსანიშნავია, რომ მსგავსი თვლა ყველა ხსენებულ ენაში

მიდის მხოლოდ ექვსამდე. ექვსამდე ბინარულმა თვლამ გამოიწვია ექვსობითი თვლის განვითარება. ამას კი უდიდესი ისტორიული მნიშვნელობა ჰქონდა სათვლელი სისტემებისა და თვლის ფორმირების საქმეში.

ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ რიცხვის ცნების ისტორიული განვითარების პირველმა გზამ ზღერულ რიცხვად განსაზღვრა 10, ხოლო მეორე გზამ – 6. აქედან ადვილად იხსნება დღე-ღამის 24 ნაწილად დაყოფისა და შუმერული თვლის სამოცობითი სისტემის წარმოშობის მიზეზები.

თვლის პოზიციური სისტემა პირველად შუმერებმა ჩამოაყალიბეს. ეს სისტემა სამოცობითი იყო, მაგრამ თან ათობითი სისტემის ელემენტებიც ახლდა. უნდა აღინიშნოს, რომ შუმერულ სისტემაში ნული არ იყო. ნულის ცნება შემოვიდა მოგვიანებით ბაბილონელების მათემატიკაში, რომელთა სისტემა ათობითექვსობითია.

ათობითი თვლის პოზიციური სისტემა ჩამოყალიბდა ინდოეთში. არაბი მეცნიერის მასუდის ცნობით, ინდური ციფრები და შესაბამისად თვლის პოზიციური სისტემა ინდოეთიდან არაბეთში გაერცვლდა. მერვე საუკუნეში არაბებს იგი უკვე საყოველთაოდ მიღებული ჰქონდათ. ევროპიდან ინდურ-არაბული ციფრები მეჩვიდმეტე საუკუნიდან ვრცელდება ყველგან. აღსანიშნავია, რომ საქართველოში ეს ციფრები გვხვდება გაცილებით ადრე, ვიდრე დასავლეთ ევროპაში. XI საუკუნის დასაწყისიდანვე ვხვდებით ინდურ-არაბულ ციფრებს ქუთაისის ბაგრატის ტაძრის, ატენის მახლობლად მდებარე ვერეს ეკლესიისა და ტიმოთეს ეკლესიის კედლების წარწერებში. ამას გარდა, ინდურ-არაბული რიცხვითი ნიშნები ნახსენებია X საუკუნის ქართულ ასტრონომიულ ხელნაწერში (974 წ.), საიდან და როგორ შემოვიდა ეს ციფრები საქართველოში ჯერ გამოკვლეული არ არის.

თვლის საინტერესო სისტემა შექმნეს მაიას ტომებმა. ისინი თანამედროვე ამერიკის ტერიტორიაზე ცხოვრობდნენ. მათი შექმნილი სისტემა ძირითადად ოცობითია, მაგრამ შეიცავს თვრამეტობითის ელემენტებსაც, რაც ექვსობითი სისტემის პრინციპებიდან იღებს სათავეს.

ძველეგვიპტური ათობით არაპოზიციური სისტემა წარმოიშვა ძვ. წ. მესამე ათასწლეულის მეორე ნახევარში. ცნობილია

თელის არაპოზიციური რომაული სისტემა. საქართველოშიც იყენებდნენ თელის არაპოზიციურ სისტემას (ცხრილი 1).

ცხრილი 1.

თელის არაპოზიციური სისტემები

რიცხვები	ძველგვიანური	ძველბერძნული	რომაული	ბაბილონური	ქართული
1	0		I	▼	ა
2	00		II	▼▼	ბ
3	000		III	▼▼▼	გ
4	0000		IV	▼▼▼▼	დ
5	00000	Γ	V	▼▼▼▼▼	ე
6	000000	Γ	VI	▼▼▼▼▼	ვ
7	0000000	Γ	VII	▼▼▼▼▼	ზ
8	00000000	Γ	VIII	▼▼▼▼▼	თ
9	000000000	Γ	IX	▼▼▼▼▼	ი
10	⌒	△	X	◀	კ
11	⌒0	△	XI	◀◀	კა
12	⌒00	△	XII	◀◀▼	კბ
20	⌒⌒	△△	XX	⚡	ლ
30	⌒⌒⌒	△△△	XXX	⚡	მ
40	⌒⌒⌒⌒	△△△△	XL	⚡⚡	ნ
50	⌒⌒⌒⌒⌒	℞	L	⚡⚡	ო
60	⌒⌒⌒⌒⌒⌒	℞△	LX	▽	პ
70	⌒⌒⌒⌒⌒⌒⌒	℞△△	LXX	◀◀	ჟ
80	⌒⌒⌒⌒⌒⌒⌒⌒	℞△△△	LXXX	◀◀▼	რ
90	⌒⌒⌒⌒⌒⌒⌒⌒⌒	℞△△△△	XC	◀◀⚡	ს
100	ღ	H	C	▶▶	ტ
500	ღღღღღ	℞	D	▼▼▼▶▶▶	ფ
1000	ჟ ⚡	X	M	◀▶▶	ძ

ტერმინი „ნატურალური რიცხვი“ პირველად შემოიღო რომელმა მეცნიერმა ბოეციუსმა მეექვსე საუკუნეში. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლისა და ნულის გაერთიანება არის არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლე და იგი აღინიშნება $\mathbb{N}_0$ სიმბოლოთი.

მათემატიკის განვითარების ისტორია გვიჩვენებს, რომ უარყოფითი რიცხვის ცნება გაცილებით ძნელად შემოვიდა კაცობრიობის აზროვნებაში ვიდრე, მაგალითად წილადი რიცხვების (ცნება. ეს ალბათ იმით აიხსნება, რომ უარყოფითი რიცხვები უფრო ნაკლებად იყო დაკავშირებული ყოფა-ცხოვრების პრაქტიკასთან, ვიდრე წილადი რიცხვები.

უარყოფით რიცხვებზე შეკრებისა და გამოკლების წესები შემოღებულ იქნა ინდოეთში. აი, როგორი წესები ჰქონდა მეშვიდე საუკუნეში ინდოელმათემატიკოს ბრაჰმაგუპტას, იგი დადებით რიცხვებს ქონებას უწოდებდა, უარყოფითს კი – ვალს.

$a+b=c$ ორი ქონების ჯამი არის ქონება.

$(-a)+(-b)=-c$ ორი ვალის ჯამი არის ვალი.

$a+(-b)=a-b$ ქონებისა და ვალის ჯამი არის მათი სხვაობა.

$a+(-a)=0$ ქონებისა და მისი ტოლი ვალის ჯამი არის ნული.

$0+a=a$ ნულისა და ქონების ჯამი არის ქონება.

$0-(-a)=a$ ნულიდან გამოკლებული ვალი ხდება ქონება.

$0-a=-a$ ნულიდან გამოკლებული ქონება ხდება ვალი.

მეთორმეტე საუკუნის ინდოელი მათემატიკოსი ბხასკარა იძლევა გამრავლებისა და გაყოფის შემდეგ წესებს:

ორი ქონების ან ორი ვალის ნამრავლი (ან განაყოფი) არის ქონება; ქონებისა და ვალის ნამრავლი (ან განაყოფი) არის ვალი. ბხასკარა პირდაპირ წერდა, რომ ხალხი არ ცნობსო უარყოფით რიცხვებს. მართალია, ქონებისა და ვალის შეკრება გამოკლება აზრს მოკლებული არ იყო, მაგრამ რა აზრი უნდა ჰქონოდა ქონებისა და ვალის გამრავლებას ან გაყოფას; ამიტომ ამ რიცხვებს „აბსურდულს“ ეძახდნენ.

არსებობდა უარყოფითი და დადებითი რიცხვების გამრავლებისა და გაყოფის წესების ორიგინალური შედარებითი ახსნაც:

1) $a>0, b>0 \Rightarrow ab>0$: ჩემი მეგობრის მეგობარი ჩემი მეგობარია.

2) $a > 0, b < 0 \Rightarrow ab < 0$: ჩემი მეგობრის მტერი ჩემი მტერია.

3) $a < 0, b > 0 \Rightarrow ab < 0$: ჩემი მტრის მეგობარი ჩემი მტერია.

4) $a < 0, b < 0 \Rightarrow ab > 0$: ჩემი მტრის მტერი ჩემი მეგობარია.

XVII საუკუნემდე არ ხერხდებოდა უარყოფითი რიცხვების მათემატიკაში დამკვიდრების საკითხი.

ლეონარ ეილერი (1707-1783) ამ საკითხის შესახებ გამოთქვამდა შემდეგს:

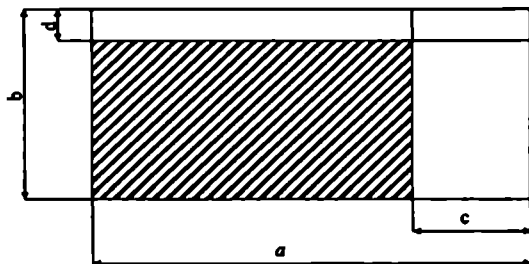
გვაქვს ორი a და b რიცხვი, როგორ გავამრავლოთ ეს რიცხვები;

1) თუ $a > 0$ და $b > 0$ – ცხადია, ე.ი. ნამრავლს ექნება „+“ ნიშანი;

2) თუ $a < 0$ და $b > 0$ – ცხადია, ე.ი. ნამრავლს ექნება „-“ ნიშანი;

3) თუ $a > 0, b < 0$, მაშინ ვისარგებლოთ გამრავლების გადანაცვლებადობის კანონით და გვექნება მეორე შემთხვევა; 4) თუ $a < 0, b < 0$, მაშინ ნამრავლს „-“ ნიშანი არ შეიძლება ჰქონდეს, რადგან ნამრაველი „-“ ნიშნით გექონდა სხვა შემთხვევაში, ამიტომ ნამრავლს ექნება „+“ ნიშანი. (სხვა შემთხვევაში აქ იგულისხმება ის შემთხვევა, როცა a და b რიცხვებს ჰქონდათ სხვადასხვა ნიშანი, სხვა განსაზღვრება ეილერს არ მოუცია).

იყო ცდები დაეფუძნებინათ მოქმედებები დადებით და უარყოფით რიცხვებზე გეომეტრიული თვალსაზრისით. ამ დაფუძნების მიზნით ითელიდნენ (უარყოფითი და დადებითი რიცხვების გამრავლებისათვის) დაშტრიხული მართკუთხედის ფართობს (ნახ.1).



ნახ. 1.

გამრავლების ოპერაციისათვის უშუალოდ ღებულობდნენ:

$$(a-c)(b-d) = ab - bc - ad + cd.$$

მიღებული ერთი და იგივე შედეგი ქმნიდა საფუძველს უარყოფითი და დადებითი რიცხვების გამრავლებისათვის, მაგრამ ამ წესში შეცდომის წარმოქმნა დაკავშირებულია იმასთან, რომ როცა დაფარული ფორმით ხდება $(a-c)$ -ს და $(b-d)$ -ს გამრავლება გულისხმობენ, რომ უარყოფითი რიცხვებისათვის არის სწორი გამანაწილებელი კანონი, თუმცა უარყოფითი რიცხვი არ არის შემოტანილი, არ არის მოცემული შედარების კრიტერიუმი, არ არის განსაზღვრული შეკრებისა და გამრავლების მოქმედება.

უარყოფითი რიცხვების შემოტანას საფუძველი დაუდო რენე დეკარტმა (1596-1650), როცა ისინი გამოიყენა ანალიზური გეომეტრიის აგებისას. უარყოფით რიცხვს ის განიხილავდა, როგორც დამოუკიდებელს და OX ღერძზე სათავისაგან მარცხნივ მდებარეს. დეკარტე მათ „მატყუარა“ რიცხვებს უწოდებდა.

მეცამეტე საუკუნეში იტალიელი მეცნიერი ლეონარდო ფიბონაჩი ამბობდა, რომ უარყოფითი რიცხვები დადებითის მოპირდაპირეა. მეთექვსმეტე საუკუნეში გერმანელი მათემატიკოსი მიხაელ შტიფელი აცხადებდა, რომ უარყოფითი რიცხვები ნულზე ნაკლებია, მაგრამ ფიბონაჩიცა და შტიფელიც უარყოფით რიცხვებს „აბსურდულს“ ეძახდნენ.

უარყოფითმა რიცხვებმა საყოველთაო აღიარება ჰპოვა მხოლოდ მეცხრამეტე საუკუნის პირველ ნახევარში.

რიცხვის ცნების განვითარება და გაფართოება ისტორიულად ძალზე რთული და ხანგრძლივი მოვლენაა. რიცხვის ცნების გაფართოებაზე საუბრისას, უმჯობესია ცნების ფორმალურ-ლოგიკურ გაფართოებაზე ვილაპარაკოთ, რადგანაც ამ თეალისაზრისით დედუქციურად უფრო სწორად აიგება რიცხვითი სიმრავლეები; ე.ი. უნდა გადავუხვიოთ ისტორიული განვითარების გზას და უარყოფითი რიცხვები განვიხილოთ წილად რიცხვებზე ადრე. რიცხვის ცნების ფორმალურ-ლოგიკური გაფართოება და თეორიული დაფუძნება მომზადებული იყო მეცხრამეტე საუკუნის გამოჩენილ მათემატიკოსთა შრომებით: აქ უპირველეს ყოვლისა აღსანიშნავია ინგლისელი ჯ. პიკოკი, უ. ჰამილტონი, ა. დე მორგანი, გერმანელი მ. ომი, გ. გრასმანი, გ. ჰანკელი. ეს დაფუძნება გაგრძელდა სიმრავლეთა თეორიის აღმოჩენის შემდეგ.

რიცხვის ცნების გაფართოების ამოცანა გულისხმობს შემდეგ

მოთხოვნებს:

1. გაფართოებული სიმრავლე P' უნდა მოიცავდეს გასაფართოებელ P სიმრავლეს, როგორც მისი ერთ-ერთ ქვესიმრავლე, ე.ი. $P \subset P'$.

($Z \supset N \supset N_0$, სადაც Z - მთელ რიცხვთა სიმრავლეა,

N_0 - არაუარყოფითი რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო N - ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე).

2. გასაფართოებელ P სიმრავლეში არსებული ოპერაციები და მიმართებანი განსაზღვრულია, აგრეთვე, გაფართოებული P' სიმრავლისათვის. ამ ოპერაციებისა და მიმართებათა აზრი იგივე რჩება.

3. P' -ში უნდა სრულდებოდეს ოპერაცია, რომელიც არ სრულდება (ან ყოველთვის არ სრულდება) P -ში.

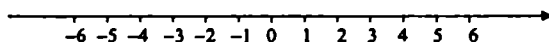
4. P' გაფართოება უნდა იყოს P -ს ყველა შესაძლო გაფართოებათა შორის მინიმალური, სადაც სრულდება 1-3 მოთხოვნები.

მეორე მოთხოვნას ეწოდება „პერმანენტობის პრინციპი“, იგი გამოთქმულ იქნა გ. ჰანკელის მიერ 1867 წელს. მესამე მოთხოვნა ნაკარნახევია რიცხვის ცნების ევოლუციის ისტორიული გზის მიერ. სახელდობრ, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში ყოველთვის არ შეიძლება გამოკლების შესრულება. ამან გამოიწვია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის გაფართოება მთელ რიცხვთა სიმრავლემდე. მთელ რიცხვთა სიმრავლეში ყოველთვის არ შეიძლება გაყოფის ოპერაციის შესრულება, ამან გამოიწვია მთელ რიცხვთა სიმრავლის გაფართოება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლემდე. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში ყოველთვის არ შეიძლება დადებითი რიცხვიდან ფესვის ამოღება, ამან გამოიწვია რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის გაფართოება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლემდე. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ყოველთვის არ შეიძლება უარყოფითი რიცხვიდან ფესვის ამოღება, ამან გამოიწვია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის გაფართოება კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლემდე. ამ უკანასკნელ გაფართოებას ჩვენ არ განვიხილავთ.

($N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$, N -ით აღინიშნება ნატურალურ რიცხვთა, Z - ით მთელ რიცხვთა, Q -თი რაციონალურ რიცხვთა, R -ით ნამ-

დვილ რიცხვთა, ხოლო C -თი კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეები).

განვიხილოთ მთელ რიცხვთა სიმრავლის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. ავიღოთ რიცხვითი წრფე და მასზე მოვნიშნოთ ათვლის სათავე 0, ერთეულოვანი მონაკვეთი შემოვიღოთ პირობითად. სათავიდან მარჯვნივ გადავზომოთ მთელი დადებითი რიცხვები, ხოლო მარცხნივ მთელი უარყოფითი რიცხვები (ნახ.2).



ნახ.2.

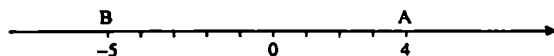
ნახაზზე 4-ის შესაბამისი წერტილი 0-ის მარჯვნივაა 4 ერთეულით, ხოლო -5-ის შესაბამისი წერტილი 0-ის მარცხნივაა 5 ერთეულით.

a რიცხვის მოპირდაპირე რიცხვი ეწოდება $-a$ რიცხვს; მაგალითად: 4-ის მოპირდაპირე რიცხვია -4, ხოლო -5-ის კი 5.

განსაზღვრა: ნატურალურ რიცხვებს, მათ მოპირდაპირე რიცხვებს და 0-ს მთელი რიცხვები ეწოდებათ.

მთელ რიცხვთა სიმრავლე Z არის უსასრულო, დალაგებული არამკვერივი (დისკრეტული) სიმრავლე. დალაგებული რიცხვთა სიმრავლე მკვერია, იმ შემთხვევაში თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერ ორ ელემენტს შორის მოთავსდება ამავე სიმრავლის ერთი ელემენტი მაინც.

თუ რიცხვით ღერძზე 4-ის შესაბამისი წერტილია A , მაშინ ჩავწერთ $A(4)$, ხოლო თუ -5-ის შესაბამისი წერტილია B , მაშინ გვექნება $B(-5)$ (ნახ.3).



ნახ.3.

ორ მთელ რიცხვს შორის ის არის მეტი, რომლის შესაბამისი წერტილი რიცხვით წრფეზე უფრო მარჯვნივაა. ყოველი დადებითი მთელი რიცხვი, ან ნული მეტია ნებისმიერ უარყოფით

მთელ რიცხვზე.

თუ a რიცხვი დადებითია, მას ასე ჩაეწერთ: $a > 0$, თუ a უარყოფითია, მაშინ გეკენება $a < 0$, თუ a რიცხვი არაუარყოფითია, ასე ჩაიწერება $a \geq 0$, ხოლო თუ a რიცხვი არადადებითია ჩაიწერება $a \leq 0$.

a და $-a$ მოპირდაპირე რიცხვები რიცხვით წრფეზე გამოისახება წერტილებით, რომლებიც 0 სათავეს მიმართ სიმეტრიული არიან, მანძილს სათავედან საკოორდინატო წრფის წერტილამდე გამოსახულს a რიცხვით ვუწოდებთ a რიცხვის მოდულს, იგი აღინიშნება ასე $|a|$; ე.ი. გვაქვს:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{თუ } a > 0 \\ 0, & \text{თუ } a = 0 \\ -a, & \text{თუ } a < 0 \end{cases}$$

მთელი რიცხვების შეკრება. თუ გავიხსენებთ, პეანოს აქსიომატიკაში ძირითადი ობიექტებია ნული და ნატურალური რიცხვები, ძირითადი მიმართება მთელ არაუარყოფით რიცხვებს შორის არის „მოსდევს“ (a რიცხვს მოსდევს b რიცხვი). რიცხვს, რომელიც a -ს „მოსდევს“ აღვნიშნავთ a' , ე.ი. $a' = a + 1$.

მთელ არაუარყოფით რიცხვთა სიმრავლეში აგრეთვე დადგენილი გეკონდა, რომ $a + 0 = a$, $a + (b + 1) = (a + b) + 1$.

მთელ რიცხვთა სიმრავლეში ეს განვაზოგადოთ შემდეგი განსაზღვრებით:

1. $a + 0 = a$; მაგალითად: $7 + 0 = 7$; $-3 + 0 = -3$. ნული შეკრებისას ნეიტრალური რიცხვია.
2. $a + 1 = a'$; მაგალითად: $7 + 1 = 8$; $-7 + 1 = -6$. საზოგადოდ, $-a + 1 = -(a - 1)$.
3. $a + b' = (a + b)'$; მაგალითად: $3 + 6' = 3 + (6 + 1) = (3 + 6) + 1 = (3 + 6)'$; $-5 + 3' = -5 + (3 + 1) = (-5 + 3) + 1 = (-5 + 3)'$;
4. $a + (-1) = 'a$ ($'a$ -ით აღვნიშნოთ a მთელი რიცხვის „წინამდებარე“ მთელი რიცხვი); მაგალითად: $5 + (-1) = 5 - 1 = '5 = 4$.
5. $a + 'b = '(a + b)$; მაგალითად: $-5 + '3 = -5 + (3 - 1) = (-5 + 3) - 1 = '(-5 + 3)$.

აქედან გამომდინარე, რთული დასადგენი არ არის, რომ მთელი რიცხვების შეკრებას გააჩნია იგივე თვისებები, რაც მთელ არაუარყოფით რიცხვთა შეკრებას.

მთელ რიცხვთა შეკრებისას შეიძლება გვექონდეს შემდეგი ოთხი შემთხვევა:

1. ორივე შესაკრები მთელი არაუარყოფითი რიცხვია.

2. ორივე შესაკრები მთელი უარყოფითი რიცხვია;

მაგალითად: $-4+(-5)=-9$, ე.ი. $-4+(-5)=-(4+5)$. საზოგადოდ, მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ $-a+(-b)=-(a+b)$.

3. ორივე შესაკრები მთელი რიცხვია, მაგრამ სხვადასხვა ნიშნისა და ტოლი მოდულების მქონე. მაგალითად, $-4+4=0$. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით მტკიცდება, რომ $-a+a=0$.

4. ორივე შესაკრები მთელი რიცხვია, მაგრამ სხვადასხვა ნიშნისა და არატოლი მოდულების მქონე.

მაგალითად: $-4+7=-4+4+3=-(4+4)+3=0+3=3$ ე.ი. $-4+7=7-4=3$.

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი: $4-7=4-(4+3)=4-4-3=-0-3=-3$. საზოგადოდ, შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ორი სხვადასხვა ნიშნისა და არატოლი მოდულის მქონე მთელი რიცხვის ჯამი უდრის მეტი და ნაკლები მოდულების სხვაობას, ალბულის მეტი მოდულის მქონე შესაკრების ნიშნით. მაგალითად: $37+(-41)=-(-41-37)=-4$.

მთელი რიცხვების გამოკლება. გამოკლების განსაზღვრა ფორმით ისეთივეა, როგორიც მთელ უარყოფით რიცხვთა სიმრავლეში, მაგრამ მთელ რიცხვთა სიმრავლეში იგი არსებითად ახალ შინაარსს იძენს. გამოკლება ეწოდება მოქმედებას, რომლის საშუალებითაც ორი შესაკრების ჯამითა და ერთ-ერთი შესაკრებით უნდა ვიპოვოთ მეორე შესაკრები. ამასთან, ამ ჯამს ეწოდება საკლები, მოცემულ შესაკრებს – მაკლები, ხოლო საპოვნ შესაკრებს – სხვაობა.

მთელ რიცხვს მთელი რიცხვი რომ გამოვაკლოთ, საკმარისია საკლებს მიეუმატოთ მაკლების მოპირდაპირე რიცხვი. მაშასადამე, მთელი რიცხვების გამოკლება ყოველთვის დაიყვანება შეკრებაზე. შეკრება ყოველთვის არსებობს და ჯამი ერთადერთია; ე.ი. გამოკლებაც ყოველთვის არსებობს და სხვაობა ერთადერთია. ეს შედეგი არ გვექონდა ნატურალური და არაუარყოფითი რიცხვების სიმრავლეებში. მთელ რიცხვთა სიმრავლეში არ

არის საჭირო შემოვიღოთ გამოკლების შესრულების პირობა.

თუ გამოვიყენებთ თვისებას – $a-b=a+(-b)$, ადვილი საჩვენებელია თეორემები სხვაობის ნიშნის შესახებ:

1. თუ $a>b$, მაშინ $a-b>0$; თუ $a-b>0$, მაშინ $a>b$.
2. თუ $a=b$, მაშინ $a-b=0$; თუ $a-b=0$, მაშინ $a=b$.
3. თუ $a<b$, მაშინ $a-b<0$; თუ $a-b<0$, მაშინ $a<b$.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში გამოკლების შესრულებადობისათვის ექსპუზობლით კითხვას: რამდენითაა მეტი საკლები მაკლებზე? მთელ რიცხვთა სიმრავლეში კი გამოკლების შესრულებისას ექსპუზობით უფრო ზოგად კითხვას: რამდენითაა მეტი ან ნაკლები საკლები მაკლებზე? ე.ი. ორი მოქმედების – შეკრებისა და გამოკლების ნაცვლად აქ გვაქვს ერთი მოქმედება (აღებურული შეკრება), რადგან $a-b=a+(-b)$.

მთელ რიცხვთა გამრავლება. მთელ არაუარყოფით რიცხვთა სიმრავლეში გამრავლებისათვის გექონდა შემდეგი, კერძოდ:

$$n \cdot 0 = 0, n \cdot 1 = n, a \cdot b' = ab + a.$$

მთელ რიცხვთა სიმრავლეში განვაზოგადოდ ეს შედეგები:

$$1a \cdot 0 = 0; \text{ მაგალითად: } 6 \cdot 0 = 0; -7 \cdot 0 = 0.$$

$$2. a \cdot 1 = a; \text{ მაგალითად: } 3 \cdot 1 = 3; -9 \cdot 1 = -9. \text{ ერთი გამრავლებისას ნეიტრალური რიცხვია.}$$

$$3. a \cdot b' = ab + a; \text{ მაგალითად: } 5 \cdot (-3)' = 5 \cdot (-3) + 5 = -10; -4 \cdot (-6) + (-4) = 20.$$

$$4. a \cdot (-1) = -a; \text{ მაგალითად: } 4 \cdot (-1) = -4; -7 \cdot (-1) = 7; -a \cdot (-1) = a.$$

$$5. a' \cdot b = ab - a; \text{ მაგალითად: } 3' \cdot (-5) = 3 \cdot (-5) - 3 = -18;$$

$$(-7)' \cdot (-3) = (-7) \cdot (-3) - (-7) = 28.$$

აქედან გამომდინარე, ადვილი დასადგენია, რომ მთელ რიცხვთა სიმრავლეში შენარჩუნებულია გამრავლების ყველა ის თვისება, რომელიც მას ჰქონდა მთელ არაუარყოფით რიცხვთა სიმრავლეში.

მთელ რიცხვთა გამრავლებისას შეიძლება გექონდეს სამი შემთხვევა:

1. ორივე თანამამრავლი მთელი დადებითი რიცხვია, ე.ი. ორივე თანამამრავლი ნატურალური რიცხვია.
2. ორივე თანამამრავლი მთელი უარყოფითი რიცხვია; მაგალითად: $-4 \cdot (-3) = -4 \cdot (3 \cdot (-1)) = -4 \cdot ((-1) \cdot 3) = ((-4) \cdot (-1)) \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12.$

საზოგადოდ: $(-a) \cdot (-b) = (-a) \cdot (b \cdot (-1)) = (-a) \cdot ((-1) \cdot b) = ((-a) \cdot (-1)) \cdot b = a \cdot b$;
 $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b = |a| \cdot |b|$.

აქედან შეიძლება დავასკვნათ, რომ მთელი ერთნაირნიშნია-ნი რიცხვების ნამრავლი უდრის მათი მოდულების ნამრავლს; მაგალითად:

$$5 \cdot 3 = |5| \cdot |3| = 15; \quad (-5) \cdot (-3) = |-5| \cdot |-3| = 15.$$

3. თანამამრავლებს სხვადასხვა ნიშანი აქვთ; გამრავლების კომუტაციურობის გამო მნიშვნელობა არა აქვს რომელს რომელი ნიშანი გააჩნია; მაგალითად:

$$(-21) \cdot 4 = (21 \cdot (-1)) \cdot 4 = 21 \cdot ((-1) \cdot 4) = 21 \cdot (4 \cdot (-1)) = (21 \cdot 4) \cdot (-1) = 84 \cdot (-1) = -84.$$

$$\text{საზოგადოდ: } (-a) \cdot b = (a \cdot (-1)) \cdot b = a \cdot ((-1) \cdot b) = a \cdot (b \cdot (-1)) = (a \cdot b) \cdot (-1) = -ab;$$

$$\text{ე.ი. } (-a) \cdot b = -a \cdot b = -|a| \cdot |b|.$$

მაშასადამე, სხვადასხვა ნიშნის მქონე ორი მთელი რიცხვის ნამრავლი უდრის მათი მოდულების ნამრავლს აღებულს მინუს ნიშნით.

მთელი რიცხვების გაყოფა. გაყოფის მოქმედების განსაზღვრა და თვისებები მთელ რიცხვთა სიმრავლეში ისეთივეა, როგორც ის იყო მთელ არაუარყოფით რიცხვთა სიმრავლეშია, იმ განსხვავებით, რომ ნებისმიერი რიცხვის ჯერადები და გამყოფები, როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი მთელი რიცხვებია. მაგალითად: 2-ის ჯერადებია: $\pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8$ და ა.შ., 18-ის გამყოფებია: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$.

როგორც ენახეთ, მთელ რიცხვთა სიმრავლეში შეკრების, გამოკლების და გამრავლების ოპერაციები ყოველთვის შესრულებადია, ხოლო გაყოფის ოპერაცია ყოველთვის არ სრულდება. იმისათვის, რომ გაყოფის ოპერაცია ყოველთვის შესრულდეს, საჭიროა მთელ რიცხვთა სიმრავლის გაფართოება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლემდე.

§ 2.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. $A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ სიმრავლიდან ვიპოვოთ იმ მთელი რიცხვების სიმრავლე, რომელიც: ა) სამის ჯერადია;

ბ) სამზე გაყოფისას ნაშთს გვაძლევს 1-ს; გ) სამზე გაყოფისას ნაშთს გვაძლევს 2-ს.

2. მოცემულია $A = \{-6, -1, 0, 2, 5\}$ სიმრავლე; ამ სიმრავლის ელემენტებს შორის ადგილი აქვს R : „ $x > y$ “ ($x, y \in A$) მიმართებას. ამოვწეროთ ყველა წყვილი ამ R მიმართებისა.

3. მოცემულია $A = \{-3; -\frac{3}{7}; 0; \frac{1}{7}; \sqrt{2}; 3\}$ სიმრავლე; ამ სიმრავლის ელემენტებს შორის ადგილი აქვს R : „ $x < y$ “ ($x, y \in A / x, y \in \mathbb{Z}$) მიმართებას. ამოვწეროთ ამ R მიმართების ყველა წყვილი.

4. $C = \{-8; -6; -4; -2; 0; 2; 4\}$ სიმრავლეზე მოცემულია S მიმართება: „ x რიცხვი ჯერადაა y -ის“ ($x, y \in C$) და R მიმართება: „ a რიცხვი გამყოფია b რიცხვის“ ($a, b \in C$). ვიპოვოთ: ა) S მიმართების ყველა წყვილი, ბ) R მიმართების ყველა წყვილი.

5. თევზის ტანი 4კგ-ს იწონის, კუდი 3 კგ-ით ნაკლებია, ვიდრე ტანი, ხოლო თავი კი 2 კგ-ით ნაკლებს იწონის ტანზე. ვიპოვოთ თევზის წონა.

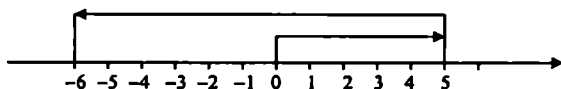


6. გამყიდველს ორ კალათში ვაშლები ჰქონდა, თითოეულში 30 ცალი. მას ნაგარაუდები ჰქონდა პირველი კალათიდან წყვილი ვაშლი 1 ლარად გაეყიდა, ხოლო მეორიდან კი – 3 ცალი ვაშლი 1 ლარად; მაგრამ შემდეგ მან ყველა ვაშლი ერთ კალათში გადააწყო და 5 ცალი ვაშლი 2 ლარად გაყიდა. ნაგარაუდებზე მეტ თანხას აიღებდა თუ არა გამყიდველი? (პასუხი აეხსნათ).

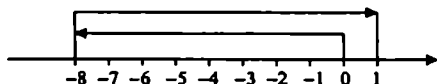
7. იპოვეთ -4 -სა და 3 -ს შორის მოთავსებული რიცხვების ა) ჯამი, ბ) ნამრავლი.

8. რომელი მთელი რიცხვების შეკრებაა გამოსახული რიცხვით წრფეზე?

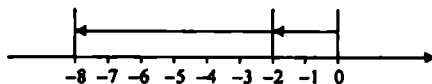
ა)



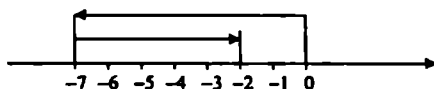
ბ)



ბ)



დ)



9. დაალაგეთ რიცხვები ზრდის მიხედვით: -7, 3, -2, 11, 0, -9, -8, -10, -1, 2, 4, 1, 8, -6, -5.

10. დაალაგეთ რიცხვები კლების მიხედვით: -4, 6, -3, -7, -8, 11, 9, 0, -1, -2, -10, 8, 4, 5, -5.

11. შეავსეთ ცხრილი:

№	პ ი რ ო ბ ა		სავარაუდო პასუხი			
			დადებითი	უარყოფითი	ნული	შეუძლებელია პასუხის გაცემა
1.	$-7x-2y$	$x<0, y<0$				
2.	$x-y+z$	$x<0, y>0, z<0$				
3.	$2x^2+x^4+y^2$	$x=y=0$				
4.	x^2+y^2-1	$x=y=0$				
5.	$xy-1$	$x>0, y>0$				
6.	x^2+y^2	$x<0, y<0$				
7.	$ x + x-y $	$x>0, y<0$				
8.	$x+ y $	$x<0, y<0$				
9.	$x+ xy $	$x>0, y<0$				

12. რიცხვით ღერძზე აღნიშნეთ ყველა a მთელი რიცხვი, რომელთათვისაც:

ა) $|x|<2$; ბ) $3<|x|<7$; გ) $|x-2|=1$; დ) $9>|x|>7$.

13. რიცხვით ღერძზე აღნიშნეთ $A(-2)$ და $B(3)$ წერტილებს შორის მოთავსებული ყველა მთელი რიცხვი.

14. რიცხვები -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 შეავსეთ კვადრატის უჯრები, ისე რომ პორიზონტალზე, ვერტიკალზე და დიაგონალზე განლაგებულ უჯრებში ჩაწერილი რიცხვების ჯამი 2-ის ტოლი იყოს.

2	?	?	?
8	-3	?	?
-7	?	0	?
-1	?	?	3

15. რიცხვებით $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ შეავსეთ კუადრატის უჯრები, ისე რომ ჰორიზონტალზე, ვერტიკალზე და დიაგონალზე განლაგებულ უჯრებში ჩაწერილი რიცხვების ჯამი 0-ის ტოლი იყოს.

-1	-2	3
?	0	?
?	?	?

16. საღამოს 8 საათზე თერმომეტრი 5°C ტემპერატურას აჩვენებდა. დილის 8 საათამდე ტემპერატურა ყოველ საათში 1°C -ით ეცემოდა. რა ტემპერატურას უჩვენებდა თერმომეტრი დილის 8 საათზე?

17. დილის 8 საათზე თერმომეტრი -7°C ტემპერატურას უჩვენებდა, 13 საათამდე ტემპერატურა ყოველ საათში 2°C -ით იმატებდა. რა ტემპერატურას უჩვენებდა თერმომეტრი 13 საათზე?

18. როგორ შეიცვალა ჰაერის ტემპერატურა, თუ იგი დილით -5°C ტემპერატურას აჩვენებდა, ხოლო საღამოს 1°C -ს.

19. როგორ შეიცვალა ჰაერის ტემპერატურა, თუ იგი საღამოს 2°C -ს აჩვენებდა, ხოლო დილით კი -7°C -ს.

20. მდინარის სიჩქარე 3კმ/სთ-ის ტოლია. კატარღა, რომლის სიჩქარე მდგარ წყალში 18კმ/სთ-ის ტოლია, 5 სთ-ს მოძრაობდა მდინარის საწინააღმდეგო მიმართულებით, ხოლო 3 სთ-ს მდინარის მიმართულებით. რომელი მიმართულებით გაიარა მან მეტი მანძილი და რამდენით?

21. გამოიანგარიშეთ:

$$((888:(37-61)-12):(37-44))\cdot(7-16).$$

22. გამოიანგარიშეთ:

$$(35-41\cdot(12-17)):(17-41).$$

23. გამოიანგარიშეთ:

$$((214-79):(51-96)+7)-((218-29-(5-7)):69-1).$$

24. იპოვეთ $|a-b|+ab$,

$$\text{თუ } a=(-7+(12-9\cdot3))(-9-2), \text{ ხოლო } b=(3+7\cdot(2-4))\cdot(20+4\cdot(-3)).$$

25. იპოვეთ $|a+b|-|a|\cdot b$, თუ $a=-5\cdot4+3\cdot(-2)$, ხოლო $b=(-6-|8|+|-2|)\cdot(-4)$.

26. იპოვეთ $|a-b-b|$, თუ $a=-12:(-3)+(-15):5$, ხოლო $b=-12:(-3)-(-15):5$.

27. პირველ ყუთში მეტი წონის ვაშლია, ვიდრე მეორეში. როგორ შეიცვლება ვაშლების წონათა სხვაობა, თუ პირველი ყუთიდან მეორეში 8 კგ ვაშლს გადავაწყოთ?

28. ერთ ყუთში 65 კგ-ით მეტი ვაშლია, ვიდრე მეორეში, რამდენი კგ ვაშლი უნდა გადავაწყოთ პირველი ყუთიდან მეორეში, რომ ა) პირველ ყუთში 25 კგ-ით მეტი დარჩეს, ვიდრე მეორეში; ბ) პირველ ყუთში 25 კგ-ით ნაკლები დარჩეს, ვიდრე მეორეში.

29. მაგიდაზე თეფშები 3-ით მეტია, ვიდრე ჭიქები, ხოლო ლამბაქები 2-ით ნაკლებია თეფშებზე. რა უფრო მეტია მაგიდაზე ჭიქები, თუ ლამბაქები და რამდენით?

30. მაღაზიის ორი საღაროდან თითოეულში 7290 ლარი იყო. ერთი საღაროდან ხარჯებისათვის გასცეს რაღაც თანხა, მეორე საღაროდან კი 900 ლარით იმაზე მეტი გასცეს, რაც პირველ საღაროში დარჩა. რა თანხა დარჩა ორივე საღაროში?

2.1.1. ტესტი №1

1. $|x|<|y|$ ნიშნავს:

ა) $a<b$; ბ) $a\leq b$; გ) $a=b$; დ) a რიცხვით ღერძზე b -ს მარცხნივ მდებარეობს; ე) მანძილი სათავედან a -მდე ნაკლებია, ვიდრე მანძილი სათავედან b -მდე.

2. რომელია ჭეშმარიტი გამოონათქვამი:

ა) ორი დადებითი რიცხვის ჯამი თითოეულ შესაკრებზე ნაკლებია;

ბ) ორი უარყოფითი რიცხვის ჯამი თითოეულ შესაკრებზე

- ნაკლებია;
- გ) დადებითი და უარყოფითი რიცხვების ჯამი დადებითია;
- დ) სხვადასხვანიშნიანი რიცხვების ჯამი ნულის ტოლია;
- ე) სამი უარყოფითი რიცხვის ჯამი დადებითია.
3. რას უდრის -3-სა და 4-ს შორის მოთავსებული რიცხვების ნამრავლი
- ა) უარყოფით რიცხვს;
- ბ) დადებით რიცხვს;
- გ) ნულს;
- დ) შეუძლებელია განსაზღვრა.
4. ვიპოვოთ თუ რას უდრის სამი ერთმანეთის მომდევნო ციფრებით (იგულისხმება ზრდადობით ან კლებადობით ჩაწერილი რიცხვი, ციფრები ავიღოთ 0-ის გარეშე, ე.ი. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) შედგენილ რიცხვს რომ გამოვაკლოთ იმავე ციფრების შებრუნებული მიმდევრობით ჩაწერილი რიცხვი
- ა) თუ საკლები მეტია მაკლებზე 198-ს, ხოლო თუ საკლები ნაკლებია მაკლებზე -198-ს;
- ბ) დადებით რიცხვს; გ) უარყოფით რიცხვს;
- დ) ნულს; ე) შეუძლებელია განსაზღვრა.
5. სამი შესაკრებიდან ერთი გადიდებულია 28-ით, ხოლო მეორე კი 53-ით. რა უნდა ვუყოთ მესამე შესაკრებს, რომ ჯამი უცვლელი დარჩეს?
- ა) გავადიდოთ 28-ით; ბ) შევამციროთ 53-ით;
- გ) გავადიდოთ 81-ით; დ) შევამციროთ 81-ით.
6. ერთნაირნიშნიანი ორი რიცხვის ნამრავლი არის:
- ა) დადებითი რიცხვი; ბ) უარყოფითი რიცხვი;
- გ) ნული; დ) შეუძლებელია განსაზღვრა.
7. სხვადასხვანიშნიანი ორი რიცხვის ნამრავლი არის:
- ა) დადებითი რიცხვი; ბ) უარყოფითი რიცხვი;
- გ) ნული; დ) შეუძლებელია განსაზღვრა.
8. $|a \cdot b|$ განაყოფს, სადაც $b \neq 0$ და $a \neq 0$, ექნება:
- ა) b რიცხვის ნიშანი; ბ) დადებითი ნიშანი;
- გ) უარყოფითი ნიშანი; დ) a -ს ნიშანი;
- ე) შეუძლებელია ნიშნის განსაზღვრა.
9. $|ab| + a$ გამოსახულებას ექნება:

- ა) დადებითი ნიშანი; ბ) უარყოფითი ნიშანი;
- გ) იგი 0-ის ტოლია; დ) a -ს ნიშანი;
- ე) შეუძლებელია ნიშნის განსაზღვრა.

10. $|ab|+|a : b|$, სადაც $b \neq 0$ გამოსახულებას ექნება:

- ა) დადებითი ნიშანი; ბ) a -ს ნიშანი; გ) b -ს ნიშანი;
- დ) შეუძლებელია ნიშნის განსაზღვრა; ე) იგი 0-ის ტოლია.

**§3. წილადის ცნება. წილადის პირითადი თვისება,
ტოლკალოვანი წილადები. ღადებითი რაციონალური
რიცხვის ჩაწერა უკვეცი წილადის სახით.**

ნატურალური რიცხვის ცნების საფუძველზე ისტორიულად აღმოცენდა და განვითარდა წილადი, ირაციონალური და უარყოფითი რიცხვის ცნება. მთელმა (დადებითმა და უარყოფითმა), აგრეთვე, რაციონალურმა და ნამდვილმა რიცხვებმა თეორიული დასაბუთება პოვეს მხოლოდ მეცხრამეტე საუკუნეში.

წილადი რიცხვების წარმოშობა დაკავშირებულია ადამიანის პრაქტიკულ საქმიანობასთან. საგანთა თელასთან ერთად ადამიანებს უძველესი დროიდან უხდებოდათ სხედასხვა სიდიდის (სიგრძე, მასა, დრო და ა.შ.) გაზომვა. გაზომვის შედეგის გამოსახვა ნატურალური რიცხვის საშუალებით ზოგჯერ არ იყო შესაძლებელი, უნდა გაეთვალისწინებინათ ერთეულის ნაწილიც. ასე წარმოიშვნენ წილადები, თავდაპირველად ეს იყო კონკრეტული ნაწილები. ძალზე ხანგრძლივი იყო კონკრეტული წილადებიდან განყენებულ წილადებზე გადასვლის დრო. ძველი რომაელები მასისა და ფულის საზომ თავიანთ ერთეულს, რომელსაც ეწოდებოდა „ასი“, ყოფდნენ 12 ტოლ ნაწილად და ერთ ნაწილს „უნციას“ ეძახდნენ. შემდგომში უნციას ისინი იყენებდნენ ნებისმიერი სიდიდის გასაზომად. ასე წარმოიშვა რომაული თორმეტობითი წილადები, ე.ი. ის წილადები, რომელთა მნიშვნელი 12 იყო. $\frac{1}{12}$ რომაელებისათვის იყო „ერთი უნცია“, $\frac{5}{12}$ - „ხუთი უნცია“ და ა.შ. სამ უნციას მეოთხედი ეწოდებოდა, ოთხ უნციას - მესამედი, ხოლო ექვს უნციას - ნახევარი.

აღბათ, პირველი წილადი, რომელსაც კაცობრიობა გაეცნო იყო ნახევარი. შემდგომი დროისაა წილადები: $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ და ა.შ. ესენი ერთეულადი წილადებია. ასეთ წილადებს ეპოულობთ ჩვენს ერამდე დაახლოებით 2000 წლის წინანდელ ეგვიპტურ პაპირუსებში. იმდროინდელი ძველი ეგვიპტელი მათემატიკოსები ერთეული წილადების გარდა იცნობდნენ წილადებს $\frac{2}{3}$ -სა და

$\frac{3}{4}$ -ს, რომელთაც ისინი სპეციალური სახელწოდებითა და სიმბოლოებით აღნიშნავენ.

უფრო რთული წილადები წარმოიდგინებოდა რამდენიმე ერთეულადი წილადის ჯამის სახით. გავარკვეით ეს მაგალითის საშუალებით; ეთქვათ, ხუთი პური თანაბრად უნდა გაინაწილოს ექვსმა კაცმა. ცხადია, თითოეულს ერგება ერთი პურის $\frac{5}{6}$ ნაწი-

ლი, მასთან $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, ე.ი. თითოეულმა უნდა მიიღოს ერთი პურის ნახევარი და ერთი პურის მესამედი ნაწილი. ამიტომ სამი პურიდან თითოეული უნდა გაიყოს შუაზე და დარჩენილი ორი პურიდან თითოეული უნდა გაიყოს სამ ტოლ ნაწილად. თუ სიდიდის გაზომვისას მიიღებოდა წილადი $\frac{3}{4}$, მაშინ ეგვიპტელებს

იგი უნდა წარმოედგინათ, როგორც $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, ე.ი. სამი მეოთხედის ნაცვლად ეგვიპტელები იღებდნენ ნახევარს და მეოთხედს.

არაერთეულადი წილადების ერთეულადი წილადების ჯამის სახით წარმოდგენისათვის ეგვიპტელებს ჰქონდათ მზა ცხრილები, რომლებითაც ისინი სარგებლობდნენ გამოანგარიშებათა დროს.

თანდათანობით ხმარებაში შემოდიოდა ნებისმიერმრიცხველიანი წილადებიც. მაგალითად, არქიმედე ჩვენს ერამდე მესამე საუკუნეში უკვე ხმარობდა ასეთ წილადებს.

ჯერ კიდევ ჩვენს ერამდე მესამე ათასწლეულის შუა საუკუნეებში შუმერებს ჰქონდათ წილადები $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$, რომელთათვისაც არსებობდა ინდივიდუალური ნიშნები. ამ დროს ისინი იცნობდნენ წილადებსაც $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}$. პარალელურად ჯერ შუმერებთან,

შემდეგ ბაბილონში განვითარდა სამოცობითი წილადები. ეს არის მსოფლიოში პირველი სისტემატური წილადები, ე.ი. ისეთი წილადები, რომელთა მნიშვნელები ერთი და იგივე რიცხვის ხარისხებია, ამ შემთხვევაში 60-ის. სისტემატური წილადების მეო-

რე მაგალითია თანამედროვე ათწილადები.

ეგვიპტელთა მსგავსად ბაბილონელებს დიდი ენერგიის დახარჯვა დასჭირდათ იმისათვის, რომ შეედგინათ ცხრილები, სადაც ერთეულადი წილადები გამოსახულიყო სამოცობით წილადებში. მაგალითად: $\frac{1}{8} = \frac{7}{60} + \frac{30}{60^2}$. მათი ცხრილები უფრო შორსაც

მიდიოდა: $\frac{3}{8} = \frac{22}{60} + \frac{30}{60^2}$, $\frac{2}{3} = \frac{40}{60}$, $\frac{2}{3}$ მეტია $\frac{3}{8}$ -ზე $\left(\frac{17}{60} + \frac{30}{60^2}\right)$ -ით.

შუმერულ-ბაბილონური სამოცობითი წილადები გაერცელდა ინდოეთში, არაბეთსა და საბერძნეთში. ამ წილადების გამოყენება განსაკუთრებით აღსანიშნავია ძველბერძნულ ასტრონომიაში.

შუმერული სამოცობითი წილადების კვალია თანამედროვე საათის დაყოფა 60 წუთად და წუთისა 60 წამად. აგრეთვე კუთხის საზომი ერთეულების ანალოგიური დაყოფა.

მეთექვსმეტე საუკუნემდე ერცელდებოდა წილადების სამი სისტემა: შუმერულ-ბაბილონური სამოცობითი, რომაული თორმეტობითი და ინდური ჩვეულებრივი. ამ წილადებს მათემატიკოსები სხვადასხვანაირად წერდნენ, სხვადასხვა სიმბოლოებს იყენებდნენ მათ ჩასაწერად. მეთექვსმეტე საუკუნეში ამ სისტემებს შორის ბრძოლა დამთავრდა ინდური სისტემის გამარჯვებით. ამავსე საუკუნეში ჩვეულებრივმა წილადებმა მიიღო დაახლოებით ისეთი სახე, როგორიც დღეს აქვს.

სახელწოდება „მრიცხველი“ და „მნიშვნელი“ შემოღებულია მაქსიმე პლენუდას მიერ მე-13 საუკუნეში. ტერმინი „ჩვეულებრივი წილადი“ გაჩნდა ტრანშანთან 1558 წელს, ხოლო ტერმინები „წესიერი“ და „არაწესიერი“ წილადები პირველად გვხვდება სენერთან 1747 წელს. წილადების გაერთმნიშვნელიანება შემოღებულია მე-16 საუკუნის მეორე ნახევრიდან ტარტალიასა და კლავიუსის შრომების შემდეგ. წილადის ჩვენთვის ჩვეული ჩანაწერი ჯერ კიდევ ძველი ბერძენი მათემატიკოსებისათვის იყო ცნობილი; თუმცა, ისინი მნიშვნელს წერდნენ მრიცხველის ზემოთ, წილადის ხაზი კი საერთოდ არ იყო. ინდოელმა მათემატიკოსებმა მნიშვნელს ადგილი შეუცვალეს, მრიცხველის ქვეშ მოაქციეს, მაგრამ წილადის ხაზის გარეშე. ასე გადავიდა ეს წესი ევროპა-

ში. წილადის ხაზი 1202 წელს შემოიღო ლეონარდო პიზელმა, მაგრამ საბოლოოდ დაამკვიდრა იგი იოჰან ეილდმანმა 1489 წლიდან.

წილადი არის $\langle m, n \rangle$ რიცხვთა წყვილი (სადაც $m \in \mathbb{Z}$ და $n \in \mathbb{N}$), n არის მნიშვნელი და გეიჩვენებს რამდენ ტოლ ნაწილადაა დაყოფილი მთელი, ხოლო m – მრიცხველია, რომელიც გეიჩვენებს, თუ რამდენი ტოლი ნაწილია აღებული. წილადს აღნიშნავენ $\frac{m}{n}$ სიმბოლოთი.

აუცილებელია, ვიცოდეთ ჩვეულებრივი წილადის ცნების ორნაირი გააზრება:

1. ჩვეულებრივი წილადი გეიჩვენებს, თუ რამდენ ტოლ ნაწილადაა მთელი გაყოფილი და რამდენი ასეთი ნაწილია აღებული. მაგალითად, განვიხილოთ ცხრილი 1, სადაც ფიგურის დაშტრიხული ნაწილი შეესაბამება მოცემულ რიცხვს.

მთელი ფიგურა 1	ნახევარი 1/2	ორი მესამედი 2/3	სამი მეოთხედი 3/4	ხუთი მეექვსედი 5/6	სამი მეერედი 3/8

2. ჩვეულებრივი წილადი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ორი ნატურალური რიცხვის გაყოფით მიღებული განაყოფი. მაგალითად, ორი ვაშლი თანაბრად გაეუნაწილოთ სამ

ბავშვს, ამისათვის საჭიროა $2:3 = \frac{2}{3}$; ე.ი. ჩვეულებრივი წილადი

შეიძლება განვიხილოთ, როგორც გაყოფის შედეგად მიღებული განაყოფი, სადაც წილადის მრიცხველი გასაყოფია, ხოლო გამყოფი კი წილადის მნიშვნელია; წილადის ხაზი აღნიშნავს მოქმედება გაყოფას. შევნიშნოთ, რომ წილადის მნიშვნელი არ შეიძლება 0-ის ტოლი იყოს, რადგან 0-ზე გაყოფა არ შეიძლება.

რიცხვებს, რომლებიც $\frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$) წილადის სახით შეიძლება ჩაიწეროს დადებითი რაციონალური რიცხვები ეწოდებათ, მათი მოპირდაპირე რიცხვები უარყოფითი რაციონალური რიცხვებია („რაციონალური“ ლათინური სიტყვაა და „ratio“ ულუფას, წილს აღნიშნავს).

დადებითი რაციონალური რიცხვები, უარყოფითი რაციონალური რიცხვები და ნული რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს ქმნიან, იგი აღინიშნება $\mathbb{Q}$ ასოთი.

განსაზღვრა: $\frac{a}{b}$ წილადს ეწოდება $\frac{c}{d}$ წილადის ტოლი, თუ პირველი წილადის მრიცხველის ნამრავლი მეორის მნიშვნელზე ტოლია მეორე წილადის მრიცხველის ნამრავლის პირველის მნიშვნელზე: ე.ი. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, თუ $ad = bc$; მაგალითად, $\frac{4}{6} = \frac{10}{15}$, ეინაიდან $4 \cdot 15 = 10 \cdot 6$.

ცნობილია, რომ ნატურალურ რიცხვთა ტოლობის თანაფარდობას გააჩნია რეფლექსურობის, ტრანზიტულობის და სიმეტრიულობის თვისებები. ეს თვისებები ძალაშია წილადი რიცხვებისათვისაც.

1. $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ (რეფლექსურობა)
2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ (სიმეტრიულობა)
3. $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right) \wedge \left(\frac{c}{d} = \frac{m}{n}\right) \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ (ტრანზიტულობა)

წილადის ტოლობის განსაზღვრაზეა დამყარებული წილადის ძირითადი თვისების დამტკიცება. წილადის სიდიდე არ შე-

იცვლება, თუ მის მრიცხველსა და მნიშვნელს ერთსა და იმავე ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვზე გავამრავლებთ ან გავყოფთ.

ეთქვათ, მოცემულია $\frac{a}{b}$ წილადი, $m \neq 0$; თუ მრიცხველსა და

მნიშვნელს გავამრავლებთ m -ზე მივიღებთ $\frac{a \cdot m}{b \cdot m}$; უნდა დავამ-

ტყიცოთ, რომ $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$.

დამტკიცება: მართლაც, $a \cdot b \cdot m = a \cdot m \cdot b$ მაგალითად, $\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 3}$,

რადგან $4 \cdot 7 \cdot 3 = 4 \cdot 3 \cdot 7 = 84$.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $\frac{a}{b} = \frac{a:m}{b:m}$.

დამტკიცება: დასამტკიცებელი ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდგომი წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი გავამრავლოთ

m -ზე. მივიღებთ: $\frac{a:m}{b:m} = \frac{(a:m) \cdot m}{(b:m) \cdot m} = \frac{a}{b}$; მაგალითად:

$$\frac{301}{387} = \frac{301:43}{387:43} = \frac{7}{9}.$$

შეენიშნოთ, რომ ნატურალურ რიცხვებს თელის ათობით სისტემაში აქვთ ერთადერთი ჩანაწერი და სახელწოდება. წილად რიცხვებს კი აქვთ ჩანაწერებისა და სახელწოდებების უსასრულო სიმრავლე, რაც გამომდინარეობს წილადის ძირითადი თვისებებიდან;

მაგალითად: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \dots$; საზოგადოდ,

$$\frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} = \frac{3a}{3b} = \dots = \frac{n \cdot a}{n \cdot b}; n \in \mathbb{N}.$$

ახლა განვიხილოთ წილადების უტოლობა.

განსაზღვრა: $\frac{a}{b}$ წილადს ეწოდება $\frac{c}{d}$ წილადზე მეტი, თუ

პირველი წილადის მრიცხველის ნამრავლი მეორე წილადის მნიშვნელზე მეტია მეორე წილადის მრიცხველის ნამრავლისა

პირველი წილადის მნიშვნელზე; ე.ი. $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > bc$; მაგალი-

თად, $\frac{5}{9} > \frac{4}{7}$, რადგან $5 \cdot 7 > 4 \cdot 9$.

განსაზღვრა: $\frac{a}{b}$ წილადს ეწოდება $\frac{c}{d}$ წილადზე ნაკლები, თუ პირველი წილადის მრიცხველის ნამრაველი მეორე წილადის მნიშვნელზე ნაკლებია მეორე წილადის მრიცხველისა და პირველი წილადის მნიშვნელის ნამრაველზე; ე.ი. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$; მაგალითად, $\frac{3}{8} < \frac{4}{7}$, რადგან $3 \cdot 7 < 4 \cdot 8$.

თანაფარდობებს „მეტია“ და „ნაკლებია“ აქვთ შემდეგი თვისებები:

1. $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{c}{d} < \frac{a}{b}$;
2. $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, ხოლო $\frac{c}{d} > \frac{m}{n}$, მაშინ $\frac{a}{b} > \frac{m}{n}$;
3. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, ხოლო $\frac{c}{d} < \frac{m}{n}$, მაშინ $\frac{a}{b} < \frac{m}{n}$.

ზემოთ მოცემული განსაზღვრებებიდან გამომდინარეობს შემდეგი შედეგები:

1. ორი ტოლმნიშვნელიანი წილადიდან მეტია ის, რომლის მრიცხველიც მეტია; ე.ი. თუ $a > c$, მაშინ $\frac{a}{b} > \frac{c}{b}$; მაგალითად: $\frac{7}{9} > \frac{5}{9}$, რადგან $7 > 5$.
2. ორი ტოლმრიცხველიანი წილადიდან მეტია ის, რომლის მნიშვნელიც ნაკლებია; ე.ი. თუ $b < d$, მაშინ $\frac{a}{b} > \frac{a}{d}$; მაგალითად: $\frac{3}{5} > \frac{3}{7}$, რადგან $5 < 7$.

განსაზღვრა: $\frac{a}{b}$ წილადის შეკვეცა ნიშნავს მის შეცვლას ახალი წილადით, რომელიც მისი ტოლია და მიიღება მოცემული წილადისა და მნიშვნელის საერთო გამყოფზე გაყოფით. წილადები შეიძლება შეიკვეცოს მრიცხველისა და მნიშვნელის უსგ-

ზე გაყოფით.

ვთქვათ, $უსგ(a;b)=d>1$; ე.ი. a და b რიცხვები არ არიან ურთიერთმარტივი; დაუშვათ, $a=ud$ და $b=vd$, სადაც $უსგ(u;v)=1$, ამის

საფუძველზე შეიძლება დავწეროთ: $\frac{a}{b} = \frac{ud}{vd} = \frac{u}{v}$; $\frac{u}{v}$ წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი ურთიერთმარტივი რიცხვებია, ამიტომ $\frac{u}{v}$ წილადს უკვეც წილადს უწოდებენ. მაგალითად: წილადი

$\frac{862}{3879}$ დავიყვანოთ უკვეც სახეზე, გვექნება: $\frac{862}{3879} = \frac{2 \cdot 431}{9 \cdot 431} = \frac{2}{9}$, რადგან $უსგ(862; 3879)=431$.

ჩვეულებრივ პრაქტიკაში არჩევენ ორგვარ შეკვეცას:

1. ერთდროული შეკვეცა; ამ შემთხვევაში წილადის მრიცხველსა და მნიშვნელს ყოფენ მათ უსგ-ზე და ღებულობენ უკვეც წილადს.

2. თანდათანობითი შეკვეცა; ამ შემთხვევაში წილადის მრიცხველსა და მნიშვნელს ვყოფთ მათ რომელიმე საერთო გამყოფზე, ასე ვექცევით მიღებულ წილადს და იგივე მოქმედებას განვაგრძობთ მანამდე, სანამ არ მივიღებთ უკვეც წილადს; მაგალითად:

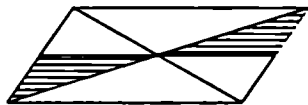
$$\frac{168}{504} = \frac{84}{252} = \frac{42}{126} = \frac{21}{63} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}.$$

3.1. საგარჯოშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. შეავსეთ ცხრილი:

განაყოფი	გასაყოფი	გამყოფი	წილადი	მრიცხველი	მნიშვნელი
4:7					
	15	6			
			$\frac{20}{6}$		
				12	14

2. წესიერი სამკუთხედი დაყავით ტოლ ნაწილებად, ისე რომ დაშტრიხოთ მისი $\frac{2}{7}$ ნაწილი.
3. წესიერი სამკუთხედი დაყავით ტოლ ნაწილებად, ისე რომ დაშტრიხოთ მისი $\frac{3}{5}$ ნაწილი.
4. წესიერი ხუთკუთხედი დაყავით ტოლ ნაწილებად, ისე რომ დაშტრიხოთ მისი $\frac{1}{3}$ ნაწილი.
5. წესიერი ექვსკუთხედი დაყავით ტოლ ნაწილებად ისე, რომ დაშტრიხოთ მისი $\frac{1}{7}$ ნაწილი.
6. პარალელოგრამის რა ნაწილია დაშტრიხული?



7. თუ სურათი  = 3, მაშინ 

დაშტრიხული ნაწილი ტოლია წილადის ...

8. 12 მთიბავს შეუძლია 3 დღეში მოთიბოს მდელო. მდელოს რა ნაწილს მოთიბავს ერთი მთიბავი ერთ დღეში, თუ ისინი სამუშაოს ერთნაირი ტემპით ასრულებდნენ?
9. ლალიმ 3 დღეში წაიკითხა წიგნის $\frac{3}{5}$ ნაწილი. რამდენ დღეში დაამთავრებს იგი მთელი წიგნის წაკითხვას, თუ წაკითხვის ტემპი უცვლელია?
10. 2 წუთი სამი საათის მერამდენედი ნაწილია?
11. დაწერეთ ყველა წილადი, რომელთა მრიცხველისა და მნიშვნელის ჯამი 5-ის ტოლია (მრიცხველიც და მნიშვნელიც დადებითია).
12. ტორტის $\frac{1}{3}$ -ის მასა 450 გრამია. რას უდრის ამ ტორტის ნა-

ხერის მასა?

13. მოცემულია წილადები: $\frac{15}{28}; \frac{5}{8}; \frac{23}{42}; \frac{19}{36}$ ა) დაალაგეთ წილადები

კლებადობით; ბ) რომელი წილადია უფრო ახლოს $\frac{1}{2}$ -თან?

14. წილადის მნიშვნელს მიუმატეს რიცხვი, რომელიც ზღერ მეტია ამ მნიშვნელზე. რა რიცხვზე უნდა გავამრავლოთ წილადის მრიცხველი, რომ წილადის სიდიდე არ შეიცვალოს?

15. x -ის ნაცვლად ჩავსვათ ისეთი რიცხვი, რომ მივიღოთ ჭეშარიტი ტოლობები: ა) $\frac{12}{17} = \frac{x}{51}$; ბ) $\frac{11}{12} = \frac{33}{x}$; გ) $\frac{87}{x} = \frac{29}{30}$; დ) $\frac{x}{13} = \frac{6}{78}$;
ე) $\frac{10}{75} = \frac{x}{15}$.

16. წილადები: $\frac{7}{19}; \frac{7}{15}; \frac{7}{10}; \frac{7}{9}; \frac{7}{18}; \frac{7}{11}; \frac{7}{8}$ ა) დაალაგეთ ზრდადობის მიხედვით; ბ) რომელი წილადი უფრო ახლოსაა 1-თან.

17. დაალაგეთ ზრდადობის მიხედვით ყველა უკვეცი წილადი, რომელთა წერები არ აღემატებიან 6-ს და არანაკლები არიან 1-ის (წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი ერთმანეთისაგან განსხვავებული რიცხვებია).

18. რას უდრის წილადები: $\frac{12}{3}; \frac{0}{7}; \frac{30}{6}; \frac{0}{16}; \frac{45}{15}; \frac{81}{27}; \frac{400}{10}; \frac{0}{201}$.

19. გამოიანგარიშეთ: ა) $\frac{48}{9-5}$; ბ) $\frac{27+3}{5-2}$; გ) $\frac{10 \cdot (35+5) + (99+21) \cdot 2}{25-2}$.

20. ტრაქტორი 2 დღეში ხნავს მიწის $\frac{1}{7}$ ნაწილს. რამდენ დღეში მოხნავს ტრაქტორი მიწის მთელ ნაკვეთს, თუ მუშაობის ტემპს არ შეცვლის?

21. საათი $\frac{7}{15}$ წამით რჩება ერთ საათში. რამდენ საათში გახდება ჩამორჩენა 7 წამის ტოლი?

22. შეკვეცთ წილადები, ისინი დაიყვანეთ უკვეც სახეზე:

- ა) $\frac{48}{60}$; ბ) $\frac{24}{120}$; გ) $\frac{180}{240}$; დ) $\frac{135}{270}$; ე) $\frac{288}{424}$; ვ) $\frac{475}{575}$; ზ) $\frac{444}{732}$; თ) $\frac{484}{644}$.

23. დაიყვანეთ შემდეგი წილადები უკვეც სახეზე:

ა) $\frac{12 \cdot 34 \cdot 15}{17 \cdot 45 \cdot 64}$; ბ) $\frac{33 \cdot 21 \cdot 16 \cdot 28}{64 \cdot 22 \cdot 49 \cdot 15}$; გ) $\frac{14 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 4}{15 \cdot 21 \cdot 16 \cdot 5}$; დ) $\frac{45 \cdot 20 \cdot 5 \cdot 3}{8 \cdot 27 \cdot 25}$;

ე) $\frac{38 \cdot 51 \cdot 65 \cdot 54}{81 \cdot 39 \cdot 34 \cdot 57}$; მ) $\frac{87 \cdot 68}{58 \cdot 51 \cdot 8}$

24. შეკვეცთ წილადები:

ა) $\frac{15x}{25x}$; ბ) $\frac{(x+y)}{2(x+y)}$; გ) $\frac{abc}{mbc}$; დ) $\frac{12ab}{16b}$.

25. გამოაკელით წილად $\frac{12}{15}$ -ის მრიცხველსა და მნიშვნელს 6 და შეადარეთ მიღებული წილადი მოცემულს.

26. გამოაკელით წილად $\frac{17}{15}$ -ის მრიცხველსა და მნიშვნელს 7 და შეადარეთ მიღებული წილადი მოცემულს.

27. მიუმატეთ წილად $\frac{3}{7}$ -ის მრიცხველსა და მნიშვნელს 8 და შეადარეთ მიღებული წილადი მოცემულს.

28. მიუმატეთ წილად $\frac{7}{3}$ -ის მრიცხველსა და მნიშვნელს 8 და შეადარეთ მიღებული წილადი მოცემულს.

29. წილად $\frac{1}{3}$ -ის მრიცხველს მიუმატეთ 2, ხოლო მნიშვნელს 6 და შეადარეთ მიღებული წილადი მოცემულს.

30. წილად $\frac{12}{18}$ -ის მრიცხველს გამოვაკლოთ 2, ხოლო მნიშვნელს 3 და შევადაროთ მიღებული წილადი მოცემულს.

3.1.1. ტესტი №2

1. წილადი, რომლის მნიშვნელია 12 და რომელიც მოთავსებულია $\frac{2}{5}$ -სა და $\frac{1}{2}$ -ს შორის არის:

ა) $\frac{3}{12}$; ბ) $\frac{4}{12}$; გ) $\frac{5}{12}$; დ) $\frac{7}{12}$; ე) $\frac{11}{12}$.

2. უდიდესი წილადი, რომლის მნიშვნელია 25 და რომელიც მოთავსებულია $\frac{1}{5}$ -სა და $\frac{4}{5}$ -ს შორის არის
- ა) $\frac{19}{25}$; ბ) $\frac{21}{25}$; გ) $\frac{22}{25}$; დ) $\frac{17}{25}$; ე) $\frac{15}{25}$.
3. უდიდესი წილადი, რომლის მნიშვნელია 20 და რომელიც მოთავსებულია $\frac{7}{10}$ -სა და $\frac{9}{10}$ -ს შორის არის
- ა) $\frac{15}{20}$; ბ) $\frac{17}{20}$; გ) $\frac{18}{20}$; დ) $\frac{14}{20}$; ე) $\frac{16}{20}$.
4. თუ მოცემული წილადის მრიცხველსა და მნიშვნელს გავამრავლებთ ან გაყოფთ ერთსა და იმავე ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვზე მიიღება: ა) მოცემულზე მეტი წილადი; ბ) მოცემულზე ნაკლები წილადი; გ) შეუძლებელია მიღებული და მოცემული წილადების შედარება; დ) მოცემულის ტოლი წილადი.
5. მოცემულია წილადები: $\frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{2}{3}$. დაალაგეთ ისინი კლებადობის მიხედვით
- ა) $\frac{4}{5}; \frac{3}{4}; \frac{2}{3}$; ბ) $\frac{4}{5}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}$; გ) $\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}$; დ) $\frac{2}{3}; \frac{4}{5}; \frac{3}{4}$.
6. მოცემულია წილადები: $\frac{2}{3}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}$. დაალაგეთ ისინი ზრდადობის მიხედვით
- ა) $\frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}$; ბ) $\frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}$; გ) $\frac{2}{3}; \frac{3}{5}; \frac{1}{2}$; დ) $\frac{3}{5}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}$.
7. წილადი იკვეცება 24-ზე. იგი შეკვეცეს ჯერ 4-ზე და შემდეგ 3-ზე. რა რიცხვზე შეიძლება კიდევ მიღებული წილადის შეკვეცა?
- ა) 24-ზე; ბ) 12-ზე; გ) 6-ზე; დ) 3-ზე; ე) 2-ზე.
8. წილადი შეკვეცეს ჯერ 2-ზე, შემდეგ 3-ზე და შემდეგ კი 5-ზე. რომელ უდიდეს რიცხვზე შეიძლებოდა წილადის ერთბაშად შეკვეცა?
- ა) 6-ზე; ბ) 15-ზე; გ) 10-ზე; დ) 30-ზე; ე) 36-ზე.

9. $\frac{x+3}{7} = \frac{8}{14}$, რა რიცხვი უნდა ჩავსვათ x -ის მაგივრად, რომ მივიღოთ ჭეშმარიტი ტოლობა?
ა) 1; ბ) 2; გ) 3; დ) 4; ე) 5.
10. $\frac{a-2}{5} = \frac{10}{25}$, რა რიცხვი უნდა ჩავსვათ a -ს მაგივრად, რომ მივიღოთ ჭეშმარიტი ტოლობა?
ა) 5; ბ) 4; გ) 3; დ) 7; ე) 6.

§4. წილადი რიცხვების შეკრება და გაყოფა. შეკრება-გაყოფის ძირითადი თვისებები.

წილადი რიცხვების შეკრებისა და გამოკლების განხილვამდე გავარკვიოთ სხვადასხვა მნიშვნელობის წილადების ერთ მნიშვნელზე დაყვანის საკითხი.

განსაზღვრა: რამდენიმე მოცემული წილადის გაერთმნიშვნელობა ეწოდება მათ ისეთ გარდაქმნას, რომლის დროსაც არც ერთი მათგანი არ იცვლის თავის სიდიდეს, ხოლო შედეგად ვღებულობთ ერთმნიშვნელოვან წილადებს.

წილადების გაერთმნიშვნელობისთვის საკმარისია ვიპოვოთ მათი მნიშვნელების საერთო ჯერადი და შემდეგ თითოეული წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი გაავრავლოთ ე.წ. დამატებით თანამამრავლზე, რომელსაც მივიღებთ ნაპოვნი საერთო ჯერადის მოცემული წილადის მნიშვნელზე გაყოფით.

ეთქვათ, მოცემულია წილადები: $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{m}{n}$; ავიღოთ მათი მნიშვნელების ერთ-ერთი საერთო ჯერადი $k = b \cdot d \cdot n$, თუ ვისარგებლებთ წილადის ძირითადი თვისებით შეიძლება მოცემული წილადები წარმოვადგინოთ ასე: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d \cdot n}{k}$; $\frac{c}{d} = \frac{c \cdot b \cdot n}{k}$; $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot d \cdot b}{k}$.

იმისათვის, რომ გავამარტივოთ წილადების გაერთმნიშვნელობის პროცესი, ე.ი. იმ მოქმედების შესრულება, რომლის დროსაც გვიხდება წილადებისათვის ერთნაირი მნიშვნელის მოძებნა, მიზანშეწონილია მოცემული წილადების საერთო მნიშვნელად ავიღოთ მათი მნიშვნელების უსჯ. ამრიგად, რამდენიმე წილადი რომ გავაერთმნიშვნელიანოთ, საჭიროა, წინასწარ, თუ შესაძლებელია, ისინი შევკვეცოთ, ხოლო შემდეგ მოვძებნოთ მიღებული წილადების მნიშვნელების უსჯ და ყველა წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი გაავრავლოთ მათ შესაბამის დამატებით მამრავლზე.

მაგალითად, ეთქვათ მოცემულია წილადები: $\frac{15}{24}; \frac{21}{36}; \frac{18}{60}$ და $\frac{7}{48}$; ჯერ მოვახდინოთ შეკვეცა $\frac{5}{8}; \frac{7}{12}; \frac{3}{10}; \frac{7}{48}$; შემდეგ ვიპოვოთ

უსჯ (8, 12, 10, 48)=240, ამიტომ $\frac{5}{8} = \frac{150}{240}$; $\frac{7}{12} = \frac{140}{240}$; $\frac{3}{10} = \frac{72}{240}$ და $\frac{7}{48} = \frac{35}{240}$.

წილადების გაერთმნიშვნელობის დროს შეიძლება ადგილი ჰქონდეს ორ შემთხვევას:

1. შესაძლებელია მოცემული უკვეცი წილადების მნიშვნელები წყვილ-წყვილად ურთიერთმარტივი რიცხვები იყოს, მაშინ მათი საერთო მნიშვნელი იქნება ყველა მნიშვნელის ნამრავლი;

მაგალითად, მოცემულია წილადები: $\frac{5}{8}$; $\frac{3}{5}$ და $\frac{4}{9}$, ამიტომ უსჯ

(8, 5, 9)=360, მაშინ გვექნება: $\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 9}{360} = \frac{225}{360}$, $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 8 \cdot 9}{360} = \frac{216}{360}$,

$\frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 5}{360} = \frac{160}{360}$.

2. შესაძლებელია, მოცემული წილადების მნიშვნელებიდან უდიდესი მნიშვნელი დანარჩენი მნიშვნელების ჯერადი იყოს; ამ შემთხვევაში საერთო მნიშვნელად მივიღებთ უდიდეს მნიშვნელს;

მაგალითად, მოცემულია წილადები: $\frac{7}{15}$; $\frac{23}{30}$; $\frac{13}{12}$ და $\frac{31}{60}$;

ცხადია, უსჯ(15, 30, 12, 60)=60; ამიტომ $\frac{7}{15} = \frac{28}{60}$; $\frac{23}{30} = \frac{46}{60}$;

$\frac{13}{12} = \frac{65}{60}$ და $\frac{31}{60} = \frac{31}{60}$.

შეთანხმდეთ, რომ წილადის სიდიდედ, რომლის მნიშვნელი 1-ის ტოლია, ჩავთვალოთ ამ წილადის მრიცხველის სიდიდე, ე.ი.

$\frac{a}{1} = a$.

ამ შეთანხმების ძალით, ყოველი მთელი რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ წილადის სახით, რომლის მნიშვნელი ნებისმიერი წინასწარ მოცემული ნატურალური რიცხვია. მართლაც, ვთქვათ მოცემულია a მთელი რიცხვი და n ნატურალური რიცხვი; ჩვენი შეთანხმებით და წილადის ძირითადი თვისების ძალით

გვექნება: $\frac{a}{1} = \frac{a \cdot n}{1 \cdot n} = \frac{a \cdot n}{n}$; ანუ $a = \frac{an}{n}$. მაშასადამე, მოცემული მთე-

ლი რიცხვი რომ წარმოადგინოთ წილადის სახით, რომლის მნიშვნელი მოცემული რიცხვია, საჭიროა შევადგინოთ წილადი, რომლის მრიცხველი იქნება მოცემული მთელი რიცხვისა და აღნიშნული მნიშვნელის ნამრავლი, ხოლო მნიშვნელი მოცემული რიცხვი. მაგალითად, მოცემულია მთელი რიცხვი 5. წარმოადგინოთ იგი წილადად, რომლის მნიშვნელი იქნება 9; გვექნება:

$$5 = \frac{5}{1} = \frac{5 \cdot 9}{9} = \frac{45}{9}.$$

განსაზღვრა: წილადს, რომლის მრიცხველი მნიშვნელზე ნაკლებია წესიერი წილადი ეწოდება. მაგალითად:

$\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{9}, \frac{11}{17}$ წესიერი წილადებია. წესიერი წილადი 1-ზე ნაკლებია. (იგულისხმება დადებითი რაციონალური რიცხვები). მართლაც, თუ $\frac{a}{b}$ წესიერი წილა-

დია, ე.ი. $a < b$, მაშინ $\frac{a}{b} < \frac{b}{b}$, ანუ $\frac{a}{b} < 1$.

განსაზღვრა: წილადს, რომლის მრიცხველი მნიშვნელზე მეტია, ან მისი ტოლია, არაწესიერი წილადი ეწოდება; მა-

გალითად: $\frac{3}{2}; \frac{4}{2}; \frac{5}{1}; \frac{3}{3}$ არაწესიერი წილადებია. არაწე-

სიერი წილადი ერთზე მეტია ან უდრის ერთს. მართლაც, თუ $\frac{a}{b}$ არაწესიერი წილადია, ე.ი. $a \geq b$, მაშინ

$\frac{a}{b} \geq \frac{b}{b}$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $\frac{a}{b} \geq 1$.

ეხლა განვიხილოთ წილადების შეკრება და ჯამის თვისებები.

განსაზღვრა: $\frac{a}{b}$ და $\frac{c}{d}$ წილადების ჯამი ეწოდება ისეთ წილადს, რომლის მრიცხველი ტოლი იქნება მოცემული წილადების გაერთმნიშვნელობების შედეგად მიღებული წილადების მრიცხველების ჯამის, ხოლო მნიშვნელი – მოცემული წილადების საერთო მნიშვნელი.

ამრიგად: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$; კერძოდ: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$.

მაგალითად: $\frac{4}{7} + \frac{5}{7} = \frac{9}{7}$; $\frac{2}{15} + \frac{7}{20} = \frac{8}{60} + \frac{21}{60} = \frac{29}{60}$.

განსაზღვრა: მთელი რიცხვისა და წილადის ჯამს შერეული რიცხვი ეწოდება. მაგალითად: $3 + \frac{4}{5}$ შერეული რიცხვია; შე-

რეული რიცხვი $3 + \frac{4}{5} = 3\frac{4}{5}$ შეიძლება წარმოვადგინოთ არაწესიე-

რი წილადის სახით; მართლაც: $3\frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 4}{5} = \frac{19}{5}$. ზოგადად,

ეტყვათ, a მთელი რიცხვია, მაშინ $a + \frac{r}{n} = \frac{an}{n} + \frac{r}{n} = \frac{an+r}{n}$.

ამრიგად, შერეული რიცხვი რომ ჩაეწეროს არაწესიერი წილადის სახით, საჭიროა მთელი გავამრავლოთ წილადის მნიშვნელზე დაემატოთ მრიცხველი და მიღებული შედეგი დაეწეროს ახალი წილადის მრიცხველად, ხოლო მნიშვნელი უცვლელად დაეტოვოს. მაგალითად: $4\frac{22}{31} = \frac{4 \cdot 31 + 22}{31} = \frac{146}{31}$.

არაწესიერი წილადი კი შერეული რიცხვის სახით რომ წარმოვიდგინოთ, საჭიროა მრიცხველი გავყოთ მნიშვნელზე, მიღებული განაყოფი დაეწეროს მთელად, ნაშთი მრიცხველად, ხოლო მნიშვნელი უცვლელად დაეტოვოს. მაგალითად: $\frac{22}{7} = 22 : 7 = 3\frac{1}{7}$.

განვიხილოთ წილადების ჯამის თვისებები:

შევნიშნოთ, რომ წილადი რიცხვების ჯამს გააჩნია ყველა ის თვისება, რასაც ადგილი ჰქონდა ნატურალური რიცხვების შეკრებისას.

1. არსებობისა და ერთადერთობის თვისება; როგორიც არ უნდა იყოს მოცემული წილადი რიცხვები, ყოველთვის არსებობს ისეთი წილადი, რომელიც მათ ჯამს წარმოადგენს და იგი ერთადერთია.

მოცემული თვისებების დამტკიცების დროს შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ წილადები დაყვანილია საერთო მნიშვნელზე.

ასეთ პირობებში წილადების შეკრება დაიყვანება ნატურალური რიცხვების შეკრებაზე და მაშასადამე, წილადების ჯამი ყოველთვის იარსებებს.

გაჩვენოთ, რომ წილადების ჯამი ერთადერთია; ე.ი. როგორც არ უნდა იყოს მოცემული წილადი რიცხვები, ყოველთვის არსებობს ისეთი ერთადერთი უკვეცი წილადი, რომელიც მათ ჯამს წარმოადგენს. ეს თვისებაც მარტივად მიიღება ნატურალური რიცხვებისათვის არსებული შესაბამისი თვისებიდან. შევნიშნოთ, რომ რიცხვთა ერთადერთი წყვილით ერთი და იმავე სიდიდის წილადი მაშინ იქნება წარმოდგენილი, როცა იგი უკვეცია.

1. გადანაცვლებადობის (კომუტატიურობის) თვისება:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}.$$

მართლაც, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} = \frac{bc+ad}{bd} = \frac{bc}{bd} + \frac{ad}{bd} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}.$

2. ჯუფებადობის (ასოციატიურობის) თვისება; მოცემული თვისების დამტკიცებისას ვიგულისხმობთ, რომ წილადები დაყვანილია საერთო მნიშვნელზე.

$$\left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n}\right) + \frac{c}{n} = \frac{a}{n} + \left(\frac{b}{n} + \frac{c}{n}\right); \text{ მართლაც, გვექნება:}$$

$$\left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n}\right) + \frac{c}{n} = \frac{a+b}{n} + \frac{c}{n} = \frac{(a+b)+c}{n} = \frac{a+(b+c)}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b+c}{n} = \frac{a}{n} + \left(\frac{b}{n} + \frac{c}{n}\right).$$

3. თუ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, მაშინ $\frac{m}{n} + \frac{a}{b} = \frac{m}{n} + \frac{c}{d}$; ე.ი. ორი წილადი რიცხვის შეკრებისას, თუ ერთ-ერთ შესაკრებს მისი ტოლი შესაკრებით შევცვლით, ამით ჯამი არ შეიცვლება.

მართლაც, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$; ამ ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ n^2 -ზე და მიღებულ შედეგებს დავუმატოთ $mn \cdot bd$, მივიღებთ:

$$adn^2 + mnbd = bc \cdot n^2 + mnbd, \text{ ე.ი. } (an+mb) \cdot dn = (cn+md) \cdot bn, \text{ რაც იმას}$$

ნიშნავს, რომ $\frac{an+mb}{bn} = \frac{cn+md}{dn}$, აქედან კი გვაქვს, $\frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{c}{d} + \frac{m}{n},$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $\frac{m}{n} + \frac{a}{b} = \frac{m}{n} + \frac{c}{d}.$

4. თუ $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$, მაშინ $\frac{a}{m} + \frac{c}{m} > \frac{b}{m} + \frac{c}{m}$; მართლაც, რადგან $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$, ამიტომ $a > b$, მაშინ $a+c > b+c$, რის საფუძველზეც გვაქვს, რომ $\frac{a+c}{m} > \frac{b+c}{m}$, ანუ $\frac{a}{m} + \frac{c}{m} > \frac{b}{m} + \frac{c}{m}$.

ახლა განვიხილოთ, რომ თუ $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$ და $\frac{c}{m} > \frac{d}{m}$, მაშინ $\frac{a}{m} + \frac{c}{m} > \frac{b}{m} + \frac{d}{m}$; მართლაც გვაქვს: $a > b$ და $c > d$, ნატურალურ რიცხვთა მონოტონობის გამო მივიღებთ: $a+c > b+d$, მაშინ $\frac{a+c}{m} > \frac{b+d}{m}$, რაც საბოლოოდ გვაძლევს - $\frac{a}{m} + \frac{c}{m} > \frac{b}{m} + \frac{d}{m}$.

ამრიგად, წილადი რიცხვების სიმრავლე, ისევე როგორც ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, შეკრების მიმართ მონოტონურია.

განვიხილოთ წილადი რიცხვების გამოკლება და მისი თვისებები.

განსაზღვრა: $\frac{a}{b}$ წილადიდან $\frac{c}{d}$ წილადის გამოკლება ნიშნავს ისეთი $\frac{x}{y}$ წილადის პოვნას, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} + \frac{x}{y}$.

ამრიგად, თავისი შინაარსით, წილადების გამოკლება არის ისეთი არითმეტიკული მოქმედება, სადაც ორი წილადის მოცემული ჯამითა და ერთ-ერთი შესაკრები წილადით ვპოულობთ მეორე შესაკრებ წილადს.

ვაჩვენოთ, რომ $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$ ამ ფორმულის არსებობისათ-

ვის აუცილებელია და საკმარისია, რომ $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ (შეგახსენებთ, რომ ჩვენ განვიხილავთ არაუარყოფით რაციონალურ რიცხვებს). მართლაც, ამ პირობებში $ad \geq bc$, ე.ი. $ad-bc$ სხვაობა არსებობს.

დავამტკიცოთ, რომ $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$. წილადების გამოკლების

განსაზღვრის თანახმად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\frac{c}{d} + \frac{ad-bc}{bd} = \frac{a}{b}$. ახლა ვაჩვენოთ წილადების სხვაობის ერთადერთობა. დაეუშვათ საწინააღმდეგო; ეთქვათ, რომ $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{x}{y}$ და $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{k}{z}$; მასთან $\frac{x}{y} \neq \frac{k}{z}$. წილადების განსაზღვრის თანახმად გვექნება:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} + \frac{x}{y} \text{ და } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} + \frac{k}{z}.$$

მიღებული ტოლობების შედარება გვაძლევს: $\frac{c}{d} + \frac{x}{y} = \frac{c}{d} + \frac{k}{z}$,

საიდანაც ვღებულობთ, რომ $\frac{x}{y} = \frac{k}{z}$, რაც ჩვენ დაშვებას ეწინააღმდეგება.

ისევე, როგორც ნატურალური რიცხვების შეკრება და გამოკლება, წილადი რიცხვების შეკრება და გამოკლებაც წარმოადგენს ურთიერთშებრუნებულ მოქმედებებს; განვიხილოთ წილადების სხვაობის თვისებები.

წილადების შეკრება და გამოკლება, როცა ისინი ერთდროულად გვხვდება მოქმედებათა მწკრივში, ხასიათდება იმავე თვისებებით, რაც დამახასიათებელია ნატურალურ რიცხვთა შეკრებისა და გამოკლებისათვის.

ჩამოვთვალოთ ეს თვისებები:

$$1. \frac{a}{b} + \frac{c}{d} - \frac{m}{n} = \frac{a}{b} - \frac{m}{n} + \frac{c}{d};$$

$$2. \frac{a}{b} - \frac{c}{d} - \frac{m}{n} = \frac{a}{b} - \frac{m}{n} - \frac{c}{d};$$

ე.ი. წილადების შეკრებისა და გამოკლების მწკრივში ამ მწკრივის წევრთა გადაადგილებით შედეგი არ შეიცვლება.

3. რიცხვს, რომ წილადების სხვაობა მიეუმატოთ, საჭიროა ამ რიცხვს მიეუმატოთ საკლები და მიღებულ ჯამს გამოვაკლოთ

$$\text{მაკლები, ე.ი. } \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} - \frac{e}{f} \right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) - \frac{e}{f};$$

4. რიცხვს რომ წილადების ჯამი გამოვაკლოთ, საჭიროა ამ

რიცხვს გამოვაკლოთ ჯერ პირველი შესაკრები და მიღებულ სხვაობას გამოვაკლოთ მეორე შესაკრები, ე.ი.

$$\frac{a}{b} - \left(\frac{c}{d} + \frac{p}{q} \right) = \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right) - \frac{p}{q};$$

5. რიცხვს რომ წილადების სხვაობა გამოვაკლოთ, საჭიროა ამ რიცხვს გამოვაკლოთ საკლები და მიღებულ შედეგს მივეუმატოთ მაკლები. ე.ი. $\frac{a}{b} - \left(\frac{c}{d} - \frac{\ell}{t} \right) = \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right) + \frac{\ell}{t}$.

ამ თვისებებიდან დავამტკიცოთ ერთ-ერთი, მაგალითად მეოთხე თვისება. საერთო მნიშვნელი წილადებისა აღვნიშნოთ m -ით, ე.ი. უნდა დავამტკიცოთ, რომ $\frac{a}{m} - \left(\frac{c}{m} + \frac{p}{m} \right) = \left(\frac{a}{m} - \frac{c}{m} \right) - \frac{p}{m}$. მართლაც,

$$\frac{a}{m} - \left(\frac{c}{m} + \frac{p}{m} \right) = \frac{a}{m} - \frac{c+p}{m} = \frac{a-(c+p)}{m} = \frac{(a-c)-p}{m} = \frac{a-c}{m} - \frac{p}{m} = \left(\frac{a}{m} - \frac{c}{m} \right) - \frac{p}{m}.$$

ანალოგიურად დამტკიცდება დანარჩენი თვისებებიც.

შევნიშნოთ, რომ შერეულ რიცხვებზე შეკრებისა და გამოკლების მოქმედებების ჩატარებისას მოსახერხებელია თითოეული შერეული რიცხვის წარმოდგენა მთელი და წილადი ნაწილების ჯამის სახით და შუალედური გამოთვლების ჩატარება ცალკე მთელ და ცალკე წილად ნაწილებზე.

მაგალითად:

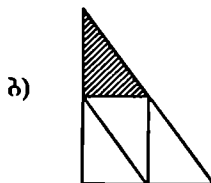
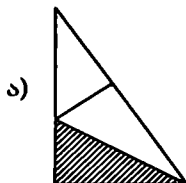
$$\begin{aligned} 7\frac{4}{5} - \left(2\frac{11}{15} + 1\frac{1}{20} \right) &= 7 + \frac{4}{5} - \left(2 + \frac{11}{5} + 1 + \frac{1}{20} \right) = 7 + \frac{4}{5} - \left(2 + \frac{11}{5} + 1 + \frac{1}{20} \right) = \\ &= 7 + \frac{4}{5} - \left((2+1) + \left(\frac{11}{5} + \frac{1}{20} \right) \right) = 7 + \frac{4}{5} - \left(3 + \frac{47}{60} \right) = (7-3) + \left(\frac{4}{5} - \frac{47}{60} \right) = \\ &= 4 + \frac{48-47}{60} = 4 + \frac{1}{60} = 4\frac{1}{60}; \end{aligned}$$

შეიძლება განვიხილოთ მეორე მაგალითი:

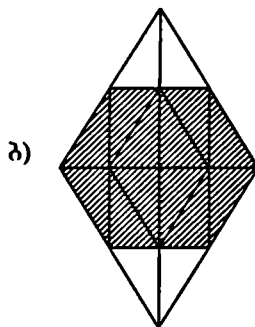
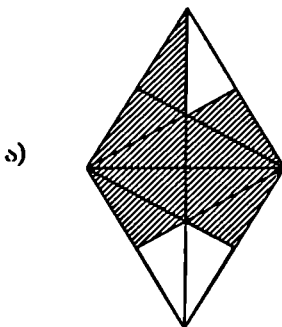
$$4 - 2\frac{1}{7} = (3+1) - \left(2 + \frac{1}{7} \right) = \left(3 + \frac{7}{7} \right) - \left(2 + \frac{1}{7} \right) = (3-2) + \left(\frac{7}{7} - \frac{1}{7} \right) = 1 + \frac{6}{7} = 1\frac{6}{7}.$$

4.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. მოცემულია ერთმანეთის ტოლი ორი მართკუთხა სამკუთხედი. ერთი მათგანი სამ ტოლ ნაწილადაა დაყოფილი, ხოლო მეორე ოთხ ტოლ ნაწილად. დაშტრიხული ნაწილებიდან რომელია მეტი ა) თუ ბ) ?



2. მოცემულია ორი ერთმანეთის ტოლი რომბი. ერთი მათგანი 12 ტოლ ნაწილადაა დაყოფილი, ხოლო მეორე კი - 16 ტოლ ნაწილად. დაშტრიხული ნაწილებიდან რომელია მეტი ა) თუ ბ)?



დაშტრიხული ნაწილებიდან (ა, ბ) რომელია მეტი ფართობის მქონე?

3.



I



II



III

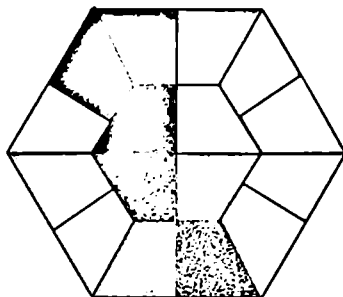


IV

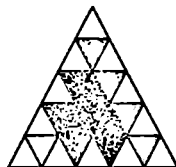
ნახაზზე მოცემულია ოთხი წესიერი ექვსკუთხედი, თითოეული

მათგანი დაყოფილია 8 ტოლ ნაწილად. ნაწილები, რომლებიც ტოლფერდა ტრაპეციებს წარმოადგენენ გაფერადებულია. ვიპოვოთ თითოეული ფერის ტრაპეციის წილი ექვსკუთხედებში, შემდეგ ეს წილები ფერების მიხედვით შევკრიბოთ და დავალაგოთ ზრდის მიხედვით.

4. წესიერი ექვსკუთხედი დაყოფილია თექვსმეტ ტოლ ნაწილად. ზოგიერთი ნაწილი გაფერადებულია. ვიპოვოთ გაფერადებული ნაწილების ჯამი და შევადაროთ გაუფერადებელ (თეთრ) ნაწილებს.

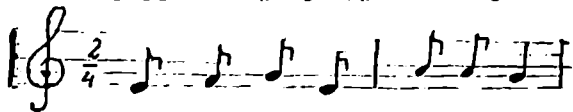


5. ტოლგვერდა სამკუთხედი დაყოფილია 25 ტოლ ნაწილად. ზოგიერთი ნაწილი გაფერადებულია. ვიპოვოთ გაფერადებული ნაწილების ჯამი და შევადაროთ გაუფერადებელ (თეთრ) ნაწილებს.



6. მოცემულია შემდეგი წინადადება: მაიორმა ვაშლები მოიტანა. ვიპოვოთ: ა) თითოეულ სიტყვაში ხმოვნების წილი და შემდეგ ისინი შევკრიბოთ; ბ) თითოეულ სიტყვაში თანხმოვნების წილი და შემდეგ შევკრიბოთ; გ) წინადადებაში ხმოვნების წილი; დ) წინადადებაში თანხმოვნების წილი.
7. მოცემულია შემდეგი წინადადება: ბადრიმ კარაყი გაშალა. ვიპოვოთ: ა) თითოეულ სიტყვაში ხმოვნების წილი და შემდეგ შევკრიბოთ; ბ) თითოეულ სიტყვაში თანხმოვნების წილი და შემდეგ შევკრიბოთ; გ) წინადადებაში ხმოვნების წილი; დ) წინადადებაში თანხმოვნების წილი.
8. მოცემულია შემდეგი წინადადება: მაიამ იაგოს წიგნი მისცა. ვიპოვოთ: ა) თითოეულ სიტყვაში ხმოვნების წილი და შემდეგ შევკრიბოთ; ბ) თითოეულ სიტყვაში თანხმოვნების წილი და შემდეგ შევკრიბოთ; გ) წინადადებაში ხმოვნების წილი; დ) წინადადებაში თანხმოვნების წილი.

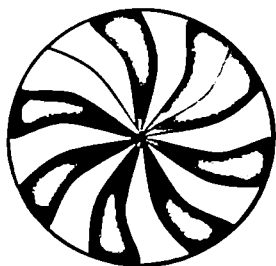
9. მოცემულია ორტაქტიანი მუსიკალური ჩანაწერი:



ვიპოვოთ თითოეულ ტაქტში მუსიკალური ნოტების უდერაღობის ხანგრძლივობა და შემდეგ შევეკრიბოთ.

10. წრე დაყოფილია 16 ტოლ ნაწილად.

ტოლი ნაწილების ნაწილი გაფერადებულია. ვიპოვოთ გაფერადებული ნაწილების ჯამი და შევადაროთ გაუფერადებელ (თეთრ) ნაწილებს, რომელია მეტი და რამდენით?

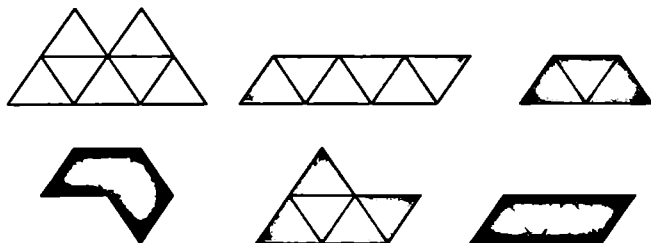


11. მოცემულია კომპოზიტორ რ. ლალიძის სიმღერის „თბილისო“-ს პირველი რვა ტაქტი:



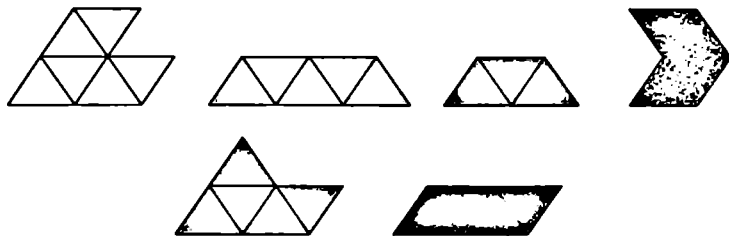
ვიპოვოთ თითოეულ ტაქტში მუსიკალური ნოტების უდერაღობის ხანგრძლივობა და ვიპოვოთ განსხვავება მეტ და ნაკლებ ხანგრძლივობებს შორის.

12. მოცემულია ტოლგვერდა სამკუთხედის ნაწილები, რომლებიც სხვადასხვა ფერითაა წარმოდგენილი:



ამ ნაწილების მიხედვით ავაგოთ შესაბამისი, უმცირესი ზომის ტოლგვერდა სამკუთხედი; ვიპოვოთ თითოეული ნაწილის წილი, შემდეგ შევეკრიბოთ ისინი და ვიპოვოთ, თუ რამდენითაა მეტი მათი ჯამი გაუფერადებელი ნაწილების ჯამზე, რომლებიც სამკუთხედის აგებისას მიიღება.

13. მოცემულია ტოლგვერდა სამკუთხედის ნაწილები, რომლებიც სხვადასხვა ფერითაა წარმოდგენილი:



ამ ნაწილების მიხედვით ავაგოთ შესაბამისი უმცირესი ზომის ტოლგვერდა სამკუთხედი; ვიპოვოთ თითოეული ნაწილის წილი, შემდეგ შევეკრიბოთ ისინი და ვიპოვოთ თუ რამდენითაა მეტი მათი ჯამი გაუფერადებელი ნაწილების ჯამზე, რომლებიც სამკუთხედის აგებისას მიიღება.

14. შეასრულეთ მოქმედებანი:

ა) $\frac{47}{150} + \frac{19}{120} + \frac{9}{80} + 2\frac{91}{300}$;

ბ) $10\frac{37}{80} + 2\frac{19}{48} + \frac{5}{32} + \frac{1}{16}$;

გ) $\frac{5}{44} + 5\frac{1}{3} + 4\frac{2}{11} + \frac{5}{66} + \frac{13}{43}$;

დ) $200\frac{3}{4} - 1\frac{97}{98} + \frac{47}{196}$;

ე) $49\frac{2}{11} + 8\frac{3}{5} + 4\frac{1}{2} + 12\frac{1}{3}$;

ვ) $2\frac{196}{1485} + 1\frac{5}{1782} + 11\frac{97}{594} + \frac{5}{891}$;

ზ) $24 - 5\frac{17}{195} - 13\frac{17}{130}$;

თ) $1\frac{1}{36} - \frac{1}{540}$;

ი) $7\frac{26}{45} - 4\frac{5}{18} + 3\frac{11}{30} - 4\frac{19}{42}$;

კ) $17\frac{13}{30} - 8\frac{17}{24} - 5\frac{19}{40} + 7\frac{7}{2}$.

15. შეასრულეთ მოქმედებანი:

ა) $\left(3\frac{1}{20} - 1\frac{1}{16}\right) - \left(\frac{131}{144} - \frac{17}{30}\right)$; ბ) $192\frac{13}{25} - 87\frac{4}{21} - \left(20\frac{14}{15} - \frac{6}{7}\right)$;

- ბ) $\left(\frac{3}{70} + \frac{3}{80} - \frac{1}{42}\right) + 10\frac{25}{56} - \left(9\frac{7}{60} - 8\frac{9}{70}\right);$
 დ) $\left(10\frac{11}{24} - 9\frac{31}{60}\right) + 12\frac{29}{36} - \left(15\frac{53}{72} - 13\frac{97}{108}\right).$
16. შეასრულეთ მოკმედეგები: ა) $\left(539\frac{37}{48} - 397\frac{53}{60}\right) - \left(400\frac{17}{30} - 261\frac{29}{32}\right);$
 ბ) $\frac{8}{15} - \frac{11}{30} + 2\frac{1}{7} - 1\frac{9}{14};$ გ) $\left(\frac{19}{33} - \frac{9}{22} + \frac{1745}{132}\right) - \left(8\frac{3}{4} + 4\frac{7}{11}\right).$
17. იპოვეთ $\frac{2}{3}$ -სა და $\frac{5}{11}$ -ის შესაბამისად ტოლი ორი წილადი, რომელთაც წევრთა ჯამი ტოლი აქვთ.
18. იპოვეთ $\frac{3}{5}$ -ის, $\frac{1}{4}$ -ის და $\frac{5}{7}$ -ის შესაბამისად ტოლი 3 წილადი, რომელთაც წევრთა ჯამი ტოლი აქვთ.
19. ტურისტი ვარაუდობდა, რომ 3 დღეში გაივლიდა განსაზღვრულ მანძილს. პირველ დღეს მან $6\frac{3}{8}$ კმ-ით მეტი გაიარა იმაზე, რასაც ვარაუდობდა ამ დღისათვის, მეორე დღეს $-7\frac{7}{12}$ კმ-ით ნაკლები და მესამე დღეს $-2\frac{1}{10}$ კმ-ით მეტი ნავარაუდევზე დღეების მიხედვით. იპოვეთ სხვაობა ნავარაუდევ მანძილსა და იმ მანძილს შორის, რომელიც მან ნამდვილად გაიარა.
20. ერთ ყუთში $14\frac{2}{5}$ კგ ყავა იყო, მეორეში - 13 კგ. გაყიდვის შემდეგ პირველში დარჩა $2\frac{3}{20}$ კგ, ხოლო მეორეში კი - $4\frac{1}{4}$ კგ. რომელი ყუთიდან და რამდენით მეტი ყავა გაყიდეს?
21. წყნარ ოკეანეს დაახლოებით დედამიწის მთელი წყლის ზედაპირის $\frac{9}{20}$ ნაწილი უკავია, ატლანტიკის ოკეანეს დაახლოებით - $\frac{3}{10}$, ინდოეთის ოკეანეს დაახლოებით - $\frac{1}{5}$. დედამიწის მთელი წყლის ზედაპირის რა ნაწილი უკავია ჩრდილო-ყინულოვან ოკეანეს?

22. რამდენიმე რიცხვის შეკრებისას ჯამში მიიღეს $23\frac{1}{8}$, მაგრამ ამასთან ნაცვლად ერთ-ერთი შესაკრების $-\frac{4}{7}$ -ისა, შეცდომით აიღეს მისი შებრუნებული წილადი $\frac{7}{4}$. იპოვეთ სწორი ჯამი.
23. როგორ შეიცვალა რკინიგზის წმინდა მოგება, თუ მისი შემოსავალი $608207\frac{3}{20}$ ლარით გაიზარდა, ხოლო ხარჯი კი -89309 ლარით და 80 თეთრით შემცირდა?
24. მაღაზიაში შაქარი $237\frac{1}{2}$ კგ-ით მეტია მარილზე. როგორი იქნება სხვაობა მათ წონებს შორის, თუ კიდევ მოიტანენ 400 კგ შაქარს და $116\frac{3}{4}$ კგ მარილს?
25. ერთ ყუთში ჩაი $8\frac{1}{2}$ კგ-ით მეტია, ვიდრე მეორეში. რამდენი კილოგრამი ჩაი უნდა გადავაწყოთ მეორე ყუთიდან პირველში, რომ მასში 10 კგ-ით მეტი ჩაი გახდეს ვიდრე მეორეში?
26. სამი რიცხვის ჯამი $142\frac{3}{4}$ -ის ტოლია. რას მივიღებთ ჯამში, თუ პირველ შესაკრებს $15\frac{7}{34}$ -ს მივუმატებთ, მეორეს $-12\frac{32}{51}$ -ს, ხოლო მესამედან $27\frac{32}{51}$ -ს გამოვაკლებთ?
27. სამი რიცხვის ჯამი $100\frac{3}{4}$ -ის ტოლია. რას მივიღებთ ჯამში, თუ პირველ შესაკრებს $7\frac{111}{165}$ -ს გამოვაკლებთ, მეორეს $26\frac{2}{11}$ -ს მივუმატებთ, ხოლო მესამეს კი $-16\frac{4}{15}$ -ს გამოვაკლებთ?
28. რამდენით შემცირდება წილადის სიდიდე, თუ მრიცხველს მნიშვნელის მეექვსედ ნაწილს გამოვაკლებთ?
29. რამდენით გადიდდება წილადის სიდიდე, თუ მრიცხველს

მნიშვნელის მეხუთედ ნაწილს დაემატებო?

30. რომელიღაც რიცხვი უნდა გამოექლოთ $16\frac{7}{12}$ -დან და სხვაობისათვის დაემატებინათ $8\frac{35}{36}$. $16\frac{7}{12}$ რიცხვში ციფრი 2 შეცდომით 9-ად მიიღეს, ხოლო $8\frac{35}{36}$ -ში ციფრი 6 კი – 8-ად და ამის შედეგად მიიღეს $16\frac{109}{114}$. იპოვეთ ნამდვილი შედეგი.

4.1.1. ტესტი №3

1. არაწესიერი წილადი ეწოდება წილადს, რომლის მრიცხველი მნიშვნელზე
ა) ნაკლებია; ბ) მხოლოდ მისი ტოლია;
გ) მხოლოდ მასზე მეტია; დ) მეტია, ან მისი ტოლია.
2. $\frac{a}{b}$ წილადს, რომ დაემატოთ $\frac{c}{d}$ წილადი, გვაქვს:
 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = (b \neq 0, d \neq 0)$
ა) $\frac{ad+b}{bc}$; ბ) $\frac{ad+bc}{cd}$; გ) $\frac{a+bc}{bd}$; დ) $\frac{ad+bc}{bd}$.
3. $1\frac{1}{2} - \frac{5}{6} =$
ა) $\frac{1}{3}$; ბ) $\frac{2}{3}$; გ) $\frac{5}{6}$; დ) 1.
4. $14 - 5\frac{1}{5} =$
ა) $9\frac{1}{5}$; ბ) $9\frac{4}{5}$; გ) $8\frac{4}{5}$; დ) $8\frac{1}{5}$.
5. ლალიმ კედლის $\frac{7}{20}$ ნაწილი შეღება, ნინომ – $\frac{5}{8}$ ნაწილი. რა ნაწილი დარჩა შესადები?

ა) $\frac{1}{20}$; ბ) $\frac{7}{20}$; გ) $\frac{1}{40}$; დ) $\frac{13}{28}$.

6. რომ გაემარტივებინა წილადი, რომლის მნიშვნელი 3-ის ჯერადი იყო, მოსწავლემ მრიცხველს გამოაკლო მნიშვნელის მესამედი ნაწილი. რამდენით შემცირდა ამით წილადის სიდიდე?

ა) იგივე დარჩა; ბ) შემცირდა $\frac{1}{3}$ -ით;

გ) შემცირდა $\frac{1}{2}$ -ით; დ) არ შემცირებულა.

7. რა მოუვა წილადს, რომლის მრიცხველს დაეუმატებთ მნიშვნელის $\frac{4}{5}$ ნაწილს?

ა) იგივე დარჩება; ბ) შემცირდება $\frac{4}{5}$ -ით;

გ) გადიდდება $\frac{4}{5}$ -ით; დ) გადიდდება $\frac{4}{9}$ -ით.

8. იპოვეთ $\frac{4}{7}$ -ის ტოლი წილადი, რომლის წევრთა ჯამი 66-ის ტოლია.

ა) $\frac{24}{42}$; ბ) $\frac{25}{41}$; გ) $\frac{20}{46}$; დ) $\frac{60}{75}$.

9. იპოვეთ $\frac{5}{8}$ -ის ტოლი წილადი, რომლის წევრთა სხვაობა 45-ის ტოლია

ა) $\frac{15}{60}$; ბ) $\frac{75}{120}$; გ) $\frac{25}{40}$; დ) $\frac{60}{75}$.

10. იპოვეთ წესიერი წილადი, რომლის წევრთა ჯამი 19-ის ტოლია, ხოლო წევრთა სხვაობა კი 3-ს უდრის.

ა) $\frac{3}{16}$; ბ) $\frac{8}{11}$; გ) $\frac{11}{8}$; დ) $\frac{5}{8}$.

§5. წილადი რიცხვების გამრავლება და გაყოფა.
ბაჟოფისა და გამრავლების პირითადი თვისებები.
ხარისხის ცნება. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე.

ნატურალური a და b რიცხვების ნამრავლი – ab ($a \in N, b \in N$) ეწოდება b ოდენობის შესაკრებთა ჯამს, სადაც თითოეული შესაკრები a -ს ტოლია:

$$\text{ე.ი. } a \cdot b = \underbrace{a + a + \dots + a}_{b\text{-ჯერ}}$$

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: ზეინკალს შეუძლია დეტალი გამოჩარხოს 11 წუთში. რა დრო დაჭირდება შეიდი დეტალის გამოჩარხვას, თუ დეტალის ჩარხვის ტემპი უცვლელია?

ცხადია, გვექნება $11 \cdot 7 = 77$ წუთი; ეს დრო შეიძლება საათებში გამოვსახოთ $1\frac{17}{60}$ საათი.

შეიძლება იგივე ამოცანა სხვაგვარად ამოგვეხსნა, თუ ერთი დეტალის გამოჩარხვის დროს თავიდანვე საათებში გამოვსახავდით – $11\text{წთ.} = \frac{11}{60}\text{სთ.}$ ამ შემთხვევაში გვექნება:

$$\frac{11}{60} \cdot 7 = \frac{11}{60} + \frac{11}{60} + \frac{11}{60} + \frac{11}{60} + \frac{11}{60} + \frac{11}{60} + \frac{11}{60} = \frac{77}{60} = 1\frac{17}{60}$$

ჩვენ გამოვსახეთ წილადის გამრავლება ნატურალურ რიცხვზე. ამრიგად, $\frac{a}{b}$ წილადის გამრავლება $n \neq 1$ ნატურალურ რიცხვზე ნიშნავს, რომ $\frac{a}{b}$ წილადი n -ჯერ ავიღოთ შესაკრებად, ე.ი.

$$\frac{a}{b} \cdot n = \underbrace{\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \dots + \frac{a}{b}}_{n\text{-ჯერ}}$$

გაგამრავლოთ წილადი, ერთის არატოლ ნატურალურ რიცხვზე, ნიშნავს ამ წილადის გამეორებას შესაკრებად იმდენჯერ, რამდენი ერთეულიცაა მოცემულ ნატურალურ რიცხვში.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა წილადს ვამრავლებთ 1-ზე, ან 0-ზე.

ცნობილია, რომ როცა $a \in N$, მაშინ $a \cdot 1 = a$ და $a \cdot 0 = 0$. ასე-

თივე მდგომარეობას აქვს ადგილი წილადი რიცხვებისათვისაც:

$$\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}; \quad \frac{a}{b} \cdot 0 = 0$$

ამრიგად, წილადი რიცხვის 1-ზე გამრავლებისას ეს რიცხვი უცვლელი რჩება, ხოლო 0-ზე გამრავლებისას ნამრაველში 0-ს ვღებულობთ.

გვაქვს, $\frac{a}{b}$ წილადი გავამრავლოთ n ნატურალურ რიცხვზე; განსაზღვრის თანახმად:

$$\frac{a}{b} \cdot n = \underbrace{\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \dots + \frac{a}{b}}_{n\text{-ჯერ}} = \frac{\overbrace{a+a+\dots+a}^{n\text{-ჯერ}}}{b} = \frac{a \cdot n}{b}.$$

მაშასადამე, წილადი რომ ნატურალურ რიცხვზე გავამრავლოთ, საჭიროა მისი მრიცხველი გავამრავლოთ ამ რიცხვზე, ხოლო მნიშვნელი უცვლელი დავტოვოთ.

$$\text{მაგალითად: } \frac{17}{89} \cdot 5 = \frac{17 \cdot 5}{89} = \frac{85}{89}.$$

განვიხილოთ შერეული რიცხვის გამრავლება ნატურალურ რიცხვზე. ეთქვათ $a + \frac{m}{n}$ შერეული რიცხვი უნდა გავამრავლოთ $K \in \mathbb{N}$ ნატურალურ რიცხვზე. წარმოვადგინოთ მოცემული შერეული რიცხვი არაწესიერ წილადად და შემდეგ გამოვიყენოთ წილადის ნატურალურ რიცხვზე გამრავლების წესი:

$$\left(a + \frac{m}{n}\right) \cdot K = \frac{an+m}{n} \cdot K = \frac{(an+m) \cdot K}{n}$$

განვიხილოთ რიცხვითი მაგალითი:

$$4\frac{2}{3} \cdot 7 = \frac{4 \cdot 3 + 2}{3} \cdot 7 = \frac{14 \cdot 7}{3} = \frac{98}{3} = 32\frac{2}{3}.$$

შერეული რიცხვი შეიძლება სხვაგვარადაც გავამრავლოთ ნატურალურ რიცხვზე. ამისათვის ვისარგებლოთ გამრავლების განრიგებადობის კანონით შეკრების მიმართ (ამ თვისებაზე შემდეგ ვისაუბრებთ):

$$\left(a + \frac{m}{n}\right) \cdot K = aK + \frac{m}{n} K = aK + \frac{mK}{n}.$$

რიცხვითი მაგალითისათვის გვექნება:

$$4\frac{2}{3} \cdot 7 = \left(4 + \frac{2}{3}\right) \cdot 7 = 4 \cdot 7 + \frac{2}{3} \cdot 7 = 28 + \frac{14}{3} = 28 + 4\frac{2}{3} = 32\frac{2}{3}.$$

ჩვენ განვიხილეთ წილადის გამრავლება ნატურალურ რიცხვზე, მაგრამ როგორ მოვიქცეთ წილადის წილადზე გამრავლების შემთხვევაში?

მაგალითად: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = ?$ მიემართოთ გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას:

მოვლი მართკუთხედი დავყოთ 12 ტოლ ნაწილად (მართკუთხედად), რადგან 3-ისა და 4-ის უ.ს.ჯ. ტოლია 12-ის.

$$1 = \frac{12}{12}$$

ავიღოთ მისი $\frac{2}{3}$ ნაწილი, ე.ი. 8 ტოლი ნაწილი (მართკუთხედი), იგი გაგაფურადლოთ ყვეთელი ფერით:

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

ავიღოთ $\frac{2}{3}$ -ის $\frac{3}{4}$ ნაწილი, ანუ ჩვენ შემთხვევაში 8-ის $\frac{3}{4}$ ნაწილი და გაგაფურადლოთ იგი წითელი ფერით:

მივიღეთ 6 ტოლი ნაწილი, მისი წილი მოვლთან, ანუ 12 ტოლ ნაწილთან შეფარდებით არის $-\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

ეს პროცესი ჩავატაროთ შებრუნებით, ე.ი. $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$; ჯერ ავი-

ღოთ მთელის $\frac{3}{4}$ ნაწილი და იგი გაგაფერადოთ წითლად:



$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$$

ეხლა ავიღოთ $\frac{3}{4}$ -ის $\frac{2}{3}$ ნაწილი, ანუ ამ შემთხვევაში 9-ის

$\frac{2}{3}$ ნაწილი და გაგაფერადოთ იგი ყვითელი ფერით:



ამ შემთხვევაშიც მივიღეთ 6 ტოლი ნაწილი და მისი წილი მთელთან, ანუ 12 ტოლ ნაწილთან შეფარდებით ტოლია $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ ის.

რამდენად სწორია, ჩვენი ვარაუდი, იმის შესახებ, რომ $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ ჯერ განვიხილოთ წილადის გაყოფა ნატურალურ რიცხვზე და ნამრავლი შევამოწმოთ შემდეგ.

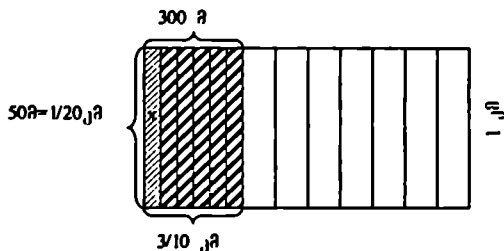
ნატურალური რიცხვების გაყოფა არის მოქმედება, სადაც მოცემული ორი ნატურალური რიცხვის ნამრავლით და ერთერთი თანამამრავლით გპოულობთ მეორე თანამამრავლს.

განვიხილოთ ამოცანა: სხეული მოძრაობდა თანაბრად მუდმივი სიჩქარით და 6 წმ-ში გაიარა 300 მეტრი, რამდენ კილომეტრს გაივლის იგი წამში?

ამოხსნა: $300:6=$ ამრიგად, სხეული 1 წამში გაივლის 50 მეტრს და გვაქვს $50მ = \frac{1}{20}$ კმ-ს ე.ი. 1 წამში სხეული გაივლის $\frac{1}{20}$ კმ-ს.

ეს ამოცანა შეიძლება ამოვხსნათ მეორე გზითაც; კერძოდ, ჯერ გამოვსახოთ 300 მეტრი კილომეტრით, გვაქვს $300მ = \frac{3}{10}$ კმ-

ს და შემდეგ, $\frac{3}{10}:6$ ამ შემთხვევაში საქმე გვაქვს წილადი რიცხვის ნატურალურ რიცხვზე გაყოფასთან, თუ წარმოვადგენთ გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას გვექნება:



$\frac{3}{10}:6 = x$, ანუ $x \cdot 6 = \frac{3}{10}$. ჩანაწერები გვიჩვენებენ, რომ წილადის გაყოფა ნატურალურ რიცხვზე არის მოქმედება, სადაც მოცემული ნამრავლითა და ერთ-ერთი (ცნობილი) თანამამრავლით უნდა ვიპოვოთ მეორე (უცნობი) თანამამრავლი.

ვთქვათ, $\frac{a}{b}$ წილადი უნდა გავყოთ 1-ზე; ზემოთ მოყვანილი ჩანაწერის თანახმად $\frac{a}{b}:1 = x$, ანუ $\frac{a}{b} = x \cdot 1$, მაგრამ $x \cdot 1 = x$; ე.ი.

$\frac{a}{b} = x$ და $\frac{a}{b}:1 = \frac{a}{b}$. ამრიგად, წილადი რიცხვის 1-ზე გაყოფა ამ რიცხვის უცვლელად დატოვებას ნიშნავს.

რაც შეეხება 0-ზე გაყოფას, როგორც ნატურალურ რიცხვთა არითმეტიკაში იყო აღნიშნული, ნატურალური რიცხვის 0-ზე გაყოფა არ შეიძლება, რადგან არ არსებობს ნატურალური რიცხვი, რომელსაც გავამრავლებთ ნულზე და მივიღებთ რაიმე ნატურალურ რიცხვს. ასევე შეუძლებელია 0-საგან განსხვავებული წილადი რიცხვის 0-ზე გაყოფა.

ვთქვათ, $\frac{a}{b}$ წილადი უნდა გავყოთ $K \in \mathbb{N}$ -ზე; ვაჩვენოთ, რომ განაყოფი ტოლია $\frac{a}{b \cdot K}$ წილადის. წილადის ნატურალურ რიცხ-

ვზე გამრავლების განსაზღვრის თანახმად გვაქვს: $\frac{a}{b \cdot K} \cdot K = \frac{a}{b}$;

რაც იმას ნიშნავს, რომ $\frac{a}{b} : K = \frac{a}{bK}$.

შერეული რიცხვის ნატურალურ რიცხვზე გაყოფის შემთხვევაში შერეული რიცხვი შეიძლება ჩაწეროს არაწესიერი წილადის სახით და შემდეგ გამოვიყენოთ წილადის ნატურალურ რიცხვზე გაყოფის წესი. მაგალითად:

$$7\frac{9}{16} : 11 = \frac{121}{16} : 11 = \frac{121}{16 \cdot 11} = \frac{11}{16}.$$

შერეული რიცხვი შეიძლება გავყოთ ნატურალურ რიცხვზე სხვაგვარადაც, თუ ვისარგებლებთ გაყოფის განრიგებადობის თვისებით ჯამის მიმართ:

$$7\frac{9}{16} : 11 = (7 + \frac{9}{16}) : 11 = 7 : 11 + \frac{9}{16} : 11 = \frac{7}{11} + \frac{9}{16 \cdot 11} = \frac{112}{176} + \frac{9}{176} = \frac{121}{176} = \frac{11}{16}.$$

დავუბრუნდეთ წილადი რიცხვის წილად რიცხვზე გამრავლებას. პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება ისეთი ამოცანები, სადაც საჭიროა რიცხვის (სიდიდის) ერთი ნაწილის პოვნა, ან რიცხვის (სიდიდის) რამდენიმე ტოლი ნაწილის პოვნა. მაგალითად, განვიხილოთ შემდეგი ამოცანები:

1. მგზავრმა მთელი გზის $\frac{1}{7}$ ნაწილი ავტომანქანით გაიარა. რა მანძილი გაიარა მან ავტომანქანით, თუ მთელი გზა 350 კმ-ს შეადგენს?

ცხადია, რომ მგზავრმა ავტომანქანით გაიარა $350 : 7 = 50$ (კმ).

აქვე განვიხილოთ შესაბამისი მაგალითები:

ა) ვიპოვოთ $\frac{4}{9}$ -ის $\frac{1}{3}$ ნაწილი - $\frac{4}{9} : 3 = \frac{4}{9 \cdot 3} = \frac{4}{27}$;

ბ) ვიპოვოთ $\frac{49}{36}$ -ის $\frac{1}{7}$ ნაწილი - $\frac{49}{36} : 7 = \frac{49}{36 \cdot 7} = \frac{7}{36}$.

2. ნაკვეთის ფართობი 800 ჰა-ს შეადგენს. ამ ნაკვეთის $\frac{3}{8}$ ნაწილზე დათესილია სიმინდი. რამდენი ჰექტარი უკავია სიმინდის ყანას?

ცხადია, რომ ამ ამოცანის ამოსახსნელად ჯერ უნდა ვიპო-

ვით ამ ნაკვეთის ფართობის $\frac{1}{8}$ ნაწილი: $800:8=100$ (ჰა) და შემდეგ $\frac{3}{8}$ ნაწილი, ე.ი. $100 \cdot 3=300$ (ჰა).

განვიხილოთ მაგალითები:

ა) ვიპოვოთ $\frac{4}{25}$ -ის $\frac{5}{16}$ ნაწილი – $\frac{4}{25}$ -ის $\frac{1}{16}$ ნაწილი იქნება $\frac{4}{25 \cdot 16} = \frac{1}{100}$, ხოლო $\frac{5}{16}$ ნაწილი იქნება $\frac{1}{100} \cdot 5 = \frac{1}{20}$, ანუ $\frac{4}{25} \cdot \frac{5}{16} = \frac{4 \cdot 5}{25 \cdot 16} = \frac{1 \cdot 1}{5 \cdot 4} = \frac{1}{20}$.

ბ) ვიპოვოთ $\frac{7}{6}$ -ის $\frac{9}{7}$ ნაწილი; გვექნება $\frac{7}{6} \cdot \frac{9}{7} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

ეთქვათ, მოცემულია $\frac{a}{b}$ და $\frac{c}{d}$ წილადები, ვიპოვოთ მათი ნამრავლი $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$.

შემოვიღოთ აღნიშვნები $\frac{a}{b} = x$ და $\frac{c}{d} = y$, აქედან გვაქვს $a = bx$ და $c = dy$, მაშინ გვექნება:

$ac = bx \cdot dy$, ანუ $ac = (bd) \cdot (xy)$. თუ ამ ტოლობიდან განვსაზღვრავთ xy -ს, გვექნება $xy = \frac{ac}{bd}$.

ამრიგად: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

მაშასადამე, მოცემული ორი წილადის ნამრავლი ტოლია ისეთი წილადის, რომლის მრიცხველია მოცემული წილადების მრიცხველების ნამრავლი, ხოლო მნიშვნელი – მნიშვნელების ნამრავლი.

შევამოწმოთ ჩვენი ვარაუდი: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

წილადების გამრავლების ოპერაციას აქვს შემდეგი თვისებები:

1. არსებობის თვისება: როგორც არ უნდა იყოს მოცემული წილადი რიცხვები, ყოველთვის არსებობს ისეთი წილადი, რომე-

ლიც მათ ნამრავლს წარმოადგენს.

2. ერთადერთობის თვისება: როგორიც არ უნდა იყოს მოცემული წილადი რიცხვები, ყოველთვის არსებობს ერთადერთი უკეცი წილადი, რომელიც მათ ნამრავლს წარმოადგენს.

3. გადანაცვლებადობის (კომუტატიურობის) თვისება:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}; \text{ მართლაც, } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}.$$

4. ჯგუფებადობის (ასოციატიურობის) თვისება:

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n}\right); \text{ მართლაც:}$$

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{m}{n} = \frac{ac}{bd} \cdot \frac{m}{n} = \frac{(ac) \cdot m}{(bd) \cdot n} = \frac{a \cdot (cm)}{b \cdot (dn)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{cm}{dn} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n}\right)$$

5. ჯამის (სხვაობის) მიმართ გამრავლების განრიგებადობის (დისტრიბუტიულობის) თვისება:

$$\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{k} = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{k} \pm \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{k}; \text{ მართლაც:}$$

$$\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{k} = \frac{ad \pm cb}{bd} \cdot \frac{e}{k} = \frac{ade \pm cbe}{bdk} = \frac{ade}{bdk} \pm \frac{cbe}{bdk} = \frac{ae}{bk} \pm \frac{ce}{dk} = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{k} \pm \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{k}.$$

ჩვენ განვიხილავთ დადებით წილად რიცხვებს, ამიტომ მათთვის სამართლიანია შემდეგი თვისებებიც:

6. თუ $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, მაშინ $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} > \frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n}$; მართლაც: $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ პირობიდან გვაქვს $ad > bc$, გავამრავლოთ ამ უტოლობის ორივე მხარე mn -ზე გვექნება $admn > bcmn$, ანუ $(am) \cdot (dn) > (cm) \cdot (bn)$, საიდანაც $\frac{am}{bn} > \frac{cm}{dn}$

და გვაქვს, რომ $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} > \frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n}$.

7. თუ $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ და $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$, მაშინ $\frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} > \frac{c}{d} \cdot \frac{r}{s}$; მართლაც:

$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Rightarrow ad > bc$ და $\frac{p}{q} > \frac{r}{s} \Rightarrow ps > rq$, აქედან კი გვაქვს, რომ $(ad) \cdot (ps) > (bc) \cdot (rq)$, ეს უტოლობა შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$(ap) \cdot (ds) > (bq) \cdot (cr)$; საიდანაც: $\frac{ap}{bq} > \frac{cr}{ds}$ და საბოლოოდ: $\frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} > \frac{c}{d} \cdot \frac{r}{s}$.

მე-6 და მე-7 თვისებებს მონოტონობის თვისებები ეწოდება.

დაეამტკიცოთ შემდეგი თეორემის სამართლიანობა:

ერთზე მეტ არაწესიერ წილადზე გამრავლებისას მიღებული ნამრავლი მეორე თანამამრაველზე მეტია, ხოლო წესიერ წილადზე გამრავლებისას მიღებული ნამრავლი მეორე თანამამრაველზე ნაკლებია.

დამტკიცება: ვთქვათ, მოცემულია $\frac{c}{d} > 1$, უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$\frac{ac}{bd} > \frac{a}{b}$; რადგან $\frac{c}{d} > 1$, ამიტომ $c > d$; ამ უტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ ab -ზე, მივიღებთ: $abc > abd$ ანუ $(ac) \cdot b > (bd) \cdot a$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $\frac{ac}{bd} > \frac{a}{b}$.

ეხლა დავუშვათ, რომ $\frac{c}{d} < 1$, ვაჩვენოთ, რომ $\frac{ac}{bd} < \frac{a}{b}$; რადგან

$\frac{c}{d} < 1$, ამიტომ $c < d$; უტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ ab -ზე, მივიღებთ: $abc < abd$ ანუ $(ac) \cdot b < (bd) \cdot a$, საიდანაც გვაქვს, რომ $\frac{ac}{bd} < \frac{a}{b}$.

შემოვიდოთ შემდეგი განსაზღვრა: ორ რიცხვს, რომელთა ნამრავლი 1-ის ტოლია ურთიერთშებრუნებული რიცხვები ეწოდება.

თუ a ნატურალურია რიცხვია, მაშინ მისი შებრუნებული რიცხვია $\frac{1}{a}$ წილადი; მართლაც $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

ფიბონაჩის განმარტებით თუ 1-ს გაეყოფთ ნებისმიერ ნული-საგან განსხვავებულ n რიცხვზე, მივიღებთ მოცემული n რიცხვის შებრუნებულს.

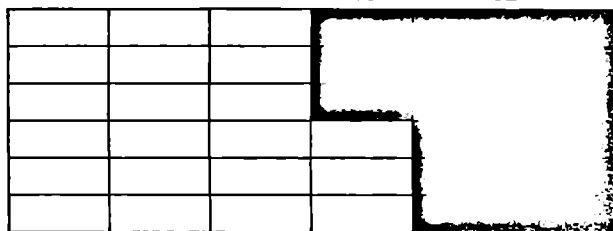
მაგალითად: 7-ის შებრუნებული რიცხვია $\frac{1}{7}$, რადგან

$$7 \cdot \frac{1}{7} = 1.$$

ზოგადად: $\frac{a}{b}$ წილადის შებრუნებული რიცხვია $\frac{b}{a}$ წილადი,

რადგან $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

განვიხილოთ წილადის წილადზე გაყოფის ოპერაცია. მაგალითად, ეთქვათ გვინდა ვიპოვოთ $\frac{7}{18} : \frac{5}{12}$; მივმართოთ გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას. ერთეულოვანი მართკუთხედი დავყოთ 36 ტოლ ნაწილად (მართკუთხედად), რადგან უ.ს.ჯ. $(18, 12)=36$. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $m = \frac{7}{18}$ და $n = \frac{5}{12}$, გვექნება:



$$l = \frac{36}{36}$$

$$m = \frac{7}{18} = \frac{14}{36}$$

$$n = \frac{5}{12} = \frac{15}{36}$$

ჩვენ შემთხვევაში m -ს შეესაბამება 14 ტოლი ნაწილი (მართკუთხედი), რომელიც ყვითელი ფერითაა გამოსახული, ხოლო n -ს შეესაბამება 15 ტოლი ნაწილი (მართკუთხედი), რომელიც წითელი ფერითაა გამოსახული; მათი განაყოფია – $m:n=14:15$, ანუ $\frac{m}{n} = \frac{14}{15}$. ჩვენ ვარაუდს დავუბრუნდეთ შემდეგ, ჯერ განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა.

$\frac{a}{b}$ წილადის განაყოფი $\frac{c}{d}$ წილადზე ეწოდება ისეთ $\frac{m}{n}$ წილადს, რომლის ნამრავლი $\frac{c}{d}$ წილადზე გეაძლევს $\frac{a}{b}$ წილადს. $\frac{a}{b}$ წილადს ეწოდება გასაყოფი, $\frac{c}{d}$ -ს გამყოფი, ხოლო $\frac{m}{n}$ -ს განაყოფი.

წილადების გაყოფა, თუ გამყოფი არ უდრის 0-ს ყოველთვის შესაძლებელია, ე.ი. წილადი რიცხვების სიმრავლე ჩაკეტილია გაყოფის ოპერაციის მიმართ.

დაეუშვათ, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = x$, მაშინ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot x$; ამ ტოლობის ორივე ნა-

წილი გავამრავლოთ $\frac{d}{c}$ -ზე გვექნება:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{c}{d} \cdot x \cdot \frac{d}{c} = x \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c} \right) \quad \frac{c}{d} \quad \text{და} \quad \frac{d}{c} \quad \text{ურთიერთშებრუნებული}$$

რიცხვებია და $\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c} = 1$, ამიტომ $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = x$, თუ გავითვალისწინებთ x -ის მნიშვნელობა გვექნება:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

ამრიგად, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$; ე.ი. ორი წილადის განაყოფი ტოლია წილადის, რომლის მრიცხველია გასაყოფი წილადის მრიცხველი გამრავლებული გამყოფი წილადის მნიშვნელზე, ხოლო მნიშვნელია გასაყოფი წილადის მნიშვნელი გამრავლებული წილადის მრიცხველზე.

$$\text{დაეუბრუნდეთ წინა მაგალითს: } \frac{7}{18} : \frac{5}{12} = \frac{7}{18} \cdot \frac{12}{5} = \frac{84}{90} = \frac{14}{15}.$$

წილადების გაყოფა ყოველთვის შესაძლებელია, ე.ი. არსებობს და განაყოფი ყოველთვის შეიძლება ერთადერთი სახით-უკვეცი წილადით წარმოედგინოთ.

მოცემული რიცხვის წილადზე გაყოფა ნიშნავს მოცემული რიცხვი გავამრავლოთ წილადის შებრუნებულ წილადზე.

შერეული რიცხვების გასაყოფად საჭიროა ისინი წინასწარ გადავაქციოთ არაწესიერ წილადებად და შემდეგ შევასრულოთ გაყოფა საერთო წესის მიხედვით.

$$\text{მაგალითად: } 7\frac{3}{5} : 2\frac{1}{9} = \frac{38}{5} : \frac{19}{9} = \frac{38}{5} \cdot \frac{9}{19} = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}.$$

განვიხილოთ წილადების გყოფის ოპერაციის თვისებები:

1. გაყოფის განრიგებადობის თვისება ჯამისა და სხვაობის მიმართ:

$$\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} \right) : \frac{e}{f} = \frac{a}{b} : \frac{e}{f} \pm \frac{c}{d} : \frac{e}{f}; \text{ მართლაც,}$$

$$\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}\right) : \frac{e}{f} = \left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{f}{e} = \frac{a}{b} \cdot \frac{f}{e} \pm \frac{c}{d} \cdot \frac{f}{e} = \frac{a}{b} : \frac{e}{f} \pm \frac{c}{d} : \frac{e}{f}.$$

2. გაყოფისა და გამრავლების გადანაცვლებადობა:

$$ა) \frac{a}{b} : \frac{c}{d} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} : \frac{m}{n} : \frac{c}{d}; \quad ბ) \frac{a}{b} : \frac{c}{d} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} : \frac{m}{n} : \frac{c}{d}.$$

დამტკიცება:

$$ა) \frac{a}{b} : \frac{c}{d} : \frac{m}{n} = \frac{ac}{bd} : \frac{m}{n} = \frac{ac}{bd} \cdot \frac{n}{m} = \frac{acn}{bdm} = \frac{(an) \cdot c}{(bm) \cdot d} = \frac{an}{bm} : \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m}\right) : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} : \frac{m}{n} : \frac{c}{d};$$

$$ბ) \frac{a}{b} : \frac{c}{d} : \frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right) \cdot \frac{n}{m} = \frac{adn}{bcm} = \frac{(an) \cdot d}{(bm) \cdot c} = \frac{an}{bm} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} : \frac{m}{n} : \frac{c}{d}$$

3. გამრავლებისა და გაყოფის ჯგუფებადობა:

ა) მოცემული წილადი რიცხვი რომ გავამრავლოთ წილადების განაყოფზე, საკმარისია ეს რიცხვი გავამრავლოთ გასაყოფზე და მიღებული ნამრავლი გაეყოთ გამყოფზე, ე.ი. $\frac{a}{b} : \left(\frac{c}{d} : \frac{m}{n}\right) = \left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right) : \frac{m}{n}.$

$$\text{დამტკიცება: } \frac{a}{b} : \left(\frac{c}{d} : \frac{m}{n}\right) = \frac{a}{b} : \frac{cn}{dm} = \frac{ac}{bd} \cdot \frac{n}{m} = \left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right) : \frac{m}{n}.$$

ბ) მოცემული წილადი რიცხვი რომ წილადების ნამრავლზე გაეყოთ, საკმარისია ეს რიცხვი ჯერ გაეყოთ პირველ თანამამრავლზე, შემდეგ მიღებული შედეგი გაეყოთ მეორე თანამამრავლზე,

$$\text{ე.ი. } \frac{a}{b} : \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n}\right) = \left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right) : \frac{m}{n}.$$

$$\text{დამტკიცება: } \frac{a}{b} : \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n}\right) = \frac{a}{b} : \frac{cm}{dn} = \frac{adn}{bcm} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \cdot \frac{n}{m} = \left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right) : \frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right) : \frac{m}{n}.$$

გ) მოცემული წილადი რიცხვი რომ გაეყოთ წილადების განაყოფზე, საკმარისია ეს რიცხვი გაეყოთ გასაყოფზე და მიღებული შედეგი გავამრავლოთ გამყოფზე, ე.ი. $\frac{a}{b} : \left(\frac{c}{d} : \frac{m}{n}\right) = \left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{m}{n}.$

დამტკიცება:

$$\frac{a}{b} : \left(\frac{c}{d} : \frac{m}{n}\right) = \frac{a}{b} : \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{n}{m}\right) = \frac{a}{b} : \frac{cn}{dm} = \frac{a}{b} \cdot \frac{dm}{cn} = \frac{adm}{bcn} = \frac{ad}{bc} \cdot \frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{m}{n}.$$

დაეამტკიცოს შემდეგი თეორემის სამართლიანობა:

წესიერ წილადზე გაყოფით მიღებული განაყოფი მოცემულ გასაყოფზე მეტია, ხოლო ერთზე მეტ არაწესიერ წილადზე გაყოფით მიღებული განაყოფი გასაყოფზე ნაკლებია.

დამტკიცება: დაეუშვათ, მოცემულია $\frac{c}{d} < 1$. დაეამტკიცოს, რომ

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} > \frac{a}{b}$; გვაქვს: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$, პირობის თანახმად $c < d$. ამ უტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ ab -ზე, მივიღებთ: $abc < abd$, ანუ $abd > abc$. ე.ი. $(ad) \cdot b > a(bc)$, საიდანაც $\frac{ad}{bc} > \frac{a}{b}$; რაც იმას ნიშნავს, რომ $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} > \frac{a}{b}$; ეტყვით, ამჯერად $\frac{c}{d} > 1$. დავამტკიცოთ, რომ $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} < \frac{a}{b}$; გვაქვს: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$. პირობის თანახმად $c > d$. გავამრავლოთ ამ უტოლობის ორივე მხარე ab -ზე. მივიღებთ: $abc > abd$, ანუ $abd < abc$; საიდანაც $(ad) \cdot b < a(bc)$, ე.ი. $\frac{ad}{bc} < \frac{a}{b}$; რაც იმას ნიშნავს, რომ $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} < \frac{a}{b}$.

განვიხილოთ მაგალითები:

1. $\frac{3}{5} : \frac{7}{15} = \frac{9}{7} = 1\frac{2}{7}$; $1\frac{2}{7} > \frac{3}{5}$.
2. $\frac{4}{9} : \frac{16}{7} = \frac{7}{36}$; $\frac{7}{36} < \frac{4}{9}$.

დამტკიცებული თეორემა გვიჩვენებს, რომ წილად რიცხვებში გაყოფა ყოველთვის შემცირებასთან არ არის დაკავშირებული, როგორც ამას ადგილი აქვს ნატურალურ რიცხვზე გაყოფისას (გარდა $a:1=a$ შემთხვევისა).

შემოვიტანოთ ხარისხის ცნება. ნატურალური მანვენებლით m რიცხვის n -ური ხარისხი, სადაც $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ $n \neq 1$ ეწოდება n თანამამრავლთა ნამრავლს, რომელთაგან თითოეული m -ის ტოლია და m^n სიმბოლოთი აღინიშნება, ე.ი.

$$m^n = \underbrace{m \cdot m \cdot \dots \cdot m}_{n-\text{ჯერ}}, \quad n \geq 2.$$

m -ს ხარისხის ფუძე ეწოდება, n -ს კი – ხარისხის მანვენებელი. მიღებულია, რომ $m^1 = m$ და თუ $m \neq 0$, მაშინ $m^0 = 1$. (0^0 არ განიხილვრება).

განვიხილოთ ნატურალურმანვენებლიანი ხარისხის თვისებები. ეტყვით, a ნებისმიერი რიცხვია, $n \in \mathbb{N}$ და $n > 1$, მაშინ

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n-\text{ჯერ}}$$

თუ $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, m > n$, მაშინ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

ვთქვათ, a ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი რიცხვია, $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, m > n$, მაშინ $a^m : a^n = a^{m-n}$.

ვთქვათ, a და b ნებისმიერი რიცხვებია, $n \in \mathbb{N}$, მაშინ $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.

ვთქვათ, a ნებისმიერი რიცხვია, b - ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი რიცხვი, $n \in \mathbb{N}$, მაშინ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

ვთქვათ, a ნებისმიერი რიცხვია, $m \in \mathbb{N}$ და $n \in \mathbb{N}$, მაშინ $(a^m)^n = a^{mn}$.

გარდა ამისა შევთანხმდეთ: თუ a ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი რიცხვია, მაშინ $a^0 = 1$, $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

აღგებრული წილადი არის წილადი, რომლის მრიცხველი და მნიშვნელი მთელი გამოსახულებებია. ყოველი მრავალწევრი შეიძლება აღგებრული წილადის სახით ჩაეწეროს,

$$\text{მაგალითად: } 3x^3y^2 + 4xy^2 = \frac{3x^3y^2 + 4xy^2}{1}$$

თუ აღგებრულ წილადში ცვლადებს რიცხვით შევცვლით, მაშინ გამოთვლების შემდეგ მიიღება აღგებრული წილადის რიცხვითი მნიშვნელობა ან, მოკლედ, მნიშვნელობა. მაგალითად,

$\frac{2a-b}{3a-b}$ აღგებრული წილადის რიცხვითი მნიშვნელობა, როცა $a=40$ და $b=10$ ტოლია $\frac{7}{11}$ -ის. ამ აღგებრულ წილადში a -სა და b -ს ნაცვლად შეიძლება ნებისმიერი რიცხვები ჩავსვათ, გარდა იმ რიცხვებისა, რომელთათვისაც სრულდება ტოლობა $b=3a$. კერძოდ, ამ შემთხვევაში აღგებრული წილადის მნიშვნელი $3a-b$ 0-ის ტოლია, 0-ზე გაყოფა კი არ შეიძლება. შევთანხმდეთ, აღგებრულ წილადში შემავალ ასოებს მხოლოდ დასაშვები მნიშვნელობების მიღება შეუძლიათ, ანუ იმ მნიშვნელობებისა, რომლებისთვისაც წილადის მნიშვნელი 0-ის ტოლი არ არის.

აღგებრული წილადის ხარისხი n მაჩვენებლით არის აღგებრული წილადი, რომლის მრიცხველი არის მოცემული წილადის მრიცხველის n ხარისხი, მნიშვნელი კი მოცემული წილადის მნიშვნელის n ხარისხი; მაგალითად:

$$ა) \left(\frac{x^2}{y^3 z}\right)^4 = \frac{(x^2)^4}{(y^3 \cdot z)^4} = \frac{x^8}{y^{12} z^4}, \quad ბ) \left(\frac{-m}{7n^2}\right)^3 = \frac{(-m)^3}{(7n^2)^3} = -\frac{m^3}{343n^6}.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1, \text{ სადაც } a \neq 0 \text{ და } b \neq 0.$$

თუ ორი ალგებრული წილადის მნიშვნელობები ამ წილადების ცვლადების ნებისმიერი დასაშვები მნიშვნელობებისათვის ტოლია, მაშინ მოცემულ წილადებს ცვლადების ამ მნიშვნელობებისათვის ტოლი ალგებრული წილადები ეწოდება და (ცვლადების დასაშვებ მნიშვნელობებს ზოგჯერ არ ვუთითებთ. მაგალითად:

$\frac{x+1}{x-1}$ და $\frac{x^3+x^2}{x^3-x^2}$ ალგებრული წილადების მნიშვნელობები,

როცა $x \neq 1$ და $x \neq 0$ ტოლია. მართლაც, $\frac{x^3+x^2}{x^3-x^2} = \frac{x^2(x+1)}{x^2(x-1)}$. მივიღეთ,

რომ მეორე წილადის რიცხვითი მნიშვნელობების გამოთვლისას პირველი წილადის მრიცხველისა და მნიშვნელის მნიშვნელობები ნულისაგან განსხვავებულ ერთსა და იმავე რიცხვზე მრავლდება. მაშასადამე, ეს წილადები ტოლია: $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x^3+x^2}{x^3-x^2}$.

თუ ვიგულისხმებთ, რომ a, b და c ნებისმიერი მთელი გამოსახულებებია, მაშინ $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ (იგულისხმება, რომ $b \neq 0$ და $c \neq 0$) ამ ტოლობის თანახმად, $\frac{ac}{bc}$ ალგებრული წილადი ტოლია $\frac{a}{b}$ ალგებრული წილადის, ანუ ასეთ შემთხვევაში $\frac{ac}{bc}$ წილადი შევკვეცთ c საერთო მამრავლზე, ან რაც იგივეა: $\frac{ac}{bc}$ ალგებრული წილადის გარდაქმნით მივიღეთ $\frac{a}{b}$ ალგებრული წილადი. მაგალითად,

შევკვეცოთ $\frac{a^2-25}{ab-5b}$; გვაქვს: $\frac{a^2-25}{ab-5b} = \frac{(a-5)(a+5)}{b \cdot (a-5)} = \frac{a+5}{b}$. წილადი

$\frac{\frac{1}{6}x + \frac{1}{4}y}{\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}y}$ გავამარტივოთ, გამარტივების მიზნით წილადის მრიცხველსა და მნიშვნელს გავამრავლოთ 12-ზე, რათა მრიცხველი და მნიშვნელი მთელი გამოსახულებები გახდეს. მაშინ

ველიც და მნიშვნელიც 36-ზე გაუმარავლოთ, გვექნება:

$$\frac{\frac{1}{6}x + \frac{1}{4}y}{\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}y} = \frac{36\left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{4}y\right)}{36\left(\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}y\right)} = \frac{6x + 9y}{4x + 6y} = \frac{3(2x + 3y)}{2(2x + 3y)} = \frac{3}{2}.$$

მოცემული წილადი x -სა და y -ის ნებისმიერი დასაშვები მნიშვნელობისათვის $\frac{3}{2}$ -ის ტოლია.

ამრიგად, ალგებრული წილადის ძირითადი თვისება (როგორც ჩვეულებრივი წილადის შემთხვევაში) მდგომარეობს იმაში, რომ წილადი არ შეიცვლება თუ მას გაუმარავლებთ, ან გაეყოფთ 0-საგან განსხვავებულ მთელ გამოსახულებაზე (ან რიცხვზე).

თუ a , b , c და d მთელი გამოსახულებებია (მასთან $b \neq 0$ და $d \neq 0$), მაშინ $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $\frac{x}{y}$ და $\frac{y}{x}$ ურთიერთშებრუნებული ალგებრული წილადები ეწოდებათ, რადგან მათი ნამრავლი 1-ის ტოლია $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = 1$.

ვიპოვოთ (-1) -სა და $\frac{a}{b}$ წილადის ნამრავლი, ცხადია $-1 = \frac{-1}{1}$.

ამრიგად, $(-1) \cdot \frac{a}{b} = \frac{-1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$. თუ მიღებული წილადის მრიცხველ-

სა და მნიშვნელს გაუმარავლებთ (-1) -ზე, მივიღებთ $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$.

$(-1) \cdot \frac{a}{b}$ ალგებრული წილადი ასე ჩაწეროთ: $-\frac{a}{b}$, მას $\frac{a}{b}$ ალგებრული წილადის მოპირდაპირე წილადი ეუწოდოთ. ამრიგად: $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$.

განვიხილოთ ალგებრული წილადების გაყოფა. დაეუშვათ a , b , c და d მთელი გამოსახულებებია, მასთან $b \neq 0$, $c \neq 0$ და $d \neq 0$, მაშინ გვაქვს $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$. ამრიგად, $\frac{a}{b}$ გაეყოთ $\frac{c}{d}$ ნიშნავს $\frac{a}{b}$ გაუმარავლოთ $\frac{c}{d}$ -ს შებრუნებულ წილადზე. მაგალითად:

$$\frac{3ab}{8xy} : \frac{ab}{2xy} = \frac{3ab \cdot 2xy}{8xy \cdot ab} = \frac{3}{4}.$$

ეთქვათ, მოცემულია $\frac{a}{b}$ და $\frac{c}{d}$ ალგებრული წილადები. ეს წილადები შეიძლება დაეიყვანოთ წილადებზე, რომელთა მნიშვნელობა $b \cdot d$. მართლაც, ალგებრული წილადის ძირითადი თვისების თანახმად $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ და $\frac{c}{d} = \frac{cb}{bd}$.

ერთმნიშვნელოვანი ალგებრული წილადები შეკრება და გამოკლება შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ და $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$.

სხვადასხვამნიშვნელოვან ალგებრულ წილადებს წინასწარ გავერთმნიშვნელოვანებთ, მაშინ მათი შეკრება და გამოკლება ერთმნიშვნელოვანი წილადების და გამოკლების წესის მიხედვით შესრულდება.

წილადების ახარისხების მაგალითად შეიძლება „ვეფხისტყაოსნის“ 839-ე სტროფი გამოვიყენოთ:

მთვარესა ეტყვის: „იფიცე სახელი ღმრთისა შენისა!

შენ ხარ მიმცემი მიჯნურთა მიჯნურობისა სენისა.

შენ გაქვს წამალი მისისა მოთმინებისა თმენისა,

მიაჯე შეკრა პირისა, შენს გამო შენებრ მშვენისა“.

ამ სტროფში შემავალი ოთხივე სტრიქონიდან თითოეულში 38 ასოა, მათგან 16 ხმოვანი და 22 თანხმოვანი, შეიძლება თითოეულ სტრიქონში გამოვთვალოთ ხმოვნების ან თანხმოვნების წილი და შემდეგ გადავამრავლოთ; გვექნება: ხმოვნებისათვის –

$$\frac{16}{38} \cdot \frac{16}{38} \cdot \frac{16}{38} \cdot \frac{16}{38} = \left(\frac{8}{19}\right)^4 = \frac{4096}{130321}, \quad \text{ხოლო თანხმოვნებისათვის –}$$

$$\frac{22}{38} \cdot \frac{22}{38} \cdot \frac{22}{38} \cdot \frac{22}{38} = \left(\frac{11}{19}\right)^4 = \frac{14641}{130321}.$$

წილადი რიცხვების შემოღება წარმოადგენს ახალ საფეხურს რიცხვის ცნების განვითარებაში. ამრიგად, ადრე შესწავლილ ნატურალურ რიცხვებს და მთელ რიცხვებს ემატება ახალი რიცხვები – წილადები; ვღებულობთ რიცხვთა სიმრავლეს, რომელსაც რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს ეწოდებთ.

ჩვეულებრივი წილადი $\frac{a}{b}$ არის $Z \times N$ დეკარტული ნამრავლის ელემენტი – წყვილი $\langle a, b \rangle$. ამ სიმრავლეზე განსაზღვრულია ტოლობის მიმართება, რომელსაც ახასიათებს რეფლექსურობის, სი-

მეტრიულობის და ტრანზიტულობის თვისებები, აქედან გამომდინარე „ტოლობის“ მიმართება ეკვივალენტობის მიმართებაა. $Z \times N$ სიმრავლე შეიძლება დაეყოს ეკვივალენტურ სიმრავლეთა კლასებად. ერთ კლასში გაერთიანდებიან ტოლობის მიმართებაში მყოფი წილადები.

განვიხილოთ სიმრავლე ასეთი ეკვივალენტური კლასებისა. თითოეული კლასი შეიძლება დავახასიათოთ ერთი უკვეცი წილადით, რომელიც ამ კლასს ეკუთვნის და მას ეუწოდოთ ამ კლასის მახასიათებელი წილადი, ან ამ ეკვივალენტური კლასის წარმომადგენელი. თითოეულ ამ კლასს ეუწოდებთ რაციონალურ რიცხვს და მას მოკლედ აღვნიშნავთ მისი წარმომადგენელი წილადით. მაგალითად: $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \dots$ წილადების კლასი არის

რაციონალური რიცხვი და მას მოკლედ $\frac{1}{3}$ -ით აღვნიშნავთ.

$-\frac{1}{2}, -\frac{2}{4}, -\frac{3}{6}, -\frac{4}{8}, -\frac{5}{10}, \dots$ წილადების კლასი არის რაციონალური

რიცხვი და მას მოკლედ $-\frac{1}{2}$ -ით აღვნიშნავთ. ნულოვანი წილა-

დების $\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \frac{0}{4}, \frac{0}{5}, \dots$ კლასი არის რაციონალური რიცხვი, რომ-

ლის წარმომადგენელი არის $\frac{0}{1}$ -ის სახით, ანუ 0-ით. $\frac{4}{1}, \frac{8}{2}, \frac{12}{3}, \dots$

წილადების კლასი არის რაციონალური რიცხვი, რომლის წარმომადგენელი არის $\frac{4}{1}$ ანუ 4.

როდესაც ვამბობთ, მოკლედ „რაციონალური რიცხვი $\frac{2}{3}$ “ იგუ-

ლისხმება ეკვივალენტური კლასი $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \dots$ წილადებისა, რომლის წარმომადგენელი, ანუ მახასიათებელი არის უკვეცი წილადი $\frac{2}{3}$.

ადრე ჩვენ განვიხილეთ თანაფარდობა სიმრავლეთა შორის:

$$N \subset N_0 \subset Z \subset Q.$$

ჩამოვთვალოთ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის თვისებები:

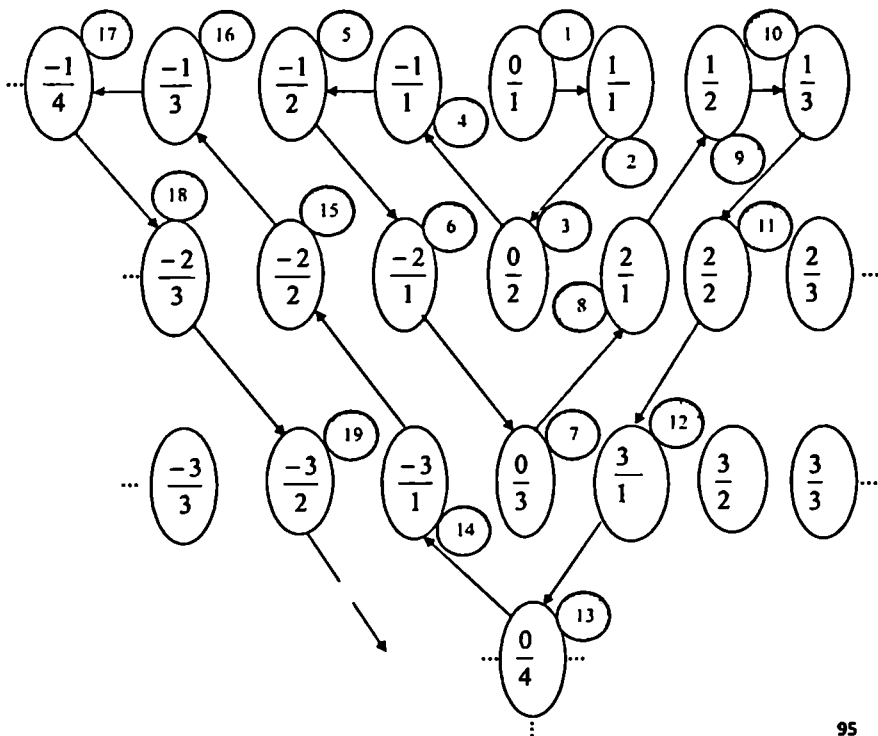
1. Q რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა.
2. Q რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე დალაგებული სიმრავ-

ლება.

3. Q რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე მკერძი სიმრავლეა. (სიმრავლეს მკერძი ეწოდება, თუ მისი ნებისმიერი ორი ელემენტისათვის შეიძლება მიეუთითოთ ამავე სიმრავლის ერთ მაინც ისეთ ელემენტზე, რომელიც აღებული ელემენტებიდან ერთის მომდევნოა (მასზე მეტია) და მეორის წინამორბედი (მასზე ნაკლები). უთქვამთ, მოცემულია ორი რაციონალური რიცხვი q და r , მასთან $q < r$, მაშინ არსებობს რაციონალური რიცხვი $k = \frac{q+r}{2}$, ისეთი, რომ $q < k < r$.

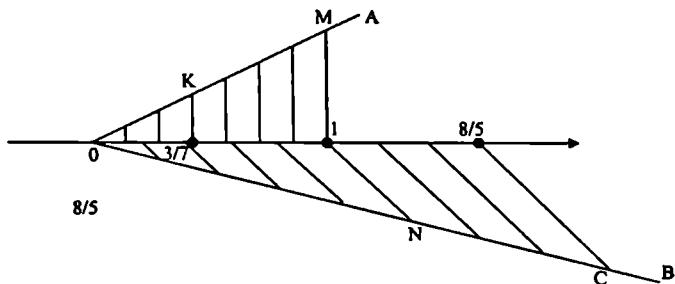
4. Q რაციონალური რიცხვთა სიმრავლე თელადი სიმრავლეა (სიმრავლეს, რომელიც ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლის ეკვივალენტურია (ტოლძალოვანია) თელადი სიმრავლე ეწოდება).

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის თელადობა სქემატურად შეიძლება შემდეგნაირად გამოვსახოთ:



წილადები დანომრილია ისრებით ნაჩვენები მიმართულებით, რაც იმას ნიშნავს, რომ Q რაციონალური რიცხვთა სიმრავლე თვლადია.

განვიხილოთ რაციონალური რიცხვის გამოსახვა რიცხვით ღერძზე. ვთქვათ, გვინდა $\frac{3}{7}$ და $\frac{8}{5}$ გამოვსახოთ რიცხვით ღერძზე.



რიცხვით ღერძის სათავედან 0 წერტილიდან ნებისმიერი მიმართულებით გაგავლოთ OA სხივი და მასზე გადავზომოთ ნებისმიერი სიგრძის 7 ტოლი მონაკვეთი, ბოლო მონაკვეთის M წერტილი შევეერთოთ რიცხვით ღერძზე 1-ის შესაბამის წერტილთან და გაგავლოთ მიღებული მონაკვეთის პარალელური წრფეები. ცხადია, $[0; 1]$ მონაკვეთი დაიყოფა 7 ტოლ ნაწილად. თითოეული ნაწილი $\frac{1}{7}$ -ია, ავიღოთ სათავედან 3 ტოლი ნაწილი, რადგან $\frac{3}{7}$ -ის გამოსახვა გვინდა.

ანალოგიურად მოვიქცეთ $\frac{8}{5}$ -ის გამოსახვისათვის; რიცხვითი ღერძის სათავედან 0 წერტილიდან ნებისმიერი მიმართულებით გაგავლოთ OB სხივი და მასზე გადავზომოთ ნებისმიერი სიგრძის 8 ტოლი მონაკვეთი, სათავედან მეხუთე მონაკვეთის ბოლო N წერტილი შევეერთოთ რიცხვით ღერძზე 1-ის შესაბამის წერტილთან და გაგავლოთ მიღებული მონაკვეთის პარალელური წრფეები. ცხადია, $[0; 1]$ მონაკვეთი დაიყოფა 5 ტოლ ნაწილად, ხოლო ბოლო მონაკვეთის ბოლო C წერტილიდან გავლებული წრფე რიცხვით ღერძს გადაკვეთს წერტილში, რომელიც $\frac{8}{5}$ -ის

შესაბამისი იქნება.

ასევე შეიძლება ნებისმიერი უარყოფითი რაციონალური რიცხვის შესაბამისი წერტილი ვიპოვოთ რიცხვით ღერძზე.

5.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

- გამოთვალეთ: ა) $\frac{2}{3} \cdot 6$, ბ) $\frac{11}{12} \cdot 0$, გ) $25 \cdot \frac{11}{100}$, დ) $16 \cdot 17 \frac{3}{4}$,
ე) $\frac{9}{16} \cdot 1$, ვ) $100 \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$, ზ) $\frac{7}{36} \cdot \frac{18}{35}$, თ) $24 \cdot 199 \frac{3}{16}$,
ი) $12 \frac{1}{4} \cdot 3 \frac{1}{3} \cdot 2 \frac{2}{15}$, კ) $18 \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10}$.
- აახარისხეთ: ა) $\left(\frac{5}{9}\right)^2$, ბ) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$, გ) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$, დ) $\left(3\frac{1}{8}\right)^2$, ე) $\left(\frac{7}{10}\right)^3$,
ვ) $\left(1\frac{1}{2}\right)^3$, ზ) $\left(1\frac{1}{5}\right)^3$, თ) $\left(1\frac{1}{3}\right)^3$, ი) $\left(2\frac{1}{3}\right)^3$, კ) $\left(3\frac{1}{2}\right)^3$.
- მოცემული რიცხვი მისი $\frac{11}{16}$ -ით შეამცირეს. შემდეგ ნაშთის $\frac{8}{11}$ აიღეს. მოცემული რიცხვის რა ნაწილს შეადგენს მიღებული შედეგი?
- იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:
ა) $1\frac{1}{10} \cdot 1\frac{1}{11} \cdot 1\frac{1}{12} \cdot \dots \cdot 1\frac{1}{98} \cdot 1\frac{1}{99}$, ბ) $1\frac{2}{11} \cdot 1\frac{2}{13} \cdot 1\frac{2}{15} \cdot \dots \cdot 1\frac{2}{97} \cdot 1\frac{2}{99}$.
- გამოთვალეთ:
ა) $\left(\left(5 - 3\frac{5}{8}\right) \cdot \frac{13}{18} + \left(12\frac{1}{3} - 6\frac{5}{6}\right) \cdot 1\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{81}{1817}$,
ბ) $\frac{5}{18} \cdot 6\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{33} \cdot 9\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{13} \cdot 7\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{44} \cdot 11\frac{11}{12} \cdot \frac{8}{31} \cdot 14\frac{1}{7} \cdot \frac{8}{75} \cdot 14\frac{1}{16}$,
გ) $\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)^5 - 4\frac{52}{243}$, დ) $\left(\left(\frac{1}{23} - \frac{1}{31}\right) + \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{37}\right) + \left(\frac{1}{29} + \frac{1}{37}\right)\right) \cdot 58$.

6. მატარებელმა $337\frac{1}{2}$ კმ გაიარა, ამ მანძილის პორიზონტალური ნაწილი მთელი გზის $\frac{7}{9}$ -ია, დარჩენილის $\frac{3}{8}$ - აღმართი, ხოლო დანარჩენი დაღმართი. რამდენი კილომეტრია დაღმართის სიგრძე?
7. ბინაში, რომელიც ორი ოთახისაგან და სამზარეულოსაგან შედგება, ელექტრულმა მთელელმა თვის განმავლობაში $103\frac{1}{2}$ კილოვატსაათი ენერგიის ხარჯი აღნიშნა. ამ ხარჯის $\frac{4}{15}$ პირველ ოთახზე მოდიოდა, $\frac{4}{9}$ მეორე ოთახზე, ხოლო დანარჩენი სამზარეულოზე. ენერგიის რა ხარჯი მოდიოდა ბინის თითოეულ ნაწილზე?
8. მერიამ გადაწყვიტა შეაკეთოს სტიქიური შემთხვევისაგან დაზიანებული სახლი; ხარჯთაღრიცხვით სახლის შეკეთება $124237\frac{1}{2}$ ლარი ჯდება. მერიას გამოყოფილი ჰქონდა $109722\frac{3}{10}$ ლარი, მან გადაწყვიტა დანაკლისი თანხის $\frac{5}{8}$ -ის მიმდინარე ბიუჯეტიდან აღება, ხოლო დანარჩენი თანხა კი ბანკიდან სესხის სახით გამოიტანოს. რამდენი ლარის სესხი უნდა აიღოს მერიამ ბანკიდან?
9. პირველ დღეს მოხნეს მთელი ფართობის $\frac{3}{10}$ ნაწილი, მეორე დღეს კი იმის $\frac{4}{5}$, რაც პირველ დღეს. მესამე დღეს $\frac{1}{50}$ -ით მეტი, ვიდრე მეორე დღეს. ფართობის რა ნაწილი უნდა მოხნან მეოთხე დღეს, იმისათვის რომ სამუშაო დასრულდეს?
10. გამოთვალეთ: ა) $\frac{12}{17}:3$, ბ) $24\frac{15}{16}:8$, გ) $1:4\frac{1}{3}$, დ) $\frac{5}{8}:\frac{15}{16}$,
 ე) $\frac{18}{25}:8\frac{4}{7}$, ვ) $100\frac{2}{3}:21\frac{4}{7}$, ზ) $1\frac{49}{75}:1\frac{7}{55}$, თ) $1:\frac{1}{9}:6\frac{3}{4}$,

$$\text{ი) } 3\frac{31}{48} : 8\frac{1}{3} : 1\frac{11}{24} : \frac{1}{120}, \quad \text{კ) } 25\frac{5}{8} : 215\frac{1}{4} : \frac{2}{3} : \frac{5}{28}.$$

11. შესარულეთ მოქმედებანი:

$$\text{ა) } \left(\left(\left(2\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right) : \frac{4}{7} \right) : \left(\left(40 - 38\frac{4}{5} \right) : \frac{1}{5} \right) \right) : \left(\left(2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4} \right) : \left(1\frac{1}{4} : 6\frac{1}{4} \right) \right),$$

$$\text{ბ) } 70\frac{3}{4} : \left(30\frac{1}{2} - \left(\frac{8\frac{5}{8} - 6\frac{1}{4}}{2\frac{2}{5} : \frac{4}{5} - 2\frac{2}{3}} + \frac{67\frac{1}{2} : 2\frac{1}{7}}{4\frac{1}{2} : 2\frac{2}{3}} \right) \right),$$

$$\text{გ) } \left(2\frac{1}{2} \right)^2 + 2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} + \left(1\frac{1}{3} \right)^2,$$

$$\text{დ) } \left(\left(3\frac{1}{2} \right)^3 + \left(\frac{1}{3} \right)^3 \right) : \left(\left(3\frac{1}{2} \right)^2 - 3\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right).$$

12. $\frac{2}{5}$ ჰექტარიდან აიღეს $1\frac{2}{5}$ ტონა კარტოფილი. ა) რამდენ ტონა

კარტოფილს აიღებენ 1 ჰექტარიდან? ბ) ჰექტარის რა ნაწილზე აიღებენ 1 ტონა კარტოფილს? (იგულისხმება, რომ კარტოფილის აღების ტემპი უცვლელია).

13. სამ კალათში 860 ცალი ვაშლია, რომელსაც ერთნაირ ფასად პყიდიან. გაყიდვის შემდეგ ორ კალათში 20-20 ვაშლი დარჩა, ხოლო, მესამეში – 26 ვაშლი; პირველი კალათიდან გაყიდულია $76\frac{4}{5}$ ლარის ვაშლი, მეორედან – $87\frac{1}{25}$ ლარის, მესამე-

დან – $90\frac{6}{25}$ ლარის. რამდენი ვაშლი იყო თითოეულ კალათში გაყიდვამდე?

14. ორ სამშენებლო ფირმაში ერთად 33 კაცი იყო. ამ ფირმებმა ერთდროულად შეასრულეს სამუშაო, მასთან ანგარიშის გასწორების შემდეგ მეორე ბრიგადამ $3070\frac{1}{2}$ ლარით მეტი მიიღო, ვიდრე პირველმა. რამდენი კაცი იყო თითოეულ ფირმაში. თუ მათ თანხა თანაბრად მიიღეს $1023\frac{1}{2}$ ლარი თითოეულმა?

15. 5 კაცს, ან 7 ქალს შეუძლია 37 დღეში დაამოაეროს ერთი

და იგივე სამუშაო. რამდენ დღეში დაამთავრებს ორჯერ მეტ სამუშაოს 7 კაცი და 5 ქალი (მუშაობის ტემპი კაცებისთვისა და ქალებისთვისაც უცვლელია), თუ ისინი ერთად იმუშავენ?

16. ორი დის წლოვანების შეფარდება $1\frac{3}{7}$ -ის ტოლია. თხუთმეტი

წლის წინათ უმცროსი დის წლოვანება უფროსი დის წლოვანების $\frac{3}{5}$ -ს შეადგენდა. რამდენი წლისაა ახლა თითოეული და?

17. ავზი ერთი მილით a საათში ივსება, მეორე მილით – b საათში. რამდენ საათში აივსება ავზი ორივე მილით?

18. წილადის მნიშვნელი 5-ით მეტია მის მრიცხველზე. თუ ამ წილადის მრიცხველს მივუმატებთ 14-ს, მნიშვნელს კი გამოვაკლებთ 1-ს, მაშინ მივიღებთ მოცემული წილადის შებრუნებულ წილადს. იპოვეთ მოცემული წილადი.

19. ჩაწერეთ ალგებრული წილადის სახით:

$$a) \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{a^2b + ab^2} \cdot a^3b, \quad b) \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \cdot \frac{1}{a^2 - b^2}.$$

20. გაამარტივეთ გამოსახულება და შემდეგ იპოვეთ მისი მნიშვნელობა, როცა $a=2$.

$$a) \frac{\frac{a^2}{(a+1)^2}}{a + \frac{1}{a - \frac{1}{a}}} \cdot (a^2 + a), \quad b) \frac{\frac{a^4 + a^3 + a^2}{a}}{a - 1} : (a^4 - a).$$

21. წარმოვადგინოთ ალგებრული წილადის სახით:

$$a) \left(\frac{1}{2a+3b} + \frac{4a^2+3b-2a}{4a^2-9b^2} - \frac{1}{2a} \right) \cdot \frac{4a^2+6ab}{3b},$$

$$b) \left(\frac{1}{y(x-y)} + \frac{y}{x(x-y)^2} + \frac{1}{2xy-x^2-y^2} \right) : \frac{x^2+xy}{x^2y},$$

$$b) \left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b(a-b)^2}{a^4-b^4} + \frac{b}{a^2+ab} \right) \cdot \frac{a^2+ab}{b^2+ab},$$

$$დ) \frac{m^2 - 3m - 4}{2m + 2} - \frac{1}{2}.$$

22. მარტო ერთი მილი ავზს l საათში ავსებს, მარტო მეორე კი $-p$ საათში. 3 საათის განმავლობაში ავზში წყალი მარტო პირველი მილით ჩაედინებოდა, შემდეგი 4 საათის განმავლობაში კი $-$ მარტო მეორე მილით. ცნობილია, რომ ამის შემდეგ ავზი არ ავსებულა. დაწერეთ ალგებრული წილადი, რომელიც გამოსახავს ავზის ასაღებად (დარჩენილ) ნაწილს.
23. A მილით ავზი l საათში ივსება მთლიანად, B მილით კი p საათში მთლიანად იცლება ($l > p$). როდესაც ორივე მილი გახსნეს, ავზის ნახევარი წყლით იყო სავსე. რამდენ საათში დაცილება ავზი?
24. მარტო პირველი მუშა მთელ სამუშაოს n საათში ასრულებს, ხოლო მარტო მეორე $- m$ საათში. პირველმა 8 საათი იმუშავა და სამუშაოს დარჩენილი ნაწილი მეორემ დაასრულა. რამდენი საათი იმუშავა მეორემ? პასუხი ჩაწერეთ ალგებრული წილადის სახით.
25. მარტო პირველი მუშა მთელ სამუშაოს a საათში ასრულებს, ხოლო მარტო მეორე $- b$ საათში. პირველმა იმუშავა 5 საათი ($a > 5$) და სამუშაოს დარჩენილი ნაწილის შესასრულებლად მას მეორე მუშაც შეუერთდა. რამდენ საათში შესრულდა მთელი სამუშაო?

გაამარტივეთ და გამოთვალეთ:

$$26. \left(\frac{2}{5x} - \frac{2}{x+y} \cdot \left(\frac{x+y}{5x} - x - y \right) \right) : \frac{x-y}{x}, \text{ თუ } x=43, y=42.$$

$$27. \frac{a^2b + 2ab^2 + b^3}{a-b} \cdot \left(\frac{a}{ab+b^2} - \frac{a^2+b^2}{a^3-ab^2} + \frac{b}{a^2-ab} \right), \text{ თუ } a=71, b=25.$$

$$28. \left(\frac{2x^2y + 2xy^2}{9x^3 + x^2y + 9xy^2 + y^3} \cdot \frac{9x+y}{x^2-y^2} + \frac{x-y}{x^2+y^2} \right) \cdot 14(x^2-y^2),$$

$$\text{თუ } x = \frac{1}{7}, y = \frac{1}{14}.$$

$$29. \left(\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2c}{ab} \right) \cdot (a + b + 2c) \right) : \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{ab} - \frac{4c^2}{a^2b^2} \right) + c^2,$$

$$\text{თუ } a = 7\frac{2}{5}, b = \frac{5}{37} \text{ და } c = 2.$$

$$30. \left(\left(2b + a - \frac{4a^2 - b^2}{a} \right) : (b^3 + 2ab^2 - 3a^2b) \right) \cdot \frac{a^3b - 2a^2b^2 + ab^3}{a^2 - b^2},$$

$$\text{თუ } a = 10\frac{1}{2}, b = -7\frac{1}{2}.$$

5.1.1. ტესტი №4

1. მოცემული ორი წილადის ნამრავლი ტოლია ისეთი წილადის, რომლის

- მრიცხველია მოცემული წილადების მრიცხველების ჯამი, ხოლო მნიშვნელი მნიშვნელების ნამრავლი;
- მრიცხველია მოცემული წილადების მრიცხველების სხვაობის მოდული, ხოლო მნიშვნელი მნიშვნელების ნამრავლი;
- მრიცხველია მოცემული წილადების მრიცხველების ნამრავლი, ხოლო მნიშვნელი მნიშვნელების ნამრავლი;
- მრიცხველია მოცემული წილადების მრიცხველების ნამრავლი, ხოლო მნიშვნელი მნიშვნელების ჯამი.

$$2. \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = (\text{სადაც } b \neq 0, c \neq 0 \text{ და } d \neq 0).$$

$$\text{ა) } \frac{ad}{b+d}, \quad \text{ბ) } \frac{a+d}{bc}, \quad \text{გ) } \frac{ac}{bd}, \quad \text{დ) } \frac{ad}{bc}.$$

3. $\frac{x^2 - y}{x}$ ალგებრული წილადის შებრუნებული წილადი არის

$$\text{ა) } \frac{x}{x^2 - y}; \quad \text{ბ) } x - \frac{y}{x}, \quad \text{გ) } \frac{y - x^2}{x}, \quad \text{დ) } \frac{x^2 + y}{x}, \quad \text{ე) } \frac{x}{x^2 + y}.$$

$$4. 6 \cdot \frac{3}{4} =$$

$$\text{ა) } 18, \quad \text{ბ) } \frac{18}{3}, \quad \text{გ) } 4\frac{1}{2}, \quad \text{დ) } 3\frac{1}{2}, \quad \text{ე) } 3\frac{1}{4}.$$

5. $\frac{3}{5}$ საათი არის
- ა) 12 წუთი, ბ) 36 წუთი, გ) 45 წუთი, დ) 35 წუთი, ე) 40 წუთი.
6. 200-ის $\frac{5}{8}$ ნაწილის საპოვნელად თეონამ 200 გაყო 8-ზე და მიღებული შედეგი გაამრავლა 5-ზე, ნიკამ კი 200 გაამრავლა $\frac{5}{8}$ -ზე. მაშინ
- ა) მხოლოდ თეონამ იანგარიშა სწორად;
 ბ) მხოლოდ ნიკამ იანგარიშა სწორად;
 გ) თეონამაც და ნიკამაც სწორად იანგარიშეს;
 დ) ორივემ არასწორად იანგარიშა.
7. მოცემული რიცხვისა და მისი შებრუნებულის ნამრავლია
- ა) მოცემული რიცხვი; ბ) მოცემული რიცხვის მოპირდაპირე რიცხვი; გ) 1; დ) $\frac{1}{2}$, ე) 2.
8. მთვარეზე რაიმე სხეულის წონა არის დედამიწაზე ამავე სხეულის წონის $\frac{4}{25}$ ნაწილი. კოსმონავტის წონა მთვარეზე $12\frac{4}{5}$ კილოგრამია. რას უდრის მისი წონა დედამიწაზე?
- ა) 64 კგ; ბ) 84 კგ; გ) 74 კგ; დ) 80 კგ; ე) 78 კგ.
9. ავტომობილის მიერ გავლილი მანძილი აღმოჩნდა დარჩენილი გზის $\frac{1}{3}$ ნაწილი. მთელი გზის რა ნაწილი აქვს გავლილი ავტომობილს?
- ა) $\frac{2}{3}$; ბ) $\frac{1}{4}$; გ) $\frac{2}{5}$; დ) $\frac{1}{6}$, ე) $\frac{2}{7}$.
10. 3 მუშა 3 სატიერთო მანქანას ტვირთავს 3 საათში. 1 მუშა 1 მანქანას დატვირთავს
- ა) 2 სთ-ში, ბ) 3 სთ-ში, გ) 9 სთ-ში, დ) 6 სთ-ში.

**§6. ათწილადების ცნება. ათწილადების თვისებები.
ჩვეულებრივი წილადის გადაქცევა ათწილადად.
არითმეტიკული მოქმედებები ათწილადებზე**

როგორც ცნობილია, ათობით სისტემაში ნატურალურ რიცხვებზე მოქმედებანი უფრო იოლად სრულდება, ვიდრე ჩვეულებრივ წილად რიცხვებზე, რაც გამოწვეულია იმით, რომ ნატურალური რიცხვები გამოსახულია ათობით სისტემაში, ხოლო წილადი რიცხვები თვლის სხვადასხვა ფუძითაა აღებული. იმ შემთხვევაში, როდესაც გეძლევა სხვადასხვა ფუძით მოცემული ორი ნატურალური რიცხვი, მათი შეკლებისათვის წინასწარ საჭიროა ისინი დაიყვანოთ სისტემის ერთ ფუძეზე და შემდეგ შევასრულოთ მოქმედება. მაგალითად, ავიღოთ ორი ნატურალური რიცხვი, ერთი ათობით სისტემაში 85_{10} , ხოლო მეორე ხუთობით სისტემაში 324_5 , როგორ შეეკრიბოთ ეს რიცხვები? პირველი შედგება რვა ათეულისაგან და ხუთი ერთეულისაგან, ხოლო მეორე 3 ხუთის კვადრატისაგან, 2 ხუთისა და 4 ერთეულისაგან. ცხადია, რომ ასეთ შემთხვევაში ისე უნდა მოვიქცეთ, როგორც სხვადასხვამნიშვნელიან წილადებზე, ე.ი. საჭიროა ისინი გამოვსახოთ ერთსა და იმავე სისტემაში; მაგალითად, ათობითში. გვექნება:

$$324_5 = 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 4 = 89_{10}.$$

ამის შემდეგ, რიცხვების, 85 -სა და 89 -ის შეკრება სიძნელეს აღარ წარმოადგენს, $85 + 89 = 174$.

ავიღოთ ორი სხვადასხვამნიშვნელიანი წილადი; მაგალითად, $\frac{7}{9}$ და $\frac{5}{8}$; ისინი მოცემულია სისტემის სხვადასხვა ნაწილში. შეკრებისა და გამოკლებისათვის საჭიროა ისინი დაყვანილიქნეს სისტემის ერთსა და იმავე ნაწილებში; მაგალითად, სამოცდამეთორმეტე ნაწილებში, გვექნება $\frac{56}{72}$ და $\frac{45}{72}$. ამის შემდეგ შეიძლება შევასრულოთ როგორც შეკრება, ისე გამოკლება.

ათწილადებს ჯერ კიდევ XIV-XV საუკუნეებში იყენებდნენ. ათწილადების სისტემა პირველმა აღწერა სამარყანდელმა მათემატიკოსმა ჯემშიდ იბნ-მასუდ ალ-კაშიმ (1427). (ალ-კაში ჯემშიდ

იბნ მასუდი – შუააზიელი მათემატიკოსი და ასტრონომი, აეტორია შრომებისა: „არითმეტიკის გასაღები“, „ტრაქტატი წრეწირის შესახებ“, „ტრაქტატი ქორდისა და სინუსის შესახებ“; შემოიღო ნებისმიერი ხარისხის ფესვის ამოღების წესი მთელი რიცხვებიდან, შეადგინა ბინომური კოეფიციენტების ცხრილი, შემოიღო ათწილადები, რის შედეგადაც ათობითი პოზიციური სისტემა ნებისმიერ ნამდვილ რიცხვთა ჩასაწერად გაერცეულა). ევროპაში ათწილადებმა ფართო გაერცელება კოვეს პოლანდიელი ინიერის ს.სტეფინის წიგნის („მეათე“, 1585) გამოსვლის შემდეგ. სახელწოდება „ათწილადი“ შემოიღო ელენდმა (1724), მანამდე იყენებდნენ ტერმინს „ათობით რიცხვი“. ჩვეულებრივი წილადის გადაქცევას ათწილადად და შებრუნებულ მოქმედებას განიხილავდა კავალერი (1643), ამასთან დაკავშირებით ევროპაში მან პირველმა დაიწყო პერიოდული ათწილადების შესწავლა. სიტყვა „პერიოდი“ (periodus) გეხვდება ბიერის წიგნში „Logistica decimolis“ (ათობითი ანგარიში, 1603). ვალისმა დაადგინა, რომ ირაციონალური რიცხვები არ გამოისახებიან პერიოდული ათწილადებით. პერიოდული ათწილადების ზოგიერთი თვისება აღმოაჩინა ლაიბნიცმა; მრავალი მნიშვნელოვანი შედეგი აქვთ მიღებული ლამბერტს (მათ შორის თეორემა პერიოდის ციფრთა რაოდენობის შესახებ, 1769), რობერტსონს, გაუსს და სხვ.

ცნობილია, რომ ნატურალურ რიცხვთა ჩანაწერით გამოსახვა თელის ათობით სისტემაში დამყარებულია ციფრების პოზიციური მნიშვნელობის პრინციპზე. მაგალითად, რიცხვში ერთი თანრიგით მარცხნივ გადანაცვლებით ციფრის მნიშვნელობა 10-ჯერ იზრდება, ხოლო მარჯვნივ გადანაცვლებით შესაბამისად მცირდება 10-ჯერ. ამ პრინციპით ესარგებლობთ სისტემატური წილადების განსაკუთრებული ფორმით ჩაწერის დროს.

სისტემატური წილადის ჩაწერის ფორმა განისაზღვრება ციფრის პოზიციური მნიშვნელობიდან გამომდინარე; კერძოდ, M რიცხვის ერთეულების გამომსახველი a_i ციფრის მარჯვნივ გვექნება 10-ჯერ ნაკლები ერთეულების გამომსახველი ციფრი. მაშასადამე, ეს ციფრი გამოსახავს ერთეულის მეათედი ნაწილის ოდენობას; მარჯვნივ მომდევნო ციფრი აღნიშნავს ერთეულის მეასედი ნაწილის ოდენობას და ა. შ.

ამრიგად, ელემენტობით ახალ სათვალავ ერთეულებს: $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \dots, \frac{1}{10^n}, \dots$ ეს ერთეულები ჩვენთვის ცნობილ სათვალავ ერთეულებთან ერთად ქმნიან სათვალავ ერთეულთა შემდეგ მიმდევრობას:

$$\dots, 10^n, 10^{n-1}, \dots, 10^3, 10^2, 10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \dots, \frac{1}{10^{n-1}}, \frac{1}{10^n}, \dots$$

ახალი სათვალავი ერთეულის შემოტანა შესაძლებლობას გვაძლევს ყოველი წილადი, რომლის მნიშვნელია 10-ის რაიმე ხარისხი, დაეწეროთ მნიშვნელის გარეშე, მხოლოდ მრიცხველის საშუალებით. ათწილადები რომ ჩავწეროთ უმნიშვნელოდ, ამისათვის საჭიროა აგრეთვე შემოვიღოთ რაიმე პირობითი ნიშანი იმის აღსანიშნავად, თუ სად თავდება მოცემული რიცხვის მთელი ნაწილი და სად იწყება მისი წილადი ნაწილი. ასეთ ნიშნად ხმარობენ მძიმეს, რომელსაც სვამენ უშუალოდ მოცემული წილადის მთელი ერთეულის გამომსახველი ციფრის შემდეგ, თუ რა თქმა უნდა, მთელი ნაწილი მოცემულ წილადს გააჩნია; მაგალითად, $101\frac{7}{10}$ გამოისახება ასე: $101\frac{7}{10} = 101,7$. თუ სისტემატური რიცხვი არ შეიცავს მთელ ნაწილს, მთელის ნაცვლად წერენ 0-ს, რომლის შემდეგ სვამენ მძიმეს; მაგალითად, $\frac{7}{10} = 0,7$. 0-ებით აღინიშნება აგრეთვე ის მრიცხველები, რომელთა მნიშვნელები 10-ის რომელიმე ხარისხებია და რომლებიც მოცემულ წილადში არ შედის; მაგალითად, $2\frac{107}{10000} = 2,0107$. დანარჩენ შემთხვევაში ათწილადების ნუმერაცია იგივეა, რაც ნატურალური რიცხვების ნუმერაცია.

წილადს, რომლის მნიშვნელია 10 ან 10-ის რომელიმე ხარისხი, ათწილადი ეწოდება.

ათწილადის ნიშნის (მძიმის) მარცხნივ მოთავსებულ რიცხვს ეწოდება ათწილადის მთელი ნაწილი, ხოლო მარჯვნივ მოთავსებულს წილადი ნაწილი. ათწილადი ზოგადად შეიძლება ასე ჩავწეროთ: $a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10 + a_1 + \frac{b}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \dots + \frac{b_m}{10^m}$, სადაც

$a_1, a_2, \dots, a_n$ და აგრეთვე $b_1, b_2, \dots, b_m$ ციფრებია. მაგალითად:

$$2751 \frac{45022}{1000000} = 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 1 + \frac{0}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{0}{10000} + \frac{2}{100000} + \frac{2}{1000000} = 2751,045022.$$

თუ $a_n = a_{n-1} = \dots = a_2 = a_1 = 0$, მაშინ ათწილადის მთელი ნაწილი ტოლია 0-ის და ვლესულობთ ე.წ. წესიერ ათწილადს. თუ $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ ციფრებიდან რომელიმე ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ მივიღებთ შერეულ რიცხვს. თუ $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, მაშინ მოცემული ათწილადის წილადი ნაწილი იქნება 0-ის ტოლი, რადგან $\frac{0}{10} = \frac{0}{10^2} = \dots = \frac{0}{10^m} = 0$; ამ შემთხვევაში მივიღებთ მთელ რიცხვს.

ათწილადი შეიძლება ჩაეწეროს ასეც:
 $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1}, \overline{b_1 b_2 \dots b_m} = A, \overline{b_1 b_2 \dots b_m}$, A -თი ათწილადის მთელი ნაწილია აღნიშნული $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1}$ ($\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1}, \overline{b_1 b_2 \dots b_m}$ აღნიშნავს რიცხვს (ათწილადს), სადაც $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, b_1, b_2, \dots, b_m$ ციფრებია, თავზე ხაზი იხმარება იმისათვის, რომ ჩანაწერი არ გვეგონოს ნამრავლი). პირველ ციფრს მძიმედან მარჯვნივ ეწოდება პირველი ათობითი ნიშანი, ანუ მეთოდების ციფრი. მეორეს, მეორე ათობითი ნიშანი, ანუ მესამედების ციფრი და ა.შ.

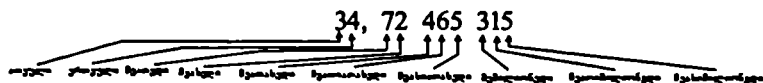
ყოველი ათწილადი შეიძლება წარმოვადგინოთ ორი რიცხვის ჯამის სახით, რომელთაგან პირველი შესაქრები არის მთელი რიცხვი გამოსახული მძიმის მარცხნივ მდებარე ციფრებით, ხოლო მეორე შესაქრები წესიერი წილადია, რომლის მრიცხველია მძიმის მარჯვნივ მოთავსებული ციფრები, ხოლო მნიშვნელი წარმოადგენს რიცხვს 1-ითა და მის მარჯვნივ მიწერილი იმდენი ნულით, რამდენი ციფრიცაა წილად ნაწილში. მართლაც:

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1}, \overline{b_1 b_2 \dots b_m} = \frac{\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 b_1 b_2 \dots b_m}}{10^m} = \frac{\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1} \cdot 10^m + \overline{b_1 b_2 \dots b_m}}{10^m} = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1} + 0, \overline{b_1 b_2 \dots b_m}.$$

$0, \overline{b_1 b_2 \dots b_m}$ წესიერი წილადია, რადგან მისი მრიცხველის ციფრთა რაოდენობა არ აღემატება m -ს, ხოლო მნიშვნელის ციფრთა რიცხვი არის $m+1$; ამრიგად, თუ ათწილადის მთელი ნაწილი ნულის ტოლია, მაშინ იგი გამოსახავს 1-ზე ნაკლებ რიცხვს. თუ ათწილადის მთელი ნაწილი არის რაიმე ნატურა-

ლური რიცხვი, მაშინ იგი გამოსახავს 1-ზე მეტ ან 1-ის ტოლ რიცხვს. მასთან 1-ის ტოლი რიცხვი იქნება მაშინ, როცა მთელი ნაწილი ტოლია 1-ის, ხოლო წილადი ნაწილი არ შეიცავს არც ერთ ნიშნად ციფრს.

ათწილადი რომ წავიკითხოთ, საჭიროა ჯერ წავიკითხოთ მთელი ნაწილი, ხოლო შემდეგ მიმდევრობითი წილადი ნაწილი. მაგალითად, 34, 72 465 315 წაიკითხება ასე: ოცდათოთხმეტი მთელი სამოცდათორმეტი მილიონ ოთხას სამოცდახუთი ათას სამას თხუთმეტი მეასმილიონედი;



შეიძლება ათწილადი ასეც წავიკითხოთ: 34 მთელი, 724 მეათასედი, 653 მემილიონედი, 15 მეასმილიონედი. ზოგიერთ შემთხვევაში სარგებლობენ ე.წ. „ტელეფონური“ ხერხით; მაგალითად, ასე – 34 მთელი, სამოცდათორმეტი, ორმოცდაექვსი, ორმოცდაცამეტი, თხუთმეტი; ე.ი. მნიშვნელის ჩვენების გარეშე.

მოცემული ათწილადებიდან მეტია ის, რომლის მთელი ნაწილიც მეტია, თუ მთელი ნაწილები ტოლია, მაშინ მეტია ის ათწილადი, რომლის მეათადების ციფრიც მეტია, თუ მეათადების ციფრები ტოლია, მაშინ მეტია ის ათწილადი, რომლის მეასედების ციფრიც მეტია და. ა.შ. მაგალითად, 23,5141 და 23,51415. გვაქვს: $23,51415 > 23,5141$.

განვიხილოთ ათწილადების თვისებები:

1. წილადის ძირითადი თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ ათწილადი არ შეიცვლება, თუ მას მარჯვნივ, წილად ნაწილში მიუწეროთ ერთ ან რამდენიმე ნულს. მაგალითად: $12,7 = 12,70 = 12,70000$.
2. თუ ათწილადში მძიმეს გადავიტანთ ერთი ათწილადი ნიშნით მარჯვნივ, ათწილადი გაიზრდება 10-ჯერ, ხოლო მძიმის ერთი ათწილადი ნიშნით მარცხნივ გადატანით ათწილადი 10-ჯერ შემცირდება. ანალოგიურად, თუ ათწილადში მძიმეს გადავიტანთ ორი ათწილადი ნიშნით მარჯვნივ, იგი 100-ჯერ გაიზრდება, ხოლო მძიმის ორი ათწილადი ნიშნით მარცხნივ გადა-

ტანით ათწილადი 100-ჯერ შემცირდება და ა.შ.

3. ყოველი მთელი რიცხვი შეიძლება განხილულ იქნეს, როგორც ათწილადი, რომლის მთელი ნაწილია თვით ეს რიცხვი. ხოლო წილადი ნაწილი გამოსახულია მხოლოდ ნულებით. მაგალითად, $72=72,0=72,0000$.
4. წილადი, რომლის მნიშვნელი 10 ან 10-ის რომელიმე ხარისხია, რომ გამოვსახოთ ათწილადად საჭიროა დაეწეროთ მისი მრიცხველი და მარჯვნიდან გამოეყოთ მძიმით იმდენი ციფრი, რამდენი ნულიც არის მოცემული წილადის მნიშვნელში. თუ მრიცხველის ციფრთა რაოდენობა ნაკლებია მნიშვნელის ნულების რაოდენობაზე (მნიშვნელის ხარისხის მაჩვენებელზე) მრიცხველის ციფრების მარცხნივ მძიმემდე იწერება იმდენი ნული, რამდენიც არის სხვაობა ნულების ოდენობასა და ციფრთა ოდენობას შორის. მაგალითად, $\frac{724}{10^7}=0,00724$; $\frac{725724}{10^5}=7,25724$.
5. ათწილადი რომ გამოვსახოთ ჩვეულებრივ წილადად, საჭიროა უკუვაგდოთ მძიმე, მრიცხველად ავიღოთ მიღებული ნატურალური რიცხვი, ხოლო მნიშვნელად უკანასკნელი ათობითი ნიშნის მნიშვნელი და თუ შესაძლებელია შევკვეცოთ; მაგალითად,

$$0,436 = \frac{436}{1000} = \frac{109}{250}.$$

ათწილადები გამოიყენება რიცხვების სტანდარტული სახით ჩასაწერად. რიცხვის სტანდარტული სახის ჩანაწერი ორი მამრავლისაგან შედგება. პირელი მამრაველი ნაკლებია 10-ზე და არ არის ნაკლები 1-ზე, მეორე – 10-ის ხარისხია. მაგალითად, 61 200 000 ჩაწეროთ სტანდარტული სახით, გვაქვს: $61\,200\,000=6,12 \cdot 10^7$.

იმისათვის, რომ შესაძლებელი იყოს მოცემული უკვეცი ჩვე-

ულებრივი წილადი $\frac{a}{b}$ გადავაქციოთ სასრულ ათწილადად, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მოცემული წილადის მნიშვნელის მარტივ მამრავლებად დაშლა შეიცადეს მხოლოდ მარტივ მამრავლებს 2-ს და 5-ს (ან მხოლოდ მათ ხარისხებს).

დამტკიცება. დავამტკიცოთ საკმარისობა; დაეუშვათ, რომ

$b=2^k \cdot 5^m$, მაშინ მოცემული წილადი ჩაიწერება ასე: $\frac{a}{b} = \frac{a}{2^k \cdot 5^m}$. აქ ადგილი აქვს სამ შემთხვევას: 1. $k=m$, 2. $k < m$, 3. $k > m$. განვიხილოთ თითოეული მათგანი:

1. თუ $k=m$, მაშინ $\frac{a}{b} = \frac{a}{2^k \cdot 5^k} = \frac{a}{(2 \cdot 5)^k} = \frac{a}{10^k}$, ე.ი. მოცემული წილადის სასრულ ათწილადად გადაქცევა შესაძლებელია.

2. თუ $k < m$, მაშინ მოცემული წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი გავამრავლოთ 2^{m-k} -ზე, მივიღებთ:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^k \cdot 5^m} = \frac{a \cdot 2^{m-k}}{2^{m-k} \cdot 2^k \cdot 5^m} = \frac{a \cdot 2^{m-k}}{2^m \cdot 5^m} = \frac{a \cdot 2^{m-k}}{10^m},$$

ამ შემთხვევაში მოცემული წილადის ათწილადად გადაქცევა შესაძლებელია.

3. თუ $k > m$, მაშინ მოცემული წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი გავამრავლოთ 5^{k-m} -ზე, გვექნება:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^k \cdot 5^m} = \frac{a \cdot 5^{k-m}}{2^k \cdot 5^{k-m} \cdot 5^m} = \frac{a \cdot 5^{k-m}}{2^k \cdot 5^k} = \frac{a \cdot 5^{k-m}}{10^k},$$

ეს შემთხვევაც გვაძლევს საშუალებას, რომ მოცემული წილადი ათწილადად გადავაქციოთ.

მაგალითად, 1) $\frac{3}{250} = \frac{3}{2 \cdot 5^3} = \frac{3 \cdot 2^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{12}{10^3} = 0,012$.

2) $\frac{3}{40} = \frac{3}{2^3 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{75}{1000} = 0,075$.

დავამტკიცოთ აუცილებლობა; თუ მოცემული უკვეცი ჩვეულებრივი წილადი წარმოდგენილია სასრული ათწილადის სახით, მაშინ მისი მნიშვნელი არ შეიძლება შეიცავდეს 2-სა და 5-საგან განსხვავებულ სხვა მარტივ თანამამრავლებს.

ეთქვას, $\frac{a}{b} = 0, \overline{c_1 c_2 \dots c_k}$ (ვიგულისხმობთ, რომ მოცემული უკვეცი წილადი წესიერია). გადავაქციოთ ათწილადი ჩვეულებრივ წილადად, გვექნება: $0, \overline{c_1 c_2 \dots c_k} = \frac{c_1 c_2 \dots c_k}{10^k}$. მიღებული წილადი $\frac{c_1 c_2 \dots c_k}{10^k}$ შეიძლება იყოს უკვეცი, ან შეიძლება მისი შეკვეცა. თუ

იგი უკვეცია, მაშინ ვინაიდან ის $\frac{a}{b}$ უკვეცია წილადის ტოლია, ამიტომ მისი მნიშვნელი $10^k = 2^k \cdot 5^k = b$ (ტოლ უკვეც წილადებს ტოლი მნიშვნელები შეესაბამება), ე.ი. ამ შემთხვევაში b არ შეიცავს 2-ისა და 5-საგან განსხვავებულ სხვა თანამამრავლებს. თუ იგივე წილადი იკვეცება, მაშინ ვიპოვოთ მრიცხველისა და მნიშვნელის უ.ს.გ. და აღვნიშნოთ იგი d -თი, მაშინ $c_1 c_2 \dots c_k = md$ და $10^k = nd$. მაშასადამე, გვექნება:

$$\frac{a}{b} = \frac{c_1 c_2 \dots c_k}{10^k} = \frac{md}{nd} = \frac{m}{n}.$$

აქედან გვაქვს, რომ $b=n$; ე.ი. შეიძლება დავასკვნათ, რომ n მნიშვნელი არ შეიცავს სხვა მარტივ მამრავლებს გარდა 2-ისა და 5-ისა. დაუშვათ, იგი შეიცავს ასეთ მამრავლს. მაგალითად p -ს, მაშინ $n=p \cdot n'$, აქედან $dn=dpn'$. მაგრამ $dn=10^k$, ე.ი. $10^k=dpn'$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $10^k:p$; მიუხედავად იმისა, რომ 10^k არ შეიძლება იყოფოდეს ისეთ p მარტივ რიცხვზე, რომელიც 2-სა და 5-საგან განსხვავებულია. ეს კი პირობის აუცილებლობას ამტკიცებს.

ათწილადები რომ შეეკრიბოთ, საჭიროა ისინი მიეწეროთ ერთმანეთს ისე, რომ ყველა შესაკრებში ერთნაირი თანრიგები მდებარეობდეს ერთ სვეტში და ასევე მძიმეებიც ერთ სვეტში მოხედეს, შემდეგ შეკრება სრულდება მთელი რიცხვების შეკრების მსგავსად. მიღებულ ჯამში მძიმე დაისმება იმავე ვერტიკალურ სვეტში, სადაც ის მოცემულ შესაკრებებშია. მაგალითად:

$$\begin{array}{r} 3,4013 \\ + 75,403 \\ 2010,21514 \\ 0,42 \\ \hline 2089,43944 \end{array}$$

ათწილადების სხვაობა რომ ვიპოვოთ, საჭიროა საკლებს მიეწეროთ მაკლები ისე, რომ ერთნაირი თანრიგები მდებარეობდეს ერთ სვეტში და ასევე მძიმეებიც ერთ სვეტში მოხედეს, შემდეგ მოვახდინოთ გამოკლება მთელი რიცხვების მსგავსად. მიღებულ სხვაობაში მძიმე დავსვათ იმავე ვერტიკალურ სვეტში, სა-

დაც ის საკლებსა და მაკლებშია. განვიხილოთ მაგალითები:

$$\begin{array}{r} 1,3054 \\ 1) - 0,6218 \\ \hline 0,6836 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4,385 \\ 2) - 2,5 \\ \hline 1,885 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8,2 \\ 3) - 3,7948 \\ \hline 4,4052 \end{array}$$

განვიხილოთ ათწილადების გამრავლების ცალკეული შემთხვევები. ათწილადი რომ გავამრავლოთ ნატურალურ რიცხვზე, საჭიროა ისინი გადავამრავლოთ როგორც ნატურალური რიცხვები და მიღებულ ნამრაველში მარჯვნიდან მარცხნივ მძიმით გამოვყოთ იმდენი ათობითი ციფრი, რამდენიცაა ათწილადის წილად ნაწილში. მაგალითად:

$$\begin{array}{r} 40,385 \\ \times 54 \\ \hline 161540 \\ + 20195 \\ \hline 2180,890 \end{array}$$

ეს წესი ძალაში რჩება ნატურალური რიცხვის ათწილადზე გამრავლების შემთხვევაშიც (ნამრავლის გადანაცვლებადობის თვისების გამო).

$$\begin{array}{r} 137 \\ \times 4,3 \\ \hline 411 \\ + 548 \\ \hline 589,1 \end{array}$$

მაგალითად:

ათწილადის 10-ზე ნამრავლი რომ გამოვთვალოთ, საკმარისია ამ ათწილადში მძიმე გადავიტანოთ ერთი ციფრით მარჯვნივ. მაგალითად, $213,56 \cdot 10 = 2135,6$.

ათწილადის 10ⁿ-ზე ნამრავლი რომ გამოვთვალოთ (სადაც $n \in \mathbb{N}$), საკმარისია ამ ათწილადში მძიმე გადავიტანოთ n ოდენობის ციფრით მარჯვნივ. განვიხილოთ მაგალითები:

ა) $213,15 \cdot 10^3 = 213\,150$; ბ) $21,001 \cdot 10^2 = 2100,1$.

ორი ათწილადი რომ გავამრავლოთ, საჭიროა ისინი გადავამრავლოთ როგორც ნატურალური რიცხვები და მიღებულ ნამრაველში მძიმე გამოვყოთ მარჯვნიდან მარცხნივ იმდენ ნიშანზე,

რამდენი ციფრიცაა თანამამრაველი ათწილადების წილად ნაწილში ერთად. მაგალითად:

$$\begin{array}{r}
 2007,15 \\
 \times \quad 14,122 \\
 \hline
 401430 \\
 + 401430 \\
 200715 \\
 802860 \\
 200715 \\
 \hline
 28344,97230
 \end{array}$$

განვიხილოთ ათწილადების გაყოფის ცალკეული შემთხვევები. ნატურალური რიცხვების განაყოფი ყოველთვის შეიძლება გამოისახოს ჩვეულებრივი წილადის სახით, მაგრამ ყოველთვის არ გამოისახება სასრულ ათწილადად; იმისათვის, რომ ნატურალური რიცხვების განაყოფი გამოისახოს სასრული ათწილადით საჭიროა გამყოფის მარტივ მამრავლებად დაშლა შეიცავდეს მხოლოდ მარტივ მამრავლებს 2-სა და 5-ს (ან მხოლოდ მათ ხარისხებს), ეს იმ შემთხვევაში, როცა გასაყოფისა და გამყოფის უ.ს.გ. 1-ის ტოლია. თუ გვაქვს შემთხვევა, როცა გასაყოფი და გამყოფი არ არიან ურთიერთმარტივი რიცხვები, მაშინ მათი შესაბამისი წილადი უნდა დავიყვანოთ უკვეც სახეზე და ამ შემთხვევაში, თუ მიღებული წილადის მნიშვნელის მარტივ მამრავლებად დაშლა შეიცავს მხოლოდ მარტივ მამრავლებს 2-სა და 5-ს (ან მხოლოდ მათ ხარისხებს) ამ შემთხვევაშიც განაყოფი გამოისახება სასრული ათწილადით. მაგალითად: $7:35=0,2$; $9:36=0,25$. ამრიგად, ნატურალური რიცხვების გაყოფის დროს შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

1. როცა არ არსებობს მათი განაყოფი სასრული ათწილადის სახით; მაგალითად, $3:7$ არ გამოისახება სასრული ათწილადის სახით.
2. ნატურალური რიცხვების განაყოფი გამოისახება სასრული ათწილადის სახით; მაგალითად: $17:20=0,85$.

ათწილადი რომ 10-ზე გავყოთ, საკმარისია ამ ათწილადში მძიმე გადავიტანოთ ერთი ციფრით მარცხნივ. მაგალითად:

$$17.03:10=1,703.$$

ათწილადი რომ 10^k -ზე გაეყოთ (სადაც $K \in \mathbb{N}$), საკმარისია ამ ათწილადში მძიმე გადავიტანოთ K ოდენობის ციფრით მარცხნივ. მაგალითად: ა) $1203,15:10^3=1,20315$; ბ) $12,3:10^4=0,00123$.

ათწილადი რომ გაეყოთ ნატურალურ რიცხვზე, საჭიროა გაყოფა შევასრულოთ, როგორც ნატურალური რიცხვისა ნატურალურ რიცხვზე; გასაყოფის მთელი ნაწილის გაყოფის დამთავრებისას განაყოფში დავსვათ მძიმე და მოქმედება განვაგრძოთ ისე, როგორც ნატურალური რიცხვების გაყოფის დროს, სანამ გაყოფა არ დასრულდება. მაგალითად:

$$ა) 48,8889:12 = 4,074075$$

$$\begin{array}{r} 88 \\ - 84 \\ \hline 48 \\ 90 \\ - 84 \\ \hline 60 \\ - 60 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$ბ) 5,523:14 = 0,3945.$$

$$\begin{array}{r} - 42 \\ \hline 132 \\ - 126 \\ \hline 63 \\ - 56 \\ \hline 70 \\ - 70 \\ \hline 0 \end{array}$$

რიცხვი რომ გაეყოთ ათწილადზე საჭიროა გასაყოფი და გამყოფი გაემრავლოთ ერთი და იმავე თანრიგის ერთეულზე, რომლის მაჩვენებელი იქნება იმდენი ერთეული, რამდენი ათობითი ნიშანიც აქვს გამყოფს და გაყოფა შევასრულოთ ისე, როგორც ათწილადის ნატურალურ რიცხვზე გაყოფის შემთხვევაში

გეკონდა. მართლაც, ეთქვათ, $Q_1 = \frac{A}{10^n}$; $Q_2 = \frac{B}{10^m}$; გვექნება:

$$Q_1 : Q_2 = \frac{A}{10^n} : \frac{B}{10^m} = \left(\frac{A}{10^n} \cdot 10^m \right) : \left(\frac{B}{10^m} \cdot 10^n \right) = (A \cdot 10^{m-n}) : B.$$

მაგალითად, ა) $24109 : 0,5 = 241090 : 5 = 48218$;

ბ) $6,375 : 3,75 = 637,5 : 375 = 1,7$.

$$\begin{array}{r} - 375 \\ 2625 \\ - 2625 \\ \hline 0 \end{array}$$

6.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. მოცემული შემდეგი ცხრილი:

მილიონები	ასეული ათასეულები	ათეული ათასეულები	ათასეული	ასეული	ათეული	ერთეულები	მსიმი	მეათედი ნაწილები	მეასედი ნაწილები	მეათასედი ნაწილები	მეათათასედი ნაწილები	მეასიათასედი ნაწილები	მემილიონედი ნაწილები	მეათმილიონედი ნაწილები
ათწილადი რიცხვის მთელი ნაწილი	.							ათწილადი რიცხვის წილადი ნაწილი						
9	1	3	0	7	4	2	.	0	1	2	0	0	3	4

- წავიკითხოთ ცხრილში ჩაწერილი რიცხვი;
- რამდენი მეათედი ნაწილია ერთეულში?
- რამდენი მეასედი ნაწილია ერთ მეათედში?
- რამდენი მეათასედი ნაწილია ერთ მეათედში?
- რამდენი მეათმილიონედი ნაწილია ერთ მეასედში?
- რამდენჯერ ნაკლებია ერთეულზე მეათედი ნაწილი?
- რამდენჯერ ნაკლებია მეათასედი ნაწილი მეასედზე?
- რამდენჯერ მეტია მეასიათასედი ნაწილი მემილიონედზე?

2. რამდენი მთელი ერთეულია

- 47 მეათედ ნაწილში?

- ბ) 785 მეასედ ნაწილში?
 გ) 5378 მეათასედ ნაწილში?
3. რიცხვების შეკრებისას დაშვებული შეცდომა: მეასადების ციფრი 4 მიღებულია 7-ად, მეათედების ციფრი 3 მიღებულია 8-ად, ერთეულების ციფრი 9 მიღებულია 2-ად; ჯამში მიღებულია 37,5. იპოვეთ ნამდვილი ჯამი.
4. რიცხვების გამოკლებისას დაშვებულია შემდეგი შეცდომები: საკლებში ერთეულების ციფრი 8 მიღებულია 3-ად, მეასედების ციფრი 4 მიღებულია 1-ად, ხოლო საკლებში მეათედების ციფრი 9 მიღებულია 2-ად და მეათითასედების ციფრი 0 მიღებულია 6-ად. სხვაობაში მიღებულია 15,0015. იპოვეთ სწორი სხვაობა.
5. 13.21345-ს მიუმატეს მისი მეათედი და მეასედი ნაწილები და მიღებული ჯამი გაადიდეს 0,70081-ით. რა რიცხვი მიიღეს?
6. კოშკის ზედა სართულის აიენიდან გადმოგდებულმა კენჭმა 4 წამის შემდეგ მიაღწია დედამიწის ზედაპირს. ცნობილია, რომ ეარდნილმა სხეულმა პირველ წამში გაიარა 4,9 მ; ხოლო თითოეულ შემდეგ წამში 9,8 მ-ით მეტი, ვიდრე წინაში. ვიპოვოთ კოშკის სიმაღლე, თუ მისი წვერო 4,5 მ-ით მაღალია აიენზე.
7. რა მოუვა სხვაობას, თუ ა) საკლებს 0,6-ით შევამცირებთ, ხოლო მაკლებს კი 0,06-ით? ბ) საკლებს 18,7-ს მივუმატებთ, ხოლო მაკლებს 12,9-ს გამოვაკლებთ? გ) საკლებს 9,5-ს გამოვაკლებთ, ხოლო მაკლებს 7,3-ს მივუმატებთ? დ) საკლებსაც და მაკლებსაც 2,45-ს მივუმატებთ? ე) საკლებსაც და მაკლებსაც 0,125-ს გამოვაკლებთ? ვ) საკლებს 0,2-ს მივუმატებთ, ხოლო მაკლებს 0,2-ს გამოვაკლებთ? ზ) საკლებს 0,2-ს გამოვაკლებთ, ხოლო მაკლებს 0,2-ს მივუმატებთ?
8. გამოთვალეთ:
 ა) $276,01 - 69,89435$; ბ) $(1 - 0,8526) + (1 - 0,3797)$; გ) $8 - (9 - 7,97125)$;
 დ) $((5,000005 - 0,003729) - 2,728395) - 0,795899$;
 ე) $16 - (7,8004 - (1,2005 - (0,906 - 5,5307)))$;
 ვ) $(6,523 - 0,78) - (8,8 - 3,057)$; ზ) $(3,5 - 0,789) - (5,709 - 3,998)$.
9. სამმა მუშამ ერთად 4649 ლარი მიიღო. პირველმა მათგანმა 17 ლე იმუშავა, მეორემ - 24 ლე, მესამემ - 32 ლე. პირველი ორი მუშა დღეში ტოლი ოდენობის თანხას იღებდა, ხოლო მესამე მათზე 3

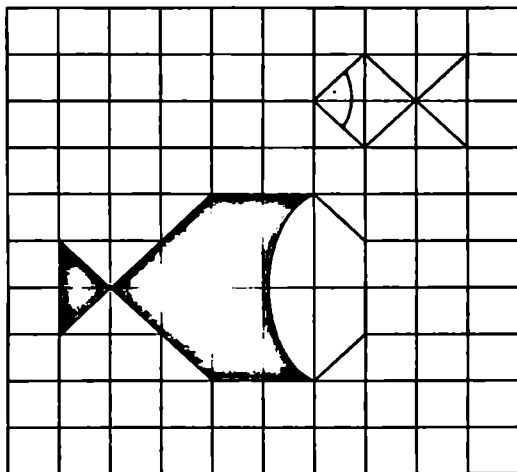
ლარით ნაკლებს. რა თანხა მიიღო თითოეულმა მუშამ?

10. წყალი გაყინვისას თავისი მოცულობის 0,09-ით ფართოვდება. რას უდრის წყლის მოცულობა, თუ მისგან მიღებული ყინულის ნატრის მოცულობა 545 დმ³ შეადგენს?
11. მზიდან დედამიწამდე საშუალო მანძილი 149,45 მლნ კმ-ია. რა მანძილზეა მზიდან პლანეტა მერკური, ვენერა და მარსი, თუ მათი მანძილები შესაბამისად უდრის მზიდან დედამიწამდე მანძილის 0,387; 0,723 და 1,524-ს?
12. მთვარეზე სხეულის წონა უდრის დედამიწაზე ამავე სხეულის წონის 0,16-ს; მარსზე სხეულის წონა 0,38-ის ტოლია, ხოლო იუპიტერზე - 2,64-ჯერ მეტია, ვიდრე დედამიწაზე. რას უდრის იმ ადამიანის წონა მთვარეზე, მარსზე და იუპიტერზე, რომელიც დედამიწაზე 72 კგ-ს იწონის?
13. ტურისტმა მთელი გზის 0,3 ნაწილი გაიარა, ამის შემდეგ მას გასასვლელი დარჩა 21,63 კმ. სულ რამდენ კილომეტრს შეადგენს მთელი გზა?
14. ერთ მუშას შეუძლია სამუშაო შეასრულოს 5 დღეში, თუ ყოველდღიურად 6,25 საათს იმუშავეს; ხოლო მეორეს 7,5 საათში შეუძლია შეასრულოს ამ სამუშაოს 0,06 ნაწილი. რა დროში დაამთავრებს ამ სამუშაოს ორივე მუშა, თუ მას ერთდროულად დაიწყებენ და დღეში 6,25 საათს იმუშავენ?
15. მზესუმზირა თავისი წონის 0,7 მარცვალს იძლევა, მარცვალი კი - თავისი წონის 0,3 ზეთს. რა წონის მზესუმზირა უნდა ავიღოთ, რომ 0,84 ც ზეთი მივიღოთ?
16. პირველი ხარისხის კვერცხად ითვლება ისეთი, რომლის 120 ცალი 7,782 კგ-ს იწონის; მეორე ხარისხის კვერცხად - ისეთი, რომლის 120 ცალი 6,936 კგ-ს იწონის. განსაზღვრეთ თითოეული ხარისხის ცალი კვერცხის საშუალო წონა გრამებით.
17. მუშების ერთი ნაწილი 5 კაციტ მეტი იყო, ვიდრე მეორე და 8 კაციტ მეტი, ვიდრე მესამე. პირველ ნაწილში თითოეული მუშა დღეში 45,5 ლარს იღებდა, მეორე ნაწილში - 65,5 ლარს, ხოლო მესამე ნაწილში - 85,5 ლარს. საერთო დღიური ხელფასი 2918,5 ლარს შეადგენს. რამდენი მუშაა თითოეულ ნაწილში?
18. სამ ბელელში ერთად 7,6 ც ფქვილია, მეორეში 1,2-ჯერ მეტია, ვიდრე პირველში; ხოლო მესამეში 1,5-ჯერ მეტია, ვიდრე მეორეში.

რამდენი ცენტნერი ფქვილია პირველ ბეღელში?

19. სამმა ღურგალმა რაღაც სამუშაო შეასრულა; პირველმა მთელი სამუშაოს 0,3 ნაწილი შეასრულა, მეორემ - მთელი სამუშაოს 0,2 ნაწილით მეტი, ვიდრე პირველმა, მესამემ - დანარჩენი ნაწილი. რამდენი ლარი მიიღო სამუშაოში პირველმა ღურგალმა, თუ მესამემ 364,5 ლარით ნაკლები მიიღო, ვიდრე მეორემ?
20. ორმა გამყიდველმა ერთად 79,85 კგ ვაშლი იყიდა. მეორე მათგანმა თავის წილ ვაშლებში 189,28 ლარი გადაიხადა. რამდენი ლარი გადაიხადა პირველმა გამყიდველმა თავის წილ ვაშლებში, თუ მან მეორეზე 38,45 კგ-ით ნაკლები ვაშლი აიღო?
21. ქეთიმ, თიკომ და მარიმ მამის ნაჩუქარი 100,8 ლარიდან მესამედით დეიდას და მამიდას საჩუქრები უყიდეს, დანარჩენი თანხა კი თანაბრად გაინაწილეს. რამდენი ლარი ერგო თითოეულს?
22. უცხოეთიდან შემოზიდული საქონელი სავაჭრო ფირმამ საქართველოში 3-ჯერ ძვირად გაყიდა. რა თანხად შეიძინა მან 3074,4 ლარად გაყიდული საქონელი?
23. სამშენებლო სამუშაოს დასრულების შემდეგ 18-კაციან ბრიგადას 5501,8 ლარი გადაუხადეს. ბრიგადის მენეჯერის (ისიც ბრიგადის წევრია) ანაზღაურება 650 ლარი იყო. დანარჩენ წევრებს თანხა თანაბრად გაუნაწილდა. რამდენი ლარი მიიღო თითოეულმა?

24.



უჯრედებიან ნახაზზე გამოსახულია ორი თეეზი. დიდი თეეზის ფართობის რა ნაწილს შეადგენს პატარა თეეზის ფართობი? შეეკრიბოთ ამ თეეზების ფიგურების ფართობები და შევადაროთ მთლიან ფართობს.

25. რა მოუვა ნამრავლს თუ ერთ თანამამრავლს 3,5-ჯერ გავადიდებთ, ხოლო მეორეს 0,2-ზე გავეყოფთ?
26. რა მოუვა სამი რიცხვის ნამრავლს, თუ პირველ თანამამრავლს 4,8-ჯერ გავადიდებთ, მეორეს 2,4-ჯერ შევამცირებთ, ხოლო მესამეს 2,5-ჯერ გავადიდებთ?
27. გასაყოფი 5,2-ჯერ გაადიდეს, რა მოუვიდა გამყოფს, თუ განაყოფი 10,4-ჯერ გადიდდა?
28. ორი რიცხვის ნამრავლია 108; თუ ერთ თანამამრავლს 1,5-ს მიეუმატებთ, მაშინ ნამრავლი იქნება 180. იპოვეთ ეს თანამამრავლები.
29. ერთი რიცხვი 2,25-ჯერ მეტია მეორეზე. ამ რიცხვების ჯამის განაყოფი მათ სხვაობაზე (სხვაობა მიიღება დიდი რიცხვისათვის მცირე რიცხვის გამოკლებით) გაამრავლეს 30-ის ყველა მარტივი გამყოფის ჯამზე. რა რიცხვი მიიღეს?
30. გამოთვალეთ:
 - ა) $(232,078 \cdot 2,74 - 452,25 \cdot 0,04) \cdot 4 + 628,125 \cdot 33,5 + 83,5525$;
 - ბ) $(73,264 : 12,05 + 35,5 \cdot 0,28) \cdot 8 - (1,4473 : 7,06 + 1,2125)$;
 - გ) $507,6 : (0,86 \cdot 0,172 - 10,8 \cdot 36) - 385 \cdot (2,16 : 27 - 3,5 \cdot 0,02)$;
 - დ) $128,52 : (136,474 : 15,08 + 44,4 : 12) + 75 \cdot (334,8862 : 37,004 - 4 \cdot 0,05)$.

6.1.1. ტესტი №5

1. მართკუთხედის ფორმის 12 დმ სიგრძისა და 8 დმ სიგანის თუნუქის ფურცელი დაჭრეს 4 დმ სიგრძისა და 3 დმ სიგანის მართკუთხა ნაჭრებად. ასეთი ნაჭრების რაოდენობა არ შეიძლება იყოს მეტი.
 - ა) 3-ზე; ბ) 4-ზე; გ) 8-ზე; დ) 6-ზე.
2. მამამ შეიღს დააველა ამოეხსნა 34 ამოცანა, მასთან ასეთი პირობით: სწორად ამოხსნილ ამოცანაში მამა შეიღს 0,3 ლარს აძლედა, ხოლო არასწორად ამოხსნილი ამოცანის შემთხვევაში კი შეიღს უნდა დაებრუნებინა 0,4 ლარი. შეიღმა რომ ამოცანების

- ამოხსნა დაამთავრა მას მხოლოდ 0,4 ლარი დარჩა. რამდენი ამოცანა ამოხსნა სწორად შეილმა?
- ა) 20; ბ) 18; გ) 22; დ) 21.
3. ორი რიცხვის ჯამია 26,48; თუ ერთ მათგანს 1,6-ზე გაეყოფოთ, ხოლო მეორედან 0,43-ს გამოვაკლებთ და განაყოფს ამ სხვაობას მიუვმატებთ 18,37-ს მივიღებთ. იპოვეთ ეს რიცხვები.
- ა) 16 და 10,48; ბ) 10,48 და 6; გ) 16,16 და 10,32; დ) 26 და 0,48.
4. ქათმის კვერცხი შეიცავს 0,55 წილ ცილას და 0,4 წილ გულს, დანარჩენი ნატუჭია. რამდენ გრამს იწონის ნატუჭი, თუ კვერცხის წონა 56 გრამია?
- ა) 5 გრამს; ბ) 6 გრამს; გ) 2,8 გრამს; დ) 0,95 გრამს.
5. უცნობი რიცხვის 0,3 ნაწილი 7,2-ის ტოლია. იპოვეთ უცნობი რიცხვის 0,75 ნაწილი.
- ა) 24; ბ) 20; გ) 20,16; დ) 18.
6. რკინიგზის ლიანდაგი უნდა შეცვალონ 4,265 კმ მანძილზე. ამისათვის 52203,6 ლარის რეგლსები შეიძინეს და ერთ ტონაში 204 ლარი გადაიხედეს. რამდენ კილოგრამს იწონის თითოეული სიგრძივი მეტრი რელსი?
- ა) 50 კგ-ს; ბ) 55 კგ-ს; გ) 60 კგ-ს; დ) 65 კგ-ს.
7. რამდენი წუთი დატვირდება ოთახში ჰაერის გაწმენდას, თუ ოთახის სიგრძე 8,5 მეტრია; სიგანე 6 მეტრი; ხოლო სიმაღლე 3,5 მეტრი; კონდენციონერი კი წამში 0,07 მ³ ჰაერს წმენდს?
- ა) 25,5 წთ; ბ) 42,5 წთ; გ) 45 წთ; დ) 37,5 წთ.
8. რამდენ ტონა ჭარხალს აიღებენ 0,25 კმ სიგრძისა და 0,12 კმ სიგანის მიწის ნაკვეთზე, თუ 1 ჰექტარზე 550 ცენტნერს იღებენ?
- ა) 165 ტ; ბ) 160 ტ; გ) 150 ტ; დ) 155 ტ.
9. ოთახის სიგრძე 8 მ-ია, სიგანე სიგრძის 0,75-ს შეადგენს; ხოლო სიმაღლე სიგანის 0,5 ნაწილის ტოლია. იპოვეთ ოთახის მოცულობა:
- ა) 140 მ³; ბ) 150 მ³; გ) 144 მ³; დ) 120 მ³.
10. რიცხვს რომ 5,35 მიუვმატოთ მივიღებთ ისეთ რიცხვს, რომელიც 30-ჯერ მეტია 10,3-ის 0,028 ნაწილზე. იპოვეთ თავდაპირველი რიცხვი:
- ა) 15,678; ბ) 8,652; გ) 14,002; დ) 3,302.

§7. პროცენტი, პრომილე; პირითადი ამოცანები პროცენტებზე

პროცენტის ცნება ხშირად გამოიყენება სამეურნეო და სტატისტიკურ გამოთვლებში, ასევე სხვადასხვა მეცნიერების მრავალ დარგში. სიდიდეთა ნაწილებს გამოსახავენ პროცენტებში.

პროცენტი არის ერთეულად მიღებული მთელის მეასედი ნაწილი და აღინიშნება % ნიშნით. სიდიდეთა გამოსახვა ერთნაირ ნაწილებში აადვილებს სიდიდეთა ნაწილების შედარებას მთელ სიდიდესთან და ურთიერთშორის, აგრეთვე აიოლებს მათ გამოანგარიშებასაც. საზომ ნაწილად მეასედი ნაწილის შერჩევა მოხერხებულია რიცხვის შედგენილობის ათობით სისტემასთან დაკავშირებითაც. მეასედის ნაცვლად მეათედი ნაწილის შერჩევა ვერ უზრუნველყოფდა გაზომვათა საკმარის სიზუსტეს.

ვთქვათ, მოსაძებნია a რიცხვის P პროცენტი. a რიცხვის 1% , ანუ $\frac{1}{100}$ ნაწილი იქნება $\frac{a}{100}$, ხოლო P პროცენტი P -ჯერ მეტი, ე.ი. $\frac{aP}{100}$. ამრიგად, მოცემული რიცხვის რაიმე პროცენტი რომ ვიპოვოთ, საჭიროა ეს რიცხვი გავყოთ ასზე (ამით მოიძებნება მოცემული რიცხვის 1%) და გავამრავლოთ პროცენტების მაჩვენებელ რიცხვზე. მაგალითად, თუ რაიმე a სიდიდის თანხა ერთი წლის განმავლობაში (ან დროის რაიმე შუალედში) იზრდება $P\%$ -ით, მაშინ n წლის შემდეგ იგი გახდება $x = a\left(1 + \frac{Pn}{100}\right)$; ეს არის მარტივი ფორმულა. აქ იგულისხმება, რომ ყოველი წლის ბოლოს ამ წლის შემოსავალი ამოიღება, ასე რომ ახალი წლიდან შემოსავალი აითვლება პირველსაწყისი სიდიდიდან (სწორედ, ამიტომ უწოდებენ მას მარტივ პროცენტს).

თუ შემოსავალს დაუშვამტებთ პირველსაწყისი სიდიდეს და მასთან ახალი წლიდან შემოსავალს გამოვითვლით გაზრდილი თანხიდან, მაშინ ამბობენ, რომ გვაქვს რთული პროცენტი და ამ შემთხვევაში საწყისი a სიდიდე n წლის შემდეგ გახდება $x = a\left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$; ეს

არის რთული პროცენტის გამოსათვლელი ფორმულა.

პროცენტები ცნობილი იყო ინდოეთში ჯერ კიდევ V საუკუნეში.

ეს ერთგვარად კანონზომიერიცაა, რადგან ინდოეთში უძველესი დროიდან იყენებდნენ თვლის ათობით სისტემას. ევროპაში ათწილადების გამოყენება დაახლოებით ათასი წლით გვიან დაიწყო. ბელგიელმა მეცნიერმა ს.სტევენმა 1584 წელს პირველად გამოაქვეყნა პროცენტების ცხრილი.

სიტყვა *procentum* – „ასიდან“, „ასზე“, „მეასელი“ ლათინური წარმოშობისაა; ამ ტერმინის გამოყენება მათემატიკაში შემოვიდა სავაჭრო და ფინანსური ურთიერთობებიდან. პროცენტის აღნიშვნა % სიმბოლოთი გამოჩნდა XIX საუკუნიდან, არსებობს ვერსია იმის თაობაზე, რომ %-ით აღნიშვნა მიღებულია სიტყვა *cento*-ს შემოკლებული *ცე* ჩანაწერის დამახინჯებით; კერძოდ, 1685 წელს გამოცემულ „კომერციულ არითმეტიკაში“ ასოთამწყობმა ჩანაწერი *ცე* მიიღო წილადად და დაბეჭდა $\frac{0}{0}$ სახით, ამის შედეგად შემოიღეს % ნიშანი პროცენტის აღსანიშნავად და XIX საუკუნიდან საერთო აღიარებაც მიიღო.

რიცხვი რომ ვიპოვოთ მისი მოცემული პროცენტის მიხედვით, საჭიროა მოცემული პროცენტის შესაბამისი რიცხვი გავეყოთ პროცენტის მაჩვენებელ რიცხვზე და მიღებული შედეგი გავამრავლოთ 100-ზე. მაგალითად: მეურნემ მოხსნა 85,44 ჰა ფართობი, რაც მთელი ფართობის 48%-ია. რამდენ ჰექტარს შეადგენს მთელი ფართობი? ამოხსნა. ცხადია, $x = (85,44 : 48) \cdot 100$ და გვაქვს: $x = 178$ ჰა-ს.

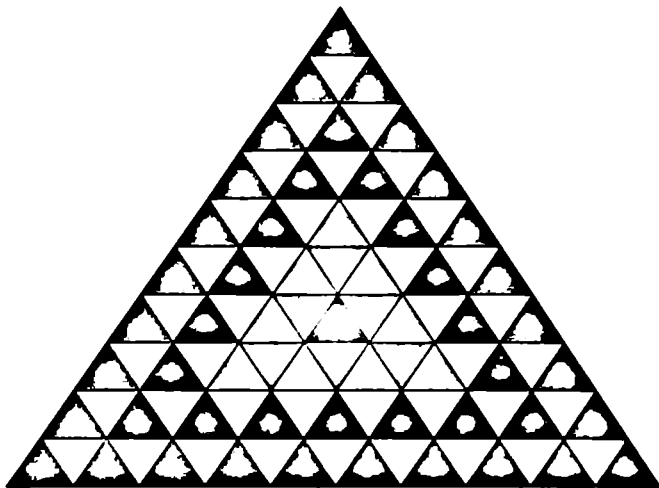
რიცხვების პროცენტული შეფარდება რომ ვიპოვოთ, საჭიროა თითოეული რიცხვი შევაფარდოთ მათ ჯამთან და მიღებული შედეგები 100-ზე გავამრავლოთ. მაგალითად, როგორ პროცენტულ თანაფარდობაში არიან რიცხვები 24, 90 და 136? ამოხსნა. $\frac{24}{250} \cdot 100 = 9,6$;

$\frac{90}{250} \cdot 100 = 36$; $\frac{136}{250} \cdot 100 = 54,4$; ამრიგად, გვაქვს 9,6%; 36% და 54,4%.

თუ გვინდა ვიპოვოთ ერთი რიცხვის პროცენტული გამოსახვა მეორის მიხედვით, მაშინ პირველი რიცხვი უნდა გავეყოთ მეორეზე და მიღებული შედეგი გავამრავლოთ 100-ზე. მაგალითად, 8 ვაშლიდან 3 წითელი ფერისაა, რამდენი პროცენტია წითელი ვაშლი? ამოხსნა. $(3:8) \cdot 100 = 37,5$; ამრიგად, წითელი ფერის ვაშლები 37,5 %-ია.

განხილული ამოცანები ძირითადი სახის ამოცანებია; განვიხილოთ კიდევ ზოგიერთი ამოცანა პროცენტულ გამოანგარიშებაზე:

1. ნახაზზე მოცემული ტოლგვერდა სამკუთხედი დაყოფილია 100 ტოლ ნაწილად და შრეებში მიღებული ტოლი სამკუთხედები გაფერადებულია (წითელი, მწვანე, ლურჯი, ყვითელი, ვარდისფერი, ნარინჯისფერი და ყავისფერი ფერებით). ეიპოვოთ თითოეული ერთნაირი ფერის სამკუთხედების პროცენტული წილი. ეს წილები შეეკრიბოთ და დაეალაგოთ შრეების მიხედვით ზრდადობით.



ამოხსნა. წითელი ფერის სამკუთხედების პროცენტული წილი ტოლია 27%-ის, მწვანესი – 24%-ის, ლურჯის – 18%-ის, ყვითელის – 15%-ის, ვარდისფერის 9%-ის, ნარინჯისფერის 6%-ის, ხოლო ყავისფერის – 1%-ის. პირველ შრედ შეიძლება ჩავთვალოთ ყავისფერი სამკუთხედი, რომელსაც შეიძლება ეუწოდოთ „ბირთვი“, იგი 1%-ის ტოლია; მეორე შრედ შეიძლება მივიღოთ ვარდისფერი და ნარინჯისფერი სამკუთხედების ერთობლიობა – $6\%+9\%=15\%$; მესამე შრეს წარმოადგენს ლურჯი და ყვითელი სამკუთხედების ერთობლივი წილი – $18\%+15\%=33\%$; ხოლო მეოთხე შრედ მივიჩნიოთ წითელი და მწვანე სამკუთხედების ერთობლივი წილი – $27\%+24\%=51\%$. მივიღეთ რიცხვები: 1, 15, 33, 51. მათი ჯამია $1+15+33+51=100$. ეს რიცხვები შეიძლება უსასრულოდ გავაგრძელოთ; მათ პირობითად „მოზაი-

კური რიცხვები“ ეუწოდეთ 1, 15, 33, 51, 69, 87, 105, 143, ... ზოგადად ამ მწკრივისათვის გვექნება: $K_n = 3(6n-1)$, სადაც $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 1$; მწკრივის წევრების მიღება დაიწყება 15-დან).

2. მოსწავლემ წიგნი 25%-ით ნაკლებ ფასში იყიდა და გადაიხადა 12 ლარი. ვიპოოთ წიგნის ფასი გაიაფებამდე.

ამოხსნა. წიგნის ფასი გაიაფებამდე აღენიშნოთ x ლარით. გაიაფების შემდეგ წიგნის ღირებულება იქნება $100\% - 25\% = 75\%$, ანუ x -ის 75% ტოლია 12 ლარის და გვაქვს:

$$\frac{x}{100} \cdot 75 = 12, \text{ აქედან } x = 16 \text{ ლარს.}$$

1. პურის ფქვილი გამოცხოვის შემდეგ 35% ნამატს იძლევა. გამოსაცხოვია 108 კგ პური; რამდენი კილოგრამი ფქვილია ამისათვის საჭირო?

ამოხსნა. 135 %-ს შეესაბამება 108 კგ, ამიტომ რომ გავიგოთ 100%-ის შესაბამისი წონა გვექნება: $(108:135) \cdot 100 = 80$, ე.ი. საჭიროა 80 კგ პურის ფქვილი.

2. რამდენი პროცენტით გაიაფდა საქონელი, თუ ეხლა 5 ერთეული იგივე ფასი ღირს, რამდენიც მანამდე 4 ერთეული ღირდა?

ამოხსნა. 4 ერთეულის ღირებულება აღენიშნოთ x ლარით, მაშინ ერთი ერთეულის ღირებულება იქნება $x:4 = \frac{x}{4}$ ლარი, გაიაფების შემდეგ გვაქვს $x:5 = \frac{x}{5}$ ლარი. ე.ი. ერთი ერთეულის ფასი შემცირდა

$\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = \frac{x}{20}$ ლარით. გავიგოთ, თუ $\frac{x}{20}$ რამდენი პროცენტია $\frac{x}{4}$ -ის, გვაქვს $\left(\frac{x}{20} : \frac{x}{4}\right) \cdot 100 = 20$; ე.ი. საქონელი გაიაფდა 20%-ით.

3. რამდენი კგ შაქრის ყიდვა შეიძლება იმ თანხით, რომლითაც საახალწლო გაიაფებამდე ეყიდულობდით 36 კგ-ს; თუ საახალწლო ფასდაკლება 28%-ს შეადგენს?

ამოხსნა. ეთქვათ, 36 კგ შაქარი გაიაფებამდე ღირდა x ლარი; 28%-იანი გაიაფების შემდეგ იგი ღირს $x - \frac{x}{100} \cdot 28 = 0,72x$ ლარი; ე.ი. 1 კგ ღირს $0,72x : 36 = 0,02x$ ლარი და გვაქვს $x : 0,02x = \frac{x}{0,02x} = 50$; ამრიგად, შეიძლება იგივე თანხით 50 კგ შაქრის ყიდვა.

4. სამუშაოსათვის გამოყოფილი იყო 5 დღე, მაგრამ ფორსმაჟორული მდგომარეობის გამო მუშამ იგი შეასრულა $3\frac{1}{3}$ დღეში. რამდენი პროცენტით გადააჭარბა მან რეალურად $3\frac{1}{3}$ დღეში შესასრულებელ სამუშაოს?

ამოხსნა. $x = \frac{(5 - 3\frac{1}{3})}{3\frac{1}{3}} \cdot 100\% = 50\%$. ე.ი. მუშამ რეალურად შესასრუ-

ლებელ სამუშაოს გადააჭარბა 50%-ით.

7. გაშრობამდე ხორბლის სინოტივე 23%-ის ტოლი იყო, ხოლო გაშრობის შემდეგ იგი 12%-ის ტოლი აღმოჩნდა. რამდენი პროცენტით დაიკლო ხორბლის წონაშ გაშრობის შემდეგ?

ამოხსნა. გაშრობამდე ხორბალი შეადგენდა (სინოტივის გარეშე) მთელი წონის $100\% - 23\% = 77\%$ -ს, ხოლო გაშრობის შემდეგ იგივე რაოდენობის ხორბალი დარჩენილი წონის $(100\% - 12\%)$ 88%-ია. ე.ი. გვექნება:

$$x = \frac{88 - 77}{88} \cdot 100\% = 12.5\%.$$

ამრიგად, ხორბალმა წონაში დაიკლო 12,5%-ით.

8. რამდენი ლიტრი წყალი უნდა დაემატოს 20 ლ 80%-იან გოგირდმჟეას, რომ მისმა სიმაგრემ 16%-ით დაიწიოს?

ამოხსნა. 20 ლიტრი 80%-იანი გოგირდმჟეა შეიცავს $\frac{20 \cdot 80}{100} = 16$ ლ სუფთა გოგირდს, ამოცანის პირობით მოითხოვება, რომ ეს 16 ლიტრი იყოს $80\% - 16\% = 64\%$ -ის. მაშასადამე, მიღებული ხსნარი უნდა იყოს $\frac{16 \cdot 100}{64} = 25$ ლიტრი; ე.ი. 20 ლიტრს უნდა დაემატოს 5 ლიტრი წყალი.

9. რამდენი 73%-იანი გოგირდმჟეა უნდა დაემატოს 12 ლიტრ 40%-იან გოგირდმჟეას, რომ მისმა სიმაგრემ 15%-ით აიწიოს?

ამოხსნა. 12 ლიტრს უნდა დაემატოს $\frac{12 \cdot 15}{100} = 1.8$ ლიტრი გოგირდი.

აშკარაა გოგირდმჟეას ეს ნამატი იქნება შერეული 73%-იანი გოგირდმჟეას ხარჯზე. ნარევის სიმაგრე ხდება $40\% + 15\% = 55\%$; მაშასადამე 73%-იანი მჟეას სიმაგრე დაიწევს $73\% - 55\% = 18\%$ -ით. 73%-იანი გოგირდმჟეას ის რაოდენობა, რომელიც უნდა დაემატოს 12

ლიტრ 40%-იან გოგირდმჟეავას ტოლი იქნება $\frac{1.8 \cdot 100}{18} = 10$ ლიტრის.

ამრიგად, 10 ლიტრი 73%-იანი გოგირდმჟეავას დამატება იძლევა სასურველ შედეგს.

პროცენტის მეთედს პრომილეს უწოდებენ და % სიმბოლოთი აღნიშნავენ. პრომილე არის ერთეულის მეათასედი ნაწილი. მაგალითად. წინადადება - „წყლის მარილიანობა 11 %-ს შეადგენს“ იგივეა, რაც - „წყლის მარილიანობა 1.1%-ია“. პრომილეებში აღირიცხება რკინიგზისა და მეტროს ღიანდაგების დახრილობა; ადამიანის სისხლში ალკოჰოლის შემცველობის დონეც ხშირად პრომილეებში გაზომისა ხება.

7.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. საათი 200 ლარი ღირს, სამაჯურის ფასი კი საათის ღირებულების 12%-ს შეადგენს. რა ღირს სამაჯური და საათი ერთად?
2. კარაქად გადაამუშავეს 7,8 ტ რძე. რამდენი კარაქი მიიღეს, თუ მისი წონა რძის წონის 2,5%-ს შეადგენს?
3. 10,5 კგ წონის ჭალი გაკეთებულია სპილენძის, თუთიისა და კალის შენადნობისაგან. თუთიის რაოდენობა შენადნობის წონის 15%-ს შეადგენს, კალის რაოდენობა კი – თუთიის რაოდენობის $16\frac{2}{3}\%$ -ია. რამდენი კგ სპილენძია დახარჯული ამ ჭალზე?
4. რამდენ შერიას აიღებენ 25 მ სიგანისა და 60 მ სიგრძის მიწის ნაკვეთიდან, თუ 1 ჰა 80 ცენტნერ მოსავალს იძლევა (ნამჯას და მარცვალს ერთად), ხოლო მოსავლის სუფთა წონა მთელი წონის 43%-ს შეადგენს?
5. სტუდენტმა გადაწყვიტა ორი წიგნის ყიდვა, მაგრამ ერთი წიგნის ღირებულება მისი თანხის 65%-ს შეადგენს, ხოლო მეორე - 57,5%-ს. ამიტომ მას წიგნების საყიდლად 4,5 ლარი აკლდება, რა ღირს ორივე წიგნი ერთად?
6. გაყიდეს კარტოფილის მთელი რაოდენობის 33%. გასაყიდი დარჩა იმაზე 25,5 ტონით მეტი კარტოფილი რაც გაყიდეს. რამდენი ტონა

კარტოფილლი იყო გამოტანილი გასაყიდად?

7. სადაზღვევო კომპანიაში 4158 ქალი და მამაკაცი მუშაობს; ქალების რიცხვი მამაკაცთა რიცხვის 65%-ს შეადგენს. რამდენი ქალი და რამდენი მამაკაცი მუშაობს კომპანიაში?
8. რომელი საათია ახლა, თუ დღე-ღამის გასული დრო დარჩენილის $63\frac{7}{11}\%$ - ის ტოლია?
9. ახალი სოკო 90% წყალს შეიცავს, გამხმარი კი - 12%-ს. რამდენი კილოგრამი ახალი სოკო უნდა ავიღოთ, რომ 11 კილოგრამი გამხმარი სოკო მივიღოთ?
10. საესე ავზიდან მთელი წყლის 60% გადმოღვარეს; შემდეგ დარჩენილის 25% გადმოღვარეს. წყლის რამდენი პროცენტი დარჩა ავზში?
11. ორ ძმას თანაბარი თანხა ჰქონდა. უფროსმა ძმამ თავისი წილი თანხა შეიტანა ბანკში, რომელიც წლიურ 3%-ს იძლეოდა; უმცროსმა კი ბანკში, რომელიც 4% შემოსავალს იძლეოდა წელიწადში. ერთი წლის შემდეგ მათ ერთად 350 ლარი სარგებელი მიიღეს. რამდენი ლარი ჰქონდა თითოეულ ძმას?
12. ვაჟის ხელფასი 600 ლარია, რაც დედის ხელფასის 120%-ია, ხოლო მამის ხელფასის 75%. ოჯახის საერთო შემოსავლის რამდენი პროცენტია ვაჟის ხელფასი და რამდენ ლარს იღებს დედა და მამა ცალ-ცალკე?
13. დეტალის დამზადება 3 ლარი ჯდება. დაზგის რემონტის შემდეგ მისი ღირებულება 40%-ით შემცირდა, ხოლო ახალი დაზგების მიღების შემდეგ მისი ღირებულება კიდევ 40%-ით შემცირდა. რა ღირს ეხლა დეტალის დამზადება?
14. კომპანიამ აქციები 100 ლარად იყიდა და 101,2 ლარად გაყიდა. რამდენი პროცენტი მოიგო ამ ოპერაციით კომპანიამ?
15. სამ ძმას არათანაბარი თანხა ჰქონდა. თუ თითოეული მათგანი, უფროსით დაწყებული, რიგრიგობით თანაბრად მისცემს დანარჩენებს იმ თანხის 25%-ს, რაც მას იმ მომენტში აქვს, მაშინ თითოეულ ძმას საბოლოოდ 270 ლარი აღმოაჩნდება. რა თანხა ჰქონდა თითოეულ ძმას თავდაპირველად?
16. 200 კგ საქონლის საყიდლად გაცემულია რაღაც თანხა. ყიდვი-

სას აღმოჩნდა, რომ საქონლის ფასმა 50%-ით აიწია. საქონლის რა რაოდენობის ყიდვა შეიძლება იმავე თანხით?

17. ყავა მოხალვისას 12.5%-ს ჰკარგავს წონაში. ა) რამდენი კილოგრამი ყავა უნდა ავიღოთ, რომ 28 კგ მოხალული ყავა მივიღოთ? ბ) რა ელირება 1 კგ მოხალული ყავა, თუ 1 კგ ნედლი ყავა 56 ლარი ღირს?
18. საახალწლოდ კაკაო $14\frac{1}{6}$ %-ით გაიაფდა. რამდენი კილოგრამი შეგვიძლია ახლა ვიყიდოთ იმავე ფულით, რომლითაც გაიაფებამდე 10,3 კგ-ის ყიდვა შეგვეძლო?
19. აეზიდან ჯერ მთელი წყლის 25% გადაასხეს, შემდეგ - დანარჩენის 60%. ამის შემდეგ აეზში 900 დკლ წყალი დარჩა. იპოვეთ აუზის ტევადობა.
20. მიწის ნაკვეთს მართკუთხედის ფორმა აქვს. მისი სიგრძე და სიგანე 20%-ით გაადიდეს. რამდენი პროცენტით გადიდდა მისი ფართობი?
21. აეზში გაყვანილი მილის დანაგვიანების გამო წყლის დინება 60%-ით შემცირდა. რამდენი პროცენტით გადიდდება აეზის გასაღებად საჭირო დრო ამის შემდეგ?
22. ორი რიცხვის ჯამი 2490-ის ტოლია. იპოვეთ ეს რიცხვები, თუ ერთის 6,5% მეორის 8,5%-ის ტოლია.
23. ტრაქტორმა პირველ დღეს მოხნა მინდერის ნახევარი და კიდევ 2 ჰექტარი, მეორე დღეს კი მინდერის დარჩენილი ნაწილის 25% და უკანასკნელი 6 ჰექტარი. იპოვეთ მინდერის ფართობი.
24. მათემატიკის გამოცდაზე 15%-მა კერ ამოხსნა ვერცერთი ამოცანა. 144-მა ამოცანების ნაწილი ამოხსნა. ყველა ამოცანის სწორად ამომხსნელთა რაოდენობის შეფარდება ვერცერთი ამოცანების ამომხსნელთა რაოდენობასთან ტოლია 5:3. ვიპოვოთ გამოცდაზე გასულთა რაოდენობა.
25. ორ ბიდონში ერთად 70 ლიტრი რძეა, თუ პირველი ბიდონიდან მეორეში გადავასხამთ იმ რძის 12,5 %-ს, რომელიც პირველ ბიდონშია, მაშინ ორივე ბიდონში აღმოჩნდება რძის ერთი და იგივე რაოდენობა. რამდენი ლიტრი რძე იყო პირველ ბიდონში გადასხმამდე?

26. ქალაქის მოსახლეობა წლის ბოლოს უდრიდა 78000 კაცს. ვიპოვოთ ქალაქის მოსახლეობა წლის დასაწყისისათვის, თუ მოსახლეობის კლება ამ დროის განმავლობაში შეადგენდა 4%-ს.
27. ვაშლი გაშრობისას კარგავს თავისი წონის 84%-ს. რამდენი ვაშლი უნდა ავიღოთ, რომ მივიღოთ 16 კგ ჩირი?
28. რიცხვებისათვის 1, 2, 3 და 4 ვიპოვოთ პროცენტული თანაფარდობა.
29. რიცხვებისათვის $4\frac{1}{3}$, $8\frac{2}{3}$ და 7 ვიპოვოთ პროცენტული თანაფარდობა.
30. რამდენი პრომილეა 0,37%.

7.1.1. ტესტი №6

1. a სიდიდის თანხა წლიური P მარტივი პროცენტით n წლის შემდეგ გახდება:

$$ა) \frac{aP}{n} \cdot 100; \quad ბ) a \left(1 + \frac{P}{100} \right)^n; \quad გ) \frac{an}{P} \cdot 100; \quad დ) a \left(1 + \frac{Pn}{100} \right).$$

2. a სიდიდის თანხა წლიური P რთული პროცენტით n წლის შემდეგ გახდება:

$$ა) \frac{aP}{n} \cdot 100; \quad ბ) a \left(1 + \frac{P}{100} \right)^n; \quad გ) \frac{an}{P} \cdot 100; \quad დ) a \left(1 + \frac{Pn}{100} \right).$$

3. 1 პრომილე (1‰) 1%-ის

- ა) მეათედი ნაწილია – 1‰=0,1%;
- ბ) მეასედი ნაწილია – 1‰=0,01%;
- გ) მეათასედი ნაწილია – 1‰=0,001%;
- დ) მეათიათასედი ნაწილია – 1‰=0,0001%;

4. 1 პრომილე მთელის

- ა) მეათედი ნაწილია; ბ) მეასედი ნაწილია;
- გ) მეათასედი ნაწილია; დ) მეათიათასედი ნაწილია.

5. მაღაზიამ ნივთი 150 ლარად გაყიდა და ამის შედეგად 25% მოგება ნახა. რამდენი ლარი მოგება მიიღო მაღაზიამ?

- ა) 37,5 ლარი; ბ) 25 ლარი; გ) 30 ლარი; დ) 35 ლარი.
6. ხორბლის ფქვილი გამოცხობისას 35% ნამატს იძლევა. რამდენი კილოგრამი ფქვილი უნდა ავიღოთ, რომ 27 ცალი 1,5 კგ-იანი პური მივიღოთ?
- ა) 27 კგ; ბ) 30 კგ; გ) 40,5 კგ; დ) 53 კგ.
7. მოიმარაგეს 40 დღის სამყოფი სურსათი, რამდენი პროცენტით უნდა შემცირდეს სურსათის ყოველდღიური ხარჯვა, რომ ეს სურსათი 50 დღე ეყოთ?
- ა) 20%-ით; ბ) 25%-ით; გ) 15%-ით; დ) 10%-ით.
8. მოგება საქონლის გასაყიდი ღირებულების $11\frac{1}{4}\%$ -ს შეადგენს. თვითღირებულების რამდენ პროცენტს შეადგენს ეს?
- ა) $11\frac{1}{4}\%$; ბ) 12%; გ) $12\frac{48}{71}\%$; დ) $12\frac{11}{12}\%$.
9. წიგნის მაღაზიამ 2203,2 ლარად გაყიდა 144 სახელმძღვანელო წიგნი და 12,5% მოგება ნახა იმის მიუხედავად, რომ წიგნს გარეკანზე აღნიშნული ფასის 15%-ის დაკლებით ყიდდა. რა ფასად ყიდულობდა მაღაზია თითოეულ სახელმძღვანელოს და რა ფასს აწერდა გარეკანზე?
- ა) 13,6 ლარი; 18 ლარი; ბ) 12,5 ლარი; 15,3 ლარი;
გ) 15,3 ლარი; 18 ლარი; დ) 13,6 ლარი; 15,3 ლარი.
10. წიგნის მაღაზია წიგნებს ყიდულობს გარეკანზე აღნიშნული ფასის $33\frac{1}{3}\%$ -ის დაკლებით, ხოლო ყიდის იმავე ფასის 15%-ის დაკლებით. რამდენ პროცენტს იგებს მაღაზია?
- ა) 27,5%; ბ) $18\frac{1}{3}\%$; გ) 20%; დ) 15,5%.

**§8. პროპორცია, პროპორციის ძირითადი თვისება.
ამოცანები პროპორციულ დამოკიდებულებაზე**

ერთი რიცხვის განაყოფს მეორეზე ამ რიცხვების შეფარდება ეწოდება: $a:b=K$, ან $\frac{a}{b}=K$; სადაც $b \neq 0$.

K არის a და b რიცხვების შეფარდება. შეფარდებას ახასიათებს იგივე თვისებები, რაც გაყოფას.

განყენებული რიცხვების შეფარდებასთან ერთად განიხილავენ სახელდებული რიცხვების, ანუ სიდიდეების შეფარდებასაც. (შეფარდებას ზოგჯერ ფარდობასაც უწოდებენ).

თუ A და B თანაზომადი სიდიდეებია, მაშინ A -ს შეფარდება B -სთან არსებობს და იგი ნატურალურ ან წილად რიცხვს წარმოადგენს.

უთანაზომო სიდიდეთა შეფარდება ირაციონალური რიცხვით გამოისახება და მას შემდგომში განვიხილავთ.

ერთგვაროვან სიდიდეთა შეფარდება შეიძლება შეიცვალოს მათი მნიშვნელობების შეფარდებით. მაგალითად, რამდენჯერ მეტია 20 სანტიმეტრი 5 სანტიმეტრზე? $20\text{სმ}:5\text{სმ}=20:5=4$.

ოთხი სიდიდის ორი ფარდობის ტოლობას $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ პროპორცია ეწოდება; იგი შეიძლება ასეც ჩაიწეროს $a:b=c:d$. a, b, c, d სიდიდეები პროპორციის წევრებია. პროპორციის შემადგენელი არც ერთი წევრი არ არის ნულის ტოლი. a -სა და d -ს ეწოდებათ კიდურა წევრები, b -სა და c -ს – შუა წევრები.

პროპორციის ძირითადი თვისებაა: კიდურა წევრების ნამრავლი ტოლია შუა წევრების ნამრავლისა $ad=bc$.

არითმეტიკული პროპორცია ეწოდება ორი სხვაობის ტოლობას: $a-b=c-d$; ამ შემთხვევაშიც a -სა და d -ს კიდურა წევრები ეწოდებათ. ხოლო b -სა და c -ს შუა წევრები. არითმეტიკული პროპორციის ძირითადი თვისებაა: კიდურა წევრების ჯამი შუა წევრების ჯამის ტოლია: $a+d=b+c$.

პროპორციის თეორია განავითარეს ძველი საბერძნეთის მეცნიერებმა, რასაც სტიმული მისცა მათემატიკური სიმკაცრის მოთხოვნა.

ნამ – შეესწავლათ მხოლოდ მთელი რიცხვების შეფარდება, მთელ რიცხვებს შორის დამოკიდებულება. ამის შედეგად ჩე.წ.ალ-მდე IV საუკუნეში ევდოქსმა დაასრულა პროპორციის ზოგადი თეორიის აგება. შეფარდებისა და პროპორციის აღმნიშვნელი ბერძნული ტერმინების ლათინურ ენაზე გადათარგმნის შემდეგ მივიღეთ დღევანდელი ტერმინები: $\lambda o y o s$ ითარგმნება სიტყვით $ratio$ – „შეფარდება“, ხოლო ბერძნული $avaloyia$ ციცერონმა თარგმნა იშვიათი ლათინური სიტყვით $proportio$ – „თანაზომადი“, „თანაზომიერი“, „თანაბარი“.

პროპორცია აშკამინდელი მნიშვნელობით პირველად განსაზღვრა რომის საინჟინრო სკოლის წარმომადგენელმა ცამბერტიმ (XV საუკუნე). თანამედროვე ჩაწერა – $a:b=c:d$ შემოიღო ლაიბნიცმა (1708).

რაიმე რიცხვი (მონაკვეთის სიგრძე) რომ გავყოთ მოცემული რიცხვების პირდაპირპროპორციულ ნაწილებად (მონაკვეთების სიგრძეებად), საჭიროა ეს რიცხვი გავყოთ მოცემული რიცხვების ჯამზე და მიღებული განაყოფი თანმიმდევრობით გავამრავლოთ თითოეულ მოცემულ რიცხვზე. მაგალითად: 66 გავყოთ 2, 4 და 6 რიცხვების პროპორციულად. საჭიროა შესრულდეს მოქმედება: $66:(2+4+6)=5,5$; შემდეგ $2 \cdot 5,5=11$; $4 \cdot 5,5=22$; $6 \cdot 5,5=33$; მივიღებთ: 2:4:6 ფარდობას შეესაბამება ფარდობა 11:22:33, სადაც $11+22+33=66$.

რაიმე რიცხვი (მონაკვეთის სიგრძე) რომ გავყოთ მოცემული რიცხვების უკუპროპორციულ ნაწილებად (მონაკვეთების სიგრძეებად), საჭიროა ეს რიცხვი გავყოთ მოცემული რიცხვების შებრუნებულების პირდაპირპროპორციულ ნაწილებად. მაგალითად: 66 გავყოთ 2, 4 და 6 რიცხვების უკუპროპორციულად. საჭიროა შესრულდეს მოქმედება: $66:\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)=72$; შემდეგ $\frac{1}{2} \cdot 72=36$; $\frac{1}{4} \cdot 72=18$; $\frac{1}{6} \cdot 72=12$; მივიღებთ: $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{6}$ ფარდობას შეესაბამება ფარდობა 36:18:12, სადაც $36+18+12=66$.

ვთქვათ, მოცემულია პროპორცია – $a:b=c:d$. ამ პროპორციისაგან შეგვიძლია მივიღოთ 7 პროპორცია, პროპორციის ძირითადი თვისებების გამოყენებით; კერძოდ; $ad=bc$. ჩამოვწეროთ ეს პროპორციები:

1. $a:c=b:d$; 2. $d:b=c:a$; 3. $d:c=b:a$; 4. $c:d=a:b$; 5. $b:d=a:c$;

6. $c:a=d:b$; 7. $b:a=d:c$.

ოთხ რიცხვს – a, b, c და d -ს, რომელთაგან შეიძლება პროპორციის შედგენა, პროპორციული რიცხვები ეწოდებათ; თითოეულ მათგანს კი – დანარჩენების მიმართ მეოთხე პროპორციული. პროპორციის კიდურა (შუა) წევრი რომ ვიპოვოთ, ამისათვის საჭიროა შუა (კიდურა) წევრების ნამრავლი გაეყოთ ცნობილ კიდურა (შუა) წევრზე.

პროპორციას, რომელსაც ტოლი აქვს კიდურა, ან შუა წევრები უწყვეტი პროპორცია ეწოდება. მაგალითად: $a:x=x:b$ უწყვეტ პროპორციაში გამეორებულ წევრს დანარჩენი წევრების საშუალო გეომეტრიული, ან საშუალო პროპორციული ეწოდება და ამ შემთხვევაში გვაქვს: $x = \sqrt{ab}$.

არითმეტიკული პროპორციის შემთხვევაში, თუ მისი შუა წევრები, ან კიდურა წევრები ერთმანეთის ტოლია: ე.ი. $a-x=x-b$, ან $x-a=b-x$; გვაქვს რომ გამეორებული წევრი დანარჩენი წევრების საშუალო არითმეტიკულის ტოლია და ამ შემთხვევაში – $x = \frac{a+b}{2}$.

წარმოებული პროპორცია ეწოდება მოცემული პროპორციიდან ორივე მხარის იგივეური მოქმედებებით მიღებულ ახალ პროპორციებს. მაგალითად, პროპორციიდან $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ანუ $a:b=c:d$, ვიღებთ: $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$; $\frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{c \pm d}$; $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ და ა.შ. ზოგადად: $\frac{ma+nb}{pa+qb} = \frac{mc+nd}{pc+qd}$; სადაც m, n, p, q ნებისმიერი რიცხვებია (მასთან p, q და q ერთდროულად არ უდრის ნულს).

ტოლ შეფარდებათა მწკრივს $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ ახასიათებს შემდეგი თვისება: წინა წევრების ჯამი ისე შეეფარდება მომდევნო წევრების ჯამს, როგორც ერთ-ერთი წინა წევრი თავის მომდევნოს.

მართლაც, მოცემულ ტოლ შეფარდებათაგან თითოეულის მნიშვნელობა აღენიშნოთ K -თი, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = K$; აქედან $a_1 = K \cdot b_1$, $a_2 = K \cdot b_2, \dots, a_n = K \cdot b_n$. ამ ტოლობათა შეკრებით მივიღებთ:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = K(b_1 + b_2 + \dots + b_n); \quad \text{მაშასადამე,}$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = K = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}, \quad \text{რაც ამტკიცებს მოცემულ თვისებას.}$$

განვიხილოთ ზოგიერთი ამოცანა პროპორციულ დამოკიდებულებებზე:

1. 3 ცალი პური 2,4 ლარი ღირს. რა ეღირება 5 ცალი პური?

ამოხსნა. მოცემულია ორი პროპორციული სიდიდის შესაბამისი მნიშვნელობანი $a=3$; $b=2,4$; აგრეთვე მეორე ფარდობის ერთ-ერთი მნიშვნელობა $a_1=5$; მოსაძებნია მეორე ფარდობის შესაბამისი მნიშვნელობა $b_1=?$ ასეთი სახის ამოცანებში მოცემულია სამი რიცხვი და მათი პროპორციულობის გამო უნდა ვიპოვოთ მეოთხე პროპორციული. ასეთ ამოცანებს პირობითად უწოდებენ ამოცანებს სამთა წესზე. ამოცანა შეიძლება ასე ჩავეწეროთ:

3 ცალი პური — 2,4 ლარი

5 ცალი პური — x ლარი

შეიძლება დაეწეროთ პროპორცია: $\frac{3}{5} = \frac{2,4}{x}$; აქედან კი გვაქვს:

$$x = \frac{2,4 \cdot 5}{3} \quad \text{და მივიღებთ, რომ } x=4 \text{ ლარს.}$$

2. 12 კგ ჭარხალისაგან მიიღება 1 კგ 600 გ შაქარი. რამდენი შაქარი მიიღება 30 კგ ჭარხალისაგან?

ამოხსნა. ეს ამოცანაც, წინა ამოცანის მსგავსად, შეიძლება ამოხსნილ იქნას პროპორციის შედგენით, ასევე იგი შეიძლება ამოხსნათ ერთეულზე დაყვანის წესით; გარდა ამისა, მის ამოსახსნელად შეიძლება გამოვიყენოთ უდიდეს საერთო გამყოფზე დაყვანის ხერხი, რაც ერთეულზე დაყვანის ხერხის განზოგადებას წარმოადგენს.

$$a) \text{ ამოხსნა ერთეულზე დაყვანის ხერხით: } 1,6 : 12 = \frac{2}{15} \text{ და } \frac{2}{15} \cdot 30 = 4.$$

$$b) \text{ ამოხსნა პროპორციის შედგენით: } \frac{12}{1,6} = \frac{30}{x} \text{ და } x=4.$$

გ) ამოხსნა საერთო გამყოფზე დაყვანის ხერხით: 12-სა და 30-ის უდიდესი საერთო გამყოფია 6; თუ 12 კგ ჭარხალი გვაძლევს 1,6 კგ

შაქარს, მაშინ 6 კგ მოგეცემს 800 გ შაქარს, ხოლო 30 კგ შეიცავს 5-ჯერ 6 კგ-ს, ამიტომ 30 კგ შაქარი მოგეცემს $800 \cdot 5 = 4000$; 4000 გრამი კი იგივე 4 კილოგრამია.

3. გარკვეულ მანძილზე საბურავი, რომლის წრეწირის სიგრძეა 1მ 65სმ, აკეთებს 20 ბრუნს. რა სიგრძის უნდა იყოს იმ საბურავის წრეწირის სიგრძე, რომელიც იმავე მანძილზე 15 ბრუნს აკეთებს?

ამოხსნა. გვაქვს, $1,65 \cdot 20 = x \cdot 15$; აქედან კი $x = \frac{1,65 \cdot 20}{15}$ და $x = 2,2$ ე.ი. სა-

ბურავის საძიებელი წრეწირის სიგრძე 2 მეტრის და 20 სანტიმეტრის ტოლია.

ჩვენ განვიხილეთ ამოცანები, ამ ამოცანებში შედიოდა ორ-ორი პროპორციული სიდიდე. ახლა განვიხილოთ ისეთი ამოცანები, სადაც წყვილ-წყვილად პროპორციულ სიდიდეთა რიცხვი ორზე მეტია. ასეთ ამოცანებს უწოდებენ ამოცანებს რთულ სამთა წესზე. ეს ამოცანები წინა ამოცანების განვითარებაა, როდესაც სამი მოცემული რიცხვის მიხედვით ვეძებდით მეოთხე რიცხვს.

4. ქსოვილის ნაჭერი, რომლის სიგრძეა 65 მ და სიგანე 1,25 მ ღირს 3750 ლარი. რა ეღირება 91 მ სიგრძისა და 1,45 მ სიგანის ისეთივე ხარისხის, იმავე სახის ქსოვილის ნაჭერი?

ამოხსნა. ამოვხსნათ ამოცანა პროპორციების გამოყენებით. პირველი პროპორცია შევადგინოთ შემდეგი მსჯელობით: ვთქვათ, გვაქვს ნაჭერი, რომლის სიგრძე ისეთივეა, როგორც პირველი ნაჭრის, ხოლო სიგანე მეორე ნაჭრის სიგანისაა. საძიებელია ამ ნაჭრის ღირებულება. ეს პირობა სქემატურად ასე ჩავწეროთ:

65 მ _ 1,25მ _____ 3750 ლარი;

65 მ _____ 1,45მ _____ y ლარი.

ამ შემთხვევისათვის შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი პროპორცია:

$$y:3750=1,45:1,25; \text{ ე.ი. } y=\frac{1,45 \cdot 3750}{1,25}.$$

ამის შემდეგ გადავიდეთ ამოცანაში დასმული კითხვის, ანუ მეორე ნაჭრის ღირებულების პოვნაზე:

65 მ _____ 1,45მ _____ y ლარი;

91 მ _____ 1,45მ _____ x ლარი.

ვადგენთ მეორე პროპორციას:

$$x:y=91:65;$$

თუ გავითვალისწინებთ Y-ის მნიშვნელობას, პირველი პროპორციიდან, გვექნება:

$$x = \frac{1,45 \cdot 3750 \cdot 91}{1,25 \cdot 65} \text{ და გვაქვს } x=6090 \text{ ე.ი.}$$

91 მ სიგრძისა და 1,45 მ სიგანის ნაჭერი ეღირება 6090 ლარი.

5. 8 ცხენის გამოსაკებად 30 დღის განმავლობაში საჭიროა 5760 კგ თივა. რამდენი დღის განმავლობაში ეყოფა 10 ცხენს 4800 კგ თივა?

ამოხსნა. ჯერ გავიგოთ თუ რამდენი დღის განმავლობაში ეყოფა 8 ცხენს 4800 კგ თივა, გვაქვს:

$$8 \text{ ცხ. } \underline{\hspace{2cm}} 5760 \text{ კგ } \underline{\hspace{2cm}} 30 \text{ დღე;}$$

$$8 \text{ ცხ. } \underline{\hspace{2cm}} 4800 \text{ კგ } \underline{\hspace{2cm}} y \text{ დღე.}$$

შეგიძლია დაეწეროთ პროპორცია:

$$\frac{y}{30} = \frac{4800}{5760}, \text{ აქედან } y=25.$$

ახლა შეგიძლია ეუპასუხოთ ამოცანის კითხვას და გავარკვიოთ თუ რამდენი დღის განმავლობაში ეყოფა 10 ცხენს 4800 კგ თივა, გვაქვს:

$$8 \text{ ცხ. } \underline{\hspace{2cm}} 4800 \text{ კგ } \underline{\hspace{2cm}} y \text{ დღე;}$$

$$10 \text{ ცხ. } \underline{\hspace{2cm}} 4800 \text{ კგ } \underline{\hspace{2cm}} x \text{ დღე.}$$

შეგიძლია დაეწეროთ მეორე პროპორცია: $\frac{x}{y} = \frac{8}{10}$ (რადგან ცხენების

რაოდენობა საკვების ყოფნის დღეების უკუპროპორციულია), თუ

გავითვალისწინებთ y-ის მნიშვნელობას გვექნება: $x = \frac{25 \cdot 8}{10} = 20$, ამ-

რიგად 10 ცხენს 4800 კგ თივა ეყოფა 20 დღის განმავლობაში.

6. გარკვეულ სამუშაოზე სამი მუშა ერთნაირი ინტენსივობით მუშაობდა. ერთმა მათგანმა იმუშავა 2 დღე, მეორემ - 3 და მესამემ - 5; მათ სამუშაოს შესრულებისათვის მიიღეს 500 ლარი. როგორ გადანაწილოთ მუშებს შორის ეს თანხა?

ამოხსნა. ეთქვათ, პირველმა მუშამ მიიღო x_1 ლარი, მეორემ - x_2 ლარი, ხოლო მესამემ - x_3 ლარი. ამოცანი პირობა შეიძლება წარ-

მოვადგინოთ ტოლშეფარდებათა მწკრივის სახით: $\frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_3}{5}$,

ტოლშეფარდებათა მწკრივის თვისების თანახმად გვაქვს:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{2 + 3 + 5} = \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_3}{5}, \text{ აქედან კი რაღვან ვიცით, რომ}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 500 \text{ ლარს; გვექნება: } \frac{x_1}{2} = \frac{500}{10} \text{ და } x_1 = 100; \frac{x_2}{3} = \frac{500}{10} \text{ და } x_2 = 150;$$

$$\frac{x_3}{5} = \frac{500}{10} \text{ და } x_3 = 250. \text{ ამრიგად, პირველმა მუშამ უნდა მიიღოს } 100 \text{ ლა-}$$

რი, მეორემ – 150 ლარი, ხოლო მესამემ – 250 ლარი.

1. სამმა საბავშვო ბაღმა მიიღო 358 ცალი საახალწლო საჩუქრების პაკეტი, პირველ და მეორე საბავშვო ბაღში საჩუქრები განაწილდა შეფარდებით 6:11, ხოლო პირველ და მესამე ბაღში შეფარდებით 7:10. რამდენი ცალი საახალწლო საჩუქრის პაკეტი მიიღო თითოეულმა საბავშვო ბაღმა?

ამოხსნა. თითოეული საბავშვო ბაღის მიერ მიღებული საჩუქრების პაკეტების რაოდენობა აღვნიშნოთ: I ბაღისათვის – x_1 -ით, II ბაღისათვის – x_2 -ით, ხოლო III ბაღისათვის – x_3 -ით. გვაქვს: $x_1 + x_2 + x_3 = 358$, მასთან $x_1 : x_2 = 6 : 11$ და $x_1 : x_3 = 7 : 10$. პირველ პროპორციაში x_1 წარმოდგენილია 6 ნაწილისაგან შედგენილად, ხოლო მეორეში 7 ნაწილისაგან (ამით განსხვავდება ეს ამოცანა წინა ამოცანისაგან, პირველ ფარდობაში შემავალი პირველი ბაღის წილი იგივე არ არის რაც მეორე ფარდობაში). გამოვსახოთ ორივე პროპორციაში შემავალი სიდიდეები ერთსა და იმავე ნაწილებში, ამისათვის ვიპოვოთ 6-სა და 7-ის უმცირესი საერთო ჯერადი უ.ს.ჯ. (6,7)=42; გვექნება:

$$x_1 : x_2 = 6 : 11 \parallel 7 \mid x_1 : x_2 = 42 : 77$$

$$x_1 : x_3 = 7 : 10 \parallel 6 \mid x_1 : x_3 = 42 : 60$$

ახლა შეიძლება ორივე პროპორცია გაგაერთიანოთ:

$$x_1 : x_2 : x_3 = 42 : 77 : 60$$

ეს შემთხვევა კი უკვე წინა ამოცანიდანაა ცნობილი და გვექნება:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{42 + 77 + 60} = \frac{358}{42 + 77 + 60} = \frac{x_1}{42} = \frac{x_2}{77} = \frac{x_3}{60};$$

$$\text{აქედან კი } \frac{x_1}{42} = 2 \text{ და } x_1 = 84, \frac{x_2}{77} = 2 \text{ და } x_2 = 154; \frac{x_3}{60} = 2 \text{ და } x_3 = 120. \text{ ამრი-}$$

გად, პირველმა საბავშვო ბაღმა მიიღო 84 ცალი საჩუქრების პაკეტი, მეორემ – 154 ცალი, ხოლო მესამემ – 120 ცალი.

2. ვაშლებით საცხე ყუთი 1,5-ჯერ უფრო მძიმეა ფორთოხლებით საცხე ყუთთან შედარებით. ხილის მაღაზიამ მიიღო 40 ყუთი (ვაშლი და ფორთოხალი ერთად). რამდენი ყუთი ვაშლი და რამდენი ყუთი ფორთოხალი მიიღო მაღაზიამ, თუ ვაშლებისა და ფორთოხლების მთლიანი წონები ერთმანეთის ტოლია?

ამოხსნა. ვაშლებიანი ყუთების რაოდენობა x -ით აღვნიშნოთ, ფორთოხლიანის – y -ით; გვექნება, რომ მათი შეფარდება ყუთების წონათა შებრუნებულ შეფარდებას უდრის; მაშასადამე, $\frac{x}{y} = \frac{1}{1,5}$, ანუ

$\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$. აღებულ ამოცანაში რიცხვი 40 იყოფა 1,5-ისა და 1-ის უკუპროპორციულ ნაწილებად (ფორთოხლიანი ყუთის წონა მივიღოთ ერთეულად – 1-ად); ე.ი. 40 უნდა გავყოთ 1,5-ისა და 1-ის შებრუნებული რიცხვების $\frac{2}{3}$ -ისა და 1-ის პროპორციულ ნაწილებად; გვაქვს:

$40 : \left(\frac{2}{3} + 1\right) = 24$. ამრიგად, ვაშლებიანი ყუთების რაოდენობა

$x = 24 \cdot \frac{2}{3} = 16$ და ფორთოხლიანი ყუთების რაოდენობა $y = 24 \cdot 1 = 24$,

ვაშლებიანი ყუთები 16 ცალია, ხოლო ფორთოხლიანი ყუთები კი – 24 ცალი.

3. 73,5 გავყოთ რიცხვების $\frac{2}{3}$ -ის; 0,75-ის და 0,8-ის უკუპროპორციულ ნაწილებად.

ამოხსნა. ავიღოთ $\frac{2}{3}$ -ის; 0,75-ის და 0,8-ის შებრუნებული რიცხვები $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$ და მოვახდინოთ 73,5-ის მათ პირდაპირპროპორციულ ნაწი-

ლებად დაყოფა; გვაქვს: $\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} = \frac{49}{12}$, მასთან $73,5 : \frac{49}{12} = 18$; ამიტომ

$\frac{3}{2} \cdot 18 = 27$; $\frac{4}{3} \cdot 18 = 24$ და $\frac{5}{4} \cdot 18 = 22,5$.

73,5-ის რიცხვების $\frac{2}{3}$ -ის; 0,75-ის და 0,8-ის უკუპროპორციულ ნაწილებად წარმოდგენა: 27:24:22,5.

8.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. სამმა მეგობარმა 10800 დოლარი გადაიხადეს ერთად და იყიდეს აგარაკი. ორი წლის შემდეგ მათ აგარაკი 12000 დოლარად გაყიდეს. როგორ გაინაწილებენ ისინი მოგებას, თუ ყიდვის დროს მათ მიერ გადახდილი თანხების პროპორცია იყო 5:8:11-ზე?
2. ქათმის კვერცხში ნატუტის, გულისა და ცილის წონათა შორის საშუალო შეფარდება 1:3:5. განსაზღვრეთ 1000 ცალი კვერცხის ნატუტის წონა, თუ ერთი კვერცხის საშუალო წონაა 58,5 გ.
3. სამი რიცხვი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც ა) 0,2:0,5:0,15. პირველი რიცხვი 42,5-ით მეტია მესამეზე. იპოვეთ ეს რიცხვები. ბ) 0,8: $\frac{2}{3}$:0,05. პირველი რიცხვი 7,5-ით მეტია ორი დანარჩენის ჯამზე. იპოვეთ ეს რიცხვები.
4. ა) 540 გაყავით სამ ნაწილად ისე, რომ პირველი სამჯერ მეტი იყოს მესამეზე, ხოლო მეორე 5-ჯერ მეტი იყოს მესამეზე; ბ) 344 გაყავით ოთხ ნაწილად ისე, რომ პირველი სამჯერ მეტი იყოს მეორეზე, მეორე – ოთხჯერ მეტი მესამეზე, მესამე – ხუთჯერ მეტი მეოთხეზე; გ) 326 გაყავით ოთხ ნაწილად ისე, რომ პირველი იყოს 6-ჯერ მეტი, მეორე – 12-ჯერ მეტი, ხოლო მესამე – 36-ჯერ მეტი გასამკეცებულ მეოთხეზე.
5. ა) ოთხი რიცხვის ჯამია 525. პირველი რიცხვი მეორის 75%-ს შეადგენს, მეორე რიცხვი – მესამის 75%-ს, მესამე რიცხვი – მეოთხის 75%-ს. იპოვეთ ეს რიცხვები; ბ) 750,4 გაყავით სამ ნაწილად ისე, რომ მეორე რიცხვი პირველის 50%-ს შეადგენს, ხოლო მესამე რიცხვი – მეორის 50%-ს; გ) 385 დაშალეთ ოთხ ნაწილად ისე, რომ პირველი ნაწილი მეორის 45%-ს შეადგენდეს, მესამე ნაწილი კი – მეორის 30% და აგრეთვე მეოთხის -30%-ს.
6. სახელოსნომ სამი ნატყერი სპილენძი იყიდა. პირველი ნატყერი იმდენივეს იწონის, რამდენსაც მეორე, ხოლო მესამე ნატყერი სამჯერ

- მეტს იწონის, ვიდრე პირველი და მეორე ერთად. რამდენ კილოგრამს იწონის თითოეული ნაჭერი, თუ პირველი და მესამე ნაჭრის საერთო წონა 14 კილოგრამია?
7. სასტუმროში 200-ით მეტი ინგლისელი ტურისტია, ვიდრე ფრანგი და 400-ით მეტი, ვიდრე გერმანელი. გერმანელთა რიცხვი კი 3-ჯერ ნაკლებია ფრანგთა რაოდენობაზე. სულ რამდენი ინგლისელი, ფრანგი და გერმანელი ტურისტია სასტუმროში?
 8. 21 მ სიგრძის თოკი სამ ნაწილად გაჭრეს ისე, რომ მეორის სიგრძე პირველის სიგრძის 75%-ს შეადგენს, ხოლო მესამის სიგრძე ერთად აღებული პირველი ორი ნაწილის სიგრძის 75%-ს შეადგენს. იპოვეთ თოკის თითოეული ნაწილის სიგრძე.
 9. დაბაში 1970 სახლია. ყოველ 15 აგურის სახლზე 8 ქვიტკირის სახლი მოდის, ხოლო ყოველ 14 ქვიტკირის სახლზე 9 ხის სახლი მოდის, რამდენი სახლია დაბაში აგურის, ქვიტკირის და ხისა?
 10. სამმა ხარატმა 251 დეტალი დაამზადა. რამდენი დეტალი დაამზადა თითოეულმა, თუ პირველი ხარატი $12\frac{1}{12}$ დეტალს ამზადებს იმ დროში, რა დროშიც მეორე ამზადებს $11\frac{2}{3}$ დეტალს; ხოლო მესამე $10\frac{2}{3}$ დეტალს ამზადებს იმ დროში, რა დროშიც $11\frac{1}{5}$ დეტალს ამზადებს მეორე ხარატი?
 11. ერთი ოთახის მოცულობა ისე შეეფარდება მეორისას, როგორც 3:4, მეორე ოთახის მოცულობა ისე შეეფარდება მესამისას, როგორც 7:5; ხოლო მათი საერთო მოცულობა 184 მ³-ია. იპოვეთ თითოეული ოთახის მოცულობა.
 12. ოთხ სოფელში 748 კომლი ცხოვერობს. პირველი სოფლის კომლთა რიცხვის შეფარდება მეორე სოფელში მცხოვრებ კომლთა რიცხვთან ტოლია 5:7, მეორე და მესამე სოფლის კომლთა რიცხვები ისე შეეფარებიან ერთმანეთს, როგორც 4:3, ხოლო მესამისა და მეოთხისა – როგორც 6:7. რამდენი კომლი ცხოვერობს თითოეულ სოფელში?
 13. წრეწირი გაყავით სამ ნაწილად ისე, რომ პირველი ნაწილის სიგრძის შეფარდება მეორე ნაწილის სიგრძესთან ტოლი იყოს 0,625:0,5-ის, ხოლო მეორე ნაწილის სიგრძის შეფარდება მესამე

ნაწილის სიგრძესთან ტოლი იყოს 0,40,6-ის. რამდენ გრადუსს შეიცავს თითოეული რკალი?

14. მონაკვეთი გაყოფილია სამ ნაწილად. პირველის სიგრძე ისე შეფარდება მეორის სიგრძეს, როგორც $3\frac{1}{2}$:4-ს, ხოლო მეორის სიგრძე მესამის სიგრძეს – ისე, როგორც 1:0,5-ს. იპოვეთ მონაკვეთის სიგრძე, თუ პირველი ნაწილი 27 სმ-ით გრძელია მესამეზე.
15. გაუნაწილეთ 4408,6 ლარი ხუთ კაცს ისე, რომ თუ A მიიღებს 4 ლარს, მაშინ B მიიღებს 5 ლარს; თუ B მიიღებს 3 ლარს, მაშინ C-მ უნდა მიიღოს 2 ლარი; თუ C მიიღებს 3 ლარს, მაშინ D მიიღებს 5 ლარს; თუ D მიიღებს 6 ლარს; მაშინ E მიიღებს 7 ლარს. რამდენ ლარს მიიღებს თითოეული?
16. ოთხმა კაცმა ისე გაიყო 2690 ლარი, რომ მეორემ მიიღო პირველზე სამჯერ მეტი და კიდევ 12 ლარი; მესამემ – მეორეზე ორჯერ მეტი და კიდევ 40 ლარი; მეოთხემ იმის 25%, რაც მიიღო დანარჩენმა სამმა ერთად. რამდენი ლარი მიიღო თითოეულმა?
17. იყიდეს ორი ხარისხის 10 კგ ჩაი, ერთი ხარისხის ჩაი კილოგრამი 40 ლარი ღირდა, ხოლო მეორე – 60 ლარი. ორივე ხარისხის ჩაიში ფასი თანაბრად გადაიხადეს. თითოეული ხარისხის რამდენი კილოგრამი ჩაი იყიდეს?
18. ერთნაირმრიცხველიანი ორი წილადის ჯამია $1\frac{1}{20}$; მათი მნიშვნელები ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც 5:4. იპოვეთ ეს წილადები.
19. ერთნაირმრიცხველიანი ორი წილადიდან ერთი $\frac{5}{48}$ -ით მეტია მეორეზე; მათი მნიშვნელები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3:4. იპოვეთ ეს წილადები.
20. მაღაზიაში სამი სხვადასხვა ხარისხის 68 ლიტრი ღვინოა. თითოეული ხარისხის ღვინო თანაბარი თანხისაა. I ხარისხის ღვინო ერთი ლიტრი 12 ლარი ღირს, II ხარისხის – 9 ლარი, ხოლო III ხარისხის – 8 ლარი. რამდენი ლიტრი ღვინოა თითოეული ხარისხისა?
21. ავტოფარეხში სამი სახის სატვირთო ავტომობილები დგას: ერ-

თი ნაწილის ტვირთმზიდობა 1,5 ტონას შეადგენს, მეორისა – 2 ტონას, ხოლო მესამის – 3 ტონას. ტვირთის გადასახიდად სულ გაგზავნეს 81 სატვირთო ავტომობილი; იმ ვარაუდით, რომ ყველა ტონანახევრიანი მზიდობის, ორტონიანი მზიდობის და სამტონიანი მზადობის მანქანას ერთნაირი ოდენობის ტვირთი გადაეზიდათ. თითოეული ტვირთმზიდობის რამდენი მანქამა იყო გაგზავნილი?

22. სამი პუნქტი A, B და C ერთმანეთთან თანაბარი მანძილით არის დაშორებული. ტურისტი A პუნქტიდან B-კენ გაემგზავრა და საათში საშუალოდ 4,5 კმ გაიარა; შემდეგ B-დან C-მდე მგზავრობისას საათში საშუალოდ 4 კმ გაიარა და ბოლოს C-დან A პუნქტში დაბრუნდა და საათში საშუალოდ 3 კმ გაიარა; სულ ამ მოგზაურობას 29 საათი დაჭირდა. რა მანძილია პუნქტებს შორის?
23. ტურისტმა A პუნქტიდან B პუნქტამდე ფეხით იარა და საშუალოდ საათში 3 კილომეტრი გაიარა. უკან იგი ცხენით დაბრუნდა და საშუალოდ საათში 6 კილომეტრი გაიარა. რა მანძილია A-დან B პუნქტამდე, თუ მთლიანად ამ მგზავრობას ტურისტმა 6 საათი მოანდომა?
24. სატვირთო, სამგზავრო და სწრაფი მატარებლების სიჩქარეები ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც 1:1,5:3. სამგზავრო მატარებელი მანძილს ორ სადგურს შორის 1 სთ. 20 წთ-ით ჩქარა გადიოდა, ვიდრე სატვირთო. რამდენ საათში გადიოდა თითოეული მატარებელი ამ მანძილს?
25. მუშების სამმა ბრიგადამ, რომლებიც ერთიმეორის შემდეგ მუშაობდნენ, რაღაც სამუშაო შეასრულა და ანგარიშის გასწორებისას თანაბრად მიიღო თანხა. პირველ ბრიგადაში 48 მუშა იყო, მეორეში – 36, მესამეში – 24. რამდენ დღეს მუშაობდა თითოეული ბრიგადა, თუ პირველმა და მეორე ბრიგადამ ერთად 5 დღით მეტ ხანს იმუშავა, ვიდრე მესამემ?
26. 4500 გაყავით სამ ნაწილად ისე, რომ პირველის 80%, მეორის $53\frac{1}{3}\%$ და მესამის 40% ერთმანეთის ტოლი იყოს.
27. მერია თოვლისაგან წმენდს სამ უბანს სხვადასხვა ქუჩაზე. პირველი ქუჩის სიგრძე სამჯერ მეტია მეორეზე და ორჯერ ნაკლებია

მესამეზე; პირველი ქუჩის უბნის სიგანე ორჯერ ნაკლებია, ვიდრე მეორისა და მესამე ქუჩის უბნის $\frac{3}{4}$ -ს შეადგენს. მთელ ამ სამუშაოში გადახდილია 5200 ლარი. რამდენი ლარი გადაიხდა მერიამ თითოეული უბნის გაწმენდაში?

28. სამმა სოფელმა ერთად 57000 ლარად ღირებული ხიდი ააშენა. პირველი სოფელი 1,5 კმ-ის მანძილზე მდებარეობდა ხიდიდან და 40 კომლისაგან შედგებოდა; მეორე – 3 კმ-ის მანძილზე და 20 კომლისაგან შედგებოდა; მესამე – 1 კმ-ის მანძილზე და 30 კომლისაგან შედგებოდა. რამდენი ლარის გადახდა მოუწევს თითოეულ სოფელს და შესაბამისად სოფელში მცხოვრებ კომლს, თუ გადასახადი თანხა კომლთა რიცხვის პირდაპირპროპორციულია და ხიდამდე მანძილის უკუპროპორციული?
29. სამმა ძმამ 4900 ლარი გაიყო. როცა პირველმა დახარჯა თავისი კაპიტალის $\frac{1}{3}$, მეორემ – $\frac{1}{4}$, ხოლო მესამემ – $\frac{1}{5}$; სამივე ძმას ფული თანაბრად დარჩა. რამდენი ლარი დახარჯა თითოეულმა ძმამ?
30. ა) ოთხი წილადის ჯამი 2-ის ტოლია; მათი მრიცხველები ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც 2:4:8:1, ხოლო მნიშვნელები – ისე, როგორც 1:3:5:15. იპოვეთ ეს წილადები.
 ბ) მატარებელი 2, 3 და 4-ღერძიანი ვაგონებისაგან შედგება; 4-ღერძიანების რიცხვი ისე შეეფარდება 2-ღერძიანების რიცხვს, როგორც 3:1; ვაგონების საერთო რიცხვია 31, ღერძების საერთო რიცხვია 105. რამდენია თითოეული სახის ვაგონი?

8.1.1. ტესტი №7

- მოცემულია პროპორცია $a:b=c:d$, მაშინ პროპორციის ძირითადი თვისება შეიძლება ასე ჩავწეროთ:
 ა) $ab=cd$; ბ) $a+b=c+d$; გ) $ad=bc$; დ) $a+d=b+c$.
- მოცემულია არითმეტიკული პროპორცია $a-x=x-b$, მაშინ

$$\text{ა) } x = \frac{a+b}{2}; \quad \text{ბ) } x = \frac{ab}{2}; \quad \text{გ) } x^2 = ab; \quad \text{დ) } x = \frac{a-b}{2}.$$

3. 50 გაეყოთ 1-ის, 2-ის, 3-ის და 4-ის პირდაპირპროპორციულ ნაწილებად:

$$\text{ა) } 1:2:3:4; \quad \text{ბ) } 8:6:4:2; \quad \text{გ) } 6:12:14:18; \quad \text{დ) } 24:12:8:6; \quad \text{ე) } 5:10:15:20.$$

4. 50 გაეყოთ 1-ის, 2-ის, 3-ისა და 4-ის უკუპროპორციულ ნაწილებად:

$$\text{ა) } 4:3:2:1; \quad \text{ბ) } 8:6:4:2; \quad \text{გ) } 6:12:14:18; \quad \text{დ) } 24:12:8:6; \quad \text{ე) } 5:10:15:20.$$

5. სამი რიცხვის ჯამი 560-ია; თუ პირველს 2-ზე გაეყოფთ, მეორეს – 3-ზე, მესამეს – 4-ზე. მიღებული განაყოფები ისე შეეფარდებათ ერთმანეთს, როგორც 5:6:7. იპოვეთ ეს რიცხვები.

$$\text{ა) } 100, 180, 280; \quad \text{ბ) } 150, 180, 230; \quad \text{გ) } 170, 180, 210; \quad \text{დ) } 120, 144, 296.$$

6. დაწყებითი სკოლის ოთხ კლასში მოსწავლეთა რაოდენობის რიცხვი კლასების რიგის მიხედვით ასეთ შეფარდებაშია:

$$1\frac{3}{4}:1\frac{5}{6}:1\frac{1}{2}:1\frac{1}{4}. \text{ პირველ ორ კლასში 20 მოსწავლით მეტია, ვიდრე } \\ \text{ორ შემდეგში. იპოვეთ მოსწავლეთა საერთო რიცხვი.}$$

$$\text{ა) } 150; \quad \text{ბ) } 162; \quad \text{გ) } 152; \quad \text{დ) } 160.$$

7. სამ მართკუთხედს ერთნაირი ფართობი აქვს. რა დამოკიდებულებაშია მათი სიგრძეების გამომსახველი რიცხვები, თუ პირველი მართკუთხედის სიგანე ისე შეეფარდება მეორისას, როგორც 2:3, ხოლო მესამის სიგანე უდრის პირველი და მეორე მართკუთხედების სიგანეების ჯამს?

$$\text{ა) } 2:3:5; \quad \text{ბ) } 15:10:6; \quad \text{გ) } 5:2:3; \quad \text{დ) } 10:15:26.$$

8. 450 გაეყოთ 7-ისა და 8-ის პროპორციულ ნაწილებად.

$$\text{ა) } 210 \text{ და } 240; \quad \text{ბ) } 200 \text{ და } 250; \quad \text{გ) } 190 \text{ და } 260; \quad \text{დ) } 215 \text{ და } 235.$$

9. 4 ცალი პური 3 ლარი ღირს. რა ეღირება 9 ცალი პური?

$$\text{ა) } 9 \text{ ლარი; } \quad \text{ბ) } 4 \text{ ლარი; } \quad \text{გ) } 6,75 \text{ ლარი; } \quad \text{დ) } 7,25 \text{ ლარი.}$$

10. 4 ცხენს 15 დღის განმავლობაში გამოსაკვებად ჭირდება 2880 კგ თივა. რამდენი დღე ეყოფა 5 ცხენს 2400 კგ თივა?

$$\text{ა) } 10 \text{ დღე; } \quad \text{ბ) } 12 \text{ დღე; } \quad \text{გ) } 11 \text{ დღე; } \quad \text{დ) } 9 \text{ დღე.}$$

§9. პერიოდული ათწილადები. მოკმედეხანი პერიოდულ ათწილადებზე

საზოგადოდ, ჩვეულებრივი წილადი ათწილადად რომ გადავაქციოთ, საჭიროა მრიცხველი გავეყოთ მნიშვნელზე, მაგრამ ეს გაყოფა ყოველთვის არ გვაძლევს სასრულ ათწილადს.

ვთქვათ, a მთელი არაუარყოფითი რიცხვია; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – ათობითი ნიშნებია, ანუ თითოეული მათგანი რაიმე ციფრია 0-დან 9-მდე, მაშინ ჩანაწერი: $a, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ათწილადია (სასრული). ის წარმოადგენს

რიცხვს
$$- a + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{10^n}.$$
 მაგალითად,

$$251,70531 = 251 + \frac{7}{10} + \frac{0}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{1}{100000}.$$

ათწილადის მნიშვნელობა არ შეიცვლება, თუ მას მარჯვნივ ნულებს მიეწეროთ. მაგალითად, $47,35 = 47,350 = 47,3500 = 47,35000$.

მთელი დადებითი რიცხვებიც შეიძლება ჩაეწეროს ათწილადის სახით. მაგალითად, $11 = 11,0 = 11,00 = 11,000$.

ცხადია, $a + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{10^n}$ ჯამით მოიცემა წილადი, რომლის მნიშვნელი 10-ის მთელი არაუარყოფითი ხარისხია. ამრიგად, გვაქვს:

$$a, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = \frac{\text{ნატურალური რიცხვი}}{10^n}.$$

პირიქით, თუ $\frac{p}{q}$ რაიმე წილადია, რომლის მნიშვნელია 10^k , $k \in \mathbb{N}$,

მაშინ ის ჩაიწერება $a, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ სახით; სადაც a მთელი რიცხვია, ხოლო $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – ათობითი ნიშნებია, ანუ ციფრები 0-დან 9-მდე. იმ შემთხვევაშიც, როცა q ორებისა და ხუთების ნამრავლს წარმოადგენს, წილადის ძირითადი თვისების თანახმად, ის შეიძლება ჩაეწეროს 10-ის ხარისხების სახით. მაგალითად:

$$\frac{31}{250} = \frac{31 \cdot 4}{250 \cdot 4} = \frac{124}{1000} = 0,124.$$

განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა წილადის მნიშვნელის მარტივ მამრავლებად დაშლაში რიცხვების 2-სა და 5-ის გარდა, სხვა მარტივი თანამამრავლებიც გვხვდება. ამ შემთხვევაში ჩვენ ამ წილად

რიცხვს ვერ ჩავწერთ სასრული ათწილადის სახით, იგი შეიძლება უსასრულო პერიოდულ ათწილადს დაეუკავშიროთ. მაგალითად, $\frac{2}{3}$ -ს ვერ ჩავწერთ სასრული ათწილადის სახით. წარმოვადგინოთ ეს პროცესი:

ჯერ ვიპოვოთ ორი მთელი რიცხვი, რომელთა შორისაა მოთავსებული $\frac{2}{3}$; გვექნება $-0 < \frac{2}{3} < 1$. შემდეგ $[0; 1]$ შუალედი დავეყოთ 10 ტონაწილად და განვიხილოთ რიცხვები:

$$0, 0 + \frac{1}{10}, 0 + \frac{2}{10}, 0 + \frac{3}{10}, 0 + \frac{4}{10}, 0 + \frac{5}{10}, 0 + \frac{6}{10}, 0 + \frac{7}{10}, 0 + \frac{8}{10}, 0 + \frac{9}{10}, 0 + \frac{10}{10}.$$

ვიპოვოთ მათ შორის ორი რიცხვი, რომელთა შორისაა $\frac{2}{3}$, გვექნება

$$0 + \frac{6}{10} < \frac{2}{3} \leq 0 + \frac{7}{10}, \text{ ანუ } 0,6 < \frac{2}{3} \leq 0,67. \text{ ორმაგი უტოლობების ჩაწერის}$$

პროცესი დაუსრულებლად გაგრძელდება, მოცემულ წილადს კი ასე ჩავწერთ: $\frac{2}{3} = 0,6666\dots$; ე.ი. $\frac{2}{3}$ უსასრულო პერიოდული ათწილადის სა-

ხით ჩაიწერება: $\frac{2}{3} = 0,(6)$. გაცილებით მარტივია იგივე შედეგი გაყოფით მივიღოთ:

$$\begin{array}{r} 2:3=0,666\dots \\ -20 \\ \hline -18 \\ \hline -20 \\ -18 \\ \hline -20 \\ -18 \\ \hline \vdots \end{array}$$

უარყოფითი რაციონალური რიცხვი $-\frac{1}{3}$ კი ასე ჩაიწერება:

$$-\frac{1}{3} = -0,(3).$$

ყოველი დადებითი რაციონალური რიცხვი, რომელიც არ ჩაიწერება სასრული ათწილადის სახით, შეიძლება ჩავწეროთ უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით.

მაგალითად, თუ $\frac{p}{q} (n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N})$ არ ჩაიწერება სასრული ათწილა-

დის სახით, მაშინ p -ს q -ზე გაყოფისას პროცესი უსასრულოდ გაგრძელდება. გაყოფის პროცესში მიღებული ყოველი ნაშთი შეიძლება იყოს ერთ-ერთი რიცხვი, შემდეგი რიცხვებიდან: $1, 2, \dots, q-1$. ამიტომ გარკვეული მომენტიდან დაწყებული ნაშთი გამეორებას დაიწყებს და ათწილადის ჩანაწერშიც ციფრების ჯგუფი (ან ციფრი) გამეორდება, ანუ უსასრულო პერიოდული ათწილადი მიიღება. მაგალითად, $\frac{23}{99} = 0,2323\dots = 0,(23)$; $\frac{203}{165} = 1,2303030\dots = 1,2(30)$.

ყოველი პერიოდული ათწილადი გარკვეული რაციონალური რიცხვის ათობითი ჩანაწერია. მაგალითად, $0,(23) = \frac{23}{99}$;

$$0,1(24) = \frac{124-1}{990}; 0,(5) = \frac{5}{9}.$$

როგორც აღენიშნეთ, იმისათვის, რომ ჩვეულებრივი წილადი გადაექციოთ ათწილადად, საჭიროა მრიცხველი გავეყოთ მნიშვნელზე. ახლა განვიხილოთ შებრუნებული ამოცანა: როგორ გამოვსახოთ უსასრულო პერიოდული ათწილადი ჩვეულებრივი წილადის სახით.

უსასრულო პერიოდული ათწილადი ორი სახისაა – წმინდა და შერეული. წმინდა პერიოდულ ათწილადად გადაიქცევიან წილადები, რომელთა მნიშვნელის მარტივ მამრავლებად დაშლა არც ერთ 2-იანს და არც ერთ 5-იანს არ შეიცავს; მაგალითად, $\frac{1}{7} = 0,(142857)$;

$\frac{1}{21} = 0,(047619)$. წმინდა პერიოდულ ათწილადებში პერიოდი უშუალოდ მძიმის შემდეგ იწყება. შერეული პერიოდულია ისეთი უსასრულო ათწილადი, რომლის ჩანაწერშიც მძიმესა და პერიოდს შორის კიდევ არის ათობითი ნიშნები და შერეულ პერიოდულ ათწილადად გადაიქცევიან ისეთი წილადები, რომელთა მნიშვნელების მარტივ მამრავლებად დაშლა შეიცავს, როგორც 2-ანებს და 5-ანებს, ასევე სხვ მარტივ მამრავლებსაც; მაგალითად: $\frac{1}{6} = 0,1(6)$; $\frac{1}{15} = 0,0(6)$;

$$\frac{1}{30} = 0,0(3); \quad \frac{1}{12} = 0,08(3); \quad \frac{1}{75} = 0,01(3); \quad \frac{1}{600} = 0,001(6).$$

წმინდა უსასრულო პერიოდული ათწილადი ტოლია ისეთი ათწილადის, რომლის მრიცხველთა პერიოდი, ხოლო მნიშვნელი არის რიცხვი, რომლის ჩანაწერი შედგება იმდენი ცხრიანისაგან, რამდენი ციფრიცაა პერიოდში, მაგალითად: $1,(16) = 1\frac{16}{99}$; $0,(27) = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$; $3,(0036) = \frac{36}{9999} = \frac{4}{1111}$.

შერეული უსასრულო პერიოდული ათწილადი ტოლია ისეთი წილადის, რომლის მრიცხველია მეორე პერიოდის დაწყებამდე მდგომ ციფრებით შედგენილი რიცხვისა და პირველი პერიოდის დაწყებამდე მდგომი ციფრებით შედგენილი რიცხვის სხვაობა, ხოლო მნიშვნელია რიცხვი, რომლის ჩანაწერი შედგება იმდენი ცხრიანისაგან, რამდენი ციფრიცაა პერიოდში და მარჯვნივ მიწერილი იმდენი ნულისაგან, რამდენი ციფრიცაა პირველი პერიოდის დაწყებამდე.

მაგალითად:

$$2,01(12) = 2\frac{112-1}{9900} = 2\frac{111}{9900} = 2\frac{37}{3300}; \quad 0,00(12) = \frac{12}{9900} = \frac{1}{825};$$

$$4,10(3) = 4\frac{103-10}{900} = 4\frac{31}{300}.$$

შეიძლება სასრული ათწილადებიც წარმოვადგინოთ უსასრულო პერიოდული ათწილადების სახით. მაგალითად, წარმოვადგინოთ 1,16 უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით, გვაქვს: $1,1599\dots_9 < 1,16 \leq 1,1599\dots_9 + 10^{-n-2}$; $n = 1, 2, \dots$ ორმაგი უტოლობის ეს

სისტემა ნიშნავს, რომ $\frac{29}{25} = 1,15(9)$. 1,15(9) აღმოჩნდა 0,16-ის განსხვავებული ჩანაწერი. ასევე შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ მაგალითად, $7,454 = 7,453(9)$; $8 = 7,9$. სასრული ათწილადი შეიძლება ჩაეწეროს სხვა სახის უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახითაც; მაგალითად, $\frac{29}{25} = 1,16 = 1,16(0)$. აქ პერიოდია 0.

ამრიგად, ყოველი რაციონალური რიცხვი შეიძლება ჩაეწეროს უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით.

მაგალითად, $\frac{1}{6} = 0,166... = 0,1(6); \quad \frac{1}{5} = 0,199... = 0,1(9);$

$-\frac{1}{6} = -0,166... = -0,1(6)$. თუმცა, ყოველი უარყოფითი რიცხვი შეიძლება ჩაეწეროს მისი მთელი და წილადი (დადებითი) ნაწილის სახით. გვაქვს: $-\frac{1}{6} = -1 + \frac{5}{6} = -1 + 0,833...; \text{ ამ რიცხვს ასეც ჩაეწერთ: } -\frac{1}{6} = \bar{1},(83).$

პრაქტიკული გამოყენების დროს რაციონალურ რიცხვს, რომელიც უსასრულო ათწილადითაა გამოსახული მიახლოებით წარმოვადგენთ სასრული ათწილადის სახით. ამასთანავე, ყოველთვის შეგვიძლია იმდენი ათწილადი ნიშანი დავტოვოთ, რომ მიღებული ცდომილება დასაშვები იყოს. ამ საკითხს ჩვენ განვიხილავთ.

მოქმედებანი პერიოდულ ათწილადებზე შეიძლება ვაწარმოოთ შემდეგი სახით – პერიოდული ათწილადები გამოვსახოთ ჩვეულებრივი წილადების სახით და მათზე ვაწარმოოთ მითითებული მოქმედებანი, შემდეგ მიღებული შედეგი თუ საჭიროება მოითხოვს გამოვსახოთ ისევ პერიოდული ათწილადის სახით. მაგალითად:

$$1. \text{ შეკრება: } 8,9(3)+7,(5)=8\frac{93-9}{90}+7\frac{5}{9}=8\frac{14}{15}+7\frac{5}{9}=16\frac{22}{45}=16,4(8).$$

$$2. \text{ გამოკლება: } 8,9(3)-7,(5)=8\frac{93-9}{90}-7\frac{5}{9}=8\frac{14}{15}-7\frac{5}{9}=1\frac{17}{45}=1,3(7).$$

3. გამრავლება:

$$8,9(3) \cdot 7,(5)=8\frac{14}{15} \cdot 7\frac{5}{9}=\frac{134}{15} \cdot \frac{68}{9}=\frac{9112}{135}=67\frac{67}{135}=67,4(962).$$

$$4. \text{ გაყოფა: } 8,9(3):7,(5)=8\frac{14}{15}:7\frac{5}{9}=\frac{134}{15}:\frac{68}{9}=\frac{134}{15} \cdot \frac{9}{68}=\frac{201}{170}=1\frac{31}{170}.$$

9.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. პერიოდული ათწილადი $0,(6)$ შეცვალებს მიახლოებითი მნიშვნელობით $0,66$ -ით. შეაფასეთ ცდომილება – $0,(6)-0,66$.
2. შეასრულეთ მოქმედებანი: $\frac{0,1(6)+0,(3)}{0,(3)+1,1(6)}$.
3. A-ს და B-ს ერთად შეუძლიათ სამუშაო შეასრულონ 12 დღეში; A-

- ს და C-ს – 13,(3) დღეში B-ს და C-ს – $17\frac{1}{7}$ დღეში. რამდენ დღეში დაამთავრებს იმავე სამუშაოს თითოეული ცალ-ცალკე?
4. გადააქციეთ ჩვეულებრივ წილადად შემდეგი პერიოდული ათწილადები:
- ა) 0,(7); ბ) 0,(21); გ) 0,(02); დ) 0,(130); ე) 0,(036); ე) 0,(009);
 ზ) 0,12(3); თ) 0,31(6); ი) 20,1(9); კ) 0,12(9); ლ) 0,04(6); მ) 0,12(8).
5. რომელი წილადის გადაქცევით იქნა მიღებული პერიოდული ათწილადი:
- ა) 1,(1); ბ) 0,(71); გ) 0,(01); დ) 0,(13); ე) 0,0(01); ე) 0,(004); ზ) 0,12(5);
 თ) 0,1(25); ი) 0,01(13); კ) 0,0(113).
6. ორი რიცხვის სხვაობა 1,5-ია, ხოლო მათი განაყოფი 0,8(63)-ის ტოლია. იპოვეთ ეს რიცხვები.
7. ორი რიცხვის ჯამია 4,5; ხოლო სხვაობა – 0,(7). იპოვეთ ეს რიცხვები.
8. რიცხვისა და 0,0(925)-ზე მისი განაყოფის სხვაობა 14,7-ის ტოლია. იპოვეთ ეს რიცხვი.
9. იპოვეთ რიცხვი, რომლის 0,4(6) ნაწილი 360-ის 0,6(4) ნაწილის ტოლია.
10. თუ უცნობ რიცხვს მის 0,(135) ნაწილს გამოვაკლებთ სხვაობა 10-ით ნაკლები იქნება საკლებზე. იპოვეთ უცნობი რიცხვი.
11. შეადარეთ რიცხვები: ა) 1,1(6) და 1,(16); ბ) 1,(16) და 1,1(61);
 გ) 10%-ის შესაბამისი წილადი და 0,(1).
12. თუ უცნობი რიცხვის $\frac{1}{12}$ -ს მის 0,(7)-ს და კიდევ 5-ს მივუმატებთ, იმავე უცნობ რიცხვს მივიღებთ. იპოვეთ ეს რიცხვი.
13. უცნობ რიცხვს 8, 6 და $6\frac{7}{12}$ -ის ჯამი გამოაკლეს და მიიღეს 0,6(8). იპოვეთ უცნობი რიცხვი.
14. თუ უცნობი რიცხვიდან 101,5 და 99,(7)-ის სხვაობას გამოვაკლებთ 0,0(12)-ს მივიღებთ. იპოვეთ უცნობი რიცხვი.
15. თუ გარკვეულ თანხას მის 0,(6) ნაწილს და კიდევ 40 ლარს მივუმატებენ იგი 840 ლარი გახდება. რა თანხა ჰქონდათ თავდაპირველად?

16. თუ უცნობი რიცხვის 0,(5)-ს 5-ს მიუშვამთ და ჯამს 10-ზე გამრავლებთ 300-ს მივიღებთ. იპოვეთ უცნობი რიცხვი.
17. გამყოფი 4,5-ს უდრის; ხოლო გასაყოფისა და განაყოფის ჯამი 27,6(2)-ის ტოლია. იპოვეთ გასაყოფი და განაყოფი.
18. დაალაგეთ ზრდის მიხედვით: 2,1(45); 2,(145); 2,14(5); 2,14(52); 2,1(452); 2,145(2).
19. აღმოაჩინეთ კანონზომიერება და ჩასვით გამოტოვებული რიცხვები:
- ა)

0,(45)	0,(27)	$\frac{8}{11}$
$\frac{12}{7}$	$\frac{9}{7}$	3
$\frac{3}{14}$	?	1

ბ)

2,0(1)	0,9(8)	3
1,(3)	1,(6)	3
2	?	3

20. შეავსეთ ცხრილი:

a	b	$a+b$	$a-b$	$a \cdot b$	$a:b$
0,(6)	0,(3)				
0,2(4)	0,1(2)				
1,(3)	0,1(3)				

21. რამდენი გრადუსის ტოლი იქნება წრეწირის სიგრძის 0,2(4) ნაწილის მქონე რკალი?
22. იპოვეთ კანონზომიერება და ჩასვით გამოტოვებული რიცხვები:

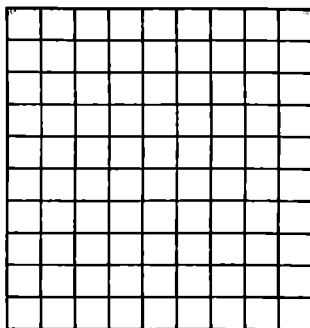
0,(4)	0,(3)	
1	0,(5)	0,(1)

23. იპოვეთ კანონზომიერება და კითხვის ნიშნის ნაცვლად ჩაწერეთ რიცხვი:



24. კვადრატის პერიმეტრი ტოლია 4,(4) სმ-ის. იპოვეთ ამ კვადრატის ფართობი.

25. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები ტოლია 2,0(2) სმ-ის და 3,(03) სმ-ის. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.
26. მართკუთხედი დაყოფილია 90 კეადრატულ ერთეულად. ვარდისფერი ფიგურის ფართობი აღენიშნოთ S_1 -ით, მწვანესი – S_2 -ით, ყვითელის – S_3 -ით, ხოლო ცისფერის – S_4 -ით. თითოეული ფიგურის ფართობი მთელი მართკუთხედის ფართობის რა ნაწილს წარმოადგენს? (შედეგები გამოვსახოთ პერიოდული ათწილადების საშუალებით).
27. 32103 აბიტურიენტიდან 0,(7) ნაწილმა საგამოცდო უცხო ენად ინგლისური აირჩია. რამდენმა აბიტურიენტმა აირჩია ინგლისური ენა?
28. გამოვსახოთ პროცენტით მთელის 0,2(7) ნაწილი.



$$29. \text{ გამოთვალეთ: } \frac{\frac{1,4 \cdot 0,15}{\frac{3}{-} - 0,012 : 0,02} - \left(\left(0,0(6) + \frac{3}{8} + 0,725 \right) : 1,1(6) \right)}{4 \frac{\frac{1}{2} - 3 \frac{4}{7}}{\left(\frac{4}{13} : 0,(714285) \right)}}.$$

30. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

$$\left(\frac{0,216}{0,15} + 0,(6) : 0,2(6) \right) + \left(12,375 - \frac{7,7}{24 \frac{3}{4}} \right) + 0,695 : 1,39 + 0,09.$$

9.1.1. ტესტი №8

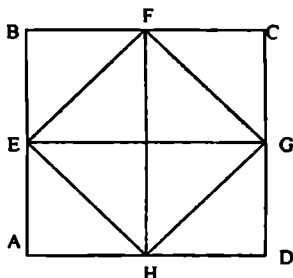
1. ჩავეწერთ $\frac{3}{7}$ პერიოდული ათწილადის სახით:
ა) 0,(7); ბ) 0,(21); გ) 0,(142857); დ) 0,(428571).
2. ჩავეწერთ $\frac{19}{30}$ პერიოდული ათწილადის სახით:
ა) 0,(57); ბ) 0,6(3); გ) 0,(19); დ) 0,6(8).

3. პერიოდული ათწილადი $0,(18)$ წარმოედგინოთ წილადის სახით:
 ა) $\frac{9}{50}$; ბ) $\frac{2}{11}$; გ) $\frac{1}{9}$; დ) $\frac{2}{99}$.
4. პერიოდული ათწილადი $0,0102(32)$ წარმოედგინოთ წილადის სახით:
 ა) $\frac{1013}{99000}$; ბ) $\frac{1013}{990000}$; გ) $\frac{1023}{99000}$; დ) $\frac{1023}{990000}$.
5. $22\frac{5}{11}\%$ წარმოადგინეთ პერიოდული ათწილადის სახით:
 ა) $0,22(23)$; ბ) $0,22(45)$; გ) $0,225(11)$; დ) $0,22(11)$.
6. პერიოდული ათწილადი $0,88(3)$ წარმოედგინოთ პროცენტით:
 ა) $88\frac{1}{3}\%$; ბ) 88% ; გ) $88\frac{2}{3}\%$; დ) 89% .
7. $2,(3)+4,0(31)=$
 ა) $6,0(61)$; ბ) $6,3(64)$; გ) $6,3(31)$; დ) $6,0(64)$.
8. $2,(3)-4,0(31)=$
 ა) $-1,6(97)$; ბ) $-1,0(01)$; გ) $-1,0(61)$; დ) $-1,0(97)$.
9. $2,(3)\cdot 4,0(31)=$
 ა) $9\frac{1207}{2970}$; ბ) $9\frac{17}{41}$; გ) $9\frac{71}{175}$; დ) $9\frac{12}{297}$.
10. $2,(3):4,0(31)=$
 ა) $\frac{231}{391}$; ბ) $\frac{2310}{3991}$; გ) $\frac{11}{19}$; დ) $\frac{10}{17}$.

**§10. არაპერიოდული ათწილადი. ირაციონალური რიცხვი.
დადებითი ნამდვილი რიცხვის ჩაწერა**

საერთო საზომის მქონე სიდიდეებს თანაზომადი სიდიდეები ეწოდება. სიდიდეებს, რომელთაც საერთო საზომი არა აქვთ, უთანაზომო სიდიდეები ეწოდება. მაგალითად, კვადრატის გვერდი და მისი დიაგონალი უთანაზომო მონაკეთებია.

ნახაზზე გამოსახული ABCD კვადრატის გვერდი EFGH კვადრატის დიაგონალის ტოლია, ხოლო ფართობი EFGH ფართობზე ორჯერ მეტია. ვთქვათ, $EF=1$ სმ, მაშინ EFGH კვადრატის ფართობი ტოლია 1 სმ^2 -ის, ხოლო ABCD კვადრატისა – 2 სმ^2 . დაეუშვათ, $AB=a$ სმ, მაშინ გვექნება $a^2=2$.



ვიპოვოთ a რიცხვი, ეს ის რიცხვია, რომელიც ABCD კვადრატის გვერდის სიგრძეს გამოსახავს სანტიმეტრებში. თუ a რიცხვი რაციონალური რიცხვია, მაშინ ის შეიძლება ჩაიწეროს $\frac{m}{n}$ სახით, სადაც $m \in \mathbb{N}$ და $n \in \mathbb{N}$. ვიგულისხმობთ, რომ ამ წი-

ლადში ყველა შესაძლო შეკვეცა უკვე მოხდენილია, ანუ $\frac{m}{n}$ წილადი

უკვეცია; რადგან ჩვენ a აღვნიშნეთ $\frac{m}{n}$ სახით, ამიტომ გვექნება:

$a^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2$ და $m^2 = 2n^2$. ამრიგად, m^2 ლუწია, მაშინ m -იც ლუწია (კენტი რიცხვის კვადრატი ხომ კენტი რიცხვია). ლუწი m რიცხვი შეიძლება ასე ჩაიწეროს: $m=2m_1$; მაშინ $4m_1^2 = 2n^2$, $n^2 = 2m_1^2$. აქედან ვღებულობთ: n^2 ლუწია და ამიტომ n -იც ლუწია. ეს ნიშნავს, რომ $\frac{m}{n}$ წილადი არ არის უკვეცი. რაც ეწინააღმდეგება პირობას.

მაშასადამე, არ არსებობს რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი 2-ის ტოლია (ასეთი რიცხვი არც ნატურალურ და მთელ რიცხვებს შორის იარსებებს, რადგან ისინიც რაციონალური რიცხვებია).

მაშ, რა რიცხვით გამოვსახოთ ABCD კვადრატის გვერდის სიგრძე

და საერთოდ ნებისმიერი მონაკვეთის სიგრძე?

ამ კითხვას პასუხი ახალი რიცხვების საშუალებით გაეცა, როცა მათემატიკაში რაციონალური რიცხვების „დასახმარებლად“ ირაციონალური რიცხვები გამოჩნდა. მაგალითად, არსებობს ორი რიცხვი, რომლის კვადრატი 2-ის ტოლია: $\sqrt{2}$ -ით აღნიშნულია დადებითი ირაციონალური რიცხვი და $-\sqrt{2}$ -ით უარყოფითი ირაციონალური რიცხვი.

ირაციონალური რიცხვების მაგალითებია აგრეთვე ფესვი ყოველი ისეთი დადებითი რიცხვიდან, რომელიც რაიმე რაციონალური რიცხვის კვადრატი არ არის. მაგალითად,

$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[4]{\frac{1}{4}}, \sqrt{8}, -\sqrt{3}, -\sqrt{10}, -\sqrt[3]{\frac{3}{10}}, -\sqrt{21}$ ირაციონალური რიცხვებია.

პირველი ოთხი დადებითი, ხოლო დანარჩენები - უარყოფითი ირაციონალური რიცხვებია.

ირაციონალური რიცხვი არა მარტო კვადრატული ფესვის ამოღების დროს მიიღება. მაგალითად, π რიცხვი, რომელიც ნებისმიერი წრეწირის სიგრძის მის დიამეტრთან შეფარდების ტოლია, ირაციონალური რიცხვია. $\pi \approx 3,141592653589793238\dots$; თუ π რიცხვს მესაყდამდე სიზუსტით წარმოვადგენთ, მაშინ $\pi \approx 3,14$ - რაციონალური რიცხვის ტოლია.

რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვებს ნამდვილი რიცხვები ეწოდებათ.

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს ადგენენ დადებითი და უარყოფითი ნამდვილი რიცხვები და ნული. ყოველი დადებითი ნამდვილი რიცხვი ნულზე მეტია, ყოველი უარყოფითი ნამდვილი რიცხვი ნულზე ნაკლებია. ნამდვილი რიცხვები შეიძლება შევადაროთ ერთმანეთს. ამაში დაგვეხმარება შემდეგი თვისება: თუ a და b დადებითი ნამდვილი რიცხვებია და $a^2 < b^2$, მაშინ $a < b$. ამას მარტივი გეომეტრიული ახსნა მოეძებნება: იმ კვადრატის გვერდია მეტი, რომლის ფართობიც მეტია. მაგალითად: $16 > 10$, ამიტომ $4 > \sqrt{10}$; $5 > 3$, ამიტომ $\sqrt{5} > \sqrt{3}$.

ირაციონალური რიცხვის ჩაწერა სასრული ან უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით შეუძლებელია. ასეთი ათწილადებით მხოლოდ რაციონალური რიცხვები გამოისახება. ყოველი ირაციო-

ნალური რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ უსასრულო არაპერიოდული ათწილადის სახით. ირაციონალური რიცხვი შეიძლება იყოს როგორც ალგებრული, ასევე ტრანსცენდენტური. ალგებრული რიცხვი ეწოდება რიცხვს, რომელიც წარმოადგენს

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ განტოლების ფესვს, სადაც a_0, a_1, a_{n-1}, a_n კოეფიციენტები ჩვეულებრივი მთელი რიცხვებია. მაგალითად, $\sqrt[3]{5}$ – ალგებრული რიცხვია, ვინაიდან ის წარმოადგენს $x^3 - 5 = 0$ განტოლების ფესვს. რიცხვი, რომელიც არ აკმაყოფილებს მთელკოეფიციენტებიან არც ერთ ალგებრულ განტოლებას ტრანსცენდენტური რიცხვია. მაგალითად, π რიცხვი ტრანსცენდენტური რიცხვია. ეილერმა რიცხვები დაყო ალგებრულ და ტრანსცენდენტურ რიცხვებად და ეს სახელწოდებები საყოველთაოდ დაფუძნდა (1748). ყველა ტრანსცენდენტური რიცხვი ირაციონალურია, მაგრამ არა პირიქით.

კელაე დაუგებრუნდეთ $\sqrt{2}$ -ს და გაეცხენოთ კვადრატული ფესვის ამოღების ალგორითმი:

$$\begin{array}{r} \sqrt{2} = 1,41421\dots \\ \begin{array}{r} \underline{1} \\ \times 24 \quad | \quad 100 \\ \quad 4 \quad | \quad -96 \\ \hline \times 281 \quad | \quad 400 \\ \quad 1 \quad | \quad -281 \\ \hline \times 2824 \quad | \quad 11900 \\ \quad 4 \quad | \quad -11296 \\ \hline \times 28282 \quad | \quad 60400 \\ \quad 2 \quad | \quad -56564 \\ \hline \times 282841 \quad | \quad 383600 \\ \quad 1 \quad | \quad -282841 \\ \hline \hline \quad \quad \quad 100756 \end{array} \end{array}$$

საზოგადოდ, a რიცხვიდან კვადრატული ფესვი ეწოდება იმ რიცხვს, რომლის კვადრატი a -ს ტოლია. არაუარყოფითი a რიცხვიდან არითმეტიკული კვადრატული ფესვი ეწოდება არაუარყოფით კვადრატულ ფესვს ამ რიცხვიდან. ეს ფესვი ასე ჩაიწერება: $\sqrt{a}$. $\sqrt{}$ ნიშანს არითმეტიკული კვადრატული ფესვის ნიშანი (რადიკალი) ეწოდება. $\sqrt{a}$ ასე იკითხება: არითმეტიკული კვადრატული ფესვი a -

დან.

ფესვის ამოღების პროცესი მოცემულ შემთხვევაში უსასრულოდ გრძელდება, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში, გვექნებოდა სასრული ათწილადი (ან უსასრულო პერიოდული ათწილადი), რაც რაციონალურ რიცხვს წარმოადგენს.

გვაქვს: $1 < 2 < 4$, ამიტომ $1 < \sqrt{2} < 2$;

$1,4^2 < 2 < 1,5^2$, ამიტომ $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$;

$1,41^2 < 2 < 1,42^2$, ამიტომ $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$

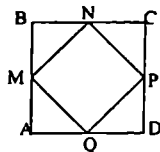
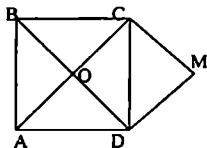
$1,414^2 < 2 < 1,415^2$, ამიტომ $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ და ა.შ.

რაციონალური რიცხვები: 1; 1,4; 1,41 არის $\sqrt{2}$ -ის მიახლოებითი მნიშვნელობები შესაბამისად $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ სიზუსტით (ნაკლებობით). თვით $\sqrt{2}$ კი შეიძლება ასეც ჩაეწერო: $\sqrt{2} = 1,414...$

მათემატიკური ტერმინი ირაციონალური წარმოდგება ლათინური სიტყვისაგან ir – „უარყოფა“ და ratio – „შეფარდება“, „თანაფარდობა“. ეს ტერმინი შემოიღო გერმანელმა მათემატიკოსმა შტიფელმა (მისი „არითმეტიკა“ გამოვიდა 1544 წელს).

10.1. სავარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. ABCD კვადრატის BD დიაგონალზე ააგეს BEFD კვადრატი, რომლის ფართობია 8 სმ². იპოვეთ ABCD კვადრატის გვერდი.
2. AC დიაგონალზე ააგეს AEFC კვადრატი ააგეს, ABCD კვადრატის ფართობია 9 სმ². იპოვეთ AEFC კვადრატის გვერდი.
3. CD გვერდი არის OCMD კვადრატის დიაგონალი. ABCD კვადრატის ფართობი S-ის ტოლია. იპოვეთ OCMD კვადრატის გვერდი.
4. ABCD კვადრატის გვერდების შუაწერტილები თანმიმდევრობით შეაერთეს. მიღებული MNPQ კვადრატის ფართობია S. იპოვეთ ABCD კვადრატის გვერდი.



5. მოცემულია მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტები 1 სმ და 2 სმ-ის ტოლია. ვიპოვოთ ჰიპოტენუზის სიგრძე.

6. მოცემულია A სიმრავლე

$$A = \left\{ 1; 0; -1; \sqrt{3}; -\sqrt{\frac{4}{9}}; -\sqrt{5}; \sqrt{25}; \sqrt{2,56}; \pi; \sqrt{100} \right\}. \text{ მისი ელემენტე-}$$

ბით შეავსეთ ცხრილი:

მთელი რიცხვია

რაციონალური რიცხვია

ირაციონალური რიცხვია

7. დაასახელეთ რიცხვები, რომელთა კვადრატია: ა) 0,16; ბ) 10; გ) 1,5; დ) 0,01.

8. σ -ს რა მნიშვნელობებისათვის გადაიქცევა მოცემული ტოლობები ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობებად:

ა) $\sigma^2=1,44$; ბ) $\sigma^2=7$; გ) $\sigma^2=0,9$; დ) $\sigma^2=0,09$.

9. იპოვეთ რაიმე ორი ირაციონალური რიცხვი:

ა) 5-ზე მეტი და 6-ზე ნაკლები; ბ) 6-ზე მეტი და 7-ზე ნაკლები;

გ) -2-ზე მეტი და -1-ზე ნაკლები.

10. დაწერეთ რაიმე ორი რიცხვი:

ა) 1,83-სა და 1,84-ს შორის; ბ) 3,013-სა და 3,014-ს შორის;

გ) $\sqrt{2}$ -სა და $\sqrt{3}$ -ს შორის.

11. შეადარეთ: ა) $\sqrt{10}$ და 9; ბ) $\sqrt{1,5}$ და 1,2; გ) $-\sqrt{6}$ და 2; დ) $-\sqrt{45}$ და -7; ე) $\sqrt{1,4}$ და 1,2; ე) $\sqrt{40}$ და 6,2; ზ) 4,5 და $-\sqrt{8}$; თ) 0 და $-\sqrt{8}$.

12. იპოვეთ $\sqrt{3}$ -ის მიახლოებითი მნიშვნელობები:

ა) ერთეულების; ბ) მეათედების; გ) მესასედების სიზუსტით.

13. დაალაგეთ ზრდის მიხედვით: -3, π , $\sqrt{10}$, $-\sqrt{5}$, 4, $-\sqrt{15}$, -4.

14. დაალაგეთ კლების მიხედვით: $\sqrt{50}$, 0, $-\pi$, $-\sqrt{10}$, 8, -3, $\sqrt{65}$.

15. დაშალეთ მამრავლებად $\sqrt{6} + \sqrt{3}$.

16. დაშალეთ მამრავლებად $\sqrt{15} - \sqrt{10}$.

17. დაშალეთ მამრავლებად $\sqrt{21} + \sqrt{14}$.

18. დაშალეთ მამრავლებად $\sqrt{30} - \sqrt{20}$.

19. შეკვეცეთ წილადი $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{6}}{\sqrt{35} - \sqrt{14}}$.

20. შეკვეთეთ წილადი $\frac{\sqrt{10} + \sqrt{15}}{\sqrt{8} + \sqrt{12}}$.

21. რომელია მეტი:

ა) $\sqrt[3]{3}$ თუ $\sqrt{2}$; ბ) $\sqrt{5}$ თუ $\sqrt[3]{11}$; გ) $\sqrt[3]{5}$ თუ $\sqrt[3]{2}$.

22. მოსპეთ ირაციონალობა წილადის მნიშვნელში:

ა) $\frac{8}{\sqrt{2}}$; ბ) $\frac{9}{\sqrt[3]{4}}$; გ) $\frac{5}{2\sqrt[3]{25}}$; დ) $\frac{16}{\sqrt[3]{8}}$.

23. მოსპეთ ირაციონალობა წილადის მნიშვნელში:

ა) $\frac{2}{2 + \sqrt{2}}$; ბ) $\frac{12}{3 - \sqrt{3}}$; გ) $\frac{18}{\sqrt{7} - 1}$; დ) $\frac{8}{\sqrt{5} + 1}$.

24. მოსპეთ ირაციონალობა წილადის მნიშვნელში:

ა) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$; ბ) $\frac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$; გ) $\frac{6}{\sqrt{5} - \sqrt{8}}$; დ) $\frac{14}{\sqrt{3} - \sqrt{10}}$.

25. მოსპეთ ირაციონალობა წილადის მნიშვნელში:

ა) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}$; ბ) $\frac{1}{5 + \sqrt{7} + \sqrt{11}}$; გ) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$; დ) $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}}$.

26. მოსპეთ ირაციონალობა წილადის მნიშვნელში:

ა) $\frac{1}{\sqrt{10} - \sqrt{15} + \sqrt{14} - \sqrt{21}}$; ბ) $\frac{2 - \sqrt{6}}{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - 2}$;
 გ) $\frac{1}{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}$; დ) $\frac{1}{2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}}$.

27. მოსპეთ ირაციონალობა წილადის მნიშვნელში:

ა) $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$; ბ) $\frac{15}{\sqrt{7} - 2\sqrt{6}}$; გ) $\frac{\sqrt{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}}$; დ) $\frac{\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}}}$.

28. მოსპეთ ირაციონალობა წილადის მნიშვნელში:

ა) $\frac{6}{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{4}}$; ბ) $\frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$; გ) $\frac{2}{\sqrt[3]{4} + 1}$; დ) $\frac{1}{1 - \sqrt[3]{5}}$; ე) $\frac{4}{2 - 3\sqrt[3]{4}}$.

29. მოსპეთ ირაციონალობა წილადის მნიშვნელში:

ა) $\frac{1}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}$; ბ) $\frac{1}{\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{35} + \sqrt[3]{25}}$.

30. მოსპეთ ირაციონალობა წილადის მნიშვნელში:

ა) $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}}$; ბ) $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}}$; გ) $\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}$.

10.1.1. ტესტი № 9

1. $\sqrt{2}$ არის
 - ა) რაციონალური რიცხვი; ბ) დადებითი მთელი რიცხვი;
 - გ) დადებითი ირაციონალური რიცხვი.
2. $-\sqrt{2}$ არის
 - ა) უარყოფითი რაციონალური რიცხვი; ბ) უარყოფითი ირაციონალური რიცხვი;
 - გ) უარყოფითი მთელი რიცხვი.
3. ვთქვათ $S \geq 0$, მაშინ $\sqrt{S}$ არის
 - ა) არიმეტიკული კვადრატული ფესვი S -დან; ბ) კვადრატული ფესვი S -დან;
 - გ) დადებითი ან უარყოფითი კვადრატული ფესვი S -დან.
4. $\sqrt{9\frac{1}{9}}$ არის
 - ა) რაციონალური რიცხვი; ბ) დადებითი რაციონალური რიცხვი;
 - გ) ირაციონალური რიცხვი.
5. ვთქვათ, a ნატურალური რიცხვია და არ არის რაიმე ნატურალური რიცხვის კვადრატი, მაშინ $\sqrt{a}$
 - ა) რაციონალური რიცხვია; ბ) ირაციონალური რიცხვია;
 - გ) მთელი რიცხვია.
6. ირაციონალური რიცხვი გამოისახება
 - ა) უსასრულო არაპერიოდული ათწილადით; ბ) არაწესიერი წილადით;
 - გ) უსასრულო პერიოდული ათწილადით.
7. $\frac{4}{7}$ გამოისახება
 - ა) უსასრულო პერიოდული ათწილადით; ბ) სასრული ათწილადით;
 - გ) უსასრულო არაპერიოდული ათწილადით.
8. π რიცხვი არის
 - ა) რაციონალური რიცხვი; ბ) ირაციონალური რიცხვი;
 - გ) დადებითი რაციონალური რიცხვი.

9. შევადაროთ π და $\sqrt{3}$

ა) $\pi > \sqrt{3}$; ბ) $\pi < \sqrt{3}$; გ) $\pi = \sqrt{3}$.

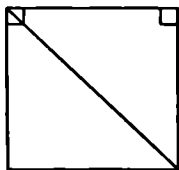
10. შევადაროთ π და $\sqrt{10}$

ა) $\pi > \sqrt{10}$; ბ) $\pi < \sqrt{10}$; გ) $\pi = \sqrt{10}$.

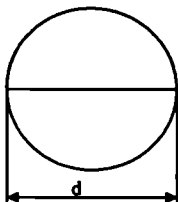
§11. ღადეპიტი ნამდვილი რიცხვების შეპრება, გაროქლება, გამრავლება და გაყოფა. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ურთიერთცალსახა ასახვა საპროგრდინატო წრფის წერტილთა სიმრავლეზე

განეხილოთ ირაციონალური რიცხვების მაგალითები:

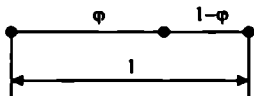
1. $\sqrt{2}$ – ერთეულის სიგრძის გვერდის მქონე კვადრატის დიაგონალი.



1. π – l -ის ტოლი დიამეტრის მქონე წრეწირის სიგრძე.



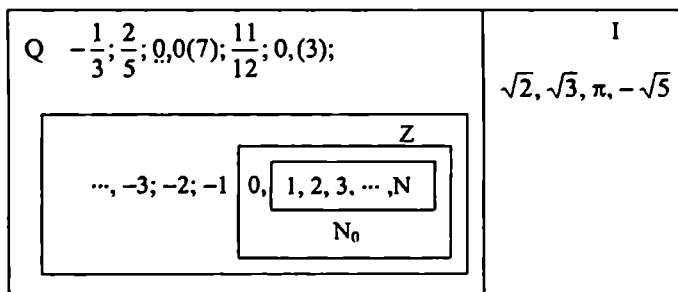
2. $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ – ოქროს კვეთასთან დაკავშირებული რიცხვი. მონაკვეთის სიგრძე ერთეულის ტოლია და φ წარმოადგენს $(1-\varphi):\varphi$ განტოლების უცხეს.



3. როგორც აღვნიშნეთ, რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვებს ერთად ნამდვილი რიცხვები ეწოდებათ. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს R -ით აღვნიშნავენ, ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს I -ით. ნამდვილი რიცხვები შეიძლება განვმარტოთ, როგორც სასრული და უსასრულო ათწილადების ერთობლიობა.

ნახაზზე წარმოდგენილი დიდი მართკუთხედით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა გამოსახული. აქვეა მონიშნული რაციონალურ, ირაციონალურ, მთელ და ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეები და რამდენიმე საილუსტრაციო რიცხვი. ნახაზზე რიცხვთა სიმრავლეებს შორის მიმართებაცაა გამოსახული: $N \subset N_0 \subset Q \subset R$; $R = Q \cup I$; $Q \cap I = \emptyset$.

R ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე



4. როგორ შევასრულოთ მოქმედებანი ნამდვილ რიცხვებზე? მაგალითად, როგორ ვიპოვოთ შემდეგი მნიშვნელობები:

$$\sqrt{2} + \pi = ? \quad \pi - \sqrt{2} = ? \quad \sqrt{2} \cdot \pi = ? \quad \frac{\sqrt{2}}{\pi} = ?, \text{ ან } 2 + \sqrt{2} = ? \text{ და } \frac{3}{4} + \sqrt{3} = ?.$$

ნამდვილი რიცხვების შეკრებას და გამრავლებას გააჩნიათ შემდეგი თვისებები:

1. თუ a და b ნამდვილი რიცხვები ($a \in R$ და $b \in R$), მაშინ $a+b$ და $a \cdot b$ ასევე ნამდვილი რიცხვებია (ჩაკეტილობა).

2. $a+b=b+a$ და $a \cdot b=b \cdot a$ (კომუტატიურობა).

3. $a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$ და $a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c=a \cdot b \cdot c$ (ასოციაციურობა).

4. $a \cdot 1 = a$

5. $a(b+c)=ab+ac$ (დისტრიბუციულობა).

6. ტოლობიდან $a+c=b+c$ გამომდინარეობს, რომ $a=b$.

7. ტოლობიდან $c \cdot a = c \cdot b$, სადაც $c \neq 0$, გამომდინარეობს, რომ $a=b$ (შეკვეცა).

8. ნამდვილ რიცხვს 0 (ნულს) გააჩნია შემდეგი თვისებები: $a+0=a$

და $a \cdot 0 = 0$, ყოველი ნამდვილი რიცხვისათვის.

9. ყოველი a ნამდვილი რიცხვისათვის მოპირდაპირა – a რიცხვი და შებრუნებული რიცხვია $a^{-1} = \frac{1}{a}$, ისინი შესაბამისად განისაზღვრებიან ტოლობებით: $a + (-a) = a - a = 0$, $a \cdot a^{-1} = 1$ ($a \neq 0$). ნულზე გაყოფა არ შეიძლება.

ნამდვილ რიცხვთა სისტემის აგება დამთავრდა მხოლოდ XIX საუკუნეში, რომელშიც დიდი ღვაწლი მიუძღვით ი. დედეკინდს, გ. კანტორს, კ. ვაიერშტრასს და სხვა მათემატიკოსებს.

ეთქვათ, მოცემულია a ნამდვილი რიცხვი, ეს რიცხვი მეტია მის ნაკლებობით აღებულ ყოველ მიახლოებაზე და ნაკლებია მის მეტობით აღებულ ყოველ მიახლოებაზე. მაგალითად, $\sqrt{2}$ -სათვის გვაქვს:

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$$

$$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$$

და ა.შ.

$-\sqrt{2}$ -სათვის გვაქვს:

$$-2 < -\sqrt{2} < -1$$

$$-1,5 < -\sqrt{2} < -1,4$$

$$-1,42 < -\sqrt{2} < -1,41$$

$$-1,415 < -\sqrt{2} < -1,414$$

$$-1,4143 < -\sqrt{2} < -1,4142$$

და ა.შ.

ეთქვათ, მოცემულია a და b დადებითი ნამდვილი რიცხვები, a_k და b_k -თი აღენიშნოთ მათი ათობითი მიახლოება ნაკლებობით, ხოლო a_k' და b_k' -ით – მათი მიახლოება მეტობით, ე.ი. გვაქვს: $a_k < a < a_k'$ და $b_k < b < b_k'$.

a და b დადებითი ნამდვილი რიცხვების ჯამი ეწოდება $a+b$ რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს: $a_k + b_k < a+b \leq a_k' + b_k'$. მაგალითად, ვიპოვოთ $\sqrt{2} + \pi$ ჯამი სიზუსტით 0,01; გვაქვს: $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ და $3,14 < \pi < 3,15$; ამიტომ $4,55 < \sqrt{2} + \pi < 4,57$; ე.ი. მიახლოე-

ბით 0,01 სიზუსტით გვექნება: $\sqrt{2} + \pi \approx 4,56$.

a და b დადებითი ნამდვილი რიცხვების ნამრავლი ეწოდება $a \cdot b$ რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობებს: $a_k \cdot b_k < a \cdot b \leq a_k' \cdot b_k'$. მაგალითად, ვიპოვოთ $\sqrt{2} \cdot \pi$ ნამრავლი სიზუსტით 0,01; გვაქვს: $1,41 \cdot 3,14 < \sqrt{2} \cdot \pi < 1,42 \cdot 3,15$; ამრიგად, $4,4274 < \sqrt{2} \cdot \pi \leq 4,473$ და 0,01 სიზუსტით გვექნება: $\sqrt{2} \cdot \pi \approx 4,45$.

მოქმედებანი ნამდვილ რიცხვებზე სრულდება შემდეგი სახით:

ორი ნამდვილი რიცხვის ჯამი ეწოდება რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1. ორი დადებითი ნამდვილი რიცხვის ჯამი დადებითი რიცხვია და მოიძებნება იმ წესებით, რომლებიც განსაზღვრული იყო დადებითი ნამდვილი რიცხვებისათვის.

1. ორი უარყოფითი ნამდვილი რიცხვის ჯამი უარყოფითი რიცხვია.

2. ორი ნამდვილი რიცხვის ჯამის მოდული არ აღემატება ამ რიცხვების მოდულების ჯამს, ე.ი. $|a + b| \leq |a| + |b|$.

3. ორი დადებითი ნამდვილი რიცხვის ნამრავლი დადებითი რიცხვია და მოიძებნება იმ წესებით, რომლებიც განსაზღვრული იყო დადებითი ნამდვილი რიცხვებისათვის.

4. ორი უარყოფითი ნამდვილი რიცხვის ნამრავლი დადებითი რიცხვია; ორი სხვადასხვა ნიშნის მქონე რიცხვის ნამრავლი უარყოფითი რიცხვია.

5. ორი ნამდვილი რიცხვის ნამრავლის მოდული ტოლია ამ რიცხვების მოდულების ნამრავლის, ე.ი. $|ab| = |a| \cdot |b|$.

ნამდვილი რიცხვების გამოკლება და გაყოფა განისაზღვრება, როგორც შეკრებისა და გამრავლების შებრუნებული მოქმედებები. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში გამოკლება შესრულებადია ყოველთვის; ისევე როგორც გაყოფა, ნულზე გაყოფის გამორიცხვით.

ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებათა შესრულებისათვის უნდა გავეცნოთ მიახლოებით რიცხვებზე მოქმედებათა წესებს (ამას განვიხილავთ შემდეგ).

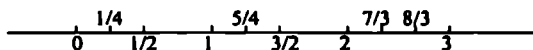
ყოველი რაციონალური რიცხვი უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით შეიძლება წარმოვადგინოთ, ხოლო ყოველი უსასრუ-

ლო პერიოდული ათწილადი რომელიმე რაციონალურ რიცხვს წარმოადგენს; მაგრამ არსებობენ არაპერიოდული ათწილადებიც. მაგალითად, $10.1010010001\dots$ (მძიმის შემდეგ პირველი ერთიანის შემდეგ ერთი ნულია, მეორე ერთიანის შემდეგ ორი ნული და ა.შ.) უსასრულო არაპერიოდული ათწილადია.

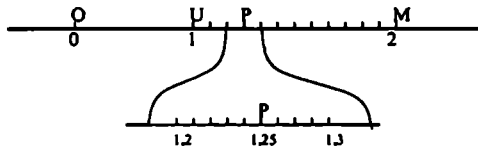
დადებითი ნამდვილი რიცხვები – რიცხვებია, რომლებიც წარმოიდგინება უსასრულო ათწილადებით (პერიოდულით ან არაპერიოდულით).

ჩანაწერი: $x = a, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ ციფრებია) ნიშნავს: $a, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_m < x \leq a, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_m + 10^{-m}$ ($m=1, 2, 3, \dots$), თუ a რაიმე დადებითი ნამდვილი რიცხვია, მაშინ $-a$ უარყოფითი ნამდვილი რიცხვია. მაგალითად, თუ $a = 0,1010010001\dots$, მაშინ $-a = -0,1010010001\dots$

ნახაზზე ავიღოთ რიცხვითი წრფე. მასზე რაციონალური რიცხვებია წარმოდგენილი. ეს რიცხვები რიცხვითი წრფის „რაციონალური წერტილებით“ გამოისახება. ამ „რაციონალურ წერტილთა“ სიმრავლე, ისევე, როგორც რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, უსასრულოა. მათ გარდა გვაქვს იმ წერტილთა უსასრულო სიმრავლეც, რომლებიც რაციონალურ რიცხვებს არ გამოსახავენ.



ყოველ P წერტილს ამ წრფეზე რაიმე უსასრულო ათწილადი, ანუ ნამდვილი რიცხვი შეესაბამება, ეთქვათ, ეს რიცხვია a . ეს რიცხვი P წერტილის კოორდინატია, a -ს მოდული მონაკვეთის სიგრძეს გამოსახავს, $OP = |a|$. მაგალითად, ეთქვათ, P წერტილი 1-ის მარჯვნივაა და 2-ის მარჯვნივ არ არის, მაშინ OP -ს სიგრძე არის ნამდვილი a რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: $1 < a \leq 2$.



UM მონაკვეთს (მისი სიგრძე ერთის ტოლია), რომელსაც ეკუთვნის P წერტილი, 10 ტოლ ნაწილად ეყოფთ. თუ P მოხვდა 1,2-ისა და

1,3-ის შესაბამის წერტილებს შორის, მაშინ $1.2 < a < 1.3$. შემდეგ ვაგრძელებთ ტოლ ნაწილებად დაყოფის პროცესს. ეოქვათ, $1.25 < a < 1.26$.

პროცესის გაგრძელების შედეგად მივიღებთ უსასრულო ათწილადს, ეოქვათ, $1.2537...$

ეს უსასრულო ათწილადი წარმოადგენს a ნამდვილ რიცხვს – რიცხვითი წრფის P წერტილის შესაბამის რიცხვს. თუ მიღებული ათწილადი პერიოდულია, მაშინ a რიცხვი რაციონალურია; თუ ათწილადი არაპერიოდულია, მაშინ a რიცხვი ირაციონალურია. 1.2; 1.25 და 1.253 ამ რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობებია ნაკლებობით – შესაბამისად, 0,1; 0,01 და 0,001 სიზუსტით; ხოლო 1,3; 1,26 და 1,254 ამავე სიზუსტით მიღებული მიახლოებითი მნიშვნელობებია მეტობით.

ნამდვილი რიცხვთა სიმრავლე უსასრულო არათვლადი სიმრავლეა.

11.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. რიცხვები დალაგებულია ზრდის მიხედვით: 4; 4,65; 4,7; 4,72; 4,75; 4,8; 4,81; 5. განათავსეთ მათ შორის $\sqrt{23}$ ისე, რომ კანონზომიერება არ დაარღვიოთ.

2. დააღაგეთ ზრდის მიხედვით: $\frac{26}{15}$; $\sqrt{3}$; $1,73(20)$; $\sqrt{10} - \sqrt{2}$.

3. შეასრულეთ მოქმედებანი:

ა) $(2\sqrt{18} + 3\sqrt{8}) + (3\sqrt{32} - \sqrt{50})$;

ბ) $(2\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18}) + (\sqrt{72} - \sqrt{80})$;

გ) $(0,5\sqrt{24} - 3\sqrt{40}) - (\sqrt{150} + \sqrt{54} - \sqrt{100})$.

დ) $\left(\sqrt{32} + \sqrt{0,5} - 2\sqrt{\frac{1}{3}}\right) - \left(\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{48}\right)$.

4. შეასრულეთ მოქმედებანი:

ა) $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} - \sqrt{12,5} - 0,5\sqrt{200} + \sqrt{242} + 6\sqrt{1\frac{1}{8}} - \sqrt{24,5}$;

$$b) \frac{1}{2}\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \sqrt{54} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}} - \sqrt{5\frac{1}{3}} + 4,5\sqrt{2\frac{2}{3}} + 2\sqrt{27};$$

$$g) \sqrt[3]{40} + \left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{-5} - 2\sqrt[3]{\frac{1}{5}} \right);$$

$$d) \left(3\sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{108} \right) - \left(16\sqrt[3]{\frac{1}{16}} - 4\sqrt[3]{\frac{1}{72}} \right).$$

5. შეასრულეთ მოქმედებანი: ა) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}$; ბ) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{20}$; გ) $\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{14}$;
 დ) $\frac{3}{4}\sqrt{24} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{6}$; ე) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{3}$; ვ) $\sqrt[3]{48} \cdot 2\sqrt[3]{4}$; უ) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2}$.

6. შეასრულეთ მოქმედებანი: ა) $\sqrt{7}(3\sqrt{7} + 5\sqrt{2}) - 4\sqrt{14}$;
 ბ) $(4\sqrt{3} - 2\sqrt{5}) \cdot 2\sqrt{5} + 20$; გ) $(\sqrt{12} - 2\sqrt{18}) \cdot \sqrt{2} + \sqrt{96}$;
 დ) $(\sqrt{50} + 2\sqrt{3} + \sqrt{5})\sqrt{5} + \sqrt{60}$; ე) $(1 + 2\sqrt{3})(1 - 2\sqrt{3})$;
 ვ) $(2\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})$; უ) $(3 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$;
 თ) $(\sqrt{5} + \sqrt{8})(\sqrt{5} + 3\sqrt{2})$; ი) $(5\sqrt{2} - \sqrt{125})(\sqrt{125} - \sqrt{2}) - \sqrt{250}$.

7. რაციონალურია თუ ირაციონალური გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $(\sqrt{11} + 2)(\sqrt{11} - 2)$; ბ) $(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} - 1)$; გ) $(1 - 3\sqrt{5})^2$;

დ) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}{8 \cdot \sqrt{10}}$; ე) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{12}$; ვ) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \cdot 3 \cdot \sqrt{15}$;

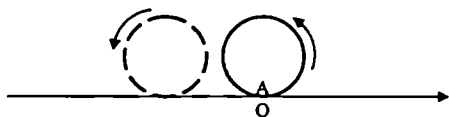
უ) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$; თ) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{11}}{\sqrt{2} + \sqrt{11}} - \frac{\sqrt{2} + \sqrt{11}}{\sqrt{2} - \sqrt{11}}$;

ი) $\frac{\sqrt{27} - 2}{3\sqrt{3} + 2} + \frac{\sqrt{27} + 2}{3\sqrt{3} - 2}$; კ) $\sqrt{(1 - 2\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5}}$.

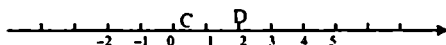
8. საკოორდინატო წრფის ერთეულოვანი მონაკვეთი დაყოფილია 6 ტოლ ნაწილად. ასე მიღებული ერთ-ერთი პატარა მონაკვეთი თანმიმდევრულად გადადეს ჯერ სათაეიდან მარჯვნივ 10-ჯერ და მიიღეს A წერტილი, შემდეგ სათაეიდან მარცხნივ 8-ჯერ და მიიღეს B წერტილი. იპოვეთ A და B წერტილების კოორდინატები და მანძილი მათ შორის.

9. აგებულია სამი კუადრატი გვერდებით: 2 სმ; 5 სმ; 0,8 სმ. საკოორდინატო წრფეზე, რომლის ერთეულოვანი მონაკვეთი 1 სმ-ია, სათაეიდან მარჯვნივ და მარცხნივ გადადეს ამ სამი კუადრატის დიაგონალების ტოლი მონაკვეთები. იპოვეთ მათი ბოლო წერტილების კოორდინატები.

10. საკოორდინატო წრფე ეხება წრეწირს, რომლის რადიუსი 3 ერთეულია, წრეწირის A წერტილი კოორდინატთა სათავეს ემთხვევა. იპოვეთ A წერტილის კოორდინატი ამ წრფეზე მაშინ, როდესაც ეს წრეწირი 1 ბრუნს შეასრულებს სათავედან მარცხნივ ამ წრფეზე. რა მთელ რიცხვებს შორის იქნება მოთავსებული ეს კოორდინატი?



11. საკოორდინატო წრფეზე C და D წერტილები შეესაბამება $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$ რიცხვებიდან ორ რიცხვს. რა რიცხვები შეიძლება იყოს ისინი?



12. ეთქვათ, მოცემულია რიცხვთა სიმრავლე: $A = \{-1; 0; 1\}$. შეკრების, გამოკლების და გამრავლების მოქმედებებიდან რომლის მიმართ არის ჩაკეტილი ეს სიმრავლე?

13. რა არითმეტიკული მოქმედების მიმართ არის ჩაკეტილი: ა) კენტი მთელი რიცხვების სიმრავლე? ბ) ლუწი მთელი რიცხვების სიმრავლე? გ) 2-ის ნატურალური ხარისხების სიმრავლე?

14. ჩაწერეთ მოდულის გამოყენების გარეშე: ა) $|3 - \sqrt{10}|$; ბ) $|\sqrt{18} - 4|$, გ) $|\pi^2 - 10|$.

15. ABCD მართკუთხედის გვერდები 3 სმ და 4 სმ-ია. წრფეზე შეარჩიეს ათელის სათავე – A წერტილი, დადებითი მიმართულება – AC სიხივის მიმართულება და 1 სმ სიგრძის ერთეულოვანი მონაკვეთი. იპოვეთ ამ შემთხვევაში არჩეულ საკოორდინატო წრფეზე C წერტილის კოორდინატი და დიაგონალების გადაკვეთის O წერტილის კოორდინატი. იპოვეთ A, O და C წერტილების კოორდინატები იმ შემთხვევაში, როცა AC წრფეზე დადებითი მიმართულებასა და ერთეულს არ შეეცვლით, ხოლო სათავეს O წერტილში გადავიტანო.

16. ABCD მართკუთხედის გვერდები 1 სმ და 2 სმ. ა) AC წრფეზე შეარჩიეს ათელის სათავე A წერტილი, დადებითი მიმართულება –

AC სხივის მიმართულება და 1 სმ სიგრძის ერთეულოვანი მონაკვეთი. იპოვეთ ასე შერჩეულ საკოორდინატო წრფეზე C წერტილის კოორდინატი; ბ) იპოვეთ A და C წერტილების კოორდინატები, თუ სათავედ AC და BD დიაგონალების გადაკვეთის O წერტილს ავირჩევთ და ღერძს მიემართავთ A-დან B-სკენ; გ) იპოვეთ D წერტილის კოორდინატი, თუ სათავე A წერტილშია, დადებითი მიმართულება AD სხივის მიმართულებას, ხოლო ერთეულოვანი მონაკვეთი 2 სმ სიგრძის ტოლია; დ) იპოვეთ C წერტილის კოორდინატი, თუ სათავე A წერტილშია, დადებითი მიმართულება AC სხივის მიმართულებას ემთხვევა, ხოლო ერთეულოვანი მონაკვეთი 2 სმ სიგრძისაა.

17. საკოორდინატო წრფეზე გამოსახულია A(2,14) და B(2,15) წერტილები. იპოვეთ AB მონაკვეთის C_1 შუა წერტილის კოორდინატი, C_1B მონაკვეთის C_2 შუა წერტილის კოორდინატი, C_2B მონაკვეთის C_3 შუაწერტილის კოორდინატი, C_3B მონაკვეთის C_4 შუა წერტილის კოორდინატი.

18. დაასახელეთ და საკოორდინატო წრფეზე მონიშნეთ ჩამოთვლილ წერტილებს შორის მდებარე ორი რაიმე წერტილი, რომელთა კოორდინატები ირაცინონალური რიცხვებია: ა) $P_1(1,3)$; $Q_1(1,5)$; ბ) $P_2(3,2)$; $Q_2(3,4)$; გ) $P_3(4)$; $Q_3(4,2)$.

19. თუ რიცხვთა მოცემული სიმრავლის ნებისმიერ ორ რიცხვზე რაიმე არითმეტიკული მოქმედების (შეკრების, გამოკლების, გამრავლების, გაყოფის) შესრულებით მიიღება (თუ გამოვრიცხავთ ნულზე გაყოფის შემთხვევას) ამავე სიმრავლის რიცხვი, მაშინ ვიტყვით, რომ სიმრავლე ჩაკეტილია აღნიშნული მოქმედების მიმართ.

შეავსეთ ცხრილი. გამოიყენეთ „ $\oplus$ “ ნიშნაკი, თუ სიმრავლე ჩაკეტილია მითითებული ოპერაციის მიმართ, წინააღმდეგ შემთხვევაში – „ $-$ “ ნიშნაკი გამოიყენეთ.

მოქმედება სიმრავლე	შეკრება	გამოკლება	გამრავლება	გაყოფა
N	$\oplus$	$\ominus$		
Z				
Q				
R				

20. ცნობილია, რომ $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$. გაამარტივეთ:

$$\sqrt{a+b+c+2\sqrt{ac+bc}} + \sqrt{a+b+c-2\sqrt{ac+bc}}.$$

21. გაამარტივეთ $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ გამოსახულება, თუ $1 \leq x \leq 2$.

22. წარმოადგინეთ სრული კვადრატის სახით: ა) $3+2\sqrt{2}$;

ბ) $9+4\sqrt{5}$; გ) $14-6\sqrt{5}$; დ) $17-12\sqrt{2}$.

23. გაამარტივეთ და გამოთვალეთ:

$$\left(\frac{2\sqrt{a}+1}{a-18\sqrt{a}} + \frac{2\sqrt{a}-1}{a+18\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{a^2+9a}{\sqrt{a}(a-324)} \right), \text{ თუ } a=116.$$

24. გაამარტივეთ და გამოთვალეთ:

$$\left(\frac{1}{(2\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} + \frac{2}{4a-b} + \frac{1}{(2\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \right) \cdot \frac{12a+12\sqrt{ab}+3b}{16\sqrt{a}}, \text{ თუ } a=4, \\ b=9.$$

25. გაამარტივეთ და გამოთვალეთ:

$$\left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4\sqrt{ab}} - 1 \right) \cdot \frac{a+\sqrt{ab}}{a-b}, \text{ თუ } a=0,81, b=0,25.$$

26. გაამარტივეთ და გამოთვალეთ:

$$\frac{\sqrt{y}}{27-y\sqrt{y}} \left(1 + \frac{3}{\sqrt{y}} + \frac{9}{y} \right) : \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}-3}, \text{ თუ } y = \frac{2}{7}.$$

27. გაამარტივეთ და გამოთვალეთ:

$$\left(\frac{4-2\sqrt{x}}{x-4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \right) : \left(\frac{8\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \sqrt{x} - 2 \right), \text{ თუ } x=144.$$

28. $\frac{y^2\sqrt{4+y^2}}{2} \cdot \frac{1+\frac{2}{\sqrt{y^2+4}}}{2+\sqrt{y^2+4}}$ გაამარტივეთ და გამოთვალეთ, თუ $y=7$.

29. გაამარტივეთ და გამოთვალეთ: $\frac{4+a^2}{\sqrt{\left(\frac{a^2-4}{2a}\right)^2+4}}, \text{ თუ } a=37,6.$

30. ჰეშმარიტია თუ არა ტოლობა:

ა) $(\sqrt{3} - 2)^2 = 7 - 4\sqrt{3}$? ბ) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 2$?

გ) $\sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2} = 3 - 2\sqrt{2}$? დ) $\sqrt{(5 - 3\sqrt{3})^2} = 5 - 3\sqrt{3}$?

11.1.1. ტესტი №10

1. ჩაწერეთ სიმბოლოების გამოყენებით: $\sqrt{3}$ ნამდვილი რიცხვია.

ა) $\sqrt{3} \in N$; ბ) $\sqrt{3} \in R$; გ) $\sqrt{3} \in Z$; დ) $\sqrt{3} \in Q$.

2. რაციონალურ რიცხვთა დამატებითი სიმრავლე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში

ა) ცარიელი სიმრავლეა; ბ) მთელი რიცხვთა სიმრავლეა;

გ) ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა; დ) ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეა.

3. თუ a უარყოფითი ნამდვილი რიცხვია, მაშინ $|a| =$

ა) a ; ბ) $-a$; გ) 0 ; დ) $\pm a$.

4. თუ $a < 0$, მაშინ $\sqrt{a^2} =$

ა) a ; ბ) 0 ; გ) $-a$; დ) $\pm a$.

5. ნული

ა) ნატურალური რიცხვია; ბ) არ არის ნამდვილი რიცხვი;

გ) ნამდვილი რიცხვია; დ) დადებითი რაციონალური რიცხვია.

6. $\sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} =$

ა) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$; ბ) $\pm(\sqrt{2} - \sqrt{3})$; გ) $-(\sqrt{2} - \sqrt{3})$; დ) 0 .

7. ორი ირაციონალური რიცხვის ჯამი

ა) ყოველთვის ირაციონალური რიცხვია;

ბ) ყოველთვის რაციონალური რიცხვია;

გ) ყოველთვის მთელი რიცხვია; დ) ნამდვილი რიცხვია.

8. ორი ირაციონალური რიცხვის ნამრავლი

ა) ყოველთვის ირაციონალური რიცხვია;

ბ) ყოველთვის რაციონალური რიცხვია;

გ) ყოველთვის მთელი რიცხვია; დ) ნამდვილი რიცხვია.

9. ეიპოვოთ $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + 2\sqrt{6}$ გამოსახულების მნიშვნელობა:

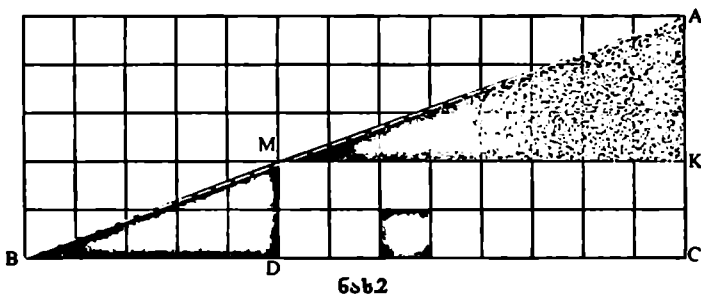
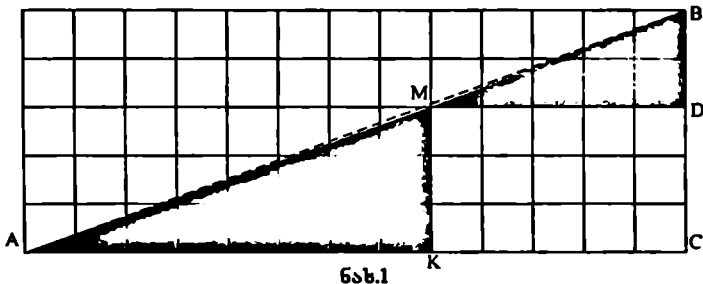
ა) 1; ბ) 5; გ) $2\sqrt{6}$; დ) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

10. ნამდვილი რიცხვი $0,717117\dots$ შეცვალეთ ისეთი ათწილადით, რომ ცდომილება არ აღემატებოდეს $0,001$ -ს.

ა) $0,71$; ბ) $0,717$; გ) $0,72$; დ) $0,7$.

**§12. რიცხვების დამრგვალების წესი.
მიახლოებითი გამოთვლები**

განვიხილოთ შემდეგი ნახაზები. ფართობის ერთეულად მივიღოთ ერთი კვადრატი. თითოეულ ნახაზზე არის 65 ერთეული.



ნახ.1-ზე გამოსახული ABC სამკუთხედის ფართობი 32,5 ერთეულია, AMK სამკუთხედი ნახაზზე წითელი ფერითაა აღნიშნული, მისი ფართობია 12 კვ. ერთეული; MBD სამკუთხედი ნახაზზე მწვანე ფერითაა აღნიშნული, მისი ფართობი 5 კვ. ერთეულია; ლურჯი ფერის ფიგურის ფართობი 8 კვ. ერთეულია, ხოლო ყვითელი ფერის ფიგურის ფართობი 7 კვ. ერთეული; სულ ჯამში გვაქვს: $12+5+8+7=32$ (კვ. ერთეული). თითქოს პარადოქსია, რადგან $32 < 32,5$; მაგრამ ნახაზზე ცდომილება გვაქვს, A და B წერტილები ზუსტად შეერთებულია წყვეტილი ხაზით, რომელიც ABC „სამკუთხედის“ გარე არეში გადის, ხოლო AMB არის ტეხილი.

ნახ.2-ზე წინა ნახაზისაგან განსხვავებით შეცვლილია ფიგურათა

განლაგება და მათი წვეროების აღმნიშვნელი ასოები, მაგრამ ფიგურათა ფართობები უცვლელია, ამ შემთხვევაშიც ABC სამკუთხედის ფართობი 32,5 კვ. ერთეულია; წითელი ფერის სამკუთხედის AMK-ს ფართობი კვლავ 12 კვ. ერთეულია, იგივეა მწვანე ფერის სამკუთხედის MBD-ს ფართობიც – 5კვ.ერთეული და ლურჯი ფერის ფიგურის ფართობი 8 კვ.ერთეულია, ხოლო ყვითელი ფერის ფიგურის ფართობი – 7კვ. ერთეული; აქვე განაღდა ერთი კვ. ერთეული, რომელიც ნახაზზე ნარინჯისფერითაა წარმოდგენილი, ამ ფიგურათა ფართობების ჯამი $12+5+8+7+1=33$ (კვ. ერთეული) აღემატება ABC სამკუთხედის ფართობს $33>32,5$. ამ შემთხვევაშიც ნახაზზე გეაქვს ცდომილება A და B წერტილები ზუსტად შეერთებულია წყვეტილი ხაზით, რომელიც ABC „სამკუთხედის“ შიგა არეში მდებარეობს. ხოლო AMB ამ შემთხვევაშიც წარმოადგენს ტეხილს. ამრიგად, ABC სამკუთხედის ფართობის გამომსახველი რიცხვი მოთავსებულია ორ მთელ რიცხვს შორის $32<32,5<33$; რომელი რიცხვი მივიღოთ ABC სამკუთხედის ფართობის გამომსახველად, თუ გვინდა, რომ ABC სამკუთხედის ფართობის გამომსახველი რიცხვი დაეამრგვალოთ მთელ რიცხვამდე, ნაკლებობით – 32, თუ მეტობით – 33? ამ შეკითხვაზე პასუხს გავცემთ შემდეგ.

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: ეთქვათ, გეაინტერესებს რამდენი მარცვალია 1 კოლოგრამ ხორბალში. რადგან ერთი კილოგრამი ხორბლის მარცვლების დათვლა დიდ დროს მოითხოვს, ამიტომ უმჯობესია 10-10 გრამი ხორბლის აღება და მათში ხორბლის მარცვლების რაოდენობის გარკვევა. დავუშვათ მივიღეთ ასეთი შედეგები: პირველ 10 გრამში დათვლის შედეგად აღმოჩნდა 328 მარცვალი, მეორეში – 342, მესამეში – 332, მეოთხეში – 308, ხოლო მეხუთეში – 306. ავიღოთ ამ შედეგების საშუალო არითმეტიკული:

$$\frac{328 + 342 + 332 + 308 + 306}{5} = 323,2.$$

ამგვარად, 10 გრამ ხორბალში საშუალოდ 323 მარცვალია. მიღებული რიცხვი მიახლოებითია, მაგრამ უფრო სანდოა, ვიდრე თითოეული შედეგი ცალ-ცალკე. გაეარჩიოთ, მიღებული საშუალო არითმეტიკულის რომელი ციფრია უფრო სანდო. აქ ასეულების ციფრი 3 სანდოა, რადგან იგი ყველა შედეგში შედის. ათეულების რიცხვი 2

ნაკლებად სანდოა, რადგან თითოეულ შედეგში ათეულების ციფრი სხვადასხვაა 2,4,3,0,0 და მისი დიაპაზონი 4-ის ტოლია. ერთეულების ციფრი კი ძალზე არასაიმედოა, 8,2,2,8,6 მისი დიაპაზონი 6-ის ტოლია; ამის გამო საშუალო არითმეტიკულში ერთეულების ციფრი და მის შემდეგ მდგომი მეთოდების ციფრი უნდა უკუვაგდოთ და მათ ნაცვლად დაეწეროთ 0-ები; ე.ი. 323,2 $\approx$ 320,0.

მაშინ შეგვიძლია მიახლოებით ვივარაუდოთ, რომ 1 კგ ხორბალი დაახლოებით საშუალოდ 32000 მარცვალს შეიცავს.

განვიხილოთ კიდევ ერთი ამოცანა; ოლიმპიურ თამაშებზე პისტოლეტიდან ტყვიის სროლაში გამარჯვებულმა დააგროვა 694,9 ქულა. დავამრგვალოთ ეს რიცხვი უახლოეს მთელ რიცხვამდე (ერთეულებამდე).

ვაკვირდებით ერთეულების თანრიგის უახლოეს მარჯვენა ციფრს (მეთოდების თანრიგში), თუ ეს ციფრი 5-ია ან 5-ზე მეტი, მაშინ რიცხვს ვამრგვალებთ მეტობით (ანუ ერთეულების თანრიგში ეუმატებთ ერთ ერთეულს, წილად ნაწილს კი აღარ ვწერთ). თუ ეს ციფრი ნაკლებია 5-ზე, მაშინ მოცემულ რიცხვს ვამგვრადებთ ნაკლებობით (ანუ მთელ ნაწილს უცვლელად ეტოვებთ, წილად ნაწილს კი აღარ ვწერთ).

ამრიგად, გამარჯვებულმა მიახლოებით 695 ქულა დააგროვა.

შეიძლება პასუხი გავცეთ პირველ ამოცანაში დასმულ შეკითხვას; კერძოდ, ABC სამკუთხედის ფართობის გამომსახველი რიცხვი მთელამდე დამრგვალების შემდეგ ტოლი იქნება 33 ერთეულის, ე.ი. 32,5 $\approx$ 33.

განვიხილოთ სხვა მაგალითები:

67,489 – მეთოდების თანრიგშია 4 და 4<5. ამიტომ ვამრგვალებთ ნაკლებობით: 67,489 $\approx$ 67. 42,528 მეთოდების თანრიგშია 5. ამიტომ ვამრგვალებთ მეტობით: 42,528 $\approx$ 43.

მეთოდების დამრგვალებისას შესაბამისი (მეთოდის) თანრიგის უახლოეს მარჯვენა ციფრს (ასეულების თანრიგში) ვიხილათ და ვადარებთ 5-ს.

დავამრგვალოთ 3,641 მეთოდებამდე.

ემსჯელობთ: 3,641; 4<5. ამიტომ ვამრგვალებთ ნაკლებობით და ვღებულობთ; 3,641 $\approx$ 3,6.

ანალოგიურად ვღებულობთ: $48,289 \approx 48,3$; $7,023 \approx 7,0$ (დამრგვალები-
სას მიღებული 7,0 არ უნდა შეიცვალოს მისი ტოლი 7-ით).

დავამრგვალოთ	25, 48758
მეათასედებამდე	$25,48758 \approx 25,488$
მეასედებამდე	$25,48758 \approx 25,49$
მეთედებამდე	$25,48758 \approx 25,5$
ერთეულებამდე	$25,48758 \approx 25$
ათეულებამდე	$25,48758 \approx 30$

ზოგიერთი სიდიდის მნიშვნელობას ხშირად მიახლოებით ასახე-
ლებენ; მაგალითად: ა) საქართველოში ამომრჩეველთა რაოდენობა
მიახლოებით სამი მილიონია; ბ) თბილისში მიახლოებით 200 სკო-
ლაა; გ) დედამიწიდან მზემდე მიახლოებით 150 მილიონი კილომეტ-
რია; დ) 1,3 რომ თავის თავზე გაავამრავლოთ მიახლოებით 1,7-ს მივი-
ღებთ - $1,3 \cdot 1,3 \approx 1,7$.

ზოგჯერ სიდიდის მიახლოებით მნიშვნელობაზე საუბრისას
სიტყვას „მიახლოებით“ გამოტოვებენ ხოლმე. მაგალითად, ეთქვათ
ერთ-ერთ სკოლაში 753 მოსწავლეა. ერთ-ერთმა მოსწავლემ კითხე-
ა: – რამდენი მოსწავლეა სკოლაში? – გვიპასუხა: „760“, მეორემ –
„730“. პირველი 7-ით შეცდა, მეორე – 23-ით. ასეთ შემთხვევაში ვამ-
ბობთ ხოლმე: პირველი მოსწავლის პასუხი უფრო ზუსტია; ზუსტ და
მიახლოებით მნიშვნელობებს შორის განსხვავება პირველ შემთხვე-
ვაში – 7-ია, მეორე შემთხვევაში – 23.

მოცემული სიდიდის ზუსტ და მიახლოებით მნიშვნელობებს შო-
რის სხვაობის მოდულს მიახლოების (მიახლოებითი მნიშვნელო-
ბის) აბსოლუტური ცდომილება ეწოდება.

განხილული მაგალითის პირველ შემთხვევაში აბსოლუტური
ცდომილება 7-ია, მეორე შემთხვევაში – 23:

$$|753 - 760| = 7 = 7, \quad |753 - 730| = 23 = 23.$$

ამრიგად, თუ a არის იმ სიდიდის მიახლოებითი მნიშვნელობა,
რომლის ზუსტი მნიშვნელობაა x , მაშინ $|x - a|$ მიახლოების (მიახლო-
ებითი მნიშვნელობის) აბსოლუტური ცდომილებაა.

განვიხილოთ მაგალითი აბსოლუტური ცდომილების გამოთვლა-

ზე:

მართკუთხედის გვერდები 2 სმ და 2,1 სმ-ია. ამ მართკუთხედის დიაგონალის სახაზავით გაზომვის შედეგი 3 სმ-ია. ვიპოვოთ ამ მიახლოების აბსოლუტური ცდომილება.

ამოხსნა: ვთქვათ, დიაგონალი x -ია. მაშინ პითაგორას თეორემის თანახმად,

$$x = \sqrt{2,1^2 + 2^2} = \sqrt{8,41} = 2,9 \text{ (სმ)}.$$

ამ სიდიდის მიახლოებითი მნიშვნელობა 3 სმ-ია. ამიტომ მიახლოების აბსოლუტური ცდომილება არის: $|2,9 - 3| = 0,1$ (სმ).

განვიხილოთ ამოცანა: სინჯარაში ჩასხმული სითხის ტემპერატურის გაზომვისას თერმომეტრის სეკტის ზედა ბოლო 21°C და 22°C -ს შორისაა. ტემპერატურის მიახლოებითი მნიშვნელობად ავიღოთ $21,5^\circ\text{C}$. რა სიდიდეებს შორისაა აბსოლუტური ცდომილება?

ტემპერატურის ზუსტი t მნიშვნელობისათვის გვაქვს საზღვრები: $21 \leq t \leq 22$, აქედან $21 - 21,5 \leq t - 21,5 \leq 22 - 21,5$; ანუ $-0,5 \leq t - 21,5 \leq 0,5$. მაშასადამე, აბსოლუტური ცდომილება – $|t - 21,5|$ არ აღემატება 0,5-ს.

ამ შემთხვევაში ასეც ვიტყვით: ტემპერატურა 0,5 გრადუსამდე სიზუსტითაა გაზომილი და ეწერთ: $t = 21,5 \pm 0,5$.

ამ ამოცანაში განხილული გაზომვის დროს მიახლოებითი მნიშვნელობად, როგორც წესი იღებენ 21°C ან 22°C -ს. აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება 1°C -ს. ამიტომ მიჩნეულია, რომ იმ თერმომეტრით გაზომვისას, რომლის დანაყოფები ერთი გრადუსის ბიჯითაა მოცემული, ტემპერატურის გაზომვა 1°C -ის (ან 1°C -მდე) სიზუსტით ხდება.

ვითქვით, რომ a არის x სიდიდის მიახლოებითი მნიშვნელობა h -მდე სიზუსტით, თუ $|x - a| \leq h$. ამ შემთხვევაში ეწერთ: $x = a \pm h$.

მაგალითად, მიახლოებითი გამოთვლებისას გამოყენებული $x = 2,45 \pm 0,01$ ჩანაწერი ნიშნავს x ტოლია 2,45-ის 0,01-მდე სიზუსტით, ანუ $2,45 - 0,01 \leq x \leq 2,45 + 0,01$.

მათემატიკურ ცხრილებში და ცნობარებში მიახლოებითი მნიშვნელობები ისეა ჩაწერილი, რომ აბსოლუტური ცდომილება ჩანაწერში ბოლო თანრიგის ერთ ერთეულს არ აღემატება. ასეთ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ სიდიდე სანდო ციფრებითაა ჩაწერილი.

მიახლოებითი მნიშვნელობის სანდო ციფრი იმ თანრიგის ციფრს ეწოდება, რომლის ერთ ერთეულს არ აღემატება აბსოლუტური ცდომილება.

ხშირად სიდიდეები სტანდარტული სახითაა ჩაწერილი - $a \cdot 10^n$ (n მთელია), $1 < a < 10$. ასეთ შემთხვევაში a რიცხვი მხოლოდ სანდო ციფრებით მოიცემა, რაც იმას ნიშნავს, რომ a -ს აბსოლუტური ცდომილება მისი ბოლო თანრიგის ერთ ერთეულს არ აღემატება. ვთქვათ, x რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობაა $a \cdot 10^n$ და a -ს ათწილად ნაწილში ორი ციფრია, მაშინ

$$x = (a \pm 0,001) \cdot 10^n$$

$$x = a \cdot 10^n \pm 0,01 \cdot 10^n$$

$$x = a \cdot 10^n \pm 10^{n-2}$$

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება 10^{n-2} -ს.

რაიმე სიდიდის სხვადასხვა მიახლოებითი მნიშვნელობის შედარებისას ის მიახლოებაა (მიახლოებითი მნიშვნელობა) უკეთესი, რომლის აბსოლუტური ცდომილება ნაკლებია.

ახლა განვიხილოთ სხვადასხვა სიდიდეების მიახლოებითი მნიშვნელობები. ვთქვათ, ერთი ქალაქიდან მეორე ქალაქამდე მანძილი მოცემულია ფორმულით: $S = (750 \pm 1)$ კმ, ხოლო ფანქრის სიგრძე $l = (19,5 \pm 0,1)$ სმ.

პირველ შემთხვევაში აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება 1 კმ-ს, მეორე შემთხვევაში - 0,1 სმ-ს. თითქოს მეორე გაზომვა უფრო ზუსტადაა შესრულებული, მაგრამ დაეკვირდეთ შემდეგ მსჯელობას; ქალაქებს შორის მანძილის გაზომვისას 750 კმ-ზე ცდომილება არაუმეტეს 1 კმ-ია. შეიძლება ითქვას, რომ ამ შემთხვევაში ცდომილება მიახლოებითი მნიშვნელობის $\frac{1}{750} \cdot 100\% \approx 0,13\%$ -ს არ აღემატება,

ხოლო ფანქრის შემთხვევაში $\frac{0,1}{19,5} \cdot 100\% \approx 0,51\%$ -ს; ამიტომ, შეიძლება ვთქვათ, რომ ქალაქებს შორის მანძილი უფრო ზუსტადაა მოცემული, ვიდრე ფანქრის სიგრძე. ასეთ შემთხვევაში მიახლოების შეფასებისას შემოდის ფარდობითი ცდომილების ცნება.

ფარდობითი ცდომილება (მიახლოების ფარდობითი ცდომილება)

ეწოდება მიახლოების მნიშვნელობის აბსოლუტური ცდომილებისა და ამ მიახლოებითი მნიშვნელობის მოდულის შეფარდებას.

თუ აბსოლუტური ცდომილება ცნობილი არ არის და მხოლოდ მისი შეფასება ვიცით, მაშინ ფარდობითი ცდომილების შეფასებასაც ვიპოვიტ. მაგალითად, განხილულ მაგალითში ქალაქებს შორის მანძილის მიახლოებითი მნიშვნელობის აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება 1 კმ-ს. მაშასადამე, ფარდობითი ცდომილება არ აღემატება $\frac{1}{750}$ -ს, პროცენტებში $\frac{1}{750} \cdot 100\%$ -ს. ფანქრის სიგრძის ფარ-

დობითი ცდომილება არ აღემატება $\frac{1}{195}$ -ს, პროცენტებში - $\frac{1}{195} \cdot 100\%$ -ს.

ჩვენ აღვნიშნეთ, რომ ცნობარებში სიდიდეები ხშირად სტანდარტული სახით ჩაწერილი რიცხვებით გამოისახება და 10-ის ხარისხის წინ მდგომი რიცხვი სანდო ციფრებით მოიცემა (აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება ამ რიცხვის ნებისმიერი თანრიგის ერთ ერთეულს). ასეთი ჩანაწერი ფარდობითი ცდომილების შეფასების საშუალებასაც იძლევა.

ეთქვან, x რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა ჩაწერილია $a \cdot 10^n$ (ი მთელია $1 \leq a < 10$) სტანდარტული სახით, a -ს ყველა ციფრი სანდოა. განვიხილოთ შემთხვევა - a რიცხვის ათწილად ნაწილში ორი ციფრია. მაშინ, როგორც ადრე აღვნიშნეთ, რიცხვის აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება 0,01-ს, ხოლო $a \cdot 10^n$ რიცხვის აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება 10^{n-2} -ს. ამიტომ ფარდობითი ცდომილება არ აღემატება $\frac{10^{n-2}}{a \cdot 10^n} = \frac{1}{100a} \leq 0,01$.

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში $a \cdot 10^n$ რიცხვის ფარდობითი ცდომილება არ აღემატება a რიცხვის ბოლო თანრიგის ერთ ერთეულს. ეს დებულება ყოველთვის სწორია - რამდენი ციფრიც არ უნდა იყოს a -ს ათწილად ნაწილში.

ამრიგად, თუ x სიდიდის მიახლოებითი მნიშვნელობა არის a , მაშინ $\frac{|x-a|}{|a|}$ ფარდობითი ცდომილებაა. თუ x რიცხვის მიახლოებითი

მნიშვნელობა $a \cdot 10^0$ ($1 \leq a < 10$, a მთელია) სტანდარტული სახითაა მოცემული, მაშინ ფარდობითი ცდომილება არ აღემატება a რიცხვის ბოლო თანრიგის ერთ ერთეულს.

ეთქვათ, x და y სიდიდეების მიახლოებითი გამოთვლებისას მიღებულია ფორმულები: $x=8,44 \pm 0,01$ და $y=2,5 \pm 0,1$ (1); ანუ $|x-8,44| \leq 0,01$ და $|y-2,5| \leq 0,1$ (2); რაც ნიშნავს, რომ $8,44-0,01 \leq x \leq 8,44+0,01$ და $2,5-0,1 \leq y \leq 2,5+0,1$; ამ უტოლობების შეკრებით მივიღებთ: $10,94-0,11 \leq x+y \leq 10,94+0,11$; ანუ $|(x+y)-10,94| \leq 0,11$ (3). (3) ნიშნავს, რომ $(x+y)$ -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა $10,94$ -ია; $0,11$ -ის სიზუსტით.

მაშასადამე, მიახლოებით მნიშვნელობათა ჯამის აბსოლუტური ცდომილება შესაკრებთა აბსოლუტურ ცდომილებათა ჯამს არ აღემატება და ეწერტ: $x+y=10,94 \pm 0,11$ (4). (1), (2) და (4) ფორმულებს ასეც ჩაეწერტ ხოლმე: $x \approx 8,44$; $y \approx 2,5$ (ანუ მიახლოებით მნიშვნელობებს სანდო ციფრებით წარმოეადგენტ) $x+y \approx 10,9$; ჯამის უფრო მეტი სიზუსტით (ეთქვათ, მეასედამდე) დამრგვალება გაუმართლებელია, რადგან y მხოლოდ $0,1$ სიზუსტითაა წარმოდგენილი.

ამრიგად, ათწილადების ჯამის მიახლოებით მნიშვნელობას ასე ეპოულობტ: ეკრებტ მიახლოებით მნიშვნელობებს და ჯამს ეამრგვალებტ იმ სიზუსტით, რაც აქვს ყველაზე ნაკლები სიზუსტით (აბსოლუტური ცდომილების მიხედვით) მოცემულ შესაკრებს. განვიხილოტ მაგალითი: ეთქვათ, $x \approx 18,3$ და $y \approx 5,608$. ეპოვოტ $(x+y)$ -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა.

გეაქვს: $18,3+5,608=23,908$. ეს შედეგი მეათედებამდე დავამრგვალოტ, რადგან $x \approx 18,3$ მეათედებამდე სიზუსტითაა მოცემული. მაშასადამე, $x+y \approx 23,9$.

განვიხილოტ შემდეგი მაგალითი: ეთქვათ, $x \approx 7,908$ და $y \approx 4,31$. ეპოვოტ $(x-y)$ -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა.

$(x-y)$ -ის მიახლოებითი მნიშვნელობის პოვნა ზემოტ აღწერილი წესის მიხედვით მიმდინარეობს: $7,908-4,31=3,598$. ეს რიცხვი მეასედებამდე სიზუსტით უნდა დავამრგვალოტ: $3,598 \approx 3,60$. ამრიგად, $(x-y) \approx 3,60$.

მაშასადამე, მიახლოებითი სიდიდეების შეკრებისა და გამოკლების გამარტივებული წესი, რომელიც პრაქტიკაში ხშირად გამოიყუ-

ნება მდგომარეობს შემდეგში: მიახლოებითი სიდიდეების შეკრები-
სა და გამოკლებისას ეპოულობთ სიდიდეების ჯამს ან სხვაობას;
შედგეს ვამრგვალებთ ნაკლებად ზუსტი მოცემულობის სიზუსტით.

ეთქვას x და y სიდიდეების მიახლოებითი მნიშვნელობებია
 $x \approx 63,87$; $y \approx 4,8$.

რა რიცხვი ავიღოთ xy ნამრავლის მიახლოებითი მნიშვნელობად?

გავეცნოთ გამრავლების ერთ-ერთ წესს: ვიპოვოთ მიახლოებითი
მნიშვნელობების ნამრავლი – $63,87 \cdot 4,8 = 306,576$.

ეს რიცხვი დავამრგვალოთ იმ სიზუსტით, რაც გააჩნია თანამამ-
რავლს, რომელიც უფრო ნაკლები სიზუსტითაა მოცემული (ფარ-
დობითი ცდომილების მიხედვით). ამ სიზუსტის დადგენა გაიოლდე-
ბა, თუ x და y -ს ჩავწერთ სტანდარტული სახით:

$$x \approx 6,387 \cdot 10^1; y \approx 4,8 \cdot 10^0.$$

ამ ჩანაწერიდან ჩანს, რომ მეორე რიცხვი უფრო ნაკლები სიზუს-
ტითაა მოცემული (ფარდობითი ცდომილების მიხედვით). ამას მიუ-
თითებს 10-ის ხარისხის წინ მდგომი მამრავლი – 4,8. იგივე სიზუს-
ტით დავამრგვალოთ შედეგი. მივიღებთ: $x \cdot y \approx 306,6$.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი. ეთქვას, $x \approx 0,56$ და $y \approx 25,1$. ვიპო-
ვოთ $x \cdot y$ -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა, გავითვალისწინოთ, რომ
 $0,56 \cdot 25,1 = 14,056$.

ჩავწეროთ 0,56; 25,1 და 14,056 სტანდარტული სახით:
 $x \approx 0,56 = 5,6 \cdot 10^{-1}$; $y \approx 25,1 = 2,51 \cdot 10^1$; $14,056 = 1,4056 \cdot 10^1$.

პირველი რიცხვი – x ფარდობითი ცდომილების მიხედვით ნაკლე-
ბი სიზუსტითაა მოცემული – ათწილად ნიშნებში ერთი ციფრია.
ასევე ერთი ციფრი დავტოვოთ ნამრავლში. მივიღებთ, რომ
 $x \cdot y \approx 1,4 \cdot 10^1$, ანუ $x \cdot y \approx 14$.

ანალოგიურად ემოქმედებთ ორზე მეტი თანამამრავლის შემთხვე-
ვაშიც.

ეთქვას, $x \approx 500,2$ და $y \approx 64$. ვიპოვოთ x და y -ის შეფარდების მიახ-
ლოებითი მნიშვნელობა.

$$500,2 : 64 = 7,815 = 7,815 \cdot 10^0.$$

რადგან $x \approx 5,002 \cdot 10^2$; ხოლო $y \approx 6,4 \cdot 10^1$, ამიტომ შედეგს მეორე მონა-
ცემის მიხედვით ვამრგვალებთ - იგი უფრო ნაკლები სიზუსტითაა

მოცემული (ფარდობითი ცდომილების მიხედვით) ე.ი. $\frac{x}{y} \approx 7,8 \cdot 10^0$,

ანუ $\frac{x}{y} \approx 7,8$.

ამრიგად, მიახლოებითი რიცხვების გამრავლებისას ან გაყოფისას მოცემულ რიცხვებს სტანდარტული სახით წარმოვადგენთ, შევასრულებთ გამრავლებას ან გაყოფას და შედეგში 10-ის წინ მდგომ რიცხვს ვამრგვალებთ ნაკლებად ზუსტი მოცემულობის მიხედვით (ფარდობითი ცდომილების მიხედვით).

12.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

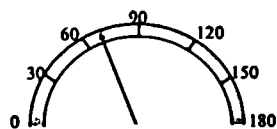
1. დაამრგვალეთ რიცხვი უახლოეს მთელ რიცხვამდე: ა) 154,91; ბ) 258,88; გ) 35,261; დ) 0,12; ე) 100,53; ე) 146,488; ზ) 71,09; თ) 0,555.
2. დაამრგვალეთ რიცხვი მათედეამდე: ა) 326,34; ბ) 0,664; გ) 44,236; დ) 1,2104; ე) 102,29; ე) 0,729; ზ) 501,691; თ) 5,4558.
3. $\frac{22}{25}$ ჩაწერეთ წილადის სახით, რომლის მნიშვნელი არის 100, შემდეგ ჩაწერეთ ის ათწილადის სახით და დაამრგვალეთ მათედეამდე.
4. დეტალის მასაა 0,73562 კგ. დაამრგვალეთ ეს რიცხვი მათედეამდე, მეასედებამდე, მეათასეტებამდე და თითოეულ შემთხვევაში იპოვეთ მიღებული მიახლოებითი მნიშვნელობის აბსოლუტური ცდომილება.
5. შეავსეთ ცხრილი:

x რიცხვი	2,1579	3,4415	0,44531	100,10133	0,95188	1,8999
x რიცხვის მეათასედებამდე დამრგვალებით მიღებული მიახლოებითი მნიშვნელობები						
აბსოლუტური ცდომილება						

6. დედამიწის ეკვატორის სიგრძედ მიჩნეულია 40075696 მეტრი. დაამრგვალეთ ეს რიცხვი ასეულებამდე, ათასეულებამდე და თითოეულ შემთხვევაში იპოვეთ მოცემული რიცხვის მიღებული მიახლოებითი მნიშვნელობის აბსოლუტური ცდომილება.
7. ცნობილია, რომ $x=3,157228$. a არის x -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა, შეავსეთ ცხრილი:

	a მიიღება x -ის დამრგვალებით მეასეულებამდე	a მიიღება x -ის დამრგვალებით მათასეულებამდე	a მიიღება x -ის დამრგვალებით მათათასეულებამდე
a			
$x-a$			
აბსოლუტური ცდომილება: $ x-a $			

8. ერთ-ერთი დეტალის დამუშავების პროცესში მისი ტემპერატურა უნდა იყოს $(80 \pm 5^\circ) = C$. აღნიშნეთ დამუშავების პროცესში დეტალის ტემპერატურა x -ით და ჩაწერეთ x -ის შესაძლო მნიშვნელობები უტოლობის სახით.
9. ჩაწერეთ უტოლობების სახით x -ის შესაძლო მნიშვნელობები:
- ა) $x=27 \pm 0,2$; ბ) $x=100 \pm 0,01$; გ) $x=3,6 \pm 0,02$; დ) $x=32,5 \pm 0,5$.
10. ჩაწერეთ უტოლობის სახით x , y და z -ის მნიშვნელობები:
- ა) $x=5 \pm 0,001$; $y=0,2 \pm h$; $z=l \pm e$; ბ) $x=a \pm t$; $y=45 \pm a$; $z=o \pm e$.
11. ჩაწერეთ ორნაირად:
- ა) a ტოლია 10-ის 0,2-მდე სიზუსტით;
- ბ) v ტოლია 90 კმ/სთ-ის 5 კმ/სთ-მდე სიზუსტით;
- გ) m ტოლია 500 გრამის 20 გრამამდე სიზუსტით;
- დ) h ტოლია 0,8 სმ-ის 0,001 სმ-მდე სიზუსტით;
- ე) T ტოლია 8 სთ-ის 5 წთ-მდე სიზუსტით;
- ვ) t ტოლია $100^\circ C$ -ის $2^\circ C$ -მდე სიზუსტით.
12. ვთქვათ, ავტომობილის სინქარის საზომი ხელსაწყო, სპიდომეტრის ისარი 65-სა და 70-ს შორისაა. ავტომობილის სინქარის მიახლოებითი მნიშვნელობად ავიღოთ 67,5 კმ/სთ. რა სიზუსტითაა ამ შემ-



თხვევაში გაზომილი სიჩქარე?

13. გეაქეს პინებიანი სასწორი და ოთხი საწორი 100 გრამიანი, 500 გრამიანი, 2 და 5 კილოგრამი. ასაწორი ტვირთი უფრო მსუბუქი აღმოჩნდა, ვიდრე 5 კგ, 2კგ და 500გ-იანი საწორები ერთად; ხოლო როცა ტვირთის მხარეს დაამატეს 100 გრამიანი საწორი, ტვირთის მხარემ გადაწონა. რა საზღვრებშია ტვირთის მასა? ვთქვათ, მიახლოებით მნიშვნელობად ამ საზღვრების არითმეტიკული საშუალო ავიღეთ. რა სიზუსტით იქნება ტვირთის მასა აღებული?
14. თომამ 4 დმ-იანი მონაკვეთის გაზომვისას მიიღო 4,15 დმ; ქეთიმ 1 მ-იანი მონაკვეთის გაზომვისას – 97 სმ. ა) შეადარეთ გაზომვების აბსოლუტური ცდომილებები; ბ) თითოეულ შემთხვევაში იპოვეთ გაზომვის ფარდობითი ცდომილება პროცენტული სახით. რომელი გაზომვაა უფრო ზუსტად შესრულებული?
15. 8 კგ მასის მქონე ტვირთის აწონისას მიიღეს 7კგ 880 გ; 50 კგ მასის მქონე ტვირთის აწონისას კი – 50,5 კგ. რომელი აწონებაა შესრულებული უფრო ზუსტად?
16. ლაშა ზომავს 12 სმ-იან და 22 სმ-იან მონაკვეთებს. შედეგად მიიღო 12 სმ 1 მმ; 15 სმ 2 მმ და 21 სმ 9 მმ. იპოვეთ თითოეულ შემთხვევაში ფარდობითი ცდომილება მეათასედამდე სიზუსტით.
17. დეტალის სიგრძისა და სიგანის გაზომვისას მიღებულია $a=(12\pm0,3)$ დმ და $b=(7\pm0,2)$ დმ. შეაფასეთ სიგრძისა და სიგანის მიახლოებითი მნიშვნელობების ფარდობითი ცდომილება.
18. A-დან B, C და D ქალაქებამდე მანძილებია (200 ± 2) კმ, (250 ± 3) კმ, (480 ± 5) კმ. იპოვეთ ამ მანძილების მიახლოებითი მნიშვნელობების ფარდობითი ცდომილებები და შეადარეთ მიახლოებითი შეფასებები.
19. მოცემულია x და y სიდიდეების მიახლოებითი ფორმულები. იპოვეთ $x+y$ სიდიდის ზუსტი მნიშვნელობის საზღვრები.
ა) $x=4,25\pm0,02$; $y=3,2\pm0,01$; ბ) $x=100,4\pm0,4$; $y=-48,21\pm0,25$;
გ) $10-0,05 \leq x \leq 10+0,05$; $-2-0,001 \leq y \leq -2+0,001$;
დ) $50-0,3 \leq x \leq 50+0,3$; $1,2-0,02 \leq y \leq 1,2+0,02$.
20. შეაფასეთ $a+b$ სიდიდის მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ
ა) $|a-4| \leq 0,02$ და $|b-1,5| \leq 0,001$; ბ) $|a-6,25| \leq 0,5$ და $|b-30| \leq 0,06$;

- გ) $|a-1.25| \leq 0.003$ და $|b-2| \leq 0.01$; დ) $|a-5| \leq 0.13$ და $|b-2.5| \leq 0.01$.
21. იპოვეთ $x+y$ სიდიდის მიახლოებითი მნიშვნელობა, თუ
 ა) $x \approx 7.98$ და $y \approx 0.2$; ბ) $x \approx -10.22$ და $y \approx 4.125$;
 გ) $x \approx 0.008$ და $y \approx 0.2$; დ) $x \approx 5.406$ და $y \approx -4.6629$.
22. იპოვეთ $a-b$ სიდიდის მიახლოებითი მნიშვნელობა, თუ
 ა) $a \approx -7.2$ და $b \approx 3.44$; ბ) $a \approx 10.998$ და $b \approx 2.03$;
 გ) $a \approx 4.524$ და $b \approx -0.2$; დ) $a \approx 40.2$ და $b \approx 0.005$.
23. იპოვეთ $x+y$ სიდიდის მიახლოებითი მნიშვნელობა, თუ
 ა) $x \approx 100 \pm 0.96$ და $y \approx 25.42 \pm 0.001$; ბ) $x \approx 27.2$ და $y \approx -10.25$.
24. იპოვეთ $x-y$ სიდიდის მიახლოებითი მნიშვნელობა, თუ
 ა) $x \approx 100 \pm 0.96$ და $y \approx 25.42 \pm 0.001$; ბ) $x \approx 27.2$ და $y \approx -10.25$.
25. იპოვეთ x და y რიცხვების ნამრავლის მიახლოებითი მნიშვნელობა, თუ
 ა) $x \approx 2.32 \cdot 10^3$ და $y \approx 4.51 \cdot 10^3$; ბ) $x \approx 1.2 \cdot 10^2$ და $y \approx 2.732 \cdot 10^2$;
 გ) $x \approx 2.35 \cdot 10^{-1}$ და $y \approx 9.988 \cdot 10^{-1}$; დ) $x \approx -3.1 \cdot 10^{-2}$ და $y \approx 5 \cdot 10^{-2}$.
26. იპოვეთ x და y რიცხვების ნამრავლის მიახლოებითი მნიშვნელობა, თუ
 ა) $x \approx 4.56 \cdot 10^3$ და $y \approx 1.41 \cdot 10^2$; ბ) $x \approx 4.2 \cdot 10^{-2}$ და $y \approx 1.205 \cdot 10^2$;
 გ) $x \approx 2.98 \cdot 10^4$ და $y \approx 6.5 \cdot 10^{-2}$; დ) $x \approx 4 \cdot 10^3$ და $y \approx -2.5 \cdot 10^{-2}$.
27. იპოვეთ x და y რიცხვების ნამრავლის მიახლოებითი მნიშვნელობა, თუ
 ა) $x \approx 2125.54$ და $y \approx 4.150$; ბ) $x \approx 102.3 \cdot 10^3$ და $y \approx 1000.5$;
 გ) $x \approx 0.02 \cdot 10^4$ და $y \approx 25.4 \cdot 10^{-1}$; დ) $x \approx 445.98$ და $y \approx 0.01 \cdot 10^3$.
28. იპოვეთ მართკუთხედის პერიმეტრისა და ფართობის მიახლოებითი მნიშვნელობები, თუ მისი სიგრძისა და სიგანის მიახლოებითი მნიშვნელობებია: 14.25 მ და 6.5 მ.
29. იპოვეთ მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობის მიახლოებითი მნიშვნელობა, თუ მისი სიგრძის, სიგანისა და სიმაღლის მიახლოებითი მნიშვნელობებია: 8.45 მ; 3.2 მ და 5 მ.
30. იპოვეთ a და b რიცხვების განაყოფების მიახლოებითი მნიშვნელობები, თუ
 ა) $a \approx 2.72 \cdot 10^3$ და $b \approx 1.45 \cdot 10^3$; ბ) $a \approx 8.36 \cdot 10^2$ და $b \approx 2.21 \cdot 10^{-1}$;
 გ) $a \approx 27.54$ და $b \approx 9.2$; დ) $a \approx 144.5$ და $b \approx 22.45$.

12.1.1. ტესტი №11

1. თუ ტრანსპორტირით სამკუთხედის კუთხეების ჯამის გაზომვის შედეგი 182° აღმოჩნდა, მაშინ ამ მიახლოებითი მნიშვნელობის აბსოლუტური ცდომილებაა
ა) -2° ; ბ) 2° ; გ) 180° .
2. 0,1978-ის მეათასედებამდე (მეათასედების თანრიგამდე) სიზუსტით დამრგვალებისას აღებული მიახლოებითი მნიშვნელობის აბსოლუტური ცდომილებაა
ა) $-0,0002$; ბ) $0,002$; გ) $0,0002$.
3. ეთქვათ, 5,45 არის x -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა, აბსოლუტური ცდომილება ნაკლებია 0,01-ზე, მაშინ x რიცხვი ეკუთვნის
ა) $(5,43; 5,44)$ შუალედს; ბ) $(5,46; 5,48)$ შუალედს;
გ) $(5,44; 5,46)$ შუალედს.
4. $\frac{13}{30}$ -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა 0,01-მდე სიზუსტით არის
ა) 0,44; ბ) 0,45; გ) 0,43.
5. მოცემულია $x=12\pm 0,3$. მაშინ
ა) $11,7 \leq x \leq 12,3$; ბ) $11 \leq x \leq 12$; გ) $11,3 \leq x \leq 12,3$.
6. ეთქვათ, x სიდიდე მოცემულია მიახლოებითი ფორმულით: $x=a\pm h$. მაშინ ფარდობითი ცდომილება პროცენტებით გამოსახული არ აღემატება
ა) $\frac{h}{|a|} \cdot 100\%$ -ს; ბ) $\frac{a}{|h|} \cdot 100\%$ -ს, გ) $\frac{h}{|x|} \cdot 100\%$ -ს.
7. ეთქვათ, $x \approx 3,6$ და $y \approx 3,72$. მაშინ ჯამის მიახლოებითი მნიშვნელობად ვირჩევთ, ანუ $x+y$
ა) 7,33; ბ) 7,3; გ) 7,4; დ) 7,32.
8. ეთქვათ, $x \approx 8,4$ და $y \approx 3,12$. მაშინ $x-y$
ა) 5,33; ბ) 5,2; გ) 5,0; დ) 5,28.
9. ეთქვათ, $x \approx 1,25 \cdot 10^8$ და $y \approx 2,4 \cdot 10^5$. მაშინ xy
ა) $3,0 \cdot 10^3$; ბ) 10^3 ; გ) 10^{13} .
10. ეთქვათ, $a \approx 8,5 \cdot 10^3$ და $b \approx 0,17 \cdot 10^5$, მაშინ $\frac{a}{b} \approx$
ა) 50; ბ) $5,0 \cdot 10^{-1}$; გ) 10^{-2} .

§13. სიდიდის ცნება. სკალარული და ვექტორული სიდიდეები

ადამიანის პრაქტიკული მოღვაწეობის მოთხოვნილებებმა უძველესი დროიდან შექმნა აუცილებლობა სხვადასხვა (მაგრამ ერთგვაროვანი) რეალური ობიექტის ფიზიკური, გეომეტრიული და მათ მსგავს თვისებათა თანაზომადობის შემოტანისა. ასეთმა თანაზომადობამ (შედარებამ) ადამიანი ბუნებრივად მიიყვანა რიცხვთა განსახილველი სიმრავლის ყოველი ელემენტის მახასიათებლის მკვლევარისათვის საინტერესო თვალსაზრისთან, შედარების მათემატიკურ კონსტრუქციამდე. ასეთ კონსტრუქციებს წარმოადგენენ სიგრძის, ფართობის, მოცულობის, მასის, ტემპერატურის, დროის და ა.შ. გაიზომვის ხერხები. ამ კონსტრუქციებში განსახილველი სიმრავლის ზოგიერთი ელემენტი შეირჩევა ერთეულად, ხოლო დანარჩენი ელემენტები გაიზომებიან ამ ერთეული ელემენტის დახმარებით. რის შედეგადაც მიიღება მათი დამახასიათებელი (გამზომი) რიცხვი. აღწერილი კონსტრუქციები შეიძლება საფუძვლად დაედოს მათემატიკურ აბსტრაქციას, რომელსაც მიეყვარათ სიდიდის მათემატიკურ ცნებამდე.

ჯერ კიდევ ევკლიდეს „საწყისებში“ იყო ნათლად ჩამოყალიბებული თვისებები იმ სიდიდეებისა, რომლებსაც ამჟამად, სხვა განზოგადებისაგან განსხვავებით, დადებით სკალარულ სიდიდეებს უწოდებენ. ეს პირველსაწყისი ცნება არის უშუალო განზოგადება უფრო კონკრეტული ცნებებისა: სიგრძის, ფართობის, მოცულობის და ა.შ.

ამბობენ, რომ მოცემულია სიდიდე, თუ ცნობილია A ობიექტების სიმრავლე და ამ სიმრავლეზე ტოლობის დამოკიდებულება ($=$), მეტობის დამოკიდებულება ($>$), ნაკლებობის დამოკიდებულება ($<$) და შეკრების ოპერაცია ($+$), ე.ი. ყველა ერთგვაროვანი სიდიდის სისტემათა საზღვრებში გვაქვს:

1. ნებისმიერი ორი ერთგვაროვანი a და b სიდიდისათვის ($a, b \in A$) გვაქვს დამოკიდებულებები: ან $a=b$, ან $a<b$, ან $a>b$.
2. თუ $a<b$ და $b<c$, მაშინ $a<c$ (ტრანზიტულობა).
3. ნებისმიერი $a, b \in A$ -სთვის არსებობს ცალსახად განსაზღვრული $c \in A$, ისე რომ $a+b=c$.

4. $a+b=b+a$ (შეკრების კომუტატიურობა).
5. $a+(b+c)=(a+b)+c$ (შეკრების ასოციაციურობა).
6. $a+b>a$ (შეკრების მონოტონურობა).
7. თუ $a>b$, მაშინ არსებობს ერთადერთი c სიდიდე, ისეთი, რომ $b+c=a$ (გამოკლების შესაძლებლობა).
8. ნებისმიერი $a, b \in A$ სიდიდეებისათვის არსებობს ნატურალური $n \in N$ რიცხვი ისეთი, რომ $nb > a$ (ე.წ. არქიმედეს, ან ეედოქსის აქსიომა).

9. როგორიც არ უნდა იყოს $a \in A$ და ნატურალური $n \in N$ რიცხვი, მოიძებნება $b \in A$ ისეთი სიდიდე, რომ $nb = a$ (გაყოფის შესაძლებლობა).

1-9 აქსიომებით აგებული სიდიდის ცნება სრულად არ აღწერს მონაკვეთების სიგრძეთა გაზომვას, რადგან ამ შემთხვევაში არსებობს უთანაზომო მონაკვეთები. ამ მხრივ 1-9 აქსიომები ივსება შემდეგი აქსიომით:

10. ეთქვათ, სიდიდეთა მიმდევრობას $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n, \dots; a_i \in A$, სადაც $i=1, 2, \dots, n, \dots$ ახასიათებს თვისება $a_1 < a_2 < \dots < a_i < \dots < a_n < \dots$, ხოლო მიმდევრობას $b_1, b_2, \dots, b_j, \dots, b_n, \dots; b_j \in A$, სადაც $j=1, 2, \dots, n, \dots$ ახასიათებს თვისება $b_1 > b_2 > \dots > b_j > \dots > b_n > \dots$; ამასთან $a_i < b_j$ ნებისმიერი $i, j \in N$ -სათვის. დაეუშვათ, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის სრულდება პირობა $|a_n - b_n| < \varepsilon$, მაშინ არსებობს ერთადერთი ელემენტი $c \in A$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს $a_i < c$ და $c < b_j$ ნებისმიერი i და j -სათვის N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლიდან.

თვისებები 1-10 იძლევა დადებით სკალარულ სიდიდეთა სისტემის თანამედროვე ცნებას.

სკალარულია ისეთი სიდიდე, რომელიც ხასიათდება მხოლოდ რიცხვით, მიმართულების ან რომელიმე სხვა შეფასების გათვალისწინების გარეშე. ასეთი სიდიდეებია, მაგალითად: სიგრძე, ფართობი, მოცულობა, ტემპერატურა, სიმკვრივე და სხვა.

ცნობილია, რომ ობიექტებისა და მოვლენების ყველა თვისების გაზომვა არ შეგვიძლია, მაგალითებად შეგვიძლია დავასახელოთ მრავალი ცნება ფსიქოლოგიიდან, პედაგოგიიდან, ბიოლოგიიდან და ა.შ. ასეთებია: ნებისყოფა, სიმამაცე, ძლიერება, სიყვარული, გემოვნება, შიში, გულადოვნება და სხვა. ზოგჯერ ამ ცნებებსაც სიდი-

დეებს უწოდებენ. მაგრამ მათემატიკური სიდიდეებისაგან განსხვავებით მათ ლატენტური სიდიდეები ჰქვია. ასეთ სიდიდეთა შედარება მხოლოდ ინტუიციურ დონეზე ხდება. თუ ამბობენ, რომ პეტრეს უფრო მეტი სიმაძაძე გააჩნია, ვიდრე პაელეს, მაშინ სიმაძაძის ხარისხზე მსჯელობენ რომელიმე კონკრეტულ სიტუაციაში მხოლოდ პეტრესა და პაელეს ქცევის ხასიათის მიხედვით, მათ მიერ შესაბამის სიტუაციაში სიმაძაძის გამოქვეყნების მიხედვით. ჩვენ ვერ შევარჩევთ სიმაძაძის ან სიყვარულის ერთეულებს და ამიტომ არ შეიძლება გაიზომოს ეს სიდიდეები, შეფასდეს ისინი რაიმე რიცხვებით.

სიდიდის ცნება ისტორიულად განიცდიდა მრავალგზის განზოგადებას. კერძოდ, ძალის, სიჩქარის, დრეკადი ძაბვების შესწავლამ მიგვიყვანა არასკალარული სიდიდეების – ვექტორისა და ტენზორის (ცნებადღე. ეს ცნებებიც ითვლებიან სიდიდეებად, თუმცა ზემოთ მითითებული მრავალი აქსიომა მათთვის არამართებულია (ისინი შეიძლება შეეკრიბოთ, მაგრამ მათთვის აზრს კარგავს უტოლობის მიმართება).

ლათინურად *scalaris* – ქართულად კიბისებრს, საფეხურებიანს ნიშნავს, ხოლო ვექტორი – ლათინურად *vector* – ქართულად გადამტანს შეესაბამება.

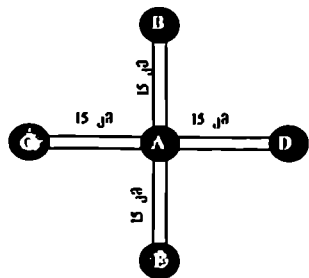
ვექტორის ცნება მნიშვნელოვან როლს თამაშობს თანამედროვე მათემატიკაში და მის გამოყენებით დარგებში. ვექტორები გამოიყენება გალილეი-ნიუტონის თანამედროვე კლასიკურ მექანიკაში, ალბათობათა თეორიაში, კვანტურ ფიზიკაში, მათემატიკურ ეკონომიკაში და სხვა დარგში.

ვექტორის სიგრძისათვის აღნიშვნა $|AB|$ შემოიღო განსმა (1905), ვექტორის სიგრძის სახელწოდება ვექტორის „მიღული“ კი – არ განმა ლათინურიდან *modulus* – „ზომა“ (1814), შემდგომ მას კოშიც იყენებდა. ჰამილტონი და ხევისაიდი იყენებდნენ სიტყვას *tensor* (ლათინურად *tendo* – დაჭიმვა, გაჭიმვა). გრასმინი იყენებდა სახელწოდებას *Inhaltbegriff* – „სიდიდე“.

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა:

ტურისტები მოძრაობენ 5 კმ/სთ სიჩქარით. 11 საათზე ისინი იმყოფებიან A პუნქტში (ადგილმდებარეობის გეგმა მოცემულია ნახაზ-

ზე). სად იქნებიან ტურისტები 14 საათზე, თუ ისინი მოძრაობენ მხოლოდ აღნიშნული გზებიდან რომელიმეზე? (A პუნქტიდან პირდაპირი გზა მიდის B, C, D და E პუნქტებამდე და თითოეული A პუნქტიდან დაშორებულია 15 კმ-ით).



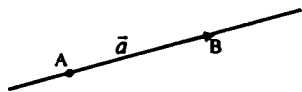
(ცხადია, რომ ამ ამოცანის კითხვაზე პასუხის გაცემა შეუძლებელია, რადგან კონკრეტულად არ არის ცნობილი, თუ ამ ოთხი გზიდან რომელზე მოძრაობდნენ ტურისტები, ე.ი. არ ვიცით ტურისტების

მოძრაობის მიმართულება. ამოცანის პირობიდან შეგვიძლია გავიგოთ მხოლოდ ის, რომ ტურისტები 14 საათზე გაივლიდნენ $(14-11) \cdot 5 = 15$ კილომეტრს.

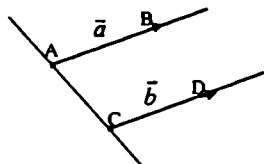
მაშასადამე, ზოგიერთი სიდიდე საცხებით განისაზღვრება თავისი რიცხვითი მნიშვნელობით (მაგალითად: სიგრძე, კუთხის ზომა, ტემპერატურა, ადამიანის ასაკი და სხვა), ასეთ სიდიდეებს სკალარულ სიდიდეებს უწოდებენ. ზოგიერთ სიდიდეს კი გარდა რიცხვითი მნიშვნელობისა ახასიათებს მიმართულებაც. ასეთ სიდიდეებს ვექტორულ სიდიდეებს უწოდებთ; მაგალითად, ვექტორული სიდიდეებია: სიჩქარე, ძალა, აჩქარება და სხვა.

ვექტორულ სიდიდეს მიმართული მონაკვეთით გამოვსახავთ. ვექტორის ერთ-ერთი ბოლო - A წერტილი - საწყისი წერტილია (სათავეა), მეორე ბოლო - B წერტილი - ბოლო წერტილია. ამ ვექტორს ასე ჩაეწეროს - $\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის სიგრძე (მოდული) ეწოდება AB მონაკვეთის სიგრძეს, მას ასე ჩაეწეროს - $|\overrightarrow{AB}|$. ვექტორებს ერთი ასოს გამოყენებითაც ჩაეწეროს, ამისათვის იყენებენ ლათინური ანბანის მცირე ასოებს: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ და ა.შ.

შევთანხმდეთ, რომ იმ ვექტორსაც განვიხილავთ, რომლის ბოლო და სათავე ერთმანეთს ემთხვევა. თუ A რაიმე წერტილია, მაშინ $\overrightarrow{AA}$ ვექტორი ნულოვანია. მას ასე ჩაეწეროს - $\vec{0}$, მისი მოდულიც 0-ია. ე.ი. $|\vec{0}| = 0$. რაიმე გარკვეული მიმართულება ამ ვექტორს არ გააჩნია, იგი ნებისმიერი მიმართულების ვექტორად შეიძლება მივიჩნიოთ.



ნახაზზე გამოსახულია ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორი, რომლებიც შესაბამისად მდებარეობენ AB და CD სხივებზე. სხივები AB და CD - AC წრფით შემოსაზღვრულ ერთ-ერთ ნახევარსიბრტყეშია, მასთან $AB \parallel CD$, მაშინ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ და



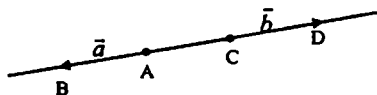
$\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ ვექტორებს თანამიმართულს ვუწოდებთ და ჩავწერთ - $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD}$, ანუ $\vec{a} \uparrow \vec{b}$.



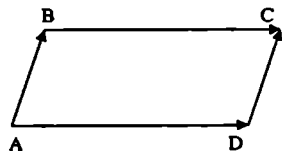
თანამიმართულია აგრეთვე ვექტორები, რომლებიც $\overrightarrow{MN}$ და $\overrightarrow{PQ}$ მიმართული მონაკვეთებით არიან გა-

მოსახული, ისინი a წრფეზე მდებარეობენ, $\overrightarrow{MN} \uparrow \overrightarrow{PQ}$.

თუ ვექტორები ერთ წრფეზე ან პარალელურ წრფეებზეა განლაგებული და ისინი არ არიან თანამიმართული, მაშინ მათ საწინააღმდეგოდ მიმართულ ვექტორებს ვუწოდებთ. ვექტორები $\vec{a}$ და $\vec{b}$ საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორებია.



თუ ორი არანულოვანი ვექტორი თანამიმართულია და მასთან მათ ტოლი სიგრძეები გააჩნიათ, მაშინ ამ ვექტორებს ტოლი ვექტორები ეწოდებათ. თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ტოლი ვექტორებია, მაშინ ჩავწერთ - $\vec{a} = \vec{b}$. მაგალითად, თუ $ABCD$ პარალელოგრამია, მაშინ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ და $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$.



ამრიგად, $\vec{p} = \vec{q}$ ტოლობა ნიშნავს: 1.

$|\vec{p}| = |\vec{q}|$ - $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორებს ტოლი სიგრძეები აქვთ, ანუ მათი მოდულები ერთმანეთის

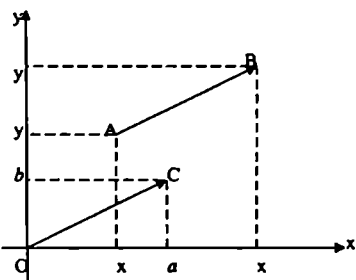
ტოლია. 2. $\vec{p} \uparrow \vec{q}$ - $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორები თანამიმართულია.

ნებისმიერი ორი ნულოვანი ვექტორი ტოლად ითვლება.

სიბრტყის ნებისმიერ წერტილზე შეიძლება მოვდოთ მოცემული ვექტორის ტოლი ვექტორი, თანაც ერთადერთი.

თუ $A=(x_1, y_1)$ და $B=(x_2, y_2)$, მაშინ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია x_2-x_1 და y_2-y_1 , მასთან ეწერთ: $\overrightarrow{AB} = (x_2-x_1; y_2-y_1)$ ან

ასე $\overline{AB} (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. ტოლ ვექტორებს ტოლი კოორდინატები აქვთ და პირიქით - ტოლი კოორდინატების მქონე ვექტორები ტოლია. თუ $\overline{AB}$ ვექტორს სათავეზე მოვდებთ - $\overline{AB} = \overline{OC}$ და $C = (a; b)$, მაშინ $a = x_2 - x_1$ და $b = y_2 - y_1$.
 ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელი ფორმულის გამოყენებით

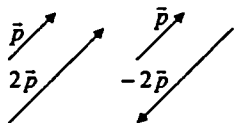


შეიძლება ვიპოვოთ $\overline{AB}$ ვექტორის სიგრძე -
 $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

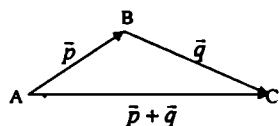
მაშასადამე, თუ $\overline{AB} = (m; n)$, მაშინ $|\overline{AB}| = \sqrt{m^2 + n^2}$

თუ $p \neq 0$ და $k \neq 0$, მაშინ p ვექტორისა და k რიცხვის ნამრავლი არის ვექტორი (იგი $k \cdot p$ -თი აღენიშნოთ), რომელიც ასე განისაზღვრება: 1. $|k \cdot p| = |k| \cdot |p|$; 2. თუ $k > 0$, მაშინ $k \cdot p$ და p ვექტორები თანამიმართული ვექტორებია; ხოლო თუ $k < 0$, მაშინ $k \cdot p$ ვექტორი და p ვექტორი საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორებია.

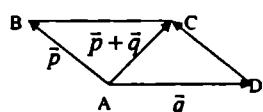
მაგალითად, ეთქვათ p ვექტორი გავამრავლოთ 2-ზე, მაშინ p ვექტორი და $2p$ ვექტორი თანამიმართული ვექტორებია; ხოლო p ვექტორი და $-2p$ ვექტორი საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორებია.



განვიხილოთ ვექტორების შეკრება. ეთქვათ, A წერტილზე მოვდეთ p ვექტორი - $p = \overline{AB}$, B წერტილზე მოვდოთ q ვექტორი - $q = \overline{BC}$, მაშინ p და q ვექტორების ჯამი $\overline{AC}$ ვექტორია. ამრიგად, $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$. შეკრების ეს წესი ვექტორთა შეკრების სამკუთხედის წესია.



შეიძლება ორი p და q ვექტორი პარალელოგრამის წესითაც შევკრიბოთ. $ABCD$ პარალელოგრამია, მაშინ $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$, ანუ $p + q = \overline{AC}$. იმავე შე-



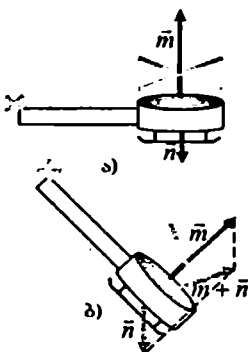
დებს მოგკემს სამკუთხედის წესით შეკრებაც -
 $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = \vec{q} + \vec{p}$.

თუ $\vec{p} = 0$, ან $k=0$, მაშინ $k \cdot \vec{p} = \vec{0}$.

(-1) $\vec{p}$ ვექტორი არის $\vec{p}$ ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი, მას ასე
 ჩაეწეროთ: $-\vec{p}$.

განვიხილოთ შეეულმფრენზე მოქმედი ძა-
 ლები, როგორც აურენის მომენტში, ისე მისი
 მოძრაობის დროს.

ა) ნახაზზე შეეულმფრენზე მოქმედებს -
 ხრახნის ძალა, რომელიც ზევით არის მიმარ-
 თული და მეორე - $\vec{m}$ სიმძიმის ძალა, რომე-
 ლიც ქვევითაა მიმართული. ამ ვექტორების
 სიგრძეები ამ ძალების რიცხვითი მნიშვნელო-
 ბების ტოლია (მოცემულ ერთეულებში). (ცხა-



დია, $|\vec{m}| > |\vec{n}|$ და ამიტომ შეეულმფრენი მაღლა ადის. ბ) ნახაზზე შეე-
 ულმფრენი გადახრილია, $\vec{m}$ და $\vec{n}$ ძალები ერთ წრფეზე არ მდებარე-
 ლობენ და ამიტომ იგი მოძრაობს $\vec{k} = \vec{m} + \vec{n}$ ვექტორის მიმართულე-
 ბით.

ჩამოვთვალოთ ვექტორზე მოქმედების თვისებები, ნებისმიერი
 $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ ვექტორებისათვის და λ, μ რიცხვებისათვის გვაქვს:

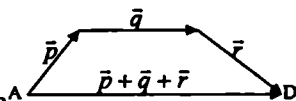
1. $\vec{p} + \vec{q} = \vec{q} + \vec{p}$.
2. $(\vec{p} + \vec{q}) + \vec{r} = \vec{p} + (\vec{q} + \vec{r})$.
3. $\vec{p} + \vec{0} = \vec{p}$.
4. $\vec{p} + (-\vec{p}) = \vec{0}$.
5. $\lambda(\vec{p} + \vec{q}) = \lambda\vec{p} + \lambda\vec{q}$.
6. $(\lambda + \mu) \cdot \vec{p} = \lambda\vec{p} + \mu\vec{p}$.
7. $1 \cdot \vec{p} = \vec{p}$.
8. $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{p}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{p}$.

მაშასადამე, სამი ვექტორის ჯამი შეიძლება ასე განესაზღვროთ:

$$\vec{p} + \vec{q} + \vec{r} = (\vec{p} + \vec{q}) + \vec{r},$$

$$\overline{AD} = \vec{p} + \vec{q} + \vec{r}.$$

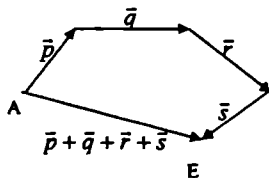
ანალოგიურად, შეიძლება განესაზღვროთ



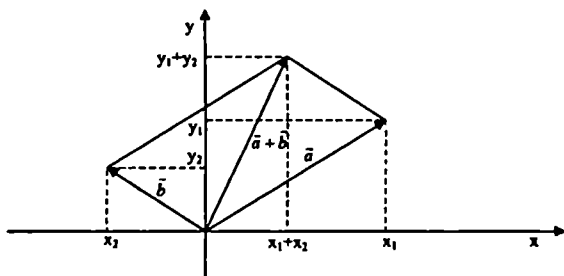
ოთხი და მეტი ვექტორის ჯამი,

$$\overline{AE} = \overline{p} + \overline{q} + \overline{r} + \overline{s}.$$

თუ ვექტორები კოორდინატებითაა მოცემული, მაშინ გვაქვს:

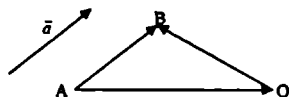


1. ვექტორის რიცხვზე გამრავლებისას ვექტორის კოორდინატები მრავლდება ამ რიცხვზე; თუ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ და m ნებისმიერი რიცხვია, მაშინ $m\vec{a} = (ma_1; ma_2)$.
2. ვექტორების შეკრებისას შესაბამისი კოორდინატები იკრიბება; თუ $\vec{a} = (x_1; y_1)$ და $\vec{b} = (x_2; y_2)$, მაშინ $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$.



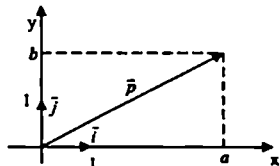
$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სხვაობას ასე განვსაზღვრავთ:
 $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

ცხადია, $\vec{a} = \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ (სადაც O სიბრტყის ნებისმიერი წერტილია). მართლაც, $-\overline{OA} = \overline{AO}$ და

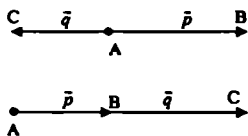
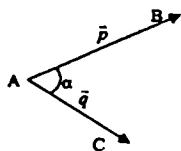


$$\overline{OB} - \overline{OA} = \overline{OB} + (-\overline{OA}) = \overline{OB} + \overline{AO} = \overline{AO} + \overline{OB} = \overline{AB} = \vec{a}.$$

საკოორდინატო ღერძების ორტები (მგეზავები, ბერძნულად — იპშიძ ქართულად სწორს შეესაბამება, ე.ი. მოცემული ვექტორის ან ღერძის მიმართულება) ეუწოდოთ $\vec{i} = (1; 0)$ და $\vec{j} = (0; 1)$ ვექტორებს. თუ $\vec{p} = (a; b)$, მაშინ $\vec{p} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$. $\vec{p}$ ვექტორის ასეთი სახით წარმოდგენას ეწოდება ვექტორის საკოორდინატო ღერძების მიმართ დაშლა.



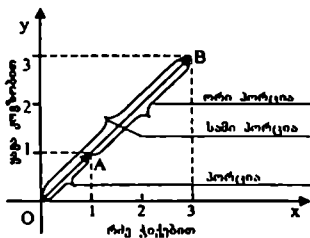
კუთხე ორ ვექტორს შორის ეუწოდოთ $\angle BAC$ და $\angle CAB$ სხივებს შორის



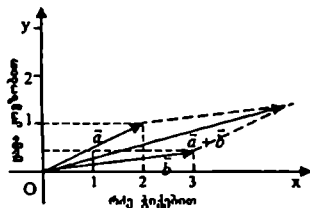
α კუთხეს (იგულისხმება, რომ $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორები მოდებულია ერთსა და იმავე A წერტილში), თუ $\vec{p} = \overline{AB}$ და $\vec{q} = \overline{AC}$, რომელიც აკმა-

ყოფილებს პირობას - $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$. საწინააღმდეგოდ მიმართულ ვექტორებს შორის კუთხე 180° -ის ტოლია, ხოლო თანამიმართულ ვექტორებს შორის კუთხე 0° -ს უდრის.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი. ყავის მომზადების სხვადასხვა რეცეპტი არსებობს, ზოგს შავი ყავა უყვარს, ზოგიერთი ამჯობნებს ყავა რძით მოამზადოს; ჩვენ შევჩერდეთ ამ უკანასკნელზე. ეთქვათ, პორცია ყავა მოვაზადეთ - ერთი კოეზი ყავით და ერთი ჭი-



ქა რძით, თუ ამ რეცეპტით გამზადებულ ყავას დაემატებოთ ზუსტად ასე მომზადებულ ორჯერ მეტ პორციას, შეიძლება ეთქვათ, რომ ყავის პორცია გავამრავლეთ სამზე, ხოლო თუ მას დაემატებოთ იგივე რეცეპტით გამზადებულ ნახევარ პორციას, მაშინ ვიტყვით, რომ ყავის პორცია გავამრავლეთ 1,5-ზე.

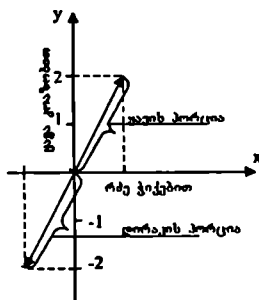


ესლა განვიხილოთ სხვადასხვა რეცეპტით მომზადებული ორი ყავის პორცია და შემდეგ შევურიოთ ერთმანეთს, ამით მოვახდენთ მათ შეკრებას.

$\vec{a}$ ვექტორით აღვნიშნოთ I რეცეპტით მომზადებული ყავა, ხოლო $\vec{b}$ ვექტორით II რეცეპტით მომზადებული ყავა, მაშინ მათი ნარევი იქნება $\vec{a} + \vec{b}$ ვექტორი.

რაც შეეხება ნულოვან ვექტორს - ამ შემთხვევაში შეიძლება ცარიელი ჭიქა ჩავთვალოთ ნულოვან ვექტორად, რომელიც არც ერთ კოეზ ყავას და არც ერთ წვეთ რძეს არ შეიცავს. შევეცადოთ ავაგოთ რაიმე რეცეპტით მომზადებული ყავის - შესაბამისი ვექტორის - საწინააღმდეგო მიმართულების ვექტორი. ერთხელ, საახალწლო ზეიმზე, ცნობილ ინგლისელ ფიზიკოსს პოლ დირაკს დაუსვეს სახუმარ-

რო ამოცანა ამოსახსნელად. ეს ამოცანაა: სამი მეთევეზე თევზაობდა. მათ შემოადამდათ, ისინი თავთავიანთ კარავში შევიდნენ ღამის გასათევად და რადგან ძალზე ბნელოდა, გადაწყვიტეს ნადავლი დილით თანაბრად გაეყოთ. პირველმა მეთევეებმა, რომელმაც დილით ყველაზე ადრე გაიღვიძა, თევზების გადათელისას აღმოაჩინა, რომ თევზების ოდენობა სამზე გაყოფისას ნაშთს 1-ს იძლეოდა, ამიტომ ერთი თევზი ტბაში გადააგდო, თავისი წილი აიღო და წავიდა. მეორე მეთევეებმაც აღმოაჩინა, რომ თევზების ოდენობა სამზე გაყოფისას ნაშთს 1-ს იძლეოდა, ამიტომ მანაც ერთი თევზი ტბაში გადააგდო, თავისი წილი აიღო და წავიდა. ასევე მოიქცა მესამე მეთევემაც, მანაც აღმოაჩინა, რომ ერთი თევზი ზედმეტი იყო, ამიტომ ერთი თევზი მანაც ტბაში ჩააგდო, აიღო დარჩენილის მესამედი და წავიდა. სულ რამდენი თევზი დაიჭირეს მეთევეებმა, თუ ყოველი შესაძლო მნიშვნელობიდან თევზების ოდენობა ნულთან ახლოს მდგომი მთელი რიცხვია? (ამ ამოცანის პასუხი ნატურალურ რიცხვებში 25-ის ტოლია). ღირაკის პასუხი მოულოდნელი იყო, მან თქვა: – მეთევეებმა -2 (მინუს ორი) თევზი დაიჭირეს. პასუხი პარადოქსულია, მაგრამ სწორი.



მაშასადამე, თუ მოცემული გეაქვს რაიმე რეცეპტით მომზადებული ყავა, მაგალითად 2 კოვზი ყავით და 1 ჭიქა რძით, მაშინ შეიძლება ავაგოთ მისი შესაბამისი ვექტორის საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორი და მას ვუწოდოთ ყავა მომზადებული ღირაკის რეცეპტით, კერძოდ: ყავა -2 კოვზით და რძე -1 ჭიქით.

ამრიგად, ვექტორულ სიდიდედ შეიძლება განვიხილოთ არა მხოლოდ სიჩქარე, ძალა, აჩქარება და ა.შ. არამედ იმ სიმრავლის ელემენტებიც, რომელთათვისაც განსაზღვრულია შეკრების ოპერაცია და გამრავლება რიცხვზე, რომლებიც ზემოთაღნიშნულ თვისებებს აკმაყოფილებს.

13.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. 80 კილომეტრი მოტოციკლისტმა 4 საათში გაიარა, ველოსიპედისტმა - 5 საათში, რომლის სიჩქარეა მეტი და რამდენჯერ?
2. მსუბუქმა ავტომობილმა 400 კმ 5 საათში გაიარა. რა დროში გაივლის იგივე მანძილს ავტობუსი, რომლის სიჩქარე მსუბუქი ავტომობილის სიჩქარეზე 1,6-ჯერ ნაკლებია?
3. გამოცდაზე 40 ამოცანის ამოსახსნელად 3 საათია განკუთვნილი.
ა) საშუალოდ რამდენი წუთი აქვს მოსწავლეს თითო ამოცანის ამოსახსნელად? ბ) თომამ პირველი 8 ამოცანის ამოსახსნაზე 1 სთ და 5 წთ დახარჯა. საშუალოდ რამდენი წუთი დარჩა მას დარჩენილი ამოცანებიდან თითოეულის ამოსახსნელად?
4. ეთქვათ, დოლარის კურსი შესაბამისად არის - 100 დოლარი იცვლება 246 ლარში. რამდენი დოლარი უნდა გადაახურდოს ამერიკელმა ტურისტმა, იმისათვის, რომ 615 ლარიანი ნივთი იყიდოს?
5. 4 კგ კანფეტი 48 ლარი ღირს, რა ღირს ა) 1 კგ კანფეტი? ბ) 250 გ კანფეტი? გ) 1,5 კგ კანფეტი?
6. 50 კვადრატული მეტრი იატაკის შესაღებად 3 კგ საღებავი დაიხარჯა. რა რაოდენობის საღებავია საჭირო 70 კვადრატული მეტრი იატაკის შესაღებად?
7. კატარღის საკუთარი სიჩქარე 19 კმ/სთ-ია, მდინარის დინების სიჩქარეა - 2,8 კმ/სთ. კატარღამ დინების მიმართულებით 4 სთ იმოძრავა, დინების საწინააღმდეგოდ - 5 სთ. სულ რა მანძილი გაიარა კატარღამ?
8. კატარღა, რომლის საკუთარი სიჩქარეა 20 კმ/სთ, დინების მიმართულებით 6 სთ-ში 147 კმ გაიარა. იპოვეთ: ა) მდინარის დინების სიჩქარე; ბ) კატარღის სიჩქარე დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით მოძრაობისას.
9. სამშენებლო კომპანიამ 125 კმ გზის გაყვანაში 4,5 მილიონი ლარი მიიღო. გამოთვალეთ, რა დაჯდა ერთი კილომეტრი გზის გაყვანა?
10. ორმა მეგობარმა კაზინოში გარკვეული თანხა მოიგო. მათ თანხა შუაზე გაიყვეს. ერთი მათგანი ყოველთვიურად 200 ლარს

ხარჯავდა მოგებული თანხიდან, ხოლო მეორე კი – 250 ლარს, ამიტომ მეორე მეგობარს მოგებული თანხა 5 თვით ადრე გაუთავდა, ვიდრე პირველს. სულ რა თანხა მოიგეს მათ კაზინოში?

11. ორი პუნქტიდან, რომელთა შორის მანძილი 140 კმ-ია, ერთდროულად ერთმანეთის შესახვედრად ორ ელოსიპედისტი გამოვიდა, პირველის სიჩქარე 15 კმ/სთ, ხოლო მეორის 20 კმ/სთ-ია. ერთ-ერთ ელოსიპედისტთან ერთად იმავე მიმართულებით საათში 30 კილომეტრის სიჩქარით გამოფრინდა ფრინველი, რომელიც მეორე ელოსიპედისტთან შეხვედრისთანავე უკან ბრუნდება პირველთან შეხვედრამდე, რის შემდეგ ისევ უკან ბრუნდება და მეორესთან შეხვედრისთანავე კვლავ პირველთან ბრუნდება და ასე შემდეგ მანამდე, სანამ ელოსიპედისტები ერთმანეთს არ შეხვდებიან. რამდენ კილომეტრს გაიფრენს ფრინველი?
12. თანაბრად გაუნაწილეთ 12 კაცს 10 ფორთოხალი ისე, რომ თითოეული ფორთოხალი 12-ზე ნაკლებ ტოლ ნაწილად გაიჭრას.
13. ყვაეები თითო-თითოდ სხდებოდნენ ვერხვებზე, მაგრამ ერთი ვერხვის ხე დააკლდათ; ორ-ორნი რომ დასხდნენ ერთი ვერხვი ზედმეტი აღმოჩნდებოდა. რამდენი ყვაეი და რამდენი ვერხვის ხე იყო?
14. სამი მგზავრი სასტუმრო ბაკში გაჩერდა და კარტოფილი მოითხოვა; სანამ სასტუმრო ბაკის მეპატრონე კარტოფილს ხარშავდა მგზავრებს ჩაეძინათ. რამდენიმე ხნის შემდეგ, როცა კარტოფილი მოტანილი იყო, ერთ მგზავრს გამოეღვიძა, მაგიდაზე კარტოფილი დაინახა, თავისი წილი (ე.ი. მესამედი) შეჭამა და ისევ დაიძინა; შემდეგ მეორემ გაიღვიძა, იფიქრა, რომ სხვებზე ადრე გაიღვიძა, დაითვალა კარტოფილი, მესამედი შეჭამა და დაიძინა; ბოლოს მესამემ გაიღვიძა, და რადგან არ იცოდა, რომ ორმა მისმა თანამგზავრმა უკვე ჭამა კარტოფილი, მესამედი ნაწილი შეჭამა და ისევ დაიძინა. დილით ყველაფერი გამოირკვა: აღმოჩნდა, რომ თეფშზე 8 ცალი კარტოფილი დარჩა. რამდენი კარტოფილი იყო მიტანილი თავდაპირველად და როგორ უნდა გაიყონ დარჩენილი კარტოფილი?
15. ერთი მუშა დღეში იმდენ ლარს იღებდა, რამდენ დღესაც მუშაობდა; მეორე მუშა დღეში ერთი ლარით მეტს იღებდა პირველ-

ზე, მაგრამ 1 დღით ნაკლები იმუშავა, რომელმაც მათგანმა მიიღო მეტი ფული?

16. ამოცანის ამოხსნისათვის მოსწავლეს რაღაც რიცხვი უნდა გამრავლებინა 3-ზე და შედეგისათვის მიემატებინა 4; ამის ნაცვლად მან რიცხვი 4-ზე გაამრავლა და 3 გამოაკლო. ამის მიუხედავად, მან სწორი პასუხი მიიღო. რა რიცხვი შეხვდა მას ამოცანაში?
17. ავტომაგისტრალზე მოძრაობს ორი ავტომობილი, ერთი – 80 კმ/სთ სიჩქარით, მეორე – 60 კმ/სთ სიჩქარით, იგულისხმება, რომ ავტომაგისტრალის ნაპირები პარალელურ წრფეებს წარმოადგენენ. განსაზღვრეთ პირველი ავტომობილის მეორის მიმართ სიჩქარის სიდიდე, თუ ეს ავტომობილები მოძრაობენ: ა) ერთმანეთის საპირისპირო მიმართულებით; ბ) ერთი და იმავე მიმართულებით.
18. საკოორდინატო სისტემაზე მოცემულია წერტილები: $A(1;5)$, $B(-3;5)$, $C(1;-1)$ და $D(1;-7)$. იპოვეთ $|\overline{AB}|$ და $|\overline{CD}|$.
19. საკოორდინატო სისტემაზე მოცემულია წერტილები: $A(3;5)$, $B(6;6)$. იპოვეთ $\overline{AB}$ ვექტორის მოდული.
20. ეთქვათ მოცემულია წერტილები: $B(a_1;b_1)$, $C(a_2;b_2)$, $A(a;b)$, $O(0;0)$; $a_2 - a_1 = a$ და $b_2 - b_1 = b$. გამოსახეთ a და b რიცხვებით $\overline{OA}$ და $\overline{BC}$ ვექტორების მოდულები.
21. საკოორდინატო სისტემაზე მოცემულია წერტილები: $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(4;5)$ და $D(7;0)$. იპოვეთ $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ და $\overline{BD}$ ვექტორების მოდულები.
22. საკოორდინატო სისტემის ღერძები ისეა შერჩეული, რომ OX ღერძი აღმოსავლეთითაა მიმართული, OY ღერძი – ჩრდილოეთით. კოორდინატთა სათავიდან გამოსული მატერიალური წერტილი გადაადგილდება ჯერ ჩრდილო-აღმოსავლეთით $-\sqrt{2}$ ერთეულით, შემდეგ სამხრეთით -7 ერთეულით და ბოლოს სამხრეთ-აღმოსავლეთით $5\sqrt{2}$ ერთეულით.
ა) იპოვეთ მატერიალური წერტილის კოორდინატები ყოველი გადაადგილების დასრულებისას;

ბ) გამოსახეთ მატერიალური წერტილის გადაადგილება მოძრაობის დაწყებიდან დამთავრებამდე ვექტორის საშუალებით და იპოვეთ ამ ვექტორის კოორდინატები.

23. მოცემულია: $\vec{p} = (2; 3)$ და $\vec{q} = (4; 1)$.

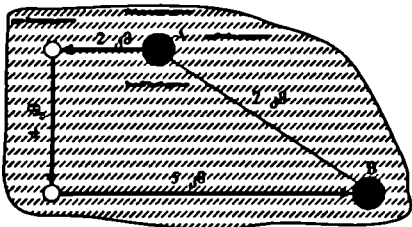
იპოვეთ: ა) $\vec{p} + \vec{q}$; ბ) $\vec{p} - \vec{q}$; გ) $2\vec{p}$; დ) $3\vec{q}$; ე) $2\vec{p} - 3\vec{q}$.

24. ცნობილია, რომ $\vec{a} = -3\vec{b}$, $|\vec{a}| = 2$. იპოვეთ $|\vec{b}|$.

25. იპოვეთ $\vec{p} + \vec{q}$ და $\vec{p} - \vec{q}$ ვექტორები, თუ $\vec{p} = \vec{i} + \vec{j}$ და $\vec{q} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.

26. იპოვეთ ერთეულოვანი ვექტორი, რომლის თანამიმართული ვექტორია $\vec{p} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$.

27. ტურისტა ჯგუფი A პუნქტიდან დასაველეოის მიმართულებით 2 კილომეტრის, სამხრეთის მიმართულებით 4 კილომეტრის და აღმოსავლეთის მიმართულებით 5 კილომეტრის გაეღის შემდეგ აღმოჩნდა B პუნქტში. ვიპოვოთ მანძილი A პუნქტიდან B პუნქტამდე.



28. ტურისტა ერთი ჯგუფი A პუნქტიდან დასაველეოით გავიდა, ხოლო მეორე ასევე A პუნქტიდან აღმოსავლეთით, ტურისტა პირველმა ჯგუფმა 8 კილომეტრის გავლის შემდეგ გეზი ჩრდილოეთით აიღო და 2 კილომეტრი გაიარა, ხოლო მეორე ჯგუფმა 4 კილომეტრის გავლის შემდეგ ასევე ჩრდილოეთის მიმართულებით 7 კილომეტრი გაიარა. რა მანძილზე იმყოფებიან ტურისტთა ჯგუფები ერთმანეთისაგან?



29. მოცემულია $A(4; 4)$, $B(7; 1)$ წერტილები. C და D წერტილები შესაბამისად y და x ღერძებს ეკუთვნის, $\overline{AB} = \overline{CD}$. იპოვეთ C და D წერტილების კოორდინატები.

30. მოცემულია $A(2; -7)$, $B(1; 3)$, $C(4; -1)$ წერტილები. ცნობილია, რომ $\overline{AB} = \overline{CD}$. იპოვეთ D წერტილის კოორდინატთა წყვილი.

13.1.1. ტესტი №12

1. ეთქვათ, ა, ბ და ი ასოებიდან ყოველი ერთ გარკვეულ ციფრს აღნიშნავს. ცნობილია, რომ ბი რიცხვი აი-ზე ორჯერ მეტია:

$$\begin{array}{r} \text{აი} \\ \times \quad 2 \\ \hline \text{ბი} \end{array}$$

მაშინ მცდარია წინადადება –

- ა) ა აუცილებლად ღუწი რიცხვია,
 ბ) ბ აუცილებლად ღუწი რიცხვია,
 გ) ი=0, დ) ა ნაკლებია 5-ზე.
2. ტემპერატურა
 ა) ვექტორული სიდიდეა, ბ) სკალარული სიდიდეა,
 გ) ზოგჯერ ვექტორული სიდიდეა,
 დ) ზოგჯერ სკალარული სიდიდე არ არის.
3. ვექტორულ სიდიდეს (ვექტორს) ახასიათებს
 ა) მხოლოდ რიცხვითი მნიშვნელობა,
 ბ) რიცხვითი მნიშვნელობა და მიმართულება,
 გ) მხოლოდ მიმართულება.
4. კუთხის ზომა
 ა) ვექტორული სიდიდეა, ბ) ზოგჯერ ვექტორული სიდიდეა,
 გ) სკალარული სიდიდეა,
 დ) ზოგჯერ სკალარული სიდიდე არ არის.
5. ნულოვანი ვექტორი „მიმართული მონაკვეთია“, რომლის სათავე და ბოლო
 ა) ორი სხვადასხვა წერტილია, ბ) ერთი წერტილია,
 გ) ერთმანეთს არ ემთხვევა,
 დ) შეიძლება ერთი წერტილი არ იყოს.
6. ეთქვათ, $\vec{p} = (3;4)$, მაშინ $|\vec{p}| =$
 ა) 4, ბ) 3, გ) 5, დ) 2.
7. ეთქვათ, $\vec{p} = (2;5)$, $\vec{q} = (-1;3)$, მაშინ $\vec{p} + \vec{q} =$
 ა) (3;2), ბ) (1;8), გ) (-3;8), დ) (1;-2).
8. ეთქვათ, $\vec{p} = (-2;5)$, მაშინ $2\vec{p} =$
 ა) (-4;-10), ბ) (-4,5), გ) (-4;10), დ) (4;-10).
9. ერთმანეთის საწინააღმდეგოდ მიმართული ნებისმიერი $\vec{p}$ და

$\vec{q}$ ვექტორებისათვის

ა) $\vec{p} + \vec{q} = \vec{0}$, ბ) $\vec{p} + \vec{q}$ შეიძლება არ იყოს ნულოვანი ვექტორი,

გ) $|\vec{p} - \vec{q}| = 2|\vec{p}|$, დ) $|\vec{p} - \vec{q}| = |\vec{p}| - |\vec{q}|$.

10. $\vec{p} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{q} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, მაშინ $\vec{p} + \vec{q} =$

ა) $3\vec{i} - 2\vec{j}$, ბ) $-2\vec{i} + 3\vec{j}$, გ) $-\vec{i} + 4\vec{j}$, დ) $-\vec{i} - 4\vec{j}$.

§14. მონაკვეთის სიზოქე და მისი ბაზომბა, სხეულის მასა და მისი ბაზომბა

არქიმედეს აქსიომიდან ნათლად ჩანს, რომ ყოველი სიდიდე შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით - ნებისმიერი $a \in A$ და $b \in A$ სიდიდეებისათვის არსებობს ნატურალური $n \in N$ რიცხვი ისეთი, რომ $nb > a$. $nb - a$ აღვნიშნოთ a_1 -ით, სადაც $a_1 > 0$ და $a_1 < b$, ე.ი. გვაქვს $a = nb + a_1$. თუ $a_1 = 0$, მაშინ $a = nb$. ხოლო, თუ $n = 0$, მაშინ $a_1 = a$.

სიდიდეთა გაზომვა ეყრდნობა საერთო საზომის ცნებას. ორი a და b სიდიდის საერთო საზომი ეწოდება ისეთ სიდიდეს, რომლისთვისაც ადგილი აქვს ტოლობებს: $a = mc$ და $b = nc$, სადაც m და n ნატურალური რიცხვებია.

საერთო საზომის მქონე სიდიდეებს თანაზომადი სიდიდეები ეწოდებათ. თუ სიდიდეები თანაზომადია, მაშინ მათ უამრავი საერთო საზომი გააჩნიათ. ცხადია, რომ საერთო საზომის ყოველი ნაწილი, აგრეთვე საერთო საზომი იქნება.

დამტკიცების გარეშე ჩამოვაყალიბოთ საერთო საზომის რამდენიმე თვისება:

1. თუ a სიდიდე b და c სიდიდეების თანაზომადია, მაშინ b და c სიდიდეებიც თანაზომადი იქნება.

2. თუ a და b სიდიდეები თანაზომადია, მაშინ თანაზომადი იქნება $a+b$ და a , აგრეთვე, $a+b$ და b სიდიდეები.

3. თუ a და b სიდიდეები თანაზომადი სიდიდეებია და მასთან $a > b$, მაშინ თანაზომადი იქნება $a-b$ და a , აგრეთვე, $a-b$ და b სიდიდეები.

4. თუ a და b თანაზომადი სიდიდეებია, მაშინ თანაზომადი იქნება ka და b , აგრეთვე, $k-b$ და a სიდიდეები, სადაც k დადებითი რაციონალური რიცხვია.

თუ ორი სიდიდე თანაზომადია, მაშინ მათი საერთო საზომი არსებობს და მისი პოვნა შეგვიძლია.

სიდიდეებს, რომელთაც საერთო საზომი არ გააჩნიათ, უთანაზომო სიდიდეები ეწოდებათ. არსებობს უამრავი უთანაზომო სიდიდე, მაგრამ პრაქტიკული მიზნების შესაბამისად, შეგვიძლია უთანაზომობა უგულებელვუყოთ, რადგან პრაქტიკაში სიდიდეთა გაზომვა ყოველთვის შეიძლება ნებისმიერი სიზუსტით.

სიდიდეთა გაზომვის პროცესი მდგომარეობს შემდეგში: უპირველეს ყოვლისა, სიდიდეთა მოცემული სიმრავლიდან ვარჩევთ ერთ გარკვეულ ელემენტს, რომელსაც ვუწოდებთ საზომ ერთეულს. შემდეგ ვახორციელებთ გაზომვის ოპერაციას (ეს ოპერაცია განხილული იქნება ცალ-ცალკე სიდიდეთა სახეების მიხედვით), რომელიც გვაძლევს საშუალებას, შერჩეული ერთეულის მიხედვით, მოცემული სიმრავლის ყოველ ელემენტს შევუსაბამოთ ნამდვილი რიცხვი - ამ სიდიდის ზომა. გაზომვის გზით ნაპოვნი ზომა უნდა აკმაყოფილებდეს ორ პირობას:

1. სიმრავლის ტოლ ელემენტებს ტოლი ზომები შეესაბამება.
2. ორი ელემენტის ჯამს შეესაბამება მათი ზომების ჯამი.

ამ პირობათა შესრულების დროს ორი ელემენტის შეფარდება (ე.ი. მათი ზომების ურთიერთგანაყოფი) არ არის დამოკიდებული ერთეული ელემენტის შერჩევისაგან.

მონაკვეთის სიგრძე ეწოდება არაუარყოფით სიდიდეს, რომელიც ყოველი მონაკვეთისაგან განსაზღვრულია ისე, რომ:

1. ტოლ მონაკვეთებს ტოლი სიგრძეები გააჩნია.
2. თუ მონაკვეთი შედგება მონაკვეთების სასრული რაოდენობისაგან, მაშინ მისი სიგრძე ტოლია ამ მონაკვეთების სიგრძეთა ჯამის.

მონაკვეთის სიგრძე სკალარულ-ადიციური უწყვეტი სიდიდეა და მაშასადამე, აკმაყოფილებს ასეთი სიდიდის ყველა თვისებას.

სკალარულ-ადიციური უწყვეტი სიდიდეები ხასიათდება შემდეგი თვისებებით:

სკალარულ სიდიდეთა მოცემული სიმრავლისათვის განსაზღვრულია შეკრების ოპერაცია, რომელიც გვაძლევს საშუალებას ამ სიმრავლის a და b ორი ელემენტით ცალსახად განვსაზღვროთ მესამე c ელემენტი, რომელიც ამავე სიმრავლეს ეკუთვნის. c -ს ეწოდება a -სა და b -ს ჯამი და სიმბოლურად ჩაიწერება: $a+b=c$. ჯამი ემორჩილება ა კანონებს:

1. კომუტატიურობა: $a+b=b+a$.
2. ასოციატიურობა: $a+(b+c)=(a+b)+c$.
3. მონოტონურობა: $a+b=c$, მაშინ $c>a$ და $c>b$.

ადიციური სიდიდის მაგალითებია სიგრძე, ფართობი, მოცულობა

და სხვა. სიდიდეები: სხეულის სიმკვრივე, ტემპერატურა, მართალია, სკალარული სიდიდეებია, მაგრამ ადიციურს არ წარმოადგენენ. თუ, მაგალითად ერთმანეთს შეეურევთ ორ ჭიქა წყალს, ერთს ტემპერატურით 30°C , ხოლო მეორეს ტემპერატურით 80°C , მაშინ შედეგში არ გვექნება 110°C -ის ტემპერატურის მქონე წყალი.

იმისათვის, რომ სკალარულ-ადიციური სიდიდე იყოს უწყვეტი, აუცილებელია და საკმარისი, შესრულდეს შემდეგი პირობები:

1. არქიმედეს აქსიომა. თუ $a > b$, მაშინ ყოველთვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური n რიცხვი, რომ $nb > a$, სადაც $nb = \underbrace{b + b + \dots + b}_{n\text{-ჯერ}}$.

2. მოცემული სიმრავლის ნებისმიერი a ელემენტისა და ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის ცალსახად განისაზღვრება ისეთი b ელემენტი, რომ $b = \frac{a}{n}$. ეს არის ნებისმიერი ელემენტის რაგინდ მცირე ნაწილებად უსასრულო დაყოფის შესაძლებლობა.

3. კანტორის განზოგადებული აქსიომა. გვაქვს მოცემული სიმრავლის ელემენტების ორი მიმდევრობა $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ და $a'_1, a'_2, \dots, a'_n, \dots$; რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

ა) $a_p < a'_q$ (ნებისმიერი p და q -სათვის)

ბ) $a_{n+1} > a_n$ და $a'_{n+1} < a'_n$.

გ) მოცემული სიმრავლის ნებისმიერი k ელემენტისათვის არსებობს ისეთი n , რომ $a'_n - a_n < K$, მაშინ არსებობს ერთადერთი a ელემენტი, რომელიც პირველი მიმდევრობის ყველა წევრზე მეტია და მეორე მიმდევრობის ყველა წევრზე ნაკლები.

უწყვეტი სიდიდის უმარტივესი მაგალითია სიგრძე. სიგრძისათვის სრულდება ყველა ის პირობა, რომელიც ზემოთ იყო მოცემული.

უნდა აღინიშნოს, რომ უწყვეტ სიმრავლეს უპირისპირდება დისკრეტული სიმრავლე, რომელიც შედგება ცალკეული დაუყოფელი ელემენტებისაგან. ასეთი სიმრავლის მაგალითია ვარსკვლავთა სიმრავლე გალაქტიკაში.

განვიხილოთ მონაკვეთების სიგრძეთა გაზომვის პროცესი.

მონაკვეთების სიმრავლიდან შეარჩივენ ერთ რომელიმე e მონაკვეთს და მიიღებენ მას სიგრძის ერთეულად. გასაზომი a მონაკვეთის რომელიმე ერთი ბოლოდან თანმიმდევრობით გადაზომავენ მანამ,

სანამ ეს შესაძლებელია. თუ e -ს ტოლი მონაკვეთები a -ზე მოიზომა ზუსტად n -ჯერ და e -სა და a -ს ბოლოები ერთმანეთს დაემთხვევა, მაშინ ამბობენ, რომ a მონაკვეთის სიგრძის მნიშვნელობა არის n და წერენ: $a=ne$. თუ e -ს ტოლი მონაკვეთები a -ზე მოიზომა n -ჯერ და კიდევ დარჩა e -ზე ნაკლები სიგრძის მონაკვეთი, მაშინ a მონაკვეთზე თანმიმდევრობით გადაზომავენ $e_1 = \frac{1}{10}e$ -ს ტოლ მონაკვეთებს, თუ ეს

მონაკვეთები ზუსტად მოიზომა n_1 -ჯერ, მაშინ $a = n_1 e_1$ და a მონაკვეთის სიგრძის მნიშვნელობა სასრული ათწილადია. თუ e_1 მოიზომა n_1 -ჯერ და კიდევ დარჩა e_1 -ზე ნაკლები სიგრძის მონაკვეთი, მაშინ მასზე გადაზომავენ $e_2 = \frac{1}{10}e_1$ -ის ტოლი სიგრძის მონაკვეთებს და

ა.შ. თუ ამ პროცესს წარმოვიდგენთ უსასრულოდ, მაშინ a მონაკვეთის სიგრძე გამოისახება უსასრულო ათწილადის საშუალებით. მაშასადამე, წინასწარ შერჩეული ერთეულის დროს ნებისმიერი მონაკვეთის სიგრძე შეიძლება გამოვსახოთ დადებითი ნამდვილი რიცხვით. მართებულია შებრუნებული დებულებაც. იმ შემთხვევაში, როცა მონაკვეთის გაზომვისას მიიღება უსასრულო ათწილადი, მონაკვეთის სიგრძის მნიშვნელობა შეიძლება გამოვსახოთ მიახლოებით, ნებისმიერი სიზუსტით.

a მონაკვეთის სიგრძის მნიშვნელობა e ერთეულით გაზომვის დროს აღენიშნოთ $m_e(a)$ სიმბოლოთი.

ჩამოვყალიბოთ მონაკვეთების სიგრძეთა რამდენიმე თვისება:

1. თუ ორი მონაკვეთი ტოლია, მაშინ მათი სიგრძეთა რიცხვითი მნიშვნელობებიც ტოლია და პირიქით – თუ მონაკვეთების სიგრძეთა რიცხვითი მნიშვნელობები ტოლია, მაშინ ეს მონაკვეთებიც ერთმანეთის ტოლია. $a=b \Leftrightarrow m_e(a)=m_e(b)$.

2. თუ მონაკვეთი შედგება მონაკვეთებისაგან, მაშინ მისი სიგრძის რიცხვითი მნიშვნელობა ტოლია ამ მონაკვეთების სიგრძეთა რიცხვითი მნიშვნელობების ჯამის და პირიქით:

$$c=a+b+d \Leftrightarrow m_e(a)+m_e(b)+m_e(d).$$

3. თუ a და b მონაკვეთების სიგრძეები ისეთია, რომ $b=x \cdot a$, სადაც x დადებითი ნამდვილი რიცხვია და a გაზომილია e ერთეულით, მაშინ b მონაკვეთის სიგრძის რიცხვითი მნიშვნელობის საპოვნელად, e ერ-

თეულის შემთხვევაში საკმარისია x გავამრავლოთ a მონაკვეთის სიგრძის გამომსახველ რიცხვით მნიშვნელობაზე:

$$b = x \cdot a \Leftrightarrow m_c(b) = x \cdot m_c(a).$$

4. სიგრძის ერთეულის შეცვლისას სიგრძის რიცხვითი მნიშვნელობა იზრდება (მცირდება) იმდენჯერ, რამდენჯერაც ნაკლებია (მეტია) ახალი ერთეული ძველთან შედარებით.

ჩამოთვლილი თვისებები საშუალებას იძლევა შევადაროთ მონაკვეთები და მათზე ვაწარმოოთ სხვადასხვა მოქმედებები.

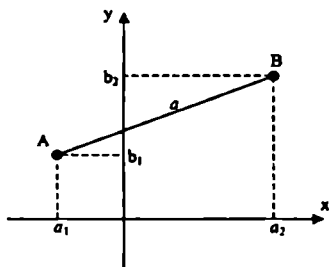
სიგრძის საზომი ერთეულებია (მეტრულ სისტემაში):

1 კილომეტრი (კმ) = 1000 მეტრი (მ);

1 მეტრი (მ) = 10 დეციმეტრი (დმ);

1 დეციმეტრი (დმ) = 10 სანტიმეტრი (სმ);

1 სანტიმეტრი (სმ) = 10 მილიმეტრი (მმ).



ეთქვათ, a მონაკვეთი მოცემულია დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში, კერძოდ მისი ბოლოების კოორდინატებია $A(a_1; b_1)$ და $B(a_2; b_2)$, მაშინ მისი სიგრძე შეიძლება გამოვთვალოთ და თუ მას აღვნიშნავთ $|a|$ -თი გვექნება:

$$|a| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$$

ეთქვათ, მოცემულია AB მონაკვეთი, რომლის ბოლო წერტილებია $A(x_1; y_1)$ და $B(x_2; y_2)$. დაეუშვათ λ რომელიმე დადებითი ნამდვილი რიცხვია. ვიტყვი, რომ M წერტილი AB მონაკვეთს ყოფს λ ფარდობით, თუ M ეკუთვნის AB წრფეს და $\frac{|AM|}{|MB|} = \lambda$. თუ M წერტილის კოორდინატებს აღვნიშნავთ x -ით და y -ით, ე.ი. $M(x; y)$, მაშინ ადვილად გამოვსახავთ მათ A და B წერტილების კოორდინატებისა და λ რიცხვის საშუალებით, კერძოდ გვექნება: $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ და $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$. თუ

M წერტილი AB მონაკვეთის შუაწერტილია, ე.ი. $\lambda = 1$, მაშინ $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

და $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

208

მასა არის ერთ-ერთი ძირითადი ფიზიკური სიდიდე. სხეულის მასის ცნება მჭიდროდაა დაკავშირებული წონის ცნებასთან. წონა არის ძალა, რომლითაც დედამიწა იზიდავს სხეულს. ამის გამო, სხეულის წონა დამოკიდებულია არა მარტო სხეულისაგან, არამედ იმისგანაც, თუ დედამიწის რომელ რეგიონში აიწონება ეს სხეული. წონა ცვალებადია ადგილმდებარეობის მიხედვით, მაგრამ ის თავისებურება გააჩნია, რომ ორი სხეულის წონათა შედარების გზით, სხეულების წონათა გაზომვისას, შედგენდება სხეულის ახალი თვისება, რომელსაც მასა ეწოდება.

თუ თეფშებიანი სასწორით სხეულს აეწონით ეკვატორზე და შემდეგ სხეულსა და საწონებს გადავიტანთ პოლუსზე, მაშინ აწონა იგივე შედეგს მოგცემს, რადგანაც სხეულმაც და საწონებმაც წონა ერთნაირად შეიცვალა. ამრიგად, სხეულის მასა უცვლელია, იგი არ არის დამოკიდებული ადგილმდებარეობაზე.

სხეულის წონის ცვლილება ადგილმდებარეობის მიხედვით გამოწვეულია დედამიწის ფორმით და მისი ბრუნვით თავისი ღერძის გარშემო. გამორკვეულია: დედამიწა 17-ჯერ უფრო სწრაფად რომ ბრუნავდეს თავისი ღერძის გარშემო, მაშინ ეკვატორზე მოთავსებულ საგნებს წონა არ ექნებოდათ.

ეთქვათ, სასწორის ერთ თეფშზე დევს a სხეული; ხოლო მეორე თეფშზე – b სხეული. შესაძლებელია სამი შემთხვევა:

1. თეფშები ერთ დონეზე დადგა. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ სასწორი გაწონასწორებულია. ე.ი. a და b სხეულების მასები ერთმანეთის ტოლია.
2. პირველი თეფში მეორესთან შედარებით მაღლა დადგა. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ a სხეულის მასა უფრო ნაკლებია, ვიდრე b სხეულის მასა.
3. მეორე თეფში პირველთან შედარებით მაღლა დადგა. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ a სხეულის მასა უფრო მეტია, ვიდრე b სხეულის მასა.

მათემატიკური თეალსაზრისით მასა არის დადებითი სკალარულ-ადიციური სიდიდე, რომელიც ხასიათდება შემდეგი თვისებებით:

1. ტოლი მასები აქვთ იმ სხეულებს, რომლებიც სასწორზე თეფ-

შებს აწონასწორებენ.

2. ერთად აღებული რამდენიმე სხეულის მასა ტოლია ამ სხეულების მასათა ჯამის.

მასა ხასიათდება იგივე თვისებები, რომლებითაც ხასიათდება სიგრძე, მაგრამ იგი განსაზღვრულია ფიზიკური სხეულების სივრცეზე. განვიხილოთ მასის გაზომვის პროცესი:

ავიღოთ თეფშებიანი სასწორი. შევარჩიოთ სხეული და მისი მასა e მივიღოთ მასის ერთეულად. სასწორის ერთ თეფშზე დაედოთ სხეული, რომლის მასა უნდა გაიზომოს. მეორე თეფშზე თითო-თითოდ დაედოთ მასის e ერთეულები (საწონები) მანამ, სანამ სასწორი არ გაწონასწორდება ან საწონებიანი თეფში არ გადაწონის. თუ სასწორი გაწონასწორდა, მაშინ სხეულის მასა გაზომილია. თუკი საწონებიანი თეფშმა გადაწონა, მაშინ ვაკლებთ ერთ საწონს და თითო-თითოდ იმავე თეფშზე ვაწყობთ e -ს მეთოდ ნაწილებს (საწონებს). ამ შემთხვევაშიც ვიქცევით ისევე, თუ საჭირო იქნა, საწონიან თეფშზე დავაწყობთ e -ს მესამედ ნაწილებს (საწონებს) და ა.შ. აწონის შედეგად მიიღება მოცემული სხეულის მასის რიცხვითი მნიშვნელობა შერჩეული ერთეულის მიხედვით.

მასების შედარება და მასებზე მოქმედებათა წარმოება დაიყვანება შესაბამის რიცხვით მნიშვნელობათა შედარებასა და მათზე მოქმედებათა წარმოებაზე.

სხეულის მასის გასაზომად ჩვენ ერთეულებს ავიღებთ საზომთა მეტრული სისტემიდან, სახელდობრ:

1ტონა (ტ)=1000 კილოგრამი (კგ); 1ცენტნერი (ც)=100 კილოგრამი (კგ);

1 კილოგრამი (კგ)=1000 გრამი (გ); 1 გრამი (გ)=1000 მილიგრამი (მგ).

საინტერესოა საწონების შერჩევის საკითხი.

ვთქვათ, გვაქვს 1, 5, 10 და 20-გრამიანი საწონები. ცხადია, რომ მაქსიმალური მასა, რომლის გაზომვა შეიძლება ამ საწონებით არის $1+5+10+20=36$ გრამი, მაგრამ ამ საწონებით ვერ ავწონით. მაგალითად: 2, 3, 7, 8 გრამს. ისმის საკითხი: არსებობს თუ არა საწონების ისეთი სისტემა, რომლის მასა არ აღემატება წინასწარ მოცემულს. დამტკიცებულია, რომ საწონების ასეთი სისტემა არსებობს. ასეთი სისტემების შესაქმნელად მოიშველიება თვლის სხვადასხვა სისტემები.

მაგალითად, ვთქვათ ასაწონია 93-გრამიანი სხეული.

როგორც ვიცით, ყოველი ნატურალური რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ თელის ორობით სისტემაში. ამასთან ორობით სისტემაში რიცხვის ყოველი თანრიგი შეიცავს ციფრს 1-ს ან 0-ს.

გვაქვს:

$$93_{10} = 1011101_2 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1.$$

აქედან, ცხადია რომ, თუ გვაქვს საწონთა სისტემა: 1გ, 2გ, 4გ, 8გ, 16გ, 32გ, 64გ, მაშინ 93 გრამიანი სხეულის ასაწონად დაგვჭირდება საწონები: $1+4+8+16+64=93$ გრამს.

თუ გვექნება ორობითი სისტემის საწონთა ერთი კრებული ე.ი. 1, 2, 4, 8, 16, ... გრამიანი საწონები, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია აეწონოთ გრამებში ნებისმიერი სხეული, თუ სხეულს დავდებთ სასწორის ერთ თევშზე, ხოლო მეორეზე საწონებს. იმისათვის, რომ გავიგოთ, თუ რომელი საწონების დადებაა საჭირო თევშზე, საჭიროა გრამების მოცემული რიცხვი გადავიყვანოთ თელის ორობით სისტემაში, რაც ყოველთვის შესაძლებელია ერთადერთი ხერხით. ამ რიცხვის ორობით სისტემაში ჩანაწერის ციფრები, მარჯვნიდან მარცხნივ გვიჩვენებს, თუ რომელი საწონები უნდა ავიღოთ.

ვთქვათ, ასაწონია 117 გრამიანი სხეული. გვაქვს:

$$117_{10} = 1110101_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 64 + 32 + 16 + 4 + 1.$$

ე.ი. საჭირო საწონები: 1გ, 4გ, 16გ, 32გ და 64გ.

განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითი:

1. სირაკუზის მეფემ ოქრომჭედელს 4,8 კგ-იანი ოქროს გვირგვინი შეუკეთა; ოქრომჭედელმა დავალება შეასრულა, მხოლოდ გვირგვინის ოქროში ვერცხლიც შეურია.

მეფეს ოქრომჭედლის პატიოსნებაში ეჭვი შეეპარა და სიმართლის გამორკვევა იმ დროის გამოჩენილ მეცნიერს, არქიმედს დაავალა.

არქიმედი შემდეგნაირად მოიქცა: აწონა გვირგვინი წყალში და აღმოჩნდა, რომ იგი 262 გრამით შემსუბუქდა. შემდეგ წყალში აწონა 4,8 კგ წმინდა ოქრო და ამდენივე წმინდა ვერცხლი. პირველმა დაკარგა წონაში 240 გრამი, ხოლო მეორემ 457 გრამი. ამით არქიმედმა

გამოარკვია, რომ გვირგვინი არ იყო დამზადებული წმინდა ოქროსაგან.

ამის გარდა, არქიმედმა ისიც დაადგინა, თუ რამდენი იყო გვირგვინში ოქრო და რამდენი ვერცხლი.

აღენიშნოთ ოქროს რაოდენობა გვირგვინში x -ით, ხოლო ვერცხლის y -ით, მაშინ $x+y=4,8$. რადგან 4,8 წმინდა ოქრომ წონაში (წყალში) დაკარგა 240 გრამი, მაშინ 1 კილოგრამი ოქრო დაკარგავდა $240:4,8=50$ (გ), ხოლო 1 კილოგრამი ვერცხლი კი - $457:4,8 \approx 95$ (გ). ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ: $50x+95y=262$ (რადგან, მოლიანად გვირგვინი წყალში 262 გ-ს კარგავს).

$$\begin{cases} x + y = 4,8 \\ 50x + 95y = 262 \end{cases}$$

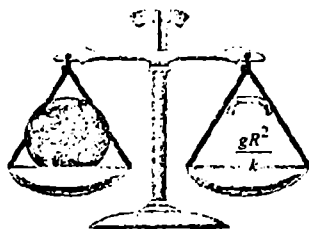
ორუცნობიან განტოლებათა სისტემის ამოხსნა გვაძლევს:

$x \approx 4,31$ (კგ) და $y \approx 0,49$ (კგ).

2. როგორ გავიგოთ დედამიწის მასა?

ცხადია, ამ ამოცანას ვერ გადავწყვეტთ თეფშებიანი სასწორის საშუალებით, რადგან ასეთ სასწორს ვერ ავაგებთ.

ნიუტონის მსოფლიო მიზიდულობის კანონით გვაქვს: $P = K \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$, ხოლო მისივე



მეორე კანონის მიხედვით: $P=mg$, სადაც p ნიშნავს სხეულის წონას, m - სხეულის მასას, g - სიმძიმის ძალის აჩქარებას, K - გრავიტაციულ მუდმივს, M - დედამიწის მასას, ხოლო R - დედამიწის რადიუსს. თუ ამ ორი ტოლობის მარჯვენა მხარეებს ერთმანეთს გავუტო-

ლებთ, გვექნება: $K \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} = mg$, საიდანაც $M = \frac{g \cdot R^2}{K}$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $g \approx 9,8$ მ/წმ², $K \approx 6,685 \cdot 10^{-8}$ და $R \approx 6370$ კმ-ს მივიღებთ, რომ დედამიწის მასა $M \approx 6 \cdot 10^{21}$ ტონას.

14.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. ექვსკუთხედის გვერდები ისე შეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც $1:2:3:4:5:6$. ვიპოვოთ თითოეული გვერდის სიგრძე, თუ ექვსკუთხედის პერიმეტრი 42 სმ-ის ტოლია.
2. C წერტილი AB მონაკვეთის შიგა წერტილია, იპოვეთ AC და CB მონაკვეთების სიგრძეები, თუ AC მონაკვეთის სიგრძე 5 სმ-ით ნაკლებია CB მონაკვეთის სიგრძეზე, ხოლო AB მონაკვეთის სიგრძე 25 სმ-ის ტოლია.
3. ვთქვათ, $AB=16$ სმ, $BC=4$ სმ და $CD=9$ სმ. რა უდიდესი მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს AD -მ?
4. AB მონაკვეთი გაგრძელებულია BC მონაკვეთით ისე, რომ AC 3-ჯერ მეტია AB -ზე. იპოვეთ $AB:BC$.
5. მოცემულია $A(1;3)$ და $B(4;-1)$ წერტილები. იპოვეთ AB მონაკვეთის სიგრძე.
6. მატარებელმა გაიარა მთელი გზის $\frac{4}{5}$ ნაწილი, მას გასასვლელი დარჩა 10 კმ. იპოვეთ მთელი გზის სიგრძე.
7. მოცემულია $A(2;4)$, $B(5;7)$ და $C(6;1)$ წერტილები. AB მონაკვეთზე აღებულია M წერტილი, ისე რომ $AM:MB=1:2$, ე.ი. $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$. ვიპოვოთ M წერტილის კოორდინატები და MC მონაკვეთის სიგრძე.
8. მოცემულია $A(1;5)$ და $B(5;1)$ წერტილები. M წერტილი AB მონაკვეთის წერტილია, ისე რომ $AM:MB=1:3$, ე.ი. $\left(\lambda = \frac{1}{3}\right)$. ვიპოვოთ M წერტილის კოორდინატები.
9. მოცემულია $A(1;5)$ და $B(5;1)$ წერტილები. M წერტილი AB მონაკვეთის წერტილია, ისე რომ $AM:MB=3:1$, ე.ი. $(\lambda=3)$ ვიპოვოთ M წერტილის კოორდინატები.
10. $A(1;1)$, $B(1;3)$, $C(3;1)$, $D(3;3)$ წერტილები კვადრატის წვეროებს წარმოადგენენ. ვიპოვოთ ამ კვადრატის გვერდების შუაწერტილების კოორდინატები და ამ წერტილების შეერთებით მიღებული კვადრატის ფართობი.

11. $A(1;2)$, $B(1;8)$, $C(5;8)$, $D(5;2)$ წერტილები მართკუთხედის წვეროებს წარმოადგენენ. ვიპოვოთ ამ მართკუთხედის გვერდების შუაწერტილების კოორდინატები და ამ წერტილების შეერთებით მიღებული რომბის ფართობი.
12. მოცემულია $A(1;1)$ და $B(9;1)$ წერტილები. AB მონაკვეთი M წერტილით იყოფა შეფარდებით $AM:MB=7:1$, ($\lambda=7$), ასევე მოცემულია $C(2;4)$ და $D(5;4)$ წერტილები. CD მონაკვეთი N წერტილით იყოფა შეფარდებით $CN:ND=2:1$ ($\lambda=2$). იპოვეთ M და N წერტილების კოორდინატები და MN მონაკვეთის სიგრძე.
13. სამკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც $2:5:4$, ხოლო ოთხკუთხედის გვერდები, როგორც $1:2:5:3$. სამკუთხედის პერიმეტრი ტოლია ოთხკუთხედის პერიმეტრის და იგი 33 სმ-ია. ერთმანეთს შევადაროთ სამკუთხედისა და ოთხკუთხედის უდიდესი და უმცირესი გვერდები.
14. ერთი წრის ფართობი 4-ჯერ მეტია მეორე წრის ფართობზე. რამდენჯერ მეტია პირველი წრის რადიუსი მეორე წრის რადიუსზე?
15. სკოლიდან დათოს სახლამდე 2,7 კმ-ია; ხოლო სოსოს სახლი სკოლიდან 2-ჯერ მეტი მანძილითაა დაშორებული. რა მანძილია სკოლიდან სოსოს სახლამდე?
16. შეიძლება თუ არა 25 გრამიანი სხეული აეწონოთ; თუ გვაქვს 1 გრამიანი, 3 გრამიანი და 27 გრამიანი?
17. შეიძლება თუ არა 119 გრამიანი სხეული აეწონოთ; თუ გვაქვს 1 გრამიანი, 3 გრამიანი, 9 გრამიანი, 27 გრამიანი და 81 გრამიანი საწონები?
18. შეიძლება თუ არა 8 კილოგრამიანი სხეული აეწონოთ; თუ გვაქვს 1, 4, 6 და 11 კილოგრამიანი საწონები?
19. შეიძლება თუ არა 13 კილოგრამიანი სხეული აეწონოთ; თუ გვაქვს 4, 6 და 11 კილოგრამიანი საწონები?
20. ფერმერი ორი ნაკვეთიდან 500 ტონა ხორბალს ღებულობდა. აგროტექნიკური ღონისძიების გატარების შემდეგ მოსავალი პირველ მონაკვეთზე გადიოდა 30%-ით, ხოლო მეორეზე 20%-ით, ამიტომ ფერმერმა ამ ნაკვეთებიდან აიღო 630 ტონა ხორბალი. რამდენ ტონა ხორბალს იღებდა ფერმერი თითოეული ნაკვეთი-

დან აგროტექნიკის გამოყენებამდე?

21. 300 ცალი ფიჭვის და მუხის მორი ერთად 10 ტონასა და 524 კილოგრამს იწონის. თითო ფიჭვის მორი 28 კგ-ს იწონის, მუხის კი – 46 კგ-ს. რამდენი ცალი ფიჭვის და მუხის მორია ცალ-ცალკე?
22. სასწორის ორ ჯამზე ორი სხეადასხეა ყალიბის საფანტი ყრია, სულ 195 ცალი. თუ ერთი ჯამიდან 11 საფანტს ავიღებთ და შემდეგ მეორე ჯამიდან 2 ცალ საფანტს პირველ ჯამზე გადავდებთ, ამით წონასწორობა არ დაირღვევა. თითოეული ყალიბის რამდენი საფანტი დევს სასწორზე?
23. ორ ყუთში თანაბრად იყო ყავა, მაგრამ როცა პირველი ყუთიდან 6 კილოგრამი გაყიდეს, ხოლო მეორედან – 19 კილოგრამი, პირველში ორჯერ მეტი ყავა გახდა, ვიდრე მეორეში. რამდენი კილოგრამი ყავა იყო თითოეულ ყუთში?
24. პირველი ხარისხის 2 კგ და მეორე ხარისხის 10 კგ კანფეტში 100 ლარი გადაიხადეს. რა ღირს თითოეული ხარისხის 1 კგ, თუ მეორე ხარისხის 5 კგ კანფეტი იგივე ღირს, რაც 4 კგ პირველი ხარისხის კანფეტი?
25. 5,04 კგ ვერცხლისაგან 40 სუფრის კოვზი, 72 ჩაის კოვზი და 16 სასანთლე გააკეთეს, სუფრის კოვზზე 0,036 კილოგრამი მეტი დაიხარჯა, ვიდრე ჩაის კოვზზე. ხოლო სასანთლეზე – 0,065 კილოგრამით მეტი, ვიდრე ჩაის კოვზზე. რამდენი კილოგრამი ვერცხლი დაიხარჯა თითოეულ ნივთზე?
26. სამოვარი, ლამბაქი და კოვზი ერთად $6\frac{1}{4}$ კგ-ს იწონის. რამდენს იწონის თითოეული ნივთი, თუ სამოვარი 32-ჯერ მძიმეა ლამბაქზე, ხოლო ლამბაქი 3-ჯერ მძიმეა კოვზზე?
27. $1\frac{13}{24}$ კგ წონის სპილენძისა და ვერცხლის ზოდი $\frac{7}{45}$ კგ-ს ჰკარგავს წყალში. რამდენი კილოგრამია მასში თითოეული ლითონი, თუ 20 გრამი ვერცხლი წყალში კარგავს 2 გრამს, ხოლო 1 კილოგრამი სპილენძი $\frac{8}{9}$ კილოგრამს იწონის წყალში?
28. 2 კგ წონის კალისა და ტყვიის ზოდი წყალში – $\frac{1}{5}$ კგ-ს კარგავს.

რამდენი კილოგრამი კალა და ტყეიაა ამ ზოდში, თუ ცნობილია, რომ ნაჭერი კალა თავისი წონის $\frac{11}{80}$ -ს კარგავს წყალში, ხოლო ნაჭერი ტყეია - $\frac{3}{40}$ -ს?

29. ნაეთით სავსე ბიდონი $10\frac{14}{15}$ კგ-ს იწონის. მთელი ნაეთის $\frac{7}{8}$ ნაწილი რომ გადმოასხეს, ბიდონი $2\frac{8}{15}$ კგ-ს იწონიდა. რამდენი კილოგრამი ნაეთი იყო ბიდონში და რამდენ კილოგრამს იწონის ცარიელი ბიდონი?
30. ორ ყუთში 155 კგ ფქვილი იყო, როცა პირველიდან 20 კგ ფქვილი გადაიტანეს მეორეში, მაშინ პირველში დარჩა იმის $\frac{12}{19}$, რაც გახდა მეორეში. რამდენი კილოგრამი ფქვილი იყო თავდაპირველად თითოეულ ყუთში?

14.1.1. ტესტი №13

- მონაკვეთის სიგრძე
 - ა) ვექტორული სიდიდეა, ბ) სკალარული სიდიდეა,
 - გ) ზოგჯერ ვექტორული სიდიდეა.
 - დ) ზოგჯერ სკალარული სიდიდე არ არის.
- სხეულის მასა
 - ა) სკალარული სიდიდეა, ბ) ვექტორული სიდიდეა,
 - გ) ზოგჯერ ვექტორული სიდიდეა.
 - დ) ზოგჯერ სკალარული სიდიდე არ არის.
- ვთქვათ, მოცემულია AB მონაკვეთი $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. $M(x; y)$ წერტილი AB მონაკვეთს ყოფს λ შეფარდებით, ე.ი. $|AM|:|MB| = \lambda$, მაშინ M წერტილის კოორდინატები x და y ტოლია:
 - ა) $x = \frac{x_1 + y_1}{\lambda}$ და $y = \frac{y_1 + y_2}{\lambda}$; ბ) $x = \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \cdot \lambda$ და $y = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} \cdot \lambda$;

$$\text{გ) } x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \text{ და } y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad \text{დ) } x = \frac{x_1 + x_2}{1 + \lambda} \text{ და } y = \frac{y_1 + y_2}{1 + \lambda}.$$

4. თუ M წერტილი AB მონაკვეთის შუაწერტილია – $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, მაშინ M წერტილის x და y კოორდინატებისთვის გვაქვს:

$$\text{ა) } x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ და } y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad \text{ბ) } x = \frac{x_1 + y_2}{2} \text{ და } y = \frac{y_1 + x_2}{2};$$

$$\text{გ) } x = \frac{x_1 \cdot x_2}{2} \text{ და } y = \frac{y_1 \cdot y_2}{2}; \quad \text{დ) } x = \frac{x_1 + x_2}{3} \text{ და } y = \frac{y_1 + y_2}{3}.$$

5. გვაქვს მხოლოდ 2, 4, და 5 კილოგრამიანი თითო საწონი. ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რამდენკილოგრამიანი ნივთის აწონას ვერ შევძლებთ თევშებიან სასწორზე ერთი აწონით, თუ მხოლოდ ამ საწონებს გამოვიყენებთ?

$$\text{ა) 1; } \quad \text{ბ) 3; } \quad \text{გ) 10; } \quad \text{დ) 11.}$$

6. გვაქვს მხოლოდ 3, 6 და 10 კილოგრამიანი თითო საწონი. ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რამდენკილოგრამიანი ნივთის აწონას ვერ შევძლებთ თევშებიან სასწორზე ერთი აწონით, თუ მხოლოდ ამ საწონებს გამოვიყენებთ?

$$\text{ა) 15; } \quad \text{ბ) 13; } \quad \text{გ) 7; } \quad \text{დ) 1.}$$

7. ერთ ბოსტნეულსაცავში 21 ტ კარტოფილია, მეორეში კი – 18ტ. პირველიდან ყოველდღიურად გააქვთ 3 ტ კარტოფილი, ხოლო მეორედან კი – 2 ტ. რამდენი დღის შემდეგ იქნება საცავეებში კარტოფილის ერთი და იგივე რაოდენობა?

$$\text{ა) 4; } \quad \text{ბ) 3; } \quad \text{გ) 5; } \quad \text{დ) 2.}$$

8. გვაქვს მხოლოდ 1, 3, 9 და 27 კილოგრამიანი თითო საწონი. ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რამდენკილოგრამიანი ნივთის აწონას ვერ შევძლებთ თევშებიან სასწორზე ერთი აწონით, თუ მხოლოდ ამ საწონებს გამოვიყენებთ?

$$\text{ა) 38; } \quad \text{ბ) 39; } \quad \text{გ) 33; } \quad \text{დ) 41.}$$

9. რამდენი ლარი უნდა გადავიხადოთ 0,8 კგ შოკოლადის კანფეტში, თუ 0,12 კგ 3,3 ლარი ღირს?

$$\text{ა) 22 კგ; } \quad \text{ბ) 27,5 კგ; } \quad \text{გ) 33 კგ; } \quad \text{დ) 21.}$$

10. წყლით სავსე ვედრო 12 კგ-ს იწონის. სპირტით სავსე ისეთივე ვედრო 10 კგ-ს იწონის. რამდენს იწონის ცარიელი ვედრო, თუ 5 ვედრო სპირტის წონა 4 ვედრო წყლის წონის ტოლია?

$$\text{ა) 1 კგ; } \quad \text{ბ) 2 კგ; } \quad \text{გ) 1,5 კგ; } \quad \text{დ) 1,2 კგ.}$$

დროის ცნება გაცილებით უფრო რთულია, ვიდრე სიგრძის თუ მასის. დრო არის ის, რაც აშორებს ერთ მოვლენას მეორისაგან. მათემატიკაში დრო განიხილება, როგორც სკალარული სიდიდე. დროის შუალედები შეიძლება ერთმანეთს შევადაროთ. მაგალითად, 20 კმ-ის გავლას ფეხით უფრო მეტ დროს მოვანდომებთ, ვიდრე ავტომობილით გადაადგილებისას. დროის შუალედებზე შეიძლება ვაწარმოოთ შეკრება და გამოკლება, იგი შეიძლება გაეამრავლოთ ნებისმიერ ნატურალურ რიცხვზე. დრო სკალარულ-ადიციური უწყვეტი სიდიდეა.

დროის შუალედები შეიძლება გაეზომოთ, მაგრამ ამ გაზომვის პროცესი განსხვავდება, მაგალითად, სიგრძის გაზომვის პროცესისაგან. დროის ერთეულად უნდა მივიღოთ რეგულარულად განმეორებადი პროცესი. უძველესი წყაროები გვამცნობენ, რომ ჩვენს ერამდე 1100 წლის წინ ბაბილონელები იყენებდნენ წყლის საათებს, ე.წ. კლევსიდრებს. კლევსიდრა (ბერძნულად „წყლის გამტარებელი“) დროის გასაზომად გამოიყენებოდა ჩვენს ერამდე მეორე ათასწლეულში ინდოეთში, ჩინეთში, ეგვიპტეში, შემდეგ ის ცნობილი გახდა ხმელთაშუაზღვისპირეთში, საბერძნეთში და იქიდან – რომში.

დედამიწის დღე-ღამური ბრუნვის ხანგრძლივობას ცისა და მზის ხილული დღე-ღამური ბრუნვის ხანგრძლივობით განსაზღვრავენ, მაგრამ ამ ორი ბრუნვის ხანგრძლივობა სხვადასხვაა. შესაბამისად ასტრონომიაში მიღებულია ვარსკლავური და მზიური დროის ცნებები.

ვარსკლავური დღე-ღამე დროის ძირითად საზომ ერთეულად არის მიღებული. ვარსკლავური დღე-ღამის ხანგრძლივობა ფაქტობრივად ტოლია საკუთარი ღერძის გარშემო დედამიწის ერთი შემობრუნების ხანგრძლივობისა, რომელიც ვარსკლავური დროით 24 საათს, 0 წუთსა და 0,0084 წამს შეადგენს. დროის ერთეულად საზომთა საერთაშორისო სისტემაში მიღებულია წამი, წამთან ერთად გამოიყენება დროის შემდეგი ერთეულები: წუთი, საათი, დღე-ღამე, კვირა, თვე, წელიწადი, საუკუნე.

დღე-ღამის 24 ნაწილად (საათებად) დაყოფას ძველ შუმერებს მიაწერენ. საათის დაყოფა 60 წუთად და წუთისა 60 წამად ბაბილონში

მოხდა, ბაბილონელი ქურუმების მიერ, საფუძველი იყო ბაბილონური თელის სამოცობითი სისტემა.

ადამიანთა ცხოვრების სახისა და პირობების ცვლამ, მომთაბარეობიოდან მიწათმოქმედებაზე გადასვლამ წარმოქმნა საჭიროება განესხვაებინათ გაზაფხულის, ზაფხულის, შემოდგომისა და ზამთრის პერიოდულობის ცვალებადობა, რომელიც მზის მოძრაობასთან იყო დაკავშირებული. გაჩნდა დროის უფრო დიდი საზომი ერთეული – წელიწადი. ასე თანდათანობით შეიქმნა მზის კალენდარი.

დროის აღრიცხვის ძირითად კალენდარულ ერთეულად მიჩნეულია მზიური დღე-ღამე და არა ეარსკელაეური დღე-ღამე. კალენდარული, ანუ მზიური დღე-ღამე დროის შუალედია მზის ქვედა (ან ზედა) კულმინაციის მომენტიდან მომდევნო ქვედა (ან ზედა) კულმინაციის მომენტამდე. მზე ცასთან ერთად ბრუნავს ცის თაღის ბრუნვის საწინააღმდეგოდ გადადის ერთი თანაეარსკელაედიდან მეორეში და წლის განმავლობაში ერთ სრულ წრეწირს შემოწერს ცაზე.

კალენდარი დროის შედარებით ხანგრძლივ პერიოდებად დანაწილებისა და აღრიცხვის სისტემაა. აღნიშნული პერიოდები, ანუ დროის შუალედები განისაზღვრება ციურ სხეულთა მოძრაობებით (მზის ამოსვლა-ჩასვლა, მთეარის ფაზების მონაცვლეობა, წელიწადის დროთა ცვლა).

დროის დიდი შუალედების გასაზომად ძირითადი ერთეულია ტროპიკული წელიწადი, რომელიც მზის ირგვლივ დედამიწის ერთი გარემოქცევით განისაზღვრება; იგი შედგება 365,2422 დღე-ღამისაგან, ანუ 365 დღე-ღამე, 5 საათი, 48 წუთი და 46 წამი.

უკვე ძველი წელთაღრიცხვის მე-4 ათასწლეულის დასასრულს ეგვიპტელმა ქურუმებმა დააზუსტეს წელიწადის ხანგრძლივობა და 365-დღიანი მზის კალენდარული სისტემა შემოიღეს. მართალია, მზის კალენდრის ასეთი „დაზუსტება“ წინ გადადგმული ნაბიჯი იყო, მაგრამ მზის კალენდარული წლის რეალურ ხანგრძლივობას ის დაახლოებით 6 საათით ჩამორჩებოდა, რაც ცხადია, კელაე ახალ შესწორებას მოითხოვდა. ძველი ეგვიპტელების ამ კალენდარს მოიხსენიებენ, როგორც მზის მოძრაეი წელიწადის კალენდარს.

მზის მოძრაეი კალენდარული სისტემის უზუსტობას (6 საათიანი განსხეაეების) შესწორება ეგვიპტელებმა რამდენჯერმე სცადეს, მაგრამ უშედეგოდ. აღნიშნული ნაკლის მიუხედავად, ეგვიპტური

მოძრავი კალენდარი არის მზის პირველი კალენდარული სისტემა
კაცობრიობის ისტორიაში.

უძველესმა მაიას ცივილიზაციამაც შექმნა მზის კალენდარული
სისტემა, რომელიც იძლეოდა 365-დღიან წელიწადს. მაიას ასტრო-
ნომების გაანგარიშებით წელიწადის ხანგრძლივობა 365,2420 დღე-
ღამეს შეადგენდა; იგი საკმაოდ ზუსტი იყო, თუმცა ისინი მაინც 365-
დღიანი კალენდრით სარგებლობდნენ. მათი მზის კალენდარიც მოძ-
რავი ხასიათის იყო.

მსოფლიოში ყველაზე ფართოდ გავრცელებული და, ამასთანავე
პირველი უძრავი მზის კალენდარული სისტემა განხორციელდა
რომში, როცა ცნობილმა რომაელმა სახელმწიფო მოღვაწემ იული-
უს ცეზარმა ეგვიპტელი ასტრონომის სოზიგენის მეთაურობით შექ-
მნილი მეცნიერთა ჯგუფის რჩევით ძვ.წ. 46 წლის 1 იანვრიდან შემო-
იღო წელთაღრიცხვის ახალი სისტემა. ამ სისტემის მიხედვით ყოვე-
ლი სამი წელიწადის ხანგრძლივობად მიღებული იქნა 365 დღე-ღამე,
ხოლო ყოველი მეოთხე წელიწადისა (ნაკიანი წელიწადი) – 366 დღე-
ღამე. ამის შედეგად წელიწადის საშუალო ხანგრძლივობა (365,25
დღე-ღამე) ძალიან დაუახლოვდა ტროპიკული წელიწადის ხან-
გრძლივობას (365,2422 დღე-ღამე).

ამ ახალ, რომაულ კალენდარულ სისტემას ცეზარის - იულიუსის
კალენდარი უწოდეს.

მიუხედავად იმისა, რომ განსხვავება იულიუსის საშუალო და
ტროპიკულ წელიწადებს შორის ძალიან უმნიშვნელოა, მისი უგუ-
ლებელყოფა არ შეიძლება, რადგან საუკუნეების მანძილზე ეს სხვა-
ობა საკმაოდ შესამჩნევი ხდება და რამდენიმე დღე-ღამეს შეადგენს.
ამიტომ 1582 წელს მოხდა იულიუსის წელთაღრიცხვის სისტემის
რეფორმა, რომელიც განახორციელა რომის პაპმა გრიგოლ XIII-ემ.
ამ რეფორმის თანახმად მოხდა დღეთა ანგარიშის გადანაცვლება:
1582 წლის 4 ოქტომბერს მომდევნო დღე გამოცხადდა 15 ოქტომ-
ბრად, რათა მანამდე დაგროვილი 10-დღიანი ცდომილება გაესწორე-
ბინათ. ამის შედეგად გაზაფხულის ბუნიობა კელაჲ 21 მარტს დაემ-
თხეა. დადგინდა, რომ ის წელი, რომლის საუკუნეების რიცხვი მთე-
ლია, მაგრამ 4-ზე უნაშთოდ არ იყოფა (წლების რიცხვი კი იყოფა),
არ ჩაითვლება ნაკიანად (ნაკიანია 1600, 2000, 2400 წ.წ. და ა.შ., ნაკი-
ანი არ არის 1700, 1800, 1900, 2100 წ.წ. და ა.შ.). ამ წესის განხორციელე-

ბა კიდევ უფრო აახლოებს სამოქალაქო წელთაღრიცხვას წელთა ბუნებრივ მიმდინარეობასთან. გრიგორიანულ კალენდარში კი სამი დღე-ღამის ცდომილება გროვდება ყოველ 400 წელიწადში.

გრიგორიანულ კალენდარს უწოდებენ წელთაღრიცხვას ახალი სტილით. პირველად იგი შემოიღეს XVI საუკუნის 80-იან წლებში იტალიაში, ესპანეთში, საფრანგეთში, პორტუგალიაში, პოლონეთში და ევროპის ზოგიერთ სხვა სახელმწიფოში, მოგვიანებით კი გერმანიაში (XVII-XVIII საუკუნეებში), ინგლისში (XVIII ს.), იაპონიაში (XIX ს.).

უნდა აღინიშნოს, რომ ქართული დოკუმენტური წყაროების თანახმად, რომლებშიც მე-13 მოქცევაზე (ახ.წ. 781 წლიდან) აღვინიშნული დათარიღება არ მოიპოვება, საქართველოში იყენებდნენ იულიუსის კალენდარს. გრიგორიანული კალენდარი (ახალი სტილი) შემოღებულ იქნა 1918 წლის 1 მაისიდან.

მრავალი კალენდარული ტერმინი სათავეს ძველი რომაელებისაგან იღებს. თვით სიტყვა კალენდარი ლათინური წარმოშობისაა – *calendarium*, რაც ნიშნავს თვის პირველ დღეს.

წლის პირველ თვეს უწოდეს იანვარი (ძვ. ქართული სახელწოდება – აპნისი), ორსახოვანი ღმერთის იანუსის პატივსაცემად, რომლის ერთი სახე მიქცეულია წინ (მომავლისაკენ, ახლისაკენ), ხოლო მეორე სახე – უკან (წარსულისაკენ, ძველისაკენ).

თებერვალი (ძვ. ქართული სახელწოდება – სურწყუნისი) წარმოდგარია ლათინური სიტყვიდან „*Februm*“ – განწმენდა. ეს თვე იყო რელიგიური მონანიების, განწმენდის თვე.

მარტის (ძვ. ქართული სახელწოდება – მირკანი) თვე დაერქვა ომის ღმერთის მარსის პატივსაცემად.

აპრილში (ძვ. ქართული სახელწოდება – იგრიკა) ხეებზე კვირტები იშლება. სიტყვა „*Aperire*“ აღნიშნავს „გამომჟღავნებას“, „გამოჩენას“, „გახსნას“.

მაისი (ძვ. ქართული სახელწოდება – ვარდობისთვე) – გაზაფხულის ბოლო თვეს ეწოდა ზრდის, განვითარების ღმერთის – „*Majus*“-ის პატივსაცემად.

ივნისი (ძვ. ქართული სახელწოდება – ივანობისთვე) – ცის ქალ-

ღმერთის იუნონას პატივსაცემად შემოიღეს.

იელისი და აგვისტო (ძვ. ქართული სახელწოდებებია – კეირიკობისთვე და მარიამობისთვე) ეწოდათ რომის იმპერატორების იულიუს ცეზარისა და გაიუს ავგუსტუსის პატივსაცემად.

სექტემბერი (ძვ. ქართული სახელწოდება – ენკენისთვე) – *Sepi-
embr* – „მეშვიდეს“ ნიშნავს.

ოქტომბერი (ძვ. ქართული სახელწოდებაა – ღვინობისთვე) – *Oktombr* – „მერვეს“ ნიშნავს.

ნოემბერი (ძვ. ქართული სახელწოდებაა – გიორგობისთვე) – *No-
vembr* – „მეცხრეს“ ნიშნავს.

დეკემბერი (ძვ. ქართული სახელწოდებაა – ქრისტეშობისთვე) – *Decembr* – „მეთეს“ ნიშნავს.

ბოლო ოთხი თვის რიცხვითი სახელები ალბათ იმასთან არის დაკავშირებული, რომ VIII–IX საუკუნეებში წლის პირველ თვედ მარტი იყო აღიარებული, ხოლო ბოლო თვედ თებერვალი. ამიტომ წლის ბოლოს დღეთა შესწორება თებერვალში ხდებოდა.

აქ აღსანიშნავია ერთი მნიშვნელოვანი საკითხიც. როგორც ცნობილია, წელიწადის 12თვე დაყოფილია მონაცვლეობით 30 და 31-დღიანი თვეებით. ამ რიგის მიხედვით მეხუთე თვე (რომლის სახელწოდება დაკავშირებულია რომის იმპერატორის იულიუს ცეზარის სახელთან – იგი ამ თვეში იყო დაბადებული), იელისი 31-დღიანი თვეა, ხოლო აგვისტო 30-დღიანი თვე უნდა ყოფილიყო. კეისრის შემდეგ მეორე იმპერატორმა ავგუსტუსმა თავისი სახელი უწოდა თავისი დაბადების თვეს, მაგრამ არ მოსწონდა, რომ მისი სახელობის თვე ნაკლებ დღეებს შეიცავდა, ვიდრე იულიუს ცეზარისა და ამიტომ აქცია აგვისტო 31-დღიან თვედ. ეს ერთი დღე მოაკლეს წლის ბოლო თვეს – თებერვალს, რომელსაც წინა 29 დღის ნაცვლად დარჩა 28 დღე. სამი 31 დღიანი თვე უხერხული გამოდგა, ამიტომ სექტემბერი გახადეს 30-დღიანი და რიგ-რიგად შეცვალეს სხვა თვეებიც, გარდა იანვრისა. თებერვალს დააკლდა ერთი დღე, რის გამოც ჩვეულებრივ წელს მას აქვს 28 დღე, ხოლო ნაკიან წელს 29.

შემდგომშიც იყო მცდელობა შეეცვალათ აპრილის, მაისის, ოქტომბრის თვეთა სახელები იმპერატორების ნერონის, კლავდიუსის და დომიციანის სახელებით, მაგრამ ეს სახელები აღნიშნულ თვე-

ებს არ შემორჩა.

კვირაც უძველესი დროიდან შემოიღეს; მისი ხანგრძლივობა განაპირობა მთვარის თვის 4 ნაწილად დაყოფამ, აგრეთვე იმ ფაქტმა, რომ რიცხვი 7 მისტიკური მნიშვნელობისა იყო, ამასთან იგი გამოხატავდა ცაზე მზის, მთვარის და ყველაზე კაშკაშა პლანეტების საერთო რიცხვსაც.

შეიძღლიანი კვირა პირველად ძველ აღმოსავლეთში შემოიღეს, რომელიც ახ. წელთაღრიცხვის I საუკუნეში რომშიც დააკანონეს, საიდანაც მთელ დასავლეთ ევროპაში გავრცელდა.

კვირის დღეების სახელწოდება ზოგიერთ ენაში დაკავშირებულია ციური სხეულების (მზე, მთვარე, მარსი, მერკური, იუპიტერი, ვენერა, სატურნი) სახელებთან. მაგალითად, შაბათს უწოდეს სატურნის დღე, კვირას – მზისა, ორშაბათს – მთვარისა, სამშაბათს – მარსის, ოთხშაბათს – მერკურის, ხუთშაბათს – იუპიტერის, პარასკეპს – ვენერას დღეები.

ქართულად „შაბათი“ წარმოშობილია ძველებრათული სიტყვიდან „შაბატ“ – სიმშვიდე, დასვენება. ბიბლიის თანახმად ეს დღე იყო „ღმერთის დასვენების დღე“. ძველ ქართულში ციურ სხეულთა შესაბამისად კვირის დღეებს ერქვა: კრონოსისა, მზისა ანუ საუფლო, მთოვარისა, არიასი, ერმისა, აფროდიტესა და დიოსისა. როგორც ივ. ჯავახიშვილი აღნიშნავს (ტ. I) – „შაბათის სისტემის შეიდეულის დღის სახელები ქართულში უკვე IV-V საუკუნეში ქრისტეს შობიდან გაბატონებული ყოფილა“.

სხვადასხვა ეპოქაში სხვადასხვა ერების კვირის დღეთა რაოდენობა განსხვავებული იყო.

ხუთდღიანი კვირა ბაბილონელებს ჰქონდათ; მას „ჰამუშტუს“ (ხუთეულს) ეძახდნენ.

შეიძღლიანი კვირა ჰქონდათ: ებრაელებს, ჩინელებს, მონღოლებს, გერმანელებს.

ცხრადღიანი კვირა – ინდოელებს, სპარსელებს, ბერძნებს.

ათდღიანი კვირა – ეგვიპტელებს.

წლის დროისა და დღე-ღამის დროის ცვლილების გარდა დედამიწაზე არსებობს კიდევ ერთი მუდმივი პერიოდული პროცესი – მთვარის ფაზების ცვლა, რამაც დაბადა წლის 12 თვედ დაყოფა.

აღმოსავლეთისა და აფრიკის მრავალ ქვეყანაში (მუსულმანურ სამყაროში) დღესაც ხმარობენ მთვარის ფაზების ცვლაზე დაყრდნობილ, ე.წ. მთვარისმიერ კალენდარს - ჰიჯრას, რომლის მიხედვით მთვარისმიერი წელიწადი შეიცავს 29 და 30 დღელადიან 12 თვეს, რაც შეადგენს 354 ან 355 დღელადიან წელიწადს. ამ მოვლენაზეა დაყრდნობილი ისლამური მთვარის კალენდარი, რომელიც დღესაც მოქმედებს მრავალ არაბულ ქვეყანაში. თვეში დღეების რაოდენობა ისეა შერჩეული, რომ თვის პირველი დღე ემთხვეოდეს ახალმთვარეობას. რადგან მთვარისმიერი კალენდარი 10-11 დღე-ღამით მოკლეა მზისიერ (ასტრონომიულ) კალენდარზე, ეს ართულებს თარიღების გაიგივებას ამ ორ კალენდარს შორის. ამასთანავე, უნდა შევნიშნოთ, რომ მთვარის ფაზების ცვლა ხდება 29,5306 დღე-ღამის შემდეგ, რაც ცუდად უკავშირდება არა მარტო წლის ხანგრძლივობას, არამედ დღე-ღამის ხანგრძლივობას.

ძველად ზოგიერთ ქვეყანაში (ბაბილონში, ჩინეთში და სხვა) იყენებდნენ კიდევ უფრო რთულ, მთვარე-მზისიერ კალენდარს. მთვარისმიერი კალენდარი უფრო ძველია, რადგან მთვარის ფაზების მონაცვლეობის შემჩნევა უფრო ადვილია, ვიდრე მზის ირგვლივ დედამიწის გარემოქცევით გამოწვეული სეზონური ცვლილებებისა.

ყოველი ერი წელთა აღრიცხვას იწყებს თავისი ცხოვრების რომელიმე ღირშესანიშნავ თარიღთან დაკავშირებით. ქართული ეროვნული წელთაღრიცხვა თავისი წარმოშობით დაკავშირებულია ძველი წელთაღრიცხვის 284 წელთან. ეს თარიღი ქართული ქრონოლოგიის საწყისია და დაკავშირებულია იბერიის დამოუკიდებელი სამეფოს დაარსებასთან. ეს არის თარიღი ფარნავაზიანთა დინასტიის დამკვიდრებისა საქართველოში. ფარნავაზის (ძვ.წ. IV-III საუკუნე) მეფობის დროს ჩამოყალიბდა ერთიანი ქართული სახელმწიფო. ფარნავაზ მეფის ზეობის საწყის თარიღად, „ქართლის ცხოვრების“ ქრონოლოგიური მონაცემების საფუძველზე უნდა მივიჩნიოთ ძვ. წ. 303-302 წლები. „ქართლის ცხოვრება“ ასევე გვაუწყებს: „მან (ფარნავაზ) განაერცო ენა ქართლისა, და არღარა იზრახებოდა სხუა ენა ქართლსა შინა თვინიერ ქართულისა და ამან შექმნა მწიგნობრობა ქართული.“

შეუძლებელი იყო სრულიად ქართული დამწერლობა შექმნილიყო და შემოღებულიყო ერთდროულად. ცხადია, ქართული დამწერ-

ლობა გაცილებით ადრე არსებობდა, ვიდრე მოხდებოდა მისი საქვეყნოდ აღიარება, ვიდრე შეიქმნებოდა ის სახელმწიფოებრივი ხელსაყრელი პირობები, როცა შესაძლებელი იქნებოდა ამ დამწერლობის სახელმწიფო დამწერლობად გამოცხადება.

განსაკუთრებით აღსანიშნავია ერთიან საქართველოში სრულიად ქართული სახელმწიფო ენის შემოღება. ქართულ სახელმწიფო დამწერლობად შემოღებული იქნა ქართული ასომთავრული ანბანი. მაშასადამე, ზემო მსჯელობიდან გამომდინარე, ქართული ანბანი ძვ. წ. 284 წელს კი არ შეიქმნა, არამედ 284 წელს ქართული ასომთავრული ანბანი გამოცხადდა სრულიად ქართულ სახელმწიფო დამწერლობად.

ქართული ასომთავრული ანბანი გაცილებით ადრეა შექმნილი, ვიდრე ფარნავაზის მიერ მისი სახელმწიფო დამწერლობად გამოცხადების წელია. ქართული ასომთავრული ანუ მრგელოვანი, ქართული დამწერლობის უძველესი სახეობაა და ერთ-ერთი არქაული ანბანური დამწერლობაა მსოფლიოში. ასომთავრულით იწერებოდა ძველი ქართული წერილობითი ძეგლები. ამის დასტურია ძვ.წ. III საუკუნეში დაწერილი ბერძენი აპოლონიუს როდოსელის პოეტური თხზულება „არგონავტიკა“, სადაც აღნიშნულია, რომ კოლხეთში ინახებოდა ტყავზე ნაწერი წიგნი, რომელშიც ოქროს მიღების წესი ეწერა და რაც მთავარია, ქართველებს ჰქონიათ თავიანთ მამაპაპათაგან ნაწერი კირბები, რომლებზედაც მოგზაურთათვის ნაჩვენებია ზღვისა და ხმელეთის ყველა გზა და საზღვარი. აი, რას გვამცნობს „არგონავტიკის“ მეოთხე წიგნში მოთავესებული 278-281 სტრიქონები:

„ხოლო აია, დღესაც ურღვევი, დგას და ცხოვრობენ იმ დიდ ქალაქში იმ მამაც გამირთა შთამომავალნი, დიდმა მოლაშქრემ იქ რომ დატოვა. შენახული აქეთ მამაპაპური ძველი კირბები, წერილისეცტები, და იმ კირბებზე ნაჩვენებია გზები ყოველთა ზღვათა და ხმელთა“.

(აია – კოლხეთი; კირბები – გეოგრაფიული რუკის მაგვარი). ეს ცნობა უაღრესად დამაჯერებელია, ჩვენ შორეულ წინაპრებს ჰქონიათ ანბანი ანტიკურ ეპოქაში და ჰქონიათ რუკები სათანადო აღნიშვნებით.

მრავალ ქრისტიანს აინტერესებს ამოიცნოს წლის რომელ დღეს

იქნებოდა აღდგომა. მრავალი მეცნიერ-მათემატიკოსი (კდილობდა შეედგინა ამ დღის გამოსაანგარიშებელი ფორმულა ან ცხრილი; ერთ-ერთი ასეთი იყო გერმანელი მათემატიკოსი კარლ ფრიდრიხ გაუსი. ქვემოთ მოგეყავს აღდგომის (პასექის) დღის თარიღის გამოსაანგარიშებელი მარადიული ცხრილის ერთ-ერთი ნიმუში:

19-ზე გაყოფის ნაშთები	28-ზე გაყოფის ნაშთები							თ მ ე მ ბ ი
	9	4	5	6	1	2	3	
	15	10	11	17	7	13	8	
	20	21	16	23	12	19	14	
	26	27	22	0	18	24	25	
15	6	5	4	10	9	8	7	ა კ მ ნ ი მ ი ს ი
4	6	5	11	10	9	8	7	
12	13	12	11	10	9	8	7	
1	13	12	11	10	9	8	14	
9	13	12	11	10	16	15	14	
17	13	12	18	17	16	15	14	
6	13	19	18	17	16	15	14	
14	20	19	18	17	16	15	14	
3	20	19	18	17	16	22	21	
11	20	19	18	24	23	22	21	
0	20	19	25	24	23	22	21	
8	27	26	25	24	23	22	21	
16	27	26	25	24	23	29	21	
5	27	26	25	24	30	29	28	
13	27	26	25	1	30	29	28	
2	27	3	2	1	30	29	28	
10	4	3	2	1	30	29	5	მ ა ს ი
18	4	3	2	1	7	6	5	
7	4	3	2	1	7	6	5	

ამ ცხრილის მიხედვით შეგვიძლია გავიგოთ, თუ როდის იყო აღდგომა (პასექი) ნებისმიერ წელს; მაგალითად, 2018 წელს.

ამისათვის უნდა მოვიქცეთ შემდეგნაირად: 2018-ს ეყოფოთ 19-ზე, შედეგად მივიღებთ 106 მთელსა და ნაშთში – 4-ს. შემდეგ, 2018-ს ეყოფოთ 28-ზე, შედეგად მივიღებთ 72 მთელსა და ნაშთში – 2-ს.

ამის შემდეგ, 19-ზე გაყოფის ნაშთების სეკტში ვაფიქსირებთ 4-ს;

ასევე 28-ზე გაყოფის ნაშთებში ვეძებთ და ვაფიქსირებთ 2-ს.

შემდეგ 4-სა და 2-ის პორიზონტალურ და ვერტიკალურ კეფთაში ვაფიქსირებთ შესაბამის რიცხვს, ამ შემთხვევაში ეს რიცხვია 8, რომელიც ყვითელი ფერის უჯრედშია მოთავსებული და მას აპრილის თვე უკესაბამება. ამრიგად, 2018 წელს აღდგომის დღე იყო 8 აპრილი.

ეთქვამთ, გვინდა ვიპოვოთ აღდგომის შესაბამისი დღე 2024 წელს. ამ შემთხვევაში 19-ის ნაშთების სვეტში უნდა ავიღოთ 10, ხოლო 28-ის ნაშთებში უნდა მოვიძებნოთ 8; მათი შესაბამისი კეფთის უჯრა იქნება 5, რომელიც ვარდისფერია, ამიტომ მას მაისის თვე უკესაბამება; ე.ი. 2024 წელს აღდგომის დღე იქნება 5 მაისი.

შეიძლება ვიპოვოთ აღდგომის დღეები შემდეგი წლებისათვის: 2019 წელი – 28 აპრილი, 2020 წელი – 19 აპრილი; 2021 წელი – 2 მაისი, 2022 წელი – 24 აპრილი, 2023 წელი – 16 აპრილი და ა. შ.

უნდა გვახსოვდეს, რომ ახალი სტილით აღდგომის დღე აუცილებლად უნდა მოხდეს 4 აპრილისა და 7 მაისის შუალედში, ამ დღეების ჩათვლით.

ზემოთ მოხსენებული 19 და 28 რიცხვები შესაბამისად არიან: 19 - მთვარის ციკლი, 28 - მზის ციკლი. მათი ნამრაველია $19 \cdot 28 = 532$. ქორონიკული წელთაღრიცხვა, ასევე ქართული დასაბამითგანი აგებულია 532-წლიან ციკლზე. რიცხვი 532 განსაკუთრებით მოსახერხებელია ყოველგვარი საკალენდრო გამოთვლის დროს.

15.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. დედამიწის ირგვლივ პირველი მოგზაურობა 1519 წლის 10 აგვისტოს დაიწყო, იგი 3 წელი და 29 დღე გაგრძელდა. როდის დამთავრდა ეს მოგზაურობა?
2. ცნობილი ბერძენი მათემატიკოსი არქიმედე დაიბადა ჩვენს წელთაღრიცხვამდე 287 წელს. ცნობილია, რომ მან 75 წელი იცოცხლა, რომელ წელს გარდაიცვალა არქიმედე?
3. პალეის კომეტა 1682 წელს და 1758 წელს გამოჩნდა. იპოვეთ მზის გარშემო მისი მიმოქცევის პერიოდი და გამოთვალეთ, როდის გამოჩნდება ის კიდევ?

4. რამდენმა დრომ განელო ორშაბათის დღე-ღამის დასაწყისიდან:
ა) ოთხშაბათის 13 საათამდე? ბ) ხუთშაბათს 18 სთ.50წთ-მდე?
5. მატარებლები 25 წთ-ში ერთხელ გადიან სადგურიდან. პირველი მატარებელი 17 საათზე გავიდა, როდის გაეა მეოთხე მატარებელი?
6. სასტუმროში პარასკევს, 25 იელისს, 15 საათზე დაბინავდა ტურისტი და მან სასტუმრო დატოვა 3 დღისა და 4 საათის შემდეგ. რა რიცხვში, კვირის რომელ დღეს და რომელ საათზე დატოვა მან სასტუმრო?
7. წვიმა 22 სთ.50 წთ-დან 23 სთ.25 წთ-მდე მოდიოდა. რამდენ ხანს წვიმდა?
8. ცნობილი რომაელი პოეტი ოვიდიუს ნაზონი ჩვენს წელთაღრიცხვამდე 43 წელს დაიბადა და ჩვენი წელთაღრიცხვის 17 წელს გარდაიცვალა. რამდენი წელი იცოცხლა მან?
9. მექანიკურმა საათმა მომართვიდან 7 დღისა და 10 საათის განმავლობაში იმუშავა და ორშაბათს დილის 4 საათზე გაჩერდა. როდის მოუმართავთ იგი უკანასკნელად?
10. კომპანია, სამუშაოს შეკვეთის შემდეგ, ავანსი მიიღო 16 აგვისტოს 14 საათზე და 30 წუთზე. სამუშაოს დამთავრების შემდეგ დარჩენილი თანხა მას ჩაერიცხა 31 აგვისტოს 13 საათზე და 25 წუთზე. რა დრომ განელო ავანსის ჩარიცხვიდან დარჩენილი თანხის ჩარიცხვამდე?
11. ცნობილი მათემატიკოსი რენე დეკარტი დაიბადა 1596 წლის 3 აპრილს და 53 წლის, 10 თვის, 9 დღის ასაკში გარდაიცვალა. როდის გარდაიცვალა დეკარტი?
12. გემი ნავსადგურიდან 24 იელისის 15 საათზე გავიდა და დანიშნულების ადგილს 6 დღის, 1 საათის და 20 წუთის შემდეგ მიაღწა. როდის მივიდა გემი დანიშნულების ადგილზე?
13. გემი ნავსადგურიდან 24 იენისის დილის 8 საათზე და 40 წუთზე გავიდა. დანიშნულების ადგილს იგი 8 დღის, 15 საათის და 35 წუთის შემდეგ მიაღწა. როდის მივიდა გემი დანიშნულების ადგილზე?
14. დათო საფრანგეთში გაემგზავრა 2016 წლის 1 იანვარს და საქართველოში დაბრუნდა იმავე წლის 5 იენისს. რამდენი დღე არ იყო დათო საქართველოში?

15. ცნობილი მეცნიერი ისააკ ნიუტონი 1642 წლის 25 დეკემბერს დაიბადა და 1727 წლის 20 მარტს გარდაიცვალა. რამდენ ხანს იცოცხლა ნიუტონმა?
16. მთვარის დაბნელება 2 საათი და 36 წუთი გაგრძელდა და 23 საათზე და 15 წუთზე დამთავრდა. რომელ საათზე დაიწყო მთვარის დაბნელება?
17. მთვარის თევზია 29 დღე, 12 საათი, 44 წუთი და 3 წამი. რამდენი დღე, საათი, წუთი და წამია მთვარის 12 თვეში?
18. დედამიწის გარშემო სრულ შემობრუნებას მთვარე 97 დღე-ღამეს, 7 საათს, 43 წუთს და 11 წამს უნდება. რა დროის განმავლობაში შემობრუნდება მთვარე 12-ჯერ?
19. ბგერა წამში 330 მეტრს გადის, ქვემეხის გასროლა ცეცხლის გამოჩენიდან 1 წუთის და 35 წამის გაელის შემდეგ გაიგონეს. დაკვირვების ადგილიდან რა მანძილზე იდგა ქვემეხი?
20. გაადიდეთ 7 დღე-ღამე, 15 საათი და 4 წუთი 12-ჯერ.
21. 7 საათი 48 წუთი და 56 წამი გაამრავლეთ 18-ზე.
22. 25 წელი, 10 თვე და 23 დღე გაამრავლეთ 48-ზე.
23. მექანიკური საათი ყოველ 1 საათში 2 წუთით და 3 წამით უკან რჩება. რამდენი იქნება ჩამორჩენა 2 დღე-ღამისა და 15 საათის შემდეგ?
24. მექანიკური საათი 1 დღე-ღამესა და 12 საათში 2 წუთითა და 24 წამით წინ მიდის, რამდენით წაგა წინ 3 დღე-ღამეში?
25. საათი დღე-ღამეში 12 წამით წინ გარბის. რამდენით წაგა წინ ნაკიანი წლის განმავლობაში?
26. შეილი 6 წლის 8 თვის და 4 დღისაა. მამა 6-ჯერ უფროსია შეილზე, დედა 4 წლით 5 თვით და 10 დღით უმცროსია მამაზე. რა ხნისაა დედა?
27. რამდენჯერ მოთავსდება 1 კვირა 23 საათი და 44 წუთი – 9 კვირაში, 21 საათში და 52 წუთში?
28. რამდენჯერ ნაკლებია 23 დღე-ღამეზე 15 წუთი და 20 წამი?
29. ხელის ტუმბოთი შეიძლება 6 საათში ამოიტუმბოს წყლით საესე აუზი. რა დროში ამოტუმბავს წყალს იმავე აუზიდან 2 ცალი ელექტროტუმბო, თუ ერთი ელექტროტუმბოს სიმძლავრე 5-ჯერ მეტია ხელის ტუმბოსთან შედარებით?
30. 86 დღე-ღამე, 8 საათი და 24 წუთი გაყავით 22-ზე.

15.1.1. ტესტი №14

1. დრო

- ა) ექვტორული სიდიდეა; ბ) ზოგჯერ ექვტორული სიდიდეა;
გ) სკალარული სიდიდეა;
დ) ზოგჯერ სკალარული სიდიდე არ არის.

2. ერთ საათში

- ა) 720 წამია; ბ) 360 წამია; გ) 60 წამია; დ) 3600 წამია.

3. ნაკიან წელიწადში

- ა) 360 დღე-ღამეა; ბ) 364 დღე-ღამეა; გ) 365 დღე-ღამეა;
დ) 366 დღე-ღამეა.

4. წელიწადში

- ა) 12 თვეა; ბ) 10 თვეა; გ) 18 თვეა; დ) 24 თვეა.

5. მოეარისმიერი კალენდრის – ჰიჯრას წელიწადი შედგება

- ა) 365-366 დღე-ღამისაგან; ბ) 354-355 დღე-ღამისაგან;
გ) 350 დღე-ღამისაგან; დ) 360 დღე-ღამისაგან.

6. თუ 17 დღე-ღამეს 4 საათს და 36 წუთს გაეყოფთ 3 საათზე, 26 წუთზე და 18 წამზე – მივიღებთ

- ა) 100-ს; ბ) 120-ს; გ) 140-ს; დ) 150-ს.

7. დღე-ღამის $\frac{1}{96}$ ნაწილია

- ა) 20 წუთი; ბ) 10 წუთი; გ) 15 წუთი; დ) 25 წუთი.

8. კეირის $\frac{1}{8}$ ნაწილია

- ა) 1 დღე-ღამე; ბ) 23 საათი; გ) 21 საათი; დ) 22 საათი.

9. 9 წლისა და 8 თვის მსჯავრი პატიმარს ამნისტიამ შეუმსუბუქა 25%-ით. რამდენი დრო დასტირდება პატიმარს სასჯელის მოხდის-თვის, თუ ამნისტიას გაეითვალისწინებთ?

- ა) 8 წელი და 1 თვე; ბ) 6 წელი და 2 თვე;
გ) 7 წელი და 8 თვე; დ) 7 წელი და 3 თვე.

10. გოგონა 10 წლისაა. 4 წლის შემდეგ მამა ქალიშვილზე 3-ჯერ უფროსი იქნება. რამდენი წლისაა მამა?

- ა) 42 წლის; ბ) 38 წლის; გ) 40 წლის; დ) 30 წლის.

§16. დამოკიდებულებანი სიდიდეებს შორის
(მანძილი, სიჩქარე, დრო; ღირებულება, ფასი, რაოდენობა)

განვიხილოთ თანაბარი მოძრაობა, რომლის დროსაც მოძრავი სხეული ყოველ საათში 20 კილომეტრს გადის, 1 საათის შემდეგ სხეულის მიერ გავლილი იქნება 20 კმ მანძილი, 2 საათის შემდეგ – 40 კმ, 3 საათის შემდეგ – 60 კმ და ა.შ. შევადგინოთ ცხრილი:

დრო საათობით	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5
გავლილი მანძილი კილომეტ- რობით	20	30	40	50	60	70	80	90	100

ამ ცხრილიდან თვალსაჩინოდ, ჩანს შესაბამისობა დროსა და გავლილ მანძილს შორის. დროის რომელი ორი მნიშვნელობაც არ უნდა ავიღოთ, მათი შეფარდება და შესაბამისი გავლილ მანძილთა შეფარდება ერთსა და იმავე რიცხვს მოგვცემს. მაგალითად, ავიღოთ 4 საათი და 2 საათი, გვაქვს $4:2=2$. შესაბამისი მანძილებია 80 კილომეტრი და 40 კილომეტრი, მათი შეფარდება $80:40=2$. ასევე ერთნაირი მნიშვნელობების იქნება $3\frac{1}{2}$ სთ, $2\frac{1}{2}$ სთ და მათი შესაბამისი მან-

ძილების 70 კმ-ისა და 50 კმ-ის შეფარდებები: $\frac{3\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}} = \frac{70}{50} = \frac{7}{5} = 1,4$.

ასეთივე დამოკიდებულება არსებობს ერთნაირი საცალო ფასის მქონე საქონლის რაოდენობასა და მის ღირებულებას შორის. ეთქვათ, რაიმე საქონლის 1 კილოგრამის ფასი 4 ლარია. ცხრილით გამოვსახოთ შესაბამისობა საქონლის რაოდენობასა და ღირებულებას შორის:

საქონლის რაოდენობა კილოგრამობით	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5
ღირებულება ლარებში	4	6	8	10	12	14	16	18	20

აეიღოთ შეფარდება საქონლის ნებისმიერი ორი რაოდენობისა და შესაბამისი ღირებულებების. მაგალითად, 4 კილოგრამისა და $2\frac{1}{2}$ კილოგრამის, შესაბამისად ღირებულებები იქნება 16 ლარი და 10

ლარი. გვაქვს ფარდობების ტოლობა: $\frac{4}{2\frac{1}{2}} = \frac{16}{10} = 1,6$.

შემოვიღოთ განსაზღვრა – თუ ერთი სიდიდის ყოველი ორი ნებისმიერი მნიშვნელობის შეფარდება ტოლია მეორე სიდიდის შესაბამის მნიშვნელობათა შეფარდების, მაშინ ასეთ სიდიდეებს პირდაპირპროპორციული სიდიდეები ეწოდებათ.

ჩვენს მიერ განხილული მაგალითები: დრო და ამ დროში გაველილი მანძილი, თანაბარი მოძრაობის პირობებში (ე.ი. მუდმივი სიჩქარის შემთხვევაში) და საქონლის რაოდენობა, მისი შესაბამისი ღირებულება ერთი და იგივე საცალო ფასის შემთხვევაში პირდაპირპროპორციული სიდიდეების მაგალითებს წარმოადგენენ.

ვთქვათ, გვაქვს ორი პირდაპირპროპორციული სიდიდე. a იყოს პირველი მათგანის ერთი მნიშვნელობა, ხოლო b მეორე სიდიდის შესაბამისი მნიშვნელობა. თუ კიდევ ცნობილი იქნება პირველი სიდიდის მნიშვნელობა, მაგალითად – c , ადვილად შეიძლება მოიძებნოს მეორე სიდიდის მისი (ე.ი. c -ს) შესაბამისი მნიშვნელობაც x , მას მეოთხე პროპორციული ეწოდება. მართლაც, a , b , c და x ქმნიან პროპორციას: $\frac{a}{c} = \frac{b}{x}$, საიდანაც $x = \frac{bc}{a}$. მივიღეთ ზოგადი ფორმულა, რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს ორ პირდაპირპროპორციულ სიდიდეს.

აეიღოთ ორი პირდაპირპროპორციული სიდიდიდან ერთ-ერთი ერთეულის ტოლი მნიშვნელობა, მეორე სიდიდის შესაბამისი მნიშვნელობა აღვნიშნოთ k -ით. პირველი სიდიდის ერთეულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი მნიშვნელობა აღვნიშნოთ x -ით, მეორე სიდიდის შესაბამისი მნიშვნელობა y -ით. პირდაპირპროპორციული სიდიდეების განსაზღვრის თანახმად, $\frac{y}{k} = \frac{x}{1}$, ან $\frac{y}{x} = \frac{k}{1}$, აქედან $y=kx$. k -ს

ეწოდება პროპორციულობის კოეფიციენტი. იგი წარმოადგენს პირდაპირპროპორციულ სიდიდეთა შესაბამის მნიშვნელობათა შეფარდებას.

ამგვარად, პირდაპირპროპორციულ სიდიდეთა შესაბამის მნიშვნელობებს შორის დამოკიდებულება გამოისახება ფორმულით:

$$y=kx \quad (1).$$

შეიძლება ვაჩვენოთ პირიქითაც, თუ ორი სიდიდის შესაბამის მნიშვნელობათა (x -სა და y -ს) შორის დამოკიდებულება გამოისახება (1) ფორმულით, ასეთი სიდიდეები პირდაპირპროპორციული სიდიდეები იქნებიან.

მართლაც, ვთქვათ, x_1 და y_1 არის შესამოწმებელ სიდიდეთა შესაბამისი მნიშვნელობების ერთი ნებისმიერი წყვილი. პირობის მიხედვით $y_1=kx_1$; მეორე ნებისმიერი წყვილი იყოს (x_2 ; y_2); ამ შემთხვევაშიც, $y_2=kx_2$. აქედან გვექნება: $\frac{y_2}{y_1} = \frac{kx_2}{kx_1}$, ანუ $y_2:y_1=x_2:x_1$. ეს კი მოცემუ-

ლი სიდიდეების პირდაპირპროპორციულობას ნიშნავს.

ამის შედეგად, სიდიდეთა შორის პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულების განსაზღვრა შეიძლება ასეც ჩამოვაყალიბოთ: ორ სიდიდეს პირდაპირპროპორციული ეწოდება, თუ მათ ნებისმიერ შესაბამის ორ მნიშვნელობას (x -სა და y -ს) შორის დამოკიდებულება გამოისახება ფორმულით $y=kx$ (ეს ფორმულა იმას გვეუბნება, რომ y არის x -ის პირდაპირპროპორციული სიდიდე, პროპორციულობის მუდმივი k კოეფიციენტით (რიცხვით)). იმავე ფორმულიდან გვაქვს:

$$x = \frac{1}{k} \cdot y, \text{ რაც თავის მხრივ, იმას გვეუბნება, რომ } x \text{ არის } y\text{-ის მიმართ}$$

პირდაპირპროპორციული, პროპორციულობის კოეფიციენტით $\frac{1}{k}$ (ცხადია, $k \neq 0$). ამრიგად, პირდაპირპროპორციულობა ორ სიდიდეს შორის სიმეტრიული ხასიათისაა.

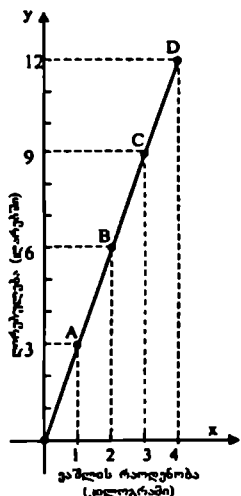
$y=kx$ ფორმულიდან ჩანს, რომ პირდაპირპროპორციული სიდიდეებიდან ერთ-ერთის რომელიმე მნიშვნელობის რაიმე რიცხვზე გარავლევით მეორე სიდიდის შესაბამისი მნიშვნელობაც იმავე რიცხვზე მრავლდება.

შესაბამისობა, რომელიც არსებობს პირდაპირპროპორციულ სი-

დიდებებს შორის შეიძლება თვალსაჩინოდ წარმოვადგინოთ გრაფიკის საშუალებით დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში.

ვთქვათ, 1 კილოგრამი ვაშლის ფასი 3 ლარია. ვიპოვოთ დამოკიდებულება ვაშლის (კილოგრამებით) რაოდენობისა და მის შესაბამის ღირებულებებს (ლარებით) შორის.

ცხადია, გვაქვს დამოკიდებულება $y=3x$. ამ დამოკიდებულების გრაფიკი შეიძლება წარმოვადგინოთ სხივის საშუალებით, რომლის სათავე კოორდინატთა სათავეში (0;0) იმყოფება.



ნახაზიდან ცხადად ჩანს, რომ თუ ვაშლების რაოდენობა კილოგრამებით 0-ის ტოლია, მაშინ მისი ღირებულებაც 0 ლარი იქნება. A წერტილს შეესაბამება 1 კილოგრამი ვაშლი, რომლის შესაბამისი ღირებულება 3 ლარია; B წერტილს შეესაბამება 2 კილოგრამი ვაშლი, რომლის შესაბამისი ღირებულება 6 ლარია; C წერტილს შეესაბამება 3 კილოგრამი ვაშლი, რომლის შესაბამისი ღირებულება 9 ლარია; ხოლო D წერტილს შეესაბამება 4 კილოგრამი ვაშლი, რომლის შესაბამისი ღირებულება 12 ლარის ტოლია.

შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრა – თუ ერთი სიდიდის ყოველი ორი ნებისმიერი მნიშვნელობის შეფარდება ტოლია მეორე სიდიდის შესაბამის ნიშნელობათა შებრუნებული შეფარდების, მაშინ ასეთ სიდიდეებს უკუპროპორციული სიდიდეები ეწოდებათ.

უკუპროპორციული სიდიდეების მაგალითად შეიძლება განვიხილოთ თანაბარი მოძრაობის შემთხვევაში გარკვეული მანძილის გასაღელელად საჭირო დრო და მოძრაობის სიჩქარე. ვთქვათ, თანაბარი სიჩქარით გასაღელელია 120 კილომეტრი. თუ ეს მანძილი გავლილია 5 საათში, ეს იმას ნიშნავს, რომ სიჩქარე ტოლი იყო 24 კმ/სთ-ის, თუ – 10 საათში, მაშინ სიჩქარე იქნებოდა 12 კმ/სთ. შევადგინოთ ცხრილი, სადაც თვალსაჩინოდ გამოჩნდება შესაბამისობა დროსა და სიჩქარეს შორის.

დრო (საათობით)	1	2	3	4	5	6	8	10	12
სიჩქარე (კმ/სთ-ობით)	120	60	40	30	24	20	15	12	10
გაეღილი მანძილი (კილომეტრობით)	120	120	120	120	120	120	120	120	120

თუ ავიღებთ დროის ორ ნებისმიერ შუალედს, ეტყვათ 12 საათი და 4 საათი; მათი შესაბამისი სიჩქარეებია 10 კმ/სთ და 30 კმ/სთ; მაშინ დროის შუალედთა გამომსახველი რიცხვების შეფარდება $\frac{12}{4} = 3$ იგივეა, რაც შესაბამის სიჩქარეთა გამომსახველი რიცხვების

შებრუნებული შეფარდება: $1 : \frac{10}{30} = 3$.

ასეთი სიდიდეების მაგალითები უამრავი შეიძლება დავასახელოთ. მაგალითად, გარკვეული თანხით საყიდელი საქონლის რაოდენობა კილოგრამობით და კილოგრამის საცალო ფასი; ან გარკვეული სამუშაოს შესასრულებლად საჭირო დღეების რაოდენობა და მუშების რაოდენობა.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი: ეტყვათ, დათოს მისცეს 36 ლარი და დააეღვს ამ თანხით შესაბამისად ეყიდა ერთი და იგივე სახელების რომელიმე ხილეულის სახეობა, მასთან თანხა მთლიანად უნდა დაეხარჯა. ავაგოთ შესაბამისი ცხრილი:

ხილეულის სახეობა	მანდა- რინი	ვაშ- ლი	მსხა- ლი	ფორთო- ხალი	გრეიფუ- ტი	მარ- წყვი	ანა- ნასი	აეოკა- დო
1 კილოგრა- მის საცა- ლო ფასი (ლარებში)	1	2	3	4	6	9	12	18
რაოდენობა (კილოგრა- მებში)	36	18	12	9	6	4	3	2
მთლიანი თანხა (ლარებში)	36	36	36	36	36	36	36	36

თუ ავიღებთ ნებისმიერ ორი სახეობის ხილს, მაგალითად: აეოკადოსა და მსხალს, მათი შესაბამისი საცალო ფასია – 1 კილოგრამი აეოკადო 18 ლარი ღირს, ხოლო 1 კილოგრამი მსხლის ფასი 3 ლა-

რია, ამ რიცხვების შეფარდება $-\frac{18}{3} = 6$ -ის ტოლია. მათი შესაბამისი რაოდენობების (კილოგრამებში) გამომსახველი რიცხვების შებრუნებული შეფარდებაა $-1 : \frac{2}{12} = 6$. ორივე შემთხვევაში ერთი და იგივე რიცხვი მივიღეთ.

ამრიგად, მოყვანილ მაგალითებში ერთი სიდიდის ორი ნებისმიერი მნიშვნელობის შეფარდება ტოლია მეორე სიდიდის შესაბამის მნიშვნელობათა შებრუნებელი შეფარდების.

გამოვსახოთ ეს დამოკიდებულება ზოგადად და მივიღოთ უკუპროპორციულ სიდიდეთა დამაკავშირებელი ფორმულა.

ავიღოთ უკუპროპორციულ სიდიდეთაგან ერთი ერთეულის ტოლი მნიშვნელობა, მეორე სიდიდის მისი შესაბამისი მნიშვნელობა აღვნიშნოთ k -ით; პირველი სიდიდის ერთეულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი მნიშვნელობა აღვნიშნოთ x -ით, მეორე სიდიდის მისი შესაბამისი მნიშვნელობა y -ით; უკუპროპორციული სიდიდეების განსაზღვრის თანახმად, $\frac{y}{k} = \frac{1}{x}$, აქედან $xy = k$ (2).

k -ს ეწოდება უკუპროპორციულობის კოეფიციენტი. იგი წარმოადგენს უკუპროპორციულ სიდიდეთა შესაბამის მნიშვნელობათა ნამრავლს. წინა მაგალითებში – თანაბარი მოძრაობის შემთხვევაში – $k=120$, ხოლო მეორე მაგალითში – $k=36$.

უკუპროპორციული სიდიდეებისათვის (ჩვენ განვიხილავთ მათ ისეთ მნიშვნელობებს, რომლებიც დადებითი რიცხვებით ხასიათდებიან, მასთან $k \neq 0$, $x \neq 0$ და $y \neq 0$). დამახასიათებელია ის, რომ ერთი სიდიდის რამდენჯერმე გადიდებას შეესაბამება მეორე სიდიდის იმდენჯერმე შემცირება, ხოლო ერთის რამდენჯერმე შემცირებას შეესაბამება მეორის იმდენჯერმე გადიდება. ეს აშკარად ჩანს (2) ფორმულიდან.

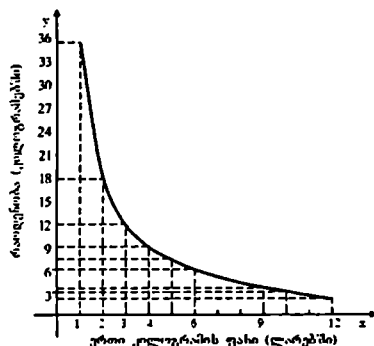
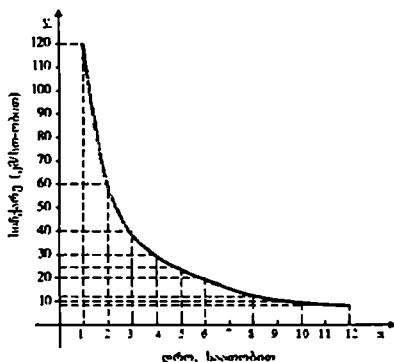
(2) ფორმულიდან გვაქვს: $y = \frac{k}{x}$, ან $x = \frac{k}{y}$.

სიდიდეთა შორის უკუპროპორციული დამოკიდებულების განსაზღვრა შეიძლება ასეც ჩამოვაყალიბოთ: ორ სიდიდეს უკუპროპორციული ეწოდება, თუ მათ ნებისმიერ შესაბამის ორ მნიშვნელო-

ბას შორის დამოკიდებულება გამოისახება ფორმულით $xy = k$, ან რაც იგივეა $y = \frac{k}{x}$, ან $x = \frac{k}{y}$.

თუ ერთი სიდიდე მეორის მიმართ უკუპროპორციულია, უკუპროპორციულობის k კოეფიციენტით, მაშინ მეორე სიდიდეც პირველის მიმართ უკუპროპორციული იქნება, უკუპროპორციულობის იმავე k კოეფიციენტით.

დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში გამოვსახოთ განხილული მაგალითების გრაფიკები:



მივიღეთ გრაფიკები, მიღებულ მრუდებს პიპერბოლა ეწოდება (უფრო ზუსტად მივიღეთ პიპერბოლას ერთი შტო, იმის გამო რომ ჩვენ x -სა და y -ის მხოლოდ დადებითი მნიშვნელობებით ვიყარგლებით).

16.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. x და y პირდაპირპროპორციული სიდიდეებია. შეავსეთ ცხრილი:

x	1	2	3	4	5
y	4,5				

2. 6 კილოგრამი ხორცი 72 ლარი ღირს. რა ეღირება იგივე ხარისხის 5 კილოგრამი ხორცი?

3. 6 მილით აუზი 18 საათში ივსება. რამდენი საათი დაჭირდება აუ-

ზის ავსებას იგივე წყალგამტარიანობის 9 მილით (იგულისხმება, რომ ყველა მილს ტოლი წყალგამტარიანობა აქვს?

4. ორმა დიასახლისმა ერთად იყიდეს 30 კილოგრამი ვაშლი და ღირებულებაც თანაბრად გადაიხადეს, მაგრამ ერთმა დიასახლისმა 4 კილოგრამით მეტი წაიღო, ამიტომ მან მეორე დიასახლისს 7 ლარი გადაუხადა. რამდენი კილოგრამი ვაშლი შეხვდა თითოეულ დიასახლისს და რა ღირს ერთი კილოგრამი ვაშლი?
5. 30 ცალ კიტრში და 2 ცალ ნესეში ერთად 14 ლარი გადაიხადეს. კიტრი რომ ერთისამად გაძვირებულიყო, ხოლო ნესეი ერთიორად, მაშინ მათში 34 ლარი უნდა მიეცათ. რა ღირს 10 ცალი კიტრი და 1 ცალი ნესეი?
6. ერთმანეთში უნდა აურიონ ორი ხარისხის საქონელი: ერთის ფასი – კილოგრამი 4 ლარი, ხოლო მეორის ფასი – კილოგრამი 9 ლარი. უნდათ შეადგინონ 45 კილოგრამი ნარევი, ისე რომ 1 კილოგრამის საშუალო ფასი 6 ლარი იყოს. თითოეული ხარისხის რამდენი კილოგრამი უნდა ავიღოთ ნარევის შესადგენად?
7. ორი ხარისხის კამფეტი, კილოგრამი 9-ლარიანი და 6-ლარიანი ერთმანეთში ისე აურიეს, რომ 7-ლარიანი ნარევი მიიღეს. 6-ლარიანი კამფეტი 44 კგ აიღეს. რამდენი კილოგრამი აიღეს 9-ლარიანი კამფეტი?
8. კილოგრამი 6-ლარიანი და 3-ლარიანი ვაშლი ერთმანეთში აურიეს და 5-ლარიანი ნარევი მიიღეს. თითოეული ხარისხის რამდენი კილოგრამი ვაშლი აიღეს ნარევისათვის, თუ I ხარისხის ვაშლი აღებულია 4 კილოგრამით მეტი, ვიდრე მეორე ხარისხის?
9. 2 კგ მსხალი იმდენივე ღირს, რამდენიც 3 კგ ვაშლი. 27 ლარით შეიძლება ვიყიდოთ 6 კგ მსხალი. რა ღირს 1 კგ ვაშლი?
10. რაღაც სამუშაოს 26 მუშა 17 დღეში ამთავრებს. რამდენი მუშაა საჭირო, რომ ეს სამუშაო 13 დღეში დამთავრდეს, თუ მუშების შრომისუნარიანობა ერთმანეთის ტოლია?
11. სასტუმროში 14 დღეში 25 დამსვენებელზე 175 კგ პური იხარჯება. რამდენი კილოგრამი პური იქნება საჭირო იმავე ნორმით 32 დამსვენებელზე 6 დღეში?
12. I ხარისხის ვაშლის ფასი 3 ლარია, ხოლო II ხარისხის ვაშლის ფასი – 2 ლარი. სულ გაიყიდა 400 ლარის ღირებულების ვაშლი.

- თითოეული ხარისხის რამდენი კილოგრამი ვაშლი გაიყიდა, თუ I ხარისხის 50 კილოგრამით მეტი გაიყიდა, ვიდრე II ხარისხის?
13. მაღაზია მეტრ ქსოვილს 8 ლარით იმაზე ძვირად ყიდდა, ვიდრე მასში გადაიხადა, ამიტომ 162 მეტრში იმდენივე აიღო, რამდენიც 210 მეტრში გადაიხადა. რამდენ ლარად შეიძინა ერთი მეტრი ქსოვილი მაღაზიამ?
 14. ბაღის გასაწმენდად ერთნაირი პირობებით აიყვანეს ჯერ 5 მუშა, შემდეგ კიდევ 2. პირველებმა 6 დღე იმუშავეს, მეორეებმა – 4 დღე და ყველამ ერთად 2280 ლარი მიიღო. რა თანხა მიიღო თითოეულმა მუშამ?
 15. 3700 ლარად იყიდეს 25 მეტრი მაუდი და 40 მეტრი ხავერდი. მეტრი მაუდი 4-ჯერ იაფი იყო მეტრ ხავერდზე. რა ღირდა მეტრი მაუდი და მეტრი ხავერდი?
 16. მატარებელმა დამკვირვებელს 8 წამში ჩაუარა, ხოლო 400 მეტრის სიგრძის ბაქანს კი – 33 წამში. იპოვეთ მატარებლის სიგრძე და სიჩქარე.
 17. 190 კილომეტრის მანძილზე მატარებლის სიჩქარე 50 კმ/სთ იყო. გზის დაზიანების გამო მან სიჩქარე 20 კმ/სთ-მდე შეამცირა და მთელი გზის გაეღას 5 საათი მოანდომა, ვიპოვოთ დაზიანებული გზის სიგრძე.
 18. ძაღლი კურდღელს მისდევს, რომელიც თავისი 40 ნახტომით წინ არის ძაღლზე. ძაღლი 7 ნახტომს აკეთებს იმ დროში, რა დროშიც კურდღელი 9 ნახტომს აკეთებს, მაგრამ ძაღლის 3 ნახტომი კურდღლის 5 ნახტომის ტოლია. რამდენი ნახტომი უნდა გააკეთოს ძაღლმა, რომ კურდღელს დაეწიოს?
 19. ძაღლი მელას გამოეკიდა, რომელიც მისგან 105 მეტრით იყო დაშორებული. რამდენ წუთში დაეწევა ძაღლი მელას, თუ მელას სიჩქარე წუთში 340 მეტრის ტოლია, ხოლო ძაღლის – 375 მეტრის?
 20. დილის 7 საათზე ქალაქიდან ტურისტთა ჯგუფი გავიდა, რომელიც საათში 5 კილომეტრს გადიოდა. იმავე დღის 14 საათზე ქალაქიდან იგივე მიმართულებით გამოვიდა ველოსიპედისტი, რომელიც საათში 12 კილომეტრს გადიოდა. ქალაქიდან რა მანძილ-

ზე და რა დროში დაეწევა ველოსიპედისტი ტურისტთა ჯგუფს?

21. მდინარეზე, რომელიც 3 კმ/სთ სიჩქარით მიედინება, ორი ნავსადგური მდებარეობს ერთმანეთისაგან 60 კილომეტრის მანძილზე. შუადღისას, ერთდროულად ორივე ნავსადგურიდან ერთმანეთის შემხვედარი მიმართულებით გამოვიდნენ გემები. თითოეული გემის სიჩქარე დამდგარ წყალში 15 კმ/სთ-ია. იპოვეთ დრო, როცა გემები ერთმანეთს შეხვდებიან, მანძილი შეხვედრის ადგილიდან თითოეულ ნავსადგურამდე და დანიშნულების ადგილზე გემების მისვლის დრო.
22. მანძილს A ქალაქიდან B ქალაქამდე განრიგით ავტობუსი გადის 40 კმ/სთ საშუალო სიჩქარით. გზატკეცილის შეკეთების გამო ავტობუსმა გზის პირველი ნახევარი გაიარა 20 წუთის დაგვიანებით. განრიგში რომ ჩატეულიყო B ქალაქამდე დარჩენილი გზა მან 45 კმ/სთ საშუალო სიჩქარით გაიარა. იპოვეთ მანძილი A ქალაქიდან B ქალაქამდე.
23. გზა A ქალაქიდან B ქალაქამდე ზღვით 10 კილომეტრით ნაკლებია, ვიდრე საავტომობილო გზით. გემი მანძილის გავლას A ქალაქიდან B ქალაქამდე 3 საათს და 20 წუთს უნდება, ხოლო ავტომობილი კი 2 საათს. ვიპოვოთ გემის სიჩქარე, თუ იგი ავტომობილის სიჩქარეზე 17 კმ/სთ-ით ნაკლებია.
24. იპოვეთ მატარებლის სიგრძე და სიჩქარე, თუ ის უძრავ დამკვირვებელს გვერდს უკლის 7 წამში, ხოლო 306 მეტრის სიგრძის ბაქანს კი – 25 წამში.
25. გემის სიჩქარე დინების მიმართულებით 18 კმ/სთ-ის ტოლია, დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით კი – 14 კმ/სთ-ია. იპოვეთ მდინარის სიჩქარე და გემის სიჩქარე მდგარ წყალში.
26. თბომავეალმა მანძილი ორ ნავსადგურს შორის მდინარის მიმართულებით გაიარა 4 საათში, ხოლო მდინარის დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით 5 საათში. იპოვეთ მანძილი ნავსადგურებს შორის, თუ მდინარის დინების სიჩქარე 2 კმ/სთ-ია.
27. ნავი დინების მიმართულებით 3 საათში იმდენ კილომეტრს მიცურავდა, რამდენსაც 3 სთ 40 წთ-ში დინების საწინააღმდეგოდ. იპოვეთ მდინარის დინების სიჩქარე, თუ ნავის სიჩქარე მდგარ

წყალში 5 კმ/სთ-ია.

28. კატარღამ მდინარის დინების მიმართულებით 5 საათში იმდენი კილომეტრი გაიარა, რამდენიც 6 სთ 15 წთ-ში მდინარის დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით. იპოვეთ კატარღის სიჩქარე მდგარ წყალში, თუ მდინარის დინების სიჩქარე 2,4 კმ/სთ-ია.
29. რამდენი კილომეტრით შეიძლება დაშორება ნავსადგურიდან მდინარის დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით ნავით, რომლის სიჩქარე მდგარ წყალში ტოლია 8 კმ/სთ-ის, რომ უკან დაბრუნება მოასწრო 4 საათში, თუ მდინარის სიჩქარე 2 კმ/სთ-ია?
30. ეტლის წინა ბორბალმა გარკვეულ მანძილზე 15 ბრუნით მეტი გააკეთა, ვიდრე უკანამ. წინა ბორბლის წრეწირის სიგრძე 2,5 მეტრის ტოლია, ხოლო უკანასი 4 მეტრის. რამდენი ბრუნი გააკეთა თითოეულმა ბორბალმა და რა მანძილი გაიარა ეტლმა?

16.1.1. ტესტი №15

1. მუდმივი სიჩქარის შემთხვევაში დრო და ამ დროში გავლილი მანძილი
 - ა) უკუპროპორციული სიდიდეებია,
 - ბ) პირდაპირპროპორციული სიდიდეები არ არიან,
 - გ) ზოგჯერ უკუპროპორციული სიდიდეებია,
 - დ) პირდაპირპროპორციული სიდიდეებია.
2. საქონლის რაოდენობა და მისი შესაბამისი ღირებულება, ერთი და იგივე საცალო ფასის შემთხვევაში
 - ა) პირდაპირპროპორციული სიდიდეებია,
 - ბ) ზოგჯერ უკუპროპორციული სიდიდეებია,
 - გ) პირდაპირპროპორციული სიდიდეები არ არიან,
 - დ) უკუპროპორციული სიდიდეებია.
3. თუ ერთი სიდიდის ორი ნებისმიერი მნიშვნელობის შეფარდება ტოლია მეორე სიდიდის შესაბამის მნიშვნელობათა შებრუნებული შეფარდების, მაშინ ეს სიდიდეები
 - ა) პირდაპირპროპორციული სიდიდეებია,
 - ბ) ზოგჯერ უკუპროპორციული სიდიდეები არ არიან,

- გ) უკუპროპორციული სიდიდეები არ არიან,
 დ) უკუპროპორციული სიდიდეებია.
4. წისკეილში ყოველ 3 საათში 27 ტონა ხორბალი იფქვება. რამდენი ტონა ხორბლის დაფქვა შეიძლება ამ წისკეილში 9 საათში?
 ა) 81 ტონა, ბ) 3 ტონა, გ) 9 ტონა, დ) 27 ტონა.
5. ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდი ორჯერ გაზარდეს, მაშინ ამ სამკუთხედის პერიმეტრი
 ა) ორჯერ შემცირდება, ბ) სამჯერ გაიზრდება,
 გ) ორჯერ გაიზრდება, დ) სამჯერ შემცირდება.
6. ავტომანქანამ 40 კმ/სთ სიჩქარით 120 კილომეტრი გაიარა. რა დროში გაივლიდა იგი ამ 120 კილომეტრს მისი სიჩქარე 2-ჯერ მეტი რომ ყოფილიყო?
 ა) 2 საათში, ბ) 1 საათში და 30 წუთში, გ) 3 საათში,
 დ) 6 საათში.
7. მაიამ ორ კილოგრამ ხორცში 30 ლარი გადაიხადა. რამდენ კილოგრამ ხორცს იყიდდა მაია იმავე 30 ლარით ხორცის ფასი 20%-ით ნაკლები რომ ყოფილიყო?
 ა) 3 კილოგრამს; ბ) 1,6 კილოგრამს, გ) 2,5 კილოგრამს,
 დ) 2,4 კილოგრამს.
8. ტურისტებმა 7 კილომეტრი ფეხით გაიარეს, ხოლო დარჩენილი მანძილი ავტობუსით, რომლის სიჩქარე 45 კმ/სთ-ის ტოლი იყო. რა მანძილი გაუვლიათ ტურისტებს სულ, თუ ისინი ავტობუსით მგზავრობდნენ 1 საათის და 40 წუთის განმავლობაში?
 ა) 82 კილომეტრი, ბ) 75 კილომეტრი, გ) 97 კილომეტრი,
 დ) 52 კილომეტრი.
9. ავტომობილი 3 საათის განმავლობაში მოძრაობდა 50 კმ/სთ სიჩქარით. რა სიჩქარით უნდა იმოძრაოს ავტომობილმა, რომ 2 საათში გაიაროს იგივე მანძილი?
 ა) 60 კმ/სთ, ბ) 70 კმ/სთ, გ) 55 კმ/სთ, დ) 75 კმ/სთ.
10. გემმა მდინარის დინების მიმართულებით 45 წუთში 16,5 კილომეტრი გაიარა, მდინარის დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით კი – 48 წუთში 14,4 კილომეტრი. იპოვეთ გემის სიჩქარე მდგარ წყალში.
 ა) 18 კმ/სთ, ბ) 22 კმ/სთ, გ) 20 კმ/სთ, დ) 15,45 კმ/სთ.

§17. რიცხვითი გამოსახულება. რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობა. რიცხვითი ტოლობა და უტოლობა, როგორც გამონათქვამი. ჯამგარიტი რიცხვითი ტოლობისა და უტოლობის თვისებები

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: თბილისსა და ქუთაისს შორის 210 კილომეტრია. ქუთაისიდან თბილისისაკენ 60 კმ/სთ სიჩქარით გაემართა სამარშრუტო ტაქსი, 0,5 საათის შემდეგ, მისი გამოსვლიდან, თბილისიდან ქუთაისისაკენ გამოვიდა ავტომობილი, რომლის საშუალო სიჩქარე 90 კმ/სთ-ის ტოლია. ავტომობილის გამოსვლიდან, რა დროში შეხვდებიან ერთმანეთს მანქანები?

ამოცანის ამოსახსნელად, ჯერ გავიგოთ, თუ რა მანძილს გაივლის სამარშრუტო ტაქსი ნახევარ საათში. ამისათვის $60 \cdot 0,5$; შემდეგ ვიპოვოთ, თუ რა მანძილით იქნება დაშორებული იგი თბილისიდან: $210 - 60 \cdot 0,5$. სამარშრუტო ტაქსი და ავტომობილი ერთმანეთს მიუახლოვდებიან სიჩქარით – $(60+90)$ კმ/სთ. ბოლოს, ვიპოვოთ, თუ რამდენ საათში შეხვდებიან ერთმანეთს სამარშრუტო ტაქსი და ავტომობილი (ავტომობილის გამოსვლიდან): $(210 - 60 \cdot 0,5) : (60+90)$.

მიღებულ ჩანაწერს რიცხვითი გამოსახულება ეწოდება. მასში აღნიშნულია მოქმედებები, რომლებიც შესაბამისი თანმიმდევრობით უნდა შესრულდეს ამოცანის პირობაში მოცემულ რიცხვებზე, რომ მივიღოთ პასუხი. რიცხვითი გამოსახულების სტრუქტურული შედგენილობით მოცემულია რიცხვებზე მოქმედებათა შესრულების თანმიმდევრობა – პასუხის გამოანგარიშების პროგრამა. ამ პროგრამის შესრულებით ეპოულობთ რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობას: $(210 - 60 \cdot 0,5) : (60+90) = 1,2$. მაშასადამე, შეხვედრა მანქანებს შორის მოხდება, ავტომობილის გამოსვლიდან, 1 საათისა და 12 წუთის შემდეგ.

საზოგადოდ, რიცხვითი გამოსახულება ეწოდება ჩანაწერს, რომელიც შედგენილია რიცხვებით და შეერთებულია მოქმედებათა ნიშნებით. რიცხვით გამოსახულებაში, მოქმედებათა შესრულების თანმიმდევრობის დაცვის მიზნით, ხშირად გამოყენებულია ფრჩხილები; თუმცა, ჩვენს მიერ შედგენილი ამოცანის ამოსახსნელი რიცხვითი გამოსახულება, შეგვეძლო ფრჩხილების გამოყენების გა-

რეშეც ნაგვეწერა:

$$\frac{210 - 60 \cdot 0,5}{60 + 90}.$$

მაშასადამე, რიცხითი გამოსახულებები კონსტრუირებულია რიცხვების, მოქმედებათა ნიშნების და ფრჩხილებისაგან. ითვლება, რომ ყოველი რიცხვი რიცხვით გამოსახულებას წარმოადგენს.

რიცხვით გამოსახულებათა მაგალითებია: $-2\cdot7$; $\sqrt{3}$; $\frac{2}{7}$; 5 ; $3+7$;

$3\cdot2+17$; $(29-8)\cdot3+12$; $(2,4-11)\cdot(8:13+2)$ და ა.შ.

გამოსახულებაში მითითებულ მოქმედებათა თანმიმდევრობით შესრულების შედეგად მღებულ რიცხვს რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობა ეწოდება. მაგალითად, რიცხვითი გამოსახულების $-7\cdot(5-3\cdot11)$ მნიშვნელობა ტოლი იქნება: -196 -ის.

უნდა აღინიშნოს, რომ ორი რიცხვითი გამოსახულების ჯამი, სხვაობა, ნარაველი და განაყოფი (თუ გამოყოფი რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობა 0-საგან განსხვავებული რიცხვია), აგრეთვე, რიცხვით გამოსახულებას წარმოადგენს.

ამრიგად, რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობის საპოვნელად საჭიროა გამოსახულებაში მითითებულ მოქმედებათა თანმიმდევრობით შესრულება. ეს შესრულება კი ხდება შემდეგი წესების მიხედვით:

1. თუ რიცხვითი გამოსახულება არ შეიცავს ფრჩხილებს, მაშინ ის უნდა დაეყოს ნაწილებად, რომლებიც შეერთებულია ერთმანეთთან შეკრების ან გამოკლების ნიშნებით, შემდეგ გამოვიანგარიშოთ ყოველი ასეთი ნაწილის მნიშვნელობა. ამასთან, გამრავლება და გაყოფა უნდა შევასრულოთ თანმიმდევრობით, მარცხნიდან მარჯვნივ. შემდეგ ყოველი ნაწილი შევცვალოთ მისი მნიშვნელობით და ეიპოვოთ მოცემული რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობა შეკრებისა და გამოკლების თანმიმდევრობით შესრულებით. მაგალითად, ეიპოვოთ შემდეგი გამოსახულების მნიშვნელობა: $30-15\cdot2\cdot3+42\cdot7-10\cdot2$. შევცვალოთ გამოსახულების ეს ნაწილები თავიანთი შესაბამისი მნიშვნელობებით. გვექნება: $30-10+6-5=20+6-5=26-5=21$.

2. თუ რიცხვითი გამოსახულება შეიცავს ფრჩხილებს, მაშინ უნდა ავიღოთ გამოსახულების ის ნაწილები, რომლებიც ფრჩხილებ-

შია მოთავსებული, ეიპოვოთ მათი მნიშვნელობები პირველი წესის მიხედვით და გამოსახულებაში შეეცვალოთ ეს ნაწილები თავიანთი შესაბამისი მნიშვნელობებით. თუ ამის შემდეგ მივიღებთ უფრჩხილო გამოსახულებას, მაშინ ეიპოვოთ მისი მნიშვნელობა პირველი წესის მიხედვით. წინააღმდეგ შემთხვევაში, კვლავ გამოვიყენოთ მეორე წესი. მაგალითად, ეიპოვოთ შემდეგი გამოსახულების მნიშვნელობა: $((42:6+5)-(15:3-2)-7):5$. გვაქვს: $42:6+5=7+5=12$; $15:3-2=5-2=3$. შეეცვალოთ ყველა ეს ნაწილი თავიანთი შესაბამისი მნიშვნელობებით; გვექნება: $(12-3-7):5=29:5=145$.

არსებობს ისეთი რიცხვითი გამოსახულებები, რომელთაც რიცხვითი მნიშვნელობები არ გააჩნიათ. ასეთი გამოსახულებების შესახებ ამბობენ, რომ მათ აზრი არა აქვთ. მაგალითად, გამოსახულებას $-12:(6-6)$ აზრი არ გააჩნია, რადგან $6-6=0$, ხოლო ნულზე გაყოფა შეუძლებელია. აზრი არა აქვს, აგრეთვე გამოსახულებას $\sqrt{-5}$, რადგან არ არსებობს ნამდვილი რიცხვი, რომლის კვადრატი -5 -ის ტოლი იქნება. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში აზრი არა აქვს გამოსახულებას $7-9$ და სხვ.

ეთქვათ, a და b ორი რიცხვითი გამოსახულება, რომელთაც გააჩნიათ აზრი. თუ მათ შევეერთებთ ტოლობის ნიშნით, მივიღებთ გამონათქვამს, რომელსაც ტოლობა ეწოდება; ეწეროთ $a=b$. თუ a და b გამოსახულების მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ გამონათქვამი $a=b$ ჭეშმარიტია, წინააღმდეგ შემთხვევაში – მცდარი. მაგალითად, რიცხვითი ტოლობა $7-4=20:5-1$ ჭეშმარიტია, ხოლო რიცხვითი ტოლობა $2:3+7:12=28:4+21:6$ – მცდარი.

მოვიყვანოთ ჭეშმარიტი რიცხვითი ტოლობების რამდენიმე თვისება:

1. თუ $a=b$ ჭეშმარიტი რიცხვითი ტოლობის ორივე მხარეს მივუმატებთ აზრის მქონე ერთიდაიგივე c რიცხვით გამოსახულებას, მივიღებთ: $a+c=b+c$ ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობას, ე.ი. $a=b \Rightarrow a+c=b+c$.

2. თუ $a=b$ ჭეშმარიტი რიცხვითი ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ აზრის მქონე ერთიდაიგივე c რიცხვით გამოსახულებაზე, მივიღებთ $a \cdot c = b \cdot c$ ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობას, ე.ი. $a=b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$.

3. თუ $a=b$ ჭეშმარიტი რიცხვითი ტოლობაა და მასთან ჭეშმარი-

ტია $b=c$ რიცხვითი ტოლობაც, მაშინ ჭეშმარიტი იქნება $a=c$ რიცხვითი ტოლობაც, ე.ი. $a=b \wedge b=c \Rightarrow a=c$.

ვთქვათ, თუ a და b ორი რიცხვითი გამოსახულებაა, რომელთაც აზრი გააჩნიათ. თუ მათ შეეადრებოდა უტოლობის ნიშნით ($<$ ან $>$), მივიღებთ გამონათქვამებს, რომელსაც რიცხვითი უტოლობა ეწოდება, ეწერათ $a < b$ ($a > b$). თუ a გამოსახულების მნიშვნელობა ნაკლებია b გამოსახულების მნიშვნელობაზე, მაშინ უტოლობა $a < b$ ჭეშმარიტია, წინააღმდეგ შემთხვევაში – მცდარი. აგრეთვე, თუ a გამოსახულების მნიშვნელობა მეტია b გამოსახულების მნიშვნელობაზე, მაშინ უტოლობა $a > b$ ჭეშმარიტია, წინააღმდეგ შემთხვევაში – მცდარი. მაგალითად, რიცხვითი უტოლობა $5-4-6 > 19-16$ ჭეშმარიტია, ხოლო უტოლობა $5-4-6 < 19-16$ – მცდარი. აგრეთვე, უტოლობა $7-2 < 12-4$ ჭეშმარიტია, ხოლო უტოლობა $7-2 > 12-4$ – მცდარი. თუ განვიხილავთ შემდეგ რიცხვით უტოლობას – $15:3+6 > 132:11-1$, იგი მცდარია; მცდარია მოპირდაპირე აზრის უტოლობაც – $15:3+6 < 132:11-1$.

უტოლობებს ეწოდება ერთნაირი აზრის, თუ ყოველ მათგანში გამოყენებულია ერთიდაიგივე ნიშანი. ორ უტოლობას ეწოდება მოპირდაპირე აზრის, თუ ერთ-ერთ მათგანში გამოყენებულია „ $>$ “-ის ნიშანი, ხოლო მეორეში კი – „ $<$ “-ის ნიშანი.

მოვიყვანოთ ჭეშმარიტი რიცხვითი უტოლობების რამდენიმე თვისება:

1. თუ $a > b$ ჭეშმარიტი რიცხვითი უტოლობის ორივე მხარეს მივუმატებთ აზრის მქონე ერთიდაიგივე c რიცხვით გამოსახულებას, მივიღებთ $a+c > b+c$ ჭეშმარიტ რიცხვით უტოლობას. ანალოგიურად ითქმის $a < b$ ჭეშმარიტი რიცხვითი უტოლობის შესახებაც.

2. თუ $a > b$ ჭეშმარიტი რიცხვითი უტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ აზრის მქონე ერთიდაიგივე c რიცხვით გამოსახულებაზე, რომელსაც აქვს დადებითი რიცხვითი მნიშვნელობა, მივიღებთ $ac > bc$ ჭეშმარიტ რიცხვით უტოლობას. ანალოგიურად ითქმის $a < b$ ჭეშმარიტი რიცხვითი უტოლობის შესახებაც.

3. თუ $a > b$ ჭეშმარიტი რიცხვითი უტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ აზრის მქონე ერთიდაიგივე c რიცხვით გამოსახულებაზე, რომელსაც აქვს უარყოფითი მნიშვნელობა, მივიღებთ – $ac < bc$ ჭეშ-

მარიტ რიცხვით უტოლობას. ანალოგიურად ითქმის $a < b$ ჭეშმარიტი რიცხვითი უტოლობის შესახებ.

4. თუ $a < b$ და $c < d$ ჭეშმარიტი რიცხვითი უტოლობებია, მაშინ $a + c < b + d$ უტოლობაც ჭეშმარიტი რიცხვითი უტოლობაა. ანალოგიურად, თუ $a > b$ და $c > d$ ჭეშმარიტი რიცხვითი უტოლობებია, მაშინ $a + c > b + d$ უტოლობაც ჭეშმარიტი რიცხვითი უტოლობაა.

5. თუ a, b, c და d დადებითი რიცხვებია, ან დადებითი მნიშვნელობების მქონე რიცხვითი გამოსახულებებია, მასთან ჭეშმარიტია უტოლობები: $a < b$ და $c < d$, მაშინ ჭეშმარიტია უტოლობა $ac < bd$. ანალოგიურად, თუ $a > b$ და $c > d$ ჭეშმარიტი უტოლობებია, მაშინ $ac > bd$ აგრეთვე ჭეშმარიტი უტოლობაა.

უტოლობები $a < b$ და $b > a$ ერთსა და იმავე ფაქტს აღნიშნავს. ორივე ეს უტოლობა ან ერთდროულად ჭეშმარიტია, ან ერთდროულად მცდარი.

უტოლობა $a \leq b$ არის მიმართებათა $a < b$ და $a = b$ დიზიუნქცია, ამიტომ იგი ჭეშმარიტია, როცა ჭეშმარიტია ერთი მათგანი მაინც: $a \leq b \Leftrightarrow (a < b) \vee (a = b)$. მაგალითად, ჭეშმარიტია $6 \leq 7$ უტოლობა, რადგან ჭეშმარიტია $6 < 7$. აგრეთვე ჭეშმარიტია $7 \leq 7$ უტოლობა, რადგან ჭეშმარიტია $7 = 7$; ხოლო $7 \leq 6$ უტოლობა მცდარია, რადგან მცდარია მასში შემავალი ორივე გამონათქვამი.

ორმაგი უტოლობა $a < b < c$ არის უტოლობათა $a < b$ და $b < c$ კონიუნქცია. იგი ჭეშმარიტია მაშინ, როცა ჭეშმარიტია მასში შემავალი ორივე გამონათქვამი. მაგალითად, ჭეშმარიტია $2 < 5 < 7$, ხოლო ორმაგი უტოლობა $3 < 7 < 5$ მცდარია.

17.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. გამოვიყენოთ ფრჩხილები ისე, რომ მივიღოთ ჭეშმარიტი ტოლობა:

- ა) $20:5-1+3=8$; ბ) $20:5-1+3=0$; გ) $9-6:3-2-1=0$; დ) $9-3:3-2-1=1$;
ე) $9-3:3-2-1=7$.

2. ორ ქალაქს შორის მანძილი 420 კმ-ია. ამ ქალაქებიდან ერთდროუ-

ლად ერთმანეთის შესახვერად ორი ავტომობილი გამოვიდა. პირველი საათში 80 კმ-ს გადის, რამდენ კილომეტრს გადის საათში მეორე ავტომობილი, თუ ისინი ერთმანეთს 3 საათში შეხვდნენ? (შევადგინოთ რიცხვითი გამოსახულება და შემდეგ ვიპოვოთ მისი მნიშვნელობა).

3. ქალაქიდან ჩრდილოეთის მიმართულებით გავიდა ტურისტთა ერთი ჯგუფი, რომელიც საათში 6 კილომეტრს გადის. ერთი საათის შემდეგ იმავე ქალაქიდან დასავლეთის მიმართულებით გამოვიდა ტურისტთა მეორე ჯგუფი, რომელიც საათში 5 კილომეტრის სიჩქარით მოძრაობდა. ვიპოვოთ მანძილი ტურისტთა ამ ჯგუფებს შორის, მეორე ჯგუფის გამოსვლიდან, ერთი საათის შემდეგ (შევადგინოთ რიცხვითი გამოსახულება და ვიპოვოთ მისი მნიშვნელობა).

4. სარკინიგზო სადგურიდან ერთი მატარებელი გავიდა საათში 45 კმ-ის სიჩქარით. იმავე სადგურიდან მოპირდაპირე მიმართულებით 2 საათის შემდეგ გამოვიდა მეორე მატარებელი, რომლის სიჩქარე 50 კმ/სთ-ის ტოლია. რა მანძილი იქნება მატარებლებს შორის, მეორე მატარებლის გამოსვლიდან 3 საათის შემდეგ? (შევადგინოთ რიცხვითი გამოსახულება და ვიპოვოთ მისი მნიშვნელობა).

5. მოცემულია ორი რიცხვითი გამოსახულება: $20\frac{1}{4} \cdot \frac{25}{64} \cdot 2\frac{14}{25} \cdot \frac{4}{9}$ და

$$\left(3 + 2\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\right) \cdot 1\frac{1}{3}. \text{ რა რიცხვზე უნდა გავეყოთ მეორე გამოსახულება, ისე რომ მისი რიცხვითი მნიშვნელობა პირველი რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობის ტოლი იყოს?}$$

ისე რომ მისი რიცხვითი მნიშვნელობა პირველი რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობის ტოლი იყოს?

6. მოცემულია ორი რიცხვითი გამოსახულება: $\left(3\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) \cdot 8$ და

$$\left(6\frac{2}{5} - 4\right) \cdot \frac{1}{2}. \text{ რა რიცხვი უნდა მივუმატოთ მეორე გამოსახულებას, ისე რომ მისი რიცხვითი მნიშვნელობა პირველი რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობის ტოლი გახდეს?}$$

ისე რომ მისი რიცხვითი მნიშვნელობა პირველი რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობის ტოლი გახდეს?

7. მოცემულია ორი რიცხვი: $1\frac{7}{9}$ და $1\frac{1}{4}$. პირველი რიცხვისა და გაორ-

კეცებული მეორე რიცხვის ჯამს გამოვაკლოთ გასამკეცებული პირველი და მეორე რიცხვების სხვაობა. შევადგინოთ რიცხვითი გამოსახულება და გამოეთვალეთ.

8. მოცემულია ორი რიცხვი: $\frac{2}{3}$ და $\frac{3}{5}$. გამოთვალეთ ამ რიცხვების გა-

ორკეცებული ჯამის განაყოფი მათი სხვაობის $\frac{1}{15}$ ნაწილზე. შევადგინოთ რიცხვითი გამოსახულება და გამოეთვალეთ.

9. მოცემულია ოთხი რიცხვი: $\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{5}$; $\frac{5}{12}$ და 3. შევადგინოთ რიცხვითი

გამოსახულება და გამოეთვალეთ:

ა) კიდურა რიცხვების ნამრავლისა და შუა რიცხვების ნამრავლის სხვაობა;

ბ) ორი პირველი რიცხვის ჯამის ნამრავლი მეოთხე და მესამე რიცხვის სხვაობაზე.

10. იპოვეთ შემდეგი გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობანი:

ა) $\left(4\frac{1}{2} + 6\frac{1}{4}\right)^2 - \left(4\frac{1}{2} - 6\frac{1}{4}\right)^2,$

ბ) $\left(\left(6\frac{3}{5}\right)^2 - \left(4\frac{7}{10}\right)^2\right) : \left(6\frac{3}{5} + 4\frac{7}{10}\right),$

გ) $\left(\frac{4}{5} - \frac{2}{7}\right) \cdot 4\frac{3}{8} + \frac{2}{7} \cdot 4\frac{3}{8}.$

11. გამოთვალეთ:

ა) $\left(5\frac{7}{12} - 3\frac{17}{36}\right) \cdot 2\frac{1}{2};$

ბ) $9 \cdot \left(2\frac{4}{7} - \frac{95}{108}\right).$

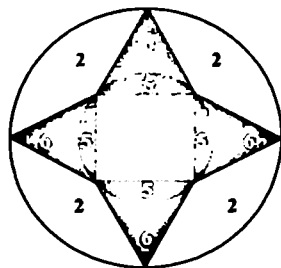
12. უჯრებში ჩაწერეთ მოქმედების ნიშნები, ისე რომ ჭეშმარიტი ტოლობა მივიღოთ: $18 \square 9 \square 7 = 81 \square 9.$

13. შეავსეთ ცარიელი უჯრები მოქმედების ნიშნებით, ისე რომ ტოლობა ჭეშმარიტი გახდეს: $18 \square (9 \square 7) = 81 \square 9.$

14. გურიის ტერიტორიის $\frac{1}{100}$ ნაწილი 30,73 კმ²-ია. შევადგინოთ გა-

მოსახულება და ეიპოვოთ გურიის მთელი ტერიტორია.

15. სამკუთხედის ერთი გვერდი 12,8 სმ-ის ტოლია, მეორე გვერდი 1,5 სმ-ით მეტია პირველზე, ხოლო მესამე 4,1 სმ-ით მეტია მეორეზე. შევადგინოთ გამოსახულება და ეიპოვოთ სამკუთხედის პერიმეტრი.
16. კვადრატის გვერდი 4 სმ-ის ტოლია. ეიპოვოთ ამ კვადრატის პერიმეტრი და ფართობი. ერთმანეთს შევადაროთ მათი გამომსახველი რიცხვები.
17. მართკუთხედის ერთი გვერდი 3 სმ-ია, ხოლო მეორე ტოლია 6 სმ-ის. ეიპოვოთ ამ მართკუთხედის პერიმეტრი და ფართობი. ერთმანეთს შევადაროთ მათი გამომსახველი რიცხვები.
18. ბირთვის რადიუსი 3 სმ-ის ტოლია. ეიპოვოთ ამ ბირთვის მოცულობა და მისი შესაბამისი სფეროს გვერდითი ზედაპირის ფართობი. ერთმანეთს შევადაროთ მათი გამომსახველი რიცხვები.
19. წრის რადიუსი 2 სმ-ის ტოლია. ეიპოვოთ ამ წრის ფართობი და მისი შესაბამისი წრეწირის სიგრძე. ერთმანეთს შევადაროთ მათი გამომსახველი რიცხვები.
20. იპოვეთ შემდეგი გამოსახულებების რიცხვითი მნიშვნელობები და შევადაროთ ერთმანეთს: $72:(18+6)$ და $72:(18-6)$.
21. ნახაზის მიხედვით შევადგინოთ ორი გამოსახულება. პირველი გამოსახულებაა: წითელი ფერის ფიგურებში ჩაწერილი რიცხვების ნამრავლი გაეყოთ მწვანე ფერის ფიგურებში ჩაწერილი რიცხვების ჯამზე და მიღებულ შედეგს გამოვაკლოთ ყვითელი ფერის ფიგურებში ჩაწერილი რიცხვების ნამრავლი. მეორე გამოსახულებაა: წითელი წრის გარეთ ჩაწერილი რიცხვების ჯამს გამოვაკლოთ წითელი წრის შიგნით ჩაწერილი რიცხვების ჯამი. გამოვიანგარიშოთ მიღებული გამოსახულებები და ერთმანეთს შევადაროთ მათი მნიშვნელობები.
22. მოცემულია გამოსახულებანი:



$$a = 697 : (3 \cdot 12 + 5) - \frac{2}{3} \cdot (2 + 13), \quad b = \frac{\left(85\frac{7}{30} - 83\frac{5}{18}\right) : 2\frac{2}{3}}{0,04} - 12\frac{1}{3},$$

$$c = \frac{\left(6\frac{3}{5} - 3\frac{3}{14}\right) \cdot 5\frac{5}{6}}{(21 - 1,25) : 2,5} + 11 : 2. \quad \text{ვიპოვოთ } a\text{-ს, } b\text{-ს და } c\text{-ს რიცხვითი}$$

მნიშვნელობანი და დაეალაგოთ ისინი ზრდის მიხედვით.

23. მოცემულია რიცხვები 84 და 82. ვიპოვოთ მათი მარტივი გამყოფების ჯამი, თითოეული მათგანისათვის და შევადაროთ ისინი ერთმანეთს.

24. მოცემულია: $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{4-\sqrt{3}}{6}\right) : \frac{7+2\sqrt{3}}{12} \square \left(\frac{5+3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}-1}{6}\right) : \frac{17+7\sqrt{2}}{12}$

უჯრაში ჩასვით ან „>“ ან „<“ ან „=“ ნიშანი.

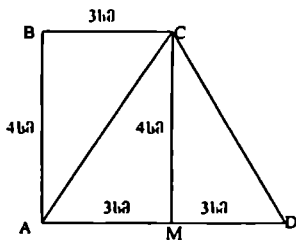
25. შევადაროთ $\sqrt{10} : 0,5 \cdot \sqrt{2,5}$ გამოსახულებისა და $\frac{10\sqrt[3]{9} + 5\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}}$ გამო-

სახულების მნიშვნელობები.

26. ერთმა მოთხილამურემ 6 წუთში 900 მ გაირბინა, მეორემ კი 5 წუთში 800 მეტრი. რომელი მოთხილამურის სიჩქარე უფრო მეტია?

27. ექსპრესი საათში გადის 75 კმ-ს, გემი კი - 35 კმ-ს. რომელი უფრო მეტ მანძილს გაივლის - ექსპრესი 3 საათში, თუ გემი 7 საათში?

28. ნახაზზე მოცემული $ABCM$ მართკუთხედის გვერდები 3 სმ და 4 სმ-ია, ხოლო ACD ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე 6 სმ, სიმაღლე კი 4 სმ-ია. ვიპოვოთ და ერთმანეთს შევადაროთ $ABCM$ მართკუთხედის და ACD სამკუთხედის პერიმეტრები, აგრეთვე $ABCM$ მართკუთხედის და ACD სამკუთხედის ფართობები.



29. თუ უცნობ რიცხვს მივუმატებთ 12-ს და მიღებულ ჯამს გავასამკეცებთ, მაშინ მივიღებთ 90-ს. შევადგინოთ გამოსახულება და ვიპოვოთ უცნობი რიცხვი.

30. თუ უცნობი რიცხვის მესამედს 20 გამოვაკლებთ მივიღებთ 30-ს. შევადგინოთ გამოსახულება და ვიპოვოთ უცნობი რიცხვი.

17.1.1. ტესტი №16

1. ერთიდაიგივე რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობის გამოთვლისას ორმა მოსწავლემ სხვადასხვა პასუხი მიიღო. ჩამოთვლილი შემთხვევებიდან შეუძლებელია:
 - ა) ორივე მოსწავლე შეცდა; ბ) ერთ-ერთი მოსწავლე შეცდა;
 - გ) ორივე პასუხი არასწორია; დ) ორივე პასუხი სწორია.
2. მაღაზიის ორი სალაროდან თითოეულში 7290 ლარი იყო. ერთი სალაროდან გასცეს რაღაც თანხა, ხოლო მეორედან კი 900 ლარით იმაზე ნაკლები გასცეს, რაც პირველ სალაროში დარჩა. რა თანხა დარჩა ორივე სალაროში ერთად?
 - ა) 8190 ლარი; ბ) 6390 ლარი; გ) 9090 ლარი; დ) 5490 ლარი.
3. თაროზე 47 წიგნით მეტი იყო, ვიდრე კარადაში. რამდენი წიგნი უნდა გადაეაწყოთ თაროდან კარადაში, რომ მასში 17 წიგნით მეტი იყოს, ვიდრე თაროზე?
 - ა) 30 წიგნი; ბ) 27 წიგნი; გ) 17 წიგნი; დ) 32 წიგნი.
4. უნდა გადაიზიდოს 8400 ტომარა ფქვილი. თითოეული ტომარა ფქვილი 60კგ-ს იწონის. სატირთო მანქანაზე 3 ტონას ტვირთავენ. ამ ტვირთშიზიდლობის რამდენი მანქანა იქნება საჭირო ფქვილის მოლიანად გადასახიდად. შევადგინოთ რიცხვითი გამოსახულება.
 - ა) $8400:(3000:60)$, ბ) $8400-60:3000$, გ) $8400:(3000-60)$,
 დ) $8400:(60:3000)$.
5. კვადრატში ჩავსვათ ან „>“ ან „<“ ან „=“ ნიშნები, ისე რომ გამოინაოქვამი ჭეშმარიტი გახდეს – $(528+720+600):24 \square (315+770+140):35$.
 - ა) >; ბ) <; გ) =.
6. 2,5 საათში მოტოციკლისტმა 160 კილომეტრი გაიარა. რამდენ კილომეტრს გაივლის იგი იმავე დროში, თუ მისი სიჩქარე 6 კილომეტრით მეტი იქნება საათში? შევადგინოთ რიცხვითი გამოსახულება.
 - ა) $(160+6):2,5$; ბ) $160-6-2,5$; გ) $(160-6):2,5$; დ) $(160:2,5+6):2,5$.
7. ავტობუსმა თანაბარი მოძრაობისას 105 კილომეტრი 1,5 საათში გაიარა. რამდენი კილომეტრი პქონდა მას გავლილი ნახევარ საათში?

- ა) 30 კმ; ბ) 35 კმ; გ) 40 კმ; დ) 45 კმ.
8. რამდენიმე წიგნში 75 ლარი გადაიხადეს. ერთი წიგნის ფასი დახარჯული თანხის მეხუთედია, მეორის კი მესამედი. რამდენით იაფია პირველი წიგნის ფასი მეორეზე?
- ა) 15 ლარით; ბ) 10 ლარით; გ) 8 ლარით; დ) 12 ლარით.
9. 21 კგ ფქვილისაგან 28 ცალი პური ცხეება. რამდენი პური დაცხეება 63 კგ ამავე ხარისხის ფქვილისაგან?
- ა) 69; ბ) 64; გ) 71; დ) 84.
10. რამდენიმე სხედასხვა ფერისა და ზომის ბურთში 54 ლარი გადაიხადეს. წითელი ფერის ბურთში გადაიხადეს დახარჯული თანხის მეექვსედი, ხოლო თეთრ ბურთში კი მეთექვსმედი. რამდენით ძვირია წითელი ფერის ბურთი თეთრი ფერის ბურთზე?
- ა) 4 ლარით; ბ) 4 ლარით და 60 თეთრით; გ) 3 ლარით; დ) 3 ლარით და 60 თეთრით.

**§18. გამოსახულება ცვლადით, გამოსახულების
ბანსაზღვრის არე.
იზიშვოზა, იზიშვური ბარდაძმენები**

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: თბილისსა და ბათუმს შორის a კილომეტრია. თბილისიდან ბათუმისაკენ 60 კმ/სთ სიჩქარით მოძრა-
ვი ავტომობილის გამოსვლიდან 2 საათის შემდეგ ბათუმიდან
თბილისისაკენ გამოვიდა ავტომობილი, რომლის სიჩქარეა 80
კმ/სთ. ბათუმიდან ავტომობილის გამოსვლიდან რა დროში შეხვდუ-
ბიან ერთმანეთს მანქანები?

ამოცანის ამოსახსნელად საჭირო რიცხვებიდან თბილისსა და
ბათუმს შორის მანძილი აღნიშნული გვაქვს a კილომეტრით, ამიტომ
მივიღებთ გამოსახულებას ცვლადით, რომელსაც ექნება შემდეგი
სახე: $(a-60 \cdot 2):(60+80)$.

აღნიშნულ გამოსახულებაში დავეუშვათ უცნობია აგრეთვე მანქა-
ნების სიჩქარეები, რომლებიც აღვნიშნოთ b კმ/სთ-ით და c კმ/სთ-ით,
მაშინ გამოსახულება მიიღებს სახეს: $(a-2b):(b+c)$.

მიღებული გამოსახულებები არ წარმოადგენენ რიცხვით გამოსა-
ხულებებს, მათ ეწოდებათ ცვლადიანი გამოსახულებები, ანუ გამო-
სახულებები ცვლადით (ცვლადებით). პირველ შემთხვევაში ჩვენ მი-
ვიღეთ ერთცვლადიანი გამოსახულება, ხოლო მეორე შემთხვევაში
– სამცვლადიანი. ამ ცვლადებისათვის სხვადასხვა მნიშვნელობათა
მინიჭებისას მიიღება სხვადასხვა რიცხვითი გამოსახულება.

ცვლადიანი გამოსახულება ისევე განისაზღვრება, როგორც
რიცხვითი გამოსახულება, ოღონდ მასში ასოების გარდა შეიძლება
შედიოდნენ რიცხვებიც. ცვლადი შეიძლება აღინიშნოს ნებისმიერი
ასოთი. მათემატიკაში განიხილება ერთცვლადიანი, ორცვლადიანი,
სამცვლადიანი და ა.შ. გამოსახულებანი.

იმ რიცხვს, რომელიც გამოსახულებაში შეიძლება ჩაისვას ცვლა-
დის ნაცვლად, ეწოდება ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობა. ასეთი
რიცხვების სიმრავლეს კი გამოსახულების განსაზღვრის არე, ანუ
ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე ეწოდება. სიტყვები
„შეიძლება ჩაისვას“ და „დასაშვები მნიშვნელობა“ ნიშნავს, რომ
ცვლადს ყველა მნიშვნელობის მიღება ყოველთვის არ შეუძლია.

განვიხილოთ მაგალითები:

1. გამოსახულება $5-3x$ ცვლადის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის არის განსაზღვრული ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე, ეს ნიშნავს, რომ x -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის მოცემულ გამოსახულებას გააჩნია სრულიად გარკვეული ერთი მნიშვნელობა. ამიტომ გამოსახულების $5-3x$ განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე. იგივე გამოსახულებას $5-3x$ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში გააჩნია ერთადერთი $x=1$ მნიშვნელობა, რომელიც მისი განსაზღვრის არეს წარმოადგენს; სხვა ნებისმიერი ნატურალური რიცხვისათვის გამოსახულების $-(5-3x)$ -ის მნიშვნელობა არ იქნება ნატურალური რიცხვი. იგივე გამოსახულების $-(5-3x)$ -ის განსაზღვრის არე არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლეზე არის ორი რიცხვი 0 და 1; სხვა შემთხვევაში მისი მნიშვნელობა არ იქნება არაუარყოფითი რიცხვი.

2. თუ გამოსახულებაში $\frac{2}{x-5}$ ცვლადის ნაცვლად ჩავსვათ 5-ს, მაშინ მოცემული ცვლადიანი გამოსახულება იქცევა ისეთ რიცხვით გამოსახულებად, რომელსაც აზრი არა აქვს, ე.ი. $x=5$ -სათვის მოცემული ცვლადიანი გამოსახულება განსაზღვრული არ არის. მაშასადამე, გამოსახულების $\frac{2}{x-5}$ განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, გარდა 5-ისა, ე.ი. სიმრავლე $] -\infty, 5[\cup] 5, +\infty [$.

3. გამოსახულება $\sqrt{x-3}$ ცვლადის მხოლოდ იმ მნიშვნელობებისათვის იქცევა აზრის მქონე გამოსახულებად, როცა $x-3 \geq 0$. მაშასადამე, გამოსახულების განსაზღვრის არეა სიმრავლე $[3; +\infty[$.

4. გამოსახულებას $\sqrt{-(x^2+1)}$ არ გააჩნია დასაშვებ მნიშვნელობათა არე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში, რადგან რომელი ნამდვილი რიცხვის მნიშვნელობაც არ უნდა ჩავსვათ, x -ის ნაცვლად, მას აზრი არ ექნება.

დაწყებითი სკოლის მათემატიკის კურსში რიცხვით გამოსახულებას ვრცელი ადგილი უჭირავს. რიცხვითი გამოსახულების მიხედვით მოსწავლეები ადგენენ ამოცანათა პირობებს, ამოცანათა ტექსტის მიხედვით ადგენენ რიცხვით გამოსახულებებს, პოულობენ

რიცხვით გამოსახულებათა მნიშვნელობებს და სხვ. ასოით გამოსახულებებზე მუშაობა დაიყვანება რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობის პოვნაზე.

ვთქვათ, მოცემულია ცვლადის შემცველი ორი გამოსახულება: $3(x+4)-5$ და $3x+7$. ორივე გამოსახულების განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე R . შევადგინოთ თითოეული ამ გამოსახულების მნიშვნელობათა ცხრილი, ცვლადის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის გამოსახულებათა განსაზღვრის არიდან მივიღებთ:

x	-11	-8	-5	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	12
$3(x+4)-5$	-26	-17	-8	-2	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	43
$3x+7$	-26	-17	-8	-2	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	43

როგორც ეხედავთ, ყველა იმ მნიშვნელობისათვის, რომელიც ცვლადს მივეცით, ორივე გამოსახულების მნიშვნელობა ერთმანეთის ტოლია. იგივე იქნება x -ის ყოველი სხვა მნიშვნელობის შემთხვევაშიც. თუ გარდავქმნით პირველ გამოსახულებას გვექნება:

$$3(x+4)-5=3x+12-5=3x+7.$$

ამრიგად, პირველი გამოსახულება, მისი გამარტივების შემდეგ იგივე აღმოჩნდა, როგორიც მეორე გამოსახულებაა.

გამოსახულებებს, რომელთა მნიშვნელობები ტოლია მათში შემავალი ასოების (ცვლადების) ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის. გამოსახულებათა განსაზღვრის არიდან (იგულისხმება, რომ გამოსახულებებს ერთი და იგივე განსაზღვრის არეები აქვთ), იგივეურად ტოლი, ანუ იგივეური ეწოდება.

მაშასადამე, გამოსახულებები $3(x+4)-7$ და $3x+7$ იგივეურია. გამოსახულებები $\frac{x}{5}$ და $\frac{x^2}{5x}$ იგივეურად ტოლი არ არის, რადგან თუ $x=0$, პირველი ღებულობს მნიშვნელობას 0, ხოლო მეორე განსაზღვრული არ არის, არ გააჩნია რიცხვითი მნიშვნელობა. თუ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს მოვაკლებთ 0-ს, ე.ი. x -ს მივცემთ ნებისმიერ ნამდვილ მნიშვნელობას, გარდა ნულისა, მაშინ ეს ორი გამოსახულება იგივეურად ტოლი გახდება.

ამრიგად, გამოსახულებებს იგივეური ეწოდება, თუ მათ ერთმანეთის ტოლი რიცხვითი მნიშვნელობები აქვთ ცვლადის ნებისმიერი

დასაშვები მნიშვნელობებისათვის.

თუ ორ იგივეურ გამოსახულებას ტოლობის ნიშნით შევაერთებთ იგივეობას მივიღებთ. მაშასადამე, იგივეობა ეწოდება ტოლობას, რომელიც ჭეშმარიტია მასში შემავალი ასოების (ცვლადების) ნებისმიერი დასაშვები მნიშვნელობებისათვის. მაგალითად, იგივეობას $(x+5)^2=x^2+10x+25$ ჩაეწერთ ასეც: $(\forall x \in R)[(x+5)^2=x^2+10x+25]$.

იგივეობად ითვლება ჭეშმარიტი რიცხვითი ტოლობები, ნამდვილ რიცხვებზე არითმეტიკულ მოქმედებათა კანონები, ჯამიდან რიცხვის, რიცხვიდან ჯამის გამოკლებისა და სხვა წესები.

ხშირად საჭიროა ამა თუ იმ გამოსახულების შეცვლა მისი იგივეური გამოსახულებით; მაგალითად, $37a+36a+37a$ გამოსახულების მნიშვნელობა ვიპოვოთ, როცა $a=2,75$. გამოანგარიშება უფრო გაადვილდება, თუ ვაწარმოებთ ასეთ გარდაქმნას: $37a+36a+37a=(37+36+37) \cdot a=110a$; აქედან კი გვაქვს $110 \cdot 2,75=302,5$.

ერთი გამოსახულების შეცვლას მეორე, მისი იგივეურად ტოლი გამოსახულებით, ამ გამოსახულების იგივეური გარდაქმნა ეწოდება.

წარმოვადგინოთ ზოგიერთი იგივეობა:

1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.
2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.
3. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
4. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.
5. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.
6. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.
7. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
8. $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.
9. $(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$.

გამოსახულებათა იგივეური გარდაქმნების დროს გამოიყენება არითმეტიკულ მოქმედებათა კანონები, შემოკლებული გამრავლების ფორმულები; აგრეთვე, სხვადასხვა წესი, როგორიცაა საერთო მამრავლის ფრჩხილებს გარეთ გატანის, დაჯგუფების და სხვა.

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი:

1. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა $\frac{a^3+a^2-a-1}{a^2+2a+1}$, როცა

$$a=2.$$

გვაქვს:

$$\frac{a^3 + a^2 - a - 1}{a^2 + 2a + 1} = \frac{a^2(a+1) - (a+1)}{(a+1)^2} = \frac{(a+1)(a^2 - 1)}{(a+1)^2} = \frac{(a+1)^2(a-1)}{(a+1)^2} = a-1;$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $a=2$, მივიღებთ: $a-1=2-1=1$.

2. გაამარტივეთ გამოსახულება:

$$\left(\frac{2}{2a-b} + \frac{6b}{b^2-4a^2} - \frac{4}{2a+b} \right) : \left(1 + \frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2} \right) \text{ და იპოვეთ მისი მნიშვნე-}$$

ლობა, როცა $a = -\frac{1}{2}$.

გვაქვს:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{2a-b} + \frac{6b}{b^2-4a^2} - \frac{4}{2a+b} \right) : \left(1 + \frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2} \right) = \frac{4a+2b-6b-8a+4b}{4a^2-b^2} : \frac{8a^2}{4a^2-b^2} \\ & = \frac{-4a}{4a^2-b^2} \cdot \frac{4a^2-b^2}{8a^2} = -\frac{1}{2a}; \end{aligned}$$

უნდა შევნიშნოთ, რომ $b \neq \pm 1$, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $a = -\frac{1}{2}$,

$$\text{გვექნება: } -\frac{1}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 1.$$

$$3. \text{ ვიპოვოთ გამოსახულების } \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right) : \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} - \frac{x^2-1}{x^2+1} \right) \text{ მნიშ-}$$

ვნელობა, როცა $x=2$.

გვაქვს:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right) : \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} - \frac{x^2-1}{x^2+1} \right) = \frac{4x}{x^2-1} : \frac{4x^2}{(x^2-1) \cdot (x^2+1)} = \\ & = \frac{4x}{x^2-1} \cdot \frac{(x^2-1) \cdot (x^2+1)}{4x^2} = x + \frac{1}{x}; \end{aligned}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $x=2$, მივიღებთ: $x + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{2} = 2,5$.

§18.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

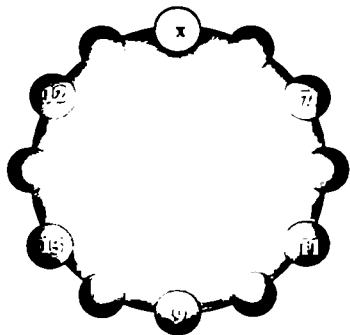
1. ორი პუნქტიდან ერთდროულად ერთმანეთის შესახედრად გაემართა ორი მსუბუქი ავტომანქანა. ერთის სიჩქარე a კმ/სთ-ია, ხოლო მეორის b კმ/სთ. 3 საათის შემდეგ ისინი ერთმანეთს შეხვდნენ. რა მანძილია პუნქტებს შორის?
2. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები შესაბამისად 5 სმ-ისა და a სმ-ის ტოლია. ვიპოვოთ ამ სამკუთხედის პერიმეტრი და ფართობი.
3. თუ $a^2+b^2=14$ და $a^2-b^2=6$, მაშინ ვიპოვოთ $a^2 \cdot b^2$ გამოსახულების მნიშვნელობა.

4. ვიპოვოთ $x^2-8x+16$ გამოსახულების მნიშვნელობა, როცა $x=1004$.

5. თუ $(a+b)^2=8$ და $a^2+b^2=4$, მაშინ რას უდრის ab ნამრავლი?

6. ვიპოვოთ $(2x+3)(x+6)-(2x-5)(x+10)$ გამოსახულების მნიშვნელობა.

7. წითელი წრის საზღვარზე მოთავსებულია თორმეტი მცირე ზომის წრე. მათგან მწვანე წრეებში ჩაწერილია რიცხვები, ხოლო ლურჯ წრეებში ჩაწერილი რიცხვები არ ჩანს. მწვანე წრეებში ჩაწერილი რიცხვები ტოლია მის გვერდით მდგომი რიცხვების (ლურჯ წრეებში დაფარული) ჯამის. ვიპოვოთ ყვითელ წრეში ჩაწერილი x -ის მაგივრად, მისი შესაბამისი რიცხვი, რომელიც ტოლია გვერდით მყოფი რიცხვების ჯამის.



8. რისი ტოლია $\left(m + \frac{2}{m}\right)^2 - \left(m - \frac{2}{m}\right)^2$ გამოსახულების მნიშვნელობა?

9. თუ $\frac{1}{m^2} + m^2 = 98$, მაშინ რისი ტოლია $\left(\frac{1}{m} + m\right)$ -ის მნიშვნელობა?

10. თუ $x \neq \pm 3$, მაშინ $\frac{x^2+6x+9}{x-3} \cdot \frac{x^2-9}{x+3}$.

11. ვიპოვოთ $\frac{12x^4 - 3x^2}{(2x-1) \cdot (18x^2 + 9x)}$ გამოსახულების მნიშვნელობა, როცა $x=333$.
12. გემმა მდინარის მიმართულებით 48 კმ გაიარა და იმდენივე დინების საწინააღმდეგოდ, სულ ამ მგზავრობას 5 საათი დაჭირდა. იპოვეთ გემის სინქარე მდგარ წყალში, თუ დინების სინქარე 4 კმ/სთ-ია.
13. მამისა და ორი შვილის ასაკთა ჯამი 7 წლის წინ 87 წელი იყო. რამდენია ამჟამად მათი ასაკთა ჯამი?
14. გემი მდინარის მიმართულებით გარკვეულ მანძილს 3 საათში გადის, უკან კი 4 საათში ბრუნდება. რამდენ საათში გააგლის ტივი ამ მანძილს?
15. ოჯახში 5 ბავშვია. რამდენი გოგონაა ოჯახში, თუ თითოეულ მათგანს 3-ჯერ მეტი ძმა ჰყავს, ვიდრე და?
16. აუზში ჩაშვებულია ორი მილი და მათი ერთობლივი მოქმედებით აუზი ივსება 3 საათში. მხოლოდ ერთი მილის მოქმედებით აუზი ივსება 5 საათში. რამდენ საათში აავსებს აუზს მხოლოდ მეორე მილი?
17. მაგიდაზე დევს n რაოდენობის დიდი ყუთი. თითოეულში დევს n რაოდენობის საშუალო ზომის ყუთი, ხოლო თითოეულ საშუალო ზომის ყუთში დევს n რაოდენობის პატარა ზომის ყუთი. ვიპოვოთ ყუთების საერთო რაოდენობა.
18. ჭიქაში ბაქტერიების რაოდენობა ყოველ წამში ორმაგდება. თუ პირველი წამის ბოლოს მათი რაოდენობა 6-ია, მე-4 წამის ბოლოსათვის რამდენი იქნება მათი რაოდენობა?
19. მოცეულია ოთხნიშნა რიცხვი, რომლის მხოლოდ ორი ციფრია ერთნაირი. მინიმუმ რისი ტოლი შეიძლება იყოს ამ რიცხვის ციფრთა ჯამი?
20. მოცეულია ოთხნიშნა რიცხვი, რომლის მხოლოდ ორი ციფრია ერთნაირი. მაქსიმუმ რისი ტოლი შეიძლება იყოს ამ რიცხვის ციფრთა ჯამი?
21. მამის, მისი ქალიშვილის და ვაჟის წლოვანება ერთად 48 წელს შეადგენს. მამა ვაჟიშვილზე 5-ჯერ უფროსია, ხოლო ქალიშვილი 1 წლით უმცროსია ძმაზე. რამდენი წლისაა ვაჟი?

22. სამკუთხედის ერთი გვერდი ორჯერ მეტია მეორეზე, მესამე გვერდი კი 15 მ-ით ნაკლებია მეორეზე. იპოვეთ სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ მესამე გვერდის სიგრძე 20 მეტრია.
23. ორნიშნა რიცხვის ერთი ციფრი წაშალეს და მიიღეს თავდაპირველზე სამჯერ ნაკლები რიცხვი. იპოვეთ ეს ორნიშნა რიცხვი.
24. მოცემულ ორნიშნა რიცხვს თავში და ბოლოში ერთიანები მიუწერეს, რის შედეგადაც მოცემული რიცხვი 23-ჯერ გადიდდა. იპოვეთ ორნიშნა რიცხვი.
25. იპოვეთ ნატურალური რიცხვი, რომლის კვადრატი 14-ით მეტია 5-ჯერ გაზრდილ ამ რიცხვზე?
26. 6 ავტომობილმა 5 საათის განმავლობაში 480 ლ ბენზინი დახარჯა. თუ ბენზინის მოხმარება არ შეიცვლება, რამდენ ლიტრს დახარჯავს 8 საათში 7 ავტომობილი?
27. 2 კგ კარტოფილი 1 ლარი და 60 თეთრი ღირს. რა ეღირება 11 კგ კარტოფილი?
28. 18 კგ ფქვილისაგან 24 ცალი პური ცხეება. რამდენი ცალი პური დაცხეება 468 კგ იმავე ხარისხის ფქვილისაგან?
29. იპოვეთ $\frac{a^3 + a^2 - a - 1}{a^2 + 2a + 1}$ გამოსახულების მნიშვნელობა, როცა $a=625$.
30. ცნობილია, რომ $x-y=-3$, მაშინ $3x-3y+5$ გამოსახულების მნიშვნელობა გავამრავლოთ $2+(y-x)$ გამოსახულების მნიშვნელობაზე.

18.1.1. ტესტი №17

1. რამდენით გაიზრდება ორნიშნა რიცხვი, თუ მის ჩანაწერს მარცხნიდან მიეუწერთ 5-ს?
ა) 500-ით, ბ) 50-ით, გ) 550-ით, დ) 55-ით.
2. თუ n და m კენტი რიცხვებია, ჩამოთვლილთაგან რომელია ლუწი?
ა) $m \cdot n$, ბ) $m+n+1$, გ) $2n+m$, დ) $n+m$.

3. თუ $\frac{5x^2 - 20}{x - 2}$, მაშინ ჩამოთვლილი პირობებიდან რომელია სამარ-
თლიანი?

I. $x=2$; II. $x=-2$; III. $x \neq 2$.

ა) მხოლოდ I, ბ) მხოლოდ II, გ) მხოლოდ III,

დ) მხოლოდ II და III.

4. მოცემულია ორი პირობა: I. $-2n^3 > (-2n)^2$, II. $-2n^2 < (-2n)^2$. იმისათვის,
რომ დაეადგინოთ n მეტია თუ ნაკლები 0-ზე

ა) საკმარისია პირველი პირობა, მეორე კი არ არის საკმარისი,

ბ) საკმარისია მეორე პირობა, პირველი კი არ არის საკმარისი,

გ) არცერთი პირობა არ არის საკმარისი,

დ) საკმარისია ორივე პირობა ერთად, ცალ-ცალკე კი არ არის
საკმარისი.

5. თუ $\frac{a^2 - b^2}{(a+b) \cdot a} = \frac{11}{21}$, მაშინ ჩამოთვლილთაგან რისი ტოლი შეიძლე-
ბა იყოს a -სა და b -ს მნიშვნელობები?

ა) $a=21$; $b=11$; ბ) $a=10$; $b=11$; გ) $a=21$; $b=10$; დ) $a=11$; $b=10$.

6. მაღაზიაში ოთხთელიანი და სამთელიანი ეტლები იყიდება. ჩა-
მოთვლილთაგან რომელი არ შეიძლება აღნიშნავდეს ეტლების
თვლების საერთო რაოდენობას?

ა) 9; ბ) 10; გ) 13; დ) 21.

7. ავტობუსმა თანაბარი მოძრაობისას 120 კმ გაიარა საათნახევარ-
ში. რამდენი კილომეტრი ჰქონდა მას გაველილი 15 წუთში?

ა) 40 კმ; ბ) 15 კმ; გ) 20 კმ; დ) 30 კმ.

8. რისი ტოლია $2(x-3)$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ
 $2(x-3)(x+1)=0$.

ა) მხოლოდ 0; ბ) მხოლოდ -8; გ) 0 ან -8; დ) 10 ან -18.

9. $|2x|-9$, როცა $x=-1$ ტოლია

ა) -11; ბ) 11; გ) -7; დ) 7.

10. $\|2x|-9\|$, როცა $x=-1$ ტოლია

ა) -11; ბ) 11; გ) -7; დ) 7.

§19. ერთცვლადიანი განტოლების ცნება, როგორც $f(x)=g(x)$,
 $x \in X$ სახის პრედიკატი.

განტოლების შესვთა სიმრავლე. ტოლკალოვანი
განტოლებები. თეორემები ტოლკალოვანი განტოლებების
შესახებ. ერთცვლადიანი განტოლების ამოხსნა.
კვადრატული განტოლება და მისი ამონახსნის შორეულა.

ავიღოთ ცვლადის შემცველი ორი გამოსახულება $4x+7$ და $3x+8$.
შევაერთოთ ისინი ტოლობის ნიშნით $4x+7=3x+8$ და მივიღებთ წინა-
დადებას, რომელიც შეიცავს ცვლადს და ამ ცვლადის სხვადასხვა
მნიშვნელობებისათვის იქცევა ჭეშმარიტ ან მცდარ გამონათქვამად.
მაგალითად, როცა $x=0$, მიიღება მცდარი გამონათქვამი $4 \cdot 0 + 7 = 3 \cdot 0 + 8$,
ხოლო როცა $x=1$, მიიღება ჭეშმარიტი გამონათქვამი $4 \cdot 1 + 7 = 3 \cdot 1 + 8$. ამ-
რიგად, წინადადება $4x+7=3x+8$ წარმოადგენს საგამონათქვამო ფორ-
მას, ერთადგილიან პრედიკატს. მას უწოდებენ ერთცვლადიან გან-
ტოლებას.

ეთქვათ, მოცემულია $f(x)$ და $g(x)$ გამოსახულებები, სადაც X სიმ-
რავლე არის x ცვლადის განსაზღვრის არე ე.ი. $x \in X$, მაშინ ერთადგი-
ლიან პრედიკატს $f(x)=g(x)$, ეწოდება ერთცვლადიანი განტოლება.
ამოვხსნათ განტოლება ნიშნავს ვიპოვოთ x -ის ის მნიშვნელობები,
რომელთა განტოლებაში ჩასმა განტოლებას აქცევს ჭეშმარიტ
რიცხვით ტოლობად; ე.ი. უნდა ვიპოვოთ მოცემული ერთადგილიანი
პრედიკატის ჭეშმარიტობის სიმრავლე. $f(x)=g(x)$, სადაც $x \in X$ პრე-
დიკატის ჭეშმარიტობის სიმრავლე ცვლადის ის მნიშვნელობებია,
რომელთათვისაც პრედიკატი ჭეშმარიტ გამონათქვამად გადაიქცე-
ვა. პრედიკატის $f(x)=g(x)$, სადაც $x \in X$, ჭეშმარიტობის სიმრავლეს –
განტოლების ფესვს ანუ ამონახსნს უწოდებენ.

მაგალითად, განტოლებას $x(x^2-1)=0$ აქვს სამი ფესვი: -1 , 0 და 1 . ე.ი.
ამ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე არის $M=\{-1; 0; 1\}$. არსე-
ბობს განტოლება, რომლის ამონახსნთა სიმრავლე უსასრულოა; მა-
გალითად, განტოლების $|x|=x$ ამონახსნთა სიმრავლე შედგება ყველა
არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვისაგან. შესაძლოა, განტოლებას
საერთოდ არ ჰქონდეს ამონახსნი. მაგალითად, განტოლების
 $\sqrt{x-1}=-2$ ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელი სიმრავლეა.

ზოგჯერ შესაძლებელია, რომ $f_1(x)$ ან $f_2(x)$ გამოსახულებას აზრი ჰქონდეს რომელიმე, ან ზოგიერთი მნიშვნელობისათვის X სიმრავლიდან. მაგალითად, ვთქვათ, $f_1(x) = \frac{5}{x-2} + x$, ხოლო $f_2(x) = \frac{32}{x-3}$. თუ განვიხილავთ $f_1(x) = f_2(x)$ ტოლობას, ანუ $\frac{5}{x-2} + x = \frac{32}{x-3}$, მაშინ 2 და 3 არ იქნებიან ამ განტოლების განსაზღვრის არეში, რადგან როცა $x=2$, მაშინ აზრი არა აქვს $f_1(x)$ გამოსახულებას, ხოლო როცა $x=3$, მაშინ აზრი არა აქვს $f_2(x)$ გამოსახულებას.

ცხადია, რომ $f_1(x) = f_2(x)$ განტოლების ამოხსნამდე ნაპოვნი უნდა იქნეს ის სიმრავლე, სადაც გამოსახულებები $f_1(x)$ ან $f_2(x)$ განსაზღვრულია ერთდროულად. ამ სიმრავლეს ეწოდება ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე ანუ განტოლების განსაზღვრის არე. განტოლებისათვის $\frac{5}{x-2} + x = \frac{32}{x-3}$ ასეთი არეა ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, გარდა 2-სა და 3-სა.

ეს სიმრავლე შეიძლება ასე ჩაეწეროს: $]-\infty; 2[\cup]2; 3[\cup]3; +\infty[$.

განტოლების $\frac{5}{x-2} + x = \frac{32}{x-3}$ ფესვებია: $x_1=7$, $x_2=-1+\sqrt{8}$ და $x_3=-1-\sqrt{8}$.

ვთქვათ, მოცემულია $f_1(x)=f_2(x)$ განტოლება, რომლის განსაზღვრის არეა X ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. შეიძლება ადგილი ჰქონდეს ორ შემთხვევას: 1. X სიმრავლე სასრული იყოს; 2. X სიმრავლე იყოს უსასრულო. როცა X სიმრავლე სასრულია, განტოლების ფესვთა პოვნა შეიძლება სინჯვის ხერხით.

მაგალითად: $x^3+2=2x^2+x$ განტოლების განსაზღვრის არეა $X=\{-1;0;1;2\}$. ამ განტოლების ამონახსნების პოვნა შეიძლება სინჯვის ხერხით და გვაქვს, რომ ამ განტოლების ფესვებია: $x_1=-1$, $x_2=1$ და $x_3=2$. როცა X სიმრავლე უსასრულოა, მაშინ სინჯვის ხერხი არ გამოდგება, ასეთ შემთხვევაში გამოსაყენებელია განტოლებათა ტოლძალოვნების ცნება.

ორ განტოლებას ეწოდება ტოლძალოვანი (ეკვივალენტური), თუ მათი ამონახსნების სიმრავლეები ტოლია, ე.ი. თუ ერთი განტოლების ყოველი ფესვი წარმოადგენს მეორე განტოლების ფესვს და პი-

რიკით, მეორე განტოლების ყოველი ფესვი წარმოადგენს პირველი განტოლების ფესვს. ამასთან, იგულისხმება, რომ ორივე განტოლების განსაზღვრის არე ერთი და იგივე სიმრავლეა. მაგალითად, განტოლებები $x^4+10x^3+35x^2+50x+24=0$ და $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=0$ ტოლდალოვანი, ანუ ეკვივალენტური განტოლებებია; მათი განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე, ხოლო განტოლების ფესვებია: $x_1=-1$; $x_2=-2$; $x_3=-3$ და $x_4=-4$.

თუ $f_1(x)=f_2(x)$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე არის $g_1(x)=g_2(x)$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლის ქვესიმრავლე, მაშინ $g_1(x)=g_2(x)$ განტოლებას ეწოდება $f_1(x)=f_2(x)$ განტოლების შედეგი. მაგალითად, განტოლება $(x+2)^2=9$ არის $x+2=3$ განტოლების შედეგი, რადგან მეორე განტოლების ფესვი $x=1$ აკმაყოფილებს პირველ განტოლებასაც. მაშასადამე, ორი განტოლება ერთმანეთის ტოლდალოვანია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ისინი ერთმანეთის შედეგს წარმოადგენენ. მაგალითად, $(x+1)^2=4$ და $x^2+2x+1=4$ განტოლებები ტოლდალოვანია.

ზოგჯერ განტოლება ორი ან რამდენიმე განტოლების დიზიუნქციის ტოლდალოვანია. მაგალითად, განტოლება $x^4+10x^3+35x^2+50x+24=0$ განტოლებათა შემდეგი დიზიუნქციის ტოლდალოვანია: $(x+1=0) \vee (x+2=0) \vee (x+3=0) \vee (x+4=0)$; რადგან მათი ამონახსნთა სიმრავლეები ტოლია.

არსებობს შემთხვევები, როცა განტოლების ამოხსნისას გვიხდება გადასვლა არა მის ტოლდალოვან განტოლებაზე, არამედ მის შედეგზე. ამ შემთხვევაში ამონახსნთა სიმრავლე ფართოვდება, რის გამოც საჭიროა ფესვების შემოწმება. მაგალითად, $6-x=5\sqrt{x}$ განტოლების ამოხსნისას თუ ორივე მხარეს ავიყვანთ კვადრატში მივიღებთ: $x^2-37x+36=0$, ანუ $(x-1)(x-36)=0$, აქედან $x_1=1$ და $x_2=36$. პირველი ფესვი $x_1=1$ მოცემულ განტოლებას აკმაყოფილებს, ხოლო მეორე ფესვი $x_2=36$ პირველ განტოლებას არ აკმაყოფილებს, რადგან მისი განსაზღვრის არეა $x \in [0;6]$ ე.ი. $0 \leq x \leq 6$.

ის გარდაქმნები, რომლებიც საშუალებას გვაძლევს განტოლებათა ამოხსნისას გადავიდეთ ტოლდალოვან განტოლებაზე აიხსნება შემდეგ თეორემებში.

თეორემა 1. ეთქვას, განტოლება $f(x)=g(x)$ განსაზღვრულია X სიმ-

რაუღლებზე და $h(x)$ არის იმავე X სიმრავლეზე განსაზღვრული გამო-
სახულება. მაშინ განტოლებები $f(x)=g(x)$ და $f(x)+h(x)=g(x)+h(x)$ ტოლ-
ძალოვანია X სიმრავლეზე.

ეს თეორემა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ სხვა სიტყვებითაც: თუ X
სიმრავლეზე განსაზღვრული განტოლების ორივე მხარეს მიუშუმა-
ტებთ ამავე სიმრავლეზე განსაზღვრულ ერთსა და იმავე გამოსახუ-
ლებას (რიცხვითს, ან ცვლადის შემცველს) მივიღებთ მოცემულის
ტოლძალოვან განტოლებას.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ T_1 -ით მოცემული განტოლების ამონახ-
სნთა სიმრავლე, ხოლო T_2 -ით მიღებული განტოლების ამონახსნთა
სიმრავლე. მაშინ მოცემული და მიღებული განტოლებები ტოლძა-
ლოვანი იქნება, თუ $T_1=T_2$. ეს რომ დავამტკიცოთ, საჭიროა ვაჩვენოთ,
რომ T_1 -ის ყოველი ელემენტი არის მიღებული განტოლების ფესვი
და T_2 -ის ყოველი ელემენტი არის მოცემული განტოლების ფესვი.

ყოქვათ, a არის მოცემული განტოლების ფესვი, მაშინ $a \in T_1$ და მი-
სი ჩასმა მოცემულ განტოლებას გადააქცევს ჭეშმარიტ რიცხვით
ტოლობად $f(a)=g(a)$, ხოლო $h(x)$ გამოსახულებას გადააქცევს $h(a)$
რიცხვით გამოსახულებად. თუ $f(a)=g(a)$ ჭეშმარიტი რიცხვითი ტო-
ლობის ორივე მხარეს მიუშუმატებთ რიცხვით $h(a)$ გამოსახულებას,
ჭეშმარიტი რიცხვითი ტოლობის თვისების თანახმად მივიღებთ
ისევე ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობას: $f(a)+h(a)=g(a)+h(a)$; ეს კი ნიშ-
ნავს, რომ a არის აგრეთვე მიღებული განტოლების ფესვი.

ამით დაკმატოვით, რომ მოცემული განტოლების ყოველი ფესვი
წარმოადგენს აგრეთვე მიღებული განტოლების ფესვს, ე.ი. $T_1 \subset T_2$.

ყოქვათ, ამჯერად b არის მიღებული განტოლების ფესვი, ე.ი. T_2 -
ის ზოგადი ელემენტი ($b \in T_2$). მისი ჩასმა მიღებულ განტოლებაში
მას აქცევს ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობად: $f(b)+h(b)=g(b)+h(b)$. თუ ამ
ტოლობის ორივე მხარეს გამოვაკლებთ $h(b)$ -ს, მივიღებთ ჭეშმარიტ
რიცხვით ტოლობას $f(b)=g(b)$. ეს კი ნიშნავს, რომ b არის მოცემული
განტოლების ფესვიც, ე.ი. $T_2 \subset T_1$. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

პრაქტიკაში, განტოლებების ამოხსნისას, უფრო ხშირად გამოი-
ყენება არა თვით თეორემა, არამედ მისი შედეგები:

1. თუ განტოლების ორივე მხარეს მიუშუმატებთ (ან გამოვაკლებთ)

ერთსა და იმავე რიცხვს, მივიღებთ მოცემულის ტოლძალოვან განტოლებას.

2. თუ რომელიმე შესაქრებს (რიცხვით ან ცვლადიან გამოსახულებას) გადავიტანთ განტოლების ერთი მხრიდან მეორეში და ნიშანს შევუცვლით, მივიღებთ მოცემულის ტოლძალოვან განტოლებას.

თეორემა 2. ეთქვათ, განტოლება $f(x)=g(x)$ განსაზღვრულია X სიმრავლეზე და $h(x)$ იმავე X სიმრავლეზე განსაზღვრული გამოსახულებაა, რომელიც არ იქცევა ნულად X სიმრავლის არცერთი ელემენტისათვის, მაშინ განტოლებები $f(x)=g(x)$ და $f(x) \cdot h(x)=g(x) \cdot h(x)$ ტოლძალოვანია X სიმრავლეზე. ამ თეორემის დამტკიცება პირველი თეორემის დამტკიცების ანალოგიურია.

პრაქტიკაში ხშირად გამოიყენება ამ თეორემის შედეგი:

თუ განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ (ან გავეყოფთ) ერთსა და იმავე ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვზე, მივიღებთ მოცემულის ტოლძალოვან განტოლებას.

ამ თეორემათა გამოყენებით ნებისმიერი ერთცვლადიანი განტოლება დაიყვანება სახემდე $F(x)=0$.

განვიხილოთ მაგალითები:

1. ამოვხსნათ განტოლება: $3x=x(x+4)$. თუ განტოლების ორივე მხარეს გავეყოფთ x -ზე მივიღებთ: $3=x+4$, აქედან $x=-1$. ადვილი შესამჩნევია, რომ ამოხსნა სწორი არ არის, რადგან -1 -ის გარდა 0 -იც აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას. ფესვი დაეკარგეთ იმიტომ, რომ დაირღვა მეორე თეორემის პირობა.

2. ამოვხსნათ განტოლება: $\frac{x(3x-3)}{(x-1)(x+2)}=0$. თუ განტოლების ორი-

ვე მხარეს გავამრავლებთ $(x-1)(x+2)$ გამოსახულებაზე მივიღებთ: $x(3x-3)=0$, საიდანაც $x=0$ და $x=1$; მაგრამ როცა $x=1$, წილადის მნიშვნელი ნულად იქცევა და ამიტომ 1 არ შეიძლება იყოს მოცემული განტოლების ფესვი, ე.ი. 1 არის მისთვის გარეშე ფესვი. გარეშე ფესვი მივიღეთ იმიტომ, რომ დავარღვიეთ მეორე თეორემის პირობა.

3. ამოვხსნათ განტოლება: $5\sqrt{x}=6-x$. ამოხსნის დაწყებამდე ეიპოვოთ განსაზღვრის არე, განსაზღვრის არეა $0 \leq x \leq 6$. განტოლება

შეიძლება ამოვხსნათ ორი ხერხით:

I ხერხი. შემოვიღოთ აღნიშვნა $\sqrt{x} = y$, გვაქვს $y^2 + 5y - 6 = 0$ და $(y-1)(y+6) = 0$. ამ განტოლების ფესვებია $y_1 = 1$ და $y_2 = -6$, თუ გავითვა-
ლისწინებთ $\sqrt{x} = 1$, გვექნება $x = 1$, ხოლო $\sqrt{x} = -6$ ამონახსნი არა აქვს.

II ხერხი. $5\sqrt{x} = 6 - x$ განტოლების ორივე მხარე ავიყვანოთ კვად-
რატში გვექნება: $25x = 36 - 12x + x^2$, აქედან $x^2 - 37x + 36 = 0$ და $(x-1)(x-36) = 0$.
ამ განტოლების ფესვებია $x_1 = 1$ და $x_2 = 36$. $x = 36$ შეუძლებელია იყოს
განტოლების ფესვი, რადგან იგი არ ეკუთვნის განსაზღვრის არეს,
ამრიგად $x = 1$.

განტოლების ამოხსნის ორივე ხერხი აჩენს დამხმარე ფესვებს,
ამიტომ აუცილებელია მოხდეს ფესვების შემოწმება. ამ განტოლე-
ბას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $x = 1$.

საზოგადოდ, გარეშე ფესვი მიიღება მაშინ, როცა განტოლების
ამოხსნის დროს მას ცვლიან არა ტოლძალოვანი განტოლებით,
არამედ შედეგით. ასეთ შემთხვევაში ყველა ფესვი უნდა შევამოწ-
მოთ და გარეშე ფესვი უკუვაგდოთ.

განტოლების ამოხსნისას ფესვის დაკარგვა რომ არ მოხდეს
საჭიროა ტოლძალოვნების შესახებ განხილულ თეორემათა პირო-
ბების დაცვა.

ერთცვლადიანი განტოლება შეიძლება იყოს წრფივი, კვადრატ-
ული, კუბური და ა.შ. ჩვენ განვიხილოთ წრფივი და კვადრატული.

წრფივი განტოლება. $ax + b = 0$ სახის განტოლებას, სადაც x
ცვლადია, ხოლო a და b ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვები, წრფივი
ერთცვლადიანი განტოლება ეწოდება. a -ს უწოდებენ ცვლადის კოე-
ფიციენტს, b -ს კი - თავისუფალ წევრს.

თუ $a \neq 0$, მაშინ $ax + b = 0$ განტოლებას პირველი რიგის განტოლე-
ბა ეწოდება, ხოლო თუ $a = 0$, განტოლებას ექნება სახე $0 \cdot x + b = 0$ და
იგი ნულოვანი რიგისაა.

$ax + b = 0$ წრფივი განტოლებისათვის გვაქვს სამი შემთხვევა:

1. $a \neq 0$, ამ შემთხვევაში განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი

$$\text{და } x = -\frac{b}{a}.$$

2. $a = 0$ და $b = 0$, ასეთ შემთხვევაში განტოლება ღებულობს სახეს:

$0 \cdot x = 0$, რაც ჭეშმარიტია ნებისმიერი x -სათვის, ე.ი. განტოლების ფესვია ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი.

3. $a=0$ და $b \neq 0$, ამ შემთხვევაში განტოლება ღებულობს სახეს: $0 \cdot x + b = 0$ და მას ფესვები არ გააჩნია.

როგორც აღვნიშნეთ, როცა $a \neq 0$, მაშინ $x = -\frac{b}{a}$. ფესვი დადებითია,

თუ a -სა და b -ს სხვადასხვა ნიშანი გააჩნიათ; უარყოფითია, როცა a და b ერთნაირი ნიშნის მქონეა და განაყოფი უდრის ნულს, როცა $b=0$.

ამოეხსნათ განტოლება: $\frac{2}{3} + \frac{x}{8} + \frac{2-x}{12} = \frac{5x}{24} - 1$. თუ განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ 24-ზე (მნიშვნელების უმცირესი საერთო ჯერადი) გვექნება: $16 + 3x + 4 - 2x = 5x - 24$, გარდაექმნათ მიღებული განტოლება $-4x + 44 = 0$, ამ წრფივი განტოლების ამონახსნია: $x = \frac{-44}{-4}$, ანუ $x=11$.

კვადრატული განტოლება. $ax^2 + bx + c = 0$ სახის განტოლებას, სადაც x ცვლადია, ხოლო a , b და c ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია ($a \neq 0$), ერთცვლადიანი კვადრატული განტოლება ეწოდება. a -ს უწოდებენ პირველ კოეფიციენტს, b -ს მეორე კოეფიციენტს, ხოლო c -ს თავისუფალ წევრს. თუ $a=1$, მაშინ განტოლებას დაყვანილი სახის კვადრატული განტოლება ეწოდება. (ლათინურად discriminans – განმასხვავებელს ნიშნავს).

გამოვიყვანოთ კვადრატული განტოლების ფესვთა ფორმულა. ამისათვის განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ $4a$ -ზე, ორივე მხარეს დაუვმატოთ b^2 და შევასრულოთ მარტივი გარდაქმნები, გვექნება: $4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac = b^2$, საიდანაც $(2ax+b)^2 = b^2 - 4ac$. გამოსახულებას $b^2 - 4ac$ ეწოდება კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტი და აღინიშნება D -თი, $D = b^2 - 4ac$.

თუ $D = b^2 - 4ac < 0$, მაშინ $(2ax+b)^2 = b^2 - 4ac$ ტოლობა არ არის ჭეშმარიტი x -ის არც ერთი მნიშვნელობისათვის, ამიტომ ამ შემთხვევაში კვადრატულ განტოლებას ამონახსნი არ გააჩნია.

თუ $D=0$, მაშინ განტოლებას აქვს სახე: $(2ax+b)^2=0$, აქედან $x=-\frac{b}{2a}$,
 ე.ი. ამ შემთხვევაში კვადრატულ განტოლებას გააჩნია ერთი ამო-
 ნახსნი, რომელიც $-\frac{b}{2a}$ -ს ტოლია.

თუ $D>0$, მაშინ ტოლობიდან $(2ax+b)^2=b^2-4ac$ გვაქვს:
 $2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$. საიდანაც $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, ე.ი. ამ შემთხვევაში

განტოლებას აქვს ორი ამონახსნი: $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ და

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

განვიხილოთ მაგალითები:

1. ამოვხსნათ განტოლება: $x^2-x+1=0$. რადგან $D=1-4=-3<0$, ამიტომ
 განტოლებას ამონახსნი არ გააჩნია.

2. ამოვხსნათ განტოლება: $x^2-2x+1=0$. ამ შემთხვევაში $D=4-4=0$,
 ამიტომ განტოლებას აქვს ერთი ამონახსნი $x=1$.

3. ამოვხსნათ განტოლება: $x^2-3x+2=0$. ამ შემთხვევაში $D=9-8=1>0$,
 ამიტომ განტოლებას აქვს ორი ამონახსნი: $x_1=1$ და $x_2=2$.

4. a -ს რა მნიშვნელობისათვის აქვს $4x^2-(3a+2)x+(a^2-1)=0$ განტო-
 ლებას ერთი ამონახსნი?

ამოხსნა. კვადრატულ განტოლებას ერთი ამონახსნი აქვს, როცა
 დისკრიმინანტი 0-ის ტოლია, ე.ი.

$$D=(3a+2)^2-4\cdot4(a^2-1)=9a^2+12a+4-16a^2+16=-7a^2+12a+20=0, \text{ აქედან კი } -$$

$$a_1=\frac{12+8\sqrt{11}}{14} \text{ და } a_2=\frac{12-8\sqrt{11}}{14}; \text{ ამრიგად, მოცემულ განტოლებას ერ-}$$

თი ამონახსნი გააჩნია ორ შემთხვევაში.

განვიხილოთ ვიეტის ფორმულები. კერძოდ, ფორმულები, რომ-
 ლებიც ადგენენ კავშირს განტოლების ფესვებსა და კოეფიციენტებს
 შორის. ეთქვათ, მოცემულია n -ური ხარისხის ერთცვლადიანი დაყ-
 ვანილი სახის განტოლება:

$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n=0$ და მას დაეუშვათ აქვს n რაოდე-
 ნობის ფესვი; კერძოდ, მისი ფესვებია შემდეგი ნამდვილი რიცხვები:
 $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, მაშინ ვიეტის ფორმულებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$a_1 = -(m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n);$$

$$a_2 = m_1 m_2 + m_1 m_3 + \dots + m_1 m_n + m_2 m_3 + \dots + m_2 m_n + \dots + m_{n-1} m_n;$$

$$a_3 = -(m_1 m_2 m_3 + m_1 m_2 m_4 + \dots + m_1 m_2 m_n + \dots + m_{n-2} m_{n-1} m_n)$$

$$a_n = (-1)^n m_1 m_2 \dots m_n.$$

კერძოდ, როცა $n=2$, ვღებულობთ დაყვანილი კვადრატული განტოლების შემთხვევას: $x^2 + px + q = 0$; აქ $p = -(m_1 + m_2)$ და $q = m_1 \cdot m_2$ (ცხადია, m_1 და m_2 კვადრატული განტოლების ფესვებია). ეს ფორმულები პირველად მიიღო ფრანგმა მათემატიკოსმა ფ. ვიეტამ, რომელიც აღნიშნავდა, რომ ყველა n ფესვი დადებითია. ზოგადი სახით ვიეტის თეორემა დაადგინა ა.ჟირარმა.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, ცნობილია, რომ კვადრატული განტოლების ფესვებია $x_1 = -\frac{3}{2}$ და $x_2 = 2$, შევადგინოთ შესაბამისი კვადრატული განტოლება.

ამოხსნა. ვიეტის თეორემის თანახმად გვექნება: $p = -\left(-\frac{3}{2} + 2\right)$, ხოლო $q = -\frac{3}{2} \cdot 2$ და საძიებელ კვადრატულ განტოლებას ექნება სახე: $x^2 - \left(-\frac{3}{2} + 2\right) \cdot x - 3 = 0$; დავიყვანოთ იგი შემდეგ ტოლფას სახემდე: $2x^2 - x - 6 = 0$.

ვთქვათ, მოცემულია $ax^2 + bx + c = 0$ კვადრატული განტოლება; იმ შემთხვევაში, როცა b და c რიცხვებიდან ერთი მაინც ნულის ტოლია, მაშინ განტოლებას ეწოდება არასრული კვადრატული განტოლება. არასრული კვადრატული განტოლების ამოხსნისას შეიძლება ფესვების ფორმულა არ გამოვიყენოთ.

განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

1. $b \neq 0$ და $c = 0$. გვაქვს: $ax^2 + bx = 0$, ანუ $x(ax + b) = 0$, აქედან $x_1 = 0$ და $x_2 = -\frac{b}{a}$.

2. $b = 0$ და $c \neq 0$. ამ შემთხვევაში: $ax^2 + c = 0$, საიდანაც $x^2 = -\frac{c}{a}$. ცხადია, განტოლებას ამონახსნი არ გააჩნია მაშინ, როცა a -სა და c -ს ერთნაირი ნიშანი აქვთ, როცა მათ მოპირდაპირე ნიშნები აქვთ, მაშინ

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ და } x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

3. $b = c = 0$. გვაქვს $ax^2 = 0$, აქედან კი $x = 0$.

მრავალი განტოლება გარდაქმნების შემდეგ დაიყვანება კვადრატულზე. მაგალითად, ამოვხსნათ განტოლება: $1 + \frac{2}{x-1} - \frac{6}{x^2-1} = \frac{3}{x+1}$.

ამოხსნა. გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ: $\frac{x^2 - x - 2}{(x-1)(x+1)} = 0$, საიდანაც

გვაქვს: $x \neq 1$, $x \neq -1$, და $x^2 - x - 2 = 0$; კვადრატული განტოლების ამოხსნისას ვღებულობთ ფესვებს $x_1 = -1$ და $x_2 = 2$. რადგან -1 არ შედის განტოლების განსაზღვრის არეში, ამიტომ იგი გარეშე ფესვია, ე.ი. განტოლებას აქვს ერთი ამონახსნი $x = 2$.

განვიხილოთ განტოლებები:

$$\frac{3}{2}x + 7 = 5(7 - x) \quad (1), \quad x - \frac{4}{x} = -4x + 1 \quad (2), \quad 1 + \frac{x-3}{x} = \frac{x-1}{3x-5} \quad (3).$$

(1) განტოლების ორივე ნაწილი მთელი გამოსახულებაა, ასეთ განტოლებას მთელი განტოლება ეუწოდოთ. (2) განტოლების მარცხენა ნაწილი შეიცავს წილადს, რომლის მნიშვნელი ცვლადის შემცველი მთელი გამოსახულებაა. ამგვარი წილადები (3) განტოლების ორივე ნაწილშია. განტოლებას, რომლის ერთ მხარეში მაინც ისეთი წილადებია, რომელთა მნიშვნელები ცვლადის შემცველი მთელი გამოსახულებებია, მრიცხველები კი - კვლავ მთელი გამოსახულებებია, წილადური განტოლება ეუწოდოთ. (2) და (3) წილადური განტოლებებია.

წილადური განტოლების ამოხსნისას უმჯობესია მოვიქცეთ შემდეგნაირად:

1. ვიპოვოთ საერთო მნიშვნელი იმ წილადებისა, რომლებსაც მოცემული განტოლება შეიცავს.

2. გავამრავლოთ განტოლების ორივე მხარე ამ საერთო მნიშვნელზე.

ამ გამრავლებამ შეიძლება მოცემულის ტოლფასი განტოლება არ მოგეცეს, ამიტომ შემდეგი ნაბიჯები უნდა იყოს:

3. ამოვხსნათ მიღებული მთელი განტოლება.

4. მისი ამოხსნისას მიღებული ფესვებიდან შევარჩიოთ მხოლოდ

იხიანი, რომლებისთვისაც საერთო მნიშვნელი ნული არ არის. ეს რიცხვები მოცემული განტოლების ფესვებია.

განვიხილოთ წილადური განტოლების ამოხსნის მაგალითები:

1. ამოხსნათ განტოლება: $\frac{x-1}{x-3} + \frac{1}{x+2} = \frac{x+7}{(x+2)(x-3)}$.

ამოხსნა. განტოლებაში შემავალი წილადების საერთო მნიშვნელია $(x-3)(x+2)$. გაავრცელოთ მოცემული განტოლების ორივე ნაწილი ამ გამოსახულებაზე, მივიღებთ: $(x-1)(x+2)+x-3=x+7$, აქედან გვაქვს კვადრატული განტოლება: $x^2+x-12=0$. ამ განტოლების ფესვებია $x_1=3$ და $x_2=-4$. თუ $x=3$, მაშინ $(x-3)(x+2)=0$; თუ $x=-4$, მაშინ $(x-3)(x+2)=14 \neq 0$. მაშასადამე, ამ განტოლების ამონახსენია $x=-4$.

2. ამოხსნათ განტოლება: $\frac{1}{2x^2-2} - \frac{1}{4(x^2-x)} = \frac{2-x}{2(x^2+x)}$.

ამოხსნა. მოცემული განტოლება ასე გადავწეროთ: $\frac{1}{2(x-1)(x+1)} - \frac{1}{4x(x-1)} = \frac{2-x}{2x(x+1)}$. წილადების საერთო მნიშვნელია $4x(x+1)(x-1)$. ამ გამოსახულებაზე განტოლების ორივე ნაწილის გავრცელებით მივიღებთ: $2x-(x+1)=2(2-x)=2(2-x)(x-1)$, აქედან კი გვაქვს კვადრატული განტოლება $2x^2-5x+3=0$, მისი ფესვებია $x_1=1,5$ და $x_2=1$. აქედან გარეშე ფესვია $x=1$, რადგან ამ შემთხვევაში $4x \cdot (x+1)(x-1)=0$, ხოლო $x=1,5$ -ის შემთხვევაში გვაქვს $4x \cdot (x+1)(x-1)=7,5 \neq 0$. ამრიგად, განტოლების ამონახსენია $x=1,5$.

19.1. საგარეოშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $3\frac{5}{6} - 4\frac{1}{5}x = -2\frac{7}{12}$; ბ) $1\frac{1}{4}x - 5\frac{3}{8} = -6\frac{1}{2}$; გ) $0,12 - 2,5x = -0,8$;

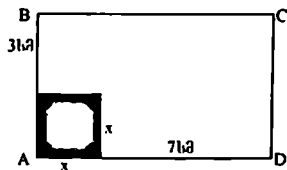
დ) $0,1 - 0,01x = -1$.

2. იპოვეთ a -ს იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლებისთვისაც $(a-3)(a+1) \cdot x = a+1$ განტოლებას (x უცნობის მიმართ):

ა) უამრავი ფესვი აქვს; ბ) არა აქვს ფესვი;

- გ) ერთადერთი ფესვი აქვს.
3. იპოვეთ b -ს იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლებისთვისაც $(b-2)(b+2) \cdot x = b+2$ განტოლებას (x უცნობის მიმართ):
 ა) უამრავი ფესვი აქვს; ბ) არა აქვს ფესვი;
 გ) ერთადერთი ფესვი აქვს.
4. იპოვეთ k -ს იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლებისთვისაც $(k+2) \cdot y = 6$ განტოლებას (y უცნობის მიმართ):
 ა) არა აქვს ფესვი; ბ) ფესვი აქვს და ის მთელი რიცხვია;
 გ) ფესვი აქვს და ის ნატურალური რიცხვია.
5. დაასრულეთ მოცემული განტოლების ჩაწერა $ax=b$ სახემდე, რომ შესრულდეს მითითებული პირობა:
 ა) ... $x=3$, განტოლებას ფესვი არა აქვს;
 ბ) $2x=...$ განტოლების ფესვია მხოლოდ 0;
 გ) ... $x=...$ განტოლებას უამრავი ფესვი აქვს;
 დ) ... $x=5$ განტოლებას ერთადერთი ფესვი აქვს და იგი -0,2-ის ტოლია.
6. იპოვეთ n -ის იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლებისთვისაც $nx - x = (n+3)(n+2)$ განტოლებას (x უცნობის მიმართ):
 ა) უამრავი ფესვი აქვს; ბ) არა აქვს ფესვი;
 გ) ერთადერთი ფესვი აქვს.
7. უღლიანი სასწორი, რომლის ერთ თეფშზე $(a+2)$ კგ შაქარია, მეორეზე $-2a$ კგ გაწონასწორებულია. იპოვეთ a .
8. ამოხსენით განტოლებები:
 ა) $\frac{1}{x-1} = \frac{2}{x+1}$; ბ) $\frac{3}{y-2} = \frac{2}{y-3}$; გ) $\frac{x-3}{3} = 4x$; დ) $\frac{1}{x-2} + 3 = \frac{3-x}{x-2}$;
 ე) $5 + \frac{1}{x-4} = \frac{5-x}{x-4}$; ვ) $\frac{8-x}{x-7} = 8 + \frac{1}{x-7}$.
9. იპოვეთ განტოლების ფესვები:
 ა) $\frac{(x+2)(x-2)}{4} + x = 2$; ბ) $\frac{10}{x-1} + \frac{15}{x-1} = \frac{14}{x^2-1}$; გ) $2 + \frac{1}{x-1} = 1 - \frac{x+1}{x-1}$;
 დ) $2x + \frac{x}{x+2} = 4 + \frac{4(1+6x)}{x+2}$; ე) $\frac{4}{3-6x+3x^2} + 3 = \frac{5}{x-1}$;
 ვ) $\frac{8}{x^3-4x} - \frac{1}{x^2-2x} = \frac{1}{x+2}$; ზ) $\frac{4}{9x^2-1} = \frac{4}{9x^2-6x+1} - \frac{1}{3x^2-x}$.

10. a ცვლადის რა მნიშვნელობებისთვისაა $\frac{6}{a-4}$ და $\frac{a}{a+2}$ წილადების სხვაობა ამ წილადების ნამრავლის ტოლი?
11. ამოხსენით განტოლებები დამხმარე უცნობის შემოტანის ხერხით:
- ა) $(x^2 + 2x)^2 - 14(x^2 + 2x) - 15 = 0$; ბ) $(6x^2 - 7x)^2 - 2(6x^2 - 7x) - 3 = 0$;
- გ) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{x-1}{x}\right) - 4 = 0$; დ) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4.5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0$.
12. იპოვეთ m -ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $\frac{2}{2x-m} = \frac{7}{mx-1}$ განტოლებას არა აქვს ამონახსენი (x უცნობის მიმართ).
13. იპოვეთ m -ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $\frac{6x-m-2}{3x-m} = m$ განტოლებას აქვს უამრავი ამონახსენი (x უცნობის მიმართ).
14. იპოვეთ k -ს მნიშვნელობები, რომელთათვისაც განტოლებას: $k \cdot (2x-1) + 4 = \frac{4x-2kx+3}{k}$ (x უცნობის მიმართ):
- ა) აქვს უამრავი ამონახსენი; ბ) არა აქვს ამონახსენი.
15. c -ს რა მნიშვნელობისათვის ექნება ერთი ფესვი განტოლებას $4x^2 - 12x + c = 0$ (x უცნობის მიმართ)?
16. a -ს რა მნიშვნელობისათვის აქვს $ax^2 + (2a+1)x + a-2 = 0$ განტოლებას ერთი ფესვი (x უცნობის მიმართ)?
17. იპოვეთ m -ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m-2 = 0$ განტოლებას ექნება ერთი ფესვი (x უცნობის მიმართ).
18. ორნიშნა რიცხვის ერთეულების ციფრი 4-ით მეტია ათეულების ციფრზე, ამ ციფრთა ნამრავლი 21-ის ტოლია. აღნიშნეთ x -ით ამ ორნიშნა რიცხვის ათეულების ციფრი, მის საპოვნელად შეადგინეთ კვადრატული განტოლება და იპოვეთ ეს ორნიშნა რიცხვი.
19. კვადრატის მეზობელი გვერდები 3 სმ და 7 ს-ით გაადიდეს, რის შედეგადაც მიიღეს 77 სმ² ფართობის მქონე $ABCD$



მართკუთხედი. კვადრატის გვერდი აღნიშნეთ x -ით. მის საპოვნელად შეადგინეთ კვადრატული განტოლება და ამოხსენით.

20. $ax^2 - 5x + 9 = 0$ კვადრატულ განტოლებას აქვს ერთი ფესვი. იპოვეთ a კოეფიციენტი და განტოლების ფესვი.

21. $2x^2 + 7x + c = 0$ განტოლების ერთ-ერთი ფესვია 1,5. იპოვეთ c და განტოლების მეორე ფესვი.

22. ცნობილია, რომ -3 და 2 არის $3x^2 + bx + c = 0$ განტოლების ფესვები. იპოვეთ b და c კოეფიციენტები.

23. ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

ა) $x|x| = 16$; ბ) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$; გ) $\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{x^2 + 1}{x} = 3$;

დ) $5(x^2 + 5x - 6) + \frac{6}{x(x + 5)} = 1$.

24. ცნობილია, რომ $x^2 + bx + c - 54 = 0$ განტოლების ფესვები ორჯერ მეტია $x^2 - 7x + c = 0$ განტოლების ფესვებზე. იპოვეთ b და c .

25. შეადგინეთ დაყვანილი კვადრატული განტოლება, რომლის ფესვების ჯამია 12, ხოლო ნამრავლია 20.

26. შეადგინეთ კვადრატული განტოლება, რომლის ფესვებია $4x^2 - 2x - 27 = 0$ განტოლების ფესვების ჯამი და ფესვების ნამრავლი.

27. $x^2 - (a+3)x - 98 = 0$ განტოლების x_1 და x_2 ფესვები აკმაყოფილებენ პირობას: $x_1 = -2x_2$. იპოვეთ განტოლების ფესვები და a .

28. $3x^2 - 5x + k = 0$ განტოლებაში იპოვეთ k -ს მნიშვნელობა, რომლისთვისაც მისი x_1 და x_2 ფესვები აკმაყოფილებენ პირობას $6x_1 + x_2 = 0$.

29. განსაზღვრეთ a -ს მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $a^2 + a(x-1) = 2 + \frac{7}{2x}$ განტოლებას აქვს მოდულით ტოლი და ნიშნით განსხვავებული ფესვები.

30. c -ს რა დადებითი მნიშვნელობისათვის იქნება $8x^2 - 6x + 9c^2 = 0$ განტოლების ერთი ფესვი მეორე ფესვის კვადრატის ტოლი?

1. რომ ვიპოვოთ a -ს ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $2a-1$ და $4a-13$ გამოსახულებების მნიშვნელობები ტოლია, უნდა ამოვხსნათ a ცვლადის მიმართ განტოლება:
 ა) $2a=4a$; ბ) $2a-1=4a$; გ) $2a-1=4a-13$; დ) $2a=4a-13$.
2. თუ $a \neq 0$, მაშინ $ax=b$ განტოლებას
 ა) უამრავი ფესვი აქვს; ბ) არა აქვს ფესვი; გ) ორი ფესვი აქვს; დ) ერთი ფესვი აქვს.
3. თუ $a=0$ და $b \neq 0$, მაშინ $ax=b$ განტოლებას
 ა) აქვს ერთი ფესვი $x = \frac{b}{a}$; ბ) არა აქვს ფესვი;
 გ) ორი ფესვი აქვს; დ) უამრავი ფესვი აქვს.
4. თუ $a=0$ და $b=0$, მაშინ $ax=b$ განტოლებას
 ა) ერთი ფესვი აქვს; ბ) უამრავი ფესვი აქვს;
 გ) ფესვი არა აქვს; დ) ორი ფესვი აქვს.
5. $ax^2+bx+c=0$ კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტია:
 ა) $D=b^2+4ac$; ბ) $D=b^2-4ac$; გ) $D=a^2-4bc$; დ) c^2-4ab .
6. ეტყვათ, $ax^2+bx+c=0$ კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტი $D=0$, მაშინ ამ განტოლების ფესვია
 ა) $x=ab$; ბ) $x=\frac{b}{a}$; გ) $x=-\frac{b}{2a}$; დ) $x=\frac{b}{2a}$.
7. ვიპოვოთ x , თუ $\frac{12x^4-3x^2}{(2x-1)(18x^2+9x)}=111$.
 ა) $x=333$; ბ) $x=37$; გ) $x=444$; დ) $x=11$.
8. ვიპოვოთ x , თუ $\frac{5x^2-20}{x-2}=4x+8$
 ა) $x_1=2, x_2=-2$; ბ) $x=2$; გ) $x=-2$; დ) $x=0$.
9. შეადგინეთ კვადრატული განტოლება, რომლის ფესვებია $x_1=1$ და $x_2=-2$.
 ა) $x^2+x-2=0$; ბ) $x^2+2x-3=0$; გ) $x^2-3x+2=0$; დ) $x^2-1=0$.
10. $|x|+|x-1|=0$ განტოლების ამონახსენია
 ა) $x=\frac{1}{2}$; ბ) $x=-\frac{1}{2}$; გ) ამონახსენი არა აქვს; დ) $x_1=1$ და $x_2=0$.

**§20. ორცვლადიანი განტოლების ცნება, როგორც $f(x,y)=g(x,y)$,
 $x,y \in X$ სახის პრედიკატი. ორცვლადიან განტოლებათა
 ამონახსენთა სიმრავლე.
 ორცვლადიანი ორი განტოლების სისტემა როგორც
 განტოლებათა კონიუნქცია**

ორცვლადიან პრედიკატს $f(x,y)=g(x,y)$, სადაც $x \in X$ და $y \in Y$ ეწოდება ორცვლადიანი განტოლება. ორცვლადიანი განტოლების მაგალითებია: $x^2=12$; $5x+7y=11$; $16x^2+9y^2=25$ და ა.შ. იგივეური გარდაქმნების შედეგად ორცვლადიანი განტოლება ყოველთვის შეიძლება დაიყვანოს $F(x,y)=0$ სახემდე.

ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ (a,b) წყვილს ეწოდება ორცვლადიანი განტოლების ამონახსნი, თუ x -ის a -თი და y -ის b -თი შეცვლისას განტოლება იქცევა ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობად. მაგალითად, წყვილი $(1;3)$ არის განტოლების $2x+3y=11$ ერთერთი ამონახსნი, რადგან მათი ჩასმით განტოლება გარდაიქმნება ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობად: $2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 11$, მაგრამ ამ განტოლებას სხვა ამონახსნებიც გააჩნია; მაგალითად, $(-2;5)$, $(0; \frac{11}{3})$; $(\frac{11}{2}; 0)$ და სხვა.

ორცვლადიან განტოლებას შეიძლება ჰქონდეს ერთადერთი ამონახსნი; მაგალითად, $x^2+y^2=0$ განტოლებას ერთადერთი ამონახსნი გააჩნია $(0;0)$. შეიძლება ორცვლადიან განტოლებას საერთოდ არ გააჩნდეს ამონახსნი; მაგალითად, $x^2+y^2=-1$ განტოლებას ამონახსნი არა აქვს. შეიძლება მას ჰქონდეს ორი, სამი და ა.შ. უსასრულო რაოდენობის ამონახსნი. სიმრავლე ისეთი დალაგებული წყვილებისა, რომელთა ჩასმა ორცვლადიან განტოლებას ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობად აქცევს ქმნის ორცვლადიანი განტოლების ამონახსენთა სიმრავლეს. ჩვეულებრივ, ეს სიმრავლე ხშირად უსასრულოა.

ყოველ დალაგებულ ნამდვილ რიცხვთა წყვილს სიბრტყეზე კოორდინატთა სისტემაში შეესაბამება ერთი და მასთან მხოლოდ ერთი წერტილი. მაშასადამე, ორცვლადიანი განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე სიბრტყეზე გეგმილს წერტილთა სიმრავლეს, რომელსაც მოცემული განტოლების გრაფიკი ეწოდება. იმის გამო, რომ ორცვლადიანი განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე ხშირად უსასრუ-

ლოა, გრაფიკის ყველა წერტილის მოცემა შეუძლებელია, ამიტომ ვკმაყოფილდებით გრაფიკის აღწერის გეომეტრიული ხერხით.

ორცვლადიან ორ განტოლებას, რომელთაც ერთი და იგივე გრაფიკი აქვთ, ტოლძალოვანი ეწოდება. ტოლძალოვანი ორცვლადიანი განტოლებების გრაფიკები ერთმანეთს ემთხვევა.

განვიხილოთ შემდეგი თეორემები:

თეორემა 1. თუ გამოსახულება $f(x,y)$ განსაზღვრულია $x \in X$ და $y \in Y$ მნიშვნელობებისათვის და განტოლება $g(x,y)=h(x,y)$ ასევე განსაზღვრულია $x \in X$ და $y \in Y$ მნიშვნელობებისათვის, მაშინ განტოლებები $g(x,y)=h(x,y)$ და $g(x,y)+f(x,y)=h(x,y)+f(x,y)$ ტოლძალოვანია.

თეორემა 2. თუ გამოსახულება $f(x,y)$ განტოლება $g(x,y)=h(x,y)$ განსაზღვრულია $x \in X$ და $y \in Y$ მნიშვნელობებისათვის და არ არსებობს (x,y) წყვილი, რომლისთვისაც $f(x,y)$ 0-ის ტოლი გახდება, მაშინ განტოლებები $g(x,y)=h(x,y)$ და $g(x,y):f(x,y)=h(x,y):f(x,y)$ ტოლძალოვანია.

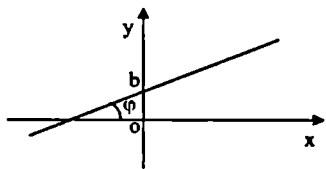
ორცვლადიანი განტოლება შეიძლება იყოს წრფივი, კვადრატული, კუბური და ა.შ. განვიხილოთ წრფივი განტოლებანი. სიბრტყეზე – წრფის ზოგადი სახის განტოლებას $ax+by+c=0$ ეწოდება არასრული, თუ მისი თუნდაც ერთი კოეფიციენტი a , b , c ნულის ტოლია. შესაძლებელია წრფის არასრული განტოლებების შემდეგი სახეები:

1. $a \neq 0$, $b \neq 0$ და $c=0$, მაშინ $ax+by=0$ არის კოორდინატთა სათავეში გამავალი წრფე.
2. $a \neq 0$, $c \neq 0$ და $b=0$, მაშინ $ax+c=0$ არის OY ღერძის პარალელური წრფე.
3. $b \neq 0$, $c \neq 0$ და $a=0$, მაშინ $by+c=0$ არის OX ღერძის პარალელური წრფე.
4. თუ $a \neq 0$ და $b=c=0$, მაშინ $ax=0$ ანუ $x=0$ არის OY ღერძის განტოლება.
5. თუ $b \neq 0$ და $a=c=0$, მაშინ $by=0$ ანუ $y=0$ არის OX ღერძის განტოლება.
6. თუ $a=b=c=0$, მაშინ $ax+by+c=0$ განტოლების ამონახსნია ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვის წყვილი (ამ შემთხვევაში განტოლების გრაფიკი წრფეს არ წარმოადგენს).
7. თუ $a=b=0$, ხოლო $c \neq 0$, მაშინ $0 \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$ განტოლებას ამონახ-

სნი არა აქვს.

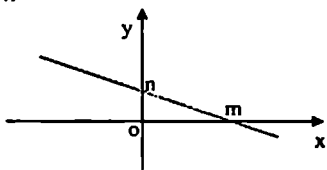
განვიხილოთ წრფის განტოლება სხვადასხვა სახით დეკარტეს კოორდინატებში სიბრტყეზე. თუ a და b ერთდროულად 0-ის ტოლი არ არის, მაშინ $ax+by+c=0$ განტოლებას ზოგადი სახის წრფივი განტოლება ეწოდება.

1. თუ წრფე აღგენს φ კუთხეს OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან და კვეთს OY ღერს $(0,b)$ წერტილში, მაშინ ამ წრფის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე: $y=kx+b$, სადაც $k=\operatorname{tg}\varphi$ და ამ განტოლებას უწოდებენ წრფის განტოლებას საკუთხო კოეფიციენტით.



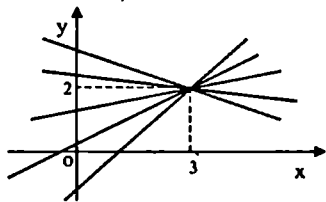
2. დაეუშვათ, მოცემულია წრფის ზოგადი სახის განტოლება $ax+by+c=0$, მასთან $a \neq 0$, $b \neq 0$ და $c \neq 0$. გარდაექმნათ იგი: $\frac{ax}{-c} + \frac{by}{-c} = 1$, აქედან $\frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1$. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $-\frac{c}{a} = m$ და $-\frac{c}{b} = n$, მა-

შინ წრფის განტოლებას ექნება სახე: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$, ამ განტოლებას ეწოდება წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში; კერძოდ, იგი OX ღერძს კვეთს $(m;0)$ წერტილში, ხოლო OY ღერძს $(0;n)$ წერტილში.



განვიხილოთ წრფესთან დაკავშირებული ზოგიერთი ამოცანა:

1. მოცემულ $M(x_0, y_0)$ წერტილზე გამავალ წრფეთა კონის განტოლებას აქვს სახე $y-y_0=k(x-x_0)$, სადაც k ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. მაგალითად, ვიპოვოთ $M(3,2)$ წერტილზე გამავალი წრფეთა კონის განტოლება. ცხადია, გვექნება: $y-2=k(x-3)$.



2. მოცემულ ორ $M_1(x_1, y_1)$ და $M_2(x_2, y_2)$ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლებას აქვს შე მდებარე სახე: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. განვიხილოთ მაგალითი: ვიპოვოთ $M_1(-4;1)$ და $M_2(9;2)$ წერტილებზე გამავალ-

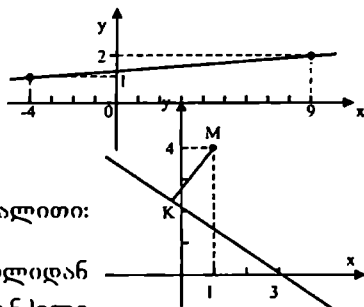
ლი წრფის განტოლება. ამ შემთხვევაში გვექნება: $\frac{y-1}{2-1} = \frac{x-(-4)}{9-(-4)}$.

გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ შესაბამის განტოლებას: $13y - x - 17 = 0$,
ანუ $y = \frac{1}{13}x + \frac{17}{13}$.

3. ვთქვათ, მოცემულია $M(x_0, y_0)$
წერტილი და $ax + by + c = 0$ წრფე, მა-
შინ მანძილი ამ წერტილიდან მოცე-
მულ წრფემდე ტოლია:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \text{ განვიხილოთ მაგალითი:}$$

ვიპოვოთ მანძილი $M(1;4)$ წერტილიდან
 $3x + 4y - 9 = 0$ წრფემდე. ცხადია, ეს მანძილი



$$MK = d \text{ ტოლი იქნება: } d = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2.$$

4. ვთქვათ, მოცემულია $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ და $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ წრფეები,
რომლებიც ერთმანეთს კვეთენ M წერტილში, მაშინ მათ შორის α
კუთხის ტანგენსი გამოითვლება ფორმულით: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 + b_1b_2}$. თუ
წრფეების განტოლებები მოცემულია საკუთხო კოეფიციენტებით:
 $y = k_1x + b_1$ და $y = k_2x + b_2$, მაშინ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$.

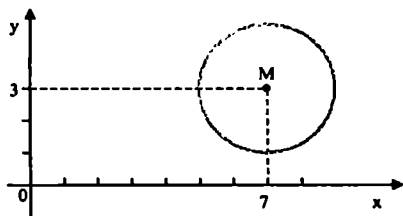
5. ორი წრფე იკვეთება ერთ წერტილში, როცა $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, თუ მათი
განტოლებები მოცემულია ზოგადი სახით: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ და
 $a_2x + b_2y + c_2 = 0$; ხოლო თუ წრფის განტოლებები საკუთხო კოეფიციენ-
ტით არის მოცემული: $y = k_1x + b_1$ და $y = k_2x + b_2$, მაშინ ისინი ერთმანეთს
გადაკვეთენ როცა $k_1 \neq k_2$.

6. ვთქვათ, წრფის განტოლებები მოცემულია ზოგადი სახით:
 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ და $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, მაშინ ეს წრფეები ერთმანეთის პარა-
ლელურია, თუ ადგილი აქვს შემდეგ დამოკიდებულებას $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;
ხოლო, თუ წრფეები საკუთხო კოეფიციენტებით არიან წარმოდგე-
ნილი: $y = k_1x + b_1$ და $y = k_2x + b_2$, მაშინ ისინი ერთმანეთის პარალელუ-

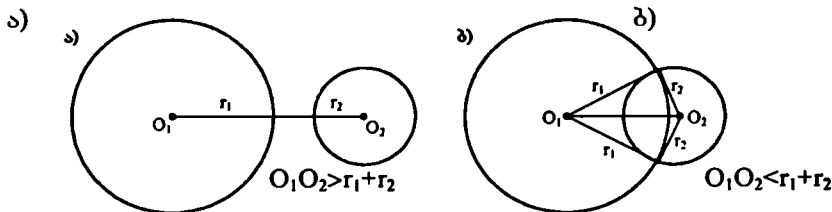
რია, როცა $k_1=k_2$.

7. ზოგადი სახით მოცემული $a_1x+b_1y+c_1=0$ და $a_2x+b_2y+c_2=0$ წრფეები ერთმანეთის პერპენდიკულარულია, თუ $a_1a_2+b_1b_2=0$; ხოლო თუ წრფეები მოცემულია საკუთხო კოეფიციენტით: $y=k_1x+b_1$ და $y=k_2x+b_2$, მაშინ ისინი ურთიერთმართობულია, როცა $k_1 \cdot k_2=-1$.

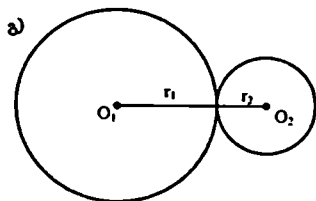
ორცვლადიანი კვადრატული (მეორე ხარისხის) განტოლება, საზოგადოდ, რთული სახისაა. ჩვენ განვიხილოთ მხოლოდ ერთი კერძო შემთხვევა, სახელდობრ, წრეწირის განტოლება. წრეწირი, რომლის ცენტრი მდებარეობს $M(a,b)$ წერტილში, ხოლო რადიუსი R -ის ტოლია, ორცვლადიანი განტოლებით შეიძლება შემდეგნაირად გამოვსახოთ: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. იმ შემთხვევაში, როცა $a=b=0$, წრეწირის განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს: $x^2+y^2=R^2$. წრეწირის განტოლება შეიძლება სხვა სახითაც იყოს მოცემული, მაგალითად ორცვლადიანი განტოლება: $x^2+y^2-2(7x+3y-27)=0$ გამოსახავს წრეწირს, ვიპოვოთ ამ წრეწირის ცენტრის კოორდინატები და რადიუსი. ამ წრეწირის ცენტრის კოორდინატების და რადიუსის საპოვნელად, საჭიროა გამოიყოს სრული კვადრატები: $x^2-14x+49+y^2-6y+9-4=0$; აქედან კი ვღებულობთ წრეწირის კანონიკურ განტოლებას: $(x-7)^2+(y-3)^2=4$; საიდანაც ცხადია, რომ ამ წრეწირის ცენტრია $M(7;3)$ წერტილი, ხოლო რადიუსი $R=2$ -ს.



განვიხილოთ ორი წრეწირის ურთიერთმდებარეობა სიბრტყეზე:

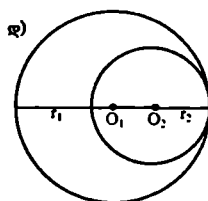


ბ)



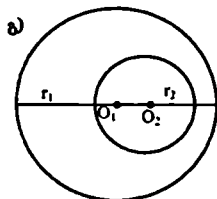
$$O_1O_2 = r_1 + r_2$$

დ)



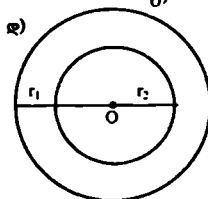
$$O_1O_2 = r_1 - r_2$$

ე)



$$O_1O_2 < r_1 - r_2$$

ვ)



$$O_1O_2 = 0 \text{ და } r_1 > r_2.$$

ვთქვათ, მოცემულია ორი ორცვლადიანი განტოლება $f(x,y)=0$ და $g(x,y)=0$. ვიპოვოთ ამ ორი განტოლების საერთო ამონახსნები, ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ მოცემულია ორი განტოლების სისტემა; რადგან თითოეული განტოლება წარმოადგენს ორცვლადიან პრედიკატს, ამიტომ განტოლებათა სისტემა არის მოცემულ პრედიკატთა კონიუნქცია. ცხადია, რომ ამ განტოლებათა სისტემის, ანუ მოცემულ პრედიკატთა კონიუნქციის ჭეშმარიტობის სიმრავლე არის მოცემულ პრედიკატთა ჭეშმარიტობის სიმრავლეების თანაკვეთა. ცვლადების მნიშვნელობათა ყოველ წყვილს, რომელთა ჩასმისას თითოეული განტოლება გადაიქცევა ჭეშმარიტად რიცხვით ტოლობად, სისტემის ამონახსნი ეწოდება. ამოვხსნათ სისტემა – ნიშნავს, ვიპოვოთ ყველა მისი ამონახსნი ან დავამტკიცოთ, რომ იგი არ არსებობს.

საზოგადოდ, ორი $f(x,y)=0$ და $g(x,y)=0$ ორცვლადიანი განტოლების სისტემა ეწოდება ამ განტოლებათა კონიუნქციას – $f(x,y)=0 \wedge g(x,y)=0$; რომელსაც ფიგურული ფრჩხილების საშუალებითაც ჩაწერენ:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0. \end{cases}$$

განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითი:

1. ვიპოვოთ $\begin{cases} |x^2 - x| + |y^2 - 1| = 0 \\ |x| + |y^2 - 3y + 2| = 0 \end{cases}$ განტოლებათა სისტემის ამონახ-

სენი.

ამოხსნა. სისტემის პირველი განტოლების $|x^2 - x| + |y^2 - 1| = 0$ ამონახსენთა სიმრავლეა $A = \{(0;1), (0;-1), (1;1), (1;-1)\}$, ხოლო სისტემის მეორე განტოლების $|x| + |y^2 - 3y + 2| = 0$ ამონახსენთა სიმრავლეა $B = \{(0;1), (0;2)\}$, მაშინ მოცემული განტოლებათა სისტემის ამონახსენია $A \cap B = \{(0;1)\}$.

2. ვიპოვოთ $\begin{cases} |x+1| + |y+1| = 0 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ განტოლებათა სისტემის ამონახსენი.

ნი.

ამოხსნა. სისტემის პირველი განტოლების ამონახსენია $(-1;-1)$, ხოლო სისტემის მეორე განტოლების ამონახსენია $(0;0)$, ამიტომ განტოლებათა სისტემას ამონახსენი არ გააჩნია.

განტოლებათა ორ სისტემას ეწოდება ტოლძალოვანი, თუ ამ სისტემებს ერთი და იგივე ამონახსენები გააჩნიათ. კერძოდ, თუ არც ერთ სისტემას არა აქვს ამონახსენი, მაშინ ისინი ტოლძალოვნად ითვლება. განტოლებათა სისტემის ამოხსენისას, ჩვეულებრივ მოცემულ სისტემას ცვლიან, უფრო „მოხერხებული“ სისტემით, მაგრამ ეს მეორე სისტემა პირველის ტოლძალოვანი უნდა იყოს.

განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითი:

1. სისტემები $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 5y = 21 \end{cases}$ და $\begin{cases} 16x + 24y = 32 \\ 16x + 20y = 84 \end{cases}$ ტოლძალოვანია, რად-

გან პირველი სისტემის პირველი და მეორე განტოლება შეცვლილია მათი ტოლძალოვანი განტოლებებით.

2. სისტემის რომელიმე განტოლება შეიძლება შეეცვალოს მოცემულ განტოლებათა ჯამით ან სხვაობით, მეორე კი უცვლელად დავ-

ტოვოთ. მაგალითად, სისტემები $\begin{cases} 7x - 7y = 3 \\ 3x + 6y = 19 \end{cases}$ და $\begin{cases} 10x - y = 22 \\ 3x + 6y = 19 \end{cases}$ ტოლძა-

ლოვანია, რადგან მეორე სისტემის პირველი განტოლება წარმოადგენს პირველი სისტემის განტოლებათა ჯამს, ხოლო მეორე სისტემის მეორე განტოლება დატოვებულია უცვლელად.

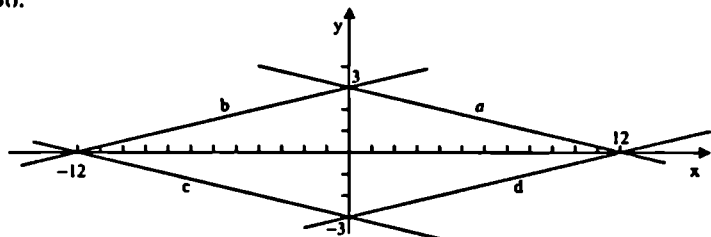
3. სისტემის ერთ რომელიმე განტოლებაში შეიძლება ერთი ცვლადი გამოვსახოთ მეორის საშუალებით და ეს გამოვსახულება ჩაესვათ მეორე განტოლებაში. ახალი განტოლება პირველთან ერთად შეადგენს მოცემული სისტემის ტოლძალოვან სისტემას. მაგალითად, სისტემები $\begin{cases} x - y^2 = 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ და $\begin{cases} x = y^2 + 1 \\ 2(y^2 + 1) - 3y = 1 \end{cases}$ ტოლძალოვანია.

20.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. ცნობილია, რომ $(3;a)$, $(2b;5)$, $(2c; -22,5b)$ და $(5b;d)$ წყვილები $20x+y=11$ განტოლების ამონახსნებია. იპოვეთ a , b , c და d რიცხვები.
2. აქვს თუ არა $2x+2,5y=0,5$ განტოლებას მთელი ამონახსნი (ამონახსნი, რომელიც მთელ რიცხვთა წყვილია)?
3. დაწერეთ ორუცნობიანი განტოლება, რომლის გრაფიკი აბსცისათა ღერძის პარალელური წრფეა და გადის $(-1;-3)$ წერტილზე.
4. დაწერეთ ორუცნობიანი განტოლება, რომლის გრაფიკი ორდინატთა ღერძის პარალელურია და $(-7;4)$ წერტილზე გადის.
5. რამდენი ამონახსენი აქვს $|x(x^2-1)|+|(y-1)(y^2-5y+6)|=0$ ორცვლადიან განტოლებას?
6. დაწერეთ ორცვლადიანი განტოლება ორდინატთა ღერძის პარალელური ისეთი წრფისა, რომელიც $(2;5)$ წერტილიდან 3 ერთეულითაა დაშორებული.
7. დაწერეთ განტოლება აბსცისათა ღერძის პარალელური ისეთი წრფისა, რომელიც $(2;3)$ წერტილიდან 5 ერთეულითაა დაშორებული.
8. დაეწეროთ $A(-1;1)$ და $B(2,5)$ წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება.
9. ეთქვას, მოცემულია $4x-3y+5=0$ წრფე, ვიპოვოთ $M(5;5)$ წერტილიდან ამ წრფემდე მანძილი.
10. ეთქვას, მოცემულია $x+y-1=0$ წრფე და $M(1;1)$ წერტილი. ვიპოვოთ ამ წერტილზე გამავალი და მოცემული წრფის პარალელური

წრფის განტოლება.

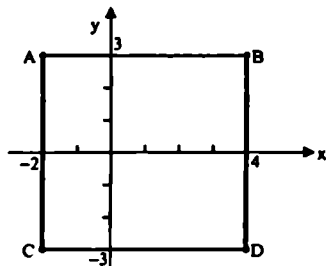
11. მოცემულია $x-y+2=0$ წრფე და $M(2;1)$ წერტილი. ვიპოვოთ ამ წერტილზე გამავალი და მოცემული წრფის მართობული წრფის განტოლება.
12. დაეწეროთ ნახაზზე გამოსახული a, b, c და d წრფეების განტოლებები.



13. მოცემულია წრეწირის განტოლება $x^2+y^2-4(x-y)-8=0$. ვიპოვოთ ამ წრეწირის ცენტრის კოორდინატები და ვიპოვოთ მისი რადიუსი.
14. მოცემულია ორი წრეწირი $x^2+y^2=9$ და $(x-4)^2+y^2=4$. ექნებათ თუ არა ამ წრეწირებს საერთო წერტილები და თუ ექნებათ რამდენი?
15. მოცემულია ორი წრეწირი $x^2+y^2=4$ და $x^2+(y-4)^2=1$. ექნებათ თუ არა ამ წრეწირებს საერთო წერტილები და თუ ექნებათ რამდენი?

16. მოცემულია ორი წრეწირი $(x+1)^2+y^2=1$ და $(x-2)^2+y^2=4$. ექნებათ თუ არა ამ წრეწირებს საერთო წერტილები და თუ ექნებათ რამდენი?

17. ვიპოვოთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც ჩახაზულია კვადრატში, რომლის წვეროს წერტილებია $A(-2;3)$, $B(4;3)$, $C(-2;-3)$ და $D(4;-3)$.



18. ტოლფასია თუ არა შემდეგი განტოლებათა სისტემები:

$$\begin{cases} 2x+y=150 \\ 0.7x-0.8y=12.9 \end{cases} \quad \text{და} \quad \begin{cases} 2x+y=150 \\ 7x-8y=129. \end{cases}$$

19. $(3;-2)$, $(-3;-2)$, $(-3;2)$, $(3;2)$ წყვილებიდან რომელია $\begin{cases} 5x-y=-17 \\ 2x+5y=4 \end{cases}$

სისტემის ამონახსნი?

20. ცნობილია, რომ $(a; -7)$ წყვილი არის $2x+y=12$ განტოლების ამონახსნი. არის თუ არა ეს წყვილი $\begin{cases} 4x+5y=3 \\ 10x+12y=11 \end{cases}$ სისტემის ამონახსნიც?

21. ცნობილია, რომ $(a; a-1)$ წყვილი არის $2x+y=11$ განტოლების ამონახსნი. არის თუ არა ეს წყვილი $\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ სისტემის ამონახსნიც?

22. ცნობილია, რომ $(2a; a+4)$ წყვილი არის $4x+y=-3$ განტოლების ამონახსნი. არის თუ არა ეს წყვილი $\begin{cases} 3y-x=11 \\ 5x+2y=1 \end{cases}$ სისტემის ამონახსნიც?

23. დენდროლოგიურ პარკში შესასვლელი ბილეთი მოზრდილებსათვის 80 თეთრი ღირს, ხოლო ბავშვებისათვის – 50 თეთრი. შაბათ დღეს გაიყიდა 84 ლარის ბილეთები, სულ 150 ცალი. რამდენი ბავშვის და რამდენი მოზრდილის ბილეთი გაიყიდა ამ დღეს? ამოცანის ამოსახსნელად დაწერეთ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემა. ჩამოთვლილი წყვილებიდან რომელია ამ სისტემის ამონახსნი: $(8;100)$, $(100;8)$, $(41;9)$, $(9;41)$, $(120;30)$, $(30;120)$, $(24;90)$, $(90;24)$?

24. *-ის ნაცვლად ჩაწერეთ ისეთი რიცხვი, რომ $(24; -1)$ იყოს $\begin{cases} 5x-y=121 \\ 2x+3y=* \end{cases}$ სისტემის ამონახსნი.

25. ოთახში არის ერთუჯრიანი, ორუჯრიანი და სამუჯრიანი მაგიდები, სულ 17 ცალი; მათ სულ 36 უჯრა აქვთ. ამასთან, ერთუჯრიანი მაგიდა იმდენია, რამდენიც ორუჯრიანი. რამდენი ერთუჯრიანი და სამუჯრიანი მაგიდაა ოთახში?

ამოცანის ამოსახსნელად დაწერეთ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემა. ჩამოთვლილთაგან, რომელია ამ სისტემის ამონახსნი: $(5;12)$, $(5;7)$, $(6;5)$, $(4;9)$.

26. რიგში თომას უკან 3-ჯერ მეტი ბავშვია, ვიდრე წინ. თომას შემდგომ ბავშვის წინ და უკან ტოლი რაოდენობის ბავშვი დგას. რამდენი ბავშვი დგას თომას წინ და რამდენი ბავშვი დგას თომას

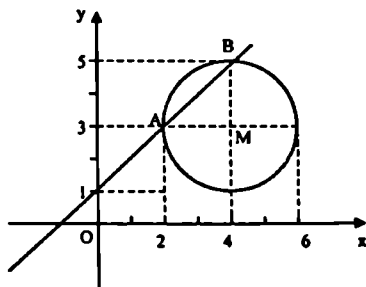
მას უკან?

27. ტოლფასია თუ არა შემდეგი განტოლებათა სისტემები:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \text{ და } \begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 7 \end{cases}.$$

28. რამდენი 2-ლარიანი რეგულისა და 3-ლარიანი წიგნის ყიდვა შეიძლება 15 ლარით?

29. ნახაზზე მოცემულია წრეწირი და წრფე. ამ ნახაზის მიხედვით შევადგინოთ ორცვლადიან განტოლებათა სისტემა და ვიპოვოთ მისი ამონახსნები.



30. მოცემულია განტოლებათა სისტემა $\begin{cases} 2kx - y = 7 \\ (k+1)x - ky = 1 \end{cases}$ ვიპოვოთ k -ს ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც სისტემას ამონახსნი არა აქვს.

20.1.1. ტესტი №19

1. თუ $b=0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$, მაშინ $ax+by+c=0$ განტოლების გრაფიკია

- აბსცისათა ღერძის პარალელური წრფე,
- ორდინატთა ღერძის პარალელური წრფე,
- ორდინატთა ღერძის მართობული წრფე,
- კოორდინატთა სათავეზე გამავალი წრფეა.

2. x_0 და y_0 რიცხვების წყვილი $(x_0; y_0)$ არის $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ სისტემის

ამონახსნი, თუ ამ რიცხვების ჩასმის შემდეგ მიიღება:

- სისტემის პირველი ჯეშმარიტი, ხოლო მეორე მცდარი ტოლობა,
- სისტემის პირველი მცდარი, ხოლო მეორე ჯეშმარიტი ტოლობა,
- მცდარი ტოლობები, დ) ჯეშმარიტი ტოლობები.

3. თუ სისტემის ერთ-ერთ განტოლებას არა აქვს ამონახსნი, მაშინ სისტემას

ა) შეიძლება პქონდეს ამონახსნი, ბ) არა აქვს ამონახსნი,
გ) აქვს ამონახსნი, დ) ერთადერთი ამონახსნი აქვს.

1. წრეწირის, რომლის ცენტრი $M(a;b)$ წერტილშია, ხოლო რადიუსი R -ის ტოლია, განტოლებას აქვს სახე:

ა) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, ბ) $(x-a)^2 - (y-b)^2 = R^2$,

გ) $x+y-a-b=R$, დ) $x+y+a^2+b^2=R$.

2. მოცემულია $y=x+1$ და $y=-x+2$ წრფეები, მაშინ

ა) ეს წრფეები პარალელურია,

ბ) ეს წრფეები ურთიერთმართობულია,

გ) ეს წრფეები კოორდინატთა სათავეზე გადიან,

დ) ეს წრფეები გადიან $(-1;-2)$ წერტილზე.

3. მოცემულია $y=2x+1$ და $y=2x+3$ წრფეები, ისინი

ა) პარალელურია, ბ) ურთიერთმართობულია,

გ) კოორდინატთა სათავეზე გადიან,

დ) ეს წრფეები გადიან $(-1;-3)$ წერტილზე.

4. $\begin{cases} 2x+5y=11 \\ 2x+5y=22 \end{cases}$ განტოლებათა სისტემას

ა) მხოლოდ ორი ამონახსნი აქვს,

ბ) ერთადერთი ამონახსნი აქვს,

გ) უამრავი ამონახსნი აქვს,

დ) არ აქვს ამონახსნი.

5. $\begin{cases} 3x+y=10 \\ 6x+2y=20 \end{cases}$ განტოლებათა სისტემას

ა) მხოლოდ ორი ამონახსნი აქვს,

ბ) ერთადერთი ამონახსნი აქვს,

გ) უამრავი ამონახსნი აქვს,

დ) არ აქვს ამონახსნი.

6. $\begin{cases} x-y=8 \\ 3x+2y=9 \end{cases}$ განტოლებათა სისტემის ამონახსნია

ა) $(5;-3)$, ბ) $(-5;-3)$, გ) $(-5;3)$, დ) $(5;3)$.

7. მოცემულია განტოლებათა სამი სისტემა:

I. $\begin{cases} 2x-y=7 \\ x+y=8 \end{cases}$, II. $\begin{cases} 2x-y=7 \\ 3x=15 \end{cases}$ და III. $\begin{cases} x-2y=-1 \\ 3x-2y=15 \end{cases}$, მათგან ერთმანე-

თის ტოლფასია

ა) სამივე სისტემა, ბ) I და II, გ) I და III, დ) II და III.

§21. ორცვლადიან განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ხერხები.

ორცვლადიან განტოლებათა სისტემის ამოხსნის მრავალი ხერხი არსებობს. განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი სათანადო მაგალითებით.

I. ჩასმის ხერხი. იგი მდგომარეობს შემდეგში:

ა) სისტემის ერთ-ერთ განტოლებას მისცემენ ისეთ სახეს, სადაც y გამოსახულია x -ით (ან x გამოსახულია y -ით).

ბ) მიღებულ გამოსახულებას ჩასვამენ y -ის (ან x -ის) ნაცვლად მეორე განტოლებაში. შედეგად მიიღება ერთცვლადიანი განტოლება.

გ) პოულობენ ამ განტოლების ფესვებს.

დ) გამოსახულების, სადაც y გამოსახულია x -ით (ან x გამოსახულია y -ით), საშუალებით პოულობენ y -ის (ან x -ის) შესაბამის მნიშვნელობებს. მოვიყვანოთ მაგალითები:

1. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:
$$\begin{cases} 5x + 6y = 13 \\ 7x + 18y = -1. \end{cases}$$

ამოხსნა. სისტემის პირველი განტოლებიდან გვაქვს: $x = -\frac{6}{5}y + \frac{13}{5}$; x -ის ეს გამოსახულება ჩავსვათ მეორე განტოლებაში,

მივიღებთ $-\frac{42}{5}y + \frac{91}{5} + 18y = -1$. მიღებული განტოლებიდან გვაქვს

$\frac{48}{5}y = -\frac{96}{5}$; ე.ი. $y = -2$. y -ის მიღებული მნიშვნელობა ჩავსვათ გამოსახულებაში $x = -\frac{6}{5}y + \frac{13}{5}$, მივიღებთ $x = 5$. მაშასადამე, სისტემის ამო-

ხსნაა $(5; -2)$.

2. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:
$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 63 \\ x - y = -3. \end{cases}$$

ამოხსნა. სისტემის მეორე განტოლებიდან გვაქვს: $y = x + 3$; y -ის ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ სისტემის პირველ განტოლებაში, მივიღებთ ერთცვლადიან განტოლებას: $x^2 - x(x+3) + (x+3)^2 = 63$. მიღებულ კვადრატულ განტოლებას: $x^2 + 3x - 54 = 0$ აქვს ორი ამონახსნი $x_1 = 6$ და $x_2 = -9$.

ამიტომ სისტემასაც ორი ამონახსნი აქვს: (6; 9) და (-9; -6).

3. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \\ xy = 4. \end{cases}$$

ამოხსნა: სისტემის მეორე განტოლებიდან გვაქვს: $x = \frac{4}{y}$. x -ის ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ სისტემის პირველ განტოლებაში და მივიღებთ: $\frac{2}{\sqrt{y}} + \sqrt{y} = 3$. აქედან გვექნება: $y_1 = 1$ და $y_2 = 4$. მაშასადამე, სისტემის ამონახსნებია: (1;4) და (4;1).

4. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:
$$\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{9}{20} \\ x^2 - y^2 = 9. \end{cases}$$

ამოხსნა. სისტემის მეორე განტოლებიდან გვაქვს: $x = \sqrt{9 + y^2}$. x -ის ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ სისტემის პირველ განტოლებაში, გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ: $\frac{1}{y\sqrt{9+y^2}} = \frac{1}{20}$. აქედან გვექნება: $y_1 = 4$ და $y_2 = -4$. გამოკვლევის შემდეგ სისტემის ამონახსნებია: (5;4), (-5;-4).

II. შეკრების ხერხი. შეკრების ხერხით სისტემის ამოხსნა შემდეგ ეტაპებად შეიძლება წარმოვადგინოთ:

ა) სისტემის განტოლებებს (თუ საჭიროა) ვამრავლებთ ისეთ რიცხვებზე, რომ რომელიმე ცვლადის კოეფიციენტები პირველ და მეორე განტოლებებში მოპირდაპირე რიცხვები აღმოჩნდნენ.

ბ) ვიხილათ ახალ სისტემას, რომლის ერთ-ერთი განტოლება იგივეა, რაც მოცემულში, ხოლო მეორე განტოლება მიიღება წინა ეტაპზე მიღებული სისტემის განტოლებების შეკრებით – იგი ერთცვლადიანი განტოლებაა.

გ) ვხსნით მიღებულ ერთცვლადიან განტოლებას. თუ მას ერთადერთი ამონახსნი აქვს, მაშინ ცვლადის მიღებული მნიშვნელობის მეორე განტოლებაში ჩასმით ვღებულობთ მეორე ცვლადის მნიშვნელობასაც. თუ ერთცვლადიან განტოლებას არა აქვს ამონახსნი, სისტემასაც არა აქვს ამონახსნი; თუ ერთცვლადიან განტოლებას უამრავი ამონახსნი აქვს, მაშინ სისტემასაც უამრავი ამონახსნი

აქვს.

განვიხილოთ მაგალითები:

1. ამოხსენით, შეკრების ხერხით, განტოლებათა შემდეგი სის-

$$\text{ტემა: } \begin{cases} 5x + 2y = 13 \\ 4x + 3y = 23. \end{cases}$$

ამოხსნა. სისტემის პირველი განტოლება გავამრავლოთ 3-ზე, ხოლო მეორე -2-ზე. მივიღებთ მოცემული სისტემის ტოლფას სისტე-

$$\text{მას: } \begin{cases} 15x + 6y = 39 \\ -8x - 6y = -46. \end{cases} \text{ შევადგინოთ განტოლებათა სისტემა, სადაც}$$

პირველი განტოლებაა მოცემული სისტემის პირველი განტოლება, ხოლო მეორე განტოლება წარმოადგენს მიღებული სისტემის განტოლებათა ჯამს. გვექნება: $\begin{cases} 5x + 2y = 13 \\ 7x = -7, \end{cases}$ ამ სისტემის მეორე განტო-

ლებიდან ვიპოვოთ x , $x = -1$ და იგი ჩავსვათ სისტემის პირველ განტოლებაში, მივიღებთ მეორე ცვლადის მნიშვნელობასაც $y = 9$. ამრიგად სისტემის ამონახსნია: წყვილი $(-1; 9)$.

2. ამოხსენით, შეკრების ხერხით, განტოლებათა შემდეგი სის-

$$\text{ტემა: } \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ x^2 - y^2 + x - y = 6 \end{cases}$$

ამოხსნა. შევეკრიბოთ სისტემის განტოლებები, მივიღებთ: $2x^2 + 2x = 24$; ამოვხსნათ შესაბამისი კვადრატული განტოლება: $x^2 + x - 12 = 0$, მივიღებთ: $x_1 = 3$ და $x_2 = -4$. $x_1 = 3$ მნიშვნელობა ჩავსვათ სისტემის პირველ განტოლებაში, გვექნება: $y^2 + y - 6 = 0$, ამ კვადრატული განტოლების ამონახსნებია: $y_1 = 2$ და $y_2 = -3$. ამჯერად, $x_2 = -4$ მნიშვნელობა ჩავსვათ სისტემის პირველ განტოლებაში, გვექნება: $y^2 + y - 6 = 0$, აქაც ამონახსნებია: $y_3 = 2$ და $y_4 = -3$. ამრიგად, სისტემას გააჩნია ოთხი ამონახსნი: $(3; 2)$, $(3; -3)$, $(-4; 2)$ და $(-4; -3)$.

3. ამოხსენით განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} \sqrt{x - y + 5} = 3 \\ \sqrt{x + y - 5} = -2x + 11. \end{cases}$$

ამოხსნა. სანამ განტოლებათა სისტემის ამოხსნას შეუდგებოდეთ, მანამდე შევნიშნოთ, რომ $-2x + 11 \geq 0$ და აქედან $x \leq 5,5$. მოცემული

სისტემის ორივე განტოლება ავიყვანოთ კვადრატში და შემდეგ შევეკრიბოთ, მივიღებთ: $2x=130-44x+4x^2$, შესაბამისი კვადრატული განტოლების $2x^2-23x+65=0$ ამოხსნის შედეგად მივიღებთ: $x_1=5$ და $x_2=7.5$. აქედან $x_2=7.5$ განტოლების გარეშე ფესვია. თუ $x=5$ -ის მნიშვნელობას გავითვალისწინებთ სისტემის პირველ განტოლებაში, მივიღებთ $y=1$ -ს. ამრიგად, სისტემის ამონახსნია $(5;1)$.

4. გამოვიყენოთ სისტემის ამოხსნის შეკრების ხერხი და იპოვეთ a -ს მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სისტემას არა აქვს ამონახსნი:
$$\begin{cases} 2x-5y=9 \\ 10x+ay=5. \end{cases}$$

ამოხსნა. სისტემის პირველი განტოლება გავამრავლოთ -5 -ზე და შემდეგ განტოლებები შევეკრიბოთ, გვექნება: $25y+ay=-40$, აქედან y -ის მნიშვნელობა არის $y=\frac{-40}{(a+25)}$. როცა $a=-25$ განტოლებათა სისტემას ამონახსნი არა აქვს.

5. გამოვიყენოთ სისტემის ამოხსნის შეკრების ხერხი და იპოვეთ a -ს ის მნიშვნელობები, რომლებისთვისაც მოცემულ სისტემას უამრავი ამონახსნი აქვს
$$\begin{cases} 12x-5y=1 \\ 2,4x+ay=0,2. \end{cases}$$

ამოხსნა. სისტემის მეორე განტოლება გავამრავლოთ -5 -ზე და შემდეგ განტოლებები შევეკრიბოთ, მივიღებთ: $-5y-5ay=0$, აქედან გვაქვს $y(a+1)=0$, როცა $a=-1$ განტოლებას უამრავი ამონახსნი აქვს. მაშასადამე, როცა $a=-1$ სისტემას უამრავი ამონახსნი აქვს.

III. ახალი ცვლადების შემოტანის ხერხი. გვაქვს ორ შემთხვევა: ზოგჯერ ერთი ახალი ცვლადი შემოგვაქვს სისტემის მხოლოდ ერთი განტოლებისათვის, ზოგჯერ კი ორი ახალი ცვლადი შემოგვაქვს ორივე განტოლებისათვის ერთდროულად. განვიხილოთ მაგალითები:

1. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:
$$\begin{cases} \sqrt{x-9y+4}=2 \\ xy-5\sqrt{xy}=6. \end{cases}$$

ამოხსნა. სისტემის მეორე განტოლებაში შემოვიტანოთ ახალი ცვლადი; კერძოდ, $t=\sqrt{xy}$. ახალი ცვლადის მიმართ მივიღებთ კვად-

რატულ განტოლებას: $t^2-5t-6=0$, ამ განტოლების ფესვებია $t_1=6$ და $t_2=-1$. $t_2=-1$ გარეშე ფესვია, რადგან $\sqrt{xy} \neq -1$. ამიტომ გვაქვს $\sqrt{xy}=6$ და აქედან $x=\frac{36}{y}$. x -ის ეს მნიშვნელობა შევიტანოთ სისტემის პირველ განტოლებაში და ამოვხსნათ მიღებული ერთუცნობიანი განტოლება. კერძოდ, $\sqrt{\frac{36}{y}-9y+4}=2$; აქედან გვაქვს: $y^2=4$, საიდანაც $y_1=2$ და $y_2=-2$; ე.ი. $x_1=18$ და $x_2=-18$. ამრიგად, სისტემას ორი ამონახსნი აქვს: $(18;2)$ და $(-18;-2)$.

2. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:
$$\begin{cases} xy - \frac{x}{y} = 17,5 \\ xy - \frac{y}{x} = 16. \end{cases}$$

ამოხსნა. განტოლებებში შემოვიღოთ აღნიშვნა: $xy=a$ და $\frac{x}{y}=b$, მაშინ მივიღებთ ახალ სისტემას a -სა და b -ს მიმართ, რომელსაც ექნება შემდეგი სახე:
$$\begin{cases} a-b=17,5 \\ a-\frac{1}{b}=16, \end{cases}$$
 თუ ამ სისტემის მეორე განტოლებას გავამრავლებთ -1 -ზე და შემდეგ სისტემის განტოლებებს შევკრებთ, b -ს მიმართ მივიღებთ ერთუცვლადიან განტოლებას: $-b+\frac{1}{b}=1,5$; შესაბამისი კვადრატული განტოლების $2b^2+3b-2=0$ ფესვებია: $b_1=0,5$ და $b_2=-2$. a -ს შესაბამისი მნიშვნელობები იქნება: $a_1=18$ და $a_2=19,5$. მიიღება ორი სისტემა:
$$\begin{cases} xy=18 \\ \frac{x}{y}=0,5 \end{cases} \text{ და } \begin{cases} xy=19,5 \\ \frac{x}{y}=-2; \end{cases}$$
 პირველი სისტემის ამონახსნებია: $(3;6)$ და $(-3;-6)$, ხოლო მეორე სისტემას ამონახსნი არა აქვს. ამრიგად, თავდაპირველი სისტემის ამონახსნებია: $(3;6)$ და $(-3;-6)$.

3. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 32 \\ xy + 2(x+y) = 26. \end{cases}$$

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $x+y=a$ და $xy=b$, მაშინ

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=a^2-2b \text{ და სისტემა მიიღებს სახეს: } \begin{cases} a^2-2b+a=32 \\ b+2a=26. \end{cases}$$

ამ სისტემის ჩასმის ხერხით, ამოხსნის შემდეგ ვღებულობთ: $a_1=-12$ და $b_1=50$, ან $a_2=7$ და $b_2=12$. მივიღებთ ორ სისტემას: $\begin{cases} x+y=-12 \\ xy=50 \end{cases}$

და $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=12. \end{cases}$ აქედან პირველ სისტემას ამონახსნი არა აქვს, ხოლო

მეორე სისტემის ამონახსნებია: $(3;4)$ და $(4;3)$.

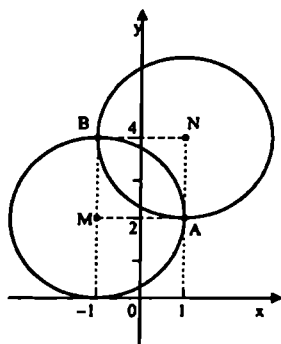
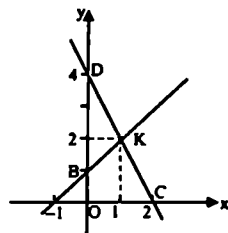
IV. გრაფიკული ხერხი. ზოგჯერ განტოლებათა სისტემის ამოხსნისას ამ განტოლებათა გრაფიკებსაც გამოვიყენებთ. გრაფიკების გამოყენება ხელსაყრელია თვალსაჩინოებისათვის.

ვთქვათ, ეხსნით $\begin{cases} x-y=-1 \\ 2x+y=4 \end{cases}$ განტოლებათა სისტემას. საკოორდინატო

სიბრტყეზე ავაგოთ თითოეული განტოლების გრაფიკი. პირველი განტოლების გრაფიკი არის წრფე, რომელიც საკოორდინატო ღერძებს (აბსცისათა და ორდინატთა ღერძებს) შესაბამისად $A(-1;0)$ და $B(0;1)$ წერტილებში კვეთს, მეორე განტოლების გრაფიკი კი არის წრფე, რომელიც აღნიშნულ ღერძებს $C(2;0)$ და $D(0;4)$ წერტილებში კვეთს. ეს წრფეები $K(1;2)$ წერტილში იკვეთება. K წერტილი AB წრფეს ეკუთვნის, ამიტომ მისი კოორდინატები პირველ განტოლებას აკმაყოფილებს (AB წრფე პირველი განტოლების გრაფიკია). K წერტილი CD წრფესაც ეკუთვნის, ამიტომ მისი კოორდინატები მეორე განტოლებასაც აკმაყოფილებს. ამრიგად, $(1;2)$ სისტემის ამონახსნია. სისტემას ერთადერთი ამონახსნი აქვს.

ამოხსნის წარმოდგენილ ხერხს განტოლებათა სისტემის ამოხსნის გრაფიკული ხერხი ეწოდება. იგი, როგორც წესი საშუალებას გვაძლევს ამონახსნი მხოლოდ მიახლოებით ვიპოვოთ.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი, ამოვ-

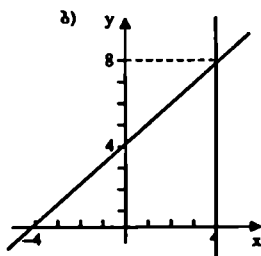
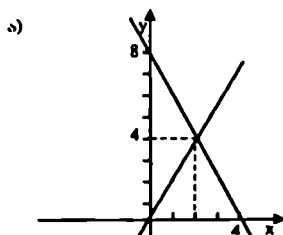


ხსნათ განტოლებათა სისტემა:
$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ (x-1)^2 + (y-4)^2 = 4. \end{cases}$$
 განტოლების

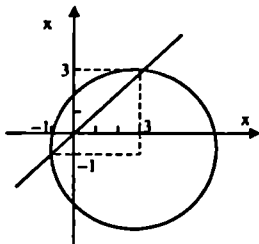
$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ გრაფიკი არის წრეწირი, რომლის ცენტრი $M(-1;2)$ წერტილში მდებარეობს, ხოლო რადიუსი $R=2$ -ს. ასევე, მეორე განტოლების გრაფიკიც წრეწირია, რომლის ცენტრი მოთავსებულია $N(1;4)$ წერტილში და ამ წრეწირის რადიუსიც $R=2$ -ს. ეს წრეწირები ერთმანეთს კვეთენ $A(1;2)$ და $B(-1;4)$ წერტილებში. ამ წრეწირების განტოლებებს აკმაყოფილებენ A და B წერტილების კოორდინატები, ამიტომ მოცემულ სისტემას აქვს ორი ამონახსნი $(1;2)$ და $(-1;4)$.

21.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

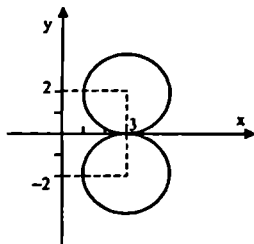
1. ცნობილია, რომ $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 10x + ky = 3 \end{cases}$ სისტემას არა აქვს ამონახსნი. იპოვეთ k .
2. ცნობილია, რომ $\begin{cases} x + ky = 3 \\ 0,2x - y = 2 \end{cases}$ სისტემას ამონახსნი არა აქვს. იპოვეთ k .
3. ცნობილია, რომ $\begin{cases} 12x - 5y = -1 \\ 2,4x - y = a \end{cases}$ სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი. იპოვეთ a .
4. ცნობილია, რომ $\begin{cases} ax + y = b \\ 6x + 5y = 15 \end{cases}$ სისტემას უამრავი ამონახსნი აქვს. იპოვეთ a და b .
5. დაწერეთ განტოლებათა სისტემა, რომლის განტოლებების გრაფიკები ნახაზზეა გამოსახული:



ა)



ე)



6. ჩასმის ხერხით ამოვხსნათ შემდეგი სისტემები:

$$ა) \begin{cases} x+2y=11 \\ 5x-3y=3, \end{cases}$$

$$ბ) \begin{cases} 3x-y=5 \\ 5x+2y=23, \end{cases}$$

$$გ) \begin{cases} 7x+9y=8 \\ 9x-8y=69, \end{cases}$$

$$დ) \begin{cases} 2x+5y=15 \\ 3x+8y=-1, \end{cases}$$

$$ე) \begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 5x+6y=-7. \end{cases}$$

7. ამოვხსნათ ჩასმის ხერხით:

$$ა) \begin{cases} 2x^2-y=2 \\ x-y=1, \end{cases}$$

$$ბ) \begin{cases} xy=15 \\ 2x-y=7, \end{cases}$$

$$გ) \begin{cases} x^2+y^2=8 \\ x-y=4, \end{cases}$$

$$დ) \begin{cases} x^2+y^2=40 \\ x+y=8, \end{cases}$$

$$ე) \begin{cases} x^2+xy=2 \\ y-3x=7, \end{cases}$$

$$ვ) \begin{cases} x^2-xy-y^2=19 \\ x-y=7, \end{cases}$$

$$ზ) \begin{cases} x^2+y^2-6y=0 \\ y+2x=0, \end{cases}$$

$$თ) \begin{cases} x^2-xy+y^2=63 \\ x-y=-3. \end{cases}$$

8. სისტემები ამოვხსნათ ჩასმის ხერხით:

$$ა) \begin{cases} \frac{3x-2}{y+5} + \frac{y}{x} = 2 \\ x-y=4, \end{cases}$$

$$ბ) \begin{cases} \frac{2x-5}{x-2} + \frac{2y-3}{y-1} = 2 \\ 3x-4y=1, \end{cases}$$

$$გ) \begin{cases} y^2-3xy+x^2-x+y+9=0 \\ y-x=2, \end{cases}$$

$$დ) \begin{cases} x^2+2xy+y^2-x-y=6 \\ x-2y=3, \end{cases}$$

$$ე) \begin{cases} 7x^2-3y^2+5xy-2x-27=0 \\ x+y=5, \end{cases}$$

$$ვ) \begin{cases} 2x^2-5xy+y^2+10x+12y=100 \\ 2x-3y=1, \end{cases}$$

$$ზ) \begin{cases} \frac{1+x+x^2}{1+y+y^2} = 3 \\ x+y=6, \end{cases}$$

$$თ) \begin{cases} \frac{x^2+y+1}{y^2+x+1} = \frac{3}{2} \\ x-y=1, \end{cases}$$

$$ი) \begin{cases} x:y=3:4 \\ (x-1):(y+2)=1:2, \end{cases}$$

$$კ) \begin{cases} \frac{x-1}{x+15} = \frac{y-6}{y+2} \\ \frac{x-3}{x} = \frac{y-4}{y-1}, \end{cases}$$

$$\text{მ)} \begin{cases} \frac{0,2x+0,1y}{2} - \frac{4x-y}{10} = \frac{3x+0,5y}{30} + \frac{x-y}{5} \\ \frac{3x+2y-1}{8} = 3 - \frac{0,8x-5y}{41} \end{cases}$$

9. ამოხსენით სისტემები შეკრების ხერხით:

$$\text{ა)} \begin{cases} 2x+y=11 \\ 3x-y=9, \end{cases} \quad \text{ბ)} \begin{cases} x+5y=7 \\ x-3y=-1, \end{cases} \quad \text{გ)} \begin{cases} x-3y=4 \\ 5x+3y=-1, \end{cases}$$

$$\text{დ)} \begin{cases} 4x+3y=-6 \\ 2x+y=4, \end{cases} \quad \text{ე)} \begin{cases} 2x+5y=25 \\ 4x+3y=15, \end{cases} \quad \text{ვ)} \begin{cases} 4x+3y=-4 \\ 6x+5y=-7, \end{cases}$$

$$\text{ზ)} \begin{cases} 6x-7y=40 \\ 5y-2x=-8, \end{cases} \quad \text{თ)} \begin{cases} 2x-3y=8 \\ 7x-5y=-5. \end{cases}$$

10. ამოხსენით შეკრების ხერხით:

$$\text{ა)} \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}, \end{cases} \quad \text{ბ)} \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{8}{y} = 8 \\ \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 51, \end{cases} \quad \text{გ)} \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 30 \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 31, \end{cases}$$

$$\text{დ)} \begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{5}{8} \\ \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = \frac{3}{8}, \end{cases} \quad \text{ე)} \begin{cases} \frac{10}{x-5} + \frac{1}{y+2} = 1 \\ \frac{25}{x-5} + \frac{3}{y+2} = 2, \end{cases} \quad \text{ვ)} \begin{cases} \frac{2}{x-y} + \frac{6}{x+y} = 1,1 \\ \frac{4}{x-y} - \frac{9}{x+y} = 0,1 \end{cases}$$

$$\text{ზ)} \begin{cases} \frac{15}{x} - \frac{7}{y} = 9 \\ \frac{4}{x} + \frac{9}{y} = 35, \end{cases} \quad \text{თ)} \begin{cases} \frac{27}{2x-y} + \frac{32}{x+3y} = 7 \\ \frac{45}{2x-y} - \frac{48}{x+3y} = -1, \end{cases} \quad \text{ი)} \begin{cases} 2x^2 - 5xy + 3x - 2y = 10 \\ 5xy - 2x^2 + 7x - 8y = 10. \end{cases}$$

8. ამოხსენით სისტემები ახალი ცვლადის შემოტანის ხერხით:

$$\text{ა)} \begin{cases} \frac{11}{2x-3y} + \frac{18}{3x-2y} = 13 \\ \frac{27}{3x-2y} - \frac{2}{2x-3y} = 1, \end{cases} \quad \text{ბ)} \begin{cases} \frac{4}{x+2y} - \frac{1}{x-2y} = 1 \\ \frac{20}{x+2y} + \frac{3}{x-2y} = 1, \end{cases}$$

$$\text{გ)} \begin{cases} \frac{1}{x-y+2} + \frac{1}{1-x-y} = 0,1 \\ \frac{1}{x-y+2} + \frac{1}{x+y-1} = 0,3; \end{cases} \quad \text{დ)} \begin{cases} xy + x + y = 29 \\ xy - 2(x+y) = 2, \end{cases}$$

$$\text{ე)} \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ x^2 - y^2 + x - y = 6, \end{cases} \quad \text{ვ)} \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 5xy \\ 4x - 4y = xy, \end{cases} \quad \text{ზ)} \begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 14 \\ x^2 + xy - y^2 = 5, \end{cases}$$

$$\text{თ) } \begin{cases} (x+y)^2 - 4(x+y) = 45 \\ (x-y)^2 - 2(x-y) = 3, \end{cases} \quad \text{ო) } \begin{cases} x+y+\frac{x}{y}=9 \\ \frac{(x+y)x}{y}=20. \end{cases}$$

12. ამოხსენით სისტემები:

$$\begin{aligned} \text{ა) } \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6} \\ x^2 + y^2 = 13, \end{cases} & \text{ბ) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2} \\ x+y=10, \end{cases} & \text{გ) } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \\ xy=4, \end{cases} & \text{დ) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{41}{20} \\ x+y=41, \end{cases} \\ \text{ე) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{6} \\ x-y=5, \end{cases} & \text{ვ) } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{xy} = 6, \end{cases} & \text{ზ) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2} \\ x+y=25. \end{cases} \end{aligned}$$

13. ამოხსენით სისტემები:

$$\begin{aligned} \text{ა) } \begin{cases} x+y+x^2+y^2=18 \\ xy+x^2+y^2=19, \end{cases} & \text{ბ) } \begin{cases} x+y+x^2+y^2=18 \\ xy+x^2+y^2=12, \end{cases} & \text{გ) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4}, \end{cases} \\ \text{დ) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \\ x^2 + y^2 = 160, \end{cases} & \text{ე) } \begin{cases} x^3 - y^3 = 218 \\ x^2 + xy + y^2 = 109. \end{cases} \end{aligned}$$

14. ამოხსენით სისტემები:

$$\begin{aligned} \text{ა) } \begin{cases} \sqrt{x+y-1}=1 \\ \sqrt{x-y+2}=2y-2, \end{cases} & \text{ბ) } \begin{cases} \sqrt{x+3y+1}=2 \\ \sqrt{2x-y+2}=7y-6, \end{cases} & \text{გ) } \begin{cases} \sqrt{x-y+5}=3 \\ \sqrt{x+y-5}=-2x+11. \end{cases} \end{aligned}$$

15. ამოხსენით სისტემები:

$$\begin{aligned} \text{ა) } \begin{cases} x-y+\sqrt{x^2-4y^2}=2 \\ x\sqrt{x^2-4y^2}=0, \end{cases} & \text{ბ) } \begin{cases} x+y-\sqrt{4y^2-x^2}=4 \\ y\sqrt{4y^2-x^2}=0. \end{cases} \\ \text{გ) } \begin{cases} x-y+\sqrt{4x^2-y^2}=1 \\ x\sqrt{4x^2-y^2}=0. \end{cases} \end{aligned}$$

16. ამოხსენით სისტემები:

$$\text{ა) } \begin{cases} \sqrt{x^2+4xy-3y^2}=x+1 \\ x-y=1, \end{cases} \quad \text{ბ) } \begin{cases} 2x+y=2 \\ 2(y-1)=\sqrt{10x^2-xy-2y^2}. \end{cases}$$

17. იპოვეთ განტოლებათა სისტემის ყველა ის ამონეხსენი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: $xy > 0$.

$$ა) \begin{cases} y^2 - 4xy + 4y - 1 = 0 \\ 3x^2 - 2xy - 1 = 0, \end{cases} \quad ბ) \begin{cases} x^2 - 3xy + 6x - 1 = 0 \\ y^2 - xy - 2 = 0. \end{cases}$$

18. განსაზღვრეთ აქვს თუ არა მოცემულ სისტემას 1) ერთი ამონახსენი, 2) ამონახსენთა უსასრულო სიმრავლე, 3) არა აქვს ამონახსენი:

$$ა) \begin{cases} 5x + 3y = 15 \\ 10x - 6y = 0, \end{cases} \quad ბ) \begin{cases} 3x + 10y = 16 \\ 6x + 20y = 32, \end{cases} \quad გ) \begin{cases} 2x + y = 11 \\ x + 3y = 18, \end{cases} \quad დ) \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 6y = 8, \end{cases}$$

$$ე) \begin{cases} 6x - 9y = 4 \\ 4x - 6y = 9, \end{cases} \quad ვ) \begin{cases} 4x + 10y = 12 \\ 6x + 15y = 18. \end{cases}$$

19. იპოვეთ m -ისა და n -ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც შემდეგ სისტემებს აქვთ ამონახსენთა უსასრულო სიმრავლე:

$$ა) \begin{cases} mx + ny = 8 \\ 5x + 3y = 4, \end{cases} \quad ბ) \begin{cases} mx + (n-1)y = 2 \\ 3x + 10y = -1, \end{cases} \quad გ) \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ mx + y = n, \end{cases}$$

$$დ) \begin{cases} 6x + y = 10 \\ (n+1)x + \frac{1}{n}y = n^2 + m. \end{cases}$$

20. იპოვეთ a -ს ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც შემდეგ სისტემებს არა აქვთ ამონახსენი:

$$ა) \begin{cases} 4x + 3y = 12 \\ 2x + ay = 5, \end{cases} \quad ბ) \begin{cases} 3x + 8y = 10 \\ x - ay = 7, \end{cases} \quad გ) \begin{cases} ax - 5y = 9 \\ 2x - 3y = 15, \end{cases} \quad დ) \begin{cases} 3x + 2ay = 1 \\ (3a-1)x - ay = 1. \end{cases}$$

21. იპოვეთ m -ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სისტემას

$$\begin{cases} (3+m)x + 4y = 5 - 3m \\ 2x + (5+m)y = 8 \end{cases}$$

ა) აქვს ამონახსენების უსასრულო სიმრავლე,

ბ) არა აქვს ამონახსენი.

22. იპოვეთ m -ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სისტემას

$$\begin{cases} (m+5)x + (2m+3)y = 7 \\ (3m+10)x + (5m+6)y = 16 \end{cases}$$

ა) აქვს ამონახსენების უსასრულო სიმრავლე,

ბ) არა აქვს ამონახსენი.

23. იპოვეთ m -ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სისტემას

$$\begin{cases} (m+2)x + 2my = 8 \\ mx + 2y = 4 \end{cases}$$

ა) აქვს ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე,

ბ) არა აქვს ამონახსნები.

24. იპოვეთ m -ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სისტემას

$$\begin{cases} (m+5)x+8y=12 \\ -x+(m-1)y=3m \end{cases}$$

ა) აქვს ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე,

ბ) არა აქვს ამონახსნები.

25. იპოვეთ m -ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სისტემას

$$\begin{cases} (m+4)x+6y=10+2m \\ 8x+(12-3m)y=20 \end{cases}$$

ა) აქვს ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე,

ბ) არა აქვს ამონახსნები.

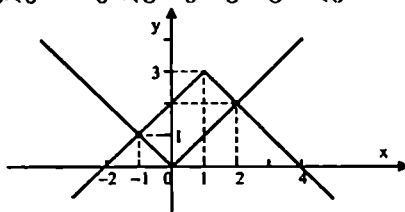
26. იპოვეთ m -ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სისტემას

$$\begin{cases} (3m+1)x+(m+5)y-(m+1)=0 \\ (2m-1)x+(m+1)y-(m-1)=0 \end{cases}$$

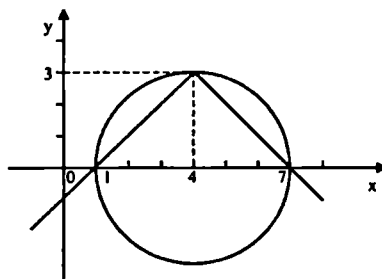
ა) აქვს ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე,

ბ) არა აქვს ამონახსნები.

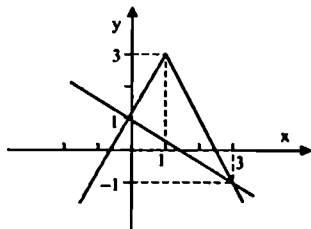
27. ნახაზის მიხედვით შეადგინეთ განტოლებათა სისტემა:



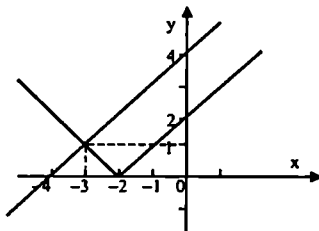
28. ნახაზის მიხედვით შეადგინეთ განტოლებათა სისტემა:



29. ნახაზის მიხედვით შეადგინეთ განტოლებათა სისტემა:



30. ნახაზის მიხედვით შეადგინეთ განტოლებათა სისტემა:



21.1.1. ტესტი №20

1. ორცვლადიან განტოლებათა სისტემის ჩასმის ხერხით ამოხსნისას რა თანმიმდევრობა უნდა დავიცვათ შემდეგ ეტაპებში?

I. ვხსნით ერთცვლადიან განტოლებას.

II. ერთ-ერთი განტოლებიდან ერთ-ერთ ცვლადს მეორე ცვლადით გამოვსახავთ.

III. ცვლადის ნაპოვნ მნიშვნელობას ჩავსევამთ მეორე განტოლებაში.

ა) I, II, III; ბ) II, I, III; გ) III, II, I; დ) II, III, I.

2. ორცვლადიან განტოლებათა სისტემის შეკრების ხერხით ამოხსნისას რა თანმიმდევრობა უნდა დავიცვათ შემდეგ ეტაპებში?

I. ეკრებთ წვერ-წვერად მიღებულ განტოლებათა მარჯვენა და მარცხენა მხარეებს და ვწერთ ერთ-ერთ განტოლებად.

II. სისტემის განტოლებებს ვამრავლებთ შესაბამისად ისეთ რიცხვებზე, რომ ერთ-ერთი ცვლადის კოეფიციენტები პირ-

ველ და მეორე განტოლებებში მოპირდაპირე რიცხვები აღ-
მოჩნდეს.

III. ეხსნით მიღებულ ერთცვლადიან განტოლებას.

ა) I, II, III; ბ) II, III, I; გ) III, II, I; დ) II, I, III.

3. რამდენი ამონახსნი აქვს $\begin{cases} 2x - 3,5y = 9 \\ x - 1,75y = 4,5 \end{cases}$ სისტემას?

ა) მხოლოდ ერთი, ბ) უსასრულოდ ბევრი, გ) მხოლოდ ორი,
დ) არა აქვს ამონახსნი.

4. რამდენი ამონახსნი აქვს $\begin{cases} x - 2y = -7 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$ სისტემას?

ა) ერთადერთი, ბ) ორი სხვადასხვა ამონახსნი,
გ) უსასრულოდ ბევრი, დ) არა აქვს ამონახსნი.

5. $\begin{cases} x + y = 11 \\ -3x - 3y = 33 \end{cases}$ სისტემას აქვს

ა) ერთადერთი ამონახსნი, ბ) მხოლოდ ორი ამონახსნი,
გ) უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი, დ) არა აქვს ამონახსნი.

6. რამდენი ამონახსნი აქვს $\begin{cases} y = |x| \\ y = 3 \end{cases}$ სისტემას?

ა) ერთადერთი, ბ) მხოლოდ ორი, გ) უსასრულოდ ბევრი,
დ) არა აქვს ამონახსნი.

7. $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ სისტემის ამონახსნებია

ა) (2;0) და (0;2), ბ) (3;2) და (2;0), გ) (1; $\sqrt{3}$) და ($\sqrt{3}$;1),
დ) ($\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$) და ($-\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$).

8. $\begin{cases} y = |x| \\ y = -|x| \end{cases}$ სისტემის ამონახსენია

ა) (0;0), ბ) არა აქვს ამონახსენი, გ) (1;-1), დ) (-1;1).

9. $\begin{cases} y = |x| \\ y = |x-2| \end{cases}$ სისტემის ამონახსენია

ა) (0;0), ბ) არა აქვს ამონახსენი, გ) (1;1), დ) (0;2).

10. $\begin{cases} y = |x+2| \\ y = |x-2| \end{cases}$ სისტემის ამონახსენია

ა) (0;0), ბ) არა აქვს ამონახსენი, გ) (1;1), დ) (0;2).

§22. ამოცანების ამოხსნა განტოლებებისა და განტოლებათა სისტემის შედგენით

მათემატიკური ამოცანა არის დამოკიდებულება (გამოთქმული სიტყვიერად ან ფორმულით) მონაცემ სიდიდეებსა ან ნაკეთებს შორის და ერთ მაინც უცნობ სიდიდეს ან ნაკეთს შეიცავს, რომლის განსაზღვრაც მოითხოვება მოცემული დამოკიდებულების საფუძველზე.

არითმეტიკაში განიხილება ამოცანები, რომლებშიც როგორც მონაცემს, ასევე საძიებელს წარმოადგენენ რიცხვები (განყენებული ან სახელდებული) და საძიებლის განსაზღვრა ხერხდება მონაცემებზე ოთხი არითმეტიკული მოქმედების შესრულებით.

დამოკიდებულებებს ამოცანაში მოცემულ და საძიებელ რიცხვებს შორის ამოცანის პირობა ეწოდება. პირობის ფორმულის მიხედვით არჩევენ ორი სახის ამოცანებს: 1. რიცხვით მაგალითებს, სადაც დამოკიდებულებანი მოცემულია რიცხვითი ფორმულის სახით, მაგალითად: $\frac{(x+5) \cdot 3}{2} - 4 = 23$, საძიებელია x ; ან

$12\frac{1}{4} : 7 + 10 \cdot 1\frac{1}{8}$, სადაც გამოსაანგარიშებელია ნაჩვენებ მოქმედებათა შედეგი. 2. ამოცანებს ტექსტით, სადაც დამოკიდებულება მონაცემებსა და საძიებელს შორის გამოთქმულია სიტყვიერი ტექსტით (განტოლებები ალგებრის ენაა, ამოცანების ამოხსნისათვის განტოლებათა შედგენის ხელოვნება სინამდვილეში „ქართული ენიდან“ ალგებრულად გადათარგმნის ხელოვნებაა). მაგალითად, განვიხილოთ შემდეგი ტექსტიანი ამოცანა: მშენებლობაზე მუშაობდა 5-ტონიანი 8 ავტომანქანა, თითოეული მანქანა დღეში 14 რეისს აკეთებდა. რამდენ ცხენს შეუძლია ამ მანქანების შეცვლა, თუ თითოეულ ცხენს ერთ გადაზიდვაზე გადააქვს 2 ცენტნერი, ხოლო დღეში აკეთებს 4 გზობას? (თუ ცხენების ოდენობას აღვნიშნავთ x -ით, მაშინ შედგება განტოლება: $4 \cdot 0,2x = 14 \cdot 5 \cdot 8$; აქედან გვაქვს $x = 700$ -ს). ეს ტექსტიანი ამოცანა შედგენილი ამოცანაა, იგი შედგება რამდენიმე მარტივი ამოცანისაგან. მარტივი ამოცანა ისეთი ამოცანაა, რომლის პასუხის მისაღებად, ანუ ამოსახსნელად, საკმარისია ერთი მოქმედება; წინააღმდეგ შემ-

თხვევაში ამოცანა შედგენილია.

მარტივი და შედგენილი ამოცანები შეადგენენ არითმეტიკულ ამოცანათა ძირითად ჯგუფებს. შედგენილი ამოცანა ყოველთვის იშლება მარტივ ამოცანებად და ამით მისი ამოხსნა დადის მარტივ ამოხსნაზე. მაშასადამე, მარტივი ამოცანები წარმოადგენენ საფუძველს ყოველგვარი არითმეტიკული ამოცანების ამოხსნისათვის.

ჩამოთვალეთ მარტივ ამოცანათა ძირითადი სახეები; ეს სახეები უკავშირდება არითმეტიკულ მოქმედებებს: შეკრებას, გამოკლებას, გამრავლებასა და გაყოფას.

მარტივი ამოცანები შეკრებაზე, ძირითადად არის ორი ტიპის:

1. ამოცანები ორი ან რამდენიმე შესაკრების ჯამის პოვნაზე. მაგალითად, ერთ კლასში 35 მოსწავლეა, მეორეში 25. რამდენი მოსწავლეა ორივე კლასში? ცხადია, გვაქვს: $x=35+25$ და $x=60$ მოსწავლე.

2. ამოცანები რიცხვის გადიდებაზე რამდენიმე ერთეულით, ან ერთეულის ნაწილით. მაგალითად, ერთ კლასში 25 მოსწავლეა, მეორეში 10-ით მეტი. რამდენი მოსწავლეა მეორე კლასში? ცხადია, გვაქვს $x=25+10$ და $x=35$ მოსწავლე.

მარტივი ამოცანები გამოკლებაზე, ძირითადად არის შემდეგი ტიპის:

1. ამოცანები ნაშთის მოძებნაზე. მაგალითად, 250 კილომეტრი გასაველელი მანძილიდან მატარებელმა გაიარა 180 კილომეტრი. რა მანძილი დარჩა მას გასაველელი? გვექნება: $x=250-180$ და $x=70$ კილომეტრი.

2. ამოცანები რიცხვის შემცირებაზე რამდენიმე ერთეულით, ან ერთეულის ნაწილით. მაგალითად, ერთ ქალაქში 150000 მცხოვრებია, მეორეში 50000-ით ნაკლები. რამდენი მცხოვრებია მეორე ქალაქში? $x=150000-50000$ და $x=100000$ მცხოვრები.

3. ამოცანები ორი რიცხვის სხვაობის პოვნაზე. მაგალითად, A ქალაქიდან B ქალაქამდე 220 კილომეტრია, ხოლო C ქალაქიდან D ქალაქამდე კი - 150 კილომეტრი. რამდენი კილომეტრით მეტი მანძილია A და B ქალაქებს შორის, C და D ქალაქებს შორის მანძილთან შედარებით? გვექნება: $x=220-150$ და $x=70$ კილომეტრი.

მარტივი ამოცანები გამრავლებაზე, ძირითადად შემდეგი ტიპისაა:

1. ამოცანები, სადაც მოცემული რიცხვი შესაკრებად აღებული უნდა იქნეს რამდენჯერმე. მაგალითად, ერთ ავტომანქანას დღეში გადააქვს 70 ტონა ტვირთი. რამდენ ტვირთს გადაზიდავს დღეში იგივე ტვირთშიდაობის 8 ავტომანქანა? გვაქვს: $x=70 \cdot 8$ და $x=560$ ტონა.

2. ამოცანები რიცხვის რამდენჯერმე გადიდებაზე. მაგალითად, ცხენს ერთ გადაზიდვაზე გადააქვს 2 ცენტნერი ტვირთი, ავტომანქანას კი 25-ჯერ მეტი. რა წონის ტვირთი გადააქვს ავტომანქანას? გვაქვს: $x=2 \cdot 25$ და $x=50$ ცენტნერი.

3. ამოცანები რიცხვის ნაწილის პოვნაზე. მაგალითად, უნივერსიტეტში ირიცხება 5642 სტუდენტი. მათგან პედაგოგიურ ფაკულტეტზე მოდის $\frac{2}{7}$ ნაწილი. რამდენი სტუდენტი ირიცხება პედაგოგიურ ფაკულტეტზე? გვაქვს: $x=5642 \cdot \frac{2}{7}$ და $x=1612$ სტუდენტი.

მარტივი ამოცანები გაყოფაზე, ძირითადად არის შემდეგი ტიპის:

1. ამოცანები, სადაც საჭიროა რიცხვის გაყოფა რამდენიმე ტოლ ნაწილად. მაგალითად, 18 რვეული თანაბრად გაუნაწილეს 6 მოსწავლეს. რამდენი რვეული შეხვდა თითოეულს? გვაქვს: $x=18:6$ და $x=3$ რვეული.

2. ამოცანები რიცხვის რამდენჯერმე შემცირებაზე. მაგალითად, ერთი მეტრი შალის ქსოვილი ღირს 40 ლარი, ხოლო ერთი მეტრი ჩითის ქსოვილის ღირებულება მასზე 10-ჯერ ნაკლებია. რა ღირს ერთი მეტრი ჩითის ქსოვილი? გვაქვს: $x=40:10$ და $x=4$ ლარი.

3. ამოცანები, სადაც საჭიროა გავიგოთ, თუ რამდენჯერ თავსდება ერთი რიცხვი მეორეში. მაგალითად, გადასაზიდია 280 ცენტნერი ტვირთი. რამდენი ცხენი დაჭირდება ამ ტვირთის გადაზიდვას, თუ ერთ ცხენს შეუძლია გადაზიდოს 2 ცენტნერი ტვირთი? გვაქვს: $x=280:2$ და $x=140$ ცხენი.

4. ამოცანები ორი რიცხვის ჯერადი შეფარდების პოვნაზე. მაგალითად, ერთ ნაჭერში 160 მეტრი მატერიაა, მეორეში 40 მეტრი. რამდენჯერ უფრო გრძელია პირველი ნაჭერი მეორეზე?

გვაქვს: $x=160:40$ და $x=4$ -ჯერ.

5. ამოცანები ნაწილის მიხედვით მთელის პონაზე. მაგალითად, დაიხარჯა 20 ლარი, რაც მთელი თანხის $\frac{2}{7}$ ნაწილს შეად-

გენს. რა თანხა ჰქონდათ? გვაქვს: $x=20:\frac{2}{7}$ და $x=70$ ლარი.

ყოველი ამოცანის ამოხსნას წინ უძღვის მისი გარჩევა. ყველა ამოცანას, რომელიც ჩვენ განვიხილეთ ჰქონდა ერთი გარკვეული პასუხი. ეს რა თქმა უნდა, დამოკიდებულია ამოცანის პირობისაგან. პირობა განსაზღვრავს სრულიად გარკვეულ დამოკიდებულებას მოცემულ სიდიდეებსა და საძიებელ სიდიდეს შორის და იძლევა ცალსახა პასუხის მიღების საშუალებას.

ისეთ ამოცანებს, რომლებსაც აქვთ ერთი ან, საზოგადოდ, სასრული რაოდენობის ამონახსნი, განსაზღვრული ამოცანები ეწოდებათ.

ამოცანა შეიძლება განუსაზღვრელიც იყოს, ე.ი. მას ჰქონდეს არა ერთი გარკვეული პასუხი ერთი ან რამდენიმე ამონახსნის სახით, არამედ ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე. ეს ხდება მაშინ, როდესაც ამოცანის პირობა არ ზღუდავს დამოკიდებულებას მოცემულ სიდიდეებსა და საძიებელს შორის, საძიებელს არ სვამს გარკვეულ ჩარჩოებში. მაგალითად, ორი რიცხვის ჯამი 11-ია. იპოვეთ ეს რიცხვები.

აშკარაა, რომ ასეთი პირობით ამოცანა განუსაზღვრელია, უსასრულოა იმ რიცხვთა სიმრავლე, რომელთა ჯამი 11-ს იძლევა.

ამოცანა განსაზღვრული გახდება, თუ მის პირობას დაემატება მოთხოვნა, რომ პირველი რიცხვი მეორეზე 1-ით მეტი იყოს. ასეთი პირობით ამოცანას აქვს გარკვეული პასუხი: 6 და 5.

თუ ამის შემდეგ ამოცანის პირობას კიდევ დაემატება რაიმე ახალ მოთხოვნას საძიებელ სიდიდეთა შორის დამოკიდებულებაზე, ამოცანა უკვე ზეგანსაზღვრული გახდება.

მაგალითისათვის ჩვენი ამოცანის პირობას დაემატოთ კიდევ ერთი მოთხოვნა იმის შესახებ, რომ პირველი რიცხვი 10-ჯერ მეტი იყოს მეორეზე. მაშინ ამოცანა ასეთ სახეს მიიღებს: ორი

რიცხვის ჯამი ტოლია 11-ის, ისე რომ პირველი რიცხვი 1-ით მეტია მეორეზე და მასთან პირველი რიცხვი 10-ჯერ მეტია მეორეზე. იპოვეთ ეს რიცხვები.

ამ ამოცანას ამოხსნა არა აქვს; რადგან იმ პირობით, რომ ორი რიცხვის ჯამი 11-ს უდრიდეს და პირველი მეორეზე 1-ით მეტი იყოს, გვაქვს რიცხვები 6 და 5, მაგრამ ეს რიცხვები არ აკმაყოფილებენ იმ მოთხოვნას, რომ პირველი რიცხვი 10-ჯერ მეტია მეორეზე, დამატებული პირობა ეწინააღმდეგება წინა პირობებს. ამ პირობის დამატებამდე ამოცანა განსაზღვრული იყო, იგი უკვე იძლეოდა გარკვეულ მნიშვნელობებს საძიებელი სიდიდეებისათვის; დამატებითი მოთხოვნა კი ამ მნიშვნელობებს არ ითვალისწინებს.

ამოცანა განსაზღვრული იქნება იმ შემთხვევაშიც, თუ მას ასე ჩამოვაყალიბებთ: ორი რიცხვის ჯამი 11-ია, მასთან პირველი რიცხვი 10-ჯერ მეტია მეორეზე. ვიპოვოთ ეს რიცხვები. ამოცანა იხსნება ცალსახად და მისი პასუხია 10 და 1. ამ შემთხვევაში მოთხოვნა, რომ პირველი რიცხვი 1-ით მეტია მეორეზე, თუ ამოცანას დაემატება, იგი განუსაზღვრელი გახდება და მას ამონახსნი არ ექნება.

ეს ამოცანა ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად: ორი რიცხვის ჯამი 11-ია, ისე რომ პირველი რიცხვი 1-ით მეტია მეორეზე, ან პირველი რიცხვი 10-ჯერ მეტია მეორეზე. იპოვეთ ეს რიცხვები.

ამ შემთხვევაში ამოცანას ორი ამონახსნი აქვს 6; 5 და 10; 1.

განვიხილოთ ამოცანა: ორი რიცხვის ჯამი 11-ის ტოლია ისე, რომ პირველი რიცხვი 1-ით მეტია მეორეზე, ამავე დროს მეორე რიცხვი პირველის $\frac{5}{6}$ ნაწილს შეადგენს. იპოვეთ ეს რიცხვები.

უკანასკნელი პირობის გამოყენების გარეშე ნაპოვნი რიცხვებიდან 6 და 5, მეორე პირველის $\frac{5}{6}$ ნაწილს შეადგენს ისე, რომ უკანასკნელი პირობაც კმაყოფილდება. ამ შემთხვევაში ზეგანსაზღვრულ ამოცანას, როგორც ვხედავთ, ამოხსნა აქვს, მაგრამ მასში ერთ-ერთი პირობა საჭირო არ არის, ზედმეტია; იგი სხვა პირობებიდან გამომდინარეობს.

ზოგჯერ ამოცანა არ შეიძლება ამოიხსნას იმიტომ, რომ მისი

პირობა არ შეიცავს საკმარის მონაცემებს. მაგალითად, წიგნის ყოველ სტრიქონზე საშუალოდ 52 ასოა. რამდენი გვერდი აქვს ამ წიგნს, თუ მასში სულ 189696 ასოა?

ეს ამოცანა არ ამოიხსნება იმიტომ, რომ მისი პირობა არ შეიცავს საკმარის მონაცემებს. მონაცემთა მიხედვით შეიძლება გავიგოთ რამდენი სტრიქონია წიგნში. ხოლო იმის გასაგებად, თუ რამდენი გვერდია წიგნში, საჭიროა ვიცოდეთ სტრიქონების რაოდენობა გვერდზე. ეთქვათ, რომ გვერდზე 38 სტრიქონია, ამ შემთხვევაში ამოცანა ჩამოყალიბდება ასე: წიგნის ყოველ სტრიქონზე საშუალოდ 52 ასოა, ხოლო გვერდზე 38 სტრიქონია. რამდენი გვერდი აქვს ამ წიგნს, თუ მასში სულ 189696 ასოა? ცხადია, გვაქვს განტოლება: $38x = 189696$ და $x = 96$ გვერდი. ამრიგად, ამოცანის პირობა, ამ შემთხვევაში, საკმარისია დასმულ კითხვაზე პასუხის გასაცემად.

ამის შემდეგ ზედმეტი იქნება ამოცანის პირობისათვის რაიმე მონაცემის დამატება. მაგალითად, წიგნში ყოველ გვერდზე 38 სტრიქონია. სტრიქონში საშუალოდ 52 ასოა. რამდენი გვერდია წიგნში, თუ მასში სულ 189696 ასოა და გვაქვს 10 ასეთი წიგნი? აქ ზედმეტია მონაცემი წიგნების რაოდენობის შესახებ. ამოცანა ამოიხსნება ამ მონაცემის გამოყენების გარეშე.

ამრიგად, ამოცანის პირობა მოითხოვს დაკვირვებას: არის თუ არა მასში საკმარისი მონაცემები დასმული კითხვისათვის პასუხის გასაცემად? ყველა მონაცემი საჭიროა, თუ არის მათ შორის ზედმეტი? განსაზღვრავს პირობა ცალსახა პასუხს, თუ ამოცანას უამრავი ამონახსნი შეიძლება ჰქონდეს? ხომ არ არის პირობაში ისეთი მონაცემი, რომელიც ეწინააღმდეგება დანარჩენებს?

ამოცანათა ამოხსნის გასაადვილებლად ხელსაყრელია ისეთი ამოცანების ერთად დაჯგუფება, რომლებშიც მოცემულ და საძიებელ სიდიდეებს შორის ერთნაირი დამოკიდებულებაა, მიუხედავად ამ სიდიდეთა სხვადასხვა ბუნებისა და სხვადასხვა რიცხვითი მნიშვნელობებისა. ასეთი სახის ამოცანები ქმნიან გარკვეულ ტიპს. ერთი ტიპის ამოცანები, როგორც ერთნაირი მათემატიკური შინაარსის მქონენი, ერთნაირად ამოიხსნებიან და ამიტომ ყოველ ცალკეულ შემთხვევაში არ საჭიროებენ მსჯელობის ჩატარებას. განვიხილოთ ზოგიერთი ტიპი:

1. ამოცანები მოძრაობაზე. ამ ამოცანების ამოხსნისას უნდა გვესმოდეს სიჩქარის არსი: სიჩქარე არის დროის ერთეულში გავლილი მანძილი, თუ სიჩქარეს აღვნიშნავთ v ასოთი და $v = \frac{s}{t}$, სადაც s - გავლილი მანძილია, ხოლო t დრო, რომლის განმავლობაში სხეულმა s მანძილი გაიარა. ამ ფორმულიდან შეგვიძლია გამოვთვალოთ მანძილი $s = vt$ და დრო - $t = \frac{s}{v}$. აქ ძირითადად განიხილება ორი ტიპის ამოცანა, როცა სხეულები ერთი და იმავე მიმართულებით მოძრაობენ, ან როცა მოძრაობენ საპირისპირო მიმართულებით.

განვიხილოთ ამოცანები:

ა) გოგონა გამოვიდა A პუნქტიდან და მოძრაობდა 10 კმ/სთ სიჩქარით. 1 საათის შემდეგ იმავე მიმართულებით A პუნქტიდან გამოვიდა ბიჭი, რომელიც მოძრაობდა 15 კმ/სთ სიჩქარით და რაღაც დროის შემდეგ დაეწია გოგონას. იპოვეთ დრო, რომელიც დაეხარჯა ბიჭს გოგონას დასაწევად.

ამოხსნა. ამოცანის პირობიდან ჩანს, რომ სანამ ბიჭი გამოვა A პუნქტიდან, გოგონას უკვე გავლილი ჰქონდა $10 \cdot 1 = 10$ კილომეტრი, ამის შემდეგ მათ უკვე ერთი და იგივე დრო ეხარჯებათ შეხვედრამდე. ჩვენ შეგვიძლია ბიჭისა და გოგონას სიჩქარეების სხვაობა დავეწეროთ და გავიგოთ, თუ რა სიჩქარით უახლოვდება ბიჭი გოგონას, თუ დაწევის დროს აღვნიშნავთ t -თი, მივიღებთ განტოლებას: $(15-10) \cdot t = 10$ და $t = 2$ საათს.

ბ) A და B პუნქტებს შორის 60 კილომეტრია. A პუნქტიდან B -ს მიმართულებით გამოვიდა გოგონა და მოძრაობდა 10 კმ/სთ სიჩქარით. 1 საათის შემდეგ B პუნქტიდან A -ს მიმართულებით გამოვიდა ბიჭი, რომელიც მოძრაობდა 15 კმ/სთ სიჩქარით და რაღაც დროის შემდეგ შეხვდა გოგონას. იპოვეთ დრო, რომელიც დაეხარჯა ბიჭს გოგონასთან შეხვედრამდე.

ამოხსნა. ამოცანის პირობიდან ჩანს, რომ სანამ ბიჭი გამოვიდოდა B პუნქტიდან A -ს მიმართულებით, გოგონას გავლილი ჰქონდა $10 \cdot 1 = 10$ კილომეტრი და მათ შორის დარჩენილი იყო $60 - 10 = 50$ კილომეტრი. გოგონა და ბიჭი ერთმანეთს მიუახლოვდე-

ბოდნენ $(10+15)$ კმ/სთ სიჩქარით და თუ მათ შეხვედრამდე გასულ დროს აღენიშნაეთ t -თი, მივიღებთ განტოლებას: $(10+15) \cdot t = 50$ და $t = 2$ საათს.

ბშირად ამოცანებში საჭიროა საშუალო სიჩქარის გამოთვლა, იმისათვის რომ ვიპოვოთ საშუალო სიჩქარე, საჭიროა მთლიანი მანძილი შევაფარდოთ მთელ დროსთან. განვიხილოთ ამოცანები:

ა) გასავლელი გზის ზუსტად ნახევარი ველოსიპედისტმა გაიარა 20 კმ/სთ სიჩქარით, რა სიჩქარით უნდა იმოძრაოს მან გზის მეორე ნახევარზე, რომ მთელ გზაზე საშუალო სიჩქარე 24 კმ/სთ გამოვიდეს?

ამოხსნა. ასეთი ტიპის ამოცანას ზოგჯერ არასწორად ხსნიან; კერძოდ, გზის მეორე ნახევარზე სიჩქარეს აღნიშნავენ v -თი და ღებულობენ განტოლებას: $\frac{20+v}{2} = 24$, საიდანაც $v = 28$ კმ/სთ-ს, ეს

ამოხსნა მცდარია. ამოცანის სწორად ამოხსნისათვის ჩავატაროთ შემდეგი მსჯელობა: მთელი გზა აღენიშნოთ s -ით, გზის მეორე ნახევარზე საძიებელი სიჩქარე v -თი, მაშინ ამოცანის პირობით გზის პირველ ნახევარს ველოსიპედისტი გაივლიდა $\frac{s}{2} : 20 = \frac{s}{40}$ საათში, ხოლო გზის მეორე ნახევარს $\frac{s}{2} : v = \frac{s}{2 \cdot v}$ საათ-

ში, სულ s გზას დაჭირდებოდა $\frac{s}{40} + \frac{s}{2 \cdot v} = \frac{s(v+20)}{40 \cdot v}$ საათი, რადგან მთელ გზაზე საშუალო სიჩქარე 24 კმ/სთ უნდა გამოვიდეს, ამიტომ ეწერთ შემდეგ განტოლებას: $s : \frac{s(v+20)}{40 \cdot v} = 24$, აქედან

$\frac{40 \cdot v}{v+20} = 24$ და $v = 30$ კმ/სთ.

ბ) დროის ზუსტად ნახევარში ველოსიპედისტმა იმოძრავა 20 კმ/სთ სიჩქარით, რა სიჩქარით უნდა იმოძრაოს მან დროის მეორე ნახევარში, რომ მთელ გზაზე საშუალო სიჩქარე 24 კმ/სთ გამოვიდეს?

ამოხსნა. ეთქვათ, გზის მეორე ნახევარში ველოსიპედისტის სიჩქარე არის v კმ/სთ. მთელი დრო აღენიშნოთ t -თი, მაშინ დროის პირველ ნახევარში ველოსიპედისტი გაივლიდა $20 \cdot \frac{t}{2}$ კილო-

მეტრს, ხოლო დროის მეორე ნახევარში $v \cdot \frac{t}{2}$ კილომეტრს; რადგან საშუალო სიჩქარე 24 კმ/სთ უნდა გამოვიდეს, ამიტომ ველო-სიკედისტს მთლიანად გასაველელი ექნება 24*t* კილომეტრი, რაც ქმნის იმის საფუძველს, რომ დავწეროთ შემდეგი განტოლება:

$$20 \cdot \frac{t}{2} + v \cdot \frac{t}{2} = 24t, \text{ საიდანაც გვაქვს } \frac{20+v}{2} = 24 \text{ და } v = 28 \text{ კმ/სთ-ს.}$$

2. ამოცანები მუშაობაზე. ძალიან ხშირად ასეთი ამოცანების ამოხსნა დაიყვანება ერთი ადამიანის მიერ, დროის ერთეულში შესრულებული სამუშაოს რაოდენობაზე. განვიხილოთ ამოცანები:

ა) ერთი მუშა გარკვეულ სამუშაოს 6 საათში ასრულებს, ხოლო მეორეს იმავე სამუშაოს შესრულება შეუძლია 4 საათში. რა დროში შეასრულებს ამ სამუშაოს ორივე მუშა ერთად?

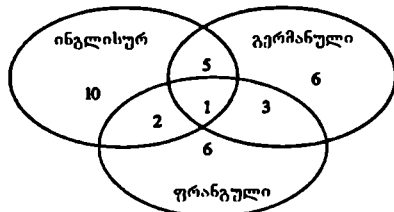
ამოხსნა. ვთქვათ, ორივე მუშა ამ სამუშაოს შეასრულებს *x* საათში. ერთ საათში ერთობლივი მუშაობით ისინი შეასრულებენ სამუშაოს $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$ ნაწილს, ამიტომ შეიძლება დავწეროთ განტოლება: $\frac{5}{12} \cdot x = 1$ და $x = 2,4$ საათს; ე.ი. ორივე მუშა ერთად ამ სამუშაოს შეასრულებს 2 საათსა და 24 წუთში.

ბ) თუ 5 ტუმბო აეზს აესებს 10 საათში, რამდენ ხანში შეაესებს აეზს 2 ტუმბო?

ამოხსნა. გვაქვს განტოლება: $x = (10 \cdot 5) : 2$ და $x = 25$ საათში.

3. ამოცანები სიმრავლეებზე. განვიხილოთ ამოცანა: ჯგუფში ყველა მოსწავლემ იცის ერთი უცხო ენა მაინც. მათგან 18-მა იცის ინგლისური, 15-მა გერმანული და 12-მა ფრანგული. სამივე ენა იცის ერთმა მოსწავლემ, ინგლისური და გერმანული 5 მოსწავლემ, ინგლისური და ფრანგული 2 მოსწავლემ, გერმანული და ფრანგული 3 მოსწავლემ. რამდენი მოსწავლეა ჯგუფში?

ამოხსნა. ასეთი ამოცანების ამოხსნისას ვიყენებთ სიმრავლეების გამომსახველ ვენის დიაგრამა-



მებს:

სიმრავლის თანაუკვეთ კლასებად დაყოფა გვაძლევს: $x=10+6+6+2+5+3+1$ და $x=33$, მაშასადამე ჯგუფში 33 მოსწავლეა.

4. კომბინატორიკის ამოცანები. ასეთი ამოცანების ზოგიერთ ტიპში საჭიროა სასრული რაოდენობის ელემენტებისაგან შემდგარი სხვადასხვა კომბინაციების შედგენა და ამ კომბინაციების რაოდენობის განსაზღვრა. განვიხილოთ შემდეგი ამოცანები:

ა) რამდენაირად შეგვიძლია შევარჩიოთ სამოსი, თუ გვაქვს 3 ჯინსის შარვალი და 4 მაისური?

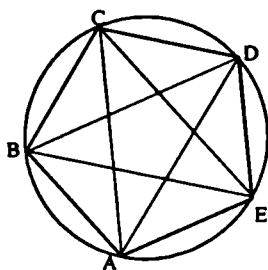
ამოხსნა. ერთი ჯინსის შარვალს შეგვიძლია შევუსაბამოთ 4 მაისური, მეორე ჯინსის შარვალსაც – 4 და მესამესაც – 4. ე.ი. სულ გამოვიდა $x=3 \cdot 4$, ანუ 12 ვარიანტი.

ბ) რამდენი სამნიშნა რიცხვის შედგენა შეიძლება ციფრებით 3; 8; 0, 2 და 5?

ამოხსნა. სამნიშნა რიცხვის პირველ ადგილას, ანუ ასეულების პოზიციაზე შეგვიძლია დავეწეროთ 0-ის გარდა ნებისმიერი დარჩენილი 4 ციფრიდან (რადგან 0-ით რიცხვის ჩანაწერს ვერ დაეწყოთ), ათეულების და ერთეულების პოზიციაზე შეგვიძლია დავეწეროთ ხუთივე ციფრიდან ნებისმიერი, ანუ სულ ვარიანტების რიცხვი იქნება $x=4 \cdot 5 \cdot 5$ და შეგვეძლება 100 განსხვავებული სამნიშნა რიცხვის დაწერა.

თუ ამოცანაში მოითხოვება განსხვავებული ციფრებით შედგენილი რიცხვის ჩაწერა, მაშინ ზემოთ მოყვანილი ამოცანის ამოხსნა იქნება: $x=4 \cdot 4 \cdot 3$ და შეგვეძლება მხოლოდ 48 განსხვავებული სამნიშნა რიცხვის დაწერა.

ბ) ვთქვათ, წრეზე მდებარე 5 წერტილიდან უნდა შევადგინოთ ყველა შესაძლო სამკუთხედი. რამდენაირად შეგვიძლია ეს გავაკეთოთ?



ამ ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ ჯუფების ფორმულა C_3^5 და გვექნება: $x = \frac{5!}{3!(5-3)!}$, მივიღებთ $x=10$. მართლაც,

გვაქვს შემდეგი სამკუთხედები: $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ABE$, $\triangle ACD$, $\triangle ACE$, $\triangle ADE$, $\triangle BCD$, $\triangle BCE$, $\triangle BDE$ და $\triangle CDE$.

განვიხილოთ ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნა განტოლების შედგენით:

1. დრაფის ნაჭერი, რომლის სიგრძეა 78 მეტრი და სიგანე 1,25 მეტრი ღირს 4500 ლარი. რა ეღირება 91 მეტრი სიგრძის და 1,45 მეტრი სიგანის ისეთივე ხარისხის დრაფის ნაჭერი?

ამოხსნა. ვთქვათ, 91 მეტრი სიგრძის და 1,45 მეტრი სიგანის დრაფის ნაჭერი ეღირება x ლარი, მაშინ 1 მ²-ის ღირებულება იქნება $x:(91 \cdot 1,45)$, რადგან ამოცანის პირობით დრაფის ნაჭერი იგივეა, ამიტომ ეწერთ განტოლებას: $x:(91 \cdot 1,45) = 4500:(78 \cdot 1,25)$. პროპორციის თვისებით გვექნება: $x = \frac{4500 \cdot 91 \cdot 1,45}{78 \cdot 1,25}$, აქედან კი $x = 6090$;

ამრიგად, დრაფის ნაჭერი, რომლის სიგრძე 91 მეტრი, ხოლო სიგანე 1,45 მეტრია 6090 ლარი ეღირება.

2. 4 ცხენის გამოსაკვებად 15 დღის განმავლობაში საჭიროა 2880 კგ თივა. რამდენი დღის განმავლობაში ეყოფა 11 ცხენს 11 ტონა და 88 კილოგრამი თივა?

ამოხსნა. ვთქვათ, 11 ცხენს 11 ტონა და 88 კგ თივა ეყოფა x დღის განმავლობაში, მაშინ 1 ცხენს დღეში დაჭირდება $11088:(11x)$ კგ თივა; რადგან ცხენის დღიური ნორმა მუდმივია, ამიტომ ეწერთ განტოლებას: $11088:(11x) = 2880:(4 \cdot 15)$. პროპორციის თვისების გამოყენებით მივიღებთ: $x = \frac{11088 \cdot 4 \cdot 15}{2880 \cdot 11}$, აქედან $x = 21$;

ე.ი. 11 ცხენს 11 ტონა და 88 კგ თივა ეყოფა 21 დღის განმავლობაში.

3. გარკვეულ სამუშაოზე სამი მუშა მუშაობდა ერთნაირი ინტენსივობით. ერთმა მათგანმა 2 დღე იმუშავა, მეორემ – 3 და მესამემ – 5 დღე. შესრულებული სამუშაოსათვის მათ მიიღეს 2000 ლარი. როგორ უნდა განაწილდეს მუშებს შორის ეს თანხა?

ამოხსნა. ვთქვათ, მუშის დღიური ანაზღაურება x ლარია, მაშინ პირველი მუშა ამოცანის პირობით მიიღებდა $2x$ ლარს, მეორე – $3x$ ლარს, ხოლო მესამე – $5x$ ლარს, ამიტომ ეწერთ განტოლე-

ბას: $2x+3x+5x=2000$, აქედან კი $x=200$. ამრიგად, პირველი მუშა მიიღებდა 400 ლარს, მეორე 600 ლარს, ხოლო მესამე კი – 1000 ლარს.

4. მეურნემ შეიძინა 35800 ნერგი. მან ეს ნერგები სამ ნაკვეთზე დარგო. ნერგების განაწილება ასეთია: პირველ და მეორე ნაკვეთზე დარგული ნერგების რაოდენობების შეფარდება (6:11)-ის ტოლია, ხოლო პირველ და მესამე ნაკვეთზე დარგული ნერგების რაოდენობის შეფარდებაა 7:10. რამდენი ნერგი დაირგო თითოეულ ნაკვეთზე?

ამოხსნა. ვთქვათ, პირველ ნაკვეთზე დაირგო x_1 ნერგი, მეორეზე – x_2 , ხოლო მესამეზე – x_3 . ამოცანის პირობით: $x_1:x_2=6:11$ და $x_1:x_3=7:10$. 6-სა და 7-ის უმცირესი საერთო ჯერადია 42, ამიტომ მიღებული ტოლობები შეიძლება ასე ჩაწეროთ: $x_1:x_2=42:77$ და $x_1:x_3=42:60$, აქედან კი ორივე პროპორციიდან შეიძლება მივიღოთ პროპორცია $x_1:x_2:x_3=42:77:60$, თუ პროპორციულობის კოეფიციენტს აღვნიშნავთ x -ით მივიღებთ განტოლებას: $42x+77x+60x=35800$, აქედან $x=200$; მაშინ პირველ ნაკვეთზე დაურგიათ 8400 ნერგი, მეორეზე – 15400 ნერგი, ხოლო მესამეზე – 12000 ნერგი.

5. ერთი რიცხვი 2-ით მეტია მეორეზე და მათი ნამრავლი ტოლია 1023-ის, იპოვეთ ამ რიცხვებიდან უმცირესი.

ამოხსნა. ვთქვათ, ერთი რიცხვია x , მაშინ მეორე $(x+2)$ -ის ტოლი იქნება, ამოცანის პირობით ვწერთ განტოლებას: $x(x+2)=1023$, ანუ $x^2+2x-1023=0$. აქედან ვღებულობთ: $x_1=31$ და $x_2=-33$.

6. მატარებელი 6 წუთით იქნა შეჩერებული და ეს დაგვიანება მან აანაზღაურა 20კმ-იან გზის მონაკვეთზე, რომელიც გაიარა 10 კმ/სთ-ით მეტი სიჩქარით, ვიდრე განრიგით იყო დადგენილი. იპოვეთ განრიგის მიხედვით მატარებლის სიჩქარე გზის ამ მონაკვეთზე.

ამოხსნა. ვთქვათ, განრიგის მიხედვით მატარებლის სიჩქარე x კმ/სთ-ის ტოლია, მაშინ მატარებელი მოძრაობდა $(x+10)$ კმ/სთ სიჩქარით, ამიტომ ვწერთ განტოლებას: $\frac{20}{x} - \frac{20}{x+10} = \frac{1}{10}$; აქედან

გვაქვს: $x^2+10x-2000=0$, საიდანაც $x_1=40$ და $x_2=-50$. -50 უვარგისია, რადგან არ შეიძლება მატარებლის სიჩქარე უარყოფითი სიდიდე

იყოს, ამიტომ მატარებლის სიჩქარეა 40 კმ/სთ.

7. საჭადრაკო ტურნირზე მონაწილეები სათამაშოდ თითოჯერ შეხვდნენ ერთმანეთს, სულ 21 პარტია გაიმართა. რამდენი მონაწილე იყო ტურნირზე?

ამოხსნა. ვთქვათ, საჭადრაკო ტურნირზე იყო x მონაწილე, რადგან ისინი თითოჯერ შეხვდნენ ერთმანეთს, ამიტომ ვწერთ განტოლებას: $\frac{x(x-1)}{2} = 21$, აქედან $x^2 - x - 42 = 0$ და $x_1 = 7$ და $x_2 = -6$. რად-

გან მონაწილეთა რაოდენობა არ შეიძლება იყოს უარყოფითი, ამიტომ გვაქვს, რომ ყოფილა 7 მონაწილე.

ამოხსნათ ამოცანები განტოლებათა სისტემის შედგენით:

1. ვაშლებით საესე ყუთი 1,5-ჯერ უფრო მძიმეა ფორთოხლებით საესე ყუთთან შედარებით. ხილის მაღაზიამ მიიღო 40 ყუთი ვაშლი და ფორთოხალი ერთად. რამდენი ყუთი ვაშლი და რამდენი ყუთი ფორთოხალი მიიღო მაღაზიამ, თუ ვაშლების მთლიანი წონა და ფორთოხლების მთლიანი წონა ერთი და იგივეა?

ამოხსნა. ვაშლიანი ყუთების რაოდენობა აღვნიშნოთ x -ით, ხოლო ფორთოხლიანი ყუთებისა y -ით, მაშინ გვაქვს სისტემის პირველი განტოლება: $x + y = 40$. ვაშლიანი ყუთების რაოდენობა იმდენჯერ ნაკლები იქნება ფორთოხლიანი ყუთების რაოდენობაზე, რამდენჯერაც ყუთი ვაშლის წონა მეტია ყუთი ფორთოხლის წონაზე, ამრიგად გვექნება სისტემის მეორე განტოლება: $\frac{x}{y} = \frac{1}{1,5}$

და სისტემას ექნება სახე:
$$\begin{cases} x + y = 40 \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{1,5} \end{cases}$$
 ამ სისტემის ამოხსნის შე-

დეგად მივიღებთ: $x = 16$ და $y = 24$.

2. მამამ 36 ვაშლი ხუთ შვილს გაუყო. ნახევარი ვაშებს მისცა, მათ იგი თანასწორად გაინაწილეს. მეორე ნახევარი ქალიშვილებს ერგოთ. განაწილება მათ შორისაც თანაბრად მოხდა. აღმოჩნდა, რომ თითოეულმა ქალიშვილმა 3 ვაშლით მეტი მიიღო, ვიდრე თითოეულმა ვაჟმა. რამდენი ქალიშვილი და რამდენი ვაჟი ჰყავდა მამას?

ამოხსნა. ვთქვათ, მამას ჰყავს x ქალიშვილი და y ვაჟი, მაშინ

სისტემის პირველ განტოლებას აქვს სახე: $x+y=5$, ხოლო მეორე განტოლება იქნება: $\frac{18}{x}-\frac{18}{y}=3$, ამიტომ მივიღებთ სისტემას:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ \frac{18}{x}-\frac{18}{y}=3. \end{cases} \text{ ამ სისტემის ამოხსნის შედეგად მივიღებთ: } x_1=2, y_1=3$$

და $x_2=15, y_2=-10$; მეორე ამონახსნი უვარგისია, რადგან ვაქვების რაოდენობა უარყოფითია და ქალიშვილების რაოდენობაც - 15 აღემატება 5-ს; ამიტომ მამას ჰყავდა 2 ქალიშვილი და 3 ვაჟი.

3. ორნიშნა რიცხვის ციფრთა კვადრატების ჯამი ტოლია 13-ის, თუ ამ რიცხვს 9-ს გამოვაკლებთ, მაშინ მივიღებთ რიცხვს, რომელიც ჩაწერილი იქნება იმავე ციფრებით, მაგრამ შებრუნებული მიმდევრობით. იპოვეთ ეს რიცხვი.

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნა: ვთქვათ, ორნიშნა რიცხვისათულების აღმნიშვნელი ციფრია x , ხოლო ერთეულების y , მაშინ მივიღებთ შემდეგ სისტემას:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 10x + y - 9 = 10y + x. \end{cases} \text{ ამ სისტემის}$$

ამონახსნებია $(3;2)$ და $(-2;-3)$. მეორე ამონახსნი არ შეიძლება ამოცანის ამონახსნად ჩაეთვალოთ, რადგან უარყოფითი ციფრები არ არსებობს, ამიტომ საძიებელი რიცხვია 32.

5.რამდენიმე მუშას სამუშაო შეუძლია შეასრულოს 20 დღეში. თუ მათი რაოდენობა 4-ით მეტი იქნებოდა და თითოეული იმუშავებდა დღეში 1 საათით მეტს, მაშინ სამუშაო შესრულდებოდა 16 დღეში. თუ მუშების რაოდენობა კიდევ 12 კაცით გაიზრდებოდა და თითოეული მათგანი დღეში იმუშავებს კიდევ 2 საათით მეტს, მაშინ მოცემული სამუშაო შესრულდებოდა 10 დღეში. რადენი მუშა იყო და რამდენ საათს მუშაობდნენ ისინი დღეში?

ამოხსნა. ვთქვათ, იყო x მუშა და ისინი დღეში y საათს მუშა-

ობდნენ; მაშინ გვაქვს სისტემა:
$$\begin{cases} \frac{16(y+1)(x+4)}{20xy} = 1 \\ \frac{10(y+3)(x+16)}{20xy} = 1 \end{cases} \text{ აქედან } x=32$$

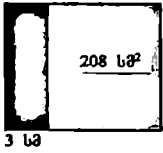
და $y=9$, ამრიგად, იყო 32 მუშა და ისინი დღეში 9 საათს მუშაობ-

დნენ.

ის ამოცანები, რომელთა შესაბამისი განტოლებები, ან განტოლებათა სისტემები მაღალი ხარისხისაა (მცირე გამონაკლისის გარდა) არითმეტიკული საშუალებებით არ ამოიხსნება და ამიტომ მათ ჩვენ არ განვიხილავთ.

22.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. ორი მომდევნო მთელი რიცხვის ნამრავლი 38-ით ნაკლებია შემდეგი ორი მთელი რიცხვის ნამრავლზე. იპოვეთ ეს რიცხვები.
2. ერთ ავზში ორჯერ მეტი ბენზინია, ვიდრე მეორეში. თუ პირველი ავზიდან მეორეში გადაეასხამთ 35 ლ ბენზინს, მაშინ ორივე ავზში ბენზინის რაოდენობა გათანაბრდება. რამდენი ლიტრი ბენზინი იყო თითოეულ ავზში თავდაპირველად.
3. აუზიდან დაიწყეს წყლის თანაბარი გაშვება. ერთი საათის შემდეგ აუზში დარჩა 400 მ³ წყალი, ხოლო კიდევ სამი საათის შემდეგ – 250 მ³. რა რაოდენობის წყალი იყო აუზში?
4. ერთ მეგობარს 55 ლარი აქვს, მეორეს კი – 65 ლარი. მას შემდეგ რაც მეორე მეგობარმა დახარჯა ორჯერ მეტი თანხა, ვიდრე პირველმა, მას დარჩა 5 ლარით ნაკლები პირველზე. რამდენი ლარი დახარჯა თითოეულმა?
5. და ძმაზე 8 წლით უფროსია, ხოლო ერთი წლის შემდეგ სამჯერ უფროსი იქნება. რამდენი წლისაა თითოეული?
6. ორ ბიდონში ერთად 70 ლიტრი რძეა, თუ პირველი ბიდონიდან მეორეში გადაეასხამთ რძის 12,5%-ს, რომელიც პირველშია, მაშინ ორივე ბიდონში აღმოჩნდება ტოლი რაოდენობის რძე. რამდენი ლიტრი რძეა პირველ ბიდონში?
7. მეანაბრემ ბანკიდან თავდაპირველად გამოიტანა თავისი თანხის $\frac{1}{4}$ ნაწილი, შემდეგ კი დარჩენილი თანხის $\frac{4}{9}$ და კიდევ 660 ლარი. ამის შემდეგ დარჩა მთელი თავისი ანაბრის $\frac{1}{20}$ ნაწილი. რა თანხა პქონდა მეანაბრეს ბანკში?

8. სპორტულ მოედანს ისეთი მართკუთხედის ფორმა აქვს, რომლის სიგრძე სიგანეზე 4 მეტრით მეტია. მოედანს შემოავლეს 2 მეტრი სიგანის გაზონი. ცნობილია, რომ მოედნის ფართობია 140 მ². იპოვეთ გაზონის ფართობი.
9. კვადრატის ფორმის ფირფიტას ჩამოაჭრეს 3 სმ სიგანის მქონე მართკუთხედის ფორმის ნაჭერი. დარჩენილი ნაწილის ფართობი 208 სმ²-ია. იპოვეთ კვადრატის გვერდი. 
10. მეექვსე კლასის მოსწავლეებმა ერთმანეთს ახალი წელი ინტერნეტის საშუალებით მიულოცეს. სულ გაიგზავნა 506 მიულოცვა. რამდენი მოსწავლეა კლასში?
11. საჭადრაკო ტურნირში, სადაც ყოველი წყვილი თითო პარტიას თამაშობს, სულ 171 პარტია გათამაშდა. რამდენი მოჭადრაკე მონაწილეობდა ტურნირში?
12. ამოზნექილ n-კუთხედში გააველეს ყველა შესაძლო დიაგონალი და მათი რაოდენობა აღმოჩნდა 35-ის ტოლი. იპოვეთ n.
13. ორი მომდევნო ნატურალური რიცხვის ნამრავლი შემცირებული 18-ით 18-ჯერ მეტია ამ რიცხვების ჯამზე. იპოვეთ ეს რიცხვები.
14. ორი მომდევნო კენტი რიცხვის ნამრავლი 255-ია. იპოვეთ ეს რიცხვები.
15. წილადის მრიცხველი 1-ით ნაკლებია მნიშვნელზე. თუ მრიცხველს 1-ით შევამცირებთ, ხოლო მნიშვნელს 1-ით გავადიდებთ, მივიღებთ მოცემულზე $\frac{5}{12}$ -ით ნაკლებ წილადს. იპოვეთ ეს წილადი.
16. მარტო ერთო ონკანი აუზის ავსებას 4 სთ-ით მეტ დროს ანდომებს, ვიდრე მარტო მეორე ონკანი. თუ ორივე ონკანს ერთდროულად გავხსნით, მაშინ აუზი 4 სთ-სა და 48 წთ-ში აივსება. რა დროში ავსებს აუზს თითოეული ონკანი ცალკე?
17. ქალაქიდან გავიდა ავტობუსი. 1 საათის შემდეგ მის კვალდაკვალ გავიდა მსუბუქი ავტომანქანა. რომლის სიჩქარე 25კმ/სთ-ით მეტია ავტობუსის სიჩქარეზე. მსუბუქი ავტომობილი ავტობუსს ქალაქიდან 150 კმ-ის დაშორებით დაეწია. იპოვეთ ავტობუსის სიჩქარე.

18. საჭადრაკო ტურნირში 55 პარტია უნდა გათამაშებულიყო. სამი მონაწილე A , B და C ავადმყოფობის გამო ტურნირის მსვლელობისას გამოეთიშა შეჯიბრს. A მონაწილემ 9 პარტიის თამაში მოასწრო, B და C -მ კი მხოლოდ ორის. შეხვედებოდა თუ არა A მონაწილე ერთ-ერთს მაინც ან B , ან C მოთამაშეს?
19. ცნობილია, რომ $x^2+ax+b=0$ განტოლების ფესვები მთელი რიცხვებია, $a+b=96$. იპოვეთ ფესვები.
20. ორმა ხელოსანმა სამუშაოში 1170 ლარი მიიღო. პირველმა იმუშავა 15 დღე, მეორემ კი – 14 დღე. რამდენ ლარს ღებულობდა დღეში თითოეული მათგანი, თუ ცნობილია, რომ პირველმა ხელოსანმა 4 დღეში მიიღო 110 ლარით მეტი, ვიდრე მეორემ 3 დღეში?
21. ავტომობილმა გზის პირველი ნახევარი გაიარა 40 კმ/სთ სიჩქარით, ხოლო გზის მეორე ნახევარზე მის სიჩქარე 60 კმ/სთ-ის ტოლი იყო. ვიპოვოთ ავტომობილის საშუალო სიჩქარე მთელ გზაზე.
22. ნავს ორი ნიშბოსნით უნდა გაეველო გარკვეული დისტანცია; თუ ორივე ნიშბოსანი ნიჩაბს ერთდროულად მოუსვამს, მაშინ დისტანციას 6 საათში დაფარავენ. თუ დისტანციის 40%-ს გაცურავს მარტო პირველი ნიშბოსანი და დარჩენილ ნაწილს – მარტო მეორე, მაშინ დისტანციას ისინი დაფარავენ 12 საათში. დისტანციის რა ნაწილს გაივლის მარტო მეორე ნიშბოსანი 3 საათში, თუ ის მიცურავს უფრო სწრაფად, ვიდრე პირველი?
23. ორნიშნა რიცხვი 4-ჯერ მეტია თავისივე ციფრთა ჯამზე და 3-ჯერ მეტია მათსავე ნამრავლზე. იპოვეთ ორნიშნა რიცხვი.
24. ორნიშნა რიცხვის ციფრთა კვადრატების ჯამი 13-ის ტოლია. თუ ამ რიცხვს 9-ს მიეუმატებთ, მაშინ მივიღებთ რიცხვს, რომელიც ჩაწერილი იქნება იმავე ციფრებით, მაგრამ შებრუნებული მიმდევრობით. იპოვეთ ეს რიცხვი.
25. ორნიშნა რიცხვით ათეულების ციფრი ერთეულების ციფრზე 2-ით ნაკლებია, ხოლო ამ რიცხვის ციფრთა კვადრატების ჯამი 34-ის ტოლია. იპოვეთ ეს რიცხვი.
26. ორნიშნა რიცხვის ათეულების ციფრის კვადრატი ერთეულების ციფრის კვადრატზე 24-ით ნაკლებია. თუ ამ რიცხვს მი-

- ქუშტებზე მისი ციფრების გადაადგილებით მიღებულ რიცხვს 132-ს მივიღებთ. იპოვეთ ეს რიცხვი.
27. ცნობილია, რომ ორნიშნა რიცხვის ციფრთა ჯამი ერთით მეტია მისი ციფრების ნამრავლზე. თვით ეს რიცხვი 18-ით მეტია მისი ციფრების გადაადგილებით მიღებულ რიცხვზე. იპოვეთ ეს რიცხვი.
 28. მართკუთხედის პერიმეტრი 56 სმ-ის ტოლია, დიაგონალია – 20 სმ. იპოვეთ ამ მართკუთხედის გვერდები.
 29. სამკუთხედის ფართობი 12 დმ²-ის ტოლია. ერთი გვერდისა და მასზე დაშვებული სიმაღლის ჯამი – 10 დმ-ია. იპოვეთ ეს გვერდი, თუ ცნობილია, რომ მისი ზომა სიმაღლის ზომაზე მცირეა.
 30. ცნობილია, რომ ორი რიცხვის კვადრატების ჯამი 16-ით მეტია ამ რიცხვების გაორკეცებულ ნამრავლზე, ხოლო ამ რიცხვების კვადრატების სხვაობა 11-ით მეტია ამ რიცხვების ნამრავლზე. იპოვეთ ეს რიცხვები, თუ ცნობილია, რომ ორივე რიცხვი დადებითია.

22.1.1. ტესტი №21

1. თუ ორი დადებითი რიცხვის შეკრებისას პირველ შესაკრებს 3-ჯერ გავზრდით, ხოლო მეორეს უცვლელად დავტოვებთ, მაშინ ჯამი 120-ით გაიზრდება. რისი ტოლია პირველი შესაკრები?
ა) 40; ბ) 50; გ) 55; დ) 30; ე) 60.
2. იპოვეთ ნატურალური რიცხვი, რომლის კვადრატი 14-ით მეტია 5-ჯერ გაზრდილ ამ რიცხვზე.
ა) 2; ბ) 7; გ) 49; დ) 14; ე) 3.
3. ლანგარზე ნამცხვრის 15 ნაჭერი იდო. მას შემდეგ, რაც რამდენიმე ნაჭერი სამად დაჭრეს ლანგარზე 35 ნაჭერი აღმოჩნდა. რამდენი ნაჭერი დაუჭრიათ?
ა) 3; ბ) 10; გ) 5; დ) 6; ე) 9.
4. იპოვეთ 9-ის ჯერადი სამნიშნა რიცხვი, რომლის ერთეულებითა და ასეულების ციფრები ტოლია, ათეულების ციფრი კი მათგან განსხვავებულია. ცნობილია, რომ ეს სამნიშნა რიცხვი

უნაშთოდ იყოფა ორნიშნა რიცხვზე, რომლის ჩანაწერშიც ორი მომდევნო ციფრი მონაწილეობს და მათგან ერთ-ერთი საძიებელი რიცხვის ასეულების ციფრს ემთხვევა, განაყოფი კი მიიღება გამყოფისაგან ციფრების გადანაცვლებით.

ა) 252; ბ) 585; გ) 171; დ) 414; ე) 747.

5. ავტომობილმა A -დან B -ში იმგზავრა 50 კმ/სთ სიჩქარით, უკან დაბრუნებისას კი – 30 კმ/სთ სიჩქარით. იპოვეთ საშუალო სიჩქარე ამ გზაგზავრისას.

ა) 40კმ/სთ; ბ) 45კმ/სთ; გ) 35კმ/სთ; დ) 36,5კმ/სთ; ე) 37,5კმ/სთ.

6. თუ ორნიშნა რიცხვს მიეუმატებთ იმავე ციფრებით, ოღონდ შებრუნებული თანმიმდევრობით ჩაწერილ რიცხვს 55-ს მივიღებთ. ამ ორი რიცხვის ნამრავლი 736-ის ტოლია. შევადგინოთ განტოლებათა სისტემა.

$$\begin{array}{ll} \text{ა)} \begin{cases} (10x + y)(10y + x) = 736 \\ 10x + 10y = 55 \end{cases} & \text{ბ)} \begin{cases} (10x + 10y) \cdot xy = 736 \\ 11x + 11y = 55 \end{cases} \\ \text{გ)} \begin{cases} xy = 736 \\ 9x + 9y = 55 \end{cases} & \text{დ)} \begin{cases} (10x + y)(10y + x) = 736 \\ 11x + 11y = 55 \end{cases} \end{array}$$

7. იპოვეთ 9-ის ჯერადი ორნიშნა რიცხვი, რომლის 12-ზე გაყოფისას მიღებული განაყოფი საძიებელი რიცხვის ათეულების ციფრზე 1-ით ნაკლებია, ხოლო ნაშთი ერთეულების ციფრის ტოლია.

ა) 63; ბ) 81; გ) 54; დ) 99; ე) 90.

8. მოცემული ორნიშნა რიცხვის ციფრების ნამრავლი 28-ის ტოლია. იმავე ციფრებით, ოღონდ შებრუნებული თანმიმდევრობით ჩაწერილი რიცხვისა და მოცემული რიცხვის ჯამი 121-ის ტოლია. შევადგინოთ სისტემა.

$$\begin{array}{ll} \text{ა)} \begin{cases} (10x + y)(x + y) = 28 \\ 11x + 11y = 121 \end{cases} & \text{ბ)} \begin{cases} (x + y) \cdot x = 28 \\ 10x + 10y = 121 \end{cases} \\ \text{გ)} \begin{cases} xy = 28 \\ 11x + 11y = 121 \end{cases} & \text{დ)} \begin{cases} xy = 121 \\ 11x + 11y = 28 \end{cases} \end{array}$$

9. გემი მდინარის მიმართულებით გარკვეულ მანძილს 3 საათში გადის, უკან კი 4 საათში ბრუნდება (გემის სიჩქარე მდგარ წყალში მუდმივია). რამდენ საათში გაივლის ტივი ამ მანძილს?

ა) 7; ბ) 24; გ) 14; დ) 20; ე) 16.

10. ტურისტმა გაიარა 72 კილომეტრი და შენიშნა, რომ თუ იგი ამ მგზავრობას 6 დღით მეტს მოანდომებდა, მაშინ მას შეეძლო დღეში 2 კმ-ით ნაკლები გაეელო, ვიდრე გადიოდა. რამდენ კილომეტრს გადიოდა იგი დღეში? (შევადგინოთ განტოლება)

ა) $\frac{72}{x-2} - \frac{72}{x} = 6$; ბ) $\frac{72}{x} - \frac{72}{x-2} = 6$;

გ) $\frac{72}{x} + \frac{72}{x+2} = 6$; დ) $\frac{6x}{x+2} = 72$.

11. სამმა მეთევზემ სამ საათში სამი კილოგრამი თევზი დაიჭირა. რამდენ საათში დაიჭერს ხუთი მეთევზე ხუთ კილოგრამ თევზს, თუ თევზჭერის ტემპი იგივე იქნება?

- ა) 5 საათში; ბ) 3 საათში;
გ) 2 საათში; დ) 15 საათში.

§23. განტოლებათა ერთობლიობა, როგორც განტოლებათა დიზიუნქცია

ორი ან რამდენიმე განტოლების დიზიუნქციას ეწოდება ამ განტოლებათა ერთობლიობა და მისი ამონახსნია ცვლადის ის დასაშვები მნიშვნელობა, რომელიც აკმაყოფილებს ამ ერთობლიობის ერთ-ერთ განტოლებას მაინც.

ვთქვათ, მოცემულია $f_1(x)=\varphi_1(x)$ და $f_2(x)=\varphi_2(x)$ განტოლებები, თუ განვიხილავთ ამ განტოლებათა დიზიუნქციას: $f_1(x)=\varphi_1(x) \vee f_2(x)=\varphi_2(x)$, მაშინ მივიღებთ მოცემულ განტოლებათა ერთობლიობას და მას ასე წერენ:
$$\begin{cases} f_1(x)=\varphi_1(x) \\ f_2(x)=\varphi_2(x) \end{cases}$$

როგორც აღვნიშნეთ, განტოლებათა ერთობლიობის ამონახსნი ეწოდება ცვლადის იმ მნიშვნელობას, რომელიც ცვლადის ადგილზე ჩასმის შემდეგ მოცემული განტოლებებიდან ერთს მაინც გადააქცევს ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობად. ყველა ასეთი ამონახსნის სიმრავლე იძლევა მოცემული განტოლებათა ერთობლიობის ამონახსნთა სიმრავლეს.

ზოგჯერ განტოლება ორი ან რამდენიმე განტოლების დიზიუნქციის ტოლძალოვანია. მაგალითად, განტოლება $x^3-2x^2-5x+6=0$ ტოლძალოვანია შემდეგი განტოლების $(x-1)(x+2)(x-3)=0$, რომელიც თავის მხრივ განტოლებათა შემდეგი დიზიუნქციის ტოლძალოვანია: $x-1=0 \vee x+2=0 \vee x-3=0$, რადგან მათი ამონახსნთა სიმრავლეები ტოლძალოვანია, ე.ი. გვაქვს განტოლებათა ერთობლი-

ობა:
$$\begin{cases} x-1=0 \\ x+2=0, \text{ აქედან მივიღებთ: } x_1=-1 \text{ } x_2=-2 \text{ და } x_3=3. \text{ ამრიგად,} \\ x-3=0 \end{cases}$$

განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეა: $\{-1; -2; 3\}$.

თუ გვაქვს ორცვლადიან განტოლებათა ერთობლიობა, მაშინ ამ ერთობლიობის ამონახსენია – ამონახსენთა გაერთიანება (ორცვლადიან განტოლებათა სისტემის ამონახსენი, ამონახსენთა თანაკვეთა). განვიხილოთ მაგალითი:

ა) ამოვხსნათ განტოლებათა

სისტემის: $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 18 \\ y = x+1 \end{cases}$, ამ სის-

ტემის ამონახსნებია: (3;4) და (-3;-2). თუ წარმოვიდგენთ გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას, გვექნება:

ბ) ამოვხსნათ განტოლებათა

ერთობლიობა: $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 18 \\ y = x+1 \end{cases}$,

ამ ერთობლიობის ამონახსნები წარმოადგინოთ გეომეტრიული ინტერპრეტაციის სახით, სადაც ამონახსნები გამოსახულია წითელი ფერით:

გავარჩიოთ ზოგიერთი მაგალითი:

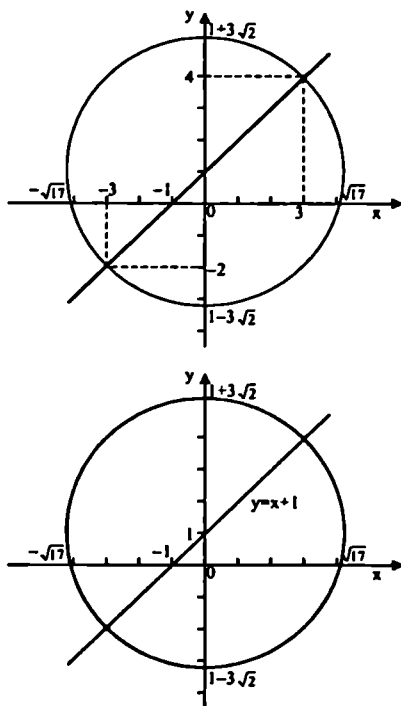
1. ამოვხსნათ განტოლება: $2x-3=5$

ამოხსნა. ეს განტოლება შეიძლება წარმოადგინოთ ორი განტოლების ერთობლიობის სახით: $\begin{cases} 2x-3=5 \\ 2x-3=-5 \end{cases}$, ამოვხსნათ თითოეული: $2x-3=5$ და $x=4$, $2x-3=-5$

და $x=-1$. თუ გავერთიანებთ ამ ამონახსნებს მივიღებთ ამ განტოლებათა ერთობლიობის ამონახსნებს: $x_1=4$ და $x_2=-1$.

2. ამოვხსნათ განტოლება: $x^2+7x+10=0$.

ამოხსნა. ეს განტოლება შეიძლება ასე გარდაექმნათ: $x^2+2x+5x+10=0$, $x(x+2)+5(x+2)=0$ და $(x+2)(x+5)=0$. ჩვენთვის ცნობილია, რომ ნამრავლი 0-ის ტოლია, თუ ერთერთი თანამამრავლი მაინც 0-ის ტოლია; ე.ი. მოცემული განტოლების ტოლფასია განტოლებათა დიზიუნქცია $x+2=0 \vee x+5=0$, ანუ განტოლებათა ერთობლიობა $\begin{cases} x+2=0 \\ x+5=0 \end{cases}$, აქედან კი განტოლების ამონახსნებია:



$$x_1 = -2 \text{ და } x_2 = -5.$$

3. ამოუხსნათ განტოლება: $|x-3|+|x-2|=1$.

ამოხსნა. ეს განტოლება შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ერთობლიობის სახით:

$$\begin{cases} \text{თუ } x \geq 3, \text{ მაშინ } x-3+x-2=1, \\ \text{თუ } 2 \leq x < 3, \text{ მაშინ } -(x-3)+x-2=1, \\ \text{თუ } x < 2, \text{ მაშინ } -(x-3)-(x-2)=1. \end{cases}$$

პირველი განტოლების ამონახსნია $x=3$, მეორე განტოლების ამონახსნებია $x \in [2;3)$, ხოლო მესამე განტოლებას ამონახსნი არ გააჩნია, რადგან $x=2$ არ ეკუთვნის $2 \notin (-\infty; 2)$ შუალედს.

ამრიგად, ამ განტოლების ამონახსნებია $x \in [2;3]$ შუალედი.

4. ამოუხსნათ განტოლება: $|x|+|2x|=9$.

ამოხსნა. ეს განტოლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ერთობლიობის სახით:
$$\begin{cases} \text{თუ } x \geq 0, \text{ მაშინ } x+2x=9, \\ \text{თუ } x < 0, \text{ მაშინ } -x-2x=9. \end{cases}$$

პირველი განტოლების ამონახსნია $x=3$, ხოლო მეორე განტოლების ამონახსნია $x=-3$, მაშინ ერთობლიობის ამონახსნია: $x_1=3$ და $x_2=-3$.

5. ამოუხსნათ განტოლება: $x^4-6x^3+3x^2+26x-24=0$

ამოხსნა. გარდაეკმნათ გამოსახულება:

$$\begin{aligned} x^4-6x^3+3x^2+26x-24 &= x^4-x^3-5x^3+5x^2-2x^2+2x+24x-24= \\ &= (x-1)(x+2)(x^2-7x+12) = (x-1)(x+2)(x-3)(x-4) \end{aligned}$$

ამ გარდაკმნის შედეგად მოცემული განტოლება მიიღებს სახეს: $(x-1)(x+2)(x-3)(x-4)=0$, ამიტომ განტოლება შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ერთობლიობით:

$$\begin{cases} x-1=0 \\ x+2=0 \\ x-3=0 \\ x-4=0 \end{cases};$$

ამ ერთობლიობის ამონახსნები - $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=3$ და $x_4=4$ განტოლების ამონახსნებიცაა.

23.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. ამოხსენით განტოლებათა ერობლიობა:
$$\begin{cases} 5x-3=9-x \\ x^2-x-6=0 \end{cases}$$
2. ამოხსენით განტოლებათა ერთობლიობა:
$$\begin{cases} x^2-9=0 \\ x^2-4=0 \end{cases}$$
3. ამოხსენით განტოლება: $x^2-5|x|+6=0$.
4. ამოხსენით განტოლება: $x^2-|5x+6|=0$.
5. ამოხსენით განტოლება: $|x^2-5x|-6=0$.
6. ამოხსენით განტოლება: $|x|x-5x+6=0$.
7. ამოხსენით განტოლება: $|x|x-5|x|+6=0$.
8. ამოხსენით განტოლება: $|x|x-5|x+6|=0$.
9. ამოხსენით განტოლება: $|x-3|+|x+1|-|x|=0$.
10. ამოხსენით განტოლება: $|x|+|x-1|-|x-2|-|x+1|=-1$.
11. $x^2-x|x|=18$. იპოვეთ ამ განტოლების ფესვი.
12. ამოხსენით განტოლებათა ერობლიობა:
$$\begin{cases} x^2-2x|x|+1=4, \\ x^2+2x|x|+1=4. \end{cases}$$
13. ამოხსენით განტოლებათა ერთობლიობა:
$$\begin{cases} x^2-2|x|+1=4, \\ x^2+2|x|+1=4. \end{cases}$$
14. ამოხსენით განტოლებათა ერობლიობა:
$$\begin{cases} |x|x|-2|x|+1=4, \\ |x|x|+2|x|+1=4. \end{cases}$$
15. ამოხსენით განტოლებათა სისტემების ერობლიობა:
$$\begin{cases} x+2y=11, \\ 5x-3y=3; \\ x+5y=7, \\ x-3y=-1. \end{cases}$$
16. ამოხსენით განტოლებათა სისტემების ერთობლიობა:
$$\begin{cases} 4x-y=5, \\ 3x+2y=1; \\ 5x+16y=-1, \\ 3x+4y=-2. \end{cases}$$

17. ამოხსენით განტოლებათა სისტემების ერთობლიობა:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}; \\ \begin{cases} 4x + 3y = -4, \\ 6x + 5y = -7. \end{cases} \end{cases}$$

18. ამოხსენით განტოლებათა სისტემების ერთობლიობა:

$$\begin{cases} x : y = 3 : 4, \\ (x-1) : (y+2) = 1 : 2; \\ \begin{cases} (x+4) : (y+1) = 2 : 1, \\ (x+2) : (y-1) = 3 : 1. \end{cases} \end{cases}$$

19. ამოხსენით განტოლებათა სისტემების ერთობლიობა:

$$\begin{cases} xy = 15, \\ 2x - y = 7; \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ x - 4 = y. \end{cases} \end{cases}$$

20. ამოხსენით განტოლებათა სისტემების ერთობლიობა:

$$\begin{cases} \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 8, \\ xy = 7. \end{cases} \end{cases}$$

21. ამოხსენით განტოლებათა სისტემების ერთობლიობა:

$$\begin{cases} \begin{cases} x - y = 7, \\ xy = 18; \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2 = y, \\ xy = 15. \end{cases} \end{cases}$$

22. ამოხსენით განტოლებათა სისტემების ერთობლიობა:

$$\begin{cases} x - y = 16, \\ xy = -48; \\ x - y = 3, \\ xy = -2. \end{cases}$$

23. ამოხსენით განტოლებათა სისტემების ერთობლიობა:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6; \\ x^2 + y^2 = 34, \\ xy = 15. \end{cases}$$

24. ამოხსენით განტოლებათა სისტემების ერთობლიობა:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ xy = 20; \\ x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3. \end{cases}$$

25. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა: $\begin{cases} |x+1| = |x+7|, \\ x^2 + 8|x| + 16 = 0. \end{cases}$

26. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა: $\begin{cases} |x+1| + |x+2| = |x-2| + 1, \\ x^3 + 5x^2 - 6x = 0. \end{cases}$

27. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა: $\begin{cases} |x| + |x-2| = |x|, \\ x^2 - 4 = 0. \end{cases}$

28. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა: $\begin{cases} |x-1| + |x+1| = 2x, \\ x^3 - 5x^2 + 6x = 0. \end{cases}$

29. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა: $\begin{cases} |x| = |x+2|, \\ |x| = 2 - |x+2|. \end{cases}$

30. ამოხსენით განტოლებათა ერთობლიობა: $\begin{cases} |x| = |x+2|, \\ |x| = 2 - |x+2|. \end{cases}$

1. 10 სათამაშოდან არცერთი არ ღირს 3 ლარზე ნაკლები. მათგან მხოლოდ 4 ცალის ფასია 10 ლარზე ნაკლები. ათივე სათამაშოს საშუალო ფასი 14 ლარია. რა უდიდესი ფასი შეიძლება ჰქონდეს ამ სათამაშოებიდან ერთ-ერთს?

ა) 27, ბ) 58, გ) 78, დ) 112, ე) 135.

2. თუ p და q დადებითი რიცხვებია და $p^2 - q^2 = 19$ და $p^2 + q^2 = 31$, მაშინ რას უდრის p ?

ა) 25, ბ) 5, გ) 6, დ) 16, ე) 20.

3. თუ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 4$, მაშინ რას უდრის $\frac{b}{a} + \frac{c}{d}$?

ა) $\frac{1}{4}$, ბ) 2, გ) $\frac{3}{4}$, დ) $\frac{4}{3}$, ე) დაუდგენელია.

4. ამოხსენით განტოლებათა ერთობლიობა:
$$\begin{cases} |x| = |x-2|, \\ |x+1| = |x-1|, \\ x^3 - x = 0. \end{cases}$$

ა) $\{-1;0\}$, ბ) $\{0;1\}$, გ) $\{-1;0;1\}$, დ) $\{-1;0;1\}$, ე) $\{-1;0;1;2\}$.

5. ოთახში არის ერთუჯრედიანი, ორუჯრედიანი და სამუჯრედიანი მაგიდები; სულ 17 ცალი. მათ სულ 36 უჯრა აქვთ. მასთან ერთუჯრედიანი მაგიდები იმდენია, რამდენიც ორუჯრედიანები. რამდენი სამუჯრედიანი მაგიდაა ოთახში?

ა) 7, ბ) 5, გ) 6, დ) 8, ე) 10.

6. თომას, მარის და ქეთის თანაბარი რაოდენობის მონეტები აქვთ. ჩამოთვლილთაგან რომელი განტოლებათა სისტემა გამოხატავს ბავშვების მონეტების რაოდენობას, თუ x თომას მონეტების რაოდენობაა, y - მარის, ხოლო z - ქეთის?

ა) $\begin{cases} x+y=3z, \\ x+z=2y; \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} x+y=2z, \\ x+z=2y; \end{cases}$ გ) $\begin{cases} x-y=z, \\ 2y+z=x; \end{cases}$
 დ) $\begin{cases} x+2y=2z, \\ y-2z=x; \end{cases}$ ე) $\begin{cases} x+y=2z, \\ x-z=2y. \end{cases}$

7. ამოხსენით განტოლებათა ერთობლიობა:
$$\begin{cases} ||x| - 2| = |x| \\ |x - 2| = |x|, \\ |x - 2| = x + 2. \end{cases}$$

 ა) $\{-1; 0\}$, ბ) $\{-1; 0; 1\}$, გ) $\{-1; 0; 1; 2\}$, დ) $\{-1; 1\}$, ე) $\{0; 1\}$.
8. ამოხსენით განტოლებათა ერთობლიობა:
$$\begin{cases} |x - 3| = 1, \\ x^2 + x - 6 = 0. \end{cases}$$

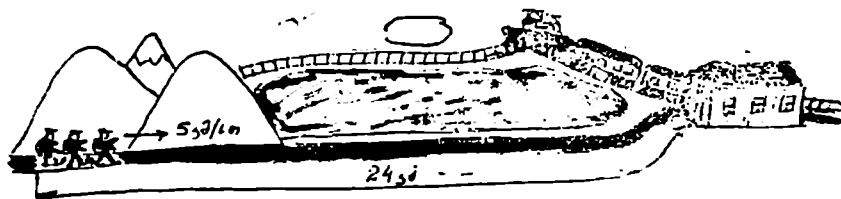
 ა) $\{-3; 2\}$, ბ) $\{-3; 1; 2\}$, გ) $\{-4; 2; 4\}$, დ) $\{2; 4\}$, ე) $\{-3; 2; 4\}$.
9. ამოხსენით განტოლებათა ერთობლიობა:
$$\begin{cases} |x - 4| = 3, \\ |x - 3| = 4. \end{cases}$$

 ა) $\{-1; 1; 7\}$, ბ) $\{-1; 0; 1\}$, გ) $\{-1; 0; 7\}$, დ) $\{0; 1; 7\}$, ე) $\{3; 4; 7\}$.
10. ამოხსენით განტოლება: $x|x - 5| + 6 = 0$.
 ა) $\{2; 3; 6\}$, ბ) $\{-1\}$, გ) $\{-1; 2; 3; 6\}$, დ) $\{-1; 2; 3\}$, ე) $\{-1; 3; 6\}$.

§24. ცვლადიანი უტოლობა, როგორც პრემიატი.

უტოლობის ამონახსნენთა სიმრავლე. ტოლკალოვანი უტოლობები. თეორემები ტოლკალოვან უტოლობებზე. პირველი ხარისხის ერთცვლადიანი უტოლობის ამოხსნა

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: ეთქვათ, ტურისტთა ჯგუფმა მთაზე ლაშქრობა დაასრულა და უნდა გაემართოს რკინიგზის სადგურისაკენ, რომელიც მათგან 24 კმ-ითაა დაშორებული. გზა მდებარეობს ტბის გასწვრივ და ტურისტების სიჩქარე 5 კმ/სთ-ის ტოლია. ტურისტებმა უნდა მიუსწრონ მატარებელს, რომელიც სადგურიდან 13 საათზე გადის. რომელ საათზე უნდა დაიძრან ტურისტები რკინიგზის სადგურის მიმართულებით, ისე რომ მათ არ დააგვიანონ სასურველი მატარებლის რეისზე?



ამოვხსნათ ეს ამოცანა. თუ სადგურისკენ ტურისტები x საათზე გაეღენ, მაშინ მატარებლის გასვლამდე $(13-x)$ საათს იმოძრავებენ და ამ დროში $5 \cdot (13-x)$ კილომეტრს გაივლიან. მათ რომ მატარებელს მიუსწრონ, ანუ სადგურში 13 საათის შემდეგ რომ არ მივიდნენ, ეს მანძილი არ უნდა იყოს ნაკლები სადგურამდე დაშორებაზე, ე.ი. 24 კილომეტრზე, მაშინ შეიძლება დავწეროთ შემდეგი უტოლობა: $5(13-x) \geq 24$; ანუ $65-5x \geq 24$. მივიღეთ უტოლობა, რომელიც ცვლადს შეიცავს, იგი ერთცვლადიანი უტოლობაა. მისი მარცხენა ნაწილია - $(65-5x)$, მარჯვენა ნაწილი - 24. $65, -5x$ და 24 უტოლობის წევრებია. თუ ამ უტოლობაში x -ის ნაცვლად ჩავსვათ $x=6$, $x=7$, $x=8$ მნიშვნელობებს, ჭეშმარიტ უტოლობებს მივიღებთ: $65-30 \geq 24$, $65-35 \geq 24$ და $65-40 \geq 24$. x -ის თითოეულ ამ მნიშვნელობას მიღებული უტოლობის ამონახსნი ეწოდება.

ეთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ერთცვლადიანი ორი გამოსახულებაა და მათი განსაზღვრის არეა $x \in X$; მაშინ $f(x) > g(x)$ (ან $f(x) < g(x)$, $f(x) \geq g(x)$, $f(x) \leq g(x)$) სახის უტოლობას ერთცვლადიანი უტოლობა ეწოდება.

იგი ცხადია, ერთადგილიან პრედიატს წარმოადგენს. იგიური გარდაქმნების შედეგად ერთცვლადიანი უტოლობა ყოველთვის შეიძლება დაეყვანოს $\varphi(x) > 0$ (ან $\varphi(x) \geq 0$) სახემდე.

x ცვლადის იმ მნიშვნელობას X სიმრავლიდან, რომელიც უტოლობას ჭეშმარიტ რიცხვით უტოლობად გადააქცევს, უტოლობის ამონახსნი ეწოდება. ამოცხსნათ მოცემული უტოლობა – ნიშნავს ვიპოვოთ მოცემული უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე.

შეიძლება მივიღოთ, რომ ერთი უტოლობის ყოველი ამონახსნი აკმაყოფილებდეს მეორე უტოლობას. ასეთ შემთხვევაში მეორე უტოლობას პირველი უტოლობის შედეგს უწოდებენ. მაგალითად, ავიღოთ ორი უტოლობა: $x > 5$ და $x > 2$. ცხადია, რომ თუ რომელიმე რიცხვი მეტია 5-ზე, იგი მეტი იქნება 2-ზეც. ამიტომ უტოლობა $x > 2$ წარმოადგენს $x > 5$ უტოლობის შედეგს. შედეგის ამონახსნთა სიმრავლე მოიცავს მოცემული უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეს.

უტოლობათა ამოხსნა, როგორც განტოლებათა ამოხსნა ეფუძნება ტოლფასობის ცნებას. ორ ერთცვლადიან უტოლობას ეწოდება ტოლფასი, თუ მათი ამონახსნების სიმრავლეები ერთმანეთს ემთხვევა ერთნაირი დალაგებისას; ასეთი უტოლობები ერთმანეთის შედეგია.

უტოლობათა ამოხსნისას, ჩვეულებრივ, მოცემულ უტოლობას ცვლიან მეორე, უფრო მარტივი, მაგრამ მოცემულის ტოლფასი უტოლობით. მიღებულ უტოლობას ისევ ცვლიან უფრო მარტივი და მოცემულის ტოლფასი უტოლობით და ა.შ. ასეთი შეცვლები ხორციელდება შემდეგი დებულებების საფუძველზე:

თეორემა 1. ეთქვას, უტოლობა $f(x) > g(x)$ მოცემულია X სიმრავლეზე და $h(x)$ გამოსახულება განსაზღვრულია იმავე სიმრავლეზე. მაშინ უტოლობები $f(x) > g(x)$ და $f(x) + h(x) > g(x) + h(x)$ ტოლფასია X სიმრავლეზე.

ამ თეორემის შედეგები ხშირად გამოიყენება უტოლობათა ამოხსნისას. ეს შედეგებია:

შედეგი 1. თუ უტოლობის $f(x) > g(x)$ ორივე მხარეს მივუმატებთ ერთსა და იმავე ნამდვილ d რიცხვს, მაშინ მიღებული $f(x) + d > g(x) + d$ უტოლობა მოცემულის ტოლფასი იქნება.

შედეგი 2. თუ უტოლობის რომელიმე შესაქრებს (რიცხვით გამოსახულებას ან გამოსახულებას ცვლადით) გადავიტანთ უტოლობის ერთი მხრიდან მეორეში და ნიშანს შევუცვლით, მივიღებთ მოცემულის ტოლფას უტოლობას.

თეორემა 2. ვთქვათ, უტოლობა $f(x) > g(x)$ მოცემულია X სიმრავლეზე და $h(x)$ გამოსახულება განსაზღვრულია იმავე სიმრავლეზე, მასთან ნებისმიერი x -სათვის X სიმრავლიდან $h(x) > 0$, მაშინ უტოლობები $f(x) > g(x)$ და $f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x)$ ტოლფასია X სიმრავლეზე.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $f(x) > g(x)$ უტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ ერთსა და იმავე დადებით ნამდვილ $d > 0$ რიცხვზე, მაშინ მიღებული $f(x) \cdot d > g(x) \cdot d$ უტოლობა მოცემულის ტოლფასი იქნება.

თეორემა 3. ვთქვათ, უტოლობა $f(x) > g(x)$ მოცემულია X სიმრავლეზე და $h(x)$ გამოსახულება განსაზღვრულია იმავე სიმრავლეზე, მასთან ნებისმიერი x -სათვის X სიმრავლიდან $h(x) < 0$, მაშინ უტოლობები $f(x) > g(x)$ და $f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x)$ ტოლფასია X სიმრავლეზე.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს: თუ უტოლობის $f(x) > g(x)$ ორივე მხარეს გავამრავლებთ ერთსა და იმავე უარყოფით ნამდვილ $d < 0$ რიცხვზე და უტოლობის ნიშანს შევცვლით მოპირდაპირეთი, მაშინ მიღებული $f(x) \cdot d < g(x) \cdot d$ უტოლობა მოცემულის ტოლფასი იქნება.

პირველი ხარისხის ერთცვლადიანი უტოლობა ეწოდება $ax + b > 0$, $a \neq 0$ (ან $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$) სახის უტოლობას, სადაც x ცვლადია, ხოლო a და b ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვები, მას წრფივ ერთცვლადიან უტოლობასაც უწოდებენ. a -ს ეწოდება ცვლადის კოეფიციენტი, b -ს კი – თავისუფალი წევრი.

თუ $a \neq 0$, მაშინ $ax + b > 0$ უტოლობას პირველი რიგის უტოლობა ეწოდება, ხოლო, თუ $a = 0$, მაშინ უტოლობას ექნება სახე $0 \cdot x + b > 0$ და იგი ნულოვანი რიგისაა.

თუ $a > 0$, მაშინ უტოლობა $ax + b > 0$ უტოლობის – $x > -\frac{b}{a}$ ტოლფა-

სია და მისი ამონახსნების სიმრავლეა $-x \in \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$. თუ $a < 0$, მაშინ უტოლობა $ax+b > 0$ ტოლფასია $-x < -\frac{b}{a}$ უტოლობის და მისი ამონახსნების სიმრავლეა $-x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$. თუ $a = 0$, მაშინ უტოლობა ღებულობს სახეს $0 \cdot x + b > 0$ ე.ი. მას არა აქვს ამონახსნები, როცა $b \leq 0$ და კმაყოფილდება x -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის ($x \in (-\infty; +\infty)$), როცა $b > 0$.

მრავალი უტოლობა ამოხსნისას დაიყვანება წრფივზე. ჩვენი პარაგრაფის დასაწყისში დასმული ამოცანისათვის გვექნება: $x \leq 8\frac{1}{5}$, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ თუ ტურისტები 8 საათსა და 12 წუთზე უფრო გვიან გაეღენ რკინიგზის სადგურის მიმართულებით, მაშინ ისინი სასურველი მატარებლის რეისზე დააგვიანებენ.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითები:

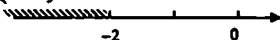
1. ამოვხსნათ უტოლობა $5(3,2x-2) < 20x+12,4$.

ამოხსნა. თუ გავხსნათ ფრჩხილებს, გვექნება: $16x-10 < 20x+12,4$. ვისარგებლოთ უტოლობის თვისებებით და მივიღებთ: $16x-20x < 10+12,4$. აქედან $-4x < 22,4$ და $x > -5,6$. პასუხი: $x \in (-5,6; +\infty)$.

2. ამოვხსნათ უტოლობა და პასუხი გამოვსახოთ გეომეტრიულად. $24(2-1,5y) \geq 18(11+2y)-6$.

ამოხსნა. $48-36y \geq 198+36y-6$, $-72y \geq 144$, აქედან $y \leq -2$.

პასუხი: $y \in (-\infty; -2]$. გეომეტრიულ ინტერ-



პრეტაციას ექნება სახე:

3. ორ ყუთში 15 ბირთვია, პირველი ყუთის ბირთვების გახუთკეცებული რაოდენობაც კი მეორე ყუთში ბირთვების რაოდენობაზე ნაკლებია. რამდენი ბირთვი შეიძლება იყოს პირველ ყუთში (იგულისხმება, რომ იგი ცარიელი არ არის ბირთვების მიმართ)?

ამოცანის ამოსახსნელად შევადგინოთ უტოლობა: $5x < 15-x$, მისი ამოხსნის შედეგად გვაქვს $-x < 2,5$. მთელი დადებითი რიცხვები, რომლებიც ამ უტოლობას დააკმაყოფილებს ტოლია 1-ის და

2-ის, ამიტომ ამ ამოცანას ორი ამონახსნი გააჩნია $x_1=1$ და $x_2=2$.

ცხრილის საშუალებით კონკრეტული მაგალითების მიხედვით წარმოვადგინოთ წრფივი ერთცვლადიანი უტოლობის ამოხსნა:

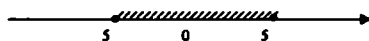
წრფივი უტოლობა	მისი ტოლფასი უტოლობა	ამონახსნების სიმრავლე	გეომეტრიული გამოსახვა
$11x-33>0$	$x>3$	$x \in (3; +\infty)$	
$11x-33<0$	$x<3$	$x \in (-\infty; 3)$	
$-11x-33>0$	$x<-3$	$x \in (-\infty; -3)$	
$-11x-33<0$	$x>-3$	$x \in (-3; +\infty)$	
$11x-33 \geq 0$	$x \geq 3$	$x \in [3; +\infty)$	
$11x-33 \leq 0$	$x \leq 3$	$x \in (-\infty; 3]$	
$-11x-33 \geq 0$	$x \leq -3$	$x \in (-\infty; -3]$	
$-11x-33 \leq 0$	$x \geq -3$	$x \in [-3; +\infty)$	

ამოეხსნათ მოდულის შემცველი უტოლობები:

1. ამოეხსნათ უტოლობა $|x| \leq 5$.

ამოხსნა. ამ უტოლობას აკმაყოფილებენ ის რიცხვები, რომლებიც სათავედან 5-ზე არაუმეტესი მანძილითაა დაშორებული; მაშასადამე, $-5 \leq x \leq 5$.

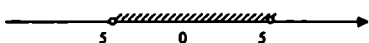
პასუხი: $x \in [-5; 5]$. გეომეტრიულ გამოსახვას ექნება სახე:



2. ამოეხსნათ უტოლობა $|x| < 5$.

ამოხსნა. ამ უტოლობას აკმაყოფილებენ ის რიცხვები, რომლებიც სათავედან 5-ზე ნაკლები მანძილითაა დაშორებული; მაშასადამე, $-5 < x < 5$.

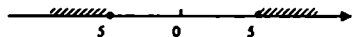
პასუხი: $x \in (-5; 5)$. გეომეტრიულ



ინტერპრეტაციას ექნება სახე:

3. ამოცხსნათ უტოლობა $x \leq 5$.

ამოხსნა. ამ უტოლობას აკმაყოფილებენ ის რიცხვები, რომლებიც სათავედან 5-ზე არანაკლები მანძილითაა დაშორებული; მაშასადამე, $x \leq 5$ ან $x \geq 5$.

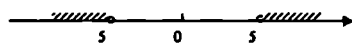


პასუხი: $x \in (-\infty; 5] \cup [5; +\infty)$. გა-

მოვსახოთ გეომეტრიულად:

4. ამოცხსნათ უტოლობა $x \geq 5$.

ამოხსნა. ამ უტოლობას აკმაყოფილებენ ის რიცხვები, რომლებიც სათავედან 5-ზე მეტი მანძილითაა დაშორებული; მაშასადამე, $x < 5$ ან $x > 5$.



პასუხი: $x \in (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$. გამოვსა-

ხოთ გეომეტრიულად:

ამ მაგალითების საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ, რომ თუ მაგალითად, $a > 0$, მაშინ $x \leq a$ უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლეა $[-a; a]$ შუალედი, ხოლო უტოლობის $x \geq a$ ამონახსენთა სიმრავლეა $-x \in (-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$. (თუ $a < 0$, მაშინ $x \leq a$ უტოლობას ამონახსენი არა აქვს, ხოლო $x \geq a$ უტოლობის ამონახსენია ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი $-x \in (-\infty; +\infty)$).

გავეცნოთ ახალ სიმბოლოს, რომლის საშუალებით შეიძლება რიცხვის მოდული ჩაეწეროს.

ეთქვას, გვაქვს ორელემენტიანი სიმრავლე: $\{a; b\}$ (a და b ნამდვილი რიცხვებია). $\max\{a; b\}$ აღნიშნავს ამ სიმრავლის უდიდეს ელემენტს; მაგალითად, $\max\{3; -7\} = 3$, $\max\{-5; 0\} = 0$. (ეს სიმბოლო 2-ზე მეტი ელემენტის შემცველი სიმრავლეებისთვისაც ანალოგიურად განიმარტება; მაგალითად, $\max\{-3; -1; 0; 3; 7\} = 7$).

აქედან ცხადია, რომ $|x| = \max\{x; -x\}$. მაგალითად, $\max\{3; -3\} = 3$; მასთან გვაქვს, რომ $|3| = 3$ ან $|-3| = 3$.

განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითი:

1. ვიპოვოთ $|3 - 2x| < 3$ უტოლობის ამონახსნები.

ამოხსნა. ამ უტოლობას აკმაყოფილებს ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $-3 < 3 - 2x < 3$, აქედან გვაქვს $-6 < -2x < 0$ და $0 < x < 3$.

პასუხი: $x \in (0; 3)$.

2. ვიპოვოთ $3-2x \leq 3$ უტოლობის ამონახსნები.

ამოხსნა. ამ უტოლობას აკმაყოფილებს ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $3-2x \leq 3$ ან $3-2x \geq 3$, ამრიგად: $-2x \leq -6$, $2x \geq 6$, $x \geq 3$ ან $-2x \geq 0$, $x \leq 0$.

პასუხი: $x \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$.

24.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. ფეხბურთის მატჩის დაწყებამდე 4 საათი და 40 წუთია დარჩენილი. რა სიჩქარით უნდა იმოძრაოს სტადიონიდან 22 კილომეტრით დაშორებულმა თომამ, რომ მიუსწროს მატჩის დაწყებას? (იპოვეთ უმცირესი მთელი ამონახსნი).
2. კონკურსზე გამოცხადდა გათვალისწინებულზე 30-ით ნაკლები მოსწავლე. მათ 100 ადგილიანი დარბაზის ნახევარიც კი ვერ შეავსეს. ცნობილია, რომ კონკურსზე მოსასვლელი მოსწავლეების რიცხვი იყო ლუწი და ამ რიცხვის ციფრთა ჯამი 15-ს უდრიდა. რამდენი მოსწავლე უნდა მოსულიყო კონკურსზე?
3. რეზოს 2 ბურთის საყიდლად არ ეყო 38 ლარი და 70 თეთრი, გოგის კი 2 ბურთის ყიდვის შემდეგ 50 ლარიდან ხურდაც დარჩა.
 - ა) იპოვეთ ერთი ცალი ბურთის ფასის უმცირესი მთელი მნიშვნელობა;
 - ბ) იპოვეთ ერთი ცალი ბურთის ფასის უდიდესი მთელი მნიშვნელობა.
4. სოსომ დაბადების დღის აღსანიშნავად მოწვეული სტუმრებისათვის სამახსოვროდ 50 ღია ბარათი დაამზადა, თითოეული-სათვის – თითო. მოსული სტუმრების რაოდენობა 2-ჯერ მეტო რომ ყოფილიყო, მათ ეს ბარათები არ ეყოფოდათ, 3-ჯერ ნაკლები სტუმრებისთვის კი ბარათების მეხუთედზე ნაკლები დარიგდებოდა. მოსული სტუმრების რაოდენობა არც ლუწია და არც მარტივი. იპოვეთ ეს რაოდენობა.
5. ABC სამკუთხედის BC გვერდის სიგრძე AB გვერდის გაორკეცვბულ სიგრძეზე 1 სმ-ით ნაკლებია, $AC=24$ სმ, AB გვერდის სიგ-

რძე (სანტიმეტრებში) უდიდესი შესაძლო მთელი რიცხვით გამოისახება. იპოვეთ ABC სამკუთხედის პერიმეტრი.

6. ღვეზელი ფუნთუშაზე 50 თეთრით ძვირია. ლუკამ 2 ღვეზელსა და 3 ფუნთუშაში 3 ლარზე ნაკლები გადაიხადა. ეყოფა თუ არა 1 ღვეზელისა და 1 ფუნთუშის საყიდლად მერის ლარნახევარი.

7. ამოხსენით უტოლობები:

ა) $7x-24<4$; ბ) $18-5x<12$; გ) $17-x>6-6x$; დ) $12x+0,5\leq 13x-1$.

8. ამოხსენით უტოლობები:

ა) $5(x-1)+7\leq 1-3(x+2)$; ბ) $4(x+8)-7(x-1)<12$;

გ) $4(x-1,5)-1,2>6x-1$; დ) $1,7-3(1-x)<-(x-1,9)$.

9. ამოხსენით უტოლობები:

ა) $x(x-4)-x^2>12-6x$;

ბ) $(2x-1)2x-5x<4x^2-x$;

გ) $(3x-1)^2-3x(1,2+3)>8x+177$;

დ) $(x-1)^2-(x-7)(x-3)<2x+0,8$.

10. ამოხსენით უტოლობები:

ა) $12(1-12x)+100x\geq 36-49x$;

ბ) $(0,6x-1)-0,2(3x+1)<5x-4$;

გ) $\frac{2}{3}(6x+4)-\frac{1}{6}(12x-5)\leq 4-6x$;

დ) $15x^2-(5x-2)(3x+1)<7x-8$.

11. ამოხსენით უტოლობები:

ა) $\frac{2+3x}{18}<0$;

ბ) $x-\frac{x-3}{5}+\frac{2x-1}{10}<4$;

გ) $\frac{3+x}{4}+\frac{2-x}{3}<0$;

დ) $\frac{2x-1}{4}+\frac{x+3}{2}>1$.

12. ამოხსენით უტოლობები:

ა) $\frac{x-1}{4}-1<\frac{x+1}{3}+8$;

ბ) $\frac{1-2x}{4}-2<\frac{1-5x}{8}$;

გ) $\frac{3x-1}{2}-\frac{x-1}{4}>0$;

დ) $\frac{5x}{6}-\frac{3x-1}{3}+\frac{2x-1}{2}<1$.

13. ამოხსენით უტოლობები:

ა) $\frac{7x+1}{8}-\frac{5x-1}{4}>0$;

ბ) $\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(3-x)^2}{3}>\frac{5}{6}x^2-1$;

გ) $\frac{4x+1}{3}-\frac{19-x}{2}>x$;

დ) $\frac{(y-2)^2}{18}-\frac{(y+1)^2}{45}<\frac{y^2-5y-36}{30}-1$.

14. ამოხსენით უტოლობები:

ა) $5 - \frac{x}{3} < 3\frac{1}{2} - \frac{4x+1}{8}$; ბ) $3 - \frac{3}{2}x > \frac{5}{8} - \frac{4x-3}{6}$;
გ) $x - \frac{x-1}{2} > \frac{x-3}{4} - \frac{x-2}{3}$; დ) $\frac{5x-1}{4} - \frac{3x-13}{10} > \frac{5x+1}{3}$.

15. ამოხსენით უტოლობები:

ა) $\frac{-2}{3-x} > 0$; ბ) $\frac{7}{3x+5} < 0$; გ) $\frac{-3}{2-5x} > 0$; დ) $\frac{10}{7-14x} > 0$.

16. ცვლადის რა მნიშვნელობისათვის აქვს აზრი შემდეგ გამოსახულებებს:

ა) $\sqrt{x-3}$; ბ) $\frac{1}{\sqrt{x-5}}$; გ) $\sqrt{4+2x}$; დ) $\frac{3}{\sqrt{3-6x}}$.

17. ცნობილია, რომ $2,4 < x < 4,1$ და $1,6 < y < 3,9$; იპოვეთ:

- ა) $x+y$ გამოსახულების უმცირესი მთელი მნიშვნელობა;
- ბ) $x+y$ გამოსახულების უდიდესი მთელი მნიშვნელობა;
- გ) $x-y$ გამოსახულების უმცირესი მთელი მნიშვნელობა;
- დ) $x-y$ გამოსახულების უდიდესი მთელი მნიშვნელობა.

18. ცნობილია, რომ $x > 10$ და $y < 12$; იპოვეთ $3x-2y$ გამოსახულების უმცირესი მთელი მნიშვნელობა.

19. ცნობილია, რომ $x \geq 3,6$ და $y \leq 10$; იპოვეთ $2y-4x$ გამოსახულების უდიდესი მნიშვნელობა.

20. მოცემულია $M = \{-5; -4; 7; -3; -1,8; 0; \frac{2}{3}; 0,8; 1; 2\}$ სიმრავლე; A

სიმრავლე შედგება M სიმრავლის იმ ელემენტებისაგან, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას: $5,2x+18 \geq 2,2x+21$. იპოვეთ A სიმრავლე.

21. მოცემულია $M = \{-10; -9; -7; 0; 1; 4; 5\}$ სიმრავლე; B სიმრავლე შედგება M სიმრავლის იმ ელემენტებისაგან, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას: $|x| < 7$. იპოვეთ B სიმრავლე.

22. ამოხსენით უტოლობა და ამონახსნების სიმრავლე გამოსახეთ გეომეტრიულად:

ა) $2x+5 < -1-4x$; ბ) $x+2 \leq 2-x$; გ) $x-2 \geq 2-x$.

23. ამოხსენით უტოლობა: $|1-x| > 10$.

24. ამოხსენით უტოლობა: $4|x+2| < 2x+10$.

25. ამოხსენით უტოლობა: $|x|+x-2|-x-3|+|x+1|-|x+2|<4$.
26. ამოხსენით უტოლობა: $3|x+1|\geq x+5$.
27. ამოხსენით უტოლობა: $3x+8|x|-3<0$.
28. ამოხსენით უტოლობა: $|3+x|\geq|x|$.
29. ამოხსენით უტოლობა: $|x+1|-|x|<0$.
30. ამოხსენით უტოლობა: $3|x+2|-|2x-1|\geq x$.

24.1.1. ტესტი №23

1. $5-2x>7$ უტოლობა გოლფასია
 - ა) $x>1$ უტოლობის; ბ) $x<-1$ უტოლობის;
 - გ) $x>-1$ უტოლობის; დ) $x\leq-1$ უტოლობის.
2. $-3x-3>9$ უოლობის ამონახსენთა სიმრავლეა
 - ა) $(-4;+\infty)$; ბ) $(-\infty;-4)$; გ) $(-\infty;-4]$; დ) $[-4;+\infty)$.
3. $-4x-8\geq 8$ უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლეა
 - ა) $[-4;+\infty)$; ბ) $(-4;+\infty)$; გ) $(-\infty;-4]$; დ) $(-\infty;-4)$.
4. x -ის რა მნიშვნელობებისათვის აქვს აზრი $\frac{1}{\sqrt{3-x}}$ გამოსახულება?
 - ა) $x\in(-\infty;3)$; ბ) $x\in(-\infty;-3]$; გ) $x\in(-\infty;3)$; დ) $x\in(3;+\infty)$.
5. უტოლობის $\frac{7}{3x-9}\leq 0$ ამონახსენების სიმრავლეა
 - ა) $x\in(-\infty;3)$; ბ) $x\in(-\infty;-3)$; გ) $x\in(-\infty;-3]$; დ) $x\in(-\infty;3]$.
6. ორი ნატურალური რიცხვის ჯამი 4-ზე მეტია, ჩამოთვლილთაგან რისი ტოლი შეიძლება იყოს მათი გაორკეცებული რიცხვების ნამრავლი?
 - ა) 12; ბ) 16; გ) 10; დ) 18; ე) 8.
7. რა ნიშანი უნდა ჩავსვათ $\square$ -ის ნაცვლად, რომ მოცემული ჩანაწერი $5-7x\square 12$, როცა $-1<x<2$ იქცეს ჭეშმარიტად?
 - ა) $>$; ბ) $\leq$; გ) $=$; დ) $\geq$; ე) $<$.
8. თუ $4x+y<6$ და $x>2$, მაშინ ჩამოთვლილთაგან რომელია ჭეშმარიტი?

ა) $y < -2$; ბ) $y = x$; გ) $y < -10$; დ) $y < 4$; ე) $y > 6$.

9. ოთხი მიმდევრობით აღებული ნატურალური რიცხვის ჯამი ნაკლებია 22-ზე. ჩამოთვლილთაგან რას შეიძლება უდრიდეს ამ რიცხვებს შორის უმცირესი?

ა) 4; ბ) 3; გ) 5; დ) 7; ე) 16.

10. ეანომ 2-ჯერ მეტი ამოცანა ამოხსნა, ვიდრე კობამ და 2-ჯერ ნაკლები, ვიდრე თიკომ. რისი ტოლი შეიძლება იყოს ბავშვების მიერ ამოხსნილი ამოცანების საერთო რაოდენობა?

ა) 20; ბ) 21; გ) 27; დ) 32; ე) 40.

§25. უტოლობათა სისტემა, როგორც უტოლობათა

კონიუნქცია.

ერთცვლადიან უტოლობათა სისტემის ამოხსნა

განვიხილოთ ამოცანა: 500 ტ ტევადობის აუზს წყლით ავსებენ. რამდენი ტონა წყალი უნდა ჩაისხას ამ აუზში ყოველ საათში, ისე რომ 5 საათში ნახევარზე ნაკლები წყალი არ იყოს აუზში, ხოლო 8 საათში აუზი არ შეივსოს?

ეთქვათ, ყოველ საათში აუზში x ტ წყალს ასხამენ. მაშინ 5 საათში $5x$ ტ, ხოლო 8 საათში – $8x$ ტ წყალი იქნება დაგროვილი. ამოცანის პირობის თანახმად, $5x \geq 250$ და $8x < 500$. ვეძებთ x -ის იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც ორივე პირობას აკმაყოფილებენ, ანუ წარმოადგენენ მიღებულ უტოლობათა საერთო ამონახსნების სიმრავლეს. შეიძლება, ასეც ეთქვას, ეხსნით უტოლობათა

სისტემას:
$$\begin{cases} 5x \geq 250 \\ 8x < 500. \end{cases}$$

ეს ერთცვლადიან უტოლობათა სისტემაა. ერთცვლადიან უტოლობათა სისტემა ორზე მეტი უტოლობისგანაც შეიძლება შედგებოდეს. მაგალითად:

$$\begin{cases} 3x > 9, \\ 5x \leq 40, \\ 4x > 16, \\ 7x < 36. \end{cases}$$

ამ შემთხვევაში ოთხი ერთცვლადიანი უტოლობაა განხილული და ვეძებთ x -ის ყველა იმ მნიშვნელობას, როლისთვისაც ოთხივე უტოლობა ჭეშმარიტია.

უტოლობათა სისტემა ეწოდება ამ უტოლობათა კონიუნქციას. მაშასადამე, ამბობენ რომ რამდენიმე უტოლობა ქმნის სისტემას, თუ საკითხი ისმის იმის შესახებ, რომ მოიძებნოს ამ უტოლობათა საერთო ამონახსნების სიმრავლე. უტოლობათა სისტემა ჩაიწერება ფიგურული ფორმით.

უტოლობათა რაიმე სისტემის ამონახსნი ეწოდება x -ის ყველა იმ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც ამ სისტემის თითოეული უტოლობა ჭეშმარიტია.

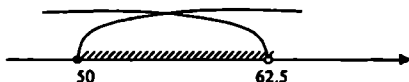
ამოვხსნათ უტოლობათა სისტემა ნიშნავს ვიპოვოთ ყველა მისი ამონახსნი ან დაეადგინოთ, რომ სისტემას არა აქვს ამონახსნი.

ორ სისტემას ეწოდება ტოლფასი, თუ მათ ერთი და იგივე ამონახსნები აქვთ, ან თითოეულს არა აქვს ამონახსნი. სისტემის თითოეული უტოლობის ტოლფასი უტოლობით შეცვლის შემდეგ მიიღება მოცემულის ტოლფასი სისტემა.

მიეუბრუნდეთ პარაგრაფის დასაწყისში დასმულ ამოცანას, ჩვენ მივიღეთ სისტემა:

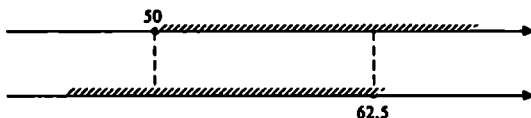
$$\begin{cases} 5x \geq 250 \\ 8x < 500 \end{cases} \text{ ეს სისტემა ტოლფასია } \begin{cases} x \geq 50 \\ x < 62,5 \end{cases} \text{ სისტემის.}$$

გამოვსახოთ რიცხვით წრფეზე ამ სისტემის თითოეული უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე:



დაშტრიხული არე გამოსახავს სისტემის ამონახსნთა სიმრავლეს.

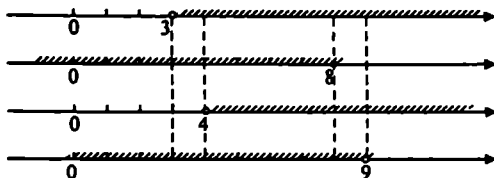
ზოგჯერ ამონახსნთა სიმრავლეებს ცალ-ცალკე გამოსახავენ რიცხვით წრფეებზე. მაგალითად, ასე:



ნახაზიან ჩანს, რომ ორივე უტოლობა ჭეშმარიტია, როცა $50 \leq x < 62,5$. ამრიგად, ამ სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე $[50; 62,5)$ რიცხვითი შუალედია.

$$\text{უტოლობათა სისტემის } \begin{cases} 3x > 9, \\ 5x \leq 40, \\ 4x > 16, \\ 7x < 36. \end{cases} \text{ ტოლფასი სისტემაა: } \begin{cases} x > 3, \\ x \leq 8, \\ x > 4, \\ x < 9; \end{cases}$$

გამოვსახოთ ამ სისტემის ამონახსნთა სიმრავლეები ცალ-ცალკე რიცხვით წრფეებზე:

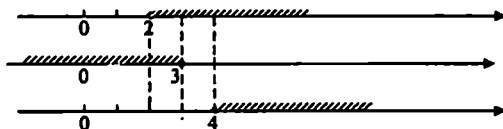


ნახაზიდან ჩანს, რომ ოთხივე უტოლობა ჭეშმარიტია, როცა $4 < x \leq 8$. ამრიგად, სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე $(4; 8]$ რიცხვითი შუალედია.

ამოხსნათ უტოლობათა სისტემა:
$$\begin{cases} 3x \geq 6, \\ 4x \leq 12, \\ 7x \geq 28. \end{cases}$$

ამოხსნა. მოცემული უტოლობათა სისტემა ტოლფასია სისტემის $\begin{cases} x \geq 2, \\ x \leq 3, \\ x \geq 4. \end{cases}$ საკოორდინატო წრფეების დახმარებით ადვილად

დაერწმუნდებით, რომ იმ რიცხვთა სიმრავლეებს, რომლებიც შესაბამისად აკმაყოფილებენ პირობებს: $x \geq 2$, $x \leq 3$ და $x \geq 4$, საერთო ელემენტი არა აქვთ. მოცემულ სისტემას ამონახსნი არა აქვს.



პასუხს ასე ჩაეწერთ: სისტემას ამონახსნი არა აქვს.

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი. უტოლობათა სისტემა შეიძლება ორმაგი უტოლობის სახით იყოს ჩაწერილი. მაგალითად, $-3 \leq 1 - 2x < -1$ ორმაგი უტოლობა $\begin{cases} 1 - 2x < -1, \\ 1 - 2x \geq -3 \end{cases}$ სისტემის სხვაგ-

ვარი ჩანაწერია. ეს სისტემა ტოლფასია $\begin{cases} x > 1, \\ x \leq 2 \end{cases}$ სისტემის, ანუ

ორივე უტოლობა ჭეშმარიტია, როცა $1 < x \leq 2$.

მოცემული $-3 \leq 1 - 2x < -1$ ორმაგი უტოლობის ამოხსნის პროცესი შეიძლება ასეც ჩაიწეროს: $-3 \leq 1 - 2x < -1 \Rightarrow -4 \leq -2x < -2 \Rightarrow 2 < 2x \leq 4 \Rightarrow 1 < x \leq 2$.

პასუხი ჩაიწერება: $x \in (1; 2]$.

ვოქვათ. a , b და c მოცემული ნატურალური რიცხვებია და გვსურს $ax+by=c$ განტოლების ყველა მთელი არაუარყოფითი ამონახსნი ვიპოვოთ.

თუ $(x_0; y_0)$ ამ განტოლების ერთ-ერთი ამონახსნია, მაშინ ნებისმიერი ამონახსნი

$$x=x_0+bt,$$

$$y=y_0-at$$

ფორმულებით მიიღება, აქ t ნებისმიერი მთელი რიცხვია. თუ გვსურს მხოლოდ არაუარყოფითი მთელი ამონახსნების პოვნა, მაშინ t -ს მიმართ ვიღებთ უტოლობათა სისტემას:

$$\begin{cases} x_0 + bt \geq 0, \\ y_0 - at \geq 0. \end{cases}$$

განვიხილოთ ერთი პრაქტიკული ამოცანა: 60 კგ და 80 კგ ტევადობის რამდენი ტომარა უნდა აივსოს 1 ტონა ხორბლის შესანახად? ტომრების რა უმცირესი რაოდენობა დაგეგმირდება?

ამოხსნა. თუ 60 კგ-იანი სავსე ტომრების რაოდენობას x -ით აღვნიშნავთ, 80 კგ-იანი ტომრებისას – y -ით, მაშინ მივიღებთ $60x+80y=1000$ განტოლებას, ანუ $3x+4y=50$. საჭიროა ამ განტოლების არაუარყოფით მთელ რიცხვებში ამოხსნა. ცხადია, რომ $3 \cdot (-50) + 4 \cdot 50 = 50$; ამიტომ $(-50; 50)$ ერთ-ერთი მთელი ამონახსნია. ყველა მთელი ამონახსნი

$$x=-50+4t,$$

$$y=50-3t$$

ფორმულებით მიიღება. არაუარყოფითი მთელი ამონახსნების მისაღებად $\begin{cases} -50+4t \geq 0, \\ 50-3t \geq 0 \end{cases}$ სისტემის ამოხსნაა საჭირო. ამ სისტემის

ამონახსნებია – $\frac{50}{4} \leq t \leq \frac{50}{3}$, აქედან $12\frac{1}{2} \leq t \leq 16\frac{2}{3}$. მთელი მნიშვნე-

ლობები, რომელიც t -მ შეიძლება მიიღოს არის – 13, 14, 15 და 16. შესაბამისი არაუარყოფითი ამონახსნებია: (2; 11), (6; 8), (10; 5) და (14; 2). მათგან პირველი ამონახსნი ტომრების უმცირეს რაოდენობას შეესაბამება: $2+11=13$.

25.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. ამოხსენით უტოლობათა სისტემები:

$$a) \begin{cases} 5(x-2) - x > 2, \\ 1 - 3(x-1) < -2; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - (x-4) < 6, \\ x > 3(2x-1) + 18; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 10(x-1) + 11 > 4x + 5(x+1), \\ 3x - 5 < 2(x-1); \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 17(3x-1) - 50x + 1 < 2(x+4), \\ 12 - 11x < 11x + 10. \end{cases}$$

2. ამოხსენით უტოლობათა სისტემები:

$$a) \begin{cases} x - 4 < 8, \\ 2x + 5 < 13, \\ 3 - x > 1; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3 - 2x < 7, \\ 7x > 7, \\ 12x > 144, \\ 1 - x < 1; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - 1 < x + 3, \\ 5x - 1 > 6 - 2x, \\ x - 3 < 0; \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 5x - 4 < 4x - 2, \\ 1 - 2x > 2 - 4x, \\ 3x - 3 < 5x - 5, \\ 17x > 0. \end{cases}$$

3. იპოვეთ m , თუ ცნობილია, რომ

$$a) \begin{cases} 5x - 7 \geq 3, \\ 2(5 + x) \leq m - (x + 4) \end{cases} \text{ უტოლობათა სისტემას ერთადერთი } \\ \text{ამონახსნი აქვს;}$$

$$b) \begin{cases} 2x + m \leq -3, \\ x \geq \frac{x-1}{2} \end{cases} \text{ უტოლობათა სისტემას ერთადერთი ამონახსნი } \\ \text{აქვს.}$$

4. a -ს რომელი მთელი მნიშვნელობისათვის ეკუთვნის $3a-6$ გამოსახულების მნიშვნელობა $(-2; 1)$ შუალედს?

5. სამკუთხედის გვერდები მთელი რიცხვებით გამოისახება (მეტრებში). ორი გვერდის სიგრძეებია: 3 მეტრი და 4 მეტრი, მესამე გვერდი მათგან განსხვავებულია. ამ სამკუთხედის პერიმეტრი 12 მეტრზე ნაკლებია. ვიპოვოთ მესამე გვერდის სიგრძე.

6. ორ აუდიტორიაში ერთად 49 სტუდენტი. პირველ აუდიტორიაში სტუდენტთა რაოდენობა მეტია მეორე აუდიტორიაში სტუდენტთა რაოდენობაზე. მეორე აუდიტორიის სტუდენტთა გა-

ოთხეცეული რაოდენობა მეტია პირველაუდიტორიაში 66-ით გადიდებულ სტუდენტთა რაოდენობაზე. რამდენი სტუდენტია თითოეულ აუდიტორიაში?

7. 66 ცალ ვაშლს უნაწილებენ ბავშვებს. გოგონებს აძლევენ 4 ცალ ვაშლს, ხოლო ვაჟებს კი 3 ცალს. რამდენ გოგონას და ვაჟს შეიძლება გაუნაწილდეს ვაშლები?
8. ტვირთის გადამზიდ ფირმას 3 ტონა და 4 ტონა ტვირთის ტევადობის გადამზიდი მანქანები ჰყავს. რამდენი 3 ტ და 4 ტ ტევადობის მანქანა დაჭირდება მას 34 ტონა ტვირთის გადასაზიდად?
9. A და B პუნქტებს შორის მანძილი 320 კილომეტრია. A პუნქტიდან გამოსული ავტომობილის სიჩქარე 20 კმ/სთ-ით მეტია B პუნქტიდან გამოსული ავტომობილის სიჩქარეზე. ისინი პუნქტებიდან ერთდროულად გამოვიდნენ და ერთმანეთს 2 საათზე ნაკლებ დროში შეხვდნენ. სიჩქარის შეზღუდვა ამ გზაზე 90 კმ/სთ-ია. ა) მოასწრებს თუ არა B -დან გამოსული ავტომობილი A -ში ჩასვლას 4,5 საათში? ბ) მოასწრებს თუ არა B -დან გამოსული ავტომობილი A -ში ჩასვლას 4,75 საათში?
10. ფილმის ჩვენებას დაესწრო 300-ზე ნაკლები მაყურებელი, რაც დარიგებული მოსაწვევების ოდენობაზე 120-ით ნაკლები აღმოჩნდა. მოსაწვევების ოდენობა 12-ის ჯერადია. ორჯერ მეტი მოსაწვევი რომ დარიგებულიყო, მაშინ მათი ოდენობა 800-ს გადააჭარბებდა. იპოვეთ ფილმის ჩვენებაზე მოსული მაყურებლების ოდენობა.
11. 120 ლიტრი ტევადობის ავზში A მილით ყოველ წუთში 12 ლიტრი წყალი ჩაედინება. B მილით ავზიდან წყალი გაედინება. თუ ცარიელი ავზის ორივე მილს ერთდროულად გაეხსნით, მაშინ 10 წუთში ავზში ნახევარზე ნაკლები და მეოთხედზე მეტი წყალი დაგროვდება. ა) წუთში რამდენი ლიტრი წყალი გაედინება B მილიდან, თუ იგი მთელი კენტი რიცხვია? ბ) წუთში რამდენი ლიტრი წყალი გაედინება B მილიდან, თუ იგი მთელი ლუწი რიცხვია?
12. დამქირავებელი დაქირავებულს საათში 10 ლარს უხდის. დაქირავებული დღეში 8 საათს მუშაობს; თუ იგი დამატებით

იმუშავენ, მაშინ მას დამატებით საათში ორჯერ მეტს გადაუხდიან. მაქსიმუმ რამდენი საათი უნდა იმუშაოს დაქირავებულმა კვირაში (ხუთი სამუშაო დღე), ისე რომ მის მიერ აღებული თანხა 500 ლარზე მეტი არ იყოს?

13. კატარღის სირქარე მდგარ წყალში 15 კმ/სთ-ის ტოლია, მდინარის დინების სირქარე კი – 3 კმ/სთ-ია. რა მაქსიმალური მანძილით შეიძლება გადაადგილდეს კატარღა A პუნქტიდან ა) მდინარის მიმართულებით, ისე რომ იგი იმავე A პუნქტში ბრუნდება და ამ მგზავრობას 5 საათზე მეტი დრო არ დაჭირდება? ბ) მდინარის საწინააღმდეგო მიმართულებით, ისე რომ იგი იმავე A პუნქტში ბრუნდება და ამ მგზავრობას 2 საათზე მეტი დრო არ დაჭირდება?
14. მსროლელი 10 გასროლას ასრულებს. მიზანში ყოველ მოხვედრაზე მსროლელს 3 ქულა ეთვლება, ხოლო ყოველ აცდენაზე კი 1 ქულა აკლდება. მინიმუმ რამდენჯერ უნდა მოახვედროს მიზანს მსროლელმა, რომ მან 15 ქულაზე არანაკლები დააგროვოს?
15. ფაიფურის დასამზადებლად იყენებენ თიხას, თაბაშირსა და სილას, რომელთა მასებიც პროპორციულია 25,1 და 2 რიცხვებისა. რამდენი კილოგრამი თიხა, თაბაშირი და სილა იქნება საჭირო არანაკლებ 200 კგ და არაუმეტეს 250 კგ ფაიფურის დასამზადებლად, თუ მათი გამომსახველი რიცხვები მთელი რიცხვებია?
16. მართკუთხედის სიგრძე 2-ჯერ მეტია მის სიგანეზე. მართკუთხედის პერიმეტრი 144 სმ-ზე ნაკლებია. იპოვეთ მართკუთხედის სიგრძე და სიგანე, თუ მათი რიცხვითი მნიშვნელობები მთელი რიცხვებით გამოისახებიან სანტიმეტრებში და მაქსიმალურია ყველა შესაძლო მნიშვნელობებიდან.
17. მართკუთხედის სიგრძე 17 სმ-ია, ხოლო სიგანე – 15 სმ. იპოვეთ ა) იმ კვადრატის გვერდის სიგრძე, რომლის პერიმეტრი ნაკლებია მოცემული მართკუთხედის პერიმეტრზე და მთელი რიცხვით გამოისახება სანტიმეტრებში, მასთან უდიდესია ყველა შესაძლო მნიშვნელობებიდან; ბ) იმ კვადრატის გვერდის სიგრძე, რომლის ფართობი ნაკლებია მოცემული მართკუთხედის ფართობზე და მთელი რიცხვით გამოისახება,

მასთან უდიდესია ყველა შესაძლო მნიშვნელობებიდან.

18. და ძმაზე 6 წლით უფროსია. მათი წლოვანებათა გამომსახველი რიცხვების ჯამი 20-ზე მეტია. რამდენი წლისაა თითოეული მათგანი, თუ მათი წლოვანებების რიცხვები მთელია და უმცირესია ყველა შესაძლო მნიშვნელობებიდან?

19. იპოვეთ შემდეგი გამოსახულებების განსაზღვრის არეები:

ა) $\sqrt{20-9x} < x$; ბ) $2-x > \sqrt{3x-2}$;
გ) $\sqrt{2x+1} < 2x-1$; დ) $3x+1 > \sqrt{6x+5}$

20. აქვს თუ არა $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-5} \geq -5$ უტოლობას ამონახსნი?

21. ამოხსენით ორმაგი უტოლობა:

ა) $-7 \leq 5-3x \leq -1$; ბ) $1,4 \leq 10,4+3x \leq 7,4$;
გ) $-0,5 < 1-9x \leq 4$; დ) $10 \leq 5-4x < 12,4$.

22. ორმაგი უტოლობა ჩაწერეთ სისტემის სახით და ამოხსენით ეს სისტემა:

ა) $-1 \leq 2x+1 < 10$; ბ) $2,4 < 10,4-8x < 98,4$;
გ) $-1 < 100-40x < 120,5$; დ) $4 \leq 2+x \leq 25,2$.

23. ქეთიმ დაბადების დღის აღსანიშნავად მოწვეული სტუმრებისათვის სამახსოვროდ 40 ღია ბარათი დაამზადა, თითოეული საათის – თითო. მოსული სტუმრების რაოდენობა 10-ით მეტი რომ ყოფილიყო, მათ ეს ბარათები არ ეყოფოდათ, 28-ით ნაკლები სტუმრისთვის კი ბარათების მეათედზე ნაკლები დარიგდებოდა. იპოვეთ მოსული სტუმრების რაოდენობა.

24. $[x]$ -ით აღნიშნულია x რიცხვის მთელი ნაწილი, ანუ მთელი რიცხვი, რომელიც არ აღემატება x -ს და მეტია $(x-1)$ -ზე. ამოხსენით განტოლებები და უტოლობები:

ა) $[x]=3$ ბ) $2 \leq [x] \leq 4$; გ) $[2x-1]=5$; დ) $1 < [3+4x] \leq 4$.

25. ცნობილია, რომ $AB=8$ სმ და AC მონაკვეთის სიგრძე BC მონაკვეთის სიგრძეზე 3-ჯერ მეტია. დაწერეთ იმის პირობა, რომ A , B და C წერტილები არ მდებარეობენ ერთ წრფეზე.

26. ამოხსენით უტოლობები: ა) $2 < |x| < 3$; ბ) $-2 < |x| \leq 10$.

27. ამოხსენით უტოლობები: ა) $1 \leq |x| < 7,5$; ბ) $0 < |x| \leq 12$.

28. ამოხსენით უტოლობები: ა) $0 \leq |15+12x| < 20$; ბ) $0 < |3-4x| < 15$.

29. ამოხსენით უტოლობები:

- ა) $1 \leq |x-1| \leq 5$; ბ) $10 < |24x-20| \leq 20$; გ) $22 < |7-3x| \leq 26$.
30. a -ს რა მნიშვნელობისათვის არა აქვს ამონახსნი უტოლობას:
 ა) $|x| < a$; ბ) $|x| \leq a-8$; გ) $15 - |x+1| > 4a$.

25.1.1. ტესტი №24

- მოცემული ორმაგი უტოლობა $-7,9 < x < 7,9$ შეიძლება ასე ჩაეწეროს:
 ა) $|x| > 7,9$; ბ) $|x| \geq 7,9$; გ) $|x| < 7,9$; დ) $|x| \leq 7,9$.
- უტოლობა $|x| < 9,2$ შეიძლება ჩაეწეროს უტოლობათა სისტემის სახით შემდეგნაირად:
 ა) $\begin{cases} x < 9,2; \\ x > -9,2; \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} x < 9,2; \\ x < -9,2; \end{cases}$ გ) $\begin{cases} x < 9,2; \\ x \geq -9,2; \end{cases}$ დ) $\begin{cases} x < 9,2; \\ x \leq -9,2. \end{cases}$
- a -ს მნიშვნელობები, რომლებისთვისაც $\begin{cases} x > 5 \\ x < a \end{cases}$ სისტემას არა აქვს ამონახსნი, არის
 ა) 5-ზე მეტი რიცხვები;
 ბ) რიცხვები, რომლებიც 5-ს არ აღემატება;
 გ) 7-ზე მეტი რიცხვები;
 დ) 10-ზე მეტი რიცხვები.
- თუ $-3 < 4-5x < 2$, მაშინ
 ა) $-7 < x < -2$; ბ) $-0,4 < x < 1,4$; გ) $0,4 < x < 1,4$; დ) $-1,4 < x < -0,4$.
- თუ $\frac{x-5}{2}$ წილადის მნიშვნელობა ეკუთვნის $[1; 5]$ შუალედს, მაშინ
 ა) $1 \leq x \leq 5$; ბ) $2 \leq x \leq 10$; გ) $7 \leq x \leq 15$; დ) $1 < x < 5$.
- აქვთ 50 კგ და 60 კგ ტევადობის ტომრები, მინიმუმ რამდენი ტომარა უნდა აივსოს 1120 კილოგრამი ხორბლის შესანახად?
 ა) 22 ტომარა; ბ) 21 ტომარა; გ) 20 ტომარა;
 დ) 19 ტომარა; ე) 18 ტომარა.
- სისტემის $\begin{cases} 4x-1 > 7 \\ 5-6x > -13 \end{cases}$ ამონახსნთა სიმრავლეა:

ა) (2; 3); ბ) $(-\infty; 3)$; გ) $(2; +\infty)$; დ) $(-13; 7)$.

$$8. \text{ ამოხსენით უტოლობათა სისტემა: } \begin{cases} 3x \geq 15 \\ 1-x > 3x-31 \\ 6-2x \leq 4 \end{cases}$$

ა) $x \in [1; 8)$; ბ) $x \in [1; 5]$; გ) $x \in [5; +\infty)$; დ) $x \in [5; 8)$.

9. a -ს რა მნიშვნელობებისთვის არის $3x-2a=5$ განტოლების ამონახსნი 10-ზე ნაკლები არაუარყოფითი რიცხვი?

ა) $a \in [-2,5; 12,5)$; ბ) $a \in [-5; 25)$; გ) $a \in [0; 10)$; დ) $a \in [-2,5; 10,5)$.

10. ორ ნაეში ერთად 9 მგზავრი ზის. პირველ ნაეში უფრო მეტი მგზავრია, ვიდრე მეორეში. მეორე ნაეში მგზავრების გაოთხეცებული რაოდენობა მეტია პირველ ნაეში მგზავრების გასამეცებულ რაოდენობაზე. რამდენი მგზავრი ზის პირველ ნაეში?

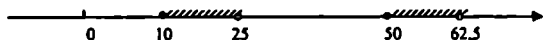
ა) 6; ბ) 7; გ) 5; დ) 8.

§26. უტოლობათა ერთობლიობა, როგორც უტოლობათა დიზიუნქცია. ორცვლადიან უტოლობათა სისტემის ამოხსნა. ორცვლადიან უტოლობათა ერთობლიობის ამოხსნა

განვიხილოთ ამოცანა: 500 ტ ტევადობის აუზს წყლით ავსებენ. რამდენი ტონა წყალი უნდა ჩაისხას ამ აუზში ყოველ საათში, ისე რომ 5 საათში ნახევარზე ნაკლები წყალი არ იყოს აუზში, ხოლო 8 საათში აუზი არ შეივსოს, ან 1 საათში ორმოცდამეათედზე ნაკლები წყალი არ იყოს აუზში, ხოლო 2 საათში აუზის მეთედი არ შეივსოს?

შემოვიღოთ აღნიშვნა: ეთქვას, ყოველ საათში აუზში x ტონა წყალს ასხამენ. ამოცანის პირველი ნაწილი ამოხსნილი გვაქვს წინა პარაგრაფში და მივიღეთ: $50 \leq x < 62,5$. ამოცანის მეორე ნაწილისათვის გვექნება სისტემა:
$$\begin{cases} x \geq 10 \\ 2x < 50. \end{cases}$$
 ამ სისტემის ამოხსნა გვაძლევს: $10 \leq x < 25$.

გამოვსახოთ რიცხვით წრფეზე ამ უტოლობათა სისტემების ამონახსნთა სიმრავლეები:



დაშტრიხული არეები გამოსახავს ამოცანის ამონახსნთა სიმრავლეს.

ამრიგად, ამოცანის ამონახსნია მიღებული სისტემების ამონახსნთა გაერთიანება: $x \in [10; 25) \cup [50; 62,5)$.

უტოლობათა ერთობლიობა ეწოდება ამ უტოლობათა დიზიუნქციას. მაშასადამე, ამბობენ, რომ რამდენიმე უტოლობა ქმნის ერთობლიობას, თუ საკითხი ისმის იმის შესახებ, რომ მოიძებნოს ცვლადის იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლის ყოველი ელემენტი დააკმაყოფილებს მოცემული ერთობლიობის ერთ უტოლობას მაინც. უტოლობათა ერთობლიობა ჩაიწერება კვადრატული ფორჩხილის საშუალებით. მაგალითად, თუ მოცემულია უტოლობები: $2 < x \leq 5$, $x - 2 > 5$ და $x + 1 < 2$; მაშინ მათი ერთობლიობა

ჩაიწერება შემდეგნაირად:
$$\begin{cases} 2 < x \leq 5; \\ x - 2 > 5; \text{ და } \text{მისი ამონახსნებია:} \\ x + 1 < 2 \end{cases}$$

$x \in (-\infty; 1) \cup (2; 5] \cup (7; +\infty)$.

ზოგადად, თუ მოცემულია ორი ერთცვლადიანი უტოლობა: $f_1(x) > g_1(x)$ და $f_2(x) > g_2(x)$; განვიხილოთ ამ უტოლობათა დიზიუნქცია, ანუ ეს ორი უტოლობა შევაერთოთ „ან“ კავშირით: $(f_1(x) > g_1(x)) \vee (f_2(x) > g_2(x))$. მიღებულ პრედიკატს უტოლობათა ერთობლიობას უწოდებენ და ასე ჩაიწერება:
$$\begin{cases} f(x_1) > g_1(x), \\ f(x_2) > g_2(x). \end{cases}$$

როგორც აღვნიშნეთ, ერთცვლადიან უტოლობათა ერთობლიობის ამონახსნი არის ცვლადის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ერთობლიობის ერთი მაინც უტოლობა გადაიქცევა ჭეშმარიტ რიცხვით უტოლობად.

უტოლობათა ერთობლიობის ამონახსნთა სიმრავლე არის მასში შემავალი თითოეული უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეების გაერთიანება.

ამოვხსნათ უტოლობათა ერთობლიობა ნიშნავს ამოვხსნათ ამ ერთობლიობის ყოველი უტოლობა და ვიპოვოთ თითოეული უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეების გაერთიანება.

ეთქვათ, მოცემულია $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ ან $f(x)g(x) > 0$ უტოლობები. ამ

უტოლობების ტოლფასია უტოლობათა სისტემების დიზიუნქცია:

$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0; \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$ ეს დიზიუნქცია შეიძლება ჩავწეროთ ასე:

$$\begin{cases} \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{cases}$$

განვიხილოთ მაგალითები:

1. ამოვხსნათ $\frac{3x+7}{x+1} > -1$ უტოლობა.

ამოხსნა. მოვახდინოთ გარდაქმნა: $\frac{3x+7}{x+1}+1>0 \Rightarrow \frac{4x+8}{x+1}>0$.

წილადი რომ დადებითი იყოს საჭიროა, მრიცხველიც და მნიშვნელობაც ერთდროულად დადებით ან უარყოფით რიცხვებს წარმოადგენდნენ, ამიტომ გვაქვს უტოლობათა სისტემების ერთობ-

$$\text{ლიობა: } \begin{cases} 4x+8>0, \\ x+1>0; \\ 4x+8<0, \\ x+1<0. \end{cases} \text{ აქედან გვაქვს: } \begin{cases} x \in (-1; +\infty); \\ x \in (-\infty; -2). \end{cases}$$

ამრიგად, უტოლობის ამონახსნებია: $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$

2. $[x]$ -ით აღნიშნულია x რიცხვის მთელი ნაწილი, ანუ მთელი რიცხვი, რომელიც არ აღემატება x -ს და მეტია $(x-1)$ -ზე. მაგალითად, $[3,217]=3$; $[-0,3]=-1$; $[0,3]=0$. ამოვხსნათ ერთობლიობა:

$$\begin{cases} [x]=1; \\ [x]=-1. \end{cases}$$

ამოხსნა. ერთობლიობის პირველი განტოლების ამონახსნია $-x \in [1; 2)$, ხოლო მეორე განტოლების ამონახსნია $x \in [-1; 0)$. ამრიგად, ერთობლიობის ამონახსნებია: $x \in [-1; 0) \cup [1; 2)$.

3. ამოვხსნათ $|2x-3|>1$ უტოლობა.

ამოხსნა. ამოვხსნათ შემდეგი ერთობლიობა: $\begin{cases} 2x-3>1, \\ 2x-3<-1. \end{cases}$ აქედან

$$\text{გვს: } \begin{cases} x>2, \\ x<1. \end{cases} \text{ ამრიგად, უტოლობის ამონახსნებია: } x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty).$$

$$x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty).$$

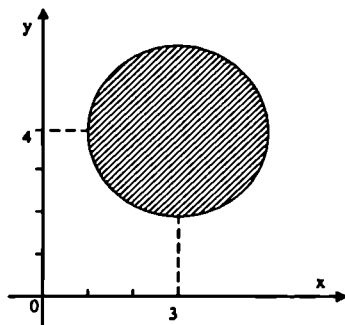
$f(x, y)>0, f(x, y)\geq 0, f(x, y)<0, f(x, y)\leq 0$ სახის უტოლობებს, სადაც $f(x, y)$ არის x -ისა და y -ის მიმართ ცვლადიანი გამოსახულება, ორცვლადიანი უტოლობები ეწოდებათ. მაგალითად, ორცვლადიანი უტოლობებია: $7x-5y+3<0, (x-1)^2+y\leq 0, 3x^2+x-y^2+5xy>0, (x-y)^2-x\geq 0$ და ა.შ.

ორცვლადიანი უტოლობის ამონახსნი ეწოდება ცვლადების $(a; b)$ დალაგებულ წყვილს, რომლისთვისაც მოცემული უტოლო-

ბა ჰეშმარიტია. მაგალითად, თუ $(a; b)$ წყვილი არის $f(x; y) \geq 0$ უტოლობის ამონახსნი, მაშინ $f(a; b) \geq 0$ უტოლობა ჰეშმარიტი რიცხვითი უტოლობაა.

ორცვლადიანი უტოლობით საკოორდინატო სიბრტყეზე შეიძლება განისაზღვროს რაიმე გეომეტრიული ფიგურა. კერძოდ, ის ფიგურები, რომელთა ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები მოცემული უტოლობის ამონახსნებია.

მაგალითად, $(x-3)^2 + (y-4)^2 \leq 4$. ეს არის წრის წერტილების შემცველი უტოლობა, ამ წრის ცენტრი მოთავსებულია $(3; 4)$ წერტილში, ხოლო რადიუსი 2-ის ტოლია.



ვთქვათ, მოცემულია $f(x; y) > 0$ და $g(x; y) > 0$ ორცვლადიანი უტოლობები განვიხილოთ ამ უტოლობათა კონიუნქცია ($f(x; y) > 0$) $\wedge$ ($g(x; y) > 0$); მიღებულ პრედიკატს ორცვლადიან უტოლობათა სისტემა ეწოდება და იგი შეიძლება ასე ჩაეწეროს: $\begin{cases} f(x; y) > 0; \\ g(x; y) > 0. \end{cases}$ ამ სისტემის ამონახსნი

ეწოდება რიცხვთა დალაგებულ წყვილს, რომელიც აკმაყოფილებს ამ სისტემის თითოეულ უტოლობას. სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე არის ამ სისტემაში შემავალი უტოლობების ამონახსნთა სიმრავლეების თანაკვეთა.

განვიხილოთ მაგალითი:

$$\text{ამოხსნათ } \begin{cases} -2x + y - 2 \leq 0, \\ 2x + y - 4 \leq 0, \\ -0,5x + y + 2 \geq 0 \end{cases} \text{ ორცვლადიან უტოლობათა სისტემა.}$$

ამოხსნა. მოცემული სისტემა ტოლფასია სისტემის -

$$\begin{cases} y \leq 2x + 2, \\ y \leq -2x + 4, \\ y \geq 0,5x - 2. \end{cases} \text{ მიღებული შედეგები გამოვსახოთ საკოორდინატო}$$

სიბრტყეზე:

მოცემული უტოლობათა სისტემის ამონახსნი დაშტრიხული

სამკუთხედის წერტილთა სიმრავლის ელემენტებია.

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი: ამოვხსნათ

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 16, \\ -x + y - 1 \leq 0, \\ x - y - 1 \leq 0 \end{cases}$$

უტოლობათა სისტემა.

ამოვხსნა. მოცემული სისტემა ტოლ-

ფასია

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 16, \\ y \leq x+1, \\ y \geq x-1. \end{cases}$$

უტოლობათა სისტემის. შედეგები გამოვსახოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე:

მოცემული უტოლობათა სისტემის ამონახსნი დაშტრიხული არის წერტილთა სიმრავლის ელემენტებია.

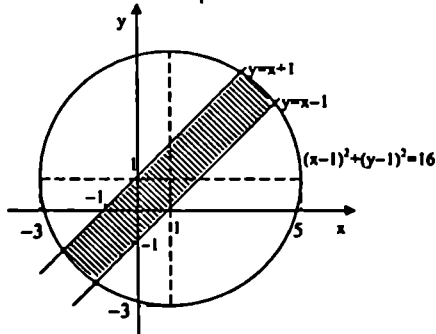
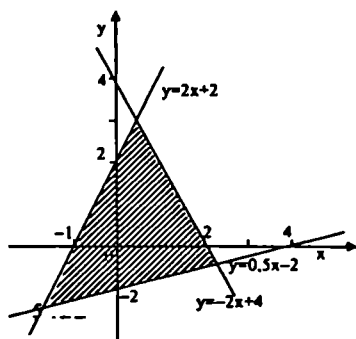
როგორც ვხედავთ, ორცვლადიანი უტოლობის შემთხვევაში, ამოხსნის და ამონახსნთა ჩვენებისას ეკმაყოფილებით აღწერის გეომეტრიული ხერხით.

დავუშვათ, მოცემულია $f(x; y) > 0$ და $g(x; y) > 0$ ორცვლადიანი უტოლობები. განვიხილოთ ამ უტოლობათა დიზიუნქცია $(f(x; y) > 0) \vee (g(x; y) > 0)$; მიღებულ პრედიკატს ორცვლადიან უტოლობათა ერთობლიობა ეწოდება და იგი შეიძლება ასე ჩაწეროთ:

$\begin{cases} f(x; y) > 0; \\ g(x; y) > 0. \end{cases}$ ამ ერთობლიობის ამონახსნი ეწოდება რიცხვთა და-

ლაგებულ წყვილს, რომელიც ამ ერთობლიობის ერთ უტოლობას მაინც აკმაყოფილებს. სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე არის ამ ერთობლიობაში შემავალი უტოლობების ამონახსნთა სიმრავლეების გაერთიანება.

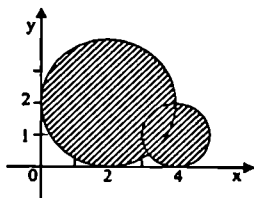
განვიხილოთ მაგალითი. ამოვხსნათ

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4; \\ (x-4)^2 + (y-1)^2 \leq 1 \end{cases} \quad \text{ორ-}$$


ცვლადიან უტოლობათა ერთობლიობა.

ამოხსნა. განვიხილოთ გეომეტრიული ინტერპრეტაცია:

მოცემული უტოლობათა ერთობლიობის ამონახსნი დაშტრიხული არის წერტილთა სიმრავლის ელემენტებია.



26.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. დიზიუნქციისა და კონიუნქციის გამოყენებით ამოხსენით უტოლობები:

ა) $(x+1)(x-3) > 0$; ბ) $(x+1)(x+4) > x+4$; გ) $\frac{2-x}{x-3} \geq 0$; დ) $\frac{x+1}{1-x} < 0$.

2. ამოხსენით უტოლობები:

ა) $|x-1| > 2$; ბ) $|x-4| \leq 7$; გ) $|3x+1| \geq 7$; დ) $|2x+1| < 5$.

3. ამოხსენით უტოლობათა ერთობლიობები:

ა) $\begin{cases} x-1 > 15; \\ 2x-3 < 5; \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 3x-1 > 8; \\ 2-0,6x < 0,8. \end{cases}$

4. ამოხსენით უტოლობათა ერთობლიობები:

ა) $\begin{cases} \frac{2-3x}{12} < 0; \\ \frac{3+x}{7} > 0; \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} \frac{12(x-4)}{7} > 0; \\ \frac{x-2}{6} > 0. \end{cases}$

5. ამოხსენით უტოლობათა ერთობლიობები:

ა) $\begin{cases} 2(4x-7)+5 \geq x+5(x+7); \\ 3(x-1)-8 < 3+5(2x-1); \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 8(x-1)+3(x+2) \geq 9x+3; \\ 7x-3(2x+5) < 2(x-8). \end{cases}$

6. ამოხსენით უტოლობათა ერთობლიობები:

ა) $\begin{cases} \frac{2x-4}{3} > \frac{x+16}{6}; \\ \frac{x+1}{2} + 3 < x - 6\frac{1}{4}; \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} \frac{5-x}{4} - 9 < \frac{2x-1}{3}; \\ \frac{3+4x}{2} > 0,3(x+12); \\ \frac{6-5x}{3} + \frac{3x-1}{2} < 7-x. \end{cases}$

7. ამოხსენით უტოლობათა ერთობლიობები:

$$\text{ა) } \begin{cases} \frac{x-7}{4} > \frac{3x-5}{4} - \frac{5}{2}; \\ \frac{x+1}{4} < 2 - \frac{1-2x}{2}; \end{cases} \quad \text{ბ) } \begin{cases} x+2 < \frac{2x-8}{6} - \frac{18-4x}{3}; \\ 9 - \left(\frac{x-2}{4} + \frac{2}{3} \right) > x. \end{cases}$$

8. კოორდინატთა სიბრტყეზე დაშტრიხეთ შემდეგ უტოლობათა ამონახსნთა სიმრავლეები:

$$\text{ა) } x^2 + y^2 \leq 9; \quad \text{ბ) } (x+2)^2 + (y-1)^2 \leq 9; \quad \text{გ) } (x-3)^2 + (y+1)^2 \leq 4; \quad \text{დ) } (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 16.$$

9. კოორდინატთა სიბრტყეზე დაშტრიხეთ შემდეგ უტოლობათა ამონახსნთა სიმრავლეები:

$$\text{ა) } |x| + |y| \leq 1; \quad \text{ბ) } 2 \leq |x| + |y| \leq 4; \quad \text{გ) } |x+2| + y < 3; \quad \text{დ) } |x+2| + |y-2| \leq 5.$$

10. ამოხსენით შემდეგი უტოლობანი და ამოხსნას მიეცით გეომეტრიული ილუსტრაცია:

$$\text{ა) } 2x + y + 1 > 0; \quad \text{ბ) } 3x - y > -5.$$

11. ამოხსენით შემდეგი უტოლობანი და ამოხსნას მიეცით გეომეტრიული ილუსტრაცია:

$$\text{ა) } x > 2y - 1; \quad \text{ბ) } y > |x - 3|.$$

12. ამოხსენით შემდეგი უტოლობანი და ამოხსნას მიეცით გეომეტრიული ილუსტრაცია:

$$\text{ა) } |x+y| \leq 1; \quad \text{ბ) } |x-y| \leq 1; \quad \text{გ) } y \leq -|x+1|; \quad \text{დ) } y \geq -|x-1|.$$

13. ამოხსენით შემდეგი უტოლობანი და ამოხსნას მიეცით გეომეტრიული ილუსტრაცია:

$$\text{ა) } y \leq 1 - 2|x|; \quad \text{ბ) } y \geq 2|x| - 1; \quad \text{გ) } y \geq 2|x-1| - 2.$$

14. კოორდინატთა სიბრტყეზე დაშტრიხეთ შემდეგ უტოლობათა სისტემების ამონახსნთა სიმრავლეები:

$$\text{ა) } \begin{cases} 2x + y > 1, \\ x - y > 3; \end{cases} \quad \text{ბ) } \begin{cases} 2x + 3y \geq 1, \\ 4x + 6y \leq 2; \end{cases} \quad \text{გ) } \begin{cases} x + y > 1, \\ 4x + 4y < 8; \end{cases} \quad \text{დ) } \begin{cases} 3x + y > 4, \\ 9x + 3y < 9. \end{cases}$$

15. კოორდინატთა სიბრტყეზე დაშტრიხეთ შემდეგ უტოლობათა სისტემების ამონახსნთა სიმრავლეები:

$$\text{ა) } \begin{cases} y - x - 2 > 0, \\ y - 2x + 3 < 0; \end{cases} \quad \text{ბ) } \begin{cases} 3x + 5y > 7, \\ 4x + 5y < 9; \end{cases} \quad \text{გ) } \begin{cases} -x + 5y < -1, \\ 3x - y > -5; \end{cases} \quad \text{დ) } \begin{cases} y > -x + 2, \\ 2x > y - 1. \end{cases}$$

16. გეომეტრიული ხერხით ამოხსენით შემდეგ უტოლობათა სისტემები:

$$\text{ა) } \begin{cases} 2 \leq |x| + |y| \leq 3, \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1; \end{cases} \quad \text{ბ) } \begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4, \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 \leq 4; \end{cases} \quad \text{გ) } \begin{cases} y \leq x, \\ y \geq x-2, \\ y \leq -x+2, \\ y \geq -x-2. \end{cases}$$

17. გეომეტრიული ხერხით ამოხსენით შემდეგ უტოლობათა სისტემები:

$$\text{ა) } \begin{cases} y \leq 2 - |x|, \\ y \geq x, \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 \geq 4; \end{cases} \quad \text{ბ) } \begin{cases} y \geq |x|, \\ y \leq 3 - |x|; \end{cases} \quad \text{გ) } \begin{cases} x^2 + (y-2)^2 \leq 4, \\ y \geq x+1. \end{cases}$$

18. გეომეტრიული ხერხით ამოხსენით შემდეგ უტოლობათა სისტემები:

$$\text{ა) } \begin{cases} xy \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9; \end{cases} \quad \text{ბ) } \begin{cases} xy \leq 0, \\ y \leq x+2, \\ y \geq x-1; \end{cases} \quad \text{გ) } \begin{cases} |x| + |y| \leq 4, \\ xy \geq 0. \end{cases}$$

19. გეომეტრიული ხერხით ამოხსენით შემდეგ უტოლობათა სისტემები:

$$\text{ა) } \begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 \leq 4, \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4, \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 9; \end{cases} \quad \text{ბ) } \begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 16, \\ x^2 + (y-2)^2 \geq 1, \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 \geq 1; \end{cases}$$

$$\text{გ) } \begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 9, \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 \geq 4. \end{cases}$$

20. გეომეტრიული ხერხით ამოხსენით შემდეგ უტოლობათა სისტემები:

$$\text{ა) } \begin{cases} y \geq 2x+2, \\ y \geq 3, \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 9; \end{cases} \quad \text{ბ) } \begin{cases} y \geq 1, \\ y \leq 4, \\ (x+1)^2 + (y-3)^2 \leq 9; \end{cases} \quad \text{გ) } \begin{cases} y \geq 0, \\ y \leq 2, \\ x \geq -1, \\ x \leq 3. \end{cases}$$

21. გეომეტრიული ხერხით ამოხსენით შემდეგ უტოლობათა სისტემები:

$$\begin{array}{lll}
 \text{ა)} \begin{cases} y \geq |x| - 2, \\ y \leq 2, \\ x \geq -2, \\ x \leq 3; \end{cases} & \text{ბ)} \begin{cases} y \geq |x| - 1, \\ x^2 + y^2 \geq 4, \\ y \leq 3; \end{cases} & \text{გ)} \begin{cases} y \leq 3 - |x|, \\ x^2 + (y+1)^2 \geq 4, \\ y \geq -4. \end{cases}
 \end{array}$$

22. გეომეტრიული ხერხით ამოხსენით უტოლობათა ერთობლიობები:

$$\begin{array}{lll}
 \text{ა)} \begin{cases} |x+1| + |y-3| \geq 2, \\ (x+1)^2 + (y-3)^2 \leq 2; \end{cases} & \text{ბ)} \begin{cases} |x| + |y-2| \geq 2, \\ |x-1| + |y-1| \leq 5; \end{cases} & \text{გ)} \begin{cases} |x+1| + |y-1| \leq 3, \\ y \geq x. \end{cases}
 \end{array}$$

23. გეომეტრიული ხერხით ამოხსენით უტოლობათა ერთობლიობები:

$$\begin{array}{ll}
 \text{ა)} \begin{cases} |x| + |y| \leq 2, \\ (x-3)^2 + y^2 \leq 2; \end{cases} & \text{ბ)} \begin{cases} |x-1| + |y+1| \leq 3, \\ |x-1| + |y-2| \leq 2. \end{cases}
 \end{array}$$

24. გეომეტრიული ხერხით ამოხსენით უტოლობათა ერთობლიობები:

$$\begin{array}{ll}
 \text{ა)} \begin{cases} x^2 + (y-2)^2 \leq 4, \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4, \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 4; \end{cases} & \text{ბ)} \begin{cases} |x| + |y| \leq 3, \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 4, \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 4. \end{cases}
 \end{array}$$

25. გეომეტრიული ხერხით ამოხსენით უტოლობათა ერთობლიობები:

$$\begin{array}{ll}
 \text{ა)} \begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4, \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 4, \\ (x-5)^2 + (y-2)^2 \leq 4, \\ (x-5)^2 + (y+1)^2 \leq 4; \end{cases} & \text{ბ)} \begin{cases} |x+1| + |y-2| \leq 2, \\ |x+1| + |y| \leq 2, \\ |x-3| + |y| \leq 2. \end{cases}
 \end{array}$$

26. გეომეტრიული ხერხით ამოხსენით უტოლობათა სისტემების ერთობლიობები:

$$\begin{array}{ll}
 \text{ა)} \begin{cases} \begin{cases} y \leq x+3, \\ y \leq -x+3, \end{cases} \\ \begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 9, \\ (x+1)^2 + (y+2)^2 \leq 9; \end{cases} \end{cases} & \text{ბ)} \begin{cases} \begin{cases} x \geq -1, \\ x \leq 2, \\ y \leq 3, \\ y \geq 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 1, \\ x \leq 3, \\ y \geq 2, \\ y \leq 4. \end{cases} \end{cases}
 \end{array}$$

27. გეომეტრიული ხერხით ამოხსენით უტოლობათა სისტემების ერთობლიობები:

$$ა) \begin{cases} y \geq |x|, \\ y \leq 2 - |x|, \\ y \geq |x| + 1, \\ y \leq 3 - |x|; \end{cases}$$

$$ბ) \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4, \\ x^2 + y^2 \leq 9, \\ (x-3)^2 + (y-3)^2 \geq 1, \\ (x-3)^2 + (y-3)^2 \leq 4. \end{cases}$$

28. გეომეტრიული ხერხით ამოხსენით უტოლობათა სისტემების ერთობლიობები:

$$ა) \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 \leq 4, \\ x^2 + (y-3)^2 \leq 4, \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4; \end{cases}$$

$$ბ) \begin{cases} |x| + |y| \leq 2, \\ |x-2| + |y| \leq 2; \\ x^2 + (y-2)^2 \leq 4, \\ (x-2)^2 + y^2 \leq 4. \end{cases}$$

29. გეომეტრიული ხერხით ამოხსენით უტოლობათა ერთობლიობების სისტემები:

$$ა) \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ y \geq 1; \\ (x-1)^2 + y^2 \leq 4, \\ y \leq -1; \end{cases}$$

$$ბ) \begin{cases} |x| + |y| \leq 2, \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4; \\ |x-2| + |y-1| \leq 2, \\ (x-2)^2 + y^2 \leq 4. \end{cases}$$

30. გეომეტრიული ხერხით ამოხსენით უტოლობათა ერთობლიობების სისტემა:

$$\begin{cases} y \geq x+3, \\ x^2 + y^2 \leq 9; \\ y \leq -x+2, \\ x^2 + (y-4)^2 \leq 4. \end{cases}$$

26.1.1. ტესტი №25

- უტოლობათა ერთობლიობა ეწოდება ამ უტოლობათა აკონიუნქციას, ბ)ტოლობას, გ)დიზიუნქციას, დ)იმპლიკაციას.
- ერთცვლადიან უტოლობათა ერთობლიობის ამონახსნი არის

ცვლადის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ერთობლიობის

- ა) ერთი უტოლობა მაინც გადაიქცევა ჭეშმარიტ უტოლობად.
- ბ) ყველა უტოლობა გადაიქცევა მცდარ რიცხვით უტოლობად,
- გ) არც ერთი უტოლობა არ გახდება ჭეშმარიტი რიცხვითი უტოლობა,
- დ) ყველა უტოლობათა საწინააღმდეგო აზრის მქონე უტოლობები ჭეშმარიტ რიცხვით უტოლობებად გადაიქცევა.

3. $f(x; y) > 0$, $f(x; y) \geq 0$, $f(x; y) < 0$, $f(x; y) \leq 0$ სახის უტოლობებს, სადაც $f(x; y)$ არის x -ისა და y -ის მიმართ ცვლადიანი გამოსახულება

- ა) ორცვლადიანი განტოლებები ეწოდებათ,
- ბ) ორცვლადიანი უტოლობები ეწოდებათ,
- გ) ერთცვლადიანი განტოლებები ეწოდებათ,
- დ) ერთცვლადიანი უტოლობები ეწოდებათ.

4. თუ $(a; b)$ წყვილი არის $f(x; y) \leq 0$ უტოლობის ამონახსნი, მაშინ

- ა) $f(a; b) > 0$, ბ) $f(a; b) \geq 0$, გ) $f(a; b) < 0$, დ) $f(a; b) \leq 0$.

5. საკოორდინატო სიბრტყის III მეოთხედი გამოისახება უტოლობათა სისტემით:

- ა) $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0; \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} x < 0, \\ y < 0; \end{cases}$ გ) $\begin{cases} x \leq 0, \\ y \leq 0; \end{cases}$ დ) $\begin{cases} x > 0, \\ y < 0. \end{cases}$

6. უტოლობათა სისტემის $\begin{cases} y - x > 2, \\ y - x < -2; \end{cases}$ ამონახსნთა სიმრავლის

გრაფიკის გამოსახულებაა:

- ა) ოთხკუთხედი, ბ) $\emptyset$, გ) ზოლი, დ) სამკუთხედი.

7. უტოლობათა სისტემის $\begin{cases} x + 2y < 4 \\ 3x + 4y > 3; \end{cases}$ ერთ-ერთი ამონახსნია:

- ა) $(8; 3)$, ბ) $(8; -3)$, გ) $(-8; 3)$, დ) $(-8; -3)$.

8. უტოლობათა ერთობლიობის $\begin{cases} (x+7)^2 + (y-8)^2 \leq 16, \\ (x+6)^2 + (y-4)^2 \leq 4; \end{cases}$ ამონახსნს

არ წარმოადგენს წყვილი:

- ა) $(-7; 5)$, ბ) $(-3; 3)$, გ) $(-6; 3)$, დ) $(-4; 7)$.

9. უტოლობათა სისტემის $\begin{cases} |x| + |y| < 5, \\ (x-1)^2 + (y-4)^2 \leq 4; \end{cases}$ ამონახსნს არ

წარმოადგენს წყვილი:

ა) (1; 2), ბ) (-1; 2), გ) (2; 2), დ) (1; 4).

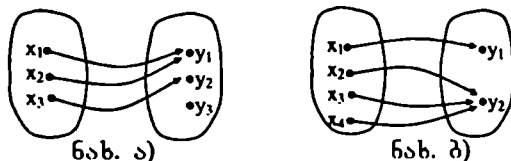
10. უტოლობათა ერთობლიობის $\begin{cases} |x-7| + |y-2| < 2, \\ |x-7| + |y| < 2 \end{cases}$ ერთ-ერთი ამო-

ნახსნია:

ა) (5; 0), ბ) (7; 4), გ) (7; 2), დ) (5; 2).

**§27. ასახვა. ასახვათა სახეები: სიმრავლის ასახვა
სიმრავლეში, სიმრავლის ასახვა სიმრავლეზე, სიმრავლის
ურთიერთცალსახა ასახვა სიმრავლეზე**

შესაბამისობას ორ სიმრავლეს შორის, როცა შესაბამისობის წინასახეებისა და განსაზღვრის არეები ერთმანეთს ემთხვევა, ხოლო სახეებისა და მნიშვნელობათა არეების ურთიერთდაბ-
თხვევა აუცილებელი არ არის, ასახვა ეწოდება. ე.ი. X და Y სიმ-
რავლეებს შორის ასახვა ეწოდება ამ სიმრავლეთა შორის ისეთ
შესაბამისობას, სადაც ნებისმიერი $x \in X$ ელემენტის სახეს წარ-
მოადგენს Y სიმრავლის ერთი და მასთან მხოლოდ ერთი ელე-
მენტი. სხვაგვარად, X და Y სიმრავლეებს შორის შესაბამისობა
წარმოადგენს ასახვას, თუ ნებისმიერი $x \in X$ ელემენტისათვის არ-
სებობს ერთი და მასთან მხოლოდ ერთი $y \in Y$ ელემენტი ისეთი,
რომ xRy . X და Y სიმრავლეებს შორის ასახვა შეიძლება ნახაზზე
გამოვსახოთ (ნახ. ა და ნახ. ბ):

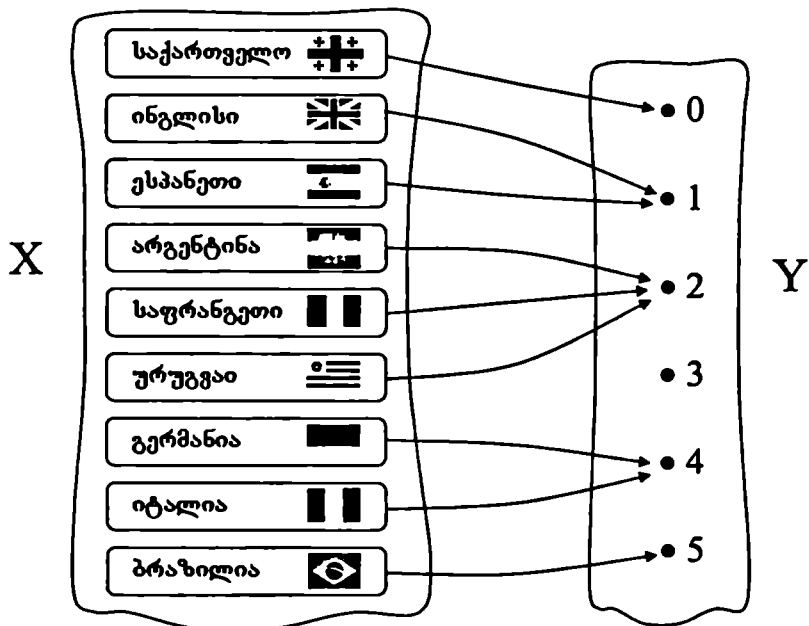


როგორც ვხედავთ, ორივე შემთხვევაში x სიმრავლის ყოველი
წერტილიდან გამოდის ერთი ისარი. ნახ. ა) შემთხვევაში Y სიმ-
რავლის ერთ ელემენტს, კერძოდ y_3 -ს წინასახე არ გააჩნია, ხო-
ლო ნახ. ბ) შემთხვევაში Y სიმრავლის ყოველ ელემენტს გააჩ-
ნია წინასახე. ორივე ნახაზზე გვხვდება Y სიმრავლის ისეთი
ელემენტები, რომლებსაც ერთი ან რამდენიმე წინასახე გააჩნი-
ათ.

სიმრავლეთა შორის ასახვა აღინიშნება ასე: $f: X \rightarrow Y$ ან
 $X \xrightarrow{f} Y$. f არის ასახვის სიმბოლო ანუ შესაბამისობის დამყა-
რების წესი. თუ f ასახვის დროს x ელემენტს შეესაბამება y ელე-
მენტი, მაშინ წერენ: $f: x \rightarrow y$ ან $x \xrightarrow{f} y$ ან კიდევ $y = f(x)$.

მაგალითად, X სიმრავლე, ეთქვათ, შემდეგი ქვეყნების სიმრავ-

ლუა: $X = \{\text{საქართველო, ინგლისი, ესპანეთი, არგენტინა, საფრანგეთი, ურუგვაი, გერმანია, იტალია, ბრაზილია}\}$, ხოლო $Y = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. f შესაბამისობა X სიმრავლის ელემენტებსა და Y სიმრავლის ელემენტებს შორის დადამყაროთ შემდეგი წესით: ჩამოთვლილი ქვეყნებიდან თუ რომელი რამდენჯერ გახდა მსოფლიო ჩემპიონი ფეხბურთში; მაშინ ამ სიმრავლეების ელემენტებს შორის გვექნება შემდეგი ასახვა: საქართველო $\xrightarrow{f} 0$, ინგლისი $\xrightarrow{f} 1$, ესპანეთი $\xrightarrow{f} 1$, არგენტინა $\xrightarrow{f} 2$, საფრანგეთი $\xrightarrow{f} 2$, ურუგვაი $\xrightarrow{f} 2$, გერმანია $\xrightarrow{f} 4$, იტალია $\xrightarrow{f} 4$, ბრაზილია $\xrightarrow{f} 5$. ეს ასახვა შეიძლება ნახაზზეც გამოვსახოთ:

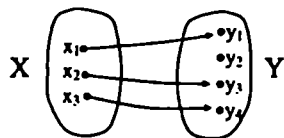


$X \xrightarrow{f} Y$ ასახვის შემთხვევაში X სიმრავლის ყველა იმ ელემენტების სიმრავლეს, რომელთა სახეა $y \in Y$, ეუწოდოთ y ელემენტის სრული წინასახე. ეს სიმრავლე აღინიშნება $f^{-1}(y)$ სიმბოლოთი, ე.ი. $f^{-1}(y) = \{x | x \in X / f(x) = y\}$. ჩვენი მაგალითის შემთხვევაში გვექნება: $f^{-1}(0) = \{\text{საქართველო}\}$, $f^{-1}(1) = \{\text{ინგლისი; ესპანეთი}\}$, $f^{-1}(2) = \{\text{არგენტინა; საფრანგეთი; ურუგვაი}\}$, $f^{-1}(3) = \emptyset$, $f^{-1}(4) = \{\text{გერმანია; იტა-}\}$

ლია), $f^1(5) = \{\text{ბრაზილია}\}$. ჩასახვის დროს X სიმრავლის სახე შედგება Y სიმრავლის იმ ელემენტებისაგან, რომელთაც არაცარიელი სრული წინასახეები გააჩნიათ. აღნიშნული მაგალითის შემთხვევაში, X სიმრავლის სახეა Y -ის შემდეგი ელემენტებისაგან შემდგარი სიმრავლე: $\{0; 1; 2; 4; 5\}$.

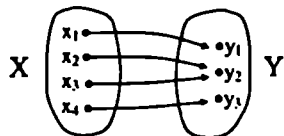
გვაქვს ასახვის შემდეგი სახეები:

1. ეთქვას, მოცემულია $X \xrightarrow{f} Y$ ასახვა, თუ Y სიმრავლეში არსებობენ ისეთი ელემენტები, რომლებსაც X სიმრავლეში წინასახე არ გააჩნიათ, მასთან Y სიმრავლის ყოველი დანარჩენი ელემენტი არის X სიმრავლის ერთი და მასთან მხოლოდ ერთი ელემენტის სახე, მაშინ ასეთ ასახვას ინექციური ასახვა (ანუ ინექცია) ეწოდება. ინექცია არის სიმრავლის ასახვა სიმრავლეში და არ არის შექცევადი, რადგან თუ გრაფზე ისრებს მიმართულებას შევეუცვლით მაშინ ასახვას ვერ მივიღებთ. ინექცია შეიძლება ნახაზზე გამოვსახოთ:



ჩვენს მიერ განხილული მაგალითი, მართალია ასახვაა, მაგრამ ინექციას არ წარმოადგენს; იგი თუმცა სიმრავლის სიმრავლეში ასახვაა (დღეისათვის არცერთი ქვეყანა არაა მსოფლიოს სამგზის ჩემპიონი ფეხბურთში), მაგრამ Y სიმრავლეში არსებობენ ისეთი ელემენტები, რომლებსაც რამდენიმე წინასახე გააჩნიათ (ინგლისი და ესპანეთი ერთგზის; საფრანგეთი, არგენტინა და ურუგვაი ორგზის; ხოლო გერმანია და იტალია ოთხგზის მსოფლიო ჩემპიონები არიან ფეხბურთში), ამიტომ ეს ასახვა ინექცია არ არის.

2. ეთქვას, მოცემულია $X \xrightarrow{f} Y$ ასახვა, თუ Y სიმრავლეში არ არსებობს ისეთი ელემენტი, რომელსაც წინასახე არ გააჩნია, მაგრამ მასთან Y სიმრავლის ზოგიერთ ელემენტს შეიძლება გააჩნდეს რამდენიმე წინასახე, მაშინ ასეთ ასახვას სიურექციული ასახვა (ანუ სიურექცია) ეწოდება. სიურექცია არის სიმრავლის სიმრავლეზე ასახვა და არ არის შექცევადი, რადგან თუ გრაფზე ისრებს მიმართულებას შევეუცვლით, მაშინ ასახვას ვერ მივიღებთ. სიურექცია შეიძლე-

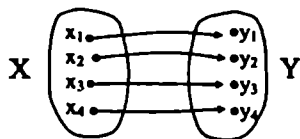


ბა ნახაზზე გამოვსახოთ:

ჩვენს მიერ განხილული მაგალითი, როგორც აღვნიშნეთ ასახვაა. მაგრამ სიურექციას არ წარმოადგენს; მართალია, Y სიმრავლეში არსებობენ ელემენტები, რომლებსაც რამდენიმე წინასახე გააჩნიათ, მაგრამ ეს ასახვა სიმრავლის სიმრავლეში ასახვაა და არა სიმრავლის სიმრავლეზე ასახვა, ამიტომ იგი სიურექცია არ არის.

3. ეთქვათ, მოცემულია $X \rightarrow Y$ ასახვა, თუ X სიმრავლის ყოველ ელემენტს Y სიმრავლეში გააჩნია ერთი და მასთან მხოლოდ ერთი სახე და Y სიმრავლის ყოველ ელემენტს X სიმრავლეში გააჩნია ერთი და მასთან მხოლოდ ერთი წინასახე, მაშინ ამ ასახვას სიმრავლის სიმრავლეზე ურთიერთცალსახა ასახვა ანუ ბიექციური ასახვა (ბიექცია) ეწოდება. ბიექცია სიმრავლის სიმრავლეზე ასახვაა და იგი შექცევადია, რადგან თუ გრაფზე ისრების მიმართულებას შევცვლით მივიღებთ მოცემულის შებრუნებულ ასახვას. ბიექცია სიმრავლის სიმრავლეზე ასახვაა და იგი შექცევადია, რადგან თუ გრაფზე ისრების მიმართულებას შევცვლით მივიღებთ მოცემულის შებრუნებულ ასახვას. ბიექცია ერთდროულად ინექციაა და სიურექცია. ბიექცია შეიძლება ნახაზზე გამოვსახოთ:

ამრიგად, ასახვა მოცემულია მაშინ, როცა მოცემულია ორი სიმრავლე და ამ სიმრავლეთა შორის ასახვის დამყარების წესი.



ეთქვათ, მოცემულია A და B სიმრავლე, თუ არსებობს ერთი მაინც ბიექციური ასახვა $A \rightarrow B$, მაშინ A და B სიმრავლეებს ეკვივალენტური სიმრავლეები ეწოდებათ. თუ A და B სიმრავლეები ეკვივალენტურია, მაშინ ამ ფაქტს აღნიშნავენ ასე: $A \sim B$. მიმართება $\sim$ წარმოადგენს ეკვივალენტობის მიმართებას და იგი ხასიათდება შემდეგი თვისებებით:

1. რეფლექსურობა - $\forall A[A \sim A]$. მართლაც ბიექციური ასახვა $A \rightarrow A$ შეიძლება დამყარდეს A სიმრავლის ნებისმიერი x ელემენტის თავის თავთან შესაბამისობით.

2. სიმეტრიულობა - $(\forall A, B)[A \sim B \Rightarrow B \sim A]$. თუ არსებობს ბიექცი-

ური ასახვა $A \xrightarrow{f} B$, მაშინ არსებობს ბიექციური ასახვაც $B \xrightarrow{f^{-1}} A$, რადგან ბიექციური ასახვა შექცევადია.

3. ტრანზიტულობა - $(\forall A, B, C) [A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C]$. მართლაც, თუ $A \sim B$, მაშინ არსებობს ბიექციური ასახვა $A \xrightarrow{f_1} B$ და თუ $B \sim C$, მაშინ არსებობს ბიექციური ასახვა $B \xrightarrow{f_2} C$. ავადგოთ ასახვა $A \xrightarrow{f} C$ შემდეგნაირად: A სიმრავლის ნებისმიერ a ელემენტს შევუსაბამოთ C სიმრავლის ისეთი c ელემენტი, რომელიც B სიმრავლის $b = f_1(a)$ ელემენტის შესაბამისი ელემენტია $c = f_2(b)$ ბიექციური ასახვის შედეგად. ეს ნიშნავს, რომ $f(a) = f_2(f_1(a))$. f ასახვას ეწოდება f_1 და f_2 ასახვების სუპერპოზიცია ანუ ნამრავლი და აღინიშნება ასე: $f = f_1 \circ f_2$. ცხადია, რომ f არის ბიექციური ასახვა და გვაქვს: $A \sim C$.

ეკვივალენტობის მიმართება განსაზღვრავს სიმრავლის ეკვივალენტურობის კლასებად დაყოფას, ე.ი. ისეთ კლასებად, სადაც თითოეულ კლასში გაერთიანებულია ეკვივალენტური სიმრავლეები, ასეთი დაყოფის დროს ორი სიმრავლე ჰყდება ერთ კლასში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი ეკვივალენტურია. სხვაგვარად, ერთი კლასის ნებისმიერი ორი სიმრავლე ეკვივალენტურია, ხოლო სხვადასხვა კლასის ნებისმიერი ორი სიმრავლე ეკვივალენტური არ არის.

მაგალითად, ვთქვათ, $M = \{a, b, c, d\}$; მაშინ ამ სიმრავლის თანაუქვეთი კლასების სიმრავლეა: $\tilde{M} = \{M_0; M_1; M_2; M_3; M_4\}$, სადაც $M_0 = \{\emptyset\}$, $M_1 = \{\{a\}; \{b\}; \{c\}; \{d\}\}$,

$M_2 = \{\{a, b\}; \{a, c\}; \{a, d\}; \{b, c\}; \{b, d\}; \{c, d\}\}$,

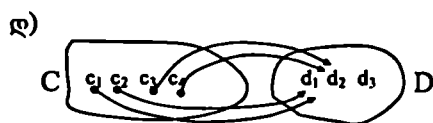
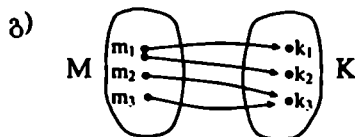
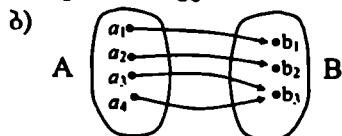
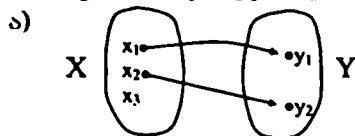
$M_3 = \{\{a, b, c\}; \{a, b, d\}; \{a, c, d\}; \{b, c, d\}\}$, და $M_4 = M = \{\{a, b, c, d\}\}$.

მიიღება M სიმრავლის ფაქტორ-სიმრავლე.

ეს გვაძლევს საშუალებას განესაზღვროთ ნატურალური რიცხვი, როგორც ეკვივალენტურ სიმრავლეთა გარკვეული კლასის საერთო მახასიათებელი ნიშან-თვისება.

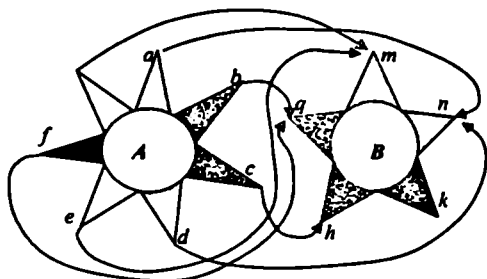
§27.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. არის თუ არა შემდეგი შესაბამისობები ასახვები?



2. A სიმრავლე შედგება შეიღქმიანი ვარსკვლავის ქიმებისაგან, რომლებიც 4 ფერითაა გაფერადებული: a და b ქიმები მწვანე, b და f ქიმები წითელი, q და e ქიმები ყვითელი, ხოლო c ქიმი ლურჯი ფერისაა.

B სიმრავლე შედგება ხუთქიმიანი ვარსკვლავის ქიმებისაგან, რომლებიც 5 ფერითაა წარმოდგენილი: n ქიმი მწვანეა, q ქიმი წითელი, m ქიმი ყვითელი, h ქიმი ლურჯი, ხოლო k ქიმი კი ყავისფერია. R შე-

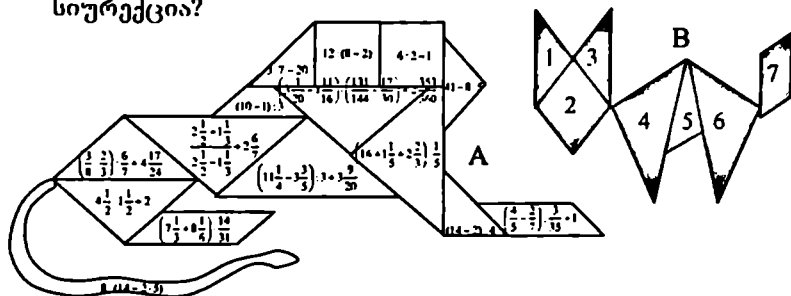


საბამისობა - $A \xrightarrow{R} B$ A სიმრავლის ნებისმიერ ქიმს უთანადებს B სიმრავლის შესაბამისი ფერის ქიმს. არის თუ არა R შესაბამისობა ასახვა?

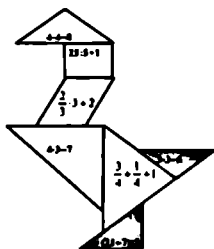
3. A სიმრავლე შემდეგი ქვეყნების სიმრავლეა - $A = \{\text{შვედეთი, ლიეტუა, პოლონეთი, ჩინეთი, თურქეთი, სომხეთი, ესპანეთი, პორტუგალია, საბერძნეთი, საქართველო, აზერბაიჯანი, ირანი, საფრანგეთი, ბელგია, გერმანია}\}$; ხოლო B სიმრავლე, ქალაქების სიმრავლეა - $B = \{\text{სტოკჰოლმი, ვილნიუსი, ვარშავა, პეკინი, შანხაი, ანკარა, სტამბოლი, მადრიდი, ბარსელონა, ერევანი, ლონდონი, ლისაბონი, ათენი, თბილისი, ბათუმი, ქუთაისი, ბაქო, თეირანი, პარიზი, ბრიუსელი, ბერლინი, ბონი, ვენა, კოპენჰაგენი, ამსტერდამი}\}$. ა) A სიმრავლესა და B სიმრავლეს შო-

რის $A \rightarrow B$ შესაბამისობაა - A სიმრავლის ქვეყნის შესაბამისია, ამ ქვეყანაში მდებარე, B სიმრავლის ელემენტი - ქალაქი (ან ელემენტები - ქალაქები). არის თუ არა ეს შესაბამისობა ასახვა? ბ) A სიმრავლესა და B სიმრავლეს შორის $A \rightarrow B$ შესაბამისობაა - A სიმრავლის ქვეყნის შესაბამისი დედაქალაქია B სიმრავლეში მოთავსებული შესატყვისი ქალაქი. არის თუ არა ეს შესაბამისობა ასახვა?

4. A სიმრავლე წარმოადგენს ფიგურა „ლომის“ ნაწილების ერთობლიობას, ხოლო B სიმრავლე - ფიგურა „კატის“ ნაწილებში ჩაწერილი რიცხვებისაგან შედგება. შეეუსაბამოთ A სიმრავლის ელემენტების (ნაწილების) გამოსახულებებს შესაბამისი მნიშვნელობები B სიმრავლიდან. არის თუ არა მიღებული შესაბამისობა ასახვა და თუ არის, მაშინ იგი ინექციაა თუ სიურექცია?



5. A სიმრავლე წარმოადგენს ფიგურა „იხვის“ ნაწილებში ჩაწერილი გამოსახულებების ერთობლიობას, ხოლო B სიმრავლე კვადრატის ნაწილებში ჩაწერილი რიცხვებისაგან შედგება. შეეუსაბამოთ A სიმრავლის გამოსახულებებს შესაბამისი მნიშვნელობები B სიმრავლიდან. არის თუ არა მიღებული შესაბამისობა ასახვა და თუ არის, მაშინ იგი ინექციაა თუ სიურექცია?

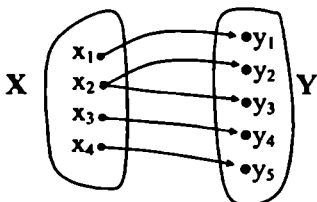


6	7	2
1	5	9
8	3	4

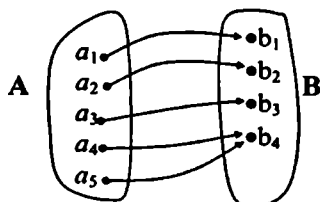
6. A სიმრავლე შედგება შემდეგი მხატვრული ნაწარმოებებისაგან: $A = \{\text{ილიადა, ოდისეა, ვეფხისტყაოსანი, ღვთაებრივი კომედია, ჰამლეტი, ოტელო, რიჩარდ მესამე}\}$. B სიმრავლე წარმოადგენს შემდეგი მწერლების სიმრავლეს: $B = \{\text{ჰომეროსი, რუსთაველი, დანტე, შექსპირი}\}$. შევუსაბამოთ A სიმრავლის მხატვრულ ნაწარმოებს შესაბამისი მწერალი. არის თუ არა ეს შესაბამისობა ასახვა და თუ არის, მაშინ იგი ინექციაა თუ სიურექცია?

7. დავადგინოთ შემდეგი შესაბამისობები არის თუ არა ასახვა და თუ არის ასახვა, მაშინ იგი ინექციაა, თუ სიურექცია?

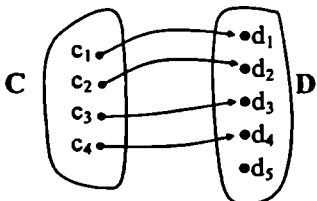
ა)



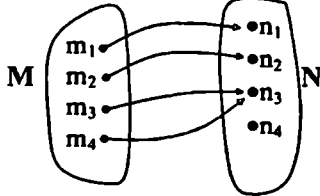
ბ)



გ)

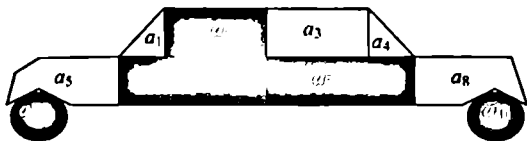


დ)

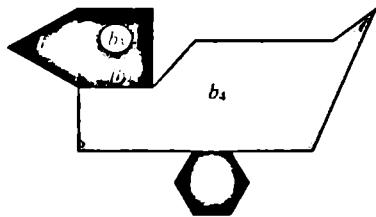


8. მოცემულია $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ და $B = \{6; 7; 8; 9\}$ სიმრავლეები; განვიხილოთ შემდეგი შესაბამისობები და გავარკვეოთ არიან თუ არა ისინი ასახვები და თუ არიან ინექციას წარმოადგენენ თუ სიურექციას? ა) $A \xrightarrow{f} B$, ისე რომ A სიმრავლის ელემენტს შევუსაბამოთ მასზე ხუთით მეტი ერთეული; ბ) $B \xrightarrow{g} A$, ისე რომ B სიმრავლის ელემენტს შევუსაბამოთ მასზე ხუთით ნაკლები ელემენტი.

9. A სიმრავლე შედგება ფიგურა „მანქანის“ შემადგენელი ნაწილებისაგან: $A = \{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6; a_7; a_8; a_9; a_{10}\}$; ხოლო B სიმრავლე შედგება ფიგურა



„მტრედის“ შემადგენელი ნაწილებისაგან: $B = \{b_1; b_2; b_3; b_4; b_5\}$. A სიმრავლის ელემენტებს (ნაწილებს) შევუსაბამოთ B სიმრავლის ელემენტები (ნაწილები) შემდეგი წესით: წრეს შევუსაბამოთ წრე, სამკუთხედს სამკუთხედი, ოთხკუთხედს ოთხკუთხედი, ექვსკუთხედს ექვსკუთხედი, შვიდკუთხედს შვიდკუთხედი. არის თუ არა მიღებული შესაბამისობა ასახვა და თუ არის, მაშინ იგი ინექციაა თუ სიურექცია?



10. მოცემულია $A = \{2; 3; 7\}$ და $B = \{10; 11; 15; 21\}$ სიმრავლეები; განვიხილოთ შემდეგი შესაბამისობები და გავარკვიოთ არიან თუ არა ისინი ასახვები და თუ არიან ინექციას წარმოადგენენ თუ სიურექციას? ა) $A \xrightarrow{f} B$, ისე რომ A სიმრავლის ელემენტს შევუსაბამოთ B სიმრავლის ის ელემენტი, რომელიც ამ ელემენტის ჯერადია; ბ) $A \xrightarrow{g} B$, ისე რომ A სიმრავლის ელემენტს შევუსაბამოთ მასზე 8 ერთეულით მეტი B სიმრავლის ელემენტი.

11. აკვარიუმში არის ორი წყალმცენარე, სამი წითელი თევზი და ორი ყვითელი თევზი. წითელი თევზები შევუსაბამოთ I წყალმცენარეს, ხოლო ყვითელი თევზები II წყალმცენარეს. იქნება თუ არა ეს შესაბამისობა ასახვა და თუ იქნება, მაშინ იგი ინექციაა თუ სიურექცია?



12. მოცემულია $A = \{-5; -4; -3; 0; 1; 2; 3\}$ და $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ სიმრავლეები. შესაბამისობა $A \xrightarrow{f} B$ მდგომარეობს შემდეგში: A სიმრავლის ელემენტს შევუსაბამოთ მისი მოდული B სიმრავლიდან. ა) არის თუ არა $A \xrightarrow{f} B$ შესაბამისობა ასახვა და თუ არის, მაშინ იგი ინექციაა თუ სიურექცია? ბ) არის თუ არა ამ შესაბამისობის შექცეული შესაბამისობა $B \xrightarrow{f^{-1}} A$ ასახვა და თუ არის, მაშინ იგი ინექციაა თუ სიურექცია?

13. მოცემულია $A=\{-5; -4; -3; 0; 1; 2; 3\}$ და $B=\{0; 1; 4; 9; 16; 25\}$ სიმრავლეები. შესაბამისობა $A \xrightarrow{f} B$ მდგომარეობს შემდეგში: A სიმრავლის ელემენტს შეევსაბამოთ მისი კვადრატი B სიმრავლიდან. ა) არის თუ არა $A \xrightarrow{f} B$ შესაბამისობა ასახვა და თუ არის, მაშინ იგი ინექციაა თუ სიურექცია? ბ) არის თუ არა ამ შესაბამისობის შექცეული შესაბამისობა $B \xrightarrow{f^{-1}} A$ ასახვა და თუ არის, მაშინ იგი ინექციაა თუ სიურექცია?

14. მოცემულია $A=\{-5; -4; -3\}$ და $B=\{9; 16; 25\}$ სიმრავლეები. შესაბამისობა $A \xrightarrow{f} B$ მდგომარეობს შემდეგში: A სიმრავლის ელემენტს შეევსაბამოთ მისი კვადრატი B სიმრავლიდან. ა) არის თუ არა $A \xrightarrow{f} B$ შესაბამისობა ასახვა და თუ არის, მაშინ იგი ინექციაა თუ სიურექცია? ბ) არის თუ არა ამ შესაბამისობის შექცეული შესაბამისობა $B \xrightarrow{f^{-1}} A$ ასახვა და თუ არის, მაშინ იგი ინექციაა თუ სიურექცია?

15. მოცემულია $A=\{-5; -4; -3; -2; -1; 0\}$ და $B=\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ სიმრავლეები. შესაბამისობა $A \xrightarrow{f} B$ მდგომარეობს შემდეგში: A სიმრავლის ელემენტს შეევსაბამოთ მისი მოდული B სიმრავლიდან. არის თუ არა $A \xrightarrow{f} B$ შესაბამისობა ასახვა და თუ არის, მაშინ იგი ინექციაა თუ სიურექცია?

16. ნახაზზე მოცემულია გეომეტრიული ფიგურები, რომლებიც შეადგენენ A სიმრავლეს: $A=\{F_1; F_2; F_3; F_4; F_5; F_6; F_7; F_8; F_9\}$. დაეყოს A სიმრავლე თანაუკვეთ კლასებად: ა) ფერის მიხედვით; ბ) ფორმის მიხედვით.



17. მოცემულია $A=\{\text{სპილო, დათვი, თევზი}\}$ და $B=\{\text{ხორთუმი, თათი, ფარფლი, ფრთა}\}$ სიმრავლეები. A და B სიმრავლეებს შორის შესაბამისობა $A \xrightarrow{f} B$ მდგომარეობს შემდეგში: წინადადებებში – სპილოს აქვს , დათვის აქვს , თევზს აქვს ; ჩავსვათ სამი წერტილის ადგილზე B სიმრავლეში მოთავსე-

ბული სიტყვა, ისე რომ მივიღოთ ჭეშმარიტი გამონათქვამი. არის თუ არა ეს შესაბამისობა ასახვა და თუ ასახვაა იგი ინექციაა თუ სიურექცია?

18. 2018 წლის 28 ოქტომბერს ჩატარებული, საქართველოს პრეზიდენტობის არჩევნების, I ტურის, შედეგების მონაცემები მოცემულია ცხრილით. *A* სიმრავლით აღვნიშნოთ პრეზიდენტობის კანდიდატებისათვის მინიჭებული რიგითი ნომრები, *B* სიმრავლით – მათ მიერ მოპოვებული ხმების რაოდენობის რიცხვები, ხოლო *C* სიმრავლით – მოპოვებული ხმების პროცენტული მონაცემების აღმნიშვნელი რიცხვები.
- ა) შესაბამისობა $A \rightarrow B$ მდგომარეობს შემდეგში: *A* სიმრავლის ელემენტი შეესაბამოთ მის მიერ მოპოვებული ხმების რაოდენობა *B* სიმრავლიდან. არის თუ არა ეს შესაბამისობა ასახვა და თუ არის წარმოადგენს თუ არა ის ბიექციას?
- ბ) შესაბამისობა $A \rightarrow B$ მდგომარეობს შემდეგში: *A* სიმრავლის ელემენტი შეესაბამოთ მის მიერ მოპოვებული ხმების პროცენტული მაჩვენებელი. არის თუ არა ეს შესაბამისობა ასახვა და თუ არის, იგი ინექციაა თუ სიურექცია?

მოპოვებული ადგილი	<i>A</i> – პრეზიდენტობის კანდიდატი მინიჭებული ნომრით	<i>B</i> – ხმების რაოდენობა	<i>C</i> – პროცენტული მაჩვენებელი
1.	48. სალომე ზურაბიშვილი (დამოუკიდებელი)	615572	38,64%
2.	5. გრიგოლ გაშაძე (ერთიანი ნაციონალური მოძრაობა)	601224	37,74%
3.	2. დავით ბაქრაძე (ევროპული საქართველო – მოძრაობა თავისუფლებისათვის)	174849	10,97%
4.	10. შალვა ნათელაშვილი (საქართველოს ლეიბორისტული პარტია)	59651	3,74%
5.	25. დავით უსუფაშვილი (თავისუფალი დემოკრატები)	36037	2,26%
6.	36. ზურაბ ჯაფარიძე (გირჩი)	36034	2,26%
7.	21. კახა კუკავა (თავისუფალი საქართველო)	21186	1,33%
8.	51. გიორგი ანდრიძე (დამოუკიდებელი)	13133	0,82%
9.	65. თეიმურაზ შაშიაშვილი (დამოუკიდებელი)	9481	0,6%
10.	31. თამარი ცხორაგაული (თავისუფლება – ზეიად გამსახურდიას გზა)	4004	0,25%

11.	49. ბესარიონ თედიაშვილი (დამოუკიდებელი)	3713	0,23%
12.	28. მიხეილ სალუაშვილი (სამართლიანობის აღდგენის კავშირი ხმა ერთ-სა: უწყალობა ჩვენი სიმაართლე)	2970	0,19%
13.	40. ლევანი ჩხეიძე (ასახლი ქრისტიან-დემოკრატები)	2895	0,18%
14.	18. აკაკი ასათიანი (ქართველ ტრადიციონალიზმთა კავშირი)	1994	0,13%
15.	4. ვახტანგ გაბუნია (ქრისტიან-დემოკრატიული მოძრაობა)	1958	0,12%
16.	35. გელა ხუციშვილი (საქართველოს ძალოვან გეტერანთა და პატრიოტთა პოლიტიკური მოძრაობა)	1623	0,1%
17.	58. კახაბერ ტიჭინაძე (დამოუკიდებელი)	1418	0,09%
18.	1. მიხეილ ანთაძე (მოძრაობა სახელმწიფო ხალხისთვის)	1074	0,07%
19.	17. გიორგი ლილუაშვილი (საქართველო)	892	0,06%
20.	13. ზვიად მეხატიშვილი (საქართველოს ქრისტიანულ-კონსერვატიული პარტია)	713	0,04%
21.	22. ოთარ მეუნარგია (მრეწველობა გადაარჩენს საქართველოს)	664	0,04%
22.	62. ვლადიმერ ნონიკაშვილი (დამოუკიდებელი)	633	0,04%
23.	23. ირაკლი გორგაძე (მოძრაობა თავისუფალი საქართველოსთვის)	531	0,03%
24.	27. ზვიადი ბაღდაძე (სამოქალაქო პლატფორმა - ასახლი საქართველო)	477	0,03%
25.	30. ზვიად იაშვილი (ეროვნულ-დემოკრატიული პარტია (ევპ))	444	0,03%

19. მოცემულია $A=\{6; 9; 14; 15\}$ და $B=\{3; 7; 11\}$ სიმრავლეები. შესაბამისობა $A \xrightarrow{f} B$ მდგომარეობს შემდეგში: A სიმრავლის ელემენტი ნაკლებია B სიმრავლის შესაბამის ელემენტზე, ხოლო შესაბამისობა $A \xrightarrow{f} B$ წარმოადგენს შემდეგს: A სიმრავლის ელემენტი ჯერადია B სიმრავლის შესაბამისი ელემენტის. არიან თუ არა ეს შესაბამისობები ასახეები და თუ არიან, მაშინ ისინი ინექციას წარმოადგენენ თუ სიურექციას?
20. მოცემულია $A=\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ სიმრავლე; ამ სიმრავლის ელემენტების სამზე გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთების მიხედვით იგი დაეყოთ თანაუკვეთ კლასებად.

21. მოცემულია ორი სიმრავლე: $A = \{\text{ქაერი, წყალი, რკინა, მარმარილო, რძე}\}$ და $B = \{\text{მყარი, თხევადი, გაზი}\}$. ამ ორ სიმრავლეს შორის დამყარებულია შემდეგი შესაბამისობა $A \xrightarrow{f} B$; რომელიც A სიმრავლის ელემენტს შეუსაბამებს შესაბამისი მდგომარეობის გამომხატველს B სიმრავლის ელემენტებიდან. წარმოადგენს თუ არა ეს შესაბამისობა ასახვას და თუ იგი ასახვაა, მაშინ იგი ინექციაა თუ სიურექცია?
22. მოცემულია ორი სიმრავლე: $A = \{\text{სტაფილო, ალუბალი, კარტოფილი, ვაშლი, ატამი}\}$ და $B = \{\text{ბოსტნეული, ხილი, თევზეული}\}$. ამ ორ სიმრავლეს შორის დამყარებულია შემდეგი შესაბამისობა $A \xrightarrow{f} B$; რომელიც A სიმრავლის ელემენტს შეუსაბამებს B სიმრავლიდან შესაბამისი კატეგორიის აღმნიშვნელ ელემენტს. წარმოადგენს თუ არა ეს შესაბამისობა ასახვას და თუ წარმოადგენს, მაშინ იგი ინექციაა თუ სიურექცია?
23. მოცემულია $C = \{4; 5; 6; 7; 8\}$ და $D = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ სიმრავლეები. შესაბამისობა ამ სიმრავლეებს შორის $C \xrightarrow{f} D$ შემდეგია: „ C რიცხვი 3-ით მეტია d რიცხვზე, სადაც $c \in C$ და $d \in D$ “. არის თუ არა ეს შესაბამისობა ასახვა და თუ არის, მაშინ წარმოადგენს თუ არა იგი ბიექციას?
24. მოცემულია $C = \{4; 5; 6; 7; 8\}$ და $D = \{1; 2; 3; 4\}$ სიმრავლეები. შესაბამისობა ამ სიმრავლეებს შორის $C \xrightarrow{f} D$ შემდეგია: „ c რიცხვი 3-ით მეტია d რიცხვზე, სადაც $c \in C$ და $d \in D$ “. არის თუ არა ეს შესაბამისობა ასახვა?
25. მოცემულია $C = \{4; 5; 6; 7; 8\}$ და $D = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ სიმრავლეები. შესაბამისობა ამ სიმრავლეებს შორის $C \xrightarrow{f} D$ შემდეგია: „ c რიცხვი 3-ით მეტია d რიცხვზე, სადაც $c \in C$ და $d \in D$ “. წარმოადგენს თუ არა ეს შესაბამისობა ასახვას და თუ წარმოადგენს, მაშინ იგი ინექციაა თუ სიურექცია?
26. მოცემულია $A = \{4; 5; 6; 7; 8\}$ და $B = \{1; 2; 9\}$ სიმრავლეები. შესაბამისობა ამ სიმრავლეებს შორის $A \xrightarrow{f} B$ შემდეგია: „ A სიმრავლეში შემავალ კენტ რიცხვებს შეესაბამება B სიმრავ-

ლემში შემავალი მარტივი რიცხვი, ხოლო A სიმრავლეში შემავალ ლუწ რიცხვებს შეესაბამება B სიმრავლეში შემავალი შედგენილი რიცხვი“. არის თუ არა ეს შესაბამისობა ასახვა და თუ არის, მაშინ იგი ინექციაა თუ სიურექცია?

27. მოცემულია $A=\{2; 3; 5\}$ და $B=\{15; 22; 43\}$ სიმრავლეები. შესაბამისობა ამ სიმრავლეებს შორის $A \xrightarrow{f} B$ შემდეგია: „ A სიმრავლის ელემენტი გამოყოფია B სიმრავლის შესაბამისი ელემენტის“. არის თუ არა ეს შესაბამისობა ასახვა და თუ არის, მაშინ იგი ინექციაა თუ სიურექცია?
28. მოცემულია $A=\{2; 3; 5\}$ და $B=\{15; 22; 43\}$ სიმრავლეები. შესაბამისობა ამ სიმრავლეებს შორის $A \xrightarrow{f} B$ შემდეგია: „ A სიმრავლეში შემავალ ციფრს, B სიმრავლიდან, შეესაბამება ის რიცხვი, რომელიც ჩანაწერში ერთ მაინც იმავე ციფრს შეიცავს“. არის თუ არა ეს შესაბამისობა ასახვა და თუ არის, იგი წარმოადგენს თუ არა ბიექციას?
29. მოცემულია $A=\{\text{ია; აბი; კატა; თაგვი; კარავი; ზეიგენი; ლოკოინა}\}$ და $B=\{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ სიმრავლეები. ამ სიმრავლეებს შორის $A \xrightarrow{f} B$ შესაბამისობა შემდეგია: „ A სიმრავლეში შემავალ სიტყვას, B სიმრავლიდან, შეესაბამება ის რიცხვი, რომელიც ამ სიტყვაში ასო-ბგერების რაოდენობის ტოლია“. არის თუ არა ეს შესაბამისობა ასახვა და თუ არის, იგი წარმოადგენს თუ არა ბიექციას?
30. მოცემულია $A=\{\text{ია; ბია; კატა; თაგვი; კარავი; ზეიგენი; ლოკოინა}\}$ და $B=\{2; 3; 4\}$ სიმრავლეები. ამ სიმრავლეებს შორის $A \xrightarrow{f} B$ შესაბამისობა შემდეგია: „ A სიმრავლეში შემავალ სიტყვას, B სიმრავლიდან, შეესაბამება ის რიცხვი, რომელიც ამ სიტყვაში მარცვლების რაოდენობის ტოლია“. არის თუ არა ეს შესაბამისობა ასახვა და თუ არის, მაშინ იგი ინექციაა თუ სიურექცია?

1. x და y სიმრავლეებს შორის შესაბამისობა, რომლის დროსაც ნებისმიერი $x \in X$ ელემენტისათვის არსებობს ერთი და მასთან მხოლოდ ერთი $y \in Y$ ელემენტი, ისეთი რომ $x \xrightarrow{f} y$, წარმოადგენს
 - ა) სიმრავლეთა თანაკვეთას; ბ) ასახვას;
 - გ) სიმრავლეთა გაერთიანებას; დ) ცარიელ სიმრავლეს.
2. ეთქვათ, მოცემულია $x \xrightarrow{f} y$ ასახვა. თუ Y სიმრავლეში არსებობენ ისეთი ელემენტები, რომლებსაც X სიმრავლეში წინასახე არ გააჩნიათ, მასთან Y სიმრავლის ყოველი დანარჩენი ელემენტი არის X სიმრავლის ერთი და მასთან მხოლოდ ერთი ელემენტის სახე, მაშინ ასეთ ასახვას ეწოდება.
 - ა) ინექციური ასახვა; ბ) სიურექციული ასახვა;
 - გ) ბიექციური ასახვა;
 - დ) სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი.
3. ეთქვათ, მოცემულია $x \xrightarrow{f} y$ ასახვა. თუ Y სიმრავლეში არ არსებობს ისეთი ელემენტი, რომელსაც წინასახე არ გააჩნია, მაგრამ მასთან Y სიმრავლის ზოგიერთ ელემენტს შეიძლება გააჩნდეს რამდენიმე წინასახე, მაშინ ასეთ ასახვას ეწოდება
 - ა) ინექციური ასახვა; ბ) სიურექციული ასახვა;
 - გ) ბიექციური ასახვა;
 - დ) სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი.
4. ეთქვათ, მოცემულია $x \xrightarrow{f} y$ ასახვა. თუ X სიმრავლის ყოველ ელემენტს Y სიმრავლეში გააჩნია ერთი და მასთან მხოლოდ ერთი სახე და Y სიმრავლის ყოველ ელემენტს X სიმრავლეში გააჩნია ერთი და მასთან მხოლოდ ერთი წინასახე, მაშინ ამ ასახვას ეწოდება
 - ა) არაინექციური ასახვა; ბ) არასიურექციული ასახვა;
 - გ) ბიექციური ასახვა;
 - დ) სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი.
5. მოცემულია $A=\{2; 3; 5; 7\}$ და $B=\{6; 35\}$ სიმრავლეები. $A \xrightarrow{f} B$ ასახვა მდგომარეობს შემდეგში: „ A სიმრავლის ელემენტი გამყოფია B სიმრავლის შესაბამისი ელემენტის“, მაშინ ეს ასახვა

არის

ა) ბიექცია; ბ) ინექცია; გ) სიურექცია;

დ) სიმრავლის სიმრავლეში ასახვა.

6. მოცემულია $A=\{1; 2; 3; 4\}$ და $B=\{5; 6; 7; 8; 9\}$ სიმრავლეები.

$A \xrightarrow{f} B$ ასახვა მდგომარეობს შემდეგში: „ a რიცხვი 4-ით ნაკლებია b რიცხვზე, სადაც $a \in A$ და $b \in B$ “, მაშინ ეს ასახვა არის

ა) ბიექცია; ბ) ინექცია; გ) სიურექცია;

დ) სიმრავლის სიმრავლეზე ასახვა.

7. მოცემულია $A=\{2; 3; 4; 6; 7\}$ და $B=\{1; 2; 25\}$ სიმრავლეები.

$A \xrightarrow{f} B$ ასახვა მდგომარეობს შემდეგში: „ A სიმრავლეში შემავალ ლუწ რიცხვს შეესაბამება B სიმრავლეში შემავალი მარტივი რიცხვი, ხოლო A სიმრავლეში შემავალ კენტ რიცხვს შეესაბამება შედგენილი რიცხვი“, მაშინ ეს ასახვა არის

ა) ბიექცია; ბ) ინექცია; გ) სიურექცია;

დ) სიმრავლის სიმრავლეში ასახვა.

8. მოცემულია $A=\{2; 3; 4; 6; 7\}$ და $B=\{2; 16\}$ სიმრავლეები.

$A \xrightarrow{f} B$ ასახვა მდგომარეობს შემდეგში: „ A სიმრავლეში შემავალ კენტ რიცხვებს შეესაბამება B სიმრავლეში შემავალი მარტივი რიცხვი, ხოლო A სიმრავლეში შემავალ ლუწ რიცხვებს შეესაბამება B სიმრავლეში შემავალი შედგენილი რიცხვი“, მაშინ ეს ასახვა არის

ა) ბიექცია; ბ) ინექცია; გ) სიურექცია;

დ) სიმრავლის სიმრავლეში ასახვა.

9. მოცემულია $A=\{-1; 1\}$ და $B=\{1; 2; 4\}$ სიმრავლეები. $A \xrightarrow{f} B$

ასახვა მდგომარეობს შემდეგში: „ A სიმრავლეში შემავალ უარყოფით რიცხვს შეესაბამება B სიმრავლეში შემავალი მარტივი რიცხვი, ხოლო A სიმრავლეში შემავალ დადებით რიცხვს შეესაბამება B სიმრავლეში შემავალი შედგენილი რიცხვი“, მაშინ ეს ასახვა არის

ა) ბიექცია; ბ) ინექცია; გ) სიურექცია;

დ) სიმრავლის სიმრავლეზე ასახვა.

10. მოცემულია $A=\{-2; -1; 1; 2\}$ და $B=\{1; 2; 4\}$ სიმრავლეები.

$A \xrightarrow{f} B$ ასახვა მდგომარეობს შემდეგში: „ A სიმრავლეში შე-

მაველ უარყოფით რიცხვებს შეესაბამება B სიმრავლეში შემავალი მარტივი რიცხვი, ხოლო A სიმრავლეში შემავალ დადებით რიცხვებს შეესაბამება B სიმრავლეში შემავალი შედგენილი რიცხვი“, მაშინ ეს ასახვა არის

- ა) ბიექცია; ბ) ინექცია; გ) სიურექცია;
- დ) სიმრავლის სიმრავლეზე ასახვა.

§28. ფუნქცია. ფუნქციის მოცემის ხარხები. ფუნქციის განსაზღვრისა და მნიშვნელობათა არეები. ზრდადი, კლებადი, ლუწი, კენტი, პერიოდული და შემოსაზღვრული ფუნქციები

ფუნქცია – მათემატიკის ერთ-ერთი ძირითადი ცნებაა, რომელიც გამოსახავს ერთი ტიპის ცვლადი სიდიდეების – X სიმრავლის x ელემენტების ($x \in X$) კავშირს სხვა ცვლადი სიდიდეების – Y სიმრავლის y ელემენტებთან ($y \in Y$) ისე, რომ x -ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება y -ის გარკვეული მნიშვნელობა. ასეთ შემთხვევაში y -ს ეწოდება x არგუმენტის (ცალსახა) ფუნქცია და ზოგადი სახით ასე ჩაიწერება: $f: X \rightarrow Y$ ან $y = f(x)$. X სიმრავლეს ეწოდება ფუნქციის განსაზღვრის არე, ხოლო Y სიმრავლეს – ფუნქციის მნიშვნელობათა არე (ანუ ფუნქციის ცვლილების არე). ზოგჯერ x -ს უწოდებენ დამოუკიდებელ ცვლადს (არგუმენტს), ხოლო Y -ს კი – დამოკიდებულ ცვლადს.

ტერმინი – „ფუნქცია“ პირველად გამოჩნდა ლეიბნიცის ხელნაწერებში 1673 წელს, ხოლო 1692 წლიდან კი – გამოქვეყნებულ შრომებში. ლათინური „functio“ – ქართულად „შესრულებას“, „განხორციელებას“ ნიშნავს.

ფუნქციის განსაზღვრა, როგორც ერთი სიმრავლის მეორეზე ასახვა, დადგინდა სიმრავლეთა თეორიის შესახებ კამათში. იგი გარკვეულად შეინიშნებოდა დედეკინდის შრომებში (1887), მაგრამ მკაფიოდ ჩამოაყალიბა პეანომ 1911 წელს.

ფუნქციის აღნიშვნა პირველად შემოიღო ლაიბნიცმა, რომელიც სარგებლობდა ასტრონომიული ნიშნებით. 1734 წელს ეილერმა გამოიყენა აღნიშვნა $f(x)$, რათა მიეთითებინა, რომ f არის $\frac{x}{a} + c$ არგუმენტის ფუნქცია, ხოლო 1753 წელს გამოიყენა აღნიშვნა $\phi = \phi(x, t)$.

გარდა ერთი ცვლადის ფუნქციისა, მათემატიკაში მნიშვნელოვან როლს ასრულებს აგრეთვე რამდენიმე ცვლადის ფუნქციის ცნება. მათემატიკის განვითარებამ XIX-XX საუკუნეებში მათემატიკოსები მიიყვანა ფუნქციის ცნების ისეთი გაფართოების საჭი-

როებად, როდესაც ცვლადები იქნებოდა არა მარტო რიცხვები, არამედ ნებისმიერი ბუნების მათემატიკური ობიექტებიც.

მოვიყვანოთ ერთი სიდიდის მეორე სიდიდეზე დამოკიდებულების მაგალითები:

1. თუ ტემპერატურა ცელსიუსის სკალით არის T_1 გრადუსი, ხოლო იგივე ტემპერატურა ფარენჰეიტის სკალით – T_2 გრადუსი, მაშინ მათ შორის დამოკიდებულება შემდეგი წრფივი განტოლებით განისაზღვრება: $T_2 = \frac{9}{5}T_1 + 32$.

2. წრის S ფართობის მის r რადიუსზე დამოკიდებულება $S = \pi r^2$ ფორმულით გამოისახება.

3. თუ სხეულის მოძრაობა წრფივია, საწყისი სიჩქარე არის V_0 მ/წმ, აჩქარება a მ/წმ² მუდმივია, მაშინ V სიჩქარის დამოკიდებულება t დროზე მოიცემა ფორმულით: $V = V_0 + at$.

შეიძლება ვთქვათ, რომ ფუნქცია ორ სიდიდეს შორის დამოკიდებულების მათემატიკური გამოსახვაა.

ვთქვათ, გვაქვს ორი სიმრავლე: A, B და A სიმრავლის ნებისმიერ x ელემენტს შეესაბამება B სიმრავლის გარკვეული y ელემენტი, რომელიც $f(x)$ -ითაა აღნიშნული. როგორც ზემოთ ავღნიშნეთ, ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ y ცვლადი არის x ცვლადის ფუნქცია და ჩაწერთ $y = f(x)$. შეიძლება ითქვას: ფუნქცია არის f დამოკიდებულება (ზემოთ აღწერილი ტიპის) y ცვლადისა (დამოკიდებული ცვლადის) x ცვლადზე (დამოუკიდებელ ცვლადზე), ან ასე: f არის A სიმრავლის ასახვა B სიმრავლეში – $f: A \rightarrow B$. A სიმრავლეს ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება. ყველა $f(x)$ მნიშვნელობებისაგან შემდგარი სიმრავლე – ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა, იგი არის B -ს ქვესიმრავლე.

ჩვენს მიერ განხილულ მაგალითებში A და B , როგორც წესი, რიცხვთა სიმრავლეები იყო. თუმცა, ეს არ არის აუცილებელი. მაგალითად, A იყოს სიბრტყეზე წრეწირების სიმრავლე, ხოლო R – ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. ყოველ $x \in A$ წრეწირს შევუსაბამოთ რიცხვი – მისი რადიუსის სიგრძე, ე.ი. დაეუშვათ, რომ $f(x)$ არის x წრეწირის რადიუსი. ელემენტობა $f: A \rightarrow R$ ასახვას, რომელიც ფუნქციას წარმოადგენს.

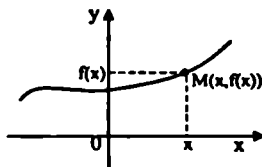
ამრიგად, ფუნქცია ერთმანეთთან დაკავშირებული სამი ნაწილით ხასიათდება:

1. განსაზღვრის A არე.
2. B სიმრავლე, რომელიც მნიშვნელობათა სიმრავლეს მოიცავს.
3. წესი, რომლის მიხედვითაც ყოველ x -ს A სიმრავლიდან შეესაბამება $f(x)$ ელემენტი B სიმრავლიდან.

თუ რიცხვითი ფუნქცია ფორმულითაა მოცემული და განსაზღვრის არე არ არის მითითებული, მაშინ განსაზღვრის არე ყველა იმ ნამდვილი რიცხვის სიმრავლეა, რომელთათვისაც ფორმულას აზრი აქვს.

როგორც აღვნიშნეთ, f ფუნქცია არის A სიმრავლის ასახვა B სიმრავლეში; A -ს ყოველ x ელემენტს შეესაბამება B -ს გარკვეული $f(x)$ ელემენტი, ფუნქცია შეიძლება $(x; f(x))$ წყვილებითაც წარმოვადგინოთ. ყველა ამ $(x; f(x))$ წყვილების სიმრავლეს f ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება. ამ შემთხვევაში x განსაზღვრის არეს ეკუთვნის, $f(x)$ არის ფუნქციის მნიშვნელობა, რომელიც x -ს შეესაბამება.

თუ A და B რიცხვითი სიმრავლეებია, მაშინ $(x; f(x))$ რიცხვთა წყვილებია და მათ საკოორდინატო სიბრტყეზე წერტილები შეესაბამება; ყოველ $(x; f(x))$ წყვილს – წერტილი, რომლის აბსცისაა x , ორდინატი კი – $f(x)$. (ესეც ფუნქციის – ასახვის მაგალითია: რიცხვთა გარკვეულ წყვილებს სიბრტყის წერტილები შეესაბამება).



ეთქვათ, ცნობილია რაიმე ფუნქციის გრაფიკი. გრაფიკის გამოყენებით შეიძლება განსაზღვრის არესა და მნიშვნელობათა სიმრავლეზე ვიმსჯელოთ. დაეუშვათ, ნახაზზე გამოსახული ფიგურა სრულად წარუადგენს რაიმე ფუნქციის გრაფიკს.

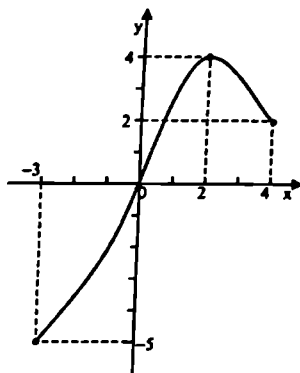
ამ გრაფიკის მიხედვით შეიძლება მივიჩნიოთ:

1. x იცვლება -3 -დან 4 -მდე; ფუნქციის განსაზღვრის არე იმ x რიცხვთა სიმრავლეა, რომლებიც $-3 \leq x \leq 4$ ორმაგ უტოლობას აკმაყოფილებს, ანუ ფუნქციის განსაზღვრის არე $[-3; 4]$ რიცხვითი შუალედია; ასეც ჩავწერთ: $D(f) = [-3; 4]$, $D(f)$ -ით f -ის განსაზღვრის

არე აღინიშნება.

1. $f(x)$ იცვლება -5 -დან 4 -მდე;
 $5 \leq f(x) \leq 4$. მაშასადამე, მნიშვნელობათა
 სიმრავლე (არე) $[-5; 4]$ შუალედი; ასეც
 ჩაეწერთ: $E(f) = [-5; 4]$, $E(f)$ -ით f -ის მნიშ-
 ვნელობათა არე აღინიშნება.

2. ვიპოვოთ ფუნქციის მნიშვნელობა,
 როცა $x=2$. ასეც ვამბობთ ხოლმე, ვიპო-
 ვოთ ფუნქციის მნიშვნელობა $x=2$ წერ-
 ტილში. გრაფიკიდან ცხადად ჩანს,
 რომ $f(2)=4$.

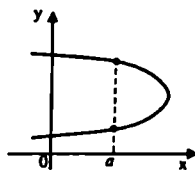


ჩვენ განვიხილავთ იმ ფუნქციებს,
 რომელთა განსაზღვრისა და მნიშვნელობათა არეები ნამდვილ
 რიცხვთა სიმრავლეებია. ძირითადად ასეთ ფუნქციათა გრაფიკე-
 ბი, საკოორდინატო სიბრტყეზე, გარკვეული წირით გამოისახება.

საკოორდინატო სიბრტყეზე ზოგჯერ ამ წირის ნაწილს გამოე-
 სახავთ ხოლმე და მასაც გრაფიკს ეუწოდებთ.

იბადება კითხვა – არის თუ არა ყოველი წირი საკოორდინა-
 ტო სიბრტყეზე რაიმე ფუნქციის გრაფიკი?

ნახაზზე წარმოდგენილ წირს „ვერტიკალუ-
 რი“ წრფე (OY ღერძი, ან მისი პარალელური
 რომელიმე წრფე) ორ წერტილში კვეთს – ეს
 წირი არ შეიძლება რაიმე f ფუნქციის გრაფიკი
 იყოს – a რიცხვს ორი სხვადასხვა რიცხვი შეე-
 საბამება.



ყოველი f ფუნქცია თითოეულ x რიცხვს განსაზღვრის არიდან
 ერთადერთ $f(x)$ რიცხვს უთანადებს მნიშვნელობათა სიმრავლე-
 დან.

ყოველი f ფუნქციის გრაფიკს ნებისმიერ ვერტიკალურ წრფეს-
 თან ერთზე მეტი საერთო წერტილი არა აქვს. თუ სიბრტყეზე
 წერტილთა მოცემულ სიმრავლეს რაიმე ვერტიკალურ წრფესთან
 ორი საერთო წერტილი მაინც აქვს, მაშინ ეს სიმრავლე არ
 არის რაიმე ფუნქციის გრაფიკი.

სიმრავლეებს შორის დამოკიდებულებების მოცემა სხვადასხვა

ხერხით შეიძლება განხორციელდეს. ჩვენ გავეცანით ფუნქციის მოცემის ხერხებს – ფორმულის საშუალებით და გრაფიკის გამოყენებით. განვიხილოთ ფუნქციის მოცემის ცხრილური ხერხი. ასეთ შემთხვევაში მოცემულია ცხრილი, სადაც ნაჩვენებია ფუნქციის მნიშვნელობები არგუმენტის ცხრილში მოცემული მნიშვნელობებისათვის.

ფუნქციის ცხრილური ხერხით მოცემა მრავალ შემთხვევაშია მოხერხებული. მასში შეიძლება არგუმენტის ნებისმიერი მოცემული მნიშვნელობისათვის ვიპოვოთ ფუნქციის მნიშვნელობა ყოველგვარი გამოანგარიშების გარეშე. პრაქტიკაში ხშირად ერთი სიდიდის მეორეზე დამოკიდებულებას ეძებენ ცდის საფუძველზე. ამ შემთხვევაში ერთ სიდიდეს აძლევენ მნიშვნელობებს და შემდეგ ყოველი ასეთი მნიშვნელობისათვის (ცდის საფუძველზე) პოულობენ მეორე სიდიდის შესაბამის მნიშვნელობას (ზოგჯერ მიახლოებით).

მაგალითად, ცხრილით წარმოდგენილია 2018 წლის 1 თებერვლიდან 6 თებერვლამდე გუდაურში შუადღის შესაბამისი გარემოს ტემპერატურათა მონაცემები:

თებერვლის დღეები	შუადღის ტემპერატურა
1 თებერვალი	5 ⁰
2 თებერვალი	3 ⁰
3 თებერვალი	-1 ⁰
4 თებერვალი	-3 ⁰
5 თებერვალი	0 ⁰
6 თებერვალი	3 ⁰

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი; ცხრილის საშუალებით წარმოვადგინოთ ერთიდან ათამდე (10-ის ჩათვლით) ნატურალური რიცხვებიდან ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობები (0,0001 სიზუსტით).

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sqrt{x}$	1	1,4142	1,7321	2	2,2361	2,4495	2,6458	2,8284	3	3,1623

ამ შემთხვევაშიც დავსვათ კითხვა – არის თუ არა ყოველი ცხრილი ფუნქციონალური დამოკიდებულების გამომსახველი?

განვიხილოთ მაგალითი; ვთქვათ, A და B შესაბამისად, ქალა-

ქებისა და ამ ქალაქებიდან თბილისში სამგზაგრო მიკროავტობუსების შესაძლო გასვლის საათების ასეთი სიმრავლეებია: $A = \{\text{თელავი, გურჯაანი, საგარეჯო, სიღნაღი, ლაგოდეხი}\}$, ხოლო $P = \{5; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16\}$.

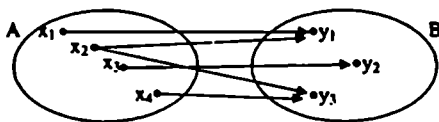
ამ სიმრავლეებს შორის დამოკიდებულება შესაძლოა ასეთი ცხრილით იყოს წარმოდგენილი:

ქალაქი	მიკროავტობუსის გასვლის დრო
თელავი	8; 10; 12
გურჯაანი	8; 11; 13
ყვარელი	9; 14
საგარეჯო	6; 7; 8; 15; 16
სიღნაღი	7; 10; 15
ლაგოდეხი	7; 11; 16

ამ ცხრილით წარმოდგენილი შესაბამისობა არ წარმოადგენს ასახვას და იგი რა თქმა უნდა არ არის ფუნქციონალური დამოკიდებულების გამომსახველი. ამ ცხრილის მიხედვით A სიმრავლის ერთ ელემენტს B სიმრავლიდან რამდენიმე ელემენტი შეესაბამება.

განვიხილოთ სიმრავლეებს შორის დამოკიდებულების თვალსაჩინო წარმოდგენის კიდევ ერთი ხერხი.

ნახაზზე სიმრავლეთა ელემენტები წერტილებათა გამოსახული. A სიმრავლის ელემენტები: x_1, x_2, x_3, x_4 ; B სიმრავლის ელემენტები: y_1, y_2, y_3 . ისრებითაა დაკავშირებული B სიმრავლის შესაბამის ელემენტებთან.



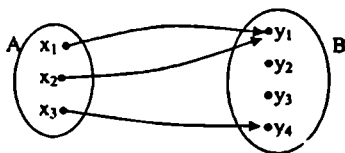
აქ არ არის აუცილებელი მიმართული მონაკვეთების გამოყენება ელემენტები შეიძლება მონაკვეთებით ან სხვა წირებით დაკავშირდნ.

მაგალითად, შემდეგ ნახაზზე სიმრავლეების ელემენტები „მომართული წირებით“ („რკალებით“) არიან დაკავშირებული.

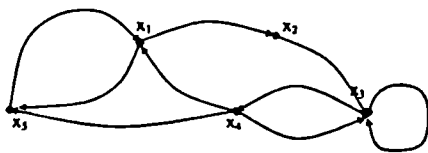
მათემატიკაში ფიგურას, რომელიც რამდენიმე წერტილისა და ამ წერტილების შემაერთებული (დამაკავშირებელი) წირებისაგან შედგება (ყოველი ორი წერტილი შეიძლება არ იყოს შეერთებული წირით), გრაფი ეწოდება.

წერტილებს გრაფის წვეროები ეწოდება, მათ შემაერთებელ წირებს – წიბოები.

თუ ყოველი წიბო რკალია, ანუ მითითებულია საწყისი და ბოლო წერტილები (როგორც ზემოთ ნახაზზე იყო), მაშინ გრაფს ორიენტირებული გრაფი ეწოდება.



თუ რომელიმე ორი წვერო რამდენიმე წიბოთია შეერთებული, მაშინ ასეთ წიბოს ჯერადი წიბო ეწოდება. შეიძლება მოხდეს, რომ ზოგიერთი წიბო იწყებოდეს და მთავრდებოდეს ერთ წვეროში, ასეთ წიბოს მარყუევი ეწოდება. მაგალითად, ნახაზზე ჯერადი წიბოებია x_1x_2 და x_3x_4 , ხოლო მარყუევი x_3x_2 წიბო.



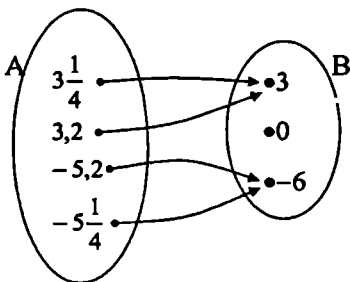
ფუნქციონალური დამოკიდებულება შეიძლება ორიენტირებული გრაფით გამოვსახოთ. მაგალითად, ეთქვათ, მოცემულია

$$A = \left\{ 3\frac{1}{4}; 3,2; -5,2; -5\frac{1}{4} \right\} \text{ და } B = \{-6; 0; 3\}. A \text{ სიმრავლის ყოველ } x$$

რიცხვს მისი მთელი ნაწილი – $[x]$ შეესაბამოთ. ეს ფუნქცია ფორმულით შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ: $f(x)=[x]$, სადაც

$$x \in \left\{ -5\frac{1}{4}; -5,2; 3,2; 3\frac{1}{4} \right\}. \text{ ნახაზზე აღ-}$$

ნიშნული ფუნქციის გრაფია წარმოდგენილი.

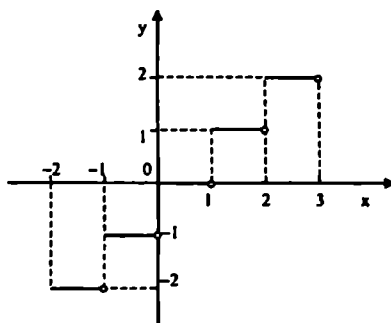


განვიხილოთ იგივე ფორმულით ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია: $y=[x]$, $x \in R$.

შევნიშნოთ, რომ f ფუნქციის გრაფიკი გამოირჩევა „ნახტომებით“ (ვერტიკალურად, თითო ერთეულით), ფუნქცია მუდმივია ყოველ ორ მთელ რიცხვს შორის. ამ ფუნქციის ზოგიერთი მნიშვნელობაა: $[0,9]=0$; $[-0,4]=-1$; $[-1,2]=-2$; $[1,5]=1$; $[2,7]=2$.

ხშირად ფუნქციის ფორმულით მოცემის დროს რამდენიმე გამოსახულება გამოიყენება.

განვიხილოთ მაგალითი. ბუნებრივი აირის ეკონომიური (მომგირნე) მოხმარების წახალისების მიზნით მოსახლეობისათვის შეიძლება დაეწესოს შემდეგი შეღავათიანი გადასახადი:

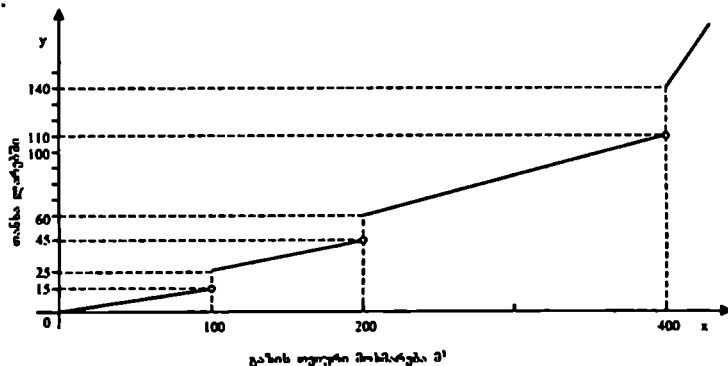


გაზის თვიური მოხმარება (მ³)	ფიქსირებული გადასახადი (ლარებში)	1 მ³-ის ფასი (ლარებში)
0 — 99,999	0	0.15
100 — 199,999	5	0.2
200 — 399,999	10	0.25
≥ 400	20	0.3

ფასი არის დახარჯული გაზის რაოდენობის ფუნქცია, გაზის დახარჯული x მ³-ს შეესაბამება ერთადერთი $f(x)$ თანხა, რომელიც ასე მოიცემა:

$$f(x) = \begin{cases} 0.15x, & \text{თუ } 0 \leq x < 100, \\ 5 + 0.2x, & \text{თუ } 100 \leq x < 200, \\ 10 + 0.25x, & \text{თუ } 200 \leq x < 400, \\ 20 + 0.3x, & \text{თუ } x \geq 400. \end{cases}$$

ფუნქცია შეიძლება მისი გრაფიკის საშუალებითაც წარმოვადგინოთ.



განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი. 2018 წლის 2 დეკემბერს ჩატარდა 2020 წლის ევროპის ქვეყნების ჩემპიონატის შესარჩევი ჯგუფების წილისყრა ფეხბურთში, რომელმაც გუნდები შემდეგნაირად გაანაწილა:

a ჯგუფი (ინგლისი, ჩეხეთი, ბულგარეთი, მონტენეგრო, კოსოვო),

b ჯგუფი (პორტუგალია, უკრაინა, სერბეთი, ლიეტუა, ლუქსემბურგი),

c ჯგუფი (ნიდერლანდები, გერმანია, ჩრდილოეთ ირლანდია, ესტონეთი, ბელარუსი),

d ჯგუფი (შვეიცარია, დანია, ირლანდია, საქართველო, გიბრალტარი),

e ჯგუფი (ხორვატია, უელსი, სლოვაკეთი, უნგრეთი, აზერბაიჯანი),

f ჯგუფი (ესპანეთი, შვედეთი, ნორვეგია, რუმინეთი, ფარერის კუნძულები, მალტა),

g ჯგუფი (პოლონეთი, ავსტრია, ისრაელი, სლოვენია, მაკედონია, ლატვია),

h ჯგუფი (საფრანგეთი, ისლანდია, თურქეთი, ალბანეთი, მოლდოვა, ანდორა),

i ჯგუფი (ბელგია, რუსეთი, შოტლანდია, კეიპროსი, ყაზახეთი, სან-მარინო),

j ჯგუფი (იტალია, ბოსნია-ჰერცეგოვინა, ფინეთი, საბერძნეთი, სომხეთი, ლიტენშტეინი).

ევროპის ერთა ლიგის ჯგუფურ ტურნირში გამარჯვებული გუნდებია: ინგლისი, კოსოვო, პორტუგალია, უკრაინა, სერბეთი, ნიდერლანდები, ბელარუსი, შვეიცარია, დანია, საქართველო, შვედეთი, ნორვეგია, მაკედონია, შოტლანდია, ბოსნია-ჰერცეგოვინა და ფინეთი.

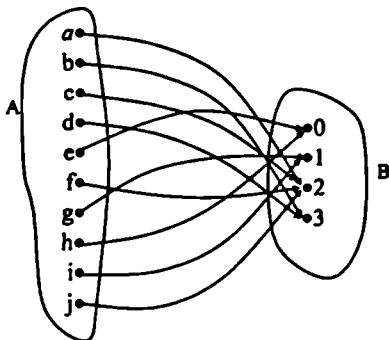
განვიხილოთ სიმრავლეები: $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ და $B = \{0; 1; 2; 3\}$. A და B სიმრავლეებს შორის ფუნქციონალური დამოკიდებულება გამოვსახოთ ორიენტირებული გრაფის საშუალებით, სადაც A სიმრავლის ელემენტს (x ჯგუფს) შეესაბამება B სიმრავლის ის ელემენტი, რომელიც გამოსახავს ამ ჯგუფში ერთა ლიგის

ჯგუფურ ტურნირში გამარჯვებული გუნდების რაოდენობას.

გაქვს შემდეგი გრაფი:

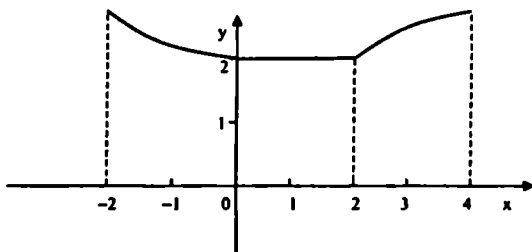
ამრიგად, სიმრავლეებს შორის ფუნქციონალური დამოკიდებულების (ფუნქციის) მოცემის (გამოსახვის) ხერხები წარმოდგება ცხრილის, ფორმულის, გრაფიკის, ორიენტირებული გრაფის საშუალებით.

ნახაზზე გამოსახულია f ფუნქციის გრაფიკი, $D(f)=[-2; 4]$.



თუ x იცვლება -2 -დან 0 -მდე, მაშინ გრაფიკის წერტილები „ქვემოთ ეშვება“.

თუ x იცვლება 0 -დან 2 -მდე, მაშინ ფუნქციის მნიშვნელობები უცვლელია; ე.ი. ამ შუალედში ფუნქცია მუდმივია, მისი მნიშვნელობები ამ შუალედში 2 -ის ტოლია.



თუ x იცვლება 2 -დან 4 -მდე, მაშინ გრაფიკის წერტილების ორდინატები იზრდება.

ამ შემთხვევაში ვიტყვი, რომ: ფუნქცია კლებადია $[-2; 0]$ შუალედში, მუდმივია $[0; 2]$ შუალედში, ზრდადია $[2; 4]$ შუალედში. თითოეულ შუალედს (დასახელებული სამიდან) მონოტონურობის შუალედსაც უწოდებენ.

f ფუნქციას ეწოდება რაიმე სიმრავლეზე ზრდადი, თუ ამ სიმრავლის ყოველი x_1 და x_2 წერტილებისათვის, $x_1 < x_2$ პირობიდან გამომდინარეობს: $f(x_1) < f(x_2)$.

f ფუნქციას ეწოდება რაიმე სიმრავლეზე კლებადი, თუ ამ სიმ-

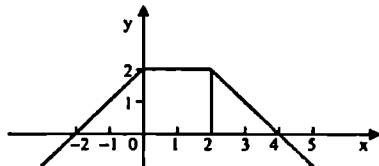
რავლის ყოველი x_1 და x_2 წერტილებისათვის, $x_1 < x_2$ პირობიდან გა-
მომდინარეობს: $f(x_1) > f(x_2)$.

f ფუნქციას ეწოდება მუდმივი რაიმე სიმრავლეზე, თუ ამ სიმ-
რავლის ყოველი x_1 და x_2 წერტილებისათვის $f(x_1) = f(x_2)$.

განვიხილოთ მაგალითი. ავაგოთ $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{თუ } x < 0 \\ 2, & \text{თუ } 0 \leq x \leq 2 \\ -x+4, & \text{თუ } x > 2 \end{cases}$ ფუნ-

ქციის გრაფიკი და ვიპოვოთ მისი მონოტონურობის შუალედები.

ნახაზიდან ცხადად ჩანს, რომ $(-\infty; 0]$ შუალედში ფუნქცია ზრდა-
დია, $[0; 2]$ შუალედში მუდმივია,
ხოლო $[2; \infty)$ შუალედში კი -
კლებადია.



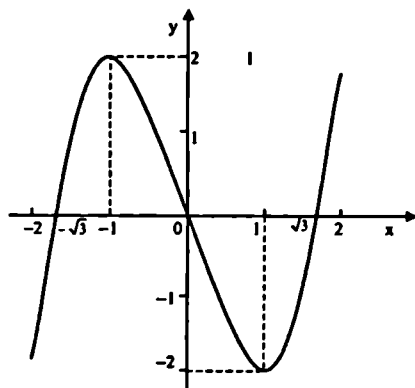
ამ ნახაზიდან აგრეთვე ჩანს, რომ მოცემული ფუნქციის OX
ღერძთან გადაკვეთის წერტილებია $(-2; 0)$ და $(4; 0)$. რაიმე f ფუნ-
ქციის ნულები $f(x)=0$ განტოლების ფესვებია. ჩვენ შემთხვევაში
 $x=-2$ და $x=4$ მოცემული $f(x)$ ფუნქციის ნულებია.

ნახაზზე აგებული გრაფიკი გვიჩვენებს, რომ $(-2; 4)$ შუალედში
 $f(x)$ ფუნქცია დადებითია, ხოლო $(-\infty; -2)$ და $(4; \infty)$ შუალედებში
კი აღნიშნული ფუნქცია უარყოფითია. ეს შუალედები მოცემული
ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედებია; $(-2; 4)$ - დადებითო-
ბის შუალედია, ხოლო $(-\infty; -2)$ და $(4; \infty)$ შუალედები კი - უარ-
ყოფითობის შუალედებია.

რაიმე f ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედები $f(x) > 0$ და
 $f(x) < 0$ უტოლობების ამონახსნთა სიმრავლეებია; ყოველ ასეთ შუ-
ალედში გრაფიკი ან მხოლოდ OX ღერძს ზემოთაა ან მხოლოდ
ქვემოთ, I შემთხვევაში გვაქვს დადებითობის შუალედი, II-ში -
უარყოფითობის შუალედი.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი. მოცემულია $f(x) = x^3 - 3x$ ფუნ-
ქცია, ამ ფუნქციის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე:

ამ ფუნქციის გრაფიკის OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილე-
ბის პოენისათვის უნდა ამოვხსნათ განტოლება: $f(x) = 0$; აქედან
 $x^3 - 3x = 0$; $x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$ და $x = 0$; $x = \sqrt{3}$; $x = -\sqrt{3}$. ეს რიცხვები



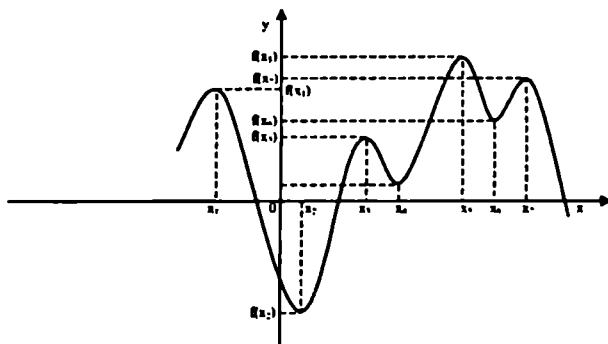
$f(x)$ ფუნქციის ნულებია. ამრიგად, $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილებია: $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; 0)$ და $(\sqrt{3}; 0)$. გრაფიკი გვიჩვენებს, რომ $(-\sqrt{3}; 0)$ და $(\sqrt{3}; \infty)$ შუალედებში ფუნქცია დადებითია; ხოლო $(-\infty; -\sqrt{3})$ და $(0; \sqrt{3})$ შუალედებში კი – უარყოფითი.

მოცემული ფუნქციის შემთხვევაში განვიხილოთ ფუნქციის მნიშვნელობები, როცა $x=-1$ და $x=1$. ეს წერტილები ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილებია; $x=-1$ -ის მაქსიმუმის, ხოლო $x=1$ – მინიმუმის წერტილი: ყველა x -სათვის $x=1$ -ის რაიმე მიდამოდან $f(x) \geq f(1)$. $f(1)=-2$ – ეს მნიშვნელობა ფუნქციის მაქსიმუმია.

x_0 წერტილს ეწოდება რაიმე f ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი, თუ ნებისმიერი x -სათვის x_0 -ის რაიმე მიდამოდან $f(x) \leq f(x_0)$.

x_0 წერტილს ეწოდება რაიმე f ფუნქციის მინიმუმის წერტილი, თუ ნებისმიერი x -სათვის x_0 -ის რაიმე მიდამოდან $f(x) \geq f(x_0)$.

ეთქვათ, ნახაზზე გრაფიკულად მოცემულია შემდეგი $f(x)$ ფუნქცია:

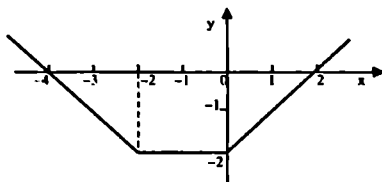


x_1 ; x_3 ; x_5 და x_7 მაქსიმუმის წერტილებია; ხოლო x_2 ; x_4 და x_6 – მინიმუმის წერტილებია. ამასთანავე, ისიც შეიძლება მოხდეს

(როგორც ჩვენი მაგალითის შემთხვევაში), რომ მაქსიმუმის წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობა ნაკლები იყოს მინიმუმის წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობაზე. მაგალითად, $f(x_3) < f(x_6)$; ე.ი. რომელიმე მაქსიმუმი შეიძლება ნაკლები იყოს რომელიმე მინიმუმზე.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი. ნახაზზე გრაფიკულად გამოვსახოთ

$$f(x) = \begin{cases} -x-4, & \text{თუ } x < -2 \\ -2, & \text{თუ } -2 \leq x \leq 0 \\ x-2, & \text{თუ } x > 0 \end{cases} \text{ ფუნქცია.}$$



როგორც ნახაზიდან ჩანს ფუნქცია მუდმივია $[-2; 0]$ შუალედში, $(-2; 0)$ შუალედის ყოველი x_0 წერტილისათვის არსებობს მიდამო, რომლის ნებისმიერი x_0 -სათვის სრულდება ორივე პირობა: $f(x) \geq f(x_0)$ და $f(x) \leq f(x_0)$; მაშასადამე, ჩვენი განსაზღვრების თანახმად, x_0 არის როგორც მაქსიმუმის, ასევე მინიმუმის წერტილი; ამიტომ $(-2; 0)$ შუალედის ყოველი წერტილი შეიძლება ჩაეთვალოთ, როგორც მაქსიმუმის, ასევე მინიმუმის წერტილად.

დღეა ორივე პირობა: $f(x) \geq f(x_0)$ და $f(x) \leq f(x_0)$; მაშასადამე, ჩვენი განსაზღვრების თანახმად, x_0 არის როგორც მაქსიმუმის, ასევე მინიმუმის წერტილი; ამიტომ $(-2; 0)$ შუალედის ყოველი წერტილი შეიძლება ჩაეთვალოთ, როგორც მაქსიმუმის, ასევე მინიმუმის წერტილად.

თუ $y=f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე სიმეტრიულია რიცხვითი წრფის სათავეს მიმართ და განსაზღვრის არის ყოველი x რიცხვისათვის სრულდება ტოლობა $f(-x)=f(x)$, მაშინ $y=f(x)$ ფუნქციას ლუწი ფუნქცია ეწოდება.

თუ $y=f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე სიმეტრიულია რიცხვითი წრფის სათავეს მიმართ და განსაზღვრის არის ყოველი x რიცხვისათვის სრულდება ტოლობა $f(-x)=-f(x)$, მაშინ $y=f(x)$ ფუნქციას კენტი ფუნქცია ეწოდება.

მაგალითად, $y=|x|$ ფუნქცია ლუწი ფუნქციაა, ხოლო თუ $y=|x|$ ფუნქციის განსაზღვრის არე $D(f)=[-1; 2]$, მაშინ ეს ფუნქცია არ არის ლუწი ფუნქცია. $y=x|x|$ ფუნქცია კენტი ფუნქციაა, თუ $y=x|x|$ ფუნქციის განსაზღვრის არე $D(f)=[-5; 4]$, მაშინ ეს ფუნქცია არ არის კენტი ფუნქცია. $y=x+1$ ფუნქცია არც ლუწია და არც კენტი.

ბევრი მოვლენა ბუნებაში პერიოდულად მეორდება – დროის ერთი და იმავე შუალედის გავლის შემდგომ უბრუნდება საწყის მდგომარეობას. უძველეს დროშივე შეამჩნია ადამიანმა, რომ ვარსკვლავები ცაზე ყოველდღიურად უბრუნდებიან თავიანთ ადგილებს; დედამიწაზე პერიოდულად, თანმიმდევრულად იცვლება წელიწადის ოთხი დრო, უფრო ხანგრძლივი დაკვირვებების შედეგად აღმოჩნდა, რომ პერიოდულად, დროის გარკვეულ მონაკვეთებში მეორდება მზისა და მთვარის დაბნელებები, პირველი კომეტა იყო ჰალეის კომეტა, რომლის ორბიტის გამოთვლამ ცხადყო, რომ იგი ელიფსია და მაშასადამე, კომეტა პერიოდულად უბრუნდება მზეს. ჰალეიმ შენიშნა, რომ 1531, 1607 და 1682 წლებში ერთი და იგივე კომეტა მოძრაობდა მზის მახლობლად და 1705 წელს მან იწინასწარმეტყველა ამ კომეტის დაბრუნება 1758 წლისათვის. ფრანგმა მეცნიერმა ა. კლერომ დააზუსტა პერიპელიუმში კომეტის გავლის მომენტი (1759 წლის 12 მარტი). შემდეგ ჰალეის კომეტამ პერიპელიუმში გაიარა 1835, 1910 და 1986 წლებში. ფ. კოუელმა და ა. კრომლინმა შეისწავლეს ჰალეის კომეტის ისტორია და აღმოაჩინეს, რომ 1909 წლამდე ეს კომეტა 29-ჯერ შეუმჩნევიათ (პირველად ჩენს წელთაღრიცხვამდე 446 წელს). ჰალეის კომეტის შემდგომი (უახლოესი) გამოჩენა მზისა და დედამიწის მახლობელ სივრცეში მოხდება 2062 წელს.

განვიხილოთ მაგალითი. ეიპოვოთ 2^{1000} -ის ბოლო ციფრი. ამ ამოცანის ამოსახსნელად 2-ის ნატურალური ხარისხების მიმდევრობის რამდენიმე საწყისი წევრი ამოეწეროთ: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...; როგორც ვხედავთ ბოლო ციფრების მიმდევრობას აქვს სახე: 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, ...; რატომ ხდება ეს გამეორებები? იმიტომ, რომ 2-ის ნებისმიერი ხარისხის მხოლოდ ბოლო ციფრი განსაზღვრავს მომდევნო ხარისხის ბოლო ციფრს; მაშასადამე, ერთი ციფრის გამეორება იწვევს მეორე ციფრის გამეორებას და მაშასადამე, ყოველი მეორე ციფრის გამეორებას. ასე ვღებულობთ პერიოდს – ამ მიმდევრობის ნაწილს ორ გამეორებას შორის. პერიოდულობის კანონზომიერების აღწერით შეგვიძლია განესაზღვროთ 2^{1000} -ის ბოლო ციფრიც – 6.

სხვადასხვა პერიოდული პროცესის აღწერა და შესწავლა მათემატიკის გამოყენებით ხდება, ძირითადად – პერიოდული ფუნ-

ქციების საშუალებით.

f ფუნქციას ეწოდება პერიოდული, თუ არსებობს ნულისაგან განსხვავებული ისეთი ℓ რიცხვი, რომ ყოველი x -ისთვის, f -ის განსაზღვრის არიდან, $x-\ell$ და $x+\ell$ რიცხვებიც ეკუთვნის განსაზღვრის არეს და გვაქვს ტოლობა: $f(x)=f(x+\ell)$. ℓ რიცხვს f ფუნქციის პერიოდი ეწოდება.

მაშასადამე, თუ f არის პერიოდული ფუნქცია ℓ პერიოდით, მაშინ f -ის განსაზღვრის არე თავის ყოველ x -თან ერთად შეიცავს წერტილებს, რომლებიც მიიღება x -ისაგან პარალელური გადატანით $\vec{a}_1(\ell;0)$ ან $\vec{a}_2(-\ell;0)$ ვექტორებით, ანუ – პარალელური გადატანებით OX ღერძის გასწვრივ ℓ მანძილით (მარჯვნივ და მარცხნივ) ფუნქციის განსაზღვრის არე თავის თავზე აისახება.

თუ $f(x)=f(x+\ell)$ ტოლობაში x -ის ნაცვლად $(x-\ell)$ -ს ჩავსვამთ, მივიღებთ $f(x-\ell)=f(x)$. თუ ფუნქცია პერიოდულია და მისი პერიოდი არის ℓ რიცხვი, მაშინ ამ ფუნქციის პერიოდია $n\ell$ რიცხვიც, სადაც n ნებისმიერი მთელი რიცხვია. მაშასადამე, f ფუნქციას უამრავი პერიოდი აქვს; მართლაც,

$$f(x+2\ell)=f(x+\ell+\ell)=f(x+\ell)=f(x),$$

$$f(x+3\ell)=f(x+2\ell+\ell)=f(x+2\ell)=f(x),$$

$$f(x-2\ell)=f(x-2\ell+2\ell)=f(x),$$

და ა.შ. თუ ℓ_1 და ℓ_2 პერიოდებია, მაშინ $\ell_1+\ell_2$ და $\ell_1-\ell_2$ რიცხვებიც პერიოდებია.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციის პერიოდებია 5-იც და 8-იც. არის თუ არა ამ ფუნქციის პერიოდი 1?

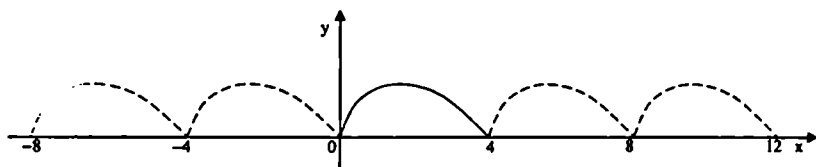
ამოხსნა. გვაქვს, $f(x)=f(x+5)$ და $f(x)=f(x+8)$, ამიტომ $f(x)=f(x-3\cdot 5)$ და $f(x)=f(x+2\cdot 8)$; რაც იმას ნიშნავს, რომ $f(x)=f(x+2\cdot 8+(-3\cdot 5))=f(x+1)$; ე.ი. $f(x)=f(x+1)$ და $f(x)$ ფუნქციის პერიოდი არის 1-იც.

ცხადია, რომ თუ ℓ პერიოდის მქონე პერიოდული ფუნქციის განსაზღვრის არეს ეკუთვნის რაიმე x რიცხვი, მაშინ $x+n\ell$ ($n\in\mathbb{Z}$) რიცხვებიც ეკუთვნის ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეს.

შევნიშნოთ, რომ თუ f ფუნქცია მუდმივია, ანუ მისი მნიშვნელობები ერთი და იმავე რიცხვის ტოლია, მაშინ ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი რიცხვიც ამ ფუნქციის პერიოდია.

თუ f ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი არის ℓ , მაშინ მისი გრაფიკის ასაგებად საკმარისია, ჯერ შევარჩიოთ ℓ სიგრძის რაიმე რიცხვითი შუალედი (მაგალითად, $[0; \ell]$ ან $[-\frac{\ell}{2}; \frac{\ell}{2}]$) და ავაგოთ გრაფიკი ამ შუალედის $D(f)$ სიმრავლესთან თანაკვეთაზე ($D(f)$ – ფუნქციის განსაზღვრის არეა). გრაფიკის სხვა ნაწილები მიიღება ამ ნაწილის პარალელური გადატანით $\vec{a}_1(\ell; 0)$, $\vec{a}_2(-\ell; 0)$, $\vec{a}_3(2\ell; 0)$ და ა.შ., ანუ $\vec{a}(n\ell; 0)$ სახის ვექტორებით, სადაც n ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

ნახაზზე მოცემულია ერთ-ერთი პერიოდული ფუნქციის (მისი პერიოდია 4) გრაფიკი.



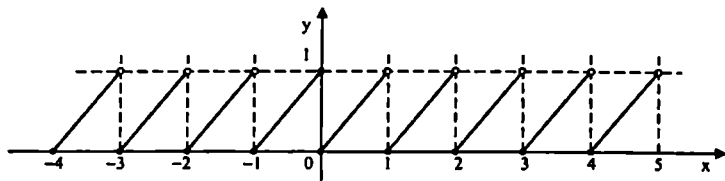
საწყის შუალედად შერჩეულია $[0; 4]$, შემდეგ კი გრაფიკის ეს ნაწილი „მეორდება“ პარალელური გადატანებით.

გავიხსენოთ რიცხვის მთელი და წილადი ნაწილები. x რიცხვის მთელი ნაწილი ეწოდება მთელ რიცხვს, რომელიც მეტია $(x-1)$ -ზე და არ აღემატება x -ს (ანუ უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც არ აღემატება x -ს). x რიცხვის მთელი ნაწილი $[x]$ -ით აღვნიშნეთ. მაგალითად: $[10,15]=10$, $[-7,6]=-8$; x რიცხვის წილადი ნაწილი ეწოდება x რიცხვისა და მისი მთელი ნაწილის სხვაობას; მას ასე აღვნიშნავთ: $\{x\}$. ამრიგად, $\{x\}=x-[x]$.

მაგალითად: $\{4,7\}=0,7$; $\{-3,89\}=0,11$; $\{9\}=0$. მართლაც, $\{4,7\}=4,7-4=0,7$; $\{-3,89\}=-3,89-(-4)=0,11$; $\{9\}=9-9=0$.

$y=\{x\}$ ფუნქცია პერიოდული ფუნქციაა. ნებისმიერი მთელი რიცხვი ამ ფუნქციის პერიოდია. უმცირესი დადებითი პერიოდი 1-ის ტოლია.

ამ ფუნქციის გრაფიკის წარმოსადგენად შევნიშნოთ, რომ როცა $0 \leq x < 1$, მაშინ $\{x\}=x$; როცა $x=1$, მაშინ $\{x\}=0$.

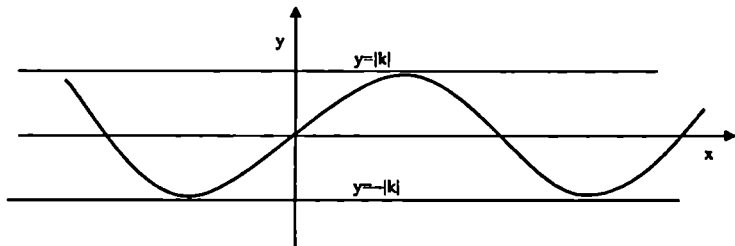


ნახაზზე გამოყოფილია $[0;1)$ შუალედზე აგებული ამ ფუნქციის გრაფიკის ნაწილი (ეს ნაწილი $y=x$ წრფეზე მდებარეობს). ამ ნაწილის პარალელური გადატანით $\vec{a}(n;0)$ სახის ვექტორებით ($n \in \mathbb{Z}$) მიიღება ამ ფუნქციის გრაფიკი.

$y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება შემოსაზღვრული თავის განსაზღვრის $D(f)$ არეში, თუ არსებობს ისეთი დადებითი k რიცხვი, რომ ამ არეში x არგუმენტის ყოველი მნიშვნელობისათვის აღგილი ექნება უტოლობას: $|f(x)| < k$, ყოველი $x \in D(f)$; ან რაც ტოლფასია ორმაგი უტოლობის: $-k < f(x) < k$, ყოველი $x \in D(f)$.

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია მოცემულ არეში, თუ ამ არეში ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე წარმოადგენს შემოსაზღვრულ სიმრავლეს. კერძოდ, შეიძლება ფუნქცია შემოსაზღვრული იყოს სეგმენტზე, ან ინტერვალში, ან მთელ OX ღერძზე.

თუ $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია რაიმე შუალედში, მაშინ გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ყველა წერტილი მდებარეობს OX ღერძის ორ პარალელურ წრფეს შორის: $y=-|k|$ და $y=|k|$.



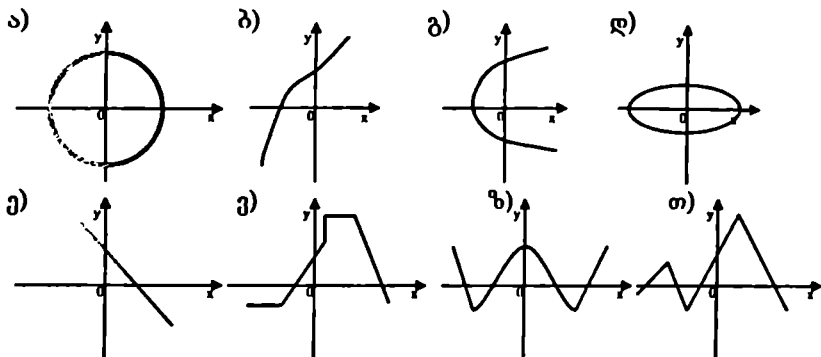
$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება შემოსაზღვრული მოცემულ არეში, თუ ყოველი ნებისმიერი დადებითი L დიდი რიცხვისათვის მოიძებნება ალბუღ არეში ისეთი $x=x_0$ წერტილი, რომ $|f(x_0)| > L$.

28.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. ეთქვათ, $A=\{0; 1; 2; 3\}$ და $B=\{-2; -1; 0; 1; 2\}$. წყვილთა დასახელებული სიმრავლეებიდან რომელია ფუნქცია $A \rightarrow B$?

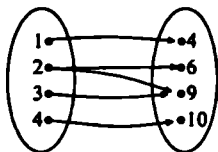
- ა) $\{(0; 1), (1; -2), (2; 0), (3; 2)\}$,
 ბ) $\{(0; -1), (2; 2), (1; -2), (3; 0), (1; 1)\}$,
 გ) $\{(0; 0), (1; 0), (2; 0), (3; 0)\}$,
 დ) $\{(0; 2), (3; 0), (1; 1)\}$.

2. ნახაზზე გამოსახული წირებიდან რომელი შეიძლება იყოს ფუნქციის გრაფიკი?



3. ფუნქცია მოცემულია ფორმულებით: $f(x) = \begin{cases} x, & \text{თუ } x < 2 \\ 2, & \text{თუ } x \geq 2 \end{cases}$, იპოვეთ $f(-1)+f(1)+f(2)+f(3)$.

4. ნახაზზე გამოსახული გრაფი წარმოადგენს თუ არა ფუნქციას?



5. მოცემულია ცხრილები: ა)

x	0	1	1
$f(x)$	3	3	4

ბ)

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	3	4

გ)

x	-1	1	2
$f(x)$	0	1	1

დ)

x	1	1	3	2
$f(x)$	2	-1	2	3

 . მათგან რომელი ცხრილი განსაზღვრავს რაიმე ფუნქციას?

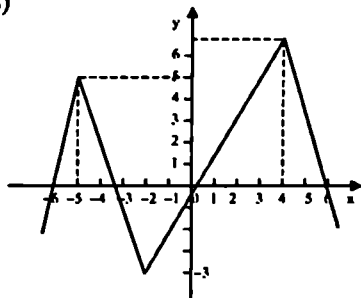
6. ფუნქციის პერიოდი არის 24-იც და 36-იც. არის თუ არა ამ ფუნქციის პერიოდი 12?

7. x -ის რა მნიშვნელობისთვისაა ჭეშმარიტი თანაფარდობა:

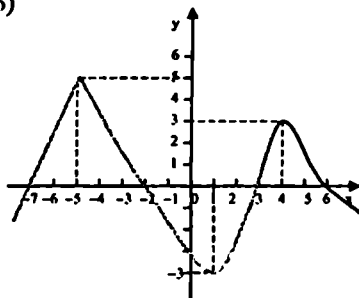
ა) $\left\{x + \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{2}$; ბ) $\left\{3x - 2\frac{1}{4}\right\} = \frac{2}{3}$; გ) $\left\{2x + \frac{2}{5}\right\} = \frac{1}{3}$?

8. ნახაზზე ოთხი სხვადასხვა ფუნქციის გრაფიკია გამოსახული:

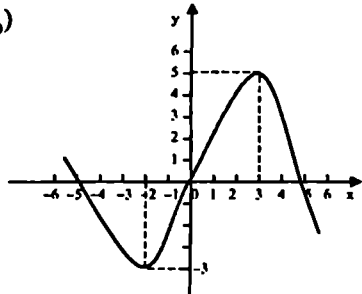
ა)



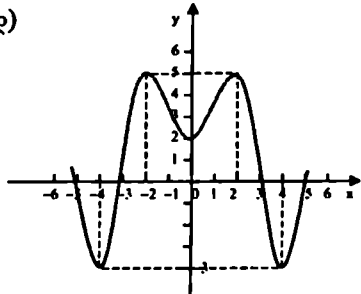
ბ)



გ)



დ)



იპოვეთ: მოცემული ფუნქციების ნიშანმუდმივობის შუალედები, თითოეული ფუნქციის მონოტონურობის შუალედები და ექსტრემუმის წერტილები.

9. პერიოდულია თუ არა ღირიხლეს ფუნქცია,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \text{ რაციონალურია} \\ 1, & \text{თუ } x \text{ ირაციონალურია} \end{cases}$$

10. მოცემული ფუნქციებიდან, რომელია ლუწი ფუნქცია ან კენ-

ტი ფუნქცია?

ა) $f(x)=x^3-3x^2|x|$; ბ) $f(x)=x^4-3x^2|x|$; გ) $f(x)=x^3-3x$;

დ) $f(x)=3x+x^3$; ე) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$; ვ) $f(x)=\frac{2|x|}{1-x^2}$;

ზ) $f(x)=\frac{2x}{1-x^2}$; თ) $f(x)=x^4-2x^2+1$; ი) $f(x)=x^3-x+1$;

კ) $f(x)=x|x|+x^2|x|$.

11. 15 მუშამ შეშა 8 საათში დახერხა. რამდენ საათში შეასრულებს იგივე სამუშაოს x რაოდენობის მუშა? (იგულისხმება, რომ მუშების შრომისნაყოფიერება ერთმანეთის ტოლი მუდმივი სიდიდეა). საათების რაოდენობა აღვნიშნოთ y -ით და x -სა და y -ს შორის ფუნქციონალური დამოკიდებულება გამოვსახოთ ფორმულის საშუალებით.
12. მართკუთხედის ფართობი 72 სმ²-ის ტოლია. ამ მართკუთხედის გვერდები აღვნიშნოთ x -ით და y -ით. y -სა და x -სა შორის ფუნქციონალური დამოკიდებულება გამოვსახოთ ფორმულის საშუალებით.
13. 12 შეგიღდს შეუძლია იმავე დროში შეასრულოს სამუშაო, რა დროშიც მას ასრულებს 5 ოსტატი. რამდენი დღე დაჭირდება 2 შეგიღდს, რომ შეასრულოს სამუშაო, როელსაც 10 ოსტატი ასრულებს 1 დღეში? (იგულისხმება, რომ როგორც ოსტატების შრომისნაყოფიერება ერთმანეთის ტოლი და მუდმივია, ასევე შეგიღდების შრომისნაყოფიერება ერთმანეთის ტოლი და მუდმივია).
14. მიწის ერთი ნაკვეთი 5-მა ტრაქტორმა 9 საათში მოხნა. რამდენი ასეთივე სიმძლავრის ტრაქტორი მოხნავს იგივე ფართობის მიწის ნაკვეთს 7,5 საათში? (იგულისხმება, რომ ტრაქტორების შრომისნაყოფიერება ერთმანეთის ტოლი მუდმივი სიდიდეა).
15. ველოსიპედისტი 3 საათი მოძრაობდა 8 კმ/სთ სიჩქარით. რა დრო დაჭირდება ქვეითს, გზის იმავე მონაკვეთის გასასვლელად, თუ იგი 4კმ/სთ სიჩქარით იმოძრაებს?
16. იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა განსაზღვრის არე:

ა) $y=-2x+5$; ბ) $y=\frac{6}{x}$; გ) $y=-\frac{12}{x}+4$; დ) $y=\frac{1}{x-3}$;

$$ე) y = \frac{x+1}{2x-1}; \quad ვ) y = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1}.$$

17. იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა განსაზღვრის არე:

$$ა) y = \sqrt{x}; \quad ბ) y = -\sqrt{x+1}; \quad გ) y = \frac{\sqrt{4x-5}}{3}; \quad დ) y = \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x-3}}{x^2-4};$$

$$ე) y = \sqrt{x^2-5x+6}; \quad ვ) y = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}.$$

18. იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა განსაზღვრის არე:

$$ა) y = 2\sqrt{x-1} - \frac{3}{\sqrt{4-x}}; \quad ბ) y = \frac{x-1}{x+2} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-6x+9};$$

$$გ) y = \sqrt{(3-x)(x-6)}.$$

19. იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა მნიშვნელობათა არე:

$$ა) y = x^2 - 4x + 7; \quad ბ) y = 8x - x^2 - 10; \quad გ) y = 1 + \frac{1}{x-3}; \quad დ) y = x + 3.$$

20. იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა მნიშვნელობათა არე:

$$ა) y = |x|; \quad ბ) y = 3 - |x-1|; \quad გ) y = |1-x|; \quad დ) y = 2 - |1-3x|.$$

21. იპოვეთ ფუნქციათა ნულები:

$$ა) y = 3x - 1; \quad ბ) y = 2 - 4x; \quad გ) y = x^2 - 7x + 6; \quad დ) y = 2x^2 - 5x + 3.$$

22. იპოვეთ ფუნქციების ზრდადობის შუალედები:

$$ა) y = -x^2; \quad ბ) y = x^2 - 5x + 6; \quad გ) y = -2x^2 + 4x - 3.$$

23. იპოვეთ ფუნქციების კლებადობის შუალედები:

$$ა) y = |x|; \quad ბ) y = |3x - 4|; \quad გ) y = \frac{1}{x}.$$

24. იპოვეთ შუალედები, სადაც დადებითია შემდეგი ფუნქციები:

$$ა) y = \frac{2}{3}x - 4; \quad ბ) y = 3 - 6x; \quad გ) y = x^2 - 3x - 10.$$

25. იპოვეთ შუალედები, სადაც უარყოფითია შემდეგი ფუნქციები:

$$ა) y = \frac{5}{8}x - 1; \quad ბ) y = 2 - 5x; \quad გ) y = x^2 - 5x - 24.$$

26. ერთი ფანქრის მასა არის 1,5 გრამი. x ფანქრის მასა ავღნიშნოთ y -ით (გრამებში) და ცხრილის საშუალებით გამოვსახოთ ფუნქციონალური დამოკიდებულება x -სა და y -ს შორის, თუ $1 \leq x \leq 4$.

27. 135 კილომეტრის გაელისას ავტომობილმა 27 ლიტრი საწვავი დახარჯა. რამდენ ლიტრ საწვავს დახარჯავს ავტომობილი 315 კილომეტრის გასაელელად, თუ საწვავის ხარჯვის ტემპი იგივე დარჩება?
28. მოცემულია $f(x)=3x^2-x^3$, იპოვეთ $f(-1)-f(1)+f(0)$.
29. მოცემულია $f(x)=3x^3-2x^2+4$, იპოვეთ $f(-2)+f(2)+f(0)$.
30. მოცემულია $f(x)=\begin{cases} 3-4x, & \text{თუ } x < 2, \\ -5, & \text{თუ } 2 \leq x \leq 5, \\ 4x-25, & \text{თუ } x > 5; \end{cases}$ იპოვეთ $f(4)+f(6)+f(1)$.

28.1.1. ტესტი №27

1. f ფუნქცია მოცემულია ცხრილით:
- | | | | | | |
|--------|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f(x)$ | 3 | 5 | 2 | 6 | 7 |
- ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა
- ა) $\{2; 5; 6; 7\}$, ბ) $\{0; 1; 2; 3; 4\}$, გ) $\{3; 5; 6; 7\}$,
 დ) $\{2; 3; 5; 6; 7\}$.
2. f ფუნქციის გრაფიკის OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილის აბსცისა არის f ფუნქციის
- ა) მინიმუმი, ბ) მაქსიმუმი, გ) ნული, დ) ექსტრემუმი.
3. f ფუნქციის მინიმუმის და მაქსიმუმის წერტილები ამ f ფუნქციის
- ა) ექსტრემუმის წერტილებია, ბ) ნულებია,
 დ) დადებითობის წერტილებია, ე) უარყოფითობის წერტილებია.
4. f ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედები რომ ვიპოვოთ, უნდა ვიცოდეთ:
- ა) მხოლოდ $f(x)=0$ განტოლების ფესვები,
 ბ) მხოლოდ $f(x)<0$ უტოლობის ამონახსნი,
 გ) მხოლოდ $f(x)>0$ უტოლობის ამონახსნი,
 დ) $f(x)<0$ და $f(x)>0$ უტოლობების ამონახსნები.
5. თუ $[x]=-5$, მაშინ
- ა) $x<-5$; ბ) $x=-6$; გ) $-5 \leq x < -4$; დ) $-6 \leq x < -5$.

6. ლუწი ფუნქციის განსაზღვრის არე არ შეიძლება იყოს
 ა) $(-3; 3)$; ბ) $[-3; 3)$; გ) $[-3; 3]$; დ) $(-\infty; \infty)$.
7. თუ $y=f(x)$ კენტი ფუნქციაა და მისი გრაფიკი გადის $M(-3; 4)$ წერტილზე, მაშინ ამ გრაფიკს აუცილებლად ეკუთვნის
 ა) $(-3; -4)$ წერტილი; ბ) $(3; -4)$ წერტილი; გ) $(3; 4)$ წერტილი; დ) $(-3; 8)$ წერტილი.
8. შეარჩიეთ ლუწი ფუნქცია
 ა) $y=|x|$, ბ) $y=2x$, გ) $y=x^2+1$, დ) $y=x^4+x$.
9. შეარჩიეთ კენტი ფუნქცია
 ა) $y=x+1$, ბ) $y=3x^2$, გ) $y=x^4$, დ) $y=2x^3$.
10. თუ $f(x)=|x-1|+x^2-x^3$, მაშინ $f(1)+f(2)-f(0)=$
 ა) -3 ; ბ) -4 ; გ) -2 ; დ) -1 .

§29. პირდაპირპროპორციული და უპირპროპორციული დამოკიდებულებანი სიდიდეებს შორის

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, 1 კილოგრამი ვაშლის ფასი 2 ლარია. ვიპოვოთ x კილოგრამი ვაშლის ღირებულება. y -ით აღვნიშნოთ ვაშლის ღირებულება და x -სა და y -ს შორის ფუნქციონალური დამოკიდებულება გამოვსახოთ ფორმულის საშუალებით. (x -ს მიეცეთ მნიშვნელობები: $x=0,5$; $x=2$; $x=4$; $x=10$ და შესაბამისად შევავსოთ ცხრილი).

ცხადია, რომ $y=2x$, სადაც 2 აღნიშნავს, ამოცანის პირობაში მოცემული, 1 კილოგრამი ვაშლის ფასს; ხოლო ღირებულების (y -ის) ცვლილება დამოკიდებულია თუ რამდენი კილოგრამი ვაშლის (x -ის) შეძენას ეპირებათ. x -ის შესაბამისი მნიშვნელობები სათვის ცხრილს ექნება შემდეგი სახე:

ნაყიდი ვაშლები კილოგრამებში x	0,5	2	4	10
ნაყიდი ვაშლების ღირებულება ლარებში y	1	4	8	20

როგორც ცხრილიდან ჩანს y -ისა და x -ის შესაბამისი მნიშვნელობების შეფარდება უცვლელია და იგი 2-ის ტოლია - $\frac{y}{x} = 2$.

თუ x და y სიდიდეები ისე იცვლება, რომ მათი შეფარდება მუდმივია, $\frac{y}{x} = k$, მაშინ x და y სიდიდეები პირდაპირპროპორციული სიდიდეებია ერთმანეთის მიმართ.

დადებითი სიდიდეების შემთხვევაში პირდაპირპროპორციულია ორი სიდიდე, თუ ერთი სიდიდის რამდენჯერმე ზრდით (შემცირებით), მეორეც იმდენჯერვე იზრდება (მცირდება).

მაგალითად, თანაბარი მოძრაობისას გავლილი s მანძილი და ამ მანძილის გავლაზე დახარჯული t დრო პირდაპირპროპორციული სიდიდეებია; რეალურ პუნქტებს შორის მანძილი და რუკაზე შესაბამის წერტილებს შორის მანძილი პირდაპირპროპორციული სიდიდეებია.

პირდაპირპროპორციული ეწოდება ფუნქციას, რომელიც მოცემულია ფორმულით $y=kx$, სადაც k ნულის არატოლი ნამდვილი რიცხვია. k რიცხვს ეწოდება პროპორციულობის კოეფიციენტი; y ცვლადის შესახებ ამბობენ, რომ იგი პირდაპირპროპორციულ დამოკიდებულებაშია x ცვლადთან, სხვა სიტყვებით, y პირდაპირპროპორციულადაა დამოკიდებული x -ზე.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ პროპორციულობის კოეფიციენტი, საკმარისია ვიცოდეთ x -სა და y -ის ერთმანეთის შესაბამის მნიშვნელობათა ერთი წყვილი ($x_0; y_0$), რომელიც განსხვავებულია ($0; 0$) წყვილისაგან. მაგალითად, საქონლის მუდმივი ფასის დროს მისის ღირებულება, როგორც ზემოთ აღნიშნულ მაგალითში აღვნიშნეთ, საქონლის რაოდენობის პირდაპირპროპორციულია. ამასთან, პროპორციულობის კოეფიციენტია ფასი. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ფასი, საკმარისია ვიცოდეთ საქონლის რაიმე (0 -საგან განსხვავებული) რაოდენობის ღირებულება. ცხადია, რომ ფასი არის ღირებულებისა და რაოდენობის განაყოფის ტოლი.

აეღნიშნოთ, რომ თუ f ფუნქცია წარმოადგენს პირდაპირპროპორციულ ფუნქციას და $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ $y=f(x)$ -ის შესაბამის მნიშვნელობათა წყვილებია, სადაც $x_2 \neq 0$, მაშინ $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$; ანუ, თუ $y=k(x)$, მაშინ x ცვლადის ორი (0 -საგან განსხვავებული) ნებისმიერი მნიშვნელობის შეფარდება ტოლია y ცვლადის შესაბამის მნიშვნელობათა შეფარდების.

ჩამოვაყალიბოთ პირდაპირპროპორციულობის ზოგიერთი თვისება:

1. $y=k(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე.
 2. $y=k(x)$ ფუნქციის ცვლილებების არეა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე.
 3. $y=k(x)$ ფუნქცია ზრდადია, მაშინ როცა $k>0$; ხოლო კლებადია, მაშინ როცა $k<0$.
 4. ეთქვათ, მოცემულია $y=k(x)$ ფუნქცია და $k>0$, მაშინ: თუ $x>0$, გამომდინარეობს $y>0$, ხოლო თუ $x<0$, მაშინ $y<0$; როცა $k<0$, მაშინ: თუ $x>0$, გამომდინარეობს $y<0$, ხოლო თუ $x<0$, მაშინ $y>0$.
- განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი. ეთქვათ A -დან B -პუნქტამდე

მანძილი 40 კმ-ის ტოლია. A -დან B -პუნქტის მიმართულებით ერთდროულად გავიდა ავტობუსი, I ავტომობილი, II ავტომობილი, I ველოსიპედისტი, II ველოსიპედისტი, I ტურისტი და II ტურისტი. შესაბამისად ისინი შემდეგი მუდმივი სიჩქარით მოძრაობენ: ავტობუსის სიჩქარეა 40 კმ/სთ, I ავტომობილის – 80 კმ/სთ, II ავტომობილის – 100 კმ/სთ, I ველოსიპედისტის – 10 კმ/სთ, II ველოსიპედისტის – 16 კმ/სთ, I ტურისტის – 5 კმ/სთ, ხოლო II ტურისტის – 4 კმ/სთ. ვიპოვოთ დრო, რომლის განმავლობაში, შესაბამისად, თითოეული მათგანი დაფარავს A -დან B -პუნქტამდე მანძილს. ამოხსნის შედეგები შეიძლება შევიტანოთ ცხრილში (x -ით ავლნიშნოთ სიჩქარეები, y -ით მანძილის გასაველელად საჭირო დრო (თითოეულისათვის), ხოლო k -თი A და B პუნქტებს შორის მანძილი), გვაქვს:

მოძრავი ობიექტი	გასაველელი მანძილი (კმ-ში) k	სიჩქარე (კმ/სთ-ში) x	დრო (სთ-ში) y
ავტობუსი	40	40	1
I ავტომობილი	40	80	0,5
II ავტომობილი	40	100	0,4
I ველოსიპედისტი	40	10	4
II ველოსიპედისტი	40	16	2,5
I ტურისტი	40	5	8
II ტურისტი	40	4	10

როგორც ცხრილიდან ჩანს, y -ისა და x -ის შესაბამისი მნიშვნელობების ნამრავლი უცვლელია და იგი 40-ის ტოლია – $yx = 40$.

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი. ეთქვათ, გვაქვს 40 ლარი და ეს თანხა მთლიანად უნდა დაეხარჯოთ და ვიყიდოთ მხოლოდ ერთი დასახელების პროდუქტი შემდეგი პროდუქტებიდან: ავოკადო, ქოქოსი, ფეიჰოია, მარწყვი, ალუბალი, ატამი ან ვაშლი. პროდუქტების ფასი შემდეგია: 1 კგ ავოკადო – 16 ლარი ღირს, 1 კგ ქოქოსი – 10 ლარი, 1 კგ მარწყვი – 8 ლარი, 1 კგ ფეიჰოია – 5 ლარი, 1 კგ ალუბალი – 4 ლარი, 1 კგ ატამი – 2,5 ლარი, ხოლო 1 კგ ვაშლი – 2 ლარი. ვიპოვოთ, დასახელებული პროდუქტებიდან, თითოეულის რამდენი კილოგრამის შეძენა შეგ-

ვიძლია 40 ლარის ფარგლებში. შედეგები შეეიტანოთ ცხრილში (x-ით აღნიშნოთ 1 კგ შესაბამისი პროდუქტის ფასი, y-ით შეძენილი პროდუქტის რაოდენობა კილოგრამებში, ხოლო k-თი გამოყოფილი თანხა, რომელიც იხარჯება მთლიანად შერჩეული ერთგვაროვანი პროდუქტის საყიდლად), გვაქვს:

პროდუქტის სახეობა	დახარჯული თანხა (ლარებში) k	1 კგ-ს ფასი (ლარებში) x	შეძენილი პროდუქტის რაოდენობა (კგ-ში) y
ავოკადო	40	16	2,5
ქოქოსი	40	10	4
ფეიჭოა	40	5	8
მარწყვი	40	8	5
ალუბალი	40	4	10
ატამი	40	2,5	16
ვაშლი	40	2	20

ამ შემთხვევაშიც, y -ისა და x -ის შესაბამისი მნიშვნელობების ნამრავლი უცვლელია და იგი 40-ის ტოლია – $yx=40$.

თუ x და y სიდიდეები ისე იცვლება, რომ მათი xy ნამრავლი მუდმივია, მაშინ x და y სიდიდეებს უკუპროპორციული ეწოდება.

ორივე განხილულ მაგალითში ცვლადები დადებით მნიშვნელობებს ღებულობენ და ერთი ცვლადის მეორეზე დამოკიდებუ-

ლება $y = \frac{k}{x}$ ფორმულით გამოისახება, სადაც k მოცემული რიცხ-

ვია, $k \neq 0$. პირველ მაგალითში y აღნიშნავს დროს (რომლის განმავლობაშიც მოძრავი ობიექტი, შესაბამისი სიჩქარით (x -ით), გადის A და B პუნქტებს შორის მანძილს (k -ს)); მეორე მაგალითში y არის შეძენილი პროდუქტის რაოდენობა (რომლის ფასი აღნიშნულია x -ით, ხოლო მთლიანად გადახდილი ღირებულება კი k -თი).

x და y ცვლადებს, რომლებიც დადებით მნიშვნელობებს იღებენ და მათ შორის დამოკიდებულება $y = \frac{k}{x}$ ფორმულით მოიცე-

მა, უკუპროპორციული ცვლადები ეწოდებათ. ეთქვას, x ცვლადის რაიმე მნიშვნელობებია x_1 და x_2 , y ცვლადის შესაბამისი

მნიშვნელობები $x_1 - y_1$ და y_2 -ია, ანუ $y_1 = \frac{k}{x_1}$ და $y_2 = \frac{k}{x_2}$. მაშინ

$x_1 y_1 = k$, $x_2 y_2 = k$ და $x_1 y_1 = x_2 y_2$, საიდანაც $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_1}{y_2}$. ამ დამოკიდებულები-

დან ჩანს, რომ x ცვლადის რამდენჯერმე გაზრდა იწვევს y ცვლადის იმდენჯერმე შემცირებას, ანუ x ცვლადის რამდენჯერმე შემცირება იწვევს y ცვლადის იმდენჯერმე გაზრდას.

უკუპროპორციული ეწოდება ფუნქციას, რომელიც $y = \frac{k}{x}$ ფორმულით მოიცემა, სადაც k ნულის არატოლი ნამდვილი რიცხვია. k რიცხვს პროპორციულობის კოეფიციენტი ეწოდება; y ცვლადის შესახებ ამბობენ, რომ იგი უკუპროპორციულ დამოკიდებულებაშია x ცვლადთან, სხვა სიტყვებით, y უკუპროპორციულადაა დამოკიდებული x -ზე.

როგორც პირდაპირპროპორციულობის შემთხვევაში, იმისათვის რომ ვიპოვოთ უკუპროპორციულობის კოეფიციენტი, საკმარისია ვიცოდეთ x -სა და y -ის ერთმანეთის შესაბამის მნიშვნელობათა ერთი წყვილი (x_0, y_0). ცხადია, რომ $k = x_0 y_0$.

ჩამოვაყალიბოთ $y = \frac{k}{x}$ ფუნქციის ზოგიერთი თვისება:

1. ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე, გარდა $x=0$ წერტილისა.

2. ფუნქციის მნიშვნელობათა არეა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე, გარდა $y=0$ წერტილისა.

3. როცა $k>0$, ფუნქცია კლებადია ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე, გარდა $x=0$ წერტილისა; ამ წერტილზე ფუნქცია განიცდის წყვეტას. როცა $k<0$, ფუნქცია ზრდადია ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე, გარდა $x=0$ წერტილისა.

4. როცა $k>0$, მაშინ: თუ $x>0$ გამომდინარეობს $y>0$, ხოლო, თუ $x<0$ გამომდინარეობს $y<0$; როცა $k<0$, მაშინ: თუ $x>0$ გამომდინარეობს $y<0$, ხოლო თუ $x<0$ გამომდინარეობს $y>0$.

29.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. სამკუთხედის a გვერდის სიგრძე ისე შეეფარდება b გვერდის სიგრძეს, როგორც 1:2; ხოლო b გვერდის სიგრძე ისე შეეფარდება c გვერდის სიგრძეს, როგორც 3:4. ვიპოვოთ $a:b:c$.
2. ტურისტი თანაბარი სიჩქარით მოძრაობდა. I დღეს მან 5 საათში 24 კმ გაიარა. II დღეს მან იმავე სიჩქარით 20 კმ გაიარა. რამდენი საათი იარა ტურისტი II დღეს?
3. ვთქვათ, სამუშაოს შესრულების დრო მუშების ოდენობის უკუპროპორციულია. 3 მუშა სამუშაოს 4 საათში ასრულებს. რა დროში შეასრულებს იგივე სამუშაოს ა) 9 მუშა? ბ) 12 მუშა?
4. მარიამმა ნამცხერის გამოსაცხობად აიღო 2 წილი შაქრის ფხენილი და 3 წილი ფქვილი, სულ – 2 კილოგრამი. რამდენი გრამი შაქრის ფხენილი გამოიყენა მარიამმა?
5. ორ ქალაქს შორის მანძილი 120 კმ-ია, რუკაზე ამ ქალაქებს შორის მანძილი – 6 სმ-ია. იპოვეთ რუკის მასშტაბი.
6. რკინის მაღანში ყოველ 7 ნაწილ რკინაზე 4 ნაწილი მინარეჟია. რამდენი ტონა მინარეჟი იყო მაღანში, თუ მისგან 59,5 ტ რკინა მიიღეს?
7. რკინისა და სპილენძის შენადნობში რკინა და სპილენძი 5:2 შეფარდებით შედის. რკინის მასის რა ნაწილს შეადგენს ამ შენადნობში სპილენძი?
8. მართკუთხედის სიგრძე და სიგანე, შესაბამისად, 5-ისა და 3-ის პროპორციულია. ამ მართკუთხედის პერიმეტრი 8 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ მართკუთხედის ფართობი.
9. x და y დადებითი რიცხვებია. როგორ შეიცვლება $\frac{x}{y}$ წილადის სიდიდე, თუ x -ს გაეზრდით 20%-ით და y -ს შევამცირებთ 20%-ით.
10. სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები 3-ის, 5-ისა და 6-ის პროპორციულია. ამ სამკუთხედის პერიმეტრი 84 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ სამკუთხედის უდიდესი გვერდის სიგრძე.
11. ცნობილია, რომ ერთი დადებითი რიცხვის 25% ტოლია მეორე რიცხვის 35%-ის. რომელი რიცხვია მეტი?

12. თუ მართკუთხედის ერთ გვერდს 10 %-ით გაგზრდით, ხოლო მის მეზობელ გვერდს კი – 40%-ით; მაშინ რამდენი პროცენტით გაიზრდება ამ მართკუთხედის ფართობი?
13. როგორ შეიცვლება ორი დადებითი რიცხვის ნამრავლი, თუ ერთს გაგზრდით 200 %-ით, ხოლო მეორეს კი 2-ჯერ შევამცირებთ?
14. თუ მოცემულ დადებით რიცხვს გაგზრდით 200%-ით, ხოლო შემდეგ 100%-ით, მაშინ რამდენი პროცენტით გაიზრდება მოცემული რიცხვი?
15. რამდენიმე მუშა სამუშაოს ასრულებს 9 საათში, თუ მათი ოდენობა 3-ით მეტი იქნება, მოსალოდნელია, რომ სამუშაო 8 საათში დაასრულონ. შეიძლება თუ არა მივიჩნიოთ, რომ მუშების ოდენობა საათების ოდენობის უკუპროპორციულია და თუ შეიძლება, მაშინ დაადგინეთ, თუ რამდენი მუშა დაასრულებდა სამუშაოს 9 საათში?
16. შეიძლება თუ არა, სამი ნაგი ისე იყოს არაწრფივად განლაგებული ტბაზე, რომ ნაგებს შორი a , b და c მანძილები აკმაყოფილებდეს პირობებს: $ab=2:3$ და $bc=5:11$?
17. პარლამენტში 4 პარტიის 150 დეპუტატია. პირველ პარტიას წარმოადგენს დეპუტატების 30%, მეორეს – 40%, მესამეს – 20%, ხოლო მეოთხეს – 10%. რამდენი დეპუტატი ჰყავს თითოეულ პარტიას?
18. ერთ ბრიგადას მარტო მუშაობით სამუშაოს დამთავრება 8 საათში შეუძლია, მეორეს – 6 საათში, მესამეს – 5 საათში. სამივე ბრიგადამ ერთად იმუშავე და სამუშაო ერთდროულად შეასრულა. მათ შორის სამართლიანად გავანაწილოთ 2360 ლარი.
19. რამდენიმე მუშა სამუშაოს 20 დღეში ასრულებს; თუ მათი რაოდენობა 1-ით გაიზრდება და თითოეული მუშა 1 საათით მეტს იმუშავენს, მაშინ იგივე სამუშაო 16 დღეში შესრულდება. თუ მუშების ოდენობა 6-ით გაიზრდება და თითოეული მათგანი იმუშავენს კიდევ 2 საათით მეტს, მაშინ სამუშაო 10 დღეში შესრულდება. აღნიშნეთ x -ით მუშების თავდაპირველი ოდენობა, y -ით – ერთ დღეში თითოეულის მუშაობის ხანგრძლივობა (საათებში). შეეცადეთ, დაწეროთ ორი ტოლობა.

რომლებსაც x და y აკმაყოფილებს (უკუპროპორციული სიდიდეების თვისების გამოყენებით) და იპოვეთ x და y .

20. მოლარემ a -ლარიანი და 5-ლარიანი კუპიურებით b ლარი გასცა. კუპიურების რაოდენობა სულ 20-ის ტოლი იყო. რამდენი კუპიურა იყო a -ლარიანი? შეიძლება თუ არა ვიპოვოთ ეს რაოდენობა, როცა $b=110$ -ს?
21. კლასში მოსწავლეთა რაოდენობა a -ს ტოლია. თუ თითოეულ მერხს b მოსწავლე მიუჯდება, მაშინ 5 მოსწავლისათვის ადგილი არ დარჩება. რამდენი მერხია კლასში?
22. A და B პუნქტებიდან ერთდროულად გამოსული ორი ავტომობილი ერთმანეთს t საათში შეხვდა. A -დან გამოსული ავტომობილის სიჩქარე v_1 კმ/სთ-ია, B -დან გამოსულის კი – v_2 კმ/სთ. შეხვედრის შემდეგ რამდენ საათში ჩავა A -დან გამოსული ავტომობილი B -ში და B -დან გამოსული – A -ში?
23. ორი მომდევნო ნატურალური რიცხვის ნამრავლი 62-ით ნაკლებია შემდეგი ორი ნატურალური რიცხვის ნამრავლზე. იპოვეთ ეს რიცხვები.
24. თუ მართკუთხედის სიგრძეს 5 სმ-ით შევამცირებთ, ხოლო სიგანეს 3 სმ-ით გავადიდებთ, მაშინ მივიღებთ კვადრატს, რომლის ფართობი 5 სმ²-ით მეტი იქნება მართკუთხედის ფართობზე. იპოვეთ კვადრატის გვერდის სიგრძე.
25. ოთხ ყუთში თანაბრად მოთავსებულია ფორთოხალი. როდესაც თითოეული ყუთიდან ამოიდეს 18 კგ ფორთოხალი, მაშინ ყველა ყუთში ერთად დარჩა იმდენი, რამდენიც თავდაპირველად იყო თითოეულში, რამდენი კგ ფორთოხალი ყოფილა თითოეულ ყუთში?
26. თესვა უნდა დასრულებულიყო 12 დღეში; მაგრამ იმის გამო, რომ დღეში ითესებოდა 6 ჰექტარით ნაკლები, ვიდრე გათვალისწინებული იყო, თესვა დასრულდა 16 დღეში, რამდენი ჰექტარი მიწა იყო სულ დასათესი?
27. ორ მუშის გარკვეული სამუშაოს შესასრულებლად 4 დღით ნაკლები ჭირდება, ვიდრე მხოლოდ პირველს და 9 დღით ნაკლები, ვიდრე მხოლოდ მეორეს. ა) რამდენ დღეში შეასრულებს ამ სამუშაოს თითოეული მუშა ცალკე მუშაობით? ბ)

რამდენ დღეში დაასრულებენ სამუშაოს, თუ სამუშაოს ნახევარს ორივე ერთად შეასრულებს, ხოლო დარჩენილ ნახევარს მხოლოდ პირველი მუშა დაასრულებს?

28. მიკროავტობუსი რუსთაიდან ბათუმში 6 საათში ჩავიდა. უკან წამოსვლისას პირველი 80 კმ მიკროავტობუსმა იგივე სიჩქარით გაიარა, შემდეგ ის 1 საათით შეაჩერეს. ამის შემდეგ მიკროავტობუსმა თავდაპირველი სიჩქარე 20 კმ/სთ-ით გაზარდა და ბათუმიდან რუსთავეში დაბრუნებას კვლავ 6 საათი მოინდომა. იპოვეთ მიკროავტობუსის თავდაპირველი სიჩქარე და მანძილი რუსთაიდან ბათუმამდე (გავითვალისწინოთ, რომ ამ ქალაქებს შორის მანძილი 250 კილომეტრზე მეტია).
29. ტურისტები კატარლით მდინარის მიმართულებით გაემგზავრნენ და უკან დაბრუნებას აპირებენ. მდინარის დინების სიჩქარე 2 კმ/სთ-ია, კატარლის სიჩქარე მდგარ წყალში – 18 კმ/სთ-ია. რა მაქსიმალური მანძილით შეიძლება გადაადგილდნენ ტურისტები მდინარის დინების მიმართულებით, რომ მთელ მგზავრობაზე 4,5 საათზე მეტი დრო არ დაჭირდეთ?
30. ტურისტები კატარლით მდინარის საწინააღმდეგო მიმართულებით გაემგზავრნენ და უკან დაბრუნებას აპირებენ, მდინარის დინების სიჩქარე 2 კმ-სთ-ია, კატარლის სიჩქარე მდგარ წყალში – 18 კმ/სთ-ია. რა მაქსიმალური მანძილით შეიძლება გადაადგილდნენ ტურისტები მდინარის საწინააღმდეგო მიმართულებით, რომ მთელ მგზავრობაზე 4,5 საათზე მეტი დრო არ დაჭირდეთ?

29.11. ტესტი №28

1. მართკუთხედის სიგრძე და სიგანე, შესაბამისად 5-ისა და 3-ის პროპორციულია. პერიმეტრი 8 სმ-ის ტოლია. ამ მართკუთხედის ფართობია:
ა) 3,75 სმ²; ბ) 625 სმ²; გ) 225 სმ²; დ) 1500 სმ².
2. a და b რიცხვები 5-ისა და 7-ის პროპორციულია, b და c რიცხვები – 4-ისა და 5-ის. რა რიცხვების პროპორციულია a , b და c ?

ა) $ab:c=7:4:5$; ბ) $ab:c=4:5:7$; გ) $ab:c=20:25:35$;

დ) $ab:c=20:28:35$.

3. არდადეგებზე თომას მუშაობის და თანხის დაგროვების ორი შესაძლებლობა გამოუჩნდა: ერთ სამუშაოზე მას მუშაობის პირველ დღეს აძლევენ 28 ლარს, ხოლო ყოველ შემდგომ სამუშაო დღეს 18 ლარს. მეორე სამუშაოზე მას ყოველდღიურად 20 ლარს პირდებიან. რამდენი სამუშაო დღის შემდეგ შეიძლება გაუტოლდეს მეორე სამუშაოში აღებული თანხა პირველ სამუშაოში აღებულ თანხას?

ა) 12 დღეში, ბ) 4 დღეში, გ) 5 დღეში, დ) 6 დღეში.

4. ქსოვილი ჯერ 10 %-ით გაძვირდა, შემდეგ კი – 30 %-ით. სულ რამდენი პროცენტით გაძვირდა ქსოვილი?

ა) 40%-ით, ბ) 43%-ით, გ) 15%-ით, დ) $18\frac{2}{11}$ %-ით.

5. ქურქი 20%-ით გაიაფდა, შემდეგ – კიდევ 20%-ით. სულ რამდენი პროცენტით გაიაფდა ქურქი?

ა) 40%-ით, ბ) 32%-ით, გ) 36%-ით, დ) 30%-ით.

6. სამი ლითონის შენადნობში ამ ლითონების მასები 1-ის, 2-ის და 5-ის პროპორციულია. შენადნობის მასის რამდენ პროცენტს შეადგენს მესამე ლითონის მასა?

ა) 62,5%; ბ) 20%; გ) 60%; დ) 37,5%.

7. თუ 8 მკერავი 5 საათში კერავს 80 უნიფორმას, მაშინ 10 მკერავი 9 საათში შეკერავს

ა) 160 უნიფორმას; ბ) 150 უნიფორმას;

გ) 180 უნიფორმას; დ) 200 უნიფორმას.

8. ოსტატი 3 საათში ჩარხავს 30 დეტალს, რამდენ დეტალს გამოჩარხავს ის 30 წუთში?

ა) 10, ბ) 6, გ) 5, დ) 3.

9. თუ $x:y=5:7$ და $x:z=3:5$, მაშინ რას უდრის $y:z$?

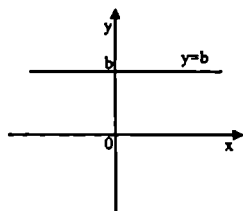
ა) 21:25; ბ) 25:21, გ) 7:5, დ) 7:15.

10. თიკომ იყიდა ნამცხვრები და შოკოლადები, სულ 42 ლარის. ერთი შოკოლადი ღირდა 12 ლარი, ხოლო ერთი ნამცხვარი კი – 18 ლარი. რამდენი ცალი შოკოლადი უყიდა თიკოს?

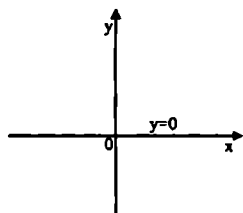
ა) 1, ბ) 2, გ) 3, დ) 4.

§30. $y = kx + b$, $y = \frac{k}{x}$ ფუნქციები, მათი თვისებები
და გრაფიკები

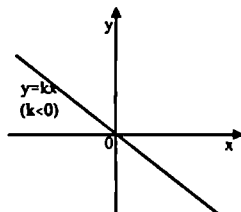
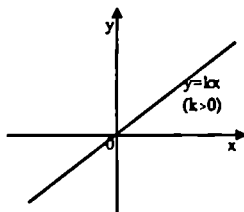
ფუნქციას, რომელიც მოცემულია $y = kx + b$ ფორმულით, სადაც k და b ნამდვილი რიცხვებია, წრფივი ფუნქცია ეწოდება. თუ $k=0$, მაშინ წრფივი ფუნქცია მიიღებს შემდეგ სახეს $y=b$. მას მუდმივი ფუნქცია ეწოდება და მისი გრაფიკი აბსცისათა ღერძის პარალელური წრფეა, რომელიც ორდინატთა ღერძს კვეთს b წერტილში.



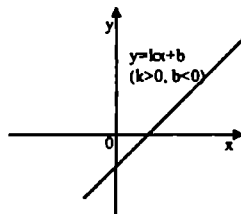
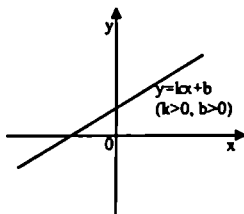
თუ $k=0$ და $b=0$, მაშინ მიიღება $y=0$, რომელიც ცხადია, აბსცისათა ღერძის განტოლებას წარმოადგენს.

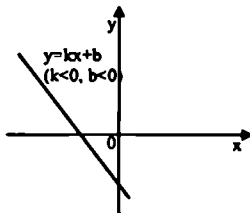
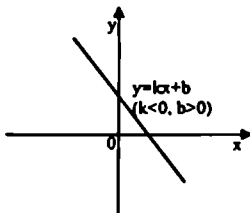


თუ $k \neq 0$ და $b=0$, მაშინ $y=kx$ წრფე კოორდინატთა სათავეზე გაივლის.

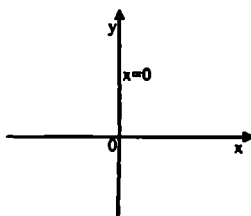
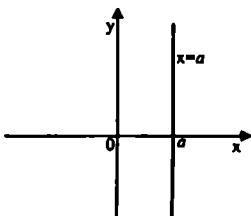


თუ $k \neq 0$ და $b \neq 0$, მაშინ $y = kx + b$ წრფივი ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს $y = kx$ წრფის პარალელურ წრფეს, რომელიც ორდინატთა ღერძს გადაკვეთს b წერტილში.





აღსანიშნავია, რომ OY ღერძის პარალელური წრფის განტოლებას აქვს სახე $x=a$, სადაც a მოცემული წრფის OX ღერძთან გადაკეუთის წერტილია; კერძოდ, $x=0$ წარმოადგენს ორდინატთა ღერძის – OY -ის განტოლებას; შევნიშნოთ, რომ ეს წრფეები ფუნქციებს არ წარმოადგენენ.



შეიძლება შევნიშნოთ, რომ სწორი ხაზის ქართული ტერმინი – „წრფე“ წარმოშობილია ქართული ცნებიდან „წრფელი“ – სწორი, პირდაპირი; მაგალითად, გულწრფელი. ეს ტერმინი იოანე პეტრიწის მიერაა შემოღებული; იგი წერს: „რაი წაილუაროს წერტილი შექმნის წრფელსა“. სახელწოდება წრფივი ფუნქცია დაკავშირებულია იმასთან, რომ $y=kx+b$ ფუნქციის გრაფიკი არის წრფე. ტერმინი – „წრფივი ფუნქცია“ შემოიღო დიუბუა რაიმონმა 1882 წელს.

დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაზე შეიძლება განვიხილოთ ზოგიერთი სხვადასხვა სახით ჩაწერილი წრფის განტოლება:

1. ზოგადი სახის წრფის განტოლება: $ax+by+c=0$, სადაც a და b ერთდროულად არ უდრიან ნულს.

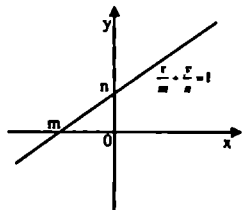
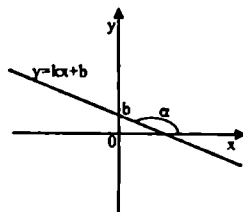
2. წრფის განტოლება საკუთხო კოეფიციენტით: $y=kx+b$. $k=tg\alpha$, სადაც α არის კუთხე, რომელსაც ადგენს წრფე OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან. როგორც განვიხილეთ ეს წრფე OY

დერძს კვეთს $(0; b)$ წერტილში. k -ს ეწოდება საკუთხო კოეფიციენტი.

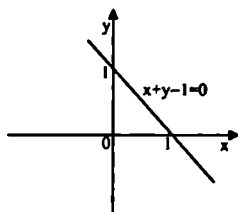
წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$. წრფე OX ღერძს კვეთს $(m; 0)$

წერტილში, ხოლო OY ღერძს კი $(0; n)$ წერტილში.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია წრფის განტოლება ზოგადი სახით: $x + y - 1 = 0$. ჩავწეროთ იგი საკუთხო კოეფიციენტის და ღერძთა მონაკვეთების სახით; ვიპოვოთ α კუთხე, რომელსაც ეს წრფე ადგენს OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან და ავაგოთ მისი გრაფიკი.



ამოხსნა. ამ წრფის განტოლებას საკუთხო კოეფიციენტით ექნება სახე: $y = -x + 1$, საიდანაც, ცხადია, $k = -1$; რაც იმას ნიშნავს, რომ $\operatorname{tg} \alpha = -1$, ე.ი. $\alpha = 135^\circ$. წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში არის $-\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1$.



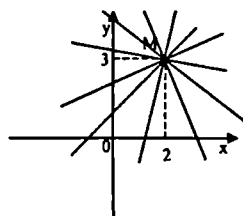
წრფის გრაფიკს აქვს სახე:

დამტკიცების გარეშე მოვიყვანოთ ზოგიერთი ფაქტი:

1. მოცემულ $M(x_0; y_0)$ წერტილზე გამავალი წრფეთა კონის განტოლებას აქვს სახე: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

მაგალითად, დავწეროთ $M(2; 3)$ წერტილზე გამავალი წრფეთა კონის განტოლება.

ამოხსნა. წრფეთა კონის განტოლებას ექნება სახე: $y - 3 = k(x - 2)$.

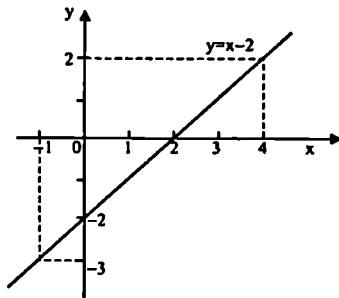


2. მოცემულ ორ $M_1(x_1; y_1)$ და $M_2(x_2; y_2)$ წერტილზე გამავალ წრფის განტოლებას აქვს სახე: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

მაგალითად, დავწეროთ $M_1(-1; -3)$ და $M_2(4; 2)$ წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება.

ამოხსნა. წრფის განტოლებას ექნება სახე: $\frac{y-(-3)}{2-(-3)} = \frac{x-(-1)}{4-(-1)}$; გარდაქმნის

შემდეგ მივიღებთ: $y=x-2$; თუ დავწერთ ღერძთა მონაკვეთების სახით, გვექნება: $\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1$.

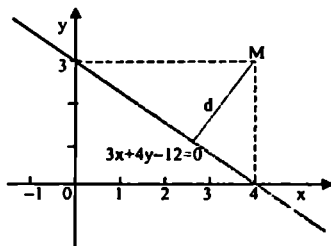


3. მოცემულია წრფე ზოგადი სახით $-ax+by+c=0$ და $M(x_0, y_0)$ წერტილი. მაშინ მანძილი ამ წერტილიდან წრფემდე არის $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

მაგალითად, ვიპოვოთ $M(4; 3)$ წერტილიდან $3x+4y-12=0$ წრფემდე მანძილი.

ამოხსნა. გვექნება: $d = \frac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 - 12}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$,

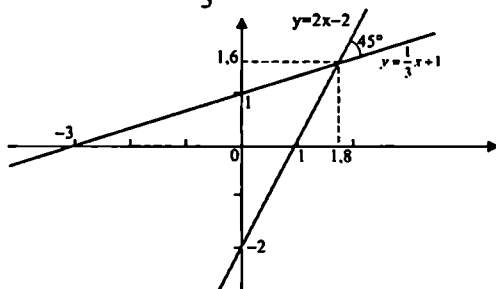
აქედან $d=2,4$.



4. მოცემულია $y=k_1x+b_1$ და $y=k_2x+b_2$ წრფეები; თუ α არის მათ შორის კუთხე, მაშინ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.

მაგალითად, ვიპოვოთ კუთხე $y = \frac{1}{3}x + 1$ და $y = 2x - 2$ წრფეებს შორის.

ამოხსნა. გვაქვს $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}}$, აქედან $\operatorname{tg} \alpha = 1$; ე.ი. $\alpha = 45^\circ$.



5. მოცემულია $y=k_1x+b_1$ და $y=k_2x+b_2$ წრფეები; ეს ორი წრფე ერთმანეთს კვეთს, თუ $k_1 \neq k_2$.

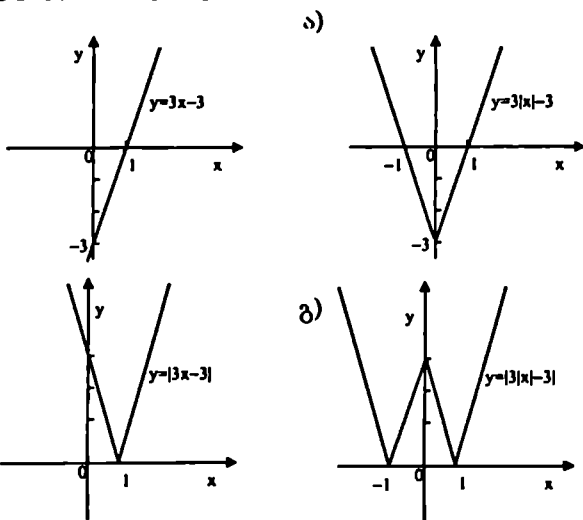
6. მოცემულია $y=k_1x+b_1$ და $y=k_2x+b_2$ წრფეები; ისინი ერთმანეთის პარალელურია, თუ $k_1=k_2$.

7. მოცემულია $y=k_1x+b_1$ და $y=k_2x+b_2$ წრფეები; ისინი ურთიერთმართობულია, თუ $k_1k_2=-1$.

პირველად პ. ფერმარ (1636) გამოთქვა შენიშვნა, რომ ნებისმიერი პირველი ხარისხის ორი ცვლადის განტოლება არის წრფის განტოლება. ამ ფაქტის დამტკიცება მოგვცა ი. დე ვიტომ (1658-1659).

$y=kx+b$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, ასევე ცვლილების არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე (გარდა $y=b$ წრფისა, რომლის ცვლილების არე თვით b რიცხვია).

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი. ავაგოთ $y=3x-3$ ფუნქციის გრაფიკი და მის მიხედვით ავაგოთ ა) $y=3|x|-3$, ბ) $y=|3x-3|$, გ) $y=|3|x|-3|$ ფუნქციათა გრაფიკები.



განვიხილოთ $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) ფუნქცია (k ნულისაგან განსხვავებული ნამდვილი რიცხვია). ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა – $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. ეს ფუნქცია კენტია, რადგან იგი განსაზღვრულია სიმეტრიულ შუალედზე კოორდინატთა სათავეის მიმართ და $f(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -f(x)$. ამ ფუნქციის ცვლილების არეა – $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

თუ $k > 0$, ფუნქცია კლებადია, როგორც $(-\infty; 0)$ შუალედში, ასევე $(0; \infty)$ შუალედშიც. მართლაც, თუ $x_1 \in (-\infty; 0)$ და $x_2 \in (-\infty; 0)$, მასთან $x_1 < x_2$, მაშინ $f(x_1) - f(x_2) = \frac{k}{x_1} - \frac{k}{x_2} = \frac{k(x_2 - x_1)}{x_1 x_2} > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. ამასთან, ამ შუალედში ფუნქციის ცვლილების არეა $(-\infty; 0)$. ასევე, თუ $x_1 \in (0; +\infty)$, და $x_2 \in (0; +\infty)$, მასთან $x_1 < x_2$, მაშინ $f(x_1) > f(x_2)$ და ამ შუალედში ფუნქციის ცვლილების არეა $(0; \infty)$.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ თუ $k < 0$, მაშინ აღნიშნულ შუალედებში ფუნქცია ზრდადია, ამასთან $(-\infty; 0)$ შუალედში ფუნქციის ცვლილების არეა $(0; \infty)$, ხოლო $(0; \infty)$ შუალედში კი – $(-\infty; 0)$.

შეენიშნოთ, რომ $y = \frac{k}{x}$ ფუნქცია მთელ განსაზღვრის არეში მონოტონური არ არის. ზემოთ მოყვანილი თვისებებიდან გამომდინარე $y = \frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი შედგება ორი შტოსაგან, რომლებიც მოთავსებულია I და III საკოორდინატო მეოთხედებში, როცა $k > 0$, ხოლო II და IV მეოთხედებში, როცა $k < 0$. $y = \frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკს ჰიპერბოლა ეწოდება.

განვიხილოთ მაგალითი:

$$\text{ერთ ნახაზზე ავაგოთ } y = \frac{0,12}{x}, y = \frac{1}{x}, y = \frac{6}{x}, y = \frac{-8}{x} \text{ და } y = \frac{12}{x}$$

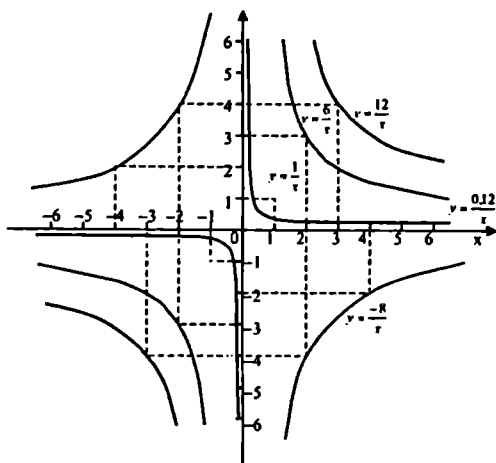
ფუნქციათა გრაფიკები.

იმისათვის, რომ k -ს კონკრეტული მნიშვნელობისათვის ჰიპერბოლა აიგოს უფრო ზუსტად, მიზანშეწონილია წინასწარ ავა-

გოთ გრაფიკის ზოგიერთი წერტილი.

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ ფუნქციას,}$$

სადაც a, b, c და d მოცემული ნამდვილი რიცხვებია, მათან $c \neq 0$ და $ad \neq bc$, წილად-წრფივი ფუნქცია ეწოდება. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, გარდა $x = -\frac{d}{c}$



რიცხვისა. მარტივი გარდაქმნებით წილად-წრფივ ფუნქციას შე-

იძლება მიეცეთ სახე: $y = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx + d}$. აქედან გამომდინარეობს, რომ წილად-წრფივი ფუნქციის გრაფიკი არის ჰიპერბოლა.

განვიხილოთ მაგალითები:

1. ავაგოთ $y = \frac{2x+7}{x+3}$ ფუნქციის გრაფიკი:

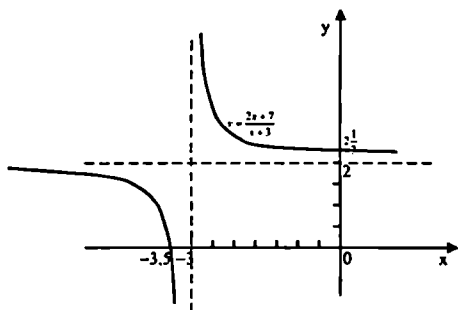
ამოხსნა. ჩაეწეროთ მოცემული ფუნქცია შემდეგი სახით:

$y = 2 + \frac{1}{x+3}$. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D(y) = (-\infty; -3) \cup (-3; \infty)$.

ცხადია, რომ ამ ფუნქციის

გრაფიკი მიიღება $y = \frac{1}{x}$

ფუნქციის გრაფიკისაგან პარალელური გადატანით OX ღერძის საწინააღმდეგო მიმართულებით 3 ერთეულზე და OY ღერძის მიმართულებით 2 ერთეულზე.



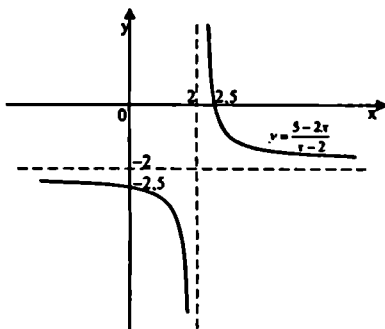
2. ავაგოთ $y = \frac{5-2x}{x-2}$ ფუნქციის

გრაფიკი.

ამოხსნა. ჩაწეროთ მოცემული ფუნქცია შემდეგი სახით:

$y = \frac{1}{x-2} - 2$. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$. ამ

ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y = \frac{1}{x}$



ფუნქციის გრაფიკისაგან პარალელური გადატანით OX ღერძის მიმართულებით 2 ერთეულზე და OY ღერძის საწინააღმდეგო მიმართულებით 2 ერთეულზე.

30.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

- იპოვეთ b -ს მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ $y=3x+b$ ფუნქციის გრაფიკი გადის შემდეგ წერტილებზე:
ა) $(-2; 4)$; ბ) $(1; 7)$; გ) $(2; 8)$; დ) $(3; 10)$.
- იპოვეთ k -ს მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ $y=kx+2$ ფუნქციის გრაფიკი გადის შემდეგ წერტილებზე:
ა) $(1; 3)$; ბ) $(5; 12)$; გ) $(1; 10)$; დ) $(8; 9)$.
- მოცემულია $y=2x-3$ წრფე. ამ წრფეზე იპოვეთ წერტილი, რომლის ორდინატაა 7.
- იპოვეთ შემდეგი წრფეების საკუთხო კოეფიციენტები:
ა) $x-y=5$; ბ) $4x-3y-6=0$; გ) $\frac{x}{15} - \frac{y}{10} = 1$; დ) $4x+3y=0$.
- შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M(1; -3)$ წერტილზე და OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან ადგენს კუთხეს, რომლის ტანგენსი 3-ის ტოლია.
- ჩაწერეთ ღერძთა მონაკვეთებში წრფეთა შემდეგი განტოლებები:
ა) $2x+3y-36=0$; ბ) $7x-8y-56=0$; გ) $12x+8y-48=0$; დ) $4x+3y-12=0$.
- იპოვეთ კუთხე შემდეგ წრფეებს შორის:
ა) $4x-2y=-3$ და $6x-3y-1=0$; ბ) $y=3x-4$ და $2x+y=0$.

8. $M(2; -3)$ წერტილზე გააელეთ $2x+3y=0$ წრფის მართობული წრფე.
9. $M(2; -1)$ წერტილზე გააელეთ $2x+3y=0$ წრფის პარალელური წრფე.
10. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $A(-1; 7)$ წერტილზე და საკუთხო კოეფიციენტი $k=-3$.
11. იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია კოორდინატთა ღერძებსა და $2x+5y-20=0$ წრფეს შორის.
12. იპოვეთ მანძილი $M(2; -1)$ წერტილიდან $8x-6y+15=0$ წრფემდე.
13. შეადგინეთ $M(-4; 3)$ წერტილზე გამავალი იმ წრფის განტოლება, რომელიც კოორდინატთა სათავედან დაშორებულია 5 ერთეულით.
14. მოცემულია $2x+y-3=0$ წრფე და მასზე $M(1; 1)$ წერტილი. ამავე წრფეზე იპოვეთ წერტილი, რომელიც M წერტილიდან დაშორებულია $\sqrt{5}$ მანძილით.
15. $x+2y-11=0$ და $2x-y-2=0$ წრფეთა გადაკვეთის წერტილზე გააელეთ წრფე, რომელიც კოორდინატთა სათავედან დაშორებულია 5 ერთეულით.
16. A წერტილი მდებარეობს $2x-3y+4=0$ წრფეზე. მანძილი A წერტილიდან $3y=4x$ წრფემდე 2-ის ტოლია. იპოვეთ A წერტილის კოორდინატები.
17. წარმოების დანახარჯი გარკვეული საქონლის 100 ცალზე შეადგენს 300 ლარს, ხოლო 500 ცალზე 600 ლარს. განსაზღვრეთ წარმოების დანახარჯი 400 ცალ საქონელზე, თუ ვიგულისხმებთ, რომ დანახარჯის ფუნქცია წრფივია.
18. ავაგოთ $y=3|x|-6$ ფუნქციის გრაფიკი.
19. ავაგოთ $y=|3x-6|$ ფუნქციის გრაფიკი.
20. ავაგოთ $y=|3|x|-6|$ ფუნქციის გრაფიკი.
21. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $(2; 3)$ წერტილზე და საკოორდინატო კუთხიდან მოკვეთს 12 კვ. ერთეულის ტოლი ფართობის მქონე სამკუთხედს.
22. ცნობილია, რომ $(-3; 2)$ წერტილი ეკუთვნის $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკს. იპოვეთ k .

23. ცნობილია, რომ $(a; 20)$ წერტილი ეკუთვნის $y = \frac{12}{x}$ ფუნქციის გრაფიკს. იპოვეთ a .
24. ეკუთვნის თუ არა $A(1; 1)$, $B(2; 4)$, $C(3; 5)$, $D(0; 8)$, $E(-1; 8)$, $F(-1; -8)$ წერტილები $y = \frac{8}{x}$ ფუნქციის გრაფიკს?
25. ცნობილია, რომ $(a; 10)$ წერტილი ძეგს $y = \frac{16}{x}$ ფუნქციის გრაფიკზე. ძეგს თუ არა ამავე ფუნქციის გრაფიკზე $(5; 2a)$ წერტილი?
26. ცნობილია, რომ $(a; b)$ წერტილი ძეგს $y = \frac{15}{x}$ ფუნქციის გრაფიკზე. ძეგს თუ არა ამავე ფუნქციის გრაფიკზე $(-2b; -0,5a)$ წერტილი?
27. ერთსა და იმავე საკოორდინატო სისტემაზე აგებულია $y = \frac{12}{x}$ და $y = \frac{10}{x}$ ფუნქციების გრაფიკები. იპოვეთ $y=4$ წრფისა და მოცემული ჰიპერბოლების გადაკვეთის წერტილები.
28. მოცემულია $y = \frac{6}{x}$ ჰიპერბოლა და $y=1,5x$ წრფე. ვიპოვოთ მათი გადაკვეთის წერტილები.
29. მოცემულია $y = \frac{6}{x}$ ჰიპერბოლა და $y=-x$ წრფე. იარსებებს თუ არა მათი გადაკვეთის წერტილები.
30. მოცემულია $y = \frac{-1}{x}$ ჰიპერბოლა და $y=|x|$ წრფე. ვიპოვოთ მათი გადაკვეთის წერტილი.

30.1.1. ტესტი №29

- მოცემულია წრფივი ფუნქცია $f(x)=3x-7$, მაშინ $f(3)=$
ა) 2; ბ) 3; გ) -2; დ) 7.
- მოცემულია $y=-8x+7$ ფუნქცია, არგუმენტის რა მნიშვნელობისათვის იქნება ფუნქციის მნიშვნელობა 3-ის ტოლი?

ა) $x=-0,5$; ბ) $x=0,5$; გ) $x=1$; დ) $x=2$.

3. ირაკლის 20 ლარი ჰქონდა. მან იყიდა x კგ ვაშლი, 1 კილოგრამი ვაშლი 2 ლარი ღირდა. იმ თანხის რაოდენობა, რაც ირაკლის დარჩა აღენიშნოთ y -ით. გამოვსახოთ ფორმულით y , როგორც x -ის ფუნქცია.

ა) $y=2x$; ბ) $y=\frac{20}{x}$; გ) $y=\frac{10}{x}$; დ) $y=20-2x$.

4. $f(x)=17x-10$ წრფე ფუნქციას არ ეკუთვნის წერტილი:

ა) (1; 7), ბ) (0; -10), გ) (1; -1), დ) (2; 24).

5. თუ $y=kx-3$ წრფე გადის (3; 0) წერტილზე, მაშინ

ა) $k=-1$, ბ) $k=2$, გ) $k=1$, დ) $k=0$.

6. $y=kx$ ფუნქციის გრაფიკი

ა) წარმოადგენს ჰიპერბოლას, ბ) არ გადის სათავეზე,
გ) გადის სათავეზე, დ) წრფეს არ წარმოადგენს.

7. $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი

ა) სათავეზე გადის, ბ) სათავეზე არ გადის,
გ) კვეთს აბსცისათა ღერძს,
დ) კვეთს ორდინატთა ღერძს.

8. თუ (2; -4) წერტილი $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკს ეკუთვნის, მაშინ

ა) $k=2$, ბ) $k=-8$, გ) $k=8$, დ) $k=-2$.

9. თუ (3; -7) წერტილი $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკს ეკუთვნის, მაშინ ამ გრაფიკს ეკუთვნის წერტილი

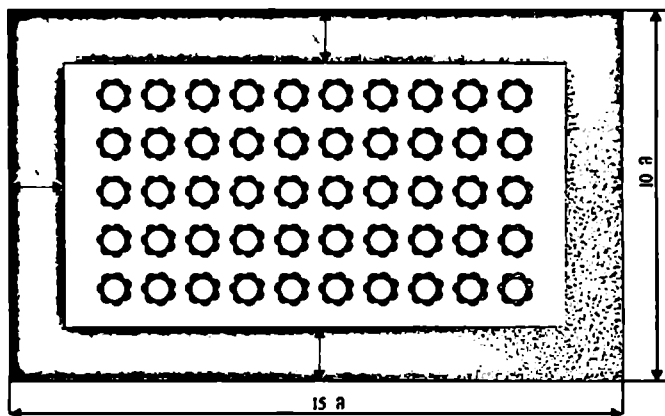
ა) (-3; 7), ბ) (3; 7), გ) (-3; -7), დ) (0; 0).

10. თუ რაიმე წერტილი $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკს ეკუთვნის, მაშინ

ა) სათავეს მიმართ მისი სიმეტრიული წერტილიც გრაფიკს ეკუთვნის,
ბ) აბსცისათა ღერძის მიმართ მისი სიმეტრიული წერტილიც გრაფიკს ეკუთვნის,
გ) ორდინატთა ღერძის მიმართ მისი სიმეტრიული წერტილიც გრაფიკს ეკუთვნის,
დ) კოორდინატთა სათავე - (0; 0) წერტილიც გრაფიკს ეკუთვნის.

§31. $y=ax^2+bx+c$ ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: მებაღეებმა მართკუთხედის ფორმის ყვავილნარს მთელი საზღვრის გასწვრივ ერთი და იგივე სიგანის ბილიკი შემოაღეს. ასე მიღებული მართკუთხედის ფორმის ნაკვეთის ზომებია 15 მეტრი და 10 მეტრი. (ცხადია, ამ ყვავილნარის ფართობი ბილიკის სიგანეზე იქნება დამოკიდებული. გამოვსახოთ ეს დამოკიდებულება ფორმულით.



ამოხსნა. ვთქვათ, ბილიკის სიგანე x მეტრია, მაშინ ყვავილნარის სიგანე $(10-2x)$ მეტრია, ხოლო სიგრძე კი $(15-2x)$ მეტრი, მაშინ ყვავილნარის ფართობი იქნება $S=(10-2x)(15-2x)$, ანუ $S=4x^2-50x+150$.

მივიღეთ ფუნქცია, რომელიც ყვავილნარის S ფართობის ბილიკის x სიგანეზე დამოკიდებულებას გამოსახავს. არგუმენტის რამდენიმე მნიშვნელობისათვის ვიპოვოთ ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები:

x	$4x^2-50x+150$
0,5	$4 \cdot 0,25 - 50 \cdot 0,5 + 150 = 126$
1	$4 \cdot 1 - 50 \cdot 1 + 150 = 104$
2	$4 \cdot 4 - 50 \cdot 2 + 150 = 66$
3	$4 \cdot 9 - 50 \cdot 3 + 150 = 36$
4	$4 \cdot 16 - 50 \cdot 4 + 150 = 14$

ანუ

x	S
0,5	126
1	104
2	66
3	36
4	14

ამოცანის შინაარსის მიხედვით x არგუმენტმა შეიძლება მიიღოს მნიშვნელობები (0; 5) შუალედიდან. თუ $x=0$, ბილიკი არ გეექნება; თუ $x=5$, მაშინ $S=0$ და, მაშასადამე, ყვავილნარი არ გეექნება.

x და S ცვლადებს შორის არსებულ დამოკიდებულებაში ($S=4x^2-50x+150$) $4x^2-50x+150$ კვადრატული სამწევრია. ამიტომ ამბობენ, რომ S არის x ცვლადის კვადრატული ფუნქცია.

ფუნქციას, რომელიც $y=ax^2+bx+c$ ფორმულით მოიცემა, სადაც x დამოუკიდებელი ცვლადია; a , b და c კი - ნამდვილი რიცხვები, მასთან $a \neq 0$, კვადრატული ფუნქცია ეწოდება.

კვადრატული ფუნქციის მაგალითებია: $y=x^2$, $y=-3x^2$, $y=-7x^2-2x$, $y=x^2-3x+4$.

კვადრატული ფუნქციით გამოისახება დედამიწის ზედაპირიდან S_0 მანძილით დაშორებული სხეულის ევრტიკალურად ზემოთ ასროლისას ამ სხეულის მიერ გაელილი მანძილის დამოკიდებულება t დროზე: $S=-0,5gt^2+vt+s_0$ ($g=9,8$ მ/წმ², v სხეულის სიჩქარეა).

$y=ax^2+bx+c$ ფორმულით მოცემულ კვადრატულ ფუნქციას ზოგჯერ ასეც ჩაეწეროთ: $y(x)=ax^2+bx+c$.

განვიხილოთ ამოცანები:

1. ვიპოვოთ $y(x)=x^2-4x+3$ კვადრატული ფუნქციის მნიშვნელობა, როცა $x=-2$, $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=3$, $x=5$, $x=2$.

ამოხსნა. $y(-2)=(-2)^2-4(-2)+3=4+8+3=15$, $y(-1)=(-1)^2-4(-1)+3=8$, $y(0)=3$, $y(1)=1^2-4 \cdot 1+3=0$, $y(3)=3^2-4 \cdot 3+3=0$, $y(5)=5^2-4 \cdot 5+3=8$.

2. x -ის რა მნიშვნელობებისათვის არის $y(x)=x^2-6x+8$ კვადრატული ფუნქციის მნიშვნელობა ა) 8-ის ტოლი, ბ) -2-ის ტოლი, გ) 3-ის ტოლი, დ) -1-ის ტოლი, ე) 0-ის ტოლი.

ამოხსნა. ა) პირობის თანახმად, $x^2-6x+8=8$, ანუ $x^2-6x=0$. აქედან $x_1=0$ და $x_2=6$. მაშასადამე, $y(0)=8$ და $y(6)=8$.

ბ) პირობის თანახმად, $x^2-6x+8=-2$, ანუ $x^2-6x+10=0$, გვაქვს $D=36-40=-4$; ამგვარად, მოცემული ფუნქცია -2-ის ტოლ მნიშვნელობას არ ღებულობს.

გ) პირობის თანახმად, $x^2-6x+8=3$, ანუ $x^2-6x+5=0$. აქედან $x_1=0$ და $x_2=5$. მაშასადამე, $y(1)=3$ და $y(5)=3$.

დ) პირობის თანახმად, $x^2-6x+8=-1$, ანუ $x^2-6x+9=0$ და $x=3$. მაშა-

სადავო, $y(3) = -1$.

ე) პირობის თანახმად, $x^2 - 6x + 8 = 0$, $D = 36 - 32 = 4$. ამგვარად, $x_1 = 2$ და $x_2 = 4$. x -ის ამ მნიშვნელობებისათვის $x^2 - 6x + 8$ კვადრატული სამ-წევრი ნულია - ეს რიცხვები $x^2 - 6x + 8 = 0$ განტოლების ფესვებია.

x_0 რიცხვს $y(x) = ax^2 + bx + c$ კვადრატული ფუნქციის ნული ეწოდება, თუ $y(x_0) = 0$ (x_0 არის $ax^2 + bx + c = 0$ განტოლების ფესვი).

განვიხილოთ $y = ax^2$ ($a \neq 0$) ფუნქცია, ანუ $y = ax^2 + bx + c$ კვადრატული ფუნქცია, როცა $b = 0$ და $c = 0$. ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა $a = 1$, ანუ $y = x^2$ ფუნქცია.

$y = x^2$ ფორმულის მიხედვით შევადგინოთ არგუმენტისა და ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობების ცხრილი:

$y = x^2$ ფორმულის მიხედვით შევადგინოთ არგუმენტისა და ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობების ცხრილი:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

$y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკი არის წირი, რომელსაც პარაბოლა ეწოდება.

შევნიშნოთ რამდენიმე თვისება:

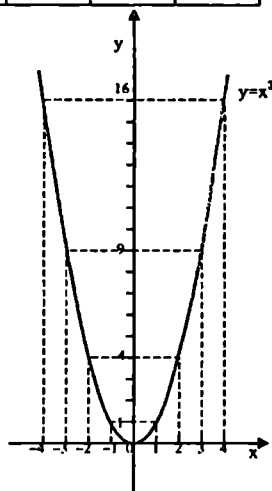
1. $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკი კოორდინატთა სათავეზე გადის - როცა $x = 0$, მაშინ $y = 0$.

2. თუ $x \neq 0$, მაშინ $y > 0$ - გრაფიკის ყველა წერტილი, გარდა $(0; 0)$ -ისა OX ღერძის ზემოთაა. პარაბოლას შტოები ზემოთაა მიმართული.

3. $y = x^2$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D(y) = (-\infty; \infty)$, ხოლო (ცვლილების არეა $E(y) = [0; \infty)$).

4. $y = x^2$ -ის გრაფიკი სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ - ყოველი x -სთვის $(-x)^2 = x^2$, ანუ $y(-x) = y(x)$; ე.ი. $y = x^2$ ფუნქცია ლუწია. პარაბოლისა და მისი სიმეტრიის ღერძის გადაკვეთის წერტილს ამ პარაბოლის წვერო ეწოდება. $y = x^2$ ფუნქციის წვერო კოორდინატთა სათავეა.

5. თუ $x \in [0; \infty)$, მაშინ x -ის მეტ მნიშვნელობას y -ის მეტი მნიშვნელობა შეესაბამება. მართლაც, თუ x_1 და x_2 არაუარყოფითი

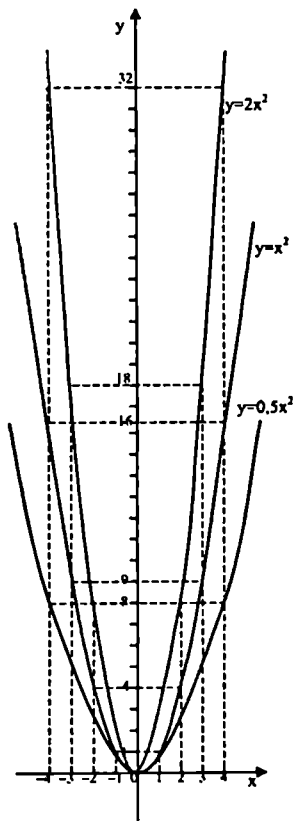


რიცხვებია და $x_2 > x_1$, მაშინ უტოლობათა ერთ-ერთი თვისების თანახმად, $x_2^2 > x_1^2$. ეს თვისება შეიძლება ასეც ჩამოვყალიბოთ: $y=x^2$ ფუნქცია $[0; +\infty)$ შუალედზე ზრდადი ფუნქციაა. ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $(-\infty; 0]$ შუალედზე $y=x^2$ ფუნქცია კლებადია.

ახლა დავუბრუნდეთ $y=ax^2$ ფუნქციას.

ა) ეთქვათ, $a>0$; განვიხილოთ $y=2x^2$ და $y=\frac{1}{2}x^2$ ფუნქციები. შევადგინოთ $y=2x^2$ და $y=\frac{1}{2}x^2$ ფუნქციების მნიშვნელობათა ცხრილი:

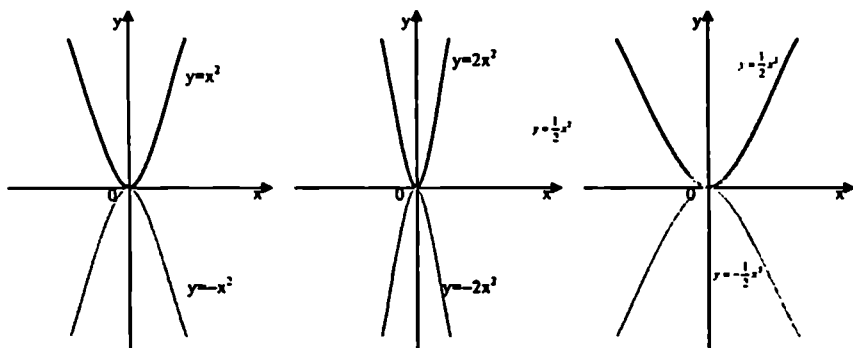
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=2x^2$	32	18	8	2	0	2	8	18	32
$y=\frac{1}{2}x^2$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8



თუ $y=2x^2$ და $y=\frac{1}{2}x^2$ ფუნქციის გრაფიკებს შევადარებთ $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკს ერთი და იმავე აბსცისის მქონე წერტილების შემთხვევაში ვღებულობთ, რომ $y=2x^2$ ფუნქციის $(x; 2x^2)$ წერტილის ორდინატი 2-ჯერ მეტია $y=x^2$ -ის $(x; x^2)$ წერტილის ორდინატზე, ხოლო $y=\frac{1}{2}x^2$ ფუნქციის $(x; \frac{1}{2}x^2)$ წერტილის ორდინატი კი ორჯერ ნაკლებია $y=x^2$ -ის $(x; x^2)$ წერტილის ორდინატზე. ამიტომ ვამბობთ: $y=2x^2$ -ის გრაფიკი მიიღება $y=x^2$ -ის გრაფიკის გაჭიმვით OY ღერძის გასწვრივ, ხოლო $y=\frac{1}{2}x^2$ -ის გრაფიკი მიიღება $y=x^2$ -ის გრაფიკის შეკუმშვით OY ღერძის გასწვრივ.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $a<0$. ეთქვათ, $a=-1$. შევადაროთ $y=x^2$ და $y=-x^2$ ფუნქციები. ერთი და იმავე x -სათვის ამ ფუნქციების მნიშვნელობები მოდულით

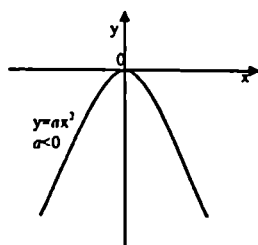
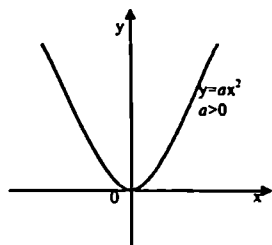
ტოლია და მოპირდაპირე ნიშნისაა; $(x; y)$ და $(x; -y)$ წერტილები კი OX ღერძის მიმართ სიმეტრიული წერტილებია. ამიტომ, შეიძლება ვთქვათ, რომ $y=x^2$ და $y=-x^2$ ფუნქციების გრაფიკები OX ღერძის მიმართ სიმეტრიული ფიგურებია. ანალოგიურად, $y=2x^2$ და $y=-2x^2$, აგრეთვე $y=\frac{1}{2}x^2$ და $y=-\frac{1}{2}x^2$ ფუნქციების გრაფიკები OX ღერძის მიმართ სიმეტრიული ფიგურებია.



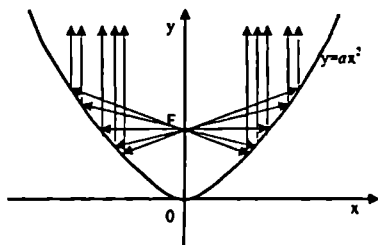
ყველა ეს გრაფიკი პარაბოლაა. თითოეული მათგანის წვერო $(0; 0)$ წერტილია. სიმეტრიის ღერძი OY ღერძია. $y=x^2, y=2x^2$ და $y=\frac{1}{2}x^2$ პარაბოლების შტოები ზევითაა მიმართული; ხოლო $y=-x^2, y=-2x^2$ და $y=-\frac{1}{2}x^2$ -ისა კი - ქვემოთ.

ჩამოვყალიბოთ $y=ax^2$ ($a \neq 0$) ფუნქციის ძირითადი თვისებები:

1. თუ $a > 0$, მაშინ $y=ax^2$ ფუნქცია არაუარყოფით მნიშვნელობებს იღებს; თუ $a < 0$ - არადადებით მნიშვნელობებს. ფუნქციის მნიშვნელობა ნულია მხოლოდ მაშინ, როცა $x=0$.
2. $y=ax^2$ ფუნქციის გრაფიკი პარაბოლაა, რომლის სიმეტრიის ღერძი OY ღერძია. თუ $a > 0$, შტოები ზევითაა მიმართული, თუ $a < 0$ - ქვევით.
3. თუ $a > 0$, მაშინ $y=ax^2$ ფუნქცია კლებადია $(-\infty; 0]$ შუალედზე და კლებადია $[0; \infty)$ - შუალედზე.
 $y=ax^2$ ფუნქციის გრაფიკს აქვს სახე:



პარაბოლას ბევრი საინტერესო თვისება აქვს. მაგალითად, სიმეტრიის ღერძზე არსებულ ერთ-ერთ წერტილში თუ მოვათავსებთ სინათლის წყაროს, მაშინ პარაბოლიდან არეკლილი ყველა სხივი ერთი და იმავე მიმართულებით – სიმეტრიის ღერძის პარალელურად გაემართება. ამ წერტილს პარაბოლის ფოკუსი ეწოდება. $y = ax^2$ პარაბოლის ფოკუსია წერტილი: $F(0; \frac{1}{4a})$. ამ თვისებას დაეფუძნა ტელეანტენების, პროექტორებისა და სხვა ხელსაწყოების შექმნა.



დავამტკიცოთ, რომ $y = ax^2$ პარაბოლის ნებისმიერი $M(x; y)$ წერტილი ტოლი მანძილითაა დაშორებული პარაბოლის $F(0; \frac{1}{4a})$

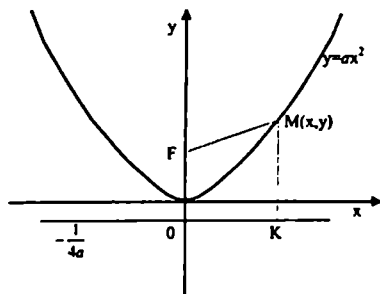
ფოკუსიდან და $y = -\frac{1}{4a}$ წრფიდან.

დამტკიცება. მართლაც,

$F(0; \frac{1}{4a})$ წერტილიდან $M(x; y)$ წერტილამდე მანძილი

$$d_1 = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2} \quad \text{აქ გავითვა-}$$

ლისწინოთ, რომ $x^2 = \frac{y}{a}$ და გვექნება:



$$d_1 = \sqrt{\frac{y}{a} + y^2 - 2y \cdot \frac{1}{4a} + \frac{1}{16a^2}} = \sqrt{y^2 + \frac{y}{a} - \frac{y}{2a} + \frac{1}{16a^2}} = \sqrt{y^2 + \frac{y}{2a} + \frac{1}{16a^2}} =$$

$$= \sqrt{\left(y + \frac{1}{4a}\right)^2} = \left|y + \frac{1}{4a}\right|;$$

$$\text{ამრიგად, } d_1 = \left|y + \frac{1}{4a}\right|.$$

M წერტილიდან $y = -\frac{1}{4a}$ წრფემდე მანძილი ამ წრფეზე დაშვებული MK მართობის სიგრძის ტოლი იქნება. ცხადია, K წერტილის კოორდინატებია $(x; -\frac{1}{4a})$, ამიტომ MK -ს სიგრძე

$$d_2 = \sqrt{(x-x)^2 + (y + \frac{1}{4a})^2} = \sqrt{\left(y + \frac{1}{4a}\right)^2} = \left|y + \frac{1}{4a}\right|; \text{ რადგან } d_1 = d_2, \text{ ამიტომ } y = ax^2$$

პარაბოლის ნებისმიერი წერტილიდან ამავე პარაბოლის ფოკუსამდე და $y = -\frac{1}{4a}$ წრფემდე მანძილები ერთმანეთის ტოლია.

განვიხილოთ $y = ax^2 + bx + c$ ფუნქციის გრაფიკი ($a \neq 0$). სრული კვადრატის გამოყოფის შემდეგ იგი ასე ჩაიწერება:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}, \text{ ანუ } y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}, \text{ სადაც } D = b^2 - 4ac.$$

იგი შეიძლება ასეც ჩაეწეროს: $y = a(x - x_0)^2 + y_0$, სადაც $x_0 = -\frac{b}{2a}$, ხო-

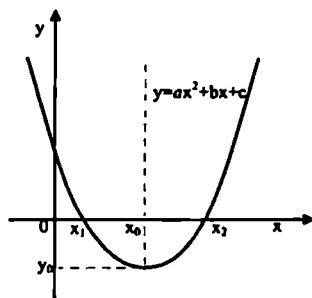
$$\text{ლო } y_0 = -\frac{D}{4a}.$$

$y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) ფუნქციის გრაფიკი პარაბოლაა, რომელიც მი-

იღება $y = ax^2$ ფუნქციის გრაფიკისაგან - „გადაადგილებით“ საკოორდინატო ღერძების გასწვრივ. ამ პარაბოლის წვერო $(x_0; y_0)$ წერტილია, $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = -\frac{D}{4a}$, სი-

მეტრიის ღერძი $x = -\frac{b}{2a}$ წრფეა. თუ $a > 0$,

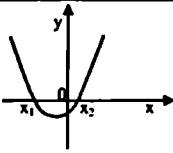
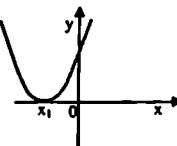
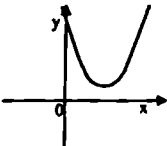
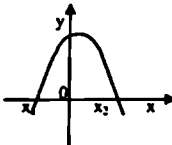
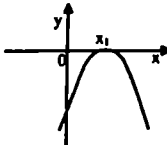
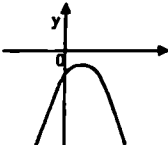
მაშინ შტოები ზემოთაა მიმართული, თუ $a < 0$ - ქვემოთ. პარაბოლის მხოლოდ



ის წერტილები ეკუთვნის OX ღერძს, რომლებშიც $y=0$, ანუ $ax^2+bx+c=0$.

ნახაზზე ის შემთხვევაა წარმოდგენილი, როცა $a>0$ და $D>0$. ამ დროს კვადრატულ განტოლებას ორი ფესვი აქვს. თუ ეს ფესვები x_1 და x_2 რიცხვებია, მაშინ OX ღერძს პარაბოლა $(x_1; 0)$ და $(x_2; 0)$ წერტილებში კვეთს.

a კოეფიციენტისა და D დისკრიმინანტის მნიშვნელობათა ყოველი წყვილისათვის $y=ax^2+bx+c$ კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის შესაძლო განლაგება ცხრილის საშუალებით წარმოვადგინოთ.

$y=ax^2+bx+c$ $D=b^2-4ac$	$D>0$	$D=0$	$D<0$
ax^2+bx+c	ორი ფესვი, x_1 და x_2	ერთი ფესვი, $x_0 = -\frac{b}{2a}$	არა აქვს ფეს- ვი
$a>0$			
$a<0$			

განვიხილოთ მაგალითი: ავაგოთ $y=5x^2-2x-3$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა. $y=5x^2-2x-3$ გრაფიკის აგების მიზნით ეიოვოთ პარაბოლას A წვეროს კოორდინატები, გვაქვს $-A(0,2; -3,2)$, სიმეტრიის ღერძია $x=0,2$ წრფე. OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილებია: $(-0,6; 0)$ და $(1; 0)$; OY ღერძს კვეთს $(0; -3)$ წერტილში. ამ გამოკვლევის შემდეგ შეიძლება ავაგოთ $y=5x^2-2x-3$ ფუნქციის გრაფიკი.

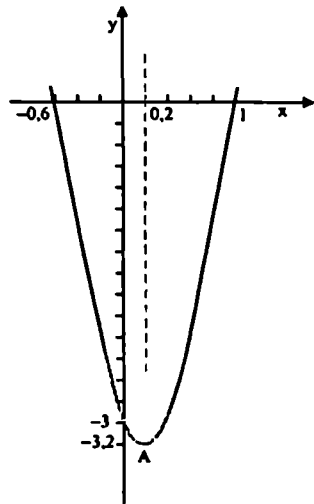
გრაფიკი თვალსაჩინო წარმოდგენას გვაძლევს ამ ფუნქციის თვისებებზე:

1. ფუნქცია დადებით მნიშვნელობებს იღებს $(-\infty; -0,6)$ და $(1; \infty)$ შუალედებში, უარყოფით მნიშვნელობებს $(-0,6; 1)$ შუალედში. ეს იმას ნიშნავს, რომ $(-\infty; -0,6)$, $(1; \infty)$ და $(-0,6; 1)$ შუალედები მოცემული ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედებია. პირველ ორში ფუნქცია დადებითია, მესამეში კი – უარყოფითი.

2. ფუნქცია კლებადია $(-\infty; 0,2]$ შუალედში, ზრდადია $[0,2; \infty)$ შუალედში.

3. როცა $x=0,2$ ფუნქცია ღებულობს უმცირეს მნიშვნელობას, ეს უმცირესი მნიშვნელობა $-3,2$ -ის ტოლია; ნებისმიერი x -სთვის $y(x) \geq -3,2$. ფუნქციას უდიდესი მნიშვნელობა არ გააჩნია.

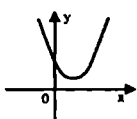
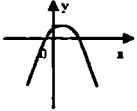
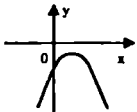
4. ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია $x=0,2$ წრფის მიმართ.



31.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. იპოვეთ მანძილი $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკის იმ წერტილებს შორის, რომელთა ორდინატია ა) 4, ბ) 5, გ) 625.
2. იპოვეთ b , თუ ცნობილია, რომ $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკის წერტილია ა) $M_1(2,1; b)$; ბ) $M_2(-b; 6,25)$.
3. ცნობილია, რომ $M(-1,2; 7,2)$ წერტილი ეკუთვნის $y=kx^2$ ფუნქციის გრაფიკს. იპოვეთ a .
4. ცნობილია, რომ $A(2,5; -25)$ წერტილი ეკუთვნის $y=kx^2$ ფუნქციის გრაფიკს. იპოვეთ k .
5. ააგეთ $y=x^2-5x+6$ ფუნქციის გრაფიკი.
6. ააგეთ $y=-2x^2+8x-9$ ფუნქციის გრაფიკი.
7. იპოვეთ $y=x^2-2x-3$ პარაბოლის წვერო, აბსცისათა და ორდინატთა ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები.

8. იპოვეთ $y=2x^2+5x+2$ პარაბოლის წვერო, აბსცისათა და ორდინატთა ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები.
9. ცნობილია, რომ $y=x^2+ax+3$ პარაბოლის სიმეტრიის ღერძია $x=6$. იპოვეთ a და პარაბოლის წვერო.
10. ცნობილია, რომ $y=4x^2-16x+13$ და $y=ax^2-2x+b$ პარაბოლებს წვეროები ერთ წერტილში აქვთ. იპოვეთ a და b .
11. ცნობილია, რომ $y=ax^2-3x-8$ პარაბოლა აბსცისათა ღერძს კვეთს $(-2; 0)$ წერტილში. იპოვეთ a , აბსცისათა ღერძთან გადაკვეთის მეორე წერტილის კოორდინატები და სიმეტრიის ღერძი.
12. $y=x^2-x-12$ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით დაადგინეთ ამ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები.
13. $y=x^2-8x+20$ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით დაადგინეთ ამ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები.
14. იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა:
 - ა) $y=x^2+x+1$; ბ) $y=x^2-6x+9$; გ) $y=3x^2-12x$; დ) $y=\frac{x^2}{2}-x-3$.
15. იპოვეთ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა:
 - ა) $y=-2x^2+4x-3$; ბ) $y=-x^2-2x$; გ) $y=-x^2$; დ) $y=-4x^2+x-1$.
16. კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი აბსცისათა ღერძს კვეთს $(3;0)$ და $(1; 0)$ წერტილებში, მისი უდიდესი მნიშვნელობაა 4. დაადგინეთ ამ კვადრატული ფუნქციის სიმეტრიის ღერძი, ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები, ნიშან-მუდმივობის შუალედები.
17. კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის სიმეტრიის ღერძი ორდინატთა ღერძია, უდიდესი მნიშვნელობაა 8, აბსცისათა ღერძთან გადაკვეთის წერტილებია: $(2; 0)$ და $(2; 0)$. იპოვეთ კვადრატული ფუნქცია.
18. კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის სიმეტრიის ღერძი ორდინატთა ღერძია, უმცირესი მნიშვნელობაა -2 ; აბსცისათა ღერძთან გადაკვეთის წერტილებია: $(-1; 0)$ და $(1; 0)$. იპოვეთ კვადრატული ფუნქცია.
19. $y(x)=x^2+x+b$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობაა $-1,25$. იპოვეთ b .

20. ცნობილია, რომ $f(x)=2x^2+x-a$. $f(x)=0$ განტოლების ორივე ფესვი 2-სა და 0-ს შორის არის მოთავსებული. $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის შესაძლო განლაგების მიხედვით შეადარეთ 0-ს: ა) $f(-2)$; ბ) $f(0)$; გ) $f(-0,5)$; დ) $f(2,1)$; ე) a .
21. ცნობილია, რომ $f(x)=ax^2+bx+c$ და $f(x)=0$ განტოლების ორივე ფესვი 0-სა და 4-ს შორისაა. $a<0$ შემთხვევაში $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის შესაძლო განლაგების მიხედვით შეადარეთ 0-ს: ა) $af(0)$; ბ) $af(4)$; გ) $af\left(-\frac{b}{2a}\right)$.
22. ცნობილია, რომ $f(x)=-x^2+3x+b$ ფუნქციის ერთ-ერთი ნული უარყოფითი რიცხვია. შეადარეთ ნულს b .
23.  ნახაზზე $y=ax^2+bx+c$ ფუნქციის გრაფიკია გამოსახული. შეადარეთ ნულს a და b .
24.  ნახაზზე $y=ax^2+bx+c$ ფუნქციის გრაფიკია გამოსახული. შეადარეთ ნულს a , b და c .
25.  ნახაზზე $y=mx^2+nx+k$ ფუნქციის გრაფიკია გამოსახული. შეადარეთ ნულს m , n და k .
26. იპოვეთ a , თუ ცნობილია, რომ $y=2x^2-x+a$ კვადრატულ ფუნქციას ერთადერთი ნული აქვს.
27. იპოვეთ a , თუ ცნობილია, რომ $y=x^2+ax-a-1$ კვადრატულ ფუნქციას ერთადერთი ნული აქვს.
28. იპოვეთ a -ს უმცირესი მთელი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $y=x^2-4x+5a$ კვადრატულ ფუნქციას ნულები არა აქვს.
29. $y=ax^2+5x+b$ კვადრატული ფუნქციის ნულებია $x=0$ და $x=-2,5$. იპოვეთ a და b .
30. იპოვეთ $y=0,25x^2$ პარაბოლის ფოკუსის F წერტილის კოორდინატები.

1. $y = ax^2 + bx + c$ პარაბოლის წვეროა წერტილი:

ა) $A\left(\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$, ბ) $A\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$,

გ) $A\left(-\frac{b}{a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$, დ) $A\left(-\frac{b}{a}; -\frac{a}{b}\right)$.

2. $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) ფუნქციის ზრდადობის შუალედია:

ა) $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$, ბ) $\left[-\frac{b}{2a}; \infty\right)$, გ) $\left[\frac{b}{2a}; \infty\right)$, დ) $\left(-\infty; \frac{b}{2a}\right]$.

3. $y = -2x^2 + 5x + 11$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობაა

ა) 10,8; ბ) $14\frac{1}{8}$; გ) 11; დ) $-14\frac{1}{8}$.

4. $y = 3x^2 - 12x + 19$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობაა

ა) 7; ბ) 19; გ) 4; დ) -12.

5. $y = -3x^2 + 5x + 2$ ფუნქციის დადებითობის შუალედია

ა) $\left(-2; \frac{1}{3}\right)$, ბ) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$, გ) $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$, დ) $(2; \infty)$.

6. $y = 2x^2 + 8x - 17$ კვადრატული ფუნქციის სიმეტრიის ღერძია

ა) $y = -25$ წრფე, ბ) $y = 25$ წრფე, გ) $y = 2$ წრფე,
დ) $y = -2$ წრფე.

7. რა შუალედშია $y = -x^2 + 10x - 9$ ფუნქცია არაუარყოფითი?

ა) $[1; 9)$, ბ) $(1; 9)$, გ) $(1; 9]$, დ) $[1; 9]$.

8. კვეთს თუ არა და თუ კვეთს, მაშინ რამდენ წერტილში $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკს $y = 2$ წრფე?

ა) ორ წერტილში კვეთს, ბ) ერთადერთ წერტილში კვეთს,
გ) არ კვეთს, დ) შეუძლებელია პასუხის გაცემა.

9. ვთქვათ, $(-2, 1; y_1)$ და $(2; y_2)$ წერტილები $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკის წერტილებია. მაშინ

ა) $y_1 < y_2$, ბ) $y_1 > y_2$, გ) $y_1 = y_2$, დ) $y_1 y_2 < 0$.

10. $y = ax^2$ ($a \neq 0$) ფუნქციის გრაფიკი

ა) პარაბოლაა, ბ) ჰიპერბოლაა, გ) წერტილია, დ) წრფეა.

§32. მიმდევრობა, არითმეტიკული და გეომეტრიული პროგრესიები

სიტყვა მიმდევრობა მათემატიკაში თითქმის იმავე აზრით გამოიყენება, რა აზრითაც მას ვიყენებთ ჩვეულებრივ საუბარში. მაგალითად, საგნების მიმდევრობა წარმოგვიდგენია ხოლმე, როგორც საგნების ისეთი განლაგება, სადაც გვაქვს პირველი წევრი, მეორე წევრი, მესამე წევრი და ა.შ., ანუ ყოველ საგანს აქვს თავისი ნომერი – ყოველი ნომრის (ნატურალური რიცხვის) მიხედვით შეიძლება სათანადო საგნის მითითება. ასევეა მათემატიკაშიც: თუ ყოველ ნატურალურ რიცხვს შეესაბამება გარკვეული ობიექტი, ამით განისაზღვრება მიმდევრობა.

მაგალითად, წარმოვადგინოთ შემდეგი მიმდევრობები:

კენტი რიცხვების მიმდევრობა:	1; 3; 5; 7; ...
სამის ჯერადი რიცხვების მიმდევრობა:	3; 6; 9; 12; ...
ნატურალურ რიცხვთა კვადრატების მიმდევრობა:	1; 4; 9; 16;
ღუწი რიცხვების შებრუნებული რიცხვების მიმდევრობა:	$\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \dots$

ამ მიმდევრობათა წევრები რიცხვებია, ამიტომ ეს მიმდევრობები რიცხვთა მიმდევრობებია.

საზოგადოდ, რიცხვთა მიმდევრობა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული რიცხვითი ფუნქციაა (ანუ ასახვა N -ისა R -ში).

ვთქვათ, რიცხვთა მიმდევრობა f ფუნქციაა. ის შეიძლება მიმდევრობის წევრებით (ფუნქციის მნიშვნელობებით) წარმოვადგინოთ: $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$; ან შეიძლება სხვაგვარადაც (თუ არგუმენტის მნიშვნელობებს ინდექსების სახით ჩავწერთ): $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots$

f_1 ამ მიმდევრობის პირველი წევრია, f_2 – მეორე წევრი, f_3 – მესამე წევრი და ა.შ. f_n – მიმდევრობის n -ური წევრია. ზოგჯერ მიმდევრობას მხოლოდ მისი n -ური წევრის გამოყენებით ჩავ-

წერთ.

მიმდევრობის მოცემა n -ური წვერის ფორმულით ნიშნავს $f(n)$ ფუნქციის მოცემას ფორმულით.

განვიხილოთ მაგალითები:

1. ვიპოვოთ იმ მიმდევრობის პირველი ოთხი წვერი, რომლის n -ური წვერის ფორმულაა:

ა) $f_n=2+(-1)^n$	ბ) $a_n=\frac{3n}{1+n}$	გ) $y_n=\frac{(-1)^n}{2n-1}$	დ) $b_n=n+\pi^n$
$f_1=2+(-1)^1=1$	$a_1=\frac{3 \cdot 1}{1+1}=\frac{3}{2}$	$y_1=\frac{(-1)^1}{2 \cdot 1 - 1} = -1$	$b_1=1+\pi$
$f_2=2+(-1)^2=3$	$a_2=\frac{3 \cdot 2}{1+2}=2$	$y_2=\frac{(-1)^2}{2 \cdot 2 - 1} = \frac{1}{3}$	$b_2=2+\pi^2$
$f_3=2+(-1)^3=1$	$a_3=\frac{3 \cdot 3}{1+3}=\frac{9}{4}$	$y_3=\frac{(-1)^3}{2 \cdot 3 - 1} = -\frac{1}{5}$	$b_3=3+\pi^3$
$f_4=2+(-1)^4=3$	$a_4=\frac{3 \cdot 4}{1+4}=\frac{12}{5}$	$y_4=\frac{(-1)^4}{2 \cdot 4 - 1} = \frac{1}{7}$	$b_4=4+\pi^4$

2. ვთქვათ, (a_n) მიმდევრობის n -ური წვერის ფორმულაა $a_n=9$. ამ მიმდევრობის ყველა წვერი 9-ის ტოლია: $a_1=9, a_2=9, a_3=9, \dots, a_n=9$.

მიმდევრობას, რომლის ყველა წვერი ერთი და იგივე რიცხვია, მუდმივი მიმდევრობა ეწოდება.

ამრიგად, რიცხვთა მიმდევრობა არის რიცხვითი ფუნქცია, რომელიც ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლეზეა განსაზღვრული. შეიძლება ასეც ვთქვათ: რიცხვთა მიმდევრობა ეწოდება N სიმრავლის ასახვას R სიმრავლეში.

ცნობილი იტალიელი მათემატიკოსის ლეონარდო ფიბონაჩის (1180-1240) წიგნში (ეს წიგნი 1202 წელს გამოვიდა; მისი სახელწოდება „წიგნი აბაკის შესახებ“ (ანუ – წიგნი საანგარიშო და ფის შესახებ)) შემდეგი ამოცანაა მოცემული:

კურდღლების წყვილი ორი თვის ასაკიდან ყოველთვიურად აჩენს ახალ წყვილს. რამდენი წყვილი დაგროვდება დეკემბრისათვის, თუ ცნობილია, რომ პირველი წყვილი იანვარში გაჩნდა (იგულისხმება, რომ ყველა კურდღელი წლის ბოლოსთვის ცოცხალია)?

ერთი თვის ასაკის კურდღლების წყვილი ასე აღვნიშნოთ – $\blacktriangle\blacktriangle$,
 ერთ თვეზე მეტი ასაკის კურდღლების წყვილი კი ასე – $\bullet\bullet$.

თვეები	წყვილები	წყვილები ბის რაბა
იანვარი	$\blacktriangle\blacktriangle$	1
თებერვალი	$\bullet\bullet$	1
მარტი	$\bullet\bullet$ $\blacktriangle\blacktriangle$	2
აპრილი	$\bullet\bullet$ $\blacktriangle\blacktriangle$ $\bullet\bullet$ $\blacktriangle\blacktriangle$	3
მაისი	$\bullet\bullet$ $\blacktriangle\blacktriangle$ $\bullet\bullet$ $\blacktriangle\blacktriangle$ $\bullet\bullet$ $\blacktriangle\blacktriangle$	5
ივნისი	$\bullet\bullet$ $\blacktriangle\blacktriangle$ $\bullet\bullet$ $\blacktriangle\blacktriangle$ $\bullet\bullet$ $\blacktriangle\blacktriangle$ $\bullet\bullet$ $\blacktriangle\blacktriangle$	8
ივლისი	$\bullet\bullet$ $\blacktriangle\blacktriangle$ $\bullet\bullet$ $\blacktriangle\blacktriangle$ $\bullet\bullet$ $\blacktriangle\blacktriangle$ $\bullet\bullet$ $\blacktriangle\blacktriangle$ $\bullet\bullet$ $\blacktriangle\blacktriangle$ $\bullet\bullet$ $\blacktriangle\blacktriangle$	13

თუ ამოვწერთ ყოველი თვის ბოლო კურდღლების წყვილების რაოდენობებს მივიღებთ მიმდევრობას: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13. ეს რიცხვები გარკვეული კანონზომიერებით მიიღება: მესამე წვერიდან დაწყებული, ყოველი რიცხვი წინა ორი რიცხვის ჯამის ტოლია. მაგალითად, ივლისში არსებული წყვილების ოდენობა – 13 არის წინა ორ თვეში არსებული ოდენობების (8-ისა და 5-ის) ჯამი. აღნიშნული წესის გამოყენებით ადვილად შეიძლება ვიპოვოთ დეკემბრის თვეში კურდღლების წყვილების ოდენობა, იგი 144-ის ტოლია.

თვე	წყვილების ოდენობა
აგვისტო	$13+8=21$
სექტემბერი	$21+13=34$
ოქტომბერი	$34+21=55$
ნოემბერი	$55+34=89$
დეკემბერი	$89+55=144$

ამ წესით მიღებული წყვილების ოდენობები ადგენენ მიმდევრობას – ფიბონაჩის მიმდევრობას: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; ამ მიმდევრობის წევრებს ფიბონაჩის რიცხვები ეწოდება. მაშასადამე, ფიბონაჩის მიმდევრობა არის მიმდევრობა, რომლის ყოველი წევრი, დაწყებული მესამიდან, არის წინა ორი წევრის ჯამი; პირველი და მეორე წევრებიდან თითოეული ერთის ტოლია; ეთქვას, ეს მიმდევრობაა (a_n) , მაშინ $a_1=a_2=1$ და $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ ($n>2$); ანუ მიმდევრობა რეკურსიის წესით მოიცემა – მისი ყოველი წევ-

რი მის წინ მდგომი რამდენიმე (ერთი და იმავე ოდენობის) წევრით გამოისახება (რეკურსია – ლათინურად *rekursio* – „უკან დაბრუნება“).

მოვიყვანოთ რეკურსიის წესით მოცემული მიმდევრობების მაგალითები:

1. არითმეტიკული პროგრესია. არითმეტიკული პროგრესია რიცხვთა ისეთი მიმდევრობაა, რომლის ყოველი წევრი დაწყებული მეორედან მიიღება წინასაგან ერთი და იმავე d რიცხვის მიმატებით. მაშასადამე, თუ $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ არითმეტიკული პროგრესიაა (პროგრესია – ლათინური *progresus*–იდანაა შემოდებული, რაც წინსვლას, განვითარებას, სრულყოფას ნიშნავს), მაშინ ნებისმიერი ნატურალური n -სათვის – $a_{n+1} = a_n + d$. ამ შემთხვევაში ასეც ვიტყვით: არითმეტიკული პროგრესია რეკურენტული ფორმულითაა მოცემული. ცხადია, არითმეტიკული პროგრესიის მოცემისათვის საჭიროა d რიცხვის – არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობისა და პირველი წევრის – a_1 -ის მოცემა.

თუ $d > 0$, მაშინ არითმეტიკული პროგრესიის ყოველი წევრი, დაწყებული მეორედან წინაზე მეტია, ანუ, ამ შემთხვევაში პროგრესია ზრდადი მიმდევრობაა.

თუ $d < 0$, მაშინ არითმეტიკული პროგრესიის ყოველი წევრი, დაწყებული მეორედან წინაზე ნაკლებია, ანუ, ამ შემთხვევაში პროგრესია კლებადი მიმდევრობაა.

თუ $d = 0$, მაშინ პროგრესია მუდმივი მიმდევრობაა.

ვთქვათ, მოცემულია $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots$ არითმეტიკული პროგრესია, განსაზღვრის თანახმად, თუ $n > 1$, მაშინ $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} = d$; აქედან გვაქვს: $a_n = \frac{a_1 + a_{n-1}}{2}$.

ამრიგად, კიდევ ერთი რეკურენტული ფორმულით წარმოვადგინეთ მოცემული პროგრესია.

მიმდევრობის რეკურენტულად მოცემის დროს რაიმე წევრის პოვნა მისი წინა წევრების პნიშენელობების გამოყენებით ხდება. ხშირად ხელსაყრელია მიმდევრობის n -ური წევრის ფორმულის ცოდნა – ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს მიმდევრობის ყოველი წევრი მისი წინა წევრების გამოთვლის გარეშე ვიპოვოთ.

ვთქვათ, ცნობილია არითმეტიკული პროგრესიის პირველი წევრი – a_1 და სხვაობა – d . მაშინ, ცხადია,

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d, \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d, \\ a_4 &= a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d, \\ a_5 &= a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d, \\ a_6 &= a_5 + d = a_1 + 4d + d = a_1 + 5d, \\ a_7 &= a_6 + d = a_1 + 5d + d = a_1 + 6d, \\ a_8 &= a_7 + d = a_1 + 6d + d = a_1 + 7d, \end{aligned}$$

ამ ფორმულებში აღმოჩენილი კანონზომიერებით, არითმეტიკული პროგრესიის ზოგადი – a_n წევრისათვის, გვექნება: $a_n = a_1 + d(n-1)$, $n \in \mathbb{N}$; ეს არის არითმეტიკული პროგრესიის n -ური წევრის გამოსათვლელი ფორმულა.

შესაძლებელია არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის ფორმულის დადგენაც.

არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი, როცა $n > 1$ ავლნიშნოთ S_n -ით, ე.ი. $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$. შევთანხმდეთ, რომ $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, ...

S_n ჩავწეროთ ორგვერად:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1.$$

შესაბამისად,

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-3)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d),$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_n - (n-3)d) + (a_n - (n-2)d) + (a_n - (n-1)d).$$

ამ ტოლობების შეკრებით მივიღებთ:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)}_{n \text{ წევრი}} = n(a_1 + a_n).$$

ამრიგად, $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $a_n = a_1 + d(n-1)$, მაშინ მივიღებთ:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

განვიხილოთ მაგალითები:

ა) ვიპოვოთ პირველი n კენტი ნატურალური რიცხვის ჯამი.

ამოხსნა. კენტი ნატურალური რიცხვები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას: 1, 3, 5, 7, აქ $a_1=1$, $d=2$, n -ური წვერი $a_n=1+2(n-1)=2n-1$, პირველი n კენტი რიცხვის ჯამი $S_n=1+3+5+\dots+(2n-1)$. თუ გავითვალისწინებთ S_n -ის გამოსათვლელ ფორმულას, მივიღებთ: $S_n = \frac{1+(2n-1)}{2} \cdot n = n^2$. მაშასადამე, $S_n=n^2$.

ბ) ცნობილია, რომ პირველი n ნატურალური რიცხვის ჯამი 5050-ის ტოლია. იპოვეთ n .

ამოხსნა. გვაქვს: $S_n = \frac{1+n}{2} \cdot n = 5050$. ე.ი. უნდა ამოვხსნათ განტო-

ლება: $n^2+n-10100=0$. $D=40401=201^2$ და $n = \frac{-1 \pm 201}{2}$, აქედან $n=100$,

მეორე ამონახსნი - -101 ამოცანის პირობას არ აკმაყოფილებს. ამრიგად, პირველი 100 ნატურალური რიცხვის ჯამი 5050-ის ტოლია.

გ) ვიპოვოთ ყველა იმ ორნიშნა ნატურალური რიცხვის ჯამი, რომელთა 7-ზე გაყოფისას ნაშთი 5-ია.

ამოხსნა. მითითებული სახის უმცირესი ორნიშნა რიცხვი 12-ია, შემდეგი რიცხვებია: 19, 26, 33, 40 და ა.შ. ეს მიმდევრობა არითმეტიკული პროგრესია: $a_1=12$, $d=7$, $a_n=12+7(n-1)=5+7n$. ამ თვისების მქონე უდიდესი ორნიშნა რიცხვის ნომერს ვპოულობთ $a_n \leq 99$ უტოლობის ამოხსნით: $5+7n \leq 99$, აქედან $n \leq 13\frac{3}{7}$ და $n=13$. ამრიგად, პროგრესიის უდიდესი ორნიშნა წევრის ნომერი 13-ის ტოლია. გვაქვს: $S_{13} = \frac{2 \cdot 12 + 7 \cdot 12}{2} \cdot 13 = 702$.

2. გეომეტრიული პროგრესია. გეომეტრიული პროგრესია ნულისაგან განსხვავებული რიცხვების მიმდევრობაა, რომლის ყოველი წვერი დაწყებული მეორედან, მიიღება წინასაგან ერთსა და იმავე რიცხვზე გამრავლებით; ამ რიცხვს პროგრესიის მნიშვნელი ეწოდება. მაშასადამე, თუ მოცემული მიმდევრობაა (a_n) , დასახელებული რიცხვი (მნიშვნელი) არის q , მაშინ $a_{n+1}=a_n \cdot q$, $n=1, 2, 3, \dots$

თუ $q>1$, ამასთანავე, $a_1>0$, მაშინ ყოველი შემდეგი წვერი წინაზე მეტია - პროგრესია ზრდადი მიმდევრობაა. თუ $q>1$ და $a_1<0$,

მაშინ პროგრესიის წევრები უარყოფითი რიცხვებია; თუმცა, მათი მოდულები ზრდად მიმდევრობას ქმნის. მაგალითად, თუ $a_1=-1$, $q=2$, მაშინ გეექნება მიმდევრობა: $-1; -2; -4; -8; -16; \dots$

თუ $0 < q < 1$ და $a_1 > 0$, მაშინ პროგრესიის წევრები დადებითი რიცხვებია, პროგრესია კლებადი მიმდევრობაა. მაგალითად, თუ $a_1=108$, $q=\frac{1}{3}$, მაშინ გეექნება მიმდევრობა: $108; 36; 12; 4; 1\frac{1}{3}; \dots$ თუ $0 < q < 1$ და $a_1 < 0$, მაშინ პროგრესიის წევრები უარყოფითი რიცხვებია და მათი მოდულები კლებად მიმდევრობას ქმნიან.

თუ $q=1$, მაშინ გეომეტრიული პროგრესია მუდმივი მიმდევრობაა. მაგალითად, $a_1=-3$ და $q=1$, მაშინ გეექნება: $-3; -3; -3; \dots$ ეს მიმდევრობა არითმეტიკული პროგრესიაცაა – მისი სხვაობა $d=0$.

თუ $q=-1$, მაშინ გეომეტრიული პროგრესია ნიშანცვლადი მიმდევრობაა. მაგალითად, $a_1=2$ და $q=-1$, მაშინ გეექნება: $2; -2; 2; -2; \dots$

თუ $q < -1$, მაშინაც გეომეტრიული პროგრესია ნიშანცვლადია, მაგრამ პროგრესიის წევრების მოდულებით შედგენილი მიმდევრობა ზრდადია. მაგალითად, $a_1=1,5$ და $q=-2$, მაშინ გეექნება: $1,5; -3; 6; -12; \dots$

თუ $-1 < q < 0$, ამ შემთხვევაშიც გეომეტრიული პროგრესიის რიცხვები ნიშანცვლადი რიცხვებია, თუმცა მათი მოდულები კლებად მიმდევრობას ქმნის; მაგალითად, $a_1=-120$ და $q=-\frac{1}{2}$, მაშინ გეაქვს: $-120; 60; -30; 15; \dots$

ეთქვათ, მოცემულია (b_n) გეომეტრიული მიმდევრობა, მასთან $b_1 \neq 0$ და მნიშვნელია q ($q \neq 1$). ვიპოვოთ ამ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი – $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$. ამისათვის უკანასკნელი ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ q -ზე, გექნება $S_n q = b_1 q + b_2 q + b_3 q + \dots + b_n q$, ანუ $S_n q = b_2 + b_3 + \dots + b_{n+1}$, თუ ამ ტოლობასთან ერთად გავითვალისწინებთ ტოლობას – $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$, მივიღებთ $S_n q - S_n = b_{n+1} - b_1$, ე.ი. $S_n(q-1) = b_{n+1} - b_1$. ამრიგად, $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}$, თუ $q \neq 1$. რადგან $b_n = b_1 q^{n-1}$, ამიტომ გეაქვს:

$$S_n = \frac{b_n(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ თუ } q \neq 1.$$

თუ (b_n) გეომეტრიული პროგრესიის q მნიშვნელი 1-ისტოლია, მაშინ მისი ყველა წევრი b_1 -ის ტოლია და $S_n = nb_1$, თუ $q=1$.

განვიხილოთ მაგალითი. ეთქვათ, სექტემბრის თვეში ერთი ბიზნესმენი ყოველდღიურად 300000 ლარს ღებულობს, ხოლო მეორე ბიზნესმენი პირველ დღეს ღებულობს 1 თეთრს, ხოლო ყოველ შემდეგ დღეს – 2-ჯერ მეტს, ვიდრე წინა დღეს. ვიპოვოთ სექტემბრის თვეში თითოეული მათგანის მიერ აღებული თანხა და შევადაროთ ერთმანეთს.

ამოხსნა. ცხადია, რადგან სექტემბრის თვეში 30 დღეა, მაშინ პირველი ბიზნესმენი აიღებს – $30 \cdot 300\,000 = 9\,000\,000$ (ლარს), ხოლო მეორე – $\frac{1 \cdot (2^{30} - 1)}{2 - 1} = 1073741823$ (თეთრს). ამრიგად, პირველი ბიზნესმენი აიღებს 9 მილიონ ლარს, ხოლო მეორე ბიზნესმენი – 1073741823 ლარს. მეორე ბიზნესმენი უფრო მეტ თანხას აიღებს.

32.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

- (a_n) მიმდევრობა მოცემულია ფორმულით: $a_n = 15 - 3n$. იპოვეთ იმ წევრის ნომერი, რომელიც არის:
 - 15; ბ) –30; გ) –45; დ) –60.
- (C_n) მიმდევრობა მოცემულია ფორმულით: $C_n = 5n + 2$. იპოვეთ:
 - C_5 ; ბ) C_7 ; გ) $C_8 - C_6$; დ) $\frac{C_8}{C_5}$.
- მოცემულია რეკურენტული მიმდევრობა: $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$; $a_1 = 1$, $a_2 = 3$. იპოვეთ ამ მიმდევრობის პირველი ექვსი წევრი.
- იპოვეთ რაიმე კანონზომიერება, რომლის მიხედვითაც შედგენილია მოცემული მიმდევრობა.

ა) 3; 8; 13; 18; 23;	ბ) 1; 3; 9; 27; 81;
გ) 500; 50; 5; 0,5; 0,05;	დ) 64; 60; 56; 52; 48; ...
ე) 1; 5; 21; 85;	ვ) 1; 2; 5; 26;

5. (x_n) მიმდევრობა $x_n = n^2 - n$ ფორმულითაა მოცემული.

ა) იპოვეთ x_{10} და x_{15} ;

ბ) არის თუ არა ამ მიმდევრობის წევრები 56 და 110?
დადებითი პასუხის შემთხვევაში იპოვეთ მათი ნომრები.

6. მიმდევრობა მოცემულია ფორმულით: $x_n = n - \frac{1}{n}$.

ა) იპოვეთ ამ მიმდევრობის ის წევრები, რომლებიც ნაკლებია 5-ზე;

ბ) შეადარეთ: $x_{10} - x_9$ და $x_{100} - x_{99}$.

7. (y_n) მიმდევრობა მოცემულია ფორმულით: $y_n = 3^{n-5}$.

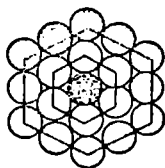
ა) იპოვეთ ის წევრები, რომლებიც მეტია 0,1-ზე და ნაკლებია 10-ზე;

ბ) შეადარეთ: $\frac{y_{10}}{y_9}$ და $\frac{y_{100}}{y_{99}}$.

8. ცნობილია, რომ პირველი n ნატურალური რიცხვის ჯამი 210-ის ტოლია. იპოვეთ n .

9. ერთ-ერთმა ფირმამ თავის თანამშრომელს პირველ თვეში 500 ლარი გადაუხადა, ხოლო ყოველ შემდეგ თვეში – 20 ლარით მეტი, ვიდრე წინა თვეში. რამდენი ლარი გადაუხადა ფირმამ ამ თანამშრომელს ექვს თვეში?

10. ნახაზზე წრეები „ექვსკუთხედებს“ ქმნიან. ცენტრში ერთი წითელი ფერის წრეა, მის გარშემო 6 ყვითელი ფერის წრეა განლაგებული და ისინი პირველ „სარტყელს“ ქმნიან.



ა) იპოვეთ კანონზომიერება, რომლის მიხედვით იზრდება წრეების ოდენობა ყოველ შემდეგ „სარტყელში“.

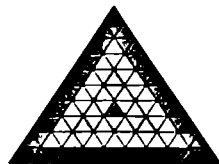
ბ) ვთქვათ, „ექვსკუთხედს“ 3 სარტყელი აქვს. რამდენი წრეა ამ „ექვსკუთხედში“?

გ) რამდენი წრეა „ექვსკუთხედში“, რომელსაც 10 „სარტყელი“ აქვს?

დ) რამდენი სარტყელი აქვს „ექვსკუთხედს“, რომელიც 127 წრისაგან შედგება?

11. ნახაზზე წესიერი სამკუთხედი დაყოფილია მცირე ზომის 100 ტოლ წესიერ სამკუთხედად. ცენტრში მოთავსებულია წითელი ფერის სამკუთხედი, მის გარშემო პირველ „სარტყელს“

ქმნის მწვანე სამკუთხედები, მის გარშემო პირველ „სარტყელს“ ქმნის მწვანე სამკუთხედები, რომელთა რაოდენობა 15-ის ტოლია, მეორე „სარტყელი“ წარმოდგენილია ყვითელი ფერის სამკუთხედებით, რომელთა რაოდენობა 33-ის ტოლია, ხოლო მესამე „სარტყელი“ ვარდისფერი სამკუთხედებითაა წარმოდგენილი, რომელთა რაოდენობა 51-ის ტოლია.



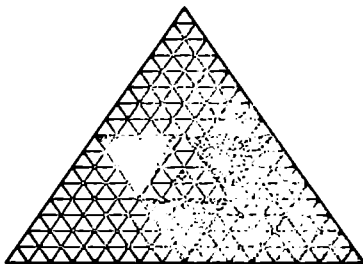
- ა) იპოვეთ კანონზომიერება, რომლის მიხედვით იზრდება სამკუთხედების ოდენობა ყოველ „სარტყელში“.
- ბ) ეთქვათ, გვაქვს 9 „სარტყელი“, რამდენი მცირე ზომის სამკუთხედი გვექნება მიღებულ სამკუთხედში?
12. არითმეტიკული პროგრესიის პირველი წევრი 100-ია, 25-ე – 220. იპოვეთ ამ პროგრესიის პირველი 25 წევრის ჯამი.
13. გამოიანგარიშეთ ყველა ორნიშნა ნატურალური რიცხვის ჯამი.
14. გამოიანგარიშეთ ყველა კენტი ორნიშნა რიცხვის ჯამი.
15. გამოიანგარიშეთ ყველა ლუწი ორნიშნა რიცხვის ჯამი.
16. იპოვეთ 10-სა და 20-ს შორის მოთავსებული ყველა იმ უკვეცი წილადების ჯამი, რომელთა მნიშვნელია 3.
17. იპოვეთ $a_n = 14 - \frac{6}{7}n$ მიმდევრობის ყველა ისეთი წევრის ჯამი, რომლებიც მეტია 2-ზე.
18. იპოვეთ პირველი ოცი წევრის ჯამი იმ არითმეტიკული პროგრესიისა, რომელშიც $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$.
19. ტყეის სროლაში შეჯიბრის დროს დანიშნული იყო 25 გასროლიანი სერიები. თითოეულ სერიაში ყოველი აცდენისათვის მსროლელი ღებულობდა შემდეგ საჯარიმო ქულებს: პირველი აცდენისათვის – ერთ საჯარიმო ქულას, ხოლო ყოველი შემდეგისათვის 0,5 ქულით მეტ საჯარიმო ქულას, ვიდრე წინაში. რამდენჯერ მოარტყა ნიშანში მსროლელმა, რომელმაც 7 საჯარიმო ქულა დააგროვა?
20. ტურისტმა, რომელიც მთის ფერდობზე ადიოდა, პირველი საათის განმავლობაში მიადწია 800 მეტრ სიმაღლეს, ხოლო ყოველ შემდეგ საათში 25 მეტრით ნაკლები სიმაღლე დაფარა.

რა, ვიდრე წინაში. რამდენ საათში მიაღწევს ტურისტი 5700 მეტრ სიმაღლეს?

21. გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი -5-ის ტოლია, პირველი სამი წევრის ჯამი არის -21. იპოვეთ პირველი ექვსი წევრის ჯამი.

22. ინტერნეტში ჩართული მოსწავლე სხვა სამ მოსწავლეს 6 წუთში გადასცემს შეტყობინებას, ამ სამიდან თითოეული შემდეგ 6 წუთში ამავე შეტყობინებას სხვა სამ მოსწავლეს გადასცემს და ა.შ. რამდენ მოსწავლეს ეცოდინება შეტყობინება ნახევარ საათში?

23. ნახაზზე წესიერი სამკუთხედი დაყოფილია 256 ტოლ წესიერ სამკუთხედად. ცენტრში მოთავსებულია წითელი ფერის სამკუთხედი, მის გარშემო პირველ „სარტყელს“ ქმნის მწვანე სამკუთხედები, რომელთა რაოდენობა 3-ის ტოლია, მეორე „სარტყელი“ წარმოდგენილია ყვითელი ფერის სამკუთხედებით, რომელთა რაოდენობა 12-ის ტოლია, მესამე „სარტყელი“ შედგენილი ვარდისფერი სამკუთხედებით, რომელთა რაოდენობა 48-ის ტოლია, ხოლო მეოთხე „სარტყელი“ შედგება ცისფერი სამკუთხედებით, რომელთა რაოდენობა 192-ის ტოლია.



ა) იპოვეთ კანონზომიერება, რომლის მიხედვით იზრდება სამკუთხედების ოდენობა ყოველ „სარტყელში“.

ბ) ვთქვათ გვაქვს 6 „სარტყელი“, რამდენი მცირე ზომის სამკუთხედი გვექნება მიღებულ სამკუთხედში?

24. გეომეტრიული პროგრესიის პირველი წევრი დადებითია. მნიშვნელის რა მნიშვნელობისათვის ღებულობს პირველი სამი წევრის ჯამი უმცირეს მნიშვნელობას?

25. გეომეტრიული პროგრესიის პირველი, მეორე და მეოთხე წევრები არითმეტიკულ პროგრესიას აღგენენ. იპოვეთ გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი.

26. სამი დადებითი რიცხვი, რომელთა ჯამი 21-ია, არითმეტიკულ პროგრესიას აღგენენ. თუ მათ შესაბამისად 2-ით, 3-ით და 9-

ით გავადიდებთ მივიღებთ გეომეტრიულ პროგრესიას. იპოვეთ ეს რიცხვები.

27. გეომეტრიული პროგრესიის პირველი სამი წევრის ჯამია 40, ხოლო პირველი ექვსი წევრისა კი – 60; იპოვეთ პირველი ცხრა წევრის ჯამი – S_9 .
28. მოცემულია გეომეტრიული პროგრესია: $-25; 50; -100; \dots$ იპოვეთ S_{10} .
29. მოცემულია გეომეტრიული პროგრესია: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \dots$ იპოვეთ S_9 .
30. ორი დღე-ღამის განმავლობაში აკვირდებოდნენ კოლბაში განთავსებულ ბაქტერიებს. აღმოჩნდა, რომ ამ სახეობის ბაქტერიების ოდენობა ყოველ 12 საათში ორმაგდება. რამდენი პროცენტით გაიზარდა ბაქტერიების თავდაპირველი ოდენობა ექსპერიმენტის დასასრულისთვის?

32.1.1 ტესტი №31

1. რიცხვთა მიმდევრობა
 - ა) ფუნქციაა, ბ) ერთცვლადიანი უტოლობაა,
 - გ) არ არის ფუნქცია, დ) ზოგჯერ არ არის ფუნქცია.
2. თუ (a_n) არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობაა d , მაშინ $a_5 =$
 - ა) $4a_1d$, ბ) a_1d^4 , გ) a_1+4d , დ) $4a_1+d$.
3. თუ (b_n) გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელია q , მაშინ $b_5 =$
 - ა) b_1+4q , ბ) qb_1^4 , გ) b_1-4q , დ) b_1q^4 .
4. ეთქვათ, (a_n) არითმეტიკული პროგრესიაა, d მისი სხვაობაა, მაშინ ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის
 - ა) $a_{n+1}-a_n=d$, ბ) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=d$, გ) $a_{n+1}+a_n=d$, დ) $a_{n+1} \cdot a_n=d$.
5. ეთქვათ, (b_n) გეომეტრიული პროგრესიაა, q მისი მნიშვნელია, მაშინ ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის
 - ა) $b_{n+1}-b_n=q$, ბ) $\frac{b_{n+1}}{b_n}=q$, გ) $b_{n+1}+b_n=q$, დ) $b_{n+1} \cdot b_n=q$.
6. ეთქვათ, a , b და c არითმეტიკული პროგრესიის მომდევნო წევრებია, მაშინ

$$\text{ა) } b=a+c, \quad \text{ბ) } b=\frac{a+c}{2}, \quad \text{გ) } b=a \cdot c, \quad \text{დ) } b^2=a \cdot c.$$

7. ეთქვათ, a , b და c გეომეტრიული პროგრესიის მომდევნო წევრებია, მაშინ

$$\text{ა) } b=a+c, \quad \text{ბ) } b=\frac{a+c}{2}, \quad \text{გ) } b=a \cdot c, \quad \text{დ) } b^2=a \cdot c.$$

8. შეარჩიეთ გამოსახულება, რომლის მნიშვნელობა 80-ის ჯერადი სამნიშნა ნატურალური რიცხვების ჯამია.

$$\text{ა) } \frac{80+960}{2} \cdot 12, \quad \text{ბ) } \frac{160+960}{2} \cdot 11, \quad \text{გ) } \frac{80+960}{2} \cdot 11,$$

$$\text{დ) } \frac{160+960}{2} \cdot 10.$$

9. 5; -10; 20; -40; 80; ... გეომეტრიული პროგრესიის პირველი 20 წევრის ჯამი არის შემდეგი გამოსახულების მნიშვნელობა:

$$\text{ა) } \frac{5(2^{20}-1)}{-2}, \quad \text{ბ) } \frac{5(2^{20}-1)}{3}, \quad \text{გ) } \frac{5(2^{20}-1)}{-3}, \quad \text{დ) } \frac{5(2^{20}-1)}{2}.$$

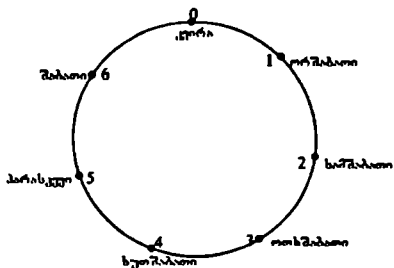
10. შემდეგი მიმდევრობებიდან, რომელი არ შეიძლება იყოს გეომეტრიული პროგრესია?

$$\text{ა) } 3, 6; 12; 24; 48; \quad \text{ბ) } 30; 20; 10; 0; -10;$$

$$\text{გ) } -100; 10; -1; 0,1; \dots \quad \text{დ) } 162; 54; 18; 6; 2;$$

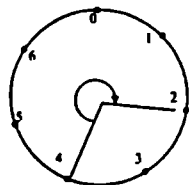
§33. ზოგადი არითმეტიკა

ეთქვათ, კვირის დღეები 0-დან 6-მდე (ჩათვლით) რიცხვებით არის გადანომრილი – რიცხვები წრეწირზე განლაგებული. კვირას მივანიჭოთ ნომერი 0, ორშაბათს – 1, სამშაბათს – 2, ოთხშაბათს – 3, ხუთშაბათს – 4, პარასკევს – 5, ხოლო შაბათს – 6.



ეთქვათ, დღეს ხუთშაბათია, რა დღე იქნება 5 დღის შემდეგ?

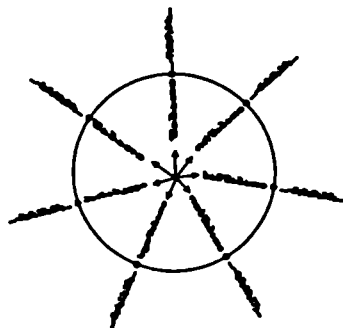
წრეწირზე მონიშნული ხუთშაბათის შესაბამისი 4 რიცხვიდან გადავთვლით, საათის ისრის მიმართულებით, 5 დანაყოფს და მივიღებთ 2-ით მონიშნულ სამშაბათ დღეს. რა დღე იქნება 27 დღის შემდეგ? რა დღე იყო 20 დღის წინ? ამ კითხვებზე პასუხის გასაცემად მოგვიწევს „4“ წერტილიდან, შესაბამისად 27 დანაყოფის გადათვლა ჯერ საათის ისრის მიმართულებით და შემდეგ კვლავ „4“ წერტილიდან 20 დანაყოფის გადათვლა საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით.



პირველ შემთხვევაში მოგვიწევს წრეწირზე 31-ის შესაბამისი წერტილის პოვნა ($4+27=31$), მეორე შემთხვევაში – -16-ის შესაბამისი წერტილის პოვნა ($4-20=-16$), 31-ს შეესაბამება – ოთხშაბათი, ხოლო -16-ს – პარასკევი.

შეიძლება ითქვას, რომ გვაქვს მთელ რიცხვთა სიმრავლის ასახვა კვირის დღეებზე.

- : -21; -14; -7; 0; 7; 14; 21; - (7n სახის რიცხვები, $n \in \mathbb{Z}$)	კეირა
- : -20; -13; -6; 1; 8; 15; 22; - (7n+1 სახის რიცხვები, $n \in \mathbb{Z}$)	ორშაბათი
- : -19; -12; -5; 2; 9; 16; 23; - (7n+2 სახის რიცხვები, $n \in \mathbb{Z}$)	სამშაბათი
- : -11; -4; 3; 10; 17; 24; 31; - (7n+3 სახის რიცხვები, $n \in \mathbb{Z}$)	ოთხშაბათი
- : -17; -10; -3; 4; 11; 18; 25; - (7n+4 სახის რიცხვები, $n \in \mathbb{Z}$)	ხუთშაბათი
- : -16; -9; -2; 5; 12; 19; 26; - (7n+5 სახის რიცხვები, $n \in \mathbb{Z}$)	პარასკევი
- : -15; -8; -1; 6; 13; 20; 27; - (7n+6 სახის რიცხვები, $n \in \mathbb{Z}$)	შაბათი



მაშასადამე, მთელ რიცხვთა სიმრავლე 7 ნაწილად – 7 კლასად დაიყო; ყოველი მთელი რიცხვი ერთ-ერთ კლასში ხვდება; მაგალითად, რიცხვები: 29, 50, 64, 134 მოხვდება იმავე კლასში, რომელშიცაა რიცხვი 1 – თითოეული მათგანი $7n+1$ ($n \in \mathbb{Z}$) სახისაა.

დღეს თუ სამშაბათია (მეორე დღე), 25 დღის შემდეგ იქნება შაბათი ($2+25=27=7 \cdot 3+6$), 20 დღის წინ კი იყო ოთხშაბათი ($2-20=-18=7 \cdot (-3)+3$).

თუ ზემოთ აღნიშნულ კლასებს დაეუბრუნდებით – მათ ეწოდება კლასები მოდულით 7; ერთი და იმავე კლასიდან აღებული ნებისმიერი a და b რიცხვების სხვაობა 7-ზე უნაშთოდ იყოფა; ამ ფაქტს ასე ჩაეწერთ: $a \equiv b \pmod{7}$. ეკითხულობთ: a სადარია b -სი მოდულით 7. თანაფარდობას $a \equiv b \pmod{7}$ ეწოდება შედარება (მოდულით 7); $\equiv$ შედარების ნიშანია.

საზოგადოდ, ვთქვათ m ნატურალური რიცხვია; a და b მთელი რიცხვებია. ვიტყვით, რომ a სადარია b -სი მოდულით m , თუ $a-b$ უნაშთოდ იყოფა m -ზე და ეწერთ: $a \equiv b \pmod{m}$.

გვაქვს:

1. თუ a სადარია b -სი მოდულით m , მაშინ a და b რიცხვების m -ზე გაყოფისას ერთი და იგივე ნაშთი მიიღება და პირიქით, თუ a და b რიცხვების m -ზე გაყოფისას ერთი და იგივე ნაშთი მიიღება, მაშინ a სადარია b -სი მოდულით m .

2. ყოველი რიცხვი სადარია მოდულით m ამ რიცხვის m -ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთის.

3. ყოველი a მთელი რიცხვისათვის და m ნატურალური რიცხვისათვის გვაქვს: $a \equiv a \pmod{m}$.

4. ყოველი a და b მთელი რიცხვისათვის და m ნატურალური რიცხვისათვის გვაქვს: თუ $a \equiv b \pmod{m}$, მაშინ $b \equiv a \pmod{m}$.

შედარებები შეიძლება შევკრიბოთ, გამოვაკლოთ, გავამრავლოთ და ავახარისხოთ კიდევ:

თუ $a \equiv b \pmod{m}$ და $c \equiv d \pmod{m}$, მაშინ ა) $a+c \equiv b+d \pmod{m}$; ბ) $a-c \equiv b-d \pmod{m}$; გ) $ac \equiv bd \pmod{m}$; დ) $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, $n \in \mathbb{N}$. დავამტკიცოთ, მაგალითად, ა) თვისება. მართლაც, თუ $a \equiv b \pmod{m}$ და $c \equiv d \pmod{m}$, მაშინ $a=b+mk$ ($k \in \mathbb{N}$) და $c=d+ml$ ($l \in \mathbb{N}$) და $a+c=(b+d)+m(k+l)$, ეს კი ნიშნავს, რომ $a+c \equiv b+d \pmod{m}$.

ამ თვისებებიდან გამომდინარეობს:

რაიმე მთელი რიცხვების შეკრებით, გამრავლებით ან გამოკლებით მიღებული ნებისმიერი გამოსახულების მნიშვნელობის m მოდულზე გაყოფით მიღებული ნაშთი არ შეიცვლება, თუ ამ გამოსახულებაში შემავალ რიცხვებს შევცვლით მათი m -ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთებით.

მაშასადამე, მთელ რიცხვთა სიმრავლე m მოდულით m კლასად იყოფა. ერთი და იმავე კლასის რიცხვები შეიძლება არც განესხვავოთ და ისინი ამ კლასის მხოლოდ უმცირესი არაუარყოფითი რიცხვით (ნაშთით) წარმოვადგინოთ, ნაშთებისათვის კი შემდეგი წესით შემოვიღოთ შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები: თუ r_1 და r_2 ორი ნაშთია, მათი „ჯამი“ ეუწოდოთ ნაშთს, რომელიც მიიღება (r_1+r_2) -ის გაყოფით m -ზე; ხოლო $r_1 \cdot r_2$ „ნამრავლი“ ეუწოდოთ ნაშთს, რომელიც მიიღება $r_1 \cdot r_2$ -ის m -ზე გაყოფისას. მაგალითად, წარმოვადგინოთ $m=7$ -ის შემთხვევა: $1+6=0$, $4+4=1$, $5+4=2$, $5+5=3$, $4 \cdot 4=2$, $3 \cdot 4=5$, $3 \cdot 3=2$ და ა.შ. შეიძლება შევადგინოთ – „7 მოდულის არითმეტიკის“ შეკრებისა და გამრავლების ცხრილები:

შეკრების ცხრილი

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

გამრავლების ცხრილი

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

ანალოგიურად შეიძლება ნებისმიერი m ნატურალური რიცხვისათვის „ m მოდულის არითმეტიკის“ განსაზღვრა. ამ არითმეტიკაში ნებისმიერი a, b და c ნაშთებისათვის გვაქვს:

1. $a+b=b+a$ – ჯამის გადანაცვლებადობის თვისება.
2. $(a+b)+c=a+(b+c)$ – ჯამის ჯუფდებადობის თვისება.
3. $(ab)c=a(bc)$ – გამრავლების ჯუფდებადობის თვისება.
4. $a(b+c)=ab+bc$ – გამრავლების განრიგებადობის თვისება შეკრების მიმართ.

ასეთ არითმეტიკაში, მაგალითად გვაქვს: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$; გვაქვს შეკრების მიმართ „ნეიტრალური“ ელემენტი – ნაშთი 0, ანუ ნებისმიერი a -სთვის, $a+0=a$; გამრავლების მიმართ „ნეიტრალური“ ელემენტი – ნაშთი 1, ანუ ნებისმიერი a -სთვის, $a \cdot 1=a$.

შევადგინოთ „5 მოდულის არითმეტიკის“ შეკრებისა და გამრავლების ცხრილები:

შეკრების ცხრილი

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

გამრავლების ცხრილი

+	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

შევადგინოთ „6 მოდულის არითმეტიკის“ შეკრებისა და გამრავლების ცხრილები:

შეკრების ცხრილი

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

გამრავლების ცხრილი

+	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

როგორც ვხედავთ „6 მოდულის არითმეტიკის“ გამრავლების ცხრილში გვაქვს $2 \cdot 3 = 0$ და $3 \cdot 4 = 0$, ე.ი. ამ არითმეტიკაში ნულის არატოლი ნაშთების ნამრავლი შეიძლება 0-ის ტოლი იყოს.

ამრიგად, როგორც ავლნიშნეთ, $a \equiv b \pmod{m}$ ნიშნავს: $a - b$ მთელი რიცხვი იყოფა m ნატურალურ რიცხვზე; a და b მთელ რიცხვებს აქვთ ტოლი ნაშთები m ნატურალურ რიცხვზე გაყოფისას.

1801 წელს გამოქვეყნდა დიდი გერმანელი მათემატიკოსის კარლ ფრიდრიხ გაუსის (1777-1855) ექვსასგვერდიანი წიგნი – „არითმეტიკული გამოკვლევები“. ამ წიგნში პირველად არის შემოღებული მათემატიკის მეტად მნიშვნელოვანი ცნება – „შედარება“ და გადმოცემულია შედარებათა ზოგადი თეორია. ამ თეორიას მოდულურ (ზოგჯერ – მოდულარულ) არითმეტიკასაც უწოდებენ (მოდული – ტერმინი წარმოდგება ლათინური modulus-იდან, რაც ქართულად ზომას ნიშნავს).

33.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. შევადგინოთ „2 მოდულის არითმეტიკის“ შეკრებისა და გამრავლების ცხრილები.
2. შევადგინოთ „3 მოდულის არითმეტიკის“ შეკრებისა და გამრავლების ცხრილები.
3. შევადგინოთ „4 მოდულის არითმეტიკის“ შეკრებისა და გამრავლების ცხრილები.
4. თუ კალათში ჩაწყობილ ვაშლებს წყვილ-წყვილად დავთვლით 1 ვაშლი დარჩება; ასევე სამ-სამად, ოთხ-ოთხად, ხუთ-ხუთად

- და ექვს-ექვსად ვაშლების გადათვლის შემთხვევაშიც თითო ვაშლი რჩება, ხოლო შვიდ-შვიდად ვაშლების გადათვლის შემთხვევაში არცერთი ვაშლი არ რჩება. რამდენი ცალი ვაშლია კალათაში, თუ მათი რიცხვი უმცირესია შესაძლებელიდან?
5. ეთქვათ, n ნატურალური რიცხვია, $n > 5$. რა ნაშთი შეიძლება მივიღოთ $(n^2 + n + 2)$ -ის $(n + 3)$ -ზე გაყოფისას?
 6. ნატურალური x რიცხვის 9-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთია 8. რისი ტოლია $(x + 13)$ -ის 9-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი?
 7. მიუთითეთ უმცირესი არაუარყოფითი რიცხვი, რომელიც იმავე კლასშია, რომელშიც არის
 - ა) 73, მოდულით 8; ბ) 47, მოდულით 11; გ) 81, მოდულით 16; დ) 16, მოდულით 12; ე) 16, მოდულით 8; ე) 8, მოდულით 6.
 8. დაასახელეთ კვირის დღე, რომელიც არის სამშაბათიდან (კვირის მე-2 დღიდან)
 - ა) მე-19 დღე; ბ) 134-ე დღე; გ) 365-ე დღე; დ) 376-ე დღე.
 9. თუ ახლა ივნისია, რა თვე იქნება 400 თვის შემდეგ?
 10. გამოიყენეთ „3 მოდულის არითმეტიკა“ და ამოხსენით ამოცანები:
 - ა) იპოვეთ ყველა ის p მარტივი რიცხვი, რომლებისთვისაც $p + 10$ და $p + 14$ რიცხვებიც მარტივია.
 - ბ) ცნობილია, რომ p და $8p^2 + 1$ მარტივი რიცხვებია. იპოვეთ p .
 11. დარაჯი 4 დღეს მუშაობს, ხოლო მეხუთე დღეს ისვენებს. მუშაობას იგი იწყებს ორშაბათს, კვირა დღეს დასვენების შემდეგ. რამდენი დღის შემდეგ დაისვენებს იგი ისევ კვირა დღეს?
 12. ოთხი გემი ერთი მიმართულებით გადის ნავსადგურიდან: პირველი – 5 დღეში ერთხელ, მეორე – 8 დღეში ერთხელ, მესამე – 12 დღეში ერთხელ და მეოთხე – 15 დღეში ერთხელ. გემებმა ერთ დღეს ერთდროულად დაიწყეს გასვლა. რამდენი დღის შემდეგ გავლენ ეს გემები ერთდროულად კელავ იმავე ნავსადგურიდან?
 13. სამ ძმას არათანაბარი თანხა ჰქონდა. თუ თითოეული მათგანი, უფროსით დაწყებული, რიგრიგობით მისცემს დანარჩე-

ნებს იმ თანხის მეოთხედ ნაწილს, რაც მას აქვს ამ მომენტში, მაშინ თითოეულ ძმას 6250 ლარი აღმოაჩნდება. რა თანხა პქონდა თითოეულ ძმას თავდაპირველად?

14. მეურნეს ორ კალათში პქონდა ვაშლი: ერთში – 240 ცალი, მეორეში – 300 ცალი. ორთავე კალათიდან მესამეში აწყობს ვაშლებს შემდეგნაირად: პირველიდან ორს იღებს, მეორედან – სამს, შემდეგ ისევ პირველიდან – ორს, მეორედან – სამს და ა.შ. რამდენჯერ უნდა ამოიღოს პირველიდან 2 ვაშლი, ხოლო მეორედან 3 ვაშლი, რომ პირველ კალათში ოთხჯერ მეტი დარჩეს, ვიდრე მეორეში?
15. იპოვეთ 2^{999} -ის ბოლო ციფრი.
16. იპოვეთ 3^{2019} -ის ბოლო ციფრი.
17. იპოვეთ 4^{2020} -ის ბოლო ციფრი.
18. ტბაზე სასეირნოდ გამოყოფილია 4 და 5 ადგილიანი ნაეები. თუ ავირჩევთ ერთ-ერთი სახის ნაეებს, ერთი ადგილი ერთ ნაეში ყოველთვის თავისუფალი დარჩება (დანარჩენ ნაეებში თავისუფალი ადგილი არ დარჩება). რამდენ ადამიანს შეუძლია ტბაზე ნავით გასეირნება, თუ მათი რაოდენობა 10-დან 30-მდეა?
19. ტბაზე სასეირნოდ გამოყოფილია 5 და 6 ადგილიანი ნაეები. თუ ავირჩევთ ერთერთი სახის ნაეებს, არცერთ ნაეში თავისუფალი ადგილი არ დარჩება. რამდენ ადამიანს შეუძლია ტბაზე ნავით გასეირნება, თუ მათი რაოდენობა 10-დან 30-მდეა?
20. „12 მოდულის არითმეტიკაში“ $9+11=?$
21. თუ პრეზიდენტის არჩევნები ყოველ 4 წელიწადში ერთხელ იმართება და უკანასკნელი არჩევნები ჩატარდა 2016 წელს, მაშინ 25 წლის გავლის შემდეგ რომელ წელს გაიმართება პირველი საპრეზიდენტო არჩევნები?
22. 9 სმ სიგანისა და 21 სმ სიგრძის კოლოფების ჩასაწყობად საჭიროა გაკეთდეს კვადრატულძირიანი ყუთი. როგორი უნდა იყოს კვადრატული ძირის გვერდის უმცირესი სიდიდე, რომ კოლოფებში მჭიდროდ მოთავსდეს ყუთში?
23. დათო სამ დღის ზედიზედ მუშაობის შემდეგ ორი დღე ისვენებს. იგი სამუშაოდ გავიდა ორშაბათს. შაბათსა და კვირას

დასვენების შემდეგ. ორშაბათიდან მინიმუმ რამდენი დღე უნდა გავიდეს, რომ დათომ კელავ შაბათსა და კვირას დაისვენოს?

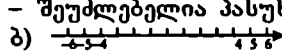
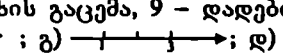
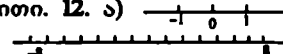
24. ტურისტმა ველოსიპედით გაიარა პირველ დღეს 98 კმ, მეორე დღეს – 70 კმ, მესამე დღეს – 84 კმ. რამდენი საათი მოინდომა მან მთელ მარშრუტს, თუ მოძრაობის სიჩქარე ერთნაირი და უდიდესია შესაძლებელიდან?
25. იპოვეთ უმცირესი არაუარყოფითი x რიცხვი, რომლისთვისაც $x+6 \equiv 4 \pmod{8}$.
26. წუთების ისარი ამჟამად 25 წუთს გვიჩვენებს. რამდენ წუთს წარმოგვიდგენს იგი 176 წუთის შემდეგ?
27. წუთების ისარი ამჟამად 25 წუთს გვიჩვენებს. რამდენ წუთს წარმოგვიდგენდა იგი 176 წუთის წინ?
28. ეთქვათ, $x=8k-5$ ($k \in \mathbb{Z}$). რა ნაშთი მიიღება ამ რიცხვის 8-ზე გაყოფისას?
29. ეთქვათ, $n=7l-2$. რა ნაშთი მიიღება n რიცხვის 6-ზე გაყოფისას?
30. x რიცხვის 4-ზე გაყოფისას მიიღება ნაშთი 3. რა რიცხვი შეიძლება იყოს x -ის 8-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი?

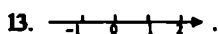
33.1.1. ტესტი №32

1. მთელი რიცხვის 6-ზე გაყოფისას ყველა შესაძლებელი ნაშთთა სიმრავლეა
 - ა) $\{0; 1; 2\}$, ბ) $\{1; 2; 3; 4; 5\}$, გ) $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, დ) $\{0; 1; 2; 3; 4\}$.
2. რისი ტოლია -3 -ის 7-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი?
 - ა) -3 ; ბ) 4; გ) 3; დ) -4 .
3. მოცემულია თანაფარდობები:
 - I. $17 \equiv 5 \pmod{7}$; II. $17 \equiv -5 \pmod{11}$; III. $19 \equiv 0 \pmod{9}$; IV. $18 \equiv 6 \pmod{11}$.
 მათგან ჭეშმარიტია
 - ა) I, ბ) II, გ) III, დ) IV.

4. თუ $x=4k+3$ ($k \in \mathbb{Z}$); $y=4t+3$ ($t \in \mathbb{Z}$); მაშინ აუცილებლად
 ა) $x=y$; ბ) $x \neq y$; გ) $x \equiv y \pmod{4}$; დ) $x=4y$.
5. თუ $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$ და $x \equiv y \pmod{m}$, m ნატურალური რიცხვია, მაშინ აუცილებლად
 ა) $x-y$ იყოფა m -ზე, ბ) $x-y$ არ იყოფა m -ზე,
 გ) x -ისა და y -ის m -ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთები განსხვავებულია,
 დ) $x+y$ იყოფა m -ზე.
6. ეთქვას, $x \equiv y \pmod{m}$; $c \equiv d \pmod{m}$; შემდეგი თანაფარდობებიდან რომელი შეიძლება არ იყოს სწორი?
 ა) $xc \equiv yd \pmod{m}$; ბ) $x+cy \equiv y+d \pmod{m}$; გ) $x-cy \equiv d \pmod{m}$;
 დ) $\frac{x}{c} \equiv \frac{y}{d} \pmod{m}$.
7. თუ $x+2 \equiv 5 \pmod{7}$, მაშინ
 ა) $x \equiv 0 \pmod{7}$; ბ) $x \equiv 1 \pmod{7}$; გ) $x \equiv 4 \pmod{7}$; დ) $x \equiv 3 \pmod{7}$.
8. თუ $3x \equiv 9 \pmod{15}$, მაშინ
 ა) $x \equiv 1 \pmod{5}$; ბ) $x \equiv 2 \pmod{5}$; გ) $x \equiv 0 \pmod{5}$; დ) $x \equiv 3 \pmod{5}$.
9. თუ $x+5 \equiv 2x+13 \pmod{7}$, მაშინ
 ა) $x \equiv -1 \pmod{7}$; ბ) $x \equiv 1 \pmod{7}$; გ) $x \equiv 3 \pmod{7}$;
 დ) $x \equiv 4 \pmod{7}$.
10. თუ n რაიმე ნატურალური რიცხვია და $n \equiv 0 \pmod{5}$, მაშინ n რიცხვის ბოლო ციფრი არის
 ა) 1; ბ) 0 ან 5; გ) 2 ან 3; დ) 4.

2.1

1. ა) $\{-3, 0, 3\}$; ბ) $\{-5, -2, 1, 4\}$; გ) $\{-4, -1, 2, 5\}$. 2. $\{(5;2), (5;0), (5;-1), (5;-6), (2;0), (2;-1), (2;-6), (0;-1), (0;-6), (-1;6)\}$. 3. $\{(-3;0), (-3;3), (0;3)\}$. 4. ა) $\{(-8;-4), (-8;-2), (-8;2), (-8;4), (-6;-2), (-6;2), (-4;-2), (-4;2), (-4;4), (-2;2), (0;-8), (0;-6), (0;-4), (0;-2), (0;2), (0;4), (2;-2), (4;-4), (4;-2), (4;2)\}$, ბ) $\{(-4;-8), (-4;0), (-4;4), (-2;-8), (-2;-6), (-2;-4), (-2;0), (-2;2), (-2;4), (2;-8), (2;-6), (2;-4), (2;-2), (2;0), (2;4), (4;-8), (4;-4), (4;0)\}$. 5. $4+(4-3)+(4-2)=7$ (კგ). 6. ნაეარაუდევი თანხა - $30:2+30:3=15+10=25$ (ლარი), რეალური თანხა - $(30+30):5:2=24$ (ლარი); $24-25=-1$ გამყიდველი ნაეარაუდევეზე ერთი ლარით ნაკლებს აიღებდა. 7. ა) -3 ; ბ) 0 . 8. ა) $5+(-11)$; ბ) $-8+9$; გ) $(-2)+(-6)$; დ) $-7+5$. 9) $-10, -9, -8, -7, -6, -5, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 8, 11$. 10. $11, 9, 8, 6, 5, 4, 0, -1, -2, -3, -4, -5, -7, -8, -10$. 11. 1 - დადებითი, 2 - უარყოფითი, 3 - 0, 4 - უარყოფითი, 5 - შეუძლებელია პასუხის გაცემა, 6 - დადებითი, 7 - დადებითი, 8 - შეუძლებელია პასუხის გაცემა, 9 - დადებითი. 12. ა) ; ბ) ; გ) ; დ) 

13. . 14.

2	7	-5	-2
8	-3	1	-4
-7	4	0	5
-1	-6	6	3

 15.

-1	-2	3
4	0	-4
-3	2	1

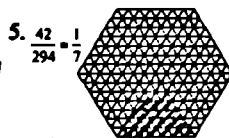
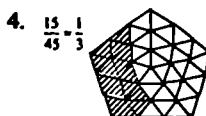
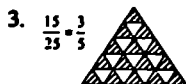
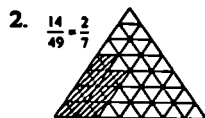
 16. -7°C . 17. 3°C .

18. ტემპერატურამ მოიმატა 6°C . 19. ტემპერატურამ მოიკლო 9°C -ით. 20. მდინარის საწინააღმდეგო მიმართულებით კატარლამ გაიარა $(18-3)5=75$ (კმ), ხოლო მდინარის მიმართულებით $(18+3)3=63$ (კმ); ე.ი. მდინარის საწინააღმდეგო მიმართულებით მან გაიარა $75-63=12$ (კმ-ით) მეტი. 21. -63 . 22. -10 . 23. 12. 24. -86 . 25. -49 . 26. 5. 27. თუ პირველ ყუთში x კგ-ით მეტი ვაშლი იყო, მაშინ 8კგ ვაშლის მეორე ყუთში გადაწყობის შემდეგ სხვაობა გახდება $(x-16)$ კგ. 28. ა) 20კგ; ბ) 45კგ. 29. ლამბაქების ოდენობა 1-ით მეტია ჭაწიკების ოდენობაზე. 30. 8190 ლარი.

3.1

1.

განაყოფი	გასაყოფი	გაყოფი	წილადი	მრიცხველი	მნიშვნელი
4:7	4	7	$\frac{4}{7}$	4	7
15:6	15	6	$\frac{15}{6}$	15	6
20:6	20	6	$\frac{20}{6}$	20	6
12:14	12	14	$\frac{12}{14}$	12	14



6. $\frac{1}{4}$. 7. $\frac{9}{8}$ -ის. 8. ერთ დღეში მოთიბავს მდელოს $\frac{1}{36}$ ნაწილს. 9. 5 დღეში. 10. $\frac{1}{90}$. 11. $\frac{0}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}$. 12. 675 გრამს. 13. ა) $\frac{5}{8}, \frac{23}{42}, \frac{15}{28}, \frac{19}{36}$.
ბ) $\frac{1}{2}$ -თან უფრო ახლოსაა $\frac{19}{36}$. 14. წილადის მრიცხველი უნდა გაეაზრა ელვით 9-ზე. 15. ა) $x=36$; ბ) $x=36$; გ) $x=90$; დ) $x=1$; ე) $x=2$.
16. ა) $\frac{7}{19}, \frac{7}{18}, \frac{7}{15}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{7}{9}, \frac{7}{8}$; ბ) 1-თან ყველაზე ახლოსაა $\frac{7}{8}$.
17. $\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{5}{5}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{2}{1}, \frac{5}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{6}{1}$. 18. 4; 0; 5; 0; 3; 40; 0. 19. ა) 12; ბ) 10; გ) 20. 20. 14 დღეში. 21. 15 საათში. 22. ა) $\frac{4}{5}$;
ბ) $\frac{1}{5}$; გ) $\frac{3}{4}$; დ) $\frac{1}{2}$; ე) $\frac{36}{53}$; ე) $\frac{19}{23}$; ზ) $\frac{37}{61}$; თ) $\frac{121}{161}$. 23. ა) $\frac{1}{8}$; ბ) $\frac{3}{10}$;
გ) $\frac{1}{5}$; დ) $\frac{5}{2}$; ე) $\frac{10}{9}$; ე) $\frac{1}{4}$. 24. ა) $\frac{3}{5}$; ბ) $\frac{1}{2}$; გ) $\frac{a}{m}$; დ) $\frac{3a}{4}$.
25. $\frac{12-6}{15-6} = \frac{6}{9}$, $\frac{12}{15} > \frac{6}{9}$. 26. $\frac{17-7}{15-7} = \frac{10}{8}$, $\frac{17}{15} < \frac{10}{8}$. 27. $\frac{3+8}{7+8} = \frac{11}{15}$, $\frac{11}{15} > \frac{3}{7}$.
28. $\frac{7+8}{3+8} = \frac{15}{11}$, $\frac{15}{11} < \frac{7}{3}$. 29. $\frac{1+2}{3+6} = \frac{3}{9}$, $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. 30. $\frac{12-2}{18-3} = \frac{10}{15}$, $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

4.1

1. ა) მეტია. 2. ა) და ბ) ერთმანეთის ტოლია. 3. I ნახაზზე წითელი ფერის ტრაპეციების წილია $\frac{3}{8}$, მწვანესი - $\frac{2}{8}$, ყვითელის - $\frac{2}{8}$, ლურჯის - $\frac{1}{8}$; II ნახაზზე წითელია - $\frac{1}{8}$, მწვანე - $\frac{1}{8}$, ყვითელი - $\frac{5}{8}$, ლურჯი - $\frac{1}{8}$; III ნახაზზე წითელია - $\frac{2}{8}$, მწვანე - $\frac{2}{8}$, ყვითელი - $\frac{2}{8}$, ლურჯი - $\frac{2}{8}$; IV ნახაზზე წითელია - $\frac{3}{8}$, მწვანე - $\frac{2}{8}$, ლურჯი - $\frac{2}{8}$, ყვითელი - $\frac{1}{8}$; სულ წითელია - $\frac{9}{8}$, მწვანე - $\frac{7}{8}$, ყვითელი - $\frac{10}{8}$, ხოლო

ლურჯი $-\frac{6}{8}$, ამრიგად ზრდის მიხედვით გვექნება: ლურჯი $-\frac{6}{8}$, მწვანე $-\frac{7}{8}$, წითელი $-\frac{9}{8}$ და ყვითელი $-\frac{10}{8}$. 4. წითელია $-\frac{3}{16}$, მწვანეა $-\frac{1}{16}$, ლურჯია $-\frac{1}{16}$, ყვითელია $-\frac{2}{16}$, სტაფილოსფერია $-\frac{4}{16}$, ხოლო თეთრია $-\frac{5}{16}$; ფერადები სულ $\frac{3}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{4}{16} = \frac{11}{16}$ და გვაქვს $\frac{11}{16} > \frac{5}{16}$. 5. ყვითელია $-\frac{1}{25}$, მწვანეა $-\frac{2}{25}$, წითელია $-\frac{3}{25}$, ლურჯია $-\frac{3}{25}$, სტაფილოსფერია $-\frac{4}{25}$, ხოლო თეთრია $-\frac{12}{25}$, ფერადები სულ $\frac{1}{25} + \frac{2}{25} + \frac{3}{25} + \frac{3}{25} + \frac{4}{25} = \frac{13}{25}$ და გვაქვს $\frac{13}{25} > \frac{12}{25}$. 6. ა) $\frac{4}{7} + \frac{3}{7} + \frac{4}{7} = \frac{11}{7}$; ბ) $\frac{3}{7} + \frac{4}{7} + \frac{3}{7} = \frac{10}{7}$; გ) $\frac{11}{21}$; დ) $\frac{10}{21}$. 7) ა) $\frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = \frac{8}{6}$; ბ) $\frac{4}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{10}{6}$; გ) $\frac{8}{18}$; დ) $\frac{10}{18}$. 8. ა) $\frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{10}{5}$; ბ) $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{10}{5}$; გ) $\frac{10}{20}$; დ) $\frac{10}{20}$. 9. პირველ ტაქტში $-\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8}$, მეორე ტაქტში $-\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{4}{8}$, $\frac{4}{8} + \frac{4}{8} = 1$. 10. წითელია $-\frac{3}{16}$, ვარდისფერი $-\frac{2}{16}$, მწვანე $-\frac{2}{16}$, ყვითელი $-\frac{1}{16}$, ლურჯი $-\frac{1}{16}$, ხოლო თეთრი $-\frac{7}{16}$; ფერადების ჯამი $-\frac{3}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$ მეტია $\frac{2}{16}$ -ით თეთრ ნაწილებზე. 11. I, III და V ტაქტებში მუსიკალური ნოტების ჟღერადობის ხანგრძლივობები ტოლია $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$; ასევე ერთმანეთის ტოლია II $-\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$, IV $-\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$, VI $-\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ტაქტებში ჟღერადობის ხანგრძლივობები, აგრეთვე VII-ში და VIII-ში $-\frac{3}{4}$ -ია, ამიტომ $\frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{1}{8}$. 12.  ყვითელი ფერის ნაწილის წილი ტოლია $\frac{7}{36}$ -ის, (ვისფერის $-\frac{6}{36}$ -ის, მწვანესი $-\frac{3}{36}$ -ის, წითელის $-\frac{3}{36}$ -ის, ლურჯის $-\frac{3}{36}$ -ის, ყვითელის $-\frac{3}{36}$ -ის, სტაფილოსფერის $-\frac{3}{36}$ -ის, ხოლო თეთრის $-\frac{3}{36}$ -ის).

$\frac{4}{36}$ -ის, სტაფილოსფერის $-\frac{5}{36}$ -ის, ვარდისფერის $-\frac{4}{36}$ -ის, სულ მათი ჯამია: $\frac{7}{36} + \frac{6}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} = \frac{29}{36}$; გაუფერადებელი (თეთრი) ნაწილების ჯამია: $\frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36} = \frac{7}{36}$ და ფერადი ნაწილები მეტია თეთრ ნაწილებზე $\frac{29}{36} - \frac{7}{36} = \frac{22}{36}$ -ით. 13.  ყვეოთელი ფერის

ნაწილის წილი ტოლია $-\frac{6}{36}$ -ის, ცისფერის $-\frac{6}{36}$ -ის, მწვანის $-\frac{3}{36}$ -ის, წითელის $-\frac{4}{36}$ -ის, სტაფილოსფერის $-\frac{5}{36}$ -ის, ვარდისფერის $-\frac{4}{36}$ -ის, სულ მათი ჯამია: $\frac{6}{36} + \frac{6}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} = \frac{28}{36}$; გაუფერადებელი (თეთრი) ნაწილების ჯამია: $\frac{1}{36} + \frac{6}{36} + \frac{1}{36} = \frac{8}{36}$ და ფერადი ნაწილები მეტია თეთრ ნაწილებზე $\frac{28}{36} - \frac{8}{36} = \frac{20}{36}$ -ით.

14. ა) 3; ბ) $13\frac{37}{480}$; გ) $10\frac{13}{1892}$; დ) 199; ე) $74\frac{203}{330}$; ე) $3\frac{1333}{4455}$;

ზ) $5\frac{793}{1014}$; თ) $\frac{7}{270}$; ი) $2\frac{3}{14}$; კ) $13\frac{3}{4}$. 15. ა) $1\frac{29}{45}$; ბ) $85\frac{19}{75}$; გ) $9\frac{173}{336}$;

დ) $11\frac{491}{540}$. 16. ა) $3\frac{109}{480}$; ბ) $\frac{2}{3}$; გ) $\frac{25}{66}$. 17. $\frac{32}{48}$ და $\frac{25}{55}$.

18. $\frac{45}{75}, \frac{24}{96}$ და $\frac{50}{70}$. 19. ტურისტმა $\frac{107}{120}$ კმ-ით მეტი გაიარა ნავარა-

უდეზე. 20. I ყუთიდან $3\frac{1}{2}$ კმ-ით მეტი ყავა გაყიდეს. 21. $\frac{1}{20}$.

22. $21\frac{53}{56}$. 23. მოგება გახდა $697516\frac{19}{20}$ ლარი. 24. $520\frac{3}{4}$ კგ. 25. $\frac{3}{4}$ კგ.

26. $142\frac{65}{68}$. 27. $102\frac{131}{132}$. 28. $\frac{1}{6}$ -ით. 29. $\frac{1}{5}$ -ით. 30. $17\frac{2}{9}$.

5.1.

1. ა) 4, ბ) 0, გ) $27\frac{3}{4}$, დ) 284, ე) $\frac{9}{16}$, ვ) $75\frac{3}{8}$, ზ) $\frac{1}{10}$, თ) $4780\frac{1}{2}$,
 ი) $87\frac{1}{9}$, კ) $23\frac{5}{6}$. 2. ა) $\frac{25}{81}$, ბ) $\frac{9}{16}$, გ) $2\frac{1}{4}$, დ) $1\frac{57}{64}$, ე) $\frac{343}{1000}$, ვ) $3\frac{3}{8}$,
 ზ) $1\frac{91}{125}$, თ) $2\frac{10}{27}$, ი) $12\frac{19}{27}$, კ) $42\frac{7}{8}$. 3. $\frac{5}{22}$. 4. ა) 10, ბ) $9\frac{2}{11}$. 5. ა) $\frac{1}{2}$,
 ბ) 50, გ) 0, დ) $4\frac{12}{23}$. 6. $46\frac{7}{8}$ კმ. 7. პირველ ოთახზე $-27\frac{3}{5}$ კვტ,
 მეორე ოთახზე - 46 კვტ, ხოლო სამზარეულოზე - $29\frac{9}{10}$ კვტ.
 8. $5443\frac{1}{5}$ ლარი. 9. $\frac{1}{5}$ ნაწილი. 10. ა) $\frac{4}{17}$, ბ) $3\frac{15}{128}$, გ) $\frac{3}{13}$, დ) $\frac{2}{3}$,
 ე) $\frac{21}{250}$, ვ) $4\frac{2}{3}$, ზ) $1\frac{7}{15}$, თ) $1\frac{1}{3}$, ი) 36, კ) 7. 11. ა) $1\frac{2}{3}$, ბ) 12,
 გ) $14\frac{25}{36}$, დ) $3\frac{5}{6}$. 12. ა) 1 ჰექტარიდან აიღებენ $3\frac{1}{2}$ ტ კარტოფილს,
 ბ) 1 ტონა კარტოფილს აიღებენ $\frac{2}{7}$ ჰექტარიდან. 13. I კალათაში
 - 260 ცალი, II კალათაში - 292 ცალი, III კალათაში - 308 ცა-
 ლი. 14. I ფირმაში - 15 კაცი, II ფირმაში - 18 კაცი. 15. 35 დღე-
 ში. 16. უფროსი და 60 წლისაა, ხოლო უმცროსი და - 42 წლის.
 17. $\frac{ab}{a+b}$ საათში. 18. $\frac{4}{9}$. 19. ა) $\frac{a}{b}$, ბ) $-\frac{1}{a+b}$. 20. ა) 1,
 ბ) 2. 21. ა) $\frac{3b}{2a-3b}$, ბ) $\frac{1}{x+y}$, გ) $\frac{1}{b}$, დ) $\frac{m-5}{2}$. 22. $\frac{tp-3p-4t}{tp}$.
 23. $\frac{tp}{2(t-p)}$. 24. $\frac{m(n-8)}{n}$. 25. $\frac{a(b+5)}{a+b}$. 26. 86. 27. 96. 28. 3. 29. 5.
 30. 6.

6.1.

1. ა) ცხრა მილიონ ასოცდაათი ათას შვიდას ორმოცდამეორე მთე-
 ლი ასოცი ათას ოცდაათხმეტე მესამილიონედი; ბ) 10; გ) 10;
 დ) 100; ე) 100 000; ვ) 10-ჯერ; ზ) 10-ჯერ; თ) 10-ჯერ. 2. ა) 4; ბ)
 7; გ) 5. 3. 43,97. 4. 19,3321. 5. 15,3677395. 6. კოშკის სიმაღლეა 82,9მ.
 7. ა) შემცირდება 0,54-ით; ბ) გაიზარდება 31,6-ით; გ) შემცირდება
 16,8-ით; დ) უცვლელი დარჩება; ე) უცვლელი დარჩება; ვ) გაიზ-
 რდება 0,4-ით; ზ) შემცირდება 0,4-ით. 8. ა) 206,11565; ბ) 0,7677;

გ) 6,97125; დ) 1,471982; ე) 14,0248; ვ) 0; ზ) 1. 9. პირველმა მიიღო 1105 ლარი, მეორემ – 1560 ლარი, მესამემ – 1984 ლარი. 10. 500 დმ³. 11. მზიდან მერკურამდე მანძილია 57,83715 მლნ კმ; ენერგამდე – 108,05235 მლნ კმ; მარსამდე – 227,7618 მლნ კმ. 12. მთვარეზე – 11,52 კგ; მარსზე – 27,36 კგ; იუპიტერზე – 190,08 კგ. 13. 30,9 კმ. 14. 4 დღეში. 15. 4 ცენტნერი. 16. I ხარისხის – 64,85 გ; II ხარისხის – 57,8 გ. 17. I ნაწილში – 20 მუშა, II ნაწილში – 15 მუშა, III ნაწილში – 12 მუშა. 18. 1,9 ცენტნერი. 19. 364,5 ლარი. 20. 66,24 ლარი. 21. 22,4 ლარი. 22. 1024,8 ლარად. 23. 285,4 ლარი. 24. 0,1875; 0,19. 25. 17,5-ჯერ გადიდდება. 26. 5-ჯერ გადიდდება. 27. შემცირდა 2-ჯერ. 28. 2,25; 48. 29. 26. 30. ა) 128; ბ) 0,585; გ) 104,15; დ) 673,83.

7.1.

1. 224 ლარი. 2. 195 კგ. 3. 8,6625 კგ. 4. 5,16 ც. 5. 24,5 ლარი. 6. 75 ტონა. 7. 1638 ქალი და 2520 მამაკაცი. 8. 9სთ20წთ. 9. 96,8 კგ. 10. 30%. 11. 5000 ლარი. 12. $31\frac{11}{19}\%$; 500 ლარი; 800 ლარი. 13. 1,08 ლარი. 14. 1,2%. 15. უფროსს კქონდა 250 ლარი; საშუალოს – 268,75 ლარი; ხოლო უმცროსს – 291,25 ლარი. 16. $133\frac{1}{3}$ კგ. 17. ა) 32 კგ; ბ) 64 ლარი. 18. 12 კგ. 19. 3000 დკლ. 20. 44%-ით. 21. 150%-ით. 22. 1079 და 1411. 23. 20 კა. 24. 240. 25. 40 ლიტრი. 26. 81250 კაცი. 27. 100 კგ. 28. 10%, 20%, 30%, 40%. 29. $21\frac{2}{3}\%$, $43\frac{1}{3}\%$, 35%. 30. 3,7%.

8.1.

1. პირველი წაიღებდა მის მიერ გადახდილ თანხას და კიდევ 250 დოლარს, მეორე – 400 დოლარს, ხოლო მესამე 550 დოლარს. 2. 6,5 კგ. 3. ა) 170; 425; 127,5. ბ) 72; 60; 4,5. 4. ა) 180, 300, 60; ბ) 240, 80, 20, 4; გ) 36, 72, 216. 2. 5. ა) 81, 108, 144, 192; ბ) 187,6; 375,2; 187,6; გ) 63, 140, 42, 140. 6. 2კგ, 2კგ, 12კგ. 7. ინგლისელი – 500 ტურისტის, ფრანგი – 300 ტურისტის, გერმანელი – 100 ტურისტის. 8. $6\frac{6}{7}$ მ, $5\frac{1}{7}$ მ, 9მ. 9. 1050 აგურის სახლია, 560 ქვიტკირის, ხოლო 360 ხის. 10. I ხარატმა დაამზადა 87 დეტალი, II-მ – 84 დეტალი, ხოლო III-მ – 80 დეტალი. 11. პირველი ოთახის მოცულო-

ბაა 56 მ³, მეორის - $74\frac{2}{3}$ მ³, ხოლო მესამის კი - $53\frac{1}{3}$ მ³. 12. პირველ სოფელში ცხოვრობს 160 კომლი, მეორეში - 224 კომლი, მესამეში 168 კომლი, ხოლო მეოთხეში - 196 კომლი. 13. პირველი რკალი ტოლია 120°-ის, მეორე - 96°-ის, ხოლო მესამე - 144°-ის. 14. 171 სმ. 15. A მიიღებს 723,6 ლარს; B - 904,5 ლარს; C - 603 ლარს; D - 1005 ლარს; ხოლო E - 1172,5 ლარს. 16. პირველმა მიიღო 207,6 ლარი; მეორემ - 634,8 ლარი; მესამემ - 1309,6 ლარი; მეოთხემ - 538 ლარი. 17. I ხარისხის ჩაი 6 კილოგრამი იყიდეს, ხოლო მეორე ხარისხის - 4 კგ. 18. $\frac{7}{15}$ და $\frac{7}{12}$. 19. $\frac{5}{12}$ და $\frac{5}{16}$. 20. I ხარისხის - 18 ლ. II ხარისხის - 24 ლ. III ხარისხის - 27 ლ. 21. 1,5 ტ. მზიდაობის - 36 მანქანა; 2 ტ. მზიდაობის - 27 მანქანა; 3 ტ. მზიდაობის - 18 მანქანა. 22. 36 კმ. 23. 12 კმ. 24. სატვირთო - 4 სთ-ში, სამგზავრო - 2 სთ.40წთ-ში, ხოლო ჩქარი - 1 სთ.20წთ-ში. 25. I მუშაობდა 15 დღე, II - 20 დღე, ხოლო III - 30 დღე. 26. 1000; 1500; 2000. 27. I - 1200 ლარი, II - 800 ლარი; III - 3200 ლარი. 28. I სოფელს მოუწევს 24000 ლარის გადახდა და მასში მცხოვრებ თითოეულ კომლს 600 ლარი; II - 6000 ლარი და 300 ლარი; III - 27000 ლარი 900 ლარი. 29. I - 600 ლარი, II - 400 ლარი, III - 300 ლარი. 30. ა) $\frac{4}{5}$; $\frac{8}{15}$; $\frac{16}{25}$; $\frac{2}{75}$. ბ) 2 - ღერძიანი არის 6 ვაგონი, 3 - ღერძიანი - 7 ვაგონი, ხოლო 4 - ღერძიანი - 18 ვაგონი.

9.1.

1. $\frac{1}{150}$. 2. $\frac{7}{22}$. 3. A - 20 დღე, B - 30 დღე, C - 40 დღე. 4. ა) $\frac{7}{9}$; ბ) $\frac{7}{33}$; გ) $\frac{2}{99}$; დ) $\frac{130}{999}$; ე) $\frac{4}{111}$; ვ) $\frac{1}{111}$; ზ) $\frac{37}{300}$; თ) $\frac{19}{60}$; ი) $20\frac{1}{5}$; კ) $\frac{13}{100}$; ლ) $\frac{7}{150}$; მ) $\frac{29}{225}$. 5. ა) $1\frac{1}{9}$; ბ) $\frac{71}{99}$; გ) $\frac{1}{99}$; დ) $\frac{13}{99}$; ე) $\frac{1}{990}$; ვ) $\frac{1}{900}$; ზ) $\frac{113}{900}$; თ) $\frac{62}{495}$; ი) $\frac{28}{2475}$; კ) $\frac{113}{9990}$. 6. 11 და 9,5. 7. $2\frac{23}{36}$ და $1\frac{31}{36}$. 8. 1,5. 9. $497\frac{1}{7}$. 10. 74. 11. ა) $1,1(6) > 1,(16)$; ბ) $1,(16)=1,1(61)$; გ) $10\% < 0,(1)$. 12. 36. 13. $15\frac{157}{180}$. 14. 1,7(34). 15. 480 ლარი. 16. 45.

17. $22\frac{3}{5}$ და $5\frac{1}{45}$. 18. 2,(145); 2,145(2); 2,1(452); 2,14(52); 2,1(45);

2,14(5). 19. ა) $\frac{11}{14}$; ბ) 1. 20.

a	b	a+b	a-b	a·b	a:b
0,(6)	0,(3)	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	2
0,2(4)	0,1(2)	$\frac{11}{30}$	$\frac{11}{90}$	$\frac{121}{4050}$	2
1,4(3)	0,1(3)	$1\frac{7}{15}$	$1\frac{3}{15}$	$\frac{8}{45}$	10

21. 88° -ის.

22.

0,(4)	0,(3)	0,(8)
1	0,(5)	0,(1)
0,(2)	0,(7)	0,(6)

23. 3,3(6). 24. $1\frac{19}{81}$ სმ². 25. $3\frac{19}{297}$ სმ².

26. $S_1 - 0,1(7)$; $S_2 - 0,(3)$; $S_3 - 0,(2)$; $S_4 - 0,2(6)$. 27. 24969. 28. $27\frac{7}{9}\%$.

29. 1. 30. $16\frac{1069}{1800}$.

10.1.

1. 2 სმ. 2. $\sqrt{18}$ სმ². 3. $\sqrt{\frac{5}{2}}$. 4. $\sqrt{25}$. 5. $\sqrt{5}$ სმ. 6. მოთვლი რიცხვებია:

1; 0; -1; $\sqrt{25}$; $\sqrt{100}$; რაციონალური რიცხვებია: 1; 0; -1; $\sqrt{25}$; $\sqrt{100}$;
 $-\sqrt{\frac{4}{9}}$; $\sqrt{2,56}$; ირაციონალური რიცხვებია: $\sqrt{3}$; $-\sqrt{5}$; π . 7. ა) 0,4;

ბ) $\sqrt{10}$; გ) $\sqrt{1,5}$; დ) 0,1. 8. ა) $a=1,2$ და $a=-1,2$; ბ) $a=\sqrt{7}$ და $a=-\sqrt{7}$;
 გ) $a=\sqrt{0,9}$ და $a=-\sqrt{0,9}$; დ) $a=0,3$ და $a=-0,3$. 9. ა) $\sqrt{29}$ და $\sqrt{31}$;

ბ) $\sqrt{37}$ და $\sqrt{47}$; გ) $-\sqrt{3}$ და $-\sqrt{2}$. 10. ა) 1,831 და 1,839; ბ) 3,0131
 და 3,0139; გ) 1,5 და 1,7. 11. ა) $\sqrt{10} < 9$; ბ) $\sqrt{1,5} > 1,2$; გ) $-\sqrt{6} < 2$;

დ) $-\sqrt{45} > -7$; ე) $\sqrt{1,4} < 1,2$; ვ) $\sqrt{40} > 6,2$; ზ) $4,5 > -\sqrt{8}$; თ) $0 > -\sqrt{8}$.
 12. ა) 2; ბ) 1,7; გ) 1,73. 13. -4, $-\sqrt{15}$, -3, $-\sqrt{5}$, π , $\sqrt{10}$, 4. 14. $\sqrt{65}$,
 8, $\sqrt{50}$, 0, -3, $-\pi$, $-\sqrt{10}$. 15. $\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$. 16. $\sqrt{5}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

17. $\sqrt{7}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$. 18. $\sqrt{10}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. 19. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. 20. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. 21. ა) $\sqrt{3} > \sqrt{2}$;

ბ) $\sqrt{5} > \sqrt{11}$; გ) $\sqrt{2} > \sqrt{5}$. 22. ა) $4\sqrt{2}$; ბ) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$; გ) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; დ) $2\sqrt{4}$.

23. ა) $2-\sqrt{2}$; ბ) $2(3+\sqrt{3})$; გ) $3(\sqrt{7}+1)$; დ) $2(\sqrt{5}-1)$. 24. ა) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$;
 ბ) $\sqrt{7}+\sqrt{3}$; გ) $-2(\sqrt{5}+\sqrt{8})$; დ) $-2(\sqrt{3}+\sqrt{10})$.

25. ა) $\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7})(2\sqrt{15}-1)}{59}$; ბ) $\frac{(5-\sqrt{7}-\sqrt{11})(13-2\sqrt{77})}{139}$;
 გ) $\frac{\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{12}$; დ) $\frac{\sqrt{6}(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})}{12}$. 26. ა) $\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{12}$;
 ბ) $(\sqrt{2}+1)\cdot(5-2\sqrt{6})$; გ) $(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})$; დ) $-(\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.
 27. ა) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}(5-\sqrt{3})}{22}$; ბ) $\frac{3\cdot\sqrt{7}-2\sqrt{6}\cdot(7+2\sqrt{6})}{5}$; გ) $\frac{\sqrt{10}(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{10}$;
 დ) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$. 28. ა) $2\cdot(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{28}+\sqrt[3]{16})$; ბ) $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$;
 გ) $\frac{2(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}+1)}{5}$; დ) $\frac{-(1+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25})}{4}$; ე) $\frac{-(4+6\sqrt[3]{4}+9\sqrt[3]{16})}{25}$.
 29. ა) $\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{5}$; ბ) $\frac{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}}{2}$. 30. ა) $-(2+\sqrt[3]{3})\cdot(4+2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{81})$;
 ბ) $(2+\sqrt[3]{3})\cdot(2+\sqrt{3})$; გ) $(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

11.1.

1. 4; 4.65; 4,7; 4,72; 4,75; $\sqrt{23}$; 4,8; 4,81; 5. 2. $1,73(20)$; $\sqrt{3}$; $\frac{26}{15}$;
 $\sqrt{10}-\sqrt{2}$. 3. ა) $23\sqrt{2}$; ბ) $15\sqrt{2}-3\sqrt{5}$; გ) $4\sqrt{10}-6\sqrt{2}$; დ) $\frac{51\sqrt{2}-52\sqrt{3}}{12}$.
 4. ა) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$; ბ) $-2\sqrt{3}$; გ) $\frac{\sqrt[3]{25}-4}{2\sqrt[3]{5}}$; დ) $-\frac{3\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{3}}{3}$. 5. ა) $\sqrt{12}$;
 ბ) $10\sqrt{2}$; გ) $14\sqrt{2}$; დ) 6; ე) $\sqrt[4]{432}$; ე) $4\sqrt[3]{24}$; ზ) $2\sqrt[4]{2}$. 6. ა) $21-\sqrt{14}$;
 ბ) $8\sqrt{15}$; გ) 0; დ) $5\sqrt{10}+5$; ე) -11; ე) $4\sqrt{6}+6$; ზ) $9-5\sqrt{3}$;
 თ) $17+5\sqrt{10}$; ი) $25\sqrt{10}-135$. 7. ა) 7 რაციონალურია; ბ) $5-3\sqrt{3}$
 ირაციონალურია; გ) $46-6\sqrt{5}$ ირაციონალურია; დ) $\frac{1}{8}$ რაციონა-
 ლურია; ე) $6\sqrt{2}$ ირაციონალურია; ე) 45 რაციონალურია; ზ) 4
 რაციონალურია; თ) $-\frac{4\sqrt{22}}{3}$ ირაციონალურია; ი) $2\frac{16}{23}$ რაციონა-
 ლურია; კ) -1 რაციონალურია. 8. $A\left(1\frac{2}{3}\right)$; $B\left(-1\frac{1}{3}\right)$; $|AB|=3$. 9. $2\sqrt{2}$;
 $-2\sqrt{2}$; $5\sqrt{2}$; $-5\sqrt{2}$; $0,8\sqrt{2}$; $-0,8\sqrt{2}$. 10. -6π ; მოთავსებული იქნება -19-
 სა და -18-ს შორის. 11. $C\left(\frac{2}{3}\right)$ და $D\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. 12. გამრავლების მი-
 მართ. 13. ა) გამრავლების მიმართ; ბ) შეკრების, გამოკლების და

გამრავლების მიმართ; გ) გამრავლების მიმართ. 14. ა) $\sqrt{10}-3$; ბ) $\sqrt{18}-4,1$; გ) $10-\pi^2$. 15. C(5); O(2,5); თუ სათავე O წერტილშია A(-2,5); C(2,5); O(0). 16. ა) $C(\sqrt{5})$; ბ) $A\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$; გ) D(1); დ) $C\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$. 17. $C_1(2,145)$; $C_2(2,1475)$; $C_3(2,14875)$; $C_4(2,149375)$. 18. ა) მაგალითად $\sqrt{2}$ და $\sqrt{1,7}$; ბ) $\sqrt{11}$ და $\sqrt{10,5}$; გ) $\sqrt{17}$ და $\sqrt{17,2}$. 20. $2\sqrt{a+b}$, თუ $a+b \geq c$; $2\sqrt{c}$, თუ $c \geq a+b$. 21. 2. 22. ა) $(\sqrt{2}+1)^2$; ბ) $(\sqrt{5}+2)^2$; გ) $(3-\sqrt{5})^2$; დ) $(3-2\sqrt{2})^2$. 23. $\frac{1}{29}$. 24. 6. 25. 0,2. 26. -3,5. 27. -0,148. 28. 24,5. 29. 75,2. 30. ა) ჭეშმარიტია; ბ) არ არის ჭეშმარიტია; გ) ჭეშმარიტია; დ) არ არის ჭეშმარიტი.

12.1.

1. ა) 155; ბ) 259; გ) 35; დ) 0; ე) 101; ე) 146; ზ) 71; თ) 1. 2. ა) 326,3; ბ) 0,7; გ) 44,2; დ) 1,2; ე) 102,3; ე) 0,7; ზ) 501,7; თ) 5,5. 3. 0,9. 4. 0,7; 0,74; 0,736; $|0,73562-0,7|=0,03562$; $|0,73562-0,74|=0,00438$; $|0,73562-0,736|=0,00038$. 6. 40075700 მეტრი; 40076000 მეტრი; $|40075696-40075700|=4$; $|40075696-40076000|=304$. 8. $75^\circ \leq x \leq 85^\circ$. 9. ა) $26,8 \leq x \leq 27,2$; ბ) $99,99 \leq x \leq 100,1$; გ) $3,58 \leq x \leq 3,62$; დ) $32 \leq x \leq 33$. 10. ა) $4,999 \leq x \leq 5,001$; $0,2-h \leq y \leq 0,2+h$; $t-e \leq z \leq t+e$; ბ) $a-t \leq x \leq a+t$; $45-a \leq y \leq 45+a$; $-e \leq z \leq e$. 11. ა) $a=10 \pm 0,2$; $9,8 \leq a \leq 10,2$; ბ) $v=90 \pm 5$; $85 \leq v \leq 95$; გ) $m=500 \pm 20$; $480 \leq m \leq 520$; დ) $h=8 \pm 0,001$; $7,999 \leq h \leq 8,001$; ე) $T=8 \pm \frac{1}{12}$; $7\frac{11}{12} \leq T \leq 8\frac{1}{12}$; ე) $t=100 \pm 2$; $98 \leq t \leq 102$. 12. 2,5 კმ/სთ. 13. ტვირთის მასა მოთავსებულია 7,4 კგ-სა და 7,6 კგ-ს შორის; ტვირთის მასა აღებულია 0,1 კგ-მდე სიზუსტით. 14. ა) თომას მიერ შესრულებული გაზომვის აბსოლუტური ცდომილება ტოლია 0,15 დმ-ის, ხოლო ქეთის მიერ შესრულებული გაზომვის აბსოლუტური ცდომილებაა - 0,3 დმ; 0,15 დმ < 0,3 დმ; ბ) თომას მიერ შესრულებული გაზომვის ფარდობითი ცდომილების პროცენტული გამოსახვა ტოლია 3,75%-ის, ხოლო ქეთის - 3%-ის; რადგან $3\% < 3,75\%$, ამიტომ ქეთის მიერ შესრულებული გაზომვა უფრო ზუსტია, ვიდრე თომას მიერ შესრულებული გაზომვა. 15. 8 კგ მასის მქონე ტვირთის აწონვის ფარდობითი ცდომილების პროცენტული გამოსახვა ტოლია 1,5%-ის, ხოლო 50 კგ-იანი ტვირთის კი - 1%-ის, რად-

გან $1\% < 1,5\%$, ამიტომ 50 კგ-იანი ტვირთის აწონვა უფრო ზუსტია, ვიდრე 8 კგ-იანი ტვირთის. 16. 0,008; 0,013; 0,005. 17. სიგრძის ფარდობითი ცდომილებაა 0,025; ანუ 2,5%; ხოლო სიგანის $\approx 0,02857$, ანუ 2,857%. 18. A-დან B-მდე მანძილის ფარდობითი ცდომილება არ აღემატება $\frac{2}{200}100\% = 1\%$ -ს; A-დან C-მდე $\frac{3}{250}100\% = 1,2\%$ -ს; ხოლო A-დან D-მდე $\frac{5}{480}100\% \approx 1,04\%$; გვაქვს $1\% \leq 1,04\% \leq 1,2\%$. 19. ა) $x+y=7,45 \pm 0,03$; ბ) $x+y=148,61 \pm 0,65$; გ) $8-0,051 \leq x+y \leq 8+0,051$; დ) $51,2-0,31 \leq x+y \leq 51,2+0,31$; 20. ა) $|(a+b)-5,5| \leq 0,021$; ბ) $|(a+b)-36,25| \leq 0,56$; გ) $|(a+b)-3,25| \leq 0,013$; დ) $|(a+b)-7,5| \leq 0,11$. 21. ა) $x+y \approx 8,2$; ბ) $x+y \approx -6,10$; გ) $x+y \approx 0,03$; დ) $x+y \approx 0,743$. 22. ა) $a-b \approx 10,6$; ბ) $a-b \approx 8,97$; გ) $a-b \approx 4,7$; დ) $a-b \approx 40,2$. 23. ა) $x+y \approx 125$; ბ) $x+y \approx 16,0$. 24. ა) $x-y \approx 75$; ბ) $x-y \approx 37,5$. 25. ა) $xy \approx 10,46 \cdot 10^6$; ბ) $xy \approx 3,3 \cdot 10^4$; გ) $xy \approx 23,47 \cdot 10^{-2}$; დ) $xy \approx -16 \cdot 10^{-4}$. 26. ა) $xy \approx 6,43 \cdot 10^5$; ბ) $xy \approx 5,1 \cdot 10^0$; გ) $xy \approx 19,4 \cdot 10^2$; დ) $xy \approx -10 \cdot 10^1$. 27. ა) $xy \approx 8,821 \cdot 10^3$; ბ) $xy \approx 1,024 \cdot 10^8$; გ) $xy \approx 0,05 \cdot 10^4$; დ) $xy \approx 4,46 \cdot 10^3$. 28. $P \approx 41,58$ და $S \approx 938^2$. 29. $V \approx 135$ მ³. 30. ა) $a:b \approx 1,88$; ბ) $a:b \approx 3,78 \cdot 10^3$; გ) $a:b \approx 0,3 \cdot 10^1$; დ) $a:b \approx 0,644 \cdot 10^1$.

13.1.

- მეტია მოტოციკლის სიჩქარე 1,25-ჯერ.
- 8 საათში.
- ა) 4,5 წთ; ბ) $3\frac{19}{32}$ წთ.
- 250 დოლარი.
- ა) 12 ლარი; ბ) 3 ლარი; გ) 18 ლარი.
- 4,2 კგ.
- 168,2 კმ.
- ა) 4,5 კმ/სთ; ბ) 15,5 კმ/სთ.
- 36000 ლარი.
- 10000 ლარი.
- 120 კმ-ს.
- 6 ფორთოხალი გაიჭრება შუაზე, ხოლო 4 ფორთოხლიდან თითოეული სამ ტოლ ნაწილად.
- 4 ყვავი და 3 ვერხვის ხე.
- მოტანილი იყო 27 ცალი კარტოფილი, პირველმა არცერთი არ უნდა აიღოს, მეორეს ეკუთვნის 3 ცალი, ხოლო მესამეს 5 ცალი კარტოფილი.
- პირველმა 1 ლარით მეტი მიიღო.
- 7.
- ა) 140 კმ/სთ; ბ) 20 კმ/სთ;
- $|\overline{AB}| = 4$; $|\overline{CD}| = 6$.
- $|\overline{AB}| = 5$.
- $|\overline{OA}| = \sqrt{a^2 - b^2}$, $|\overline{BC}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- $|\overline{BA}| = 4$; $|\overline{BC}| = 5$; $|\overline{BD}| = 3$.
- ა) (1;1), (1;-6), (6;-11); ბ) (6;-11).
- ა) $\bar{p} + \bar{q} = (6;4)$; ბ) $\bar{p} - \bar{q} = (-2;2)$; გ) $2\bar{p} = (4;6)$; დ) $3\bar{q} = (12;3)$;
- $2\bar{p} - 3\bar{q} = (-8;3)$.
- $|\bar{b}| = \frac{2}{3}$.
- $\bar{p} + \bar{q} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$ და $\bar{p} - \bar{q} = -\bar{i} + 4\bar{j}$.

26. მითითება: ნებისმიერი არანულოვანი $\vec{p}$ ვექტორი თანამიმართული ორტია: $\frac{1}{|\vec{p}|} \cdot \vec{p}$, რადგან $|\vec{p}| = \sqrt{16+9} = 5$, ამიტომ საძიებელი ვექტორია $\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$. 27. 5 კმ. 28. 13 კილომეტრის მანძილზე. 29. C(0;3) და D(3;0). 30. D(3;9).

14.1.

1. 2 სმ, 4 სმ, 6 სმ, 8 სმ, 10 სმ, 12 სმ. 2. AC=10 სმ, CB=15 სმ. 3. 29 სმ. 4. AB:BC=1:2. 5. 5. 6. 50 კმ. 7. M(3;5), |MC|=5. 8. M(2;4). 9. M(4;2). 10. (2;1), (1;2), (2;3), (3;2); S=2. 11. (1;5), (3;8), (5;5), (3;2); S=12. 12. M(8;1), N(4;4); |MN|=5. 13. სამკუთხედის უდიდესი გვერდი ოთხკუთხედის უდიდეს გვერდს უდრის და იგი 15 სმ-ია, ხოლო ოთხკუთხედის უმცირესი გვერდი სამკუთხედის უმცირეს გვერდზე ნაკლებია – 3სმ<6სმ-ზე. 14. 2-ჯერ. 15. 5,4 კმ. 16. შეიძლება, თუ სასწორის თეფშზე დაედებთ 27 გრამიან და 1 გრამიან საწონებს, ხოლო მეორე თეფშზე – ასაწონ სხეულს და 3 გრამიან საწონს. 17. შეიძლება, თუ სასწორის თეფშზე დაედებთ 3 გრამიან, 9 გრამიან, 27 გრამიან და 81 გრამიან საწონებს, ხოლო მეორე თეფშზე – ასაწონ სხეულს და 1 გრამიან საწონს. 18. შეიძლება, თუ სასწორის თეფშზე მოვათავსებთ 4 კილოგრამიან და 11 კილოგრამიან საწონებს, ხოლო მეორე თეფშზე – ასაწონ სხეულს, 1 კილოგრამიან და 6 კილოგრამიან საწონებს. 19. შეიძლება, თუ სასწორის თეფშზე მოვათავსებთ 6 კილოგრამიან და 11 კილოგრამიან საწონებს, ხოლო მეორე თეფშზე – ასაწონ სხეულს და 4 კილოგრამიან საწონს. 20. I ნაკვეთიდან – 3 ტონას, II ნაკვეთიდან – 200 ტონას. 21. 182 ფიჭვის მორი და 118 მუხის მორი. 22. 143 ცალი ერთი ყალიბის და 52 ცალი მეორე ყალიბის. 23. 32 კილოგრამი. 24. I ხარისხის ღირს 10 ლარი, II ხარისხის კი – 8 ლარი. 25. სუფრის კოეზზე დაიხარჯა 0,056 კგ; ჩაის კოეზზე – 0,02 კგ; ხოლო სასანთლეზე – 0,085 კგ. 26. კოეზი იწონის 0,0625 კილოგრამს, ლამბაქი – 0,1875 კილოგრამს, ხოლო სამოვარი – 6 კილოგრამს. 27. $\frac{1}{8}$ კგ სპილენძი და $1\frac{5}{12}$ კგ ვერცხლი. 28. 0,8 კგ კალა და 1,2 კგ ტყვია. 29. ნავთი იყო $9\frac{3}{5}$ კგ, ცარიელი ბიდონი იწონის $1\frac{1}{3}$ კგ-ს. 30. I – 80 კგ, II – 75 კგ.

15.1.

1. 1522 8 სექტემბერს. 2. ჩენს წელთაღრიცხვამდე 212 წელს.
 3. 76 წელი, 2062 წელს. 4. ა) 61 საათი; ბ) 90 საათი და 50 წუთი.
 5. 18 სთ. 15 წთ. 6. 28 ივლისს, ორშაბათს 19 საათზე. 7. 35 წუთი.
 8. 60 წელი. 9. კეირას, 18 საათზე. 10. 14 დღე, 22 საათი და 55 წუთი.
 11. 1650 წლის 12 თებერვალს. 12. 30 ივლისს 16 საათზე და 20 წუთზე. 13. 3 ივლისის 0 საათზე და 15 წუთზე. 14. 157 დღე. 15. 84 წელი, 2 თვე და 23 დღე. 16. 20 საათზე და 39 წუთზე. 17. 354 დღე, 8 საათი, 48 წუთი და 36 წამი. 18. 1167 დღე-ღამე, 20 საათი, 38 წუთი და 12 წამი. 19. 31,35 კილომეტრზე. 20. 91 დღე-ღამე, 12 საათი და 48 წუთი. 21. 140 საათი, 40 წუთი და 48 წამი. 22. 1243 წელი და 24 დღე. 23. ჩამორჩენა იქნება 1 საათი, 19 წუთი და 57 წამი. 24. 4 წუთითა და 48 წამით. 25. 1 საათით, 13 წუთით და 12 წამით. 26. დედა არის 35 წლის, 7 თვის და 14 დღის. 27. 8-ჯერ. 29. 36 წუთში. 30. 3 დღე-ღამე, 22 საათი და 12 წუთი.

16.1.

1.

x	1	2	3	4	5
y	4,5	9	13,5	18	22,5

 2. 60 ლარი. 3. 12 საათი. 4. 17 კგ; 13

კგ; 3,5 ლარი. 5. 10 ცალი კიტრი ღირს 2 ლარი, ხოლო 1 ცალი ნესეი – 4 ლარი. 6. პირველი ხარისხის – 27 კგ, მეორე ხარისხის – 18 კგ. 7. 22 კგ. 8. I ხარისხის – 8 კგ, II ხარისხის – 4 კგ. 9. 3 ლარი. 10. 34 მუშა. 11. 96 კგ. 12. I ხარისხის – 100 კგ, II ხარისხის – 50 კგ. 13. 27 ლარად. 14. პირველებიდან თითოეულმა მიიღო 360 ლარი, ხოლო მეორეებიდან თითოეულმა – 240 ლარი. 15. მაუდი – 20 ლარი, ხავერდი – 80 ლარი. 16. 64 მეტრი; 28,8 კმ/სთ. 17. 40 კმ. 18. ვთქვათ ძალმა უნდა გააკეთოს x ნახტომი, მაშინ გვაქვს განტოლება: $\left(\frac{x}{3} \cdot 5 - 40\right) : 9 = x : 7$; აქედან $x = 105$. 19. 3 წუთში. 20. ქალაქიდან 60 კილომეტრზე; 5 საათში. 21. გემები ერთმანეთს შეხვდებიან 14 საათზე; I გემი შეხვედრამდე გადის 24 კილომეტრს და დანიშნულების ადგილზე მივა 17 საათზე, ხოლო II გემი შეხვედრამდე გაივლის 36 კილომეტრს და დანიშნულების ადგილზე მივა 15 საათზე და 20 წუთზე. 22. 240 კმ. 23. 18 კმ/სთ. 24. 119 მ; 17 მ/წმ. 25. 2 კმ/სთ; 16 კმ/სთ. 26. 80 კმ. 27. 0,5 კმ/სთ. 28. 22,5 კმ/სთ. 29. 15 კმ. 30. წინა ბორბალმა გააქცოთა 25 ბრუნი, უკანამ – 40 ბრუნი; მანძილი ტოლია 100 მეტრის.

17.1

1. ა) $20:(5-1)+3=8$; ბ) $20:5-(1+3)=0$; გ) $(9-6):3-(2-1)=0$; დ) $(9-3):3-(2-1)=1$; ე) $9-3:3-(2-1)=7$. 2. $420:3-80=60$ კმ/სთ. 3. $\sqrt{(2 \cdot 6)^2 + 5^2} = 13$ კმ.
 4. $45(2+3)+50 \cdot 3=375$ კმ. 5. $5/6$ -ზე. 6. 24,8. 7. $\left(1\frac{7}{9}+2 \cdot 1\frac{1}{4}\right)-3\left(1\frac{7}{9}-1\frac{1}{4}\right)=2\frac{25}{36}$.
 8. $\frac{2\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right)}{\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{15}}=570$. 9. ა) $\frac{2}{3} \cdot 2 - 1\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{12} = 1\frac{1}{2}$; ბ) $\left(\frac{2}{3}+1\frac{1}{5}\right) \cdot \left(3-\frac{5}{12}\right) = 4\frac{37}{45}$.
 10. ა) 112,5; ბ) 1,9; გ) 3,5. 11. ა) $5\frac{5}{18}$; ბ) $15\frac{19}{84}$. 12. $18:9+7=81:9$.
 13. $18:(9-7)=81:9$. 14. $30,73: \frac{1}{100} = 3073$ კმ². 15. $3 \cdot 12,8 + 2 \cdot 1,5 + 4,1 = 45,5$ სმ.
 16. $P=16$ სმ; $S=16$ სმ²; $16=16$. 17. $P=18$ სმ; $S=18$ სმ²; $18=18$.
 18. $V=36\pi$ სმ³; $S=36\pi$ სმ²; $36\pi=36\pi$. 19. $S=4\pi$ სმ²; $\ell=46\pi$ სმ; $4\pi=4\pi$.
 20. 3 და 6; $3<6$. 21. $5^4 \cdot (4 \cdot 6 + 1) - 2^4 = 9$, $4 \cdot (6+2) - (4 \cdot 5 + 1) = 11$, $9 < 11$. 22. $a=7$,
 $b=6$ და $c=8$; 6, 7, 8. 23. 84-ისათვის გეაქვს $2+3+7=12$, ხოლო 82-
 ისათვის გეაქვს $2+41=43$; $12 < 43$. 24. $2 > 1$. 25. $10 > 5$. 26. I – 150 მ/წთ,
 II – 160 მ/წთ; $160 \text{მ/წთ} > 150 \text{მ/წთ}$. 27. ექსპრესი – 225 კმ-ს, გემი –
 245 კმ-ს; $245 \text{კმ} > 225 \text{კმ}$. 28. $P_{ABCM}=14 \text{სმ}$, $P_{ACD}=16 \text{სმ}$, $14 \text{სმ} < 16 \text{სმ}$;
 $S_{ABCM}=12 \text{სმ}^2$, $S_{ACD}=12 \text{სმ}^2$, $12 \text{სმ}^2 = 12 \text{სმ}^2$. 29. $90:3-12=18$.
 30. $(30+20):3=150$.

18.1

1. $3(a+b)$ კმ. 2. $P = \left(5+a+\sqrt{25+a^2}\right)$ სმ, $S=2,5a$ სმ². 3. 40. 4. 1000000.
 5. 2. 6. 68. 7. 4. 8. 8. 9. 10. 10. $(x+3)^2$. 11. 111. 12. 20 კმ/სთ. 13. 108.
 14. 24 საათში. 15. ორი გოგონა. 16. 7 საათში და 30 წუთში.
 17. $n(n^2+n+1)$. 18. 90. 19. 3. 20 33. 21. 7 წლის. 22. 125 მეტრი. 23. 15.
 24. 77. 25. 7. 26. 896 ლიტრს. 27. 8 ლარი და 80 თეთრი. 28. 624
 ცალი. 29. 624. 30. -20.

19.1

1. ა) $1\frac{19}{36}$; ბ) -0,9; გ) 0,368; დ) 110. 2. ა) როცა $a=-1$ განტოლებას
 უამრავი ფესვი აქვს, ბ) როცა $a=3$ განტოლებას ფესვი არა აქვს,
 გ) როცა $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 3) \cup (3; +\infty)$, მაშინ განტოლებას ერთად-
 ერთი ფესვი აქვს. 3. ა) -2, ბ) 2, გ) ნებისმიერი რიცხვი გარდა

-2-ისა და 2-ისა. 4. ა) როცა $k=-2$ განტოლებას ფესვი არ აქვს, ბ) როცა k ღებულობს მნიშვნელობას შემდეგი სიმრავლიდან $\{-8; -5; -4; -3; -1; 0; 1; 4\}$, მაშინ განტოლების ამონახსნი მთელი რიცხვია, გ) როცა k ღებულობს რომელიმე მნიშვნელობას $\{-1; 0; 1; 4\}$ სიმრავლიდან, მაშინ განტოლების ამონახსნი ნატურალური რიცხვია. 5. ა) $0 \cdot x=3$, ბ) $2x=0$, გ) $0 \cdot x=0$, დ) $-25 \cdot x=5$. 6. ა) არ არსებობს, ბ) 1, გ) 1-საგან განსხვავებული ნებისმიერი რიცხვი. 7. $a=2$. 8. ა) $x=3$, ბ) $y=5$, გ) $x=-\frac{3}{11}$, დ) განტოლებას ამონახსნი არა აქვს, ე) განტოლებას ამონახსნი არა აქვს, ვ) განტოლებას ამონახსნი არა აქვს. 9. ა) $x_1=2$; $x_2=-6$; ბ) $-0,44$; გ) $-0,5$; დ) $x_1=-0,5$; $x_2=12$; ე) $x_1=\frac{7}{3}$; $x_2=\frac{4}{3}$; ვ) $x=3$; ზ) $x_1=1$; $x_2=-\frac{1}{9}$. 10. $a=6$ სათვის. 11. ა) $x_1=3$, $x_2=-5$, $x_3=-1$; ბ) $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=-\frac{1}{3}$, $x_3=1$, $x_4=\frac{1}{6}$; გ) $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{1}{2}$. დ) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=\frac{1}{2}$. 12. $m=7$, $m=\sqrt{2}$ და $m=-\sqrt{2}$. 13. $m=2$ -სათვის. 14. ა) $k=1$, ბ) $k=-2$. 15. $c=9$. 16. $a=-\frac{1}{12}$. 17. $m=\frac{1}{5}$. 18. $x^2-4x-21=0$, ეს რიცხვია 37. 19. $x^2+10x-56=0$, კვადრატის გვერდი $x=4$ სმ-ს. 20. $a=\frac{25}{36}$, $x=3,6$. 21. $c=-15$, $x_2=-5$. 22. $b=3$, $c=-18$. 23. ა) $x=4$; ბ) $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=3$, $x_4=-3$; გ) $x=1$; დ) $x_1=1$, $x_2=-6$, $x_3=\frac{-25+\sqrt{645}}{10}$, $x_4=\frac{-25-\sqrt{645}}{10}$. 24. $b=-14$, $c=-18$. 25. $x^2-12x+20=0$. 26. $16x^2+224x+783=0$. 27. $x_1=-14$, $x_2=7$ და $a=-10$; ან $x_1=14$, $x_2=-7$ და $a=4$. 28. $k=-2$, $x_1=2$, $x_2=-\frac{1}{3}$. 29. $a=2$. 30. $c=\frac{1}{3}$.

20.1.

1. $a=-49$; $b=0,15$; $c=0,359375$; $d=-4$. 2. აქვს; $x=4+5t$, $y=-3-4t$, t ნებისმიერი მთელი რიცხვია. 3. $y=-3$. 4. $x=-7$. 5. აქვს ცხრა ამონახსენი, ესენია: $(0; 1)$, $(0; 2)$, $(0; 3)$, $(1; 1)$, $(1; 2)$, $(1; 3)$, $(-1; 1)$, $(-1; 2)$, $(-1; 3)$. 6. $x=5$ ან $x=-1$. 7. $y=8$ ან $y=-2$. 8. $3y-4x-7=0$. 9. $d=2$. 10. $x+y-2=0$. 11. $x+y-3=0$. 12. $a-x+4y-12=0$, $b-x-4y-12=0$, $c-x+4y+12=0$, $d-4y-x+12=0$. 13. $O(2; -2)$, $R=4$. 14. ექნებათ ორი საერთო წერტილი. 15. საერთო წერტილები არ ექნებათ. 16. ექნებათ ერთადერთი საერთო წერტილი $O(0; 0)$. 17. $(x-1)^2+y^2=9$.

18. ტოლფასია. 19. $(-3; 2)$. 20. არის. 21. არის. 22. არ არის.
 23. $\begin{cases} 0,5x + 0,8y = 84 \\ x + y = 150 \end{cases}$ $(120; 30)$. 24. 45. 25. $\begin{cases} 2x + y = 17 \\ 3x + 3y = 36 \end{cases}$; $(5; 7)$.
 26. $\begin{cases} 3x = y \\ x + 1 = y - 1 \end{cases}$; $(1; 3)$. 27. არა. 28. 6 რვეული და 1 წიგნი, ან 3
 რვეული და 3 წიგნი. 29. $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-3)^2 = 4 \\ y = x + 1 \end{cases}$; ამონახსნები: $(2; 3)$
 და $(4; 5)$. 30. $k=1$ და $k=-\frac{1}{2}$.

21.1.

1. $k=5$. 2. $k=-5$. 3. $a=-0,2$. 4. $a=1,2$; $b=3$. 5. ა) $\begin{cases} y-x=4 \\ x=4 \end{cases}$, ბ) $\begin{cases} y+2x=8 \\ y=2x \end{cases}$
 გ) $\begin{cases} (x-3)^2 + (y+1)^2 = 16 \\ y=x \end{cases}$, დ) $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ (x-3)^2 + (y+2)^2 = 4 \end{cases}$. 6. ა) $(3; 4)$, ბ) $(3; 4)$,
 გ) $(5; -3)$, დ) $(125; -47)$, ე) $(1; -2)$. 7. ა) $(1; 0)$, $(-0,5; -1,5)$, ბ) $(5; 3)$,
 $(-1,5; -10)$, გ) $(2; -2)$, დ) $(6; 2)$, $(2; 6)$ ე) $(-2; 1)$, $(0,25; 7,75)$,
 ე) $(17; 10)$, $(4; -3)$, ზ) $(0; 0)$, $(-2,4; 4,8)$, თ) $(6; 9)$, $(-9; -6)$.
 8. ა) $(4; 0)$, $(-0,5; -4,5)$, ბ) $(3; 2)$, $\left(1\frac{5}{6}; 1,125\right)$, გ) $(3; 5)$ $(-5; -3)$,
 დ) $(3; 0)$, $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right)$, ე) $(2; 3)$, $(51; -46)$, ე) $(11; 7)$, $\left(\frac{85}{8}; \frac{27}{4}\right)$,
 ზ) $(4; 2)$, $(16; -10)$, თ) $(3; 2)$, $(2; 1)$, ი) $(6; 8)$, კ) $(9; 10)$, ლ) $(5; 9)$.
 9. ა) $(4; 3)$, ბ) $(2; 1)$, გ) $\left(\frac{1}{2}; -1\frac{1}{6}\right)$, დ) $(3; -2)$, ე) $(0; 5)$, ე) $(0,5; -2)$,
 ზ) $(9; 2)$, თ) $(-5; -6)$. 10. ა) $(2; 3)$, ბ) $(0,1; 4)$, გ) $(0,2; 0,25)$,
 დ) $(5; 3)$, ე) $(10; -3)$, ე) $(7; 3)$, ზ) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$, თ) $(5; 1)$, ი) $(3; 1)$,
 $\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. 11. ა) $(5; 3)$, ბ) $(3; 2,5)$, გ) $(7; 4)$, დ) $(5; 4)$, $(4; 5)$, ე) $(3; 2)$,
 $(3; -3)$, $(-4; 2)$, $(-4; -3)$, ე) $(0; 0)$, $(4; 2)$, $(-2; -4)$, ზ) შემოვიტანოთ
 აღნიშვნა $y=tx$, მივიღებთ: $t_1 = \frac{4}{3}$ და $t_2 = -\frac{1}{8}$. სისტემის ამონახსნე-
 ბია: $(3; 4)$, $(-3; -4)$, $\left(\frac{8}{\sqrt{11}}; -\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$, $\left(-\frac{8}{\sqrt{11}}; \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$, თ) $(6; 3)$, $(-1; -4)$,

(4; 5), (-3; -2), ი) (4; 1), $\left(\frac{10}{3}; \frac{2}{3}\right)$. 12. ა) (3; 2), (-3; -2), (2; -3), (-2; 3), ბ) (8; 2), (2; 8), გ) (4; 1), (1; 4), დ) 25; 16), (16; 25), ე) (9; 4), (9; 4), (4; 9), ზ) (5; 20), (20; 5). 13. ა) (2; 3), (3; 2), $(-2+\sqrt{7}; -2-\sqrt{7})$, $(-2-\sqrt{7}; -2+\sqrt{7})$, ბ) (2; -4), (-4; 2), $\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}; \frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)$, $\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}; \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)$, გ) (2; 1), (1; 2), დ) (12; 4), (4; 12), $(-5+\sqrt{55}; -5-\sqrt{55})$, $(-5-\sqrt{55}; -5+\sqrt{55})$, ე) (7; 5), (-5; -7). 14. ა) $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, ბ) (0; 1), გ) (5; 1). 15. ა) (4; 2), $\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, ბ) (8; -4), $\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right)$, გ) (-1; -2), $\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, 16. ა) (2; 1), ბ) $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. 17. ა) (1; 1), ბ) (1; 2). 18. ა) აქვს ერთი ამონახსენი, ბ) აქვს ამონახსენთა უსასრულო სიმრავლე, გ) აქვს ერთი ამონახსენი, დ) აქვს ამონახსენთა უსასრულო სიმრავლე, ე) არა აქვს ამონახსენი, ვ) აქვს ამონახსენთა უსასრულო სიმრავლე. 19. ა) $m=10, n=6$; ბ) $m=-6, n=-19$; გ) $m=\frac{2}{3}, n=\frac{8}{3}$, დ) $m=1, n=2$ ან $m=\frac{37}{3}, n=-3$. 20. ა) $a=\frac{3}{2}$, ბ) $a=-\frac{8}{3}$, გ) $a=\frac{10}{3}$, დ) $a=-\frac{1}{6}$ ან $a=0$. 21. ა) $m=-1$, ბ) $m=-7$. 22. ა) $m=2$, ბ) $m=0$. 23. ა) $m=2$, ბ) $m=-1$. 24. ა) $m=-1$, ბ) $m=-3$. 25. ა) $m=0$, ბ) არ არსებობს (სისტემას m -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის აქვს ამონახსენი. 26. ა)

$$m=3, \text{ ბ) } m=2. \quad 27. \begin{cases} y=|x| \\ y=3-|x-1| \end{cases} \quad 28. \begin{cases} (x-4)^2+y^2=9 \\ y=3-|x-4| \end{cases} \quad 29. \begin{cases} 3y+2x=3 \\ y=3-2|x-1| \end{cases} \quad 30. \begin{cases} y-x=4 \\ y=|x+2| \end{cases}$$

22.1

1. 8, 9, 10 და 11. 2. 140 ლიტრი და 70 ლიტრი. 3. 450 გ. 4. 15 ლარი და 30 ლარი. 5. 11 წლის და 3 წლის. 6. 40 ლიტრი. 7. 1800 ლარი. 8. 112 გ. 9. 16 სანტიმეტრი. 10. 23 მოსწავლე. 11. 19 მოგადრაკე. 12. $n=10$. 13. 36 და 37. 14. 15 და 17. 15. $\frac{2}{3}$. 16. 12 სთ და 8 სთ. 17. 50 კმ/სთ. 18. შეხედებოდა. 19. 0 და -96. 20. 50

ლარი და 30 ლარი. 21. $V_{\text{საშ}}=48$ კმ/სთ. 22. 0,3.
 23. 24. 24. 34. 25. 35. 26. 57. 27. 31. 28. სიგრძე 16 სმ, სიგანე - 12
 სმ. 29. 4 სმ. 30. 9 და 5.

23.1.

1. $x_1=2$; $x_2=-2$ და $x_3=3$. 2. $x_1=2$; $x_2=-2$; $x_3=3$; $x_4=-3$. 3. $x_1=2$; $x_2=3$; $x_3=-2$
 და $x_4=-3$. 4. $x_1=-1$; $x_2=6$; $x_3=-2$ და $x_4=-3$. 5. $x_1=6$; $x_2=-1$; $x_3=2$ და $x_4=3$.
 6. $x_1=2$; $x_2=3$ და $x_3=-6$. 7. $x_1=2$; $x_2=3$ და $x_3=-1$. 8. $x=6$. 9. $x=5$; $x=1$ და
 $x=-1$. 10. $x_1=1,5$ და $x_2=-0,5$. 11. $x=-3$. 12. $x_1=-1$ და $x_2=1$. 13. $x_1=1$,
 $x_2=-1$, $x_3=3$ და $x_4=-3$. 14. $x_1=3$ და $x_2=1$. 15. (3; 4) და (2; 1). 16. (1; -1)
 და (-1; 0,25). 17. (2; 3) და (0,5; -2). 18. (6; 8) და (4; 3). 19. (5; 3),
 (-1,5; -10) და (2; -2). 20. (4; 1), (1; 4), (7; 1) და (1; 7). 21. (9; 2),
 (-2; -9), (5; 3) და (-3; -5). 22. (12; -4), (4; -12), (2; -1) და (1; -2).
 23. (3; 2), (2; 3), (5; 3) და (3; 5). 24. (5; 4), (4; 5), (3; 1) და (1; 3).
 25. $x=-4$. 26. $x=0$ და $x=-6$. 27. $x=2$. 28. $x=2$ და $x=3$. 29. $x=-1$. 30. ამ
 ერთობლიობის ამონახსენია: $x \in [-2; 0]$, ანუ $-2 \leq x \leq 0$.

24.1.

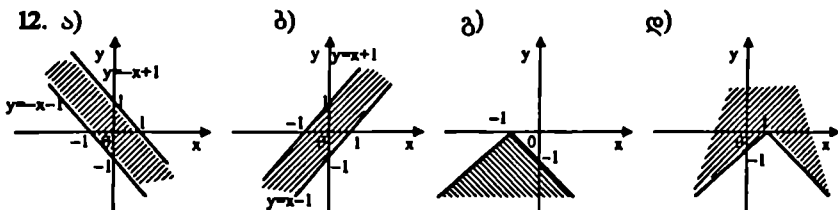
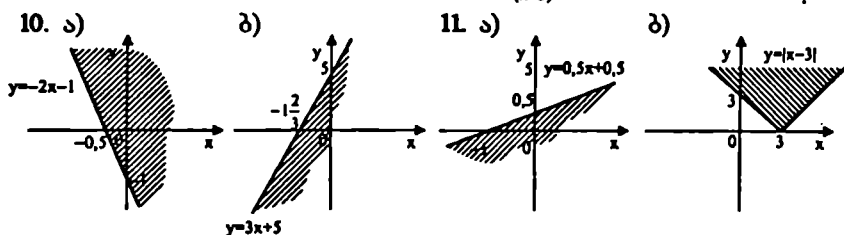
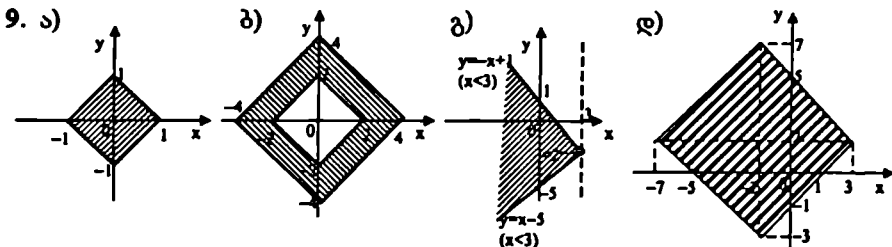
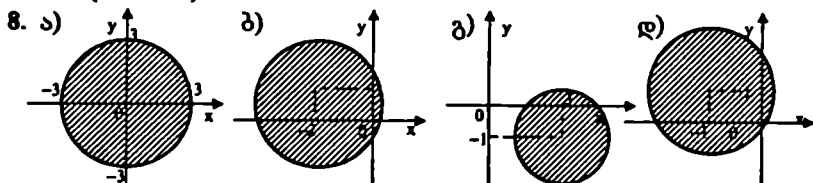
1. 5 კმ/სთ. 2. 78 მოსწავლე. 3. ა) 20 ლარი; ბ) 24 ლარი. 4. 27
 სტუმარი. 5. 95 სმ. 6. ეყოფა. 7. ა) $x \in (-\infty; 4)$; ბ) $x \in (1,2; +\infty)$;
 გ) $x \in (-2,2; +\infty)$; დ) $x \in [1,5; +\infty)$. 8. ა) $x \in \left[-\infty; -\frac{7}{8}\right]$; ბ) $x \in (9; +\infty)$;
 გ) $x \in (-\infty; -3,1)$; დ) $x \in (-\infty; 0,8)$. 9. ა) $x \in (6; +\infty)$; ბ) $x \in (0; +\infty)$;
 გ) $x \in (-\infty; -10)$; დ) $x \in \left(-\infty; 3\frac{7}{15}\right)$. 10. ა) $x \in [4,8; +\infty)$; ბ) $x \in (0,56; +\infty)$;
 გ) $x \in \left(-\infty; \frac{1}{16}\right]$; დ) $x \in \left[1\frac{2}{3}; +\infty\right)$. 11. ა) $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$; ბ) $x \in (-\infty; -3,5)$;
 გ) $x \in (17; +\infty)$; დ) $x \in (-0,25; +\infty)$. 12. ა) $x \in (-115; +\infty)$; ბ) $x \in (-\infty; -15)$;
 გ) $x \in (0,2; +\infty)$; დ) $x \in (-\infty; 1,4)$. 13. ა) $x \in (-\infty; 1)$; ბ) $x \in (-\infty; 1,5)$;
 გ) $x \in (11; +\infty)$; დ) $x \in (24; +\infty)$. 14. ა) $x \in (-\infty; -9,75)$; ბ) $x \in (-\infty; -2,25)$;
 გ) $x \in (-1; +\infty)$; დ) $x \in (-\infty; 1)$. 15. ა) $x \in (3; +\infty)$; ბ) $x \in \left(-\infty; -1\frac{2}{3}\right)$;
 გ) $x \in (0,4; +\infty)$; დ) $x \in (-\infty; 0,5)$. 16. ა) $x \in [3; +\infty)$; ბ) $x \in (5; +\infty)$;
 გ) $x \in [-2; +\infty)$; დ) $x \in (-\infty; 0,5)$. 17. ა) 5; ბ) 7; გ) -1; დ) 2. 18. 7.
 19. 5,6. 20. $A=\{1; 2\}$. 21. $B=\{0; 1; 4; 5\}$. 22. ა) $x \in (-\infty; -1)$; 

ბ) $x \in (-\infty; 0]$;  გ) $x \in [2; +\infty)$;  23. $x \in (-\infty; -9) \cup (11; +\infty)$. 24. $x \in (-3; 1)$. 25. $x \in (-4; 4)$. 26. $x \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$. 27. $x \in \left(-\frac{3}{5}; \frac{3}{11}\right)$. 28. $x \in [-1,5; +\infty)$. 29. $x \in (-\infty; -0,5)$. 30. $x \in (-\infty; -3,5) \cup (-1,25; +\infty)$.

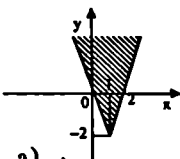
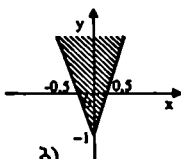
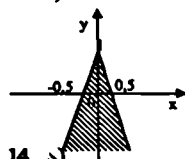
25.1.

1. ა) $x \in (3; +\infty)$; ბ) $x \in (-\infty; -3)$; გ) $x \in (4; +\infty)$; დ) $x \in \left(\frac{1}{11}; +\infty\right)$.
 2. ა) $x \in (-\infty; -2)$; ბ) $x \in (12; +\infty)$; გ) $x \in (1; 3)$; დ) $x \in (1; 2)$. 3. ა) $m=20$; ბ) $m=-1$. 4. $a=2$. 5. 2 მეტრი. 6. 25 და 24. 7. 3 გოგონა, 18 ვაჟი; 6 გოგონა, 14 ვაჟი; 9 გოგონა, 10 ვაჟი; 12 გოგონა 6 ვაჟი; 15 გოგონა 2 ვაჟი; არცერთი გოგონა, 22 ვაჟი. 8. 2 სამტონიანი და 7 ოთხტონიანი მანქანა, ან 6 სამტონიანი და 4 ოთხტონიანი მანქანა, ან 10 სამტონიანი და 1 ოთხტონიანი მანქანა. 9. ა) ვერ მოასწრებს; ბ) მოასწრებს. 10. 288 მაყურებელი. 11. ა) 7 ლ; ბ) 8 ლ. 12. მაქსიმუმ 45 საათი. 13. ა) 36 კმ; ბ) 14,4 კმ. 14. 7. 15. 25 კგ. 8 კგ და 16 კგ. 16. სიგანე – 23 სმ და სიგრძე – 46 სმ. 17. ა) 7 სმ; ბ) 1 სმ. 18. და – 14 წლისაა, ხოლო ძმა – 8-ის.
 19. ა) $x \in \left(0; 2\frac{2}{9}\right]$; ბ) $x \in \left[\frac{2}{3}; 2\right]$; გ) $x \in (0,5; +\infty)$; დ) $x \in \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.
 20. არა აქვს. 21. ა) $x \in [2; 4]$; ბ) $x \in [1; 3]$; გ) $x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right]$; დ) $x \in (1,85; 1,25]$. 22. ა) $x \in [-1; 4,5]$; ბ) $x \in (-11; 1)$; გ) $x \in (2,0125; 2,525]$; დ) $x \in [2; 23,2]$. 23. 31 სტუმარი. 24. $x \in [3; 4]$; ბ) $x \in [2; 5]$; გ) $x \in [3; 3,5]$; დ) $x \in [-0,25; 0,5]$. 25. BC მონაკვეთის სიგრძის გამომსახველი რიცხვი სანტიმეტრებში მოთავსებულია (2; 4) შუალედში. 26. ა) $(-3; -2) \cup (2; 3)$; ბ) $x \in [-10; 10]$. 27. ა) $x \in (-7,5; -1) \cup [1; 7,5]$; ბ) $x \in [-12; 0) \cup (0; 12]$. 28. ა) $x \in \left[-2\frac{11}{12}; \frac{5}{12}\right]$; ბ) $x \in (-3,075) \cup (0,75; 4,5)$. 29. ა) $x \in [-4; 0] \cup [2; 6]$; ბ) $x \in \left[0; \frac{5}{12}\right] \cup \left[1\frac{1}{4}; 1\frac{2}{3}\right]$; გ) $x \in \left[-6\frac{1}{3}; -5\right] \cup \left[9\frac{2}{3}; 11\right]$. 30. ა) $a \leq 0$; ბ) $a < 8$; გ) $a \geq 3,75$.

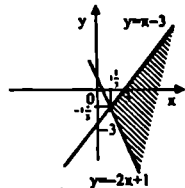
1. а) $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$; б) $x \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$; в) $x \in [2; 3]$; г) $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. 2. а) $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$; б) $x \in [-3; 11]$; в) $x \in \left(-\infty; -2\frac{2}{3}\right] \cup [2; +\infty)$; г) $x \in (-3; 2)$. 3. а) $x \in (-\infty; 4) \cup (16; +\infty)$; б) $x \in (2; +\infty)$. 4. а) $x \in (3; +\infty)$; б) $x \in (2; +\infty)$. 5. а) $x \in \left(-1\frac{2}{7}; +\infty\right)$; б) $x \in (1; +\infty)$. 6. а) $x \in (8; +\infty)$; б) $x \in \left(-8\frac{1}{11}; +\infty\right)$. 7. а) $x \in (-\infty; +\infty)$; б) $x \in \left(-\infty; 7\frac{1}{15}\right)$, $x \in (14; +\infty)$.



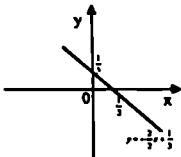
13. а)



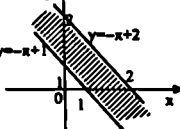
14. а)



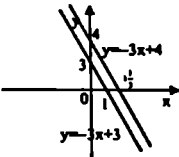
б)



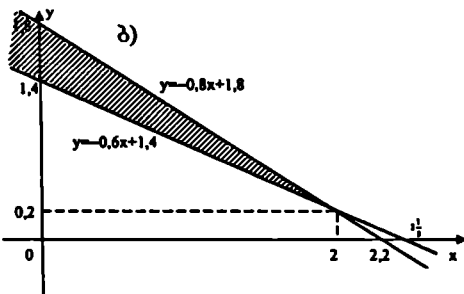
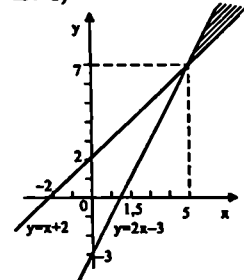
в)



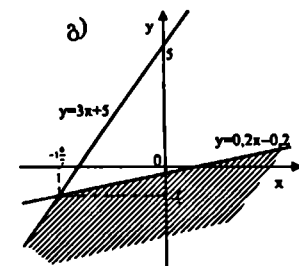
г)



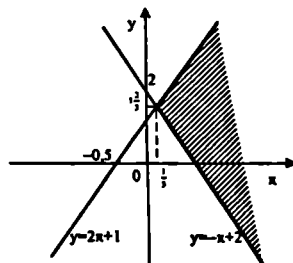
15. а)



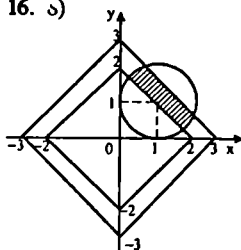
б)



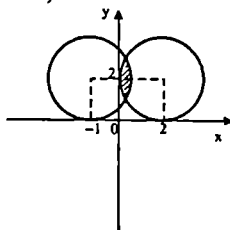
в)



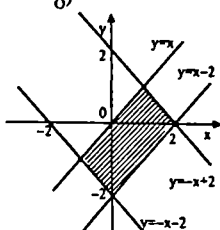
16. а)



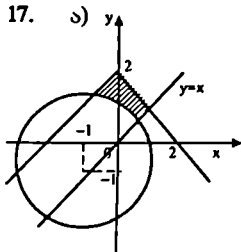
б)



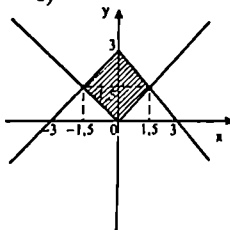
в)



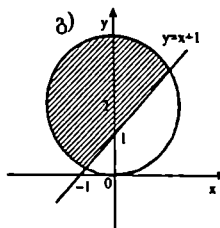
17. а)



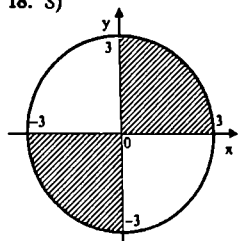
б)



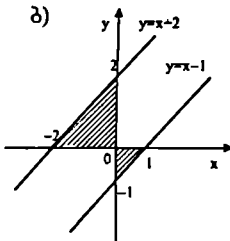
в)



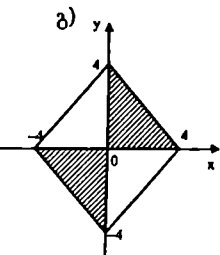
18. а)



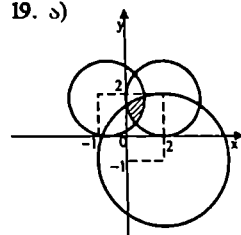
б)



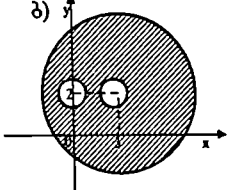
в)



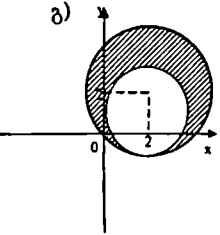
19. а)



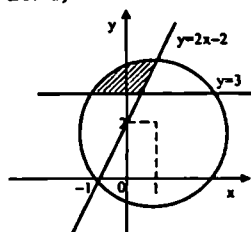
б)



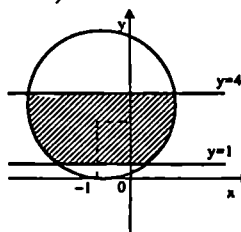
в)



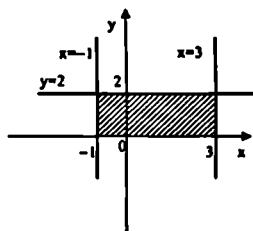
20. а)



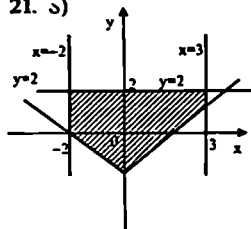
б)



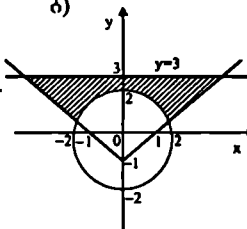
в)



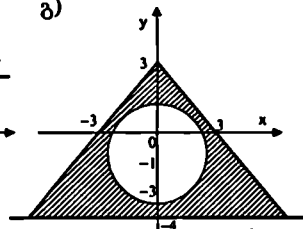
21. а)



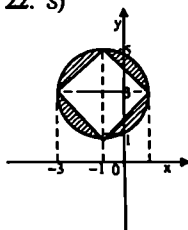
б)



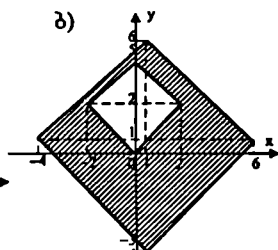
в)



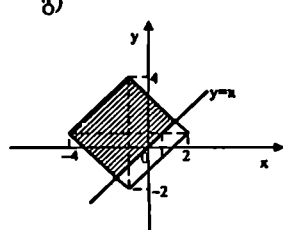
22. а)



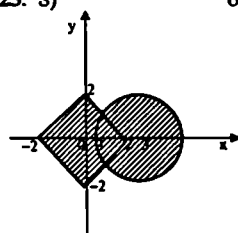
б)



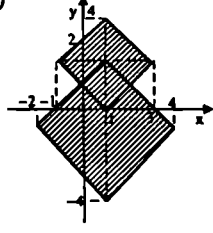
в)



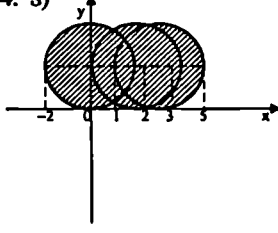
23. а)



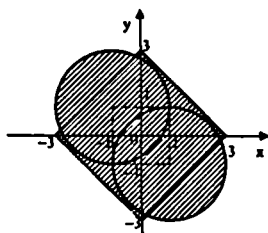
б)



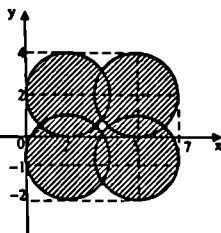
24. а)



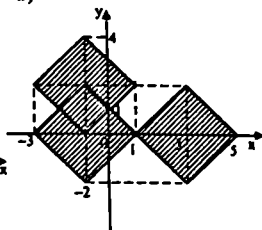
б)



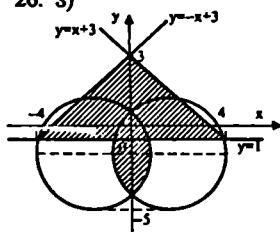
25. а)



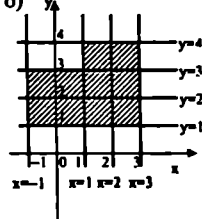
б)



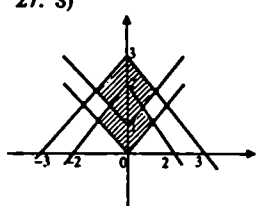
26. а)



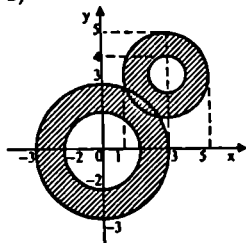
б)



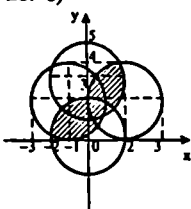
27. а)



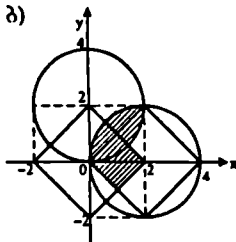
б)



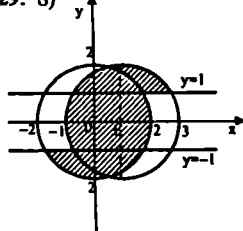
28. а)



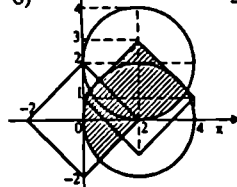
б)



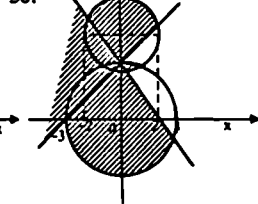
29. а)



б)



30.



1. ა) არ არის; ბ) არის; გ) არ არის; დ) არის. 2. არის. 3. ა) არ არის; ბ) არის. 4. ეს შესაბამისობა არის ასახვა, იგი არ წარმოადგენს ინექციას, მაგრამ წარმოადგენს სიურექციას. 5. ეს შესაბამისობა არის ასახვა, იგი წარმოადგენს ინექციას, მაგრამ არ წარმოადგენს სიურექციას. 6. ეს შესაბამისობა არის ასახვა, იგი არ წარმოადგენს ინექციას, მაგრამ წარმოადგენს სიურექციას. 7. ა) ასახვა არ არის; ბ) არის ასახვა, იგი არ არის ინექცია, მაგრამ არის სიურექცია; გ) არის ასახვა, იგი არის ინექცია, მაგრამ არ არის სიურექცია. 8. ა) ასახვა არ არის; ბ) არის ასახვა, იგი წარმოადგენს ინექციას, მაგრამ არ არის სიურექცია. 9. ეს შესაბამისობა არის ასახვა, იგი არ წარმოადგენს ინექციას, მაგრამ არის სიურექცია. 10. ა) ასახვა არ არის; ბ) ეს შესაბამისობა არის ასახვა, იგი წარმოადგენს ინექციას, მაგრამ არ არის სიურექცია. 11. ეს შესაბამისობა არის ასახვა, იგი არ წარმოადგენს ინექციას, მაგრამ არის სიურექცია. 12. ა) ეს შესაბამისობა არის ასახვა, იგი არ წარმოადგენს ინექციას, მაგრამ არის სიურექცია, ბ) არ არის ასახვა. 13. ა) ეს შესაბამისობა არის ასახვა, იგი არ წარმოადგენს ინექციას, მაგრამ არის სიურექცია; ბ) არ არის ასახვა. 14. ა) ეს შესაბამისობა არის ასახვა და იგი წარმოადგენს როგორც ინექციას, ასევე სიურექციას, ამიტომ ის ბიექციაა ბ) ამ შესაბამისობის შექცეული შესაბამისობაც ასახვაა, იგი არის როგორც ინექცია, ასევე სიურექცია და ამიტომ ბიექციაა. 15. ეს შესაბამისობა არის ასახვა და იგი წარმოადგენს როგორც ინექციას, ასევე სიურექციას, ამიტომ ის ბიექციაა. 16. ა) ფერის მიხედვით გვაქვს ოთხი კლასი, წითელი ფიგურებია: F_1, F_6, F_8 ; მწვანე – F_2 და F_3 ; ყვითელი – F_4, F_5 და F_7 ; ხოლო ლურჯი ფიგურა მხოლოდ ერთია – F_9 ; ბ) ფორმის მიხედვით გვაქვს ორი კლასი: მრავალკუთხედები $F_1, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7$ და ფიგურები, რომლებიც არ არიან მრავალკუთხედები F_2, F_8, F_9 . 17. ეს შესაბამისობა არის ასახვა, იგი წარმოადგენს ინექციას, მაგრამ არ არის სიურექცია. 18. ა) ეს შესაბამისობა არის ასახვა და იგი ბიექციაა წარმოადგენს; ბ) ეს შესაბამისობა არის ასახვა, იგი არ წარმოადგენს ინექციას, მაგრამ არის სიურექცია. 19. $A \xrightarrow{f} B$ შესაბამისობა არ არის ასახვა; $A \xrightarrow{g} B$ არის ასახვა, მაგრამ იგი არც ინექციაა და არც სიურექცია. 20. $\{1; 4; 7; 10\}$, $\{2; 5; 8\}$, $\{3; 6; 9\}$. 21. ეს შესაბამისობა არის ასახვა, იგი არ წარმოადგენს ინექციას, მაგრამ არის სიურექცია. 22. ეს შესაბამისობა არის ასახვა, იგი არ წარმოადგენს არც ინექციას

და არც სიურექციას. 23. ეს შესაბამისობა არის ასახვა და იგი წარმოადგენს ბიექციას. 24. ეს შესაბამისობა არ არის ასახვა. 25. ეს შესაბამისობა არის ასახვა, იგი წარმოადგენს ინექციას, მაგრამ არ არის სიურექცია. 26. ეს შესაბამისობა არის ასახვა, იგი არ წარმოადგენს არც ინექციას და არც სიურექციას. 27. ეს შესაბამისობა არის ასახვა, მაგრამ იგი არც ინექციაა და არც სიურექცია. 28. ეს შესაბამისობა არის ასახვა, იგი წარმოადგენს ბიექციას. 29. ეს შესაბამისობა არის ასახვა, იგი წარმოადგენს ბიექციას. 30. ეს შესაბამისობა არის ასახვა, იგი არ წარმოადგენს ინექციას, მაგრამ არის სიურექცია.

28.1

1. ფუნქციაა ა) და გ), ხოლო ბ) და დ) ფუნქცია არ არის. 2. ბ), ე), ზ) და თ) შეიძლება იყოს ფუნქციის გრაფიკი. 3. 4. 4. არ წარმოადგენს. 5. ბ) და გ). 6. არის. 7. ა) მითითება: $x + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + m$.

$m \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{1}{6} + m$, $m \in \mathbb{Z}$; ბ) $x = \frac{11}{36} + \frac{k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$; გ) $x = -\frac{1}{30} + \frac{n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

8. ა) უარყოფითობის შუალედებია $(-\infty; -6)$, $(-3; 0)$ და $(6; +\infty)$; დადებითობის შუალედებია $(-6; -3)$ და $(0; 6)$; ზრდადია $(-\infty; -5]$ და $[-2; 4]$ შუალედებში; კლებადია $[-5; -2]$ და $[4; +\infty)$ შუალედებში; $x = -5$ და $x = 4$ მაქსიმუმის წერტილებია, ხოლო $x = -2$ მინიმუმის წერტილია; ბ) უარყოფითობის შუალედებია $(-\infty; -7)$, $(-2; 3)$ და $(6; +\infty)$; დადებითობის შუალედებია $(-7; -2)$ და $(3; 6)$; ზრდადია $(-\infty; -5]$ და $[1; 4]$ შუალედებში; კლებადია $[-5; 1]$ და $[4; +\infty)$ შუალედებში; $x = -5$ და $x = 4$ მაქსიმუმის წერტილებია, ხოლო $x = 1$ მინიმუმის წერტილია; გ) უარყოფითობის შუალედებია $(-5; 0)$ და $(5; +\infty)$; დადებითობის შუალედებია $(-\infty; -5)$ და $(0; 5)$; ზრდადია $[-2; 3]$ შუალედებში; კლებადია $(-\infty; -2]$ და $[3; +\infty)$ შუალედებში; $x = 3$ მაქსიმუმის წერტილია, ხოლო $x = -2$ მინიმუმის წერტილია; დ) უარყოფითობის შუალედებია $(-5; -3)$ და $(3; 5)$; დადებითობის შუალედებია $(-\infty; -5)$, $(-3; 3)$ და $(5; +\infty)$; ზრდადია $[-4; -2]$, $[0; 2]$ და $[4; +\infty)$ შუალედებში; კლებადია $(-\infty; -4]$, $[-2; 0]$ და $[2; 4]$ შუალედებში; $x = -2$ და $x = 2$ მაქსიმუმის წერტილებია, ხოლო $x = -4$, $x = 0$ და $x = 4$ მინიმუმის წერტილებია.

9. პერიოდულია და მისი პერიოდია ნებისმიერი რაციონალური x რიცხვი. მართლაც, თუ x რაციონალურია, მაშინ $x + \pi$ აგრეთვე რაციონალურია; ხოლო თუ x ირაციონალურია, მაშინ $x + \pi$ რი-

- ცხვიც ირაციონალურია; ამიტომ დირიხლეს ფუნქციის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ $f(x+r)=f(x)$, ე.ი. $f(x)$ პერიოდული ფუნქციაა r პერიოდით. დირიხლეს ფუნქცია არის მაგალითი ისეთი პერიოდული ფუნქციისა, რომელსაც უმცირესი დადებითი პერიოდი არ გააჩნია. 10. ა) ფუნქცია არც ლუწია და არც კენტი; ბ) ფუნქცია ლუწია; გ) ფუნქცია კენტია; დ) ფუნქცია კენტია; ე) ფუნქცია კენტია; ე) ფუნქცია ლუწია; ზ) ფუნქცია კენტია; თ) ფუნქცია არც ლუწია და არც კენტი; ი) ფუნქცია არც ლუწია და არც კენტი; კ) ფუნქცია არც ლუწია და არც კენტი. 11. $y=120:x$. 12. $y=72:x$. 13. 12 დღე. 14. 6 ტრაქტორი. 15. 6 საათი. 16. ა) $D(f)=(-\infty; +\infty)$; ბ) $D(f)=(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; გ) $D(f)=(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; დ) $D(f)=(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; ე) $D(f)=\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; ე) $D(f)=(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. 17. ა) $D(f)=[0; +\infty)$; ბ) $D(f)=[-1; +\infty)$; გ) $D(f)=[0,8; +\infty)$; დ) $D(f)=[3; +\infty)$; ე) $D(f)=(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$; ე) $D(f)=(-2; 0]$. 18. ა) $D(f)=[1; 4)$; ბ) $D(f)=(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; გ) $D(f)=(-\infty; 3] \cup [6; +\infty)$. 19. ა) $E(f)=[3; +\infty)$; ბ) $E(f)=(-\infty; 6]$; გ) $E(f)=(-\infty; 1] \cup [1; +\infty)$; დ) $E(f)=(-\infty; +\infty)$. 20. ა) $E(f)=[0; +\infty)$; ბ) $E(f)=(-\infty; 3]$; გ) $E(f)=[0; +\infty)$; დ) $E(f)=(-\infty; 2]$. 21. ა) $x=\frac{1}{3}$; ბ) $x=0,5$; გ) $x_1=1$ და $x_2=6$; დ) $x_1=1$ და $x_2=1,5$. 22. ა) $(-\infty; 0]$; ბ) $[2,5; +\infty)$; გ) $(-\infty; 1]$. 23. ა) $(-\infty; 0]$; ბ) $\left(-\infty; 1\frac{1}{3}\right]$; გ) $(-\infty; 0] \cup [0; +\infty)$. 24. ა) $(6; +\infty)$; ბ) $(-\infty; 0,5)$; გ) $(-\infty; -2] \cup [5; +\infty)$. 25. ა) $(-\infty; 1,6)$; ბ) $(0,4; +\infty)$; გ) $(-3; 8)$. 26.

| | | | | |
|---|-----|---|-----|---|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 1,5 | 3 | 4,5 | 6 |

 27. 63 ლიტრს. 28. 2. 29. -4. 30. -7.

29.1.

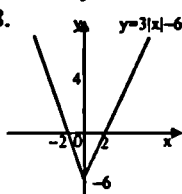
1. $a:b:c=3:6:8$. 2. $4\frac{1}{6}$ საათი. 3. ა) 1 საათი და 20 წუთი, ბ) 1 საათი. 4. 800 გრამი. 5. 12000000. 6. 34 ტონა. 7. $\frac{2}{5}$. 8. $3,75 \text{ სმ}^2$. 9. გაიზრდება 50%-ით. 10. 36 სმ. 11. პირველი რიცხვი. 12. 54%-ით. 13. გაიზრდება 50%-ით. 14. 500%-ით. 15. შეიძლება, 24 მუშა. 16. არ შეიძლება, რადგან $a+b < c$. 17. I - 45, II - 60, III - 30, IV - 15. 18. I - 600 ლარი, II - 800 ლარი, III - 960 ლარი. 19. $\begin{cases} 20xy = 16(x+1)(y+1), \\ 20xy = 109x + 6(y+3); \end{cases} \quad x=24; y=5$. 20. შეიძლება, 18 5-ლარიანი

- და 2 10-ლარიანი. 21. $\frac{a-5}{b}$. 22. $\frac{V_2}{V_1}$, $\frac{V_1}{V_2}$. 23. 14; 15; 16; 17.
 24. 5 სმ. 25. 24 კმ. 26. 288 ჰექტარი. 27. ა) I – 10 დღეში, II – 15 დღეში; ბ) 8 დღეში. 28. 80 კმ/სთ, 480 კმ. 29. 40 კმ. 30. 40 კმ.

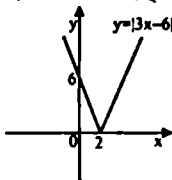
30.1.

1. ა) $b=10$; ბ) $b=4$; გ) $b=2$; დ) $b=1$. 2. ა) $k=1$; ბ) $k=2$; გ) $k=8$;
 დ) $\frac{7}{8}$. 3. (5; 7). 4. ა) $k=1$; ბ) $k=1\frac{1}{3}$; გ) $k=\frac{2}{3}$ დ) $k=-1\frac{1}{3}$.
 5. $y=3x-6$. 6. ა) $\frac{x}{18}+\frac{y}{12}=1$; ბ) $\frac{x}{8}+\frac{y}{-7}=1$; გ) $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$;
 დ). $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$. 7. ა) $\alpha=0$; ბ) $\alpha=\frac{\pi}{4}$. 8. $y=1,5x-6$. 9. $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$.
 10. $y=-3x+4$. 11. 20. 12. 3,7. 13. $4x-3y+25=0$. 14. (0; 3) ან (2; -1).
 15. $3x+4y-25=0$. 16. A(7; 6). 17. 525 ლარი.

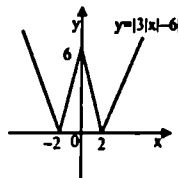
18.



19.



20.

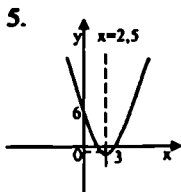


21. $3x+2y-12=0$. 22. $k=-6$. 23. $a=0,6$. 24. B და F წერტილები ეკუთვნის, ხოლო A, C, D და E წერტილები არ ეკუთვნის. 25. ძვეს.
 26. ძვეს. 27. (3; 4) და (2,5; 4). 28. (2; 3) და (-2; -3). 29. არ იარსებებს. 30. (-1; 1).

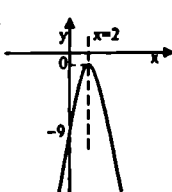
31.1.

1. ა) 4, ბ) $2\sqrt{5}$, გ) 50. 2. ა) 4,41; ბ) 2,5 ან -2,5. 3. $a=5$. 4. $k=-4$.

5.



6.



7. პარაბოლას წვეროა (1; -4), ოx ღერძთან გადაკვეთის წერტილებია: (-1; 0) და (3; 0), ოy ღერძთან გადაკვეთის წერტილია (0; -3).

8. პარაბოლას წვეროა $\left(-1\frac{1}{4}; -1\frac{1}{8}\right)$, ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილებია: $(-2; 0)$ და $(-0,5; 0)$, oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილია $(0; 2)$. 9. $a=-12$, პარაბოლის წვეროა $(6; -33)$. 10. $a=0,5$; $b=-1$. 11. $a=0,5$; $(8; 0)$; $x=3$. 12. ზრდადია $[0,5; \infty)$ შუალედში, კლებადია $(-\infty; 0,5]$ შუალედში. 13. ზრდადია $[4; +\infty)$ შუალედში, კლებადია $(-\infty; 4]$ შუალედში. 14. ა) $0,75$; ბ) 0 ; გ) -12 ; დ) $-3,5$. 15. ა) -1 ; ბ) 1 ; გ) 0 ; დ) $-\frac{15}{16}$. 16. $x=-1$, ზრდადია $(-\infty; -1]$ შუალედში, კლებადია $[-1; +\infty)$ შუალედში, დადებითია $(-3; 1)$ შუალედში, უარყოფითია $(-\infty; -3)$ და $(1; +\infty)$ შუალედებში. 17. $y=-2x^2+8$. 18. $y=2x^2-2$. 19. $b=-1$. 20. ა) $f(-2)>0$; ბ) $f(0)>0$; გ) $f(-0,5)>0$; დ) $f(2,1)>0$; ე) $a<0$. 21. ა) $af(0)>0$; ბ) $af(4)>0$; გ) $af\left(-\frac{b}{2a}\right)<0$. 22. $b>0$. 23. $a<0$ და $b>0$. 24. $a<0$, $b>0$ და $c>0$. 25. $m<0$, $n<0$ და $k<0$. 26. $a=\frac{1}{8}$. 27. $a=-2$. 28. $a=1$. 29. $a=2$ და $b=0$. 30. $F(0; 1)$.

32.1.

1. ა) 10 ; ბ) 15 ; გ) 20 ; დ) 25 . 2. ა) $C_5=27$; ბ) $C_7=37$; გ) $C_8-C_6=10$; დ) $\frac{C_{10}}{C_9}=1\frac{5}{47}$. 3. 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 . 4. ა) $a_n=-2+5n$; ბ) $a_n=3^{n-1}$; გ) $a_n=500 \cdot (0,1)^{n-1}$; დ) $a_n=68-4n$; ე) $a_n=4a_{n-1}+1$, $a_1=1$, $n \geq 2$; ე) $a_n=a_{n-1}^2+1$, $a_1=1$, $n \geq 2$. 5. ა) $x_{10}=90$, $x_{15}=210$; ბ) $x_8=56$, $x_{11}=110$. 6. ა) $x_1=0$; $x_2=1,5$; $x_3=2\frac{2}{3}$; $x_4=3,75$; $x_5=4,8$; ბ) $x_{10}-x_9 > x_{100}-x_{99}$. 7. ა) $y_3=\frac{1}{9}$; $y_4=\frac{1}{3}$; $y_5=1$; $y_6=3$; $y_7=9$; ბ) $\frac{y_{10}}{y_9}=\frac{y_{100}}{y_{99}}=3$. 8. $n=20$. 9. 3300 ლარი. 10. ა) ყოველ შემდეგ „სარტყელში“ წრეების რაოდენობა 6 -ით იზრდება; ბ) 37 ; გ) 331 ; დ) ექვსი „სარტყელი“. 11. ა) მეორე „სარტყელის“ შემდეგ ყოველ „სარტყელში“ სამკუთხედების რაოდენობა 18 -ით იზრდება; ბ) 625 . 12. 4000 . 13. 4905 . 14. 2475 . 15. 2430 . 16. 300 . 17. 104 . 18. 100 . 19. 21 -ჯერ. 20. 8 საათში. 21. 2604 . 22. 121 მოსწავლე. 23. ა) მეორე „სარტყელის“ შემდეგ ყოველ „სარტყელში“ 4 -ჯერ მეტი სამკუთხედია, ვიდრე წინაში; ბ) 4096 . 24. $q=-0,5$. 25. 1 ან

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ ან } \frac{-1-\sqrt{5}}{2}. 26. 3, 7 \text{ და } 11. 27. 70. 28. S_{10}=8525. 29. S_8=\frac{255}{128}.$$

30. 1500%-ით.

33.1.

1. შეკრების ცხრილი -

| | | |
|---|---|---|
| - | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

, გამრავლების ცხრილი

| | | |
|---|---|---|
| x | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

.

2. შეკრების ცხრილი -

| | | | |
|---|---|---|---|
| + | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 1 |

, გამრავლების ცხრილი

| | | | |
|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 1 |

.

3. შეკრების ცხრილი

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| + | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |

 გამრავლების ცხრილი

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| 3 | 0 | 3 | 2 | 1 |

.

4. 301. 5. 8. 6. 3 7. ა) $73 \equiv 1 \pmod{8}$; ბ) $47 \equiv 3 \pmod{11}$; გ) $81 \equiv 1 \pmod{16}$; დ) $16 \equiv 4 \pmod{12}$; ე) $16 \equiv 0 \pmod{8}$; ვ) $8 \equiv 2 \pmod{6}$. 8. ა) კვირა; ბ) ოთხშაბათი; გ) ოთხშაბათი; დ) კვირა. 9. ოქტომბერი. 10. ა) $P=3$; ბ) $P=3$. 11. 35-ე დღეს. 12. 120 დღის შემდეგ. 13. უფროსს ძმას ჰქონდა 6950 ლარი, საშუალოს - 6200 ლარი, უმცროსს - 5600 ლარი. 14. 96-ჯერ. 15. 8. 16. 7. 17. 6. 18. 20. 19. 29. 20. 8. 21. 2044 წელს. 22. 63 სმ. 23. 32 დღე. 24. 18 საათი. 25. 6. 26. 21 წუთს. 27. 29 წუთს. 28. 3. 29. 4. 30. 3 ან 7.

1. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მეზონია, ლ. ქურჩიშვილი. მათემატიკა III კლასის სახელმძღვანელო (I, II ნაწ.); „ინტელექტი“, თბილისი. 2011.
2. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მეზონია, ლ. ქურჩიშვილი. მათემატიკა IV კლასის სახელმძღვანელო (I, II ნაწ.); „ინტელექტი“, თბილისი. 2011.
3. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მეზონია, ლ. ქურჩიშვილი. მოკვამადოთ მათემატიკაში (სასერტიფიკაციო გამოცდებისა და პროფესიული განვითარებისათვის I-VI კლასების მასწავლებლებისათვის); „უსტარი“, თბილისი. 2013.
4. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მეზონია, ლ. ქურჩიშვილი. მათემატიკა 7; „ინტელექტი“, თბილისი. 2006.
5. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მეზონია, ლ. ქურჩიშვილი. ალგებრა VIII კლასის სახელმძღვანელო; „ინტელექტი“, თბილისი. 2004.
6. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მეზონია, ლ. ქურჩიშვილი. ალგებრა IX კლასის სახელმძღვანელო; „ინტელექტი“, თბილისი. 2005.
7. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მეზონია, ლ. ქურჩიშვილი. მათემატიკა X; „ინტელექტი“, თბილისი. 2013.
8. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მეზონია, ლ. ქურჩიშვილი. მათემატიკა 11; „ინტელექტი“, თბილისი. 2007.
9. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მეზონია, ლ. ქურჩიშვილი. მათემატიკა XII; „ინტელექტი“, თბილისი. 2012.
10. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მეზონია, ლ. ქურჩიშვილი. მათემატიკა 5; „ინტელექტი“, თბილისი. 2005.
11. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მეზონია, ლ. ქურჩიშვილი. მათემატიკა 6; „ინტელექტი“, თბილისი. 2006.
12. თ. გიორგაძე. გრაფიკული პროექტეტიკისათვის დაწყებით კლასებში; „ინტელექტი“, თბილისი. 1997.
13. მ. ბუჭუხიშვილი, თ. გიორგაძე. საინტერესო რიცხვები ალგებრაში. პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „გონი“ №6, ქუთაისი. 2018.
14. თ. გიორგაძე, მ. ბუჭუხიშვილი. ძირითადი ამოცანები პროცენტებზე. პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „გონი“ №6, ქუთაისი. 2018.

15. თ. გიორგაძე, მ. ბუჭუხიშვილი. სწავლებაში წრფის შემოტანის ერთ-ერთი ასპექტი. პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „გონი“ №4, ქუთაისი. 2016.
16. თ. გიორგაძე. მოზაიკური რიცხვები. საქართველოს ტურიზმის მეცნიერებათა აკადემია, პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „პროფესიონალის ხმა“ №1-2(12), ქუთაისი 2018.
17. თ. გიორგაძე. წრფივი და მაჩვენებლიანი ფუნქციების კავშირი არითმეტიკულ და გეომეტრიულ პროგრესიებთან. საქართველოს ტურიზმის მეცნიერებათა აკადემია, პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „პროფესიონალის ხმა“ №3-4(8), ქუთაისი 2016.
18. T. Giorgadze. Diagram using some practical aspects. საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის VIII ყოველწლიური საერთაშორისო კონფერენცია. ბათუმი, 4-8 სექტემბერი, 2017.
19. T. Giorgadze, M. Buchukishvili. The usr mosaic numbers in the process of teaching arithmetic progression. Multidisciplinary Scientific Edition WORLD SCIENCE #3(11) Vol.5 March 2018; Scientific Educational Center Warsaw, Poland.
20. ქ. ზეიდაძე, თ. გიორგაძე. მრავალნიშნა რიცხვების გაყოფის სწავლება დაწყებით სკოლაში. აწსუ, ქუთაისი 1999.
21. ა. ქურჩიშვილი, ლ. ქურჩიშვილი, ი. ჭელიძე. მათემატიკური კალენდრისკომპი. თბილისი 2004.
22. ა. ბენდუქიძე. მათემატიკა სერიოზული და სახალისო. თბილისი 1988.
23. Математическая энциклопедия, т.1-5, под редакцией Виноградова И. Москва 1977.
24. Колягин Ю., Луканин Г. Основные понятия современного школьного курса математики. Москва 1974.
25. Энциклопедия для детей. Математика, Т.11. «Аванта», Москва 2002.
26. საერთო სამაგისტრო გამოცდა. გამოცდების ეროვნული ცენტრი 2011 წ. 2012 წ.
27. <http://www.referat.ru>
28. ქ. შავგულიძე. მარტივი რიცხვები. მათემატიკა, სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი. ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი №2, თბილისი 2014.
29. ქ. შავგულიძე, რიცხვთა თეორია და კრიპტოლოგია. თბილისი 2018.
30. T. Giorgadze, M. Buchukishvili, S. Kirtadze. Some considerations for teaching Graph Theory; Conference: "Analysis and Related Topics", Kutaisi, October 26-27, 2019.

საზომი ერთეულები

სიგრძის საზომი ერთეულები

| დასახელება | სიმბოლო | აღწერა |
|--------------|------------|--|
| ანგსტრემი | Å | 0,1 ნანომეტრი ანუ მეტრის მეათმილი-
არდედი ნაწილი (10^{-10} მ.). ანგსტრემი
ხშირად გამოიყენებოდა ფიზიკაში, ამ-
ჟამად მისი ჩანაცვლება ხდება ნანო-
მეტრით. 1 ანგსტრემი მიახლოებით უდ-
რის ელექტრონის ორბიტის დიამეტრს
არააღზნებულ წყალბადის ატომში. |
| ნანომეტრი | nm | მეტრის მეშვიდარდედი ნაწილი (10^{-9}
მეტრი). უდრის 10 ანგსტრემს. |
| მიკრომეტრი | µm | მეტრის მეშვილიონედი ანუ მილიმეტ-
რის მეათასედი ნაწილი |
| მილიმეტრი | mm | მეტრის მეათასედი ნაწილი |
| დეციმეტრი | dm | მეტრის მეათედი ნაწილი |
| სანტიმეტრი | cm | მეტრის მეასედი ნაწილი |
| მეტრი | m | მანძილი, რომელსაც სინათლე გადის
ვაკუუმში $1/299\,792\,458$ წამში |
| კილომეტრი | km | უდრის 1000 მეტრს |
| მილი | mi | გამოიყენება საგზაო მანძილების გასა-
ზომად. უდრის 1.609344 კმ. |
| საზღვაო მილი | M, NM, nmi | გამოიყენება ავიაციასა და ზღვაოსნო-
ბაში მანძილის გასაზომად. უდრის 1.852
კმ |
| ფუტი | ft | სიგრძის არამეტრული საზომი ერთეუ-
ლი. უდრის 30.48 სმ. |
| იარდი | yd | სიგრძის არამეტრული საზომი ერთეუ-
ლი. უდრის 0.9144 მ.(3 ფუტს) |
| დუიმი (ინჩი) | in | სიგრძის არამეტრული საზომი ერთეუ-
ლი, $1/12$ ფუტი. უდრის 2.54 სმ. |

| | | |
|----------------------|----|---|
| უნიტი | U | სპეციალური მოწყობილობების (სატელეკომუნიკაციო, კომპიუტერული, მუსიკალური, ენერგეტიკული) სიმაღლის საზომი ერთეული, რომლებიც თავსდება სამაგრი კონსტრუქციების მქონე სპეციალურ კარადაში ან სადგამზე. უდრის 44.45 მმ. |
| სინათლის წელი | ly | მანძილი, რომელსაც სინათლე გადის ვაკუუმში გრავეიტაციული ველების ზემოქმედების გარეშე, ერთ იულიანურ წელში. უდრის 9 460 730 472 580.8 კმ (63 241.1 ასტრონომიულ ერთეულს) |
| ასტრონომიული ერთეული | au | უდრის 149 597 870.700 კმ. (საშუალო მანძილს მზესა და დედამიწას შორის) |
| პარსეკი | pc | სიგრძის ერთეული, რომელიც გამოიყენება მანძილის გასაზომად ასტრონომიაში. დასახელება შედგენილია სიტყვებისაგან parallax და second. დედამიწიდან ერთი პარსეკის (პს) მანძილზე დაშორებული ობიექტის წლიური ტრიგონომეტრიული პარალაქსი უტოლდება ერთ სეკუნდს. ამგეადად, პარსეკი არის მანძილი რომლიდანაც დედამიწის ორბიტის საშუალო რადიუსი (1 ა.ე.) ჩანს ერთი სეკუნდის კუთხით. 1 პარსეკი = 3.2616 სინათლის წელს |
| აღლი | | სიგრძის საზომი ერთეული ძველ საქართველოში. იხმარებოდა მეტრული სისტემის შემოღებამდე და უდრიდა 2 წყრთას (დაახლოებით 101,15 სმ.) |
| არშინი | | ძველებური რუსული სიგრძის საზომი ერთეული, უდრის 71.12 სმ. იხმარებოდა მეტრული სისტემის შემოღებამდე. |
| ალაჯი | | სიგრძის საზომი ერთეული ძველ საქართველოში. თავდაპირველად იგი გზებზე დასმულ ბოძებს შორის მანძილს გამოხატავდა. შემდეგ იგი დროზე |

| | | |
|----------|--|--|
| | | დამყარებული საზომი გახდა და მხედრის მიერ ერთ საათში გაველილ მანძილს უდრიდა. ამის გამო მისი ზომა სხვადასხვა დროს 5.7-6.7 კმ. ფარგლებში მერყეობდა. |
| ბიჯი | | საზომი ერთეული ძველ საქართველოში. შეადგენდა ორ ნაბიჯს. თავდაპირველად უდრიდა 1.4 მ., შემდგომ 1 ადლს(დაახლოებით 101,15 სმ). |
| გოჯეული | | სიგრძის საზომი ერთეული ძველ საქართველოში. უდრიდა 2 გოჯს. |
| გოჯი | | სიგრძის საზომი ერთეული ძველ საქართველოში. მანძილი ცერის ბოლო სახსრიდან ფრჩხილის წვერამდე, 9 ხორბლის მარცვლის ტოლი. უდრის დაახლოებით 3,16 სმ. |
| ეჯი | | მანძილის საზომი ერთეული XII-XVIII საუკუნეების საქართველოში. უდრიდა 6-7,5 კმ. ეჯი იყო მანძილი, რომელსაც აქლემი ერთ საათში გადის. |
| თითი | | სიგრძის საზომი ერთეული ძველ საქართველოში. უდრიდა საშუალო ტანის ადამიანის შუა თითის სიგანეს, დაახლოებით 2,1 სმ. |
| თოფი | | საზომი ერთეული ძველ საქართველოში. XVIII საუკუნეში საქართველოში თოფით იზომებოდა ქსოვილი. თოფის სიდიდე იყო 8-10 მეტრი (8-10 ადლი). |
| მანძილი | | მანძილის საზომი ერთეული XVIII საუკუნის საქართველოში. შემოვიდა ირანიდან, უდრიდა 15.5 კმ. |
| მტკაველი | | სიგრძის საზომი ერთეული საქართველოში XIX საუკუნემდე, მანძილი გაშლილ ცერსა და ნეკს შორის. უდრიდა დაახლოებით 25,3 სმ. |

| | | |
|----------|--|---|
| პირი | | დაჭრილი შეშის საზომი. უდრიდა 1/4
საჟენს (დაახლოებით 53 სმ.) |
| საჟენი | | ძველებური რუსული სიგრძის საზომი
ერთეული; უდრის 2.13 მ. (3 არშინი). იხ-
მარებოდა მეტრული სისტემის შემოღე-
ბამდე. |
| ფარსანგი | | იგივე ეჯი. მანძილის საზომი ერთეული
XII-XVIII საუკუნეების საქართველოში.
უდრიდა 6-7,5 კმ. ეჯი იყო მანძილი, რო-
მელსაც აქლემი ერთ საათში გადის. |
| ციდა | | სიგრძის საზომი ერთეული საქართვე-
ლოში. მანძილი გაშლილ ცერსა და
საჩვენებელი თითის წვერს შორის. უდ-
რიდა დაახლოებით 18 სმ. |
| წყრთა | | სიგრძის საზომი ერთეული ძველ სა-
ქართველოში. მანძილი იდაყვიდან შუა
თითის ბოლომდე. უდრიდა დაახლოე-
ბით 51 სმ. |

წონის საზომი ერთეულები

| დასახელება | სიმბოლო | აღწერა |
|------------|---------|---|
| გრამი | g | კილოგრამის მეათასედი ნაწილი. უდრის ერთი კუბური სანტიმეტრი ქიმიურად სუფთა დისტილირებული წყლის წონას ყინულის დნობის ტემპერატურაზე. |
| კილოგრამი | kg | ერთეულთა საერთაშორისო სისტემის ერთ-ერთი ერთეული. უდრის კილოგრამის საერთაშორისო ეტალონის მასას. ეტალონი წარმოადგენს პლატინა-ირიდიუმის შენადნობის ცილინდრს, რომლის სიმაღლე და დიამეტრი 39.17 მმ-ია, ხოლო მასალა პლატინა (90%) და ირიდიუმი (10%) |
| ატოგრამი | ag | უდრის 10^{-18} გრამს. |
| ფემტოგრამი | fg | უდრის 10^{-15} გრამს. |
| პიკოგრამი | pg | უდრის 10^{-12} გრამს. |
| ნანოგრამი | ng | უდრის 10^{-9} გრამს. |
| მიკროგრამი | μg | გრამის ერთი მემილიონედი ნაწილი (10^{-6} გრამი) |
| მილიგრამი | mg | გრამის მეათასედი ნაწილი (10^{-3} გრამი) |
| მეგაგრამი | Mg | უდრის მილიონ გრამს (1 ტონას) |
| გიგაგრამი | Gg | უდრის 10^9 გრამს. |
| ტერაგრამი | Tg | უდრის 10^{12} გრამს. |
| პეტაგრამი | Pg | უდრის 10^{15} გრამს. |
| ექსაგრამი | Eg | უდრის 10^{18} გრამს. |
| ზეტაგრამი | Zg | უდრის 10^{21} გრამს. |
| იოტაგრამი | Yg | უდრის 10^{24} გრამს. |
| ცენტნერი | | უდრის 100 კგ. (გერმანიაში უდრის 50 კგ.) |

| | | |
|---------------|------|---|
| ტონა | t | უდრის 1000 კგ. |
| დეციტონა | dt | ტონის მეათედი ნაწილი |
| დეკატონა | dat | უდრის 10 ტონას |
| ჰექტოტონა | gt | უდრის 100 ტონას |
| კილოტონა | kt | უდრის 1000 ტონას |
| მეგატონა | Mt | უდრის მილიონ ტონას |
| გიგატონა | Gt | უდრის 10^9 ტონას. |
| ტერატონა | Tt | უდრის 10^{12} ტონას. |
| პეტატონა | Pt | უდრის 10^{15} ტონას. |
| ექსატონა | Et | უდრის 10^{18} ტონას. |
| ზეტატონა | Et | უდრის 10^{21} ტონას. |
| იოტატონა | Yt | უდრის 10^{24} ტონას. |
| პენიევიტი | dwt | ძვირფასი ლითონებისა და ქვების ბრიტანული საზომი ერთეული. უდრის 1.555 გრ. |
| კარატი | ct | ძვირფასი ქვების წონის საზომი ერთეული. უდრის 0.2 გრ. |
| გრანი | gr | იგივე ტროას გრანი. გამოიყენება აშშ-სა და დიდ ბრიტანეთში სამხედრო სფეროში (ძირითადად ცეცხლსასროლ იარაღთან მიმართებაში) ტყვიების წონის გასაზომად. ასევე ხანდახან მედიკამენტების დოზირებისას. უდრის 0.0648 გრ. |
| ტროას უნცია | oz t | იგივე სააფთიაქო უნცია. ტროას ფუნტის მეთორმეტედი. უდრის 31.1034768 გრ. |
| ტროას ფუნტი | lb t | იგივე სააფთიაქო ფუნტი. უდრის 373.2417216 გრ. |
| უნცია (ounce) | oz | უდრის 28.3495 გრამს |

| ფუნტი (pound) | lb, lbs | უდრის 453.592 გრამს |
|---------------|---------|---|
| ბათმანი | | საწყაო და წონის ერთეული ირანში, ოსმალეთში, რუსეთსა და საქართველოში. XVIII საუკუნეში საქართველოში გაერცვლებული იყო ირანული ბათმანი (საშუალოდ 3 კგ.) და ოსმალური ბათმანი (საშუალოდ 7.3 კგ.). ოსმალურ ბათმანს აღმოსავლეთ საქართველოში თილანის ბათმანი ან თილანი ეწოდებოდა. XIX საუკუნეში საქართველოში ბათმანის წონა ცვალებადი იყო. |
| გორა | | მარცვლეულისა და სითხის საწყაო XVI-XVIII საუკუნეებში ლეჩხუმში. ტევადობა — საშუალოდ 32 კგ (ლ). |
| ზურგი | | საწყაო და წონის ერთეული. მოხსენებულია XV-XVI საუკუნეების ქართული ისტორიულ წყაროებში. იხმარებოდა თივის, ფეტივის, კანაფის, სელისა და ღვინის საზომად. იყენებდნენ XVII და XIX საუკუნეებშიც. ზურგი გულისხმობდა ისეთი სიმძიმის ტვირთს (დაახლოებით 32 კგ), რომლის მოკიდებაც შეეძლო ერთ ადამიანს. |
| თაღარი | | მარცვლეულის საწყაო საქართველოში (XVIII-XIX საუკუნეებში). თაღარი შეადგენდა 30 ლიტრს (დაახლოებით 90-100 კგ). |
| კაბიწი | | მარცვლეულის საწყაო ახლო და შუა აღმოსავლეთის ქვეყნებში. საქართველოში ფართოდ იყო გაერცვლებული VI-XVI საუკუნეებში, იშვიათად ხმარობდნენ XVII-XVIII საუკუნეებშიც. XIII-XV საუკუნეების I ნახევარში კაბიწი საშუალოდ შეადგენდა 10 კგ. XV საუკუნის II ნახევარში და XVI საუკუნეში |

| | | |
|-------------------|--|--|
| | | — 17,8 კგ. XVIII საუკუნის დასაწყისში კაბიწი სამკოდინი (90 კგ) საწყაო იყო და თაღარს შეესაბამებოდა. |
| კანტარი (კინტარი) | | წონის ერთეული შუა საუკუნეებში აღმოსავლეთის ქვეყნებში. სამხრეთ საქართველოში გავრცელდა ოსმალეთიდან. კანტარის სიდიდე სხვადასხვა ქვეყანაში სხვადასხვა იყო. XIX საუკუნეში ახალციხის მაზრაში კანტარი იყო 30 ოსმალური ბათმანი ანუ 220 კგ. |
| კოდი | | მარცვლეულის საწყაო XV-XIX საუკუნეებში საქართველოში. კოდის მასა სხვადასხვაა. ცნობილია 8-, 10- და 12-ლიტრიანი კოდები. „სწორ“ (კანონიკურ) კოდში 10 ლიტრი ხორბალი ან 8 ლიტრი ქერი ჩადიოდა. ლიტრის მასური ოდენობის ზრდამ განაპირობა კოდის ტევადობის ზრდაც. 10-ლიტრიანი კოდი XVI საუკუნეში იტევდა 18 კგ. XVII საუკუნეში — 25,8 კგ. XVIII საუკუნეში — 30-34 კგ. XIX საუკუნეში აღმოსავლეთ საქართველოში კოდის სიდიდე 50 კგ-მდე გაიზარდა. რაჭაში გავრცელებული იყო „ლომკაცის კოდი“, რომელიც 41 კგ იტევდა. სამხრეთ საქართველოში XIX საუკუნემდე კოდის სიდიდე 18 კგ იყო. |
| მათრიხი | | მარცვლეულის საწყაო XVIII საუკუნის აღმოსავლეთ საქართველოში. შეადგენდა 0,9 კგ. |
| მახათელი | | ლომისა და მარილის საწყაო XVI საუკუნის დასაწყისით საქართველოში, უდრიდა 2 ქილას ანუ 29 კგ. |
| ნაოთხალი | | მარცვლეულის საწყაო დასავლეთ საქართველოში, კოდის 1/4. XVI-XVIII საუკუნეებში იტევდა 4,5-6 კგ მარცვლულს, XIX საუკუნეში რაჭაში — 8-10 კგ-ს. |

| | | |
|---------|--|---|
| ნიტრა | | უდრიდა 10 კგ. |
| ოყა | | წონის ერთეული ძველ საქართველოში.
უდრის 136 კგ. |
| საპალნე | | აქლემის – 224-294 კგ., ცხენის – 147 კგ.,
ვირის – 65 კგ. |
| სტილი | | წონის ერთეული XVII—XVIII საუკუნე-
ებში ირანსა და საქართველოში. საქარ-
თველოში შეადგენდა ლიტრის 1/20-ს.
XVII საუკუნის მიწურულამდე უდრიდა
128,8 გრამს, XVIII საუკუნეში — 153-
165,6 გრამს. |
| ტაგანა | | მარცვლეულის საწყაო ერთეული XVIII
საუკუნეში აღმოსავლეთ საქართველო-
ში. სულხან-საბა ორბელიანის ცნობით,
შეადგენდა კოდის 1/8. ე. ი. 25 ლიტრს
ანუ 3,75 კგ. ეთნოგრაფიის ყოფაში ტა-
განა სახელად ხის ჭურჭელს შემორჩა. |
| ფუთი | | უდრის 16 კგ. |

ფართობის საზომი ერთეულები

| დასახელება | სიმბოლო | აღწერა |
|----------------------|-----------------|---|
| კვადრატული მეტრი | m ² | 1 კვ.მ. არის კვადრატის ფართობი, რომლის გვერდიც 1 მეტრის ტოლია. უდრის 10 000 კვ.სმ. (100 სმ. X 100 სმ.) |
| კვადრატული კილომეტრი | km ² | უდრის 1 000 000 კვ.მ. |
| სანტიარი | ca | ფართობის საზომი ერთეული მეტრულ სისტემაში. უდრის 1 კვ.მ. |
| არი | a | უდრის 100 კვ.მ. |
| ჰექტარი | ha | უდრის 10 000 კვ.მ. |
| აკრი | ac | მიწის ფართობის საზომი ერთეული. უდრის 4046.86 კვ.მ. |
| ირლანდიური აკრი | | ფართობის საზომი ერთეული. უდრის 6600 კვ.მ. |
| დუნამი | | ფართობის საზომი ერთეული. გამოიყენება ისრაელში, ლიბანში, იორდანიაში, თურქეთში. უდრის 1000 კვ.მ. |
| დღიური | | ფართობის საზომი ერთეული აღმოსავლეთ საქართველოში; გულისხმობდა მიწის იმ რაოდენობას, რასაც გუთნეული ერთ დღეში მოხსნავდა. დღიურის ხიდიდეს განაპირობებდა სამუშაო დღის ხანგრძლივობა, გამწევი ძალა და ნიადაგის ხარისხი. ქართულ წყაროებში გვხვდება XVI საუკუნიდან. XIX საუკუნეში დღიური 0,39-0,5 ჰა უდრიდა. |
| ქცევა | | მიწის ფართობის საზომი ერთეული დასავლეთ საქართველოში. უდრიდა დაახლოებით 3600 კვ.მ. |

სიჩქარის საზომი ერთეულები

| დასახელება | სიმბოლო | აღწერა |
|---------------------|------------------------|--|
| კილომეტრი საათში | km/h | უდრის 0.28 მეტრს წამში. |
| მეტრი წამში | m/s, m·s ⁻¹ | უდრის 3.6 კილომეტრს საათში. |
| მილი საათში | mph | უდრის 1.61 კილომეტრს საათში. |
| საზღვაო მილი საათში | mi/h | უდრის 1.85 კილომეტრს საათში. |
| კეანძი | | უდრის 1 საზღვაო მილს საათში (1.85 კილომეტრს საათში). |
| ფუტი წამში | fps | უდრის 1.1 კილომეტრს საათში. |
| სინათლის სიჩქარე | c | ნებისმიერი ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელების სიჩქარე ვაკუუმში. დღესდღეობით მაქსიმალურად შესაძლო სიჩქარე ბუნებაში. უდრის 299 792 458 მ/წმ (დაახლოებით 300 000 კმ/წმ) |
| ბგერის სიჩქარე | | ბგერითი ტალღის გავრცელების სიჩქარე ჰაერში +20 C–ზე უდრის 343.2 მ/წმ (1236 კმ/სთ), წყალში (ტემპერატურა +20 C, წნევა 1 atm, სიმკვრივე 998.2 kg/m ³) – 1482 მ/წმ, რკინაში – 5120 მ/წმ. სიჩქარე ცვალებადია და დამოკიდებულია როგორც ტემპერატურაზე, ასევე გავრცელების არეალზე. სითხეებში ბგერა უფრო სწრაფად გადაადგილდება ვიდრე აირებში და უფრო ნელა ვიდრე მყარ სხეულებში. მშრალ (0% ტენიანობა) პაერში ბგერის სიჩქარე გამოითვლება შემდეგი ფორმულით: ბგერის სიჩქარე = $(331.3 + 0.606 \times t)$ მ/წმ–ში (t არის ტემპერატურა ცელსიუსში). ტენიანობის მომატება ბგერის სიჩქარეს ზრდის მიახლოებით 0.1–0.6%–ით. |

მოცულობის საზომი ერთეულები

| დასახელება | სიმბოლო | აღწერა |
|------------------------------|----------------|---|
| ლიტრი | l | უდრის 0.001 კუბურ მეტრს |
| მილილიტრი | ml | უდრის 0.001 ლიტრს |
| დეკალიტრი | dal | უდრის 10 ლიტრს. გამოიყენება მეღვინეობაში. |
| კუბური მეტრი | m ³ | უდრის 1000 ლიტრს |
| სუფრის კოვზი | tbsp | უდრის 0.015 ლიტრს (15 მილილიტრს) |
| ჩაის კოვზი | tsp | უდრის 4.93 მილილიტრს |
| სამედიცინო წვეთი | | უდრის 1/12 მილილიტრს |
| მეტრული წვეთი | | უდრის 1/20 მილილიტრს |
| დეში | | უდრის 0.5 მილილიტრს (4–5 წვეთს) |
| ამერიკული თხევადი კვარტა | qt | უდრის 0.946 ლიტრს |
| ამერიკული მშრალი კვარტა | US qt dry | უდრის 1.101 ლიტრს |
| იმპერიული (ბრიტანული) კვარტა | UK qt | უდრის 1.136 ლიტრს |
| ამერიკული თხევადი პინტა | US pt | უდრის 0.473 ლიტრს |
| ამერიკული მშრალი პინტა | US pt dry | უდრის 0.551 ლიტრს |
| იმპერიული (ბრიტანული) პინტა | pt | უდრის 0.568 ლიტრს |
| ამერიკული თხევადი უნცია | US fl oz | უდრის 0.029 ლიტრს; 1 ლიტრი = 33.8140 ამერიკულ თხევად უნციას |
| იმპერიული (ბრიტანული) | UK fl oz | უდრის 0.028 ლიტრს |

| | | |
|--------------------------------------|-----------------|---|
| თხევადი უნცია | | |
| ამერიკული ბარელი (ნავთობის) | US bbl oil | ნავთობის მოცულობის საზომი ერთეული. უდრის 158.99 ლიტრს |
| ამერიკული მშრალი ბარელი | US bbl dry | უდრის 115.63 ლიტრს |
| ამერიკული თხევადი ბარელი | US bbl lqd | უდრის 119.24 ლიტრს |
| იმპერიული (ბრიტანული) ბარელი | UK bbl | უდრის 163.66 ლიტრს |
| ამერიკული ბარელი (ღუდის) | | უდრის 117.347 ლიტრს |
| იმპერიული (ბრიტანული) ბარელი (ღუდის) | | უდრის 163.66 ლიტრს |
| ამერიკული თხევადი გალონი | US gal lqd | უდრის 3.785 ლიტრს |
| ამერიკული მშრალი გალონი | US gal dry | უდრის 4.40 ლიტრს |
| იმპერიული (ბრიტანული) გალონი | UK gal | უდრის 4.55 ლიტრს |
| ამერიკული ბუშელი | | უდრის 35.23 ლიტრს |
| იმპერიული (ბრიტანული) ბუშელი | | უდრის 36.3687 ლიტრს |
| ამერიკული თხევადი კუბური დუიმი | in ³ | უდრის 0.016 ლიტრს |
| ამერიკული თხევადი კუბური ფუტი | ft ³ | უდრის 28.3169 ლიტრს (1278 კუბურ დუიმს) |

| | | |
|--------|--|--|
| კოკა | | სითხის საწყაო საქართველოში X საუკუნიდან. მისი ტევადობა სხედასხვა კუთხეში სხედასხვა იყო. XIII საუკუნის შუა ხანიდან გეხედება 24-ლიტრიანი კოკა, ხოლო XVI-XVIII საუკუნეებში 8-16 ლიტრიანიც. ლიტრის ზრდის გამო საუკუნეთა მანძილზე კოკის ტევადობაც იზრდებოდა. XVIII საუკუნის აღმოსავლეთ საქართველოში 10-ლიტრიანი კოკა „სწორ“ (კანონიკურ) კოკად ითვლებოდა. დასავლეთ საქართველოში „სწორე“ კოკა 12-ლიტრიანი იყო. 12-ლიტრიანი კოკის ნახევარს მენახევრე ერქვა. XIX საუკუნის 30-იანი წლების აღმოსავლეთ საქართველოში კოკა 12 თუნგით განისაზღვრებოდა |
| თუნგი | | ღვინის საწყაო თუნგი ქართულ წყაროებში XVI საუკუნიდან იხსენიება. საქართველოს სხედასხვა კუთხეში სხედასხვა ტევადობის თუნგი იყო გავრცელებული, მაგ., შიდა ქართლში 4-, 5-, 6- და ზოგან 8-ლიტრიანი. XVIII საუკუნეში თუნგის ტევადობა 2 ხელადას (3 – 3,4 ლ) შეადგენდა. |
| ხელადა | | საწყაო 2 ლიტრი ტევადობის |
| ჩაფი | | საწყაო 12-16-18-ლიტრი ტევადობის, არის 20-ლიტრიანიც, რომელიც უპირატესად ღვინისთვის გამოიყენება ადგილზე, მარანში, ამიტომ მას სამარნე ჩაფს ეძახიან. საღვინე ჩაფი 16-ლიტრიანიც არის. მას მეტწილად ღვინის საწყაოდ ხმარობენ, ამიტომ საწყაო ჩაფს ფუთიანს უწოდებენ. |

ძალის საზომი ერთეულები

| დასახელება | სიმბოლო | აღწერა |
|---------------|---------|---|
| ნიუტონი | N | ძალის საზომი ერთეული ერთეულთა საერთაშორისო სისტემაში. ერთი ნიუტონი არის ძალა, რომელიც 1კგ. მასის სხეულს ანიჭებს 1 მ/წმ^2 აჩქარებას. $1 \text{ ნ.} = 1 \text{ კგ. X მ / წმ}^2$ |
| დინი | dyn | ძალა, რომელიც საჭიროა 1 გრამი მასის მქონე სხეულისთვის 1 მ/წმ^2 აჩქარების მისანიჭებლად. უდრის 0,00001 ნიუტონს |
| გრამ-ძალა | pond | უდრის 0,0098 ნიუტონს |
| კილოგრამ-ძალა | kgf | უდრის 9,81 ნიუტონს |
| კილოფუნტ-ძალა | kip | უდრის 4448.22 ნიუტონს |
| ფუნტ-ძალა | lbf | უდრის 4.45 ნიუტონს |

წნევის საზომი ერთეულები

| დასახელება | სიმბოლო | აღწერა |
|-------------------------------------|---------------------|--|
| პასკალი | Pa | წნევა, რომელსაც ქმნის 1 ნიუტონი ძალა 1 კვადრატულ მეტრზე. 1 პასკალი (პა) = $1 \text{ ნ/მ}^2 = 1 \text{ კგ/(მXწმ}^2)$ |
| ფიზიკური ატმოსფერო | atm | წნევის არასისტემური საზომი ერთეული. დაახლოებით უდრის ატმოსფერულ წნევას დედამიწის ზედაპირზე მსოფლიო ოკეანის დონეზე. უდრის 101325 პასკალს. |
| ტექნიკური ატმოსფერო | at | წნევის არასისტემური საზომი ერთეული. უდრის 980665 პასკალს. |
| ბარი | bar | წნევის არასისტემური საზომი ერთეული. უდრის 10^5 პასკალს. |
| მილიბარი | mbar, mb | გამოიყენება მეტეოროლოგიაში ატმოსფერული წნევის გასაზომად. უდრის 0.001 ბარს. |
| ვერცხლისწყლის სვეტის დუიმი | in Hg | უდრის 3386,38 პასკალს 0 გრადუს ცელსიუსზე. გამოიყენება აშშ-ში ატმოსფერული წნევის გასაზომად მეტეოროლოგიაში და ავიაციაში. |
| ვერცხლისწყლის სვეტის მილიმეტრი | mm Hg | წნევის არასისტემური საზომი ერთეული. უდრის 133.32 პასკალს. |
| დინი კვადრატულ სანტიმეტრზე | | წნევის არასისტემური საზომი ერთეული. უდრის 0.1 პასკალს. |
| კილოგრამ-ძალა კვადრატულ სანტიმეტრზე | kgf/cm ² | წნევის არასისტემური საზომი ერთეული. უდრის 98.0665 კილოპასკალს. |
| ფუნტი კვადრატულ დუიმზე | psi | წნევის არასისტემური საზომი ერთეული. უდრის 6894,76 პასკალს. |

ტემპერატურის საზომი ერთეულები

| დასახელება | სიმბოლო | აღწერა |
|-------------------|---------|---|
| ცელსიუსი | °C | ტემპერატურულ შკალაზე ყინულის დნობისა და წყლის დუღილის ტემპერატურებს შორის ინტერვალი დაყოფილია 100 ტოლ ნაწილად. ყინულის დნობის ტემპერატურად მიღებულია 0°C. წყლის დუღილის ტემპერატურად კი — +100°C. |
| ფარენჰაიტი | °F | ფარენჰაიტის შკალის მიხედვით წყლის გაყინვის ტემპერატურაა +32 გრადუსი, ხოლო დუღილის ტემპერატურაა +212 გრადუსი; ცელსიუსის ფარენჰაიტში გადასაყვანი ფორმულა: $F = C \times 9/5 + 32$ |
| კელვინი | °K | ტემპერატურის საზომი ერთეული. გამოიყენება ერთეულთა საერთაშორისო სისტემაში. შკალა იწყება აბსოლუტური ნულით (− 273.16 C); ცელსიუსის კელვინის გრადუსში გადასაყვანი ფორმულა: $K = C + 273.15$ |
| ნიუტონის გრადუსი | °N | ტემპერატურის ერთ-ერთი უძველესი საზომი. შკალის მიხედვით მტკნარი წყლის გაყინვის ტემპერატურად ითვლებოდა 0 გრადუსი, ადამიანის სხეულის ტემპერატურად +12 გრადუსი, წყლის ადუღების ტემპერატურად +33 გრადუსი. ამჟამად არ გამოიყენება; ცელსიუსის ნიუტონის გრადუსში გადასაყვანი ფორმულა: $N = C \times 33/100$ |
| რანკინის გრადუსი | °R | იშვიათად გამოყენებადი ერთეული. შკალის დასაწყისად ითვლება აბსოლუტური ნული (− 273.16 C); ცელსიუსის რანკინის გრადუსში გადასაყვანი ფორმულა: $R = (C + 273.15) \times 9/5$ |
| რეომიურის გრადუსი | °Re | რეომიურის შკალის მიხედვით წყლის |

| | | |
|------------------|-------------------|---|
| დუსი | | გაყინვის და ადულების ტემპერატურა 0 და +80 გრადუსია. ამჟამად არ გამოიყენება.; ცელსიუსის რეომიურის გრადუსში გადასაყვანი ფორმულა: $Re = C \times \frac{4}{5}$ |
| როემერის გრადუსი | $^{\circ}R\theta$ | როემერის შკალის მიხედვით წყლის გაყინვის და ადულების ტემპერატურა +7.5 და +60 გრადუსია. ამჟამად არ გამოიყენება.; ცელსიუსის როემერის გრადუსში გადასაყვანი ფორმულა: $Ro = C \times \frac{21}{40} + 7.5$ |

ინფორმაციის საზომი ერთეულები

| დასახელება | სიმბოლო | აღწერა |
|----------------|------------|--|
| ბიტი | | ინფორმაციის საზომი მინიმალური ერთეული |
| ნიბლი | | უდრის 4 ბიტს. |
| ბაიტი | B | უდრის 8 ბიტს. |
| კილობაიტი | kB | უდრის 1024 ბაიტს. (2^{10} ბაიტი) |
| მეგაბაიტი | MB | უდრის 1024 კილობაიტს. (2^{20} ბაიტი) |
| გიგაბაიტი | GB | უდრის 1024 მეგაბაიტს. (2^{30} ბაიტი) |
| ტერაბაიტი | TB | უდრის 1024 გიგაბაიტს. (2^{40} ბაიტი) |
| პეტაბაიტი | PB | უდრის 1024 ტერაბაიტს. (2^{50} ბაიტი) |
| ექსაბაიტი | EB | უდრის 1024 პეტაბაიტს. (2^{60} ბაიტი) |
| ზეტაბაიტი | ZB | უდრის 1024 ექსაბაიტს. (2^{70} ბაიტი) |
| იოტაბაიტი | YB | უდრის 1024 ზეტაბაიტს. (2^{80} ბაიტი) |
| კილობიტი/წამში | kbps, kbit | ინფორმაციის გადაცემის სიჩქარის საზომი ერთეული. უდრის 128 ბაიტ-ს/წამში (0.125 კილობაიტს) |
| მეგაბიტი/წამში | Mbps, Mbit | ინფორმაციის გადაცემის სიჩქარის საზომი ერთეული. უდრის 128 კილობაიტს/წამში (0.125 მეგაბაიტს) |
| გიგაბიტი/წამში | Gbps, Gbit | ინფორმაციის გადაცემის სიჩქარის საზომი ერთეული. უდრის 128 მეგაბაიტს/წამში (0.125 გიგაბაიტს) |
| ტერაბიტი/წამში | Tbps, Tbit | ინფორმაციის გადაცემის სიჩქარის საზომი ერთეული. უდრის 128 გიგაბაიტს/წამში (0.125 ტერაბაიტს) |
| პეტაბიტი/წამში | Pbps, Pbit | ინფორმაციის გადაცემის სიჩქარის საზომი ერთეული. უდრის 128 ტერაბაიტს/წამში (0.125 პეტაბაიტს) |
| ექსაბიტი/წამში | Ebps, Ebit | ინფორმაციის გადაცემის სიჩქარის საზომი ერთეული. უდრის 128 პეტაბა- |

| | | |
|---------------|------------|--|
| | | იტს/წამში (0.125 ექსაბაიტს) |
| ზეტაბიტ/წამში | Zbps, Zbit | ინფორმაციის გადაცემის სიჩქარის საზომი ერთეული. უდრის 128 ექსაბაიტს/წამში (0.125 ზეტაბაიტს) |
| იოტაბიტ/წამში | Ybps, Ybit | ინფორმაციის გადაცემის სიჩქარის საზომი ერთეული. უდრის 128 ზეტაბაიტს/წამში (0.125 იოტაბაიტს) |

ენერგიის საზომი ერთეულები

| დასახელება | სიმბოლო | აღწერა |
|--------------------------------|---------|--|
| ჯოული | J | 1 ჯოული არის ენერგია, რომელიც იხარჯება 1 ნიუტონი ძალით სხეულის 1 მეტრით გადაადგილებისას ძალის მოქმედების მიმართულებით. ასევე ჯოული არის მუშაობა, რომელიც საჭიროა 1 ვატი სიმძლავრის შესაქმნელად 1 წამში. |
| კილოვატი-საათში | kW·h | ენერგიის რაოდენობა რომელსაც მოიხმარს 1 კილოვატი სიმძლავრის მოწყობილობა 1 საათში. უდრის 3 600 000 ჯოულს. |
| ელექტრონვოლტი | eV | გამოიყენება ატომურ, ბირთვულ, ელემენტარულ ნაწილაკთა ფიზიკაში. უდრის $1.60217653(14) \times 10^{-19}$ ჯოულს. |
| ერგი | erg | 1 დინი ძალის მიერ 1 სანტიმეტრი გადაადგილებისას შესრულებული მუშაობა. უდრის 10^{-7} ჯოულს. |
| კალორია | cal | ენერგიის საზომი არასისტემული ერთეული. კალორია უდრის სითბოს რაოდენობას, რომელიც საჭიროა 1 გრამი წყლის ტემპერატურის 1 გრადუსით გასათბობად სტანდარტული ატმოსფერული წნევისას (101325 კპა). უდრის 4.19 ჯოულს. |
| ბრიტანული თბური ერთეული | BTU | უდრის 1055.06 ჯოულს. |
| კილოგრამი ტროტილის ექვივალენტი | | უდრის 4 612 000 ჯოულს. |
| კილოგრამ-ძალა-მეტრი | kgf·m | მუშაობა, რომელიც სრულდება 1 კილოგრამ-ძალით სხეულის გადაადგილებისას 1 მეტრზე ძალის მოქმედების მიმართულებით. უდრის 9.80665 ჯოულს. |
| ფუტ-ფუნტი ძალა | ft·lbf | უდრის 136 ჯოულს. |

სიმძლავრის საზომი ერთეულები

| დასახელება | სიმბოლო | აღწერა |
|-------------------------------|------------|---|
| ვატი | W | სიმძლავრე, რომლის დროსაც 1 წამში სრულდება 1 ჯოული მუშაობა. |
| კილოვატი | KW | უდრის 1000 ვატს. |
| ერგი წამში | erg/s | უდრის 10^{-7} ვატს. |
| კალორია წამში | cal/s | უდრის 4.19 ვატს. |
| კილოკალორია საათში | kcal/h | სიმძლავრის საზომი არასისტემური ერთეული. უდრის 1.16 ვატს. |
| ცხენის ძალა | hp(M), PS, | სიმძლავრე, რომელიც იხარჯება 75 კგ. ტვირთის 1 მეტრ სიმაღლეზე 1 წამში ასაწევად თავისუფალი ვარდნის სტანდარტული აჩქარებისას (9.8 მ/წმ^2). უდრის 735.49875 ვატს. |
| ცხენის ძალა (ინგლისური) | hp | უდრის 745.6998 ვატს. |
| ბრიტანული თბური ერთეული წამში | BTU/s | სიმძლავრის საზომი არასისტემური ერთეული. უდრის 1055.06 ვატს. |
| კილოგრამ-ძალა მეტრი წამში | kgf m/s | სიმძლავრის საზომი არასისტემური ერთეული. უდრის 9.80665 ვატს. |

სიხშირის საზომი ერთეულები

| დასახელება | სიმბოლო | აღწერა |
|------------|----------------|--|
| ჰერცი | Hz | პერიოდული პროცესების (მაგ. რხევის) სიხშირის საზომი ერთეული. 1 ჰერცი ნიშნავს ამგვარი პროცესის ერთ რეალიზაციას 1 წამის განმავლობაში. |
| მიკროჰერცი | μHz | უდრის ერთ მეგილიონედ ჰერცს. |
| მილიჰერცი | mHz | უდრის ერთ მეათასედ ჰერცს. |
| კილოჰერცი | kHz | უდრის ათას ჰერცს. |
| მეგაჰერცი | MHz | უდრის მილიონ ჰერცს. |
| გიგაჰერცი | GHz | უდრის მილიარდ ჰერცს. |
| ტერაჰერცი | THz | უდრის ბილიონ ჰერცს. (10^{12} ჰერცი) |

SI სისტემა

ერთეულთა საერთაშორისო სისტემა (შემოკლებით “სი”; შემოკლ. ფორმა ფრანგ.: *Système international d’unités*) წარმოადგენს ყველაზე ფართოდ გავრცელებულ საზომ ერთეულთა სისტემას, როგორც მეცნიერებაში ასევე ყოველდღიურ ცხოვრებაში. დღეისათვის სი მიღებულია საზომ ერთეულთა ძირითად სისტემად მსოფლიოს უმეტეს ქვეყანაში

ერთეულთა საერთაშორისო სისტემის ძირითადი ერთეულები

| დასახელება | სიმბოლო | აღწერა |
|------------|---------|---|
| მეტრი | m | სიგრძის საზომი ერთეული. მანძილი, რომელსაც სინათლე გადის ვაკუუმში 1/299792458 წამში. |
| კილოგრამი | kg | მასის საზომი ერთეული. უდრის კილოგრამის საერთაშორისო ეტალონის მასას. ეტალონი წარმოადგენს პლატინა-ირიდიუმის შენადნობის ცილინდრს, რომლის სიმაღლე და დიამეტრი 39.17 მმ-ია, ხოლო მასალა პლატინა (90%) და ირიდიუმი (10%) |
| წამი | s | დროის საზომი ერთეული. დროის ინტერვალი, რომელიც ტოლია 9 192 631 770 გამოსხივების პერიოდისა, რომელიც შეესაბამება 0 K-ზე (აბსოლუტურ ნულზე) წონასწორობაში მყოფი და გარე ველებისგან შეუშფოთებელი ცეზიუმ-133-ის ატომის ძირითადი (კვანტური) მდგომარეობის ორ ზენაზ დონეებს შორის გადასვლას. |
| ამპერი | A | დენის ძალის საზომი ერთეული. მუდმივი დენის ძალა, რომელიც ვაკუუმში ერთმანეთისაგან ერთი მეტრით დაშორებულ ორ პარალელურ უსასრულოდ გრძელ წრფივ გამტარში |

| | | |
|---|-----|---|
| | | გაველისას ამ გამტარებს შორის აღძრავს 2×10^{-7} ნიუტონ ურთიერთქმედების ძალას სიგრძის თითოეულ მეტრზე. |
| კელვინი | K | ტემპერატურის საზომი ერთეული, რომელიც ტოლია $1/273.16$ წყლის სამმაგი წერტილის თერმოდინამიკური ტემპერატურისა. შეალა იწყება აბსოლუტური ნულით ($- 273.16$ C); ცელსიუსის კელვინის გრადუსში გადასაყვანი ფორმულა: $K = C + 273.15$ |
| მოლი | mol | ნივთიერების რაოდენობის საზომი ერთეული. მოლი ისეთი სისტემის ნივთიერებათა რაოდენობაა, რომელიც შეიცავს იმდენივე სტრუქტურულ ელემენტს (მაგ. ატომს, მოლეკულას, იონს, ელექტრონს), რამდენ ატომსაც შეიცავს $0,012$ კგ მასის ნახშირბად-12. |
| კანდელა | cd | სინათლის ძალის საზომი ერთეული. კანდელა არის სინათლის ძალა, რომელიც გამოსხივდება მოცემული მიმართულებით 540×10^{12} ჰერცი სიხშირის მონოქრომატული გამომსხივებელი წყაროს მიერ, რომლის სინათლის ენერგეტიკული ძალა ამ მიმართულებით შეადგენს $(1/683)$ ვტ/სტერადიანს. |
| ერთეულთა საერთაშორისო სისტემის წარმოებული ერთეულები | | |
| რადიანი | rad | ბრტყელი კუთხეების საზომი ერთეული. რადიანი უდრის წრის ორ რადიუსს შორის არსებულ კუთხეს, რომლის მომჭიმავი რკალის სიგრძეც რადიუსის ტოლია. უდრის $180^\circ/\pi$, დაახლოებით 57.2958 გრადუსს. |
| სტერადიანი | sr | სივრცითი კუთხის საზომი ერთეული. სტერადიანი ტოლია სივრცული კუთხის, |

| | | |
|----------|----|---|
| | | რომლის წვეროც მოთაესებულია სფეროს ცენტრში და სფეროს ზედაპირზე ამოკეფოს მისი რადიუსის კვადრატის ტოლ ფაროს. სტერადიანის გამოთვლა ხდება შემდეგი ფორმულით: $Q = 2\pi(1 - \cos \alpha/2)$, სადაც Q არის სიერციითი კუთხე, α – ბრტყელი კუთხე კონუსის წვერთან, რომელიც წარმოიქმნება სფეროს შიგნით, მოცემული სიერციითი კუთხით. |
| ცელსიუსი | °C | ტემპერატურის საზომი ერთეული. ტემპერატურულ შკალაზე კინულის დნობისა და წყლის დუღილის ტემპერატურებს შორის ინტერვალის დაყოფილია 100 ტოლ ნაწილად. ყინულის დნობის ტემპერატურად მიღებულია 0°C, წყლის დუღილის ტემპერატურად კი +100°C. |
| ჰერცი | Hz | პერიოდული პროცესების (მაგ: რხევის) სიხშირის საზომი ერთეული. 1 ჰერცი ნიშნავს ამგვარი პროცესის ერთ რეალიზაციას 1 წამის განმავლობაში. |
| ნიუტონი | N | ძალის საზომი ერთეული. ერთი ნიუტონი არის ძალა, რომელიც 1კგ. მასის სხეულის ანიჭებს 1 მ/წმ ² აჩქარებას. 1 ნ. = 1 კგ. X მ/წმ ² |
| ჯოული | J | ენერგიის საზომი ერთეული. 1 ჯოული არის ენერგია, რომელიც იხარჯება 1 ნიუტონი ძალით სხეულის 1 მეტრით გადაადგილებისას ძალის მოქმედების მიმართულებით. ასევე ჯოული არის მუშაობა, რომელიც საჭიროა 1 ვატი სიმძლავრის შესაქმნელად 1 წამში. |
| ვატი | W | სიმძლავრის საზომი ერთეული. 1 ვატი არის სიმძლავრე, რომლის დროსაც 1 წამში სრულდება 1 ჯოული მუშაობა. |
| პასკალი | Pa | წნევის საზომი ერთეული. 1 პასკალი არის წნევა, რომელსაც კმნის 1 ნიუტონი ძალა 1 კვადრატულ მეტრზე. 1 პასკალი (პა) = 1 |

| | | |
|--------|----------|--|
| | | $\epsilon/\mu^2 = 1 \text{ კგ}/(\text{მXწმ}^2)$ |
| ლუმენი | lm | სინათლის ნაკადის საზომი ერთეული. 60 ვატიანი ვარვარის ნათურა ქმნის 710 ლუმენის ტოლ სინათლის ნაკადს, 100 ვატიანი ვარვარის ნათურა ქმნის 1350 ლუმენის ტოლ სინათლის ნაკადს. |
| ლუქსი | lx | განათების საზომი ერთეული. 1 ლუქსი ტოლია 1 კვ.მ. ფართობის მქონე ზედაპირის 1 ლუმენი სინათლის ნაკადით განათების. |
| კულონი | C | ელექტრული მუხტის საზომი ერთეული. 1 კულონი არის ელექტრული მუხტის ის რაოდენობა, რომელიც გადის გამტარში ერთი წამის განმავლობაში ერთი ამპერი დენის ძალის დროს. 1 კულ. = 1 ა. x 1 წმ. |
| ვოლტი | V | ელექტრომამოძრავებელი ძალის (პოტენციალების ან ელექტრული ძაბვის სხვაობის) საზომი ერთეული. 1 ვოლტი არის ძაბვა (პოტენციალების სხვაობა) გამტარის ორ წერტილს შორის, რომლის დროსაც გამტარის ამ მონაკვეთზე 1 ამპერი დენის ძალის გაგლისას გამოიყოფა 1 ვატი სიმძლავრე. |
| ომი | Ω | წინაღობის საზომი ერთეული. ომი არის იმ გამტარის წინაღობა, რომლის ბოლოებს შორის წარმოიშობა 1 ვოლტი ძაბვა 1 ამპერი მუდმივი დენის დროს. |
| ფარადა | F | ელექტრული ტევადობის საზომი ერთეული. 1 ფარადა არის ისეთი კონდენსატორის ტევადობა, რომელზედაც 1 კულონი (1 ამპერი წამში) მუხტის მოთავსებისას შემოწაფენებს შორის ძაბვა იქნება 1 ვოლტი. |
| ვებერი | Wb | მაგნიტური ნაკადის საზომი ერთეული. 1 ვებერი მაგნიტური ნაკადის ცვლილება 1 წამში გამოიწვევს 1 ვოლტი ელექტრომამოძრავებელი ძალის |

| | | |
|----------|----|--|
| | | გენერირებას. ერთი ვებერი მაგნიტური ნაკადი ერთ კვადრატულ მეტრზე არის (1 ვბ/მ ²) 1 ტესლა. |
| ტესლა | T | მაგნიტური ინდუქციის საზომი ერთეული. 1 ტესლა არის ისეთი ერთგვაროვანი მაგნიტური ველის ინდუქცია, რომელიც მოქმედებს 1 ნიუტონი ძალით. ინდუქციის წირებისადმი პერპენდიკულარული გამტარის 1 მეტრი სიგრძის მონაკვეთზე, თუ მასში გადის 1 ამპერი დენი. |
| ჰენრი | H | ინდუქციურობის საზომი ერთეული. 1 ჰენრი არის ისეთი კონტურის ინდუქციურობა, რომელშიც დენის ძალის ცვლილებისას 1 ამპერით 1 წამში, აღიძვრება 1 ვოლტი ელექტრომამოძრავებელი ძალა. |
| სიმენსი | S | ელექტრული გამტარობის საზომი ერთეული. 1 სიმენსი ტოლია ისეთი გამტარის ელექტრული გამტარობისა, რომლის წინააღობა 1 ომი. |
| ბეკერელი | Bq | რადიოაქტიური იზოტოპების აქტიურობის ერთეული. 1 ბეკერელი არის რადიოაქტიური წყაროს აქტიურობა, რომელშიც 1 წამში საშუალოდ 1 რადიოაქტიური დაშლა ხდება. |
| გრეი | Gy | შთანთქმული მაიონებელი გამოსხივების დოზის გაზომვის ერთეული. დოზა უდრის 1 გრეის, თუ მაიონებელი გამოსხივების შთანთქმის შედეგად სხეულმა მიიღო 1 კილოგრამზე 1 ჯოული ენერგია. ასევე ხშირად გამოიყენება შთანთქმული დოზის ერთეული რადი. 1 გრეი = 100 რადს. |
| ზივერტი | Sv | ექვივალენტური და ეფექტური მაიონებელი გამოსხივების დოზის გაზომვის ერთეული. 1 ზივერტი უდრის 1 კვ. ბიოლოგიური ქსოვილის მიერ შთანთქმულ ენერგიის რაოდენობას, რომელიც ზემოქმედებით |

| | | |
|--------|-----|--|
| | | უტოლდება 1 გრ. გამა-გამოსხივების
შთანთქმას. |
| კატალი | kat | კატალიზატორის აქტიუობის საზომი
ერთეული. თუ კატალიზატორის არსებობა
ზრდის ქიმიური რეაქციის სიჩქარეს 1
მოლი/წამით, მაშინ მოცემული
კატალიზატორის რაოდენობის აქტიუობა
ტოლი იქნება 1 კატალის. 1 კატალი = მოლი
/ წამზე. |

| | |
|---|-----|
| ავტორებისაგან | 3 |
| §1. ისტორიული ცნობები ალბეგორის წარმოშობის შესახებ | 5 |
| საინტერესო რიცხვები ალბეგორაში | 12 |
| §2. მთელ რიცხვთა სიმრავლე, მისი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია და არითმეტიკული მოძმედებები მთელ რიცხვებზე | 30 |
| 2.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის | 41 |
| 2.1.1. ტესტი №1 | 45 |
| §3. წილადის ცნება. წილადის ძირითადი თვისება, ტოლკალვანი წილადები. დადებითი რაციონალური რიცხვის ჩაწერა უკვეცი წილადის სახით. | 48 |
| 3.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის | 55 |
| 3.1.1. ტესტი №2 | 58 |
| §4. წილადი რიცხვების შეპრება და გამოკლება. შეპრება-გამოკლების ძირითადი თვისებები. | 61 |
| 4.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის | 69 |
| 4.1.1. ტესტი №3 | 75 |
| §5. წილადი რიცხვების გამრავლება და გაყოფა. გაყოფისა და გამრავლების ძირითადი თვისებები. ხარისხის ცნება. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე. | 77 |
| 5.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის | 97 |
| 5.1.1. ტესტი №4 | 102 |
| §6. ათწილადების ცნება. ათწილადების თვისებები. ჩვეულებრივი წილადის გადაცემა ათწილადად. არითმეტიკული მოძმედებები ათწილადებზე | 104 |
| 6.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის | 115 |
| 6.1.1. ტესტი №5 | 119 |
| §7. პროცენტი, პრომილე; ძირითადი ამოცანები პროცენტებზე | 121 |
| 7.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის | 126 |
| 7.1.1. ტესტი №6 | 129 |
| §8. პროპორცია, პროპორციის ძირითადი თვისება. ამოცანები პროპორციულ დამოკიდებულებებზე | 131 |
| 8.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის | 139 |
| 8.1.1. ტესტი №7 | 143 |
| §9. პერიოდული ათწილადები. მოძმედებანი პერიოდულ ათწილადებზე | 145 |
| 9.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის | 149 |
| 9.1.1. ტესტი №8 | 152 |

| | |
|---|-----|
| §10. არაპერიოდული ათწილადი. ირაციონალური რიცხვი.
დადებითი ნამდვილი რიცხვის ჩაწერა _____ | 154 |
| 10.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის _____ | 157 |
| 10.1.1. ტესტი № 9 _____ | 160 |
| §11. დადებითი ნამდვილი რიცხვების შეკრება, გამოკლება,
გამრავლება და გაყოფა. ნამდვილ რიცხვთან სიმრავლე.
ნამდვილ რიცხვთან სიმრავლის ურთიერთცალსახა
ასახვა საკოორდინატო წრფის წერტილთა
სიმრავლეზე _____ | 162 |
| 11.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის _____ | 167 |
| 11.1.1. ტესტი №10 _____ | 172 |
| §12. რიცხვების დამრგვალების წესი. მიახლოებითი
გამოთვლები _____ | 174 |
| 12.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის _____ | 183 |
| 12.1.1. ტესტი №11 _____ | 187 |
| §13. სიდიდის ცნება. სკალარული და ვექტორული
სიდიდეები _____ | 188 |
| 13.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის _____ | 198 |
| 13.1.1. ტესტი №12 _____ | 202 |
| §14. მონაკვეთის სიბრძნე და მისი გაზომვა, სხეულის
მასა და მისი გაზომვა _____ | 203 |
| 14.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის _____ | 213 |
| 14.1.1. ტესტი №13 _____ | 216 |
| §15. ღრუ და მისი გაზომვა. კალენდარი _____ | 218 |
| 15.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის _____ | 227 |
| 15.1.1. ტესტი №14 _____ | 230 |
| §16. დამოკიდებულებანი სიდიდეებს შორის (მანძილი,
სიჩქარე, ღრუ; ღირებულება, შესი, რაოდენობა) _____ | 231 |
| 16.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის _____ | 237 |
| 16.1.1. ტესტი №15 _____ | 241 |
| §17. რიცხვითი გამოსახულება. რიცხვითი გამოსახულების
მნიშვნელობა. რიცხვითი ტოლობა და უტოლობა,
როგორც გამონათქვამი. ჯეშმარიტი რიცხვითი
ტოლობისა და უტოლობის თვისებები _____ | 243 |
| 17.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის _____ | 247 |
| 17.1.1. ტესტი №16 _____ | 252 |
| §18. გამოსახულება ცვლადით, გამოსახულების
ბანსაზღვრის არე. იგივეობა, იგივერი ბარდამენები _____ | 254 |
| §18.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის _____ | 259 |
| 18.1.1. ტესტი №17 _____ | 261 |

| | | |
|------|---|-----|
| 19. | მრთცვლადიანი ბანტოლუბის ცნება, რობოროც $f(x)=g(x)$, $x \in X$ სახის პრედიკატი. ბანტოლუბის ჟუსვთა სიბრავლე. ტოლკალოვანი ბანტოლუბები. თეორომები
ტოლკალოვანი ბანტოლუბების ჟუსახეშ. | |
| | მრთცვლადიანი ბანტოლუბის ამოხსნა. კვადრატული ბანტოლუბა და მისი ამონახსნის ჟოროშულა. | 263 |
| | 19.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის | 273 |
| | 19.1.1. ტესტი №18 | 277 |
| §20. | მრთცვლადიანი ბანტოლუბის ცნება, რობოროც | |
| | $f(x,y)=g(x,y)$, $x,y \in X$ სახის პრედიკატი. მრთცვლადიან ბანტოლუბათა ამონახსნეთა სიბრავლე. მრთცვლადიანი მორი ბანტოლუბის სისტემა რობოროც ბანტოლუბათა კონიუნქცია | 278 |
| | 20.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის | 285 |
| | 20.1.1. ტესტი №19 | 288 |
| §21. | მრთცვლადიან ბანტოლუბათა სისტემის ამოხსნის ხმრხები. | 290 |
| | 21.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის | 296 |
| | 21.1.1. ტესტი №20 | 302 |
| §22. | ამოცანების ამოხსნა ბანტოლუბებისა და ბანტოლუბათა სისტემის ჟედაბენით | 304 |
| | 22.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის | 318 |
| | 22.1.1. ტესტი №21 | 321 |
| §23. | ბანტოლუბათა მრთობლიობა, რობოროც ბანტოლუბათა დიზიუნქცია | 324 |
| | 23.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის | 327 |
| | 23.1.1. ტესტი №22 | 330 |
| §24. | ცვლადიანი უტოლობა, რობოროც პრედიკატი. უტოლობის ამონახსნეთა სიბრავლე. ტოლკალოვანი უტოლობები. თეორომები ტოლკალოვან უტოლობებზე. პირველი ხარისხის მრთცვლადიანი უტოლობის ამოხსნა | 332 |
| | 24.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის | 338 |
| | 24.1.1. ტესტი №23 | 341 |
| §25. | უტოლობათა სისტემა, რობოროც უტოლობათა კონიუნქცია. მრთცვლადიან უტოლობათა სისტემის ამოხსნა | 343 |
| | 25.1. საგარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის | 347 |
| | 25.1.1. ტესტი №24 | 351 |

| | |
|---|-----|
| §26. უტოლობათა ერთობლიობა, როგორც უტოლობათა დიზიუნქცია. ორცვლადიან უტოლობათა სისტემის ამოხსნა. ორცვლადიან უტოლობათა ერთობლიობის ამოხსნა | 353 |
| 26.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის | 358 |
| 26.1.1. ტესტი №25 | 362 |
| §27. ასახვა. ასახვათა სახეები: სიმრავლის ასახვა სიმრავლეში, სიმრავლის ასახვა სიმრავლეზე, სიმრავლის ურთიერთდასახვა ასახვა სიმრავლეზე | 365 |
| §27.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის | 370 |
| 27.1.1. ტესტი №26 | 379 |
| §28. ფუნქცია. ფუნქციის მოცემის ხერხები. ფუნქციის განსაზღვრისა და მნიშვნელობათა არეები. ზოდადი, კლუბადი, ლუწი, კენტი, კერიოდული და შემოსაზღვრული ფუნქციები | 382 |
| 28.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის | 399 |
| 28.1.1. ტესტი №27 | 403 |
| §29. პირდაპირპროპორციული და უპროპორციული დამოკიდებულებანი სიდიდეებს შორის | 405 |
| 29.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის | 410 |
| 29.1.1. ტესტი №28 | 413 |
| §30. $y = kx + b$, $y = \frac{k}{x}$ ფუნქციები, მათი თვისებები და გრაფიკები | 415 |
| 30.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის | 422 |
| 30.1.1. ტესტი №29 | 424 |
| §31. $y = ax^2 + bx + c$ ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი | 426 |
| 31.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის | 434 |
| 31.1.1. ტესტი №30 | 437 |
| §32. მიმდევრობა, არითმეტიკული და გეომეტრიული პროგრესიები | 438 |
| 32.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის | 445 |
| 32.1.1. ტესტი №31 | 449 |
| §33. მოდულური არითმეტიკა | 451 |
| 33.1. საფარჯიშოები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის | 455 |
| 33.1.1. ტესტი №32 | 458 |
| პასუხები | 460 |
| ლიტერატურა | 490 |
| საზოგადოებრივი ერთეულები | 492 |
| სიგრძის საზომი ერთეულები | 492 |
| წონის საზომი ერთეულები | 496 |
| ფართობის საზომი ერთეულები | 501 |

| | |
|-------------------------------|-----|
| სიჩქარის საზომი ერთეულები | 502 |
| მოცულობის საზომი ერთეულები | 503 |
| ძალის საზომი ერთეულები | 506 |
| წნევის საზომი ერთეულები | 507 |
| ტემპერატურის საზომი ერთეულები | 508 |
| ინფორმაციის საზომი ერთეულები | 510 |
| ენერგიის საზომი ერთეულები | 512 |
| სიმძლავრის საზომი ერთეულები | 513 |
| სიხშირის საზომი ერთეულები | 514 |
| SI სისტემა | 515 |