

ომარ ძაგნიძე

ფურიეს ერთგანზომილებიანი მწკრივები ერთი და ორი ცვლადის ფუნქციებისთვის

$$x = 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots \right), \quad -\pi < x < \pi$$

$$x = \pi - 2 \left(\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots \right), \quad 0 < x < 2\pi$$

$$1 = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right), \quad 0 < x < \pi$$

$$xy = 4 \sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{\sin mx \sin ny}{mn}, \quad -\pi < x < \pi, \quad -\pi < y < \pi$$

$$xy = \pi^2 - 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx}{m} - 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} + 4 \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\sin mx \sin ny}{mn},$$
$$0 < x < 2\pi, \quad 0 < y < 2\pi$$

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ანდრია რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტი

ომარ ძაგნიძე

ფურიეს ერთგანზომილებიანი მწკრივები
ერთი და ორი ცვლადის ფუნქციებისთვის



უნივერსიტეტის
გამომცემლობა

სტუდენტებისა და მაგისტრანტებისთვის გამიზნული ეს სახელმძღვანელო ოთხნაწილიანია.

I ნაწილში შეტანილია ავტორის მიერ 2015 წელს გამოცემული (თსუ), გადამუშავებული და ნაწილობრივ გაფართოებული “ფურიეს მწკრივები”.

II ნაწილში თავმოყრილია ორი ცვლადის ფუნქციებისთვის ფურიეს ერთგანზომილებიანი, ცვლადკოორდინატების მწკრივების შესახებ ავტორის მიერ 2017 წელს დაწეული მუშაობის შედეგები. გამოვლენილია ამ მწკრივების უპირატესობა ფურიეს ორმაგ მწკრივებთან შედარებით კრებადობასა და შეჯამებადობის რიმანის მეთოდთან დაკავშირებით — მოცემულია ორი ცვლადის ჯამებადი ფუნქციის წარმოდგენა მასთან ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი ორი მწკრივის R^2 -ჯამებით.

III ნაწილში მოიცავს რიმანის მიერ ერთი ცვლადის ფუნქციისთვის შემოღებული გლუვობის გავრცელებას ორი ცვლადის ფუნქციაზე და დადგენილია ორი ცვლადის გლუვი ფუნქციების მრავალი თვისება.

IV ნაწილში თავმოყრილია ორმაგ მწკრივებზე ცნობილი ზოგიერთი შედეგი. აგრეთვე, მოყვანილია ახალი შედეგები: ერთზე მეტ ხარისხში ჯამებადი ორი ცვლადის ფუნქციის ფურიეს განმეორებითი მწკრივების თითქმის ყველგან კრებადობა, თეორემა ფურიეს ორმაგი მწკრივის წევრობრივი ინტეგრების მართლზომიერებაზე.

რედაქტორი: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი **შაქრო ტეტუნაშვილი**

რეცენზენტები: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი **ალექსანდრე მესხი**

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი **გიორგი ონიანი**

კომპიუტერული უზრუნველყოფა: მაია ჯაფოშვილი

გამოცემულია ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის საუნივერსიტეტო საგამომცემლო საბჭოს გადაწყვეტილებით.

© ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა,

ანდრია რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტი, 2024

ISBN 978-9941-36-121-0

რეზიუმე

ომარ ძაგნიძის წიგნისა

“ფურიეს ერთგანზომილებიანი მწკრივები ერთი და ორი ცვლადის ფუნქციებისთვის”

ფუნქციათა წარმოდგენის პრობლემის განხილვისას ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა სისტემისადმი, სიმბოლურად (T) სისტემისადმი, განსაკუთრებული ყურადღება გამოწვეულია იმიტომ, რომ წარმოსადგენ ფუნქციას (T) სისტემა უყენებს გაცილებით სუსტ პირობას, ვიდრე ალგებრული (A) სისტემა: (T) სისტემისთვის საკმარისია პირველი რიგის წარმოებულის არსებობა და ეს მაშინ, როცა (A) სისტემისთვის ყველა რიგის წარმოებულის არსებობაც კი არ კმარა!

წინამდებარე წიგნი ოთხნაწილიანია.

ხუთი თავისგან შედგენილ ნაწილში შეტანილია ავტორის მიერ 2015 წელს გამოცემული (თსუ), გადამუშავებული და გაფართოებული “ფურიეს მწკრივები”. სახელდობრ, თავი 1-ში გადმოცემულია ძირითადი ცნებანი; თავი 2-ში — ფურიეს მწკრივთა ზოგადი საკითხები; თავი 3-ში — ფურიეს მწკრივთა კრებადობის ზოგადი საკითხები; თავი 4-ში — ფურიეს მწკრივთა კრებადობის საკითხები, რომელშიც დამატებულია ფურიეს მწკრივის კრებადობის რიმანის ნიშანი და ფურიეს მწკრივის (საზოგადოდ, განშლადის) წევრობრივი ინტეგრების მართლზომიერების შესახებ ლებეგის თეორემის შებრუნებული თეორემა; თავი 5-ში — რიცხვითი და ფურიეს მწკრივების სხვადასხვა მეთოდით შეჯამებადობის საკითხები; ამ თავში დამატებულია რიმანის მწკრივის კერძო ჯამისთვის ორმაგი ზღვრის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა და ამ პირობის გამოყენება ა. კოლმოგოროვის ყველგან განშლად ფურიეს მწკრივისთვის.

წიგნის II, III, IV ნაწილები მიძღვნილია ორი ცვლადის ჯამებადი ფუნქციებისთვის ფურიეს ორმაგი და ერთგანზომილებიანი მწკრივებისადმი (ცვლადი კოეფიციენტებით).

მიუხედავად იმისა, რომ ფურიეს ჯერადმა ტრიგონომეტრიულმა მწკრივებმა გამოყენება პოვა პროგნოზირების თეორიაში (იხ. Helson H. and Lowdenslager D., Acta Math. 99 (1958), no. 3-4, 165-202; II — Acta Math. 106 (1961), no. 3-4, 175-213), ორი ცვლადის ფუნქციის წარმოდგენის საკითხში ფურიეს ორჯერად მწკრივს აღმოაჩნდა ისეთი უარყოფითი თვისება, საზოგადოდ, რომლის ანალოგი არ შეიძლება გააჩნდეს ერთი ცვლადის ფუნქციის ფურიეს მწკრივს. ამას ეძღვნება წიგნის II ნაწილი.

სახელდობრ, 1971 წელს გამოქვეყნდა ჩ. ფეფერმანის ნაშრომი [72], რომელშიც დადგენილია ორი ცვლადის ყველგან უწყვეტი და თითოეული ცვლადის მიმართ 2π პერიოდული ისეთი $F(x, y)$ ფუნქციის არსებობა, რომლის ფურიეს ორჯერად $S[F]$ მწკრივს არ გააჩნია მართკუთხედების მიხედვით კრებადობის ერთი წერტილიც კი!

ავტორის მიერ 2017 წელს გამოქვეყნებულ [66] ნაშრომში განვითარებულია სრულიად ახალი მეთოდი, რომლის მიხედვით n -განზომილებიან $[-\pi, \pi]^n$ კუბში ჯამებად და თითოეული ცვლადის მიმართ 2π პერიოდულ $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, ფუნქციასთან ასოცირდება თითოეული ცვლადის მიმართ ფურიეს n რაოდენობის $S[f]_1, \dots, S[f]_n$ მწკრივი, რომელთა კოეფიციენტები დამოკიდებულია დანარჩენ $n - 1$ რაოდენობის ცვლადზე.

დადგენილია ასოცირებული მწკრივის წერტილზე კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა. კერძოდ, დადგენილია ჩ. ფეფერმანის უწყვეტ $F(x, y)$ ფუნქციასთან ასოცირებული $S[F]_1$ და $S[F]_2$ მწკრივების კრებადობა $[-\pi, \pi]^2$ კვადრატის თითქმის ყველა (x, y) წერტილზე $F(x, y)$ მნიშვნელობისკენ! ამასთან ერთად, აღნიშნულია ჰანტის თეორემის [75] მართებულობა ორი ცვლადის $L^p[-\pi, \pi]^2$, $p > 1$, კლასის ფუნქციასთან ასოცირებული მწკრივებისთვის (იხ. თეორემა 6.3.4).

გარდა ამისა, დადგენილია: $[-\pi, \pi]^2$ კვადრატზე ჯამებად f ფუნქციასთან ასოცირებული ორივე $S[f]_1$ და $S[f]_2$ მწკრივი შეჯამებადია რიმანის მეთოდით თითქმის ყველა $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$ წერტილზე $f(x, y)$ მნიშვნელობისკენ (იხ. თეორემები 6.4.2 და 6.4.3).

ამით მრავალი ცვლადის ფუნქციებისთვის დასაბამი მიეცა სრულიად ახალ მიმართულებას ფურიეს ერთგანზომილებიან ცვლადკოეფიციენტებიან მწკრივთა თეორიაში!

რადგან ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია ამ ფუნქციის გლუვობის წერტილებზე, თუკი ასეთი წერტილი გააჩნია ფუნქციას (იხ. თეორემა 4.10.1), ამიტომ ბუნებრივად გაჩნდა საჭიროება რიმანის აბრით გლუვობის ცნების გავრცელებისა ორი ცვლადის ფუნქციებზე, რასაც ეძღვნება წიგნის III ნაწილი.

ამ ნაწილში ორი ცვლადის ფუნქციისთვის შემოღებულია გლუვობის ცნებანი: ერთობლივად ორი ცვლადის მიმართ, თითოეული ცვლადის მიმართ, თითოეული ცვლადის მიმართ კუთხურად და თითოეული ცვლადის მიმართ განზოგადებულ კუთხურად.

დადგენილია, რომ ერთობლივად ორი ცვლადის მიმართ გლუვობა იწვევს თითოეული ცვლადის მიმართ ორივე სახის გლუვობას, ხოლო განზოგადებული კუთხური გლუვობა იწვევს ცვლადთა ერთობლიობით გლუვობას (იხ. თეორემა 7.8.1). ეს თეორემა საშუალებას იძლევა დავასკვნათ ფუნქციის გლუვობა, მისი თითოეული ცვლადის მიმართ განზოგადებული კუთხური გლუვობისას!

გარდა ამისა, რადგან არსებობს ერთი ცვლადის ყველგან გლუვი ფუნქცია, რომელსაც წარმოებული გააჩნია მხოლოდ ნულოვანიანი სიმრავლეზე, ამიტომ წიგნში განხილული და დადგენილია ორი ცვლადით გლუვობის წერტილზე ფუნქციის დიფერენცირებადობის საკმარისი პირობები: ექსტრემუმის არსებობა, სიმეტრიულად დიფერენცირებადობა, ერთ-ერთი მხრიდან დიფერენცირებადობა.

კარგადაა ცნობილი ის მრავალფეროვნება, რაც თანმდევია მრავალგანზომილებიანი ანალიზისთვის. უფრო კონკრეტულად: არსებობს ორმაგი მიმდევრობის და, შესაბამისად, ორმაგი მწკრივის კრებადობის სხვადასხვა ცნება. ორმაგი მწკრივისთვის არსებობს კრებადობა: მართკუთხედების მიხედვით, კვადრატების მიხედვით, წრიული და სამკუთხოვანი. წარმოდგენილ წიგნში განხილულია მხოლოდ მართკუთხედების მიხედვით (პრინგსპაიმის აზრით) და კვადრატების მიხედვით კრებადობანი.

IV ნაწილის 8.1-8.8 პარაგრაფებში თავმოყრილია ორმაგ ტრიგონომეტრიულ, კერძოდ, ფურიეს ორმაგ მწკრივებზე სხვადასხვა მონოგრაფიასა თუ საჟურნალო ლიტერატურაში გადმოცემული ის შედეგები, რომლებიც შეესაბამება ერთჯერადი მწკრივებისთვის ცნობილ ძირითად შედეგებს: კანტორ-ლებეგის თეორემას, დანჟუ-ლუზინის თეორემას, ბესელის იგივეობას და უტოლობას, პარსევალის ტოლობას და რისი-ფიშერის თეორემას, რიმან-ლებეგის თეორემას ფურიეს კოეფიციენტების ნულისკენ კრებადობის შესახებ. ამით დამყოფილებულია მკითხველის ბუნებრივი სურვილი იმის შესახებ, რომ კომპაქტურად იხილოს კლასიკური შედეგების გავრცელება ორმაგ მწკრივებზე.

პარაგრაფში 8.9 დადგენილია ერთზე მეტ ხარისხში ჯამებადი ორი ცვლადის ფუნქციის შესაბამისი ფურიეს განმეორებითი ორივე მწკრივის თითქმის ყველგან კრებადობა (იხ. თეორემა 8.9.1). კერძოდ, ამ თეორემას ადგილი აქვს ჩ. ფეფერმანის უწყვეტი ფუნქციისთვის (იხ. თეორემა 8.9.2), რომლის ფურიეს ორმაგ მწკრივს არ გააჩნია, მართკუთხედების მიხედვით კრებადობის ერთი წერტილიც კი (იხ. პარაგრაფი 6.3 და კერძოდ, დასკვნა 6.3.5).

პარაგრაფებში 8.10, 8.11 და 8.12 მოცემულია ფურიეს ორმაგი მწკრივის მართკუთხოვანი კერძო ჯამების ინტეგრალური წარმოდგენა, მართკუთხედებით კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა და კვადრატით ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს ორმაგი მწკრივის თითქმის ყველგან კრებადობა — ნიკოლოზ (კიტა) თევზაძის თეორემა 8.12.1. აქვე (იხ. შედე-

გი 8.12.5) მოცემულია ჩ. ფეფერმანის $F(x, y)$ ფუნქციის ყველა თვისებათა ნაკრები.

ზემოთ აღნიშნული იყო ლებეგის მნიშვნელოვანი თეორემა იმის შესახებ, რომ ფურიეს მწკრივის წევრობრივი ინტეგრება, თუნდაც ის განშლადი იყოს ყველგან, მართლმომიერი (იხ. თეორემა 4.15.1 და შედეგი 4.15.2).

ამ თეორემების გავრცელება ფურიეს ორმაგი მწკრივებზე მოცემულია ავტორის 2014 და 2017 წლების შრომებში [65] და [67]. აქ დამტკიცებულია

$$\sum_{m,n=1}^n \frac{b_{mn}}{mn}$$

მწკრივის კრებადობა და

$$\sum_{|m| \geq 1, |n| \geq 1} \frac{c_{mn}}{mn} = - \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{b_{mn}}{mn}$$

ტოლობა, სადაც c_{mn} წარმოადგენს ფურიეს ორმაგი ექსპონენტური მწკრივის კოეფიციენტს. ეს შედეგი შეესაბამება ფურიეს ერთჯერადი მწკრივებისთვის ცნობილ შედეგებს: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ კრებადია და

$$\sum_{|n| \geq 1} \frac{c_n}{n} = -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}.$$

აქვე აღნიშნულია (იხ. პარაგრაფი 8.15), რომ ლოკალიზების რიმანის პრინციპს ადგილი არ აქვს ფურიეს ორმაგი მწკრივის მართკუთხედების მიხედვით კრებადობისას.

დამტკიცებულია, რომ ორი ცვლადის ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს განმეორებითი მწკრივები R^2 შეჯამებადია თითქმის ყველგან (იხ. პარაგრაფი 8.16).

მიმაჩნია, რომ წინამდებარე წიგნი წარმატებით შეასრულებს გზამკვლევის ფუნქციას ზუსტი და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის ბაკალავრებისთვის, მაგისტრანტებისა და დოქტორანტებისთვის თბილისის, ქუთაისის, ბათუმისა და თელავის უნივერსიტეტებში.

შინაარსი

რეზიუმე	iii
ნაწილი I ფურიეს მწკრივები ერთი ცვლადის ფუნქციებისთვის	1
შესავალი I ნაწილისათვის	3
თავი 1 ძირითადი ცნებანი	7
1.1 ფუნქციის ლუწობა და კენტობა	7
1.2 ფუნქციის პერიოდულობა	11
1.3 ტრიგონომეტრიული სისტემის ორთოგონულობა	14
1.4 ტრიგონომეტრიული მწკრივის ფორმები	19
1.5 შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივი	27
თავი 2 ფურიეს მწკრივთა ზოგადი საკითხები	32
2.1 ფურიეს ფორმულები	32
2.2 ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის ცნება	36
2.3 ლუწ და კენტ ფუნქციათა ფურიეს მწკრივები	38
2.4 ფურიეს მწკრივი $2l$ პერიოდის ფუნქციისთვის	40
2.5 ძირითადი პრობლემები ფურიეს მწკრივებზე	42
2.6 ფურიეს მწკრივი ორთონორმული სისტემისთვის	43
2.7 ფუნქციათა ორთოგონული სისტემის სისრულე	47
2.8 ტრიგონომეტრიული სისტემის სისრულე	49

თავი 3 ფურიეს მწკრივთა კრებადობის ზოგადი საკითხები	54
3.1 ფურიეს თანაბრად კრებადი მწკრივის ჯამი	54
3.2 ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამების L^2 -მინიმალურობა. ბესელის იგივეობა და უტოლობა	57
3.3 ორთონორმულ სისტემაში $S[f]$ -ის L^2 კრებადობა რაიმე $F \in L^2$ ფუნქციისკენ ..	59
3.4 რისი-ფიშერის თეორემა	61
3.5 ჩაკეტილი სისტემა და მის მიმართ $S[f]$ -ის L^2 კრებადობა f -კენ	63
3.6 რისი-ფიშერის თეორემა და პარსევალის ტოლობა ტრიგონომეტრიული სისტემისთვის	66
3.7 პარსევალის ტოლობა ორი ფუნქციის ნამრავლისთვის	69
3.7.1 ზოგადი სისტემისთვის	69
3.7.2 ტრიგონომეტრიული სისტემისთვის	70
3.8 სრული (ჩაკეტილი) სისტემისთვის ფურიეს მწკრივის წევრობრივი ინტეგრება	70
3.9 ერთობლივ შემოსაზღვრული სისტემისთვის ფურიეს კოეფიციენტების კრებადობა ნულისკენ. რიმან-ლებეგის თეორემა	71
3.10 სასრული ვარიაციით ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები	74
3.11 პარამეტრიანი ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტების ნულისკენ თანაბრად კრებადობა	80
3.12 ფორმალური ოპერაციები ფურიეს მწკრივებზე	87
3.12.1 ფორმალური ინტეგრება და გაწარმოება	87
3.12.2 აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციის შემთხვევა	89
3.12.3 აბსოლუტურად უწყვეტი წარმოებულის შემთხვევა	89
3.12.4 ფურიეს მწკრივების შეკრება-გამოკლება	90
3.12.5 ფურიეს მწკრივის გამრავლება მუდმივზე	91
3.12.6 ფურიეს მწკრივი $f(x + \alpha)$ -თვის	91
3.12.7 ფურიეს მწკრივი $f(x)e^{imx}$ ფუნქციისთვის, სადაც m მთელია	91
3.12.8 $ f $ -ის მწკრივი	92

თავი 4 ფურიეს მწკრივთა კრებადობის საკითხები	93
4.1 ფურიეს მწკრივის აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადობის მართი შემთხვევა	93
4.2 დანჟუა-ლუზინის და კანტორ-ლებეგის თეორემები	96
4.3 ღირისლეს გული და შეუღლებული გული	103
4.4 ფურიეს მწკრივის და შეუღლებული მწკრივის კერძო ჯამების ინტეგრალური წარმოდგენები	106
4.5 ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამების გამართივებული ფორმა	109
4.6 ლოკალიზების რიმანის პრინციპი	113
4.7 ღირისლეს გამართივებული გული	114
4.8 ფურიეს მწკრივის კრებადობის კრიტერიუმი	117
4.9 რიმანის აბრით გლუვი ფუნქცია	119
4.10 ფურიეს მწკრივის კრებადობის რიმანის ნიშანი	123
4.11 ფურიეს მწკრივის კრებადობის ღინის ნიშანი	124
4.12 ფურიეს მწკრივის კრებადობის ჟორდანის ნიშანი	127
4.13 ფურიეს მწკრივის კრებადობის ვალე-პუსენის ნიშანი	130
4.14 ფურიეს მწკრივის კრებადობის იანგის, ლებეგის, ლებეგ-გერგენის ნიშნები და დამოკიდებულებანი კრებადობის ნიშნებს შორის	133
4.14.1 იანგის, ლებეგისა და ლებეგ-გერგენის ნიშნები	133
4.14.2 დამოკიდებულებანი კრებადობის ნიშნებს შორის	134
4.15 ფურიეს მწკრივის წევრობრივი ინტეგრება	135
4.15.1 ფურიეს ნამდვილი ფორმის მწკრივის წევრობრივი ინტეგრება	135
4.15.2 ფურიეს ექსპონენტური მწკრივის წევრობრივი ინტეგრება	142
4.15.3 ლებეგის 4.15.1 და 4.15.10 თეორემების შებრუნების შესახებ	145
4.16 აბელის გარდაქმნა. აბელის ლემა და თეორემები	146
4.17 ზოგიერთი ტრიგონომეტრიული მწკრივის შესახებ	151
4.18 ფურიეს მწკრივად გაშლის მაგალითები	154

თავი 5 ფურიესა და რიცხვითი მწკრივების შეჯამებადობის საკითხები	161
5.0 შესავალი	161
5.1 რიცხვითი მწკრივის შეჯამებადობა ჩეზაროს ($C, 1$) მეთოდით	166
5.2 რიცხვითი მწკრივის შეჯამებადობის აბელ-პუასონის (A) მეთოდი	172
5.3 მიმართება ($C, 1$) და (A) მეთოდებს შორის	177
5.4 ზღვარზე გადასვლა მწკრივში	181
5.5 შეჯამებადობის ზოგადი შემთხვევა და ბორელის თეორემა	184
5.6 ტაუბერის ტიპის თეორემები შეჯამებადობის (A) და ($C, 1$) მეთოდებისთვის	187
5.7 ფურიეს მწკრივის შეჯამებადობა ფეიერის მეთოდით	191
5.8 ფეიერ-ლებეგის თეორემა	198
5.9 პუასონის ინტეგრალი	203
5.10 P და Q გულების თვისებები	208
5.11 ფურიეს მწკრივის შეჯამებადობა (A) მეთოდით	212
5.12 უწყვეტი ფუნქციის პუასონის ინტეგრალის ზღვარი	215
5.13 ღირიხლეს პრობლემა წრისთვის	218
5.14 პუასონის ინტეგრალის წარმოებულის ზღვარი	220
5.15 კუთხური (არამხეობითი) მისწრაფების დახასიათება	223
5.15.1 კუთხური (არამხეობითი) ზღვრის ცნება	223
5.15.2 წერტილის კუთხური (არამხეობითი) მისწრაფების პირობები	225
5.15.3 შენიშვნა კუთხური ზღვრის შესახებ	228
5.16 პუასონის ინტეგრალის წარმოებულის კუთხური ზღვარი	228
5.17 პუასონის ინტეგრალის კუთხური ზღვარი	234
5.18 ღირიხლეს განზოგადებული პრობლემა	236
5.19 პუასონის ინტეგრალის წარმოებულის რადიალური ზღვარი	241
5.20 ფურიეს ნამდვილი ფორმის მწკრივის შეჯამებადობა ლებეგის L და L^* მეთოდებით	247

A. ნამდვილი ფორმის ტრიგონომეტრიული მწკრივის შეჯამებადობა L და L^* მეთოდებით	247
B. ფურიეს ნამდვილი ფორმის მწკრივის შეჯამებადობა L და L^* მეთოდებით	249
5.21 ექსპონენტური მწკრივის L და L^* შეჯამებადობა	251
5.22 რიმან-შვარცის მეორე წარმოებული	253
5.23 მწკრივის შეჯამებადობის რიმანის R^2 მეთოდი	257
5.24 შეჯამებადობის R^2 მეთოდის რეგულარულობა	259
5.25 მწკრივისთვის რიმანის ფუნქციის გლუვობა	263
5.26 ფურიეს მწკრივის შეჯამებადობა რიმანის R^2 მეთოდით	266
5.27 მწკრივის შეჯამებადობის რიმანის R^2 მეთოდთან დაკავშირებული ორმაგი ზღვრის შესახებ	268
5.27.1 რიმანის $R^2(l)$ მწკრივისთვის ორმაგი ზღვრის არსებობის პირობა	268
5.27.2 თეორემა 5.27.3-ის გამოყენება კოლმოგოროვის ფუნქციის ყველგან განშლადი ფურიეს მწკრივისთვის	272
5.28 ფუნქციათა წარმოდგენის პრობლემა	273
5.29 ტრიგონომეტრიული მწკრივის კერძო ჯამების ერთი თვისების შესახებ	277
5.30 რიმან-შვარცის მეორე წარმოებული ერთი თვისების შესახებ	281
5.31 ტრიგონომეტრიული მწკრივით ფუნქციის წარმოდგენის ერთადერთობა	282
ნაწილი II ორი ცვლადის ფუნქციასთან ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი მწკრივები	287
შესავალი II ნაწილისათვის	289
თავი 6 ორი ცვლადის ფუნქციასთან ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი ორი მწკრივის თვისებები	291
6.1 ფუბინისა და ტონელის თეორემები	291

6.2	ორი ცვლადის ჯამებად ფუნქციასთან ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი მწკრივები	293
6.3	ფურიეს ორჯერადი მწკრივის შედარება ფურიეს ერთგანზომილებიან ასოცირებულ მწკრივთან	295
6.4	ორი ცვლადის ჯამებადი ფუნქციის წარმოდგენა, მასთან ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი ორი მწკრივის R^2 -ჯამებით	298
6.5	ორი ცვლადის ჯამებად ფუნქციასთან ასოცირებულ, ფურიეს ერთგანზომილებიანი მწკრივების კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები	304
ნაწილი III ორი ცვლადის გლუვი ფუნქციები		307
შესავალი III ნაწილისათვის		309
თავი 7 ორი ცვლადის გლუვი ფუნქციის თვისებები		310
7.1	ორი ცვლადის ფუნქციის გლუვობა და კერძო გლუვობა	310
7.2	ორი ცვლადის გლუვი ფუნქციის დიფერენცირებადობა ექსტრემუმის წერტილზე	313
7.3	სიმეტრიულად დიფერენცირებადი ორი ცვლადის გლუვი ფუნქციის დიფერენცირებადობა	314
7.4	ორი ცვლადის ცალმხრივ დიფერენცირებადი გლუვი ფუნქციის დიფერენცირებადობა	318
7.5	ორი ცვლადის ფუნქციის სიმეტრიული დიფერენციალის წარმოდგენა ცალმხრივი დიფერენციალებით	320
7.6	ორი ცვლადის ფუნქციის გლუვობა და თითოეული ცვლადით კუთხური გლუვობა	321
7.7	ორი ცვლადის ფუნქციის გლუვობა და თითოეული ცვლადით კუთხურად განზოგადებული გლუვობა	322
7.8	ორი ცვლადის ფუნქციის გლუვობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები	323

7.9 ორი ცვლადის ჯამებად ფუნქციასთან ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი მწკრივების კრებადობის საკმარისი პირობები	325
ნაწილი IV რამდენიმე შედეგი ორმაგი მწკრივების შესახებ	329
შესავალი IV ნაწილისათვის	331
თავი 8 რიცხვითი და ფურიეს ორმაგი მწკრივების შესახებ	334
8.1 რიცხვითი ორმაგი მიმდევრობისა და ორმაგი მწკრივის კრებადობის ცნებები	334
8.2 ფურიეს ტრიგონომეტრიული ორმაგი მწკრივები	336
8.3 კანტორ-ლებეგის თეორემის განზოგადებები	338
8.4 დანუა-ლუზინის თეორემის განზოგადება	341
8.5 ფურიეს ორმაგი მწკრივის აბსოლუტურად კრებადობის პირობები	341
8.6 ბესელის იგივეობა და უტოლობა, პარსევალის ტოლობა და რისი-ფიშერის თეორემა ფურიეს ორმაგი მწკრივებისთვის	342
8.6.1 ბესელის იგივეობა	343
8.6.2 ბესელის უტოლობა	343
8.6.3 პარსევალის ტოლობა	343
8.6.4 $S[f]$ მწკრივის L^2 -კრებადობა	343
8.6.5 რისი-ფიშერის თეორემა	343
8.7 რიმან-ლებეგის თეორემის განზოგადება კვადრატით ჯამებადი ფუნქციებისთვის	344
8.8 რიმან-ლებეგის თეორემის განზოგადება ორი ცვლადის ჯამებადი ფუნქციებისთვის	345
8.9 ერთზე მეტ ხარისხში ჯამებადი ორი ცვლადის ფუნქციის ფურიეს განმეორებითი მწკრივების თითქმის ყველგან კრებადობა	348
8.10 ფურიეს ორმაგი მწკრივის მართკუთხოვანი კერძო ჯამების ინტეგრალური წარმოდგენა	351

8.11 ფურიეს ორმაგი მწკრივის მართკუთხედების მიხედვით კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა	352
8.12 კვადრატით ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს ორმაგი მწკრივის კრებადობის შესახებ	354
8.13 ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს ორმაგი მწკრივის კრებადობის საკმარისი პირობები	356
8.14 ფურიეს ორმაგი მწკრივის წევრობრივი ინტეგრების შესახებ	357
8.15 ლოკალიზების რიმანის პრინციპის არამართებულობა ფურიეს ორმაგი მწკრივისთვის	363
8.16 ორი ცვლადის ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს განმეორებითი მწკრივების R^2 შეჯამებადობა	364
 ლიტერატურა	 366
Index	372
წიგნში ციტირებულთა შესახებ	377

ნაწილი I

ფურიეს მწკრივები ერთი ცვლადის
ფუნქციებისთვის

შესავალი | ნაწილისათვის

ფუნქციათა თეორიის უმნიშვნელოვანესი პრობლემაა მოცემული ფუნქციის წარმოდგენა შედარებით მარტივ ფუნქციათა სისტემის მეშვეობით. მარტივ ფუნქციათა ძირითადი სისტემებია: დამოუკიდებელი ცვლადის ნატურალურმაჩვენებლიანი სისტემა და დამოუკიდებელი ცვლადის ჯერადარგუმენტიან ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა სისტემა.

წარმოსადგენი ფუნქციის მიმართ წაყენებული მოთხოვნა — პირობა დამოუკიდებელია იმაზე, თუ რომელი სისტემის მიმართ განიხილება მისი წარმოდგენა.

ხარისხოვანი მწკრივით f ფუნქციის წარმოდგენის საკითხი რაიმე x_0 წერტილის მიდამოში იწყება ფუნქციისთვის ტეილორის მწკრივის კოეფიციენტების პოვნით, რისთვისაც საჭიროა ვიცოდეთ f ფუნქციის ყველა რიგის $f^{(n)}(x_0)$ წარმოებულის მნიშვნელობა x_0 წერტილზე.

მაგრამ, რიცხვითი $f^{(n)}(x_0)$ მიმდევრობის ვერავითარი კარგი თვისებები ვერ უზრუნველყოფს f ფუნქციის წარმოდგენას ტოლობით

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (*)$$

მართლაც, ნამდვილ რიცხვთა ყოველი a_n მიმდევრობისთვის არსებობს ფუნქციათა არათვლადი სიმრავლე, თითოეული რომელთაგანის მაკლორენის მწკრივის კოეფიციენტებია a_n რიცხვები [80]. ეს ფაქტი წარმოადგენს ე. ბორელის შემდეგი თეორემის [26, გვ. 60–64] სრულყოფას: ნამდვილ რიცხვთა ყოველი a_n მიმდევრობისათვის არსებობს ისეთი μ ფუნქცია, რომლის მაკლორენის მწკრივია $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ანუ, რაც იგივეა, $\mu^{(n)}(0) = a_n$.

ამ თეორემის არაბორელისმიერ დამტკიცებაში [80] გამოყენებულია $a_n = n!$ მიმდევრობის შესაბამისი ν ფუნქციის კონსტრუირების მეთოდი, რომლის მაკლორენის მწკრივი $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ კრებადია მხოლოდ $x = 0$ წერტილზე [15, გვ. 90–93]. ამასთან დაკავშირებით საინტერესოა $\lambda(x) = e^{-1/x^2}$, როცა $x \neq 0$ და $\lambda(0) = 0$ ფუნქციის შემთხვევა, რომლის მაკლორენის მწკრივის ყოველი შესაკრები ნულია $\lambda^{(n)}(0) = 0$ ტოლობის გამო და ამიტომ

ეს მწკრივი კრებადი ნულისკენ ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$ წერტილზე მიუხედავად იმისა, რომ λ ფუნქცია ნულია მხოლოდ $x = 0$ წერტილზე [3, გვ. 102-103].

აქედან ამჟღავნა, რომ წარმოსადგენი ფუნქციის წარმოებულები გარკვეულ პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს არა მხოლოდ x_0 წერტილზე, არამედ x_0 წერტილის მიდამოში!

ასეთია ა. პრინგსჰაიმის აუცილებელი და საკმარისი პირობა [26, გვ. 50]¹:

$$\frac{\delta^n}{n!} \sup_{x \in (a,b)} |f^{(n)}(x)| \quad (n = 0, 1, \dots)$$

მიმდევრობის შემოსაზღვრულობა არის აუცილებელი და საკმარისი იმისა, რომ $(*)$ ტოლობა შესრულდეს ყველა იმ $x \in (a, b)$ წერტილზე, რომელიც აკმაყოფილებს $|x - x_0| < \delta$ პირობას.

მწირი დიფერენციალური თვისებების მქონე ჯამებადი ფუნქციის წარმოსადგენად გამოიყენება ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივი. ასეთი მწკრივის კოეფიციენტები ყოველი ჯამებადი ფუნქციისთვის კრებადი ნულისკენ, ხარისხიანი მწკრივის კოეფიციენტებისგან განსხვავებით!

ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის კრებადობის დასადგენად შესაბამისი ფუნქციისკენ ცნობილია უ. დინის, ვ. ჟორდანის, ვალე-პუსენის, ა. ლებეგის და სხვა ნიშნები.

ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის კრებადობის საკითხში პრინციპული მნიშვნელობის თეორემა ეკუთვნის ა. კოლმოგოროვს, რომელმაც 1926 წელს დაადგინა ისეთი ჯამებადი ფუნქციის არსებობა, რომლის ფურიეს მწკრივი განშლადია ყოველ წერტილზე $x \in (-\infty, +\infty)$.

უფრო ადრე კი — დიუბუა-რეიმონმა 1876 წელს, ა. ლებეგმა 1906 წელს და ლ. ფეიერმა 1910 წელს, დაადგინეს წყვეტი ისეთი ფუნქციების არსებობა, რომელთა ფურიეს მწკრივები განშლადია რომელიღაც წერტილებზე.

ამასთან ერთად, ფურიეს მწკრივების წერტილოვანი კრებადობის საკითხში კარგად მუშაობს დინის, ჟორდანის, ვალე-პუსენის და ლებეგის ნიშნები. აქვე უნდა აღინიშნოს ლებეგის მნიშვნელოვანი თეორემა იმის შესახებ, რომ ყოველი ჯამებადი f ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ მწკრივის წევრობრივი ინტეგრებით $[0, 2\pi]$ -ზე მიიღება $\int_0^{2\pi} f(x) dx$ ინტეგრალისკენ კრებადი მწკრივი, თუნდაც $S[f]$ განშლადი იყოს ყველგან, რასაც ადგილი აქვს კოლმოგოროვის მწკრივისთვის. ამ საკითხებზე საუბარია წიგნის მე-4 თავში.

ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს პრობლემა: შესაძლებელია თუ არა ჯამებადი f ფუნქციის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივი გამოყენებული იქნას $f(x)$ მნიშვნე-

¹საკმარისობა დამტკიცებულია [55, გვ. 287]-ში.

ლობების მისაღებად?

ამ პრობლემის გადაწყვეტას ემსახურება ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის წევრების “შეშფოთება” პარამეტრიანი მამრავლით — მაშფოთებელი მამრავლით, რომლის ზღვარია 1.

თუ შეშფოთებით მიღებული მწკრივი კრებადია და მის ჯამს კი გააჩნია ზღვარი პარამეტრის მიმართ, მაშინ თავიდან აღებულ მწკრივს ეწოდება შეჯამებადი იმ მეთოდით, რომელიც შეესაბამება პარამეტრიან მამრავლს (იხ. თავი 5, პარაგრაფი 5.5).

ამ მიმართულებით ცნობილია ბ. რიმანის, ე. ჩეზაროს, აბელ-პუასონის, ა. ლებეგისა და სხვა მეთოდები, რომელნიც თითქმის ყველგან აჯამებენ ყველა ჯამებადი f ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ მწკრივს f -ის მნიშვნელობებისკენ, მათ შორის, კოლმოგოროვის ყველგან განშლად მწკრივსაც კი. ეს მეთოდები, გარდა ლებეგის მეთოდისა, რეგულარულია. ეს ნიშნავს, რომ ყოველ კრებად მწკრივს ის აჯამებს თავისივე ბუნებრივი ჯამისკენ.

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ მწკრივის შეშფოთებას მისი a_k წევრის გამრავლებით მაშფოთებელ $\omega_k(\cdot)$ ფუნქციაზე, შეიძლება ეწოდოს ამ მწკრივისთვის:

(1) $(C, 1)$ მეთოდის მამრავლი, თუ

$$\omega_k(n) = \begin{cases} 1 - \frac{k}{n+1}, & \text{როცა } 0 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{როცა } k > n; \end{cases}$$

(2) (A) მეთოდის მამრავლი, თუ

$$\omega_k(r) = r^k, \quad \text{როცა } 0 < r < 1;$$

(3) (R^2) მეთოდის მამრავლი, თუ

$$\omega_k(h) = \left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2,$$

სადაც მიღებულია შეთანხმება $\omega_0(h) = 1$.

ცალკე უნდა აღინიშნოს ტრიგონომეტრიულ მწკრივთა რიმანის თეორია (1854 წ.). რიმანი იყო პირველი, ვინც დასვა და გადაწყვიტა ტრიგონომეტრიული მწკრივით ფუნქციის წარმოდგენის პრობლემა. ამ პრობლემის გადაწყვეტის მიზნით მან მოახდინა ტრიგონომეტრიული $T(x)$ მწკრივის, რომლის კოეფიციენტები კრებადია ნულისკენ, ორჯერ ფორმალური ინტეგრება და ამ გზით მიიღო უწყვეტი ფუნქცია, ე.წ. T მწკრივისთვის რიმანის

F ფუნქცია. შემოიღო რა ფუნქციის გლუვობის (რიმანის აზრით) ძალზედ მნიშვნელოვანი ცნება, რაც წარმოებადობაზე სუსტია, დაამტკიცა F ფუნქციის ყველგან გლუვობა (გლუვობის წერტილზე ფურიეს მწკრივი კრებადია — იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.10). რიმანმა შემოიღო მეორე სიმეტრიული წარმომავალი (რომელსაც შემდგომში ეწოდა შვარცის მეორე წარმომავალი), სიმბოლურად $F^{(II)}$ და T მწკრივს უწოდა R^2 -შეჯამებადი x წერტილზე $S(x)$ -კენ, როცა არსებობს $F^{(III)}(x)$ და იგი ტოლია $S(x)$ -ის. რიმანის ამ თეორიამ არსებითი როლი შეასრულა ტრიგონომეტრიული მწკრივით ფუნქციის წარმოდგენის ერთადერთობის საკითხში, რომლის თეორია ეკუთვნის გ. კანტორს (1872 წ.). ამ საკითხებზე საუბარია მე-5 თავში.

ყოველივე ზემოთქმულის შესახებ და მათთან დაკავშირებულ საკითხებზეა საუბარი წინამდებარე სახელმძღვანელოს პირველ ნაწილში. ამავე ნაწილში დამატებულია ახალი შედეგები ფურიეს მწკრივის წევრობრივი ინტეგრების შესახებ თეორემის შებრუნების მტკიცება (იხ. თავი 4, ქვეპარაგრაფი 4.15.3), რიმანის R^2 მეთოდით მწკრივის შეჯამებადობასთან დაკავშირებით (იხ. თავი 5, ქვეპარაგრაფი 5.27.1) და უკანასკნელი შედეგის გამოყენებით გამოვლენილია ფურიეს ყველგან განშლადი ა. კოლმოგოროვის მწკრივის ერთი ახალი თვისება (იხ. თავი 5, ქვეპარაგრაფი 5.27.2).

აქვე აღვნიშნავთ, რომ უცხოელ მათემატიკოსთა გვარების ქართულად წარმოთქმისთვის ვისარგებლე ციკინო გაბესკირიას “ქართულ-ინგლისური მათემატიკური ლექსიკონით”, თბილისი, 2018, გვ. 319–380.

თავი 1

ძირითადი ცნებანი

1.1 ფუნქციის ლუწობა და კენტობა

ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ სიმრავლეზე ანუ, რაც იგივეა, რიცხვით $(-\infty, +\infty)$ ღერძზე განსაზღვრულ ნამდვილი მნიშვნელობების მქონე $y = f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ლუწი, თუ ყოველი x -თვის $\mathbb{R}$ -დან სრულდება $f(-x) = f(x)$ ტოლობა. ამრიგად, f ფუნქციის ლუწობის გასარკვევად საჭიროა შევადგინოთ $f(-x) - f(x)$ სხვაობა და თუ ეს სხვაობა აღმოჩნდება ნულის ტოლი ყოველი x -თვის $\mathbb{R}$ -დან, მაშინ f ფუნქცია ლუწია.

რადგან $(x, f(x))$ და $(-x, f(x))$ წერტილები ურთიერთსიმეტრიულია ორდინატთა Oy ღერძის მიმართ, ამიტომ ლუწი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ. მაგალითად, $y = |x|$ და $y = x^2$ ლუწი ფუნქციებია.

$y = f(x)$ ფუნქციას ეწოდება კენტი, თუ ყოველ $x \in \mathbb{R}$ წერტილზე სრულდება $f(-x) = -f(x)$ ტოლობა. მაშასადამე, f ფუნქციის კენტობის დასადგენად საჭიროა განვიხილოთ $f(-x) + f(x)$ ჯამი და თუ ეს ჯამი იქნება ნულის ტოლი ყველა x წერტილზე $\mathbb{R}$ -დან, მაშინ f ფუნქცია კენტია.

ვინაიდან, $(x, f(x))$ და $(-x, -f(x))$ კოორდინატთა სათავის მიმართ წარმოადგენენ სიმეტრიულ წერტილებს, ამიტომ კენტი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია $(0, 0)$ წერტილის მიმართ. მაგალითად, $y = x$, $y = -x$, $y = \sin x$, $y = x^3$ კენტი ფუნქციებია.

შევნიშნოთ, რომ კენტი φ ფუნქციისთვის ადგილი აქვს $\varphi(0) = 0$ ტოლობას. მართლაც, $\varphi(0) = \varphi(-0) = -\varphi(0)$ და, აქედან, $2\varphi(0) = 0$ ანუ $\varphi(0) = 0$.

თუ $y = f(x)$ ფუნქცია კენტია, მაშინ $\psi(x) = |f(x)|$ ფუნქცია ლუწია. მართლაც,

$$\psi(-x) = |f(-x)| = |-f(x)| = |f(x)| = \psi(x).$$

მაგალითად, კენტი $y = \sin x$ ფუნქციის აბსოლუტური მნიშვნელობა $y = |\sin x|$ ლუწი ფუნ-

ქციაა:

$$|\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x|.$$

არსებობენ ფუნქციები, რომელნიც არც ლუწია და არც კენტი.

ასეთებია, მაგალითად, $y = 2^x$, $y = \ln x$, $y = x^2 + x$ ფუნქციები.

მტკიცება 1.1.1. ყოველი f ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია $\mathbb{R}$ -ზე, წარმოდგენილია ლუწი და კენტი ფუნქციების ჯამად.

მართლაც,

$$f_1(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)] \text{ და } f_2(x) = \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)]$$

ლუწი და კენტი ფუნქციებია, შესაბამისად. ამასთან, $f_1(x) + f_2(x) = f(x)$. მაგალითად, $\varphi(x) = 2^x$ ფუნქციისთვის

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2} [2^x + 2^{-x}], \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{2} [2^x - 2^{-x}] \text{ და } 2^x = \varphi_1(x) + \varphi_2(x).$$

მაგალითი 1.1.2. თუ f ფუნქცია ლუწია და დადებითი, მაშინ $F(x) = \ln f(x)$ ფუნქცია ლუწია, რადგან

$$F(-x) = \ln f(-x) = \ln f(x) = F(x).$$

მაგალითი 1.1.3. რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს დადებითი $\varphi(x)$ ფუნქცია, რომ $\phi(x) = \ln \varphi(x)$ ფუნქცია იყოს კენტი? ამის გასარკვევად, როგორც უკვე ვთქვით, აუცილებელი და საკმარისია $\phi(x) + \phi(-x) = 0$ ტოლობის შესრულება ანუ

$$0 = \ln \varphi(x) + \ln \varphi(-x) = \ln [\varphi(x) \cdot \varphi(-x)],$$

საიდანაც ვღებულობთ აუცილებელ და საკმარის პირობას

$$\varphi(x) \cdot \varphi(-x) = 1, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (1.1.1)$$

(1.1.1) პირობას აკმაყოფილებს, მაგალითად, $\varphi(x) = x + \sqrt{1+x^2}$ ფუნქცია, რომელიც დადებითია $\mathbb{R}$ -ზე, ვინაიდან

$$\varphi(x) > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0$$

და

$$\begin{aligned} \varphi(x) \cdot \varphi(-x) &= (\sqrt{1+x^2} + x)(\sqrt{1+(-x)^2} - x) \\ &= (\sqrt{1+x^2} + x)(\sqrt{1+x^2} - x) = (\sqrt{1+x^2})^2 - x^2 = 1 + x^2 - x^2 = 1. \end{aligned}$$

მტკიცება 1.1.4. ორი ფუნქციის ნამრავლი ლუწია, თუ ორივე ფუნქცია ლუწია ან ორივე კენტია.

მართლაც, $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ ნამრავლისთვის გვაქვს

$$f(-x) = \varphi(-x)\psi(-x) = \varphi(x)\psi(x) = f(x), \text{ როცა } \varphi \text{ და } \psi \text{ ლუწია}$$

და

$$\begin{aligned} f(-x) &= \varphi(-x)\psi(-x) \\ &= [-\varphi(x)] \cdot [-\psi(x)] = \varphi(x) \cdot \psi(x) = f(x), \text{ როცა } \varphi \text{ და } \psi \text{ კენტია.} \end{aligned}$$

მტკიცება 1.1.5. ლუწი და კენტი ფუნქციების ნამრავლი კენტია.

მართლაც, ლუწი φ -თვის და კენტი ψ -თვის გვაქვს

$$f(-x) = \varphi(-x)\psi(-x) = \varphi(x)[- \psi(x)] = -\varphi(x)\psi(x) = -f(x).$$

მტკიცება 1.1.6. $[-l, l]$ სეგმენტზე ჯამებადი და ლუწი φ ფუნქციისთვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_{-l}^l \varphi(x) dx = 2 \int_0^l \varphi(x) dx.$$

მართლაც,

$$\int_{-l}^l \varphi(x) dx = \int_{-l}^0 \varphi(x) dx + \int_0^l \varphi(x) dx.$$

x ცვლადის $(-l)$ ცვლადით შეცვლით გვექნება

$$\int_{-l}^0 \varphi(x) dx = \int_l^0 \varphi(-t) (-dt) = - \int_l^0 \varphi(-t) dt = - \int_l^0 \varphi(t) dt = \int_0^l \varphi(t) dt,$$

ამიტომ

$$\int_{-l}^l \varphi(x) dx = \int_{-l}^0 \varphi(x) dx + \int_0^l \varphi(x) dx = 2 \int_0^l \varphi(x) dx.$$

მტკიცება 1.1.7. $[-l, l]$ სეგმენტზე ჯამებადი და კენტი ψ ფუნქციისთვის მართებულია ტოლობა

$$\int_{-l}^l \psi(x) dx = 0.$$

მართლაც, x ცვლადის იმავე გარდაქმნით

$$\int_{-l}^0 \psi(x) dx = \int_l^0 \psi(-t) (-dt) = - \int_l^0 [-\psi(t)] dt = \int_l^0 \psi(t) dt = - \int_0^l \psi(t) dt,$$

ამიტომ

$$\int_{-l}^l \psi(x) dx = - \int_0^l \psi(x) dx + \int_0^l \psi(x) dx = 0.$$

მტკიცება 1.1.8. თუ $[-l, l]$ სეგმენტზე კვადრატით ჯამებადი φ და ψ ფუნქციები ორივე ლუწია ან ორივე კენტია, მაშინ $\int_{-l}^l \varphi(x)\psi(x) dx$ სასრულია და 1.1.4, 1.1.6 მტკიცებებიდან გამომდინარეობს ტოლობა¹

$$\int_{-l}^l \varphi(x)\psi(x) dx = 2 \int_0^l \varphi(x)\psi(x) dx.$$

მტკიცება 1.1.9. თუ $[-l, l]$ სეგმენტზე კვადრატით ჯამებადი φ და ψ ფუნქციებიდან ერთ-ერთი ლუწია, ხოლო დარჩენილი — კენტი, მაშინ 1.1.5 და 1.1.7 მტკიცებებიდან მიიღება ტოლობა

$$\int_{-l}^l \varphi(x)\psi(x) dx = 0.$$

¹ φ და ψ ფუნქციების კვადრატით ჯამებადობა $[-l, l]$ სეგმენტზე ნიშნავს $\int_{-l}^l |\varphi(x)|^2 dx$ და $\int_{-l}^l |\psi(x)|^2 dx$ ინტეგრალების სასრულობას, საიდანაც $|a| |b| \leq \frac{1}{2} (|a|^2 + |b|^2)$ უტოლობის გამოყენებით მიიღება $\int_{-l}^l |\varphi(x)| \cdot |\psi(x)| dx$ ინტეგრალის და, მაშასადამე, $\int_{-l}^l \varphi(x)\psi(x) dx$ ინტეგრალის სასრულობა.

1.2 ფუნქციის პერიოდულობა

რიცხვით $(-\infty, +\infty)$ ღერძზე განსაზღვრულ ნამდვილ $y = f(x)$ ფუნქციას ეწოდება პერიოდული, თუ არსებობს ნულისგან განსხვავებული ისეთი T რიცხვი, რომ ყოველი x -თვის სრულდება ტოლობა

$$f(x + T) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (1.2.1)$$

ასეთ შემთხვევაში, T რიცხვს ეწოდება f ფუნქციის პერიოდი.

შევნიშნოთ, რომ T რიცხვთან ერთად $(-T)$ რიცხვიც f ფუნქციის პერიოდია ანუ $f(x - T) = f(x)$. მართლაც,

$$f(x) = f(x - T + T) = f[(x - T) + T] = f(x - T).$$

ამიტომ T და $-T$ რიცხვებთან ერთად f ფუნქციის პერიოდებია $\pm nT$ რიცხვების უსასრულო სიმრავლე, სადაც $n = 1, 2, \dots$. ამ რიცხვებიდან f ფუნქციის პერიოდად იღებენ უმცირეს დადებითს. უფრო ზუსტად, (1.2.1) ტოლობის შემსრულებელი ყველა დადებითი T რიცხვებიდან უმცირესს, თუკი ასეთი არსებობს, ეწოდება f ფუნქციის ძირითადი პერიოდი ანუ, მოკლედ, პერიოდი.

მაშასადამე, f ფუნქციის პერიოდულობის გასარკვევად საჭიროა განვიხილოთ $f(x + T) - f(x)$ სხვაობა და თუ ეს სხვაობა აღმოჩნდება ნულის ტოლი ყველა x -თვის და ერთი ან რამდენიმე T რიცხვისთვის, მაშინ ასეთ T რიცხვთა შორის დადებითი უმცირესი აიღება f ფუნქციის პერიოდად. ამ თვალსაზრისით $f(x) = 3$ ფუნქციას არ აქვს პერიოდი, თუმცა (1.2.1) ტოლობა მისთვის შესრულებულია ყველა T რიცხვისთვის $(-\infty, +\infty)$ -დან, რომელთა შორის არ არსებობს უმცირესი დადებითი.

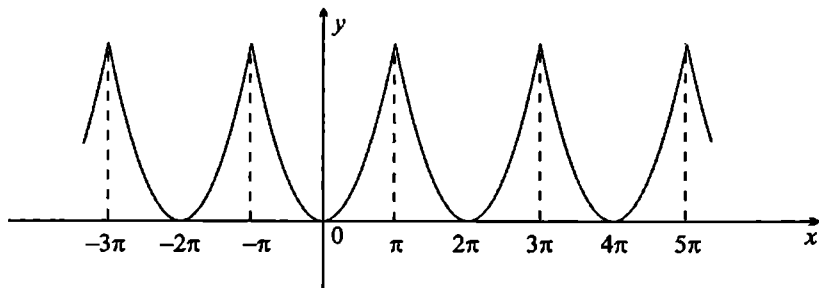
თუ ფუნქცია განსაზღვრული არ არის მთელ $(-\infty, +\infty)$ -ზე, მაშინ ასეთი ფუნქცია არ შეიძლება იყოს პერიოდული. მაგალითად, $f(x) = \sin \sqrt{x}$ არ არის განსაზღვრული $x < 0$ მნიშვნელობებისთვის.

$f(x) = x^2$ ფუნქცია კი არის განსაზღვრული მთელს რიცხვით ღერძზე, მაგრამ არ არის პერიოდული. მართლაც, თუ რაიმე $T > 0$ რიცხვი იქნებოდა მისი პერიოდი, მაშინ ყველა x -თვის უნდა შესრულებულიყო $x^2 = (x + T)^2 = x^2 + 2xT + T^2$ ტოლობა, საიდანაც ვღებულობთ $T^2 + 2xT = 0$ ანუ $T(T + 2x) = 0$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $T = -2x$, რადგან T არ არის ნულის ტოლი. ეს კი შეუძლებელია, ვინაიდან პერიოდი არ შეიძლება დამოკიდებული იყოს x -ზე!

შენიშვნა 1.2.1. $(-\infty, +\infty)$ -ზე განსაზღვრულ $f(x) = x^2$ ფუნქციასთან დაკავშირებით უნდა ითქვას ის, რაც მრავალი ფუნქციის მიმართ გამოგვადგება მომავალში. განვიხილოთ $f(x) = x^2$ ფუნქციის შეზღუდვა $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ანუ $f(x) = x^2$ ფუნქცია მოცემულად მივიღოთ მხოლოდ $[-\pi, \pi]$ -ზე და $(-\infty, +\infty)$ -ზე განვიხილოთ ახალი f^* ფუნქცია, რომელიც $x \in [-\pi, \pi]$ წერტილებზე ტოლია x^2 -ის, ხოლო ამ სეგმენტის გარეთ მდებარე $x + 2\pi k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) წერტილებზეც იყოს x^2 . ასე მიღებულ f^* ფუნქციას ეწოდება f ფუნქციის 2π პერიოდული გაგრძელება $[-\pi, \pi]$ -დან რიცხვით $(-\infty, +\infty)$ ლერძზე და f^* აკმაყოფილებს პირობას

$$f^*(x + 2\pi) = f^*(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

f^* ფუნქციის გრაფიკია ნახაზი 1.



ნახ. 1

მაგალითი 1.2.2. $f(x) = \sin x$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი ანუ, რაც იგივეა, პერიოდი არის 2π . მართლაც,

$$f(x + T) - f(x) = \sin(x + T) - \sin x = 2 \cos \left(x + \frac{1}{2} T \right) \sin \frac{1}{2} T.$$

ამიტომ $f(x + T) - f(x) = 0$ ტოლობა ყველა x -თვის შესრულებდა მხოლოდ მაშინ, როცა $\sin \frac{1}{2} T = 0$ ანუ, როცა $\frac{1}{2} T = k\pi$. აქედან $T = 2k\pi$, სადაც $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. $2\pi k$ რიცხვებს შორის უმცირესი დადებითი რიცხვია 2π , ე.ი. $y = \sin x$ ფუნქციის პერიოდია 2π .

ასევე მტკიცდება $y = \cos x$ ფუნქციის 2π პერიოდულობა.

აქედან გამომდინარეობს, რომ $y = \sin kx$ და $y = \cos kx$ ფუნქციების პერიოდია $\frac{2\pi}{|k|}$, სადაც $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

მაგალითი 1.2.3. $\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$ ფუნქციის პერიოდია $\frac{2\pi}{2} = \pi$, რაც

$$|\sin x| = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$$

ფუნქციის პერიოდიცაა.

ცხადია, თუ $f_1(x)$ და $f_2(x)$ ფუნქციებს აქვს ერთი და იგივე T პერიოდი, მაშინ იგივე T პერიოდი აქვს ამ ფუნქციების ჯამს, სხვაობასა და ნამრავლს. კერძოდ, თუ f ფუნქცია 2π პერიოდულია, მაშინ 2π პერიოდულია f^n ფუნქციაც, $n = 2, 3, \dots$.

თუ პერიოდულ φ_1 და φ_2 ფუნქციებს აქვს განსხვავებული T_1 და T_2 პერიოდები და თუ ეს პერიოდები აკმაყოფილებს $mT_1 = nT_2$ ტოლობას რომელიმე ნატურალური m და n რიცხვებისთვის, მაშინ φ_1 და φ_2 ფუნქციების საერთო პერიოდია $T = mT_1 = nT_2$ რიცხვი. მართლაც,

$$\varphi_1(x + T) = \varphi_1(x + mT_1) = \varphi_1(x) \quad \text{და} \quad \varphi_2(x + T) = \varphi_2(x + nT_2) = \varphi_2(x).$$

მტკიცება 1.2.4. ყველგან წარმოებადი და T პერიოდული f ფუნქციის f' წარმოებული T პერიოდულია.

მართლაც,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(x + h) - f(x)]$$

ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$f'(x + T) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(x + T + h) - f(x + T)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(x + h) - f(x)] = f'(x).$$

მტკიცება 1.2.5. ყველგან წარმოებადი ლუწი ფუნქციის წარმოებული კენტი ფუნქციაა და ყველგან წარმოებადი კენტი ფუნქციის წარმოებული კი — ლუწი.

მართლაც, ლუწი φ ფუნქციისთვის

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\varphi(x + h) - \varphi(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\varphi(-x - h) - \varphi(-x)] \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{-h} [\varphi(-x - h) - \varphi(-x)] = -\varphi'(-x). \end{aligned}$$

ამრიგად, $\varphi'(x) + \varphi'(-x) = 0$, რაც ნიშნავს φ' ფუნქციის კენტობას.

ასევე დამტკიცდება მეორე ფაქტიც.

მტკიცება 1.2.6. 2π პერიოდული და $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი f ფუნქციის შესაბამისი აბსოლუტურად უწყვეტი

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (1.2.2)$$

ფუნქციის 2π პერიოდულობისთვის, აუცილებელი და საკმარისია ტოლობა

$$F(2\pi) = 0 \text{ ანუ } \int_0^{2\pi} f(x) dx = 0. \quad (1.2.3)$$

აუცილებლობა გამომდინარეობს იქიდან, რომ უნდა შესრულდეს $F(2\pi) = F(0)$ ტოლობა F ფუნქციის 2π პერიოდულობის შემთხვევაში, მაგრამ (1.2.2) ტოლობიდან ცხადია, რომ $F(0) = 0$. ამიტომ უნდა შესრულდეს $F(2\pi) = 0$ ტოლობა, რაც ეკვივალენტურია $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$ ტოლობის.

საკმარისობის დასადგენად ვისარგებლოთ

$$F(x + 2\pi) - F(x) = \int_0^{x+2\pi} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt = \int_x^{x+2\pi} f(t) dt$$

დამოკიდებულებებით. მაგრამ f ფუნქციის 2π პერიოდულობის გამო

$$\int_x^{x+2\pi} f(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) dt = F(2\pi).$$

მივიღეთ $F(x + 2\pi) - F(x) = F(2\pi)$. თუკი ადგილი ექნება $F(2\pi) = 0$ ტოლობას, მაშინ შესრულდება $F(x + 2\pi) - F(x) = 0$ ტოლობა, რაც ნიშნავს F ფუნქციის ანუ $\int_0^x f(t) dt$ ინტეგრალის 2π პერიოდულობას.

1.3 ტრიგონომეტრიული სისტემის ორთოგონულობა

ფუნქციათა

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \quad (1.3.1)$$

სისტემას ეწოდება ნამდვილი ფორმის ტრიგონომეტრიული სისტემა, ხოლო ფუნქციათა ორმხრივ უსასრულო

$$\dots, e^{-inx}, e^{-i(n-1)x}, \dots, e^{-ix}, 1, e^{ix}, \dots, e^{i(n-1)x}, e^{inx}, \dots \quad (1.3.2)$$

სისტემას ეწოდება კომპლექსური ფორმის ტრიგონომეტრიული სისტემა.²

(1.3.1) და (1.3.2) სისტემების ყოველი წევრი-ფუნქცია განსაზღვრულია ნამდვილ $(-\infty, +\infty)$ ღერძზე და მათი საერთო პერიოდია 2π (თუმცა $\cos nx$, $\sin nx$ და e^{inx} ფუნქციების პერიოდი $\frac{2\pi}{n} < 2\pi$, როცა $n > 1$) ანუ, რაც იგივეა, ამ სისტემების ყოველი ფუნქცია $x + 2\pi k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) წერტილებზე ღებულობს იმავე მნიშვნელობას, რასაც x წერტილზე.

1. ახლა დავადგინოთ სამომავლოდ საჭირო ზოგიერთი ტოლობა.

ყოველი მთელი $n \neq 0$ რიცხვისთვის გვაქვს ტოლობები:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx &= \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{1}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2} [\pi - (-\pi)] = \pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} \, dx = \pi. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

ახლა კი გამოვიყენოთ კარგად ცნობილი ფორმულები

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)], \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \end{aligned}$$

და ვისარგებლოთ (1.3.3) ტოლობებიდან პირველით. მაშინ ყოველი მთელი m და n რიცხ-

²ზოგჯერ (1.3.2) სისტემას ეწოდება ექსპონენტური ფორმის ტრიგონომეტრიული სისტემა.

ვებისთვის, როცა $m \neq n$ მივიღებთ ტოლობებს

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x + \cos(n+m)x] \, dx = 0, \quad (1.3.4)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] \, dx = 0.$$

დაბოლოს, თუ ვისარგებლებთ (1.3.3) ტოლობებიდან მეორეთი და ფორმულით

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)],$$

მაშინ ყოველი მთელი n და m რიცხვებისთვის მივიღებთ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x] \, dx = 0. \quad (1.3.5)$$

(1.3.3), (1.3.4) და (1.3.5) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ (1.3.1) სისტემის ორი ურთიერთგანსხვავებული ფუნქციის ნამრავლიდან ინტეგრალი $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ნულის ტოლია. ეს თვისება შემდეგნაირად გამოითქმის:

მ თ კ ი ც ე ბ ა 1.3.1. ფუნქციათა (1.3.1) სისტემა ორთოგონულია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე³.

2. შემდგომში ხშირად ვისარგებლებთ შემდეგი ფაქტით.

მ თ კ ი ც ე ბ ა 1.3.2. თუ 2π პერიოდული φ ფუნქცია ჯამებადია 2π სიგრძის რაიმე სეგმენტზე — ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ φ ფუნქცია ჯამებადია პერიოდზე, მაშინ ყოველი ნამდვილი a რიცხვისთვის გვაქვს

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x) \, dx = \int_a^{2\pi+a} \varphi(x) \, dx \quad (1.3.6)$$

ანუ $\phi(a) = \int_a^{2\pi+a} \varphi(x) \, dx$ ფუნქციას ყოველ $a \in (-\infty, +\infty)$ წერტილზე აქვს ერთი და იგივე

$$\phi(0) = \int_0^{2\pi} \varphi(x) \, dx \text{ მნიშვნელობა.}$$

³მაგრამ ორთოგონული არ არის $[0, \pi]$ -ზე: $\int_0^{\pi} \sin x \cos 2x \, dx = -\frac{2}{3} \neq 0$.

მართლაც, გვაქვს ტოლობა

$$\int_a^{2\pi+a} \varphi(x) dx = \int_a^{2\pi} \varphi(x) dx + \int_{2\pi}^{2\pi+a} \varphi(x) dx.$$

მაგრამ, φ ფუნქციის 2π პერიოდულობის გამო გვაქვს

$$\int_{2\pi}^{2\pi+a} \varphi(x) dx = \int_0^a \varphi(x) dx.$$

ამიტომ

$$\int_a^{2\pi} \varphi(x) dx + \int_{2\pi}^{2\pi+a} \varphi(x) dx = \int_a^{2\pi} \varphi(x) dx + \int_0^a \varphi(x) dx = \int_a^{2\pi} \varphi(x) dx.$$

მივიღეთ (1.3.6) ტოლობა.

3. მტკიცება 1.3.1-ით გამოთქმულია ნამდვილი ფორმის ტრიგონომეტრიული (1.3.1) სისტემის ორთოგონულობის თვისება $[-\pi, \pi]$ მონაკვეთზე.

ახლა განვიხილოთ ანალოგიური თვისება კომპლექსური ფორმის ტრიგონომეტრიული (1.3.2) სისტემისთვის. ამ მიზნით, ავიღოთ ნებისმიერი ორი e^{imx} და e^{inx} ფუნქცია (1.3.2) სისტემიდან, სადაც m და n ურთიერთგანსხვავებული ორი მთელი რიცხვია. განვიხილოთ ინტეგრალი $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ამ ფუნქციების ნამრავლიდან

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{inx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m+n)x} dx. \quad (1.3.7)$$

განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

1) თუ $m + n = 0$ ანუ, თუ $n = -m$, მაშინ (1.3.7)-ის მარჯვენა მხარე მიიღებს სახეს $\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$. ამგვარად, ყოველი მთელი m რიცხვისთვის გვაქვს ტოლობა

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-mx} dx = 2\pi. \quad (1.3.8)$$

2) თუ $m + n \neq 0$ ანუ, თუ $m \neq -n$, მაშინ (1.3.7)-ის მარჯვენა ინტეგრალისთვის გვაქვს

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m+n)x} dx &= \frac{1}{i(m+n)} e^{i(m+n)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{-i}{m+n} [e^{i(m+n)\pi} - e^{-i(m+n)\pi}] = \frac{i}{m+n} [e^{-i(m+n)\pi} - e^{i(m+n)\pi}]. \end{aligned}$$

მაგრამ

$$\frac{i}{2} (e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}) = \sin \varphi.$$

ამრიგად,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-i(-n)x} dx = 0, \text{ როცა } m \neq -n$$

ანუ

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-ipx} dx = 0, \text{ როცა } m \neq p. \quad (1.3.9)$$

ახლა (1.3.8) და (1.3.9) ტოლობები შეიძლება ასე გავაერთიანოთ

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{როცა } n = m, \\ 0, & \text{როცა } n \neq m. \end{cases} \quad (1.3.10)$$

(1.3.10) დამოკიდებულება შეიძლება ასე გამოითქვას: (1.3.2) სისტემის რაიმე ფუნქციას თუ გავამრავლებთ ამავე სისტემაში სიმეტრიულ ადგილზე განთავსებულ ფუნქციაზე და მოვასდენთ ამ ნამრავლის ინტეგრებას $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე, მაშინ მივიღებთ 2π -ს. სხვა შემთხვევაში ინტეგრალი ნულის ტოლია. ამგვარად, გვაქვს

მტკიცება 1.3.3. ფუნქციათა (1.3.2) სისტემა ორთოგონულია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე.

ახლა, (1.3.6) ტოლობის გათვალისწინებით, 1.3.1 და 1.3.3 მტკიცებებიდან გამომდინარეობს

მტკიცება 1.3.4. ფუნქციათა (1.3.1) და (1.3.2) სისტემები ორთოგონულია 2π სიგრძის ნებისმიერ სეგმენტზე, კერძოდ, $[0, 2\pi]$ -ზე.

1.4 ტრიგონომეტრიული მწკრივის ფორმები

პარაგრაფ 1.3-ში განხილულ (1.3.1) და (1.3.2) ტრიგონომეტრიულ სისტემებს შეესაბამება ნამდვილი ფორმის

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1.4.1)$$

ტრიგონომეტრიული მწკრივი⁴ და კომპლექსური ფორმის

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \quad (1.4.2)$$

ტრიგონომეტრიული მწკრივი, რომელსაც ზოგჯერ ეწოდება ექსპონენტური ფორმის ტრიგონომეტრიული მწკრივი.

ვინაიდან, (1.4.1) და (1.4.2) მწკრივების თითოეული შესაკრები 2π პერიოდული ფუნქციაა, ამიტომ ამ მწკრივებთან კავშირში განხილული ყოველი f ფუნქცია იგულისხმება $(-\infty, \infty)$ -ზე განსაზღვრულად და 2π პერიოდულად ანუ ყოველ $x \in (-\infty, \infty)$ წერტილზე შესრულებულია $f(x + 2\pi) = f(x)$ ტოლობა.

თუკი 2π სიგრძის რაიმე მონაკვეთზე f ფუნქციის განსაზღვრის წესი ისეთია, რომ ამ მონაკვეთის ბოლოებზე f ღებულობს ურთიერთგანსხვავებულ მნიშვნელობებს, მაშინ f -ის მნიშვნელობა ერთ-ერთ ბოლოზე უნდა შეიცვალოს f -ის მნიშვნელობით მეორე ბოლოზე და ამის შემდეგ მოხდეს, ასე შესწორებული ფუნქციის, 2π პერიოდით გაგრძელება $(-\infty, +\infty)$ -ზე.

1. ნამდვილი ფორმის ტრიგონომეტრიული (1.4.1) მწკრივის კრებადობა რაიმე x_0 წერტილზე $s(x_0)$ ჯამისკენ ნიშნავს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_0) = s(x_0) \quad (1.4.3)$$

ტოლობას, სადაც

$$s_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0)$$

⁴აქ, a_k და b_k კოეფიციენტები არ არის დამოკიდებული ცვლადზე, ხოლო მე- n თავში გვაქვს ერთ ცვლადზე დამოკიდებული კოეფიციენტები.

წარმოდგენს (1.4.1) მწკრივის

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1.4.4)$$

n -ური კერძო ჯამის მნიშვნელობას x_0 წერტილზე.

ბუნებრივია, გავარკვეოთ რა სახეს მიიღებს (1.4.3) ტოლობა, თუ მას ჩაეწერთ კომპლექსური ფორმით ანუ, რაც იგივეა, მას გადაწერთ ორმხრივი (1.4.2) მწკრივის წევრების საშუალებით. ამ მიზნით, (1.4.4) ტოლობაში $\cos kx$ და $\sin kx$ ფუნქციები გამოვსახოთ კომპლექსური ანუ ექსპონენტური ფორმით ოილერის (ილერის)

$$\cos t = \frac{1}{2} (e^{-it} + e^{it}), \quad \sin t = \frac{i}{2} (e^{-it} - e^{it})$$

ფორმულების გამოყენებით. ეს დავიწყოთ $A_k(x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx$ შესაკრების გამოსახვით, როცა $k \geq 1$. გვაქვს

$$A_k(x) = \frac{a_k}{2} (e^{-ikx} + e^{ikx}) + i \frac{b_k}{2} (e^{-ikx} - e^{ikx}),$$

საიდანაც წვერთა დაჯგუფებით მივიღებთ

$$A_k(x) = \frac{1}{2} (a_k - ib_k) e^{ikx} + \frac{1}{2} (a_k + ib_k) e^{-ikx}. \quad (1.4.5)$$

აღნიშვნების

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad c_k = \frac{1}{2} (a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2} (a_k + ib_k), \quad k \geq 1 \quad (1.4.6)$$

შემოღებით, (1.4.5) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}, \quad k \geq 1.$$

ამიტომ (1.4.4) ტოლობა წარმოდგენილი იქნება

$$s_n(x) = c_0 + \sum_{k=1}^n c_k e^{ikx} + \sum_{k=1}^n c_{-k} e^{-ikx}$$

სახით. მაგრამ

$$\sum_{k=1}^n c_{-k} e^{-ikx} = \sum_{k=-1}^{-n} c_k e^{ikx} \quad \text{და} \quad c_k e^{ikx} \big|_{k=0} = c_0.$$

ამიტომ

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{ikx}, \quad s_0(x) = c_0, \quad n \geq 1. \quad (1.4.7)$$

ამრიგად, (1.4.1) მწკრივის n -ური კერძო ჯამი ტოლია ორმხრივი (1.4.2) მწკრივის n -ური სიმეტრიული კერძო ჯამის. ეს ნიშნავს, რომ (1.4.1) მწკრივის კრებადობა ეკვივალენტურია ორმხრივი (1.4.2) მწკრივის სიმეტრიული კრებადობის და მათი ჯამები ტოლია, ანუ

$$s(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0) \right] \quad (1.4.8)$$

ეკვივალენტურია

$$s(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{ikx_0} \quad (1.4.9)$$

ტოლობის.

(1.4.9) ტოლობის შემთხვევაში ამბობენ, რომ ორმხრივი (1.4.2) მწკრივი კრებადია მთავარი მნიშვნელობით $s(x_0)$ რიცხვისკენ და ამ ფაქტს ზოგჯერ წერენ

$$s(x_0) = (PV) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx_0} \quad (1.4.10)$$

სახით. ამრიგად, (1.4.1) მწკრივის კრებადობა $s(x)$ -კენ იწვევს (1.4.2) მწკრივის მთავარი მნიშვნელობით კრებადობას იმავე $s(x)$ -კენ და პირიქით.

გარდა ამისა, (1.4.6) ტოლობებიდან ვლუბულობთ (1.4.1) მწკრივის a_k და b_k კოეფიციენტების

$$a_0 = 2c_0, \quad b_0 = 0, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}), \quad k \geq 1,$$

გამოსახვას (1.4.2) მწკრივის c_k და c_{-k} კოეფიციენტებით.

აქვე შევნიშნოთ, რომ თუ (1.4.1) მწკრივის a_k და b_k კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ (1.4.2) მწკრივის c_k და c_{-k} კოეფიციენტები ურთიერთშეუღლებული კომპლექსური რიცხვებია, ანუ $c_{-k} = \bar{c}_k$ (სიმბოლო $\bar{z}$ აღნიშნავს კომპლექსური z რიცხვისადმი შეუღლებულს: თუ $z = a + ib$, მაშინ $\bar{z} = a - ib$).

2. თუ ორმხრივი (1.4.2) მწკრივში ყველა $c_{-k} = 0$, როცა $k \geq 1$, მაშინ იგი მიიღებს

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k e^{ikx} \quad (1.4.11)$$

სახეს და (1.4.11)-ს ეწოდება ხარისხოვანი ტიპის ტრიგონომეტრიული მწკრივი, რადგანაც იგი არის ხარისხოვანი $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ მწკრივის ფორმალური ჩაწერა ერთეულ ღოვან $|z| = 1$ წრეწირზე, რომელზეც ეს უკანასაკნელი განშლადია, საზოგადოდ.

შევნიშნოთ, რომ (1.4.11) მწკრივი შეიძლება ჩაიწეროს ნამდვილი კოეფიციენტებითაც. ამისთვის ვისარგებლოთ (1.4.6)-ის ბოლო ტოლობით, რომელიშიც უნდა ავიღოთ $c_{-k} = 0$, $k \geq 1$. ამიტომ გვაქვს $a_k + ib_k = 0$, საიდანაც ვღებულობთ $b_k = ia_k$, $k = 1, 2, \dots$. ამის გათვალისწინებით (1.4.11) მიიღებს სახეს

$$\begin{aligned} c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{ikx} &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_k - ib_k) e^{ikx} = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} [a_k - i(ia_k)] e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_k + a_k) e^{ikx} = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{ikx}. \end{aligned}$$

ამრიგად, ხარისხოვანი ტიპის ტრიგონომეტრიულ (1.4.11) მწკრივს ნამდვილი კოეფიციენტებით აქვს სახე

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{ikx}.$$

ხარისხოვანი ტიპის ტრიგონომეტრიულ მწკრივს გააჩნია, საზოგადოდ, უკეთესი თვისება, ვიდრე არახარისხოვან ტრიგონომეტრიულ მწკრივს. არის შემთხვევა, როცა დგინდება რაღაც უარყოფითი თვისების მქონე ტრიგონომეტრიული მწკრივის არსებობა. ამიტომ სასურველია გაირკვეს, არსებობს თუ არა ამ უარყოფითი თვისების მქონე ხარისხოვანი ტიპის ტრიგონომეტრიული მწკრივი?

3. ზემოთ საუბარი გვექონდა ორმხრივი (1.4.2) მწკრივის სიმეტრიულ კრებადობაზე, რაც ნიშნავს ზღვრის არსებობას მისი სიმეტრიული კერძო ჯამებისთვის.

გარდა სიმეტრიული კრებადობისა, ორმხრივი მწკრივისთვის შეიძლება განხილულ იქნას მისი კრებადობის საკითხიც. ამასთან, მიზანშეწონილია ეს საკითხი განვიხილოთ ზოგადი სახის ორმხრივი მწკრივისთვის და არა მარტო ორმხრივი ტრიგონომეტრიული (1.4.2) მწკრივისთვის.

განვიხილოთ რიცხვითი ან ფუნქციური ორმხრივი მიმდევრობა

$$\dots, a_{-n}, a_{-n+1}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots,$$

რომლისგანაც ფორმალურად შევადგინოთ “ორმხრივი მწკრივი”

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k. \quad (1.4.12)$$

შემოვიღოთ $s_{00} = a_0$ აღნიშვნა და ყოველი $m > 0$ და $n > 0$ ნატურალური რიცხვებისთვის შევადგინოთ ჯამი

$$s_{mn} = \sum_{k=-m}^n a_k. \quad (1.4.13)$$

მივიღეთ ორმაგი (s_{mn}) მიმდევრობა, რომლის გაშლილი სახეა

$$\begin{array}{cccc} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & \dots \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \end{array}$$

გ ა ნ ს ა ზ დ ვ რ ა 1.4.1 (კოში). ორმაგ (s_{mn}) მიმდევრობას ეწოდება კრებადი სასრული s რიცხვისკენ, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ ყოველი $m > N$ და $n > N$ რიცხვებისთვის სრულდება უტოლობა

$$|s_{mn} - s| < \varepsilon \quad (1.4.14)$$

და ამ ფაქტს წერენ სახით

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} s_{mn} = s. \quad (1.4.15)$$

(1.4.13) ტოლობის თანახმად, (1.4.14) უტოლობა და (1.4.15) ტოლობა მიიღებენ სახეს

$$\left| s - \sum_{k=-m}^n a_k \right| < \varepsilon, \text{ როცა } m > N, \quad n > N, \quad (1.4.16)$$

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=-m}^n a_k = s, \quad (1.4.17)$$

შესაბამისად.

ორმხრივი მწკრივის კრებადობა დაკავშირებულია გარკვეული სახის ორი “ცალმხრივი” მწკრივის კრებადობასთან შემდეგნაირად.

თეორემა 1.4.2. ორმხრივი (1.4.12) მწკრივის კრებადობისთვის აუცილებელი და საკმარისია, კრებადი იყოს შემდეგი ორი “ცალმხრივი მწკრივი”

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k}. \quad (1.4.18)$$

ხოლო, თუკი ეს მწკრივები კრებადია და, თუ

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = s_1, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} = s_2, \quad (1.4.19)$$

მაშინ (1.4.12) მწკრივის s ჯამისთვის მართებულია $s = s_1 + s_2$ ანუ ადგილი აქვს (1.4.17) ტოლობას.

დამტკიცება. ვთქვათ, ადგილი აქვს (1.4.19) ტოლობებს. მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი ნატურალური M რიცხვი, რომ

$$\left| s_1 - \sum_{k=0}^n a_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left| s_2 - \sum_{k=1}^m a_{-k} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

უტოლობები შესრულებულია ყოველი $m > M$ და $n > M$ რიცხვებისთვის. აქედან გვაქვს

$$\left| (s_1 + s_2) - \sum_{k=-m}^n a_k \right| = \left| \left(s_1 - \sum_{k=0}^n a_k \right) + \left(s_2 - \sum_{k=0}^m a_{-k} \right) \right| < \varepsilon,$$

რაც ნიშნავს (1.4.12) მწკრივის კრებადობას $s_1 + s_2$ რიცხვისკენ.

შეგრუნებით, ვთქვათ, (1.4.12) მწკრივი კრებადია s რიცხვისკენ, ანუ შესრულებულია (1.4.16) უტოლობა და ვაჩვენოთ (1.4.18) მწკრივების კრებადობა. ამ მიზნით ვაჩვენოთ კომის ცნობილი კრიტერიუმის შესრულება ამ მწკრივებისთვის, მაგალითად, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ მწკრივისთვის. ავიღოთ $p > N + 1$ და $q \geq 1$ რიცხვები, მაშინ (1.4.16) უტოლობიდან ვღებულობთ

$$\left| \sum_{k=p}^{p+q} a_k \right| = \left| \left(s - \sum_{k=-m}^{p-1} a_k \right) - \left(s - \sum_{k=-m}^{p+q} a_k \right) \right| < 2\varepsilon,$$

რაც ნიშნავს $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ მწკრივის კრებადობას. ანალოგიურად დამტკიცდება $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k}$ მწკრივის კრებადობა. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა. □

შედეგი 1.4.3. ორმხრივი (1.4.12) მწკრივის კრებადობისთვის აუცილებელია შესრულდეს ორი პირობა:

$$a_n \rightarrow 0 \text{ და } a_{-n} \rightarrow 0, \text{ როცა } n \rightarrow +\infty.$$

შენიშვნა 1.4.4. ორმხრივი (1.4.12) მწკრივის კრებადობიდან გამომდინარეობს ამავე მწკრივის სიმეტრიული კრებადობა და მისი სიმეტრიული (PV) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k$ ჯამი ტოლია მისი-ვე ჩვეულებრივი $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k$ ჯამის, რაც გამომდინარეობს (1.4.16) უტოლობიდან, თუ იქ განვიხილავთ $m = n$ კერძო შემთხვევას.

შებრუნებული ფაქტი მცდარია, საზოგადოდ. მართლაც,

$$a_k = \begin{cases} 1, & \text{როცა } k > 0, \\ 0, & \text{როცა } k = 0, \\ -1, & \text{როცა } k < 0 \end{cases}$$

წევრებიანი ორმხრივი მწკრივისთვის არ სრულდება კრებადობის აუცილებელი პირობა (იხ. შედეგი 1.4.3), ხოლო მისი სიმეტრიული კერძო ჯამები $s_{nn} = 0$ და, მაშასადამე, ის სიმეტრიულად კრებადია ნულისკენ.

4. ორმხრივი (1.4.12) მწკრივის სიმეტრიული კრებადობა ეკვივალენტურია გარკვეული სახის ერთი ცალმხრივი მწკრივის კრებადობის, სახელდობრ, მართებულია

თეორემა 1.4.5. ორმხრივი (1.4.12) მწკრივის სიმეტრიული კრებადობისთვის აუცილებელი და საკმარისია

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + a_{-k}) \quad (1.4.20)$$

მწკრივის კრებადობა. ამასთან, (1.4.20) მწკრივის კრებადობის შემთხვევაში მისი ჯამი ტოლია ორმხრივი (1.4.12) მწკრივის სიმეტრიული ჯამის.

დამტკიცება. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ (1.4.20) მწკრივის n -ური კერძო ჯამი

$$a_0 + (a_1 + a_{-1}) + (a_2 + a_{-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_{-(n-1)}) + (a_n + a_{-n})$$

ტოლია (1.4.12) მწკრივის სიმეტრიული

$$s_{nn} = a_{-n} + a_{-n+1} + \cdots + a_{-1} + a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

n -ური კერძო ჯამის. თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 1.4.6. თეორემა 1.4.5-ის კერძო შემთხვევაა პუნქტ 1-ში დადგენილი ფაქტი იმის შესახებ, რომ ორმხრივი

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \quad (1.4.21)$$

მწკრივის სიმეტრიული კრებადობა ეკვივალენტურია

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

მწკრივის კრებადობის. ამასთან, ამ მწკრივებს აქვთ ტოლი ჯამები.

შენიშვნა 1.4.7. კომპლექსური ფორმის

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \quad (1.4.22)$$

ტრიგონომეტრიული მწკრივი არის კომპლექსური $z = r e^{ix}$ ცვლადის მიმართ $0 < r < 1$ რგოლში ანალიზური $f(z)$ ფუნქციის

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k, \quad 0 < |z| < 1. \quad (1.4.23)$$

ლორანის მწკრივით წარმოდგენის (1843 წ.) ზღვრული, საზოგადოდ, არამართებული შემთხვევა, როცა (1.4.23) ტოლობის მარჯვენა მხარეში ფორმალურად ჩაისმება $r = 1$ და ვლუბულობთ (1.4.21) გამოსახულებას, ანუ კომპლექსური ფორმის ტრიგონომეტრიულ მწკრივს, რომლის კრებადობა კავშირში არ არის (1.4.23) ტოლობის $f(e^{ix})$ მარცხენა მხარესთან, რადგან $f(e^{ix})$ განსაზღვრული არ არის $|z| = 1$ წრეწირზე!

როგორც ვნახეთ, (1.4.22)-ის სიმეტრიული კერძო ჯამები ემთხვევა (1.4.1) მწკრივის კერძო ჯამებს (იხ. (1.4.7) ტოლობა) და ამით ამოიწურება კავშირი (1.4.1)-სა და (1.4.2) ფორმის ტრიგონომეტრიულ მწკრივებს შორის.

მეორეს მხრივ, ანალიზურ ფუნქციითა თეორიაში ლორანის (1.4.23) მწკრივის კრებადობა $f(z)$ ჯამისკენ გაგებულია როგორც $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ და $\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^{-k}$ მწკრივების კრებადობა! ჩვენ კი ვნახეთ (იხ. თეორემა 1.4.2), რომ (1.4.23) მწკრივის $f(z)$ ჯამის ამგვარად გაგება

ემთხვევა განსაზღვრა 1.4.1-ში მოცემულ კოშის აზრით⁵ (1.4.23) მწკრივის კრებადობას (იხ. ტოლობა (1.4.17)):

$$f(z) = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=-m}^n c_k z^k.$$

1.5 შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივი

განვიხილოთ ერთეულოვან ღია წრეში

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (1.5.1)$$

ანალიზური ფუნქცია, სადაც

$$f(z) = u(z) + iv(z), \quad z = re^{ix} = r(\cos x + i \sin x), \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

(1.5.1) ტოლობაში ჩავწეროთ $c_0 = \frac{1}{2} a_0$ და $c_n = a_n - ib_n, n = 1, 2, \dots$ მაშინ

$$[r(\cos x + i \sin x)]^n = r^n (\cos nx + i \sin nx)$$

მუავრის ფორმულის გამოყენებით, (1.5.1) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$u(re^{ix}) + iv(re^{ix}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) r^n (\cos nx + i \sin nx). \quad (1.5.2)$$

მაგრამ

$$\begin{aligned} (a_n - ib_n) r^n (\cos nx + i \sin nx) \\ = (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n + i(a_n \sin nx - b_n \cos nx) r^n. \end{aligned}$$

⁵ორმაგი მიმდევრობის კოშის აზრით კრებადობის ის ცნება, რაც მოცემულია 1.4.1 განსაზღვრით, შემოიღო კოშიმ 1821 წლის შრომაში "Analyse algébrique". შტოლცმა კი ჩამოაყალიბა ორმაგი (s_{mn}) მიმდევრობის, კოშის აზრით, კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა (1884 წ.).

$|s_{m+p, n+q} - s_{mn}| < \varepsilon$, როცა $m > N$, $n > N$ და $p, q = 0, 1, 2, \dots$,

რომლის დამტკიცება მოგვცა 1897 წელს პრინცსპაიმმა [48, გვ. 42].

ამიტომ ტოლობა (1.5.2) ასე ჩაიწერება

$$\begin{aligned} u(re^{ix}) + iv(re^{ix}) \\ = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx) r^n. \end{aligned}$$

ორი კომპლექსური სიდიდის ტოლობა კი ნიშნავს მათი ნამდვილი ნაწილების ურთიერთ-ტოლობას და, აგრეთვე, წარმოსახვითი ნაწილების ტოლობას.

მაშასადამე,

$$u(re^{ix}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n \quad (1.5.3)$$

და

$$v(re^{ix}) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx) r^n \quad (1.5.4)$$

წარმოადგენს ანალიზური f ფუნქციის ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს. კომპლექსური ანალიზიდან კი ვიცით, ერთეულოვან ღია წრეში ანალიზური f ფუნქციის $u(re^{ix})$ ნამდვილი ნაწილი და $v(re^{ix})$ წარმოსახვითი ნაწილი წარმოადგენს იმავე წრეში ჰარმონიულ ფუნქციებს, ანუ u და v აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0. \quad (1.5.5)$$

ამასთან, $v(re^{ix})$ ფუნქციას ეწოდება **ჰარმონიულად** შეუღლებული $u(re^{ix})$ ფუნქციისადმი. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, ერთეულოვან ღია წრეში ჰარმონიულ $u(re^{ix})$ ნამდვილ ფუნქციას მოეძებნება ისეთი ჰარმონიული $v(re^{ix})$ ნამდვილი ფუნქცია იმავე წრეში, რომ $u(re^{ix}) + iv(re^{ix})$ იქნება ერთეულოვან ღია წრეში ანალიზური ფუნქცია. ასეთი v ფუნქცია მრავალია და ისინი ერთიმეორისგან განსხვავდება მუდმივი შესაკრებით. იმ მიზნით, რომ ყოველ u -ს შეესაბამებოდეს ამ თვისების ერთადერთი v , მიღებულია შეთანხმება $v(0) = 0$. ამის გამო (1.5.4) მწკრივის თავისუფალი წევრი ნულის ტოლია.

როცა $r = 1$, მაშინ (1.5.3) და (1.5.4) ტოლობების მარცხენა მხარეები განსაზღვრული არაა, საზოგადოდ, ხოლო მათი მარჯვენა მხარეებიდან მიიღება

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1.5.6)$$

და

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx) \quad (1.5.7)$$

ტრიგონომეტრიული მწკრივები, ფორმალურად, რომელთაც შეიძლება ჰქონდეს კრებადობის წერტილები. $\frac{1}{2} a_0$ -ს ეწოდება (1.5.6) მწკრივის თავისუფალი წევრი.

(1.5.1) ტოლობის მარჯვენა მხარე $r = 1$ მნიშვნელობისთვის იძლევა ხარისხოვანი ტიპის

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (1.5.8)$$

ტრიგონომეტრიულ მწკრივს (იხ. პარაგრაფი 1.4, ტოლობა (1.4.11)), რომელსაც შეიძლება ჰქონდეს კრებადობის წერტილები, თუმცა მის $f(z)$ მარცხენა მხარეს შეიძლება აზრი არ ჰქონდეს $r = 1$ მნიშვნელობისთვის. აქ ლაპარაკია იმაზე, რომ (1.5.6), (1.5.7) და (1.5.8) მწკრივები შეიძლება აზრის მატარებელი იყოს, ხოლო მათი მარცხენა მხარეები $u(e^{ix})$, $v(e^{ix})$ და $f(e^{ix})$ წარმოადგენს აზრს მოკლებულ სიმბოლოებს.

აქ ნათქვამთან დაკავშირებით უნდა აღინიშნოს ლუზინის ერთ-ერთი საინტერესო შედეგი [30, გვ. 274, 455]: არსებობს ერთეულოვან ღია $|z| < 1$ წრეში ანალიზური ფუნქცია

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad c_n = a_n - ib_n \rightarrow 0.$$

ისეთი, რომ (1.5.8), (1.5.6) და (1.5.7) მწკრივები განშლადია ყოველ $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე.

(1.5.7) მწკრივს (ნულოვანი თავისუფალი წევრით) ეწოდება (1.5.6) მწკრივისადმი შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივი. ეს ტერმინი მომდინარეობს იქიდან, რომ $v(re^{ix})$ არის $u(re^{ix})$ -სადმი ჰარმონიულად შეუღლებული ფუნქცია.

ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის მძლავრი აპარატი საშუალებას იძლევა გამოვლენილ იქნეს მჭიდრო კავშირი $u(re^{ix})$ და $v(re^{ix})$ ფუნქციებს შორის ერთეულოვან ღია წრეში. მაგრამ, აშკარად გამოხატული კავშირი (1.5.6) და (1.5.7) ტრიგონომეტრიულ მწკრივებს შორის არ არსებობს. ამიტომ ძალიან რთულია მათ შორის იმ ფარული კავშირების გამოვლენა, რაც მათ გადმოჰყვა (1.5.3) და (1.5.4) ტოლობებიდან.

სადღეისოდ საკმაოდ ვრცელია ის სამეცნიერო ინფორმაცია, რაც მოპოვებულია შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივების შესახებ. ამ გამოკვლევებს ხშირი და მრავალმხრივი გამოყენება აქვს თეორიული მათემატიკის მონათესავე დარგებშიც.

ბუნებრივია სურვილი იმის შესახებ, რომ დასახელდეს (1.5.2) ტოლობიდან ნამდვილი $v(re^{ix})$ პარმონიული ფუნქციისადმი შეუღლებული პარმონიული ფუნქცია. ამ მიზნით საკმარისია შევნიშნოთ, რომ $u + iv$ ფუნქციასთან ერთად ანალიზურია $-i(u + iv) = v - iu$ ფუნქცია. აქედან ჩანს, რომ $v(z)$ ფუნქციისადმი პარმონიულად შეუღლებულია $[-u(z)]$ ფუნქცია. ამასთან, უნდა გვქონდეს $[-u(0)] = 0$ ანუ $u(0) = 0$. ეს ნიშნავს, რომ (1.5.7) მწკრივის შეუღლებულია $-\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ მწკრივი.

მაშასადამე, ნამდვილი ფორმის რაიმე ტრიგონომეტრიული მწკრივისადმი შეუღლებულის შეუღლებული არის $(-)$ ნიშნით აღებული საწყისი მწკრივი თავისუფალი წევრის გარეშე.

აქვე აღვნიშნოთ, რომ კომპლექსური ფორმით მოცემული

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \quad (1.5.9)$$

ტრიგონომეტრიული მწკრივისადმი, სადაც c_0 -ს ეწოდება (1.5.9) მწკრივის თავისუფალი წევრი, შეუღლებულია ისევ კომპლექსური ფორმის

$$-i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\operatorname{sign} k) c_k e^{ikx} \quad (1.5.10)$$

ტრიგონომეტრიული მწკრივი, სადაც sign სიმბოლო განსაზღვრულია ტოლობით

$$\operatorname{sign} 0 = 0, \quad \operatorname{sign} k = \frac{k}{|k|} \quad (k \neq 0).$$

(1.5.10) მწკრივისადმი შეუღლებული მწკრივის განსაზღვრის მიზნით, (1.5.10) გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-i \operatorname{sign} k) c_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k e^{ikx},$$

რომლისადმი შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივი იქნება

$$-i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\operatorname{sign} k) d_k e^{ikx} = -i \sum (\operatorname{sign} k) (-i \operatorname{sign} k) c_k e^{ikx}.$$

ეს კი არის მწკრივი $-\sum_{|k| \geq 1} c_k e^{ikx}$ ნულოვანი თავისუფალი წევრით.

ამრიგად, (1.5.9)-ის ორჯერ შეუღლება იძლევა $(-)$ ნიშნით აღებულ (1.5.9) მწკრივს თავისუფალი წევრის გარეშე.

მაშასადამე, ნამდვილი და კომპლექსური ფორმის ტრიგონომეტრიული მწკრივის ორჯერ შეუღლება იძლევა, თავიდან აღებულ მწკრივს $(-)$ ნიშნით ნულოვანი თავისუფალი წევრით.

ტრიგონომეტრიულ (1.5.6) მწკრივსა და მისადმი შეუღლებულ (1.5.7) მწკრივს შორის კავშირი, მათი კრებადობის თვალსაზრისით, მოიცემა პლესნერის მნიშვნელოვანი თეორემით: თუ ტრიგონომეტრიული (1.5.6) მწკრივი კრებადია რაიმე $E \subset [0, 2\pi]$ ზომად სიმრავლეზე, მაშინ მისადმი შეუღლებული (1.5.7) მწკრივი კრებადია თითქმის ყველგან E -ზე (იხ. [8, გვ. 605], [41]).

თავი 2

ფურიეს მწკრივთა ზოგადი საკითხები

2.1 ფურიეს ფორმულები

ვთქვათ, ნამდვილი ფორმის

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (2.1.1)$$

ტრიგონომეტრიული მწკრივი თანაბრად კრებადია $(-\infty, +\infty)$ ღერძზე, რომლის ჯამი აღ-
ვნიშნით $f(x)$ -ით. ამიტომ f ფუნქცია უწყვეტია $[-\pi, \pi]$ -ზე, 2π პერიოდულია და

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (2.1.2)$$

რადგან (2.1.2) მწკრივი თანაბრად კრებადია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე, ამიტომ მართლზომიერ-
რია მისი წევრობრივი ინტეგრება, რაც (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.3, ტოლობა (1.3.3))

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

ტოლობების გათვალისწინებით მოგვცემს

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + 0 = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi = \pi a_0.$$

ამრიგად,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx. \quad (2.1.3)$$

ახლა (2.1.2) მწკრივის გამრავლებით $\cos nx$ ფუნქციაზე, სადაც $n \geq 1$ რაიმე ფიქსირებული რიცხვია, მივიღებთ ტოლობას

$$f(x) \cos nx = \frac{a_0}{2} \cos nx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx \cos nx + b_k \sin kx \cos nx). \quad (2.1.4)$$

დავამტკიცოთ, რომ (2.1.4) მწკრივიც თანაბრად კრებადია $[-\pi, \pi]$ -ზე. ამ მიზნით განვიხილოთ (2.1.1) მწკრივის m -ური კერძო ჯამი

$$s_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

$f(x)$ -კენ (2.1.2) მწკრივის თანაბრად კრებადობის გამო $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე, ყოველ $\varepsilon > 0$ რიცხვს ეთანადება ნატურალური N რიცხვი ისეთი, რომ ყოველი x -თვის $[-\pi, \pi]$ -დან სრულდება უტოლობა

$$|f(x) - s_m(x)| < \varepsilon, \text{ როცა } m \geq N.$$

ცხადია, რომ $s_m(x) \cos nx$ ნამრავლი წარმოადგენს (2.1.4) მწკრივის m -ურ კერძო ჯამს და

$$|f(x) \cos nx - s_m(x) \cos nx| = |f(x) - s_m(x)| |\cos nx| \leq \varepsilon$$

ყველა x -თვის $[-\pi, \pi]$ -დან და ყოველი $m \geq N$ რიცხვისთვის. ეს კი ნიშნავს (2.1.4) მწკრივის თანაბრად კრებადობას $[-\pi, \pi]$ -ზე. ამიტომ მართებულია ტოლობა

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx \, dx \right). \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

თავი 1-ის 1.3 პარაგრაფში დამტკიცებული ტოლობებიდან ვღებულობთ, რომ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx \, dx = 0 \text{ ყოველი } k\text{-თვის}$$

და

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx = 0, \text{ როცა } k \neq n.$$

ამიტომ (2.1.5) ტოლობის მარჯვენა მხარეში დავვრჩება ერთადერთი

$$a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos nx dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = a_n \cdot \pi$$

შესაკრები. მაშასადამე, (2.1.5) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n \cdot \pi.$$

აქედან კი

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.1.6)$$

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

რადგან (2.1.3) მიიღება (2.1.6) ტოლობიდან, თუ ამ უკანასკნელში ავიღებთ $n = 0$ მნიშვნელობას, ამიტომ (2.1.3) და (2.1.6) ფორმულები შეიძლება გაერთიანდეს შემდეგი სახით

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

მაშასადამე, დამტკიცდა შემდეგი

თ ე ო რ მ ა 2.1.1. თუ ნამდვილი ფორმის

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2.1.7)$$

ტრიგონომეტრიული მწკრივი **თანაბრად კრება** ($-\infty, +\infty$) ღერძზე $f(x)$ ფუნქციისკენ, მაშინ (2.1.7) მწკრივის კოეფიციენტებისთვის ადგილი აქვს ტოლობებს

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.1.8)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.1.9)$$

ანუ, რაც იგივეა, (2.1.7) მწკრივი არის f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი.

ანალოგიურად დამტკიცდება, თავი 1-ის 1.3 პარაგრაფიდან (1.3.10) ტოლობების გამოყენებით, შემდეგი

თეორემა 2.1.2. თუ კომპლექსური ფორმის

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \quad (2.1.10)$$

ტრიგონომეტრიული მწკრივი სიმეტრიულად თანაბრად კრებადია $(-\infty, +\infty)$ ღერძზე $\varphi(x)$ ფუნქციისკენ, მაშინ (2.1.10) მწკრივის კოეფიციენტებისთვის მართებულია ტოლობები

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{-inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.1.11)$$

ანუ, (2.1.10) მწკრივი არის φ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი.

შენიშვნა 2.1.3. (2.1.8) და (2.1.9) ფორმულების მისაღებად აუცილებელი არაა (2.1.1) მწკრივის თანაბრად კრებადობა $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე. თუ თვალს გავადევნებთ ამ ფორმულების დადგენისთვის ჩატარებულ მსჯელობებს დავადგენთ, რომ (2.1.8) და (2.1.9) ფორმულების მისაღებად საკმარისია შემდეგი პირობები:

- (1) f ფუნქცია ჯამებადია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე;
- (2) f ფუნქცია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე წარმოდგენილია ტოლობით

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad -\pi \leq x \leq \pi; \quad (2.1.12)$$

- (3) მართებულია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე წევრობრივი ინტეგრება (2.1.12) მწკრივის და ყველა იმ მწკრივის, რომელიც მიიღება (2.1.12) მწკრივის გამრავლებით $\cos nx$ და $\sin nx$ ფუნქციებზე, $n = 1, 2, \dots$

ამიტომ იმ ტრიგონომეტრიული მწკრივის ძიებისას, რომლის ჯამი იქნება $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი f ფუნქცია, პირველ რიგში უნდა განვიხილოთ ის ტრიგონომეტრიული მწკრივი, რომლის კოეფიციენტები განსაზღვრულია (2.1.8) და (2.1.9) ტოლობებით და მხოლოდ ამის შემდეგ გავარკვიოთ არის თუ არა ასეთი ტრიგონომეტრიული მწკრივის ჯამი f ?

აქვე აღვნიშნოთ, რომ (2.1.8) და (2.1.9) ფორმულებში ხდება 2π პერიოდული ფუნქციების ინტეგრება. ამიტომ ამ ფორმულებში $[-\pi, \pi]$ მონაკვეთი შეიძლება შეიცვალოს 2π სიგრძის ნებისმიერი მონაკვეთით ანუ, რაც იგივეა, (2.1.8) და (2.1.9) ფორმულების გვერდით ადგილი აქვს ტოლობებს

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots),$$

ყოველი $a \in (-\infty, +\infty)$ რიცხვისთვის.

ყველაფერი, რაც აქ ითქვა მართებულია (2.1.10) მწკრივის და (2.1.11) კოეფიციენტის მიმართაც, ცხადია.

მაშასადამე, განსაკუთრებული ყურადღების ღირსია (2.1.1) და (2.1.10) სახის ის მწკრივები, რომელთა კოეფიციენტები გამოთვლილია (2.1.8), (2.1.9) და (2.1.11) ფორმულებით, შესაბამისად.

შემდგომი ჩვენი ყურადღება კონცენტრირებული იქნება, ძირითადად, ასეთი კოეფიციენტების მქონე მწკრივებზე.

2.2 ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის ცნება

ვთქვათ, ნამდვილი ან კომპლექსური მნიშვნელობების მქონე f ფუნქცია განსაზღვრულია ნამდვილ $(-\infty, +\infty)$ ღერძზე და 2π პერიოდულია, რაც ნიშნავს $f(x+2\pi) = f(x)$ ტოლობის შესრულებას ყოველი $x \in (-\infty, +\infty)$ მნიშვნელობისთვის. ასეთ შემთხვევაში, ადგილი აქვს $f(x+2n\pi) = f(x)$ ტოლობასაც ყოველი მთელი $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ მნიშვნელობისთვის.

ამის გამო, 2π პერიოდული ფუნქციები ძირითადად მოიცემა 2π სიგრძის რაიმე ინტერვალზე და შემდგომ ხდება მისი 2π პერიოდით გაგრძელება აღებული ინტერვალის გარეთ. უმრავლეს შემთხვევაში, ძირითადი ინტერვალია $(-\pi, \pi)$ ან $(0, 2\pi)$.

ახლა შემოვიღოთ ფურიეს ანალიზისთვის უმნიშვნელოვანესი ცნება — **ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის ცნება**.

გ ა ნ ს ა ზ დ ვ რ ა 2.2.1 (ფურიე (1805 წ.)). $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი¹ და 2π პერიოდული f ფუნქციის ნამდვილი ფორმის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივი ეწოდება

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2.2.1)$$

ტრიგონომეტრიულ მწკრივს, ხოლო a_0 , a_n და b_n ($n = 1, 2, \dots$) რიცხვებს — f ფუნქციის ფურიეს ნამდვილი ფორმის კოეფიციენტები და ისინი მოიცემა შემდეგი ტოლობებით

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \quad (2.2.2)$$

იმის მისანიშნებლად, რომ (2.2.1) მწკრივი არის f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი, წერენ

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (2.2.3)$$

ან შემდეგი სახით

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (2.2.4)$$

ცხადია, რომ f ფუნქციის ფურიეს a_n და b_n კოეფიციენტები იქნება ნამდვილი ან კომპლექსური რიცხვები იმის მიხედვით, f ფუნქცია ნამდვილია თუ კომპლექსური.

გ ა ნ ს ა ზ დ ვ რ ა 2.2.2. $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი და 2π პერიოდული f ფუნქციის კომპლექსური, ანუ ექსპონენტური, ფორმის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივი ეწოდება

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

“ორმხრივ უსასრულო” მწკრივს, სადაც ფურიეს კომპლექსური ფორმის c_n კოეფიციენტები მოიცემა

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.2.5)$$

¹კომპლექსური ფუნქციის ჯამებადობა რაიმე ინტერვალზე ნიშნავს მისი ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების ჯამებადობას იმავე ინტერვალზე.

ტოლობებით და წერენ

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad (2.2.6)$$

ან

$$S[f] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}. \quad (2.2.7)$$

მაშასადამე, (2.2.3) და (2.2.6) დამოკიდებულებებში $\sim$ სიმბოლო მიანიშნებს მხოლოდ იმას, რომ ამ დამოკიდებულებების მარჯვენა მხარე ანუ, რაც იგივეა (2.2.4) და (2.2.7) მწკრივები, სიმბოლურად $S[f]$, შედგენილია ფორმალურად f ფუნქციის ფურიეს a_n , b_n და c_n კოეფიციენტებისგან, შესაბამისად.

რადგან (2.2.2) და (2.2.5) კოეფიციენტები ჩაწერილია ლებეგის აბრით ინტეგრებადი f ფუნქციის ანუ, რაც იგივეა, ჯამებადი f ფუნქციისთვის, ამიტომ (2.2.4) და (2.2.7) მწკრივებს ეწოდება ფურიე-ლებეგის მწკრივი ანუ, მოკლედ, ნამდვილი და კომპლექსური ფორმის ფურიეს მწკრივი f ფუნქციისთვის.

ამრიგად, f ფუნქციის $S[f]$ მწკრივის a_n , b_n და c_n კოეფიციენტები გამოთვლილია ძირითად პერიოდზე ჯამებადი f ფუნქციისთვის.

გარდა ამისა, $S[f]$ მწკრივისადმი შეუღლებული (1.5.7) და (1.5.10) მწკრივები თავი 1-ის 1.5 პარაგრაფიდან, აღინიშნება $\tilde{S}[f]$ სიმბოლოთი. იქვე აღნიშნულია ფაქტი იმის შესახებ, რომ ორჯერ შეუღლება იძლევა $(-)$ ნიშნით აღებულ საწყის $S[f]$ მწკრივს ნულოვანი თავისუფალი წევრით.

შ ე ნ ი შ ვ ა 2.2.3. მოცემული f ფუნქციისთვის ფურიეს $S[f]$ მწკრივის სახეს, ანუ $S[f]$ მწკრივის კოეფიციენტებს f -თან ერთად განსაზღვრავს ის ინტერვალის, რომელზეც უნდა გაიშალოს f ფუნქცია ფურიეს $S[f]$ მწკრივად. სათანადო მაგალითები მოცემული იქნება თავი 4-დან პარაგრაფ 4.18-ში.

2.3 ლუწ და კენტ ფუნქციათა ფურიეს მწკრივები

1. ვთქვათ, $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი f ფუნქცია ლუწია, ანუ f -ის 2π პერიოდით $(-\infty, +\infty)$ -ზე გაგრძელებული ფუნქციაა ლუწი. f და $\cos nx$ ($n = 0, 1, \dots$) ფუნქციების ლუწობის გამო $f(x) \cos nx$ ნამრავლი ლუწია, ხოლო $f(x) \sin nx$ კენტია $\sin nx$, $n = 1, 2, \dots$ ფუნქციის კენტობის გამო (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.1, მტკიცებანი 1.1.4 და 1.1.5).

ახლა f ფუნქციის ფურიეს

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad \text{და} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (2.3.1)$$

კოეფიციენტების (იხ. თავი 2, პარაგრაფი 2.2, ტოლობები (2.2.2)) მიმართ $f \cos nx$ -ის ლუწობისა და $f(x) \sin nx$ კენტობის (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.1, მტკიცებანი 1.1.6 და 1.1.7) გამოყენებით მივიღებთ

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2.3.2)$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

ამრიგად, ლუწი f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი შედგება მხოლოდ კოსინუსებისგან, ე.ი.

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

სადაც ფურიეს a_n კოეფიციენტები მოიცემა (2.3.2) ტოლობებით.

2. ვთქვათ, f არის $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი კენტი ფუნქცია, ანუ კენტია მისი 2π პერიოდული გაგრძელება. $\cos nx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) ფუნქციის ლუწობისა და f -ის კენტობის გამო $f(x) \cos nx$ ნამრაველი კენტი ფუნქციაა, ხოლო $f(x) \sin nx$ ლუწია $\sin nx$ -ის კენტობის გამო (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.1, მტკიცებანი 1.1.4 და 1.1.5). ახლა $f(x) \cos nx$ -ის კენტობის გამო და $f(x) \sin nx$ -ის ლუწობის გათვალისწინებით, (2.3.1) ტოლობები მიიღებს (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.1, მტკიცებანი 1.1.7 და 1.1.8) სახეს

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.3.3)$$

მაშასადამე, კენტი f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი შეიცავს მხოლოდ სინუსებს, ე.ი.

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (2.3.4)$$

სადაც ფურიეს b_n კოეფიციენტები მოცემულია (2.3.3) ტოლობებით.

შენიშვნა 2.3.1. (2.3.4) დამოკიდებულებიდან აშკარაა, რომ კენტი ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია ნულისკენ $x = k\pi$ წერტილებში, მიუხედავად იმისა ნულია თუ არა $f(k\pi)$ მნიშვნელობები, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

3. არის შემთხვევები, როცა საჭიროა $[0, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი f ფუნქციის გაშლა ფურიეს ისეთ მწკრივად, რომელიც შედგება მხოლოდ კოსინუსებისგან ან მხოლოდ სინუსებისგან ანუ, მოკლედ, საჭიროა f -ის გაშლა ფურიე-კოსინუს მწკრივად ან ფურიე-სინუს მწკრივად. ორივე ეს შემთხვევა განვიხილოთ ცალ-ცალკე.

როგორც ზემოთ ვნახეთ, ფურიე-კოსინუს მწკრივი შეესაბამება ლუწ ფუნქციას. ამიტომ მოვახდინოთ f -ის ლუწობით გაგრძელება $[-\pi, 0]$ სეგმენტზე ტოლობით $f(-x) = f(x)$, როცა $0 \leq x \leq \pi$. ამ გზით მიღებული “გაგრძელებული” ფუნქცია ლუწია $[-\pi, \pi]$ -ზე. ზემოთ ჩატარებული მსჯელობით მივიღებთ $b_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) და

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.3.5)$$

როგორც ვხედავთ, (2.3.5) ტოლობაში მონაწილეობს f -ის მნიშვნელობები მხოლოდ $[0, \pi]$ -ზე. მაშასადამე, ფაქტობრივად შეგვიძლია არ მოვახდინოთ f -ის ლუწობით გაგრძელება $[-\pi, 0]$ -ზე. თუ გვინდა $[0, \pi]$ -ზე ჯამებადი იგივე f ფუნქცია გავშალოთ ფურიე-სინუს მწკრივად, მაშინ f უნდა გავაგრძელოთ $[-\pi, 0]$ -ზე კენტობით, ე.ი. $f(-x) = -f(x)$, როცა $0 \leq x \leq \pi$.

კენტობიდან გამომდინარე, გაგრძელებულ ფუნქციას უნდა მივანიჭოთ $f(0) = 0$ თვისება. გაგრძელებული კენტი ფუნქციის მიმართ ზემოთ ჩატარებული მსჯელობით მივიღებთ $a_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) და

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.3.6)$$

(2.3.6) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ f ფუნქციის კენტობით გაგრძელება $[0, \pi]$ სეგმენტიდან $[-\pi, 0]$ -ზე სავალდებულო არაა.

2.4 ფურიეს მწკრივი 2ℓ პერიოდის ფუნქციისთვის

აქამდე ვიხილავდით $(-\infty, +\infty)$ ღერძზე განსაზღვრულ 2π პერიოდულ ფუნქციებს, რომლებიც ჯამებადია პერიოდზე ანუ ამ ფუნქციებს, პერიოდზე ჯამებადობასთან ერთად, აქვს

$f(x + 2\pi) = f(x)$ თვისება ყოველ $x \in (-\infty, +\infty)$ წერტილზე.

ახლა განვიხილოთ $2l$ სიგრძის მონაკვეთზე ჯამებადი და $2l$ პერიოდული ფუნქციები, ანუ $f(x)$ ფუნქციას $2l$ სიგრძის მონაკვეთზე ჯამებადობასთან ერთად ყოველ $x \in (-\infty, +\infty)$ წერტილზე აქვს $f(x + 2l) = f(x)$ თვისება, სადაც $l > 0$ რაიმე მუდმივია f ფუნქციისთვის.

შემოვიღოთ ახალი l ცვლადი $t = \frac{\pi}{l} x$ ტოლობით. როცა $-\pi \leq x \leq \pi$, მაშინ $-\pi \leq t \leq \pi$.

$[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი $\varphi(t) = f\left(\frac{l}{\pi} t\right)$ ფუნქცია 2π პერიოდულიცაა. მართლაც,

$$\varphi(t + 2\pi) = f\left[\frac{l}{\pi}(t + 2\pi)\right] = f\left(\frac{l}{\pi}t + \frac{l}{\pi} \cdot 2\pi\right) = f\left(\frac{l}{\pi}t + 2l\right) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = \varphi(t).$$

ახლა განვიხილოთ φ ფუნქციის შესაბამისი ფურიეს $S[\varphi]$ მწკრივი

$$\varphi \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

სადაც

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos nt \, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin nt \, dt.$$

მაგრამ

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \cos nt \, dt \quad \text{და} \quad \frac{l}{\pi} t = x.$$

ამიტომ

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(x) \cdot \frac{\pi}{l} \cos n \frac{\pi}{l} x \, dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos n \frac{\pi}{l} x \, dx$$

და $\varphi(t) = f(x)$. მაშასადამე, გვაქვს

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n \frac{\pi}{l} x + b_n \sin n \frac{\pi}{l} x \right),$$

სადაც

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos n \frac{\pi}{l} x \, dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin n \frac{\pi}{l} x \, dx.$$

შ ე ნ ი შ ე ნ ა 2.4.1. თუ f ფუნქცია არ არის პერიოდული, მაგრამ ჯამებადია რაიმე $[a, b]$ სეგმენტზე, სადაც $-\pi < a < b < \pi$, მაშინ როგორ შევადგინოთ ფურიეს მწკრივი f -თვის?

ამ მიზნით შეგვიძლია განვიხილოთ $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი რაიმე φ ფუნქცია, რომელსაც მოეთხოვება ერთადერთი $\varphi(x) = f(x)$ პირობა, როცა $a \leq x \leq b$, ანუ f არის φ -ის შეზღუდვა $[a, b]$ -ზე. ამის შემდეგ კი მოვახდენთ φ ფუნქციის 2π პერიოდით გაგრძელებას $(-\infty, +\infty)$ -ზე.

ამგვარად, ვღებულობთ $[-\pi, \pi]$ -ზე ჯამებად უამრავ ფუნქციას, რომლებიც $[a, b]$ სეგმენტზე ემთხვევა f -ს. თითოეულ ასეთ φ ფუნქციას შეესაბამება ფურიეს $S[\varphi]$ მწკრივი.

შემდგომში დამტკიცებული იქნება ლოკალიზების რიმანის უმნიშვნელოვანესი პრინციპი (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.6), რომლის თანახმად ყველა ეს $S[\varphi]$ მწკრივი ერთი და იგივე თვისებისაა (a, b) -ში აღებულ ყოველ წერტილზე მისი კრებადობის თვალსაზრისით: $x \in (a, b)$ წერტილზე ან ყველა კრებადია ან ყველა განშლადია.

2.5 ძირითადი პრობლემები ფურიეს მწკრივებზე

პერიოდზე ჯამებადი f ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ მწკრივის მიმართ ისმის მრავალი პრობლემა, მათ შორისაა:

- (1) წერტილოვნად კრებადია თუ არა $S[f]$ მწკრივი;
- (2) თუ $S[f]$ მწკრივი წერტილოვნად კრებადია, მაშინ ამ მწკრივის ჯამი რა კავშირშია f ფუნქციასთან;
- (3) თუ f ფუნქცია ეკუთვნის რომელიმე L^p კლასს, მაშინ რა შეიძლება ითქვას $S[f]$ მწკრივის კრებადობის შესახებ L^p -ნორმით;
- (4) $S[f]$ მწკრივის არაკრებადობის შემთხვევაში მითითებულ იქნას “განზოგადებული ჯამი”-ს მოძებნის წესები, ე.წ. შეჯამებადობის მეთოდები. თანაც სასურველია “განზოგადებული ჯამი” დაემთხვეს $S[f]$ მწკრივის ჯამს, როცა $S[f]$ კრებადია. შეჯამებადობის ასეთ მეთოდს ეწოდება **რეგულარული**;
- (5) თუ მოცემულია რიცხვთა მიმდევრობა და თუ ცნობილია, რომ ეს მიმდევრობა წარმოადგენს რაღაც ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს, მაშინ შეიძლება თუ არა ამ ფუნქციის პოვნა?

აქ ჩამოთვლილი პრობლემების გარდა ვრცლად განიხილება შემდეგი პრობლემა: რაიმე წესით მოცემული 2π პერიოდული F ფუნქციისთვის, რომელიც შეიძლება იყოს არაჯამებადი ან უსასრულოდ დიდი მნიშვნელობების მქონეც კი დადებითი ზომის სიმრავლეზე,

შეიძლება თუ არა მოიძებნოს ისეთი ტრიგონომეტრიული მწკრივი, რომლის “ჯამი რაღაც აზრით” იქნება $F(x)$?

უკანასკნელი პრობლემა ცნობილია, როგორც მოცემული ფუნქციის ტრიგონომეტრიული მწკრივით წარმოდგენის პრობლემა.

ყველა ამ პრობლემაზე სადღეისოდ არსებობს ვრცელი ლიტერატურა, მიმოხილვითი შრომების სახითაც კი (იხ. თავი 5, პარაგრაფი 5.28).

2.6 ფურიეს მწკრივი ორთონორმული სისტემისთვის

როგორც ვნახეთ (იხ. პარაგრაფი 2.1, თეორემა 2.1.1), $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე თანაბრად კრებული ტრიგონომეტრიული მწკრივის

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2.6.1)$$

ჯამი რომ იყოს უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია აუცილებელია, რომ a_n და b_n რიცხვები წარმოადგენდეს f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს, ანუ უნდა გვექნოდეს ტოლობები

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \quad (2.6.2)$$

ტრიგონომეტრიული (2.6.1) მწკრივი არის კერძო შემთხვევა ე.წ. ორთოგონული მწკრივისა, რომლის ცნებასაც ახლა შემოვიღებთ.

ფუნქციათა $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემას, სადაც ყოველი $\varphi_n \in L^2(a, b)$, ეწოდება **ორთოგონული** $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ ადგილი აქვს შემდეგ დამოკიდებულებებს

$$\int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = 0, \quad \text{როცა } m \neq n; \quad m = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.6.3)$$

$$\int_a^b \varphi_n^2(x) dx \neq 0, \quad \text{როცა } n = 1, 2, \dots$$

ორთოგონულ $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემას ეწოდება **ორთონორმული** $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ ადგი-

ლი აქვს ტოლობებს

$$\int_a^b \varphi_n^2(x) dx = 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.6.4)$$

როგორც ვიცით, ტრიგონომეტრიული

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

სისტემა ორთოგონულია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.3) და მისი ნორმირებისთვის უნდა გამოვიყენოთ

$$\begin{aligned} \|1\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi, & \|\cos kx\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kt dt = \pi, \\ \|\sin kx\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kt dt = \pi \end{aligned}$$

ტოლობები (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.3). ამიტომ $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ორთონორმულია სისტემა

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \quad (2.6.5)$$

სწორედ $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ორთონორმული ტრიგონომეტრიული (2.6.5) სისტემის მიმართ f ფუნქციის ფურიეს მწკრივს აქვს (2.6.1) სახე, სადაც ამ მწკრივის კოეფიციენტები გამოითვლება (2.6.2) ფორმულებით.

საზოგადოდ, რაიმე F ფუნქციის ფურიეს მწკრივი $[a, b]$ სეგმენტზე, (2.6.3) და (2.6.4) თვისებების მქონე $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ ეწოდება $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi_n(x)$ მწკრივს და წერენ

$$F \sim \sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi_n(x),$$

სადაც ფურიეს d_n კოეფიციენტები F ფუნქციისთვის მოიცემა ტოლობებით

$$d_n = \int_a^b F(x) \varphi_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.6.6)$$

აქ იგულისხმება, რომ ყველა (2.6.6) ინტეგრალი არსებობს და სასრულია.

თუკი $[a, b]$ სეგმენტზე ორთოგონული $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა არ არის ნორმირებული, ე.ი. $\int_a^b \psi_n^2(x) dx = 1$ ტოლობა დარღვეულია n -ის ერთი მაინც მნიშვნელობისთვის, მაშინ

$$\left\{ \frac{\psi_n(x)}{\|\psi_n\|^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

სისტემა, სადაც

$$\|\psi_n\| = \left(\int_a^b \psi_n^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

არის ნორმირებული $[a, b]$ -ზე და მის მიმართ ფურიეს მწკრივს რაიმე Ψ ფუნქციისთვის აქვს სახე

$$\Psi \sim \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \psi_n(x).$$

სადაც Ψ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ მოიცემა ტოლობები

$$\mu_n = \frac{1}{\|\psi_n\|^2} \int_a^b \Psi(x) \psi_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.6.7)$$

თუ გვაქვს ნამდვილი x ცვლადის კომპლექსური $\varphi_n(x)$ ფუნქციების $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა, მაშინ ამ სისტემას ეწოდება ორთოგონული $[a, b]$ სეგმენტზე, როცა

$$\int_a^b \varphi_m(x) \overline{\varphi}_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n)$$

და

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx \neq 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

სადაც $\overline{\varphi}_n(x)$ არის $\varphi_n(x)$ -სადმი კომპლექსურად შებულებული.

ასეთ შემთხვევაში f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს აქვს სახე

$$c_n = \int_a^b f(x) \overline{\varphi}_n(x) dx,$$

როცა $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა ნორმირებულია და

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_a^b f(x) \overline{\varphi_n(x)} dx$$

არანორმირებული $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემისთვის; აქ

$$\|\varphi_n\| = \left(\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

2π სიგრძის ნებისმიერ სეგმენტზე, მაგალითად, $[-\pi, \pi]$ -ზე, ორთოგონულია კომპლექსური ფუნქციების $\{e^{inx}\}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) სისტემა, რადგან

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx \\ &= \frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{i(n-m)} (1 - 1) = 0, \quad \text{როცა } n \neq m. \end{aligned}$$

ხოლო

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-inx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} |e^{inx}|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi, \quad \text{როცა } m = n,$$

ე.ი.

$$\|e^{inx}\| = \sqrt{2\pi}.$$

ამიტომ $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ნორმირებულია $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}\}$ სისტემა ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), რომლის მიმართ f ფუნქციის ფურიეს მწკრივს აქვს “**ორმხრივ უსასრულო**” მწკრივის სახე

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad (2.6.8)$$

სადაც f ფუნქციის ფურიეს c_n კოეფიციენტები მოცემულია ტოლობებით

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

შეგვიშნოთ, რომ (2.6.8) მწკრივის კრებადობა გაიგება, როგორც მისი სიმეტრიული კერძო

$$s_{nn} = \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{ikx}$$

ჟამების მიმდევრობის კრებადობა, რაც იწოდება (2.6.8) მწკრივის მთავარი მნიშვნელობით კრებადობად (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.4). (2.6.8) მწკრივის კი იწოდება f ფუნქციის ფურიეს მწკრივის კომპლექსური ანუ ექსპონენტური ფორმა.

2.7 ფუნქციათა ორთოგონული სისტემის სისრულე

გ ა ნ ს ა ზ დ ვ რ ა 2.7.1. $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულ ფუნქციათა $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემას ეწოდება სრული $p \geq 1$ ხარისხში $[a, b]$ -ზე ჯამებად ფუნქციათა $L^p[a, b]$ სივრცეში $([a, b]$ -ზე უწყვეტ ფუნქციათა $C[a, b]$ სივრცეში), თუ $f \in L^p[a, b]$ (შესაბამისად, $f \in C[a, b]$) ფუნქციის ორთოგონულობა $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემის ყველა ფუნქციასთან იწვევს f -ის ნულობას თითქმის ყველგან $[a, b]$ -ზე (შესაბამისად, ყველგან $[a, b]$ -ზე). სხვაგვარად რომ ვთქვათ, ყველა

$$\int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.7.1)$$

ტოლობის შესრულება იწვევს $f(x) = 0$ ტოლობას თითქმის ყველა $x \in [a, b]$ წერტილზე (შესაბამისად, ყველა $x \in [a, b]$ წერტილზე).

(2.7.1) ტოლობის ინტეგრალების არსებობისთვის ყველა $f \in L[a, b]$ ფუნქციისთვის, აუცილებელია და საკმარისი $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემის ერთობლივი შემოსაზღვრულობა $[a, b]$ -ზე, ანუ არსებობა ისეთი დადებითი $M < +\infty$ რიცხვისა, რომ უტოლობა $|\varphi_n(x)| \leq M$ სრულდებოდეს ყველა n -თვის და ყოველი x -თვის: $x \in [a, b]$, $n = 1, 2, \dots$.

ნებისმიერი $f \in L^p[a, b]$, $p > 1$, ფუნქციისთვის რომ იარსებოს (2.7.1) ინტეგრალებმა, აუცილებელი და საკმარისია ყოველი $\varphi_n(x)$ ფუნქცია ეკუთვნოდეს $L^q[a, b]$, $q > 1$, სივრცეს, სადაც $p > 1$ და $q > 1$ რიცხვები აკმაყოფილებს პირობას $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

ყოველი $f \in C[a, b]$ ფუნქციისთვის (2.7.1) ინტეგრალების არსებობისთვის აუცილებელია და საკმარისი თითოეული $\varphi_n(x)$ ეკუთვნოდეს $L[a, b]$ -ს.

თუკი $\varphi_n(x)$ ფუნქციები კომპლექსურია, ე.ი. კომპლექსური მნიშვნელობების მქონეა, მაშინ (2.7.1) პირობა იცვლება პირობით

$$\int_a^b f(x) \overline{\varphi_n(x)} dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

სადაც $\overline{\varphi_n(x)}$ აღნიშნავს $\varphi_n(x)$ ფუნქციისადმი კომპლექსურად შუღლუბულს.

ფუნქციათა სრული სისტემის თვისება მოცემულია შემდეგი თეორემით.

თეორემა 2.7.2. თუ $f \in L^p[a, b]$ და $g \in L^p[a, b]$, $p \geq 1$, ფუნქციებისთვის უტოლობა $f(x) \neq g(x)$ სრულდება დადებითი ზომის რაიმე სიმრავლეზე $[a, b]$ -დან, მაშინ $L^p[a, b]$ სივრცეში სრული ნებისმიერი $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები არ დაემთხვევა g ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს ანუ, რაც იგივეა,

$$\int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx = \int_a^b g(x) \varphi_n(x) dx \quad (2.7.2)$$

ტოლობა არ შესრულდება ყველა n -თვის ანუ კიდევ, f -ისა და g -ს ფურიეს მწკრივები $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ არ იქნება ერთი და იგივე.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, f და g ფუნქციებს აქვს ერთი და იგივე გამწკრივება $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ, რაც ნიშნავს (2.7.2) ტოლობის შესრულებას ყველა $n = 1, 2, \dots$ მნიშვნელობისთვის, ანუ ყველა n -თვის სრულდება ტოლობა

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] \varphi_n(x) dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

უკანასკნელი ტოლობა ნიშნავს, რომ $f(x) - g(x)$ ფუნქცია ორთოგონულია ყოველი ფუნქციისადმი $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემიდან. ამან კი $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემის სისრულის გამო $L^p[a, b]$ სივრცეში, უნდა გამოიწვიოს $f(x) - g(x) = 0$ ტოლობა თითქმის ყველა x -თვის $[a, b]$ -დან. ეს კი ეწინააღმდეგება თეორემის პირობას იმის შესახებ, რომ $f(x) - g(x) = 0$ ტოლობა დარღვეულია დადებითი ზომის რაღაც სიმრავლეზე $[a, b]$ -დან. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

წინადადება 2.7.3. ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე ორთოგონული $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა სრულია $L[a, b]$ სივრცეში. მაშინ $f \in L[a, b]$ ფუნქციის ფურიეს ყველა კოეფიციენტის ნულობისთვის $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ, აუცილებელი და საკმარისია f -ის ნულობა თითქმის ყველგან $[a, b]$ -ზე.

დამტკიცება.

აუცილებლობა. თუ f ფუნქციის ფურიეს ყველა კოეფიციენტი ნულია, მაშინ $f(x) = 0$ თითქმის ყველა $x \in [a, b]$ წერტილზე. მართლაც, თუ $f(x) \neq 0$ დადებითი ზომის რაიმე სიმრავლეზე $[a, b]$ -დან, მაშინ f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც იქნება ნულისგან განსხვავებული, თეორემა 2.7.2-ის ძალით, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას.

საკმარისობა. თუ $f(x) = 0$ თითქმის ყველა $x \in [a, b]$ წერტილზე, მაშინ f -ის ფურიეს ყველა კოეფიციენტი $\{f_n(x)\}$ -ის მიმართ ნულია (იხ. პარაგრაფი 2.6, ტოლობა (2.6.7)). $\square$

2.8 ტრიგონომეტრიული სისტემის სისრულე

2π პერიოდული და $[-\pi, \pi]$ -ზე ჯამებადი ფუნქციების სიმრავლე, როგორც წესი, აღინიშნება $L[-\pi, \pi]$ სიმბოლოთი, ხოლო 2π პერიოდული და $(-\infty, +\infty)$ ღერძზე უწყვეტი ანუ, მოკლედ, წრეწირზე უწყვეტი ფუნქციების სიმრავლე — $C[-\pi, \pi]$ სიმბოლოთი.

ჩვენი მიზანია დავამტკიცოთ ლებეგის შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2.8.1 (ლებეგი). ტრიგონომეტრიული

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \quad (2.8.1)$$

სისტემა სრულია $C[-\pi, \pi]$ და $L[-\pi, \pi]$ სივრცეებში.

დამტკიცება.

$C[-\pi, \pi]$ -თვის. დავუშვათ $f \in C[-\pi, \pi]$ ფუნქციის ყველა a_n და b_n კოეფიციენტის ნულობა, ე.ი. გვაქვს (იხ. პარაგრაფი 2.2, ტოლობები (2.2.2))

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx &= 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx &= 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

ტოლობები, საიდანაც ყოველი ტრიგონომეტრიული $T(x)$ პოლინომისთვის გამომდინარეობს ტოლობა²

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T(x) dx = 0. \quad (2.8.2)$$

უნდა დავამტკიცოთ, რომ $f(x) = 0$ ყველა წერტილზე. დავუშვათ ამის საწინააღმდეგო, ანუ ვუშვებთ ისეთი x_0 წერტილის არსებობას, რომ $|f(x_0)| > 0$. f ფუნქციის უწყვეტობის გამო, კერძოდ, x_0 წერტილზე, არსებობს $\varepsilon > 0$ და $\delta > 0$ რიცხვები ისეთი, რომ $|f(x)| > \varepsilon$, როცა $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \equiv I(\delta)$. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $f(x) > \varepsilon$, როცა $x \in I(\delta)$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში მსჯელობას ჩავატარებთ $(-f)(x)$ ფუნქციისთვის).

განვიხილოთ ტრიგონომეტრიული პოლინომი

$$t(x) = 1 + \cos(x - x_0) - \cos \delta.$$

თუ $x \in I(\delta)$, მაშინ $|x - x_0| \leq \delta$ და

$$t(x) \geq 1 + \cos \delta - \cos \delta = 1.$$

თუ $x \in [-\pi, \pi] \setminus I(\delta)$, მაშინ

$$|t(x)| \leq 1. \quad (2.8.3)$$

როცა $x \in (x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2)$, მაშინ $\cos(x - x_0) > \cos \delta/2$ და

$$t(x) > 1 + \cos \frac{\delta}{2} - \cos \delta = 1 + 2 \sin \frac{3}{4} \delta \sin \frac{\delta}{4} \equiv 1 + q.$$

რადგან (2.8.2)-ს ადგილი აქვს ნებისმიერი ტრიგონომეტრიული $T(x)$ პოლინომისთვის, ამიტომ მას ადგილი ექნება, როცა $T(x) = [t(x)]^n$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)[t(x)]^n dx = 0.$$

მაგრამ

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)[t(x)]^n dx = \int_{I(\delta)} + \int_{[-\pi, \pi] \setminus I(\delta)} \quad (2.8.4)$$

²ტრიგონომეტრიული $T(x)$ პოლინომი ეწოდება $T(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$ გამოსახულებას.

და

$$\int_{I(\delta)} > \int_{I(\delta/2)} > \varepsilon(1+q)^n \delta.$$

ბერნულის უტოლობის

$$(1+a)^n > 1+na, \text{ როცა } n > 1, \ a > -1, \ a \neq 0,$$

ძალით ვღებულობთ

$$\int_{I(\delta)} > \varepsilon \delta(1+nq) \longrightarrow +\infty, \text{ როცა } n \rightarrow \infty. \quad (2.8.5)$$

მეორეს მხრივ, f -ის $[-\pi, \pi]$ -ზე შემოსაზღვრულობისა და (2.8.3) უტოლობის გამო,

$$\left| \int_{[-\pi, \pi] \setminus I(\delta)} \right| < M, \quad |f| < M. \quad (2.8.6)$$

(2.8.5) და (2.8.6) დამოკიდებულებანი მიგვანიშნებს იმაზე, რომ (2.8.4) ტოლობის მარჯვენა მხარე ისწრაფვის $+\infty$ -კენ, როცა $n \rightarrow \infty$. ამიტომ ამავე ტოლობის მარცხენა მხარე ვერ იქნება ნულის ტოლი, ე.ი. არ არსებობს ისეთი x_0 წერტილი, რომლისთვისაც $f(x_0) \neq 0$ ანუ $f \equiv 0$.

$L[-\pi, \pi]$ -თვის. დავეშვათ $\varphi \in L[-\pi, \pi]$ ფუნქციის ყველა a_n და b_n კოეფიციენტის ნულობა, ე.ი. გვაქვს ტოლობები

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx \, dx &= 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx \, dx &= 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (2.8.7)$$

$[-\pi, \pi]$ -ზე განვიხილოთ

$$\phi(x) = \int_{-\pi}^x \varphi(t) \, dt$$

ფუნქცია. გვაქვს

$$\phi(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \, dt = \pi a_0 \text{ და } \phi(-\pi) = 0.$$

მაგრამ $a_0 = 0$, ამიტომ $\phi(-\pi) = \phi(\pi) = 0$. გარდა ამისა,

$$\phi(x + 2\pi) - \phi(x) = \int_{-\pi}^{x+2\pi} \varphi(t) dt - \int_{-\pi}^x \varphi(t) dt = \int_x^{x+2\pi} \varphi(t) dt.$$

მაგრამ (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.3, მტკიცება 1.3.2)

$$\int_x^{x+2\pi} \varphi(t) dt = \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt = a_0 = 0.$$

მაშასადამე, $\phi(x + 2\pi) - \phi(x) = 0$. ამგვარად, ϕ ფუნქცია 2π პერიოდულია და უწყვეტი $(-\infty, +\infty)$ -ზე, ანუ ϕ უწყვეტია წრეწირზე. ამიტომ $\phi \in C[-\pi, \pi]$.

ახლა ვიპოვოთ ϕ ფუნქციის ფურიეს A_n და B_n კოეფიციენტები ($n = 1, 2, \dots$). ამ მიზნით მოვასდინოთ ნაწილობითი ინტეგრება და გავითვალისწინოთ $\phi(-\pi) = 0$ და $\phi(\pi) = 0$ ტოლობები. მივიღებთ

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) \cos nx dx = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx = -\frac{1}{n\pi} \cdot b_n = -\frac{1}{n\pi} \cdot 0 = 0,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) \sin nx dx = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx = -\frac{1}{n\pi} \cdot a_n = -\frac{1}{n\pi} \cdot 0 = 0.$$

მაშასადამე, ϕ ფუნქციის ფურიეს ყველა კოეფიციენტი ნულია, გარდა შესაძლებელია A_0 -ის. ამიტომ $\phi(x) - A_0$ ფუნქციის ფურიეს ყველა კოეფიციენტი ნული. ამასთან, $\phi(x) - A_0 \in C[-\pi, \pi]$. ამიტომ $\phi(x) - A_0 \equiv 0$. ამის გაწარმოებით ვლებულობთ $\phi'(x) - A'_0 = 0$, ანუ $\phi'(x) = 0$ თითქმის ყველგან. მაგრამ თითქმის ყველა წერტილზე $[-\pi, \pi]$ -დან გვაქვს $\phi'(x) = \varphi(x)$. მივიღეთ, რომ $\varphi(x) = 0$ თითქმის ყველგან $[-\pi, \pi]$ -ზე. ამით თეორემის დამტკიცება დამთავრებულია. $\square$

შედეგი 2.8.2. ტრიგონომეტრიული (2.8.1) სისტემა სრულია $L^p[-\pi, \pi]$ სივრცეში, სადაც $p > 1$.

მართლაც, რადგან $\psi \in L^p[-\pi, \pi]$ ფუნქციის ფურიეს ყველა კოეფიციენტი ნულია და ψ ეკუთვნის $L[-\pi, \pi]$ სივრცესაც, ამიტომ ψ ფუნქციისთვის შესრულებულია (2.8.7) ტოლობები და, უკვე დამტკიცებულის ძალით, $\psi(x) = 0$ თითქმის ყველგან.

შ ე დ ე გ ი 2.8.3. თუ f_1 და f_2 ფუნქციებს აქვთ ფურიეს ერთი და იგივე მწკრივი, მაშინ $f_1(x) \sim f_2(x)$.

მართლაც, რადგან f_1 და f_2 ფუნქციებს ფურიეს ერთი და იგივე კოეფიციენტები აქვს, ამიტომ $f_1 - f_2$ სხვაობის ფურიეს ყველა კოეფიციენტი ნულია. ეს კი, უკვე დამტკიცებულის ძალით, იწვევს $f_1(x) - f_2(x)$ ფუნქციის ნულობას თითქმის ყველგან $[-\pi, \pi]$ -ზე ანუ $f_1 \sim f_2$ $[-\pi, \pi]$ -ზე.

თავი 3

ფურიეს მწკრივთა კრებადობის ზოგადი საკითხები

3.1 ფურიეს თანაბრად კრებადი მწკრივის ჯამი

1. ტრიგონომეტრიული სისტემის სისრულე უწყვეტ ფუნქციათა $C[-\pi, \pi]$ სივრცეში იწვევს შემდეგ მნიშვნელოვან თეორემას.

თეორემა 3.1.1. თუ წრეწირზე უწყვეტი f ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ მწკრივი თანაბრად კრებადია წრეწირზე, მაშინ $S[f]$ მწკრივი თანაბრად კრებადია წრეწირზე სწორედ f -კენ.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (3.1.1)$$

მისი ჯამი აღვნიშნოთ $g(x)$ -ით. რადგან (3.1.1) მწკრივის წევრები უწყვეტია და თავად მწკრივი — თანაბრად კრებადი, ამიტომ $g(x)$ ფუნქცია უწყვეტია წრეწირზე. რადგან $g(x)$ წარმოადგენს თანაბრად კრებადი (3.1.1) ტრიგონომეტრიული მწკრივის ჯამს, ამიტომ ამ მწკრივის a_n და b_n კოეფიციენტები მოიცემა g ფუნქციისთვის დაწერილი ფურიეს ფორმულებით (იხ. თავი 2, პარაგრაფი 2.1, თეორემა 2.1.1).

მეორეს მხრივ, a_n და b_n რიცხვები წარმოადგენს f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს. მაშასადამე, g და f უწყვეტ ფუნქციებს აქვს ფურიეს ერთი და იგივე მწკრივი, ამიტომ $g - f$ სხვაობის ფურიეს ყველა კოეფიციენტი ნულია.

რადგან $(g - f) \in C[-\pi, \pi]$ და ტრიგონომეტრიული სისტემა სრულია $C[-\pi, \pi]$ სივრცეში (იხ. თავი 2, პარაგრაფი 2.8), ამიტომ $g - f$ სხვაობა ნულია ყველა წერტილზე, ანუ $g(x) = f(x)$ ყველა x წერტილზე.

მაშასადამე, (3.1.1) დამოკიდებულებაში გვაქვს ტოლობა

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ყოველ x წერტილზე, თანაც თანაბრად $[-\pi, \pi]$ -ზე. □

შევნიშნოთ, რომ ამ თეორემასთან კავშირშია ფურიეს მნიშვნელოვანი თეორემიდან გამომდინარე შემდეგი (იხ. თავი 5, წინადადება 5.7.2)

წინადადება 3.1.2. თუ პერიოდზე ჯამებად და 2π პერიოდულ f ფუნქციას აქვს უწყვეტობის რაიმე x_0 წერტილი და $S[f]$ კრებადია ამ წერტილზე, მაშინ $S[f]$ -ის კრებადობა x_0 წერტილზე იქნება $f(x_0)$ მნიშვნელობისკენ, ანუ ადგილი ექნება ტოლობას

$$S[f](x_0) = f(x_0).$$

2. თავი 2-დან 2.1 პარაგრაფის თეორემა 2.1.1-ის თანახმად, თუ

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (3.1.2)$$

ტრიგონომეტრიული მწკრივი თანაბრად კრებადია წრეწირზე f ფუნქციისკენ, მაშინ (3.1.2) მწკრივი წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივს.

ახლა შესაძლებელია ამ ფაქტის შემდეგნაირი გაძლიერება.

თეორემა 3.1.3. თუ (3.1.2) ტრიგონომეტრიული მწკრივის კერძო ჯამების ერთი ქვემიმდევრობა მაინც თანაბრად კრებადია წრეწირზე რაიმე φ ფუნქციისკენ, მაშინ (3.1.2) მწკრივი არის ამ φ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი.

დამტკიცება. ვთქვათ, $s_{n_k}(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) ქვემიმდევრობაა თანაბრად კრებადი წრეწირზე უწყვეტი $\varphi(x)$ ფუნქციისკენ. მაშინ $|s_{n_k}(x) - \varphi(x)| \rightarrow 0$ თანაბრად წრეწირზე, როცა $k \rightarrow \infty$. ამიტომ

$$\int_{-\pi}^{\pi} |s_{n_k}(x) - \varphi(x)| dx \rightarrow 0, \text{ როცა } k \rightarrow \infty.$$

ამრიგად, ყოველი m -თვის გვაქვს დამოკიდებულებანი

$$\int_{-\pi}^{\pi} [s_{n_k}(x) - \varphi(x)] \cos mx dx \rightarrow 0, \text{ როცა } k \rightarrow \infty,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} [s_{n_k}(x) - \varphi(x)] \sin mx \, dx \rightarrow 0, \text{ როცა } k \rightarrow \infty, \quad (3.1.3)$$

საიდანაც ყოველი m -თვის ვღებულობთ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} s_{n_k}(x) \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos mx \, dx, \quad (3.1.4)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} s_{n_k}(x) \sin mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin mx \, dx. \quad (3.1.5)$$

ტრიგონომეტრიული სისტემის ორთოგონულობის გამო (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.3), უტოლობა $n_k > m$ იწვევს ტოლობას

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_{n_k}(x) \cos mx \, dx = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx = \pi a_m$$

და, მაშასადამე,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} s_{n_k}(x) \cos mx \, dx = \pi a_m. \quad (3.1.6)$$

(3.1.4) და (3.1.6) ტოლობებიდან ვღებულობთ

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos mx \, dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

ანალოგიურად მიიღება ტოლობაც

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin mx \, dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

ეს ნიშნავს, რომ (3.1.2) მწკრივი არის φ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

3.2 ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამების L^2 -მინიმალურობა. ბესელის იგივეობა და უტოლობა

ვთქვათ, $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ არის რაიმე ორთონორმული სისტემა $L^2[a, b]$ სივრცეში. ისმის ამოცანა: მოცემულია $f \in L^2[a, b]$ ფუნქცია და n ცალი $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ ფუნქცია $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ სისტემიდან. განვიხილოთ ყველა შესაძლო $\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x)$ ჯამი და შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\rho_f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \|f(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x)\|_{L^2}.$$

გვინტერესებს, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ მუდმივების რომელი მნიშვნელობებისთვის ექნება $\rho_f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ -ს მინიმალური მნიშვნელობა?

1. ამ კითხვასთან დაკავშირებით დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 3.2.1. $\rho_f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ -ის მინიმალური მნიშვნელობაა $\rho_f(c_1, \dots, c_n)$, სადაც $c_1, c_2, \dots, c_n$ წარმოადგენს f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ.

დამტკიცება. ზოგადობისთვის დავუშვათ, რომ $\{\varphi_k(x)\}$ სისტემა შედგება კომპლექსური ფუნქციებისგან და ვისარგებლოთ z კომპლექსური სიდიდის $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ თვისებით, სადაც $\bar{z}$ არის z -სადმი შუულებული.

გვაქვს დამოკიდებულებანი

$$\begin{aligned} \|f(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x)\|_{L^2}^2 &= \int_a^b |f(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x)|^2 dx \\ &= \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x) \right] \cdot \left[\bar{f}(x) - \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_k \bar{\varphi}_k(x) \right] dx \\ &= \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_a^b \bar{f}(x) \varphi_k(x) dx \\ &\quad - \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_k \int_a^b f(x) \bar{\varphi}_k(x) dx + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_k \bar{\alpha}_j \int_a^b \varphi_k(x) \bar{\varphi}_j(x) dx. \end{aligned}$$

რადგან $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ სისტემა ორთონორმულია, ამიტომ გვაქვს

$$\int_a^b \varphi_k(x) \overline{\varphi_j(x)} dx = 0, \text{ როცა } k \neq j, \quad (3.2.1)$$

$$\int_a^b |\varphi_k(x)|^2 dx = 1, \text{ როცა } k = 1, 2, \dots \quad (3.2.2)$$

ტოლობები. ამრიგად,

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x) \right\|_{L^2}^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=1}^n \alpha_k \bar{c}_k - \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_k c_k + \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2.$$

თუ ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეს დავამატებთ და დავაკლებთ $\sum_{k=1}^n |c_k|^2$ -ს, მივიღებთ

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x) \right\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \sum_{k=1}^n |c_k - \alpha_k|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2. \quad (3.2.3)$$

აქედან აშკარაა, რომ (3.2.3) ტოლობის მარჯვენა მხარე იქნება მინიმალური მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\alpha_k = c_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

2. ბესელის იგივეობა. თუ (3.2.3) ტოლობაში α_k რიცხვებს ჩავანაცვლებთ f ფუნქციის c_k ფურიეს კოეფიციენტებით, მაშინ მივიღებთ ტოლობას

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2. \quad (3.2.4)$$

(3.2.4)-ს ეწოდება ბესელის იგივეობა.

შედეგი 3.2.2. მინიმალური L^2 გადახრა $\rho_f(c_1, \dots, c_n)$ მოიცემა ტოლობით

$$\rho_f(c_1, \dots, c_n) = \|f\|_{L^2}^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2,$$

ე.ი. n -ის ზრდისას L^2 გადახრა მცირდება!

ბესელის უტოლობა (1828 წ.). რადგან (3.2.4) უტოლობის მარცხენა მხარე არაუარყოფითია, ამიტომ მისი მარჯვენა მხარეც არაუარყოფითია, ანუ

$$\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \leq \|f\|_{L^2}^2. \quad (3.2.5)$$

ნებისმიერი n -თვის მივიღეთ მართებული უტოლობა, რომლის მარჯვენა მხარე არაა დამოკიდებული n -ზე.

ცხადია, რომ $s_n = \sum_{k=1}^n |c_k|^2$ მიმდევრობა ზრდადია, როგორც არაუარყოფითი $|c_k|^2$ რიცხვების ჯამი: $s_{n+1} \geq s_n$, $n = 1, 2, \dots$. გარდა ამისა, $(s_n)_{n=1}^\infty$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია ზემოდან $\|f\|_{L^2}^2$ სასრული რიცხვით. ამიტომ $(s_n)_{n=1}^\infty$ მიმდევრობას აქვს სასრული ზღვარი

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=1}^\infty |c_k|^2$$

ამრიგად, თუ (3.2.5) უტოლობაში n -ს მივასწრაფებთ ∞ -კენ და გავითვალისწინებთ, რომ მისი მარჯვენა მხარე არ იცვლება n -ის ცვლილებისას, მივიღებთ უტოლობას

$$\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 \leq \|f\|_{L^2}^2, \quad \|f\|_{L^2} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

ამ უტოლობას ეწოდება ბესელის უტოლობა, რომელიც მართებულია $[a, b]$ სეგმენტზე ყოველი $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ ორთონორმული სისტემისთვის და ნებისმიერი $f \in L^2[a, b]$ ფუნქციისთვის.

შედეგი 3.2.3. ნებისმიერი $f \in L^2[a, b]$ ფუნქციისთვის $\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2$ მწკრივი კრებადია და, მაშასადამე,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0. \quad (3.2.6)$$

3.3 ორთონორმულ სისტემაში $S[f]$ -ის L^2 კრებადობა რაიმე $F \in L^2$ ფუნქციისკენ

ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე გვაქვს $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ ორთონორმული სისტემა და f იყოს კვადრატით ჯამებადი ფუნქცია $[a, b]$ -ზე, ე.ი. $\int_a^b |f(x)|^2 dx$ ინტეგრალი სასრულია, სიმბოლურად

$f \in L^2[a, b]$. განვიხილოთ f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ

$$f \sim c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + \dots, \quad (3.3.1)$$

სადაც f ფუნქციის ფურიეს c_n კოეფიციენტები მოიცემა ტოლობებით (იხ. თავი 2, პარაგრაფი 2.6, ტოლობა (2.6.6))

$$c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

(3.3.1) მწკრივის n -ური კერძო ჯამი აღენიშნოთ $s_n(f; x)$ -ით:

$$s_n(f; x) = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x).$$

ჩვენი მიზანია დავამტკიცოთ, რომ მოცემულ $f \in L^2[a, b]$ ფუნქციას შეესაბამება რაღაც $F \in L^2[a, b]$ ფუნქცია, რომლისკენაც კრებადია (3.3.1) მწკრივი L^2 ნორმით, ანუ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |F(x) - s_n(f; x)|^2 dx = 0. \quad (3.3.2)$$

მოკლედ რომ ვთქვათ, ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა 3.3.1. $f \in L^2[a, b]$ ფუნქციის ფურიეს (3.3.1) მწკრივი L^2 კრებადია რაღაც $F \in L^2[a, b]$ ფუნქციისკენ.

დამტკიცება. ცნობილია [1, გვ. 526], რომ ფუნქციათა $f_n \in L^2[a, b]$ მიმდევრობის $L^2[a, b]$ სივრცეში კრებადობისთვის რაღაც $F \in L^2[a, b]$ ფუნქციისკენ აუცილებელია და საკმარისი ყოველ $\varepsilon > 0$ რიცხვს ეთანადებოდეს ისეთი ნატურალური $N(\varepsilon)$, რომ სრულდებოდეს უტოლობა

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_{L^2} < \varepsilon, \quad \text{როცა } n \geq N, \quad m \geq N. \quad (3.3.3)$$

ახლა ვაჩვენოთ (3.3.3) უტოლობის შესრულება, როცა $f_n(x)$ ფუნქციების როლში აღებულია (3.3.1) მწკრივის კერძო $s_n(f; x)$ ჯამები.

ცხადია, რომ ყოველი n -თვის და $p \geq 1$ -თვის გვაქვს

$$\|s_{n+p}(f; x) - s_n(f; x)\|_{L^2}^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \varphi_k(x) \right\|_{L^2}^2 = \int_a^b \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \varphi_k(x) \right|^2 dx.$$

მაგრამ

$$\int_a^b \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \varphi_k(x) \right|^2 dx = \int_a^b \left[\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \varphi_k(x) \right] \cdot \left[\sum_{k=n+1}^{n+p} \bar{c}_k \bar{\varphi}_k(x) \right] dx.$$

თუ შევასრულებთ ინტეგრალქვეშ მითითებულ გამრავლებას და გამოვიყენებთ ორთონორმული $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ სისტემის შესაბამის თვისებებს (იხ. პარაგრაფი 3.2, ტოლობები (3.2.1), (3.2.2)), მივიღებთ

$$\|s_{n+p}(f; x) - s_n(f; x)\|_{L^2}^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k|^2. \quad (3.3.4)$$

მაგრამ შედეგი 3.2.3-ის თანახმად, $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ მწკრივი კრებადია, ამიტომ $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ნატურალური $N(\varepsilon)$ ისეთი, რომ

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k|^2 < \varepsilon, \text{ როცა } n \geq N, \quad p \geq 1.$$

მაშასადამე,

$$\|s_{n+p}(f; x) - s_n(f; x)\|_{L^2} < \varepsilon, \text{ როცა } n \geq N, \quad p \geq 1.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

შ ე ნ ი შ ე ნ ა 3.3.2. ის ფაქტი, რომ თეორემა 3.3.1-ში მოძებნილი F ფუნქციის როლში არ არის მოცემული f ფუნქცია, გამოწვეულია იმით, რომ $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ არის მხოლოდ ორთონორმული. ქვემოთ ვნახავთ, რომ (3.3.2) ტოლობაში F -ის როლში არის f , როცა $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ სისტემა არის ორთონორმული და სრული (ჩაკეტილი), იხ. (3.5.4) ტოლობა.

3.4 რისი-ფიშერის თეორემა

ბესელის უტოლობა (იხ. პარაგრაფი 3.2, უტოლობა (3.2.5)) მიგვანიშნებს იმაზე, რომ $f \in L^2[a, b]$ ფუნქციის ფურიეს c_n კოეფიციენტებს $[a, b]$ -ზე ორთონორმული $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ აქვს თვისება: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ მწკრივი კრებადია — იხ. შედეგი 3.2.3.

შებრუნებულ კითხვებზე პასუხს იძლევა ფ. რისისა და ე. ფიშერის მიერ, 1907 წელს, ერთიმეორისგან დამოუკიდებლად დამტკიცებული თეორემა.

თეორემა 3.4.1 (რიისი, ფიშერი). თუ ფუნქციითა $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ სისტემა ორთონორმულია $[a, b]$ -ზე და რიცხვთა რაღაც (c_n) მიმდევრობისთვის $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ მწკრივი კრებადია, მაშინ არსებობს ისეთი $f \in L^2[a, b]$ ფუნქცია, რომლის ფურიეს კოეფიციენტებია c_n რიცხვები $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ და ადგილი აქვს პარსევალის ტოლობას (1806 წ.).

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2. \quad (3.4.1)$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x),$$

რომლისთვისაც გვაქვს ტოლობა (იხ. პარაგრაფი 3.3, ტოლობა (3.3.4))

$$\int_a^b |T_{n+p}(x) - T_n(x)|^2 dx = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2.$$

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ მწკრივის კრებადობის გამო, ყოველ $\varepsilon > 0$ რიცხვს ეთანადება ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ

$$\int_a^b |T_p(x) - T_q(x)|^2 dx < \varepsilon, \text{ როცა } p > N, \quad q > N,$$

ამიტომ ცნობილი თეორემის გამო [1, გვ. 526], $L^2[a, b]$ -ში არსებობს ისეთი f ფუნქცია, რომ ადგილი აქვს ტოლობას (T_n მიმდევრობა L^2 კრებადია f -კენ)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - T_n(x)|^2 dx = 0. \quad (3.4.2)$$

ავიღოთ ნებისმიერი $k \geq 1$ და, ვთქვათ, $n > k$. რადგან $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ სისტემა ორთონორმულია და $n > k$, ამიტომ

$$\int_a^b T_n(x) \varphi_k(x) dx = c_k.$$

მაშასადამე,

$$c_k = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx + \int_a^b [T_n(x) - f(x)] \varphi_k(x) dx. \quad (3.4.3)$$

ცნობილი უტოლობის გამო [1, გვ. 521], რომელიც 1859 წელს დაადგინა ბუნიაკოვსკიმ და 1875 წელს კი — ა. შვარციმ,

$$\left| \int_a^b [T_n(x) - f(x)] \varphi_k(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b |T_n(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot (b-a)^{1/2}. \quad (3.4.4)$$

(3.4.2)–(3.4.4) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს ტოლობა

$$c_k = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

ამრიგად, c_k რიცხვები წარმოადგენს $f \in L^2[a, b]$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ სისტემის მიმართ. $\square$

დაბოლოს, (3.4.2) ტოლობა გამოვიყენოთ ბესელის იგივეობის (იხ. პარაგრაფი 3.2, ტოლობა (3.2.4)) მიმართ, მივიღებთ (3.4.1) ტოლობას, რომელსაც ეწოდება პარსევალის ტოლობა.

3.5 ჩაკეტილი სისტემა და მის მიმართ $S[f]$ -ის L^2 კრებადობა f -კენ

როგორც ვიცით (იხ. თავი 2, პარაგრაფი 2.7), $L^2[a, b]$ სივრცის φ_n ელემენტებისგან შედგენილ ფუნქციათა ორთონორმულ $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ სისტემას ეწოდება სრული $L^2[a, b]$ სივრცეში, თუ $f \in L^2[a, b]$ ფუნქციის ორთოგონულობა $\{\varphi_k(x)\}$ სისტემის ყველა ფუნქციასთან იწვევს $f(x) = 0$ ტოლობას თითქმის ყველა $x \in [a, b]$ წერტილზე, ანუ f ეკვივალენტურია ნულის, სიმბოლურად $f \sim 0$.

მოკლედ რომ ვთქვათ: ყველა $\int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) ტოლობის შესრულება იწვევს $f \sim 0$ დამოკიდებულებას.

1. ახლა განვიხილავთ სრული სისტემის სხვაგვარ დახასიათებას, ე.წ. სისტემის ჩაკეტილობით.

გ ა ნ ს ა ზ დ ვ რ ა 3.5.1. $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ფუნქციების ორთონორმულ $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ სისტემას ეწოდება **ჩაკეტილი** $L^2[a, b]$ სივრცეში, თუ ყოველი $f \in L^2[a, b]$ ფუნქციისთვის და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ რიცხვები, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x) \right\|_{L^2} < \varepsilon. \quad (3.5.1)$$

როგორც ვიცით, ასეთი თვისების მქონე $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ სისტემებს შორის (3.5.1) უტოლობის მარცხენა მხარეს უმცირეს მნიშვნელობას ანიჭებს f ფუნქციის ფურიეს $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ კოეფიციენტები ანუ, თუ $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ სისტემა ჩაკეტილია $L^2[a, b]$ -ში, მაშინ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{L^2} < \varepsilon. \quad (3.5.2)$$

აქ, (3.5.1) უტოლობისგან განსხვავებით, $c_1, c_2, \dots, c_n$ ცალსახადაა განსაზღვრული f ფუნქციის მეშვეობით და (3.5.2)-ში ε -ზე დამოკიდებულია მხოლოდ n და არა რიცხვების მთელი სისტემა, როგორც ესაა (3.5.1)-ში, ამიტომ (3.5.2)-ის ეკვივალენტური ფორმაა ტოლობა

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{L^2} = 0.$$

ამრიგად, გვაქვს

თ ე ო რ ე მ ა 3.5.2. $f \in L^2[a, b]$ ფუნქციის ფურიეს

$$f \sim c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots \quad (3.5.3)$$

მწკრივი, $L^2[a, b]$ -ში **ჩაკეტილი** $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ სისტემის მიმართ არის L^2 კრებადი f -კენ, თუნდაც (3.5.3) მწკრივი განზღაღი იყოს ყველგან,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right|^2 dx = 0. \quad (3.5.4)$$

2. (3.5.4) ტოლობიდან და ბესელის იგივეობიდან (იხ. პარაგრაფი 3.2, ტოლობა (3.2.4)) გამომდინარეობს

თეორემა 3.5.3. $L^2[a, b]$ -ში ჩაკეტილი $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ სისტემის მიმართ, $f \in L^2[a, b]$ ფუნქციის $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ კოეფიციენტებისთვის ადგილი აქვს პარსევალის ტოლობას

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx. \quad (3.5.5)$$

თეორემა 3.5.4. ჩაკეტილი სისტემა სრულია.

დამტკიცება. ჩაკეტილი სისტემისთვის ადგილი აქვს პარსევალის (3.5.5) ტოლობას. თუ ახლა $f \in L^2[a, b]$ ფუნქციის ფურიეს ყველა c_k კოეფიციენტი ნულია, მაშინ

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0.$$

საიდანაც $f \sim 0$. □

თეორემა 3.5.5. სრული სისტემა ჩაკეტილია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ სისტემა სრულია $L^2[a, b]$ სივრცეში. ავიღოთ ნებისმიერი $f \in L^2[a, b]$ ფუნქცია და მისი ფურიეს კოეფიციენტები $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ სისტემის მიმართ იყოს $c_1, c_2, \dots$. შედეგი 3.2.3-ის ძალით, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ მწკრივი კრებადი და ამიტომ რისი-ფიშერის თეორემის ძალით არსებობს $g \in L^2[a, b]$ ფუნქცია, რომლის ფურიეს კოეფიციენტები $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ სისტემის მიმართ იქნება $c_1, c_2, \dots$ და

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \int_a^b |g(x)|^2 dx. \quad (3.5.6)$$

რადგან f -სა და g -ს აქვს ფურიეს ერთი და იგივე კოეფიციენტები, ამიტომ $f - g$ სხვაობის ყველა კოეფიციენტი ნულია, ანუ $f - g$ ორთოგონულია $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ სისტემის ყველა ფუნქციასთან. აქედან, $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ სისტემის სისრულის გამო, $f - g \sim 0$ ანუ $g \sim f$. მაშასადამე, (3.5.6)-ის ძალით, $L^2[a, b]$ სივრცის ყოველი f ფუნქციისთვის ადგილი აქვს პარსევალის ტოლობას

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

აქედან კი, ბესელის იგივეობის გამოყენებით, ვღებულობთ ტოლობას

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)\|_{L^2} = 0.$$

ამრიგად, $\{\varphi_k(x)\}$ სისტემა ჩაკეტილია. □

შედეგი 3.5.6. L^2 კლასის ფუნქციათა სივრცეში ფუნქციათა სისტემის ჩაკეტილობისა და სისრულის ცნებანი ურთიერთეკვივალენტურია.

3.6 რისი-ფიშერის თეორემა და პარსევალის ტოლობა ტრიგონომეტრიული სისტემისთვის

1. რისი-ფიშერის თეორემა და პარსევალის ტოლობა დამტკიცებული გვექონდა ორთონორმული სისტემისთვის, ამიტომ ისინი მართებულია სისტემისთვისაც (იხ. (2.6.5))

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

სახელდობრ, თუ a_0, a_n, b_n ($n = 1, 2, \dots$) რიცხვებს აქვს თვისება

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 < +\infty, \quad (3.6.1)$$

მაშინ არსებობს $F \in L^2[-\pi, \pi]$ ფუნქცია ისეთი, რომ ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{\sqrt{2}} &= \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx, & a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} dx, \\ b_n &= \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} dx. \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

ცხადია, რომ ფუნქცია $f(x) = \sqrt{\pi} \cdot F(x) \in L^2[-\pi, \pi]$. (3.6.2) ტოლობები f ფუნქციის

საშუალებით ასე ჩაიწერება

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, & a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

ამრიგად, თუ (3.6.1) მწრივი კრებადია, მაშინ არსებობს $f \in L^2[-\pi, \pi]$ ფუნქცია ისეთი, რომ (3.6.3) ტოლობებით განსაზღვრული a_0, a_n და b_n რიცხვები წარმოადგენს f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ.

ახლა ჩავწეროთ პარსევალის ტოლობა f -ისა და a_0, a_n, b_n კოეფიციენტებით. ამ მიზნით a_0, a_n და b_n კოეფიციენტებს მივცეთ საჭირო ფორმა:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx, & a_n &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} dx, \\ b_n &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} dx. \end{aligned}$$

აქედან

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} a_0 &= \int_{-\pi}^{\pi} f \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx, & \sqrt{\pi} a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} dx, \\ \sqrt{\pi} b_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} dx. \end{aligned}$$

ახლა გამოვიყენოთ პარსევალის ტოლობა ორთონორმული სისტემისთვის (იხ. პარაგრაფი 3.4, ტოლობა (3.4.1)), გვექნება

$$\pi \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\pi a_n^2 + \pi b_n^2) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

ახე

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \quad (3.6.4)$$

2. $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ორთონორმული კომპლექსური ფორმის ტრიგონომეტრიული $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}\}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2$) სისტემის მიმართ (იხ. თავი 2, პარაგრაფი 2.6) რისი-ფიშერის თეორემის თანახმად, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$ პირობა იწვევს ისეთი $\phi \in L^2[-\pi, \pi]$ ფუნქციის არსებობას, რომლისთვისაც ადგილი აქვს ტოლობებს

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} dx. \quad (3.6.5)$$

შემოვიღოთ $L^2[-\pi, \pi]$ სივრცის $\varphi(x) = \sqrt{2\pi} \phi(x)$ ფუნქცია, რომლის მეშვეობით (3.6.5) მიიღება სახეს

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{-inx} dx. \quad (3.6.6)$$

ეს კი $\varphi \in L^2[-\pi, \pi]$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებია $\{e^{inx}\}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) სისტემის მიმართ (იხ. თავი 2, პარაგრაფი 2.2, ტოლობა (2.2.5)).

პარსევალის ტოლობას (3.6.5) მიმდევრობისთვის და $\phi(x)$ ფუნქციისთვის აქვს სახე (იხ. პარაგრაფი 3.4, ტოლობა (3.4.1))

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\phi(x)|^2 dx.$$

ამრიგად, $\{e^{inx}\}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) სისტემის მიმართ $\varphi \in L^2[-\pi, \pi]$ ფუნქციის ფურიეს (3.6.6) კოეფიციენტებისთვის პარსევალის ტოლობას, რომელიც ავტორის მიერ დადგენილ იქნა 1799 წელს, აქვს სახე

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x)|^2 dx.$$

3.7 პარსევალის ტოლობა ორი ფუნქციის ნამრავლისთვის

3.7.1 ზოგადი სისტემისთვის

თეორემა 3.7.1. ვთქვათ, $L^2[a, b]$ -ში სრული (ჩაკეტილი) ორთონორმული $\{\varphi_k(x)\}$ სისტემის მიმართ $f \in L^2[a, b]$ და $g \in L^2[a, b]$ ფუნქციების ფურიეს მწკრივებია

$$f \sim c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots,$$

$$g \sim d_1\varphi_1(x) + d_2\varphi_2(x) + \dots.$$

მაშინ $f \cdot g \in L[a, b]$ ¹ ნამრავლისთვის ადგილი აქვს პარსევალის ტოლობას

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n. \quad (3.7.1)$$

დამტკიცება. ელემენტარული $(a \pm b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ უტოლობის ძალით ვასკვნით, რომ $f + g$ და $f - g$ ფუნქციები $L^2[a, b]$ კლასისაა. ამასთან, პირველის კოეფიციენტებია $c_n + d_n$, ხოლო მეორესი კი $c_n - d_n$. ამიტომ პარსევალის ტოლობას მათთვის აქვს სახე

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx &= \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)^2, \\ \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx &= \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - d_n)^2. \end{aligned}$$

პირველიდან მეორის გამოკლებით მივიღებთ

$$4 \int_a^b f(x)g(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} 4c_n d_n.$$

ანუ ადგილი აქვს (3.7.1) ტოლობას. □

¹ეს გამომდინარეობს $|f| \cdot |g| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$ უტოლობიდან.

3.7.2 ტრიგონომეტრიული სისტემისთვის

თუ

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$g \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nx + d_n \sin nx),$$

მაშინ

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx = \frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_n + b_n d_n). \quad (3.7.2)$$

თუკი

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx} \text{ და } g \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{inx},$$

მაშინ

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\bar{g}(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \bar{b}_n. \quad (3.7.3)$$

შევნიშნოთ, რომ (3.7.1), (3.7.2) და (3.7.3) ტოლობებს ზოგჯერ უწოდებენ პარსევალის განზოგადებულ ტოლობებს.

3.8 სრული (ჩაკეტილი) სისტემისთვის ფურიეს მწკრივის წევრობრივი ინტეგრება

თეორემა 3.8.1. $L^2[a, b]$ სივრცეში სრული (ჩაკეტილი) სისტემის მიმართ $f \in L^2[a, b]$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის, თუნდაც ეს მწკრივი განშლადი იყოს ყველგან,

$$f \sim c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots \quad (3.8.1)$$

წევრობრივი ინტეგრებით ნებისმიერ $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ სეგმენტზე მიიღება $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ ინტეგრალისკენ კრებადი მწკრივი.

თუ წევრობრივი ინტეგრება მიმდინარეობს $[a, x] \subset [a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ინტეგრების შედეგი მწკრივი თანაბრად კრებადია $[a, b]$ -ზე $\int_a^x f(t) dt$ ინტეგრალისკენ.

უფრო მეტიც, ორივე ეს შემთხვევა მართებულია მაშინაც, თუ (3.8.1) მწკრივის წინასწარ გავამრავლებით რაიმე $\psi \in L^2[a, b]$ ფუნქციაზე და შემდეგ ვაინტეგრებთ წევრობრივ. შედეგი იქნება $\int_a^x f(x)\psi(x) dx$ და $\int_a^x f(t)\psi(t) dt$ თანაბრად $[a, b]$ -ზე, შესაბამისად.

დ ა მ ტ ვ ი ც ე ბ ა . გარკვეულობისთვის მსჯელობას ჩავატარებთ ცვლადსაზღვრიანი ინტეგრებისთვის,

$$\left| \int_a^x f(t)\psi(t) dt - \sum_{k=1}^n c_k \int_a^x \varphi_k(t)\psi(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(t)| |\psi(t)| dt$$

$$\leq \left(\int_a^b |f(t) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b |\psi(t)|^2 dt \right)^{1/2} \rightarrow 0, \text{ როცა } n \rightarrow \infty.$$

ამრიგად, თანაბრად $[a, b]$ -ზე ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^x f(t)\psi(t) dt = c_1 \int_a^x \psi(t)\varphi_1(t) dt + c_2 \int_a^x \psi(t)\varphi_2(t) dt + \dots$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

3.9 ერთობლივ შემოსაზღვრული სისტემისთვის ფურიეს კოეფიციენტების კრებადობა ნულისკენ. რიმან-ლებეგის თეორემა

როგორც უკვე ვიცით, ყოველი $f \in L^2[a, b]$ ფუნქციის ფურიეს $c_n(f)$ კოეფიციენტებს $[a, b]$ სეგმენტზე ორთონორმული ნებისმიერი $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ სისტემის მიმართ გაანჩიათ თვისება: $\sum_{n=1}^\infty |c_n(f)|^2$ მწკრივი კრებადია და, მაშასადამე, $c_n(f) \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$ (იხ. თავი 3, პარაგრაფი 3.2, შედეგი 3.2.3).

თუკი $f \in L[a, b]$, მაგრამ f არ ეკუთვნის $L^2[a, b]$ სივრცეს, მაშინ f ფუნქციის $c_n(f)$ კოეფიციენტებს შეიძლება თუ არა ჰქონდეს ნულისკენ სწრაფვის თვისება, როცა $n \rightarrow \infty$?

თეორემა 3.9.1 (მერსერი). თუ $[a, b]$ სეგმენტზე ორთონორმული $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ სისტემა ერთობლივ შემოსაზღვრულია, ე.ი. თუ

$$|\varphi_k(x)| < M, \text{ როცა } x \in [a, b] \text{ და } k = 1, 2, \dots, \quad (3.9.1)$$

მაშინ $[a, b]$ -ზე ჯამებადი ნებისმიერი f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ სისტემის მიმართ კრებადია ნულისკენ.

დამტკიცება. როგორც ცნობილია [28, გვ. 432], ყოველი $f \in L[a, b]$ ფუნქციისთვის და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს შემოსაზღვრული $g \in L^2[a, b]$ ფუნქცია, რომელსაც აქვს თვისება

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{M}. \quad (3.9.2)$$

განვიხილოთ $[a, b]$ -ზე განსაზღვრული

$$\psi(x) = f(x) - g(x)$$

ფუნქცია. აქედან $f(x) = g(x) + \psi(x)$ და

$$\int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = \int_a^b g(x) \varphi_k(x) dx + \int_a^b \psi(x) \varphi_k(x) dx$$

ტოლობის წევრები წარმოადგენს f , g და ψ ფუნქციების ფურიეს კოეფიციენტებს $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ სისტემის მიმართ, ანუ

$$c_k(f) = c_k(g) + c_k(\psi), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.9.3)$$

რადგან $g \in L^2[a, b]$, ამიტომ ბესელის უტოლობიდან გამომდინარე (იხ. პარაგრაფი 3.2, ტოლობა (3.2.6))

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k(g) = 0.$$

ამრიგად, აღებული $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ნატურალური რიცხვი $N(\varepsilon)$ ისეთი, რომ

$$|c_k(g)| < \varepsilon, \text{ როცა } k > N. \quad (3.9.4)$$

მეორეს მხრივ, (3.9.1) და (3.9.2) უტოლობების გამო $|c_k(\psi)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$, ე.ი.

$$|c_k(\psi)| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.9.5)$$

(3.9.4), (3.9.5) უტოლობების საფუძველზე, (3.9.3)-დან გამომდინარეობს

$$|c_k(f)| < 2\varepsilon, \text{ როცა } k > N.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k(f) = 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

რადგან ტრიგონომეტრიული სისტემა ერთობლივ შემოსაზღვრულია მუდმივით 1, ამიტომ თეორემა 3.9.1-დან გამომდინარეობს ლებეგის მიერ 1902 წელს ჯამებადი ფუნქციებისთვის და რიმანის მიერ (მანამდე) R -ინტეგრებადი ფუნქციებისთვის დამტკიცებული მეტად მნიშვნელოვანი

თეორემა 3.9.2 (რიმანი, ლებეგი). 2π პერიოდული და პერიოდზე ჯამებადი ნებისმიერი ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ კრებადია ნულისკენ.

რიმან-ლებეგის ამ თეორემიდან ადვილად მიიღება

თეორემა 3.9.3. ვთქვათ, E რაიმე ზომადი სიმრავლეა $[0, 2\pi]$ -ზე და (p_n) — ნამდვილ რიცხვთა რაიმე მიმდევრობაა, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \cos^2(nx + p_n) dx = \frac{1}{2} |E|. \quad (3.9.6)$$

და მტკიცება. რადგან $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$, ამიტომ ინტეგრელქვეშა ფუნქცია ტოლია

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2nx + 2p_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} [\cos 2nx \cos 2p_n - \sin 2nx \sin 2p_n].$$

ე.ი.

$$\begin{aligned} & \int_F \cos^2(nx + p_n) dx \\ &= \frac{1}{2} |F| + \frac{1}{2} \cos 2p_n \int_E \cos 2nx dx - \frac{1}{2} \sin 2p_n \int_E \sin 2nx dx, \end{aligned} \quad (3.9.7)$$

მაგრამ $\frac{1}{\pi} \int_E \cos 2n x \, dx$ და $\frac{1}{\pi} \int_E \sin 2n x \, dx$ წარმოადგენს E სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქციის, რომელიც E -ზე 1-ია და სხვაგან კი — ნული, ფურიეს კოეფიციენტებს. ამიტომ, თეორემა 3.9.2-ის ძალით, ამ ინტეგრალების ზღვარი ნულია, როცა $n \rightarrow \infty$. ამავე დროს, $\cos 2p_n$ და $\sin 2p_n$ მამრავლები შემოსაზღვრულია. ამგვარად, (3.9.6) ტოლობა გამომდინარეობს (3.9.7)-დან. $\square$

შედეგი 3.9.4. თუ რაიმე ტრიგონომეტრიული მწკრივის კოეფიციენტები არ ისწრაფვის ნულისკენ, მაშინ ეს მწკრივი არ არის $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი და 2π პერიოდული რაიმე ფუნქციის ფურიეს მწკრივი, რომან-ლებეგის თეორემის გამო.

შენიშვნა 3.9.5. როგორც ვნახეთ, ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ კრებადია ნულისკენ. დადგენილია, რომ ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს, საზოგადოდ, არ შეიძლება ჰქონდეს სიმცირის რაიმე რიგი. უფრო ზუსტად: ნულისკენ ნებისმიერად ნელა კრებადი ε_n მიმდევრობისთვის არსებობს ფურიეს $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ მწკრივი, რომლის კოეფიციენტებია $a_k \geq \varepsilon_k$ ($k = 1, 2, \dots$). ამ საკითხთან დაკავშირებით იხ. [8, გვ. 222].

3.10 სასრული ვარიაციით ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები

ჩინა პარაგრაფში ვნახეთ, რომ პერიოდზე ჯამებადი და 2π პერიოდული ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ არ შეიძლება ჰქონდეს სიმცირის რაიმე რიგი.

ახლა ვისაუბრებთ სასრული ვარიაციის მქონე ფუნქციის კოეფიციენტებზე ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ, რომელთაც აქვს $\frac{1}{n}$ -ის სიმცირის რიგი.

1. მანამდე აღვნიშნოთ, 1882 წელს, ჟორდანის მიერ შემოღებული სასრული ვარიაციით ფუნქციის ზოგიერთი თვისება.

გ ა ნ ს ა ზ დ ვ რ ა 3.10.1 (ჟორდანი (1882 წ.)). ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულია სასრული f ფუნქცია. დავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი ქვესეგმენტებად $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ წერტილებით და შევადგინოთ

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

ჯამი. $[a, b]$ სეგმენტის ყოველ დანაწილებას შეესაბამება არაუარყოფითი s რიცხვი და II -ით აღენიშნოთ ყველა ასეთი s რიცხვის სიმრავლე. H სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი აღინიშნება $\bigvee_a^b(f)$ სიმბოლოთი და მას ეწოდება f ფუნქციის სრული ვარიაცია $[a, b]$ სეგმენტზე. თუ $\bigvee_a^b < +\infty$, მაშინ f ფუნქციას ეწოდება ფუნქცია სასრული ვარიაციით $[a, b]$ სეგმენტზე.

მტკიცდება, რომ $[a, b]$ სეგმენტზე ზრდად და კლებად ფუნქციებს სასრული ვარიაცია აქვს იმავე სეგმენტზე.

სასრული ვარიაცია გააჩია ლიპშიცის მიერ, 1864 წელს, შემოღებულ ფუნქციებსაც.

გ ა ნ ს ა ზ დ ვ რ ა 3.10.2 (ლიპშიცი (1864 წ.)). $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ სასრულ f ფუნქციას ეწოდება ლიპშიცის კლასის, თუ არსებობს მუდმივი K ისეთი, რომ ყოველი $x \in [a, b]$ და $y \in [a, b]$ წერტილებისთვის სრულდება უტოლობა ანუ, ლიპშიცის პირობა მაჩვენებლით 1,

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|. \quad (3.10.1)$$

$[a, b]$ სეგმენტზე ლიპშიცის კლასის f ფუნქციას აქვს სასრული ვარიაცია და მისი ვარიაცია $[a, b]$ სეგმენტზე არ აღემატება $K(b - a)$ რიცხვს. მართლაც, $[a, b]$ სეგმენტის ზემოთ აღებული დანაწილებისთვის, (3.10.1)-დან ვლევულობთ

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq K(x_{k+1} - x_k)$$

და, ამიტომ

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| &\leq K \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \\ &= K[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})] = K(x_n - x_0) = K(b - a). \end{aligned}$$

ცხადია, რომ $[a, b]$ სეგმენტზე ლიპშიცის კლასის f ფუნქცია უწყვეტია ამავე სეგმენტზე. თუკი, გარდა ამისა, f ფუნქციას $[a, b]$ -ს ყველა შიდა წერტილზე აქვს $f'(x)$ წარმოებული, $a < x < b$, და, თუ ეს $f'(x)$ შემოსაზღვრულია, მაშინ f არის ლიპშიცის კლასის $[a, b]$ -ზე. მართლაც, ლაგრანჟის ფორმულით

$$f(x) - f(y) = f'(z)(x - y), \quad x < z < y$$

და (3.10.1) შესრულებულია $K \geq |f'(z)|$ მუდმივისთვის.

$[a, b]$ სეგმენტზე სასრული ვარიაციის მქონე f ფუნქცია შემოსაზღვრულიცაა $[a, b]$ -ზე. მართლაც, თუ $a \leq x \leq b$, მაშინ

$$|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq \bigvee_a^b(f),$$

კერძოდ,

$$|f(x) - f(a)| \leq \bigvee_a^b(f),$$

ანუ

$$|f(x)| - |f(a)| \leq \bigvee_a^b(f).$$

აქედან

$$|f(x)| \leq |f(a)| + \bigvee_a^b(f).$$

სასრული ვარიაციით ფუნქციების ძალიან მნიშვნელოვანი თვისება მოცემულია ლებეგის შემდეგი თეორემით.

თეორემა 3.10.3 (ლებეგი (1903 წ.)). $[a, b]$ სეგმენტზე სასრული ვარიაციით f ფუნქციას, კერძოდ ლიპშიცის კლასის ფუნქციას², თითქმის ყველა $x \in [a, b]$ წერტილზე გააჩნია $f'(x)$ წარმოებული და $f'(x)$ ფუნქცია ჯამებადია $[a, b]$ -ზე, კერძოდ, $f'(x)$ სასრულია თითქმის ყველგან.

ეს იყო პირველი შემთხვევა, როცა დასახელდა კლასი ფუნქციებისა, რომელთაც სასრული წარმოებული გააჩნია თითქმის ყველგან. ლებეგის ამ თეორემასთან დაკავშირებით მ. რისი წერდა “ეს არის ანალიზის უმნიშვნელოვანესი და განსაცვიფრებელი შედეგი”.

2. ახლა ვისაუბრებთ 2π პერიოდული და $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე სასრული ვარიაციის მქონე f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტების შესახებ ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ. თავიდანვე აღვნიშნოთ, რომ რადგან $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე სასრული ვარიაციით f ფუნქცია შემოსაზღვრულია $[0, 2\pi]$ -ზე, ამიტომ $f \in L^2[0, 2\pi]$ და მისი ფურიეს კოეფიციენტები კრებადია ნულისკენ (იხ. პარაგრაფი 3.6, ტოლობა (3.6.4)).

²ლიპშიცის კლასის ფუნქციისთვის გარანტირებული არ არის მისი წარმოებულის ყველგან არსებობა. მაგალითად, $\psi(x) = |x|$ ფუნქციისთვის არ არსებობს $\psi'(0)$ (0 წერტილზე მისი მარჯვენა წარმოებულია 1, ხოლო მარცხენა წარმოებული კი (-1)), თუმცა $\psi(x)$ ფუნქცია ლიპშიცის კლასისაა, რადგანაც $||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|$.
გარდა ამისა, ლიპშიცის კლასის ფუნქციის წარმოებული, სადაც ის არსებობს, არ შეიძლება უსასრულოა იყოს.

ამ ფაქტის არსებითი გაძლიერებაა

თეორემა 3.10.4. თუ 2π პერიოდული და $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე სასრული ვარიაციის მქონე f ფუნქციის ფურიეს მწკრივია

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

მაშინ ადგილი აქვს უტოლობებს

$$|a_n| \leq \frac{\bigvee_0^{2\pi}(f)}{2} \cdot \frac{1}{n}, \quad |b_n| \leq \frac{\bigvee_0^{2\pi}(f)}{2} \cdot \frac{1}{n}, \quad (3.10.2)$$

სადაც $\bigvee_0^{2\pi}(f)$ არის f ფუნქციის სრული ვარიაცია $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე. (3.10.2) უტოლობებს მოკლედ ასე წერენ

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (3.10.3)$$

დამტკიცება. x იყოს რაიმე წერტილი $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე და 2π სიგრძის $[x, x + 2\pi]$ სეგმენტი დავყოთ $2n$ რაოდენობის ქვესეგმენტებად

$$\left[x + \frac{\pi}{n}, x + 2\frac{\pi}{n}\right], \dots, \left[x + (2n-1)\frac{\pi}{n}, x + 2n\frac{\pi}{n}\right].$$

რადგან f არის სასრული ვარიაციის მქონე $[0, 2\pi]$ -ზე და 2π პერიოდული, ამიტომ f -ის ვარიაცია არის ერთი და იგივე 2π სიგრძის ყოველ სეგმენტზე, მათ შორის $[x, x + 2\pi]$ -ზეც, ამიტომ

$$\sum_{k=1}^{2n} \left| f\left(x + k\frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1)\frac{\pi}{n}\right) \right| \leq \bigvee_0^{2\pi}(f). \quad (3.10.4)$$

თუ ტოლობაში

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (3.10.5)$$

მოვასდენთ $x = t + \frac{\pi}{n}$ გარდაქმნას, მივიღებთ

$$a_n = -\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n} + 2\pi} f\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \cos nt \, dt.$$

უკანასკნელი ინტეგრალისთვის, ცნობილი ტოლობის (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.3, ტოლობა (1.3.6)) გამოყენებით, მივიღებთ

$$a_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \cos nx \, dx. \quad (3.10.6)$$

(3.10.5) და (3.10.6) ტოლობებიდან ვღებულობთ

$$2a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \right] \cos nx \, dx,$$

საიდანაც

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - f(x) \right| dx. \quad (3.10.7)$$

მეორეს მხრივ, $x + (k-1)\frac{\pi}{n} = t$ გარდაქმნით მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left| f\left(x + k\frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1)\frac{\pi}{n}\right) \right| dx \\ &= \int_{-(k-1)\frac{\pi}{n}}^{-(k-1)\frac{\pi}{n} + 2\pi} \left| f\left(t + \frac{\pi}{n}\right) - f(t) \right| dt = \int_0^{2\pi} \left| f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - f(x) \right| dx. \end{aligned} \quad (3.10.8)$$

(3.10.7) და (3.10.8) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(x + k\frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1)\frac{\pi}{n}\right) \right| dx. \quad (3.10.9)$$

თუ (3.10.9) უტოლობებს შევკრებთ $k = 1, 2, \dots, 2n$ მნიშვნელობებისთვის და გავითვალისწინებთ (3.10.4) უტოლობას, მივიღებთ

$$2n|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \bigvee_0^{2\pi}(f) \int_0^{2\pi} dx = \bigvee_0^{2\pi}(f).$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$2n|b_n| \leq \bigvee_0^{2\pi}(f).$$

ამრიგად, (3.10.2) უტოლობანი მართებულია. □

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 3.10.5. როგორ ცნობილია, სასრული ვარიაციის მქონე ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს წყვეტის წერტილები, ისიც მხოლოდ $\downarrow$ გვარის. ბუნებრივია კითხვა: ხომ არ შეიძლება (3.10.3) დამოკიდებულებანი გაუმჯობესდეს

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ და } b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

ფორმებით, თუ სასრული ვარიაციის f ფუნქცია იქნება 2π პერიოდული და უწყვეტი $(-\infty, +\infty)$ -ზე ანუ უწყვეტი წრეწირზე?

პასუხი უარყოფითია (იხ. [8, გვ. 203]).

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 3.10.6. არსებობს სასრული ვარიაციის მქონე ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებზე აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ ეს ფუნქცია იყოს უწყვეტი. სახელდობრ, მართებულია ვინერის შემდეგი თეორემა (იხ. [8, გვ. 205]).

თ ე ო რ ე მ ა 3.10.7 (ვინერი (1924 წ.)). სასრულო ვარიაციის მქონე ფუნქციის უწყვეტობისთვის აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს ტოლობა

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_1 + 2p_2 + \dots + np_n}{n} = 0,$$

$$\text{სადაც } p_n^2 = a_n^2 + b_n^2.$$

შ ე დ ე გ ი 3.10.8 ([8, გვ. 208]). სასრული ვარიაციის მქონე f ფუნქციის ფურიეს a_n და b_n კოეფიციენტები თუ აკმაყოფილებს პირობებს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nb_n = 0, \quad (3.10.10)$$

მაშინ f ფუნქცია უწყვეტია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 3.10.9 ([8, გვ. 203]). არსებობს უწყვეტი და სასრული ვარიაციის მქონე ფუნქცია, რომლის ფურიეს a_n და b_n კოეფიციენტები არ აკმაყოფილებს (3.10.10) პირობას და აკმაყოფილებს მხოლოდ (3.10.3) პირობას 3.10.4 თეორემიდან.

3.11 პარამეტრიანი ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტების ნულისკენ თანაბრად კრებადობა

პარაგრაფ 3.9-ში დამტკიცებული რიმან-ლებეგის თეორემის თანახმად, ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ კრებადია ნულისკენ.

ფურიეს მწკრივის კრებადობის საკითხში მნიშვნელოვან როლს ასრულებს პლესნერის თეორემა იმის შესახებ, რომ პარამეტრზე დამოკიდებული ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები ტრიგონომეტრიული სისტემისთვის, თანაბრად კრებადია ნულისკენ პარამეტრის მიმართ.

ამ თეორემაში არსებითი მომენტია თანაბრად კრებადობა, რადგან პარამეტრის ყოველი ფიქსირებული მნიშვნელობისთვის კოეფიციენტების ნულისკენ კრებადობა გამომდინარეობს რიმან-ლებეგის თეორემიდან!

პლესნერის თეორემის დამტკიცება ემყარება რამდენიმე, თავისთავად საინტერესო ფაქტს.

1.

თეორემა 3.11.1. ვთქვათ, f ფუნქცია ჯამებადია $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე და 2π პერიოდული. მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს $[0, 2\pi]$ -ზე უწყვეტი φ ფუნქცია ისეთი, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \varphi(x)| dx < \varepsilon. \quad (3.11.1)$$

დამტკიცება. ლებეგის ინტეგრალის განსაზღვრის თანახმად³, არსებობს $[0, 2\pi]$ -ზე

³რადგან f ფუნქცია ჯამებადია $[0, 2\pi]$ -ზე, ამიტომ არსებობს (იხ. [28, გვ. 338]) მარტივ ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობა, რომელიც თანაბრად კრებადია $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე f ფუნქციისკენ ანუ მოცემული $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს $N(\varepsilon)$ ისეთი, რომ

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4\pi}, \text{ როცა } 0 \leq x \leq 2\pi, \quad n > N.$$

ამიტომ, როცა $n > N$, მაშინ

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - f_n(x)| dx < 2\pi \cdot \frac{\varepsilon}{4\pi} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

თუ ახლა ψ ფუნქციად ავიღებთ რომელიმე f_n -ს, სადაც $n > N$, მაშინ გვექნება (3.11.2) უტოლობა.

ამასთან, ზომად f_n ფუნქციის ეწოდება მარტივი, თუ f_n ფუნქციის მიერ $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე მიღებულ მნიშვნელობათა სიმრავლე სასრულია ან თვლადი [28, გვ. 336–338].

შემოსაზღვრული და 2π პერიოდული ψ ფუნქცია ისეთი, რომ

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.11.2)$$

$[0, 2\pi]$ სეგმენტზე განვიხილოთ ფუნქცია

$$\Psi(x) = \int_0^x \psi(t) dt$$

და უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობა

$$\psi_n(x) = \frac{\Psi(x + 1/n) - \Psi(x)}{1/n} = \frac{\int_x^{x+1/n} \psi(t) dt}{1/n}.$$

რადგან ψ ფუნქცია შემოსაზღვრულია, ამიტომ არსებობს M მუდმივი ისეთი, რომ $|\psi(x)| \leq M$, როცა $0 \leq x \leq 2\pi$. ამის გამო

$$|\psi_n(x)| \leq \frac{M \int_x^{x+1/n} dx}{1/n} = M,$$

ე.ი. ფუნქციათა (ψ_n) მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრულია:

$$|\psi_n(x)| \leq M, \text{ როცა } 0 \leq x \leq 2\pi \text{ და } n = 1, 2, \dots \quad (3.11.3)$$

გარდა ამისა, ლებეგის თეორემის თანახმად ცვლადსაზღვრიანი ინტეგრალის გაწარმოების შესახებ [28, გვ. 380], თითქმის ყველა $x \in [0, 2\pi]$ -თვის ადგილი აქვს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) = \psi(x) \quad (3.11.4)$$

ტოლობას და (3.11.3) უტოლობის ძალით

$$|\psi(x)| \leq M. \quad (3.11.5)$$

ეგოროვის მიერ 1911 წელს დამტკიცებული თეორემის თანახმად [28, გვ. 329], (3.11.4) ტოლობიდან გამომდინარეობს ზომადი $E \subset [0, 2\pi]$ სიმრავლის არსებობა ყოველი დადებითი $\delta < \varepsilon/8M$ რიცხვისთვის, რომლის ზომა $|E| > 2\pi - \delta$ და E სიმრავლეზე (3.11.4)

ტოლობა სრულდება თანაბრად, ამიტომ

$$\int_E |\psi_n(x) - \psi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{4}, \text{ როცა } n > N^*. \quad (3.11.6)$$

ამასთან ერთად, (3.11.3) და (3.11.5) უტოლობების გათვალისწინებით, გვაქვს

$$\begin{aligned} & \int_{[0, 2\pi] \setminus E} |\psi_n(x) - \psi(x)| dx \\ & \leq \int_{[0, 2\pi] \setminus E} |\psi_n(x)| dx + \int_{[0, 2\pi] \setminus E} |\psi(x)| dx \leq M\delta + M\delta = 2M\delta < \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned} \quad (3.11.7)$$

მაშასადამე, (3.11.6) და (3.11.7) უტოლობებიდან ვღებულობთ

$$\int_0^{2\pi} |\psi_n(x) - \psi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ როცა } n > N^*. \quad (3.11.8)$$

(3.11.2) და (3.11.8) უტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \psi_n(x)| dx < \varepsilon, \text{ როცა } n > N^*.$$

ახლა, თეორემაში ხსენებული უწყვეტი φ ფუნქციის როლში შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერი ψ_n ფუნქცია, რომლისთვისაც $n > N^*$. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 3.11.2. ვთქვათ, f ფუნქცია ჯამებადია $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე და 2π პერიოდული, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)| dx = 0. \quad (3.11.9)$$

დამტკიცება. თუ f ფუნქცია უწყვეტია $[0, 2\pi]$ -ზე, მაშინ f თანაბრად უწყვეტია ამავე სეგმენტზე. ამის გამო, ყოველ $\varepsilon > 0$ რიცხვს მოეძებნება დადებითი δ ისეთი, რომ

$$|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}, \text{ როცა } |t| < \delta.$$

ამ მიზეზით

$$\int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)| dx < 2\pi \cdot \frac{\varepsilon}{2\pi} = \varepsilon, \text{ როცა } |t| < \delta.$$

რაც ნიშნავს (3.11.9) ტოლობის შესრულებას.

როცა $f \in L[0, 2\pi]$, მაშინ თეორემა 3.11.1-ის ძალით არსებობს უწყვეტი φ ფუნქცია ისეთი, რომ ადგილი აქვს (3.11.1) უტოლობას. ტოლობიდან

$$f(x+t) - f(x) = [\varphi(x+t) - \varphi(x)] + [f(x+t) - \varphi(x+t)] + [\varphi(x) - f(x)]$$

გამომდინარეობს შეფასება

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)| dx &\leq \int_0^{2\pi} |\varphi(x+t) - \varphi(x)| dx \\ &+ \int_0^{2\pi} |f(x+t) - \varphi(x+t)| dx + \int_0^{2\pi} |\varphi(x) - f(x)| dx \equiv P + Q + R. \end{aligned}$$

რადგან φ ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ, უკვე დამტკიცებულის ძალით,

$$\lim_{t \rightarrow 0} P = 0 \iff P < \varepsilon, \text{ როცა } |t| < \eta. \quad (3.11.10)$$

(3.11.1) უტოლობის გამო კი

$$R < \varepsilon. \quad (3.11.11)$$

Q ინტეგრალში $x+t = y$ გარდაქმნით

$$Q = \int_t^{t+2\pi} |f(y) - \varphi(y)| dy.$$

რადგან f და φ (იგივე ψ_n , როცა $n > N^*$) 2π პერიოდული ფუნქციებია⁴, ამიტომ

$$Q = \int_0^{2\pi} |f(y) - \varphi(y)| dy.$$

4

$$\psi_n(2\pi) = \frac{\int_0^{2\pi+1/n} \psi(t) dt}{1/n} = \frac{\int_0^{1/n} \psi(t) dt}{1/n} = \psi_n(0).$$

აქ გამოყენებულია ψ ფუნქციის 2π პერიოდულობა (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.3, ტოლობა (1.3.6)).

ახლა, (3.11.1) უტოლობის გამო,

$$Q < \varepsilon. \quad (3.11.12)$$

(3.11.10)-(3.11.12) უტოლობების ძალით

$$\int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)| dx < 3\varepsilon, \text{ როცა } |t| < \eta.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

2. ახლა დავამტკიცოთ ძირითადი

თეორემა 3.11.3 (პლესნერი (1929 წ.)). ვთქვათ, მოცემულია 2π პერიოდული f და g ფუნქციები, რომელთაგან $[0, 2\pi]$ -ზე f ჯამებადია და g — შემოსაზღვრული. მაშინ $x \in (-\infty, +\infty)$ პარამეტრზე დამოკიდებული და $0 \leq t \leq 2\pi$ -ზე ჯამებადი ფუნქციის

$$\chi_x(t) = f(x+t)g(t) \quad (3.11.13)$$

ფურიეს $c_n(\chi_x)$ კოეფიციენტები კრებადია ნულისკენ თანაბრად x -ის მიმართ, ე.ი.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(\chi_x) = 0 \text{ თანაბრად } x\text{-ის მიმართ.} \quad (3.11.14)$$

დამტკიცება. როგორც ვიცით (იხ. თავი 2, პარაგრაფი 2.2, ტოლობა (2.2.5)), 2π პერიოდული რაიმე $\varphi \in L[0, 2\pi]$ ფუნქციის c_n კოეფიციენტებისთვის გვაქვს

$$2\pi c_n = \int_0^{2\pi} \varphi(x) e^{-inx} dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ტოლობები. თუ მოვახდენთ $x = t + \pi/n$ გარდაქმნას, მაშინ გვექნება

$$\begin{aligned} 2\pi c_n &= \int_{-\pi/n}^{-\pi/n+2\pi} \varphi\left(t + \frac{\pi}{n}\right) e^{-in(t+\frac{\pi}{n})} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \varphi\left(t + \frac{\pi}{n}\right) e^{-int} e^{-i\pi} dt = - \int_0^{2\pi} \varphi\left(x + \frac{\pi}{n}\right) e^{-inx} dx. \end{aligned}$$

ამრიგად,

$$2\pi c_n = \int_0^{2\pi} \varphi(x) e^{-inx} dx \quad \text{და} \quad 2\pi c_n = - \int_0^{2\pi} \varphi\left(x + \frac{\pi}{n}\right) e^{-inx} dx.$$

ამიტომ

$$4\pi c_n = \int_0^{2\pi} \left[\varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \right] e^{-inx} dx.$$

აქედან

$$|c_n| \leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left| \varphi\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - \varphi(x) \right| dx. \quad (3.11.15)$$

ახლა, (3.11.15) უტოლობის მარჯვენა მხარეში φ ფუნქციის როლში ავიღოთ (3.11.13) ტოლობით განსაზღვრული $\chi_x(t)$ ფუნქცია, π/n შევცვალოთ h -ით და გავითვალისწინოთ

$$\begin{aligned} \chi(t+h) - \chi(t) &= f(x+t+h)g(t+h) - f(x+t)g(t) \\ &= [f(x+t+h) - f(x+t)]g(t+h) + f(x+t)[g(t+h) - g(t)] \end{aligned}$$

ტოლობა, მაშინ გვექნება

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\chi(t+h) - \chi(t)| dt &\leq \int_0^{2\pi} |f(x+t+h) - f(x+t)| |g(t+h)| dt \\ &\quad + \int_0^{2\pi} |f(x+t)| |g(t+h) - g(t)| dt \equiv P + Q. \end{aligned}$$

თუ P ინტეგრალში მოვახდენთ $x+t=y$ გარდაქმნას, მივიღებთ

$$P = \int_x^{x+2\pi} |f(y+h) - f(y)| |g(y-x+h)| dy.$$

f და g ფუნქციების 2π პერიოდულობის გამო (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.3, ტოლობა (1.3.6)), გვექნება

$$P = \int_0^{2\pi} |f(y+h) - f(y)| |g(y-x+h)| dy.$$

g ფუნქციის შემოსაზღვრულობის გამო $|g| < M$ და, ამიტომ,

$$P \leq M \int_0^{2\pi} |f(y+h) - f(y)| dy.$$

(3.11.9) ტოლობის ძალით არსებობს $\delta_1 > 0$ ისეთი, რომ

$$P < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ როცა } |h| < \delta_1. \quad (3.11.16)$$

Q ინტეგრალში კი f წარმოვადგინოთ $f = f_1 + f_2$ სახით, სადაც f_1 შემოსაზღვრულია $[0, 2\pi]$ -ზე რაიმე B რიცხვით და

$$\int_0^{2\pi} |f_2(x)| dx < \frac{\varepsilon}{8M}$$

(იხ. უტოლობა (3.11.2)), ამიტომ

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi} |f_1(x+t)| |g(t+h) - g(t)| dt + \int_0^{2\pi} |f_2(x+t)| |g(t+h) - g(t)| dt \\ &\leq B \int_0^{2\pi} |g(t+h) - g(t)| dt + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{8M}. \end{aligned}$$

(3.11.9) ტოლობის გამო

$$\int_0^{2\pi} |g(t+h) - g(t)| dt < \frac{\varepsilon}{4B}, \text{ როცა } |h| < \delta_2.$$

ამგვარად,

$$Q \leq B \frac{\varepsilon}{4B} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}, \text{ როცა } |h| < \delta_2. \quad (3.11.17)$$

(3.11.16) და (3.11.17) შეფასებებიდან ვლუბულობთ, რომ

$$P + Q < \varepsilon, \text{ როცა } |h| < \delta, \text{ სადაც } \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0. \quad (3.11.18)$$

(3.11.18) უტოლობა $h = \frac{\pi}{n}$ კერძო შემთხვევისთვის მიიღებს სახეს

$$P + Q < \varepsilon, \text{ როცა } n > N(\varepsilon). \quad (3.11.19)$$

(3.11.19) უტოლობის გამოყენება (3.11.15) უტოლობის მარჯვენა მხარის მიმართ იძლევა (3.11.14) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

3.12 ფორმალური ოპერაციები ფურიეს მწკრივებზე

3.12.1 ფორმალური ინტეგრება და გაწარმოება

ვთქვათ, 2π პერიოდული f ფუნქცია ჯამებადია პერიოდზე და F_c იყოს f -ის განუსაზღვრელი ინტეგრალი.⁵ ცხადია, რომ $F_c(x)$ ფუნქციის 2π პერიოდულობისთვის ანუ

$$F_c(x + 2\pi) - F_c(x) = 0$$

ტოლობისთვის, აუცილებელი და საკმარისია 2π პერიოდული იყოს

$$F(x) \equiv F_0(x) = \int_0^x f(t) dt$$

ფუნქცია. ამიტომ $F(x)$ ფუნქციის 2π პერიოდულობისთვის აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$ ტოლობა (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.2, ტოლობა (1.2.3)). ეს კი ნიშნავს, რომ f ფუნქციის ფურიეს მწკრივში თავისუფალი c_0 წევრი ნულია, ე.ი.

$$f \sim \sum_{|k| \geq 1} c_k(f) e^{ikx}, \quad (3.12.1)$$

⁵ $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე ჯამებადია f ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი (ლემების აზრით) ეწოდება ფუნქციათა სიმრავლეს

$$F_c(x) = c + \int_0^x f(t) dt, \quad F_c(0) = c, \quad (ა)$$

სადაც c აღნიშნავს ნებისმიერ მუდმივს, ე.ი. f -ს აქვს უსასრულო სიმრავლე განუსაზღვრელი ინტეგრალებისა, რომელთაგან ერთიმეორისგან მუდმივით განსხვავდება.

(ა) ტოლობით განსაზღვრული აბსოლუტურად უწყვეტი F_c ფუნქციების საერთო თვისებაა

$$F'_c(x) = f(x) \quad (ბ)$$

ტოლობის შესრულება თითქმის ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე.

სახელდობრ, (ბ) ტოლობას ადგილი აქვს f ფუნქციის ლემების x წერტილზე. ასე ეწოდება x წერტილის, თუ $f(x) \neq \pm \infty$ და სრულდება ტოლობა

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt = 0.$$

სადაც

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F'(x) e^{-ikx} dx.$$

ნაწილობითი ინტეგრებით და $F(x)$ ფუნქციის 2π პერიოდულობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \left[F(x) e^{ikx} \Big|_0^{2\pi} \right] - \frac{(-ik)}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x) e^{-ikx} dx = ik \cdot c_k(F),$$

ე.ი.

$$c_k(f) = ik c_k(F), \quad |k| \geq 1. \quad (3.12.2)$$

ამრიგად,

$$F(x) \sim \sum_{|k| \geq 1} c_k(F) e^{ikx}$$

დამოკიდებულება მიიღებს სახეს

$$F(x) \sim \sum_{|k| \geq 1} \frac{c_k(f)}{ik} e^{ikx}. \quad (3.12.3)$$

(3.12.2) ტოლობის მარცხენა მხარის მიმართ რიმან-ლბეგის თეორემის გამოყენებით (იხ. თავი 3, პარაგრაფი 3.9, თეორემა 3.9.2) მიიღება

წინადადება 3.12.1. აბსოლუტურად უწყვეტი F ფუნქციის ფურიეს $c_n(F)$ კოეფიციენტებს აქვს თვისება

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |n c_n(F)| = 0 \quad \text{ანუ} \quad c_n(F) = o\left(\frac{1}{|n|}\right).$$

(3.12.3) დამოკიდებულება შეიძლება გამოითქვას შემდეგი წინადადების სახით.

წინადადება 3.12.2. პერიოდზე ჯამებადი და 2π პერიოდული f ფუნქციის ფურიეს (3.12.1) მწკრივის ფორმალური წევრობრივი ინტეგრება შესაძლებელია $\sim$ სიმბოლოს შენარჩუნებით.

თუკი $F(x)$ ფუნქცია არაა 2π პერიოდული, მაშინ (3.12.3) დამოკიდებულებას ექნება სახე

$$F(x) - c_0(f)x \sim \sum_{|k| \geq 1} \frac{c_k(f)}{ik} e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (a_k \sin kx - b_k \cos kx), \quad (3.12.4)$$

რომლის მარცხენა მხარე 2π პერიოდულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 3.12.3. ფურიეს მწკრივის არაფორმალური წევრობრივი ინტეგრების მართლზომიერება დამტკიცებულ იქნება ქვემოთ (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.15), სადაც დადგენილ იქნება, რომ (3.12.4) დამოკიდებულებაში “ $\sim$ ” შესაბამისობის ნიშანი იცვლება “ $=$ ” ტოლობის ნიშნით.

3.12.2 აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციის შემთხვევა

რადგან $F'(x) = f(x)$ თითქმის ყველგან, ამიტომ 2π პერიოდული აბსოლუტურად უწყვეტი $F(x)$ ფუნქციის ფურიეს (3.12.3) მწკრივიდან (3.12.1) მწკრივზე გადასვლა შეიძლება ასე გამოითქვას.

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა 3.12.4. აბსოლუტურად უწყვეტი 2π პერიოდული ფუნქციის ფურიეს მწკრივის ფორმალური წევრობრივი გაწარმოებით მიიღება წარმოებულის შესაბამისი ფურიეს მწკრივი.

ამ წინადადებაში აბსოლუტურად უწყვეტობა არსებითია, რასაც გვიჩვენებს, მაგალითად, ფურიეს ყველგან კრებადი $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ მწკრივი. სხვა სიტყვებით: ჯამებადი 2π პერიოდული φ ფუნქციის ფურიეს $(\alpha_k, \beta_k, k \geq 1)$ კოეფიციენტების მისაღებად აუცილებელი და საკმარისია, რომ აბსოლუტურად უწყვეტი და 2π პერიოდული $\phi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt - \frac{1}{2} \alpha_0 x$ ფუნქციისთვის შევადგინოთ ფურიეს $(A_k, B_k, k \geq 1)$ კოეფიციენტებიანი მწკრივი. ეს მწკრივი კი მიიღება $(\varphi - \frac{1}{2} \alpha_0)$ ფუნქციის ფურიეს $(\alpha_k, \beta_k, k \geq 1)$ კოეფიციენტებიანი მწკრივის წევრობრივი ინტეგრებით $[0, x]$ სეგმენტზე, რაც მართლზომიერია ლებეგის თეორემით (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.15). წევრობრივი ინტეგრების შედეგია, მუდმივი შესაკრების სიზუსტით,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{\beta_k}{k} \cos kx + \frac{\alpha_k}{k} \sin kx \right)$$

მწკრივი, რომლის წევრობრივი გაწარმოებით მიიღება სწორედ φ ფუნქციის $(\alpha_k, \beta_k, k \geq 1)$ კოეფიციენტებიანი მწკრივი.

3.12.3 აბსოლუტურად უწყვეტი წარმოებულის შემთხვევა

ვთქვათ, 2π პერიოდულ და $(-\infty, +\infty)$ -ზე უწყვეტ f ფუნქციას აქვს აბსოლუტურად უწყვეტი წარმოებული $f'(x)$. მაშინ მეორე რიგის წარმოებული $f''(x)$ ჯამებადია და მისი $c_n(f'')$

ფურიეს კოეფიციენტები, რიმან-ლებეგის თეორემის ძალით, კრებადია ნულისკენ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(f'') = 0. \quad (3.12.5)$$

მეორეს მხრივ, აბსოლუტურად უწყვეტი f' ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები, (3.12.2) ტოლობის გამო⁶, მოიცემა $c_n(f') = \frac{1}{in} c_n(f'')$ ტოლობით. ასევე,

$$c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f') = \frac{1}{(in)^2} c_n(f'').$$

აქედან, (3.12.5) ტოლობის ძალით, ვლბულობთ

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{|n|^2}\right). \quad (3.12.6)$$

თუ f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი ნამდვილი ფორმითაა მოცემული და $f \sim (a_n, b_n)$, მაშინ (3.12.6) შეიცვლება დამოკიდებულებებით

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3.12.4 ფურიეს მწკრივების შეკრება-გამოკლება

თუ f და g ფუნქციებს შეესაბამება ფურიეს შემდეგი მწკრივები

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}, \quad (3.12.7)$$

$$g \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n(g) e^{inx},$$

მაშინ

$$f \pm g \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n \pm d_n) e^{inx}. \quad (3.12.8)$$

მართლაც,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(x) \pm g(x)] e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \pm \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) e^{-inx} dx = c_n \pm d_n.$$

თუ ფურიეს მწკრივი ჩაწერილია ნამდვილი ფორმით და $f \sim (a_n, b_n)$ და $g \sim (c_n, d_n)$, მაშინ $f \pm g \sim (a_n \pm c_n, b_n \pm d_n)$.

⁶(3.12.2) ტოლობის მარცხნივ მდგომი f არის მარჯვნივ მდგომი F -ის წარმოებული.

3.12.5 ფურიეს მწკრივის გამრავლება მუდმივზე

(3.12.7) დამოკიდებულებიდან ნებისმიერი p მუდმივისთვის გამომდინარეობს, რომ

$$pf \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (pc_n(f))e^{inx}.$$

3.12.6 ფურიეს მწკრივი $f(x + \alpha)$ -თვის

თუ α ნებისმიერი მუდმივია, მაშინ (3.12.7) დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს

$$f(x + \alpha) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{in(x+\alpha)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (e^{in\alpha})c_n(f)e^{inx}.$$

მართლაც,

$$\begin{aligned} c_n(f(x + \alpha)) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + \alpha)e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(y)e^{in(y-\alpha)} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y)e^{-in(y-\alpha)} dy = e^{in\alpha} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y)e^{-iny} dy = e^{in\alpha} c_n(f). \end{aligned}$$

მაშასადამე, $f(x + \alpha)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი მიიღება $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივიდან, თუ x -ს შევცვლით $(x + \alpha)$ -ით, რაც გამოიწვევს $c_n(f)$ კოეფიციენტის გამრავლებას $e^{in\alpha}$ -ზე.

3.12.7 ფურიეს მწკრივი $f(x)e^{imx}$ ფუნქციისთვის, სადაც m მთელია

რადგან

$$c_n(f(x)e^{imx}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{imx}e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-i(n-m)x} dx = c_{n-m}(f),$$

ამიტომ

$$f(x)e^{imx} \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n-m}(f)e^{inx},$$

რომლის მიღება შეიძლება ფორმალურადაც

$$f(x)e^{imx} \sim \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \right) e^{imx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i(n+m)x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{k-m} e^{ikx}.$$

3.12.8 $|f|$ -ის მწკრივი

რადგან f და $|f|$ ერთდროულად არის ან არ არის ჯამებადი ფუნქციები, ამიტომ ჯამებადი f ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ მწკრივთან შეიძლება დავაკავშიროთ ასევე ჯამებადი $|f|$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი. მართლაც, ვთქვათ,

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

სადაც (იხ. თავი 2, პარაგრაფი 2.2)

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (3.12.9)$$

რადგან არსებობს⁷ [1, გვ. 454] $f = f_1 - f_2$ წარმოდგენა, სადაც $f_1 \geq 0$, $f_2 \geq 0$ და $|f| = f_1 + f_2$, ამიტომ (3.12.9) ტოლობიდან ვღებულობთ, (3.12.8) ტოლობის ძალით,

$$c_n(f) = c_n(f_1) - c_n(f_2)$$

და, ასევე,

$$c_n(|f|) = c_n(f_1) + c_n(f_2).$$

ამიტომ

$$|f| \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [c_n(f_1) + c_n(f_2)] e^{inx}.$$

7

$$f_1(x) = \frac{1}{2} [|f(x)| + f(x)] \geq 0, \quad f_2(x) = \frac{1}{2} [|f(x)| - f(x)] \geq 0$$

ჯამებადი ფუნქციებია f_1 -ისა და $|f|$ -ის ჯამებადობის გამო. აქედან,

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) \quad \text{და} \quad \int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f_1(x) dx - \int_0^{2\pi} f_2(x) dx.$$

თავი 4

ფურიეს მწკრივთა კრებადობის საკითხები

4.1 ფურიეს მწკრივის აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადობის მარტივი შემთხვევა

თ ე ო რ ე მ ა 4.1.1. ვთქვათ, 2π პერიოდულ და $(-\infty, +\infty)$ -ზე უწყვეტ f ფუნქციას გააჩნია პერიოდზე ჯამებადი¹ მეორე რიგის $f''(x)$ წარმოებული, $x \in (-\infty, +\infty)$, მაშინ f ფუნქციის ფურიეს

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (4.1.1)$$

ტრიგონომეტრიული მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$ წერტილზე. გარდა ამისა, (4.1.1) მწკრივი ნებისმიერ $[a, b] \subset (-\infty, +\infty)$ სეგმენტზე თანაბრად კრებადია $f(x)$ ფუნქციისკენ:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \text{ თანაბრად } [a, b]\text{-ზე.}$$

დ ა მ ტ ვ ი ც ე ბ ა . თეორემის პირობებში გვაქვს ტოლობანი (იხ. თავი 3, პარაგრაფი 3.12)

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ და } b_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

ანუ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 0 \text{ და } \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 b_n = 0.$$

¹ 2π პერიოდული და $(-\infty, +\infty)$ -ზე მეორე რიგის $f''(x)$ წარმოებულის მქონე f ფუნქციისთვის, $f''(x)$ არის 2π პერიოდული ფუნქცია (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.2, მტკიცება 1.2.4).

აქედან გამომდინარეობს $(n^2 a_n)$ და $(n^2 b_n)$ მიმდევრობების შემოსაზღვრულობა, ანუ არსებობს ისეთი M მუდმივისა, რომ ადგილი აქვს უტოლობებს

$$|a_n| < \frac{M}{n^2} \text{ და } |b_n| < \frac{M}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

რადგან $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ მწკრივი კრებადია, ამიტომ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ და $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ მწკრივებიც კრებადია, ანუ

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < +\infty. \quad (4.1.2)$$

ამასთან,

$$\begin{aligned} \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \\ \leq \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [|a_n| |\cos nx| + |b_n| |\sin nx|] \leq \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < +\infty \end{aligned}$$

ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$ -თვის.

ამრიგად, (4.1.1) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$ წერტილზე.

(4.1.1) მწკრივის თანაბრად კრებადობა ნებისმიერ $[a, b] \subset (-\infty, +\infty)$ სეგმენტზე, გამომდინარეობს ნებისმიერი $x \in [a, b]$ -თვის მართებული შეფასებებიდან

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=p}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right| \\ \leq \sum_{n=p}^{\infty} (|a_n| |\cos nx| + |b_n| |\sin nx|) \leq \sum_{n=p}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \leq 2M \sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

მართლაც, რადგან $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ მწკრივი კრებადია, ამიტომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს $N(\varepsilon)$ ისეთი, რომ

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{2M},$$

ამიტომ

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right| < \varepsilon \quad (4.1.3)$$

ერთბაშად ყველა x -თვის $[a, b]$ -დან. ეს კი ნიშნავს (4.1.1) მწკრივის თანაბრად კრებადობას $[a, b] \subset (-\infty, +\infty)$ სეგმენტზე.

მეორეს მხრივ, (4.1.1) მწკრივის თანაბრად კრებადობა ყოველ $[a, b] \subset (-\infty, +\infty)$ სეგმენტზე იწვევს (4.1.1) მწკრივის $[a, b]$ -ზე თანაბრად კრებადობას $f(x)$ -კენ (იხ. თავი 3, პარაგრაფი 3.1). თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თ ე ო რ ე მ ა 4.1.2. თუ 2π პერიოდული F ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია ყოველ $[A, B] \subset (-\infty, +\infty)$ სეგმენტზე და მისი თითქმის ყველგან არსებული $F'(x) \equiv f(x)$ წარმოებული წარმოდგენს კვადრატით ჯამებად ფუნქციას $[-\pi, \pi]$ -ზე, მაშინ F ფუნქციის

$$F \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \quad (4.1.4)$$

ფურიეს მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$ წერტილზე და თანაბრად კრებადია $F(x)$ -კენ ნებისმიერ სეგმენტზე $(-\infty, +\infty)$ -დან.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . რადგან $f \in L^2[-\pi, \pi]$, ამიტომ მისი a_n და b_n ფურიეს კოეფიციენტები აკმაყოფილებს პარსევალის ტოლობას (იხ. თავი 3, პარაგრაფი 3.6, ტოლობა 3.6.4)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2), \quad (4.1.5)$$

ე.ი.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) < +\infty.$$

მეორეს მხრივ, ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} F(x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F'(x) \sin nx dx \\ &= -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = -\frac{b_n}{n} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$B_n = \frac{a_n}{n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

გარდა ამისა, $A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx$ სასრულია, რადგან F შემოსაზღვრულია $[-\pi, \pi]$ -ზე. ამრიგად,

$$\frac{|A_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|A_n| + |B_n|) = \frac{|A_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|b_n|}{n} + \frac{|a_n|}{n} \right).$$

ეს მწკრივი კი კრებადი, რადგან

$$\frac{|b_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left(b_n^2 + \frac{1}{n^2} \right) \text{ და } \frac{|a_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left(a_n^2 + \frac{1}{n^2} \right),$$

ხოლო (4.1.5) და $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ მწკრივები კრებადია.

მაშასადამე,

$$\frac{|A_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|A_n| + |B_n|) < +\infty.$$

ამის შემდეგ მსჯელობა გაგრძელდება ისევე, როგორც (4.1.1) თეორემის დამტკიცებისას, დაწყებული (4.1.2) უტოლობიდან. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

4.2 დანჟუა-ლუზინის და კანტორ-ლესბეგის თეორემები

ამ პარაგრაფში დამტკიცებული იქნება ორი მნიშვნელოვანი თეორემა ზოგადი ტრიგონომეტრიული მწკრივების შესახებ.

1. პირველი თეორემა ატარებს დანჟუასა და ლუზინის სახელებს, რომელიც მათ დაამტკიცეს 1912 წელს ერთიმეორისგან დამოუკიდებლად. მისი ფორმულირებისას გამოვიყენებთ ტოლობას (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.4)

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}, \quad n \geq 1.$$

თეორემა 4.2.1 (დანჟუა, ლუზინი [8, გვ. 173]). დადებითი ზომის სიმრავლეზე

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (4.2.1)$$

ტრიგონომეტრიული მწკრივის აბსოლუტურად კრებადობისთვის ანუ, რაც იგივეა

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \equiv |c_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}| \quad (4.2.2)$$

მწკრივის კრებადობისთვის ყველა x წერტილზე დადებითი ზომის რაიმე $E \subset [0, 2\pi]$ სიმრავლიდან, $|E| > 0$, აუცილებელი და საკმარისია პირობა

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < +\infty \quad (4.2.3)$$

ანუ, რაც იგივეა, პირობა²

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty. \quad (4.2.4)$$

დამტკიცება.

საკმარისობა. თუ შესრულებულია (4.2.3) პირობა ან (4.2.4), მაშინ

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < +\infty,$$

ე.ი. (4.2.1) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$ წერტილზე, კერძოდ, დადებითი ზომის E სიმრავლეზეც.

აუცილებლობა. აღვნიშნოთ $\rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ($n \geq 1$) და შემოვიღოთ $\alpha_0 = 0$ და $\frac{a_0}{2} = \rho_0$. გარდა ამისა, არსებობს α_n მუდმივები ისეთი, რომ $a_n = \rho_n \cos \alpha_n$ და $b_n = \rho_n \sin \alpha_n$, ამიტომ (4.2.1) მწკრივი მიიღებს სახეს

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \cos(n x - \alpha_n). \quad (4.2.5)$$

²ტოლობებიდან (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.4)

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - i b_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + i b_n), \quad n \geq 1,$$

გამომდინარეობს

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad \text{და} \quad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

აქედან

$$|a_n| \leq |c_n| + |c_{-n}| \quad \text{და} \quad |b_n| \leq |c_n| + |c_{-n}|.$$

ამასთან ერთად,

$$|c_n| \leq \frac{1}{2} (|a_n| + |b_n|), \quad |c_{-n}| \leq \frac{1}{2} (|a_n| + |b_n|), \quad |c_n| + |c_{-n}| \leq |a_n| + |b_n|.$$

(4.2.1) მწკრივის ანუ, რაც იგივეა, (4.2.5) მწკრივის აბსოლუტურად კრებადობა E სიმრავლეზე ნიშნავს, რომ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n |\cos(nx - \alpha_n)| < +\infty \text{ ყველა } x \in E\text{-თვის.} \quad (4.2.6)$$

ევგოროვის თეორემის თანახმად [1, გვ. 368], არსებობს დადებითი ზომის $F \subset E$ ჩაკეტილი სიმრავლე, $|F| > 0$, რომელზეც (4.2.6) მწკრივი თანაბრად კრებადია. მისი ჯამი აღენიშნოთ $s(x)$ -ით.

რადგან F სიმრავლეზე თანაბრად კრებადი (4.2.6) მწკრივის $\rho_n |\cos(nx - \alpha_n)|$ წევრები უწყვეტი ფუნქციებია, ამიტომ $s(x)$ ფუნქცია უწყვეტია F სიმრავლეზე [1, გვ. 289].

F სიმრავლეზე (4.2.6) მწკრივის თანაბრად კრებადობის გამო,

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n |\cos(nx - \alpha_n)|$$

ტოლობის წევრობრივი ინტეგრება F -ზე მართლზომიერია, ე.ი.

$$\int_F s(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \int_F |\cos(nx - \alpha_n)| dx.$$

მაგრამ (იხ. თავი 3, პარაგრაფი 3.9, თეორემა 3.9.3)

$$\int_F |\cos(nx - \alpha_n)| dx \geq \int_F \cos^2(nx - \alpha_n) dx \rightarrow \frac{1}{2} |F|, \text{ როცა } n \rightarrow \infty.$$

ამიტომ არსებობს N ისეთი, რომ

$$\int_F |\cos(nx - \alpha_n)| dx > \frac{1}{4} |F|, \text{ როცა } n \geq N. \quad (4.2.7)$$

ცხადია, რომ

$$\int_F s(x) dx \geq \sum_{n=N}^{\infty} \rho_n \int_F |\cos(nx - \alpha_n)| dx > \frac{1}{4} |F| \sum_{n=N}^{\infty} \rho_n,$$

ანუ

$$\sum_{n=N}^{\infty} \rho_n < \frac{4}{|F|} \int_F s(x) dx,$$

ე.ი. $\sum_{n=N}^{\infty} \rho_n$ მწკრივი კრებადია. ამიტომ $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n < +\infty$. მაგრამ

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n < +\infty \quad \text{და} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n < +\infty.$$

მაშასადამე, ადგილი აქვს (4.2.3) უტოლობას, საიდანაც გამომდინარეობს (4.2.4) უტოლობაც. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შედეგი 4.2.2. თუ (a_n) და (b_n) მიმდევრობები (შესაბამისად, (c_n) მიმდევრობა) არ აკმაყოფილებს (4.2.3) უტოლობას (შესაბამისად, (4.2.4) უტოლობას), მაშინ (4.2.2) მწკრივი განშლადია თითქმის ყველგან $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე.

აქ უნდა აღინიშნოს

თეორემა 4.2.3 (ლუზინი (1912 წ.)). თუ (4.2.2) მწკრივი კრებადია II კატეგორიის სიმრავლეზე, თუნდაც ის იყოს ნული ზომის, მაშინ ადგილი აქვს (4.2.3) და (4.2.4) უტოლობებს და, მაშასადამე, (4.2.2) მწკრივი კრებადია ყველგან $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე.

შენიშვნა 4.2.4. ფატუმ 1906 წელს დაამტკიცა, რომ თუ (4.2.2) მწკრივი კრებადია რაიმე $(\alpha, \beta) \subset [0, 2\pi]$ ინტერვალის ყოველ x წერტილზე, თუნდაც $\beta - \alpha$ სხვაობა იყოს რაგინდ მცირე დადებითი რიცხვი, მაშინ ადგილი აქვს (4.2.3) და (4.2.4) უტოლობებს, ე.ი. (4.2.2) მწკრივი კრებადია ყველგან $[0, 2\pi]$ -ზე.

შენიშვნა 4.2.5. როგორც ვხედავთ, თეორემა (4.1.1) ჩამოყალიბებულია ტრიგონომეტრიული მწკრივის ორივე ფორმისთვის ერთბაშად და ეს რეალიზებულია იმის საფუძველზე, რომ ნამდვილი ფორმის ტრიგონომეტრიული მწკრივის კრებადობა ეკვივალენტურია კომპლექსური ფორმის ტრიგონომეტრიული მწკრივის სიმეტრიული ანუ, რაც იგივეა, მთავარი მნიშვნელობით კრებადობის (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.4, ტოლობები (1.4.8)–(1.4.10)).

გარდა ამისა, განიხილება კომპლექსური ფორმის ტრიგონომეტრიული მწკრივის კრებადობა კოშის აზრითაც (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.4, განსაზღვრა 1.4.1), რაც ნიშნავს ორმაგი ზღვრის არსებობას³

$$\lim_{\substack{m \rightarrow +\infty \\ n \rightarrow -\infty}} \sum_{k=-m}^n c_k e^{ikx} \equiv \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}. \quad (4.2.8)$$

³(4.2.8) ტოლობის მარჯვენა მხარეში არ წერია (PV) , როგორც ესაა (4.2.9) ტოლობაში იქვე.

როგორც ვიცი, (4.2.8) ტოლობის შემთხვევაში საქმე გვაქვს ლორანის მწკრივთან და (იხ. იქვე, შენიშვნა 1.4.7)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{inx}.$$

ამიტომ

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \quad (4.2.9)$$

მწკრივის რომელიმე x_0 წერტილზე აბსოლუტურად კრებადობა, ანუ

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n e^{inx_0}| < +\infty,$$

იწვევს $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$ უტოლობას, რადგან $|e^{inx}| = 1$ ყოველი x -თვის და ყოველი n -თვის.

მაშასადამე, (4.2.9) მწკრივის აბსოლუტურად კრებადობა თუნდაც ერთ რომელიმე წერტილზე იწვევს იგივე (4.2.9) მწკრივის აბსოლუტურად კრებადობას ნებისმიერ $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე!

უკანასკნელ ფაქტს ადგილი არ აქვს, საზოგადოდ, ნამდვილი ფორმის ტრიგონომეტრიული მწკრივების. მართლაც,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n!x) \quad (4.2.10)$$

მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია ნულისკენ ყველა x წერტილზე, რომელიც ჯერადია π -ს რაციონალური კოეფიციენტით. ამავე დროს, $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$. ამრიგად, არსებობს განსხვავება

ვება $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ და $(PV) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ მწკრივებს შორის.

2. აქ განვიხილავთ ტრიგონომეტრიული მწკრივის კოეფიციენტების ნულისკენ სწრაფვის თვისებას, როცა ეს მწკრივი კრებადია (არააბსოლუტურად) დადებითი ზომის რაიმე სიმრავლეზე. თუ რამდენად მნიშვნელოვანია დადებითი ზომის სიმრავლეზე კრებადობა, კარგად ჩანს (4.2.10) მწკრივის მაგალითზე.

ამ მიმართულებით გადმოცემულ იქნება თეორემა, რომელიც 1870 წელს დაამტკიცა გ. კანტორმა ინტერვალის შემთხვევაში, ხოლო ლეხეგმა 1906 წელს დადებითი ზომის სიმრავლისთვის.

თეორემა 4.2.6 (კანტორი, ლებეგი). თუ

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \equiv c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) \quad (4.2.11)$$

ტრიგონომეტრიული მწკრივისთვის ტოლობა

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0 \quad (4.2.12)$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) = 0 \quad (4.2.12)$$

ტოლობა შესრულებულია ყოველ x წერტილზე დადებითი ზომის რაიმე $E \subset [0, 2\pi]$ სიმრავლიდან, კერძოდ, თუ (4.2.11) მწკრივი კრებადია E სიმრავლეზე, მაშინ

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} c_n = 0 \quad (4.2.13)$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ და } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0. \quad (4.2.13)$$

დამტკიცება. თუ ვისარგებლებთ დანჟუა-ლუზინის თეორემის დამტკიცებისას გამოყენებული აღნიშვნებით, მაშინ თეორემა 4.2.6-ის მოცემულობა ნიშნავს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n \cos(nx - \alpha_n) = 0$$

ტოლობის ანუ, რაც იგივეა,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n |\cos(nx - \alpha_n)| = 0$$

ტოლობის შესრულებას ყოველ $x \in E$ წერტილზე.

ეგოროვის თეორემით არსებობს $F \subset E$ ჩაკეტილი სიმრავლე, $|F| > 0$, რომელზეც $\rho_n |\cos(nx - \alpha_n)| \rightarrow 0$ თანაბრად, როცა $n \rightarrow \infty$. ამიტომ

$$\rho_n \int_F |\cos(nx - \alpha_n)| dx \rightarrow 0, \text{ როცა } n \rightarrow \infty.$$

მაგრამ (4.2.7) უტოლობის ძალით

$$\int_F |\cos(nx - \alpha_n)| dx > \frac{1}{4} |F|, \text{ როცა } n \geq N.$$

ამიტომ აუცილებლად $\rho_n \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$. მეორეს მხრივ,

$$|a_n| \leq \rho_n, \quad |b_n| \leq \rho_n \quad \text{და} \quad |c_{\pm n}| \leq \frac{1}{2} (|a_n| + |b_n|).$$

მაშასადამე, ადგილი აქვს (4.2.13) ტოლობებს. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შედეგი 4.2.7. თუ $(c_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ მიმდევრობა არ იკრიბება ნულისკენ, როცა $|n| \rightarrow +\infty$ ანუ, რაც იგივეა, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ და $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობებიდან ერთი მაინც არ იკრიბება ნულისკენ, როცა $n \rightarrow \infty$, მაშინ (4.2.11) მწკრივი განშლადია თითქმის ყველგან $[0, 2\pi]$ -ზე.

შენიშვნა 4.2.8 (ფატუს კითხვა და ლუზინის პასუხი). ბუნებრივია კითხვა, რომელიც 1906 წლის შრომაში დასვა ფატუმ: შეიძლება თუ არა კანტორ-ლებეგის 4.2.6 თეორემის შებრუნება?

ამ კითხვაზე ლუზინმა 1912 წელს გასცა უარყოფითი პასუხი: არსებობს $[0, 2\pi]$ სეგმენტის ყოველ წერტილზე განშლადი ტრიგონომეტრიული მწკრივი, რომლის კოეფიციენტები კრებადია ნულისკენ [30, გვ. 455].

საინტერესოა, აგრეთვე, იანგის შემდეგი

თეორემა 4.2.9 (იანგი, [89], [30, გვ. 189]). თუ (4.2.11) მწკრივი კრებადია მეორე კატეგორიის რაიმე $E \subset [0, 2\pi]$ სიმრავლეზე, თუნდაც E იყოს ნული ზომის, მაშინ ადგილი აქვს (4.2.13) ტოლობებს.

შენიშვნა 4.2.10. ცნობილია, რომ

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sin m^{2m} x$$

მწკრივი კრებადია $[0, 2\pi]$ -ზე ყველგან მკვრივ სიმრავლეზე, თუმც მისი კოეფიციენტები არ ისწრაფვის ნულისკენ [30, გვ. 453-454].

შენიშვნა 4.2.11. დანუა-ლუზინის 4.2.1 თეორემასთან დაკავშირებით საინტერესოა პრივალუის შემდეგი თეორემა. ფუნქციათა ერთობლივ შემოსაზღვრული ორთოგონული $\{\omega_n(x)\}$ სისტემის მიმართ $\sum c_n \omega_n(x)$ მწკრივის თითქმის ყველგან აბსოლუტურად კრებადობა იწვევს $\sum |c_n|$ მწკრივის კრებადობას. თუკი $\{\omega_n(x)\}$ სისტემა არ იქნება ერთობლივ შემოსაზღვრული, მაშინ შეიძლება ადგილი არ ჰქონდეს c_n კოეფიციენტების ნულისკენ კრებადობის თვისებასაც კი (იხ. [7, გვ. 332], [34, გვ. 396], [39]).

4.3 დირიხლეს გული და შეულღებული გული

ტრიგონომეტრიული მწკრივების კრებადობის განხილვისას მნიშვნელოვან როლს ასრულებს დირიხლეს გული — ლუწი ფუნქცია

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx \quad (4.3.1)$$

და დირიხლეს შეულღებული გული — კენტი ფუნქცია

$$\tilde{D}_n(x) = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx. \quad (4.3.2)$$

ამ ტოლობებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.3, ტოლობები (1.3.3)), რომ

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = \pi, \quad (4.3.3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{D}_n(x) dx = 0. \quad (4.3.4)$$

დამოკიდებულებიდან

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{x}{2} D_n(x) &= \sin \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{x}{2} \cos kx \\ &= \sin \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\sin \left(k + \frac{1}{2} \right) x - \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) x \right] \\ &= \sin \frac{x}{2} + \left[\sin \frac{3}{2} x - \sin \frac{1}{2} x \right] + \left[\sin \frac{5}{2} x - \sin \frac{3}{2} x \right] + \dots \\ &\quad + \left[\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x - \sin \left(n - \frac{1}{2} x \right) \right] = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x \end{aligned}$$

კი გამომდინარეობს ტოლობა

$$D_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}, \quad x \neq 2k\pi. \quad (4.3.5)$$

ანალოგიურად,

$$\begin{aligned}
 2 \sin \frac{x}{2} \tilde{D}_n(x) &= 2 \sin x \sin \frac{x}{2} + 2 \sin 2x \sin \frac{x}{2} + \dots + 2 \sin nx \sin \frac{x}{2} \\
 &= \left[\cos \left(x - \frac{x}{2} \right) - \cos \left(x + \frac{x}{2} \right) \right] + \left[\cos \left(2x - \frac{x}{2} \right) - \cos \left(2x + \frac{x}{2} \right) \right] + \dots \\
 &\quad + \left[\cos \left(nx - \frac{x}{2} \right) - \cos \left(nx + \frac{x}{2} \right) \right] \\
 &= \cos \left(x - \frac{x}{2} \right) - \cos \left(nx + \frac{x}{2} \right) = \cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x.
 \end{aligned}$$

აქედან

$$\tilde{D}_n(x) = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2}x)}{2 \sin \frac{x}{2}}, \quad x \neq 2k\pi. \quad (4.3.6)$$

(4.3.3), (4.3.4) და (4.3.5), (4.3.6) ტოლობებიდან ვღებულობთ

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} dx &= 2\pi, \\
 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} dx &= 0.
 \end{aligned}$$

(4.3.5) და (4.3.6) ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$|D_n(x)| \leq \frac{1}{2|\sin \frac{x}{2}|}, \quad \text{როცა } x \neq 2k\pi, \quad (4.3.7)$$

$$|\tilde{D}_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}, \quad \text{როცა } x \neq 2k\pi. \quad (4.3.8)$$

რადგან $\frac{\sin x}{x}$ ფუნქცია კლებადია $(0, \frac{\pi}{2})$ ინტერვალზე⁴, ამიტომ

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

მაშასადამე,

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}, \quad \text{როცა } 0 < x < \frac{\pi}{2}. \quad (4.3.9)$$

⁴ $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$ ფუნქცია კლებადია $(0, \frac{\pi}{2})$ ინტერვალზე. მართლაც,

$$\varphi'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x (x - \operatorname{tg} x)}{x^2} < 0,$$

რადგან $(0, \frac{\pi}{2})$ ინტერვალზე $x - \operatorname{tg} x < 0$ (ვინაიდან $\sin x < x < \operatorname{tg} x$) და $\cos x > 0$.

აქედან

$$\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} > \frac{2}{\pi}, \text{ როცა } 0 < x < \pi.$$

ამგვარად,

$$\sin \frac{x}{2} > \frac{x}{\pi}, \text{ როცა } 0 < x < \pi. \quad (4.3.10)$$

(4.3.10) უტოლობის გამოყენება (4.3.7) და (4.3.8) უტოლობების მიმართ გვაძლევს⁵

$$|D_n(x)| < \frac{\pi}{2|x|}, \text{ როცა } 0 < |x| < \pi, \quad (4.3.11)$$

$$|\tilde{D}_n(x)| < \frac{\pi}{|x|}, \text{ როცა } 0 < |x| < \pi. \quad (4.3.12)$$

(4.3.11) და (4.3.12) შეფასებებს ზოგჯერ წერენ შემდეგი სახით

$$D_n(x) = O\left(\frac{1}{x}\right) \text{ და } \tilde{D}_n(x) = O\left(\frac{1}{x}\right), \text{ როცა } x \rightarrow 0.$$

(4.3.11) და (4.3.12) უტოლობებიდან მიიღება

$$|D_n(x)| < \frac{\pi}{2\delta} \text{ და } |\tilde{D}_n(x)| < \frac{\pi}{\delta}, \text{ როცა } \delta \leq |x| < \pi \text{ და } 0 < \delta < \pi. \quad (4.3.13)$$

$D_n(x)$ და $\tilde{D}_n(x)$ ფუნქციების 2π პერიოდულობის გამო, (4.3.13) უტოლობებს ადგილი აქვს, როცა $\delta \leq x \leq 2\pi - \delta$.

შევნიშნოთ, რომ (4.3.9) და (4.3.10) უტოლობები ჟორდანის უტოლობების სახელწოდებით არის ცნობილი.

⁵თუ $-\pi < x < 0$, მაშინ $0 < -x < \pi$ და (4.3.10)-ის ძალით $\sin \frac{x}{2} > \frac{-x}{\pi}$, ანუ $-\sin \frac{x}{2} > \frac{|x|}{\pi}$. აქედან $|\sin \frac{x}{2}| > \frac{|x|}{\pi}$, რადგან $\sin \frac{x}{2} < 0$, როცა $-\pi < x < 0$. მაშასადამე,

$$\left| \sin \frac{x}{2} \right| > \frac{|x|}{\pi}, \text{ როცა } -\pi < x < 0. \quad (4.3.10')$$

(4.3.10) და (4.3.10') უტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$\left| \sin \frac{x}{2} \right| > \frac{|x|}{\pi}, \text{ როცა } x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi),$$

ანუ

$$\left| \sin \frac{x}{2} \right| > \frac{|x|}{\pi}, \text{ როცა } 0 < |x| < \pi. \quad (4.3.10'')$$

4.4 ფურიეს მწკრივის და შეუღლებული მწკრივის კერძო ჯამების ინტეგრალური წარმოდგენები

ფურიეს მწკრივის კრებადობის გასარკვევად ძალიან მოხერხებულია ამ მწკრივის კერძო ჯამის ინტეგრალური წარმოდგენა, რომელიც დადგენილ იქნა ღირიხლეს მიერ 1829 წელს.

1. ვთქვათ, f არის 2π პერიოდული და პერიოდზე ჯამებადი ფუნქცია. განვიხილოთ f -ის შესაბამისი

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (4.4.1)$$

ფურიეს მწკრივი. აქ “=” ტოლობის ნიშანი ნიშნავს მხოლოდ იმას, რომ $S[f]$ -ით აღნიშნულია (4.4.1) დამოკიდებულების მარჯვენა მხარე, რომელშიც a_0 , a_n და b_n ($n \geq 1$) რიცხვები წარმოადგენს f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს, ანუ (იხ. თავი 2, პარაგრაფი 2.2)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (4.4.2)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(4.4.1) დამოკიდებულების მარჯვენა მხარეში მდგომი მწკრივის n -ური კერძო ჯამის მნიშვნელობას x წერტილზე აღენიშნავთ $S_n(f; x)$ სიმბოლოთი, ანუ

$$S_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

ამ ტოლობაში, (4.4.2) კოეფიციენტების ჩასმით მივიღებთ

$$S_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \right) \cos kx + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \right) \sin kx \right].$$

აქ მარჯვენა მხარეში გვაქვს შესაყრებათა სასრული რაოდენობა, ამიტომ ინტეგრებისა და შეყრების ოპერაციებს შეიძლება შევუცვალოთ ადგილები, მივიღებთ

$$\begin{aligned} S_n(f; x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt, \end{aligned}$$

სადაც $D_n(u)$ ლუწი ფუნქცია ანუ დირიხლეს გული (იხ. პარაგრაფი 4.3) მოცემულია ტოლობებით

$$D_n(u) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}}, \text{ როცა } u \neq 2k\pi \quad (4.4.3)$$

და

$$D_n(2k\pi) = n + \frac{1}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ამრიგად,

$$S_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt. \quad (4.4.4)$$

თუ მოვახდენთ t ცვლადის გარდაქმნას $y = t - x$ სახით, მივიღებთ

$$S_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+y) D_n(y) dy. \quad (4.4.5)$$

რადგან f და D_n არის 2π პერიოდული ფუნქციები, ამიტომ (4.4.5) შეიძლება ასე ჩაიწეროს (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.3, ტოლობა (1.3.6))

$$S_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) D_n(y) dy. \quad (4.4.6)$$

ანუ

$$S_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})y}{2 \sin \frac{y}{2}} dy - \text{დირიხლეს ინტეგრალი.} \quad (4.4.7)$$

აქვე აღვნიშნოთ, რომ $D_n(x)$ -ის გამოსახულებიდან (იხ. პარაგრაფი 4.3, ტოლობა (4.3.1)) გამომდინარეობს

$$|D_n(y)| \leq n + \frac{1}{2}, \quad -\infty < y < +\infty, \quad (4.4.8)$$

და

$$D_n(2k\pi) = n + \frac{1}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.4.9)$$

(4.4.8) შეფასების ძალით, (4.4.6)-დან ვღებულობთ

$$|S_n(f; x)| \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt, \quad -\infty < x < +\infty.$$

2. განვიხილოთ f ფუნქციის ფურიეს (4.4.1) მწკრივისადმი

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

შეუღლებული

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-b_n \cos nx + a_n \sin nx)$$

ტრიგონომეტრიული (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.5, მწკრივი (1.5.7)) მწკრივის n -ური $\tilde{S}_n(f; x)$ კერძო ჯამი

$$\tilde{S}_n(f; x) = \sum_{k=1}^n (-b_k \cos kx + a_k \sin kx). \quad (4.4.10)$$

თუ (4.4.10)-ის მარჯვენა მხარეში ჩავსვამთ a_k და b_k კოეფიციენტების (4.4.2) გამოსახვას, როცა $k = 1, 2, \dots$, მივიღებთ

$$\tilde{S}_n(f; x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \tilde{D}_n(t - x) dt,$$

სადაც $\tilde{D}_n(u)$ კენტი ფუნქციისთვის გვაქვს (იხ. პარაგრაფი 4.3, ტოლობა (4.3.2))

$$\tilde{D}_n(u) = \sum_{k=1}^n \sin ku.$$

როგორც ვნახეთ (იხ. პარაგრაფი 4.3, ტოლობა (4.3.6))

$$\tilde{D}_n(u) = \frac{\cos \frac{u}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}}, \text{ როცა } u \neq 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \dots)$$

და

$$\tilde{D}(m\pi) = 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ამიტომ

$$\tilde{S}_n(f; x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\cos \frac{t-x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})(t-x)}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt.$$

ანუ

$$\tilde{S}_n(f; x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\cos \frac{u}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du.$$

4.5 ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამების გამარტივებული ფორმა

1. გვაქვს დამოკიდებულებანი

$$\begin{aligned} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{1}{2}u} &= \frac{\sin nu \cos \frac{1}{2}u + \cos nu \sin \frac{1}{2}u}{2 \sin \frac{1}{2}u} \\ &= \frac{\sin nu \cos \frac{1}{2}u}{2 \sin \frac{1}{2}u} + \frac{1}{2} \cos nu = \frac{\sin nu}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}u} + \frac{1}{2} \cos nu. \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

ახლა $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე განვიხილოთ ფუნქცია

$$g(u) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi}, & \text{როცა } u = \pi, \\ \frac{1}{\pi}, & \text{როცა } u = -\pi, \\ 0, & \text{როცა } u = 0, \\ \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}u} - \frac{1}{u}, & \text{როცა } -\pi < u < \pi. \end{cases} \quad (4.5.2)$$

როცა $-\pi < u < \pi$, მაშინ

$$g(u) = \frac{\cos \frac{1}{2}u}{2 \sin \frac{1}{2}u} - \frac{1}{u}$$

და ვიპოვოთ:

(1) $g(u)$ -ს ზღვარი $u = 0$ წერტილზე.

გვაქვს

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} g(u) &= \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\cos \frac{1}{2}u}{2 \sin \frac{1}{2}u} - \frac{1}{u} \right) \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\cos \frac{1}{2}u}{2 \cdot \frac{1}{2}u} - \frac{1}{u} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\cos \frac{1}{2}u}{u} - \frac{1}{u} \right) = - \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{1}{2}u}{u} \\ &= - \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{1}{4}u}{u} = - \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{1}{16}u^2}{u} = - \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{8}u = 0 = g(0). \end{aligned}$$

ამრიგად, $g(u)$ ფუნქცია უწყვეტია $u = 0$ წერტილზე.

(2) $g(u)$ -ს მარცხნიდან ზღვარი $u = \pi$ წერტილზე.

გვაქვს

$$\lim_{u \rightarrow \pi^-} \left(\frac{\cos \frac{1}{2}u}{2 \sin \frac{1}{2}u} - \frac{1}{u} \right) = \frac{0}{2 \cdot 1} - \frac{1}{\pi} = -\frac{1}{\pi} = g(\pi).$$

მაშასადამე, $g(u)$ უწყვეტია $u = \pi$ წერტილზე⁶

(3) $g(u)$ -ს მარჯვნიდან ზღვარი $u = -\pi$ წერტილზე.

გვაქვს

$$\lim_{u \rightarrow -\pi^+} g(u) = \frac{0}{2(-1)} - \frac{1}{-\pi} = \frac{1}{\pi} = g(-\pi),$$

ე.ი. $g(u)$ უწყვეტია $u = -\pi$ წერტილზეც.

⁶როცა ამბობენ, რომ $\varphi(t)$ ფუნქცია მოცემულია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ φ -ს მნიშვნელობები $[a, b]$ -ს გარეთ მდებარე წერტილზე, თუკი ასეთი მნიშვნელობები მას გააჩნია, შედეგელობაში არ მიიღება. აქედან გამომდინარე, φ ფუნქციის უწყვეტობა $[a, b]$ სეგმენტზე ნიშნავს φ -ს უწყვეტობას $[a, b]$ -ს ყველა შიგა ℓ წერტილზე, $a < \ell < b$, და a წერტილზე მარჯვნიდან უწყვეტობას, ხოლო b წერტილზე კი მარცხნიდან უწყვეტობას (იგულისხმება, როგორც ყოველთვის, რომ $a < b$).

მაშასადამე, φ ფუნქციის უწყვეტობა a წერტილზე ნიშნავს φ -ს მხოლოდ მარჯვნიდან უწყვეტობას a -ზე. ასევე, φ ფუნქციის უწყვეტობა b წერტილზე ნიშნავს მის მარცხნიდან უწყვეტობას b -ზე [24, გვ. 507].

ანალოგიურად განიხილება სეგმენტზე წარმოებადობის საკითხიც [4, გვ. 160–163].

მაშასადამე, $g(u)$ ფუნქცია უწყვეტია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე და, ამიტომ, შემოსაზღვრულიც არის ამ სეგმენტზე.

ახლა დგება საჭიროება $g(u)$ ფუნქციის 2π პერიოდით გაგრძელებისა $[-\pi, \pi]$ -ს გარეთ, მთელ $(-\infty, +\infty)$ -ზე. რადგან $g(-\pi) \neq g(\pi)$, ამიტომ $[-\pi, \pi]$ -ს ერთ-ერთ ბოლოზე უნდა შეიცვალოს g ფუნქციის მნიშვნელობა მეორე ბოლოზე მისი მნიშვნელობით. მაგალითად ასე, $g(-\pi) = -\frac{1}{\pi}$ და ახლა გვექნება $g(-\pi) = g(\pi)$ (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.4). ამის შემდეგ მოვახდინოთ 2π პერიოდით გაგრძელება $g(x+2\pi) = g(x)$ ტოლობით. ასე შეცვლილი g ფუნქცია დარჩა შემოსაზღვრული, გახდა 2π პერიოდული, ოღონდ $u = -\pi$ წერტილზე გაუხნდა სასრული წყვეტა, რაც გავლენას ვერ მოახდენს ინტეგრალებზე. ამის შემდეგ, $g(u)$ ფუნქციას ვიგულისხმებთ ასეთნაირად შესწორებულს!

(4.5.1) და (4.5.2) ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$\frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{1}{2}u} = \frac{\sin nu}{u} + g(u) \sin u + \frac{1}{2} \cos nu. \quad (4.5.3)$$

ამიტომ 4.4 პარაგრაფის (4.4.7) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$S_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin nu}{u} du + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) g(u) \sin nu du + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \cos nu du. \quad (4.5.4)$$

2. თავი 3-დან 3.11 პარაგრაფში დამტკიცებული იყო პლესნერის თეორემა 3.11.3 იმის შესახებ, რომ $\chi_x(t) = f(x+t)g(t)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები

$$c_n(\chi_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_x(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_x(t) \cos nt dt - i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_x(t) \sin nt dt \rightarrow 0$$

თანაბრად x -ის მიმართ, როცა $n \rightarrow \infty$.

ეს ნიშნავს, რომ $\int_{-\pi}^{\pi} \chi_x(t) \cos nt dt$ და $\int_{-\pi}^{\pi} \chi_x(t) \sin nt dt$ ინტეგრალები ისწრაფვის ნულისკენ თანაბრად x -ის მიმართ, როცა $n \rightarrow \infty$.

მაშასადამე, (4.5.4) ტოლობის ბოლო ორი ინტეგრალი ისწრაფვის ნულისკენ თანაბრად $x \in [-\pi, \pi]$ -ის მიმართ, როცა $n \rightarrow \infty$.

ეს ნიშნავს ტოლობას

$$S_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin nu}{u} du + o(1), \quad (4.5.5)$$

სადაც $o(1)$ არის n -ზე და $x \in [-\pi, \pi]$ -ზე დამოკიდებული ფუნქცია, რომელიც x -ის მიმართ თანაბრად ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $n \rightarrow \infty$.

3. შესაძლებელია (4.5.5) ტოლობაში შემავალი ინტეგრალის გამარტივება. ვთქვათ, $0 < \delta < \pi$ და $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე განვსაზღვროთ ψ ფუნქცია ტოლობებით

$$\psi(u) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } -\delta \leq u \leq \delta, \\ \frac{1}{u}, & \text{როცა } u \in (-\pi, -\delta) \cup (\delta, \pi], \\ \frac{1}{\pi}, & \text{როცა } u = -\pi. \end{cases}$$

აქედან ჩანს, რომ $\psi(\pi) = \frac{1}{\pi} = \psi(-\pi)$ და $[-\pi, \pi]$ -ს გარეთ ψ ფუნქცია გავაგრძელოთ 2π პერიოდულად: $\psi(x + 2\pi) = \psi(x)$. ამრიგად, ψ ფუნქცია შემოსაზღვრულია $[-\pi, \pi]$ -ზე და ამავე დროს არის 2π პერიოდული.

ასეა, (4.5.5) ტოლობაში მონაწილე ინტეგრალი გადავწეროთ ასე

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin nu}{u} du \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} f(x+u) \frac{\sin nu}{u} du + \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]} f(x+u) \frac{\sin nu}{u} du. \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

მაგრამ

$$\int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]} f(x+u) \frac{1}{u} \sin nu du = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \psi(u) \sin nu du = o(1)$$

თანაბრად $x \in [-\pi, \pi]$ -ის მიმართ, თავი 3-ის პარაგრაფ 3.11-ში დამტკიცებული პლესნე-რის 3.11.3 თეორემის ძალით. ამგვარად, (4.5.6) მიიღებს სახეს

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin nu}{u} du = \int_{-\delta}^{\delta} f(x+u) \frac{\sin nu}{u} du + o(1). \quad (4.5.7)$$

$o(1) + o(1) = o(1)$ ტოლობის გათვალისწინებით, (4.5.7)-ის ჩასმა (4.5.5) ტოლობაში მოგვცემს

$$S_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x+u) \frac{\sin nu}{u} du + o(1), \quad (4.5.8)$$

სადაც $o(1)$ ისევე არის n -ზე და x -ზე დამოკიდებული რაღაც ფუნქცია, რომლის ზღვარი ნუ-ლია თანაბრად $x \in [-\pi, \pi]$ -ის მიმართ, როცა $n \rightarrow \infty$.

4.6 ლოკალიზების რიმანის პრინციპი

ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამების ინტეგრალური (4.5.8) ფორმულა წინა პარაგრაფიდან, საშუალებას იძლევა დავამტკიცოთ რიმანის მეტად მნიშვნელოვანი თეორემა, რომელიც ცნობილია ლოკალიზების რიმანის პრინციპის სახელწოდებით.

თეორემა 4.6.1 (რიმანი (1853 წ.), [8, გვ. 110]). 2π პერიოდული და პერიოდზე ჯამებადი f ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ მწკრივის კრებადობა ან განშლადობა რაიმე x_0 წერტილზე, დამოკიდებულია მხოლოდ და მხოლოდ f ფუნქციის მნიშვნელობებზე x_0 წერტილის ნებისმიერად მცირე მიდამოში.

დამტკიცება. 4.5 პარაგრაფის (4.5.8) ტოლობას x_0 წერტილისთვის აქვს სახე

$$S_n(f; x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x_0+u) \frac{\sin nu}{u} du + o(1).$$

აქედან ჩანს, რომ $S_n(f; x_0)$ რიცხვითი მიმდევრობის ზღვრის არსებობა ან არარსებობა x_0 წერტილზე, როცა $n \rightarrow \infty$, დამოკიდებულია f ფუნქციის მნიშვნელობებზე მხოლოდ $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ მიდამოში ნებისმიერად მცირე $\delta > 0$ რიცხვისთვის.

უფრო მეტი, რადგან წინა პარაგრაფის (4.5.8) ტოლობაში $o(1)$ ფუნქცია თანაბრად x -ის მიმართ $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $n \rightarrow \infty$, ამიტომ $S_n(f; x)$ ფუნქციური მიმდევრობის x -ის მიმართ თანაბრად კრებადობა რაიმე (a, b) ინტერვალზე ეკვივალენტურია (4.5.8) ტოლობის ინტეგრალის თანაბრად კრებადობის იმავე (a, b) ინტერვალზე, როცა $n \rightarrow \infty$.

ამასთან ერთად, ამ ინტეგრალის ზღვარი ემთხვევა, თუ ის არსებობს, $S_n(f; x)$ -ის ზღვარს. $\square$

უკანასკნელი ფაქტი შეიძლება ასე გამოითქვას.

თეორემა 4.6.2. თუ 2π პერიოდული $f_1 \in L[-\pi, \pi]$ და $f_2 \in L[-\pi, \pi]$ ფუნქციები ერთიმეორის ტოლია რაიმე (a, b) ინტერვალზე, მაშინ მათი $S[f_1]$ და $S[f_2]$ ფურიეს მწკრივები ყოველ $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, მონაკვეთზე თანაბრად ტოლადკრებადებია ანუ, რაც იგივეა, ამ მწკრივების $S[f_1] - S[f_2]$ სხვაობა თანაბრად კრებადია ნულისკენ $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ სეგმენტზე.

დამტკიცება. განვიხილოთ $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ სხვაობა, რომელიც ნულის ტოლია (a, b) ინტერვალზე. ავიღოთ $0 < \delta \leq \varepsilon$ და $x \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$, მაშინ $u + x \in (a, b)$, როცა $-\delta \leq u \leq \delta$. ამიტომ $f(x + u) = 0$, როცა $-\delta \leq u \leq \delta$.

ახლა წინა პარაგრაფის (4.5.8) ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ x -ის მიმართ თანაბრად $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ სეგმენტზე ადგილი აქვს ტოლობას

$$S_n(f; x) = o(1), \quad a + \varepsilon \leq x \leq b - \varepsilon,$$

სადაც $o(1)$ ფუნქცია თანაბრად x -ის მიმართ $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ მონაკვეთზე კრებადია ნულისკენ, როცა $n \rightarrow \infty$.

მაშასადამე, f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი თანაბრად კრებადია $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ სეგმენტზე ნულისკენ ანუ, რაც იგივეა, $f(x)$ -კენ.

ეს ნიშნავს, რომ

$$S[f_1] - S[f_2] = S[f_1 - f_2]$$

თანაბრად კრებადია ნულისკენ $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ სეგმენტზე. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

აქვე აღვნიშნოთ **გ. ტოლსტოვის თეორემა**: ყოველი $0 < \mu < 2\pi$ რიცხვისთვის არსებობს μ ზომის არსადმკვერივი სრულყოფილი P სიმრავლე ისეთი, რომ L^p , $p > 1$, კლასის f_1 და f_2 ფუნქციების ტოლობა P სიმრავლეზე იწვევს მათი ფურიეს მწკრივების სხვაობის ნულისკენ კრებადობას თითქმის ყველგან P სიმრავლეზე [8, გვ. 421-425].

4.7 დირიხლეს გამარტივებული გული

დირიხლეს გამარტივებული გული ეწოდება ფუნქციას

$$D_n^*(u) = \frac{\sin nu}{u}.$$

პარაგრაფ 4.3-ის (4.3.5) და პარაგრაფ 4.5-ის (4.5.3) ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$D_n(u) = D_n^*(u) + O(1).$$

რადგან

$$D_n^*(-u) = \frac{\sin n(-u)}{-u} = \frac{-\sin nu}{-u} = \frac{\sin nu}{u} = D_n^*(u),$$

ამიტომ $D_n^*(u)$ ლუწი ფუნქცია:

$$D_n^*(-u) = D_n^*(u).$$

ახლა, 4.5 პარაგრაფის (4.5.8) ტოლობა წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$S_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^0 f(x+u) D_n^*(u) du + \frac{1}{\pi} \int_0^\delta f(x+u) D_n^*(u) du + o(1).$$

თუ პირველ ინტეგრალში მოვახდენთ $v = -u$ გარდაქმნას, მაშინ ის მიიღებს სახეს, $D_n^*(u)$ ფუნქციის ლუწობის გათვალისწინებით,

$$\int_{-\delta}^0 f(x+u) D_n^*(u) du = \int_0^\delta f(x-v) D_n^*(v) dv.$$

მაშასადამე,

$$S_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin nu}{u} du + o(1). \quad (4.7.1)$$

შენიშვნა 4.7.1.

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \quad (4.7.2)$$

ტრიგონომეტრიული სისტემის რომელიმე წევრისთვის ფურიეს მწკრივი იმავე (4.7.2) სისტემის მიმართ იქნება თვით ეს წევრი. ამაში რომ დავრწმუნდეთ, საჭიროა ამ წევრისთვის გამოვთვალოთ ფურიეს კოეფიციენტები და გნახავთ, რომ ამ წევრთან მდგომი კოეფიციენტი იქნება 1, ხოლო ყველა დანარჩენი კოეფიციენტი — 0. თვალსაჩინოებისთვის განვიხილოთ რამდენიმე შემთხვევა:

- (1) თუ f ფუნქცია მუდმივია ანუ $f(x) = C$ ყველა $x \in [-\pi, \pi]$ -თვის, მაშინ მისი a_0 კოეფიციენტი იქნება (იხ. თავი 2, პარაგრაფი 2.2)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C dx = \frac{1}{\pi} \cdot C \cdot 2\pi = 2C,$$

ამიტომ $\frac{a_0}{2} = C$. ყველა დანარჩენი a_k და b_k ($k = 1, 2, \dots$) კოეფიციენტი ნულია (იხ. იქვე (2.2.2) ფორმულები). ამრიგად, $C \sim C$.

- (2) თუ $f(x) = B \cos nx$, მაშინ ყველა $a_k = 0$, როცა $k \neq n$ და ყველა $b_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) (იხ. იქვე (2.2.2) ტოლობები). თვით

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B \cos^2 nx dx = \frac{B}{\pi} \cdot \pi = B$$

(იხ. იქვე ტოლობა (2.2.2)). ამგვარად, $B \cos nx \sim B \cos nx$. ასევე, $C \sin nx \sim C \sin nx$.

- (3) ვთქვათ, $f(x) = \cos 2x \sin 3x$. რადგან

$$\sin 3x \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 5x + \frac{1}{2} \sin x,$$

ამიტომ (2)-ის ძალით

$$\cos 2x \sin 3x \sim \frac{1}{2} \sin 5x + \frac{1}{2} \sin x.$$

(4.7.1) ტოლობაში ავიღოთ $f(t) = 1$ კერძო შემთხვევა ყველა $t \in [-\pi, \pi]$ მნიშვნელობისთვის. მაშინ, (1) შემთხვევის გათვალისწინებით, $1 \sim 1$ და ამიტომ $S_n(1; x) = 1$ ყველა x -თვის $[-\pi, \pi]$ -დან და ყველა $n = 0, 1, 2, \dots$ მნიშვნელობისთვის. ამგვარად, (4.7.1) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} (1+1) \frac{\sin nu}{u} du + o(1), \text{ ანუ } 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{\sin nu}{u} du + o(1). \quad (4.7.3)$$

თუ აქ ჩავსვამთ $nu = t$, მაშინ მივიღებთ

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{n\delta} \frac{\sin t}{\frac{t}{n}} \cdot \frac{1}{n} dt + o(1) = \frac{2}{\pi} \int_0^{n\delta} \frac{\sin t}{t} dt + o(1).$$

აქედან

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\delta} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2},$$

ანუ

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \quad (4.7.4)$$

4.8 ფურიეს მწკრივის კრებადობის კრიტერიუმი

ჩვენი უახლოესი მიზანია დავადგინოთ f ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ მწკრივის რაიმე x წერტილზე L რიცხვისკენ კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა, კერძოდ, $f(x)$ მნიშვნელობისკენ.

პარაგრაფ 4.7-ის (4.7.1) ტოლობის თანახმად

$$S_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin nu}{u} du + o(1), \quad (4.8.1)$$

სადაც $o(1)$ აღნიშნავს n -ზე და x -ზე დამოკიდებულ ფუნქციას, რომელიც $[-\pi, \pi]$ -ზე თანაბრად კრებადია ნულისკენ, როცა $n \rightarrow \infty$.

თუ პარაგრაფ 4.7-ის (4.7.3) ტოლობას გავამრავლებთ რაიმე $L \neq 0$ რიცხვზე, მივიღებთ

$$L = \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} L \frac{\sin nu}{u} du + o(1). \quad (4.8.2)$$

(4.8.1) და (4.8.2) ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$S_n(f; x) - L = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [f(x+u) + f(x-u) - 2L] \frac{\sin nu}{u} du + o(1).$$

აქედან ცხადია, რომ $S[f]$ მწკრივის კრებადობისთვის x წერტილზე L რიცხვისკენ აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს ტოლობა

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} [f(x+u) + f(x-u) - 2L] \frac{\sin nu}{u} du = 0, \quad (4.8.3)$$

ხოლო $S[f]$ მწკრივის კრებადობისთვის x წერტილზე $f(x)$ მნიშვნელობისკენ კი აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს ტოლობა

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta [f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)] \frac{\sin nu}{u} du = 0. \quad (4.8.4)$$

თუ f ფუნქციასთან დაკავშირებულ $f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)$ გამოსახულებას აღვნიშნავთ $F_f(x, u)$ სიმბოლოთი, ანუ

$$F_f(x, u) = f(x+u) + f(x-u) - 2f(x), \quad (4.8.5)$$

მაშინ (4.8.4) ტოლობა შეგვიძლია ასე ჩამოვაცალიოთ.

თეორემა 4.8.1. $f \in L[-\pi, \pi]$ ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ მწკრივის კრებადობისთვის x წერტილზე $f(x)$ მნიშვნელობისკენ, აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს ტოლობა

$$\lim_{n \rightarrow 0} \int_0^\delta F_f(x, u) \frac{\sin nu}{u} du = 0, \quad (4.8.6)$$

სადაც $\delta > 0$ და $F_f(x, u)$ განსაზღვრულია (4.8.5) ტოლობით.

თუკი f ფუნქცია უწყვეტია რაიმე (a, b) ინტერვალზე, მაშინ შეიძლება დაისვას საკითხი მისი $S[f]$ ფურიეს მწკრივის $f(x)$ -კენ თანაბრად კრებადობის შესახებ $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ ქვე-ინტერვალზე.

თუკი ავიღებთ ისეთ $\varepsilon > 0$ რიცხვს, რომ $[a + \varepsilon, b - \varepsilon] \subset (a, b)$, მაშინ f ფუნქცია უწყვეტი და შემოსაზღვრულია $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ სეგმენტზე. 4.7 პარაგრაფის (4.7.3) ტოლობის გამრავლებით $f(x)$ მნიშვნელობაზე, $x \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$, მივიღებთ

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\delta f(x) \frac{\sin nu}{u} du + o(1), \quad (4.8.7)$$

სადაც $o(1)$ თანაბრად კრებადია ნულისკენ $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ სეგმენტზე, როცა $n \rightarrow \infty$. (4.8.1) და (4.8.7) ტოლობებიდან ვღებულობთ

$$S_n(f; x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta [f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)] \frac{\sin nu}{u} du + o(1). \quad (4.8.8)$$

თუ $0 < \delta < \varepsilon$, მაშინ $x \pm u \in (a, b)$, როცა $x \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ და თუ $|u| < \delta$, ამიტომ (4.8.5) ტოლობით განსაზღვრული $F_f(x, u)$ ფუნქცია უწყვეტია (a, b) ინტერვალზე.

აქედან, (4.8.8) ტოლობის გათვალისწინებით, მიიღება

თეორემა 4.8.2. თუ $f \in L[-\pi, \pi]$ ფუნქცია უწყვეტია (a, b) ინტერვალზე და $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(b - a)$, მაშინ $S[f]$ ფურიეს მწკრივის თანაბრად კრებადობისთვის $f(x)$ -გენ $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ სეგმენტზე, აუცილებელი და საკმარისია

$$\lim_{n \rightarrow 0} \int_0^\delta F_f(x, u) \frac{\sin nu}{u} du = 0 \quad (4.8.9)$$

ტოლობის შესრულება თანაბრად x -ის მიმართ $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ სეგმენტზე.

აქ $0 < \delta < \varepsilon$ და (4.8.5) ტოლობით განსაზღვრული $F_f(x, u)$ ფუნქცია უწყვეტია x -ის მიმართ $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ სეგმენტზე, ამასთან, $|u| \leq \delta$.

4.9 რიმანის აზრით გლუვი ფუნქცია

რიმანიმ თავის ფუნდამენტურ შრომაში “ფუნქციის წარმოდგენა ტრიგონომეტრიული მწკრივით” (1854 წ.), შემოიღო ფუნქციების მეტად მნიშვნელოვანი კლასი, რომელთაც ზიგმუნდმა (1945 წ.) [90] უწოდა “გლუვი ფუნქციები”.

ამ ტერმინის საფუძველია ის ფაქტი, რომ ფუნქციის გლუვობის წერტილზე მის გრაფიკს არ შეიძლება ჰქონდეს კუთხიანი წერტილი, ანუ მას ამ წერტილზე არ აქვს ურთიერთგანსხვავებული ცალმხრივი წარმოებულები, რომელთაგან ერთი მაინც სასრულია. უფრო ზუსტად, გლუვობის წერტილზე ფუნქციის გრაფიკს ან აქვს მხები ან არ აქვს არცერთი ცალმხრივი მხები.

1. ფუნქციათა თეორიაში გლუვ ფუნქციებს ხშირი და მრავალმხრივი გამოყენება აქვს, კერძოდ კი, ტრიგონომეტრიული მწკრივების კრებადობა-შეჯამებადობის საკითხებში (იხ. [8, გვ. 181], [24, გვ. 75]).

გ ა ნ ს ა ზ დ ვ რ ა 4.9.1. x_0 წერტილის მდამოში განსაზღვრულ f ფუნქციას ეწოდება გლუვი x_0 წერტილზე, როცა სრულდება ტოლობა

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + u) + f(x_0 - u) - 2f(x_0)}{u} = 0. \quad (4.9.1)$$

აქვე შევნიშნოთ, რომ ცალმხრივ გლუვობას ამრიგ არ აქვს! არაა სავალდებულო, რომ გლუვობის წერტილზე ფუნქცია უწყვეტი იყოს. მაგალითად, (4.9.1) პირობას ასრულებს x_0 წერტილის მიმართ კენტი ფუნქცია, თუნდაც ის უწყვეტი არ იყოს x_0 წერტილზე.

უწყვეტობასთან დაკავშირებით ცნობილია, რომ

$$\lim_{u \rightarrow 0} [f(x_0 + u) + f(x_0 - u) - 2f(x_0)] = 0 \quad (4.9.2)$$

პირობა [87, გვ. 266] იწვევს f ფუნქციის უწყვეტობას თითქმის ყველა ასეთ x_0 წერტილზე (x_0 წერტილზე f ფუნქციის უწყვეტობა რომ იწვევს (4.9.2) ტოლობას, ცხადია).

არსებობს $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი g ფუნქცია, რომელიც გლუვია (a, b) ინტერვალის ყოველ წერტილზე და $g'(x)$ არსებობს მხოლოდ ნული ზომის სიმრავლეზე [24, გვ. 83, 330-331].

ამასთან, $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი და (a, b) -ში გლუვი ფუნქციის წარმოებული არსებობს (a, b) -ში ყველგან მკვრივ სიმრავლეზე [8, გვ. 182], [24, გვ. 76].

უნდა აღინიშნოს $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი და (a, b) -ში გლუვი ფუნქციის ის მნიშვნელოვანი თვისება, რომ მისთვის მართებულია ლაგრანჟის საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა, თუნდაც ის წარმოებულს მოკლებული იყოს თითქმის ყველგან, რომელიც არსებობს ყველგან მკვრივ სიმრავლეზე [8, გვ. 182].

ადვილად მტკიცდება, რომ $f'(x_0)$ წარმოებულის სასრულობა იწვევს f -ის გლუვობას x_0 წერტილზე. ეს გამომდინარეობს (4.9.1) პირობის შემდეგი ჩაწერიდან

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{u} - \frac{f(x_0 - u) - f(x_0)}{-u} \right) = 0. \quad (4.9.3)$$

წ ი ნ ა დ ე ბ ა 4.9.2. თუ x_0 წერტილზე გლუვ f ფუნქციას x_0 -ზე აქვს ცალმხრივი სასრული წარმოებული, მაშინ f -ს x_0 -ზე აქვს $f'(x_0)$ წარმოებულიც.

ეს გამომდინარეობს (4.9.3) ტოლობიდან.

უკანასკნელი წინადადება ნიშნავს, რომ x_0 წერტილზე გლუვი F ფუნქციის გრაფიკისთვის $(x_0, F(x_0))$ წერტილი არ არის კუთხიანი⁷ წერტილი (აქედან გამომდინარეობს ტერმინი “გლუვი ფუნქცია”).

⁷ უთქვამთ, x_0 არის f ფუნქციის განსაზღვრის ინტერვალის შიგა წერტილი და დავუშვათ ამავე წერტილზე $f'_-(x_0)$ მარცხენა და $f'_+(x_0)$ მარჯვენა წარმოებულების არსებობა. თუ $f'_-(x_0)$ და $f'_+(x_0)$ რიცხვითაგან ერთი მინუს სასრულია და, გარდა ამისა, ადვილი აქვს $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ უტოლობას, მაშინ ცალმხრივი მხებები $(x_0, f(x_0))$ წერტილზე ქმნის კუთხეს. ასეთ შემთხვევაში $(x_0, f(x_0))$ წერტილს ეწოდება $y = f(x)$ ფუნქციის Γ გრაფიკის კუთხიანი წერტილი.

2. როგორც უკვე ვიცით, გლუვ ფუნქციას შეიძლება არ ჰქონდეს წარმოებული. ამასთან დაკავშირებით ისმება კითხვა: გლუვი ფუნქციის კიდევ რა დამატებითი თვისება უზრუნველყოფს მის წარმოებადობას? ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად დაგვირდება სიმეტრიული წარმოებულის ცნება.

გ ა ნ ს ა ზ დ ე რ ა 4.9.3. φ ფუნქციის სიმეტრიული წარმოებული x_0 წერტილზე, სიმბოლურად $\varphi^{(1)}(x_0)$, ეწოდება შემდეგ ზღვარს, თუ იგი არსებობს სასრული ან უსასრულო ნიშნიანი,

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + u) - \varphi(x_0 - u)}{2u} = \varphi^{(1)}(x_0). \quad (4.9.4)$$

შევნიშნოთ, რომ (4.9.4) ტოლობაში ზღვარქვეშ მდგომი შეფარდება ლუწი ფუნქციაა u -ს მიმართ და ამიტომ, ზოგადობის შეუზღუდავად, (4.9.4) ტოლობაში შეგვიძლია დავწეროთ $u \rightarrow 0+$.

წინადადება 4.9.4. თუ არსებობს ჩვეულებრივი $\varphi'(x_0)$ წარმოებული, მაშინ არსებობს სიმეტრიული წარმოებულიც და ადგილი აქვს

$$\varphi^{(1)}(x_0) = \varphi'(x_0)$$

ტოლობას. შებრუნებული გამოთქმა მცდარია.

დამტკიცება.

$$\frac{\varphi(x_0 + u) - \varphi(x_0 - u)}{2u} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi(x_0 + u) - \varphi(x_0)}{u} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi(x_0 - u) - \varphi(x_0)}{-u} \quad (4.9.5)$$

ტოლობის მარჯვენა მხარე ისწრაფვის

$$\frac{1}{2} \varphi'(x_0) + \frac{1}{2} \varphi'(x_0) = \varphi'(x_0)$$

რიცხვისკენ, როცა $u \rightarrow 0+$.

შებრუნებული გამოთქმის მცდარობა ჩანს $\mu(t) = |t|$ ფუნქციის მაგალითზე, როცა $t_0 = 0$. მართლაც, $\mu'_+(0) = 1$ და $\mu'_-(0) = -1$, ე.ი. $\mu'(0)$ არ არსებობს. ამავე დროს, ადგილი აქვს $\mu^{(1)}(0) = 0$ ტოლობას, რაც გამომდინარეობს შემდეგი წინადადებიდან. $\square$

წინადადება 4.9.5. სასრული $\lambda'_+(t_0)$ და $\lambda'_-(t_0)$ ცალმხრივი წარმოებულების არსებობა იწვევს სასრული $\lambda^{(1)}(t_0)$ სიმეტრიული წარმოებულის არსებობას და ტოლობას

$$\lambda^{(1)}(t_0) = \frac{1}{2} [\lambda'_+(t_0) + \lambda'_-(t_0)]. \quad (4.9.6)$$

დამტკიცება. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, (4.9.6) გამომდინარეობს (4.9.5)-დან იმის გათვალისწინებით, რომ (4.9.5)-ში შეგვიძლია დავწეროთ $u \rightarrow 0+$. $\square$

მიუხედავად ამისა, წინადადება 4.9.4-ის შებრუნებული მართებულია **თითქმის ყველგან**, როგორც ამას ადასტურებს **ხინჩინის** შემდეგი

თეორემა 4.9.6 (ხინჩინი, [52, გვ. 381]). თუ ზომად φ ფუნქციას ზომადი E სიმრავლის ყოველ წერტილზე აქვს სასრული სიმეტრიული წარმოებული, მაშინ φ ფუნქციას E სიმრავლის თითქმის ყველა x_0 წერტილზე გააჩნია სასრული ჩვეულებრივი $\varphi'(x_0)$ წარმოებულიც და ადგილი აქვს $\varphi'(x_0) = \varphi^{(1)}(x_0)$ ტოლობას.

გლუვი ფუნქციისთვის სიტუაცია სხვაგვარია. სახელდობრ, მართებულია

წინადადება 4.9.7 ([30, გვ. 475]). x_0 წერტილზე φ გლუვ ფუნქციას $\varphi'(x_0)$ წარმოებული აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს მისივე სიმეტრიული $\varphi^{(1)}(x_0)$ წარმოებული. როცა არსებობს $\varphi^{(1)}(x_0)$, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\varphi'(x_0) = \varphi^{(1)}(x_0).$$

დამტკიცება. საკმარისია გამოვიყენოთ შემდეგი ტოლობა

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi(x_0 + u) + \varphi(x_0 - u) - 2\varphi(x_0)}{u} + \frac{\varphi(x_0 + u) - \varphi(x_0 - u)}{u} \\ &= 2 \frac{\varphi(x_0 + u) - \varphi(x_0)}{u}. \end{aligned}$$

(დამატებითი ინფორმაციისთვის [4, გვ. 159, 165–166, 281, 326]). $\square$

დასასრულ, აღვნიშნოთ შემდეგი

თეორემა 4.9.8. არ არსებობს $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $F(x)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც

$$F^{(1)}(x) = +\infty \text{ ან } F^{(1)}(x) = -\infty$$

ტოლობები შესრულდება დადებითი ზომის $e \subset [a, b]$ სიმრავლეზე. მართლაც, ხინჩინის თეორემა 4.9.6-ის ძალით, იგივე ტოლობა შესრულდებოდა თითქმის ყველგან e -ზე ჩვეულებრივი წარმოებულისთვის, რაც შეუძლებელია [30, გვ. 285].

4.10 ფურიეს მწკრივის კრებადობის რიმანის ნიშანი

თეორემა 4.10.1. თუ $f \in L[-\pi, \pi]$ ფუნქციას გააჩნია x_0 გლუვობის წერტილი, მაშინ f -ის $S[f]$ ფურიეს მწკრივი კრებადია x_0 წერტილზე $f(x_0)$ მნიშვნელობისკენ.

დამტკიცება. 4.9 პარაგრაფიდან (4.9.1) ტოლობის შესრულება ნიშნავს, რომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left| \frac{f(x_0 + u) + f(x_0 - u) - 2f(x_0)}{u} \right| < \varepsilon. \quad \text{როცა } 0 < |u| < \delta. \quad (4.10.1)$$

პარაგრაფ 4.8-ის (4.8.8) ტოლობის თანახმად კი

$$\begin{aligned} S_n(f; x_0) - f(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x_0 + u) + f(x_0 - u) - 2f(x_0)}{u} \sin nu \, du + o(1), \end{aligned} \quad (4.10.2)$$

სადაც n -ზე და x_0 -ზე დამოკიდებული $o(1)$ ფუნქციის ზღვარი ნულია, როცა $n \rightarrow \infty$. ამიტომ არსებობს ნატურალური $N(x_0, \varepsilon)$ რიცხვი ისეთი, რომ $|o(1)| < \varepsilon$, როცა $n > N(x_0, \varepsilon)$. ამის გამო და (4.10.1) უტოლობის ძალით, (4.10.2)-დან გამომდინარეობს

$$|S_n(f; x_0) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad n > N(x_0, \varepsilon).$$

მაშასადამე,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x_0) = f(x_0).$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

შედეგი 4.10.2 ([8, გვ. 120]). თუ $f \in L[-\pi, \pi]$ ფუნქციას რაიმე x_0 წერტილზე აქვს $f'(x_0)$ სასრული წარმოებული, მაშინ f -ის $S[f]$ ფურიეს მწკრივი კრებადია x_0 წერტილზე $f(x_0)$ მნიშვნელობისკენ.

შედეგი 4.10.3. თუ $f \in L[-\pi, \pi]$ დიფერენცირებადია, ე.ი. აქვს სასრული წარმოებული, $(-\pi, \pi)$ ინტერვალის ყოველ წერტილზე, მაშინ $S[f]$ კრებადია $(-\pi, \pi)$ ინტერვალის ნებისმიერ წერტილზე f -ის შესაბამისი მნიშვნელობისკენ.

შენიშვნა 4.10.4. როგორც უკვე ვიცით (იხ. პარაგრაფი 4.9), $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტ და (a, b) ინტერვალში გლუვ ფუნქციას წარმოებული აქვს (a, b) -ში ყველგან მკვერთ სიმრავლეზე — ეს არის რაიჰშტაინის 1919 წლის შედეგი. რაიჰშტაინის ეს მტკიცება გააძლიერა ზალც-ვასერმა (Zalcwasser) თავის გამოუქვეყნებელ შრომაში შემდეგნაირად [24, გვ. 76, თეორემა 3.3]: I ინტერვალზე უწყვეტ და გლუვ F ფუნქციას სასრული I' წარმოებული აქვს კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეზე ყოველი სეგმენტიდან, რომლებიც ეკუთვნის I ინტერვალს.

ზალცვასერის ამ შედეგის გათვალისწინებით, თეორემა 4.10.1-დან გამომდინარეობს

შედეგი 4.10.5. თუ $F \in L[-\pi, \pi]$ ფუნქცია უწყვეტი და გლუვია რაიმე $I \subset [-\pi, \pi]$ ინტერვალზე, მაშინ I -დან აღებულ ყოველ სეგმენტზე არსებობს კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლე, რომლის ყოველ წერტილზე F -კენ კრებადია F -ის $S[F]$ ფურიეს მწკრივი.

4.11 ფურიეს მწკრივის კრებადობის დინის ნიშანი

როგორც ვიცით, რაიმე x_0 წერტილის მიდამოში განსაზღვრულ φ ფუნქციას x_0 წერტილზე გააჩნია პირველი გვარის წყვეტა⁸, თუ x_0 წერტილზე მისი

$$\varphi(x_0 + 0) \equiv \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \varphi(x) \text{ და } \varphi(x_0 - 0) \equiv \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \varphi(x)$$

ზღვრები მარჯვნიდან და მარცხნიდან, შესაბამისად, სასრულია და სრულდება უტოლობა

$$\varphi(x_0 + 0) \neq \varphi(x_0 - 0).$$

თუ ეს ცალმხრივი ზღვრები ტოლია, მაშინ φ ფუნქციას x_0 წერტილზე გააჩნია $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$ ზღვარი და იგი ტოლია ცალმხრივი ზღვრების, ანუ ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\varphi(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0 - 0).$$

თუკი $\varphi(x_0)$ სასრულია და ადგილი აქვს $\varphi(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$ ტოლობას, მაშინ φ ფუნქცია ასე ეწოდება უწყვეტი x_0 წერტილზე⁹, რაც სიმბოლურად შეიძლება ერთბაშად გამოისახოს

⁸ პირველი გვარის წყვეტას უცხოურ ლიტერატურაში ეწოდება “ჩვეულებრივი წყვეტა” [76, გვ. 633].

⁹ უცხოურ ლიტერატურაში, სწორედ, φ ფუნქციას ეწოდება წყვეტილი x_0 წერტილზე, როცა არსებობს $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$ სასრული ზღვარი, რომელიც განსხვავებულია ასევე სასრული $\varphi(x_0)$ მნიშვნელობიდან — სწორედ ამ დროს გვაქვს წყვეტა. ჩვენს ლიტერატურაში წყვეტის ცნება მოიცავს სხვა შემთხვევასაც.

ასე:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) - \varphi(x_0) = 0.$$

განსაზღვრა 4.11.1 (ლებევი). x_0 წერტილის ეწოდება რეგულარული φ ფუნქციისთვის, თუ არსებობს სასრული $\varphi(x_0 - 0)$ და $\varphi(x_0 + 0)$ და, გარდა ამისა, სრულდება ტოლობა

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{2} [\varphi(x_0 + 0) + \varphi(x_0 - 0)]. \quad (4.11.1)$$

ცხადია, რომ φ ფუნქციის უწყვეტობის ყოველი წერტილი, თუკი ასეთი წერტილი მას გააჩნია, არის φ ფუნქციის რეგულარული წერტილი.

როცა φ ფუნქციას არ გააჩნია (4.11.1) ტოლობით გამოსახული თვისება, მაგრამ არსებობს სასრული $\varphi(x_0 + 0)$ და $\varphi(x_0 - 0)$ ცალმხრივი ზღვრები¹⁰, მაშინ ამ ზღვრების არითმეტიკულ საშუალოს აღნიშნავენ $\overset{\circ}{\varphi}$ სიმბოლოთი, ანუ [32, გვ. 739]

$$\overset{\circ}{\varphi}(x_0) = \frac{1}{2} [\varphi(x_0 + 0) + \varphi(x_0 - 0)]. \quad (4.11.2)$$

ახლა დავამტკიცოთ ფურიეს მწკრივის წერტილზე კრებადობის დინის შემდეგი ნიშანი.

დინის ნიშანი 4.11.2 (1880 წ., [8, გვ. 120]). თუ $f \in L[-\pi, \pi]$ ფუნქცია ისეთია, რომ რაიმე x_0 წერტილისთვის და რომელიმე $\delta > 0$ რიცხვისთვის არსებობს

$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0 + u) + f(x_0 - u) - 2\overset{\circ}{f}(x_0)|}{u} du \quad (4.11.3)$$

ინტეგრალი, მაშინ f ფუნქციის $S[f]$ ფურიეს მწკრივი კრებადია x_0 წერტილზე $\overset{\circ}{f}(x_0)$ მნიშვნელობისკენ, სიმბოლოურად

$$S[f](x_0) = \overset{\circ}{f}(x_0).$$

დამტკიცება. (4.11.3) ინტეგრალის არსებობა ნიშნავს ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის ისეთი $\eta(x_0, \varepsilon) > 0$ რიცხვის არსებობას, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\int_0^\eta |f(x_0 + u) + f(x_0 - u) - 2\overset{\circ}{f}(x_0)| \frac{du}{u} < \varepsilon.$$

¹⁰(4.11.1) ტოლობის არ შესრულება შეიძლება გამოწვეული იყოს არა მარტო იმით, რომ x_0 წერტილზე φ ფუნქციის სასრული $\varphi(x_0)$ მნიშვნელობა განსხვავებულია (4.11.1) ტოლობის მარჯვენა მხარისგან, არამედ იმითაც, რომ არ არსებობს ერთ-ერთი ცალმხრივი ზღვარი ან ორივე კი არსებობს, მაგრამ ერთ-ერთი უსასრულოა.

რადგან $|\sin nu| \leq 1$ ყოველი n -თვის და ნებისმიერი u -თვის, ამიტომ

$$\left| \int_0^{\eta} [f(x_0 + u) + f(x_0 - u) - 2\overset{\circ}{f}(x_0)] \frac{\sin nu}{u} du \right| < \varepsilon. \quad (4.11.4)$$

მეორეს მხრივ,

$$l(u) = \frac{f(x_0 + u) + f(x_0 - u) - 2\overset{\circ}{f}(x_0)}{u}$$

ფუნქცია ჯამებადია (η, δ) ინტერვალზე. ამიტომ, რიმან-ლებეგის თეორემის ძალით¹¹, (იხ. თავი 3, პარაგრაფი 3.9)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\eta}^{\delta} \left[\frac{f(x_0 + u) + f(x_0 - u) - 2\overset{\circ}{f}(x_0)}{u} \right] \sin nu \, du = 0. \quad (4.11.5)$$

(4.11.4) და (4.11.5) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} [f(x_0 + u) + f(x_0 - u) - 2\overset{\circ}{f}(x_0)] \frac{\sin nu}{u} du = 0.$$

რაც ნიშნავს ტოლობას (იხ. პარაგრაფი 4.8, ტოლობა (4.8.6))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f; x_0) = \overset{\circ}{f}(x_0).$$

დინის ნიშანი დამტკიცებულია. □

შედეგი 4.11.3. თუ $f \in L[-\pi, \pi]$ ფუნქციისთვის x_0 წერტილი რეგულარულია, კერძოდ, თუ f უწყვეტია x_0 წერტილზე და რომელიმე $\delta > 0$ რიცხვისთვის არსებობს

$$\int_0^{\delta} \frac{|F_f(x_0, u)|}{u} du$$

ინტეგრალი (იხ. თეორემა 4.8.1), მაშინ

$$S[f](x_0) = f(x_0). \quad (4.11.6)$$

¹¹რიმან-ლებეგის თეორემა მართებულია $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი ყოველი φ ფუნქციისთვის. ამის დასაწახად, საკმარისია განვიხილოთ ახალი ფუნქცია $\psi(x) = \varphi(x)$, როცა $x \in [a, b]$ და $\psi(x) = 0$, როცა $x \in [-\pi, \pi] \setminus [a, b]$.

შედეგი 4.11.4 ([8, გვ. 120]). ვთქვათ, $f \in L[-\pi, \pi]$ ფუნქცია x_0 წერტილის მიდამოში აკმაყოფილებს ლიპშიცის $\alpha > 0$ პირობას¹²

$$|f(x_0 + u) - f(x_0)| \leq k|u|^\alpha,$$

სადაც $\alpha > 0$ და $|u| \leq \delta$, მაშინ (4.11.3) ინტეგრალი არსებობს¹³ და f ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილზე. ამიტომ, (4.11.6) ტოლობის ძალით, გვაქვს

$$S[f](x_0) = f(x_0).$$

შენიშვნა 4.11.5 ([46, გვ. 426]). (4.11.3) ინტეგრალის არსებობის შეცვლა $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\delta}$ ზღვრის არსებობით, არ არის საკმარისი კრებადობისთვის.

4.12 ფურიეს მწკრივის კრებადობის ჟორდანის ნიშანი

ჟორდანის თეორემის ძალით, სასრული ვარიაციით ფუნქცია წარმოდგენილია ორი ზრდადი ფუნქციის სხვაობის სახით, რომელთაგან თითოეული სასრული ვარიაციის მქონეა [1, გვ. 303, 309]. მონოტონური ფუნქცია კი არის უწყვეტი ან აქვს პირველი გვარის წყვეტა და ასეთ წერტილთა სიმრავლე სასრულია ან თვლადი [1, გვ. 287-288]. თუ სასრული ვარიაციით ფუნქცია უწყვეტიცაა, მაშინ მის წარმოდგენაში მონაწილე ზრდადი ფუნქციებიც უწყვეტია.

თეორემა 4.12.1 (ჟორდანი (1881 წ.), [8, გვ. 121]). თუ $f \in L[-\pi, \pi]$ ფუნქცია არის სასრული ვარიაციით $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ სეგმენტზე, მაშინ მისი $S[f]$ ფურიეს მწკრივი კრებადია (a, b) ინტერვალზე. ამასთან ერთად, $S[f]$ მწკრივის ჯამია $f(x_0)$, როცა $x_0 \in (a, b)$ წერტილი f ფუნქციის უწყვეტობის წერტილია და არის $f(x_0)$, როცა x_0 არის f -ის წყვეტის

¹² $\alpha = 1$ შემთხვევა განხილული იყო ადრე (იხ. თავი 3, პარაგრაფი 3.10).

¹³(4.11.3) ინტეგრალი

$$\begin{aligned} &\leq 2k \int_0^\delta \frac{u^\alpha}{u} du = 2k \int_0^\delta u^{\alpha-1} du \\ &= 2k \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^\delta u^{\alpha-1} du = 2k \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{u^\alpha}{\alpha} \right]_{u=t}^{u=\delta} = 2k \frac{1}{\alpha} \lim_{t \rightarrow 0} [\delta^\alpha - t^\alpha] = \frac{2k}{\alpha} \delta^\alpha. \end{aligned}$$

წერტილი. გარდა ამისა, თუკი f ფუნქცია უწყვეტიცაა (a, b) ინტერვალში, მაშინ $S[f]$ მწკრივი თანაბრად კრებადია ყოველ $[a', b'] \subset (a, b)$ სეგმენტზე $f(x)$ -კენ, როცა $x \in [a', b']$.

დამტკიცება. ზემოაღნიშნულის ძალით, f ფუნქცია წარმოდგენილია f_1 და f_2 ზრდადი ფუნქციების სხვაობის სახით $f = f_1 - f_2$. ამასთან, $S[f] = S[f_1 - f_2] = S[f_1] - S[f_2]$ (იხ. თავი 3, პარაგრაფი 3.12). ამგვარად, თუ თეორემა დამტკიცებული იქნება $S[f_1]$ და $S[f_2]$ მწკრივებისთვის, მაშინ იგი დამტკიცებული იქნება $S[f]$ მწკრივისთვისაც. ამიტომ, თავიდანვე შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ f ფუნქცია ზრდადია $[a, b]$ სეგმენტზე.

რადგან

$$\overset{\circ}{f}(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)], \quad (4.12.1)$$

ამიტომ

$$\begin{aligned} f(x_0 + u) + f(x_0 - u) - 2\overset{\circ}{f}(x_0) \\ = [f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)] + [f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)]. \end{aligned} \quad (4.12.1')$$

აქ თითოეული კვადრატული ფრჩხილშიცაა სხვაობა არაუარყოფითია და წარმოდგენს ზრდად ფუნქციას u -ს მიმართ.

$x_0 \in (a, b)$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი $\delta = \delta(x_0) > 0$ რიცხვი, რომ $x_0 \pm \delta \in (a, b)$ და

$$0 \leq f(x_0 + u) - f(x_0 + 0) < \varepsilon, \quad \text{როცა } 0 \leq u \leq \delta. \quad (4.12.2)$$

რადგან $f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)$ წარმოდგენს u -ს ზრდად და არაუარყოფით ფუნქციას, ამიტომ საშუალო მნიშვნელობის მეორე ფორმულით ანუ, რაც იგივეა, ბონეს ფორმულით¹⁴

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(b) \int_c^b f(x) dx,$$

გვაქვს ტოლობა

$$\int_0^\delta [f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)] \frac{\sin nu}{u} du = [f(x_0 + \delta) - f(x_0 + 0)] \int_{\delta_1}^\delta \frac{\sin nu}{u} du, \quad (4.12.3)$$

¹⁴ თუ $f \in L[a, b]$ და $g(x)$ ზრდადია და $g(u) \geq 0$, მაშინ $[a, b]$ სეგმენტზე არსებობს ერთი მაინც ისეთი c წერტილი, რომ (იხ. [1, გვ. 519]) ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(b) \int_c^b f(x) dx.$$

სადაც $0 < \delta_1 < \delta$. ამავე დროს (იხ. [8, გვ. 114])

$$\left| \int_{\delta_1}^{\delta} \frac{\sin nu}{u} du \right| < 2\pi \text{ ნებისმიერი } n\text{-თვის.} \quad (4.12.4)$$

(4.12.2) და (4.12.4) უტოლობების გათვალისწინებით, (4.12.3) ტოლობიდან გვაქვს

$$\left| \int_0^{\delta} [f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)] \frac{\sin nu}{u} du \right| < 2\pi\varepsilon.$$

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ

$$\left| \int_0^{\delta} [f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)] \frac{\sin nu}{u} du \right| < 2\pi\varepsilon.$$

(4.12.1') ტოლობის გათვალისწინებით, უკანასკნელი ორი უტოლობიდან ვღებულობთ

$$\left| \int_0^{\delta} [f(x_0 + u) - f(x_0 - u) - 2\overset{\circ}{f}(x_0)] \frac{\sin nu}{u} du \right| < 4\pi\varepsilon.$$

ეს კი ნიშნავს 4.8 პარაგრაფიდან (4.8.3) ტოლობის შესრულებას $L = \overset{\circ}{f}(x_0)$ მნიშვნელობისთვის ანუ, რაც იგივეა, $S[f]$ მწკრივი $x_0 \in (a, b)$ წერტილზე კრებადი $\overset{\circ}{f}(x_0)$ მნიშვნელობისკენ.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $[a, b]$ სეგმენტზე სასრული ვარიაციის მქონე f ფუნქცია უწყვეტია (a, b) ლია ინტერვალში და $[a', b']$ სეგმენტი ეკუთვნის (a, b) -ს. მაშინ არსებობს ისეთი $\delta_2(\varepsilon) > 0$ რიცხვი, რომ

$$|f(x + u) - f(x)| < \varepsilon, \quad |f(x - u) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{როცა } a' \leq x \leq b', \quad 0 < u \leq \delta_2.$$

წინა მსჯელობები ძალაშია, თუ x_0 შეცვლილია ნებისმიერი x -ით $[a', b']$ -დან. ამის გამო

$$\left| \int_0^{\delta} [f(x + u) + f(x - u) - 2f(x)] \frac{\sin nu}{u} du \right| < 4\pi\varepsilon, \quad \text{როცა } a' \leq x \leq b'.$$

ეს ნიშნავს $S[f]$ მწკრივის თანაბარ კრებადობას $[a', b']$ სეგმენტზე $f(x)$ მნიშვნელობებისკენ, $x \in [a', b']$. თეორემა დამტკიცებულია. □

ჟორდანის ამ თეორემიდან გამომდინარეობს

თეორემა 4.12.2 ([8, გვ. 122]). თუ f ფუნქცია არის სასრული ვარიაციის მქონე და უწყვეტი $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე და, ამასთან, სრულდება $f(-\pi) = f(\pi)$ ტოლობა ანუ, რაც იგივეა, თუ f უწყვეტია წრეწირზე და აქვს სასრული ვარიაცია $[-\pi, \pi]$ -ზე, მაშინ $S[f]$ მწკრივი თანაბრად კრებადია ნებისმიერ $[A, B] \subset (-\infty, +\infty)$ სეგმენტზე. კერძოდ, ამ დასკვნას ადგილი აქვს თუ f აბსოლუტურად უწყვეტია $[-\pi, \pi]$ -ზე და სრულდება $f(-\pi) = f(\pi)$ ტოლობა ანუ, რაც იგივეა, თუ f აბსოლუტურად უწყვეტია წრეწირზე.

შენიშვნა 4.12.3. როცა ესაუბრობთ u ცვლადის $f(x_0 + u) + f(x_0 - u) - 2f(x_0)$ ფუნქციაზე, ცხადია, ვგულისხმობთ f -ის განსაზღვრულობას x_0 წერტილის მიდამოში და $2f(x_0) = f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)$ მნიშვნელობის სასრულობას, რაც, თავის მხრივ, გულისხმობს ცალმხრივი $f(x_0 + 0)$ და $f(x_0 - 0)$ ზღვრების არსებობასა და მათ სასრულობას.

როცა რაიმე ფაქტის დასადგენად წინაპირობად მოთხოვნილია, რომ f ფუნქციის მნიშვნელობა x_0 წერტილზე არის $\frac{1}{2}[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)]$ ანუ, რაც იგივეა, x_0 არის f -ის რეგულარული წერტილი, ეს გარკვეულწილად ზღუდავს f ფუნქციას და თანაც, გამიზნული ფაქტისთვის ეს არც კი არის არსებითი. მართლაც, გამიზნული ფაქტის დადგენისას მთავარია თვით მნიშვნელობა $\frac{1}{2}[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)]$ და არა ის, რომ ამ მნიშვნელობას f ღებულობს x_0 წერტილზე.

ერთხელ კიდევ, რაღაც პირობებში ფურიეს მწკრივის x_0 წერტილზე $\frac{1}{2}[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)]$ მნიშვნელობისკენ კრებადობა იმ მოთხოვნით, რომ x_0 იყოს რეგულარული წერტილი f -თვის, კრებადობა არ საჭიროებს. საქმე ისაა, რომ ასეთ თეორემებში კრებადობა $\frac{1}{2}[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)]$ მნიშვნელობისკენ მტკიცდება იმისგან დამოუკიდებლად, არის თუ არ არის ეს არითმეტიკული საშუალო f ფუნქციის მნიშვნელობა x_0 წერტილზე.

ამიტომ, რომ ფურიეს მწკრივის კრებადობის დინისა და ჟორდანის აქ მოყვანილი ფორმულირებებში ფიგურირებს $f(x_0)$ მნიშვნელობა (იხ. პარაგრაფი 4.11, თეორემა 4.11.2; პარაგრაფი 4.12, თეორემა 4.12.16).

4.13 ფურიეს მწკრივის კრებადობის ვალე-პუსენის ნიშანი

ახლა დავამტკიცოთ ვალე-პუსენის თეორემა, რომელშიც ფიგურირებს პარაგრაფ 4.8-ში (4.8.5) ტოლობით მიღებული

$$F_f(x; u) = f(x + u) + f(x - u) - 2f(x)$$

აღნიშვნისგან განსხვავებული შემდეგი აღნიშვნა

$$\overset{\circ}{F}_f(x, u) = f(x + u) + f(x - u) - 2f(x),$$

სადაც (იხ. პარაგრაფი 4.11, ტოლობა (4.11.2))

$$\overset{\circ}{f}(x) = \frac{1}{2} [f(x + 0) + f(x - 0)].$$

თეორემა 4.13.1 (ვალე-პუსენი (1911 წ.), [8, გვ. 247]). ვთქვათ, $t > 0$,

$$\omega_{x_0}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \overset{\circ}{F}_f(x_0, u) du, \quad \omega_{x_0}(0) = 0$$

და, ვთქვათ,

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \omega_{x_0}(t) = 0. \quad (4.13.1)$$

თუკი $\omega_{x_0}(t)$ ფუნქციას აქვს სასრული ვარიაცია რაიმე $[0, \delta]$ სეგმენტზე, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$S[f](x_0) = \overset{\circ}{f}(x_0). \quad (4.13.2)$$

დამტკიცება. რადგან

$$t\omega_{x_0}(t) = \int_0^t \overset{\circ}{F}_f(x_0, u) du,$$

ამიტომ თითქმის ყველა t -თვის $[0, \delta]$ -დან

$$(t\omega_{x_0}(t))' = \overset{\circ}{F}_f(x_0, t)$$

და

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \overset{\circ}{F}_f(x_0, u) \frac{\sin nu}{u} du &= \int_0^\delta [\omega'_{x_0}(u)]' \frac{\sin nu}{u} du \\ &= \int_0^\delta \omega'_{x_0}(u) \frac{\sin nu}{u} du + \int_0^\delta \omega_{x_0}(u) \frac{\sin nu}{u} du \\ &= \int_0^\delta \omega'_{x_0}(u) \sin nu du + \int_0^\delta \omega_{x_0}(u) \frac{\sin nu}{u} du \equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

რადგან $\omega_{x_0}(u)$ არის სასრული ვარიაციით $[0, \delta]$ სეგმენტზე, ამიტომ მისი $\omega'_{x_0}(u)$ წარმოებული ჯამებადია $[0, \delta]$ -ზე [33, გვ. 205] და რიმან-ლებეგის თეორემის თანახმად (იხ. თავი 3, პარაგრაფი 3.9, თეორემა 3.9.2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1 = 0, \quad (4.13.3)$$

როგორც $[-\pi, \pi]$ -ზე ჯამებადია

$$\psi(u) = \begin{cases} \omega'_{x_0}(u), & \text{როცა, } u \in [0, \delta], \\ 0, & \text{როცა, } u = [-\pi, \pi] \setminus [0, \delta] \end{cases}$$

ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტი.

ახლა ვაჩვენებთ I_2 ინტეგრალის სწრაფვა ნულისკენ, როცა $n \rightarrow \infty$. შევნიშნოთ, რომ $\omega_{x_0}(t)$ ფუნქცია უწყვეტია $t = 0$ წერტილზე (რადგან (4.13.1) ტოლობა შეიძლება ასე ჩაიწეროს: $\lim_{t \rightarrow 0+} \omega_{x_0}(t) = \omega_{x_0}(0)$) და $[0, \delta]$ -ზე არის სასრულო ვარიაციის მქონე. ამიტომ, ჟორდანის თეორემით $S[\omega_{x_0}](0) = 0$. ეს კი ნიშნავს, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta [\omega_{x_0}(0+u) + \omega_{x_0}(0-u) - 2\omega_{x_0}(0)] \frac{\sin nu}{u} du = 0$$

ტოლობიდან (იხ. პარაგრაფი 4.8, ტოლობა (4.8.6)) გამომდინარეობს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta [\omega_{x_0}(u) + \omega_{x_0}(-u)] \frac{\sin nu}{u} du = 0 \quad (4.13.4)$$

ტოლობა. ამასთან ერთად, u ცვლადის $\overset{\circ}{F}_f(x_0, u)$ ფუნქცია ლუწია, ამიტომ

$$\int_0^t \overset{\circ}{F}_f(x_0, u) du = \int_{-t}^0 \overset{\circ}{F}_f(x_0, u) du = - \int_0^{-t} \overset{\circ}{F}_f(x_0, u) du$$

და

$$\frac{1}{t} \int_0^t \overset{\circ}{F}_f(x_0, u) du = \frac{1}{-t} \int_0^{-t} \overset{\circ}{F}_f(x_0, u) du = \omega_{x_0}(-t),$$

ი.ი.

$$\omega_{x_0}(-t) = \omega_{x_0}(t), \quad t \geq 0.$$

ამის გამო, (4.13.4)–დან გამომდინარეობს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta \omega_{x_0}(u) \frac{\sin nu}{u} du = 0. \quad (4.13.5)$$

(4.13.3) და (4.13.5) ტოლობების ძალით ვღებულობთ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta \overset{\circ}{F}_f(x_0, u) \frac{\sin nu}{u} du = 0.$$

ეს კი ნიშნავს (4.13.2) ტოლობას, რადგან 4.8 პარაგრაფის (4.8.6)–ში $F_f(x, u)$ –ის ადგილას ახლა გვაქვს $\overset{\circ}{F}_f(x_0, u)$, საიდანაც იმავე პარაგრაფის თეორემა 4.8.1–ის ძალით $S[f]$ კრებადია x_0 წერტილზე $\overset{\circ}{f}(x_0)$ მნიშვნელობისკენ. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

4.14 ფურიეს მწკრივის კრებადობის იანგის, ლებეგის, ლებეგ-გერგენის ნიშნები და დამოკიდებულებანი კრებადობის ნიშნებს შორის

ფურიეს მწკრივის კრებადობის უკვე დამტკიცებული დინის, ჟორდანის და ვალე-პუსენის ნიშნების გარდა არსებობს კიდევ რამდენიმე ნიშანი, რომელთა შესახებ ინფორმაცია აქ მოცემული იქნება დამტკიცების გარეშე.

4.14.1 იანგის, ლებეგისა და ლებეგ-გერგენის ნიშნები

დავიწყოთ იანგის თეორემით.

თეორემა 4.14.1 (იანგი (1916 წ.), [8, გვ. 249]). ვთქვათ,

- (1) $\overset{\circ}{F}_f(x_0, u) \rightarrow 0$, როცა $u \rightarrow 0$;
- (2) $\psi(t) = t \overset{\circ}{F}_f(x_0, t)$ ფუნქციას სასრული ვარიაცია აქვს $(0, \delta)$ ინტერვალზე;
- (3) ψ ფუნქციის $V_\psi(h)$ ვარიაციას $(0, h)$ ინტერვალზე აქვს თვისება

$$V_\psi(h) = O(h).$$

მაშინ $S[f]$ კრებადია x_0 წერტილზე $\overset{\circ}{f}(x_0)$ მნიშვნელობისკენ.

თეორემა 4.14.2 (ლებეგი (1905 წ.), [8, გვ. 254]). თუ

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \int_h^\delta \left| \frac{\overset{\circ}{F}_f(x_0, u+h)}{u+h} - \frac{\overset{\circ}{F}_f(x_0, u)}{u} \right| du = 0, \quad (4.14.1)$$

მაშინ

$$S[f](x_0) = \overset{\circ}{f}(x_0). \quad (4.14.2)$$

ამასთან ერთად, (4.14.1) პირობა ეკვივალენტურია შემდეგი ორი პირობის [8, გვ. 257]:

$$\begin{aligned} \int_0^t |\overset{\circ}{F}_f(x_0, u)| du &= o(t), \quad t \rightarrow 0, \\ \int_h^\delta \left| \frac{\overset{\circ}{F}_f(x_0, u+h) - \overset{\circ}{F}_f(x_0, u)}{u} \right| du &= o(1), \quad h \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.14.3)$$

თეორემა 4.14.3 (ლებეგი, გერგენი, 1930 წ., [8, გვ. 263]). თუ

$$\int_0^t \overset{\circ}{F}_f(x_0, u) du = o(t)$$

და შესრულებულია (4.14.3) პირობა, მაშინ ადგილი აქვს (4.14.2) ტოლობას.

4.14.2 დამოკიდებულებანი კრებადობის ნიშნებს შორის

1) გამოთქმა “კრებადობის A ნიშანი ძლიერია კრებადობის B ნიშანზე” ნიშნავს, რომ A ნიშანი ადგენს ყველა იმ მწკრივის კრებადობას, რომელიც კრებადია B ნიშნის მიხედვით და, ამავე დროს, არსებობს A ნიშნით კრებადი მწკრივი, რომელიც არაა კრებადი B ნიშნის მიხედვით.

2) გამოთქმა “კრებადობის A და B ნიშნები არასადარია” ნიშნავს ისეთი მწკრივის არსებობას, რომელიც კრებადია A ნიშნით, მაგრამ არაა კრებადი B ნიშნის მიხედვით და, გარდა ამისა, არსებობს B ნიშნით კრებადი მწკრივი, რომელიც არაა კრებადი A ნიშნით.

1. ღინისა და ჟორდანის ნიშნები არასადარია [8, გვ. 248].

2. ვალე-პუსენის ნიშანი ძლიერია ღინისა და ჟორდანის ნიშნებზე [8, გვ. 248].

3. იანგის ნიშანი ძლიერია ჟორდანის ნიშანზე [8, გვ. 251].
4. იანგისა და დინის ნიშნები არასადარია [8, გვ. 252].
5. იანგისა და ვალე-პუსენის ნიშნები არასადარია [8, გვ. 254].
6. ლებეგის ნიშანი ძლიერია დინის, ჟორდანის, ვალე-პუსენისა და იანგის ნიშნებზე [8, გვ. 258].
7. ლებეგ-გერგენის ნიშანი ძლიერია ლებეგის ნიშანზე [8, გვ. 266].

4.15 ფურიეს მწკრივის წევრობრივი ინტეგრება

თავი 3-ის პარაგრაფ 3.8-ში დამტკიცებული გვექონდა, რომ $L^2[a, b]$ სივრცეში სრული (ჩაკეტილი) $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ $f \in L^2[a, b]$ ფუნქციის

$$f \sim c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + \dots$$

ფურიეს მწკრივის წევრობრივი ინტეგრება მართლზომიერია ნებისმიერ $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ სეგმენტზე და ადგილი აქვს ტოლობას (ე.ი. “ $\sim$ ” შესაბამისობის ნიშანი იცვლება “ $=$ ” ტოლობის ნიშნით!)

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_k(x) dx.$$

ახლა დავამტკიცებთ ლებეგის ანალოგიურ თეორემას როგორც ნამდვილი ისე კომპლექსური ფორმის ტრიგონომეტრიული მწკრივისთვის უკვე პერიოდზე **ჯამებადი** ფუნქციისთვის, თუნდაც ეს მწკრივი განშლადი იყოს ყველგან! პერიოდზე **ჯამებადი** ფუნქციის ფურიეს ყველგან **განშლადი** მწკრივის არსებობა დაამტკიცა კოლმოგოროვმა.

4.15.1 ფურიეს ნამდვილი ფორმის მწკრივის წევრობრივი ინტეგრება

თეორემა 4.15.1 (ლებეგი (1902 წ.), [24, გვ. 101], [8, გვ. 122], [13, გვ. 142]). ვთქვათ, f არის 2π პერიოდული და $[0, 2\pi]$ მონაკვეთზე **ჯამებადი** ნებისმიერი ფუნქცია. განვიხილოთ f ფუნქციის შესაბამისი ფურიეს ნამდვილი ფორმის მწკრივი

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (4.15.1)$$

რომელიც შესაძლებელია განზღადიკ კი იყოს ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე! მაშინ, (4.15.1) დამოკიდებულების მარჯვენა მხარის წევრობრივი ინტეგრებით ნებისმიერ $[a, b] \subset [0, 2\pi]$ სეგმენტზე მიიღება კრებადი რიცხვითი მწკრივი, რომლის ჯამია ინტეგრალი $[a, b]$ სეგმენტზე (4.15.1)-ის მარცხენა მხარიდან:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_a^b dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_a^b \cos nx dx + b_n \int_a^b \sin nx dx \right). \quad (4.15.2)$$

ამასთან ერთად, თუკი ინტეგრებას მოვახდენთ $[0, x] \subset [0, 2\pi]$ ცვლადსაზღვრიან სეგმენტზე, მაშინ წევრობრივი ინტეგრებით მიღებული მწკრივი თანაბრად კრებადია $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე და მას აქვს სახე

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0}{2} \int_0^x dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_0^x \cos nt dt + b_n \int_0^x \sin nt dt \right), \quad (4.15.3)$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \sin nx - b_n \cos nx), \quad (4.15.4)$$

სადაც

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)(\pi - x) dx. \quad (4.15.5)$$

დ ა მ ტ ვ ი ც ე ბ ა . განვიხილოთ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია

$$F(x) = \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt, \quad (4.15.6)$$

სადაც

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx.$$

ცხადია, რომ $F(0) = 0$, ხოლო

$$\begin{aligned} F(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(t) dt - \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi a_0 - \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi = \pi a_0 - \pi a_0 = 0, \end{aligned}$$

ე.ი. $F(0) = F(2\pi) = 0$. $[0, 2\pi]$ სეგმენტის გარეთ F ფუნქცია გავაგრძელოთ 2π პერიოდით: $F(x + 2\pi) = F(x)$.

ამრიგად, (4.15.6) ტოლობით მოცემული ფუნქცია არის 2π პერიოდული და აბსოლუტურად უწყვეტი ყოველ სეგმენტზე $(-\infty, +\infty)$ -დან.

ჟორდანის თეორემის თანახმად (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.12, თეორემა 4.12.2), (4.15.6) ტოლობით განსაზღვრული F ფუნქცია გაიშლება $[0, 2\pi]$ -ზე თანაბრად კრებად

$$F(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \quad (4.15.7)$$

ფურიეს მწკრივად, სადაც

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) dx, \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cos nx dx, \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \sin nx dx. \end{aligned} \quad (4.15.8)$$

ნაწილობითი ინტეგრების მეთოდით A_n და B_n ($n = 1, 2, \dots$) კოეფიციენტები გამოისახება a_n და b_n კოეფიციენტებით შემდეგნაირად, რადგან არაინტეგრალური წევრები ნულის ტოლია,

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cos nx dx = -\frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = -\frac{b_n}{n}, \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \sin nx dx = \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{a_n}{n}. \end{aligned}$$

A_n და B_n კოეფიციენტების ეს ნაპოვნი მნიშვნელობები ჩავსვათ (4.15.7) ტოლობაში და გავითვალისწინოთ (4.15.6) ტოლობა, მივიღებთ

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{1}{2} A_0 + \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \sin nx - b_n \cos nx). \quad (4.15.9)$$

თუ (4.15.9) ტოლობაში ჩავსვამთ კერძო $x = 0$ მნიშვნელობას, მივიღებთ

$$0 = \frac{1}{2} A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}.$$

ანუ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2} A_0.$$

ამის გამო

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx \right) \\ &= \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx + \frac{b_n}{n} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} \int_0^x dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_0^x \cos nt dt + b_n \int_0^x \sin nt dt \right), \end{aligned}$$

ე.ი. (4.15.3) ტოლობა მართებულია და იგი შესრულებულია თანაბრად $[0, 2\pi]$ -ზე. გარდა ამისა,

$$\int_a^b \lambda(t) dt = \int_0^b \lambda(t) dt - \int_0^a \lambda(t) dt$$

ტოლობის გამოყენებით (4.15.9)-დან მივიღებთ (გამოკლებისას $\frac{1}{2} A_0$ გაქრება)

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_a^b + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{n} \Big|_a^b,$$

რაც ნიშნავს (4.15.2) ტოლობას.

ახლა დავამტკიცოთ (4.15.5) ტოლობა. ამ მიზნით ვისარგებლოთ (4.15.6) ტოლობით და A_0 კოეფიციენტის გამოსათვლელი (4.15.8) ტოლობით. გვაქვს

$$\begin{aligned} \pi A_0 &= \int_0^{2\pi} F(x) dx = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt \right) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^x f(t) dt \right) dx - \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^x dt \right) dx. \quad (4.15.10) \end{aligned}$$

ღირისლეს ფორმულაში (იხ. [3, გვ. 330], [50, გვ. 158])

$$\int_0^a \left(\int_0^x \varphi(x, y) dy \right) dx = \int_0^a \left(\int_y^a \varphi(x, y) dx \right) dy$$

თუ ავიღებთ $a = 2\pi$ და $\varphi(x, y) = f(y)$, მაშინ მივიღებთ

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^x f(t) dt \right) dx &= \int_0^{2\pi} \left(\int_t^{2\pi} f(t) dx \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(f(t) \int_t^{2\pi} dx \right) dt = \int_0^{2\pi} (f(t)(2\pi - t)) dt. \quad (4.15.11) \end{aligned}$$

გარდა ამისა,

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^x dt \right) dx = \int_0^{2\pi} \left([t]_0^x \right) dx = \int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2. \quad (4.15.12)$$

ახლა (4.15.10), (4.15.11) და (4.15.12) ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$\begin{aligned} \frac{A_0}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)(2\pi - t) dt - \frac{a_0}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)(2\pi - t) dt - \frac{a_0}{2} \pi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)(2\pi - t) dt - \frac{\pi}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)(2\pi - t - \pi) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)(\pi - t) dt. \end{aligned}$$

მაშასადამე,

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)(\pi - t) dt.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

შედეგი 4.15.2. ყოველი $f \in L[0, 2\pi]$ ფუნქციის ფურიეს b_n კოეფიციენტებისგან შედგენილი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \quad (4.15.13)$$

მწკრივი კრებადია და ადგილი აქვს (4.15.5) ტოლობას.

შედეგი 4.15.3. ლემების 4.15.1 თეორემიდან (4.15.3) ტოლობა შეიძლება ჩამოყალიბდეს ასე: $[0, 2\pi]$ -ზე ჯამებადი f ფუნქციისთვის, თანაბრად $[0, 2\pi]$ -ზე სრულდება შემდეგი ორი ურთიერთეკვივალენტური ტოლობა

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x S_n(f; t) dt = \int_0^x f(t) dt \quad (4.15.14)$$

და

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x [S_n(f; t) - f(t)] dt = 0. \quad (4.15.14')$$

სადაც

$$S_n(f; t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

შედეგი 4.15.4. თეორემა 4.15.1 საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ ჯამებადი f ფუნქცია, თუ ცნობილია f -ის ფურიეს კოეფიციენტები ანუ, რაც იგივეა, ცნობილია f ფუნქციის $S[f]$ ფურიეს მწკრივი. მართლაც, უნდა დაიწეროს (4.15.1) დამოკიდებულება, ვიპოვოთ (4.15.3) ტოლობის მარჯვენა მხარის ჯამი და ამის შემდეგ გავაწარმოთ ეს ჯამი. (4.15.3) ტოლობის მარცხენა მხარის თანახმად, თითქმის ყველა $x \in [0, 2\pi]$ მნიშვნელობისთვის, ვიპოვოთ $(f(x) - \frac{1}{2} a_0)$ -ს. ამგვარად მიღებულ შედეგს დავამატოთ $\frac{1}{2} a_0$ და გვეცოდინება $f(x)$ თითქმის ყველა $x \in [0, 2\pi]$ მნიშვნელობისთვის.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 4.15.5. (4.15.13) მწკრივის კრებადობა საშუალებას გვაძლევს მივუთითოთ არაფურიეს მწკრივი, რომლისთვისაც განშლადია (4.15.13) მწკრივი.

მაგალითად, ფატუმ მიუთითა ყველგან კრებადი $\sum_{k=2}^{\infty} \sin kx / \ln k$ ტრიგონომეტრიული მწკრივი (იხ. პარაგრაფი 4.17, შედეგი 4.17.4), რომელიც არ არის ფურიეს მწკრივი იმ მიზეზის გამო, რომ $\sum_{n=2}^{\infty} 1/k \ln k$ მწკრივი განშლადია¹⁵ და, მაშასადამე, არ სრულდება აუცილებელი (4.15.13) პირობა.

ამასთან ერთად, (4.15.13) კრებადი მწკრივის გვერდით, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n$ მწკრივი შეიძლება განშლადი იყოს. მართლაც, $\sum_{n=2}^{\infty} \cos kx / \ln k$ მწკრივი კრებადია ყველგან, გარდა $x = 2\pi k$ წერტილებისა და ეს მწკრივი წარმოადგენს არაუარყოფითი ფუნქციის ფურიეს მწკრივს (იხ. [8, გვ. 100, 102]), თუმცა

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

მწკრივი განშლადია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 4.15.6. განსხვავება $\sum_1^{\infty} a_n/n$ და $\sum_1^{\infty} b_n/n$ მწკრივებს შორის მათი კრებადობის თვალსაზრისით ქრება, თუ a_n და b_n წარმოადგენს L^p , $p > 1$, კლასის ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს: მაშინ ორივე ეს მწკრივი კრებადია [8, გვ. 216].

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 4.15.7. (4.15.4) ტოლობის მარჯვენა მხარე არ წარმოადგენს მისი მარცხენა მხარის გაშლას ფურიეს მწკრივად, რადგან მარჯვენა მხარეში დგას არაპერიოდული $\frac{a_0}{2} x$ ფუნქცია! თუკი (4.15.4) ტოლობის ორივე მხარეს დავაკლებთ $\frac{a_0}{2} x$ -ს, მაშინ ასე მიღებული ტოლობის მარჯვენა მხარე იქნება მისი $(\int_0^x f(t) dt - \frac{a_0}{2} x)$ მარცხენა მხარის ფურიეს მწკრივი.

¹⁵რადგან $\frac{1}{x \ln x}$ ფუნქცია კლებადია, ამიტომ

$$\frac{1}{n \ln n} > \int_n^{n+1} \frac{dx}{x \ln x}.$$

აქედან

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n \ln n} > \int_2^N \frac{dx}{x \ln x} > \ln \ln N - \ln \ln 2 \rightarrow \infty, \text{ როცა } N \rightarrow \infty.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 4.15.8. (4.15.5) ტოლობის აქ მოყვანილი დამტკიცება განსხვავდება ცნობილი დამტკიცებებისგან (იხ. [24, გვ. 120], [8, გვ. 217], [33, გვ. 276], [51, გვ. 53]).

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 4.15.9. (4.15.14') ტოლობასთან დაკავშირებით უნდა ითქვას: არსებობს $[0, 2\pi]$ -ზე ჯამებადი ისეთი φ ფუნქცია, რომლის შეუღლებული $\bar{\varphi}$ ფუნქციაც ჯამებადი $[0, 2\pi]$ -ზე, მაგრამ $\int_0^{2\pi} |\varphi(x) - S_n(\varphi; x)| dx$ და $\int_0^{2\pi} |\bar{\varphi}(x) - S_n(\bar{\varphi}; x)| dx$ სიდიდეებიდან არც ერთი არ ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $n \rightarrow \infty$ [8, გვ. 602].

4.15.2 ფურიეს ექსპონენტური მწკრივის წევრობრივი ინტეგრება

თ ე ო რ ე მ ა 4.15.10 (ლებევი (1902 წ.)). 2π პერიოდული და $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი ნებისმიერი f ფუნქციის ფურიეს ექსპონენტური მწკრივის

$$f \sim c_0 + \sum_{|n| \geq 1} c_n e^{inx} \quad (4.15.15)$$

წევრობრივი ინტეგრება ყოველ $[0, x] \subset [0, 2\pi]$ სეგმენტზე მართლზომიერია, თუნდაც (4.15.15) მწკრივი განშლადი იყოს ყველა წერტილზე და ინტეგრების შედეგია ტოლობა

$$c_0 x - i \sum_{|n| \geq 1} \frac{c_n}{n} e^{inx} = \int_0^x f(t) dt - i \sum_{|n| \geq 1} \frac{c_n}{n}, \quad (4.15.16)$$

რომლის შემადგენელი მარცხენა მწკრივი თანაბრად კრებადია $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე და c_n კოეფიციენტებს გააჩნია თვისება

$$(PV) \quad \sum_{|n| \geq 1} \frac{c_n}{n} = -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \quad (4.15.17)$$

$$= -i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)(\pi - t) dt. \quad (4.15.18)$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . განვიხილოთ ფუნქცია

$$F(x) = \int_0^x [f(t) - c_0] dt,$$

რომლისთვისაც $F(0) = 0$ და

$$F(2\pi) = \int_0^{2\pi} f(t) dt - c_0 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi c_0 - 2\pi c_0 = 0.$$

რადგან (იხ. თავი 2, პარაგრაფი 2.2, ტოლობა (2.2.5))

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

$[0, 2\pi]$ -ს გარეთ F გავაგრძელოთ 2π პერიოდულად:

$$F(x + 2\pi) = F(x).$$

ამრიგად, 2π პერიოდული F ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია, კერძოდ, სასრული ვარიაციის მქონეა ყოველ სეგმენტზე $(-\infty, +\infty)$ -დან. ამიტომ F ფუნქციის

$$F \sim d_0 + \sum_{|n| \geq 1} d_n e^{inx}$$

ფურიეს ექსპონენცური მწკრივი თანაბრად კრებადია $[0, 2\pi]$ -ზე, ჟორდანის 4.12.2 თეორემის თანახმად. ამრიგად, თანაბრად $[0, 2\pi]$ -ზე ადგილი აქვს ტოლობას

$$F(x) = d_0 + \sum_{|n| \geq 1} d_n e^{inx},$$

სადაც

$$d_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) dt, \quad d_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) e^{-int} dt, \quad |n| \geq 1.$$

ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ

$$d_n = \frac{1}{in} c_n, \quad |n| \geq 1,$$

ამიტომ თანაბრად $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე სრულდება ტოლობა

$$F(x) = d_0 + \sum_{|n| \geq 1} \frac{1}{in} c_n e^{inx}.$$

აქ, კერძო $x = 0$ მნიშვნელობის ჩასმით მივიღებთ

$$d_0 = i \sum_{|n| \geq 1} \frac{1}{n} c_n \quad (4.15.19)$$

და, მაშასადამე, თანაბრად $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე გვაქვს ტოლობა

$$F(x) = i \sum_{|n| \geq 1} \frac{c_n}{n} (1 - e^{inx}). \quad (4.15.20)$$

(4.15.19) მწკრივის კრებადობის გამო, (4.15.20) ტოლობა შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$F(x) = i \sum_{|n| \geq 1} \frac{c_n}{n} - i \sum_{|n| \geq 1} \frac{c_n}{n} e^{inx},$$

ანუ

$$\int_0^x f(t) dt - c_0 x = i \sum_{|n| \geq 1} \frac{c_n}{n} - i \sum_{|n| \geq 1} \frac{c_n}{n} e^{inx},$$

რაც ეკვივალენტურია (4.15.16) ტოლობის.

ახლა დავამტკიცოთ (4.15.17) ტოლობა. ამ მიზნით უნდა განვიხილოთ სიმეტრიული კერძო ჯამები

$$\sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{c_n}{n} = \sum_{n=-N}^{-1} \frac{c_n}{n} + \sum_{n=1}^N \frac{c_n}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{c_{-n}}{-n} + \sum_{n=1}^N \frac{c_n}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} (c_n - c_{-n}).$$

მაგრამ $c_n - c_{-n} = -ib_n$ და $b_n = i(c_n - c_{-n})$ (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.4, ტოლობები (1.4.6)), ამიტომ

$$\sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{c_n}{n} = -i \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{n},$$

რაც იწვევს (4.15.17)-ს, ხოლო (4.15.18) ტოლობა გამომდინარეობს (4.15.5)-დან.

გარდა ამისა, (4.15.17) და (4.15.19) ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$d_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n},$$

პარაგრაფ 4.15-ის (4.15.5) ტოლობის გამოყენებით ვღებულობთ

$$d_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)(\pi - x) dx.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

□

4.15.3 ლებეგის 4.15.1 და 4.15.10 თეორემების შებრუნების შესახებ

ბუნებრივია განვიხილოთ ლებეგის აღნიშნული თეორემების შებრუნების შესაძლებლობა, ანუ რაც იგივეა, გავარკვიოთ რამდენად არსებითადაა დაკავშირებული ტრიგონომეტრიული მწკრივის წევრობრივი ინტეგრების მართლობიერება იმასთან, რომ აღებული ტრიგონომეტრიული მწკრივი უნდა იყოს ფურიეს მწკრივი? ეს საკითხი განვიხილოთ ნამდვილი ფორმის ტრიგონომეტრიული მწკრივისთვის.

თეორემა 4.15.11. რაიმე

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (4.15.21)$$

ტრიგონომეტრიული მწკრივი რომ იყოს ფურიეს მწკრივი 2π პერიოდული და $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი რომელიმე $f(x)$ ფუნქციისთვის, აუცილებელი და საკმარისია (4.15.21) მწკრივის $[0, x] \subset [0, 2\pi]$ სეგმენტზე წევრობრივი ინტეგრებით მიღებული

$$\frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \sin nx - b_n \cos nx) \quad (4.15.22)$$

მწკრივი იყოს $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე თანაბრად კრებადი $\int_0^x f(t) dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ ფუნქციისკენ.

დამტკიცება.

აუცილებლობა არის ლებეგის თეორემა 4.15.1.

საკმარისობა. (4.15.22) მწკრივის თანაბრად კრებადობა $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე $\int_0^x f(t) dt -$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ ფუნქციისკენ იწვევს იმას, რომ (4.15.22) მწკრივი წარმოადგენს $\int_0^x f(t) dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივს, ანუ

$$\int_0^x f(t) dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \sim \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \sin nx - b_n \cos nx). \quad (4.15.23)$$

რადგან (4.15.23) დამოკიდებულების მარცხენა მხარე წარმოადგენს აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციას, ამიტომ ამ დამოკიდებულების წევრობრივი გაწარმოება მართლობიერია

და შედეგში შენარჩუნებული იქნება $\sim$ სიმბოლო (იხ. თავი 3, პარაგრაფი 3.12, წინადადება 3.12.4), ანუ

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (4.15.24)$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

4.16 აბელის გარდაქმნა. აბელის ლემა და თეორემები

აბელის გარდაქმნას, ლემას და თეორემებს მრავალმხრივი გამოყენება აქვთ ფუნქციათა თეორიაში, კერძოდ, ფურიეს მწკრივებში. რიმან-ლებეგის თეორემით (იხ. თავი 3, პარაგრაფი 3.9), ფურიეს მწკრივის კოეფიციენტები კრებადია ნულისკენ. აქ დავადგენთ ისეთი ტრიგონომეტრიული მწკრივის არსებობას, რომელიც კრებადია ყველგან და მისი კოეფიციენტები ისწრაფვის ნულისკენ, მაგრამ ის არ არის ფურიეს მწკრივი!

აბელის გარდაქმნა 4.16.1. ვთქვათ, გვაქვს ნამდვილ ან კომპლექსურ რიცხვთა ორი $a_1, a_2, \dots$ და $b_1, b_2, \dots$ სისტემა. შემოვიღოთ ჯამები

$$B_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k.$$

მაშინ ყოველი $m \geq 1$ და $n \geq m+1$ რიცხვებისთვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\sum_{k=m}^n a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n - a_m B_{m-1}, \quad (4.16.1)$$

რომელსაც ეწოდება აბელის გარდაქმნა. ამასთან, $B_0 = 0$, როცა $m = 1$.

დამტკიცება (ინდუქციის მეთოდით). $n = m+1$ კერძო შემთხვევაში (4.16.1) ტოლობის მარცხენა მხარეა $a_m b_m + a_{m+1} b_{m+1}$, ხოლო მისი მარჯვენა მხარე კი

$$\begin{aligned} & (a_m - a_{m+1}) B_m + a_{m+1} B_{m+1} - a_m B_{m-1} \\ &= a_m B_m - a_{m+1} B_m + a_{m+1} B_{m+1} - a_m B_{m-1} \\ &= a_m (B_m - B_{m-1}) + a_{m+1} (B_{m+1} - B_m) = a_m b_m + a_{m+1} b_{m+1}. \end{aligned}$$

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში (4.16.1) ტოლობა მართებულია. დავუშვათ (4.16.1) ტოლობის მართებულობა რაიმე $n \geq m + 2$ -თვის და ვაჩვენოთ მისი სისწორე $n + 1$ მნიშვნელობისთვის. ამ მიზნით, ცხადი

$$\sum_{k=m}^{n+1} a_k b_k = \sum_{k=m}^n a_k b_k + a_{n+1} b_{n+1}$$

ტოლობის მარჯვენა ჯამისთვის გამოვიყენოთ (4.16.1) ტოლობა, გვექნება

$$\sum_{k=m}^{n+1} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n - a_m B_{m-1} + a_{n+1} b_{n+1}. \quad (4.16.2)$$

თუ (4.16.1) ტოლობა მართებულია $(n + 1)$ -თვის, მაშინ

$$\sum_{k=m}^{n+1} a_k b_k = \sum_{k=m}^n (a_k - a_{k+1}) B_k + a_{n+1} B_{n+1} - a_m B_{m-1}. \quad (4.16.3)$$

ახლა შევამოწმოთ (4.16.2) და (4.16.3) ტოლობების მარჯვენა მხარეების ტოლობა. ამისთვის საჭიროა შესრულდეს

$$a_n B_n - a_m B_{m-1} + a_{n+1} b_{n+1} = (a_n - a_{n+1}) B_n + a_{n+1} B_{n+1} - a_m B_{m-1}$$

ტოლობა, ანუ უნდა შესრულდეს

$$a_n B_n + a_{n+1} b_{n+1} = a_n B_n - a_{n+1} B_n + a_{n+1} B_{n+1}$$

და, მაშასადამე,

$$a_{n+1} b_{n+1} = a_{n+1} (B_{n+1} - B_n)$$

ტოლობაც, რაც ასეა. □

შ ე დ ე გ ი 4.16.2. თუ (4.16.1)-ში ავიღებთ $m = 1$ და გავითვალისწინებთ $B_0 = 0$ ტოლობას, გვექნება

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n, \quad n = 2, 3, \dots \quad (4.16.4)$$

ლ ე მ ა 4.16.3 (აბელი). თუ $|B_k| \leq c$ ($k = 1, 2, \dots$) და

$$a_1 > a_2 > \dots a_n > 0,$$

მაშინ

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| < 2ca_1. \quad (4.16.5)$$

დამტკიცება. (4.16.4) ტოლობის მარჯვენა წევრებისთვის გვაქვს

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k \right| &\leq c \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \\ &= c[(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{n-1} - a_n)] = c[a_1 - a_n] < ca_1 \end{aligned}$$

და $|a_n B_n| \leq ca_n < ca_1$. ამით (4.16.5) დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 4.16.4 (აბელი). თუ $|B_k| \leq c$ ($k = 1, 2, \dots$),

$$a_1 > a_2 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots \quad (4.16.6)$$

და

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad (4.16.7)$$

მაშინ

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \quad (4.16.8)$$

მწკრივი კრებადი და

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \right| \leq 4ca_1. \quad (4.16.9)$$

დამტკიცება. (4.16.5) უტოლობის მტკიცების მეთოდით მივიღებთ, რომ ყოველი p და $q > p$ რიცხვებისთვის მართებულია უტოლობა

$$\left| \sum_{k=p}^q a_k b_k \right| \leq 2c_1 a_p, \quad (4.16.10)$$

სადაც

$$\begin{aligned} c_1 &= \sup_{p \leq s \leq q} |b_p + \dots + b_s| = \sup |(b_1 + \dots + b_s) - (b_1 + \dots + b_{p-1})| \\ &= \sup |B_s - B_{p-1}| \leq \sup \{|B_s| + |B_{p-1}|\} = \sup |B_s| + |B_{p-1}| \leq 2c. \end{aligned}$$

ამიტომ, (4.16.10) უტოლობის ძალით,

$$\left| \sum_{k=p}^q a_k b_k \right| \leq 4ca_p. \quad (4.16.11)$$

თუ (4.16.11)-ში ავიღებთ $p = 1$ და $q = \infty$, მაშინ მივიღებთ (4.16.9)-ს.

შემდეგ, (4.16.7)-დან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს $N(\varepsilon)$ ისეთი, რომ $a_p < \varepsilon/4c$, როცა $p \geq N$. ამის გათვალისწინებით, (4.16.11)-დან ვღებულობთ, რომ ყოველი $p \geq N$ და $q > p$ რიცხვებისთვის

$$\left| \sum_{k=p}^q a_k b_k \right| < \varepsilon, \text{ როცა } p \geq N \text{ და } q > p. \quad (4.16.12)$$

მწკრივის კრებადობის კოშის კრიტერიუმის თანახმად, (4.16.12)-დან გამომდინარეობს (4.16.8) მწკრივის კრებადობა. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თ ე ო რ ე მ ა 4.16.5 (აბელის განზოგადებული თეორემა). თუ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, (B_n) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია და $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - a_{k+1}|$ მწკრივი კრებადია, მაშინ

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \quad (4.16.13)$$

მწკრივი კრებადია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . გვაქვს

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_{k-1} = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} a_{k+1} B_k \\ &= a_{n+p} B_{n+p} - a_{n+1} B_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) B_k. \end{aligned}$$

აქედან

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leq |a_{n+p}| \cdot |B_{n+p}| + |a_{n+1}| \cdot |B_n| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |B_k| \cdot |a_k - a_{k+1}|. \quad (4.16.14)$$

ახლა, ვთქვათ, $|B_n| \leq L$ ($n = 1, 2, \dots$) და $\varepsilon > 0$ ნებისმიერად მცირეა, მაშინ არსებობს $N(\varepsilon)$ ნატურალური რიცხვი ისეთი, რომ

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{3L} \text{ და } \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k - a_{k+1}| < \frac{\varepsilon}{3L}. \text{ როცა } n \geq N \text{ და } p > 1 \text{ ნებისმიერია.}$$

ამიტომ (4.16.14)-დან გამომდინარეობს

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| < \varepsilon,$$

ე.ი. (4.16.13) მწკრივი კრებადია. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

აბელის განზოგადებულ თეორემას ზოგჯერ აცალიბებენ სხვა ფორმითაც, რისთვისაც დაგვიტოვებთ შემდეგი

გ ა ნ ს ა ზ ე რ ა 4.16.6. (a_n) მიმდევრობას ეწოდება შემოსაზღვრული ცვლილების¹⁶, თუ

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - a_{k+1}| < +\infty. \quad (4.16.15)$$

ახლა, აბელის განზოგადებული თეორემა ასე ჩამოყალიბდება.

თ ე ო რ ე მ ა 4.16.7 (აბელის განზოგადებული თეორემა¹⁷). თუ ნულისკენ კრებადი (a_n) მიმდევრობა შემოსაზღვრული ცვლილებებისა და (B_n) მიმდევრობა კი შემოსაზღვრულია,

¹⁶(4.16.15)-დან გამომდინარეობს

$$(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \dots = a_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

მწკრივის კრებადობა.

¹⁷თეორემა 4.16.5 არის 4.16.4 თეორემის განზოგადება რადგან, როცა (a_n) მიმდევრობას აქვს (4.16.6) თვისება, მაშინ

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k - a_{k+1}| &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) \\ &= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \dots = a_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1 - 0 = a_1 \end{aligned}$$

მწკრივი კრებადია, რაც წინა სქოლიოს კერძო შემთხვევაა.

მაშინ

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

მწკრივი კრებადია.

აბელის 4.16.4 თეორემის დამტკიცებისას მიღებული (4.16.11) და (4.16.12) უტოლობების საფუძველზე მიიღება აბელის ამავე თეორემის გავრცელება ფუნქციურ მწკრივებზე.

თ ე ო რ ე მ ა 4.16.8 (აბელის თეორემა ფუნქციური მწკრივისთვის). ვთქვათ, $|B_n(x)| \leq M$, როცა $x \in [\alpha, \beta]$ და $n = 1, 2, \dots$. თუ

$$a_1 > a_2 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$$

და

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

მაშინ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k(x)$ ფუნქციური მწკრივი თანაბრად კრებადია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე და მის $S(x)$ ჯამს აქვს თვისება

$$|S(x)| \leq 2Ma_1, \quad \alpha \leq x \leq \beta.$$

4.17 ზოგიერთი ტრიგონომეტრიული მწკრივის შესახებ

ლ ე მ ა 4.17.1. კრებადობის წერტილი არ გააჩნია

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx + \dots \quad (4.17.1)$$

მწკრივს და მხოლოდ $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) წერტილებზეა კრებადი მწკრივი

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin mx + \dots \quad (4.17.2)$$

დ ა მ ტ ვ ი ც ე ბ ა . თუ (4.17.1) მწკრივი კრებადი იქნება რომელიმე x_0 წერტილზე, მაშინ მისი ზოგადი წევრი $\cos nx_0 \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$. მაშინ

$$\sin^2 nx_0 = 1 - \cos^2 nx_0 \rightarrow 1, \quad \text{როცა } n \rightarrow \infty.$$

მეორეს მხრივ,

$$\sin^2 nx_0 = \frac{1}{2} (1 - \cos 2nx_0) \rightarrow \frac{1}{2}.$$

მივიღეთ წინააღმდეგობა.

თუ (4.17.2) მწკრივი კრებადია რაიმე x_0 წერტილზე, მაშინ $\sin nx_0 \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\sin(n+1)x_0 \rightarrow 0 \text{ და } \sin(n-1)x_0 \rightarrow 0.$$

მაშასადამე,

$$\sin(n+1)x_0 - \sin(n-1)x_0 \rightarrow 0, \text{ როცა } n \rightarrow \infty.$$

მაგრამ

$$\sin(n+1)x_0 - \sin(n-1)x_0 = 2 \sin x_0 \cos nx_0,$$

ე.ი.

$$\sin x_0 \cos nx_0 \rightarrow 0, \text{ როცა } n \rightarrow \infty.$$

(4.17.1) მწკრივის შესახებ მიღებული ინფორმაციით, $\cos nx_0$ არ ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $n \rightarrow \infty$. მაშასადამე, $\sin x_0 = 0$ და $x_0 = k\pi$. $\square$

ლ ე მ ა 4.17.2. მწკრივების

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots, \quad (4.17.3)$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots \quad (4.17.4)$$

$A_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos kx$ და $B_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin kx$ კერძო ჯამებს აქვს თვისება

$$|A_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}, \text{ როცა } x \neq 2k\pi, \quad (4.17.5)$$

$$|B_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \text{ ნებისმიერი } x\text{-თვის } (-\infty, +\infty)\text{-დან.} \quad (4.17.6)$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . ცხადია, რომ $A_n(x)$ და $B_n(x)$ წარმოადგენს

$$c_n(x) = \sum_{k=1}^n e^{ikx} = \frac{e^{ix} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}$$

ჯამის ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს. ამიტომ

$$|A_n(x)| \leq |c_n(x)| \text{ და } |B_n(x)| \leq |c_n(x)|, \text{ როცა } e^{ix} \neq 1$$

ანუ, როცა $x \neq 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). გვაქვს

$$\begin{aligned} |c_n(x)| &\leq \frac{2}{|1 - e^{ix}|} = \frac{2}{|(1 - \cos x) + i \sin x|} \\ &= \frac{2}{|2 \sin^2 \frac{x}{2} + i 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}|} = \frac{2}{|2 \sin \frac{x}{2}| |\sin \frac{x}{2} + i \cos \frac{x}{2}|} \\ &= \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}| (\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2})^{1/2}} = \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}, \quad x \neq 2k\pi. \end{aligned}$$

ამით (4.17.5) და (4.17.6) უტოლობები დამტკიცებულია, როცა $x \neq 2k\pi$.

თუკი $x = 2k\pi$, მაშინ $B_n(2k\pi) = 0$ და (4.17.6)-ის მარჯვენა მხარე იქნება $+\infty$, ე.ი. (4.17.6) მართებულია ყველა x -თვის. $\square$

ლ ე მ ა 4.17.3. თუ

$$q_1 > q_2 > q_3 > \dots > q_n > \dots \quad \text{და} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0. \quad (4.17.7)$$

მაშინ

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos nx \quad \text{კრებადია} \quad x \neq 2k\pi \quad \text{მნიშვნელობებისთვის}$$

და

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin nx \quad \text{კრებადია ყველა} \quad x \in (-\infty, +\infty) \text{-თვის.}$$

დ ა მ ტ ვ ი ც ე ბ ა . შეგვიძლია გამოვიყენოთ აბელის 4.16.4 თეორემა 4.16 პარაგრაფიდან, რადგან ამ თეორემის (4.16.6) და (4.16.7) პირობები შესრულებულია (4.17.7)-ის ძალით, ხოლო $|B_k| \leq c$ პირობაც შესრულებულია (4.17.6) უტოლობის სახით, იმის გათვალისწინებით, რომ $B_n(2k\pi) = 0$. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

შ ე დ ე გ ი 4.17.4.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \quad \text{და} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\ln k}$$

მწკრივები კრებადია ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$ -თვის, ხოლო

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} \quad \text{და} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kx}{\ln k}$$

მწკრივები კრებადია ყველა $x \neq 2k\pi$ მნიშვნელობისთვის.

ლემა 4.17.5 ([33, გვ. 275-276]). ყოველი $x \in (-\infty, +\infty)$ -თვის და ყველა $n = 1, 2, \dots$ მნიშვნელობისთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \right| < 2\sqrt{\pi}.$$

4.18 ფურიეს მწკრივად გაშლის მაგალითები

ქვემოთ განხილულ მაგალითებში, ფურიეს შესაბამისი მწკრივის კრებადობას აღებული ფუნქციისკენ ადასტურებს ჟორდანის თეორემა (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.12).

1. მართებულია ტოლობა

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right), \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

ამ მიზნით $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე განვიხილოთ $f(x) = x^2$ ლუწი ფუნქცია. f ფუნქციას, ლუწობის გამო, შესაბამება კოსინუსების მწკრივი (იხ. თავი 2, პარაგრაფი 2.3). $x < -\pi$ და $x > \pi$ წერტილებზე f გავაგრძელოთ 2π პერიოდულობის მიხედვით. $(-\infty, +\infty)$ -ზე ასე განსაზღვრული ფუნქცია 2π პერიოდულია და მისი გრაფიკი მოცემულია თავი 1-ის 1.2 პარაგრაფში — ნახაზი 1.

ჟორდანის თეორემის მიხედვით, $S[f]$ მწკრივი კრებადია x^2 -კენ ყოველ $x \in [-\pi, \pi]$ წერტილზე და პერიოდული გაგრძელებისკენ $[-\pi, \pi]$ -ს გარეთ (იხ. ნახაზი 1).

ახლა გამოვთვალოთ $f(x) = x^2$ ფუნქციის a_n ფურიეს კოეფიციენტები (f -ის ლუწობის გამო $b_n = 0, n = 1, 2, \dots$).

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

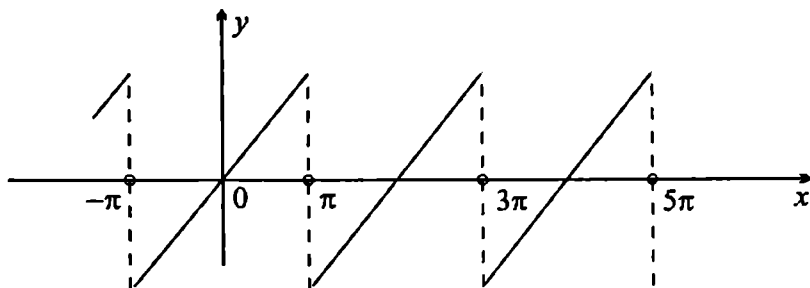
ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = -\frac{4}{n\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx dx \\ &= \frac{4}{n^2\pi} [x \cos nx]_0^{\pi} - \frac{4}{n^2\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \frac{4}{n^2} \cos n\pi = (-1)^n \frac{4}{n^2}. \end{aligned}$$

2. ადგილი აქვს ტოლობას

$$x = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right), \quad -\pi < x < \pi. \quad (4.18.1)$$

$f(x) = x$ ფუნქცია კენტი და მისი 2π პერიოდული გაგრძელება გამოსახულია ნახაზ 2-ზე.



ნახ. 2

გაგრძელებული ფუნქცია წყვეტილია $x = (2k+1)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) წერტილებზე. წყვეტის წერტილებზე მარცხნიდან და მარჯვნიდან ზღვრები ერთმეორეს აბათილებს და ფურიეს მწკრივი კრებადია ნულისკენ $x = (2k+1)\pi$ წერტილებზე. f -ის კენტობის გამო $a_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) და

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} [x \cos nx]_0^\pi + \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \cos nx \, dx = -\frac{2}{n} \cos n\pi = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ (4.18.1) ტოლობა შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}, \quad -\pi < x < \pi.$$

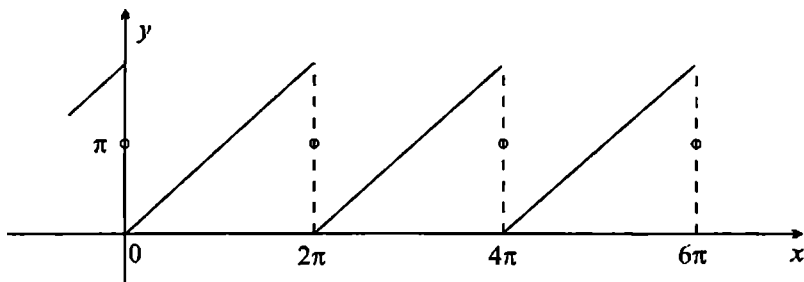
3. გვაქვს ტოლობა

$$x = \pi - 2 \left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right), \quad 0 < x < 2\pi$$

ანუ

$$\frac{\pi - x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots, \quad 0 < x < 2\pi. \quad (4.18.2)$$

გარეგნულად ეს შემთხვევა პგავს მე-2 შემთხვევას, მაგრამ იქ არის $(-\pi, \pi)$ ინტერვალი, აქ კი $(0, 2\pi)$. ეს განსხვავება კარგად ჩანს ნახაზი 2-ის შედარებით ამ შემთხვევის 2π პერიოდულ გაგრძელებასთან ნახაზ 3-ზე (იხ. თავი 2, 2.1 პარაგრაფის დასასრული).



ნახ. 3

2π პერიოდით გაგრძელებულ ფუნქციას წყვეტა აქვს $x = 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) წერტილებზე. ამ წერტილებზე ფურიეს მწკრივი კრებადია მარცხნიდან და მარჯვნიდან ზღვრების არითმეტიკული საშუალოსკენ, ე.ი. მნიშვნელობისკენ. $(0, 2\pi)$ ინტერვალზე $f(x) = x$ ტოლობით განსაზღვრული f ფუნქცია არც კენტი და არც ლუწი.

ასლა გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx \, dx = \frac{1}{n\pi} [x \sin nx]_0^{2\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx \, dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx \, dx = -\frac{1}{n\pi} [x \cos nx]_0^{2\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx = -\frac{2}{n}.$$

4. მართებულია ტოლობა

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad 0 < x < 2\pi. \quad (4.18.3)$$

მაშასადამე, $(0, 2\pi)$ ინტერვალზე ვიხილავთ $f(x) = x^2$ ფუნქციას. ეს შემთხვევა ჰგავს პირველ შემთხვევას, ოღონდ განსხვავებულ ინტერვალზე. ამ ფუნქციის 2π პერიოდულ გაგრძელებას $(0, 2\pi)$ -ს გარეთ აქვს წყვეტა $2\pi k$ წერტილებზე ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). გაგრძელებული ფუნქციის ფურიეს მწკრივი წყვეტის წერტილებზე კრებადია მარცხნიდან და მარჯვნიდან ზღვრების არითმეტიკული საშუალოსკენ ანუ $\frac{1}{2}[(2\pi)^2 + 0] = \frac{1}{2} \cdot 4\pi^2 = 2\pi^2$ რიცხვისკენ. $f(x)$ არ მიეკუთვნება არც ლუწების და არც კენტების კლასს. ახლა გამოვთვალოთ ფურიეს კოეფიციენტები

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3}, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx = -\frac{2}{n\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx dx \\ &= \frac{2}{n^2\pi} [x \cos nx]_0^{2\pi} - \frac{2}{n^2\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx dx = \frac{4}{n^2}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx = -\frac{1}{n\pi} [x^2 \cos nx]_0^{2\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx dx \\ &= -\frac{4\pi}{n} - \frac{1}{n^2\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx dx = -\frac{4\pi}{n}. \end{aligned}$$

ამიტომ

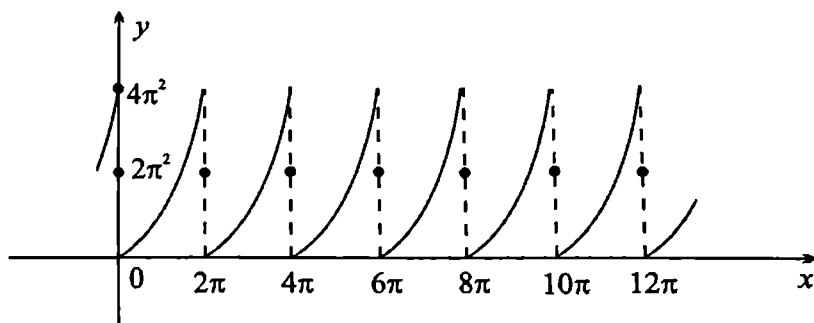
$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{4\pi^2}{3} + 4 \left(\cos x - \pi \sin x + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\pi \sin 2x}{2} + \dots + \frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n} + \dots \right) \\ &= \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n} \right) = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \end{aligned}$$

როცა $0 < x < 2\pi$.

ეს შემთხვევა გრაფიკულად გამოსახულია ნახაზ 4-ზე.

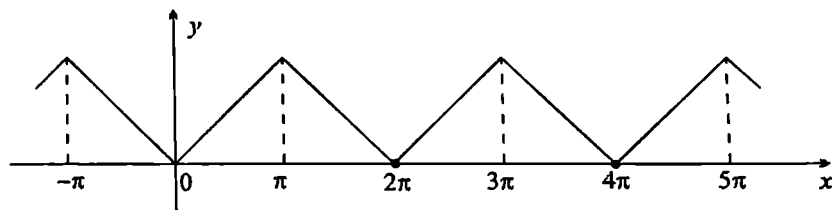
5. ადგილი აქვს ტოლობას

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right), \quad -\pi \leq x \leq \pi. \quad (4.18.4)$$



ნახ. 4

$[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x) = |x|$ ფუნქცია ლუწია. ეს ფუნქცია თავის 2π პერიოდულ გაგრძელებასთან ერთად გრაფიკულად გამოსახულია ნახაზ 5-ზე. რადგან $|x| = x$,



ნახ. 5

როცა $x \geq 0$, ამიტომ

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \pi,$$

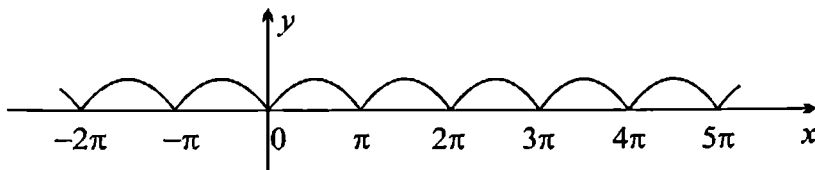
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = -\frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{2}{n^2\pi} [\cos nx]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n^2\pi} [\cos n\pi - 1] = \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1]. \end{aligned}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ლუწი n -თვის $a_n = 0$ და კენტი n -თვის კი $a_n = -\frac{4}{\pi n^2}$.
დაბოლოს, $b_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), რადგან f ლუწი ფუნქციაა.

6. ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$ -თვის გვაქვს ტოლობა

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + \frac{\cos 6x}{35} + \dots \right).$$

$f(x) = |\sin x|$ ფუნქციის პერიოდია π (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.2). რადგან $|\sin x| = \sin x$, როცა $0 \leq x \leq \pi$ და, როგორც ვთქვით, ამ ფუნქციის პერიოდია π , ამიტომ $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკი გავაგრძელოთ ამ სეგმენტიდან ორივე მხარეს π პერიოდით. გაგრძელებული ფუნქციის გრაფიკი წარმოდგენილია ნახ. 6-ით.



ნახ. 6

ფურიეს კოეფიციენტებისთვის გვაქვს

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{4}{\pi}.$$

თუ $n \neq 1$, მაშინ

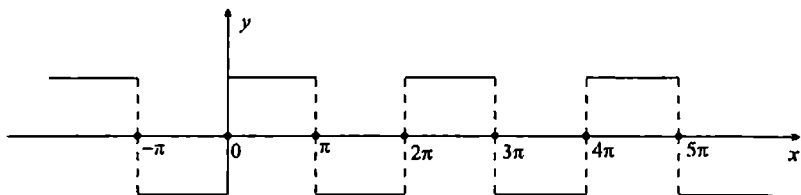
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] \, dx = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^{n+1} - 1}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n-1} \right] = -2 \frac{(-1)^n + 1}{\pi(n^2 - 1)}. \end{aligned}$$

$n = 1$ შემთხვევისთვის

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x \, dx = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\pi} = 0.$$

ამავე დროს, $b_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), რადგან $y = |\sin x|$ ლუწი ფუნქციაა.

7. ფუნქცია $f(x) = 1$, როცა $0 < x < \pi$ გავშალოთ სინუსების მწკრივად, რაც ნიშნავს, რომ f უნდა გავაგრძელოთ კენტობით $[-\pi, 0]$ სეგმენტზე. ასეთი გაგრძელებით მივიღებთ $x = 0$ წერტილზე წყვეტის მქონე ფუნქციას. ამის შემდეგ კი უნდა გავაგრძელოთ 2π პერიოდით $[-\pi, \pi]$ -ს გარეთ. გრაფიკულად ეს ასე გამოიხატება ნახაზ 7-ის სახით.



ნახ. 7

წყვეტის $k\pi$ წერტილებზე ფურიეს მწკრივი კრებადია ნულისკენ, რადგან მარცხნიდან და მარჯვნიდან ზღვრების 1-ისა და -1 -ის არითმეტიკული საშუალო ნულია. სხვა წერტილებზე მწკრივი კრებადია 1-კენ. ახლა ვიპოვოთ ფურიეს კოეფიციენტები.

ფუნქციის კენტობის გამო $a_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$),

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = \frac{2}{n\pi} [-\cos nx]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n].$$

ამრიგად, $0 < x < \pi$ ინტერვალზე ადგილი აქვს ტოლობას

$$1 = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right).$$

თავი 5

ფურიესა და რიცხვითი მწკრივების შეჯამებადობის საკითხები

5.0 შესავალი

ვთქვათ, f ფუნქცია ჯამებადია 2π სიგრძის სეგმენტზე, კერძოდ, $[0, 2\pi]$ -ზე ან $[-\pi, \pi]$ -ზე და 2π პერიოდულადაა გაგრძელებული $(-\infty, +\infty)$ -ზე.

$S[f]$ იყოს f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი, სიმბოლურად

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \text{ — ნამდვილი ფორმის}$$

ან

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \text{ — კომპლექსური ანუ ექსპონენტური ფორმის.}$$

სადაც

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx,$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{ikx} \, dx.$$

A. $S[f]$ -ის წერტილოვანი კრებადობის შესახებ გვქონდა

- (1) თავი 4-ის პარაგრაფ 4.8-ში თეორემა 4.8.1. რაიმე x წერტილზე $S[f]$ -ის კრებადობისთვის $f(x)$ მნიშვნელობისკენ, აუცილებელი და საკმარისია

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta F_f(x, u) \frac{\sin nu}{u} du = 0$$

ტოლობის შესრულება, სადაც $\delta > 0$ რაიმე ფიქსირებული რიცხვია და

$$F_f(x, u) = f(x + u) + f(x - u) - 2f(x).$$

- (2) თავი 4-ის პარაგრაფ 4.10-ში თეორემა 4.10.1. თუ ჯამებად f ფუნქციას გააჩნია გლუვობის რაიმე x_0 წერტილი, მაშინ $S[f](x_0) = f(x_0)$.

ამ თეორემის კერძო შემთხვევაა

შედეგი 5.0.1. თუ f ფუნქციას რაიმე x_0 წერტილზე გააჩნია სასრული $f'(x_0)$ წარმოებული, მაშინ $S[f](x_0) = f(x_0)$.

- (3) თავი 4-ის პარაგრაფ 4.11-ში დინის ნიშნის შედეგი 4.11.3. თუ f ფუნქცია უწყვეტია რაიმე x_0 წერტილზე და რომელიმე $\delta > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ინტეგრალი

$$\int_0^\delta \frac{|F_f(x_0, u)|}{u} du,$$

მაშინ $S[f](x_0) = f(x_0)$.

- (4) თავი 4-ის პარაგრაფ 4.12-ში ჟორდანის ნიშანი. თუ f ფუნქციას რაიმე სეგმენტზე $[a, b] \subset [0, 2\pi]$ გააჩნია სასრული ვარიაცია, მაშინ (a, b) ღია ინტერვალის ყოველ x_0 წერტილზე $S[f]$ კრებადია $\frac{1}{2} [f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)]$ რიცხვისკენ, კერძოდ, $f(x_0)$ მნიშვნელობისკენ, თუ x_0 არის f ფუნქციის უწყვეტობის წერტილი.

B. რამდენიმე ფაქტი $S[f]$ -ის განშლადობის შესახებ

- (1) [8, გვ. 97]. არსებობს $[-\pi, \pi]$ -ზე თანაბრად კრებადი $S[f]$, რომელიც არაა აბსოლუტურად კრებადი $[-\pi, \pi]$ -ზე.

- (2) [8, გვ. 128] — დიუბუა-რეიმონის მაგალითი (1876 წ.). არსებობს უწყვეტი $R(x)$ ფუნქცია, რომლის ფურიეს $S[R]$ მწკრივი კრებადია ყველგან, გარდა $x = 0$ ($x = 2\pi$) წერტილისა. ასეთ შემთხვევას ეწოდება განშლადობის “დიუბუა-რეიმონის განსაკუთრებულობა”. $S[R]$ მწკრივი თანაბრად კრებადია $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ სეგმენტზე (იხ., აგრეთვე, [50, გვ. 501]).
- (3) [8, გვ. 129-132] — ლებეგის მაგალითი (1906 წ.). არსებობს უწყვეტი $L(x)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც $S[L]$ მწკრივი კრებადია ყველგან და $x = 0$ ($x = 2\pi$) წერტილის მიდამოში კრებადია არათანაბრად. ასეთ შემთხვევას ეწოდება “არათანაბრად კრებადობის ლებეგის განსაკუთრებულობა” (იხ., აგრეთვე, [50, გვ. 501-502], [24, გვ. 473]).
- (4) [46, გვ. 426-428] — ფეიერის მაგალითი (1910 წ.). არსებობს უწყვეტი $F(x)$ ფუნქცია, რომლის $S[F]$ მწკრივი განშლადია $x = 0$ წერტილზე და მისი კერძო ჯამები ერთობლივ შემოსაზღვრულია.
- (5) [8, გვ. 129]. არსებობს უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც $S[f]$ მწკრივი განშლადია $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე ყველგან მკვირივი სიმრავლის წერტილებზე (კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეზე) (იხ., აგრეთვე, [50, გვ. 502]).
- (6) [8, გვ. 129]. არსებობს უწყვეტი $\phi(x)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც $S[\phi]$ მწკრივი კრებადია ყველგან, მაგრამ მას არ გააჩნია თანაბრად კრებადობის ინტერვალი (იხ., აგრეთვე, [24, გვ. 473]).
- (7) [8, გვ. 222]. თუ $\sum_{k=2}^{\infty} a_k \cos kx$ ფურიეს მწკრივში, სადაც $a_k = \frac{1}{\sqrt{\ln k}}$, ნულებით ჩაანაცვლებთ ყველა a_k კოეფიციენტს, როცა $k \neq 2^n$, მაშინ ამგვარად მიღებული $\sum a_{2^n} \cos 2^n x$ მწკრივი უკვე აღარ იქნება რაიმე ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს მწკრივი.
- (8) [8, გვ. 319]. არსებობს უწყვეტი f ფუნქცია, რომლისთვისაც $S[f]$ განშლადია კონტინუუმის სიმძლავრისა სიმრავლეზე.
- (9) [8, გვ. 321]. არსებობს უწყვეტი f ფუნქცია, რომლის $S[f]$ განშლადია მოცემულ თვლად E სიმრავლეზე და კრებადია $[0, 2\pi] \setminus E$ -ზე.
- (10) [8, გვ. 323]. არსებობს უწყვეტი f ფუნქცია, რომლისთვისაც $S[f]$ კრებადია თანაბრად და $S[f^2]$ კი განშლადია კონტინუუმის სიმძლავრისა სიმრავლეზე.

- (11) [8, გვ. 327]. არსებობს უწყვეტი f ფუნქცია ისეთი, რომ $S[f]$ მწკრივის კერძო ჯამების ყოველი ქვემიმდევრობა განშლადია ერთ წერტილზე მაინც (ფეიერის მაგალითის გაძლიერება).
- (12) [8, გვ. 327]. ყოველი უწყვეტი ფუნქცია შეიძლება წარმოდგენილ იქნას ისეთი ორი უწყვეტი ფუნქციის ჯამის სახით, რომ თითოეულის ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამების მიმდევრობა შეიცავს თანაბრად კრებად ქვემიმდევრობას.
- (13) [8, გვ. 329]. ყოველი უწყვეტი ფუნქცია შეიძლება წარმოდგეს ისეთი ორი უწყვეტი ფუნქციის ჯამის სახით, რომ თითოეულის ფურიეს მწკრივის კრებადობის წერტილთა სიმრავლეს აქვს დადებითი ზომა ყოველ $[a, b] \subset [0, 2\pi]$ სეგმენტზე.
- (14) [8, გვ. 615]. არსებობს აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია, რომლისთვისაც $S[f]$ -ს არ აქვს აბსოლუტურად კრებადობის წერტილი.
- (15) [8, გვ. 635]. $S[f]$ -ის აბსოლუტურად კრებადობისთვის აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)g(t) dt$$

ტოლობა, სადაც $h \in L^2[-\pi, \pi]$ და $g \in L^2[-\pi, \pi]$.

C. $S[f]$ -ის თითქმის ყველგან კრებადობის შესახებ

A განყოფილებაში აღნიშნული ფაქტების დადგენიდან გავიდა ერთ საუკუნეზე მეტი და მას შემდეგ იყო ბევრი მცდელობა გადაჭრილიყო $S[f]$ -ის თითქმის ყველგან კრებადობის პრობლემა, რაც აღმოჩნდა ძალიან ძნელი გადასაწყვეტი. ლუზინმა თავის გახმაურებულ სადოქტორო დისერტაციაში “ინტეგრალი და ტრიგონომეტრიული მწკრივი” (1915 წ.) ჩამოაყალიბა შემდეგი ჰიპოტეტური თეორემა: თუ F ფუნქცია ეკუთვნის $L^2[0, 2\pi]$ კლასს ანუ, თუ $\int_0^{2\pi} F^2(x) dx$ ინტეგრალი სასრულია, მაშინ $S[F]$ კრებადია $F(x)$ მნიშვნელობისკენ თითქმის ყველა $x \in [0, 2\pi]$ -თვის.

იყო ბევრი მცდელობა, ლუზინის ამ თეორემის დამტკიცების ან უარყოფის, მაგრამ უშედეგოდ. ამასობაში კოლმოგოროვმა დაამტკიცა ისეთი $K(x)$ ჯამებადი ფუნქციის არსებობა, რომლის ფურიეს $S[K]$ მწკრივი განშლადია ყოველ წერტილზე [8, გვ. 412], [24, გვ. 488]!

L^2 პრობლემის ვერგადანწყვეტამ და კოლმოგოროვის ამ შედეგმა უარყოფითად იმოქმედა აღნიშნული პრობლემით დაინტერესებულ მათემატიკოსებზე და სიტყვიერად კიდევაც აცხადებდნენ (მაგალითად, ზიგმუნდი, ულიანოვი, მენშოვი, სტეჩინი), რომ ალბათ არსებობს f_0 უწყვეტი ფუნქცია, რომლისთვისაც $S[f_0]$ განშლადი იქნება დადებითი ზომის სიმრავლეზე. და აი, 1966 წელს, დღესაც მოქმედმა კარლესონმა დადებითად გადაწყვიტა L^2 -ის ანუ ლუზინის პრობლემა (იხ. [62]; დაწვრილებით УМН, Т. 23, no. 6, 1968).

სადღეისოდ ცნობილია კარლესონის ამ თეორემის შემდეგი გაუმჯობესება [59]: თუ $f \in L[0, 2\pi]$ და

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| \ln(1 + |f(x)|) \ln \ln(20 + |f(x)|) dx < +\infty,$$

მაშინ $S[f]$ კრებადია თითქმის ყველგან $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე, კერძოდ, როცა $f \in L^p$, $p > 1$ [75].

D. გაგრძელება

ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს პრობლემა: შესაძლებელია თუ არა f ჯამეზადი ფუნქციის $S[f]$ მწკრივი როგორმე გამოყენებულ იქნას $f(x)$ მნიშვნელობების მისაღებად, თუნდაც კოლმოგოროვის მაგალითის შემთხვევაში.

ამ პრობლემის ერთ-ერთი გადაწყვეტა ჩვენთვის ცნობილია $S[f]$ -ის წევრობრივი ინტეგრებით (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.15).

არსებობს ამ პრობლემის უფრო მრავალფეროვანი გადაწყვეტა, რაც უკავშირდება $S[f]$ -ის სხვადასხვა მეთოდით “შეჯამებადობა”-ს. შეჯამებადობის მეთოდში მითითებულია ის ოპერაციები, რაც უნდა შესრულდეს $S[f]$ -ზე რომ მივიღოთ f .

საკითხისადმი ასეთი მიდგომა აღმოჩნდა ძალიან შედეგიანი არამარტო ფურიეს მწკრივის მიმართ, არამედ სხვა სახის მწკრივებისთვისაც. ამასთან სასურველია, რომ მწკრივის “განზოგადებული” ჯამი, რაც შეესაბამება შეჯამებადობის მოცემულ მეთოდს, იძლეოდეს მწკრივის ჩვეულებრივ ჯამს, როცა ეს უკანასკნელი არსებობს. თუ შეჯამებადობის მოცემულ მეთოდს გააჩნია ეს თვისება, მაშინ ამ მეთოდს ეწოდება რეგულარული. უნდა ითქვას, რომ არსებობს შეჯამებადობის არარეგულარული მეთოდიც, რაც იმას ნიშნავს, რომ მწკრივის წევრებს მოეთხოვება დამატებითი თვისება, რათა აღებულმა მეთოდმა შეაჯამოს კრებადი მწკრივი თავისი ჯამისკენ.

ჩვენი უახლოესი ამოცანაა, რიცხვითი მწკრივების შეჯამებადობის განხილვა სხვადასხვა მეთოდით. შემდეგ კი გადავალთ ფურიეს მწკრივების შეჯამებადობის განხილვაზე, რასაც შორს მიმავალი გაგრძელება აქვს ჰოლომორფულ და ჰარმონიულ ფუნქციებთან კავშირში.

5.1 რიცხვითი მწკრივის შეჯამებადობა ჩეზაროს $(C, 1)$ მეთოდით

ვთქვათ, მოცემულია რიცხვითი მწკრივი

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots \quad (5.1.1)$$

და განვიხილოთ მისი კერძო ჯამების მიმდევრობა

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.1.2)$$

როგორც ვიცით, (5.1.1) მწკრივს ეწოდება კრებადი s -კენ, თუ სრულდება ტოლობა

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s. \quad (5.1.3)$$

ასეთ შემთხვევაში წერენ

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = s.$$

შეიძლება მოხდეს, რომ (5.1.1) მწკრივი არ იყოს კრებადი ანუ, რაც იგივეა, არ არსებობდეს (5.1.3) ზღვარი, მაგრამ ზღვარი გააჩნდეს შემდეგ მიმდევრობას

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} (S_0 + S_1 + \cdots + S_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.1.4)$$

რომელსაც ეწოდება არითმეტიკული საშუალოების მიმდევრობა $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ მიმდევრობის-თვის.

რადგან

$$(n+1)\sigma_n = S_0 + S_1 + \cdots + S_n \quad \text{და} \quad n\sigma_{n-1} = S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1},$$

ამიტომ

$$(n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1} = S_n. \quad (5.1.5)$$

შემოვიღოთ შემდეგი

გ ა ნ ს ა ზ ღ რ ა 5.1.1. თუ არსებობს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma \quad (5.1.6)$$

ზღვარი, მაშინ ჩებაროს აზრით σ -კენ კრებადი ეწოდება როგორც (5.1.1) მწკრივს, ისე $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ მიმდევრობას და, შესაბამისად, წერენ

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sigma(C, 1) \quad (5.1.7)$$

და

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sigma(C, 1). \quad (5.1.8)$$

(5.1.7) ტოლობას გამოთქვამენ ასე: (5.1.1) მწკრივი $(C, 1)$ -შეჯამებადია σ -კენ. ანალოგიურად, (5.1.8) ტოლობა გამოითქმის: σ არის $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ მიმდევრობის $(C, 1)$ ზღვარი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5.1.2. განვიხილოთ მწკრივი

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots, \quad (5.1.9)$$

რომელიც განშლადია, რადგან მისი კრებადობის შემთხვევაში ზოგადი წევრის ზღვარი უნდა იყოს ნული, რაც ასე არ არის. (5.1.9) მწკრივის კერძო ჯამების მიმდევრობაა $S_0 = 1$, $S_1 = 0$, $S_2 = 1, \dots$, რომლისთვისაც (5.1.4) ტოლობით განსაზღვრული σ_n მიმდევრობა ასეთია: $\sigma_{2k} = \frac{k+1}{2k+1}$ და $\sigma_{2k-1} = \frac{1}{2}$. ამიტომ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{1}{2}$. ამრიგად, (5.1.9) მწკრივი $(C, 1)$ -შეჯამებადია $\frac{1}{2}$ -კენ, ანუ

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}(C, 1). \quad (5.1.10)$$

მაშასადამე, არსებობს მწკრივი, რომელიც არაა კრებადი, მაგრამ არის $(C, 1)$ -შეჯამებადი.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ მწკრივის შეჯამებადობის $(C, 1)$ მეთოდი არის რეგულარული, ანუ მართებულია

თ ე ო რ ე მ ა 5.1.3. თუ (5.1.1) მწკრივი კრებადია რაიმე სასრული s რიცხვისკენ, მაშინ იგივე მწკრივი $(C, 1)$ -შეჯამებადია იმავე s რიცხვისკენ.¹

¹შემთხვევა $s = +\infty$ განხილული იქნება ქვემოთ.

დამტკიცება. რადგან ადგილი აქვს (5.1.3) ტოლობას, ამიტომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი N ნატურალური რიცხვი, დამოკიდებული მხოლოდ ε -ზე, რომ სრულდება უტოლობა

$$|S_n - s| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ყველა } n > N \text{ რიცხვისთვის.} \quad (5.1.11)$$

მეორეს მხრივ, ყოველი n -თვის გვაქვს დამოკიდებულებანი

$$\begin{aligned} \sigma_n - s &= \frac{1}{n+1} (S_0 + S_1 + \dots + S_n) - s \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k - s = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (S_k - s). \end{aligned}$$

ახლა ავიღოთ (5.1.11) უტოლობაში მონაწილე $n > N$ ანუ $n \geq N+1$ და დავწეროთ

$$\sigma_n - s = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^N (S_k - s) + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N+1}^n (S_k - s),$$

საიდანაც

$$|\sigma_n - s| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^N |S_k - s| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N+1}^n |S_k - s| \equiv A_n + B_n.$$

რადგან $\sum_{k=0}^N |S_k - s|$ ფიქსირებულ N -ზე დამოკიდებული სასრული რიცხვია, ამიტომ $A_n \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$. ეს ნიშნავს ისეთი $N_1 > N$ რიცხვის არსებობას, რომ უკვე აღებული $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის შესრულდება $A_n < \frac{\varepsilon}{2}$ უტოლობა ყველა $n > N_1$ რიცხვისთვის. გარდა ამისა, (5.1.11) უტოლობის ძალით გვაქვს

$$B_n \leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=N+1}^n 1 < \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

მაშასადამე,

$$|\sigma_n - s| < \varepsilon \quad \text{ყველა } n > N_1 \text{ რიცხვისთვის,}$$

ანუ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = s.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

წინადადება 5.1.4. მწკრივის შეჯამებადობის $(C, 1)$ მეთოდი სავსებით რეგულარულია ანუ, თუ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty, \quad (5.1.12)$$

მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = +\infty. \quad (5.1.13)$$

დამტკიცება. ნებისმიერად დიდი M რიცხვისთვის არსებობს ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ ყველა $n \geq N$ რიცხვისთვის შესრულდება $S_n > M$ უტოლობა, რაც გამომდინარეობს (5.1.12) ტოლობიდან. ასეთი n -თვის გვაქვს ტოლობა

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} (S_0 + S_1 + \dots + S_N) + \frac{1}{n+1} (S_{N+1} + \dots + S_n). \quad (5.1.14)$$

N რიცხვი ფიქსირებულია და ამიტომ პირველი შესაყარები ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $n \rightarrow \infty$; მეორე შესაყარებისთვის კი გვაქვს

$$\frac{1}{n+1} (S_{N+1} + \dots + S_n) > M \frac{n-N}{n+1} > M \cdot \frac{1}{2},$$

როცა $n > 2N + 1$, ანუ მეორე შესაყარები ისწრაფვის $+\infty$ -კენ, როცა $n \rightarrow \infty$.

ამრიგად, (5.1.14) ტოლობის მარჯვენა მხარე ისწრაფვის $+\infty$ -კენ, როცა $n \rightarrow \infty$ ((5.1.14) ტოლობის პირველი შესაყარები ვერ ჩააქრობს მისი მეორე წევრის სწრაფვას $+\infty$ -კენ!). მაშასადამე, ადგილი აქვს (5.1.13) ტოლობას. $\square$

წინადადება 5.1.5. თუ (5.1.1) მწკრივი $(C, 1)$ -შეჯამებადია სასრული რიცხვისკენ, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 0, \quad (5.1.15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_n}{n} = 0. \quad (5.1.16)$$

დამტკიცება. ვთქვათ, (5.1.1) მწკრივი $(C, 1)$ -შეჯამებადია რაიმე σ სასრული რიცხვისკენ. მაშინ

$$\frac{n+1}{n} \sigma_n \rightarrow \sigma, \quad \sigma_{n-1} \rightarrow \sigma$$

და, ამიტომ,

$$\frac{n+1}{n} \sigma_n - \sigma_{n-1} \rightarrow 0,$$

ანუ

$$\frac{(n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1}}{n} \rightarrow 0, \text{ როცა } n \rightarrow \infty.$$

ეს კი ნიშნავს (5.1.15) ტოლობას, ტოლობა (5.1.5)-ის ძალით.

ახლა, (5.1.15) გამოვიყენოთ

$$\frac{u_n}{n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{S_{n-1}}{n-1}$$

ტოლობის მიმართ, მივიღებთ $\frac{u_n}{n} \rightarrow 0 - 1 \cdot 0 = 0$, როცა $n \rightarrow \infty$. ეს კი არის (5.1.16) ტოლობა. $\square$

როგორც ვნახეთ, (5.1.1) მწკრივის S_n კერძო ჯამების σ_n არითმეტიკული საშუალოები განსაზღვრულია (5.1.4) ტოლობით. იგივე σ_n საშუალოები შეიძლება გამოისახოს თვით (5.1.1) მწკრივის წევრებით.

წინადადება 5.1.6. (5.1.4) ტოლობით მოცემული σ_n მიმდევრობისთვის მართებულია ტოლობა

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) u_k. \quad (5.1.17)$$

დამტკიცება. (5.1.4) ტოლობიდან გვაქვს

$$\begin{aligned} (n+1)\sigma_n &= S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_{n-1} + S_n \\ &= (u_0) + (u_0 + u_1) + (u_0 + u_1 + u_2) + \cdots + (u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}) + (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) \\ &= (n+1)u_0 + nu_1 + \cdots + (n+1-k)u_k + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^n (n+1-k)u_k. \end{aligned}$$

ამიტომ

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^n \frac{n+1-k}{n+1} u_k = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) u_k.$$

წინადადება დამტკიცებულია. $\square$

შედეგი 5.1.7. (5.1.1) მწკრივის $(C, 1)$ -შეჯამებადობა რაიმე σ -კენ ნიშნავს ტოლობას

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) u_k = \sigma. \quad (5.1.18)$$

შენიშვნა 5.1.8. თუ შემოვიღებთ რიცხვებს

$$\alpha_n^{(k)} = \begin{cases} 1 - \frac{k}{n+1}, & \text{როცა } 0 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{როცა } k > n, \end{cases}$$

მაშინ სრულდება ტოლობა

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{(k)} = 1 \text{ ყოველი } k\text{-თვის}$$

და (5.1.18) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n^{(k)} u_k = \sigma.$$

ამრიგად, (5.1.1) მწკრივის $(C, 1)$ -შეჯამებადობა σ -კენ ნიშნავს:

- (1) (5.1.1) მწკრივის “შეშფოთებას” მისი u_k წევრების გამრავლებით, n პარამეტრზე დამოკიდებულ $\alpha_n^{(k)}$ სიდიდეებზე;
- (2) σ არის შეშფოთებით მიღებული მწკრივის ჯამის ზღვარი, როცა n პარამეტრი ისწრაფვის თავის $+\infty$ ზღვრისკენ.

დასკვნა 5.1.9. (5.1.1) მწკრივის $(C, 1)$ -შეჯამებადობა σ -კენ მოიცემა ურთიერთგვიწაღებური (5.1.6) და (5.1.18) ტოლობებით.

წინადადება 5.1.10. (5.1.2) და (5.1.4) ტოლობებით განსაზღვრული S_n და σ_n მიმდევრობებისთვის მართებულია ტოლობა

$$S_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k u_k. \quad (5.1.19)$$

დამტკიცება. (5.1.2) და (5.1.4) ტოლობების თანახმად გვაქვს დამოკიდებულებანი

$$\begin{aligned} S_n - \sigma_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &\quad - \left[u_0 + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) u_1 + \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) u_2 + \dots + \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) u_n \right] \\ &= \frac{1}{n+1} u_1 + \frac{2}{n+1} u_2 + \dots + \frac{n}{n+1} u_n = \frac{1}{n+1} (u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n), \end{aligned}$$

რაც ადასტურებს (5.1.19) ტოლობის მართებულობას. □

წინადადება 5.1.11. თუ (5.1.1) მწკრივი კრებადია, მაშინ მისი u_k წევრები აკმაყოფილებენ პირობას

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n] = 0. \quad (5.1.20)$$

დამტკიცება. თუ (5.1.1) მწკრივის ჯამია s , მაშინ ამ მწკრივის S_n კერძო ჯამების ზღვარია s . მეორეს მხრივ, იმავე მწკრივისთვის შედგენილი σ_n მიმდევრობა კრებადია იგივე s -კენ თეორემა 5.1.3-ის თანახმად. მაშასადამე, $S_n - \sigma_n$ მიმდევრობა კრებადია ნულისკენ. ამიტომ (5.1.19) ტოლობიდან გამომდინარეობს ტოლობა

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} (u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n) = 0. \quad (5.1.21)$$

რადგან

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \quad \text{და} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

ამიტომ (5.1.20) გამომდინარეობს (5.1.21) ტოლობიდან. $\square$

5.2 რიცხვითი მწკრივის შეჯამებადობის აბელ-პუასონის (A) მეთოდი

განვიხილოთ რიცხვითი მწკრივი

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (5.2.1)$$

და მასთან ასოცირებული ხარისხოვანი მწკრივი

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \dots + u_n x^n + \dots \quad (5.2.2)$$

(5.2.1) მწკრივის მეშვეობით განისაზღვრება (5.2.1) მწკრივის შეჯამებადობის გარკვეული მეთოდი, რომელთანაც სხვადასხვა გზით მივიდნენ პუასონი და აბელი.

მწკრივის $(C, 1)$ მეთოდით შეჯამებადობის ურთიერთეკვივალენტური ორი ფორმის არსებობის ანალოგიურად, აქაც მოცემულ იქნება მწკრივის აბელ-პუასონის მეთოდით შეჯამებადობის ორი ფორმა და იქვე დადგენილ იქნება მათი ურთიერთეკვივალენტურობა.

გ ა ნ ს ა ზ ვ რ ა 5.2.1. (5.2.1) მწკრივს ეწოდება აბელ-პუასონის მეთოდით შეჯამებადი, მოკლედ (A)-შეჯამებადი, S -კენ, თუ (5.2.2) მწკრივი კრებადია ყველა $x \in (0, 1)$ წერტილზე და მისი ჯამი აკმაყოფილებს პირობას

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = s.$$

გ ა ნ ს ა ზ დ ვ რ ა 5.2.2. (5.2.1) მწკრივს ეწოდება აბელ-პუასონის მეთოდით შეჯამებადი, მოკლედ (A)-შეჯამებადი s-კენ, თუ (5.2.2) მწკრივი კრებადია ყველა $x \in (0, 1)$ წერტილზე და სრულდება ტოლობა

$$\lim_{x \rightarrow 1-} (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k = s, \quad (5.2.3)$$

სადაც $S_k = u_0 + u_1 + \dots + u_k$.

თ ე ო რ ე მ ა 5.2.3. განსაზღვრებები 5.2.1 და 5.2.2 ურთიერთეკვივალენტურია.

დ ა მ ტ ვ ი ც ე ბ ა . ამ განსაზღვრებათა ეკვივალენტურობის დამტკიცების მიზნით დავადგინოთ, რომ (5.2.2) მწკრივის კრებადობა $(0, 1)$ ინტერვალზე იწვევს ტოლობას

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k, \quad 0 < x < 1, \quad (5.2.4)$$

და, მაშასადამე, $\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k$ მწკრივის კრებადობას $(0, 1)$ ინტერვალზე. ამისთვის გამოვიყენოთ აბელის გარდაქმნა (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.16, შედეგი 4.16.2)

$$\sum_{n=0}^n u_n b_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n,$$

რომელშიც ახლა ავიღოთ $a_k = x^k$, $b_k = u_k$ და $B_k = \sum_{j=0}^k b_j = \sum_{j=0}^k u_j = S_k$. გვექნება

$$\sum_{k=0}^n u_k x^k = \sum_{k=0}^{n-1} (x^k - x^{k+1}) S_k + S_n x^n.$$

მაგრამ

$$\sum_{k=0}^{n-1} (x^k - x^{k+1}) S_k = \sum_{k=0}^{n-1} x^k S_k - x \sum_{k=0}^{n-1} x^k S_k = (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} S_k x^k.$$

მაშასადამე,

$$\sum_{k=0}^n u_k x^k = (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} S_k x^k + S_n x^n. \quad (5.2.5)$$

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ყოველი ფიქსირებული $x \in (0, 1)$ -თვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n x^n = 0. \quad (5.2.6)$$

მართლაც, აღებული $x \in (0, 1)$ -თვის არსებობს ისეთი r რიცხვი, რომ $x < r < 1$. რადგან (5.2.2) მწკრივი კრებადია ღია $(0, 1)$ ინტერვალის ყოველ წერტილზე, ამიტომ კრებადია $\sum_{k=0}^{\infty} u_k r^k$ მწკრივიც. ამიტომ ამ მწკრივის ზოგადი წევრი $u_k r^k \rightarrow 0$, როცა $k \rightarrow \infty$. ეს ნიშნავს, რომ არსებობს r -ზე დამოკიდებული c_r მუდმივი ისეთი, რომ $|u_k r^k| < c_r$ ყველა $k = 0, 1, 2, \dots$ მნიშვნელობისთვის. უკანასკნელიდან გამომდინარეობს $|u_k| < c_r \left(\frac{1}{r}\right)^k$ უტოლობა ყველა $k = 0, 1, 2, \dots$ მნიშვნელობისთვის.

მეორეს მხრივ,

$$\begin{aligned} |S_n| &\leq \sum_{k=0}^n |u_k| < c_r \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{r}\right)^k \\ &= c_r \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{r^n}\right) = c_r \cdot \frac{1}{r^n} (1 + r + \dots + r^n) < \frac{c_r}{r^n} \cdot \frac{1}{1-r}. \end{aligned}$$

ამრიგად,

$$|S_n x^n| = |S_n| x^n < \frac{x^n}{r^n} \cdot \frac{c_r}{1-r} = \frac{c_r}{1-r} \left(\frac{x}{r}\right)^n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

ცხადია, რომ (5.2.4) გამომდინარეობს (5.2.5) და (5.2.6) ტოლობებიდან (5.2.2) მწკრივის კრებადობის გამო. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ახლა დავამტკიცოთ შეჯამებადობის (A) მეთოდის რეგულარულობა.

თეორემა 5.2.4. თუ (5.2.1) მწკრივი კრებადია სასრული s რიცხვისკენ, მაშინ (5.2.2) მწკრივი კრებადია ყოველ $x \in (0, 1)$ წერტილზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = s \quad (5.2.7)$$

ანუ, რაც იგივეა, (5.2.1) კრებადი მწკრივი (A)-შეჯამებადია თავისივე s ჯამისკენ.

დამტკიცება. (5.2.1) მწკრივის კრებადობა ნიშნავს (5.2.2) მწკრივის კრებადობას $x = 1$ წერტილზე. ამიტომ (5.2.2) ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი არაა ნაკლები 1-ზე, ანუ (5.2.2) მწკრივი ნამდვილად კრებადი $(0, 1)$ ღია ინტერვალის ყოველ წერტილზე — აბსოლუტურადაც კი, ახელის პირველი თეორემის ძალით [3, გვ. 73].

მეორეს მხრივ, ყოველ $x \in (0, 1)$ წერტილზე ადგილი აქვს $1 = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ტოლობას ანუ, s -ის სასრულობის გამო, მართებულია ტოლობა

$$s = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} s \cdot x^k, \quad 0 < x < 1. \quad (5.2.8)$$

(5.2.8)-დან (5.2.4)-ის წევრობრივი გამოკლება მოგვცემს ტოლობას

$$s - \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} (s - S_k) x^k. \quad (5.2.9)$$

(5.2.1) მწკრივის s -კენ კრებადობის გამო $s - S_k \rightarrow 0$, როცა $k \rightarrow \infty$. ამიტომ ყოველ $\varepsilon > 0$ რიცხვს შესაბამემა ისეთი N ნატურალური რიცხვი, რომ $|s - S_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ ყოველი $k > N$ რიცხვისთვის. ახლა (5.2.9) ტოლობის მარჯვენა მხარე წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$(1-x) \sum_{k=0}^N (s - S_k) x^k + (1-x) \sum_{k=N+1}^{\infty} (s - S_k) x^k. \quad (5.2.10)$$

(5.2.10)-ის მეორე შესაკრების აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება სიდიდეს

$$\begin{aligned} & (1-x) \sum_{k=N+1}^{\infty} |s - S_k| x^k \\ & < \frac{\varepsilon}{2} (1-x) \sum_{k=N+1}^{\infty} x^k < \frac{\varepsilon}{2} (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{\varepsilon}{2} (1-x) \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

(5.2.10)-ის პირველი შესაკრების აბსოლუტური მნიშვნელობა არ აღემატება $(1-x) \sum_{k=0}^N |s - S_k|$ სიდიდეს; ეს კი შეგვიძლია გავხადოთ ნებისმიერად მცირე $(1-x)$ სხვაობის სიმცირის ხარჯზე, ანუ არსებობს ε -ზე დამოკიდებული $\delta > 0$ ისეთი, რომ

$$(1-x) \sum_{k=0}^N |s - S_k| x^k < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{როცა } 1 - \delta < x < 1. \quad (5.2.12)$$

(5.2.11) და (5.2.12) უტოლობების საფუძველზე ვასკვნით, რომ (5.2.9) ტოლობის მარჯვენა მხარისთვის მართებულია უტოლობა

$$\left| s - \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k \right| < \varepsilon, \quad \text{როცა } 1 - \delta < x < 1.$$

ეს კი ადასტურებს (5.2.7) ტოლობის მართებულებას. □

უკანასკნელ თეორემას ზოგჯერ აყალიბებენ შემდეგი სახით

თეორემა 5.2.5 (აბელის მეორე თეორემა ხარისხოვანი მწკრივის ჯამის უწყვეტობაზე).
თუ (5.2.1) მწკრივი კრებადია, მაშინ (5.2.2) მწკრივი კრებადია ღია $(0, 1)$ ინტერვალში და მისი ჯამი მარცხნიდან უწყვეტია $x = 1$ წერტილზე.

მაგალითი 5.2.6. დავამტკიცოთ, რომ

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad (5.2.13)$$

განშლადი მწკრივი (A) -შეჯამებადია $\frac{1}{2}$ -კენ, ანუ ადგილი აქვს ტოლობას

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2} (A). \quad (5.2.14)$$

მართლაც, (5.2.2) სახის მწკრივი (5.2.13) მწკრივისთვის არის

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1 - (-x)} = \frac{1}{1 + x} \rightarrow \frac{1}{2}, \text{ როცა } x \rightarrow 1 -.$$

(5.2.14) ტოლობიდან და პარაგრაფი 5.1-ის (5.1.10) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ (5.2.13) მწკრივი შეჯამებადია $\frac{1}{2}$ -კენ როგორც $(C, 1)$ მეთოდით, ისე (A) მეთოდით და ეს ფაქტი არაა შემთხვევითი.

წინადადება 5.2.7. მწკრივის შეჯამებადობის (A) მეთოდი სავსებით რეგულარულია, ე.ი. თუ (5.2.1) მწკრივი კრებადია $+\infty$ -კენ, მაშინ (5.2.7) ტოლობის მარჯვენა მხარეში გვექნება $+\infty$.

დამტკიცება. ნებისმიერად დიდი M რიცხვისთვის არსებობს ნატურალური p რიცხვი ისეთი, რომ $S_k > M$ ყველა $k > p$ რიცხვისთვის. მაშინ (5.2.3) ტოლობის მარცხენა მხარისთვის გვექნება

$$\begin{aligned} (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k &> (1-x) \sum_{k=0}^p S_k x^k + M(1-x) \sum_{k=p+1}^{\infty} x^k \\ &> M(1-x) \sum_{k=p+1}^{\infty} x^k = M(1-x) \frac{x^{p+1}}{1-x} = M \cdot x^{p+1}, \end{aligned}$$

ე.ი.

$$(1-x) \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k > M x^{p+1}, \quad 0 < x < 1. \quad (5.2.15)$$

რადგან $x^{p+1} \rightarrow 1$, როცა $x \rightarrow 1-$, ამიტომ (5.2.15)-დან ვღებულობთ, რომ

$$(1-x) \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k > \frac{1}{2} M, \quad \text{როცა } 1-\delta < x < 1.$$

ეს კი ნიშნავს ტოლობას

$$\lim_{x \rightarrow 1-} (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k = +\infty,$$

რაც (5.2.7)-ის ეკვივალენტურია, რომელშიც ახლა $s = +\infty$. □

5.3 მიმართება $(C, 1)$ და (A) მეთოდებს შორის

თ ე ო რ ე მ ა 5.3.1 (ფრობენიუსი, [8, გვ. 28]). თუ

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots \quad (5.3.1)$$

მწკრივი $(C, 1)$ -შეჯამებადი σ სასრული რიცხვისკენ, მაშინ (5.3.1) მწკრივი (A) -შეჯამებადიცაა იგივე σ რიცხვისკენ.

დ ა მ ტ ვ ი ც ე ბ ა . (5.3.1) მწკრივის (A) -შეჯამებადობაზე რომ შეგვეძლოს საუბარი, აუცილებელია (5.3.1) მწკრივთან ასოცირებული

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \dots + u_n x^n + \dots \quad (5.3.2)$$

ხარისხოვანი მწკრივი კრებადი იყოს ყველა $x \in (0, 1)$ წერტილზე. ამის დასადგენად ვი-სარგებლობთ პარაგრაფ 5.1-ის (5.1.16) ტოლობით $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k}{k} = 0$, საიდანაც გამომდინარეობს ისეთი N ნატურალური რიცხვის არსებობა, რომ $\frac{|u_k|}{k} < 1$ ანუ $|u_k| < k$ უტოლობა შესრულდება ყველა $k > N$ რიცხვისთვის.

ახლა (5.3.2) მწკრივის მივცეთ სახე

$$\sum_{k=0}^N u_k x^k + \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k x^k.$$

ცხადია, რომ სასრული რაოდენობის წევრებისგან შედგენილი $\sum_{k=0}^N u_k x^k$ ჯამი სასრულია ყველა $x \in (0, 1)$ წერტილზე. გარდა ამისა,

$$\left| \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k x^k \right| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |u_k| x^k < \sum_{k=N+1}^{\infty} k x^k,$$

ხოლო $\sum_{k=N+1}^{\infty} k x^k$ მწკრივის კრებადობის რადიუსია 1 (იხ. [3, გვ. 84]), ე.ი. ეს მწკრივი კრებადია ყველა $x \in (0, 1)$ წერტილზე. მაშასადამე, (5.3.2) მწკრივი კრებადია $(0, 1)$ ღია ინტერვალზე და მისი ჯამი აღვნიშნოთ $f(x)$ -ით, ე.ი.

$$f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \dots + u_n x^n + \dots, \quad (5.3.3)$$

რის გამოც 5.2 პარაგრაფის (5.2.4) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$f(x) = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k, \quad 0 < x < 1. \quad (5.3.4)$$

როგორც ვნახეთ, პარაგრაფ 5.2-ის (5.2.4) ტოლობის დამტკიცება ემყარება იმ ფაქტს, რომ $\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$ მწკრივი კრებადია $(0, 1)$ ინტერვალზე. იმავე ტოლობიდან გამომდინარეობს, როგორც იქვე ითქვა, რომ $\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k$ მწკრივიც კრებადია $(0, 1)$ ინტერვალზე და ამ შემთხვევისთვის (5.2.4) ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} (S_0 + S_1 + \dots + S_k) x^k.$$

მაგრამ $S_0 + S_1 + \dots + S_k = (k+1)\sigma_k$ (იხ. პარაგრაფი 5.1, ტოლობა (5.1.4)). ამიტომ გვაქვს

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\sigma_k x^k. \quad (5.3.5)$$

(5.3.4) და (5.3.5) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$f(x) = (1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\sigma_k x^k, \quad 0 < x < 1. \quad (5.3.6)$$

მეორეს მხრივ,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad 0 < x < 1,$$

ტოლობის წევრობრივი გაწარმოებით, რაც მართებულია [3, გვ. 87], მივიღებთ ტოლობას

$$1 = (1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k, \quad 0 < x < 1.$$

უკანასკნელი ტოლობა გავამრავლოთ სასრულ σ -ზე და ასე მიღებულ ტოლობას წევრობრივ დავაკლოთ (5.3.6) ტოლობა, გვექნება

$$\sigma - f(x) = (1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(\sigma - \sigma_k)x^k. \quad (5.3.7)$$

რადგან (5.3.1) მწკრივი $(C, 1)$ -შეჯამებულია σ -კენ, ამიტომ ყოველ $\varepsilon > 0$ რიცხვს შეესაბამება ნატურალური რიცხვი L ისეთი, რომ

$$|\sigma_n - \sigma| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \text{როცა } n > L. \quad (5.3.8)$$

ამის შესაბამისად, (5.3.7) ტოლობის მარჯვენა მხარეს მივცეთ სახე

$$(1-x)^2 \sum_{k=0}^L (k+1)(\sigma - \sigma_k)x^k + (1-x)^2 \sum_{k=L+1}^{\infty} (k+1)(\sigma - \sigma_k)x^k. \quad (5.3.9)$$

ცხადია, რომ $(0, 1)$ ინტერვალზე $x^k < 1$ და

$$\left| (1-x)^2 \sum_{k=0}^L (k+1)(\sigma - \sigma_k)x^k \right| < (1-x)^2 \sum_{k=0}^L (k+1)|\sigma - \sigma_k|.$$

უკანასკნელი გამოსახულება, შესაკრებთა სასრული რაოდენობის გამო, შეგვიძლია გავხადოთ ნებისმიერად მცირე $(1-x)$ სხვაობის სიმცირის ხარჯზე. ამიტომ უკვე აღებულ ε რიცხვს მოეძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ

$$(1-x)^2 \sum_{k=0}^L (k+1)|\sigma - \sigma_k| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \text{როცა } 1-\delta < x < 1.$$

ამიტომ

$$\left| (1-x)^2 \sum_{k=0}^L (k+1)(\sigma - \sigma_k)x^k \right| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \text{როცა } 1-\delta < x < 1. \quad (5.3.10)$$

ამასთან ერთად, (5.3.8) უტოლობის გათვალისწინებით გვექნება

$$\begin{aligned}
 \left| (1-x)^2 \sum_{k=L+1}^{\infty} (k+1)(\sigma - \sigma_k)x^k \right| &< \frac{\varepsilon}{2} (1-x)^2 \sum_{k=L+1}^{\infty} (k+1)x^k \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} (1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = \frac{\varepsilon}{2} (1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (x^{k+1})' \\
 &= \frac{\varepsilon}{2} (1-x)^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} \right)' = \frac{\varepsilon}{2} (1-x)^2 (x + x^2 + \dots)' \\
 &= \frac{\varepsilon}{2} (1-x)^2 \left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) - 1 \right]' = \frac{\varepsilon}{2} (1-x)^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right)' \\
 &= \frac{\varepsilon}{2} (1-x)^2 \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{\varepsilon}{2} (1-x)^2 \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\varepsilon}{2}.
 \end{aligned}$$

ამრიგად,

$$\left| (1-x)^2 \sum_{k=L+1}^{\infty} (k+1)(\sigma - \sigma_k)x^k \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ როცა } 0 < x < 1. \quad (5.3.11)$$

(5.3.3), (5.3.7) და (5.3.9)–(5.3.11) დამოკიდებულებათა საფუძველზე გვაქვს

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k - \sigma \right| < \varepsilon, \text{ როცა } 1 - \delta < x < 1.$$

ეს კი ნიშნავს (5.3.1) მწკრივის (A) -შეჯამებადობას σ რიცხვისკენ. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შედეგი 5.3.2. (5.3.1) მწკრივის არა მხოლოდ კრებადობა, არამედ მისი $(C, 1)$ -შეჯამებადობაც კი სასრული რიცხვისკენ იწვევს (5.3.2) მწკრივის კრებადობას $(0, 1)$ ღია ინტერვალზე.

მაგალითი 5.3.3. მწკრივი

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots \quad (5.3.12)$$

არაა $(C, 1)$ -შეჯამებადი, რადგან ის არ აკმაყოფილებს ამისთვის აუცილებელ (5.1.16) პირობას პარაგრაფი 5.1-დან

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = 0.$$

მეორეს მხრივ, (5.3.12) მწკრივთან ასოცირებული ხარისხოვანი

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$$

მწკრივი კრებადია (0, 1) ლია ინტერვალში და მისი ჯამი

$$\begin{aligned} 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots + &= (x - x^2 + x^3 - x^4 + \dots)' \\ &= [- (1 - x + x^2 - \dots) + 1]' = -(1 - x + x^2 - \dots)' \\ &= -\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{0 - (1+x)'}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

აკმაყოფილებს ტოლობას

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{4},$$

ე.ი. (5.3.12) მწკრივი არის (A)-შეჯამებადი $\frac{1}{4}$ -კენ.

ფრობენიუსის 5.3.1 თეორემისა და 5.3.3 მაგალითის საფუძველზე გვაქვს

შედეგი 5.3.4. მწკრივის შეჯამებადობის (A) მეთოდი ძლიერია შეჯამებადობის (C, 1) მეთოდზე, ე.ი. (A) მეთოდი აჯამებს უფრო ფართო კლასის მწკრივებს, ვიდრე (C, 1) მეთოდი. ამასთან ერთად, ორივე მეთოდი თანხვედრილია, როცა ორივე გამოყენებადია.

შენიშვნა 5.3.5. როგორც ვნახეთ, u_n წევრებიანი მწკრივის (A)-შეჯამებადობა s -კენ ნიშნავს:

- (1) მწკრივის “შეშფოთებას” მისი u_n წევრების გამრავლებით (0, 1) ინტერვალზე ცვალებად x პარამეტრის n -ურ x^n ხარისხზე;
- (2) s არის შეშფოთებით მიღებული მწკრივის ჯამის ზღვარი, როცა x პარამეტრი ისწრაფვის თავის ზღვარ 1-კენ და, მაშასადამე, x^n მამრაველი ყოველი ფიქსირებული n -თვის ისწრაფვის 1-კენ, როცა x ისწრაფვის 1-კენ.

5.4 ზღვარზე გადასვლა მწკრივში

აქ მოცემული იქნება ის საკმარისი პირობები, რომელნიც უზრუნველყოფს მწკრივში წევრობრივ ზღვარზე გადასვლის მართებულობას.

თეორემა 5.4.1. განვიხილოთ დაგროვების წერტილის მქონე E სიმრავლეზე განსაზღვრულ ფუნქციასა $(\varphi_n(x))_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა, $x \in E$.

E სიმრავლის დაგროვების წერტილი იყოს a , სასრული ან ნიშნიანი უსასრულო, რომელიც შეიძლება არცეი ეკუთვნოდეს E -ს.

დავუშვათ, რომ ყოველ $\varphi_n(x)$ ფუნქციას გააჩნია სასრული ზღვარი a წერტილზე.

თუ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \quad (5.4.1)$$

მწკრივი თანაბრად კრებადია E სიმრავლეზე, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} \varphi_n(x), \quad (5.4.2)$$

რაც ასე გამოითქმის: თანაბრად კრებადი მწკრივის ზღვარი რაიმე წერტილზე იმავე წერტილზე მისი წევრების ზღვრების ჯამის ტოლია.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi_n(x) = c_n, \quad C = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

E სიმრავლეზე (5.4.1) მწკრივის თანაბრად კრებადობის გამო ყოველ $\varepsilon > 0$ რიცხვს შეესაბამება ისეთი $N = N(\varepsilon)$ ნატურალური რიცხვი, რომ უტოლობა

$$|\varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+2}(x) + \dots + \varphi_{n+p}(x)| < \varepsilon \quad (5.4.3)$$

შესრულებულია ყოველი $n > N$ რიცხვისთვის, ყოველი $x \in E$ წერტილისთვის და ყოველი $p = 1, 2, \dots$ რიცხვისთვის.

(5.4.3) უტოლობაში ზღვარზე გადასვლით, როცა $x \rightarrow a$, მივიღებთ

$$|c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+p}| \leq \varepsilon.$$

ამრიგად, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ რიცხვითი მწკრივი კრებადია (მწკრივის კრებადობის კოშის კრიტერიუმით), რომლის n -ური კერძო ჯამი და n -ური ნაშთი იყოს C_n და γ_n , ანუ

$$C = C_n + \gamma_n. \quad (5.4.4)$$

ასევე, $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ მწკრივის n -ური კერძო ჯამი და n -ური ნაშთი იყოს $S_n(x)$ და $\delta_n(x)$, შესაბამისად, ანუ

$$\varphi(x) = S_n(x) + \delta_n(x). \quad (5.4.5)$$

თუ (5.4.5) ტოლობიდან წევრობრივ გამოვაკლებთ (5.4.4)-ს, მივიღებთ

$$\varphi(x) - C = (S_n(x) - C_n) + (\delta_n(x) - \gamma_n),$$

საიდანაც

$$|\varphi(x) - C| \leq |S_n(x) - C_n| + |\delta_n(x)| + |\gamma_n|. \quad (5.4.6)$$

(5.4.1) მწკრივის თანაბრად კრებადობის გამო, ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის შეგვიძლია დავასახელოთ და დავაფიქსიროთ n ნატურალური რიცხვი ისეთი, რომ ყოველი $x \in E$ -თვის შესრულებული იქნება უტოლობები

$$|\delta_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |\gamma_n| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (5.4.7)$$

რადგან

$$\lim_{x \rightarrow a} S_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow a} \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^n c_k = C_n,$$

ამიტომ, თუ შემოვიფარგლებით სასრული a -ს შემთხვევით, გვექნება

$$|S_n(x) - C_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{როცა } |x - a| < \delta, \quad x \in E. \quad (5.4.8)$$

ახლა, (5.4.6)–(5.4.8) შეფასებებიდან გამომდინარეობს უტოლობა

$$|\varphi(x) - C| < \varepsilon, \quad \text{როცა } |x - a| < \delta, \quad x \in E.$$

მაშასადამე, E სიმრავლის გასწვრივ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = C,$$

რაც ეკვივალენტურია (5.4.2) ტოლობის. თეორემა დამტკიცებულია. □

5.5 შეჯამებადობის ზოგადი შემთხვევა და ბორელის თეორემა

ვთქვათ, გვაქვს

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (5.5.1)$$

რიცხვითი მწკრივი და განვიხილოთ $(a_n(x))_{n=0}^{\infty}$ ფუნქციათა მიმდევრობა, რომელიც განსაზღვრულია რაიმე E სიმრავლეზე, რასაც გააჩნია დაგროვების რომელიმე x_0 წერტილი და x_0 შეიძლება არცკი ეკუთვნოდეს E -ს.

დავუშვათ, რომ $(a_n(x))_{n=0}^{\infty}$ მიმდევრობას გააჩნია შემდეგი ოთხი თვისება:

- (1) $0 \leq a_n(x) \leq 1$ ყოველი n -თვის და ყოველი $x \in E$ -თვის;
- (2) n -ის ზრდისას $a_n(x)$ არ იზრდება, როცა $x \in E$ ფიქსირებულია;
- (3) ყოველი ფიქსირებული n -თვის $a_n(x)$ ფუნქცია ისწრაფვის 1-კენ, როცა $x \in E$ ისწრაფვის თავისი x_0 ზღვრისკენ;
- (4) (5.5.1) მწკრივთან ასოცირებული

$$u_0 a_0(x) + u_1 a_1(x) + u_2 a_2(x) + \dots + u_n a_n(x) + \dots \quad (5.5.2)$$

მწკრივი კრებადია ყველა $x \in E$ წერტილზე.

ახლა შემოვიღოთ შემდეგი

გ ა ნ ს ა ზ ღ ჯ რ ა 5.5.1. როცა არსებობს ზღვარი

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n a_n(x) = s, \quad (5.5.3)$$

მაშინ (5.5.1) მწკრივს ეწოდება $(a_n(x))_{n=0}^{\infty}$ ფუნქციათა მიმდევრობით განსაზღვრული მეთოდით შეჯამებადი s რიცხვისკენ, ხოლო s -ს კი ეწოდება (5.5.1) მწკრივის განზოგადებული ჯამი — ამ მეთოდის შესაბამისი.

მწკრივის განზოგადებული ჯამის ცნება, საზოგადოდ, იქნებოდა უსარგებლო, გარდა ზოგიერთი გამონაკლისისა, თუ უმრავლეს შემთხვევაში მართებული არ იქნებოდა ბორელის შემდეგი

თ ე ო რ ე მ ა 5.5.2 (ბორელი). თუ (5.5.1) მწკრივი კრებადია s რიცხვისკენ, მაშინ იგი $(a_n(x))_{n=0}^{\infty}$ მიმდევრობის შესაბამისი მეთოდითაც შეჯამებადია იგივე s რიცხვისკენ, ანუ ადგილი აქვს (5.5.3) ტოლობას.

დ ა მ ტ ვ ი ც ე ბ ა . რადგან $\lim_{x \rightarrow x_0} a_n(x) = 1$ ყოველი n -თვის, ამიტომ თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n a_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n a_n(x)$$

ტოლობის მართებულობა. ამ ტოლობის დასამტკიცებლად საკმარისია დავადგინოთ, პარაგრაფ 5.4-ის თეორემა 5.4.1-ის თანახმად, (5.5.2) მწკრივის თანაბრად კრებადობა $x \in E$ -ის მიმართ, რასაც ახლა მოვახდენთ.

რადგან (5.5.1) მწკრივი კრებადია, ამიტომ მისი n -ური ნაშთის

$$R_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

აბსოლუტური სიდიდე ნაკლები იქნება ნებისმიერად აღებულ $\varepsilon > 0$ რიცხვზე, როგორც კი n გადააჭარბებს ε -გან დამოკიდებულ გარკვეულ $N = N(\varepsilon)$ ნატურალურ რიცხვს, ე.ი.

$$|R_n| < \varepsilon \quad \text{ყველა } n > N \text{ რიცხვისთვის.} \quad (5.5.4)$$

ახლა განვიხილოთ (5.5.1) მწკრივთან ასოცირებული (5.5.2) მწკრივის n -ური ნაშთი

$$\rho_n(x) = u_n a_n(x) + u_{n+1} a_{n+1}(x) + \dots \quad (5.5.5)$$

და დავამტკიცოთ, რომ უკვე აღებული $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს $L \geq N$ -ზე ნატურალური რიცხვი ისეთი, რომ თანაბრად $x \in E$ -ის მიმართ სრულდება უტოლობა

$$|\rho_n(x)| < \varepsilon \quad \text{ყველა } n > L \text{ რიცხვისთვის.} \quad (5.5.6)$$

ამ მიზნით განვიხილოთ (5.5.5) მწკრივის p -რი კერძო ჯამი (წერის გამარტივების მიზნით, x არგუმენტს არ დავწერთ)

$$S_p^{(1)} = u_n a_n + u_{n+1} a_{n+1} + u_{n+2} a_{n+2} + \dots + u_{n+p-1} a_{n+p-1} + u_{n+p} a_{n+p},$$

რომელიც $u_k = R_k - R_{k+1}$ ტოლობების, $k = n, n+1, \dots$, გამოყენებით ასე ჩაიწერება

$$S_p^{(1)} = a_n(R_n - R_{n+1}) + a_{n+1}(R_{n+1} - R_{n+2}) + a_{n+2}(R_{n+2} - R_{n+3}) + \dots \\ + a_{n+p-1}(R_{n+p-1} - R_{n+p}) + a_{n+p}(R_{n+p} - R_{n+p+1}).$$

ამასთან ერთად, განვიხილოთ ჯამი

$$S_p^{(2)} = a_n R_n + (a_{n+1} - a_n) R_{n+1} + (a_{n+2} - a_{n+1}) R_{n+2} + \dots \\ + (a_{n+p-1} - a_{n+p-2}) R_{n+p-1} + (a_{n+p} - a_{n+p-1}) R_{n+p}.$$

აქედან, (1), (2) თვისებებისა და (5.5.4) უტოლობის გათვალისწინებით, გვაქვს დამოკიდებულებანი

$$|S_p^{(2)}| \leq \varepsilon \left[a_n + (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \dots \right. \\ \left. + (a_{n+p-2} - a_{n+p-1}) + (a_{n+p-1} - a_{n+p}) \right] \\ = \varepsilon [2a_n - a_{n+p}] < 2\varepsilon a_n \leq 2\varepsilon, \text{ როცა } n > N.$$

ამრიგად,

$$|S_p^{(2)}(x)| < 2\varepsilon, \text{ როცა } n > N, \text{ } p \text{ ნებისმიერია.}$$

მეორეს მხრივ,

$$S_p^{(1)}(x) = S_p^{(2)}(x) - a_{n+p} R_{n+p-1}.$$

ამიტომ

$$|S_p^{(1)}(x)| < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, \text{ როცა } n > N \text{ და } p \text{ ნებისმიერია.}$$

მაშასადამე. მართებულია (5.5.6) უტოლობა, ანუ (5.5.2) მწკრივი თანაბრად კრებადია E -ზე. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შედეგი 5.5.3. თუ

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots \quad (5.5.7)$$

მწკრივი კრებადია, მაშინ

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \dots \quad (5.5.8)$$

ხარისხოვანი მწკრივი თანაბრად კრებადია $[0, 1]$ სეგმენტზე.

დამტკიცება. კერძოდ, თუ ბორელის 5.5.2 თეორემაში ავიღებთ $x_0 = 1$, $E = (0, 1)$, $u_n(x) = x^n$, $0 < x < 1$, მაშინ ამ თეორემის (1), (2) და (3) პირობები შესრულებულია.

გარდა ამისა, ამავე თეორემის მე-(4) პირობაც შესრულებულია აბელის 5.2.5 თეორემის ძალით პარაგრაფი 5.2-დან.

როგორც ბორელის 5.5.2 თეორემის მტკიცების პროცესი გვიჩვენებს, თთხივე ეს პირობა (5.5.7) მწკრივის კრებადობასთან ერთად უზრუნველყოფს (5.5.8) მწკრივის თანაბრად კრებადობას (0, 1) ღია ინტერვალზე.

ამასთან ერთად, (5.5.8) მწკრივი კრებადია $x = 1$ წერტილზე, (5.5.7) მწკრივის კრებადობის გამო. მაშასადამე, (5.5.8) მწკრივი თანაბრად კრებადია მარცხნიდან ღია და მარჯვნიდან ჩაკეტილ (0, 1] ინტერვალზე და, ამიტომ, [0, 1] სეგმენტზე. $\square$

შედეგი 5.5.3 შეიძლება ასეც გამოითქვას:

შედეგი 5.5.4. თუ რაიმე ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი $R > 0$ და ეს მწკრივი კრებადია $x = R$ წერტილზეც, მაშინ აღებული მწკრივი თანაბრად კრებადია $[-R + \varepsilon, R]$ სეგმენტზე, როცა $0 < \varepsilon < 2R$.

ამ ფაქტთან დაკავშირებით აღვნიშნოთ

შედეგი 5.5.5. თუ რაიმე ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი $r > 0$ და ეს მწკრივი არაა კრებადი $x = r$ წერტილზე, მაშინ იგი ვერ იქნება თანაბრად კრებადი $[0, r]$ სეგმენტზე!

დამტკიცება. $[0, r]$ სეგმენტზე თანაბრად კრებადობის შემთხვევაში შეგვეძლო მწკრივში ზღვარზე გადასვლა, როცა $x \rightarrow r$ (პარაგრაფი 5.4-ის თეორემა 5.4.1-ის თანახმად) და მივიღებდით $x = r$ წერტილზე კრებად მწკრივს, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას. $\square$

5.6 ტაუბერის ტიპის თეორემები შეჯამებადობის (A) და (C, 1) მეთოდებისთვის

თუ მწკრივი შეჯამებადია (C, 1) ან (A) მეთოდით, მაშინ ასეთი მწკრივი შეიძლება კრებადი არ იყოს (იხ. პარაგრაფები 5.1 და 5.2). ამიტომ ბუნებრივია კითხვა: მწკრივის წევრების რა თვისება უზრუნველყოფს მის კრებადობას, თუკი ეს მწკრივი შეჯამებადია რომელიმე მეთოდით?

1. ასეთი შინაარსის პირველი თეორემა შეჯამებადობის აბელ-პუასონის (A) მეთოდისთვის ტაუბერმა დაამტკიცა 1897 წელს. ამიტომ მას ეწოდება ტაუბერის ტიპის, თუ რომელიმე

მეთოდით შეჯამებად მწკრივზე მითითებულია პირობა, რომელიც უზრუნველყოფს მის კრებადობას.

თ ე ო რ ე მ ა 5.6.1 (ტაუბერი, [8, გვ. 889]). თუ

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots \quad (5.6.1)$$

მწკრივი (A) შეჯამებადია რაიმე s რიცხვისკენ, ე.ი. თუ ადგილი აქვს

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = s \quad (5.6.2)$$

ტოლობას და, გარდა ამისა, შესრულებულია პირობა

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k u_k = 0, \quad (5.6.3)$$

მაშინ (5.6.1) მწკრივი კრებადია და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = s. \quad (5.6.4)$$

დ ა მ ტ ვ ი ც ე ბ ა . თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\delta_n = \max_{k \geq n} |k u_k|,$$

მაშინ მონოტონურად კლებადი $(\delta_n)_{n=0}^{\infty}$ მიმდევრობა კრებადია ნულისკენ.

ყოველი ნატურალური N რიცხვისთვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\sum_{k=0}^N u_k - s = \sum_{k=0}^N u_k (1 - x^k) - \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k x^k + \left[\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k - s \right]. \quad (5.6.5)$$

გარდა ამისა, $0 < x < 1$ შემთხვევაში მართებულია დამოკიდებულებანი

$$1 - x^k = (1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}) < k(1 - x),$$

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} x^k = \frac{x^{N+1}}{1 - x} < \frac{1}{1 - x}.$$

უკანასკნელი უტოლობები გამოვიყენოთ (5.6.5) ტოლობის მიმართ, გვექნება

$$\left| \sum_{k=0}^N u_k - s \right| \leq \sum_{k=0}^N |ku_k|(1-x) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|ku_k|x^k}{k} + \left| \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k - s \right|$$

$$\leq (1-x)N\delta_0 + \frac{\delta_{N+1}}{(N+1)(1-x)} + \left| \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k - s \right|. \quad (5.6.6)$$

ნებისმიერად მცირე $\varepsilon > 0$ რიცხვთან ერთად განვიხილოთ $\eta = \frac{\varepsilon}{2+\delta_0}$ რიცხვი და ავიღოთ $x = 1 - \frac{\eta}{N}$, ანუ $(1-x)N = \eta$. მაშასადამე, $x \rightarrow 1$, როცა $N \rightarrow \infty$. ახლა N ავიღოთ ისეთი, რომ:

(1) შესრულდეს უტოლობა $\delta_{N+1} < \eta^2$;

(2) ამ N -ის შესაბამისი x იყოს ისე ახლოს 1-თან, რომ შესრულდეს უტოლობა (ეს შესაძლებელია (5.6.2) ტოლობის ძალით)

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k - s \right| < \eta.$$

ამიტომ (5.6.6) უტოლობიდან ვღებულობთ, რომ

$$\left| \sum_{k=0}^N u_k - s \right| < (2 + \delta_0)\eta = \varepsilon.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

შეენიშნოთ, რომ მართებულია უფრო ძლიერი

თეორემა 5.6.2 (ტაუბერი). თუ (5.6.1) მწკრივი (A) შეჯამებადია რაიმე s რიცხვისკენ და, გარდა ამისა, შესრულებულია პირობა

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_1 + 2u_2 + \dots + ku_k}{k} = 0, \quad (5.6.7)$$

მაშინ ადგილი აქვს (5.6.4) ტოლობას.

თეორემა 5.6.2-ის სიძლიერე 5.6.1 თეორემასთან შედარებით გამოიხატება იმით, რომ (5.6.7) სუსტი მოთხოვნაა (5.6.1) მწკრივზე, ვიდრე (5.6.3) პირობა. მართლაც, (5.6.3) პირობა ნიშნავს $(ku_k)_{k=1}^{\infty}$ მიმდევრობის კრებადობას ნულისკენ, ხოლო (5.6.7) პირობა ნიშნავს, რომ ნული არის $(C, 1)$ ზღვარი იგივე $(ku_k)_{k=1}^{\infty}$ მიმდევრობის (იხ. 5.1.1 განსაზღვრის ბოლო წინადადება). მაგრამ ვიცით, რომ $(C, 1)$ ზღვრის არსებობა გამომდინარეობს ჩვეულებრივი ზღვრის არსებობიდან შებრუნების გარეშე (იხ. 5.1.3 თეორემა მიმდევრობისთვის).

თეორემა 5.6.3. თუ $u_k \geq 0$ და (5.6.1) მწკრივი (A) -შეჯამებადია ან $(C, 1)$ -შეჯამებადია რაიმე სასრული რიცხვისკენ, მაშინ (5.6.1) მწკრივი კრებადია იგივე რიცხვისკენ.

დამტკიცება. თუ (5.6.1) მწკრივი არ იქნებოდა კრებადი, მაშინ გვექნებოდა

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = +\infty$$

ტოლობა, როგორც ზრდადი კერძო ჯამების ზღვარი. აქედან გამომდინარე (5.6.1) მწკრივი იქნებოდა (A) -შეჯამებადი $((C, 1)$ -შეჯამებადი) $+\infty$ -კენ, ამ მეთოდთა სახეებით რეგულარულობის გამო (იხ. წინადადებები 5.2.7 და 5.1.4), რაც ეწინააღმდეგება თეორემის პირობას. $\square$

შედეგი 5.6.4. დადებითწევრებიანი (უარყოფითწევრებიანი) მწკრივებისთვის შეჯამებადობის (A) და $(C, 1)$ მეთოდები კრებადობის ეკვივალენტურია.

2. რადგან მწკრივის $(C, 1)$ -შეჯამებადობა რაიმე σ რიცხვისკენ იწვევს ამ მწკრივის (A) -შეჯამებადობას იმავე σ -კენ (იხ. ფრობენიუსის 5.3.1 თეორემა), ამიტომ ტაუბერის 5.6.2 თეორემა შეჯამებადობის $(C, 1)$ მეთოდისთვის მიიღებს სახეს.

თეორემა 5.6.5. თუ (5.6.1) მწკრივი $(C, 1)$ -შეჯამებადია რაიმე σ რიცხვისკენ და თუ შესრულებულია (5.6.7) პირობა, კერძოდ, (5.6.3) პირობა, მაშინ (5.6.1) მწკრივი კრებადია და ადგილი აქვს (5.6.4) ტოლობას, რომლის მარჯვენა მხარეშია σ .

პარდიმ დაამტკიცა, რომ ტაუბერის 5.6.5 თეორემა ძალაშია, თუ (5.6.7) და (5.6.4) პირობები შეცვლილია $|ku_k| < c$ პირობით ($c = \text{const}; k = 1, 2, 3, \dots$), ხოლო უკანასკნელი პირობის შეცვლის სამართლიანობა $ku_k > -c$ პირობით ($c = \text{const}; m = 1, 2, \dots$) დაადგინა ლანდაუმი.

ფეიერის ლემა 5.6.6. თუ (5.6.1) მწკრივი $(C, 1)$ -შეჯამებადია რაიმე s რიცხვისკენ და, გარდა ამისა, $\sum_{k=1}^{\infty} k|u_k|^2$ მწკრივი კრებადია, მაშინ ადგილი აქვს (5.6.4) ტოლობას.

გაფრთხილება! 5.6.7. მწკრივში ნულების ჩამატება არ ცვლის მისი კრებადობის ხასიათს, მაგრამ ცვლის შეჯამებადობის ხასიათს.

5.7 ფურიეს მწკრივის შეჯამებადობა ფეიერის მეთოდით

როგორც ვიცით:

- (1) არსებობს უწყვეტი ფუნქცია, რომლის ფურიეს მწკრივს გააჩნია განშლადობის წერტილი — ფეიერის მაგალითი;
- (2) არსებობს უწყვეტი ფუნქცია, რომლის ფურიეს მწკრივი განშლადია დასახელებულ თვლად სიმრავლეზე და კრებადია ყველა სხვა წერტილზე;
- (3) არსებობს უწყვეტი ფუნქცია, რომლის ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამების ყოველი ქვე-მიმდევრობა განშლადია ერთ წერტილზე მაინც.

გარდა ამისა, ჯამებად ფუნქციათა კლასში არსებობს ისეთი ფუნქცია, რომლის ფურიეს მწკრივი განშლადია ყველა წერტილზე — კოლმოგოროვის მაგალითი.

ყოველივე ამის ფონზე ბუნებრივად ჩნდება კითხვა: კი მაგრამ, მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობების მისაღებად ვარგისია თუ არა მისი ფურიეს მწკრივი?

ამ მიმართულებით უნდა მოისინჯოს განშლადი რიცხვითი მწკრივის შეჯამებადობის ცნობილი მეთოდები, სახელდობრ, $(C, 1)$ და (A) მეთოდები. უნდა ითქვას, რომ ამ თვალსაზრისით მიღებულია საკმაოდ კარგი შედეგები, რომელთა შესახებაც ქვემოთ გვექნება საუბარი.

1. განვიხილოთ 2π პერიოდული და პერიოდზე ჯამებადი f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (5.7.1)$$

რომლის კერძო ჯამების

$$S_0(x) = \frac{a_0}{2}, \quad S_1(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x,$$

$$S_2(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots,$$

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \dots,$$

მიმდევრობისგან შევადგინოთ მათი შესაბამისი $(C, 1)$ საშუალოები

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(x). \quad (5.7.2)$$

რომელთაც ფურიეს მწკრივთან მიმართებაში ეწოდება ფეიერის საშუალოები ფურიეს (5.7.1) მწკრივისთვის. ეს სახელწოდება მომდინარეობს იქიდან, რომ ფეიერმა პირველმა აღმოაჩინა $(\sigma_n(x))_{n=0}^{\infty}$ მიმდევრობის ის შესანიშნავი თვისება, რაც მოცემული იქნება ქვემოთ ფეიერის თეორემაში — 1905 წ.

რადგან $S_n(x)$ კერძო ჯამის ინტეგრალური წარმოდგენაა (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.4, ფორმულა (4.4.4))

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt,$$

ამიტომ (5.7.2) ფორმულით განსაზღვრული ფეიერის $\sigma_n(x)$ საშუალო მიიღებს სახეს

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t-x) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(t-x) dt,$$

სადაც

$$K_n(u) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(u) \quad (5.7.3)$$

წარმოადგენს დირიხლეს $D_k(u)$ გულების $(C, 1)$ საშუალოს.

ამრიგად,

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) K_n(u) du. \quad (5.7.4)$$

K_n ფუნქციას ეწოდება ფეიერის გული, იგი არაა დამოკიდებული f ფუნქციაზე და არც f -ის შესაბამის (5.7.1) მწკრივზე!

ზოგჯერ, (5.7.4) ტოლობის მარჯვენა მხარეს ეწოდება ფეიერის ინტეგრალი f ფუნქციისთვის.

პირველ რიგში დავადგინოთ ფეიერის K_n გულის რამდენიმე მნიშვნელოვანი თვისება:

(1)

$$K_n(u) = \frac{1}{2(n+1)} \left[\frac{\sin(n+1)\frac{1}{2}u}{\sin\frac{1}{2}u} \right]^2, \quad u \neq 2l\pi, \quad l = 0, \pm 1, \dots$$

მართლაც,

$$D_n(u) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{1}{2}u} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u \cdot \sin\frac{1}{2}u}{2\sin^2\frac{1}{2}u} = \frac{\cos nu - \cos(n+1)u}{4\sin^2\frac{1}{2}u}$$

ტოლობიდან (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.4, ტოლობა (4.4.3)) ვღებულობთ

$$\begin{aligned} K_n(u) &= \frac{1}{4(n+1)\sin^2 \frac{1}{2}u} \sum_{k=0}^n [\cos ku - \cos(k+1)u] \\ &= \frac{1}{4(n+1)\sin^2 \frac{1}{2}u} [1 - \cos(n+1)u] = \frac{1}{2(n+1)} \left[\frac{\sin(n+1)\frac{1}{2}u}{\sin \frac{1}{2}u} \right]^2, \end{aligned}$$

ხოლო $D_k(2l\pi) = k + \frac{1}{2}$ ტოლობის ძალით (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.4, ტოლობა (4.4.9)) გვაქვს

$$\begin{aligned} K_n(2l\pi) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{n+1} \left[\sum_{k=1}^n k + \frac{1}{2}(n+1) \right] \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

ამრიგად,

$$K_n(u) = \begin{cases} \frac{1}{2(n+1)} \left[\frac{\sin(n+1)\frac{1}{2}u}{\sin \frac{1}{2}u} \right]^2, & \text{როცა } u \neq 2l\pi, \\ \frac{n+1}{2}, & \text{როცა } u = 2l\pi, \end{cases} \quad (5.7.5)$$

$l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს მომდევნო თვისება

(2) $K_n(u) \geq 0$ ყველა u -თვის და ყველა n -თვის, ანუ ფიქსირის K_n გული არაუარყოფითია! — ეს თვისება არ გააჩნია ღირიხლეს D_n გულს.

(3) ჟორდანის

$$\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \geq \frac{2}{\pi}, \quad \text{როცა } 0 < |\alpha| \leq \pi.$$

უტოლობის გამოყენებით გვექნება

$$K_n(u) \leq \frac{1}{2(n+1)\sin^2 \frac{1}{2}u} \leq \frac{\pi^2}{2(n+1)u^2}, \quad \text{როცა } 0 < |u| \leq \pi. \quad (5.7.6)$$

აქედან ვღებულობთ

$$K_n(u) = O\left(\frac{1}{nu^2}\right), \quad \text{როცა } 0 < |u| \leq \pi$$

და

$$K_n(u) \leq \frac{\pi^2}{2(n+1)\delta^2}, \text{ როცა } 0 < \delta \leq |u| \leq \pi. \quad (5.7.7)$$

თუ შემოვიღებთ მიმდევრობას

$$M_n(\delta) = \max_{\delta \leq |u| \leq \pi} K_n(u), \text{ როცა } 0 < \delta < \pi,$$

მაშინ (5.7.7) უტოლობიდან გამომდინარეობს ტოლობა

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(\delta) = 0. \quad (5.7.8)$$

(4)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(u) du = 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

ტოლობის (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.3, ტოლობა (4.3.3)) გამოყენებით (5.7.3)-ის მიმართ მივიღებთ

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(u) du = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.7.9)$$

(5) (5.7.8) და (5.7.9) ტოლობებიდან მიიღება

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(u) du = 1, \quad 0 < \delta < \pi.$$

2. 2π პერიოდული და პერიოდზე ჯამებადი f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი, ანუ (5.7.1) დამოკიდებულების მარჯვენა მხარე აღენიშნოთ, როგორც ყოველთვის, $S[f]$ -ით. მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ მტკიცებულებებს.

ფეიერის თეორემა 5.7.1 ([8, გვ. 139]).

(1) თუ f ფუნქცია უწყვეტია x წერტილზე, მაშინ $S[f]$ შეჯამებადია ფეიერის მეთოდით ამ x წერტილზე $f(x)$ მნიშვნელობისკენ;

- (2) თუ f ფუნქციას x წერტილზე გააჩნია l გვარის წყვეტა, მაშინ $S[f]$ შეჯამებადია ფეიერის მეთოდით x წერტილზე $\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$ მნიშვნელობისკენ;
- (3) თუ f უწყვეტია რაიმე (a, b) ღია ინტერვალზე, მაშინ $S[f]$ თანაბრად შეჯამებადია ფეიერის მეთოდით ყოველ $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ ქვესეგმენტზე;
- (4) თუ f ფუნქცია უწყვეტია $(-\infty, +\infty)$ -ზე, მაშინ $S[f]$ თანაბრად შეჯამებადია ფეიერის მეთოდით $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . (5.7.9) ტოლობა გადაწეროთ შემდეგი სახით

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 K_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} K_n(t) dt.$$

$t = -\tau$ ცვლადის გარდაქმნით და K_n ფუნქციის ლუწობის გათვალისწინებით (იხ. ტოლობა (5.7.5)) გვექნება

$$\int_{-\pi}^0 K_n(t) dt = \int_{\pi}^0 K_n(-\tau) (-d\tau) = - \int_{\pi}^0 K_n(\tau) d\tau = \int_0^{\pi} K_n(\tau) d\tau.$$

ამიტომ

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} K_n(t) dt, \quad (5.7.10)$$

საიდანაც

$$\int_0^{\pi} K_n(t) dt = \frac{\pi}{2}. \quad (5.7.11)$$

(5.7.10) ტოლობის გამრავლებით $\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$ მუდმივზე (საინტეგრაციო t ცვლადის მიმართ მუდმივზე) მივიღებთ

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+0) + f(x-0)] K_n(t) dt. \quad (5.7.12)$$

გარდა ამისა, (5.7.4) ტოლობა ჩავწეროთ ასე

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+t) K_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+t) K_n(t) dt.$$

პირველ ინტეგრალში $t = -\tau$ ცვლადის გარდაქმნით და K_n გულის ლუწობის გამო მივიღებთ

$$\int_{-\pi}^0 f(x+t) K_n(t) dt = \int_{\pi}^0 f(x-\tau) K_n(-\tau) (-d\tau) = \int_0^{\pi} f(x-\tau) K_n(\tau) d\tau.$$

ამიტომ

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] K_n(t) dt. \quad (5.7.13)$$

ახლა (5.7.13) ტოლობას წევრობრივ დავაკლოთ (5.7.12), მივიღებთ

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) - \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0)] K_n(t) dt. \end{aligned} \quad (5.7.14)$$

ვამჩნევთ, რომ (5.7.14) ტოლობის მარჯვენა მხარე ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $n \rightarrow \infty$. ამასთან, ეს მისწრაფება არის თანაბარი ყოველ $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ სეგმენტზე, როცა f ფუნქცია უწყვეტია (a, b) ღია ინტერვალზე. ამ მიზნით, ნებისმიერად აღებული $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის შევარჩიოთ $\delta > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ შესრულდეს უტოლობები

$$\left. \begin{aligned} |f(x+t) - f(x+0)| &< \varepsilon, \\ |f(x-t) - f(x-0)| &< \varepsilon \end{aligned} \right\}, \quad \text{როცა } 0 \leq t \leq \delta. \quad (5.7.15)$$

ეს შესაძლებელია ყოველი ფიქსირებული x -თვის, თუკი x წერტილზე f ფუნქცია განიკადრის | გვარის წყვეტას ანუ, რაც იგივეა, f -ს გააჩნია $f(x+0)$ და $f(x-0)$ სასრული ზღვრები მარჯვნიდან და მარცხნიდან, შესაბამისად.

თუკი f ფუნქცია უწყვეტია (a, b) შუალედზე, მაშინ იგი თანაბრად უწყვეტია ყოველ $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე, როცა $a < \alpha < \beta < b$. ასეთ შემთხვევაში δ შეიძლება შეირჩეს ისე, რომ იგი არ იყოს დამოკიდებული x -ზე $[\alpha, \beta]$ -დან; ამით მიიღწევა თანაბარი შეფასება.

ახლა (5.7.14) ტოლობაში ინტეგრალი დავანაწილოთ I_1 და I_2 ინტეგრალებად $[0, \delta]$ და $[\delta, \pi]$ სეგმენტებზე, შესაბამისად. (5.7.15) უტოლობებისა და (5.7.11) ტოლობის გათვალისწინებით გვექნება

$$|I_1| < 2\varepsilon \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} K_n(t) dt < 2\varepsilon \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} K_n(t) dt = 2\varepsilon \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \varepsilon,$$

ხოლო

$$|I_2| \leq M_n(\delta) \int_{\delta}^{\pi} \left[|f(x+t)| + |f(x-0)| + |f(x-t)| + |f(x-0)| \right] dt. \quad (5.7.16)$$

ფიქსირებული x -თვის უკანასკნელი ინტეგრალი სასრულია, ხოლო მასთან მდგომი $M_n(\delta)$ მამრავლი ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $n \rightarrow \infty$, ე.ი. $I_2 \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$ და x ფიქსირებულია.

თუ f ფუნქცია უწყვეტია (a, b) შუალედში და $x \in [\alpha, \beta] \subset (a, b)$, მაშინ ინტეგრალი (5.7.16) უტოლობაში არ აღემატება $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt + 2\pi |f(x)|$ რიცხვს. რადგან f შემოსაზღვრულია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე, ამ სეგმენტზე უწყვეტობის გამო, ამიტომ $I_2 \rightarrow 0$ თანაბრად $[\alpha, \beta]$ -ზე, როცა $n \rightarrow \infty$.

დასამტკიცებელი თეორემის ოთხივე მტკიცება გამომდინარეობს (5.7.14) ტოლობიდან, ზემოთ მიღებული დასკვნების საფუძველზე. ამასთან, თანაბრად შეჯამებადობა ფეიერის მეთოდით რაიმე E სიმრავლეზე რომელიმე A სიდიდისკენ ნიშნავს, რომ სხვაობა

$$\sigma_n(x) - A \rightarrow 0 \text{ თანაბრად } E\text{-ზე, როცა } n \rightarrow \infty.$$

ამით ფეიერის 5.7.1 თეორემა დამტკიცებულია. □

3. რადგან მწკრივის შეჯამებადობის $(C, 1)$ მეთოდი რეგულარულია (იხ. თეორემა 5.1.3), ამიტომ ფეიერის ახლახან დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი მნიშვნელოვანი

წინადადება 5.7.2. თუ f ფუნქციას გააჩნია უწყვეტობის x წერტილი და მისი ფურიეს $S[f]$ მწკრივი კრებადია ამ წერტილზე, მაშინ $S[f]$ კრებადია სწორედ $f(x)$ მნიშვნელობისკენ! ანალოგიურად, თუ $S[f]$ კრებადია f -ის x გვარის წყვეტის x წერტილზე, მაშინ

$$S[f](x) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)].$$

წინადადება 5.7.3. f ფუნქციის ფურიეს (5.7.1) მწკრივის $S_n(f; x)$ კერძო ჯამისა და იმავე მწკრივის ფეიერის $\sigma_n(f; x)$ საშუალოს $S_n(f; x) - \sigma_n(f; x)$ სხვაობა x წერტილზე და თვით $\sigma_n(f; x)$, გამოისახება (5.7.1) მწკრივის $a_k \cos kx + b_k \sin kx$ წევრებით შემდეგნაირად:

$$S_n(f; x) - \sigma_n(f; x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$\sigma_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

ეს ტოლობები გამომდინარეობს 5.1 პარაგრაფის (5.1.19) და (5.1.17) ტოლობებიდან, შესაბამისად.

შ ე ნ შ ვ ნ ა 5.7.4. შეჯამებადობის ფეიერის მეთოდის გამორჩეულობა ფურიეს მწკრივებისთვის კარგად ჩანს ფეიერის 5.7.1 თეორემიდან (1) მტკიცების შედარებიდან ფეიერის იმ უწყვეტი ფუნქციისთვის, რომლის ფურიეს მწკრივი განშლადია რომელიღაც წერტილზე (იხ. თავი 5-სადმი შესავლიდან B განყოფილების მე-(3) პუნქტი).

შ ე ნ შ ვ ნ ა 5.7.5. ფეიერის 5.7.1 თეორემიდან მე-(4) მტკიცება იძლევა $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე უწყვეტი და 2π პერიოდული, ანუ წრეწირზე უწყვეტი, ფუნქციის ტრიგონომეტრიული პოლინომებით თანაბრად მიახლოების შესახებ ვაიერშტრასის კლასიკური თეორემის ერთ-ერთ ვარიანტს.

5.8 ფეიერ-ლებეგის თეორემა

როგორც ვნახეთ, ფეიერის 5.7.1 თეორემა იძლევა f ფუნქციის ფურიეს მწკრივის $(C, 1)$ -შეჯამებადობას $f(x)$ ან $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ მნიშვნელობებისკენ, შესაბამისად, თუკი x არის f -ის უწყვეტობის წერტილი ან ამ წერტილზე მას გააჩნია l გვარის წყვეტა.

ასეთი წერტილი ჯამებად ფუნქციას შეიძლება არც კი გააჩნდეს. ამიტომ საჭირო იყო ამ ზოგადი შემთხვევის გამოკვლევა, რაც 1905 წელს მოახდინა ლებეგმა. ლებეგის მიერ მოძებნილ საკმარის პირობას ყოველი ჯამებადი ფუნქცია აკმაყოფილებს თითქმის ყველა წერტილზე და ასეთია ამ ფუნქციის ლებეგის წერტილი.

ამავე დროს, ლებეგის ეს პირობა შესრულებულია ფუნქციის უწყვეტობისა და l გვარის წყვეტის წერტილებზე. მაშასადამე, ლებეგის თეორემა წარმოადგენს ფეიერის თეორემის განზოგადებას და, ამიტომ, ეწოდა მას ფეიერ-ლებეგის თეორემა.

ფეიერ-ლებეგის თეორემა 5.8.1 ([8, გვ. 143]). ჯამებადი f ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ მწკრივი შეჯამებადია ფეიერის მეთოდით $f(x)$ მნიშვნელობისკენ ყველა იმ x წერტილზე, რომელიც წარმოადგენს ლებეგის წერტილს f ფუნქციისთვის, ე.ი. $[0, 2\pi]$ -ის თითქმის ყველა წერტილზე.

დ ა მ ტ ვ ი ც ე ბ ა . ვთქვათ, $x \in [0, 2\pi]$ არის ლებეგის წერტილი² f ფუნქციისთვის და განვიხილოთ t ცვლადის და x პარამეტრის ფუნქცია

$$L_x(t) = \int_0^t |F_f(x, u)| du.$$

სადაც გამოყენებულია აღნიშვნა (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.8, ტოლობა (4.8.5))

$$F_f(x, u) = f(x + u) + f(x - u) - 2f(x).$$

რადგან x არის ლებეგის წერტილი f -თვის, ამიტომ გვაქვს

$$L_x(t) = o(t), \quad t \rightarrow 0 +. \quad (5.8.1)$$

$\sigma_n(x)$ -ის ინტეგრალური გამოსახვა (იხ. პარაგრაფი 5.7, ტოლობა (5.7.4)), K_n გულის ლუწობის გათვალისწინებით, გადაწეროთ შემდეგი სახით

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t)] K_n(t) dt. \quad (5.8.2)$$

მეორეს მხრივ, ისევ K_n -ის ლუწობის გამო, 5.7 პარაგრაფის (5.7.9) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi K_n(t) dt = 1,$$

რომლის გამრავლებით $f(x)$ -ზე მივიღებთ

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2f(x) K_n(t) dt. \quad (5.8.3)$$

² x -ს ეწოდება ლებეგის წერტილი ჯამეზადი φ ფუნქციისთვის, როცა ადგილი აქვს

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} \int_0^h |\varphi(x \pm t) - \varphi(x)| dt = 0$$

ახლა, (5.8.2) ტოლობას წევრობრივ დავაკლოთ (5.8.3), გვექნება

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F_f(x, t) K_n(t) dt. \quad (5.8.4)$$

მაშასადამე, თეორემის დასამტკიცებლად აუცილებელი და საკმარისია ტოლობა

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} F_f(x, t) K_n(t) dt = 0. \quad (5.8.5)$$

პარაგრაფ 5.7-ის (5.7.3) ტოლობის ძალით

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t)$$

და ასევე ყველა t -თვის (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.3, ტოლობა (4.3.1))

$$|D_k(t)| \leq k + \frac{1}{2} < 2n, \text{ როცა } k \leq n.$$

ამიტომ, ყველა t -თვის მართებულია უტოლობა

$$|K_n(t)| \leq 2n, \quad n \geq 1.$$

ტოლობა (5.8.1)-ის ძალით, ყოველ $\varepsilon > 0$ რიცხვს შეესაბამება $\delta > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ შესრულდება უტოლობა

$$\frac{L_x(t)}{t} < \varepsilon, \text{ როცა } 0 < t \leq \delta. \quad (5.8.6)$$

აღებული δ -თვის ავიღოთ N ნატურალური რიცხვი ისეთი, რომ შესრულდეს $\frac{1}{N} < \delta$ უტოლობა. ამის შემდეგ, ყოველი $n > N$ რიცხვისთვის ინტეგრალი (5.8.4) ტოლობიდან წარმოვადგინოთ $(0, 1/n)$, $(1/n, \delta)$ და (δ, π) ინტერვალებზე I_1 , I_2 და I_3 ინტეგრალების ჯამად. შესაბამისად, გვექნება

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} |I_1| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{1/n} F_f(x, t) K_n(t) dt \right| \\ &\leq \frac{2n}{\pi} \int_0^{1/n} |F_f(x, t)| dt = \frac{2n}{\pi} L_x\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{2n}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cdot \varepsilon < \varepsilon. \end{aligned} \quad (5.8.7)$$

შემდეგ, პარაგრაფი 5.7-დან (5.7.6) უტოლობის თანახმად, გვექნება

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} |I_2| &= \frac{1}{\pi} \left| \int_{1/n}^{\delta} F_f(x, t) K_n(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2(n+1)} \int_{1/n}^{\delta} |F_f(x, t)| \frac{dt}{t^2} < \frac{\pi}{2n} \int_{1/n}^{\delta} |F_f(x, t)| \frac{dt}{t^2}. \end{aligned}$$

უკანასკნელი ინტეგრალის ნაწილობითი ინტეგრებით და (5.8.6) უტოლობის გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \int_{1/n}^{\delta} |F_f(x, t)| dt \cdot \frac{1}{t^2} &= L_x(t) \cdot \frac{1}{t^2} \Big|_{1/n}^{\delta} + 2 \int_{1/n}^{\delta} \frac{L_x(t)}{t} \cdot \frac{dt}{t^2} \\ &= \frac{L_x(\delta)}{\delta} \cdot \frac{1}{\delta} - \frac{L_x(1/n)}{1/n} \cdot n + 2\varepsilon \int_{1/n}^{\delta} \frac{dt}{t^2} < \varepsilon \cdot \frac{1}{\delta} + \varepsilon n + 2\varepsilon \left(-\frac{1}{t} \Big|_{1/n}^{\delta} \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{n} + \varepsilon n + 2\varepsilon \left(n - \frac{1}{\delta} \right) < \frac{\varepsilon}{\delta} + \varepsilon n + 2\varepsilon n = 3\varepsilon n + \varepsilon \cdot \frac{1}{\delta} < 4\varepsilon n, \end{aligned}$$

რადგან $\frac{1}{\delta} < N < n$.

მაშასადამე,

$$\frac{1}{\pi} |I_2| < \frac{\pi}{2n} \cdot 4\varepsilon n = 2\pi\varepsilon. \quad (5.8.8)$$

დაბოლოს, პარაგრაფი 5.7-ის (5.7.6) უტოლობის ძალით, გვაქვს შეფასება

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} |I_3| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} |F_f(x, t)| K_n(t) dt \leq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2(n+1)} \int_{\delta}^{\pi} |F_f(x, t)| \frac{dt}{t^2} \\ &< \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{\delta^2} \int_0^{\pi} |F_f(x, t)| dt \leq \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{\delta^2} \cdot 4 \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt < \varepsilon, \quad (5.8.9) \end{aligned}$$

თუკი n საკმარისად დიდია. ახლა, (5.8.5) ტოლობა გამომდინარეობს (5.8.7)-(5.8.9) უტოლობებიდან. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

წინადადება 5.8.2. f ჯამებადი ფუნქციის $S[f]$ ფურიეს მწკრივი თუ კრებადია რაიმე E სიმრავლეზე, მაშინ $S[f]$ კრებადია $f(x)$ მნიშვნელობისკენ თითქმის ყველა x -თვის E -დან.

დამტკიცება. რადგან შეჯამებადობის $(C, 1)$ მეთოდი რეგულარულია, ამიტომ $S[f]$ მწკრივი კრებადი უნდა იყოს იმ მნიშვნელობებისკენ, საითკენაც აჯამებს მას $(C, 1)$ მეთოდი. მაგრამ, ფეიერ-ლებეგის თეორემით, $S[f]$ მწკრივი $(C, 1)$ -შეჯამებადია $f(x)$ მნიშვნელობისკენ თითქმის ყველგან. ამრიგად, $S[f]$ მწკრივი კრებადია $f(x)$ მნიშვნელობისკენ თითქმის ყველა $x \in E$ წერტილზე. $\square$

წინადადება 5.8.3. არ არსებობს ისეთი ჯამებადი φ ფუნქცია, რომლის $S[\varphi]$ ფურიეს მწკრივი კრებადი ან $(C, 1)$ -შეჯამებადი იქნება $+\infty$ -კენ ან $-\infty$ -კენ დადებითი ზომის რაიმე E სიმრავლეზე.

დამტკიცება. მწკრივის შეჯამებადობის $(C, 1)$ მეთოდის სახესებით რეგულარულობის გამო, $S[\varphi]$ იქნებოდა ფეიერის მეთოდით შეჯამებადი $+\infty$ -კენ ან $-\infty$ -კენ E სიმრავლეზე. მაგრამ ფეიერ-ლებეგის თეორემის ძალით, $S[\varphi]$ -ის $(C, 1)$ -ჯამი უნდა იყოს $\varphi(x)$ მნიშვნელობანი თითქმის ყველა x -თვის E -დან. ეს გამოიწვევდა ჯამებადი φ ფუნქციის მნიშვნელობების ტოლობას $+\infty$ -თან ან $-\infty$ -თან დადებითი ზომის სიმრავლეზე. ეს კი შეუძლებელია, რადგან ჯამებადი ფუნქცია სასრულია თითქმის ყველგან. $\square$

შენიშვნა 5.8.4. ფეიერ-ლებეგის თეორემის თანახმად, ჯამებადი f -ის ფურიეს $S[f]$ მწკრივი ჯამებადია ფეიერის მეთოდით $f(x)$ მნიშვნელობისკენ, როცა x არის ლებეგის წერტილი f -თვის.

აქ ჩნდება ბუნებრივი კითხვა: ფეიერ-ლებეგის თეორემა ხომ არ არის მართებული იმ x წერტილზეც, რომლისთვისაც $f(x)$ მნიშვნელობა წარმოადგენს f -ის განუსაზღვრელი ინტეგრალის წარმოებულს x წერტილზე?

ამ კითხვას უარყოფითი პასუხი გასცა (1905 წ.) ლებეგმა და დაადგინა მისი მართებულობა $(C, 2)$ მეთოდისთვის, რომელიც ძლიერია $(C, 1)$ მეთოდზე.

შენიშვნა 5.8.5. წინა შენიშვნაში დასმულ კითხვაზე არსებობს დადებითი პასუხი, ოღონდ მწკრივის შეჯამებადობის აბელ-პუასონის (A) მეთოდისთვის, რაც ერთხელ კიდევ ადასტურებს (A) მეთოდის სიძლიერეს $(C, 1)$ მეთოდთან შედარებით (იხ. პარაგრაფი 5.17).

5.9 პუასონის ინტეგრალი

1. თუ f ფუნქცია 2π პერიოდულია და ჯამებადი 2π სიგრძის რომელიმე სეგმენტზე, ვთქვათ, $[-\pi, \pi]$ -ზე ან $[0, 2\pi]$ -ზე, მაშინ მას შეესაბამება ფურიეს მწკრივი

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (5.9.1)$$

სადაც f -თვის ფურიეს a_n და b_n კოეფიციენტები მოცემულია ფურიეს ფორმულებით

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, \dots). \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (5.9.2)$$

ახლა, a_n და b_n კოეფიციენტების მეშვეობით, შევადგინოთ კომპლექსური $z = x + iy$ ცვლადის

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) z^n \quad (5.9.3)$$

ხარისხოვანი მწკრივი, რაც პოლარულ r და θ კოორდინატებში, $z = re^{i\theta}$ ტოლობის გათვალისწინებით, მიიღებს სახეს

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) r^n e^{in\theta}. \quad (5.9.4)$$

რადგან a_n და b_n წარმოადგენს ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს, ამიტომ რი-
მან-ლებეგის თეორემის ძალით $a_n \rightarrow 0$ და $b_n \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$ (იხ. თავი 3, პარაგ-
რაფი 3.9). ამის გამო, $re^{i\theta}$ -ის მიმართ ხარისხოვანი (5.9.4) მწკრივის კრებადობის

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n - ib_n|}}$$

რადიუსი კოში-ადამარის ფორმულის თანახმად, არ იქნება 1-ზე ნაკლები ანუ $R \geq 1$. ეს ნიშნავს, რომ (5.9.4) მწკრივის ჯამი $\phi_f(re^{i\theta})$ ანალიზური ფუნქციაა ერთეულოვან წრეში

$|z| < 1$ და ოილერის (ეილერის) $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ფორმულის გათვალისწინებით გვაქვს ტოლობა

$$\phi_f(re^{i\theta}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n)r^n(\cos \theta + i \sin \theta)^n.$$

მაგრამ მუავრის ფორმულით³

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.9.5)$$

და, ამიტომ,

$$\phi_f(re^{i\theta}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n)r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta). \quad (5.9.6)$$

თუ (5.9.6) მწკრივში მოვახდენთ აღნიშნულ გამრავლებას და ასე მიღებულ მწკრივში გამოვყოფთ ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს და, გარდა ამისა, (5.9.6)-ის მარცხენა მხარეს ჩავწერთ $\phi_f = u_f + iv_f$ სახით, მივიღებთ ტოლობებს

$$u_f(re^{i\theta}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad (5.9.7)$$

$$v_f(re^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta). \quad (5.9.8)$$

$\phi_f(z)$ ფუნქციის ანალიზურობიდან $|z| < 1$ წრეში გამომდინარეობს მისი ჰარმონიულობა იმავე წრეში. ეს ნიშნავს, რომ ϕ_f ფუნქცია ამ წრეში აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = 0, \quad r \neq 0.$$

რადგან ამ განტოლებაში ფიგურირებს კერძო წარმოებულები ნამდვილი r და θ ცვლადების მიმართ, ამიტომ კომპლექსური ϕ_f ფუნქციის ჰარმონიულობა ეკვივალენტურია u_f და v_f ფუნქციების ერთდროული ჰარმონიულობის.

³(5.9.5) ფორმულა მართებულია უარყოფითი მთელი n -თვისაც იმის გათვალისწინებით, რომ $z^n = 1/z^{|n|}$, როცა $z \neq 0$ და მთელი რიცხვი $n < 0$. მართლაც, $n = -|n|$ და

$$\begin{aligned} [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n &= [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^{-|n|} = \frac{1}{[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^{|n|}} \\ &= \frac{1}{r^{|n|}(\cos |n|\theta + i \sin |n|\theta)} = r^{-|n|} \cdot \frac{1}{\cos n\theta - i \sin n\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta). \end{aligned}$$

ამრიგად, (5.9.7) და (5.9.8) ტოლობებით მოცემული $u_f(re^{i\theta})$ და $v_f(re^{i\theta})$ წარმოადგენს ერთეულოვან $|z| < 1$ წრეში ჰარმონიულ ფუნქციებს, ამასთან, v_f -ს ეწოდება u_f -სადმი ჰარმონიულად შეუღლებული ფუნქცია.

2. ჩვენი უახლოესი მიზანია ჰარმონიული u_f და v_f ფუნქციები წარმოვადგინოთ ინტეგრალების სახით, რაც საშუალებას მოგვცემს მათი თვისებები დავაკავშიროთ (5.9.1) მწკრივის წარმომქმნელი f ფუნქციის თვისებებთან.

ამ მიზნით, (5.9.7)-ში ჩავსვათ a_n და b_n კოეფიციენტების გამოსახვა (5.9.2) ფორმულებით, მივიღებთ

$$\begin{aligned} u_f(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) [\cos n\theta \cos nt + \sin n\theta \sin nt] r^n dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta - t) \right] dt. \end{aligned} \quad (5.9.9)$$

აქ მწკრივშიგა ინტეგრალი გამოტანილია მწკრივის წინ. ეს მართლზომიერია (5.9.9) მწკრივის თანაბრად კრებადობის გამო საინტეგრაციო $t \in [-\pi, \pi]$ ცვლადის მიმართ, რაც გამომდინარეობს t -ს მიმართ თანაბარი შეფასებიდან

$$\sum_{n=1}^{\infty} |r^n \cos n(\theta - t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} r^n$$

და ფუნქციური მწკრივის თანაბრად კრებადობის “ვაიერშტრასის ნიშანი”-დან: თუ $\sup_{x \in E} |A_n(x)| = \alpha_n$ მიმდევრობისთვის რიცხვითი $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ მწკრივი კრებადია, მაშინ ფუნ-

ქციური $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)$ მწკრივი თანაბრად კრებადია E სიმრავლეზე (აქ თანაბრად კრებადობა არის მხოლოდ და მხოლოდ საკმარისი პირობა. მართლაც, გვექონდა (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.15) ფურიეს ნებისმიერი მწკრივის წევრობრივი ინტეგრების მართლზომიერება, თუმცა ზოგიერთი მათგანი შეიძლება ყველგან განშლადიც კი იყოს, თანაბრად კრებადობა კი არა!).

ტოლობის

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} = \frac{1}{1 - re^{i\theta}}, \quad 0 \leq r < 1$$

მარცხენა მხარე ოილერისა (ეილერის) და მუავრის ფორმულების ძალით მიიღებს სახეს

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta),$$

ხოლო მარჯვენა მხარე გარდავექმნათ ასე

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - re^{i\theta}} &= \frac{1 - re^{-i\theta}}{(1 - re^{i\theta})(1 - re^{-i\theta})} \\ &= \frac{1 - r \cos \theta + ir \sin \theta}{1 - r(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + r^2} = \frac{1 - r \cos \theta + ir \sin \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}. \end{aligned}$$

ამრიგად,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = \frac{1 - r \cos \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2} + i \frac{r \sin \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}.$$

ამ ტოლობაში ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების გატოლებით გვექნება

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1 - r \cos \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}, \quad (5.9.10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r \sin \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}. \quad (5.9.11)$$

(5.9.10) ტოლობის ძალით,

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1 - r \cos \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}.$$

ამიტომ

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1 - r \cos \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2} - \frac{1}{2} = \frac{1 - r^2}{2(1 - 2r \cos \theta + r^2)}. \quad (5.9.12)$$

უკანასკნელი ტოლობის ძალით (5.9.9) მიიღებს სახეს

$$u_f(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1 - r^2}{2(1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2)} dt,$$

ანუ

$$u_f(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P(r, \theta - t) dt, \quad (5.9.13)$$

სადაც

$$P(r, \tau) = \frac{1 - r^2}{2(1 - 2r \cos \tau + r^2)}, \quad 0 \leq r < 1. \quad (5.9.14)$$

$P(r, \tau)$ -ს ეწოდება პუასონის გული.

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ ტოლობას

$$v_f(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n(\theta - t) \right] dt,$$

რომლის მიმართ (5.9.11) ტოლობის გამოყენება მოგვცემს

$$v_f(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{r \sin(\theta - t)}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2} dt,$$

ანუ

$$v_f(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) Q(r, \theta - t) dt, \quad (5.9.15)$$

სადაც

$$Q(r, \tau) = \frac{r \sin \tau}{1 - 2r \cos \tau + r^2}, \quad 0 \leq r < 1. \quad (5.9.16)$$

$Q(r, \tau)$ -ს ეწოდება პუასონის შეუღლებული გული.

პუასონმა (5.9.13) და (5.9.15) ფორმულები დაამტკიცა 1820 წელს.

(5.9.10), (5.9.11) და (5.9.14), (5.9.16) ტოლობებიდან ჩანს, რომ $P(r, \theta)$ და $Q(r, \theta)$ ფუნქციები წარმოადგენს ერთეულოვან $|z| < 1$ წრეში ანალიზური $\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta}$ ფუნქციის ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს. ეს ნიშნავს, რომ $P(r, \theta)$ და $Q(r, \theta)$ გულები წარმოადგენს ერთეულოვან $|z| < 1$ წრეში ჰარმონიულ ფუნქციებს და მათ აქვთ ყველა რიგის კერძო წარმომადგენელი ისევე, როგორც $u_f(re^{i\theta})$ და $v_f(re^{i\theta})$ ფუნქციებს. ამასთან ერთად, აღნიშნული ყველა კერძო წარმომადგენელი ჰარმონიულია იმავე წრეში გარკვეული შესწორებით. სახელდობრ, ჰარმონიულია ფუნქციები:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} u_f, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} v_f, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} P, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} Q, \quad r \frac{\partial}{\partial r} u_f, \quad r \frac{\partial}{\partial r} v_f, \quad r \frac{\partial}{\partial r} P, \quad r \frac{\partial}{\partial r} Q.$$

შენიშვნა 5.9.1. შვარცმა 1872 წელს დაამტკიცა, რომ $(-\infty, +\infty)$ -ზე უწყვეტი და 2π პერიოდული f ფუნქციისთვის (5.9.13) ინტეგრალს ყოველ $(1, \theta_0)$ წერტილზე გააჩნია $f(\theta_0)$ -ის ტოლი ზღვარი, როცა წრის (r, θ) შიგა წერტილი ისწრაფვის საზღვრის $(1, \theta_0)$ წერტილისკენ რაიმე შეზღუდვის გარეშე (ეს შედეგი გამოქვეყნდა 1890 წელს). ამის შემდეგ ეწოდა (5.9.13) ინტეგრალს პუასონის ინტეგრალი f ფუნქციისთვის და (5.9.15)-ს კი — პუასონის შუღლებული ინტეგრალი იგივე f ფუნქციისთვის.

ერთი და იგივე f ფუნქციით წარმოქმნილ (5.9.13) და (5.9.15) ინტეგრალებს გააჩნია საკმაოდ განსხვავებული თვისებები.

5.10 P და Q გულების თვისებები

1. პარაგრაფ 5.9-ის (5.9.12) და (5.9.14) ტოლობების თანახმად, პუასონის $P(r, \tau)$ გულის გამწვრივებაა

$$P(r, \tau) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\tau, \quad 0 \leq r < 1. \quad (5.10.1)$$

ასევე,

$$Q(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\tau, \quad 0 \leq r < 1. \quad (5.10.2)$$

2. რადგან $r = 0$ მნიშვნელობას შეესაბამება $O = (0, 0)$ კოორდინატთა სათავე, ამიტომ ამ O წერტილზე P ფუნქციის მნიშვნელობაა, (5.10.1) ტოლობის ძალით, $P(0, 0) = \frac{1}{2}$ ან მეორეაზროვნად $P(0, \tau) = \frac{1}{2}$ ყოველი $\tau \in (-\infty, +\infty)$ -თვის. ამიტომ 5.9 პარაგრაფის (5.9.13) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$u_f(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{a_0}{2}. \quad (5.10.3)$$

ამრიგად, 5.9 პარაგრაფის (5.9.7) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$u_f(re^{i\theta}) = u_f(0, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad 0 \leq r < 1.$$

ასევე, (5.10.2) ტოლობიდან $Q(0, 0) = 0$ და, ამის გამო, 5.9 პარაგრაფის (5.9.15)-დან გამომდინარეობს $v_f(0, 0) = 0$. სწორედ ამ ტოლობის გამო არის მიღებული შეთანხმება, რომ პარმონიული u_f ფუნქციისადმი პარმონიულად შეუღლებული v_f ფუნქცია, რომელიც u_f -ით განისაზღვრება მუდმივი შესაკრების სიზუსტით, აკმაყოფილებდეს $v_f(0, 0) = 0$ პირობას და ამით v_f განისაზღვრა ცალსახად.

3. (5.10.1) ტოლობიდან გამომდინარეობს $P(r, \tau)$ ფუნქციის ლუწობა τ -ს მიმართ: $P(r, -\tau) = P(r, \tau)$. ამიტომაც გვაქვს ტოლობა

$$\int_{-\pi}^{\pi} P(r, t) dt = 2 \int_0^{\pi} P(r, t) dt.$$

ასევე, (5.10.2) ტოლობა გვიჩვენებს $Q(r, \tau)$ ფუნქციის კენტობას τ -ს მიმართ:

$$Q(r, -\tau) = -Q(r, \tau).$$

ამის გამო

$$\int_{-\pi}^{\pi} Q(r, t) dt = 0.$$

4. თუ ავიღებთ $f(t) = 1$ კერძო შემთხვევას ყველა t -თვის, მაშინ პარაგრაფ 5.9-ის (5.9.2) ტოლობებიდან გამომდინარეობს იგივეური 1-იანის შესაბამისი a_n და b_n კოეფიციენტების ნულობა n -ის $1, 2, 3, \dots$ მნიშვნელობებისთვის (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.3, ტოლობები (1.3.3)). ამიტომ იგივეური 1-იანის შესაბამისი მარჯვენა მხარე 5.9 პარაგრაფის (5.9.7) ტოლობაში იქნება $\frac{\pi}{2}$, რაც (5.9.3) ტოლობის ძალით არის $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot dt = 1$ რიცხვი. მაშასადამე, იგივეური 1-იანის შესაბამისი მარცხენა მხარე (5.9.7) ტოლობისა, 5.9 პარაგრაფიდან, არის 1. ეს კი (5.9.13) ტოლობით ნიშნავს, რომ

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot P(r, t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} P(r, t) dt.$$

მაშასადამე,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t) dt = 1, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} P(r, t) dt = \frac{1}{2}. \quad (5.10.4)$$

5. მართებული დამოკიდებულება

$$1 - 2r \cos \tau + r^2 = (1-r)^2 + 4r \sin^2 \frac{1}{2} \tau > 0, \quad \tau \in (-\infty, +\infty), \quad 0 \leq r < 1. \quad (5.10.5)$$

6. უკანასკნელი უტოლობიდან და (5.9.14) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $P(r, \tau)$ პუასონის გული დადებითია. $P(r, t)$ გულის ეს თვისება ასე გამოისახება

$$P(r, t) > 0, \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad 0 \leq r < 1.$$

7. აგრეთვე,

$$Q(r, t) > 0, \quad \text{როცა } 0 < t < \pi, \quad 0 < r < 1.$$

8. ვთქვათ, $0 < \delta < \pi$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $m(r, \delta) = \max_{\delta \leq |t| \leq \pi} P(r, t)$. მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{r \rightarrow 1-} m(r, \delta) = 0.$$

ეს ტოლობა ნიშნავს, რომ $P(r, t)$ ფუნქციის სწრაფვა ნულისკენ, როცა $r \rightarrow 1-$, თანაბარია $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ გაერთიანებაზე ყოველი $\delta > 0$ რიცხვისთვის. მართლაც, როცა $\delta \leq |t| \leq \pi$, მაშინ $1 - 2r \cos t + r^2 \geq 1 - 2r \cos \delta + r^2$ და, ამიტომ,

$$\max_{\delta \leq |t| \leq \pi} P(r, t) \leq \frac{1 - r^2}{2(1 - 2r \cos \delta + r^2)} = P(r, \delta) \rightarrow 0, \quad \text{როცა } r \rightarrow 1-. \quad (5.10.6)$$

9. (5.10.6) შეფასების გაუმჯობესება

$$\max_{\delta \leq |t| \leq \pi} P(r, t) \leq \frac{1 - r^2}{2 \sin^2 \delta}. \quad (5.10.7)$$

მართლაც, $\lambda(r) = 1 - 2r \cos \delta + r^2$ ფუნქციის $\lambda'(r) = 2r - 2 \cos \delta$ წარმოებული ნული გახდება $r = \cos \delta$ წერტილზე, რომელზეც $\lambda'(r) = 2(r - \cos \delta)$ წარმოებული r -ის ზრდისას უარყოფით ნიშანს იცვლის დადებითზე. ამიტომ $\lambda(r)$ ფუნქციას მინიმუმი აქვს $r = \cos \delta$ წერტილზე და ეს მინიმუმი ტოლია $1 - 2 \cos \delta \cos \delta + \cos^2 \delta = 1 - \cos^2 \delta = \sin^2 \delta$ რიცხვის, აქედან გამომდინარეობს (5.10.7).

მაშასადამე,

$$\min_{\substack{\delta \leq |t| \leq \pi \\ 0 \leq r < 1}} (1 - 2r \cos t + r^2) = \sin^2 \delta. \quad (5.10.8)$$

10. გვაქვს დამოკიდებულებები

$$P(r, \rho) = \frac{1 - r^2}{2(1 - r)^2} = \frac{1 + r}{2(1 - r)} \rightarrow +\infty, \text{ როცა } r \rightarrow 1- \quad (5.10.9)$$

და

$$P(r, \pi) = \frac{1 - r^2}{2(1 + r)^2} = \frac{1 - r}{2(1 + r)} \rightarrow 0, \text{ როცა } r \rightarrow 1-. \quad (5.10.10)$$

11. თუ $0 < \delta < \pi$, მაშინ

$$\lim_{r \rightarrow 1-} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta P(r, t) dt = \frac{1}{2}, \quad (5.10.11)$$

$$\lim_{r \rightarrow 1-} \int_\delta^\pi P(r, t) dt = 0. \quad (5.10.12)$$

მართლაც, (5.10.4) ტოლობებიდან მეორე ინტეგრალი ჩაწეროთ ასე

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta P(r, t) dt + \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi P(r, t) dt,$$

რომლის მეორე შესაკრები არ აღემატება $\frac{1}{\pi} m(r, \delta) \cdot (\pi - \delta) \rightarrow 0$ სიდიდეს, როცა $r \rightarrow 1-$.

12. მართებულია ორმხრივი შეფასებები

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - r}{1 + r} \leq P(r, t) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + r}{1 - r}, \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad 0 \leq r < 1. \quad (5.10.13)$$

ამასთან ერთად, ეს შეფასებანი ზუსტია, რადგან $r = 0$ მნიშვნელობისთვის მისი განაპირა წევრები ემთხვევა (5.10.1)-დან გამომდინარე $P(0, \tau) = \frac{1}{2}$, $\tau \in (-\infty, +\infty)$ ტოლობას.

(5.10.13) დამოკიდებულებების საჩვენებლად შევნიშნოთ, რომ ფიქსირებული r -თვის $P(r, t)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი და მინიმუმი $t = 0$ და $t = \pi$ წერტილებზე, შესაბამისად.

13. პარაგრაფ 5.9-ის (5.9.13) ტოლობა ვაინტეგრირებთ θ ცვლადით $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე და ამგვარად მიღებული ტოლობის მარჯვენა მხარეში მოვახდინოთ ინტეგრების რიგის შენაცვლება ფუბინის თეორემის თანახმად. შემდეგ გამოვიყენოთ (5.10.4)-ის პირველი ტოლობა, მივიღებთ

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_f(re^{i\theta}) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt. \quad (5.10.14)$$

კერძოდ, თუ აქ ავიღებთ $r = 0$, მაშინ გვექნება

$$u_f(0, 0) \cdot 2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt,$$

რაც სრულ შესაბამისობაშია (5.10.3) ტოლობის მარცხენა მხარესთან.

მაშასადამე, (5.10.14) ტოლობის მარცხენა მხარე არაა დამოკიდებული r -ზე.

5.11 ფურიეს მწკრივის შეჯამებადობა (A) მეთოდით

5.9 და 5.10 პარაგრაფების საფუძველზე შეგვიძლია ჩამოვყალიბოთ

თ ე ო რ ე მ ა 5.11.1. 2π პერიოდულ და $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ყოველ f ჯამებად ფუნქციას, მისი ფურიეს მწკრივის

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (5.11.1)$$

a_n და b_n კოეფიციენტების მეშვეობით შეესაბამება ერთეულოვან ღია წრეში $|z| < 1$ ანალიზური ფუნქცია

$$\phi_f(re^{i\theta}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n)r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta),$$

რომლის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები — იმავე წრეში ჰარმონიული ფუნქციები

$$u_f(re^{i\theta}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (5.11.2)$$

და

$$v_f(re^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta)$$

შეიძლება ჩაიწეროს f ფუნქციის შესაბამისი პუასონის ინტეგრალის და პუასონის შეუღლებული ინტეგრალის სახით შემდეგნაირად:

$$u_f(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P(r, \theta - t) dt,$$

$$v_f(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)Q(r, \theta - t) dt,$$

სადაც

$$P(r, \tau) = \frac{1 - r^2}{2(1 - 2r \cos \tau + r^2)} \quad (5.11.3)$$

და

$$Q(r, \tau) = \frac{r \sin \theta}{1 - 2r \cos \tau + r^2}, \quad (5.11.4)$$

იმავე წრეში პარამონიული ფუნქციები, წარმოადგენს პუასონის გულს და პუასონის შეუღლებულ გულს.

ცხადია, რომ (5.11.2) ტოლობის მარჯვენა მხარე წარმოადგენს (5.11.1) მწკრივთან ასოცირებულ, r -ის მიმართ ხარისხიან მწკრივს (იხ. პარაგრაფი 5.2) ანუ პუასონ-აბელის საშუალოს f ფუნქციის ფურიეს (5.11.1) მწკრივისთვის.

თავი 5-ის პარაგრაფ 5.3-ის თეორემა 5.3.1-ის ძალით, მწკრივის $(C, 1)$ -შეჯამებადობა რაიმე s რიცხვისკენ იწვევს იმავე მწკრივის (A) შეჯამებადობას იგივე s -კენ.

მეორეს მხრივ, ფეიერის თეორემის თანახმად (იხ. პარაგრაფი 5.7), f ფუნქციის (5.11.1) ფურიეს მწკრივი $(C, 1)$ -შეჯამებადია $f(x)$ რიცხვისკენ f -ის უწყვეტობის x წერტილზე, $\frac{1}{2} [f(x+0) + \frac{1}{2} f(x-0)]$ რიცხვისკენ f -ის x გვარის წყვეტის x წერტილზე და არის თანაბრად $(C, 1)$ -შეჯამებადი $f(x)$ -კენ f -ის უწყვეტობის ჩაკეტილ ინტერვალზე.

უფრო ზოგადად, ფეიერ-ლებეგის თეორემის ძალით (იხ. პარაგრაფი 5.8), (5.11.1) მწკრივი $(C, 1)$ -შეჯამებადია $f(x)$ მნიშვნელობისკენ ყველა იმ x წერტილზე, რომელიც წარმოადგენს ლებეგის წერტილს f ფუნქციისთვის, ე.ი. თითქმის ყველა $x \in [-\pi, \pi]$ წერტილზე.

მაშასადამე, გვაქვს

თ ე ო რ ე მ ა 5.11.2. f ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ მწკრივის პუასონ-აბელის საშუალოების კავშირი თვით f ფუნქციასთან გამოისახება შემდეგი ტოლობებით:

$$(1) \lim_{r \rightarrow 1-} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)P(r, \theta - t) dt = f(\theta) \quad f\text{-ის უწყვეტობის } \theta \text{ წერტილზე;}$$

(2) თანაბრად θ -ს მიმართ, (1) ტოლობას ადგილი აქვს f -ის უწყვეტობის ჩაკეტილ ინტერვალზე;

$$(3) \lim_{r \rightarrow 1-} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P(r, \theta - t) dt = \frac{1}{2} [f(\theta + 0) + f(\theta - 0)] \quad f\text{-ის } \theta \text{ გვარის წვევების } \theta \text{ წერტილზე;}$$

$$(4) \lim_{r \rightarrow 1-} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P(r, \theta - t) dt = f(\theta) \quad f \text{ ფუნქციის ლებეგის } \theta \text{ წერტილზე.}$$

(1)–(4) მტკიცებულებებში ზღვარი განხილულია რადიუსის გასწვრივ ანუ, რაც იგივეა, ერთეულოვანი ღია წრის შიგა $(r, \theta) = re^{i\theta}$ წერტილი ისწრაფვის ერთეულოვანი წრეწირის $(1, \theta) = e^{i\theta}$ წერტილისკენ. ასეთ შემთხვევაში ლაპარაკობენ **რადიალურ** ზღვარზე.

ცხადია, რომ შეიძლება $(r, \theta) = re^{i\theta}$ წერტილი ისწრაფოდეს საზღვრის რაღაც $(1, \theta_0) = e^{i\theta_0}$ წერტილისკენ, რომლის პოლარული θ_0 კუთხე განსხვავებულია θ -გან, ე.ი. $(r, \theta) = re^{i\theta}$ ისწრაფვის $(1, \theta_0) = e^{i\theta_0}$ -კენ ნებისმიერი გზით (ბილიკით), სიმბოლურად $(r, \theta) \rightarrow (1, \theta_0)$. ასეთ მისწრაფებას ეწოდება **თავისუფალი**, ე.ი. (r, θ) -ის სწრაფვა $(1, \theta_0)$ -კენ არაა შემზღუდული რაიმე პირობით.

თუკი მისწრაფება ისეთია, რომ (r, θ) მუდმივად რჩება იმ კუთხეში, რომელიც შედგენილია $(1, \theta_0)$ წერტილიდან გამომავალი ორი ქორდით და ამ კუთხისთვის რადიუსი კი წარმოადგენს ბისექტრისას, მაშინ ამბობენ, რომ (r, θ) ისწრაფვის $(1, \theta_0)$ -კენ **კუთხურად**, ან სხვაგვარად, წრეწირისადმი **არამხევი გზით** (არამხევი ბილიკით) და წერენ

$$(r, \theta) \xrightarrow{\wedge} (1, \theta_0).$$

მაშასადამე, კუთხური ზღვარი არის შემზღუდული, არათავისუფალი ზღვრის კერძო სახეობა.

ძირითადად, განვიხილავთ პუასონის ინტეგრალის **თავისუფალ, კუთხურ და რადიალურ ზღვრებს**.

ცხადია, რომ თავისუფალი ზღვრის არსებობა იწვევს მისივე ტოლი კუთხური ზღვრის არსებობას და ეს უკანასკნელი კი იწვევს რადიალური ზღვრის არსებობას და მათ ტოლობას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5.11.3. პუასონის $P(r, \tau)$ გულის ზღვარი (თავისუფალი) ნულია ყველა $e^{i\theta}$ წერტილზე, როცა $0 < \theta < 2\pi$. ეს გამომდინარეობს მისი წარმოდგენიდან (იხ. პარაგრაფი 5.9, ტოლობა (5.9.14)) და 5.10 პარაგრაფის (5.10.5) უტოლობიდან. როცა $(r, 0) \rightarrow (1, 0)$ -კენ, მაშინ $P(r, 0) \rightarrow +\infty$ (იხ. პარაგრაფი 5.10, ტოლობა (5.10.9)) და $P(r, \pi) \rightarrow 0$, როცა $(r, \pi) \rightarrow (1, \pi)$ -კენ (იხ. იქვე, (5.10.10) დამოკიდებულება).

5.12 უწყვეტი ფუნქციის პუასონის ინტეგრალის ზღვარი

2π პერიოდული და 2π სიგრძის რაიმე სეგმენტზე ჯამებადი და, მაშასადამე, 2π სიგრძის ყოველ სეგმენტზე ჯამებადი, რომელიმე ψ ფუნქციის პუასონის ინტეგრალს აღვნიშნავდით $u_\psi(re^{i\theta})$ სიმბოლოთი. ამიერიდან, წერის გამარტივების მიზნით, იმავე ინტეგრალს აღვნიშნავთ $\psi(r, x)$ სიმბოლოთი. გარდა ამისა, ყოველ ფუნქციას, რომლის პუასონის ინტეგრალსაც განვიხილავთ, ვიგულისხმებთ 2π პერიოდულს და ჯამებადს $[-\pi, \pi]$ ან $[0, 2\pi]$ სეგმენტებზე.

ახლა დავამტკიცოთ ფაქტუს შემდეგი

თ ე ო რ ე მ ა 5.12.1 ([8, გვ. 154], [71]). თუ f ფუნქცია უწყვეტია რაიმე x_0 წერტილზე, მაშინ f -ის პუასონის $f(r, x)$ ინტეგრალს $(1, x_0)$ წერტილზე გააჩნია $f(x_0)$ -ის ტოლი ზღვარი (თავისუფალი), ანუ მართებულია ტოლობა

$$\lim_{(r,x) \rightarrow (1,x_0)} f(r, x) = f(x_0), \quad (5.12.1)$$

კერძოდ, რადიალური ზღვარი

$$\lim_{(r,x) \rightarrow (1,x_0)} f(r, x) = f(x_0),$$

სადაც

$$f(r, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P(r, x - t) dt \quad (5.12.2)$$

არის f ფუნქციის პუასონის ინტეგრალი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . პარაგრაფი 5.10-დან (5.10.4) დამოკიდებულებების პირველი

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t) dt = 1$$

ტოლობა შეიძლება ასეც ჩაიწეროს ნებისმიერი x -თვის,

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, x - t) dt. \quad (5.12.3)$$

მართლაც, (5.12.3)-ის ინტეგრალში მოვასდინოთ ცვლადის გარდაქმნა $x - t = u$, მივიღებთ გამოსახულებას

$$-\frac{1}{\pi} \int_{x+\pi}^{x-\pi} P(r, u) du.$$

მაგრამ, $P(r, u)$ არის 2π პერიოდული ფუნქცია u ცვლადის მიმართ (იხ. პარაგრაფი 5.10, ტოლობა (5.10.1)) და, ამიტომ, უკანასკნელი ინტეგრალი ტოლია

$$-\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} P(r, u) du = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, u) du = 1$$

(იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.3, ტოლობა (1.3.6)) ინტეგრალის, ანუ ადგილი აქვს (5.12.3) ტოლობას.

ახლა, (5.12.3)-ის ორივე მხარე გავამრავლოთ $f(x_0)$ რიცხვზე, რომელიც სასრულია f -ის უწყვეტობის გამო x_0 წერტილზე. მიღებული ტოლობა წევრობრივ დავაკლოთ (5.12.2) ტოლობას, მივიღებთ

$$f(r, x) - f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - f(x_0)] P(r, x - t) dt. \quad (5.12.4)$$

f ფუნქციის x_0 წერტილზე უწყვეტობის გამო, ნებისმიერად ადებულ $\varepsilon > 0$ რიცხვს შეესაბამება $\delta > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ შესრულდება უტოლობა

$$|f(t) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ როცა } x_0 - \delta \leq t \leq x_0 + \delta. \quad (5.12.5)$$

ახლა, (5.12.4) ტოლობის ინტეგრალი წარმოვადგინოთ ასე

$$\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} + \int_{[-\pi, \pi] \setminus (x_0-\delta, x_0+\delta)} \equiv I_1(r, x) + I_2(r, x).$$

(5.12.3) და (5.12.5) დამოკიდებულებების ძალით გვაქვს უტოლობა

$$|I_1(r, x)| \leq \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} P(r, x - t) dt \leq \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, x - t) dt = \frac{\varepsilon}{\pi}.$$

ამრიგად, ნებისმიერი x -თვის და ნებისმიერი r -თვის, $0 \leq r < 1$, გვაქვს

$$|I_1(r, x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \leq r < 1, \quad -\pi \leq x \leq \pi. \quad (5.12.6)$$

ვინაიდან, შემდეგ ეტაპზე x უნდა მივასწრაფოთ x_0 -კენ (იხ. (5.12.1) ტოლობა), ამიტომ ბუნებრივი იქნება $I_2(r, x)$ ინტეგრალში x ვიგულისხმოთ $(x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2)$ ინტერვალში, ე.ი. $x \in (x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2)$.

რადგან $I_2(r, x)$ ინტეგრალში საინტეგრაციო t ცვლადი არ ეკუთვნის $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ინტერვალს, ამიტომ $|x - t| \geq \frac{\delta}{2}$.

ახლა გამოვიყენოთ 5.10 პარაგრაფის (5.10.7) უტოლობა, მივიღებთ

$$|I_2(r, x)| \leq \frac{1-r^2}{2 \sin^2 \delta/2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt < \frac{1-r}{\sin^2 \delta/2} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt. \quad (5.12.7)$$

რადგან უკანასკნელი ინტეგრალი სასრულია (f -ის ჯამებადობის გამო $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე) და $\delta > 0$ არაა დამოკიდებული r -ზე, ამიტომ (5.12.7) უტოლობის მარჯვენა მხარე შეგვიძლია გავხადოთ ნებისმიერად მცირე r -ის 1-თან მარცხნიდან სიახლოვის ხარჯზე. ეს ნიშნავს, რომ უკვე აღებული ε რიცხვისთვის არსებობს ისეთი $\eta > 0$ რიცხვი, რომ (5.12.7) უტოლობის მარჯვენა მხარე ნაკლები აღმოჩნდება $\varepsilon/2$ -ზე, როცა r აკმაყოფილებს პირობას $1 - \eta < r < 1$.

ამრიგად, ადგილი აქვს უტოლობას

$$|I_2(r, x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{როცა } x \in \left(x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}\right), \quad 1 - \eta < r < 1. \quad (5.12.8)$$

(5.12.6) და (5.12.8) უტოლობებიდან ვღებულობთ

$$|f(r, x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \text{როცა } x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \quad 1 - \eta < r < 1. \quad (5.12.9)$$

გემოთ ჩატარებული მსჯელობიდან ჩანს, რომ η და δ რიცხვები დამოკიდებულია მხოლოდ და მხოლოდ ε რიცხვზე. ამიტომ (5.12.9) უტოლობა შესრულებულია ამ უტოლობაში მითითებული თვისებების მქონე $\delta > 0$ და $\eta > 0$ რიცხვებისთვის, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ ε -ზე! ეს ნიშნავს, რომ უტოლობა $|f(r, x) - f(x_0)| < \varepsilon$ შესრულებულია $(1, x_0)$ წერტილის მიდამოს ერთეულოვან ღია წრესთან თანაკვეთაში და ეს თანაკვეთა დამოკიდებულია მხოლოდ (5.12.9) უტოლობაში მონაწილე ε რიცხვზე. ეს კი, ზღვრის განმარტების თანახმად, ნიშნავს (5.12.1) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს შვარცის მიერ დამტკიცებული

თეორემა 5.12.2 (შვარცი (1872 წ.), [85]). თუ 2π პერიოდული f ფუნქცია უწყვეტია $(-\infty, +\infty)$ -ზე, მაშინ მის პუასონის $f(r, x)$ ინტეგრალს ერთეულოვანი წრეწირის ყოველ $(1, x_0)$ წერტილზე გააჩნია თვისება

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ x \rightarrow x_0}} f(r, x) = f(x_0),$$

კერძოდ,

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(r, x_0) = f(x_0).$$

შვარციმ ეს თეორემა დაამტკიცა შემდეგი ფორმით [35, გვ. 28]: პირველი სასაზღვრო ამოცანა უწყვეტი u ფუნქციისთვის იხსნება პუასონის ინტეგრალით

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)} d\theta.$$

5.13 დირიხლეს პრობლემა წრისთვის

1. დირიხლემ 1850 წელს დასვა შემდეგი პრობლემა

დირიხლეს პრობლემა 5.13.1. ერთეულოვანი ღია D წრის C საზღვარზე მოცემული უწყვეტი f ფუნქციისთვის (ე.ი. f არის 2π პერიოდული და უწყვეტი $(-\infty, +\infty)$ -ზე) არსებობს თუ არა ერთეულოვან ჩაკეტილ $\overline{D} = D \cup C$ წრეზე უწყვეტი და ღია D წრეში ჰარმონიული ω ფუნქცია თვისებით

$$\omega(1, x) = f(x).$$

თეორემა 5.13.2. ფუნქცია

$$\omega(r, x) = \begin{cases} f(r, x), & \text{როცა } 0 \leq r < 1, \\ f(x), & \text{როცა } r = 1 \end{cases} \quad (5.13.1)$$

დირიხლეს პრობლემის ამოხსნაა.

დამტკიცება. $\omega(r, x)$ ფუნქციის უწყვეტობა და ჰარმონიულობა ღია D წრეში ნიშნავს f ფუნქციის $f(r, x)$ პუასონის ინტეგრალის იმავე თვისებებს, რაც გარანტირებულია (იხ. პარაგრაფი 5.11).

$\omega(r, x)$ ფუნქციის უწყვეტობის დასადგენად ერთეულოვანი C წრეწირის ყოველ წერტილზე, ავიღოთ C -ს ნებისმიერი $(1, x_0)$ წერტილი.

ცხადია, რომ $(1, x_0)$ წერტილი წარმოადგენს როგორც D სიმრავლის, ისე C სიმრავლის დაგროვების წერტილს.

პირველ შემთხვევაში, D -ს გასწვრივ $\omega(r, x) = f(r, x)$ ფუნქციის უწყვეტობას $(1, x_0)$ წერტილზე ადასტურებს 5.12 პარაგრაფის (5.12.1) ტოლობა.

მეორე შემთხვევაში კი, $\omega(1, x) = f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობას C წრეწირის გასწვრივ უზრუნველფს თვით f ფუნქციის უწყვეტობა C -ს ყველა წერტილზე (მოცემულობის თანახმად), სახელდობრ, $(1, x_0)$ წერტილზე.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (5.13.1) ტოლობით მოცემული ფუნქცია ერთადერთია. დავუშვათ, რომ არსებობს კიდევ სხვა $\omega_1(r, x)$ ფუნქცია იმავე თვისებებით. მაშინ $\omega(r, x) - \omega_1(r, x)$ სხვაობა უწყვეტია $\overline{D}$ -ზე და პარმონიულია D -ში. ამიტომ ეს სხვაობა მაქსიმუმსა და მინიმუმს მიაღწევს მხოლოდ C საზღვარზე [11, გვ. 130]. მაგრამ C საზღვარზე ეს სხვაობა ნულია. მაშასადამე, შიგნით ეს სხვაობა ვერ მიიღებს ვერც დადებით და ვერც უარყოფით მნიშვნელობას. ამგვარად, ეს სხვაობა ნულია D -ში.

როგორც ვნახეთ, C -ზეც ნულია ეს სხვაობა.

მაშასადამე, ეს სხვაობა ნულია $\overline{D}$ -ზე, ანუ $\omega_1(r, x) = \omega(r, x)$ ყველა $r \in [0, 1]$ -თვის და ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$ -თვის.

ამრიგად, $\omega_1(z) = \omega(z)$ ყველა $z \in \overline{D}$ წერტილზე. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

2. რადგან დირიხლეს პრობლემის გადამჭრელი $\omega(r, x)$ ფუნქცია, რომელიც მოცემულია (5.13.1) ტოლობით, წარმოადგენს $\overline{D}$ ჩაკეტილ წრეზე უწყვეტ ფუნქციას, ამიტომ $\omega(r, x)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია $\overline{D}$ -ზე და, მაშასადამე, D -შიც. ამიტომ გვაქვს

წინადადება 5.13.3. ერთეულოვანი C წრეწირზე უწყვეტი ფუნქციის პუასონის ინტეგრალი თანაბრად უწყვეტია ერთეულოვანი D წრეში.

მართებულია შემბრუნებული თეორემაც (იხ. თეორემა 5.13.6).

წინადადება 5.13.4. თუ პუასონის ინტეგრალი თანაბრად უწყვეტია ერთეულოვანი D წრეში, მაშინ შესაძლებელია ამ ინტეგრალის უწყვეტად გაგრძელება $\overline{D}$ -ზე. მაშასადამე, ასეთ შემთხვევაში პუასონის ინტეგრალი წარმოადგენს $(-\infty, +\infty)$ -ზე უწყვეტი და 2π პერიოდული ფუნქციის პუასონის ინტეგრალს.

ამ წინადადებათა ძალით გვაქვს

თეორემა 5.13.5. პუასონის ინტეგრალის უწყვეტი გაგრძელება რომ შეიძლებოდეს ღია D წრიდან ჩაკეტილ $\bar{D}$ წრეზე, აუცილებელი და საკმარისია ამ ინტეგრალის თანაბრად უწყვეტობა D -ში.

წინადადება 5.13.4 კი შემდეგი თეორემის კერძო შემთხვევაა.

თეორემა 5.13.6 ([36, გვ. 290]). თუ არაჩაკეტილ A სიმრავლეზე განსაზღვრული f ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია A -ზე, მაშინ არსებობს f -ის ერთადერთი გაგრძელება A სიმრავლიდან $\bar{A}/A$ სიმრავლეზე ისეთი, რომ ამგვარად მიღებული ფუნქცია უწყვეტია $\bar{A}$ -ზე.

ადგილი მისახვედრია, რომ 5.13.5 თეორემა ეკვივალენტურია შემდეგი თეორემის.

თეორემა 5.13.7. პუასონის ინტეგრალით მოცემული ჰარმონიული ფუნქციის ზღვარი ერთეულოვან წრეწირზე იქნება ამ წრეწირის მიმართ (გასწვრივ) უწყვეტი, როცა ეს ინტეგრალი თანაბრად უწყვეტია ერთეულოვან ღია წრეში.

5.14 პუასონის ინტეგრალის წარმოებულის ზღვარი

პარაგრაფ 5.12-ში დავადგინეთ, რომ $f(r, x)$ პუასონის ინტეგრალს გააჩნია $f(x_0)$ ზღვარი $(1, x_0)$ წერტილზე, როცა f ფუნქცია უწყვეტია ამ x_0 წერტილზე, ანუ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{(r,x) \rightarrow (1,x_0)} f(r, x) = f(x_0).$$

პუასონის ინტეგრალს, როგორც ღია ერთეულოვან წრეში ჰარმონიული ფუნქციას (იხ. პარაგრაფი 5.11) გააჩნია $\frac{\partial}{\partial x} f(r, x)$ კერძო წარმოებული ნებისმიერი 2π პერიოდული და $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი f ფუნქციისთვის. ჩვენი მიზანია დავადგინოთ კავშირი ამ კერძო წარმოებულის ზღვარსა და f ფუნქციის წარმოებულს შორის. ამასთან დაკავშირებით მართებულია

თეორემა 5.14.1 (ფატუ, [71], [8, გვ. 156]). თუ f ფუნქციას სასრული წარმოებული გააჩნია რაიმე (a, b) ინტერვალში და თუ ეს წარმოებული უწყვეტია (a, b) -ს რომელიმე x_0 შიგა წერტილზე, მაშინ $f'(x_0)$ წარმოადგენს $\frac{\partial}{\partial x} f(r, x)$ კერძო წარმოებულის ზღვარს $(1, x_0)$ წერტილზე, ანუ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{(r,x) \rightarrow (1,x_0)} \frac{\partial}{\partial x} f(r, x) = f'(x_0), \quad (5.14.1)$$

რომლის კერძო შემთხვევაა რადიალური ზღვარი

$$\lim_{r \rightarrow 1-} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(r, x) \right)'(x_0) = f'(x_0).$$

დამტკიცება. როგორც ვიცით, f ფუნქციის პუასონის ინტეგრალს აქვს სახე (იხ. პარაგრაფი 5.12, ტოლობა (5.12.2))

$$f(r, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P(r, x - t) dt,$$

სადაც პუასონის გული

$$P(r, u) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos u + r^2}, \quad -\pi \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq r < 1.$$

აქედან

$$\frac{\partial}{\partial u} P(r, u) = -\frac{2r(1 - r^2) \sin u}{[1 - 2r \cos u + r^2]^2} \quad (5.14.2)$$

და

$$\left| \frac{\partial}{\partial u} P(r, u) \right| \leq \frac{4(1 - r)}{[1 - 2r \cos u + r^2]^2}. \quad (5.14.3)$$

მაგრამ $[-\pi, \pi]$ -ზე გვაქვს $1 - 2r \cos u + r^2 \geq 1 - 2r + r^2 = (1 - r)^2$. ამიტომ

$$\left| \frac{\partial}{\partial u} P(r, u) \right| \leq \frac{4(1 - r)}{(1 - r)^4} = \frac{4}{(1 - r)^3}, \quad 0 \leq r < 1. \quad (5.14.4)$$

(5.14.4) შეფასების საფუძველზე შეგვიძლია გამოვიყენოთ ინტეგრალის პარამეტრით გაწარმოების წესი⁴, გვექნება ტოლობა

$$\frac{\partial}{\partial x} f(r, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\partial}{\partial x} P(r, x - t) dt. \quad (5.14.5)$$

⁴თუ $\frac{\partial}{\partial x} \phi(t, x)$ კერძო წარმოებული შემოსაზღვრულია $Q = [a \leq t \leq b, c \leq x \leq d]$ მარკუთხედზე და $\psi(t)$ ფუნქცია ჯამებადია $[a, b]$ -ზე, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას [76, გვ. 356]

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^b \psi(t) \phi(t, x) dt = \int_a^b \psi(t) \frac{\partial}{\partial x} \phi(t, x) dt.$$

ჩვენს შემთხვევაში $a = c = -\pi$, $b = d = \pi$, $\phi(t, x) = P(r, x - t)$ (r ფიქსირებულია), $\psi = f$ და ფიქსირებული r -თვის $\frac{\partial}{\partial x} P(r, x - t)$ კერძო წარმოებული შემოსაზღვრულია (5.14.6) ტოლობისა და (5.14.4) უტოლობის ძალით.

გარდა ამისა,

$$\frac{\partial}{\partial x} P(r, x-t) = \frac{\partial}{\partial u} P(r, u), \quad u = x-t. \quad (5.14.6)$$

რადგან x_0 არის (a, b) ინტერვალის შიგა წერტილი და წარმოებული f' უწყვეტია x_0 წერტილზე, ამიტომ არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ და f' შემოსაზღვრულია $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ინტერვალზე: $|f'(x)| < M$, როცა $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.

ამის შემდეგ, ვიგულისხმეთ $x \in (x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2)$ და ინტეგრალი (5.14.5) ტოლობაში დავშალოთ $I_1(r, x)$ და $I_2(r, x)$ ინტეგრალების ჯამად $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ და $[-\pi, \pi] \setminus (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ინტერვალებზე, შესაბამისად.

$I_2(r, x)$ -ში $|x-t| \geq \frac{\delta}{2}$ და (5.14.3) უტოლობის მიმართ

$$\min_{\substack{\delta \leq |u| \leq \pi \\ 0 \leq r < 1}} (1 - 2r \cos u + r^2) = \sin^2 \delta$$

ტოლობის გამოყენებით (იხ. პარაგრაფი 5.10, ტოლობა (5.10.8)), მივიღებთ შეფასებას

$$\left| \frac{\partial}{\partial u} P(r, u) \right| \leq \frac{4(1-r)}{\sin^4 \delta/2} \rightarrow 0, \quad \text{როცა } r \rightarrow 1-, \quad \delta \leq |u| \leq \pi, \quad (5.14.7)$$

რომელსაც ადგილი არ აქვს ფეიერის გულისთვის.

ამრიგად, ნებისმიერი $x \in (x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2)$ -თვის და ყოველი $r \in [0, 1)$ -თვის მართებულია უტოლობა, (5.14.6) ტოლობისა და (5.14.7)-ის გამო,

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} P(r, x-t) \right| \leq \frac{4(1-r)}{\sin^4 \delta/2}, \quad \text{როცა } |x-t| \geq \frac{\delta}{2},$$

და, ამიტომ,

$$|I_2(r, x)| \leq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{4(1-r)}{\sin^4 \delta/2} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt, \quad x \in \left(x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}\right). \quad (5.14.8)$$

$I_1(r, x)$ ინტეგრალისთვის გამოვიყენოთ (5.14.6)-დან გამომდინარე

$$\frac{\partial}{\partial x} P(r, x-t) = -\frac{\partial}{\partial t} P(r, x-t), \quad 0 \leq r < 1, \quad (5.14.9)$$

ტოლობა და შემდეგ მოვახდინოთ ნაწილობითი ინტეგრება, მივიღებთ

$$\begin{aligned} I_1(r, x) &= -\frac{1}{\pi} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(t) \frac{\partial}{\partial t} P(r, x-t) dt \\ &= -\frac{1}{\pi} f(t) P(r, x-t) \Big|_{t=x_0-\delta}^{t=x_0+\delta} + \frac{1}{\pi} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f'(t) P(r, x-t) dt. \end{aligned} \quad (5.14.10)$$

თუ შემოვიღებთ დამხმარე $F(t) = f'(t)$ ფუნქციას, როცა $t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ და $F(t) = 0$, როცა $t \notin (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, მაშინ პარაგრაფი 5.12-ის ტოლობა (5.12.1)-ის გამოყენებით f' -თვის გვექნება

$$\lim_{(r,x) \rightarrow (1,x_0)} \frac{1}{\pi} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f'(t) P(r, x-t) dt = f'(x_0). \quad (5.14.11)$$

გარდა ამისა,

$$\begin{aligned} &\left| -\frac{1}{\pi} f(t) P(r, x-t) \Big|_{t=x_0-\delta}^{t=x_0+\delta} \right| \\ &\leq \frac{M}{\pi} \left[|P(r, x - (x_0 + \delta))| + |P(r, x - (x_0 - \delta))| \right]. \end{aligned} \quad (5.14.12)$$

რადგან $|x - (x_0 + \delta)| \geq \delta/2$ და $|x - (x_0 - \delta)| \geq \delta/2$, ამიტომ პარაგრაფი 5.10-დან (5.10.7) უტოლობის ძალით

$$\begin{aligned} |P(r, x - (x_0 + \delta))| &\leq \frac{1-r^2}{2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \\ |P(r, x - (x_0 - \delta))| &\leq \frac{1-r^2}{2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}. \end{aligned} \quad (5.14.13)$$

ახლა, (5.14.1) ტოლობა გამოვდინარეობს (5.14.8), (5.14.12), (5.14.13) უტოლობებიდან და (5.14.10), (5.14.11) ტოლობებიდან. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

5.15 კუთხური (არამხეობითი) მისწრაფების დახასიათება

5.15.1 კუთხური (არამხეობითი) ზღვრის ცნება

ერთეულოვან D ღია წრეში $|z| < 1$ ავიღოთ უსასრულო რაიმე E სიმრავლე, რომელსაც C წრეწირზე $|z| = 1$ გააჩნია დაგროვების რაიმე e^{ix_0} წერტილი. D წრეში განსაზღვრული

რაიმე ψ ფუნქციის ზღვარი e^{ix_0} წერტილზე E სიმრავლის გასწვრივ ეწოდება ზღვარს

$$\lim_{\substack{z \rightarrow e^{ix_0} \\ z \in E}} \psi(z),$$

როცა ეს ზღვარი არსებობს სასრული ან უსასრულო.

თუ E არის e^{ix_0} წერტილზე გამავალი რადიუსი, ქორდა ან სხვა რაიმე წირი, მაშინ ლაბა-რაკობენ ψ ფუნქციის რადიალურ, ქორდულ ან წირით ზღვარზე e^{ix_0} წერტილზე, შესაბამისად.

ახლა განვიხილოთ კუთხური ზღვრის ცნება. ზემოთ აღნიშნულ E სიმრავლედ მივიღოთ e^{ix_0} წერტილიდან გამომავალი ორი ქორდის მიერ შედგენილი 2θ გაშლილობის კუთხე e^{ix_0} წერტილის გარეშე, სიმბოლურად $V_\theta(x_0)$, რომლისთვისაც ბისექტრისას წარმოადგენს e^{ix_0} წერტილზე გამავალი რადიუსი და $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

თუკი არსებობს ψ ფუნქციის ზღვარი e^{ix_0} წერტილზე $V_\theta(x_0)$ კუთხის გასწვრივ, სიმბოლურად,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow e^{ix_0} \\ z \in V_\theta(x_0)}} \psi(z) = A(x_0) \quad (5.15.1)$$

და $A(x_0)$ არაა დამოკიდებული θ -ზე, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, მაშინ ამბობენ, რომ ψ ფუნქციას e^{ix_0} წერტილზე გააჩნია კუთხური $A(x_0)$ ზღვარი და წერენ

$$\lim_{z \rightarrow e^{ix_0}} \psi(z) = A(x_0). \quad (5.15.2)$$

ურთიერთეკვივალენტური (5.15.1) და (5.15.2) ტოლობები ნიშნავს, რომ $\psi(z)$ მნიშვნელობების სწრაფვას $A(x_0)$ -კენ ადგილი აქვს ყოველი ფიქსირებული $V_\theta(x_0)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, კუთხის გასწვრივ z წერტილის სწრაფვისას e^{ix_0} წერტილისკენ. ეს უკანასკნელი კი ნიშნავს, რომ $V_\theta(x_0)$ კუთხეში მდებარე z წერტილი საკმარისად ახლოს უნდა იყოს e^{ix_0} წერტილთან.

ეს ყველაფერი შეიძლება გამოითქვას ასე: $\psi(z)$ მნიშვნელობები ნებისმიერად ახლოსაა $A(x_0)$ -თან, როცა z იმყოფება $V_\theta(x_0)$ კუთხისა და იმ ღია წრის თანაკვეთაში, რომლის ცენტრია e^{ix_0} და რადიუსი კი საკმარისად მცირე. აქედან ჩანს, რომ უკანასკნელი წრის რადიუსად შეიძლება თავიდანვე ვიგულისხმოთ $\cos \theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, რიცხვი.

ამ უკანასკნელი წრის თანაკვეთა $V_\theta(x_0)$ კუთხესთან აღვნიშნოთ $V_{\theta, \cos \theta}(x_0)$ სიმბოლოთი.

ამრიგად, $z = re^{ix}$, $0 \leq r < 1$, წერტილი ისწრაფვის e^{ix_0} წერტილისკენ ისე, რომ მუდმივად რჩება $V_{\theta, \cos \theta}(x_0)$ სიმრავლეში, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

ამიტომ ტოლობა (5.15.1) გახდება უფრო ინფორმაციული, თუ მას ჩაეწერთ შემდეგი სახით

$$\lim_{\substack{z \rightarrow e^{ix_0} \\ z \in V_{\theta, \cos \theta}(x_0)}} \psi(z) = A, \quad (5.15.3)$$

რომელიც უფრო გამჭვირვალეს ხდის (5.15.2) ჩანაწერს.

აქედან ჩანს, რომ $A(x_0)$ იქნება ψ ფუნქციის კუთხური ზღვარი e^{ix_0} წერტილზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა (5.15.3) ტოლობა შესრულებულია π -ზე ნაკლები 2θ გაშლილობის ყველა იმ კუთხისთვის, რომლისთვისაც $[0, e^{ix_0}]$ მონაკვეთი — რადიუსი არის ბისექტრისა.

ხშირად, კუთხური ზღვრის ნაცვლად ამბობენ არამხებით ზღვარს იმის ხაზგასასმელად, რომ e^{ix_0} წერტილისკენ სწრაფვისას $z = re^{ix}$ წერტილები ეკუთვნის 2θ , $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, გაშლილობის კუთხეს წვეროთი e^{ix_0} წერტილზე, რომლის ბისექტრისას წარმოადგენს e^{ix_0} წერტილზე გამავალი რადიუსი.

D -ში აღებული რაიმე უსასრულო E' სიმრავლე იქნება C' წრეწირისადმი მხები სიმრავლე e^{ix_0} წერტილზე, თუ e^{ix_0} წერტილიდან გამოსული ყოველი ორი ქორდით შედგენილი კუთხის გარეთ რჩება E სიმრავლის re^{ix} წერტილების უსასრულო სიმრავლე, e^{ix_0} წერტილის ნებისმიერ მახლობლობაში.

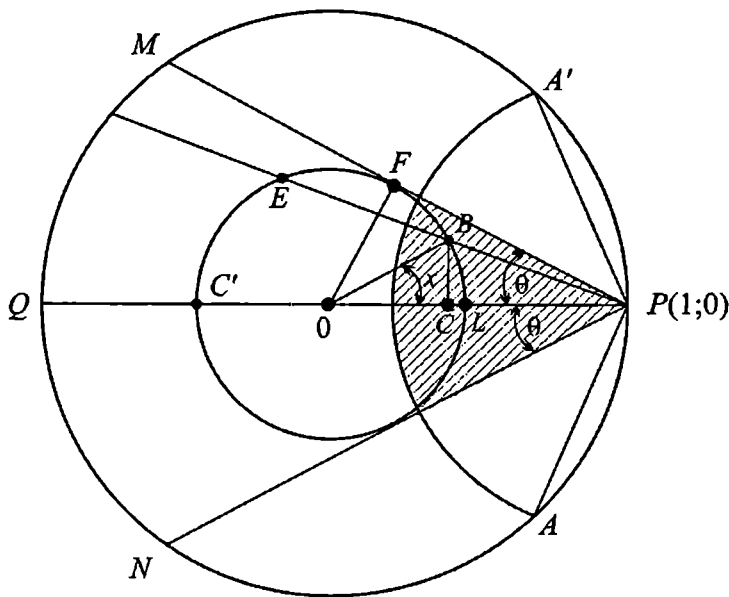
მაგალითად, $|z| = 1$ წრეწირისადმი $(1; 0)$ წერტილზე მხები სიმრავლეა $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ წრეწირი და, აგრეთვე, ამ წრეწირებს შორის მოქცეული სიმრავლეც.

5.15.2 წერტილის კუთხური (არამხებითი) მისწრაფების პირობები

შემდგომში უმეტესად ლაპარაკი გვექნება კუთხური (არამხებითი) ზღვრის არსებობის შესახებ. ამიტომ, ჯერ უნდა დავადგინოთ წერტილის არამხებითი (კუთხური) მისწრაფების განმსაზღვრელი პირობა. ასეთი გვექნება ორი პირობა: მიმსწრაფი $z = re^{ix}$ წერტილის მეშვეობით და ამ წერტილის x არგუმენტით.

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია განვიხილოთ ერთეულოვანი D ღია წრის z წერტილის კუთხური მისწრაფება $P(1; 0)$ წერტილისკენ. ეს ნიშნავს, რომ $z \in D$ მისწრაფვის $P(1; 0)$ წერტილისკენ ისე, რომ z მუდმივად რჩება $V_{\theta, \cos \theta}(0)$ სიმრავლეში, რომლის ბისექტრისაა PQ დიამეტრი. ნახაზზე 2θ გაშლილობის კუთხის შემქმნელი ქორდებია PM , PN და დაშტრიხულია $V_{\theta, \cos \theta}(0)$ სიმრავლე, რომლის გასწვრივაც მიისწრაფვის z -ის შესაბამისი B წერტილი $P(1; 0)$ წერტილისკენ, $PA = PA' = \cos \theta$.

სკოლის გეომეტრიიდან კარგად ცნობილი თეორემის თანახმად, წრის გარეთ მდებარე წერტილიდან წრისადმი გავლებული ყოველი მკვეთის ნამრავლი თავისთავად გარე ნაწილზე



ნახ. 8

ერთი და იგივე რიცხვია, ე.ი. გვაქვს ტოლობა $PB \cdot PE = PL \cdot PC'$ ანუ $\frac{PB}{PL} = \frac{PC'}{PE}$. მაგრამ

$$\frac{PB}{PL} = \frac{|1-z|}{PL} > \frac{|1-z|}{PB} = \frac{|1-z|}{1-|z|}$$

და

$$\frac{PC'}{PE} < \frac{PQ}{PE} < \frac{PQ}{PF} = \frac{2 \cdot OP}{PF} = \frac{2 \cdot OP}{OP \cos \theta} = \frac{2}{\cos \theta}.$$

ამიტომ

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} < \frac{2}{\cos \theta}, \text{ ანუ } |1-z| < \frac{2}{\cos \theta} (1-|z|).$$

ეს უკანასკნელი ჩაიწერება სახით

$$|1-z| < M(1-|z|), \quad (5.15.4)$$

სადაც შემოღებულია აღნიშვნა $M = 2/\cos \theta$, $0 < \theta < \pi/2$.

აშკარაა, რომ M დამოკიდებულია θ -ზე, მაგრამ ამის შესახებ მინიშნება არ არის. საქმე ისაა, რომ კუთხური ზღვრის არსებობის შესახებ ნებისმიერი ფაქტის დადგენის პროცესში π -ზე ნაკლები 2θ გაშლილობის კუთხე ფიქსირებულია და იმ მსჯელობაში M მუდმივია.

ანალოგიურ მდგომარეობასთან გვაქვს საქმე ქვემოთ დამტკიცებულ (5.15.7) პირობაში მონაწილე K მუდმივის მიმართაც.

$z = re^{ix}$ წერტილის $P(1; 0)$ წერტილისკენ კუთხური სწრაფვის (5.15.4) პირობა შეიძლება გადაიწეროს x -ზე პირობის სახითაც. ამ მიზნით შევნიშნოთ, რომ (იხ. ნახაზი 8)

$$|1 - z| > BC = OB \sin x = |z| \cdot \sin x.$$

ამიტომ, (5.15.4)-ის ძალით, $|z| \cdot \sin x < M(1 - |z|)$. მაგრამ $\frac{2}{\pi} |x| \leq |\sin x|$, როცა $0 \leq |x| \leq \frac{\pi}{2}$. ამრიგად,

$$\frac{2}{\pi} |z| |x| < M(1 - |z|), \text{ ანუ } |x| < M \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 - |z|}{|z|}.$$

მეორეს მხრივ, $1 - |z| \leq |1 - z|$ და, აქედან,

$$|z| \geq 1 - |1 - z|. \quad (5.15.5)$$

რადგან z წერტილი $V_{\theta, \cos \theta}(0)$ სიბრავლის ფარგლებში მიისწრაფვის $P(1; 0)$ წერტილისკენ, ამიტომ, ზემოთ აღნიშნულის ძალით (იხ. $|z - e^{ix}| < \cos \theta$ პირობა), გვაქვს $|1 - z| < \cos \theta$. ამის გათვალისწინებით (5.15.5)-დან ვღებულობთ

$$|z| > 1 - \cos \theta.$$

მაშასადამე,

$$|x| < M \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 - |z|}{1 - \cos \theta} = \frac{2}{\cos \theta} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 - |z|}{1 - \cos \theta} < \frac{4(1 - |z|)}{\cos \theta(1 - \cos \theta)}. \quad (5.15.6)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$K = \frac{4}{\cos \theta(1 - \cos \theta)}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2},$$

მაშინ $z = re^{ix}$ წერტილის კუთხური სწრაფვის (5.15.6) პირობა $P(1; 0)$ წერტილისკენ მიიღებს სახეს

$$|x| < K(1 - |z|). \quad (5.15.7)$$

5.15.3 შენიშვნა კუთხური ზღვრის შესახებ

როცა ვიხილავთ $z = re^{ix} \in D$ წერტილის არამხეხურ (კუთხურ) სწრაფვას e^{ix_0} წერტილისკენ, მაშინ (5.15.4) და (5.15.7) პირობები ასე შეიცვლება:

$$\begin{aligned} |e^{ix_0} - z| &< M(1 - |z|), \\ |x - x_0| &< K(1 - |z|). \end{aligned} \quad (5.15.8)$$

ამ შემთხვევაში $z = re^{ix}$ წერტილი ეკუთვნის $V_{\theta, \cos \theta}(x_0)$ კუთხეს, რომლის e^{ix_0} წვეროსკენ ისწრაფვის z წერტილი. $V_{\theta, \cos \theta}(x_0)$ კუთხის წვერო e^{ix_0} არ ეკუთვნის, საზოგადოდ, იმ ფუნქციის განსაზღვრის არეს, რომლის კუთხური ზღვარიც განიხილება e^{ix_0} წერტილზე, თუმცა e^{ix_0} არის ფუნქციის განსაზღვრის არის დაგროვების წერტილი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 5.15.4. (5.15.2) და (5.15.3) ტოლობის რეალიზაციისთვის აუცილებელია $V_{\theta, \cos \theta}(x_0)$ სიმრავლეში მდებარე z წერტილი აკმაყოფილებდეს $|e^{ix_0} - z| < \cos \theta$ პირობას, რომელიც არაა საკმარისი იმისთვის, რომ $|\psi(z) - A(x_0)|$ გახდეს ნებისმიერად მცირე, ვთქვათ, მოცემულ $\varepsilon > 0$ რიცხვზე ნაკლები. ამასთან, კუთხის გაფართოვება იწვევს e^{ix_0} წერტილის იმ კუთხური მიდამოს დავიწროვებას, რომელზეც უნდა შესრულდეს $|\psi(x) - A(x_0)| < \varepsilon$ უტოლობა. ამ ინფორმაციას შეიცავს $V_{\theta, \cos \theta}(x_0)$ აღნიშვნა: როცა $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-$, მაშინ $\cos \theta \rightarrow 0+$ და ამიტომ $V_{\theta, \cos \theta}(x_0)$ მიისწრაფვის სიცარიელისკენ! ამიტომაცაა, რომ კუთხური ზღვრის არსებობა არ იწვევს, საზოგადოდ, ზღვრის (თავისუფალის) არსებობას! — ეს ფაქტი საჭიროებს სათანადო ყურადღებას!

აქ თქმული და მომდევნო პარაგრაფებში გადმოცემული მასალა გვიჩვენებს, რომ კუთხური ზღვარი წარმოადგენს ზღვრის კარგ მიახლოებას.

5.16 პუასონის ინტეგრალის წარმოებულის კუთხური ზღვარი

თ ე ო რ ე მ ა 5.16.1 (ფატუ, [71], [24, გვ. 167]). ვთქვათ, 2π პერიოდულ და $[-\pi, \pi]$ -ზე ჯამებად f ფუნქციას რაიმე x_0 წერტილზე გააჩნია $f'(x_0)$ სასრული წარმოებული. მაშინ f -ის $f(r, x)$ პუასონის ინტეგრალის x -ით $\frac{\partial}{\partial x} f(r, x)$ კერძო წარმოებულს e^{ix_0} წერტილზე გააჩნია $f'(x_0)$ -ის ტოლი კუთხური ზღვარი, ანუ ადგლი აქვს ტოლობას

$$\lim_{(r,x) \rightarrow e^{ix_0}} \frac{\partial}{\partial x} f(r, x) = f'(x_0), \quad (5.16.1)$$

რომლის კერძო შემთხვევაა რადიალური ზღვარი

$$\lim_{r \rightarrow 1-} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(r, x) \right) (x_0) = f'(x_0). \quad (5.16.2)$$

დამტკიცება⁵. შემოვიღოთ $\phi(x) = f(x) - f(x_0) - \sin(x - x_0)f'(x_0)$ დამხმარე ფუნქცია. მაშინ

$$\phi(x_0) = 0, \quad \phi'(x_0) = f'(x_0) - \cos(x_0 - x_0)f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

მაგრამ

$$\phi'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} [\phi(x) - \phi(x_0)].$$

თუ გავითვალისწინებთ წინა ტოლობებს, მივიღებთ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{x - x_0} \phi(x) \right] = 0.$$

ეს ნიშნავს, რომ ყოველ $\varepsilon > 0$ რიცხვს ეთანადება $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ ისეთი, რომ ადგილი აქვს $\left| \frac{1}{x - x_0} \phi(x) \right| < \varepsilon$ უტოლობას, ანუ

$$|\phi(x)| < \varepsilon |x - x_0|, \quad \text{როცა } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \quad (5.16.3)$$

⁵ [8] წიგნში მოცემული (5.16.1) ტოლობის დამტკიცება არაკორექტულია. გვ. 158-ზე (56.7) ტოლობით განსაზღვრული $Q = Q_r(t, \omega)$ ფუნქციის შემოსაზღვრულობის დადგენის მცდელობა, როცა $-\delta \leq t \leq \delta$ და $|t| < c(1 - r)$, ემყარება მცდარ

$$|Q| = 2r(1 - r^2) \frac{t \cdot \sin(t - \omega)}{|e^{it} - re^{i\omega}|^2}$$

ტოლობას.

აქ მნიშვნელში უნდა იყოს $|e^{it} - re^{i\omega}|^4$. იგივეა გამეორებული წიგნში: Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., 1966, стр. 370.

უფრო ზუსტად, $Q_r(t, \omega)$ ფუნქცია აღნიშნულ პირობებში არ არის შემოსაზღვრული. მართლაც,

$$Q_r(t, \omega) = 2r(1 - r^2) \frac{t \sin(t - \omega)}{[(1 - r)^2 + 4r \sin^2 \frac{t - \omega}{2}]^2}$$

ტოლობიდან, როცა $0 \leq t \leq \delta$ გამომდინარეობს

$$\begin{aligned} Q_r(t, 0) &= 2r(1 - r^2) \frac{t \sin t}{[(1 - r)^2 + 4r \sin^2 \frac{t}{2}]^2} \\ &\geq 2r(1 - r^2) \frac{t \cdot t/2}{[(1 - r)^2 + rt^2]^2} = r(1 + r)(1 - r) \frac{t^2}{[(1 - r)^2 + rt^2]^2}. \end{aligned}$$

ვთქვათ, $0 < t_n \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$ და ავიღოთ $r_n = 1 - t_n$. მაშინ

$$\frac{t_n}{1 - r_n} = 1 \quad \text{და} \quad Q_{r_n}(t_n, 0) \geq r_n(1 + r_n) \frac{t_n^2}{t_n^4(1 + r_n)^2} \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

რადგან:

- (1) მუდმივის გაშლა ფურიეს მწკრივად არის თვით ეს მუდმივი;
- (2) $\sin x$ ფუნქციის გაშლა ფურიეს მწკრივად არის $\sin x$;
- (3) $\sin x$ ფუნქციისთვის პუასონ-აბელის საშუალოა $r \sin x$;
- (4) $c \sin x$ ფუნქციისთვის პუასონ-აბელის საშუალოა $cr \sin x$,

ამიტომ

$$f(x) = \phi(x) + f(x_0) + \sin(x - x_0)f'(x_0)$$

ტოლობის შესაბამისი პუასონის ინტეგრალებისთვის გვექნება ტოლობა

$$f(r, x) = \phi(r, x) + f(x_0) + r \sin(x - x_0)f'(x_0),$$

საიდანაც

$$\frac{\partial}{\partial x} f(r, x) = \frac{\partial}{\partial x} \phi(r, x) + r \cos(x - x_0)f'(x_0).$$

რადგან

$$\lim_{(r,x) \rightarrow e^{ix_0}} r \cos(x - x_0)f'(x_0) = f'(x_0),$$

ამიტომ (5.16.1) ტოლობის დასამტკიცებლად აუცილებელია და საკმარისი შესრულდეს ტოლობა (იხ. პარაგრაფი 5.15, უტოლობა (5.15.8))

$$\lim_{\substack{(r,x) \rightarrow e^{ix_0} \\ |x-x_0| < c(1-r)}} \frac{\partial}{\partial x} \phi(r, x) = 0. \quad (5.16.4)$$

გვაქვს

$$\phi(r, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) P(r, t - x) dt$$

და

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(r, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \frac{\partial}{\partial x} P(r, t - x) dt.$$

მაგრამ,

$$\frac{\partial}{\partial x} P(r, t - x) = -\frac{\partial}{\partial t} P(r, t - x).$$

ამიტომ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \phi(r, x) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \frac{\partial}{\partial t} P(r, t-x) dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} \phi(x+\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} P(r, \tau) d\tau = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x+t) \frac{\partial}{\partial t} P(r, t) dt. \end{aligned} \quad (5.16.5)$$

წერის გამარტივების მიზნით და ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $x_0 = 0$. ამის გამო, (5.16.3) უტოლობა მიიღებს სახეს

$$|\phi(\tau)| < \varepsilon |\tau|, \quad \tau \in (-\delta, \delta). \quad (5.16.6)$$

(5.16.5) ტოლობის ბოლო ინტეგრალი წარმოადგინოთ ასე

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x+t) \frac{\partial}{\partial t} P(r, t) dt \\ = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \phi(x+t) \frac{\partial}{\partial t} P(r, t) dt + \int_{[-\pi, \pi] \setminus (-\delta/2, \delta/2)} \phi(x+t) \frac{\partial}{\partial t} P(r, t) dt. \end{aligned} \quad (5.16.7)$$

უკანასკნელი ტოლობის ბოლო ინტეგრალის აბსოლუტური მნიშვნელობა, 5.14 პარაგრაფის (5.14.7) უტოლობის თანახმად, არ აღემატება სიდიდეს

$$\frac{4(1-r)}{\sin^4 \delta/2} \int_{-\pi}^{\pi} |\phi(r, \tau)| d\tau \rightarrow 0, \quad \text{როცა } r \rightarrow 1.$$

რადგან x უნდა მივასწრაფოთ $x_0 = 0$ -კენ, ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $x \in (-\delta/2, \delta/2)$. ამასთან ერთად, (5.16.7) ტოლობის მარჯვენა მხარის

$$J(r, x) \equiv \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \phi(x+t) \frac{\partial}{\partial t} P(r, t) dt$$

პირველ ინტეგრალში $t \in (-\delta/2, \delta/2)$. ამის გამო, $x+t \in (-\delta, \delta)$. ამიტომ (5.16.6)-დან გვაქვს უტოლობა

$$|\phi(x+t)| < \varepsilon |x+t|. \quad (5.16.8)$$

(5.16.8)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}
 |J(r, x)| &\leq \varepsilon \int_{-\delta/2}^{\delta/2} [|x| + |t|] \left| \frac{\partial}{\partial t} P(r, t) \right| dt \\
 &= \varepsilon \int_{-\delta/2}^0 (|x| + |t|) \left| \frac{\partial}{\partial t} P(r, t) \right| dt + \varepsilon \int_0^{\delta/2} (|x| + |t|) \left| \frac{\partial P(r, t)}{\partial t} \right| dt \\
 &\equiv \varepsilon \cdot (J_1 + J_2).
 \end{aligned} \tag{5.16.9}$$

J_1 ინტეგრალში $-\delta/2 < t \leq 0$, ამიტომ, პარაგრაფ 5.14-ის (5.14.2) ტოლობის ძალით,

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} P(r, t) \right| = \frac{2r(1-r^2)[- \sin t]}{(1-2r \cos t + r^2)^2} = -\frac{2r(1-r^2) \sin t}{(1-2r \cos t + r^2)^2} = \frac{\partial}{\partial t} P(r, t).$$

ასევე, J_2 ინტეგრალში $0 \leq t < \frac{\delta}{2}$ და

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} P(r, t) \right| = \frac{2r(1-r^2) \sin t}{(1-2 \cos t + r^2)^2} = -\frac{\partial}{\partial t} P(r, t).$$

ამიტომ

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \int_{-\delta/2}^0 (|x| - t) \frac{\partial}{\partial t} P(r, t) dt = |x| \int_{-\delta/2}^0 \frac{\partial}{\partial t} P(r, t) dt - \int_{-\delta/2}^0 t \cdot \frac{\partial}{\partial t} P(r, t) dt, \\
 J_2 &= - \int_0^{\delta/2} (|x| + t) \frac{\partial}{\partial t} P(r, t) dt = -|x| \int_0^{\delta/2} \frac{\partial}{\partial t} P(r, t) dt - \int_0^{\delta/2} t \cdot \frac{\partial}{\partial t} P(r, t) dt.
 \end{aligned}$$

აქედან

$$\begin{aligned}
 J_1 + J_2 &= |x| \left[\int_{-\delta/2}^0 \frac{\partial}{\partial t} P(r, t) dt - \int_0^{\delta/2} \frac{\partial}{\partial t} P(r, t) dt \right] \\
 &\quad - \left[\int_{-\delta/2}^0 t \cdot \frac{\partial}{\partial t} P(r, t) dt + \int_0^{\delta/2} t \cdot \frac{\partial}{\partial t} P(r, t) dt \right] \equiv |x|A - B. \tag{5.16.10}
 \end{aligned}$$

პარაგრაფ 5.14-ის (5.14.2) ტოლობიდან ჩანს, რომ $\frac{\partial}{\partial t} P(r, t)$ არის კენტი ფუნქცია, ხოლო $t \cdot \frac{\partial}{\partial t} P(r, t)$ — ლუწი. ამის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$A = -2 \int_0^{\delta/2} \frac{\partial}{\partial t} P(r, t) dt = -2P(r, t) \Big|_{t=0}^{t=\delta/2} = 2 \left[P(r, 0) - P\left(r, \frac{\delta}{2}\right) \right],$$

$$B = 2 \int_0^{\delta/2} t \frac{\partial}{\partial t} P(r, t) dt = 2 \left[tP(r, t) \Big|_{t=0}^{t=\delta/2} - \int_0^{\delta/2} P(r, t) dt \right].$$

მაგრამ პარაგრაფ 5.10-ის (5.10.9) ტოლობით

$$P(r, 0) = \frac{1+r}{2(1-r)} < \frac{1}{1-r}.$$

თუ ვისარგებლებთ იმავე პარაგრაფის (5.10.5) ტოლობით, მივიღებთ

$$P\left(r, \frac{\delta}{2}\right) < \frac{1-r^2}{2 \cdot 4r \sin^2 \delta/4} < \frac{1-r}{4r \sin^2 \delta/4}.$$

გარდა ამისა, პარაგრაფ 5.10-ის (5.10.11), (5.10.12) ტოლობებიდან

$$\int_0^{\delta/2} P(r, t) dt = \frac{\pi}{2} + O(1) = O(1).$$

ამრიგად,

$$A = 2 \left[\frac{1}{1-r} + \frac{1-r}{r \sin^2 \delta/4} \right] = \frac{2}{1-r} + o(1).$$

$$B = \frac{1-r}{2r \sin^2 \delta/4} + O(1) = o(1) + O(1) = O(1)$$

და (5.16.10)-დან ვღებულობთ

$$J_1 + J_2 \leq 2 \frac{|x|}{1-r} + o(1) + O(1) = 2 \frac{|x|}{1-r} + O(1).$$

როცა $(r, x) \xrightarrow{\wedge} 1$, მაშინ $\frac{|x|}{1-r} < K$ (იხ. პარაგრაფი 5.15, უტოლობა (5.15.7)) და $J_1 + J_2 = O(1)$. ახლა (5.16.9)-დან ვღებულობთ

$$J(r, x) = \varepsilon \cdot O(1), \text{ როცა } (r, x) \xrightarrow{\wedge} 1.$$

ეს კი ε -ის ნებისმიერი სიმცირის გამო იწვევს (5.16.4) ტოლობას, რომელიც ტოლფასია (5.16.1) ტოლობის. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შედეგი 5.16.2. თუ 2π პერიოდულ და $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებად f ფუნქციას რაიმე x_0 წერტილზე გააჩნია სასრული $f'(x_0)$ წარმომადგენელი, მაშინ ადგილი აქვს

$$\lim_{(r,x) \rightarrow e^{ix_0}} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P(r, x-t) \cdot Q(r, x-t) dt = -\frac{1}{4} f'(x_0)$$

ტოლობას, რომლის კერძო შემთხვევაა

$$\lim_{(r,x_0) \rightarrow e^{ix_0}} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P(r, x_0-t) \cdot Q(r, x_0-t) dt = -\frac{1}{4} f'(x_0)$$

რადიალური ზღვარი.

დამტკიცება. პარაგრაფ 5.14-ის (5.14.2) ტოლობა გადავწეროთ ასე

$$\frac{\partial}{\partial u} P(r, u) = -2 \cdot \frac{1-r^2}{1-2r \cos u + r^2} \cdot \frac{r \sin u}{1-2r \cos u + r^2}$$

და გამოვიყენოთ პარაგრაფ 5.11-ის (5.11.3), (5.11.4) ტოლობები, მივიღებთ

$$\frac{\partial}{\partial u} P(r, u) = -4P(r, u) \cdot Q(r, u).$$

ამიტომ პარაგრაფ 5.14-ის (5.14.5) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial}{\partial x} f(r, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) [-4P(r, x-t) \cdot Q(r, x-t)] dt.$$

ახლა საკმარისია გამოვიყენოთ თეორემა 5.16.1. □

5.17 პუასონის ინტეგრალის კუთხური ზღვარი

წინა პარაგრაფის 5.16.1 თეორემის გამოყენებით მტკიცდება

თეორემა 5.17.1 (ფატუ, [71], [8, გვ. 160], [24, გვ. 168]). ვთქვათ, f ფუნქცია ჯამებადია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე და მის გარეთ გაგრძელებულია 2π პერიოდით. თუ $x_0 \in [-\pi, \pi]$ წერტილზე $f(x_0)$ მნიშვნელობა სასრულია და იგი ტოლია f -ის განუსაზღვრელი ინტეგრალის

წარმოებულის x_0 -ზე, მაშინ ყველა ასეთ x_0 წერტილზე ანუ თითქმის ყველა x_0 -ზე, კერძოდ, f -ის ლებეგის წერტილებზე, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{(r, x_0) \rightarrow e^{ix_0}} f(r, x) = f(x_0). \quad (5.17.1)$$

ე.ი., ადგილი აქვს რადიალურ ტოლობას

$$\lim_{(r, x_0) \rightarrow e^{ix_0}} f(r, x_0) = f(x_0),$$

რაც ნიშნავს f ფუნქციის შესაბამისი $S[f]$ ფურიეს მწკრივის (A) -შეკამებადობას x_0 წერტილზე $f(x_0)$ მნიშვნელობისკენ.

დამტკიცება. შემოვიღოთ $A = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$ რიცხვი და $(f - A)$ ფუნქციის

$$F(u) = \int_{-\pi}^u [f(t) - A] dt$$

განუსაზღვრელი ინტეგრალი, მაშინ

$$\begin{aligned} f(r, x) - A &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P(r, x - t) dt - A = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P(r, x - t) dt \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A P(r, x - t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - A] P(r, x - t) dt; \end{aligned}$$

აქ გამოვიყენეთ პარაგრაფ 5.10-ის (5.10.4) ტოლობის პირველი ნაწილი.

მაგრამ, თითქმის ყველა $t \in [-\pi, \pi]$ -თვის, $F'(t) = f(t) - A$. ამიტომ უკანასკნელი ინტეგრალი მიიღებს სახეს

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F'(t) P(r, x - t) dt = \frac{1}{\pi} \cdot F(t) \cdot P(r, x - t) \Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \frac{\partial}{\partial t} P(r, x - t) dt.$$

მაგრამ $F(-\pi) = 0 = F(\pi)$. ამიტომ აღნიშნული ჩასმა ნულია, ხოლო 5.14 პარაგრაფის (5.14.9) ტოლობის ძალით უკანასკნელი ინტეგრალი თავისივე ნიშნით ასე ჩაიწერება

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \frac{\partial}{\partial x} P(r, x - t) dt = \frac{\partial}{\partial x} F(r, x).$$

უკანასკნელი წარმოებულის კუთხური ზღვარი e^{ix_0} წერტილზე ტოლია $F'(x_0) = f(x_0) - A$ რიცხვის, პარაგრაფ 5.16-ის (5.16.1) ტოლობის ძალით.

მაშასადამე, $f(r, x) - A$ სხვაობის კუთხური ზღვარი e^{ix_0} წერტილზე ტოლია $f(x_0) - A$ რიცხვის. ეს კი ეკვივალენტურია (5.17.1) ტოლობის. $\square$

5.18 დირიხლეს განზოგადებული პრობლემა

პარაგრაფ 5.13-ში გადაწყვეტილი იყო დირიხლეს პრობლემა წრისთვის: ერთეულოვან C წრეწირზე მოცემული ყოველი უწყვეტი f ფუნქციისთვის არსებობს ერთეულოვან D ღია წრეში პარამონიული და ჩაკეტილ $\overline{D}$ წრეზე ისეთი უწყვეტი $f(r, x)$ ფუნქცია — f ფუნქციის პუასონის ინტეგრალი, რომლის ზღვარი D -ს გასწვრივ ყოველ e^{ix_0} წერტილზე ტოლია $f(x_0)$ -ის, ე.ი. $f(r, x)$ არის წრეწირზე უწყვეტი f ფუნქციის პარამონიული გაგრძელება D -ში.

ჩინა პარაგრაფში დამტკიცებული 5.17.1 თეორემა იძლევა დირიხლეს განზოგადებული ამოცანის ამოხსნას: ერთეულოვან C წრეწირზე მოცემული ყოველი ჯამებადი φ ფუნქციისთვის არსებობს D -ში პარამონიული $\varphi(r, x)$ ფუნქცია — φ ფუნქციის პუასონის ინტეგრალი, რომლის კუთხური ზღვარი თითქმის ყველა e^{ix_0} წერტილზე ტოლია $\varphi(x_0)$ -ის.

დირიხლეს განზოგადებულ ამოცანასთან დაკავშირებით ისმის კითხვა: რა შეიძლება ითქვას იმ შემთხვევაში, როცა ერთეულოვან C წრეწირზე მოცემული ψ ფუნქცია არაა ჯამებადი?

ამ კითხვაზე პასუხი დამოკიდებულია იმაზე, ψ ფუნქცია თითქმის ყველგან სასრულია, თუ მას შეუძლია გახდეს $+\infty$ ან $-\infty$ დადებითი ზომის რაიმე ქვესიმრავლეზე C -დან.

1. თითქმის ყველგან სასრული ფუნქციების შემთხვევაში პასუხს იძლევა ლუზინის შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 5.18.1 (ლუზინი (1915 წ.), [30, გვ. 87]). ყოველი ზომადი, 2π პერიოდული და თითქმის ყველგან $[-\pi, \pi]$ -ზე სასრული ψ ფუნქციისთვის არსებობს ერთეულოვან ღია D წრეში პარამონიული $\omega(r, x)$ ფუნქცია ისეთი, რომლის კუთხური ზღვარი, კერძოდ, რადიალური ზღვარი, თითქმის ყველა $x_0 \in [-\pi, \pi]$ წერტილზე ტოლია $\psi(x_0)$ -ის.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . ლუზინის ერთ-ერთი ძირითადი თეორემის თანახმად, ψ ფუნქციისთვის არსებობს $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ისეთი უწყვეტი Ψ ფუნქცია, რომ $\Psi'(x) = \psi(x)$ ტოლობა სრულდება თითქმის ყველა $x \in [-\pi, \pi]$ წერტილზე [30, გვ. 78].

ახლა განვიხილოთ Ψ ფუნქციისთვის პუასონის $\Psi(r, x)$ ინტეგრალი. პარაგრაფ 5.16-დან (5.16.1) ტოლობის ძალით, $\frac{\partial}{\partial x} \Psi(r, x)$ კერძო წარმოებულის კუთხური ზღვარი თითქმის ყველა x_0 წერტილზე არის $\Psi'(x_0) = \psi(x_0)$.

მეორეს მხრივ, კერძო წარმოებული $\frac{\partial}{\partial x} \Psi(r, x)$ პარმონიული ფუნქციაა D ღია წრეში (იხ. პარაგრაფი 5.9), რომელიც გამოდგება თეორემაში აღნიშნულ $\omega(r, x)$ ფუნქციად. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

რადიალური ზღვრის შემთხვევისთვის, თეორემა 5.18.1 შეიძლება ასეც ჩამოყალიბდეს.

თეორემა 5.18.1' (ლუბინი). ყოველი ზომადი, 2π პერიოდული და თითქმის ყველგან $[-\pi, \pi]$ -ზე სასრული ψ ფუნქციისთვის არსებობს

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ტრიგონომეტრიული მწკრივი, რომელიც (A) -შეჯამებადია $\psi(x_0)$ მნიშვნელობისკენ თითქმის ყველა $x_0 \in [-\pi, \pi]$ წერტილზე, ანუ ადგილი აქვს რადიალურ ტოლობას

$$\lim_{r \rightarrow 1} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) r^n \right] = \psi(x_0).$$

ბუნებრივია კითხვა: რა შეიძლება ითქვას თეორემა 5.18.1-ში სხენებული პარმონიული $\omega(r, x)$ ფუნქციისადმი პარმონიულად შეუღლებული ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობების არსებობის შესახებ?

თეორემა 5.18.2 (პრივალოვი (1919 წ.), [8, გვ. 605]). ერთეულოვან ღია წრეში რომელიმე

$$u(r, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n$$

პარმონიულ ფუნქციას სასრული კუთხური ზღვარი თუ გააჩნია რაიმე ზომად $E \subset [-\pi, \pi]$ სიმრავლეზე, მაშინ შეუღლებულ

$$v(r, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx) r^n$$

პარმონიულ ფუნქციასაც გააჩნია სასრული კუთხური ზღვარი, ოღონდ თითქმის ყველგან E სიმრავლეზე.

2. განსაკუთრებული შემთხვევაა, როცა ერთეულოვან C წრეწირზე მოცემული ნამდვილი ფუნქცია შეიძლება გახდეს $+\infty$ ან $-\infty$ დადებითი ზომის რაიმე ქვესიმრავლეზე C -დან. ამასთან დაკავშირებით, აუცილებელია აღინიშნოს **ლუზინ-პრივალოვის** (1925 წ.) თეორემა.

თეორემა 5.18.3 ([38, გვ. 292]). არ არსებობს ერთეულოვან D წრეში ანალიზური (მე-რომორღულიც კი) ფუნქცია, რომლის კუთხური ზღვარი იქნება ∞ დადებითი ზომის რაიმე ქვესიმრავლეზე C -დან.

რადიალურ ზღვართან დაკავშირებით მართებულია, ისევ **ლუზინ-პრივალოვის** (1925 წ.) შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5.18.4 ([38, გვ. 309, 316]). არსებობს ერთეულოვან ღია D წრეში ანალიზური $\omega(z)$ ფუნქცია და 2π ზომის პირველი კატეგორიის $E \subset [0, 2\pi]$ სიმრავლე ისეთები, რომ E სიმრავლის ყოველ x წერტილზე სრულდება რადიალური ტოლობა

$$\lim_{r \rightarrow 1-} \omega(re^{ix}) = \infty.$$

ამიტომ, ჩვენი უახლოესი საუბარი შეეხება რადიალურ ზღვარს.

ამ თემას აქვს ხანგრძლივი ისტორია და სათავეს იღებს ვაიერშტრასის კლასიკური თეორემიდან, რომლის თანახმად $[0, 1]$ სეგმენტზე უწყვეტი ყოველი ფუნქციის თანაბრად მიახლოება შეიძლება პოლინომებით.

ვაიერშტრასის ეს თეორემა უსასრულო ინტერვალზე გაავრცელა კარლემანმა.

თეორემა 5.18.5 (კარლემანი (1927 წ.), [61]). ვთქვათ, $f(x)$ და $\varepsilon(x) > 0$ ფუნქციები უწყვეტია $(-\infty, +\infty)$ -ზე და $[0, +\infty)$ -ზე, შესაბამისად. მაშინ არსებობს $z = x + iy$ კომპლექსური ცვლადის $G(z)$ მთელი ფუნქცია ისეთი, რომ მისი $G(x)$ შეზღუდვა $(-\infty, +\infty)$ ნამდვილ ღერძზე აკმაყოფილებს პირობას

$$|G(x) - f(x)| < \varepsilon(|x|), \quad -\infty < x < +\infty.$$

ამ თეორემის განზოგადება შემდეგი

თეორემა 5.18.6 ([82]). ვთქვათ, $E \subset [0, 2\pi]$ ჩაკეტილი არსად მკვრივი სიმრავლეა, $f(z)$ კი არის $z = x + iy$ ცვლადის უწყვეტი კომპლექსური ფუნქცია ღია წრეში $|z| < r$ ($0 < r \leq +\infty$), ხოლო $\varepsilon(t) > 0$ უწყვეტია მარჯვნიდან ღია $0 \leq t < r$ ინტერვალზე. მაშინ არსებობს $|z| < r$ წრეში ანალიზური $F(z)$ ფუნქცია ისეთი, რომ ყოველ $x \in E$ წერტილზე ადგილი აქვს უტოლობას

$$|F(\rho e^{ix}) - f(\rho e^{ix})| < \varepsilon(\rho), \quad \text{როცა } 0 \leq \rho < r.$$

ამ თეორემის შემდეგი გასრულება ეკუთვნით ბეიდუმილს და ზეიდელს [60], რომლის კერძო შემთხვევაა რუდინის [84] შემდეგი

თეორემა 5.18.7 ([60, § 3]). ვთქვათ, მოცემულია ერთეულოვან D ღია წრეში ნებისმიერი უწყვეტი კომპლექსური $g(z)$ ფუნქცია და F_σ ტიპის პირველი კატეგორიის $E \subset [0, 2\pi]$ სიმრავლე, შესაძლოა 2π ზომის. მაშინ არსებობს D -ში ანალიზური $f(z)$ ფუნქცია ისეთი, რომ ყოველ $x \in E$ წერტილზე სრულდება რადიალური ტოლობა

$$\lim_{r \rightarrow 1-} [f(re^{ix}) - g(re^{ix})] = 0. \quad (5.18.1)$$

უკანასკნელი თეორემის მტკიცებიდან გამომდინარეობს

თეორემა 5.18.8 ([37, გვ. 138]). D წრეში ნებისმიერი უწყვეტი კომპლექსური $g(z)$ ფუნქციისთვის და 2π -ზე ნაკლები დადებითი ყოველი η რიცხვისთვის არსებობს D წრეში ანალიზური $f(z)$ ფუნქცია და $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე არსად მკვრივი ჩაკეტილი ϵ სიმრავლე ისეთი, რომ $2\pi - \eta < |e| < 2\pi$ და e სიმრავლეზე თანაბრად სრულდება რადიალური ტოლობა

$$\lim_{r \rightarrow 1-} [f(re^{ix}) - g(re^{ix})] = 0.$$

გემოთ აღნიშნული 5.18.7 თეორემიდან მიიღება

თეორემა 5.18.9 ([60, გვ. 191], [37, გვ. 138]). ერთეულოვან ღია წრეში არსებობს $f(z) = u(z) + iv(z)$ ანალიზური ფუნქცია ისეთი, რომ თითქმის ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე ადგილი აქვს რადიალურ ტოლობებს

$$\lim_{r \rightarrow 1-} u(re^{ix}) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 1-} v(re^{ix}) = +\infty. \quad (5.18.2)$$

დამტკიცება. P_n -ით აღნიშნოთ $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე არსად მკვრივი სრულყოფილი სიმრავლე, რომლის ზომაა $2\pi - \frac{1}{n}$ (იხ. [1, გვ. 349]). მაშინ $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ სიმრავლე არის F_σ ტიპის და პირველი კატეგორიის, რომლის ზომაა 2π . თუ 5.18.7 თეორემაში ავიღებთ

$$g(re^{ix}) = \frac{i}{1-r},$$

მაშინ

$$\operatorname{Re} g(re^{ix}) = 0 \quad \text{და} \quad \operatorname{Im} g(re^{ix}) \rightarrow +\infty, \quad \text{როცა} \quad r \rightarrow 1, \quad x \in E.$$

აქედან, (5.18.1)-ის ძალით, მივიღებთ (5.18.2) ტოლობებს. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

უკანასკნელ თეორემაზე ზოგადია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5.18.10 ([60, თეორემა 7], [37, გვ. 141]). ვთქვათ, φ და ψ ნებისმიერი ზომადი ნამდვილი ფუნქციებია $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე. მაშინ არსებობს ერთეულოვან ღია D წრეში ანალიზური $f = u + iv$ ფუნქცია ისეთი, რომ თითქმის ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე სრულდება რადიალური ტოლობები.

$$\lim_{r \rightarrow 1-} u(re^{ix}) = \varphi(x), \quad \lim_{r \rightarrow 1-} v(re^{ix}) = \psi(x).$$

ცხადია, რომ თავი 1-დან პარაგრაფ 1.5-ის (1.5.3) და (1.5.4) ტოლობების მარჯვენა მხარეები წარმოადგენს (1.5.6) და (1.5.7) ტრიგონომეტრიულ მწკრივებთან ასოცირებულ (იხ. თავი 5, პარაგრაფი 5.2) მწკრივებს, შესაბამისად. ამიტომ 5.18.10 თეორემა შეიძლება განხილულ იქნას, როგორც (5.18.3) და (5.18.4) მწკრივების (A) -შეჯამებადობის შესახებ მტკიცება, ანუ მართებულია

თეორემა 5.18.11. $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე ზომადი ნებისმიერი ნამდვილი φ და ψ ფუნქციებისთვის არსებობს

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (5.18.3)$$

ტრიგონომეტრიული მწკრივი ისეთი, რომ თითქმის ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე (A) -შეჯამებადია: $\varphi(x)$ -კენ (5.18.3) მწკრივი, ხოლო $\psi(x)$ -კენ შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx - b_n \sin nx), \quad (5.18.4)$$

ანუ ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\lim_{r \rightarrow 1-} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n \right] = \varphi(x),$$

$$\lim_{r \rightarrow 1-} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx) r^n \right] = \psi(x).$$

შენიშვნა 5.18.12. ამ პარაგრაფის მასალა გვიჩვენებს, რომ

$$u(re^{ix}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n, \quad (5.18.5)$$

$$v(re^{ix}) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx) r^n \quad (5.18.6)$$

ტოლობების ორივე მხარის მიმართ შეგვიძლია განვიხილოთ ზღვარი, როცა $r e^{ix}$ წერტილი ისწრაფვის e^{ix_0} -კენ რომელიმე აზრით: თავისუფლად, კუთხურად თუ რადიალურად.

ამასთან ერთად, $r = 1$ მნიშვნელობის პირდაპირი ჩასმის მიმართ გამოუსადეგარია (5.18.5) და (5.18.6) ტოლობების მარცხენა მხარეები, ხოლო მათი მარჯვენა მხარეები მიიღებს (5.18.3) და (5.18.4) ფორმებს, შესაბამისად.

როგორც ვნახეთ, (5.18.3) და (5.18.4) მწკრივების მიმართ კი შეგვიძლია ვილაპარაკოთ კრებადობაზე ან შეკამებადობაზე. ამიტომაც ეს მწკრივები უფრო მოხერხებულია იმ ფუნქციების წარმოსადგენად, რომელთაც არ გააჩნია გამორჩეული დიფერენციალური თვისებები (იხ. შესავალი).

5.19 პუასონის ინტეგრალის წარმოებულის რადიალური ზღვარი

1. 2π პერიოდული და $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი f ფუნქციის

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (5.19.1)$$

ფურიეს მწკრივს (ე.ი. a_n და b_n წარმოადგენს f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს — იხ. თავი 2, პარაგრაფი 2.2, ფორმულები (2.2.2)) შეესაბამება მასთან ასოცირებული (იხ. პარაგრაფი 5.2) r -ის მიმართ ხარისხობანი მწკრივი

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n.$$

რომელსაც (5.19.1) მწკრივისთვის შედგენილი პუასონ-აბელის საშუალო ეწოდება და აღინიშნება $f(r, x)$ სიმბოლოთი. ამრიგად,

$$f(r, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n, \quad 0 < r < 1. \quad (5.19.2)$$

პარაგრაფი 5.11-დან ვიცით ტოლობაც

$$f(r, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P(r, x - t) dt, \quad (5.19.3)$$

რომლის მარჯვენა მხარეს f ფუნქციის პუასონის ინტეგრალი ეწოდება (იხ. 5.9 პარაგრაფის დასასრული).

მაშასადამე, პუასონ-აბელის $f(r, x)$ საშუალოსთვის გვაქვს (5.19.3) ინტეგრალური წარმოდგენა და (5.19.2) მწკრივით წარმოდგენა.

აქამდე, $\frac{\partial}{\partial x} f(r, x)$ კერძო წარმოებულს ვაკავშირებდით (5.19.3) ტოლობის მარჯვენა მხარის ინტეგრალის შესაბამის

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\partial}{\partial x} P(r, x-t) dt$$

წარმოებულთან და ვადგენდით $\frac{\partial}{\partial x} f(r, x)$ -ის კავშირს f ფუნქციის f' წარმოებულთან.

მეორეს მხრივ, $\frac{\partial}{\partial x} f(r, x)$ კერძო წარმოებული შეიძლება დავაკავშიროთ (5.19.2) ტოლობის მარჯვენა მხარეს მდგომ მწკრივთანაც. მართლაც, გვაქვს ტოლობა

$$\frac{\partial}{\partial x} f(r, x) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n \right],$$

ანუ

$$\frac{\partial}{\partial x} f(r, x) = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n. \quad (5.19.4)$$

რადგან a_n და b_n ფურიეს კოეფიციენტები შემოსაზღვრულია (იხ. თავი 3, პარაგრაფი 3.9) და ტრიგონომეტრიული სისტემაც შემოსაზღვრულია, ამიტომ არსებობს $M > 0$ მუდმივი ისეთი, რომ

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| < M, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ამრიგად,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n$$

მწკრივის მაჟორანტი (მეტობითი) მწკრივია $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$, რომელიც თანაბრად კრებადია ყოველ $[0, l] \subset [0, r)$ სეგმენტზე, $l < r$; ასევე თანაბრად კრებადია ყოველ $[0, l] \subset [0, r)$ სეგმენტზე, $l < r$, მისი ნებისმიერ რიცხვჯერ წევრობრივი გაწარმოებით მიღებული მწკრივებიც. ამიტომ (5.19.4) ტოლობის მარჯვენა მხარის გაწარმოება შეგვიძლია მოვახდინოთ

მწკრივის შიგნით, რაც მოგვცემს

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nx - a_n \sin nx)r^n \quad (5.19.5)$$

მწკრივს. მაგრამ, ეს მწკრივი შეიძლება მოვიზღოთ ასეც: ჯერ წევრობრივ, ფორმალურად, გავაწარმოთ (5.19.1), რაც მოგვცემს $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx)$ მწკრივს. ამ უკანასკნელისთვის შევადგინოთ პუასონ-აბელის საშუალო, მივიღებთ

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nx - a_n \sin nx)r^n. \quad (5.19.6)$$

რადგან (5.19.5) და (5.19.6) ერთი და იგივეა, ამიტომ (5.19.1) მწკრივისთვის წევრობრივი წარმოებულის პუასონ-აბელის საშუალო და პუასონ-აბელის საშუალოს x -ით წარმოებული ერთი და იგივეა.

მაშასადამე, f ფუნქციის პუასონის ინტეგრალის x -ით წარმოებულის შესახებ ყოველი მტკიცებულება ეკვივალენტურია f -ის ფურიეს მწკრივის წევრობრივი, ფორმალურად, გაწარმოებით მიღებული მწკრივის პუასონ-აბელის შესახებ მტკიცებულების.

ამიტომ პარაგრაფ 5.16-ის (5.16.2) ტოლობა შეიძლება განხილულ იქნას როგორც $S[f]$ მწკრივის წევრობრივი გაწარმოებით მიღებული მწკრივისთვის პუასონ-აბელის საშუალოს თვისება: მისი რადიალური ზღვარი ტოლია $f'(x_0)$ -ის, როცა $f'(x_0)$ სასრულია.

მაგრამ უკანასკნელი ფაქტისთვის აუცილებელი არ აღმოჩნდა $f'(x_0)$ წარმოებულის არსებობა.

ფაქტმა დაადგინა, რომ ამისთვის საკმარისია სასრული სიმეტრიული $f^{(l)}(x_0)$ წარმოებულის არსებობა.

სიმეტრიული წარმოებულის შესახებ იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.9.

2. ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 5.19.1 (ფატუ, [71], [8, გვ. 161]). ვთქვათ, 2π პერიოდულ და $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებად f ფუნქციას რომელიმე x_0 წერტილზე გააჩნია სასრული სიმეტრიული $f^{(l)}(x_0) \equiv l$ წარმოებულის. მაშინ პუასონის $f(r, x)$ ინტეგრალის $\frac{\partial}{\partial x} f(r, x)$ კერძო წარმოებულს c^{ix_0} წერტილზე გააჩნია l -ის ტოლი რადიალური ზღვარი:

$$\lim_{r \rightarrow 1-} \frac{\partial}{\partial x} f(r, x_0) = l. \quad (5.19.7)$$

დამტკიცება. პარაგრაფ 5.14-ის (5.14.5) და (5.14.6) ტოლობების ძალით გვაქვს

$$\begin{aligned}\pi \frac{\partial}{\partial x} f(r, x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\partial}{\partial x} P(r, x-t) dt = - \int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-u) \frac{\partial}{\partial u} P(r, u) du \\ &= \int_{x-\pi}^{x+\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^0 f(x-u) \frac{\partial}{\partial u} P(r, u) du + \int_0^{\pi} f(x-u) \frac{\partial}{\partial u} P(r, u) du.\end{aligned}$$

აქ პირველი ინტეგრალის მიმართ გამოვიყენოთ $\frac{\partial}{\partial u} P(r, u)$ ფუნქციის კენტობა (იხ. პარაგრაფი 5.14, ტოლობა (5.14.2)), გვექნება

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^0 f(x-u) \frac{\partial}{\partial u} P(r, u) du \\ = \int_{\pi}^0 f(x+v) \left[-\frac{\partial}{\partial v} P(r, v) \right] (-dv) = - \int_0^{\pi} f(x+v) \frac{\partial}{\partial v} P(r, v) dv.\end{aligned}$$

ამიტომ

$$\pi \frac{\partial}{\partial x} f(r, x) = \int_0^{\pi} f(x-u) \frac{\partial}{\partial u} P(r, u) du - \int_0^{\pi} f(x+u) \frac{\partial}{\partial u} P(r, u) du,$$

ანუ გვაქვს

$$\frac{\partial}{\partial x} f(r, x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u) - f(x-u)] \frac{\partial}{\partial u} P(r, u) du. \quad (5.19.8)$$

პარაგრაფ 5.14-ის (5.14.3) უტოლობის მიმართ თუ გამოვიყენებთ პარაგრაფ 5.10-ის (5.10.8) შეფასებას, მაშინ ყოველი $\delta > 0$ რიცხვისთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left| \frac{\partial}{\partial u} P(r, u) \right| \leq \frac{4(1-r)}{\sin^4 \delta}, \quad \text{როცა } \delta \leq |u| \leq \pi. \quad (5.19.9)$$

ახლა (5.19.8) ინტეგრალი წარმოვადგინოთ $I_1 = \int_0^{\delta}$ და $I_2 = \int_{\delta}^{\pi}$ ინტეგრალების ჯამად.

(5.19.9) უტოლობის ძალით

$$|I_2| \leq \frac{8(1-r)}{\sin^4 \delta} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt,$$

ხოლო

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+u) - f(x-u)}{2u} \cdot 2u \frac{\partial}{\partial u} P(r, u) du \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\delta \left[\frac{f(x+u) - f(x-u)}{2u} - l \right] \cdot 2u \frac{\partial}{\partial u} P(r, u) du - \frac{l}{\pi} \int_0^\delta 2u \frac{\partial}{\partial u} P(r, u) du \\ &\equiv J_1 + J_2. \end{aligned}$$

რადგან (5.19.9) უტოლობა სრულდება ყველა $\delta > 0$ რიცხვისთვის, ამიტომ შეგვიძლია შესრულებულად ჩავთვალოთ შემდეგი უტოლობაც

$$|J_1| \leq \frac{1}{\pi} \cdot 2\delta \cdot \frac{4(1-r)}{\sin^4 \delta} \cdot \varepsilon,$$

სადაც ნებისმიერად ადებული $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის გვაქვს

$$\left| \frac{f(x+u) - f(x-u)}{2u} - l \right| < \varepsilon, \text{ როცა } u \in (0, \delta).$$

ახლა განვიხილოთ J_2 ინტეგრალი, რომლის ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} & -\frac{2l}{\pi} \int_0^\delta u \frac{\partial}{\partial u} P(r, u) du \\ &= -\frac{2l}{\pi} u \cdot P(r, u) \Big|_{u=0}^{u=\delta} + \frac{2l}{\pi} \int_0^\delta P(r, u) du = -\frac{2l}{\pi} P(r, \delta) + l \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\delta P(r, u) du \right]. \end{aligned}$$

5.10 პარაგრაფიდან (5.10.7) უტოლობის ძალით $P(r, \delta) \leq \frac{1-r}{\sin^2 \delta} \rightarrow 0$, როცა $r \rightarrow 1-$, ხოლო 5.10 პარაგრაფის (5.10.11) უტოლობის თანახმად

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\delta P(r, u) du \rightarrow 1, \text{ როცა } r \rightarrow 1-.$$

(5.19.7) გამომდინარეობს მიღებული შეფასებებიდან. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

3. სასურველია 5.19.1 თეორემა ჩამოვაყალიბოთ მისი ეკვივალენტური სახით.

თ ე ო რ ე მ ა 5.19.2 (ფატუ, [71], [8, გვ. 161, 163]). თუ 2π პერიოდულ და $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებად f ფუნქციას რაიმე x_0 წერტილზე გააჩნია სასრული სიმეტრიული $f^{(l)}(x_0)$ წარმოებული, კერძოდ, თუ მას გააჩნია სასრული ჩვეულებრივი $f'(x_0)$ წარმოებული, მაშინ f ფუნქციის

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ფურიეს მწკრივის წევრობრივი გაწარმოებით მიღებული

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nx - a_n \sin nx)$$

მწკრივი არის (A) -შეჯამებადი x_0 წერტილზე $f^{(l)}(x_0)$ რიცხვისკენ, ანუ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} nr^n (b_n \cos nx_0 - a_n \sin nx_0) = f^{(l)}(x_0).$$

შ ე ნ ი შ ვ ა 5.19.3. ფატუს 5.19.2 თეორემის (და, აგრეთვე, მისი ეკვივალენტური 5.19.1 თეორემის) განზოგადება ცნობილია **ბორელის სიმეტრიული**

$$B'_s f(\theta_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \frac{f(\theta_0 + t) - f(\theta_0 - t)}{2t} dt$$

წარმოებულისთვის [78]⁶. აქვე მტკიცდება, რომ ფატუს 5.19.1 თეორემას ადგილი არ აქვს აპროქსიმირებადი წარმოებულისთვის. შემდეგ, ავტორს შემოაქვს $\alpha \geq 1$ რიგის აპროქსიმირებადი წარმოებულის ცნება $f'_\alpha(\theta_0)$ და ამბობს, რომ ფატუს 5.19.1 თეორემა ძალაშია, როცა $\alpha > 4$. მაგრამ შემდეგ გაირკვა [88], რომ აქ საჭიროა პირობა $\alpha > 5$.

⁶ბორელის წარმოებულია

$$B'f(\theta_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \frac{f(\theta_0 + t) - f(\theta_0)}{t} dt.$$

ორივე შემთხვევაში ინტეგრალი გაგებულია $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^h$ აზრით.

5.20 ფურიეს ნამდვილი ფორმის მწკრივის შეჯამებადობა ლებეგის L და L^* მეთოდებით

A. ნამდვილი ფორმის ტრიგონომეტრიული მწკრივის შეჯამებადობა L და L^* მეთოდებით

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე ტრიგონომეტრიული მწკრივი, საზოგადოდ, არა ფურიეს მწკრივი

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (5.20.1)$$

1. შემოვიღოთ შემდეგი

გ ა ნ ს ა ზ დ ვ რ ა 5.20.1 ([24, გვ. 505], [8, გვ. 486]). (5.20.1) მწკრივს ეწოდება ლე-ბეგის მეთოდით შეჯამებადი, მოკლედ L -შეჯამებადი, რომელიმე x_0 წერტილზე რაიმე S რიცხვისკენ, თუ

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx_0) \frac{\sin nh}{nh} \quad (5.20.2)$$

მწკრივი კრებადია ყველა h -თვის რაიმე $(0, \eta)$ ღია ინტერვალდან⁷ და ადგილი აქვს ტოლობას⁸

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) \frac{\sin nh}{nh} \right] = S. \quad (5.20.3)$$

(5.20.3) საშუალებას იძლევა შემოვიღოთ რაიმე

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \quad (5.20.4)$$

⁷მწკრივი (5.20.2) არის h -ის ლუწი ფუნქცია და ამიტომ საკმარისია $(0, \eta)$ შემთხვევა.

⁸თითი $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0)$ მწკრივის კრებადობა არ მოითხოვება. სწორედ ასეთ შემთხვევასთან გვექნება საქმე ფურიეს მწკრივებისთვის.

რიცხვითი მწკრივის L -შეჯამებადობა S რიცხვისკენ ტოლობით^{9,10}

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \left[A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin nh}{nh} \right] = S.$$

შენიშვნა 5.20.2. მწკრივის შეჯამებადობის L მეთოდი არაა შედარებადი ამავე მწკრივის კრებადობასთან. კრებადობა ეკვივალენტურია L -შეჯამებადობის, თუ $n \cdot A_n \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$ (ფატუ, [8, გვ. 487], [24, გვ. 506]).

2. თუკი (5.20.1) მწკრივის ფორმალურად წევრობრივი ინტეგრებით მიღებული

$$\frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \sin nx - b_n \cos nx) \quad (5.20.5)$$

მწკრივი¹¹ კრებადია x_0 წერტილის მიდამოში რაიმე $l(x)$ ფუნქციისკენ, რომელსაც ეწოდება (5.20.1) მწკრივის ლეზეგის ფუნქცია და, თუ x_0 წერტილზე არსებობს $l(x)$ ფუნქციის სასრული სიმეტრიული წარმოებული (იხ. პარაგრაფი 5.19) $l^{(l)}(x_0)$, მაშინ

$$l(x_0 + h) - l(x_0 - h) = a_0 h + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) \frac{\sin nh}{n}$$

და

$$\frac{l(x_0 + h) - l(x_0 - h)}{2h} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) \frac{\sin nh}{nh}$$

ტოლობებიდან გამომდინარე, (5.20.3) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) \frac{\sin nh}{nh} \right] = l^{(l)}(x_0). \quad (5.20.6)$$

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში (5.20.1) მწკრივი L შეჯამებადია x_0 წერტილზე $l^{(l)}(x_0)$ რიცხვისკენ.

⁹მწკრივი (5.20.4) შეიძლება არ იყოს კრებადი.

¹⁰(5.20.1) და (5.20.4) მწკრივები "შეშლილთა" მათი n -ური წევრის გამრავლებით $\frac{\sin nh}{nh}$ -ზე, რომლის ზღვარი $h = 0$ წერტილზე არის 1 ყოველი ფიქტიური ნატურალური n -თვის (ანალიზური იხ. თავი 5, პარაგრაფი 5.1, შენიშვნა 5.1.8; პარაგრაფი 5.3, შენიშვნა 5.3.5).

¹¹ე.ი. (5.20.1) მწკრივი მიიღება (5.20.5) მწკრივისგან ფორმალურად წევრობრივი გაწარმოებით.

3. ლებეგის $l(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილზე შესაძლებელია გაანდეს

$$l'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} [l(x_0 + 2h) - l(x_0)]$$

ჩვეულებრივი წარმომადგენელი კი. მაშინ

$$l(x_0 + 2h) - l(x_0) = a_0 h + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n(x_0 + h) + b_n \sin n(x_0 + h)] \frac{\sin nh}{n}$$

ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n(x_0 + h) + b_n \sin n(x_0 + h)] \frac{\sin nh}{nh} \right\} = l'(x_0). \quad (5.20.7)$$

გ ა ნ ს ა ზ დ ვ რ ა 5.20.3. (5.20.1) მწკრივის ვუწოდოთ ლებეგის ინტენსიური მეთოდით შეჯამებადი, მოკლედ L^* -შეჯამებადი, x_0 წერტილზე s რიცხვისკენ, როცა ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n(x_0 + h) + b_n \sin n(x_0 + h)] \frac{\sin nh}{nh} \right\} = s.$$

(5.20.6) და (5.20.7) ტოლობებიდან გამომდინარეობს

წ ი ნ ა დ ე ბ ა 5.20.4. თუ (5.20.5) მწკრივის $l(x)$ ჯამს x_0 წერტილზე გაანდეს $l'(x_0)$ წარმომადგენელი, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობებს

$$l'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) \frac{\sin nh}{nh} \right] \quad (5.20.8)$$

და

$$l'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n(x_0 + h) + b_n \sin n(x_0 + h)] \frac{\sin nh}{nh} \right\}. \quad (5.20.9)$$

B. ფურიეს ნამდვილი ფორმის მწკრივის შეჯამებადობა

L და L^* მეთოდებით

თავი 4-ის პარაგრაფ 4.15-ში დამტკიცებული ლებეგის 4.15.1 თეორემა გვეუბნება, რომ 2π პერიოდული და $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი ყოველი f ფუნქციის ფურიეს ნამდვილი ფორმის მწკრივის

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (5.20.10)$$

წევრობრივი ინტეგრება ნებისმიერ $[0, x] \subset [0, 2\pi]$ სეგმენტზე მართლზომიერია, თუნდაც (5.20.10) მწკრივი განშლადი იყოს ყველგან. ლებეგის ეს თეორემა, (4.15.4) ტოლობიდან გამომდინარე, ასე გამოიყურება

$$\frac{1}{2} a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \sin nx - b_n \cos nx) = \int_0^x f(t) dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}. \quad (5.20.11)$$

სადაც $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ რიცხვითი მწკრივი კრებადია და

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\pi - t) dt.$$

(5.20.11) ტოლობის მარცხენა მხარე წარმოადგენს ლებეგის $I(x)$ ფუნქციას (5.20.10) მწკრივისთვის და რადგან იგი (5.20.11)-ის მარჯვენა მხარის ტოლია, ამიტომ თითქმის ყველა $x_0 \in [-\pi, \pi]$ წერტილზე ადგილი აქვს $I'(x_0) = f(x_0)$ ტოლობას.

ამგვარად, (5.20.8) და (5.20.9) ტოლობების მარცხენა მხარეში გვაქვს $f(x_0)$. მამასადაბე, მართებულია შემდეგი

თ ე ო რ ე მ ა 5.20.5 (ლებეგი, [8, გვ. 486], [24, გვ. 506]). ყოველი $f \in L[0, 2\pi]$ ფუნქციისთვის მისი (5.20.10) ფურიეს მწკრივი L და L^* შეკამბადია $f(x_0)$ მნიშვნელობისკენ თითქმის ყველა $x_0 \in [0, 2\pi]$ წერტილზე ანუ, ადგილი აქვს ტოლობებს

$$f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \frac{\sin nh}{nh} \right]. \quad (5.20.12)$$

$$f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n(x_0 + h) + b_n \sin n(x_0 + h)] \frac{\sin nh}{nh} \right\}. \quad (5.20.13)$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 5.20.6. (5.20.12) და (5.20.13) ტოლობებს ადგილი აქვს f ფუნქციის ლებეგის x_0 წერტილებზე, კერძოდ, f -ის უწყვეტობის ყველა x_0 წერტილზე, თუკი f -ს გააჩნია უწყვეტობის წერტილი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 5.20.7. ცნობილია ისეთი F უწყვეტი ფუნქციის არსებობა — ფეიერის მაგალითი [8, გვ. 132], რომლის $S[F]$ ფურიეს მწკრივი განშლადია ერთ მაინც x_0 წერტილზე. მაგრამ F -ის უწყვეტობის ყოველი წერტილი არის F -თვის ლებეგის წერტილი და შენიშვნა 5.20.6-ის ძალით უწყვეტობის x_0 წერტილზე $S[F]$ არის L და L^* მეთოდებით შეკამბადია $F(x_0)$ მნიშვნელობისკენ. ამავე დროს, $S[F]$ განშლადია x_0 წერტილზე!

5.21 ექსპონენტური მწკრივის L და L^* შეჯამებადობა

A. ნამდვილი ფორმის

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (5.21.1)$$

ტრიგონომეტრიული მწკრივი შეიძლება ჩაწერილ იქნას ექსპონენტური ფორმით (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.4)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad (5.21.2)$$

სადაც

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + ib_n), \quad \text{როცა } n \geq 1.$$

(5.21.1) ფორმიდან (5.21.2) ფორმაზე გადასვლას ზოგჯერ უწოდებენ “ტრიგონომეტრიული მწკრივის გაექსპონენტურებას”. ასეთი გადასვლისას (5.21.1) მწკრივის

$$S_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad S_0(x) = \frac{1}{2} a_0.$$

n -ური კერძო ჯამის ექსპონენტური ფორმაა

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{ikx}, \quad n \geq 1. \quad S_0(x) = c_0.$$

ასეთ შემთხვევაში, ლებეგის თეორემას ფურიეს ექსპონენტური მწკრივის წევრობრივი ინტეგრების შესახებ აქვს სახე (იხ. თავი 4, თეორემა 4.15.10).

თ ე ო რ ე მ ა 5.21.1 (ლებეგი (1902 წ.)). 2π პერიოდული და $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი ნებისმიერი f ფუნქციის ფურიეს ექსპონენტური

$$f \sim c_0 + \sum_{|n| \geq 1} c_n e^{inx} \quad (5.21.3)$$

მწკრივის წევრობრივი ინტეგრება ნებისმიერ $[0, x] \subset [0, 2\pi]$ სეგმენტზე მართლზომიერია, თუნდაც (5.21.3) მწკრივი განშლადი იყოს ყველგან და ინტეგრების შედეგს აქვს სახე

$$c_0 x - i \sum_{|n| \geq 1} \frac{c_n}{n} e^{inx} = \int_0^x f(t) dt - i \sum_{|n| \geq 1} \frac{c_n}{n}, \quad (5.21.4)$$

რომელშიც მწკრივი თანაბრად კრებადია ნებისმიერ $[a, b] \subset [0, 2\pi]$ სეგმენტზე და

$$(PV) \quad \sum_{|n| \geq 1} \frac{c_n}{n} = -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n},$$

$$(PV) \quad \sum_{|n| \geq 1} \frac{c_n}{n} = -i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)(\pi - t) dt.$$

B. (5.21.4) ტოლობის მარჯვენა მხარე განსაზღვრულია ყველგან და, მაშასადამე, ყველგან განსაზღვრულია მისი მარჯვენა მხარეც

$$L(x) \equiv c_0 x - i \sum_{|n| \geq 1} \frac{c_n}{n} e^{inx}. \quad (5.21.5)$$

მეორეს მხრივ, (5.21.5) ტოლობის მარჯვენა მხარე წარმოადგენს (5.21.3) მწკრივისგან ფორმალურად წევრობრივი ინტეგრებით მიღებულ გამოსახულებას ანუ, (5.21.4) ტოლობის თანახმად, (5.21.5) ტოლობით ყველგან განსაზღვრული $L(x)$ ფუნქცია წარმოადგენს, პარაგრაფ 5.20-ში მიღებული ტერმინის შესაბამისად, **ლევევის ფუნქციას** (5.21.3) მწკრივისთვის. (5.21.4) და (5.21.5) ტოლობებიდან ვღებულობთ

$$L(x) = \int_0^x f(t) dt - i \sum_{|n| \geq 1} \frac{c_n}{n}. \quad (5.21.6)$$

შემდეგ, (5.21.5) ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$L(x_0 + h) - L(x_0 - h) = 2c_0 h + 2 \sum_{|n| \geq 1} c_n e^{inx_0} \frac{\sin nh}{n},$$

$$L(x_0 + 2h) - L(x_0) = 2c_0 h + 2 \sum_{|n| \geq 1} c_n e^{inx_0} e^{inh} \frac{\sin nh}{n}.$$

აქედან

$$\frac{L(x_0 + h) - L(x_0 - h)}{2h} = c_0 + \sum_{|n| \geq 1} c_n e^{inx_0} \frac{\sin nh}{nh},$$

$$\frac{L(x_0 + 2h) - L(x_0)}{2h} = c_0 + \sum_{|n| \geq 1} c_n e^{inx_0} e^{inh} \frac{\sin nh}{nh}.$$

ამ ტოლობების მარცხენა მხარეთა ზღვარია $f(x_0)$, $h \rightarrow 0$, თითქმის ყველა x_0 -თვის, (5.21.6) ტოლობის თანახმად. ამრიგად, გვაქვს

თ ე ო რ მ ა 5.21.2 (ლემეგი). 2π პერიოდული და $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი ყოველი f ფუნქციის ფურიეს (5.21.3) ექსპონენტური მწკრივი თითქმის ყველა $x_0 \in [0, 2\pi]$ წერტილზე შეჯამებადია L და L^* მეთოდებით $f(x_0)$ მნიშვნელობისკენ ანუ, ადგილი აქვს ტოლობებს

$$f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[c_0 + \sum_{|n| \geq 1} c_n e^{inx_0} \frac{\sin nh}{nh} \right],$$

$$f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[c_0 + \sum_{|n| \geq 1} c_n e^{inx_0} e^{inh} \frac{\sin nh}{nh} \right].$$

5.22 რიმან-შვარცის მეორე წარმომადგენელი

x წერტილის მიდამოში განსაზღვრული f ფუნქციის სიმეტრიული წარმომადგენელი x წერტილზე, სიმბოლურად $f^{(r)}(x)$ ან $D_1 f(x)$, ეწოდება

$$f^{(r)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (5.22.1)$$

ზღვარს, როცა ეს ზღვარი არსებობს და ის სასრულია.

უკვე ვიცით, რომ ჩვეულებრივი $f'(x)$ წარმომადგენლის არსებობა იწვევს მისივე ტოლი სიმეტრიული $f^{(r)}(x)$ წარმომადგენლის არსებობას (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.9).

$f(x+h) - f(x-h)$ სხვაობას ეწოდება f ფუნქციის სიმეტრიული (ზოგჯერ პირველი სიმეტრიული) სხვაობა x წერტილზე და აღინიშნება $\Delta_h f(x)$ სიმბოლოთი.

ახლა განვიხილოთ $\Delta_h f(x)$ ფუნქციის სიმეტრიული სხვაობა იმავე x წერტილზე იგივე h -თვის, სიმბოლურად $\Delta_h^2 f(x)$, რომელსაც ეწოდება f ფუნქციის სიმეტრიული მეორე სხვაობა x წერტილზე.

რადგან

$$\begin{aligned} \Delta_h f(x+h) - \Delta_h f(x-h) &= [f(x+h+h) - f(x+h-h)] \\ &\quad - [f(x-h+h) - f(x-h-h)] = f(x+2h) + f(x-2h) - 2f(x), \end{aligned}$$

ამიტომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\Delta_h^2 f(x) = f(x+2h) + f(x-2h) - 2f(x). \quad (5.22.2)$$

ამრიგად, f ფუნქციის სიმეტრიული მეორე სხვაობა x წერტილზე h ნაზრდისთვის მოიცემა (5.22.2) ტოლობით.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 5.22.1 ([8, გვ. 185], [24, გვ. 44]). x წერტილის მიდამოში განსაზღვრული F ფუნქციის რიმან-შვარცის მეორე წარმოებული x წერტილზე, სიმბოლურად $F^{(II)}(x)$ ან $D_2 F(x)$, ეწოდება

$$f^{(II)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} \quad (5.22.3)$$

ზღვარს¹², როცა ეს ზღვარი არსებობს და ის სასრულია.

შეენიშნოთ, რომ რიმან-შვარცის მეორე წარმოებული არ არის მეორე რიგის სიმეტრიული წარმოებული, ანუ არ არის სიმეტრიული წარმოებულის სიმეტრიული წარმოებული.

წ ი ნ ა დ ა დ ე ბ ა 5.22.2. თუ F ფუნქციას x წერტილზე გააჩნია მეორე რიგის ჩვეულებრივი $F''(x)$ წარმოებული, მაშინ იმავე x წერტილზე F -ს გააჩნია რიმან-შვარცის მეორე წარმოებული $F^{(II)}$ და ადგილი აქვს ტოლობას

$$F^{(II)}(x) = F''(x).$$

¹²შეენიშნოთ, რომ მათემატიკურ ლიტერატურაში გვაქვს ამ ტერმინის, ანუ (5.22.3) ზღვრის სხვადასხვა სახელწოდება:

- (1) [34, გვ. 280]—(5.22.3) ზღვარს ეწოდება შვარცის მეორე წარმოებული, ხოლო იქვე, გვ. 279-ზე, შვარცის წარმოებული ჰქვია (5.22.1) ტოლობით განსაზღვრულ სიდიდეს, რომელიც ყველგან იწოდება სიმეტრიულ წარმოებულად;
- (2) [8, გვ. 185]—(5.22.3) ზღვარს ეწოდება შვარცის მეორე წარმოებული და არ აქვს შვარცის პირველი წარმოებული, რომლის ნაცვლად ახსენებს სიმეტრიულ წარმოებულს;
- (3) [43, გვ. 30]—(5.22.3) ზღვარს ეწოდება მეორე სხვაობითი სიმეტრიული წარმოებული, რაც მართებულია. საქმე ისაა, რომ მეორე რიგის წარმოებულისგან, ე.ი. წარმოებულის წარმოებულისგან, განსხვავებით არსებობს სხვაობითი მეორე წარმოებულის ცნება. იქვე, გვ. 29-ზე, სიმეტრიულ წარმოებულს ჰქვია შვარცის წარმოებული;
- (4) [24, გვ. 44]—(5.22.3) ზღვარს ეწოდება “შვარცის (ან რიმანის) წარმოებული”.

სხვების მიერ ამ საკითხთან დაკავშირებით დაფიქსურებული რიმანი, [24]—ში მართებულად არის ციტირებული. საქმე ისაა, რომ (5.22.3) ზღვარი პირველად განიხილა რიმანმა [42, გვ. 30], რომლისთვისაც მას რაიმე სახელწოდება არ მიუნიჭებია. მოგვიანებით კი, [42]—ში განთავსებულ რიმანის შრომებზე, რედაქციის მიერ კომენტარებში (5.22.3) ზღვარს ჰქვია “რიმანის განზოგადებული მეორე წარმოებული” [42, გვ. 504].

სხვათაშორის, რიმანის მიერ ყოფილა დამტკიცებული [42, გვ. 29–30], ვაიერშტრასზე აღდრე, რომ უწყვეტი ფუნქციებისგან შედგენილი თანაბრად კრებადი მწკრივის ჯამი უწყვეტი ფუნქციაა, თუმცა, ამ თეორემას ყველგან მინიჭებული აქვს ვაიერშტრასის სახელი.

ვფიქრობ, ტერმინი “შვარცის წარმოებული” გაჩნდა მას შემდეგ, რაც ვაიერშტრასმა დაამტკიცა თეორემა (1890 წ.): თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი F ფუნქციისთვის (5.22.3) ზღვარი ნულია (a, b) ინტერვალში, მაშინ F არის წრფივი ფუნქცია $[a, b]$ ინტერვალზე.

ტერმინების ამ სიჭრელადან მეტ-ნაკლებად მისაღებია “რიმან-შვარცის მეორე წარმოებული”. მით უფრო, რომ [32]—ში, გვ. 995-ზე, (5.22.3) ზღვარს ეწოდება რიმანის (შვარცის) წარმოებული, ხოლო [31, გვ. 887]—ში ნათქვამია: (5.22.3) ზღვარი პირველად შემოიღო ბ. რიმანმა (1854 წ.), რომელიც კ. შვარცმა განიხილა 1890 წელს.

დ ა მ ტ ვ ი ც ე ბ ა . როგორც ვიცით, $F''(x)$ მეორე რიგის წარმომადგენელი ეწოდება $F'(x)$ ფუნქციის წარმომადგენელს იმავე x წერტილზე: $F''(x) = (F')'(x)$.

თუ შემოვიღებთ h -ის ფუნქციას (x ფიქსირებულია)

$$\varphi(h) = F(x+h) + F(x-h),$$

მაშინ გვექნება ტოლობა

$$\frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} = \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h^2},$$

რომლის მარჯვენა მხარის მიმართ კოშის თეორემის (იხ. [2, გვ. 295]) გამოყენებით მივიღებთ

$$\frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h^2} = \frac{\varphi'(\theta h)}{2\theta h}, \quad 0 < \theta < 1.$$

მაგრამ

$$\varphi'(h) = F'(x+h) \cdot 1 + F'(x-h) \cdot (-1) = F'(x+h) - F'(x-h).$$

ამიტომ

$$\frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} = \frac{F'(x+\theta h) - F'(x-\theta h)}{2\theta h}. \quad (5.22.4)$$

სიმეტრიული წარმომადგენლის განსაზღვრის თანახმად (იხ. ტოლობა (5.22.1))

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F'(x+\theta h) - F'(x-\theta h)}{2\theta h} = (F')^{(1)}(x). \quad (5.22.5)$$

რადგან ჩვეულებრივი წარმომადგენლის არსებობა იწვევს მისივე ტოლი სიმეტრიული წარმომადგენლის არსებობას, ხოლო პირობის თანახმად არსებობს $(F')'(x)$, ამიტომ (5.22.5) ტოლობის მარჯვენა მხარე ტოლია $(F')'(x) = F''(x)$ რიცხვის. ამის გათვალისწინებით, (5.22.4) ტოლობიდან გამომდინარეობს $F^{(1)}(x) = F''(x)$. $\square$

ამით წინადადების პირველი ნაწილი დამტკიცებულია, ხოლო მეორე ნაწილის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 5.22.3. ფუნქციისთვის

$$\varphi(x) = \begin{cases} x \sin^2 \frac{1}{x}, & \text{როცა } x \neq 0. \\ 0, & \text{როცა } x = 0 \end{cases}$$

გვაქვს

$$\varphi(h) + \varphi(-h) - 2\varphi(0) = \varphi(h) - \varphi(h) - 2 \cdot 0 = 0,$$

ე.ი. $\varphi'''(0) = 0$. ამავე დროს, $\varphi'(0)$ არ არსებობს და მით უფრო არ არსებობს $\varphi''(0)$.

მაგალითი 5.22.4. თუ

$$\psi(x) = \int_0^x t \sin \frac{1}{t} dt,$$

მაშინ

$$\psi(h) + \psi(-h) - \psi(0)$$

$$= \int_0^h t \sin \frac{1}{t} dt + \int_0^{-h} t \sin \frac{1}{t} dt - 0 = \int_0^h t \sin \frac{1}{t} dt - \int_0^h t \sin \frac{1}{t} dt = 0.$$

ამიტომ $\psi'''(0) = 0$. ამასთან ერთად, როცა $x \neq 0$, მაშინ $\psi'(x) = x \sin \frac{1}{x}$ და $\psi''(0)$ არ არსებობს.

უნდა აღვნიშნოთ, რომ წინადადება 5.22.2-ის შებრუნებული მტკიცება მცდარია, საზოგადოდ, მაგრამ მართებულია თითქმის ყველგან. ამას ადასტურებს შემდეგი

თეორემა 5.22.5 ([79]). თუ ზომად E სიმრავლეზე არსებობს რიმან-შვარცის $F''(x)$ მეორე წარმოებული, მაშინ თითქმის ყველგან E -ზე არსებობს მეორე რიგის $F'''(x)$ ჩვეულებრივი წარმოებულიც და

$$F'''(x) = F''(x).$$

ამასთან ერთად, კითხვაზე: შესაძლებელია თუ არა $F'''(x)$ იყოს $+\infty$ ან $-\infty$ დადებითი ზომის სიმრავლეზე, პასუხს იძლევა შემდეგი

თეორემა 5.22.6 ([16, გვ. 137–142]). რიმან-შვარცის მეორე წარმოებული ვერ გაუტოლდება უსასრულობას დადებითი ზომის რაიმე სიმრავლეზე. ამასთან ერთად, მისი უსასრულობასთან ტოლობა რეალიზებადია ნული ზომის ნებისმიერ სიმრავლეზე.

5.23 მწკრივის შეჯამებადობის რიმანის R^2 მეთოდი

1. რიმანის მიერ შეწავლილ მრავალ პრობლემათა შორისაა ტრიგონომეტრიული მწკრივით ფუნქციის წარმოდგენის პრობლემა. რიმანის თანამედროვენი: დირიხლე, ლიპშიცი და

სხვანი იძიებდნენ ფუნქციის იმ საკმარის თვისებებს, რომელნიც უზრუნველყოფდა მის წარმოდგენას ტრიგონომეტრიული მწკრივით. რიმანი კი იკვლევდა ფუნქციის იმ აუცილებელ თვისებებს, რომელნიც გამოწვეული იქნებოდა მისი ტრიგონომეტრიული მწკრივით წარმოდგენისას (იხ. [19, გვ. 25–90], რიმანის ამ შრომისადმი პენროს ვებერის მინიშნებებით).

ამ პრობლემასთან დაკავშირებით რიმანიმ განიხილა

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (5.23.1)$$

ტრიგონომეტრიული მწკრივი ერთადერთი მოთხოვნით: $a_n \rightarrow 0$ და $b_n \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$ (თუმცა, საკმარისია (a_n) და (b_n) მიმდევრობების შემოსაზღვრულობა).

რიმანიმ მოახდინა (5.23.1) მწკრივის ფორმალური წევრობრივი ინტეგრება ორჯერ და მიიღო ყველგან უწყვეტი

$$F(x) = \frac{a_0}{4} x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (5.23.2)$$

ფუნქცია¹³, რომლის ფორმალურად წევრობრივი ორჯერ გაწარმოებით მიიღება (5.23.1) მწკრივი — სწორედ ამას ნიშნავს ფორმალური ინტეგრება. F ფუნქციის ყველგან უწყვეტობა გამომდინარეობს (5.23.2) მწკრივის აბსოლუტურად და თანაბარად კრებადობიდან.

(5.23.2) ტოლობით განსაზღვრულ F ფუნქციას ეწოდება რიმანის ფუნქცია (5.23.1) მწკრივისთვის.

2. (5.23.2) ტოლობით განსაზღვრულ F ფუნქციასთან დავაკავშიროთ

$$G(x, h) = \frac{F(x + 2h) + F(x - 2h) - 2F(x)}{4h^2} \quad (5.23.3)$$

ტოლობით განსაზღვრული $G(x, h)$ ფუნქცია, რომელიც (5.23.1) მწკრივს უკავშირდება ტოლობით

$$G(x, h) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \frac{\sin^2 nh}{n^2 h^2}. \quad (5.23.4)$$

უკანასკნელი ტოლობის დასამტკიცებლად უნდა გამოვთვალოთ (5.23.3)-ის მარჯვენა მხარე (5.23.2) ტოლობით განსაზღვრული F ფუნქციისთვის და, ამავე დროს, ვისარგებლოთ ტოლობებით

$$\cos n(x + 2h) + \cos n(x - 2h) - 2 \cos nx = -4 \cos nx \sin^2 nh,$$

¹³(5.23.2) ტოლობის მარჯვენა მხარეს უნდა ემატებოდეს $A + Bx$ წრფივი ფუნქცია, რაც გავლენას ვერ ახდენს (5.23.3) და (5.23.4) ტოლობების მარჯვენა მხარეებზე.

$$\sin n(x+2h) + \sin n(x-2h) - 2 \sin nx = -4 \sin nx \sin^2 nh.$$

ახლა შემოვიღოთ (5.23.1) მწკრივის რიმანის მეთოდით შეჯამებადობის, ორი ურთიერთეკვივალენტური განსაზღვრება.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 5.23.1 ([8, გვ. 187], [24, გვ. 502]). ტრიგონომეტრიულ (5.23.1) მწკრივს ეწოდება რიმანის R^2 მეთოდით შეჯამებადი $s(x)$ -კენ, როცა რიმანის F ფუნქცია აკმაყოფილებს ტოლობას

$$F^{(n)}(x) = s(x). \quad (5.23.5)$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 5.23.2 ([8, გვ. 187], [24, გვ. 502]). ტრიგონომეტრიულ (5.23.1) მწკრივს ეწოდება რიმანის R^2 მეთოდით შეჯამებადი $s(x)$ -კენ, როცა ადგილი აქვს ტოლობას

$$s(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 \right]. \quad (5.23.6)$$

ამ განსაზღვრებათა ურთიერთეკვივალენტურობა გამომდინარეობს (5.23.3) და (5.23.4) ტოლობებიდან.

(5.23.6) ტოლობა საშუალებას იძლევა განვიხილოთ რიცხვითი მწკრივის R^2 -შეჯამებადობის ცნება.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 5.23.3. $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ რიცხვით მწკრივს ეწოდება R^2 -შეჯამებადი C რიცხვისკენ, როცა ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 \right] = C. \quad (5.23.7)$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 5.23.4. (5.23.6) და (5.23.7) ტოლობებიდან ჩანს, რომ რაიმე მწკრივის R^2 -შეჯამებადობის განიხილა ნიშნავს ამ მწკრივის n -ური წევრის გამრავლებას $(\frac{\sin nh}{nh})^2$ -ზე, რომლის ზღვარი h -ის მიმართ $h = 0$ წერტილზე 1-ის ტოლია ყოველი ფიქსირებული n -თვის. ამრიგად, R^2 -შეჯამებადობა ნიშნავს მწკრივის წევრების "შეშფოთებას" $(\frac{\sin nh}{nh})^2$ მამრავლებით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 5.23.5. ზოგიერთ საკითხთან დაკავშირებით განიხილება R^k -შეჯამებადობაც ($k = 1, 2, 3, \dots$), რაც ნიშნავს მწკრივის წევრების გამრავლებას $(\frac{\sin nh}{nh})^k$ -ზე. ამ თვალსაზრისით, მწკრივის R^0 -შეჯამებადობა ნიშნავს ამ მწკრივის კრებადობას. როცა $k = 1$, მაშინ გვაქვს მწკრივის შეჯამებადობის ლებეგის მეთოდი, რომელიც არ არის რეგულარული (იხ. პარაგრაფები 5.20 და 5.21), თუმცა მაგალითი 5.23.6-ის შემთხვევაში რეგულარულია. მწკრივის შეჯამებადობის R^k მეთოდი რეგულარულია, როცა $k > 1$.

მაგალითი 5.23.6 ([48, გვ. 262]). ადგილი აქვს ტოლობას

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 = \frac{\pi}{2h} - \frac{1}{2}, \quad h > 0.$$

მაშასადამე, $+\infty$ -კენ კრებადი მწკრივი $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$ არის R^2 -შეჯამებადი $+\infty$ -კენ.

5.24 შეჯამებადობის R^2 მეთოდის რეგულარულობა

მწკრივის შეჯამებადობის ყოველ მეთოდს წაეყენება ორი ძირითადი მოთხოვნა:

- (1) აჯამებს თუ არა ეს მეთოდი ყოველ კრებად მწკრივს ამ მწკრივის ჯამისკენ;
- (2) რამდენად ფართოა განშლად მწკრივთა კლასი, კერძოდ, შედის თუ არა ამ კლასში ფურიეს ყველა მწკრივი, რომელთაც აჯამებს განსახილველი მეთოდი.

დადებითი პასუხი გაცემა (1) კითხვას აქვე, ხოლო 5.26 პარაგრაფში — (2) კითხვას.

თეორემა 5.24.1 (რიმანი, [19, გვ. 56–60]¹⁴, [8, გვ. 188, 189], [24, გვ. 502, 503], [33, გვ. 290, 291], [42, გვ. 242]). მწკრივის შეჯამებადობის R^2 მეთოდი რეგულარულია, რაც ნიშნავს, რომ კრებად მწკრივს R^2 მეთოდი შეაჯამებს იგივე ჯამისკენ ანუ, რაც იგივეა,

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots = S \quad (5.24.1)$$

კრებადი მწკრივის შესაბამისი R^2 -საშუალო

$$a_0 + a_1 \left(\frac{\sin h}{h} \right)^2 + a_2 \left(\frac{\sin 2h}{2h} \right)^2 + \dots \equiv S(h) \quad (5.24.2)$$

კრებადია ყველა $h \neq 0$ მნიშვნელობისთვის და მის $S(h)$ ჯამს აქვს თვისება

$$\lim_{h \rightarrow 0} S(h) = S.$$

¹⁴აქ განხილულია

$$a_0 + a_1 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\beta} + a_2 \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \cdot \frac{\sin 2\beta}{2\beta} + \dots$$

ზოგადი შემთხვევა. იმ პირობით, რომ α/β შეუფარდება შემოსაზღვრულია. რიმანის ეს სტატია ძალზედ საინტერესოა იმიტომ, რომ იქ ავტორი საუბრობს მომჩიანვე პრობლემებზე მომუშავე კოლეგების მიღწევებზე და უზუსტობებზეც, რაც დღევანდელ პრაქტიკაში მიუღებელია, და ინტეგრალის ცნების ფორმირებისა და მათემატიკის მოსაზღვრე დარგებში მისი გამოყენების შესახებ. რიმანის ამ სტატიას ერთვის პენრიხ ვებერის შენიშვნები სტატიისადმი (გვ. 86–90). ვებერმა გადაამუშავა რიმანის ლექციები მათემატიკურ ფიზიკაში და 1900–1901 წლებში გამოსცა “მათემატიკური ფიზიკის დიფერენციალური განტოლებები”-ს სახელწოდებით.

დამტკიცება. (5.24.1) მწკრივის კრებადობიდან გამომდინარეობს, რომ $|a_n| < M$ ყველა $n = 0, 1, 2, \dots$ მნიშვნელობებისთვის (რადგან $a_n \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$), ე.ი.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 < M h^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < +\infty \text{ ყოველი } h \neq 0 \text{-თვის.}$$

(5.24.1) და (5.24.2) მწკრივების n -ური ნაშთებისთვის, შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$A_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k, \quad S_n(h) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2.$$

(5.24.1) მწკრივის კრებადობის გამო, ყოველი ε რიცხვისთვის არსებობს ისეთი $n = n(\varepsilon)$ ნატურალური რიცხვი, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$|A_k| < \varepsilon \text{ ყოველი } k \geq n \text{ რიცხვისთვის.} \quad (5.24.3)$$

ამის შემდეგ, ეს $n = n(\varepsilon)$ რიცხვი აღარ შეიცვლება მთელი მსჯელობის განმავლობაში. რადგან $a_k = A_k - A_{k+1}$, ამიტომ $S_n(h)$ ასეც ჩაიწერება

$$S_n(h) = \sum_{k=n}^{\infty} (A_k - A_{k+1}) \left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2. \quad (5.24.4)$$

რადგან კრებადი მწკრივის წევრების დაჯგუფებით მიიღება იმავე ჯამისკენ კრებადი მწკრივი (იხ. [3, გვ. 15]), ამიტომ (5.24.4) ტოლობა შეიძლება ასეც გადაიწეროს

$$S_n(h) = A_n \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k \left[\left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2 - \left(\frac{\sin(k-1)h}{(k-1)h} \right)^2 \right].$$

მაგრამ

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2 - \left(\frac{\sin(k-1)h}{(k-1)h} \right)^2 \right| \\ &= \left| \int_{(k-1)h}^{kh} \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx \right| \leq \int_{(k-1)h}^{kh} \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \right| dx, \end{aligned}$$

ამიტომ

$$|S_n(h)| \leq |A_n| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |A_k| \int_{(k-1)h}^{kh} \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \right| dx.$$

აქედან, (5.24.3) უტოლობის გათვალისწინებით, ვღებულობთ

$$|S_n(h)| \leq \varepsilon \left[1 + \int_{nh}^{+\infty} \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \right| dx \right] \quad (5.24.5)$$

შეფასებას თანაბრად h -ის მიმართ.

ახლა დავადგინოთ

$$I = \int_0^{+\infty} \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \right| dx \quad (5.24.6)$$

ინტეგრალის სასრულობა. ტოლობიდან

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2 \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

ჩანს, რომ (5.24.6) ინტეგრალის არსებობისთვის აუცილებელი და საკმარისია, (5.24.6) ინტეგრალი არსებობდეს ნულისა და $+\infty$ -ის მიდამოში (სხვაგან ეს ინტეგრალი არსებობს).

როგორც ვიცით, არსებობს $\delta > 0$ ისეთი, რომ $\sin x \approx x$, როცა $0 < x < \delta$. ასეთი x -თვის

$$\left| 2 \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \right| \approx 2 \left| \frac{x(\cos x - 1)}{x^2} \right| = 2 \left| \frac{-2 \sin^2 x/2}{x} \right| \approx 4 \frac{x^2}{4x} = x,$$

ე.ი.

$$\int_0^\delta \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \right| dx < \delta^2$$

და, მაშასადამე, არსებობს.

როცა $x \geq 1$, მაშინ

$$\begin{aligned} & \left| 2 \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \right| \\ & \leq 2 \frac{|\sin x|}{x} \cdot \frac{|x \cos x| + |\sin x|}{x^2} \leq 2 \frac{x+1}{x^3} \leq 2 \frac{x+x}{x^3} = 4 \frac{x}{x^3} = \frac{4}{x^2}. \end{aligned}$$

ამიტომ

$$\begin{aligned} & \int_1^t \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \right| dx \\ & \leq 4 \int_1^t x^{-2} dx = -4 \left[\frac{1}{x} \right]_1^t = -4 \left(\frac{1}{t} - 1 \right) = 4 - \frac{4}{t} \rightarrow 4, \text{ როცა } t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

მაშასადამე,

$$\int_1^{\infty} \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \right| dx \leq 4$$

და ამით დადგენილია (5.24.6) ინტეგრალის სასრულობა.

ახლა, (5.24.5) უტოლობა მიიღებს სახეს

$$|S_n(h)| < \varepsilon(1 + I)$$

თანაბრად h -ის მიმართ. ეს ნიშნავს

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2 \quad (5.24.7)$$

მწკრივის თანაბრად კრებადობას h -ის მიმართ, ანუ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2$$

ზღვრის არსებობას თანაბრად h -ის მიმართ.

ადვილი შესამოწმებელია ტოლობა

$$S(h) - S = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \left[\left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2 - 1 \right] + S_n(h) - A_n,$$

საიდანაც

$$|S(h) - S| \leq \sum_{k=1}^{n-1} |a_k| \cdot \left| \left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2 - 1 \right| + (2 + I)\varepsilon.$$

ამასთან ერთად, ყოველი ფიქსირებული k -თვის $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2 = 1$. ამიტომ ადრე აღებული ε -თვის არსებობს $\delta > 0$ ისეთი, რომ ყველა $|h| < \delta$ მნიშვნელობისთვის, სასრული რაოდენობის შესაკრებების მქონე ჯამი შეფასდება შემდეგი სახით

$$\sum_{k=1}^{n-1} |a_k| \cdot \left| \left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2 - 1 \right| < \varepsilon.$$

ამრიგად,

$$|S(h) - S| < (3 + I)\varepsilon, \text{ როცა } |h| < \delta.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა (5.24.1)-დან გამომდინარეობს

რიმანის პირველი თეორემა 5.24.2 ([24, გვ. 502]). თუ

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (5.24.8)$$

ტრიგონომეტრიული მწკრივი, ნულისკენ კრებადი a_n და b_n კოეფიციენტებით, კრებადია რომელიმე x_0 წერტილზე $s(x_0)$ მნიშვნელობისკენ, მაშინ (5.24.8) მწკრივი R^2 -შეჯამებადია იმავე x_0 წერტილზე იგივე $s(x_0)$ მნიშვნელობისკენ.

5.25 მწკრივისთვის რიმანის ფუნქციის გლუვობა

განვიხილოთ

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (5.25.1)$$

ტრიგონომეტრიული მწკრივი ნულისკენ კრებადი a_n და b_n კოეფიციენტებითა და

$$F(x) = \frac{a_0}{4} x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (5.25.2)$$

რიმანის ფუნქციით (იხ. პარაგრაფი 5.23) (5.25.1) მწკრივისთვის.

ჩვენი მიზანია დავადგინოთ (5.25.2) ტოლობით განსაზღვრული F ფუნქციის გლუვობა (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.9).

რიმანის მეორე თეორემა 5.25.1 ([19, გვ. 60], [24, გვ. 503], [42, გვ. 245], [46, გვ. 440]). როცა (5.25.1) მწკრივის a_n და b_n კოეფიციენტები კრებადია ნულისკენ, მაშინ ამ მწკრივისთვის რიმანის F ფუნქცია გლუვია ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$ წერტილზე, ანუ აკმაყოფილებს ურთიერთეკვივალენტურ ტოლობებს

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+2h) + F(x-2h) - 2F(x)}{4h} = 0, \quad (5.25.3)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{a_0}{2} h + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \frac{\sin^2 nh}{n^2 h} \right] = 0. \quad (5.25.4)$$

დამტკიცება. (5.25.3) და (5.25.4) ტოლობების ეკვივალენტურობა გამომდინარეობს ტოლობიდან (იხ. პარაგრაფი 5.23, ტოლობები (5.23.3) და (5.23.4))

$$\frac{F(x+2h) + F(x-2h) - 2F(x)}{4h} = \frac{a_0}{2} h + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \frac{\sin^2 nh}{n^2 h}.$$

ახლა დავადგინოთ (5.25.4) ტოლობის მართებულობა ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$ წერტილზე, რაც, თავის მხრივ, ეკვივალენტურია ტოლობის ($\frac{\pi}{2} h \rightarrow 0, h \rightarrow 0$)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \frac{\sin^2 nh}{n^2 h} = 0. \quad (5.25.5)$$

თეორემის პირობით $a_n \rightarrow 0$ და $b_n \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$. ამიტომ არსებობს $A > 0$ მუდმივი ისეთი, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$|a_n| + |b_n| < A \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5.25.6)$$

ამასთან ერთად, მართებულია უტოლობა

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n|, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.25.7)$$

ახლა, (5.25.6) და (5.25.7) უტოლობებიდან, ვღებულობთ

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| < A, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.25.8)$$

ისევ $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$, პირობის გამოყენებით და (5.25.7) უტოლობის გათვალისწინებით ვადგენთ, რომ ყოველ $\varepsilon > 0$ რიცხვს ეთანადება ისეთი $N = N(\varepsilon)$, რომ

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| < \varepsilon, \quad \text{როცა } n > N, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (5.25.9)$$

ავიღოთ ნებისმიერად მცირე $h > 0$ და (5.25.5) ტოლობის მწკრივი დავშალოთ ასე

$$\sum_{n=1}^N + \sum_{N < n \leq 1/h} + \sum_{n > 1/h} = S_1(h) + S_2(h) + S_3(h).$$

ცნობილი $|\sin t| \leq |t|$ უტოლობის გამოყენებით გვაქვს

$$\sin^2 nh \leq n^2 h^2. \quad (5.25.10)$$

$S_1(h)$ ჯამის მიმართ თუ გამოვიყენებთ (5.25.8) და (5.25.10) უტოლობებს, გვექნება

$$|S_1(h)| < ANh.$$

რადგან $S_2(h)$ ჯამში $n > N$, ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ (5.25.9) უტოლობა და მასთან ერთად, ცხადია, (5.25.10) უტოლობაც. მივიღებთ შეფასებებს¹⁵

$$|S_2(h)| \leq \varepsilon h \sum_{N < n < 1/h} \leq \varepsilon h \cdot \left(\frac{1}{h} - 1\right) = \varepsilon.$$

¹⁵ აქ შესაკრებთა რაოდენობა არ აღემატება $\frac{1}{h} - N$ -ს.

ახლა, $S_3(h)$ ჯამში გამოვიყენოთ $\sin^2 nh \leq 1$ უტოლობა და (5.25.9) შეფასება, გვექნება

$$|S_3(h)| \leq \sum_{n>1/h} \varepsilon \frac{1}{n^2 h} = \frac{\varepsilon}{h} \sum_{n>1/h} \frac{1}{n^2}.$$

$\sum_{n>1/h} \frac{1}{n^2}$ მწკრივის ჯამის შესაფასებლად გამოვიყენოთ მაკლორენ-კოშის უტოლობები (იხ. [49, გვ. 286])

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \equiv \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt,$$

გვექნება

$$\sum_{n>\frac{1}{h}} \frac{1}{n^2} \leq \int_{\frac{1}{h}-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} \Big|_{\frac{1}{h}-1}^{+\infty} = \frac{1}{\frac{1}{h}-1} = \frac{h}{1-h}.$$

რადგან $h \rightarrow 0$, ამიტომ თავიდანვე შეგვიძლია ვიგულისხმოთ $h < \frac{1}{2}$ და $1-h > \frac{1}{2}$, ე.ი. $\frac{h}{1-h} < 2h$. ამგვარად,

$$\sum_{n>1/h} \frac{1}{n^2} < 2h \text{ და } |S_3(h)| \leq \frac{\varepsilon}{h} \cdot 2h = 2\varepsilon.$$

მაშასადამე,

$$|S_1(h)| + |S_2(h)| + |S_3(h)| < ANh + \varepsilon + 2\varepsilon.$$

აღებული $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის განვიხილოთ $\delta = \frac{\varepsilon}{AN}$ რიცხვი. მაშინ $ANh < \varepsilon$, როცა $0 < h < \delta$. ამგვარად, გვაქვს უტოლობა

$$|S_1(h)| + |S_2(h)| + |S_3(h)| < 4\varepsilon, \text{ როცა } 0 < h < \delta,$$

რაც ნიშნავს (5.25.5) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია. □

5.26 ფურიეს მწკრივის შეჯამებადობა რიმანის R^2 მეთოდით

ჩვენ დამტკიცებული გვექონდა, რომ f ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ მწკრივი თითქმის ყველგან შეჯამებადია f -ის შესაბამისი მნიშვნელობისკენ: ჩეზაროს $(C, 1)$ მეთოდით (იხ.

თავი 5, პარაგრაფი 5.7), აბელ-პუასონის (A) მეთოდით (იხ. თავი 5, პარაგრაფი 5.11) და ლებეგის L და L^* მეთოდებით (იხ. თავი 5, პარაგრაფები 5.20, 5.21).

ანალოგიურ ფაქტს დავადგენთ შეჯამებადობის R^2 მეთოდისთვისაც.

თეორემა 5.26.1 ([8, გვ. 190], [30, გვ. 235], [33, გვ. 292]). 2π პერიოდული და $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი ყოველი f ფუნქციის

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (5.26.1)$$

ფურიეს მწკრივი შეჯამებადია რიმანის R^2 მეთოდით $f(x)$ მნიშვნელობისკენ თითქმის ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე.

დამტკიცება. თავი 4-დან პარაგრაფ 4.15-ის (4.15.4) ტოლობის ძალით, ანუ ლე-ბეგის თეორემით ფურიეს მწკრივის წევრობრივი ინტეგრების მართლზომიერების შესახებ, ყველა $x \in [0, 2\pi]$ -თვის გვაქვს ტოლობა

$$\int_0^x f(t) dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} - \frac{a_0}{2} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \sin nx - b_n \cos nx). \quad (5.26.2)$$

თუ შემოვიღებთ ფუნქციას

$$\phi(x) = \int_0^x f(t) dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}, \quad (5.26.3)$$

მაშინ (5.26.2) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$\phi(x) - \frac{a_0}{2} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \sin nx - b_n \cos nx). \quad (5.26.4)$$

უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარე წარმოადგენს ფურიეს მწკრივს ამავე ტოლობის $[\phi(x) - \frac{a_0}{2} x]$ მარცხენა მხარისთვის.

ლებეგის იმავე თეორემის თანახმად, მართებულია (5.26.4) ტოლობის წევრობრივი ინტეგრება და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_0^x \phi(t) dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} - \frac{a_0}{4} x^2 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (5.26.5)$$

(5.26.5)-ს მივცეთ სახე

$$\int_0^x \phi(t) dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} = \frac{a_0}{4} x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

რომლის მარჯვენა მხარე წარმოადგენს (5.26.1) მწკრივისთვის რიმანის F ფუნქციას (იხ. პარაგრაფი 5.23, ტოლობა (5.23.2)). ამრიგად,

$$F(x) = \int_0^x \phi(t) dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}.$$

თეორემის დასამტკიცებლად საჭიროა

$$F^{(n)}(x) = f(x) \quad (5.26.6)$$

ტოლობის დადგენა (იხ. პარაგრაფი 5.23, ტოლობა (5.23.5)) თითქმის ყველა $x \in [0, 2\pi]$ -თვის, სადაც $F^{(n)}$ აღნიშნავს F ფუნქციის რიმან-შვარცის მეორე წარმოებულს (იხ. პარაგრაფი 5.22, ტოლობა (5.22.3)). უფრო მეტი, ახლავე დავამტკიცებთ ტოლობას

$$F''(x) = f(x) \quad \text{თითქმის ყველა } x \in [0, 2\pi]\text{-თვის.} \quad (5.26.7)$$

მართლაც, ლებეგის თეორემის თანახმად ცვლადსაზღვრიანი ინტეგრალის გაწარმოების შესახებ, ყველა x წერტილზე ადგილი აქვს ტოლობას

$$F'(x) = \phi(x), \quad (5.26.8)$$

რადგან ϕ არის ყველგან უწყვეტი ფუნქცია, ამიტომ ყველა წერტილი მისი ლებეგის წერტილია.

მაგრამ, (5.26.3) ტოლობით მოცემულ ϕ ფუნქციას თითქმის ყველა წერტილზე გააჩნია წარმოებული ლებეგის იმავე თეორემის თანახმად, ე.ი. თითქმის ყველა x -თვის გვაქვს

$$\phi'(x) = f(x). \quad (5.26.9)$$

ახლა ტოლობა (5.26.6) გამომდინარეობს (5.26.7)-(5.26.9) ტოლობებიდან. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

5.27 მწკრივის შეჯამებადობის რიმანის R^2 მეთოდთან დაკავშირებული ორმაგი ზღვრის შესახებ

5.27.1 რიმანის $R^2(h)$ მწკრივისთვის ორმაგი ზღვრის არსებობის პირობა

რიმანის თეორემის თანახმად (იხ. პარაგრაფი 5.24, თეორემა (5.24.1))

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad (5.27.1)$$

მწკრივის კრებადობა სასრული s -კენ იწვევს (5.27.1) მწკრივის R^2 -შეჯამებადობას s -კენ, ანუ (5.27.1) მწკრივის კრებადობა იწვევს რიმანის

$$R^2(h) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2$$

მწკრივისთვის ტოლობას

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2 = s. \quad (5.27.2)$$

რაც შეეხება (5.27.2) ტოლობის ზღვარშიგა მწკრივის კრებადობას ყოველი $h \neq 0$ მნიშვნელობისთვის, რაც აუცილებელი პირობაა (5.27.2) ტოლობის რეალიზებისთვის, გამომდინარეობს $a_k \rightarrow 0$ დამოკიდებულებიდან, როცა $k \rightarrow \infty$ (იხ. თეორემა 5.24.1-ის დამტკიცების დასაწყისი). ამიტომ (5.27.2) ეკვივალენტურია ტოლობის

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2 = s. \quad (5.27.3)$$

ამრიგად, (5.27.1) მწკრივის R^2 -შეჯამებადობა s რიცხვისკენ ეკვივალენტურია განმეორებითი (5.27.3) ზღვრის s -თან ტოლობის.

თუ, რიმანის $R^2(h)$ მწკრივის n -ური კერძო ჯამისთვის, შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$A_n(h) = \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2, \quad (5.27.4)$$

მაშინ (5.27.3) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(h) = s. \quad (5.27.5)$$

მაშასადამე, მართებულია შემდეგი

წინადადება 5.27.1. (5.27.1) მწკრივის R^2 -შეჯამებადობისთვის s რიცხვისკენ, აუცილებელი და საკმარისია ადგილი ჰქონდეს (5.27.5) ტოლობას.

მეორე განმეორებითი $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} A_n(h)$ ზღვრის არსებობა და მისი ტოლობა რაიმე ω რიცხვთან, ჩაიწერება ასე

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} A_n(h) = \omega. \quad (5.27.6)$$

რადგან (5.27.4) ჯამი შედგება სასრული რაოდენობის შესაკრებებისგან, ამიტომ

$$\lim_{h \rightarrow 0} A_n(h) = \sum_{k=0}^n a_k \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2 = \sum_{k=0}^n a_k.$$

მაშასადამე, (5.27.6) ეკვივალენტურია ტოლობის

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \omega.$$

ამრიგად, მართებულია შემდეგი

წინადადება 5.27.2. (5.27.1) მწკრივის კრებადობისთვის ω რიცხვისკენ, აუცილებელი და საკმარისი ადგილი ჰქონდეს (5.27.6) ტოლობას.

ახლა განვიხილოთ კავშირი (5.27.1) მწკრივის კრებადობასა და

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} A_n(h)$$

ორმაგი ზღვრის არსებობას შორის.

ამასთან დაკავშირებით, მართებულია

თეორემა 5.27.3 ([70]). (5.27.1) მწკრივის კრებადობა სასრული s რიცხვისკენ, ანუ

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s \quad (5.27.7)$$

ტოლობის შესრულება, არის აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ ადგილი ჰქონდეს

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} A_n(h) = s \quad (5.27.8)$$

ტოლობას, ანუ მოკლედ, (5.27.7) და (5.27.8) ტოლობები ურთიერთგვერდობის ტოლობაა.

დამტკიცება.

საკმარისობა. წინადადება 5.27.2-ის ძალით, (5.27.7) ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} A_n(h) = s, \quad (5.27.9)$$

რაც იწვევს

$$\lim_{h \rightarrow 0} A_n(h) \quad (5.27.10)$$

სასრული ზღვრის არსებობას ყოველი n -თვის.

მეორეს მხრივ, (5.27.7) ტოლობა იწვევს (5.27.1) მწკრივის R^2 -შეჯამებადობას და, მაშასადამე, (5.27.5) ტოლობას, წინადადება 5.27.1-ის თანახმად.

ამრიგად, (5.27.7) იწვევს ტოლობას

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(h) = s. \quad (5.27.11)$$

(5.27.9) და (5.27.11) გვიჩვენებს, რომ ამ ტოლობებში მონაწილე ორივე განმეორებითი ზღვარი ურთიერთტოლია და მათი საერთო მნიშვნელობა არის (5.27.7) მწკრივის s ჯამი:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} A_n(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(h) = s. \quad (5.27.12)$$

ახლა მოვივლით, რომ რიმანის პირველი თეორემის დამტკიცების პროცესში დადგინდა მნიშვნელოვანი ფაქტი იმის შესახებ, რომ (5.27.7) მწკრივის კრებადობა იწვევს

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2$$

მწკრივის თანაბრად კრებადობას h -ის მიმართ (იხ. პარაგრაფი 5.24, (5.24.7), [48, გვ. 440]). ეს ნიშნავს, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(h) \quad (5.27.13)$$

ზღვარი არსებობს, თანაბრად h -ის მიმართ, (5.27.4) ტოლობის გამო.

მაშასადამე, სასრული (5.27.10) ზღვარი არსებობს ყოველი n -თვის, ხოლო (5.27.13) ზღვარი არსებობს თანაბრად h -ის მიმართ.

ეს ინფორმაცია საკმარისია იმისათვის, რომ (5.27.12) ტოლობებს მივეუერთოთ (5.27.8) ტოლობაც. ამის საშუალებას გვაძლევს ორმაგი ზღვრის შესახებ მუერ-ოსგულის თეორემა¹⁶ (იხ. [77, გვ. 180], მოდიფიცირებული უწყვეტი h პარამეტრისთვის).

ამრიგად, (5.27.7) გამომდინარეობს (5.27.8) ტოლობიდან.

ა უ ც ი ლ ე ბ ღ ა . თუ შესრულებულია (5.27.8) ტოლობა, მაშინ შესრულებულია, კერძოდ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(0) = s$$

ტოლობაც. მაგრამ $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$, ე.ი. ადგილი აქვს (5.27.7) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

5.27.2 თეორემა 5.27.3-ის გამოყენება კოლმოგოროვის ფუნქციის ყველგან განშლადი ფურიეს მწკრივისთვის

როგორც ვიცით, არსებობს კოლმოგოროვის ჯამებადი $K(x)$ ფუნქცია, რომლის

$$K \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (5.27.14)$$

ფურიეს მწკრივი განშლადია ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე (იხ. თავი 5, შესავალი 5.0, პუნქტი C).

ამავე დროს, (5.27.14) მწკრივი R^2 -შეჯამებადია თითქმის ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე $K(x)$ მნიშვნელობებისკენ (იხ. თავი 5, თეორემა 5.26.1).

ამ ფაქტების გათვალისწინებით, თეორემა 5.27.3-დან გამომდინარეობს

¹⁶მუერ-ოსგულის თეორემა ორმაგი ზღვრის შესახებ. თუ $\{X_{nk}\}$ ორმაგი მიმდევრობისთვის შესრულებულია პირობები:

- (1) ყოველი n -თვის სასრულია $\lim_{k \rightarrow \infty} X_{nk}$ ზღვარი;
- (2) ყოველი k -თვის სასრულია $\lim_{n \rightarrow \infty} X_{nk}$ ზღვარი;
- (3) არსებობს $\lim_{k \rightarrow \infty} X_{nk}$ თანაბრად n -ის მიმართ ან არსებობს $\lim_{n \rightarrow \infty} X_{nk}$ თანაბრად k -ს მიმართ,

მაშინ ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} X_{nk} = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} X_{nk} = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} X_{nk}.$$

თეორემა 5.27.4 ([70]). (5.27.14) მწკრივისთვის ადგილი აქვს შემდეგ მტკიცებულებებს:

(1) თითქმის ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე სრულდება

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2 \right] = K(x)$$

ტოლობა;

(2) არ არსებობს რომელიმე $x \in [0, 2\pi]$ წერტილი, რომლისთვისაც იარსებებს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2 \right]$$

ორმაგი ზღვარი ან მეორე

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2 \right]$$

განმეორებითი ზღვარი.

შენიშვნა 5.27.5. ესაა პირველი მაგალითი ისეთი შემთხვევისა, როცა ერთ-ერთი განმეორებითი ზღვარი არსებობს თითქმის ყველგან, ხოლო მეორე განმეორებითი ზღვრის და ორმაგი ზღვრის არსებობის წერტილთა სიმრავლე ცარიელია. აქამდე ცნობილი იყო ისეთი მაგალითები, როცა ანალოგიური კავშირი დარღვეულია მხოლოდ ცალკეულ წერტილებზე.

5.28 ფუნქციათა წარმოდგენის პრობლემა

აქამდე განხილულ საკითხთა უმრავლესობა ემსახურება მათემატიკური ანალიზის უმნიშვნელოვანეს მიზანს — ფუნქციათა წარმოდგენის პრობლემას.

მაგრამ ეს წინადადება ორი მიმართულებით საჭიროებს დაზუსტებას:

(1) რა შინაარსი დევს სიტყვაში “წარმოდგენა”;

(2) რა საშუალებებით ხორციელდება წარმოდგენა.

საკმარისად კარგი თვისებების მქონე ჯამებადი ფუნქციები წარმოდგება თავისი ფურიეს მწკრივით წერტილოვანი კრებადობის თვალსაზრისით.

მაგრამ არის ისეთი ჯამებადი ფუნქციაც, რომლის ფურიეს მწკრივი განშლადია ყველა წერტილზე — კოლმოგოროვის მაგალითი.

აქვე ისმის კითხვა: ნუთუ არ შეიძლება კოლმოგოროვის $K(x)$ ჯამებადი ფუნქციის წარმოდგენა, რაიმე აზრით, თავისი ფურიეს $S[K]$ მწკრივით?

ამ კითხვაზე პასუხს, კერძო სახით, შეიცავს ფურიეს მწკრივის სხვადასხვა მეთოდით შემებადობა, რომელთაგან უმნიშვნელოვანესია: ჩეზარო-ფიერიის $(C, 1)$ მეთოდი, პუასონ-აბელის (A) მეთოდი და რიმანის R^2 მეთოდი.

ჩვენ ვნახეთ, რომ თითოეული ამ მეთოდით შეიძლება მიღებულ იქნას ნებისმიერი ჯამებადი ფუნქციის მნიშვნელობები თითქმის ყველა წერტილზე (იხ. თავი 5, პარაგრაფები 5.7, 5.11, 5.17, 5.20, 5.21, 5.26).

1. არაჯამებადი, მაგრამ თითქმის ყველგან სასრული, ფუნქციებისთვის ადგილი აქვს შემდეგ თეორემებს.

პარაგრაფ 5.18-ში დამტკიცებული ლუზინის 5.18.1⁷ თეორემის სრულყოფაა შემდეგი, აგრეთვე, ლუზინის თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 5.28.1 (ლუზინი, [30, გვ. 236]). ზომადი და თითქმის ყველგან $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე სასრული f ფუნქციისთვის არსებობს ტრიგონომეტრიული მწკრივი ისეთი, რომელიც თითქმის ყველგან $f(x)$ მნიშვნელობისკენ შეჯამებადია, როგორც პუასონ-აბელის (A) მეთოდით, ისე რიმანის R^2 მეთოდით.

თ ე ო რ ე მ ა 5.28.2 ([40, გვ. 324]).¹⁷ ზომადი და თითქმის ყველგან $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე სასრული f ფუნქციისთვის არსებობს ტრიგონომეტრიული მწკრივი ისეთი, რომელიც $f(x)$ მნიშვნელობისკენ შეჯამებადია რიმანის, პუასონ-აბელისა და (C, k) მეთოდებით, $k > 1$, თითქმის ყველა $x \in [-\pi, \pi]$ -თვის.

მაგრამ, ამ მეთოდთა განსხვავება თავს იჩენს მაშინ, როცა განიხილება $+\infty$ ან $-\infty$ მნიშვნელობების მქონე ფუნქციების წარმოდგენის საკითხი დადებითი ზომის რაიმე სიმრავლეზე.

ასეთი ფუნქციების წარმოდგენის საკითხს წარმატებით წყვეტს პუასონ-აბელის (A) საშუალებები (იხ. თავი 5, პარაგრაფი 5.18, თეორემა 5.18.11).

¹⁷ [8, გვ. 852]-ში აღნიშნული $(C, 1)$ -ის ნაცვლად უნდა იყოს (C, k) , $k > 1$.

რიმანის R^2 მეთოდით კი შეუძლებელია ისეთი ფუნქციის წარმოდგენა, რომელიც დადებითი ზომის რაიმე სიმრავლეზე ხდება უსასრულო. ამასთანავე, ეს რეალიზებადია ნული ზომის ყოველ სიმრავლეზე (იხ. [8, გვ. 865], [16, გვ. 137, 142]).

ეს გამოწვეულია იმით, რომ შეჯამებადობის R^2 მეთოდი დაკავშირებულია წარმოებულთან და, ლუზინის თეორემის თანახმად, წარმოებული არ შეიძლება იყოს $\pm\infty$ დადებითი ზომის რაიმე სიმრავლეზე [30, გვ. 285].

აქვე უნდა აღინიშნოს “უცნაური” მოვლენა: კოლმოგოროვის $K(x)$ ფუნქციისკენ არ იკრება მისი ფურიეს $S[K]$ მწკრივი, მაგრამ არსებობს ტრიგონომეტრიული მწკრივი ისეთი, რომელიც კრებადია $K(x)$ მნიშვნელობისკენ თითქმის ყველა x -თვის. უფრო მეტი, მართებულია მენშოვის თეორემა.

თეორემა 5.28.3 (მენშოვი, [8, გვ. 852]). ზომადი და თითქმის ყველგან $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე სასრული f ფუნქციისთვის არსებობს ტრიგონომეტრიული მწკრივი ისეთი, რომელიც კრებადია $f(x)$ მნიშვნელობისკენ თითქმის ყველა $x \in [-\pi, \pi]$ წერტილზე.

2. თავი 5-დან პარაგრაფ 5.18-ის თეორემა 5.18.10 გვეუბნება, რომ ნებისმიერი ორი φ და ψ ზომადი ფუნქციისთვის, შესაძლოა $\pm\infty$ მნიშვნელობის მქონე დადებითი ზომის სიმრავლეებზე, არსებობს ერთეულოვან D ღია წრეში ანალიზური $f = u + iv$ ფუნქცია, რომლის u ნამდვილი და v წარმოსახვითი ჰარმონიული ფუნქციების რადიალური ზღვარი თითქმის ყველგან ემთხვევა φ და ψ ფუნქციების მნიშვნელობებს.

აქ საზი უნდა გავსვას φ და ψ ფუნქციებს შორის რაიმე კავშირის არარსებობას. ამავე დროს, u და v ჰარმონიული ფუნქციები, როგორც ანალიზური ფუნქციის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები, დაკავშირებულია ერთიმეორესთან კოში-რიმანის $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$ პირობებით!

ამგვარად, ნებისმიერ ორი φ და ψ ზომად ფუნქციას გვაძლევს ორი ურთიერთშეუღლებული ჰარმონიული ფუნქციების (u, v) წყვილის რადიალური ზღვარი.

ამ ფაქტის განხორციელება შეიძლება ერთი ჰარმონიული ფუნქციით, თუ გამოვიყენებთ ამ ფუნქციის კერძო წარმოებულებს.

თეორემა 5.28.4. $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ნებისმიერი ორი φ და ψ ზომადი ფუნქციისთვის, შესაძლოა $\pm\infty$ მნიშვნელობების მქონე დადებითი ზომის სიმრავლეებზე, არსებობს ერთეულოვან ღია D წრეში ჰარმონიული $u(z)$ ფუნქცია ისეთი, რომ თითქმის ყველა θ -თვის $[-\pi, \pi]$ -დან ადგილი აქვს რადიალურ ტოლობებს

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{\partial u}{\partial x}(re^{i\theta}) = \varphi(\theta), \quad \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\partial u}{\partial y}(re^{i\theta}) = \psi(\theta), \quad x + iy = z = re^{i\theta}.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . 5.18.10 თეორემის ძალით, φ და $-\psi$ ფუნქციებისთვის არსებობს ანალიზური $f(z)$, $|z| < 1$, ფუნქცია ისეთი, რომ თითქმის ყველა θ -თვის $[-\pi, \pi]$ -დან ადგილი აქვს რადიალურ ტოლობას

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta}) = \varphi(\theta) - i\psi(\theta).$$

ახლა განვიხილოთ f ფუნქციის

$$F(z) = u(z) + iv(z)$$

პირველადი ფუნქცია. მაშინ

$$u'_x - iv'_y = u'_x + iv'_x = (u + iv)'_x = F'(z) = f(z) \rightarrow \varphi(\theta) - i\psi(\theta), \text{ როცა } r \rightarrow 1.$$

ე.ი.

$$u'_x \rightarrow \varphi(\theta) \text{ და } u'_y \rightarrow \psi(\theta), \text{ როცა } r \rightarrow 1.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

შ ე ნ ი შ ე ნ ა 5.28.5. თეორემა 5.18.10-ში მითითებული $f(z)$ ფუნქცია შეიძლება დავექვემდებაროთ $|f(z)| < \mu(|z|)$ პირობას, სადაც $[0, 1)$ მარჯვნიდან ღია ინტერვალზე მოცემული ნამდვილი $\mu(t)$ ფუნქციას გააჩნია თვისებები $0 < \mu(t) \uparrow +\infty$, როცა $t \rightarrow 1$ [27].

3. მენშოვის 5.28.3 თეორემით დადგინდა, ზომადი და თითქმის ყველგან სასრული ფუნქციის წარმოდგენის შესაძლებლობა თითქმის ყველგან კრებადი ტრიგონომეტრიული მწკრივით.

თავი 5-ის წინადადება 5.8.3-დან ვიცით, რომ არ არსებობს ფურიეს მწკრივი, რომლის კერძო ჯამების ზღვარი იქნება $+\infty$ ან $-\infty$, დადებითი ზომის რაიმე სიმრავლეზე.

დიდხანს პასუხგაუცემელი იყო კითხვა [30, გვ. 239]: არსებობს თუ არა ერთი ტრიგონომეტრიული მწკრივი მაინც, რომლის კერძო ჯამების ზღვარი იქნება $+\infty$ ან $-\infty$ დადებითი ზომის სიმრავლეზე?

სადლეისოდ ცნობილია [29], რომ ასეთი თვისების ტრიგონომეტრიული მწკრივი არ არსებობს. ამჟამად ცნობილია ისიც, რომ არ არსებობს ასეთივე თვისების ორმაგი ტრიგონომეტრიული მწკრივი მართკუთხედებით კრებადობის თვალსაზრისით [74].

ამგვარად, ჯერჯერობით ვერ ხერხდება ასეთი ფუნქციების წარმოდგენა, ამგვარი აზრით, უსასრულობისკენ კრებადი ტრიგონომეტრიული მწკრივებით. ამ ამოცანის გადაწყვეტაში

ვერ დაგვეხმარება ის ფაქტი, რომ არ არსებობს $+\infty$ -კენ ან $-\infty$ -კენ R^2 მეთოდით შეჯამებადი ტრიგონომეტრიული მწკრივი (იხ. [8, გვ. 865], [16, გვ. 137, 142]). ვერ დახმარების მიზეზია ის, რომ რიმანის R^2 მეთოდი რეგულარული კი არის, მაგრამ არაა სავსებით რეგულარული, ე.ი. ვერ აკმატებს უსასრულობისკენ კრებად მწკრივს, საზოგადოდ (იხ. მაგალითი 5.23.6).

მართებულია შემდეგი

თეორემა 5.28.6 (მენშოვი, [8, გვ. 876]). $[-\pi, \pi]$ -ზე ზომადი ყოველი f ფუნქციისთვის შესაძლოა, $\pm\infty$ -ის ტოლი დადებითი ზომის სიმრავლეებზე, არსებობს

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (5.28.1)$$

ტრიგონომეტრიული მწკრივი, რომელიც ზომით კრებადია f -კენ $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე.

ეს ნიშნავს, რომ (5.28.1) მწკრივის $S_n(x)$ კერძო ჯამები შეიძლება წარმოვადგენო

$$S_n(x) = g_n(x) + \alpha_n(x)$$

სახით, სადაც

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = f(x)$$

თითქმის ყველგან $[-\pi, \pi]$ -ზე და α_n მიმდევრობა ზომით კრებადია ნულისკენ $[-\pi, \pi]$ -ზე ანუ, რაც იგივეა, ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის ნულისკენ ისწრაფვის იმ E_n სიმრავლეების ზომა, რომლებზეც სრულდება $|\alpha_n(x)| \geq \varepsilon$ უტოლობა.

5.29 ტრიგონომეტრიული მწკრივის კერძო ჯამების ერთი თვისების შესახებ

განვიხილოთ რაიმე

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (5.29.1)$$

ტრიგონომეტრიული მწკრივი და $(-\infty, +\infty)$ -ზე განსაზღვრული მისი კერძო ჯამები

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad S_0(x) = \frac{a_0}{2}.$$

ლ ე მ ა 5.29.1. თუ $(S_n(x))_{n=0}^{\infty}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრულია ქვემოთა სარული c რიცხვით, ე.ი. ადგილი აქვს უტოლობებს

$$c \leq S_n(x) \leq +\infty, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.29.2)$$

მაშინ ყოველი ზომადი და სარული ზომის მქონე $E \subset (-\infty, +\infty)$ სიმრავლისთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$c|E| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E S_n(x) dx. \quad (5.29.3)$$

დ ა მ ტ ვ ი ც ე ბ ა . ფატუს ლემის თანახმად, ადგილი აქვს უტოლობას¹⁸

$$\int_E \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E S_n(x) dx. \quad (5.29.4)$$

მაგრამ, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \geq c$ და, ამიტომ,

$$\int_E \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) dx \geq \int_E c dx = c|E|.$$

¹⁸ ფატუს ლემის აყალიბებენ ასე [1, გვ. 466]: თუ სარული ზომის E სიმრავლეზე მოცემულია არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციების $(u_n(x))_{n=0}^{\infty}$ მიმდევრობა, ე.ი., თუ $0 \leq u_n(x) \leq +\infty$, როცა $x \in E$ და $n = 0, 1, 2, \dots$, მაშინ ადგილი აქვს ფატუს უტოლობას

$$\int_E \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E u_n(x) dx. \quad (5.29.5)$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (5.29.5)-დან გამომდინარეობს (5.29.4). მართლაც, (5.29.2)-დან გვაქვს $0 \leq S_n(x) - c \leq +\infty$ და, (5.29.5)-ის ძალით,

$$\int_E \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n(x) - c) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E (S_n(x) - c) dx. \quad (5.29.6)$$

მაგრამ, ცნობილია, რომ (იხ. [6, გვ. 146])

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n. \end{aligned}$$

როცა არსებობს $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$. ამის გათვალისწინებით, (5.29.6)-დან მივიღებთ

$$\int_E \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) dx - c|E| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E S_n(x) dx - c|E|,$$

საიდანაც გამომდინარეობს (5.29.4).

ე.ი. ადგილი აქვს (5.29.3) უტოლობას. □

ლ ე მ ა 5.29.2. თუ $(S_n(x))_{n=0}^{\infty}$, $x \in (-\infty, \infty)$, მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრულია ზემოდან სასრული d რიცხვით, ე.ი., თუ $-\infty \leq S_n(x) \leq d$, მაშინ

$$d|E| \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_E S_n(x) dx. \quad (5.29.7)$$

დ ა მ ტ ვ ი ც ე ბ ა . ისევ ფატუს ლემით [12, გვ. 188]

$$\int_E \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n(x) dx \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_E S_n(x) dx. \quad (5.29.8)$$

მაგრამ

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \leq d,$$

ე.ი. ადგილი აქვს (5.29.7) უტოლობას. □

შ ე დ ე გ ი 5.29.3. თუ $(S_n(x))$, $x \in (-\infty, +\infty)$, მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრულია და $L \leq S_n(x) \leq M$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $n = 0, 1, \dots$, მაშინ

$$L|E| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E S_n(x) dx, \quad (5.29.9)$$

$$M|E| \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_E S_n(x) dx.$$

თ ე ო რ ე მ ა 5.29.4. თუ $(S_n(x))_{n=0}^{\infty}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრულია და ნულისკენ კრებადი ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$ წერტილზე, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E S_n(x) dx = 0. \quad (5.29.10)$$

დ ა მ ტ ვ ი ც ე ბ ა . (5.29.4) და (5.29.8) უტოლობებიდან, შესაბამისად, გვაქვს

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E S_n(x) dx,$$

$$0 \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_E S_n(x) dx.$$

აქედან,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} l_n$$

უტოლობის ძალით, გამომდინარეობს უტოლობები

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E S_n(x) dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_E S_n(x) dx \leq 0,$$

ანუ ადგილი აქვს (5.29.10) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შ ე დ ე გ ი 5.29.5. თეორემა 5.29.4-ის პირობებში ადგილი აქვს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E S_n(x) \cos kx dx = 0 \quad (5.29.11)$$

ტოლობას ყოველი ფიქსირებული $k = 0, 1, 2, \dots$ რიცხვისთვის.

თ ე ო რ ე მ ა 5.29.6. თუ (5.29.1) ტრიგონომეტრიული მწკრივი ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$ წერტილზე კრებადია ნულისკენ და ამ მწკრივის კერძო ჯამების $(S_n(x))_{n=0}^\infty$ მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრულია, მაშინ (5.29.1) მწკრივის ყველა კოეფიციენტი ნულია:

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots; \quad b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . მოცემულობით, ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$ წერტილზე, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0.$$

ავიღოთ ნებისმიერი n და მასზე მეტი ნებისმიერი N რიცხვი, მაშინ გვექნება ტოლობა (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.3)

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} S_N(x) \cos nx dx, \quad N > n. \quad (5.29.12)$$

რადგან a_n არაა დამოკიდებული N -ზე და (5.29.12) ტოლობას ადგილი აქვს ყველა $N > n$ -ზე რიცხვისთვის, ამიტომ (5.29.12) ტოლობა ასეც ჩაიწერება

$$\pi a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_N(x) \cos nx dx.$$

ახლა, (5.29.11) ტოლობის ძალით, გვაქვს $a_n = 0$. ასევე დამტკიცდება $b_n = 0$. $\square$

დამტკიცებული 5.29.6 თეორემიდან გამომდინარეობს

თეორემა 5.29.7. თუ ორი ტრიგონომეტრიული მწკრივი ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$ წერტილზე კრებადია ერთი და იგივე $s(x)$ სასრული მნიშვნელობისკენ და ორივე ამ მწკრივს გააჩნია ერთობლივ შემოსაზღვრული კერძო ჯამები, მაშინ ამ მწკრივებში ტოლინდექსიანი კოეფიციენტები ტოლია ანუ, რაც იგივეა, ეს ორი მწკრივი იგივეურია.

დამტკიცება. ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ მწკრივების წევრობრივი სხვაობით მიღებული მწკრივი კრებადია ნულისკენ და ტოლინდექსიანი კერძო ჯამების სხვაობაც ერთობლივ შემოსაზღვრულია. ამიტომ, თეორემა 5.29.6-ის ძალით, სხვაობა-მწკრივის ყველა კოეფიციენტი ნულია ანუ, რაც იგივეა, ამ მწკრივებს გააჩნია ერთი და იგივე კოეფიციენტები. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

5.30 რიმან-შვარცის მეორე წარმოებულის ერთი თვისების შესახებ

$x \in (-\infty, +\infty)$ წერტილის მიდამოში განსაზღვრული F ფუნქციისთვის რიმან-შვარცის მეორე წარმოებული x წერტილზე, სიმბოლოურად $F^{(II)}(x)$, ეწოდება

$$F^{(II)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2}$$

ზღვარს, როცა ის არსებობს და სასრულია (იხ. პარაგრაფი 5.22, ტოლობა (5.22.3)).

იქვე დადგენილია, რომ რიმან-შვარცის მეორე $F^{(II)}(x)$ წარმოებული წარმოადგენს F ფუნქციის მეორე რიგის ჩვეულებრივი $F''(x)$ წარმოებულის განზოგადებას იმ აზრით, რომ $F''(x)$ -ის არსებობა იწვევს $F^{(II)}(x)$ -ის არსებობას და $F^{(II)}(x) = F''(x)$ ტოლობას.

რიმან-შვარცის მეორე $F^{(II)}(x)$ წარმოებული რომ ნამდვილად განზოგადებაა ჩვეულებრივი მეორე რიგის $F''(x)$ წარმოებულის გამომდინარეობს იქიდან, რომ არსებობს ფუნქციები, რომელთაც გააჩნია რიმან-შვარცის მეორე წარმოებული, მაგრამ არ გააჩნია ჩვეულებრივი მეორე რიგის წარმოებული (იხ. პარაგრაფი 5.22, მაგალითები 5.22.3 და 5.22.4).

მათემატიკური ანალიზის კურსიდან ვიცით, რომ რაიმე ინტერვალზე ნულის ტოლი მეორე რიგის წარმოებულის მქონე f ფუნქცია წარმოადგენს ამ ინტერვალზე ანუ, რაც იგივეა, მას აქვს $f(x) = Ax + B$ სახე, სადაც A და B მუდმივებია.

ახლა დავამტკიცებთ, რომ ეს თვისება გააჩნია რიმან-შვარცის მეორე წარმოებულსაც ანუ, რაც იგივეა, მართებულია შემდეგი

თ ე ო რ ე მ ა 5.30.1 (შვარცი (1890 წ.)). თუ F ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და მისი რიმან-შვარცის $F'''(x)$ მეორე წარმოებული კი ნულია (a, b) ინტერვალში, მაშინ F ფუნქცია წრფივია $[a, b]$ სეგმენტზე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია

$$\varphi(x) = F(x) - F(a) - \frac{x-a}{b-a} [F(b) - F(a)]. \quad (5.30.1)$$

ცხადია, $\varphi(a) = 0$ და $\varphi(b) = 0$.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $\varphi(x) = 0$ ყველა x -თვისაც, სადაც $a < x < b$.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, მაგალითად, $\varphi(c) > 0$, სადაც $a < c < b$. მაშინ განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი მეორე ფუნქცია

$$\psi(x) = \varphi(x) - \frac{1}{2} \varepsilon (x-a)(b-x),$$

სადაც $\varepsilon > 0$ რიცხვი იმდენად მცირეა, რომ $\psi(c) = \varphi(c) - \frac{\varepsilon}{2} (c-a)(b-c) > 0$.

აგრეთვე ცხადია, რომ $\psi(a) = \varphi(a) = 0$ და $\psi(b) = \varphi(b) = 0$.

ψ ფუნქციის $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტობისა და ამ სეგმენტის ბოლოებზე მისი ნულობის, ხოლო (a, b) ინტერვალის შიგა c წერტილზე მისი დადებითობის გამო, ψ ფუნქციას ექნება მაქსიმუმის η შიგა წერტილი, $a < \eta < b$. ამიტომ, საკმარისად მცირე დადებითი h -თვის, შესრულდება უტოლობა

$$\psi(\eta + h) + \psi(\eta - h) - 2\psi(\eta) \leq 0. \quad (5.30.2)$$

მეორეს მხრივ, ადვილად ვრწმუნდებით შემდეგი ტოლობის სისწორეში

$$\frac{\psi(\eta + h) + \psi(\eta - h) - 2\psi(\eta)}{h^2} = \frac{F(\eta + h) + F(\eta - h) - 2F(\eta)}{h^2} + \varepsilon. \quad (5.30.3)$$

მოცემულობის ძალით $F'''(\eta) = 0$ და, ამიტომ, (5.30.3) ტოლობის მარჯვენა მხარის ზღვარია ε , როცა $h \rightarrow 0$. ამრიგად, ამავე ტოლობის მარცხენა მხარის ზღვარიც დადებითი ε რიცხვია, რაც ეწინააღმდეგება (5.30.2) უტოლობას.

ანალოგიურ წინააღმდეგობას მივიღებთ იმის დაშვებით, რომ $\varphi(d) < 0$ რომელიმე d წერტილზე, $a < d < b$.

მაშასადამე, $\varphi(x) = 0$ ყველა $x \in [a, b]$ წერტილზე. ეს კი, (5.30.1) ტოლობის ძალით, ნიშნავს ტოლობას

$$F(x) = F(a) + \frac{x-a}{b-a} [F(b) - F(a)],$$

რაც ადასტურებს F ფუნქციის წრფივობას $[a, b]$ სეგმენტზე. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

5.31 ტრიგონომეტრიული მწკრივით ფუნქციის წარმოდგენის ერთადერთობა

აქამდე 2π პერიოდულ და პერიოდზე ჯამებად ნებისმიერ f ფუნქციას ვაკავშირებდით მისთვის შედგენილ ფურიეს მწკრივთან და ეს დაკავშირება გამოიხატება იმით, რომ ფურიეს ამ ტრიგონომეტრიული მწკრივის კოეფიციენტები გამოთვლილია f ფუნქციის მეშვეობით — ფურიეს ფორმულებით (იხ. თავი 2, პარაგრაფი 2.1).

განხილული გვექნდა f ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ მწკრივის f -კენ როგორც კრებადობის, ისე სხვადასხვა მეთოდით შეჯამებადობის საკითხი.

ბუნებრივად ჩნდება კითხვა: რამდენი სხვადასხვა ტრიგონომეტრიული მწკრივით შეიძლება წარმოდგეს მოცემული ფუნქცია?

აქ მნიშვნელოვანია, თუ რა იგულისხმება სიტყვა “წარმოდგენა”-ში.

1. ახლა განვიხილავთ შემთხვევას, როცა ტრიგონომეტრიული მწკრივით ფუნქციის წარმოდგენაში იგულისხმება ამ მწკრივის ყველაგან კრებადობა აღებული ფუნქციისკენ. ამისთვის ვისარგებლებთ მწკრივის შეჯამებადობის რიმანის R^2 მეთოდით (იხ. პარაგრაფები 5.23, 5.24, 5.26) და პასუხს გავცემთ კითხვას: არსებობს თუ არა ორი სხვადასხვა ტრიგონომეტრიული მწკრივი, რომლებიც კრებადი იქნება ყველა წერტილზე ერთი და იგივე ფუნქციისკენ?

უარყოფით პასუხს ამ კითხვაზე იძლევა, ფუნდამენტური მნიშვნელობის შემდეგი

თეორემა 5.31.1 (გ. კანტორი (1872 წ.)). თუ

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (5.31.1)$$

ტრიგონომეტრიული მწკრივი კრებადია ნულისკენ ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე, მაშინ (5.31.1) მწკრივის ყველა კოეფიციენტი ნულია: $a_n = 0$, როცა $n = 0, 1, 2, \dots$ და $b_n = 0$, როცა $n = 1, 2, \dots$

დამტკიცება. კანტორ-ლემების თეორემის ძალით $a_n \rightarrow 0$ და $b_n \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$ (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.2). ამიტომ შეგვიძლია (5.31.1) მწკრივისთვის ავაგოთ რიმანის ფუნქცია (იხ. თავი 5, პარაგრაფი 5.23)

$$F(x) = \frac{a_0}{4} x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} [a_n \cos nx + b_n \sin nx], \quad (5.31.2)$$

რომელიც უწყვეტია $(-\infty, +\infty)$ ლერძზე.

რიმანის პირველი თეორემის თანახმად, (5.31.1) მწკრივი R^2 მეთოდით ნულისკენ შეკამებადია ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე (იხ. თავი 5, პარაგრაფი 5.24). ეს ნიშნავს ტოლობას (იხ. პარაგრაფი 5.23, განსაზღვრა 5.23.1)

$$F^{(n)}(x) = 0, \quad x \in [0, 2\pi]. \quad (5.31.3)$$

(5.31.3) ტოლობის მიმართ გამოვიყენოთ შვარცის თეორემა (იხ. პარაგრაფი 5.30), გვექნება

$$F(x) = Ax + B, \quad x \in [0, 2\pi]. \quad (5.31.4)$$

(5.31.2) და (5.31.4) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{a_0}{4} x^2 - Ax - B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარე 2π პერიოდული უწყვეტი ფუნქციაა, ამიტომ 2π პერიოდული უნდა იყოს მისი მარცხენა მხარეც. ამისთვის კი, აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს ტოლობები

$$a_0 = 0, \quad A = 0. \quad (5.31.5)$$

ამრიგად, გვაქვს ტოლობა

$$-B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (5.31.6)$$

რომლის მარჯვენა მხარე თანაბრად კრებადია ნებისმიერ სეგმენტზე $(-\infty, +\infty)$ -დან. ამიტომ (5.31.6)-ის მარჯვენა მხარე იქნება მისი $(-B)$ ჯამისთვის ფურიეს მწკრივი (იხ. თავი 3, პარაგრაფი 3.1). მაგრამ, მუდმივისთვის, თავისუფალი წევრის გარდა ფურიეს ყველა კოეფიციენტი ნულია (იხ. თავი 4, შენიშვნა 4.7.1). ამრიგად,

$$\frac{a_n}{n^2} = 0 \quad \text{და} \quad \frac{b_n}{n^2} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

ამასთან, (5.31.5) ტოლობის ძალით, $a_0 = 0$. მაშასადამე, $a_n = 0$, როცა $n = 0, 1, 2, \dots$ და $b_n = 0$, როცა $n = 1, 2, \dots$ თეორემა დამტკიცებულია. □

მართებულია ამ თეორემის გაძლიერება შემდეგი სახით.

თეორემა 5.31.2 (გ. კანტორი (1872 წ.)). თუ

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \quad (5.31.7)$$

ტრიგონომეტრიული მწკრივი კრებადია ნულისკენ ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე, გარდა შესაძლებელია სასრული რაოდენობის წერტილებისა, მაშინ (5.31.7) მწკრივის ყველა კოეფიციენტი ნულია.

დამტკიცება. წინა თეორემის დამტკიცების მიხედვით $A_n \rightarrow 0$ და $B_n \rightarrow \infty$, როცა $n \rightarrow \infty$. ამიტომ (5.31.7) მწკრივისთვის არსებობს რიმანის F ფუნქცია, რომელიც წრფივია თითოეულ იმ ქვეინტერვალზე, რომელზედაც (5.31.7) მწკრივი კრებადია ნულისკენ, რადგან ამ ქვეინტერვალზე $F^{(n)}(x) = 0$; მაგრამ, რიმანის F ფუნქცია გლუვია ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$ წერტილზე რიმანის მეორე თეორემის თანახმად (იხ. პარაგრაფი 5.25, თეორემა 5.25.1).

ამიტომ $F(x)$ ფუნქციის გრაფიკს კუთხიანი წერტილი არ ექნება. ამგვარად, $F(x)$ ფუნქციის გრაფიკი სხვადასხვა ტეხილებისგან კი არ შედგება, არამედ ის არის ერთი მთლიანი წრფე. ამის გამო, თეორემის დამტკიცება დამთავრდება წინა თეორემის მტკიცების მიხედვით. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს უფრო ზოგადი თეორემა.

თეორემა 5.31.3 (გ. კანტორი (1872 წ.)). ვთქვათ, $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე განსაზღვრული და 2π პერიოდული $f(x)$ ფუნქცია სასრულია ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე. მაშინ არ არსებობს ორი სხვადასხვა ტრიგონომეტრიული მწკრივი, რომელიც კრებადი იქნება $f(x)$ -კენ ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე, გარდა შესაძლებელია სასრული რაოდენობის წერტილისა.

დამტკიცება. ორი ასეთი მწკრივის სხვაობა კრებადია ნულისკენ ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე, გარდა შესაძლებელია სასრული რაოდენობის წერტილებისა. მაშინ თეორემა 5.31.2-ის ძალით ამ სხვაობა-მწკრივის ყველა კოეფიციენტი, რომელიც წარმოადგენს იმ ორი მწკრივის კოეფიციენტების სხვაობას, ნულია. ეს იწვევს იმ ორ მწკრივში შესაბამისი კოეფიციენტების ტოლობას ანუ, რაც იგივეა, ეს ორი მწკრივი იდენტურია იმ გავებით, რომ მათი ტოლინდექსიანი კოეფიციენტები ერთიმეორის ტოლია. ამრიგად, აღნიშნული თვისების ორი მწკრივი არ არსებობს. $\square$

ზემოთ აღნიშნული თეორემების მტკიცების პროცესიდან ჩანს შემდეგი თეორემის მარტებულობა.

თეორემა 5.31.4 (გ. კანტორი (1872 წ.)). თუ ტრიგონომეტრიული მწკრივის კოეფიციენტები კრებადია ნულისკენ და თვით მწკრივი R^2 შეჯამებადია ნულისკენ ყველგან, გარდა შესაძლებელია სასრული რაოდენობა წერტილებისა, მაშინ ასეთი მწკრივის ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლია.

2. 2π პერიოდული და $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე ყველგან სასრული f ფუნქციისთვის არ არსებობს ორი სხვადასხვა ტრიგონომეტრიული მწკრივი, რომელიც კრებადი იქნება $f(x)$ -კენ ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე (იხ. თეორემა 5.31.3).

ბუნებრივია კითხვა: თუკი ერთი ასეთი მწკრივი არსებობს, მაშინ ის იქნება თუ არა f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი?

პასუხი უარყოფითია: მწკრივი

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

კრებადია ყველგან, მაგრამ ის არ არის რომელიმე ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს მწკრივი (იხ. თავი 4, შენიშვნა 4.15.5).

მაშასადამე, კითხვა ზუსტდება ასე: ვთქვათ, 2π პერიოდული f ფუნქცია სასრულია ყველგან $[0, 2\pi]$ -ზე და ჯამებადია ამავე სეგმენტზე. თუკი არსებობს რაიმე ტრიგონომეტრიული მწკრივი, რომელიც კრებადია $f(x)$ -კენ ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე, მაშინ ეს მწკრივი იქნება f ფუნქციისთვის ფურიეს მწკრივი თუ არა?

ამ კითხვაზე დადებით პასუხს იძლევა შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5.31.5 (დიუბუა-რეიმონი, [8, გვ. 790]). ვთქვათ, რაიმე ტრიგონომეტრიული მწკრივი კრებადია ყველგან $[0, 2\pi]$ -ზე, გარდა შესაძლებელია თვლადი სიმრავლე წერტილებისა და ამ მწკრივის $f(x)$ ჯამი სასრულია ყველგან $[0, 2\pi]$ -ზე და ჯამებადი ამავე სეგმენტზე. მაშინ ეს მწკრივი არის ფურიეს მწკრივი f ფუნქციისთვის.

შენიშვნა 5.31.6. პარაგრაფ 5.29-ის თეორემა 5.29.6-ში, $(S_n(x))_{n=0}^{\infty}$ მიმდევრობის ერთობლივ შემოსაზღვრულობა ზედმეტი პირობაა. ეს გამომდინარეობს ამ პარაგრაფის თეორემებიდან.

ნაწილი II

ორი ცვლადის ფუნქციასთან ასოცირებული
ფურიეს ერთგანზომილებიანი მწკრივები

შესავალი II ნაწილისათვის

ფუნქციათა თეორიის უმნიშვნელოვანესი პრობლემა — მოცემული ფუნქცია წარმოადგინოთ შედარებით მარტივ ფუნქციათა სისტემის მეშვეობით, გაცილებით მძიმე აღმოჩნდა მრავალი ცვლადის ფუნქციებისთვის, ვიდრე ერთი ცვლადის შემთხვევაში.

ერთი ცვლადის ფუნქციების შემთხვევაში კი, ტრიგონომეტრიული სისტემა აღმოჩნდა უპირატესი მნიშვნელობის მქონე, ვიდრე ალგებრული სისტემა (იხ. შესავალი პირველი ნაწილისადმი).

სწორედ, ამიტომ მიიპყრო მკვლევართა განსაკუთრებული ყურადღება ჯერადმა ტრიგონომეტრიულმა სისტემამ.

ამ მიმართულებით ბოლო ერთ საუკუნეში გამოქვეყნდა ასობით ნაშრომი ჯერად ტრიგონომეტრიულ, კერძოდ, ფურიეს ჯერად მწკრივებზე. ამ ნაშრომებში წარმოჩინდა ფურიეს ჯერადი მწკრივების პრაქტიკული გამოყენება პროგნოზირების თეორიაში (იხ. Helson H. and Lowdenslager D., Acta Math. 99 (1958), no. 3-4, 165-202; II. Acta Math. 106 (1961), no. 3-4, 175-213) ერთის მხრივ, და ისეთი შედეგებიც, რომელთა ანალოგი არ არსებობს ერთი ცვლადის ფუნქციებისთვის — მეორეს მხრივ.

სახელდობრ, 1971 წელს გამოქვეყნდა ჩ. ფეფერმანის ნაშრომი [72], სადაც დადგენილია ორი ცვლადის ყველგან უწყვეტი და თითოეული ცვლადის მიმართ 2π პერიოდული ისეთი $F(x, y)$ ფუნქციის არსებობა, რომლის ფურიეს ორმაგ $S[F]$ მწკრივს არ გააჩნია მართკუთხედების მიხედვით კრებადობის ერთი წერტილიც კი!

1. 2017 წელს გამოქვეყნებულ ჩემს ნაშრომში [66] განვითარებულია ახალი მეთოდი, რომლის მიხედვით n -განზომილებიან $[-\pi, \pi]^n$ კუბში ჯამებად და თითოეული ცვლადის მიმართ 2π პერიოდულ $f(x)$ ფუნქციასთან, $x = (x_1, \dots, x_n)$, ასოცირდება ფურიეს n რაოდენობის ერთჯერადი $S[f]_1, \dots, S[f]_n$ მწკრივები $x_1, \dots, x_n$ ცვლადების მიმართ სათითაოდ.

დადგენილია ასოცირებული მწკრივების წერტილზე კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა. კერძოდ, დადგენილია ჩ. ფეფერმანის უწყვეტ $F(x, y)$ ფუნქციასთან ასოცირებული $S[F]_1$ და $S[F]_2$ მწკრივების კრებადობა $[-\pi, \pi]^2$ კვადრატის თითქმის ყველა

(x, y) წერტილზე $F(x, y)$ მნიშვნელობისკენ.

გარდა ამისა, აღნიშნულია ჰანტის თეორემის [75] მართებულობა ორი ცვლადის $L^p[-\pi, \pi]^2$, $p > 1$, კლასის ფუნქციასთან ასოცირებული მწკრივებისთვის (იხ. თეორემა 6.3.4).

2. ტრიგონომეტრიული ერთჯერადი მწკრივების რიმანის თეორიას, მთელი ერთი თავი აქვს დათმობილი ა. ზიგმუნდის ორტომეულის პირველ ტომში. ამ შედეგებიდან, ჩვენი სამომავლო მიზნებიდან გამომდინარე, აღვნიშნავთ ორ შედეგს: მწკრივის შეჯამებადობის რიმანის მეთოდი რეგულარულია, ე.ი. რიმანის მეთოდი აჯამებს ყველა კრებად მწკრივს მისი ბუნებრივი ჯამისკენ და, მეორე, ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს ერთჯერადი მწკრივი შეჯამებადია, რიმანის მეთოდით, ფუნქციის მნიშვნელობისკენ თითქმის ყველა წერტილზე (იხ. თავი 5, პარაგრაფი 5.24, თეორემა 5.24.1; პარაგრაფი 5.26, თეორემა 5.26.1).

ორმაგი მწკრივებისთვის შეჯამებადობის რიმანის მეთოდად შემოთავაზებული¹⁹ გამოსახულების (იხ. [5], [14], [18], [57], [58]) ნაკლია ის, რომ ის არ არის რეგულარული. ამასთან ერთად, ფურიეს ორმაგი მწკრივის შეჯამებადობა შემოთავაზებული მეთოდით დღემდე არ არის ცნობილი (იხ. მაგალითად [58]), მაგრამ დადგენილია ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს განმეორებითი მწკრივის R^2 შეჯამებადობა თითქმის ყველგან (იხ. პარაგრაფი 8.16).

აქ, მეორე ნაწილში, განვიხილავთ რიმანის ერთგანზომილებიანი მეთოდით შეჯამებადობის საკითხს ასოცირებული მწკრივებისთვის და დადგენილია: $[-\pi, \pi]^2$ კვადრატზე ჯამებად f ფუნქციასთან ასოცირებული ორივე $S[f]_1$ და $S[f]_2$ მწკრივი შეჯამებადია რიმანის ერთგანზომილებიანი მეთოდით თითქმის ყველა $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$ წერტილზე $f(x, y)$ მნიშვნელობისკენ (იხ. პარაგრაფი 6.4, თეორემები 6.4.2, 6.4.3).

მწკრივის შეჯამებადობის რიმანის მეთოდთან დაკავშირებით აღვნიშნავ, რომ წიგნის პირველ ნაწილში დამატებული ახალი შედეგით (იხ. თავი 5, პარაგრაფი 5.27) დადგენილია, რომ რიმანის მეთოდის განმსაზღვრელი განმეორებითი ზღვარი საუკეთესოა დარჩენილ ორმაგ ზღვარსა და მეორე განმეორებით ზღვარს შორის [70].

¹⁹ვამბო “შემოთავაზებული”, რადგან ეს გამოსახულება არ არის ორმაგი ტრიგონომეტრიული მწკრივის ორჯერ წევრობრივი ინტეგრებით წარმოქმნილი მწკრივის შესაბამისი (იხ. [64]), ისე როგორც ამას აქვს ადგილი ერთჯერადი მწკრივის შემთხვევაში.

თავი 6

ორი ცვლადის ფუნქციასთან ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი ორი მწკრივის თვისებები

6.1 ფუბინისა და ტონელის თეორემები

I. ვთქვათ, ორი ცვლადის $F(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია R ($a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$) მართკუთხედზე. ასეთ მართკუთხედს ხშირად წერენ $[a, b]$ და $[c, d]$ სეგმენტების დეკარტული (პირდაპირი, [28, გვ. 355]) ნამრავლის სახით $R = [a, b] \times [c, d]$. როცა $c = a$ და $d = b$, მაშინ ამ დეკარტულ ნამრავლს წერენ $[a, b]^2$ სახით.

ორი ცვლადის $F(x, y)$ ფუნქციის ჯამებადობა R მართკუთხედზე ნიშნავს ლებეგის ორმაგი ინტეგრალის სასრულობას (იხ. [34, გვ. 326]) R მართკუთხედზე, ანუ ლებეგის აზრით ორმაგი ინტეგრალი

$$\iint_R F(x, y) \, dx \, dy \quad (6.1.1)$$

არსებობს და სასრულია.

ფუბინის თეორემა საშუალებას იძლევა ლებეგის ორმაგი (6.1.1) ინტეგრალის გამოთვლა დავიყვანოთ ლებეგის მარტივი ინტეგრალების გამოთვლამდე. სახელდობრ, მართებულია შემდეგი

თ ე ო რ ე მ ა 6.1.1 (ფუბინი, [1, გვ. 487-488], [34, გვ. 328-329]). თუ $F(x, y)$ ფუნქცია ჯამებადია $R = [a, b] \times [c, d]$ მართკუთხედზე, მაშინ:

(1) თითქმის ყველა $x \in [a, b]$ -თვის სასრულია ინტეგრალი

$$\int_c^d F'(x, y) dy,$$

ანუ, რაც იგივეა, თითქმის ყველა $x \in [a, b]$ -თვის $F(x, y)$, როგორც y -ის ფუნქცია, ჯამებადია $[c, d]$ სეგმენტზე;

(2) თითქმის ყველა $y \in [c, d]$ -თვის სასრულია ინტეგრალი

$$\int_a^b F(x, y) dx,$$

ანუ, რაც იგივეა, თითქმის ყველა $y \in [c, d]$ -თვის $F(x, y)$, როგორც x -ის ფუნქცია, ჯამებადია $[a, b]$ სეგმენტზე;

(3) მართებულია ტოლობები

$$\iint_R F(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d F(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b F(x, y) dx \right] dy. \quad (6.1.2)$$

II. (6.1.2) ტოლობების მარჯვენა მხარეს არსებულ ორ ინტეგრალს

$$\int_a^b \left[\int_c^d F(x, y) dy \right] dx, \quad \int_c^d \left[\int_a^b F(x, y) dx \right] dy \quad (6.1.3)$$

ეწოდება განმეორებითი ინტეგრალები R მართკუთხედზე $f(x, y)$ ფუნქციისთვის.

მაშასადამე, ფუბინის თეორემა გვეუბნება, რომ R მართკუთხედზე ჯამებადი $F(x, y)$ ფუნქციისთვის განმეორებითი (6.1.3) ინტეგრალები ტოლია და მათი საერთო მნიშვნელობა არის ორმაგი (6.1.1) ინტეგრალი.

ახლა, ბუნებრივია კითხვა: R მართკუთხედზე განსაზღვრული ორი ცვლადის რაიმე $F(x, y)$ ფუნქციისთვის, განმეორებითი (6.1.3) ინტეგრალების ტოლობა ხომ არ იწვევს F ფუნქციის ჯამებადობას R მართკუთხედზე? ამ კითხვაზე პასუხი უარყოფითია, რასაც ადასტურებს შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 6.1.2 (ფიხტენჰოლცი, [34, გვ. 334]). არსებობს R მართკუთხედზე განსაზღვრული ორი ცვლადის ისეთი $f(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც არაჯამებადია ყოველ $r = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] \subset R$ ქვემართკუთხედზე და, ამავე დროს, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{\gamma}^{\delta} f(x, y) dy \right] dx = \int_{\gamma}^{\delta} \left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx \right] dy.$$

III. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა (6.1.3) განმეორებითი ინტეგრლებიდან ერთ-ერთის სასრულობა იწვევს $F(x, y)$ ფუნქციის ჯამებადობას R მართკუთხედზე. ამ მიმართულებით მართებულია შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 6.1.3 (ტონელი [1, გვ. 489], [34, გვ. 335]). თუ ორი ცვლადის $F(x, y)$ ფუნქცია R -ზე არის არაუარყოფითი ($F'(x, y) \geq 0, (x, y) \in R$) ან არადადებითი ($F'(x, y) \leq 0, (x, y) \in R$), მაშინ განმეორებითი (6.1.3) ინტეგრლებიდან ერთ-ერთის სასრულობა იწვევს მეორე განმეორებითი ინტეგრალის არსებობას, $F(x, y)$ ფუნქციის ჯამებადობას R მართკუთხედზე და (6.1.2) ტოლობებს.

6.2 ორი ცვლადის ჯამებად ფუნქციასთან ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი მწკრივები

1. ვთქვათ, ორი ცვლადის $f(x, y)$ ფუნქცია ჯამებადია $[-\pi, \pi]^2$ კვადრატზე. ეს ნიშნავს, რომ $f(x, y)$ ფუნქციისთვის სასრულია ლებეგის ორმაგი ინტეგრალი

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) dx dy.$$

$f(x, y)$ ფუნქცია $[-\pi, \pi]^2$ კვადრატის გარეთ გაავარძელოთ 2π პერიოდულად თითოეული ცვლადის მიმართ. ასე მიღებული ახალი ფუნქცია განსაზღვრულია მთელს oxy სიბრტყეზე და იგი აღვნიშნოთ ისევ $f(x, y)$ -ით, $x \in (-\infty, +\infty), y \in (-\infty, +\infty)$.

$f(x, y)$ ფუნქციის 2π პერიოდულობა თითოეული ცვლადის მიმართ ნიშნავს

$$f(x + 2\pi, y) = f(x, y), \quad f(x, y + 2\pi) = f(x, y) \quad (6.2.1)$$

ტოლობების ერთდროულ შესრულებას ყოველი (x, y) წერტილისთვის, სადაც $x \in (-\infty, +\infty)$ და $y \in (-\infty, +\infty)$.

აქ საჭიროა აღინიშნოს, რომ f ფუნქციის 2π პერიოდულობა თითოეული ცვლადის მიმართ არის უფრო მეტი მოთხოვნა f ფუნქციაზე, ვიდრე f -გან 2π პერიოდულობის მოთხოვნა (x, y) წყვილის მიმართ — ორპერიოდულობა

$$f(x + 2\pi, y + 2\pi) = f(x, y), \quad (6.2.2)$$

ე.ი. (6.2.1) პირობებიდან გამომდინარეობს (6.2.2) პირობა. მართლაც,

$$f(x + 2\pi, y + 2\pi) = f(x, y + 2\pi) = f(x, y).$$

2. $f(x, y)$ ფუნქციის ჯამებადობიდან $[-\pi, \pi]^2$ კვადრატზე გამომდინარეობს, ფუბინის თეორემა 6.1.1-ის ძალით, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია ჯამებადია x -ის მიმართ $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე თითქმის ყველა ფიქსირებული y -თვის $[-\pi, \pi]$ სეგმენტიდან. გეომეტრიულად ეს ნიშნავს, რომ oy ღერძზე აღებული თითქმის ყველა $y \in [-\pi, \pi]$ წერტილზე, ox ღერძის პარალელურად გავლებულ წრფეზე მდებარე $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე აღებული $\int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) dx$ ინტეგრალი

სასრულია. $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე მდებარე ის y წერტილი, რომელსაც გააჩნია $\int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) dx$ ინტეგრალის სასრულობის თვისება აღვნიშნოთ $\mathcal{Y}$ სიმბოლოთი, ხოლო $\mathcal{Y} \in [-\pi, \pi]$ წერტილების სიმრავლე — E^2 სიმბოლოთი. ცხადია, რომ E^2 სიმრავლის ზომა $|E^2| = 2\pi$.

ამრიგად, გვაქვს x და $\mathcal{Y}$ ცვლადების $f(x, \mathcal{Y})$ ფუნქცია, $x \in [-\pi, \pi]$, $\mathcal{Y} \in E^2$, რომელიც ჯამებადია x -ის მიმართ $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ყოველი $\mathcal{Y}$ -თვის E^2 სიმრავლიდან.

ამიტომ f ფუნქციას შეესაბამება x -ის მიმართ ფურიეს ერთგანზომილებიანი შემდეგი მწკრივი, სიმბოლურად $S[f]_1$,

$$S[f]_1(x, \mathcal{Y}) = \frac{1}{2} a_0(\mathcal{Y}) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(\mathcal{Y}) \cos nx + b_n(\mathcal{Y}) \sin nx] \quad (6.2.3)$$

$\mathcal{Y} \in E^2$ ცვლადზე დამოკიდებული

$$a_0(\mathcal{Y}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, \mathcal{Y}) dx, \quad a_n(\mathcal{Y}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, \mathcal{Y}) \cos nx dx, \quad (6.2.4)$$

$$b_n(\mathcal{Y}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, \mathcal{Y}) \sin nx dx$$

კოეფიციენტებით.

ანალოგიურად, f ფუნქცია ჯამებადია y -ის მიმართ $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე თითქმის ყველა ფიქსირებული x -თვის $[-\pi, \pi]$ სეგმენტიდან. ამ თვისების x წერტილი აღვნიშნოთ $\mathcal{X}$ სიმბოლოთი, ხოლო $\mathcal{X} \in [-\pi, \pi]$ წერტილების სიმრავლე E^1 სიმბოლოთი, $|E^1| = 2\pi$.

მაშასადამე, გვაქვს $\mathcal{X}$ და y ცვლადების $f(\mathcal{X}, y)$, $\mathcal{X} \in E^1$, $y \in [-\pi, \pi]$ ფუნქცია, რომელიც ჯამებადია y ცვლადის მიმართ $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ყოველი $\mathcal{X}$ -თვის E^1 სიმრავლიდან.

ამის გამო, f ფუნქციას შეესაბამება y -ის მიმართ ფურიეს ერთგანზომილებიანი მწკრივი, სიმბოლურად $S[f]_2$,

$$S[f]_2(\mathcal{X}, y) = \frac{1}{2} c_0(\mathcal{X}) + \sum_{m=1}^{\infty} [c_m(\mathcal{X}) \cos my + d_m(\mathcal{X}) \sin my] \quad (6.2.5)$$

$\mathcal{X} \in E^1$ ცვლადზე დამოკიდებული

$$c_0(\mathcal{X}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\mathcal{X}, y) dy, \quad c_m(\mathcal{X}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\mathcal{X}, y) \cos my dy,$$

$$d_m(\mathcal{X}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\mathcal{X}, y) \sin my dy.$$

კოეფიციენტებით.

ამგვარად, $[-\pi, \pi]^2$ სეგმენტზე ჯამებად ორი ცვლადის $f(x, y)$ ფუნქციას შეესაბამება ცვლადკოეფიციენტებიანი ფურიეს ერთგანზომილებიანი ორი მწკრივი — x ცვლადის მიმართ (6.2.3) მწკრივი და y ცვლადის მიმართ (6.2.5) მწკრივი.

(6.2.3) და (6.2.5) მწკრივებს ვუწოდოთ ორი ცვლადის $f(x, y)$ ფუნქციასთან ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი მწკრივები x და y ცვლადების მიმართ, შესაბამისად.

6.3 ფურიეს ორჯერადი მწკრივის შედარება ფურიეს ერთგანზომილებიან ასოცირებულ მწკრივთან

1. ცნობილია, რომ $[-\pi, \pi]^2$ კვადრატზე ჯამებად $f(x, y)$ ფუნქციას, სიმბოლურად $f \in L[-\pi, \pi]^2$, შეესაბამება ფურიეს ორჯერადი მწკრივი, სიმბოლურად $S[f]$.

მარტო 1953–1980 წლებში გამოქვეყნდა რამდენიმე ასეული ნაშრომი, ფურიეს ორჯერადი მწკრივების კრებადობა-შეჯამებადობის საკითხებზე [17]. ამ შედეგთა შორის პრინციპული მნიშვნელობის არის ჩ. ფეფერმანის 1971 წლის ნაშრომი [72], რომელშიც დადგენილია

ორი ცვლადის ყველგან უწყვეტი ისეთი $F(x, y)$ ფუნქციის არსებობა, რომელიც 2π პერიოდულია თითოეული ცვლადის მიმართ და მის შესაბამის ფურიეს ორჯერად $S[F]$ მწკრივს არ გააჩნია პრინგსპაიმის აზრით კრებადობის წერტილი, ანუ oxy სიბრტყეზე არ არსებობს ისეთი (x, y) წერტილი, რომ $S[F]$ მწკრივის მართკუთხოვან კერძო $S_{mn}(F; x, y)$ ჯამებს (x, y) წერტილზე გააჩნდეს ზღვარი, როცა $m \rightarrow \infty$ და $n \rightarrow \infty$ ერთიმეორისგან დამოუკიდებლად.

2. ახლა განვიხილოთ ფეფერმანის $F(x, y)$ ფუნქციასთან ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი ორივე მწკრივის კრებადობის საკითხი.

ამ მიმართულებით მართებულია

თეორემა 6.3.1 ([66]). ფეფერმანის $F(x, y)$ ფუნქციასთან x ცვლადის მიმართ ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი

$$S[F]_1(x, y) = \frac{1}{2} a_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(y) \cos nx + b_n(y) \sin nx]$$

მწკრივი, $y \in [-\pi, \pi]$ ცვლადზე დამოკიდებული

$$a_0(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x, y) dx, \quad a_n(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x, y) \cos nx dx,$$

$$b_n(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x, y) \sin nx dx$$

კოეფიციენტებით, კრებადია $F(x, y)$ მნიშვნელობისკენ თითქმის ყველა x -თვის $[-\pi, \pi]$ სეგმენტიდან და ყველა y -თვის $[-\pi, \pi]$ სეგმენტიდან, ანუ ადგილი აქვს

$$S[F]_1(x, y) = F(x, y) \quad (6.3.1)$$

ტოლობას თითქმის ყველა $x \in [-\pi, \pi]$ -თვის და ყველა $y \in [-\pi, \pi]$ -თვის.

დამტკიცება. რადგან $F(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია ყველგან (x, y) წყვილის მიმართ, ამიტომ $F(x, y)$ უწყვეტია, კერძოდ, x -ის მიმართ ყველგან $(-\infty, +\infty)$ -ზე და ამ ფაქტს ადგილი აქვს ყველა y -თვის $(-\infty, +\infty)$ -დან. აქედან გამომდინარეობს, რომ F როგორც x -ის ფუნქცია, ეკუთვნის $L^2[-\pi, \pi]$ კლასს ყველა y -თვის $[-\pi, \pi]$ სეგმენტიდან. ეს ნიშნავს,

რომ პარაგრაფ 6.2-ის (6.2.3) ტოლობაში არსებული $\mathcal{P}$ -ის როლში გვევლინება ნებისმიერი $y \in [-\pi, \pi]$ (იხ. [46, გვ. 58]).

ახლა, დასამტკიცებელი (6.3.1) ტოლობა გამომდინარეობს ლ. კარლესონის კარგად ცნობილი თეორემიდან (იხ. [62]; თავი 5, C პუნქტის დასასრული). თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ანალოგიურად მტკიცდება

თეორემა 6.3.2 ([66]). ფეფერმანის $F(x, y)$ ფუნქციასთან y ცვლადის მიმართ ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი

$$S[F]_2(x, y) = \frac{1}{2} c_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} [c_m(x) \cos my + d_m(x) \sin my]$$

მწკრივი, $x \in [-\pi, \pi]$ ცვლადზე დამოკიდებული

$$c_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x, y) dy, \quad c_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x, y) \cos ny dy,$$

$$d_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x, y) \sin my dy$$

კოეფიციენტებით, კრებადია $F(x, y)$ მნიშვნელობისკენ ყველა x -თვის $[-\pi, \pi]$ სეგმენტიდან და თითქმის ყველა y -თვის $[-\pi, \pi]$ სეგმენტიდან, ანუ ადგილი აქვს

$$S[F]_2(x, y) = F(x, y)$$

ტოლობას ყველა $x \in [-\pi, \pi]$ -თვის და თითქმის ყველა $y \in [-\pi, \pi]$ -თვის.

ბოლო ორი თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი

თეორემა 6.3.3 ([66]). ფეფერმანის $F(x, y)$ ფუნქციასთან ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი ორივე $S[F]_1(x, y)$ და $S[F]_2(x, y)$ მწკრივი ერთდროულად კრებადია $F(x, y)$ მნიშვნელობისკენ თითქმის ყველა $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$ წერტილზე. *

დაბოლოს, თეორემები 6.3.1-6.3.3 შეიძლება ასე გაძლიერდეს ჰანტის თეორემის (იხ. [17, გვ. 12], [75]) გამოყენებით.

* იხ. Ю. С. Очан, Сборник задач по математическому анализу, 1981, с. 50.

თეორემა 6.3.4 ([66]). ნებისმიერი $f \in L^p[-\pi, \pi]^2$, $p > 1$, ფუნქციისთვის არსებობს E_1 , E_2 და E_3 ზომადი სიმრავლეები $[-\pi, \pi]^2$ კვადრატადან, რომელთათვისაც მართებულია შემდეგი ტოლობები:

1. $|E_1| = |E_2| = |E_3|$;
2. $S[f]_1(x, y) = f(x, y)$, როცა $(x, y) \in E_1$;
3. $S[f]_2(x, y) = f(x, y)$, როცა $(x, y) \in E_2$;
4. $S[f]_1(x, y) = f(x, y) = S[f](x, y)$, როცა $(x, y) \in E_3$.

დასკვნა 6.3.5. აქედან თვალნათლივ ჩანს ორი ცვლადის ჯამებად ფუნქციასთან ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი ორივე მწკრივის უპირატესობა, თითქმის ყველგან კრებადობის თვალსაზრისით, იმავე ფუნქციის შესაბამის ფურიეს ორჯერად მწკრივთან შედარებით!

6.4 ორი ცვლადის ჯამებადი ფუნქციის წარმოდგენა, მასთან ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი ორი მწკრივის R^2 -ჯამებით

1. როგორც ვიცით (იხ. თავი 5, თეორემა 5.26.1), მართებულია შემდეგი

თეორემა 6.4.1. 2π პერიოდული და $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი ყოველი $f(x)$ ფუნქციის

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (6.4.1)$$

ფურიეს მწკრივი შეჯამებადია რიმანის R^2 მეთოდით $f(x)$ მნიშვნელობისკენ თითქმის ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე.

ეს ნიშნავს, რომ თითქმის ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე ადგილი აქვს ურთიერთეკვივალენტურ შემდეგ ორ ტოლობას (იხ. თავი 5, პარაგრაფი 5.23, (5.23.5) და (5.23.6) ტოლობები)

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 \right], \quad (6.4.2)$$

$$f(x) = F^{(II)}(x), \quad (6.4.3)$$

სადაც (6.4.1) მწკრივის შესაბამისი რიმანის $F(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია შემდეგი ტოლობით (იხ. თავი 5, პარაგრაფი 5.23, ტოლობა (5.23.2))

$$F(x) = \frac{a_0}{4} x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

სშირად, (6.4.2), (6.4.3) ტოლობებს ასე გამოთქვამენ: $f(x)$ არის მისი შესაბამისი ფურიეს (6.4.1) მწკრივის R^2 -ჯამი თითქმის ყველა x -თვის $[0, 2\pi]$ სეგმენტიდან.

2. ჩვენი უახლოესი მიზანია, თეორემა 6.4.1 განვაზოგადოთ $[0, 2\pi]^2$ კვადრატზე ჯამებადი ორი ცვლადის ფუნქციასთან ასოცირებული ერთგანზომილებიანი მწკრივებისთვის და ამ მიზნით გამოყენებული იქნება რიმანის მხოლოდ ერთგანზომილებიანი $(\frac{\sin nh}{nh})^2$ მამრავლები და არა რიმანის ერთგანზომილებიანი მამრავლების $(\frac{\sin mh}{mh})^2 (\frac{\sin nk}{nk})^2$ ნამრავლი, რასაც ადგილი აქვს, როცა განიხილავენ ორჯერადი ტრიგონომეტრიული მწკრივის შეჯამებადობის საკითხს რიმანის ორგანზომილებიანი R^2 მეთოდით (იხ. [5], [14], [18], [57], [58]).

$[0, 2\pi]^2$ კვადრატზე ჯამებადი, x და y ცვლადების ფუნქციასთან x ცვლადის მიმართ ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი მწკრივისთვის, თეორემა 6.4.1-ის განზოგადებას წარმოადგენს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 6.4.2 ([69]). $[0, 2\pi]^2$ სეგმენტზე ჯამებად და თითოეული ცვლადის მიმართ 2π პერიოდული $f(x, y)$ ფუნქციასთან, x ცვლადის მიმართ ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი

$$S[f]_1(x, \mathcal{Y}) = \frac{1}{2} a_0(\mathcal{Y}) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(\mathcal{Y}) \cos nx + b_n(\mathcal{Y}) \sin nx] \quad (6.4.4)$$

მწკრივი R^2 -შეჯამებადია $f(x, \mathcal{Y})$ მნიშვნელობისკენ თითქმის ყველა x -თვის $[0, 2\pi]$ სეგმენტიდან და ყველა $\mathcal{Y}$ -თვის E^2 სიმრავლიდან (იხ. პარაგრაფი 6.2, მწკრივი (6.2.3)), ანუ ადგილი აქვს

$$f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} a_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(y) \cos nx + b_n(y) \sin nx] \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 \right\} \quad (6.4.5)$$

ტოლობას თითქმის ყველა $(x, y) \in [0, 2\pi]^2$ წერტილისთვის.

დამტკიცება. ლებეგის თეორემის ძალით (იხ. თავი 4, თეორემა 4.15.1), (6.4.4) მწკრივის წევრობრივი ინტეგრებით $[0, x] \subset [0, 2\pi]$ სეგმენტზე მიიღება

$$\int_0^x f(t, \mathcal{Y}) dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(\mathcal{Y})}{n} - \frac{a_0(\mathcal{Y})}{2} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [a_n(\mathcal{Y}) \sin nx - b_n(\mathcal{Y}) \cos nx]$$

ტოლობა, სადაც

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [a_n(\mathcal{Y}) \sin nx - b_n(\mathcal{Y}) \cos nx] \quad (6.4.6)$$

მწკრივი თანაბრად კრებადია x -ის მიმართ $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე

$$\phi(x, \mathcal{Y}) - \frac{a_0(\mathcal{Y})}{2} x \quad (6.4.7)$$

ფუნქციისკენ, სადაც შემოღებულია აღნიშვნა

$$\phi(x, \mathcal{Y}) = \int_0^x f(t, \mathcal{Y}) dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(\mathcal{Y})}{n}. \quad (6.4.8)$$

ამასთან ერთად, ადგილი აქვს ტოლობას (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.15, ტოლობა (4.15.5))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(\mathcal{Y})}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x, \mathcal{Y}) dx.$$

(6.4.6) მწკრივის თანაბრად კრებადობის გამო x -ის მიმართ $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე, იგი წარმოადგენს x ცვლადის მიმართ ფურიეს მწკრივს (6.4.7) ფუნქციისთვის. ამიტომ, ისევ ლეიბნიცის თეორემის გამოყენებით, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_0^x \phi(t, \mathcal{Y}) dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\mathcal{Y})}{n^2} - \frac{a_0(\mathcal{Y})}{4} x^2 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} [a_n(\mathcal{Y}) \cos nx + b_n(\mathcal{Y}) \sin nx].$$

ამ ტოლობას მივცეთ შემდეგი სახე

$$\begin{aligned} \int_0^x \phi(t, \mathcal{Y}) dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\mathcal{Y})}{n^2} \\ = \frac{a_0(\mathcal{Y})}{4} x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} [a_n(\mathcal{Y}) \cos nx + b_n(\mathcal{Y}) \sin nx], \quad (6.4.9) \end{aligned}$$

რომლის მარჯვენა მხარე წარმოადგენს (6.4.4) მწკრივთან დაკავშირებულ რიმანის ფუნქციას (იხ. თავი 5, პარაგრაფი 5.23, ტოლობა (5.23.2)) და იგი აღვნიშნოთ $F(x, \mathcal{Y})$ -ით:

$$F(x, \mathcal{Y}) = \frac{a_0(\mathcal{Y})}{4} x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} [a_n(\mathcal{Y}) \cos nx + b_n(\mathcal{Y}) \sin nx]. \quad (6.4.10)$$

მაგრამ, გამომდინარე (6.4.9) ტოლობიდან, (6.4.10) ტოლობასთან ერთად ადგილი აქვს

$$F(x, \mathcal{Y}) = \int_0^x \phi(t, \mathcal{Y}) dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\mathcal{Y})}{n^2} \quad (6.4.11)$$

ტოლობას. თეორემის დასამტკიცებლად საჭიროა

$$F_x^{(n)}(x, \mathcal{Y}) = f(x, \mathcal{Y})$$

ტოლობის (იხ. თავი 5, პარაგრაფი 5.22, ტოლობა (5.22.3) და პარაგრაფი 5.23, ტოლობები (5.23.3), (5.23.4)) დადგენა თითქმის ყველა $x \in [0, 2\pi]$ -თვის და $\mathcal{Y} \in E^2$ -თვის, რადგან მართებულია

$$\begin{aligned} & \frac{F(x+2h, \mathcal{Y}) + F(x-2h, \mathcal{Y}) - 2F(x, \mathcal{Y})}{4h^2} \\ &= \frac{a_0(\mathcal{Y})}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(\mathcal{Y}) \cos nx + b_n(\mathcal{Y}) \sin nx] \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.4.12)$$

ტოლობა.

ახლა, ცვლადსაზღვრიანი ინტეგრალის გაწარმოების შესახებ ლებეგის თეორემის ძალით, (6.4.11) ტოლობიდან ყველა x -თვის მიიღება

$$F'_x(x, \mathcal{Y}) = \phi(x, \mathcal{Y}) \quad (6.4.13)$$

ტოლობა. რადგან $\phi(x, \mathcal{Y})$ ფუნქცია უწყვეტია x -ის მიმართ ყველგან, ამიტომ ყველა x წერტილი მისი ლებეგის წერტილია.

მეორეს მხრივ, (6.4.8) ტოლობით განსაზღვრულ $\phi(x, \mathcal{Y})$ ფუნქციას წარმოებული გააჩნია თითქმის ყველა x წერტილზე, ისევე ლებეგის თეორემის თანახმად, ე.ი. თითქმის ყველა x -თვის გვაქვს ტოლობა

$$\phi'_x(x, \mathcal{Y}) = f(x, \mathcal{Y}). \quad (6.4.14)$$

(6.4.13) და (6.4.14) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ (6.4.11)-ით განსაზღვრულ $F(x, \mathcal{Y})$ ფუნქციას გააჩნია $f(x, \mathcal{Y})$ -ის ტოლი მეორე რიგის ჩვეულებრივი $F''_{xx}(x, \mathcal{Y})$ კერძო წარმოებული, ანუ თითქმის ყველა x -თვის მართებულია ტოლობა

$$F''_{xx}(x, \mathcal{Y}) = f(x, \mathcal{Y}). \quad (6.4.15)$$

მაგრამ, (6.4.15) ტოლობის მარცხენა მხარის არსებობა იწვევს მისივე ტოლი $F_x^{(n)}(x, \mathcal{Y})$ -ის არსებობას (იხ. თავი 5, წინადადება 5.22.2), ე.ი. თითქმის ყველა x -თვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$F_x^{(n)}(x, \mathcal{Y}) = f(x, \mathcal{Y}). \quad (6.4.16)$$

(6.4.12) და (6.4.16) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, $|E^2| = 0$ ტოლობის გათვალისწინებით, რომ თითქმის ყველა $(x, y) \in [0, 2\pi]^2$ წერტილისთვის ადგილი აქვს (6.4.5) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ასევე დამტკიცდება

თეორემა 6.4.3 ([69]). $[0, 2\pi]^2$ კვადრატზე ჯამებად და თითოეული ცვლადის მიმართ 2π პერიოდულ $f(x, y)$ ფუნქციასთან, y ცვლადის მიმართ ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი

$$S[f]_2(\mathcal{X}, y) = \frac{1}{2} c_0(\mathcal{X}) + \sum_{m=1}^{\infty} [c_m(\mathcal{X}) \cos my + d_m(\mathcal{X}) \sin my]$$

მწკრივი R^2 -შეჯამებადია $f(\mathcal{X}, y)$ მნიშვნელობისკენ ყველა $\mathcal{X}$ -თვის E^1 სიმრავლიდან და თითქმის ყველა y -თვის $[0, 2\pi]$ სეგმენტიდან (იხ. პარაგრაფი 6.2, მწკრივი (6.2.5)), ანუ ადგილი აქვს

$$f(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} c_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} [c_m(x) \cos my + d_m(x) \sin my] \left(\frac{\sin mk}{mk} \right)^2 \right\} \quad (6.4.17)$$

ტოლობას თითქმის ყველა $(x, y) \in [0, 2\pi]^2$ წერტილზე.

უკანასკნელი ორი თეორემიდან გამომდინარეობს

თეორემა 6.4.4 ([69]). $[0, 2\pi]^2$ კვადრატზე ჯამებადი და თითოეული ცვლადის მიმართ 2π პერიოდული $f(x, y)$ ფუნქციის შესაბამისი ფურიეს ერთგანზომილებიანი $S[f]_1(x, y)$ და $S[f]_2(x, y)$ მწკრივები, R^2 -შეჯამებადებია $f(x, y)$ მნიშვნელობისკენ თითქმის ყველა (x, y) წერტილისთვის $[0, 2\pi]^2$ კვადრატიდან, ანუ ერთდროულად ადგილი აქვს (6.4.5) და (6.4.17) ტოლობებს თითქმის ყველა $(x, y) \in [0, 2\pi]^2$ წერტილზე.

3. თეორემა 6.4.2-ის დამტკიცების პროცესში გამოვლინდა (იხ. ტოლობები (6.4.9) და (6.4.11)), რომ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\mathcal{Y})}{n^2}$$

კრებადია ყველა $\mathcal{Y} \in E^2$ -თვის, $|E^2| = 2\pi$.

აქედან გამომდინარეობს

წინადადება 6.4.5. $[0, 2\pi]^2$ კვადრატზე ჯამებადი და თითოეული ცვლადის მიმართ 2π პერიოდული $f(x, y)$ ფუნქციისთვის

$$a_n(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) \cos nx \, dx \quad (6.4.18)$$

და

$$c_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) \cos my \, dy$$

ტოლობებით განსაზღვრულ $a_n(y)$, $y \in [0, 2\pi]$ და $c_m(x)$, $x \in [0, 2\pi]$ ფუნქციებს გააჩნია შემდეგი თვისებები:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(y)}{n^2} \quad \text{და} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_m(x)}{m^2}$$

მწკრივები კრებადია თითქმის ყველა $y \in [0, 2\pi]$ -თვის და თითქმის ყველა $x \in [0, 2\pi]$ -თვის, შესაბამისად.

შენიშვნა 6.4.6. თუ (6.4.18) ტოლობაში ავიღებთ ერთი x ცვლადის $[0, 2\pi]$ -ზე ჯამებად $f(x)$ ფუნქციას, მაშინ იგი მიიღებს სახეს

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

და მისთვის

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$$

მწკრივის კრებადობა აშკარაა, რადგან რიმან-ლებეგის თეორემის ძალით (იხ. თავი 3, პარაგრაფი 3.9, თეორემა 3.9.2) $a_n \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$ და ამიტომ $|a_n| < c$, ხოლო $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

მწკრივი კრებადია.

ამასთან ერთად, ვიცით, რომ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^p}$ მწკრივი განშლადია, საზოგადოდ (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.15, შენიშვნა 4.15.5), ხოლო ეს მწკრივი კრებადია თუკი a_n წარმოადგენს $L^p[0, 2\pi]$, $p > 1$, კლასის ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტს.

4. დამტკიცებული თეორემებიდან გამომდინარე ჩამოვაცალიბოთ

თეორემა 6.4.7 ([69]). $[0, 2\pi]^2$ კვადრატზე ჯამებადი და თითოეული ცვლადის მიმართ 2π პერიოდული $f(x, y)$ ფუნქციის შესაბამის ფურიეს ერთგანზომილებიანი ორი

$$S[f]_1(x, y) = \frac{1}{2} a_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(y) \cos nx + b_n(y) \sin nx]$$

და

$$S[f]_2(x, y) = \frac{1}{2} c_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} [c_m(x) \cos my + d_m(x) \sin my]$$

მწკრივი R^2 -ჯამებადია რიმანის ერთგანზომილებიანი მეთოდით $f(x, y)$ მნიშვნელობისკენ თითქმის ყველა $(x, y) \in [0, 2\pi]^2$ წერტილზე.

6.5 ორი ცვლადის ჯამებად ფუნქციასთან ასოცირებულ, ფურიეს ერთგანზომილებიანი მწკრივების კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები

როგორც ვიცით (იხ. პარაგრაფი 6.2, მწკრივები (6.2.3) და (6.2.5)), $[-\pi, \pi]^2$ კვადრატზე ჯამებად და თითოეული ცვლადის მიმართ 2π პერიოდულ $f(x, y)$ ფუნქციას უკავშირდება, ფურიეს ერთგანზომილებიანი ორი მწკრივი: x -ის მიმართ f ფუნქციასთან ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი

$$S[f]_1(x, \mathcal{Y}) = \frac{1}{2} a_0(\mathcal{Y}) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(\mathcal{Y}) \cos nx + b_n(\mathcal{Y}) \sin nx] \quad (6.5.1)$$

მწკრივი და y -ის მიმართ f ფუნქციასთან ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი

$$S[f]_2(\mathcal{X}, y) = \frac{1}{2} c_0(\mathcal{X}) + \sum_{m=1}^{\infty} [c_m(\mathcal{X}) \cos my + d_m(\mathcal{X}) \sin my]$$

მწკრივი.

განვიხილოთ (6.5.1) მწკრივის

$$S_m(f; x, \mathcal{Y}) = \frac{1}{2} a_0(\mathcal{Y}) + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k(\mathcal{Y}) \cos kx + b_k(\mathcal{Y}) \sin kx]$$

კერძო ჯამი, რომელიც მასში ფურიეს კოეფიციენტების ჩასმის შემდეგ (იხ. პარაგრაფი 6.2, ტოლობები (6.2.4)) მიიღებს სახეს

$$S_m(f; x, \mathcal{Y}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, \mathcal{Y}) D_m(t-x) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t, \mathcal{Y}) D_m(t) dt.$$

სადაც დირიხლეს D_m გულისთვის ადგილი აქვს ტოლობებს

$$D_m(t) = \frac{\sin(m + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}}, \text{ როცა } t \neq 2k\pi$$

და

$$D_m(2k\pi) = m + \frac{1}{2}, \text{ როცა } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

რადგან f ფუნქცია x ცვლადის მიმართ ჯამებადია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ყოველი $\mathcal{Y}$ -თვის, ამიტომ $\varphi \in [-\pi, \pi]$ ფუნქციის შესაბამისი ფურიეს $S[\varphi]$ მწკრივის რაიმე $t \in [-\pi, \pi]$ წერტილზე $\varphi(t)$ მნიშვნელობისკენ კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა (იხ. თავი 4, თეორემა 4.8.1)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{\varphi(t+u) + \varphi(t-u) - 2\varphi(t)}{u} \sin mu du = 0,$$

ჩვენს შემთხვევაში მიიღებს სახეს

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{f(x+t, \mathcal{Y}) + f(x-t, \mathcal{Y}) - 2f(x, \mathcal{Y})}{t} \sin mt dt = 0, \mathcal{Y} \in E^2.$$

მაშასადამე, მართებულია

თეორემა 6.5.1 ([66]). ფურიეს ერთგანზომილებიანი $S[f]$, მწკრივის კრებადობისთვის რაიმე $(x, \mathcal{Y})$ წერტილზე, $x \in [-\pi, \pi]$ და $\mathcal{Y} \in E^2$, $f(x, \mathcal{Y})$ მნიშვნელობისკენ, აუცილებელია და საკმარისი ადგილი ჰქონდეს შემდეგ ტოლობას

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{f(x+t, \mathcal{Y}) + f(x-t, \mathcal{Y}) - 2f(x, \mathcal{Y})}{t} \sin mt dt = 0. \quad (6.5.2)$$

მართებულია, აგრეთვე, შემდეგი

თეორემა 6.5.2 ([66]). ფურიეს ერთგანზომილებიანი $S[f]_2$ მწკრივის კრებადობისთვის რაიმე $(\mathcal{X}, y)$ წერტილზე, $\mathcal{X} \in E^1$ და $y \in [-\pi, \pi]$, $f(\mathcal{X}, y)$ მნიშვნელობისკენ, აუცილებელია და საკმარისი ადგილი ჰქონდეს შემდეგ ტოლობას

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{f(\mathcal{X}, y + \tau) + f(\mathcal{X}, y - \tau) - 2f(\mathcal{X}, y)}{\tau} \sin n\tau \, d\tau = 0. \quad (6.5.3)$$

ნაწილი III

ორი ცვლადის გლუვი ფუნქციები

შესავალი III ნაწილისათვის

ბ. რიმანის 1854 წლის შრომაში, სადაც განხილულია ერთი ცვლადის ფუნქციის ტრიგონომეტრიული მწკრივით წარმოდგენის პრობლემა, შემოღებულია ერთი ცვლადის ფუნქციის წერტილზე გლუვობის ცნება. დიდი ხნის შემდეგ, 1945 წლის [90] შრომაში, ა. ზიგმუნდმა მრავალმხრივ გამოიკვლია რიმანის აზრით გლუვი ფუნქციები და ეს შედეგები ფართოდაა წარმოდგენილი მისი ორტომეულის პირველ ტომში ფურიეს მწკრივებთან დაკავშირებით.

ცალკე უნდა აღინიშნოს, რომ რიმანის აზრით წერტილზე გლუვობის ცნებაში არსებული შეფარდება, ზუსტად არის ფურიეს მწკრივის იმავე წერტილზე კრებადობის აუცილებელ და საკმარის ინტეგრალურ პირობაში. აქედან გამომდინარე, არსებობს ფურიეს მწკრივის კრებადობის რიმანის საკმარისი პირობა (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.10) — წარმოებულის არსებობაზე სუსტი საკმარისი პირობა, მაგრამ სხვაგან არსად მოხსენიებული.

აქედან აშკარაა, რომ გარკვეული ინტერესი გაჩნდეს გლუვობის ცნების მოხერხებული შემოღებისა მრავალი ცვლადის, უპირველესად ორი ცვლადის, ფუნქციებისთვის. ამ მიმართულებით შესრულებულ [64] შრომაში დადგენილია, რომ ორი ცვლადის გლუვ ფუნქციას გააჩნია ყველა ის მთავარი თვისება, რაც დადგენილი იყო ერთი ცვლადის გლუვი ფუნქციებისთვის ა. ზიგმუნდის მიერ [90]. ამასთან ერთად, გარკვეული პირობისას დადგენილია ტრიგონომეტრიული ორმაგი მწკრივის ჯამის გლუვობა [64], რაც სრულად შეესაბამება ბ. რიმანის მეორე თეორემას [24, გვ. 503]. [68] შრომაში განხილულია ორი ცვლადის ფუნქციის თითოეული ცვლადით გლუვობა სხვადასხვა აზრით, რომელთა შორის უმთავრესია აღებული ცვლადის მიმართ განზოგადებული კუთხური გლუვობა და დადგენილია, რომ თითოეული ცვლადის მიმართ ამგვარი გლუვობა არის აუცილებელი და საკმარისი პირობა ორი ცვლადის ფუნქციის გლუვობის.

დასასრულ, პარაგრაფ 7.9-ში მოცემულია ფურიეს მწკრივის კრებადობისთვის რიმანის თეორემის (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.10) გავრცელება ორი ცვლადის ჯამებად ფუნქციასთან ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი ორივე მწკრივის კრებადობის შესახებ (იხ. თეორემები 7.9.1-7.9.3).

თავი 7

ორი ცვლადის გლუვი ფუნქციის თვისებები

7.1 ორი ცვლადის ფუნქციის გლუვობა და კერძო გლუვობა

$(x_0, y_0) \in R^2$ წერტილის მიდამოში განსაზღვრულ $f(x, y)$ ფუნქციასთან დაკავშირებით შემოვიტანოთ რამდენიმე განსაზღვრას.

გ ა ნ ს ა ზ დ ვ რ ა 7.1.1 ([64], [66]). $f(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება გლუვი (x_0, y_0) წერტილზე, როცა ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) + f(x_0 - h, y_0 - k) - 2f(x_0, y_0)}{|h| + |k|} = 0. \quad (7.1.1)$$

გ ა ნ ს ა ზ დ ვ რ ა 7.1.2. $f(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება x ცვლადის მიმართ კერძო გლუვი (x_0, y_0) წერტილზე, როცა x -ის მიმართ $f(x, y_0)$ კერძო ფუნქცია არის გლუვი x_0 წერტილზე, ე.ი. როცა ადგილი აქვს ტოლობას¹

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) + f(x_0 - h, y_0) - 2f(x_0, y_0)}{h} = 0. \quad (7.1.2)$$

f ფუნქციას ეწოდება y ცვლადის მიმართ კერძო გლუვი (x_0, y_0) წერტილზე, როცა y -ის მიმართ $f(x_0, y)$ კერძო ფუნქცია არის გლუვი y_0 წერტილზე, ე.ი. როცა ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0 - k) - 2f(x_0, y_0)}{k} = 0. \quad (7.1.3)$$

¹ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0$ და $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{|h|} = 0$ ტოლობები ურთიერთეკვივალენტურია. ამის დასადაგენად საკმარისია პირველი ტოლობა გადავწეროთ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \frac{\varphi(h)}{|h|} = 0$ სახით და გავითვალისწინოთ $|\frac{|h|}{h}| = 1$ ტოლობა, ე.ი. $\frac{|h|}{h}$ ვერ წაიფვანს $\frac{\varphi(h)}{|h|}$ შეფარდებას ნულისკენ, როცა $h \rightarrow 0$. ეს ნიშნავს, რომ $\frac{\varphi(h)}{|h|} \rightarrow 0$, როცა $h \rightarrow 0$.

(7.1.2) და (7.1.3) ტოლობების ერთდროულად შესრულების შემთხვევაში ვიტყვით, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია განცალბებულად (თითოეული ცვლადის მიმართ) გლუვია (x_0, y_0) წერტილზე.

ცხადია, რომ ორი ცვლადის $f(x, y)$ ფუნქციის გლუვობა (x_0, y_0) წერტილზე იწვევს f ფუნქციის კერძო გლუვობას x -ისა და y -ის მიმართ ცალ-ცალკე (x_0, y_0) წერტილზე. ამის შესაძენეად საკმარისია (7.1.1)-ში ავიღოთ $k = 0$ კერძო შემთხვევა და (7.1.2)-ში $-h = 0$ კერძო შემთხვევა.

თ ე ო რ ე მ ა 7.1.3 ([64], [66]). (x_0, y_0) წერტილზე დიფერენცირებადი ორი ცვლადის $f(x, y)$ ფუნქცია გლუვია (x_0, y_0) წერტილზე. საზოგადოდ, შებრუნებული მტკიცება მცდარია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . $f(x, y)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობის გამო (x_0, y_0) წერტილზე ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - Ah - Bk}{|h| + |k|} = 0, \quad (7.1.4)$$

სადაც $df(x_0, y_0) = Ah + Bk$ დიფერენციალის A და B კოეფიციენტები ტოლია $f(x, y)$ ფუნქციის კუთხური კერძო წარმოებულების (x_0, y_0) წერტილზე (იხ. [4, გვ. 218, 234]):

$$A = f'_x(x_0, y_0), \quad B = f'_y(x_0, y_0).$$

$f(x, y)$ ფუნქციის გლუვობა (x_0, y_0) წერტილზე გამომდინარეობს

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) + f(x_0 - h, y_0 - k) - 2f(x_0, y_0)}{|h| + |k|} \\ &= \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - Ah - Bk}{|h| + |k|} \\ & \quad + \frac{f(x_0 - h, y_0 - k) - f(x_0, y_0) - A(-h) - B(-k)}{|-h| + |-k|} \end{aligned}$$

ტოლობიდან, ვინაიდან მისი მარჯვენა მხარე ისწრაფვის ნულისკენ (7.1.4)-ის გამო, როცა $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

შებრუნებული მტკიცების მცდარობის დასადგენად განვიხილოთ $(0, 2\pi)$ ინტერვალზე უწყვეტი და გლუვი $a(x)$ და $b(y)$ ფუნქციები, რომელთაც $a'(x)$ და $b'(y)$ წარმოებულები გაანხნია მხოლოდ ნული ზომის სიმრავლეებზე (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.9). აქედან გამომდინარე, ორი ცვლადის $\varphi(x, y) = a(x) + b(y)$ უწყვეტი ფუნქცია გლუვია ღია $(0, 2\pi)^2$ კვადრატში და დიფერენცირებადია მხოლოდ ნულის ზომის სიმრავლეზე $(0, 2\pi)^2$ კვადრატისგან. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

კარგად ცნობილია, რომ თითქმის ყველგან დიფერენცირებადი ორი ცვლადის ფუნქციებს შორის გამორჩეული მნიშვნელობისაა, ორი ცვლადის ჯამებადი ფუნქციის შესაბამისი ყველგან უწყვეტი, ცვლადსაზღვრებიანი ორჯერადი ინტეგრალი, რომლისთვისაც თეორემა 7.1.3-დან მიიღება შემდეგი

თეორემა 7.1.4 ([64]). ვთქვათ, ორი ცვლადის $f(x, y)$ ფუნქცია ჯამებადია $[a, b] \times [c, d]$ მართკუთხედზე. მაშინ ორი ცვლადის

$$F(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(t, \tau) dt d\tau \quad (7.1.5)$$

ფუნქცია უწყვეტია აღებულ მართკუთხედში და გლუვია ამავე მართკუთხედის თითქმის ყველა შიგა $(x_0, y_0) \in [a, b] \times [c, d]$ წერტილზე.

დამტკიცება. $F(x, y)$ ფუნქციის უწყვეტობა აღებულ მართკუთხედში აშკარაა, ხოლო მის დიფერენცირებადობას თითქმის ყველა შიგა წერტილზე ადასტურებს ცნობილი თეორემა [4, გვ. 388]. $\square$

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 7.1.5 ([64]). ვთქვათ, (x_0, y_0) წერტილზე დიფერენცირებადია (7.1.5) ტოლობით განსაზღვრული $F(x, y)$ ფუნქცია. მაშინ ორი ცვლადის

$$\phi(x, y) = \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y f(t, \tau) dt d\tau$$

ფუნქცია გლუვია (x_0, y_0) წერტილზე.

დამტკიცება. მართებულია ტოლობა

$$\begin{aligned} & \phi(x_0 + h, y_0 + k) + \phi(x_0 - h, y_0 - k) - 2\phi(x_0, y_0) \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} \int_{y_0}^{y_0+k} f(t, \tau) dt d\tau + \int_{x_0}^{x_0-h} \int_{y_0}^{y_0-k} f(t, \tau) dt d\tau. \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

(7.1.6) ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ $|h| + |k|$ სიდიდებზე. მაშინ მარჯვენა მხარეში მივიღებთ ორი ინტეგრალის ჯამს, რომელთა კოეფიციენტებია

$$(|h| + |k|)^{-1} \text{ და } (|-h| + |-k|)^{-1}$$

და ეს ჯამი მიისწრაფვის ნულისკენ, როცა $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ (იხ. [4, გვ. 391]). მაშასადამე, $\phi(x, y)$ ფუნქცია გლუვია (x_0, y_0) წერტილზე. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

7.2 ორი ცვლადის გლუვი ფუნქციის დიფერენცირებადობა ექსტრემუმის წერტილზე

თეორემა 7.2.1 ([64]). თუ (x_0, y_0) წერტილზე გლუვ $f(x, y)$ ფუნქციას ამავე წერტილზე გააჩნია მაქსიმუმი ან მინიმუმი, მაშინ f ფუნქციას (x_0, y_0) წერტილზე გააჩნია ნულოვანი კუთხური კერძო წარუბეულები $f'_x(x_0, y_0) = 0$ და $f'_y(x_0, y_0) = 0$. მაშასადამე, f ფუნქცია დიფერენცირებადია (x_0, y_0) წერტილზე $df(x_0, y_0) = 0$ ნულოვანი დიფერენციალით.

დამტკიცება. ადგილი აქვს ტოლობას

$$\frac{f(x_0 + h, y_0 + k) + f(x_0 - h, y_0 - k) - 2f(x_0, y_0)}{|h| + |k|} = \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{|h| + |k|} + \frac{f(x_0 - h, y_0 - k) - f(x_0, y_0)}{|-h| + |-k|}. \quad (7.2.1)$$

ვინაიდან f ფუნქცია გლუვია (x_0, y_0) წერტილზე, ამიტომ (7.2.1) ტოლობის მარცხენა მხარე და, მაშასადამე, მისი მარჯვენა მხარეც მიისწრაფვის ნულისკენ, როცა $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. ამავე დროს, (7.2.1) ტოლობის მარჯვენა მხარის ორივე შესაკრებს გააჩნია ერთი და იგივე ნიშანი: ორივე არადადებითია მაქსიმუმის შემთხვევაში და არაუარყოფითია მინიმუმის შემთხვევაში. ამიტომ ადგილი აქვს შემდეგ ორ ტოლობას

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{|h| + |k|} &= 0, \\ \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 - h, y_0 - k) - f(x_0, y_0)}{|-h| + |-k|} &= 0. \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

(7.2.2) ტოლობიდან ვღებულობთ $f'_x(x_0, y_0) = 0$ ($k = 0$ შემთხვევაში) და $f'_y(x_0, y_0) = 0$ ($h = 0$ შემთხვევაში).

ახლა, (7.2.2) ტოლობა გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)}{|h| + |k|} + \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{|h| + |k|} &= 0, \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

რომლის მარჯვენა ზღვარი $f'_y(x_0, y_0) = 0$ -ის ტოლია, გამომდინარე კერძო $h = 0$ შემთხვევიდან. ამიტომ (7.2.3) ტოლობიდან ვღებულობთ ტოლობას

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)}{|h| + |k|} = 0. \quad (7.2.4)$$

კერძოდ, (7.2.4)-დან გამომდინარეებს ტოლობა

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ |k| \leq c|h|}} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)}{h} = 0, \quad (7.2.5)$$

სადაც $c > 0$ ნებისმიერი მუდმივია.

მართლაც,

$$|h| + |k| = |h| \left(1 + \frac{|k|}{|h|} \right) \text{ და } 1 + \frac{|k|}{|h|} \geq 1,$$

ამიტომ (7.2.4) ტოლობის ზღვარქვეშ არსებული შეფარდების ზღვარი, როცა $h \rightarrow 0$ და $|k| \leq c|h|$, შეიძლება განხორციელდეს მხოლოდ h -ის ნულისკენ მისწრაფებისას. (7.2.5) ტოლობა კი ნიშნავს, რომ $f'_x(x_0, y_0) = 0$.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $f'_y(x_0, y_0) = 0$. უკანასკნელი ორი ტოლობა ეკვივალენტურია $f(x, y)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობის (x_0, y_0) წერტილზე და $df(x_0, y_0) = 0$ ტოლობის (იხ. [4, გვ. 234]). თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

7.3 სიმეტრიულად დიფერენცირებადი ორი ცვლადის გლუვი ფუნქციის დიფერენცირებადობა

1. ვთქვათ, ორი ცვლადის $\varphi(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $(x_0, y_0) \in R^2$ წერტილის მიდამოში. სათაურში გამოტანილ საკითხთან დაკავშირებით შემოვიტანთ რამდენიმე განსაზღვრას.

გ ა ნ ს ა ზ დ ვ რ ა 7.3.1 ([4, გვ. 283]). $\varphi(x, y)$ ფუნქციის x ცვლადის მიმართ სიმეტრიული კერძო წარმოებული (x_0, y_0) წერტილზე, სიმბოლურად $\varphi_x^{(s)}(x_0, y_0)$, ეწოდება

$$\varphi_x^{(s)}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + h, y_0) - \varphi(x_0 - h, y_0)}{2h}$$

ზღვარს, როცა ეს ზღვარი სასრულია.

ასევე, φ ფუნქციის y ცვლადის მიმართ სიმეტრიული კერძო წარმომადგენელი (x_0, y_0) წერტილზე ეწოდება

$$\varphi_y^{(j)}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0, y_0 + k) - \varphi(x_0, y_0 - k)}{2k}$$

ზღვარს, როცა ეს ზღვარი არსებობს და სასრულია.

გ ა ნ ა ზ დ ვ რ ა 7.3.2 ([4, გვ. 283]). $\varphi(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება სიმეტრიულად დიფერენცირებადი (x_0, y_0) წერტილზე, როცა არსებობს ისეთი A და B რიცხვები, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varphi(x_0 + h, y_0 + k) - \varphi(x_0 - h, y_0 - k) - 2Ah - 2Bk}{|h| + |k|} = 0. \quad (7.3.1)$$

ასეთ შემთხვევაში $\varphi(x, y)$ ფუნქციის სიმეტრიული დიფერენციალი (x_0, y_0) წერტილზე ეწოდება $Ah + Bk$ გამოსახულებას და დაწერეთ

$$d^{sym} \varphi(x_0, y_0) = Ah + Bk. \quad (7.3.2)$$

ამასთან ერთად, A და B მუდმივებს ეწოდება (x_0, y_0) წერტილზე $\varphi(x, y)$ ფუნქციის სიმეტრიული დიფერენციალის კოეფიციენტები.

წ ი ნ ა დ ა ე ბ ა 7.3.3 ([4, გვ. 284]). თუ $\varphi(x, y)$ ფუნქცია სიმეტრიულად დიფერენცირებადია (x_0, y_0) წერტილზე, მაშინ $\varphi_x^{(j)}(x_0, y_0)$ და $\varphi_y^{(j)}(x_0, y_0)$ სასრულებია და ადგილი აქვს ტოლობას

$$d^{sym} \varphi(x_0, y_0) = \varphi_x^{(j)}(x_0, y_0) dx + \varphi_y^{(j)}(x_0, y_0) dy. \quad (7.3.3)$$

შებრუნებული მტკიცება მცდარია.

დ ა მ ტ ვ ი ც ე ბ ა . (7.3.1) ტოლობიდან გამომდინარე, $k = 0$ შემთხვევისთვის, ტოლობა შეიძლება შემდეგნაირად ჩაიწეროს

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{|h|} \cdot \frac{\varphi(x_0 + h, y_0) - \varphi(x_0 - h, y_0) - 2Ah}{2h} = 0.$$

საიდანაც გამომდინარეობს ტოლობა

$$\varphi_x^{(j)}(x_0, y_0) = A. \quad (7.3.4)$$

ანალოგიურად მიიღება

$$\varphi_y^{(j)}(x_0, y_0) = B. \quad (7.3.5)$$

ამრიგად, სიმეტრიული $d^{sym}\varphi(x_0, y_0)$ დიფერენციალის კოეფიციენტები წარმოადგენს $\varphi(x, y)$ ფუნქციის სიმეტრიულ კერძო წარმოებულებს სიმეტრიული დიფერენცირებადობის (x_0, y_0) წერტილზე.

ამრიგად, (7.3.2), (7.3.4) და (7.3.5) ტოლობების ძალით, მართებულია (7.3.3).

შებრუნებული მტკიცების მცდარობა ჩანს

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{x^2 + y^2}, & \text{როცა } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{როცა } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ფუნქციის მაგალითზე, რომლისთვისაც $u_x^{(i)}(0, 0) = 0 = u_y^{(i)}(0, 0)$ და

$$\frac{u(h, k) - u(-h, -k) - 2h \cdot 0 - 2k \cdot 0}{|h| + |k|} = \frac{2hk}{(h^2 + k^2)(|h| + |k|)} \rightarrow +\infty,$$

როცა $0 < k = h \rightarrow 0$.

□

2.

თეორემა 7.3.4 ([4, გვ. 285]). $\varphi(x, y)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობა (x_0, y_0) წერტილზე იწვევს φ ფუნქციის სიმეტრიულ დიფერენცირებადობას იმავე წერტილზე და

$$d^{sym}\varphi(x_0, y_0) = d\varphi(x_0, y_0)$$

ტოლობას. შებრუნებული მტკიცება მცდარია.

დამტკიცება. $\varphi(x, y)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობა (x_0, y_0) -ზე იწვევს სასრული $\varphi'_x(x_0, y_0)$ და $\varphi'_y(x_0, y_0)$ კერძო წარმოებულების არსებობას. ამიტომ სასრულია სიმეტრიული $\varphi_x^{(i)}(x_0, y_0)$ და $\varphi_y^{(i)}(x_0, y_0)$ კერძო წარმოებულებიც (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.9).

მაშასადამე, შეგვიძლია განვიხილოთ

$$\frac{\varphi(x_0 + h, y_0 + k) - \varphi(x_0 - h, y_0 - k) - 2h\varphi_x^{(i)}(x_0, y_0) - 2k\varphi_y^{(i)}(x_0, y_0)}{|h| + |k|} \quad (7.3.6)$$

სასრული სიდიდე, რომელიც წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\frac{\varphi(x_0 + h, y_0 + k) - \varphi(x_0, y_0) - h\varphi_x^{(i)}(x_0, y_0) - k\varphi_y^{(i)}(x_0, y_0)}{|h| + |k|} - \frac{\varphi(x_0 - h, y_0 - k) - \varphi(x_0, y_0) - (-h)\varphi_x^{(i)}(x_0, y_0) - (-k)\varphi_y^{(i)}(x_0, y_0)}{|-h| + |-k|}.$$

ფუნქციის (x_0, y_0) წერტილზე დიფერენცირებადობის გამო, თითოეული ეს შეფარდება ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. მაშასადამე, (7.3.6) შეფარდების ზღვარია ნული, როცა $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. ეს კი ნიშნავს ფუნქციის სიმეტრიულ დიფერენცირებადობას (x_0, y_0) წერტილზე.

შებრუნებული მტკიცების მცდარობა შევამოწმოთ $(0, 0)$ წერტილზე $\mu(x, y) = \sqrt{|x| \cdot |y|}$ არადიფერენცირებადი ფუნქციის მაგალითზე (იხ. [4, გვ. 227]), რომლისთვისაც

$$\mu'_x(0, 0) = \mu^{(i)}_x(0, 0) = 0 = \mu'_y(0, 0) = \mu^{(i)}_y(0, 0)$$

და $\mu(h, k) - \mu(-h, -k) = 0$. ამიტომ $\mu(x, y)$ ფუნქცია სიმეტრიულად დიფერენცირებადია $(0, 0)$ წერტილზე და $d^{sym} \mu(0, 0) = 0$. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

3. როგორც ვნახეთ, თეორემა 7.3.4-ის შებრუნებული მტკიცება მცდარია. ახლა ვნახავთ, რომ თეორემა 7.3.4-ის შებრუნებული მტკიცება მართებულია, როცა აღებული ფუნქცია გლუვია. ამასთან დაკავშირებით, მართებულია შემდეგი

თეორემა 7.3.5 ([64]). (x_0, y_0) წერტილზე სიმეტრიულად დიფერენცირებადი $\varphi(x, y)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობისთვის იმავე (x_0, y_0) წერტილზე, აუცილებელი და საკმარისია $\varphi(x, y)$ ფუნქციის გლუვობა (x_0, y_0) წერტილზე.

დამტკიცება. დასამტკიცებელი გამოთქმა გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობიდან

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi(x_0 + h, y_0 + k) + \varphi(x_0 - h, y_0 - k) - 2\varphi(x_0, y_0)}{|h| + |k|} \\ & + \frac{\varphi(x_0 + h, y_0 + k) - \varphi(x_0 - h, y_0 - k) - 2Ah - 2Bk}{|h| + |k|} \\ & = 2 \frac{\varphi(x_0 + h, y_0 + k) - \varphi(x_0, y_0) - Ah - Bk}{|h| + |k|}. \end{aligned} \quad (7.3.7)$$

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შედეგი 7.3.6 ([64]). პარაგრაფ 7.1-ის თეორემა 7.1.3-ში ნახსენები თითქმის ყველგან არადიფერენცირებადი გლუვი $\varphi(x, y) = a(x) + b(y)$ ფუნქცია, სიმეტრიულადაც არადიფერენცირებადია თითქმის ყველგან.

7.4 ორი ცვლადის ცალმხრივ დიფერენცირებადი გლუვი ფუნქციის დიფერენცირებადობა

$0 = (0, 0)$ წერტილის მიდამო და უცენტრო მიდამო აღვნიშნოთ $U(0)$ და $U^0(0) = U(0) \setminus \{0\}$ სიმბოლოებით და შემოვიღოთ სიმრავლეები:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1^+ &= \{(h, k) \in U(0) : h > 0\}, & \mathcal{A}_2^+ &= \{(0, k) \in U(0) : k > 0\}, \\ \mathcal{A}_1^- &= \{(h, k) \in U(0) : h < 0\}, & \mathcal{A}_2^- &= \{(0, k) \in U(0) : k < 0\}, \\ \mathcal{A}_{12}^+ &= \mathcal{A}_1^+ \cup \mathcal{A}_2^+, & \mathcal{A}_{12}^- &= \mathcal{A}_1^- \cup \mathcal{A}_2^-. \end{aligned}$$

ცხადია, რომ

$$\mathcal{A}_{12}^+ \cap \mathcal{A}_{12}^- = \emptyset \text{ და } \mathcal{A}_{12}^+ \cup \mathcal{A}_{12}^- = U^0(0).$$

ახლა შემოვიღებთ მარჯვნიდან (მარცხნიდან) დიფერენცირებადობის ცნებას და დავამტკიცებთ, რომ იგი გლუვობასთან ერთად უზრუნველყოფს დიფერენცირებადობას.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 7.4.1 ([4, გვ. 328]). $f(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება მარჯვნიდან დიფერენცირებადი (x_0, y_0) წერტილზე, თუ რაიმე A^+ და B^+ რიცხვებისთვის სრულდება

$$\lim_{\substack{(h,k) \rightarrow (0,0) \\ (h,k) \in \mathcal{A}_{12}^+}} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - A^+h - B^+k}{|h| + |k|} = 0 \quad (7.4.1)$$

ტოლობა, ხოლო f -ის მარჯვენა დიფერენციალი (x_0, y_0) წერტილზე, სიმბოლურად $d^+f(x_0, y_0)$, ვუწოდოთ $A^+h + B^+k$ წრფივ ფუნქციას, როცა $(h, k) \in \mathcal{A}_{12}^+$ და დავწეროთ

$$d^+f(x_0, y_0) = A^+h + B^+k.$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 7.4.2. f ფუნქციას ეწოდება მარცხნიდან დიფერენცირებადი (x_0, y_0) წერტილზე, თუ რაიმე A^- და B^- რიცხვებისთვის მართებულია

$$\lim_{\substack{(h,k) \rightarrow (0,0) \\ (h,k) \in \mathcal{A}_{12}^-}} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - A^-h - B^-k}{|h| + |k|} = 0$$

ტოლობა, ხოლო f -ის მარცხენა დიფერენციალი (x_0, y_0) წერტილზე, სიმბოლურად $d^-f(x_0, y_0)$, ვუწოდოთ $A^-h + B^-k$ წრფივ ფუნქციას, როცა $(h, k) \in \mathcal{A}_{12}^-$ და დავწეროთ

$$d^-f(x_0, y_0) = A^-h + B^-k.$$

ცხადია, შემდეგი

წინადადება 7.4.3.

- (1) (x_0, y_0) წერტილზე დიფერენცირებადი f ფუნქცია ორივე მხრიდან დიფერენცირებადია იმავე წერტილზე და ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$A^+ = A^- = f'_x(x_0, y_0), \quad B^+ = B^- = f'_y(x_0, y_0), \\ d^+ f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) = d^- f(x_0, y_0);$$

- (2) თუ f ფუნქცია ორივე მხრიდან დიფერენცირებადია (x_0, y_0) წერტილზე და ადგილი აქვს

$$A^+ = A^- \text{ და } B^+ = B^-$$

ტოლობებს, მაშინ f ფუნქცია დიფერენცირებადია (x_0, y_0) წერტილზე.

თეორემა 7.4.4 ([64], [4, გვ. 329]). (x_0, y_0) წერტილზე გლუვი $f(x, y)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობისთვის იმავე წერტილზე, აუცილებელია და საკმარისი ერთ-ერთი მხრიდან f -ის დიფერენცირებადობა (x_0, y_0) -ზე.

დამტკიცება. ნებისმიერი A და B რიცხვებისთვის მართებულია ტოლობა

$$\frac{f(x_0 + h, y_0 + k) + f(x_0 - h, y_0 - k) - 2f(x_0, y_0)}{|h| + |k|} \\ = \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - Ah - Bk}{|h| + |k|} \\ + \frac{f(x_0 - h, y_0 - k) - f(x_0, y_0) - A(-h) - B(-k)}{|-h| + |-k|}. \quad (7.4.2)$$

f ფუნქციის გლუვობის გამო (x_0, y_0) წერტილზე, (7.4.2) ტოლობის მარცხენა მხარე ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $(h, k) \rightarrow (0, 0)$, კერძოდ, $(h, k) \in A_{12}^+$ პირობის შესრულებისას. შემდეგ, f ფუნქციის მარჯვნიდან დიფერენცირებადობისას (x_0, y_0) წერტილზე, (7.4.2) ტოლობის მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ ისე, რომ $(h, k) \in A_{12}^+$. ამიტომ (7.4.2) ტოლობის მარჯვენა მხარის მეორე შესაკრებიც ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ იგივე $(h, k) \in A_{12}^+$ პირობის შესრულებისას. ეს უკანასკნელი კი ნიშნავს f ფუნქციის მარცხნიდან დიფერენცირებადობას (x_0, y_0) წერტილზე, რადგან $(-h, -k) \in A_{12}^-$.

ამრიგად,

$$d^+ f(x_0, y_0) = Ah + Bk \text{ და } d^- f(x_0, y_0) = Ah + Bk.$$

აქედან კი გამომდინარეობს, წინადადება 7.4.3-დან მტკიცება (2)-ის ძალით, f ფუნქციის დიფერენცირებადობა (x_0, y_0) წერტილზე, ანუ ადგილი აქვს ტოლობებს

$$d^+ f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) dx + f'_y(x_0, y_0) dy,$$

$$d^- f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) dx + f'_y(x_0, y_0) dy.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

7.5 ორი ცვლადის ფუნქციის სიმეტრიული დიფერენციალის წარმოდგენა ცალმხრივი დიფერენციალებით

თ ე ო რ ე მ ა 7.5.1. თუ ორი ცვლადის $f(x, y)$ ფუნქციას (x_0, y_0) წერტილზე გააჩნია $d^+ f(x_0, y_0)$ და $d^- f(x_0, y_0)$ ცალმხრივი დიფერენციალები, მაშინ (x_0, y_0) წერტილზე არსებობს f ფუნქციის სიმეტრიული დიფერენციალი $d^{sym} f(x_0, y_0)$ და ადგილი აქვს ტოლობას

$$d^{sym} f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} [d^- f(x_0, y_0) + d^+ f(x_0, y_0)]$$

დ ა მ ტ ვ ი ც ე ბ ა . $f(x, y)$ ფუნქციის მარჯვნიდან დიფერენცირებადობა ნიშნავს პარაგრაფ 7.4-ის (7.4.1) ტოლობის შესრულებას, $(h, k) \in A_{12}^+$ რადგან $(-h, -k)$ წერტილი ეკუთვნის A_{12}^- სიმრავლეს და f ფუნქცია მარცხნიდან დიფერენცირებადია (x_0, y_0) წერტილზე, ამიტომ შესრულებულია ტოლობაც

$$\lim_{\substack{(h,k) \rightarrow (0,0) \\ (-h,-k) \in A_{12}^-}} \frac{f(x_0 - h, y_0 - k) - f(x_0, y_0) - A^-(-h) - B^-(-k)}{|-h| + |-k|} = 0. \quad (7.5.1)$$

გარდა ამისა, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - A^+h - B^+k}{|h| + |k|} \\ & - \frac{f(x_0 - h, y_0 - k) - f(x_0, y_0) - A^-(-h) - B^-(-k)}{|-h| + |-k|} \end{aligned}$$

$$= \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 - h, y_0 - k) - 2 \frac{A^+ + A^-}{2} h - 2 \frac{B^+ + B^-}{2} k}{|h| + |k|}. \quad (7.5.2)$$

ამ ტოლობის მარცხენა მხარე მიისწრაფვის ნულისკენ, (7.5.1)-ისა და პარაგრაფ 7.4-ის (7.4.1) ტოლობის ძალით, როცა $(h, k) \in \mathcal{A}_{12}^+$ და $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. ამიტომ ნულისკენ მიისწრაფვის (7.5.2) ტოლობის მარჯვენა მხარე, როცა $(h, k) \in \mathcal{A}_{12}^+$ და $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

ასევე დადგინდება (7.5.2) ტოლობის მარჯვენა მხარის ნულისკენ სწრაფვა, როცა $(h, k) \in \mathcal{A}_{12}^-$ და $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

ამ ფაქტებიდან გამომდინარეობს $d^{sym} f(x_0, y_0)$ -ის არსებობა და

$$\begin{aligned} d^{sym} f(x_0, y_0) &= \frac{1}{2} (A^+ + A^-) dx + \frac{1}{2} (B^+ + B^-) dy \\ &= \frac{1}{2} (A^+ dx + B^+ dy) + \frac{1}{2} (A^- dx + B^- dy) \\ &= \frac{1}{2} d^+ f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} d^- f(x_0, y_0) \\ &= \frac{1}{2} [d^+ f(x_0, y_0) + d^- f(x_0, y_0)] \end{aligned}$$

ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია. □

7.6 ორი ცვლადის ფუნქციის გლუვობა და თითოეული ცვლადით კუთხური გლუვობა

ჩვენ გვქონდა ორი ცვლადის ფუნქციის გლუვობისა და თითოეული ცვლადით მისი გლუვობის (კერძო გლუვობის) ცნებები (იხ. 7.1). იქვე ითქვა, რომ ორი ცვლადის ფუნქციის გლუვობიდან რაიმე წერტილზე გამომდინარეობს თითოეული ცვლადით მისი გლუვობა იმავე წერტილზე.

ბუნებრივია, განვიხილოთ იქნას ამოცანა: ორი ცვლადის ფუნქციის გლუვობას რაიმე წერტილზე, მისი რა თვისებები უზრუნველყოფს თითოეული ცვლადის მიმართ იმავე წერტილზე? ამ თვალსაზრისით ორიენტირად გამოგვადგება მრავალი ცვლადის, კერძოდ, ორი ცვლადის, ფუნქციის დიფერენცირებადობის კავშირი სხვადასხვა აზრით მისი კერძო წარმოებულების არსებობასთან.

ამოცანისადმი ასეთი მიდგომით, უპირველესად, განვიხილოთ (შემოვიტანოთ) კუთხურად გლუვობის ცნება.

განსაზღვრა 7.6.1 ([64]). $f(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება x ცვლადის მიმართ კუთხურად გლუვი (x_0, y_0) წერტილზე, როცა

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ |k| \leq c|h|}} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 - h, y_0 - k) - 2f(x_0, y_0)}{h} = 0 \quad (7.6.1)$$

ტოლობა შესრულებულია ყოველ $c > 0$ მუდმივისთვის.

განსაზღვრა 7.6.2 ([64]). $f(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება y ცვლადის მიმართ კუთხურად გლუვი (x_0, y_0) წერტილზე, როცა

$$\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ |h| \geq l|k|}} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 - h, y_0 - k) - 2f(x_0, y_0)}{k} = 0 \quad (7.6.2)$$

ტოლობა სრულდება ყოველი $l > 0$ მუდმივისთვის.

თუ $f(x, y)$ ფუნქცია (x_0, y_0) წერტილზე ერთდროულად აკმაყოფილებს (7.6.1) და (7.6.2) ტოლობებს, მაშინ f ფუნქციას ეწოდება კუთხურად გლუვი (x_0, y_0) წერტილზე თითოეული ცვლადით.

ვიცით, რომ ორი ცვლადის $f(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია რაიმე (x_0, y_0) წერტილზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(x, y)$ -ს (x_0, y_0) წერტილზე გააჩნია სასრული კუთხური კერძო წარმოებულები [4, გვ. 234].

გლუვობასთან მიმართებაში ანალოგიურ მოვლენას არ აქვს ადგილი, საზოგადოდ. თითოეული ცვლადით (x_0, y_0) წერტილზე კუთხურად გლუვი ფუნქცია რომ იყოს გლუვი იმავე (x_0, y_0) წერტილზე, საჭიროა f -ს (x_0, y_0) წერტილზე გააჩნდეს ნულოვანი სიმეტრიული ძლიერი კერძო წარმოებულები (იხ. [4, გვ. 287], [64]).

ახლა გადავდივართ იმის გარკვევაზე, თითოეული ცვლადის მიმართ რა აზრით გლუვობა არის გლუვობის ეკვივალენტური? აქვე ვიტყვით, რომ თითოეული ცვლადით $f(x, y)$ -ის კუთხურად გლუვობაში მონაწილე $f(x_0, y_0)$ მუდმივი შეიცვლება f -ით გამოსახული გარკვეული ფუნქციებით (იხ. მომდევნო პარაგრაფში (7.7.1) და (7.2.2) ტოლობები).

7.7 ორი ცვლადის ფუნქციის გლუვობა და თითოეული ცვლადით კუთხურად განზოგადებული გლუვობა

განსაზღვრა 7.7.1 ([68]). (x_0, y_0) წერტილის მიდამოში განსაზღვრულ $f(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება x ცვლადის მიმართ კუთხურად განზოგადებულად გლუვი (x_0, y_0) წერტილზე

ავიღოთ ნებისმიერი c დადებითი რიცხვი. რადგან $f(x, y)$ ფუნქცია გლუვია (x_0, y_0) წერტილზე, ამიტომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისთვის არსებობს ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ $0 < |h| < \delta$ და $0 < |k| < \delta$ პირობებში ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f(x_0 + h, y_0 + k) + f(x_0 - h, y_0 - k) - 2f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2(1+c)} (|h| + |k|),$$

კერძოდ,

$$|f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0 - k) - 2f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2(1+c)} |k|.$$

უკანასკნელი ორი უტოლობის გათვალისწინებით, (7.8.1) ტოლობიდან გამომდინარეობს უტოლობა

$$\begin{aligned} & |f(x_0 + h, y_0 + k) + f(x_0 - h, y_0 - k) - [f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0 - k)]| \\ & < \frac{\varepsilon}{1+c} (|h| + |k|), \quad 0 < |h| < \delta, \quad 0 < |k| < \delta. \end{aligned} \quad (7.8.2)$$

როცა ადგილი აქვს $|k| \leq c|h|$ უტოლობას, მაშინ (7.8.2)-დან გამომდინარეობს უტოლობა

$$\left| \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) + f(x_0 - h, y_0 - k) - [f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0 - k)]}{h} \right| < \varepsilon,$$

როცა $0 < |h| < \delta$, $0 < |k| < \delta$ და $|k| \leq c|h|$. ეს ნიშნავს პარაგრაფ 7.7-ის (7.7.1) ტოლობის შესრულებას. მაშასადამე, ადგილი აქვს $f(x, y)$ ფუნქციის x ცვლადის მიმართ კუთხურად განზოგადებულ გლუვობას (x_0, y_0) წერტილზე.

ანალოგიურად დამტკიცდება $f(x, y)$ ფუნქციის y ცვლადის მიმართ კუთხურად განზოგადებული გლუვობა (x_0, y_0) წერტილზე.

ს ა კ მ ა რ ი ს ო ბ ა . პარაგრაფ 7.7-ის (7.7.1) და (7.7.2) ტოლობების ერთდროული შესრულება, $c = 1 = l$ კერძო შემთხვევისთვის, იწვევს ტოლობებს

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ |k| \leq |h|}} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) + f(x_0 - h, y_0 - k) - [f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0 - k)]}{h} = 0, \quad (7.8.3)$$

$$\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ |h| \leq |k|}} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) + f(x_0 - h, y_0 - k) - [f(x_0 + h, y_0) + f(x_0 - h, y_0)]}{k} = 0. \quad (7.8.4)$$

ახლა (x_0, y_0) წერტილის δ -მიდამო წარმოვადგინოთ

$$E_1 = \left\{ (x_0 + h, y_0 + k) : |h| < \delta, |k| < \delta, |k| \leq |h| \right\}$$

და

$$E_2 = \{(x_0 + h, y_0 + k) : |h| < \delta, |k| < \delta, |k| \geq |h|\}$$

სიმრავლეების გაერთიანების სახით.

გვაქვს ტოლობა

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h, y_0 + k) + f(x_0 - h, y_0 - k) - 2f(x_0, y_0) \\ &= f(x_0 + h, y_0 + k) + f(x_0 - h, y_0 - k) - [f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0 - k)] \\ & \quad + [f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0 - k) - 2f(x_0, y_0)] \equiv A + B. \end{aligned} \quad (7.8.5)$$

გარკვეულობისთვის ვიგულისხმობთ, რომ ცვლადი წერტილი მიისწრაფვის (x_0, y_0) წერტილისკენ E_1 სიმრავლის გასწვრივ, მაშინ (7.8.3) ტოლობიდან მივიღებთ $|A| < \varepsilon|h|$, როცა $0 < |h| < \delta(\varepsilon)$. (7.8.4) ტოლობიდან $h = 0$ კერძო შემთხვევისთვის გვექნება $|B| < \varepsilon|k|$, როცა $0 < |k| < \delta(\varepsilon)$. ამიტომ (7.8.5) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$|f(x_0 + h, y_0 + k) + f(x_0 - h, y_0 - k) - 2f(x_0, y_0)| < \varepsilon(|h| + |k|), \quad (7.8.6)$$

როცა $|h| < \delta$, $|k| < \delta$ და $|k| \leq |h|$.

ანალოგიურად დამტკიცდება (7.8.6) უტოლობა E_2 სიმრავლისთვის. მაშასადამე, $F(x, y)$ ფუნქცია გლუვია (x_0, y_0) წერტილზე (იხ. პარაგრაფი 7.1, ტოლობა (7.1.1)). თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

7.9 ორი ცვლადის ჯამებად ფუნქციასთან ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი მწკრივების კრებადობის საკმარისი პირობები

1. ჩვენ გვქონდა თითოეული ცვლადის მიმართ 2π პერიოდული და $[0, 2\pi]^2$ კვადრატზე ჯამებად ორი ცვლადის $f(x, y)$ ფუნქციასთან x ცვლადის მიმართ ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი მწკრივის (იხ. თავი 6, პარაგრაფი 6.2, ტოლობა (6.2.3))

$$S[f]_1(x, \mathcal{Y}) = \frac{1}{2} a_0(\mathcal{Y}) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(\mathcal{Y}) \cos nx + b_n(\mathcal{Y}) \sin nx], \quad (7.9.1)$$

$x \in [0, 2\pi]$, $\mathcal{Y} \in E^2 \subset [0, 2\pi]$, $|E^2| = 2\pi$, $f(x, \mathcal{Y})$ მნიშვნელობისკენ კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა (იხ. თავი 6, პარაგრაფი 6.5, ტოლობა (6.5.2))

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{f(x+t, \mathcal{Y}) + f(x-t, \mathcal{Y}) - 2f(x, \mathcal{Y})}{t} \sin mt \, dt = 0$$

და ამავე $f(x, y)$ ფუნქციასთან y ცვლადის მიმართ ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი მწკრივის (იხ. თავი 6, პარაგრაფი 6.2, ტოლობა (6.2.5))

$$S[f]_2(\mathcal{X}, y) = \frac{1}{2} c_0(\mathcal{X}) + \sum_{m=1}^{\infty} [c_m(\mathcal{X}) \cos my + d_m(\mathcal{X}) \sin my] \quad (7.9.2)$$

$\mathcal{X} \in E^1 \subset [0, 2\pi]$, $|E^1| = 2\pi$, $y \in [0, 2\pi]$, $f(\mathcal{X}, y)$ მნიშვნელობისკენ კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა (იხ. თავი 6, პარაგრაფი 6.5, ტოლობა (6.5.3))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\eta \frac{f(\mathcal{X}, y+\tau) + f(\mathcal{X}, y-\tau) - 2f(\mathcal{X}, y)}{\tau} \sin n\tau \, d\tau = 0.$$

2. გავეცანით რა ორი ცვლადის ფუნქციის გლუვობის ცნებას და ამ ცნებიდან გამომდინარე იმავე ფუნქციის თითოეული ცვლადის მიმართ გლუვობის ცნებებს (იხ. თავი 7, პარაგრაფი 7.1), შეგვიძლია ჩამოვყალიბოთ **რიმანის თეორემის** (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.10) ანალოგები ორი ცვლადის ფუნქციებისთვის, სადაც გათვალისწინებული იქნება სასრული წარმოებულის არსებობიდან გამომდინარე გლუვობის თვისება (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.9).

თეორემა 7.9.1 ([66]). თითოეული ცვლადის მიმართ 2π პერიოდულ და $[0, 2\pi]^2$ კვადრატზე ჯამებად $f(x, y)$ ფუნქციას რაიმე $(x_0, \mathcal{Y}) \in [0, 2\pi]^2$ წერტილზე თუ გააჩნია x ცვლადის მიმართ გლუვობის თვისება, კერძოდ, თუ გააჩნია სასრული $f'_x(x_0, \mathcal{Y})$ კერძო წარმოებული, მაშინ x ცვლადის მიმართ $f(x, y)$ ფუნქციასთან ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი (7.9.1) მწკრივი $S[f]_1(x, \mathcal{Y})$ კრებადია $(x_0, \mathcal{Y})$ წერტილზე $f(x_0, \mathcal{Y})$ მნიშვნელობისკენ.

თეორემა 7.9.2 ([66]). თითოეული ცვლადის მიმართ 2π პერიოდულ და $[0, 2\pi]^2$ კვადრატზე ჯამებად $f(x, y)$ ფუნქციას რაიმე $(\mathcal{X}, y_0) \in [0, 2\pi]^2$ წერტილზე თუ გააჩნია y ცვლადის მიმართ გლუვობის თვისება, კერძოდ, თუ გააჩნია სასრული $f'_y(\mathcal{X}, y_0)$ კერძო წარმო-

ეხული, მაშინ y ცვლადის მიმართ $f(x, y)$ ფუნქციასთან ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი (7.9.2) მწკრივი $S[f]_2(\mathcal{X}, y)$ კრებადია $(\mathcal{X}, y_0)$ წერტილზე $f(\mathcal{X}, y_0)$ მნიშვნელობისკენ.

დაბოლოს, აღვნიშნოთ შემდეგი

თეორემა 7.9.3 ([66]). თითოეული ცვლადის მიმართ 2π პერიოდულ და $[0, 2\pi]^2$ კვადრატზე უწყვეტ $f(x, y)$ ფუნქციას რაიმე $(x_0, y_0) \in [0, 2\pi]^2$ წერტილზე თუ გააჩნია გლუვობის თვისება, კერძოდ, თუ დიფერენცირებადია (x_0, y_0) წერტილზე, მაშინ გვექნება $S[f]_1(x, y)$ და $S[f]_2(x, y)$, $(x, y) \in [0, 2\pi]^2$, მწკრივები, რომლებიც კრებადებია (x_0, y_0) წერტილზე ერთი და იგივე $f(x_0, y_0)$ მნიშვნელობისკენ.

დამტკიცება. რადგან $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია ყველგან, ამიტომ $\mathcal{X}$ -ად გამოდგება ნებისმიერი $y \in [0, 2\pi]$ და $\mathcal{X}$ -ად — ნებისმიერი $x \in [0, 2\pi]$, ე.ი. გვექნება $S[f]_1(x, y)$ და $S[f]_2(x, y)$ მწკრივები, რომელთა კრებადობა (x_0, y_0) წერტილზე $f(x_0, y_0)$ მნიშვნელობისკენ გამომდინარეობს 7.9.1 და 7.9.2 თეორემებიდან. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ნაწილი IV

რამდენიმე შედეგი ორმაგი მწკრივების
შესახებ

შესავალი IV ნაწილისათვის

გამომდინარე თავისი სპეციფიკური აგებულებიდან, არსებობს ორმაგი მიმდევრობის და, შესაბამისად, ორმაგი მწკრივის კრებადობის სხვადასხვა ცნება. ორმაგი მწკრივისთვის არსებობს კრებადობა: მართკუთხედების მიხედვით² (პრინგსპაიმის აზრით), კვადრატების მიხედვით, წრიული და სამკუთხოვანი. მხედველობაში გვექნება მართკუთხედებისა და კვადრატების მიხედვით კრებადობა.

წინამდებარე ნაწილში საუბარია ორმაგ ტრიგონომეტრიულ, კერძოდ, ფურიეს ორმაგ მწკრივებზე. ამ მიმართულებით ფორმულირებულია სხვადასხვა მონოგრაფიიდან და საჟურნალო ლიტერატურიდან ცნობილი შედეგები, რომლებიც შეესაბამება ერთჯერადი მწკრივებისთვის ცნობილ ძირითად შედეგებს: კანტორ-ლუბევის თეორემას, დანჟუა-ლუზინის თეორემას, ბესელის იგივეობას და უტოლობას, პარსევალის ტოლობას და რისი-ფიშერის თეორემას.

განზოგადებულია რიმან-ლუბევის თეორემა ფურიეს ორმაგი კოეფიციენტებისთვის ვიწრო აზრით კრებადობის სახით.

პარაგრაფ 8.9-ში დადგენილია ერთზე მეტ ხარისხში ჯამებადი ორი ცვლადის ფუნქციის ფურიეს განმეორებითი ორივე მწკრივის თითქმის ყველგან კრებადობა (იხ. თეორემა 8.9.1). კერძოდ, ამ თეორემას ადგილი აქვს ჩ. ფეფერმანის უწყვეტი ფუნქციისთვის (იხ. თეორემა 8.9.2), რომლის ფურიეს ორმაგ მწკრივს არ გააჩნია, მართკუთხედების მიხედვით, კრებადობის ერთი წერტილიც კი. მისი თვისებების ნაკრები მოცემულია 8.12 პარაგრაფის შედეგი 8.12.5-ის სახით.

მოცემულია (პარაგრაფი 8.10) ფურიეს ორმაგი მწკრივის მართკუთხოვანი კერძო ჯამების ინტეგრალური წარმოდგენა და ფურიეს ორმაგი მწკრივის მართკუთხედების მიხედვით კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა (პარაგრაფი 8.11) და, აგრეთვე, საკმარისი პირობები (პარაგრაფი 8.13).

²არის შემთხვევა, როცა ორმაგ მწკრივს ჰქვია პრინგსპაიმის აზრით კრებადი თუ ის კრებადი და. ამავე დროს, მისი მართკუთხოვანი კერძო ჯამების ორმაგი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია (იხ. [58, გვ. 403-404]). ჩვენ, ყოველთვის ერთი და იგივედ მივიჩნევთ მართკუთხედების მიხედვით კრებადობას და პრინგსპაიმის აზრით კრებადობას.

განხილულია კვადრატით ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს ორმაგი მწკრივის თითქმის ყველგან კრებადობის საკითხი კვადრატების მიხედვით. ამ საკითხში ძირითადი თეორემა ეკუთვნის ნიკოლოზ (კიტა) თევზაძეს (1970 წ.): კვადრატით ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს ორმაგი მწკრივი კრებადია თითქმის ყველა წერტილზე კვადრატების მიხედვით და მისი ჯამი არის ფუნქციის მნიშვნელობა აღებულ წერტილზე.

პარაგრაფ 8.14-ში საუბარია იმის შესახებ, თუ როგორი მნიშვნელოვანი როლი შეასრულა ბ. რიმანის იდეამ — მოუხდინა შემოსაზღვრულკოეფიციენტებიანი ტრიგონომეტრიული მწკრივის ორჯერ წევრობრივი ინტეგრება და განეხილა ამგვარად მიღებული უწყვეტი ფუნქციის, რომელსაც ეწოდება რიმანის ფუნქცია თავიდან აღებული მწკრივისთვის, რიმან-შვარცის მიხედვით გაწარმოება.

რიმანის ეს იდეა წარმატებით გამოიყენა ა. ლებეგმა და დაადგინა, რომ ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს მწკრივის წევრობრივი ინტეგრება მართლზომიერია, თუნდაც აღებული მწკრივი განშლადი იყოს ყველა წერტილზე. ფურიეს მწკრივის წევრობრივი ინტეგრებით მიღებული მწკრივის ჯამი გლუვი ფუნქციაა თითქმის ყველგან (იხ. თავი 5, პარაგრაფი 5.25, თეორემა 5.25.1).

ლებეგის ამ თეორემამ გააჩინა იმის საშუალება, რომ დადგენილიყო ნებისმიერი ჯამებადი $f(x)$ ფუნქციის $S[f]$ ფურიეს მწკრივის თითქმის ყველა წერტილზე რიმანის R^2 მეთოდით შეჯამებადობა f ფუნქციის მნიშვნელობისკენ იმავე წერტილზე (იხ. თავი 5, პარაგრაფი 5.26, თეორემა 5.26.1).

უკანასკნელი თეორემის ანალოგი ფურიეს ორმაგი მწკრივებისთვის დღემდე ცნობილი არ არის [58]. ეს გამთქვეფელია ორი ცვლადის ფუნქციისთვის რიმან-შვარცის მეორე წარმოებულის რაიმე გამოყენებადი განზოგადების უქონლობით. ამავე დროს, დადგენილია ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს განმეორებითი მწკრივების R^2 შეჯამებადობა თითქმის ყველგან (იხ. პარაგრაფი 8.16).

შენიშნოთ, რომ ფურიეს ორმაგი მწკრივის წევრობრივი ინტეგრების მართლზომიერების დადგენას გააჩნია გარკვეული დატვირთვა. საქმე ისაა, რომ ამგვარი თეორემა საშუალებას იძლევა აღვადგინოთ ფუნქცია მისი ფურიეს კოეფიციენტების ანუ, რაც იგივეა, მისი ფურიეს მწკრივის მიხედვით. ამისთვის საკმარისია მოვახდინოთ ფურიეს მწკრივის საჭირო რიცხვჯერ ინტეგრება და ამგვარად მიღებული ჯამი გავაწარმოოთ სათანადო წესით იმავე რიცხვჯერ, როცა გაწარმოების ასეთი წესი არსებობს.

ამგვარად, გარკვეულ ინტერესს იწვევს [65] და [67] ნაშრომები, სადაც დადგენილია ფურიეს ორმაგი მწკრივის წევრობრივი ინტეგრების მართლზომიერება. იქვე დადგენილია

ორმაგი

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{b_{mn}}{mn}$$

მწკრივის კრებადობა და გამოთვლილია მისი ჯამი. დადგენილია, აგრეთვე,

$$\sum_{|m| \geq 1, |n| \geq 1} \frac{c_{mn}}{mn} = - \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{b_{mn}}{mn}$$

ტოლობა, სადაც c_{mn} წარმოადგენს ფურიეს ორმაგი მწკრივის ექსპონენტურ კოეფიციენტს. ეს შედეგები შეესაბამება ფურიეს ერთჯერადი მწკრივებისთვის ცნობილ შედეგებს: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$

მწკრივი კრებადია და

$$\sum_{|n| \geq 1} \frac{c_n}{n} = -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}.$$

აქვე აღნიშნულია (პარაგრაფი 8.15), რომ ლოკალიზების რიმანის პრინციპს ადგილი არ აქვს ფურიეს ორმაგი მწკრივის მართკუთხედების მიხედვით კრებადობისას.

თავი 8

რიცხვითი და ფურიეს ორმაგი მწკრივების შესახებ

8.1 რიცხვითი ორმაგი მიმდევრობისა და ორმაგი მწკრივის კრებადობის ცნებები

1. რიცხვით $(s_{mn})_{m,n \geq 0}$ ორმაგ მიმდევრობას ო. კოშიმ უწოდა s რიცხვისკენ კრებადი, როცა ნებისმიერად მცირე დადებითი ε რიცხვისთვის არსებობს ნატურალური N რიცხვი ისეთი, რომ ყოველი $m > N$ და $n > N$ რიცხვებისთვის სრულდება

$$|s_{mn} - s| < \varepsilon$$

უტოლობა და ამ ფაქტს წერენ შემდეგი სახით (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.4, განსაზღვრა 1.4.1)

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} s_{mn} = s.$$

ორმაგი მიმდევრობის კრებადობის ეს ცნება ო. კოშიმ შემოიღო 1821 წლის ნაშრომში “Analysis Algébrique”. ო. შტოლციმ კი, ჩამოაყალიბა ორმაგი $(s_{mn})_{m,n \geq 0}$ მიმდევრობის კოშის აბრით კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი შემდეგი პირობა (1884 წ.)

$$|s_{m+p,n+q} - s| < \varepsilon, \text{ როცა } m > N, \quad n > N, \quad p, q = 0, 1, 2, \dots,$$

რომელიც დაუმტკიცებია ა. პრინგსპაიმს (იხ. [48, გვ. 42]) 1897 წელს (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.5, სქოლიო). ალბათ, ამის გამო დამკვიდრდა სათანადო ლიტერატურაში გამოთქმა “პრინგსპაიმის აბრით კრებადი ორმაგი მიმდევრობა”, თუმცა მართლზომიერი იქნებოდა “კოში-პრინგსპაიმის აბრით კრებადი ორმაგი მიმდევრობა”.

$(s_{mn})_{m,n \geq 0}$ ორმაგ მიმდევრობას ეწოდება შემოსაზღვრული, როცა არსებობს დადებითი M რიცხვი ისეთი, რომ ყოველი $m \geq 0$ და $n \geq 0$ რიცხვებისთვის შესრულებულია უტოლობა

$$|s_{mn}| < M.$$

შევნიშნოთ, რომ პრინგსპაიმის აზრით კრებადი ორმაგი მიმდევრობა, განსხვავებით კრებადი ერთმაგი მიმდევრობისგან, შეიძლება არ იყოს შემოსაზღვრული. მაგალითად,

$$s_{mn} = \begin{cases} n, & \text{როცა } m = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{როცა } m \geq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

ორმაგი მიმდევრობა კრებადია ნულისკენ პრინგსპაიმის აზრით, მაგრამ არ არის შემოსაზღვრული.

2. ორმაგ

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} a_{ik} \quad (8.1.1)$$

რიცხვით მწკრივს ეწოდება პრინგსპაიმის აზრით კრებადი s რიცხვისკენ, როცა (8.1.1) მწკრივის მართკუთხა კერძო ჯამების

$$s_{mn} = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^m a_{ik}$$

ორმაგი მიმდევრობა კრებადია პრინგსპაიმის აზრით s რიცხვისკენ და წერენ

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} a_{ik} = s.$$

ასეთ შემთხვევაში, სხვა შემთხვევისგან განსასხვავებლად, ამბობენ “(8.1.1) მწკრივი კრებადია მართკუთხედების მიხედვით”.

(8.1.1) მწკრივს ეწოდება კვადრატების მიხედვით კრებადი s რიცხვისკენ, როცა

$$s_{mm} = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^m a_{ik}$$

ერთმაგი მიმდევრობა კრებადია s რიცხვისკენ, ანუ როცა ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{mm} = s.$$

(8.1.1) მწკრივს ეწოდება წრიულად კრებადი s რიცხვისკენ, როცა სრულდება ტოლობა

$$\lim_{R \rightarrow \infty} s_k = s.$$

სადაც s_k ჯამი განსაზღვრულია ტოლობით

$$s_k = \sum_{i^2 + k^2 \leq R^2} a_{ik}.$$

კავშირები (8.1.1) ორმაგი მწკრივის მართკუთხედების, კვადრატებისა და წრეების მიხედვით კრებადობებს შორის ცნობილია (იხ. [9], [57, გვ. 42-45], [58]).

8.2 ფურიეს ტრიგონომეტრიული ორმაგი მწკრივები

ამ პარაგრაფში აღვნიშნავთ ტრიგონომეტრიული, კერძოდ, ფურიეს, ორმაგი მწკრივების ძირითად ცნებებს, რომელთა შესახებ არსებობს ძალიან ვრცელი ლიტერატურა (იხ. მაგალითად, [17], [20]–[23], [57], [58], [72], [73], [81]).

განიხილავენ, ნამდვილი და კომპლექსური (ექსპონენტური) ფორმების ტრიგონომეტრიულ ორმაგ მწკრივებს.

ნამდვილი ფორმისაა მწკრივი

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} a_{00} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (a_{m0} \cos mx + d_{m0} \sin mx) \\ + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{0n} \cos ny + c_{0n} \sin ny) + \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}(x, y), \end{aligned} \quad (8.2.1)$$

სადაც

$$\begin{aligned} A_{mn}(x, y) = a_{mn} \cos mx \cos ny + b_{mn} \sin mx \sin ny \\ + c_{mn} \cos mx \sin ny + d_{mn} \sin mx \cos ny. \end{aligned}$$

(8.2.1) მწკრივი მოკლედ იწერება შემდეგი სახით

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{mn} A_{mn}(x, y),$$

სადაც

$$\lambda_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{როცა } m = n = 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{როცა } m \geq 1, n = 0 \text{ ან } m = 0, n \geq 1, \\ 1, & \text{როცა } m \geq 1, n \geq 1. \end{cases}$$

კომპლექსური (ექსპონენცური) ფორმისაა

$$C_{00} + \sum_{|m| \geq 1} C_{m0} e^{imx} + \sum_{|n| \geq 1} C_{0n} e^{iny} + \sum_{|m| \geq 1, |n| \geq 1} C_{mn} e^{i(mx+ny)} \quad (8.2.2)$$

მწკრივი, რომელიც მოკლედ ასე იწერება

$$\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} C_{mn} e^{i(mx+ny)}. \quad (8.2.3)$$

აქვე აღვნიშნავთ [74], რომ არ არსებობს ორმაგი ტრიგონომეტრიული მწკრივი, რომლის მართკუთხოვანი კერძო ჯამების ზღვარი იქნება $+\infty$ ან $-\infty$ დადებითი ზომის სიმრავლეზე $[-\pi, \pi]^2$ -დან.

როცა (8.2.1) მწკრივში კოეფიციენტები წარმოადგენს $[0, 2\pi]^2$ კვადრატზე ჯამებადი რომელიმე $f(x, y)$ ფუნქციის ფურიეს ნამდვილი ფორმის

$$\begin{aligned} a_{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) \cos mx \cos ny \, dx \, dy, \\ b_{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) \sin mx \sin ny \, dx \, dy, \\ c_{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) \cos mx \sin ny \, dx \, dy, \\ d_{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) \sin mx \cos ny \, dx \, dy \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

კოეფიციენტებს ან (8.2.2) მწკრივში კოეფიციენტები წარმოადგენს ამავე $f(x, y)$ ფუნქციის

ფურიეს კომპლექსური (ექსპონენტური) ფორმის

$$C_{mn} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) e^{-i(mx+ny)} dx dy \quad (8.2.5)$$

კოეფიციენტებს, მაშინ ასეთ (8.2.1) და (8.2.2) მწკრივებს ეწოდება ნამდვილი და კომპლექსური (ექსპონენტური) ფორმის ფურიეს ორმაგი მწკრივები და ორივე აღინიშნება ერთი და იგივე $S[f]$ სიმბოლოთი, ოღონდ იქვე უნდა ითქვას რომელი ფორმისაა $S[f]$.

ხშირად, $f \in L[0, 2\pi]^2$ ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ ორმაგი მწკრივის მართკუთხედების მიხედვით კერძო ჯამს (x, y) წერტილზე აღნიშნავენ $s_{mn}(f; x, y)$ სიმბოლოთი, ხოლო კვადრატების მიხედვით კერძო ჯამს — $s_{nn}(f; x, y)$ სიმბოლოთი.

8.3 კანტორ–ლებეგის თეორემის განზოგადებები

თეორემა 8.3.1 ([57, გვ. 85–86], [81]). თუ (8.2.1) ტრიგონომეტრიული მწკრივისთვის

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} A_{mn}(x, y) = 0$$

ტოლობა შესრულებულია ყოველ (x, y) წერტილზე დადებითი ზომის ბრტყელი რაიმე $E \subset [0, 2\pi]^2$ სიმრავლიდან, მაშინ ყველა a_{mn} , b_{mn} , c_{mn} და d_{mn} კოეფიციენტების ზღვარი ნულია, როცა $m \rightarrow \infty$ და $n \rightarrow \infty$ ერთიმეორისგან დამოუკიდებლად, ანუ ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} a_{mn} = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} b_{mn} = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} c_{mn} = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} d_{mn} = 0.$$

თეორემა 8.3.2 ([58, გვ. 408]). თუ დადებითი ზომის ბრტყელი რაიმე $E \subset [0, 2\pi]^2$ სიმრავლის ყოველ (x, y) წერტილზე (8.2.1) ტრიგონომეტრიული მწკრივისთვის შესრულებულია

$$\lim_{\min\{m, n\} \rightarrow \infty} A_{mn}(x, y) = 0$$

ტოლობა, მაშინ a_{mn} , b_{mn} , c_{mn} და d_{mn} კოეფიციენტები მიისწრაფვის ნულისკენ, როცა $\min\{m, n\} \rightarrow \infty$.

გ ა ნ ს ა ზ დ ვ რ ა 8.3.3 ([54, გვ. 18]). $(s_{mn})_{m,n \geq 0}$ ორმაგ მიმდევრობას ეწოდება ვიწრო აზრით კრებადი s -კენ, როცა ნებისმიერად მცირე დადებითი ε რიცხვისთვის არსებობს ნატურალური N რიცხვი ისეთი, რომ

$$|s_{mn} - s| < \varepsilon \quad (8.3.1)$$

უტოლობა სრულდება ყველა m და n რიცხვისთვის, რომელთაგან ერთი მაინც მეტია N -ზე, ანუ აკმაყოფილებს $m + n > N$ პირობას. ასეთ შემთხვევაში წერენ

$$\lim_{m+n \rightarrow \infty} s_{mn} = s.$$

მართებულია შემდეგი

თ ე ო რ ე მ ა 8.3.4 ([14], [54, გვ. 18–19]). $(s_{mn})_{m,n \geq 0}$ ორმაგი მიმდევრობის ვიწრო აზრით კრებადობისთვის s -კენ, აუცილებელი და საკმარისია შემდეგი სამი პირობის შესრულება:

- (1) $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{mn} = s$ ყოველი ფიქსირებული n -თვის;
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{mn} = s$ ყოველი ფიქსირებული m -თვის;
- (3) $\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} s_{mn} = s.$

თ ე ო რ ე მ ა 8.3.5 ([14]). თუ

$$\lim_{m+n \rightarrow \infty} A_{mn}(x, y) = 0$$

ტოლობა სრულდება ყოველ (x, y) წერტილზე დადებითი ზომის ბრტყელი რაიმი $E \subset [0, 2\pi]^2$ სიმრავლიდან, მაშინ a_{mn} , b_{mn} , c_{mn} და d_{mn} კოეფიციენტები კრებადია ნულისკენ ვიწრო აზრით, ანუ ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\lim_{m+n \rightarrow \infty} a_{mn} = \lim_{m+n \rightarrow \infty} b_{mn} = \lim_{m+n \rightarrow \infty} c_{mn} = \lim_{m+n \rightarrow \infty} d_{mn} = 0.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 8.3.6. გვაქვს შემთხვევა, როცა ორმაგი მიმდევრობის სულ სხვა ხასიათის კრებადობას ეწოდება ვიწრო აზრით კრებადობა. მაგალითად, წიგნში [56, გვ. 44] მოცემულია: $\{x_{kl}\}$ ორმაგ მიმდევრობას ეწოდება ვიწრო კრებადი x -კენ, როცა ყოველი θ რიცხვისთვის, $0 < \theta < 1$, ყველა იმ x_{kl} -ების სიმრავლეს, რომელიც აკმაყოფილებს $\theta l < k < \theta^{-1}l$ შებლუდვას, გააჩნა დაგროვების ერთადერთი x წერტილი და ამ ფაქტს ასე ჩაეწერთ:

$$\left| \lim_{k,l \rightarrow \infty} x_{kl} \right| = x.$$

ამ განსაზღვრის წყაროდ დასახელებულია Lösch F., *Über restringierte Limitierung von Doppelfolgen*. Math. Annalen 110 (1934), 33–53.

ვფიქრობ, ასეთ კრებადობას უფრო მოუხდება “შეზღუდული კრებადობა” (restricted convergence) და არა “*ограниченная сходимость*” როგორც ესაა ნათარგმნ წიგნში [25, გვ. 465].

წიგნ [56]–ში მოცემულია სხვა განსაზღვრებებიც.

1. (გვ. 8). ორმაგ (a_{mn}) მიმდევრობას ეწოდება რეგულარულად კრებადი a -კენ, როცა სრულდება ტოლობები

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{mn} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn} = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} a_{mn} = a.$$

2. (გვ. 6). ორმაგ

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} \quad (8.3.2)$$

მწკრივის ეწოდება შემოსაზღვრულად კრებადი, როცა (8.3.2) მწკრივი კრებადია მართკუთხედების მიხედვით და ამავე დროს, შემოსაზღვრულია მისი მართკუთხოვანი კერძო ჯამების მიმდევრობა.

3. (გვ. 6). (8.3.2) მწკრივის ეწოდება რეგულარულად კრებადი, როცა (8.3.2) მწკრივთან ერთად კრებადია განმეორებითი

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \right) \text{ და } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} \right) \quad (8.3.3)$$

მწკრივებიც. არის შემთხვევა, როცა განმეორებითი (8.3.3) მწკრივები კრებადია ერთი და იგივე სიდიდისკენ, მაგრამ (8.3.2) მწკრივი არ არის კრებადი (იხ. თეორემა 8.9.1-ის დამტკიცების მომდევნო აბზაცი და თეორემა 8.9.2).

4. (ლემა, გვ. 7). თუ (8.3.2) მწკრივი რეგულარულად კრებადია s -კენ, მაშინ განმეორებითი მწკრივების ჯამია s .

5. (ლემა, გვ. 8). როცა (8.3.2) მწკრივი კრებადია რეგულარულად, მაშინ ნებისმიერად მცირე დადებითი ε რიცხვისთვის არსებობს ნატურალური N რიცხვი ისეთი, რომ სრულდება

$$\left| \sum_{k=m}^p \sum_{l=n}^q a_{kl} \right| \leq \varepsilon \quad (8.3.4)$$

უტოლობა, როგორც კი m და n რიცხვებიდან ერთი მაინც მეტია ან ტოლი N -ის, ხოლო $p \geq m$ და $q \geq n$ ნებისმიერებია, ე.ი. (8.3.4) ორმაგ ჯამში არ შედის მხოლოდ სასრული რაოდენობის a_{kl} წევრები, $0 \leq k < N$ და $0 \leq l < N$.

სწორედ ეს ფაქტია გამოსახული (8.3.1) უტოლობით და თეორემა 8.3.4-ით, სადაც s_{mn} წარმოადგენს (8.3.2) მწკრივის მართკუთხოვან კერძო ჯამებს.

8.4 დანჟუა-ლუზინის თეორემის განზოგადება

თეორემა 8.4.1 ([81]). თუ

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}(x, y)$$

ტრიგონომეტრიული ორმაგი მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია დადებითი ზომის ორგან-ზომილებიან რაიმიე $E \subset [0, 2\pi]^2$ სიმრავლეზე, მაშინ კრებადია მართკუთხედების მიხედ-ვით

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \rho_{mn}$$

მწკრივი, სადაც

$$\rho_{mn}^2 = a_{mn}^2 + b_{mn}^2 + c_{mn}^2 + d_{mn}^2.$$

8.5 ფურიეს ორმაგი მწკრივის აბსოლუტურად კრებადობის პირობები

თეორემა 8.5.1 ([63]). ორი ცვლადის ჯამებადი $f \in [0, 2\pi]^2$ ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ ორ-მაგი მწკრივის აბსოლუტურად კრებადობისთვის, აუცილებელია და საკმარისი $L^2[0, 2\pi]^2$ კლასში არსებობდეს ორი $h(x, y)$ და $g(x, y)$ ფუნქცია ისეთი, რომ ადგილი ჰქონდეს ტო-ლობას

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} h(x-t, y-\tau) g(t, \tau) dt d\tau.$$

გ ა ნ ს ა ზ ჯ რ ა 8.5.2 ([53], [57, გვ. 109]). $[0, 2\pi]^2$ კვადრატზე $f(x, y)$ უწყვეტი ფუნ-ქცია ეკუთვნის $H(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$ კლასს, სადაც დადებითი $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ რიცხვები არ აღემატება

1-ს, როცა ამ კვადრატთან ადებული ნებისმიერი ორი (x_1, y_1) და (x_2, y_2) წერტილისთვის ადგილი აქვს შემდეგ სამ უტოლობას

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq k_1(y)|x_1 - x_2|^{\alpha'},$$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k_2(x)|y_1 - y_2|^{\beta'},$$

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1) + f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2)| \leq c|x_1 - x_2|^{\alpha}|y_1 - y_2|^{\beta},$$

სადაც $k_1(y)$ და $k_2(x)$ ჯამებადი ფუნქციებია, ხოლო c მუდმივია.

თეორემა 8.5.3 ([53], [57, გვ. 109]). თუ თითოეული ცვლადის მიმართ 2π პერიოდული $f(x, y)$ ფუნქცია ეკუთვნის $H(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$ კლასს, სადაც $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ რიცხვები მეტია $\frac{1}{2}$ -ზე, მაშინ f ფუნქციის $S[f]$ ფურიეს მწკრივი კრებადია აბსოლუტურად. თუკი ამ რიცხვთაგან რომელიმე არ იქნება $\frac{1}{2}$ -ზე მეტი, მაშინ თეორემა შეიძლება არ იყოს მართებული.

8.6 ბესელის იგივეობა და უტოლობა, პარსევალის ტოლობა და რისი-ფიშერის თეორემა ფურიეს ორმაგი მწკრივებისთვის

$[0, 2\pi]^2$ კვადრატში ჯამებადი და თითოეული ცვლადის მიმართ 2π პერიოდული $f(x, y)$ ფუნქციის ფურიეს ნამდვილი ფორმის (8.2.1) ორმაგი მწკრივი (8.2.4) კოეფიციენტებით (იხ. თავი 8, პარაგრაფი 8.2) ჩაწერით ასე

$$S[f] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{mn} A_{mn}(x, y),$$

სადაც

$$A_{mn} = a_{mn} \cos mn \cos ny + b_{mn} \sin mx \sin ny + c_{mn} \cos mx \sin ny + d_{mn} \sin mx \cos ny, \quad \lambda_{mn} = 1, \quad \text{როცა } m \geq 1, \quad n \geq 1$$

და

$$\lambda_{00} = \frac{1}{4}, \quad \lambda_{m0} = \lambda_{0n} = \frac{1}{2}, \quad \text{როცა } m = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots$$

თუ $f(x, y)$ ფუნქცია კვადრატით ჯამებადია $[0, 2\pi]^2$ კვადრატზე, რაც ნიშნავს $\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x, y) dx dy$ ორმაგი ინტეგრალის სასრულობას და ამას მოკლედ ასე ჩაწერით $f \in L^2[0, 2\pi]^2$, მაშინ მართებულია შემდეგი მტკიცებულებები [57, გვ. 62-63]:

8.6.1 ბესელის იგივეობა

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y) - s_{MN}(f; x, y)|^2 dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)|^2 dx dy - \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \lambda_{mn} (a_{mn}^2 + b_{mn}^2 + c_{mn}^2 + d_{mn}^2). \end{aligned} \quad (8.6.1)$$

8.6.2 ბესელის უტოლობა

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{mn} (a_{mn}^2 + b_{mn}^2 + c_{mn}^2 + d_{mn}^2) \leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)|^2 dx dy.$$

8.6.3 პარსევალის ტოლობა

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{mn} (a_{mn}^2 + b_{mn}^2 + c_{mn}^2 + d_{mn}^2) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)|^2 dx dy. \quad (8.6.2)$$

8.6.4 $S[f]$ მწკრივის L^2 -კრებადობა

$S[f]$ მწკრივი L^2 ნორმით კრებადია პრინგსპაიმის აზრით $f(x, y)$ ფუნქციისკენ, რაც (8.6.1) და (8.6.2) ტოლობებიდან გამომდინარეობს.

8.6.5 რისი-ფიშერის თეორემა

თუ მოცემულია (a_{mn}) , (b_{mn}) , (c_{mn}) და (d_{mn}) რიცხვითი მიმდევრობები ისეთები, რომ

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{mn} (a_{mn}^2 + b_{mn}^2 + c_{mn}^2 + d_{mn}^2)$$

მწკრივი კრებადია პრინგსპაიმის აზრით, მაშინ არსებობს $F \in L^2[0, 2\pi]^2$ ფუნქცია, რომლისთვისაც a_{mn} , b_{mn} , c_{mn} და d_{mn} რიცხვები იქნება ფურიეს კოეფიციენტები და ასეთი F ფუნქცია, როგორც L^2 სივრცის ელემენტი, ერთადერთია.

8.7 რიმან-ლებეგის თეორემის განზოგადება კვადრატით ჯამებადი ფუნქციებისთვის

თეორემა 8.7.1 ([57, გვ. 63]). თუ ორი ცვლადის $f(x, y)$ ფუნქცია ეკუთვნის $L^2[0, 2\pi]^2$ კლასს, მაშინ მისი a_{mn} , b_{mn} , c_{mn} და d_{mn} ფურიეს კოეფიციენტები კრებადია ნულისკენ ვიწრო აზრით, ანუ ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\lim_{m+n \rightarrow \infty} a_{mn} = \lim_{m+n \rightarrow \infty} b_{mn} = \lim_{m+n \rightarrow \infty} c_{mn} = \lim_{m+n \rightarrow \infty} d_{mn} = 0. \quad (8.7.1)$$

დამტკიცება. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\omega_{mn}^2 = a_{mn}^2 + b_{mn}^2 + c_{mn}^2 + d_{mn}^2, \quad (8.7.2)$$

მაშინ ბესელის უტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{mn} \omega_{mn}^2 \quad (8.7.3)$$

მწკრივის კრებადობა პრინგსპაიმის აზრით. ამიტომ (8.7.3) მწკრივის ω_{mn}^2 ზოგადი წევრი კრებადია ნულისკენ პრინგსპაიმის აზრით

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \omega_{mn}^2 = 0, \quad (8.7.4)$$

რაც გამომდინარეობს

$$\omega_{mn}^2 = s_{mn} - s_{m,n-1} - s_{m-1,n} + s_{m-1,n-1}$$

ტოლობიდან [54, გვ. 22], სადაც შემოღებულია აღნიშვნა

$$s_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \lambda_{ik} \omega_{ik}^2.$$

რადგან პრინგსპაიმის აზრით კრებადი (8.7.3) მწკრივის წევრები დადებითია, ამიტომ კრებადია

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{mn} \omega_{mn}^2 = s_n \text{ ყოველი } n\text{-თვის,} \quad (8.7.5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} \omega_{mn}^2 = \sigma_m \text{ ყოველი } m\text{-თვის} \quad (8.7.6)$$

მწკრივები [54, გვ. 37] და ადგილი აქვს

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n = s, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_m = \sigma, \quad s = \sigma$$

ტოლობებს. (8.7.5)–დან და (8.7.6)–დან გამომდინარეობს

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \omega_{mn}^2 = 0 \text{ ყოველი } n\text{-თვის}, \quad (8.7.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{mn}^2 = 0 \text{ ყოველი } m\text{-თვის}. \quad (8.7.8)$$

ახლა კი, (8.7.4), (8.7.7) და (8.7.8) ტოლობებიდან გამომდინარეობს (იხ. თავი 8, პარაგრაფი 8.3, თეორემა 8.3.4)

$$\lim_{m+n \rightarrow \infty} \omega_{mn}^2 = 0. \quad (8.7.9)$$

(8.7.9) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ (8.7.2) ტოლობის ოთხივე შესაკრები აკმაყოფილებს (8.7.1) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

8.8 რიმან–ლებეგის თეორემის განზოგადება ორი ცვლადის ჯამებადი ფუნქციებისთვის

ჩვენ გვქონდა რიმან–ლებეგის თეორემა კვადრატით ჯამებადი ორი ცვლადის ფუნქციებისთვის (იხ. თავი 8, პარაგრაფი 8.7). ახლა დავადგენთ, რომ იგივე თვისებები გააჩნია ნებისმიერი ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს.

თეორემა 8.8.1. ორი ცვლადის ნებისმიერი ჯამებადი $f \in L[0, 2\pi]^2$ ფუნქციის a_{mn} , b_{mn} , c_{mn} და d_{mn} ფურიეს კოეფიციენტები, ვიწრო აზრით, იკრებება ნულისკენ:

$$\lim_{m+n \rightarrow \infty} a_{mn} = \lim_{m+n \rightarrow \infty} b_{mn} = \lim_{m+n \rightarrow \infty} c_{mn} = \lim_{m+n \rightarrow \infty} d_{mn} = 0. \quad (8.8.1)$$

დამტკიცება. როგორც ცნობილია (იხ. [28, გვ. 433]), ყოველი $f \in L[0, 2\pi]^2$ ფუნქციისთვის და ნებისმიერად მცირე დადებითი ε რიცხვისთვის არსებობს $g \in L^2[0, 2\pi]^2$ უწყვეტი

ფუნქცია, რომელსაც გააჩნია თვისება

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y) - g(x, y)| dx dy < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ამ უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $f(x, y) - g(x, y) = \varphi(x, y)$ ფუნქციის ფურიეს ყველა კოეფიციენტის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლებია $\frac{\varepsilon}{2}$ -ზე, მათი ნებისმიერი m და n ინდექსებისთვის (იხ. თავი 8, პარაგრაფი 8.2, ტოლობები (8.2.4)). $f(x, y) = g(x, y) + \varphi(x, y)$ ტოლობის მარჯვენა პირველი $g(x, y)$ შესაკრების ფურიეს ყველა კოეფიციენტის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლები გახდება $\frac{\varepsilon}{2}$ -ზე, როცა $m + n > N(\varepsilon)$ (იხ. თავი 8, პარაგრაფი 8.7).

ამასთანავე, როგორც უკვე ვთქვით, $\varphi(x, y)$ ფუნქციის ფურიეს ყველა კოეფიციენტის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლებია $\frac{\varepsilon}{2}$ -ზე ყველა m და n ინდექსებისთვის. ამრიგად, $f(x, y)$ ფუნქციის ფურიეს ყველა კოეფიციენტის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლებია $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ რიცხვზე, როცა $m + n > N(\varepsilon)$. ეს კი ნიშნავს (8.8.1) ტოლობებს. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შედეგი 8.8.2. (8.8.1) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ ორი ცვლადის ნებისმიერი $f \in L[0, 2\pi]^2$ ჰამებადი ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებისგან შედგენილი ოთხი $(a_{mn}), (b_{mn}), (c_{mn})$ და (d_{mn}) მიმდევრობიდან თითოეული მათგანი შემოსაზღვრულია. ეს ნიშნავს, რომ არსებობს დადებითი L რიცხვი, დამოკიდებული მხოლოდ f ფუნქციაზე, ისეთი, რომ ყოველი m -ისა და n -თვის აქვს უტოლობებს:

$$|a_{mn}| \leq L, \quad |b_{mn}| \leq L, \quad |c_{mn}| \leq L, \quad |d_{mn}| \leq L.$$

ეს გამომდინარეობს 8.2 პარაგრაფის (8.2.4) ტოლობებიდანაც, სადაც L -ის როლში გამოდის რიცხვი

$$L = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)| dx dy.$$

შედეგი 8.8.3. იმავე $f \in L[0, 2\pi]^2$ ფუნქციას თუ შევუსაბამებთ ფურიეს კომპლექსური ფორმის მწკრივს (იხ. გამოსახულებები (8.2.3) და (8.2.5))

$$f \sim \sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} C_{mn} e^{i(mx+ny)},$$

სადაც

$$C_{mn} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) e^{-i(mx+ny)} dx dy, \quad (8.8.2)$$

მაშინ

$$|C_{mn}| \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)| dx dy.$$

შენიშვნა 8.8.4 ([67]). $f \in L[0, 2\pi]^2$ ფუნქციის ნამდვილი ფორმისა და კომპლექსური ფორმის ფურიეს კოეფიციენტებს შორის კავშირი შემდეგია:

$$C_{mn} = \frac{1}{4} [(a_{mn} - b_{mn}) - i(c_{mn} + d_{mn})],$$

$$C_{-m,n} = \frac{1}{4} [(a_{mn} + b_{mn}) - i(c_{mn} - d_{mn})],$$

$$C_{m,-n} = \frac{1}{4} [(a_{mn} + b_{mn}) + i(c_{mn} - d_{mn})],$$

$$C_{-m,-n} = \frac{1}{4} [(a_{mn} - b_{mn}) + i(c_{mn} + d_{mn})]$$

და

$$a_{mn} = C_{mn} + C_{-m,n} + C_{m,-n} + C_{-m,-n},$$

$$b_{mn} = C_{m,-n} + C_{-m,n} - C_{mn} - C_{-m,-n},$$

$$c_{mn} = i(C_{m,n} + C_{-m,n} - C_{m,-n} - C_{-m,-n}),$$

$$d_{mn} = i(C_{m,n} - C_{-m,n} + C_{m,-n} - C_{-m,-n}).$$

გარდა ამისა,

$$\begin{aligned} a_{mn} \cos mx \cos ny + b_{mn} \sin mx \sin ny \\ + c_{mn} \cos mx \sin ny + d_{mn} \sin mx \cos ny = C_{mn} e^{i(nx+ny)} \\ + C_{-m,n} e^{i(-mx+ny)} + C_{m,-n} e^{i(mx-ny)} + C_{-m,-n} e^{i(-mx-ny)}. \end{aligned}$$

კერძოდ,

$$C_{00} = \frac{1}{4} a_{00},$$

$$C_{m0} = \frac{1}{4} (a_{m0} - i d_{m0}), \quad C_{-m,0} = \frac{1}{4} (a_{m0} + i d_{m0}),$$

$$C_{0n} = \frac{1}{4} (a_{0n} - i c_{0n}), \quad C_{0,-n} = \frac{1}{4} (a_{0n} + i c_{0n}).$$

დასასრულ, მართებულია ტოლობა (იხ. [67, გვ. 510])

$$\sum_{|m| \geq 1, |n| \geq 1} \frac{1}{mn} C_{mn} = - \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} b_{mn}.$$

8.9 ერთზე მეტ ხარისხში ჯამებადი ორი ცვლადის ფუნქციის ფურიეს განმეორებითი მწკრივების თითქმის ყველგან კრებადობა

ეთქვას, თითოეული ცვლადის მიმართ 2π პერიოდული $f(x, y)$ ფუნქცია ჯამებადია $[-\pi, \pi]^2$ კვადრატზე, სიმბოლურად $f \in L[-\pi, \pi]^2$, ე.ი. სასრულია $\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x, y)| dx dy$ ორმაგი ინტეგრალი.

განვიხილოთ f ფუნქციის ფურიეს ექსპონენტური ორმაგი მწკრივი (იხ. ნაწილი IV, თავი 8, პარაგრაფი 8.2)

$$f \sim \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} c_{mn} e^{i(mx+ny)}. \quad (8.9.1)$$

სადაც

$$c_{mn} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) e^{-i(mx+ny)} dx dy. \quad (8.9.2)$$

(8.9.1) მწკრივისგან შევადგინოთ შემდეგი

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{mn} e^{imx} \right) e^{iny} \quad (8.9.3)$$

და

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{mn} e^{iny} \right) e^{imx} \quad (8.9.4)$$

განმეორებითი მწკრივები, რომელთაც ეწოდება f ფუნქციის ფურიეს განმეორებითი მწკრივები.

1. მართებულია შემდეგი

თეორემა 8.9.1 ([69]). ყოველი $f \in L^p[-\pi, \pi]^2$, $p > 1$, ფუნქციონირების, თითქმის ყველა $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$ წერტილზე, ადგილი აქვს შემდეგ ორ ტოლობას

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{mn} e^{imx} \right) e^{iny} \quad (8.9.5)$$

და

$$f(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{mn} e^{iny} \right) e^{imx}. \quad (8.9.6)$$

დამტკიცება. ფუნქციონირების თეორემის ძალით, თითქმის ყველა $y \in [-\pi, \pi]$ მნიშვნელობის-თვის $f(x, y)$, როგორც x ცვლადის ფუნქცია ეკუთვნის $L^p[-\pi, \pi]$ კლასს. ასევე, თითქმის ყველა $x \in [-\pi, \pi]$ მნიშვნელობისთვის $f(x, y)$, როგორც y ცვლადის ფუნქცია ეკუთვნის $L^p[-\pi, \pi]$ კლასს.

ჯერ განვიხილოთ (8.9.5) ტოლობის $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{mn} e^{imx}$ შიგა მწკრივი, რომელიც (8.9.2) ტოლობის გათვალისწინებით მიიღებს სახეს

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{mn} e^{imx} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, \tau) e^{-ni\tau} d\tau \right] e^{-im\tau} dt \right\} e^{imx}.$$

რადგან

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, \tau) e^{-in\tau} d\tau$$

ფუნქცია ეკუთვნის $L^p[-\pi, \pi]$ კლასს¹, ამიტომ მისი ფურიეს მწკრივი $\{e^{imx}\}$ სისტემის მიმართ, ჰანტის თეორემით (იხ. [17, გვ. 12], [75]) კრებადია თითქმის ყველა $x \in [-\pi, \pi]$

¹გვაქვს

$$|\varphi_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x, \tau)| \cdot |e^{-in\tau}| d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x, \tau)| d\tau.$$

რაც ჰელდერ-რიისის უტოლობის ძალით (იხ. [1, გვ. 520]) არ აღემატება

$$\frac{1}{2\pi} \cdot (2\pi)^{1/q} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x, \tau)|^p d\tau \right)^{1/p} = \frac{1}{(2\pi)^{1/p}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x, \tau)|^p d\tau \right)^{1/p},$$

ანუ

$$|\varphi_n(x)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x, \tau)|^p d\tau.$$

მნიშვნელობისთვის $\varphi_n(x)$ -კენ. მაშასადამე, უკანასკნელი ტოლობა გადაიწერება ასე

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{mn} e^{imx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, \tau) e^{-in\tau} d\tau.$$

ახლა, (8.9.5) ტოლობის მარჯვენა მხარე მიიღებს სახეს

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, \tau) e^{-in\tau} d\tau \right) e^{iny} = f(x, y)$$

თითქმის ყველა $y \in [-\pi, \pi]$ -თვის, ისევე ჰანტის თეორემით.

ამრიგად, (8.9.5) ტოლობა მართებულია თითქმის ყველა $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$ წერტილზე. ასევე დამტკიცდება (8.9.6) ტოლობაც. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

2. როგორც ვიცით (იხ. ნაწილი II, შესავალი), ორი ცვლადის ყველგან უწყვეტი და თითოეული ცვლადის მიმართ 2π პერიოდული ჩ. ფეფერმანის $F(x, y)$ ფუნქციის ფურიეს $S[F]$ ორმაგი მწკრივი განშლადია სიბრტყის ყველა წერტილზე. მეორეს მხრივ, რადგან F მიეკუთვნება $L^p[-\pi, \pi]^2$, $p > 1$, კლასს, ამიტომ მისთვის ადგილი აქვს 8.9.1 თეორემას.

ამრიგად, მართებულია შემდეგი

თ ე ო რ ე მ ა 8.9.2 ([69]). ჩ. ფეფერმანის $F(x, y)$ ფუნქციისთვის შედგენილი ფურიეს განმეორებითი მწკრივები კრებადია თითქმის ყველა $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$ წერტილზე ერთი და იგივე $F(x, y)$ მნიშვნელობისკენ, ე.ი. ადგილი აქვს ტოლობებს

$$F(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_{mn} e^{imx} \right) e^{iny}$$

და

$$F(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_{mn} e^{iny} \right) e^{imx},$$

აქედან ვლუბლობთ, რომ

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(x)|^p dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x, \tau)|^p d\tau dx < +\infty,$$

რადგან $f \in L^p[-\pi, \pi]^2$.

სადაც F ფუნქციის ფურიეს F_{mn} კოეფიციენტები ექსპონენტური $\{e^{i(mx+ny)}\}$ ორმაგი სისტემის მიმართ მოცემულია ტოლობებით

$$F_{mn} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t, \tau) e^{-i(mt + n\tau)} dt d\tau.$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

მაშასადამე, $L^p[-\pi, \pi]^2$, $p > 1$, კლასის ფუნქციებისთვის უფრო ბუნებრივია ფურიეს განმეორებითი მწკრივები, ვიდრე ფურიეს ორმაგი მწკრივები.

შეგნიშნოთ, რომ (8.9.1) მწკრივის ყველგან კრებადობა მართკუთხედების მიხედვით იწვევს (8.9.3) და (8.9.4) განმეორებითი მწკრივების ყველგან კრებადობას (8.9.1) მწკრივის ჯამისკენ (იხ. [45], [83, თეორემა 3]). შებრუნებული მტკიცება მცდარია, 8.9.2 თეორემის ძალით.

8.10 ფურიეს ორმაგი მწკრივის მართკუთხოვანი კერძო ჯამების ინტეგრალური წარმოდგენა

გამოსახულებებს

$$s_{mn}(f; x, y) = \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n \lambda_{pq} A_{pq}(x, y).$$

ეწოდება $f \in L[-\pi, \pi]^2$ ფუნქციის შესაბამისი ფურიეს $S[f]$ ორმაგი მწკრივის მართკუთხოვანი $s_{mn}(f; x, y)$ კერძო ჯამები ($m = 0, 1, 2, \dots$; $n = 0, 1, 2, \dots$), რომლებიც თავი 8-ის, პარაგრაფ 8.2-ის (8.2.4) ტოლობების ჩასმით მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\begin{aligned} s_{mn}(f; x, y) &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n \lambda_{pq} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, \tau) \cos p(t-x) \cos q(\tau-y) dt d\tau \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, \tau) \left[\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^m \cos p(t-x) \right] \cdot \left[\frac{1}{2} + \sum_{q=1}^n \cos q(\tau-y) \right] dt d\tau. \end{aligned}$$

კვადრატულ ფრჩხილებში ჩასმული გამოსახულებებისთვის გამოვიყენოთ

$$\frac{1}{2} + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos \nu\alpha = \frac{\sin(2\nu + 1)\frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq 2k\pi$$

ტოლობა (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.3, ტოლობები (4.3.1) და (4.3.5)), შედეგად მივიღებთ

$$\begin{aligned} s_{mn}(f; x, y) &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, \tau) \frac{[\sin(2m+1)\frac{t-x}{2}] \cdot [\sin(2n+1)\frac{\tau-y}{2}]}{4 \sin \frac{t-x}{2} \sin \frac{\tau-y}{2}} dt d\tau \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\frac{1}{2}(\pi+x)}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \int_{-\frac{1}{2}(\pi+y)}^{\frac{1}{2}(\pi-y)} f(x+2t, y+2\tau) \frac{\sin(2m+1)t}{\sin t} \cdot \frac{\sin(2n+1)\tau}{\sin \tau} dt d\tau \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x, y; t, \tau) \frac{\sin(2m+1)t}{\sin t} \cdot \frac{\sin(2n+1)\tau}{\sin \tau} dt d\tau, \end{aligned}$$

სადაც

$$\begin{aligned} F(x, y; t, \tau) &= f(x+2t, y+2\tau) \\ &\quad + f(x-2t, y+2\tau) + f(x+2t, y-2\tau) + f(x-2t, y-2\tau). \end{aligned} \quad (8.10.1)$$

ამრიგად [57, გვ. 76],

$$s_{mn}(f; x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x, y; t, \tau) \frac{\sin(2m+1)t}{\sin t} \cdot \frac{\sin(2n+1)\tau}{\sin \tau} dt d\tau. \quad (8.10.2)$$

8.11 ფურიეს ორმაგი მწკრივის მართკუთხედების მიხედვით კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა

ჯერ განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა $f(x, y) = 1$ ყველა (x, y) წერტილზე. ამ შემთხვევის შესაბამისი ფურიეს ორმაგი მწკრივი შედგება, ერთადერთი შესაკრებისგან და ეს შესაკრები 1-ის ტოლია. ამიტომ ამ შემთხვევის შესაბამისი ყველა კერძო ორმაგი ჯამი 1-ის ტოლია. ამის გამო, (8.10.1) და (8.10.2) ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$1 = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m+1)t}{\sin t} \cdot \frac{\sin(2n+1)\tau}{\sin \tau} dt d\tau \quad (8.11.1)$$

ტოლობა ყველა m -ისა და n -თვის.

ცხადია, რომ $f \in [-\pi, \pi]^2$ ფუნქციის შესაბამისი ფურიეს $S[f]$ ორმაგი მწკრივის მართკუთხედების მიხედვით კრებადობა რაიმე $s(x, y)$ მნიშვნელობისკენ, ეკვივალენტურია ტოლობის

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} s_{mn}(f; x, y) = s(x, y).$$

(8.11.1) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$s(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4s(x, y) \frac{\sin(2m+1)t}{\sin t} \cdot \frac{\sin(2n+1)\tau}{\sin \tau} dt d\tau, \quad (8.11.2)$$

ხოლო (8.10.2) და (8.11.2) ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$\begin{aligned} s_{mn}(f; x, y) - s(x, y) \\ = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [F(x, y; t, \tau) - 4s(x, y)] \frac{\sin(2m+1)t}{\sin t} \cdot \frac{\sin(2n+1)\tau}{\sin \tau} dt d\tau. \end{aligned}$$

მაშასადამე, დამტკიცდა

თეორემა 8.11.1. $f \in L[-\pi, \pi]^2$ ფუნქციის შესაბამისი ფურიეს $S[f]$ ორმაგი მწკრივის მართკუთხედების მიხედვით კრებადობისთვის (x, y) წერტილზე $s(x, y)$ მნიშვნელობისკენ, აუცილებელია და საკმარისი შესრულდეს ტოლობა

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [F(x, y; t, \tau) - 4s(x, y)] \frac{\sin(2m+1)t}{\sin t} \cdot \frac{\sin(2n+1)\tau}{\sin \tau} dt d\tau = 0,$$

რაც ეკვივალენტურია

$$\lim_{\substack{M \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [F(x, y; t, \tau) - 4s(x, y)] \frac{\sin Mt}{\sin t} \cdot \frac{\sin N\tau}{\sin \tau} dt d\tau = 0 \quad (8.11.3)$$

ტოლობის [57, გვ. 76] და $F(x, y; t, \tau)$ განსაზღვრულია (8.10.1) ტოლობით.

შენიშვნა 8.11.2 ([76, გვ. 700]). (8.11.3) ტოლობა ეკვივალენტურია ტოლობის

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [F(x, y; t, \tau) - 4s(x, y)] \frac{\sin mt}{\sin t} \cdot \frac{\sin n\tau}{\sin \tau} dt d\tau = 0.$$

8.12 კვადრატით ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს ორმაგი მწკრივის კრებადობის შესახებ

როგორც ვიცით (იხ. შესავალი II ნაწილისადმი), 1971 წელს გამოქვეყნდა ჩ. ფეფრმანის ნაშრომი [72], რომლითაც დადგენილ იქნა თითოეული ცვლადის მიმართ 2π პერიოდული და მთელს სიბრტყეზე უწყვეტი $F(x, y)$ ფუნქციის არსებობა, რომლის შესაბამის ფურიეს ორმაგ მწკრივს არ გააჩნია მართკუთხედების მიხედვით (პრინგსპაიმის აზრით) კრებადობის რაიმე წერტილი!

ჩ. ფეფრმანის ამ ნაშრომის გამოქვეყნებამდე, 1970 წელს, გამოქვეყნდა ნიკოლოზ (კიტა) თევზაძის ნაშრომი, სადაც დამტკიცებულია შემდეგი

თეორემა 8.12.1 ([44]). $f \in L^2[-\pi, \pi]^2$ ფუნქციის ფურიეს ორმაგი $S[f]$ მწკრივის მართკუთხოვანი კერძო ჯამების ნებისმიერი

$$s_{m_k n_k}(f; x, y) \quad (m_k \leq m_{k+1}, \quad n_k \leq n_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots$$

ქვემიმდევრობა კრებადია თითქმის ყველა $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$ წერტილზე $f(x, y)$ მნიშვნელობისკენ.

ნ. თევზაძის ამ თეორემას, უმეტესწილად ციტირებენ შემდეგი კერძო სახით.

თეორემა 8.12.2 ([86]). $f \in L^2[-\pi, \pi]^2$ ფუნქციის ფურიეს ორმაგი მწკრივის კერძო ჯამები კრებადია კვადრატების მიხედვით თითქმის ყველა $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$ წერტილზე $f(x, y)$ მნიშვნელობისკენ, ე.ი. თითქმის ყველგან სრულდება ტოლობა

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{nn}(f; x, y) = f(x, y). \quad (8.12.1)$$

ნ. თევზაძის თეორემა 8.12.2 მართებულია L^p , $p > 1$, კლასის ფუნქციებისთვისაც.

თეორემა 8.12.3 ([58], [86]). $f \in L^p[\pi, \pi]^2$, $p > 1$, ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ ორმაგი მწკრივისთვის, თითქმის ყველგან, მართებულია (8.12.1) ტოლობა.

ნ. თევზაძის თეორემა 8.12.1 ცნობილია შემდეგი სახითაც.

თეორემა 8.12.4 ([73]). $f \in L^2[-\pi, \pi]^2$ ფუნქციისთვის და მართკუთხედთა ნებისმიერი მონოტონური $R_1 \subseteq R_2 \subseteq R_3 \subseteq \dots$ მიმდევრობისთვის, რომელთა გვერდები საკოორდინატო ღერძების პარალელურია, თითქმის ყველა $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$ წერტილზე მართებულია ტოლობა

$$f(x, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_{mn}(f; x, y), \quad (m, n) \in R_k$$

სწორედ, ჩ. ფეფერმანის [72] ნაშრომის შემდეგ მიიპყრო მკვლევართა ყურადღება ნ. თეზაძის [44] ნაშრომმა.

შედეგი 8.12.5. ფეფერმანის ყველგან უწყვეტ $F(x, y)$ ფუნქციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

- (1) მის ფურიეს ორმაგ $S[F]$ მწკრივს არ გააჩნია მართკუთხედებით კრებადობის წერტილი (იხ. თავი 6, პარაგრაფი 6.3);
- (2) მასთან ასოცირებული ფურიეს ერთგანზომილებიანი $S[F]_1$ და $S[F]_2$ მწკრივები კრებადია თითქმის ყველა $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$ წერტილზე ერთი და იგივე $F(x, y)$ მნიშვნელობისკენ (იხ. თავი 6, თეორემები 6.3.1-6.3.3);
- (3) მისი განმეორებითი ორივე მწკრივი კრებადია თითქმის ყველა $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$ წერტილზე ერთი და იგივე $F(x, y)$ მნიშვნელობისკენ (იხ. თავი 8, თეორემა 8.9.2);
- (4) მისი ორმაგი $S[F]$ მწკრივის მართკუთხოვანი კერძო ჯამების ნებისმიერი ქვემიმდევრობა $s_{m_k, n_k}(F; x, y)$, სადაც $m_k \leq m_{k+1}$ და $n_k \leq n_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, კრებადია თითქმის ყველა $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$ წერტილზე ერთი და იგივე $F(x, y)$ მნიშვნელობისკენ (იხ. თავი 8, თეორემა 8.12.1):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{m_k, n_k}(F; x, y) = F(x, y). \quad (8.12.2)$$

კერძოდ, თითქმის ყველა $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$ წერტილზე ადგილი აქვს ტოლობას (იხ. თავი 8, თეორემა 8.12.2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{nn}(F; x, y) = F(x, y); \quad (8.12.3)$$

- (5) (8.12.2) და (8.12.3) ტოლობებით გამოსახული თვისებები ფორმულირდება შემდეგნაირადაც (იხ. თავი 8, თეორემა 8.12.4): მართკუთხედთა ნებისმიერი მონოტონური $R_1 \subseteq R_2 \subseteq R_3 \subseteq \dots$ მიმდევრობისთვის, რომელთა გვერდები პარალელურია საკოორდინატოღერძების თითქმის ყველა $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$ წერტილზე, მართებულია ტოლობა

$$F(x, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_{mn}(F; x, y)_{(m, n) \in R_k}.$$

მაშასადამე, ფეფერმანის ორი ცვლადის ყველგან უწყვეტ $F(x, y)$ ფუნქციას გააჩნია რამდენიმე მნიშვნელოვანი თვისება, გარდა ერთისა — ფურიეს მისი ორმაგი მწკრივი მართკუთხედების მიხედვით განშლადია სიბრტყის ყველა წერტილზე!

დასკვნა 8.12.6. ორიცვლადის ჯამებადი $\phi(x, y)$ ფუნქციის ფურიეს ორმაგი $S[\phi]$ მწკრივი მართკუთხედების მიხედვით კრებადობისას სუსტ კავშირშია, საზოგადოდ, $\phi(x, y)$ ფუნქციასთან!

8.13 ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს ორმაგი მწკრივის კრებადობის საკმარისი პირობები

ახლა დაგვიხილავს წერტილის ჯვრისებრი δ -მიდამოს ცნება.

განსაზღვრა 8.13.1 ([25, გვ. 458]). $[-\pi, \pi]^2$ კვადრატის შიგა (x_0, y_0) წერტილის ჯვრისებრი δ -მიდამო, $\delta > 0$, ეწოდება შემდეგ სიმრავლე-გაერთიანებას

$$\{(x, y) : |x - x_0| < \delta, y \in [-\pi, \pi]\} \cup \{(x, y) : x \in [-\pi, \pi], |y - y_0| < \delta\}.$$

თეორემა 8.13.2 ([76, გვ. 711]). $f \in L[-\pi, \pi]^2$ ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ ორმაგი მწკრივი კრებადია $[-\pi, \pi]^2$ კვადრატის შიგა (x_0, y_0) წერტილზე მართკუთხედების მიხედვით, როცა (x_0, y_0) წერტილის ჯვრისებრი δ -მიდამოში არსებობს შემოსაზღვრული $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ და $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (ან $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$) კერძო წარმოებულები.

შემდეგი თეორემა იძლევა ფურიეს ორმაგი მწკრივის მართკუთხედების მიხედვით მოცემულ წერტილზე კრებადობის საკმარისი პირობებს ფუნქციის მნიშვნელობისკენ იმავე წერტილზე.

თეორემა 8.13.3 ([47, გვ. 219]). ვთქვათ, $[-\pi, \pi]^2$ კვადრატის შიგა წერტილების სიმრავლეზე $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია და გააჩნია შემოსაზღვრული $\frac{\partial f}{\partial x}$ და $\frac{\partial f}{\partial y}$ კერძო წარმოებულები. თუ $[-\pi, \pi]^2$ კვადრატის რაიმე შიგა (x_0, y_0) წერტილს გააჩნია ისეთი მიდამო, რომლის ყოველ წერტილზე არსებობს ამ მიდამოში უწყვეტი შერეული $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (ან $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$) კერძო წარმოებული, მაშინ f ფუნქციის $S[f]$ ფურიეს მწკრივი კრებადია პრინგსპაიმის აზრით (x_0, y_0) წერტილზე $f(x_0, y_0)$ მნიშვნელობისკენ. თუკი, $f(x, y)$ ფუნქცია 2π პერიოდულია და უწყვეტი მთელს სიბრტყეზე და, გარდა ამისა, მას გააჩნია $[-\pi, \pi]^2$ კვადრატის ყოველ წერტილზე $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ და $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (ან $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$) უწყვეტი წარმოებულები, მაშინ

$$S[f](x, y) = f(x, y)$$

ტოლობას ადგილი აქვს ყოველ (x, y) წერტილზე.

მაგალითი 8.13.4 ([47, გვ. 220]).

$$1. \quad xy = 4 \sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{\sin mx \sin ny}{mn}, \text{ როცა } -\pi < x < \pi, -\pi < y < \pi;$$

$$2. \quad xy = \pi^2 - 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx}{m} - 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny}{n} + 4 \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\sin mx \sin ny}{mn},$$

როცა $0 < x < 2\pi, 0 < y < 2\pi$.

შემდეგ თეორემაში გამოყენებულია მთელს სიბრტყეზე უწყვეტი და თითოეული ცვლადის მიმართ 2π პერიოდული $f(x, y)$ ფუნქციის უწყვეტობის მოდული

$$\omega(\delta, f) = \sup_{(x-\delta)^2 + (y-t)^2 \leq \delta^2} |f(x, y) - f(s, t)|.$$

თეორემა 8.13.5 ([10]). თუ რაიმე დადებითი ε რიცხვისთვის ადგილი აქვს

$$\omega(\delta, f) = O\left(\lg^{-1-\varepsilon} \frac{1}{\delta}\right), \quad \delta \rightarrow +0$$

ტოლობას, მაშინ f ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ ორმაგი მწკრივი კრებადია პრინგსპაიმის აზრით (მართკუთხედების მიხედვით) თითქმის ყველგან.

დაბოლოს, მართებულია

თეორემა 8.13.6 ([50, გვ. 484]). თუ თითოეული ცვლადის მიმართ 2π პერიოდულ და $[-\pi, \pi]^2$ კვადრატზე ჯამებად $f(x, y)$ ფუნქციას გააჩნია მთელ სიბრტყეზე შემოსაზღვრული $\frac{\partial f}{\partial x}$ და $\frac{\partial f}{\partial y}$ კერძო წარმოებულები და, გარდა ამისა, თუ რომელიმე (x_0, y_0) წერტილის მიდამოში გააჩნია შერეული $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (ან $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$) წარმოებული, რომელიც უწყვეტია (x_0, y_0) წერტილზე, მაშინ f ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ ორმაგი მწკრივი კრებადია პრინგსპაიმის აზრით (x_0, y_0) წერტილზე $f(x_0, y_0)$ მნიშვნელობისკენ:

$$S[f](x_0, y_0) = f(x_0, y_0).$$

8.14 ფურიეს ორმაგი მწკრივის წევრობრივი ინტეგრების შესახებ

1. ბ. რიმანი იყო პირველი, რომელმაც ტრიგონომეტრიული მწკრივით ფუნქციის წარმოდგენის პრობლემა დასვა და გადაწყვიტა (1854 წ.). ამ პრობლემის გადაწყვეტის მიზნით

რიმანიმ მოახდინა შემოსაზღვრულკოეფიციენტებიანი ტრიგონომეტრიული მწკრივის წევრობრივი ინტეგრება ორჯერ და ამგვარად მიღებული უწყვეტი ფუნქციის, რომელსაც ეწოდება რიმანის ფუნქცია აღებული მწკრივისთვის, დიფერენციალურ თვისებებს დაუკავშირა ფუნქციის წარმომდგენი ტრიგონომეტრიული მწკრივის შეჯამებადობა რიმანის მეთოდით. ტრიგონომეტრიული მწკრივის წევრობრივი ინტეგრების რიმანის იდეა, ფურიეს მწკრივებისთვის გამოიყენა ა. ლებეგმა და დაადგინა შესანიშნავი ფაქტი: ჯამებადი ფუნქციის შესაბამისი ფურიეს მწკრივის წევრობრივი ინტეგრებით მიიღება აღებული ჯამებადი ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალისკენ თანაბრად კრებადი მწკრივი. ლებეგის ეს თეორემა მართებულია ფურიეს ისეთი მწკრივებისთვისაც, რომლებიც განშლადია ყველა წერტილზე (კოლმოგოროვის მწკრივი) (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.15).

დროთა განმავლობაში გამოვლინდა დიდი განსხვავება ფურიეს ერთჯერად და ფურიეს ორჯერად მწკრივებს შორის: უწყვეტი ფუნქციის ფურიეს ერთჯერადი მწკრივი კრებადია თითქმის ყველგან, კარლესონის ცნობილი თეორემის ძალით (1966 წ.), ხოლო ორი ცვლადის უწყვეტი ფუნქციის ფურიეს ორჯერადი მწკრივი შეიძლება განშლადი იყოს ყველა წერტილზე — ფეფერმანის 1971 წლის თეორემა. უკანასკნელმა შედეგმა ძალიან შეუშალა ხელი (იდეურად), ლებეგის თეორემის ანალოგის დადგენას ფურიეს ორმაგი მწკრივებისთვის. სადღეისოდ, ეს ამოცანა გადამწყვეტილია დადებითად. სათანადო შედეგების ჩამოყალიბებამდე, გავიხსენოთ ლებეგის თეორემა ფურიეს ორივე ფორმის ერთჯერადი მწკრივებისთვის.

თეორემა 8.14.1 (იხ. თავი 4, პარაგრაფი (4.15), პუნქტები 1–3). თუ 2π პერიოდული და $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი f ფუნქციის ფურიეს მწკრივებია

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{და} \quad f \sim c_0 + \sum_{|n| \geq 1} c_n e^{inx},$$

მაშინ, თანაბრად $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე, ადგილი აქვს

$$\int_0^x f(t) dt = \begin{cases} \frac{a_0}{2} \int_0^x dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt) dt, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \sin nx - b_n \cos nx) \end{cases}$$

და

$$\int_0^x f(t) dt = \begin{cases} c_0 \int_0^x dt + \sum_{|n| \geq 1} \int_0^x c_n e^{inx} dt. \\ i \sum_{|n| \geq 1} \frac{c_n}{n} + c_0 x - i \sum_{|n| \geq 1} \frac{1}{n} c_n e^{inx} \end{cases} \quad (8.14.1)$$

ტოლობებს, შესაბამისად. გარდა ამისა, ადგილი აქვს ტოლობებსაც

$$\sum_{|n| \geq 1} \frac{c_n}{n} = -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x) dx. \quad (8.14.2)$$

2. ლებეგის თეორემა 8.14.1-ის განზოგადებანი, ფურიეს ორივე სახის ორჯერადი მწკრივებისთვის შემდეგია.

თ ე ო რ ე მ ა 8.14.2 ([67]). თითოეული ცვლადის მიმართ 2π პერიოდული და $[0, 2\pi]^2$ კვადრატზე ჯამებადი ყოველი f ფუნქციის ფურიეს

$$f \sim c_{00} + \sum_{|m| \geq 1} c_{m0} e^{imx} + \sum_{|n| \geq 1} c_{0n} e^{iny} + \sum_{|m| \geq 1, |n| \geq 1} c_{mn} e^{i(mx+ny)}$$

ექსპონენტური (კომპლექსური ფორმის) მწკრივისთვის

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^y f(t, \tau) dt d\tau \\ = c_{00}xy + iy \sum_{|m| \geq 1} \frac{1}{m} c_{m0}(1 - e^{imx}) + ix \sum_{|n| \geq 1} \frac{1}{n} c_{0n}(1 - e^{iny}) \\ - \sum_{|m| \geq 1, |n| \geq 1} \frac{1}{mn} c_{mn}(1 - e^{imx})(1 - e^{iny}) \end{aligned} \quad (8.14.3)$$

ტოლობა სრულდება თანაბრად $[0, 2\pi]^2$ კვადრატზე.

შ ე დ ე გ ი 8.14.3 ([67]). მართებულია

$$\sum_{|m| \geq 1, |n| \geq 1} \frac{c_{mn}}{mn} = - \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{b_{mn}}{mn} \quad (8.14.4)$$

ტოლობა, სადაც b_{mn} არის ფურიეს კოეფიციენტი $\sin mx \sin ny$ ნამრავლთან შემდეგი დაშლის მიხედვით

$$\begin{aligned} f \sim \frac{1}{4} a_{00} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (a_{m0} \cos mx + d_{m0} \sin mx) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{0n} \cos ny + c_{0n} \sin ny) \\ + \sum_{m,n=1}^{\infty} (a_{mn} \cos mx \cos ny + b_{mn} \sin mx \sin ny \\ + c_{mn} \cos mx \sin ny + d_{mn} \sin mx \cos ny). \quad (8.14.5) \end{aligned}$$

3. (8.14.4) ტოლობის მარცხენა მხარე ცნობილი იქნება, როცა გვეცოდინება ამავე ტოლობის მარჯვენა მხარე.

ამ მიმართულებით მართებულია

თეორემა 8.14.4 ([65]). თუ f არის 2π პერიოდული თითოეული ცვლადის მიმართ და ჯამებადია $[0, 2\pi]^2$ კვადრატზე, მაშინ (8.14.5) მწკრივისთვის

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^y f(t, \tau) dt d\tau = \frac{1}{4} a_{00} xy \\ + \frac{1}{2} y \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^x (a_{m0} \cos mt + d_{m0} \sin mt) dt + \frac{1}{2} x \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^y (a_{0n} \cos n\tau + c_{0n} \sin n\tau) d\tau \\ + \sum_{m,n=1}^{\infty} \int_0^x \int_0^y [a_{mn} \cos mt \cos n\tau + b_{mn} \sin mt \sin n\tau \\ + c_{mn} \cos mt \sin n\tau + d_{mn} \sin mt \cos n\tau] dt d\tau \quad (8.14.6) \end{aligned}$$

ტოლობა სრულდება თანაბრად $[0, 2\pi]^2$ კვადრატზე.

შედეგი 8.14.5 ([65]). ადგილი აქვს

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{b_{mn}}{mn} = -\frac{1}{4} (A_{00} + a_{00}\pi^2) \\ - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \beta_m + \frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} d_{m0} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \delta_n + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} c_{0n} \end{aligned}$$

ტოლობას, სადაც

$$\beta_m = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} y f(x, y) \sin mx \, dx \, dy, \quad \delta_n = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} x f(x, y) \sin ny \, dx \, dy,$$

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(t, \tau) \, dt \, d\tau$$

$$-y \int_0^x \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t, y) \, dy \right) dt - x \int_0^y \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, \tau) \, dx \right) d\tau,$$

$$A_{00} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x, y) \, dx \, dy.$$

შ ე დ ე გ ი 8.14.6 ([65]). (8.14.6) ტოლობა საშუალებას იძლევა განვსაზღვროთ ფუნქცია თითქმის ყველგან $[0, 2\pi]^2$ კვადრატზე, როცა ცნობილია მისი ფურიეს კოეფიციენტები. ამისთვის საჭიროა მოვახდინოთ ამ კოეფიციენტებიანი ფურიეს მწკრივის წევრობრივი ინტეგრება $[0, x] \times [0, y]$ მართკუთხედზე და ამ გზით მიღებული ფუნქციის შერეული კერძო წარმოებული იქნება საძიებელი ფუნქცია, რომელიც თითქმის ყველგან განსაზღვრულია $[0, 2\pi]^2$ კვადრატზე.

4. ცვლადსაზღვრებიანი ორმაგი ინტეგრალის პერიოდულობის პირობები.
ფურიეს

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ერთჯერად მწკრივთან დაკავშირებით, ზოგიერთი თეორემის დამტკიცების გამარტივების მიზნით უშვებენ, რომ $a_0 = 0$. ამისთვის კი აუცილებელია და საკმარისი $\int_0^{2\pi} f(x) \, dx = 0$ ტოლობის შესრულება, რაც ეკვივალენტურია f ფუნქციის $F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$ ცვლადსაზღვრიანი ინტეგრალის 2π პერიოდულობის (იხ. თავი 1, პარაგრაფი 1.2, მტკიცება 1.2.6).

ფურიეს ორმაგ მწკრივებთან დაკავშირებული ზოგიერთი ფაქტის დადგენის გამარტივების მიზნით, საჭირო ხდება (8.14.5) მწკრივში ნულის ტოლი იყოს a_{00}, a_{m0}, d_{m0} ($m = 1, 2, \dots$) და a_{0n}, c_{0n} ($n = 1, 2, \dots$) კოეფიციენტები. ეს კი კავშირშია $[0, 2\pi]^2$ კვადრატზე

ჰამებადი $f(x, y)$ ფუნქციის ცვლადსაზღვრებიანი

$$I_f(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(t, \tau) dt d\tau$$

ორმაგი ინტეგრალის 2π პერიოდულობასთან x და y ცვლადების მიმართ ცალ-ცალკე.

წინადადება 8.14.7 ([67]). $I_f(x, y)$ ინტეგრალის 2π პერიოდულობისთვის თითოეული ცვლადის მიმართ, აუცილებელი და საკმარისია, რომ შესრულდეს ტოლობები

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^y f(x, \tau) d\tau \right) dx &= 0 \quad \text{ყველა } y\text{-თვის,} \\ \int_0^x \left(\int_0^{2\pi} f(t, y) dy \right) dt &= 0 \quad \text{ყველა } x\text{-თვის.} \end{aligned}$$

თეორემა 8.14.8 ([67]). $I_f(x, y)$ ინტეგრალის 2π პერიოდულობისთვის თითოეული ცვლადის მიმართ, აუცილებელია და საკმარისი ადგილი ჰქონდეს შემდეგ ტოლობებს

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x, y) dy &= 0 \quad \text{თითქმის ყველა } x \in [0, 2\pi]\text{-თვის.} \\ \int_0^{2\pi} f(x, y) dx &= 0 \quad \text{თითქმის ყველა } y \in [0, 2\pi]\text{-თვის.} \end{aligned}$$

თეორემა 8.14.9 ([67]). $I_f(x, y)$ ინტეგრალის 2π პერიოდულობისთვის თითოეული ცვლადის მიმართ f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობებს:

(1) (8.14.5) მწკრივიდან

$$a_{00} = 0, \quad a_{m0} = 0 = d_{m0} \quad (m \geq 1), \quad a_{0n} = 0 = c_{0n} \quad (n \geq 1);$$

(2) (8.14.3) მწკრივიდან

$$c_{00} = 0, \quad c_{m0} = 0 \quad (|m| \geq 1), \quad c_{0n} = 0 \quad (|n| \geq 1).$$

შედეგი 8.14.10 ([67]). $f \in L[0, 2\pi]^2$ ფუნქციის შესაბამისი ცვლადსაზღვრიანი $I_f(x, y)$ ორმაგი ინტეგრალის 2π პერიოდულობა თითოეული ცვლადის მიმართ არის აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ $[0, 2\pi]^2$ კვადრატზე თანაბრად სრულდებოდეს ტოლობები

$$\int_0^x \int_0^y f(t, \tau) dt d\tau = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \left[b_{mn} \cos mx \cos ny + a_{mn} \sin mx \sin ny - d_{mn} \cos mx \sin ny - c_{mn} \sin mx \cos ny \right],$$

$$\int_0^x \int_0^y f(t, \tau) dt d\tau = - \sum_{|m| \geq 1, |n| \geq 1} \frac{1}{mn} c_{mn} (1 - e^{imx})(1 - e^{iny}).$$

8.15 ლოკალიზების რიმანის პრინციპის არამართებულობა ფურიეს ორმაგი მწკრივისთვის

როგორც ვიცით (იხ. თავი 4, პარაგრაფი 4.6, თეორემა 4.6.1), ფურიეს ერთჯერადი მწკრივისთვის ადგილი აქვს ლოკალიზების რიმანის შემდეგ პრინციპს.

თეორემა 8.15.1 (რიმანი). 2π პერიოდული $f \in L[0, 2\pi]$ ფუნქციის $S[f]$ ფურიეს მწკრივის კრებადობა ან განშლადობა რაიმე x_0 წერტილზე დამოკიდებულია მხოლოდ და მხოლოდ f ფუნქციის მნიშვნელობებზე x_0 წერტილის ნებისმიერად მცირე მიდამოში, ე.ი. $S[f]$ მწკრივის კრებადობა-განშლადობაზე გავლენას ვერ ახდენს f ფუნქციის მნიშვნელობები x_0 წერტილის მიდამოს გარეთ მდებარე წერტილებზე.

ბუნებრივია კითხვა: მართებულია თუ არა ლოკალიზების რიმანის პრინციპი ფურიეს ორმაგი მწკრივისთვის? აღმოჩნდა, რომ არაა მართებული. 1928 წლის ნაშრომში ლ. ტონელიმ დაადგინა ორი ცვლადის ჯამებადი ისეთი ფუნქციის არსებობა, რომელიც ნულის ტოლია რაღაც წრის ყოველ წერტილზე და, ამავე დროს, მისი ფურიეს ორმაგი მწკრივი არ არის კრებადი ამ წრის ცენტრში მართკუთხედების მიხედვით.

იმავე ნაშრომში ტონელიმ დაადგინა, რომ ლოკალიზების რიმანის პრინციპი ძალაშია ჯვრისებრი მიდამოს შემთხვევაში (იხ. [17, გვ. 6], [25, გვ. 457-458]).

ცნობილია ლოკალიზების რიმანის პრინციპის დარღვევები მწკრივთა შეჯამებადობის ზოგიერთი მეთოდისთვის (იხ. [57, გვ. 206-211]).

8.16 ორი ცვლადის ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს განმეორებითი მწკრივების R^2 შეჯამებადობა

ვთქვათ, თითოეული ცვლადის მიმართ 2π პერიოდული $f(x, y)$ ფუნქცია ჯამებადია $[-\pi, \pi]^2$ კვადრატზე. განვიხილოთ $f(x, y)$ ფუნქციის ფურიეს ექსპონენტური ორმაგი მწკრივი

$$f \sim \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} c_{mn} e^{imx} e^{iny}, \quad (8.16.1)$$

სადაც

$$c_{mn} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) e^{-imx} e^{-iny} dx dy. \quad (8.16.2)$$

(8.16.1) მწკრივისგან წარმოქმნილ განმეორებითი

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{mn} e^{imx} \right) e^{iny}, \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{mn} e^{iny} \right) e^{imx}$$

მწკრივებს გააჩნია თეორემა 8.16.1-ში მითითებული თვისებები.

თეორემა 8.16.1 ([69]). $[-\pi, \pi]^2$ კვადრატზე ჯამებადი f ფუნქცია თითქმის ყველა (x, y) წერტილზე აკმაყოფილებს შემდეგ ორ ტოლობას

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{mn} e^{imx} \left(\frac{\sin mh}{mh} \right)^2 \right] e^{iny} \left(\frac{\sin nk}{nk} \right)^2 = f(x, y), \quad (8.16.3)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\lim_{k \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{mn} e^{iny} \left(\frac{\sin nk}{nk} \right)^2 \right] e^{imx} \left(\frac{\sin mh}{mh} \right)^2 = f(x, y). \quad (8.16.4)$$

დამტკიცება. (8.16.2) ტოლობა გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$c_{mn} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, \tau) e^{-in\tau} d\tau \right] e^{-imt} dt.$$

ამიტომ

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{mn} e^{imx} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, \tau) e^{-in\tau} d\tau \right] e^{-imt} dt \right\} e^{imx}, \quad (8.16.5)$$

რომლის მარჯვენა მხარე წარმოადგენს $\{e^{imx}\}$ სისტემის მიმართ ფურიეს მწკრივს $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი

$$\psi_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, \tau) e^{-in\tau} d\tau$$

ფუნქციისთვის. ამიტომ (8.16.5) ტოლობის მარცხენა მხარე R^2 შეჯამებადია თითქმის ყველა $x \in [-\pi, \pi]$ წერტილზე

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, \tau) e^{-in\tau} d\tau$$

მნიშვნელობისკენ, ანუ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{mh} e^{imx} \left(\frac{\sin mh}{mh} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, \tau) e^{-in\tau} d\tau. \quad (8.16.6)$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარე წარმოადგენს $f(x, y)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტს $\{e^{iny}\}$ სისტემის მიმართ. ამიტომ

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, \tau) e^{-in\tau} d\tau \right] e^{iny} \left(\frac{\sin nk}{nk} \right)^2 = f(x, y) \quad (8.16.7)$$

თითქმის ყველა $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$ წერტილზე.

(8.16.6) და (8.16.7) ტოლობებიდან გამომდინარეობს (8.16.3) ტოლობა. ანალოგიურად მტკიცდება (8.16.4) ტოლობაც. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 8.16.2. განმეორებითი მწკრივების კრებადობისთვის დამტკიცებული 8.9.1 თეორემის ანალოგს R^2 შეჯამებადობისთვის წარმოადგენს თეორემა 8.16.1.

ლიტერატურა

- [1] ჭელიძე ვლ., ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორია. ცოდნა, თბილისი, 1964.
- [2] ხარაძე ა., ჭელიძე ვლ., ხვედელიძე ბ., ქარცივაძე ი., მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. I. თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1952.
- [3] ხარაძე ა., ჭელიძე ვლ., ხვედელიძე ბ., ქარცივაძე ი., მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. II. თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1961.
- [4] ძაგნიძე ო., ნამდვილ ცვლადთა ფუნქციების უწყვეტობა და დიფერენცირებადობა. თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2010.
- [5] ჟაკი ი., რიცხვითი ორმაგი მწკრივის რიმანის მეთოდით შეჯამებადობის შესახებ. სა-ქართველოს სსრ მეცნ. აკად. მოამბე XIII (1952), no. 10, 587–593.
- [6] Адександров П. С., Колмогоров А. Н., *Введение в теорию функций действительного переменного*. Государственное объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, Москва–Ленинград, 1938.
- [7] Алексич Г., *Проблемы сходимости ортогольных рядов*. ИЛ, Москва, 1963 (перевод с английского).
- [8] Бари Н. К., *Тригонометрические ряды*. Государственное издательство физико-математических литературы, Москва, 1961.
- [9] Бахбух М., О сходимости двойных рядов. *Матем. заметки* 13 (1973), no. 3, 341–350.
- [10] Бахбух М., О достаточных условиях сходимости двойных рядов по прямоугольникам. *Матем. заметки* 15 (1974), no. 3, 835–838.
- [11] Бицадзе А. В., *Основы теории аналитических функций комплексного переменного*. Наука, Москва, 1972.
- [12] Бохнер С., Мартин У. Т., *Функции многих комплексных переменных*. ИЛ, Москва, 1951 (перевод с английского).

- [13] Валие Пуссен Ш. Ж., *Курс анализа бесконечно малых*, т. I. Государственное технико-теоретическое издательство, 1933 (перевод с французского).
- [14] Гахария К. К., Суммирование двойных тригонометрических рядов методом Римана. *Матем. сб.* **28(70)** (1951), no. 2, 337–350.
- [15] Гельбаум Б., Олмстед Дж., *Контрпримеры в анализе*. Мир, Москва, 1967 (перевод с английского).
- [16] Гермейер Ю. Б., О симметричных производных числах. *Матем. сб.* **12(54)** (1943), no. 1, 121–144.
- [17] Голубов Б. И., Кратные ряды и интегралы Фурье. *Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ* **19** (1982), 3–54.
- [18] Джваршшвили, О суммируемости двойных тригонометрических рядов методом Римана. *Труды Тбилисс. матем. ин-та им. Размадзе* **20** (1954), 157–166.
- [19] Дирикле-Лежен П. Г., Риман Б., Липшиц Р., *Разложение функций в тригонометрические ряды*. Пер. с немецкого Грузинцева Г. А. и Бернштейна С. Н., Харьков. 1914.
- [20] Жижиашвили Л. В., О некоторых вопросах из теории простых и кратных тригонометрических и ортогональных рядов. *Успехи мат. наук* **28** (1973), no. 2(170), 65–119.
- [21] Жижиашвили Л. В., О простых и кратных рядах Фурье. *Докл. АН СССР* **225** (1975), no. 2, 256–258.
- [22] Жижиашвили Л. В., О тригонометрических рядах Фурье. *Матем. сб.* **100(142)** (1976), no. 4, 580–609.
- [23] Жижиашвили Л. В., О сходимости и суммируемости тригонометрических рядов Фурье. *Матем. заметки* **19** (1976), no. 6, 887–898.
- [24] Зигмунд А., *Тригонометрические ряды*, т. I. Мир, Москва, 1965 (перевод с английского).
- [25] Зигмунд А., *Тригонометрические ряды*, т. II. Мир, Москва, 1965 (перевод с английского).
- [26] Зобин Н. М., Крейн С. Г., *Математический анализ гладких функций*. Изд-во Воронеж. ун-та, Воронеж, 1978.

- [27] Кегелян Э. М., О граничном поведении неограниченных аналитических функций, заданных в круге. *Доклады АН Арм. ССР* 42 (1966), no. 2, 65–72.
- [28] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*. Наука, Москва, 1989.
- [29] Конягин С. В., О пределах неопределенности тригонометрических рядов. *Матем. заметки* 44 (1988), no. 6, 770–784.
- [30] Лузин Н. Н., *Интеграл и тригонометрический ряд*. ГИТТЛ, Москва—Ленинград, 1951.
- [31] Математическая энциклопедия, т. 4. Советская энциклопедия, Москва, 1984.
- [32] Математическая энциклопедия, т. 5. Советская энциклопедия, Москва, 1985.
- [33] Натансон И. П., *Теория функций вещественной переменной*. Наука, Москва, 1974.
- [34] Натансон И. П., *Теория функций вещественной переменной*. Гостехиздат, Москва, 1950.
- [35] Неванлинна Р., *Однозначные аналитические функции*. ГИТТЛ, Москва—Ленинград, 1941 (перевод с немецкого).
- [36] Никольский С. М., *Курс математического анализа*, т. I. Наука, Москва, 1990.
- [37] Носиро К., *Предельные множества*. ИЛ, Москва, 1963 (перевод с английского).
- [38] Привалов И. И., *Граничные свойства аналитических функций*. Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, Москва, 1950.
- [39] Привалов И. И., Свойства рядов по ортогольным функциям. *Матем. сб.* 29 (1914), no. 2, 182–185.
- [40] Привалов И. И., О дифференцировании рядов Фурье. *Матем. сб.* 30 (1916), 320–324.
- [41] Плеснер А. И., О сопряженных тригонометрических рядах. *ДАН СССР* 4 (1935), 235–238.
- [42] Риман Б., *Сочинения*. Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1948 (перевод с немецкого).
- [43] Справочная математическая библиотека: Математический анализ — дифференцирование и интегрирование. Наука, Москва, 1961.
- [44] Тсвзадзе Н. Р., О сходимости двойного ряда Фурье функции, суммируемой с квадратом. *Сообщ. АН ГССР* 58 (1970), no. 2, 277–279.

- [45] Тетунашвили Ш. Т., О некоторых кратных функциональных рядах и решение проблемы единственности кратных тригонометрических рядов для сходимости по Прингсхейму. *Матем. сб.* 182 (1991), no. 8, 1158–1176.
- [46] Титчмарш Е., *Теория функций*. Наука, Москва, 1980 (перевод с английского).
- [47] Толстов Г. П., *Ряды Фурье*. Наука, Москва, 1980.
- [48] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. П., *Курс современного анализа*, часть I. *Основные операции анализа*. Наука, Москва, 1962 (перевод с английского).
- [49] Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. II. Наука, Москва, 1959.
- [50] Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. III. Наука, Москва, 1959.
- [51] Харди Г. Х., Рогозинский В. В., *Ряды Фурье*. Физматгиз, Москва, 1959 (перевод с английского).
- [52] Хиггинс А. Я., Исследования о строении измеримых функций. II. Опыт сравнительной характеристики обобщений понятия производной. *Матем. сб.* 31 (1924), no. 3-4, 377–433.
- [53] Челидзе В. Г., Об абсолютной сходимости двойных рядов Фурье. *Докл. АН СССР* 54 (1946), no. 2, 117–120.
- [54] Челидзе В. Г., Некоторые методы суммирования двойных рядов и двойных интегралов. Издательство Тбилисского университета, Тбилиси, 1977.
- [55] Шилов Г. Е., *Математический анализ (функции одного переменного)*, Части 1-2. Наука, Москва, 1970.
- [56] Янушаускас А. И., *Двойные ряды*. Наука, Москва, 1980.
- [57] Янушаускас А. И., *Кратные тригонометрические ряды*. Наука, Москва, 1986.
- [58] Ash J. M., Welland G. V., Convergence, uniqueness, and summability of multiple trigonometric series. *Trans. Amer. Math. Soc.* 163 (1972), 401–436.
- [59] Antonov N. Yu., Convergence of Fourier series. Proceedings of the XX Workshop on Function Theory (Moscow, 1995). *East J. Approx.* 2 (1996), no. 2, 187–196.
- [60] Bagemihl F., Seidel W., Some boundary properties of analytic functions. *Math. Z.* 61 (1954), 186–199.

- [61] Carleman T., Sur un théorème de Weierstraß. (French) *Arkiv för Mat. B* **20** (1927), no. 4, 5 p.
- [62] Carleson L., On convergence and growth of partial sums of Fourier series. *Acta Math.* **116** (1966), 135–157.
- [63] Chandrasekharan K., Minakshisundaram S., Some results on double Fourier series. *Duke Math. J.* **14** (1947), 731–753.
- [64] Dzagnidze O., The smoothness of functions of two variables and double trigonometric series. *Real Anal. Exchange* **34** (2009), no. 2, 451–470.
- [65] Dzagnidze O., On the behaviour of series, obtained by termwise integration of double trigonometric series. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* **166** (2014), 31–48.
- [66] Dzagnidze O., One-dimensional Fourier series of a function of many variables. *Trans. A. Razmadze Math. Inst.* **171** (2017), no. 2, 167–170.
- [67] Dzagnidze O., Symmetric convergence of double series whose coefficients are the quotients of divisions of complex Fourier coefficients by their indexes. *Georgian Math. J.* **24** (2017), no. 4, 507–516.
- [68] Dzagnidze O., Smoothness conditions for functions of two variables. *Georgian Math. J.* **28** (2021), no. 6, 859–865.
- [69] Dzagnidze O., Tsivtsivadze I., Representations of a summable functions of two variables by iterated and associated Fourier series. *Georgian Math. J.* (submitted).
- [70] Dzagnidze O., Tsivtsivadze I., On the double limit associated with Riemann's summation method. *Trans. A. Razmadze Math. Inst.* **173** (2019), no. 1, 33–35.
- [71] Fatou P., Séries trigonométriques et séries de Taylor. (French) *Acta Math.* **30** (1906), no. 1, 335–400.
- [72] Fefferman Ch., On the divergence of multiple Fourier series. *Bull. Amer. Math. Soc.* **77** (1971), 191–195.
- [73] Fefferman Ch., On the convergence of multiple Fourier series. *Bull. Amer. Math. Soc.* **77** (1971), 744–745.
- [74] Gogoladze L., On the problem of convergence of double functional series to $+\infty$. *Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat.* **56** (2021), no. 1, 35–44.

- [75] Hunt R. A., On the convergence of Fourier series. 1968 *Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues (Proc. Conf., Edwardsville, Ill., 1967)*, pp. 235–255, *Southern Illinois Univ. Press, Carbondale, Ill.*
- [76] Hobson E. W., *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier Series*. 2nd ed. revised and enlarged. Vol. I (1921), II. University Press, Cambridge. 1926.
- [77] Hoffman K., *Analysis in Euclidean Space*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.
- [78] Ikegami T., On Poisson integrals. *Proc. Japan Acad.* **37** (1961), 14–17.
- [79] Marcinkiewicz J., Zygmund A., On the differentiability of functions and summability of trigonometrical series. *Fundam. Math.* **26** (1936), 1–43.
- [80] Meyerson M. D., Every power series is a Taylor series. *Amer. Math. Monthly* **88** (1981), no. 1, 51–52.
- [81] Reves G. E., Szász O., Some theorems on double trigonometric series. *Duke Math. J.* **9** (1942), 693–705.
- [82] Roth A., Approximationseigenschaften und Strahlengrenzwerte meromorpher und ganzer Funktionen. (German) *Comment. Math. Helv.* **11** (1938), no. 1, 77–125.
- [83] Rinne D., Rectangular and iterated convergence of multiple trigonometric series. *Real Anal. Exchange* **19** (1993/94), no. 2, 644–650.
- [84] Rudin W., Radial cluster sets of analytic functions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **60** (1954), no. 6.
- [85] Schwarz H. A., Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. (German) *J. Reine Angew. Math.* **74** (1872), 218–253.
- [86] Sjölin P., On the convergence almost everywhere of double Fourier series. *Ark. Mat.* **14** (1976), no. 1, 1–8.
- [87] Stein E. M., Zygmund A., On the differentiability of functions. *Studia Math.* **23** (1963/64), 247–283.
- [88] Waterman D., On the summability of the differentiated Fourier series. *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 109–112.
- [89] Young W. H., A note on trigonometrical series. *Messenger Math.* **38** (1909), 44–48.
- [90] Zygmund A., Smooth functions. *Duke Math. J.* **12** (1945), 47–76.
- [91] Zygmund A., *Trigonometric Series*. 2nd ed. Vols. I, II. Cambridge University Press, New York, 1959.

Index

- R^2 მეთოდი, 276
 R^2 მეთოდის რეგულარულობა, 259
 R^2 -საშუალო, 259
- აბელის განზოგადებული თეორემა, 149, 150
აბელის გარდაქმნა, 146
აბელის თეორემა ფუნქციური მწკრივისთვის, 151
აბელის მეორე თეორემა ხარისხოვანი მწკრივის ჯამის უწყვეტობაზე, 176
- არამხეობი გზა (ბილიკი), 214
ბეიდემილი, 239
ბესელის იგივეობა, 58, 63, 66
ბონეს ფორმულა, 128
განზოგადებული ჯამი, 42, 165
განსაზღვრა
 ლიპშიცი, 75
 ჟორდანი, 74
განტოლება
 ლაპლასის, 204
გარდაქმნა
 აბელის, 173
გლუვი ფუნქცია, 119
გული
 დირიხლეს, 103
 დირიხლეს გამარტივებული, 114
 დირიხლეს შეუღლებული, 103
 პუასონის, 207
 პუასონის შეუღლებული, 207
 ფეიერის, 192
დინის ნიშნის შედეგი, 162
დირიხლე, 106
ზალცვასერი, 124
ზეიდელი, 239
ზღვარზე გადასვლა მწკრივში, 181
ზღვარი
 არამხეობითი, 225
 თავისუფალი, 214
 კუთხური, 224
 რადიალური, 214, 224
 ქორდული, 224
 წირითი, 224
თეორემა
 აბელის, 146, 148
 ბორელის, 3, 184
 დანჟუა-ლუზინის, 96
 დიუბუა-რეიმონის, 285
 ვაიერშტრასის, 198
 ვალე-პუსენის, 131
 ვინერის, 79
 იანგის, 102, 133

კანტორ–ლებეგის, 96, 101
 კანტორის, 282, 284, 285
 კარლემანის, 238
 კოლმოგოროვის, 4
 ლებეგის, 49, 76, 134, 135, 142,
 250, 251
 ლებეგის, გერგენის, 134
 ლუზინის, 99, 236, 237, 273
 მენშოვის, 274
 მერსერის, 72
 პლესნერის, 80, 84, 112
 პრივალოვის, 102, 237
 ჟორდანის, 127
 რიმან–ლებეგის, 71, 203
 რიმანი–ლებეგი, 73
 რიმანის, 113, 259
 რიმანის მეორე, 263
 რიმანის პირველი, 263
 რისი–ფიშერი, 62
 რისი–ფიშერის, 61, 66
 ტაუბერის, 188
 ტონელის, 293
 ფატუს, 215, 220, 228, 234, 243
 ფეიერ–ლებეგის, 198, 213
 ფრობენიუსის, 177
 ფუბინის, 291
 შვარცის, 218, 280
 ხინჩინის, 122
 ინტეგრალი
 დირიხლეს, 107
 პუასონის, 203, 208
 პუასონის შუღლებული, 208
 ფეიერის, 192

კანტორი, 100
 კარლესონი, 165
 კოლმოგოროვის $K(x)$ ფუნქცია, 274
 კოში, 23
 კრებადობა
 აბსოლუტურად, 341
 ვიწრო აზრით, 331
 კვადრატების მიხედვით, 331
 კოშის აზრით, 99
 მართკუთხედების მიხედვით, 289
 მთავარი მნიშვნელობით, 47, 99
 ორმაგი მიმდევრობის
 კოშის აზრით, 27
 წრიული, 331
 კუთხურად მისწრაფება, 214
 კუთხური (არამხეობით) ზღვარი, 223
 კუთხური მიდამო, 228
 ლაგრანჟი, 120
 ლანდაუ, 190
 ლაპლასის განტოლება, 28
 ლემა
 აბელის, 146, 148
 ფატუს, 277
 ფეიერის, 190
 ლოკალიზების რიმანის პრინციპი, 333
 ლუზინი, 164
 ლუზინის პასუხი, 102
 მაგალითი
 დიუბუა–რეიმონის, 163
 ლებეგის, 163
 ფეიერის, 163
 მამფოთებელი მამრავლი, 5
 მიმდევრობა

- არითმეტიკული საშუალოების, 166
 შემოსაზღვრული ცვლილების, 150
 მწკრივი
 ფეიერის, 197
 ასოცირებული ხარისხოვანი, 172
 მაკლორენის, 3
 მწკრივთან ასოცირებული, 184
 მწკრივთან ასოცირებული
 ხარისხოვანი, 177
 ორმხრივი, 20, 23
 პუასონის მეთოდით შეჯამებადი, 172
 ტილორის, 3
 ფურიე-კოსინუს, 40
 ფურიე-ლებეგის, 38
 ფურიეს, 38
 ფურიეს ორმაგი (ორჯერადი), 331
 შეუღლებული ტრიგონომეტრიული,
 27
 ცალმხრივი, 24
 მწკრივის თანაბრად კრებადობის
 “ვაიერშტრასის ნიშანი”, 205
 მწკრივის მაჟორანტი (მეტობითი)
 მწკრივი, 242
 მწკრივის შემოფოთება, 5, 181
 მწკრივის შეჯამებადობის (A) მეთოდი
 ძლიერია შეჯამებადობის
 (C, 1) მეთოდზე, 181
 მწკრივისთვის
 რიმანის F ფუნქცია, 6, 263
 რიმანის ფუნქცია, 257, 282, 332, 358
 რიმანის ფუნქციის გლუვობა, 263
 მხები, 119
 მხები სიმრავლე, 225
 ნიშანი
 დინის, 4, 125
 ვალე-პუსენის, 4, 130
 იანგის, 133
 ლებეგ-გერგენის, 133
 ლებეგის, 4, 133
 ჟორდანის, 4, 127, 162
 ორთონორმული სისტემა
 სრული, 63
 ჩაკეტილი, 64
 ორმხრივ უსასრულო, 37
 პარსევალის განზოგადებული ტოლობა,
 70
 პარსევალის ტოლობა, 62, 65–69, 95
 პერიოდი, 11
 პირობა
 კოში-რიმანის, 274
 პრინგსჰაიმის აუცილებელი და საკმარისი
 პირობა, 4
 პრობლემა
 დირიხლეს, 218
 დირიხლეს განზოგადებული, 236
 პუასონ-აბელის (A) მეთოდი, 273
 რაიჰმანი, 124
 რეგულარული მეთოდი, 165
 რეგულარული შეჯამებადობის მეთოდი,
 167
 რიმანი, 119
 რიმანის R^2 მეთოდი, 273
 რუდინი, 239
 სავსებით რეგულარული შეჯამებადობის
 (A) მეთოდი, 176

სავსებით რეგულარული შეჯამებადობის
მეთოდი, 169

საშუალო

პუასონ-აბელის, 213, 241

ფეიერის, 192

საშუალოს სხვაობა, 197

სიმეტრიულად დიფერენცირებადი
ორი ცვლადის ფუნქცია, 314

სიმეტრიული კერძო ჯამი, 21, 47

სიმეტრიული კრებადობა, 21

სიმეტრიული მეორე სხვაობა, 253

სიმეტრიული წარმოებული, 253

სისტემა

ერთობლივ შემოსაზღვრული, 47

ორთოგონული, 16, 43

ორთონორმული, 43, 57, 59

სრული, 47

ფუნქციათა, 47

ჩაკეტილი, 64, 65

სწრაფვა, 214

ტრიგონომეტრიულ მწკრივთა
რიმანის თეორია, 5

ტრიგონომეტრიული მწკრივი
ექსპონენტური ფორმის, 19
კომპლექსური ფორმის, 19
ნამდვილი ფორმის, 19
ხარისხოვანი ტიპის, 22

ტრიგონომეტრიული სისტემა
ექსპონენტური ფორმის, 15
კომპლექსური ფორმის, 15
ნამდვილი ფორმის, 15

უტოლობა

ბერნულის, 51

ბესელის, 59, 72

მაკლორენ-კოშის, 265

ჟორდანის, 105

ფატუს, 277

ფატუ, 99, 141

ფატუს კითხვა, 102

ფეიერის მაგალითი, 191, 250

ფეფერმანი, 289

ფიხტენჰოლცი, 293

ფორმალურად წევრობრივი ინტეგრება,
252

ფორმალური ინტეგრება და
გაწარმოება, 87

ფორმულა

ღირისლეს, 139

კოში-ადამარის, 203

მუავრის, 204, 206

ოილერის (ეილერის), 20, 206

ფუნქცია

გლუვი, 120

გლუვი ორი ცვლადის, 307

კენტი, 7

კერძო გლუვი, 310

კვადრატით ჯამებადი, 332

კუთხურად განზოგადებულად
გლუვი, 322

კუთხურად გლუვი, 322

ლებეგის, 248

ლებეგის $l(x)$, 250

ლუწი, 7

პერიოდული, 11

სასრული ვარიაციით, 75

უწყვეტი წრეწირზე, 79

წრეწირზე უწყვეტი, 198
 ჯამებადია პერიოდზე, 16
 ფუნქციასთან ასოცირებული მწკრივები, 290
 ფურიე, 36
 ფურიეს განმეორებითი მწკრივი, 331
 ფურიეს მწკრივის წევრობრივი ინტეგრება, 135
 ფურიეს ფორმულები, 32
 შემოღობვა, 5
 შეჯამებადი
 ლებეგის ინტენსიური მეთოდით, 249
 მწკრივი L , 248
 ფეიერის მეთოდით, 194
 შეჯამებადობა, 165
 L და L^* მეთოდებით, 249
 ფეიერის მეთოდით, 191
 შეჯამებადობის (A) მეთოდის რეგულარულობა, 174
 შეჯამებადობის რიმანის R^2 მეთოდი, 256
 ჩეზარო-ფეიერის ($C, 1$) მეთოდი, 273
 ცალმხრივ დიფერენცირებადი
 ორი ცვლადის ფუნქცია, 318
 ცალმხრივი მხები, 119
 ძირითადი პერიოდი, 11
 წარმოებული
 აპროქსიმატული, 246
 ბორელის, 246
 ბორელის სიმეტრიული, 246
 მეორე რიგის, 254
 რიმან-შვარცის მეორე, 253, 254, 267, 280
 სიმეტრიული, 121

წერტილი
 რეგულარული, 125, 130
 ფუნქციის ლებეგის, 198
 წერტილის კუთხური (არამხებიითი) მისწრაფების პირობები, 225
 წრეწირზე უწყვეტი ფუნქციების სიმრავლე, 49
 ჰარდი, 190
 ჰენრიხ ვებერი, 259

წიგნში ციტირებულთა შესახებ

აბელი (Abel N. H., 1802-1829),
 ბარი (Бари Н. К., 1901-1961),
 ბერნული იოჰან I (Bernoulli J. I., 1667-1748),
 ბესელი (Bessel F. W., 1784-1846),
 ბონე (Bonnet P. O., 1819-1892),
 ბორელი (Borel E., 1871-1956),
 ბუნიაკოვსკი (Буняковский В. Я., 1804-1889),
 გოლუზინი (Голузин Г. М., 1906-1952),
 გერგენი (Gergon J. J., 1903-1967),
 გრუზინცევი (Грузинцев Г. А., 1881-1929),
 დანჟუა (Denjoy A., 1884-1973),
 დინი (Dini U., 1845-1918),
 დირიხლე (Dirichlet L. P. G., 1805-1859),
 დიუ ბუა რეიმონი (Du Bois-Reymond, 1831-1889),
 ეგოროვი (Егоров Д. Ф., 1869-1931),
 ვაიერშტრასი (Weierstrass K. T. B., 1815-1897),
 ვალე პუსენი (de la Vallée Poussin C. J., 1866-1922),
 ვებერი (Weber H., 1842-1913),
 ვინერი (Wiener N., 1894-1964),
 ზალცვასერი (Zalcwasser),
 ზიგმუნდი (Zygmund A., 1900-1992),
 იანგი (Young W. H., 1863-1942),
 კანტორი გ. (Cantor G. 1845-1918),
 კარლემანი (Cárleman T. Y. T., 1892-1949),
 კარლესონი (Carleson L., 1928-),
 კოლმოგოროვი (Колмогоров А. Н., 1903-1987),
 კოში (Cauchy A. L., 1789-1857),
 ლანდაუ (Landay E. G. H., 1877-1938),
 ლაგრანჟი (Lagrange J. L., 1736-1813),
 ლაპლასი (Laplace P. S., 1749-1827),
 ლებეგი (Lebesgue H. L., 1875-1941),

ლიპშიცი (Lipschitz R. O. S., 1832-1903),
 ლორანი (Laurent P. A., 1813-1854),
 ლუზინი (Лузин Н. Н., 1883-1950),
 მენშოვი (Меньшов Д. Е., 1892-1988),
 მერსერი (Mercer J., 1883-1932),
 მუავრი (Moivre A. de, 1667-1754),
 ოილერი (ეილერი) (Euler L., 1707-1783),
 ოსტროგრადსკი (Остроградский М. В., 1801-1862),
 პარსევალი (Parseval M. A., 1755-1836),
 პლესნერი (Плеснер А. И., 1900-1961),
 პრივალოვი (Привалов И. И., 1891-1941),
 პრინგსჰაიმი (Prinsheim A., 1850-1941),
 პუანკარე (Poincare H., 1854-1912),
 პუასონი (Poisson S. D., 1781-1840),
 ჟორდანი (Jordan M. E. C., 1838-1922),
 რიმანი (Riemann G. F. B., 1826-1866),
 რისი ფ. (Riesz F., 1880-1956),
 რისი მ. (Riesz M., 1886-1969),
 ტაუბერი (Tauber A., 1866-1942 საკონცენტრაციო ბანაკში),
 ფატუ (Fatou P. J. L., 1878-1929),
 ტოლსტოვი (Толстов Г. П., 1911-1981),
 ფეიერი (Fejer L., 1880-1959),
 ფიშერი (Fisher R. A., 1890-1962),
 ფიხტენგოლცი (Фихтенгольц Г. М., 1888-1959),
 ფრობენიუსი (Frobenius F. G., 1849-1917),
 ფურიე (Fourier J. B. J., 1768-1830),
 შვარცი (Schwarz H. A., 1843-1921),
 შტოლცი (Stolz O., 1842-1905),
 ჩეზარო (Cesaro E., 1859-1906),
 ხინჩინი (Хинчин А. Я., 1894-1959),
 ჰარდი (Hardy G. H., 1877-1947).

გამოცემაზე მუშაობდნენ:

ნინო ებრაღიძე

მარია ერქომაიშვილი

ლალი კურდღელაშვილი

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
გამომცემლობა

2024

0128 თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზირი 1
1, Ilia Tchavtchavadze Ave., Tbilisi 0179
Tel 995(32) 225 04 84, 6284/6279
<https://www.tsu.ge/ka/publishing-house>