

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

გიორგი ონიანი

ნამდვილი ანალიზის საფუძვლები



ქვეყნის დრო
განმანათლებლობა

წიგნი წარმოადგენს საუნივერსიტეტო სახელმძღვანელოს ნამდვილ ანალიზში. მასში თანამედროვე სამეცნიერო ტენდენციების გათვალისწინებითაა გადმოცემული ძირითადი საკითხები, დეტალურად მომისა და ლეგის ინტეგრალის კონსტრუქციებთან და მათ გამოყენებებთან. პარაგრაფების უმეტესობას თან ერთვის სხვადასხვა სირთულის თემატურ ამოცანათა ჯგუფი.

წიგნი გათვლილია მათემატიკის სპეციალობის სამივე აკადემიური საფეხურის სტუდენტებზე. ის აგრეთვე სასარგებლო იქნება მათემატიკური ანალიზის მიმართულებით მოღვაწე მკვლევართათვის.

რედაქტორი: საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის წევრი
ვახტანგ კოკილაშვილი

რეცენზენტები: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი
შაქრო ტეტუნაშვილი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი
დუგლას უგულაჟა

გამოცემულია ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის საუნივერსიტეტო საგამომცემლო საბჭოს გადაწყვეტილებით.

შინაარსი

წინასიტყვაობა	xi
თ ა ვ ი 1. სიმრავლის სიმძლავრე	1
§ 1. სიმძლავრის ცნება	1
§ 2. თვლადი სიმრავლეები	3
§ 3. ზოგიერთი პრინციპი, რომელიც უზრუნველყოფს სიმრავლეთა ეკვივალენტობას	9
§ 4. კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეები	12
§ 5. სიმძლავრეთა შედარება	18
თ ა ვ ი 2. ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეები $\mathbb{R}^n$ სივრცეში	23
§ 1. ღია და ჩაკეტილი წრფივი სიმრავლეების სტრუქტურა	23
§ 2. ღია სიმრავლის სტრუქტურა $\mathbb{R}^n$ სივრცეში	26
§ 3. ჩაკეტილი სიმრავლის სიმძლავრე	30
§ 4. კანტორის სიმრავლე	33
თ ა ვ ი 3. სიმრავლეთა კლასები	37
§ 1. სიმრავლეთა კლასების ძირითადი ტიპები	37
§ 2. ნახევარრგოლის თვისებები	40
§ 3. წარმოქმნილი კლასები	43
§ 4. ბორელის σ -ალგებრა	47
თ ა ვ ი 4. ზომა	49
§ 1. ზომა და კვაზიზომა	49
§ 2. ზომისა და კვაზიზომის გაგრძელება ნახევარრგოლიდან რგოლზე	52
§ 3. ზომისა და კვაზიზომის ზოგიერთი ელემენტარული თვისება	54
§ 4. ზომის უწყვეტობა	56
§ 5. მოცულობა	60

§ 6. მონაყვეთების I^n კლასზე განსაზღვრული სასრული და ადიციური ფუნქციების დახასიათება	66
§ 7. მონაყვეთების I^n კლასზე განსაზღვრული სასრული მომების დახასიათება	71
თ ა ვ ი 5. ზომის გაგრძელება	75
§ 1. გარე ზომა	75
§ 2. ზომის გაგრძელების ლებეგის მეთოდი	78
§ 3. გარე ზომის მეშვეობით ზომის წარმოქმნის კარათეოდორის მეთოდი	81
§ 4. ზომის ბორელისეული გაგრძელება და მისი კაეშირი ზომის ლებეგისეულ გაგრძელებასთან	86
§ 5. ზომის გაგრძელების ერთადერთობა	88
§ 6. ზომადობის კრიტერიუმი საწყისი რგოლის სიმრავლეთა მეშვეობით მიახლოების ტერმინებში	89
§ 7. ზომადობის კრიტერიუმი საწყისი რგოლის სიმრავლეთა თელადი გაერთიანებების მეშვეობით მიახლოების ტერმინებში	94
§ 8. ზომით წარმოქმნილი გარე ზომის ქვემოდან უწყვეტობის თვისება	97
თ ა ვ ი 6. ზოგიერთი კლასიკური ზომა	99
§ 1. ლებეგის ზომა	99
§ 2. ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეთა დახასიათება მარტივი სტრუქტურის სიმრავლეთა მეშვეობით	104
§ 3. ლებეგის ზომის ძერის მიმართ ინვარიანტულობა	108
§ 4. ლებეგის აზრით არაზომადი სიმრავლე	110
§ 5. ლებეგ-სტილტესის ზომები	113
§ 6. ჰაუსდორფის ზომები და ჰაუსდორფის განზომილება	116
თ ა ვ ი 7. ზომადი ფუნქციები	119
§ 1. ზომადი ფუნქციის ცნება	119
§ 2. ზომადი ასახვების კომპოზიცია	123
§ 3. მოქმედებები ზომად ფუნქციებზე	125
§ 4. კანტორის ფუნქცია	127
§ 5. ზომადი ფუნქციის მიახლოება მარტივი ფუნქციების მეშვეობით	130
§ 6. ეკვივალენტური ფუნქციები	133
§ 7. თითქმის ყველგან კრებალობა	134

§ 8. ზომით კრებადობა	137
§ 9. ლუბინის თეორემა	141
თ ა ვ ი 8. ლებეგის ინტეგრალი	147
§ 1. არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი	147
§ 2. არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალის ზოგიერთი თვისება	150
§ 3. არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი	152
§ 4. არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალის ზოგიერთი თვისება	155
§ 5. ზღვარზე გადასვლა ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ, არაუარყოფით ზომად ფუნქციათა მიმდევრობებისათვის	157
§ 6. არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის თვალადად აღიციურება	162
§ 7. ლებეგის ინტეგრალი ზოგად შემთხვევაში	164
§ 8. ლებეგის ინტეგრალი, როგორც სიმრავლის ფუნქცია	170
§ 9. ზღვარზე გადასვლა ლებეგის ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ	173
§ 10. ლებეგის ინტეგრალის გამოთვლა განაწილების ფუნქციის მეშვეობით	179
თ ა ვ ი 9. რიმანისა და ლებეგის ინტეგრალების შედარება	183
§ 1. მიმართება რიმანისა და ლებეგის ინტეგრალებს შორის	183
§ 2. რიმანის ამრით ინტეგრებადობის კრიტერიუმი	187
§ 3. რიმანის არასაკუთრივი ინტეგრალისა და ლებეგის ინტეგრალის შედარება	193
§ 4. პირველყოფილი ფუნქციის აღდგენა შემოსაზღვრული წარმოებულის შემთხვევაში	196
თ ა ვ ი 10. ინტეგრება სივრცეთა ნამრავლზე	201
§ 1. ზომების დეკარტული ნამრავლი	201
§ 2. ზომიანი სივრცეების ლებეგისეული და ბორელისეული ნამრავლები	203
§ 3. სიმრავლის ზომის გამოთვლა მისი კვეთების ზომების მეშვეობით	206
§ 4. ფუბინისა და ტონელის თეორემები ზომების ლებეგისეული ნამრავლისათვის	209
§ 5. ფუბინისა და ტონელის თეორემები ზომების ბორელისეული ნამრავლისათვის	218
§ 6. ფუბინისა და ტონელის თეორემების ზოგიერთი გამოყენება	220

§ 7. ფუბინისა და ტონელის თეორემები ნებისმიერი რაოდენობის ზომის ნამრავლისათვის	225
თ ა ვ ი 11. L^p სივრცეები	231
§ 1. L^p სივრცის განსაზღვრა	231
§ 2. L^p სივრცეების ზოგიერთი თვისება	235
§ 3. L^p სივრცის სისრულე. p მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადობა	238
§ 4. ყველგან მკვეთრი სიმრავლეები L^p სივრცეში	240
§ 5. L^p სივრცის სეპარაბელურობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა	245
§ 6. არსებითად შემოსაზღვრული ფუნქციების სივრცე	248
§ 7. L^∞ სივრცის ზოგიერთი თვისება	250
თ ა ვ ი 12. ინტეგრება და დიფერენცირება	253
§ 1. ლებეგის თეორემა ინტეგრალის დიფერენცირების შესახებ	253
§ 2. ვიტალის თეორემები სიმრავლეთა დაფარვის შესახებ	257
§ 3. სუსტი ტიპის უტოლობა პარდი-ლიტლუუდის მაქსიმალური ოპერატორისათვის	262
§ 4. ზოგიერთი შენიშვნა ლებეგის თეორემასთან დაკავშირებით	265
§ 5. საყითხი ლებეგის ინტეგრალის მეშვეობით პირველყოფილი ფუნქციის აღდგენის შესახებ	270
§ 6. ზრდადი ფუნქციის დიფერენციალური თვისებები	275
§ 7. შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციები	284
§ 8. აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციები. ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის სახით წარმოდგენადი ფუნქციების დახასიათება	291
§ 9. პირველყოფილი ფუნქციის აღდგენა ჯამებადი წარმოებულის შემთხვევაში	296
თ ა ვ ი 13. შემოსაზღვრული ვარიაციისა და აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციების ზოგიერთი თვისება	301
§ 1. შემოსაზღვრული ვარიაციის უწყვეტი ფუნქციები	301
§ 2. შემოსაზღვრული ვარიაციის უწყვეტი ფუნქციების დახასიათება ბანახის ინდეკსის მეშვეობით	305
§ 3. აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციების დახასიათება (N) თვისების ტერმინებში	308
§ 4. წრფევალი წირები	314
§ 5. ნახტომთა ფუნქციები	323
§ 6. შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციის ლებეგის ღამლა	330

§ 7. ზრდადი ფუნქციის ლებეგის დამლა	334
§ 8. აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციებით წარმოქმნილი ლებეგ-სტილტიესის მომები	335
§ 9. ნახტომთა ფუნქციებით წარმოქმნილი ლებეგ-სტილტიესის მომები	339
§ 10. სინგულარული ფუნქციებით წარმოქმნილი ლებეგ-სტილტიესის მომები	341
§ 11. ლებეგ-სტილტიესის მომის დამლა სამი კომპონენტის ჯამის სახით	343
თ ა ვ ი 14. ინტეგრება და დიფერენცირება $\mathbb{R}^n$ სივრცეში	347
§ 1. დიფერენცირების ბაზისის ცნება	348
§ 2. ინტეგრალთა დიფერენცირება ვიტალის თეისების მქონე ბაზისების მიხედვით	350
§ 3. ვიტალის თეისების მქონე ბაზისების კონკრეტული მაგალითები	352
§ 4. ინტეგრებისა და დიფერენცირების ურთიერთშებრუნებადობის დარღვევა n -განზომილებიანი მონაკვეთების ბაზისის შემთხვევაში	360
§ 5. ინტეგრალთა დიფერენცირება ზოგადი ბაზისების მიხედვით. ზოგიერთი ცნობილი შედეგი	367
§ 6. ლებეგ-სტილტიესის მომების დიფერენცირება	370
§ 7. სიმრავლის ფუნქციის აღდგენა ჯამებადი წარმოებულის შემთხვევაში	375
თ ა ვ ი 15. ზომა და სიმრავლის ფუნქციები	377
§ 1. მუხტის ცნება. პანისა და ჟორდანის დამლები	377
§ 2. აბსოლუტურად უწყვეტობა	383
§ 3. რადონ-ნიკოდიმის თეორემა	385
§ 4. რადონ-ნიკოდიმის წარმოებულის	389
§ 5. ლებეგის დამლა	391
§ 6. ლებეგის დამლა უწყვეტი მომის მქონე სივრცეებისთვის	394
§ 7. ცვლადის შეცვლა ლებეგის ინტეგრალში	397
§ 8. ცვლადის შეცვლა ლებეგის ინტეგრალში (ერთგანზომილებიანი შემთხვევა)	400
თ ა ვ ი 16. რიმან-სტილტიესის ინტეგრალი	403
§ 1. რიმან-სტილტიესის ინტეგრალის განსაზღვრა და ელემენტარული თეისებები	403

§ 2. ნაწილობითი ინტეგრება	406
§ 3. რიმან-სტილტესის ინტეგრალის ადისიურობა	407
§ 4. რიმან-სტილტესის ინტეგრალის არსებობა, როცა f უწყვეტია, ხოლო φ შემოსაზღვრული ვარიაციისაა	411
§ 5. ზღვარზე გადასვლა რიმან-სტილტესის ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ	414
§ 6. რიმან-სტილტესის ინტეგრალის გამოთვლა ზოგიერთ კონკრეტულ შემთხვევაში	417
§ 7. რიმან-სტილტესისა და ლებეგ-სტილტესის ინტეგრალების შედარება	422
§ 8. რიმან-სტილტესის ამრით ინტეგრებადობის კრიტერიუმი	427
§ 9. ლებეგის ინტეგრალის წარმოდგენა რიმან-სტილტესის ინტეგრალის მეშვეობით	430
 დ ა ნ ა რ თ ი 1. რიცხვის წარმოდგენა ორობითი წილადის სახით	433
 დ ა ნ ა რ თ ი 2. ზოგიერთი ცნობა მეტრიკული და ნორმირებული სივრცეების შესახებ	439
 ლიტერატურა	447
 საგნობრივი საძიებელი	449

წინასიტყვაობა

ნამდვილი ანალიზი შეისწავლის ფუნქციებს სხვადასხვა ანალიზური ოპერაციებისა და სტრუქტურული თვისებების მეშვეობით (დიფერენცირება, ინტეგრება, ტრიგონომეტრიულ მწკრივად გაშლა, უწყვეტობა, მონოტონურობა და ა.შ.). რაც ბუნებრივად იწვევს სიმრავლეთა შესწავლის აუცილებლობასაც, რადგან, როგორც ფუნქციის განსაზღვრისათვის, ასევე, მისი თვისებების შესრულების არეალის გამოსაყვეთად საჭიროა სიმრავლის ცნების გამოყენება.

არსებითია იმის ხაზგასმა, რომ, კლასიკური ანალიზისაგან განსხვავებით, ნამდვილ ანალიზში საქმე გვაქვს არა მხოლოდ გლუვ ფუნქციებთან და მარტივი აგებულების სიმრავლეებთან განხილვის საგანი ხდება არარეგულარული ხასიათის ფუნქციები და სიმრავლეებიც.

აღნიშნული რთული სტრუქტურის ობიექტების მათემატიკური ლეგიტიმაცია წინააღმდეგობების ფონზე მოხდა. კოლიზიას ქმნიდა ის გარემოება, რომ კლასიკურ ანალიზში განხილული, ანალიზური გამოსახულებებით განსაზღვრული ფუნქციები და თვალსაჩინო გეომეტრიული მახასიათებლების მქონე სიმრავლეები ახდენდნენ რეალური ფიზიკური პროცესებისა და ობიექტების მათემატიკურ მოდელირებას. მაშინ, როცა იგივე საფუძველს მოუღებულნი იყვნენ, მაგალითად, ეაიერშტრასის არსად წარმოებადი უწყვეტი ფუნქცია, ანაც, კანტორის დისკონტინუალური სიმრავლე.

ნამდვილი ანალიზის ფარგლებში აღმოჩენილი უცნაური ფუნქციებისა და სიმრავლეების შესაბამისი ფიზიკური ფენომენები გამოვლინდა მოგვიანებით. მე-20 საუკუნეში - ბროუნის მოძრაობის, ფრაქტალურობის, დინამიკური სისტემების და ზოგიერთი სხვა ფიზიკური მოვლენის შესწავლის შედეგად. თუმცა, ამ დროს ნამდვილი ანალიზი უკვე იყო ჩამოყალიბებული სამეცნიერო მიმართულება. შემოსხენებული წინააღმდეგობის დაძლევა მათემატიკის განვითარების შინაგანი ლოგიკის საფუძველზე მოხდა. უმნიშვნელოვანესი როლი ამ თვალსაზრისით შეასრულა ტრიგონომეტრიულ მწკრივთა შესწავლამ. ასეთი ტიპის მწკრივების, როგორც ფუნქციის მარტივ კომპონენტებად დამლის ეფექტური მექანიზმის, კვლევა წამოწყებული იყო ე. ფურიეს შრომებში.

აღმოჩნდა, რომ ისეთი კარგი ფუნქციების, როგორიც ტრიგონომეტრიული ფუნქციებია, შეკრების შედეგი შეიძლება რთული ბუნების (წყვეტების მქონე) ფუნქციები იყვნენ. წყვეტილ ფუნქციათა ინტეგრების საჭიროებამ რიმანი მიიყვანა კოშის მიერ შემოღებული ინტეგრალის კონსტრუქციის გაუმჯობესებამდე. შემდეგ კი, რიმანის ამრით ინტეგრებადობისათვის ოპტიმალური პირობების კვლევამ კიდევ უფრო გააძლიერა წყვეტილი ფუნქციებისა და არასტანდარტული სიმრავლეების შესახებ ცოდნა.

აქვე შევნიშნოთ, იგივე პერიოდში მომხდარი ერთი უმნიშვნელოვანესი მათემატიკური მოვლენის თაობაზე: ტრიგონომეტრიულ მწკრივად ფუნქციის გაზღვის ერთადერთობის უზრუნველმყოფი სიმრავლეების კვლევის პროცესში გ. კანტორმა აღმოაჩინა უსასრულო სიმრავლეთა იერარქია რაოდენობრიობის და დალაგების სტრუქტურის თვალსაზრისით და შემდგომ შექმნა მთლიანად მათემატიკისათვის უმნიშვნელოვანესი მიმართულება - სიმრავლეთა თეორია. ეს თეორია მალევე მყარი დასაყრდენი გახდა ნამდვილი ანალიზისათვის.

მე-19 საუკუნის 80-იანი წლებისთვის ნამდვილი ანალიზი უკვე მიჩნეული იყო საინტერესო, თუმცა ჯერ კიდევ ჩამოყალიბების პროცესში მყოფ კვლევის სფეროდ. ჯ. პეანოს, კ. ჟორდანის, უ. ლინის, ვ. ვოლტერას, ლ. შეფერის და სხვა მეცლევართა მიერ ამ პერიოდში შესრულებულ შრომებში გამოიყენეთა ის არსებითი პრობლემები, რომელთა შემდგომმა გადაწყვეტამ ნამდვილი ანალიზი მათემატიკის უმნიშვნელოვანეს დარგად აქცია. აღმოჩნდა, რომ რიმანის ინტეგრალს და ამოწურვის კლასიკურ სქემაზე დაფუძნებულ სიმრავლეთა გაზომვის მეთოდს რთული სტრუქტურის ფუნქციებისა და სიმრავლეების შესწავლისას ჰქონდათ გამოყენების შეზღუდული არეალი. კერძოდ, გამოიყენეთა პრობლემების შემდეგი წრე:

- უწყვეტ ფუნქციათა კლასის მიღმა, რიმანის ინტეგრალისათვის ირ-
ლევება გაწარმოებისა და ინტეგრების ოპერაციების ურთიერთშებრუნე-
ბადობის კლასიკური პრინციპი. სახელდობრ, რიმანის ინტეგრალი,
საზოგადოდ, ვერ იძლევა პირველყოფილის აღდგენის პრობლემის
გადაწყვეტას შემოსაზღვრული წარმოებულის მქონე ფუნქციების შემ-
თხვევაშიც კი (რაც იგივეა, რომ არსებობენ ფუნქციები, რომელთა
წარმოებული შემოსაზღვრულია, მაგრამ არაა რიმანის აზრით ინ-
ტეგრებადი). ამასთანავე, წყვეტილი ფუნქციებისათვის გაუგებარია,
თუ რა თვალსაზრისით უნდა იქნას მიჩნეული მისი რიმანის განუ-
საზღვრელი ინტეგრალი მისსავე პირველყოფილად;
- რიმანის ინტეგრალის მეშვეობით, საზოგადოდ, ვერ ხერხდება თვით
ისეთი წირების სიგრძის გამოთვლა, რომელთაც აქვთ ყოველ წერ-
ტილში წარმოებადი საკოორდინატო ფუნქციები (გეომეტრიული ტერ-
მინებით რომ ვთქვათ, ყოველ წერტილში აქვთ მხები);
- რიმანის ინტეგრალი, საზოგადოდ, ვერ უზრუნველყოფს ფუნქციური
მწკრივის წვერ-წვერად ინტეგრებას იმ შემთხვევაშიც კი, როცა:
 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ მწკრივი შედგება არაუარყოფითი უწყვეტი ფუნქციებისაგან,
მისი კერძო ჯამები ერთობლივ შემოსაზღვრულია და ამასთანავე,
 $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{[a,b]} f_k$ ინტეგრალების მწკრივი კრებადი;

- მონაკვეთების სასრული გაერთიანებების გამოყენებაზე დაფუძნებული ამოწურვის მეთოდით, სამოგადოდ, შეუძლებელია რთული აგებულების სიმრავლეთა თვით ყველაზე მსუბუქი ვერსიების - ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეების გამოშვება. შეუძლებელია, ასევე, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლისათვის ზომის მნიშვნელობის მინიჭება.

რიმანის ინტეგრალის არაუფექტურობა მემთ მოცემულ სიტუაციებში გაპირობებული იყო იმით, რომ მისი მექანიზმი გათვლილია უწყვეტ ან უწყვეტთან მიახლოებული ხასიათის ფუნქციებზე. მრავლობითი წყვეტების მქონე ფუნქციებისათვის კი, რიმანის ინტეგრალი არ იძლევა სასურველ შედეგებს. თუ ინტეგრებას მივიჩნევთ ფუნქციის გამოშვის მეთოდად (რაც სავსებით ლოგიკურია), მაშინ შეიძლება ითქვას, რომ მემთ აღწერილი გარემოებები დღის წესრიგში აყენებდა ფუნქციებისა და სიმრავლეების გამოშვის ახალი, უფრო ძლიერი მექანიზმების შექმნის საკითხს. ორივე მიმართულებით საკითხის ეფექტური გადაწყვეტა მოცემული იყო ა. ლებეგის მიერ 1902 წელს. აქვე უნდა აღინიშნოს ე. ბორელის მნიშვნელოვანი წვლილიც სიმრავლეთა გამოშვის ლებეგის მეთოდი არსებითად იყენებს ცოტა ხნით ადრე ბორელის მიერ გამოთქმულ იდეებს.

ლებეგმა, ინტეგრალისა და ზომის თეორიების შექმნასთან ერთად, ეფექტურად გამოიყენა კიდევ ისინი შემოქმედებითელ ამოცანებთან მიმართებაში. განსაკუთრებით აღსანიშნავია განუსაზღვრელი ინტეგრალის დიფერენცირებასთან დაკავშირებით მიღებული შედეგები, რომლითაც, უწყვეტ ფუნქციათა შემთხვევაში, კლასიკური ანალიზიდან ცნობილი დიფერენცირებისა და ინტეგრების ოპერაციების ურთიერთშებრუნებადობის პრინციპი გავრცელდა ლებეგის ამრით ინტეგრებად ფუნქციათა გაცილებით ფართო კლასზე.

სამოგადოდ, ლებეგის ინტეგრალის აპარატმა შესაძლებელი გახადა ცოდნის არსებითი გაფართოება ყველა იმ მიმართულებით, სადაც ადრე კვლევის საშუალებად რიმანის ინტეგრალი გამოიყენებოდა. ამ თვალსაზრისით, თვალსაზრისით მაგალითად შეიძლება გამოვყოთ ტრიგონომეტრიული და ზოგადი ორთოგონალური მწკრივების თეორია (ფურიეს ანალიზი).

მე-20 საუკუნის 20-იანი წლებისთვის ჯ. რადონმა, მ. ფრეშემ და კ. კარათეოდორმა ლებეგის ზომისა და ინტეგრალის კონსტრუქციები განაზოგადეს აბსტრაქტულ სივრცეებზე, რომლებშიც არანაირი ალგებრული და ტოპოლოგიური სტრუქტურა აპრიორულად არაა მოცემული. ზომისა და ლებეგის ინტეგრალის აბსტრაქტული მექანიზმები არსებითი საფუძველი აღმოჩნდა ალბათობის თეორიის აქსიომატიზაციისათვის და შემდგომ გადაიქცა ამ დარგის კვლევის უმთავრეს საშუალებად. აღსანიშნავია, აგრეთვე, მნიშვნელოვანი გამოყენებები ფუნქციონალურ ანალიზში (ჯამებად ფუნქციათა სივრცეების, ერგოდულობისა და სპექტრალური თეორიები).

წინამდებარე სახელმძღვანელოში გადმოცემულია ნამდვილი ანალიზის ძირითადი პრინციპები, რომლებიც დაკავშირებულია ზომისა და ლებეგის ინტეგრალის კონსტრუქციებთან და მათი გამოყენებებთან. თანაც, ეს კეთდება როგორც აბსტრაქტულ, ასევე კონკრეტულ - $\mathbb{R}^n$ სივრცეების სიტუაციებში. პარაგრაფების უმეტესობას თან ერთვის სხვადასხვა სირთულის თემატურ ამოცანათა ჯგუფი. წიგნს საფუძვლად უდევს სასწავლო კურსები, რომელთაც ბოლო 20 წლის განმავლობაში ვკითხულობდი აკადემიური წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მათემატიკის სპეციალობის სტუდენტებისთვის.

მინდა, ღრმა მადლიერება გამოვხატო რედაქტორის - ვასტანტ კოცლაშვილის და რეცენზენტების - შაქრო ტეტუნაშვილისა და დუგლას უგულავას მიმართ, რომელთაც გულდასმით წაიკითხეს წიგნის ხელნაწერი და მომცეს მთელი რიგი ფასეული შენიშვნებისა.

სხვადასხვა დროს, სახელმძღვანელოს თემატიკასთან და ხელნაწერთან დაკავშირებით სასარგებლო რჩევები მიმიღია კოლეგების უშანგი გოგინავას, ლაშა ეფრემიძის, თამაზ ზერეკიძის, თენგიზ კოპალიანის, ლერი ბანცურის, კახა ჩუბინიძისა და ერეკლე ჯაფარიძისაგან. მაია კეინიკაძემ დიდი დახმარება გამიწია ტექსტის დაკაბადონების ეტაპზე. მათ, ყველას, დიდ მადლობას მოვახსენებ.

სიმრავლის სიმძლავრე

§ 1. სიმძლავრის ცნება

სიმძლავრეთა (კარდინალურ რიცხვთა) თეორიის შესწავლის საგანს წარმოადგენს სიმრავლეთა კლასიფიკაცია და შედარება იმისდა მიხედვით, თუ ელემენტთა რა მარაგს შეიცავენ ისინი. ერთი შეხედვით, უსასრულო სიმრავლეთათვის ამ საკითხების შესწავლა აზრს მოკლებულია, რადგანაც ყოველმათგანში უსასრულო რაოდენობის ელემენტია და ამდენად, ელემენტების რაოდენობის მახასიათებლის მიხედვით ისინი ერთნაირი უსასრულო არიან. მიუხედავად ამისა, არსებობს ბუნებრივი პრინციპები, რომლებიც კლასიფიკაციისა და შედარების საშუალებას იძლევა. მათი მეშვეობით ირყევება, რომ უსასრულო სიმრავლეთა შორისაც არიან შედარებით ღარიბები და შედარებით მდიდრები.

დავიწყოთ იმ პრინციპის განსაზღვრით, რომელიც მოგვცემს კლასიფიკირების საშუალებას, ანუ იმის განსაზღვრით, თუ როდის უნდა ჩავთვალოთ სიმრავლეები ელემენტთა ერთნაირი მარაგის მქონეებად.

A და B სიმრავლეებს ეწოდებათ ეკვივალენტური, ან კიდევ ერთნაირი სიმძლავრის, თუ მათ შორის შეიძლება დამყარდეს ურთიერთსადაცა შესაბამისობა.

A და B სიმრავლეების ეკვივალენტობის ჩასაწერად გამოვიყენებთ $A \sim B$ აღნიშვნას.

ცხადია, რომ ორი სასრული სიმრავლე ეკვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი ელემენტთა ერთსა და იმავე რაოდენობას შეიცავენ.

ასახვითა სტანდარტულ თვისებებზე დაყრდნობით მარტივად მტკიცდება, რომ სიმრავლეთა ეკვივალენტობის მიმართებას აქვს ზოგადი ეკვივალენტობის მიმართების დამახასიათებელი სამივე თვისება:

- 1) $A \sim A$ (რეფლექსურობა);
- 2) თუ $A \sim B$, მაშინ $B \sim A$ (სიმეტრიულობა);
- 3) თუ $A \sim B$ და $B \sim C$, მაშინ $A \sim C$ (ტრანზიტულობა).

როგორც ცნობილია, ყოველი ეკვივალენტობის მიმართება ობიექტთა ერთობლიობას ყოფს კლასებად, ისე, რომ ერთ კლასში ერთმანეთის ეკვივალენტური ობიექტები იყრიან თავს, რაც იძლევა ამ ობიექტთა კლასიფიკაციას

იმ ნიშნით, რომლის მიხედვითაც ეკვივალენტობის მიმართება არის განსაზღვრული. ამრიგად, თუ სიმრავლეა ეკვივალენტობის მიმართების მიხედვით ყველა შესაძლო სიმრავლის ერთობლიობას დაეყოფიერება, მივიღებთ სიმრავლეთა კლასიფიკაციას იმისდა მიხედვით, თუ ელემენტთა რა მარაგის შემცველები არიან ისინი, ანუ თითოეულ კლასს ექნება მხოლოდ მისთვის დამახასიათებელი ელემენტთა მარაგის ტიპი. ამ მსჯელობის ფორმალიზაციას იძლევა სიმრავლის სიმძლავრის (კარდინალური რიცხვის) ცნება:

ვთქვათ, სიმრავლეები განაწილებულია კლასებში ისე, რომ ორი სიმრავლე ერთ კლასში თავსდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი ეკვივალენტური არიან. სიმრავლეთა ყოველ K კლასს შევუსაბამოთ რაიმე α სიმბოლო ისე, რომ, განსხვავებულ კლასებს განსხვავებული სიმბოლოები შეესაბამებოდეთ და α -ს ვუწოდოთ K კლასის სიმრავლეების სიმძლავრე ან კიდევ, კარდინალური რიცხვი.

სასრული სიმრავლის სიმძლავრე, ბუნებრივია, მიჩნეულია მასში ელემენტების რაოდენობის ტოლად. ასე რომ, სიმძლავრის ცნება წარმოადგენს სასრულ სიმრავლეში ელემენტების რაოდენობის ცნების განზოგადებას.

A სიმრავლის სიმძლავრეს $\text{card } A$ ან $\overline{A}$ ჩანაწერით აღნიშნავენ.

სასრული სიმრავლე შეუძლებელია ეკვივალენტური იყოს მისი საკუთრივი ქვესიმრავლის. უსასრულო სიმრავლეთა შემთხვევაში კი, ასეთ ფენომენს შეიძლება ადვილი ჰქონდეს, რასაც მოწმობს შემდეგი მაგალითები.

მაგალითი 1.1.1. $[0, 1]$ და $[0, 2]$ სეგმენტები ეკვივალენტურია. ურთიერთ-ცალსახა შესაბამისობა მათ შორის მოიცემა $[0, 1] \ni x \mapsto 2x \in [0, 2]$ ასახვის მეშვეობით.

მაგალითი 1.1.2. ვთქვათ, M არის ყველა ლუწი რიცხვის სიმრავლე. ურთიერთცალსახა შესაბამისობა ნატურალურ რიცხვთა $\mathbb{N}$ და ლუწი რიცხვთა M სიმრავლეებს შორის მოიცემა $\mathbb{N} \ni n \mapsto 2n \in M$ ასახვის მეშვეობით.

ამრიგად, უსასრულო სიმრავლეების შემთხვევაში, „ნაწილში“ შეიძლება იმდენივე ელემენტი აღმოჩნდეს რამდენიც „მთელში“. შემდგომში დადგენილი იქნება, რომ ასეთი რამ უსასრულო სიმრავლეთა მახასიათებელ თვისებას წარმოადგენს.

ამოცანები

1. ააგეთ ბიექცია $(0, 1)$ ინტერვალსა და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს შორის.
2. ააგეთ ბიექცია $[0, 1]$ სეგმენტსა და $(0, 1)$ ინტერვალს შორის.
3. ააგეთ ბიექცია ღია ერთეულოვან წრესა და ჩაკეტულ ერთეულოვან წრეს შორის.
4. ააგეთ ბიექცია წრეწირსა და წრფეს შორის.
5. ააგეთ ბიექცია ერთ წერტილში გაჩხვლეტილ სფეროსა და სიბრტყეს შორის.
6. ააგეთ ბიექცია სფეროსა და სიბრტყეს შორის.

§ 2. თვლადი სიმრავლეები

სიმრავლეს ეწოდება თვლადი, თუ ის ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ეკვივალენტურია.

თვლად სიმრავლეთა სიმძლავრეს a ასოთი აღნიშნავენ. აქვე შევნიშნათ, რომ სასრულ ან თვლად სიმრავლეს არაუმეტეს თვლადს უწოდებენ.

თვლადი სიმრავლე შეიძლება დახასიათდეს, როგორც სიმრავლე, რომლის წარმოდგენა შესაძლებელია $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ სახით. ასეთ წარმოდგენაში სიმრავლის ელემენტები აღწერილია გარკვეული მიმდევრობის წევრების მეშვეობით.

თეორემა 1.2.1. ყოველი უსასრულო სიმრავლე შეიცავს თვლად ქვესიმრავლეს.

დამტკიცება. დაეწვად A უსასრულო სიმრავლეა. ამოვარჩიოთ A სიმრავლიდან რაიმე a_1 ელემენტი. დარჩენილი $A \setminus \{a_1\}$ სიმრავლე კვლავ უსასრულო იქნება. $A \setminus \{a_1\}$ სიმრავლიდან ამოვარჩიოთ რაიმე a_2 ელემენტი. დარჩენილი $A \setminus \{a_1, a_2\}$ სიმრავლე კვლავ უსასრულო იქნება და ა.შ. თუ ამორჩევის აღწერილ პროცესს უსასრულოდ გაავრცელებთ, მივიღებთ A სიმრავლის თვლად $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ ქვესიმრავლეს. $\square$

თეორემა 1.2.2. თვლადი სიმრავლის ყოველი უსასრულო ქვესიმრავლე თვლადია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ და B მისი უსასრულო ქვესიმრავლეა. განვიხილოთ რიცხვი:

$$n_1 = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \in B\},$$

შემდეგ რიცხვი:

$$n_2 = \min\{n \in \mathbb{N} : n > n_1, a_n \in B\},$$

და ა.შ. ამ ინდუქციური აგების პრინციპი ისაა, რომ თუ აგებულია $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ რიცხვები, მაშინ n_{k+1} განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$n_{k+1} = \min\{n \in \mathbb{N} : n > n_k, a_n \in B\}.$$

ცხადია, რომ $B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots\}$, საიდანაც გამომდინარეობს B სიმრავლის თვლადობა. $\square$

1.2.1 და 1.2.2 თეორემები გვიჩვენებენ, რომ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე წარმოადგენს ყველაზე ღარიბს უსასრულო სიმრავლეთა შორის.

შედეგი 1.2.1. ვთქვათ, A თვლადი სიმრავლეა და B მისი სასრული ქვესიმრავლეა. მაშინ $A \setminus B$ თვლადია.

დამტკიცება. $A \setminus B$ არის თვლადი A სიმრავლის უსასრულო ქვესიმრავლე. ამიტომ თეორემა 1.2.2-ის თანახმად $A \setminus B$ თვლადია. $\square$

თეორემა 1.2.3. ვთქვათ, A თვლადი, ხოლო B სასრული სიმრავლეა და $A \cap B = \emptyset$. მაშინ $A \cup B$ თვლადია.

დამტკიცება. დაუშვათ, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ და $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. მაშინ $A \cup B$ წარმოდგება შემდეგი სახით:

$$\{b_1, b_2, \dots, b_n, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

რაც ნიშნავს მის თვლადობას. $\square$

თეორემა 1.2.4. ვთქვათ, $A_1, A_2, \dots, A_n$ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი თვლადი სიმრავლეებია. მაშინ $\bigcup_{k=1}^n A_k$ სიმრავლე თვლადია.

დამტკიცება. განვიხილოთ $n = 2$ შემთხვევა. დაუშვათ,

$$A_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}, A_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}.$$

მაშინ $A_1 \cup A_2$ წარმოდგება სახით:

$$\{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots\},$$

რაც ნიშნავს მის თვლადობას. ნებისმიერი $n > 2$ -სთვის დამტკიცება ხდება მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით. ამასთან, ინდუქციის ბიჯის განხორციელებისას უნდა გამოვიყენოთ $n = 2$ შემთხვევაში დადგენილი დებულება. $\square$

თეორემა 1.2.5. ვთქვათ, A_n ($n \in \mathbb{N}$) წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი არაცარიელი სასრული სიმრავლეებია. მაშინ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ სიმრავლე თვლადია.

დამტკიცება. დაუშვათ,

$$A_n = \{a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_{N_n}^{(n)}\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

თუ ჯერ ამოვწერთ A_1 -ის ელემენტებს, შემდეგ A_2 -ის და ა.შ., მივიღებთ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ სიმრავლის წარმოდგენას ელემენტთა

$$a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_{N_1}^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots, a_{N_2}^{(2)}, \dots$$

მიმდევრობის მეშვეობით, რაც ნიშნავს მის თვლადობას. $\square$

თეორემა 1.2.6. ვთქვათ, A_n ($n \in \mathbb{N}$) წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი თვლადი სიმრავლეებია. მაშინ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ სიმრავლე თვლადია.

დაიტკიცება. ღაფუშვათ,

$$A_n = \{a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_k^{(n)}, \dots\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

განვალაგოთ $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ სიმრავლის ელემენტები ცხრილში შემდეგნაირად:

$$\begin{array}{l} a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_k^{(1)}, \dots \\ a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots, a_k^{(2)}, \dots \\ \vdots \\ a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_k^{(n)}, \dots \end{array}$$

ამ ცხრილის ელემენტები შეიძლება განვალაგოთ ერთ პორიზმონტალში შემდეგი წესით: ჯერ ამოვიწეროთ ცხრილის პირველ დიაგონალზე მდგომი $a_1^{(1)}$ ელემენტი, შემდეგ მეორე დიაგონალზე მდგომი $a_1^{(2)}$ და $a_2^{(1)}$ ელემენტები და ა. შ. ცხადია, დიაგონალები ამოწურავენ განსახილვე ცხრილს, ამიტომ დიაგონალების თანმიმდევრობის მიხედვით ცხრილის წევრების დალაგების მითითებული წესი იძლევა $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ სიმრავლის წარმოდგენას მიმდევრობის წევრების შესეობით, რაც ნიშნავს ამ სიმრავლის თვლადობას. $\square$

შენიშვნა 1.2.1. შემდგომში ტერმინით - სიმრავლეთა კლასი, გამოხატული იქნება სიმრავლე, რომლის ელემენტებსაც სიმრავლეები წარმოადგენენ. განსხვავებული დატვირთვის მატარებელი იქნება ტერმინი - სიმრავლეთა ოჯახი. სახელდობრ, ვთქვათ, H წარმოადგენს სიმრავლეთა რაიმე არაყარიელ კლასს, ხოლო Γ არის რაიმე არაყარიელი სიმრავლე. მაშინ H კლასის სიმრავლეთა $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ ოჯახი გაცემული იქნება, როგორც $f: \Gamma \rightarrow H$ ასახვა, რომლისთვისაც $f(\gamma) = A_\gamma$ ($\gamma \in \Gamma$). ცხადია, სიმრავლეთა ყოველი $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ მიმდევრობა იძლევა სიმრავლეთა ოჯახის მაგალითს.

სიმრავლეთა $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ ოჯახის წევრთაგან შედგენილი $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ კლასი განისაზღვრება როგორც, ყველა იმ A სიმრავლის კლასი, რომელიც ემთხვევა ერთერთის მაინც A_γ ($\gamma \in \Gamma$) სიმრავლეთა შორის. სიმრავლეთა $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ ოჯახის გაერთიანება აღინიშნება $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ ჩანაწერით და განისაზღვრება როგორც, $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ კლასის სიმრავლეთა გაერთიანება. მსგავსად განისაზღვრება სიმრავლეთა $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ ოჯახის $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ თანაკვეთა.

სიმრავლეთა ოჯახისა და მის წევრთაგან შედგენილი კლასის აღსანიშნად აგრეთვე გამოიყენება შესაბამისად $(A_\gamma : \gamma \in \Gamma)$ და $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ ჩანაწერები.

სიმრავლეთა $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ ოჯახის სიმძლავრე გაიგივებული იქნება ინდექსთა Γ სიმრავლის სიმძლავრესთან. ცხადია, $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ ოჯახისა და მის წევრთაგან შედგენილი $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ კლასის სიმძლავრეები სამოგადოდ განსხვავებულია. მაგალითად, თუ სიმრავლეთა $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ მიმდევრობის ყველა წევრი ერთი და

იგივეა, მაშინ $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ კლასის სიმძლავრე ერთია, ხოლო $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ოჯახის კი α -ს ტოლად მიიჩნევა.

თეორემა 1.2.7. ვთქვათ, A_n ($n \in \mathbb{N}$) თვლადი სიმრავლეებია. მაშინ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ თვლადია, ე.ი. თვლად სიმრავლეთა თვლადი ოჯახის გაერთიანება თვლადია.

დამტკიცება. (A_n) მიმდევრობა გარდაქმნათ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი წევრების მქონე (B_n) მიმდევრობად შემდეგი წესით:

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \quad (n > 1).$$

მარტივი შესამოწმებელია, რომ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

აღვნიშნოთ

$$N_1 = \{n \in \mathbb{N} : B_n \text{ თვლადია}\},$$

$$N_2 = \{n \in \mathbb{N} : B_n \text{ არაყარიელია და სასრული}\}.$$

ცხადია,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \left(\bigcup_{n \in N_1} B_n \right) \cup \left(\bigcup_{n \in N_2} B_n \right).$$

შესაძლებელია შემთხვევები:

- 1) N_1 თვლადია, N_2 თვლადია;
- 2) N_1 თვლადია, N_2 სასრულია;
- 3) N_1 სასრულია, N_2 თვლადია;
- 4) N_1 სასრულია, N_2 სასრულია.

თითოეულ შემთხვევაში თეორემის დასკვნა გამომდინარეობს 1.2.3–1.2.6 თეორემების შესაბამისი კომბინირებით. მაგალითად, განვიხილოთ მეორე შემთხვევა. გვეჩვენა, რომ: ა) $\bigcup_{n \in N_1} B_n$ თვლადია თეორემა 1.2.6-ის ძალით; და ბ) $\bigcup_{n \in N_2} B_n$ სასრულია როგორც სასრულ სიმრავლეთა სასრული ოჯახის გაერთიანება. ამის შემდეგ გამოვიყენებთ თეორემა 1.2.3-ს. $\square$

შენიშვნა 1.2.2. თეორემა 1.2.6-ის მსგავსად, 1.2.3 და 1.2.4 თეორემები სა-მართლიანი რჩება მაშინაც, როცა არ ვითხოვთ სიმრავლეთა წყვილ-წყვილად თანაუკვეთობას. მარტივი დასაწახია, რომ იგივეს ვერ ვიტყვით თეორემა 1.2.5-თან მიმართებაში.

შედეგი 1.2.2. მთელ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია.

დამტკიცება. მთელ რიცხვთა $\mathbb{Z}$ სიმრავლე წარმოიდგინება შემდეგი სამი სიმრავლის გაერთიანების სახით: $\mathbb{N}$, $\{-1, -2, \dots, -n, \dots\}$ და $\{0\}$. პირველი და მეორე სიმრავლე თვალადა, ხოლო მესამე - სასრული. აქედან, 1.2.3 და 1.2.4 თეორემების გათვალისწინებით დავასკვნით $\mathbb{Z}$ -ის თვალადობას. $\square$

შედეგი 1.2.3. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე თვალადია.

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ რაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{Q}$ სიმრავლე შეიძლება წარმოადგინოთ თვალად სიმრავლეთა თვალადი ოჯახის გაერთიანების სახით, რაც, თეორემა 1.2.7-ის გათვალისწინებით, საკმარისია დებულების დასამტკიცებლად. განვიხილოთ სიმრავლეები:

$$A_n = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \right\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

ცხადია, რომ $A_n \sim \mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{N}$). აქედან, $\mathbb{Z}$ -ის თვალადობის გამო, ვასკვნით A_n სიმრავლეების თვალადობას. ცხადია აგრეთვე, რომ $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. ამით დებულება დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 1.2.8. ვთქვათ, $A_1, A_2, \dots, A_n$ თვალადი სიმრავლეებია. მაშინ მათი დეკარტული ნამრავლი $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ თვალადი სიმრავლეა.

დამტკიცება. გამოვიყენოთ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი n -ის მიმართ. $n = 1$ -სთვის დებულება ცხადია. დავაფუძნოთ ინდუქციის ბიჯი $n = m$ -დან $n = m + 1$ -ზე გადასვლისას. ყოველი $a \in A_{m+1}$ ელემენტისათვის განვიხილოთ სიმრავლე

$$M(a) = \{(a_1, \dots, a_n, a) : (a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_m\}.$$

მარტივი შესამოწმებელია, რომ:

$$M(a) \sim A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m, \\ A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m \times A_{m+1} = \bigcup_{a \in A_{m+1}} M(a).$$

აქედან, თეორემა 1.2.7-ის ძალით ვასკვნით დებულების სამართლიანობას $n = m + 1$ შემთხვევაში. $\square$

შედეგი 1.2.4. ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -სთვის, $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ სიმრავლეები თვალადია.

შედეგი 1.2.5. მთელი კოფიციენტების მქონე ყველა მრავალწევრის სიმრავლე თვალადია.

დამტკიცება. განსახილველი სიმრავლე აღვნიშნოთ A -თი და ის წარმოადგინოთ თვალად სიმრავლეთა თვალადი ოჯახის გაერთიანების სახით, რაც, თეორემა 1.2.7-ის გათვალისწინებით, საკმარისია დებულების დასამტკიცებლად. ამ მიზნით ყოველი ნატურალური n -სთვის განვიხილოთ არაუმეტეს $(n - 1)$ -სა

რიგის მქონე ყველა მრავალწევრის სიმრავლე, რომელსაც აღენიშნაეთ A_n -ით. თუ ფიქსირებული n -სთვის ყოველ $p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k$ მრავალწევრს შეესაბამება მებით მის კოფიციენტთა $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ n -ეულს, ეს შესაბამისობა იქნება ბიექტია A_n სიმრავლიდან $\mathbb{Z}^n$ სიმრავლეში. შედეგად, A_n ($n \in \mathbb{N}$) თვლადია. მეორე მხრივ გვაქვს, რომ $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. ამით დებულება დამტკიცებულია. $\square$

რიცხვს ეწოდება ალგებრული, თუ ის წარმოადგენს რაიმე მთელყოფი-
ფიციენტებიანი მრავალწევრის ფესვს.

შედეგი 1.2.6. ალგებრულ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია.

დამტკიცება. A იყოს ალგებრულ რიცხვთა სიმრავლე, B კი ყველა მთელყოფიციენტებიანი მრავალწევრის სიმრავლე. $p \in B$ მრავალწევრისათვის S_p -თი აღენიშნოთ ყველა მისი ფესვის სიმრავლე. გვაქვს, რომ: ა) S_p ($p \in B$) სიმრავლე სასრულია; ბ) B თვლადია; და გ) $A = \bigcup_{p \in B} S_p$. ამრიგად, A წარმოადგინეთ როგორც სასრულ სიმრავლეთა თვლადი ოჯახის გაერთიანება. თეორემა 1.2.5-ის გათვალისწინებით ადვილი დასაანახია, რომ ასეთი სახის გაერთიანება სასრულია ან თვლადი. მეორე მხრივ, ალგებრულ რიცხვთა სიმრავლე A მოიცავს რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს, რის გამოც A უსასრულოა. უკანასკნელი ორი წინადადების ძალით ვასკენით A -ს თვლადობას. $\square$

ამოცანები

1. აჩვენეთ, რომ თეორემა 1.2.6-ის დამტკიცებისას აღწერილ ბიექტიას $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ და $\mathbb{N}$ სიმრავლეებს შორის აქვს შემდეგი სახე:

$$a_k^{(n)} \mapsto \frac{(n+k-2)(n+k-1)}{2} + n.$$

2. დაამტკიცეთ, რომ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ინტერვალებისაგან შედგენილი ნებისმიერი კლასი არაუმეტეს თვლადია.
3. დაამტკიცეთ, რომ მონოტონური ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია.
4. ეთქვათ, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციას ყოველ წერტილში აქვს ლოკალური მინიმუმი. დაამტკიცეთ, რომ f -ის მიერ მიღებული მნიშვნელობების სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია.
5. ეთქვათ, $E \subset \mathbb{R}^2$ სიმრავლე ისეთია, რომ მის ყოველ ორ წერტილს შორის მანძილი მეტია რაიმე ფიქსირებულ დადებით α რიცხვზე. დაამტკიცეთ, რომ E სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია.

§ 3. ზოგიერთი პრინციპი, რომელიც უზრუნველყოფს სიმრავლეთა ეკვივალენტობას

1. შეწებების პრინციპი. შემდეგი თეორემა, რომელსაც „შეწებების“ პრინციპით მოიხსენიებენ, ხშირად გამოიყენება სიმრავლეთა ეკვივალენტობის გამაპირობებელი ბიექციის ასაგებად.

თეორემა 1.3.1. ვთქვათ, Ω არის ინდექსთა რაიმე არა ცარიელი სიმრავლე და მოცემული გვაქვს სიმრავლეთა $(A_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ და $(B_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ ოჯახები შემდეგი თვისებებით: 1) $A_\alpha \sim B_\alpha$ ყოველი $\alpha \in \Omega$ -სთვის; 2) $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ და $B_\alpha \cap B_\beta = \emptyset$, როცა $\alpha \neq \beta$. მაშინ

$$\bigcup_{\alpha \in \Omega} A_\alpha \sim \bigcup_{\alpha \in \Omega} B_\alpha.$$

დამტკიცება. $f: \bigcup A_\alpha \rightarrow \bigcup B_\alpha$ ბიექცია აიგება $f_\alpha: A_\alpha \rightarrow B_\alpha$ ბიექციების „შეწებებით“, რაც გულისხმობს იმას, რომ f განისაზღვრება შემდეგნაირად: $f(x) = f_\alpha(x)$ ($\alpha \in \Omega, x \in A_\alpha$). $\square$

2. სიმრავლისა და მისი ქვესიმრავლის ეკვივალენტობის პირობები.

თეორემა 1.3.2. ვთქვათ, A და B უსასრულო სიმრავლეებია და $A \supset B$. თუ $A \setminus B$ სიმრავლე სასრული ან თვლადია, მაშინ $A \sim B$.

დამტკიცება. განვიხილოთ B სიმრავლის რაიმე თვლადი C ქვესიმრავლე. გვაქვს, რომ $A = (A \setminus B) \cup C \cup (B \setminus C)$ და $B = C \cup (B \setminus C)$. 1.2.3 და 1.2.4 თეორემების ძალით $(A \setminus B) \cup C \sim C$. აქედან გამომდინარე, შეწებების პრინციპის გამოყენებით ვასყენით, რომ $A \sim B$. $\square$

შედეგი 1.3.1. ვთქვათ, A არის უსასრულო სიმრავლე, ხოლო E არის სასრული ან თვლადი სიმრავლე. მაშინ $A \cup E \sim A$.

შედეგი 1.3.2. ვთქვათ, A არის უსასრულო სიმრავლე, ხოლო E არის მისი სასრული ან თვლადი ქვესიმრავლე. თუ $A \setminus E$ უსასრულო სიმრავლეა, მაშინ $A \setminus E \sim A$.

შედეგი 1.3.3. ვთქვათ, A არის უსასრულო სიმრავლე, ხოლო E არის მისი სასრული ქვესიმრავლე. მაშინ $A \setminus E \sim A$.

შედეგი 1.3.1-დან გამომდინარეობს უსასრულო სიმრავლეთა შემდეგი დახასიათება, რომელიც ეკუთვნის რ. დედეკინდს.

შედეგი 1.3.4. ვთქვათ, A რაიმე სიმრავლეა. შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

1) A უსასრულოა;

2) მოიძებნება A -ს საკუთრივი ქვესიმრავლე, რომელიც A -ს ეკვივალენტურია.

დამტკიცება. 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაციას გვაძლევს შედეგი 1.3.1. სასრული სიმრავლე შეუძლებელია შეიცავდეს მისსავე ეკვივალენტურ საკუთრივ ნაწილს, საიდანაც გამომდინარეობს შებრუნებული 2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაცია. $\square$

შემდეგი ღებულება განაზოგადებს თეორემა 1.3.2-ს.

თეორემა 1.3.3. ვთქვათ, $A \supset B$. თუ მოიძებნებიან B სიმრავლის ქვესიმრავლეები - C_n ($n \in \mathbb{N}$), რომლებიც წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და $A \setminus B$ სიმრავლის ეკვივალენტურია, მაშინ A და B სიმრავლეები ეკვივალენტურია.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ

$$D = B \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

გვაქვს, რომ

$$A = (A \setminus B) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \cup D, \quad (1)$$

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \cup D. \quad (2)$$

ლემის პირობის ძალით $A \setminus B \sim C_1, C_1 \sim C_2, \dots, C_n \sim C_{n+1}, \dots$ ამავდროულად, $A \setminus B, C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია, საიდანაც შეწებების პრინციპის ძალით ვასკენით, რომ

$$(A \setminus B) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \sim \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

აქედან კი, (1) და (2) ტოლობების გათვალისწინებით და კვლავ შეწებების პრინციპის გამოყენებით მივიღებთ, რომ $A \sim B$. $\square$

3. თეორემა შუალედური სიმრავლის სიმძლავრის შესახებ. შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ ორ ეკვივალენტურ სიმრავლეს შორის მოთავსებული სიმრავლე მათივე ეკვივალენტურია.

თეორემა 1.3.4. ვთქვათ, $A \supset B \supset C$ და $A \sim C$. მაშინ $A \sim B \sim C$.

$f: A \rightarrow A$ ასახვის n -ური ხარისხი აღვნიშნოთ $f^{(n)}$ -ით, ე.ი. $f^{(n)} = f_n \circ \dots \circ f_1$, სადაც $f_n = \dots = f_1 = f$.

ლემა 1.3.1. ვთქვათ, $f: A \rightarrow A$ ინექციური ასახვაა და $E \subset A \setminus f(A)$. მაშინ $f^{(n)}(E)$ ($n \in \mathbb{N}$) სიმრავლეები წარმოადგენენ $f(A)$ -ს ქვესიმრავლეებს, რომლებიც წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და E სიმრავლის ეკვივალენტურია.

დამტკიცება. გვაქვს, რომ

$$A \supset f(A) \supset f^{(2)}(A) \supset \dots \supset f^{(n)}(A) \dots, \quad (3)$$

$$f^{(n)}(E) \subset f^{(n)}(A \setminus f(A)) = f^{(n)}(A) \setminus f^{(n+1)}(A) \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (4)$$

(3) ცხადია, ხოლო (4)-ს მიიღება $f^{(n)}$ ასახვის ინექციურობის გათვალისწინებით.

(3) და (4) თანაფარდობებიდან ვასკენით, რომ $f^{(n)}(E)$ სიმრავლეები წარმოადგენენ $f(A)$ -ს ქვესიმრავლეებს, რომლებიც წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია. აქედან, თუკი შევნიშნავთ, რომ f -ის ინექციურობის გამო $f^{(n)}(E)$ სიმრავლეები E სიმრავლის ეკვივალენტურია, დავასკენით ლემის სამართლიანობას. $\square$

თეორემა 1.3.4-ის დამტკიცება. განვიხილოთ $f : A \rightarrow A$ ინექცია, რომლისთვისაც $f(A) = C$. მაშინ ლემა 1.3.1-ის ძალით $f(A \setminus B), f^{(2)}(A \setminus B), \dots, f^{(n)}(A \setminus B), \dots$ სიმრავლეები წარმოადგენენ C -ს ქვესიმრავლეებს, რომლებიც წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი და $A \setminus B$ სიმრავლის ეკვივალენტურია. $C \subset B$ ჩართვის გამო $f^{(n)}(A \setminus B)$ სიმრავლეები არიან B -ს ქვესიმრავლეებიც. ახლა, თუ გამოვიყენებთ თეორემა 1.3.3-ს, დავასკენით, რომ $A \sim B$. $\square$

4. კანტორ-ბერნშტეინის თეორემა. შემდეგი თეორემა, რომელიც ეკუთვნის გ. კანტორს და ფ. ბერნშტეინს, წარმოადგენს ერთ-ერთ ყველაზე მნიშვნელოვან დებულებას სიმძლავრეთა თეორიაში.

თეორემა 1.3.5. ვთქვათ, A სიმრავლე B სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლის ეკვივალენტურია, ხოლო B სიმრავლე A სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლის ეკვივალენტურია. მაშინ A და B სიმრავლეები ეკვივალენტურია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $A \sim B^* \subset B$ და $B \sim A^* \subset A$. განვიხილოთ $f : A \rightarrow B^*$ და $g : B \rightarrow A^*$ ბიექციები. აღვნიშნოთ $A^{**} = (g \circ f)(A)$. ცხადია, რომ $A \supset A^* \supset A^{**}$ და $A \sim A^{**}$. აქედან, თეორემა 1.3.4-ის ძალით გვექნება, რომ $A \sim A^*$. საიდანაც $A^* \sim B$ გათვალისწინებით, ვასკენით $A \sim B$ ეკვივალენტობის სამართლიანობას. $\square$

შენიშვნა 1.3.1. რიგ შემთხვევებში კანტორ-ბერნშტეინის თეორემის გამოყენება მოსახერხებელია შემდეგი ფორმულირებით: ვთქვათ, α და β სიმძლავრეები. თუ α სიმძლავრის A_1 სიმრავლე ეკვივალენტურია β სიმძლავრის B_1 სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლის და მეორე მხრივ, β სიმძლავრის B_2 სიმრავლე ეკვივალენტურია α სიმძლავრის A_2 სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლის, მაშინ α და β სიმძლავრეები ტოლია.

1. კანტორ-ბერნსტეინის თეორემის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ:

- ა) $[0, 1]$ სეგმენტი და $(0, 1)$ ინტერვალის ეკვივალენტურია;
- ბ) ღია წრე და ჩაკეტილი წრე ეკვივალენტურია.

§ 4. კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეები

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ უსასრულო სიმრავლეთა ახალ ტიპს - კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეებს.

თეორემა 1.4.1. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე არათვლადია.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე.ი. დავუშვათ, რომ $\mathbb{R}$ თვლადია. მაშინ ის წარმოდგება $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ სახით. დაეყოს $[0, 1]$ სამ ტოლ ნაწილად და დაყოფის სეგმენტებს შორის ამოვირჩიოთ ისეთი, რომელიც x_1 წერტილს არ შეიცავს და იგი აღვნიშნოთ Δ_1 -ით. მეორე ეტაპზე Δ_1 დაეყოს სამ ტოლ სეგმენტად და დაყოფის სეგმენტებს შორის ამოვირჩიოთ ისეთი, რომელიც არ შეიცავს x_2 -ს და იგი აღვნიშნოთ Δ_2 -ით. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ უსასრულოდ, მივიღებთ (Δ_n) სეგმენტთა მიმდევრობას შემდეგი თვისებებით:

- 1) $x_n \notin \Delta_n$ ($n \in \mathbb{N}$);
- 2) $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \dots$;
- 3) $|\Delta_n| = \frac{1}{3^n}$ ($n \in \mathbb{N}$).

ჩალაგებულ სეგმენტთა პრინციპის ძალით, Δ_n სეგმენტების თანაყვეთა შედგება ერთი წერტილისაგან, რომელსაც აღვნიშნავთ x -ით. (Δ_n) მიმდევრობის 1) თვისებიდან გამომდინარე, x ვერ დაემთხვევა ვერცერთ x_n წერტილს, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას იმისა, რომ x_n წერტილები ამოწურავენ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს. მიღებული წინააღმდეგობის ძალით $\mathbb{R}$ არათვლადია. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

სიმრავლეს ეწოდება კონტინუუმის სიმძლავრის, თუ ის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ეკვივალენტურია.

კონტინუუმის სიმძლავრეს c ასოთი აღნიშნავენ.

თეორემა 1.4.2. ყოველი გადაუგვარებელი შუალედი კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

დამტკიცება. ვთქვათ $a < b$. შემდეგი ფუნქცია:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \arctg x + \frac{1}{2},$$

გვაძლევს ბიექციას $\mathbb{R}$ -სა და $(0, 1)$ ინტერვალს შორის. თავის მხრივ, $g(x) = a + (b - a)x$ წრფივი ფუნქცია იძლევა ბიექციას $(0, 1)$ და (a, b) ინტერვალებს შორის. შედეგად, (a, b) ინტერვალის კონტინუუმი სიმძლავრისაა. $[a, b]$, $[a, b)$ და $(a, b]$ შუალედები მიიღება (a, b) ინტერვალისათვის მისი ორივე ან ერთ-ერთი ბოლოს დამატებით. აქედან გამომდინარე, შედეგი 1.3.1-ის ძალით ისინიც კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეები არიან.

შევნიშნოთ, რომ $2^x + a$ ფუნქცია არის ბიექცია $\mathbb{R}$ -სა და (a, ∞) სხივს შორის, ხოლო $-2^x + a$ ფუნქცია კი, $\mathbb{R}$ -სა და $(-\infty, a)$ სხივს შორის. აქედან, შედეგი 1.3.1-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ჩაკეტილი სხივი კონტინუუმის სიმძლავრისაა. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 1.4.3. ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ ირაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ სიმრავლე უსასრულოა, მაგალითად, $n\sqrt{2}$ ($n \in \mathbb{N}$) რიცხვები ქმნიან ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის უსასრულო ქვესიმრავლეს. ახლა, თუკი გავითვალისწინებთ, რომ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია, თეორემა 1.3.2-ის ძალით დაეასყენით $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ და $\mathbb{R}$ სიმრავლეების ეკვივალენტობას. $\square$

რიცხვს ეწოდება ტრანსცენდენტული. თუ ის არ არის ალგებრული.

როგორც ცნობილია, π და e ტრანსცენდენტული რიცხვები არიან. შევნიშნაეთ, რომ კონსტრუქციული გზით ტრანსცენდენტული რიცხვის აგება არცთუ იოლი ამოცანაა. თუმცა, როგორც შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს ტრანსცენდენტული რიცხვი ძალიან ბევრია, კერძოდ, „იმდენივე“, რამდენიც ნამდვილი რიცხვი.

თეორემა 1.4.4. ტრანსცენდენტულ რიცხვთა სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

დამტკიცება. A -თი აღვნიშნოთ ალგებრულ რიცხვთა სიმრავლე.

შევნიშნოთ, რომ ტრანსცენდენტულ რიცხვთა $\mathbb{R} \setminus A$ სიმრავლე უსასრულოა, მაგალითად, $n\pi$ ($n \in \mathbb{N}$) რიცხვები ქმნიან ტრანსცენდენტულ რიცხვთა სიმრავლის უსასრულო ქვესიმრავლეს. ახლა, თუკი გავითვალისწინებთ, რომ ალგებრულ რიცხვთა A სიმრავლე თვლადია, თეორემა 1.3.2-ის ძალით დაეასყენით $\mathbb{R} \setminus A$ და $\mathbb{R}$ სიმრავლეების ეკვივალენტობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 1.4.5. კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეთა სასრული ან თვლადი ოჯახის გაერთიანება კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

დამტკიცება. დამტკიცება ჩავატაროთ თვლადი ოჯახის შემთხვევაში. სასრული ოჯახის შემთხვევაში დამტკიცება ანალოგიურია. ვიქცაოთ, A_n ($n \in \mathbb{N}$)

კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეებია. აღვნიშნოთ:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n; \quad B_1 = A_1, \quad B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \quad (n \geq 2).$$

ცხადია, რომ B_n სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A$. B_1 სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა, ხოლო ყოველი B_n ($n \geq 2$) სიმრავლე წარმოადგენს კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლის ქვესიმრავლეს. ამის გამო, B_1 სიმრავლეს შეიძლება ურთიერთცალსახად შევუსაბამოთ $[0, 1)$ შუალედი, ხოლო ყოველ B_n ($n \geq 2$) სიმრავლეს - $[n-1, n)$ შუალედის რაიმე ქვესიმრავლე. რის შედეგადაც, შეწებების პრინციპის ძალით, A სიმრავლე აღმოჩნდება $\mathbb{R}$ -ის გარკვეული ქვესიმრავლის ეკვივალენტური. მეორე მხრივ, $\mathbb{R}$ ეკვივალენტურია B_1 სიმრავლის, რომელიც A -ს ქვესიმრავლეს წარმოადგენს. აქედან გამომდინარე, კანტორ-ბერნშტეინის თეორემის ძალით, A კონტინუუმის სიმძლავრისაა. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეების დეკარტული ნამრავლის თვისებების დასადგენად დაგვირდება შემდეგი თეორემა, რომელსაც დამოუკიდებელი მნიშვნელობაც აქვს.

თეორემა 1.4.6. ნატურალური რიცხვებისაგან შედგენილი ყველა შესაძლო მიმდევრობის სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

დამტკიცება. A, B და C ასოებით აღვნიშნოთ შესაბამისად:

ნატურალური რიცხვებისაგან შედგენილი ყველა შესაძლო მიმდევრობის სიმრავლე;

ნატურალური რიცხვებისაგან შედგენილი ყველა შესაძლო ზრდადი მიმდევრობის სიმრავლე;

0 და 1 რიცხვებისაგან შედგენილი ყველა იმ მიმდევრობის სიმრავლე, რომლის ნულის ტოლი წევრების რაოდენობა უსასრულოა.

ჩვენ დავამტკიცებთ ეკვივალენტობათა შემდეგი ჯაჭვის სამართლიანობას: $[0, 1) \sim C \sim B \sim A$.

ორივეთი წილადად რიცხვის წარმოდგენის თვისებებიდან გამომდინარე (იხ. დამატება 1), შემდეგი ასახვა:

$$C \ni (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} \in [0, 1),$$

წარმოადგენს ურთიერთცალსახა თანალობას C და $[0, 1)$ სიმრავლეებს შორის. ამრიგად, $[0, 1) \sim C$.

განვიხილოთ ასახვა, რომელიც $(\varepsilon_n) \in C$ ელემენტს შეუსაბამებს $(p_n) \in B$ მიმდევრობას თვისებით $\{p_n : n \in \mathbb{N}\} = \{k \in \mathbb{N} : \varepsilon_k = 0\}$, ანუ $(\varepsilon_n) \in C$

ელემენტს ეუსაბამებთ იმ n ინდექსებისაგან შედგენილ ზრდად მიმდევრობას, რომელთათვისაც $\varepsilon_n = 0$. მარტივი შესამოწმებელია, რომ ასეთი ასახვა წარმოადგენს ბიექციას C და B სიმრავლეებს შორის. ამით $C \sim B$ ეკვივალენტობა დადგენილია.

$B \sim A$ ეკვივალენტობის დასაღვენად განვიხილოთ ასახვა, რომელსაც $(p_n) \in B$ მიმდევრობას შეუსაბამებს შემდეგ მიმდევრობას A სიმრავლიდან:

$$p_1, p_2 - p_1, \dots, p_n - p_{n-1}, \dots$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ასეთი ასახვა წარმოადგენს ბიექციას B და A სიმრავლეებს შორის. შედეგად, $B \sim A$. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 1.4.1. თეორემა 1.4.6 გვიჩვენებს, რომ თელად სიმრავლეთა უსასრულო მიმდევრობის დეკარტული ნამრავლი, განსხვავებით სასრული მიმდევრობის შემთხვევისაგან (იხ. თეორემა 1.2.8), წარმოადგენს არათელად. კერძოდ. კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეს.

თეორემა 1.4.7. თუ $A_1, \dots, A_n$ კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეებია, მაშინ მათი დეკარტული ნამრავლი - $A_1 \times \dots \times A_n$ კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

დამტკიცება. განვიხილოთ $n = 2$ შემთხვევა. M იყოს ნატურალური რიცხვთა ყველა შესაძლო მიმდევრობის სიმრავლე. დავადგინოთ, რომ $A_1 \times A_2 \sim M$, საიდანაც თეორემა 1.4.6-ის გათვალისწინებით მივიღებთ სასურველ დასკვნას.

თეორემა 1.4.6-ის ძალით გვაქვს, რომ $A_1 \sim M$ და $A_2 \sim M$. განვიხილოთ $f_1 : A_1 \rightarrow M$, $f_2 : A_2 \rightarrow M$ ბიექციები და მათი მუშეობით ავაგოთ $f : A_1 \times A_2 \rightarrow M$ ბიექცია. ავიღოთ რაიმე $a_1 \in A_1$ და $a_2 \in A_2$ ელემენტები. ვთქვათ,

$$f_1(a_1) = (p_1, p_2, \dots, p_k, \dots),$$

$$f_2(a_2) = (q_1, q_2, \dots, q_k, \dots).$$

მაშინ $f(a_1, a_2)$ განესაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$f(a_1, a_2) = (p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_k, q_k, \dots)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ასეთნაირად აგებული $f : A_1 \times A_2 \rightarrow M$ ასახვა წარმოადგენს ბიექციას.

ნებისმიერი $n \geq 2$ რიცხვისათვის დამტკიცება ხდება ინდუქციური მსჯელობით, რომლის დროსაც საჭიროა $(A_1 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n$ და $A_1 \times \dots \times A_{n-1} \times A_n$ სიმრავლეთა ეკვივალენტობის გათვალისწინება.

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შედეგი 1.4.1. ნებისმიერი ნატურალური n -სთვის, $\mathbb{R}^n$ სივრცე და $[0, 1]^n$ ერთეულოვანი კუბი კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეებია.

$[a, b]$ სეგმენტის რაციონალური რიცხვების სიმრავლე წარმოვადგინოთ მიმდევრობის წევრების მეშვეობით: $[a, b] \cap \mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$. ყოველ $f \in C[a, b]$ ფუნქციას შეესაბამოთ $(f(r_n))$ მიმდევრობა. მაშინ ყოველ ორ განსხვავებულ f და g ფუნქციებს შესაბამისი ექნებათ განსხვავებული $(f(r_n))$ და $(g(r_n))$ მიმდევრობები. ეს გამომდინარეობს იქედან, რომ, თუ ორი უწყვეტი ფუნქცია ერთმანეთს ემთხვევა რაციონალურ წერტილებში, მაშინ ისინი ერთმანეთს დაემთხვევიან უკლებლივ ყველა წერტილშიც. ამრიგად, $C[a, b]$ ეკვივალენტურია ყველა შესაძლო რიცხვითი მიმდევრობის $\mathbb{R}^\infty$ სიმრავლის გარყეული ქვესიმრავლის. ახლა თუ გაითვალისწინებთ, რომ $\mathbb{R}^\infty$ კონტინუუმის სიმძლავრისაა, კანტორ-ბერნშტეინის თეორემის მეშვეობით (იხ. აგრეთვე შენიშვნა 1.3.1) მივიღებთ დასამტკიცებელ წინადადებას. $\square$

შენიშვნა 1.4.2. როგორც მომდევნო პარაგრაფში დამტკიცდება, $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ყველა ფუნქციის სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაგან განსხვავებული, კერძოდ, უფრო მეტი სიმძლავრისაა.

თეორემა 1.4.9. ყველა იმ მიმდევრობის სიმრავლე, რომელიც შედგება 0 და 1 რიცხვებისაგან, კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

დამტკიცება. A იყოს განსახილველი სიმრავლე, B იყოს A -ს ქვესიმრავლე, რომელიც შედგება ყველა იმ მიმდევრობისაგან, რომლის ნულის ტოლი წევრების რაოდენობა სასრულია. E იყოს $[0, 1]$ სეგმენტის ყველა ორობითად-რაციონალური წერტილის სიმრავლე, ე.ი.

$$E = \left\{ \frac{m}{2^n} : n \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq 2^n \right\}.$$

თვლავ სიმრავლეთა ცნობილი თვისებების გამოყენებით მტკიცდება, რომ E თვლადია.

განვიხილოთ ასახვები:

$$B \ni (\varepsilon_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} \in [0, 1),$$

$$A \setminus B \ni (\varepsilon_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} \in E.$$

ორობით წილადად რიცხვის წარმოდგენის თვისებებიდან გამომდინარე (იხ. დამატება 1), ორივე ასახვა არის ბიექცია. ამრიგად, B კონტინუუმის სიმძლავრისაა, ხოლო $A \setminus B$ თვლადია. აქედან, შედეგი 1.3.1-ის ძალით A კონტინუუმის სიმძლავრისაა. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 1.4.9-ის თანახმად ორელემენტისანი $\{0, 1\}$ სიმრავლის თავის თავზე თელადჯურ დეკარტული ნამრავლი - $\prod_{n=1}^{\infty} \{0, 1\}$ კონტინუუმის სიმძლავრისაა. შემდეგი დებულება გვიჩვენებს, რომ იგივე სამართლიანია ნებისმიერი ორელემენტისანი სიმრავლეების შემთხვევაშიც.

შედეგი 1.4.4. ვთქვათ, $A_1, A_2, \dots$ ორელემენტისანი სიმრავლეებია. მაშინ მათი დეკარტული ნამრავლი $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

შედეგი 1.4.4-ის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ და $\prod_{n=1}^{\infty} \{0, 1\}$ სიმრავლეები ეკვივალენტურია.

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbb{R}^n$ სივრცის ნებისმიერი არაუარიული ღია ქვესიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა.
2. ვთქვათ, $A \subset \mathbb{R}$ თელადი სიმრავლეა. დაამტკიცეთ, რომ მოიძებნება ℓ რიცხვი, რომლისთვისაც $(A + \ell) \cap A = \emptyset$, სადაც $A + \ell = \{a + \ell : a \in A\}$.
3. დაამტკიცეთ, რომ სიბრტყეზე ყველა შესაძლო წრის კლასი კონტინუუმის სიმძლავრისაა.
4. სიბრტყეზე T -სიმრავლე ვუწოდოთ ორი მონაკვეთის გაერთიანებას, რომლებიც ერთმანეთის მართობულია და ერთ-ერთის ცენტრი წარმოადგენს მეორე მათგანის ბოლოს. ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი T -სიმრავლეების რაიმე Ω კლასი (სიმრავლეების ზომები შეიძლება სხვადასხვა იყოს). შეიძლება თუ არა ასეთი Ω კლასი იყოს არათელადი?
5. ვთქვათ, A და B სიმრავლეების გაერთიანება კონტინუუმის სიმძლავრისაა. დაამტკიცეთ, რომ A და B სიმრავლეებს შორის ერთ-ერთი მაინც კონტინუუმის სიმძლავრისაა.
6. ვთქვათ, A_n ($n \in \mathbb{N}$) სიმრავლეების გაერთიანება კონტინუუმის სიმძლავრისაა. დაამტკიცეთ, რომ A_n სიმრავლეებს შორის ერთ-ერთი მაინც კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

§ 5. სიმძლავრეთა შედარება

ჩვენ უკვე განვიხილეთ უსასრულო სიმრავლეთა ორი ტიპი: თელადი სიმრავლეები და კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეები. ბუნებრივად ისმის კითხვა: არსებობენ თუ არა, სიმძლავრის თვალსაზრისით, სხვა ტიპის სიმრავლეები, ე.ი. არსებობენ თუ არა a და c სიმძლავრეებისაგან განსხვავებული სიმძლავრეები? ამ საკითხის გადაწყვეტა უკავშირდება თავისთავად მნიშვნელოვან საკითხს სიმძლავრეთა შედარების შესახებ.

შემოვიდეთ დალაგების მიმართება სიმძლავრეთა შორის. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ორი α და β სიმძლავრე და ცნობილია, რომ $\alpha = \text{card } A$ და

$\beta = \text{card } B$. ვიყვით, რომ α არ აღემატება β -ს (ჩანაწერი: $\alpha \leq \beta$), თუ A ეკვივალენტურია B -ს რაიმე ქვესიმრავლის.

მარტივი შესაშინებია, რომ სიმძლავრეების შედარებისას შედეგი არაა დამოკიდებული α სიმძლავრის A სიმრავლისა და β სიმძლავრის B სიმრავლის არჩევაზე (ე.ი., თუ A ეკვივალენტურია B -ს რაიმე ქვესიმრავლის, მაშინ იგივე მოხდება α სიმძლავრის ნებისმიერი A' სიმრავლისა და β სიმძლავრის ნებისმიერი B' სიმრავლის შემთხვევაში).

აღნიშნული წესით შემოღებულ სიმძლავრეთა შედარებას აქვს დალაგების მიმართებისთვის დამახასიათებელი რეფლექსურობის, ანტისიმეტრიულობისა და ტრანზიტულობის თვისებები, ე.ი. ნებისმიერი α, β და γ სიმძლავრეებისათვის სრულდება პირობები:

$$\alpha \leq \alpha \quad (\text{რეფლექსურობა});$$

$$\text{თუ } \alpha \leq \beta \text{ და } \beta \leq \alpha, \text{ მაშინ } \alpha = \beta \quad (\text{ანტისიმეტრიულობა});$$

$$\text{თუ } \alpha \leq \beta \text{ და } \beta \leq \gamma, \text{ მაშინ } \alpha \leq \gamma \quad (\text{ტრანზიტულობა}).$$

რეფლექსურობა და ტრანზიტულობა მოწმდება უშუალოდ, სოლო ანტი-სიმეტრიულობა წარმოადგენს კანტორ-ბერნშტეინის თეორემის ეკვივალენტურ წინადადებას.

შევინბოთ, რომ $\alpha < \beta$ ნიშნავს შემდეგს: $\alpha \leq \beta$ და $\alpha \neq \beta$, ე.ი., თუ $\alpha = \text{card } A$ და $\beta = \text{card } B$, მაშინ $\alpha < \beta$ ნიშნავს იმას, რომ:

- 1) A არ არის B -ს ეკვივალენტური;
- 2) A ეკვივალენტურია B -ს რაიმე ქვესიმრავლის.

აქვე შევინბოთ, რომ $a < c$. მართლაც, როგორც ვიცით $\mathbb{R}$ არათვლადია, ე.ი. $\mathbb{R}$ არაა $\mathbb{N}$ -ის ეკვივალენტური. მეორე მხრივ, $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. რის შედეგადაც ვლუბულობთ $a < c$ უტოლობას.

სიმძლავრეს ეუწოდოთ სასრული (უსასრულო), თუ ის სასრულ (უსასრულო) სიმრავლეთა სიმძლავრეს წარმოადგენს.

სასრული სიმძლავრეები ყოველთვის სადარია, ე.ი., თუ α და β სასრული სიმძლავრეებია, მაშინ ისინი ან ტოლია, ანაჲ მათ შორის ერთ-ერთი ნაჲლებია მეორეზე. დამტკიცებლად აღენიშნავთ, რომ სადარია ნებისმიერი ორი უსასრულო სიმძლავრე (დამტკიცებისათვის იხ., მაგალითად, [29] წიგნის მე-14 თავი). ეს მნიშვნელოვანი შედეგი ეკუთვნის ე. ცერმელს.

ახლა დაეუბრუნდეთ საჲთხს a და c სიმძლავრეებისაგან განსხვავებული სიმძლავრეების არსებობის შესახებ. როგორც შემდეგი თეორემა გეიჩვენებს, ასეთი სიმძლავრე უამრავი არსებობს. უფრო მეტიც, როგორც ირევეა, ნებისმიერი სიმძლავრისთვის არსებობს მასზე დიდი სიმძლავრე.

A სიმრავლის ყველა შესაძლო ქვესიმრავლისაგან შედგენილი კლასი აღენიშნოთ 2^A ჩანაწერით.

თეორემა 1.5.1. ნებისმიერი A სიმრავლისათვის გვაქვს, რომ

$$\text{card } A < \text{card } 2^A.$$

დამტკიცება. თუ A ცარიელია, მაშინ დებულება ცხადია.

განვიხილოთ არაცარიელი A სიმრავლის შემთხვევა. ჯერ დაეადგინოთ, რომ A და 2^A არ არიან ეკვივალენტური. დავეშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ, მოიძებნება $f: A \rightarrow 2^A$ ბიექცია. $a \in A$ ელემენტს დავარქვათ „კარგი“, თუ $a \in f(a)$, და დავარქვათ „ცუდი“, წინააღმდეგ შემთხვევაში, ე.ი. თუ $a \notin f(a)$.

E -თი აღნიშნოთ ყველა „ცუდი“ $a \in A$ ელემენტის სიმრავლე და განვიხილოთ ის $a_0 \in A$ ელემენტი, რომლის ანასახიც არის E სიმრავლე, ე.ი. $f(a_0) = E$.

თუ a_0 ელემენტი „კარგია“, მაშინ ის ეკუთვნის მის ანასახს - $f(a_0) = E$ სიმრავლეს. განსაზღვრის თანახმად, E შედგება „ცუდი“ ელემენტებისაგან, a_0 კი, როგორც ითქვა, მისი ელემენტია. შედეგად, a_0 „ცუდია“. მიღებული წინააღმდეგობის ძალით a_0 შეუძლებელია იყოს „კარგი“.

თუ a_0 „ცუდია“, მაშინ ის არ ეკუთვნის მის ანასახს $f(a_0) = E$ სიმრავლეს, მაგრამ, მეორე მხრივ, E -ს განსაზღვრის თანახმად, E სიმრავლე შეიცავს ყოველ „ცუდი“ ელემენტს, მათ შორის a_0 -ს. მიღებული წინააღმდეგობის ძალით, a_0 შეუძლებელია იყოს „ცუდი“.

ამრიგად, a_0 ელემენტი არც „კარგია“ და არც „ცუდი“, რაც გვაძლევს წინააღმდეგობას, რომლის ძალითაც ვასკენით A და 2^A სიმრავლეების არა-ეკვივალენტობას.

თუ A სიმრავლის ყოველ a ელემენტს შევუსაბამებთ მისგან შედგენილ ერთელემენტიან $\{a\}$ სიმრავლეს, მივიღებთ ბიექციას A სიმრავლესა და A -ს ყველა ერთელემენტიანი ქვესიმრავლის კლასს შორის. ამით $\text{card } A < \text{card } 2^A$ უტოლობა დადგენილია. $\square$

თუ $\text{card } A = \alpha$, მაშინ 2^α ჩანაწერით აღნიშნავენ 2^A ოჯახის სიმძლავრეს.

თეორემა 1.5.2. $\text{card } 2^{\mathbb{N}} = \text{card } \mathbb{R}$, ე.ი. $2^{\aleph_0} = c$.

დამტკიცება. განვიხილოთ ასახვა, რომელიც $E \in 2^{\mathbb{N}}$ სიმრავლეს შეუსაბამებს შემდეგ (ε_n) მიმდევრობას: $\varepsilon_n = 1$, თუ $n \in E$ და $\varepsilon_n = 0$, თუ $n \notin E$. მარტივი შესამოწმებელია, რომ ეს ასახვა არის ურთიერთცალსახა შესაბამისობა $2^{\mathbb{N}}$ კლასსა და 0 და 1 რიცხვებისაგან შედგენილი ყველა შესაძლო მიმდევრობის სიმრავლეს შორის. ეს უკანასკნელი სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა (იხ. თეორემა 1.4.9), საიდანაც ვასკენით, რომ $\text{card } 2^{\mathbb{N}} = c$. $\square$

1877 წელს კანტორმა გამოთქვა კონტინუუმის ჰიპოთეზის სახელწოდებით ცნობილი მოსაზრება a და c სიმძლავრეებს შორის მოთავსებული სიმძლავრის არარსებობის შესახებ. ის ფიქრობდა, რომ თელადმე მეტი უმცირესი

სიმძლავრე კონტინუუმის სიმძლავრეა. პრობლემის ამოხსნამ მოითხოვა მათემატიკის საფუძვლების უკიდურესად ღრმა ანალიზი, როგორც აღმოჩნდა, კონტინუუმის ჰიპოთეზის გადაწყვეტა შეუძლებელია სიმრავლეთა თეორიის ცერმელო-ფრენკელის აქსიომათა სისტემაში. კერძოდ, კ. გიოდელმა (1940) დაამტკიცა, რომ კონტინუუმის ჰიპოთეზა არ ეწინააღმდეგება ცერმელო-ფრენკელის აქსიომატიკას, ხოლო პ. კონმა (1963) აჩვენა, რომ არც ჰიპოთეზის უარყოფა ეწინააღმდეგება ხსენებულ აქსიომატიკას.

თეორემა 1.5.3. გადაუკვარებელ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ყველა ფუნქციის $F[a, b]$ სიმრავლე 2^c სიმძლავრისაა, ე.ი. $\text{card } F[a, b] = \text{card } 2^{\mathbb{R}}$.

დამტკიცება. ყოველ $f \in F[a, b]$ ფუნქციას შეუსაბამოთ მისი გრაფიკი $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\}$, რომელიც, ცხადია, წარმოადგენს $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ სიბრტყის ქვესიმრავლეს. ფუნქცია ცალსახად განისაზღვრება მისი გრაფიკის მეშვეობით, ანუ განსაზღვრული ასახვა ინექციაა $F[a, b]$ -დან $2^{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$ -ში. შედეგად, $F[a, b]$ ეკვივალენტურია $2^{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$ -ის გარყვეული ქვესიმრავლის.

მეორე მხრივ, ყოველ $E \subset [a, b]$ სიმრავლეს შეუსაბამოთ მისი მახასიათებელი ფუნქცია χ_E , ე.ი. შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია: $\chi_E(x) = 1$, როცა $x \in E$ და $\chi_E(x) = 0$, როცა $x \in [a, b] \setminus E$. ასეთი ასახვა იქნება ინექცია $2^{[a, b]}$ -დან $F[a, b]$ -ში. შედეგად, $2^{[0, 1]}$ ეკვივალენტურია $F[a, b]$ -ს გარყვეული ქვესიმრავლის.

შენიშნოთ, რომ $2^{\mathbb{R}} \sim 2^{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \sim 2^{[a, b]}$. ეს გამომდინარეობს $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim [a, b]$ ეკვივალენტობებიდან.

ასლა, თუ გამოვიყენებთ კანტორ-ბერნშტეინის თეორემას (იხ., აგრეთვე, შენიშვნა 1.3.1) დავასკვნით, რომ $F[a, b] \sim 2^{\mathbb{R}}$. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამოცანები

1. რა სიმძლავრისაა $[0, 1]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ყველა მონოტონური ფუნქციის სიმრავლე?
2. ვთქვათ, სიმრავლეები აკმაყოფილებენ პირობებს: 1) $1 \leq \text{card } A_n \leq c$ ($n \in \mathbb{N}$); 2) $\text{card } A_n \geq 2$ უსასრულო რაოდენობის n -სთვის. აჩვენეთ, რომ ყველა იმ (a_n) მიმდევრობის სიმრავლე, რომლისთვისაც $a_n \in A_n$ ($n \in \mathbb{N}$), არის კონტინუუმის სიმძლავრის.
3. დაამტკიცეთ, რომ ყველა $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ბიექციის სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეები $\mathbb{R}^n$ სივრცეში

ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეები მნიშვნელოვან კლასს ქმნიან. მათი მეშვეობით ხდება უფრო რთული ტიპის სიმრავლეთა კონსტრუირება და დახასიათება. ამ თავში შესწავლილი იქნება $\mathbb{R}^n$ სივრცის ღია და ჩაკეტილ სიმრავლეთა სტრუქტურა და ზოგიერთი სხვა თვისება.

§ 1. ღია და ჩაკეტილი წრფივი სიმრავლეების სტრუქტურა

რიცხვითი წრფის ანუ $\mathbb{R}$ -ის ქვესიმრავლეებს წრფივი სიმრავლეები ეუწოდოთ.

თეორემა 2.1.1. ვთქვათ, G წრფივი არაცარიელი ღია სიმრავლეა. მაშინ G წარმოიდგინება წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული ან თვლადი კლასის გაერთიანების სახით, ამასთან, ასეთი წარმოდგენა ერთადერთია.

დამტკიცება. შემოვიღოთ ბინარული მიმართება G სიმრავლეში შემდეგნაირად: $x \sim y$, თუ მოიძებნება ამ წერტილების შემცველი (a, b) ინტერვალი ისეთი, რომ $(a, b) \subset G$. ეს მიმართება არის ეკვივალენტობის მიმართება, ანუ აქვს რეფლექსურობის, სიმეტრიულობისა და ტრანზიტულობის თვისებები. რეფლექსურობა და სიმეტრიულობა ცხადია. ტრანზიტულობის დასადგენად შევნიშნოთ, რომ თუ ორი ინტერვალი ერთმანეთს კვეთს, მაშინ მათი გაერთიანება წარმოადგენს ინტერვალს. ახლა ვთქვათ, $x \sim y$ და $y \sim z$. მაშინ მოიძებნებიან (a, b) და (c, d) ინტერვალები ისეთები, რომ $x, y \in (a, b) \subset G$ და $y, z \in (c, d) \subset G$. გავეთებული შენიშვნის ძალით $x, y, z \in (a, b) \cup (c, d) = (t, \tau) \subset G$, რაც ნიშნავს მიმართების ტრანზიტულობას.

G სიმრავლე დაიშლება წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ეკვივალენტობის კლასებად, რომელთა ოჯახი აღვნიშნოთ Ω -თი. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი I ეკვივალენტობის კლასი წარმოადგენს ინტერვალს, რაც ტოლფასია $I = (\inf I, \sup I)$ ტოლობის. თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ G -ს ღიაობიდან გამომდინარეობს I -ს ღიაობა. შედეგად, დავასკვნით $I \subset (\inf I, \sup I)$ ჩართვის სამართლიანობას. შებრუნებული ჩართვის დასადგენად საყმარისია

შეგნიშნოთ, რომ $\inf I$ -სთან ნებისმიერ სიახლოვეში მარჯვნიდან და $\sup I$ -სთან ნებისმიერ სიახლოვეში მარცხნიდან შეიძლება შევარჩიოთ I სიმრავლის x და y წერტილები. ეკვივალენტობის განსაზღვრის თანახმად, მოიძებნება ინტერვალი (a, b) ისეთი, რომ $x, y \in (a, b) \subset G$. ცხადია, (a, b) ინტერვალის ყოველი წერტილი შედის განსახილავ I კლასში, ე.ი. $(a, b) \subset I$. აქედან კი, უშუალოდ ვასკენით $(\inf I, \sup I) \subset I$ ჩართვის სამართლიანობას.

დავადგინოთ, რომ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ინტერვალების ნებისმიერი Δ კლასი არაუშემტყუნებს თელადია, რითაც G სიმრავლის სასურველი თვისებების მქონე წარმოდგენის არსებობა დადგენილი იქნება. რაციონალურ რიცხვითა სიმრავლის ყველგან მკერძობის გათვალისწინებით Δ კლასის ყოველ ინტერვალს შეიძლება შეუესაბამოთ ამავე ინტერვალში შემავალი რაიმე რაციონალური რიცხვი. მიღებული შესაბამისობა იქნება ბიექცია Δ კლასსა და $\mathbb{Q}$ -ს რაიმე ქვესიმრავლეს შორის. თელადი სიმრავლის ნებისმიერი ქვესიმრავლე არაუშემტყუნებს თელადია, რისი გათვალისწინებითაც ვასკენით დებულების სამართლიანობას.

ინტერვალებისაგან შედგენილ Δ კლასს ეწოდოთ G სიმრავლის წარმოდგენა, თუ მასში შემავალი ინტერვალები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და $G = \bigcup_{I \in \Delta} I$. შეგნიშნოთ, რომ ჩვენ უკვე ავაგეთ G სიმრავლის წარმოდგენა Ω კლასის სახით.

ეთქვათ, Δ არის G სიმრავლის რაიმე წარმოდგენა. შეუძლებელია, ორ თანაუკვეთ ინტერვალს შორის ერთ-ერთი შეიცავდეს მეორის რომელიმე ბოლოს, რისი გათვალისწინებითაც ვასკენით, რომ წარმოდგენაში შემავალი ინტერვალების ბოლოები არ ეკუთვნიან G სიმრავლეს.

ახლა დავადგინოთ წარმოდგენის ერთადერთობა. დავუშვათ, Δ არის G სიმრავლის რაიმე წარმოდგენა. ვაჩვენოთ, რომ Δ ემთხვევა Ω წარმოდგენას. ავიღოთ რაიმე $I \in \Omega$ ინტერვალი. ცხადია, მოიძებნება I -ს თანამკვეთი $J \in \Delta$ ინტერვალი. იმის გათვალისწინებით, რომ I და J ინტერვალების ბოლოები არ ეკუთვნიან G სიმრავლეს, უშუალოდ გამომდინარეობს ამ ინტერვალების იგივეურობა. ამრიგად, $\Omega \subset \Delta$. ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $\Delta \subset \Omega$. შედეგად, $\Delta = \Omega$. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

წრფივი არაყარეული ღია G სიმრავლის წარმოდგენის ინტერვალებს G -ს შემადგენელ ინტერვალებს უწოდებენ.

შენიშვნა 2.1.1. თეორემა 2.1.1-ის დამტკიცებისას ჩვენ დავადგინეთ, რომ შემადგენელი ინტერვალების ბოლოები არ ეკუთვნიან G სიმრავლეს. აქვე შეგნიშნოთ შემადგენელი ინტერვალების მეორე მნიშვნელოვანი თვისება: თუ რაიმე (a, b) ინტერვალი შედის G -ში, მაშინ მოიძებნება G -ს შემადგენელი ინტერვალი, რომელიც შეიცავს (a, b) -ს. მართლაც, განვიხილოთ G -ს შემადგენელი I ინტერვალი, რომლის თანაკვეთა (a, b) -სთან არაყარეულია. მაშინ

იმის გათვალისწინებით, რომ I -ს ბოლოები არ ეკუთნიან G -ს, მარტივად ვაყენით სასურველ $I \supset (a, b)$ ჩართვას.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ღია სიმრავლეების გაერთიანება ღია სიმრავლეა, 2.1.1 თეორემიდან მივიღებთ ღია წრფივ სიმრავლეთა შემდეგ დახასიათებას.

თეორემა 2.1.2. ვთქვათ, G წრფივი სიმრავლეა. შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- G ღიაა;
- G წარმოდგება წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული ან თვლადი კლასის გაერთიანების სახით.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ჩაკეტილი სიმრავლეები წარმოადგენენ ღია სიმრავლეების დამატებებს, 2.1.2 თეორემიდან მივიღებთ ჩაკეტილ წრფივ სიმრავლეთა შემდეგ დახასიათებას.

თეორემა 2.1.3. ვთქვათ, F წრფივი სიმრავლეა. შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- F ჩაკეტილია;
- F მიიღება წრფიდან წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული ან თვლადი კლასის ამოკლებით.

ჩაკეტილი F სიმრავლის დამატებით $\mathbb{R} \setminus F$ სიმრავლის შემადგენელ ინტერვალებს F -ის დამატებით ინტერვალებს უწოდებენ.

$F \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეს ეწოდება სრულყოფილი, თუ ის ჩაკეტილია და არ შეიცავს იზოლირებულ წერტილებს.

სამართლიანია წრფივი ჩაკეტილი სიმრავლის იზოლირებულ წერტილთა შემდეგი დახასიათება.

ლემა 2.1.1. ვთქვათ, F წრფივი ჩაკეტილი სიმრავლეა. $x \in F$ წერტილი იზოლირებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის წარმოადგენს F -ის რაიმე ორი დამატებითი ინტერვალის საერთო ბოლოს.

დამტკიცება. საკმარისობა ცხადია. რაც შეეხება აუცილებლობას. განვიხილოთ (a, x) და (x, b) ინტერვალები, რომლებიც ჩართულია F -ის დამატებაში. მაშინ მოიძებნებიან $\mathbb{R} \setminus F$ სიმრავლის შემადგენელი I და J ინტერვალები ისეთები, რომ $(a, x) \subset I$ და $(x, b) \subset J$. ცხადია, x წერტილი იქნება I და J ინტერვალების საერთო ბოლო, რითაც ლემა დადგენილია. $\square$

თეორემა 2.1.3-დან და ლემა 2.1.1-დან მიიღება სრულყოფილ წრფივ სიმრავლეთა შემდეგი დახასიათება.

თეორემა 2.2.1. ვთქვათ, $G \subset \mathbb{R}^n$ არაცარიელი ღია სიმრავლეა. მაშინ G წარმოიდგინება ღია ბირთვების სასრული ან თვლადი კლასის გაერთიანების სახით.

ლემა 2.2.1. ვთქვათ, x წარმოადგენს $G \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის შიგა წერტილს. მაშინ მოიძებნებიან $y \in \mathbb{Q}^n$ რაციონალური წერტილი და $r > 0$ რაციონალური რიცხვი ისეთები, რომ $x \in B(y, r) \subset G$.

დამტკიცება. განვიხილოთ $\varepsilon > 0$, რომლისთვისაც $B(x, \varepsilon) \subset G$. ოქვისარგებლბთ $\mathbb{Q}^m$ ($m \in \mathbb{N}$) სიმრავლის ყველაზე მცირეობით $\mathbb{R}^m$ სივრცეში. ეიპოვით $y \in \mathbb{Q}^n$ წერტილს და $r \in \mathbb{Q}$ რიცხვს შემდეგი თვისებებით: $\rho(x, y) < \varepsilon/4$ და $r \in (\varepsilon/4, \varepsilon/2)$. მაშინ მარტივი შესამოწმებელია, რომ $x \in B(y, r) \subset B(x, \varepsilon) \subset G$, რითაც ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 2.2.1-ის დამტკიცება. ლემა 2.2.1-ის ძალით ყოველი $x \in G$ წერტილისათვის მოიძებნება $B_x = B(y_x, r_x)$ ბირთვი ისეთი, რომ $y_x \in \mathbb{Q}^n$, $r_x \in \mathbb{Q}$ და $x \in B(y_x, r_x) \subset G$. თუ გავითვალისწინებთ $\mathbb{Q}^n$ და $\mathbb{Q}$ სიმრავლეების თვლადობას, თელად სიმრავლეთა თვისებების საფუძეელზე დაერწმენდებით, რომ $\Omega = \{B_x\}_{x \in G}$ კლასი არაუმეტეს თვლადია. მეორე მხრივ,

$$G = \bigcup_{x \in G} \{x\} \subset \bigcup_{x \in G} B_x \subset G.$$

შედვად,

$$G = \bigcup_{x \in G} B_x = \bigcup_{B \in \Omega} B.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ვთქვათ, $k \in \mathbb{Z}$ და $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$. აღნიშნოთ

$$\Delta_k^m = \prod_{i=1}^n \left(\frac{m_i}{2^k}, \frac{m_i + 1}{2^k} \right) \quad (k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n),$$

$$\Omega_k = \{\Delta_k^m : m \in \mathbb{Z}^n\} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Omega_k.$$

Ω კლასში შემავალ კუბებს - ორობით კუბებს, ხოლო Ω_k ($k \in \mathbb{Z}$) კლასში შემავალ კუბებს - k -ური რიგის ორობით კუბებს უწოდებენ.

შენიშნოთ, რომ:

- k -ური რიგის ორობითი კუბები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და ისინი ქმნიან $\mathbb{R}^n$ სივრცის დაყოფას $1/2^k$ სიგრძის წიბოს მქონე კუბებად. შედეგად, სივრცის ყოველი x წერტილისათვის მოიძებნება მისი შემცველი ერთადერთი k -ური რიგის კუბი;

- k -ური რიგის ორობითი კუბები მიიღებიან $k - 1$ რიგის ორობითი კუბების დაყოფით 2^n ცალ ტოლ კუბად. შედეგად, k -ური რიგის კუბისათვის არსებობს მისი შემცველი ერთადერთი $k - 1$ რიგის კუბი.

შემდეგი ლემა გამოხატავს ორობითი კუბების არსებით თვისებას.

ლემა 2.2.2. ორი ორობითი კუბი ან თანაუკვეთია, ან ერთ-ერთი მათგანი მოიცავს მეორეს.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია ერთმანეთისაგან განსხვავებული I და J ორობითი კუბები. თუ I და J ერთი და იგივე რიგის არიან, მაშინ ისინი თანაუკვეთია. ასე რომ, განსახილავი გვრჩება შემთხვევა, როცა $I \in \Omega_p$, $J \in \Omega_q$, სადაც $p \neq q$. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმობთ, რომ $p > q$. განვიხილოთ ის

$$\Delta_{p-1} \in \Omega_{p-1}, \Delta_{p-2} \in \Omega_{p-2}, \dots, \Delta_q \in \Omega_q$$

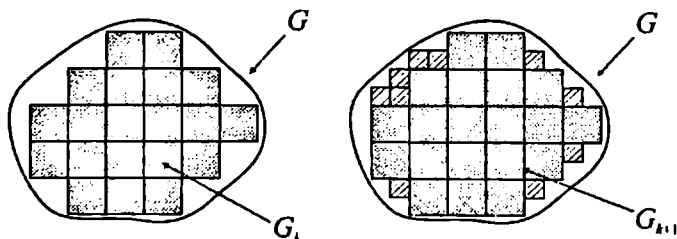
კუბები, რომელთათვისაც შესრულებული იქნება ჩართვები:

$$I \subset \Delta_{p-1} \subset \Delta_{p-2} \subset \dots \subset \Delta_q.$$

შევნიშნოთ, რომ Δ_q და J წარმოადგენენ q რიგის მქონე ორობით კუბებს. რის გამოც, $\Delta_q \cap J = \emptyset$ ან $\Delta_q = J$. შესაბამისად, $I \cap J = \emptyset$ ან $I \subset J$. ამით ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 2.2.2. ვთქვათ, $G \subset \mathbb{R}^n$ არაცარიელი ღია სიმრავლეა. მაშინ G წარმოადგენს წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ორობითი კუბების გაერთიანების სახით.

დამტკიცება. ყოველი $k \in \mathbb{N}$ -სთვის Π_k -თი აღვნიშნოთ ყველა იმ k -ური რიგის ორობითი კუბის კლასი, რომელიც შედის G სიმრავლეში, ხოლო G_k იყოს Π_k -ში შემავალი ორობითი კუბების გაერთიანება (ნახ. 2.1).



ნახ. 2.1.

თეორემის დამტკიცება ხდება (G_k) სიმრავლეთა მიმდევრობის შემდეგი სამი თვისების საფუძველზე:

- $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_k \subset$
- $G_{k+1} \setminus G_k$ წარმოდგება $k+1$ რიგის მქონე ორობითი კუბების გარყვეული კლასის გაერთიანების სახით,
- (G_k) მიმდევრობა ამოწურავს G სიმრავლეს, ე.ი. $\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G$.

შევამოწმოთ ეს თვისებები. შევნიშნოთ, რომ $k+1$ რიგის მქონე ყოველი ორობითი კუბი იშლება k რიგის მქონე 2^n ცალი ორობითი კუბის გაერთიანებად. ამ ფაქტის გათვალისწინებით, Π_{k+1} კლასის კუბები დაიყოფიან ორ ჯგუფად: პირველი ტიპის კუბები აითვისებენ Π_k კლასის კუბების მიერ დაკავებულ არეალს, ე.ი. ეს კუბები შედიან G_k სიმრავლეში და მათი გაერთიანება გვაძლევს G_k -ს, ხოლო მეორე ტიპის კუბები მოთავსდებიან G_k სიმრავლის გარეთ. შედეგად, ვღებულობთ პირველ და მეორე თვისებებს.

მესამე თვისების დამტკიცებისათვის განვიხილოთ ნებისმიერი $x \in G$ წერტილი. $I_k(x)$ -ით აღვნიშნოთ k -ური რიგის ის ორობითი კუბი, რომელიც შეიცავს x წერტილს. x არის G -ს შიგა წერტილი, საიდანაც, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $I_k(x)$ კუბების წიბოს სიგრძეები მიისწრაფვიან ნულისაკენ, როცა $k \rightarrow \infty$, დავასკვნით $I_k(x) \subset G$ ჩართვის სამართლიანობას საკმარისად დიდი k -სათვის. შედეგად, $x \in G_k$ საკმარისად დიდი k -სათვის. ამით მესამე თვისება შემოწმებულია.

დადგენილი სამი თვისების საფუძველზე G სიმრავლე წარმოდგება G_1 სიმრავლისა და $G_{k+1} \setminus G_k$ ($k \in \mathbb{N}$) სიმრავლეების გაერთიანების სახით, ამასთან, ეს სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და თითოეული მათგანი, თავის მხრივ, წარმოადგენს ორობითი კუბების გარყვეულ გაერთიანებას. ამით ცხადია, თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

აქვე შემოვიღოთ სიმრავლეთა ზოგიერთი კლასი, რომლებიც განაზოგადებენ ღია და ჩაკეტილ სიმრავლეთა კლასებს.

ამბობენ, რომ სიმრავლე A არის G_δ ტიპის, თუ მოიძებნებიან ღია სიმრავლეები $A_1, A_2, \dots$ ისეთები, რომ $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$.

ამბობენ, რომ სიმრავლე არის F_σ ტიპის, თუ მოიძებნებიან ჩაკეტილი სიმრავლეები $A_1, A_2, \dots$ ისეთები, რომ $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

თუ A წარმოიდგინება $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ სახით, სადაც ყოველი A_k სიმრავლე არის F_σ ტიპის, მაშინ ამბობენ, რომ A არის $F_{\sigma\delta}$ ტიპის, ხოლო თუ A წარმოიდგინება $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ სახით, სადაც ყოველი A_k სიმრავლე არის G_δ ტიპის, მაშინ ამბობენ, რომ A არის $G_{\delta\sigma}$ ტიპის.

გემოთ აღწერილი გზით ინდექსიურად შესაძლებელია $G_{\delta\sigma\delta}$, $G_{\delta\sigma\delta\sigma}$, და $F_{\sigma\delta\sigma}$, $F_{\sigma\delta\sigma\delta}$, ... ტიპების სიმრავლეთა განსაზღვრა.

ამოცანები

1. დამტკიცეთ, რომ ყოველი ჩაკეტილი $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე არის G_δ ტიპის, ხოლო ყოველი ღია $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე კი, F_σ ტიპის.

2. დაამტკიცეთ, რომ თვალად ყველაზე მცირე $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეს შეუძლებელია ჰქონდეს G_δ ტიპი.
3. ვთქვათ $A_1, A_2, \dots$ სიმრავლეები ყველაზე მცირეა, დაამტკიცეთ, რომ მათი თანაყვეთა ყველაზე მცირეა, თუ თითოეული A_k სიმრავლე ღიაა ან G_δ ტიპისაა.
4. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციის უწყვეტობის წერტილთა სიმრავლეს აქვს G_δ ტიპი.
5. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი უწყვეტი $f_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციების მიმდევრობის კრებადობის წერტილთა სიმრავლე არის G_δ ტიპის.

§ 3. ჩაკეტილი სიმრავლის სიმძლავრე

თეორემა 2.3.1. $\mathbb{R}^n$ სივრცის ყოველი არაცარიელი სრულყოფილი სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

თეორემა 2.3.1-ის დამტკიცებისას ტერმინ ბირთვის ქვეშ ვიგულისხმებთ ჩაკეტილ ბირთვს არანულოვანი რადიუსით.

B ბირთვის ცენტრი და რადიუსი აღვნიშნოთ, შესაბამისად, $c(B)$ და $r(B)$ ჩანაწერებით.

B ბირთვს ვუწოდოთ E სიმრავლეზე მიმაგრებული, თუ $c(B) \in E$.

ლემა 2.3.1. ვთქვათ, E არაცარიელი სრულყოფილი სიმრავლეა და B არის E -ზე მიმაგრებული ბირთვი. მაშინ მოიძებნებიან B -ში შემავალი $B(0)$ და $B(1)$ ბირთვები, რომლებიც თანაუკვეთია და მიმაგრებულია E -ზე.

დამტკიცება. ლემის პირობის ძალით, B ბირთვის ცენტრი $c(B)$ წარმოადგენს E სიმრავლის ზღვარით წერტილს, რის გამოც მოიძებნებიან B -ს შიგა წერტილები x_0 და x_1 , რომლებიც ეკუთვნიან E სიმრავლეს. ცხადია, რომ $B(0)$ და $B(1)$ ბირთვების როლში შეიძლება ავიღოთ x_0 და x_1 წერტილებში ცენტრების მქონე საკმარისად მცირე რადიუსის ბირთვები. $\square$

შენიშვნა 2.3.1. ლემა 2.3.1-ში მოძებნილი $B(0)$ და $B(1)$ ბირთვები შეიძლება შევარჩიოთ ისე, რომ მათ ჰქონდეთ ნებისმიერი წინასწარ დასახელებული სიმცირის რადიუსები.

ლემა 2.3.1-ის მიხედვით B ბირთვისაგან $B(0)$ და $B(1)$ ბირთვების წარმოქმნას ვუწოდოთ B -ს დიქტომია.

თეორემა 2.3.1-ის დამტკიცება. განვიხილოთ მოცემულ E სიმრავლეზე მიმაგრებული რაიმე B ბირთვი. ლემა 2.3.1-ის მეშვეობით განესაზღვროთ B ბირთვით წამოწყებული დიქტომიების მიმდევრობითი გამოყენებით აგებული $B(i_1, \dots, i_k)$ ბირთვების კლასი, სადაც k ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია,

ხოლო i_k ინდექსები ლეზულობენ 0-ის ან 1-ის ტოლ მნიშვნელობებს. სახელდობრ, აგების წესი შემდეგნაირია: პირველ ეტაპზე განისილება B -ს დიქტომიით მიღებული $B(0)$ და $B(1)$ ბირთვები, მეორე ეტაპზე - $B(0)$ და $B(1)$ ბირთვების დიქტომიით მიღებული $B(0,0)$, $B(0,1)$ და $B(1,0)$, $B(1,1)$ ბირთვები. ამ პროცესის უსასრულოდ გაგრძელება გეძლევენ $B(i_1, \dots, i_k)$ ბირთვების შემოსვენებულ კლასს. ვიგულისხმობთ, რომ

$$r(B(i_1, \dots, i_k)) < \frac{1}{k},$$

რისი მიღწევის საშუალებასაც აგება იძლევა (იხ. შენიშვნა 2.3.1).

ამრიგად, ყოველი ორობითი $i = (i_k)$ მიმდევრობისათვის გვაქვს ჩალაგებული და ნულისაყენ კრებადი რადიუსების მქონე ბირთვების მიმდევრობა:

$$B(i_1), B(i_1, i_2), \dots, B(i_1, \dots, i_k),$$

როგორც ცნობილია, ასეთი ბირთვთა მიმდევრობას აქვს ერთწერტილიანი თანაკვეთა. ეს წერტილი აღვნიშნოთ x_i -თი. შევნიშნოთ, რომ

$$c(B(i_1, \dots, i_k)) \in E \quad (k \in \mathbb{N}) \quad \text{და} \quad c(B(i_1, \dots, i_k)) \rightarrow x_i \quad (k \rightarrow \infty).$$

აქედან, E -ს ჩაეტილობის გათვალისწინებით, ეასყენით x_i წერტილის მიკუთვნებას E სიმრავლისადმი. ახლა ვაჩვენოთ, რომ $i \mapsto x_i$ შესაბამისობა, რომელიც ყველა ორობითი მიმდევრობის სიმრავლეს ასახავს E სიმრავლეში, არის ინექცია. მართლაც, განვიხილოთ ერთმანეთისაგან განსხვავებული $i = (i_k)$ და $i' = (i'_k)$ ორობითი მიმდევრობები. k_0 იყოს მინიმალური იმ k ინდექსებს შორის, რომელთათვისაც $i_k \neq i'_k$. მაშინ $B(i_1, \dots, i_{k_0})$ და $B(i'_1, \dots, i'_{k_0})$ ბირთვები მიღებული იქნებიან $B(i_1, \dots, i_{k_0-1})$ ბირთვის დიქტომიით. რის გამოც ისინი გამოვლენ თანაუკვეთი. აქედან გამომდინარე, x_i და $x_{i'}$ წერტილები მოთავსებული იქნებიან თანაუკვეთ სიმრავლეებში. შედეგად, $x_i \neq x_{i'}$. ამით $i \mapsto x_i$ ასახვის ინექციურობა დადგენილია. ახლა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ყველა ორობითი მიმდევრობის სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა, მივიღებთ $\text{card} E \geq c$ შეფასებას. მეორე მხრივ, $E \subset \mathbb{R}^n$ ჩართვის გამო, $\text{card} E \leq c$. საბოლოოდ, კანტორ-ბერნშტეინის თეორემის ძალით მივიღებთ $\text{card} E = c$ ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

$x \in \mathbb{R}^n$ წერტილის ეწოდება $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის კონდენსაციის წერტილი, თუ x -ის ყოველი მიდამო შეიცავს E სიმრავლის არათვალად ქვესიმრავლეს.

თეორემა 2.3.2. ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის არცერთი წერტილი არ წარმოადგენს მის კონდენსაციის წერტილს. მაშინ E არაუმეტეს თვლადია.

დამტკიცება. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\mathbb{Q}^m$ ყველგან ჩვერივია $\mathbb{R}^m$ სივრცეში. თეორემის პირობის ძალით, ყოველი $x \in E$ -სთვის ვიპოვით რაციონალური ცენტრისა და რაციონალური რადიუსის მქონე ღია ბირიუს, რომელიც შეიცავს x წერტილს და ამასთან $B_x \cap E$ სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია. ესაღია, $E \subset \bigcup_{x \in E} B_x$. საიდანაც გვექნება,

$$E = \bigcup_{x \in E} (B_x \cap E).$$

ყოველი B_x ($x \in E$) ბირთვი ცალსახად განისაზღვრება ორი პარამეტრით - ცენტრითა და რადიუსით, რომლებიც მიეკუთვნებიან თვლად სიმრავლეებს. აქედან, თვლად სიმრავლეთა ცნობილი თვისებების ძალით ვასენით, რომ $\{B_x : x \in E\}$ კლასი არაუმეტეს თვლადია. ამგვარად, E სიმრავლე წარმოადგა როგორც არაუმეტეს თვლად სიმრავლეთა არაუმეტეს თვლადი $\{B_x \cap E : x \in E\}$ კლასის გაერთიანება, საიდანაც ვასენით, რომ E არაუმეტეს თვლადია. $\square$

შედეგი 2.3.1. ვთქვათ, P არის $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის კონდენსაციის წერტილთა სიმრავლეა. მაშინ $E \setminus P$ არაუმეტეს თვლადია.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ $E \setminus P$ სიმრავლის არცერთი წერტილი არ წარმოადგენს მის კონდენსაციის წერტილს. მართლაც, თუ $x \in E \setminus P$ იქნება $E \setminus P$ -ს კონდენსაციის წერტილი, მაშინ x მიუძღუება იქნება E -ს კონდენსაციის წერტილიც. ამიტომ x მიეკუთვნება P -ს და შედეგად, $x \notin E \setminus P$, რაც ეწინააღმდეგება $x \in E \setminus P$ პირობას.

ახლა, თუ გამოვიყენებთ თეორემა 2.3.2-ს, დავასკენით, რომ $E \setminus P$ არაუმეტეს თვლადია. $\square$

თეორემა 2.3.3. ყოველი $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის კონდენსაციის წერტილთა სიმრავლე სრულყოფილია.

დამტკიცება. თეორემა ტრივიალურია, თუ სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია. ვთქვათ, E არათვლადია. მისი კონდენსაციის წერტილთა სიმრავლე იყოს P . ჯერ დავამტკიცოთ, რომ P ჩაკეტილია. ვთქვათ, P -ს წერტილთა (x_k) მიმდევრობა კრებადია x წერტილისაკენ. განვიხილოთ x წერტილის რაიმე B მიდამო, მაშინ B მიდამო იქნება მიმდევრობის საკმარისად დიდი ნომრის მქონე x_k წევრისთვისაც. $x_k \in P$ კონდენსაციის წერტილია E -სთვის, რის გამოც $B \cap E$ არათვლადია. შედეგად, x არის E სიმრავლის კონდენსაციის წერტილი.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ P სრულყოფილია. ვთქვათ, $x \in P$ და B არის x -ის რაიმე მიდამო. მაშინ $B \cap E$ არათვლადია, ხოლო შედეგი 2.3.1-ის ძალით, $B \cap E$ სიმრავლის ყველა წერტილი, გარდა შესაძლოა წერტილთა არაუმეტეს

თვლადი სიმრავლისა, მისივე კონდენსაციის წერტილია. აქედან გამომდინარე, $B \cap E$ შეიცავს უსასრულოდ ბევრ მისავე კონდენსაციის წერტილს, რომლებიც, იმაედროულად, იქნებიან E სიმრავლის კონდენსაციის წერტილებიც. ამგვარად, x -ის ნებისმიერ B მიდამოში ვიპოვეთ P სიმრავლის უსასრულოდ ბევრი წერტილი. რითაც დავადასტურეთ, რომ P სრულყოფილია. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შემდეგი დებულება დამტკიცებული იყო გ. კანტორისა და ი. ბენდიქსონის მიერ.

თეორემა 2.3.4. ყოველი ჩაკეტილი $F \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე წარმოადგენს იმ სიმრავლის გაერთიანების სახით, რომელთაგან ერთ-ერთი არის სრულყოფილი, ხოლო მეორე - არაუმეტეს თვლადი.

დამტკიცება. P -ში აღვნიშნოთ F -ის კონდენსაციის წერტილთა სიმრავლე. F ჩაკეტილია, ამიტომ მისი დამატება F -ის კონდენსაციის წერტილებს არ შეიცავს. შედეგად, $P \subset F$. ახლა, თუ გავითვალისწინებთ $E = P \cup (F \setminus P)$ წარმოდგენას და გამოვიყენებთ თეორემა 2.3.3-ს და შედეგი 2.3.1-ს, დაერწმუნდებით დასამტკიცებელი წინადადების სამართლიანობაში. $\square$

შემდეგი დებულება გამომდინარეობს 2.3.1 და 2.3.4 თეორემებიდან.

შედეგი 2.3.2. $\mathbb{R}^n$ სივრცის ყოველი ჩაკეტილი სიმრავლე ან სასრულია, ან თვლადი, ანაც კონტინუუმის სიმძლავრის.

§ 4. კანტორის სიმრავლე

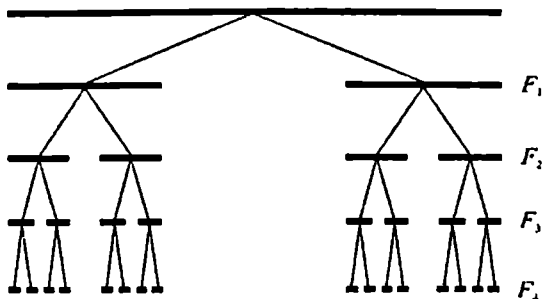
A სიმრავლისათვის $\text{int} A$ -ში აღვნიშნოთ A -ს შიგა წერტილების სიმრავლე. ეთქვას, $\Delta \subset \mathbb{R}$ რაიმე სეგმენტი. დავყოთ Δ სამ ტოლ სეგმენტად და მიღებული სეგმენტები მათი დალაგების შესაბამისად აღვნიშნოთ $\Delta(0)$, $\Delta(1)$ და $\Delta(2)$ -ით. $\text{int} \Delta(1)$ ინტერვალს დავარქვათ Δ -ს შუა ნაწილი.

$\Delta \subset \mathbb{R}$ სეგმენტის გაწყვეტა დავარქვათ ოპერაციას, რომელიც Δ -ს შეუსაბამებს $\Delta(0)$ და $\Delta(2)$ სეგმენტების გაერთიანებას, ანუ Δ -ს „გაწყვეტს“ მისი შუა ნაწილის ამოღების მეშვეობით.

საზოგადოდ, თუ F არის წყვილ-წყვილად თანაუქვეთი $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ სეგმენტების გაერთიანება, მაშინ F -ის გაწყვეტა დავარქვათ ოპერაციას, რომელიც F -ს შეუსაბამებს $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ სეგმენტების გაწყვეტის შედეგად ღარჩენილ $\bigcup_{k=1}^n (\Delta_k(0) \cup \Delta_k(2))$ სიმრავლეს.

კანტორის სიმრავლე (კანტორის დისკონტინუუმი) $\mathbb{D}$ განისაზღვრება. როგორც სიმრავლე, რომელიც რჩება $[0, 1]$ სეგმენტისაგან მასზე გაწყვეტის

ოპერაციის რეკურენტული მოქმედებების შედეგად, სასულდობრ, როგორც სიმ-
რავლე: $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, სადაც F_1 არის $[0, 1]$ -ის გაწყვეტა, F_2 არის F_1 -ის
გაწყვეტა და ა.შ. (ნახ. 2.2).



ნახ. 2.2.

ამრიგად, კანტორის სიმრავლის მისაღებად $[0, 1]$ სეგმენტისაგან ჯერ უნდა
ამოვავლოთ მისი შუა ნაწილი, შემდეგ დარჩენილი $\Delta(0)$ და $\Delta(2)$ სეგმენტები-
საგან უნდა ამოვავლოთ მათი შუა ნაწილები და ა.შ. ამ პროცესის უსასრულოდ
გაგრძელების შედეგად $[0, 1]$ სეგმენტის ხელუსვლელი (ანუ არაამოვადებული)
წერტილები ქმნიან კანტორის სიმრავლეს.

კანტორის $\mathbb{D}$ სიმრავლის ერთ-ერთი უმთავრესი თვისება იმაში გამო-
იხატება, რომ ის იყავეს $[0, 1]$ სეგმენტის ძალიან უმნიშვნელო ნაწილს (მისი
დამატებითი ინტერვალების სიგრძეთა ჯამი 1-ის ტოლია), მაგრამ, მიუხედავად
ამისა, $\mathbb{D}$ სიმრავლეში ძალიან ბევრი წერტილია, კერძოდ, ის კონტინუუმის
სიმძლავრისაა. ქვემოთ დადგენილი იქნება კანტორის სიმრავლის ეს და სხვა
თვისებები.

ეთქვათ, $\Delta \subset \mathbb{R}$ რაიმე სეგმენტია. $n \geq 2$ და $i_1, \dots, i_n \in \{0, 1, 2\}$
პარამეტრებისათვის $\Delta(i_1, \dots, i_n)$ სეგმენტები განვსაზღვროთ ინდუქციურად
შემდეგი ტოლობით:

$$\Delta(i_1, \dots, i_n) = \Delta(i_1, \dots, i_{n-1})(i_n),$$

თუ Δ -ს როლში ავიღებთ $[0, 1]$ მონაკვეთს, გვექნება:

$$F_n = \bigcup_{(i_1, \dots, i_n) \in \{0, 2\}^n} \Delta(i_1, \dots, i_n),$$

$$F_{n+1} = F_n \setminus \bigcup_{(i_1, \dots, i_n) \in \{0, 2\}^n} \text{int} \Delta(i_1, \dots, i_n, 1).$$

შედგებად ვლუბულობტ კანტორის სიმრავლის ორ წარმოდგენას:

$$\mathbb{D} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{(i_1, \dots, i_n) \in \{0, 2\}^n} \Delta(i_1, \dots, i_n);$$

$$\mathbb{D} = [0, 1] \setminus \left(\text{int}\Delta(1) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{(i_1, \dots, i_n) \in \{0, 2\}^n} \text{int}\Delta(i_1, \dots, i_n, 1) \right)$$

თეორემა 2.4.1. კანტორის $\mathbb{D}$ სიმრავლეს აქვს შემდეგი თვისებები:

- $\mathbb{D}$ სრულყოფილი სიმრავლეა;
- $\mathbb{D}$ არსად მკერვივა;
- $\mathbb{D}$ -ს აქვს კონტინუუმის სიმძლავრე;
- $\mathbb{D}$ -ს დამატებითი ინტერვალების სიგრძეთა ჯამი 1-ის ტოლია.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $F_0 = [0, 1]$. შევნიშნოთ, რომ $\mathbb{D}$ სიმრავლის აგების n -ურ ეტაპზე F_n სიმრავლიდან ვაგდებთ 2^{n-1} ცალ ინტერვალს სიგრძით $1/3^n$, რომლებიც F_n -ის დამატებითი სიმრავლისაგან დამორებულია $1/3^n$ მანძილით. ამ შესაშენაზე დაყრდნობით გვაქვს, რომ:

1) $\mathbb{D}$ -ს დამატებითი ინტერვალები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი და წყვილ-წყვილად საერთო ბოლოს არმქონეა;

2) $\mathbb{D}$ -ს დამატებითი ინტერვალების ჯამური სიგრძე გამოისახება $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}/3^n$ მწკრივით, რომლის ჯამი 1-ის ტოლია;

3) $\mathbb{D}$ არაყარეილია, კერძოდ, შეიცავს თითოეული დამატებითი ინტერვალის ბოლოებს.

1)-დან თეორემა 2.2.1-ზე დაყრდნობით ვასკენით, რომ $\mathbb{D}$ სრულყოფილია. შემდეგ კი, 3)-ის და თეორემა 2.3.1-ის ძალით ვლუბულობტ, რომ $\mathbb{D}$ კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

დასამტკიცებელი გვრჩება $\mathbb{D}$ -ს არსად მკერვიობა, ე.ი. ნებისმიერი $I \subset [0, 1]$ ინტერვალისათვის უნდა ვიპოვოთ $J \subset I$ ქვეინტერვალ, რომელიც არ შეიცავს $\mathbb{D}$ -ს წერტილებს. თუ $J \cap \mathbb{D} = \emptyset$, მაშინ დებულება ცხადია. ვთქვათ, $J \cap \mathbb{D} \neq \emptyset$. ავარჩიოთ რაიმე $x \in I \cap \mathbb{D}$ წერტილი. x არის I ინტერვალის შიგა წერტილი, რის გამოც საკმარისად დიდი n -ის შემთხვევაში, F_n -ის შემადგენელი ის $\Delta(i_1, \dots, i_n)$ სეგმენტი, რომელიც შეიცავს x -ს, აღმოჩნდება ჩართული I ინტერვალში. მაშინ $\Delta(i_1, \dots, i_n)$ სეგმენტის შუა $\text{int}\Delta(i_1, \dots, i_n, 1)$ ნაწილი იქნება კანტორის სიმრავლის დამატებითი ინტერვალ, რომელიც ჩართულია I -ში. აქედან გამომდინარე, J -ს როლში შეიძლება ავიღოთ $\text{int}\Delta(i_1, \dots, i_n, 1)$ ინტერვალ. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამოცანები

1. ააგეთ სრულყოფილი და არსად მკერძი $E \subset [0, 1]$ სიმრავლე, რომლის დამატებითი ინტერვალების სიგრძეთა ჯამი წინასწარ დასასულებული $a \in (0, 1)$ რიცხვის ტოლია.
2. დაამტკიცეთ, რომ კანტორის სიმრავლეს აქვს შემდეგი არითმეტიკული სტრუქტურა: ის შედგება მხოლოდ და მხოლოდ იმ რიცხვებისაგან, რომლებიც შეიძლება წარმოდგეს ისეთი $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k / 3^k$ საშობითი წილადის სახით, რომლის საშობით ε_k თანრიგებს შორის არცერთი არაა 1-ის ტოლი. ამ ფაქტზე დაყრდნობით დაამტკიცეთ, რომ კანტორის სიმრავლეს აქვს კონტინუუმის სიმძლავრე.
3. დაამტკიცეთ, რომ $\{x_1 + x_2 : x_1, x_2 \in \mathbb{D}\} = [0, 2]$.
4. ააგეთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ღია $Q_k \subset [0, 1]^n$ კუბების მიმდევრობა, რომლის დამატებითი სიმრავლე $[0, 1]^n$ კუბამდე სრულყოფილი და არსად მკერძია.

სიმრავლეთა კლასები

სიმრავლეთა კლასებს, რომლებიც ჩაკეტილი არიან სხვადასხვა სიმრავლური ოპერაციების (სასრული გაერთიანება, თვლადი გაერთიანება, სხვაობა და ა.შ.) მიმართ, არსებითი ღატვირთვა აქვთ ზომის თეორიაში. ამ თავში განხილული იქნება ამ ტიპის კლასები და მათი საბაზისო თვისებები.

§ 1. სიმრავლეთა კლასების ძირითადი ტიპები

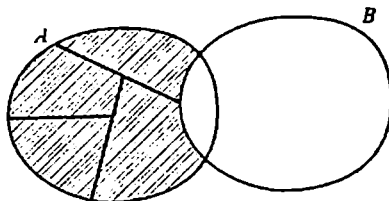
ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ X რაიმე არაყარიული სიმრავლეა და ვანვიხილავთ X -ის ქვესიმრავლეთა კლასებს.

ეთქვას, $H \subset 2^X$ სიმრავლეთა არაყარიული კლასია. სიმრავლეთა $\Omega \subset 2^X$ კლასს ეუწოდოთ $A \subset X$ სიმრავლის H -დამლა (თვლადი H -დამლა), თუ: Ω სასრულია (თვლადია), Ω -ში შემავალი სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია, $\Omega \subset H$ და $A = \bigcup_{B \in \Omega} B$.

სიმრავლეთა არაყარიულ $H \subset 2^X$ კლასს ეუწოდოთ ნახევარგოლი, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

- თუ $A, B \in H$, მაშინ $A \cap B \in H$;
- თუ $A, B \in H$, მაშინ არსებობს $A \setminus B$ სიმრავლის H -დამლა.

ამრიგად, ნახევარგოლი ჩაკეტილია თანაკვეთის ოპერაციის მიმართ. სხვაობის მიმართ ჩაკეტილობის ნაცვლად კი, მოითხოვება მისი შესუსტებული ფორმა სხვაობა უნდა იმლებოდეს ნახევარგოლის სიმრავლეთა სასრულ გაერთიანებად (ნახ. 3.1).



ნახ. 3.1.

შეენიშნოთ, რომ ცარიელი სიმრავლე ეკუთვნის ნახევარგოლს. ეს გამოდინარეობს განსაზღვრების მეორე პირობიდან, თუ ავიღებთ $A = B$.

შეენიშნოთ აგრეთვე, რომ ნახევარგოლი ჩაეტილია სასრული თანავეთის ოპერაციის მიმართ, ე.ი. თუ $A_1, \dots, A_n$ სიმრავლეები ეკუთვნიან H ნახევარგოლს, მაშინ $\bigcap_{k=1}^n A_k \in H$.

ნახევარგოლის მაგალითებს იძლევიან $\{\emptyset\}$ და 2^X კლასები. მათგან პირველი უღარიბესია ყველა შესაძლო $H \subset 2^X$ ნახევარგოლთა შორის, მეორე კი უმდიდრესი. მარტივი შესამოწმებელია, რომ ნახევარგოლის მაგალითს იძლევა, აგრეთვე, შემდეგი კლასი:

$$I = \{\emptyset\} \cup \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

ნახევრადლია მონაცემების I კლასს საბაზისო დატვირთვა აქვს ლებეგის ზომის კონსტრუქციაში.

სიმრავლეთა არაცარიელ $H \subset 2^X$ კლასს ეწოდება ნახევარგოლთა. თუ ის ნახევარგოლია და შეიცავს X -ს.

სიმრავლეთა არაცარიელ $H \subset 2^X$ კლასს ეწოდება რგოლი, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

- თუ $A, B \in H$, მაშინ $A \cup B \in H$;
- თუ $A, B \in H$, მაშინ $A \setminus B \in H$.

რგოლი ჩაეტილია თანავეთის ოპერაციის მიმართ. ამის დასადაგენად საკმარისია შეენიშნოთ, რომ $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$. ამრიგად, რგოლი წარმოადგენს ნახევარგოლსაც.

ცხადია, რგოლი ჩაეტილია თანავეთის, სხვაობისა და გაერთიანების სასრული რაოდენობის ოპერაციების მიმართ.

შეენიშნოთ, რომ ნახევრადლია მონაცემების I კლასი არ წარმოადგენს რგოლს.

სიმრავლეთა არაცარიელ $H \subset 2^X$ კლასს ეწოდება ალგებრა, თუ ის რგოლია და შეიცავს X -ს.

სიმრავლეთა არაცარიელ $H \subset 2^X$ კლასს ეწოდება σ -რგოლი, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

- თუ $A_1, A_2, \dots \in H$, მაშინ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in H$;
- თუ $A, B \in H$, მაშინ $A \setminus B \in H$.

მეორე თვისებიდან გამომდინარე, ცარიელი სიმრავლე ეკუთვნის σ -რგოლს, საიდანაც, პირველი თვისების მეშვეობით, მარტივად დაედასტურება, რომ σ -რგოლი ჩაეტილია ორი სიმრავლის გაერთიანების ოპერაციის მიმართ. ამრიგად, σ -რგოლი იმავდროულად წარმოადგენს რგოლსაც.

შეგნიშნოთ, რომ σ -რგოლი ჩაკეტილია თვლადი თანაკვეთის ოპერაციის მიმართაც, კერძოდ, თუ $\{A_1, A_2, \dots\} \subset H$, მაშინ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in H$. ეს მტკიცდება შემდეგი სიმრავლური ტოლობის გათვალისწინებით:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \bigcup_{n=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_n).$$

სიმრავლეთა არაყარიელ $H \subset 2^X$ კლასს ეწოდება σ -ალგებრა, თუ ის σ -რგოლია და შეიცავს X -ს.

სიმრავლეთა (A_n) მიმდევრობას ეწოდება ზრდადი, თუ $A_n \subset A_{n+1}$ ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -სთვის. სიმრავლეთა ზრდადი (A_n) მიმდევრობის ზღვარი განისაზღვრება ტოლობით:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

სიმრავლეთა (A_n) მიმდევრობას ეწოდება კლებადი, თუ $A_n \supset A_{n+1}$ ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -სთვის. სიმრავლეთა კლებადი (A_n) მიმდევრობის ზღვარი განისაზღვრება ტოლობით:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

სიმრავლეთა ზრდად და კლებად მიმდევრობებს მონოტონური ეწოდებათ. სიმრავლეთა არაყარიელ $H \subset 2^X$ კლასს ეწოდება მონოტონური კლასი, თუ H -ში შემავალ სიმრავლეთა ნებისმიერი მონოტონური მიმდევრობის წევრებთან ერთად H შეიცავს ამ მიმდევრობის ზღვარსაც.

თეორემა 3.1.1. ვთქვათ, $H \subset 2^X$. შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- 1) H არის σ -რგოლი;
- 2) H არის მონოტონური რგოლი.

დამტკიცება. 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია გამომდინარეობს σ -რგოლის თვისებებიდან.

დავადგინოთ შებრუნებული 2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაცია. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს რაიმე $A_n \in H$ მიმდევრობა. H რგოლიცაა, რის გამოც, $\bigcup_{k=1}^n A_k \in H$ ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -თვის. ამასთანავე, $\bigcup_{k=1}^n A_k \subset \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k$ ($n \in \mathbb{N}$). აქედან, $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^n A_k$ ტოლობისა და 2) პირობის გათვალისწინებით დადასტვინით, რომ $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in H$. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამოცანები

1. აავსეთ სიმრავლეთა კლასი, რომელიც ჩაკეტილია თანაკვეთისა და გაერთიანების ოპერაციების მიმართ, მაგრამ არ წარმოადგენს ნახევარრგოლს.

2. დამტკიცეთ, რომ ყველა რისხვითი მუალედის კლასი არის ნახევარრგოლი.
3. დამტკიცეთ, რომ წრფის ყველა შემოსაზღვრული სიმრავლის კლასი არის რგოლი, მაგრამ არ არის σ -რგოლი.
4. დამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი არათვლადი X სიმრავლისათვის, მისი ის ქვესიმრავლეები, რომლებიც ან არაუმეტეს თვლადია, ანაც აქვთ არაუმეტეს თვლადი დამატება, ქმნიან σ -ალგებრას.
5. ააგეთ H რგოლი, რომელიც არ წარმოადგენს σ -რგოლს, მაგრამ H -ის სიმრავლეთა ნებისმიერი თვლადი ოჯახის თანავეეთა ეკუთვნის H -ს.
6. ეთქვათ, H რგოლია. აღვნიშნოთ $A + B = A \Delta B$, $A \cdot B = A \cap B$. დამტკიცეთ, რომ ასეთი სახის შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების მიმართ H , როგორც ალგებრული სტრუქტურა, წარმოადგენს კომუტაციურ რგოლს.

§ 2. ნახევარრგოლის თვისებები

თეორემა 3.2.1. ვთქვათ, H ნახევარრგოლია. მაშინ ნებისმიერი $A, A_1, \dots, A_n \in H$ სიმრავლეებისათვის არსებობს $A \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k$ სიმრავლის H -დამლა.

დამტკიცება. ვიმსჯელოთ ინდუქციით n -ის მიხედვით. $n = 1$ შემთხვევაში დებულება გამომდინარეობს ნახევარრგოლის განსაზღვრებიდან. ვთქვათ, $n > 1$ და დებულება დამტკიცებულია $n - 1$ ცალი სიმრავლისათვის. განვიხილოთ წყვილ-წყვილად თანავეეთი $C_1, \dots, C_p \in H$ სიმრავლეები, რომელთათვისაც

$$A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) = C_1 \cup \dots \cup C_p.$$

გვექნება, რომ

$$A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup A_n) = (C_1 \setminus A_n) \cup \dots \cup (C_p \setminus A_n).$$

ნახევარრგოლის მეორე თვისების გამოყენებით თითოეული $C_i \setminus A_n$ სიმრავლისათვის იარსებებს მისი H -დამლა - Ω_i . ცხადია, რომ $\Omega_1, \dots, \Omega_p$ კლასების გაერთიანება მოგვცემს $A \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k$ სიმრავლის H -დამლას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 3.2.2. ვთქვათ, H ნახევარრგოლია. მაშინ ნებისმიერი $A_1, \dots, A_n \in H$ სიმრავლეებისათვის არსებობს სიმრავლეთა Ω კლასი, ისეთი, რომ

1) Ω არის $\bigcup_{k=1}^n A_k$ სიმრავლის H -დამლა;

2) ყოველი $k \in \overline{1, n}$ -სთვის მოიძებნება $\Omega_k \subset \Omega$ ქვეკლასი, რომელიც არის A_k სიმრავლის H -დამლა.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ $\bigcup_{k=1}^n A_k$ გაერთიანების H -დამშლის არსებობა ადვილად გამომდინარეობს თეორემა 3.2.1-დან, თუმცა ეს არაა საკმარისი დამტკიცებისათვის, რადგანაც მოითხოვება ისეთი დამშლის აგება, რომელსაც ექნება 2) თვისებაც.

ვიმსჯელოთ ინდუქციით n -ის მიხედვით. $n = 1$ შემთხვევაში დებულება ცხადია. ვთქვათ, $n > 1$ და დებულება დამტკიცებულია $n - 1$ ცალი სიმრავლისათვის. გამოვიყენოთ ინდუქციის დაშვება $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ სიმრავლეებისათვის და განვიხილოთ დებულების მიხედვით მათი შესაბამისი H -დამშლა, შედგენილი $C_1, C_2, \dots, C_p \in H$ სიმრავლეებისაგან.

$\bigcup_{k=1}^n A_k$ სიმრავლე დაიშლება წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სიმრავლეების შემდეგ სამ ჯგუფად:

$$A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1});$$

$$C_1 \setminus A_n, \dots, C_p \setminus A_n;$$

$$C_1 \cap A_n, \dots, C_p \cap A_n.$$

თეორემა 3.2.1-ის გამოყენებით პირველი და მეორე ჯგუფის სიმრავლეებისათვის მოიძებნებიან მათი H -დამშლები: $\Delta, \Delta_1, \dots, \Delta_p$ კლასების სახით, შესაბამისად. რაც შეეხება მესამე ჯგუფის სიმრავლეებს, ისინი ქმნიან H -ის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სიმრავლეთა სასრულ Δ'' კლასს. მარტივი დასანახია, რომ $\Delta \cup \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_p \cup \Delta''$ გვაძლევს საძიებელ Ω კლასს. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ვთქვათ, $X_1, \dots, X_n$ არაყარიელი სიმრავლეებია. $H_1 \subset 2^{X_1}, \dots, H_n \subset 2^{X_n}$ არაყარიელი კლასების დეკარტული ნამრავლი ეწოდება $X_1 \times \dots \times X_n$ -ის ქვესიმრავლეთა შემდეგ კლასს

$$\{A_1 \times \dots \times A_n : A_1 \in H_1, \dots, A_n \in H_n\}$$

და აღინიშნება $H_1 \times \dots \times H_n$ ჩანაწერით. როცა $H_1 = \dots = H_n = H$, მაშინ $H_1 \times \dots \times H_n$ ნამრავლს ეწოდება H კლასის n -ური ხარისხი და აღინიშნება H^n ჩანაწერით.

თეორემა 3.2.3. თუ $H_1 \subset 2^{X_1}, \dots, H_n \subset 2^{X_n}$ წარმოადგენენ ნახევარ-რგოლებს, მაშინ მათი $H_1 \times \dots \times H_n$ ნამრავლი ნახევარ-რგოლია.

დამტკიცება. თავდაპირველად განვიხილოთ $n = 2$ შემთხვევა. განვიხილოთ $H_1 \times H_2$ კლასის ნებისმიერი ორი $A = A_1 \times A_2$ და $B = B_1 \times B_2$ წარმომადგენელი. სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2); \quad (1)$$

$$(A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2) = [(A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \setminus B_2)] \cup [(A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \cap B_2)] \cup [(A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2)]. \quad (2)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ H_1 და H_2 ნახევარგოლებია, (1)-დან მივიღებთ $A \cap B \in H_1 \times H_2$ თანაფარდობას.

განვიხილოთ $A_1 \setminus B_1$ სიმრავლის H_1 -დან - $\{C_1, \dots, C_p\}$, და $A_2 \setminus B_2$ სიმრავლის H_2 -დან - $\{D_1, \dots, D_q\}$. მაშინ (2) ტოლობის გათვალისწინებით დავწერთ,

$$(A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2) = \\ = \left[\bigcup_{i=1}^p \bigcup_{j=1}^q (C_i \times D_j) \right] \cup \left[\bigcup_{i=1}^p (C_i \times (A_2 \cap B_2)) \right] \cup \left[\bigcup_{j=1}^q ((A_1 \cap B_1) \times D_j) \right].$$

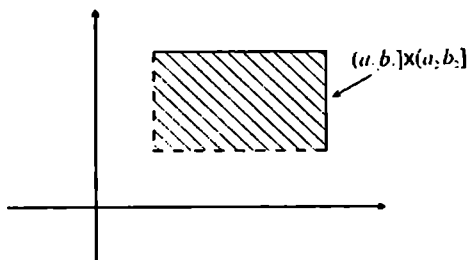
მიღებულ წარმოდგენაში მონაწილე სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და ისინი ეკუთვნიან $H_1 \times H_2$ კლასს. შედეგად, $H_1 \times H_2$ კლასი ნახევარგოლია.

უკვე განხილული $n = 2$ შემთხვევა, ინდუქციური მსჯელობის გამოყენებით, საშუალებას იძლევა დებულება დავადგინოთ ნებისმიერი $n \geq 2$ -სთვის. საამისოდ საკმარისია ინდუქციის ბიჯის განხორციელებისას $H_1 \times \dots \times H_{n-1} \times H_n$ და $(H_1 \times \dots \times H_{n-1}) \times H_n$ კლასების გაიგივება, რაც, თავის მხრივ მიიღწევა $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ და $((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$ ელემენტების გაიგივებით. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

განვიხილოთ I^n კლასი, რომელიც, როგორც ადვილი დასანახია, შედგება ცარიელი სიმრავლისა და ყველა შესაძლო მარცხნიდან ღია n -განზომილებიანი მონაკვეთისაგან (ნახ. 3.2), ე.ი.

$$I^n = \{\emptyset\} \cup \left\{ \bigtimes_{k=1}^n (a_k, b_k] : a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n \right\}.$$

I ნახევარგოლია, რის გამოც თეორემა 3.2.3-ის გათვალისწინებით მიიღება შემდეგი დებულება.



ნახ. 3.2.

შედეგი 3.2.1. ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -სთვის, I^n კლასი არის ნახევარგოლი.

1. არის თუ არა რგოლების ნამრავლი კელაე რგოლი?

§ 3. წარმოქმნილი კლასები

ლემა 3.3.1. რგოლების ნებისმიერი ოჯახის თანაკვეთა რგოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ. მოცემული გვაქვს რგოლების $(H_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ ოჯახი. დაუშვათ, $A, B \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma$. მაშინ $A, B \in H_\gamma$ ყოველი $\gamma \in \Gamma$ -სთვის. შედეგად, $A \cup B, A \setminus B \in H_\gamma$ ყოველი $\gamma \in \Gamma$ -სთვის, ანუ $A \cup B, A \setminus B \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma$. ამით ლემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 3.3.1. აღვიღო შესამოწმებელია, რომ ლემა 3.3.1-ის ანალოგიური დებულებები სამართლიანია ალგებრის, σ -რგოლის, σ -ალგებრის და მონოტონური კლასის შემთხვევებში და არაა სამართლიანი ნახევარრგოლის შემთხვევაში.

შენიშნოთ, რომ ნებისმიერი $H \subset 2^X$ კლასისათვის არსებობს ერთი რგოლი მაინც, რომელიც მას შეიცავს, სახელდობრ, ასეთია 2^X კლასი. ამ შენიშვნისა და ლემა 3.3.1-ის გათვალისწინებით შესაძლებელია შემდეგი განსაზღვრების შემოღება: $H \subset 2^X$ კლასით წარმოქმნილი რგოლი ეწოდება H -ის შემცველი ყველა შესაძლო $R \subset 2^X$ რგოლის თანაკვეთას და იგი აღინიშნება სიმბოლოთი $r(H)$. ცხადია, რომ $r(H)$ წარმოადგენს მინიმალურს H -ის შემცველ რგოლთა შორის.

$r(H)$ კლასის მსგავსად განისაზღვრებიან H კლასით წარმოქმნილი ალგებრა, σ -რგოლი, σ -ალგებრა და მონოტონური კლასი. ისინი, შესაბამისად, აღინიშნებიან $a(H)$, $\sigma r(H)$, $\sigma a(H)$ და $m(H)$ ჩანაწერებით.

სამოგადოდ, სიმრავლეთა მოცემული H კლასით წარმოქმნილი ამა თუ იმ ტიპის კლასის აღწერა საკმაოდ რთული საკითხია, თუმცა, ნახევარრგოლით წარმოქმნილი რგოლის შემთხვევაში, სამართლიანია შემდეგი მარტივი დახასიათება.

თეორემა 3.3.1. H ნახევარრგოლით წარმოქმნილი რგოლი წარმოადგენს H -ში შემაჯავალ სიმრავლეთა ყველა შესაძლო სასრული გაერთიანებისაგან წარმოქმნილ კლასს, ე.ი.

$$r(H) = \left\{ \bigcup_{k=1}^n A_k : n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in H \right\}.$$

$$M = \left\{ \bigcup_{k=1}^n A_k : n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in H \right\}.$$

თუ შევნიშნავთ, რომ რგოლი ჩაეტილია სასრული გაერთიანების ოპერაციის მიმართ, გავითვალისწინებთ, რომ $r(H)$ რგოლია და იგი შეიცავს H -ს, დაეას-
კენით $M \subset r(H)$ ჩართვას. ახლა ვაჩვენოთ, რომ M რგოლია, რითაც დაეად-
გენთ შებრუნებულ ჩართვას და შედეგად, თეორემას. დავეუშვათ, $A, B \in M$,
ე.ი. ისინი წარმოდგებიან შემდეგი სახით:

$$A = \bigcup_{k=1}^n A_k, \quad B = \bigcup_{i=1}^{n_1} B_i,$$

სადაც $A_1, \dots, A_n \in H$ და $B_1, \dots, B_{n_1} \in H$. $A \cup B \in M$ მიუთენება ცხადია.
ვაჩვენოთ, რომ $A \setminus B \in M$. გვაქვს,

$$A \setminus B = \bigcup_{k=1}^n \left(A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{n_1} B_i \right).$$

შემდეგ, თუ გამოვიყენებთ თეორემა 3.2.1-ს, ყოველი k -სთვის ეიპოვით წყვილ-
წყვილად თანაუკვეთ $C_{k,1}, \dots, C_{k,q_k} \in H$ სიმრავლეებს, ისეთებს, რომ

$$A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{n_1} B_i = \bigcup_{q=1}^{q_k} C_{k,q}.$$

აქედან გამომდინარე, $C_{k,q}$ ($k \in \overline{1, n}; q \in \overline{1, q_k}$) სიმრავლეები ქმნიან $A \setminus B$
სიმრავლის წარმოდგენას H კლასის სიმრავლეთა სასრული გაერთიანების
სახით, ე.ი. $A \setminus B \in M$. ამრიგად, M რგოლია. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 3.3.2. თეორემა 3.2.2-ის ძალით ნახევარრგოლის სიმრავლეთა
ყოველი სასრული გაერთიანება წარმოდგება ამავე ნახევარრგოლის წყვილ-
წყვილად თანაუკვეთ სიმრავლეთა სასრული გაერთიანების სახით. ამის გათ-
ვალისწინებით ვრწმუნდებით, რომ სამართლიანია თეორემა 3.3.1-ის შემდეგი
ვარიანტი: H ნახევარრგოლით წარმოქმნილი რგოლი წარმოადგენს H -ში
შემახად წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ სიმრავლეთა ყველა შესაძლო სასრული
გაერთიანებისაგან წარმოქმნილ კლასს.

ქვემოთ დამტკიცებული ორი თეორემა დაგვჭირდება მეხუთე თავში, ზომის
გაგრძელების ერთადერთობის საკითხის განხილვისას.

თეორემა 3.3.2. რგოლით წარმოქმნილი σ -რგოლი და მონოტონური
კლასი ერთმანეთს ემთხვევიან, ე.ი. თუ H რგოლია, მაშინ $\sigma r(H) = m(H)$.

დამტკიცება. თავიდან შევნიშნოთ, რომ რადგან $\sigma r(H)$ წარმოადგენს მონოტონურ კლასს, ამიტომ $\sigma r(H) \supset m(H)$.

დავამტკიცოთ, რომ $m(H)$ რგოლია. მაშინ ითვრება 3.1.1-ის ძალით $m(H)$ იქნება σ -რგოლი. აქედან კი, დავასკვნით, რომ $m(H) \supset \sigma r(H)$, რაც შედეგად მოგვცემს $m(H) = \sigma r(H)$ ტოლობას.

A და B სიმრავლეებს $m(H)$ კლასიდან ვუწოდოთ თანხმობაში მყოფი, თუ მათთან ერთად $A \cup B$, $A \setminus B$ და $B \setminus A$ სიმრავლეებიც ეკუთვნიან $m(H)$ კლასს. ჩვენი მიზანია, დავადგინოთ, რომ $m(H)$ კლასის ნებისმიერი ორი სიმრავლე არის თანხმობაში.

$A \in m(H)$ -სთვის მასთან თანხმობაში მყოფი ყველა $B \in m(H)$ სიმრავლის კლასი აღვნიშნოთ Ω_A -თი. დავამტკიცოთ შემდეგი წინადადება:

(I) ყოველი $A \in m(H)$ -სთვის Ω_A წარმოადგენს $m(H)$ -ის მონოტონურ ქვეკლასს.

ეთქვას, $B_n \in \Omega_A$ ზრდადი მიმდევრობაა. ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -სთვის გვექნება: $B_n \cup A, B_n \setminus A, A \setminus B_n \in m(H)$. შევნიშნოთ, რომ $B_n \cup A$ და $B_n \setminus A$ მიმდევრობები ზრდადია, ხოლო $A \setminus B_n$ - კლებადი. საიდანაც, $m(H)$ კლასის მონოტონურობის გათვალისწინებით დავწერთ:

$$1) A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cup B_n) \in m(H);$$

$$2) \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \setminus A) \in m(H);$$

$$3) A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A \setminus B_n) \in m(H).$$

ამრიგად, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \Omega_A$. ანალოგიური მსჯელობით დავადგენთ, რომ კლებადი $B_n \in m(H)$ მიმდევრობის შემთხვევაში ადგილი აქვს $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \Omega_A$ მიყუთვნებას. აქედან გამომდინარე, Ω_A მონოტონური კლასია.

სამართლიანია, აგრეთვე. შემდეგი წინადადება:

(II) თუ $A \in m(H)$ სიმრავლისათვის Ω_A კლასი აღმოჩნდება H -ის შემცველი, მაშინ იგი დამთხვევა $m(H)$ კლასს.

ეს წინადადება გამომდინარეობს (I) წინადადებიდან, $m(H)$ კლასის განსაზღვრის გათვალისწინებით.

ცხადია, H რგოლის ნებისმიერი ორი სიმრავლე თანხმობაშია, რის გამოც, ყოველი $A \in H$ სიმრავლისათვის Ω_A კლასი შეიცავს H -ს. და შედეგად, (II) წინადადების ძალით, $\Omega_A = m(H)$. ამრიგად, ნებისმიერი სიმრავლე H კლასიდან თანხმობაშია ნებისმიერ სიმრავლესთან $m(H)$ კლასიდან. ეს კი ნიშნავს, რომ ყოველი $B \in m(H)$ -სთვის Ω_B მოიცავს H -ს. შედეგად, კელაე (II) წინადადების ძალით ვასკვნით $\Omega_B = m(H)$ ტოლობას. რაც, თავის მხრივ ნიშნავს, რომ $m(H)$ კლასის ნებისმიერი ორი სიმრავლე თანხმობაშია. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შემდეგი დებულება გამომდინარეობს თეორემა 3.3.2-დან.

შედგენი 3.3.1. ალგებრით წარმოქმნილი მონოტონური კლასი და σ -ალგებრა ერთმანეთს ემთხვევიან.

სიმრავლეთა H კლასისა და E სიმრავლისათვის $H \cap E$ ჩანაწერით აღენიშნოთ H კლასის კვალი E სიმრავლეში, ე.ი. შემდეგი კლასი

$$H \cap E = \{A \cap E : A \in H\}.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ, თუ H კლასი σ -ალგებრაა, მაშინ σ -ალგებრაა $H \cap E$ კლასიც. ანალოგიური დებულებები სამართლიანია სხვა ტიპის კლასების (ნახევარგოლი, რგოლი და ა.შ.) შემთხვევაშიც.

თეორემა 3.3.3. ნებისმიერი H კლასისა და E სიმრავლისათვის სრულდება ტოლობა: $\sigma(H) \cap E = \sigma(H \cap E)$.

დამტკიცება. ცხადია, $H \cap E \subset \sigma(H) \cap E$. საიდანაც, იმის საფუძველზე, რომ $\sigma(H) \cap E$ კლასი σ -ალგებრაა, ეწერთ,

$$\sigma(H \cap E) \subset \sigma(H) \cap E. \quad (1)$$

დავამტკიცოთ (1)-ის შებრუნებული ჩართვა. საამისოდ დაგვეჭირდება $\sigma(H \cap E)$ კლასის შემდეგი Ω გაფართოების განხილვა: Ω იყოს კლასი, რომელიც შედგება $A \cup B$ სახის სიმრავლეებისაგან, სადაც $A \in \sigma(H \cap E)$ და $B \in \sigma(H \cap \bar{E})$. აქ $\bar{E}$ აღნიშნავს E სიმრავლის დამატებას, ე.ი. $X \setminus E$ სიმრავლეს.

Ω კლასს აქვს თვისებები: 1) Ω არის σ -ალგებრა და 2) $H \subset \Omega$. პირველი თვისება ადვილად მოწმდება იმის საფუძველზე, რომ $\sigma(H \cap E)$ და $\sigma(H \cap \bar{E})$ კლასები წარმოადგენენ σ -ალგებრებს. მეორე თვისების დასამტკიცებლად კი საკმარისია გავითვალისწინოთ $A = (A \cap E) \cup (A \cap \bar{E})$ წარმოდგენა ნებისმიერი $A \in H$ სიმრავლისათვის.

Ω კლასის აღნიშნული თვისებებიდან ელემენტობით $\sigma(H) \subset \Omega$ ჩართვას, რის შემდეგაც, თუ გავითვალისწინებთ შემდეგ ცხად ტოლობას: $\Omega \cap E = \sigma(H \cap E)$, მივიღებთ, რომ

$$\sigma(H) \cap E \subset \Omega \cap E = \sigma(H \cap E).$$

ამრიგად,

$$\sigma(H) \cap E \subset \sigma(H \cap E). \quad (2)$$

(1) და (2) ჩართვების ძალით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამოცანები

1. მოთიით მოგვლით ორი ნახევარგოლისა, რომელთა თანავეთა არ წარმოადგენს ნახევარგოლს.
2. აღწერეთ სიმრავლეთა ნებისმიერი არაყარიელი კლასით წარმოქმნილი რგოლის სტრუქტურა.

§ 4. ბორელის σ -ალგებრა

(X, d) მეტრიკული სივრცის ყველა კომპაქტური ქვესიმრავლის კლასისაგან წარმოქმნილ σ -ალგებრას (X, d) სივრცის ბორელის σ -ალგებრა ეწოდება და იგი აღინიშნება $B(X, d)$ სიმბოლოთი. $B(X, d)$ -ში შემავალ სიმრავლეებს (X, d) სივრცის ბორელის სიმრავლეებს ეწოდებენ.

განვიხილოთ სიმრავლეთა შემდეგი ოთხი კლასი $H_1 = \{E \subset \mathbb{R}^n : E \text{ ჩაკტილია}\}$, $H_2 = \{E \subset \mathbb{R}^n : E \text{ ღიაა}\}$, $H_3 = \mathcal{I}^n$ და $H_4 = \left\{ \bigcup_{i=1}^n (-\infty, b_i] : b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R} \right\}$. ამ კლასებისათვის სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 3.4.1. თითოეული $\sigma a(H_1)$, $\sigma a(H_2)$, $\sigma a(H_3)$ და $\sigma a(H_4)$ კლასებს შორის ტოლია $\mathbb{R}^n$ სივრცის ბორელის σ -ალგებრის.

წარმოქმნილი σ -ალგებრის განსაზღვრების გათვალისწინებით მარტივად მოწმდება შემდეგი ლემის სამართლიანობა.

ლემა 3.4.1. ვთქვათ, სიმრავლეთა Ω_1 და Ω_2 კლასები ისეთია, რომ $\Omega_1 \subset \sigma a(\Omega_2)$ და $\Omega_2 \subset \sigma a(\Omega_1)$. მაშინ $\sigma a(\Omega_1) = \sigma a(\Omega_2)$.

თეორემა 3.4.1-ის დამტკიცება. აღვნიშნოთ $H = \{E \subset \mathbb{R}^n : E \text{ კომპაქტურია}\}$. საჩვენებელი გვაქვს, რომ $\sigma a(H) = \sigma a(H_i)$ ყოველი $i \in \overline{1, 4}$ -სთვის.

თუ გაითვალისწინებთ, რომ კომპაქტური სიმრავლე ჩაკტილია, მივიღებთ $H \subset \sigma a(H_1)$ ჩართვას.

$\mathbb{R}^n$ სივრცის ყოველი ჩაკტილი სიმრავლე წარმოადგება კომპაქტურ სიმრავლეთა მიმდევრობის გაერთიანების სახით. ასეთი წარმოადგენისათვის საკმარისია განვიხილოთ მოცემული სიმრავლის თანავეთები უსასრულობისაყენ კრებადი რადიუსების მქონე კონცენტრულ ჩაკტილ ბირთვებთან. ამ ფაქტის საფუძველზე ვასკენით $H_1 \subset \sigma a(H)$ ჩართვას. შედეგად, ლემა 3.4.1-ის ძალით $\sigma a(H) = \sigma a(H_1)$.

ახლა, თუ გაითვალისწინებთ, რომ ღია და ჩაკტილი სიმრავლეები ურთიერთდამატებითი არიან, ლემა 3.4.1-ის საფუძველზე მივიღებთ ტოლობას: $\sigma a(H_1) = \sigma a(H_2)$.

ყოველი $\bigtimes_{i=1}^n (a_i, b_i] \in H_3$ მონაკვეთი შემდეგნაირად წარმოდგება ღია სიმრავლეთა მიმღევრობის თანაკვეთის სახით:

$$\bigtimes_{i=1}^n (a_i, b_i] = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigtimes_{i=1}^n (a_i, b_i + 1/k).$$

შედეგად, $H_3 \subset \sigma a(H_2)$. მეორე მხრივ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ყოველი არაკარიული ღია სიმრავლე წარმოდგება $\mathcal{I}^n$ კლასის მონაკვეთების თვლადი გაერთიანების სახით (იხ. თეორემა 2.2.2), მივიღებთ, რომ $H_2 \subset \sigma a(H_3)$. შედეგად, ლემა 3.4.1-ის ძალით $\sigma a(H_2) = \sigma a(H_3)$.

ყოველი $\bigtimes_{i=1}^n (-\infty, b_i] \in H_4$ სიმრავლისათვის სამართლიანია ტოლობა:

$$\bigtimes_{i=1}^n (-\infty, b_i] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigtimes_{i=1}^n (b_i - k, b_i].$$

შედეგად, $H_4 \subset \sigma a(H_3)$. მეორე მხრივ, ნებისმიერი $\bigtimes_{i=1}^n (a_i, b_i] \in H_3$ მონაკვეთისათვის გვაქვს,

$$\bigtimes_{i=1}^n (a_i, b_i] = \bigtimes_{i=1}^n (-\infty, b_i] \setminus \bigcup_{j=1}^n \bigtimes_{i=1}^n \Delta_{i,j}, \quad (1)$$

სადაც $\Delta_{i,j} = (-\infty, b_i]$, თუ $i \neq j$ და $\Delta_{i,i} = (-\infty, a_i]$. (1)-დან ვაკენით, რომ $H_3 \subset \sigma a(H_4)$. საიდანაც, ლემა 3.4.1-ის თანახმად მიიღება $\sigma a(H_3) = \sigma a(H_4)$ ტოლობა. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 3.4.1. თეორემა 3.4.1-ის დამტკიცებისას გამოყენებული სქემით დგინდება, რომ

$$\bigtimes_{i=1}^n (-\infty, b_i], \quad \bigtimes_{i=1}^n [a_i, \infty), \quad \bigtimes_{i=1}^n (a_i, \infty)$$

სახის n -განზომილებიანი სხივების შემთხვევებში წარმოქმნილი σ -ალგებრები აგრეთვე $\mathbb{R}^n$ სივრცის ბორელის σ -ალგებრის ტოლია.

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ, რომ (X, d) მეტრიკული სივრცის ბორელის σ -ალგებრა შეიცავს ნებისმიერ არაუმეტეს თვლად სიმრავლეს.
2. ვთქვათ, H წარმოადგენს (X, d) მეტრიკული სივრცის ყველა ღია ბირთვის კლასს. ყოველთვის ემთხვევა თუ არა H კლასით წარმოქმნილი σ -ალგებრა (X, d) სივრცის ბორელის σ -ალგებრას?
3. ვთქვათ, (X, d) სეპარაბელური მეტრიკული სივრცეა. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს მის ქვესიმრავლეთა არაუმეტეს თვლადი H კლასი, რომლით წარმოქმნილი σ -ალგებრა ემთხვევა (X, d) სივრცის ბორელის σ -ალგებრას.

ზომა

ზომის ცნება განაზოგალებს ისეთი რეალური ფიზიკური ბუნების მქონე სიდიდეებს, როგორიცაა სიგრძე, ფართობი, მოცულობა და მასა. ამ თავში განიხილება ზომის საბაზისო თვისებები და მაგალითები.

§ 1. ზომა და კვაზიზომა

1. სიმრავლის ფუნქციის ზოგიერთი ტიპი. ვთქვათ, X - რაიმე არაყარი-ელი სიმრავლეა. ზომის თეორიის შესწავლის ძირითად ობიექტებს წარმოად-გენენ გარკვეული ტიპის $\mu : H \rightarrow (-\infty, \infty]$ სიმრავლის ფუნქციები, სადაც H არის X -ის ქვესიმრავლეთა რაიმე არაყარიელი კლასი.

შევთანხმდეთ, რომ $\infty + \infty = \infty$, $\infty + \infty + \dots = \infty$ და $a + \infty = \infty + a = \infty$ ($a \in \mathbb{R}$).

$\mu : H \rightarrow (-\infty, +\infty]$ სიმრავლის ფუნქციას ეწოდება:

- ნახევრადადიციური, თუ

$$\left(A \in H, n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in H, A = \bigcup_{k=1}^n A_k \right) \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k);$$

- ადიციური, თუ

$$\left(A \in H, n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in H, A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j), A = \bigcup_{k=1}^n A_k \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(A) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k);$$

- თვლადად ნახევრადადიციური (ან კილევ, σ -ნახევრადადიციური), თუ

$$\left(A \in H, A_1, A_2, \dots \in H, A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k);$$

- თვლადად ადიციური (ან კიდე, σ -ადიციური), თუ

$$\left(A \in H, A_1, A_2, \dots \in H, A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j), A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k);$$

- ზრდადი, თუ

$$(A, B \in H, A \subset B) \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B);$$

- სასრული, თუ $\mu(A) < \infty$ ყოველი $A \in H$ -სთვის;
- შემოსაზღვრული, თუ $\sup\{|\mu(A)| : A \in H\} < \infty$;
- σ -შემოსაზღვრული, თუ X შეიძლება დაიშალოს ისეთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ $X_n \in H$ ($n \in \mathbb{N}$) სიმრავლეებად, რომელთათვისაც $\sup\{|\mu(A)| : A \in H, A \subset X_n\} < \infty$ ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -სთვის.

შენიშვნა 4.1.1. ვიქვით, μ ნახევარგოლზე განსაზღვრული ნახევრადადიციური ფუნქციაა და დამატებით ცნობილია, რომ μ ზრდადია. მაშინ

$$\left(A \in H, n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in H, A \subset \bigcup_{k=1}^n A_k \right) \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

მართლაც, ზრდადობისა და ნახევრადადიციურობის თვისებების ძალით გვექნება,

$$\mu(A) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k \cap A) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

ანალოგიურად, თუ μ ნახევარგოლზე განსაზღვრული თვლადად ნახევრადადიციური ფუნქციაა და დამატებით ცნობილია, რომ μ ზრდადია, მაშინ

$$\left(A \in H, A_1, A_2, \dots \in H, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

2. ზომის და კვაზიზომის ცნებები. ნახევარგოლზე განსაზღვრულ μ ფუნქციას ეწოდება ზომა, თუ მას აქვს შემდეგი თვისებები:

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- μ არაუარყოფითია;
- μ თვლადად ადიციურია.

შენიშვნა 4.1.2. $\mu(\emptyset) = 0$ ტოლობის გათვალისწინებით, ზომის თვლადად ადიციურობიდან მარტივად გამომდინარეობს მისი ადიციურობა. მართლაც, აღნიშნულის დასადგენად $A_1, \dots, A_n$ სიმრავლეები, რომლებიც ფიგურირებენ

ადიციურობის განსაზღვრებაში, ცარიელი სიმრავლის შემეობით უნდა შეგავსოთ $A_1, \dots, A_n, \emptyset, \emptyset, \dots$ მიმღევრობამდე და შემდეგ გამოვიყენოთ ზომის მესამე და პირველი თვისებები.

მოვიყენოთ ზომის რამდენიმე მარტივი მაგალითი:

- 1) X რაიმე არაცარიელი სიმრავლეა, $H = 2^X$ და $\mu(A) = 0 \ (A \in H)$;
- 2) X რაიმე არაცარიელი სიმრავლეა, $H = 2^X$ და ყოველი $A \in H$ სიმრავლისათვის $\mu(A) = \text{card} A$, თუ A სასრულია და $\mu(A) = \infty$, თუ A უსასრულოა. ასეთ ზომას დამთვლელ ზომას უწოდებენ;
- 3) $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $H = 2^X$, $p_1, \dots, p_n \geq 0$ და

$$\mu(A) = \sum_{\{k: x_k \in A\}} p_k \quad (A \in H).$$

ყოტა მოგვიანებით განხილული იქნება ზომის უმნიშვნელოვანესი მაგალითები: მონაკვეთის სიგრძე, მართკუთხედის ფართობი და მრავალგანზომილებიანი მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა.

ნახევარგოლმე განსაზღვრულ μ ფუნქციას ეწოდება კვაზიზომა, თუ მას აქვს შემდეგი თვისებები:

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- μ არაუარყოფითია;
- μ ადიციურია.

შენიშვნა 4.1.3. ზომის ადიციურობიდან გამომდინარე, ყოველი ზომა, იმავედროულად, არის კვაზიზომაც. შემდეგი მაგალითი გვიჩვენებს, რომ შეზღუდული დებულება, საზოგადოდ, სამართლიანი არაა. ეთქვას, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგნაირად: $\varphi(x) = 0$, თუ $x \leq 0$ და $\varphi(x) = 1$, თუ $x > 0$; ხოლო μ არის $\mathcal{I}$ ნახევარგოლმე შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია: $\mu(\emptyset) = 0$ და $\mu((a, b]) = \varphi(b) - \varphi(a) \ ((a, b] \in \mathcal{I})$. მარტივი შესამოწმებელია, რომ μ კვაზიზომავა. ამასთან μ არაა ზომა, ვინაიდან $(1/2^n, 1/2^{n-1}]$ შუალედების მიმღევრობისათვის დარღვეულია თვალადად ადიციურობის პირობა. კერძოდ, გვაქვს, რომ

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (1/2^n, 1/2^{n-1}]\right) = \mu((0, 1]) = 1.$$

მეორე მხრივ კი,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu((1/2^n, 1/2^{n-1}]) = 0.$$

1. ვთქვათ, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, $H = 2^X$. $p_n \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$) და

$$\mu(A) = \sum_{\{n: x_n \in A\}} p_n \quad (A \in H).$$

დაამტკიცეთ, რომ μ არის ზომა.

§ 2. ზომისა და კვაზიზომის გაგრძელება ნახევარგოლიდან რგოლზე

არსებობს მარტივი კონსტრუქცია, რომელიც საშუალებას იძლევა, ნახევარგოლზე მოცემული ზომა გაავარგელოთ ამ ნახევარგოლის შემცველ მინიმალურ რგოლზე, კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4.2.1. ვთქვათ, μ არის H ნახევარგოლზე განსაზღვრული ზომა. მაშინ არსებობს H -ით წარმოქმნილ $r(H)$ რგოლზე განსაზღვრული ერთადერთი ზომა, რომელიც წარმოადგენს μ -ს გაგრძელებას.

დამტკიცება. ნაბიჯი I: გაგრძელების განსაზღვრა. ვთქვათ, $A \in r(H)$. თეორემა 3.3.1-ის ძალით არსებობს A სიმრავლის H -დამლა $\{C_1, \dots, C_n\}$. $\nu(A)$ განესაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^n \mu(C_i).$$

ν ფუნქციის განსაზღვრა კორექტულია. მართლაც, განვიხილოთ A -ს რაიმე სხვა H -დამლა $\{D_1, \dots, D_n\}$. შევნიშნოთ, რომ ყოველი $i \in \overline{1, n}$ -სთვის $\{C_i \cap D_1, \dots, C_i \cap D_m\}$ კლასი არის C_i სიმრავლის H -დამლა, ხოლო ყოველი $j \in \overline{1, m}$ -სთვის $\{C_1 \cap D_j, \dots, C_n \cap D_j\}$ კლასი არის D_j სიმრავლის H -დამლა. აღნიშნულის გათვალისწინებით დავწერთ,

$$\sum_{i=1}^n \mu(C_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu(C_i \cap D_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \mu(C_i \cap D_j) = \sum_{j=1}^m \mu(D_j),$$

რაც ნიშნავს ν -ს განსაზღვრის კორექტულობას.

ცხადია, რომ ν ფუნქცია არაუარყოფითია და წარმოადგენს μ -ს გაგრძელებას $r(H)$ რგოლზე.

ნაბიჯი II: ν ფუნქციის თვალადად ადიციურობა. ვთქვათ, $A, A_1, A_2, \dots \in r(H)$, $A_1, A_2, \dots$ სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. განვიხილოთ A სიმრავლის H -დამლა - $\{C_1, \dots, C_n\}$, ხოლო ყოველი $i \in \mathbb{N}$ -სთვის განვიხილოთ A_i სიმრავლის H -დამლა - $\{C_{i,1}, \dots, C_{i,n_i}\}$. შევნიშნოთ, რომ:

1) ყოველი $j \in \overline{1, n}$ -სთვის, $C_{i,p} \cap C_j$ ($i \in \mathbb{N}, p \in \overline{1, n_i}$) სიმრავლეები ქმნიან C_j სიმრავლის თვლად H -დამლას;

2) ყოველი $i \in \mathbb{N}$ და $p \in \overline{1, n_i}$ ინდექსებისათვის, $C_{i,p} \cap C_j$ ($j \in \overline{1, n}$) სიმრავლეები ქმნიან $C_{i,p}$ სიმრავლის H -დამლას.

ამ ორი შენიშვნის ძალით და μ ზომის თვლად აღიციურობის გათვალისწინებით დავწერთ,

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \sum_{j=1}^n \mu(C_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{n_i} \mu(C_{i,p} \cap C_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{n_i} \sum_{j=1}^n \mu(C_{i,p} \cap C_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{n_i} \mu(C_{i,p}) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i).\end{aligned}$$

ამით ν ფუნქციის თვლად აღიციურობა დადგენილია. ამრიგად, ν ფუნქციას აქვს ზომის თვისებები.

ნაბიჯი III: გაგრძელების ერთადერთობა. ახლა ვაჩვენოთ, რომ ν არის ერთადერთი შესაძლო ზომა, რომელიც წარმოადგენს μ -ს გაგრძელებას $\tau(H)$ რგოლზე. ვთქვათ, λ არის $\tau(H)$ -ზე განსაზღვრული ზომა, რომელიც წარმოადგენს μ -ს გაგრძელებას. საჭიროა ვაჩვენოთ λ და ν ფუნქციების ტოლობა. ნებისმიერი $A \in \tau(H)$ -სთვის განვიხილოთ მისი რაიმე H -დამლა - $\{C_1, \dots, C_n\}$. გვეჩვენება, რომ

$$\lambda(A) = \sum_{i=1}^n \lambda(C_i) = \sum_{i=1}^n \mu(C_i) = \nu(A).$$

რითაც λ და ν ფუნქციების იგივეობა ნაჩვენებია.

ზემოთ დადგენილი თვისებებიდან გამომდინარე, ν არის ერთადერთი ზომა, რომელიც წარმოადგენს μ -ს გაგრძელებას $\tau(H)$ რგოლზე. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

სამართლიანია თეორემა 4.2.1-ის შემდეგი ანალოგი კვანძოების გაგრძელების შესახებ.

თეორემა 4.2.2. ვთქვათ, μ არის H ნახევარრგოლზე განსაზღვრული კვანძოზომა. მაშინ არსებობს H -ით წარმოქმნილ $\tau(H)$ რგოლზე განსაზღვრული ერთადერთი კვანძოზომა, რომელიც წარმოადგენს μ -ს გაგრძელებას.

თეორემა 4.2.2-ის დამტკიცება ხდება თეორემა 4.2.1-ის დამტკიცების ანალოგიურად.

§ 3. ზომისა და კვაზიზომის ზოგიერთი ელემენტარული თვისება

თეორემა 4.3.1. ვთქვათ, μ არის H ნახევარგოლზე განსაზღვრული კვაზიზომა. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

- თუ $A, A_1, A_2, \dots \in H$, $A_1, A_2, \dots \subset A$ და $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$), მაშინ $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \mu(A)$. შედეგად, μ ზრდადია;
- თუ $A, B, B \setminus A \in H$, $A \subset B$ და $\mu(A) < \infty$, მაშინ $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$;
- თუ $A, B, A \cup B \in H$, და $\mu(A)$, $\mu(B)$ რიცხვებს შორის ერთ-ერთი მაინც სასრულია, მაშინ $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$;
- μ ნახევრადადიციურია.

დამტკიცება. თეორემა 4.2.2-ის გათვალისწინებით, ადვილი დასაბუთება, რომ შეიძლება შემოვიფარგლოთ იმ შემთხვევის განხილვით, როცა H რგოლია.

პირველი და მეორე წინადადებები: კვაზიზომის არაუარყოფითობისა და ადიციურობის გათვალისწინებით ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -სთვის გვექნება:

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n) + \mu\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k\right) \geq \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n).$$

საიდანაც გამომდინარეობს თეორემის პირველი და მეორე წინადადებები.

მესამე წინადადება: გვაქვს, რომ $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, საიდანაც, კვაზიზომის ადიციურობის ძალით: $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. კვაზიზომის ზრდადობის გამო გვექნება: $\mu(A \cap B) \leq \min(\mu(A), \mu(B)) < \infty$. აქედან, თავის მხრივ, მეორე წინადადების საფუძველზე დავწერთ,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

მეოთხე წინადადება: ვთქვათ, $A \in H, n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in H$ და $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$. აღვნიშნოთ

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \quad (2 \leq k \leq n).$$

ცხადია, $B_1, \dots, B_n$ სიმრავლეები ეკუთვნიან H -ს, ისინი წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და $\bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{k=1}^n B_k$. აქედან კვაზიზომის ზრდადობისა და ადიციურობის გათვალისწინებით ვწერთ,

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(B_k) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 4.3.2. ყოველი ზომა თვლადად ნახევრადადიციურია.

დამტკიცება. თეორემა 4.2.1-ის გათვალისწინებით შეგვიძლია შემოვიფარგლოთ H რგოლზე განსაზღვრული μ ზომის შემთხვევის განხილვით.

ეთქვას, $A, A_1, A_2, \dots \in H$ და $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. აღვნიშნოთ

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \quad (n \geq 2).$$

ესადაა, რომ (B_n) მიმდევრობა წარმოადგენს A სიმრავლის თვლად H -დამლას. აქედან ზომის თვლადად ადიციურობისა და ბრდადობის ძალით დაეწეროთ, რომ

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 4.3.3. ეთქვას, μ არის H ნახევარრგოლზე განსაზღვრული ფუნქცია. შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

1) μ ზომაა;

2) μ კვაზიზომაა და თვლადად ნახევრადადიციურია.

დამტკიცება. 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია მიიღება თეორემა 4.3.2-ის გათვალისწინებით, ხოლო შებრუნებული იმპლიკაციის დასადგენად უნდა გავითვალისწინოთ თეორემა 4.3.1-ის პირველი დასკვნა. □

ამოცანები

- ეთქვას, μ არის H σ -რგოლზე განსაზღვრული ზომა. დაეუშვათ, $A_n \in H$ და $\mu(A_n) = 0$ ($n \in \mathbb{N}$). აჩვენეთ, რომ $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$.
- ეთქვას, μ არის H σ -ალგებრაზე განსაზღვრული ზომა და $\mu(X) = 1$. დაეუშვათ, $A_n \in H$ და $\mu(A_n) = 1$ ($n \in \mathbb{N}$). აჩვენეთ, რომ $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$.
- ეთქვას, μ არის H ალგებრაზე განსაზღვრული კვაზიზომა და $\mu(X) = 1$. დაეუშვათ, $A_1, \dots, A_n \in H$ და $\mu(A_1) + \dots + \mu(A_n) > n - 1$. აჩვენეთ, რომ $\mu(\bigcap_{k=1}^n A_k) > 0$.
- ეთქვას, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული კვაზიზომა. განვიხილოთ H -ში შემდეგნაირად განსაზღვრული ბინარული მიმართება: $A, B \in H$ სიმრავლეებისათვის $A \sim B \Leftrightarrow \mu(A \triangle B) = 0$. დაამტკიცეთ, რომ: ა) აღნიშნული მიმართება არის ეკვივალენტობის მიმართება, ე.ი. აქვს რეფლექსურობის, სიმეტრიულობისა და ტრანზიტულობის თვისებები; ბ) თუ $A \sim B$, მაშინ $\mu(A) = \mu(B) = \mu(A \cap B)$; ც) ყველა იმ $A \in H$ სიმრავლის კლასი, რომელიც ცარიელი სიმრავლის ეკვივალენტურია, არის რგოლი.
- ეთქვას, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული კვაზიზომა. განვიხილოთ ფუნქცია: $d(A, B) = \mu(A \triangle B)$ ($A, B \in H$). აჩვენეთ, რომ: ა) d არის „ნახევარმანძილი“. ე.ი. აქვს თვისებები: $d(A, B) \geq 0$. $d(A, B) = d(B, A)$

და $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$; b) თუ $A_1 \sim B_1$ და $A_2 \sim B_2$, მაშინ $d(A_1, B_1) = d(A_2, B_2)$.

§ 4. ზომის უწყვეტობა

ეთქვათ, H სიმრავლეა რაიმე არაყარიელი კლასია და $\mu : H \rightarrow [0, \infty]$ რაიმე მრდადი ფუნქციაა. μ ფუნქციას ეწოდება:

- ქვემოდან უწყვეტი $A \in H$ სიმრავლეზე. თუ H კლასის სიმრავლეთა ყოველი მრდადი (A_n) მიმდევრობისათვის, რომლის ზღვარი არის A , სრულდება ტოლობა: $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$;
- ზემოდან უწყვეტი $A \in H$ სიმრავლეზე, თუ H კლასის სიმრავლეთა ყოველი კლებადი (A_n) მიმდევრობისათვის, რომლის ზღვარი არის A და რომლის ერთი წევრი მაინც აკმაყოფილებს $\mu(A_n) < \infty$ პირობას, სრულდება ტოლობა: $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$;
- ქვემოდან უწყვეტი, თუ ქვემოდან უწყვეტია ყოველ $A \in H$ სიმრავლეზე;
- ზემოდან უწყვეტი, თუ ზემოდან უწყვეტია ყოველ $A \in H$ სიმრავლეზე.

თეორემა 4.4.1. ყოველი ზომა უწყვეტია ქვემოდან.

დამტკიცება. ვთქვათ, μ H ნახევარგოლზე განსაზღვრული ზომაა, $A \in H$, (A_n) - H -ის სიმრავლეთა მრდადი მიმდევრობაა და $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$.

თეორემა 4.2.1-ის ძალით საკმარისია განვიხილოთ შემთხვევა, როცა H კლასი წარმოადგენს რგოლს.

თუ არსებობს N ისეთი, რომ $\mu(A_N) = \infty$, მაშინ ზომის მრდადობის ძალით, $\mu(A) \geq \mu(A_N) = \infty$ და $\mu(A_n) \geq \mu(A_N) = \infty$ ($n \geq N$), საიდანაც გამომდინარეობს თეორემის დასკვნა.

განსახილავი რჩება შემთხვევა, როცა $\mu(A_n) < \infty$ ყოველი n -თვის. (A_n) მიმდევრობის მრდადობის გამო,

$$A = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \dots$$

$A_1, A_2 \setminus A_1, A_3 \setminus A_2, \dots$ სიმრავლეების წყვილ-წყვილად თანაუკვეთობისა და ზომის თვალადად ადიციურობის თვისების ძალით,

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \mu(A_3 \setminus A_2) + \dots \quad (1)$$

უკანასკნელი მწკრივის n -ური კერძო ჯამი, თეორემა 4.3.1-ის მეორე დასკვნის ძალით, შემდეგი გამოსახულების ტოლია:

$$\mu(A_1) + [\mu(A_2) - \mu(A_1)] + [\mu(A_3) - \mu(A_2)] + \dots + [\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})],$$

რომელიც, თავის მხრივ, $\mu(A_n)$ -ის ტოლია. ამრიგად, $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.
თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 4.4.2. ყოველი ზომა უწყვეტია ზემოდან.

დამტკიცება. ვთქვათ, μ H ნახევარგოლზე განსაზღვრული ზომია, $A \in H$, (A_n) H -ის სიმრავლეთა კლუბადი მიმდევრობაა, ისეთი, რომ $\mu(A_n) < \infty$ რომელიმე n -სთვის და $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$.

თეორემა 4.2.1-ის ძალით, სამარისისა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა H კლასი წარმოადგენს რგოლს.

ზოგადობის შეუმღუდავად ვიგულისხმობთ, რომ $\mu(A_1) < \infty$. თეორემა 4.4.1-ის ძალით ვწერთ:

$$\mu(A_1 \setminus A) = \mu\left(\bigcup_{n=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_1 \setminus A_n).$$

თუ ვისარგებლებთ $\mu(A_1) < \infty$ პირობით და თეორემა 4.3.1-ის მეორე დასკვნით, გვექნება, რომ

$$\mu(A_1) - \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(A_1) - \mu(A_n)),$$

რითაც სასურველი მღვარიტი ტოლობა დადგენილია. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 4.4.1. თეორემა 4.4.2 სამართლიანი არ რჩება, თუ გემოდან უწყვეტობის განსაზღვრებაში არ მოვითხოვთ მიმდევრობის წევრთა შორის ერთ-ერთისათვის მაინც $\mu(A_n) < \infty$ პირობის შესრულებას. მოვიყვანოთ შესაბამისი მაგალითი, ვთქვათ, μ არის დამთვლელი ზომა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში. განვიხილოთ $A_n = \{n, n+1, \dots\}$ ($n \in \mathbb{N}$) სიმრავლეთა მიმდევრობა. ცხადია, (A_n) კლუბადი მიმდევრობაა და $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \emptyset$. ერთი მხრივ გვაქვს, რომ $\mu(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \mu(\emptyset) = 0$, ხოლო მეორე მხრივ, A_n სიმრავლეები უსასრულოა, რის გამოც, $\mu(A_n) = \infty$ ყოველი n -სთვის, და შედეგად, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \infty$.

სასრული ზომა შეიძლება დახასიათდეს კვაზიმომისა და უწყვეტობის ტერმინებით. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 4.4.3. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული სასრული ფუნქცია. შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- 1) μ ზომიან;
- 2) μ კვაზიზომია და ქვემოდან უწყვეტია;
- 3) μ კვაზიზომია და ზემოდან უწყვეტია;
- 4) μ კვაზიზომია და ზემოდან უწყვეტია ცარიელ სიმრავლეზე.

დამტკიცება. $1) \Rightarrow 2)$, $1) \Rightarrow 3)$ და $1) \Rightarrow 4)$ იმპლიკაციები გამომდინარეობენ 4.4.1 და 4.4.2 თეორემებიდან, ხოლო $3) \Rightarrow 4)$ ცხადია. ასე რომ, დებულების დასამტკიცებლად გვჭირდება დავადგინოთ $2) \Rightarrow 1)$ და $4) \Rightarrow 1)$ იმპლიკაციები.

ეთქვას, შესრულებულია 2) პირობა. დაეუშვათ $A, A_1, A_2, \dots \in H$, A_n სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. აღვნიშნოთ $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$ ($n \in \mathbb{N}$). (B_n) არის H რგოლის სიმრავლეთა ზრდადი მიმდევრობა და $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = A$, ამიტომ μ -ს ქვემოდან უწყვეტობისა და ადიციურობის ძალით გვექნება,

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

ამით μ -ს თელადად ადიციურობა დადგენილია, ე.ი. μ ზომაა.

ეთქვას, შესრულებულია 4) პირობა. დაეუშვათ $A, A_1, A_2, \dots \in H$, A_n სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. აღვნიშნოთ $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$ და $C_n = A \setminus B_n$ ($n \in \mathbb{N}$). μ -ს ადიციურობის ძალით ყოველი n -სთვის გვექნება, რომ

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k) + \mu(C_n). \quad (2)$$

(C_n) არის H რგოლის სიმრავლეთა კლებადი მიმდევრობა და $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \emptyset$, ამიტომ ცარიელ სიმრავლეზე μ -ს ზემოდან უწყვეტობის გამო, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n) = 0$. შედეგად, (2)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ,

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu(A_k) + \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

ამით μ -ს თელადად ადიციურობა დადგენილია, ე.ი. μ ზომაა. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

სიმრავლეთა (A_n) მიმდევრობის ზედა ზღვარი ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომელიც შედის (A_n) მიმდევრობის წევრთა უსასრულო რაოდენობაში. სიმრავლეთა (A_n) მიმდევრობის ზედა ზღვარი აღინიშნება $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n$ ანაც $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ ჩანაწერით.

სიმრავლეთა (A_n) მიმდევრობის ქვედა ზღვარი ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომელიც შედის (A_n) მიმდევრობის ყველა წევრში, გარდა შესაძლოა წევრთა სასრულო რაოდენობისა. სიმრავლეთა (A_n) მიმდევრობის ქვედა ზღვარი აღინიშნება $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf A_n$ ანაც $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ ჩანაწერით.

მარტივი შესამოწმებელია, რომ სიმრავლეთა ნებისმიერი (A_n) მიმდევრობისათვის სამართლიანია ტოლობები:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

სიმრავლეთა (A_n) მიმდევრობას ეწოდება კრებადი, თუ მისი ზედა და ქვედა ზღვრები ერთმანეთის ტოლია.

კრებადი სიმრავლეთა მიმდევრობის ზღვარი აღინიშნება $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ ჩანაწერით და ეწოდება მისი ზედა და ქვედა ზღვრების საერთო მნიშვნელობას.

ადილი დასანახია, რომ მონოტონური სიმრავლეთა მიმდევრობები კრებადია და მათი ზღვრების აღრე შემოღებული განსაზღვრებები თანხმობაშია კრებადი სიმრავლეთა მიმდევრობის ზღვრის განსაზღვრებასთან.

შემდეგი თეორემა მოიხსენიება ბორელ-კანტელის ლემის სახელწოდებით.

თეორემა 4.4.4. ვთქვათ, μ არის H σ -ალგებრაზე განსაზღვრული ზომა. თუ $A_n \in H$ ($n \in \mathbb{N}$) სიმრავლეთა მიმდევრობა ისეთია, რომ $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, მაშინ $\mu(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$.

დამტკიცება. აღნიშნოთ $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ ($n \in \mathbb{N}$). ადილი დასანახია, რომ:

- 1) (B_n) კლებადი მიმდევრობაა;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$;
- 3) $B_n \in H$ ($n \in \mathbb{N}$) და $\mu(B_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k)$.

ამის შემდეგ, თუ ვისარგებლებთ ზომის ზემოღან უწყვეტობის თვისებით და გავითვალისწინებთ $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < \infty$ მწკრივის კრებადობას, დაეწერთ,

$$\mu(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n) = \mu(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

ამოცანები

1. ვთქვათ, μ არის H σ -ალგებრაზე განსაზღვრული ზომა და $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H$. დაამტკიცეთ, რომ $\mu(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.
2. ვთქვათ, μ არის H σ -ალგებრაზე განსაზღვრული ზომა, $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H$ და მოიძებნება n , რომლისთვისაც $\mu(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) < \infty$. დაამტკიცეთ, რომ $\mu(\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n) \geq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.
3. ვთქვათ, μ არის H σ -ალგებრაზე განსაზღვრული ზომა, $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H$ და მოიძებნება n , რომლისთვისაც $\mu(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) < \infty$. დაეუშვათ, გარდა ამისა, (A_n) მიმდევრობა კრებადია. დაამტკიცეთ, რომ $\mu(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

§ 5. მოცულობა

$v = v_n$ -ით აღენიშნოთ n -განზომილებიანი მონაკვეთების I^n კლასზე განსაზღვრული მოცულობა, ე.ი. ფუნქცია, რომელიც მოქმედებს შემდეგი წესით: $v(\emptyset) = 0$ და ყოველი n -განზომილებიანი $\bigtimes_{k=1}^n (a_k, b_k] \in I^n$ მონაკვეთისათვის,

$$v\left(\bigtimes_{k=1}^n (a_k, b_k]\right) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k).$$

ერთ და ორგანზომილებიან შემთხვევებში v ფუნქციას, შესაბამისად, მოიხსენიებენ, როგორც სიგრძეს და ფართობს. შევთანხმდეთ, რომ განზომილების მიუხედავად, v ფუნქციას ვუწოდოთ მოცულობა.

ჩვენი მიზანია, ვაჩვენოთ, რომ მოცულობას აქვს ზომის თვისებები. თავდაპირველად დავადგინოთ შემდეგი თეორემის სამართლიანობა.

თეორემა 4.5.1. ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$ -სთვის მოცულობა არის კვაზიზომო.

თეორემა 4.5.1 ცხადია ერთგანზომილებიან შემთხვევაში, თუმცა ნებისმიერი n -სთვის მისი დამტკიცება არაა ტრივიალური და ეფუძნება ნახევარგოლებისა და კვაზიზომების დეკარტული ნამრავლის თვისებებს, რომლებიც ქვემოთ იქნება განხილული.

ვთქვათ, X_1 არის რაიმე არაცარიელი სიმრავლე, $H_1 - X_1$ -ის ქვესიმრავლების რაიმე ნახევარგოლი, ხოლო $\mu_1 - H_1$ -ზე განსაზღვრული კვაზიზომო. განვიხილოთ, აგრეთვე, მსგავსი სახით ერთმანეთთან დაკავშირებული X_2 სიმრავლე, H_2 ნახევარგოლი და μ_2 კვაზიზომო.

როგორც ვიცი, H_1 და H_2 კლასების დეკარტული ნამრავლი წარმოადგენს ნახევარგოლს. განვიხილოთ $H_1 \times H_2$ ნახევარგოლზე შემდგენიარად განსაზღვრული $\mu_1 \times \mu_2$ ფუნქცია:

$$(\mu_1 \times \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \quad (A_1 \in H_1, A_2 \in H_2).$$

$\mu_1 \times \mu_2$ ფუნქციას μ_1 და μ_2 კვაზიზომების დეკარტული ნამრავლი ეწოდება.

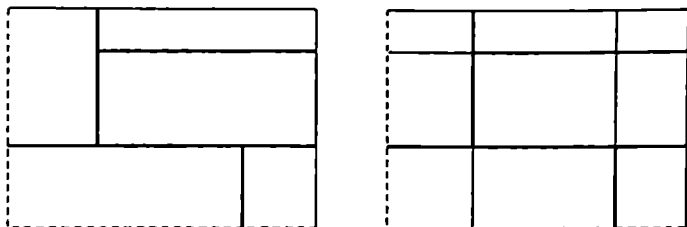
თეორემა 4.5.2. კვაზიზომების დეკარტული ნამრავლი არის კვაზიზომო.

ვთქვათ, H_1 და H_2 ნახევარგოლებია. Π კლასს ვუწოდოთ $A_1 \times A_2 \in H_1 \times H_2$ სიმრავლის ბადისებური $H_1 \times H_2$ -დაშლა, თუ Π წარმოდგება სახით: $\Pi = \Pi_1 \times \Pi_2$, სადაც Π_1 არის A_1 სიმრავლის რაიმე H_1 -დაშლა, ხოლო Π_2 კი - A_2 სიმრავლის რაიმე H_2 -დაშლა, ე.ი. $A_1 \times A_2$ სიმრავლის ბადისებური დაშლა წარმოდგება A_1 და A_2 თანამამრავლების დაშლათა ნამრავლის სახით.

ლემა 4.5.1. ვთქვათ, H_1 და H_2 ნახევარგოლებია. დავუშვათ, $A_1 \times A_2 \in H_1 \times H_2$ და $\Omega = \{P_1 \times Q_1, \dots, P_n \times Q_n\}$ არის $A_1 \times A_2$ სიმრავლის $H_1 \times H_2$ -დაშლა. მაშინ არსებობს Π კლასი, ისეთი, რომ:

- Π არის $A_1 \times A_2$ სიმრავლის ბადისებური $H_1 \times H_2$ -დამლა;
- ყოველი $k \in \overline{1, n}$ -სთვის არსებობს Π -ს ქვეკლასი Π_k , რომელიც არის $P_k \times Q_k$ სიმრავლის ბადისებური $H_1 \times H_2$ -დამლა.

ნახ. 4.1-ზე მოცემულია ლემა 4.5.1-ის შესაბამისი ილუსტრაცია $H_1 \times H_2 = I^2$ შემთხვევაში.



ნახ. 4.1.

დამტკიცება. მარტივი შესამოწმებელია, რომ

$$\bigcup_{k=1}^n P_k = A_1, \quad \bigcup_{k=1}^n Q_k = A_2. \quad (1)$$

თუ $\{P_1, \dots, P_n\}$ და $\{Q_1, \dots, Q_n\}$ კლასებისათვის გამოვიყენებთ თეორემა 3.2.2-ს და გავითვალისწინებთ (1)-ს, ვიპოვიოთ A_1 და A_2 კლასებს. ისეთებს, რომ:

- A_1 არის A_1 სიმრავლის H_1 -დამლა;
- ყოველი $k \in \overline{1, n}$ -სთვის მოიძებნება $A_{1,k} \subset A_1$ ქვეკლასი, რომელიც არის P_k სიმრავლის H_1 -დამლა;
- A_2 არის A_2 სიმრავლის H_2 -დამლა;
- ყოველი $k \in \overline{1, n}$ -სთვის მოიძებნება $A_{2,k} \subset A_2$ ქვეკლასი, რომელიც არის Q_k სიმრავლის H_2 -დამლა.

Π კლასის როლში ავიღოთ A_1 და A_2 კლასების ნამრავლი, ე.ი. $\Pi = A_1 \times A_2$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ლემის პირველი დასკვნა გამომდინარეობს ა) და c) პირობებიდან, სოლო მეორე დასკვნა კი - b) და d) პირობებიდან. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 4.5.2-ის დამტკიცება. დავადგინოთ $\mu_1 \times \mu_2$ ფუნქციის ადიტიურობა. კვამიზომის სხვა თვისებები, ცხადია, შესრულებულია. ეთქვათ, $A_1 \in H_1$, $A_2 \in H_2$ და Ω კლასი არის $A_1 \times A_2$ სიმრავლის $H_1 \times H_2$ -დამლა. ჩვენი მიზანია, დავადგინოთ, რომ

$$(\mu_1 \times \mu_2)(A_1 \times A_2) = \sum_{E \in \Omega} (\mu_1 \times \mu_2)(E).$$

თავდაპირველად განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა Ω კლასი არის $A_1 \times A_2$ სიმრავლის ბადისებური $H_1 \times H_2$ -დამლა, ე.ი. $\Omega = \Lambda_1 \times \Lambda_2$, სადაც $\Lambda_1 = \{P_1, \dots, P_n\}$ არის A_1 სიმრავლის H_1 -დამლა, ხოლო $\Lambda_2 = \{Q_1, \dots, Q_m\}$ კი - A_2 სიმრავლის H_2 -დამლა.

კვამიშომის თვისებების გათვალისწინებით დავწერთ, რომ

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \Omega} (\mu_1 \times \mu_2)(E) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\mu_1 \times \mu_2)(P_i \times Q_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu_1(P_i) \mu_2(Q_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_1(P_i) \sum_{j=1}^m \mu_2(Q_j) = \mu_1(A_1) \mu_2(A_2). \end{aligned}$$

ახლა განვიხილოთ ზოგადი სიტუაცია. ვთქვათ,

$$\Omega = \{P_1 \times Q_1, \dots, P_n \times Q_n\}$$

არის $A_1 \times A_2$ სიმრავლის რაიმე $H_1 \times H_2$ -დამლა. Π კლასი და Π_k ($k \in \overline{1, n}$) კლასები შევარჩიოთ ლემა 4.5.1-ის მიხედვით. თუ ვისარგებლებთ უკვე განხილული შემთხვევით და გათვალისწინებით, რომ Π_k კლასები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და მათი გაერთიანება Π -ს ტოლია, დავწერთ,

$$(\mu_1 \times \mu_2)(A_1 \times A_2) = \sum_{E \in \Pi} (\mu_1 \times \mu_2)(E) =$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{E \in \Pi_k} (\mu_1 \times \mu_2)(E) = \sum_{k=1}^n (\mu_1 \times \mu_2)(P_k \times Q_k) = \sum_{E \in \Omega} (\mu_1 \times \mu_2)(E).$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 4.5.1-ის დამტკიცება. თეორემა მტკიცდება ინდუქციით n -ის მიხედვით. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, $n = 1$ შემთხვევაში დებულება მარტივად მოწმდება, ინდუქციის ბიჯის განხორციელება კი ხდება თეორემა 4.5.2-ის მეშვეობით, იმის გათვალისწინებით, რომ n -განზომილებიანი v_n მოცულობა შეიძლება გაუაიგივოთ $v_{n-1} \times v_1$ დეკარტულ ნამრავლთან $(x_1, \dots, x_n)$ და $((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$ სახის ელემენტების გაიგივების მეშვეობით. $\square$

შემდეგი დებულება განაზოგადებს თეორემა 4.5.1-ს და გვიჩვენებს, რომ მოცულობას აქვს ზომის თვისებები.

თეორემა 4.5.3. ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$ -სთვის მოცულობა არის ზომა.

დამტკიცება. თეორემა 4.5.1-ის და თეორემა 4.3.3-ის გათვალისწინებით, საკმარისია დავადგინოთ v ფუნქციის თვალადად ნახევრადადიციურობა.

ქვემოთ $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის ჩაეტვა და ყველა შიგა წერტილის სიმრავლე, შესაბამისად, აღნიშნული იქნება $cl(E)$ და $int(E)$ ჩანაწერებით.

ვთქვათ, მოცემულია $\mathcal{I}^n$ კლასში შემავალი $I, I_1, I_2, \dots$ მონაკვეთები, ისეთები, რომ $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. ჩვენი მიზანია, დავამტკიცოთ შემდეგი:

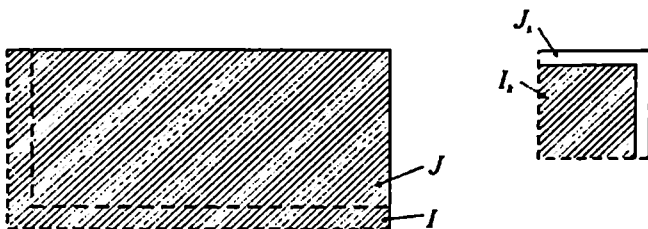
$$v(I) \leq \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k). \quad (2)$$

განვიხილოთ რაიმე $\varepsilon > 0$ რიცხვი. შევამციროთ I მონაკვეთი $J \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთამდე ისე, რომ სრულდებოდეს პირობები:

$$\text{cl}(J) \subset I, \quad v(J) < v(I) + \varepsilon; \quad (3)$$

ხოლო ყოველი $k \in \mathbb{N}$ -სთვის I_k მონაკვეთი გაგზარდოთ $J_k \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთამდე ისე, რომ (ნახ. 4.2)

$$I_k \subset \text{int}(J_k), \quad v(J_k) < v(I_k) + \varepsilon/2^k. \quad (4)$$



ნახ. 4.2.

გვექნება

$$\text{cl}(J) \subset I \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{int}(J_k).$$

ამრიგად, ჩაკეტილი და შემოსაზღვრული $\text{cl}(J)$ სიმრავლე დაფარულია ღია $\text{int}(J_k)$ ($k \in \mathbb{N}$) სიმრავლეების მეშვეობით. ასეთ შემთხვევაში ჰაინე-ბორელის ლემის გამოყენებით შეგვიძლია გამოვყოთ სასრული ქვედაფარვა, ე.ი. ვიპოვოთ $m \in \mathbb{N}$ რიცხვი, ისეთი, რომ

$$\text{cl}(J) \subset \bigcup_{k=1}^m \text{int}(J_k).$$

აქედან გამომდინარე,

$$J \subset \bigcup_{k=1}^m J_k,$$

საიდანაც (3) და (4) თანაფარდობების, v -ს ნახევრადადიციურობისა და ზრდა-
ლობის გათვალისწინებით ვწერთ,

$$v(I) < v(J) + \varepsilon \leq \sum_{k=1}^m v(J_k) + \varepsilon < \sum_{k=1}^m [v(I_k) + \varepsilon/2^k] + \varepsilon < \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) + 2\varepsilon.$$

აქედან, $\varepsilon > 0$ -ის ნებისმიერობის გათვალისწინებით, ვასყენით (2)-ის სამარ-
თლიანობას. $\square$

თეორემა 4.5.3-ის დამტკიცების ანალიზი ცხადყოფს, რომ დამატებითი
არგუმენტი, რომლის მეშვეობითაც v კვამიზომამ თვისებები გაიუმჯობესა და
გახდა ზომა, უკაფიოდება ჰაინე-ბორელის ლემის გამოყენებას. ქვემოთ მო-
ცემული იქნება აღნიშნული მოვლენის გამომხატველი ზოგადი პრინციპი.

ეთქვას, μ არის H ნახევარგოლზე განსაზღვრული კვამიზომა, ხოლო Π
და Λ სიმრავლეთა არაყარიელი კლასებია. შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრე-
ბები:

- μ -ს ეუწოდოთ შიგნიდან რეგულარული Π კლასის მიმართ, თუ
ყოველი $A \in H$ -სთვის და ყოველი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნებიან $A' \in H$
და $E \in \Pi$ სიმრავლეები, ისეთები, რომ: $A' \subset E \subset A$ და $\mu(A') >$
 $\mu(A) - \varepsilon$;
- μ -ს ეუწოდოთ გარედან რეგულარული Λ კლასის მიმართ, თუ
ყოველი $A \in H$ -სთვის და ყოველი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნებიან $A' \in$
 H და $E \in \Lambda$ სიმრავლეები, ისეთები, რომ: $A \subset E \subset A'$ და
 $\mu(A') < \mu(A) + \varepsilon$;
- μ -ს ეუწოდოთ რეგულარული (Π, Λ) წყვილის მიმართ, თუ μ
შიგნიდან რეგულარულია Π -ის მიმართ და გარედან რეგულარულია
 Λ კლასის მიმართ;
- (Π, Λ) წყვილს ეუწოდოთ კომპაქტური, თუ

$$\left(A \in \Pi, A_k \in \Lambda \ (k \in \mathbb{N}), A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) \Rightarrow \left(\exists m \in \mathbb{N} : A \subset \bigcup_{k=1}^m A_k \right),$$

ე.ი. ნებისმიერი $A \in \Pi$ სიმრავლისათვის, Λ კლასის სიმრავლეების
მეშვეობით, მისი ნებისმიერი თვლადი დაფარვიდან გამოიყოფა სას-
რული ქვედაფარვა.

თეორემა 4.5.4. თუ μ კვამიზომა რეგულარულია რაიმე კომპაქტური
წყვილის მიმართ, მაშინ μ არის ზომა.

დამტკიცება. თეორემა 4.5.4-ის დამტკიცება თეორემა 4.5.3-ის დამტკი-
ცების ანალოგიურია და იგი მოგვყავს გადმოცემის სისრულისათვის.

თეორემა 4.3.3-ის გათვალისწინებით, საკმარისია დაეადგინოთ μ კვამი-
ზომის თვლადად ნახევრადადიციურობა.

ეთქვას, μ განსაზღვრულია H კლასზე, ხოლო (Π, Λ) არის ის კომპაქტური წყვილი, რომლის მიმართაც რეგულარულია μ .

განვიხილოთ H კლასში შემავალი $A, A_1, A_2, \dots$ სიმრავლეები, ისეთები, რომ $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. ჩვენი მიზანია დავამტკიცოთ შემდეგი:

$$\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \quad (5)$$

განვიხილოთ რაიმე $\varepsilon > 0$ რიცხვი, ავიღოთ $A' \in H$ და $E \in \Pi$ სიმრავლეები, ისეთები, რომ სრულდებოდეს პირობები:

$$A' \subset E \subset A, \quad \mu(A') > \mu(A) - \varepsilon; \quad (6)$$

ხოლო ყოველი $k \in \mathbb{N}$ -სთვის ავიღოთ $A'_k \in H$ და $E_k \in \Lambda$ სიმრავლეები, ისეთები, რომ

$$A_k \subset E_k \subset A'_k, \quad \mu(A'_k) < \mu(A_k) + \varepsilon/2^k \quad (7)$$

გვექნება,

$$E \subset A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

(Π, Λ) წყვილის კომპაქტურობის ძალით ვიპოვიოთ $m \in \mathbb{N}$ რიცხვს, ისეთს, რომ

$$E \subset \bigcup_{k=1}^m E_k.$$

აქედან გამოდინარე,

$$A' \subset \bigcup_{k=1}^m A'_k,$$

საიდანაც (6) და (7) თანაფარდობების, μ -ს ნახევრადადიციურობისა და ზრადობის გათვალისწინებით ეწერთ,

$$\mu(A) < \mu(A') + \varepsilon \leq \sum_{k=1}^m \mu(A'_k) + \varepsilon < \sum_{k=1}^m [\mu(A_k) + \varepsilon/2^k] + \varepsilon < \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) + 2\varepsilon.$$

აქედან, $\varepsilon > 0$ -ის ნებისმიერობის გათვალისწინებით, ვასკენით (5)-ის სამართლიანობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

§ 6. მონაკვეთების I^n კლასზე განსაზღვრული სასრული და ადიციური ფუნქციების დახასიათება

მონაკვეთების I^n კლასზე განსაზღვრული სასრული და ადიციური ფუნქციები შეიძლება დავახასიათოთ „წერტილის“ (ანუ $\mathbb{R}^n$ -ზე განსაზღვრული) ფუნქციების მეშვეობით, შერეული ნაშრდის ცნების გამოყენების საფუძველზე.

თავდაპირველად განვიხილოთ ერთგანზომილებიანი სიტუაცია. ვთქვათ, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ რაიმე ფუნქციაა და $I = (a, b] \in \mathcal{I}$. შემდეგ გამოსახულებას:

$$\Delta(\varphi, I) = \varphi(b) - \varphi(a)$$

ეწოდება φ ფუნქციის ნაშრდი I მონაკვეთზე. ჩავთვალოთ, რომ $\Delta(\varphi, \emptyset) = 0$. $\Delta(\varphi, I)$ გამოსახულება, როგორც I -ს ფუნქცია, აღნიშნოთ v_φ სიმბოლოთი.

ერთგანზომილებიან შემთხვევაში, მონაკვეთის სასრული და ადიციური ფუნქციების დახასიათება მოიცემა შემდეგი დებულებით:

ვთქვათ, μ არის $\mathcal{I}$ კლასზე განსაზღვრული სასრული ფუნქცია. მაშინ შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- μ ადიციურია;
- მოიძებნება $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია, ისეთი, რომ $\mu = v_\varphi$.

მარტივი შესამოწმებელია, რომ მეორე წინადადებიდან გამომდინარეობს პირველი. შებრუნებული იმპლიკაციის დასადგენად უნდა განვიხილოთ $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \mu((0, x]), & \text{როცა } x > 0, \\ 0, & \text{როცა } x = 0, \\ -\mu((x, 0]), & \text{როცა } x < 0. \end{cases}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $\mu = v_\varphi$.

ქვემოთ დადგენილი იქნება მონაკვეთის სასრული და ადიციური ფუნქციების დახასიათება ნებისმიერი განზომილების შემთხვევაში, რაც, უნდა აღინიშნოს, რომ, ერთგანზომილებიანი სიტუაციისაგან განსხვავებით, ტექნიკური თვალსაზრისით საკმაოდ დატვირთულ მსჯელობას მოითხოვს.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$(a_1, \dots, a_n) < (b_1, \dots, b_n) \Leftrightarrow a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n;$$

$$(a, b] = \bigcap_{k=1}^n (a_k, b_k] \quad (a, b \in \mathbb{R}^n, \quad a < b);$$

$$xy = (x_1 y_1, \dots, x_n y_n) \quad (x, y \in \mathbb{R}^n);$$

$$|x| = \sum_{k=1}^n |x_k| \quad (x \in \mathbb{R}^n);$$

$$\Gamma_n = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}\}.$$

ეთქვას, $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ რაიმე ფუნქციაა და $I = (a, b] \in \mathcal{I}^n$. შემდეგ განიხილოთ

$$\Delta(\varphi, I) = \sum_{\varepsilon \in \Gamma_n} (-1)^{n-|\varepsilon|} \varphi(a + \varepsilon(b - a))$$

წოდება φ ფუნქციის შერეული ნაზრდი I მონაკვეთზე. $\Delta(\varphi, I)$ განიხილება როგორც I -ს ფუნქცია, აღენიშნოთ φ სიმბოლოთი.

$n = 1$ და $n = 2$ შემთხვევებში, შესაბამისად, შერეული ნაზრდისათვის გვექნება:

$$\Delta(\varphi, I) = \varphi(b) - \varphi(a);$$

$$\Delta(\varphi, I) = \varphi(b_1, b_2) - \varphi(a_1, b_2) - \varphi(b_1, a_2) + \varphi(a_1, a_2).$$

თეორემა 4.6.1 ყოველი $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციისათვის მისი შერეული ნაზრდი - φ არის სასრული და ადითიური ფუნქცია.

ლემა 4.6.1. ნებისმიერი $n \geq 2$ -სთვის სამართლიანია $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციის შერეული ნაზრდის შემდეგი წარმოდგენა:

$$\Delta(\varphi, I) = \Delta(\varphi_{b_n}, I') - \Delta(\varphi_{a_n}, I'),$$

სადაც $I = \prod_{k=1}^n (a_k, b_k]$, φ_t ($t \in \mathbb{R}$) არის შემდეგნაირად განსაზღვრული $n-1$ ცვლადის ფუნქცია: $\varphi_t(x_1, \dots, x_{n-1}) = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, t)$ და $I' = \prod_{k=1}^{n-1} (a_k, b_k]$.

დამტკიცება. აღენიშნოთ:

$$a' = (a_1, \dots, a_{n-1}), \quad b' = (b_1, \dots, b_{n-1});$$

$$\varepsilon' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \quad (\varepsilon \in \Gamma_n).$$

თუ $\varepsilon \in \Gamma_n$ ისეთია, რომ $\varepsilon_n = 1$. მაშინ შესრულდება ტოლობა

$$(-1)^{n-|\varepsilon|} \varphi(a + \varepsilon(b - a)) = (-1)^{n-1-|\varepsilon'|} \varphi_{b_n}(a' + \varepsilon'(b' - a')), \quad (1)$$

ხოლო, თუ $\varepsilon \in \Gamma_n$ ისეთია, რომ $\varepsilon_n = 0$, მაშინ

$$(-1)^{n-|\varepsilon|} \varphi(a + \varepsilon(b - a)) = -(-1)^{n-1-|\varepsilon'|} \varphi_{a_n}(a' + \varepsilon'(b' - a')) \quad (2)$$

(1) და (2) ტოლობებიდან გამომდინარე ვწერთ,

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi, I) &= \sum_{\delta \in \Gamma_{n-1}} (-1)^{n-1-|\delta|} \varphi_{b_n}(a' + \delta(b' - a')) - \\ &- \sum_{\delta \in \Gamma_{n-1}} (-1)^{n-1-|\delta|} \varphi_{a_n}(a' + \delta(b' - a')) = \Delta(\varphi_{b_n}, I') - \Delta(\varphi_{a_n}, I'). \end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია. □

ლემა 4.6.2. ვთქვათ, ყოველი $t \in \mathbb{R}$ -სთვის μ_t არის H ნახევარგოლზე განსაზღვრული სასრული და ადიციური ფუნქცია. მაშინ $H \times I$ ნახევარგოლზე შემდეგნაირად განსაზღვრული μ ფუნქცია:

$$\mu(A \times (a, b]) = \mu_b(A) - \mu_a(A) \quad (A \in H, (a, b] \in I),$$

არის სასრული და ადიციური.

დამტკიცება. თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ μ ფუნქციის სასრულობა ცხადია.

ვთქვათ, $A \in H, I = (a, b] \in I$ და Ω კლასი არის $A \times I$ სიმრავლის $H \times I$ -დამლა, ჩვენი მიზანია, დავადგინოთ ტოლობა:

$$\mu(A \times I) = \sum_{E \in \Omega} \mu(E),$$

რაც ნიშნავს μ -ს ადიციურობას.

თავდაპირველად განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა Ω კლასი არის $A \times I$ სიმრავლის ბადისებური $H \times I$ -დამლა, ე.ი. $\Omega = \Delta \times \Lambda$, სადაც $\Delta = \{A_1, \dots, A_n\}$ არის A სიმრავლის H -დამლა, ხოლო $\Lambda = \{I_1, \dots, I_m\}$ კი $I = (a, b]$ მონაკვეთის I -დამლა. რიცხვების სასრული ჯამი არ იცვლება წვერთა გადანაცვლებით, რის გამოც შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $I_1, \dots, I_m$ მონაკვეთები განლაგებულია ერთმანეთის მიყოლებით, მარცხნიდან მარჯვნივ. ე.ი. $I_1 = (c_0, c_1], I_2 = (c_1, c_2], \dots, I_m = (c_{m-1}, c_m]$, სადაც $a = c_0 < c_1 < \dots < c_m = b$.

μ ფუნქციის განსაზღვრისა და μ_t ფუნქციების ადიციურობის გათვალისწინებით დავწერთ, რომ

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \Omega} \mu(E) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu(A_i \times I_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\mu_{c_j}(A_i) - \mu_{c_{j-1}}(A_i)) = \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \mu_{c_j}(A_i) - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \mu_{c_{j-1}}(A_i) = \sum_{j=1}^m \mu_{c_j}(A) - \sum_{j=1}^m \mu_{c_{j-1}}(A) = \\ &= \mu_b(A) - \mu_a(A) = \mu(A \times I). \end{aligned}$$

ახლა განვიხილოთ ზოგადი სიტუაცია. ვთქვათ, $\Omega = \{A_1 \times I_1, \dots, A_n \times I_n\}$ არის $A \times I$ სიმრავლის რაიმე $H \times I$ -დამლა. Π კლასი და Π_k ($k \in \overline{1, n}$) კლასები შევარჩიოთ ლემა 4.5.1-ის მისხედით. თუ ვისარგებლებთ უკვე განხილული შემთხვევით, ამასთან გავითვალისწინებთ, რომ Π_k კლასები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და მათი გაერთიანება არის Π , დავწერთ,

$$\mu(A \times I) = \sum_{E \in \Pi} \mu(E) = \sum_{k=1}^n \sum_{E \in \Pi_k} \mu(E) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k \times I_k) = \sum_{E \in \Omega} \mu(E).$$

ამით ლემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 4.6.1-ის დამტკიცება. დამტკიცება მოვახდინოთ ინდუქციით n -ის მიმართ. $n = 1$ შემთხვევაში დებულება მარტივი დასადაგენია. დაეუფაოთ, დებულება სამართლიანია $(n - 1)$ -ის შემთხვევაში. ყოველი $t \in \mathbb{R}$ -სთვის განვიხილოთ $\mathcal{I}^{n-1}$ კლასზე შემდეგნაირად განსაზღვრული μ_t ფუნქცია:

$$\mu_t(J) = \Delta(\varphi_t, J) \quad (J \in \mathcal{I}^{n-1}).$$

ინდუქციის დაშვების თანახმად, μ_t ადიციურია. შემდეგ, თუ გამოვიყენებთ 4.6.1 და 4.6.2 ლემებს, დაეასყენით, რომ ν_φ ფუნქცია ადიციურია. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 4.6.2. $\mathcal{I}^n$ კლასზე განსაზღვრული ყოველი სასრული და ადიციური μ ფუნქციისათვის მოიძებნება $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია, ისეთი, რომ $\mu = \nu_\varphi$.

ლემა 4.6.3. ვთქვათ, μ_1 და μ_2 არიან $\mathcal{I}^n$ -ზე განსაზღვრული სასრული ადიციური ფუნქციები, რომლებიც ერთმანეთს ემთხვევიან ყოველ ისეთ $I \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთისზე, რომლის ერთ-ერთი წევრო მდებარეობს კოორდინატთა სათავეში. მაშინ $\mu_1(I) = \mu_2(I)$ ნებისმიერი $I \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთისათვის.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ:

$$\langle a, b \rangle = (\min(a, b), \max(a, b)) \quad (a, b \in \mathbb{R}, a \neq b);$$

$$\langle a, b \rangle = \bigtimes_{k=1}^n \langle a_k, b_k \rangle \quad (a, b \in \mathbb{R}^n, a_k \neq b_k \quad (k \in \overline{1, n})).$$

ყოველი $A \subset \overline{1, n}$ სიმრავლისათვის აღვნიშნოთ

$$\Omega_A = \{(0, x) : \text{sign}(x_k) = 1 \quad (k \in A)\}.$$

აღვნიშნოთ აგრეთვე, $\Omega^{(0)} = \Omega_{\overline{1, n}}$. ყოველი $m \in \overline{1, n}$ -სთვის განვიხილოთ მონაკვეთების $\Omega^{(m)}$ კლასი, რომელშიც შედის ის n -განზომილებიანი $\bigtimes_{k=1}^n I_k$ მონაკვეთები, რომელთათვისაც $I_1, \dots, I_m$ შუალედებს აქვთ სახე: $I_1 = (a_1, b_1], \dots, I_m = (a_m, b_m]$, სადაც $0 < a_1 < b_1, \dots, 0 < a_m < b_m$; ხოლო $I_{m+1}, \dots, I_n$ შუალედებს კი აქვთ სახე: $I_{m+1} = (0, b_{m+1}], \dots, I_n = (0, b_n]$. ცხადია,

$$\Omega^{(0)} \subset \Omega^{(1)} \subset \dots \subset \Omega^{(n)}.$$

ამასთან, მარტივი შესამოწმებელია, რომ ყოველი $I \in \Omega^{(m)}$ მონაკვეთი წარმოადგება $\Omega^{(m-1)}$ კლასის ორი მონაკვეთის სხვაობის სახით. ამ ფაქტისა და μ_1, μ_2 ფუნქციების ადიციურობის გათვალისწინებით დაეასყენით: რადგან μ_1 და μ_2 ემთხვევიან $\Omega^{(0)}$ კლასზე, ამიტომ ისინი ერთმანეთს დაემთხვევიან $\Omega^{(1)}$ -ზე, აქედან გამომდინარე, დამთხვევა მოხდება $\Omega^{(2)}$ -ზე და ა.შ. $\Omega^{(n)}$ -ზე.

ნებისმიერი $A \subset \overline{1, n}$ -სთვის მსგავსი მსჯელობით დაერწმუნდებით, რომ μ_1 -ის და μ_2 -ის მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევიან Ω_A კლასზე. აქედან,

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ნებისმიერი $I \in \mathcal{I}^n$ იშლება Ω_A კლასებში შემავალი მონაკვეთების გაერთიანებად, დავასკვნით μ_1 -ის და μ_2 -ის მნიშვნელობების ტოლობას ნებისმიერი $I \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთისათვის. $\square$

თეორემა 4.6.2-ის დამტკიცება. $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილისათვის $\nu(x)$ -ით აღენიშნოთ x -ის უარყოფითი კოორდინატების რაოდენობა.

$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად: $\varphi(x) = (-1)^{\nu(x)} \mu(\langle 0, x \rangle)$, როცა $x_1 \cdots x_n \neq 0$ და $\varphi(x) = 0$, როცა $x_1 \cdots x_n = 0$.

ვაჩვენოთ, რომ μ და ν_φ ფუნქციების მნიშვნელობები ტოლია ყოველ ისეთ $I \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთზე, რომლის ერთ-ერთი წვერო მდებარეობს კოორდინატთა სათავეში. ამის შემდეგ კი, თეორემა 4.6.1-ისა და ლემა 4.6.2-ის ძალით დავასკვნით μ და ν_φ ფუნქციების მნიშვნელობების ტოლობას ნებისმიერი $I \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთისათვის.

ამრიგად, ჩვენი მიზანია, ვაჩვენოთ, რომ $x \in \mathbb{R}^n$, $x_1 \cdots x_n \neq 0$, წერტილისათვის,

$$\nu_\varphi(\langle 0, x \rangle) = \mu(\langle 0, x \rangle).$$

$\langle 0, x \rangle$ მონაკვეთის „კიდურა“ წვეროები იქნებიან

$$a = (\min(0, x_1), \dots, \min(0, x_n)),$$

და

$$b = (\max(0, x_1), \dots, \max(0, x_n))$$

წერტილები. ცხადია, $b - a = (|x_1|, \dots, |x_n|)$. შევნიშნოთ, რომ $\langle 0, x \rangle$ მონაკვეთის ყველა წვეროზე, გარდა x -ისა, φ ფუნქციის მნიშვნელობა ნულის ტოლია. შედეგად, $\nu_\varphi(\langle 0, x \rangle)$ შერეული ნამრდის განმსაზღვრელ ჯამში დაგერჩება მხოლოდ ის

$$(-1)^{n-|x|} \varphi(a + \varepsilon(b - a))$$

წვერი, რომლისთვისაც $a + \varepsilon(b - a) = x$. φ -ს განსაზღვრებიდან გამომდინარე, $\varphi(a + \varepsilon(b - a)) = (-1)^{\nu(x)} \mu(\langle 0, x \rangle)$. გავარვიოთ, თუ რისი ტოლია $(-1)^{n-|x|}$. გვაქვს, რომ $\min(0, x_k) + \varepsilon_k |x_k| = \max(0, |x_k|)$ ($k \in \overline{1, n}$). შედეგად, $\varepsilon_k = 1$, როცა $x_k > 0$ და $\varepsilon_k = 0$, როცა $x_k < 0$, ე.ი. $n - |x|$ გამოსახავს x წერტილის უარყოფითი კოორდინატების რაოდენობას, ანუ უდრის $\nu(x)$ -ს. აქედან გამომდინარე,

$$\nu_\varphi(\langle 0, x \rangle) = (-1)^{n-|x|} \varphi(a + \varepsilon(b - a)) =$$

$$= (-1)^{\nu(x)} (-1)^{\nu(x)} \mu(\langle 0, x \rangle) = \mu(\langle 0, x \rangle).$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 4.6.1. თეორემა 4.6.2-ის დამტკიცებისას დადგინდა არა მარტო წარმოშემწევი (ე.ი. $\mu = \nu_\varphi$ ტოლობის დამაკმაყოფილებელი) φ ფუნქციის არსებობა, უფრო მეტიც, ნაპოვნი იქნა φ ფუნქციის ზუსტი სახე: $\varphi(x) =$

$(-1)^{\nu(x)} \mu(\langle 0, x \rangle)$. აქედან, მაგალითად ვლბულობო, რობ იმ შემოხვევაში, როცა μ არის მოცულობა, წარმოქმნელ ფუნქციას აქვს სახე: $\varphi(x) = x_1 \dots x_n$.

4.6.1 და 4.6.2 თეორემებიდან ვლბულობო მონაკვეთის ადიცურ ფუნქციათა შემდეგ დახასიათებას.

შედეგი 4.6.1. ვთქვათ, μ არის I^n -ზე განსაზღვრული სასრული ფუნქცია. მაშინ შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- μ ადიცურია;
- მოიძებნება $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია, ისეთი, რომ $\mu = \nu_\varphi$.

$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციას ეწოდება ვიტალის აზრით ზრდადი, თუ $\Delta(\varphi, I) \geq 0$ ყოველი $I \in I^n$ მონაკვეთისათვის.

ცხადია, რომ ერთგანზომილებიან შემოხვევაში ვიტალის აზრით ზრდადობა იგივეა, რაც ჩვეულებრივი ზრდადობა.

სამართლიანია მონაკვეთების I^n კლასზე განსაზღვრული სასრული კვამიზომების შემდეგი დახასიათება, რომელიც გამომდინარეობს შედეგი 4.6.1-დან.

შედეგი 4.6.2. ვთქვათ, μ არის I^n -ზე განსაზღვრული სასრული ფუნქცია. მაშინ შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- μ კვამიზომია;
- მოიძებნება ვიტალის აზრით ზრდადი $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია, ისეთი, რომ $\mu = \nu_\varphi$.

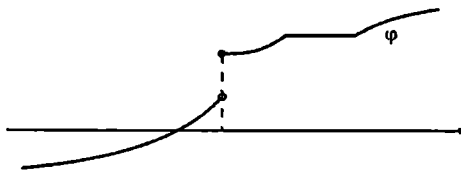
§ 7. მონაკვეთების I^n კლასზე განსაზღვრული სასრული ზომების დახასიათება

როგორც ვიცი (იხ. შედეგი 4.6.2), მონაკვეთების I^n კლასზე განსაზღვრული სასრული კვამიზომები ხასიათდებიან ვიტალის აზრით ზრდადი წერტილის ფუნქციების მეშვეობით. ბუნებრივია კითხვა: როგორია ანალოგიური დახასიათება კვამიზომის ნაცულად ზომის განხილვის შემოხვევაში?

ერთგანზომილებიან სიტუაციაში დახასიათება მოიცემა შემდეგი ღებულებით:

ვთქვათ, μ არის I კლასზე განსაზღვრული სასრული ფუნქცია. მაშინ შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- μ ზომაა;
- მოიძებნება ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია ისეთი, რომ $\mu = \nu_\varphi$ (ნახ. 4.3).



ნახ. 4.3.

პირველი წინადადებიდან მეორე მიიღება 4.6.2 და 4.4.2 თეორემების საფუძველზე. შებრუნებული იმპლიკაციის დასამტკიცებლად უნდა გავითვალისწინოთ თეორემა 4.6.1, რომლის ძალითაც v_φ ფუნქცია ადიკურიბა. შემდეგ, მარტივად დავადგენთ, რომ v_φ რეგულარულია იმ კომპაქტური წყვილის მიმართ, რომლის პირველი კომპონენტი ყველა ჩაეცეტილი მონაცემის კლასი, ხოლო მეორე კი - ყველა ღია მონაცემის კლასი. ამის შემდეგ, თეორემა 4.5.4-ის ძალით მივიღებთ, რომ v_φ არის ზომა.

ქვემოთ დადგენილი იქნება აღნიშნულის მსგავსი დახასიათება ნებისმიერი განზომილებისათვის.

ვთქვათ, μ არის I^n კლასზე განსაზღვრული სასრული ფუნქცია. μ -ს ეუწოდოთ მარჯვნიდან უწყვეტი $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილში, თუ

$$\mu((x, x + h]) \rightarrow 0$$

ყოველთვის, როცა $h_1, \dots, h_n > 0$ კოორდინატებს შორის ერთი ან რამდენიმე მიისწრაფვის ნულისაკენ, ხოლო დანარჩენები ფიქსირებულია. ვიტყვი, რომ μ მარჯვნიდან უწყვეტია, თუ ის მარჯვნიდან უწყვეტია ყოველ x წერტილში.

თეორემა 4.7.1. ვთქვათ, μ არის I^n კლასზე განსაზღვრული სასრული ფუნქცია. მაშინ შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- μ ზომაა;
- μ კვაზიზომაა და უწყვეტია მარჯვნიდან.

დამტკიცება. პირველი წინადადებიდან მეორის მისაღებად საკმარისია გამოვიყენოთ თეორემა 4.4.2. გადავიდეთ შებრუნებული იმპლიკაციის დამტკიცებაზე. Π -ს როლში ავიღოთ ყველა ჩაეცეტილი n -განზომილებიანი მონაცემის კლასი, ხოლო Λ -ს როლში კი ყველა ღია n -განზომილებიანი მონაცემის კლასი. პაინე-ბორელის ლემის თანახმად, (Π, Λ) წარმოადგენს კომპაქტურ წყვილს.

დავამტკიცოთ, რომ

$$\mu((a, b + h]) \rightarrow \mu((a, b]) \quad \text{და} \quad \mu((a + h, b]) \rightarrow \mu((a, b]),$$

როცა $h \rightarrow 0$, $h_1, \dots, h_n > 0$. ამ თანაფარდობებიდან შემდეგი ჩართვების გათვალისწინებით:

$$(a, b] \subset (a, b + h] \subset (a, b + h], \quad (a + h, b] \subset [a + h/2, b] \subset (a, b],$$

უშუალოდ დავასკენით, რომ μ რეგულარულია (Π, Λ) წყვილის მიმართ. ამის შემდეგ კი, თეორემა 4.5.4-ის მეშვეობით დავადგენთ, რომ μ ზომაა.

ყოველი $m \in \overline{1, n}$ ინდექსისათვის $I_{m, h}$ -ით აღნიშნოთ მონაკვეთი, რომელიც წარმოადგენს შემდეგნაირად განსაზღვრული ერთგანზომილებიანი $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ მონაკვეთების დეკარტულ ნამრავლს: $\Delta_k = (a_k, b_k]$, როცა $k \neq m$ და $\Delta_m = (b_m, b_m + h_m]$. მარტივი შესამოწმებელია, რომ ფიქსირებული h -სთვის,

$$(a, b + h] \setminus (a, b] \subset \bigcup_{m=1}^n I_{m, h}.$$

აქედან გამომდინარე, კვანძოების ნახევრადადიკურობისა და ზრდადობის ძალით,

$$\mu((a, b + h]) \leq \mu((a, b]) + \sum_{m=1}^n \mu(I_{m, h}). \quad (1)$$

μ ფუნქციის მარჯვნიდან უწყვეტობის გამო, $\mu(I_{m, h}) \rightarrow 0$, როცა $h \rightarrow 0$, $h_1, \dots, h_n > 0$. საიდანაც, (1)-ის გათვალისწინებით ვლბულობთ, რომ

$$\mu((a, b + h]) \rightarrow \mu((a, b]).$$

ანალოგიური მსჯელობით, დავრწმუნდებით $\mu((a + h, b]) \rightarrow \mu((a, b])$ თანაფარდობის სამართლიანობაში. შევნიშნაყთ, რომ ამ შემთხვევაში დაგვჭირდება ჩართვა:

$$(a, b] \setminus (a + h, b] \subset \bigcup_{m=1}^n J_{m, h},$$

სადაც $J_{m, h}$ -ით აღნიშნულია მონაკვეთი, რომელიც წარმოადგენს შემდეგნაირად განსაზღვრული ერთგანზომილებიანი $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ მონაკვეთების დეკარტულ ნამრავლს: $\Delta_k = (a_k, b_k]$, როცა $k \neq m$ და $\Delta_m = (a_m, a_m + h_m]$. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

$\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციას ეუწოდოთ მარჯვნიდან უწყვეტი ვიტალის აზრით, თუ მისი შერეული ნაზრდი - v_φ მარჯვნიდან უწყვეტია.

ესადაა, ერთგანზომილებიან შემთხვევაში ვიტალის აზრით მარჯვნიდან უწყვეტობა ემთხვევა ჩვეულებრივი მარჯვნიდან უწყვეტობის ცნებას.

შედეგი 4.6.2-ის და თეორემა 4.7.1-ის საფუძველზე ვლბულობთ მონაკვეთების I^n კლასზე განსაზღვრული სასრული ზომების შემდეგ დახასიათებას.

თეორემა 4.7.2. ვთქვათ, μ არის I^n -ზე განსაზღვრული სასრული ფუნქცია. მაშინ შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- μ ზომაა;
- მოიძებნება ვიტალის აზრით ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია, ისეთი, რომ $\mu = \nu_\varphi$.

ზომის გაგრძელება

სიმრავლის მიერ სივრცეში დეკაიებული ადგილის გამოშვება ისტორიულად იყო ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი მათემატიკური ამოცანა. ამ მიმართულებით საბაზისო დატვირთვისაა n -განზომილებიანი მონაკვეთის მოცულობის ცნება. მონაკვეთზე უფრო რთული სტრუქტურის სიმრავლეების გამოშვებისათვის საჭიროა ახალი მეთოდების განვითარება. საინტერესო მიდგომები შემოთავაზებული იქნა ჯერ კიდევ ანტიკურ ეპოქაში, როცა წარმატებით ასეურებდნენ წრის, ბირთვის, პარაბოლური სეგმენტისა და მოგიერთი სხვა მრუდწირული სამღერის მქონე ფიგურების ფართობისა თუ მოცულობის გამოთვლას. ამ მიდგომების არსებითი განვითარება მოხდა დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის შექმნის შედეგად. კერძოდ, შესაძლებელი გახდა უწყვეტი ფუნქციების გრაფიკებით შემოსამღერელი ფიგურების გამოშვება. ეს მაშინდელი მათემატიკისათვის საკითხის დამუშავოფილებულ გადაწყვეტად მიიჩნეოდა, თუმცა მე-19 საუკუნის მეორე ნახევარში, მთელი რიგი მნიშვნელოვანი ამოცანების კვლევისას წარმოიშვა კიდევ უფრო რთული აგებულების სიმრავლეთა გამოშვის აუცილებლობა. კ. ჟორდანის, ჯ. პეანოსა და ე. ბორელის იდეების განვითარების გზით, გადაწყვეტი ნაბიჯი საკითხის კვლევაში გადაღებული იყო ა. ლებეგის მიერ (1902).

ამ თავში გავეცნობით ლებეგის კონსტრუქციის აბსტრაქტულ ვარიანტს, რომელიც ცოტა მოგვიანებით შემუშავდა ჯ. რადონის (1913) და კ. კარათეოდორის (1918) შრომებში.

§ 1. გარე ზომა

ლებეგის მიერ $\mathbb{R}^n$ სივრცის სიმრავლეთა გასაზომად შემოთავაზებული მეთოდი წარმატებით მუშაობს არა მხოლოდ მონაკვეთების კლასზე მოცემული ზომის - მოცულობის გაგრძელებისას, არამედ ნებისმიერი X სივრცის ქვესიმრავლეთა რაიმე ნახევარგოლზე მოცემული ზომის შემთხვევაშიც. ამ თავში ზომის გაგრძელების მეთოდი გადმოცემული იქნება ზოგად სიტუაციაში, ხოლო მომდევნო თავში მოხდება აბსტრაქტული თეორიის გამოყენება $\mathbb{R}^n$ სივრცის სიმრავლეთა გამოშვის ამოცანისათვის.

შემდგომში ვიგულისხმებთ, რომ X რაიმე ფიქსირებული არაყარიელი სიმრავლეა და განვიხილავთ X -ის ქვესიმრავლეთა კლასებს.

შენიშნით, რომ თეორემა 4.2.1-ის ძალით ზომის გაგრძელების ამოცანის გოგადობა არ შეიძლება, თუ მას შევისწავლით რგოლზე მოცემული საწყისი ზომის შემთხვევაში.

უთქვამთ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა. ლებეგის კონსტრუქციაში არსებით როლს ასრულებს μ ზომით წარმოქმნილი (ინდუცირებული) გარე ზომის ცნება, რომელიც შემდეგნაირად განისაზღვრება: დავუშვათ, A არის X -ის რაიმე ქვესიმრავლე. თუ არსებობს H რგოლის სიმრავლეთა ერთი მიანც (A_n) მიმდევრობა, რომელიც ფარავს A სიმრავლეს (ე.ი. $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$), მაშინ A -ს გარე ზომა - $\mu^*(A)$ განესაზღვროთ, როგორც შემდეგი ინფიმუმი:

$$\inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in H (n \in \mathbb{N}), A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\},$$

ხოლო აღნიშნული თვისების (A_n) მიმდევრობის არარსებობის შემთხვევაში, $\mu^*(A)$ მივიჩნიოთ ∞ -ის ტოლად.

ამრიგად, μ^* გარე ზომა განსაზღვრულია X -ის ყველა ქვესიმრავლისათვის. ცხადია, რომ μ^* არაუარყოფითი ზრდადი ფუნქციაა და $\mu^*(\emptyset) = 0$.

შენიშვნა 5.1.1. რადგან H რგოლია, ამიტომ ნებისმიერი $A_n \in H$ მიმდევრობისათვის არსებობს წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი წევრების მქონე $B_n \in H$ მიმდევრობა, ისეთი, რომ $B_n \subset A_n (n \in \mathbb{N})$ და $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. აქედან გამომდინარე, მარტივი დასანახია, რომ $\mu^*(A)$ -ს მნიშვნელობა არ შეიცვლება, თუ მის განსაზღვრებაში დამატებით მოვითხოვთ დამფარავი A_n სიმრავლეების წყვილ-წყვილად თანაუკვეთობას.

შენიშვნა 5.1.2. მარტივი შესამოწმებელია, რომ თუ აღვებრათ (რგოლზე) განსაზღვრული μ ზომა არის შემოსაზღვრული (σ -შემოსაზღვრული), მაშინ μ^* გარე ზომაც არის შემოსაზღვრული (σ -შემოსაზღვრული).

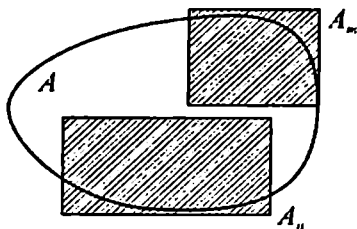
შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ μ^* ფუნქცია წარმოადგენს μ ფუნქციის გაგრძელებას.

თეორემა 5.1.1. ყოველი $A \in H$ სიმრავლისათვის სრულდება ტოლობა: $\mu^*(A) = \mu(A)$.

დამტკიცება. უთქვამთ, $A \in H$. $A \subset A \cup \emptyset \cup \emptyset \dots$ ჩართვიდან გამომდინარე გვაქვს, რომ $\mu^*(A) \leq \mu(A) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \dots = \mu(A)$. მეორე მხრივ, თუ $A_n \in H (n \in \mathbb{N})$ ნებისმიერი მიმდევრობაა, რომლისთვისაც $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, მაშინ ზომის თვალადა ნახევრადადიურობისა და ზრდადობის

ძალით: $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. აქედან, A_n მიმდევრობის ნებისმიერობის გამო, ვასცენით $\mu(A) \leq \mu^*(A)$ შეფასების სამართლიანობას. ამრიგად, $\mu^-(A) = \mu(A)$. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

$A \subset X$ სიმრავლის გარე ზომა, უხეშად რომ ვთქვათ, გვიჩვენებს, სულ მცირე, რა რაოდენობის მასალა უნდა დაიხარჯოს A სიმრავლის დასაფარად. აქ მასალად გაიგება H რგოლის სიმრავლეები, ხოლო მათი დანახარჯის გასაზომად კი გამოიყენება μ ზომა (ნახ. 5.1).



ნახ. 5.1.

გარე ზომის კონსტრუქცია საკმაოდ ბუნებრივ გზად ჩანს სიმრავლეთა გასაზომად. მაშინ რა გვიძლის ხელს, μ^* მივიჩნიოთ μ ზომის საძიებელ გაგრძელებად? ხელშეშული გარემოება ძნელი მისათითებელი არაა: სადაა გარანტია იმისა, რომ μ^* ფუნქციას ექნება ზომის თვისებები, კერძოდ, თელადად ადიციურობის თვისება? სწორედ აღნიშნული სირთულე იწვევს აუცილებლობას იმისა, რომ გარე ზომის სახით შემოთავაზებული სიმრავლეთა გაზომვის მეთოდის მოქმედების არეალი შეზღუდვით შედარებით ვიწრო სიმრავლეთა კლასზე საიმისოდ, რომ შემცირებული კლასის ფარგლებში მიღწეული იქნეს ზომის თვისებების შესრულება. ასეთი სახის შეზღუდვის მეთოდი მოცემული იქნება მომდევნო პარაგრაფში.

როგორც მოგვიანებით ენახავთ, ზომით წარმოქმნილ გარე ზომას, სამოგადოდ, არა აქვს არა მხოლოდ თელადად ადიციურობის, არამედ ადიციურობის თვისებაც კი (იხ. თეორემა 6.4.3), თუმცა სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5.1.2. μ^* ფუნქციას აქვს თელადად ნახევრადადიციურობის თვისება.

დამტკიცება. ვთქვათ, $A, A_1, A_2, \dots$ არიან X -ის ქვესიმრავლეები და $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. თუ $\mu^*(A_n) = \infty$ რომელიმე n -სთვის, მაშინ ცხადია, რომ $\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$. ამრიგად, განსახილავი რჩება ის შემთხვევა, როცა

$\mu^*(A_n) < \infty$ ყოველი n -სთვის. ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. μ^* -ის განსაზღვრის ძალით ყოველი n -სთვის მოიძებნება შემდეგი პირობების დამაკმაყოფილებელი $B_{n,m} \in \mathcal{H}$ ($m \in \mathbb{N}$) სიმრავლეები:

$$A_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} B_{n,m}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \mu(B_{n,m}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

აქედან, μ^* -ის განსაზღვრისა და $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} B_{n,m}$ ჩართვის გათვალისწინებით გვექნება,

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu(B_{n,m}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\mu^*(A_n) + \varepsilon/2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

საიდანაც, ε -ის ნებისმიერობიდან გამომდინარე ვლუბულობთ საჭირო შეფასებას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ზომით წარმოქმნილი გარე ზომის თვისებები საფუძვლად ედება აბსტრაქტული გარე ზომის განსაზღვრებას: X -ის ყველა ქვესიმრავლის კლასზე განსაზღვრულ λ ფუნქციას ეწოდება გარე ზომა X -ში, თუ მას აქვს შემდეგი თვისებები:

- $\lambda(\emptyset) = 0$;
- λ არაუარყოფითია;
- λ მრდადია;
- λ თვლადად ნახევრადადიკურია.

შენიშვნა 5.1.3. მარტივი დასაბახია, რომ გარე ზომას აქვს ნახევრადადიკურობის თვისებაც.

ამოცანები

1. ააგეთ მაგალითი გარე ზომისა, რომელსაც არა აქვს ადიკურობის თვისება.

§ 2. ზომის გაგრძელების ლებეგის მეთოდი

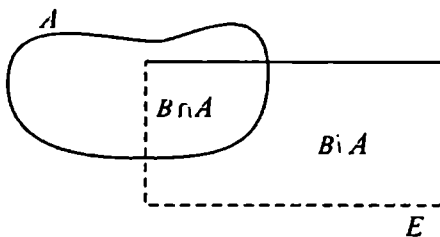
ვთქვათ, μ არის რაიმე $\mathcal{H}$ რგოლზე განსაზღვრული ზომა. ჩვენი მიზანია, ვიმოვოთ სიმრავლეთა რაც შეიძლება დიდი S კლასი, რომლის ფარგლებშიც μ ზომით წარმოქმნილ μ^* გარე ზომას ექნება ზომის თვისებები. ბუნებრივია, S კლასს მოეთხოვოთ, რომ მან გააფართოროს $\mathcal{H}$ რგოლი და თავადაც წარმოადგენდეს რგოლს ან კიდევ უფრო მდიდარი სტრუქტურის მქონე რაიმე კლასს.

პრინციპი, რომლის მეშვეობითაც ლებეგმა გამოყო S კლასი ეფუძნება შემდეგ ბუნებრივ მოსაზრებას: S კლასიდან აღებულია A სიმრავლემ $\mathcal{H}$

რგოლის ნებისმიერი B სიმრავლე უნდა დაშალოს ადიციურობის თვისებასთან თანხმობაში მყოფ ნაწილებად, ე.ი. $B \cap A$ და $B \setminus A$ სიმრავლეებისათვის უნდა სრულდებოდეს ტოლობა:

$$\mu(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

მართლაც, თუ $S \supset H$, S რგოლია და $\mu^*|_S$ ზომაა, მაშინ სამივე - B , $B \cap A$ და $B \setminus A$ სიმრავლე უნდა შედიოდეს S კლასში და ზომის ადიციურობის თვისების ძალით უნდა გვექნოდეს, რომ $\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) = \mu^*(B) = \mu(B)$ (ნახ. 5.2).



ნახ. 5.2.

S კლასისათვის ნაპოვნი აუცილებელი პირობის საფუძველზე შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრება:

$A \subset X$ სიმრავლეს ეუწოდოთ ლებეგის აზრით ზომადი μ ფუძის მიხედვით (მოკლედ, ლებეგის აზრით ზომადი), თუ ყოველი $B \in H$ სიმრავლისათვის სრულდება ტოლობა:

$$\mu(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ ლებეგის აზრით ზომადობის პირობა არსებით შედეგს იძლევა დასახული ამოცანის გადაწყვეტის თვალსაზრისით.

თეორემა 5.2.1. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა. მაშინ ლებეგის აზრით ზომადი ყველა სიმრავლის S კლასს აქვს შემდეგი თვისებები:

- $S \supset H$;
- S არის σ -ალგებრა;
- μ^* გარე ზომის შეზღუდვა S კლასზე არის ზომა.

თეორემა 5.2.1 აფუძნებს რგოლზე განსაზღვრული μ ზომის გაგრძელების ლებეგის მეთოდს, რომლის არსი შემდეგში მდგომარეობს: ჯერ აიგება μ ზომით წარმოქმნილი μ^* გარე ზომა, ხოლო შემდეგ, μ^* გარე ზომა იზღუდება ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეთა კლასზე. ასეთი წესით

მიღებულ გავრძელებას μ ზომის ლებეგისეულ გავრძელებას უწოდებენ და მას $\overline{\mu}$ ჩანაწერით აღნიშნავენ.

ახლა ჩვენ არ დავამტკიცებთ თეორემა 5.2.1-ს, რადგანაც მომდევნო პარაგრაფში დადგენილი იქნება კიდევ უფრო ზოგადი თეორემა, რომელიც ეკუთვნის კ. კარათეოდორს.

შენიშვნა 5.2.1. იმ შემთხვევაში, როცა μ ზომა არის მოცულობა (განსაზღვრული ნახევრადლია მონაკვეთების სასრული გავრთიანებების $r(I^n)$ რგოლზე), თეორემა 5.2.1 დამტკიცებული იყო ლებეგის მიერ. ზოგადი შემთხვევა კი ეკუთვნის ფრეშს.

შენიშვნა 5.2.2. თეორემა 5.2.1-ის ძალით ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეების S კლასი წარმოადგენს H რგოლის შემცველ σ -ალგებრას. შედეგად, S შეიცავს H რგოლით წარმოქმნილ σ -ალგებრასაც, ე.ი. $S \supset \sigma a(H)$.

შენიშვნა 5.2.3. წინა პარაგრაფის პირველი შენიშვნის გათვალისწინებით გვაქვს, რომ: თუ ალგებრაზე (რგოლზე) განსაზღვრული μ ზომა შემოსაზღვრულია (σ -შემოსაზღვრულია), მაშინ შემოსაზღვრულია (σ -შემოსაზღვრულია) მისი ლებეგისეული $\overline{\mu}$ გავრძელებაც.

შენიშვნა 5.2.4. შემდგომში ნაჩვენები იქნება, რომ (იხ. ამოცანა 5.2.1 და თეორემა 5.3.1) ზომის ლებეგისეული გავრძელების განმეორებითი გამოყენება, ზომის გავრძელების თვალსაზრისით, ახალს არაფერს იძლევა, ე.ი. $\overline{\overline{\mu}} = \overline{\mu}$.

ეთქვათ, μ არის რაიმე ზომა, ხოლო H კლასი არის მისი განსაზღვრის არე. μ ზომას ეწოდება სრული, თუ ნულზომიანი სიმრავლის ნებისმიერი ქვესიმრავლე ზომადია, ე.ი.

$$(A \in H, \mu(A) = 0, A' \subset A) \Rightarrow A' \in H.$$

ცხადია, რომ ზომის სისრულის შემთხვევაში, ნულზომიანი სიმრავლის ნებისმიერი ქვესიმრავლე ასევე ნულზომიანი სიმრავლე იქნება.

თეორემა 5.2.2. ზომის ლებეგისეულ გავრძელებას აქვს სისრულის თვისება.

თეორემა 5.2.2 გამოდინარეობს შემდეგი დებულებიდან.

თეორემა 5.2.3. ეთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა. თუ $A \subset X$ სიმრავლეს აქვს ნულის ტოლი გარე ზომა, ე.ი. $\mu^*(A) = 0$, მაშინ A არის ლებეგის აზრით ზომადი.

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი $B \in H$ სიმრავლე. გარე ზომის ზრდადობის გამო: $\mu^*(B \cap A) \leq \mu^*(A) = 0$. შედეგად, $\mu^*(B \cap A) = 0$. საიდანაც, გარე ზომის ზრდადობისა და ნახევრადადიციურობის თვისებების

ძალით გვექნება: $\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) = \mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(B)$. ამრიგად, $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$. აქედან გამომდინარე, ვასკენით, რომ A სიმრავლე არის ლებეგის აზრით ზომადი, თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამოცანები

1. ვთქვათ, μ არის რგოლზე განსაზღვრული ზომა. დამტკიცეთ, რომ μ ზომის ლებეგისეული გაგრძელებით წარმოქმნილი გარე ზომა ემთხვევა μ ზომით წარმოქმნილ გარე ზომას, ე.ი. $\mu^* = \mu$.

§ 3. გარე ზომის მეშვეობით ზომის წარმოქმნის კარათეოდორის მეთოდი

ვთქვათ, λ არის აბსტრაქტული გარე ზომა X სიმრავლეში. შესაძლებელია თუ არა რაიმე წესით X -ის ქვესიმრავლეთა ფართო S კლასის გამოყოფა, რომლის ფარგლებში λ გარე ზომას ექნება ზომის თვისებები?

ლებეგის მიდგომა ასეთ ზოგად სიტუაციაზე გააერყელა კ. კარათეოდორმა, რომლის კონსტრუქცია ეფუძნება შემდეგ განსაზღვრებას:

ვთქვათ, λ არის გარე ზომა X სიმრავლეში. $A \subset X$ სიმრავლეს ვუწოდოთ კარათეოდორის აზრით ზომადი λ ფუძის მიხედვით (მოკლედ, კარათეოდორის აზრით ზომადი), თუ ყოველი $B \subset X$ სიმრავლისათვის სრულდება ტოლობა:

$$\lambda(B) = \lambda(B \cap A) + \lambda(B \setminus A).$$

შენიშვნა 5.3.1. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $\bar{A} = X \setminus A$, მაშინ ცხადია, $B \setminus A = B \cap \bar{A}$. შედეგად, კარათეოდორის აზრით ზომადობის განსაზღვრებაში მოცემული ტოლობა შემდეგი სახით შეიძლება ჩაეწეროს:

$$\lambda(B) = \lambda(B \cap A) + \lambda(B \cap \bar{A}).$$

შენიშვნა 5.3.2. $B = (B \cap A) \cup (B \setminus A)$ ტოლობისა და გარე ზომის ნახევრადადიციურობის ძალით, ყოველთვის სრულდება უტოლობა:

$$\lambda(B) \leq \lambda(B \cap A) + \lambda(B \setminus A).$$

შენიშვნა 5.3.3. როგორც ვხედავთ, განსხვავებით ლებეგის აზრით ზომადობის განსაზღვრებისაგან, მოითხოვება, რომ კარათეოდორის აზრით ზომადმა A სიმრავლემ X სივრცის ნებისმიერი B ქვესიმრავლე დაშალოს ადიციურობასთან თანხმობაში მყოფ $B \cap A$ და $B \setminus A$ ნაწილებად. ზოგად სიტუაციაში არა გვაქვს ზომად სიმრავლეთა საწყისი H კლასი, რის გამოც ეს მოთხოვნა გონივრულ გზად ჩანს ზომადი A სიმრავლეების (ე.ი. S კლასის) გამოყოფის მიზნით.

შემდეგი თეორემის თანახმად, ლებეგისა და კარათეოდორის აზრით ზომადობის ცნებები ერთმანეთს ემთხვევა იმ სიტუაციაში, როცა λ გარე ზომა წარმოქმნილია რაიმე μ ზომით, ე.ი. $\lambda = \mu^*$.

თეორემა 5.3.1. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა. მაშინ ნებისმიერი $A \subset X$ სიმრავლისათვის შემდეგი წინადადებები ტოლფასია:

- A ლებეგის აზრით ზომადია μ ფუძის მიხედვით;
- A კარათეოდორის აზრით ზომადია μ^* ფუძის მიხედვით.

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ $A \subset X$ სიმრავლის ლებეგის აზრით ზომადობა μ ფუძის მიხედვით იწვევს A -ს კარათეოდორის აზრით ზომადობას μ^* ფუძის მიხედვით. შებრუნებული იმპლიკაცია ცხადია.

ამრიგად, დასამტკიცებელი გვაქვს ნებისმიერი $B \subset X$ სიმრავლისათვის $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$ ტოლობის სამართლიანობა. შენიშვნა 5.3.2-ის თანახმად, $\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$. დაუადგინოთ შებრუნებული შეფასება:

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A). \quad (1)$$

თუ $\mu^*(B) = \infty$, მაშინ (1) ცხადია. დავუშვათ $\mu^*(B) < \infty$. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. μ^* გარე ზომის განსაზღვრის საფუძველზე შეგვიძლია ვიპოვოთ H რგოლის სიმრავლეთა (E_n) მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad \text{და} \quad \mu^*(B) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

თუ E_n სიმრავლეებისათვის გამოვიყენებთ A სიმრავლის ლებეგის აზრით ზომადობას μ ფუძის მიხედვით და გავითვალისწინებთ გარე ზომის თელადად ნახევრადადიკურობის თვისებას გვექნება,

$$\begin{aligned} \mu^*(B) + \varepsilon &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n \setminus A) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A). \end{aligned}$$

საიდანაც, $\varepsilon > 0$ რიცხვის ნებისმიერობის საფუძველზე ვაცვენით (1) შეფასების სამართლიანობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

კარათეოდორმა დაამტკიცა თეორემა 5.2.1-ის შემდეგი განზოგადება.

თეორემა 5.3.2. ვთქვათ, λ არის გარე ზომა X სიმრავლეში. მაშინ კარათეოდორის აზრით ზომადი ყველა სიმრავლის S კლასს აქვს შემდეგი თვისებები:

- S არის σ -ალგებრა;

- λ გარე ზომის შეზღუდვა S კლასზე არის ზომა;
- თუ დამატებით ცნობილია, რომ λ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომით წარმოქმნილი გარე ზომა, მაშინ $S \supset H$.

ლემა 5.3.1. ვთქვათ, λ არის გარე ზომა X სიმრავლეში. მაშინ კარათეოდორის ახრით ზომადი ყველა სიმრავლის S კლასი არის ალგებრა.

დამტკიცება. სიმუცლისათვის კარათეოდორის ახრით მომადი სიმრავლეები მოვისხენიოთ, როგორც მომადი სიმრავლეები.

ნაბიჯი I: $\emptyset$ და X არიან ზომადი სიმრავლეები. მართლაც, $\lambda(\emptyset) = 0$ ტოლობის გათვალისწინებით, ნებისმიერი $B \subset X$ სიმრავლისათვის გვექნება,

$$\lambda(B \cap \emptyset) + \lambda(B \cap \overline{\emptyset}) = \lambda(\emptyset) + \lambda(B) = \lambda(B),$$

$$\lambda(B \cap X) + \lambda(B \cap \overline{X}) = \lambda(B) + \lambda(\emptyset) = \lambda(B).$$

ნაბიჯი II: თუ $A \subset X$ სიმრავლე ზომადია, მაშინ ზომადია მისი დამატებითი $\overline{A}$ სიმრავლეც. მართლაც, A -ს მომადობის გათვალისწინებით, ნებისმიერი $B \subset X$ სიმრავლისათვის შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\lambda(B \cap \overline{A}) + \lambda(B \cap \overline{\overline{A}}) = \lambda(B \cap \overline{A}) + \lambda(B \cap A) = \lambda(B).$$

ნაბიჯი III: თუ G და F სიმრავლეები არიან ზომადი, მაშინ ზომადია მათი გაერთიანებაც. განვიხილოთ ნებისმიერი $B \subset X$ სიმრავლე. G -ს მომადობის გათვალისწინებით გვექნება,

$$\begin{aligned} \lambda(B \cap (G \cup F)) &= \lambda(B \cap (G \cup F) \cap G) + \lambda(B \cap (G \cup F) \cap \overline{G}) = \\ &= \lambda(B \cap G) + \lambda(B \cap F \cap \overline{G}). \end{aligned} \quad (2)$$

მეორე მხრივ, F -ის მომადობის საფუძველზე დავწეროთ,

$$\lambda(B \cap (\overline{G \cup F})) = \lambda(B \cap \overline{G} \cap \overline{F}) = \lambda(B \cap \overline{G}) - \lambda(B \cap \overline{G} \cap F). \quad (3)$$

ახლა, თუ შევკრებთ (2) და (3) ტოლობებს და გავითვალისწინებთ G -ს მომადობას მივიღებთ, რომ

$$\lambda(B \cap (G \cup F)) + \lambda(B \cap (\overline{G \cup F})) = \lambda(B \cap G) + \lambda(B \cap \overline{G}) = \lambda(B).$$

ნაბიჯი IV: თუ G და F სიმრავლეები არიან ზომადი, მაშინ ზომადია მათი სხვაობაც. ამ წინადადების დასადგენად საკმარისია გავითვალისწინოთ ზემოთ ნაჩვენები II და III წინადადებები და შემდეგი ტოლობები: $G \setminus F = G \cap \overline{F}$, $G \cap \overline{F} = \overline{G \cup F}$.

I, III და IV წინადადებების ძალით დადგენილია, რომ ყველა მომადი სიმრავლის S კლასი არის ალგებრა. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 5.3.2. ვთქვათ, λ არის გარე ზომა X სიმრავლეში. თუ $A_1, A_2, \dots, A_n$ წყვილ-წყვილად თანაკვეთი და კარათეოდორის აზრით ზომადი სიმრავლეებია, მაშინ ნებისმიერი $B \subset X$ სიმრავლისათვის,

$$\lambda\left(B \cap \bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda(B \cap A_k).$$

დამტკიცება. განვიხილოთ $n = 2$ შემთხვევა. ვთქვათ, $B \subset X$. A_2 სიმრავლის ზომადობისა და $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ პირობის ძალით დაეწერთ,

$$\begin{aligned} \lambda(B \cap (A_1 \cup A_2)) &= \lambda(B \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_2) + \lambda(B \cap (A_1 \cup A_2) \cap \overline{A_2}) = \\ &= \lambda(B \cap A_2) + \lambda(B \cap A_1). \end{aligned}$$

ამის შემდეგ, ნებისმიერი n -სთვის წინადადება მარტივად მტკიცდება ინდუქციით n -ის მიმართ. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 5.3.2-ის დამტკიცება. ნაბიჯი I: S არის σ -ალგებრა. დავეშვათ, A_n ($n \in \mathbb{N}$) არიან ზომადი სიმრავლეები. ჩვენი მიზანია, ვაჩვენოთ მათი გაერთიანების ზომადობა. ლემა 5.3.1-ის თანახმად, S არის ალგებრა. ამიტომ ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ A_n სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაკვეთია. განვიხილოთ ნებისმიერი $B \subset X$ სიმრავლე. S ალგებრაა, ამიტომ $\bigcup_{k=1}^n A_k$ სიმრავლე ზომადია. აქედან, ლემა 5.3.2-ის და გარე ზომის მრავლობის გათვალისწინებით გვექნება,

$$\begin{aligned} \lambda(B) &= \lambda\left(B \cap \bigcup_{k=1}^n A_k\right) + \lambda\left(B \cap \overline{\bigcup_{k=1}^n A_k}\right) \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^n \lambda(B \cap A_k) + \lambda\left(B \cap \overline{\bigcup_{k=1}^n A_k}\right). \end{aligned}$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ n -ის ნებისმიერობასა და გარე ზომის თელადად ნახევრადადიციურობას, დაეწერთ

$$\begin{aligned} \lambda(B) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B \cap A_k) + \lambda\left(B \cap \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}\right) \geq \\ &\geq \lambda\left(B \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \lambda\left(B \cap \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

აქედან, შენიშვნა 5.3.2-ის გათვალისწინებით მივიღებთ ტოლობას:

$$\lambda(B) = \lambda\left(B \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \lambda\left(B \cap \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}\right).$$

შედეგად, ვასკენით, რომ $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in S$.

ნაბიჯი II: λ -ს შეზღუდვა S -ზე არის ზომა. დასადგენი გვაქვს $\lambda|_S$ ფუნქციის თვალადად ადისიურობა. ეთქვას, A_n ($n \in \mathbb{N}$) არიან წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი და ზომადი სიმრავლეები. თუ (4)-ის პირველ შეფასებაში B როლში ავიღებთ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ სიმრავლეს, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k) + \lambda(\emptyset) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k).$$

საიდანაც, გარე ზომის თვალადად ნახევრადადისიურობის გათვალისწინებით ვასკენით $\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k)$ ტოლობას.

ნაბიჯი III: თუ λ არის H რეგულზე განსაზღვრული μ ზომით წარმოქმნილი გარე ზომა, მაშინ $S \supset H$.

ეთქვას, $A \in H$. უნდა ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $B \subset X$ სიმრავლისათვის სრულდება ტოლობა:

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap \bar{A}). \quad (5)$$

$\mu^*(B) = \infty$ შემთხვევაში (5) ტოლობა მიიღება შენიშვნა 5.3.2-ის საფუძველზე. დაეუშვათ, $\mu^*(B) < \infty$. μ^* -ის განსაზღვრის ძალით ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება H რეგოლის სიმრავლეების (E_n) მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad \text{და} \quad \mu^*(B) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

აქედან გამომდინარე, μ ზომის ადისიურობისა და μ^* გარე ზომის განსაზღვრის გათვალისწინებით ვწერთ,

$$\begin{aligned} \mu^*(B) + \varepsilon &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \cap \bar{A}) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap \bar{A}). \end{aligned}$$

აქედან, თავის მხრივ, თუ გავითვალისწინებთ ε -ის ნებისმიერობასა და შენიშვნა 5.3.2-ს, დავასკენით (5) ტოლობის სამართლიანობას.

თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 5.3.2 საშუალებას გვაძლევს შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრება: ეთქვას, λ არის გარე ზომა X სიმრავლეში. მაშინ λ -ს შეზღუდვას კარათეოლორის ამრით ზომადი ყველა სიმრავლის S კლასზე ეწოდება λ გარე ზომით წარმოქმნილი (ინდუცირებული) ზომა და იგი აღინიშნება $\bar{\lambda}$ ჩანაწერით.

თეორემა 5.2.3-ის მსგავსად მტკიცდება შემდეგი დებულება.

თეორემა 5.3.3. ვთქვათ, λ არის X სიმრავლეში განსაზღვრული გარე ზომა. თუ $A \subset X$ სიმრავლეს აქვს ნულის ტოლი გარე ზომა, ე.ი. $\lambda(A) = 0$, მაშინ A არის კარათეოდორის აზრით ზომადი.

შედეგი 5.3.1. გარე ზომით წარმოქმნილ ზომას აქვს სისრულის თვისება.

ამოცანები

1. ვთქვათ, λ გარე ზომაა X -ში. აჩვენეთ, რომ $\{\emptyset, X\} \subset S \subset 2^X$ (აქ და ქვემოთ S აღნიშნავს კარათეოდორის აზრით ზომადი სიმრავლეების კლასს).
2. ააგეთ მაგალითი λ გარე ზომისა, რომლისთვისაც $S = \{\emptyset, X\}$.
3. ააგეთ მაგალითი λ გარე ზომისა, რომლისთვისაც $S = 2^X$.
4. თუ $\text{card}(X) \geq 2$, მაშინ ააგეთ მაგალითი λ გარე ზომისა, რომლისთვისაც სრულდება მყარი ჩართუბი: $\{\emptyset, X\} \subset S \subset 2^X$.

§ 4. ზომის ბორელისეული გაგრძელება და მისი კავშირი ზომის ლებეგისეულ გაგრძელებასთან

ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა. როგორც ვიცით, ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეების S კლასი შეიცავს H რგოლით წარმოქმნილ σ -ალგებრას, ე.ი. $S \supset \sigma\alpha(H)$. შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ $\sigma\alpha(H)$ კლასი ძალიან ახლოს დგას S კლასთან.

თეორემა 5.4.1. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა. თუ A არის ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლე და $\mu^*(A) < \infty$, მაშინ A წარმოიდგინება სახით: $A = M \cup N$, სადაც $M \cap N = \emptyset$, $M \in \sigma\alpha(H)$ და N არის სიმრავლე, რომლისთვისაც მოიძებნება E სიმრავლე, ისეთი, რომ: $E \in \sigma\alpha(H)$, $E \supset N$ და $\mu^*(E) = 0$. თუ დამატებით ცნობილია, რომ μ ზომა არის σ -შეშლადი, მაშინ იგივე დასკვნა სამართლიანია ლებეგის აზრით ზომადი ნებისმიერი A სიმრავლისათვის.

ლემა 5.4.1. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა. თუ $A \subset X$ და $\mu^*(A) < \infty$, მაშინ მოიძებნება $B \in \sigma\alpha(H)$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $B \supset A$ და $\mu^*(B) = \mu^*(A)$.

დამტკიცება. ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -სთვის განვიხილოთ სიმრავლეთა $A_{n,k} \in H$ ($k \in \mathbb{N}$) მიმდევრობა შემდეგი თვისებებით:

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{n,k}) < \mu^*(A) + \frac{1}{n}.$$

მარტივი შესაძლებელია, რომ B სიმრავლის როლში შეიძლება ავიღოთ $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k}$ სიმრავლე. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 5.4.2. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული σ -შემოსაზღვრული ზომა. მაშინ ლებეგის აზრით ზომადი ნებისმიერი A სიმრავლისათვის მოიძებნება $B \in \sigma\alpha(H)$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $B \supset A$ და $\mu^*(B) = \mu^*(A)$.

დამტკიცება. განვიხილოთ H კლასის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ სიმრავლეთა (X_n) მიმდევრობა თვისებებით: $\mu(X_n) < \infty$ და $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. აღვნიშნოთ $A_n = A \cap X_n$. ცხადია, $\mu(A_n) < \infty$ ($n \in \mathbb{N}$). თუ ვისარგებლებთ ლემა 5.4.1-ით, ყოველი n -სთვის ვიპოვით $B_n \in \sigma\alpha(H)$ სიმრავლეს, რომლისთვისაც: $B_n \supset A_n$ და $\mu^*(B_n) = \mu^*(A_n)$. შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $B_n \subset X_n$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში B_n -ის ნაცულად განვიხილავდით $B_n \cap X_n$ სიმრავლეს). აღვნიშნოთ $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. მაშინ გვექნება: $B \in \sigma\alpha(H)$, $B \supset A$ და

$$\mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \setminus A_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n \setminus A_n) = 0.$$

აქ ვითვალისწინებთ, რომ A_n და B_n სიმრავლეთა ზომადობის გამო, $\mu^*(B_n \setminus A_n) = \mu^*(B_n) - \mu^*(A_n) = 0$.

ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 5.4.1-ის დამტკიცება. ლემა 5.4.1-ის საფუძველზე ვიპოვოთ $B \in \sigma\alpha(H)$ სიმრავლე, რომლისთვისაც $B \supset A$ და $\mu^*(B) = \mu^*(A)$. A და B სიმრავლეების ზომადობის გამო ადგილი ექნება $\mu^*(B \setminus A) = 0$ ტოლობას. შემდეგ, კვლავ გამოვიყენოთ ლემა 5.4.1 და ვიპოვოთ $E \in \sigma\alpha(H)$ სიმრავლე, თვისებებით: $E \supset B \setminus A$ და $\mu^*(E) = \mu^*(B \setminus A) = 0$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $M = B \setminus E$ და $N = A \setminus M$ სიმრავლეები ამაყოფილებენ საჭირო პირობებს.

σ -შემოსაზღვრული ზომის შემთხვევაში დამტკიცება საესეებით ანალოგურია, ოღონდ ლემა 5.4.1-ის ნაცულად უნდა გამოვიყენოთ ლემა 5.4.2. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 5.4.1. ლემა 5.4.1-ის, ლემა 5.4.2-ისა და თეორემა 5.4.1-ის დამტკიცებების გათვალისწინებით, B , M და E სიმრავლეების შესახებ შეგვიძლია ვთქვათ უფრო მეტი, სახელდობრ ის, რომ ამ სიმრავლეებს აქვთ სახე:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k},$$

სადაც $A_{n,k} \in H$ ($n, k \in \mathbb{N}$).

მარტივი შესამოწმებელია შემდეგი თეორემის სამართლიანობა.

თეორემა 5.4.2. ვთქვათ, μ არის T σ -რგოლზე განსაზღვრული ზომა. განვიხილოთ $M \cup N$ სახის სიმრავლეთა $\tilde{T}$ კლასი, სადაც $M \cap N = \emptyset$,

$M \in T$ და N არის T -ში შემავალი რაიმე ნულზომიანი სიმრავლის ქვესიმრავლე. მაშინ:

- $\tilde{T}$ კლასი არის σ -რგოლი;
- არსებობს ერთადერთი ზომა, რომელიც ახდენს μ -ს გაგრძელებას $\tilde{T}$ კლასზე. ეს ზომა მოიცემა ტოლობით: $\tilde{\mu}(M \cup N) = \mu(M)$;
- $\tilde{\mu}$ არის სრული ზომა.

თეორემა 5.4.2-ში განსაზღვრულ $\tilde{\mu}$ ზომას μ ზომის შეესება ეწოდება.

ეთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა. μ^* გარე ზომის შეზღუდვას $\sigma_a(H)$ კლასზე ეწოდება μ ზომის ბორელისეული გაგრძელება.

ცხადია, ბორელისეული გაგრძელება არის ზომის გაგრძელების უფრო სუსტი ვარიანტი, ვიდრე ლებეგისეული გაგრძელება.

5.4.1 და 5.4.2 თეორემებიდან ეღებულობთ შემდეგ დებულებას.

თეორემა 5.4.3. σ -შემოსაზღვრული ზომის ლებეგისეული გაგრძელება წარმოადგენს მისი ბორელისეული გაგრძელების შეესებას.

§ 5. ზომის გაგრძელების ერთადერთობა

თეორემა 5.5.1. ეთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული σ -შემოსაზღვრული ზომა. მაშინ μ -ს ბორელისეული გაგრძელება წარმოადგენს ერთადერთ ზომას, რომელიც ახდენს μ -ს გაგრძელებას $\sigma_a(H)$ კლასზე.

დამტკიცება. ეთქვათ, ν არის μ ზომის ბორელისეული გაგრძელება (ე.ი. $\nu = \mu^*|_{\sigma_a(H)}$). ხოლო λ არის μ -ს რაიმე გაგრძელება $\sigma_a(H)$ კლასზე. უნდა ეჩვენოთ, რომ $\lambda(A) = \nu(A)$ ყოველი $A \in \sigma_a(H)$ სიმრავლისათვის.

ჯერ თეორემა დაგვამტკიცოთ იმ შემთხვევაში, როცა H ალგებრაა და μ შემოსაზღვრული ზომაა. ცხადია, $\nu(X) = \lambda(X) = \mu(X) < \infty$. ამრიგად, ν და λ შემოსაზღვრული ზომებია. აღვნიშნოთ

$$Q = \{A \in \sigma_a(H) : \lambda(A) = \nu(A)\}.$$

ცხადია, $H \subset Q \subset \sigma_a(H)$. ეჩვენოთ, რომ Q წარმოადგენს მონოტონურ კლასს. ეთქვათ, $A_n \in Q$ ზრდადი მიმდევრობაა. მაშინ ზომის ქვემოდან უწყვეტობის თვისების ძალით ეწერტ,

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

შედეგად, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in Q$. ანალოგიურად, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ν და λ ზომები შემოსაზღვრული არიან და ვისარგებლებთ ზომის ზემოდან უწყვეტობის

თვისებით, დაეასყენით, რომ ყოველი კლასადი $A_n \in Q$ მიმდევრობისათვის: $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in Q$. ამრიგად, Q მონოტონური კლასია. შედეგად, $m(H) \subset Q \subset \sigma\alpha(H)$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ ალგებრით წარმოქმნილი მონოტონური კლასი და σ -ალგებრა ერთმანეთს ემთხვევა (იხ. შედეგი 3.3.1), გვექნება: $m(H) = \sigma\alpha(H) = Q$. ამით განსახილავ შემთხვევაში თეორემა დამტკიცებულია.

ასლა განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა. ვთქვათ, წყვილ-წყვილად თანაუქვეთ სიმრავლეთა $X_n \in H$ მიმდევრობა ისეთია, რომ: $\mu(X_n) < \infty$ ($n \in \mathbb{N}$) და $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. თუ ნებისმიერი n -სთვის გავითვალისწინებთ თეორემა 3.3.3-ს და გამოვიყენებთ თეორემის უკვე დამტკიცებულ ნაწილს $H \cap X_n$ ალგებრისათვის და $\mu|_{H \cap X_n}, \nu|_{\sigma\alpha(H \cap X_n)}, \lambda|_{\sigma\alpha(H \cap X_n)}$ ზომებისათვის, დაეასყენით, რომ ν და λ ზომები ერთმანეთს ემთხვევა $\sigma\alpha(H) \cap X_n$ კლასზე ყოველი n -სთვის. აქედან კი უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ν და λ ზომები ერთმანეთს ემთხვევა $\sigma\alpha(H)$ კლასზეც. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

დამტკიცებული თეორემიდან და თეორემა 5.4.1-დან გამომდინარეობს შემდეგი დებულება.

თეორემა 5.5.2. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული σ -შემოსაზღვრული ზომა. მაშინ μ -ს ლებეგისეული გაგრძელება წარმოადგენს ერთადერთ ზომას, რომელიც ახდენს μ -ს გაგრძელებას ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეთა S კლასზე.

§ 6. ზომადობის კრიტერიუმი საწყისი რგოლის სიმრავლეთა მეშვეობით მიახლოების ტერმინებში

ზომის ლებეგისეული გაგრძელების აგებისას, კლასი, რომლის ფარგლებში გარე ზომას აქვს ზომის თვისებები, გამოყოფილი იქნა საწყისი რგოლის სიმრავლეთა „წესიერ“ ნაწილებად დაჭრის თვისების საფუძველზე. საკმაოდ ზოგად პირობებში არსებობს საკითხის გადაწყვეტის სხვა ეკვივალენტური მიდგომებიც. ამ პარაგრაფში გავეცნობით ერთ-ერთ ასეთ მეთოდს, რომელიც ზომად სიმრავლეთა კლასს გამოყოფს საწყისი რგოლის სიმრავლეებით მიახლოებადობის თვისების საფუძველზე.

თეორემა 5.6.1. ვთქვათ, μ არის H ალგებრაზე განსაზღვრული შემოსაზღვრული ზომა. მაშინ ნებისმიერი $A \subset X$ სიმრავლისთვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- A არის ლებეგის აზრით ზომადი;
- ყოველი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება $B \in H$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$.

შენიშვნა 5.6.1. გამომდინარე იქედან, რომ $A \Delta B$ გამოსატავს A და B სიმრავლეებს შორის განსხვავებას, ხოლო $\mu^*(A \Delta B)$ შეიძლება განვიხილოთ, როგორც აღნიშნული განსხვავების რაოდენობრივი მახასიათებელი, თეორემა 5.6.1-ის მეორე პირობა მართლაც ასახავს A სიმრავლის მიახლოების შესაძლებლობას საწყისი H რგოლის სიმრავლეების მეშვეობით.

ლემა 5.6.1. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა. მაშინ ნებისმიერი $A, B \subset X$ სიმრავლეებისათვის სრულდება შეფასება:

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \Delta B).$$

დამტკიცება. მარტივი შესამოწმებელია შემდეგი ჩართვების სამართლიანობა: $A \subset B \cup (A \Delta B)$ და $B \subset A \cup (A \Delta B)$. აქედან, გარე ზომის ნახევრადადიციურობის ძალით, გვექნება,

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A \Delta B), \quad \mu^*(B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(A \Delta B),$$

ამ შეფასებებიდან გამომდინარეობს დასამტკიცებელი უტოლობა. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 5.6.1-ის დამტკიცება. თავდაპირველად დავადგინოთ $1) \Rightarrow 2)$ იმპლიკაცია. აქ 1) და 2) შესაბამისად აღნიშნავენ თეორემის პირველ და მეორე წინადადებებს. იმის გათვალისწინებით, რომ $\mu^*(A) < \infty$, შეგვიძლია ვიპოვოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი $A_n \in H$ ($n \in \mathbb{N}$) სიმრავლეები, ისეთები, რომ:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

თუ გამოვიყენებთ ზომის ქვემოდან უწყვეტობის თვისებას $\bar{\mu}$ ლებეგისეული გაგრძელებისათვის, ვიპოვით $N \in \mathbb{N}$ რიცხვს, ისეთს, რომ

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

B -ს როლში ავიღოთ $\bigcup_{n=1}^N A_n$ სიმრავლე. თუ ვისარგებლებთ ზომის თვისებებით $\bar{\mu}$ ზომის შემთხვევაში, გვექნება:

$$\mu^*(A \setminus B) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n\right) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) - \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) < \frac{\varepsilon}{2},$$

და

$$\mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus A\right) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) - \mu^*(A) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

საიდანაც ვლბულობთ, რომ $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$. ამით $1) \Rightarrow 2)$ იმპლიკაცია დადგენილია.

ვაჩვენოთ შებრუნებული 2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაცია. ვთქვათ, $C \in H$ რაიმე სიმრავლეა. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი და მისთვის ვიპოვოთ $B \in H$ სიმრავლე ისეთი, რომ $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$. მარტივი შესამოწმებელია შემდეგი ჩართების სამართლიანობა:

$$(C \cap A) \Delta (C \cap B) \subset A \Delta B, \quad (C \cap \bar{A}) \Delta (C \cap \bar{B}) \subset A \Delta B.$$

საიდანაც ლემა 5.6.1-ის ძალით ვასკენით, რომ:

$$|\mu^*(C \cap A) - \mu^*(C \cap B)| \leq \mu^*(A \Delta B) < \varepsilon,$$

$$|\mu^*(C \cap \bar{A}) - \mu^*(C \cap \bar{B})| \leq \mu^*(A \Delta B) < \varepsilon.$$

აქედან, იმის გათვალისწინებით, რომ B და C სიმრავლეები ეკუთვნიან H რგოლს, დაეწეროთ,

$$\begin{aligned} \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap \bar{A}) &\leq \mu^*(C \cap B) + \mu^*(C \cap \bar{B}) + 2\varepsilon = \\ &= \mu(C \cap B) + \mu(C \cap \bar{B}) + 2\varepsilon = \mu(C) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

შედეგად, ε -ის ნებისმიერობის გამო, ვლბულობთ, რომ

$$\mu(C) \geq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap \bar{A}).$$

უკანასკნელი უტოლობა, როგორც ვიცით, საკმარისია $\mu(C) = \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap \bar{A})$ ტოლობის დასადგენად. ამრიგად, A სიმრავლე ლებეგის ამრით ზომადია. ამით 2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაცია და მასთან ერთად თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

სამართლიანია თეორემა 5.6.1-ის შემდეგი გაძლიერება.

თეორემა 5.6.2. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა, $Q \in H$ და $\mu(Q) < \infty$. მაშინ ნებისმიერი $A \subset Q$ სიმრავლისთვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- A არის ლებეგის აზრით ზომადი;
- ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიპებება $B \in H, B \subset Q$, სიმრავლე, ისეთი, რომ $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$.

ლემა 5.6.2. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა. თუ $A \subset X$, $B \in H$ და $A \cap B = \emptyset$, მაშინ $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu(B)$.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ H კლასისადმი მიეკუთვნების გამო, B სიმრავლე იქნება ლებეგის ამრით ზომადი და შედეგად, კარათეოდორის ამრით ზომადი. თუ B სიმრავლის ამ უკანასკნელ თვისებას გამოვიყენებთ $A \cup B$ სიმრავლის მიმართ, მაშინ $A \cap B = \emptyset$ პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ,

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cup B) &= \mu^*((A \cup B) \cap B) + \mu^*((A \cup B) \setminus B) = \\ &= \mu^*(B) + \mu^*(A) = \mu(B) + \mu^*(A). \end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 5.6.3. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა და $Q \in H$. მაშინ ნებისმიერი $A \subset Q$ სიმრავლისთვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- A არის ლებეგის აზრით ზომადი;
- ყოველი $C \in H, C \subset Q$, სიმრავლისათვის სრულდება $\mu(C) = \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \setminus A)$ ტოლობა.

დამტკიცება. 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია ცხადია. დაემატოთთებრუნებული იმპლიკაცია: 2) პირობის შესრულება იწვევს იმას, რომ ნებისმიერი $B \in H$ სიმრავლისათვის,

$$\mu(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

$A \subset Q$ ჩართვისა და 2) პირობის ძალით დაწერეთ,

$$\mu^*(B \cap A) = \mu^*((B \cap Q) \cap A) = \mu(B \cap Q) - \mu^*((B \cap Q) \setminus A). \quad (1)$$

$A \subset Q$ ჩართვისა და ლემა 5.6.2-ის საფუძველზე კი გვექნება,

$$\mu^*(B \setminus A) = \mu(B \setminus Q) + \mu^*((B \cap Q) \setminus A). \quad (2)$$

(1) და (2) ტოლობების შეკრებით მივიღებთ, რომ

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) = \mu(B \cap Q) + \mu(B \setminus Q).$$

მიღებული ტოლობის მარჯვენა მხარე კი B და Q სიმრავლეების H კლასისადმი მიეუთვნების გამო $\mu(B)$ -ს ტოლია. ამით ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 5.6.2-ის დამტკიცება. განვიხილოთ $H \cap Q$ კლასი და მასზე μ ზომის შეზღუდვა აღვნიშნოთ μ_Q -თი. ცხადია, $H \cap Q$ არის ალგებრა, ხოლო μ_Q არის შემოსაზღვრული ზომა. თუ Q -ს მივიჩნევთ ძირითად სამოქმედო სივრცედ და თეორემა 5.6.2-ს გამოვიყენებთ $H \cap Q$ ალგებრისა და μ_Q ზომისათვის, მაშინ დაუვსენით, რომ ნებისმიერი $A \subset Q$ სიმრავლისათვის შემდეგი წინადადებები ტოლფასია:

1') A არის ლებეგის აზრით ზომადი μ_Q ფუძის მიხედვით;

2') ყოველი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება $B \in H, B \subset Q$, სიმრავლე, ისეთი, რომ $\mu_Q^*(A \Delta B) < \varepsilon$.

აქ μ_Q^* არის Q -ში განსაზღვრული გარე ზომა, რომელიც წარმოქმნილია μ_Q ზომით.

შემდეგ შევნიშნოთ, რომ ყოველი $E \subset Q$ სიმრავლისათვის ადგილი აქვს მარტივად შესაბამისებელ ტოლობას:

$$\mu_Q^*(E) = \mu^*(E). \quad (3)$$

(3) ტოლობის გათვალისწინებით ვრწმუნდებით, რომ 2') წინადადება იგივეა, რაც თეორემის მეორე წინადადება, ხოლო კვლავ (3) ტოლობისა და

ლემა 5.6.3-ის ძალით კი ვასკენით 1') წინადადებისა და თეორემის პირველი წინადადების ტოლფასობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 5.6.3. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული σ -შემოსაზღვრული ზომა. მაშინ ნებისმიერი $A \subset X$ სიმრავლისთვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- A არის ლებეგის აზრით ზომადი;
- ყოველი $Q \in H$, $\mu(Q) < \infty$, სიმრავლისა და დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება $B \in H$, $B \subset Q$, სიმრავლე ისეთი, რომ $\mu^*((A \cap Q) \Delta B) < \varepsilon$.

თეორემა 5.6.3 წარმოადგენს თეორემა 5.6.2-ის და ქვემოთ მოცემული ლემის შედეგს.

ლემა 5.6.4. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული σ -შემოსაზღვრული ზომა. მაშინ $A \subset X$ სიმრავლისთვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- A არის ლებეგის აზრით ზომადი;
- $A \cap Q$ არის ლებეგის აზრით ზომადი ყოველი $Q \in H$, $\mu(Q) < \infty$, სიმრავლისათვის.

დამტკიცება. 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია მიიღება იმის გათვალისწინებით, რომ ყოველი $Q \in H$ სიმრავლე ზომადია და ზომად სიმრავლეთა S კლასი წარმოადგენს σ -ალგებრას. შებრუნებული იმპლიკაციის დასადგენად X უნდა წარმოვადგინოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სასრული ზომის $X_n \in H$ ($n \in \mathbb{N}$) სიმრავლეების გაერთიანებად. შემდეგ უნდა გავითვალისწინოთ $A \cap X_n \in H$ სიმრავლეების ზომადობა და ის, რომ ზომად სიმრავლეთა S კლასი წარმოადგენს σ -ალგებრას. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 5.6.4. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული σ -შემოსაზღვრული ზომა. მაშინ ნებისმიერი $A \subset X$, $\mu^*(A) < \infty$, სიმრავლისთვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- A არის ლებეგის აზრით ზომადი;
- ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $B \in H$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$.

დამტკიცება. 2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაცია მარტივად მიიღება თეორემა 5.6.3-ის საფუძველზე. შებრუნებული დაცენის დასადგენად X წარმოვადგინოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სასრული ზომის $X_n \in H$ ($n \in \mathbb{N}$) სიმრავლეების გაერთიანებად. განვიხილოთ A სიმრავლე, რომელიც ლებეგის აზრით ზომადია

და $\mu^*(A) < \infty$. მაშინ გვექნება, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap X_n) = \mu^*(A) < \infty.$$

შედეგად, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სთვის შეგვიძლია ვიპოვოთ $N \in \mathbb{N}$, რომლისთვისაც

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \mu^*(A \cap X_n) < \varepsilon/2. \quad (4)$$

აღვნიშნოთ $Q = \bigcup_{n=1}^N X_n$. ცხადია, $Q \in H$ და $\mu(Q) < \infty$. შემდეგ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $A \cap Q$ სიმრავლე არის ლებეგის აბრით ზომადი და გამოვიყენებთ თეორემას 5.6.2-ს, ვიპოვით ისეთ $B \in H, B \subset Q$, სიმრავლეს, რომლისთვისაც

$$\mu^*((A \cap Q) \Delta B) < \varepsilon/2. \quad (5)$$

საბოლოოდ, (4) და (5) შეფასებებისა და

$$A \Delta B \subset ((A \cap Q) \Delta B) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} (A \cap X_n)$$

ჩართვის ძალით ვლებულობთ, რომ

$$\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon.$$

რითაც $1) \Rightarrow 2)$ იმპლიკაცია და მასთან ერთად თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

§ 7. ზომადობის კრიტერიუმი საწყისი რგოლის სიმრავლეთა თვლადი გაერთიანებების შემეგობით მიახლოების ტერმინებში

ამ პარაგრაფში დადგენილ შედეგებს აქვთ გარკვეული დამოუკიდებელი მნიშვნელობა, თუმცა მათი მთავარი დანიშნულება დაკავშირებულია მომდევნო თავში განხილულ ლებეგის კლასიკური ზომის შესწავლასთან. კერძოდ, ქვემოთ დამტკიცებული დებულებები გამოყენებული იქნება ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეების ტერმინებში $\mathbb{R}^n$ სივრცის ლებეგის აბრით ზომადი სიმრავლეების დასახასიათებლად.

სიმრავლეთა H კლასისათვის $\sigma(H)$ -ით აღვნიშნოთ H -ის სიმრავლეთა ყველა შესაძლო თვლადი გაერთიანებისაგან შედგენილი კლასი, ე.ი.

$$\sigma(H) = \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n : A_n \in H (n \in \mathbb{N}) \right\}.$$

შენიშვნა 5.7.1. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა. მაშინ $\sigma(H)$ კლასის სიმრავლეები იქნებიან ლებეგის აზრით ზომადი. ეს დასკვნა გამომდინარეობს საწყისი H რგოლის სიმრავლეთა ლებეგის აზრით ზომადობიდან და კიდევ იქედან, რომ ზომად სიმრავლეთა კლასი არის σ -ალგებრა.

შენიშვნა 5.7.2. თუ H რგოლია, მაშინ ადვილი დასანახია, რომ ყოველი $G \in \sigma(H)$ სიმრავლე შეიძლება წარმოვადგინოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი $A_n \in H$ ($n \in \mathbb{N}$) სიმრავლეების გაერთიანების სახით.

ქვემოთ დადგენილი იქნება თეორემები, რომლებიც გვაძლევენ ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეთა დახასიათებას $\sigma(H)$ კლასის სიმრავლეების მეშვეობით ზემოდან მიახლოების ტერმინებში.

თეორემა 5.7.1. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა, $Q \in H$ და $\mu(Q) < \infty$. მაშინ ნებისმიერი $A \subset Q$ სიმრავლისთვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- A არის ლებეგის აზრით ზომადი;
- ყოველი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება $G \in \sigma(H)$, $G \subset Q$, სიმრავლე, ისეთი, რომ $G \supset A$ და $\mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$.

დამტკიცება. თეორემის პირველი და მეორე წინადადებები აღნიშნული იქნება შესაბამისად 1)-ით და 2)-ით.

1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია: ადვილი შესამოწმებელია, რომ მოიძებნებიან წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი $A_n \in H$, $A_n \subset Q$ ($n \in \mathbb{N}$), სიმრავლეები, ისეთები, რომ

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

G -ს როლში ავიღოთ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ სიმრავლე. ცხადია, $G \in \sigma(H)$, $G \subset Q$ და $G \supset A$. A_n და A სიმრავლეების ზომადობის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} \mu^*(G \setminus A) &= \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus A\right) = \\ &= \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) - \mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) - \mu^*(A) < \varepsilon. \end{aligned}$$

ამით იმპლიკაცია დადგენილია.

2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაცია: ვთქვათ, $\varepsilon > 0$ და G მისი შესაბამისი სიმრავლეა 2) წინადადებიდან. G წარმოვადგინოთ როგორც წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი $A_n \in H$, $A_n \subset Q$ ($n \in \mathbb{N}$), სიმრავლეების გაერთიანება. გვაქვს, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu^*(G) \leq \mu(Q) < \infty.$$

განვიხილოთ $N \in \mathbb{N}$, რომლისთვისაც

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(A_n) < \varepsilon.$$

B -თი აღენიშნოთ $\bigcup_{n=1}^N A_n$ სიმრავლე. ესადა, $B \in \mathcal{H}$ და $B \subset Q$. $B \subset G$ ჩართვიდან გამოდინარე,

$$\mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(G \setminus A) < \varepsilon.$$

მეორე მხრივ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $A \setminus B \subset \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n$, ლავწეროთ,

$$\mu^*(A \setminus B) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(A_n) < \varepsilon.$$

შედეგად,

$$\mu^*(A \triangle B) < 2\varepsilon.$$

საიდანაც თეორემა 5.6.2-ის ძალით ვასკენით, რომ A სიმრავლე ლებეგის აზრით ზომადია. ამით $2) \Rightarrow 1)$ იმპლიკაცია და მასთან ერთად თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 5.7.2. ვთქვათ, μ არის $\mathcal{H}$ რგოლზე განსაზღვრული σ -შემოსაზღვრული ზომა. მაშინ ნებისმიერი $A \subset X$ სიმრავლისთვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- A არის ლებეგის აზრით ზომადი;
- ყოველი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება $G \in \sigma(\mathcal{H})$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $G \supset A$ და $\mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$.

დამტკიცება. განვიხილოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი $X_n \in \mathcal{H}$ სიმრავლეთა მიმდევრობა, ისეთი, რომ $\mu(X_n) < \infty$ ($n \in \mathbb{N}$) და $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$.

1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია: თუ A ლებეგის აზრით ზომადია, მაშინ ზომადი იქნება $A \cap X_n$ სიმრავლე ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -სთვის. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$. თეორემა 5.7.1-ის ძალით ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -სთვის მოიძებნება $G_n \in \sigma(\mathcal{H})$, $G_n \subset X_n$, სიმრავლე თვისებებით: $G_n \supset A_n$ და $\mu^*(G_n \setminus A_n) < \varepsilon/2^n$, სადაც $A_n = A \cap X_n$. მაშინ აღვილი დასაზნახია, რომ $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ სიმრავლე ეკუთვნის $\sigma(\mathcal{H})$ კლასს, $G \supset A$ და

$$\mu^*(G \setminus A) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus A_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(G_n \setminus A_n) < \varepsilon.$$

ამით იმპლიკაცია დადგენილია.

2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაცია: განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. $G \in \sigma(\mathcal{H})$ იყოს სიმრავლე, რომლისთვისაც $G \supset A$ და $\mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$. აღენიშნოთ: $G_n = G \cap X_n$ და $A_n = A \cap X_n$ ($n \in \mathbb{N}$). ესადა, რომ $G_n \in \sigma(\mathcal{H})$, $G_n \subset$

$X_n, G_n \supset A_n$ და $\mu^*(G_n \setminus A_n) \leq \mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$. აქედან თეორემა 5.7.1-ის გათვალისწინებით დავასკენით A_n სიმრავლის ზომადობას ნებისმიერი n -სთვის. საიდანაც თავის მხრივ გამომდინარეობს A სიმრავლის ზომადობა. ამით 2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაცია და მასთან ერთად თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 5.7.3. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული σ -შემოსაზღვრული ზომა, $G \subset 2^X$ და F იყოს G -ში შემავალ სიმრავლეთა დამატებების კლასი, ე.ი.

$$F = \{X \setminus G : G \in G\}.$$

დაეუშვათ, G კლასი ისეთია, რომ ნებისმიერი $A \subset X$ სიმრავლისთვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- 1) A არის ლებეგის ამრით ზომადი;
- 2) ყოველი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება $G \in G$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $G \supset A$ და $\mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$.

ასეთ პირობებში შესაძლებელია ლებეგის ამრით ზომად სიმრავლეთა დახასიათება F კლასის სიმრავლეების მეშვეობით შიგნიდან მიახლოების ტერმინებში. სახელობრ, ადგილი ექნება შემდეგ დებულებას: ნებისმიერი $A \subset X$ სიმრავლისთვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- 1) A არის ლებეგის აზრით ზომადი;
- 3) ყოველი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება $F \in F$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $F \subset A$ და $\mu^*(A \setminus F) < \varepsilon$.

ამ დებულების დასამტკიცებლად უნდა გავითვალისწინოთ, რომ:

- ა) $A \subset X$ სიმრავლისათვის 2) წინადადება სამართლიანია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $X \setminus A$ სიმრავლისათვის სამართლიანია 3) წინადადება;
- ბ) $A \subset X$ სიმრავლე ლებეგის ამრით ზომადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ლებეგის ამრით ზომადია $X \setminus A$ სიმრავლე.

§ 8. ზომით წარმოქმნილი გარე ზომის ქვემოდან უწყვეტობის თვისება

თეორემა 5.8.1. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა. მაშინ μ^* გარე ზომა ქვემოდან უწყვეტია.

დამტკიცება. ვთქვათ, (A_n) არის სიმრავლეთა ზრდადი მიმდევრობა და $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$. μ^* -ის ზრდადობის გამო გვექნება, რომ

$$\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2) \leq \dots \leq \mu^*(A). \quad (1)$$

შედეგად,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n) \leq \mu^*(A). \quad (2)$$

დავამტკიცოთ (2)-ის შებრუნებული შეფასება:

$$\mu^*(A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n). \quad (3)$$

თუ მოიძებნება n , რომლისთვისაც $\mu^*(A_n) = \infty$, მაშინ (1)-ის ძალით, $\mu^*(A) = \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n)$. ამრიგად, განსახილავი გვრჩება ის შემთხვევა, როცა $\mu^*(A_n) < \infty$ ყოველი n -სთვის.

ნებისმიერი n -სთვის შევარჩიოთ H რგოლის სიმრავლეთა (A_k^n) მიმდევრობა, რომელიც ფარავს A_n სიმრავლეს და ამაყოფილებს შეფასებას:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k^n) < \mu^*(A_n) + \frac{1}{n}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^n, \quad C_n = B_n \cap B_{n+1} \cap \dots$$

B_n და C_n სიმრავლეები ლებეგის აზრით ზომადია და მათ აქვთ შემდეგი თვისებები:

$$A_n \subset C_n \subset B_n; \quad (4)$$

$$\overline{\mu}(C_n) \leq \overline{\mu}(B_n) < \mu^*(A_n) + \frac{1}{n}. \quad (5)$$

ესადაა, (C_n) სიმრავლეთა მიმდევრობა მრდადია. მისი ზღვარი აღენიშნოთ C -თი. მაშინ (4)-ის ძალით გვექნება, რომ

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = C.$$

შემდეგ, თუ სიმრავლეთა (C_n) მიმდევრობისა და $\overline{\mu}$ ზომისათვის გამოვიყენებთ ზომის უწყვეტობის თვისებას და გავითვალისწინებთ (5) შეფასებას, დაეწეროთ,

$$\mu^*(A) \leq \overline{\mu}(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mu}(C_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n).$$

ამით (3) შეფასება და მასთან ერთად თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 5.8.1. მოგვიანებით (იხ. თეორემა 6.4.5) დადგენილი იქნება, რომ μ^* გარე ზომას საზოგადოდ არა აქვს გემოდან უწყვეტობის თვისება.

შენიშვნა 5.8.2. თეორემა 5.8.1 არ ვრცელდება ნებისმიერ გარე ზომამზე. მართლაც, λ იყოს $2^{\mathbb{N}}$ -ზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია: $\lambda(\emptyset) = 0$, $\lambda(\mathbb{N}) = 2$ და $\lambda(E) = 1$, როცა $E \neq \emptyset$ და $E \neq \mathbb{N}$. მაშინ აღვილი შესამოწმებელია, რომ λ არის გარე ზომა და ამასთანავე,

$$E_n = \{1, 2, \dots, n\}$$

სიმრავლეთა მიმდევრობისათვის არ სრულდება ქვემოთ უწყვეტობის პირობა.

ზოგიერთი კლასიკური ზომა

ამ თავის ძირითადი შესწავლის საგანია ლებეგის ზომა $\mathbb{R}^n$ სივრცეში, რომელიც არსებითად აფართოებს მონაკვეთის მოცულობის ცნებას. ასევე განხილულია ლებეგ-სტილტესისა და ჰაუსდორფის ტიპის ზომები.

აღსანიშნავია, რომ გადმოცემა ეფუძნება წინა თავში განვითარებულ აბსტრაქტულ თეორიას.

§ 1. ლებეგის ზომა

როგორც ვიცი, n -განზომილებიანი $v = v_n$ მოცულობა არის ნახევრადლია მონაკვეთების $\mathcal{I}^n$ ნახევარგოლმზე განსაზღვრული ზომა. თეორემა 4.2.1-ის თანახმად, მოცულობა შეიძლება მივიჩნიოთ $\mathcal{I}^n$ კლასით წარმოქმნილ $\tau(\mathcal{I}^n)$ რგოლზე განსაზღვრულ ზომადაც.

ლებეგის ზომა $\mathbb{R}^n$ სივრცეში ეწოდება v_n მოცულობის ლებეგისეულ გაგრძელებას. ლებეგის ზომა $\mathbb{R}^n$ სივრცეში აღნიშნული იქნება $m = m_n$ -ით.

ლებეგის ზომის განსაზღვრის არეში შემავალ სიმრავლეებს (ე.ი. v_n ფუძის მიხედვით ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეებს) ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეები ეწოდებათ. ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეთა კლასი აღნიშნული იქნება $\mathcal{L} = \mathcal{L}_n$ -ით.

შეენიშნოთ, რომ ზომის ლებეგისეული გაგრძელების თვისებებიდან გამომდინარე:

- ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეთა კლასი σ -ალგებრაა;
- ლებეგის ზომას აქვს სისრულის თვისება;
- ლებეგის ზომა σ -შემოსაზღვრულია;
- ყოველი $I \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთი ლებეგის აზრით ზომადია და $m(I) = v(I)$.

თეორემა 6.1.1. $\mathbb{R}^n$ სივრცის ყოველი ბორელის სიმრავლე ლებეგის აზრით ზომადია.

დამტკიცება. ზომის ლეზეგისეული გავრძელების თვისებებიდან გამომდინარე, $\sigma a(I^n) \subset \mathcal{L}_n$. მეორე მსრივ, თეორემა 3.4.1-ის თანახმად, $\sigma a(I^n) = B(\mathbb{R}^n)$. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

იმის გათვალისწინებით, რომ ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეები წარმოადგენენ ბორელის სიმრავლეებს (ის. თეორემა 3.4.1), თეორემა 6.1.1-დან ვლბულობთ შემდეგ ღებულებას.

თეორემა 6.1.2. $\mathbb{R}^n$ სივრცის ყოველი ღია და ყოველი ჩაკეტილი სიმრავლე ლეზეგის აზრით ზომადია.

თეორემა 6.1.3. ვთქვათ, $I_1, \dots, I_n$ სასრული სივრძის გადაუგვარებელი მონაკვეთებია წრფეზე. მაშინ $I = I_1 \times \dots \times I_n$ მონაკვეთი ლეზეგის აზრით ზომადია და

$$m(I) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k),$$

სადაც $a_k = \inf I_k$, $b_k = \sup I_k$ ($k \in \overline{1, n}$).

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ და

$$(a, b) = \bigtimes_{k=1}^n (a_k, b_k), \quad [a, b] = \bigtimes_{k=1}^n [a_k, b_k].$$

(a, b) ღია, ხოლო $[a, b]$ ჩაკეტილი სიმრავლეა. საიდანაც თეორემა 6.1.2-ის ძალით ვასყენით (a, b) და $[a, b]$ მონაკვეთების ლეზეგის აზრით ზომადობას. განვიხილოთ n -ეულების მიმდევრობა $\varepsilon_i = (\frac{b_1 - a_1}{2^i}, \dots, \frac{b_n - a_n}{2^i})$ ($i \in \mathbb{N}$). აღვილი შესამოწმებელია, რომ

$$(a, b) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a, b - \varepsilon_i], \quad [a, b] = \bigcap_{i=1}^{\infty} (a - \varepsilon_i, b].$$

აქედან გამომდინარე, თუ ვისარგებლებთ ზომის შემოდან და ქვემოდან უწყვეტობის თვისებებით, მივიღებთ,

$$m((a, b)) = m([a, b]) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k).$$

გვაქვს, რომ $I = (a, b) \cup (I \setminus (a, b))$. $[a, b] \setminus (a, b)$ ნულზომიანი სიმრავლეა, ამიტომ $I \setminus (a, b) \subset [a, b] \setminus (a, b)$ ჩართვისა და ლეზეგის ზომის სისრულის ძალით $I \setminus (a, b)$ სიმრავლე ზომადია და

$$m(I) = m((a, b)) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k).$$

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 6.1.4. $\mathbb{R}^n$ სივრცის წერტილთა ყოველი სასრული ან თვლადი სიმრავლე ლებეგის აზრით ზომადია და მისი ზომა ნულის ტოლია.

დამტკიცება. ერთი წერტილისაგან შედგენილი სიმრავლე ჩაკეტილია და შედეგად, ზომადია. ცხადია, ის შეიძლება მოვითავსოთ რაგინდ მცირე ზომის $I \in \mathbb{I}^n$ მონაკვეთში, საიდანაც ვასკენით ერთწერტილიანი სიმრავლის ზომის ნულთან ტოლობას. აქედან კი, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ნულზომიან სიმრავლეთა სასრული ან თვლადი გაერთიანება ზომადია და მისი ზომა ნულის ტოლია, მივიღებთ საჭირო დასკვნას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ბორელის ზომა $\mathbb{R}^n$ სივრცეში ეწოდება ν_n მოცულობის ბორელისეულ გაგრძელებას. ბორელის ზომა აღენიშნოთ $m_B = m_{B,n}$ ჩანაწერით.

თეორემა 5.4.3-ის ძალით, ლებეგის ზომა წარმოადგენს ბორელის ზომის შეესებას. აქვე შევნიშნოთ, რომ თეორემა 3.4.1-ის ძალით, ბორელის ზომის განსაზღვრის არე წარმოადგენს ბორელის სიმრავლეთა $B(\mathbb{R}^n)$ კლასს.

შენიშვნა 6.1.1. ქვემოთ მოცემული იქნება მცირე ისტორიული ექსკურსი იმის შესახებ, თუ რა ნაბიჯები იყო გადადგმული ზომის თეორიაში ლებეგის ზომის შემოღებამდე.

ჯ. პეანომ (1887) და კ. ჟორდანმა (1892) შემდეგნაირად განსაზღვრეს გამომეადი სიმრავლეები და მათი გაზომვის წესი. Δ იყოს $\mathbb{R}^n$ სივრცის მონაკვეთების ყველა შესაძლო სასრული გაერთიანების კლასი. v^* გარე მოცულობა და v_* შიგა მოცულობა განისაზღვრება ტოლობებით:

$$v^*(A) = \inf \{v(I) : I \in \Delta, I \supset A\},$$

$$v_*(A) = \sup \{v(I) : I \in \Delta, I \subset A\}.$$

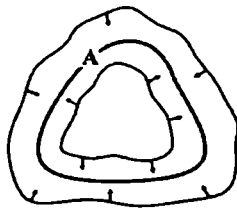
$A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეს ეწოდება პეანო-ჟორდანის აზრით ზომადი, თუ მისი შიგა და გარე მოცულობები ტოლია, ე.ი. $v_*(A) = v^*(A)$, და მისი პეანო-ჟორდანის $m_P(A)$ ზომა განისაზღვრება, როგორც შიგა და გარე მოცულობების საერთო მნიშვნელობა: $m_P(A) = v_*(A) = v^*(A)$.

$A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის პეანო-ჟორდანის აზრით ზომადობა ეკვივალენტურია შემდეგი პირობის: ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნებიან მონაკვეთების სასრული გაერთიანებები I და J ისეთები, რომ:

$$I \subset A \subset J \quad \text{და} \quad v(J) - v(I) < \varepsilon.$$

ამრიგად, პეანო-ჟორდანის თეორიაში სიმრავლის გაზომვა ეფუძნება შიგნიდან და გარედან ერთდროულ მიახლოებას ისეთი სიმრავლეებით, რომელთა გაზომვის წესი წინასწარ ცნობილია (ნახ. 6.1).

ასეთ მიდგომას ამოწურვის მეთოდს ეწოდებენ და მას მთელ რიგ კონკრეტულ შემთხვევებში წარმატებით იყენებდნენ ჯერ კიდევ ანტიკურ ეპოქაში.



ნახ. 6.1.

კერძოდ, ამოწურვის მეთოდის მეშვეობით გამოთვლილი იქნა წრის, პარაბოლური სეგმენტის, ბირთვის, პირამიდის და ზოგიერთი სხვა ფიგურისა და სხეულის მოცუბი.

რიმანის ინტეგრალის თეორიაში მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის გამოსათვლელად აგრეთვე ამოწურვის მეთოდი გამოიყენება. ამასი დარწმუნებისთვის საკმარისია შევნიშნოთ, რომ დარბუს ქედა და ზედა ჯამები წარმოადგენენ მრუდწირული ტრაპეციის შიგნიდან და გარედან მიმაახლოებული საფეხუროვანი ტრაპეციების ფართობებს.

პეანო-ჟორდანის ზომის თეორია მოხერხებული ინტრუმენტი აღმოჩნდა ინტეგრების რიმანის პროცესის გეომეტრიული გააზრებისათვის, თუმცა ის ვერ წყვეტდა ზოგიერთი მნიშვნელოვანი სიმრავლის გამოშვების საკითხს. მაგალითად, $[0, 1]$ მონაკვეთის რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე არ გამოდის გამოშვადი (მიგა მოცულობა ნულია, გარე კი ერთი). საზოგადოდ, გამოშვადი არ გამოდის არც წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთების თვლადი გაერთიანება.

შემდგომი წინსვლა ზომის თეორიაში განახორციელა ე. ბორელმა (1894). ახალი მიდგომით წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი წრფივი მონაკვეთების თვლადი გაერთიანების გასაზომად უარი ითქვა პეანო-ჟორდანის სქემაზე. ასეთი სახის გაერთიანება უშუალოდ ჩაითვალა ზომადად და მას ზომის მნიშვნელობად განესაზღვრა შემადგენელი მონაკვეთების სიგრძეთა ჯამი (ნახ. 6.2).



$$G = \bigcup_k (a_k, b_k), \quad m(G) = \sum_k (b_k - a_k)$$

ნახ. 6.2.

უფრო კონკრეტულად, ბორელმა ჩამოაყალიბა ახალ-ახალი ზომადი სიმრავლეების მიღების შემდეგი ორი წესი, დაფუძნებული თვლადი გაერთიანებისა და სხვაობის სიმრავლურ ოპერაციებზე:

- ეთქვათ, მოცემული გვაქვს წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სიმრავ-
ლები: $A_1, A_2, \dots$, რომელთა გაბომვის წესი უკვე ცნობილია. მაშინ
ზომად აღ უნდა მივიჩნიოთ მათი $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ გაერთიანება და A -ს
ზომა უნდა ჩაეთვალოთ A_k სიმრავლეების ზომათა ჯამის ტოლად;
- ეთქვათ, მოცემული გვაქვს A_1 და A_2 სიმრავლეები თვისებით: $A_1 \subset$
 A_2 , ამასთან, მათი გაბომვის წესი უკვე ცნობილია. მაშინ ზომად აღ
უნდა მივიჩნიოთ მათი $A = A_2 \setminus A_1$ სხვაობა და A -ს ზომა უნდა
ჩაეთვალოთ A_2 და A_1 სიმრავლეების ზომათა სხვაობის ტოლად.

თუ ზომად სიმრავლეთა საწყის ეგზემპლარებად აღებული იქნება მონაკ-
ვეთები, მაშინ ბორელის პირველი და მეორე ოპერაციების რიგ-რიგობით გან-
ხორციელებით მივალწვეთ შემდეგი ტიპის სიმრავლეთა თანდათანობით შემოყ-
ვანას ზომად სიმრავლეთა კლასში: ღია სიმრავლეები, ჩაკეტილი სიმრავლეები,
 F_σ ტიპის სიმრავლეები, G_δ ტიპის სიმრავლეები, $G_{\delta\sigma}$ ტიპის სიმრავლეები,
 $F_{\sigma\delta}$ ტიპის სიმრავლეები, და ა. შ. ამით ბორელმა, ფაქტობრივად, მიუთითა
მც ზომის აგების იტერაციული სქემა.

ბორელის კონსტრუქციას აქვს შემდეგი ნაულოვანებები: 1) არაა გამოყ-
ვეთილი მარტივი პრინციპი, თუ როდისაა მიჩნეული კონკრეტული სიმრავლე
ზომად აღ და ზომადობის შემთხვევაში არაა მითითებული სიმრავლის ზომის
განსაზღვრის მარტივი წესი; 2) ბორელის ზომა არ ახდენს ჰეანო-ჟორდანის
ზომის გაგრძელებას (მტკიცდება, რომ ბორელის ამრით ზომად სიმრავლეთა
კლასის სიმძლავრე კონტინუუმი, მაშინ, როცა ჰეანო-ჟორდანის ამრით ზომა-
დი სიმრავლეები ქმნიან პიპერკონტინუუმის (ე.ი. 2^c) სიმძლავრის კლასს).

ჰეანო-ჟორდანისა და ბორელის მიდგომების სინთეზირების მეშვეობით
ლებეგმა შექმნა ზომის თეორია, რომელიც დაზღვეულია ზემოთ აღნიშნული
ნაულოვანებებისაგან. კერძოდ, ჰეანოსა და ჟორდანის მსგავსად, ლებეგმა $A \subset$
 $\mathbb{R}^n$ სიმრავლის გარე ზომა - $v^*(A)$ განსაზღვრა მონაკვეთების მეშვეობით
წარმოქმნილი დაფარვების საფუძველზე, ოღონდ შეიტანა ერთი არსებითი
ცვლილება: დაფარვები მოახდინა მონაკვეთების თვლადი კლასებით, ნაცვლად
სასრული კლასებისა, თანაუკვეთი მონაკვეთების თვლადი კლასის გაერთიანება
კი გაბომა ბორელის მიდგომის მიხედვით შეკრიბა შემადგენელი მონაკვე-
თების სიგრძეთა მწკრივი. სიმრავლის ზომადობის პირობად აიღო ზომის
ადიციურობის თვისებით ნაკარნახევი მოთხოვნა: $v(I) = v^*(A \cap I) + v^*(I \setminus A)$
ყოველი I მონაკვეთისათვის.

ფიქსირებულ $I \subset \mathbb{R}^n$ მონაკვეთში მოთავსებული სიმრავლეებისათვის ლებე-
გის ზომა შეიძლება შემოღებული იქნას უშუალოდ ამოწურვის (ე.ი. ჰეანო-
ჟორდანის) მეთოდის გამოყენებითაც. ამაზე საუბარი გვექნება მომდევნო პა-
რაგრაფის ბოლოს.

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbb{R}^n$ სივრცის $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ ქვესივრცე ნული ზომისაა.
2. დაამტკიცეთ, რომ კანტორის დისკონტინუუმის ზომა ნულის ტოლია.
3. ვთქვათ, $0 < \alpha < 1$. ააგეთ $[0, 1]$ -ის სრულყოფილი და არსად მკერძი ქვესიმრავლე, რომლის ზომა α -ს ტოლია.
4. დაამტკიცეთ, რომ ნული ზომის ნებისმიერი $A \subset \mathbb{R}^n$ ჩაკეტილი სიმრავლე არსად მკერძია.
5. ვთქვათ, $A \subset \mathbb{R}$ ზომადი სიმრავლეა, $m(A) = \alpha > 0$ და $0 < \beta < \alpha$. ააგეთ ისეთი ზომადი $B \subset A$ სიმრავლე, რომ $m(B) = \beta$.
6. ვთქვათ, $A \subset [0, 1]$ დადებითი ზომის სიმრავლეა. დაამტკიცეთ, რომ A -ში მოიძებნება ორი ისეთი წერტილი, რომელთა შორის მანძილი ირაციონალურია.
7. ვთქვათ, $A \subset [0, 1]$ დადებითი ზომის სიმრავლეა. დაამტკიცეთ, რომ A -ში მოიძებნება ორი ისეთი წერტილი, რომელთა შორის მანძილი რაციონალურია.
8. დაამტკიცეთ, რომ წრფის ყველა ზომადი ქვესიმრავლის კლასის სიმძლავრე წრფის ყველა ქვესიმრავლის კლასის სიმძლავრის ტოლია.
9. დაამტკიცეთ, რომ კანტორის D სიმრავლე ზომადია ჰეანო-ჯორდანის ამრით.
10. დაამტკიცეთ, რომ წრფის ყველა ჰეანო-ჯორდანის ამრით ზომადი ქვესიმრავლის კლასის სიმძლავრე წრფის ყველა ქვესიმრავლის კლასის სიმძლავრის ტოლია.
11. დაამტკიცეთ, რომ თუ $A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე ჰეანო-ჯორდანის ამრით ზომადია, მაშინ ის ზომადია ლებეგის ამრითაც და $m(A) = m_p(A)$.

§ 2. ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეთა დახასიათება მარტივი სტრუქტურის სიმრავლეთა მეშვეობით

$A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეს ეუწოდოთ ელემენტარული, თუ ის წარმოდგება $\mathcal{I}^n$ კლასის მონაკვეთების სასრული გაერთიანების სახით (ე.ი. ეკუთვნის $r(\mathcal{I}^n)$ რგოლს).

თეორემა 5.6.3-დან გამომდინარეობს ლებეგის ამრით ზომადი სიმრავლეების შემდეგი დახასიათება ელემენტარული სიმრავლეების მეშვეობით მიახლოების ტერმინებში.

თეორემა 6.2.1. ნებისმიერი $A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისთვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- A არის ლებეგის აზრით ზომადი;
- ყოველი $I \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთისა და ყოველი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება ელემენტარული სიმრავლე B , ისეთი, რომ $v^*(A \cap I) \Delta B < \varepsilon$.

შემდეგი 6.2.1. ნებისმიერი შემოსაზღვრული $A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისთვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- A არის ლებეგის აზრით ზომადი;
- ყოველი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება ელემენტარული სიმრავლე B , ისეთი, რომ $v^*(A \Delta B) < \varepsilon$.

თეორემა 5.7.2-ის საფუძველზე შესაძლებელია ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეთა დახასიათება $\mathcal{I}^n$ კლასის მონაკვეთების თელადი გაერთიანებების მეშვეობით მიახლოების ტერმინებში, თუმცა ანალოგიური დახასიათება უფრო მოსერსებულია ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეების ტერმინებში, რომელიც მოიცემა შემდეგი თეორემით.

თეორემა 6.2.2. ნებისმიერი $A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისთვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- A არის ლებეგის აზრით ზომადი;
- ყოველი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება ღია $G \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $G \supset A$ და $v^*(G \setminus A) < \varepsilon$;
- ყოველი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება ჩაკეტილი $F \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $F \subset A$ და $v^*(A \setminus F) < \varepsilon$.

ლემა 6.2.1. ვთქვათ, $E \in \sigma(\mathcal{I}^n)$. მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება ღია $G \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $G \supset E$ და $m(G \setminus E) < \varepsilon$.

დამტკიცება. ვთქვათ, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, სადაც $I_k \in \mathcal{I}^n$ ($k \in \mathbb{N}$). ყოველი $k \in \mathbb{N}$ -სთვის ღია n -განზომილებიანი მონაკვეთი J_k შევარჩიოთ ისე, რომ სრულდებოდეს $m(J_k \setminus I_k) < \varepsilon/2^k$ შეფასება. განვიხილოთ $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$ ღია სიმრავლე. გვექნება, რომ

$$G \setminus E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (J_k \setminus I_k).$$

საიდანაც ვწერთ,

$$m(G \setminus E) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

ლემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 6.2.2-ის დამტკიცება. თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ $\sigma(\mathcal{I}^n) = \sigma(r(\mathcal{I}^n))$.

1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია: თეორემა 5.7.2-ის ძალით მოიძებნება $E \in \sigma(\mathcal{I}^n)$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $v^*(E \setminus A) < \varepsilon/2$. მეორე მხრივ, ლემა 6.2.1-ის თანახმად მოიძებნება ღია სიმრავლე G , რომლისთვისაც $G \supset E$ და $v^*(G \setminus E) = m(G \setminus E) < \varepsilon/2$. მაშინ გვექნება, რომ $G \supset A$ და

$$v^*(G \setminus A) \leq v^*(G \setminus E) + v^*(E \setminus A) < \varepsilon.$$

ამით 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია დამტკიცებულია.

2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაცია: თეორემა 3.2.2-ის თანახმად, ყოველი ღია სიმრავლე წარმოიდგინება I^n კლასის მონაკვეთების თელადი გაერთიანების სახით. შედეგად, ყოველი ღია სიმრავლე ეკუთვნის $\sigma(I^n)$ კლასს. საიდანაც, თეორემა 5.7.2-ის ძალით ვასკენით 2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაციის სამართლიანობას.

ამრიგად, პირველი და მეორე წინადადებების ეკვივალენტობა დადგენილია. ახლა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეები ურთიერთდამატებითია და გამოვიყენებთ 5.7.3 შენიშვნას, დავასკენით მესამე წინადადების ეკვივალენტობას პირველი და მეორე წინადადებებისადმი. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შედეგი 6.2.2. ნებისმიერი ლებეგის აზრით ზომადი $A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისათვის სამართლიანია ტოლობები:

$$m(A) = \inf \{m(G) : G \supset A, G \text{ ღიაა}\} = \sup \{m(F) : F \subset A, F \text{ ჩაკეტილია}\}.$$

აქვე დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა, რომელიც გვიჩვენებს, რომ v^* გარე ზომის განსაზღვრისას შეიძლება შემოვიფარგლოთ დამფარავ სიმრავლეებად ღია სიმრავლეების განხილვით.

თეორემა 6.2.3. ნებისმიერი $A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისთვის,

$$v^*(A) = \inf \{m(G) : G \supset A, G \text{ ღიაა}\}.$$

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ $v^*(A)$ გარე ზომა ტოლია $\sum_{k=1}^{\infty} v(I_k)$ სახის ჯამების ინფიმუმის, სადაც I_k წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთებია I^n კლასიდან, რომლებიც ფარავენ A სიმრავლეს.

აღვნიშნოთ $\alpha = \inf \{m(G) : G \supset A, G \text{ ღიაა}\}$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ ყოველი ღია სიმრავლე წარმოდგება I^n კლასის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთების თელადი გაერთიანების სახით (იხ. თეორემა 3.2.2), მარტივად დაეასკენით $v^*(A) \leq \alpha$ შეფასების სამართლიანობას. დავამტკიცოთ შებრუნებული უტოლობა. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი და ვიპოვოთ A -ს დამფარავი წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი I_k ($k \in \mathbb{N}$) მონაკვეთები I^n კლასიდან, რომელთათვისაც

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) < v^*(A) + \varepsilon.$$

ლემა 6.2.1-ის ძალით მოიძებნება ისეთი ღია სიმრავლე G , რომ

$$G \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad m\left(G \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) < \varepsilon.$$

შედეგად გვექნება,

$$\alpha \leq m(G) \leq m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) + \varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) + \varepsilon < v^*(A) + 2\varepsilon.$$

საიდანაც $\varepsilon > 0$ რიცხვის ნებისმიერობის გათვალისწინებით ვასყენით შებრუნებული $\alpha \leq v^*(A)$ შეფასების სამართლიანობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 6.2.1. ფიქსირებულ $I \subset \mathbb{R}^n$ მონაკვეთში მოთავსებული სიმრავლეებისათვის ლებეგის ზომა შეიძლება შემოღებული იქნას უშუალოდ ამოწურვის (ე.ი. პეანო-ჯორდანის) მეთოდის გამოყენებითაც. განვიხილოთ წრფივი ერთეულოვანი $I = (0, 1)$ მონაკვეთის შემთხვევა. შესაძლებელია დამტკიცდეს, რომ $A \subset (0, 1)$ სიმრავლე ლებეგის აზრით ზომადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $1 = v^*(A) + v^*(I \setminus A)$, ე.ი. როცა

$$1 - v^*(I \setminus A) = v^*(A). \quad (1)$$

$1 - v^*(I \setminus A)$ სიდიდეს შეიძლება შევხედოთ როგორც $v^*(A)$ სიმრავლის შიგა $v_+(A)$ ზომას.

მაშინ A სიმრავლის ლებეგის აზრით ზომადობის პირობა ლებულობს შიგა და გარე ზომების ტოლობის სახეს: $v_+(A) = v^*(A)$. სწორედ ასეთი იყო ლებეგის ორიგინალური განსაზღვრება (1902 წ.).

ახლა დაუბრუნდეთ საკითხს იმის შესახებ, თუ რატომ შეიძლება, $1 - v^*(I \setminus A)$ სიდიდეს შევხედოთ, როგორც A -ს შიგა ზომას.

გარე ზომის განსაზღვრისას შეიძლება შემოვიფარგლოთ მხოლოდ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ღია მონაკვეთების მეშვეობით მიღებული დაფარვებით (იხ. თეორემა 6.2.3). მონაკვეთების ასეთი გაერთიანებები ქმნიან ღია სიმრავლეს. ყოველი ღია G სიმრავლე ბორელის პირველი პრინციპის გამოყენებით (იხ. შენიშვნა 6.1.1) მივიჩნიოთ ზომადად და მას ზომის მნიშვნელობად განესაზღვროთ შემადგენელი მონაკვეთების სიგრძეთა ჯამი: $m(G) = \sum_k (b_k - a_k)$. ბორელის მეორე პრინციპის თანახმად, ზომადად შეიძლება მივიჩნიოთ ყოველი $F \subset (0, 1)$ ჩაკეტილი სიმრავლეც, როგორც ღია $I \setminus F$ სიმრავლის დამატება და მის ზომად ჩაითვლება $1 - m(I \setminus F)$ რიცხვი. ამგვარად, ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეები ხდებიან გაზომადი. რა მოხდება, თუ მათი გამოყენებით მოვახდენთ სიმრავლეთა ამოწურვას? ვაჩვენოთ, რომ შედეგად მივიღებთ ლებეგის ზომას.

I მონაკვეთის ღია და ჩაკეტილი ქვესიმრავლეების კლასები აღვნიშნოთ. შესაბამისად, G და F სიმბოლოებით. შესაძლებელია დამტკიცდეს, რომ ნებისმიერი $A \subset I$ სიმრავლისათვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\sup_{E \subset A, E \in G \cup F} m(E) = \sup_{E \subset A, E \in F} m(E),$$

$$\inf_{E \supset A, E \in G \cup F} m(E) = \inf_{E \supset A, E \in G} m(E),$$

$$1 - \inf_{E \supset I \setminus A, E \in G} m(E) = \sup_{E \subset A, E \in F} m(E).$$

ამ ტოლობებიდან გამომდინარე, $G \cup F$ ოჯახის სიმრავლეების მეშვეობით წარმოქმნილი A სიმრავლის შიგა და გარე ზომები ტოლი არიან შესაბამისად $1 - v^*(I \setminus A)$ და $v^*(A)$ რიცხვების. შედეგად, (1)-ის გათვალისწინებით, ასეთი სახის შიგა და გარე ზომების ტოლობა ტოლფასია A სიმრავლის ლებეგის აზრით ზომადობის.

ამრიგად, ღია და ჩაკეტილ სიმრავლეებზე ზომის გავრცელება და შემდეგ მათი მეშვეობით ამოწურვის მეთოდის გამოყენება იძლევა ლებეგის ზომას I მონაკვეთზე. ასეთნაირად დანახული ლებეგის ზომის კონსტრუქცია ჰგავს ჰეანო-ჯორდანის თეორიას იმით, რომ ისიც იყენებს ამოწურვის მეთოდს იმ სიმრავლეებით, რომელთა გამოშვების წესი უკვე ცნობილია. განსხვავება კი იმაშია, რომ ამოწურვისათვის გამოყენებული საწყისი კლასი შედგება ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეებისაგან, ნაცელად მონაკვეთების სასრულ გაერთიანებათა ღარიბი კლასისა. ღია და ჩაკეტილ სიმრავლეთა გამოშვა, როგორც ითქვა, ხდება ბორელის მიდგომის მიხედვით. აღნიშნულიდან კიდევ ერთხელ ნათლად ჩანს, რომ ლებეგის ზომის თეორია შეიქმნა ჰეანოს, ჯორდანისა და ბორელის იდეების სინთეზის საფუძველზე.

შევნიშნავთ, რომ ლებეგის ზომის აგება ღია და ჩაკეტილ სიმრავლეთა გამოყენებაზე დაფუძნებული ამოწურვის მეთოდით გადმოცემულია, მაგალითად, [29] და [34] სახელმძღვანელოებში.

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbb{R}^n$ სივრცის ნებისმიერი დადებითი ზომის ქვესიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

§ 3. ლებეგის ზომის ძვრის მიმართ ინვარიანტულობა

თორემა 6.3.1. ლებეგის აზრით ზომადი $A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის ნებისმიერი $A + x$ ძვრა ასევე ლებეგის აზრით ზომადია და $m(A + x) = m(A)$.

ლემა 6.3.1. გარე ზომა ინვარიანტულია ძვრის მიმართ, ე.ი. ნებისმიერი $A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისათვის, $v^*(A + x) = v^*(A)$ ($x \in \mathbb{R}^n$).

დამტკიცება. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ნებისმიერი $I \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთისათვის $I + x$ ასევე $\mathcal{I}^n$ კლასის მონაკვეთია და $v(I + x) = v(I)$.

შევნიშნოთ რომ, თუ $I_k \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთები ფარავენ A სიმრავლეს, მაშინ $I_k + x \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთები დაფარავენ $A + x$ სიმრავლეს და $\sum_k v(I_k + x) = \sum_k v(I_k)$. საიდანაც, უშუალოდ ვლუბულობთ შეფასებას:

$$v^*(A + x) \leq v^*(A). \quad (1)$$

თუ გაეთვალისწინებთ, რომ (1) შეფასებაში სიმრავლე და მისი ძერა ნებისმიერია, შეგვიძლია ასევე დაეწეროთ:

$$v^*(A) = v^*((A + x) + (-x)) \leq v^*(A + x).$$

საიდანაც, (1)-ის გათვალისწინებით ვასკენით $v^*(A + x) = v^*(A)$ ტოლობას. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა ნ.პ.ი-ის დამტკიცება. ნაბიჯი I: ვთქვათ, $G \subset \mathbb{R}^n$ რაიმე არა-ცარიელი ღია სიმრავლეა. ცხადია, $G + x$ ასევე ღია სიმრავლეა. წარმოადგინოთ G სიმრავლე, როგორც წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი $I_k \in \mathcal{I}^n$ ($k \in \mathbb{N}$) მონაკვეთების გაერთიანება. მაშინ $G + x$ წარმოდგება წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი $I_k + x$ ($k \in \mathbb{N}$) მონაკვეთების გაერთიანების სახით. საიდანაც, $I \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთებისათვის ლებეგის ზომის ძერის მიმართ ინვარიანტულობის გათვალისწინებით დაეწეროთ, რომ

$$m(G + x) = \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k + x) = \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) = m(G).$$

ნაბიჯი II: დაეშვათ ახლა, რომ $A \subset \mathbb{R}^n$ ნებისმიერი ლებეგის აბრით ზომადი სიმრავლეა. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. თეორემა 6.2.2-ის ძალით მოიძებნება ღია $G \supset A$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $v^*(G \setminus A) < \varepsilon$. მაშინ $G + x$ ასევე ღია სიმრავლეა, $G + x \supset A + x$ და ლემა 6.3.1-ის გათვალისწინებით გვაქვს: $v^*((G + x) \setminus (A + x)) < \varepsilon$. აქედან, თეორემა 6.2.2-ის საფუძველზე ვასკენით $A + x$ სიმრავლის ლებეგის აბრით ზომადობას. გარდა ამისა, კვლავ ლემა 6.3.1-ის გათვალისწინებით გვაქვს, რომ $m(A + x) = v^*(A + x) = v^*(A) = m(A)$.

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამოცანები

1. ვთქვათ, $A \subset \mathbb{R}^n$ ზომადი სიმრავლეა. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი $t > 0$ -სთვის $tA = \{tx : x \in A\}$ სიმრავლე ზომადია და $m(tA) = t^n m(A)$.
2. ვთქვათ, $A \subset \mathbb{R}^n$ ზომადი სიმრავლეა. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი T მობრუნებისათვის $\mathbb{R}^n$ სივრცეში $T(A)$ სიმრავლე ზომადია და $m(T(A)) = m(A)$.
3. ვთქვათ, $A \subset \mathbb{R}^n$ ზომადი სიმრავლეა. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ წრფივი ასახვისათვის $T(A)$ სიმრავლე ზომადია და $m(T(A)) = |\alpha| m(A)$, სადაც α არის T ასახვის იაკობიანი.
4. დამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი სიმრავლე, რომელიც ჩართულია $\mathbb{R}^n$ სივრცის n -ზე დაბალი განზომილების ქვესივრცეში, ზომადია და მისი ზომა ნულის ტოლია.

5. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbb{R}^n$ სივრცეში ღია ბირთვების ნებისმიერი სასრული Ω კლასიდან შეიძლება გამოვყოთ Ω^* ქვეკლასი, რომელიც შედგება წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ბირთვებისაგან და

$$m\left(\bigcup_{B \in \Omega^*} B\right) \geq \frac{1}{3^n} m\left(\bigcup_{B \in \Omega} B\right).$$

§ 4. ლებეგის აზრით არაზომადი სიმრავლე

თეორემა 6.4.1. არსებობს ლებეგის აზრით არაზომადი $A \subset \mathbb{R}$ სიმრავლე.

დამტკიცება. $(-1, 1)$ -ში შემოვიღოთ ეკვივალენტობის მიმართება შემდეგნაირად: x და y რიცხვები მივიჩნიოთ ეკვივალენტურად, თუ მათი სხვაობა რაციონალურია. მარტივი შესამოწმებელია, რომ განსაზღვრება კორექტულია, ე.ი. ასეთი მიმართება მართლაც ეკვივალენტობის მიმართებაა.

განვიხილოთ ყველა ეკვივალენტობის კლასი, რომლებბადაც დაიშლება $(-1, 1)$ ინტერვალი და მათი ოჯახი აღვნიშნოთ Π -თი. ვისარგებლოთ ცერმელოს აქსიომით ამორჩევის შესახებ და განვიხილოთ A სიმრავლე, რომელიც შედგება ეკვივალენტობის კლასებისაგან ამორჩეული თითო-თითო ელემენტისაგან, ე.ი. $A \subset (-1, 1)$ და $A \cap E$ ერთელემენტიანი სიმრავლეა ყოველი $E \in \Pi$ ეკვივალენტობის კლასისათვის.

შევნიშნოთ რომ, თუ r_1 და r_2 განსხვავებული რაციონალური რიცხვებია, მაშინ

$$(A + r_1) \cap (A + r_2) = \emptyset. \quad (1)$$

მართლაც, თუ დაუშვებთ საწინააღმდეგოს, მაშინ ვიპოვით A სიმრავლის x_1 და x_2 ელემენტებს, რომელთათვისაც $x_1 + r_1 = x_2 + r_2$. უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ x_1 და x_2 ელემენტები ეკვივალენტურია. შედეგად, A სიმრავლეში აღმოჩნდება ერთმანეთის ეკვივალენტური ორი განსხვავებული ელემენტი, რაც ეწინააღმდეგება A სიმრავლის განსაზღვრას.

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ

$$(-1, 1) \subset \bigcup_{r \in (-2, 2) \cap \mathbb{Q}} (A + r) \subset (-3, 3). \quad (2)$$

მართლაც, თუ ნებისმიერი $x \in (-1, 1)$ -სთვის განვიხილავთ A სიმრავლის იმ x^* ელემენტს, რომელიც x -ის ეკვივალენტურია და r -ის როლში ავიღებთ $x - x^*$ რიცხვს, გვექნება: $r \in (-2, 2) \cap \mathbb{Q}$ და $x \in A + r$. რაც ნიშნავს მარცხენა ჩართვის სამართლიანობას. მარჯვენა ჩართვის დასადაგენად კი საკმარისია გავითვალისწინოთ, რომ $A \subset (-1, 1)$.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ A სიმრავლე არ არის ლებეგის აზრით ზომადი. დაუშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ, A ზომადია. მაშინ ლებეგის ზომის

ბერის მიმართ ინვარიანტულობის თვისების ძალით ყოველი t -სთვის, ზომადი იქნება $A + t$ სიმრავლე. აქედან, A სიმრავლის (1) და (2) თვისებების გათვალისწინებით დავწერთ,

$$m((-1, 1)) \leq \sum_{r \in (-2, 2) \cap \mathbb{Q}} m(A + r) \leq m((-3, 3)).$$

საიდანაც $m(A + t) = m(A)$ ($t \in \mathbb{R}$) ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ,

$$2 \leq m(A) + m(A) + \dots \leq 6.$$

მაშინ მარცხენა შეფასებიდან გამომდინარეობს, რომ $m(A) > 0$. ხოლო მარჯვენა შეფასება იწვევს საწინააღმდეგო პირობის: $m(A) = 0$ ტოლობის, შესრულებას. მიღებული წინააღმდეგობის ძალით ვასკენით A სიმრავლის არაზომადობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 6.4.1. ლებეგის აზრით არაზომადი სიმრავლის ზემოთ მოცემული მაგალითი აგებული იყო ვიტალის მიერ 1905 წელს. როგორც ვხედავთ, მისი აგება იყენებს ევრემელის ამორჩევის აქსიომას. საკმაოდ ინტენსიური კელევის საგანი იყო საკითხი იმის შესახებ, შესაძლებელია თუ არა არაზომადი სიმრავლის აგება ამორჩევის აქსიომის გამოყენების გარეშე. ამ მიმართულებით 1970 წ. რ. სოლოვეიმ [15] მიიღო ძალზე მნიშვნელოვანი შედეგი, რომელიც აჩვენებს ამორჩევის აქსიომის არსებით როლს არაზომადი სიმრავლის აგებისას.

სამართლიანია თეორემა 6.4.1-ის შემდეგი განზოგადება.

თეორემა 6.4.2. ყოველი დადებითი ზომის $E \subset \mathbb{R}$ სიმრავლე შეიცავს ლებეგის აზრით არაზომად ქვესიმრავლეს.

თეორემა 6.4.2-ის დამტკიცება იმეორებს თეორემა 6.4.1-ის დამტკიცებისას ჩატარებულ მსჯელობებს, იმ განსხვავებით, რომ: ჯერ უნდა ეიპოვოთ $t > 0$ რიცხვი, რომლისთვისაც $E \cap (-t, t)$ დადებითი ზომისაა, მერე ეკვივალენტობის მიმართება შემოვიღოთ $E \cap (-t, t)$ სიმრავლეში, ხოლო არაზომადობის დამტკიცებისთვის ვისარგებლოთ შემდეგი ჩართვებით:

$$E \cap (-t, t) \subset \bigcup_{r \in (-2t, 2t) \cap \mathbb{Q}} (A + r) \subset (-3t, 3t).$$

თეორემა 6.4.3. v^- გარე ზომას არა აქვს ადიციაურობის თვისება.

თეორემა 6.4.3 მიიღება თეორემა 6.4.1-დან, შემდეგი დებულების საფუძველზე.

თეორემა 6.4.4. ვთქვათ, X არაცარიელი სიმრავლეა და μ წარმოადგენს რაიმე $H \subset 2^X$ რგოლზე განსაზღვრულ ზომას. მაშინ შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- μ^* გარე ზომა ადიცირია;
- ნებისმიერი $A \subset X$ სიმრავლე ლებეგის აზრით ზომადია μ ფუძის მიხედვით.

დამტკიცება. აღემატება შესამოწმებელია, რომ X სიმრავლეში განსაზღვრული ნებისმიერი λ გარე ზომისათვის შემდეგი წინადადებები ტოლფასია:

- λ ადიცირია;
- ნებისმიერი $A \subset X$ სიმრავლე კარათეოდორის აზრით ზომადია λ ფუძის მიხედვით.

ამის შემდეგ, თუ λ -ს როლში ავიღებთ μ^* გარე ზომას და მხედველობაში მივიღებთ, რომ კარათეოდორის აზრით ზომადობა μ^* ფუძის მიხედვით და ლებეგის აზრით ზომადობა μ ფუძის მიხედვით ტოლფასი მოთხოვნებია (იხ. თეორემა 5.3.1), დავასკვნით თეორემის პირობაში მითითებული წინადადებების ეკვივალენტურობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 6.4.5. ν^* გარე ზომას არა აქვს ზემოდან უწყვეტობის თვისება.

დამტკიცება. განვიხილოთ თეორემა 6.4.1-ის დამტკიცებისას აგებული არაზომადი A სიმრავლე. A -ს აქვს შემდეგი თვისებები:

$$(A + r_1) \cap (A + r_2) = \emptyset \quad (r_1, r_2 \in \mathbb{Q}, r_1 \neq r_2);$$

$$(-1, 1) \subset \bigcup_{r \in (-2, 2) \cap \mathbb{Q}} (A + r) \subset (-3, 3).$$

გადავზომოთ $(-2, 2) \cap \mathbb{Q}$ სიმრავლის ელემენტები: $(-2, 2) \cap \mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\}$ და A_k -ით აღვნიშნოთ $A + r_k$ სიმრავლე. მაშინ, ზემოთ მოცემული თანაფარდობებიდან გამომდინარე,

$$A_k \cap A_m = \emptyset \quad (k \neq m); \quad (3)$$

$$(-1, 1) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset (-3, 3); \quad (4)$$

გარე ზომის ძერის მიმართ ინვარიანტულობის ძალით (იხ. ლემა 6.3.1) გვაქვს,

$$\nu^*(A_k) = \nu^*(A) \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (5)$$

თეორემა 5.2.3-ის თანახმად ნულის ტოლი გარე ზომის მქონე სიმრავლე ზომადია. რის გამოც გვექნება, რომ

$$\nu^*(A) > 0. \quad (6)$$

ახლა განვიხილოთ სიმრავლეთა შემდეგი მიმდევრობა:

$$E_k = A_k \cup A_{k+1} \cup \dots \quad (k \in \mathbb{N}).$$

ცხადია, (E_k) კლუბადი მიმდევრობაა და (3)-ის ძალით მისი ზღვარი არის ცარიელი სიმრავლე. ამასთან, (4)-დან გამომდინარე,

$$v^*(E_1) \leq v^*((-3, 3)) = 6 < \infty.$$

შენიშნოთ, რომ (5)-ის ძალით: $v^*(E_k) \geq v^*(A_k) = v^*(A)$. შედეგად, (6)-ის საფუძველზე მივიღებთ,

$$v^*(\emptyset) = 0 < v^*(A) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} v^*(E_k).$$

ამრიგად, (E_k) მიმდევრობის მაგალითზე ვრწმუნდებით v^* გარე ზომისათვის ზემოდან უწყვეტობის თვისების შეუსრულებლობაში. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ 6.4.1 და 6.4.2 თეორემების ანალოგები $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) სივრცისათვის.
2. ეთქვათ, $A \subset \mathbb{R}$ და $B \subset \mathbb{R}$ ზომადი სიმრავლეებია. დაამტკიცეთ, რომ $A \times B$ სიმრავლე ზომადია (ე.ი. ზომადია ორგანზომილებიანი ლებეგის ზომის მიხედვით).

§ 5. ლებეგ-სტილტიესის ზომები

ეთქვათ, $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ არის ვიტალის ამრით ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქცია. v_φ ზომის ლებეგისეულ გაგრძელებას ეწოდება φ ფუნქციით წარმოქმნილი ლებეგ-სტილტიესის ზომა, რომელიც აღნიშნული იქნება m_φ ჩანაწერით. m_φ -ზომის განსაზღვრის არეში შემავალ სიმრავლეთა კლასი (ე.ი. v_φ ფუნქციის მიხედვით ლებეგის ამრით ზომად სიმრავლეთა კლასი) აღვნიშნოთ $\mathcal{L}_\varphi$ ჩანაწერით. შემდგომში, სიმოქლისათვის, $A \in \mathcal{L}_\varphi$ სიმრავლეებს ეუწოდოთ m_φ -ზომადი.

ცხადია, $\varphi(x) = x_1 \dots x_n$ შემთხვევაში m_φ წარმოადგენს ლებეგის m ზომას.

ყოველ ლებეგ-სტილტიესის m_φ ზომას აქვს ლებეგის ზომის მსგავსი ზოგიერთი თვისება. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი წინადადებები (რომელთა დამტკიცებები ლებეგის ზომისათვის ცნობილი შესაბამისი დებულებების დამტკიცებათა ანალოგიურია):

- $\mathcal{L}_\varphi$ კლასი არის σ -ალგებრა;
- m_φ -ს აქვს სისრულის თვისება;
- ნებისმიერი $I \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთი m_φ -ზომადია და $m_\varphi(I) = v_\varphi(I) < \infty$;
- m_φ არის σ -შემოსაზღვრული;

- $\mathbb{R}^n$ სივრცის ყოველი ბორელის სიმრავლე არის m_φ -ზომადი, ე.ი. $B(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}_\varphi$. შედეგად, $\mathbb{R}^n$ სივრცის ყოველი ღია, ყოველი ჩაკეტილი და ყოველი სასრული ან თელადი სიმრავლე არის m_φ -ზომადი;
- სამართლიანია m_φ -ზომადობის კრიტერიუმები ელემენტარული, ჩაკეტილი და ღია სიმრავლეების ტერმინებში, რომლებიც 6.2.1 და 6.2.2 თეორემების ანალოგიურია.

შენიშვნა 6.5.1. ყოველი ლებეგ-სტილტეისის ზომა არის $r(T^n)$ რგოლზე განსაზღვრული გარკვეული სასრული ზომის ლებეგისეულ გავრცელება. თეორემა 4.7.2-ის ძალით სამართლიანია შემრუნებული დებულება: ნებისმიერი ზომა, რომელიც არის $r(T^n)$ რგოლზე განსაზღვრული რაიმე სასრული ზომის ლებეგისეული გავრცელება, წარმოადგენს გარკვეული φ ფუნქციით წარმოქმნილ ლებეგ-სტილტეისის ზომას.

შენიშვნა 6.5.2. ლებეგ-სტილტეისის ზომა შეიძლება დაუკავშიროთ ნებისმიერ ზრდად $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციასაც. საამისოდ φ უნდა შევასწოროთ ისე, რომ გახდეს მარჯვნიდან უწყვეტი, კერძოდ, უნდა განვიხილოთ $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x+0)$ ტოლობით განსაზღვრული $\tilde{\varphi}$ ფუნქცია. მაშინ m_φ მიიჩნევა φ ფუნქციით წარმოქმნილ ლებეგ-სტილტეისის m_φ ზომად.

შენიშვნა 6.5.3. 5.4.2 და 5.4.3 თეორემების ძალით ნებისმიერი ლებეგ-სტილტეისის m_φ ზომა ცალსახად განსაზღვრება ბორელის სიმრავლეთა $B(\mathbb{R}^n)$ კლასზე მიღებული მნიშვნელობებით, სახელდობრ, m_φ მიიღება $m_\varphi|_{B(\mathbb{R}^n)}$ ზომის შევსების მეშვეობით. აღნიშნულიდან გამომდინარე, m_φ -ზომადი სიმრავლეების $\mathcal{L}_\varphi$ კლასს ცალსახად განსაზღვრავს შემდეგი კლასი:

$$\mathcal{E}_\varphi = \{E \in B(\mathbb{R}^n) : m_\varphi(E) = 0\}.$$

კერძოდ, ადგილი აქვს $\mathcal{L}_\varphi$ -ს შემდეგ წარმოდგენას:

$$\mathcal{L}_\varphi = B(\mathbb{R}^n) \oplus \mathcal{N}_\varphi,$$

სადაც

$$\mathcal{N}_\varphi = \bigcup_{E \in \mathcal{E}_\varphi} 2^E,$$

$$B(\mathbb{R}^n) \oplus \mathcal{N}_\varphi = \{M \cup N : M \in B(\mathbb{R}^n), N \in \mathcal{N}_\varphi\}.$$

ამრიგად, m_φ ზომისა და $\mathcal{L}_\varphi$ კლასის შესახებ სრულყოფილ წარმოდგენას შევიქმნით, თუ, შესაბამისად, გვეცოდინება m_φ -ს მნიშვნელობები ბორელის სიმრავლეებზე და ნაპოვნი გვექნება $\mathcal{E}_\varphi$ კლასი.

მიუხედავად გარკვეული მსგავსებებისა, ლებეგ-სტილტეისის ზომას შეიძლება ჰქონდეს ლებეგის ზომისაგან არსებითად განსხვავებული ხასიათი. მოვიყვანოთ ამის დამადასტურებელი მაგალითი. ვთქვათ, $t \in \mathbb{R}$ და $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

არის შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } -\infty < x < t, \\ 1, & \text{თუ } t \leq x < \infty. \end{cases}$$

ყოველი $(a, b]$ მონაკვეთისათვის გვექნება,

$$m_\varphi((a, b]) = \varphi(b) - \varphi(a) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } t \notin (a, b], \\ 1, & \text{თუ } t \in (a, b]. \end{cases} \quad (1)$$

განვიხილოთ ბორელის კლასზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ν ფუნქცია: ნებისმიერი $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ სიმრავლისათვის,

$$\nu(E) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } t \notin E, \\ 1, & \text{თუ } t \in E. \end{cases}$$

მარტივი შესამოწმებელია, რომ ასეთი ფუნქცია წარმოადგენს ზომას $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ კლასზე. ამის შემდეგ, თუ გავითვალისწინებთ (1) ტოლობას და 5.5.1 თეორემას ზომის გავრძელების ერთადერთობის შესახებ, დაეასკენით, რომ ნებისმიერი $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ სიმრავლისათვის,

$$m_\varphi(E) = \nu(E) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } t \notin E, \\ 1, & \text{თუ } t \in E. \end{cases} \quad (2)$$

როგორც ვხედავთ, $\mathcal{E}_\varphi$ კლასში შედის $(-\infty, t)$ და (t, ∞) მონაკვეთები. აქედან კი, შენიშვნა 6.5.2-ის საფუძველზე გამოვძინარეობს, რომ ნებისმიერი $E \subset \mathbb{R}$ ქვესიმრავლე m_φ -ზომადია და $m_\varphi(E)$ გამოითვლება (2) ტოლობით მოცემული წესით.

ჩვენ მიერ განხილულ m_φ ზომას δ_t ჩანაწერით აღნიშნავენ და უწოდებენ t წერტილში საყრდენის მქონე დირაკის ზომას.

დირაკის ზომის შემთხვევაში, სივრცის მთლიანი მასა თავმოყრილია ერთადერთ წერტილში, განსხვავებით ლებეგის ზომისაგან, რომელიც მასას თანაბრად ანაწილებს რიყვით ლერძზე.

განვიხილოთ საკითხი m_φ -არაზომადი სიმრავლის არსებობის შესახებ. თუ $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია მუდმივია, მაშინ ცხადია, $\mathcal{L}_\varphi = 2^{\mathbb{R}}$. ამიტომ საკითხი საინტერესოა არამუდმივი φ ფუნქციის შემთხვევაში. ამ მიმართულებით სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 6.5.1. ვთქვათ, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ არის ზრდადი და უწყვეტი ფუნქცია, $a < b$ და $\varphi(a) < \varphi(b)$. მაშინ არსებობს $A \subset [a, b]$ სიმრავლე, რომელიც არაა ზომადი m_φ ზომის მიხედვით.

დამტკიცება. თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ φ ფუნქციის უწყვეტობის გამო ყოველი $x \in \mathbb{R}$ წერტილისათვის, $m_\varphi(\{x\}) = 0$. შედეგად, ყოველი სასრული ან იელადი $A \subset \mathbb{R}$ სიმრავლისათვის, $m_\varphi(A) = 0$.

ცნობილია, რომ (ის. მაგ., [10], თავი 2, ან [11], თავი 5) არსებობს $A \subset [a, b]$ სიმრავლე თვისებით: არცერთი A და $[a, b] \setminus A$ სიმრავლეებს შორის არ შეიძლება არათვლად ჩაეყვანოს. ასეთი A სიმრავლე ბერნშტეინის ტიპის სიმრავლის ტერმინით მოიხსენიება.

ვაჩვენოთ, რომ ბერნშტეინის ტიპის $A \subset [a, b]$ სიმრავლე არაა m_φ -ზომადი. დაუშვათ საწინააღმდეგო: A არის m_φ -ზომადი. მაშინ A და $[a, b] \setminus A$ სიმრავლეებს შორის ერთ-ერთი მაინც დადებითი ზომის იქნება. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმეთ, რომ $m_\varphi(A) > 0$. როგორც აღვნიშნეთ, ლებეგ-სტილტეისის ზომებისათვის შესაძლებელია ზომადი სიმრავლის შიგნიდან მი-ახლოება ჩაყვანილი სიმრავლეების მეშვეობით (ე.ი. m_φ -სთვის ადგილი აქვს თეორემა 6.2.2-ის ანალოგს). აღნიშნულის ძალით იარსებებს A -ს ჩაყვანილი ქვესიმრავლე F , რომლისთვისაც $m_\varphi(F) > 0$. საიდანაც, დამტკიცების დასაწყისში გაკეთებული შენიშვნის გათვალისწინებით დავასცენით F სიმრავლის არათვლადობას. ამრიგად, F არის A -ს არათვლადი და ჩაყვანილი ქვესიმრავლე. ასეთი რამ კი შეუძლებელია, რადგანაც A ბერნშტეინის ტიპის სიმრავლეა. მიღებული წინააღმდეგობის ძალით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ლებეგ-სტილტეისის ზომები უფრო სიღრმისეულად შესწავლილი იქნება მე-13 თავში.

ამოცანები

1. ვთქვათ, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ არის ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქცია. აჩვენეთ, რომ $m_\varphi(\{x\}) = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა φ არის უწყვეტი x წერტილში.
2. ვთქვათ, I რაიმე წრფეა სიბრტყეზე. ააგეთ ლებეგ-სტილტეისის არანულოვანი ზომა სიბრტყეზე, ისეთი, რომ ყოველ ერთწერტილიან სიმრავლესა და I წრფის გარეთ მდებარე ყოველ სიმრავლეს ჰქონდეს ნულის ტოლი ზომა.

§ 6. ჰაუსდორფის ზომები და ჰაუსდორფის განზომილება

ლებეგის ზომა იძლევა მექანიზმს იმისა, თუ როგორ შეიძლება გავზომოთ სიმრავლის მიერ სივრცეში დაყავებული ადგილი n -განზომილებიანი განფენილობის თვალსაზრისით, მაგრამ არ იძლევა საშუალებას, გავზომოთ დაბალგანზომილებიანი სიმრავლეები, კერძოდ, წირის სიგრძე ანაც ზედაპირის ფართობი. ასეთი საკითხი წყდება ჰაუსდორფის ზომების მეშვეობით. კერძოდ, ჰაუსდორფის ერთგანზომილებიანი ზომა იძლევა წირის და სხვა „ერთგანზომილებიანი“ სიმრავლეების სიგრძის პოვნის საშუალებას, ორგანზომილებიანი ზომა - ზედაპირის და სხვა „ორგანზომილებიანი“ სიმრავლეების ფართობის პოვნის საშუალებას. საზოგადოდ, d -განზომილებიანი ჰაუსდორფის ზომა ახდენს სივრცის „ d -განზომილებიანი“ ქვესიმრავლეების გამოვლას. ჰაუსდორფის

ზომისა და განზომილების ცნებებს ფუნდამენტური მნიშვნელობა აქვს ზომის გეომეტრიულ თეორიაში.

ვიქვით, $d \geq 0$ და $\varepsilon > 0$. H_d^ε -თი აღვნიშნოთ ფუნქცია, რომელიც ნებისმიერი $A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისათვის განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$H_d^\varepsilon(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam } A_k)^d : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \text{diam } A_k < \varepsilon (k \in \mathbb{N}) \right\}.$$

H_d^ε ფუნქციას აქვს გარე ზომის თვისებები. მართლაც, ნახევრად ადგიურობა მოწმდება თეორემა 5.1.2-ის მსგავსად, ხოლო დანარჩენი თვისებები ცხადია. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ თუ ε -ს შევამცირებთ, მაშინ ინფიმუმი აიღება დაფარვების უფრო შეზღუდული კლასის მიმართ, რის გამოც $H_d^\varepsilon(A)$ გამოსახულების მნიშვნელობა იზრდება. აღნიშნულის ძალით, ნებისმიერი $A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისათვის არსებობს სასრული ან უსასრულო ზღვარი $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_d^\varepsilon(A)$, რაც საშუალებას იძლევა შემოვიღოთ ფუნქცია:

$$H_d^*(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_d^\varepsilon(A) \quad (A \subset \mathbb{R}^n).$$

ცხადია, $H_d^*(A)$ შეიძლება განესაზღვროთ $\sup_{\varepsilon > 0} H_d^\varepsilon(A)$ გამოსახულების მეშვეობითაც.

თეორემა 6.6.1. H_d^* ($d \geq 0$) ფუნქცია წარმოადგენს გარე ზომას.

დამტკიცება. ადვილი დასანახია, რომ H_d^* არის არაუარყოფითი, ზრდადი და $H_d^*(\emptyset) = 0$.

შევამოწმოთ H_d^* ფუნქციის თვლადად ნახევრადადიურობა. დაეუწუთ, $A, A_1, A_2, \dots$ არიან $\mathbb{R}^n$ -ის ქვესიმრავლეები და $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ ყოველი დადებითი ε -სთვის H_d^ε არის გარე ზომა, გვექნება,

$$H_d^*(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_d^\varepsilon(A) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} H_d^\varepsilon(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} H_d^*(A_k).$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

H_d^* ფუნქციას ეწოდება ჰაუსდორფის d -განზომილებიანი გარე ზომა $\mathbb{R}^n$ სივრცეში.

$d \geq 0$ რიცხვისათვის, ჰაუსდორფის d -განზომილებიანი ზომა $\mathbb{R}^n$ სივრცეში ეწოდება H_d^* გარე ზომით წარმოქმნილ ზომას. ჰაუსდორფის d -განზომილებიანი ზომა აღვნიშნოთ H_d -თი.

შენიშვნა 6.6.1. ჰაუსდორფის ზომა, განსხვავებით ლებეგ-სტილტესის ზომებისაგან, არაა წარმოქმნილი რაიმე რეკლზე წინასწარ მოცემული ზომის ლებეგისეული გაგრძელების შედეგად. ჰაუსდორფის ზომის კონსტრუქცია ეფუძნება ზომის წარმოქმნის კარათეოდორის მეთოდს.

დაუპტიცებლად მოვიყვანოთ $\mathbb{H}^n$ -ის ზომებისა და გარე ზომების ზოგიერთი თვისება:

- H_0 წარმოადგენს დამთვლელ ზომას;
- H_n ზომა ლებეგის m_n ზომის პროპორციულია, ე.ი. ზომად სიმრავლეთა კლასები ერთიდაიგივეა აღნიშნული ზომების თვალსაზრისით და $H_n(A) = c_n m_n(A)$ ყოველი $A \in \mathcal{L}_n$ სიმრავლისათვის, სადაც c_n არის დადებითი მუდმივი;
- თუ $d > n$, მაშინ H_d^* ტრივიალურია, სასელდობრ, ყოველი $A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისათვის $H_d^*(A) = 0$;
- ყოველი ბორელის სიმრავლე H_d -ზომადია, ანუ შედის H_d -ს განსაზღვრის არეში;
- თუ $H_d^*(A) > 0$, მაშინ ყოველი $s < d$ -სთვის, $H_s^*(A) = \infty$;
- თუ $H_d^*(A) < \infty$, მაშინ ყოველი $s > d$ -სთვის, $H_s^*(A) = 0$.

$A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის $\mathbb{H}^n$ -ის განზომილება ეწოდება რიცხვს:

$$\inf \{d \geq 0 : H_d^*(A) = 0\}.$$

$\mathbb{H}^n$ -ის განზომილება აღინიშნება $\dim_H A$ ჩანაწერით.

შენიშვნა 6.1.2. ადვილი შესამოწმებელია, რომ წერტილის $\mathbb{H}^n$ -ის განზომილება - ნულის, ხოლო მონაკვეთის - ერთის ტოლია. არსებობენ არამთელი განზომილების სიმრავლეები, რომელთა ყველაზე ცნობილი მაგალითია კანტორის $\mathbb{D}$ სიმრავლე. $\mathbb{D}$ -ს $\mathbb{H}^n$ -ის განზომილება $\ln 2 / \ln 3$ -ის ტოლია.

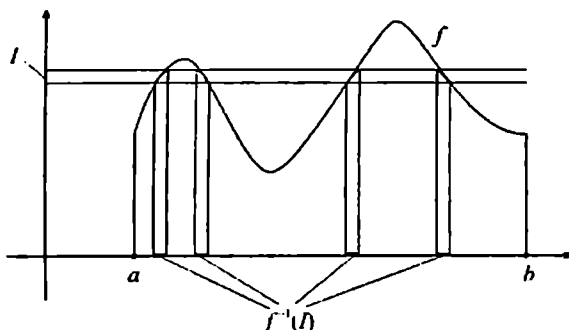
შენიშვნა 6.1.3. H_d^* გარე ზომების ზემოთ მოცემული მე-5 და მე-6 თვისებების საფუძველზე გვაქვს, რომ: $H_d^*(A) = 0$, თუ $d > \dim_H A$ და $H_d^*(A) = \infty$, თუ $0 < d < \dim_H A$. $d = \dim_H A$ შემთხვევაში საზოგადოდ არ გამოირიცხება არცერთი $H_d^*(A) = 0$, $0 < H_d^*(A) < \infty$ და $H_d^*(A) = \infty$ შესაძლებლობებს შორის.

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ $\mathbb{H}^n$ -ის ზომებისა და გარე ზომების ზემოთ მოცემული თვისებები.
2. აჩვენეთ, რომ კანტორის სიმრავლის $\mathbb{H}^n$ -ის განზომილება $\ln 2 / \ln 3$ -ის ტოლია.
3. ააგეთ ლებეგის აბრით ნული ზომის სიმრავლე წრფეზე, რომლის $\mathbb{H}^n$ -ის განზომილება ერთის ტოლია.
4. ააგეთ კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლე წრფეზე, რომლის $\mathbb{H}^n$ -ის განზომილება ნულის ტოლია.

ზომადი ფუნქციები

ლებეგის ინტეგრალის კონსტრუქცია ეფუძნება ზომადად წოდებული ფუნქციების, ანუ ისეთი ფუნქციების განხილვას, რომელთათვისაც უმრუნველყოფილია $f^{-1}(I)$ სახის სიმრავლეების (ნახ. 7.1) ზომადობა, სადაც I რიცხვითი ღერძის რაიმე მონაკვეთია.



ნახ. 7.1.

ეს თავი ეთმობა ზომად ფუნქციათა თვისებების შესწავლას.

§ 1. ზომადი ფუნქციის ცნება

გაფართოებულ რიცხვით $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ ღერძზე მონაკვეთი განისაზღვრება ისევე, როგორც ჩვეულებრივ რიცხვით ღერძზე, ე.ი. ეწოდება სიმრავლეს, რომელიც თავის ნებისმიერ ორ წერტილთან ერთად შეიცავს მათ შორის მოთავსებულ ნებისმიერ წერტილსაც. აქვე შევნიშნოთ, რომ $\overline{\mathbb{R}}$ -ის ბორელის σ -ალგებრა განისაზღვრება, როგორც A , $A \cup \{-\infty\}$, $A \cup \{+\infty\}$ და $A \cup \{-\infty, +\infty\}$ სახის ყველა სიმრავლის კლასი, სადაც A რიცხვითი ღერძის ნებისმიერი ბორელის სიმრავლეა.

შემდგომში განვიხილავთ ფუნქციებს, რომლებიც შეიძლება უსასრულო მნიშვნელობებს ღებულობდნენ. თუ ფუნქცია ყოველ წერტილში სასრულ მნიშვნელობას ღებულობს, მაშინ ვიტყვით, რომ მოცემული გვაქვს სასრული ფუნქცია.

ზომიანი სივრცე ეწოდება სამეულს (X, S, μ) , სადაც X არის არაყარიელი სიმრავლე, S არის X -ის ქვესიმრავლეთა რაიმე σ -ალგებრა, ხოლო μ კი, S -ზე განსაზღვრული რაიმე ზომა. $E \in S$ სიმრავლეებს μ -ზომადი (მოყუდ, ზომადი) სიმრავლეები ეწოდებათ.

ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ (X, S, μ) ფიქსირებული ზომიანი სივრცეა და განვიხილავთ X -ზე განსაზღვრულ ფუნქციებს.

f ფუნქციას ეწოდება μ -ზომადი (მოყუდ, ზომადი), თუ გაფართოებული რიცხვითი ღერძის ნებისმიერი I მონაკვეთის $f^{-1}(I)$ წინასახე μ -ზომადი სიმრავლეა.

ფუნქციის ზომადობა საესებით ანალოგიურად ფორმულირდება X -ის ზომად E ქვესიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქციების შემთხვევაში. შევნიშნოთ, რომ $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციის ზომადობას შეიძლება შეეხედოთ, როგორც $(E, S \cap E, \mu|_{S \cap E})$ სივრცეზე ზომადობას.

არსებობს ფუნქციის ზომადობის სხვა განსაზღვრებებიც, რომელთა ეკვივალენტობას ადგენს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 7.1.1. ნებისმიერი f ფუნქციისათვის შემდეგი წინადადებები ტოლფასია:

- f ზომადია;
- ყოველი $I = [a, \infty]$ სახის მონაკვეთისათვის, $f^{-1}(I) \in S$;
- ყოველი $I = (a, \infty]$ სახის მონაკვეთისათვის, $f^{-1}(I) \in S$;
- ყოველი $I = [-\infty, a]$ სახის მონაკვეთისათვის, $f^{-1}(I) \in S$;
- ყოველი $I = [-\infty, a)$ სახის მონაკვეთისათვის, $f^{-1}(I) \in S$;
- გაფართოებული რიცხვითი ღერძის ყოველი ბორელის A ქვესიმრავლისათვის, $f^{-1}(A) \in S$.

ზომადი სივრცე ეწოდება (X, S) წყვილს, სადაც X რაიმე არაყარიელი სიმრავლეა, ხოლო S არის X -ის ქვესიმრავლეთა რაიმე σ -ალგებრა.

ლემა 7.1.1. ვთქვათ, (X, S) ზომადი სივრცეა. მაშინ ნებისმიერი $f: X \rightarrow Y$ ასახვისათვის,

$$H_f = \{A \subset Y \mid f^{-1}(A) \in S\}$$

კლასი წარმოადგენს σ -ალგებრას.

დამტკიცება. H_f კლასის საჭირო თვისებები უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობებიდან:

$$f^{-1}(Y) = X, \quad f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B),$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n),$$

სადაც A, B და A_n ($n \in \mathbb{N}$) წარმოადგენენ H_f -ის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს. $\square$

ვთქვათ, X და Y არაცარიელი სიმრავლეებია, S და T შესაბამისად წარმოადგენენ X -ის და Y -ის ქვესიმრავლეთა რაიმე კლასებს. $f: X \rightarrow Y$ ასახვას ეწოდება (S, T) -ზომადი, თუ ყოველი $A \in T$ სიმრავლის $f^{-1}(A)$ წინასახე ეკუთვნის S კლასს.

შევნიშნოთ, რომ ზომიან (X, S, μ) სივრცეზე განსაზღვრული f ფუნქციის ზომადობა ნიშნავს მის (S, T) -ზომადობას, სადაც T არის გაფართოებული რიცხვითი ღერძის ყველა შესაძლო მონაკვეთის კლასი.

ლემა 7.1.2. ვთქვათ, (X, S) ზომადი სივრცეა, Y არაცარიელი სიმრავლეა, ხოლო H_1 და H_2 არიან Y -ის ქვესიმრავლეთა კლასები, ისეთები, რომ $\sigma a(H_1) = \sigma a(H_2)$. მაშინ ნებისმიერი $f: X \rightarrow Y$ ასახვისათვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- f ასახვა (S, H_1) -ზომადია;
- f ასახვა (S, H_2) -ზომადია.

დამტკიცება. დაეუშვათ, რომ f ასახვა (S, H_1) -ზომადია. ცხადია, $H_1 \subset H_f$. საიდანაც, ლემა 7.1.1-ის ძალით მივიღებთ, რომ $\sigma a(H_1) \subset H_f$. აქედან, ლემის პირობის გათვალისწინებით გვექნება: $H_2 \subset \sigma a(H_2) = \sigma a(H_1) \subset H_f$. რაც ცხადია, იწვევს f ასახვის (S, H_2) -ზომადობას. ანალოგიურად ვაჩვენებთ შებრუნებული იმპლიკაციის სამართლიანობას. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 7.1.1-ის დამტკიცება. H_1 იყოს გაფართოებული რიცხვითი ღერძის ყველა შესაძლო მონაკვეთის კლასი, ხოლო H_i ($i \in \overline{2, 6}$) იყოს რიგით i -ურ წინადადებაში მითითებული ყველა იმ სიმრავლის კლასი, რომელთათვისაც გარანტირებულია წინასახეთა ზომადობა (მაგალითად, H_3 იქნება ყველა $I = (a, \infty]$ სახის მონაკვეთის კლასი).

§3.4-ში დადგენილი შედეგების საფუძველზე ადვილი შესამოწმებელია, რომ H_i ($i \in \overline{1, 6}$) კლასებით წარმოქმნილი σ -ალგებრები ერთი და იგივეა და ტოლია $B(\mathbb{R})$ ბორელის σ -ალგებრისა. საიდანაც, ლემა 7.1.2-ის ძალით ვასკენით ექვსივე წინადადების ეკვივალენტურობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 7.1.1. საზოგადოდ, თუ ვიცით, რომ გაფართოებული რიცხვითი ღერძის ქვესიმრავლეთა H კლასით წარმოქმნილი σ -ალგებრა ემთხვევა $B(\mathbb{R})$ ბორელის σ -ალგებრას, მაშინ f ფუნქციის ზომადობა ტოლფასია შემდეგი პირობის: ყოველი $A \in H$ სიმრავლისათვის, $f^{-1}(A) \in S$.

$A \subset X$ სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია X სიმრავლეში (მოცულ, მახასიათებელი ფუნქცია) აღინიშნება χ_A სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } x \in A, \\ 0, & \text{თუ } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

შემდგომში სიმოცლისათვის $\{f > a\}$ -თი აღვნიშნავთ $f^{-1}((a, \infty)) = \{x \in X : f(x) > a\}$ სიმრავლეს. მსგავსად იქნება გაგებული $\{f \geq a\}$, $\{f < a\}$ და ა.შ. აღნიშვნები.

თეორემა 7.1.2. $A \subset X$ სიმრავლის მახასიათებელი χ_A ფუნქცია ზომადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ზომადია A სიმრავლე.

დამტკიცება. განვიხილოთ $(a, \infty]$ სახის მონაკვეთების წინასახეები χ_A ფუნქციის მოქმედებისას. გვეჩვენება, რომ

$$\{\chi_A > a\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{თუ } a \geq 1, \\ A, & \text{თუ } 0 \leq a < 1, \\ X, & \text{თუ } a < 0. \end{cases}$$

საიდანაც, თეორემა 7.1.1-ის ძალით ვასკენით დასამტკიცებელი დებულების სამართლიანობას. $\square$

ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}^n$ ლებეგის აბრით მომადი სიმრავლეა. $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ფუნქციას ეწოდება ლებეგის აბრით ზომადი, თუ გაფართოებული რიცხვითი ღერძის ნებისმიერი I მონაკვეთის $f^{-1}(I)$ წინასახე ლებეგის აბრით მომადი სიმრავლეა.

ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}^n$ ბორელის სიმრავლეა. $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ფუნქციას ეწოდება ბორელის აბრით ზომადი, თუ გაფართოებული რიცხვითი ღერძის ნებისმიერი I მონაკვეთის $f^{-1}(I)$ წინასახე ბორელის კლასის სიმრავლეა.

ცხადია, ყოველი ბორელის აბრით მომადი ფუნქცია ზომადია ლებეგის აბრითაც.

არაუცარიელ $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეზე განსაზღვრული სასრული f ფუნქციის უწყვეტობა გაიგება E სიმრავლეში ბუნებრივი მანძილის მიხედვით.

თეორემა 7.1.3. ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}^n$ ლებეგის აბრით ზომადი სიმრავლეა და $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ უწყვეტი ფუნქციაა. მაშინ f ლებეგის აბრით ზომადია.

დამტკიცება. განვიხილოთ (a, ∞) სახის მონაკვეთების წინასახეები f ფუნქციის მოქმედებისას. უწყვეტ ასახვათა მახასიათებელი თვისება მდგომარეობს იმაში, რომ (იხ. დანართი 2) ღია სიმრავლის წინასახე ასევე ღია სიმრავლეა. ამ თვისების ძალით, $f^{-1}((a, \infty))$ არის E -ს ღია ქვესიმრავლე E -ში არსებული ბუნებრივი მანძილის მიხედვით. შედეგად (იხ. დანართი 2), $f^{-1}((a, \infty))$ წარმოდგება $G \cap E$ სახით, სადაც G არის ღია სიმრავლე $\mathbb{R}^n$ სივრცეში. აქედან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\mathbb{R}^n$ -ის ნებისმიერი ღია სიმრავლე ლებეგის აზრით ზომადია, თეორემა 7.1.1-ის ძალით დავასკენით f ფუნქციის ლებეგის აზრით ზომადობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 7.1.2. ღირისლეს ფუნქციის, ანუ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქციის მაგალითი გვიჩვენებს, რომ ლებეგის აზრით ზომადი ფუნქცია შეიძლება ყველა წერტილში წყვეტილი იყოს.

თეორემა 7.1.3-ის მსგავსად მტკიცდება შემდეგი ლებულება.

თეორემა 7.1.4. ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}^n$ ბორელის სიმრავლეა და $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ უწყვეტი ფუნქციაა. მაშინ f ბორელის აზრით ზომადია.

აქვე შევნიშნოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ორი მარტივად შესა-
მოწმებელი წინადადება: 1) რიცხვითი ღერძის ლებეგის აზრით ზომად ქვესი-
მრავლეზე განსაზღვრული ნებისმიერი მონოტონური ფუნქცია ლებეგის აზრით
ზომადია; 2) რიცხვითი ღერძის ბორელის აზრით ზომად ქვესიმრავლეზე გან-
საზღვრული ნებისმიერი მონოტონური ფუნქცია ბორელის აზრით ზომადია.

ამოცანები

1. აჩვენეთ, რომ თუ f ზომადი ფუნქციაა, მაშინ $\{f = a\}$ სიმრავლე ზომა-
დია ნებისმიერი $a \in \mathbb{R}$ -სთვის. არის თუ არა სამართლიანი შებრუნებული
წინადადება?
2. აჩვენეთ, რომ თუ $\{f > r\}$ სიმრავლე ზომადია ყოველი რაციონალური r
რიცხვისათვის, მაშინ f ფუნქცია ზომადია.

§ 2. ზომადი ასახვების კომპოზიცია

თეორემა 7.2.1. ვთქვათ, ყოველი $k \in \overline{1, 3}$ -სთვის X_k არა ცარიელი
სიმრავლეა, ხოლო S_k არის X_k -ს ქვესიმრავლეთა რაიმე არა ცარიელი
კლასი. თუ $f : X_1 \rightarrow X_2$ ასახვა (S_1, S_2) -ზომადია, ხოლო $g : X_2 \rightarrow X_3$
ასახვა კი (S_2, S_3) -ზომადი, მაშინ მათი $g \circ f$ კომპოზიცია არის (S_1, S_3) -
ზომადი.

დამტკიცება. ვთქვათ, $A \in S_3$. მაშინ g -ს (S_2, S_3) -ზომადობის ძალით,
 $g^{-1}(A) \in S_2$. შემდეგ კი, f -ის (S_1, S_2) -ზომადობის ძალით გვეჩვენება, რომ

$f^{-1}(g^{-1}(A)) \in S_1$. საიდანაც, თუ გავითვალისწინებთ $f^{-1}(g^{-1}(A)) = (g \circ f)^{-1}(A)$ ტოლობას, დავასკვნით $g \circ f$ ასახვის (S_1, S_3) -ზომადობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 7.2.2. ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა, $f_k: X \rightarrow \mathbb{R}$ ($k \in \overline{1, n}$) μ -ზომადი ფუნქციებია, ხოლო $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ბორელის აზრით ზომადი ფუნქციაა. მაშინ შემდეგნაირად განსაზღვრული $F(f_1, \dots, f_n)$ ფუნქცია:

$$X \ni x \mapsto F(f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \mathbb{R},$$

არის μ -ზომადი.

დამტკიცება. Φ -თი აღვნიშნოთ შემდეგი ასახვა:

$$X \ni x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

ესადა, $F(f_1, \dots, f_n) = F \circ \Phi$. ვაჩვენოთ, რომ Φ არის (S, Δ_n) -ზომადი, სადაც Δ_n აღნიშნავს $\mathbb{R}^n$ სივრცეში $\bigtimes_{k=1}^n (a_k, \infty)$ სახის ყველა n -განზომილებიანი მონაკვეთის კლასს. მართლაც, f_k ფუნქციების ზომადობის საფუძველზე გვქვინება,

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}\left(\bigtimes_{k=1}^n (a_k, \infty)\right) &= \left\{x \in X : (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \bigtimes_{k=1}^n (a_k, \infty)\right\} = \\ &= \bigcap_{k=1}^n \{x \in X : f_k(x) > a_k\} \in S. \end{aligned}$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ Δ_n კლასით წარმოქმნილი σ -ალგებრა ემთხვევა $\mathbb{R}^n$ სივრცის ბორელის σ -ალგებრას (იხ. §3.4), მაშინ ლემა 7.1.2-ის საფუძველზე დავასკვნით Φ ასახვის $(S, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ -ზომადობას.

ამრიგად, Φ ასახვა არის $(S, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ -ზომადი, ხოლო F ფუნქცია კი, $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -ზომადი. შედეგად, თეორემა 7.2.1-ის ძალით $F(f_1, \dots, f_n)$ ფუნქცია იქნება ზომადი. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შედეგი 7.2.1. ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}$ ლებეგის აზრით ზომადი არა ცარიელი სიმრავლეა, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია ლებეგის აზრით ზომადია, ხოლო $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია კი არის ბორელის აზრით ზომადი. მაშინ $F \circ f$ ფუნქცია ლებეგის აზრით ზომადია.

შენიშვნა 7.2.1. შემდგომში (იხ. §7.4) ნაჩვენები იქნება, რომ ლებეგის აზრით ზომადი ორი ფუნქციის კომპოზიცია შეიძლება არ იყოს ლებეგის აზრით ზომადი.

§ 3. მოქმედებები ზომად ფუნქციებზე

ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ (X, S, μ) ფიქსირებული ზომიანი სივრცეა და განვიხილავთ X -ზე განსაზღვრულ ფუნქციებს.

როგორც შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, არითმეტიკული ხასიათის ოპერაციებს არ გამოეყვართ ზომად ფუნქციათა კლასიდან.

თეორემა 7.3.1. ვთქვათ, f და g ზომადი სასრული ფუნქციებია. მაშინ შემდეგი ფუნქციები ზომადია: cf ($c \in \mathbb{R}$), $f + g$, fg , $1/g$ (თუ $0 \notin g(X)$), $\min(f, g)$, $\max(f, g)$, $|f|$.

დამტკიცება. დასამტკიცებელი წინადადებები გამომდინარეობენ თეორემა 7.2.2-დან, თუ მას შესაბამისად გამოვიყენებთ შემდეგი ფუნქციებისათვის:

$$F_1(t) = ct; \quad F_2(t_1, t_2) = t_1 + t_2; \quad F_3(t_1, t_2) = t_1 t_2;$$

$$F_4(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & \text{როცა } t \neq 0, \\ 0, & \text{როცა } t = 0; \end{cases}$$

$$F_5(t_1, t_2) = \min(t_1, t_2); \quad F_6(t_1, t_2) = \max(t_1, t_2); \quad F_7(t) = |t|.$$

შევნიშნოთ, რომ თეორემა 7.2.2-ის გამოყენების საფუძველია F_k ფუნქციების ბორელის აბრით ზომადობა, რაც $k \neq 4$ შემთხვევებში გამომდინარეობს F_k ფუნქციების უწყვეტობიდან, ხოლო $k = 4$ შემთხვევაში კი, F_4 ფუნქციის უწყვეტობიდან $(-\infty, 0)$ და $(0, \infty)$ სხივებზე.

თეორემა დამტკიცებულია. □

შვითანხმდეთ, რომ: $\infty + a = a + \infty = \infty$ ($a \in \mathbb{R}$), $-\infty + a = a + (-\infty) = -\infty$ ($a \in \mathbb{R}$), $\infty + \infty = \infty - (-\infty) = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty + (-\infty) = -\infty$, $\infty - \infty = -\infty - (-\infty) = 0$, $a \times (\pm\infty) = (\pm\infty) \times a = \pm\infty$ ($a \in \mathbb{R}, a > 0$), $a \times (\pm\infty) = (\pm\infty) \times a = \mp\infty$ ($a \in \mathbb{R}, a < 0$), $0 \times (\pm\infty) = (\pm\infty) \times 0 = 0$, $\infty \times \infty = (-\infty) \times (-\infty) = \infty$, $(-\infty) \times \infty = \infty \times (-\infty) = -\infty$, $\frac{\infty}{\pm\infty} = 0$ ($a \in \mathbb{R}$), $-\infty < a < \infty$ ($a \in \mathbb{R}$).

თეორემა 7.3.1-ის მსგავსი დებულება სამართლიანია ნებისმიერი (არა აუცილებლად სასრული) ფუნქციებისთვისაც.

თეორემა 7.3.2. ვთქვათ, f და g ზომადი ფუნქციებია. მაშინ შემდეგი ფუნქციები ზომადია: cf ($c \in \mathbb{R}$), $f + g$, fg , $1/g$ (თუ $0 \notin g(X)$), $\min(f, g)$, $\max(f, g)$, $|f|$.

დამტკიცება. დაეამტკიცოთ fg ნამრავლის ზომადობა. დანარჩენი შემთხვევები ანალოგიურია.

ადვილი შესაძოწმებელია შემდეგი დებულების სამართლიანობა: დაეუშვათ, h რაიმე ფუნქციაა X -ზე, ხოლო $A_1, \dots, A_n$ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთა

ზომადი სიმრავლეებია, რომელთა გაერთიანება X -ის ტოლია. მაშინ h ფუნქციის ზომადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია ზომადი იყოს ითითოეული $h|_{A_1}, \dots, h|_{A_n}$ ფუნქციებს შორის.

ნებისმიერი h ფუნქციისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები: $A_1(h) = \{0 < |h| < \infty\}$, $A_2(h) = \{h = \infty\}$, $A_3(h) = \{h = -\infty\}$, $A_4(h) = \{h = 0\}$.

გემოთ მოცემული დებულების ძალით, fg ფუნქციის ზომადობა დადგენილი იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ თითოეული $(fg)|_{A_i(f) \cap A_j(g)}$ ($i, j \in \overline{1, 4}$) შეზღუდვებს შორის არის ზომადი. ეს ფაქტი უშუალოდ მოწმდება, თუ ერთ-ერთი მაინც i და j ინდექსებს შორის არ უდრის 1-ს. რაც შეეხება $i = 1, j = 1$ შემთხვევას: გემოთ მოცემული დებულების ძალით, $f|_{A_1(f) \cap A_1(g)}$ და $g|_{A_1(f) \cap A_1(g)}$ ფუნქციები ზომადია, საიდანაც თუ გავითვალისწინებთ

$$(fg)|_{A_1(f) \cap A_1(g)} = f|_{A_1(f) \cap A_1(g)} g|_{A_1(f) \cap A_1(g)}$$

ტოლობას და გამოვიყენებთ თეორემა 7.3.1-ს, დაეასყენით $(fg)|_{A_1(f) \cap A_1(g)}$ ფუნქციის ზომადობას. ამით fg ნამრავლის ზომადობა დადგენილია. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

არითმეტიკულ ოპერაციებთან ერთად ზომად ფუნქციათა კლასი ჩაეკტილია ზღვარითი ოპერაციების მიმართაც, კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 7.3.3. თუ (f_n) ზომადი ფუნქციების მიმდევრობაა, მაშინ შემდეგი ფუნქციები ზომადია:

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n, \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

კერძოდ, თუ ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის არსებობს სასრული ან უსასრულო ზღვარი $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, მაშინ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ ფუნქცია ზომადია.

დამტკიცება. ნებისმიერი $a \in \overline{\mathbb{R}}$ -სთვის გვაქვს, რომ:

$$\{x : \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) \geq a\} \in S;$$

$$\{x : \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) \leq a\} \in S.$$

ამით $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ და $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ფუნქციების ზომადობა დადგენილია.

თუ გავითვალისწინებთ ტოლობებს: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} [\inf_{k \geq n} f_k]$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} [\sup_{k \geq n} f_k]$, მაშინ ზომად ფუნქციათა სუპრემუმისა და ინფიმუმის ზომადობის უკვე დადგენილი თვისებიდან გამომდინარე, დაეასყენით $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ და $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$ ფუნქციების ზომადობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

1. აჩვენეთ, რომ თუ f^3 ზომადი ფუნქციაა, მაშინ f ზომადია. არის თუ არა იგივე დასვენა სამართლიანი f^2 -ის ზომადობის შემთხვევაში?
2. აჩვენეთ, რომ თუ Ω ზომად ფუნქციითა არათვლადი კლასია, მაშინ $\inf_{f \in \Omega} f(x)$ და $\sup_{f \in \Omega} f(x)$ შეიძლება არაზომადი ფუნქციები იყვნენ.
3. აჩვენეთ, რომ თუ Ω არის $[0, 1]$ -ზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციითა არა-ცარიელი კლასი, მაშინ $\inf_{f \in \Omega} f(x)$ და $\sup_{f \in \Omega} f(x)$ ფუნქციები ლებეგის ამრით ზომადი არიან.
4. ეთქვას, $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია ლებეგის ამრით ზომადია. აჩვენეთ, რომ ყველა იმ წერტილის A სიმრავლე, რომელშიც არსებობს f -ის სასრული წარმოებული, არის ლებეგის ამრით ზომადი. აჩვენეთ აგრეთვე, რომ f' , როგორც A სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია, არის ლებეგის ამრით ზომადი.

§ 4. კანტორის ფუნქცია

ქვემოთ მოცემული აგება მიზნად ისახავს ნამდვილი ანალიზის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ობიექტის - კანტორის ფუნქციის განსაზღვრას.

Π_n -ით აღვნიშნოთ კანტორის სიმრავლის აგების n -ურ ეტაპზე $[0, 1]$ სეგმენტიდან ამოგდებული ყველა ინტერვალის კლასი, ხოლო Λ_n იყოს $\Pi_1, \dots, \Pi_n$ კლასების გაერთიანება.

Λ_n შედგება $2^n - 1$ ცალი წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ინტერვალისაგან: $\Lambda_n = \{I_1, \dots, I_{2^n-1}\}$, ხოლო Π_{n+1} შედგება 2^n ცალი წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ინტერვალისაგან: $\Pi_{n+1} = \{J_1, \dots, J_{2^n}\}$. ვიგულისხმობთ, რომ როგორც I_k , ასევე J_k ინტერვალები გადანომრილია მათი მდებარეობის მარცხნიდან მარჯვნივ გადანაცვლების შესაბამისად. შევნიშნოთ, რომ Π_{n+1} კლასის ინტერვალები ლავდებიან Λ_n კლასის ინტერვალებს შორის, სახელდობრ, J_1 მოთავსებულია $x = 0$ წერტილსა და I_1 ინტერვალს შორის, J_2 მოთავსებულია I_1 და I_2 ინტერვალებს შორის, და ა.შ. J_{2^n} მოთავსებულია I_{2^n-1} ინტერვალსა და $x = 1$ წერტილს შორის. ამრიგად, Λ_n -დან Λ_{n+1} -ზე გადასვლისას ხდება კლასის გაფართოება, რომლის დროსაც შემომატებული ინტერვალები ითავებენ კენტნომრიან $1, 3, \dots, 2^{n+1} - 1$ პოზიციებს, ხოლო Λ_n -ში შემავალი ძველი ინტერვალები გადადიან ლუწნომრიან: $2, 4, \dots, 2^{n+1} - 2$ პოზიციებზე.

θ_n იყოს ფუნქცია, რომელიც Λ_n კლასის $I_1, I_2, \dots, I_{2^n-1}$ ინტერვალებზე შესაბამისად ლებულობს $\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \dots, \frac{2^n-1}{2^n}$ მნიშვნელობებს.

იმის გათვალისწინებით, თუ როგორ ხდება Λ_n -დან Λ_{n+1} -ზე გადასვლისას შემომატებული და მანამდე არსებული ინტერვალების გადანომვრა, ადვილი დასაბამია, რომ ყოველი n -სთვის θ_{n+1} წარმოადგენს θ_n -ის გაგრძელებას. ეს

უკანასკნელი გარემოება საშუალებას იძლევა შემოვიღოთ θ^* ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია კანტორის სიმრავლის ყველა დამატებით ინტერვალზე (ე.ი. $[0, 1] \setminus \mathbb{D}$ სიმრავლეზე) და ყოველი n -სთვის წარმოადგენს θ_n ფუნქციის გაგრძელებას. კერძოდ, θ^* ფუნქციის განსაზღვრისათვის უნდა მოვიქცეთ შემდეგნაირად: კანტორის სიმრავლის ნებისმიერი დამატებითი I ინტერვალისათვის უნდა განვიხილოთ ყველა ის $n, n+1, \dots$ ნომერი, რომელთათვისაც $I \in \Lambda_n$ და θ^* ფუნქციას I ინტერვალზე უნდა მივანიჭოთ $\theta_n, \theta_{n+1}, \dots$ ფუნქციების მიერ I -ზე მიღებული საერთო მნიშვნელობა. მარტივი დასანახია, რომ: θ^* ზრდადია თავის განსაზღვრის არეზე, მუდმივია კანტორის სიმრავლის ყოველ დამატებით ინტერვალზე და ლეზულობს $\frac{k}{2^n}$ ($n \in \mathbb{N}, k = 1, 2, \dots, 2^n - 1$) სახის ყველა მნიშვნელობას.

$\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია განესაზღვროთ შემდეგნაირად: $\theta(0) = 0$ და

$$\theta(x) = \sup\{\theta^*(y) : y \leq x, y \in [0, 1] \setminus \mathbb{D}\} \quad (0 < x \leq 1).$$

ცხადია, θ ზრდადია, ხოლო θ^* ფუნქციის ზრდადობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ θ წარმოადგენს θ^* -ის გაგრძელებას. ამრიგად, θ ზრდადი ფუნქციაა, რომლის მიერ მიღებული მნიშვნელობების სიმრავლე ყველგან მკერძოა $[0, 1]$ -ში, ასეთი თვისებების მქონე ფუნქცია კი უწყვეტია. მართლაც, დაეკუთვათ საწინააღმდეგო: რომელიდაც $x \in [0, 1]$ წერტილში θ განიციდის წყვეტას. აღენიშნოთ

$$I = \begin{cases} (\theta(x), \theta(x+0)), & \text{თუ } x = 0, \\ (\theta(x-0), \theta(x+0)) \setminus \{\theta(x)\}, & \text{თუ } x \in (0, 1), \\ (\theta(x-0), \theta(x)), & \text{თუ } x = 1. \end{cases}$$

θ -ს ზრდადობის გამო აღვილი დასანახია, რომ θ ვერ მიიღებს ეერყერთ მნიშვნელობას I -დან, რაც ეწინააღმდეგება θ -ს მიერ მიღებულ მნიშვნელობათა სიმრავლის ყველგან მკერძოებას $[0, 1]$ -ში.

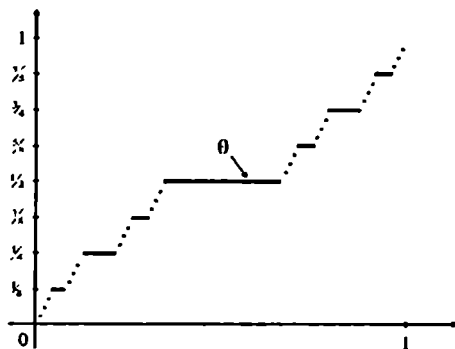
θ -ს კანტორის ფუნქციას უწოდებენ. როგორც ზემოთ დავადგინეთ, θ ფუნქციას აქვს თვისებები:

- θ არის $[0, 1]$ -ზე განსაზღვრული, ზრდადი და უწყვეტი;
- $\theta(0) = 0$ და $\theta(1) = 1$. შედეგად, θ არაა მუდმივი;
- θ მუდმივია კანტორის სიმრავლის ყოველ დამატებით ინტერვალზე. შედეგად, $\theta'(x) = 0$ თითქმის ყველგან $[0, 1]$ -ზე.

ნახ. 7.2-ზე მოცემულია კანტორის ფუნქციის გრაფიკის ესკიზი.

შემდეგი თეორემა მტკიცდება კანტორის ფუნქციის თვისებების გამოყენებით.

თეორემა 7.4.1. არსებობენ ლეზევის აზრით ზომადი $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ და $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ფუნქციები, ისეთები, რომ:



ნახ. 7.2.

- მოიძებნება ლებეგის აზრით ზომადი $A \subset [0, 1]$ სიმრავლე, რომლის $f^{-1}(A)$ წინასახე არაა ლებეგის აზრით ზომადი;
- $g \circ f$ არაა ლებეგის აზრით ზომადი.

დამტკიცება. განვიხილოთ $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია, განსაზღვრული შემდეგი ტოლობით:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\theta(x) + \frac{1}{2}x \quad (x \in [0, 1]),$$

სადაც θ კანტორის ფუნქციაა. თუ გავითვალისწინებთ კანტორის ფუნქციის თვისებებს, დავასკენით, რომ:

- φ მკაცრად მრდადია, უწყვეტია და ბიექტიურად ასახავს $[0, 1]$ სეგმენტს თავის თავში;
- კანტორის სიმრავლის დამატებითი სიმრავლის $\varphi([0, 1] \setminus \mathbb{D})$ ანასახის ზომა $1/2$ -ის ტოლია. შედეგად, $1/2$ -ის ტოლი ზომა აქვს კანტორის სიმრავლის $\varphi(\mathbb{D})$ ანასახსაც.

ყოველი დადებითი ლებეგის ზომის სიმრავლე შეიცავს არაზომად ქვესიმრავლეს. რის გამოც არსებობს $\varphi(\mathbb{D})$ სიმრავლის არაზომადი M ქვესიმრავლე. N -ით აღვნიშნოთ M -ის წინასახე $\varphi^{-1}(M)$. N როგორც ნულზომიანი $\mathbb{D}$ სიმრავლის ქვესიმრავლე, იქნება ლებეგის აზრით ზომადი. ამრიგად, φ ფუნქციის მოქმედებისას ზომადი N სიმრავლის ანასახი გამოდის არაზომადი M სიმრავლე.

f განესაზღვროთ როგორც φ -ს შებრუნებული ფუნქცია. მაშინ f იქნება უწყვეტი და შედეგად, ლებეგის აზრით ზომადიც. ამასთან, შესრუდება ტოლობა $f^{-1}(N) = M$. ამით თეორემის პირველი ნაწილი დადგენილია. შემდეგ, თუ g ფუნქციას განესაზღვრავთ, როგორც N სიმრავლის მახასიათებელ

ფუნქციას. გვექნება, რომ

$$\{g \circ f = 1\} = f^{-1}(\{g = 1\}) = f^{-1}(N) = M.$$

რაც ნიშნავს $g \circ f$ კომპოზიციის არაზომადლობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ქვემოთ მოცემული ორი ლებეგის წარმოადგენს თეორემა 7.4.1-ის შედეგს.

თეორემა 7.4.2. არსებობს ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლე, რომელიც არაა ბორელის სიმრავლე.

დამტკიცება. განვიხილოთ ლებეგის აზრით ზომადი A სიმრავლე და f ფუნქცია თეორემა 7.4.1-დან. მაშინ A ვერ იქნება ბორელის სიმრავლე, ვინაიდან, წინააღმდეგ შემთხვევაში, მისი $f^{-1}(A)$ წინასახე (f -ის ლებეგის აზრით ზომადობის ძალით) გამოვა ლებეგის აზრით ზომადი, რაც ეწინააღმდეგება თეორემა 7.4.1-ის პირველ დასკვნას. $\square$

შენიშვნა 7.4.1. ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეთა $\mathcal{L}$ კლასი რომ უფრო ფართოა, ვიდრე ბორელის სიმრავლეთა $B(\mathbb{R})$ კლასი, ამის დამტკიცება შეიძლება სიმძლავრესთან დაკავშირებულ მოსაზრებებზე დაყრდნობითაც. კერძოდ, $\mathcal{L}$ პიპერკონტინუუმის, ხოლო $B(\mathbb{R})$ კი კონტინუუმის სიმძლავრისაა. $\text{card } \mathcal{L} = 2^c$ ტოლობის მისაღებად საკმარისია გავითვალისწინოთ ლებეგის ზომის სისრულე და კანტორის სიმრავლის ლებეგის აზრით ზომადობა. $B(\mathbb{R})$ კლასისათვის $\text{card } B(\mathbb{R}) = c$ ტოლობის დამტკიცება შედარებით რთულია და მოითხოვს ტრანსფინიტული ინდუქციის გამოყენებას (იხ. მაგ., [6], §1.6).

თეორემა 7.4.3. ბორელის ზომას არა აქვს სისრულის თვისება.

დამტკიცება. განვიხილოთ ლებეგის აზრით ზომადი $A \subset [0, 1]$ სიმრავლე, რომელიც არაა ბორელის სიმრავლე. თეორემა 5.4.3-ის ძალით, A წარმოადგება სახით $A = M \cup N$, სადაც $M \in B(\mathbb{R})$, ხოლო N ისეთია, რომ მისთვის მოიძებნება $\hat{N} \in B(\mathbb{R})$ სიმრავლე თვისებებით: $N \subset \hat{N}$ და $m_B(\hat{N}) = 0$. მაშინ N წარმოადგენს სიმრავლეს, რომელიც ჩართულია ნულის ტოლი ბორელის ზომის მქონე $\hat{N}$ სიმრავლეში, მაგრამ არაა ზომადი ბორელის ზომის მიხედვით. შედეგად, ბორელის ზომას არა აქვს სისრულის თვისება. $\square$

§ 5. ზომადი ფუნქციის მიახლოება მარტივი ფუნქციების მეშვეობით

ეთქვას, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა. $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციას ეწოდება მარტივი, თუ f არის ზომადი და ლებულობს სასრული რაოდენობის მნიშვნელობებს.

მარტივი f ფუნქციის სტანდარტული წარმოდგენა ეუწოდოთ ჯამს:

$$\sum_{k=1}^n a_k \chi_{A_k},$$

სადაც $f(X) = \{a_1, \dots, a_n\}$ და $A_k = \{f = a_k\}$. ცხადია, A_k სიმრავლეები მომადები არიან.

მარტივი ფუნქციის ელემენტარული მაგალითია მომადი A სიმრავლის მახასიათებელი χ_A ფუნქცია.

მარტივ ფუნქციებს არსებითი დატვირთვა აქვთ ლებეგის ინტეგრალის კონსტრუქციაში.

ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობას ეუწოდოთ წერტილოვნად კრებადი, თუ ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის არსებობს $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ზღვარი.

ნებისმიერი მომადი ფუნქცია შეიძლება წარმოადგინოთ, როგორც მარტივ ფუნქციათა მიმდევრობის წერტილოვანი ზღვარი. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 7.5.1. ნებისმიერი ზომადი f ფუნქციისათვის არსებობს მარტივ ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობა, ისეთი, რომ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ ყოველი $x \in E$ წერტილისათვის. თუ f არაუარყოფითი ფუნქციაა, მაშინ (f_n) შეიძლება შევარჩიოთ ისე, რომ დამატებით სრულდებოდეს პირობა:

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \quad (x \in X);$$

ხოლო, თუ f შემოსაზღვრული ფუნქციაა, მაშინ შეიძლება მივადგინოთ (f_n) მიმდევრობის თანაბარ კრებადობას.

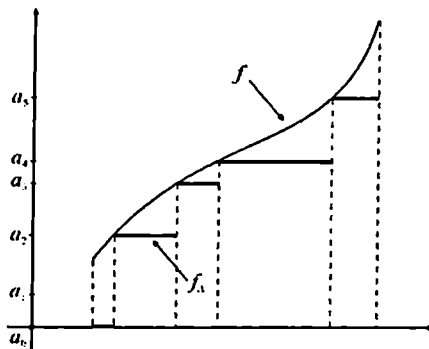
დამტკიცება. ვთქვათ, $\Delta = \{I_0, \dots, I_n\}$ მონაკვეთებისაგან შედგენილი კლასია, ისეთი, რომ: $I_0 = [a_0, a_1), I_1 = [a_1, a_2), \dots, I_{n-1} = [a_{n-1}, a_n), I_n = [a_n, \infty]$, სადაც $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n < \infty$. არაუარყოფითი მომადი f ფუნქციის Δ -გამარტივება ეუწოდოთ შემდეგ ფუნქციას:

$$f_\Delta = \sum_{k=0}^n a_k \chi_{\{f \in I_k\}}.$$

f -დან f_Δ ფუნქციაზე გადასვლისას მართლაც ხდება ფუნქციის ყოფაქცევის გამარტივება, ვინაიდან $\{f \in I_k\}$ სიმრავლეზე f ფუნქცია შეიძლება ლეზულობდეს ნებისმიერ მნიშვნელობას I_k მონაკვეთიდან, მაშინ, როცა f_Δ ლეზულობს ერთადერთ მნიშვნელობას, რომელიც I_k მონაკვეთის ქვედა საზღვრის ტოლია (ნახ. 7.3).

მოვიყვანოთ Δ -გამარტივების თვისებები:

- f_Δ მარტივი ფუნქციაა;



ნახ. 7.3.

- თუ $f(x) < a_n$, მაშინ $0 \leq f(x) - f_\Delta(x) < \lambda_\Delta$, სადაც λ_Δ არის მაქსიმალური Δ კლასის მონაკვეთების სიგრძეებს შორის;
- თუ $f(x) \geq a_n$, მაშინ $f_\Delta(x) = a_n$;
- თუ Δ^* ოჯახის მონაკვეთები მიიღებიან Δ კლასის მონაკვეთების დანაწილების შედეგად, მაშინ $f_{\Delta^*} \geq f_\Delta$.

პირველი, მეორე და მესამე თვისებები მარტივად მოწმდება. მეოთხე თვისების დასადგენად განვიხილოთ ნებისმიერი $x \in X$ წერტილი. $f(x)$ რიცხვი შეეა რომელიმე $I \in \Delta^*$ მონაკვეთში. თავის მხრივ, I მონაკვეთი შედის რომელიმე $J \in \Delta$ მონაკვეთში. მაშინ გვაქვს, რომ $f_{\Delta^*}(x) = \inf I \geq \inf J = f_\Delta(x)$.

ვთქვათ, f არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა. ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -სთვის განვიხილოთ Δ_n კლასი, რომელიც შედგება

$$[0, 1/2^n), [1/2^n, 2/2^n), \dots, [n - 1/2^n, n), [n, \infty)$$

მონაკვეთებისაგან და f_n -ის როლში ავიღოთ f_{Δ_n} ფუნქცია. Δ_{n+1} კლასის მონაკვეთები მიიღებიან Δ_n კლასის მონაკვეთების დანაწილების შედეგად. რის გამოც, Δ -გამარტივების თვისებებიდან გამომდინარე, (f_n) იქნება მარტივი არაუარყოფითი ფუნქციების მრავალი მიმდევრობა, ამასთანავე, შესრულდება პირობები:

$$0 \leq f(x) - f_n(x) < 1/2^n, \quad \text{თუ } f(x) < n;$$

და

$$f_n(x) = n, \quad \text{თუ } f(x) \geq n.$$

ცხადია, (f_n) მიმდევრობა აკმაყოფილებს არაუარყოფითი ფუნქციისათვის თეორემაში მოთხოვნილ ყველა პირობას. აქვე შევნიშნოთ, რომ f ფუნქციის შემოსაზღვრულობის შემთხვევაში, (f_n) მიმდევრობის კრებადობას თანაბარი ხასიათი ექნება.

ნებისმიერი ზომადი f ფუნქციისათვის შემოვიღოთ ფუნქციები:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{თუ } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{თუ } f(x) < 0; \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{თუ } f(x) < 0. \end{cases}$$

მათ, შესაბამისად, f ფუნქციის დადებით და უარყოფით ნაწილებს უწოდებენ. ცხადია, ორივე მათგანი არაუარყოფითია და $f = f^+ - f^-$. თუ გავითვალისწინებთ $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ და $f^- = -\min(f(x), 0)$ ტოლობებს, თეორემა 7.3.2-ის საფუძველზე დავასცენით f^+ და f^- ფუნქციების ზომადობას. განვიხილოთ მარტივ ფუნქციათა (f_n^+) და (f_n^-) მიმდევრობები, რომელთაც აქვთ საჭირო თვისებები, შესაბამისად. f^+ და f^- ფუნქციებთან მიმართებაში. მაშინ ცხადია, რომ მარტივ ფუნქციათა $f_n = f_n^+ - f_n^-$ მიმდევრობა ყოველ წერტილში კრებადი იქნება f ფუნქციისაკენ, ამასთან, f ფუნქციის შემოსაზღვრულობის შემთხვევაში, კრებადობას ექნება თანაბარი ხასიათი. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 7.5.1. თუ არაუარყოფით ზომად f ფუნქციას აქვს თვისება: $\mu(\{f > t\}) < \infty$ ყოველი დადებითი t -სათვის, მაშინ თეორემა 7.5.1-ის დამტკიცებიდან ნათლად ჩანს, რომ ყოველი f_n ფუნქცია დადებით მნიშვნელობებს მიაღწევს სასრული ზომის სიმრავლეებზე.

ამოცანები

1. აჩვენეთ, რომ ფუნქციათა მიმდევრობის წერტილოვანი კრებადობიდან, საზოგადოდ, არ გამომდინარეობს მისი თანაბრად კრებადობა.

§ 6. ეკვივალენტური ფუნქციები

ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ (X, S, μ) ფიქსირებული ზომიანი სივრცეა და ცნებები შემოღებული იქნება ამ სივრცესთან მიმართებაში.

ეთქვას, ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის მოცემულია $P(x)$ პირობა. ამბობენ, რომ P პირობა სრულდება თითქმის ყოველ $x \in X$ წერტილში (მოკლედ, სრულდება თითქმის ყველგან), თუ ყველა იმ $x \in X$ წერტილის N_P სიმრავლე, რომელშიც არ სრულდება $P(x)$ პირობა, შეიძლება დაიფაროს ნული ზომის სიმრავლის მეშვეობით, ე.ი. მოიძებნება $A \in S$ სიმრავლე თვისებებით: $\mu(A) = 0$ და $N_P \subset A$. შევნიშნოთ, რომ განსაზღვრებაში არაა მოთხოვნილი N_P სიმრავლის ზომადობა. ცხადია, თუ μ ზომა სრულია, მაშინ N_P -ს ზომადობა თავისთავად უზრუნველყოფილი იქნება.

X -ზე განსაზღვრულ f და g ფუნქციებს ეწოდებათ ეკვივალენტური, თუ $f(x) = g(x)$ პირობა სრულდება თითქმის ყოველ $x \in X$ წერტილში. ფუნქციათა ეკვივალენტობას აღნიშნავენ შემდეგნაირად: $f \sim g$ ან $f = g(\text{mod } \mu)$.

თეორემა 7.6.1. ფუნქციათა ეკვივალენტობის მიმართებას აქვს ეკვივალენტობის ზოგადი მიმართებისათვის დამახასიათებელი რეფლექსურობის, სიმეტრიულობისა და ტრანზიტულობის თვისებები.

დამტკიცება. რეფლექსურობისა და სიმეტრიულობის თვისებები ცხადია. შევამოწმოთ ტრანზიტულობა. ვთქვათ, $f = g(\text{mod } \mu)$ და $g = h(\text{mod } \mu)$. მაშინ მოიძებნებიან ნულზომიანი N_1 და N_2 სიმრავლეები, რომელთათვისაც $\{f \neq g\} \subset N_1$ და $\{g \neq h\} \subset N_2$. ახლა თუ გავითვალისწინებთ, რომ $N_1 \cup N_2$ ნული ზომისაა და $\{f \neq h\} \subset N_1 \cup N_2$, დავასკენით f და h ფუნქციების ეკვივალენტობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 7.6.2. თუ μ ზომა სრულია, მაშინ ეკვივალენტურ ფუნქციათა შორის ერთ-ერთის ზომადობა იწვევს მეორე მათგანის ზომადობასაც.

დამტკიცება. დავუშვათ, g ზომადია და $f = g(\text{mod } \mu)$. განვიხილოთ ნებისმიერი რიცხვი $a \in \mathbb{R}$. g -ს ზომადობის გამო, $\{g > a\}$ სიმრავლე არის ზომადი. ზომის სისრულიდან გამომდინარე კი, $\{f \neq g\}$ სიმრავლე არის ზომადი და მისი ზომა ნულის ტოლია. აღვნიშნოთ $E_f = \{f > a\}$ და $E_g = \{g > a\}$. შევნიშნოთ, რომ:

$$1) E_f \Delta E_g \subset \{f \neq g\},$$

$$2) E_f = (E_f \setminus E_g) \cup (E_f \cap E_g) = (E_f \setminus E_g) \cup (E_g \setminus (E_g \setminus E_f)).$$

ამ ორი პირობიდან ზომის სისრულის საფუძველზე მარტივად ვასკენით E_f სიმრავლის ზომადობას, რითაც თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამოცანები

1. ააგეთ ლებეგის ამრით ზომადი $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია, ისეთი, რომ მისი ეკვივალენტური ნებისმიერი ფუნქცია იყოს ყველა წერტილში წყვეტილი.
2. აჩვენეთ, რომ თუ $[0, 1]$ -ზე განსაზღვრული ორი უწყვეტი ფუნქცია ეკვივალენტურია ლებეგის ზომის მიხედვით, მაშინ ეს ფუნქციები ყველა წერტილში ტოლია.

§ 7. თითქმის ყველგან კრებადობა

ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ (X, S, μ) ფიქსირებული ზომიანი სივრცეა და განსახილავი ფუნქციები განსაზღვრულია X -ზე.

ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობას ეწოდება თითქმის ყველგან კრებადი f ფუნქციისაკენ, თუ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ პირობა სრულდება თითქმის ყოველი $x \in$

X წერტილისათვის. თითქმის ყველგან კრებადობას შემდეგნაირად აღნიშნავენ: $f_n \rightarrow f \pmod{\mu}$ ან $f_n \rightarrow f$ თ.ყ.

თეორემა 7.7.1. თუ ზომად ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობა თითქმის ყველგან კრებადია f ფუნქციისაკენ და დამატებით ცნობილია, რომ μ ზომა სრულია, მაშინ f ფუნქცია ზომადია.

დამტკიცება. ვთქვათ, N ნულზომიანი სიმრავლეა, რომლის გარეთ მდებარე წერტილებზე სრულდება $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ პირობა. f ფუნქცია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$f = f\chi_N + f\chi_{X \setminus N}.$$

აღილი დასანახია, რომ $(f_n\chi_{X \setminus N})(x) \rightarrow (f\chi_{X \setminus N})(x)$ ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის, ამასთან, $X \setminus N$ სიმრავლის ზომადობის გამო, $f_n\chi_{X \setminus N}$ ფუნქციები ზომადი არიან. შედეგად, $f\chi_{X \setminus N}$ ზომადია, როგორც ზომად ფუნქციათა წერტილოვანი ზღვარი. ახლა დავადგინოთ $f\chi_N$ ფუნქციის ზომადობა, რითაც თეორემა დამტკიცებული იქნება. მართლაც, თუ $a \geq 0$, მაშინ $\{f\chi_N > a\}$ სიმრავლე წარმოადგენს N -ის ქვესიმრავლეს, ხოლო თუ $a < 0$, მაშინ $\{f\chi_N > a\}$ წარმოადგება $(X \setminus N) \cup E$ სახით, სადაც $E \subset N$. ორივე შემთხვევაში $\{f\chi_N > a\}$ სიმრავლე ზომადია μ ზომის სისრულის გამო. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ცხადია, თითქმის ყველგან კრებადობა არ იწვევს თანაბარ კრებადობას, თუმცა, როგორც ნ. ეგოროვის მიერ დამტკიცებული შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, შემოსაზღვრული ზომის შემთხვევაში, თითქმის ყველგან კრებადობიდან გამომდინარეობს თანაბარი კრებადობა ზომის თვალსაზრისით ღიდ გარყვეულ სიმრავლეებზე.

თეორემა 7.7.2. თუ ზომად სასრულ ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობა თითქმის ყველგან კრებადია ზომადი სასრული f ფუნქციისაკენ და დამატებით ცნობილია, რომ μ ზომა შემოსაზღვრულია, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ზომადი $A = A_\varepsilon$ სიმრავლე, ისეთი, რომ:

- $\mu(A) < \varepsilon$,
- (f_n) მიმდევრობა თანაბრად კრებადია f ფუნქციისაკენ $X \setminus A$ სიმრავლეზე, ე.ი. $\sup_{x \in X \setminus A} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

ლემა 7.7.1. ვთქვათ, შესრულებულია თეორემა 7.7.2-ის პირობები. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ და $\delta > 0$ რიცხვებისათვის მოიძებნებიან ზომადი $A = A_{\varepsilon, \delta}$ სიმრავლე და $N = N_{\varepsilon, \delta}$ რიცხვი, ისეთები, რომ:

- $\mu(A) < \varepsilon$;
- $\sup_{x \in X \setminus A} |f_n(x) - f(x)| \leq \delta$ ყოველი $n \geq N$ -სთვის.

დამტკიცება. აღნიშნოთ

$$E_n = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \delta\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

თუ x წერტილი ეკუთვნის (E_n) მიმდევრობის წევრთა უსასრულო რაოდენობას, მაშინ ცხადია, $(f_n(x))$ არაა კრებადი $f(x)$ -საკენ. შედეგად, $f_n \rightarrow f \pmod{\mu}$ პირობის გათვალისწინებით, (E_n) მიმდევრობის ზედა ზღვარი იქნება ნული ზომის სიმრავლე. ახლა, თუ მსდევლობაში მივიღებთ $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n$, ტოლობას, ზომის ზემოდან უწყვეტობის თვისების საფუძველზე ვიპოვით N ინდექსს, რომლისთვისაც,

$$\mu\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\right) < \varepsilon. \quad (1)$$

(E_n) სიმრავლეების განსაზღვრიდან გამომდინარე, $\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n$ სიმრავლის გარეთ მყოფი ნებისმიერი x წერტილისათვის გვექნება, რომ

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \delta \quad \text{ყოველი } n \geq N\text{-სათვის.} \quad (2)$$

(1) და (2) შეფასებების ძალით ადვილი დასანახია, რომ $A = \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n$ სიმრავლე და N ინდექსი დაკმაყოფილებენ მოთხოვნილ პირობებს. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 7.7.2-ის დამტკიცება. ლემა 7.7.1-ის ძალით ყოველი k -სათვის შეიძლება ვიპოვოთ A_k სიმრავლე და N_k ინდექსი, ისეთები, რომ:

- $\mu(A_k) < \frac{\varepsilon}{2k}$;
- $\sup_{x \in X \setminus A_k} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$ ყოველი $n \geq N_k$ -სათვის.

A -ს როლში ავიღოთ $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ სიმრავლე. მაშინ A -ს ზომა იქნება ε -ზე ნაკლები, ამასთან, ყოველი k -სათვის გვექნება, რომ

$$\sup_{x \in X \setminus A} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \text{ყოველი } n \geq N_k\text{-სათვის.}$$

ბოლო შეფასება ცხადია იწვევს f ფუნქციისაკენ (f_n) მიმდევრობის თანაბრად კრებადობას $X \setminus A$ სიმრავლეზე. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 7.7.1. მარტივი შესამოწმებელია, რომ ეგოროვის თეორემა ვრცელდება იმ სიტუაციაზე, როცა მიმდევრობის წევრები და ზღვართი ფუნქცია თითქმის ყველგან სასრული არიან.

შენიშვნა 7.7.2. ეგოროვის თეორემა არ რჩება სამართლიანი იმ შემთხვევაში, როცა ზომა არაა შემოსაზღვრული. შესაბამის კონტრამაგალითს მივიღებთ, თუ ზომიანი სივრცის როლში ავიღებთ რიცხვით ღერძს, რომელიც აღჭურვილია ლებეგის ზომით, ხოლო (f_n) მიმდევრობას შევარჩევთ შემდეგნაირად: $f_n = \chi_{(n, \infty)}$. ცხადია, (f_n) მიმდევრობა ყველა წერტილში კრებადია იგივეურად

ნულის ტოლი f ფუნქციისაა. მეორე მხრივ, როგორი სასრული ზომის A სიმრავლეც არ უნდა ავიდოთ, ყოველი n -სთვის გვექნება, რომ

$$\sup_{x \in X \setminus A} |f_n(x) - f(x)| = 1.$$

შედეგად, კრებადობა $X \setminus A$ სიმრავლეზე არაა თანაბარი, როგორიც არ უნდა იყოს სასრული ზომის A სიმრავლე.

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ ეგოროვის თეორემის ანალოგი იმ შემთხვევაში, როცა მიმდევრობა თითქმის ყველგან მიისწრაფვის 0-საკენ.
2. ვთქვათ, μ ზომა შემოსაზღვრულია. აჩვენეთ, რომ ზომად სასრულ ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობა თითქმის ყველგან კრებადია ზომად სასრული f ფუნქციისაკენ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი დადებითი ε -სთვის,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \right) = 0.$$

3. ვთქვათ, f_n ($n \in \mathbb{N}$) და f ზომადი სასრული ფუნქციებია და ყოველი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება ზომადი A სიმრავლე შემდეგი თვისებებით: $\mu(X \setminus A) < \varepsilon$ და (f_n) მიმდევრობა თანაბრად კრებადია f ფუნქციისაკენ $X \setminus A$ სიმრავლეზე. აჩვენეთ, რომ (f_n) თითქმის ყველგან კრებადია f ფუნქციისაკენ.
4. დაამტკიცეთ, რომ $f_n(x) = (\sin x)^n$ ფუნქციათა მიმდევრობა თითქმის ყველგან კრებადია ნულისაკენ ლებეგის ზომის მიხედვით.

§ 8. ზომით კრებადობა

ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ (X, S, μ) ფიქსირებული ზომიანი სივრცეა და განსახილავი ფუნქციები განსაზღვრულია X -ზე.

ვთქვათ, f_n ($n \in \mathbb{N}$) და f ზომადი სასრული ფუნქციებია. (f_n) მიმდევრობას ეწოდება ზომით კრებადი f ფუნქციისაკენ, თუ ნებისმიერი დადებითი δ რიცხვისათვის,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{|f_n - f| > \delta\}) = 0.$$

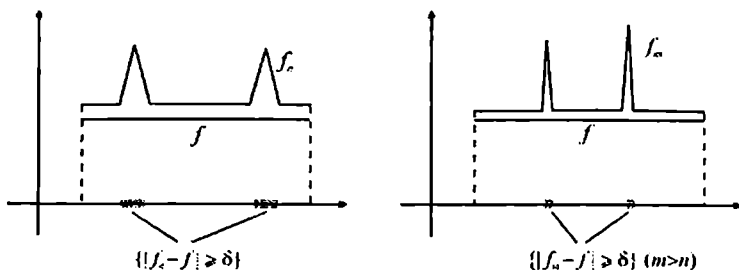
ზომით კრებადობას შემდეგნაირად აღნიშნავენ: $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

ნახ. 7.4-ზე მოცემულია ზომით კრებადობის შესატყვისი ილუსტრაცია.

თეორემა 7.8.1. ზომით კრებად მიმდევრობას ერთადერთი ზღვარი აქვს ეკვივალენტობის სიზუსტით, ე.ი. თუ $f_n \xrightarrow{\mu} f$ და $f_n \xrightarrow{\mu} g$, მაშინ $f = g \pmod{\mu}$.

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. ადვილი დასანახია, რომ ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -სთვის სამართლიანია ჩართვა:

$$\{|f - g| > \delta\} \subset \{|f - f_n| > \delta/2\} \cup \{|f_n - g| > \delta/2\}.$$



ნახ. 7.4.

საიდანაც, თეორემის პირობის გათვალისწინებით, ვღებულობთ,

$$\mu(\{|f - g| > \delta\}) \leq \mu(\{|f - f_n| > \delta/2\}) + \mu(\{|f_n - g| > \delta/2\}) \rightarrow 0.$$

შედეგად, $\mu(\{|f - g| > \delta\}) = 0$. აქედან, თავის მხრივ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\{f \neq g\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{|f - g| > 1/k\},$$

მივიღებთ $\mu(\{f \neq g\}) = 0$ ტოლობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შემდეგი თეორემა ეკუთვნის ლებეგს.

თეორემა 7.8.2. თუ ზომად სასრულ ფუნქციითა (f_n) მიმდევრობა თითქმის ყველგან კრებადია ზომადი სასრული f ფუნქციისაკენ და დამატებით ცნობილია, რომ μ ზომა შემოსაზღვრულია, მაშინ (f_n) მიმდევრობა ზომით კრებადია f ფუნქციისაკენ.

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი δ და ε რიცხვები. ლემა 7.7.1-ის ძალით შეიძლება ვიპოვოთ ზომადი A სიმრავლე და N ინდექსი, ისეთები, რომ:

- $\mu(A) < \varepsilon$,
- $\sup_{x \in X \setminus A} |f_n(x) - f(x)| \leq \delta$ ყოველი $n \geq N$ -სთვის.

ბოლო შეფასებიდან გამომდინარე, $\{|f_n - f| > \delta\} \subset A$ ყოველი $n \geq N$ -სთვის. საიდანაც მივიღებთ,

$$\mu(\{|f_n - f| > \delta\}) \leq \mu(A) < \varepsilon \text{ ყოველი } n \geq N\text{-სთვის.}$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 7.8.1. ლებეგის თეორემა არ რჩება სამართლიანი იმ შემთხვევაში, როცა ზომა არაა შემოსაზღვრული. შესაბამის კონტრმაგალითს მივიღებთ,

თუ ზომიანი სივრცის როლში ავიღებთ რიცხვით ღერძს, რომელიც აღჭურვილია ლებეგის ზომით, ხოლო (f_n) მიმდევრობას შევარჩევთ შემდეგნაირად: $f_n = \chi_{(n, \infty)}$. ცხადია, (f_n) მიმდევრობა ყოველ წერტილში კრებადია იგივე რად ნულის ტოლი f ფუნქციისა. მეორე მხრივ, ყოველი n -სთვის გვექნება, რომ $\mu(\{|f_n - f| = 1\}) = \infty$.

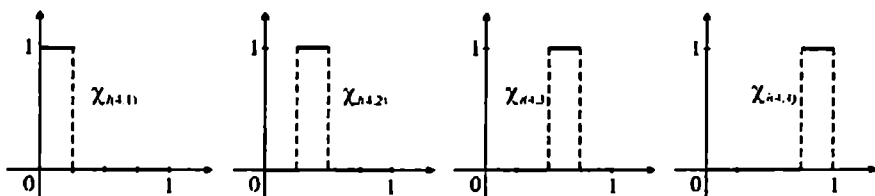
შენიშვნა 7.8.2. ეჩვენეთ, რომ ლებეგის თეორემის დასყენა არაა შეზღუდვადი. საამისოდ ყოველი ნატურალური n -სთვის $[0, 1]$ სეგმენტი დავეთო n ცალ ტოლ სეგმენტად:

$$I(n, 1) = \left[0, \frac{1}{n}\right], I(n, 2) = \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \dots, I(n, n) = \left[\frac{n-1}{n}, 1\right].$$

განვიხილოთ $[0, 1]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ ფუნქციათა შემდეგი მიმდევრობა:

$$\chi_{I(1,1)}; \quad \chi_{I(2,1)}, \chi_{I(2,2)}; \quad \chi_{I(3,1)}, \chi_{I(3,2)}, \chi_{I(3,3)}; \dots$$

ე.ი. მიმდევრობა, რომელშიც n -ური ეტაპის სეგმენტების მახასიათებელი ფუნქციები ქმნიან n -ურ ბლოს (ნახ. 7.5).



ნახ. 7.5.

მივანიჭოთ აღნიშნულ მიმდევრობას ერთინდექსიანი (f_s) ნუმერაცია. იქედან, რომ ნებისმიერი დადებითი δ -სთვის:

$$m(\{\chi_{I(n,k)} > \delta\}) \leq \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}, k \in \overline{1, n}),$$

უმჯალოდ გამოვძინარეობს (f_s) მიმდევრობის ლებეგის ზომის მიხედვით კრებადობა იგივე რად ნულის ტოლი f ფუნქციისა. მეორე მხრივ, $f_s(x) \rightarrow 0$ კრებადობას ადგილი არა აქვს არცერთ $x \in [0, 1]$ წერტილში. მართლაც, განვიხილოთ ნებისმიერი $x \in [0, 1]$ წერტილი. ყოველი n -სთვის x შედის ერთ-ერთში მაინც $I(n, k)$ მონაკვეთებს შორის. შედეგად, ყოველი n -სთვის მოიძებნება $k \in \overline{1, n}$ ინდექსი, რომლისთვისაც

$$\chi_{I(n,k)}(x) = 1.$$

რაც იწვევს იმას, რომ გარკვეული ქვემიმდევრობის გასწვრივ $(f_s(x))$ არაა ნულისა. კრებადი.

მიუხედავად იმისა, რომ ზომით კრებადობა არ იწვევს თითქმის ყველგან კრებადობას, სამართლიანია შემდეგი თეორემა, რომელიც ეკუთვნის ფ.რისს.

თეორემა 7.8.3. თუ ზომად სასრულ ფუნქციითა (f_n) მიმდევრობა ზომით კრებადია ზომადი სასრული f ფუნქციისაკენ და დამატებით ცნობილია, რომ μ ზომა შემოსაზღვრულია, მაშინ მოიძებნება (f_{n_k}) ქვემიმდევრობა, რომელიც თითქმის ყველგან კრებადია f ფუნქციისაკენ.

დამტკიცება. განვიხილოთ დადებით რიცხვთა (δ_k) და (η_k) მიმდევრობები, ისეთები, რომ:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < \infty.$$

ვიპოვოთ n_1 ინდექსი, რომლისთვისაც

$$\mu(\{|f_{n_1} - f| > \delta_1\}) < \eta_1.$$

მეორე ეტაპზე ავარჩიოთ $n_2 > n_1$ ინდექსი თვისებით:

$$\mu(\{|f_{n_2} - f| > \delta_2\}) < \eta_2.$$

თუ გაეგვრძელებთ აგების ასეთ პროცესს, ყოველი k -სათვის ვიპოვით შემდეგი პირობის დამაკმაყოფილებელ $n_k > n_{k-1}$ ინდექსს:

$$\mu(\{|f_{n_k} - f| > \delta_k\}) < \eta_k.$$

ვაჩვენოთ ასეთნაირად აგებული (f_{n_k}) ქვემიმდევრობის თითქმის ყველგან კრებადობა f ფუნქციისაკენ.

N -ით აღვნიშნოთ $\{|f_{n_k} - f| > \delta_k\}$ სიმრავლეთა მიმდევრობის ზედა ზღვარი. აგების თანახმად,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{|f_{n_k} - f| > \delta_k\}) < \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < \infty.$$

საიდანაც, ბორელ-კანტელის ლემის ძალით (იხ. თეორემა 4.4.4) დავასკვნით N სიმრავლის ნულზომიანობას. ვაჩვენოთ, რომ $f_{n_j}(x) \rightarrow f(x)$ ყოველი $x \notin N$ წერტილისათვის, რითაც თეორემა დამტკიცებული იქნება. მართლაც, თუ $x \notin N$, მაშინ მოიძებნება k , რომლისთვისაც

$$x \notin \{|f_{n_j} - f| > \delta_j\}, \quad \text{როცა } j \geq k.$$

რაც, თავის მხრივ, იმას ნიშნავს, რომ

$$|f_{n_j}(x) - f(x)| \leq \delta_j, \quad \text{როცა } j \geq k.$$

საიდანაც ვლევულობთ ($f_{n_j}(x)$) ქვემიმდევრობის კრებადობას $f(x)$ რიცხვისაკენ. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 7.8.3. რისის თეორემა ვრცელდება იმ სიტუაციაზეც, როცა σ -შემოსაზღვრულია. მართლაც, ასეთ შემთხვევაში, X სივრცე შეიძლება დაეყოს სასრული ზომის მქონე წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ A_n ($n \in \mathbb{N}$) ნაწილებად. განვიხილოთ f_n ფუნქციების შემლუდები A_1 სიმრავლეზე. მარტივი დასაანახია, რომ $(f_n|_{A_1})$ მიმდევრობა ზომით კრებადი იქნება $f|_{A_1}$ ფუნქციისაკენ. შედეგად, თუ ზომიანი სივრცის როლში ავიღებთ მოცემული სივრცის შემლუდებას A_1 სიმრავლეზე, რისის თეორემის უკვე დადგენილი ვარიანტის გამოყენებით მოვძებნით $(f_{n(1,k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ქვემიმდევრობას, რომელიც A_1 სიმრავლის თითქმის ყოველ წერტილში კრებადია f ფუნქციისაკენ. მეორე ეტაპზე, $(f_{n(1,k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ქვემიმდევრობის მიმართ მსგავსი მსჯელობის გამოყენებით მოვძებნით მის $(f_{n(2,k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ქვემიმდევრობას, რომელიც A_2 სიმრავლის თითქმის ყოველ წერტილში კრებადია f ფუნქციისაკენ. თუ ამ პროცესს უსასრულოდ გაავგრძელებთ და განვიხილავთ დიაგონალურ $(f_{n(k,k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ქვემიმდევრობას. მივიღებთ, რომ ასეთი ქვემიმდევრობა ყოველი j -სათვის, f ფუნქციისაკენ კრებადია A_j სიმრავლის თითქმის ყოველ წერტილში. შედეგად, კრებადობას ადგილი ექნება X -ის თითქმის ყოველ წერტილშიც.

ამოცანები

1. ვთქვათ, μ შემოსაზღვრული ზომაა, $f_n \xrightarrow{\mu} f$ და $g_n \xrightarrow{\mu} g$. აჩვენეთ, რომ:
1) $f_n \pm g_n \xrightarrow{\mu} f \pm g$; 2) $f_n g_n \xrightarrow{\mu} f g$; 3) $f_n / g_n \xrightarrow{\mu} f / g$, თუ $0 \notin g_n(X)$ ($n \in \mathbb{N}$) და $0 \notin g(X)$.
2. იმისათვის, რომ ზომად სასრულ ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობა ზომით კრებადი იყოს ზომადი სასრული f ფუნქციისაკენ, აუცილებელი და საჭიროა (f_n) მიმდევრობა იყოს ზომით ფუნდამენტური. ე.ი. ყოველი დადებითი δ და η რიცხვებისათვის მოიძებნებოდეს $N \in \mathbb{N}$, ისეთი, რომ $\mu(\{|f_n - f_m| > \delta\}) < \eta$, როცა $n, m \geq N$.
3. ვთქვათ, μ შემოსაზღვრული ზომაა. აჩვენეთ, რომ ზომად სასრულ ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობა ზომით კრებადია ზომადი სასრული f ფუნქციისაკენ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა (f_n) მიმდევრობის ნებისმიერი ქვემიმდევრობიდან შესაძლებელია f ფუნქციისაკენ თითქმის ყველგან კრებადი ქვექვემიმდევრობის გამოყოფა.

§ 9. ლუზინის თეორემა

ქვემოთ (X, d) მეტრიკული სივრცის E ქვესიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქციის უწყვეტობა გაიგება E -ში ინდუცირებული მანძილის მიხედვით, ე.ი. $d|_{E \times E}$ მანძილის მიხედვით.

შემდეგი თეორემა ეკუთვნის ნ. ლუზინს და გვიჩვენებს, რომ ლებეგის აზრით ზომადი ნებისმიერი ფუნქცია რაგინდ მცირე ზომის სიმრავლეზე შესწორებით (ე.ი. მნიშვნელობათა შეცვლით) შეიძლება გაგზავნოს უწყვეტი.

თეორემა 7.9.1. ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}^n$ ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეა, ხოლო f არის E სიმრავლეზე განსაზღვრული ლებეგის აზრით ზომადი სასრული ფუნქცია. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს E -ზე განსაზღვრული უწყვეტი g ფუნქცია, ისეთი, რომ

$$m(\{g \neq f\}) < \varepsilon.$$

გარდა ამისა, დამატებით შესაძლებელია იმის მიღწევა, რომ g ფუნქცია აკმაყოფილებდეს შეფასებას: $\sup_{x \in E} |g(x)| \leq \sup_{x \in E} |f(x)|$.

შემდეგი დებულება წარმოადგენს ლუზინის თეორემის შესუსტებულ ვარიანტს.

თეორემა 7.9.2. ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}^n$ ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეა, ხოლო f არის E სიმრავლეზე განსაზღვრული ლებეგის აზრით ზომადი სასრული ფუნქცია. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ჩაკეტილი $F \subset E$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $m(E \setminus F) < \varepsilon$ და f ფუნქციის შესაღწევა F სიმრავლეზე არის უწყვეტი.

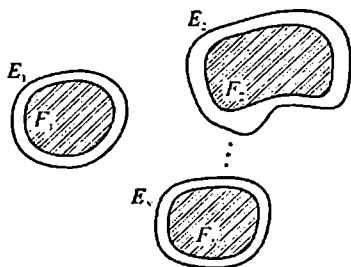
დამტკიცება. თავდაპირველად განვიხილოთ შემთხვევა, როცა E შემოსაზღვრული სიმრავლეა და f მარტივი ფუნქციაა. წარმოვადგინოთ f სტანდარტული სახით:

$$f = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{E_k}.$$

ყოველი E_k სიმრავლისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ (იხ. თეორემა 6.2.2) მისი ჩაკეტილი F_k ქვესიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს შეფასებას:

$$m(E_k \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{N}.$$

F სიმრავლის როლში ავიღოთ $\bigcup_{k=1}^N F_k$ გაერთიანება (ნახ. 7.6).



ნახ. 7.6.

გვექნება, რომ

$$m(E \setminus F) = \sum_{k=1}^N m(E_k \setminus F_k) < \varepsilon.$$

F_k სიმრავლეები კომპაქტური და წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია, რის გამოც, ნებისმიერი F_k , სხვა დანარჩენი F_j სიმრავლეების გაერთიანებისაგან დამორეზებულია დადებითი მანძილით (იხ. დანართი 2). ეს უკანასკნელი გარემოება, იმის გათვალისწინებით, რომ f მუდმივია თითოეულ F_k -ზე, გვაძლევს სამუალებას უშუალოდ დაეასყენათ F სიმრავლეზე f -ის შემლუღის უწყვეტობა.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა E შემოსაზღვრული სიმრავლეა და f ნებისმიერი ზომადი სასრული ფუნქციაა. თეორემა 7.5.1-ის საფუძველზე შევარჩიოთ მარტივ ფუნქციათა (h_k) მიმდევრობა, რომელიც f ფუნქციისაკენ კრებადია ყოველ წერტილში. ვისარგებლოთ თეორემის უკვე დადგენილი ნაწილით და ყოველი k ინდექსისათვის ვიპოვოთ $F_k \subset E$ სიმრავლე, ისეთი, რომ h_k ფუნქციის შემლუღვა F_k სიმრავლეზე იყოს უწყვეტი და სრულდებოდეს პირობა:

$$m(E \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

F_k ($k \in \mathbb{N}$) სიმრავლეების თანაკვეთა აღენიშნოთ F_* -ით. ცხადია, რომ F_* სიმრავლეზე შემლუღისას თითოეული h_k ფუნქცია შეიძენს უწყვეტობის თვისებას და ამასთან, ადგილი ექნება შეფასებას:

$$m(E \setminus F_*) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

შემდეგ ვისარგებლოთ ეგოროვის თეორემით და ზომადი სიმრავლის ჩაკეტილი სიმრავლეებით შიგნიდან მიახლოების შესაძლებლობით (იხ. თეორემა 6.2.2). შედეგად, ვიპოვოთ F_* სიმრავლის ჩაკეტილ F ქვესიმრავლეს, რომელზეც თანაბრად კრებადია (h_k) მიმდევრობა და რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$$m(F_* \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ცხადია, თითოეული $h_k|_F$ ფუნქცია უწყვეტია და $(h_k|_F)$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია. შედეგად, ზღვართი $f|_F$ ფუნქცია იქნება უწყვეტი, როგორც უწყვეტ ფუნქციათა თანაბრად კრებადი მიმდევრობის ზღვარი. ახლა, თუ შევნიშნავთ, რომ $m(E \setminus F) < \varepsilon$, დაეასყენით თეორემის სამართლიანობას განსახილავ შემთხვევაში.

გადავიდეთ ზოგადი სიტუაციის განხილვაზე. ე.ი. მოვხსნათ E სიმრავლის შემოსაზღვრულობის შემლუღვა. საამისოდ $\mathbb{R}^n$ სივრცე დაეშალოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ Q_k ($k \in \mathbb{N}$) კუბებად. შემდეგ, თითოეული Q_k კუბი ოდნავ შევამციროთ მის კონცენტრულ Q_k^* კუბამდე ისე, რომ ზომის ჯამური დანაკარგი $\mathbb{R}^n$ სივრციდან Q_k^* კუბების გაერთიანებაზე გადასვლისას ნაკლები

იყოს $\varepsilon/2$ -ზე. ამის შემდეგ კი, ყოველი k -სათვის გამოვიყენოთ თეორემის უკვე დამტკიცებული ნაწილი $f|_{Q_k \cap E}$ ფუნქციისა და $\varepsilon/2^{k+1}$ რიცხვის შემთხვევაში და ვიპოვოთ ჩაკეტილი F_k სიმრავლე შესაბამისი თვისებებით. მარტივი შესაძლოაა, რომ ასეთნაირად შერჩეული F_k სიმრავლეების გაერთიანება მოგვცემს სასურველი თვისებების მქონე ჩაკეტილ F სიმრავლეს. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

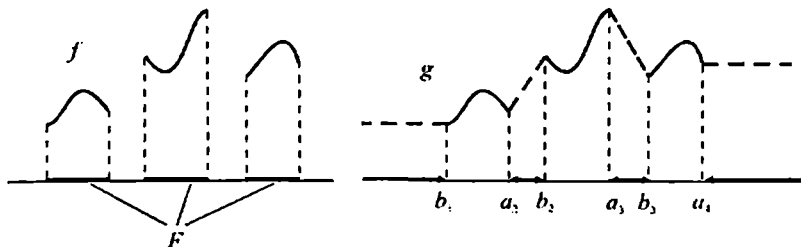
შემდეგი დებულება წარმოადგენს დამატებით არგუმენტს, რომლის მეშვეობითაც თეორემა 7.9.2-დან მიიღება ლუზინის თეორემა.

თეორემა 7.9.3. ვთქვათ, F არის $\mathbb{R}^n$ სივრცის არა(ცარიელი ჩაკეტილი ქვე)სიმრავლე, ხოლო f არის F -ზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქცია. მაშინ არსებობს $\mathbb{R}^n$ -ზე განსაზღვრული უწყვეტი g ფუნქცია, რომელიც წარმოადგენს f -ის გაგრძელებას და აკმაყოფილებს პირობას:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x)| = \sup_{x \in F} |f(x)|.$$

ქვემოთ მოცემული იქნება თეორემა 7.9.3-ის დამტკიცება ერთგანზომილებიან შემთხვევაში. მრავალგანზომილებიან სიტუაციაში დამტკიცება საკმაოდ ერცელი და ტექნიკური თვალსაზრისით რთულია. მისი ნახვა შესაძლებელია მაგალითად [29] წიგნის XII.1 პარაგრაფში.

დამტკიცება. $\{(a_n, b_n)\}$ იყოს F სიმრავლის დამატებითი ინტერვალების კლასი. თუ (a_n, b_n) შემოსაზღვრული ინტერვალია, მაშინ $[a_n, b_n]$ სეგმენტის შიგნით f ფუნქცია გაუაგრძელოთ ისე, რომ მივიღოთ $[a_n, b_n]$ -ზე წრფივი ფუნქცია სეგმენტის ბოლოებში შესაბამისად $f(a_n)$ და $f(b_n)$ მნიშვნელობებით; ხოლო, თუ $a_n = -\infty$ ან $b_n = \infty$, მაშინ (a_n, b_n) ინტერვალის წერტილებში g ფუნქციის მივანიჭოთ ის მნიშვნელობა, რომელსაც f ფუნქცია ლებულობს (a_n, b_n) ინტერვალის სასრულ ბოლოზე (ნახ. 7.7).



ნახ. 7.7.

შეამოწმოთ, რომ f ფუნქციის ასეთი g გაგრძელება აუმაყოფილებს სასურველ პირობებს. ცხადია, რომ

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| = \sup_{x \in F} |f(x)|.$$

დაეადგინოთ g -ს უწყვეტობა. უწყვეტობა ცხადია დამატებით (a_n, b_n) ინტერვალებზე. განვიხილოთ F სიმრავლის ნებისმიერი x წერტილი. დაეადგინოთ მარჯვნიდან უწყვეტობა x -ში. თუ x არის რომელიმე დამატებითი ინტერვალის მარცხენა ბოლო, მაშინ x -ში g -ს მარჯვნიდან უწყვეტობა ცხადია. ამრიგად, განსახილავი რჩება ის შემთხვევა, როცა x არ არის არცერთი დამატებითი ინტერვალის მარცხენა ბოლო. ავიღოთ x წერტილისაყენ მარჯვნიდან კრებადი რაიმე (x_k) მიმდევრობა, ე.ი. $x_k > x$ ($k \in \mathbb{N}$) და $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$. f ფუნქციის უწყვეტობის გათვალისწინებით შეგვიძლია შემოვიფარგლოთ იმ შემთხვევით, როცა x_k წერტილები არ ეკუთვნიან F სიმრავლეს. ყოველი k -სთვის (a_{n_k}, b_{n_k}) იყოს ის დამატებითი ინტერვალი, რომელიც შეიცავს x_k წერტილს. ადვილი დასანახია, რომ (a_{n_k}, b_{n_k}) ინტერვალები მარჯვნიდან მიისწრაფვიან x წერტილისაკენ, ე.ი. $x < a_{n_k} < x_k < b_{n_k}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = x$ და $\lim_{k \rightarrow \infty} b_{n_k} = x$. მაშინ f -ის უწყვეტობის გამო, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(b_{n_k}) = f(x)$. ამის შემდეგ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $g(x_k)$ მოთავსებულია $f(a_{n_k})$ და $f(b_{n_k})$ რიცხვებს შორის, დავასენით $\lim_{k \rightarrow \infty} g(x_k) = f(x) = g(x)$ ტოლობას. ამით g -ს მარჯვნიდან უწყვეტობა x -ში დადგენილია. ანალოგიურად ვაჩვენებთ x -ში მარცხნიდან უწყვეტობასაც. $\square$

შენიშვნა 7.9.1. თეორემა 7.9.3 დამტკიცებული იყო ა. ლებეგისა და ლ. ბროუერის მიერ. პ. ტიეპმ თეორემა 7.9.3 გააგრძელა მეტრიულ სივრცეებზე. შემდგომი განზოგადება ე.წ. ნორმალური ტოპოლოგიური სივრცეებისთვის ეკუთვნის პ. ურისონს (იხ. მაგ. [5], §2.1).

თეორემა 7.9.1-ის დამტკიცება. $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის თეორემა 7.9.2-ის საფუძველზე ვიპოვოთ ჩაკეტილი $F \subset E$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $m(E \setminus F) < \varepsilon$ და $f|_F$ არის უწყვეტი. ამის შემდეგ, გამოვიყენოთ თეორემა 7.9.3 და $f|_F$ გაეაგრძელოთ $\mathbb{R}^n$ -ზე განსაზღვრულ უწყვეტ h ფუნქციამდე, რომელიც აუმაყოფილებს პირობას:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |h(x)| = \sup_{x \in F} |f(x)|.$$

ადვილი დასანახია, რომ $g = h|_E$ ფუნქციას ექნება საჭირო თვისებები. $\square$

შენიშვნა 7.9.2. მარტივი შესამოწმებელია, რომ ლუბინის თეორემა ვრცელდება იმ სიტუაციაზეც, როცა ფუნქცია თითქმის ყველგან სასრულია.

შენიშვნა 7.9.3. ლებეგის აბრით ბოზადი სიმრავლეები და ფუნქციები, კლასიკური ანალიზიდან ცნობილ, გლუვი საზღვრის მქონე სიმრავლეებთან

და უწყვეტ ფუნქციებთან შედარებით, რთული ბუნებისანი არიან. მიუხედავად ამისა, როგორც ევკლიდეს, ლუგინისა და 6.2.1 თეორემები გვიჩვენებენ, ამ ობიექტებს შორის არსებობს გარკვეული სიახლოვე, რაც შემდეგი საში პრინციპის სახით გამოხატა ფუნქციათა თეორიის ცნობილმა მკვლევარმა ჯ. ლიტლუდმა:

- ლებეგის აზრით ზომადი ყოველი სიმრავლე დაახლოებით მონაკვეთების სასრული გაერთიანებაა;
- ლებეგის აზრით ზომადი ყოველი ფუნქცია დაახლოებით უწყვეტი ფუნქციაა;
- თითქმის ყველგან კრებადი ყოველი მიმდევრობა დაახლოებით თანაბრად კრებადია.

ამოცანები

1. ეთქვას, $E \subset \mathbb{R}^n$ ლებეგის აზრით ზომადი და სასრული ზომის სიმრავლეა, ხოლო f არის E სიმრავლეზე განსაზღვრული ლებეგის აზრით ზომადი სასრული ფუნქცია. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სთვის არსებობს ჩაკეტილი $F \subset E$ სიმრავლე, რომლისთვისაც $m(E \setminus F) < \varepsilon$ და f ფუნქციის შეზღუდვა F სიმრავლეზე არის შემოსაზღვრული.
2. ეთქვას, $E \subset \mathbb{R}^n$ ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეა, ხოლო f არის E სიმრავლეზე განსაზღვრული ლებეგის აზრით ზომადი სასრული ფუნქცია. მაშინ არსებობს E -ზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციასთან (g_n) მიმდევრობა, რომელიც თითქმის ყველგან კრებადია f ფუნქციისაკენ.
3. ეთქვას, $E \subset \mathbb{R}^n$ ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეა, ხოლო E -ზე განსაზღვრული f ფუნქციას აქვს შემდეგი თვისება: ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $F \subset E$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $m(E \setminus F) < \varepsilon$ და f ფუნქციის შეზღუდვა F სიმრავლეზე არის უწყვეტი. აჩვენეთ, რომ f არის ლებეგის აზრით ზომადი.
4. ეთქვას, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ლებეგის აზრით ზომადი ფუნქციაა, რომლის საყრდენი, ე.ი. $\{f \neq 0\}$ სიმრავლე, მოთავსებულია $[0, 1]$ მონაკვეთში. აჩვენეთ, რომ $f_n(x) = f(x - 1/n)$ ფუნქციასთან მიმდევრობა ლებეგის ზომის მიხედვით კრებადია f ფუნქციისაკენ.
5. აავსეთ $[0, 1]$ მონაკვეთში საყრდენის მქონე ლებეგის აზრით ზომადი $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია, რომლისთვისაც $f_n(x) = f(x - 1/n)$ ფუნქციასთან მიმდევრობა განზღუდულია $[0, 1]$ მონაკვეთის დადებითი ზომის ქვესიმრავლეზე.

ლებეგის ინტეგრალი

მეცხრამეტე საუკუნის ბოლოს მათემატიკური ანალიზის სფეროში წარმოშობილი რამდენიმე მნიშვნელოვანი ამოცანის გადაწყვეტასთან დაკავშირებით ნათლად გამოიკვეთა რიმანის ინტეგრალის განზოგადების აუცილებლობა. გეომეტრიული ინტერპრეტაციის თანახმად, განსაზღვრული ინტეგრალი უნდა გამოთვლიდეს ფუნქციის გრაფიკულ სიმაღლის ზომას. რიმანის ინტეგრალი ამ საკითხს ვერ წყვეტს. მაგალითად, ძალზე მარტივი ბუნების ღირისლეს ფუნქციის შემთხვევაში კი. საზოგადოდ, რიმანის კონსტრუქციას აქვს ორი მთავარი ნაკლოვანება: 1) შეუძლებელია მისი გამოყენება შემოსაზღვრული ფუნქციებისათვის; 2) შემოსაზღვრული ფუნქციებისთვის კი მისი მოქმედების არეალი შორს ვერ სცილდება უწყვეტ ფუნქციათა კლასს.

ლებეგმა (1902) შექმნა ინტეგრების ძალზე მოქნილი და ეფექტური მეთოდი, რომელიც თავდაპირველად გამოყენებული იყო ერთგანზომილებიან $[a, b]$ მონაკვეთზე განსაზღვრული ფუნქციებისთვის, შემდეგ კი (1910), მრავალგანზომილებიან სიტუაციაში. ლებეგის ინტეგრალის აბსტრაქტული ვარიანტი განავითარეს ჯ. რადონმა (1913) და მ. ფრეშემ (1913). წინამდებარე თავში სწორედ აღნიშნულ აბსტრაქტულ კონსტრუქციას გავეცნობით.

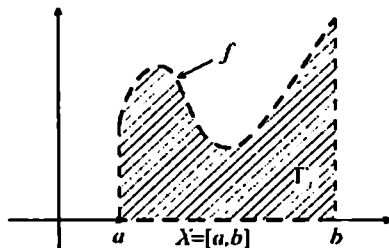
§ 1. არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი

ამ თავის ფარგლებში ვიგულისხმებთ, რომ (X, S, μ) ფიქსირებული ზომიანი სივრცეა. სიმაღლეებისა და ფუნქციების ზომადობას განვიხილავთ ამ სივრცესთან მიმართებაში.

X -ზე განსაზღვრული არაუარყოფითი f ფუნქციის გრაფიკულ სიმაღლე (ნახ. 8.1) განისაზღვრება შემდეგნაირად:

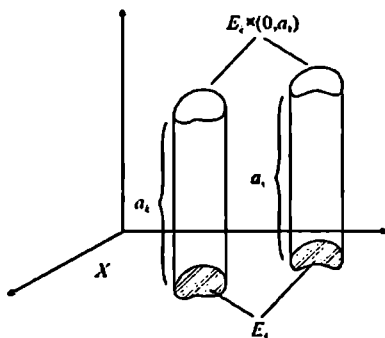
$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times [0, \infty] : x \in X, 0 < y < f(x)\}.$$

გეომეტრიული ინტერპრეტაციით, ლებეგის ინტეგრალი წარმოადგენს ფუნქციის გრაფიკულ სიმაღლის გაზომვის მექანიზმს. ეს მექანიზმი ნათლად გასაგებია არაუარყოფითი მარტივი f ფუნქციის შემთხვევაში: ვთქვათ, f ფუნქციის სტანდარტული წარმოდგენაა $\sum_{k=1}^n a_k \chi_{E_k}$. მაშინ Γ_f წარმოადგენს



ნახ. 8.1.

საფეხუროვანი ტიპის სიმრავლეს, რომლის საფეხურებია E_k ფუძისა და a_k სიმაღლის განზოგადებული $E_k \times (0, a_k)$ მართკუთხედები (ნახ. 8.2).



ნახ. 8.2.

ელემენტარული გეომეტრიული მოსაზრებებიდან გამომდინარე, ბუნებრივია, Γ_f გრაფიკეზე სიმრავლის ზომად მივიჩნიოთ მისი საფეხურების ზომათა ჯამი, ხოლო საფეხური კი გაიზომოს, როგორც მისი ფუძის ზომა გამრავლებული მისავე სიმაღლეზე.

გემოადინიშნულის შემდეგ მოვიყვანოთ ზუსტი განსაზღვრება: დაეუშვათ, f არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციაა და $\sum_{k=1}^n a_k \chi_{E_k}$ მისი სტანდარტული წარმოდგენაა. f ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი X სივრცეზე აღინიშნება $\int_X f d\mu$ ჩანაწერით და განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\int_X f d\mu = \sum_{k=1}^n a_k \mu(E_k).$$

ინტეგრალის აღსანიშნად მოგვიერ იყენებენ $\int_X f(x) d\mu(x)$ ჩანაწერსაც.

შემდეგი დებულება გეჩვენებს, რომ არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციის ინტეგრალი შეიძლება გამოთვალეთ სტანდარტულიაგან განსხვავებული წარმოდგენის მეშვეობითაც.

თეორემა 8.1.1. ვთქვათ, $f = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{F_j}$, სადაც $b_1, \dots, b_m$ არაუარყოფითი სასრული რიცხვებია, ხოლო $F_1, \dots, F_m$ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ზომადი სიმრავლეებია. მაშინ

$$\int_X f d\mu = \sum_{j=1}^m b_j \mu(F_j).$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეზღუდვად ვიგულისხმობთ, რომ F_j სიმრავლეების გაერთიანება X -ის ტოლია. წინააღმდეგ შემთხვევაში მოცემულ წარმოდგენას ფორმალურად შევაესებოთ $b_{m+1} \chi_{F_{m+1}}$ წევრით, სადაც $b_{m+1} = 0$, ხოლო F_{m+1} არის $F_1, \dots, F_m$ სიმრავლეების გარეთ დარჩენილი სივრცის ნაწილი.

თუ $b_1, \dots, b_m$ წყვილ-წყვილად განსხვავებული რიცხვებია, მაშინ $\sum_{j=1}^m b_j \chi_{F_j}$ არის f ფუნქციის სტანდარტული წარმოდგენა. რის გამოც, ასეთ შემთხვევაში დებულება ცხადია.

თუ $b_1, \dots, b_m$ რიცხვებს შორის ზოგიერთი ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ განვიხილოთ მათ მიერ მიღებული ყველა განსხვავებული მნიშვნელობა: $a_1, \dots, a_n$. ყოველი $k \in \overline{1, n}$ -სთვის შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\Delta_k = \{j \in \overline{1, m} : b_j = a_k\}, \quad E_k = \bigcup_{j \in \Delta_k} F_j.$$

მაშინ ადვილი დასანახია, რომ $\sum_{k=1}^n a_k \chi_{E_k}$ იქნება f ფუნქციის სტანდარტული წარმოდგენა და ადვილი ექნება ტოლობებს:

$$\sum_{j=1}^m b_j \mu(F_j) = \sum_{k=1}^n \sum_{j \in \Delta_k} b_j \mu(F_j) = \sum_{k=1}^n a_k \mu(E_k) = \int_X f d\mu.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

X -ის ზომად E ქვესიმრავლეზე არაუარყოფითი მარტივი f ფუნქციის ინტეგრალი აღინიშნება $\int_E f d\mu$ ჩანაწერით და განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu.$$

მარტივი დასანახია, რომ $\sum_{k=1}^n a_k \chi_{E_k}$ სტანდარტული წარმოდგენის მქონე f ფუნქციისათვის,

$$\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^n a_k \mu(E_k \cap E).$$

შეგნიშნოთ, რომ არაკარიელ E სიმრავლეზე ინტეგრალს შეგვიძლია შევხედოთ, აგრეთვე, როგორც $f|_E$ ფუნქციის ინტეგრალს $(E, S \cap E, \mu|_{S \cap E})$ ზომიან სივრცეზე.

ამოცანები

1. განვიხილოთ $\mathbb{R}$ სივრცე ლებეგის m ზომით. გამოთვალეთ: ა) $\int_{\mathbb{R}} x dm$; ბ) $\int_{[-1,1]} x dm$; გ) $\int_{[-1,1]} 2^{|x|} dm(x)$.

§ 2. არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალის ზოგიერთი თვისება

შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალს აქვს წრფივობისა და მონოტონურობის თვისებები.

თეორემა 8.2.1. ვთქვათ, f და g არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციებია. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

$$\begin{aligned}\int_X (f + g) d\mu &= \int_X f d\mu + \int_X g d\mu, \\ \int_X (cf) d\mu &= c \int_X f d\mu \quad (c \geq 0), \\ \text{თუ } f &\leq g, \text{ მაშინ } \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.\end{aligned}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ f და g ფუნქციების სტანდარტული წარმოდგენები:

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}, \quad g = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{F_j}.$$

ცხადია, $E_i \cap F_j$ სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და მათი გაერთიანება X -ის ტოლია. ამასთან, გვაქვს, რომ

$$\begin{aligned}f &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \chi_{E_i \cap F_j}, \quad g = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_j \chi_{F_j \cap E_i}, \\ f + g &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i + b_j) \chi_{E_i \cap F_j}.\end{aligned}$$

თეორემა 8.1.1-ის ძალით დავწერთ,

$$\int_X (f + g) d\mu = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i + b_j) \mu(E_i \cap F_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \mu(E_i \cap F_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij} \mu(E_i \cap F_j) = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

ამით პირველი წინადადება დადგენილია.

მეორე წინადადება ცხადია.

მესამე წინადადების დასამტკიცებლად შევნიშნოთ, რომ თუ $E_i \cap F_j$ სიმრავლე არაუარყოფითია, მაშინ მის ყოველ x წერტილში შესრულება $a_i = f(x) \leq g(x) = b_j$ შეფასება. შედეგად, კვლავ თეორემა 8.1.1-ის საფუძველზე დაწეროთ,

$$\begin{aligned} \int_X f d\mu &= \sum_{(i,j)} a_{ij} \mu(E_i \cap F_j) = \sum_{\{(i,j): E_i \cap F_j \neq \emptyset\}} a_{ij} \mu(E_i \cap F_j) \leq \\ &\leq \sum_{\{(i,j): E_i \cap F_j \neq \emptyset\}} b_{ij} \mu(E_i \cap F_j) = \sum_{(i,j)} b_{ij} \mu(E_i \cap F_j) = \int_X g d\mu. \end{aligned}$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობას ეწოდება ზრდადი, თუ $f_1 \leq f_2 \leq \dots$

ქვემოთ მოცემული თეორემა არსებითი როლს ასრულებს ინტეგრალის ცნების არაუარყოფითი ზომად ფუნქციათა კლასზე გავრცელებისას, რასაც ენახათ მომდევნო პარაგრაფში.

თეორემა 8.2.2. ვთქვათ, f_n ($n \in \mathbb{N}$) და f არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციებია. თუ (f_n) ზრდადი მიმდევრობაა და $f(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის, მაშინ

$$\int_X f d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu. \quad (1)$$

დამტკიცება. წარმოვადგინოთ f ფუნქცია სტანდარტული სახით: $f = \sum_{k=1}^m a_k \chi_{E_k}$.

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon \in (0, 1)$ რიცხვი. შემოვიღოთ სიმრავლეები:

$$E_{k,n} = \{x \in E_k : f_n(x) \geq (1 - \varepsilon)a_k\} \quad (k \in \overline{1, m}, n \in \mathbb{N}).$$

(f_n) მიმდევრობის ზრდადობის საფუძველზე, ყოველი $k \in \overline{1, m}$ -თვის გვექნება, რომ

$$E_{k,1} \subset E_{k,2} \subset \dots \quad \text{და} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{k,n} = E_k.$$

შედეგად, ზომის ქვემოდან უწყვეტობის თვისების ძალით, ყოველი $k \in \overline{1, m}$ -თვის,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_{k,n}) = \mu(E_k).$$

$$g_n = \sum_{k=1}^m (1 - \varepsilon) a_k \chi_{E_{k,n}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

ცხადია, g_n მარტივი ფუნქციაა და $f_n \geq g_n$. 8.1.1 თეორემისა და ინტეგრალის მონოტონურობის თვისების გათვალისწინებით დაეწეროთ,

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_X g_n d\mu = \sum_{k=1}^m (1 - \varepsilon) a_k \mu(E_{k,n}).$$

საიდანაც, თავის მხრივ მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m (1 - \varepsilon) a_k \mu(E_{k,n}) = \\ &= \sum_{k=1}^m (1 - \varepsilon) a_k \mu(E_k) = (1 - \varepsilon) \int_X f d\mu. \end{aligned}$$

მედეგად, $\varepsilon \in (0, 1)$ რიცხვის ნებისმიერობის საფუძველზე ვლევლობით (1) შეფასებას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

§ 3. არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი

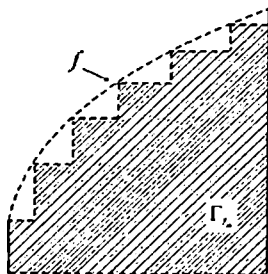
როგორც აღნიშნეთ, ლებეგის ინტეგრალი წარმოადგენს ფუნქციის გრაფიკულად სიმრავლის გამოშვას მექანიზმს, რომელიც უკვე ფორმირებულია არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციებისათვის. ნებისმიერი არაუარყოფითი ზომადი f ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალის განსასაზღვრად უნდა ვიხელმძღვანელოთ შემდეგი ბუნებრივი გეომეტრიული მოსაზრებებით: განვიხილოთ არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციების ზრდადი (f_n) მიმდევრობა, რომელიც ყოველ წერტილში კრებადია f ფუნქციისაკენ. მაშინ Γ_{f_n} სიმრავლეები თანდათანობით ამოწურავენ Γ_f სიმრავლეს (ნახ. 8.3), ე.ი.

$$\Gamma_{f_1} \subset \Gamma_{f_2} \subset \dots \quad \text{და} \quad \Gamma_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_{f_n}.$$

აღნიშნულის საფუძველზე მივიჩნიოთ, რომ

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu. \quad (1)$$

შეგინძნოთ, რომ (1)-ში მითითებული ზღვრის არსებობა გარანტირებულია (f_n) მიმდევრობის ზრდადობისა და არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციის ინტეგრალის მონოტონურობის თვისების საფუძველზე. აქვე ისმის განსაზღვრების კორექტულობის საკითხი, დაავამიერებელი (f_n) მიმდევრობის შერჩევისაგან ზღვრის დამოუკიდებლობასთან. ზღვარი მართლაც დამოუკიდებელია მიმდევრობის შერჩევისაგან, რადგან თუ (f_n) და (g_n) არიან f ფუნქციისაკენ კრებადი



ნახ. 8.3.

არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციების ზრდადი მიმდევრობები, მაშინ თეორემა 8.2.2-ის ძალით, ყოველი m -სთვის გვექნება, რომ

$$\int_X f_m d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu \quad \text{და} \quad \int_X g_m d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

უკანასკნელი შეფასებები კი გვაძლევს ტოლობას:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu.$$

დაბოლოს, კიდევ ერთი საკითხი, რომელიც ასევე მოითხოვს გარკვევას: შემოღებული განსაზღვრება მიზნად ისახავს, ინტეგრალის ცნება გააერთიანოს არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციების კლასიდან არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციების კლასზე. ამიტომ არაუარყოფითი მარტივი f ფუნქციისათვის ინტეგრალის α მნიშვნელობა თავდაპირველი (ე.ი. წინა პარაგრაფში მოცემული) განსაზღვრების მიხედვით, უნდა ემთხვეოდეს (1) ტოლობის მეშვეობით გამოთვლილ β მნიშვნელობას. ამაში დასარწმუნებლად საკმარისია, (1) ზღვარი განვიხილოთ $f_n = f$ ($n \in \mathbb{N}$) მუდმივი მიმდევრობის მიმართ.

შევაჯამოთ ზემოთქმული: ვთქვათ, f არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა, ხოლო $\Lambda(f)$ -ით აღნიშნავს ყველა იმ (f_n) მიმდევრობის კლასს, რომელიც შედგება არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციებისაგან, ზრდადია და ყოველ წერტილში კრებადია f ფუნქციისაკენ. მაშინ:

- ნებისმიერი $(f_n) \in \Lambda(f)$ მიმდევრობისათვის არსებობს (1) ზღვარი;
- (1) ზღვრის მნიშვნელობა ერთი და იგივეა ყველა $(f_n) \in \Lambda(f)$ მიმდევრობისათვის;
- თუ f მარტივი ფუნქციაა, მაშინ (1) ზღვრის მნიშვნელობა ემთხვევა f -ის ლებეგის ინტეგრალს მნიშვნელობას §8.1-ში მოცემული განსაზღვრების მიხედვით;

- X სივრცეზე f ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი განისაზღვრება როგორც (1) ზღვრის მნიშვნელობა.

აღსანიშნავია, რომ ყოველ არაუარყოფით ზომად ფუნქციას გააჩნია სასრული ან უსასრულო ინტეგრალი.

არაუარყოფითი ზომადი f ფუნქციისათვის $P(f)$ -ით აღვნიშნოთ ყველა იმ არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციის კლასი, რომლებიც არ აღემატებიან f ფუნქციას.

შემდეგი თეორემა გვაძლევს არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციის ინტეგრალის განსაზღვრის კიდევ ერთ შესაძლო ვარიანტს.

თეორემა 8.3.1. ვთქვათ, f არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა. მაშინ

$$\int_X f d\mu = \sup_{p \in P(f)} \int_X p d\mu.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $(f_n) \in \Lambda(f)$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\{f_n, n \in \mathbb{N}\} \subset P(f)$, ინტეგრალის განსაზღვრიდან გამომდინარე დაეწერთ,

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq \sup_{p \in P(f)} \int_X p d\mu.$$

მეორე მხრივ, ნებისმიერი $p \in P(f)$ ფუნქციისათვის, თეორემა 8.2.2-ის ძალით გვაქვს, რომ

$$\int_X p d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

შედეგად,

$$\sup_{p \in P(f)} \int_X p d\mu \leq \int_X f d\mu.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

X -ის ზომად E ქვესიმრავლეზე არაუარყოფითი ზომადი f ფუნქციის ინტეგრალის განსაზღვრა ხდება შემდეგი ტოლობის მეშვეობით:

$$\int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu.$$

არაყარველ E სიმრავლეზე ინტეგრალს შეგვიძლია შევხედოთ, აგრეთვე, როგორც $f|_E$ ფუნქციის ინტეგრალს $(E, \mathcal{S} \cap E, \mu|_{\mathcal{S} \cap E})$ ზომიან სივრცეზე. ადვილი დასაანახია, რომ

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \sup_{p \in P(f)} \int_E p d\mu,$$

სადაც (f_n) ნებისმიერი მიმდევრობაა $\Lambda(f)$ კლასიდან.

თეორემა 8.3.2. ვთქვათ, $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{E_k}$, სადაც $E_1, E_2, \dots$ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ზომადი სიმრავლეებია, ხოლო $a_1, a_2, \dots$ არაუარყოფითი რიცხვებია. მაშინ

$$\int_X f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu(E_k). \quad (2)$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $f_n = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{E_k}$ ($n \in \mathbb{N}$). აღვიღო დასახისია, რომ (f_n) მარტივ ფუნქციათა მრავალი მიმდევრობაა და $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ყოველი x -სთვის. შედეგად, ინტეგრალის განსაზღვრების გათვალისწინებით დავწერთ,

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

საიდანაც, თეორემა 8.1.1-ის ძალით ვლბებულობთ (2) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამოცანები

1. ვთქვათ, f და g არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციებია. f და g ფუნქციებს ეწოდებათ ტოლადზომადი, თუ

$$\mu(\{f > a\}) = \mu(\{g > a\})$$

ყოველი $a > 0$ -სთვის. აჩვენეთ, რომ თუ f და g ტოლადზომადია, მაშინ $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.

§ 4. არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციის ღებეგის ინტეგრალის ზოგიერთი თვისება

თეორემა 8.4.1. ვთქვათ, f და g არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციებია. სამაროლიანია შემდეგი წინადადებები:

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu,$$

$$\int_X (cf) d\mu = c \int_X f d\mu \quad (c \geq 0),$$

$$\text{თუ } f \leq g, \text{ მაშინ } \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $(f_n) \in \Lambda(f)$ და $(g_n) \in \Lambda(g)$. მაშინ ცხადია, რომ $(f_n + g_n) \in \Lambda(f + g)$ და $(cf_n) \in \Lambda(f)$. შედეგად, ინტეგრალის განსაზღვრებისა და თეორემა 8.2.1-ის ძალით ვწერთ,

$$\begin{aligned}\int_X (f + g) d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (f_n + g_n) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_X f_n d\mu + \int_X g_n d\mu \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu; \\ \int_X (cf) d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (cf_n) d\mu = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(c \int_X f_n d\mu \right) = c \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = c \int_X f d\mu.\end{aligned}$$

მესამე წინადადების დასამტკიცებლად უნდა ვისარგებლოთ თეორემა 8.3.1-ით და გავიყვანოთ, რომ $P(f) \subset P(g)$.

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 8.4.2. ვთქვათ, f არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა და $C \geq 0$. თუ $f(x) \leq C$ ($x \in X$), მაშინ $\int_X f d\mu \leq C\mu(X)$.

დამტკიცება. შეფასება გამომდინარეობს ინტეგრალის მონოტონურობის თვისებიდან (იხ. თეორემა 8.4.1-ის მესამე წინადადება), თუ მას გამოვიყენებთ f და g ფუნქციათა წყვილისათვის, სადაც g არის იგივეურად C -ს ტოლი ფუნქცია. $\square$

თეორემა 8.4.3. ვთქვათ, f არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა. თუ E და F ზომადი სიმრავლეებია და $E \subset F$, მაშინ $\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu$.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ $f\chi_E \leq f\chi_F$ და გამოვიყენოთ ინტეგრალის მონოტონურობის თვისება. შედეგად დავწერთ,

$$\int_E f d\mu = \int_X f\chi_E d\mu \leq \int_X f\chi_F d\mu = \int_F f d\mu.$$

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 8.4.4. ვთქვათ, f არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა. თუ $\int_X f d\mu < \infty$, მაშინ $f(x) < \infty$ თითქმის ყველგან.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $E_\infty = \{f = \infty\}$. 8.4.2 და 8.4.3 თეორემების ძალით ვწერთ,

$$\infty > \int_X f d\mu \geq \int_{E_\infty} f d\mu = \infty \mu(E_\infty).$$

რაც შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $\mu(E_\infty) = 0$. $\square$

თეორემა 8.4.5. ვთქვათ, f არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა. თუ $\int_X f d\mu = 0$, მაშინ $f(x) = 0$ თითქმის ყველგან.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$E_k = \{f \geq 1/k\} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad E = \{f > 0\}.$$

ცხადია, (E_k) ზომად სიმრავლეთა ზრდადი მიმდევრობაა და $\lim_{k \rightarrow \infty} E_k = E$.

8.4.2 და 8.4.3 თეორემების ძალით ვწერთ,

$$0 = \int_X f d\mu \geq \int_{E_k} f d\mu \geq \frac{1}{k} \mu(E_k).$$

საიდანაც, ზომის ქცემოდან უწყვეტობის თვისების საფუძველზე ვღებულობთ, რომ $\mu(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k) = 0$. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 8.4.6. ვთქვათ, f არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა. თუ $\mu(E) = 0$, მაშინ $\int_E f d\mu = 0$.

დამტკიცება. ღებულება ცხადია მარტივი ფუნქციის შემთხვევაში. რის შემდეგაც, ზოგად სიტუაციაში ღებულების დასადგენად საყმარისია გაითიუალისწინოთ, რომ $\int_E f d\mu = \sup_{p \in P(f)} \int_E p d\mu$. $\square$

ამოცანები

1. ვთქვათ, f ზომადი ფუნქციაა და $f(x) > 0$ ყოველი $x \in X$ -სთვის. აჩვენეთ, რომ თუ E ზომადი სიმრავლეა და $\int_E f d\mu = 0$, მაშინ $\mu(E) = 0$.
2. ვთქვათ, μ ზომა შემოსამღერელია, f ზომადი ფუნქციაა და $f(x) > 0$ ყოველი $x \in X$ -სთვის. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი $\alpha \in (0, \mu(X))$ რიცხვისათვის,

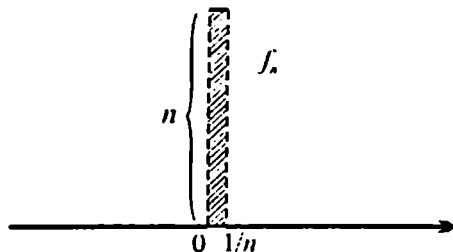
$$\inf_E \int_E f d\mu > 0,$$

სადაც ქვედა ზღვარი აიღება ყველა იმ ზომადი E სიმრავლის მიხედვით, რომელთათვისაც $\mu(E) \geq \alpha$.

3. აჩვენეთ, რომ თუ μ ზომა შემოსამღერელია, მაშინ ამოცანა 2-ის დასცენა სამოგადოდ არაა საშაროილიანი.
4. დაამტკიცეთ, რომ კანტორის ფუნქციის ინტეგრალი ღებუვის ზომის მიხედვით $1/2$ -ის ტოლია, ე.ი. $\int_{[0,1]} \theta dm = 1/2$.

§ 5. ზღვარზე გადასვლა ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ არაუარყოფით ზომად ფუნქციათა მიმდევრობებისათვის

ყოველი ნატურალური n -სთვის განვიხილოთ რიცხვით ლერძზე განსაზღვრული f_n ფუნქცია, რომელიც n -ის ტოლია $(0, 1/n)$ ინტერვალზე და ნულის ტოლია $(0, 1/n)$ ინტერვალის გარეთ, ე.ი. $f_n = n\chi_{(0,1/n)}$ (ნახ. 8.4).



ნახ. 8.4.

მარტივი შესამოწმებელია, რომ (f_n) მიმდევრობა ყოველ წერტილში კრებადია იგივეურად ნულის ტოლი f ფუნქციისაკენ, მაგრამ, მოუხედავად ამისა,

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu \neq \int_{\mathbb{R}} f d\mu = 0.$$

ამ მაგალითის საფუძველზე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ფუნქციათა მიმდევრობის ყოველ წერტილში კრებადობა, საზოგადოდ, არ უზრუნველყოფს ლებეგის ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლას, რის შემდეგაც აქტუალური ხდება საკითხი: რა დამატებით პირობებშია დასაშვები ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლა? შემდეგი თეორემა ეკუთვნის ბ. ლევის და ის გვიჩვენებს, რომ ფუნქციათა მიმდევრობის ბრდადობის შემთხვევაში ზღვარზე გადასვლა შესაძლებელია.

თეორემა 8.5.1. ვთქვათ, (f_n) არის არაუარყოფით ზომად ფუნქციათა ზრდადი მიმდევრობა, ხოლო f - მისი წერტილოვანი ზღვარი, ე.ი. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ($x \in X$). მაშინ

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

აქვე მოვახდინოთ კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი ზღვართი თეორემის ფორმულირება, რომელიც ეკუთვნის პ. ფატუს. ეს თეორემა, კერძოდ, გვიჩვენებს, რომ ფუნქციათა მიმდევრობის წერტილოვანი კრებადობა, მართალია, ვერ უზრუნველყოფს ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლას, მაგრამ მოუხედავად ამისა, უზრუნველყოფს ცალმხრივი შეფასების სამართლიანობას ზღვართი ფუნქციისა და მიმდევრობის წევრთა ინტეგრალების შედარებისას.

თეორემა 8.5.2. ვთქვათ, არაუარყოფით ზომად ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობა წერტილოვნად კრებადია და $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ($x \in X$). მაშინ

$$\int_X f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

უფრო მეტიც, იგივე შეფასება სამართლიანია მაშინაც, როცა f_n მიმდევრობა არაა აუცილებლად წერტილოვნად კრებადი და f -ის ნაცვლად აიღება $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ ფუნქცია.

აქვე მოვიყვანოთ ფატეს თეორემის ერთი საინტერესო შედეგი.

თეორემა 8.5.3. ვთქვათ, არაუარყოფითი ზომად ფუნქციითა (f_n) მიმდევრობა წერტილოვნად კრებადია და $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ($x \in X$). თუ ყოველი n -სთვის სრულდება შეფასება:

$$\int_X f_n d\mu \leq C,$$

მაშინ

$$\int_X f d\mu \leq C.$$

შენიშვნა 8.5.1. ადვილი დასაჩივრია, რომ ფატეს თეორემა და მისი შედეგი სამართლიანია მაშინაც, როცა (f_n) მიმდევრობის ყოველ წერტილში კრებადობის პირობას შევცვლით ზომადი f ფუნქციისავე თითქმის ყველგან კრებადობის პირობით.

ლევისა და ფატეს თეორემები მიღებული იქნება შემდეგი დებულების საფუძველზე, რომელიც, თავის მხრივ, წარმოადგენს თეორემა 8.2.2-ის განზოგადებას.

თეორემა 8.5.4. ვთქვათ, f_n ($n \in \mathbb{N}$) და f არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციებია. თუ (f_n) ზრდადი მიმდევრობაა და $f(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის, მაშინ

$$\int_X f d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

დამტკიცება. თეორემა 8.3.1-ის საფუძველზე დამტკიცება დაიყვანება იმ შემთხვევის განხილვაზე, როცა f მარტივი ფუნქციაა. შემდგომი მსჯელობა ანალოგიურია 8.2.2 თეორემის დამტკიცებისა და ის მოგვყავს გადმოცემის სისრულისათვის.

წარმოვადგინოთ f ფუნქცია სტანდარტული სახით: $f = \sum_{k=1}^m a_k \chi_{E_k}$.

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon \in (0, 1)$ რიცხვი. შემოვიღოთ სიმრავლეები:

$$E_{k,n} = \{x \in E_k : f_n(x) \geq (1 - \varepsilon)a_k\} \quad (k \in \overline{1, m}, n \in \mathbb{N}).$$

(f_n) მიმდევრობის ზრდადობის საფუძველზე, ყოველი $k \in \overline{1, m}$ -სთვის გვექნება, რომ

$$E_{k,1} \subset E_{k,2} \subset \dots \quad \text{და} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{k,n} = E_k.$$

შედეგად, ზომის ქვემოთ უწყვეტობის თვისების ძალით, ყოველი $k \in \overline{1, m}$ -სთვის,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_{k,n}) = \mu(E_k).$$

აღვნიშნოთ

$$g_n = \sum_{k=1}^m (1 - \varepsilon) a_k \chi_{E_{k,n}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

ცხადია, g_n მარტივი ფუნქციაა და $f_n \geq g_n$. 8.1.1 თეორემისა და ინტეგრალის მონოტონურობის თვისების გათვალისწინებით დავწერთ,

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_X g_n d\mu = \sum_{k=1}^m (1 - \varepsilon) a_k \mu(E_{k,n}).$$

საიდანაც, თავის მხრივ მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m (1 - \varepsilon) a_k \mu(E_{k,n}) = \\ &= \sum_{k=1}^m (1 - \varepsilon) a_k \mu(E_k) = (1 - \varepsilon) \int_X f d\mu. \end{aligned}$$

შედეგად, $\varepsilon \in (0, 1)$ რიცხვის ნებისმიერობის საფუძველზე ვღებულობთ (1) შეფასებას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 8.5.1-ის დამტკიცება. არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციის ინტეგრალის მონოტონურობისა და (f_n) მიმდევრობის ზრდადობის გათვალისწინებით გვექნება,

$$\int_X f_1 d\mu \leq \int_X f_2 d\mu \leq \dots \leq \int_X f d\mu.$$

საიდანაც ვასკენით, რომ $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$ არსებობს და არ აღემატება $\int_X f d\mu$ -ს. ეს დასვენა კი, თეორემა 8.5.4-თან ერთად გვაძლევს სასურველ ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 8.5.2-ის დამტკიცება. დავამტკიცოთ თეორემის მეორე ნაწილში ჩამოყალიბებული უფრო ზოგადი დებულება. აღვნიშნოთ

$$g_n = \inf_{m \geq n} f_m \quad (n \in \mathbb{N}).$$

ცხადია, (g_n) ზრდადი მიმდევრობაა და $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$ ($x \in X$). აქვე შევნიშნოთ, რომ $g_n \leq f_m$ ($n \leq m$), საიდანაც ინტეგრალის მონოტონურობის თვისების ძალით,

$$\int_X g_n d\mu \leq \int_X f_m d\mu \quad (n \leq m).$$

მეზოალნიშნულიდან გამომდინარე, თეორემა 8.5.4-ის ძალით დაეწერო, რომ

$$\int_X f d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu \leq \varlimsup_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შემდეგი მნიშვნელოვანი დებულება წარმოადგენს ლევის თეორემის შედეგს.

თეორემა 8.5.5. თუ (h_n) არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციების მიმდევრობაა, მაშინ

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} h_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X h_n d\mu.$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} h_n, \quad f_N = \sum_{n=1}^N h_n \quad (N \in \mathbb{N}).$$

ცხადია, (f_N) არაუარყოფით ზომად ფუნქციათა მონაკრები მიმდევრობაა და $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_N(x)$ ($x \in X$). თუ ვისარგებლებთ ლევის თეორემით და ინტეგრალის წრფივობის თვისებით, გვექნება, რომ

$$\begin{aligned} \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} h_n \right) d\mu &= \int_X f d\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_X f_N d\mu = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \int_X h_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X h_n d\mu. \end{aligned}$$

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამოცანები

1. ააგეთ არაუარყოფით ზომად ფუნქციათა კლასი (f_n) მიმდევრობა, რომლისთვისაც არ სრულდება ტოლობა:

$$\int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

2. აჩვენეთ, რომ თუ არაუარყოფით ზომად ფუნქციათა კლასი (f_n) მიმდევრობაა და დამტკიცებით ცნობილია, რომ $\int_X f_1 d\mu < \infty$, მაშინ

$$\int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

3. ააგეთ არაუარყოფით ზომად ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობა, შემდეგი თვისებებით:

$$\int_X f_n d\mu \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \int_X \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu = \infty.$$

§ 6. არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის თვალადად ადისციურობა

არაუარყოფითი ზომადი f ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი ეწოდება ზომად სიმრავლეთა კლასზე შემდეგნაირად განსაზღვრულ ფუნქციას:

$$\nu_f(E) = \int_E f d\mu \quad (E \in S).$$

ცხადია, ν_f არაუარყოფითი ფუნქციაა და $\nu_f(\emptyset) = 0$.

თეორემა 8.6.1. ნებისმიერი არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი არის თვალადად ადისციური და შედეგად, არის ზომა.

დამტკიცება. ვთქვათ, E_k ($k \in \mathbb{N}$) წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ზომადი სიმრავლეებია და $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. თუ გავითვალისწინებთ ტოლობას:

$$\chi_E = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k},$$

და გამოვიყენებთ თეორემა 8.5.5-ს, მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} \nu_f(E) &= \int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu = \int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f \chi_{E_k} \right) d\mu = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f \chi_{E_k} d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_f(E_k). \end{aligned}$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

მოვიყვანოთ თეორემა 8.6.1-ის რამდენიმე შედეგი.

თეორემა 8.6.2. ვთქვათ, f არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა. მაშინ ნებისმიერი თანაუკვეთი E და F ზომადი სიმრავლეებისათვის,

$$\int_{E \cup F} f d\mu = \int_E f d\mu + \int_F f d\mu.$$

თეორემა 8.6.3. არაუარყოფითი ზომადი f ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი არ არის დამოკიდებული ნული ზომის სიმრავლეზე ფუნქციის მიერ მიღებულ მნიშვნელობებზე. სახელდობრ, თუ E ზომადი სიმრავლეა, ხოლო N - მისი ნული ზომის ქვესიმრავლე, მაშინ

$$\int_E f d\mu = \int_{E \setminus N} f d\mu.$$

თეორემა 8.6.3 გამომდინარეობს თეორემა 8.6.2-დან იმის ცხადი ფაქტის გათვალისწინებით, რომ ნული ზომის სიმრავლეზე ინტეგრალის მნიშვნელობა ნულის ტოლია.

შენიშვნა 8.6.1. თეორემა 8.6.3-დან გამომდინარე, ამ თავის ყოველი თეორემა, რომლის პირობაში მოთხოვნილია რაიმე თვისების ყოველ წერტილში შესრულება, სამართლიანი რჩება იმ შემთხვევაშიც, როცა იგივე პირობები შესრულებულია ითქმის ყოველ წერტილში. მაგალითად, ფაქტს თეორემა სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როცა (f_n) მიმდევრობა ზღვართი f ფუნქციისაკენ კრებადია თითქმის ყოველ წერტილში.

თეორემა 8.6.4. თუ f და g ეკვივალენტური არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციებია, მაშინ ნებისმიერი ზომადი E სიმრავლისათვის,

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, N ნული ზომის სიმრავლეა, ისეთი, რომ $\{f \neq g\} \subset N$. მაშინ თეორემა 8.6.3-ის ძალით დაეწერთ,

$$\int_E f d\mu = \int_{E \setminus (N \cap E)} f d\mu = \int_{E \setminus (N \cap E)} g d\mu = \int_E g d\mu.$$

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 8.6.5. ვთქვათ, f არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა, (E_n) ზომად სიმრავლეთა ზრდადი მიმდევრობაა და $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. მაშინ

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f d\mu.$$

თეორემა 8.6.5 უშუალოდ გამომდინარეობს თეორემა 8.6.1-დან და ზომის ქვემოდან უწყვეტობის გათვალისწინებით.

ამოცანები

1. ვთქვათ, μ ზომა შემოსაზღვრულია და $f, f_1, f_2, \dots$ ზომადი სასრული ფუნქციებია. აჩვენეთ, რომ (f_n) მიმდევრობა ზომით კრებადია f ფუნქციისაკენ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\int_X \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} d\mu \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

2. აჩვენეთ, რომ თუ μ ზომა შემოსაზღვრულია, მაშინ ამოცანა 1-ის დასცენა საზოგადოდ არაა სამართლიანი.

3. ვთქვათ, $A_1, A_2, \dots$ ზომადი სიმრავლეებია და E_n ($n \in \mathbb{N}$) არის ყველა იმ წერტილის სიმრავლე, რომელიც შედის არანაკლებ n ცალში A_k სიმრავლეთა შორის. აჩვენეთ, რომ

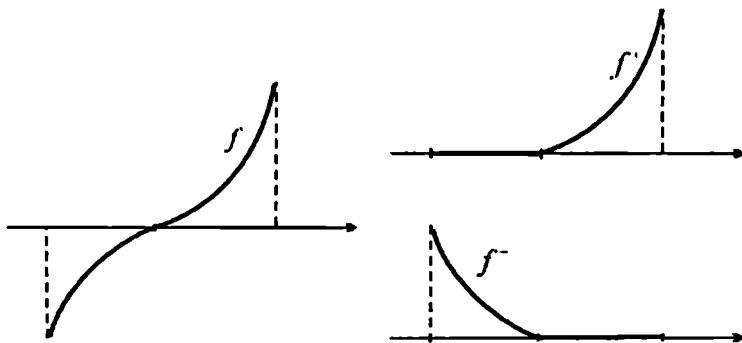
$$\mu(E_n) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

§ 7. ლებეგის ინტეგრალი ზოგად შემთხვევაში

ვთქვათ, f რაიმე ზომადი ფუნქციაა. განვიხილოთ f -ის წარმოდგენა დადებითი და უარყოფითი ნაწილების სხვაობის სახით, ე.ი.

$$f = f^+ - f^-,$$

სადაც $f^+ = f\chi_{\{f \geq 0\}}$ და $f^- = -f\chi_{\{f < 0\}}$ (ნახ. 8.5).



ნახ. 8.5.

თუკი შევნიშნავთ, რომ f^+ და f^- არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციებია, მაშინ ბუნებრივ მოსაზრებად ჩანს f ფუნქციის ინტეგრალად X სივრცეზე მივიჩნიოთ

$$\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

გამოსახულება. ოღონდ აქვე უნდა გავითვალისწინოთ შემდეგი გარემოება: თუ $\int_X f^+ d\mu$ და $\int_X f^- d\mu$ ინტეგრალები ორივე უსასრულოა, მაშინ მათი სხვაობა აზრს მოკლებულია, ანუ ასეთ შემთხვევაში $\int_X f d\mu$ ინტეგრალის განსაზღვრა შეუძლებელი ხდება. სწორედ ეს მოსაზრებები უდევს საფუძვლად ლებეგის ინტეგრალის ზოგად განსაზღვრებას. სახელდობრ:

ზომადი f ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი X სივრცეზე (აღნიშვნა: $\int_X f d\mu$) განისაზღვრება იმ შემთხვევაში, როცა

$$\int_X f^+ d\mu \text{ და } \int_X f^- d\mu$$

ინტეგრალს შორის ერთ-ერთი მაინც სასრულია და $\int_X f d\mu$ -ის მნიშვნელობად მიიჩნევა სხვაობა

$$\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

ცალკე გამოიყოფა ის შემთხვევა, როცა ორივე $\int_X f^+ d\mu$ და $\int_X f^- d\mu$ ინტეგრალი სასრულია. ასეთ შემთხვევაში, f ფუნქციას ეწოდება ლებეგის აზრით ინტეგრებადი ან კილევ, ჯამებადი. ყველა ჯამებადი ფუნქციის კლასი აღინიშნება $L(X, \mu)$ ჩანაწერით.

შენიშნოთ, რომ ლებეგის ინტეგრალის აღსანიშნად, აგრეთვე, გამოიყენება $\int_X f(x) d\mu(x)$ ჩანაწერი.

შენიშვნა 8.7.1. არაუარყოფითი ზომადი f ფუნქციისათვის $f^+ = f$ და $f^- = 0$. შედეგად, f -ის ინტეგრალის მნიშვნელობა გემოთ მოცემული განსაზღვრების მიხედვით ემთხვევა f -ის ინტეგრალის მნიშვნელობას §8.3-ში მოცემული განსაზღვრების მიხედვით.

შენიშვნა 8.7.2. არაუარყოფითი ზომადი f ფუნქციის ჯამებადობა ტოლფასია მისი ინტეგრალის სასრულობის, ე.ი. $\int_X f d\mu < \infty$ პირობის.

თეორემა 8.7.1. ზომადი f ფუნქცია ჯამებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჯამებადია მისი მოდული, ე.ი. $f \in L(X, \mu) \Leftrightarrow |f| \in L(X, \mu)$.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f \in L(X, \mu)$. მაშინ გვაქვს, რომ $\int_X f^+ d\mu < \infty$ და $\int_X f^- d\mu < \infty$. შედეგად, თუ გავითვალისწინებთ $|f| = f^+ + f^-$ ტოლობას და გამოვიყენებთ არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციებისათვის ლებეგის ინტეგრალის წრფივობის თვისებას, დავასკენით, რომ

$$\int_X |f| d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu < \infty,$$

რაც ნიშნავს $|f|$ -ის ჯამებადობას.

ვთქვათ, ახლა $|f| \in L(X, \mu)$. მაშინ $f^+ \leq |f|$ და $f^- \leq |f|$ შეფასებების გათვალისწინებით, არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციებისათვის ლებეგის ინტეგრალის მონოტონურობის თვისების ძალით დავასკენით, რომ

$$\int_X f^+ d\mu \leq \int_X |f| d\mu < \infty \text{ და } \int_X f^- d\mu \leq \int_X |f| d\mu < \infty.$$

შედეგად, $f \in L(X, \mu)$. თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 8.7.2. ვთქვათ, $f \in L(X, \mu)$. მაშინ $|f(x)| < \infty$ თითქმის ყველგან.

თეორემა 8.7.2 გამოდინარეობს 8.7.1 და 8.4.4 თეორემებიდან.

თეორემა 8.7.3. ვთქვათ, $f, g \in L(X, \mu)$. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

- 1) $f + g \in L(X, \mu)$ და $\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$,
- 2) ნებისმიერი $c \in \mathbb{R}$ -სთვის, $cf \in L(X, \mu)$ და $\int_X (cf) d\mu = c \int_X f d\mu$,
- 3) თუ $f \leq g$, მაშინ $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

დამტკიცება. არაუარყოფითი ფუნქციებისათვის ინტეგრალის მონოტონურობისა და წრფივობის თვისებების ძალით ვწერთ,

$$\int_X |f + g| d\mu \leq \int_X (|f| + |g|) d\mu \leq \int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu.$$

საიდანაც, თეორემა 8.7.1-ის საფუძველზე ვასცენით $f + g$ ფუნქციის ჯამებადობას.

გვაქვს, რომ

$$(f + g)^+ - (f + g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

შედეგად,

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+.$$

არაუარყოფითი ფუნქციებისათვის ინტეგრალის წრფივობის თვისების საფუძველზე გვექნება,

$$\begin{aligned} \int_X (f + g)^+ d\mu + \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu &= \\ &= \int_X (f + g)^- d\mu + \int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu. \end{aligned}$$

საიდანაც, ტოლობაში მონაწილე თითოეული ინტეგრალის სასრულობის გათვალისწინებით, უშუალოდ ვღებულობთ, რომ

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

გადავიღეთ ერთგვაროვნების თვისების დამტკიცებაზე. არაუარყოფითი ფუნქციებისათვის ინტეგრალის დადებითად ერთგვაროვნების ძალით დაეწერთ,

$$\int_X |cf| d\mu = \int_X (|c||f|) d\mu = |c| \int_X |f| d\mu.$$

საიდანაც, თეორემა 8.7.1-ის საფუძველზე ვასცენით cf ფუნქციის ჯამებადობას.

თუ $c \geq 0$, მაშინ გვაქვს, რომ $(cf)^+ = cf^+$ და $(cf)^- = cf^-$ შედეგად, არაუარყოფითი ფუნქციებისათვის ინტეგრალის დადებითად ერთგვაროვნების გათვალისწინებით დავწერთ,

$$\begin{aligned}\int_X (cf) d\mu &= \int_X (cf^+) d\mu - \int_X (cf^-) d\mu = \\ &= c \int_X f^+ d\mu - c \int_X f^- d\mu = c \int_X f d\mu.\end{aligned}$$

მეორე შემთხვევაში, ე.ი. როცა $c < 0$, გვექნება, რომ $(cf)^+ = (-c)f^-$ და $(cf)^- = (-c)f^+$. შედეგად, კვლავ არაუარყოფითი ფუნქციებისათვის ინტეგრალის დადებითად ერთგვაროვნების გათვალისწინებით დავწერთ,

$$\begin{aligned}\int_X (cf) d\mu &= \int_X (cf^+) d\mu - \int_X (cf^-) d\mu = \\ &= (-c) \int_X f^- d\mu - (-c) \int_X f^+ d\mu = c \int_X f d\mu.\end{aligned}$$

ინტეგრალის მონოტონურობის დასადგენად შევნიშნოთ, რომ $f \leq g$ პირობის შესრულების შემთხვევაში სამართლიანი იქნება შეფასებები:

$$f^+ \leq g^+, \quad g^- \leq f^-$$

საიდანაც, არაუარყოფითი ფუნქციებისათვის ინტეგრალის მონოტონურობის საფუძველზე დავწერთ,

$$\int_X f^+ d\mu \leq \int_X g^+ d\mu, \quad \int_X g^- d\mu \leq \int_X f^- d\mu.$$

ამ შეფასებებიდან, მათში მონაწილე ინტეგრალების სასრულობის გათვალისწინებით, ვღებულობთ, რომ

$$\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \leq \int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu.$$

რაც ნიშნავს დასამტკიცებელი შეფასების სამართლიანობას.
თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 8.7.4. ვთქვათ, $f \in L(X, \mu)$. მაშინ $\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$.

თეორემა 8.7.4-ის დასამტკიცებლად საკმარისია გავითვალისწინოთ, რომ $\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$ და $\int_X |f| d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu$.

თეორემა 8.7.5. ვთქვათ, $f \in L(X, \mu)$, $f \geq 0$, g ზომადი ფუნქციაა და $|g| \leq f$. მაშინ $g \in L(X, \mu)$.

დამტკიცება. არაუარყოფითი ფუნქციებისათვის ინტეგრალის მონოტონურობის საფუძველზე გვაქვს,

$$\int_X |g| d\mu \leq \int_X f d\mu < \infty.$$

საიდანაც, თეორემა 8.7.1-ის ძალით ვასენით g ფუნქციის ჯამებადობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 8.7.6. თუ $\mu(X) < \infty$, მაშინ ნებისმიერი შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქცია ჯამებადია.

დამტკიცება. ვთქვათ, f ზომადი ფუნქციაა და $|f(x)| \leq C$ ($x \in X$). შევნიშნოთ, რომ $\mu(X) < \infty$ პირობის საფუძველზე, იგივერად C -ს ტოლი ფუნქცია ჯამებადია. ამის შემდეგ, თუ გამოვიყენებთ თეორემა 8.7.5-ს, დავასკენით f -ის ჯამებადობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 8.7.7. თუ f ზომადი ფუნქციაა, $m \leq f(x) \leq M$ ($x \in X$) და $\mu(X) < \infty$. მაშინ $f \in L(X, \mu)$ და $m\mu(X) \leq \int_X f d\mu \leq M\mu(X)$.

დამტკიცება. თეორემა 8.7.4-ის ძალით f , $a\chi_X$ და $b\chi_X$ ფუნქციები ჯამებადია. ამის შემდეგ ინტეგრალის მონოტონურობის თვისება გვაძლევს საჭირო უტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შემდეგი ღებულება მოიხსენიება როგორც ჩებიშევის უტოლობა.

თეორემა 8.7.8. ვთქვათ, $f \in L(X, \mu)$. მაშინ ყოველი $\lambda > 0$ რიცხვისათვის სრულდება შეფასება:

$$\mu(\{|f| \geq \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_X |f| d\mu.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი $\lambda > 0$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$|f| \geq \lambda \chi_{\{|f| \geq \lambda\}}.$$

საიდანაც, არაუარყოფითი ფუნქციებისათვის ინტეგრალის მონოტონურობის საფუძველზე, გვაქვს,

$$\int_X |f| d\mu \geq \int_X \lambda \chi_{\{|f| \geq \lambda\}} d\mu = \lambda \mu(\{|f| \geq \lambda\}).$$

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 8.7.9. ვთქვათ, $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{E_k}$, სადაც $E_1, E_2, \dots$ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ზომადი სიმრავლეებია, ხოლო $a_1, a_2, \dots$ რაიმე სასრული რიცხვებია. f ფუნქცია ჯამებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ,

როცა კრებადია $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \mu(E_k)$ მწკრივი და ჯამებადობის შემთხვევაში f -ის ინტეგრალი გამოითვლება ტოლობით:

$$\int_X f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu(E_k).$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $\Lambda_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \geq 0\}$ და $\Lambda_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n < 0\}$. ადვილი დასაბუთია, რომ $f^+ = \sum_{k \in \Lambda_1} a_k \mu(E_k)$ და $f^- = \sum_{k \in \Lambda_2} |a_k| \mu(E_k)$. ამის შემდეგ, თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია გაითვალისწინოთ თეორემა 8.3.2. $\square$

თეორემა 8.7.10. გთქვამთ, μ ზომა შემოსაზღვრულია, f შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქციაა და $m \leq f(x) < M$ ($x \in X$). $[m, M)$ მონაკვეთის ნებისმიერი $T = (y_0, y_1, \dots, y_n)$, $m = y_0 < y_1 < \dots < y_n = M$, დანაწილებისათვის აღვნიშნოთ: $\lambda(T) = \max_{1 \leq k \leq n} (y_k - y_{k-1})$, $E_k = \{y_{k-1} \leq |f| < y_k\}$ ($1 \leq k \leq n$) და

$$\underline{S}_f(T) = \sum_{k=1}^n y_{k-1} \mu(E_k), \quad \overline{S}_f(T) = \sum_{k=1}^n y_k \mu(E_k).$$

ასეთ პირობებში გვაქვს, რომ

$$\int_X f d\mu = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \underline{S}_f(T) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \overline{S}_f(T).$$

დამტკიცება. განვიხილოთ $\overline{S}_f(T)$ ჯამების შემთხვევა. T დანაწილებისათვის აღვნიშნოთ: $f_T = \sum_{k=1}^n y_k \chi_{E_k}$. ცხადია, f_T მარტივი ფუნქციაა, ამასთან, თეორემა 8.7.9-ის ძალით გვაქვს,

$$\int_X f_T d\mu = S_f(T).$$

შემდეგ, თუ შევნიშნავთ, რომ $|f_T(x) - f(x)| \leq \lambda(T)$ ($x \in X$), ინტეგრალის წრფივობისა და 8.7.4 და 8.7.7 თეორემების ძალით დავწერთ,

$$\left| \int_X f_T d\mu - \int_X f d\mu \right| = \int_X |f_T - f| d\mu \leq \lambda(T) \mu(X).$$

საიდანაც გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ტოლობა. $\underline{S}_f(T)$ ჯამების შემთხვევაში მსჯელობა ანალოგიურად წარიმართება. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 8.7.3. $\underline{S}_f(T)$ და $\overline{S}_f(T)$ ჯამებს შესაბამისად ლებეგის ზედა და ქვედა ინტეგრალურ ჯამებს უწოდებენ. $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \underline{S}_f(T) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \overline{S}_f(T)$ ტოლობა შეიძლება საფუძვლად დაედოს ლებეგის ინტეგრალის განსაზღვრას

შემოსამღვრული ზომით აღჭურვილ სივრცეზე მოცემული შემოსამღვრული და ზომადი ფუნქციებისთვის. სწორედ ასეთი იყო ლებეგის ორიგინალური განსაზღვრება.

ამოცანები

1. აჩვენეთ, რომ თუ μ ზომა შემოსამღვრულია, მაშინ ზომადი f ფუნქციის ჯამებადობა ტოლფასია $\sum_{k=1}^{\infty} k\mu(\{k \leq |f| < k+1\})$ მწკრივის კრებადობის.
2. აჩვენეთ, რომ თუ μ ზომა შემოსამღვრულია, მაშინ ზომადი f ფუნქციის ჯამებადობა ტოლფასია $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{|f| \geq k\})$ მწკრივის კრებადობის.
3. აჩვენეთ, რომ თუ μ ზომა შემოსამღვრულია, მაშინ 1 და 2 ამოცანების დასკვნები საზოგადოდ არაა სამართლიანი.
4. აჩვენეთ, რომ თუ f ფუნქცია ჯამებადია, მაშინ სრულდება პირობა $\mu(\{|f| > \lambda\}) = o(1/\lambda)$ ($\lambda \rightarrow \infty$). ააგეთ მაგალითი შემოსამღვრული μ ზომის და ზომადი f ფუნქციისა, რომლებისთვისაც სრულდება აღნიშნული პირობა, მაგრამ მიუხედავად ამისა, f არაა ჯამებადი.
5. ეთქვათ, f ზომადი ფუნქციაა. აჩვენეთ, რომ თუ რომელიმე $\alpha > 1$ და $C > 0$ რიცხვებისათვის შესრულებულია $\mu(\{|f| > \lambda\}) \leq C/\lambda^\alpha$ ($\lambda > 0$) პირობა, მაშინ f ფუნქცია ჯამებადია.

§ 8. ლებეგის ინტეგრალი, როგორც სიმრავლის ფუნქცია

ზომადი f ფუნქციის ინტეგრალი X -ის ზომად E ქვესიმრავლეზე განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით:

$$\int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu.$$

ამასთან, იგულისხმება, რომ $\int_E f d\mu$ არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს $\int_X f \chi_E d\mu$. არატარიელი E სიმრავლის შემთხვევაში, $\int_E f d\mu$ -ს შეიძლება შევხედოთ, როგორც $f|_E$ ფუნქციის ინტეგრალს $(E, \mathcal{S} \cap E, \mu|_{\mathcal{S} \cap E})$ სივრცეზე.

f ფუნქციას ეწოდება ლებეგის აზრით ინტეგრებადი, ან კიდევ, ჯამებადი E სიმრავლეზე, თუ $f \chi_E \in L(X, \mu)$. E -ზე ჯამებადი ყველა ფუნქციის კლასი აღნიშნვით $L(E, \mu)$ ჩანაწერით.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ: 1) $\int_E f d\mu$ არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\int_E f^+ d\mu$ და $\int_E f^- d\mu$ ინტეგრალებს შორის ერთ-ერთი მაინც სასრულია; 2) $f \in L(E, \mu)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ორივე $\int_E f^+ d\mu$ და $\int_E f^- d\mu$ ინტეგრალებს შორის სასრულია.

თეორემა 8.8.1. ვთქვათ, f ზომადი ფუნქციაა. თუ $\mu(E) = 0$, მაშინ $f \in L(E, \mu)$ და $\int_E f d\mu = 0$.

თეორემა 8.8.1 არის 8.7.4 და 8.4.6 თეორემების შედეგი.

თეორემა 8.8.2. ვთქვათ, f ზომადი ფუნქციაა, E და F ზომადი სიმრავლეებია, $F \subset E$ და $f \in L(E, \mu)$. მაშინ $f \in L(F, \mu)$.

თეორემა 8.8.2 არის 8.7.1 და 8.4.3 თეორემების შედეგი.

$f \in L(X, \mu)$ ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი ეწოდება ზომად სიმრავლეთა კლასზე შემდეგნაირად განსაზღვრულ ფუნქციას:

$$\nu_f(E) = \int_E f d\mu \quad (E \in S).$$

შეგინძნოთ, რომ ნებისმიერი ზომადი E სიმრავლისათვის $\int_E f d\mu$ ინტეგრალის არსებობა გარანტირებულია თეორემა 8.8.2-ის ძალით.

თეორემა 8.8.3. ნებისმიერი $f \in L(X, \mu)$ ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი წარმოადგენს ორი შემოსაზღვრული ზომის სხვაობას და შედეგად არის თვლადად ადიცირება.

დამტკიცება. გვაქვს, რომ $\int_X f^+ d\mu < \infty$, $\int_X f^- d\mu < \infty$ და $\nu_f(E) = \nu_{f^+}(E) - \nu_{f^-}(E)$ ($E \in S$). საიდანაც, თეორემა 8.6.1-ის გათვალისწინებით, ვასკენით, რომ ν_f წარმოადგება ν_{f^+} და ν_{f^-} შემოსაზღვრული ზომების სხვაობის სახით. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

მოვიყენოთ თეორემა 8.8.3-ის რამდენიმე შედეგი.

თეორემა 8.8.4. ვთქვათ, $f \in L(X, \mu)$. მაშინ ნებისმიერი თანაუკვეთი E და F ზომადი სიმრავლეებისათვის,

$$\int_{E \cup F} f d\mu = \int_E f d\mu + \int_F f d\mu.$$

თეორემა 8.8.5. $f \in L(X, \mu)$ ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი არ არის დამოკიდებული ნული ზომის სიმრავლეზე ფუნქციის მიერ მიღებულ მნიშვნელობებზე. სახელდობრ, თუ E ზომადი სიმრავლეა, ხოლო N - მისი ნული ზომის ქვესიმრავლე, მაშინ

$$\int_E f d\mu = \int_{E \setminus N} f d\mu.$$

თეორემა 8.8.5 გამომდინარეობს 8.8.1 და 8.8.4 თეორემებიდან.

თეორემა 8.8.6. თუ ეკვივალენტურ ზომად f და g ფუნქციებს შორის ერთ-ერთი ჯამებადია, მაშინ ჯამებადია მეორე მათგანიც და ნებისმიერი ზომადი E სიმრავლისათვის,

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu.$$

დამტკიცება. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $f^+ \sim g^+$ და $f^- \sim g^-$. შედეგად, თეორემა 8.6.4-ის ძალით გვაქვს, რომ ყოველი ზომადი E სიმრავლისათვის სრულდება ტოლობები:

$$\int_E f^+ d\mu = \int_E g^+ d\mu, \quad \int_E f^- d\mu = \int_E g^- d\mu.$$

საიდანაც გამომდინარეობს დასამტკიცებელი წინადადებები. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 8.8.7. ვთქვათ, $f \in L(X, \mu)$, (E_n) ზომად სიმრავლეთა ზრდადი მიმდევრობაა და $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. მაშინ

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f d\mu.$$

თეორემა 8.8.7 გამომდინარეობს თეორემა 8.6.5-დან, თუ მას გამოვიყენებთ f^+ და f^- ფუნქციებისათვის.

შემდეგი თეორემა გამოხატავს ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს თვისებას, რომელსაც აბსოლუტურად უწყვეტობად მოიხსენიებენ.

თეორემა 8.8.8. ვთქვათ, $f \in L(X, \mu)$. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება $\delta > 0$, ისეთი, რომ

$$\left| \int_E f d\mu \right| < \varepsilon,$$

ყოველი ზომადი E სიმრავლისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს $\mu(E) < \delta$ პირობას.

დამტკიცება. $\nu_f = \nu_{f^+} - \nu_{f^-}$ ტოლობის გათვალისწინებით, საკმარისია თეორემა დავამტკიცოთ არაუარყოფითი ფუნქციის შემთხვევაში. დაეუშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ, მოიძებნება $\varepsilon > 0$ და ზომად სიმრავლეთა (E_n) მიმდევრობა, ისეთი, რომ ყოველი n -სთვის,

$$\mu(E_n) < \frac{1}{2^n} \quad \text{და} \quad \nu_f(E_n) \geq \varepsilon.$$

განვიხილოთ სიმრავლეთა (E_n) მიმდევრობის ზედა ზღვარი:

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k.$$

მაშინ ბორელ-კანტელის ლემის (იხ. თეორემა 4.4.4) საფუძველზე მივიღებთ $\mu(E) = 0$ ტოლობას. მეორე მხრივ, თუ გაითვალისწინებთ, რომ ν_f შემოსაზღვრული ზომაა (იხ. თეორემა 8.6.1) და გამოიყენებთ ზომის ზემოდან უწყვეტობის თვისებას, მივიღებთ,

$$\nu_f(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_f\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right).$$

შედეგად, $\nu_f(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k) \geq \nu_f(E_n) \geq \varepsilon$ შეფასების გამო, $\nu_f(E) \geq \varepsilon$. ამრიგად, ნულზომიან E სიმრავლეზე არაუარყოფითი f ფუნქციის ინტეგრალი გამოვიდა დადებითი. ეს კი ეწინააღმდეგება თეორემა 8.8.1-ს. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 8.8.1. თეორემა 8.8.1 სამართლიანია მაშინაც, როცა $|\int_E f d\mu|$ გამოსახულებას შეეცვლით $\int_E |f| d\mu$ გამოსახულებით. ამის დასადაგენად საკმარისია გაითვალისწინოთ, რომ $f \in L(X, \mu) \Rightarrow |f| \in L(X, \mu)$ და შემდეგ თეორემა 8.8.1 გამოიყენოთ $|f|$ ფუნქციისათვის.

ამოცანები

1. ვთქვათ, $f \in L(\mathbb{R}, m)$. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი შემოსაზღვრული და ლებეგის აბრით ზომადი E სიმრავლისათვის, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E+n} |f| dm = 0$, სადაც $E + n = \{x + n : x \in E\}$.
2. ვთქვათ, $f \in L([a, b], m)$. აჩვენეთ, რომ თუ $\int_{[a, c]} f dm = 0$ ყოველი $c \in [a, b]$ წერტილისათვის, მაშინ f თითქმის ყველგან ნულის ტოლია.

§ 9. ზღვარზე გადასვლა ლებეგის ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ

შემდეგი დებულება წარმოადგენს ბ. ლევის თეორემის ვარიანტს ნებისმიერნიშნის ფუნქციებისათვის.

თეორემა 8.9.1. ვთქვათ, (f_n) არის ჯამებად ფუნქციათა ზრდადი მიმდევრობა, ხოლო f მისი წერტილოვანი ზღვარი, ე.ი. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ($x \in X$). თუ დამატებით ცნობილია, რომ

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n d\mu < \infty,$$

მაშინ f ფუნქცია ჯამებადია და

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ $g_n = f_n - f_1$ ($n \in \mathbb{N}$) ფუნქციები. ცხადია, რომ ეს მიმდევრობა აკმაყოფილებს არაუარყოფითი ფუნქციებისათვის ლევის თეორემის პირობებს, რის გამოც, $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$ ტოლობით განსაზღვრული ფუნქციისათვის გვექნება, რომ

$$\int_X g d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu - \int_X f_1 d\mu. \quad (1)$$

შედეგად, თეორემის პირობის ძალით ვასკენით g ფუნქციის ჯამებადობას. აქედან, $f = g + f_1$ ტოლობის საფუძველზე გამომდინარეობს f ფუნქციის ჯამებადობა. შემდეგ, (1)-ის გათვალისწინებით, ეწერო, რომ

$$\int_X f d\mu = \int_X g d\mu + \int_X f_1 d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ახლა ჩამოვყალიბოთ უმნიშვნელოვანესი ზღვართი თეორემა, რომელიც ეკუთვნის ლებესს. ეს დებულება მოიხსენიება, როგორც ლებესის თეორემა მაკორანტული კრებადობის შესახებ და გვიჩვენებს, რომ თითქმის ყველგან კრებადობა უმრუნეელყოფს ზღვარზე გადასვლას ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ, თუ დამატებით ცნობილია, რომ მიმდევრობის წევრები ერთობლივ შემოსაზღვრულია რაიმე ჯამებადი ფუნქციით (მაკორანტით).

თეორემა 8.9.2. ვთქვათ, (f_n) ჯამებად ფუნქციათა მიმდევრობაა და f ჯამებადი ფუნქციაა. თუ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ თითქმის ყველგან და დამატებით ცნობილია ისეთი არაუარყოფითი ჯამებადი g ფუნქციის არსებობა, რომ ყოველი n -სთვის, $|f_n(x)| \leq g(x)$ თითქმის ყველგან, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0,$$

და შედეგად,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

ლემა 8.9.1. ვთქვათ, (f_n) ჯამებად ფუნქციათა მიმდევრობაა და f ჯამებადი ფუნქციაა. თუ $\mu(X) < \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ თითქმის ყველგან და დამატებით ცნობილია ისეთი არაუარყოფითი C რიცხვის არსებობა, რომ ყოველი n -სთვის, $|f_n(x)| \leq C$ თითქმის ყველგან, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0,$$

და შედეგად,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

დამტკიცება. მოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $|f_n(x)| \leq C$ და $|f(x)| \leq C$ შეფასებებს ადგილი აქვთ ყოველ წერტილში. მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში განვიხილავდით f_n და f ფუნქციების ეკვივალენტურ ფუნქციებს, რომლებიც ხსენებულ პირობებს ამაყოფილებენ ყოველ წერტილში და გავითვალისწინებდით, რომ ეკვივალენტურ ფუნქციებს ერთი და იგივე ინტეგრალები აქვთ.

ეთქვას, $\varepsilon > 0$. განვიხილოთ დადებითი δ და η რიცხვები, რომლებიც შერჩეული იქნება მოგვიანებით. შემოსაზღვრული მომის შემთხვევაში, თითქმის ყველგან კრებადობა იწვევს მომით კრებადობას (იხ. თეორემა 7.8.2). აღნიშნულის გათვალისწინებით მოიძებნება $N \in \mathbb{N}$, ისეთი, რომ

$$\mu(\{|f_n - f| > \delta\}) < \eta, \text{ როცა } n \geq N.$$

თუ გავითვალისწინებთ $|f_n - f| \leq 2C$ შეფასებას და გამოვიყენებთ ინტეგრალის ადიტიურობისა და მონოტონურობის თვისებებს, ყოველი $n \geq N$ -სთვის გვექნება,

$$\begin{aligned} \int_X |f_n - f| d\mu &= \int_{\{|f_n - f| > \delta\}} |f_n - f| d\mu + \int_{\{|f_n - f| \leq \delta\}} |f_n - f| d\mu \leq \\ &\leq \int_{\{|f_n - f| > \delta\}} 2C d\mu + \int_X \delta d\mu \leq 2C\eta + \delta\mu(X). \end{aligned}$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $\eta < \frac{\varepsilon}{4C}$ და $\delta < \frac{\varepsilon}{2\mu(X)}$, მაშინ ყოველი $n \geq N$ -სთვის გვექნება,

$$\int_X |f_n - f| d\mu < \varepsilon.$$

ამით ლემა დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 8.9.2. ვთქვათ, f ჯამებადი ფუნქციაა. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება სასრული ზომის E სიმრავლე, ისეთი, რომ f შემოსაზღვრულია E სიმრავლეზე და $\int_{X \setminus E} |f| d\mu < \varepsilon$.

დამტკიცება. მოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, როცა f არაუარყოფითია და ყოველ წერტილში სასრულია.

აღვნიშნოთ $E_k = \{1/k \leq f \leq k\}$ ($k \in \mathbb{N}$). ადვილი შესამოწმებელია, რომ $(f \chi_{E_k})$ ზრდადი მიმდევრობაა და $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f \chi_{E_k})(x)$ ყოველი x -სთვის. შედეგად, ლევის თეორემის ძალით,

$$\int_X f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f \chi_{E_k} d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f d\mu.$$

საიდანაც, განუსაზღვრელი ინტეგრალის ადიციურობის თვისების საფუძველზე, საკმარისად დიდი k -სთვის გვექნება,

$$\int_{X \setminus E_k} f d\mu < \varepsilon.$$

ამის შემდეგ, თუ შევნიშნავთ, რომ f შემოსაზღვრულია თითოეულ E_k სიმრავლეზე და ჩებიშევის უტოლობის ძალით,

$$\mu(E_k) \leq \mu(\{f \geq 1/k\}) \leq k \int_X f d\mu < \infty,$$

დავასკენით, რომ საკმარისად დიდი k -სთვის E_k სიმრავლე დაკმაყოფილებს ყველა საჭირო პირობას. თოორემა დამტკიცებულია. □

თოორემა 8.9.2-ის დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოდ, რომ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ და $|f_n(x)| \leq g(x) < \infty$ პირობებს ადგილი აქვთ ყოველ წერტილში. მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში განვიხილავდით f_n , f და g ფუნქციების ეკვივალენტურ ფუნქციებს, რომლებიც ხსენებულ პირობებს აკმაყოფილებენ ყოველ წერტილში და გაეთვალისწინებდით, რომ ეკვივალენტურ ფუნქციებს ერთი და იგივე ინტეგრალები აქვთ.

ვთქვათ, $\varepsilon > 0$. ლემა 8.9.2-ის გამოყენებით შეგვიძლია ვიპოვოთ სასრული ზომის E სიმრავლე, ისეთი, რომ g ფუნქცია შემოსაზღვრულია E -ზე და

$$\int_{X \setminus E} |g| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$(E, S \cap E, \mu|_{S \cap E})$ ზომიანი სივრცე და $f_n|_E$ ($n \in \mathbb{N}$), $f|_E$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ლემა 8.9.1-ის პირობებს. შედეგად, ლემა 8.9.1-ის ძალით, საკმარისად დიდი n -სთვის შესრულდება შეფასება:

$$\int_E |f_n - f| d\mu < \frac{\varepsilon}{3}.$$

გემოაღნიშნულიდან გამომდინარე, საკმარისად დიდი n -სთვის გვექნება, რომ

$$\begin{aligned} \int_X |f_n - f| d\mu &= \int_E |f_n - f| d\mu + \int_{X \setminus E} |f_n - f| d\mu < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + 2 \int_{X \setminus E} g d\mu < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

თოორემა დამტკიცებულია. □

ვთქვათ, (f_n) თითქმის ყველგან სასრულ ზომად ფუნქციათა მიმდევრობაა, f თითქმის ყველგან სასრული ზომადი ფუნქციაა და E ზომადი სიმრავლეა.

ვიტყვი, რომ (f_n) მიმდევრობა ზომით კრებადია f ფუნქციისაკენ E სიმრავლეზე, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ -სთვის სრულდება პირობა:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in E : |f_n(x)| < \infty, |f(x)| < \infty, |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

შენიშვნა 8.9.1. თეორემა 7.8.2-ის ძალით (f_n) მიმდევრობის თითქმის ყველგან კრებადობა იწვევს (f_n) -ის ზომით კრებადობას სივრცის ნებისმიერ სასრული ზომის E ქვესიმრავლეზე.

შენიშვნა 8.9.2. ცხადია, რომ (f_n) -ის ზომით კრებადობა იწვევს (f_n) -ის ზომით კრებადობას სივრცის ნებისმიერ ზომად E ქვესიმრავლეზე.

თუ გაეანალიზებთ თეორემა 8.9.1-ის დამტკიცებას, დაერწმუნდებით, რომ სამართლიანია შემდეგი კიდევ უფრო ზოგადი დებულება.

თეორემა 8.9.3. ვთქვათ, (f_n) ჯამებად ფუნქციათა მიმდევრობაა და f ჯამებადი ფუნქციაა. თუ (f_n) მიმდევრობა ზომით კრებადია f ფუნქციისაკენ სივრცის ნებისმიერ სასრული ზომის ქვესიმრავლეზე და დამატებით ცნობილია ისეთი არაუარყოფითი ჯამებადი g ფუნქციის არსებობა, რომ ყოველი n -სთვის, $|f_n(x)| \leq g(x)$ თითქმის ყველგან, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0,$$

და შედეგად,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

შენიშვნა 8.9.3. ამ პარაგრაფის დებულებების ანალოგები სამართლიანია $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$ ფუნქციური მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრების საკითხთან მიმართებაში. აქ, ოღონდ, ერთობლივ შემოსამღვრულობის შესაბამისი პირობები უნდა მოეთხოვოთ მწკრივის $\sum_{k=1}^n h_k$ კერძო ჯამებს.

შენიშვნა 8.9.4. წევრ-წევრად ინტეგრების საკითხი მნიშვნელოვანია, როცა გვინდა გარკვეულ ფუნქციურ მწკრივად წარმოდგენილი h ფუნქციის ინტეგრალის გამოთვლა. რიმანის ინტეგრალის ფარგლებში ამ საკითხის გადაწყვეტა შეუძლებელია საკმაოდ მარტივ შემთხვევებშიც კი.

გემოალიზმის დამადასტურებელი მაგალითის ასაგებად განვიხილოთ $[0, 1]$ მონაკვეთის არსად მკვერივი და სრულყოფილი E ქვესიმრავლე, რომელსაც აქვს დადებითი ზომა. ასეთი სიმრავლე აიგება კანტორის დისკონტინუუმის მსგავსად. სახელდობრ, ავიღოთ დადებით რიცხვთა (a_n) მიმდევრობა თვისებით: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \varepsilon < 1$. აგების პირველ ეტაპზე $[0, 1]$ სეგმენტიდან

ამოვადლოთ მისი კონცენტრული ინტერვალი α_1 -ის ტოლი სიგრძით და საზოგადოდ. აგების n -ურ ეტაპზე განვიხილოთ აგების $n - 1$ ეტაპის შემდეგ დარჩენილი 2^{n-1} ცალი სეგმენტი და მათგან ამოვადლოთ მათი კონცენტრული და $\alpha_n/2^{n-1}$ სიგრძის ინტერვალები. ასეთი აგების შედეგად მივიღებთ $[0, 1]$ მონაკვეთის არსად მკრეფ და სრულყოფილ ქვესიმრავლეს, რომელსაც ექნება $1 - \varepsilon$ რიცხვის ტოლი ზომა.

$((a_k, b_k))_{k \in \mathbb{N}}$ იყოს E სიმრავლის დამატებითი ინტერვალების მიმდევრობა. ყოველი k -სათვის h_k -თი აღვნიშნოთ $[0, 1]$ -ზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც ნულის ტოლია (a_k, b_k) ინტერვალის გარეთ და რომლის გრაფიკი Ox ღერძთან ერთად ქმნის ტოლფერდა სამკუთხედს (a_k, b_k) მონაკვეთის ტოლი ფუძით და წვეროთი $(c_k, 1)$ წერტილში, სადაც c_k არის (a_k, b_k) -ს შუაწერტილი.

განვიხილოთ $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$ ფუნქციური მწკრივი. ამ მწკრივს აქვს შემდეგი თვისებები:

- h_k ფუნქციები უწყვეტი და არაუარყოფითია;
- $\sum_{k=1}^{\infty} h_k(x) \leq 1$ ყოველი $x \in [0, 1]$ წერტილისათვის;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{[a,b]} h_k(x) dx \leq 1$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$ მწკრივის h ჯამი არაა რიმანის აზრით ინტეგრებადი.

პირველი, მეორე და მესამე თვისებები ცხადია. მეოთხე თვისების დასადაგენად უნდა შევნიშნოთ, რომ h იქნება E სიმრავლის ყოველ წერტილში წყვეტილი ფუნქცია. ეს მტკიცდება E -ს არსად მკრეფობის საფუძველზე. დადებითი ზომის სიმრავლის წერტილებში წყვეტილი ფუნქცია კი რიმანის აზრით არაინტეგრებადია. ეს უკანასკნელი დასკვნა გამომდინარეობს რიმანის აზრით ინტეგრებადობის ცნობილი კრიტერიუმიდან, რომელიც დამტკიცებული იქნება მომდევნო თავში (იხ. §9.2).

ამრიგად, რიმანის ინტეგრალი, საზოგადოდ, ვერ უზრუნველყოფს ფუნქციური მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრებას იმ შემთხვევაშიც კი, როცა მწკრივი შედგება არაუარყოფითი უწყვეტი ფუნქციებისაგან, მისი კერძო ჯამები ერთობლივ შემოსაზღვრულია და, ამასთანავე, ინტეგრალების მწკრივი კრებადია. აღნიშნულის გამო წევრ-წევრად ინტეგრების საკითხი მიჩნეული იყო ერთ-ერთ ძირითად გადაუჭრელ ამოცანად, რაც მოითხოვდა ინტეგრების ახალი უფრო ძლიერი მექანიზმის შექმნას.

ამ და წინა პარაგრაფებში დადგენილი შესაბამისი თეორემები გვიჩვენებენ ლებეგის ინტეგრალის ეფექტურობას ფუნქციური მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრების საკითხთან მიმართებაში.

ამოცანები

1. ვთქვათ, μ ზომა შემოსაზღვრულია და (f_n) ჯამებად ფუნქციათა მიმდევრობაა, რომელიც თანაბრად კრებადი ჯამებადი f ფუნქციისაა. აჩვენეთ, რომ $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.
2. ვთქვათ, (f_n) არაუარყოფით ჯამებად ფუნქციათა მიმდევრობაა და f ჯამებადი ფუნქციაა. აჩვენეთ, რომ თუ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ თითქმის ყველგან და $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

3. აჩვენეთ, რომ ამოცანა 2-ის დასკვნა, საზოგადოდ, არაა სამართლიანი, თუ (f_n) ნებისმიერ ჯამებად ფუნქციათა მიმდევრობაა.
4. ვთქვათ, μ ზომა შემოსაზღვრულია, $f, f_1, f_2, \dots$ არაუარყოფითი ჯამებადი ფუნქციებია და (f_n) მიმდევრობა ზომით კრებადი f ფუნქციისაა. აჩვენეთ, რომ $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ ტოლობა სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა f_n ფუნქციებს აქვთ თანაბარხარისხვნად აბსოლუტურად უწყვეტი ინტეგრალები, ე.ი. ყოველი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება $\delta > 0$, ისეთი, რომ δ -ზე მცირე ზომის ნებისმიერი E სიმრავლისათვის და ყოველი n -სთვის სრულდება შეფასება: $\int_E f_n d\mu < \varepsilon$.
5. აჩვენეთ, რომ ამოცანა 4-ის დასკვნა საზოგადოდ არაა სამართლიანი, თუ μ ზომა შემოსაზღვრულია.

§ 10. ლებეგის ინტეგრალის გამოთვლა განაწილების ფუნქციის მეშვეობით

ზომადი f ფუნქციის განაწილების ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$F_f(t) = \mu(\{|f| > t\}) \quad (0 \leq t < \infty).$$

ადილი შესამოწმებელია, რომ F_f ფუნქცია კლებადი და მარჯვნიდან უწყვეტია ყოველ წერტილში (ნახ. 8.6).

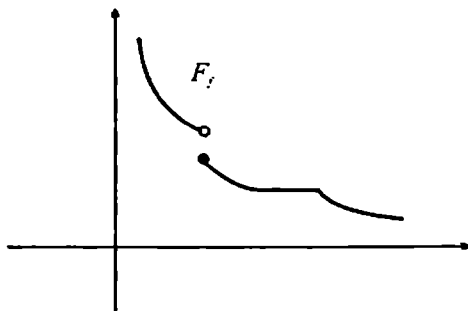
ქვემოთ მოცემული თეორემა გვიჩვენებს, თუ როგორ გამოითვლება ზომადი ფუნქციის მოდულის ინტეგრალი მისი განაწილების ფუნქციის მეშვეობით.

თეორემა 8.10.1. ნებისმიერი ზომადი f ფუნქციისათვის სამართლიანია ტოლობა:

$$\int_X |f| d\mu = \int_{[0, \infty)} F_f(t) dm(t).$$

თეორემა 8.10.1-ს ჩვენ მივიღებთ შემდეგი უფრო ზოგადი დებულებიდან.

თეორემა 8.10.2. ვთქვათ, $\Phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ რაიმე უწყვეტად წარმოებადი, მკაცრად ზრდადი ფუნქციაა და $\Phi(0) = 0$. მაშინ ნებისმიერი



ნახ. 8.6.

ზომადი f ფუნქციისათვის სამართლიანია ტოლობა:

$$\int_X \Phi(|f|) d\mu = \int_{[0, \infty)} F_f(t) \Phi'(t) dm(t). \quad (1)$$

შენიშვნა 8.10.1. ცხადია, $\Phi(t) = t$ ($0 \leq t < \infty$) შემთხვევაში თეორემა 8.10.2-დან მიიღება თეორემა 8.10.1.

დამტკიცება. ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა f არის არა-უარყოფითი მარტივი ფუნქცია, რომელიც დადებით მნიშვნელობებს ღებულობს სასრული მომის სიმრავლეებზე. განვიხილოთ f -ის წარმოდგენა: $f = \sum_{k=0}^n a_k \chi_{E_k}$, სადაც $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n$ და $\{f = a_k\} = E_k$ ($0 \leq k \leq n$). f -ის განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$F_f(t) = \begin{cases} \mu(E_1) + \mu(E_2) + \dots + \mu(E_n), & \text{თუ } 0 < t < a_1, \\ \mu(E_2) + \dots + \mu(E_n), & \text{თუ } a_2 \leq t < a_1, \\ \mu(E_n), & \text{თუ } a_{n-1} \leq t < a_n, \\ 0, & \text{თუ } a_n \leq t. \end{cases}$$

აქედან გამომდინარე, გვექნება, რომ

$$\begin{aligned} \int_{(0, \infty)} F_f(t) \Phi'(t) dm(t) &= \sum_{k=1}^n \int_{[a_{k-1}, a_k)} F_f(t) \Phi'(t) dm(t) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=k}^n \mu(E_i) \right) \int_{[a_{k-1}, a_k)} \Phi'(t) dm(t) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=k}^n \mu(E_i) \right) (\Phi(a_k) - \Phi(a_{k-1})) = \sum_{k=1}^n \Phi(a_k) \mu(E_k). \end{aligned} \quad (2)$$

მეორე მხრივ, $\Phi(f) = \sum_{k=1}^n \Phi(a_k) \chi_{E_k}$ ტოლობის ძალით,

$$\int_X \Phi(|f|) d\mu = \sum_{k=1}^n \Phi(a_k) \mu(E_k). \quad (3)$$

(2)-დან და (3)-დან ეღებულობთ დასამტკიცებელ (1) ტოლობას.

გადავიდეთ ზოგადი შემთხვევის განხილვაზე. ზოგადობის შეუმუდავად ეიგულისხმით, რომ f არაუარყოფითია. თუ $\mu(\{f > t\}) = \infty$, რომელიმე დადებითი t -სათვის, მაშინ ღებულება მარტივი შესამოწმებელია. ასე რომ, განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\mu(\{f > t\}) < \infty$ ყოველი დადებითი t -სათვის. მაშინ თეორემა 7.5.1-ის გამოყენებით (იხ. აგრეთვე შენიშვნა 7.5.1) ვიპოვით მარტივ ფუნქციათა ზრდად (f_n) მიმდევრობას, რომლის ყოველი წევრი დადებით მნიშვნელობებს ღებულობს სასრული ზომის სიმრავლეებზე და რომელიც ყოველ წერტილში კრებადია f ფუნქციისაკენ. თუ გამოვიყენებთ თეორემის ზემოთ დამტკიცებულ ნაწილს, ყოველი n -სთვის გვექნება,

$$\int_X \Phi(f_n) d\mu = \int_{[0, \infty)} F_{f_n}(t) \Phi'(t) d\mu(t). \quad (4)$$

(f_n) მიმდევრობის თვისებებიდან გამომდინარე ადვილი დასანახია, რომ (F_{f_n}) ფუნქციათა მიმდევრობა არის ზრდადი და ყოველ წერტილში კრებადია F_f ფუნქციისაკენ. ამის შემდეგ, ლევის თეორემის გამოყენებით, (4) ტოლობის ორივე მხარეში გადავიდეთ ზღვარზე. რაც მოგვცემს დასამტკიცებელ ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ეთქვათ, $\Phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ბორელის აზრით ზომადი რაიმე ფუნქციაა. $\Phi(L)(X, \mu)$ ინტეგრალური კლასი განისაზღვრება, როგორც ყველა იმ ზომადი f ფუნქციის კლასი, რომლისთვისაც

$$\int_X \Phi(|f|) d\mu < \infty.$$

ცხადია, $\Phi(t) = t$ შემთხვევაში $\Phi(L)(X, \mu)$ დაემთხვევა ლებეგის აზრით ინტეგრებად ფუნქციათა $L(X, \mu)$ კლასს. მე-11 თავში შესწავლილი იქნება $\Phi(t) = t^p$ ($1 \leq p < \infty$) სახის ფუნქციებით წარმოქმნილი ინტეგრალური კლასები.

რიმანისა და ლებეგის ინტეგრალების შედარება

ეს თავი ეთმობა ზოგიერთი იმ უპირატესობის წარმოჩენას, რომელიც ლებეგის ინტეგრალს აქვს რიმანის ინტეგრალთან შედარებით.

§ 1. მიმართება რიმანისა და ლებეგის ინტეგრალებს შორის

ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმობთ, რომ $[a, b]$ არის რაიმე გადაუგვარებელი n -განზომილებიანი სეგმენტი.

$R([a, b])$ ჩანაწერით აღვნიშნოთ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული და რიმანის აზრით ინტეგრებადი ყველა ფუნქციის კლასი.

ლებეგის აზრით ზომადი არაყაროილი $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისათვის $L(E)$ ჩანაწერით აღვნიშნოთ E -ზე განსაზღვრული და ლებეგის ზომის მიხედვით ინტეგრებადი ყველა ფუნქციის კლასი. ე.ი. $L(E) = L(E, m_E)$, სადაც m_E არის ლებეგის ზომის შეზღუდვა E -ში შემავალ ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეთა კლასზე.

შევთანხმდეთ, რომ $f \in R([a, b])$ ფუნქციის რიმანის ინტეგრალს აღვნიშნავთ $\int_{[a, b]} f$ ჩანაწერით, ხოლო $f \in L(E)$ ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალს $\int_E f dm$ ჩანაწერით.

შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ ლებეგის ინტეგრალი წარმოადგენს რიმანის ინტეგრალის გაგრესილებას.

თეორემა 9.1.1. თუ $f \in R([a, b])$, მაშინ $f \in L([a, b])$ და

$$\int_{[a, b]} f dm = \int_{[a, b]} f.$$

სიმარტივისათვის, თეორემა 9.1.1-ს დავამტკიცებთ ერთგანზომილებიან შემთხვევაში.

გადმოცემის სისრულისათვის ქვემოთ მოცემული იქნება ზოგიერთი განსაზღვრება და დებულება რიმანის ინტეგრალის თეორიიდან.

$[a, b]$ სეგმენტის დანაწილება ეწოდება ნებისმიერ $P = (x_0, \dots, x_n)$ ($n + 1$)-ეულს, სადაც $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. P დანაწილების პარამეტრი ეწოდება $\lambda(P) = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$ რიყსეს.

$[a, b]$ სეგმენტის მონიშნული დანაწილება ეწოდება (P, ξ) წყვილს, სადაც $P = (x_0, \dots, x_n)$ არის $[a, b]$ -ს დანაწილება, ხოლო $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ n -ეული. რომლის $\xi_1, \dots, \xi_n$ წევრები შესაბამისად ეკუთვნიან $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ მონაკვეთებს. (P, ξ) მონიშნული დანაწილების პარამეტრი გაიგება, როგორც P დანაწილების პარამეტრი.

ეთქვას, f არის $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული სასრული ფუნქცია. $[a, b]$ -ს მონიშნული (P, ξ) დანაწილებისათვის აღვნიშნოთ

$$\sigma_f(P, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

$\sigma_f(P, \xi)$ ჯამს უწოდებენ f ფუნქციის რიმანის ინტეგრალურ ჯამს.

ამბობენ, რომ I რიცხვი არის $\sigma_f(P, \xi)$ ჯამების ზღვარი, როცა $\lambda(P) \rightarrow 0$ (ჩანაწერი: $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma_f(P, \xi) = I$), თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება $\delta > 0$, ისეთი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი მონიშნული (P, ξ) დანაწილებისათვის, რომლის პარამეტრი ნაკლებია δ -ზე, სრულდება შეფასება:

$$|\sigma_f(P, \xi) - I| < \varepsilon.$$

$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma_f(P, \xi)$ ზღვრის არსებობის შემთხვევაში ამბობენ, რომ f ფუნქცია რიმანის აზრით ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, ან კიდევ, არსებობს f ფუნქციის რიმანის ინტეგრალი $[a, b]$ სეგმენტზე.

f ფუნქციის რიმანის ინტეგრალი $[a, b]$ სეგმენტზე (მისი არსებობის შემთხვევაში) აღინიშნება $\int_{[a,b]} f$ ან $\int_{[a,b]} f(x) dx$ ჩანაწერით და ინტეგრალის მნიშვნელობად მიიჩნევა $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma_f(P, \xi)$ ზღვარი.

მარტივად მოწმდება, რომ რიმანის აზრით ინტეგრებადი ფუნქცია აუცილებლად შემოსაზღვრულია.

ეთქვას, f არის შემოსაზღვრული ფუნქცია. $[a, b]$ სეგმენტის $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ დანაწილებისათვის აღვნიშნოთ:

$$\overline{\sigma}_f(P) = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}), \quad \underline{\sigma}_f(P) = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}),$$

სადაც M_k და m_k შესაბამისად არიან f ფუნქციის სუპრემუმი და ინფიმუმი $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე. $\overline{\sigma}_f(P)$ და $\underline{\sigma}_f(P)$ ჯამებს შესაბამისად უწოდებენ დარბუს ზედა და ქვედა ჯამებს. ცხადია, ნებისმიერი (P, ξ) მონიშნული დანაწილებისათვის, $\underline{\sigma}_f(P) \leq \sigma_f(P, \xi) \leq \overline{\sigma}_f(P)$, ამასთან, $\overline{\sigma}_f(P)$ და $\underline{\sigma}_f(P)$ ჯამები, შესაბამისად, წარმოადგენენ $\sigma_f(P, \xi)$ ჯამების სუპრემუმსა და ინფიმუმს, ალბუღს ξ -ს მიხედვით. რიმანის ინტეგრალი შეიძლება გამოითვალოს

დარბუს ჯამების საფუძველზე: თუ f რიმანის აზრით ინტეგრებადია, მაშინ

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \bar{\sigma}_f(P) = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \underline{\sigma}_f(P).$$

ე.ი. ფუნქციის რიმანის ინტეგრალი მისი დარბუს ზედა და ქვედა ჯამების ზღვრების ტოლია.

თეორემა 9.1.1-ის დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ f ფუნქცია შემოსაზღვრულია რიმანის აზრით ინტეგრებადობის გამო. ყოველი $k \in \mathbb{N}$ -სთვის დავანაწილოთ $[a, b]$ სეგმენტი 2^k ტოლ ნაწილად $x_{k,j} = a + \frac{j}{2^k}(b-a)$ ($j = 0, \dots, 2^k$) წერტილების მეშვეობით და ამ დანაწილების შესაბამისი დარბუს ჯამები:

$$\Omega_k = \frac{b-a}{2^k} \sum_{j=1}^{2^k} M_{k,j}, \quad \omega_k = \frac{b-a}{2^k} \sum_{j=1}^{2^k} m_{k,j},$$

სადაც $M_{k,j}$ არის f -ის სუპრემუმი $[x_{k,j-1}, x_{k,j}]$ სეგმენტზე, ხოლო $m_{k,j}$ f -ის ინფიმუმი იგივე სეგმენტზე. რიმანის ინტეგრალის თვისებების ძალით,

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k.$$

u_k და l_k ფუნქციები განესაზღვროთ შემდეგნაირად: $u_k(a) = l_k(a) = f(a)$ და

$$u_k(x) = M_{k,j}, \quad l_k(x) = m_{k,j} \quad (x \in (x_{k,j-1}, x_{k,j}], j = 1, \dots, 2^k).$$

u_k და l_k არიან უბან-უბან მუდმივი ფუნქციები და

$$\int_{[a,b]} u_k d\mu = \Omega_k, \quad \int_{[a,b]} l_k d\mu = \omega_k.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ k -ური ეტაპის ყოველი დანაწილების სეგმენტი წარმოადგენს $(k+1)$ -ე ეტაპის დანაწილების ორი სეგმენტის გაერთიანებას, ადვილად დაერწმუნდებით (l_k) მიმდევრობის კლებადობასა და (u_k) მიმდევრობის ზრდადობაში. აქვე შევნიშნოთ, რომ

$$\inf_{[a,b]} f \leq l_k \leq f \leq u_k \leq \sup_{[a,b]} f \quad (k \in \mathbb{N}).$$

განვიხილოთ u და l ფუნქციები, რომლებიც შესაბამისად წარმოადგენენ (u_k) და (l_k) მიმდევრობების წერტილოვან ზღვარს, ე.ი. $u(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x)$ და $l(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} l_k(x)$ ($x \in [a, b]$). u და l ფუნქციები არიან ლებეგის აზრით ზომადი და აკმაყოფილებენ შეფასებებს:

$$\inf_{[a,b]} f \leq l \leq f \leq u \leq \sup_{[a,b]} f.$$

მაქორანტული კრებადობის შესახებ ლებეგის თეორემის ძალით დაეწერი.

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} u_k dm = \int_{[a,b]} u dm,$$

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} l_k dm = \int_{[a,b]} l dm.$$

შედეგად.

$$\int_{[a,b]} (u - l) dm = 0,$$

საიდანაც ვასკენით $l(x) = u(x)$ ტოლობის თითქმის ყველგან შესრულებას. აქედან. თავის მხრივ, ლებეგის ზომის სისრულის საფუძველზე, გვაქვს, რომ f ზომადი ფუნქციაა, რომელიც ეკვივალენტურია u და l ფუნქციების. ეს უკანასკნელი პირობა კი საშუალებას გვაძლევს, დავადგინოთ ტოლობა:

$$\int_{[a,b]} f dm = \int_{[a,b]} f.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 9.1.1. ლებეგის აზრით ინტეგრებად ფუნქციათა კლასი გაცილებით უფრო ფართოა, ვიდრე რიმანის აზრით ინტეგრებად ფუნქციათა კლასი. კერძოდ, რიმანის აზრით ინტეგრებადი ყოველი ფუნქცია აუცილებლად შემოსაზღვრულია, მაშინ, როცა ძნელი მისათითებელი არაა ლებეგის აზრით ინტეგრებადი შემოსაზღვრული ფუნქციები. განსხვავება თვალსაჩინოა შემოსაზღვრული ფუნქციების შემთხვევაშიც: ნებისმიერი შემოსაზღვრული და ლებეგის აზრით ზომადი ფუნქცია, თეორემა 8.7.6-ის ძალით, ლებეგის აზრით ინტეგრებადი მაშინ, როცა როგორც მომდევნო პარაგრაფში იქნება დადგენილი, ასეთი ფუნქციები, წყვეტის წერტილთა სიმრავლის არანულზომიანობის შემთხვევაში, არ არიან რიმანის აზრით ინტეგრებადი. კონკრეტულ მაგალითს შემოსაზღვრული ფუნქციისა $L([a, b]) \setminus R([a, b])$ კლასიდან გვაძლევს ღირისლეს ფუნქცია.

ამოცანები

1. გამოთვალეთ $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} e^{-n \sin x} dx$ ზღვარი.
2. გამოთვალეთ $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \sin^{2n}(x^2 + y^2) dx dy$ ზღვარი, სადაც $E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\pi\}$.
3. გამოთვალეთ $\int_{[0,1]} f dm$ ინტეგრალი, თუ f არის ფუნქცია, რომელიც x^2 -ის ტოლია კანტორის სიმრავლის წერტილებში და x^3 -ის ტოლია $[0, 1]$ მონაკვეთის დანარჩენ წერტილებში.

§ 2. რიმანის აზრით ინტეგრებადობის კრიტერიუმი

თეორემა 9.2.1. $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული f ფუნქცია რიმანის აზრით ინტეგრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ერთდროულად შესრულებულია შემდეგი ორი პირობა:

- f შემოსაზღვრულია;
- f უწყვეტია თითქმის ყველგან ღებეგის ზომის მიხედვით.

დამტკიცება. სიმარტივისათვის განვიხილოთ ერთგანზომილებიანი შემთხვევა.

ქვემოთ ვისარგებლებთ თეორემა 9.1.1-ის დამტკიცებაში გამოყენებული აღნიშვნებით და დასვენებით. P_k ($k \in \mathbb{N}$) იყოს $x_{k,0}, \dots, x_{k,2^k}$ წერტილები-საგან შედგენილი $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილება, ხოლო Π იყოს P_k ($k \in \mathbb{N}$) დანაწილებების შემადგენელი ყველა წერტილის სიმრავლე, ე.ი.

$$\Pi = \{x_{k,j} : k \in \mathbb{N}, j = 0, \dots, 2^k\}.$$

თავდაპირველად დაემატოვოთ შემდეგი დებულება: შემოსაზღვრული f ფუნქცია უწყვეტია $x \in [a, b] \setminus \Pi$ წერტილში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $l(x) = u(x)$.

თუ $l(x) = u(x)$, მაშინ $l(x) \leq f(x) \leq u(x)$ შეფასებების გამო, $l(x) = f(x) = u(x)$. ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება k , ისეთი, რომ $|u_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ და $|l_k(x) - f(x)| < \varepsilon$. განვიხილოთ ის I ინტერვალი P_k დანაწილებით წარმოქმნილ ინტერვალთა შორის, რომელიც შეიცავს x წერტილს. ადვილად დაერწმუნდებით, რომ ყოველი $y \in I$ წერტილისათვის სრულდება შეფასებები:

$$f(x) - \varepsilon < l_k(x) < f(y) < u_k(x) < f(x) + \varepsilon.$$

რაც ნიშნავს f -ის უწყვეტობას x წერტილში.

ვთქვათ, f უწყვეტია x წერტილში. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება $\delta > 0$ თვისებით: $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$, როცა $|y - x| < \delta$. ადვილი დასანახია, რომ საკმარისად დიდი k -სთვის ის I ინტერვალი P_k დანაწილებით წარმოქმნილ ინტერვალთა შორის, რომელიც შეიცავს x წერტილს, მოთავსდება x -ის δ -მიდამოში. შედეგად, საკმარისად დიდი k -სთვის შესრულდება $u_k(x) - l_k(x) \leq 2\varepsilon$ შეფასება. საიდანაც გამომდინარეობს $l(x) = u(x)$ ტოლობა. ამით დებულება დამტკიცებულია.

ახლა გადავიდეთ უშუალოდ თეორემის დამტკიცებაზე. ვთქვათ, $f \in R([a, b])$. მაშინ f იქნება შემოსაზღვრული. თეორემა 9.1.1-ის დამტკიცებაში დადგენილია, რომ $u(x) = l(x)$ თითქმის ყველგან. აქედან გამომდინარე, დამტკიცებული დებულების საფუძველზე ვასკენით f ფუნქციის უწყვეტობას თითქმის ყოველ წერტილში. ამით აუცილებლობის ნაწილი დადგენილია.

დავუშვათ, f შემოსაზღვრულია და f უწყვეტია თითქმის ყველგან ლუბე-
გის ზომის მიხედვით. ვაჩვენოთ, რომ $\lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k$. შედეგად, გვექნება
შესაძლებლობა ვიპოვოთ დანაწილება, რომლის შესაბამის დარბუს ზედა და
ქვედა ჯამებს შორის განსხვავება წინასწარ დასახელებულ რიცხვზე მცირე
იქნება. ეს კი, როგორც ცნობილია, ნიშნავს ფუნქციის რიმანის აზრით ინტეგ-
რებადობას. სხენებული ტოლობის დასადგენად შევნიშნოთ: i) u და l ფუნქცი-
ები შემოსაზღვრული და ლუბეგის აზრით ზომადია; ii) $u(x) = l(x)$ თითქმის
ყველგან (ზემოთ დამტკიცებული დებულების ძალით). საიდანაც ეწეროთ,

$$\int_{[a,b]} u dm = \int_{[a,b]} l dm.$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ მარცხენა ინტეგრალი $\lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_k$ ზღვრის
ტოლია, ხოლო მარჯვენა კი - $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k$ ზღვრისა, მივიღებთ $\lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k$
ტოლობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 9.2.1. გავიხსენოთ პირველყოფილის განსაზღვრება: F ფუნქციას
ეწოდება f ფუნქციის პირველყოფილი, თუ F არის წარმოებული ყოველ
 $x \in [a, b]$ წერტილში და $F'(x) = f(x)$.

რიმანის აზრით ინტეგრებადი f ფუნქციისათვის F -ით აღნიშნოთ მისი
რიმანის განუსაზღვრელი ინტეგრალი, ე.ი. $F(x) = \int_{[a,x]} f$ ტოლობით განსაზ-
ღვრული ფუნქცია.

კლასიკური ანალიზიდან ცნობილია, რომ თუ f ფუნქცია უწყვეტია რაიმე
 $x_0 \in [a, b]$ წერტილში, მაშინ F წარმოებადია x_0 -ში და $F'(x_0) = f(x_0)$.

აღნიშნულიდან გამომდინარე, თუ f უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ მისი რიმანის
განუსაზღვრელი ინტეგრალი წარმოადგენს მისსავე პირველყოფილს.

იგივეს თქმა შეუძლებელია რიმანის აზრით ინტეგრებადი ნებისმიერი f
ფუნქციისათვის. მართლაც, თუ f რიმანის აზრით ინტეგრებადი ფუნქციაა,
რომელსაც აცილებადი წყვეტა აქვს რაიმე x_0 წერტილში, მაშინ ადვილი
დასანახია, რომ $F'(x_0)$ იარსებებს, მაგრამ ის არ იქნება $f(x_0)$ -ის ტოლი.
შესაძლებელია ამ თვალსაზრისით კიდევ უფრო მეტი ნეგატივის შემცველი
ფუნქციების აგება. მაგალითად, თუ $E \subset [a, b]$ არის ნებისმიერი ნული ზომის
ჩაკეტილი სიმრავლე, მაშინ $f = \chi_E$ ფუნქციისათვის $F'(x) = f(x)$ ტოლობა
დაირღვევა ყოველ $x \in E$ წერტილში.

ამრიგად, რიმანის განუსაზღვრელი ინტეგრალი, სამოგადოდ, არ წარმო-
ადგენს ინტეგრალქვეშა ფუნქციის პირველყოფილს კლასიკური გაგებით.

თეორემა 9.2.1 საშუალებას იძლევა, რიმანის განუსაზღვრელი ინტეგრალი
გავიზაროთ, როგორც ინტეგრალქვეშა ფუნქციის პირველყოფილი. ამასთან
დაკავშირებით შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრება: F ფუნქციას ეუწოდოთ f
ფუნქციის განზოგადებული პირველყოფილი, თუ F არის თითქმის ყველ-
გან წარმოებული ფუნქცია და $F'(x) = f(x)$ თითქმის ყოველი $x \in [a, b]$

წერტილისათვის. მაშინ თეორემა 9.2.1-ის ძალით, რიმანის აზრით ინტეგრებადი ნებისმიერი f ფუნქციისათვის მისი რიმანის განუსაზღვრელი ინტეგრალი წარმოადგენს მისსავე განზოგადებულ პირველყოფილს.

შენიშვნა 9.2.2. როგორც უკვე ვიცით, შემოსამღვრელი ფუნქცია რიმანის აზრით ინტეგრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი წყვეტი წერტილთა სიმრავლის მომა ნულის ტოლია, ხოლო რაც შეეხება ლებეგის აზრით ინტეგრებადობას - ის უზრუნველყოფილია ნებისმიერი შემოსამღვრელი და მომადი ფუნქციისათვის. გაუაანალიზოთ, თუ რითაა გამოწვეული ასეთი პროგრესი რიმანის ინტეგრალიდან ლებეგის ინტეგრალზე გადასვლისას.

აღნიშნული მიმნისათვის მოხერხებულია, გამოვიყენოთ რიმანის ინტეგრალის განსაზღვრა დარბუს ჯამების ტერმინებში და შემოსამღვრელი მომადი ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალის განსაზღვრა ლებეგის ჯამების ტერმინებში (იხ. თეორემა 8.7.10).

შეგინძოთ, რომ დარბუს და ლებეგის ჯამებს აქვთ ერთმანეთის მსგავსი სახეები: $\sum_{k=1}^n m_k m(E_k)$ და $\sum_{k=1}^n M_k m(E_k)$, სადაც E_k სიმრავლეები ქნიათ $[a, b]$ სეგმენტის გარსეულ დაყოფას. ხოლო m_k და M_k არიან რიხვები, რომელთა შორისაც მოთავსებულია f ფუნქციის ინფიმუმი და სუპრემუმი, ალბული E_k სიმრავლეზე. განსხვავება იმაშია, რომ დარბუს ჯამებში E_k სიმრავლე არის $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილების $[x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთი, ხოლო ლებეგის ჯამებში E_k არის

$$\{x \in [a, b] : y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}$$

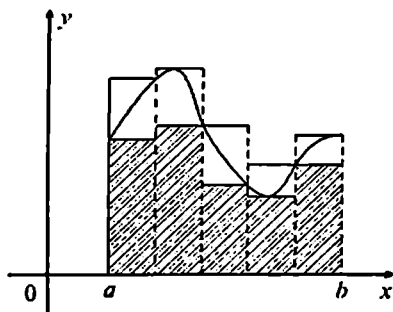
სახის სიმრავლე, სადაც $[y_{k-1}, y_k]$ წარმოადგენს f ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლის შემკველი $[m, M]$ მონაკვეთის დანაწილების მონაკვეთს. ამრიგად, პირველ შემთხვევაში E_k სიმრავლეებში წერტილები თავს იყრიან ფუნქციის განსაზღვრის არეზე მათი სიახლოვის მიხედვით, ხოლო მეორე შემთხვევაში კი - ამ წერტილებში ფუნქციის მნიშვნელობათა სიახლოვის მიხედვით. აღნიშნული მოუღუნა არსებითი განმასხვავებელი მომენტია რიმანისა და ლებეგის ინტეგრალთა მექანიზმებს შორის. ქვემოთ გაანალიზებული იქნება მიზეზები, რომლის გამოც, ინტეგრალის განზოგადების პროცესში დარბუს ჯამები გარდაიქმნება ლებეგის ჯამებად.

დავიწყოთ იმით, რომ, გეომეტრიული თვალსაზრისით, ინტეგრალი გაიგება როგორც $f \geq 0$ ფუნქციის გრაფიკემა Γ_f სიმრავლის (ე.წ. მრუდწირული ტრაპეციის) გამოშვის მექანიზმი.

ეთქვან, f უწყვეტი დადებითი ფუნქციაა. კლასიკური ინტეგრალური აღრიხვა გეთავაზობს Γ_f მრუდწირული ტრაპეციის მომის გამოთილის შემდეგ მოგად პრინიპს: Γ_f სიმრავლე, გარკვეული წესით, იყოფა ისეთ ნაწილებად, რომელთა მიახლოებითი გაზომვის სარწმუნო არგუმენტებიც არსებობს. ამ ნაწილების ზომათა მიახლოებითი მნიშვნელობების შეკრების

საფუძველზე განისაზღვრება მთლიანი მრუდწირული ტრაპეციის ზომის მიახლოებითი მნიშვნელობა, საბოლოოდ კი ხდება ზღვარზე გადასვლა უფრო და უფრო ზუსტი მიახლოების უზრუნველყოფი დაყოფებით წარმოქმნილ ზღვარით პროცესში.

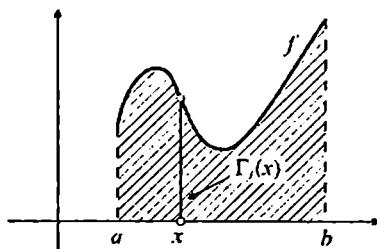
სახელდობრ, რიმანის ინტეგრალის კონსტრუქციაში Γ_f -ის დაყოფა ხდება შემდეგნაირად: დავანაწილოთ $[a, b]$ სეგმენტი $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ წერტილებით საკმარისად მცირე მონაკვეთებად და განვიხილოთ $[x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთებით წარმოქმნილი მცირე მრუდწირული ტრაპეციები: $\Gamma_k = \{(x, t) : x_{k-1} \leq x \leq x_k, 0 < t < f(x)\}$ ($1 \leq k \leq n$). m_k და M_k შესაბამისად იყენენ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე f ფუნქციის ინფიმუმი და სუპრემუმი. მაშინ ცხადია, რომ ყოველი k -სათვის, Γ_k მოიცავს $I_k = [x_{k-1}, x_k] \times (0, m_k)$ მართკუთხედს და ჩართულია $J_k = [x_{k-1}, x_k] \times (0, M_k)$ მართკუთხედში (ნახ. 9.1).



ნახ. 9.1.

გემოაღნიშნული ჩართვების გამო, თუ Γ_k -ს ზომის მიახლოებითი მნიშვნელობად ჩავთვლით I_k ან J_k მართკუთხედის ფართობს, ე.ი. $m_k(x_k - x_{k-1})$ ან $M_k(x_k - x_{k-1})$ სიდიდეს, მაშინ ცდომილება არ იქნება $(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$ რიცხვზე მეტი. ეს უკანასკნელი კი, f -ის უწყვეტობის გათვალისწინებით, შეიძლება ყოველი k -სათვის გავხადოთ $\varepsilon(x_k - x_{k-1})$ რიცხვზე მცირე. ამისათვის, x_k წერტილები უნდა შევარჩიოთ ისე, რომ $\max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$ იყოს საკმარისად მცირე. მაშინ $\sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1})$ და $\sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1})$ ჯამების გადახრა Γ_f -ს ზომის პიოთეგორი მნიშვნელობიდან იქნება $\varepsilon \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon(b - a)$ რიცხვზე მცირე. ზღვარზე გადასვლა, როცა $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილების $\max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$ პარამეტრი მიისწრაფვის ნულისაკენ, მოგვცემს რიცხვს, რომელიც, ბუნებრივია, რომ მივიჩნიოთ Γ_f მრუდწირული ტრაპეციის ზომის მნიშვნელობად.

$x \in [a, b]$ წერტილისათვის $\Gamma_f(x) = \{(x, t) : 0 < t < f(x)\}$ მონაკვეთის ეუწოდოთ Γ_f ტრაპეციის მდგენელი x ფუძით (ნახ. 9.2).



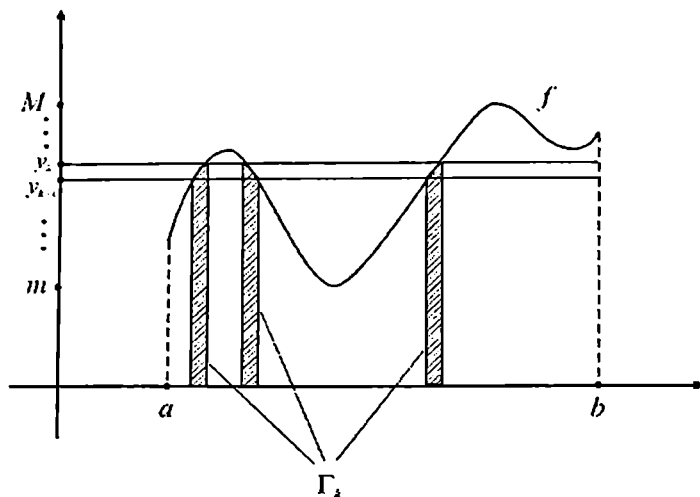
ნახ. 9.2.

როგორც გემოთ ვნახეთ, Γ_f ტრაპეციის მდგენელები გაერთიანებულია ერთ ნაწილში, მათი ფუძეების სიახლოვის ნიშნის მიხედვით, ეს კი, ფუნქციის უწყვეტობის საფუძველზე, თავის მხრივ, იწვევს ერთ ნაწილში მყოფ მდგენელთა სიმაღლეების ერთმანეთთან სიახლოვეს. ეს უკანასკნელი გარემოება არსებითი მნიშვნელობისაა Γ_k ნაწილის ზომის მიახლოებითი მნიშვნელობისა და მთლიანად Γ_f -ის ზომის განსაზღვრისა.

რა ხდება, როცა გემოთ მოცემულ კონსტრუქციას წყვეტილი ფუნქციებისათვის გამოვიყენებთ? ასეთ სიტუაციაში, წყვეტების გამო, მდგენელების სიმაღლეები შორს შეიძლება იყვნენ ერთმანეთისგან მათი ფუძეების სიახლოვის მიუხედავად. ამიტომ აშკარაა საფრთხე იმისა, რომ ბევრი წყვეტის წერტილის შემთხვევაში, Γ_k ნაწილების უმეტესობისათვის, ზომათა შეფასებები არაეფექტური აღმოჩნდეს, რაც, საბოლოო ჯამში, არ მოგვცემს Γ_f სიმრავლის გამომეის საშუალებას. ამას მარტივად გვიჩვენებს ღირიხლეს ფუნქციის მაგალითი. საზოგადოდ, თეორემა 9.2.1 ადასტურებს, რომ რიმანის ინტეგრალის ქმედუნარიანობა უწყვეტ ფუნქციათა კლასს დიდად არ შორდება. წყვეტილი ფუნქციების საინტეგრებლად საჭიროა სხვაგვარი მიდგომა.

წყვეტილი ფუნქციებისათვის Γ_f ტრაპეციის გასაზომად ლებეგმა გემოთ მოცემულ კონსტრუქციაში მოახდინა ბუნებრივი და ლოგიკური ცვლილება: ტრაპეციის მდგენელებს ერთ ნაწილში თავი მოუყარა არა მათი ფუძეების, არამედ მათი სიმაღლეების სიახლოვის ნიშნით. სახელდობრ, ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლის შემცველი $[m, M]$ მონაკვეთი $y_0 < y_1 < \dots < y_n$ წერტილებით დაპყო წინასწარ მოცემულ ε -ზე მცირე სიგრძის მონაკვეთებად. ყოველი k -სათვის Γ_k ნაწილში თავი მოუყარა ყველა იმ მდგენელს, რომელთა სიმაღლეები მოთავსებულია $[y_{k-1}, y_k]$ დიაპაზონში (ნახ. 9.3).

შენიშნით, რომ Γ_k -ში თავმოყრილი მდგენელების ფუძეები ქმნიან $E_k = \{x \in [a, b] \mid y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}$ სიმრავლეს. ამიტომ ყოველი Γ_k ნაწილი მოიცავს $I_k = E_k \times (0, y_{k-1})$ განზომადებულ მართკუთხედს და ჩართულია ანალოგიური ტიპის $J_k = E_k \times (0, y_k)$ სიმრავლეში. ბუნებრივია, $E \times (0, y)$ განზომადებული მართკუთხედი გაიზომოს, როგორც მისი ფუძის - E სიმრავლის



ნახ. 9.3.

ზომა, გამრავლებული მის სიმაღლეზე - y რიცხვზე. ზემოაღნიშნული ჩართუბის გამო, თუ Γ_k -ს ზომის მიახლოებით მნიშვნელოვად მივიჩნევთ I_k ან J_k განზოგადებული მართკუთხედის ზომას, ე.ი. $y_{k-1}m(E_k)$ ან $y_k m(E_k)$ რიცხვს, მაშინ ცდომილება არ იქნება $(y_k - y_{k-1})m(E_k) < \varepsilon m(E_k)$ რიცხვზე მეტი. შედეგად, ლებეგის $\sum_{k=1}^n y_k m(E_k)$ და $\sum_{k=1}^n y_{k-1} m(E_k)$ ჯამების გადასრა Γ_f -ის ზომის პიპოთეტური მნიშვნელობიდან გამოვა $\varepsilon \sum_{k=1}^n m(E_k) = \varepsilon(b-a)$ რიცხვზე მცირე. ზღვარზე გადასვლა, როცა $[m, M]$ მონაკვეთის დანაწილების $\max_{1 \leq k \leq n} (y_k - y_{k-1})$ პარამეტრი მიისწრაფვის ნულისაკენ, მოგვცემს რიცხვს, რომელიც, ბუნებრივია, მივიჩნიოთ Γ_f -ის ზომის მნიშვნელობად.

შევნიშნოთ, რომ ზემოთ მოცემულ მსჯელობას აქვს ერთი ხარვეზი: $y_{k-1}m(E_k)$ და $y_k m(E_k)$ სიდიდეების განხილვის უფლება გვაქვს მხოლოდ E_k სიმრავლეების ლებეგის აზრით ზომადობის შემთხვევაში. ამიტომ საჭიროა ლებეგის კონსტრუქციაში აპრიორულად მოვითხოვოთ E_k სიმრავლეების ზომადობა. ეს იგივეა, ყოველი $[y_{k-1}, y_k]$ მონაკვეთის წინასახე იყოს ზომადი, რაც, თავის მხრივ, ნიშნავს f ფუნქციის ლებეგის აზრით ზომადობას. ამრიგად, ლებეგის კონსტრუქციის წარმატებით მუშაობისათვის საჭიროა წინასწარ მოვითხოვოთ f ფუნქციის ზომადობა.

ყურადღება გავამახვილოთ ერთ ღებაღზე: განსხვავებით რიმანის ინტეგრალის შემთხვევისაგან, ლებეგის ინტეგრალის კონსტრუქციაში მრუდწირული ტრაპეციის Γ_k ნაწილი, შეიძლება, მასიური სიმრავლე იყოს. მაგალითად, თუ f ფუნქცია რაიმე ფიქსირებულ y მნიშვნელობას ლებულობს დადებითი ზომის

სიმრავლეზე, მაშინ ის Γ_k ნაწილი, რომლისთვისაც $y \in [y_{k-1}, y_k)$ იქნება ფიქსირებულ დადებით რიცხვზე მეტი ზომის. თუმცა აღნიშნული გარემოება ხელს არ უშლის Γ_k ნაწილის ზომის მიახლოებითი მნიშვნელობის ეფექტურ გამოთვლას.

როგორც მემთ მოცემული მსჯელობები გვიჩვენებენ, რიმანის ინტეგრალიდან ლებეგის ინტეგრალზე (დარბუს ჯამებიდან ლებეგის ჯამებზე) გადასვლას აქვს გეომეტრიული ახსნა, რაც დაკავშირებულია გრაფიკულად სიმრავლის გამომეის ოპტიმალური მექანიზმის შერჩევასთან. ლებეგის მიერ შემოთავაზებული მექანიზმის უპირატესობას განაპირობებს ცვლილება გრაფიკულად სიმრავლის დანაწილების წესში: ნაწილებში მდგენელები თავმოყრილია არა მათი ფუძეების, არამედ მათი სიმაღლეების სიახლოვის ნიშნით. ეს მიდგომა კი, თავის მხრივ, ეფუძნება ასევე ლებეგის მიერ შექმნილ - წრფივ სიმრავლეთა ზომის თეორიას.

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ, რომ კანტორის სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია რიმანის აზრით ინტეგრებადია.
2. ვთქვათ, E არის $[0, 1]$ მონაკვეთის ნულზომიანი ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. აჩვენეთ, რომ E სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია რიმანის აზრით ინტეგრებადია.
3. ააგეთ $[0, 1]$ მონაკვეთზე რიმანის აზრით ინტეგრებადი ფუნქცია, რომლის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე ყველგან მკერივია.
4. ვთქვათ, $[a, b]$ მონაკვეთზე რიმანის აზრით ინტეგრებად ფუნქციითა (f_n) მიმდევრობა თანაბრად კრებადია f ფუნქციისაკენ. დაამტკიცეთ, რომ f ფუნქცია რიმანის აზრით ინტეგრებადია და

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} f_n = \int_{[a, b]} f.$$

§ 3. რიმანის არასაკუთრივი ინტეგრალისა და ლებეგის ინტეგრალის შედარება

ქვემოთ დადგენილი იქნება, რომ რიმანის არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობა, საზოგადოდ, არ იწვევს ლებეგის აზრით ინტეგრებადობას. უფრო მეტიც, ფუნქცია (რომლისთვისაც აზრი აქვს რიმანის არასაკუთრივი ინტეგრალის განხილვას), ინტეგრებადია ლებეგის აზრით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა რიმანის არასაკუთრივი ინტეგრალი აბსოლუტურად კრებადია.

სიმარტივისათვის განვიხილავთ ერთგანზომილებიან შემთხვევას.

თეორემა 9.3.1. ვთქვათ, f ფუნქცია განსაზღვრულია $(a, b]$ მონაკვეთზე და ნებისმიერი $\varepsilon \in (0, b-a)$ რიცხვისათვის რიმანის აზრით ინტეგრებადია

$[a + \varepsilon, b]$ სეგმენტზე. მაშინ

$$\int_{(a,b)} |f| dm = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[a+\varepsilon, b]} |f|,$$

და შედეგად.

$$f \in L((a, b)) \Leftrightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[a+\varepsilon, b]} |f| < \infty.$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $I_k = [a + (b-a)/2^k, b]$ ($k \in \mathbb{N}$) და განვიხილოთ $g_k = |f| \chi_{I_k}$ ფუნქციათა მიმდევრობა. ცხადია, (g_k) მრავალი მიმდევრობაა და $|f|$ წარმოადგენს მის წერტილოვან ზღვარს. ამასთანავე, თეორემა 9.1.1-ის საფუძველზე, ყოველი $k \in \mathbb{N}$ -სთვის გვექნება, რომ $g_k \in L((a, b))$ და

$$\int_{(a,b)} g_k dm = \int_{I_k} |f| dm = \int_{I_k} |f|.$$

შედეგად, ლევის თეორემის გათვალისწინებით ვწერთ,

$$\int_{(a,b)} |f| dm = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{(a,b)} g_k dm = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{I_k} |f|.$$

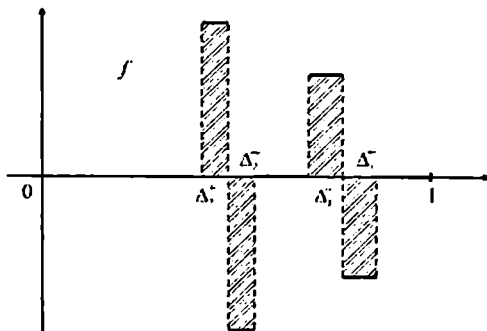
უკანასკნელი ზღვარი კი, როგორც ადვილი შესამოწმებელია,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[a+\varepsilon, b]} |f|$$

ზღვრის ტოლია. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 9.3.1. თეორემა 9.3.1-ის მეშვეობით ერწმუნდებით, რომ შეიძლება, ფუნქციის რიმანის არასაკუთრივი ინტეგრალი იყოს კრებადი, მაგრამ ფუნქცია არ იყოს ლებეგის ამრით ინტეგრებადი. კერძოდ, ასე ხდება ნებისმიერი ფუნქციისათვის, რომლის არასაკუთრივი ინტეგრალი მხოლოდ პირობით კრებადია (ე.ი. კრებადია, მაგრამ არაა აბსოლუტურად კრებადი). გადმოცემის სისრულისათვის ავაგოთ ასეთი ფუნქციის მაგალითი.

განვიხილოთ $(0, 1]$ მონაკვეთში შემავალი წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი Δ_k ინტერვალების მიმდევრობა, რომელთა მარცხენა და მარჯვენა ბოლოები ქმნიან ნულისაყენ კრებად და, იმავედროულად, კლებად რიცხვით მიმდევრობებს. თითოეული Δ_k ინტერვალისათვის განვიხილოთ მისი შუაზე გაყოფით მიღებული ორი ქვეინტერვალი, რომლებიც აღვნიშნოთ Δ_k^- -ით და Δ_k^+ -ით. დადებითი a_k რიცხვი შევარჩიოთ ისე, რომ სრულდებოდეს პირობა: $a_k m(\Delta_k) = 1/k$. ამის შემდეგ, f ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად: f -ს Δ_k^+ ინტერვალუბის წერტილებში მივანიჭოთ შესაბამისად a_k რიცხვების ტოლი მნიშვნელობები, Δ_k^- ინტერვალუბის წერტილებში - შესაბამისად $(-a_k)$ რიცხვების ტოლი მნიშვნელობები, ხოლო $(0, 1]$ -ის დარჩენილ წერტილებში კი - ნულის ტოლი მნიშვნელობა (ნახ. 9.4).



ნახ. 9.4.

გვექება,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[\varepsilon, 1]} |f| = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Delta_k} |f| dm = \sum_{k=1}^{\infty} a_k m(\Delta_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

ამრიგად, $(0, 1]$ მონაკვეთზე f -ის რიმანის არასაკუთრივი ინტეგრალი არ არის აბსოლუტურად კრებადი, მეორე მხრივ კი, იგივე ინტეგრალი ჩვეულებრივი აზრით კრებადი გამოდის. მართლაც, $[\varepsilon, 1]$ სახის ნებისმიერი სეგმენტისათვის, რომელიც შეიცავს ერთს მაინც Δ_k მონაკვეთებს შორის, განვიხილოთ ის მინიმალური $k = k(\varepsilon)$ ნომერი, რომლისთვისაც Δ_k არაა ჩართული $[\varepsilon, 1]$ მონაკვეთში. გაითვალისწინოთ, რომ ყოველი j -სთვის, $\int_{\Delta_j} f = \int_{\Delta_j^-} f + \int_{\Delta_j^+} f = 0$. შედეგად, ღაფწერთ,

$$\left| \int_{[\varepsilon, 1]} f \right| = \left| \sum_{j=1}^{k(\varepsilon)-1} \int_{\Delta_j} f + \int_{[\varepsilon, 1] \cap \Delta_{k(\varepsilon)}} f \right| \leq \int_{\Delta_{k(\varepsilon)}} |f| = \frac{1}{k(\varepsilon)}.$$

საიდანაც, უშუალოდ ვღებულობთ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[\varepsilon, 1]} f = 0$ ტოლობას.

შენიშვნა 9.3.2. თეორემა 9.3.1-ის ანალოგები სამართლიანია რიმანის სხვა სახის არასაკუთრივი ინტეგრალებისთვისაც.

ამოცანები

1. α და β პარამეტრების რა მნიშვნელობებისათვის არის $f(x) = x^\alpha \sin x^\beta$ ($x \in (0, 1]$) ფუნქცია: ა) ლებეგის აზრით ინტეგრებადი; ბ) რიმანის არასაკუთრივი აზრით ინტეგრებადი?
2. α და β პარამეტრების რა მნიშვნელობებისათვის არის $f(x) = x^\alpha \sin x^\beta$ ($x \in [1, \infty)$) ფუნქცია: ა) ლებეგის აზრით ინტეგრებადი; ბ) რიმანის არასაკუთრივი აზრით ინტეგრებადი?

§ 4. პირველყოფილი ფუნქციის აღდგენა შემოსაზღვრული წარმოებულის შემთხვევაში

პირველყოფილის აღდგენის შესახებ პრობლემა, როგორც ცნობილია გულისხმობს შემდეგს: ეთქვას, f არის $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული და ყოველ $x \in [a, b]$ წერტილში წარმოებადი ფუნქცია. როგორ შეიძლება, გამოვსახოთ (აღვადგინოთ) f პირველყოფილი მისი f' წარმოებულის მეშვეობით?

ინტეგრალური აღრიცხვის კურსიდან ცნობილია, რომ თუ f' არის რიმანის აზრით ინტეგრებადი, მაშინ

$$f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f' \quad (x \in [a, b]).$$

ე.ი. პირველყოფილი შეიძლება აღვადგინოთ რიმანის ინტეგრალის აპარატის გამოყენებით, თუ ცნობილია, რომ წარმოებული ფუნქცია რიმანის აზრით ინტეგრებადია.

სამოგადოდ, რიმანის ინტეგრალი ვერ იძლევა პირველყოფილის აღდგენის ამოცანის გადაწყვეტას თვით შემოსაზღვრული წარმოებულის მქონე ფუნქციების შემთხვევაშიც კი, რაც იმას ნიშნავს, რომ არსებობენ ფუნქციები, რომელთა წარმოებული შემოსაზღვრულია, მაგრამ არაა რიმანის აზრით ინტეგრებადი. ქვემოთ მოცემული იქნება ასეთი ფუნქციის აგება. მსგავსი მაგალითი თავდაპირველად ააგო ე. ვოლტერამ (1881 წ.).

განვიხილოთ $[0, 1]$ მონაკვეთის რაიმე არსად მკერივი და სრულყოფილი E ქვესიმრავლე, რომელსაც აქვს დადებითი ზომა. ასეთი სიმრავლის კონსტრუქცია მოცემული იყო 8.9.4 შენიშვნაში. $((a_k, b_k))$ იყოს E -ს დამატებითი ინტერვალების მიმდევრობა.

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციას E სიმრავლის წერტილებში მივანიჭოთ ნულის ტოლი მნიშვნელობა, ხოლო ყოველ (a_k, b_k) დამატებით ინტერვალზე $f(x)$ იყოს

$$(x - a_k)^2(x - b_k)^2 \sin \frac{1}{(b_k - a_k)(x - a_k)(x - b_k)}$$

გამოსახულების ტოლი.

დავადგინოთ, რომ E სიმრავლის წერტილებში f ფუნქციის წარმოებული არსებობს და ნულის ტოლია. მართლაც, ეთქვას, $x \in E$ და y არის $[0, 1]$ სეგმენტის რაიმე წერტილი, რომელიც მდებარეობს x -ის მარჯვნივ. თუ $y \in E$, მაშინ $f(y) = f(x) = 0$. $y \notin E$ შემთხვევაში განვიხილოთ ის (a_k, b_k) ინტერვალი, რომელიც შეიცავს y წერტილს. მაშინ გვაქვს, რომ $x \leq a_k < y$. შედეგად, $y - a_k \leq y - x$ და

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq y - a_k \leq y - x.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ყოველ $x \in E$, $x \neq 1$. წერტილში f -ის მარჯვენა წარმოებული არსებობს და ნულის ტოლია. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ ყოველ $x \in E$, $x \neq 0$, წერტილში f -ის მარცხენა წარმოებული არსებობს და ნულის ტოლია.

ცხადია, f ფუნქცია წარმოებადია ნებისმიერ $x \in (a_k, b_k)$ წერტილში და

$$f'(x) = 2(x - a_k)(x - b_k)(2x - a_k - b_k) \sin \frac{1}{(b_k - a_k)(x - a_k)(x - b_k)} - \\ - \frac{2x - a_k - b_k}{b_k - a_k} \cos \frac{1}{(b_k - a_k)(x - a_k)(x - b_k)}.$$

ამრიგად, f ფუნქცია წარმოებადია ყოველ წერტილში. ამასთან, f' შემოსაზღვრული ფუნქციაა, კერძოდ, $|f'(x)| \leq 3$ ყოველი x -სთვის. აღვილი დასანახია, რომ $f'(x)$ ირხევა -1 და 1 მნიშვნელობებს შორის, როცა x უახლოვდება a_k ან b_k წერტილს (a_k, b_k) ინტერვალის შიგნიდან. აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს f' ფუნქციის წყვეტილობა დადებითი ზომის E სიმრავლის თითოეულ წერტილში, ეს კი, თავის მხრივ, იწვევს f' -ის რიმანის აზრით არაინტეგრებადობას. ამით ჩვენ მიერ დასახული თვისებების ფუნქციის მაგალითი აგებულია.

ხაზგასმით უნდა აღინიშნოს, რომ მე-19 საუკუნის ბოლოს პირველყოფილის აღდგენის ამოცანა იყო მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთი ძირითადი პრობლემა, რომელიც წარმოაჩენდა რიმანის ინტეგრალის განზოგადების აუცილებლობას. ქვემოთ მოცემული თეორემა ეკუთვნის ა. ლებეგს და გვიჩვენებს არსებით პროგრესს პირველყოფილის აღდგენის ამოცანის გადაწყვეტასთან დაკავშირებით, რომელიც მიიღწევა ლებეგის ინტეგრალის მეშვეობით.

თეორემა 9.4.1. თუ f არის $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული წარმოებადი ფუნქცია და დამატებით ცნობილია, რომ f' შემოსაზღვრულია, მაშინ $f' \in L([a, b])$ და

$$f(x) = f(a) + \int_{[a, x]} f' dm \quad (x \in [a, b]).$$

ამრიგად, ლებეგის ინტეგრალი სრულად წყვეტს პირველყოფილის აღდგენის ამოცანას წარმოებულის შემოსაზღვრულობის შემთხვევაში. შედგომში (სახელდობრ, მე-12 თავში) დამტკიცებული იქნება, რომ ლებეგის ინტეგრალი პირველყოფილს აღადგენს კიდევ უფრო ზოგად სიტუაციაში, კერძოდ, მაშინაც, როცა წარმოებულის შემოსაზღვრულობის პირობა შესუსტებულია და მოთხოვნილია მხოლოდ მისი ლებეგის აზრით ინტეგრებადობა.

თეორემა 9.4.1-ის დამტკიცება. თავიდანვე შევნიშნოთ, რომ წარმოებადობიდან გამომდინარე, f ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. გავავრძელოთ

f ფუნქცია $[a, b + 1]$ სეგმენტზე ისე, რომ $(b, b + 1]$ მონაკვეთის x წერტილებში მისი მნიშვნელობები გამოითვლებოდა შემდეგნაირად:

$$f(x) = f(b) + f'(b)(x - b).$$

ახლა f შეიძლება განვიხილოთ, როგორც $[a, b + 1]$ სეგმენტზე წარმოებული (და შედეგად, უწყვეტი) ფუნქცია.

ყოველი k -სთვის განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე შემდეგნაირად განსაზღვრული Δ_k ფუნქცია:

$$\Delta_k(x) = \frac{f(x + 1/k) - f(x)}{1/k} \quad (x \in [a, b]).$$

ყოველ $x \in [a, b]$ წერტილში გვაქვს, რომ $f'(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_k(x)$. ამრიგად, f' არის უწყვეტ Δ_k ფუნქციათა მიმდევრობის წერტილოვანი მღვარი. საიდანაც ვასკენით f' -ის ლებეგის აზრით მომადობას. აქედან, თავის მხრივ, $[a, b]$ მონაკვეთის ზომის სასრულობისა და f' -ის შემოსაზღვრულობის გამო, f' იქნება ჯამებადი ფუნქცია.

შენიშნოთ, რომ Δ_k ფუნქციები ერთობლივ შემოსაზღვრულია

$$C = \sup\{|f'(x)| : x \in [a, b]\}$$

რიცხვით. მართლაც, ლაგრანჟის თეორემიდან გამომდინარე, ყოველი x -სთვის და ყოველი k -სთვის მოიძებნება $\theta = \theta_{x,k} \in (0, 1)$, რომლისთვისაც $\Delta_k(x) = f'(x + \theta/k)$, საიდანაც ვლესულობთ $|\Delta_k(x)| \leq C$ შეფასებას.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $[a, b]$ -ზე განსაზღვრული C მუდმივის ტოლი ფუნქცია ლებეგის აზრით ინტეგრებადი და გამოვიყენებთ ლებეგის თეორემას მაჟორანტული კრებადობის შესახებ, დავწერთ,

$$\int_{[a,b]} f' dm = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \Delta_k dm.$$

გვაქვს, რომ

$$\int_{[a,b]} \Delta_k dm = k \int_{[a,b]} f(\cdot + 1/k) dm - k \int_{[a,b]} f dm.$$

f ფუნქციის უწყვეტობის გამო ამ ტოლობაში მოცემული ინტეგრალები შეიძლება გავიგოთ რიმანის აზრით. შემდეგ კი, $x = t - 1/k$ ცვლადის შეცვლის საჟუძველზე დავწერთ,

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} \Delta_k &= k \int_{[a+1/k, b+1/k]} f - k \int_{[a,b]} f = \\ &= k \int_{[b, b+1/k]} f - k \int_{[a, a+1/k]} f. \end{aligned}$$

თუ უკანასკნელი ორი ინტეგრალისათვის გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის თეორემას, მივიღებთ, რომ

$$\int_{[a,b]} \Delta_k = f(b + \theta_k/k) - f(a + \xi_k/k),$$

სადაც $\theta_k, \xi_k \in (0, 1)$. საიდანაც f ფუნქციის უწყვეტობის გათვალისწინებით გამომდინარეობს ტოლობა:

$$\int_{[a,b]} f' dm = f(b) - f(a).$$

ცხადია, დამტკიცებულ ტოლობაში b შეგვიძლია შევცვალოთ ნებისმიერი x -ით $[a, b]$ მოსაკუთვდიდან. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 9.4.1. თეორემა 1 შეიძლება ჩამოვყალიბოთ შემდეგი ეკვივალენტური ფორმითაც: თუ $f \in L([a, b])$ შემოსაზღვრული ფუნქციაა და ცნობილია, რომ F არის f -ის პირველყოფილი, მაშინ სამართლიანია ნიუტონ-ლაიბნიცის ტოლობა:

$$\int_{[a,b]} f dm = F(b) - F(a).$$

ინტეგრება სივრცეთა ნამრავლზე

კლასიკური ანალიზიდან ცნობილია, რომ ორი (და, საზოგადოდ, მრავალი) ცვლადის უწყვეტი ფუნქციის ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება ერთი ცვლადის მიმართ ინტეგრებაზე. სახელობრ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა: თუ f არის $[a, b] \times [c, d]$ მართკუთხედზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქცია, მაშინ

$$\begin{aligned} \int_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy &= \\ &= \int_{[a,b]} \left(\int_{[c,d]} f(x, y) dy \right) dx = \int_{[c,d]} \left(\int_{[a,b]} f(x, y) dx \right) dy. \end{aligned}$$

ამრიგად, რიმანის ორჯერადი ინტეგრალის მნიშვნელობის საპოვნელად საკმარისია გამოვთვალოთ ერთ-ერთი ე.წ. განმეორებით ინტეგრალს შორის, ეს უკანასკნელნი კი, თავის მხრივ, წარმოადგენენ ერთი ცვლადის მიმართ ინტეგრების ოპერაციის მიმდევრობითი შესრულების შედეგს.

ამ თავში ჯერადი ინტეგრალის განმეორებით ინტეგრალამდე დაყვანის შესახებ თეორემები დადგენილი იქნება ლებეგის აზრით ინტეგრებადი ფუნქციებისათვის. მოცემულია აგრეთვე ამ ტიპის დებულებების ზოგიერთი გამოყენება.

§ 1. ზომების დეკარტული ნამრავლი

ვიქვათ, X არის რაიმე არაცარიელი სიმრავლე, S - X -ის ქვესიმრავლეების რაიმე ნახევარგოლი, ხოლო μ - S -ზე განსაზღვრული ზომა. დაეუშვათ აგრეთვე, რომ Y სიმრავლე, T ნახევარგოლი და ν ზომა ანალოგიურადაა ერთმანეთთან დაკავშირებული.

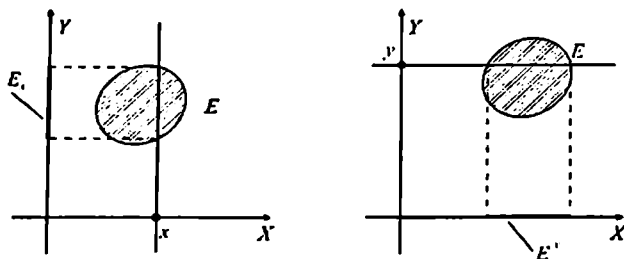
განვიხილოთ μ და ν ზომების დეკარტული ნამრავლი, ე.ი. $S \times T$ ნახევარგოლზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია:

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad (A \in S, B \in T).$$

როგორც ვიცით (იხ. თეორემა 4.5.1) $\mu \times \nu$ ფუნქცია არის კვაზიზომა. ქვემოთ ნაჩვენები იქნება, რომ $\mu \times \nu$ ფუნქციას აქვს ზომის თვისებებიც.

$S \times T$ დეკარტულ ნამრაველში შემავალ სიმრავლეებს ეუწოდოთ მართკუთხედები, ხოლო $A \times B$ მართკუთხედისათვის A და B სიმრავლეებს ეუწოდოთ გვერდები.

ვთქვათ, $E \subset X \times Y$ ფიქსირებული $x \in X$ წერტილისათვის E_x -ით აღვნიშნოთ $\{y \in Y : (x, y) \in E\}$ სიმრავლე და მას ეუწოდოთ x წერტილით წარმოქმნილი E სიმრავლის კვეთა. ანალოგიურად, ფიქსირებული $y \in Y$ წერტილისათვის E^y -ით აღვნიშნოთ $\{x \in X : (x, y) \in E\}$ სიმრავლე და მას ეუწოდოთ y წერტილით წარმოქმნილი E სიმრავლის კვეთა. შევნიშნოთ, რომ კვეთა არ არის $X \times Y$ ნამრავლის ქვესიმრავლე, ის წარმოადგენს X -ის ან Y -ის ქვესიმრავლეს (ნახ. 10.1).



ნახ. 10.1.

სიმრავლეთა (E_n) მიმდევრობის წევრების კვეთებისათვის გამოვიყენოთ $[E_n]_x$ და $[E_n]^y$ ჩანაწერები.

თეორემა 10.1.1. $\mu \times \nu$ ფუნქცია არის ზომა.

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ S კლასი არის σ -ალგებრა, ე.ი. (X, S, μ) სამეული არის ზომიანი სივრცე. წინააღმდეგ შემთხვევაში, μ ზომას გაავარგებლებთ ლებეგის მეთოდით და ვიმსჯელებთ ამ გავარგებლების შედეგად მიღებული σ -ალგებრისა და ზომის მიხედვით.

ნებისმიერი $R = A \times B$ მართკუთხედისათვის განვიხილოთ $X \ni x \mapsto \nu(R_x)$ ფუნქცია, რომელიც აღწერს მისი x -კვეთების ზომებს. შევნიშნოთ, რომ $R_x = B$, თუ $x \in A$; და $R_x = \emptyset$, თუ $x \notin A$. აქედან გამომდინარე,

$$\nu(R_x) = \nu(B), \text{ თუ } x \in A; \text{ და } \nu(R_x) = 0, \text{ თუ } x \notin A. \quad (1)$$

ესაღია, $x \mapsto \nu(R_x)$ არის მარტივი ფუნქცია (X, S, μ) ზომიან სივრცესთან მიმართებაში. ამ ფუნქციის ინტეგრალი ჩაეწეროს $\int_X \nu(R_x) d\mu(x)$ სახით. ეს ინტეგრალი (1)-ის ძალით $\mu(A)\nu(B)$ რიცხვის ტოლია. ამრიგად,

$$(\mu \times \nu)(R) = \int_X \nu(R_x) d\mu(x). \quad (2)$$

შენიშნავთ, რომ მართყუთხედის ზომის (2) სახით წარმოდგენა არის დამტკიცების ძირითადი ინსტრუმენტი.

შევამოწმოთ $\mu \times \nu$ ფუნქციის σ -ადიციურობა. ნათელია, რომ ზომის სხვა თვისებები შესრულებულია. ეთქვათ, რაიმე R მართყუთხედი წარმოდგენილია წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი R_n ($n \in \mathbb{N}$) მართყუთხედების გაერთიანების სახით. დასამტკიცებელი გვაქვს ტოლობა:

$$(\mu \times \nu)(R) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu \times \nu)(R_n).$$

ადელი დასანახია, რომ ნებისმიერი x -სთვის $[R_n]_x$ სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და $R_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} [R_n]_x$. აქედან გამომდინარე,

$$\nu(R_x) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu([R_n]_x). \quad (3)$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ (2) და (3) პირობებს და გამოვიყენებთ ლევის თეორემას $\sum_{n=1}^{\infty} \nu([R_n]_x)$ ფუნქციური მწკრივისათვის, დაეწეროთ,

$$\begin{aligned} (\mu \times \nu)(R) &= \int_X \nu(R_x) d\mu(x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \nu([R_n]_x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu \times \nu)(R_n). \end{aligned}$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

§ 2. ზომიანი სივრცეების ლებეგისეული და ბორელისეული ნამრავლები

ეთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია. μ და ν ზომების ლებეგისეული ნამრავლი (აღნიშვნა: $\mu \otimes \nu$) ეწოდება $\mu \times \nu$ ზომის ლებეგისეულ გაგრძელებას. $\mu \otimes \nu$ ზომის განსაზღვრის არეში შემავალი სიმრავლეების კლასი აღვნიშნოთ $S \otimes T$ -თი და მას ეწოდოთ S და T კლასების ლებეგისეული ნამრავლი. დაბოლოს, $(X \times Y, S \otimes T, \mu \otimes \nu)$ სივრცეს ეწოდოთ (X, S, μ) და (Y, T, ν) სივრცეების ლებეგისეული ნამრავლი.

შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ ლებეგის ზომა წარმოდგება დაბალ-განზომილებიანი ლებეგის ზომების ნამრავლის სახით.

თეორემა 10.2.1. ნებისმიერი p და q ნატურალური რიცხვებისათვის,

$$m_{p+q} = m_p \otimes m_q.$$

დამტკიცება. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $m_{p+q} = \overline{v_{p+q}}$, $m_p = \overline{v_p}$, $m_q = \overline{v_q}$ და $v_{p+q} = v_p \times v_q$, მაშინ დასამტკიცებელი ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\overline{v_p \times v_q} = \overline{m_p \times m_q}. \quad (1)$$

თეორემა 5.3.1-ის ძალით (1) დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენებთ შემდეგ ტოლობას:

$$(v_p \times v_q)^* = (m_p \times m_q)^*$$

შენიშნოთ, რომ $(v_p \times v_q)^*$ და $(m_p \times m_q)^*$ გარე ზომები განისაზღვრებიან შემდეგნაირად:

$$(v_p \times v_q)^*(E) = \inf \sum_k v_p(I_k) v_q(J_k),$$

სადაც ქვედა ზღვარი აიღება E -ს დამფარავი ყველა შესაძლო $I_k \times J_k \in \mathcal{I}^p \times \mathcal{I}^q$ მიმდევრობის მიხედვით;

$$(m_p \times m_q)^*(E) = \inf \sum_k m_p(A_k) m_q(B_k),$$

სადაც ქვედა ზღვარი აიღება E -ს დამფარავი ყველა შესაძლო $A_k \times B_k \in \mathcal{L}^p \times \mathcal{L}^q$ მიმდევრობის მიხედვით.

ცხადია, მეორე ქვედა ზღვარი დაფარვების უფრო მდიდარი კლასის მიხედვით აიღება. რის გამოც, $(m_p \times m_q)^*(E) \leq (v_p \times v_q)^*(E)$. დავამტკიცოთ მებრუნებული უტოლობა:

$$(v_p \times v_q)^*(E) \leq (m_p \times m_q)^*(E). \quad (2)$$

(2) ცხადია, თუ $(m_p \times m_q)^*(E) = \infty$. ასე რომ, განსახილავი გვრჩება $(m_p \times m_q)^*(E) < \infty$ შემთხვევა. ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის ვიპოვოთ $A_k \times B_k \in \mathcal{L}^p \times \mathcal{L}^q$ მიმდევრობა, რომელიც ფარავს E სიმრავლეს და

$$\sum_k m_p(A_k) m_q(B_k) < (m_p \times m_q)^*(E) + \varepsilon.$$

შემდეგ, $m_p = \overline{v_p}$ და $m_q = \overline{v_q}$ ტოლობების გათვალისწინებით, ყოველი k -სთვის ვიპოვოთ მონაკვეთების $(I_{k,s})$ და $(J_{k,r})$ მიმდევრობები, რომლებიც, შესაბამისად, ფარავენ A_k და B_k სიმრავლეებს და გარდა ამისა, აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$\sum_s v_p(I_{k,s}) < m_p(A_k) + \delta_k,$$

$$\sum_r v_q(J_{k,r}) < m_q(B_k) + \delta_k,$$

სადაც δ_k იმდენად მცირე დადებითი რიცხვია, რომ

$$(m_p(A_k) + \delta_k)(m_q(B_k) + \delta_k) < m_p(A_k) m_q(B_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

ასეთ პირობებში გვექნება,

$$\sum_{s,r} v_p(I_{k,s}) v_q(J_{k,r}) = \sum_s v_p(I_{k,s}) \sum_r v_q(J_{k,r}) < \\ < (m_p(A_k) + \delta_k)(m_q(B_k) + \delta_k) < m_p(A_k) m_q(B_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

შედეგად, იმის გათვალისწინებით, რომ ყოველი k -სთვის $\{I_{k,s} \times J_{k,r}\}_{s,r}$ კლასი ფარავს $A_k \times B_k$ სიმრავლეს, ელემენტობა შეფასებას:

$$(v_p \times v_q)^*(E) \leq \sum_{k,s,r} v_p(I_{k,s}) v_q(J_{k,r}) <$$

$$< \sum_k [m_p(A_k) m_q(B_k) + \varepsilon/2^k] < (m_p \times m_q)^*(E) + 2\varepsilon.$$

საიდანაც $\varepsilon > 0$ -ის ნებისმიერობის საფუძველზე ეასყენით (2) შეფასების სამართლიანობას.

თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 10.2.1. ეთქვას, A და B ლებეგის აბრით მომადი სიმრავლეებია შესაბამისად $\mathbb{R}^p$ და $\mathbb{R}^q$ სივრცეებში. მაშინ მათი დეკარტული $A \times B$ ნამრაველი ლებეგის აბრით მომადია $\mathbb{R}^{p+q}$ სივრცეში. მართლაც, $A \times B$ სიმრავლე შედის $m_p \otimes m_q$ ზომის განსაზღვრის არეში. ეს ზომა კი, თეორემა 10.2.1-ის თანახმად ლებეგის m_{p+q} ზომას ემთხვევა. ამრიგად, $A \times B$ შედის m_{p+q} ზომის განსაზღვრის არეში, ანუ არის ლებეგის აბრით მომადი $\mathbb{R}^{p+q}$ სივრცეში.

თეორემა 10.2.1-ის დამტკიცების სქემის გამოყენებით შეიძლება დაეამტკიცოს შემდეგი უფრო ზოგადი დებულება.

თეორემა 10.2.2. ნებისმიერი μ და ν ზომებისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$\overline{\mu \times \nu} = \overline{\bar{\mu} \times \bar{\nu}}.$$

ეთქვას, (X, S, μ) და (Y, T, ν) მომიანი სივრცეებია. μ და ν ზომების ბორელიანული ნამრაველი (აღნიშვნა: $\mu \odot \nu$) ეწოდება $\mu \times \nu$ ზომის ბორელიანულ გაგრძელებას. ცხადია, ბორელიანული ნამრაველი წარმოადგენს ლებეგისეული ნამრავლის შეზღუდვას $\sigma_a(S \times T)$ კლასზე. $\sigma_a(S \times T)$ კლასს ეწოდება S და T კლასების ბორელიანული ნამრაველი. $(X \times Y, \sigma_a(S \times T), \mu \odot \nu)$ სივრცეს (X, S, μ) და (Y, T, ν) სივრცეების ბორელიანულ ნამრავლს ეწოდებენ.

შენიშნით, რომ ლებეგის ზომების ბორელიანული ნამრაველი არ გვაძლევს ლებეგის ზომას, ე.ი. $m_p \odot m_q \neq m_{p+q}$. ეს ფაქტი დადგენილი იქნება ამ თავის მე-5 პარაგრაფში.

1. ვთქვათ, $H \subset 2^X$ და $R \subset 2^Y$ რაიმე ნახევარგოლებია. აჩვენეთ, რომ $\sigma a(\sigma a(H) \times \sigma a(R)) = \sigma a(H \times R)$.
2. დაამტკიცეთ თეორემა 10.2.2 ამოცანა 1-ში მოცემული ტოლობის გამოყენებით.
3. დაამტკიცეთ, რომ ბორელის ზომა წარმოდგება დაბალგანზომილებიანი ბორელის ზომების ნამრავლის სახით, ე.ი. $m_{B,p+q} = m_{B,p} \otimes m_{B,q}$.

§ 3. სიმრავლის ზომის გამოთვლა მისი კვეთების ზომების მეშვეობით

შემდეგი ღებულება მთავარი დასაყრდენია ზომათა ნამრავლის თვისებების შესწავლისას.

თეორემა 10.3.1. ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია, ხოლო $R \subset X \times Y$ არის სასრული ზომის გვერდების მქონე მართკუთხედი. მაშინ ნებისმიერი $E \subset R$, $E \in \sigma a(S \times T)$, სიმრავლისათვის:

- E -ს ყოველი კვეთა არის ზომადი, ე.ი. $E_x \in T$ ყოველი $x \in X$ -სთვის და $E^y \in S$ ყოველი $y \in Y$ -სთვის;
- $\nu(E_x)$, როგორც x ცვლადის ფუნქცია, არის μ -ზომადი; ხოლო $\mu(E^y)$, როგორც y ცვლადის ფუნქცია, არის ν -ზომადი;
- სამართლიანია ტოლობები:

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y).$$

დამტკიცება. Δ იყოს ყველა იმ $E \subset R$, $E \in \sigma a(S \times T)$, სიმრავლის კლასი, რომლისთვისაც შესრულებულია თეორემის დასკვნები. დავადგინოთ, რომ Δ კლასს აქვს შემდეგი ოთხი თვისება:

- ა) ნებისმიერი $H \subset R$ მართკუთხედი ეკუთვნის Δ კლასს;
- ბ) თუ (E_n) არის Δ კლასის სიმრავლეთა ზრდადი მიმდევრობა, მაშინ $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Delta$;
- გ) თუ $\{E_n\}$ არის Δ კლასის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ სიმრავლეთა სასრული ან თვლადი ქვეკლასი, მაშინ $\bigcup_n E_n \in \Delta$;
- დ) თუ (E_n) არის Δ კლასის სიმრავლეთა კლებადი მიმდევრობა, მაშინ $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \Delta$.

თითოეული თვისების შემოწმებისას განვიხილოთ მხოლოდ x -კვეთების შემთხვევა. y -კვეთებისათვის მსჯელობა საესებით ანალოგიურია.

ა)-ს საჩვენებლად უნდა გავიმეოროთ თეორემა 10.1.1-ის დამტკიცებაში მოცემული არგუმენტები. კერძოდ, $H = A \times B$ მართკუთხედისათვის გვაქვს,

რომ:

$$H_x = B \quad (x \in A), \quad H_x = \emptyset \quad (x \notin A);$$

$$\nu(H_x) = \nu(B)\chi_A(x) \quad (x \in X).$$

საიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს საჭირო დასკვნები.

გადავიდეთ $b)$ თვისების დამტკიცებაზე. აღვნიშნოთ $E = \bigcup_n E_n$. ნებისმიერი x -სთვის $[E_n]_x$ ($n \in \mathbb{N}$) კევთები ზომადებია, ამიტომ ზომადია მათი გაერთიანება, რომელიც E_x -ის ტოლია. ამით E_x კევთებისათვის პირველი მოთხოვნა შემოწმებულია.

(E_n) მიმდევრობის ზრდადობისა და ზომის ქვემოდან უწყვეტობის თვისების საფუძველზე გვაქვს.

$$\nu([E_n]_x) \uparrow \nu(E_x) \quad \text{ყოველი } x \in X\text{-სთვის,}$$

სადაც $a_n \uparrow a$ ჩანაწერი აღნიშნავს, რომ (a_n) მიმდევრობა ზრდადია და კრებადია a რიცხვისაკენ. ამრიგად, $x \mapsto \nu(E_x)$ ფუნქცია წარმოადგენს μ -ზომად ფუნქციატა მიმდევრობის წერტილოვან ზღვარს. შედეგად, თავდაპირველად არის μ -ზომადი და ამასთან ერთად, შეგვიძლია, ლევის თეორემის ძალით დაწვეროთ, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \nu([E_n]_x) d\mu(x) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x). \quad (1)$$

კელაე (E_n) მიმდევრობის ზრდადობისა და ზომის ქვემოდან უწყვეტობის თვისების გამო,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mu \otimes \nu)(E_n) = (\mu \otimes \nu)(E). \quad (2)$$

საბოლოოდ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $E_n \in \Delta$, (1)-ის და (2)-ის საფუძველზე გვაქვს,

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x).$$

ამით $b)$ პირობა შემოწმებულია.

ზომის ადიციურობისა და ინტეგრალის წრფივობის თვისებების საფუძველზე მარტივად მოწმდება, რომ $c)$ თვისებას ადგილი აქვს $\{E_n\}$ კლასის სასრულობის შემთხვევაში. ამის გათვალისწინებით, $c)$ -ს დარჩენილი ნაწილი უკვე წარმოადგენს $b)$ თვისების შედეგს.

$d)$ თვისების შემოწმება ხდება $b)$ თვისების დამტკიცების სქემის გამოყენებით. მსჯელობაში განსხვავებული მომენტებია ის, რომ, ზომის ქვემოდან უწყვეტობის ნაცვლად, გვიწევს ვისარგებლოთ ზემოდან უწყვეტობის თვისებით. ხოლო ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლისას კი, ლევის თეორემის ნაცვლად, უნდა დავეყრდნოთ ლებეგის თეორემას მაქორანტული კრებადობის

შესახებ. როგორც ზომის ზემოდან უწყვეტობის თვისების, ასევე ლებეგის თეორემის გამოყენება დასაშვებია E_n სიმრავლეების მომცემი R მარცხთხედის გვერდების ზომათა სასრულობის გამო.

ამრიგად, Δ კლასის $a) - d)$ თვისებები შემოწმებულია.

შევნიშნოთ, რომ $a)$ და $c)$ თვისებების ძალით, Δ კლასი შეიცავს R -ში შემავალი მარცხთხედებით წარმოქმნილ $r[(S \times T) \cap R]$ რგოლს, ხოლო $b)$ და $d)$ თვისებების ძალით კი, Δ წარმოადგენს მონოტონურ კლასს. აქედან, იმის გათვალისწინებით, რომ (იხ. თეორემა 3.2.2) $\sigma a[(S \times T) \cap R]$ ემთხვევა $r[(S \times T) \cap R]$ რგოლის შემცველ მინიმალურ მონოტონურ კლასს, ვლუბლობთ $\Delta \supset \sigma a[(S \times T) \cap R]$ ჩართვას. ახლა გამოვიყენოთ თეორემა 3.3.3, რომლის თანახმად,

$$\sigma a[(S \times T) \cap R] = \sigma a(S \times T) \cap R.$$

შედეგად მივიღებთ $\Delta \supset \sigma a(S \times T) \cap R$ ჩართვას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

E სიმრავლეს ეწოდება სრული ზომის მქონე (X, S, μ) ზომიან სივრცეში, თუ $E \in S$ და $\mu(X \setminus E) = 0$.

ამ თავის ფარგლებში მივიჩნევთ, რომ რაიმე თვისება სრულდება თითქმის ყველგან, თუ ამ თვისების მქონე ყველა წერტილის სიმრავლეს აქვს სრული ზომა.

(X, S, μ) ზომიან სივრცეს ეუწოდოთ სრული, თუ μ ზომა სრულია.

ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცე არის სრული. სამართლიანია შემდეგი ორი მარტივი წინადადება (რომლებიც, მითითების გარეშე, რამდენჯერმე იქნება ქვემოთ გამოყენებული): 1) თუ $A \subset X$ სიმრავლე შეიცავს სრული ზომის ქვესიმრავლეს, მაშინ A სრული ზომისაა; 2) თუ X -ზე განსაზღვრული f ფუნქციის შემლუღა სრული ზომის რაიმე ქვესიმრავლეზე არის ზომადი, მაშინ f ზომადია.

თეორემა 11.3.2. ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია სისრულის თვისებით, ხოლო $R \subset X \times Y$ სასრული ზომის გვერდების მქონე მარცხთხედი. მაშინ ნებისმიერი $E \subset R$, $E \in S \otimes T$, სიმრავლი-სათვის:

- E -ს თითქმის ყოველი კვეთა არის ზომადი, ე.ი. $X_E = \{x \in X : E_x \in T\}$ სიმრავლე სრული ზომისაა X -ში, და $Y_E = \{y \in Y : E^y \in S\}$ სიმრავლე სრული ზომისაა Y -ში;
- $\nu(E_x)$, როგორც X_E -ზე განსაზღვრული x ცვლადის ფუნქცია, არის μ -ზომადი; ხოლო $\mu(E^y)$, როგორც Y_E -ზე განსაზღვრული y ცვლადის ფუნქცია, არის ν -ზომადი;

- სამართლიანია ტოლობები:

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_{X_E} \nu(E_x) d\mu(x) = \int_{Y_E} \mu(E^y) d\nu(y).$$

დამტკიცება. დამტკიცება ჩავატაროთ მხოლოდ x -კვეთებისათვის. y -კვეთებისათვის მსჯელობა სავსებით ანალოგიურია.

თავდაპირველად განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა E სიმრავლე ნული ზომისაა. თეორემა 5.4.1-ის ძალით არსებობს E -ს შემკველი ნულზომიანი $\hat{E}$ სიმრავლე. რომელიც ეკუთვნის $\sigma\alpha(S \times T)$ კლასს. ცხადია, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\hat{E} \subset R$. მაშინ თეორემა 10.3.1-ის თანახმად; $\hat{E}_x$ ზომადია ყოველი x -სთვის, $x \mapsto \nu(\hat{E}_x)$ ფუნქცია არის μ -ზომადი და

$$\int_X \nu(\hat{E}_x) d\mu(x) = 0.$$

საინტეგრო ფუნქციის არაუარყოფითობიდან გამომდინარე გვექნება,

$$A = \{x \in X : \nu(\hat{E}_x) = 0\}$$

სიმრავლე სრული ზომისაა X -ში. შედეგად, $E_x \subset \hat{E}_x$ ჩართვისა და ν ზომის სისრულის გაითვალისწინებით ვასკენით: ყოველი $x \in A$ -სთვის E_x კვეთა ზომადია და $\nu(E_x) = 0$. ამის შემდეგ, $X_E \supset A$ ჩართვისა და μ ზომის სისრულის საფუძველზე აღვიღად ელემენტობით, რომ E სიმრავლეს აქვს სამივე საჭირო თვისება.

ახლა განვიხილოთ ნებისმიერი $E \subset R$, $E \in S \otimes T$, სიმრავლის შემთხვევა. გამოვიყენოთ თეორემა 5.4.1 და E წარმოვადგინოთ სახით $E = M \cup N$, სადაც $M \in \sigma\alpha(S \times T)$, ხოლო N ნულზომიანი სიმრავლეა. ცხადია, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $M \cap N = \emptyset$. თეორემა 10.3.1-ის და უკვე განხილული შემთხვევის გათვალისწინებით, ზომისა და ინტეგრალის თვისებების საფუძველზე მარტივად მოწმდება, რომ $M \cup N$ გაერთიანებას აქვს სამივე საჭირო თვისება. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 10.3.1. 10.3.1 და 10.3.2 თეორემების პირველი პუნქტი არაა შებრუნებადი, ე.ი. კვეთების ზომადობა საზოგადოდ არ იწვევს სიმრავლის ზომადობას. სახელდობრ, ვ. სერპინსკიმ ააგო ლებეგის ამრით არაზომადი სიმრავლე სიბრტყეზე, რომელსაც ნებისმიერ წრფესთან აქვს არაუმეტეს ორე-ლემენტიანი თანაკვეთა.

§ 4. ფუბინისა და ტონელის თეორემები ზომების ლებეგისეული ნამრავლისათვის

საკმაოდ ზოგად პირობებში ჯერადი (ე.ი. ზომათა ნამრავლის მიხედვით განხილული) $\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu)$ ინტეგრალი დაიყვანება თანამამრავლი ზომების

მიხედვით ალბელ $\int_X \left(\int_Y f d\nu \right) d\mu$ და $\int_Y \left(\int_X f d\mu \right) d\nu$ განმეორებით ინტეგრალებზე. ქვემოთ დამტკიცებული იქნება ამ მიმართულებით ორი უმთავრესი შედეგი. პირველ მათგანს მოიხსენიებენ, როგორც ტონელის, ხოლო მეორეს კი - როგორც ფუბინის თეორემას.

შემოვიღოთ რამდენიმე საჭირო განსაზღვრება.

ვთქვათ, f არის $X \times Y$ დეკარტულ ნამრაველზე განსაზღვრული რაიმე ფუნქცია. ფიქსირებული $x \in X$ -სთვის f_x -ით აღვნიშნოთ $Y \ni y \mapsto f(x, y)$ ფუნქცია და მას ეუწოდოთ x -ით წარმოქმნილი f ფუნქციის კვეთა. ანალოგიურად, $y \in Y$ -თვის f^y -ით აღვნიშნოთ $X \ni x \mapsto f(x, y)$ ფუნქცია და მას ეუწოდოთ y -ით წარმოქმნილი f ფუნქციის კვეთა. ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობის წევრების კვეთებისათვის გამოვიყენოთ $[f_n]_x$ და $[f_n]^y$ ჩანაწერები.

ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია.

$X \times Y$ -ზე განსაზღვრული f ფუნქციისათვის აღვნიშნოთ:

$$X_f = \{x \in X : f_x \text{ არის } \nu\text{-ზომადი}\},$$

$$Y^f = \{y \in Y : f^y \text{ არის } \mu\text{-ზომადი}\},$$

$$X_f^* = \{x \in X : f_x \text{ არის } \nu\text{-ზომადი და } f_x \in L(Y, \nu)\},$$

$$Y_*^f = \{y \in Y : f^y \text{ არის } \mu\text{-ზომადი და } f^y \in L(X, \mu)\}.$$

ვიტყვი, რომ არაუარყოფით $(\mu \otimes \nu)$ -ზომად f ფუნქციას აქვს ტონელის თვისება (უფრო ზუსტად, ტონელის თვისება $(\mu, \nu, \mu \otimes \nu)$ სამეულის მიმართ), თუ:

- თითქმის ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის f_x კვეთა არის ν -ზომადი, ე.ი. $\mu(X \setminus X_f) = 0$;
- თითქმის ყოველი $y \in Y$ წერტილისათვის f^y კვეთა არის μ -ზომადი, ე.ი. $\nu(Y \setminus Y^f) = 0$;
- $\int_Y f d\nu$ ფუნქცია არის μ -ზომადი. აქ $\int_Y f d\nu$ გაიგება როგორც ფუნქცია, რომელიც $x \in X_f$ წერტილებში $\int_Y f_x d\nu$ ინტეგრალის ტოლია, ხოლო $x \in X \setminus X_f$ წერტილებში კი ნულის ტოლია;
- $\int_X f d\mu$ ფუნქცია არის ν -ზომადი. აქ $\int_X f d\mu$ გაიგება როგორც ფუნქცია, რომელიც $y \in Y^f$ წერტილებში $\int_X f^y d\mu$ ინტეგრალის ტოლია, ხოლო $y \in Y \setminus Y^f$ წერტილებში კი ნულის ტოლია;
- f ფუნქციის ჯერადი და განმეორებითი ინტეგრალები ერთმანეთის ტოლია, ე.ი. სამართლიანია ტოლობები:

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f d\mu \right) d\nu.$$

შენიშვნა 10.4.1. განმეორებითი ინტეგრალებისათვის ასევე გავრცელებულია $\int_X d\mu \int_Y f d\nu$ და $\int_Y d\nu \int_X f d\mu$ ჩანაწერები.

იტყვი, რომ $f \in L(X \times Y, \mu \otimes \nu)$ ფუნქციას აქვს ფუბინის თვისება (უფრო ზუსტად, ფუბინის თვისება $(\mu, \nu, \mu \otimes \nu)$ სამეულის მიმართ), თუ:

- თითქმის ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის $f_x \in L(Y, \nu)$, ე.ი. $\mu(X \setminus X_f^*) = 0$;
- თითქმის ყოველი $y \in Y$ წერტილისათვის $f^y \in L(X, \mu)$, ე.ი. $\nu(Y \setminus Y_f^*) = 0$;
- $\int_Y f dv \in L(X, \mu)$. აქ $\int_Y f dv$ აღნიშნავს ფუნქციას, რომელიც $x \in X_f^*$ წერტილებში $\int_Y f_x dv$ ინტეგრალის ტოლია, ხოლო $x \in X \setminus X_f^*$ წერტილებში კი ნულის ტოლია;
- $\int_X f d\mu \in L(Y, \nu)$. აქ $\int_X f d\mu$ აღნიშნავს ფუნქციას, რომელიც $y \in Y_f^*$ წერტილებში $\int_X f^y d\mu$ ინტეგრალის ტოლია, ხოლო $y \in Y \setminus Y_f^*$ წერტილებში კი ნულის ტოლია;
- f ფუნქციის ჯერადი და განმეორებითი ინტეგრალები ერთმანეთის ტოლია, ე.ი. სამართლიანია ტოლობები:

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f dv \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f d\mu \right) dv.$$

f ფუნქციის საყრდენი (აღნიშვნა: $\text{supp } f$) ეწოდება ყველა იმ წერტილის სიმრავლეს, რომელშიც ფუნქცია არანულოვან მნიშვნელობას ღებულობს.

(X, S, μ) ზომიან სივრცეს ეწოდოთ შემოსაზღვრული (σ -შემოსაზღვრული), თუ μ ზომა არის შემოსაზღვრული (σ -შემოსაზღვრული).

თეორემა 10.4.1. ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია სისრულის თვისებით. მაშინ $X \times Y$ -ზე განსაზღვრულ ნებისმიერ არაუარყოფით $(\mu \otimes \nu)$ -ზომად ფუნქციას, რომლის საყრდენი შეიძლება დაიფაროს სასრული ზომის გვერდების მქონე მართკუთხედების არაუმეტეს თვლადი კლასით, აქვს ტონელის თვისება.

თეორემა 10.4.2. ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია სისრულის თვისებით. მაშინ ნებისმიერ $f \in L(X \times Y, \mu \otimes \nu)$ ფუნქციას, რომლის საყრდენი შეიძლება დაიფაროს სასრული ზომის გვერდების მქონე მართკუთხედების არაუმეტეს თვლადი კლასით, აქვს ფუბინის თვისება.

შედეგი 10.4.1. ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია σ -შემოსაზღვრულობისა და სისრულის თვისებებით. მაშინ $X \times Y$ -ზე განსაზღვრულ ნებისმიერ არაუარყოფით $(\mu \otimes \nu)$ -ზომად f ფუნქციას აქვს ტონელის თვისება, ხოლო ნებისმიერ $f \in L(X \times Y, \mu \otimes \nu)$ ფუნქციას აქვს ფუბინის თვისება.

შედეგი 10.4.2. ვთქვათ, $(X, S, \mu) = (\mathbb{R}^p, \mathcal{L}_p, m_p)$ და $(Y, T, \nu) = (\mathbb{R}^q, \mathcal{L}_q, m_q)$. მაშინ $\mathbb{R}^{p+q}$ -ზე განსაზღვრულ ნებისმიერ არაუარყოფით და ლებეგის

აზრით ზომად f ფუნქციას აქვს ტონელის თვისება, ხოლო ნებისმიერ $f \in L(\mathbb{R}^{p+q})$ ფუნქციას აქვს ფუბინის თვისება.

მოკლედ რომ ვთქვათ, ფუბინისა და ტონელის თეორემები ადგენენ განმეორებითი ინტეგრალების არსებობას და მათ ტოლობას ჯერად ინტეგრალთან.

ლემა 10.4.1. ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია სისრულის თვისებით. ტონელის თვისების მქონე ყველა ფუნქციის Δ კლასს აქვს შემდეგი თვისებები:

- a) თუ $f, g \in \Delta$, მაშინ $f + g \in \Delta$;
- b) თუ $f \in \Delta$ და $\alpha \geq 0$, მაშინ $\alpha f \in \Delta$;
- c) თუ (f_n) არის Δ კლასის ფუნქციათა ზრდადი მიმდევრობა, მაშინ (f_n) -ის წერტილოვანი ზღვარი f აგრეთვე ეკუთვნის Δ კლასს;
- d) თუ (f_n) არის Δ კლასის ფუნქციათა მიმდევრობა, მაშინ მათი ჯამი $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ აგრეთვე ეკუთვნის Δ კლასს.

დამტკიცება. დამტკიცება ჩავატაროთ x -კვეთებისათვის. y -კვეთების შემთხვევა ანალოგიურია.

a) და b) თვისებები უშუალოდ მოწმდება μ ზომის სისრულის, არითმეტიკულ ოპერაციათა მიმართ ზომად ფუნქციათა კლასის ჩაეტილობისა და ინტეგრალის წრფივობის გათვალისწინებით.

გადავიდეთ c) თვისების დამტკიცებაზე. თავიდან შევნიშნოთ, რომ f ფუნქცია, როგორც $(\mu \otimes \nu)$ -ზომად ფუნქციათა წერტილოვანი ზღვარი, თავადაც $(\mu \otimes \nu)$ -ზომადია.

A -თი ალენიშნოთ X_{f_n} სიმრავლეების თანაკვეთა. ცხადია, A სრული ზომისაა და ნებისმიერი $x \in A$ -სთვის თითოეული $[f_n]_x$ ($n \in \mathbb{N}$) კვეთა ν -ზომადია (ე.ი. $A \subset X_f$). აქედან გამომდინარე, ნებისმიერი $x \in A$ -სთვის f_x კვეთა, როგორც ν -ზომად ფუნქციათა $([f_n]_x)$ მიმდევრობის წერტილოვანი ზღვარი, აგრეთვე ν -ზომადია.

$\int_Y f(x, y) d\nu(y)$ და $\int_Y f_n(x, y) d\nu(y)$ ($n \in \mathbb{N}$) ინტეგრალები, როგორც A -ზე განსაზღვრული x ცვლადის ფუნქციები, ალენიშნოთ შესაბამისად I_f -ით და I_{f_n} -ით.

(f_n) მიმდევრობის ზრდადობის გამო, ზრდადია (I_{f_n}) მიმდევრობაც. ამასთან, ნებისმიერი $x \in A$ -სთვის, თუ გამოვიყენებთ ლევის თეორემას, $([f_n]_x)$ მიმდევრობის შემთხვევაში, გვეჩვენება, რომ $I_f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{f_n}(x)$. ამრიგად, I_f წარმოადგენს μ -ზომად ფუნქციათა ზრდადი (I_{f_n}) მიმდევრობის წერტილოვან ზღვარს. შედეგად, I_f არის μ -ზომადი. გარდა ამისა, ლევის თეორემის ძალით გვეჩვენება,

$$\int_A I_f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A I_{f_n} d\mu.$$

შედეგად, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\mu(X_{f_n} \setminus A) = 0$ და $f_n \in \Delta$ ($n \in \mathbb{N}$),
დაეწეროს,

$$\begin{aligned} \int_A \left[\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right] d\mu(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \left[\int_Y f_n(x, y) d\nu(y) \right] d\mu(x) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_f} \left[\int_Y f_n(x, y) d\nu(y) \right] d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} f_n d(\mu \otimes \nu). \end{aligned}$$

თუ კიდევ ერთხელ გამოვიყენებთ ლევის თეორემას, ამჯერად (f_n) მიმდევრობისათვის, მივიღებთ, რომ ბოლო ზღვარი ზემოთ მოცემულ ტოლობათა ჯაჭვიდან, $\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu)$ ინტეგრალის ტოლია. ზემოთ დადგენილი დასკვნებიდან, μ ზომის სისრულის გათვალისწინებით, ადვილად ელვებოდათ $f \in \Delta$ მიკუთვნებას. ამით $c)$ თვისება დადგენილია.

$d)$ წარმოადგენს $a)$ და $c)$ თვისებების შედეგს.

ლემა დამტკიცებულია. □

ლემა 10.4.2. ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია სისრულის თვისებით, ხოლო R სასრული ზომის გვერდების მქონე მართკუთხედი. მაშინ ნებისმიერ არაუარყოფით $(\mu \otimes \nu)$ -ზომად ფუნქციას, რომლის საყრდენი მოთავსებულია R -ში, აქვს ტონელის თვისება.

დამტკიცება. სივრცეთა სისრულის გათვალისწინებით ადვილი დასაწახია, რომ $E \subset R$, $E \in S \otimes T$, სიმრავლისათვის თეორემა 10.3.2-ის დასკვნა ტოლფასია მისი მახასიათებელი χ_E ფუნქციის მიერ ტონელის თვისების ფლობისა. ამრიგად, თეორემა 10.3.2-ის ძალით R -ში შემავალი ნებისმიერი ზომადი სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქციას აქვს ტონელის თვისება. ამის შემდეგ გავითვალისწინოთ, რომ: i) R -ში შემავალი საყრდენის მქონე არაუარყოფითი მარტივი ფუნქცია წარმოადგენს R -ში შემავალი ზომადი სიმრავლეების მახასიათებელი ფუნქციების დადებითოფიციენტებიან წრფივ კომბინაციას; ii) R -ში შემავალი საყრდენის მქონე ნებისმიერი არაუარყოფითი ზომადი ფუნქცია წარმოადგება R -ში შემავალი საყრდენის მქონე არაუარყოფით მარტივ ფუნქციათა ზრდადი მიმდევრობის წერტილოვანი ზღვრის სახით. შედეგად, ლემა 10.4.1-ის მეშვეობით ელვებოდათ საჭირო დასკვნას. ლემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 10.4.1-ის დამტკიცება. განვიხილოთ სასრული ზომის გვერდების მქონე წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მართკუთხედების არაუმეტეს თვლადი $\{R_n\}$ კლასი, რომელიც ფარავს $\{f > 0\}$ სიმრავლეს. მაშინ ლემა 10.4.2-ის ძალით $\int \chi_{R_n}$ ფუნქციებს ექნებათ ტონელის თვისება. შედეგად, თუ გავითვალისწინებთ $f = \sum_n \chi_{R_n}$ ტოლობას და გამოვიყენებთ ლემა 10.4.1-ს, დავასკენით, რომ f ფუნქციას აქვს ტონელის თვისება. თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 10.4.2-ის დამტკიცება. საჭირო დასვენა მიიღება თეორემა 10.4.1-დან შემდეგი სამი წინადადების გათვალისწინებით:

- ნებისმიერი ჯამებადი ფუნქცია წარმოდგება ორი არაუარყოფითი ჯამებადი ფუნქციის სხვაობის სახით;
- თუ არაუარყოფით ჯამებად ფუნქციას აქვს ტონელის თვისება, მაშინ მას აქვს ფუბინის თვისებაც;
- ფუბინის თვისების მქონე ფუნქციების სხვაობას აგრეთვე აქვს ფუბინის თვისება.

პირველ წინადადებაში ხსენებულ წარმოდგენას, ცხადია, იძლევიან ფუნქციის დადებითი და უარყოფითი ნაწილები. მეორე წინადადების საჩვენებლად მხედველობაში უნდა მივიღოთ ჯამებადი ფუნქციის თითქმის ყველგან სასრულობის ფაქტი. მესამე წინადადება უშუალოდ მოწმდება ჯამებად ფუნქციათა თვისებების და სივრცეთა სისრულის გათვალისწინებით.

თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 10.4.2. ჯერადი ინტეგრალის განმეორებით ინტეგრალზე დაყვანის ფორმულები მარტივად ვრცელდება იმ სიტუაციაზე, როცა ინტეგრალი ნაკელად მთელი $X \times Y$ სივრცისა აიღება მის რაიმე მომად E ქვესიმრავლეზე. სახელდობრ, თუ f ფუნქცია აკმაყოფილებს 10.4.1 ან 10.4.2 თეორემის პირობებს, მაშინ $f \chi_E$ ფუნქციისათვის შესაბამისი თეორემის გამოყენება გვაძლევს ტოლობებს:

$$\int_E f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_{E_x} f d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_{E^y} f d\mu \right) d\nu.$$

აღვილი დასანახია, რომ $E = A \times B$ შემთხვევაში აღვილი ექნება ტოლობებს:

$$\int_{A \times B} f d(\mu \otimes \nu) = \int_A \left(\int_B f d\nu \right) d\mu = \int_B \left(\int_A f d\mu \right) d\nu.$$

შენიშვნა 10.4.3. ტონელის თეორემაში ფუნქციის საყრდენთან დაკავშირებული შემდეგად არსებითია. ავავთ ამის დამადასტურებელი მაგალითი. (X, S, μ) სივრცის როლში ავიღოთ $(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}}, \mu)$, სადაც μ დამთვლელი მომაა $\mathbb{R}$ -ში, ხოლო (Y, T, ν) სივრცე იყოს $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ -ის ტოლი. განვიხილოთ $f = \chi_E$ ფუნქცია, სადაც $E = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ დიაგონალური წრფეა. თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ E მომადი სიმრავლეა და შედეგად, f მომადი ფუნქციაა. ეს გამომდინარეობს E სიმრავლის შემდეგი წარმოდგენიდან:

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} (I_{n,k} \times I_{n,k}),$$

$$\text{სადაც } I_{n,k} = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right].$$

ამის შემდეგ შევნიშნოთ, რომ ყოველი x -სთვის f_x კვეთის ინტეგრალი 0-ის ტოლია, ხოლო ყოველი y -სთვის კი, f^y კვეთის ინტეგრალი 1-ს უდრის. შედეგად, f -ის განმეორებით ინტეგრალებს შორის ერთი 0-ის, ხოლო მეორე კი, ∞ -ის ტოლია. რაც ნიშნავს ტონელის თვისების დარღვევას.

შენიშვნა 10.4.4. ტონელისა და ფუბინის თეორემებში სივრცეთა სისრულის პირობა არსებითია. ვთქვათ, (X, S, μ) არაა სრული სივრცე, ხოლო (Y, T, ν) არატრივიალური სივრცეა, ე.ი. $\nu(Y) > 0$. მაშინ X -ში მოიძებნება ნული ზომის A სიმრავლე, რომელიც შეიცავს არაზომად A^* ქვესიმრავლეს. განვიხილოთ $E = A^* \times Y$ სიმრავლე $X \times Y$ სივრცეში შევნიშნოთ, რომ $\mu \otimes \nu$ ზომა წარმოქმნილია ლებეგისეული გაგრძელების პროცესის შედეგად, ამიტომ ის სრულია. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ $A \times Y$ სიმრავლე ეკუთვნის $S \times T$ დეკარტულ ნამრავლს და

$$(\mu \times \nu)(A \times Y) = \mu(A)\nu(Y) = 0.$$

რის გამოც, $A \times Y \in S \otimes T$ და $(\mu \otimes \nu)(A \times Y) = 0$. ზემოაღნიშნული ორი გარემოებიდან გამომდინარე, E ნულზომიანი სიმრავლეა $X \times Y$ სივრცეში. გვაქვს, რომ ყოველი y -სთვის, $E^y = A^*$, ე.ი. E სიმრავლის ყოველი y -კვეთა არაზომადია. რაც, ცხადია, ნიშნავს ფუბინის და ტონელის თვისებების დარღვევას $\chi_E \in L(X \times Y, \mu \otimes \nu)$ ფუნქციისათვის.

შენიშვნა 10.4.5. ტონელისა და ფუბინის თეორემებში დგინდება ფუნქციების თითქმის ყოველი კვეთის ზომადობა. ქვემოთ ვაჩვენებთ, რომ მეტის მიღწევა, სამოგადოდ, შეუძლებელია. (X, S, μ) და (Y, T, ν) სივრცეების როლში ავიღოთ ლებეგის ზომით აღჭურვილი რიცხვითი ლერძი. დავუშვათ, $A \subset \mathbb{R}$ ნებისმიერი ნული ზომის სიმრავლეა, ხოლო $B \subset \mathbb{R}$ რაიმე არაზომადი სიმრავლე. განვიხილოთ $E = A \times B$ დეკარტული ნამრავლი. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $A \times \mathbb{R}$ სიმრავლეს ნული ზომა აქვს სიბრტყეზე და $E \subset A \times \mathbb{R}$, შემდეგ კი ვისარგებლებთ ლებეგის ზომის სისრულობით, დავასკვნით E სიმრავლის ზომადობას. ცხადია, $E_x = B$ ყოველი $x \in A$ -სთვის. შედეგად, ყოველი $x \in A$ -სთვის E_x კვეთა არაზომადია. ამრიგად, შესაძლებელია სიბრტყეზე ზომადი ისეთი სიმრავლის აგება, რომელსაც წინასწარ დასახელებული ნულზომიანი ფუბის მიხედვით აღებული კვეთები არაზომადი აქვს.

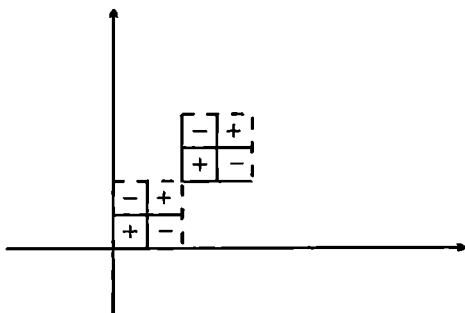
შენიშვნა 10.4.6. ტონელის თეორემიდან გამომდინარე, თეორემა 10.3.2-ში მოცემული დასკვნები ზომადი სიმრავლის კვეთების შესახებ ვრცელდება ნებისმიერ ზომად სიმრავლეზე, რომელიც შეიძლება დაიფაროს სასრული ზომის გვერდების მქონე მართკუთხედების არაუმეტეს თვლადი ოჯახით.

შენიშვნა 10.4.7. ფუბინის თეორემის ძალით, ზომათა ნამრავლის მიხედვით f ფუნქციის ჯამებადობა იწვევს f -ის განმეორებითი ინტეგრალუბის

არსებობას და მათ ერთმანეთთან ტოლობას. ქვემოთ ავსაგებთ ფუნქციის მაგალითს, რომელიც გვიჩვენებს, რომ განმეორებითი ინტეგრალების არსებობა და ტოლობა, საზოგადოდ, არ იწვევს ფუნქციის ჯამებადობას ნამრავლი ზომის მიხედვით.

(X, S, μ) და (Y, T, ν) სივრცეების როლში ავიღოთ ლებეგის ზომით აღჭურვილი რიცხვითი ლერძი, ე.ი. $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_1, m_1)$ სივრცე. თეორემა 10.2.1-ის თანახმად, $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_1, m_1)$ სივრცის თავის თავზე ლებეგისეული ნამრავლი გვაძლევს $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_2, m_2)$ სივრცეს, ე.ი. ლებეგის ზომით აღჭურვილ სიბრტყეს.

ყოველი $p, q \in \mathbb{N}$ -სთვის $I_{p,q}$ -თი აღვნიშნოთ $[p-1, p) \times [q-1, q)$ კვადრანტი. f -ის როლში ავიღოთ $\mathbb{R}^2$ -ზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც 1-ის ტოლია $I_{p,p}$ სახის კვადრატების წერტილებში, (-1) -ის ტოლია $I_{2p,2p-1}$ და $I_{2p-1,2p}$ სახის კვადრატების წერტილებში (ნახ. 10.2) და ნულის ტოლია ყველა სხვა წერტილში.



ნახ. 10.2.

ცხადია, როგორც f ფუნქცია, ასევე მისი ყოველი კვეთა, ლებეგის აზრით ზომადია. ამავდროულად, აღვილი დასაანახია, რომ f -ის ნებისმიერი კვეთის ინტეგრალი ნულის ტოლია. შედეგად, ორივე განმეორებითი ინტეგრალი ნულის ტოლი გამოდის. მეორე მხრივ, ცხადია, რომ f ფუნქცია არაა ჯამებადი.

აქვე შევნიშნავთ, რომ მსგავსი სქემით აიგება ერთეულოვან კვადრატზე განსაზღვრული ლებეგის აზრით არაინტეგრებადი ფუნქცია, რომლის განმეორებითი ინტეგრალები ერთმანეთის ტოლია (იხ. ამოცანა 1 პარაგრაფის ბოლოს).

შენიშვნა 10.4.8. ტონელისა და ფუბინის თეორემები საკმაოდ ზოგადი დამკვეთების პირობებში გვაძლევს საშუალებას, ნამრავლი ზომის მიხედვით ინტეგრალის გამოთვლა დავეყვანოთ განმეორებითი ინტეგრალების გამოთვლაზე. თანმხლები შედეგი ამ დროს არის განმეორებითი ინტეგრალების არსებობისა და მათი ერთმანეთთან ტოლობის ფაქტი. საზოგადოდ, არ უნდა

ვიფიქროთ, რომ განმეორებითი ინტეგრალები (მათი არსებობის შემთხვევაში) ყოველთვის ერთმანეთის ტოლია. ავავთ შესაბამისი მაგალითი.

კვლავ განვიხილოთ ლებეგის ზომიანი რიყსებით ღერძის თავის თავზე ლებეგისეული ნამრავლი. ყოველი $p, q \in \mathbb{N}$ -სთვის $I_{p,q}$ -თი აღვნიშნოთ კვადრატები: $[p-1, p) \times [q-1, q)$. f -ის როლში ავიღოთ $\mathbb{R}^2$ -ზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც 1-ის ტოლია $I_{p,p}$ სახის კვადრატების წერტილებში, (-1) -ის ტოლია $I_{p,p+1}$ სახის კვადრატების წერტილებში და ნულის ტოლია ყველა სხვა წერტილში. ცხადია, როგორც f ფუნქცია, ასევე მისი ყოველი კვეთა, ლებეგის აზრით ზომადია. ამავდროულად, ადვილი დასაანახია, რომ f^y კვეთის ინტეგრალი ნულის ტოლია ყოველი y -სთვის, ხოლო f_x კვეთის ინტეგრალი 1-ის ტოლია, თუ $x \in [0, 1)$ და ნულის ტოლია სხვა შემთხვევაში. აღნიშნულიდან გამომდინარე გვექნება.

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dm_1(x) \right] dm_1(y) = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dm_1(y) \right] dm_1(x) = 1.$$

აქვე შევნიშნავთ, რომ მსგავსი სქემით აიგება ერთეულოვან კვადრატზე განსაზღვრული ლებეგის აზრით ზომადი ფუნქცია, რომლის განმეორებითი ინტეგრალები ერთმანეთისაგან განსხვავებულია (იხ. ამოცანა 2 პარაგრაფის ბოლოს).

შენიშვნა 10.4.9. თეორემა 10.4.1 და თეორემა 10.4.2 იმ შემთხვევაში, როცა (X, S, μ) და (Y, T, ν) სივრცეები წარმოადგენენ ლებეგის ზომით აღჭურვილ ერთგანზომილებიან მონაკვეთებს, დამტკიცებული იყო შესაბამისად ლ. ტონელის (1909) და გ. ფუბინის (1907) მიერ. მსგავსი შედეგები გარევეულ დამატებით პირობებში მანამდე მიღებული ჰქონდა ა. ლებეგს (1904).

ამოცანები

1. ეთქვას, $\Delta_p = [1 - 1/2^{p-1}, 1 - 1/2^p)$ და $I_{p,q} = \Delta_p \times \Delta_q$ ($p, q \in \mathbb{N}$). f იყოს $[0, 1)^2$ -ზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც მუდმივია ყოველ $I_{p,q}$ მართკუთხედზე და რომლის ინტეგრალი ლებეგის m_2 ზომის მიხედვით: 1-ის ტოლია $I_{p,p}$ სახის მართკუთხედებზე, (-1) -ის ტოლია $I_{2p,2p-1}$ და $I_{2p-1,2p}$ სახის მართკუთხედებზე და 0-ის ტოლია ყველა დანარჩენ $I_{p,q}$ მართკუთხედზე. აჩვენეთ, რომ f -ის განმეორებითი ინტეგრალები (აღებული ლებეგის ერთგანზომილებიანი ზომის მიხედვით) ნულის ტოლია და $f \notin L([0, 1)^2, m_2)$.
2. ვთქვათ, $\Delta_p = [1 - 1/2^{p-1}, 1 - 1/2^p)$ და $I_{p,q} = \Delta_p \times \Delta_q$ ($p, q \in \mathbb{N}$). f იყოს $[0, 1)^2$ -ზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც მუდმივია ყოველ $I_{p,q}$ მართკუთხედზე და რომლის ინტეგრალი ლებეგის m_2 ზომის მიხედვით: 1-ის ტოლია $I_{p,p}$ სახის მართკუთხედებზე, (-1) -ის ტოლია $I_{p+1,p}$ სახის მართკუთხედებზე და 0-ის ტოლია ყველა დანარჩენ $I_{p,q}$ მართკუთხედზე.

აჩვენეთ, რომ f -ის განსწორებითი ინტეგრალები (აღებული ლებეგის ერთ-განზომილებიანი ზომის მიხედვით) ერთმანეთისაგან განსხვავებულია.

3. დამტკიცეთ კავალიერის პრინციპი: ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) σ -მეზოსაზღვრული ზომიანი სივრცეებია სისრულის თვისებით. თუ E და F ზომადი სიმრავლეებია $X \times Y$ -ში და $\nu(E_x) = \nu(F_x)$ ყოველი (თითქმის ყოველი) $x \in X$ -სთვის, მაშინ

$$(\mu \otimes \nu)(E) = (\mu \otimes \nu)(F).$$

§ 5. ფუბინისა და ტონელის თეორემები ზომების ბორელისეული ნამრავლისათვის

ქვემოთ მოცემული ორი თეორემა გვიჩვენებს, რომ ბორელისეული ნამრავლის მიხედვით ზომადი როგორც სიმრავლის, ასევე ფუნქციის ნებისმიერი კვეთა ზომადია.

თეორემა 10.5.1. თუ $E \in \sigma\alpha(S \times T)$, მაშინ $E_x \in T$ და $E^y \in S$ ყოველი $x \in X$ და $y \in Y$ წერტილებისათვის.

დამტკიცება. Δ -თი აღენიშნოთ ყველა იმ $E \in \sigma\alpha(S \times T)$ სიმრავლის კლასი, რომლის ნებისმიერი E_x კვეთა ν -ზომადია. ე.ი. ეკუთვნის T კლასს. დაეადგინოთ, რომ $\Delta = \sigma\alpha(S \times T)$. საამისოდ საკმარისია ვაჩვენოთ შემდეგი ორი წინადადების სამართლიანობა:

- 1) ყოველი $A \times B$ მართუთხედი ეკუთვნის Δ კლასს;
- 2) Δ არის σ -ალგებრა.

პირველი წინადადება გამომდინარეობს იქედან, რომ: $[A \times B]_x = \emptyset$, როცა $x \notin A$ და $[A \times B]_x = B$, როცა $x \in A$. მეორე წინადადება კი, თავის მხრივ არის შემდეგი სამი წინადადების შედეგი:

- i) $X \times Y \in \Delta$;
- ii) თუ $E \in \Delta$, მაშინ $[(X \times Y) \setminus E]_x = Y \setminus E_x$. რის გამოც, $(X \times Y) \setminus E \in \Delta$;
- iii) თუ $E_k \in \Delta$ ($k \in \mathbb{N}$) და $E = \bigcup_k E_k$, მაშინ $E_x = \bigcup_k [E_k]_x$. რის გამოც, $E \in \Delta$.

ანალოგიურ მსჯელობას გამოვიყენებთ E^y კვეთების შემთხვევაში.

თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 10.5.2. ვთქვათ, f არის $(\mu \otimes \nu)$ -ზომადი ფუნქცია. მაშინ f_x კვეთა არის ν -ზომადი ყოველი $x \in X$ -სთვის, ხოლო f^y კვეთა არის μ -ზომადი ყოველი $y \in Y$ -სთვის.

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი $x \in X$ წერტილი. ვთქვათ, a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია და $I = [a, \infty]$. გვაქვს, რომ

$$(f_x)^{-1}(I) = \{y : f_x(y) \in I\} = \{y : f(x, y) \in I\} =$$

$$= \{y : (x, y) \in f^{-1}(I)\} = [f^{-1}(I)]'_x.$$

შედეგად, თეორემა 10.5.1-ის გათვალისწინებით, $(f_x)^{-1}(I) \in T$. რითაც f_x ფუნქციის ν -ზომადობა დადგენილია. მსგავსად დამტკიცდება f^y კეითების μ -ზომადობა. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

არაუარყოფითი $(\mu \odot \nu)$ -ზომადი ფუნქციისათვის ტონელის თვისება $(\mu, \nu, \mu \odot \nu)$ სამეულის მიმართ (მოკლედ, ტონელის თვისება) განისაზღვრება მსგავსად ტონელის თვისებისა $(\mu, \nu, \mu \otimes \nu)$ სამეულის მიმართ, ოღონდ იმ განსხვავებით, რომ პირველ და მეორე თვისებებში მოითხოვება ყოველი კეითის ზომადობა, ხოლო ჯერადი ინტეგრალი განიხილება $\mu \odot \nu$ ზომის მიმართ.

$f \in L(X \times Y, \mu \odot \nu)$ ფუნქციისათვის ფუბინის თვისება $(\mu, \nu, \mu \odot \nu)$ სამეულის მიმართ (მოკლედ, ფუბინის თვისება) განისაზღვრება მსგავსად ფუბინის თვისებისა $(\mu, \nu, \mu \otimes \nu)$ სამეულის მიმართ, იმ განსხვავებით, რომ ჯერადი ინტეგრალი განხილული უნდა იქნას $\mu \odot \nu$ ზომის მიმართ.

ტონელისა და ფუბინის თეორემები სამართლიანია ზომების ბორელისეული ნამრავლისთვისაც.

თეორემა 10.5.3. ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია. მაშინ $X \times Y$ -ზე განსაზღვრულ ნებისმიერ არაუარყოფით $(\mu \odot \nu)$ -ზომად ფუნქციას, რომლის საყრდენი შეიძლება დაიფაროს სასრული ზომის გვერდების მქონე მართკუთხედების არაუმეტეს თვლადი კლასით, აქვს ტონელის თვისება.

თეორემა 10.5.4. ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია. მაშინ ნებისმიერ $f \in L(X \times Y, \mu \odot \nu)$ ფუნქციას, რომლის საყრდენი შეიძლება დაიფაროს სასრული ზომის გვერდების მქონე მართკუთხედების არაუმეტეს თვლადი კლასით, აქვს ფუბინის თვისება.

შედეგი 10.5.1. ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია σ -შემოსაზღვრულობის თვისებით. მაშინ $X \times Y$ -ზე განსაზღვრულ ნებისმიერ არაუარყოფით $(\mu \odot \nu)$ -ზომად f ფუნქციას აქვს ტონელის თვისება, ხოლო ნებისმიერ $f \in L(X \times Y, \mu \odot \nu)$ ფუნქციას აქვს ფუბინის თვისება.

ამრიგად, განსხვავებით ლებეგისეული ნამრავლისაგან, სივრცეების სისრულის მოთხოვნა შეიძლება საერთოდ მოეხსნათ. დამტკიცებები მიმდინარეობს ლებეგისეული ნამრავლის შემთხვევაში გამოყენებული სქემის მიხედვით და მათში კიდევ უფრო ნაკლებია ტექნიკური დეტალები. კერძოდ, თეორემა 10.5.3-ის დამტკიცება ეფუძნება უშუალოდ თეორემა 10.3.1-ს.

შენიშვნა 10.5.1. მრავალგანზომილებიანი ლებეგის ზომის მიხედვით აღებული ინტეგრალის დაყვანა დაბალგანზომილებიანი ლებეგის ზომების მიხედვით აღებულ განმეორებით ინტეგრალზე შეუძლებელია ბორელისეული ნამრავლის

კონსტრუქციის მეშვეობით. ეს გამოწვეულია იმით, რომ ლებეგის ზომა არ წარმოდგება დაბალგანზომილებიანი ლებეგის ზომების ბორელისეული ნამრავლის სახით, ე.ი.

$$m_{p+q} \neq m_p \odot m_q.$$

ეს, თავის მხრივ, გამომდინარეობს იქედან, რომ $m_p \odot m_q$ არაა სრული ზომა, მაშინ, როცა m_{p+q} ლებეგის ზომა სრულია. $m_p \odot m_q$ ზომის არასრულობის დასადგენად უნდა განვიხილოთ $A \neq \emptyset, m_p(A) = 0$, სიმრავლე და $B \subset \mathbb{R}^q, B \notin \mathcal{L}_q$, სიმრავლე. მაშინ $A \times B \subset A \times \mathbb{R}^q$ და $(m_p \odot m_q)(A \times \mathbb{R}^q) = 0$, მაგრამ თეორემა 10.5.1-ის ძალით, $A \times B \notin \sigma\alpha(\mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q)$.

შენიშვნა 10.5.2. წინა შენიშვნის გათვალისწინებით შეგვიძლია ვთქვათ, რომ სრული ზომების ბორელისეული ნამრაველი საზოგადოდ არაა სრული ზომა. უფრო მეტიც, თუ გავანალიზებთ ჩატარებულ მსჯელობას, შეიძლება დავამტკიცოთ შემდეგი წინადადება: ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) სივრცეები ისეთებია, რომ მოიძებნებინ $A \neq \emptyset, \mu(A) = 0$, და $B \subset Y, B \notin T$, სიმრავლეები. მაშინ μ და ν ზომების ბორელისეულ ნამრავლს არა აქვს სისრულის თვისება.

შენიშვნა 10.5.3. თეორემა 10.5.3-ში ფუნქციის საყრდენთან დაკავშირებული მოთხოვნა არსებითია. ადვილი დასანახია, რომ ამის დამადასტურებლად გამოდგება ზომათა ლებეგისეული ნამრავლის შემთხვევაში მსგავსი მიზნით აგებული სივრცეებისა და ფუნქციის მაგალითი (იხ. შენიშვნა 10.4.3).

შენიშვნა 10.5.4. ფუბინის თეორემაში ღვინდება ფუნქციის თითქმის ყოველი კვების ჯამებადობა. მეტის მიღწევა საზოგადოდ შეუძლებელია. ამაში დასარწმუნებლად (X, S, μ) და (Y, T, ν) სივრცეების როლში ავიღოთ ლებეგის ზომით აღჭურვილი რიცხვითი ღერძი. ვთქვათ, $A \subset \mathbb{R}$ ნებისმიერი ნული ზომის სიმრავლეა. განვიხილოთ ფუნქცია, რომელიც $\mathbb{C}$ -ის ტოლია $A \times \mathbb{R}$ სიმრავლეზე და ნულის ტოლია მის გარეთ. ადვილი დასანახია, რომ $f \in L(\mathbb{R}^2, m_1 \odot m_1)$ და $f_x \notin L(\mathbb{R}, m_1)$, როცა $x \in A$. ამრიგად, შესაძლებელია ისეთი ჯამებადი ფუნქციის აგება, რომელსაც წინასწარ დასახელებული ნულზომიანი ფუძის მიხედვით აღებული კვეთები არაჯამებადი აქვს.

შენიშვნა 10.5.5. ადვილი შესამოწმებელია, რომ 10.4.7 და 10.4.8 შენიშვნებში განმეორებით ინტეგრალებთან დაკავშირებით აგებული მაგალითები იგივე მიზნებისათვის გამოდგება ზომათა ბორელისეული ნამრავლის შემთხვევაშიც.

§ 6. ფუბინისა და ტონელის თეორემების ზოგიერთი გამოყენება

1. ზომათა ნამრავლის მიხედვით ფუნქციის ჯამებადობის კრიტერიუმი. ტონელის თეორემიდან, იმის გათვალისწინებით, რომ ფუნქციის ჯამებადობა

მისი მოდულის ჯამებადობის ტოლფასია, გამომდინარეობს ნამრაველი მომის მიხედვით ფუნქციის ჯამებადობის შემდეგი სასარგებლო კრიტერიუმი.

თეორემა 11.1.1. ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია სისრულის თვისებით. მაშინ ნებისმიერი $(\mu \otimes \nu)$ -ზომადი f ფუნქციისათვის, რომლის საყრდენი შეიძლება დაიფაროს სასრული ზომის გვერდების მქონე მართკუთხედების არაუშეტეხს თვლადი კლასით, შემდეგი სამი პირობა ერთმანეთის ეკვივალენტურია:

$$\begin{aligned} f &\in L(X \times Y, \mu \otimes \nu), \\ \int_X \left(\int_Y |f| d\nu \right) d\mu &< \infty, \\ \int_Y \left(\int_X |f| d\mu \right) d\nu &< \infty. \end{aligned}$$

თეორემა 10.6.1-ის თანახმად, საკმაოდ ბოგად პირობებში ზომადი ფუნქციის მოდულისათვის ერთ-ერთი განმეორებითი ინტეგრალის სასრულობა ტოლფასია ნამრაველი მომის მიხედვით ფუნქციის ჯამებადობის. ეს წინადადება სმირად გამოიყენება ფუნქციის ჯამებადობის შემოწმებისას.

შენიშვნა 11.1.1. თეორემა 10.5.3-ზე დაყრდნობით მივიღებთ ანალოგიურ თეორემას მომების ბორელისეული ნამრავლის შემთხვევაში, თანაც, ამ დროს შესაძლებელია სივრცეთა სისრულის მოთხოვნის მოხსნა.

2. ლებეგის ინტეგრალის გეომეტრიული შინაარსი. სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 11.1.2. ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა, ხოლო f არის X -ზე განსაზღვრული არაუარყოფითი μ -ზომადი ფუნქცია. მაშინ f -ის გრაფიკემა სიმრავლე:

$$\Gamma_f = \{(x, y) : x \in X, 0 < y < f(x)\}$$

ეკუთვნის $\sigma a(S \times \mathcal{L})$ კლასს, ე.ი. ზომადია $\mu \otimes m$ ბორელისეული ნამრავლის მიხედვით.

დამტკიცება. თავდაპირველად ვანეხილოთ მარტივი f ფუნქციის შემთხვევა. თუ f იგივერად ნულის ტოლია, მაშინ $\Gamma_f = \emptyset$: ხოლო თუ f არაა იგივერად ნულოვანი ფუნქცია. მაშინ გვექნება, რომ

$$\Gamma_f = \bigcup_{a \in \{f > 0\}} (\{f = a\} \times (0, a)).$$

ცხადია, ორივე შემთხვევაში $\Gamma_f \in \sigma a(S \times \mathcal{L})$.

ახლა განვიხილოთ ზოგადი სიტუაცია. ეიპოვოთ არაუარყოფით მარტივ ფუნქციათა ზრდადი (f_n) მიმდევრობა, რომელიც f ფუნქციისაკენ კრებადია ყოველ წერტილში. მაშინ გვექნება,

$$\Gamma_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_{f_n}.$$

საიდანაც, $\Gamma_{f_n} \in \sigma\alpha(S \times \mathcal{L})$ ($n \in \mathbb{N}$) პირობების გათვალისწინებით ვასკენით, რომ $\Gamma_f \in \sigma\alpha(S \times \mathcal{L})$. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 10.6.3. ვთქვათ, (X, S, μ) σ -შემოსაზღვრული ზომიანი სივრცეა, ხოლო f მასზე განსაზღვრული არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა. მაშინ

$$(\mu \odot m)(\Gamma_f) = \int_X f d\mu,$$

ე.ი. ფუნქციის გრაფიკეზეა სიმრავლის ზომა მისი ლებეგის ინტეგრალის ტოლია.

დამტკიცება. დამტკიცება ეფუძნება შედეგი 10.5.1-ის გამოყენებას

$$(X, S, \mu), (Y, T, \nu) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$$

სივრცეების ბორელისეული ნამრავლისა და $E = \Gamma_f$ სიმრავლისათვის. მართლაც, ადვილი დასაანახია, რომ $[\Gamma_f]_x = (0, f(x))$, თუ $f(x) > 0$ და $[\Gamma_f]_x = \emptyset$, თუ $f(x) = 0$. შედეგად,

$$m([\Gamma_f]_x) = f(x) \quad (x \in X).$$

საიდანაც თეორემა 10.6.2-ის და შედეგი 10.5.1-ის ძალით გვექნება,

$$(\mu \odot m)(\Gamma_f) = \int_X m([\Gamma_f]_x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x).$$

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 10.6.2. თეორემა 10.6.3 ადასტურებს, რომ ლებეგის ინტეგრალი ახორციელებს მისი განსაზღვრისას შემოღებულ მიზანს: ინტეგრალი ზომავს გრაფიკეზეა სიმრავლეს.

შენიშვნა 10.6.3. [34] სახელმძღვანელოში ლებეგის ინტეგრალის თეორია აგებულია $(\mu \odot m)(\Gamma_f) = \int_X f d\mu$ ტოლობის საფუძველზე. სახელდობრ, ჯერ შესწავლილია ზომათა ნამრავლის თვისებები და ამის შემდეგ $\int_X f d\mu$ ლებეგის ინტეგრალი განისაზღვრება როგორც გრაფიკეზეა სიმრავლის ზომის მნიშვნელობა (μ და ლებეგის ერთგანზომილებიანი m ზომების ნამრავლის მიხედვით): $(\mu \odot m)(\Gamma_f)$.

3. ნახვევის ცნება. შევთანხმდეთ, რომ $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციისათვის $\|f\|$ აღნიშნავს $\int_{\mathbb{R}^n} |f| dm$ ინტეგრალს.

თეორემა 10.6.4. ვთქვათ, $f \in L(\mathbb{R}^n)$ და $g \in L(\mathbb{R}^n)$. მაშინ:

- $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)g(t)|dm(t) < \infty$ პირობის დამაკმაყოფილებელი ყველა $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილის E სიმრავლე სრული ზომისაა;
- თუ $f * g$ აღნიშნავს შემდეგნაირად განსაზღვრულ ფუნქციას: $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dm(t)$, როცა $x \in E$ და $(f * g)(x) = 0$, როცა $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, მაშინ $f * g \in L(\mathbb{R}^n)$ და $\|f * g\| \leq \|f\| \|g\|$.

თეორემა 10.6.4-ის შემდეგობით განსაზღვრულ $f * g$ ფუნქციას f და g ფუნქციების ნახვევი ეწოდება.

შენიშვნა 10.6.4. ორი ჯამებადი ფუნქციის ნამრავლი შეიძლება არ იყოს ჯამებადი. ამიტომ ნახვევის განმსაზღვრელი $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dm(t)$ ინტეგრალის არსებობა (რომელიმე ერთი x წერტილისთვისაც კი) არაა თავისთავად ცხადი ფაქტი.

ვთქვათ, X და T არაცარიელი ღია სიმრავლეებია $\mathbb{R}^n$ სივრცეში. $\varphi : T \rightarrow X$ ასახვას ეწოდება დიფეომორფიზმი, თუ φ ბიექციაა და როგორც φ , ასევე φ^{-1} , არიან უწყვეტად დიფერენცირებადი.

თეორემა 10.6.4-ის დამტკიცებისათვის დაგვჭირდება შემდეგი თეორემა დიფეომორფული ასახვისას ლებეგის ზომის გარდაქმნის შესახებ.

თეორემა 10.6.5. ვთქვათ, X და T არაცარიელი ღია სიმრავლეებია $\mathbb{R}^n$ სივრცეში, ხოლო $\varphi : T \rightarrow X$ ასახვა არის დიფეომორფიზმი. მაშინ ლებეგის აზრით ზომადი ნებისმიერი $E \subset T$ სიმრავლისათვის $\varphi(E)$ ანასახი ასევე ლებეგის აზრით ზომადია და

$$m[\varphi(E)] = \int_E |J_{\varphi}(t)|dm(t),$$

სადაც J_{φ} აღნიშნავს φ ასახვის იაკობიანს.

ამ თეორემის დამტკიცება მოცემულია, მაგალითად, [6] და [21] სახელმძღვანელოებში.

შენიშვნა 10.6.5. ვთქვათ, X და T არაცარიელი ღია სიმრავლეებია $\mathbb{R}^n$ სივრცეში, ხოლო $\varphi : T \rightarrow X$ ასახვა არის დიფეომორფიზმი. მაშინ ლებეგის აზრით ზომადი ნებისმიერი $E \subset X$ სიმრავლის $\varphi^{-1}(E)$ წინასახე ასევე ლებეგის აზრით ზომადია. ამაში დასაბუთებულად უნდა გაითვალისწინოთ, რომ φ^{-1} ასახვა ასევე დიფეომორფიზმია და გამოვიყენოთ 10.6.5 თეორემა φ^{-1} ასახვისათვის.

თეორემა 10.6.4-ის დამტკიცებისათვის ასევე დაგვჭირდება შემდეგი ლებეგის.

თეორემა 10.6.6. ვთქვათ, f არის $\mathbb{R}^n$ სივრცეზე განსაზღვრული ლე-ბეგის აზრით ზომადი ფუნქცია, ხოლო F_1 , F_2 და F_3 არიან $\mathbb{R}^{2n}$ სივრცეზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქციები: $F_1(x, t) = f(x)$, $F_2(x, t) = f(t)$ და $F_3(x, t) = f(x - t)$ ($x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^n$). მაშინ F_1 , F_2 და F_3 ფუნქციები არიან ლებეგის აზრით ზომადი.

დამტკიცება. ნებისმიერი $a \in \mathbb{R}$ -სთვის გვაქვს, რომ

$$\{F_1 > a\} = \{f > a\} \times \mathbb{R}^n, \quad \{F_2 > a\} = \mathbb{R}^n \times \{f > a\}.$$

საიდანაც, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეების დეკარტული ნამრავლი ასევე ლებეგის აზრით ზომადია (იხ. შენიშვნა 10.2.1), დავასკვნით F_1 და F_2 ფუნქციების ლებეგის აზრით ზომადობას.

$\varphi: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ იყოს შემდეგნაირად განსაზღვრული ასახვა:

$$\varphi(x, t) = (x - t, t) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^n).$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ φ ასახვა წარმოადგენს დიფეომორფიზმს, ამასთან, გვაქვს, რომ $F_3 = F_1 \circ \varphi$. საიდანაც, 10.6.5 შენიშვნისა და 7.2.1 თეორემის საფუძველზე გამომდინარეობს F_3 ფუნქციის ლებეგის აზრით ზომადობა. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 10.6.4-ის დამტკიცება. თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ $\mathbb{R}^{2n}$ სივრცეზე $h(x, t) = f(x - t)g(t)$ ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია ზომადია ლებეგის აზრით. მართლაც, h_1 -ით და h_2 -ით აღვნიშნოთ $\mathbb{R}^{2n}$ სივრცეზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქციები: $h_1(x, t) = f(x - t)$, $h_2(x, t) = g(t)$. თეორემა 10.6.6-ის ძალით h_1 და h_2 ფუნქციები ლებეგის აზრით ზომადი არიან, ამიტომ $h = h_1 h_2$ ტოლობის გათვალისწინებით ლებეგის აზრით ზომადი იქნება h ფუნქცია.

გამოვთვალოთ $\int [f |h(x, t)| dm(x)] dm(t)$ განმეორებითი ინტეგრალი:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |h(x, t)| dm(x) \right] dm(t) = \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - t)| dm(x) \right] |g(t)| dm(t) = \|f\| \|g\| < \infty. \end{aligned} \quad (1)$$

აქ გავითვალისწინეთ, რომ ლებეგის ზომის ძერის მიმართ ინვარიანტულობისა და თეორემა 8.10.1-ის ძალით, $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - t)| dm(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dm(x)$ ყოველი $t \in \mathbb{R}^n$ -სთვის.

(1)-დან ტონელის თეორემის საფუძველზე ვღებულობთ h ფუნქციის ჯამებადობას ($2n$ -განზომილებიანი ლებეგის ზომის მიხედვით). შემდეგ კი, h -ის მიმართ ფუბინის თეორემის გამოყენება საშუალებას გვაძლევს, დავასკვნათ

თითქმის ყოველი h_x კვეთის ჯამებადობა, ანუ

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)g(t)| dm(t)$$

ინტეგრალის სასრულობა თითქმის ყოველი x -სთვის, რითაც თეორემის პირველი წინადადება დადგენილია. მეორე წინადადების დასაბუთებად გამოვიყენოთ ფუბინის თეორემა $|h|$ ფუნქციისათვის და (1) თანაფარდობები, რის საფუძველზეც დავწერთ,

$$\begin{aligned} \|f * g\| &= \int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)| dm(x) \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |h(x, t)| dm(t) \right] dm(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |h(x, t)| dm(x) \right] dm(t) = \|f\| \|g\|. \end{aligned}$$

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამოცანები

1. ეთქვას, $f \in L(X, \mu)$, $g \in L(Y, \nu)$ და $h(x, y) = f(x)g(y)$ ($x \in X, y \in Y$). აჩვენეთ, რომ $h \in L(X \times Y, \mu \odot \nu)$ და

$$\int_{X \times Y} h d(\mu \odot \nu) = \int_X f d\mu \int_Y g d\nu.$$

2. ეთქვას, $f(x, y) = e^{-xy} \sin x \sin y$ ($x, y \in (0, \infty)$). აჩვენეთ, რომ $f \in L((0, \infty)^2)$.
3. ეთქვას, f არის მომიან სივრცეზე განსაზღვრული არაუარყოფითი მომადი ფუნქცია. დაამტკიცეთ, რომ f -ის გრაფიკემა სიმრავლის მეორე ვარიანტი: $\Gamma_f = \{(x, y) : x \in X, 0 \leq y \leq f(x)\}$ ეკუთვნის $\sigma\alpha(S \times L)$ კლასს და $(\mu \odot m)(\Gamma_f) = \int_X f d\mu$.
4. ეთქვას, f არის მომიან სივრცეზე განსაზღვრული არაუარყოფითი მომადი ფუნქცია. დაამტკიცეთ, რომ f -ის გრაფიკი: $\gamma_f = \{(x, y) : x \in X, y = f(x)\}$ ეკუთვნის $\sigma\alpha(S \times L)$ კლასს და $(\mu \odot m)(\gamma_f) = 0$.

§ 7. ფუბინისა და ტონელის თეორემები ნებისმიერი რაოდენობის ზომის ნამრავლისათვის

ტონელისა და ფუბინის თეორემები სამართლიანია ნებისმიერი რაოდენობის ზომების ლებეგისეული ნამრავლისათვის. მოვიყენოთ თეორემების ჩამოყალიბებისთვის საჭირო განსაზღვრებები და დებულებები.

ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ $n \geq 2$.

ეთქვას, ყოველი $k \in \overline{1, n}$ -სთვის X_k არაუარყოფითი სიმრავლეა, $S_k \subset 2^{X_k}$ ნახევარგოლია, ხოლო μ_k არის S_k -ზე განსაზღვრული ზომა.

$S_1 \times \dots \times S_n$ განესაზღვროთ როგორც $A_1 \times \dots \times A_n$ სახის ყველა სიმრავლის კლასი, სადაც $A_1 \in S_1, \dots, A_n \in S_n$. $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$ განესაზღვროთ როგორც $S_1 \times \dots \times S_n$ კლასზე მოცემული შემდეგი ფუნქცია:

$$(\mu_1 \times \dots \times \mu_n)(A_1 \times \dots \times A_n) = \mu_1(A_1) \dots \mu_n(A_n).$$

თეორემა 10.7.1. $S_1 \times \dots \times S_n$ კლასი არის ნახევარგოლი.

თეორემა 10.7.2. $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$ ფუნქცია არის ზომა.

10.7.1 და 10.7.2 თეორემები ინდუქციური მსჯელობით მიიღებინა $n = 2$ შემთხვევაში დადგენილი შესაბამისი დებულებებიდან. შევნიშნათ, რომ ინდუქციის ბიჯის განსვორციელებისას უნდა გავაიგივოთ ერთმანეთთან

$$((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n) \text{ და } (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

სახის ელემენტები.

$\mu_1 \times \dots \times \mu_n$ ფუნქციას $\mu_1, \dots, \mu_n$ ზომების დეკარტული ნამრავლი ეწოდება.

ეთქვათ, $(X_1, S_1, \mu_1), \dots, (X_n, S_n, \mu_n)$ ზომიანი სივრცეებია. $\mu_1, \dots, \mu_n$ ზომების ლებეგისეული ნამრავლი (აღნიშვნა: $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$) ეწოდება $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$ ზომის ლებეგისეულ გაგრძელებას. ლებეგისეული ნამრავლის განსაზღვრის არეში შემავალი სიმრავლეების კლასი აღვნიშნოთ $S_1 \otimes \dots \otimes S_n$ -თი და მას ეუწოდოთ $S_1, \dots, S_n$ კლასების ლებეგისეული ნამრავლი. დაბოლოს,

$$(X_1 \times \dots \times X_n, S_1 \otimes \dots \otimes S_n, \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n)$$

სამეულს ეუწოდოთ (X_k, S_k, μ_k) სივრცეების ლებეგისეული ნამრავლი.

რამდენიმე ზომისა და სივრცის ბორელისეული ნამრავლის განსაზღვრისას უნდა განვიხილოთ $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$ ზომის ბორელისეული გაგრძელება.

თეორემა 10.7.3. ზომების ლებეგისეულ ნამრავლს აქვს ასოციაციურობის თვისება, ე.ი. $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3 = (\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)$.

თეორემა 10.7.3-ის დამტკიცება ეფუძნება თეორემა 10.2.2-ს.

შევთანხმდეთ, რომ $a_1 \times \dots \times a_{k-1} \times a_{k+1} \times \dots \times a_n$ სახის ჩანაწერი $k = 1$ და $k = n$ შემთხვევებში შესაბამისად გავიგოთ როგორც $a_2 \times \dots \times a_n$ და $a_1 \times \dots \times a_{n-1}$.

ეთქვათ, $(X_1, S_1, \mu_1), \dots, (X_n, S_n, \mu_n)$ ზომიანი სივრცეებია.

$S_1 \times \dots \times S_n$ დეკარტულ ნამრავლში შემავალ სიმრავლეებს მართულებები ეუწოდოთ. $A_1 \times \dots \times A_n$ მართულებებისათვის $A_1, \dots, A_n$ სიმრავლეებს გვერდები ეუწოდოთ.

აღვნიშნოთ:

$$Y_k = X_1 \times \dots \times X_{k-1} \times X_{k+1} \times \dots \times X_n,$$

$$\nu_k = \mu_1 \otimes \dots \mu_{k-1} \otimes \mu_{k+1} \otimes \dots \otimes \mu_n.$$

ეთქვათ, f არის $X_1 \times \dots \times X_n$ -ზე განსაზღვრული ფუნქცია. ფიქსირებული $y = (x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) \in Y_k$ ელემენტისათვის f_y -ით აღვნიშნოთ f ფუნქციის y -კვეთა, ე.ი. X_k -ზე განსაზღვრული შემდეგი ფუნქცია: $X_k \ni x_k \mapsto f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0)$.

აღვნიშნოთ აგრეთვე:

$$Y_{k,f} = \{y \in Y_k : f_y \text{ არის } \mu_k\text{-ზომადი}\},$$

$$Y_{k,f}^* = \{y \in Y_k : f_y \text{ არის } \mu_k\text{-ზომადი და } f_y \in L(X_k, \mu_k)\}.$$

f ფუნქციას ეუწოდოთ μ_k -ზომადი, თუ $Y_{k,f}$ სიმრავლე სრული ზომისაა Y_k -ში ν_k ზომის მიხედვით. შევთანხმდეთ აგრეთვე, რომ $L(X_k, \mu_k)$ -ში შემავალ ფუნქციას ეუწოდოთ μ_k -ჯამებადი.

f ფუნქციას ეუწოდოთ μ_k -ჯამებადი, თუ $Y_{k,f}^*$ სიმრავლე სრული ზომისაა Y_k -ში ν_k ზომის მიხედვით.

შევთანხმდეთ აგრეთვე, რომ $L(X_k, \mu_k)$ -ში შემავალ ფუნქციას ეუწოდოთ μ_k -ჯამებადი.

განმეორებითი ინტეგრალის ჩანაწერში, $\int_{X_k} f d\mu_k$ -ის ნაცვლად, ქვემოთ, მოხერხებულობისათვის, გამოყენებული იქნება $\int_{X_k} d\mu_k f$ სახის ჩანაწერი.

თუ f არის μ_k -ზომადი არაუარყოფითი ფუნქცია, მაშინ $\int_{X_k} d\mu_k f$ ჩანაწერით აღვნიშნოთ Y_k -ზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც ყოველ $y \in Y_{k,f}$ წერტილში ლებელობს $\int_{X_k} f_y d\mu_k$ ინტეგრალის ტოლ მნიშვნელობას, ხოლო დანარჩენ წერტილებში კი ნულის ტოლია.

ეთქვათ, π არის ნატურალურ რიცხვთა $\overline{1, n}$ მონაკვეთის რაიმე გადანაცვლება. ვიტყვი, რომ არაუარყოფით $(\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n)$ -ზომად f ფუნქციას აქვს ტონელის თვისება π გადანაცვლების მიმართ, თუ:

- f არის $\mu_{\pi(n)}$ -ზომადი;
- $\int_{X_{\pi(n)}} d\mu_{\pi(n)} f$ ფუნქცია არის $\mu_{\pi(n-1)}$ -ზომადი;
- $\int_{X_{\pi(n-1)}} d\mu_{\pi(n-1)} \int_{X_{\pi(n)}} d\mu_{\pi(n)} f$ ფუნქცია არის $\mu_{\pi(n-2)}$ -ზომადი;

და ა.შ.

- $\int_{X_{\pi(2)}} d\mu_{\pi(2)} \int_{X_{\pi(3)}} d\mu_{\pi(3)} \dots \int_{X_{\pi(n)}} d\mu_{\pi(n)} f$ ფუნქცია არის $\mu_{\pi(1)}$ -ზომადი;
- f ფუნქციის განმეორებითი ინტეგრალი π გადანაცვლების მიხედვით და ჯერადი ინტეგრალი ერთმანეთის ტოლია, ე.ი. სამართლიანია ტოლობა:

$$\begin{aligned} \int_{X_{\pi(1)}} d\mu_{\pi(1)} \int_{X_{\pi(2)}} d\mu_{\pi(2)} \dots \int_{X_{\pi(n)}} d\mu_{\pi(n)} f &= \\ &= \int_{X_1 \times \dots \times X_n} f d(\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n). \end{aligned}$$

ვიტყვი, რომ $(\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n)$ -ზომად f ფუნქციას აქვს ტონელის თვისება, თუ მას აქვს ტონელის თვისება ნებისმიერი π გადანაცვლების მიმართ.

ქვემოთ, ფუბინის თვისების ფორმულირებისას, $\int_{X_k} d\mu_k f$ ჩანაწერს ენიჭება რამდენადმე განსხვავებული შინაარსი. კერძოდ, თუ f არის μ_k -ჯამებადი ფუნქცია, მაშინ $\int_{X_k} d\mu_k f$ ჩანაწერით აღვნიშნოთ Y_k -ზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც ყოველ $y \in Y_{k,f}^*$ წერტილში ღებულობს $\int_{X_k} f_y d\mu_k$ ინტეგრალის ტოლ მნიშვნელობას, ხოლო დანარჩენ წერტილებში კი ნულის ტოლია.

ვთქვათ, π არის $\overline{1, n}$ მონაკვეთის რაიმე გადანაცვლება. ვიტყვი, რომ $f \in L(X_1 \times \dots \times X_n, \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n)$ ფუნქციას აქვს ფუბინის თვისება π გადანაცვლების მიმართ, თუ:

- f არის $\mu_{\pi(n)}$ -ჯამებადი;
- $\int_{X_{\pi(n)}} d\mu_{\pi(n)} f$ ფუნქცია არის $\mu_{\pi(n-1)}$ -ჯამებადი;
- $\int_{X_{\pi(n-1)}} d\mu_{\pi(n-1)} \int_{X_{\pi(n)}} d\mu_{\pi(n)} f$ ფუნქცია არის $\mu_{\pi(n-2)}$ -ჯამებადი; და ა.შ.
- $\int_{X_{\pi(2)}} d\mu_{\pi(2)} \int_{X_{\pi(3)}} d\mu_{\pi(3)} \dots \int_{X_{\pi(n)}} d\mu_{\pi(n)} f$ ფუნქცია არის $\mu_{\pi(1)}$ -ჯამებადი;
- f ფუნქციის განმეორებითი ინტეგრალი π გადანაცვლების მისედვით და ჯერადი ინტეგრალი ერთმანეთის ტოლია, ე.ი. სამართლიანია ტოლობა:

$$\begin{aligned} \int_{X_{\pi(1)}} d\mu_{\pi(1)} \int_{X_{\pi(2)}} d\mu_{\pi(2)} \dots \int_{X_{\pi(n)}} d\mu_{\pi(n)} f &= \\ &= \int_{X_1 \times \dots \times X_n} f d(\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n). \end{aligned}$$

ვიტყვი, რომ $f \in L(X_1 \times \dots \times X_n, \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n)$ ფუნქციას აქვს ფუბინის თვისება, თუ მას აქვს ფუბინის თვისება ნებისმიერი π გადანაცვლების მიმართ.

თეორემა 10.7.4. ვთქვათ, $(X_1, S_1, \mu_1), \dots, (X_n, S_n, \mu_n)$ ზომიანი სივრცეებია სისრულის თვისებით. მაშინ $X_1 \times \dots \times X_n$ -ზე განსაზღვრულ ნებისმიერ არაუარყოფით $(\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n)$ -ზომად ფუნქციას, რომლის საყრდენი შეიძლება დაიფაროს სასრული ზომის გვერდების მქონე მართკუთხედების არაუმეტეს თვლადაი კლასით, აქვს ტონელის თვისება.

თეორემა 10.7.5. ვთქვათ, $(X_1, S_1, \mu_1), \dots, (X_n, S_n, \mu_n)$ ზომიანი სივრცეებია სისრულის თვისებით. მაშინ ნებისმიერ $f \in L(X_1 \times \dots \times X_n, \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n)$ ფუნქციას, რომლის საყრდენი შეიძლება დაიფაროს სასრული ზომის გვერდების მქონე მართკუთხედების არაუმეტეს თვლადაი კლასით, აქვს ფუბინის თვისება.

შედეგი 10.7.1. ვთქვათ, $(X_1, S_1, \mu_1), \dots, (X_n, S_n, \mu_n)$ ზომიანი სივრცეებია σ -შემოსაზღვრულობისა და სისრულის თვისებებით. მაშინ $X_1 \times$

$\times X_n$ -ზე განსაზღვრულ ნებისმიერ არაუარყოფით $(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)$ -ზომად f ფუნქციას აქვს ტონელის თვისება, ხოლო ნებისმიერ $f \in L(X_1 \times \cdots \times X_n, \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)$ ფუნქციას აქვს ფუბინის თვისება.

შედეგი 10.7.2. ეთქვას, $(X_1, S_1, \mu_1) = \cdots = (X_n, S_n, \mu_n) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}_1, m_1)$. მაშინ $\mathbb{R}^n$ -ზე განსაზღვრულ ნებისმიერ არაუარყოფით და ღებუგის აზრით ზომად f ფუნქციას აქვს ტონელის თვისება, ხოლო ნებისმიერ $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციას აქვს ფუბინის თვისება.

10.7.4 და 10.7.5 თეორემები ინდუქციური მსჯელობით მიიღებიან ორი ზომის ნამრავლისათვის დადგენილი ტონელისა და ფუბინის თეორემებიდან, ამასთან, ინდუქციის ბიჯის განხორციელებისას უნდა ვისარგებლოთ ზომების ნამრავლის ასოციაციურობის თვისებით.

ტონელისა და ფუბინის თეორემების შესაბამისი ვარიანტები (სახელდობრ, 10.5.3 და 10.5.4 თეორემების ანალოგები) სამართლიანია ნებისმიერი რაოდენობის ზომის ბორელისეული ნამრავლის შემთხვევაშიც.

L^p სივრცეები

p ხარისხში ჯამებადი ფუნქციების სივრცეები ძალზე მნიშვნელოვანია მათემატიკის მრავალი მიმართულებით (ფუნქციონალური ანალიზი, დიფერენციალური განტოლებები, ფურიეს ანალიზი, ალბათობის თეორია). წინამდებარე თავში გადმოცემულია აღნიშნულ სივრცეთა ძირითადი თვისებები.

§ 1. L^p სივრცის განსაზღვრა

ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა. თუ დამატებით რაიმე არ იქნება ნათქვამი, მაშინ ასევე ვიგულისხმებთ, რომ p არის რიცხვი $[1, \infty)$ შუალედიდან.

$L^p(X, \mu)$ ჩანაწერით აღვნიშნოთ ყველა იმ μ -ზომადი $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ფუნქციის კლასი, რომლისთვისაც

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty.$$

უკანასკნელი პირობის დამატყოფილებელ ფუნქციას p ხარისხში ჯამებადს უწოდებენ. ცხადია, $L^1(X, \mu) = L(X, \mu)$. $L^p(X, \mu)$ კლასს, ზოგჯერ, სიმოქლისათვის, L^p -თი აღვნიშნავენ.

შენიშნავთ, რომ $\overline{\mathbb{R}}$ -ში აღვებრულ მოქმედებებთან დაკავშირებით ვისარგებლებთ §7.3-ში მოცემული შეთანხმებებით.

შემდეგი მარტივი დებულების ძალით, $L^p(X, \mu)$ კლასი წარმოადგენს წრფივ სივრცეს ფუნქციათა შეკრებისა და ფუნქციის სკალარზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ.

ლემა 11.1.1. თუ $f \in L^p(X, \mu)$ და $g \in L^p(X, \mu)$, მაშინ $f + g \in L^p(X, \mu)$ და $af \in L^p(X, \mu)$ ($a \in \mathbb{R}$).

დამტკიცება. ნებისმიერი $a, b \in \mathbb{R}$ რიცხვებისათვის გვაქვს,

$$|a + b|^p \leq [2 \max(|a|, |b|)]^p = 2^p \max(|a|^p, |b|^p) \leq 2^p (|a|^p + |b|^p).$$

შედეგად, ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისათვის დავწერთ,

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p).$$

თუ ვაინტეგრებთ ამ წერტილოვანი შეფასების ორივე მხარეს, დაფასებით, რომ $f + g \in L^p(X, \mu)$. $L^p(X, \mu)$ -ს ჩაეტილობა სცალარზე გამრავლების მიმართ მიიღება ინტეგრალის ერთგვაროვნების საფუძველზე. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

$L^p(X, \mu)$ წრფივ სივრცეში შესაძლებელია ნორმის შემოღება, რის გასაკეთებლადაც დაგვირდება რამდენიმე თავისთავად საინტერესო უტოლობის დამტკიცება.

$p > 1$ შემთხვევაში q -თი აღვნიშნოთ რიცხვი, რომლისთვისაც სრულდება $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ტოლობა. ასეთ p და q რიცხვებს ურთიერთშეუღლებულებს უწოდებენ. შევნიშნოთ, რომ: ა) $q = \frac{p}{p-1}$ და $p = \frac{q}{q-1}$; ბ) თუ $p = 2$, მაშინ $q = 2$; გ) თუ $p \rightarrow 1$, მაშინ $q \rightarrow \infty$; დ) თუ $p \rightarrow \infty$, მაშინ $q \rightarrow 1$.

ლემა 11.1.2. (იუნგის უტოლობა). თუ $a, b \in [0, \infty)$ და $1 < p < \infty$, მაშინ

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

დამტკიცება. ზოგადობის შემუღლდავად ჩავთვალოთ, რომ $a > 0$ და $b > 0$. ფიქსირებული a პარამეტრისათვის განვიხილოთ შემდეგნაირად განსაზღვრული $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია:

$$f(t) = \frac{a^p}{p} + \frac{t^q}{q} - at \quad (t > 0).$$

ვაჩვენოთ, რომ $f(t) \geq 0$ ყოველი $t > 0$ -სთვის, რითაც იუნგის უტოლობა დამტკიცებული იქნება.

განვიხილოთ f ფუნქციის წარმოებული: $f'(t) = t^{q-1} - a$. ცხადია, $f'(t) < 0$, როცა $t \in (0, a^{\frac{1}{q-1}})$ და $f'(t) > 0$, როცა $t \in (a^{\frac{1}{q-1}}, \infty)$. შედეგად, f კლებადია $(0, a^{\frac{1}{q-1}})$ შუალედზე და ზრდადია $[a^{\frac{1}{q-1}}, \infty)$ შუალედზე. აქედან გამომდინარე, $t = a^{\frac{1}{q-1}}$ წერტილში f ფუნქცია აღწევს მინიმალურ მნიშვნელობას. თუ გამოვთვლით აღნიშნულ მინიმუმს, გვექნება,

$$\min f = f(a^{\frac{1}{q-1}}) = \frac{a^p}{p} + \frac{a^{\frac{q}{q-1}}}{q} - a^{1+\frac{1}{q-1}} = \frac{a^p}{p} + \frac{a^p}{q} - a^p = 0.$$

რითაც უტოლობა დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 11.1.3. (ჰელდერის უტოლობა). თუ $1 < p < \infty$, $f \in L^p(X, \mu)$ და $g \in L^q(X, \mu)$, მაშინ $fg \in L(X, \mu)$ და

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $M = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$ და $N = \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$ ზოგადობის შეუზღუდავად ეიკულისხმით, რომ f და g ლეზულობენ სასრულ მნიშვნელობებს და $M > 0$, $N > 0$. ნებისმიერი $x \in X$ -სთვის დაეწეროთ იუნგის უტოლობა $a_x = |f(x)|/M$ და $b_x = |g(x)|/N$ რიყსეების შემთხვევაში:

$$\frac{|f(x)g(x)|}{MN} \leq \frac{|f(x)|^p}{pM^p} + \frac{|g(x)|^q}{qN^q}.$$

რის შემდეგაც, უტოლობის ორივე მხარის ინტეგრებით მივიღებთ, რომ

$$\frac{1}{MN} \int_X |fg| d\mu \leq \frac{1}{pM^p} \int_X |f|^p d\mu + \frac{1}{qN^q} \int_X |g|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

ყხადია, ამით ლემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 11.1.1. $p = 2$ შემთხვევაში ჰელდერის უტოლობა გვაძლევს შემდეგ შეფასებას:

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X |g|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}$$

რომელსაც კოში-შვარცის უტოლობად მოიხსენიებენ.

ლემა 11.1.4. (მინკოვსკის უტოლობა). თუ $f \in L^p(X, \mu)$ და $g \in L^p(X, \mu)$, მაშინ

$$\left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

დამტკიცება. $p = 1$ შემთხვევაში უტოლობა უშუალოდ გამომდინარეობს ინტეგრალის თვისებებიდან. განვიხილოთ $p \in (1, \infty)$ შემთხვევა. ზოგადობის შეუზღუდავად ეიკულისხმით, რომ f და g ლეზულობენ სასრულ მნიშვნელობებს და $\int_X |f + g|^p d\mu > 0$.

ნებისმიერი $x \in X$ -სთვის გვექნება,

$$|f(x) + g(x)|^p \leq |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1}.$$

შენიშნოთ, რომ $(p-1)q = p$ ტოლობის ძალით, $|f + g|^{p-1} \in L^q(X, \mu)$. შედეგად, უკანაცნელი შეფასების მარჯვენა მხარეში მყოფ ფუნქციათა ნამრავლებისთვის ჰელდერის უტოლობის გამოყენებით დაეწეროთ,

$$\begin{aligned} \int_X |f + g|^p d\mu &\leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} + \\ &+ \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

ახლა, თუ კვლავ გამოვიყენებთ $(p-1)q = p$ ტოლობას და მიღებული შეფასების ორივე მხარეს გავყოფთ $\left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{1/q}$ გამოსახულებაზე, მივიღებთ საჭირო უტოლობას. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

განვიხილოთ $L^p(X, \mu)$ წრფივ სივრცეზე შემდეგნაირად განსაზღვრული არაუარყოფითი $\|\cdot\| = \|\cdot\|_p$ ფუნქცია:

$$\|f\| = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

მას აქვს შემდეგი თვისებები:

- 1) $f \in L^p$ ფუნქციისათვის $\|f\| = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(x) = 0$ თითქმის ყველგან,
- 2) $\|af\| = |a| \|f\|$ ($a \in \mathbb{R}, f \in L^p$),
- 3) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ ($f, g \in L^p$).

პირველი და მეორე თვისებები მარტივად მოწმდება, ხოლო მესამე თვისება წარმოადგენს მინკოვსკის უტოლობის შედეგს.

ამრიგად, $\|\cdot\|$ ფუნქციას აქვს $L^p(X, \mu)$ წრფივ სივრცეზე განსაზღვრული ნორმის ყველა თვისება, გარდა შესაძლოა შემდეგისა:

$$\|f\| = 0 \Rightarrow f \text{ არის იგივეურად ნულოვანი ფუნქცია.}$$

იმისათვის, რომ $\|\cdot\|$ განხილული იქნას როგორც ნორმა $L^p(X, \mu)$ სივრცეზე, მიღებულია თითქმის ყველგან ერთმანეთის ტოლი ფუნქციების ერთმანეთთან გაიგივება. კერძოდ, ნულოვან ელემენტად უნდა ჩავთვალოთ თითქმის ყველგან ნულის ტოლი ყოველი ფუნქცია. ასეთ შემთხვევაში ცხადია, რომ წყვილს $(L^p(X, \mu), \|\cdot\|)$ უკვე შეგვიძლია შევხედოთ, როგორც ნორმირებულ წრფივ სივრცეს.

შევნიშნოთ, რომ ნორმის შემოღების საკითხის უფრო ფორმალური გადაწყვეტა ხდება შემდეგნაირად. განვიხილოთ $L^p(X, \mu)$ წრფივი სივრცის შემდეგი ქვესივრცე:

$$M = \{f \in L^p(X, \mu) : f(x) = 0 \text{ თითქმის ყველგან}\}.$$

და მოვასდინოთ $L^p(X, \mu)$ -ს ფაქტორიზაცია M -ის მიხედვით. შევნიშნოთ, რომ $L^p(X, \mu)/M$ სივრცის ელემენტები გამოხატავენ $L^p(X, \mu)$ კლასის თითქმის ყველგან ერთმანეთის ტოლი ფუნქციების გაიგივების შედეგად მიღებულ ობიექტებს. $L^p(X, \mu)/M$ ფაქტორ-სივრცეზე შემდეგნაირად განესაზღვროთ $\|\cdot\|$ ფუნქცია:

$$\|\xi\|^* = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \quad (\xi \in L^p(X, \mu)/M),$$

სადაც f არის $\mathcal{E}$ მოსაზღვრე კლასის რაიმე წარმომადგენელი. $\|\cdot\|$ ფუნქციის თვისებებზე დაყრდნობით აღვილი დასაბუთება, რომ $\|\cdot\|$ არის $L^p(X, \mu)/M$ სივრცეზე განსაზღვრული ნორმა.

შემდგომში $(L^p(X, \mu), \|\cdot\|)$ ნორმირებულ სივრცეს სიმოქლისათვის აღვნიშნავთ $L^p(X, \mu)$, ან, უბრალოდ, L^p ჩანაწერით.

ამოცანები

1. ონგის უტოლობის განზოგადება: ეთქვას, $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ არის მკაცრად მრღაღი ეწვეტი ფუნქცია, ისეთი, რომ $\varphi(0) = 0$, ხოლო $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ არის მისი შექცეული ფუნქცია. ნებისმიერი არაუარყოფითი a და b რიცხვებისათვის აჩვენეთ უტოლობა:

$$ab \leq \int_0^a \varphi + \int_0^b \psi.$$

შენიშვნა: ამ შეფასებიდან $\varphi(t) = t^{p-1}$ შემთხვევაში ელბულობთ ონგის უტოლობას. მართლაც, საამისოდ მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ თუ $1 < p < \infty$, მაშინ $\varphi(t) = t^{p-1}$ და $\psi(t) = t^{q-1}$ ფუნქციები ურთიერთმებრუნებული არიან.

2. დაამტკიცეთ, რომ განზოგადებულ ონგის უტოლობაში ტოლობა სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $b = \varphi(a)$.
3. დაამტკიცეთ, რომ ჰელდერის უტოლობაში ტოლობა სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მოიძებნებიან არაუარყოფითი რიცხვები α და β , ისეთები, რომ $\alpha + \beta > 0$ და $\alpha|f|^p = \beta|g|^q \pmod{\mu}$.
4. დაამტკიცეთ, რომ $1 < p < \infty$ შემთხვევაში, მიწოეცის უტოლობაში, ტოლობა სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მოიძებნებიან არაუარყოფითი რიცხვები α და β , ისეთები, რომ $\alpha + \beta > 0$ და $\alpha f = \beta g \pmod{\mu}$.
5. დაამტკიცეთ, რომ $p = 1$ შემთხვევაში, მიწოეცის უტოლობაში, ტოლობა სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $fg \geq 0 \pmod{\mu}$.
6. ეთქვას, $1 < p < \infty$ და $1/p + 1/q = 1$. დაამტკიცეთ, რომ $f \in L^p(X, \mu)$ ფუნქციის ნორმა $L^p(X, \mu)$ სივრცეში შეიძლება გამოეთვალათ შემდეგნაირად:

$$\|f\|_p = \sup_g \int_X f g d\mu,$$

სადაც სუპრემუმი აიღება ყველა იმ $g \in L^q(X, \mu)$ ფუნქციის მიხედვით, რომლისთვისაც $\|g\|_q \leq 1$. აჩვენეთ აგრეთვე, რომ აღნიშნული სუპრემუმი მიიღწევა გარკვეული $g_0 \in L^q(X, \mu)$, $\|g_0\|_q = 1$, ფუნქციისათვის.

§ 2. L^p სივრცეების ზოგიერთი თვისება

შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ შემოსაზღვრული μ ზომის შემთხვევაში, $L^p(X, \mu)$ სივრცეები ვიწროვდებიან p პარამეტრის მრდასთან ერთად.

თეორემა 11.2.1. თუ μ შემოსაზღვრული ზომაა, მაშინ $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$ პარამეტრებისათვის გვაქვს, რომ

$$L^{p_2}(X, \mu) \subset L^{p_1}(X, \mu).$$

გარდა ამისა, ნებისმიერი $f \in L^{p_2}(X, \mu)$ ფუნქციისათვის სამართლიანია შეფასება:

$$\|f\|_{p_1} \leq \mu(X)^{1/p_1 - 1/p_2} \|f\|_{p_2}.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $f \in L^{p_2}(X, \mu)$. თუ $|f|^{p_1}$ ფუნქციას წარმოვადგენთ $|f|^{p_1} = |f|^{p_1} \cdot 1$ სახით და გავითვალისწინებთ, რომ $|f|^{p_1} \in L^{p_2/p_1}(X, \mu)$, მაშინ ჰელდერის უტოლობის გამოყენებით დაეწერთ,

$$\begin{aligned} \int_X |f|^{p_1} d\mu &\leq \left(\int_X (|f|^{p_1})^{\frac{p_2}{p_1}} d\mu \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \left(\int_X 1^{\frac{p_2}{p_2-p_1}} d\mu \right)^{\frac{p_2-p_1}{p_2}} = \\ &= \left(\int_X |f|^{p_2} d\mu \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \mu(X)^{\frac{p_2-p_1}{p_2}} \end{aligned}$$

ცხადია, ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ლებეგის აზრით ზომადი არაცარიელი $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისათვის $L^p(E)$ ჩანაწერით აღვნიშნოთ $L^p(E, m_E)$ სივრცე, სადაც m_E არის ლებეგის ზომის შეზღუდვა E -ში შემავალ ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეთა კლასზე.

შენიშვნა 11.2.1. შემოსაზღვრული ზომის შემთხვევაში, საზოგადოდ, შეუძლებელია, რაიმე ითქვას $L^p(X, \mu)$ სივრცეთა მონოტონურ ყოფაქცევაზე p პარამეტრის მიმართ. სახელდობრ, ამაში გვარწმუნებენ $L^p(\mathbb{R})$ სივრცეები: $L^2(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ ჩართვა არ სრულდება, რადგან

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_{(n, n+1)}$$

ფუნქცია ეკუთვნის $L^2(\mathbb{R})$, მაგრამ არ ეკუთვნის $L^1(\mathbb{R})$ -ს. მეორე მხრივ, არ სრულდება არც $L^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ ჩართვა, რადგან

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \chi_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})}$$

ფუნქცია ეკუთვნის $L^1(\mathbb{R})$ -ს და არ ეკუთვნის $L^2(\mathbb{R})$ -ს.

$L^p(X, \mu)$ სივრცეთა საინტერესო სახესხვაობა მიიღება მაშინ, როცა $X = \mathbb{N}$ და μ წარმოადგენს დამთვლელ ზომას $\mathbb{N}$ -ში. ასეთ შემთხვევაში, $L^p(X, \mu)$ სივრცის აღსანიშნავად იყენებენ l^p სიმბოლოს. აღვილი დასაანახია, რომ l^p არის ყველა იმ $x = (x_n)$ რიკსებით მიმდევრობის სივრცე, რომლისთვისაც

$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. ამასთან, (x_n) მიმდევრობის ნორმა l^p -ში ტოლია შემდეგი გამოსახულებისა: $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ l^p სივრცეები ფართოვებიან p მაჩვენებლის ზრდასთან ერთად, ე.ი. თუ $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$, მაშინ $l^{p_1} \subset l^{p_2}$.

l^p სივრცეებისთვის ჯელდერისა და მინკოვსკის უტოლობები, შესაბამისად, ლებულოვნ შემდეგ სახეს:

- თუ $(x_n) \in l^p$ და $(y_n) \in l^q$, მაშინ $(x_n y_n) \in l^1$ და

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

- თუ $(x_n) \in l^p$ და $(y_n) \in l^p$, მაშინ $(x_n + y_n) \in l^p$ და

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ამ უტოლობებს, შესაბამისად, ჯელდერისა და მინკოვსკის რიცხვითი უტოლობების ტერმინებით მოიხსენიებენ.

შემდეგი ლებულება გამომდინარეობს 8.10.1 თეორემიდან და გვიჩვენებს, თუ როგორ შეიძლება გამოვთვალოთ L^p -ნორმა განაწილების ფუნქციის მეშვეობით.

თეორემა 11.2.2. ნებისმიერი $f \in L^p(X, \mu)$ ფუნქციისათვის სრულდება ტოლობა:

$$\int_X |f|^p d\mu = \int_{(0, \infty)} F_f(t) p t^{p-1} d\mu(t).$$

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ, რომ თუ $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$, მაშინ $L^{p_2}([0, 1]) \subset L^{p_1}([0, 1])$ ჩართვა მკაცრია. უფრო მეტიც, აჩვენეთ, რომ ყოველი $p \geq 1$ -თვის მოიძებნება $f \in L^p([0, 1])$ ფუნქცია, რომელიც არ ეკუთვნის არცერთ $L^r([0, 1])$ ($r > p$) სივრცეს.
2. ეთქვათ, μ შემოსაზღვრული ზომაა და $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$. დაამტკიცეთ, რომ $L^{p_2}(X, \mu) = L^{p_1}(X, \mu)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა μ ზომა თავმოყრილია სასრული რაოდენობის ატომებზე (ზომის ატომი ეწოდება ისეთი დადებითი ზომის სიმრავლეს, რომლისთვისაც არ მოიძებნება მასზე მცირე დადებითი ზომის ქვესიმრავლე).
3. დაამტკიცეთ, რომ თუ $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$, მაშინ არ სრულდება $L^{p_2}(\mathbb{R}) \subset L^{p_1}(\mathbb{R})$ ჩართვა. უფრო მეტიც, აჩვენეთ, რომ ყოველი $p > 1$ -თვის მოიძებნება $f \in L^p(\mathbb{R})$ ფუნქცია, რომელიც არ ეკუთვნის არცერთ $L^r(\mathbb{R})$ ($1 \leq r < p$) სივრცეს.
4. დაამტკიცეთ, რომ თუ $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$ და $f \in L^{p_1}(\mathbb{R}) \cap L^{p_2}(\mathbb{R})$, მაშინ $f \in L^p(\mathbb{R})$ ყოველი $p \in (p_1, p_2)$ -თვის.

5. ვთქვათ, უოველი $i \in \{1, 2\}$ -სთვის (X_i, S_i, μ_i) ზომიანი სივრცეა, ხოლო f_i არის μ_i -ზომადი ფუნქცია. აჩვენეთ, რომ თუ f_1 და f_2 ფუნქციები ტოლადზომადია, ე.ი. $\mu_1(\{|f_1| > t\}) = \mu_2(\{|f_2| > t\})$ ($t > 0$), მაშინ $\int_{X_1} |f_1|^p d\mu_1 = \int_{X_2} |f_2|^p d\mu_2$ ყოველი $p \in [1, \infty)$ -სთვის.

§ 3. L^p სივრცის სისრულე. p მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადობა

თეორემა 11.3.1. $L^p(X, \mu)$ სივრცე არის სრული.

დამტკიცება. ვთქვათ, (f_n) ფუნდამენტური მიმდევრობაა $L^p(X, \mu)$ -ში. საკმარისია, ვაჩვენოთ მისი რაიმე (f_{n_k}) ქვემიმდევრობის კრებადობა (იხ. დანართი 2). ამ მიზნით განვიხილოთ (f_{n_k}) ქვემიმდევრობა, რომლის წევრები აკმაყოფილებენ პირობას:

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

ასეთი ქვემიმდევრობის არსებობა გამომდინარეობს (f_n) -ის ფუნდამენტურობიდან.

ყოველი k -სთვის g_k ფუნქცია განვსაზღვროთ ტოლობით:

$$g_k(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{i=1}^{k-1} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|.$$

ცხადია, (g_k) არაუარყოფით ფუნქციათა მრავალი მიმდევრობაა. g -თი აღვნიშნოთ (g_k) მიმდევრობის წერტილოვანი ზღვარი (რომელიც ზოგიერთ წერტილში, შეიძლება, ∞ -ის ტოლი იყოს). ნებისმიერი $k \in \mathbb{N}$ -სთვის გვაქვს,

$$\|g_k\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + \sum_{i=1}^{k-1} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + 1.$$

ამრიგად, $\int_X |g_k|^p d\mu$ ინტეგრალები შემოსაზღვრულია გარკვეული მუდმივით. საიდანაც, ლევის თეორემის საფუძველზე ვღებულობთ, რომ $g \in L^p(X, \mu)$. შედეგად, g ფუნქცია სასრულია თითქმის ყოველ წერტილში. აქედან, თავის მხრივ, ვასკენით, რომ

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{k-1} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x))$$

მიმდევრობა კრებადია სრული ზომის მქონე გარკვეული E სიმრავლის ყოველ წერტილში. f იყოს ფუნქცია, რომელიც აღნიშნული მიმდევრობის ზღვრის ტოლია E სიმრავლის წერტილებში და ნულის ტოლია E სიმრავლის გარეთ.

ადელი დასაწახია, რომ f ზომადია და $|f| \leq g$. შედეგად, $f \in L^p(X, \mu)$. ახლა, თუ გაითვალისწინებთ შეფასებას:

$$|f_{n_k} - f| \leq 2g \quad (k \in \mathbb{N}),$$

მაქორანტული კრებადობის შესახებ ლებეგის თეორემის ძალით გვექნება,

$$\int_X |f_{n_k} - f|^p d\mu \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

ამრიგად, f არის (f_{n_k}) მიმდევრობის ზღვარი $L^p(X, \mu)$ სივრცეში. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ვთქვათ, $f_n \in L^p(X, \mu)$ ($n \in \mathbb{N}$) და $f \in L^p(X, \mu)$. თუ $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$, ე.ი. თუ $\int_X |f_n - f|^p d\mu \rightarrow 0$, მაშინ ამბობენ, რომ (f_n) მიმდევრობა p მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადია f ფუნქციისაკენ. შევნიშნათ, რომ $p = 1$ შემთხვევაში დამყვიდრებულია ტერმინი საშუალოდ კრებადობა, ხოლო $p = 2$ შემთხვევაში კი ტერმინი - საშუალო კვადრატულად კრებადობა.

სამართლიანია შემდეგი წინადადებები, რომლებიც გვიჩვენებენ, თუ რა მიმართებაშია p მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადობა ზომით, სიიქმის ყველგან და თანაბრად კრებადობის ტიპებთან:

- p მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადობიდან გამომდინარეობს ზომით კრებადობა. ამის დასადაგენად უნდა გაითვალისწინოთ, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სთვის,

$$\int_X |f_n - f|^p d\mu \geq \int_{\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}} |f_n - f|^p d\mu \geq \varepsilon^p \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}).$$

- არც ზომით კრებადობიდან და არც თითქმის ყველგან კრებადობიდან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს p მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადობა. მართლაც, განვიხილოთ $L^p([0, 1])$ სივრცე და მასში $f_n = n\chi_{(0, 1/n)}$ ფუნქციათა მიმდევრობა. ცხადია, რომ (f_n) როგორც ზომით, ასევე ყველა წერტილში კრებადია იგივეურად ნულის ტოლი ფუნქციისაკენ, მაგრამ

$$\int_{[0, 1]} |f_n|^p d\mu = n^{p-1} \geq 1.$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ (f_n) არაა p მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადი იგივეურად ნულის ტოლი ფუნქციისაკენ.

- p მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადობიდან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს თითქმის ყველგან კრებადობა. მართლაც, განვიხილოთ 7.8 პარაგრაფის მეორე შენიშვნაში მოცემული ფუნქციათა (f_s) მიმდევრობა. ეს მიმდევრობა $[0, 1]$ მონაკვეთის არცერთ წერტილში არაა ნულისაკენ კრებადი. მეორე მხრივ, ადელი შესამოწმებელია, რომ

(f_s) არის p მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადი იგივეურად ნულის ტოლი ფუნქციისავენ.

- თუ μ შემოსაზღვრული ზომაა, მაშინ თანაბრად კრებადობიდან გამომდინარეობს p მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადობა. ეს დასკვნა მიიღება შემდეგი შეფასებიდან:

$$\int_X |f_n - f|^p d\mu \leq \max |f_n - f|^p \mu(X).$$

შემოსაზღვრული ზომისათვის კი თანაბარი კრებადობა საზოგადოდ არ იწვევს p მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადობას. ამაში გეარწმუნებს $L^p(\mathbb{R})$ სივრცისა და $f_n = \frac{1}{n} \chi_{(-n^p, n^p)}$ ფუნქციათა მიმდევრობის მაგალითი.

აქვე შევნიშნოთ, რომ, შემოსაზღვრული ზომის შემთხვევაში, თეორემა 11.2.1-ის ძალით, p მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადობა იწვევს ნებისმიერი უფრო მცირე r მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადობას.

ამოცანები

1. ვთქვათ, f_n ($n \in \mathbb{N}$) და f არიან $L^p(X, \mu)$ სივრცის ფუნქციები. აჩვენეთ, რომ თუ (f_n) მიმდევრობა ზომით კრებადია f ფუნქციისავენ და მოიძებნება ისეთი $g \in L^p(X, \mu)$ ფუნქცია, რომ $|f_n| \leq g$ ($n \in \mathbb{N}$), მაშინ (f_n) მიმდევრობა p მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადია f ფუნქციისავენ.
2. ვთქვათ, f_n ($n \in \mathbb{N}$) და f არიან $L^p(X, \mu)$ სივრცის ფუნქციები. აჩვენეთ, რომ თუ (f_n) მიმდევრობა p მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადია f ფუნქციისავენ, მაშინ მოიძებნება (f_{n_k}) ქვემიმდევრობა, რომელიც თითქმის ყველგან კრებადია f ფუნქციისავენ.
3. ვთქვათ, $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $\{f\} \cup \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L^p(X, \mu)$ და $\{g\} \cup \{g_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L^q(X, \mu)$. აჩვენეთ, რომ თუ $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ და $\|g_n - g\|_q \rightarrow 0$, მაშინ $\|f_n g_n - f g\|_1 \rightarrow 0$.

§ 4. ყველგან მკვრივი სიმრავლეები L^p სივრცეში

ვიტყვი, რომ ფუნქციათა Ω კლასი ყველგან მკვრივია $L^p(X, \mu)$ სივრცეში, თუ ყოველი $f \in L^p(X, \mu)$ ფუნქციისათვის და ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $h \in \Omega \cap L^p(X, \mu)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც $\|f - h\|_p < \varepsilon$.

თეორემა 11.4.1. მარტივ ფუნქციათა კლასი ყველგან მკვრივია $L^p(X, \mu)$ სივრცეში.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f \in L^p(X, \mu)$ არაუარყოფითი ფუნქციაა. განვიხილოთ არაუარყოფით მარტივ ფუნქციათა ზრდადი (h_n) მიმდევრობა, რომელიც

ყოველ წერტილში კრებადია f ფუნქციისაენ. ცხადია, h_n ფუნქციები მიეკუთვნებიან $L^p(X, \mu)$ სივრცეს. შემდეგ, თუკი შევნიშნავთ, რომ

$$0 \leq (f - h_n)^p \leq f^p \quad (n \in \mathbb{N}),$$

და გამოვიყენებთ ლებეგის თეორემას მაჟორანტული კრებადობის შესახებ, დაეწერთ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f - h_n|^p d\mu = 0.$$

ამით დადგენილია $L^p(X, \mu)$ სივრცის ნებისმიერი არაუარყოფითი ფუნქციის მიახლოების შესაძლებლობა მარტივი ფუნქციების მეშვეობით.

განვიხილოთ მოგადი შემთხვევა. ვთქვათ, $f \in L^p(X, \mu)$ და $\varepsilon > 0$. წარმოვადგინოთ f ფუნქცია დადებითი და უარყოფითი ნაწილების სხვაობის სახით: $f = f^+ - f^-$. f^+ და f^- არაუარყოფითი ფუნქციებია, ამასთან, მათი განსაზღვრებიდან გამომდინარე, ცხადია, რომ ისინი $L^p(X, \mu)$ სივრცეს ეკუთვნიან. გამოვიყენოთ თეორემის უკვე დამტკიცებული ნაწილი f^+ და f^- ფუნქციებისათვის და ვიპოვოთ მარტივი $h_1 \in L^p(X, \mu)$ და $h_2 \in L^p(X, \mu)$ ფუნქციები, რომელთათვისაც

$$\|f^+ - h_1\|_p < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|f^- - h_2\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

h -ით აღვნიშნოთ $h_1 - h_2$ სხვაობა. ცხადია, რომ h ფუნქცია მარტივია, ეკუთვნის $L^p(X, \mu)$ სივრცეს და ამასთან,

$$\|f - h\|_p \leq \|f^+ - h_1\|_p + \|f^- - h_2\|_p < \varepsilon.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 11.4.1. ადვილი დასანახია, რომ $\sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}$ წარმოდგენის მარტივი h ფუნქცია ეკუთვნის $L^p(X, \mu)$ სივრცეს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სასრული ზომა აქვს ყოველ იმ A_k სიმრავლეს, რომლისთვისაც $\alpha_k \neq 0$.

თეორემა 11.4.1 შეიძლება გავაძლიეროთ, თუ ცნობილია, რომ μ ზომა მიღებულია ნახევარგოლზე მოცემული ზომის ლებეგისეული გაგრძელებით. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი ლეზულება.

თეორემა 11.4.2. ვთქვათ, μ წარმოადგენს H ნახევარგოლზე განსაზღვრული σ -შემოსაზღვრული ზომის ლებეგისეულ გაგრძელებას. მაშინ $L^p(X, \mu)$ სივრცეში ყველგან მკყრივია ყველა იმ მარტივი ფუნქციის კლასი, რომელსაც აქვს სახე: $\sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}$, სადაც A_k სიმრავლეები არიან წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი და ეკუთვნიან H ნახევარგოლს.

დამტკიცება. თავდაპირველად შევნიშნოთ: ვთქვათ, Π არის ყველა იმ მარტივი ფუნქციის კლასი, რომელზეც საუბარია თეორემის პირობაში და

ვთქვათ, Π^* არის ყველა იმ მარტივი ფუნქციის კლასი, რომელიც წარმოადგება შემდეგი სახით: $\sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}$, სადაც A_k სიმრავლეები ეკუთვნიან H კლასს. მაშინ ნახევარგოლთა თვისებებიდან (იხ. თეორემა 3.2.2) ადვილად გამოდინარეობს, რომ $\Pi^* = \Pi$. ამრიგად, თუ ვაჩვენებთ Π^* კლასის ყველგან მჭერივობას, მაშინ თეორემა დადგენილი იქნება.

თეორემა 11.4.1-ის ძალით, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $L^p(X, \mu)$ -ში შემავალ ყოველ მარტივ ფუნქციას შეიძლება ნებისმიერი სიზუსტით მიუახლოვდეთ Π^* კლასის მარტივი ფუნქციის მეშვეობით. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ყველა იმ ფუნქციის კლასი, რომელიც ექვემდებარება Π^* კლასის ფუნქციებით მიახლოებას, არის წრფივი (ე.ი. ჩაეტილია შეკრებისა და სკალარზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ), რის გამოც, საკმარისია, ვიმსჯულოთ იმ მახასიათებელი χ_A ფუნქციებისთვის, რომელთათვისაც $\mu(A) < \infty$.

ვთქვათ, $\mu(A) < \infty$ და $\varepsilon > 0$. მაშინ 5.6.4 და 3.3.1 თეორემების ძალით (იხ. აგრეთვე შენიშვნა 3.3.2) მოიძებნებიან წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი $B_1, \dots, B_n \in H$ სიმრავლეები, ისეთები, რომ

$$\mu\left(A \Delta \bigcup_{k=1}^n B_k\right) < \varepsilon^p.$$

შედეგად, $\sum_{k=1}^n \chi_{B_k}$ ფუნქცია ეკუთვნის Π^* კლასს და

$$\left\| \chi_A - \sum_{k=1}^n \chi_{B_k} \right\|_p = \left(\int_X \left| \chi_A - \sum_{k=1}^n \chi_{B_k} \right|^p d\mu \right)^{1/p} = \mu\left(A \Delta \bigcup_{k=1}^n B_k\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

(X, S, μ) ზომიან სივრცეს ეწოდება რეგულარული (X, ρ) მეტრიკული სივრცის მიმართ, თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

- S კლასი შეიცავს (X, ρ) სივრცის ყოველ ღია და ყოველ ჩაეტილ ქვესიმრავლეს;
- ყოველი $A \in S$ სიმრავლისათვის და $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნებიან (X, ρ) სივრცეში ღია G და ჩაეტილი F სიმრავლეები, ისეთები, რომ $G \supset A \supset F$ და $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.

(X, ρ) მეტრიკულ სივრცეზე განსაზღვრულ f ფუნქციას ეწოდოთ ფინიტური, თუ მისი საყრდენი (ე.ი. $\{f \neq 0\}$ სიმრავლე) შემოსაზღვრულია.

(X, ρ) მეტრიკული სივრცისათვის $C(X, \rho)$ -თი აღვნიშნოთ ყველა უწყვეტი $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციის კლასი, ხოლო $C_0(X, \rho)$ -თი აღვნიშნოთ ყველა უწყვეტი და ფინიტური $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციის კლასი. ცხადია, $C_0(X, \rho) \subset C(X, \rho)$ და $C_0(X, \rho) = C(X, \rho)$, თუ (X, ρ) შემოსაზღვრული სივრცეა.

შევნიშნოთ, რომ თუ (X, S, μ) ზომიანი სივრცე რეგულარულია (X, ρ) მეტრიკული სივრცის მიმართ, მაშინ ყოველი უწყვეტი $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია μ -მომადია. მართლაც, როგორც ცნობილია, უწყვეტი ასახვისათვის ღია

სიმრავლის წინასახე ღიაა, რის გამოც, ყოველი $a \in \mathbb{R}$ -სთვის $f^{-1}((a, \infty))$ სიმრავლე იქნება ღია (X, ρ) სივრცეში და შედეგად, იქნება μ -ზომადიც.

თეორემა 11.4.3. ვოქსაი, (X, S, μ) ზომიანი სივრცე რეგულარულია (X, ρ) მეტრიკული სივრცის მიმართ. მაშინ $C_0(X, \rho)$ კლასი ყველგან მკვერივია $L^p(X, \mu)$ სივრცეში. შედეგად, $C(X, \rho)$ კლასი ყველგან მკვერივია $L^p(X, \mu)$ სივრცეში.

დამტკიცება. იუ გავიხიოთ თეორემა 11.4.2-ის დამტკიცებისას გამოყენებულ მსჯელობას, დავრწმუნდებით, რომ საკმარისია დაუადგინოთ χ_A , $\mu(A) < \infty$, სახის ფუნქციების მიახლოების შესაძლებლობა $C_0(X, \rho)$ კლასის ფუნქციების მეშვეობით.

ვთქვათ, A სასრული ზომის სიმრავლეა და $\varepsilon > 0$. განვიხილოთ რაიმე x_0 წერტილი და $B(x_0, n) = \{x \mid \rho(x, x_0) < n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) ბირთვები. მაშინ $A_n = A \cap B(x_0, n)$ სიმრავლეები მოგვცემენ ზომად სიმრავლეთა მრდად მიმდევრობას, რომლის გაერთიანება A -ს ტოლია. ამიტომ ზომის ქვემოდან უწყვეტობის თვისების ძალით მოიძებნება n , რომლისთვისაც $\mu(A \setminus A_n) < (\varepsilon/2)^p$. ამრიგად, $A^* = A_n$ არის $B(x_0, n)$ ბირთვში შემავალი სასრული ზომის სიმრავლე, ისეთი, რომ $\|\chi_A - \chi_{A^*}\| < \varepsilon/2$.

თეორემის პირობის ძალით შეგვიძლია ვიპოვოთ ღია G და ჩაკეტილი F სიმრავლეები, ისეთები, რომ $G \supset A^* \supset F$ და $\mu(G \setminus F) < (\varepsilon/2)^p$. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ G შემოსაზღვრულია (წინააღმდეგ შემთხვევაში G -ს ნაცულად განვიხილავდით $G \cap B(x_0, n)$ სიმრავლეს.)

f ფუნქცია განესაზღვროთ შემდეგი ტოლობით:

$$f(x) = \frac{\rho(x, X \setminus G)}{\rho(x, F) + \rho(x, X \setminus G)} \quad (x \in X),$$

სადაც $\rho(y, E)$ აღნიშნავს მანძილს y წერტილსა და E სიმრავლეს შორის, ე.ი. $\rho(y, E) = \inf_{t \in E} \rho(y, t)$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ f ფუნქცია განსაზღვრულია კორექტულად (ე.ი. მნიშვნელოვანი არცერთ წერტილში არ ხდება ნულის ტოლი) და მას აქვს შემდეგი ოთხი თვისება:

- 1) f უწყვეტია;
- 2) $0 \leq f \leq 1$;
- 3) $f(x) = 1$, როცა $x \in F$;
- 4) $f(x) = 0$, როცა $x \in X \setminus G$.

ამ თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ $f \in C_0(X, \rho) \cap L^p(X, \mu)$. კერძოდ, $f \in C_0(X, \rho)$ მიუთენება ვლუბლობით 1) და 4) თვისებებიდან, ხოლო $f \in L^p(X, \mu)$ მიუთენება მიიღება 1), 2) და 4) თვისებებიდან, $\mu(G) \leq \mu(A^*) + \mu(G \setminus A^*) \leq \mu(A^*) + \mu(G \setminus F) < \infty$ შეფასების გათვალისწინებით.

2), 3) და 4) პირობების ძალით შეგვიძლია დავწეროთ,

$$\|\chi_{A^*} - f\|_p = \left(\int_{G \setminus F} |\chi_{A^*} - f|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \mu(G \setminus F)^{1/p} < \varepsilon/2.$$

ამრიგად, f ფუნქცია ეკუთვნის $C_0(X, \rho) \cap L^p(X, \mu)$ კლასს და

$$\|\chi_A - f\|_p \leq \|\chi_A - \chi_{A^*}\|_p + \|\chi_{A^*} - f\|_p < \varepsilon.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციას ეუწოდოთ საფეხუროვანი ფუნქცია, თუ მას აქვს შემდეგი სახე: $\sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{I_k}$. სადაც $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ არანულოვანი რიცხებია, ხოლო $I_1, \dots, I_m$ არიან წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ნახევრადღია n -განზომილებიანი მონაკვეთები $\mathbb{I}^n$ ნახევარგოლიდან.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ლებეგის მომა მიიღება ნახევრადღია n -განზომილებიანი მონაკვეთების $\mathbb{I}^n$ ნახევარგოლზე მოცემული საწყისი მომის (სახელდობრ, მოცულობის) გაგრძელებით და ასევე გავითვალისწინებთ ლებეგის მომის რეგულარობის თვისებას $\mathbb{R}^n$ -ის ბუნებრივი მანძილის მიმართ (იხ. თეორემა 6.2.2), მაშინ 11.4.1-11.4.3 თეორემებიდან მივიღებთ შემდეგ დებულებას.

თეორემა 11.4.4. $L^p(\mathbb{R}^n)$ სივრცეში ყველგან მკვრივია თითოეული შემდეგ სამ კლასს შორის:

- მარტივ ფუნქციათა კლასი;
- საფეხუროვან ფუნქციათა კლასი;
- უწყვეტ და ფინიტურ ფუნქციათა კლასი.

ეთქვათ, Ω არის X სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქციების რაიმე კლასი. Ω -ს შეზღუდვა $E \subset X$ სიმრავლეზე ეუწოდოთ $\{f|_E : f \in \Omega\}$ კლასს, სადაც $f|_E$ აღნიშნავს f ფუნქციის შეზღუდვას E სიმრავლეზე.

თეორემა 11.4.4-დან ადვილად გამომდინარეობს შემდეგი დებულება.

თეორემა 11.4.5. ეთქვათ, $E \subset \mathbb{R}^n$ ლებეგის აზრით ზომადი რაიმე არატარიელი სიმრავლეა. $L^p(E)$ სივრცეში ყველგან მკვრივია თითოეული შემდეგ სამ კლასს შორის:

- $\mathbb{R}^n$ -ში მარტივ ფუნქციათა კლასის შეზღუდვა E სიმრავლეზე;
- $\mathbb{R}^n$ -ში საფეხუროვან ფუნქციათა კლასის შეზღუდვა E სიმრავლეზე;
- $\mathbb{R}^n$ -ში უწყვეტ და ფინიტურ ფუნქციათა კლასის შეზღუდვა E სიმრავლეზე.

ცალკე გამოფყოთ ის შემთხვევა, როცა E არის სასრული სიგრძის ერთ-განზომილებიანი $[a, b]$ მონაკვეთი. თეორემა 11.4.4-ის ძალით $[a, b]$ -ზე განსაზღვრული ყველა უწყვეტი ფუნქციის $C([a, b])$ კლასი ყველგან მკერვიანაა $L^p([a, b])$ -ში. სამართლიანია ამ წინადადების შემდეგი გაძლიერება.

თეორემა 11.4.6. $L^p([a, b])$ სივრცეში ყველგან მკერვიანაა მრავალწევრთა კლასი.

დამტკიცება. საკმარისია, დავადგინოთ, რომ ყოველი უწყვეტ ფუნქციას შეიძლება მიუახლოვდეთ მრავალწევრების მეშვეობით. ვთქვათ, $f \in C([a, b])$ და $\varepsilon > 0$. მაშინ ვაიერშტრასის ცნობილი თეორემის ძალით მოიძებნება g მრავალწევრი, რომელიც დაჟამაყოფილებს პირობას:

$$\max |f - g| < \frac{\varepsilon}{(b - a)^{1/p}}.$$

შედეგად, გვექნება, რომ

$$\|f - g\|_p = \left(\int_{[a, b]} |f - g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq (\max |f - g|)(b - a)^{1/p} < \varepsilon.$$

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ, რომ ტრიგონომეტრიული მრავალწევრების კლასი ყველგან მკერვიანაა $L^p([-\pi, \pi])$ სივრცეში.
2. ვთქვათ, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. $f \in L^p([a, b])$ ფუნქციის L^p -უწყვეტობის მოდული არის $(0, b - a)$ ინტერვალზე შემდგენიარად განსაზღვრული ფუნქცია:

$$\omega_{f,p}(\delta) = \sup_{h \in (0, \delta]} \left(\int_{(a, b-h)} |f(x+h) - f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}$$

დაამტკიცეთ, რომ $\omega_{f,p}(\delta) \rightarrow 0$, როცა $\delta \rightarrow 0$.

§ 5. L^p სივრცის სებარაბელურობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა

ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა. $S^* \subset S$ კლასს ეწოდება μ ზომის ბაზისი, თუ მას აქვს შემდეგი ორი თვისება:

- $\mu(A^*) < \infty$ ყოველი $A^* \in S^*$ -სთვის;
- სასრული ზომის ყოველი A სიმრავლისათვის და ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $A^* \in S^*$ სიმრავლე, რომლისთვისაც სრულდება შეფასება: $\mu(A \triangle A^*) < \varepsilon$.

თეორემა 11.5.1. თუ μ ზომას აქვს არაუშეტეს თვლადი ბაზისი, მაშინ $L^p(X, \mu)$ სივრცე სებარაბელურია.

დამტკიცება. ვთქვათ, სიმრავლეთა S^* კლასი არის μ ზომის არაუმეტეს თვლადი ბაზისი. Π -ის აღენიშნოთ ყველა შემდეგი სახის მარტივი ფუნქციის კლასი:

$$\sum_{k=1}^n r_k \chi_{A_k},$$

სადაც $r_1, \dots, r_n$ რაციონალური რიცხვებია, ხოლო $A_1, \dots, A_n$ სიმრავლეები ეკუთვნიან S^* კლასს. აღვილი შესამოწმებელია, რომ Π კლასი არაუმეტეს თვლადია და $\Pi \subset L^p(X, \mu)$. დაემატიცოთ, რომ Π ყველგან მკერვიია $L^p(X, \mu)$ -ში, რითაც თოორემა დადგენილი იქნება.

ვთქვათ, A სასრული ზომის სიმრავლეა და $\varepsilon > 0$. განვიხილოთ $A^* \in S^*$ სიმრავლე, რომლისთვისაც $\mu(A \Delta A^*) < \varepsilon^p$. საიდანაც დაწეროთ,

$$\|\chi_A - \chi_{A^*}\|_p = \left(\int_X |\chi_A - \chi_{A^*}|^p d\mu \right)^{1/p} = \mu(A \Delta A^*)^{1/p} < \varepsilon.$$

ამ შენიშვნაზე დაყრდნობით შეგვიძლია უბრუნეველყოთ ნებისმიერი მარტივი $\sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k} \in L^p(X, \mu)$ ფუნქციის რაგინდ მუსტი მიახლოება Π კლასის ფუნქციის მეშვეობით. საამისოდ, $\sum_{k=1}^n r_k \chi_{A_k} \in \Pi$ ფუნქცია უნდა შევარჩიოთ ისე, რომ $|\alpha_k - r_k|$ და $\|\chi_{A_k} - \chi_{A_k^*}\|_p$ გამოსახულებები იყენენ საყმარისად მცირე.

გემოაღნიშნულიდან გამომდინარე, იმის გათვალისწინებით, რომ მარტივი ფუნქციათა კლასი ყველგან მკერვიია $L^p(X, \mu)$ -ში, ვასყენით Π კლასის ყველგან მკერვიობას $L^p(X, \mu)$ სიერცეში. თოორემა დამტკიცებულია. $\square$

სამართლიანია თოორემა 11.5.1-ის შებრუნებული ღებულება.

თოორემა 11.5.2. თუ $L^p(X, \mu)$ სიერცე სეპარაბელურია, მაშინ μ ზომას აქვს არაუმეტეს თვლადი ბაზისი.

თოორემა 11.5.2-ის დასამტკიცებლად საყმარისია შევნიშნოთ, რომ:

- 1) μ ზომას აქვს არაუმეტეს თვლადი ბაზისი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $L^p(X, \mu)$ მეტრიული სიერცის შემდეგი ქვესიერცე: $\{\chi_A : A \in S, \mu(A) < \infty\}$, არის სეპარაბელური;
- 2) სეპარაბელური მეტრიული სიერცის ნებისმიერი ქვესიერცე ასევე სეპარაბელურია (იხ. დანართი 2).

თოორემა 11.5.3. ღებგვის ზომას აქვს თვლადი ბაზისი.

დამტკიცება. n -განზომილებიან $I = I_1 \times \dots \times I_n$ მონაკვეთის ეწოლოთ რაციონალური, თუ თითოეული ერთგანზომილებიანი I_k მონაკვეთის ბოლოები რაციონალური რიცხვებია.

განვიხილოთ I^n კლასში შემავალი რაციონალური მონაკვეთების ყველა შესაძლო სასრული გაერთიანების S^* კლასი. ვაჩვენოთ, რომ S^* ქმნის ღებგვის

ზომის თვალად ბაზისს. აღვილი შესამოწმებელია, რომ S^* თვალადია. ცხადია, S^* -ში შემავალი სიმრავლეები სასრული ზომისაა.

განვიხილოთ სასრული ლებეგის ზომის მქონე ნებისმიერი $A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. თეორემა 6.2.1-ის ძალით (იხ. აგრეთვე შენიშვნა 3.3.2) მოიძებნებიან წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი $I_1, \dots, I_p \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთები, რომელთათვისაც

$$m\left(A \Delta \bigcup_{k=1}^p I_k\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

აღვილი შესამოწმებელია, რომ თუ თითოეულ I_k მონაკვეთს შევამცირებთ რაციონალურ I_k^* მონაკვეთამდე ისე, რომ სრულდებოდეს პირობა:

$$m(I_k \setminus I_k^*) < \frac{\varepsilon}{2p},$$

ბამინ სამართლიანი იქნება შეფასება:

$$m\left(A \Delta \bigcup_{k=1}^p I_k^*\right) < \varepsilon.$$

ამით დადგენილია, რომ S^* კლასი არის ლებეგის ზომის თვალადი ბაზისი. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 11.5.4. ლებეგის აზრით ზომადი ნებისმიერი $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისათვის m_E ზომას (ე.ი. ლებეგის ზომის შეზღუდვას E -ს ლებეგის აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა კლასზე) აქვს არაუმეტეს თვალადი ბაზისი.

დამტკიცება. ვთქვათ, S^* არის ლებეგის ზომის რაიმე თვალადი ბაზისი. განვიხილოთ S^* -ის კვალი E -ზე, ე.ი. $S^* \cap E = \{A^* \cap E : A^* \in S^*\}$ კლასი. აღვილი დასანახია, რომ $S^* \cap E$ არაუმეტეს თვალადია და ქმნის m_E ზომის ბაზისს. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

11.5.1 და 11.5.4 თეორემებიდან გამომდინარეობს შემდეგი დებულება.

თეორემა 11.5.5. ლებეგის აზრით ზომადი ნებისმიერი $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისათვის $L^p(E)$ სივრცე სეპარაბელურია.

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერ ლებეგ-სტილტესის ზომას აქვს არაუმეტეს თვალადი ბაზისი.
2. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი $p \in [1, \infty)$ -სთვის L^p სივრცე სეპარაბელურია.

§ 6. არსებითად შემოსაზღვრული ფუნქციების სივრცე

ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ (X, S, μ) რაიმე ზომიანი სივრცეა.

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციას ეწოდება არსებითად შემოსაზღვრული μ ზომის მიმართ, თუ მოიძებნება $c \geq 0$, ისეთი, რომ $|f(x)| \leq c$ თითქმის ყველგან, ე.ი. მოიძებნება $A \in S$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $\mu(A) = 0$ და $|f(x)| \leq c$ ყოველი $x \in X \setminus A$ წერტილისათვის.

μ ზომის მიმართ არსებითად შემოსაზღვრული f ფუნქციისათვის აღვნიშნოთ

$$\operatorname{ess\,sup} f = \inf \{c : c \geq 0, |f(x)| \leq c \text{ თითქმის ყველგან}\}.$$

$\operatorname{ess\,sup} f$ რიცხვს უწოდებენ f ფუნქციის არსებით ზედა საზღვარს μ ზომის მიმართ.

ლემა 11.6.1. თუ f არის μ ზომის მიმართ არსებითად შემოსაზღვრული ფუნქცია, მაშინ $|f(x)| \leq \operatorname{ess\,sup} f$ თითქმის ყველგან.

დამტკიცება. ადვილი დასაბუთია, რომ ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -სთვის,

$$|f(x)| \leq \operatorname{ess\,sup} f + \frac{1}{n}$$

თითქმის ყველგან, ე.ი. მოიძებნება ნული ზომის მქონე A_n სიმრავლე, რომლისთვისაც $|f(x)| \leq \operatorname{ess\,sup} f + 1/n$, როცა $x \notin A_n$.

A -თი აღვნიშნოთ A_n ($n \in \mathbb{N}$) სიმრავლეების გაერთიანება. ცხადია, A იქნება ნული ზომის სიმრავლე. ამასთან, ყოველი $x \notin A$ წერტილისათვის და ყოველი n -სთვის გვექნება, რომ $|f(x)| \leq \operatorname{ess\,sup} f + 1/n$. შედეგად, $|f(x)| \leq \operatorname{ess\,sup} f$ ყოველი $x \notin A$ -სთვის. ამით ლემა დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 11.6.2. თუ f და g არიან μ ზომის მიმართ არსებითად შემოსაზღვრული ფუნქციები, მაშინ:

$$\operatorname{ess\,sup}(f + g) \leq \operatorname{ess\,sup} f + \operatorname{ess\,sup} g,$$

$$\operatorname{ess\,sup}(af) = |a| \operatorname{ess\,sup} f \quad (a \in \mathbb{R}).$$

დამტკიცება. ლემა 11.6.1-ის ძალით მოიძებნებიან ნულზომიანი A და B სიმრავლეები, ისეთები, რომ $\{|f| > \operatorname{ess\,sup} f\} \subset A$ და $\{|g| > \operatorname{ess\,sup} g\} \subset B$. მაშინ ნულზომიანი $A \cup B$ სიმრავლისათვის გარეთ მდებარე ნებისმიერი x წერტილისათვის,

$$|f(x)| \leq \operatorname{ess\,sup} f + \operatorname{ess\,sup} g.$$

საიდანაც გამომდინარეობს $\operatorname{ess\,sup}(f + g) \leq \operatorname{ess\,sup} f + \operatorname{ess\,sup} g$ შეფასება.

$\operatorname{ess\,sup}(af) = |a| \operatorname{ess\,sup} f$ ტოლობა გამომდინარეობს შემდეგი ცხადი სიმრავლური ტოლობიდან:

$$\{c : c \geq 0, |(af)(x)| \leq c \text{ თ.ყ.}\} = \{|a|t : t \geq 0, |f(x)| \leq t \text{ თ.ყ.}\}.$$

ყველა μ -ზომადი და μ ზომის მიმართ არსებითად შემოსაზღვრული $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქციის კლასი აღვნიშნოთ $L^\infty(X, \mu)$ ჩანაწერით. ამრიგად, $L^\infty(X, \mu)$ კლასის ფუნქციებს, არსებითად შემოსაზღვრულობასთან ერთად, მოეთხოვებათ ზომადობა.

11.6.1 და 11.6.2 ლემებიდან გამომდინარე, $L^\infty(X, \mu)$ წარმოადგენს წრფივ სივრცეს ფუნქციათა შეკრებისა და ფუნქციის სკალარზე გამრავლების ოპერაციის მიმართ.

განვიხილოთ $L^\infty(X, \mu)$ სივრცეზე შემდეგნაირად განსაზღვრული $\| \cdot \| = \| \cdot \|_\infty$ ფუნქცია:

$$\|f\| = \text{ess sup } f.$$

11.6.1 და 11.6.2 ლემების ძალით, მას აქვს თვისებები:

1) $f \in L^\infty$ ფუნქციისათვის $\|f\| = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(x) = 0$ თითქმის ყველგან;

2) $\|af\| = |a| \|f\|$ ($a \in \mathbb{R}, f \in L^\infty$);

3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ ($f, g \in L^\infty$).

თუ თითქმის ყველგან ერთმანეთის ტოლ ფუნქციებს გავივიგებთ, მაშინ შეგვიძლია, $(L^\infty(X, \mu), \| \cdot \|)$ წყვილს შევხედოთ, როგორც ნორმირებულ წრფივ სივრცეს.

შემდგომში $(L^\infty(X, \mu), \| \cdot \|_\infty)$ ნორმირებულ სივრცეს, სიმოცლისათვის, აღვნიშნავთ $L^\infty(X, \mu)$ ჩანაწერით.

ლემების აზრით ზომადი არაყაროელი $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისათვის $L^\infty(E)$ -თი აღვნიშნავთ $L^\infty(E, m_E)$ სივრცეს, სადაც m_E არის ლემების ზომის შემოღება E -ში შემავალ ლემების აზრით ზომად სიმრავლეთა კლასზე.

შენიშვნა 11.6.1. ყოველი $f \in L^\infty(X, \mu)$ ფუნქციისათვის უზრუნველყოფილია $\{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$ სიმრავლის ზომადობა. ცხადია, ამ სიმრავლის ზომა ნულის ტოლია. მარტივი დასაანახია, რომ საზოგადოდ, არსებითად შემოსაზღვრული f ფუნქციისათვის აღნიშნული სახის სიმრავლე შეიძლება ზომადი არ იყოს.

შენიშვნა 11.6.2. იმის გათვალისწინებით, რომ $\lim_{p \rightarrow 1} \frac{p}{p-1} = \infty$, ბუნებრივია $p = 1$ რიხვის შეუღლებულ q პარამეტრად მივიჩნიოთ ∞ . $p = 1, q = \infty$ წყვილის შემთხვევაში, ჯეღდერის უტოლობა შემდეგ სახეს ღებულობს: თუ $f \in L^1(X, \mu)$ და $g \in L^\infty(X, \mu)$, მაშინ $fg \in L(X, \mu)$ და

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

ამ უტოლობის დამტკიცებისათვის უნდა შევნიშნოთ, რომ თითქმის ყოველ წერტილში სრულდება შეფასება: $|f(x)g(x)| \leq |f(x)| \|g\|_\infty$, რომლის ინტეგრება გვაძლევს საჭირო უტოლობას.

აქვე შევნიშნავთ, რომ $p = \infty$ შემთხვევაში მინკოვსკის უტოლობა გამოიხატება $\|\cdot\|_\infty$ ნორმის მესამე თვისებით.

შენიშვნა II.6.3. ადვილი შესამოწმებელია შემდეგი დებულება: თუ μ შემოსაზღვრული ზომაა, მაშინ ნებისმიერი $1 \leq p < \infty$ პარამეტრისათვის გვაქვს, რომ $L^\infty(X, \mu) \subset L^p(X, \mu)$. გარდა ამისა, ყოველი $f \in L^\infty(X, \mu)$ -სთვის სრულდება შეფასება $\|f\|_p \leq \mu(X)^{1/p} \|f\|_\infty$.

შემოსაზღვრული ზომის შემთხვევაში, $L^\infty(X, \mu) \subset L^p(X, \mu)$ ჩართვა საშარტოლიანი არაა. მართლაც, ამ სიტუაციაში იგივეურად ერთის ტოლი ფუნქცია ეკუთვნის $L^\infty(X, \mu)$ -ს, მაგრამ არ ეკუთვნის $L^p(X, \mu)$ -ს.

შენიშვნა II.6.4. თუ $X = \mathbb{N}$ და μ წარმოადგენს დამთვლელ ზომას $\mathbb{N}$ -ში, მაშინ $L^\infty(X, \mu)$ სივრცის აღსანიშნავად იყენებენ l^∞ სიბოლოს. l^∞ არის ყველა შემოსაზღვრული $x = (x_n)$ რიცხვითი მიმდევრობის სივრცე, რომელშიც ნორმა განისაზღვრება შემდეგნაირად: $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ყოველი $1 \leq p < \infty$ პარამეტრისათვის $l^p \subset l^\infty$.

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ, რომ $p = 1$ შემთხვევაში ჰელდერის უტოლობაში ტოლობა მიიღწევა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $|g(x)| = \|g\|_\infty$ თითქმის ყველგან.
2. ააგეთ ფუნქცია, რომელიც ეკუთვნის $L^p([0, 1])$ სივრცეს ყოველი $p \in [1, \infty)$ -სთვის, მაგრამ არ ეკუთვნის $L^\infty([0, 1])$ სივრცეს.
3. აჩვენეთ, რომ თუ μ ზომა შემოსაზღვრულია, მაშინ ნებისმიერი $f \in L^\infty(X, \mu)$ ფუნქციისათვის $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.
4. დაამტკიცეთ, რომ $f \in L^1(X, \mu)$ ფუნქციის ნორმა $L^1(X, \mu)$ სივრცეში შეიძლება გამოვთვალოთ შემდეგნაირად: $\|f\|_1 = \sup \int_X f g d\mu$, სადაც სუპრემუმი აიღება ყველა იმ $g \in L^\infty(X, \mu)$ ფუნქციის მიხედვით, რომლისთვისაც $\|g\|_\infty \leq 1$. აჩვენეთ აგრეთვე, რომ აღნიშნული სუპრემუმი მიიღწევა გარკვეული $g_0 \in L^\infty(X, \mu)$, $\|g_0\|_\infty \leq 1$, ფუნქციისათვის.
5. დაამტკიცეთ, რომ $f \in L^\infty(X, \mu)$ ფუნქციის L^∞ -ნორმა შეიძლება გამოვთვალოთ შემდეგნაირად: $\|f\|_\infty = \sup \int_X f g d\mu$, სადაც სუპრემუმი აიღება ყველა იმ $g \in L^1(X, \mu)$ ფუნქციის მიხედვით, რომლისთვისაც $\|g\|_1 \leq 1$. $L^\infty([0, 1])$ სივრცის მაგალითზე აჩვენეთ, რომ აღნიშნული სუპრემუმი შეიძლება არ მიიღწეოდეს არცერთი $g \in L^1([0, 1])$, $\|g\|_1 \leq 1$, ფუნქციისათვის.

§ 7. L^∞ სივრცის ზოგიერთი თვისება

თეორემა II.7.1. $L^\infty(X, \mu)$ სივრცე არის სრული.

დამტკიცება. ეთქვას, (f_n) არის ფუნქციათა ფუნდამენტური მიმდევრობა $L^\infty(X, \mu)$ სივრცეში. განვიხილოთ სრული ზომის E სიმრავლე, რომელიც მიიღება სივრციდან შემდეგი ნულზომიანი სიმრავლეების ამოკლებით:

$$A_n = \{x : |f_n(x)| > \|f_n\|_\infty\} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$A_{n,m} = \{x : |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\} \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

მაშინ ნებისმიერი $x \in E$ წერტილისათვის $(f_n(x))$ იქნება სასრული რიცხვების მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \quad (n, m \in \mathbb{N}). \quad (1)$$

შედეგად, $(f_n(x))$ რიცხვითი მიმდევრობა იქნება ფუნდამენტური. რის გამოც, იარსებებს $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ მღვარი. განვიხილოთ შემდეგნაირად განსაზღვრული f ფუნქცია: $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, როცა $x \in E$ და $f(x) = 0$, როცა $x \in X \setminus E$. ვაჩვენოთ, რომ f არის (f_n) მიმდევრობის მღვარი L^∞ სივრცეში.

f წარმოდგება როგორც ზომაღ ფუნქციათა მიმდევრობის წერტილოვანი მღვარი. რის გამოც, f თავადაც ზომაღი იქნება. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი და (f_n) მიმდევრობის ფუნდამენტურობის საფუძველზე ვიპოვოთ $N \in \mathbb{N}$, ისეთი, რომ $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$, როცა $n, m \geq N$. შემდეგ, ნებისმიერი $x \in E$ -სთვის და $n \geq N$ -სთვის (1) შეფასებაში m -ის მიმართ მღვარზე გადასულით მივიღებთ,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad (x \in E, n \geq N).$$

აქედან გამომდინარე, E სიმრავლის სრულზომიანობის გათვალისწინებით და-ვასკენით, რომ ყოველი $n \geq N$ -სთვის,

$$f_n - f \in L^\infty(X, \mu) \text{ და } \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

საიდანაც ერთდროულად მივიღებთ, რომ $f \in L^\infty(X, \mu)$ და $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 11.7.1. $L^\infty(X, \mu)$ სივრცეში კრებადობა ახლოს დგას თანაბრად კრებადობასთან. კერძოდ, ადვილი შესამოწმებელია შემდეგი ღებულების სამართლიანობა: ეთქვას, $\{f\} \cup \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset L^\infty(X, \mu)$. მაშინ იმისათვის, რომ (f_n) კრებადი იყოს f ფუნქციისავე $L^\infty(X, \mu)$ სივრცეში აუცილებელი და საკმარისია, რომ მოიძებნებოდეს სრული ზომის A სიმრავლე, რომელზეც (f_n) მიმდევრობა თანაბრად კრებადი იქნება f ფუნქციისავე. აქვე შევნიშნავთ, რომ f_n და f ფუნქციების უწყვეტობის შემთხვევაში $L^\infty(E)$ ($E \subset \mathbb{R}^n$) სახის სივრცეებში კრებადობა ტოლფასია თანაბარი კრებადობისა.

შენიშვნა 11.7.2. L^p ($1 \leq p < \infty$) სივრცეებისათვის დამახასიათებელი თვისებების ნაწილი არ ვრცელდება L^∞ სივრცის შემთხვევაზე. ამის საილუსტრაციოდ აღვნიშნავთ, რომ:

- $L^\infty([0, 1])$ სივრცეში არაა ყველგან მკვრივი უწყვეტ ფუნქციათა კლასი;

- $L^\infty([0, 1])$ სივრცე არაა სეპარაბელური.

მოკლედ აღეწეროთ ამ წინადადებების დამტკიცებები.

პირველი წინადადების დასადაგენად უნდა განვიხილოთ დადებითი ზომის სრულყოფილი $E \subset [0, 1]$ სიმრავლე, რომელიც არსად მკერძოა. E სიმრავლის მახასიათებელი χ_E ფუნქცია ეკუთვნის $L^\infty([0, 1])$ სივრცეს, თუმცა ნებისმიერი $f \in L^\infty([0, 1])$ ფუნქცია, რომლისთვისაც სრულდება შეფასება: $\|f - \chi_E\|_\infty < 1/2$. იქნება წყვეტილი E სიმრავლის თითქმის ყველა წერტილში. რაც იმას ნიშნავს, რომ შეუძლებელია χ_E ფუნქციას მიეუახლოვდეთ $1/2$ -ზე ნაკლებ მანძილზე უწყვეტი ფუნქციის მეშვეობით.

მეორე წინადადების დასამტკიცებლად უნდა განვიხილოთ $[0, 1]$ მონაკვეთის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ და დადებითი ზომის ქვესიმრავლეთა რაიმე (E_n) მიმდევრობა. თუ ნატურალურ ინდექსთა ნებისმიერი $\Lambda \subset \mathbb{N}$ სიმრავლისათვის f_Λ -თი აღნიშნავთ $\bigcup_{n \in \Lambda} E_n$ სიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციას, მაშინ გვექნება, რომ: 1) $\{f_\Lambda \mid \Lambda \subset \mathbb{N}\} \subset L^\infty([0, 1])$; 2) $\{f_\Lambda \mid \Lambda \subset \mathbb{N}\}$ კლასი კონტინუუმის სიმძლავრისაა; 3) $\{f_\Lambda \mid \Lambda \subset \mathbb{N}\}$ კლასის ნებისმიერ ორ ფუნქციას შორის L^∞ -მანძილი ერთის ტოლია, აღნიშნული თვისებებიდან კი გამომდინარეობს $L^\infty([0, 1])$ სივრცის არასეპარაბელურობა.

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ, რომ მარტივ ფუნქციათა კლასი ყველგან მკერძოა $L^\infty(X, \mu)$ სივრცეში.
2. დაამტკიცეთ, რომ თუ მოიძებნება წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი და დადებითი ზომის სიმრავლეთა (E_n) მიმდევრობა, მაშინ არასეპარაბელურია $L^\infty(X, \mu)$ სივრცე. აჩვენეთ აგრეთვე, რომ აღნიშნული სახის მიმდევრობის არარსებობის შემთხვევაში, $L^\infty(X, \mu)$ სივრცე სასრულგანზომილებიანია და შედეგად, სეპარაბელურია.
3. დაამტკიცეთ, რომ l^∞ სივრცე არასეპარაბელურია.

ინტეგრება და დიფერენცირება

დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის უმთავრესი პრინციპის თანახმად, გაწარმოებისა და ინტეგრების ოპერაციები ურთიერთშებრუნებული არიან. ეს გამოიხატება იმაში, რომ თუ ფუნქციას ჯერ ვაინტეგრებთ, ხოლო შემდეგ კი გავაწარმოებთ - კელავ საწყის ფუნქციას მივიღებთ, ამასთანავე. მსგავსი დასვენა შესრულებული იქნება ოპერაციების თანმიმდევრობის შეცვლის შემთხვევაშიც: თუ ფუნქციას ჯერ გავაწარმოებთ, ხოლო შემდეგ ვაინტეგრებთ - საწყის ფუნქციას დაუბრუნდებით. კერძოდ, გაწარმოებისა და რიმანის მიხედვით ინტეგრების ოპერაციების ურთიერთშებრუნებადობის ეს ორი ას-პექტი ცნობილია შემდეგი თეორემების სახით:

1. თუ f არის $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია, ხოლო F არის მისი რიმანის განუსაზღვრელი ინტეგრალი, ე.ი. $F(x) = \int_{[a,x]} f \ (x \in [a, b])$, მაშინ F ფუნქციას ყოველ $x \in [a, b]$ წერტილში აქვს წარმოებული, რომელიც $f(x)$ -ის ტოლია.

2. თუ f არის $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია, მაშინ ყოველი $x \in [a, b]$ წერტილისათვის სრულდება ტოლობა

$$f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f'.$$

წინამდებარე თავი მიზნად ისახავს, შეისწავლოს გაწარმოებისა და ლებე-გის მიხედვით ინტეგრების ოპერაციების ურთიერთშებრუნებადობის საკითხი.

§ 1. ლებეგის თეორემა ინტეგრალის დიფერენცირების შესახებ

დავიწყოთ იმის შესწავლით, არის თუ არა გაწარმოება შებრუნებული ოპერაცია ლებეგის მიხედვით ინტეგრებისათვის. კერძოდ, ამოცანა მდგომარე-ობს შემდეგში: თუ $f \in L([a, b])$ ფუნქციისათვის განვიზილავთ მის ლებეგის განუსაზღვრელ ინტეგრალს:

$$F(x) = \int_{[a,x]} f dm \quad (x \in [a, b]),$$

მაშინ იქნება თუ არა F წარმოებადი და ეს წარმოებული იქნება თუ არა f ფუნქციის ტოლი?

შევნიშნოთ, რომ ფუნქციის ცვლილება ნებისმიერ ნულზომიან სიმრავლეზე გაულებას არ ახდენს მის ლებეგის ინტეგრალზე. ამის გამო, მაქსიმუმი, რისი მოლოდინიც შეიძლება გვექონდეს, არის $F'(x) = f(x)$ ტოლობის თითქმის ყოველ წერტილში შესრულება. ლებეგის შემდეგი ფუნდამენტური თეორემა ეკვივენტურს, რომ თითქმის ყოველ წერტილში აღნიშნულ ტოლობას მართლაც აქვს ადგილი.

თეორემა 12.1.1. ნებისმიერი $f \in L([a, b])$ ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელ ინტეგრალს თითქმის ყოველ $x \in [a, b]$ წერტილში აქვს წარმოებული, რომელიც $f(x)$ -ის ტოლია.

შენიშვნა 12.1.1. თეორემა 12.1.1-ის თანახმად, ნებისმიერი ჯამებადი f ფუნქციისათვის მისი ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი წარმოადგენს მის-სავე განზოგადებულ პირველყოფილს.

შევთანხმდეთ, რომ შემდგომში:

- $E \subset \mathbb{R}$ სიმრავლის გარე ზომა და ზომადობის შემთხვევაში ლებეგის ზომა აღნიშნული იქნება შესაბამისად $|E|_*$ და $|E|$ ჩანაწერებით;
- $f \in L(\mathbb{R})$ ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი $\int_A f d\mu$ აღნიშნული იქნება $\int_A f$ ჩანაწერით;
- სიმრავლისა და ფუნქციის ზომადობა განსხილული იქნება ლებეგის ზომის მიმართ;
- ყოველთვის განსხილული იქნება გადაუგეარებელი და სასრული სიგ-რძის მონაკვეთები.

წრფეზე აღებული x წერტილისათვის $I(x)$ -ით აღვნიშნოთ x -ის შემცველი ყველა მონაკვეთის კლასი.

თეორემა 12.1.1 შედეგის სახით მიიღება შემდეგი დებულებიდან.

თეორემა 12.1.2. ნებისმიერი $f \in L(\mathbb{R})$ ფუნქციისათვის თითქმის ყოველ $x \in \mathbb{R}$ წერტილში სრულდება შემდეგი ზღვართი ტოლობა:

$$\lim_{I \in I(x), I \rightarrow x} \frac{1}{|I|} \int_I f = f(x). \quad (1)$$

შენიშვნა 12.1.2. (1) ტოლობაში მოცემული ზღვარი შემდგენიარად გაიგება: ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება $\delta > 0$, ისეთი, რომ

$$\left| \frac{1}{|I|} \int_I f - f(x) \right| < \varepsilon,$$

ყოველთვის, როცა $I \in I(x)$ და $|I| < \delta$.

შენიშვნა 12.1.3. თეორემა 12.1.2 მოკლედ შეიძლება ასე ჩამოვყალიბოთ: ინტეგრალური საშუალოების ზღვარი თითქმის ყველგან ინტეგრალდება ფუნქციის ტოლია.

შენიშვნა 12.1.4. თეორემა 12.1.2-დან თეორემა 12.1.1-ის მისაღებად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ თუ F არის $f \in L([a, b])$ ფუნქციის ლეზევის განუსაზღვრელი ინტეგრალი, მაშინ ნებისმიერი $x \in [a, b]$ -სთვის,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{|I|} \int_I f,$$

სადაც $h \neq 0$, $x+h \in [a, b]$ და I არის სეგმენტი, რომლის ბოლოებია x და $x+h$ წერტილები.

შენიშვნა 12.1.5. თეორემა 12.1.2 ცხადია მაშინ, როცა f უწყვეტი ფუნქციაა. მართლაც, განვიხილოთ ნებისმიერი x წერტილი და $\varepsilon > 0$ რიცხვი. f -ის უწყვეტობის გამო შეგვიძლია ვიპოვოთ $\delta > 0$, ისეთი, რომ $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$, როცა $|y - x| < \delta$. შედეგად, ნებისმიერი $I \ni x$ მონაკვეთისათვის, რომლის სიგრძე ნაკლებია δ -ზე, გვექნება:

$$(f(x) - \varepsilon)|I| \leq \int_I f \leq (f(x) + \varepsilon)|I|.$$

საიდანაც ვასკენით (1) ტოლობის სამართლიანობას ნებისმიერ x წერტილში.

თეორემა 12.1.2-ის დამტკიცება. მსჯელობა ეფუძნება $L(\mathbb{R})$ სივრცეში უწყვეტ ფუნქციათა კლასის ყველგან მკერეობის ფაქტს და ფუნქციის ინტეგრალურ საშუალოთა შესახებ ე.წ. სუსტი ტიპის უტოლობას, რომელიც საკმაოდ რთულ მომენტს შეადგენს დამტკიცებაში. აქვე შევნიშნავეთ, რომ აღნიშნულ სუსტი ტიპის შეფასებას ამ ეტაპზე ჩავთვლით ცნობილად, ხოლო მის დამტკიცებას დაეთმობა მომდევნო ორი პარაგრაფი.

ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $\lambda > 0$ -სთვის შემდეგი სიმრავლე:

$$E_\lambda = \left\{ x : \overline{\lim}_{I \in I(x), I \rightarrow x} \left| \frac{1}{|I|} \int_I f - f(x) \right| > 2\lambda \right\}$$

არის ნული ზომის. აქ მონაკვეთის ν ფუნქციის ზედა ზღვარი გაიგება შემდეგნაირად:

$$\overline{\lim}_{I \in I(x), I \rightarrow x} \nu(I) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\sup \{ \nu(I) : I \in I(x), |I| < \delta \}).$$

ადვილი დასანახია, რომ ყველა იმ წერტილის სიმრავლე, რომლისთვისაც არ სრულდება (1) ტოლობა, წარმოდგება $E_{1/k}$ ($k \in \mathbb{N}$) სიმრავლეების გაერთიანების სახით. ამის გათვალისწინებით, E_λ ($\lambda > 0$) სიმრავლეების ნულზომიანობის დამტკიცების შემთხვევაში, თეორემა დადგენილი იქნება.

ვთქვათ, $\lambda > 0$. თეორემა 11.4.4-ის ძალით, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სთვის შეგვიძლია ვიპოვოთ უწყვეტი და ჯამებადი g ფუნქცია, რომლისთვისაც

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g| < \varepsilon. \quad (2)$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ. უწყვეტი ფუნქციებისთვის ადგილი აქვს ინტეგრალურ საშუალოთა კრებადობას, ე.ი. ნებისმიერი x წერტილისათვის,

$$\lim_{I \in I(x), I \rightarrow x} \frac{1}{|I|} \int_I g = g(x). \quad (3)$$

განვიხილოთ რაიმე x წერტილი. გარდავქმნათ $\frac{1}{|I|} \int_I f - f(x)$ გამოსახულება შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{|I|} \int_I f - f(x) = \frac{1}{|I|} \int_I (f - g) + \frac{1}{|I|} \int_I g - g(x) + (g(x) - f(x)).$$

აქედან, (3)-ის გათვალისწინებით ადგილი დასაბამია, რომ

$$\begin{aligned} \lim_{I \in I(x), I \rightarrow x} \left| \frac{1}{|I|} \int_I f - f(x) \right| &\leq \lim_{I \in I(x), I \rightarrow x} \frac{1}{|I|} \int_I |f - g| + |g(x) - f(x)| \leq \\ &\leq \sup_{I \in I(x)} \frac{1}{|I|} \int_I |f - g| + |g(x) - f(x)|. \end{aligned} \quad (4)$$

(4)-დან გამომდინარე დავწერთ,

$$E_\lambda \subset \left\{ x : \sup_{I \in I(x)} \frac{1}{|I|} \int_I |f - g| > \lambda \right\} \cup \{ x : |g(x) - f(x)| > \lambda \} = A \cup B.$$

ამ თავის მესამე პარაგრაფში დადგენილი იქნება ე.წ. სუსტი ტიპის უტოლობა ინტეგრალური საშუალოებისათვის (იხ. თეორემა 12.3.1), რომლის ძალითაც ნებისმიერი $h \in L(\mathbb{R})$ ფუნქციისათვის,

$$\left| \left\{ x : \sup_{I \in I(x)} \frac{1}{|I|} \int_I |h| > \lambda \right\} \right|_* \leq \frac{5}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |h|. \quad (5)$$

თუ (5)-ს გამოვიყენებთ $|f - g|$ ფუნქციისათვის, მივიღებთ, რომ

$$|A|_* \leq \frac{5}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f - g|.$$

B სიმრავლის ზომა კი, $|f - g|$ ფუნქციისათვის დაწერილი ჩებიშევის უტოლობით, შემდეგნაირად შეფასდება:

$$|B| \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f - g|.$$

ახლა, თუ მხედველობაში მივიღებთ (2)-ს, დავწერთ, რომ

$$|E_\lambda|_* \leq \frac{6\varepsilon}{\lambda}.$$

საიდანაც, $\varepsilon > 0$ რიცხვის ნებისმიერობის საფუძველზე დავასყენით E_λ სიმრავლის სულზომიანობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

§ 2. ვიტალის თეორემები სიმრავლეთა დაფარვის შესახებ

ამ პარაგრაფში დამტკიცებული თეორემები ეკუთვნის ჯ. ვიტალის. მათი მიზანია, მონაკვეთების მოცემული კლასიდან გამოყოს წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთებისაგან შედგენილი ქვეკლასი, რომელიც რაც შეიძლება დიდ ნაწილს აითვისებს საწყისი კლასიდან (ე.ი. ექნება დიდი ზომის გაერთიანება). ამ ტიპის შედეგებს ძალზე მნიშვნელოვანი დატვირთვა აქვთ დიფერენცირებისა და ზოგიერთი სხვა მღვართი პროცესის შესწავლისას. ჩვენი უახლოესი მიზანია მათი გამოყენება ინტეგრალური საშუალოებისათვის სუსტი ტიპის უტოლობის დასადგენად.

თეორემა 12.2.1. ვთქვათ, წრფივი E სიმრავლე დაფარულია ერთობლივ შემოსაზღვრული სიგრძეების მქონე მონაკვეთების Π კლასით. მაშინ Π -დან შეიძლება გამოვყოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთებისაგან შედგენილი, არაუშეტეს თვლადი Π' ქვეკლასი, ისეთი, რომ

$$\sum_{I \in \Pi'} |I| \geq \frac{1}{5} |E|.$$

დამტკიცება. საძიებელი Π' ქვეკლასის შერჩევა ხდება ე.წ. „ხარბი“ ალგორითმის გამოყენებით. აღვწერთ ეს ალგორითმი:

Π ოჯახის მონაკვეთების სიგრძეების ერთობლივ შემოსაზღვრულობის გამო შეგვიძლია ავირჩიოთ „თითქმის ყველაზე დიდი“ მათ შორის, რაც გულისხმობს ისეთი $I_1 \in \Pi$ მონაკვეთის არჩევას, რომლისთვისაც სრულდება პირობა

$$|I_1| > \frac{1}{2} \sup\{|I| : I \in \Pi\}.$$

დაეუშვათ, წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი $I_1, \dots, I_k \in \Pi$ მონაკვეთები უკვე არჩეულია. განვიხილოთ ყველა იმ $I \in \Pi$ მონაკვეთის Π_k კლასი, რომელიც არ კვეთს არცერთს $I_1, \dots, I_k$ მონაკვეთებს შორის. თუ Π_k კლასი ცარიელია, მაშინ აგება დასრულებულად ჩავთვალოთ. წინააღმდეგ შემთხვევაში კი, I_{k+1} -ის როლში ავიღოთ თითქმის ყველაზე დიდი Π_k კლასის წევრებს შორის, ე.ი. ეირჩევთ $I_{k+1} \in \Pi_k$ მონაკვეთს, რომლისთვისაც

$$|I_{k+1}| > \frac{1}{2} \sup\{|I| : I \in \Pi_k\}.$$

აღწერილი სქემის გამოყენებით, Π კლასიდან გამოვყოფთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთების სასრულ ან თვლად $\Pi' = \{I_k\}$ ქვეკლასს. დავადგინოთ, რომ Π' აკმაყოფილებს საჭირო შეფასებას. განვიხილოთ ის შემთხვევა,

როცა Π' თვლადი კლასია. სასრული კლასის შემთხვევაში, დამტკიცება ანალ-
ოგიური და კიდევ უფრო მარტივია.

შესაძლებელია ორი ქვეშემთხვევა იმისდა მიხედვით $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = \infty$, თუ
 $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \infty$.

პირველ ქვეშემთხვევაში ღებულება ცხადია.

მეორე ქვეშემთხვევაში გვექნება, რომ

$$|I_k| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

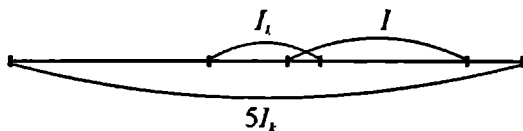
საიდანაც გამომდინარეობს შემდეგი წინადადება: ნებისმიერი $I \in \Pi$ მონაკვეთი
კვეთს ერთს მაინც I_k მონაკვეთებს შორის, ე.ი. ნებისმიერი $I \in \Pi$ -სთვის,

$$I \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset. \quad (1)$$

მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში, აგებიდან გამომდინარე ყოველი k -სთვის
შესრულება შეფასება: $|I_k| > |I|/2$. რაც ეწინააღმდეგება $|I_k| \rightarrow 0$ პირობას.

Θ_1 იყოს ყველა იმ $I \in \Pi$ მონაკვეთის კლასი, რომელიც კვეთს I_1 -ს,
ხოლო $k \geq 2$ -სთვის Θ_k იყოს ყველა იმ $I \in \Pi$ მონაკვეთის კლასი, რომელიც
კვეთს I_k -ს და არ კვეთს არც ერთს $I_1, \dots, I_{k-1}$ მონაკვეთებს შორის. აგების
გათვალისწინებით, ადვილი დასაწახია, რომ ნებისმიერი k -სთვის (ნახ. 12.1),

$$I \in \Theta_k \Rightarrow (I \cap I_k \neq \emptyset, |I| < 2|I_k|) \Rightarrow I \subset 5I_k. \quad (2)$$



ნახ. 12.1.

აქ $5I_k$ აღნიშნავს I_k -ს 5-ჯერ გაჭიმვით მიღებულ მონაკვეთს, ე.ი. $5I_k = H(I_k)$. სადაც H არის ჰომოთეტია, რომლის ცენტრი ემთხვევა I_k -ს ცენტრს და რომლის კოეფიციენტი არის 5-ის ტოლი.

(1)-ის და (2)-ის ძალით ვწერთ,

$$E \subset \bigcup_{I \in \Pi} I = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{I \in \Theta_k} I \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} 5I_k. \quad (3)$$

(3)-დან კი ვღებულობთ, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{\infty} |5I_k| \geq \frac{1}{5} \left| \bigcup_{k=1}^{\infty} 5I_k \right| \geq \frac{1}{5} |E|.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 12.2.1. Π' ქვეკლასის არაუმეტეს თვლადობის მოთხოვნა თეორემა 12.1.1-ის ფორმულირებაში (და ყველა შემდგომ მსგავსი ტიპის დებულებაში) მოცემულია გადმოცემის სისრულისათვის. მართლაც, წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთების ყოველი კლასი თავისთავადაა არაუმეტეს თვლადი. უფრო მეტიც (იხ. 1 და 2 ამოცანები პარაგრაფის ბოლოს), ელემენტარული მსჯელობით მტკიცდება, რომ σ -შემოსაზღვრულ მომიან სივრცეში დადებითი ზომის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სიმრავლეთა ნებისმიერი კლასი არაუმეტეს თვლადია.

შენიშვნა 12.2.2. თეორემა 12.2.1 არ რჩება სამართლიანი, თუ E სიმრავლის დამფარავ მონაკვეთებს არ მოეთხოვთ სივრცეების ერთობლივ შემოსაზღვრულობას. ამაში აღვიღალ დაერწმუნდებით, თუ განვიხილავთ $E = \mathbb{R}$ სიმრავლისა და მისი $\Pi = \{[-k, k] : k \in \mathbb{N}\}$ დაფარვის შემთხვევას.

ვითქვით, რომ მონაკვეთების Π კლასი ვიტალის აზრით ფარავს $E \subset \mathbb{R}$ სიმრავლეს, თუ ნებისმიერი $x \in E$ წერტილისათვის და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხისათვის მოიძებნება $I \in \Pi$ მონაკვეთი შემდეგი თვისებებით: $x \in I$ და $|I| < \varepsilon$.

შეენიშნოთ, რომ ვიტალის ამრით დაფარვის გამომხატველი პირობა ტოლფასია შემდეგის: ნებისმიერი $x \in E$ წერტილისათვის მოიძებნება Π კლასის მონაკვეთების (I_k) მიმდევრობა თვისებებით: $x \in I_k$ და $|I_k| \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).

თეორემა 12.2.2. ვთქვათ, წრფივი E სიმრავლე ვიტალის აზრით დაფარულია მონაკვეთების Π კლასით. მაშინ Π -დან შეიძლება გამოვყოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთებისაგან შედგენილი, არაუმეტეს თვლადი Π' ქვეკლასი, რომელიც თითქმის ფარავს E სიმრავლეს, ე.ი.

$$\left| E \setminus \bigcup_{I \in \Pi'} I \right|_* = 0.$$

შენიშვნა 12.2.3. ეთქვათ, Π' არის გამოყოფილი ქვეკლასი თეორემა 12.2.2-დან. მაშინ გვექნება, რომ

$$|E|_* \leq \left| E \cap \bigcup_{I \in \Pi'} I \right|_* + \left| E \setminus \bigcup_{I \in \Pi'} I \right|_* \leq \sum_{I \in \Pi'} |I|.$$

ამრიგად, $\sum_{I \in \Pi'} |I| \geq |E|_*$, რაც წარმოადგენს თეორემა 12.2.1-ის დასკვნაში მოცემულზე ძლიერ შეფასებას.

ლემა 12.2.1. ვთქვათ, წრფივი შემოსაზღვრული E სიმრავლე ვიტალის აზრით დაფარულია მონაკვეთების Π კლასით. მაშინ ნებისმიერი ჩაკეტილი A სიმრავლისათვის Π კლასიდან შეიძლება გამოვყოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთებისაგან შედგენილი სასრული Π' ქვეკლასი, ისეთი,

რომ:

$I \cap A = \emptyset$ ყოველი $I \in \Pi'$ -სათვის,

$$\left| (E \setminus A) \setminus \bigcup_{I \in \Pi'} I \right|_* \leq \left(1 - \frac{1}{20} \right) |E \setminus A|_*.$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმობთ, რომ $|E \setminus A|_* > 0$. დაეფაროთ $E \setminus A$ სიმრავლე ღია და შემოსაზღვრული G სიმრავლით ისე, რომ სრულდებოდეს პირობა:

$$|G| \leq (1 + 1/20) |E \setminus A|_* \quad (4)$$

განვიხილოთ შემდეგნაირად განსაზღვრული $\hat{\Pi}$ კლასი:

$$\hat{\Pi} = \{I \in \Pi : I \subset G, I \cap A = \emptyset\}.$$

$\hat{\Pi}$ კლასი დაფარავს $E \setminus A$ სიმრავლეს. ეს ადვილად გამომდინარეობს შემდეგი სამი ფაქტიდან: G ღიაა, A ჩაკეტილია და Π არის $E \setminus A$ სიმრავლის ეიტალის ამრით დაფარვა. ამის შემდეგ, $E \setminus A$ სიმრავლისა და $\hat{\Pi}$ კლასისთვის გამოვიყენოთ თეორემა 12.2.1. ადვილი დასანახია, რომ ეს საშუალებას მოგვცემს, ვიპოვოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთებისაგან შედგენილი, სასრული $\Pi' \subset \hat{\Pi}$ კლასი, რომლისთვისაც

$$\sum_{I \in \Pi'} |I| \geq \frac{|E \setminus A|_*}{10}.$$

შედეგად, (4)-ის გათვალისწინებით გვექნება,

$$\left| (E \setminus A) \setminus \bigcup_{I \in \Pi'} I \right| \leq \left| G \setminus \bigcup_{I \in \Pi'} I \right| = |G| - \sum_{I \in \Pi'} |I| \leq \left(1 - \frac{1}{20} \right) |E \setminus A|_*.$$

შევნიშნოთ, რომ Π' კლასის მონაკვეთები, $\Pi' \subset \hat{\Pi}$ ჩართვის გამო, არ კვეთენ A სიმრავლეს. ამით ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 12.2.2-ის დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად მივიჩნიოთ, რომ დამფარავი მონაკვეთები ჩაკეტილია.

თავდაპირველად განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა E სიმრავლე შემოსაზღვრულია.

საძიებელ ქვეკლასს გამოვყოფთ ე.წ. „ამოწურვის“ მეთოდის მეშვეობით, რომელიც ეფუძნება ლემა 12.2.1-ის გამოყენებას.

ლემა 12.2.1-ის საფუძველზე ვიპოვოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთებისაგან შედგენილი სასრული $\Pi'_1 \subset \Pi$ ქვეკლასი, ისეთი, რომ

$$\left| E \setminus \bigcup_{I \in \Pi'_1} I \right|_* \leq \left(1 - \frac{1}{20} \right) |E|_* \quad (5)$$

დავუშვათ, Π -ს სასრული ქვეკლასები - $\Pi'_1, \dots, \Pi'_k$. უკვე აგებულია. აღვნიშნოთ

$$A_1 = \bigcup_{I \in \Pi'_1} I, \quad , A_k = \bigcup_{I \in \Pi'_k} I, \quad A(k) = A_1 \cup \dots \cup A_k.$$

ცხადია, $A(k)$ სიმრავლე ჩაკეტილია. თუ $E \setminus A(k)$ სიმრავლე ცარიელია, მაშინ აგება დასრულებულად ჩაეთვალოთ. წინააღმდეგ შემთხვევაში, E და $A(k)$ სიმრავლეებისათვის გამოვიყენოთ ლემა 12.2.1 და ვიპოვოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთებისაგან შედგენილი სასრული $\Pi'_{k+1} \subset \Pi$ ქვეკლასი, ისეთი, რომ:

$$I \cap A(k) = \emptyset \text{ ყოველი } I \in \Pi'_{k+1}\text{-სათვის,} \quad (6)$$

$$\left| (E \setminus A(k)) \setminus \bigcup_{I \in \Pi'_{k+1}} I \right| \leq \left(1 - \frac{1}{20}\right) |E \setminus A(k)|. \quad (7)$$

აღწერილი სქემით, Π კლასიდან გამოვყოფთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთებისაგან შედგენილი და სასრული Π'_k ქვეკლასების სასრულ ან უსასრულო მიმდევრობას. Π' იყოს Π'_k კლასების გაერთიანება. სასრული მიმდევრობის შემთხვევაში, (6)-ის გათვალისწინებით ცხადია, რომ Π' დაამყოფილებს მოთხოვნილ პირობებს. განვიხილოთ უსასრულო მიმდევრობის შემთხვევა. აგებიდან გამომდინარე, (6)-ის გათვალისწინებით ცხადია, რომ Π' შედგება წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთებისაგან. დასამტკიცებელი გვრჩება Π' კლასის მეშვეობით E სიმრავლის თითქმის დაფარვა. ეს დასცენა მიიღება შემდეგი შეფასებიდან:

$$\left| E \setminus \bigcup_{s=1}^{\infty} \bigcup_{I \in \Pi'_s} I \right| \leq \left| E \setminus \bigcup_{s=1}^m \bigcup_{I \in \Pi'_s} I \right| \leq \left(1 - \frac{1}{20}\right)^m |E|. \quad (m \in \mathbb{N}).$$

უკანასკნული შეფასება კი ადვილად მტკიცდება ინდუქციით m -ის მიმართ (5)-ის და (7)-ის საფუძველზე. ამით, განსახილვე შემთხვევაში, თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა გადავიდეთ ზოგად შემთხვევაზე, ე.ი. როცა E არის ნებისმიერი წრფივი სიმრავლე. აღვნიშნოთ

$$\Pi_k = \{I \in \Pi : I \subset (k, k+1)\} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

ცხადია, ყოველი $k \in \mathbb{Z}$ -სთვის, Π_k ქმნის $E \cap (k, k+1)$ სიმრავლის ვიტალის აზრით დაფარვას. შემდეგ, ყოველი $k \in \mathbb{Z}$ -სთვის უკვე განხილული შემთხვევის საფუძველზე Π_k -დან გამოვყოფთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთების Π'_k ქვეკლასი, რომელიც თითქმის ფარავს $E \cap (k, k+1)$ სიმრავლეს. ადვილი დასანახია, რომ $\Pi' = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Pi'_k$ ქვეკლასის მონაკვეთები იქნებიან წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი და თითქმის დაფარავენ E სიმრავლეს. $\square$

შენიშვნა 12.2.4. თეორემა 12.2.2-ის დამტკიცებისთვის გამოყენებული იყო თეორემა 12.2.1, თუმცა შესაძლებელია მისი დამტკიცება უშუალოდაც - მონაკვეთების ამორჩევის ხარბი ალგორითმის გამოყენებით.

ამოცანები

1. აჩვენეთ, რომ შემოსაზღვრულ ზომიან სივრცეში დადებითი ზომის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ სიმრავლეთა ნებისმიერი კლასი არაუმეტეს თელავია. მითითება: ნებისმიერი ნატურალური k რიცხვისათვის განიხილეთ იმ სიმრავლეების ქვეკლასი, რომელთა ზომები მეტია $1/k$ -ზე.
2. აჩვენეთ, რომ σ -შემოსაზღვრულ ზომიან სივრცეში დადებითი ზომის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ სიმრავლეთა ნებისმიერი კლასი არაუმეტეს თელავია.
3. ვთქვათ, შემოსაზღვრული $E \subset \mathbb{R}$ სიმრავლე დაფარულია მონაკვეთების სასრული Π კლასით. დაამტკიცეთ, რომ:
 - ა) Π -დან შეიძლება გამოვყოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთებისაგან შედგენილი Π' ქვეკლასი, ისეთი, რომ $\sum_{I \in \Pi'} |I| \geq |E|/3$;
 - ბ) Π -დან შეიძლება გამოვყოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთებისაგან შედგენილი Π' ქვეკლასი, ისეთი, რომ $\sum_{I \in \Pi'} |I| \geq |E|/2$.
4. დაამტკიცეთ, რომ მონაკვეთების ნებისმიერი კლასის გაერთიანება ზომადი სიმრავლეა.

§ 3. სუსტი ტიპის უტოლობა პარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორისათვის

ვთქვათ, $f \in L(\mathbb{R})$. განვიხილოთ f -თან შემდეგი წესით დაყავშირებული $M(f)$ ფუნქცია:

$$M(f)(x) = \sup_{I \in \mathcal{I}(x)} \frac{1}{|I|} \int_I |f| \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$M(f)$ -ს უწოდებენ f -ის პარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალურ ფუნქციას. უხეშად რომ ვთქვათ, $M(f)(x)$ გვიჩვენებს, თუ რა მაქსიმალური მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს f ფუნქციის მოდულის ინტეგრალურმა საშუალოებმა x წერტილის არეალში.

ასახვას, რომელიც $f \in L(\mathbb{R})$ ფუნქციას $M(f)$ ფუნქციას შეუსაბამებს, პარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალურ ოპერატორს უწოდებენ.

ადილი შესამოწმებელია, რომ M ოპერატორს აქვს შემდეგი თვისებები:

$$0 \leq M(f)(x) \leq \infty,$$

$$M(f+g)(x) \leq M(f)(x) + M(g)(x),$$

$$M(\alpha f)(x) = |\alpha| M(f)(x).$$

შემდეგი თეორემა ადგენს ე.წ. სუსტი ტიპის უტოლობას პარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორისათვის, რომლის გამოყენებითაც მტკიცდება

ინტეგრალის წარმოებადობის შესახებ ლებეგის თეორემა. აქვე აღვნიშნავთ, რომ ამ უტოლობას მნიშვნელოვანი გამოყენებები აქვს ფუნქციათა თეორიის სხვადასხვა საკითხებში.

თეორემა 2.3.1. ნებისმიერი $f \in L(\mathbb{R})$ ფუნქციისათვის $M(f)$ არის ზომადი ფუნქცია და აკმაყოფილებს შეფასებას:

$$|\{M(f) > \lambda\}| \leq \frac{5}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f| \quad (0 < \lambda < \infty).$$

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $\lambda \in (0, \infty)$ -სთვის, $\{M(f) > \lambda\}$ სიმრავლე არის ღია, რითაც $M(f)$ -ის ზომადობა დადგენილი იქნება.

ვითქვათ, $x \in \{M(f) > \lambda\}$. მაშინ მოიძებნება $I \ni x$ მონაკვეთი, ისეთი, რომ

$$\int_I |f| > \lambda |I|.$$

აღვნიშნოთ $\varepsilon = \int_I |f| - \lambda |I|$ და ლებეგის ინტეგრალის აბსოლუტურად უწყვეტობის საფუძველზე ვიპოოთ $\delta > 0$ რიცხვი თვისებით:

$$|E| < \delta \Rightarrow \int_E |f| < \varepsilon.$$

დავადგინოთ $(x - \delta/2, x + \delta/2) \subset \{M(f) > \lambda\}$ ჩართვა. თუ $(x - \delta/2, x + \delta/2)$ მონაკვეთის ნებისმიერი $y \neq x$ წერტილისათვის განვიხილავთ

$$J = I + (y - x)$$

მონაკვეთს, მაშინ ადვილი დასაბახია, რომ $y \in J$. ამასთან, თუ შევნიშნავთ, რომ $J \setminus I$ და $I \setminus J$ წარმოადგენენ $\delta/2$ -ზე მცირე სიგრძის მონაკვეთებს, გვექნება საფუძველი, დაწეროთ,

$$\begin{aligned} \int_J |f| &= \int_I |f| - \int_{I \setminus J} |f| + \int_{J \setminus I} |f| \geq \\ &\geq \int_I |f| - \int_{(I \setminus J) \cup (J \setminus I)} |f| > \int_I |f| - \varepsilon = \lambda |I| = \lambda |J|. \end{aligned}$$

შედეგად ელემენტობა $M(f)(y) > \lambda$ შეფასებას. ამით $\{M(f) > \lambda\}$ სიმრავლის ღიაობა და, მასთან ერთად, $M(f)$ ფუნქციის ზომადობა დამტკიცებულია.

ვითქვათ, $\lambda \in (0, \infty)$. მაშინ ყოველი $x \in \{M(f) > \lambda\}$ წერტილისათვის მოიძებნება x -ის შემცველი I_x მონაკვეთი, ისეთი, რომ

$$\frac{1}{|I_x|} \int_{I_x} |f| > \lambda.$$

შედეგად, I_x მონაკვეთებისათვის სამართლიანი იქნება შეფასებები:

$$|I_x| < \frac{1}{\lambda} \int_{I_x} |f| \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f|. \quad (1)$$

მონაკვეთების $\Pi = \{I_x\}$ კლასი ფარავს $\{M(f) > \lambda\}$ სიმრავლეს, ამასთან, (1)-ის ძალით Π კლასის მონაკვეთებს აქვთ ერთობლივ შემოსაზღვრული სიგრძეები. ეს საფუძველს გვაძლევს, თეორემა 12.2.1-ის გამოყენებით, Π -დან გამოვყოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთებისაგან შედგენილი არაუმეტეს თვლადი Π' ქვეკლასი, რომლისთვისაც

$$\sum_{I \in \Pi'} |I| \geq \frac{1}{5} |\{M(f) > \lambda\}|. \quad (2)$$

$I \in \Pi'$ მონაკვეთების წყვილ-წყვილად თანაუკვეთობისა და (1), (2) პირობების ძალით დაეწერთ,

$$\begin{aligned} |\{M(f) > \lambda\}| &\leq 5 \sum_{I \in \Pi'} |I| < 5 \sum_{I \in \Pi'} \frac{1}{\lambda} \int_I |f| = \\ &= \frac{5}{\lambda} \int_{\bigcup_{I \in \Pi'} I} |f| \leq \frac{5}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f|. \end{aligned}$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 12.3.1. თუ გავითვალისწინებთ ტოლობას:

$$\{M(f) = \infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{M(f) > k\},$$

თეორემა 12.3.1-ის საფუძველზე დავასკენით, რომ ნებისმიერი $f \in L(\mathbb{R})$ -სთვის, $M(f)$ მაქსიმალური ფუნქცია თითქმის ყველგან სასრულია.

თუ T ოპერატორი ყოველ $f \in L(\mathbb{R})$ ფუნქციას შეუსაბამებს ზომად $T(f)$ ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს შეფასებას:

$$|\{T(f) > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f| \quad (0 < \lambda < \infty),$$

სადაც c არის f ფუნქციისაგან დამოუკიდებელი დადებითი მუდმივი, მაშინ ამბობენ, რომ T ოპერატორს აქვს სუსტი $(1, 1)$ ტიპი.

თუ T ოპერატორი ყოველ $f \in L(\mathbb{R})$ ფუნქციას შეუსაბამებს $T(f) \in L(\mathbb{R})$ ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს შეფასებას:

$$\int_{\mathbb{R}} |T(f)| \leq c \int_{\mathbb{R}} |f|,$$

სადაც c არის f ფუნქციისაგან დამოუკიდებელი დადებითი მუდმივი, მაშინ ამბობენ, რომ T ოპერატორს აქვს ძლიერი $(1, 1)$ ტიპი.

ჩებიშევის უტოლობიდან გამომდინარე, ცხადია, რომ თუ ოპერატორს აქვს ძლიერი $(1, 1)$ ტიპი, მაშინ მას აქვს სუსტი $(1, 1)$ ტიპი.

შენიშვნა 12.3.2. თეორემა 12.3.1-ის ძალით, პარდი-ლიტლუდის მაქსიმალური ოპერატორის აქვს სუსტი $(1, 1)$ ტიპი. აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ მას არა აქვს ძლიერი $(1, 1)$ ტიპი. უფრო მეტიც, $M(f)$ მაქსიმალური ფუნქცია, შეიძლება, საერთოდ არ იყოს ჯამებადი. მართლაც, თუ განვიხილავთ $f = \chi_{(0,1)}$ ფუნქციას, ადვილი შესამოწმებელია, რომ ყოველი $x > 1$ წერტილისათვის სამართლიანია შემდეგი:

$$M(f)(x) \geq \frac{1}{|[0, x]|} \int_{[0, x]} f = \frac{1}{x}.$$

საიდანაც ვასკენით $M(f)$ ფუნქციის არაჯამებადობას.

შენიშვნა 12.3.3. პარდი-ლიტლუდის მაქსიმალური ფუნქცია თითქმის ყოველ წერტილში აკმაყოფილებს $M(f)(x) \geq |f(x)|$ შეფასებას. მართლაც, მაქსიმალური ფუნქციის განსაზღვრებიდან გამომდინარე, ნებისმიერი x წერტილისათვის გვექნება, რომ

$$M(f)(x) \geq \lim_{I \in I(x), I \rightarrow x} \frac{1}{|I|} \int_I |f|.$$

ამასთანავე, ლებეგის თეორემის ძალით, თითქმის ყოველი x -სთვის,

$$\lim_{I \in I(x), I \rightarrow x} \frac{1}{|I|} \int_I |f| = |f(x)|.$$

შედეგად, $M(f)(x) \geq |f(x)|$ თითქმის ყველგან.

ამოცანები

1. M ოპერატორისათვის დაამტკიცეთ სუსტი $(1, 1)$ ტიპის უტოლობის შემდეგი დაზუსტება: $|\{M(f) > \lambda\}| \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f|$.
2. დაამტკიცეთ, რომ $M(f) \in L(\mathbb{R})$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(x) = 0$ თითქმის ყველგან.

§ 4. ზოგიერთი შენიშვნა ლებეგის თეორემასთან დაკავშირებით

1. ლებეგის თეორემა ლოკალურად ჯამებადი ფუნქციებისათვის. $\mathbb{R}$ -ზე განსაზღვრულ f ფუნქციას ეწოდება ლოკალურად ჯამებადი, თუ f ჯამებადია ნებისმიერ შემოსაზღვრულ და ზომად სიმრავლეზე. ყველა ლოკალურად ჯამებადი ფუნქციის კლასი აღინიშნება $L_{loc}(\mathbb{R})$ ჩანაწერით. ცხადია, რომ $L(\mathbb{R}) \subset L_{loc}(\mathbb{R})$. ამასთან, იგივერად ერთის ტოლი ფუნქციის მაგალითი გვარწმუნებს, რომ აღნიშნული ჩართვა მკაცრია.

როგორც შემდეგი დებულება გვიჩვენებს, თეორემა 12.1.2 ვრცელდება $L_{loc}(\mathbb{R})$ კლასის ფუნქციებზე.

თეორემა 12.4.1. ნებისმიერი $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ ფუნქციისათვის თითქმის ყოველ $x \in \mathbb{R}$ წერტილში სრულდება ტოლობა:

$$\lim_{I \in I(x), I \rightarrow x} \frac{1}{|I|} \int_I f = f(x).$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი მთელი k რიცხვი. ცხადია, $f_k = f \chi_{(k, k+1)}$ ფუნქცია იქნება $\mathbb{R}$ -ზე ჯამებადი და მის მიმართ ლებეგის თეორემის გამოყენებით დავასკვნით, რომ თითქმის ყოველი $x \in \mathbb{R}$ -სთვის,

$$\lim_{I \in I(x), I \rightarrow x} \frac{1}{|I|} \int_I f_k = f_k(x).$$

შევნიშნოთ, რომ: ა) თუ $x \in (k, k+1)$ წერტილის შემცველი I მონაკვეთი საკმარისად მცირეა, მაშინ ამ მონაკვეთზე f და f_k ფუნქციებს ერთი და იგივე ინტეგრალური საშუალოები აქვთ; ბ) $(k, k+1)$ მონაკვეთის ნებისმიერი x წერტილისათვის, $f_k(x) = f(x)$. შედეგად, $(k, k+1)$ მონაკვეთის თითქმის ყოველი x წერტილისათვის შესრულებული იქნება ტოლობა:

$$\lim_{I \in I(x), I \rightarrow x} \frac{1}{|I|} \int_I f = f(x).$$

აქედან, $k \in \mathbb{Z}$ ნებისმიერობის გათვალისწინებით, მარტივად გამომდინარეობს დასკვნა დასამტკიცებელი ტოლობის წრფის თითქმის ყოველ წერტილში შესრულების შესახებ. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

II. ზომადი სიმრავლის სიმკვრივისა და გაიშვიათების წერტილები. ვთქვათ, E რაიმე ზომადი სიმრავლეა წრფეზე. x წერტილს ეწოდება E სიმრავლის სიმკვრივის წერტილი, თუ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|(x-h, x+h) \cap E|}{2h} = 1,$$

და ეწოდება E სიმრავლის გაიშვიათების წერტილი, თუ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|(x-h, x+h) \cap E|}{2h} = 0.$$

შევნიშნოთ, რომ x არის სიმკვრივის წერტილი E -სთვის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა x არის გაიშვიათების წერტილი E -ს დამატებისათვის.

სიმკვრივის წერტილის ცნება წააგავს სიმრავლის შიგა წერტილის ცნებას და გამოსხატავს იმ მოვლენას, რომ x წერტილი თითქმის სრულადაა გარშემორტყმული E სიმრავლის წერტილებით, გაიშვიათების წერტილის ცნება კი წააგავს სიმრავლის გარე წერტილის ცნებას და გამოსხატავს მოვლენას, როცა x წერტილი თითქმის სრულადაა გარშემორტყმული E სიმრავლის გარეთ მდებარე წერტილებით.

თეორემა 12.4.2. ვთქვათ, E ზომადი სიმრავლეა წრფეზე. მაშინ თითქმის ყოველი $x \in E$ წერტილი არის E სიმრავლის სიმკვრივის წერტილი, ხოლო თითქმის ყოველი $x \notin E$ წერტილი არის E სიმრავლის გაიშვიათების წერტილი.

დამტკიცება. ცხადია, χ_E ლოკალურად ჯამებადი ფუნქციაა. ამიტომ, თეორემა 12.4.1-ის ძალით, თითქმის ყოველი x წერტილისათვის გვექნება, რომ

$$\lim_{I \in I(x), I \rightarrow x} \frac{1}{|I|} \int_I \chi_E = \chi_E(x).$$

შემდეგ, თუ გავითვალისწინებთ $\frac{1}{|I|} \int_I \chi_E = \frac{|I \cap E|}{|I|}$ ტოლობას და ზღვარს განვიხილავთ მხოლოდ $I = (x - h, x + h)$ სახის მონაკვეთების მიხედვით, ღაფრწმუნდებით თეორემის სამართლიანობაში. $\square$

III. ლებეგის წერტილის ცნება. ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}$ არის რაიმე ზომადი სიმრავლე, x არის E -ს შიგა წერტილი. $f \in L(E)$ და $f(x) \neq \pm \infty$. x წერტილში ინტეგრალის ლიფერენცირებადობის გამომხატველი ტოლობა:

$$\lim_{I \in I(x), I \rightarrow x} \frac{1}{|I|} \int_I f = f(x),$$

შეიძლება შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$\lim_{I \in I(x), I \rightarrow x} \frac{1}{|I|} \int_I [f(y) - f(x)] dm(y) = 0. \quad (1)$$

თუ f ფუნქცია აკმაყოფილებს კიდევ უფრო ძლიერ პირობას შემდეგი ტოლობის სახით:

$$\lim_{I \in I(x), I \rightarrow x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y) - f(x)| dm(y) = 0, \quad (2)$$

მაშინ ამბობენ, რომ x არის f ფუნქციის ლებეგის წერტილი.

ინტეგრალის ლიფერენცირებადობისა და ლებეგის წერტილის ცნების გამომხატველ პირობებს (ე.ი. (1) და (2) პირობებს) შეიძლება შევხედოთ როგორც f ფუნქციის საშუალოდ უწყვეტობას x წერტილში. (2) პირობის შემთხვევაში, უწყვეტობის ფაქტორი უფრო გამოყვეთილია, რაც აიხსნება იმით, რომ (1) ტოლობის შესრულება შეიძლება გამოწვეული იყოს $f(y) - f(x)$ ნაზრდის დადებითი და უარყოფითი მნიშვნელობების ურთიერთაქრობის (ე.წ. ინტერფერენციის) ხარჯზე. მაშინ როცა (2) ტოლობის შესრულება უკაემირდება ნაზრდის აბსოლუტური სიდიდის სიმცირეს.

აღვნიშნავთ, რომ ლებეგის წერტილებში უზრუნველყოფილია ფუნქციის გასაშუალების მთელი რიგი პროცესების კრებადობა (მაგალითად, ფუნქციის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის არითმეტიკული საშუალოების კრებადობა). რაც აიხსნება ზემოთ ნახსენები საშუალოდ უწყვეტობის მოუღწივით.

თეორემა 12.4.3. ნებისმიერი $f \in L_{loc}(\mathbb{R})$ ფუნქციისათვის თითქმის ყოველი $x \in \mathbb{R}$ წერტილი არის ლებეგის წერტილი.

დამტკიცება. განვიხილოთ ჯამებადი f ფუნქციის შემთხვევა. ლოკალურად ჯამებად ფუნქციებზე ლებულების გავრცელება ხდება თეორემა 12.4.1-სთვის გამოყენებული სქემით.

მსგულობა თითქმის სრულად იმეორებს ლებეგის თეორემის შემთხვევაში გამოყენებულ სქემას.

თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ თეორემა ცხადია უწყვეტი და ჯამებადი g ფუნქციისათვის. უფრო მეტიც, ასეთი ფუნქციებისათვის (2) ტოლობა შესრულდება უკლებლივ ყოველ წერტილში.

ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $\lambda > 0$ -სთვის შემდეგი სიმრავლე:

$$E_\lambda = \left\{ x : \overline{\lim}_{I \in I(x), I \rightarrow x} \frac{1}{|I|} \int_I |f - f(x)| > 2\lambda \right\}$$

არის ნული ზომის.

ადვილი დასანახია, რომ ყველა იმ წერტილის სიმრავლე, რომლისთვისაც არ სრულდება (2) ტოლობა, წარმოადგება $E_{1/k}$ ($k \in \mathbb{N}$) სიმრავლეების გაერთიანების სახით, ამიტომ E_λ ($\lambda > 0$) სიმრავლეთა ნულზომიანობის დამტკიცების შემთხვევაში საჭირო დასვენა დადგენილი იქნება.

ეთქვას, $\lambda > 0$. თეორემა 11.4.4-ის ძალით ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სთვის შეგვიძლია ვიპოვოთ უწყვეტი და ჯამებადი g ფუნქცია, რომლისთვისაც

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g| < \varepsilon. \quad (3)$$

g -ს უწყვეტობის გამო ნებისმიერი x -სთვის,

$$\lim_{I \in I(x), I \rightarrow x} \frac{1}{|I|} \int_I |g - g(x)| = 0. \quad (4)$$

განვიხილოთ რაიმე x წერტილი. შევაფასოთ $\frac{1}{|I|} \int_I |f - f(x)|$ გამოსახულება შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{|I|} \int_I |f - f(x)| \leq \frac{1}{|I|} \int_I |f - g| + \frac{1}{|I|} \int_I |g - g(x)| + |g(x) - f(x)|.$$

აქედან, (4)-ის გათვალისწინებით ადვილი დასანახია, რომ

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{I \in I(x), I \rightarrow x} \frac{1}{|I|} \int_I |f - f(x)| &\leq \overline{\lim}_{I \in I(x), I \rightarrow x} \frac{1}{|I|} \int_I |f - g| + |g(x) - f(x)| \leq \\ &\leq M(f - g)(x) + |g(x) - f(x)|. \end{aligned} \quad (5)$$

(5)-დან გამომდინარე ლავწერით,

$$E_\lambda \subset \{x : M(f - g)(x) > \lambda\} \cup \{x : |g(x) - f(x)| > \lambda\} = A \cup B.$$

M ოპერატორისათვის სუსტი $(1, 1)$ ტიპის უტოლობის ძალით:

$$|A| \leq \frac{5}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f - g|.$$

B სიმრავლის ზომა კი, ჩებიშევის უტოლობით, შემდეგნაირად შეფასდება:

$$|B| \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f - g|.$$

ახლა, თუ გავიიყუალისწინებთ (3)-ს, დავწერთ, რომ

$$|E_\lambda| \leq \frac{6\varepsilon}{\lambda}.$$

საიდანაც, $\varepsilon > 0$ -ის ნებისმიერობის საფუძველზე დავასცენით E_λ სიმრავლის ნულზომიანობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

IV. ზომად ფუნქციითა აპროქსიმაციულად უწყვეტობა. ამ პუნქტში განვიხილავთ უწყვეტობის ცნების კიდევ ერთ ვარიანტს - აპროქსიმაციულად უწყვეტობას, რომლის განსაზღვრა ხდება სიმეერივის წერტილის ცნების საფუძველზე.

ეთქვას, f არის $E \subset \mathbb{R}$ სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია, $A \subset E$ და $x \in A$. f ფუნქციას ეწოდება A სიმრავლის გასწვრივ უწყვეტი x წერტილში, თუ f -ის შემლდევა A -ზე არის უწყვეტი x -ში.

$E \subset \mathbb{R}$ სიმრავლეზე განსაზღვრულ f ფუნქციას ეწოდება აპროქსიმაციულად უწყვეტი $x \in E$ წერტილში, თუ მოიძებნება ზომადი $A \subset \mathbb{R}$ სიმრავლე თვისებებით:

- $x \in A$ და x არის A -ს სიმეერივის წერტილი;
- f არის $A \cap E$ სიმრავლის გასწვრივ უწყვეტი x -ში.

ყოველი უწყვეტობის წერტილი არის აპროქსიმაციულად უწყვეტობის წერტილიც (ამის დასადაგენად საემაჩივია, A სიმრავლის როლში ავიღოთ რიცხვითი წრფე). ღირსილეს ფუნქციის, ე.ი. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქციის მაგალითი კი გვიჩვენებს, რომ შებრუნებული დასკვნა, სამოგადოდ, არაა სამართლიანი.

ლუზინის თეორემა ადგენს გარკვეულ სიახლოვეს ზომად ფუნქციითა და უწყვეტ ფუნქციითა კლასებს შორის. ამ სიახლოვის კიდევ ერთი გამოხატულებაა შემდეგი დებულება.

თეორემა 2.4.4. ზომად $E \subset \mathbb{R}$ სიმრავლეზე განსაზღვრული ნებისმიერი ზომადი და სასრული f ფუნქცია აპროქსიმაციულად უწყვეტია თითქმის ყოველ $x \in E$ წერტილში.

დამტკიცება. N -ით აღენიშნოთ E სიმრავლის ყველა იმ წერტილის სიმრავლე, რომელშიც f არაა აპროქსიმაციულად უწყვეტი.

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. ლემის თეორემის ძალით (იხ. თეორემა 7.9.2) შეგვიძლია ვიპოვოთ ზომადი $F \subset E$ სიმრავლე თვისებებით: $|E \setminus F| < \varepsilon$ და f ფუნქციის შეზღუდვა F სიმრავლეზე არის უწყვეტი. თუ გავითვალისწინებთ, რომ ზომადი სიმრავლის თითქმის ყოველი წერტილი მისივე სიმცირის წერტილია, დავასკვნით f -ის აპროქსიმაციულად უწყვეტობას F -ის თითქმის ყოველ წერტილში. აქედან გამომდინარე, N ჩართულია $E \setminus F$ სიმრავლისა და F -ის ნულზომიანი ქვესიმრავლის გაერთიანებაში. რის საფუძველზეც ვლევულობთ $|N|_* < \varepsilon$ შეფასებას. აქედან კი, $\varepsilon > 0$ ნებისმიერობის გათვალისწინებით ვასკვნით N სიმრავლის ნულზომიანობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამოცანები

1. აჩვენეთ, რომ თუ x არის ზომადი E სიმრავლის სიმცირის წერტილი, მაშინ

$$\lim_{I \in \mathcal{I}(x), I \rightarrow x} \frac{|I \cap E|}{|I|} = 1.$$

2. აჩვენეთ, რომ სიმრავლის სიმცირეზე წერტილში შეიძლება მიიღოს ნებისმიერი $\alpha \in (0, 1)$ მნიშვნელობა, ე.ი. ნებისმიერი $\alpha \in (0, 1)$ -სთვის მოიძებნება ზომადი E სიმრავლე, ისეთი, რომ $\lim_{h \rightarrow 0} |(-h, h) \cap E|/2h = \alpha$.
3. აჩვენეთ, რომ წერტილში სიმრავლის სიმცირე შეიძლება არ არსებობდეს, ე.ი. ააგეთ ზომადი E სიმრავლე, რომლისთვისაც არ არსებობს ზღვარი: $\lim_{h \rightarrow 0} |(-h, h) \cap E|/2h$.
4. აჩვენეთ, რომ $f \in L(\mathbb{R})$ ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალის დიფერენცირებადობის წერტილი (ე.ი. წერტილი, რომელშიც $\frac{1}{|I|} \int_I f \rightarrow f(x)$) შეიძლება არ იყოს f ფუნქციის ლებეგის წერტილი.
5. აჩვენეთ, რომ $f \in L([a, b])$ ფუნქციის ყოველი ლებეგის წერტილი არის მისი აპროქსიმაციულად უწყვეტობის წერტილი. ააგეთ ფუნქციის მაგალითი, რომელიც გვიჩვენებს, რომ შებრუნებული დებულება საზოგადოდ სამართლიანი არაა.
6. აჩვენეთ, რომ $\mathbb{R}$ -ზე განსაზღვრული ზომადი და შემოსაზღვრული ფუნქციისათვის ყოველი აპროქსიმაციულად უწყვეტობის წერტილი არის მისი ლებეგის წერტილი.

§ 5. საკითხი ლებეგის ინტეგრალის მეშვეობით პირველყოფილი ფუნქციის აღდგენის შესახებ

განვიხილოთ დიფერენცირებისა და ლებეგის მიხედვით ინტეგრების ოპერაციათა ურთიერთშებრუნებადობის საკითხის მეორე ასპექტი: არის თუ არა ლებეგის მიხედვით ინტეგრება შებრუნებული ოპერაცია გაწარმოებისათვის?

კერძოდ, ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: ვთქვათ, f არის $[a, b]$ სეგმენტზე წარმოებადი ფუნქცია და ცნობილია, რომ $f' \in L([a, b])$. მაშინ საპრობლემაოა თუ არა წარმოდგენა:

$$f(x) = f(a) + \int_{[a, x]} f' \quad (x \in [a, b])? \quad (1)$$

ე.ი. ლებეგის ინტეგრალი აღადგენს თუ არა პირველყოფილ ფუნქციას მისი სასრული და ჯამებადი წარმოებულის მეშვეობით?

შემოსაზღვრული წარმოებულის შემთხვევაში ამ კითხვაზე დადებითი პასუხი მოცემული იყო §9.4-ში. სრული ზოგადობით საკითხის გადაწყვეტა მოითხოვს ღამტკიცების გაცილებით რთული მეთოდების გამოყენებას.

დასმული საკითხის გადაწყვეტა მჭიდროდაა დაკავშირებული შემდეგ ამოცანასთან: დაგვანახიათოთ შემდეგი სამი თვისების მქონე f ფუნქციები: (i) f თითქმის ყველგან წარმოებადია; (ii) $f' \in L([a, b])$ და (iii) f ფუნქციისათვის ადგილი აქვს (1) წარმოდგენას. აქ f' გაიგება, როგორც $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობები f -ის არაწარმოებადობის წერტილებში მიიჩნევა ნულის ტოლად.

(i)-(iii) თვისებების მქონე ფუნქციის შესახებ ამბობენ, რომ ის წარმოდგება ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის სახით. ასეთ ტერმინს გამართლება აქვს შემდეგი ლებეგის საფუძველზე: $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული f ფუნქციისათვის შემდეგი წინადადებები ტოლფასია:

- f ფუნქციას აქვს (i)-(iii) თვისებები;
- f წარმოდგება რაიმე ჯამებადი ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის სახით, ე.ი. მოიძებნება $g \in L([a, b])$ ფუნქცია, ისეთი, რომ

$$f(x) = f(a) + \int_{[a, x]} g \quad (x \in [a, b]).$$

ცხადია, მეორე წინადადება არის პირველის შედეგი. შებრუნებული იმპლიკაციის დასადგენად უნდა გამოვიყენოთ ლებეგის თეორემა ინტეგრალის დიფერენცირების შესახებ. ამ თეორემის ძალით, თითქმის ყოველ $x \in [a, b]$ წერტილში f წარმოებადია და სრულდება ტოლობა $f'(x) = g(x)$. აქედან გამომდინარე, f -ს აქვს (i)-(iii) თვისებები.

ამრიგად, თუ f ფუნქცია წარმოდგება ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის სახით, მაშინ ეს წარმოდგენა აუცილებლად f -ის წარმოებულის განუსაზღვრელი ინტეგრალის მეშვეობით მოხდება.

ამ თავის შემდგომი პარაგრაფები დაეთმობა გემოთ დასმული ორი ამოცანის შესწავლას. ორივე მათგანი გადაწყვეტილი იყო ლებეგის მიერ.

შენიშვნა 12.5.1. არსებობს წარმოებადი ფუნქცია, რომლის წარმოებული არის შემოუსაზღვრელი, მაგრამ არის ჯამებადი. ასეთი F ფუნქციის ასაგებად საჭიროა განვიხილოთ $[0, 1]$ მონაკვეთზე განსაზღვრული არაუარყოფითი f ფუნქცია თვისებებით: f უწყვეტია ყოველ $x \in [0, 1)$ წერტილში, f შემოუსაზღვრელია, $f \in L([0, 1])$ და

$$\int_{[1-\varepsilon, 1]} f = o(\varepsilon) \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (2)$$

ასეთი თვისებების f ფუნქცია ჩათვალეთ ცნობილად. მაშინ F ფუნქცია განესაზღვროთ, როგორც f -ის ლებეგის ინტეგრალი ცვლადი ზედა საზღვრით: $F(x) = \int_{[0, x]} f \quad (x \in [0, 1])$.

$[0, 1)$ მონაკვეთზე f ფუნქციის უწყვეტობის გამო გვექნება, რომ ყოველი $x \in [0, 1)$ წერტილისათვის, $F'(x) = f(x)$. რაც შეეხება $x = 1$ წერტილში წარმოებადობას: (2) პირობის გათვალისწინებით, მარტივი დასანახია, რომ $F'(1)$ არსებობს და ნულის ტოლია. ამრიგად, F ფუნქციას ყოველ წერტილში აქვს წარმოებული, რომელიც ერთდროულად არის შემოუსაზღვრელიც და ჯამებადიც.

ახლა ავაგოთ ზემოთ მითითებული თვისების მქონე f ფუნქცია. ამისათვის $[0, 1)$ მონაკვეთი დავეყოთ

$$\Delta_k = \left[1 - \frac{1}{2^{k-1}}, 1 - \frac{1}{2^k}\right) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

მონაკვეთებად.

შემდგომში შევთანხმდეთ, რომ $I \subset [0, 1]$ მონაკვეთისათვის და $h \neq 0$ რიცხვისათვის, $f_{I, h}$ -ით აღნიშნული იქნება $[0, 1]$ -ზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც ნულის ტოლია I მონაკვეთის გარეთ და რომლის გრაფიცი Ox ღერძთან ერთად ქმნის ტოლფერდა სამკუთხედს I მონაკვეთის ტოლი ფუძით და წვეროთი (c, h) წერტილში, სადაც c არის I -ს შუაწერტილი.

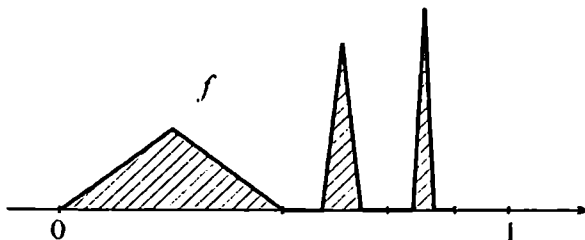
ყოველი k -სათვის Δ_k -ს კონცენტრული $I_k \subset \Delta_k$ მონაკვეთი შევარჩიოთ იმდენად მცირე, რომ $f_{I_k, k}$ ფუნქცია აკმაყოფილებდეს პირობას:

$$\int_{[0, 1]} f_{I_k, k} \leq \frac{|\Delta_k|}{k}. \quad (3)$$

ახლა განვიხილოთ $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია, რომელიც ყოველ Δ_k უბანზე $f_{I_k, k}$ ფუნქციის ტოლია (ნახ. 12.2).

შევამოწმოთ (2)-ის სამართლიანობა. დანარჩენი თვისებები ცხადია. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon \in (0, 1)$ რიცხვი. k_ε იყოს ინდექსი, რომლისთვისაც $\frac{1}{2^{k_\varepsilon}} \leq \varepsilon < \frac{1}{2^{k_\varepsilon - 1}}$. მაშინ (3)-ის ძალით გვექნება, რომ

$$\int_{[1-\varepsilon, 1]} f \leq \int_{[1-\frac{1}{2^{k_\varepsilon-1}}, 1]} f = \sum_{k=k_\varepsilon}^{\infty} \int_{\Delta_k} f_{I_k, k} \leq$$



ნახ. 12.2.

$$\leq \sum_{k=k_\varepsilon}^{\infty} \frac{|\Delta_k|}{k} \leq \frac{1}{k_\varepsilon} \sum_{k=k_\varepsilon}^{\infty} |\Delta_k| = \frac{1}{k_\varepsilon} \frac{1}{2^{k_\varepsilon-1}} \leq \frac{2\varepsilon}{k_\varepsilon}.$$

რითაც ცხადია, (2) დადგენილია.

შენიშვნა 12.5.2. ლებეგის ინტეგრალი სრულად ვერ წყვეტს პირველყოფილის აღდგენის ამოცანას, რადგანაც არსებობენ ფუნქციები არაჯამებადი წარმოებულით. ასეთი ფუნქციის ასაგებად საჭიროა განვიხილოთ $[0, 1]$ მონაკვეთზე განსაზღვრული და ყოველ $x \in [0, 1)$ წერტილში უწყვეტი f ფუნქცია, რომლის არასაკუთრივი ინტეგრალი:

$$\text{v.p.} \int_{[0,1]} f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[0, 1-\varepsilon]} f,$$

არის პირობით კრებადი (ე.ი. კრებადია, მაგრამ არაა აბსოლუტურად კრებადი), ამასთან, 1-ის მიდამოში f ფუნქცია განიცდის ძლიერ ოსცილაციას იმ თვალსაზრისით, რომ

$$\text{v.p.} \int_{[1-\varepsilon, 1]} f = o(\varepsilon) \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (4)$$

ასეთი თვისებების f ფუნქცია ჩათვალეთ ცნობილად. მაშინ F ფუნქცია განსაზღვრეთ შემდეგნაირად:

$$F(x) = \begin{cases} \int_{[0,x]} f, & x \in [0, 1); \\ \text{v.p.} \int_{[0,1]} f, & x = 1. \end{cases}$$

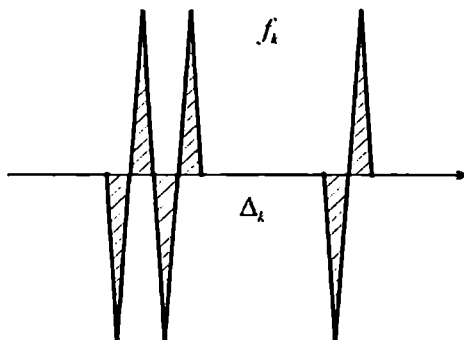
$[0, 1)$ მონაკვეთზე f ფუნქციის უწყვეტობის გამო გვექნება, რომ ყოველი $x \in [0, 1)$ წერტილისათვის, $F'(x) = f(x)$. რაც შეეხება $x = 1$ წერტილში წარმოებადობას: (4) პირობის გათვალისწინებით მარტივი დასანახია, რომ $F'(1)$ არსებობს და ნულის ტოლია. ამრიგად, F ფუნქციას ყოველ წერტილში აქვს წარმოებული. ვაჩვენოთ F' -ის არაჯამებადობა. მართლაც, $[0, 1)$ მონაკვეთზე F' ეთხვევა f ფუნქციას, რომლის რიმანის არასაკუთრივი ინტეგრალი ამ მონაკვეთზე არაა აბსოლუტურად კრებადი. ეს უკანასკნელი პირობა

კი, თეორემა 9.3.1-ის ძალით, იწვევს იმას, რომ $f \notin L([0, 1])$. შედეგად, $F' \notin L([0, 1])$.

ახლა ავაგოთ ზემოთ ჩამოთვლილი თვისებების მქონე f ფუნქცია. ვისარგებლოთ წინა მენიშვნის აღნიშვნებით. ყოველი k -სათვის Δ_k დავეყთ ერთი და იგივე სიგრძის $I_{k,1}, \dots, I_{k,4^k}$ მონაკვეთებად და განვიხილოთ ფუნქცია:

$$f_k = \sum_{m=1}^{4^k} (-1)^m f_{I_{k,m}, 2^k}.$$

ამრიგად, f_k ფუნქციის გრაფიკზე რიგ-რიგობითაა განლაგებული ქვემოთ და ზემოთ მიმართული სამკუთხა უბნები $I_{k,m}$ ფუძით და 2^k -ს ტოლი სიმაღლით (ნახ. 12.3).



ნახ. 12.3.

ცხადია, f_k უწყვეტია და ნულის ტოლია Δ_k -ს გარეთ. ამასთან, ადვილი შესამოწმებელია, რომ:

$$\int_{\Delta_k} |f_k| = \frac{1}{2}, \quad (5)$$

$$\int_{\Delta_k} f_k = 0, \quad (6)$$

ყოველი $I \subset \Delta_k$ მონაკვეთისათვის სრულდება შეფასება:

$$\left| \int_I f_k \right| \leq \frac{|\Delta_k|}{2^k}. \quad (7)$$

ახლა განვიხილოთ $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია, რომელიც თითოეულ Δ_k უბანზე f_k ფუნქციის ტოლია. ცხადია, f უწყვეტია ყოველ $x \in [0, 1]$ წერტილში. არასაკუთრივი *ს.პ.* $\int_{[0,1]} f$ ინტეგრალის პირობით კრებადობა ადვილად მტკიცდება f_k ფუნქციების (5) – (7) თვისებების საფუძველზე. დავადგინოთ (4)-ის სამართლიანობა. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon \in (0, 1)$ რიცხვი. k_ε იყოს

ინდექსი, რომლისთვისაც $1 - \varepsilon$ წერტილი მოთავსებულია Δ_{k_ε} მონაკვეთში. (5) - (7) პირობების გათვალისწინებით აღვნიშნავთ, რომ

$$\begin{aligned} \left| \nu.p. \int_{|1-\varepsilon, 1|} f \right| &= \left| \int_{|1-\varepsilon, 1| \cap \Delta_{k_\varepsilon}} f_{k_\varepsilon} + \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} \int_{\Delta_k} f_k \right| = \\ &= \left| \int_{|1-\varepsilon, 1| \cap \Delta_{k_\varepsilon}} f_{k_\varepsilon} \right| \leq \frac{|\Delta_{k_\varepsilon}|}{2^{k_\varepsilon}} \leq \frac{\varepsilon}{2^{k_\varepsilon}}. \end{aligned}$$

ამით, (4) დამტკიცებულია.

შენიშვნა 12.5.3. პირველყოფილის აღდგენის ამოცანის სრული გადაწყვეტა მოიცემა ა. დანეუას მიერ შემოღებული ინტეგრების პროცესით (იხ. მაგ. წიგნები: [28], [30], [1], [12]).

შენიშვნა 12.5.4. 12.5.1 და 12.5.2 შენიშვნებში მოცემული მაგალითები შეიძლება აიგოს სხვა გზითაც (იხ. ამოცანები პარაგრაფის ბოლოს).

ამოცანები

1. განვიხილოთ $[0, 1]$ სეგმენტზე შემდეგნაირად განსაზღვრული f ფუნქცია: $f(0) = 0$ და $f(x) = x^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{x}$, როცა $x \in (0, 1]$. აჩვენეთ, რომ f ყოველ წერტილში წარმოებადია და მისი წარმოებული არის შემოსაზღვრული და ჯამებადი ფუნქცია.
2. განვიხილოთ $[0, 1]$ სეგმენტზე შემდეგნაირად განსაზღვრული f ფუნქცია: $f(0) = 0$ და $f(x) = x^2 \cos \frac{\pi}{x^2}$, როცა $x \in (0, 1]$. აჩვენეთ, რომ f ყოველ წერტილში წარმოებადია და მისი წარმოებული არის არაჯამებადი ფუნქცია.

§ 6. ზრდადი ფუნქციის დიფერენციალური თვისებები

ამ თავის დარჩენილ ნაწილში ვიგულისხმებთ, რომ $[a, b]$ არის სასრული სიგრძის გადაუგვარებელი სეგმენტი და განვიხილათ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ ფუნქციებს.

თეორემა 12.6.1. ყოველი ზრდადი ფუნქცია არის შემოსაზღვრული, ზომადი და მისი წყვეტის წერტილთა სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ზრდადი $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია. f -ის შემოსაზღვრულობა ცხადია. გადავიღეთ f -ის ზომადობის დამტკიცებაზე. ნებისმიერი $t \in \mathbb{R}$ რიცხვისათვის $\{f < t\}$ სიმრავლე იქნება ან ცარიელი, ანაუკრთ-ერთი $[a, c]$ და $[a, c]$ სახის მონაკვეთებს შორის. მართლაც, $\{f < t\}$ სიმრავლის არაცარიელობის შემთხვევაში განვიხილოთ $c = \sup\{x \in [a, b] \mid f(x) < t\}$ რიცხვი. მაშინ, f ფუნქციის ზრდადობის გამო, აღვიღოთ დასანახია, რომ $\{f < t\}$ არის $[a, c]$ ან $[a, c)$ მონაკვეთი შესაბამისად, იმისდა მიხედვით, $f(c) < t$ თუ $f(c) \geq t$. ამით f ფუნქციის ზომადობა დადგენილია.

f ფუნქციის ზრდადობის გათვალისწინებით, ადვილი შესამოწმებელია შემდეგი წინადადებების სამართლიანობა:

- ყოველ $x_0 \in [a, b]$ წერტილში არსებობს f -ის მარჯვენა მღვარი - $f(x_0 + 0)$, რომელიც $\inf\{f(x) : x_0 < x \leq b\}$ გამოსახულების ტოლია;
- ყოველ $x_0 \in (a, b]$ წერტილში არსებობს f -ის მარცხენა მღვარი $f(x_0 - 0)$, რომელიც $\sup\{f(x) : a \leq x < x_0\}$ გამოსახულების ტოლია;
- ყოველი $x_0 \in [a, b]$ წერტილისათვის სრულდება შეფასებები: $f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0)$. აქ $f(b + 0)$ მიიჩნევა $f(b)$ -ს ტოლად, ხოლო $f(a - 0)$ კი $f(a)$ -ს ტოლად;
- f ფუნქცია წყვეტილია $x_0 \in [a, b]$ წერტილში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$.

თუ x_0 არის f ფუნქციის წყვეტის წერტილი, მაშინ x_0 -ის შესაბამისი f -ის ნახტომის ინტერვალის ეუწოდოთ $I(x_0) = (f(x_0 - 0), f(x_0 + 0))$ მონაკვეთს. შევნიშნოთ, რომ ნახტომის ინტერვალები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია. მართლაც, განვიხილოთ ნებისმიერი x და y წყვეტის წერტილები, სადაც $x < y$. მაშინ, f -ის ზრდადობის გათვალისწინებით, ადვილი დასაანახია შემდეგი შეფასებების სამართლიანობა:

$$f(x - 0) < f(x + 0) \leq f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq f(y - 0) < f(y + 0).$$

რაც იწვევს $I(x)$ და $I(y)$ ნახტომის ინტერვალების თანაუკვეთობას.

გემოაღნიშნულის შემდეგ, f ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლის არაუმეტეს თვლადობის დასადგენად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ წრფის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ინტერვალთა ნებისმიერი Λ კლასი არაუმეტეს თვლადია. მართლაც, ყოველი $I \in \Lambda$ ინტერვალიდან ავარჩიოთ რაიმე რაციონალური x_I რიცხვი. მაშინ, Λ -ში შემავალი ინტერვალების თანაუკვეთობის გამო, ერთმანეთისაგან განსხვავებული I და J ინტერვალებისათვის x_I და x_J წერტილები განსხვავებული იქნებიან. აქედან გამომდინარე, Λ კლასი ეკვივალენტური იქნება $\{x_I : I \in \Lambda\}$ სიმრავლისა, ეს უკანასკნელი კი არაუმეტეს თვლადია, როგორც $\mathbb{Q}$ -ს ქვესიმრავლე. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 12.6.1. $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი არაუმეტეს თვლადი E სიმრავლისათვის არსებობს ზრდადი ფუნქცია (იხ. ამოცანა 1 პარაგრაფის ბოლოს), რომელიც წყვეტილია ყოველ $x \in E$ წერტილში და უწყვეტია ყოველ $x \notin E$ წერტილში.

ეთქვათ, f თითქმის ყოველ წერტილში წარმოებადი ფუნქციაა. შევთანხმდეთ, რომ f' -ით აღვნიშნოთ ფუნქცია, რომელიც $f'(x)$ -ის ტოლია f -ის წარმოებულის არსებობის წერტილებში და ნულის ტოლია დარჩენილ წერტილებში.

სამართლიანია შემდეგი უმნიშვნელოვანესი თეორემა ზრდადი ფუნქციის დიფერენციალური თვისებების შესახებ.

თეორემა 2.6.2. თუ f ფუნქცია ზრდადია, მაშინ f წარმოებადია თითქმის ყველგან, $f' \in L([a, b])$ და სრულდება შეფასება:

$$\int_{[a, b]} f' \leq f(b) - f(a).$$

ვიქვით, f რაიმე ფუნქციაა და $x \in [a, b]$. f ფუნქციის ზედა და ქვედა წარმოებულები x წერტილში შესაბამისად აღინიშნებიან $\overline{D}(f)(x)$ და $\underline{D}(f)(x)$ ჩანაწერებით და განისაზღვრებიან შემდეგნაირად:

$$\overline{D}(f)(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\sup_{0 < |h| < \delta} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right];$$

$$\underline{D}(f)(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\inf_{0 < |h| < \delta} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right].$$

ესადა, $\underline{D}(f)(x) \leq \overline{D}(f)(x)$ და $\underline{D}(f)(x) \geq 0$, როცა f არის ზრდადი. f ფუნქცია წარმოებადია x წერტილში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\underline{D}(f)(x)$ და $\overline{D}(f)(x)$ არიან ერთმანეთის ტოლი სასრული რიცხვები. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ ზედა და ქვედა წარმოებულები წარმოადგენენ $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ უარდობის ზღვრებს გარკვეული მიმდევრობების გასწვრივ, ე.ი. მოიძებნებიან $h_n \rightarrow 0$ და $h_n^* \rightarrow 0$ მიმდევრობები, რომელთათვისაც

$$\overline{D}(f)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} \quad \text{და} \quad \underline{D}(f)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + h_n^*) - f(x)}{h_n^*}.$$

ლემა 2.6.1. ვთქვათ, f მკაცრად ზრდადი ფუნქციაა, $0 \leq C < \infty$ და $E \subset [a, b]$ სიმრავლის ყოველი წერტილისათვის, $\underline{D}(f)(x) \leq C$. მაშინ $f(E)$ ანასახის გარე ზომისათვის სამართლიანია შეფასება:

$$|f(E)|_* \leq C|E|_*.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. E სიმრავლე დაეფაროთ ღია შემოსაზღვრული G სიმრავლით, რომელიც E -სთან ახლოა იმ თვალსაზრისით, რომ აკმაყოფილებს შეფასებას:

$$|G| < |E|_* + \varepsilon. \quad (1)$$

II იყოს ყველა იმ $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ სეგმენტის კლასი, რომელიც შედის G სიმრავლეში და აკმაყოფილებს პირობას:

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < C + \varepsilon.$$

A იყოს ყველა იმ $[f(\alpha), f(\beta)]$ სახის სეგმენტის კლასი, სადაც $[\alpha, \beta] \in$ II. f ფუნქციის მკაცრად ზრდადობის გათვალისწინებით ადვილი დასანახია,

რომ: 1) Λ კლასის ყოველი სეგმენტი გადაუკვარებელია; 2) ყოველი $I \in \Lambda$ სეგმენტისათვის არსებობს ერთადერთი $[\alpha, \beta] \in \Pi$ სეგმენტი, რომლისთვისაც $I = [f(\alpha), f(\beta)]$, ამასთან, $[\alpha, \beta] = f^{-1}(I)$.

ჩანაწერების სიმოქლისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნა: თუ $I = [\alpha, \beta] \in \Pi$, მაშინ I^Λ იყოს $[f(\alpha), f(\beta)]$ სეგმენტი.

Π კლასის განსაზღვრის ძალით სრულდება შეფასება:

$$|I^\Lambda| < (C + \varepsilon)|I| \quad (I \in \Pi). \quad (2)$$

ამ შეფასების ეკვივალენტური ფორმულირება მოიცემა შემდეგნაირად:

$$|I| < (C + \varepsilon)|f^{-1}(I)| \quad (I \in \Lambda). \quad (3)$$

დამტკიცებისათვის არსებითი გარემოებაა ის ფაქტი, რომ Λ კლასი წარმოადგენს $f(E)$ სიმრავლის ვიტალის აზრით დაფარვას. მართლაც, განვიხილოთ ნებისმიერი $x \in E$ წერტილი. $\underline{D}(f)(x) < C + \varepsilon$ პირობის გამო მოიძებნება Π კლასის სეგმენტების (I_n) მიმდევრობა, რომლის წევრების ერთ-ერთი ბოლო არის x წერტილი და $|I_n| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). მაშინ ცხადია, $f(x) \in I_n^\Lambda$ ($n \in \mathbb{N}$) და ამასთან, (2)-ის ძალით სამართლიანია $|I_n^\Lambda| \leq (C + \varepsilon)|I_n|$ ($n \in \mathbb{N}$) შეფასება. ამრიგად, ნებისმიერი $x \in E$ -სათვის, Λ კლასში მოიძებნა $f(x)$ წერტილის შემცველი და მისკენ მოჭიმვადი სეგმენტთა მიმდევრობა, ე.ი. Λ კლასი ვიტალის აზრით ფარავს $f(E)$ სიმრავლეს. აქვე შევნიშნოთ, რომ f -ის ბრდადობის ძალით Λ კლასის წევრები ჩართული არიან $[f(a), f(b)]$ სეგმენტში.

გამოვიყენოთ 12.2.2 თეორემა $f(E)$ სიმრავლისა და Λ კლასისათვის. შედეგად, ვიპოვიტ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ სეგმენტთაგან შედგენილ $\Lambda' \subset \Lambda$ ქვეკლასს, რომლისთვისაც

$$|f(E)|_* \leq \sum_{I \in \Lambda'} |I|.$$

ცხადია, რომ $f^{-1}(I)$ ($I \in \Lambda'$) სეგმენტებიც იქნებიან წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი, საიდანაც (1) და (3) შეფასებებისა და Π კლასის განსაზღვრების საფუძველზე დავწერთ,

$$\begin{aligned} |f(E)|_* &\leq \sum_{I \in \Lambda'} |I| < \sum_{I \in \Lambda'} (C + \varepsilon)|f^{-1}(I)| = \\ &= (C + \varepsilon) \left| \bigcup_{I \in \Lambda'} f^{-1}(I) \right| \leq (C + \varepsilon)|G| < (C + \varepsilon)(|E|_* + \varepsilon). \end{aligned}$$

თუ მიღებულ შეფასებაში გავითვალისწინებთ $\varepsilon > 0$ რიცხვის ნებისმიერობას, მაშინ დაეკენით, რომ $|f(E)|_* \leq C|E|_*$. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 12.6.2. ვთქვათ, f მკაცრად ზრდადი ფუნქციაა, $0 < C < \infty$ და $E \subset [a, b]$ სიმრავლის ყოველი წერტილისათვის, $\overline{D}(f)(x) \geq C$. მაშინ $f(E)$ ანასახის გარე ზომისათვის სამართლიანია შეფასება:

$$|f(E)|_* \geq C|E|_*.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, N არის E -ს ყველა იმ წერტილის სიმრავლე, რომელშიც f ფუნქცია განიცდის წყვეტას. თეორემა 12.6.1-ის ძალით, N არაუმეტეს თვალადა. ცხადია, ასეთივე იქნება $f(N)$ ანასახიც. შემდეგ, იმის გათვალისწინებით, რომ არაუმეტეს თვალადი სიმრავლის გამოცლება გავლენას არ ახდენს სიმრავლის გარე ზომის მნიშვნელობაზე და f მკაცრად ზრდადაა, დაწვერიტ ტოლობებს:

$$|E|_* = |E \setminus N|_*, \quad |f(E)|_* = |f(E) \setminus f(N)|_* = |f(E \setminus N)|_*.$$

ამრიგად, თუ დებულებას დაემატეიყებთ $E \setminus N$ სიმრავლისათვის, მაშინ ის დადგენილი იქნება E სიმრავლისთვისაც.

გემოადნიშნულის საფუძველზე, საკმარისია მსჯელობა ჩაეატაროთ იმ შემთხვევაში, როცა f ფუნქცია უწყვეტია E სიმრავლის ყოველ წერტილში.

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon \in (0, C)$ რიცხვი. $f(E)$ სიმრავლე დაეფაროთ ღია შემოსაზღვრული G სიმრავლით, რომელიც $f(E)$ -სთან ახლოა იმ თვალსაზრისით, რომ აკმაყოფილებს შეფასებას:

$$|G| < |f(E)|_* + \varepsilon. \quad (4)$$

Π იყოს ყველა იმ $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ სეგმენტის კლასი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$[f(\alpha), f(\beta)] \subset G, \quad \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > C - \varepsilon.$$

დამტკიცებისათვის არსებითი გარემოებაა ის ფაქტი, რომ Π კლასი წარმოადგენს E სიმრავლის ვიტალის აზრით დაფარვას. მართლაც, განვიხილოთ ნებისმიერი $x \in E$ წერტილი. $\overline{D}(f)(x) > C - \varepsilon$ პირობის გამო მოიძებნებიან $I_n = [\alpha_n, \beta_n] \subset [a, b]$ ($n \in \mathbb{N}$) სეგმენტები, რომელთა ერთ-ერთი ბოლო არის x წერტილი, $|I_n| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) და

$$\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} > C - \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}).$$

ადეილი დასანახია, რომ x წერტილში f ფუნქციის უწყვეტობის ძალით იარსებებს ისეთი n_0 ნომერი, რომლიდანაც დაწყებული $[f(\alpha_n), f(\beta_n)]$ მონაკეეთები შევლენ G სიმრავლეში. შედეგად, $I_{n_0}, I_{n_0+1}, \dots$ სეგმენტები შევლენ Π კლასში. ისინი იმაედროულად ქმნიან მოცემული x წერტილის შემცველ და მიცენ მოჭიმვად მიმდევრობას. ამით დადგენილია, რომ Π კლასი ვიტალის აზრით

ფარავს E სიმრავლეს. აქვე შევნიშნოთ, რომ Π კლასის წევრები ჩართული არიან $[a, b]$ სეგმენტში.

Λ იყოს ყველა იმ $[f(\alpha), f(\beta)]$ სახის სეგმენტის კლასი, სადაც $[\alpha, \beta] \in \Pi$. ჩანაწერების სიმოცლისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნა: თუ $I = [\alpha, \beta] \in \Pi$, მაშინ I^Λ იყოს $[f(\alpha), f(\beta)]$ სეგმენტი. Π კლასის განსამზღერის ძალით სრულდება შეფასება:

$$|I| < \frac{|I^\Lambda|}{C - \varepsilon} \quad (I \in \Pi). \quad (5)$$

გამოვიყენოთ 12.2.2 თეორემა E სიმრავლისა და Π კლასისათვის. შედეგად, ეიპოვით წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ სეგმენტთაგან შედგენილ $\Pi' \subset \Pi$ ქვეკლასს, რომლისთვისაც

$$|E|_* \leq \sum_{I \in \Pi'} |I|.$$

f ფუნქციის მკაცრად მრდადობის გათვალისწინებით, აღვილი დასანახია, რომ I^Λ ($I \in \Pi'$) სეგმენტებიც იქნებიან წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი, საიდანაც, (4) და (5) შეფასებებისა და Π კლასის განსამზღერების საფუძველზე დაეწერთ,

$$\begin{aligned} |E|_* &\leq \sum_{I \in \Pi'} |I| < \sum_{I \in \Pi'} \frac{|I^\Lambda|}{C - \varepsilon} = \\ &= \frac{1}{C - \varepsilon} \left| \bigcup_{I \in \Pi'} I^\Lambda \right| \leq \frac{|G|}{C - \varepsilon} < \frac{|f(E)|_* + \varepsilon}{C - \varepsilon}. \end{aligned}$$

თუ მიღებულ შეფასებაში გავითვალისწინებთ $\varepsilon \in (0, C)$ რიცხვის ნებისმიერობას, დავასკენით, რომ $|f(E)|_* \geq C|E|_*$. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 12.6.2. ზემოთ მოცემულ ლემებს აქვთ ნათელი გეომეტრიული შინაარსი. სახელდობრ, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ფარდობას შეიძლება შევხედოთ, როგორც $[x, x+h]$ მონაკვეთის გაჭიმვის კოეფიციენტს f ფუნქციის მოქმედებისას. 12.6.1 და 12.6.2 ლემების თანახმად, თუ გაჭიმვის კოეფიციენტი ზემოდან ან ქვემოდან ფასდება E სიმრავლის ყოველი წერტილის ლოკალურ არეალში, მაშინ იგივე შეფასება ვრცელდება გაჭიმვის გლობალურ $\frac{|f(E)|_*}{|E|_*}$ კოეფიციენტზე.

ლემა 12.6.3. ვთქვათ, f ზრდადი ფუნქციაა. მაშინ $\{x \in [a, b] : \overline{D}(f)(x) = \infty\}$ სიმრავლე ნული ზომისაა.

დამტკიცება. ნებისმიერი g ფუნქციისათვის აღვნიშნოთ:

$$E_n(g) = \{x \in [a, b] : \overline{D}(g)(x) \geq n\} \quad (n \in \mathbb{N});$$

$$E_\infty(g) = \{x \in [a, b] : \overline{D}(g)(x) = \infty\}.$$

ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა f მყარად ზრდადი ფუნქციაა. ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$ რიცხვისათვის ლემა 12.6.2-ისა და $f(E_n(f)) \subset [f(a), f(b)]$ ჩართვის ძალით, სამართლიანი იქნება შეფასება:

$$|E_n(f)|_* \leq \frac{f(b) - f(a)}{n}.$$

შედეგად, $|E_n(f)|_* \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). საიდანაც, თუ გავითვალისწინებთ $E_\infty(f) \subset E_n(f)$ ($n \in \mathbb{N}$) ჩართვებს, მივიღებთ $|E_\infty(f)|_* = 0$ ტოლობას, რომლის ძალითაც ვასკენით, რომ $E_\infty(f)$ სიმრავლე ნული ზომისაა.

გადავიდეთ ზოგად შემთხვევაზე. ვთქვათ, f ნებისმიერი ზრდადი ფუნქციაა. g იყოს $g(x) = f(x) + x$ ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია. ცხადია, g მყარად ზრდადია, ამასთან, ადვილი შესამოწმებელია $E_\infty(g) = E_\infty(f)$ ტოლობა. უკანასკნელი ორი პირობიდან გამომდინარე, უკვე განხილული შემთხვევის საფუძველზე დავასკენით, რომ $E_\infty(f)$ სიმრავლე არის ნული ზომის.

ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 12.6.2-ის დამტკიცება. E იყოს ყველა იმ წერტილის სიმრავლე, რომელშიც f ფუნქცია არაა წარმოებადი. დავამტკიცოთ, რომ E ნული ზომის სიმრავლეა.

E წარმოადგება შემდეგი ორი სიმრავლის გაერთიანების სახით:

$$E_1 = \{x \in [a, b] : \underline{D}(f)(x) < \overline{D}(f)(x)\};$$

$$E_2 = \{x \in [a, b] : \underline{D}(f)(x) = \overline{D}(f)(x) = \infty\}.$$

ლემა 12.6.3-ის ძალით E_2 ნული ზომისაა. ამგვარად, დასამტკიცებელი გვრჩება E_1 სიმრავლის ნულზომიანობა. ადვილი დასაანახია, რომ E_1 თავის მხრივ წარმოადგება შემდეგი სახის სიმრავლეების თელადი გაერთიანების სახით:

$$E_{p,q} = \{x \in [a, b] : \underline{D}(f)(x) < p < q < \overline{D}(f)(x)\},$$

სადაც p და q რაციონალური რიცხვებია და $0 < p < q$. ამრიგად, საკითხი დაიყვანება $E_{p,q}$ სახის ყოველი სიმრავლის ნულზომიანობის დამტკიცებაზე.

ვთქვათ, $p, q \in \mathbb{Q}$ და $0 < p < q$. თუ გამოვიყენებთ ლემა 12.6.1-ს $E = E_{p,q}$ და $C = p$ პარამეტრებისათვის გვექნება, რომ

$$|f(E_{p,q})|_* \leq p|E_{p,q}|_*.$$

მეორე მხრივ, ლემა 12.6.2-ის გამოყენება $E = E_{p,q}$ და $C = q$ პარამეტრებისათვის გვაძლევს შეფასებას:

$$|f(E_{p,q})|_* \geq q|E_{p,q}|_*.$$

შედეგად, $p|E_{p,q}|_* \geq q|E_{p,q}|_*$. რაც შესაძლებელია მხოლოდ $|E_{p,q}|_* = 0$ შემთხვევაში. ამრიგად, დავადგინეთ, რომ $E_{p,q}$ ნული ზომის სიმრავლეა. ამით f ფუნქციის თითქმის ყველგან წარმოებადობა დამტკიცებულია.

გადავიდეთ მსჯელობის შემდგომ ეტაპზე და დავამტკიცოთ f' ფუნქციის ზომადობა.

გავავრდეთ f ფუნქცია $[a, b+1]$ სეგმენტზე ისე, რომ $(b, b+1]$ მონაკვეთის წერტილებში მისი მნიშვნელობები $f(b)$ რიცხვის ტოლი იყოს. ახლა f შეიძლება განვიხილოთ, როგორც $[a, b+1]$ სეგმენტზე ზრდადი ფუნქცია.

ყოველი n -სთვის Δ_n იყოს $[a, b]$ სეგმენტზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია:

$$\Delta_n(x) = \frac{f(x + 1/n) - f(x)}{1/n} \quad (x \in [a, b]).$$

შევნიშნოთ, რომ ყოველი n -სთვის $f(\cdot + 1/n)$ არის $[a, b]$ სეგმენტზე ზრდადი ფუნქცია. თეორემა 12.6.1-ის თანახმად f და $f(\cdot + 1/n)$ ზომადი ფუნქციებია. რის შედეგადაც, ვასყენით Δ_n ფუნქციების ზომადობას. ახლა შევნიშნოთ, რომ $[a, b]$ მონაკვეთის ყოველ x წერტილში, რომელშიც f ფუნქცია წარმოებადია, $(\Delta_n(x))$ მიმდევრობის ზღვარი იქნება $f'(x)$ რიცხვი. შედეგად, ზომად ფუნქციათა (Δ_n) მიმდევრობა $[a, b]$ მონაკვეთის თითქმის ყოველ წერტილში კრებადი იქნება f' ფუნქციისაკენ. საიდანაც, ლებეგის ზომის სისრულისა და თეორემა 7.7.1-ის საფუძველზე დაეასყენით f' -ის ზომადობას.

f' ფუნქციის არაუარყოფითობის გამო ამრი აქვს $\int_{[a,b]} f'$ ინტეგრალს. მოვახდინოთ ამ ინტეგრალის შეფასება. ფაქტს თეორემის (იხ. აგრეთვე შენიშვნა 8.5.1) საფუძველზე დავწერთ,

$$\int_{[a,b]} f' \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{[a,b]} \Delta_n. \quad (6)$$

განვიხილოთ ნებისმიერი n . f და $f(\cdot + 1/n)$ ფუნქციები ზომადობისა და შემოსაზღვრულობის გამო არიან $[a, b]$ მონაკვეთზე ჯამებადი. აქედან გამომდინარე,

$$\int_{[a,b]} \Delta_n = n \int_{[a,b]} f(\cdot + 1/n) - n \int_{[a,b]} f.$$

f და $f(\cdot + 1/n)$ ფუნქციები შემოსაზღვრულია და მათი წყვეტის წერტილთა სიმრავლეები არაუმეტეს თელადია, ამიტომ უკანასკნელ ტოლობაში მოცემული ინტეგრალები შეიძლება გავიგოთ რიმანის აზრით. ამის შემდეგ $x = t - 1/n$ ცვლადის შეცვლის საფუძველზე დავწერთ,

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} \Delta_n &= n \int_{[a+1/n, b+1/n]} f - n \int_{[a,b]} f = \\ &= n \int_{[b, b+1/n]} f - n \int_{[a, a+1/n]} f. \end{aligned}$$

ახლა თუ გავითვალისწინებთ, რომ $f(x) = f(b)$, როცა $x \in [b, b + 1/n]$ და $f(x) \geq f(a)$, როცა $x \in [a, a + 1/n]$, მივიღებთ შეფასებას:

$$\int_{[a,b]} \Delta_n \leq f(b) - f(a). \quad (7)$$

(6)-ის და (7)-ის ძალით გვექნება,

$$\int_{[a,b]} f' \leq f(b) - f(a).$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 12.6.3. კანტორის ფუნქციის მაგალითი გვიჩვენებს, რომ ზრდადი ფუნქციისათვის შეიძლება შესრულდეს მყაყარი უტოლობა:

$$\int_{[a,b]} f' < f(b) - f(a)$$

მართლაც, კანტორის θ ფუნქცია მუდმივია კანტორის სიმრავლის ყოველ დამატებით ინტერვალზე. ამიტომ ყოველ ასეთ ინტერვალზე θ -ს წარმოებული იგივერად უდრის ნულს. შედეგად, θ' ფუნქცია თითქმის ყველგან ნულის ტოლია. რის გამოც, $\int_{[0,1]} \theta' = 0$. მეორე მხრივ კი გვაქვს, რომ $\theta(1) - \theta(0) = 1 - 0 = 1$.

შენიშვნა 12.6.4. ზრდადი f ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის სახით წარმოდგენისთვის საკმარისია სრულდებოდეს ტოლობა

$$\int_{[a,b]} f' = f(b) - f(a). \quad (8)$$

მართლაც, თუ დავეშვებით საწინააღმდეგოს (ე.ი. ზრდადი f ფუნქცია აქმაყოფილებს (8) ტოლობას, მაგრამ არ წარმოდგება განუსაზღვრელი ინტეგრალის სახით), მაშინ, თეორემა 12.6.2-ის გათვალისწინებით, მოიძებნება $x \in (a, b)$, რომლისთვისაც $\int_{[a,x]} f' < f(x) - f(a)$. კვლავ თეორემა 12.6.2-ის გათვალისწინებით, $[x, b]$ სეგმენტზე შესრულებული იქნება შეფასება: $\int_{[x,b]} f' \leq f(b) - f(x)$. შედეგად, მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} f' &= \int_{[a,x]} f' + \int_{[x,b]} f' < \\ < [f(x) - f(a)] + [f(b) - f(x)] = f(b) - f(a). \end{aligned}$$

რაც ეწინააღმდეგება (8)-ს.

შენიშვნა 12.6.5. $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი ნული ზომის E სიმრავლისათვის არსებობს ზრდადი ფუნქცია (იხ. ამოცანა 3 პარაგრაფის ბოლოს), რომელიც არაა წარმოებადი E სიმრავლის არცერთ წერტილში.

შენიშვნა 12.6.6. ცხადია, რომ 12.6.1 და 12.6.2 თეორემების ანალოგები სამართილიანია ნებისმიერი კლუბადი ფუნქციისთვისაც.

შენიშვნა 12.6.7. ცნობილია, რომ არსებობენ უწყვეტი ფუნქციები, რომელთაც არცერთ წერტილში არა აქვთ წარმოებული. თეორემა 12.6.2-ის ძალით, შეუძლებელია ასეთი ტიპის ფუნქცია იყოს მონოტონური განსაზღვრის არის რაიმე ქვესეგმენტზე.

ამოცანები

1. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს $[a, b]$ მონაკვეთის x_n წერტილთა სასრული ან თვლადი სიმრავლე და ვთქვათ, ყოველ x_n წერტილს შეესაბამება h_n დადებითი რიცხვი, ამასთან, $\sum_n h_n < \infty$. f იყოს შემდეგი ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია:

$$f(x) = \sum_{x_n \leq x} h_n \quad (x \in [a, b]).$$

დაამტკიცეთ, რომ: 1) f ფუნქცია წყვეტილია ყოველ x_n წერტილში და უწყვეტია ყველა დანარჩენ წერტილში; 2) f ფუნქცია მარჯვნიდან უწყვეტია ყოველ x_n წერტილში.

2. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს მყარად ზრდადი ფუნქცია, რომელიც წყვეტილია ყოველ რაციონალურ წერტილში და უწყვეტია ყველა სხვა წერტილში.
3. ვთქვათ, $E \subset [a, b]$ ნული ზომის რაიმე არაყარბილი სიმრავლეა. ხოლო (G_n) არის ღია სიმრავლეა რაიმე მიმდევრობა თვისებებით: $E \subset G_n$, $|G_n| < 1/2^n$. f იყოს შემდეგი ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |[a, x] \cap G_n| \quad (x \in [a, b]).$$

აჩვენეთ, რომ f ფუნქცია ზრდადია და არაა წარმოებადი E სიმრავლის წერტილებში, კერძოდ, $f'(x) = \infty$, როცა $x \in E$.

4. ნებისმიერი უწყვეტი f ფუნქციისათვის არსებობს თუ არა სეგმენტი, რომელზეც f არის მონოტონური?
5. ვთქვათ, f ფუნქციას ყოველ წერტილში აქვს არაუარყოფითი ქვედა წარმოებული. აჩვენეთ, რომ f ზრდადია.
6. ვთქვათ, f ფუნქციის ზედა და ქვედა წარმოებულები შემოსაზღვრული ფუნქციებია. აჩვენეთ, რომ მოიძებნება $C \geq 0$ მუდმივი, ისეთი, რომ $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ ($x, y \in [a, b]$).

§ 7. შემოსაზღვრული გარიაციის ფუნქციები

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს f ფუნქცია და $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ არის $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე დანაწილება. მაშინ

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

ჯამს ეწოდება f ფუნქციის გარიაციული ჯამი, რომელიც შეესაბამება P დანაწილებას და ის აღინიშნება $V_f(P)$ ჩანაწერით.

f ფუნქციას ეწოდება შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქცია, თუ მისი ვარიაციული ჯამები ერთობლივ შემოსაზღვრულია, ე.ი.

$$\sup_P V_f(P) < \infty, \quad (1)$$

სადაც სუპერუმში აიღება $[a, b]$ სეგმენტის ყველა შესაძლო P დანაწილების მიხედვით.

$[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ყველა შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციის კლასს $BV([a, b])$ ჩანაწერით აღნიშნავენ.

(1) სუპერუმს f ფუნქციის სრულ ვარიაციას უწოდებენ და $V_f([a, b])$ ჩანაწერით აღნიშნავენ. ცხადია, $0 \leq V_f([a, b]) \leq \infty$.

ვთქვათ, $[c, d]$ არის $[a, b]$ -ს გადაუგვარებელი ქვესეგმენტი. f -ს უწოდებენ $[c, d]$ ქვესეგმენტზე შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციას, თუ $f|_{[c, d]} \in BV([c, d])$. $[c, d]$ -ზე f -ის სრული ვარიაცია ეწოდება $V_{f|_{[c, d]}}([c, d])$ რიცხვს და ის აღინიშნება $V_f([c, d])$ ჩანაწერით.

შეეთანხმეთ აგრეთვე, რომ თუ $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ არის რაიმე $[c, d] \subset [a, b]$ ქვესეგმენტის დანაწილება, მაშინაც $V_f(P)$ -თი აღნიშნოთ $\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$ ჯამი. ცხადია, $V_f([c, d])$ არის აღნიშნული ტიპის ჯამების სუპერუმში.

გადაგვარებულ ქვესეგმენტზე ფუნქციის ვარიაცია ჩათვალათ ნულის ტოლად.

სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

- მონოტონური ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციისაა;
- თუ f ფუნქცია აკმაყოფილებს ე.წ. ლიფშიცის პირობას: მოიძებნება $C \geq 0$ მუდმივი, ისეთი, რომ $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ ($x, y \in [a, b]$), მაშინ f შემოსაზღვრული ვარიაციისაა;
- თუ f ფუნქცია ყველა წერტილში წარმოებადია და მისი წარმოებული შემოსაზღვრულია, მაშინ f შემოსაზღვრული ვარიაციისაა;
- ვთქვათ, f რაიმე ფუნქციაა და $[c, d] \subset [a, b]$. მაშინ $V_f([c, d]) \leq V_f([a, b])$. შედეგად, თუ f შემოსაზღვრული ვარიაციისაა $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ის შემოსაზღვრული ვარიაციის იქნება $[c, d]$ ქვესეგმენტზეც;
- შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქცია შემოსაზღვრულია.

პირველი წინადადება გამომდინარეობს იქედან, რომ ზრდადი f ფუნქციისათვის ნებისმიერი $V_f(P)$ ვარიაციული ჯამი $f(b) - f(a)$ რიცხვის ტოლია, ხოლო კლებადი ფუნქციის შემთხვევაში, ვარიაციული ჯამები $f(a) - f(b)$ რიცხვს უტოლდება.

მეორე წინადადება მიიღება შემდეგი შეფასებიდან:

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^n C|x_k - x_{k-1}| = C|b - a|,$$

სადაც $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ არის $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი დანაწილება.

ეთქვას, f წარმოებადი ფუნქციაა და $|f'(x)| \leq C$ ($x \in [a, b]$). ლაგრანჟის ფორმულის გამოყენებით, ნებისმიერი $x, y \in [a, b]$ წერტილებისათვის გვექნება, რომ $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq C|x - y|$, ე.ი. f აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას. აღნიშნულის გამო, მესამე წინადადება არის მეორის შედეგი.

განვიხილოთ მეოთხე წინადადება. განვიხილოთ $[c, d]$ სეგმენტის ნებისმიერი $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ დანაწილება. P შევავსოთ $[a, b]$ სეგმენტის P^* დანაწილებამდე a და b წერტილების მეშვეობით. მაშინ გვექნება, რომ

$$|f(c) - f(a)| + V_f(P) + |f(b) - f(d)| = V_f(P^*).$$

შედეგად,

$$V_f(P) \leq V_f(P^*) \leq V_f([a, b]).$$

ესადაა, ამით მეოთხე წინადადება დამტკიცებულია.

გადავიდეთ მეხუთე წინადადებაზე. ეთქვას, f შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციაა. ნებისმიერი $x \in (a, b)$ წერტილისათვის განვიხილოთ $P = (a, x, b)$ დანაწილება. მაშინ გვექნება, რომ

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| = \\ &= |f(a)| + V_f(P) \leq |f(a)| + V_f([a, b]). \end{aligned}$$

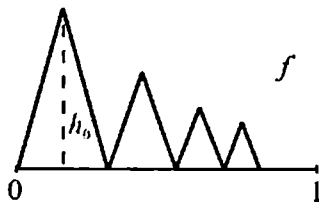
რითაც f -ის შემოსაზღვრულობა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 12.7.1 არსებობენ უწყვეტი ფუნქციები შემოსაზღვრული ვარიაციით. ასეთი ფუნქციის ასაგებად გამოვიყენოთ 12.5.1 შენიშვნაში მოცემული კონსტრუქცია.

$I \subset [0, 1]$ მონაკვეთისათვის და $h \neq 0$ რიცხვისათვის $f_{I,h}$ -ით აღვნიშნოთ $[0, 1]$ -ზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც ნულის ტოლია I მონაკვეთის გარეთ და რომლის გრაფიკი Ox ღერძთან ერთად ქმნის ტოლფერდა სამკუთხედს I მონაკვეთის ტოლი ფუძით და წვეროთი (c, h) წერტილში, სადაც c არის I -ს შუაწერტილი.

ეთქვას, $0 = x_0 < x_1 < \dots < 1$ და $x_k \rightarrow 1$ ($k \rightarrow \infty$). Δ_k -თი აღვნიშნოთ $[x_k, x_{k+1}]$ მონაკვეთი. $(h_k)_{k=0}^\infty$ იყოს დადებითი რიცხვთა მიმდევრობა, ისეთი, რომ $h_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) და $\sum_{k=0}^\infty h_k = \infty$.

ახლა განვიხილოთ $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ფუნქცია, რომელიც ყოველ Δ_k უბანზე f_{Δ_k, h_k} ფუნქციის ტოლია და $f(1) = 0$ (ნახ. 12.4).



ნახ. 12.4.

$x \in [0, 1]$ წერტილებში f -ის უწყვეტობა არის f_{Δ_k, h_k} ფუნქციების უწყვეტობის შედეგი. ხოლო $x = 1$ წერტილში f -ის უწყვეტობა გამომდინარეობს $h_k \rightarrow 0$ პირობიდან.

ვაჩვენოთ, რომ f ფუნქცია შემოუსაზღვრელი ვარიაციისაა. ყოველი k -სათვის y_k იყოს $\Delta_k = [x_k, x_{k+1}]$ მონაკვეთის შუაწერტილი. გვექება, რომ

$$|f(y_k) - f(x_k)| + |f(x_{k+1}) - f(y_k)| = 2h_k.$$

ყოველი $n \geq 2$ -სთვის განვიხილოთ $[0, 1]$ სეგმენტის $P_n = (x_0, y_0, x_1, \dots, x_n, y_n, x_{n+1}, 1)$ დანაწილება. მაშინ

$$V_f(P_n) = \sum_{k=0}^n (|f(y_k) - f(x_k)| + |f(x_{k+1}) - f(y_k)|) = \sum_{k=0}^n 2h_k.$$

საიდანაც, $\sum_{k=0}^{\infty} h_k$ მწკრივის განშლადობის საფუძველზე ვწერთ:

$$V_f([a, b]) \geq \sup_{n \geq 2} V_f(P_n) = \infty.$$

შედეგად, f ფუნქცია შემოუსაზღვრელი ვარიაციისაა.

თეორემა 12.7.1. ვთქვათ, f და g შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციებია. მაშინ შემოსაზღვრული ვარიაციისაა მათი ჯამი, სხვაობა და ნამრავ-ლი. გარდა ამისა, თუ მოიძებნება $\varepsilon > 0$, ისეთი, რომ $|g(x)| \geq \varepsilon$ ყოველი $x \in [a, b]$ -სთვის, მაშინ შემოსაზღვრული ვარიაციისაა f/g ფარდობაც.

დამტკიცება. ვთქვათ, $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ არის $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე დანაწილება. მაშინ გვექნება,

$$\begin{aligned} V_P(f \pm g) &= \sum_{k=1}^n |(f \pm g)(x_k) - (f \pm g)(x_{k-1})| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq V_f([a, b]) + V_g([a, b]); \quad (2) \\ V_P(fg) &= \sum_{k=1}^n |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| |g(x_k)| + \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| |f(x_{k-1})| \leq \\ &\leq V_f([a, b]) \sup_{x \in [a, b]} |g(x)| + V_g([a, b]) \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|. \end{aligned} \quad (3)$$

(2)-დან უშუალოდ ვასკვნით, რომ $f + g \in BV([a, b])$. (3)-დან კი იმის გათვალისწინებით, რომ შემოსამღვრელი ვარიაციის ფუნქცია შემოსამღვრელია, ვღებულობთ $fg \in BV([a, b])$ მიყუთვნებას.

გადავიდეთ თეორემის ბოლო წინადადების დამტკიცებაზე. ვთქვათ, $|g(x)| \geq \varepsilon > 0$ ყოველი $x \in [a, b]$ -სთვის. მაშინ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ დანაწილებისათვის გვექნება,

$$\begin{aligned} V_{1/g}(P) &= \sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{g(x_k)} - \frac{1}{g(x_{k-1})} \right| = \sum_{k=1}^n \left| \frac{g(x_k) - g(x_{k-1})}{g(x_k)g(x_{k-1})} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq \frac{1}{\varepsilon^2} V_g([a, b]). \end{aligned}$$

აქედან გამომდინარე, $1/g \in BV([a, b])$. შედეგად, თუ გავითვალისწინებთ უკვე დამტკიცებულ წინადადებას $BV([a, b])$ კლასის ფუნქციათა ნამრავლის შესახებ, დავასკვნით, რომ $f/g \in BV([a, b])$. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 2.7.2. ვთქვათ, f რაიმე ფუნქციაა და $a < c < b$. მაშინ

$$V_f([a, b]) = V_f([a, c]) + V_f([c, b]).$$

ე.ი. სრული ვარიაცია, განხილული როგორც სეგმენტის ფუნქცია, არის ადიციური.

დამტკიცება. ვთქვათ, P არის $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე დანაწილება. Q -თი აღვნიშნოთ დანაწილება, რომელიც P -ს ტოლია იმ შემთხვევაში, როცა P შეიცავს c წერტილს და მიიღება P დანაწილებისათვის c წერტილის დამატებით მაშინ, როცა P არ შეიცავს c წერტილს. Q_1 იყოს Q დანაწილების კვალი $[a, c]$ სეგმენტზე, ე.ი. $[a, c]$ -ს დანაწილება, რომელიც წარმოიქმნება $[a, c]$ -ში მოხვედრილი Q დანაწილების წერტილებისაგან, ხოლო Q_2 იყოს ანალოგიურად განსაზღვრული Q დანაწილების კვალი $[c, b]$ სეგმენტზე.

მარტივი დასანახია, რომ დანაწილებისათვის ახალი წერტილის დამატებით ვარიაციული ჯამი არ იცვლება. ამ ფაქტისა და $V_f(Q) = V_f(Q_1) + V_f(Q_2)$ ცხადი ტოლობის გათვალისწინებით დავწერთ,

$$V_f(P) \leq V_f(Q) = V_f(Q_1) + V_f(Q_2) \leq V_f([a, c]) + V_f([c, b]).$$

შედეგად, P დანაწილების ნებისმიერობის გამო მივიღებთ შეფასებას:

$$V_f([a, b]) \leq V_f([a, c]) + V_f([c, b]). \quad (4)$$

დამატებით (4)-ის შეზღუდვები შეფასება. ეთქვას, P_1 და P_2 არიან შესაბამისად $[a, c]$ და $[c, b]$ სეგმენტების ნებისმიერად არჩეული დანაწილებები. განვიხილოთ P_1 და P_2 დანაწილებებში შემავალი წერტილების ერთობლივად განხილვის შედეგად მიღებული $[a, b]$ სეგმენტის P დანაწილება. მაშინ ცხადია, რომ $V_f(P_1) + V_f(P_2) = V_f(P)$. შედეგად, დაეწეროთ,

$$V_f(P_1) + V_f(P_2) = V_f(P) \leq V_f([a, b]).$$

P_1 და P_2 დანაწილებების ნებისმიერობიდან გამომდინარე, მიღებული შეფასების მარცხენა მხარეში შეგვიძლია გადავიდეთ სუპრემუმებზე. რაც მოგვცემს (4)-ის შეზღუდვებზე უტოლობას:

$$V_f([a, c]) + V_f([c, b]) \leq V_f([a, b]).$$

ამით, ცხადია, თეორემა დამტკიცებულია. □

იმის გათვალისწინებით, რომ მონოტონური ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციისაა, თეორემა 12.7.2-დან მივიღებთ შემდეგ დებულებას.

თეორემა 12.7.3. თუ $[a, b]$ სეგმენტი შეიძლება დაიყოს სასრული რაოდენობის ქვესეგმენტებად, რომელთაგან თითოეულზე f ფუნქცია მონოტონურია, მაშინ f შემოსაზღვრული ვარიაციისაა.

შემოსაზღვრული ვარიაციის f ფუნქციისათვის T_f -ით აღვნიშნოთ მისი სრული ვარიაცია ცვლადი ზედა საზღვრით, ე.ი.

$$T_f(x) = V_f([a, x]) \quad (x \in [a, b])$$

ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია. შევნიშნოთ, რომ T_f ფუნქცია მრდადია. ეს გამომდინარეობს სრული ვარიაციის, როგორც სეგმენტის ფუნქციის, მრდადობის თვისებიდან.

თეორემა 12.7.4. შემოსაზღვრული ვარიაციის ნებისმიერი f ფუნქციისათვის სამართლიანია შემდეგი წარმოდგენა ორი ზრდადი ფუნქციის სხვაობის სახით:

$$f = T_f - (T_f - f).$$

დამტკიცება. დასამტკიცებელი გვაქვს $T_f - f$ ფუნქციის მრდადობა. ამრიგად, ნებისმიერი $x, y \in [a, b], x < y$, წერტილებისათვის უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$$T_f(x) - f(x) \leq T_f(y) - f(y).$$

თეორემა 12.7.2-ის ძალით, $T_f(y) - T_f(x) = V_f([x, y])$. შედეგად, დასამტკიცებელი შეფასება ასე გადაიწერება:

$$f(y) - f(x) \leq V_f([x, y]).$$

ეს უკანასკნელი კი სამართლიანია, რადგანაც $[x, y]$ სეგმენტის უმარტივესი $P = (x, y)$ დანაწილებისათვის გვაქვს, რომ

$$|f(y) - f(x)| = V_f(P) \leq V_f([x, y]).$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

მრდადი ფუნქციები შემოსაზღვრული ვარიაციისა არიან, ამიტომ, თეორემა 12.7.1-ის ძალით, ასეთივე იქნება მათი სხვაობაც. აქედან და თეორემა 12.7.4-დან ელემენტარულ შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციათა შემდეგ დახასიათებას, რომელიც დამტკიცებული იყო კ. კორდანის მიერ.

თეორემა 12.7.5. ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციისაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის წარმოდგება ორი ზრდადი ფუნქციის სხვაობის სახით.

შემოსაზღვრული ვარიაციის f ფუნქციის წარმოდგენას ორი მრდადი ფუნქციის სხვაობის სახით f -ის კორდანის დაშლას უწოდებენ.

12.7.5 და 12.6.2 თეორემებიდან მიიღება შემდეგი მნიშვნელოვანი დებულება შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციათა დიფერენციალური თვისებების შესახებ.

თეორემა 12.7.6. ყოველი შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქცია თითქმის ყველგან წარმოებადია და მისი წარმოებული ჯამებადი ფუნქციაა.

ამოცანები

1. ააგეთ შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქცია, რომელიც არ ეკუთვნის ლიფშიცის კლასს.
2. ეთქვას, f შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქციაა: $f(0) = 0$ და $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$, როცა $0 < x \leq 1$. აჩვენეთ, რომ f უწყვეტია და არაა შემოსაზღვრული ვარიაციის.
3. ეთქვას, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ და f შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქციაა: $f(0) = 0$ და $f(x) = x^\alpha \cos \frac{1}{x^\beta}$, როცა $0 < x \leq 1$. აჩვენეთ, რომ f შემოსაზღვრული ვარიაციისაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha > \beta$.
4. ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქციისათვის არსებობს თუ არა $[c, d] \subset [a, b]$ ქვესეგმენტი, რომელზეც ამ ფუნქციას აქვს შემოსაზღვრული ვარიაცია?
5. ეთქვას, f შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციაა. აჩვენეთ, რომ მოიძებნება $x \in [a, b]$ წერტილი, რომლის შემცველ ყოველ $[c, d] \subset [a, b]$ ქვესეგმენტზე f შემოსაზღვრული ვარიაციისაა.
6. აჩვენეთ, რომ თუ f შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციაა, მაშინ შემოსაზღვრული ვარიაციისაა $|f|$. ააგეთ ფუნქციის მაგალითი, რომელიც გვიჩვენებს მებრუნებული დებულების მცდარობას.
7. აჩვენეთ, რომ თუ f უწყვეტი ფუნქციაა და $|f|$ შემოსაზღვრული ვარიაციისაა, მაშინ შემოსაზღვრული ვარიაციისაა f ფუნქცია.

§ 8. აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციები. ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის სახით წარმოდგენადი ფუნქციების დახასიათება

f ფუნქციას ეწოდება აბსოლუტურად უწყვეტი, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება $\delta > 0$, ისეთი, რომ

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta,$$

სადაც $\{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$ არის $[a, b]$ სეგმენტში შემავალი წყვილ-წყვილად თანაუქვეთი ინტერვალების ნებისმიერი სასრული კლასი.

ყველა აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციის კლასი $AC([a, b])$ ჩანაწერით აღინიშნება.

სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

- აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია არის უწყვეტი;
- ლიფშიცის კლასის ფუნქცია არის აბსოლუტურად უწყვეტი;
- თუ f ფუნქცია ყველა წერტილში წარმოებადია და მისი წარმოებული უმოსაზღვრულია, მაშინ f აბსოლუტურად უწყვეტია;
- ვთქვათ, f და g აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციებია. მაშინ აბსოლუტურად უწყვეტია მათი ჯამი, სხვაობა და ნამრავლი. გარდა ამისა, თუ g არსად არ ხდება ნულის ტოლი, მაშინ აბსოლუტურად უწყვეტია f/g ფარდობაც.

აბსოლუტურად უწყვეტობის პირობის გამოყენება ერთი (a_1, b_1) ინტერვალისაგან შედგენილი კლასისათვის გვაძლევს f ფუნქციის თანაბრად უწყვეტობას. ამით მტკიცდება პირველი წინადადება. მეორე წინადადება უშუალოდ მოწმდება, ხოლო მესამე კი არის მეორის უშუალო შედეგი. მეოთხე წინადადების დამტკიცება ხდება თეორემა 2.7.1-ის შემთხვევაში გამოყენებული სტანდარტული შეფასებების მეშვეობით.

თეორემა 2.8.1. ყოველი აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია არის შემოსაზღვრული ვარიაციის.

დამტკიცება. δ იყოს დადებითი რიცხვი, რომელიც f ფუნქციის აბსოლუტურად უწყვეტობის თვისების საფუძველზე შეესაბედა $\varepsilon = 1$ რიცხვს.

შეენიშნოთ, რომ თუ $I \subset [a, b]$ ქვესეგმენტის სიგრძე δ -ზე ნაკლებია, მაშინ $V_f(I) \leq 1$. მართლაც, I -ს ნებისმიერი P დანაწილებით წარმოქმნილი ინტერვალების სიგრძეების ჯამი I -ს სიგრძის ტოლია და შედეგად, δ -ზე ნაკლებია. ამასთანავე, ცხადია, რომ ეს ინტერვალები წყვილ-წყვილად თანაუქვეთია. შედეგად, δ რიცხვის შერჩევის ძალით, სამართლიანი იქნება $V_f(P) < 1$ შეფასება, საიდანაც, P -ს ნებისმიერობის გამო, მივიღებთ $V_f(I) \leq 1$ შეფასებას.

ახლა, თუ $[a, b]$ სეგმენტს დავყოფთ n -ზე ნაკლები სიგრძის $I_1, \dots, I_n$ ქვესეგმენტებად, მაშინ გაცეიფებული შენიშვნის ძალით, თითოეული I_k მონაკვეთისათვის გვექნება, რომ $V_f(I_k) \leq 1$. შედეგად, სრული ვარიაციის ადრე-ურობის თვისების საფუძველზე (იხ. თეორემა 12.7.2) მივიღებთ,

$$V_f([a, b]) = V_f(I_1) + \dots + V_f(I_n) \leq n.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 12.8.1. არსებობენ ერთდროულად უწყვეტი და შემოსამღვრელი ვარიაციის ფუნქციები, რომლებიც არ არიან აბსოლუტურად უწყვეტი. ასეთ მაგალითს გვაძლევს კანტორის ფუნქცია. მართლაც, ყოველი ნატურალური n -სთვის განვიხილოთ კანტორის სიმრავლის აგების n ეტაპის შესრულების შემდეგ დარჩენილი 2^n ცალი სეგმენტის კლასი:

$$\{\Delta(i_1, \dots, i_n) : i_1, \dots, i_n = 0, 2\}.$$

მოვახდინოთ ამ კლასის სეგმენტების ერთინდექსიანი ნუმერაცია:

$$[a_1, b_1], \dots, [a_{2^n}, b_{2^n}].$$

შევნიშნოთ, რომ $[a_k, b_k]$ სეგმენტები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და

$$\sum_{k=1}^{2^n} (b_k - a_k) = \frac{2^n}{3^n}. \quad (1)$$

მეორე მხრივ, $[a_k, b_k]$ სეგმენტთა გაერთიანების ყოველ დამატებით ინტერვალზე კანტორის θ ფუნქცია მუდმივია. რის გამოც გვექნება,

$$\sum_{k=1}^{2^n} |\theta(b_k) - \theta(a_k)| = \sum_{k=1}^{2^n} (\theta(b_k) - \theta(a_k)) = \theta(1) - \theta(0) = 1. \quad (2)$$

ყოველი n -სთვის (1) და (2) პირობების ერთდროულად შესრულება იწვევს იმას, რომ $\varepsilon = 1$ რიცხვისათვის არ არსებობს აბსოლუტურად უწყვეტობის განსაზღვრებით გათვალისწინებული $\delta > 0$ რიცხვი. შედეგად, კანტორის θ ფუნქცია არაა აბსოლუტურად უწყვეტი.

12.8.1 და 12.7.6 თეორემებიდან ეღებულობთ შემდეგ მნიშვნელოვან დებულებას.

თეორემა 12.8.2. ყოველი აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია თითქმის ყველგან წარმოებადია და მისი წარმოებული ჯამებადი ფუნქციაა.

თეორემა 12.8.3. ყოველი $f \in L([a, b])$ ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი არის აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია.

დამტკიცება. ვიქვით, $f \in L([a, b])$ და

$$F(x) = \int_{[a, x]} f \quad (x \in [a, b]).$$

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$. ლებეგის ინტეგრალის, როგორც სიმრავლის ფუნქციის, აბსოლუტურად უწყვეტობის თვისების ძალით (იხ. თეორემა 8.8.8) იარსებებს $\delta > 0$ რიცხვი, ისეთი, რომ

$$\int_E |f| < \varepsilon, \quad (3)$$

ყოველი ზომადი E სიმრავლისათვის, რომლის ზომა აკმაყოფილებს $|E| < \delta$ უტოლობას.

განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ქვეინტერვალ-ბის ნებისმიერი $\{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$ კლასი, რომელიც აკმაყოფილებს $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ პირობას. მაშინ ინტეგრალის ენობილი თვისებებისა და (3)-ის საფუძველზე დაეწერთ, რომ

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| &= \sum_{k=1}^n \left| \int_{(a_k, b_k)} f \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{(a_k, b_k)} |f| = \int_{\bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k)} |f| < \varepsilon. \end{aligned}$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 2.8.4. თუ აბსოლუტურად უწყვეტი f ფუნქციის წარმომადგენელი თითქმის ყველგან ნულის ტოლია, მაშინ f ფუნქცია მუდმივია. შედეგად, თუ აბსოლუტურად უწყვეტ f და g ფუნქციებს თითქმის ყველგან ერთი და იგივე წარმოებული აქვთ, მაშინ ისინი ერთმანეთისაგან მუდმივით განსხვავდებიან.

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $c \in (a, b]$ წერტილისათვის, $f(c) = f(a)$. რითაც თეორემა დამტკიცებული იქნება.

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. E იყოს (a, c) ინტერვალის ყველა იმ წერტილის სიმრავლე, რომელშიც f ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია. ცხადია, E სრული ზომის სიმრავლეა (a, c) ინტერვალში. Π იყოს ყველა იმ $[\alpha, \beta]$ სეგმენტის კლასი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$[\alpha, \beta] \subset (a, c), \quad (4)$$

$$\frac{|f(\beta) - f(\alpha)|}{\beta - \alpha} < \varepsilon. \quad (5)$$

ადვილი დასაბუთება, რომ Π კლასი ქმნის E სიმრავლის ეიტალის აბრით დაფარვას. მართლაც, განვიხილოთ ნებისმიერი $x \in E$ წერტილი. $f'(x) = 0$ პირობის გამო მოიძებნება $\eta > 0$ რიცხვი, ისეთი, რომ

$$\frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} < \varepsilon,$$

ყოველივეს, როცა $0 < h < \eta$. შედეგად, x -ის ნებისმიერი საკმარისად მცირე მარჯვენა $[x, x+h]$ მიღამო შედის Π კლასში. აღნიშნულის გამო, Π ქმნის E სიმრავლის ეიტალის აბრით დაფარვას.

გამოვიყენოთ 12.2.2 თეორემა E სიმრავლისა და Π კლასისათვის. შედეგად, ვიპოვით წყვილ-წყვილად თანაუქვეთი სეგმენტთაგან შედგენილ $\Pi' \subset \Pi$ ქვეკლასს, რომლისთვისაც

$$\left| E \setminus \bigcup_{I \in \Pi'} I \right| = 0.$$

საიდანაც, (4)-ის და იმის გათვალისწინებით, რომ E სრული ზომის სიმრავლეა (a, c) ინტერვალში, მივიღებთ ტოლობას:

$$\sum_{I \in \Pi'} |I| = c - a.$$

შემდეგ, Π' -დან გამოვყოთ სასრული ქვეკლასი Π'' , რომელიც აკმაყოფილებს შეფასებას:

$$\sum_{I \in \Pi''} |I| > c - a - \delta. \quad (6)$$

სადაც $\delta \in (0, c - a)$ არის რიცხვი, რომელიც f ფუნქციის აბსოლუტურად უწყვეტობის თვისების საფუძველზე შეესაბედა ε რიცხვს.

რაიმე I მონაკვეთზე f ფუნქციის ნამრდის აღსანიშნად გამოვიყენოთ $\Delta(f, I)$ ჩანაწერი, ე.ი. $\Delta(f, I) = f(\beta) - f(\alpha)$, სადაც α არის I -ს მარცხენა, ხოლო β კი - I -ს მარჯვენა ბოლო.

Π'' კლასის თვისებებისა და (5) შეფასების საფუძველზე დაწეროთ,

$$\sum_{I \in \Pi''} |\Delta(f, I)| < \sum_{I \in \Pi''} \varepsilon |I| \leq \varepsilon(c - a). \quad (7)$$

შევნიშნოთ, რომ Π'' კლასის მონაკვეთები ჩაკეტილია, რის გამოც ისინი ვერ ამოწურავენ ღია (a, c) მონაკვეთს. განვიხილოთ ყველა იმ ინტერვალის Λ კლასი, რომლებიც Π'' კლასის სეგმენტების გაერთიანებას შეაქვს (a, c) ინტერვალამდე. ცხადია, Λ კლასიც სასრულია და შედგება წყვილ-წყვილად თანაუქვეთი წევრებისაგან. ამასთან, (6)-ის ძალით, $\sum_{I \in \Lambda} |I| < \delta$. Λ კლასის აღნიშნული თვისებებისა და δ რიცხვის შერჩევის გამო გვექნება, რომ

$$\sum_{I \in \Lambda} |\Delta(f, I)| < \varepsilon. \quad (8)$$

Π'' და Λ კლასების მონაკვეთები ერთობლიობაში ქმნიან (a, c) მონაკვეთის დანაწილებას, რის საფუძველზე დავწერთ,

$$f(c) - f(a) = \sum_{I \in \Pi''} \Delta(f, I) + \sum_{I \in \Lambda} \Delta(f, I).$$

საიდანაც (7)-ის და (8)-ის ძალით ვლუბულობთ, რომ

$$|f(c) - f(a)| < \varepsilon(c - a + 1).$$

ეს შეფასება კი, $\varepsilon > 0$ რიცხვის ნებისმიერობის გამო, გვაძლევს $f(c) = f(a)$ ტოლობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შემდეგი თეორემა ახასიათებს იმ ფუნქციებს, რომლებიც წარმოდგებიან ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის სახით.

თეორემა 12.8.5. ფუნქცია წარმოდგება ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის სახით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის აბსოლუტურად უწყვეტია.

დამტკიცება. აუცილებლობა არის თეორემა 12.8.3-ის შედეგი. დავამტკიცოთ საკმარისობასთან დაკავშირებული წინადადება. ვთქვათ, f აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა. თეორემა 12.8.2-ის ძალით f თითქმის ყველგან წარმოებადია და f' ჯამებადი ფუნქციაა. განვიხილოთ f' -ის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი g , ე.ი.

$$g(x) = \int_{[a, x]} f' \quad (x \in [a, b]).$$

თეორემა 12.8.3-ის თანახმად g ფუნქცია აბოლუტურად უწყვეტია. ამასთან, ინტეგრალის დიფერენცირების შესახებ ლებეგის თეორემის ძალით g ფუნქციის წარმოებული თითქმის ყველგან f' ფუნქციის ტოლია. ამრიგად, აბსოლუტურად უწყვეტ f და g ფუნქციებს თითქმის ყველგან ერთი და იგივე წარმოებული აქვთ. საიდანაც თეორემა 12.8.4-ის საფუძველზე ვასკენით, რომ f და g მუდმივით განსხვავდებიან: $f = C + g$. თუ გავითვალისწინებთ $g(x) = 0$ პირობას, დაეასკენით C მუდმივის $f(a)$ რიცხვთან ტოლობას. საბოლოოდ მივიღებთ, რომ

$$f(x) = f(a) + \int_{[a, x]} f' \quad (x \in [a, b]).$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამოცანები

1. ვთქვათ, f აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი $c > 0$ -სთვის მოიძებნება $\delta > 0$, რომლისთვისაც

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \delta,$$

სადაც $\{(a_k, b_k)\}$ არის $[a, b]$ სეგმენტში შემავალი წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ინტერვალების ნებისმიერი თოვადი კლასი.

2. ვთქვათ, f ფუნქცია ისეთია, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება $\delta > 0$, რომლისთვისაც

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta,$$

სადაც $\{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$ არის $[a, b]$ სეგმენტში შემავალი ინტერვალების ნებისმიერი სასრული კლასი. დამატებით, რომ f ფუნქცია აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას.

3. ვთქვათ, $f(x) = \sqrt{x}$ ($x \in [0, 1]$). აჩვენეთ, რომ f აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა, მაგრამ არ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას.
4. აჩვენეთ, რომ თუ f აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ აბსოლუტურად უწყვეტია $|f|$.
5. აჩვენეთ, რომ თუ f უწყვეტი ფუნქციაა და $|f|$ აბსოლუტურად უწყვეტია, მაშინ აბსოლუტურად უწყვეტია f ფუნქცია.

§ 9. პირველყოფილი ფუნქციის აღდგენა ჯამებადი წარმოებულის შემთხვევაში

შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ ლებეგის მიხედვით ინტეგრება წარმოადგენს გაწარმოების შეზღუდულ ოპერაციას, ჯამებადი წარმოებულის მქონე ფუნქციათა კლასის ფარგლებში.

თეორემა 12.9.1. ვთქვათ, f წარმოებადი ფუნქციაა და ცნობილია, რომ $f' \in L([a, b])$. მაშინ სამართლიანია წარმოდგენა:

$$f(x) = f(a) + \int_{[a, x]} f' \quad (x \in [a, b]).$$

თეორემა 12.9.1 მიიღება ლებეგის ინტეგრალის სახით წარმოდგენადი ფუნქციების დახასიათებიდან (იხ. თეორემა 12.7.5) შემდეგი დებულების საფუძველზე.

თეორემა 12.9.2. ვთქვათ, f წარმოებადი ფუნქციაა და ცნობილია, რომ $f' \in L([a, b])$. მაშინ f აბსოლუტურად უწყვეტია.

ლემა 12.9.1. ვთქვათ, $E \subset [a, b]$ და $0 < C < \infty$. თუ ყოველ $x \in E$ წერტილში f ფუნქცია წარმოებადია და $|f'(x)| < C$, მაშინ $f(E)$ ანასახის გარე ზომისათვის სამართლიანია შეფასება:

$$|f(E)|_* \leq C|E|_*.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $\alpha > 0$. აღვნიშნოთ

$$E_\alpha = \{x \in E : |f(y) - f(x)| < C|y - x|, \text{ როცა } |y - x| < \alpha\}.$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$|f(E_\alpha)|_* \leq C|E_\alpha|_* \quad (1)$$

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი და E_α სიმრავლე დაფაროთ მონაკვეთების სასრული ან უსასრულო (I_k) მიმდევრობით, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\sum_k |I_k| < |E_\alpha|_* + \varepsilon; \quad (2)$$

$$|I_k| < \alpha \text{ ყოველი } k\text{-სათვის.} \quad (3)$$

ასეთი (I_k) მიმდევრობა შემდეგნაირად შეირჩევა: ჯერ E_α დაფაროთ J_m მონაკვეთებით, რომლებიც აკმაყოფილებენ $\sum_m |J_m| < |E_\alpha|_* + \varepsilon$ შეფასებას, შემდეგ კი, თითოეული J_m მონაკვეთი დაყოთ α -ზე ნაკლები სიგრძის ქვემო-ნაკვეთებად.

ნებისმიერი k -სათვის განვიხილოთ E_α სიმრავლის $E_\alpha \cap I_k$ პორცია. (3)-ის ძალით, ყოველი $x, y \in E_\alpha \cap I_k$ წერტილებისათვის გვაქვს,

$$|f(y) - f(x)| < C|y - x| \leq C|I_k|.$$

საიდანაც, ადვილი დასაბუთია, რომ $f(E_\alpha \cap I_k)$ სიმრავლე შეიძლება მოვათავსოთ $C|I_k|$ სიგრძის სეგმენტში. შედეგად,

$$|f(E_\alpha \cap I_k)|_* \leq C|I_k|.$$

აქედან, (2)-ის გამოყენებით დავწერთ,

$$|f(E_\alpha)|_* \leq \sum_k |f(E_\alpha \cap I_k)|_* \leq \sum_k C|I_k| \leq C(|E_\alpha|_* + \varepsilon).$$

მიღებული შეფასებიდან $\varepsilon > 0$ -ის ნებისმიერობის საფუძველზე ვლბულობთ (1) უტოლობას.

ახლა (1)-ის გამოყენებით ვაჩვენოთ $|f(E)|_* \leq C|E|_*$ შეფასება.

შევნიშნოთ, რომ $E_{1/n}$ ($n \in \mathbb{N}$) სიმრავლეები ქმნიან ზრდად მიმდევრობას და $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$. შედეგად, $f(E_{1/n})$ სიმრავლეებიც შექმნიან ზრდად მიმდევრობას და სამართლიანი იქნება $f(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(E_{1/n})$ ტოლობა. აღნიშნულიდან გამომდინარე, თუ გამოვიყენებთ გარე ზომის ქვემოდან უწყვეტობის თვისებას (იხ. თეორემა 5.8.1), დავწერთ,

$$|E|_* = \lim_{n \rightarrow \infty} |E_{1/n}|_* \text{ და } |f(E)|_* = \lim_{n \rightarrow \infty} |f(E_{1/n})|_* \quad (4)$$

(1)-ის ძალით გვაქვს, რომ

$$|f(E_{1/n})|_* \leq C|E_{1/n}|_* \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (5)$$

(4) და (5) თანაფარდობებიდან ვლბულობთ დასამტკიცებელ შეფასებას. $\square$

შენიშვნა 12.9.1. ლემა 12.9.1 სამართლიანი რჩება, თუ E სიმრავლის წერტილებში, f ფუნქციის წარმოებადობისა და $|f'(x)| < C$ უტოლობის ნაცვალად, მოვითხოვთ შემდეგ უფრო სუსტ პირობას: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} < C$. დამტკიცება ხდება სავსებით ანალოგიურად.

ლემა 12.9.2. თუ f ფუნქცია წარმოებადია, მაშინ f' ფუნქცია ზომადია.

დამტკიცება. დამტკიცება სრულად იმეორებს 9.4.1 თეორემისთვის გამოყენებულ მსჯელობებს.

თავიდანვე შევნიშნოთ, რომ წარმოებადობიდან გამომდინარე, f ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. გავაგრძელოთ f ფუნქცია $[a, b+1]$ სეგმენტზე ისე, რომ $(b, b+1]$ მონაკვეთის x წერტილებში მისი მნიშვნელობები გამოითვლებოდეს შემდეგნაირად:

$$f(x) = f(b) + f'(b)(x - b).$$

ახლა f შეიძლება განვიხილოთ როგორც $[a, b+1]$ სეგმენტზე წარმოებადი (და შედეგად, უწყვეტი) ფუნქცია.

ყოველი k -სთვის განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე შემდეგნაირად განსაზღვრული Δ_k ფუნქცია:

$$\Delta_k(x) = \frac{f(x + 1/k) - f(x)}{1/k} \quad (x \in [a, b]).$$

ყოველ $x \in [a, b]$ წერტილში გვაქვს, რომ $f'(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_k(x)$. ამრიგად, f' არის უწყვეტ Δ_k ფუნქციათა მიმდევრობის წერტილოვანი ზღვარი. საიდანაც ვასკენით f' -ის ზომადობას. $\square$

ლემა 12.9.3. ვთქვათ, f წარმოებადი ფუნქციაა. მაშინ ნებისმიერი ზომადი $E \subset [a, b]$ სიმრავლისათვის სამართლიანია შეფასება:

$$|f(E)|_* \leq \int_E |f'|.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი და ყოველი n -სთვის E_n -ით აღვნიშნოთ $\{x \in E \mid (n-1)\varepsilon \leq |f'(x)| < n\varepsilon\}$ სიმრავლე. ცხადია, E_n სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და მათი გაერთიანება E -ს ტოლია, ამასთან, f' -ის ზომადობის გამო (იხ. ლემა 12.9.2) E_n სიმრავლეები ზომადია. E_n სიმრავლეთა აღნიშნული თვისებებისა და ლემა 12.9.1-ის ძალით გვექნება,

$$\begin{aligned} |f(E)|_* &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |f(E_n)|_* \leq \sum_{n=1}^{\infty} n\varepsilon |E_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\varepsilon |E_n| + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon |E_n| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f'| + \varepsilon |E| = \int_E |f'| + \varepsilon |E|. \end{aligned}$$

საიდანაც, $\varepsilon > 0$ რიცხვის ნებისმიერობის გათვალისწინებით ელემენტარულ და-
სამტკიცებელ შეფასებას. $\square$

თეორემა 12.9.2-ის დამტკიცება. თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ ნე-
ბისმიერი $c, d \in [a, b]$, $c < d$, წერტილებისათვის სამართლიანი იქნება შეფა-
სება:

$$|f(d) - f(c)| \leq \int_{(c,d)} |f'|. \quad (6)$$

მართლაც, f ფუნქციის უწყვეტობის საფუძველზე, ადვილი დასაბუთია, რომ
 $f(c)$ და $f(d)$ ბოლოების მქონე სეგმენტი ჩართულია $f([c, d])$ სეგმენტში.
შედეგად, ლემა 12.9.3-ის ძალით დაწერეთ,

$$|f(d) - f(c)| \leq |f([c, d])| \leq \int_{[c,d]} |f'| = \int_{(c,d)} |f'|.$$

განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. გამოვიყენოთ $|f'|$ ფუნქცი-
ისათვის ინტეგრალის, როგორც სიმრავლის ფუნქციის, აბსოლუტურად უწყვე-
ტობის თვისება და ვიპოვოთ $\delta > 0$, ისეთი, რომ

$$\int_E |f'| < \varepsilon, \text{ როცა } |E| < \delta. \quad (7)$$

განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ქვეინტერვალებ-
ის ნებისმიერი სასრული $\{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$ კლასი, რომლისთვისაც
 $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$. მაშინ (6) და (7) შეფასებების ძალით გვექნება,

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| \leq \sum_{k=1}^n \int_{(a_k, b_k)} |f'| = \int_{\bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k)} |f'| < \varepsilon.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 12.9.2. 12.1.1 და 12.9.1 თეორემები პასუხს იძლევიან ამ თავის
დასაწყისში დასმულ საკითხზე გაწარმოებისა და ლებეგის მიხედვით ინტეგრე-
ბის ოპერაციების ურთიერთშებრუნებადობის შესახებ. თეორემა 12.1.1-ის ძა-
ლით, თუ f ფუნქციას ვაინტეგრებთ და შემდეგ გაეაწარმოებთ, თითქმის
ყველა წერტილში f ფუნქციას დაეუბრუნდებით; ხოლო თეორემა 12.9.1-ის
თანახმად - თუ f ფუნქციას გაეაწარმოებთ და შემდეგ ვაინტეგრებთ, კვლავ
საწყის ფუნქციას მივიღებთ.

შენიშვნა 12.9.3. გაწარმოებისა და ლებეგის მიხედვით ინტეგრების ოპერა-
ციების ურთიერთშებრუნებადობის მოვლენა კიდევ უფრო ნათლად იყვეთება,
თუ ყოველ წერტილში გაწარმოების ნაცულად განვიხილავთ თითქმის ყველგან
გაწარმოების ოპერაციას და ვისარგებლებთ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცი-
ების თვისებებით.

$C^{(1)}([a, b])$ -ით აღვნიშნოთ უწყვეტად წარმოებად ფუნქციათა კლასი. შევთანხმდეთ, რომ $C^{(1)}([a, b])$ კლასის ნებისმიერი ორი ფუნქცია, რომლებიც მუდმივით განსხვავდებიან, გაიგივებულია.

გაწარმოების ოპერაცია გავიგოთ, როგორც $C^{(1)}([a, b])$ კლასის ასახვა $C([a, b])$ კლასში, რომელიც $f \in C^{(1)}([a, b])$ ფუნქციას შეუსაბამებს მის წარმოებულ f' ფუნქციას. ინტეგრების ოპერაცია კი გავიგოთ, როგორც $C([a, b])$ კლასიდან $C^{(1)}([a, b])$ კლასში მოქმედი ასახვა, რომელიც $f \in C([a, b])$ ფუნქციას შეუსაბამებს მის რიმანის განუსაზღვრელ F ინტეგრალს. მაშინ გაწარმოებისა და რიმანის მიხედვით ინტეგრების ოპერაციების ურთიერთშებრუნებადობის პრინციპი გამოიხატება შემდეგი დებულებით.

- გაწარმოების ოპერაცია არის $C^{(1)}([a, b])$ და $C([a, b])$ კლასებს შორის მოქმედი ბიექციური ასახვა, რომლის შებრუნებულ ასახვას წარმოადგენს რიმანის მიხედვით ინტეგრების ოპერაცია.

ქვემოთ ანალოგიური დებულება მოცემული იქნება ლებეგის მიხედვით ინტეგრების ოპერაციის შემთხვევაში.

ვთქვათ, f თითქმის ყოველ წერტილში წარმოებადი ფუნქციაა. წინა პარაგრაფების მსგავსად, შევთანხმდეთ, რომ f' -ით აღვნიშნოთ ფუნქცია, რომელიც $f'(x)$ -ის ტოლია f -ის წარმოებულის არსებობის წერტილებში და ნულის ტოლია დარჩენილ წერტილებში.

შევთანხმდეთ აგრეთვე, რომ აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციათა $AC([a, b])$ კლასის ნებისმიერი ორი ფუნქცია, რომლებიც მუდმივით განსხვავდებიან, გაიგივებულია.

აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციათა თვისებების ძალით (იხ. 12.8.2 და 12.8.3 თეორემები), გაწარმოების ოპერაცია შეიძლება გავიგოთ, როგორც $AC([a, b])$ კლასიდან $L([a, b])$ კლასში მოქმედი ასახვა, რომელიც $AC([a, b])$ კლასის f ფუნქციას შეუსაბამებს მის წარმოებულ f' ფუნქციას; ხოლო ინტეგრების ოპერაცია კი შეიძლება გავიგოთ, როგორც $L([a, b])$ და $AC([a, b])$ კლასებს შორის მოქმედი ასახვა, რომელიც $f \in L([a, b])$ ფუნქციას შეუსაბამებს მის ლებეგის განუსაზღვრელ F ინტეგრალს.

მაშინ 12.8.3, 12.8.4 და 12.1.1 თეორემების გათვალისწინებით, გაწარმოებისა და ლებეგის მიხედვით ინტეგრების ოპერაციების ურთიერთშებრუნებადობის პრინციპი შეიძლება გამოვხატოთ შემდეგი დებულებით.

- გაწარმოების ოპერაცია არის $AC([a, b])$ და $L([a, b])$ კლასებს შორის მოქმედი ბიექციური ასახვა, რომლის შებრუნებულ ასახვას წარმოადგენს ლებეგის მიხედვით ინტეგრების ოპერაცია.

ამოცანები

1. ვთქვათ, f რაიმე ფუნქციაა და $E = \{x \mid f'(x) = 0\}$. დაამტკიცეთ, რომ $f(E)$ არის ნული ზომის სიმრავლე.

შემოსაზღვრული ვარიაციისა და აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციების ზოგიერთი თვისება

ამ თავში გრძელდება შემოსაზღვრული ვარიაციისა და აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციების თვისებათა შესწავლა. კერძოდ, დამტკიცებულია ამ ტიპის ფუნქციების დასასაიათებები, როცა აპრიორულად ცნობილია უწყვეტობის თვისების შესრულება, მოცემულია მათი გამოყენება წირის სიგრძის გამოთვლის ამოცანის და აგრეთვე, ლებეგ-სტილტესის ზომათა ძირითადი ტიპების შესასწავლად.

§ 1. შემოსაზღვრული ვარიაციის უწყვეტი ფუნქციები

თეორემა 13.1.1. თუ შემოსაზღვრული ვარიაციის f ფუნქცია უწყვეტია x წერტილში, მაშინ მისი სრული ვარიაცია ცვლადი ზედა საზღვრით - T_f აგრეთვე უწყვეტია x წერტილში.

დამტკიცება. დაუშვათ $x \in [a, b]$. ვაჩვენოთ T_f -ის მარჯვნიდან უწყვეტობა x -ში. განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. ვიპოვოთ $[x, b]$ მონაკვეთის $P = (x, t_1, \dots, t_n)$ დანაწილება, რომლისთვისაც

$$V_f([x, b]) \leq V_f(P) + \varepsilon. \quad (1)$$

შემდეგ, f ფუნქციის x წერტილში უწყვეტობის საფუძველზე ვიპოვოთ $y \in (x, t_1)$ წერტილი, ისეთი, რომ

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon. \quad (2)$$

$[y, b]$ მონაკვეთის $(y, t_1, \dots, t_n)$ დანაწილება აღენიშნოთ Q -თი. მაშინ (1) და (2) თანაფარდობებიდან მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} V_f([x, b]) &\leq V_f(P) + \varepsilon \leq |f(y) - f(x)| + V_f(Q) + \varepsilon < \\ &< V_f(Q) + 2\varepsilon \leq V_f([y, b]) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

საიდანაც, $V_f([x, y]) \leq 2\varepsilon$. შედეგად, $T_f(y) - T_f(x) \leq 2\varepsilon$. უკანასკნელი შეფასებიდან, $\varepsilon > 0$ რიცხვის ნებისმიერობისა და T_f -ის ზრდადობის გამო, ვასკვნით T_f -ის მარჯვნიდან უწყვეტობას x წერტილში.

ანალოგურად დამტკიცდება T_f -ის მარცხნიდან უწყვეტობა $x \in (a, b]$ შემთხვევაში. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 13.1.1-დან შედეგის სახით ვლბულობთ შემდეგ ღებულებას.

თეორემა 13.1.2. თუ შემოსაზღვრული ვარიაციის f ფუნქცია უწყვეტია, მაშინ მისი სრული ვარიაცია ცვლადი ზედა საზღვრით - T_f აგრეთვე უწყვეტია.

თეორემა 13.1.2-დან თეორემა 12.7.4-ის გათვალისწინებით ვლბულობთ შემდეგ ღებულებას.

თეორემა 13.1.3. შემოსაზღვრული ვარიაციის უწყვეტი ფუნქცია წარმოდგინება ერთდროულად ზრდადი და უწყვეტი ფუნქციების სწვაობის სახით.

შენიშვნა 13.1.1. 13.1.1-13.1.3 თეორემების ანალოგები სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როცა, უწყვეტობის ნაცულად, განვიხილავთ მარჯვნიდან (მარცხნიდან) უწყვეტობის პირობას.

აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციებისთვის სამართლიანია თეორემა 13.1.2-ის შემდეგი ვარიანტი.

თეორემა 13.1.4. თუ f ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია, მაშინ მისი სრული ვარიაცია ცვლადი ზედა საზღვრით - T_f აგრეთვე აბსოლუტურად უწყვეტია.

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. δ იყოს დადებითი რიცხვი, რომელიც, f ფუნქციის აბსოლუტურად უწყვეტობის პირობის მიხედვით, შეესაბამება $\varepsilon/2$ -ს.

ვთქვათ, $\{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$ არის $[a, b]$ სეგმენტის წვეილ-წვეილად თანაუკვეთი ქვეინტერვლების კლასი, რომლისთვისაც $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$. ვაჩვენოთ, რომ

$$\sum_{k=1}^n |T_f(b_k) - T_f(a_k)| < \varepsilon,$$

რითაც თეორემა დამტკიცებული იქნება.

ყოველი $k \in \overline{1, n}$ -თვის ვიპოვოთ $[a_k, b_k]$ სეგმენტის ისეთი $P_k = (x_{k,0}, \dots, x_{k,m_k})$ დანაწილება, რომ

$$V_f([a_k, b_k]) < V_f(P_k) + \frac{\varepsilon}{2n}.$$

მაშინ სამართლიანი იქნება შეფასება:

$$\sum_{k=1}^n |T_f(b_k) - T_f(a_k)| = \sum_{k=1}^n V_f([a_k, b_k]) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^n V_f(P_k) = \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{m_k} |f(x_{k,i}) - f(x_{k,i-1})|. \quad (3)$$

ასლა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $(x_{k,i-1}, x_{k,i})$ ($k \in \overline{1, n}$, $i \in \overline{1, m_k}$) ინტერვალების სიგრძეთა ჯამი იგივეა, რაც (a_k, b_k) ინტერვალების სიგრძეთა ჯამი, δ რიცხვის შერჩევის საფუძველზე დავწერთ,

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{m_k} |f(x_{k,i}) - f(x_{k,i-1})| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4)$$

(3)-დან და (4)-დან ელემენტარული საჭირო შეფასებას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 13.1.4-დან თეორემა 12.7.4-ის გათვალისწინებით ელემენტარული შემდეგ დებულებას.

თეორემა 13.1.5. აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია წარმოიდგინება ერთდროულად ზრდადი და აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციების სხვაობის სახით.

$[a, b]$ სეგმენტის $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ დანაწილების პარამეტრი აღვნიშნოთ $\lambda(P)$ -თი, ე.ი. $\lambda(P) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - x_{k-1}|$.

თეორემა 13.1.6. თუ f უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ

$$V_f([a, b]) = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} V_f(P).$$

ე.ი. სრული ვარიაცია არის ვარიაციული ჯამების ზღვარი, როცა დანაწილების პარამეტრი მიისწრაფვის ნულისაკენ.

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი $\alpha < V_f([a, b])$ რიცხვი და ვაჩვენოთ, რომ $V_f(P) > \alpha$, როცა $\lambda(P)$ სუფიციენტურად მცირეა. ამით თეორემა დამტკიცებული იქნება.

$Q = (a, t_1, \dots, t_m, b)$ იყოს $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილება, ისეთი, რომ $V_f(Q) > \alpha$.

$\delta > 0$ რიცხვი შევარჩიოთ ისეთნაირად, რომ აკმაყოფილებდეს შემდეგ ორ პირობას:

$$\delta < \min\{t_1 - a, t_2 - t_1, \dots, b - t_m\}; \quad (5)$$

$$|f(x) - f(y)| < \frac{V_f(Q) - \alpha}{2m}, \text{ როცა } |x - y| < \delta. \quad (6)$$

შევნიშნოთ, რომ (6)-ის მიღწევისათვის უნდა ვისარგებლოთ f ფუნქციის თანაბრად უწყვეტობით.

განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ დანაწილება, რომლისთვისაც $\lambda(P) < \delta$. $P + Q$ ჩანაწერით აღვნიშნოთ დანაწილება.

რომელიც შედგენილია P და Q დანაწილებების წერტილთა ერთობლიობაში განხილვით. (5) პირობის გამო $t_1, \dots, t_m$ წერტილები განაწილებიან m ცალ $[x_{k-1}, x_k]$ სახის სხვადასხვა სეგმენტში. ამის გამო $V_f(P)$ ვარიაციული ჯამიდან $V_f(P+Q)$ ვარიაციულ ჯამზე გადასვლისას არაუმეტეს m ცალი

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

სახის შესაყრები შეიცვლება

$$|f(t_i) - f(x_{k-1})| + |f(x_k) - f(t_i)|$$

სახის ჯამით. შედეგად, (6) პირობის ძალით, თითოეული ასეთი ჩანაცვლებისას ვარიაციული ჯამი იზრდება $\frac{V_f(Q) - \alpha}{m}$ -ზე ნაკლები სიდიდით. აღნიშნულის საფუძველზე დავწერთ,

$$V_f(P) > V_f(P+Q) - m \frac{V_f(Q) - \alpha}{m} \geq V_f(Q) - (V_f(Q) - \alpha) = \alpha.$$

ამრიგად, $V_f(P) > \alpha$, როცა $\lambda(P) < \delta$. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

f ფუნქციის რხევა $E \subset [a, b]$ სიმრავლეზე ეწოდება

$$\omega_f(E) = M_f(E) - m_f(E)$$

სიდიდეს, სადაც $M_f(E)$ აღნიშნავს f -ის სუპრემუმს E სიმრავლეზე, ხოლო $m_f(E)$ კი f -ის ინფიმუმს ამავე სიმრავლეზე. ცხადია, თუ f უწყვეტია და E წარმოადგენს სეგმენტს, მაშინ, სუპრემუმისა და ინფიმუმის ნაცულად, შეგვიძლია მაქსიმუმი და მინიმუმი ვიგულისხმოთ.

$[a, b]$ სეგმენტის $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ დანაწილებისათვის, ზოგჯერ, უფრო მოსახერხებელია f ფუნქციის $V_f(P)$ ვარიაციული ჯამის ნაცულად რსევათა ჯამის განხილვა:

$$\Omega_f(P) = \sum_{k=1}^n \omega_f([x_{k-1}, x_k]).$$

ცხადია, $V_f(P) \leq \Omega_f(P)$. არსებითია ის გარემოება, რომ $\Omega_f(P)$ ჯამი, თავის მხრივ, ზემოდან ფასდება გარკვეული ვარიაციული ჯამით. მართლაც, განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. ადვილი დასანახია, რომ ყოველი $k \in \overline{1, n}$ -სათვის შეიძლება ისე შევარჩიოთ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტის τ_k და t_k წერტილები, რომ სრულდებოდეს პირობა

$$\omega_f([x_{k-1}, x_k]) < |f(t_k) - f(\tau_k)| + \frac{\varepsilon}{n}.$$

P^* -ით აღენიშნოთ $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილება, რომელიც შედგენილია P დანაწილების შეესებით τ_k და t_k ($k \in \overline{1, n}$) წერტილების მეშვეობით. მაშინ მარტივად დაერწმუნდებით, რომ $\Omega_f(P) \leq V_f(P^*) + \varepsilon$. ამრიგად, შესრულებულია შეფასებები:

$$V_f(P) \leq \Omega_f(P) \leq V_f(P^*) + \varepsilon. \quad (7)$$

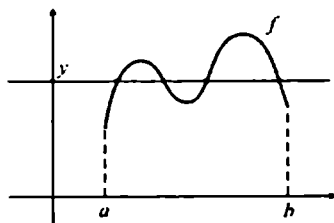
(7) შეფასებისა და თეორემა 13.1.4-ის საფუძველზე ვლებულობი შემდეგ ღებულებას.

თეორემა 13.1.7. ნებისმიერი f ფუნქციისათვის, $V_f([a, b]) = \sup_P \Omega_f(P)$;
ხოლო თუ f უწყვეტია, მაშინ $V_f([a, b]) = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \Omega_f(P)$.

შენიშვნა 13.1.2. თეორემა 13.1.6 და თეორემა 13.1.7-ის მეორე ნაწილი არ არიან სამართლიანი ნებისმიერი ფუნქციებისათვის. ამაში გვარწმუნებს $[-1, 1]$ სეგმენტზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქციის მაგალითი: $f(0) = 1$ და $f(x) = 0$, როცა $x \neq 0$.

§ 2. შემოსაზღვრული ვარიაციის უწყვეტი ფუნქციების დახასიათება ბანახის ინდიკატორის მეშვეობით

ვთქვათ, f უწყვეტი ფუნქციაა. ყოველ $y \in \mathbb{R}$ რიცხვს შევესაბამოთ $N_f(y)$ რიცხვი, რომელიც გამოსახავს $f(x) = y$ განტოლების ამონახსნთა რაოდენობას. თუ აღნიშნულ განტოლებას უამრავი ამონახსნი აქვს, მაშინ მიიჩნევა, რომ $N_f(y) = \infty$. ასეთი წესით განსაზღვრულ N_f ფუნქციას f ფუნქციის ბანახის ინდიკატორის უწოდებენ (ნახ. 13.1).



ნახ. 13.1.

როგორც ქვემოთ მოცემული შედეგებიდან დაერწმუნდებით, ბანახის ინდიკატორის მეშვეობით საინტერესოდ აღიწერება უწყვეტ ფუნქციათა ვარიაციული თვისებები.

თეორემა 13.2.1. ყოველი უწყვეტი f ფუნქციისათვის ბანახის N_f ინდიკატორის ზომადია და

$$V_f([a, b]) = \int_{\mathbb{R}} N_f.$$

ვთქვათ, Π არის $[a, b]$ მონაკვეთის წყვილ-წყვილად თანაგვეთ ქვე-სიმრავლეთა რაიმე არაქარიელი კლასი. უწყვეტი f ფუნქციისათვის $N_{f, \Pi}$ -ით აღენიშნოთ ფუნქცია, რომელიც ყოველ $y \in \mathbb{R}$ რიცხვს შეუსაბამებს რაოდენობას ყველა იმ $E \in \Pi$ სიმრავლისა, რომელშიც $f(x) = y$ განტოლებას აქვს ამონახსნი. თუ Π -ს როლში ავიღებთ $[a, b]$ -ს ყველა ერთიულმენტიანი $\{x\}$ სიმრავლის კლასს, მაშინ ცხადია, რომ $N_{f, \Pi}$ დაემთხვევა ბანახის N_f ინდიკატრის.

როცა Π კლასი ერთი E სიმრავლისაგან შედგება, $N_{f, \{E\}}$ -ის ნაცულად სიმარტივისათვის დაეწეროთ $N_{f, E}$.

როცა Π არის მცირე სიგრძის მონაკვეთების კლასი, რომელიც ქმნის $[a, b]$ -ს დაყოფას, მაშინ $N_{f, \Pi}$ ფუნქცია მარტივი სტრუქტურისაა და ამასთან, ახლოს დგას N_f ბანახის ინდიკატრისთან. როგორც ქვემოთ ენახავთ, ასეთი აპროქსიმაციის არსებობა არის ძირითადი არგუმენტი თეორემა 13.2.1-ის დამტკიცებისას.

ლემა 13.2.1. ვთქვათ, f უწყვეტი ფუნქციაა. თუ $I \subset [a, b]$ არის რაიმე გადაუგვარებელი მონაკვეთი, მაშინ $N_{f, I}$ ფუნქცია ზომადია და

$$\int_{\mathbb{R}} N_{f, I} = \omega_f(I).$$

დამტკიცება. ლემის დასკვნა გამომდინარეობს შემდეგი ორი წინადადებად:

- 1) $N_{f, I}$ ემთხვევა $f(I)$ სიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციას;
- 2) $f(I)$ სიმრავლე წარმოადგენს $m_f(I)$ და $M_f(I)$ ბოლოების მქონე მონაკვეთს.

1) გამომდინარეობს $N_{f, I}$ ფუნქციის განსაზღვრებიდან, ხოლო 2) არის f ფუნქციის უწყვეტობის შედეგი.

ლემა დამტკიცებულია. □

ლემა 13.2.2. ვთქვათ, f უწყვეტი ფუნქციაა, $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ არის $[a, b]$ მონაკვეთის დანაწილება, ხოლო Π არის $[x_0, x_1], (x_1, x_2], \dots, (x_{n-1}, x_n]$ მონაკვეთების კლასი. მაშინ $N_{f, \Pi}$ ფუნქცია ზომადია და

$$\int_{\mathbb{R}} N_{f, \Pi} = \Omega_f(P).$$

დამტკიცება. დასამტკიცებელი წინადადებები გამომდინარეობს ლემა 13.2.1-დან შემდეგი ორი მარტივად შესამოწმებელი ფაქტის გათვალისწინებით:

- 1) $N_{f, \Pi} = N_{f, [x_0, x_1]} + N_{f, (x_1, x_2]} + \dots + N_{f, (x_{n-1}, x_n]};$
- 2) უწყვეტი ფუნქციის სუპრემუმი (ინფიმუმი) ერთი და იგივეა $[c, d]$ და $(c, d]$ სახის მონაკვეთებზე. □

ყოველი n -სთვის Π_n იყოს $[a, b]$ სეგმენტის 2^n ცალ ტოლი სიგრძის ნაწილად დაყოფით მიღებული კლასი:

$$\Pi_n = \{I_{n,1}, \dots, I_{n,2^n}\},$$

სადაც $I_{n,1} = [a, a + \frac{b-a}{2^n}]$ და $I_{n,k} = (a + (k-1)\frac{b-a}{2^n}, a + k\frac{b-a}{2^n}]$, $k \in \overline{2, 2^n}$.

ლემა 13.2.3. ვთქვათ, f უწყვეტი ფუნქციაა. მაშინ ნებისმიერი $y \in \mathbb{R}$ წერტილისათვის,

$$N_{f, \Pi_1}(y) \leq N_{f, \Pi_2}(y) \leq \dots \text{ და } N_f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} N_{f, \Pi_n}(y).$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$. თუ $f(x) = y$ განტოლებას აქვს ამონახსნი $I \in \Pi_n$ მონაკვეთში, მაშინ ამონახსნი ექნება I -ს ორ ნაწილად დაყოფით მიღებულ ერთ-ერთ მონაკვეთში მაინც. შედეგად, Π_{n+1} -ში იმ მონაკვეთების რიცხვი, რომლებშიც ამოხსნადია $f(x) = y$ განტოლება, არანაკლებია $N_{f, \Pi_n}(y)$ რიცხვზე. ამრიგად, $N_{f, \Pi_n}(y) \leq N_{f, \Pi_{n+1}}(y)$. ამით $(N_{f, \Pi_n}(y))$ მიმდევრობის მრდადობა დადგენილია.

ვთქვათ, $m \leq N_f(y)$ რაიმე ნატურალური რიცხვია. მაშინ შეგვიძლია ვიპოვოთ $f(x) = y$ განტოლების m ცალი ამონახსნი: $x_1, \dots, x_m$. ვიგულისხმობთ, რომ $x_1 < x_2 < \dots < x_m$. n შევარჩიოთ იმდენად დიდი, რომ სრულდებოდეს პირობა

$$\frac{b-a}{2^n} < \min_{1 \leq k \leq m} (x_k - x_{k-1}).$$

ამ პირობის ძალით $x_1, \dots, x_m$ ფესვები გადანაწილდებიან Π_n კლასის m ცალ განსხვავებულ მონაკვეთში. შედეგად, სამართლიანი იქნება შეფასება: $N_{f, \Pi_n}(y) \geq m$.

ამრიგად, ნებისმიერი $m \leq N_f(y)$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი n , რომ $N_{f, \Pi_n}(y) \geq m$, საიდანაც $(N_{f, \Pi_k}(y))$ მიმდევრობის მრდადობის გათვალისწინებით, ვასკენით $N_f(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} N_{f, \Pi_k}(y)$ ტოლობას. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 13.2.1-ის დამტკიცება. N_f ფუნქციის ზომადობა არის 13.2.2 და 13.2.3 ლემების შედეგი. შემდეგ, ლემა 13.2.3-დან ლევის თეორემის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\int_{\mathbb{R}} N_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} N_{f, \Pi_n}.$$

საიდანაც ლემა 13.2.2-ის ძალით ვღებულობთ,

$$\int_{\mathbb{R}} N_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_f(P_n),$$

სადაც P_n არის $[a, b]$ სეგმენტის ის დანაწილება, რომელიც მას ჰყოფს 2^n ცალ ტოლი სიგრძის მონაკვეთად. აქედან, თეორემა 13.1.7-ის გათვალისწინებით, ვასკენით $\int_{\mathbb{R}} N_f = V_f([a, b])$ ტოლობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 13.2.1-დან მიიღება შემდეგი ორი საინტერესო შედეგი.

თეორემა 13.2.2. უწყვეტი f ფუნქცია არის შემოსაზღვრული ვარიაციის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ბანახის N_f ინდიკატორის ჯამებადია.

თეორემა 13.2.3. თუ f შემოსაზღვრული ვარიაციის უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ ყველა იმ $y \in \mathbb{R}$ წერტილის სიმრავლე, რომლისთვისაც $f(x) = y$ განტოლებას აქვს უსასრულო რაოდენობის ამონახსნი, არის ნული ზომის.

§ 3. აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციების დახასიათება (N) თვისების ტერმინებში

შემდეგი განსამდგერება ეკუთვნის ნ. ლუზინს: ამბობენ, რომ f ფუნქციას აქვს (N) თვისება, თუ f -ის მოქმედებისას ნებისმიერი ნული ზომის E სიმრავლის $f(E)$ ანასასი აგრეთვე ნული ზომის სიმრავლეა.

თეორემა 13.3.1. ყოველ აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციას აქვს (N) თვისება.

ვიდრე თეორემის დამტკიცებაზე გადავიდოდეთ, ორი საყურადღებო რამ შევნიშნოთ:

- აბსოლუტურად უწყვეტობის განსაზღვრება მიიღებს ეკვივალენტურ ფორმას, თუ მასში, ნაზრდების $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)|$ ჯამის ნაცვლად, განვიხილავთ რხევათა $\sum_{k=1}^n \omega_f([a_k, b_k])$ ჯამს. ამის შესამოწმებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ რხევათა ჯამი ტოლია შემცირებულ ინტერვალებზე აღებული ნაზრდების ჯამის, სახელდობრ,

$$\sum_{k=1}^n \omega_f([a_k, b_k]) = \sum_{k=1}^n |f(\beta_k) - f(\alpha_k)|,$$

სადაც α_k და β_k არიან $[a_k, b_k]$ სეგმენტის ის წერტილები, რომლებშიც f ფუნქცია შესაბამისად აღწევს მინიმუმსა და მაქსიმუმს;

- აბსოლუტურად უწყვეტობის განსაზღვრების ორივე გარიანტში, შეიძლება, წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი (a_k, b_k) ინტერვალების სასრული კლასის ნაცვლად, განვიხილოთ არაუპეიტეს თვლადი კლასი. ეს წინადადება მოწმდება უშუალოდ.

თეორემა 13.1.1-ის დამტკიცება. ვთქვათ, f არის აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია და E ნული ზომის სიმრავლეა. ვაჩვენოთ, რომ $|f(E)| = 0$. სასრული რაოდენობის წერტილები გაელენას არ ახდენენ სიმრავლის ზომაზე, ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $E \subset (a, b)$.

თეორემა 13.3.2 მტკიცდება იმავე სქემით, რომელიც უკვე გამოვიყენეთ 12.9 პარაგრაფში.

ლემა 13.3.1. თუ ზომადი f ფუნქცია თითქმის ყველგან წარმოებადია, მაშინ f' ფუნქცია ზომადია.

დამტკიცება. გავაგრძელოთ f ფუნქცია $[a, b + 1]$ სეგმენტზე ისე, რომ $(b, b + 1]$ მონაკვეთის წერტილებში მისი მნიშვნელობები $f(b)$ რიცხვის ტოლი იყოს. ახლა f შეიძლება განვიხილოთ, როგორც $[a, b + 1]$ სეგმენტზე მოცემული ზომადი ფუნქცია.

ყოველი n -სთვის Δ_n იყოს $[a, b]$ სეგმენტზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია:

$$\Delta_n(x) = \frac{f(x + 1/n) - f(x)}{1/n} \quad (x \in [a, b]).$$

ცვლადის გარდაქმნა, რომელიც ახდენს არგუმენტის ძერას, ინარჩუნებს ფუნქციის ზომადობას. რის გამოც, ყოველი n -სთვის $f(\cdot + 1/n)$ იქნება $[a, b]$ -ზე მოცემული ზომადი ფუნქცია. შედეგად, ვასცენით Δ_n ფუნქციების ზომადობას. ახლა შევნიშნოთ, რომ $[a, b]$ მონაკვეთის ყოველ x წერტილში, რომელშიც f ფუნქცია წარმოებადია, $(\Delta_n(x))$ მიმდევრობის ზღვარი იქნება $f'(x)$ რიცხვი. ამრიგად, ზომად ფუნქციათა (Δ_n) მიმდევრობა $[a, b]$ მონაკვეთის თითქმის ყოველ წერტილში კრებადია f' ფუნქციისაკენ, საიდანაც, ლებეგის ზომის სისრულისა და თეორემა 7.7.1-ის საფუძველზე, დავასცენით f' -ის ზომადობას. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 13.3.1. შესაძლებელია ლემა 13.3.1-ზე ძლიერი დებულების დამტკიცება: ნებისმიერი ზომადი f ფუნქციისათვის ზომადია ყველა იმ წერტილის E სიმრავლე, რომელშიც f წარმოებადია და ზომადია აგრეთვე f' , როგორც E -ზე განსაზღვრული ფუნქცია.

ლემა 13.3.2. ვთქვათ, f ზომადი და თითქმის ყველგან წარმოებადი ფუნქციაა. თუ f წარმოებადია ზომადი $E \subset [a, b]$ სიმრავლის ყოველ წერტილში, მაშინ

$$|f(E)|_* \leq \int_E |f'|.$$

ჩვენ არ მოგვყავს ლემა 13.3.2-ის დამტკიცება, რადგანაც ის ზუსტად იმეორებს 12.9.3 ლემის დამტკიცებას, იმ განსხვავებით, რომ 12.9.2 ლემის ნაცვლად გამოვიყენება ზემოთ მოცემული ლემა 13.3.1.

თეორემა 13.3.2-ის დამტკიცება. თეორემა 13.3.1-ის გათვალისწინებით, დასამტკიცებელი გვაქვს მხოლოდ საყმარისობის ნაწილი.

ვთქვათ, f შემოსაზღვრული ვარიაციის უწყვეტი ფუნქციაა, რომელსაც აქვს (N) თვისება. თავდაპირველად ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $c, d \in [a, b]$, $c < d$, წერტილებისათვის სამართლიანი იქნება შეფასება:

$$|f(d) - f(c)| \leq \int_{(c,d)} |f'|. \quad (2)$$

E -თი აღენიშნოთ $[c, d]$ სეგმენტის ყველა იმ წერტილის სიმრავლე, რომელშიც f არის წარმოებადი, ხოლო H იყოს $[c, d] \setminus E$ სიმრავლე. შემოსაზღვრული ვარიაციის თვისება უზრუნველყოფს თითქმის ყველგან წარმოებადობას, რის გამოც H ნული ზომის სიმრავლე იქნება. ამასთანავე, (N) თვისების გათვალისწინებით, გვექნება, რომ

$$|f(H)| = 0. \quad (3)$$

f ფუნქციის უწყვეტობის გამო, $f(c)$ და $f(d)$ ბოლოების მქონე სეგმენტის ჩართულია $f([c, d])$ სეგმენტში. შედეგად, ლემა 13.3.2-ის და (3)-ის ძალით დაწვერთ,

$$\begin{aligned} |f(d) - f(c)| &\leq |f([c, d])| \leq |f(E)|_* + |f(H)|_* \leq \\ &\leq \int_E |f'| \leq \int_{[c,d]} |f'| = \int_{(c,d)} |f'|. \end{aligned}$$

განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. გამოვიყენოთ $|f'|$ ფუნქციისათვის ინტეგრალის, როგორც სიმრავლის ფუნქციის, აბსოლუტურად უწყვეტობის თვისება და ვიპოვოთ $\delta > 0$, ისეთი, რომ

$$\int_A |f'| < \varepsilon, \text{ როცა } |A| < \delta. \quad (4)$$

განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ქვეინტერვალების ნებისმიერი სასრული $\{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$ კლასი, რომლისთვისაც $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$. მაშინ (2) და (4) შეფასებების ძალით, გვექნება,

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| \leq \sum_{k=1}^n \int_{(a_k, b_k)} |f'| = \int_{\bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k)} |f'| < \varepsilon.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

როგორც შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, (N) თვისების მქონეობით ხერხდება იმ უწყვეტი ფუნქციების დახასიათება, რომლებიც ინარჩუნებენ სიმრავლის ზომადობის თვისებას.

თეორემა 13.3.3. ვთქვათ, f უწყვეტი ფუნქციაა. იმისათვის, რომ ნებისმიერი ზომადი E სიმრავლის $f(E)$ ანასახი იყოს ზომადი, აუცილებელია და საკმარისია, f ფუნქციას ჰქონდეს (N) თვისება.

გადავიდეთ აუცილებლობის ნაწილზე. ეთქვას, f ფუნქციას არა აქვს (N) -თვისება. ვაჩვენოთ, რომ ასეთ შემთხვევაში მოიძებნება ზომადი სიმრავლე, რომლის ანასახი არაზომადია. დაშვების ძალით მოიძებნება ნული ზომის $E \subset [a, b]$ სიმრავლე, რომლის $f(E)$ ანასახის გარე ზომა სულზე მეტია. თუ $f(E)$ არაა ზომადი, მაშინ სწორედ E სიმრავლის შემთხვევაში იქნება დარღვეული ანასახის ზომადობის პირობა. თუ $f(E)$ ზომადია, მაშინ ვისარგებლოთ იმით, რომ ყოველი დადებითი ზომის სიმრავლე შეიცავს არაზომად ქვესიმრავლეს (იხ. თეორემა 6.4.2) და განვიხილოთ $f(E)$ -ს რაიმე არაზომადი M ქვესიმრავლე. მაშინ $f^{-1}(M) \subset E$ ჩართვის გამო, $H = f^{-1}(M)$ სიმრავლე იქნება ნული ზომის. H -ის ანასახი კი არის არაზომადი M სიმრავლე. ამრიგად, H სიმრავლის შემთხვევაში დაირღვა ანასახის ზომადობის პირობა. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

13.3.1 და 13.3.3 თეორემებიდან გამომდინარეობს შემდეგი დებულება.

თეორემა 13.3.4. აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია ნებისმიერ ზომად სიმრავლეს კვლავ ზომად სიმრავლეში ასახავს.

შემდეგი თეორემა იძლევა მარტივ წესს ანასახი $f(E)$ სიმრავლის ზომის გამოსათვლელად, იმ შემთხვევაში, როცა აბსოლუტურად უწყვეტი f ფუნქცია არის მკაცრად ზრდადი.

თეორემა 13.3.5. ეთქვას, f არის მკაცრად ზრდადი და აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია. მაშინ ნებისმიერი ზომადი E სიმრავლისათვის $f(E)$ ანასახი ზომადია და

$$|f(E)| = \int_E f'. \quad (5)$$

დამტკიცება. თუ E სიმრავლე არის რაიმე $[\alpha, \beta]$ სეგმენტი, მაშინ $f(E) = [f(\alpha), f(\beta)]$ და $|f(E)| = f(\beta) - f(\alpha) = \int_{[\alpha, \beta]} f'$. (5) ტოლობა ანალოგიურად მტკიცდება $E = (\alpha, \beta)$ შემთხვევაშიც. აქედან მარტივად მიიღება (5)-ის სამართლიანობა ლია $E \subset (a, b)$ სიმრავლეებისათვის. შემდეგ, დამატებით სიმრავლეზე გადასვლით დაერწმუნდებით, რომ (5) სრულდება ნებისმიერი ჩაკეტილი $E \subset [a, b]$ სიმრავლისთვისაც. საბოლოოდ განვიხილოთ ნებისმიერი ზომადი E სიმრავლის შემთხვევა. ზოგადობის შეუზღუდავად ვივარაუდოთ, რომ $E \subset (a, b)$. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი და $f(E)$ სიმრავლისათვის ვიპოვოთ ჩაკეტილი M_ε და ლია M^ε სიმრავლეები თვისებებით:

$$M_\varepsilon \subset f(E) \subset M^\varepsilon,$$

$$|f(E)| - \varepsilon < |M_\varepsilon| \leq |f(E)| \leq |M^\varepsilon| < |f(E)| + \varepsilon.$$

აღვნიშნოთ $E_\varepsilon = f^{-1}(M_\varepsilon)$ და $E^\varepsilon = f^{-1}(M^\varepsilon)$. E_ε სიმრავლე ჩაკეტილია, ხოლო E^ε კი, არის ღია. შედეგად,

$$|M_\varepsilon| = \int_{E_\varepsilon} f', \quad |M^\varepsilon| = \int_{E^\varepsilon} f'.$$

f' ფუნქციის არაუარყოფითობის საფუძველზე გვაქვს, რომ

$$\int_{E_\varepsilon} f' \leq \int_E f' \leq \int_{E^\varepsilon} f'.$$

შედეგად,

$$|M_\varepsilon| \leq \int_E f' \leq |M^\varepsilon|.$$

საბოლოოდ, ვღებულობთ შეფასებებს:

$$|f(E)| - \varepsilon \leq \int_E f' \leq |f(E)| + \varepsilon.$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ $\varepsilon > 0$ რიცხვის ნებისმიერობას, დავასყენით (5) ტოლობის სამართლიანობას. თუორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 13.3.3. დამტკიცებაში მცირედი ცვლილებებით შესაძლებელია თუორემა 13.3.5-ში შეცვალა ბრდადობის მოთხოვნა შევასუსტოთ და შეეცვალოთ ბრდადობის მოთხოვნით.

ამოცანები

1. ეთქვას, f ფუნქცია წარმოებადია ყველგან, გარდა წერტილთა არაუმეტეს თულადი სიმრავლისა და f' ჯამებადი ფუნქციაა. დაამტკიცეთ, რომ f აბსოლუტურად უწყვეტია.
2. ეთქვას, f ყველგან წარმოებადი ფუნქციაა. დაამტკიცეთ, რომ f -ს აქვს (N) -თვისება.
3. ეთქვას, f ზრდადი უწყვეტი ფუნქციაა და $E = \{x : f'(x) = \infty\}$. აჩვენეთ, რომ f აბსოლუტურად უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(E)$ ნული ზომისაა.

§ 4. წრფევადი წირები

წირი $\mathbb{R}^n$ სივრცეში (მოკლედ, წირი) ეწოდება ნებისმიერ უწყვეტ γ $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ვექტორ-ფუნქციას, სადაც $[a, b]$ არის წრფის რაიმე გადაუგვარებული სეგმენტი. $\gamma([a, b]) = \{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\}$ სიმრავლეს γ წირის კვალს უწოდებენ. ზოგჯერ, როცა ეს გაურუეველობას არ იწვევს, წირს მისსავე კვალთან აიგივებენ.

ეთქვას, γ რაიმე წირია. $[a, b]$ სეგმენტის $P = (t_0, \dots, t_m)$ დანაწილებისათვის γ_P -თი აღვნიშნოთ ტეხილი, რომლის ერთმანეთის მომდევნო

წვეროებია $\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_m)$ წერტილები. γ_P შეიძლება განვიხილოთ, როგორც γ წიროში ჩახაზული ტეხილი (ნახ. 13.2).



ნახ. 13.2.

γ_P ტეხილის სიგრძედ. ბუნებრივია, მიიჩნევა მისი შემადგენელი მონაკვეთების სიგრძეთა ჯამი:

$$l_{\gamma_P} \equiv \sum_{k=1}^m \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|. \quad (1)$$

აქ $\|\cdot\|$ აღნიშნავს ევკლიდურ ნორმას $\mathbb{R}^n$ -ში, ე.ი. $\|x\| = (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{1/2}$.

შემდეგი დებულება, კერძოდ, გვიჩვენებს, რომ ნებისმიერი წირისათვის არსებობს მასში ჩახაზული ტეხილების სიგრძეთა ზღვარი, როცა P დანაწილების პარამეტრი მიისწრაფვის ნულისაკენ.

თეორემა 13.4.1. ნებისმიერი γ წირისათვის არსებობს $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} l_{\gamma_P}$ ზღვარი და მისი მნიშვნელობა γ -ში ჩახაზული ტეხილების სიგრძეთა სუპრემუმის ტოლია, ე.ი.

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} l_{\gamma_P} = \sup_P l_{\gamma_P}.$$

თეორემის დამტკიცებისთვის ჩვენ გამოვიყენებთ განსახილავი სიდიდეების კავშირს ვექტორ-ფუნქციის ვარიაციულ თვისებებთან.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ვექტორ-ფუნქციის ვარიაციული ჯამი - $V_f(P)$, სრული ვარიაცია - $V_f([a, b])$ და შემოსაზღვრული ვარიაციის თვისება განისაზღვრებიან სკალარული ფუნქციის შემთხვევის მსგავსად, ოღონდ ყველგან, განსაზღვრებებში, $|f(x_k) - f(x_{k-1})|$ მოდული უნდა შეიცვალოს $\|f(x_k) - f(x_{k-1})\|$ ნორმით. მაშინ, (1) ტოლობის გათვალისწინებით, ცხადია, რომ γ_P ტეხილის სიგრძე უდრის $V_\gamma(P)$ ვარიაციულ ჯამს, ხოლო $\sup_P l_{\gamma_P}$ სუპრემუმი კი არის γ ვექტორ-ფუნქციის სრული $V_\gamma([a, b])$ ვარიაციის ტოლი. ამრიგად, თეორემა 13.4.1 ამტკიცებს ტოლობას:

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} V_\gamma(P) = V_\gamma([a, b]),$$

ე.ი. იმას, რომ უწყვეტი ვექტორ-ფუნქციისათვის ვარიაციული ჯამები მის-
წრაფიან სრული ვარიაციისაკენ, როცა დანაწილების პარამეტრი ნულისაკენ
მიისწრაფვის. ასეთი დებულება უკვე დაეადგინეთ ცალარული ფუნქციებისათვის
(იხ. თეორემა 13.1.6). ვექტორული შემთხვევისათვის კი დამტკიცება საყესებით
ანალოგიურია, ოღონდ იმ განსხვავებით, რომ გამოსახულებები მოდულის
ნაცვლად უნდა მოვათავსოთ ნორმის ნიშნის ქეუ.

თეორემა 13.4.1 საშუალებას გვაძლევს, განვსაზღვროთ წირის სიგრძე.
სახელდობრ, γ წირის სიგრძე აღინიშნება L_γ -თი და ეწოდება $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} L_{\gamma P}$
ზღვარს.

ცხადია, რომ წირის სიგრძე ნულის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ,
როცა γ მუდმივი ფუნქციაა.

γ წირს ეწოდება წრფევადი, თუ მისი სიგრძე სასრული რიცხვია.

f ვექტორ-ფუნქციისათვის $f_1, \dots, f_n$ -ით აღვნიშნოთ მისი საკოორდინატო
ფუნქციები, ე.ი. $f_k(t)$ ტოლია $f(t)$ ვექტორის k -ური კოორდინატის.

შემდეგი თეორემა, რომელიც ადგენს წირის წრფევადობის კრიტერიუმს,
ეკუთვნის კ. კორდანს.

თეორემა 13.4.2. γ წირი არის წრფევადი მაშინ და მხოლოდ მაშინ,
როცა მისი საკოორდინატო $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ ფუნქციები არიან შემოსაზღვრული
ვარიაციის.

დამტკიცება. გავითვალისწინოთ, რომ ყოველი $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
ვექტორისათვის,

$$\max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \leq \|x\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

შედეგად, $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი $P = (t_0, \dots, t_m)$ დანაწილებისათვის
სამართლიანი იქნება შეფასებები:

$$\sum_{k=1}^m |\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^m \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \quad (i \in \overline{1, n});$$

$$\sum_{k=1}^m \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \leq \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n |\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})|.$$

საიდანაც, თეორემა 13.4.1-ის გათვალისწინებით ვლუბულობთ, რომ

$$V_{\gamma_i}([a, b]) \leq L_\gamma \quad (i \in \overline{1, n});$$

$$L_\gamma \leq \sum_{i=1}^n V_{\gamma_i}([a, b]).$$

მიღებული შეფასებები გვარწმუნებენ თეორემის სამართლიანობაში. □

ვთქვათ, $P = (t_0, \dots, t_m)$ არის $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილება, ისეთი, რომ $\lambda(P) < \delta$. შევაფასოთ γ_P ტესილის სიგრძის გადახრა განსახილავი ინტეგრალისაგან. ლაგრანჟის ფორმულის გამოყენებით გვექნება:

$$\begin{aligned} l_{\gamma_P} &= \sum_{k=1}^m \sqrt{(\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1}))^2 + (\gamma_2(t_k) - \gamma_2(t_{k-1}))^2} = \\ &= \sum_{k=1}^m \sqrt{\gamma_1'(\xi_k)^2 + \gamma_2'(\eta_k)^2} (t_k - t_{k-1}), \end{aligned}$$

სადაც ყოველი k -სათვის ξ_k და η_k არიან $[t_{k-1}, t_k]$ მონაკვეთის რომელიმე წერტილები. უკანასკნელი ჯამი, სამოგადოდ, არაა ინტეგრალური ჯამი, ξ_k და η_k წერტილების შესაძლო განსხვავების გამო, თუმცა შესაძლებელია მისი გადახრის უფექტური შეფასება ξ_k წერტილების მეშვეობით წარმოქმნილი ინტეგრალური ჯამიდან:

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k=1}^m \sqrt{\gamma_1'(\xi_k)^2 + \gamma_2'(\eta_k)^2} (t_k - t_{k-1}) - \sum_{k=1}^m \sqrt{\gamma_1'(\xi_k)^2 + \gamma_2'(\xi_k)^2} (t_k - t_{k-1}) \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^m \left| \sqrt{\gamma_1'(\xi_k)^2 + \gamma_2'(\eta_k)^2} - \sqrt{\gamma_1'(\xi_k)^2 + \gamma_2'(\xi_k)^2} \right| (t_k - t_{k-1}) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^m |\gamma_2'(\eta_k) - \gamma_2'(\xi_k)| (t_k - t_{k-1}) < \sum_{k=1}^m \varepsilon(t_k - t_{k-1}) = \varepsilon(b - a). \quad (5) \end{aligned}$$

(5) შეფასების მიღებისას ჩვენ გამოვიყენეთ (3) შეფასება და კიდევ შემდეგი მარტივი უტოლობა: $||x|| - ||y|| \leq ||x - y||$ ($x, y \in \mathbb{R}^n$). შევნიშნოთ, რომ უკანასკნელი უტოლობა გამოყენებულია $x = (\gamma_1'(\xi_k), \gamma_2'(\eta_k))$ და $y = (\gamma_1'(\xi_k), \gamma_2'(\xi_k))$ წყვილების შემთხვევაში.

(4)-დან და (5)-დან ვლევულობით,

$$\left| l_{\gamma_P} - \int_{[a,b]} \sqrt{(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2} \right| < \varepsilon(b - a + 1).$$

საიდანაც ვასკენით თეორემის სამართლიანობას. □

ვთქვათ, γ წრფევალი წირია. მაშინ, თეორემა 13.4.2-ისა და შემოსამღერული ვარიაციის ფუნქციების თვისებათა ძალით, ყოველი γ_i საკოორდინატო ფუნქცია თითქმის ყველგან წარმოებადია და მისი γ_i' წარმოებული ჯამებადია. აღნიშნულის გამო, ნებისმიერი წრფევალი წირისათვის აზრი აქვს

$$\int_{[a,b]} \sqrt{(\gamma_1')^2 + \dots + (\gamma_n')^2}$$

ლებეგის ინტეგრალს. ქვემოთ მოცემული თეორემა იძლევა იმ წრფევალი წირების დახასიათებას, რომელთა სიგრძის გამოთვლა შესაძლებელია აღნიშნული ინტეგრალის მეშვეობით.

თეორემა 13.4.4. ნებისმიერი წრფევალი γ წირისათვის სამართლიანია უტოლობა:

$$\int_{[a,b]} \sqrt{(\gamma'_1)^2 + \dots + (\gamma'_n)^2} \leq L_\gamma. \quad (6)$$

ამასთან, ეს უტოლობა გადაიქცევა ტოლობად მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ საკოორდინატო ფუნქციები არიან აბსოლუტურად უწყვეტი.

γ წირისათვის s_γ -თი აღენიშნოთ $[a, b]$ სეგმენტზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია:

$$s_\gamma(a) = 0 \text{ და } s_\gamma(t) = L_\gamma([a, t]), \text{ როცა } t \in (a, b).$$

ამრიგად, s_γ ფუნქცია ზომავს წირის იმ რეალის სიგრძეს, რომელიც წარმოქმნილია $[a, t]$ სეგმენტში მოთავსებული პარამეტრის მნიშვნელობებით.

თეორემა 13.4.4-ის დამტკიცება ეფუძნება s_γ ფუნქციის თვისებებს, რომლებიც მოიცემა შემდეგი ლემებში.

თეორემა 13.4.5. ნებისმიერი წრფევალი γ წირისათვის s_γ არის ზრდადი და უწყვეტი ფუნქცია, რომლის წარმოებული თითქმის ყოველ $t \in [a, b]$ წერტილში აკმაყოფილებს ტოლობას:

$$s'_\gamma(t) = \sqrt{\gamma'_1(t)^2 + \dots + \gamma'_n(t)^2}. \quad (7)$$

დამტკიცება. წირის სიგრძის ადგიურობის თვისებიდან (იხ. (2) ტოლობა) გამომდინარე, s_γ ზრდადი ფუნქციაა. უწყვეტობის დასადაგენად გამოვიყენოთ ის ფაქტი, რომ წირის სიგრძე წარმოადგენს ექტორ-ფუნქციის სრულ ვარიაციას. ამ ინტერპრეტაციით, s_γ არის γ ექტორ-ფუნქციის სრული ვარიაცია ცეალადი ბედა სამღვრით: $s_\gamma(t) = V_\gamma([a, t])$. ამ შენიშვნის შემდეგ, s_γ -ს უწყვეტობა მტკიცდება ზუსტად სკალარული შემთხვევის მსგავსად (იხ. თეორემა 13.1.1).

ახლა გადავიდეთ (7)-ის დამტკიცებაზე. E იყოს ყველა იმ $t \in (a, b)$ წერტილის სიმრავლე, რომელშიც თითოეული $s_\gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ ფუნქცია წარმოებალია, ცხადია, E სრული ზომისაა.

შენიშნოთ, რომ ნებისმიერი $[c, d] \subset [a, b]$ ქვესეგმენტისათვის, პარამეტრის $t \in [c, d]$ მნიშვნელობების შესაბამისი რეალის სიგრძე მტკიცა ან ტოლია $\gamma(c)$ და $\gamma(d)$ წერტილების შემავრთებული ქორდის სიგრძეზე, ე.ი. $L_\gamma([c, d]) \geq \|\gamma(d) - \gamma(c)\|$. აღნიშნულის გათვალისწინებით, ყოველი $t \in E$ წერტილისათვის და $h \in (0, b - t)$ რიცხვისათვის გვექნება,

$$\begin{aligned} s_\gamma(t+h) - s_\gamma(t) &= L_\gamma([t, t+h]) \geq \\ &\geq \|\gamma(t+h) - \gamma(t)\| = \sqrt{(\gamma_1(t+h) - \gamma_1(t))^2 + \dots + (\gamma_n(t+h) - \gamma_n(t))^2}. \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^r \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| + \sum_{k \in \Omega} \frac{t_k - t_{k-1}}{m} \geq l_{\gamma} + \frac{|H_m|_*}{m}.$$

ასეა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $l_{\gamma} < l_{\gamma} + \varepsilon$, მივიღებთ შეფასებას:

$$|H_m|_* \leq m\varepsilon.$$

საიდანაც, $\varepsilon > 0$ რიცხვის ნებისმიერობის ძალით, დაეცანით H_m სიმრავლის ნულზომიანობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 13.4.4-ის დამტკიცება უკვე დაიყვანება ცნობილ დებულებებზე. სახელდობრ, უნდა გავითვალისწინოთ თეორემები 12.6.2 და 12.8.5 (იხ. აგრეთვე შენიშვნა 12.6.4) და გემოთ დადგენილი თეორემა 13.4.5.

აქვე მოვიყვანოთ თეორემა 13.4.4-ის ერთი საინტერესო გამოყენება. დაკავშირებული ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის სრული ვარიაციის გამოთვლასთან.

თეორემა 13.4.6. ვთქვათ, $f \in L([a, b])$ და $F(x) = \int_{[a, x]} f$ ($x \in [a, b]$). მაშინ

$$V_F([a, b]) = \int_{[a, b]} |f|.$$

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ F აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა და $F'(x) = f(x)$ თითქმის ყველგან. აღნიშნულის გათვალისწინებით, თეორემა 13.4.4-ის გამოყენება ერთგანზომილებიანი $\gamma = F$ წირისათვის გვაძლევს, რომ

$$V_F([a, b]) = l_F = \int_{[a, b]} |F'| = \int_{[a, b]} |f|.$$

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

წრფეადი γ წირისათვის განვიხილოთ შემდეგი წესით განსაზღვრული $\overline{\gamma} : [0, l_{\gamma}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ვექტორული ფუნქცია: $t \in [0, l_{\gamma}]$ რიცხვისათვის $\overline{\gamma}(t)$ ტოლია ისეთი $\gamma(t)$ წერტილის, რომლისთვისაც $l_{\gamma}([a, t]) = t$. შევნიშნოთ, რომ $\overline{\gamma}(t)$ -ს განსაზღვრა კორექტულია. მართლაც, თუ $l_{\gamma}([a, t_1]) = l_{\gamma}([a, t_2]) = t$, მაშინ ადვილი დასაანახია, რომ $\overline{\gamma}$ ფუნქცია მუდმივია $[t_1, t_2]$ სეგმენტზე. ამრიგად, თუ წირზე, მისი სათაეიდან დაწყებული, გავივლით t რიცხვის ტოლ მანძილს, მაშინ მივაღწეოთ წერტილში, რომელიც მიიჩნევა $\overline{\gamma}(t)$ -ს მნიშვნელობად.

თეორემა 13.4.7. ნებისმიერი წრფეადი და დადებითი სიგრძის γ წირისათვის $\overline{\gamma}$ წირს აქვს თვისებები:

- $\overline{\gamma}$ -ის კვადრი და სიგრძე ემთხვევა γ -ს კვადრსა და სიგრძეს, ე.ი. $\overline{\gamma}([0, l_{\gamma}]) = \gamma([a, b])$ და $l_{\overline{\gamma}} = l_{\gamma}$;
- $l_{\overline{\gamma}}([0, \tau]) = \tau$ ყოველი $\tau \in [0, l_{\gamma}]$ -სათვის;

- $\overline{\gamma}$ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას:

$$\|\overline{\gamma}(\tau_2) - \overline{\gamma}(\tau_1)\| \leq |\tau_2 - \tau_1| \quad (\tau_1, \tau_2 \in [0, l_\gamma]).$$

შედეგად, $\overline{\gamma}_1, \dots, \overline{\gamma}_n$ საკოორდინატო ფუნქციები არიან აბსოლუტურად უწყვეტი;

- თითქმის ყოველი $\tau \in [0, l_\gamma]$ წერტილისათვის,

$$\sqrt{\overline{\gamma}'_1(\tau)^2 + \dots + \overline{\gamma}'_n(\tau)^2} = 1.$$

დამტკიცება. $\overline{\gamma}([0, l_\gamma]) = \gamma([a, b])$ ტოლობა უშუალოდ გამომდინარეობს $\overline{\gamma}$ წირის განსაზღვრიდან. $l_\gamma = l_\gamma$ ტოლობის დასადაგენად კი უნდა გავითვალისწინოთ $\overline{\gamma}$ და γ წირებში ჩასაზღვრულ ტეხილთა კლასების იგივეობა.

ეთქვას, $\tau \in [0, l_\gamma]$ და $t \in [a, b]$ წერტილი აკმაყოფილებს $l_\gamma([a, t]) = \tau$ ტოლობას. ადვილი დასანახია, რომ

$$\overline{\gamma}|_{[0, \tau]} = \overline{\gamma}|_{[a, t]}.$$

საიდანაც, პირველი წინადადების ძალით დაწეროთ,

$$l_\gamma([0, \tau]) = l_\gamma|_{[0, \tau]} = l_\gamma|_{[a, t]} = l_\gamma([a, t]) = \tau.$$

ამით მეორე წინადადება დამტკიცებულია.

ეთქვას, $0 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq l_\gamma$. მაშინ, მეორე წინადადების გათვალისწინებით, გვექნება,

$$\|\overline{\gamma}(\tau_2) - \overline{\gamma}(\tau_1)\| \leq l_\gamma([\tau_1, \tau_2]) = l_\gamma([0, \tau_2]) - l_\gamma([0, \tau_1]) = \tau_2 - \tau_1.$$

რითაც მესამე წინადადება დამტკიცებულია.

მეოთხე წინადადება არის მეორე წინადადებისა და თეორემა 13.4.5-ის შედეგი. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თუ წირს გავაიგივებთ მის კვალთან, მაშინ შეიძლება $\overline{\gamma}$ განვიხილოთ როგორც $\Gamma = \gamma([a, b])$ წირის ახალი პარამეტრიზაცია. $\overline{\gamma}$ -ს უწოდებენ $\Gamma = \gamma([a, b])$ წირის ბუნებრივ (ან კიდევ, რკალის სიგრძის მიხედვით) პარამეტრიზაციას. ამრიგად, წირი შეიძლება აღწერილი იყოს ცუდი თვისებების, კერძოდ, არააბსოლუტურად უწყვეტი γ პარამეტრიზაციით, მაგრამ, თეორემა 13.4.7-ის ძალით, შესაძლებელია მისი ახლებური პარამეტრიზაცია, რომელსაც უკვე აქვს აბსოლუტურად უწყვეტობის თვისება.

თუ τ პარამეტრს მივიჩნევთ ღროდ, ხოლო $\overline{\gamma}(\tau)$ -ს კი წერტილის მოძრაობის აღმწერ ფუნქციად, მაშინ, ასეთი ფიზიკური ინტერპრეტაციის ფარგლებში, ბუნებრივი პარამეტრიზაცია შეიძლება განვიხილოთ, როგორც $\Gamma = \gamma([a, b])$ წირზე ისეთნაირად განხორციელებული მოძრაობა, რომლის პირობებშიც განვლილი მანძილის სიდიდე ემთხვევა მოძრაობის დაწყებიდან გასულ დროს.

შენიშვნა 13.4.3. წრფეადი წირის სიგრძის გამოთვლის შესახებ ამოცანა (მსგავსად პირველყოფილის აღდგენის შესახებ ამოცანისა) იყო ერთ-ერთი ძირითადი ინდიკატორი რიმანის ინტეგრალის განზოგადების აუცილებლობისა. ევროდო, ცნობილი იყო, რომ

$$L_\gamma = \int_{[a,b]} \sqrt{(\gamma'_1)^2 + \dots + (\gamma'_n)^2}.$$

ფორმულა ძალას კარგადაა უწყვეტად დიფერენცირებადი წირების კლასის გარეთ. ამის დამადასტურებელ მაგალითად გამოდგება $\gamma(t) = (t, f(t))$ ($t \in [0, 1]$) ტოლობით განსაზღვრული ბრტყელი წირი, სადაც f არის ვოლტერას ტიპის ფუნქცია, აგებული 9.4 პარაგრაფში. მაშინ $\sqrt{1 + (f')^2}$ იქნება შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქცია, რომელიც არაინტეგრებადია რიმანის აზრით. ამრიგად, რიმანის ინტეგრალის მეშვეობით ვერ ხერხდება თვით ისეთი წრფეადი წირების სიგრძის გამოთვლა, რომელთაც აქვთ ყოველ წერტილში წარმოებადი საკოორდინატო ფუნქციები (გეომეტრიული ტერმინებით რომ ვთქვათ, ყოველ წერტილში აქვთ მხები). ამის საპირისპიროდ, ამ პარაგრაფის 13.4.4 და 13.4.2 თეორემები, 12.9.1 და 12.7.6 თეორემებთან ერთად, გვიჩვენებენ, რომ იგივე სიტუაციაში ლებეგის ინტეგრალი იძლევა სასურველ შედეგს.

ამოცანები

1. ვთქვათ, γ არის კანტორის წირი, ე.ი. $\gamma(t) = (t, \theta(t))$ ($t \in [0, 1]$), სადაც θ არის კანტორის ფუნქცია. გამოთვალეთ γ წირის სიგრძე.
2. ვთქვათ, f არის შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქცია. დაამტკიცეთ, რომ თითქმის ყოველი $x \in [a, b]$ წერტილისათვის $T'_f(x) = |f(x)|$.

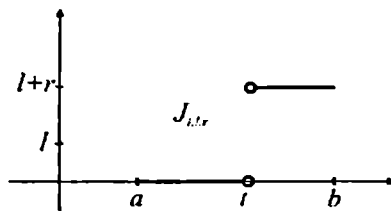
§ 5. ნახტომთა ფუნქციები

$[a, b]$ სეგმენტის t წერტილისა და l და r რიცხვებისათვის $J_{l,l,r}$ -ით აღვნიშნოთ შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია (ნახ. 13.3):

$$J_{l,l,r}(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } a \leq x < t, \\ l, & \text{თუ } x = t, \\ l + r, & \text{თუ } t < x \leq b. \end{cases}$$

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს $[a, b]$ სეგმენტის წერტილთა სასრული ან უსასრულო (t_n) მიმდევრობა, რომლის წევრები წყვილ-წყვილად განსხვავებულია. დაეუშვათ, ყოველ t_n -თან დაკავშირებულია l_n და r_n რიცხვები, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას:

$$\sum_n |l_n| + \sum_n |r_n| < \infty. \quad (1)$$



ნახ. 13.3.

მოვითხოვთ აგრეთვე, რომ $l_n = 0$, თუ $t_n = a$ და $r_n = 0$, თუ $t_n = b$. ასეთ პირობებში აღვნიშნოთ:

$$J_{(l,l,r)} = \sum_n J_{t_n, l_n, r_n}.$$

შევნიშნოთ, რომ განსახილავი ფუნქციური მწკრივის ყოველ წერტილში კრებადობა უზრუნველყოფილია (1) პირობის საფუძველზე. $J_{(l,l,r)}$ ფუნქციას ეწოდება t , l და r მიმდევრობების შესაბამისი ნახტომთა ფუნქცია. აღვნიშნოთ, რომ ნახტომთა ფუნქცია შეიძლება განისაზღვროს შემდეგი ეკვივალენტური ფორმით:

$$J_{(l,l,r)}(x) = \sum_{t_n \leq x} l_n + \sum_{t_n < x} r_n \quad (x \in [a, b]). \quad (2)$$

(2) წარმოდგენის საფუძველზე გვექნება:

- ნებისმიერ $x \in (a, b]$ წერტილში არსებობს $J_{(l,l,r)}$ ფუნქციის მარცხენა ზღვარი, რომელიც გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$J_{(l,l,r)}(x-0) = \sum_{t_n < x} l_n + \sum_{t_n < x} r_n; \quad (3)$$

- ნებისმიერ $x \in [a, b)$ წერტილში არსებობს $J_{(l,l,r)}$ ფუნქციის მარჯვენა ზღვარი, რომელიც გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$J_{(l,l,r)}(x+0) = \sum_{t_n \leq x} l_n + \sum_{t_n \leq x} r_n. \quad (4)$$

(2) – (4) ტოლობებიდან გამომდინარე ვასყენით შემდეგი წინადადების სამართლიანობას:

- $J_{(l,l,r)}$ უწყვეტია t_n წერტილებისაგან განსხვავებულ ყოველ წერტილში;
- $J_{(l,l,r)}$ ფუნქცია უწყვეტია t_n წერტილში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $l_n = r_n = 0$;
- $t_n \in (a, b]$ წერტილში $J_{(l,l,r)}$ ფუნქციის მარცხენა ნახტომი l_n რიცხვის ტოლია, ე.ი. $J_{(l,l,r)}(t_n) - J_{(l,l,r)}(t_n - 0) = l_n$;

- $t_n \in [a, b]$ წერტილში $J_{(t,l,r)}$ ფუნქციის მარჯვენა ნახტომი r_n რიცხვების ტოლია, ე.ი. $J_{(t,l,r)}(t_n + 0) - J_{(t,l,r)}(t_n) = r_n$;
- თუ ცნობილია, რომ l_n და r_n ერთდროულად ნულის ტოლი არ ხდება, არცერთი n -სთვის, მაშინ $J_{(t,l,r)}$ ფუნქციის წვევების წერტილთა სიმრავლე ემთხვევა t_n წერტილთა სიმრავლეს.

აქვე შევნიშნოთ, რომ ნახტომთა ფუნქცია არ შეიცვლება, თუ მისი წარმოშობელი (t_n) , (l_n) და (r_n) მიმდევრობების წევრებს ჩაევტარებთ ერთი და იმავე გადანაცვლებას. ეს წინადადება მიიღება (1) პირობის საფუძველზე.

შემდგომში ტერმინით - ნახტომთა ფუნქცია, მოხსენიებული იქნება $J_{(t,l,r)}$ სახის ნებისმიერი ფუნქცია და აგრეთვე, იგივეურად ნულის ტოლი ფუნქცია.

შენიშვნა 13.5.1. ნახტომთა ფუნქციების მარტივ მაგალითებს გვაძლევენ ე.წ. უბან-უბან მუდმივი ფუნქციები.

f ფუნქციას ეწოდება უბან-უბან მუდმივი, თუ მოიძებნება $[a, b]$ სეგმენტის $P = (t_0, \dots, t_n)$ დანაწილება, ისეთი, რომ f მუდმივია თითოეულ (t_{k-1}, t_k) ინტერვალზე.

ნებისმიერი f ფუნქციისათვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- (i) f არის უბან-უბან მუდმივი;
- (ii) $f - f(a)$ არის ნახტომთა ფუნქცია, რომელიც წარმოქმნილია სასრული (t_n) , (l_n) და (r_n) მიმდევრობებით.

(ii) $\Rightarrow$ (i) იმპლიკაციის შესამოწმებლად საკმარისია გავითვალისწინოთ, რომ $J_{(t,l,r)}$ სახის ფუნქცია მუდმივია ნებისმიერ I მონაკვეთზე, რომელიც არ შეიცავს t წერტილს.

(i) $\Rightarrow$ (ii) იმპლიკაციის დასადგენად განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის $P = (t_0, \dots, t_n)$ დანაწილება, ისეთი, რომ f მუდმივია ყოველ (t_{k-1}, t_k) ინტერვალზე. $(t_0, t_1), \dots, (t_{n-1}, t_n)$ ინტერვალზე f -ის მიერ მიღებული მნიშვნელობები შესაბამისად აღვნიშნოთ $y_1, \dots, y_n$ -ით. l_k და r_k რიცხვები განვსაზღვროთ შემდეგნაირად: $l_0 = 0, r_0 = y_1 - f(a), l_1 = f(t_1) - y_1, r_1 = y_2 - f(t_1), l_n = f(b) - y_n, r_n = 0$. მაშინ ადვილი შესამოწმებელია, რომ $f - f(a) = \sum_{k=0}^n J_{l_k, l_k, r_k}$.

თეორემა 13.5.1. $J_{(t,l,r)}$ ნახტომთა ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციისაა, ამასთან, მისი სრული ვარიაცია არის $\sum_n |l_n| + \sum_n |r_n|$ ჯამის ტოლი.

ლემა 13.5.1. ვთქვათ, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ფუნქციური მწკრივი ყოველ წერტილში კრებადია და $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. მაშინ

$$V_f([a, b]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} V_{f_n}([a, b]).$$

დამტკიცება. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი $P = (x_0, \dots, x_m)$ დანაწილება. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ნებისმიერი N -სთვის სამართლიანია შეფასებები:

$$\begin{aligned} V_f(P) &= \sum_{k=1}^m \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_k) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_{k-1}) \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^m \left| \sum_{n=1}^N f_n(x_k) - \sum_{n=1}^N f_n(x_{k-1}) \right| + \sum_{k=1}^m \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x_k) - \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x_{k-1}) \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^N |f_n(x_k) - f_n(x_{k-1})| + 2 \sum_{k=0}^m \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x_k) \right| = \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^m |f_n(x_k) - f_n(x_{k-1})| + 2 \sum_{k=0}^m \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x_k) \right| = \\ &= \sum_{n=1}^N V_{f_n}(P) + 2 \sum_{k=0}^m \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x_k) \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^N V_{f_n}([a, b]) + 2 \sum_{k=0}^m \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x_k) \right|. \end{aligned}$$

თუ გავითვალისწინებთ $\sum_n f_n(x)$ მწკრივის კრებადობას ყოველ $x \in [a, b]$ წერტილში და მიღებულ შეფასებაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $N \rightarrow \infty$, გვექნება, რომ

$$V_f(P) \leq \sum_{n=1}^{\infty} V_{f_n}([a, b]).$$

საიდანაც, P დანაწილების ნებისმიერობის საფუძველზე მივიღებთ საჭირო უტოლობას. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 13.5.2. ლემა 13.5.1-ში დადგენილი უტოლობა სამართლიანია ფუნქციათა სასრული ჯამის შემთხვევაშიც. ამ სიტუაციაში დამტკიცება კიდევ უფრო მარტივდება, რადგანაც შეფასებებში აღარ გვექნება მწკრივის ნაშთითი წევრი.

შენიშვნა 13.5.3. ნებისმიერი f და g ფუნქციებისათვის სრულდება უტოლობა: $V_{f \pm g}[a, b] \geq |V_f([a, b]) - V_g([a, b])|$. მართლაც, $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი P დანაწილებისათვის, $|x \pm y| \geq ||x| - |y||$ რიცხვითი უტოლობის საფუძველზე მარტივად ვაჩვენებთ, რომ $V_{f \pm g}(P) \geq |V_f(P) - V_g(P)|$, საიდანაც მივიღებთ დასამტკიცებელ შეფასებას.

ლემა 13.5.2. ვთქვათ, $f_1, \dots, f_N$ ფუნქციებისათვის მოიძებნება n წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი $(a_1, b_1), \dots, (a_N, b_N) \subset [a, b]$ ინტერვალები, ისეთები, რომ ყოველი f_n ფუნქცია მუდმივია $[a, b] \setminus (a_n, b_n)$ სიმრავლის შემადგენელ ორივე სეგმენტზე. მაშინ $f = \sum_{n=1}^N f_n$ ჯამისათვის სრულდება ტოლობა:

$$V_f([a, b]) = \sum_{n=1}^N V_{f_n}([a, b]).$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმობთ, რომ $N \geq 2$ და $V_{f_n}([a, b]) > 0$ ყოველი n -თვის (ე.ი. არსებული f_n ფუნქცია არაა მუდმივი).

ლემა 13.5.1-ის ძალით გვექნება, რომ

$$V_f([a, b]) \leq \sum_{n=1}^N V_{f_n}([a, b]).$$

ვაჩვენოთ შებრუნებული შეფასების სამართლიანობა. განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ რიცხვები, ისეთები, რომ

$$\alpha_1 < V_{f_1}([a, b]), \quad \dots, \alpha_N < V_{f_N}([a, b]).$$

ლემის პირობის ძალით, ყოველი $n \in \overline{1, N}$ -თვის შეგვიძლია ვიპოვოთ $[a_n, b_n]$ სეგმენტის P_n დანაწილება, რომლისთვისაც $V_{P_n}(f_n) > \alpha_n$. P იყოს $[a, b]$ სეგმენტის ის დანაწილება, რომელსაც გვაძლევენ ერთობლიობაში განხილული $P_1, \dots, P_N$ დანაწილებების შემადგენელი წერტილები a და b ბოლოებთან ერთად. კელავ ლემის პირობის გათვალისწინებით, ადვილი დასანახია, რომ

$$V_f(P) = \sum_{n=1}^N V_{f_n}(P_n).$$

შედეგად,

$$V_f(P) > \sum_{n=1}^N \alpha_n.$$

α_n რიცხვები შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერად ახლოს $V_{f_n}([a, b])$ ვარიაციებთან. რის გამოც, უკანასკნელი შეფასების გათვალისწინებით, ვასკვნით

$V_f([a, b]) \geq \sum_{n=1}^N V_{f_n}([a, b])$ უტოლობის სამართლიანობას, რითაც ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 13.5.1-ის დამტკიცება. აღვნიშნოთ $J_n = J_{l_n, l_n, r_n}$ და $J = J_{(l, l, r)}$. მარტივი შესამოწმებელია, რომ

$$V_{J_n}([a, b]) = |l_n| + |r_n|. \quad (5)$$

ვთქვათ, (t_n) სასრული მიმდევრობაა. მაშინ ადვილი დასადასტურებია, რომ J_n ფუნქციები დაკმაყოფილებენ ლემა 13.5.2-ის პირობებს. შედეგად, ლემა 13.5.2-ის და (5) ტოლობის გამოყენებით, გვექნება,

$$V_J([a, b]) = \sum_n V_{J_n}([a, b]) = \sum_n |l_n| + \sum_n |r_n|.$$

ახლა დავეშვათ, (t_n) არის უსასრულო მიმდევრობა. ლემა 13.5.1-ის და (5)-ის საფუძველზე დავწერთ,

$$V_J([a, b]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} V_{J_n}([a, b]) = \sum_{n=1}^{\infty} |l_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |r_n|. \quad (6)$$

განვიხილოთ ნებისმიერი $N \in \mathbb{N}$ და აღვნიშნოთ $S_N = \sum_{n=1}^N J_n$, $Q_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} J_n$. შენიშვნა 13.5.2-ის გათვალისწინებით გვექნება, რომ

$$V_J([a, b]) = V_{S_N+Q_N}([a, b]) \geq V_{S_N}([a, b]) - V_{Q_N}([a, b]). \quad (7)$$

ლემა 13.5.2-ის და (5)-ის ძალით,

$$V_{S_N}([a, b]) = \sum_{n=1}^N |l_n| + \sum_{n=1}^N |r_n|; \quad (8)$$

ხოლო ლემა 13.5.1-ის ძალით,

$$V_{Q_N}([a, b]) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |l_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |r_n|. \quad (9)$$

თუ (8) და (9) შეფასებებს გავითვალისწინებთ (7)-ში და გადავალთ ზღვარზე, როცა $N \rightarrow \infty$, მივიღებთ,

$$V_J([a, b]) \geq \sum_{n=1}^{\infty} |l_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |r_n|. \quad (10)$$

(6)-ის და (10)-ის საფუძველზე თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 13.5.2. $J_{(l, l, r)}$ ნახტომთა ფუნქციის წარმოებული თითქმის ყველგან ნულის ტოლია.

თეორემა 13.5.2-ის დამტკიცებისთვის დაგვირდება შემდეგი საინტერესო ლეზულეზა ზრდალ ფუნქციათა მწკრივის გაწარმების შესახებ, რომელიც ეკუთნის გ. ფუბინის.

თეორემა 13.5.3. ვთქვათ, (f_n) არის ზრდადი ფუნქციების მიმღევრობა, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ მწკრივი კრებადია ყოველ $x \in [a, b]$ წერტილში და $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ მაშინ თითქმის ყოველ $x \in [a, b]$ წერტილში წარმობადია თითოეული $f, f_1, f_2, \dots$ ფუნქციებს შორის და სრულდება ტოლობა

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

დამტკიცება. ზოგალობის შეზღუდავად ეიგულისხმობთ, რომ f_n ფუნქციები არაუარყოფითია (წინააღმდეგ შემთხვევაში განვიხილავდით $f_n - f_n(a)$ ფუნქციებს). თეორემა 12.6.2-ის პალით $f, f_1, f_2, \dots$ ფუნქციები თითქმის ყველგან წარმობადი არიან. შედეგად, მოიძებნება სრული ზომის $E \subset [a, b]$ სიმრავლე, რომლის ყოველ წერტილში წარმობადია ყოველი $f, f_1, f_2, \dots$ ფუნქცია. მსჯელობების სიმოცლისათვის ჩავთვალოთ, რომ $E = [a, b]$.

აღვნიშნოთ

$$h_n = f - (f_1 + \dots + f_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

ჩვენი მიზანია, ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h'_n(x) = 0 \quad \text{თითქმის ყველგან.} \quad (11)$$

$h_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k$ ტოლობიდან გამომდინარე h_n ($n \in \mathbb{N}$) ზრდადი ფუნქციაა. რის გამოც, თეორემა 12.6.2-ის პალით, დავეწროთ,

$$\int_{[a,b]} h'_n \leq h_n(b) - h_n(a).$$

$(h_n(x))$ მიმღევრობის ზღვარი ყოველ $x \in [a, b]$ წერტილში ნულის ტოლია. შედეგად, გვექნება,

$$\int_{[a,b]} h'_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (12)$$

შევნიშნოთ, რომ (h'_n) არის არაუარყოფით ფუნქციათა კლუბადი მიმღევრობა. ამის გამო (11) პირობის შეუსრულებლობა მოგვეყმს წინააღმდეგობას (12) პირობასთან. მართლაც, დაეუშვათ, $\{\lim_{n \rightarrow \infty} h'_n > 0\}$ სიმრავლე დადებითი ზომისაა. მაშინ მარტივად ვიპოვიოთ $\varepsilon > 0$ რიცხვს, რომლისთვისაც დადებითი ზომის იქნება $S = \{\lim_{n \rightarrow \infty} h'_n > \varepsilon\}$ სიმრავლე. შედეგად, (h'_n) მიმღევრობის კლუბადლობის გამო გვექნება, რომ ყოველი n -სთვის,

$$\int_{[a,b]} h'_n \geq \int_S h'_n \geq \varepsilon |S|.$$

რაც ეწინააღმდეგება (12) პირობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 13.5.2-ის დამტკიცება. თავდაპირველად ორი რამ შევნიშნოთ:

- $J_{(t,l,r)}$ ნახტომთა ფუნქცია ზრდადია მამინ და მხოლოდ მამინ, როცა ყოველი l_n და r_n რიცხვი არაუარყოფითია. ამაში დარწმუნებისთვის უნდა გავითვალისწინოთ, ერთი მხრივ, ნახტომთა ფუნქციის (2) წარმოდგენა და მეორე მხრივ, ნახტომთა ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრების სახე.
- $J_{(t,l,r)}$ ფუნქცია შემდეგნაირად წარმოდგება ორი ზრდადი ნახტომთა ფუნქციის სხვაობის სახით: $J_{(t,l,r)} = f - g$, სადაც

$$f(x) = \sum_{l_n \leq x} |l_n| + \sum_{l_n < x} |r_n|,$$

$$g(x) = \sum_{l_n \leq x} (|l_n| - l_n) + \sum_{l_n < x} (|r_n| - r_n).$$

ამ შენიშვნების საფუძველზე საკმარისია თეორემა დავამტკიცოთ იმ შემთხვევაში, როცა $J_{(t,l,r)}$ ფუნქცია ზრდადია (ე.ი. როცა ყოველი l_n და r_n რიცხვი არაუარყოფითია).

$J_{(t,l,r)}$ ფუნქციის განსაზღვრის თანახმად, $J_{(t,l,r)} = \sum_n J_{l_n, l_n, r_n}$. ამასთან, ცხადია, რომ ყოველი J_{l_n, l_n, r_n} ფუნქცია ზრდადია და $J'_{l_n, l_n, r_n}(x) = 0$ ყოველი $x \neq t_n$ წერტილისათვის. ამ თვისებების საფუძველზე დასამტკიცებელ დასკვნას უშუალოდ ეღებულობთ, როცა გვაქვს სასრული ჯამი (ე.ი. როცა (t_n) მიმდევრობა სასრულია), ხოლო უსასრულო ჯამის შემთხვევაში, დამატებით საჭიროა თეორემა 13.5.3-ის გამოყენება. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამოცანები

1. ნახტომთა ფუნქციის წარმოებულის თითქმის ყველგან ნულიან ტოლობა დაამტკიცეთ ვიტალის თეორემის გამოყენებით. მიითვება: დაუშვით საწინააღმდეგო და გამოიყენეთ, რომ $J_{(t,l,r)}$ -ის განმსაზღვრელი ჯამიდან სასრული რაოდენობის წევრთა ჩამოცილებით, $[a, b] \setminus \{x_1, x_2, \dots\}$ სიმრავლის წერტილებში $J_{(t,l,r)}$ -ის ზედა და ქვედა წარმოებულები არ იცვლება.

§ 6. შემოსაზღვრული გარიაცის ფუნქციის ლებეგის დაშლა

თუ f ფუნქციას ყოველ წერტილში აქვს ცალმხრივი ზღვრები, მამინ შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$l_f(t) = f(t) - f(t - 0) \quad (t \in (a, b]);$$

$$r_f(t) = f(t + 0) - f(t) \quad (t \in [a, b)).$$

$l_f(a)$ და $r_f(b)$ ჩავთვალოთ ნულის ტოლად.

შეგნიშნოთ, რომ 12.6.1 და 12.7.4 თეორემების ძალით შემოსაზღვრული ვარიაციის ნებისმიერი f ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე არაუბეტეს თვალადა, ამასთან, f -ს ყოველ წყვეტის წერტილში აქვს ცალმხრივი ზღვრები.

თეორემა 13.6.1. ვთქვათ, f შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციაა და t_n წერტილები ქმნიან მისი ყველა წყვეტის წერტილის სიმრავლეს. მაშინ

$$\sum_n |l_f(t_n)| + \sum_n |r_f(t_n)| \leq V_f([a, b]).$$

ე.ი. შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციის ცალმხრივ ნახტომთა მოდულების ჯამი არ აღემატება ფუნქციის სრულ ვარიაციას.

დამტკიცება. განვიხილოთ (t_n) მიმდევრობის ნებისმიერი საწყისი ნაწილი: $t_1, \dots, t_N$, და ვაჩვენოთ შეფასება:

$$\sum_{n=1}^N |l_f(t_n)| + \sum_{n=1}^N |r_f(t_n)| \leq V_f([a, b]).$$

ამით თეორემა დამტკიცებული იქნება. მოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $a = t_1 < \dots < t_N = b$. ყოველი $n \in \{1, \dots, N-1\}$ ინდექსისათვის τ_n იყოს $[t_n, t_{n+1}]$ სეგმენტის შუაწერტილი. მაშინ მარტივი დასანახია, რომ სრულდება შეფასებები:

$$|r_f(t_1)| \leq \omega_f([t_1, \tau_1]), \dots, |r_f(t_{N-1})| \leq \omega_f([t_{N-1}, \tau_{N-1}]);$$

$$|l_f(t_2)| \leq \omega_f([\tau_1, t_2]), \dots, |l_f(t_N)| \leq \omega_f([\tau_{N-1}, t_N]).$$

P იყოს $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილება, რომელიც მიიღება $t_1, \dots, t_N$ და $\tau_1, \dots, \tau_{N-1}$ წერტილებისაგან. მაშინ, თეორემა 13.1.7-ის გათვალისწინებით, დაეწეროთ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N |r_f(t_n)| + \sum_{n=1}^N |l_f(t_n)| &= \sum_{n=1}^{N-1} |r_f(t_n)| + \sum_{n=2}^N |l_f(t_n)| \leq \\ &\leq \omega_f([t_1, \tau_1]) + \omega_f([\tau_1, t_2]) + \dots + \omega_f([t_{N-1}, \tau_{N-1}]) + \omega_f([\tau_{N-1}, t_N]) = \\ &= \Omega_f(P) \leq V_f([a, b]). \end{aligned}$$

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ვთქვათ, f არის შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქცია და t_n წერტილები ქმნიან მის წყვეტის წერტილთა სიმრავლეს. მაშინ, თეორემა 13.6.1-ის საფუძველზე, შესაძლებელია განვსაზღვროთ f ფუნქციის ნახტომთა ფუნქცია:

$$J_f = \sum_n J_{t_n, l_f(t_n), r_f(t_n)}.$$

უწყვეტი შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციის ნახტომთა ფუნქცია მივიჩნიოთ იგივეურად ნულის ტოლად.

შენიშვნა 13.6.1. შემოსაზღვრული ვარიაციის ნებისმიერი f ფუნქციისათვის და ნებისმიერი გადაუგვარებელი $[c, d] \subset [a, b]$ ქვესეგმენტისათვის გვექნება, რომ

$$\sum_{t_n \in (c, d)} |l_f(t_n)| + \sum_{t_n \in [c, d)} |r_f(t_n)| \leq V_f([c, d])$$

(ე.ი. ცალმხრივ ნახტომთა მოძულების ჯამი, აღებული ქვესეგმენტში მოთავსებული წვეტის წერტილების მიხედვით, არ აღემატება ამ ქვესეგმენტზე ფუნქციის ვარიაციას). ეს შეფასება მიიღება თეორემა 13.6.1-დან, თუ მას გამოვიყენებთ f ფუნქციის შემზღუდვისათვის $[c, d]$ მონაკვეთზე.

შენიშვნა 13.6.2. შემოსაზღვრული ვარიაციის ნებისმიერი f ფუნქციისათვის 13.5.1 და 13.6.1 თეორემების ძალით, სრულდება შემდეგი თანაფარდობები:

$$V_{J_f}([a, b]) = \sum_n |l_f(t_n)| + \sum_n |r_f(t_n)| \leq V_f([a, b]).$$

შენიშვნა 13.6.3. ადვილი დასანახია, რომ შემოსაზღვრული ვარიაციის f ფუნქციის მარჯვნიდან უწყვეტობის შემთხვევაში, მისი ნახტომთა J_f ფუნქციაც მარჯვნიდან უწყვეტია.

თეორემა 13.6.2. შემოსაზღვრული ვარიაციის ნებისმიერი f ფუნქციისათვის $f - J_f$ სხვაობა უწყვეტია და $f = (f - J_f) + J_f$ არის f -ის ერთადერთი შესაძლო დაშლა უწყვეტი შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციისა და ნახტომთა ფუნქციის ჯამის სახით.

ლემა 13.6.1. თუ f და g ნახტომთა ფუნქციების სხვაობა უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ $f = g$.

დამტკიცება. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $f - g$ სხვაობა უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა f -ს და g -ს ერთი და იგივე წვეტის წერტილები აქვთ და ამასთან, წვეტის წერტილებში f და g ფუნქციების მარცხენა და მარჯვენა ნახტომები ერთმანეთს ემთხვევა. ნახტომთა ფუნქცია ცალსახად განისაზღვრება მისი წვეტის წერტილებითა და ამ წერტილებში არსებული მარცხენა და მარჯვენა ნახტომებით, ამიტომ, გეომოლინშულის ძალით, ვასკენით $f = g$ ტოლობას. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 13.6.2-ის დამტკიცება. ნახტომთა ფუნქციების თვისებების გათვალისწინებით J_f და f ფუნქციებს აქვთ ერთი და იგივე წვეტის წერტილები და ამასთან, წვეტის წერტილებში J_f და f ფუნქციების მარცხენა და მარჯვენა ნახტომები ერთმანეთს ემთხვევიან. შედეგად, $f - J_f$ იქნება უწყვეტი ფუნქცია. თეორემა 13.6.1-ის თანახმად, J_f არის შემოსაზღვრული ვარიაციის, ამიტომ $f - J_f$ ფუნქციაც იქნება შემოსაზღვრული ვარიაციის. ამრიგად, $f - J_f$ და J_f ფუნქციები გვაძლევენ f -ის დაშლას, უწყვეტი შემოსაზღვრული ვარიაციის

ფუნქციისა და ნახტომთა ფუნქციის ჯამის სახით, დაშლის ერთადერთობა კი არის ლემა 13.6.1-ის შედეგი. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ეთქვან, f შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციაა. როგორც ვიცით, f თითქმის ყველგან წარმოებადია და $f' \in L([a, b])$. f' -ის განუსაზღვრელი ინტეგრალი აღენიშნოთ A_f -ით, ე.ი.

$$A_f(x) = f(a) + \int_{[a, x]} f' \quad (x \in [a, b]).$$

A_f ფუნქციას ეწოდოთ f ფუნქციის აბსოლუტურად უწყვეტი კომპონენტი.

f ფუნქციას ეწოდოთ სინგულარული, თუ: 1) f არის უწყვეტი და შემოსაზღვრული ვარიაციის; 2) $f(a) = 0$ და 3) f -ის წარმოებული თითქმის ყველა წერტილში ნულის ტოლია.

შევნიშნოთ, რომ სინგულარული ფუნქცია არის აბსოლუტურად უწყვეტი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ის იგივერად ნულის ტოლია. მართლაც, აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია, რომლის წარმოებული თითქმის ყველგან ნულის ტოლია, არის მუდმივი (იხ. თეორემა 12.8.4), ხოლო მუდმივ ფუნქციებს შორის მხოლოდ ნულოვანი ფუნქციაა სინგულარული.

აქვე შევნიშნოთ, რომ არანულოვანი სინგულარული ფუნქციის მაგალითის გვაძლევს კანტორის θ ფუნქცია.

შემოსაზღვრული ვარიაციის f ფუნქციისათვის აღვნიშნოთ

$$S_f = f - J_f - A_f.$$

თეორემა 13.5.2-ის ძალით, J_f -ის წარმოებული თითქმის ყველგან ნულის ტოლია, ხოლო ლებეგის თეორემის თანახმად, A_f -ის წარმოებული თითქმის ყველგან $f'(x)$ -ს უდრის. აქედან გამომდინარე, თუ გავითვალისწინებთ $f - J_f$ ფუნქციის უწყვეტობას, დაეასკნით, რომ S_f სინგულარულია. S_f ფუნქციას f -ის სინგულარულ კომპონენტს უწოდებენ.

თეორემა 13.6.3. შემოსაზღვრული ვარიაციის ნებისმიერი f ფუნქციისათვის,

$$f = A_f + J_f + S_f$$

ტოლობა იძლევა f -ის ერთადერთ შესაძლო დაშლას აბსოლუტურად უწყვეტი, ნახტომთა და სინგულარული ფუნქციების ჯამის სახით.

დამტკიცება. დაეუვათ, f შემოსაზღვრული ვარიაციისაა და

$$f = A + J + S,$$

სადაც A აბსოლუტურად უწყვეტია, J ნახტომთა ფუნქციაა, ხოლო S არის სინგულარული. დასამტკიცებელი გვაქვს, რომ $A = A_f$, $J = J_f$ და $S = S_f$.

თეორემა 13.6.2-ის საფუძველზე გვექნება,

$$J = J_f \text{ და } A + S = A_f + S_f.$$

უკანასკნელი ტოლობის ძალით, $S - S_f = A_f - A$. შედეგად, სინგულარული $A - S_f$ ფუნქცია არის აბსოლუტურად უწყვეტი $A_f - A$ ფუნქციის ტოლი. ეს კი შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $S - S_f$ იგივეურად ნულის ტოლია. აქედან გამომდინარე, გვექნება, რომ $S = S_f$ და $A = A_f$. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შემოსაზღვრული ვარიაციის f ფუნქციის წარმოდგენას A_f , J_f და S_f კომპონენტების ჯამის სახით, მის ლებეგის დაშლას უწოდებენ.

§ 7. ზრდადი ფუნქციის ლებეგის დაშლა

თეორემა 13.7.1. თუ f არის ზრდადი ფუნქცია, მაშინ f -ის ლებეგის დაშლის სამივე A_f , J_f და S_f კომპონენტი აგრეთვე ზრდადი ფუნქციაა.

ლემა 13.7.1. თუ f არის ზრდადი ფუნქცია, მაშინ J_f და $f - J_f$ ფუნქციებიც ზრდადია.

დამტკიცება. f -ის მრდადობის გამო, მის ყოველ წყვეტის წერტილში მარჯვენა და მარცხენა ნახტომები არაუარყოფითია, საიდანაც გამომდინარეობს J_f ფუნქციის მრდადობა.

ახლა ვაჩვენოთ $f - J_f$ ფუნქციის მრდადობა. f -ის მრდადობის გათვალისწინებით, ადვილი დასანახია, რომ ყოველი $x \in [a, b]$ -სთვის,

$$J_f(x) = [f(a+0) - f(a)] + \sum_{a < t_n < x} [f(t_n+0) - f(t_n-0)] + [f(x) - f(x-0)],$$

სადაც t_n წერტილები ქმნიან f -ის ყველა წყვეტის წერტილის სიმრავლეს. უკანასკნელი წარმოდგენიდან გამომდინარე, ნებისმიერი $x, y \in [a, b]$, $x < y$, წერტილებისათვის გვექნება,

$$J_f(y) - J_f(x) = [f(x+0) - f(x)] + \sum_{x < t_n < y} [f(t_n+0) - f(t_n-0)] + [f(y) - f(y-0)].$$

ამრიგად, $J_f(y) - J_f(x)$ სხვაობა ტოლია f ფუნქციის იმ ნახტომთა ჯამის, რომლებიც შეესაბამება $[c, d]$ ქვესეგმენტში მოთავსებულ წყვეტის წერტილებს. ასეთი ჯამი კი, შენიშვნა 13.6.1-ის ძალით არ აღემატება $V_f([x, y])$ ვარიაციას, რომელიც f -ის მრდადობის გამო $f(y) - f(x)$ სხვაობის ტოლია. შედეგად, მივიღეთ, რომ $J_f(y) - J_f(x) \leq f(y) - f(x)$. საიდანაც, $f(x) - J_f(x) \leq f(y) - J_f(y)$. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 13.7.2. თუ f არის ზრდადი და უწყვეტი ფუნქცია, მაშინ S_f ფუნქცია ზრდადია.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ უწყვეტ ზრდად ფუნქციას აქვს ნულოვანი ნახტომთა ფუნქცია. ამიტომ გვაქვს $f = A_f + S_f$ ტოლობა. ამრიგად, S_f -ის ზრდადობა ტოლფასია $f - A_f$ ფუნქციის ზრდადობის. განვიხილოთ ნებისმიერი $x, y \in [a, b]$, $x < y$, წერტილები. დასამტკიცებელი $f(x) - A_f(x) \leq f(y) - A_f(y)$ შეფასება ტოლფასია შეფასებისა: $A_f(y) - A_f(x) \leq f(y) - f(x)$. რომელიც, A_f კომპონენტის განსაზღვრიდან გამომდინარე, გადაიწერება შემდეგნაირად

$$\int_{[x,y]} f' \leq f(y) - f(x).$$

ეს უკანასკნელი შეფასება კი სამართლიანია 12.6.2 თეორემის ძალით. ამით $f - A_f$ ფუნქციის ზრდადობა და, მასთან ერთად ლემა, დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 13.7.1-ის დამტკიცება. A_f კომპონენტის ზრდადობა გამომდინარეობს f' ფუნქციის არაუარყოფითობიდან, ხოლო J_f ფუნქციის ზრდადობა კი არის ლემა 13.7.1-ის შედეგი.

ახლა დაეადგინოთ S_f სინგულარული კომპონენტის ზრდადობა. შევნიშნოთ, რომ

$$A_f = A_{f-J_f} \text{ და } S_f = S_{f-J_f}.$$

მართლაც, J_f -ის წარმოებულის თითქმის ყველგან ნულთან ტოლობის გამო (იხ. თეორემა 13.5.2), f და $f - J_f$ ფუნქციების აბსოლუტურად უწყვეტი კომპონენტები ერთმანეთს ემთხვევა, ე.ი. $A_f = A_{f-J_f}$. შედეგად, $S_{f-J_f} = (f - J_f) - A_{f-J_f} = (f - J_f) - A_f = S_f$.

ლემა 13.7.1-ისა და თეორემა 13.6.2-ის ძალით, $f - J_f$ ფუნქცია არის ზრდადი და უწყვეტი. საიდანაც, $S_f = S_{f-J_f}$ ტოლობისა და ლემა 13.7.2-ის საფუძველზე, ვასკენით S_f ფუნქციის ზრდადობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

§ 8. აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციებით წარმოქმნილი ლებეგ-სტილტესის ზომები

ვთქვათ, φ არის $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქცია. $\bar{\varphi}$ იყოს φ -ს შემდეგნაირი გავრძელება რიცხვით ლერძზე:

$$\bar{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(a), & \text{თუ } -\infty < x < a, \\ \varphi(x), & \text{თუ } a \leq x \leq b, \\ \varphi(b), & \text{თუ } b < x < \infty. \end{cases}$$

განვიხილოთ ლებეგ-სტილტესის $m_{\bar{\varphi}}$ ზომის შემდეგა $L_{\bar{\varphi}} \cap [a, b]$ კლასზე და მას ეწოდოთ φ ფუნქციით წარმოქმნილი ლებეგ-სტილტესის ზომა $[a, b]$ სეგმენტზე. $L_{\bar{\varphi}} \cap [a, b]$ კლასი აღვნიშნოთ L_{φ} ჩანაწერით.

ამ და მომდევნო სამ პარაგრაფში ზრდადი ფუნქციების შესახებ დადგენილი დებულებები გამოყენებული იქნება ლებეგ-სტილტიესის ერთგანზომილებიანი ზომების შესასწავლად.

შემდეგი თეორემა გვაძლევს აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციებით წარმოქმნილი ლებეგ-სტილტიესის ზომების დასასიათებას.

თეორემა 3.8.1. $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემული ლებეგ-სტილტიესის ნებისმიერი m_φ ზომისათვის შემდეგი სამი წინადადება ერთმანეთის ეკვივალენტურია:

- φ ფუნქცია არის აბსოლუტურად უწყვეტი;
- $\mathcal{L} \cap [a, b] \subset \mathcal{L}_\varphi$ და მოიძებნება არაუარყოფითი $f \in L([a, b])$ ფუნქცია, ისეთი, რომ ნებისმიერი $A \in \mathcal{L} \cap [a, b]$ სიმრავლისათვის სრულდება ტოლობა:

$$m_\varphi(A) = \int_A f;$$

- სამართლიანია იმპლიკაცია:

$$(A \in \mathcal{L} \cap [a, b], |A| = 0) \Rightarrow (A \in \mathcal{L}_\varphi, m_\varphi(A) = 0).$$

ლემა 3.8.1. ვთქვათ, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ზრდადი და უწყვეტი ფუნქციაა. მაშინ ნებისმიერი $A \subset \mathbb{R}$ სიმრავლისათვის სრულდება $v_\varphi^*(A) = |\varphi(A)|_*$ ტოლობა (ე.ი. A სიმრავლის „ φ -გარე ზომა“ ტოლია $\varphi(A)$ სიმრავლის გარე ზომის).

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. ვიპოვოთ $(a_n, b_n]$ მონაკვეთების სასრული ან უსასრულო მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$\sum_n (\varphi(b_n) - \varphi(a_n)) < v_\varphi^*(A) + \varepsilon.$$

φ ფუნქციის უწყვეტობისა და ზრდადობის ძალით, ყოველი n -სთვის $(a_n, b_n]$ მონაკვეთის $\varphi((a_n, b_n]) = J_n$ ანასახი იქნება მონაკვეთი, რომლის ბოლოებსაც წარმოადგენენ $\varphi(a_n)$ და $\varphi(b_n)$ რიცხვები. შედეგად, $\varphi(A) \subset \bigcup_n \varphi((a_n, b_n])$ ჩართვის გათვალისწინებით დაწერეთ,

$$|\varphi(A)|_* \leq \left| \bigcup_n J_n \right| \leq \sum_n |J_n| = \sum_n (\varphi(b_n) - \varphi(a_n)) < v_\varphi^*(A) + \varepsilon. \quad (1)$$

ახლა დავამტკიცოთ $v_\varphi^*(A) < |\varphi(A)|_* + \varepsilon$ შეფასება. ამისათვის განვიხილოთ $\varphi(A)$ სიმრავლის დაფარვა $(c_n, d_n]$ მონაკვეთების სასრული ან უსასრულო მიმდევრობით, რომლისთვისაც

$$\sum_n (d_n - c_n) < |\varphi(A)|_* + \varepsilon.$$

φ ფუნქციის ზრდადობისა და უწყვეტობის ძალით, ყოველი n -სთვის $(c_n, d_n]$ მონაკვეთის $\varphi^{-1}((c_n, d_n])$ წინასახე იქნება $(a_n, b_n]$ მონაკვეთი, ისეთი, რომ $\varphi(a_n) = c_n$ და $\varphi(b_n) = d_n$. შედეგად, $A \subset \bigcup_n (a_n, b_n]$ ჩართვის გათვალისწინებით დაეწერთ,

$$\begin{aligned} \nu_\varphi^+(A) &\leq \nu_\varphi^+\left(\bigcup_n (a_n, b_n]\right) \leq \sum_n \nu_\varphi((a_n, b_n]) = \\ &= \sum_n (\varphi(b_n) - \varphi(a_n)) = \sum_n (d_n - c_n) < |\varphi(A)|_* + \varepsilon. \end{aligned} \quad (2)$$

(1) და (2) შეფასებებიდან, $\varepsilon > 0$ რიცხვის ნებისმიერობის საფუძველზე, ეასკენით $\nu_\varphi^+(A) = |\varphi(A)|_*$ ტოლობას. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 3.3.1-ის დამტკიცება. 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია: თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ φ -ს ზრდადობისა და აბსოლუტურად უწყვეტობის გამო, $\varphi' \geq 0$ და $\varphi' \in L([a, b])$.

განვიხილოთ $B(\mathbb{R}) \cap [a, b]$ კლასზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ν ფუნქცია:

$$\nu(A) = \int_A \varphi' \quad (A \in B(\mathbb{R}) \cap [a, b]).$$

ლებეგის ინტეგრალის თვისებების ძალით, ასეთი ფუნქცია წარმოადგენს ზომას $B(\mathbb{R}) \cap [a, b]$ კლასზე.

ნებისმიერი $c, d \in [a, b]$, $c < d$, წერტილებისათვის, φ ფუნქციის აბსოლუტურად უწყვეტობის ძალით, გვაქვს, რომ

$$m_\varphi([c, d]) = m_\varphi((c, d]) = \varphi(d) - \varphi(c) = \int_{[c, d]} \varphi' = \int_{(c, d]} \varphi'. \quad (4)$$

შევნიშნოთ, რომ $I \cap [a, b]$ ნახევარგოლი შედგება $[a, b]$ სეგმენტში მოთავსებული $[a, d]$ და $(c, d]$ სახის მონაკვეთებისაგან. ამასთან, თეორემა 3.3.3-ის თანახმად, $I \cap [a, b]$ კლასით წარმოქმნილი σ -ალგებრა არის $B(\mathbb{R}) \cap [a, b]$ კლასის ტოლი, ე.ი.

$$\sigma(I \cap [a, b]) = B(\mathbb{R}) \cap [a, b].$$

აღნიშნულის გათვალისწინებით, (4) ტოლობისა და ზომის გავრძელების ერთადერთობის შესახებ 5.5.1 თეორემის საფუძველზე დავასკენით, რომ $m_\varphi(A) = \nu(A) = \int_A \varphi'$ ნებისმიერი $A \in B(\mathbb{R}) \cap [a, b]$ სიმრავლისათვის. აქედან, 6.5.3 შენიშვნის გათვალისწინებით, ადვილად მიიღება მეორე წინადადების სამართლიანობა.

2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაცია: ვთქვათ, $f \in L([a, b])$ არის არაუარყოფითი ფუნქცია მერე წინადადებიდან. მაშინ ყოველი $x \in [a, b]$ წერტილისათვის გვექნება, რომ

$$\varphi(x) - \varphi(a) = m_\varphi((a, x]) = \int_{(a, x]} f = \int_{[a, x]} f.$$

საიდანაც, ჯამებადი ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალის (როგორც წერტილის ფუნქციის) აბსოლუტურად უწყვეტობის გათვალისწინებით, ვასკენით φ -ს აბსოლუტურად უწყვეტობას.

1) $\Leftrightarrow$ 3) ეკვივალენტობა: შევნიშნოთ, რომ მესამე წინადადების შესრულების შემთხვევაში φ იქნება უწყვეტი. მართლაც, ნებისმიერი $x \in [a, b]$ წერტილისათვის სრულდება პირობა: $m_\varphi(\{x\}) = 0$, რაც, ადვილი დასაანახია, რომ გამოიწვევს φ -ს უწყვეტობას x წერტილში. ამ შენიშვნის საფუძველზე, შეგვიძლია φ ჩავთვალოთ უწყვეტ ფუნქციად.

თეორემა 13.3.2-ის ძალით φ -ს აბსოლუტურად უწყვეტობა ტოლფასია იმისა, რომ φ -ს პქონდეს (N) თვისება. ეს თვისება კი, ლემა 13.8.1-ის გათვალისწინებით, ტოლფასია მესამე წინადადების.

თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 13.8.1. თეორემა 13.8.1 გამოცვეთს ზომის თეორიისათვის ერთ უმნიშვნელოვანეს ზოგად პრინციპს, სახელდობრ, თეორემის მეორე წინადადება გვეუბნება, რომ m_φ არის რაღაც ჯამებადი ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი (ე.ი. m_φ ზომა დაიყვანება ეტალონურად მიჩნეულ ლებეგის m ზომაზე ინტეგრების პროცესის მეშვეობით). მესამე პირობა კი გამოხატავს m_φ ზომის არაუკონტრასტულობას ლებეგის ზომასთან მიმართებაში, იმ თვალსაზრისით, რომ m_φ არ ახდენს დადებითი მასის თავმოყრას ლებეგის აზრით ნულზომიან სიმრავლეებზე. აღნიშნული ორი თვისების ეკვივალენტობა სრულდება ზოგად სიტუაციაშიც, როცა σ -ალგებრაზე მოცემულ ეტალონად მიჩნეულ μ ზომასთან მიმართებაში შეისწავლება იგივე σ -ალგებრაზე განსაზღვრული რაიმე ν ზომა. შესაბამისი დებულება ცნობილია რადონ-ნიკოდიმის თეორემის სახელწოდებით და დამტკიცებული იქნება მე-15 თავში.

შემდგომში, $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულ ლებეგ-სტილტიესის m_φ ზომას ეუწოდოთ აბსოლუტურად უწყვეტი, თუ მისი წარმომქმნელი φ ფუნქცია არის აბსოლუტურად უწყვეტი.

შენიშვნა 13.8.2. თეორემა 13.8.1-ის ძალით, აბსოლუტურად უწყვეტი m_φ ზომისთვის სრულდება $\mathcal{L} \cap [a, b] \subset \mathcal{L}_\varphi$ ჩართვა. ეს ჩართვა შეიძლება მკაცრი იყოს. მართლაც, თუ φ ფუნქცია მუდმივია რაიმე $[c, d] \subset [a, b]$ მონაკვეთზე, მაშინ ადვილი დასაანახია, რომ ნებისმიერი $A \subset [c, d]$ ქვესიმრავლე იქნება m_φ -ზომადი, რაც, ლებეგის აზრით არაზომადი $A \subset [c, d]$ ქვესიმრავლის არსებობის გათვალისწინებით, იწვევს $\mathcal{L} \cap [a, b] \subset \mathcal{L}_\varphi$ მკაცრ ჩართვას.

§ 9. ნახტომთა ფუნქციებით წარმოქმნილი ლებეგ-სტილტიესის ზომები

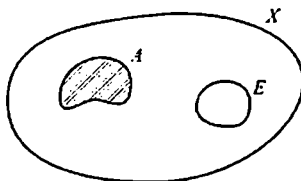
ეთქვათ, φ არის ნახტომთა ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე, რომელიც წყვეტილია t_n წერტილებში და t_n -ში მარცხენა და მარჯვენა ნახტომები, შესაბამისად, l_n და r_n რიცხვების ტოლია. ნახტომთა ფუნქციის თვისებებიდან გამომდინარე, φ არის ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი r_n რიცხვი ნულის ტოლია და ყოველი l_n რიცხვი დადებითია. შედეგად, ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი ნახტომთა φ ფუნქციისათვის სამართლიანია წარმოდგენა:

$$\varphi(x) = \sum_{t_n \leq x} l_n \quad (x \in [a, b]). \quad (1)$$

სადაც $l_n > 0$ ყოველი n -სთვის.

ეთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა. ამბობენ, რომ μ თავმოყრილია $A \subset X$ სიმრავლეზე, თუ (ნახ. 13.4)

$$(E \subset X \setminus A \quad E \in S) \Rightarrow \mu(E) = 0.$$



ნახ. 13.4.

μ ზომას ეწოდება დისკრეტული, თუ ის თავმოყრილია რაიმე არაუმეტეს თვლად სიმრავლეზე.

შენიშვნა 13.9.1. ეთქვათ, μ დისკრეტული ზომაა, რომელიც თავმოყრილია A სიმრავლეზე. თუ A სიმრავლის ელემენტებს გადავნიშნავთ: $A = \{t_n : n \in N \subset \mathbb{N}\}$ და აღვნიშნავთ $l_n = \mu(\{t_n\})$, მაშინ ადვილი დასანახია, რომ

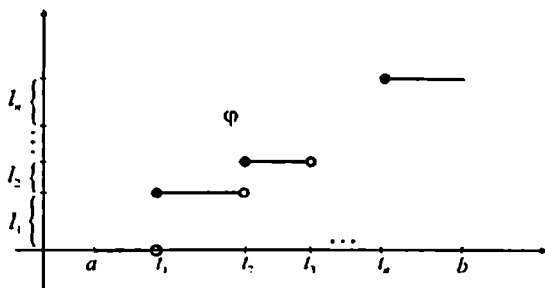
$$\mu(E) = \sum_{t_n \in E \cap A} l_n \quad (E \in S).$$

შენიშვნა 13.9.2. თუ m_φ არის $[a, b]$ მონაკვეთზე მოცემული ლებეგ-სტილტიესის დისკრეტული ზომა, მაშინ ნებისმიერი $E \subset [a, b]$ ქვესიმრავლე იქნება m_φ -ზომადი. მართლაც, განვიხილოთ არაუმეტეს თვლადი $A \subset [a, b]$ სიმრავლე, რომელზეც თავმოყრილია m_φ ზომა. მაშინ $[a, b] \setminus A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [a, b] \subset \mathcal{L}_\varphi$ და $m_\varphi([a, b] \setminus A) = 0$. საიდანაც, m_φ ზომის სისრულის გათვალისწინებით, მივიღებთ $\mathcal{L}_\varphi = 2^{[a, b]}$ ტოლობას.

თეორემა 13.9.1. $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემული ლებეგ-სტილტიესის ნე-
ბისმიერი m_φ ზომისათვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- φ არის ნახტომთა ფუნქცია მუდმივის სიზუსტით;
- m_φ არის დისკრეტული ზომა.

ნახ. 13.5-ზე გამოსახულია დისკრეტული ზომის წარმომქმნელი ნახტომთა
 φ ფუნქცია, რომელსაც აქვს სასრული რაოდენობის წყვეტის წერტილები.



ნახ. 13.5.

დამტკიცება. 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია: ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულის-
ხმოთ, რომ φ არის ნახტომთა ფუნქცია, რომლის წყვეტის წერტილებია t_n
წერტილები. ხოლო მათში მარცხენა ნახტომები არიან, შესაბამისად, $l_n > 0$
რიცხვები.

განვიხილოთ φ ფუნქციის φ გაგრძელება რიცხვით ღერძზე წინა პარაგრაფ-
ში მითითებული წესით. (1)-ის გათვალისწინებით, ადვილი დასაანახია φ -სათვის
შემდეგი წარმოდგენის სამართლიანობა:

$$\bar{\varphi}(x) = \sum_{t_n \leq x} l_n \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (2)$$

განვიხილოთ $B(\mathbb{R})$ კლასზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ν ფუნქცია:

$$\nu(E) = \sum_{t_n \in E} l_n \quad (E \in B(\mathbb{R})).$$

მარტივი შესამოწმებელია, რომ ასეთი ფუნქცია წარმოადგენს ზომას $B(\mathbb{R})$
კლასზე.

(2)-ის გათვალისწინებით ყოველი $(c, d]$ მონაკვეთისათვის გვექნება,

$$m_\varphi((c, d]) = \bar{\varphi}(d) - \bar{\varphi}(c) = \sum_{t_n \in (c, d]} l_n = \nu((c, d]).$$

საიდანაც, ზომის გაგრძელების ერთადერთობის შესახებ 5.5.1 თეორემის ძალით, მივიღებთ $m_\varphi(E) = \nu(E)$ ტოლობას ნებისმიერი $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ სიმრავლისათვის. აქედან, თავის მხრივ, მიიღება, რომ m_φ წარმოადგენს $\mathcal{I}_n$ წერტილებისაგან შედგენილ A სიმრავლეზე თავმოყრილ დისკრეტულ ზომას. ცხადია, ასეთივე იქნება m_φ ზომაც. ამით $1) \Rightarrow 2)$ იმპლიკაცია დამტკიცებულია.

$2) \Rightarrow 1)$ იმპლიკაცია: ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმობთ, რომ m_φ არანულოვანი დისკრეტული ზომაა. ეთქვას, m_φ თავმოყრილია არაუმეტეს თვლად $A = \{I_n \mid n \in N \subset \mathbb{N}\}$ სიმრავლეზე. ადვილი დასანახია, რომ ასეთივე იქნება m_φ ზომაც. აღვნიშნოთ $I_n = m_\varphi(\{t_n\})$. მაშინ ყოველი $E \subset \mathbb{R}$ სიმრავლისათვის,

$$m_\varphi(E) = \sum_{I_n \in E} I_n.$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ $\bar{\varphi}(d) - \bar{\varphi}(c) = m_\varphi((c, d])$ ტოლობას, ყოველი $x \in (a, b]$ წერტილისათვის დავწერთ,

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \bar{\varphi}(x) - \bar{\varphi}(a) = \sum_{I_n \in (a, x]} I_n = \sum_{I_n \leq x} I_n.$$

ეს წარმოადგენს კი იწვევს იმას, რომ $\varphi - \varphi(a)$ არის ნახტომთა ფუნქცია. ამით $2) \Rightarrow 1)$ იმპლიკაცია და მასთან ერთად თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

§ 10. სინგულარული ფუნქციებით წარმოქმნილი ლებეგ-სტილტესის ზომები

ლებეგ-სტილტესის m_φ ზომას ეწოდება სინგულარული, თუ ის თავმოყრილია ლებეგის აზრით ნულზომიან რაიმე სიმრავლეზე.

შენიშვნა 10.1. ლებეგის აზრით ნულზომიანი ყოველი სიმრავლე თავის მხრივ ჩართულია ასეთივე ტიპის ბორელის სიმრავლეში (იხ. ლემა 5.4.2). ამიტომ სინგულარული ზომის განსაზღვრება ეკვივალენტურ ფორმას მიიღებს, თუ მასში ნულზომიან სიმრავლეს დამატებით მოვთხოვით ბორელის კლასისადმი მიეუთვნებას.

ლებეგ-სტილტესის m_φ ზომას ეწოდება უწყვეტი, თუ ყოველი $x \in [a, b]$ წერტილისათვის $m_\varphi(\{x\}) = 0$ (ე.ი. ყოველი ერთწერტილიანი სიმრავლის m_φ -ზომა ნულის ტოლია).

შენიშვნა 10.2. ადვილი დასანახია, რომ $[a, b]$ მონაკვეთზე მოცემული ლებეგ-სტილტესის m_φ ზომის უწყვეტობა ტოლფასია φ ფუნქციის უწყვეტობას.

შენიშვნა 13.10.3. ყოველი დისკრეტული ლებეგ-სტილტიესის μ_θ ზომა სინგულარულია, ამასთან, თუ μ_θ არაა იგივერად ნულის ტოლი, მაშინ μ_θ არაა უწყვეტი.

თეორემა 13.10.1. $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემული ლებეგ-სტილტიესის ნებისმიერი μ_θ ზომისათვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- φ არის სინგულარული ფუნქცია მუდმივის სიზუსტით;
- μ_θ არის სინგულარული და უწყვეტი ზომა.

დამტკიცება. 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია: $E \subset [a, b]$ იყოს ლებეგის აბრით სრული ზომის სიმრავლე, რომლის წერტილებში φ ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია. ლემა 13.3.2-ის ძალით, $\varphi(E)$ ანასახის ლებეგის ზომა ნულის ტოლია, საიდანაც, ლემა 13.8.1-ის საფუძველზე, ეასკენით $\mu_\theta(E) = 0$ ტოლობას. აქედან გამომდინარეობს, რომ μ_θ ზომა თავმოყრილია ლებეგის აბრით ნულზომიან $[a, b] \setminus E$ სიმრავლეზე. ამით 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია დამტკიცებულია.

2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაცია: შენიშვნა 13.10.1-ის ძალით მოიძებნება ლებეგის აბრით სრული ზომის $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [a, b]$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $\mu_\theta(E) = 0$. ლემა 13.8.1-ის საფუძველზე გეეჩნება, რომ $|\varphi(E)| = 0$. A იყოს E -ს ყველა იმ წერტილის სიმრავლე, რომელშიც φ არის წარმოებადი. ზრდადობის გამო, φ თითქმის ყველგან (ლებეგის ზომის მიხედვით) წარმოებადია. შედეგად, $|A| = b - a$. ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის აღვნიშნოთ $A_\varepsilon = \{x \in A : \varphi'(x) > \varepsilon\}$. ლემა 12.6.2-ის ძალით დაეწერთ,

$$0 = |\varphi(E)| \geq |\varphi(A)|_* \geq \varepsilon |A_\varepsilon|_*.$$

ამრიგად, $|A_\varepsilon| = 0$. საიდანაც, $A \cap \{\varphi' > 0\} = \bigcup_{n=1}^\infty A_{1/n}$ ტოლობის გათვალისწინებით, ვღებულობთ: $|A \cap \{\varphi' > 0\}| = 0$. შედეგად, $\varphi'(x) = 0$ თითქმის ყოველ $x \in [a, b]$ წერტილში, ლებეგის ზომის მიხედვით. აქედან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ შენიშვნა 13.10.2-ის თანახმად, φ არის უწყვეტი, დაეასკენით φ ფუნქციის სინგულარულობას მუდმივის სიზუსტით. ამით 2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაცია და მასთან ერთად თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 13.10.4. განვიხილოთ კანტორის θ ფუნქცია. თეორემა 13.10.1-ის ძალით, μ_θ არის $[0, 1]$ მონაკვეთზე მოცემული სინგულარული ზომა. ყურადღება შევაჩეროთ μ_θ -ზომად სიმრავლეთა $\mathcal{L}_\theta$ კლასზე. სახელდობრ, ვაჩვენოთ, რომ $\mathcal{L} \cap [0, 1] \subset \mathcal{L}_\theta$ და $\mathcal{L}_\theta \subset \mathcal{L} \cap [0, 1]$ ჩართვებს შორის არცერთი არაა სამართლიანი.

$\mu_\theta([0, 1] \setminus \mathbb{D}) = 0$ ტოლობისა და შენიშვნა 6.5.3-ის ძალით, $[0, 1]$ -ის ნებისმიერი ქვესიმრავლე, რომელიც კანტორის სიმრავლის გარეთ მდებარეობს, იქნება μ_θ -ზომადი (კერძოდ, ნულის ტოლი μ_θ ზომის მქონე). შედეგად, ნებისმიერ ინტერვალში ლებეგის აბრით არაზომადი ქვესიმრავლის

არსებობის გამო, დაეასყენით, რომ $\mathcal{L}_\theta \subset \mathcal{L} \cap [0, 1]$ ჩართვა არაა სამართლიანი.

თეორემა 6.5.1-ის ძალით არსებობს $A \subset [0, 1]$ სიმრავლე, რომელიც არაა m_θ -ზომადი. შევნიშნოთ, რომ $A \setminus \mathbb{D} \subset [0, 1] \setminus \mathbb{D}$ ჩართვის გამო, $A \setminus \mathbb{D}$ სიმრავლე არის m_θ -ზომადი. შედეგად, $A \cap \mathbb{D}$ სიმრავლე არ იქნება m_θ -ზომადი. მეორე მხრივ, $A \cap \mathbb{D}$ ზომადია ლებეგის აზრით, როგორც ნულის ტოლი ლებეგის ზომის მქონე $\mathbb{D}$ სიმრავლის ქვესიმრავლე. ამრიგად, $A \cap \mathbb{D} \in (\mathcal{L} \cap [0, 1]) \setminus \mathcal{L}_\theta$, ე.ი. $\mathcal{L} \cap [0, 1] \subset \mathcal{L}_\theta$ ჩართვა არაა სამართლიანი.

§ 11. ლებეგ-სტილტიესის ზომის დამლა სამი კომპონენტის ჯამის სახით

ვთქვათ, φ არის $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქცია. მაშინ 13.7.1 და 13.6.3 თეორემების ძალით, φ ფუნქციის აბსოლუტურად უწყვეტი, დისკრეტული და სინგულარული კომპონენტები აგრეთვე ზრდადი ფუნქციებია და სრულდება წარმოდგენა: $\varphi = A_\varphi + J_\varphi + S_\varphi$. ამასთან, J_φ კომპონენტის შემთხვევაში, ადგილი აქვს მარჯვნიდან უწყვეტობას (იხ. 13.6.3 შენიშვნა). შედეგად, შეგვიძლია განვიხილოთ m_{A_φ} , m_{J_φ} და m_{S_φ} ლებეგ-სტილტიესის ზომები. შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ ეს ზომები ახდენენ m_φ -ს დამლას სამ კომპონენტად.

თეორემა 13.11.1. $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემული ლებეგ-სტილტიესის ნებისმიერი m_φ ზომა ბორელის $B(\mathbb{R}) \cap [a, b]$ კლასზე იშლება m_{A_φ} , m_{J_φ} და m_{S_φ} ზომების ჯამის სახით, ე.ი. ყოველი $A \in B(\mathbb{R}) \cap [a, b]$ სიმრავლისათვის,

$$m_\varphi(A) = m_{A_\varphi}(A) + m_{J_\varphi}(A) + m_{S_\varphi}(A).$$

ამასთან, ეს ტოლობა გვაძლევს ბორელის კლასზე m_φ ზომის ერთადერთ შესაძლო დამლას ლებეგ-სტილტიესის სამი ზომის ჯამის სახით, რომელთაგან ჰირველი არის აბსოლუტურად უწყვეტი, მეორე - დისკრეტული, ხოლო მესამე კი - სინგულარული და უწყვეტი.

შენიშვნა 13.11.1. საზოგადოდ, m_φ , m_{A_φ} , m_{J_φ} და m_{S_φ} ზომების განსაზღვრის არეები განსხვავებული კლასებია. იმთავითვე ცნობილია მხოლოდ ის, რომ ბორელის კლასი შედის თითოეულ მათგანში. ამითაა გამოწვეული m_φ ზომის კომპონენტებად დაშლისას ბორელის კლასით შემოფარგვლა. თანაც ბორელის კლასზე ლებეგ-სტილტიესის ზომის ყოფაქცევა სრულ ინფორმაციას იძლევა თავად ზომის შესახებ. ამიტომ თეორემა 13.11.1-ში $B(\mathbb{R}) \cap [a, b]$ კლასის განსილვით ზოგადობა პრინციპულად არ იზღუდება.

ლემა 13.11.1. ვთქვათ, φ და ψ რიცხვით ღერძზე განსაზღვრული ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქციებია. მაშინ ყოველი $A \in B(\mathbb{R})$ სიმრავლისათვის სრულდება ტოლობა:

$$m_{\varphi+\psi}(A) = m_{\varphi}(A) + m_{\psi}(A).$$

შედეგად, ანალოგიური დასკვნა სამართლიანია $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი φ და ψ ფუნქციების შემთხვევაშიც.

დამტკიცება. განვიხილოთ $B(\mathbb{R})$ კლასზე შემღებანიად განსაზღვრული ν ფუნქცია:

$$\nu(A) = m_{\varphi}(A) + m_{\psi}(A) \quad (A \in B(\mathbb{R})).$$

ცხადია, ასეთი ფუნქცია წარმოადგენს ზომას $B(\mathbb{R})$ კლასზე.

ყოველი $(c, d]$ მონაკვეთისათვის გვაქვს, რომ

$$m_{\varphi+\psi}((c, d]) = (\varphi + \psi)(d) - (\varphi + \psi)(c) =$$

$$= [\varphi(d) - \varphi(c)] + [\psi(d) - \psi(c)] = m_{\varphi}((c, d]) + m_{\psi}((c, d]) = \nu((c, d]).$$

საიდანაც, ზომის გაგრძელების ერთადერთობის შესახებ 5.5.1 თეორემის ძალით, მივიღებთ $m_{\varphi+\psi}(A) = \nu(A)$ ტოლობას ნებისმიერი $A \in B(\mathbb{R})$ სიმრავლისათვის. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 13.11.1-ის დამტკიცება. თუ გავითვალისწინებთ $\varphi = A_{\varphi} + J_{\varphi} + S_{\varphi}$ წარმოდგენას და გამოვიყენებთ ლემა 13.11.1-ს, ყოველი $A \in B(\mathbb{R}) \cap [a, b]$ სიმრავლისათვის გვექნება, რომ

$$m_{\varphi}(A) = m_{A_{\varphi}}(A) + m_{J_{\varphi}}(A) + m_{S_{\varphi}}(A).$$

ახლა ვაჩვენოთ წარმოდგენის ერთადერთობა. დაეუშვათ, ყოველი $A \in B(\mathbb{R}) \cap [a, b]$ სიმრავლისათვის,

$$m_{\varphi}(A) = m_{\varphi_1}(A) + m_{\varphi_2}(A) + m_{\varphi_3}(A),$$

სადაც m_{φ_1} არის აბსოლუტურად უწყვეტი, m_{φ_2} - დისკრეტული, ხოლო m_{φ_3} - სინგულარული და უწყვეტი. მაშინ, 13.8.1, 13.9.1 და 13.10.1 თეორემების თანახმად, φ_1 ფუნქცია იქნება აბსოლუტურად უწყვეტი, φ_2 - ნასტომთა ფუნქცია მუდმივის სიმუსტით, ხოლო φ_3 - სინგულარული მუდმივის სიმუსტით. ლემა 13.11.1-ის ძალით, ყოველი $A \in B(\mathbb{R}) \cap [a, b]$ სიმრავლისათვის შესრულდება ტოლობა:

$$m_{\varphi}(A) = m_{\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3}(A).$$

საიდანაც, თუ A -ს როლში ავიღებთ $(a, x]$ სახის მონაკვეთებს. დავასყენით, რომ ყოველი $x \in (a, b]$ -სთვის,

$$\varphi(x) - \varphi(a) = (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)(x) - (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)(a).$$

შედეგად, ყოველი $x \in [a, b]$ -სთვის,

$$\varphi(x) = [\varphi_1(x) - \varphi_1(a) + \varphi(a)] + [\varphi_2(x) - \varphi_2(a)] + [\varphi_3(x) - \varphi_3(a)].$$

მიღებულ წარმოდგენაში პირველი ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია, მეორე არის ნახტომთა ფუნქცია, ხოლო მესამე კი - სინგულარული ფუნქცია. მაშინ, ლებეგის ღაშლის ერთადერთობის გამო (იხ. თეორემა 13.6.3), გვექნება, რომ $A_\varphi = \varphi_1 - \varphi_1(a) + \varphi(a)$, $J_\varphi = \varphi_2 - \varphi_2(a)$ და $S_\varphi = \varphi_3 - \varphi_3(a)$. აქედან კი, უშუალოდ მიიღება $m_{A_\varphi} = m_{\varphi_1}$, $m_{J_\varphi} = m_{\varphi_2}$ და $m_{S_\varphi} = m_{\varphi_3}$ ტოლობები. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ინტეგრება და დიფერენცირება $\mathbb{R}^n$ სივრცეში

მრავალგანზომილებიან შემთხვევაში, უპირველესად, გარკვევას მოითხოვს, თუ რა უნდა მივიჩნიოთ დიფერენცირებად, ე.ი. ინტეგრების შებრუნებულ ოპერაციად. თუ გავაკეთებთ ზოგად მონახაზს, პასუხი ასეთია:

- განუსაზღვრელ ინტეგრალს უნდა შევხედოთ, როგორც სიმრავლის ფუნქციას;
- დიფერენცირება უნდა გავიგოთ, როგორც ფუნქციის ინტეგრალური საშუალოების კრებადობა.

ასეთი მიდგომა უკვე გამოყენებული იქნა ერთგანზომილებიან სიტუაციაში, როცა ჩვეულებრივი დიფერენცირების ოპერაციის განმსაზღვრელი გამოსახულება: $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ გარდაექმენით $I = [x, x+h]$ მონაკვეთზე აღებულ $\frac{1}{|I|} \int_I f$ ინტეგრალურ საშუალოდ, შემდეგ კი ვაჩვენეთ ამ საშუალოების თითქმის ყველგან კრებადობა f ფუნქციისაყენ. ეს გზა შეიძლება გავიმეოროთ მრავალგანზომილებიან შემთხვევაშიც. თუმცა, იმთავითვე ისმის საკითხი იმის შესახებ, თუ რა ტიპის სიმრავლეები შეასრულებენ ერთგანზომილებიანი მონაკვეთის მსგავს როლს? ასეთი შესაძლებლობა კი მრავალია. მაგალითად, n -განზომილებიანი კუბური მონაკვეთი, n -განზომილებიანი ბირთვი, n -განზომილებიანი მონაკვეთი, n -განზომილებიანი მართკუთხა პარალელეპიპედი - თითოეული ამ ტიპის სიმრავლეთა შორის შეიძლება მივიჩნიოთ ინტეგრალურ საშუალოთა წარმომქმნელად. ასეთი დაწერილებითი განხილვა სულაც არაა მედმეტი, რადგან, როგორც ირკვევა, მაგალითად, ბირთვების მეშვეობით წარმოქმნილი დიფერენცირების პროცესი წარმოადგენს ინტეგრების შებრუნებულ ოპერაციას, ხოლო n -განზომილებიანი მონაკვეთების მეშვეობით წარმოქმნილი კი არა. ასე რომ, ლებეგის ჯერადი ინტეგრალის დიფერენცირების პროცესის თვისებები არსებითადაა დამოკიდებული ინტეგრალური საშუალოების წარმომქმნელი სიმრავლეების გეომეტრიულ აგებულებაზე.

§ 1. დიფერენცირების ბაზისის ცნება

ვიტყვი, რომ მოცემული გვაქვს B დიფერენცირების ბაზისი $\mathbb{R}^n$ სივრცეში, თუ ყოველი $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილისათვის $B(x)$ არის სიმრავლეთა რაიმე კლასი შემდეგი თვისებებით:

- ყოველი $I \in B(x)$ სიმრავლე შეიცავს x წერტილს,
- ყოველი $I \in B(x)$ სიმრავლე არის შემოსაზღვრული, ლებეგის აზრით ზომადი და $|I| > 0$,
- $B(x)$ კლასიდან შეიძლება ამოვარჩიოთ (I_k) მიმდევრობა, რომელიც "მოიჭიმება" x წერტილისაკენ, ე.ი. $\text{diam } I_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).

გადმოცემის სისრულისათვის ჩამოვყალიბოთ შემდეგი განსაზღვრებები:

- n -განზომილებიანი მონაკვეთი ეწოდება n ცალი ერთგანზომილებიანი მონაკვეთის დეკარტულ ნამრავლს.
- n -განზომილებიანი კუბური მონაკვეთი ეწოდება ერთი და იგივე სიგრძის n ცალი ერთგანზომილებიანი მონაკვეთის დეკარტულ ნამრავლს.
- n -განზომილებიანი მარიყუთხა პარალელებიპედი (ორგანზომილებიან შემთხვევაში - მართუთხედი) ეწოდება n -განზომილებიანი მონაკვეთის მობრუნებით მიღებულ სიმრავლეს.

შეთანხმდეთ, რომ შემდგომში:

- $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის გარე ზომა და ზომადობის შემთხვევაში ლებეგის ზომა აღნიშნული იქნებიან, შესაბამისად, $|E|_*$ და $|E|$ ჩანაწერებით;
- $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი $\int_A f d\mu$, აღნიშნული იქნება $\int_A f$ ჩანაწერით;
- სიმრავლისა და ფუნქციის ზომადობა განხილული იქნება ლებეგის ზომის მიმართ;
- ყოველთვის განხილული იქნება გადაუგვარებელი და სასრული ზომის მონაკვეთები.

უთქვამთ, B რაიმე დიფერენცირების ბაზისია $\mathbb{R}^n$ სივრცეში. ვიტყვი, რომ $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი წარმოებადია (ან კიდევ, დიფერენცირებადია) x წერტილში B ბაზისის მიხედვით, თუ არსებობს სასრული ზღვარი:

$$\lim_{I \in B(x), I \rightarrow x} \frac{1}{|I|} \int_I f. \quad (1)$$

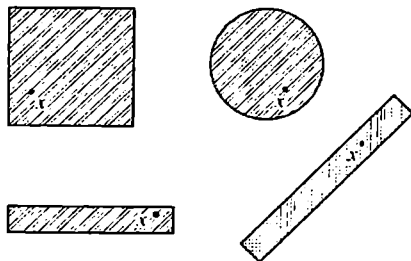
შენიშვნა 14.1.1. (1) ზღვარი (a -ს ტოლი მნიშვნელობით) შემდეგნაირად გაიგება: ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება $\delta > 0$, ისეთი, რომ

$$\left| \frac{1}{|I|} \int_I f - a \right| < \varepsilon,$$

ყოველივის, როცა $I \in B(x)$ და $\text{diam } I < \delta$.

(1) მღერის მნიშვნელობას ეწოდება f ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის წარმოებულის x წერტილში B ბაზისის მიხედვით.

I_1, I_2, I_3 და I_4 ჩანაწერებით აღნიშნოთ შემდეგნაირად განსაზღვრული ბაზისები $\mathbb{R}^n$ სივრცეში (ნახ. 14.1):



ნახ. 14.1.

- $I_1(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) შედგება x -ის შემცველი ყველა n -განზომილებიანი კუბური მონაკვეთისაგან;
- $I_2(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) შედგება x -ის შემცველი ყველა n -განზომილებიანი ბირთვისაგან;
- $I_3(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) შედგება x -ის შემცველი ყველა n -განზომილებიანი მონაკვეთისაგან;
- $I_4(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) შედგება x -ის შემცველი ყველა n -განზომილებიანი მართკუთხა პარალელეპიპედისაგან.

ცხადია, ერთგანზომილებიან შემთხვევაში ოთხივე გემოთ მოცემული ბაზისი გაიგება, როგორც ერთგანზომილებიანი მონაკვეთების I ბაზისი.

B ბაზისისათვის Δ_B ჩანაწერით აღნიშნოთ $B(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) კლასების გაერთიანება, ე.ი. $\Delta_B = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} B(x)$. Δ_B კლასის სიმრავლეებს B ბაზისის შემადგენელი სიმრავლეები ეწოდებათ.

ვთქვათ, B რაიმე ბაზისია. ნებისმიერი $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციისათვის განვიხილოთ მასთან შემდეგი წესით დეკომპოზირებული $M_B(f)$ ფუნქცია:

$$M_B(f)(x) = \sup_{I \in B(x)} \frac{1}{|I|} \int_I |f| \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

M_B ოპერატორს ეწოდებენ B ბაზისის შესაბამის მაქსიმალურ ოპერატორს.

აღვილი შესამოწმებელია, რომ M_B ოპერატორს აქვს შემდეგი თვისებები:

$$0 \leq M_B(f)(x) \leq \infty, \quad (2)$$

$$M_B(f+g)(x) \leq M_B(f)(x) + M_B(g)(x), \quad (3)$$

$$M_B(\alpha f)(x) = |\alpha| M_B(f)(x). \quad (4)$$

ვთქვათ, B რაიმე ბაზისია და $r > 0$. განვიხილოთ $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქცია-ასთან შემდეგი წესით დაკავშირებული $M_B^r(f)$ ფუნქცია:

$$M_B^r(f)(x) = \sup_{I \in B(x), \text{diam } I < r} \frac{1}{|I|} \int_I |f| \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

M_B^r -ს უწოდებენ B ბაზისის შესაბამის r -წაკვეთილ მაქსიმალურ ოპერატორს.

ადვილი დასანახია, რომ წაკვეთილ მაქსიმალურ ოპერატორს აქვს (2)-(1)-ის ანალოგიური თვისებები, ამასთან, $M_B^{r_1}(f)(x) \leq M_B^{r_2}(f)(x)$, როცა $r_1 < r_2$, $M_B^r(f)(x) \leq M_B(f)(x)$ და $M_B(f)(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} M_B^r(f)(x)$.

§ 2. ინტეგრალთა დიფერენცირება ვიტალის თვისების მქონე ბაზისების მიხედვით

ჩვენი უახლოესი მიზანია ისეთი ბაზისების მითითება, რომელთა მიერ წარმოქმნილი დიფერენცირების პროცესი წარმოადგენს ინტეგრების შებრუნებულ ოპერაციას. ამ თვალსაზრისით, არსებითია შემდეგი განსაზღვრება:

ვთქვათ, რომ დიფერენცირების B ბაზისს აქვს ვიტალის თვისება, თუ მოიძებნება $c > 0$ რიცხვი, რომლისთვისაც სამართლიანია შემდეგი წინადადება: ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე დაფარულია რაიმე $\Pi \subset \Delta_B$ კლასის სიმრავლეებით, რომელთა დიამეტრები ერთობლივ შემოსაზღვრულია. მაშინ Π -დან შეიძლება გამოვყოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სიმრავლეებისაგან შედგენილი, არაუმეტეს თვლადი Π' ქვეკლასი, ისეთი, რომ

$$\sum_{I \in \Pi'} |I| \geq c|E|.$$

სამართლიანია ინტეგრალთა დიფერენცირების შესახებ ლებეგის თეორემის შემდეგი მრავალგანზომაოვანი ანალოგი.

თეორემა 14.2.1. ვთქვათ, B არის ვიტალის თვისების მქონე ბაზისი $\mathbb{R}^n$ სივრცეში. მაშინ ნებისმიერი $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელ ინტეგრალს თითქმის ყოველ $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილში აქვს წარმოებული B ბაზისის მიხედვით, რომელიც $f(x)$ -ის ტოლია. უფრო მეტიც, ნებისმიერი $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციისათვის თითქმის ყოველი $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილი არის ლებეგის წერტილი B ბაზისის მიხედვით, ე.ი.

$$\lim_{I \in B(x), I \rightarrow x} \frac{1}{|I|} \int_I |f - f(x)| = 0.$$

თეორემა 14.2.1 მტკიცდება თეორემა 12.1.2-ის მსგავსად. დამტკიცებისათვის არსებითი მნიშვნელობისაა სუსტი ტიპის შეფასება მაქსიმალური ოპერატორისათვის, რომელიც მოიცემა შემდეგი დებულებით.

თეორემა 14.2.2. ვთქვათ, B არის ვიტალის თვისების მქონე ბაზისი $\mathbb{R}^n$ სივრცეში. მაშინ ნებისმიერი $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციისათვის სრულდება შეფასება:

$$|\{M_B(f) > \lambda\}|_* \leq \frac{1/c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f| \quad (0 < \lambda < \infty), \quad (1)$$

სადაც c არის შედმივი ვიტალის თვისების განსაზღვრებიდან.

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $r > 0$ რიცხვისათვის r -წყვეთილი მაქსიმალური M_B^r ოპერატორი აკმაყოფილებს შეფასებას:

$$|\{M_B^r(f) > \lambda\}|_* \leq \frac{1/c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f| \quad (0 < \lambda < \infty).$$

ამის შემდეგ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\{M_B^k(f) > \lambda\}$ ($k \in \mathbb{N}$) წარმოადგენს სიმრავლეთა ზრდად მიმდევრობას, რომლის ზღვარი არის $\{M_B(f) > \lambda\}$ სიმრავლე, გარე ზომის ქვემოდან უწყვეტობის საფუძველზე მივიღებთ საჭირო შეფასებას.

ვთქვათ, $r > 0$ და $\lambda \in (0, \infty)$. ყოველი $x \in \{M_B^r(f) > \lambda\}$ წერტილისათვის ვიპოვოთ $I_x \in B(x)$ სიმრავლე, ისეთი, რომ

$$\text{diam } I_x < r, \quad (2)$$

$$\frac{1}{|I_x|} \int_{I_x} |f| > \lambda. \quad (3)$$

(3) შეფასება შემდეგნაირად შეიძლება გადავწეროთ:

$$|I_x| < \frac{1}{\lambda} \int_{I_x} |f|. \quad (4)$$

სიმრავლეების $\Pi = \{I_x\}$ კლასი ფარავს $\{M_B^r(f) > \lambda\}$ სიმრავლეს. ამასთან, (2)-ის ძალით, Π კლასის სიმრავლეებს აქვთ ერთობლივ შემოსაზღვრული დიამეტრები. ეს საფუძველს გვაძლევს, ვიტალის თვისების გამოყენებით Π -დან გამოვყუთო წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სიმრავლეებისაგან შედგენილი არაუმეტეს თელადი Π' ქვეკლასი, რომლისთვისაც

$$\sum_{I \in \Pi'} |I| \geq c |\{M_B^r(f) > \lambda\}|_*. \quad (5)$$

$I \in \Pi'$ სიმრავლეების წყვილ-წყვილად თანაუკვეთიობისა და (4), (5) პირობების ძალით დავწეროთ,

$$|\{M_B^r(f) > \lambda\}|_* \leq \frac{1}{c} \sum_{I \in \Pi'} |I| < \frac{1}{c} \sum_{I \in \Pi'} \frac{1}{\lambda} \int_I |f| =$$

$$= \frac{1}{c\lambda} \int_{\bigcup_{I \in \Pi'} I} |f| \leq \frac{1}{c\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f|.$$

აქით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 14.2.1. თეორემა 14.2.2-ში, განსხვავებით თეორემა 12.3.1-საგან, აქაა გაკეთებული დასვენა $M_B(f)$ მაქსიმალური ფუნქციის ზომადობის შესახებ. თუმცა, თეორემა 14.2.1-ის დასამტკიცებლად სრულიად საკმარისია $\{M_B(f) > \lambda\}$ სიმრავლის გარე ზომისთვის მოცემული (1) შეფასება.

გიტყვით, რომ სიმრავლეების Π კლასი ვიტალის აზრით ფარავს $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეს, თუ ნებისმიერი $x \in E$ წერტილისათვის და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $I \in \Pi$ სიმრავლე შემდეგი თვისებებით: $x \in I$ და $\text{diam } I < \varepsilon$.

B ბაზისის ეუწოდოთ კომპაქტური, თუ მისი შემადგენელი ყოველი I სიმრავლე „თითქმის“ კომპაქტურია, ე.ი. მოიძებნება კომპაქტური $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $|I \triangle E| = 0$.

ცხადია, რომ კომპაქტური იქნება ნებისმიერი B ბაზისი, რომლის შემადგენელ სიმრავლეებს აქეთ ნული ზომის საზღვარი. მაგალითად, კომპაქტური არიან I_1 და I_2 ბაზისები.

ვიტალის 12.2.2 თეორემის მსგავსად მტკიცდება მისი შემდეგი მრავალგანზომილებიანი ანალოგი.

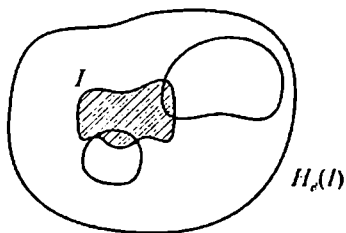
თეორემა 14.2.3. ვთქვათ, B არის ვიტალის თვისების მქონე კომპაქტური ბაზისი $\mathbb{R}^n$ სივრცეში. თუ $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე ვიტალის აზრით დაფარულია $\Pi \subset \Delta_B$ კლასით, მაშინ Π -დან შეიძლება გამოვყოთ, წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სიმრავლეებისაგან შედგენილი, არაუმეტეს თვლადი Π' ქვეკლასი, რომელიც თითქმის ფარავს E სიმრავლეს, ე.ი.

$$\left| E \setminus \bigcup_{I \in \Pi'} I \right|_* = 0.$$

შენიშვნა 14.2.2. შემდეგ პარაგრაფში ნაჩვენები იქნება, რომ კუბური მონაკვეთების I_1 და ბირთვების I_2 ბაზისებს აქეთ ვიტალის თვისება. ასე რომ, მათთვის სამართლიანია ამ პარაგრაფში მოცემული სამივე თეორემა.

§ 3. ვიტალის თვისების მქონე ბაზისების კონკრეტული მაგალითები

ვთქვათ, B რაიმე დიფერენცირების ბაზისია $\mathbb{R}^n$ სივრცეში. $I \in \Delta_B$ სიმრავლის B -მოარშეობა ეუწოდოთ შემდეგი თვისებების მქონე ყველა E



ნახ. 14.2.

სიმრავლის გაერთიანებას: $E \in \Delta_B$, $E \cap I \neq \emptyset$ და $|E| < 2|I|$. $I \in \Delta_B$ სიმრავლის B -მოარშობა აღენიშნოთ $H_B(I)$ ჩანაწერით (ნახ. 14.2).

ვიტყვი, რომ B ბაზისს აქვს შემოსაზღვრული მოარშობის თვისება, თუ მოიძებნება $C > 0$ მუდმივი, ისეთი, რომ ყოველი $I \in \Delta_B$ სიმრავლისათვის სრულდება შეფასება:

$$|H_B(I)|_* \leq C|I|.$$

თეორემა 14.3.1. თუ B ბაზისს აქვს შემოსაზღვრული მოარშობის თვისება, მაშინ B ბაზისს აქვს ვიტალის თვისება.

დამტკიცება. მსჯელობა მიმდინარეობს თეორემა 12.2.1-ის დამტკიცების სქემის მიხედვით.

ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე დაფარულია რაიმე $\Pi \subset \Delta_B$ კლასის სიმრავლეებით, რომელთა დიამეტრები ერთობლივ შემოსაზღვრულია. უკანასკნელი პირობის ძალით, Π კლასის სიმრავლეთა შორის შეგვიძლია ავირჩიოთ ზომის თვალსაზრისით თითქმის ყველაზე დიდი, ე.ი. $I_1 \in \Pi$, რომლისთვისაც

$$|I_1| > \frac{1}{2} \sup\{|I| : I \in \Pi\}.$$

დაეუშვათ, წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი $I_1, \dots, I_k \in \Pi$ სიმრავლეები უკვე არჩეულია. განვიხილოთ ყველა იმ $I \in \Pi$ სიმრავლის Π_k კლასი, რომელიც არ კვეთს არცერთს $I_1, \dots, I_k$ სიმრავლეებს შორის. თუ Π_k კლასი ცარიელია, მაშინ აგება დასრულებულად მივიჩნიოთ. წინააღმდეგ შემთხვევაში კი, I_{k+1} -ის როლში ავიღოთ თითქმის ყველაზე დიდი Π_k კლასის წევრებს შორის, ე.ი. $I_{k+1} \in \Pi_k$, რომლისთვისაც

$$|I_{k+1}| > \frac{1}{2} \sup\{|I| : I \in \Pi_k\}.$$

აღწერილი სქემის გამოყენებით, Π კლასიდან გამოვყოფთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სიმრავლეების სასრულ ან თვალად $\Pi' = \{I_k\}$ ქვეკლასს. დაეადგინოთ, რომ Π' აკმაყოფილებს საჭირო შეფასებას. განვიხილოთ ის შემთხვევა,

როცა Π' თვლადი კლასია. სასრული კლასის შემთხვევაში, დამტკიცება ანალოგიური და კიდევ უფრო მარტივია.

შესაძლებელია ორი ქვეშემთხვევა იმისდა მიხედვით $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = \infty$, თუ $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \infty$.

პირველ ქვეშემთხვევაში დებულება ცხადია.

მეორე ქვეშემთხვევაში გვექნება, რომ

$$|I_k| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

საიდანაც გამომდინარეობს შემდეგი წინადადება: ნებისმიერი $I \in \Pi$ სიმრავლე კვეთს ერთს მაინც I_k სიმრავლეებს შორის, ე.ი. ნებისმიერი $I \in \Pi$ -სთვის,

$$I \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset. \quad (1)$$

მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში, აგებიდან გამომდინარე, ყოველი k -სთვის შესრულდება შეფასება: $|I_k| > |I|/2$. რაც ეწინააღმდეგება $|I_k| \rightarrow 0$ პირობას.

Θ_1 იყოს ყველა იმ $I \in \Pi$ სიმრავლის კლასი, რომელიც კვეთს I_1 -ს, ხოლო $k \geq 2$ -სთვის Θ_k იყოს ყველა იმ $I \in \Pi$ სიმრავლის კლასი, რომელიც კვეთს I_k -ს და არ კვეთს არცერთს $I_1, \dots, I_{k-1}$ სიმრავლეებს შორის. აგების გათვალისწინებით, ადვილი დასაწახია, რომ ნებისმიერი k -სთვის,

$$I \in \Theta_k \Rightarrow (I \cap I_k \neq \emptyset, |I| < 2|I_k|) \Rightarrow I \subset H_B(I_k). \quad (2)$$

(1)-ის და (2)-ის ძალით ვწერთ,

$$E \subset \bigcup_{I \in \Pi} I = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{I \in \Theta_k} I \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} H_B(I_k). \quad (3)$$

(3)-დან კი, შემოსაზღვრული მოარშეების თვისების გათვალისწინებით, ვღებულობთ, რომ

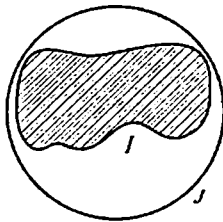
$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \geq \frac{1}{C} \sum_{k=1}^{\infty} |H_B(I_k)|_* \geq \frac{1}{C} \left| \bigcup_{k=1}^{\infty} H_B(I_k) \right|_* \geq \frac{1}{C} |E|_*,$$

სადაც C არის მუდმივი მოარშეების თვისებიდან.

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ზომად სიმრავლეთა Δ კლასს ეწოდება რეგულარული, თუ მოიძებნება $C \geq 1$ რიცხვი შემდეგი თვისებით: ყოველი $I \in \Delta$ სიმრავლისათვის მოიძებნება I -ს შემცველი ჩაკეტილი J ბირთვი, ისეთი, რომ $|J| \leq C|I|$ (ნახ. 14.3).

B ბაზისს ეწოდება რეგულარული, თუ Δ_B კლასი არის რეგულარული. ცხადია, კუბური მონაკვეთების I_1 და ბირთვების I_2 ბაზისებს აქვთ რეგულარობის თვისება. ამასთანავე, მარტივად მოწმდება, რომ $n \geq 2$ შემთხვევაში, n -განზომილებიანი მონაკვეთების I_3 ბაზისს (შედეგად, n -განზომილებიანი



ნახ. 14.3.

მართულებას პარალელუმიტების I_4 ბაზისსაც) არა აქვს რეგულარობის თვისება.

თეორემა 14.3.2. თუ B ბაზისი რეგულარულია, მაშინ B ბაზისს აქვს შემოსაზღვრული მოარშეების თვისება და შედეგად, აქვს ვიტალის თვისება.

დამტკიცება. ვთქვათ, $I \in \Delta_B$. ვისარგებლოთ B -ს რეგულარობის თვისებით და ვიპოვოთ $J_I \supset I$ ბირთვი, რომელისთვისაც $|J_I| \leq C|I|$, სადაც C მუდმივია B -ს რეგულარულობის თვისებიდან. ვაჩვენოთ $H_B(I) \subset (1 + 2\sqrt[n]{2C})J_I$ ჩართვა, საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$|H_B(I)|_* \leq (1 + 2\sqrt[n]{2C})^n |J_I| \leq (1 + 2\sqrt[n]{2C})^n C |I|.$$

განვიხილოთ ნებისმიერი $E \in \Delta_B$ სიმრავლე თვისებებით: $E \cap I \neq \emptyset$ და $|E| < 2|I|$. ვისარგებლოთ B -ს რეგულარულობის თვისებით და ვიპოვოთ $J_E \supset E$ ბირთვი, რომლისთვისაც $|J_E| \leq C|E|$. მაშინ გვექნება, რომ

$$|J_E| \leq C|E| < 2C|I|.$$

შედეგად,

$$\frac{|J_E|}{|J_I|} \leq \frac{2C|I|}{|I|} = 2C.$$

საიდანაც, $J_E \cap J_I \neq \emptyset$ პირობის გათვალისწინებით ვასკენით, რომ

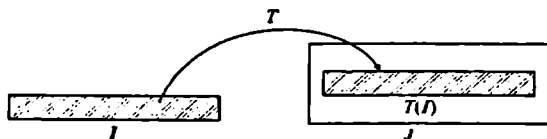
$$E \subset J_E \subset (1 + 2\sqrt[n]{2C})J_I.$$

აქედან, თავის მხრივ, ვღებულობთ $H_B(I) \subset (1 + 2\sqrt[n]{2C})J_I$ ჩართვას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

B ბაზისს ეწოდება ამოზნექილი, თუ B -ს შემადგენელი ყოველი სიმრავლე ამოზნექილია.

$\mathbb{R}^n$ სივრცის ქვესიმრავლეთა კლასში შემოვიღოთ დალაგების მიმართება შემდეგი წესით: I სიმრავლეს ეწოდოთ J სიმრავლეზე ნაკლები ან ტოლი (ჩანაწერი: $I \prec J$), თუ მოიძებნება $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ტერა, ისეთი, რომ $|T(I)| \setminus$

$|J| = 0$, ე.ი ძვრა, რომლის მოქმედების შედეგად $T(I)$ აღმოჩნდება სრულად ან თითქმის შემავალი J სიმრავლეში (ნახ. 14.4).



ნახ. 14.4.

B ბაზის ეწოდება მონოტონური, თუ B -ს შემადგენელი ნებისმიერი ორი I და J სიმრავლე ერთმანეთის სადარია, ე.ი. $I \prec J$ ან $J \prec I$.

ადელი დასაწახია, რომ: 1) კუბური მონაკვეთების I_1 და ბირთვების I_2 ბაზისებს აქვთ მონოტონურობის თვისება; 2) $n \geq 2$ შემთხვევაში, n -განზომილებიანი მონაკვეთების I_3 და n -განზომილებიანი მართკუთხა პარალელეპიედების I_4 ბაზისებს არა აქვთ მონოტონურობის თვისება.

თეორემა 14.3.3. თუ B ბაზისი ამოზნექილი და მონოტონურია, მაშინ B ბაზისს აქვს შემოსაზღვრული მთარშიების თვისება და შედეგად, აქვს ვიტალის თვისება.

დამტკიცება. ტექნიკური გადატირთულობის გამო, ჩვენ არ მოგვყავს თეორემის დამტკიცება სრული ზოგადობით. შემოვიფარგლოთ იმ შემთხვევით, როცა B ბაზისის შემადგენელი ამოზნექილი სიმრავლეები წარმოადგენენ n -განზომილებიან მონაკვეთებს.

ვთქვათ, $I \in \Delta_B$. განვიხილოთ ნებისმიერი $E \in \Delta_B$ მონაკვეთი თვისებებით: $E \cap I \neq \emptyset$ და $|E| < 2|I|$. დაეუშვათ, $I = I_1 \times \dots \times I_n$ და $E = E_1 \times \dots \times E_n$. მაშინ, B -ს მონოტონურობის საფუძველზე, გვექნება, რომ:

$$|I_1| \leq |E_1|, \quad |I_n| \leq |E_n|; \quad (4)$$

ან

$$|I_1| \geq |E_1|, \quad |I_n| \geq |E_n|. \quad (5)$$

(4)-ის შესრულების შემთხვევაში, $|E| < 2|I|$ შეფასებიდან გამომდინარე, სამართლიანი იქნება უტოლობები:

$$|E_1| < 2|I_1|, \quad |E_n| < 2|I_n|.$$

საიდანაც, $E \cap I \neq \emptyset$ პირობის გათვალისწინებით დაეასყენით, რომ $E \subset 5I$.

(5)-ის შესრულების შემთხვევაში კი, $E \cap I \neq \emptyset$ პირობის გათვალისწინებით, უშუალოდ მივიღებთ $E \subset 5I$ ჩართვას.

ამრიგად, $H_B(I) \subset 5I$. შედეგად, $|H_B(I)|_* \leq 5^n |I|$. ამით შემოსაზღვრული მთარშიების თვისება დადგენილია. $\square$

შენიშვნა 14.3.1. როგორც უკვე ვაჩვენეთ, რეგულარული ბაზისებისათვის სამართლიანია თეორემა განუსაზღვრელი ინტეგრალის თითქმის ყველგან დიფერენცირების შესახებ. დავაშტეკოთ, რომ ანალოგიური დასკვნა სამართლიანია ბაზისის წერტილოვნად რეგულარობის შემთხვევაშიც, ე.ი. როცა ცნობილია, რომ ყოველი $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილისათვის $B(x)$ კლასი არის რეგულარული.

ყოველი x -სთვის $C(x)$ იყოს მუდმივი $B(x)$ კლასის რეგულარობის თვისებიდან. აღვნიშნოთ

$$E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : C(x) \leq k\} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

ცხადია, რომ $\mathbb{R}^n$ წარმოდგება E_k სიმრავლეების გაერთიანების სახით. ყოველი k -სათვის B_k ბაზისი განესაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$B_k(x) = \begin{cases} B(x), & \text{თუ } x \in E_k; \\ I_1(x), & \text{თუ } x \notin E_k. \end{cases}$$

ცხადია, თითოეული B_k ბაზისი რეგულარულია. შედეგად, თითოეული მათგანისათვის სამართლიანია თეორემა ინტეგრალის თითქმის ყველგან დიფერენცირების შესახებ.

განვიხილოთ ნებისმიერი $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქცია. მაშინ, ზემოაღნიშნულის გამო, ყოველი k -სათვის E_k სიმრავლის თითქმის ყოველ x წერტილში შესრულდება ტოლობა:

$$\lim_{I \in B(x), I \rightarrow x} \frac{1}{|I|} \int_I f = f(x). \quad (6)$$

შედეგად, თუ გაითვალისწინებთ, რომ $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, დავასკენით (6) ტოლობის სამართლიანობას $\mathbb{R}^n$ სივრცის თითქმის ყოველ წერტილში.

იგივე ტიპის მსჯელობის გამოყენებით მტკიცდება შემდეგი კიდევ უფრო მოგადი დებულება: ვთქვათ, B ბაზისი ისეთია, რომ $\mathbb{R}^n$ სივრცის ყოველ წერტილში $B(x)$ ემთხვევა ერთ-ერთს $B_k(x)$ ($k \in \mathbb{N}$) ოჯახებს შორის, სადაც B_k ბაზისები ფლობენ ინტეგრალის თითქმის ყველგან დიფერენცირების თვისებას. მაშინ B ბაზისსაც აქვს მსგავსი თვისება.

შენიშვნა 14.3.2. რეგულარული და წერტილოვნად რეგულარული ბაზისებისათვის განუსაზღვრელი ინტეგრალის თითქმის ყველგან დიფერენცირების შესახებ თეორემა დამტკიცებული იყო ა. ლებეგის მიერ. 14.3.1 და 14.3.3 თეორემები კი ეკუთვნის ა. მორსს.

შენიშვნა 14.3.3. $\mathbb{R}^n$ -ზე განსაზღვრულ f ფუნქციას ეწოდება ლოკალურად ჯამებადი, თუ f ჯამებადია ნებისმიერ შემოსაზღვრულ და ზომად სიმრავლეზე. ყველა ლოკალურად ჯამებადი ფუნქციის კლასი აღინიშნება $L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ჩანაწერით.

თეორემა 14.2.1 საპარტილიანია ლოკალურად ჯამებადი ფუნქციებისთვისაც. დამტკიცება ხდება თეორემა 12.4.1-ის შემთხვევაში გამოყენებული სქემის მიხედვით.

შენიშვნა 14.3.4. $Q(x, h)$ -ით აღვნიშნოთ კუბური ინტერვალი, ცენტრით x წერტილში, რომლის წიბოს სიგრძე $2h$ -ის ტოლია, ე.ი.

$$Q(x, h) = (x_1 - h, x_1 + h) \times \cdots \times (x_n - h, x_n + h).$$

ვთქვათ, E რაიმე ზომადი სიმრავლეა $\mathbb{R}^n$ სივრცეში. x წერტილს ეწოდება E სიმრავლის სიმკვრივის წერტილი, თუ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|Q(x, h) \cap E|}{(2h)^n} = 1,$$

და ეწოდება E სიმრავლის გაიშვიათების წერტილი, თუ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|Q(x, h) \cap E|}{(2h)^n} = 0.$$

შევნიშნოთ, რომ x არის სიმკვრივის წერტილი E -სთვის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა x არის გაიშვიათების წერტილი E -ს დამატებისათვის.

თეორემა 12.4.2-ის მსგავსად მტკიცდება, რომ ნებისმიერი ზომადი $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისათვის თითქმის ყოველი $x \in E$ წერტილი არის E სიმრავლის სიმკვრივის წერტილი, ხოლო თითქმის ყოველი $x \notin E$ წერტილი არის E სიმრავლის გაიშვიათების წერტილი.

შენიშვნა 14.3.5. ვთქვათ, f არის $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია $A \subset E$ და $x \in A$. f ფუნქციას ეწოდება A სიმრავლის გასწვრივ უწყვეტი x წერტილში, თუ f -ის შეზღუდვა A -ზე არის უწყვეტი x -ში.

$E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეზე განსაზღვრულ f ფუნქციას ეწოდება აბროქსი-მაციულად უწყვეტი $x \in E$ წერტილში, თუ მოიძებნება ზომადი $A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე თვისებებით:

- $x \in A$ და x არის A -ს სიმკვრივის წერტილი;
- f არის $A \cap E$ სიმრავლის გასწვრივ უწყვეტი x -ში.

თეორემა 12.4.4-ის მსგავსად მტკიცდება, რომ ზომადი $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეზე განსაზღვრული ნებისმიერი ზომადი სასრული f ფუნქცია აბროქსი-მაციულად უწყვეტია თითქმის ყოველ $x \in E$ წერტილში.

შენიშვნა 14.3.6. ზემოთ მოცემული იყო რამდენიმე საკმარისი პირობა საიმისოდ, რომ B ბაზისით წარმოქმნილი დიფერენცირების პროცესი იყოს ინტეგრების შებრუნებული ოპერაცია (ე.ი. სრულდებოდეს თეორემა ინტეგრალის თითქმის ყველგან წარმოებადობის შესახებ). კერძოდ, მივეუთითეთ

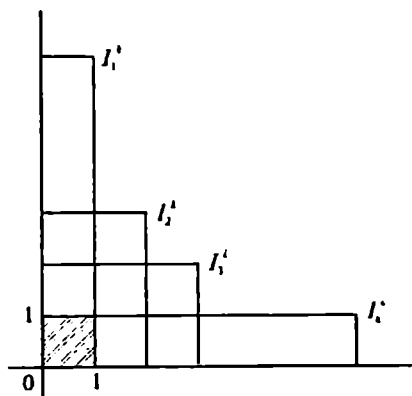
ოთხი თვისება: რეგულარობა, ამოზნეულობა და მონოტონურობა (ერთდროულად). შემოსაზღვრული მოარშეობის თვისება და ვიტალის თვისება. მათგან ყველაზე ზოგადია ვიტალის თვისება.

უკვე აღნიშნული გვაქვს, რომ n -განზომილებიანი მონაკვეთების I_3 ბაზისს არა აქვს რეგულარობისა და მონოტონურობის თვისებები. ვაჩვენოთ, რომ მას არა აქვს არც ვიტალის თვისება (ცხადია, ამით ნაჩვენები იქნება, რომ არც I_4 ბაზისს არა აქვს ვიტალის თვისება).

$k \in \mathbb{N}$ რიცხვისათვის Π_k -თი აღნიშნოთ შემდეგნაირად განსაზღვრული ორგანზომილებიანი $I_1^k, \dots, I_k^k$ მონაკვეთების კლასი:

$$I_m^k = [0, m] \times \left[0, \frac{k}{m}\right] \quad (m \in \overline{1, k}).$$

Π_k ოჯახს k -ური რანგის ბორის კიბეს უწოდებენ (ნახ. 14.5).



ნახ. 14.5.

აღვილი დასაბუთია, რომ Π_k კლასს აქვს შემდეგი თვისებები:

- თითოეული I_m^k მონაკვეთის ზომა k -ს ტოლია,
- $I_1^k \cap \dots \cap I_k^k$ თანაკვეთა $[0, 1] \times [0, 1]$ კუადრატის ტოლია,
- $|I_1^k \cup \dots \cup I_k^k| = |I_1^k| + |I_2^k \setminus I_1^k| + \dots + |I_k^k \setminus I_{k-1}^k| = k + \frac{k}{2} + \dots + \frac{k}{k} = k(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}) > k \ln(k+1)$.

ვთქვათ, Π' არის Π_k კლასიდან გამოყოფილი წყვილ-წყვილად თანაკვეთი წევრებისაგან შედგენილი ნებისმიერი ქვეკლასი. ზემოთ მოცემული თვისებებიდან გამომდინარე, Π' ქვეკლასი ან ცარიელია ან შედგება ერთი მართკუთხედისაგან. შედეგად, $\bigcup_{I \in \Pi_k} I$ გაერთიანებიდან $\bigcup_{I \in \Pi'} I$ გაერთიანებაზე გადასვლისას ზომა $\ln(k+1)$ -ზე მეტჯერ მცირდება. საიდანაც, ნატურალური k

რიცხვის ნებისმიერობის გათვალისწინებით, ვასკენით, რომ n -განზომილებიანი მონაკვეთების I_3 ბაზისს არა აქვს ვიტალის თვისება. შემდეგ პარაგრაფში ბორის კიბის კონსტრუქციის გამოყენებით დადგენილი იქნება I_3 ბაზისის კიდევ უფრო ნეგატიური თვისება, რაც გამოიხატება იმაში, რომ მისთვის არაა სამართლიანი ინტეგრალთა დიფერენცირების შესახებ ლებეგის თეორემის ანალოგი.

შენიშვნა 14.3.7. B იყოს ბაზისი, რომლისთვისაც $B(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) კლასი შედგება $I \cup (Q \cap (kI))$ სახის სიმრავლეებისაგან, სადაც I არის x წერტილის შემცველი ნებისმიერი კუბური ინტერვალი, ხოლო k არის ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი. არაა ძნელი შესამოწმებელი, რომ B ბაზისს არა აქვს ვიტალის თვისება, თუმცა, მიუხედავად ამისა, მისთვის სამართლიანია ინტეგრალთა დიფერენცირების შესახებ ლებეგის თეორემის ანალოგი. ამრიგად, ვიტალის თვისება არის საკმარისი, მაგრამ არა აუცილებელი პირობა საიმისოდ, რომ ბაზისისათვის სამართლიანი იყოს ინტეგრალთა დიფერენცირების შესახებ ლებეგის თეორემის ანალოგი.

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ, რომ n -განზომილებიანი მართკუთხა პარალელპიპედების ნებისმიერი ოჯახის გაერთიანება მომადი სიმრავლეა.

§ 4. ინტეგრებისა და დიფერენცირების ურთიერთშებრუნებადობის დარღვევა n -განზომილებიანი მონაკვეთების ბაზისის შემთხვევაში

n -განზომილებიანი მონაკვეთების I_3 ბაზისით წარმოქმნილ დიფერენცირების პროცესს აქვს საუციალო სახელწოდება - ძლიერად დიფერენცირება.

შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ ინტეგრების შემდგომ ჩატარებული ძლიერად დიფერენცირების პროცესი, საზოგადოდ, არ გვაბრუნებს საწყის ფუნქციასთან (ე.ი. I_3 ბაზისისათვის არაა სამართლიანი ინტეგრალთა დიფერენცირების შესახებ ლებეგის თეორემის ანალოგი).

თეორემა 14.4.1. არსებობს არაუარყოფითი $f \in L(\mathbb{R}^2)$ ფუნქცია, ისეთი, რომ

$$\lim_{I \in I_3(x), I \rightarrow x} \frac{1}{|I|} \int_I f = \infty$$

თითქმის ყოველ $x \in \mathbb{R}^2$ წერტილში.

შენიშვნა 14.4.1. თეორემა 14.4.1-ში მოცემული ტიპის ფუნქციების მაგალითები თავდაპირველად აგებული იყო ს. საქსის და აგრეთვე, პ. ბუმბანისა და ე. ფელერის მიერ.

ლემა 14.4.1. ვთქვათ, Q რაიმე კვადრატული მონაკვეთია. მაშინ ნებისმიერი $\lambda \in (0, 1)$ რიცხვისათვის სამართლიანია შეფასება:

$$|\{M_{I_3}(\chi_Q) > \lambda\}| \geq \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{1}{\lambda} |Q|.$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ვივლისხმით, რომ Q არის ერთეულოვანი კვადრეტი, ე.ი. $Q = [0, 1] \times [0, 1]$.

k იყოს ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც $\frac{1}{k+1} \leq \lambda < \frac{1}{k}$. გვექნება, რომ

$$\{M_{I_3}(\chi_Q) > \lambda\} \supset \{M_{I_3}(\chi_Q) \geq 1/k\}.$$

განვიხილოთ k -ური რანგის ბორის კიბე - Π_k . მისი შემადგენელი მართკუთხედების თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $I \in \Pi_k$ -სათვის,

$$\frac{1}{|I|} \int_I \chi_Q = \frac{|Q \cap I|}{|I|} = \frac{|Q|}{|I|} = \frac{1}{k}.$$

შედეგად,

$$\{M_{I_3}(\chi_Q) \geq 1/k\} \supset \bigcup_{I \in \Pi_k} I.$$

საიდანაც, ბორის კიბის შემადგენელი მართკუთხედების გაერთიანების ზომისათვის დადგენილი შეფასების გათვალისწინებით დავწერთ,

$$|\{M_{I_3}(\chi_Q) \geq 1/k\}| \geq \left| \bigcup_{I \in \Pi_k} I \right| \geq k \ln(k+1) = k \ln(k+1) |Q|.$$

ახლა, თუ გაითვალისწინებთ $k+1 \geq \frac{1}{\lambda}$ და $k \geq \frac{1}{2\lambda}$ შეფასებებს, გვექნება, რომ

$$|\{M_{I_3}(\chi_Q) > \lambda\}| \geq |\{M_{I_3}(\chi_Q) \geq 1/k\}| \geq k \ln(k+1) |Q| \geq \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{1}{\lambda} |Q|.$$

ლემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 14.4.2. ვთქვათ, Q რაიმე კვადრატული მონაკვეთია. ლემა 14.4.1-ში დადგენილი შეფასება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$|\{M_{I_3}(\chi_Q) > \lambda\}| \geq \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} |Q| \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_Q \right).$$

აქედან კი, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \ln \frac{1}{\lambda} = \infty$ ტოლობის გათვალისწინებით, დავასყენით, რომ M_{I_3} ძლიერ მაქსიმალურ ოპერატორს არა აქვს სუსტი $(1, 1)$ ტიპი. ეს ფაქტი უმთავრეს როლს ასრულებს თეორემა 14.4.1-ის დამტკიცებისას.

შენიშვნა 14.4.3. ვთქვათ, Q რაიმე კვადრატული ინტერვალია და $0 < \lambda < h$. მაშინ $\{M_{I_3}(h\chi_Q) > \lambda\} = \{M_{I_3}(\chi_Q) > \lambda/h\}$ ტოლობის გათვალისწინებით ლემა 14.4.1-დან მიიღება შეფასება:

$$|\{M_{I_3}(h\chi_Q) > \lambda\}| \geq \frac{h}{2\lambda} \ln \frac{h}{\lambda} |Q|.$$

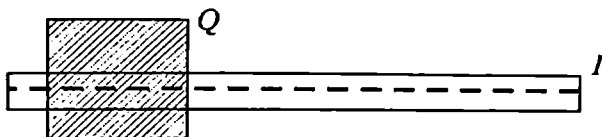
Q კვადრატის გვერდის სიგრძე აღნიშნოთ $\delta(Q)$ ჩანაწერით.

ლემა 14.4.2. ვთქვათ, Q კვადრატული მონაკვეთია და $\lambda \in (0, 1)$. თუ ორგანზომილებიანი I მონაკვეთი ისეთია, რომ

$$\frac{|I \cap Q|}{|I|} > \lambda,$$

მაშინ I -ს გვერდების სიგრძეები არ აღემატებიან $\delta(Q)/\lambda$ რიცხვს.

დამტკიცება. დაეშვათ საწინააღმდეგო, ე.ი. I -ს რომელიმე გვერდის სიგრძე მეტია $\delta(Q)/\lambda$ რიცხვზე. დაეშვათ, ასეთია პორიზონტალური გვერდები. თუ I მართუთხელს წარმოადგენთ პორიზონტალური კვეთების გაერთიანებად, მაშინ თითოეულ კვეთაზე Q კვადრატის მიერ დატოვებული კვალის ხედიერთი წილი ნაკლები იქნება λ რიცხვზე (ნახ. 14.6).



ნახ. 14.6.

რაც, ადვილი დასანახია, რომ გამოიწვევს $|I \cap Q| \leq \lambda |I|$ შეფასებას. ეს კი ეწინააღმდეგება ლემის პირობას.

ლემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 14.4.4. ვთქვათ, Q რაიმე ჩაკეტილი კვადრატული მონაკვეთია და $0 < \lambda < h$. მაშინ ლემა 14.4.2-დან ადვილად მიიღება შემდეგი ჩართვა:

$$\{M_{I_3}(h\chi_Q) > \lambda\} \subset (2h/\lambda + 1)Q.$$

მართლაც, დაეშვათ $x \in \{M_{I_3}(h\chi_Q) > \lambda\}$. მაშინ მოიძებნება ორგანზომილებიანი $I \ni x$ მონაკვეთი, რომლისთვისაც $|Q \cap I|/|I| > \lambda/h$. საიდანაც, $I \cap Q \neq \emptyset$ პირობისა და ლემა 14.4.2-ის გათვალისწინებით, ელემენტობით, რომ $x \in I \subset (2h/\lambda + 1)Q$.

შემდეგი ლემა ეკუთვნის ა. კალდერონს და ის ეფექტურად გამოიყენება სხვადასხვა კონტრიმაგალითების აგებისას განსაკუთრებულობათა გამცერივების ეტაპზე.

ლემა 14.4.3. ვთქვათ, $E_k \subset \mathbb{R}^n$ ($k \in \mathbb{N}$) ზომადი სიმრავლეებია, რომლებიც შედიან რაიმე ფიქსირებულ ბირთვში და აკმაყოფილებენ $\sum_{k=1}^{\infty} |E_k| = \infty$ პირობას. მაშინ შეიძლება $x_k \in \mathbb{R}^n$ ($k \in \mathbb{N}$) წერტილები შევარჩიოთ ისეთნაირად, რომ სიმრავლეთა $(E_k + x_k)$ მიმდევრობის ზედა ზღვარი იყოს სრული ზომის სიმრავლე $\mathbb{R}^n$ სივრცეში.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ ლემის სამართლიანობა მარტივად მიიღება შეძლევი დებულებიდან: ვთქვათ, $s \in \mathbb{N}$ და $E_k \subset [-s, s]^n$ ($k \in \mathbb{N}$) არიან ზომადი სიმრავლეები, რომლებიც აკმაყოფილებენ $\sum_{k=1}^{\infty} |E_k| = \infty$ პირობას. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon \in (0, 1)$ რიცხვისათვის მოიძებნებიან $p \in \mathbb{N}$ რიცხვი და $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}^n$ წერტილები, ისეთები, რომ

$$\left| [-s, s]^n \cap \bigcup_{k=1}^p (E_k + x_k) \right| > (2s)^n - \varepsilon. \quad (1)$$

დავამტკიცოთ ეს დებულება.

$E \subset [-s, s]^n$ სიმრავლისათვის აღვნიშნოთ:

$$E(x) = (E + x) \cap [-s, s]^n \quad (x \in \mathbb{R}^n), \quad E^* = [-s, s]^n \setminus E.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ნებისმიერი $p \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}^n$ და $t \in \mathbb{R}^n$ პარამეტრებისათვის სრულდება ტოლობები:

$$\chi_{E_1(x_1)^*} \cdots \chi_{E_p(x_p)^*}(t) = \chi_{E_1(x_1)^*}(t) \cdots \chi_{E_p(x_p)^*}(t),$$

$$\chi_{E_j(x_j)^*}(t) = \chi_{[-s, s]^n}(t) (1 - \chi_{E_j}(t - x_j)) \quad (j \in \overline{1, p}).$$

უკანასკნელი ტოლობისა და 10.6.6 თეორემის საფუძველზე, ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$\chi_{E_1(x_1)^*}(t) \cdots \chi_{E_p(x_p)^*}(t),$$

როგორც $x_1, \dots, x_p, t$ ცვლადების ფუნქცია, არის ზომადი. შედეგად, ფუნქციის თეორემის გამოყენებით დავწერთ,

$$\begin{aligned} & \int_{[-2s, 2s]^n \times \dots \times [-2s, 2s]^n} |E_1(x_1)^* \cap \dots \cap E_p(x_p)^*| d(x_1, \dots, x_p) = \\ & \int_{[-2s, 2s]^n \times \dots \times [-2s, 2s]^n} \left[\int_{[-s, s]^n} \chi_{E_1(x_1)^*}(t) \cdots \chi_{E_p(x_p)^*}(t) dt \right] d(x_1, \dots, x_p) = \\ & \int_{[-s, s]^n} \left[\int_{[-2s, 2s]^n \times \dots \times [-2s, 2s]^n} \chi_{E_1(x_1)^*}(t) \cdots \chi_{E_p(x_p)^*}(t) d(x_1, \dots, x_p) \right] dt = \\ & \int_{[-s, s]^n} \left[\prod_{j=1}^p \int_{[-2s, 2s]^n} \chi_{E_j(x_j)^*}(t) dx_j \right] dt. \end{aligned}$$

ფიქსირებული $j \in \overline{1, p}$ და $t \in [0, 1]^n$ პარამეტრებისათვის გამოვიყენოთ $\int_{[-2s, 2s]^n} \chi_{E_j(x)^*}(t) dx$ ინტეგრალი. გვექნება, რომ

$$\begin{aligned} \{x \in [-2s, 2s]^n : \chi_{E_j(x)^*}(t) = 1\} &= \{x \in [-2s, 2s]^n : E_j(x)^* \ni t\} \\ &= [-2s, 2s]^n \setminus \{x \in [-2s, 2s]^n : E_j(x) \ni t\} = [-2s, 2s]^n \setminus (t - E_j). \end{aligned}$$

საიდანაც, $t - E_j \in [-2s, 2s]^n$ ჩართვის გათვალისწინებით, მივიღებთ ტოლობას:

$$\int_{[-2s, 2s]^n} \chi_{E_j(x)}(t) dx = (4s)^n - |E_j|.$$

ამრიგად,

$$\int_{[-2s, 2s]^n \times \dots \times [-2s, 2s]^n} |E_1(x_1)^* \cap \dots \cap E_p(x_p)^*| d(x_1, \dots, x_p) = \prod_{j=1}^p [(4s)^n - |E_j|].$$

ამ ტოლობიდან დავაკენით ისეთი $x_1, \dots, x_p \in [-2s, 2s]^n$ წერტილების არსებობას, რომელთათვისაც

$$|E_1(x_1)^* \cap \dots \cap E_p(x_p)^*| \leq \frac{1}{[-2s, 2s]^n \times \dots \times [-2s, 2s]^n} \prod_{j=1}^p [(4s)^n - |E_j|] = \frac{1}{(4s)^{pn}} \prod_{j=1}^p [(4s)^n - |E_j|] = \prod_{j=1}^p \left[1 - \frac{|E_j|}{(4s)^n} \right].$$

როგორც ვიცი: $\sum_{j=1}^{\infty} |E_j| / (4s)^n = \infty$, ამიტომ საკმარისად დიდი p -სათვის უკანასკნელი შეფასებიდან მივიღებთ, რომ

$$|E_1(x_1)^* \cap \dots \cap E_p(x_p)^*| < \varepsilon.$$

საიდანაც,

$$[-s, s]^n \cap \bigcup_{k=1}^p (E_k + x_k) = [-s, s]^n \setminus [E_1(x_1)^* \cap \dots \cap E_p(x_p)^*]$$

ტოლობის გათვალისწინებით მიიღება (1) შეფასება. ამით ლემა დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 14.4. არსებობენ დადებითი რიცხვთა (h_k) , (s_k) და (t_k) მიმდევრობები შემდეგი თვისებებით:

- $\lim_{k \rightarrow \infty} h_k = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \infty$, $h_k > s_k \geq 1$ ($k \in \mathbb{N}$),
- $\sum_{k=1}^{\infty} h_k t_k < \infty$,
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{s_k} \ln \frac{h_k}{s_k} t_k = \infty$,
- $\lim_{k \rightarrow \infty} h_k \sqrt{t_k} = 0$, $(2h_k + 1) \sqrt{t_k} < 1$ ($k \in \mathbb{N}$).

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური j რიცხისათვის არსებობენ დადებითი რიცხვითა სასრული მიმდევრობები - $(h_k)_{k=1}^N$ და $(t_k)_{k=1}^N$. რომელთაც აქვთ შემდეგი თვისებები:

- $h_k > j \quad (1 \leq k \leq N)$,
- $\sum_{k=1}^N h_k t_k \leq \frac{1}{2j}$,
- $\sum_{k=1}^N \frac{h_k}{j} \ln \frac{h_k}{j} t_k \geq 2j$,
- $h_k \sqrt{t_k} < \frac{1}{3j} \quad (1 \leq k \leq N)$.

საიდანაც ადვილად გამოდინარეობს დასამტკიცებელი წინადადება.

განვიხილოთ α და β დადებითი რიცხვები, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$\alpha\beta = \frac{1}{2j}, \quad \frac{\alpha}{j} \ln \frac{\alpha}{j} \beta = 2j.$$

შემდეგ კი, ნატურალური N რიცხი შევარჩიოთ ისე, რომ სრულდებოდეს შეფასება:

$$\alpha \sqrt{\frac{\beta}{N}} < \frac{1}{3j}.$$

$(h_k)_{k=1}^N$ და $(t_k)_{k=1}^N$ მიმდევრობები განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$h_k = \alpha, \quad t_k = \frac{\beta}{N} \quad (1 \leq k \leq N).$$

ადვილი დასაწახნია, რომ ასეთი $(h_k)_{k=1}^N$ და $(t_k)_{k=1}^N$ მიმდევრობები აკმაყოფილებენ საჭირო პირობებს, ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 14.4.1-ის დამტკიცება. განვიხილოთ (h_k) , (s_k) და (t_k) მიმდევრობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ ლემა 14.4.4-ის პირობებს. აღვნიშნოთ

$$Q_k = [-\sqrt{t_k}/2, \sqrt{t_k}/2]^2 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

მაშინ 14.4.1 და 14.4.2 ლემების გათვალისწინებით (იხ. აგრეთვე 14.4.3 და 14.4.4 შენიშვნები) $h_k \chi_{Q_k}$ ფუნქციებს ექნებათ შემდეგი თვისებები:

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k |Q_k| < \infty, \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\{M_{13}(h_k \chi_{Q_k}) > s_k\}| = \infty, \quad (3)$$

$$\{M_{13}(h_k \chi_{Q_k}) > s_k\} \subset (-1, 1)^2 \quad (k \in \mathbb{N}), \quad (4)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_k \delta(Q_k) = 0. \quad (5)$$

(3) და (4) პირობებისა და ლემა 14.4.3-ის საფუძველზე $x_k \in \mathbb{R}^2$ ($k \in \mathbb{N}$) წერტილები შეიძლება ისე შევარჩიოთ, რომ

$$\{M_{I_3}(h_k \chi_{Q_k}) > s_k\} + x_k$$

სიმრავლეთა მიმდევრობის ზედა ზღვარი იყოს სრული ზომის სიმრავლე $\mathbb{R}^2$ სივრცეში. შევნიშნოთ, რომ

$$M_{I_3}(h_k \chi_{Q_k + x_k})(y + x_k) = M_{I_3}(h_k \chi_{Q_k})(y) \quad (y \in \mathbb{R}^2).$$

საიდანაც ვლბულობთ,

$$\{M_{I_3}(h_k \chi_{Q_k}) > s_k\} + x_k = \{M_{I_3}(h_k \chi_{Q_k + x_k}) > s_k\}.$$

შედეგად,

$$\{M_{I_3}(h_k \chi_{Q_k + x_k}) > s_k\}$$

სიმრავლეთა მიმდევრობის ზედა ზღვარი იქნება სრული ზომის სიმრავლე $\mathbb{R}^2$ სივრცეში.

განვიხილოთ შემდეგნაირად განსაზღვრული f ფუნქცია:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \chi_{Q_k + x_k}.$$

ცხადია, f არაუარყოფითია. (2)-ის ძალით გვეჩვენება, რომ

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} h_k \chi_{Q_k + x_k} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} h_k |Q_k + x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} h_k |Q_k| < \infty. \end{aligned}$$

მაშასადამე, $f \in L(\mathbb{R}^2)$.

განვიხილოთ ნებისმიერი x წერტილი, რომელიც ეკუთვნის

$$\{M_{I_3}(h_k \chi_{Q_k + x_k}) > s_k\}$$

სიმრავლეთა მიმდევრობის ზედა ზღვარს. მაშინ მოიძებნება ნატურალურ რიცხვთა მყაცრად ზრდადი $k(j)$ მიმდევრობა, ისეთი, რომ ყოველი j -სათვის,

$$x \in \{M_{I_3}(h_{k(j)} \chi_{Q_{k(j)} + x_{k(j)}}) > s_{k(j)}\}$$

შედეგად, მოიძებნება x -ის შემცველი ორგანზომილებიანი I_j მონაკვეთების მიმდევრობა, ისეთი, რომ ყოველი j -სათვის,

$$\frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} f \geq \frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} h_{k(j)} \chi_{Q_{k(j)} + x_{k(j)}} > s_{k(j)}.$$

ვაჩვენოთ, რომ $\text{diam } I_j \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$). შედეგად, $s_k \rightarrow \infty$ პირობის გათვალისწინებით თეორემა დამტკიცებული იქნება. გვაქვს, რომ

$$\frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} h_{k(j)} \chi_{Q_{k(j)} + x_{k(j)}} = \frac{h_{k(j)} |(Q_{k(j)} + x_{k(j)}) \cap I_j|}{|I_j|} > s_{k(j)}.$$

აქედან გამომდინარე, ლემა 14.4.2-ის ძალით ვღებულობთ, რომ I_j -ს გვერდების სიგრძეები არ აღემატებიან

$$\frac{\delta(Q_{k(j)} + x_{k(j)}) h_{k(j)}}{s_{k(j)}} = \frac{\delta(Q_{k(j)}) h_{k(j)}}{s_{k(j)}}$$

რიცხვს. ამ რიცხვების მიმდევრობა კი, (5)-ის საფუძველზე მიისწრაფვის ნულისაკენ. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ თეორემა 14.4.1-ის ანალოგი ნებისმიერი $n \geq 3$ -სთვის, ე.ი. ააგეთ არაუარყოფითი $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქცია, რომელიც $\mathbb{R}^n$ სივრცის თითქმის ყოველ x წერტილში აკმაყოფილებს თეორემა 14.4.1-ში მოცემულ ინტეგრალური საშუალოების განმსაზღვრავ პირობას.
2. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი $n \geq 2$ -სთვის არსებობს არაუარყოფითი $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქცია, რომელიც $\mathbb{R}^n$ სივრცის ყოველ x წერტილში აკმაყოფილებს თეორემა 14.4.1-ში მოცემულ პირობას.

§ 5. ინტეგრალთა დიფერენცირება ზოგადი ბაზისების მიხედვით. ზოგიერთი ცნობილი შედეგი

ამ პარაგრაფში დაუმტკიცებლადაა მოცემული რამდენიმე მნიშვნელოვანი შედეგი ინტეგრალთა დიფერენცირების შესახებ.

ვთქვათ, B რაიმე დიფერენცირების ბაზისია $\mathbb{R}^n$ -ში და $f \in L(\mathbb{R}^n)$. ამბობენ, რომ $\int f$ დიფერენცირებადია B ბაზისის მიხედვით (ან კიდევ, B ადიფერენცირებადია $\int f$ -ს), თუ თითქმის ყოველი $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილისათვის,

$$\lim_{I \in B(x), I \rightarrow x} \frac{1}{|I|} \int_I f = f(x).$$

ამბობენ, რომ B ბაზისი ადიფერენცირებადია $\Omega \subset L(\mathbb{R}^n)$ კლასს. თუ ყოველი $f \in \Omega$ ფუნქციისათვის B ადიფერენცირებადია $\int f$ -ს.

B ბაზისს ეწოდება პომოთეტიკის მიმართ ინვარიანტული, თუ ყოველი $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილისათვის, ყოველი $R \in B(x)$ სიმრავლისათვის და ყოველი $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ პომოთეტიკისათვის გვაქვს, რომ $H(R) \in B(H(x))$.

ცხადია, რომ I_1, I_2, I_3 და I_4 ბაზისებს აქვთ პომოთეტიკის მიმართ ინვარიანტულობის თვისება.

თეორემა 14.2.1-ის თანახმად, ვიტალის თვისების მქონე ბაზისები ადიფერენცირებენ $L(\mathbb{R}^n)$ კლასს. მეორე მხრივ, როგორც წინა პარაგრაფში გავარკვეით - ეს ღებულება ნებისმიერი (კერძოდ, I_3) ბაზისისათვის არაა სამართილიანა. ბუნებრივად ისმის იმ ბაზისების დახასიათების ამოცანა, რომლებიც ადიფერენცირებენ $L(\mathbb{R}^n)$ კლასს. ამ საკითხის გადაწყვეტას პომოთეტიის მიმართ ინვარიანტული ბაზისებისათვის იძლევა შემდეგი თეორემა.

თეორემა 14.5.1. ვთქვათ, B პომოთეტიის მიმართ ინვარიანტული ბაზისია $\mathbb{R}^n$ სივრცეში. მაშინ შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- B ადიფერენცირებს $L(\mathbb{R}^n)$ კლასს;
- M_B მაქსიმალურ ოპერატორს აქვს სუსტი $(1, 1)$ ტიპი.

შენიშვნა 14.5.1. 12.1.2 და 14.2.1 თეორემების შემთხვევებში გამოყენებული სქემის მეშვეობით მტკიცდება, რომ მაქსიმალური ოპერატორისათვის სუსტი $(1, 1)$ ტიპის უტოლობის სამართილიანობა, არა მხოლოდ პომოთეტიის მიმართ ინვარიანტული, არამედ ნებისმიერი B ბაზისისათვის იწვევს $L(\mathbb{R}^n)$ კლასის დიფერენცირებას.

შენიშვნა 14.5.2. თეორემა 14.5.1-ის ძალით, მაქსიმალური ოპერატორისათვის სუსტი ტიპის უტოლობის დარღვევა იწვევს B ბაზისის მიმართ არადიფერენცირებადი ინტეგრალის მქონე ფუნქციის არსებობას. წინა პარაგრაფში ჩვენ უკვე ვნახეთ ამ პრინციპის გამოვლინება მონაკვეთების I_3 ბაზისის შემთხვევაში.

საზოგადოდ, ნებისმიერი B ბაზისისათვის ისმის საკითხი იმ ფუნქციათა კლასის დახასიათების შესახებ, რომელთა ინტეგრალები დიფერენცირებადია B -ს მიმართ.

მაქსიმალური ოპერატორის არსებით როლს ინტეგრალთა დიფერენცირების შესწავლისას კიდევ ერთხელ უსვამს ხაზს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 14.5.2. ვთქვათ, B პომოთეტიის მიმართ ინვარიანტული ბაზისია $\mathbb{R}^n$ სივრცეში, ხოლო $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ - მკაცრად ზრდადი ფუნქცია, ისეთი, რომ $\varphi(0) = 0$ და $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)/t > 0$. მაშინ შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- B ადიფერენცირებს $\varphi(L)(\mathbb{R}^n)$ კლასს;
- M_B მაქსიმალური ოპერატორი აკმაყოფილებს შეფასებას:

$$|\{M_B(f) > \lambda\}| \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) \quad (f \in \varphi(L)(\mathbb{R}^n), \lambda > 0),$$

სადაც c მუდმივი დამოუკიდებელია f -საგან და λ -საგან.

ბაზისების მეორე მნიშვნელოვან კლასს განსაზღვრავს ძერის (ანუ პარალელური გადატანის) მიმართ ინვარიანტულობის თვისება. სახელდობრ, B ბაზისს ეწოდება ძერის მიმართ ინვარიანტული, თუ ყოველი $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილისათვის, ყოველი $R \in B(x)$ სიმრავლისათვის და ყოველი $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ძერისათვის გვაქვს, რომ $T(R) \in B(T(x))$.

ყოველი ძერა წარმოდგება ორი პოპოტეტიის კომპოზიციის სახით, საიდანაც გამოდინარეობს, რომ პოპოტეტიის მიმართ ინვარიანტული ბაზისი არის ძერის მიმართ ინვარიანტულიც.

ძერის მიმართ ინვარიანტული ბაზისებისათვის სამართლიანია 14.5.1 და 14.5.2 თეორემების ანალოგები იმ განსხვავებით, რომ მეორე პირობაში სუსტი ტიპის შეფასება სრულდება არა „გლობალური“ M_B მაქსიმალური ოპერატორისათვის, არამედ საყმარისად მცირე r რიცხვის შესაბამისი M_B^r წაკვეთილ-მაქსიმალური ოპერატორისათვის.

$\varphi(t) = t(1 + \ln^+ t)^a$ ($0 \leq t < \infty$) სახის ფუნქციისათვის $\varphi(L)(\mathbb{R}^n)$ ინტეგრალური კლასი აღვნიშნოთ $L(1 + \ln^+ L)^a(\mathbb{R}^n)$ ჩანაწერით.

ცნობილია საუკეთესო ინტეგრალური კლასი, რომელშიც გარანტირებულია ინტეგრალის ძლიერად დიფერენცირება. სახელდობრ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 14.5.3. (ა) n -განზომილებიანი მონაკვეთების I_3 ბაზისი ადიფერენცირებს $L(1 + \ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ კლასს;

(ბ) $L(1 + \ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ -ზე ფართო ნებისმიერ $\varphi(L)(\mathbb{R}^n)$ ინტეგრალურ კლასში მოიძებნება არაუარყოფითი f ფუნქცია, რომელიც ყოველ $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილში აკმაყოფილებს პირობას:

$$\lim_{I \in I_3(x), I \rightarrow x} \frac{1}{|I|} \int_I f = \infty.$$

თეორემა 14.5.3-ის პირველი ნაწილი დამტკიცებული იყო ბ. იესენის, ი. მარცინიევიჩისა და ა. ზიგმუნდის მიერ, ხოლო მეორე ნაწილი კი ეკუთვნის ს. საქსს.

B ბაზისს ეწოდება სიმკვრივის ბაზისი, თუ ნებისმიერი ზომადი $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისათვის თითქმის ყოველი $x \in E$ წერტილი არის B -სიმკვრივის წერტილი, ე.ი.

$$\lim_{I \in B(x), I \rightarrow x} \frac{|E \cap I|}{|I|} = 1,$$

და თითქმის ყოველი $x \notin E$ წერტილი არის B -გაიმჯიათების წერტილი, ე.ი.

$$\lim_{I \in B(x), I \rightarrow x} \frac{|E \cap I|}{|I|} = 0.$$

სიმკვრივის თვისება ტოლფასია იმისა, რომ B ბაზისი ადიფერენცირებს სასრული ზომის სიმრავლეთა მასსაიათებელი ფუნქციების კლასს.

ინტეგრალთა ძლიერად დიფერენცირება, მართალია, არ არის გარანტირებული $L(\mathbb{R}^n)$ -ში, მაგრამ თეორემა 14.5.3-ის ძალით, მას ადვილი აქვს საკმაოდ ფართო - $L(1 + \ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ კლასში. აქედან გამომდინარეობს ძლიერად დიფერენცირებადობის შესრულება $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L(\mathbb{R}^n)$ ($p > 1$) კლასებში, ასევე ის ფაქტი, რომ I_3 არის სიმკვრივის ბაზისი.

აქვე აღვნიშნოთ, რომ n -განზომილებიანი მართკუთხედების I_4 ბაზისს აქვს n -განზომილებიანი მონაკვეთების I_3 ბაზისზე ბევრად ცუდი დიფერენციალური თვისებები. კერძოდ, როგორც ა. ზიგმუნდმა აჩვენა - I_4 -ს არა აქვს სიმკვრივის თვისებაც კი. ამ შედეგის დამტკიცება იყენებს ძალზე გონებაშახეილურ გეომეტრიულ მსჯელობებს და ეფუძნება კომბინატორული ხასიათის კონსტრუქციას, რომელიც ცნობილია პერონის ხის სახელწოდებით.

ინტეგრალთა დიფერენცირების თეორია და მისი გამოყენებები ჰარმონიული ანალიზის სხვადასხვა საკითხებში საკმაოდ სრულადაა გადმოცემული მ. გუმზანის [6,7] და ე. სტიენის [16] მონოგრაფიებში.

§ 6. ლებეგ-სტილტიესის ზომების დიფერენცირება

ვთქვათ, μ ლებეგ-სტილტიესის ზომაა $\mathbb{R}^n$ -ში, ხოლო B რაიმე დიფერენცირების ბაზისია $\mathbb{R}^n$ -ში, ამასთან, ცნობილია, რომ B -ს შემადგენელი ყოველი სიმრავლე μ -ზომადია (კერძოდ, ეს შესრულებულია, თუ B -ს შემადგენელი სიმრავლეები მიეკუთვნებიან ბორელის კლასს). ვიტყვი, რომ μ ზომა წარმოებადია (ან კიდევ, დიფერენცირებადია) x წერტილში B ბაზისის მიხედვით, თუ არსებობს სასრული ზღვარი:

$$\lim_{I \in B(x), I \rightarrow x} \frac{\mu(I)}{|I|}.$$

ამ ზღვრის მნიშვნელობას ეწოდება μ ზომის წარმოებელი x წერტილში B ბაზისის მიხედვით და აღინიშნება $D_B(\mu)(x)$ ჩანაწერით.

ზრდადი და შემოსამღვრული ვარიაციის ფუნქციების შესახებ მე-12 და მე-13 თავებში განვითარებული თეორია ვრცელდება მრავალგანზომილებიან ლებეგ-სტილტიესის ზომებზე და უფრო მეტიც, მონაკვეთის ადიკურ ფუნქციებზე (იხ. მაგ., [31, თავი IV]). ამ მიმართულებით ჩვენ შემოვიფარგლებით ქვემოთ მოცემული თეორემით, რომელიც ეკუთვნის ლებეგს.

თეორემა 14.6.1 ვთქვათ, μ ლებეგ-სტილტიესის ზომაა $\mathbb{R}^n$ -ში, ხოლო B არის ვიტალის თვისების მქონე კომპაქტური ბაზისი $\mathbb{R}^n$ -ში, რომლის შემადგენელი ყოველი სიმრავლე არის μ -ზომადი. მაშინ μ ზომა თითქმის ყველგან (ლებეგის ზომის მიხედვით) წარმოებადია B ბაზისის მიხედვით.

შენიშვნა 14.6.1. ცხადია, I_1 და I_2 ბაზისები ლებეგ-სტილტესის ნებისმიერი μ მომისათვის აკმაყოფილებენ თეორემა 14.6.1-ის პირობებს.

μ ზომის ზედა და ქვედა წარმოებულები x წერტილში B ბაზისის მიხედვით შესაბამისად აღინიშნებოდნენ $\overline{D}_B(\mu)(x)$ და $\underline{D}_B(\mu)(x)$ ჩანაწერებით და განისაზღვრებიან შემდეგნაირად:

$$\overline{D}_B(\mu)(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\sup_{I \in B(x), \text{diam } I < \delta} \frac{\mu(I)}{|I|} \right],$$

$$\underline{D}_B(\mu)(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\inf_{I \in B(x), \text{diam } I < \delta} \frac{\mu(I)}{|I|} \right].$$

ცხადია, $\underline{D}_B(\mu)(x) \leq \overline{D}_B(\mu)(x)$ და $\underline{D}_B(\mu)(x) \geq 0$. μ ზომა წარმოებადია x წერტილში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\underline{D}_B(\mu)(x)$ და $\overline{D}_B(\mu)(x)$ არიან ერთმანეთის ტოლი სასრული რიცხვები. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ ზედა და ქვედა წარმოებულები წარმოადგენენ $\mu(I)/|I|$ ფარდობის მღერებს გარკვეული მიმდევრობების გასწვრივ, ე.ი. მოიტყვნებიან x წერტილისაკენ მოჭიმვადი $I_k \in B(x)$ და $I_k^* \in B(x)$ მიმდევრობები, რომელთათვისაც

$$\overline{D}(\mu)(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu(I_k)}{|I_k|} \quad \text{და} \quad \underline{D}(\mu)(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu(I_k^*)}{|I_k^*|}.$$

ქვემოთ მოცემულ ლემებში ვიგულისხმებთ, რომ μ ზომა და B ბაზისი აკმაყოფილებენ 14.6.1 თეორემის პირობებს.

ლემა 14.6.1. ვთქვათ, $0 \leq C < \infty$ და $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის ყოველი წერტილისათვის სრულდება $\underline{D}_B(\mu)(x) \leq C$ შეფასება. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სთვის არსებობს μ -ზომადი $Q \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე შემდეგი თვისებებით:

$$|E \setminus Q|_* = 0, \quad \mu(Q) \leq (C + \varepsilon)(|E|_* + \varepsilon).$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. E სიმრავლე დაე-წარმოთ ლია G სიმრავლით, რომელიც აკმაყოფილებს შეფასებას:

$$|G| \leq |E|_* + \varepsilon. \quad (1)$$

Π იყოს ყველა იმ $I \in \Delta_B$ სიმრავლის კლასი, რომელიც შედის G სიმრავლეში და აკმაყოფილებს პირობას:

$$\mu(I) < (C + \varepsilon)|I|. \quad (2)$$

Π კლასი ვიტალის აზრით დაფარავს E სიმრავლეს და ამიტომ, თეორემა 14.2.3-ის ძალით, მისგან გამოეყოფთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სიმრავლე-ებისაგან შედგენილ და არაუმეტეს თვლად Π' ქვეკლასს, რომელიც თითქმის

დაფარავს E სიმრავლეს, ე.ი.

$$\left| E \setminus \bigcup_{I \in \Pi'} I \right|_* = 0. \quad (3)$$

Q ავიღოთ $\bigcup_{I \in \Pi'} I$ გაერთიანების ტოლი. $\Pi' \subset \Delta_B$ ჩართვის საფუძველზე გვაქვს, რომ Q არის μ -ზომადი. (1) და (2) შეფასებებიდან გამომდინარე დავწერთ,

$$\mu(Q) = \sum_{I \in \Pi'} \mu(I) \leq \sum_{I \in \Pi'} (C + \varepsilon)|I| \leq (C + \varepsilon)|G| \leq (C + \varepsilon)(|E|_* + \varepsilon). \quad (4)$$

(3) და (4) პირობებიდან ვასკენით ლემის სამართლიანობას. $\square$

შენიშვნა 14.6.2. ადვილი დასანახია, რომ Q სიმრავლისათვის (ლემა 14.6.1-დან) შესრულებული იქნება $|Q \cap E|_* = |E|_*$ ტოლობა.

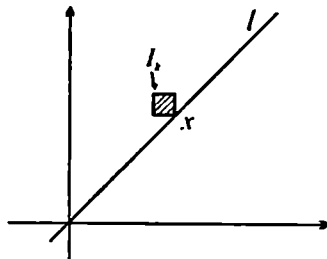
შენიშვნა 14.6.3. ვთქვათ, შესრულებულია ლემა 14.6.1-ის პირობები და დამატებით ცნობილია, რომ E არის μ -ზომადი სიმრავლე. მაშინ, სამოგადოდ, შეუძლებელია ვთქვათ, რომ შესრულებულია $\mu(E) \leq C|E|_*$ შეფასება. მიუეთითოთ შესაბამისი კონტრმაგალითი. l იყოს $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2\}$ წრფე სიბრტყეზე. განვიხილოთ ორგანიზაციებიანი მონაკვეთების I^2 კლასზე შემდეგნაირად განსაზღვრული σ ფუნქცია: ყოველი $I \in I^2$ -სათვის $\sigma(I)$ იყოს $I \cap l$ მონაკვეთის სიგრძის ტოლი. ცხადია, σ წარმოადგენს სასრულ ზომას. μ იყოს σ ზომის ლებეგისეული გაგრძელება. შენიშვნა 6.5.1-ის თანახმად, μ წარმოადგენს ლებეგ-სტილტისის ზომას. ელემენტარული მსჯელობით შეიძლება დავადგინოთ, რომ l წრფეზე მდებარე ნებისმიერი E მონაკვეთისათვის $\mu(E)$ ზომის მნიშვნელობა E -ს სიგრძის ტოლია. B -ს როლში ავიღოთ I_1 ბაზისი. განვიხილოთ $E = l \cap [0, 1]^2$ მონაკვეთი. მაშინ ყოველი $x \in E$ წერტილისათვის გვექნება, რომ $\underline{D}_{I_1}(\mu)(x) = 0$. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ განვიხილავთ $\mu(I_k)/|I_k|$ საშუალოების მიმდევრობას, სადაც I_k ($k \in \mathbb{N}$) არის x -ში მარჯვენა-ქვედა წვეროს მქონე ჩაყვანილი კვადრატული ინტერვალის $1/k$ -ს ტოლი ღიამეტრით (ნახ. 14.7).

მეორე მხრივ კი, გვექნება, რომ $\mu(E) = \sqrt{2}$. ამრიგად, I_1 , μ , E და $C = 0$ პარამეტრებისათვის დარღვეულია $\mu(E) \leq C|E|_*$ უტოლობა.

ლემა 14.6.2. ვთქვათ, $0 < C < \infty$ და $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის ყოველი წერტილისათვის სრულდება $\overline{D}_B(\mu)(x) \geq C$ შეფასება. მაშინ ნებისმიერი μ -ზომადი $Q \supset E$ სიმრავლისათვის სამართლიანია შეფასება:

$$\mu(Q) \geq C|E|_*.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon \in (0, C)$ რიცხვი. ლებეგ-სტილტისის ზომების თვისებების საფუძველზე (იხ. §6.5) Q სიმრავლე შეიძლება



ნახ. 14.7.

დაფაროთ ღია G სიმრავლით, რომელიც აკმაყოფილებს შეფასებას:

$$\mu(G) \leq \mu(Q) + \varepsilon. \quad (5)$$

Π იყოს ყველა იმ $I \in \Delta_B$ სიმრავლის კლასი, რომელიც შედის G სიმრავლეში და აკმაყოფილებს პირობას:

$$\mu(I) > (C - \varepsilon)|I|. \quad (6)$$

Π კლასი ვიტალის აბრით დაფარავს E სიმრავლეს და ამიტომ თეორემა 14.2.3-ის ძალით, მისგან გამოვყოფთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სიმრავლეებისაგან შედგენილ და არაუბეტეს თვლად Π' ქვეკლასს, რომელიც თითქმის დაფარავს E სიმრავლეს, ე.ი.

$$\left| E \setminus \bigcup_{I \in \Pi'} I \right|_* = 0. \quad (7)$$

(5) – (7) პირობებიდან გამომდინარე დაეწერთ,

$$\begin{aligned} \mu(Q) &\geq \mu(G) - \varepsilon \geq \sum_{I \in \Pi'} \mu(I) - \varepsilon \geq \\ &\geq \sum_{I \in \Pi'} (C - \varepsilon)|I| - \varepsilon \geq (C - \varepsilon)|E|_* - \varepsilon. \end{aligned}$$

საიდანაც, $\varepsilon \in (0, C)$ რიცხვის ნებისმიერობის გათვალისწინებით, ვასკენით $\mu(Q) \geq C|E|_*$ შეფასების სამართლიანობას. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 14.6.3. $\{x \in \mathbb{R}^n : \overline{D}_B(\mu)(x) = \infty\}$ სიმრავლის ლებეგის ზომის ტოლია.

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი ღია S ბირთვისათვის,

$$|\{x \in S : \overline{D}_B(\mu)(x) = \infty\}| = 0.$$

საიდანაც მარტივად მიიღება საჭირო დასკვნა.

ალენიშნოთ:

$$E = \{x \in S : \overline{D}_B(\mu)(x) = \infty\};$$

$$E_k = \{x \in S : \overline{D}_B(\mu)(x) \geq k\} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

ლემა 14.6.2-ის ძალით, სამართლიანი იქნება შეფასებები:

$$|E_k|_* \leq \frac{\mu(S)}{k} \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (8)$$

შენიშნოთ, რომ ლებეგ-სტილტეისის ზომა შემოსამღვრულ სიმრავლეებზე ლებულოს სასრულ მნიშვნელობებს. შედეგად, $\mu(S) < \infty$. საიდანაც, თუ გავითვალისწინებთ $E \subset E_k$ ($k \in \mathbb{N}$) ჩართვებს და (8) შეფასებებს, მივიღებთ $|E|_* = 0$ ტოლობას.

ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 14.6.1-ის დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი ღია S ბირთვი $\mathbb{R}^n$ სივრცეში. H იყოს ყველა იმ $x \in S$ წერტილის სიმრავლე, რომელშიც μ ზომა არაა წარმოებადი B ბაზისის მიხედვით. ვაჩვენოთ, რომ H ნული ზომის სიმრავლეა. ადვილი დასაანახია, რომ ამით თეორემა დამტკიცებული იქნება.

H წარმოდგება შემდეგი ორი სიმრავლის გაერთიანების სახით:

$$H_1 = \{x \in S : \underline{D}_B(\mu)(x) < \overline{D}_B(\mu)(x)\};$$

$$H_2 = \{x \in S : \underline{D}_B(\mu)(x) = \overline{D}_B(\mu)(x) = \infty\}.$$

ლემა 14.6.3-ის ძალით, H_2 ნული ზომისაა. ამგვარად, დასამტკიცებელი გვრჩება H_1 სიმრავლის ნულზომიანობა. ადვილი დასაანახია, რომ H_1 , თავის მხრივ, წარმოდგება შემდეგი სახის სიმრავლეების თვალადი გაერთიანების სახით:

$$H_{p,q} = \{x \in S : \underline{D}_B(\mu)(x) < p < q < \overline{D}_B(\mu)(x)\},$$

სადაც p და q რაციონალური რიცხვებია და $0 < p < q$. ამრიგად, საკითხი დაიყვანება $H_{p,q}$ სახის ყოველი სიმრავლის ნულზომიანობის დამტკიცებაზე.

ვთქვათ, $p, q \in \mathbb{Q}$ და $0 < p < q$. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი და ლემა 14.6.1 გამოვიყენოთ ε , $E = H_{p,q}$ და $C = p$ პარამეტრებისათვის. შედეგად, მოვძებნით μ -ზომად Q სიმრავლეს, ისეთს, რომ

$$|Q \cap H_{p,q}|_* = |H_{p,q}|_*, \quad \mu(Q) \leq (p + \varepsilon)(|H_{p,q}|_* + \varepsilon).$$

მეორე მხრივ, $Q, E = Q \cap H_{p,q}$ და $C = p$ პარამეტრებისათვის ლემა 14.6.2-ის გამოყენება გვაძლევს შეფასებას:

$$\mu(Q) \geq q|Q \cap H_{p,q}|_* = q|H_{p,q}|_*.$$

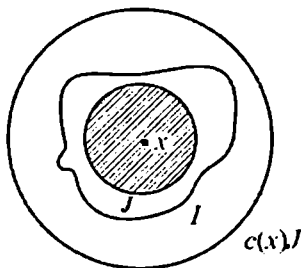
შედეგად, $(p + \varepsilon)(|H_{p,q}|_* + \varepsilon) \geq q|H_{p,q}|_*$. რაც, $\varepsilon > 0$ რიცხვის ნებისმიერობისა და $|H_{p,q}|_* \leq |S| < \infty$ პირობის გათვალისწინებით, შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $|H_{p,q}|_* = 0$. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

§ 7. სიმრავლის ფუნქციის აღდგენა ჯამებადი წარმოებულის შემთხვევაში

ამ პარაგრაფში განხილული იქნება ზომად სიმრავლეთა $\mathcal{L}_n$ კლასზე განსაზღვრული თვალადად აღიკვეთი და შემოსაზღვრული ფუნქციები, რომელთაც სიმრავლისათვის სიმრავლის ფუნქციის ტერმინით მოვიხსენიებთ.

ν სიმრავლის ფუნქციას ეწოდება აბსოლუტურად უწყვეტი ლებეგის ზომის მიმართ, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ -სთვის არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი, ისეთი, რომ $|\nu(E)| < \varepsilon$ ყოველი ზომადი E სიმრავლისათვის, რომელიც ამაყოფილებს $|E| < \delta$ შეფასებას.

B ბაზისის ეწოდოთ ცენტრირებული, თუ ყოველი $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილისათვის და $I \in B(x)$ სიმრავლისათვის მოიძებნება x -ში ცენტრის მქონე J ბირთვი, ისეთი, რომ $J \subset I \subset c(x)J$, სადაც $c(x)$ არის მხოლოდ x წერტილზე დამოკიდებული დადებითი მუდმივი (ნახ. 14.8).



ნახ. 14.8.

ეთქვათ, მოცემული გვაქვს B_1 და B_2 ბაზისები. ამბობენ, რომ B_1 არის B_2 -ის ქვებაზისი, თუ $B_1(x) \subset B_2(x)$ ყოველი $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილისათვის.

სამართლიანია შემდეგი თეორემები წარმოებულის მეშვეობით სიმრავლის ფუნქციის აღდგენის შესახებ.

თეორემა 14.7.1. ვთქვათ, B არის ვიტალის თვისების მქონე ბაზისი $\mathbb{R}^n$ -ში. მაშინ ნებისმიერი ν სიმრავლის ფუნქციისათვის შემდეგი ოთხი წინადადება ერთმანეთის ეკვივალენტურია:

- ν არის აბსოლუტურად უწყვეტი ლებეგის ზომის მიმართ;
- სამართლიანია იმპლიკაცია: $(A \in \mathcal{L}_n, |A| = 0) \Rightarrow \nu(A) = 0$;
- ν თითქმის ყოველ წერტილში წარმოებადია B ბაზისის მიხედვით, $D_B(\nu)$ ჯამებადია და შესრულებულია წარმოდგენა

$$\nu(E) = \int_E D_B(\nu) \quad (E \in \mathcal{L}_n)$$

(აქ $D_B(\nu)$ გაიგება, როგორც $\mathbb{R}^n$ -ზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობები ν -ს არაწარმოებადობის წერტილებში მიიჩნევა ნულის ტოლად);

- ν წარმოდგება რაიმე ჯამებადი ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის სახით, ე.ი. მოიძებნება ჯამებადი g ფუნქცია, ისეთი, რომ

$$\nu(E) = \int_E g \quad (E \in \mathcal{L}_n).$$

თეორემა 14.7.2. ვთქვათ, B არის ბაზისი, რომლისთვისაც მოიძებნება ცენტრალის თვისების მქონე კომპაქტური და ცენტრირებული ქეებაზისი. თუ ν არის ყოველ $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილში B ბაზისის მიხედვით წარმოებადი სიმრავლის ფუნქცია და ცნობილია, რომ $D_B(\nu)$ ჯამებადია, მაშინ სამართლიანია წარმოდგენა:

$$\nu(E) = \int_E D_B(\nu) \quad (E \in \mathcal{L}_n).$$

შენიშვნა 14.7.1. ცხადია, I_1 და I_2 ბაზისები აკმაყოფილებენ 14.7.1 და 14.7.2 თეორემების პირობებს.

თეორემა 14.7.1-ის მე-3 და მე-4 წინადადებების ეკვივალენტობა წარმოადგენს თეორემა 14.2.1-ის შედეგს. დანარჩენი იმპლიკაციები კი მიღებული იქნება მე-15 თავში, როგორც 15.2.2 და 15.3.1 თეორემების შედეგები.

თეორემა 14.7.2-ის დამტკიცების ნახვა შეიძლება [31]-ში (იხ. თავი IV, §14).

შენიშვნა 14.7.2. თეორემა 14.7.2-ში ცენტრირებულობის მოთხოვნა არსებითია. ავავოთ შესაბამისი კონტრმაგალითი. B იყოს ბაზისი $\mathbb{R}^2$ -ში, რომლისთვისაც $B(x)$ ($x \in \mathbb{R}^2$) შედგება x -ში მარჯვენა-ქვედა წვეროს მქონე ყველა ჩაკეტული კვადრატული მონაკვეთისაგან. ცხადია, B არის კომპაქტური ბაზისი. ცხადია ისიც, რომ B -ს არ მოეძებნება ცენტრირებული ქეებაზისი.

ν იყოს 14.6.3 შენიშვნაში მოცემული ლებეგ-სტილტიესის μ ზომის შემზღუდვა $\mathcal{L}_2$ კლასზე. ადვილი დასაანახია, რომ $D_B(\nu)(x) = 0$ ნებისმიერი $x \in \mathbb{R}^2$ წერტილისათვის. შედეგად,

$$\int_{[0,1]^2} D_B(\nu) = 0 \neq 1 = \nu([0,1]^2).$$

ზომა და სიმრავლის ფუნქციები

ამ თავში შეისწავლება ერთსა და იმავე კლასზე განსაზღვრული ორი ზომის (უფრო მეტიც, ზომისა და სიმრავლის ფუნქციის) ურთიერთმიმართება, კერძოდ, საკითხი იმის შესახებ, თუ რა პირობებშია შესაძლებელი ν ზომის გამოსახვა ეტალონად არჩეული μ ზომის საშუალებით, იმ თვალსაზრისით, რომ ν მიიღებოდეს μ ზომისაგან ინტეგრების პროცესის მეშვეობით (ე.ი. ν იყოს μ ზომის მიხედვით ჯამებადი რაიმე ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი).

§ 1. მუხტის ცნება. ჰანისა და ჟორდანის დაშლები

(X, S) ზომად სივრცეზე განსაზღვრული მუხტი ეწოდება $\nu : S \rightarrow (-\infty, \infty]$ ფუნქციას, რომელიც ცარიელ სიმრავლეზე ლეზულობს ნულის ტოლ მნიშვნელობას და აქვს თელადად ადიციურობის თვისება.

ამრიგად, მუხტს მოეთხოვება ზომის ყველა თვისება, გარდა არაუარყოფითობისა. მუხტს ნიშნისა ზომის ტერმინითაც მოიხსენიებენ. შევნიშნოთ, რომ განსაზღვრის თანახმად მუხტს აკრძალული აქვს $-\infty$ -ის ტოლი მნიშვნელობის მიღება. ასეთი შემლდვა ბუნებრივია, რადგან, წინააღმდეგ შემთხვევაში, $\infty - \infty$ სახის განუსაზღვრელობის გამო, ამრს დაკარგავდა მუხტის თელადად ადიციურობის პირობა. აქვე შევნიშნოთ, რომ მუხტს აქვს ადიციურობის თვისება.

მუხტის ტიპის სიმრავლის ფუნქციების წარმოქმნის მექანიზმს გვაძლევს ლებეგის ინტეგრალი. კერძოდ, თუ f არის (X, S, μ) ზომიან სივრცეზე განსაზღვრული ჯამებადი ფუნქცია, მაშინ (იხ. თეორემა 8.8.3) f -ის განუსაზღვრელი ინტეგრალი - ν_f წარმოადგენს S σ -ალგებრაზე განსაზღვრულ სიმრავლის ფუნქციას, რომელიც არის შემოსაზღვრული, თელადად ადიციური და ცარიელ სიმრავლეზე ლეზულობს ნულის ტოლ მნიშვნელობას. ამრიგად, ნებისმიერი ჯამებადი f ფუნქციის განუსაზღვრელი ν_f ინტეგრალი წარმოადგენს მუხტს, ამასთან, f ფუნქციის არაუარყოფითობის შემთხვევაში, ν_f არის ზომა.

შევნიშნოთ ორი რამ ჯამებადი f ფუნქციით წარმოქმნილი ν_f მუხტის შესახებ:

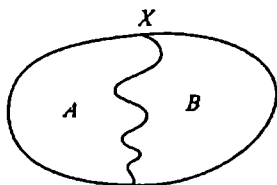
- იუ განვიხილავთ $A^+ = \{f \geq 0\}$ და $A^- = \{f < 0\}$ სიმრავლეებს, მივიღებთ ურთიერთდამატებითი ზომად სიმრავლეებს, რომელთაგან პირველს შეიძლება შევხედოთ, როგორც დადებითი მუსტის გავრცელების არეალს, ხოლო მეორეს კი - როგორც უარყოფითი მუსტის გავრცელების არეალს;
- ν მუსტი წარმოდგება ორი ზომის სხვაობის სახით. ასეთი წარმოდგენა მიიღება f ფუნქციის დადებითი და უარყოფითი ნაწილების გამოყენებით: $\nu = \nu_+ - \nu_-$.

ქვემოთ დადგენილი იქნება, რომ ანალოგიური დებულებები სამართლიანია ნებისმიერი მუსტისათვის.

ვთქვათ, ν არის (X, S) ზომად სივრცეზე განსაზღვრული მუსტი. ზომად A სიმრავლეს (ე.ი. სიმრავლეს S კლასიდან) ეწოდება უარყოფითი ν მუსტის მიმართ, თუ A -ს ნებისმიერი ზომადი E ქვესიმრავლისათვის გვაქვს, რომ $\nu(E) \leq 0$; ანალოგიურად, ზომად A სიმრავლეს ეწოდება დადებითი ν მუსტის მიმართ, თუ A -ს ნებისმიერი ზომადი E ქვესიმრავლისათვის გვაქვს, რომ $\nu(E) \geq 0$.

თეორემა 15.1.1. (X, S) ზომად სივრცეზე განსაზღვრული ნებისმიერი ν მუსტისათვის არსებობენ ურთიერთდამატებითი ზომადი A და B სიმრავლეები, ისეთები, რომ A უარყოფითია ν -ს მიმართ, ხოლო B დადებითია ν -ს მიმართ.

თეორემა 15.1.1-ში მითითებულ A და B სიმრავლეთა წყვილს უწოდებენ სივრცის პანის აზრით დაშლას ν მუსტის მიმართ (ნახ. 15.1).



ნახ. 15.1.

ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ ν არის (X, S) ზომად სივრცეზე განსაზღვრული რაიმე მუსტი. უარყოფითი და დადებითი სიმრავლეები განხილული იქნება ν მუსტთან მიმართებაში.

ლემა 15.1.1. თუ ზომადი A და B სიმრავლეები ისეთებია, რომ $B \subset A$ და $\nu(A) < \infty$, მაშინ $\nu(B) < \infty$.

დამტკიცება. მუხტის ადიციურობის თვისების ძალით გვაქვს, რომ $\nu(A) = \nu(B) + \nu(B \setminus A)$, საიდანაც, იმის გათვალისწინებით, რომ $\nu(B \setminus A) > -\infty$, უშუალოდ ველბულობთ დასამტკიცებელ დასკვნას. $\square$

ლემა 5.1.2. თუ ზომადი A სიმრავლისათვის $\nu(A) < 0$, მაშინ არსებობს მისი A^* ქვესიმრავლე, რომელიც უარყოფითია და აკმაყოფილებს $\nu(A^*) < 0$ პირობას.

დამტკიცება. ზომადი E სიმრავლისათვის აღვნიშნოთ

$$\lambda(E) = \sup\{\nu(B) : B \in S, B \subset E\}.$$

ცხადია, $\lambda(E) \geq \nu(\emptyset) = 0$. $\lambda(E)$ სიდიდეს შეიძლება შევხედოთ, როგორც E სიმრავლის „დღეობით პოტენციალს“. შევნიშნოთ, რომ E სიმრავლე უარყოფითია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\lambda(E) = 0$.

ეთქვათ, ზომადი E სიმრავლე არაა უარყოფითი. მაშინ $\lambda(E) > 0$. $\lambda(E) < \infty$ შემთხვევაში B იყოს E -ს ისეთი ზომადი ქვესიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს $\nu(B) \geq \lambda(E)/2$ პირობას, ხოლო $\lambda(E) = \infty$ შემთხვევაში B იყოს E -ს ისეთი ზომადი ქვესიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს $\nu(B) \geq 1$ პირობას. მსჯელობის სიმოკლისათვის, ასეთ B სიმრავლეს ეუწოდოთ E სიმრავლის ბალასტი, ხოლო E -დან $E \setminus B$ სიმრავლეზე გადასვლის ოპერაციას კი - E სიმრავლის შემსუბუქება.

ახლა გადავიდეთ უშუალოდ ლემის დამტკიცებაზე. თუ A სიმრავლე უარყოფითია, მაშინ დებულება ცხადია. წინააღმდეგ შემთხვევაში განვიხილოთ A -ს შემსუბუქების შედეგად მიღებული A_1 სიმრავლე. თუ A_1 სიმრავლე უარყოფითია, მაშინ პროცესი შეწყვეტოთ. წინააღმდეგ შემთხვევაში კი, შემსუბუქების ოპერაცია კელაე ჩავატაროთ უკვე A_1 სიმრავლესთან მიმართებაში და ა.შ. შესაძლებელია ორი შემთხვევა: i) რომელიმე n -ურ ეტაპზე შემსუბუქების პროცესი წყდება. ე.ი. მიიღება უარყოფითი სიმრავლე; ii) შემსუბუქების პროცესი უსასრულოდ გრძელდება (ე.ი. არცერთ ეტაპზე არ მიიღება უარყოფითი სიმრავლე).

აგების k -ურ ეტაპზე წარმოქმნილი ბალასტი აღვნიშნოთ B_k -თი. შევნიშნოთ, რომ:

- B_k სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია;
- თუ $\nu(B_k) < 1$, მაშინ $\nu(B_k) \geq \lambda(A_{k-1})/2 > 0$;
- შემსუბუქების ოპერაციის k -ჯერ ჩატარების შედეგად დარჩენილი A_k სიმრავლე უდრის $A \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_k)$ სიმრავლეს.

ახლა განვიხილოთ ორივე შემთხვევაში აღნიშნულ შემთხვევათაგან. პირველ შემთხვევაში გვაქვს, რომ A_n სიმრავლე უარყოფითია. ამასთან,

$$\nu(A) = \sum_{k=1}^n \nu(B_k) + \nu(A_n),$$

ტოლობის საფუძველზე ელბულობით $\nu(A_n) < 0$ შეფასებას. შედეგად, A^* -ის როლში შეიძლება ავიღოთ A_n სიმრავლე.

მეორე შემთხვევაში, A^* -ის როლში ავიღოთ $A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ სიმრავლე და დავადგინოთ, რომ ის აკმაყოფილებს ლემის პირობებს. თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ

$$\nu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(B_k) + \nu(A^*).$$

საიდანაც ელბულობით $\nu(A^*) < 0$ შეფასებას.

ლემა 15.1.1-ის ძალით, $\nu(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) < \infty$. ამასთანავე, სრულდება ტოლობა:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu(B_k) = \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right).$$

შედეგად, $\nu(B_k) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). საიდანაც გამომდინარე, ყოველი საემარისად დიდი k -სათვის შესრულებული იქნება $\lambda(A_{k-1}) \leq 2\nu(B_k)$ შეფასება. ამ შეფასების ძალით, $\lambda(A_k) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). ასეა, თუ გავითვალისწინებთ $A^* \subset A_k$ ($k \in \mathbb{N}$) ჩართვებს, დავწეროთ,

$$0 \leq \lambda(A^*) \leq \lambda(A_k) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

შედეგად, მივიღებთ $\lambda(A^*) = 0$ ტოლობას, რაც ნიშნავს A^* სიმრავლის უარყოფითობას. ამრიგად, A^* სიმრავლე აკმაყოფილებს საჭირო პირობებს. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 15.1.3. თუ A_n ($n \in \mathbb{N}$) სიმრავლეები უარყოფითი არიან, მაშინ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ სიმრავლე უარყოფითია.

დამტკიცება. ვთქვათ, A_n ($n \in \mathbb{N}$) სიმრავლეები უარყოფითია. ლემის სამართლიანობა ადვილი შესამოწმებელია, როცა A_n სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანახუკვეთია. ზოგადი შემთხვევის დაყვანა აღნიშნულზე კი ხორციელდება (A_n) მიმდევრობის გარდაქმნით (A_n^*) მიმდევრობად, სადაც $A_1^* = A_1$ და $A_n^* = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$, როცა $n > 1$. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 15.1.1-ის დამტკიცება. S_- იყოს კლასი, რომელიც შედგება ყველა უარყოფითი სიმრავლისაგან. აღვნიშნოთ

$$\alpha = \inf \{ \nu(M) \mid M \in S_- \}.$$

ცხადია, $\alpha \leq \nu(\emptyset) = 0$. ვთქვათ, (A_n) არის S_- კლასის სიმრავლეითა მიმდევრობა, რომელიც ახდენს α ინფიმუმის რეალიზაციას, ე.ი. აკმაყოფილებს $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A_n) = \alpha$ პირობას. განვიხილოთ

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

სიმრავლე. ლემა 15.1.3-ის ძალით A უარყოფითია. აქედან გამომდინარე, გვექნება, რომ $\alpha \leq \nu(A) \leq \nu(A_n)$ ყოველი n -სთვის. ამრიგად, A არის უარყოფითი სიმრავლე, რომლისთვისაც $\nu(A) = \alpha$.

ვაჩვენოთ, რომ $B = X \setminus A$ სიმრავლე დადებითია, რითაც თეორემა დამტკიცებული იქნება. დავეუქმეთ საწინააღმდეგო, რაც ტოლფასია იმისა, რომ მოიძებნება ზომადი $E \subset X \setminus A$ სიმრავლე, რომლისთვისაც $\nu(E) < 0$. ლემა 15.1.2-ის ძალით, შეგვიძლია ვიპოვოთ უარყოფითი $E^* \subset E$ სიმრავლე, რომლისთვისაც $\nu(E^*) < 0$. მაშინ ლემა 15.1.3-ის თანახმად, $A \cup E^*$ იქნება უარყოფითი სიმრავლე და, ამასთან ერთად, გვექნება, რომ

$$\nu(A \cup E^*) = \nu(A) + \nu(E^*) < \nu(A) = \alpha.$$

დადგენილი $\nu(A \cup E^*) < \alpha$ შეფასება კი ეწინააღმდეგება α ინფიმუმის განსაზღვრას. მიღებული წინააღმდეგობის ძალით, $X \setminus A$ არის დადებითი სიმრავლე. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 15.1.1. ვთქვათ, ν რაიმე მუხტია, ხოლო (A, B) სივრცის პანის დაშლაა ν -ს მიმართ. პანის დაშლა საშუალებას იძლევა, მარტივად ვაჩვენოთ მუხტის შემდეგი ორი თვისება:

- ν ქვემოდან შემოსაზღვრულია, ამასთან, $\nu(A)$ წარმოადგენს ν -ს მინიმალურ მნიშვნელობას;
- თუ ν სასრული ფუნქციაა, მაშინ ის შემოსაზღვრულია. ამასთან, $\nu(A)$ და $\nu(B)$ რიცხვები შესაბამისად წარმოადგენენ ν -ს მინიმალურ და მაქსიმალურ მნიშვნელობებს.

პანის დაშლა, სამოგადოდ, ერთადერთი არაა (ამაში მარტივად დაერწმუნდებით წრფის ლებეგის აპრიტ ზომად ქვესიმრავლეება კლასზე განსაზღვრული იგივეურად ნულოვანი მუხტის მაგალითზე), თუმცა, პანის სხვადასხვა დაშლები ერთსა და იმავე შედეგს იძლევიან მუხტის დადებითი და უარყოფითი „მდეგენების“ გამოშვების თვალსაზრისით. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 15.1.2. ვთქვათ, სიმრავლეება (A, B) და (A^*, B^*) წყვილები წარმოადგენენ სივრცის პანის დაშლებს, რომლებშიც A და A^* არიან უარყოფითი, ხოლო B და B^* კი - დადებითი კომპონენტები. მაშინ ნებისმიერი ზომადი E სიმრავლისათვის შესრულებულია ტოლობები:

$$\nu(E \cap A) = \nu(E \cap A^*), \quad \nu(E \cap B) = \nu(E \cap B^*).$$

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ $A \setminus A^*$, $A^* \setminus A$, $B \setminus B^*$ და $B^* \setminus B$ სიმრავლეები არიან ნულოვანი იმ გაგებით, რომ მათ ნებისმიერ ზომად ქვესიმრავლეზე მუხტის მნიშვნელობა ნულის ტოლია. ზოგადობის შეუზღუდავად განვიხილოთ $A \setminus A^*$ სიმრავლის შემთხვევა. მართლაც, ავიღოთ რაიმე ზომადი $H \subset A \setminus A^*$ სიმრავლე. მაშინ გვექნება ჩართვები: $H \subset A$ და $H \subset X \setminus A^* = B^*$. პირველი

ჩართვის ძალით მივიღებთ, რომ $\nu(H) \leq 0$, ხოლო მეორე ჩართვა გვაძლევს $\nu(H) \geq 0$ შეფასებას. ამრიგად, $\nu(H) = 0$.

ეთქვათ, E რაიმე ზომადი სიმრავლეა. მაშინ, ზემოაღნიშნულის გათვალისწინებით, გვექნება, რომ

$$\nu(E \cap A) = \nu(E \cap (A \cap A^*)) + \nu(E \cap (A \setminus A^*)) = \nu(E \cap (A \cap A^*))$$

და

$$\nu(E \cap A^*) = \nu(E \cap (A^* \cap A)) + \nu(E \cap (A^* \setminus A)) = \nu(E \cap (A \cap A^*)).$$

შედეგად, $\nu(E \cap A) = \nu(E \cap A^*)$. ანალოგიურად მტკიცდება $\nu(E \cap B) = \nu(E \cap B^*)$ ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

დამტკიცებული თეორემა გვიჩვენებს, რომ სიმრავლის მუხტის დადებითი და უარყოფითი მდგენელების გაბოშვა ერთ განსაზღვრულ შედეგს იძლევა იმისგან დამოუკიდებლად, თუ პანის რომელი დამლის მეშვეობით იქნება გაბოშვა გაცემებული. ამ გარემოების გათვალისწინებით, შეიძლება შემოვიღოთ ზომად სიმრავლეთა კლასზე (ე.ი. S -ზე) განსაზღვრული შემდეგი ν^- და ν^+ ფუნქციები:

$$\nu^-(E) = -\nu(E \cap A), \quad \nu^+(E) = \nu(E \cap B).$$

სადაც (A, B) არის სივრცის პანის რაიმე დამლა, რომელშიც A არის უარყოფითი, ხოლო B კი დადებითი კომპონენტი. ν^- და ν^+ ფუნქციებს, შესაბამისად, ν მუხტის უარყოფით და დადებით ვარიაციებს უწოდებენ. ადვილი შესამოწმებელია, რომ:

- ν^- და ν^+ ფუნქციები წარმოადგენენ ზომებს, ამასთან, ν^- შემოსაზღვრული ზომაა;
- თუ ν შემოსაზღვრულია (σ -შემოსაზღვრულია), მაშინ ν^+ შემოსაზღვრულია (σ -შემოსაზღვრულია);
- $\nu = \nu^+ - \nu^-$.

მუხტის დამლას დადებითი და უარყოფითი ვარიაციების სხვაობის სახით, მუხტის ჟორდანის დაშლა ეწოდება.

$\nu^+ + \nu^-$ ზომას ν მუხტის სრულ ვარიაციას უწოდებენ. ν მუხტის სრულ ვარიაციას $|\nu|$ ჩანაწერით აღნიშნავენ.

ამოცანები

1. ეთქვათ, ν მუხტია (X, S) ზომად სივრცეზე. დაამტკიცეთ, რომ:

$$\nu^+(E) = \sup\{\nu(F) : F \subset E, F \in S\},$$

$$\nu^-(E) = -\inf\{\nu(F) : F \subset E, F \in S\}.$$

2. ეთქვათ, $f \in L(X, \mu)$. ა) აჩვენეთ, რომ $A = \{f < 0\}$ და $B = \{f \geq 0\}$ სიმრავლეები იძლევიან ν_f მუხტის პანის დამლას μ ზომის მიმართ; ბ) დაახასიათეთ ν_f მუხტის ყველა შესაძლო პანის დამლები μ ზომის მიმართ.

§ 2. აბსოლუტურად უწყვეტობა

ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა, ხოლო ν არის S კლასზე განსაზღვრული მუხტი. ν მუხტს ეწოდება აბსოლუტურად უწყვეტი μ ზომის მიმართ (აღნიშვნა: $\nu \ll \mu$), თუ

$$(E \in S, \mu(E) = 0) \Rightarrow \nu(E) = 0.$$

ვიდრე აბსოლუტურად უწყვეტობის ცნების ანალიზს შევედგებოდეთ, გავეყუთოთ მარტივი შემთხვევა იმის თაობაზე, რომ მუხტი შეიძლება არ იყოს ზომის მიმართ აბსოლუტურად უწყვეტი. მართლაც, ვთქვათ, (X, S, μ) რაიმე ზომიანი სივრცეა და $x_0 \in X$ წერტილი ისეთია, რომ $\{x_0\} \in S$ და $\mu(\{x_0\}) = 0$. განვიხილოთ S -ზე განსაზღვრული შემდეგი ν ზომა: $\nu(E) = 1$, თუ $x_0 \in E$ და $\nu(E) = 0$, თუ $x_0 \notin E$. მაშინ ცხადია, რომ ν არაა აბსოლუტურად უწყვეტი μ -ს მიმართ.

თეორემა 1.2.1. ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა, ხოლო ν არის S კლასზე განსაზღვრული მუხტი. შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია: 1) $\nu \ll \mu$; 2) $\nu^+ \ll \mu$ და $\nu^- \ll \mu$; 3) $|\nu| \ll \mu$.

დამტკიცება. ვთქვათ, შესრულებულია 1) პირობა. განვიხილოთ სიმრავლეთა (A, B) წყვილი, რომელიც წარმოადგენს (X, S) სივრცის პანის დამლას ν მუხტის მიმართ. მაშინ ნებისმიერი $E \in S$, $\mu(E) = 0$, სიმრავლისათვის გვექნება, რომ $0 \leq \mu(E \cap A) \leq \mu(E) = 0$ და $0 \leq \mu(E \cap B) \leq \mu(E) = 0$. აქედან გამომდინარე, $\nu \ll \mu$ პირობის ძალით დაეწერთ:

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = 0, \quad \nu^-(E) = \nu(E \cap B) = 0.$$

ამით 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია დადგენილია. 2) $\Rightarrow$ 3) და 3) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაციები კი უშუალოდ გამომდინარეობენ $|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E)$ და $0 \leq |\nu|(E) \leq |\nu|(E)$ თანაფარდობებიდან. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ლემეის ინტეგრალის თვისებებიდან გამომდინარე (იხ. თეორემა 8.8.1), ნებისმიერი $f \in L(X, \mu)$ ფუნქციის განუსაზღვრელი ν_f ინტეგრალი წარმოადგენს μ ზომის მიმართ აბსოლუტურად უწყვეტ მუხტს ზემოთ მოცემული აზრით. ამასთანავე, ჩვენთვის ცნობილია განუსაზღვრელი ინტეგრალის აბსოლუტურად უწყვეტობის ცნების მეორე ვარიანტი (იხ. თეორემა 8.8.8), რომელიც გამოიხატება შემდეგნაირად: ყოველი $\varepsilon > 0$ -სთვის არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი, ისეთი, რომ $(E \in S, \mu(E) < \delta) \Rightarrow |\nu_f(E)| < \varepsilon$. შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ შემოსაზღვრული მუხტისათვის ზომის მიმართ აბსოლუტურად უწყვეტობის ცნების ორივე ვერსია ერთი და იგივე დატვირთვის მატარებელია.

თეორემა 1.2.2. ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა, ხოლო ν არის S კლასზე განსაზღვრული შემოსაზღვრული მუხტი. ν აბსოლუტურად უწყვეტია μ ზომის მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი

$\varepsilon > 0$ -სთვის არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი, ისეთი, რომ $(E \in S, \mu(E) < \delta) \Rightarrow |\nu(E)| < \varepsilon$.

დამტკიცება. საკმარისობის ნაწილი ადვილი შესამოწმებელია. დავადგინოთ აუცილებლობასთან დაკავშირებული დებულება. აქ მოგვიწევს გავიმეოროთ ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის აბსოლუტურად უწყვეტობის დამტკიცებისას გამოყენებული მსჯელობა (იხ. თეორემა 8.8.8).

ქორდანის დამლისა და 15.2.1 თეორემის საფუძველზე საკმარისია განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა ν წარმოადგენს ზომას. დავეშვათ საწინააღმდეგო: კიდეც, მოიძებნება $\varepsilon > 0$ და ზომად სიმრავლეთა (E_n) მიმდევრობა, ისეთი, რომ ყოველი n -სთვის,

$$\mu(E_n) < \frac{1}{2^n} \quad \text{და} \quad \nu(E_n) \geq \varepsilon.$$

განვიხილოთ სიმრავლეთა (E_n) მიმდევრობის ზედა ზღვარი:

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k.$$

მაშინ, ბორელ-კანტელის ლემის (იხ. თეორემა 4.4.4) საფუძველზე, მივიღებთ $\mu(E) = 0$ ტოლობას. მეორე მხრივ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ν შემოსაზღვრული ზომაა და გამოვიყენებთ ზომის ზემოდან უწყვეტობის თვისებას, გვექნება,

$$\nu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right).$$

საიდანაც, $\nu(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k) \geq \nu(E_n) \geq \varepsilon$ შეფასების გათვალისწინებით, დავასკენით, რომ $\nu(E) \geq \varepsilon$. ეს კი ეწინააღმდეგება $\nu \ll \mu$ პირობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 15.2.1. ადვილი დასანახია, რომ თეორემა 15.2.2-ის საკმარისობასთან დაკავშირებული ნაწილი სამართლიანია ნებისმიერი (თუნდაც შემოსაზღვრული) ν მუხტისათვის. რაც შეეხება აუცილებლობის გამომხატველ ნაწილს, ის, მუხტის შემოსაზღვრულობის მოთხოვნის გარეშე, სამოგადოდ, სამართლიანი არაა. შესაბამის კონტრმაგალითს მივიღებთ, თუ ზომიანი სიერკის როლში ავიღებთ ლებეგის ზომით აღჭურვილ $(0, 1)$ მონაკვეთს, ხოლო ν მუხტს კი განვსაზღვრავთ შემდეგნაირად:

$$\nu(E) = \int_E \frac{1}{x} dm(x),$$

სადაც E არის $(0, 1)$ -ის ლებეგის აზრით ზომადი ნებისმიერი ქვესიმრავლე.

ამოცანები

1. ვთქვათ, (X, S) ზომადი სივრცეა, ხოლო μ და ν ზომებია S -ზე. დაამტკიცეთ, რომ $\mu \ll \mu + \nu$.
2. ვთქვათ, (X, S) ზომადი სივრცეა და μ_n ($n \in \mathbb{N}$) შემოსაზღვრული ზომებია S -ზე. დაამტკიცეთ, რომ მოიხსნება შემოსაზღვრული μ ზომა S -ზე, რომლისთვისაც $\mu_n \ll \mu$ ყოველი n -სთვის.

§ 3. რადონ-ნიკოდიმის თეორემა

შემდეგი თეორემა წარმოადგენს ზომის თეორიის ერთ-ერთ უმოაერეს დებულებას.

თეორემა 3.1.1. (რადონ-ნიკოდიმი). ვთქვათ, (X, S, μ) σ -შემოსაზღვრული ზომიანი სივრცეა და ν არის S კლასზე განსაზღვრული მუხტი. მაშინ შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- ν წარმოდგება ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის სახით, ე.ი. მოიხსნება $f \in L(X, \mu)$ ფუნქცია, ისეთი, რომ $\nu(E) = \int_E f d\mu$ ($E \in S$);
- ν არის შემოსაზღვრული და აბსოლუტურად უწყვეტი μ ზომის მიმართ.

ლემა 3.1.1. ვთქვათ, $f_1, \dots, f_n$ არაუარყოფითი და (X, S, μ) ზომიან სივრცეზე μ -საზღვრული ფუნქციებია. თუ S -ზე განსაზღვრული ν ზომა, ისეთია, რომ

$$\nu_{f_k} \leq \nu \text{ ყოველი } k \in \overline{1, n}\text{-სთვის,}$$

მაშინ

$$\nu_{\max(f_1, \dots, f_n)} \leq \nu.$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $h = \max(f_1, \dots, f_n)$. შევნიშნოთ, რომ X შეიძლება დავშალოთ ზომად და წყილ-წყვილად თანაუკვეთ X_k ($k \in \overline{1, n}$) სიმრავლეებად, რომელთათვისაც სრულდება პირობა:

$$X_k \subset \{h = f_k\} \quad (k \in \overline{1, n}).$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ასეთი სიმრავლეები შეიძლება შევარჩიოთ შემდეგნაირად: $X_1 = \{h = f_1\}$ და

$$X_k = \{h = f_k\} \setminus (\{h = f_1\} \cup \dots \cup \{h = f_{k-1}\}) \quad (k \in \overline{2, n}).$$

ნებისმიერი $E \in S$ -სთვის გვექნება, რომ

$$\int_E h d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{E \cap X_k} h d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{E \cap X_k} f_k d\mu \leq \sum_{k=1}^n \nu(E \cap X_k) = \nu(E).$$

ლემა დამტკიცებულია. □

ლემა 5.3.2. ვთქვათ, (X, S, μ) შემოსაზღვრული ზომიანი სივრცეა. იუ S კლასზე განსაზღვრული ν ზომა არის არანულოვანი და აბსოლუტურად უწყვეტი μ ზომის მიმართ, მაშინ მოიძებნებიან $\varepsilon > 0$ რიცხვი და $M \in S$ სიმრავლე თვისებებით: $\mu(M) > 0$ და $\nu(E) \geq \varepsilon \mu(E)$ ყოველთვის, როცა $E \subset M$ და $E \in S$.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ ლემის დასკვნა ტოლფასია შემდეგი პირობის: მოიძებნებიან $\varepsilon > 0$ რიცხვი და $M \in S$ სიმრავლე თვისებებით: $\mu(M) > 0$ და M დადებითია $\nu - \varepsilon \mu$ მუხტის მიმართ.

ყოველი ნატურალური n -სთვის განვიხილოთ $\nu - \frac{1}{n} \mu$ მუხტი და მის მიმართ სივრცის μ -ის დაშლა - (A_n, B_n) , სადაც A_n უარყოფითი სიმრავლეა, ხოლო B_n - დადებითი, თუ რომელიმე n -სთვის ვაჩვენებთ, რომ $\mu(B_n) > 0$, მაშინ, ცხადია, საძიებელი M სიმრავლის როლში შეგვიძლია ავიღოთ B_n სიმრავლე.

A_n -ის განსაზღვრის საფუძველზე გვექნება,

$$\nu(A_n) \leq \frac{1}{n} \mu(A_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ μ შემოსაზღვრულია, ხოლო ν არანულოვანია, დაეცემა ისეთი n -ის არსებობას, რომლისთვისაც

$$\nu(A_n) < \nu(X).$$

მაშინ ასეთი n -სთვის მივიღებთ $\nu(B_n) > 0$ შეფასებას. საიდანაც, ν ზომის μ ზომისადმი აბსოლუტურად უწყვეტობის საფუძველზე დაეცემა, რომ $\mu(B_n) > 0$. ამით ლემა დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 5.3.3. ვთქვათ, (X, S, μ) არის შემოსაზღვრული ზომიანი სივრცე, ხოლო ν არის S კლასზე განსაზღვრული ზომა, რომელიც აბსოლუტურად უწყვეტია μ ზომის მიმართ. თუ არაუარყოფითი $f \in L(X, \mu)$ ფუნქცია ისეთია, რომ

$$\nu_f \leq \nu \text{ და } \nu_f \neq \nu,$$

მაშინ მოიძებნება არაუარყოფითი $g \in L(X, \mu)$ ფუნქცია, ისეთი, რომ

$$\nu_g \leq \nu \text{ და } \int_X g d\mu > \int_X f d\mu.$$

დამტკიცება. აღვილი დასანახია, რომ $\nu - \nu_f$ წარმოადგენს S -ზე განსაზღვრულ ზომას, რომელიც არანულოვანია და აბსოლუტურად უწყვეტია μ ზომის მიმართ. ლემა 5.3.2-ის ძალით, მოიძებნებიან $\varepsilon > 0$ რიცხვი და $M \in S$ სიმრავლე თვისებებით: $\mu(M) > 0$ და $\nu(E) - \nu_f(E) \geq \varepsilon \mu(E)$, ყოველთვის, როცა $E \subset M$ და $E \in S$.

განვიხილოთ $g = f + \varepsilon \chi_M$ ფუნქცია. μ ზომის შემოსაზღვრულობის ძალით, M სასრული ზომის სიმრავლეა, საიდანაც ვასკენით, რომ $g \in L(X, \mu)$. M -ის

შერჩევიდან გამომდინარე, ნებისმიერი $A \in \mathcal{S}$ სიმრავლისათვის დავწერთ,

$$\begin{aligned}\nu_g(A) &= \nu_f(A) + \nu_{\varepsilon \chi_M}(A) = \nu_f(A \setminus M) + \nu_f(A \cap M) + \varepsilon \mu(A \cap M) \leq \\ &\leq \nu_f(A \setminus M) + \nu(A \cap M) \leq \nu(A \setminus M) + \nu(A \cap M) = \nu(A).\end{aligned}$$

ამასთან, $\mu(M) > 0$ პირობის ძალით, გვაქვს, რომ

$$\int_X g d\mu = \int_X f d\mu + \varepsilon \mu(M) > \int_X f d\mu.$$

ამით ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 15.3.1-ის დამტკიცება. ლებეგის ინტეგრალის თვისებების საფუძველზე ვიციტ, რომ მეორე წინადადება არის პირველის შედეგი. ამრიგად, დასადგენი გვაქვს შებრუნებული იმპლიკაცია. ყორდანის დამლისა და 15.2.1 თეორემის გათვალისწინებით, მოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ν წარმოადგენს ზომას.

თავდაპირველად f ფუნქცია ეიპოვოთ იმ შემთხვევაში, როცა μ ზომა შემოსაზღვრულია.

II-თი ალენიზნოთ ყველა იმ არაუარყოფითი $f \in L(X, \mu)$ ფუნქციის კლასი, რომლის მიერ წარმოქმნილი ν_f ზომა მაქორირდება ν ზომით, ე.ი. $\nu_f \leq \nu$. განვიხილოთ შემდეგი სუპრემუმი:

$$\alpha = \sup \left\{ \int_X f d\mu : f \in \Pi \right\}.$$

შენიშნოთ, რომ ν ზომის შემოსაზღვრულობის გამო, $\alpha < \infty$. (f_n) იყოს Π კლასის ფუნქციათა ისეთი მიმდევრობა, რომელმაც რეალიზება α სუპრემუმი, ე.ი. სრულდება პირობა:

$$\int_X f_n d\mu \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty).$$

ყოველი n -სთვის h_n იყოს $f_1, \dots, f_n$ ფუნქციების მაქსიმუმი. მაშინ ლემა 15.3.1-ის ძალით, ყოველი n -სთვის გვექნება, რომ $\nu_{h_n} \leq \nu$. შედეგად, $h_n \in \Pi$ ($n \in \mathbb{N}$). ცხადია, (h_n) ზრდადი მიმდევრობაა, რის გამოც, (h_n) -ის ზღვარი არსებობს ყოველი $x \in X$ -სთვის. f -ით ალენიზნოთ (h_n) მიმდევრობის ზღვარი ითი ფუნქცია, ე.ი.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) \quad (x \in X).$$

მაშინ $h_n \in \Pi$ პირობისა და ლევის თეორემის ძალით, ნებისმიერი $E \in \mathcal{S}$ სიმრავლისათვის გვექნება,

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E h_n d\mu \leq \nu(E).$$

ამით დადგენილია $\nu_f \leq \nu$ შეფასება. შედეგად, $f \in \Pi$. ამასთან, $h_n \in \Pi$ და $h_n \geq f_n$ პირობების გათვალისწინებით, დაეწეროს,

$$\alpha \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n d\mu \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \alpha.$$

მაშასადამე,

$$\int_X f d\mu = \alpha.$$

ამრიგად, α სუპრემუმი მიიღწევა f ფუნქციისათვის. f -ის „ექსტრემალურობის“ გამომსატველი აღნიშნული თვისება არის საფუძველი ჩვენთვის საჭირო $\nu_f = \nu$ ტოლობის დამტკიცებისათვის. მართლაც, დაეუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ გვექნება: $\nu_f \leq \nu$ და $\nu_f \neq \nu$. შედეგად, ლემა 15.3.3-ის გამოყენებით, ეიპოვით $g \in \Pi$ ფუნქციას, ისეთს, რომ

$$\int_X g d\mu > \int_X f d\mu = \alpha.$$

რაც ეწინააღმდეგება α სუპრემუმის განსაზღვრას.

ახლა გადავიდეთ ზოგადი შემთხვევის განხილვაზე, ე.ი. ეიპოვოთ f ფუნქცია ნებისმიერი σ -შემოსაზღვრული μ ზომის შემთხვევაში.

წარმოვადგინოთ სიერტე წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი და სასრული ზომის X_n ($n \in \mathbb{N}$) ქვესიმრავლეების გაერთიანების სახით. თუ ნებისმიერი ფიქსირებული n -სთვის განვიხილავთ μ და ν ზომების შეზღუდვებს X_n -ის ზომად ქვესიმრავლეთა კლასზე, მაშინ თეორემის უკვე დამტკიცებული ნაწილის გამოყენებით ეიპოვით არაუარყოფით $f_n \in L(X, \mu)$ ფუნქციას, რომლის საყრდენი მოთაფსებულია X_n -ში (ე.ი. $\{f_n \neq 0\} \subset X_n$) და

$$\nu(E) = \int_E f_n d\mu,$$

როცა $E \subset X_n$ და $E \in \mathcal{S}$.

განვიხილოთ $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ფუნქცია. მაშინ

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(X_n) = \nu(X) < \infty.$$

ამრიგად, $f \in L(X, \mu)$. ამასთან გვექნება, რომ ნებისმიერი $E \in \mathcal{S}$ სიმრავლისათვის,

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E \cap X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E \cap X_n} f_n d\mu = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E \cap X_n} f d\mu = \int_E f d\mu. \end{aligned}$$

ამით ნაჩვენებია, რომ $\nu = \nu_f$.

თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა ნ.პ.1. თუ ν მუხტი წარმოდგება $f \in L(X, \mu)$ ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის სახით (ე.ი. $\nu = \nu_f$), მაშინ ასეთი f ფუნქცია ერთადერთია ეკვივალენტობის სიბუსტით. სახელდობრ, თუ $g \in L(X, \mu)$ და $\nu = \nu_g$, მაშინ g არის f -ის ეკვივალენტური μ ზომის მიხედვით.

აღვნიშნოთ $E = \{f - g > 0\}$ და $F = \{g - f > 0\}$. გვაქვს, რომ $\int_E (f - g) d\mu = \int_E f d\mu - \int_E g d\mu = 0$. შედეგად, თეორემა 8.4.5-ის კათელისწინებით, დაეასვენოთ, რომ $(f - g)(x) = 0$ თითქმის ყველგან E სიმრავლეზე. ანალოგიური მსჯელობით დავადგენთ $(g - f)(x) = 0$ ტოლობის შესრულებას თითქმის ყველგან F სიმრავლეზე. ამით, ცხადია, ნაჩვენები იქნება f და g ფუნქციების ეკვივალენტობა.

შენიშვნა ნ.პ.2. რადონ-ნიკოდიმის თეორემაში μ ზომის σ -შემოსაზღვრელობის მოთხოვნა არსებითია. მოვიყვანოთ ამის დამადასტურებელი მაგალითი. განვიხილოთ (X, S, μ) სივრცე, სადაც $X = [0, 1]$, S არის $[0, 1]$ -ის ლებეგის ამრით ზომად ქვესიმრავლეთა კლასი, ხოლო μ კი წარმოადგენს S -ზე განსაზღვრულ დამთვლელ ზომას. ν მუხტის როლში ავიღოთ ლებეგის ზომა $[0, 1]$ მონაკვეთზე. ადვილი დასანახია, რომ ν შემოსაზღვრული ზომაა და ν აბსოლუტურად უწყვეტია μ -ს მიმართ. დავამტკიცოთ, რომ არ არსებობს $f \in L(X, \mu)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც $\nu = \nu_f$. მართლაც, დაეუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ ყოველი ერთელემენტური $\{x\}$ სიმრავლისთვის გექნება: $0 = \nu(\{x\}) = \int_{\{x\}} f d\mu = f(x)$. შედეგად, f იგივეურად ნულოვანი ფუნქციაა, რის გამოც ν_f იგივეურად ნულის ტოლი ზომა გამოვა. აქედან გამომდინარე, ν_f ვერ დაემთხვევა არანულოვან ν ზომას. მიღებული წინააღმდეგობის ძალით, μ და ν ზომებისათვის რადონ-ნიკოდიმის თეორემის დასყენა არ სრულდება.

§ 4. რადონ-ნიკოდიმის წარმოებულის

ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა და ν არის S -ზე განსაზღვრული მუხტი. თუ ν წარმოდგება $f \in L(X, \mu)$ ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის სახით, ე.ი.

$$\nu(E) = \int_E f d\mu \quad (E \in S),$$

მაშინ f ფუნქციას უწოდებენ ν მუხტის რადონ-ნიკოდიმის წარმოებულს (ან, სხვაგვარად, სიმკვრივეს) μ ზომის მიმართ. ასეთ შემთხვევაში, f ფუნქციისათვის იყენებენ $\frac{d\nu}{d\mu}$ აღნიშვნას. როგორც უკვე დავამტკიცეთ, ნებისმიერი შემოსაზღვრული და აბსოლუტურად უწყვეტი ν მუხტისათვის არსებობს მისი რადონ-ნიკოდიმის წარმოებული.

შენიშნოთ, რომ რადონ-ნიკოდიმის წარმოებული ცალსახად განისაზღვრება μ ზომის მიხედვით ეკვივალენტობის სიმუსტით (იხ. შენიშვნა 15.3.1). ადვილი შესამოწმებელია აგრეთვე, რომ ზომის რადონ-ნიკოდიმის წარმოებული თითქმის ყველგან არაუარყოფითი ფუნქციაა.

შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, თუ როგორ დაიყვანება ν ზომის მიხედვით ინტეგრება μ ზომის მიხედვით ინტეგრებაზე, იმ შემთხვევაში, როცა არსებობს $\frac{d\nu}{d\mu}$ წარმოებული.

თეორემა 15.4.1. ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა, ν არის S -ზე განსაზღვრული ზომა და ცნობილია, რომ არსებობს ν -ს რადონ-ნიკოდიმის წარმოებული μ -ს მიმართ, რომელიც f -ის ტოლია. მაშინ ნებისმიერი $g \in L(X, \nu)$ ფუნქციისათვის,

$$\int_X g d\nu = \int_X g f d\mu.$$

დამტკიცება. Ω -თი აღნიშნოთ ყველა იმ არაუარყოფითი $g \in L(X, \nu)$ ფუნქციის კლასი, რომლისთვისაც სრულდება თეორემის დასკვნა. ადვილი შემამოწმებელია, რომ:

1) Ω კლასი შეიცავს ნებისმიერი $E \in S, \nu(E) < \infty$, სიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციას;

2) Ω ჩაკეტილია შეკრებისა და არაუარყოფით სკალარზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ.

აღნიშნული ორი თვისებიდან გამომდინარე, Ω კლასი შეიცავს ნებისმიერ მარტივ არაუარყოფით g ფუნქციას, რომელიც ჯამებადია ν ზომის მიხედვით.

ვაჩვენოთ, რომ Ω კლასი შეიცავს ნებისმიერ არაუარყოფით $g \in L(X, \nu)$ ფუნქციას, საიდანაც უშუალოდ დაეასკენით თეორემის საშარტლიანობას.

განვიხილოთ ნებისმიერი არაუარყოფითი $g \in L(X, \nu)$ ფუნქცია. თეორემა 7.5.1-ის ძალით (იხ. აგრეთვე, შენიშვნა 7.5.1) მოიძებნება მარტივ არაუარყოფით $g_n \in L(X, \nu)$ ფუნქციათა მიმდევრობა, რომელიც ყოველ წერტილში კრებადია g ფუნქციისაკენ. მაშინ $(g_n f)$ იქნება ზომად არაუარყოფით ფუნქციათა ზრდადი მიმდევრობა, რომელიც ყოველ წერტილში კრებადია $g f$ ფუნქციისაკენ და აკმაყოფილებს პირობას:

$$\int_X g_n d\nu = \int_X g_n f d\mu \quad (n \in \mathbb{N}).$$

ახლა, თუ გამოვიყენებთ ლევის თეორემას (g_n) და $(g_n f)$ მიმდევრობებისათვის, დაეასკენით, რომ სრულდება ტოლობა:

$$\int_X g d\nu = \int_X g f d\mu.$$

შედეგად, g ეკუთვნის Ω კლასს. ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

რადონ-ნიკოდიმის წარმოებულს აქვს ჩვეულებრივი წარმოებულის მსგავსი ბოგიერითი თვისება. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 15.4.2. ვთქვათ, (X, S) ზომადი სივრცეა, ხოლო μ, ν და λ არიან S -ზე განსაზღვრული ზომები. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

- თუ არსებობენ $\frac{d\nu}{d\mu}$ და $\frac{d\lambda}{d\mu}$, მაშინ არსებობს $\frac{d(\nu+\lambda)}{d\mu}$ და $\frac{d(\nu+\lambda)}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\mu} + \frac{d\lambda}{d\mu}$;
- თუ არსებობენ $\frac{d\nu}{d\lambda}$ და $\frac{d\lambda}{d\mu}$, მაშინ არსებობს $\frac{d\nu}{d\mu}$ და $\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\mu}$;
- თუ არსებობენ $\frac{d\nu}{d\mu}$ და $\frac{d\mu}{d\nu}$, მაშინ $\frac{d\mu}{d\nu} = \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^{-1}$.

დამტკიცება. პირველი წინადადება წარმოადგენს ინტეგრალის ადიციურობის თვისების შედეგს.

დავადგინოთ მეორე წინადადება. აღვნიშნოთ $g = \frac{d\nu}{d\lambda}$ და $f = \frac{d\lambda}{d\mu}$. მაშინ ნებისმიერი $E \in S$ სიმრავლისათვის გვაქვება,

$$\nu(E) = \int_E g d\lambda = \int_X g \chi_E d\lambda.$$

შემდეგ, თეორემა 15.4.1-ის ძალით დაეწერთ,

$$\nu(E) = \int_X g \chi_E f d\mu = \int_E g f d\mu.$$

აქედან გამომდინარე დაეასკენით, რომ $g f$ ფუნქცია წარმოადგენს $\frac{d\nu}{d\mu}$ წარმოებულს.

მესამე წინადადების დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ მეორე წინადადება (ν, μ, ν) სამეულისათვის. შედეგად,

$$1 = \frac{d\nu}{d\nu} = \frac{d\nu}{d\mu} \frac{d\mu}{d\nu}.$$

საიდანაც ვლევულობთ საჭირო ტოლობას. □

ამოცანები

1. ვთქვათ, (X, S) ზომადი სივრცეა და ν მუხტია S -ზე. იპოვეთ $\frac{d\nu^+}{d|\nu|}$ და $\frac{d\nu^-}{d|\nu|}$.

§ 5. ლებეგის დაშლა

ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა, ხოლო ν არის S -ზე განსაზღვრული მუხტი. ν -ს ეუწოდოთ $A \in S$ სიმრავლეზე აბსოლუტურად უწყვეტი μ -ს მიმართ, თუ $(E \subset A, E \in S, \mu(E) = 0) \Rightarrow \nu(E) = 0$.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, მუხტი შეიძლება არ იყოს აბსოლუტურად უწყვეტი ზომის მიმართ. შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ ზომისა და მუხტის σ -შემოსაზღვრულობის შემთხვევაში, მუხტის აბსოლუტურად უწყვეტობის დარღვევის გამოშვები განსაკუთრებულობა ყოველთვის თავს იყრის ნული ზომის რაღაც სიმრავლეზე (სხვაგვარად რომ ვთქვათ, ყოველი მუხტი აბსოლუტურად უწყვეტია სრული ზომის გარეშეულ სიმრავლეზე).

თეორემა 15.5.1. ვთქვათ, (X, S, μ) σ -შემოსაზღვრული ზომიანი სივრცეა, ხოლო ν არის S -ზე განსაზღვრული σ -შემოსაზღვრული მუხტი. მაშინ მოიძებნება სრულზომიანი A სიმრავლე (ე.ი. $A \in S$ და $\mu(X \setminus A) = 0$), რომელზეც ν მუხტი აბსოლუტურად უწყვეტია μ ზომის მიმართ.

დამტკიცება. შემოვიფარგლოთ იმ შემთხვევის განხილვით, როცა μ და ν შემოსაზღვრულ ზომებს წარმოადგენენ. ზოგადი შემთხვევა სტანდარტული მსჯელობით დაიყვანება აღნიშნულზე, თუ გამოვიყენებთ მუხტის ჯორდანის დამლას და სიერეს დავყოფთ თვლადი რაოდენობის ნაწილებად, რომელთაგან თითოეულზე შემოსაზღვრული იქნებიან μ და ν ფუნქციები.

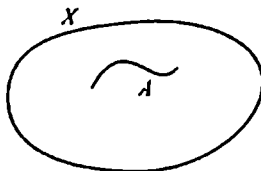
ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -სთვის განვიხილოთ $\nu - n\mu$ მუხტი და მისი პანის დამლა - (A_n, B_n) , სადაც A_n უარყოფითი სიმრავლეა, ხოლო B_n კი - დადებითი. A -თი აღვნიშნოთ A_n სიმრავლეების გაერთიანება, სოლო B -თი - B_n სიმრავლეების თანაყვეთა. ცხადია, A და B ურთიერთდამატებითი ზომადი სიმრავლეებია. შევნიშნოთ, რომ $\nu(B) \geq n\mu(B)$ შეფასება სამართლიანი ნებისმიერი n -სთვის, რის გამოც $\mu(B) = 0$.

ვთქვათ, $E \in S$, $E \subset A$ და $\mu(E) = 0$. მაშინ $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap A_n)$ და ყოველი n -სთვის, $\nu(E \cap A_n) \leq n\mu(E \cap A_n) \leq n\mu(E) = 0$. შედეგად, $\nu(E) = 0$. ამით დაეადგინეთ, რომ A სიმრავლეზე ν აბსოლუტურად უწყვეტია μ -ს მიმართ. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ვთქვათ, (X, S) ზომადი სივრცეა, ხოლო ν არის S კლასზე განსაზღვრული მუხტი. ამბობენ, რომ ν თავმოყრილია $A \subset X$ სიმრავლეზე, თუ $(E \subset X \setminus A, E \in S) \Rightarrow \nu(E) = 0$.

ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა, ხოლო ν არის S კლასზე განსაზღვრული მუხტი. ν მუხტს უწოდებენ სინგულარულს μ ზომის მიმართ (აღნიშვნა: $\nu \perp \mu$), თუ ν თავმოყრილია μ ზომის მიხედვით ნულზომიან რაიმე A სიმრავლეზე (ნახ. 15.2).

ადვილი დასანახია, რომ სინგულარული მუხტი არ შეიძლება იყოს აბსოლუტურად უწყვეტი, გარდა იმ შემთხვევისა, როცა ის იგივერად ნულის ტოლია. სინგულარულობას შეიძლება შევხედოთ, როგორც აბსოლუტურად უწყვეტობის საწინააღმდეგო ცნებას, რაც გამოიხატება იმაში, რომ თუ $\nu \perp \mu$, მაშინ ν მუხტი არანულოვან მნიშვნელობას შეიძლება ღებულობდეს მხოლოდ იმ სიმრავლეებზე, რომელთა μ ზომა ნულის ტოლია.



ნახ. 15.2.

ეთქვათ, (X, S) ზომადი სივრცეა, ხოლო ν არის S კლასზე განსაზღვრული მუხტი.

თეორემა 15.5.2. ეთქვათ, (X, S, μ) σ -შემოსაზღვრული ზომიანი სივრცეა, ხოლო ν არის S -ზე განსაზღვრული σ -შემოსაზღვრული მუხტი. მაშინ ν ერთადერთი გზით შეიძლება წარმოადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\nu = \nu_a + \nu_s,$$

სადაც ν_a და ν_s არიან S -ზე განსაზღვრული σ -შემოსაზღვრული მუხტები, რომელთაგან პირველი არის აბსოლუტურად უწყვეტი, მეორე კი სინგულარული μ ზომის მიმართ.

დამტკიცება. თეორემა 15.5.1-ის ძალით, არსებობს μ -ს მიხედვით სრულ-ზომიანი A სიმრავლე, რომელზეც ν აბსოლუტურად უწყვეტია μ -ს მიმართ. განვიხილოთ შემდეგნაირად განსაზღვრული ν_a და ν_s მუხტები:

$$\nu_a(E) = \nu(E \cap A) \quad (E \in S),$$

$$\nu_s(E) = \nu(E \cap (X \setminus A)) \quad (E \in S).$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ: 1) $\nu = \nu_a + \nu_s$; 2) ν_a და ν_s არიან σ -შემოსაზღვრული; და 3) ν_a აბსოლუტურად უწყვეტია μ -ს მიმართ. გარდა ამისა, ν_s თავმოყრილია μ -ს მიხედვით ნული ზომის მქონე $X \setminus A$ სიმრავლეზე, რის გამოც, ν_s სინგულარულია μ -ს მიმართ. ამით სასურველი წარმოდგენის არსებობა ნაჩვენებია.

რაც შეეხება წარმოდგენის ერთადერთობას. ცნობილი სქემის გამოყენებით შეიძლება შემოვიფარგლოთ იმ შემთხვევის განხილვით, როცა μ და ν შემოსაზღვრულები არიან. დაეუშვათ, რომ $\tilde{\nu}_a$ და $\tilde{\nu}_s$ მუხტები აგრეთვე აკმაყოფილებენ ν -ს წარმოდგენისათვის მოთხოვნილ პირობებს. მაშინ μ -ს მიხედვით ნული ზომის მქონე ნებისმიერ E სიმრავლეზე ორივე ν_a და $\tilde{\nu}_a$ მუხტი ნულის ტოლია (მათი აბსოლუტურად უწყვეტობის გამო). ეს კი, $\nu_a + \nu_s = \tilde{\nu}_a + \tilde{\nu}_s$ ტოლობის გათვალისწინებით, იწვევს იმას, რომ ν_s და $\tilde{\nu}_s$ მუხტები ტოლ მნიშვნელობებს ღებულობენ ნებისმიერ ნული ზომის მქონე სიმრავლეზე. თავის მხრივ, ეს უკანასკნელი პირობა, ν_s და $\tilde{\nu}_s$ მუხტების სინგულარულობის საფუძველზე, ადვილი დასაწახია. რომ იწვევს ν_s და $\tilde{\nu}_s$ მუხტების ტოლობას. შედეგად,

ტოლი იქნებიან ν_a და μ_a მუხტებიც. ამით წარმოდგენის ერთადერთობა და მასთან ერთად თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

მუხტის დაშლას აბსოლუტურად უწყვეტ და სინგულარულ კომპონენტებად ლებეგის დაშლას უწოდებენ.

შენიშვნა 15.5.1. თეორემა 15.5.2-ის დამტკიცებიდან ნათლად ჩანს, რომ:

- თუ ν მუხტი შემოსაზღვრულია, მაშინ მისი ν_a და ν_s კომპონენტებიც აგრეთვე შემოსაზღვრული არიან;
- თუ ν მუხტი წარმოადგენს ზომას, მაშინ მისი ν_a და ν_s კომპონენტებიც აგრეთვე ზომებს წარმოადგენენ.

ეთქვას, (X, S) ზომადი სივრცეა, ხოლო ν არის S კლასზე განსაზღვრული მუხტი. $A \in S$ სიმრავლისათვის ν მუხტის A -კომპონენტი ეწოდოთ შემდეგნაირად განსაზღვრულ ν_A მუხტს:

$$\nu_A(E) = \nu(E \cap A) \quad (E \in S).$$

შენიშვნა 15.5.2. თეორემა 15.5.2-ის დამტკიცების პროცესში დადგენილი იქნა შემდეგი დებულება: X სივრცე შეიძლება დაეყოს სრულზომიან და ნულზომიან ნაწილებად, რომელთაგან პირველზე მუხტის კომპონენტი აბსოლუტურად უწყვეტია, ხოლო მეორეზე კი - სინგულარული.

ამოცანები

1. ეთქვას, (X, S) ზომადი სივრცეა, μ და ν ზომებია S -ზე და $\nu \perp \mu$. იპოვეთ $\frac{d\nu}{d(\mu+\nu)}$.
2. ეთქვას, (X, S) ზომადი სივრცეა და ν მუხტია S -ზე. აჩვენეთ, რომ $\nu^- \perp \nu^+$.
3. ეთქვას, (X, S) ზომადი სივრცეა, μ , ν და λ შემოსაზღვრული ზომებია S -ზე და $\nu \perp \mu$, $\lambda \perp \mu$. აჩვენეთ, რომ $\nu + \lambda \perp \mu$.
4. ეთქვას, θ კანტორის ფუნქციაა, ν არის θ -თი წარმოქმნილი ლებეგ-სტილტისის ზომის შემლუღება $[0, 1]$ მონაკვეთის ბორელის სიმრავლეთა კლასზე, ხოლო μ არის ლებეგის ზომის შემლუღება $[0, 1]$ მონაკვეთის ბორელის სიმრავლეთა კლასზე. აჩვენეთ, რომ $\nu \perp \mu$.

§ 6. ლებეგის დაშლა უწყვეტი ზომის მქონე სივრცეებისთვის

თეორემა 15.6.1. ეთქვას, (X, S) ზომადი სივრცეა, რომელშიც ყოველი ერთელემენტური სიმრავლე ზომადია და ეთქვას, ν არის S -ზე განსაზღვრული σ -შემოსაზღვრული მუხტი. მაშინ

$$P = \{x \in X : \nu(\{x\}) \neq 0\}$$

სიმრავლე არაუშეტეს თვლადია.

დამტკიცება. სტანდარტული სქემის გამოყენებით შეიძლება შემოვიფარგლოთ იმ შემთხვევის განხილვით, როცა ν არის შემოსაზღვრული ზომა. აღენიშნოთ

$$P_n = \{x \in X : \nu(\{x\}) \geq 1/n\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

მაშინ ცხადია, რომ P_n -ის ელემენტთა რაოდენობა არ აღემატება $n\nu(X)$ რიცხს. შედეგად, $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ ტოლობის გათვალისწინებით, ეასენით P სიმრავლის არაუმეტეს თელადობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

მუხტს ეწოდება უწყვეტი, თუ ნებისმიერი ერთელემენტიანი სიმრავლე შედის მისი განსაზღვრის არეში და მასზე მუხტის მნიშვნელობა ნულის ტოლია.

მუხტს ეწოდება დისკრეტული, თუ ის თავმოყრილია რაიმე არაუმეტეს თელად სიმრავლეზე.

ეთქვას, ν დისკრეტული მუხტია, რომელიც თავმოყრილია არაუმეტეს თელად A სიმრავლეზე. თუ A სიმრავლის ელემენტებს გადაეხმორათ: $A = \{a_k \mid k \in N \subset \mathbb{N}\}$ და აღენიშნათ $p_k = \nu(\{a_k\})$, მაშინ აღვილი დასაწახია, რომ

$$\nu(E) = \sum_{k: a_k \in E \cap A} p_k \quad (E \in S).$$

თეორემა 15.6.1-დან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი ლეზულბა.

თეორემა 15.6.2. ვთქვათ, (X, S) ზომადი სივრცეა, რომელშიც ყოველი ერთელემენტიანი სიმრავლე ზომადია და ვთქვათ, ν არის S -ზე განსაზღვრული σ -შემოსაზღვრული მუხტი. დაეუწვათ,

$$P = \{x \in X : \nu(\{x\}) \neq 0\}.$$

მაშინ ν მუხტის P -კომპონენტი დისკრეტულია, ხოლო $X \setminus P$ -კომპონენტი კი უწყვეტი.

თეორემა 15.6.3. ვთქვათ, (X, S) ზომადი სივრცეა, რომელშიც ყოველი ერთელემენტიანი სიმრავლე ზომადია და ვთქვათ, ν არის S -ზე განსაზღვრული σ -შემოსაზღვრული მუხტი. მაშინ ν ერთადერთი გზით წარმოდგება შემდეგი სახით:

$$\nu = \nu_c + \nu_d,$$

სადაც ν_c არის უწყვეტი მუხტი, ხოლო ν_d კი - დისკრეტული.

დამტკიცება. ვთქვათ, $P = \{x \in X : \nu(\{x\}) \neq 0\}$. მაშინ, თეორემა 15.6.2-ის ძალით, $\nu_c = \nu_{X \setminus P}$ და $\nu_d = \nu_P$ მუხტები აკმაყოფილებენ წარმოდგენისთვის საჭირო პირობებს. ასე რომ, დასამტკიცებელი გერჩება წარმოდგენის ერთადერთობა. შემოვიფარგლოთ იმ შემთხვევით, როცა ν შემოსაზღვრულია (ზოგადი შემთხვევა მარტივად დაიყვანება აღნიშნულზე). დაეუწვათ, ν_c და ν_d მუხტები ასევე იძლევიან სასურველ წარმოდგენას. მაშინ ν_c და ν_d

მუხტები მათი უწყვეტობის გამო ნულის ტოლ მნიშვნელობას მიიღებენ ყოველ ეროვნულმენტთან სიმრავლეზე. შედეგად, $\nu_c + \nu_d = \bar{\nu}_c + \bar{\nu}_d$ ტოლობის ძალით, ν_d და $\bar{\nu}_d$ მუხტები ტოლ მნიშვნელობებს მიიღებენ ყოველ ერთეულმენტთან სიმრავლეზე. აქედან კი, ν_d და $\bar{\nu}_d$ მუხტების დისკრეტულობის გათვალისწინებით, დაფასებით მათ იგივეურად ტოლობას, რის გამოც იგივეურად ტოლი იქნებიან ν_c და $\bar{\nu}_c$ მუხტებიც. ამით წარმოდგენის ერთადერთობა დადგენილია. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა, რომლის ზომა უწყვეტია და ვთქვათ, ν არის S -ზე განსაზღვრული მუხტი. ადვილი შესამოწმებელია, რომ საძირ-თლიანია შემდეგი წინადადებები:

- თუ ν აბსოლუტურად უწყვეტია μ -ს მიმართ, მაშინ ν უწყვეტია;
- თუ ν დისკრეტულია, მაშინ ν სინგულარულია μ -ს მიმართ.

ქვემოთ მოცემული თეორემები გვიჩვენებენ, რომ უწყვეტი ზომის მქონე სივრცეებისათვის ლებეგის დამლა ექვემდებარება საინტერესო დამზუსტებას.

თეორემა 15.6.4. ვთქვათ, (X, S, μ) σ -შემოსაზღვრული ზომიანი სივრცეა, რომლის ზომა უწყვეტია, და ვთქვათ, ν არის S -ზე განსაზღვრული σ -შემოსაზღვრული მუხტი. მაშინ სივრცე შეიძლება დაგვით სამ წყვილ-წყვილად თანაუგვეთ ზომად ქვესიმრავლეად, რომელთაგან პირველზე ν მუხტის კომპონენტი აბსოლუტურად უწყვეტია μ -ს მიმართ, მეორეზე - სინგულარული μ -ს მიმართ და უწყვეტი, ხოლო მესამეზე კი - დისკრეტული.

დამტკიცება. 15.5.2 შენიშვნის ძალით მოიძებნება სრული ზომის მქონე A სიმრავლე, ისეთი, რომ ν_A აბსოლუტურად უწყვეტია, ხოლო $\nu_{X \setminus A}$ კი - სინგულარული. შემდეგ განვიხილოთ სიმრავლე

$$P = \{x \in X : \nu(\{x\}) \neq 0\}.$$

გვეჩვენება, რომ $P \subset X \setminus A$. თეორემა 15.6.2-ის ძალით $\nu_{X \setminus A}$ მუხტის P -კომპონენტი დისკრეტულია, ხოლო $(X \setminus P)$ -კომპონენტი კი - სინგულარული და უწყვეტი. ადვილი დასაანახია, რომ:

- 1) $\nu_{X \setminus A}$ მუხტის P -კომპონენტი უდრის ν_P -ს;
- 2) $\nu_{X \setminus A}$ -ს $(X \setminus P)$ -კომპონენტი უდრის $\nu_{X \setminus (A \cup P)}$ -ს.

ამრიგად, A , $X \setminus (A \cup P)$ და P სიმრავლეები გვაძლევენ სივრცის საძიებელ დამლას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 15.6.5. ვთქვათ, (X, S, μ) σ -შემოსაზღვრული ზომიანი სივრცეა, რომლის ზომა უწყვეტია, და ვთქვათ, ν არის S -ზე განსაზღვრული

σ -შემოსაზღვრული მუხტი. მაშინ ν ერთადერთი გზით შეიძლება წარმოგადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\nu = \nu_a + \nu_{sc} + \nu_d,$$

სადაც ν_a , ν_{sc} და ν_d არიან S -ზე განსაზღვრული σ -შემოსაზღვრული მუხტები, რომელთაგან პირველი არის აბსოლუტურად უწყვეტი μ -ს მიმართ, მეორე - სინგულარული μ -ს მიმართ და უწყვეტი, ხოლო მესამე კი - დისკრეტული.

დამტკიცება. ეთქვათ, A_1 , A_2 და A_3 არიან სიმრავლეები, რომელთა არსებობა უზრუნველყოფილია თეორემა 15.6.4-ის ძალით. მაშინ ცხადია, რომ $\nu_a = \nu_{A_1}$, $\nu_{sc} = \nu_{A_2}$ და $\nu_d = \nu_{A_3}$ მუხტები მოგვცემენ ν მუხტის სასურველი თვისებების მქონე წარმოდგენას. დასამტკიცებელი გვრჩება წარმოდგენის ერთადერთობა. დაეუშვათ $\hat{\nu}_a$, $\hat{\nu}_{sc}$ და $\hat{\nu}_d$ მუხტები ასევე იძლევიან სასურველ წარმოდგენას. აღვნიშნოთ

$$\nu_a = \nu_{ac} + \nu_d, \quad \hat{\nu}_a = \hat{\nu}_{sc} + \hat{\nu}_d.$$

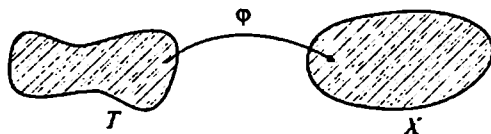
გვაქვს, რომ $\nu = \nu_a + \nu_s$ და $\hat{\nu} = \hat{\nu}_a + \hat{\nu}_s$. ახლა თუ გავითვალისწინებთ ν_s და $\hat{\nu}_s$ მუხტების სინგულარულობას, თეორემა 15.5.2-ის ძალით დავასკვნით, რომ $\nu_a = \hat{\nu}_a$ და $\nu_s = \hat{\nu}_s$. ამის შემდეგ, ν_s მუხტისადმი თეორემა 15.6.3-ის გამოყენებით ველებულობთ ტოლობებს: $\nu_{sc} = \hat{\nu}_{sc}$ და $\nu_d = \hat{\nu}_d$. ამით წარმოდგენის ერთადერთობა და მასთან ერთად თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა წ.წ.1. თეორემა 15.6.5-ის დამტკიცებიდან ნათლად ჩანს, რომ:

- თუ ν მუხტი შემოსაზღვრულია, მაშინ მისი ν_a , ν_{sc} და ν_d კომპონენტებიც აგრეთვე შემოსაზღვრული არიან;
- თუ ν მუხტი წარმოადგენს ზომას, მაშინ მისი ν_a , ν_{sc} და ν_d კომპონენტებიც აგრეთვე ზომებს წარმოადგენენ.

§ 7. ცვლადის შეცვლა ლებეგის ინტეგრალში

ეთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა, ხოლო f არის რაიმე T სიმრავლიდან X სივრცეში მოქმედი ბიექცია (ნახ. 15.3).



ნახ. 15.3.

ა ბიექციის მეშვეობით შესაძლებელია ზომის სტრუქტურით აღვჭურვოთ T სიმრავლე. კერძოდ, $\varphi^{-1}(S)$ ჩანაწერით აღვნიშნოთ $\{\varphi^{-1}(A) \mid A \in S\}$ კლასი, ხოლო $\mu \circ \varphi$ ჩანაწერით - $\varphi^{-1}(S)$ კლასზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია:

$$(\mu \circ \varphi)(\varphi^{-1}(A)) = \mu(A) \quad (A \in S).$$

აღვილი შესამოწმებელია, რომ $\varphi^{-1}(S)$ კლასი არის σ -ალგებრა, ხოლო $\mu \circ \varphi$ ფუნქცია არის ზომა.

თეორემა 5.7.1 ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა, ხოლო φ არის რაიმე T სიმრავლიდან X სივრცეში მოქმედი ბიექცია. მაშინ ნებისმიერი $f \in L(X, \mu)$ ფუნქციისათვის გვაქვს, რომ $f \circ \varphi \in L(T, \mu \circ \varphi)$ და

$$\int_X f d\mu = \int_T (f \circ \varphi) d(\mu \circ \varphi).$$

დამტკიცება. Ω -თი აღვნიშნოთ ყველა იმ არაუარყოფითი $f \in L(X, \mu)$ ფუნქციის კლასი, რომლისთვისაც სრულდება თეორემის დაცემა. აღვილი შემამოწმებელია, რომ:

1) Ω კლასი შეიცავს ნებისმიერი $A \in S, \mu(A) < \infty$, სიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციას;

2) Ω ჩაეტილია შეკრებისა და არაუარყოფით სკალარზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ.

აღნიშნული ორი თვისებიდან გამომდინარე, Ω კლასი შეიცავს ნებისმიერ მარტივ არაუარყოფით f ფუნქციას, რომელიც ჯამებადია.

ვაჩვენოთ, რომ Ω კლასი შეიცავს ნებისმიერ არაუარყოფით $f \in L(X, \mu)$ ფუნქციას, საიდანაც უშუალოდ დავასკვნით თეორემის სამართლიანობას.

განვიხილოთ ნებისმიერი არაუარყოფითი $f \in L(X, \mu)$ ფუნქცია. თეორემა 7.5.1-ის ძალით (იხ. აგრეთვე, შენიშვნა 7.5.1) მოიძებნება მარტივ არაუარყოფით $f_n \in L(X, \mu)$ ფუნქციათა მიმდევრობა, რომელიც ყოველ წერტილში კრებადია f ფუნქციისაკენ. მაშინ $(f_n \circ \varphi)$ იქნება მარტივ არაუარყოფით ფუნქციათა ზრდადი მიმდევრობა, რომელიც ყოველ წერტილში კრებადია $f \circ \varphi$ ფუნქციისაკენ და დადგამყოფილეს პირობას:

$$\int_X f_n d\mu = \int_T (f_n \circ \varphi) d(\mu \circ \varphi) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

შეგვიხსენებთ, რომ f_n ფუნქციები მარტივია (X, S, μ) სივრცესთან მიმართებაში, ხოლო $f_n \circ \varphi$ ფუნქციები კი - $(T, \varphi^{-1}(S), \mu \circ \varphi)$ სივრცესთან მიმართებაში. ახლა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ზომად ფუნქციათა მიმდევრობის ზღვარი ზომადია და გამოვიყენებთ ლევის თეორემას (f_n) და $(f_n \circ \varphi)$ მიმდევრობისათვის, დავასკვნით, რომ $f \circ \varphi$ ფუნქცია $(\mu \circ \varphi)$ -ზომადია და სრულდება

ტოლობა:

$$\int_X f d\mu = \int_T (f \circ \varphi) d(\mu \circ \varphi).$$

შედეგად, f ეკუთვნის Ω კლასს, ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შემდეგი ლემულება გამომდინარეობს 15.7.1 და 15.4.1 თეორემებიდან.

შენიშვნა 15.7.1. დამტკიცების ანალიზი ცხადყოფს, რომ თეორემა 15.7.1-ის ანალოგიური ლემულება სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როცა f ფუნქციისაგან ნაცვლად ჯამებადობის პირობისა, მოითხოვება არაუარყოფითობა და ზომადობა. კერძოდ, ამ სიტუაციაში $f \circ \varphi$ იქნება ზომადი ($\mu \circ \varphi$ ზომის მიმართ) და შესრულდება $\int_X f d\mu = \int_T (f \circ \varphi) d(\mu \circ \varphi)$ ტოლობა. აქვე შევნიშნავთ, რომ იგივე შეიძლება ითქვას ამ და მომდევნო პარაგრაფის სხვა თეორემებზეც ცვლადის შეცვლის შესახებ.

თეორემა 15.7.2. ვთქვათ, (X, S, μ) და (T, H, ν) ზომიანი სივრცეებია, ხოლო φ არის T -დან X -ში მოქმედი ბიექცია. თუ $H = \varphi^{-1}(S)$ და ცნობილია, რომ არსებობს $\mu \circ \varphi$ ზომის რადონ-ნიკოდიმის წარმოებულ ν ზომის მიმართ, მაშინ ნებისმიერი $f \in L(X, \mu)$ ფუნქციისათვის გვაქვს, რომ $(f \circ \varphi) \frac{d(\mu \circ \varphi)}{d\nu} \in L(T, \nu)$ და

$$\int_X f d\mu = \int_T (f \circ \varphi) \frac{d(\mu \circ \varphi)}{d\nu} d\nu.$$

თეორემა 15.7.3. ვთქვათ, X და T არადაცარიელი ღია სიმრავლეებია $\mathbb{R}^n$ სივრცეში, ხოლო $\varphi : T \rightarrow X$ ასახვა არის დიფეომორფიზმი. მაშინ ნებისმიერი $f \in L(X, m)$ ფუნქციისათვის გვაქვს, რომ $(f \circ \varphi) J_\varphi \in L(T, m)$ და

$$\int_X f(x) dm(x) = \int_T f[\varphi(t)] |J_\varphi(t)| dm(t).$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ზომიანი სივრცეები, რომლებიც მიიღება ლებეგის ზომის შემზღუდით X და T სიმრავლეებზე, ე.ი. საუბარია (X, S, μ) და (T, H, ν) სივრცეებზე, სადაც $S = \mathcal{L} \cap X$, $\mu = m_X$, $H = \mathcal{L} \cap T$ და $\nu = m_T$.

φ და φ^{-1} ფუნქციებისათვის თეორემა 10.6.5-ის გამოყენებით ვლუბოთ, რომ $\mu \circ \varphi$ ზომის განსაზღვრის არე ემთხვევა ν ზომის განსაზღვრის არეს (ე.ი. $\varphi^{-1}(S) = H$). ამის შემდეგ, კვლავ თეორემა 10.6.5-ის გამოყენებით (ამჟამად, მხოლოდ φ ფუნქციისათვის), დავასკვნით, რომ არსებობს $\mu \circ \varphi$ ზომის რადონ-ნიკოდიმის წარმოებულ ν ზომის მიმართ, რომელიც $|J_\varphi|$ ფუნქციის ტოლია. აქედან, თეორემა 15.7.2-ის საფუძველზე ვლუბოთ საჭირო დასკვნას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

§ 8. ცვლადის შეცვლა ლებეგის ინტეგრალში (ერთგანზომილებიანი შემთხვევა)

ამ პარაგრაფში დადგენილი ლებეგის გეჩიყენებენ, რომ ერთგანზომილებიან მონაკვეთზე ლებეგის ზომის მიხედვით ჯამებადი ფუნქციებისათვის დასაშვებია ცვლადის შეცვლათა უფრო ზოგადი კლასი, ვიდრე ამას უზრუნველყოფს თეორემა 15.7.3. კერძოდ, ცვლადის გარდაქმნად დიფეომორფიზმების მსგავსად, შეიძლება წარმატებით გამოყენებული იქნან აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციები.

თეორემა 15.8.1 ვთქვათ, X და T რაიმე გადაუგვარებელი სეგმენტებია, ხოლო $\varphi: T \rightarrow X$ არის მკაცრად ზრდადი და აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია, რომლის შებრუნებული φ^{-1} ფუნქცია ასევე აბსოლუტურად უწყვეტია. მაშინ ნებისმიერი $f \in L(X)$ ფუნქციისათვის გვაქვს, რომ $(f \circ \varphi)\varphi' \in L(T)$ და

$$\int_X f(x)dm(x) = \int_T f[\varphi(t)]\varphi'(t)dm(t).$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ზომიანი სივრცეები, რომლებიც მიიღება ლებეგის ზომის შემლუღვით X და T მონაკვეთებზე, ე.ი. საუბარია (X, S, μ) და (T, H, ν) სივრცეებზე, სადაც $S = \mathcal{L} \cap X$, $\mu = m_X$, $H = \mathcal{L} \cap T$ და $\nu = m_T$.

φ და φ^{-1} ფუნქციებისათვის თეორემა 13.3.5-ის გამოყენებით ვღებულობთ, რომ $\mu \circ \varphi$ ზომის განსაზღვრის არე ემთხვევა ν ზომის განსაზღვრის არეს (ე.ი. $\varphi^{-1}(S) = H$). ამის შემდეგ, კვლავ თეორემა 13.3.5-ის გამოყენებით (ამჟამად, მხოლოდ φ ფუნქციისათვის) დავასკვნით, რომ არსებობს $\mu \circ \varphi$ ზომის რადონიკოდიმის წარმოებული ν ზომის მიმართ, რომელიც φ' ფუნქციის ტოლია. აქედან, თეორემა 15.7.2-ის საფუძველზე ვღებულობთ საჭირო დასკვნას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

სამართლიანია თეორემა 15.8.1-ის შემდეგი განზოგადება.

თეორემა 15.8.2. ვთქვათ, X და T რაიმე გადაუგვარებელი სეგმენტებია, ხოლო $\varphi: T \rightarrow X$ არის მკაცრად ზრდადი და აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია. მაშინ ნებისმიერი $f \in L(X)$ ფუნქციისათვის გვაქვს, რომ $(f \circ \varphi)\varphi' \in L(T)$ და

$$\int_X f(x)dm(x) = \int_T f[\varphi(t)]\varphi'(t)dm(t).$$

შენიშვნა 15.8.1. განვიხილოთ (X, S, μ) და (T, H, ν) სივრცეები, რომლებიც მიიღება ლებეგის ზომის შემლუღვით, შესაბამისად, X და T მონაკვეთებზე. თეორემა 15.8.2-ის დამტკიცებისას თავს იჩენს დამატებითი სირთულე. განსხვავებით წინა თეორემის შემთხვევისაგან, უკვე საზოგადოდ შეუძლებელია

დავადგინოთ, რომ $\mu \circ \varphi$ ზომის რადონ-ნიკოდიშის წარმოებული φ' ფუნქციის ტოლია. კერძოდ, φ ფუნქციის თვისებები უკვე აღარ არის საჭირო იმის საჩვენებლად, რომ $\mu \circ \varphi$ ზომის განსაზღვრის არე ემთხვევა ν ზომის განსაზღვრის არეს (ე.ი. $\varphi^{-1}(S) = H$). აქ უშუალოდ მიიღება მხოლოდ $\varphi^{-1}(S) \supset H$ ჩართვა. როგორც ქვემოთ ვნახავთ, აღნიშნული სირთულის გადალახვა ხერხდება X და T სივრცეების გარკვეული „დავიწროვებით“.

ლემა 5.8.1. ვთქვათ, X და T რაიმე გადაუგვარებელი სეგმენტებია, ხოლო $\varphi : T \rightarrow X$ არის მკაცრად ზრდადი და აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია. მაშინ ლებეგის აზრით ზომადი ნებისმიერი A სიმრავლისათვის $f^{-1}(A)$ წინასახე წარმოდგება შემდეგნაირად: $f^{-1}(A) = E_1 \cup E_2$, სადაც E_1 არის ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლე, ხოლო E_2 შედის $\{\varphi' = 0\}$ სიმრავლეში.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ მოიძებნებიან ბორელის კლასის A_* და A^* სიმრავლეები შემდეგი თვისებებით: $A_* \subset A \subset A^*$ და $|A_*| = |A| = |A^*|$. მართლაც, თეორემა 6.2.2-ის ძალით, ყოველი n -სთვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ჩაკეტილი F_n და ღია G_n სიმრავლეები, რომელთათვისაც $F_n \subset A \subset G_n$ და $|A| - 1/n < |F_n| \leq |A| \leq |G_n| < |A| + 1/n$. მაშინ აღვილი დასანახია, რომ $A_* = \bigcup_n F_n$ და $A^* = \bigcap_n G_n$ სიმრავლეები აკმაყოფილებენ საჭირო მოთხოვნებს.

აღვნიშნოთ $E_* = f^{-1}(A_*)$, $E = f^{-1}(A)$ და $E^* = f^{-1}(A^*)$. ცხადია, $E_* \subset E \subset E^*$. φ ფუნქციის აბსოლუტურად უწყვეტობის საფუძველზე დავასკენით E_* და E^* სიმრავლეების ლებეგის აზრით ზომადობას, საიდანაც, თეორემა 13.3.5-ის გამოყენებით, მივიღებთ, რომ $|A_*| = \int_{E_*} \varphi'$ და $|A^*| = \int_{E^*} \varphi'$. შედეგად, $\int_{E_*} \varphi' dm = \int_{E^*} \varphi' dm$. აქედან, φ' ფუნქციის არაუარყოფითობის გათვალისწინებით დავასკენით, რომ $\varphi'(t) = 0$ თითქმის ყველგან $E^* \setminus E_*$ სიმრავლეზე (ე.ი. $(E^* \setminus E_*) \setminus \{\varphi' = 0\}$ არის ნული ზომის სიმრავლე). შედეგად, $E \setminus E_* \subset E^* \setminus E_*$ ჩართვის გამო, $(E \setminus E_*) \setminus \{\varphi' = 0\}$ სიმრავლე იქნება ნული ზომის.

აღვნიშნოთ $E_1 = E_* \cup ((E \setminus E_*) \setminus \{\varphi' = 0\})$ და $E_2 = (E \setminus E_*) \cap \{\varphi' = 0\}$. ცხადია, ასეთნაირად განსაზღვრული E_1 და E_2 სიმრავლეები აკმაყოფილებენ საჭირო მოთხოვნებს. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 5.8.2-ის დამტკიცება. თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ თეორემა 13.3.5-ის ძალით, $T(\{\varphi' = 0\})$ სიმრავლე ზომადია და

$$T(\{\varphi' = 0\}) = \int_{\{\varphi' = 0\}} \varphi' = 0.$$

აღვნიშნოთ

$$X_1 = X \setminus T(\{\varphi' = 0\}), \quad T_1 = T \setminus \{\varphi' = 0\}.$$

განვიხილოთ (X_1, S_1, μ_1) და (T_1, H_1, ν_1) სივრცეები, რომლებიც მიიღება ლე-ბეგის ზომის შეზღუდვით, შესაბამისად, X_1 და T_1 სიმრავლეებზე.

შევნიშნოთ, რომ φ ფუნქციის მოქმედებისას T_1 და X_1 სიმრავლეები არიან ურთიერთცალსახა თანადობაში, ამასთან, ლემა 15.8.1-ის ძალით, X_1 -ის ნებისმიერი ზომადი A ქვესიმრავლის $\varphi^{-1}(A)$ წინასახე არის ასევე ზომადი. ამის გათვალისწინებით, თუ φ_1 და φ'_1 ჩანაწერებით აღვნიშნავთ შესაბამისად φ და φ' ფუნქციების შეზღუდვებს T_1 სიმრავლეზე, მაშინ თეორემა 13.3.5-ის გამოყენებით დავასკენით, რომ $\mu_1 \circ \varphi_1$ ზომის განსაზღვრის არე ემთხვევა ν_1 ზომის განსაზღვრის არეს (ე.ი. $\varphi_1^{-1}(S_1) = H_1$) და არსებობს $\mu_1 \circ \varphi_1$ ზომის რადონ-ნიკოდიმის წარმოებული ν_1 ზომის მიმართ, რომელიც φ'_1 ფუნქციის ტოლია. აქედან, თეორემა 15.7.2-ის საფუძველზე ვღებულობთ, რომ ნებისმიერი $g \in L(X_1)$ ფუნქციისათვის,

$$\int_{X_1} g(x) d\mu(x) = \int_{T_1} g[\varphi_1(t)] \varphi'_1(t) d\nu(t). \quad (1)$$

განვიხილოთ ნებისმიერი $f \in L(X)$ ფუნქცია. თუ g -ს როლში ავიღებთ f ფუნქციის შეზღუდვას X_1 სიმრავლეზე, მაშინ (1) ტოლობის საფუძველზე გვექნება, რომ

$$\int_{X_1} f(x) d\mu(x) = \int_{T_1} f[\varphi(t)] \varphi'(t) d\nu(t). \quad (2)$$

ესადაა,

$$\int_T f[\varphi(t)] \varphi'(t) d\nu(t) = \int_{T_1} f[\varphi(t)] \varphi'(t) d\nu(t), \quad (3)$$

ხოლო $T(\{\varphi' = 0\})$ სიმრავლის ნულზომიანობის გამო,

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_{X_1} f(x) d\mu(x). \quad (4)$$

(2) – (4) ტოლობების ძალით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

რიმან-სტილტიესის ინტეგრალი

ამ თავში შეისწავლება რიმან-სტილტიესის ინტეგრალი, რომელიც შემოღებული იყო თ. სტილტიესის მიერ 1894 წ. რიმან-სტილტიესის ინტეგრალს მნიშვნელოვანი გამოყენებები აქვს მათემატიკურ ანალიზში, მექანიკაში, მათემატიკურ ფიზიკაში, ფუნქციონალურ ანალიზსა და ალბათობის თეორიაში.

§ 1. რიმან-სტილტიესის ინტეგრალის განსაზღვრა და ელემენტარული თვისებები

ვთქვათ, f და φ არიან $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული სასრული ფუნქციები. $[a, b]$ -ს მონიშნული (P, ξ) დანაწილებისათვის აღვნიშნოთ

$$\sigma_{f, \varphi}(P, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) [\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})].$$

$\sigma_{f, \varphi}(P, \xi)$ ჯამს უწოდებენ f ფუნქციის რიმან-სტილტიესის ინტეგრალურ ჯამს φ ფუნქციის მიმართ.

ამბობენ, რომ I რიცხვი არის $\sigma_{f, \varphi}(P, \xi)$ ჯამების ზღვარი, როცა დანაწილების $\lambda(P)$ პარამეტრი მიისწრაფვის ნულისაკენ (ჩანაწერი: $I = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma_{f, \varphi}(P, \xi)$), თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება $\delta > 0$, ისეთი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი მონიშნული (P, ξ) დანაწილებისათვის, რომლის პარამეტრი ნაკლებია δ -ზე, სრულდება შეფასება:

$$|\sigma_{f, \varphi}(P, \xi) - I| < \varepsilon.$$

$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma_{f, \varphi}(P, \xi)$ ზღვრის არსებობის შემთხვევაში ამბობენ, რომ f ფუნქცია რიმან-სტილტიესის აზრით ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე φ ფუნქციის მიმართ, ან კიდევ, არსებობს f ფუნქციის რიმან-სტილტიესის ინტეგრალი $[a, b]$ სეგმენტზე φ ფუნქციის მიმართ.

f ფუნქციის რიმან-სტილტიესის ინტეგრალი $[a, b]$ სეგმენტზე φ ფუნქციის მიმართ (მისი არსებობის შემთხვევაში) აღინიშნება $\int_{[a, b]} f d\varphi$ ან $\int_{[a, b]} f(x) d\varphi(x)$

ჩანაწერით და ინტეგრალის მნიშვნელობად მიიჩნევა $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma_{f,\varphi}(P, \xi)$ ზღვარი.

ცხადია, $\varphi(x) = x$ ($x \in [a, b]$) შემთხვევაში რიმან-სტილტესის ინტეგრალი წარმოადგენს რიმანის ინტეგრალს.

ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ფიქსირებული სეგმენტია, ხოლო f და φ - $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული სასრული ფუნქციები.

თეორემა 16.1.1. $\int_{[a,b]} f d\varphi$ რიმან-სტილტესის ინტეგრალი არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიპოვება $\delta > 0$, ისეთი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი მონიშნული (P, ξ) და (P', ξ') დანაწილებებისათვის, რომელთა პარამეტრები ნაკლებია δ -ზე, სრულდება შეფასება:

$$|\sigma_{f,\varphi}(P, \xi) - \sigma_{f,\varphi}(P', \xi')| < \varepsilon. \quad (1)$$

დამტკიცება. აუცილებლობასთან დაკავშირებული თეორემის ნაწილი ცხადია. ღვადაღნიოთ პირობის საკმარისობის გამომხატველი ღებულება. მონიშნული დანაწილებების $((P_n, \xi_n))$ მიმღევრობა შევარჩიოთ ისეთნაირად, რომ: $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(P_n) = 0$. მაშინ, (1) პირობის ძალით, $\sigma_{f,\varphi}(P_n, \xi_n)$ ჯამების მიმღევრობა იქნება ფუნდამენტური და შეღებად, კრებადი რაიმე I რიცხვისაკენ. ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma_{f,\varphi}(P, \xi) = I. \quad (2)$$

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$. ვიპოვოთ $\delta > 0$, რომლისთვისაც შესრულებულია (1) პირობა. ასევე ვიპოვოთ ნატურალური n , ისეთი, რომ სრულდებოდეს პირობები: $\lambda(P_n) < \delta$ და $|\sigma_{f,\varphi}(P_n, \xi_n) - I| < \varepsilon$. მაშინ δ -ზე მცირე პარამეტრის მქონე ნებისმიერი მონიშნული (P, ξ) დანაწილებისათვის გვექნება,

$$|\sigma_{f,\varphi}(P, \xi) - I| \leq |\sigma_{f,\varphi}(P, \xi) - \sigma_{f,\varphi}(P_n, \xi_n)| + |\sigma_{f,\varphi}(P_n, \xi_n) - I| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

ამით (2) ტოლობა და მასთან ერთად თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 16.1.2. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

- თუ არსებობს $\int_{[a,b]} f d\varphi$, მაშინ ნებისმიერი c რიცხვისათვის არსებობენ $\int_{[a,b]} (cf) d\varphi$ და $\int_{[a,b]} f d(c\varphi)$, ამასთან,

$$\int_{[a,b]} (cf) d\varphi = \int_{[a,b]} f d(c\varphi) = c \int_{[a,b]} f d\varphi;$$

- თუ არსებობენ $\int_{[a,b]} f_1 d\varphi$ და $\int_{[a,b]} f_2 d\varphi$, მაშინ არსებობს ინტეგრალი $\int_{[a,b]} (f_1 + f_2) d\varphi$ და

$$\int_{[a,b]} (f_1 + f_2) d\varphi = \int_{[a,b]} f_1 d\varphi + \int_{[a,b]} f_2 d\varphi;$$

- თუ არსებობენ $\int_{[a,b]} f d\varphi_1$ და $\int_{[a,b]} f d\varphi_2$, მაშინ არსებობს ინტეგრალი $\int_{[a,b]} f d(\varphi_1 + \varphi_2)$ და

$$\int_{[a,b]} f d(\varphi_1 + \varphi_2) = \int_{[a,b]} f d\varphi_1 + \int_{[a,b]} f d\varphi_2.$$

თეორემა 16.1.2-ის წინადადებები უშუალოდ მოწმდება რიმან-სტილტესის ინტეგრალის განსაზღვრის საფუძველზე.

შენიშვნა №1.1. რიმან-სტილტესის ინტეგრალი შეიძლება განესაზღვროთ ნებისმიერ მონაკვეთზე. მაგალითად, $\int_{(a,\infty)} f d\varphi$ ინტეგრალი განისაზღვრება როგორც $\lim_{a' \rightarrow a, b' \rightarrow \infty} \int_{[a',b']} f d\varphi$ ზღვარი, ამ უკანასკნელის არსებობის შემთხვევაში.

შენიშვნა №1.2. რიმან-სტილტესის ინტეგრალი შესაძლებელია შემოღებული იქნას მრავალგანზომილებიან შემთხვევაშიც. ვთქვათ, I არის გადაუგებელი სეგმენტი $\mathbb{R}^n$ სივრცეში, ხოლო f და φ მასზე მოცემული ფუნქციებია. $\int_I f d\varphi$ ინტეგრალი განისაზღვრება, როგორც შემდეგი ჯამების ზღვარი:

$$\sigma_{f,\varphi}(P, \xi) = \sum_{k=1}^m f(\xi_k) \Delta(\varphi, I_k),$$

სადაც (P, ξ) არის I -ს მონიშნული დანაწილება, $I_1, \dots, I_m$ არიან P დანაწილების შემადგენელი ქვესეგმენტები, ხოლო $\Delta(\varphi, I_k)$ კი აღნიშნავს φ ფუნქციის შერეულ სხეობას I_k ქვესეგმენტზე.

ჩვენ შემოვიფარგლებით ერთგანზომილებიანი რიმან-სტილტესის ინტეგრალის შემთხვევის განხილვით.

ამოცანები

1. ვთქვათ, φ ღირიხლეს ფუნქციაა $[a, b]$ მონაკვეთზე. აჩვენეთ, რომ $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალი არსებობს მხოლოდ იგივერად ნულის ტოლი f ფუნქციის შემთხვევაში.
2. ააგეთ შემოუსაზღვრელი ფუნქციები f და φ , რომელთათვისაც არსებობს $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალი.
3. დაამტკიცეთ, რომ $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალის არსებობიდან გამომდინარეობს $\int_{[a,b]} |f| d\varphi$ ინტეგრალის არსებობა.

§ 2. ნაწილობითი ინტეგრება

თეორემა 16.2.1. თუ არსებობს $\int_{[a,b]} f d\varphi$, მაშინ არსებობს $\int_{[a,b]} \varphi df$ და სრულდება ტოლობა:

$$\int_{[a,b]} \varphi df = (f\varphi)|_a^b - \int_{[a,b]} f d\varphi.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი მონიშნული დანაწილება (P, ξ) , სადაც $P = (x_0, \dots, x_n)$ და $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. გვექნება, რომ

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi, f}(P, \xi) &= \varphi(\xi_1)[f(x_1) - f(x_0)] + \varphi(\xi_2)[f(x_2) - f(x_1)] + \dots \\ &+ \varphi(\xi_{n-1})[f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})] + \varphi(\xi_n)[f(x_n) - f(x_{n-1})] = \\ &= -f(x_0)\varphi(\xi_1) - f(x_1)[\varphi(\xi_2) - \varphi(\xi_1)] - \dots \\ &- f(x_{n-1})[\varphi(\xi_n) - \varphi(\xi_{n-1})] + f(x_n)\varphi(\xi_n). \end{aligned}$$

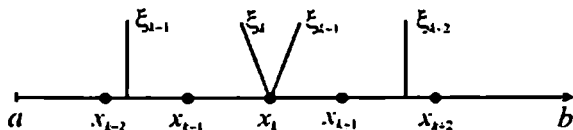
თუ მიღებულ გამოსახულებას დავემატებთ და გამოვაცლებთ

$$f(x_0)\varphi(x_0) - f(x_n)\varphi(x_n) = f(a)\varphi(a) - f(b)\varphi(b)$$

გამოსახულებას, მაშინ მივიღებთ,

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi, f}(P, \xi) &= [f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a)] - \\ &- \{f(x_0)[\varphi(\xi_1) - \varphi(x_0)] + f(x_1)[\varphi(\xi_2) - \varphi(\xi_1)] + \dots + \\ &+ f(x_{n-1})[\varphi(\xi_n) - \varphi(\xi_{n-1})] + f(x_n)[\varphi(x_n) - \varphi(\xi_n)]\} = (f\varphi)|_a^b - \sigma. \quad (1) \end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ $x_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < x_n$ უტოლობების შესრულების შემთხვევაში, σ ჯამი უშუალოდ წარმოგიდგება, როგორც $\sigma_{f, \varphi}(Q, \eta)$ სახის რიმან-სტილტესის ჯამი. კერძოდ, $\sigma = \sigma_{f, \varphi}(Q, \eta)$, სადაც $Q = (x_0, \xi_1, \dots, \xi_n, x_n)$ და $\eta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$. სამოგადოდ, $x_0, \xi_1, \dots, \xi_n, x_n$ სასრულ მიმდევრობაში ზოგიერთი მეზობელი წევრი შეიძლება ერთმანეთს ემთხვეოდეს. ამასთან, ცხადია, რომ სამი ერთმანეთის მომდევნო წევრის დამთხვევა ვერ მოხდება (ნახ. 16.1).



ნახ. 16.1.

თუ მხედველობაში მივიღებთ ამ ორ ფაქტს და σ ჯამში არ გავითვალისწინებთ $\xi_1 = x_0$, $\xi_k = \xi_{k-1}$ და $\xi_n = x_n$ ტიპის დამთხვევების გამო განსულებულ წევრებს, მაშინ ადვილი დასანახია, რომ ნებისმიერ შემთხვევაში

σ წარმოდგება, როგორც $\sigma_{f,\varphi}(Q, \eta)$ სახის რიმან-სტილტიესის ჯამი, სადაც $\lambda(Q) \leq 2\lambda(P)$. აქედან, (1) ტოლობის გათვალისწინებით, ადვილად ვასკენით თეორემის სამართლიანობას. $\square$

შენიშვნა 16.2.1. თეორემა 16.2.1-დან გამომდინარე, $\int_{[a,b]} f d\varphi$ და $\int_{[a,b]} \varphi df$ ინტეგრალები ერთდროულად არსებობენ ან ერთდროულად არ არსებობენ.

ამოცანები

1. ვთქვათ, θ არის კანტორის ფუნქცია. აჩვენეთ, რომ არსებობს $\int_{[0,1]} x d\theta(x)$ ინტეგრალი და იპოვეთ მისი მნიშვნელობა.
2. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს $\int_{[0,1]} \theta(1-x) d\theta(x)$ ინტეგრალი და იპოვეთ მისი მნიშვნელობა.

§ 3. რიმან-სტილტიესის ინტეგრალის ადიციურობა

ვთქვათ, $[c, d]$ არის $[a, b]$ -ს გალაგვარებული ქვესეგმენტი, ხოლო (P, ξ) - მისი მონიშნული დანაწილება. ასეთ პირობებში გამოყენებული იქნება აღნიშვნები:

$$\int_{[c,d]} f d\varphi = \int_{[c,d]} f|_{[c,d]} d\varphi|_{[c,d]},$$

$$\sigma_{f,\varphi}(P, \xi) = \sigma_{f|_{[c,d]}, \varphi|_{[c,d]}}(P, \xi).$$

$[a, b]$ სეგმენტის მონიშნულ (P, ξ) დანაწილებას ეუწოდოთ $[c, d] \subset [a, b]$ ქვესეგმენტის (Q, η) მონიშნული დანაწილების შევსება, თუ P და ξ მიმდევრობების ის წევრები, რომლებიც შედიან $[c, d]$ ქვესეგმენტში, შესაბამისად, ემთხვევიან Q და η მიმდევრობების წევრებს. იგივე პირობებში ვიტყვი, რომ (Q, η) არის (P, ξ) მონიშნული დანაწილების შეზღუდვა $[c, d]$ ქვესეგმენტზე.

თეორემა 16.3.1. თუ არსებობს $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალი, მაშინ ნებისმიერი $[c, d] \subset [a, b]$ ქვესეგმენტისათვის არსებობს $\int_{[c,d]} f d\varphi$ ინტეგრალი.

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$. შეგვიძლია 16.1.1 თეორემის საფუძველზე ვიპოვოთ $\delta > 0$, ისეთი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი მონიშნული (P, ξ) და (P', ξ') დანაწილებებისათვის, რომელთა პარამეტრები ნაკლებია δ -ზე, სრულდებოდეს შეფასება:

$$|\sigma_{f,\varphi}(P, \xi) - \sigma_{f,\varphi}(P', \xi')| < \varepsilon. \quad (1)$$

ვთქვათ, $[c, d] \subset [a, b]$. $[c, d]$ ქვესეგმენტის ნებისმიერი მონიშნული (Q, η) და (Q', η') დანაწილებებისათვის, რომელთა $\lambda(Q)$ და $\lambda(Q')$ პარამეტრები ნაკლებია δ -ზე, ვაჩვენოთ, რომ

$$|\sigma_{f,\varphi}(Q, \eta) - \sigma_{f,\varphi}(Q', \eta')| < \varepsilon. \quad (2)$$

შედეგად, 16.1.1 თეორემის ძალით, $\int_{[c,d]} f(x) dx$ ინტეგრალის არსებობა დამტკიცებული იქნება.

შევესოთ (Q, η) და (Q', η') მონიშნული დანაწილებები $[a, b]$ სეგმენტის მონიშნულ (P, ξ) და (P', ξ') დანაწილებებამდე, ისე, რომ სრულდებოდეს შემდეგი სამი პირობა:

ა) P და P' მიმდევრობებს $[c, d]$ მონაკვეთის გარეთ მდებარე წევრები ერთი და იგივე აქვთ;

ბ) ξ და ξ' მიმდევრობებს $[c, d]$ მონაკვეთის გარეთ მდებარე წევრები ერთი და იგივე აქვთ;

ც) $\lambda(P)$ და $\lambda(P')$ პარამეტრები δ -ზე მცირეა.

მაშინ, ა) და ბ) პირობების ძალით, გვექნება,

$$\sigma_{f,\varphi}(P, \xi) - \sigma_{f,\varphi}(P', \xi') = \sigma_{f,\varphi}(Q, \eta) - \sigma_{f,\varphi}(Q', \eta').$$

საიდანაც ც) პირობისა და (1) შეფასების საფუძველზე მივიღებთ (2) შეფასებას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 16.3.2. თუ არსებობს $\int_{[a,b]} f(x) dx$ ინტეგრალი, მაშინ ნებისმიერი $c \in (a, b)$ წერტილისათვის არსებობენ $\int_{[a,c]} f(x) dx$ და $\int_{[c,b]} f(x) dx$ ინტეგრალები, ამასთან, სრულდება ტოლობა:

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \int_{[a,c]} f(x) dx + \int_{[c,b]} f(x) dx. \quad (3)$$

დამტკიცება. $\int_{[a,c]} f(x) dx$ და $\int_{[c,b]} f(x) dx$ ინტეგრალების არსებობა უზრუნველყოფილია თეორემა 16.3.1-ის ძალით, ასე რომ, დასამტკიცებელი გვრჩება (3) ტოლობა.

ყოველი ნატურალური m -სთვის განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე (P_m, ξ_m) მონიშნული დანაწილება, ისეთი, რომ c შედიოდეს P_m დანაწილების წერტილთა მიმდევრობაში და $\lambda(P_m)$ პარამეტრი იყოს $1/m$ -ზე მცირე. (Q_m, η_m) -ით და (T_m, ζ_m) -ით, შესაბამისად, აღვნიშნოთ (P_m, ξ_m) მონიშნული დანაწილების შემლუდებები $[a, c]$ და $[c, b]$ ქვესეგმენტებზე. მაშინ გვექნება, რომ:

$$\sigma_{f,\varphi}(P_m, \xi_m) = \sigma_{f,\varphi}(Q_m, \eta_m) + \sigma_{f,\varphi}(T_m, \zeta_m), \quad (4)$$

$$\lambda(Q_m) \leq \lambda(P_m) < 1/m, \quad \lambda(T_m) \leq \lambda(P_m) < 1/m. \quad (5)$$

თუ გაითვალისწინებთ (5) შეფასებებს და (4) ტოლობაში გადავალთ მდვარზე, როცა $m \rightarrow \infty$, მაშინ მივიღებთ (3) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 16.3.1 $\int_{[a,c]} f dx$ და $\int_{[c,b]} f dx$ ინტეგრალების არსებობიდან, საზოგადოდ, არ გამომდინარეობს $\int_{[a,b]} f dx$ ინტეგრალის არსებობა. შესაბამის მაგალითს გვაძლევს $[-1, 1]$ სეგმენტზე შემდეგნაირად განსაზღვრული f და φ ფუნქციები:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \in [-1, 0], \\ 1, & \text{თუ } x \in (0, 1]; \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \in [-1, 0), \\ 1, & \text{თუ } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

მართლაც, ადვილი შესამოწმებელია, რომ $\int_{[-1,0]} f dx$ და $\int_{[0,1]} f dx$ ინტეგრალები არსებობენ და ნულის ტოლი არიან. მეორე მხრივ, თუ განვიხილავთ $[-1, 1]$ -ის ისეთ მონიშნულ (P, ξ) დანაწილებებს, რომელთათვისაც 0 წარმოადგენს დანაწილების რაიმე $[x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთის შიგა წერტილს, მაშინ $\sigma_{f,\varphi}(P, \xi)$ ჯამი გამოვა ნულის ტოლი იმ შემთხვევაში, როცა $[x_{k-1}, x_k]$ -დან არჩეული ξ_k წერტილი არის ნულის მარცხნივ და გამოვა 1-ის ტოლი, როცა ξ_k არის ნულის მარჯვნივ. აღნიშნულის გამო, არ იარსებებს $\int_{[-1,1]} f dx$ ინტეგრალი.

როგორც შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, გარკვეული დამატებითი პირობების შესრულებისას, $\int_{[a,c]} f dx$ და $\int_{[c,b]} f dx$ ინტეგრალების არსებობიდან გამომდინარეობს $\int_{[a,b]} f dx$ ინტეგრალის არსებობა.

თეორემა 16.3.2. თუ არსებობენ $\int_{[a,c]} f dx$ და $\int_{[c,b]} f dx$ ინტეგრალები და დამატებითი ცნობილია, რომ f შემოსაზღვრულია C -ს რაიმე მიდამოში, ხოლო φ უწყვეტია C -ში, მაშინ არსებობს $\int_{[a,b]} f dx$ ინტეგრალი.

დამტკიცება. თეორემის პირობის ძალით, მოიძებნება $\eta > 0$ და $M > 0$ რიცხვები ისეთები, რომ

$$|f(x)| \leq M, \text{ როცა } x \in (c - \eta, c + \eta).$$

აღვნიშნოთ $I = \int_{[a,c]} f dx + \int_{[c,b]} f dx$. $\int_{[a,c]} f dx$ და $\int_{[c,b]} f dx$ ინტეგრალების არსებობისა და φ ფუნქციის C -ში უწყვეტობის გათვალისწინებით, ადვილი დასაანახია, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება $\delta \in (0, \eta)$ რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:

1) $|\sigma_{f,\varphi}(P, \xi) - I| < \varepsilon$, ყოველთვის, როცა $[a, b]$ სეგმენტის მონიშნულ (P, ξ) დანაწილებას აქვს თვისებები: $\lambda(P) < \delta$ და c წერტილი შედის P -ს შემადგენელ წერტილთა შორის;

2) $|\varphi(x) - \varphi(c)| < \varepsilon$, თუ $|x - c| < \delta$.

ვთქვათ, (P, ξ) არის $[a, b]$ სეგმენტის მონიშნული დანაწილება შემდეგი თვისებებით: $\lambda(P) < \delta$ და c წერტილი არ შედის P -ს შემადგენელ წერტილთა შორის. განვიხილოთ P დანაწილებით წარმოქმნილ სეგმენტთა შორის ის $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტი, რომელიც შეიცავს c წერტილს. ცხადია, $x_{k-1} < c < x_k$. $[x_{k-1}, c]$ და $[c, x_k]$ სეგმენტებიდან ნებისმიერად ავირჩიოთ, შესაბამისად, t და τ წერტილები. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის მონიშნული (P', ξ') დანაწილება, განსაზღვრული შემდეგნაირად: P' მიმდევრობა მიიღება P მიმდევრობის წევრთა შორის c წერტილის ჩამატებით, ხოლო ξ' მიმდევრობა მიიღება ξ მიმდევრობის წევრებიდან ξ_k წევრის ამოცლებით და მის ნაცულად t და τ წერტილების ჩამატებით. მაშინ გვექნება, რომ

$$\begin{aligned} \sigma_{f,\varphi}(P, \xi) - \sigma_{f,\varphi}(P', \xi') &= f(\xi_k)[\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})] - \\ &- f(t)[\varphi(c) - \varphi(x_{k-1})] - f(\tau)[\varphi(x_k) - \varphi(c)] = \\ &= [f(\xi_k) - f(t)][\varphi(c) - \varphi(x_{k-1})] + [f(\xi_k) - f(\tau)][\varphi(x_k) - \varphi(c)]. \end{aligned}$$

აქედან გამომდინარე, δ რიცხვის შერჩევის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ,

$$|\sigma_{f,\varphi}(P, \xi) - I| \leq |\sigma_{f,\varphi}(P, \xi) - \sigma_{f,\varphi}(P', \xi')| + |\sigma_{f,\varphi}(P', \xi') - I| \leq (4M + 1)\varepsilon.$$

ამრიგად, $\lambda(P) < \delta$ პირობის დამაკმაყოფილებელი, ნებისმიერი მონიშნული (P, ξ) დანაწილებისათვის სრულდება შეფასება:

$$|\sigma_{f,\varphi}(P, \xi) - I| \leq (4M + 1)\varepsilon.$$

საიდანაც ვასკვნით, რომ $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალი არსებობს და I რიცხვის ტოლია. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

16.3.3 თეორემიდან 16.2.1 თეორემის საფუძველზე მიიღება შემდეგი დებულება.

თეორემა 16.3.4. თუ არსებობენ $\int_{[a,c]} f d\varphi$ და $\int_{[c,b]} f d\varphi$ ინტეგრალები და დამატებით ცნობილია, რომ f უწყვეტია c -ში, ხოლო φ შემოსაზღვრულია c -ს რაიმე მიდამოში, მაშინ არსებობს $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალი.

ამოცანები

1. ვთქვათ, f და φ ფუნქციებს აქვთ საერთო წყვეტის წერტილი და φ შემოსაზღვრული ვარიაციისაა. აჩვენეთ, რომ ასეთ შემთხვევაში არ არსებობს $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალი.

§ 4. რიმან-სტილტესის ინტეგრალის არსებობა, როცა f უწყვეტია, ხოლო φ შემოსაზღვრული ვარიაციისაა

რიმან-სტილტესის ინტეგრალის საინტერესო გამოყენებები, უმთავრესად, დაკავშირებულია იმ შემთხვევასთან, როცა φ შემოსაზღვრული ვარიაციისაა, ანაც ზრდადია. შემდეგი თეორემა საბაზისო მნიშვნელობისაა ამ მიმართულებით.

თეორემა 16.4.1. ვთქვათ, φ ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციისაა. მაშინ $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალი არსებობს ნებისმიერი უწყვეტი f ფუნქციისათვის.

თეორემა 16.4.1-ის დაბტყილებისათვის დაგვიჩვენება ინტეგრებალობის კრიტერიუმი ღარბუს ტიპის ჯამების ტერმინებში.

ვთქვათ, f არის შემოსაზღვრული, ხოლო φ კი - ზრდადი ფუნქცია. $[a, b]$ სეგმენტის $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ დანაწილებისათვის აღვნიშნოთ:

$$\overline{\sigma}_{f,\varphi}(P) = \sum_{k=1}^n M_k[\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})],$$

$$\underline{\sigma}_{f,\varphi}(P) = \sum_{k=1}^n m_k[\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})],$$

სადაც M_k და m_k , შესაბამისად, არიან f ფუნქციის სუპრემუმი და ინფიმუმი $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე. $\overline{\sigma}_{f,\varphi}(P)$ და $\underline{\sigma}_{f,\varphi}(P)$ ჯამებს, შესაბამისად, უწოდებენ ღარბუ-სტილტესის ზედა და ქვედა ჯამებს. ცხადია, ნებისმიერი (P, ξ) მონიშნული დანაწილებისათვის გვექნება, რომ

$$\underline{\sigma}_{f,\varphi}(P) \leq \sigma_{f,\varphi}(P, \xi) \leq \overline{\sigma}_{f,\varphi}(P).$$

ამასთან, $\overline{\sigma}_{f,\varphi}(P)$ და $\underline{\sigma}_{f,\varphi}(P)$ ჯამები, შესაბამისად, წარმოადგენენ ξ -ს მიხედვით აღებულ სუპრემუმსა და ინფიმუმს $\sigma_{f,\varphi}(P, \xi)$ ჯამებისა. აქვე შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი ორი P_1 და P_2 დანაწილებისათვის,

$$\underline{\sigma}_{f,\varphi}(P_1) \leq \overline{\sigma}_{f,\varphi}(P_2).$$

ამ უტოლობის დასადგენად უნდა გადავიღოთ ახალ P დანაწილებაზე, რომელიც შეიცავს როგორც P_1 , ასევე P_2 , დანაწილების წერტილებს.

თეორემა 16.4.2. ვთქვათ, φ ზრდადი ფუნქციაა. შემოსაზღვრული f ფუნქციისათვის $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალი არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება $\delta > 0$, ისეთი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი P დანაწილებისათვის, რომლის პარამეტრი ნაკლებია δ -ზე, სრულდება შეფასება:

$$\overline{\sigma}_{f,\varphi}(P) - \underline{\sigma}_{f,\varphi}(P) < \varepsilon.$$

დამტკიცება. ვიქვით, $\int_{[a,b]} f d\varphi$ არსებობს და I რიცხვის ტოლია. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი და ვიპოვოთ $\delta > 0$, ისეთი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი მონიშნული (P, ξ) დანაწილებისათვის, რომლის პარამეტრი ნაკლებია δ -ზე, სრულდებოდეს შეფასებები:

$$I - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma_{f,\varphi}(P, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{4}. \quad (1)$$

თუ განვიხილავთ $\sigma_{f,\varphi}(P, \xi)$ ჯამების სუპრემუმს და ინფიმუმს ξ -ს მიმართ, მაშინ (1)-დან მივიღებთ, რომ ყოველი P დანაწილებისათვის, რომლის პარამეტრი δ -ზე მცირეა, სრულდება შეფასება:

$$I - \frac{\varepsilon}{4} \leq \underline{\sigma}_{f,\varphi}(P) \leq \overline{\sigma}_{f,\varphi}(P) \leq I + \frac{\varepsilon}{4}.$$

საიდანაც ვაკცენით აუცილებლობასთან დაკავშირებული თეორემის ნაწილის სამართლიანობას.

ახლა გადავიდეთ თეორემის მეორე ნაწილის დამტკიცებაზე. დავუშვათ, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება $\delta > 0$, ისეთი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი P დანაწილებისათვის, რომლის პარამეტრი ნაკლებია δ -ზე, სამართლიანია შეფასება:

$$\overline{\sigma}_{f,\varphi}(P) - \underline{\sigma}_{f,\varphi}(P) < \varepsilon. \quad (2)$$

(2)-ის საფუძველზე ადვილი დასაწახია, რომ

$$\sup \underline{\sigma}_{f,\varphi}(P) = \inf \overline{\sigma}_{f,\varphi}(P).$$

სადაც სუპრემუმი და ინფიმუმი აიღება ყველა შესაძლო P დანაწილების მიხედვით.

აღვნიშნოთ $I = \sup \underline{\sigma}_{f,\varphi}(P)$. ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სთვის δ რიცხვი ავიღოთ იგივე, რაც (2) შეფასებაშია. მაშინ (2)-ის და

$$\underline{\sigma}_{f,\varphi}(P) \leq \sigma_{f,\varphi}(P, \xi) \leq \overline{\sigma}_{f,\varphi}(P), \quad \underline{\sigma}_{f,\varphi}(P) \leq I \leq \overline{\sigma}_{f,\varphi}(P)$$

შეფასებების ძალით, $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი მონიშნული (P, ξ) დანაწილებისათვის, რომლის პარამეტრი ნაკლებია δ -ზე, ადვილი ექნება უტოლობას: $|\sigma_{f,\varphi}(P, \xi) - I| < \varepsilon$. ამით დადგენილია, რომ $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალი არსებობს და I -ს ტოლია. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 16.4-ის დამტკიცება. შემოსაზღვრული ვარიაციის ყოველი ფუნქცია წარმოდგება ორი მრდადი ფუნქციის სხვაობის სახით. ამიტომ მოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ φ მრდადი ფუნქციაა.

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. უწყვეტობის გამო, f ფუნქცია თანაბრად უწყვეტიცაა $[a, b]$ სეგმენტზე. შედეგად, მოიძებნება $\delta > 0$ რიცხვი, ისეთი, რომ

$$(x, y \in [a, b], |x - y| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

აქედან გამომდინარე, თუ განვიხილავთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერ $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ დანაწილებას, რომლის პარამეტრი δ -ზე მცირეა, მაშინ ყოველი k -სათვის შესრულება $M_k - m_k \leq \varepsilon$ შეფასება, სადაც M_k და m_k , შესაბამისად, არიან f ფუნქციის სუპრემუმი და ინფიმუმი $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე. საიდანაც, თავის მხრივ ეწერო,

$$\begin{aligned} \overline{S}_{f,\varphi}(P) - \underline{S}_{f,\varphi}(P) &= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \varepsilon(\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})) = \varepsilon(\varphi(b) - \varphi(a)). \end{aligned}$$

მიღებული შეფასებიდან, თეორემა 16.4.1-ის ძალით, ვასენით $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალის არსებობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ფიქსირებული φ ფუნქციისათვის $R_\varphi([a, b])$ -თი აღვნიშნოთ ყველა იმ f ფუნქციის კლასი, რომელიც φ -ს მიმართ რიმან-სტილტესის აზრით ინტეგრირებადი.

$\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალის არსებობის შესახებ საკითხი შეიძლება შემდეგნაირად ჩამოეყალიბოთ: მოცემული φ ფუნქციისათვის დაგვახსიათოთ $R_\varphi([a, b])$ კლასი.

თეორემა 16.4.1-ის თანახმად, თუ φ შემოსაზღვრული ვარიაციისაა, მაშინ $C([a, b]) \subset R_\varphi([a, b])$. სამართლიანია შებრუნებული დებულებაც, რომელიც მოგვყავს დაუმტკიცებლად: თუ $C([a, b]) \subset R_\varphi([a, b])$, მაშინ φ შემოსაზღვრული ვარიაციისაა.

ამ თავის მერვე პარაგრაფში ჩვენ კიდევ ერთხელ დაუებრუნდებით საკითხს $R_\varphi([a, b])$ კლასის დახასიათების შესახებ.

შენიშვნა 16.4.1. თეორემა 16.4.1-დან, თეორემა 16.2.1-ის ვათვალისწინებით მიიღება $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალის არსებობა იმ შემთხვევაში, როცა f შემოსაზღვრული ვარიაციისაა, ხოლო φ უწყვეტია.

შენიშვნა 16.4.2. ფ. რისს ეკუთვნის რიმან-სტილტესის ინტეგრალის ძალზე მნიშვნელოვანი გამოყენება ფუნქციონალურ ანალიზში. კერძოდ, მან დაამტკიცა შემდეგი თეორემა უწყვეტ ფუნქციათა $C([a, b])$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი და უწყვეტი ფუნქციონალების დახასიათების შესახებ (იხ. მაგ., [26], თავი VI, §6): $C([a, b])$ სივრცეზე განსაზღვრული A ფუნქციონალისათვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- A არის წრფივი და უწყვეტი;

- A წარმოადგება შემოსაზღვრული ვარიაციის რაიმე φ ფუნქციის მიმართ რიმან-სტილტესის ინტეგრალის მეშვეობით, ე.ი.

$$A(f) = \int_{[a,b]} f d\varphi \quad (f \in C([a, b])).$$

ამოცანები

1. ააგეთ უწყვეტი ფუნქციები f და φ , ისეთები, რომ არ არსებობდეს $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალი. მიითითება: გამოიყენეთ 12.7.1 შენიშვნაში მოცემული კონსტრუქცია.
2. ეთქვას, φ არაა შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქცია. ააგეთ უწყვეტი f ფუნქცია, რომლისთვისაც არ არსებობს $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალი.
3. ეთქვას, φ_1 და φ_2 ზრდადი ფუნქციებია და არსებობს ინტეგრალი $\int_{[a,b]} f d(\varphi_1 + \varphi_2)$. დაამტკიცეთ, რომ არსებობენ $\int_{[a,b]} f d\varphi_1$ და $\int_{[a,b]} f d\varphi_2$ ინტეგრალები.
4. ეთქვას, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ და $\alpha + \beta > 1$. f და φ ფუნქციები ამაყოფილებენ ლიფციის პირობებს, შესაბამისად, α და β მაჩვენებლებით, ე.ი.

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C|x - y|^\beta \quad (x, y \in [a, b]),$$

სადაც C რაიმე მუდმივია. აჩვენეთ, რომ ასეთ შემთხვევაში არსებობს $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალი. აჩვენეთ, რომ ანალოგიური დასკვნა, საზოგადოდ, არაა სამართლიანი $\alpha + \beta > 1$ პირობის ნაცვლად $\alpha + \beta = 1$ პირობის შესრულების შემთხვევაში.

§ 5. ზღვარზე გადასვლა რიმან-სტილტესის ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ

თეორემა 16.5.1. ნებისმიერი უწყვეტი f ფუნქციისა და შემოსაზღვრული ვარიაციის φ ფუნქციისათვის სამართლიანია შეფასება:

$$\left| \int_{[a,b]} f d\varphi \right| \leq \max_{[a,b]} |f| \cdot V_\varphi([a, b]). \quad (1)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი მონიშნული დანაწილება (P, ξ) , სადაც $P = (x_0, \dots, x_n)$ და $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. გვექნება, რომ

$$\begin{aligned} |\sigma_{f,\varphi}(P, \xi)| &= \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) [\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})] \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)| |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| \leq \\ &\leq \max_{[a,b]} |f| \sum_{k=1}^n |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| \leq \max_{[a,b]} |f| V_\varphi([a, b]). \end{aligned}$$

საიდანაც მიიღება (1) შეფასება. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 16.5.2. ვთქვათ, f შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციაა. თუ უწყვეტ ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობა თანაბრად კრებადია უწყვეტი f ფუნქციისაკენ, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f_n d\varphi = \int_{[a,b]} f d\varphi. \quad (2)$$

დამტკიცება. თეორემა 16.5.1-ის გათვალისწინებით, ყოველი n -სთვის გვექნება, რომ

$$\left| \int_{[a,b]} f_n d\varphi - \int_{[a,b]} f d\varphi \right| = \left| \int_{[a,b]} (f_n - f) d\varphi \right| \leq \max_{[a,b]} |f_n - f| \cdot V_\varphi([a, b]).$$

საიდანაც, (f_n) მიმდევრობის თანაბრად კრებადობის საფუძველზე, მივიღებთ (2) მღვართით ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

აქვე დაემატიცოთ შემდეგი თეორემა საშუალო მნიშვნელობის შესახებ.

თეორემა 16.5.3. ვთქვათ, f ფუნქცია უწყვეტია, ხოლო φ ფუნქცია კი ზრდადია. მაშინ მოიძებნება $\xi \in [a, b]$ წერტილი, ისეთი, რომ

$$\int_{[a,b]} f d\varphi = f(\xi)[\varphi(b) - \varphi(a)].$$

დამტკიცება. φ ფუნქციის მრდადობის გათვალისწინებით, ადვილი შესა-
მოწმებულია. რომ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი მონიშნული (P, ξ) დანა-
წილებისათვის სრულდება შეფასებები:

$$\min_{[a,b]} f \cdot [\varphi(b) - \varphi(a)] \leq \sigma_{f,\varphi}(P, \xi) \leq \max_{[a,b]} f \cdot [\varphi(b) - \varphi(a)].$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$\min_{[a,b]} f \cdot [\varphi(b) - \varphi(a)] \leq \int_{[a,b]} f d\varphi \leq \max_{[a,b]} f \cdot [\varphi(b) - \varphi(a)].$$

ამის შემდეგ, საძიებელი ξ წერტილის არსებობას დავასყენით უწყვეტი ფუნ-
ქციის შუალედური მნიშვნელობის შესახებ თეორემის საფუძველზე. თეორემა
დამტკიცებულია. $\square$

შემდეგი მნიშვნელოვანი თეორემა ეკუთვნის ე. ჯელის.

თეორემა 16.5.4. ვთქვათ, შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციათა (φ_n) მიმდევრობა ყოველ $x \in [a, b]$ წერტილში კრებადია შემოსაზღვრული ვარიაციის φ ფუნქციისაკენ. ამასთან, ცნობილია, რომ

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} V_{\varphi_n}([a, b]) < \infty.$$

ჰაშინ, ნებისმიერი უწყვეტი f ფუნქციისათვის,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f d\varphi_n = \int_{[a,b]} f d\varphi.$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $C = \sup_{n \in \mathbb{N}} V_{\varphi_n}([a, b])$. შევნიშნოთ, რომ შესრულებული იქნება $V_{\varphi}([a, b]) \leq C$ შეფასება. მართლაც, $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი $P = (x_0, x_1, \dots, x_m)$ დანაწილებისათვის გვექნება,

$$\sum_{k=1}^m |\varphi_n(x_k) - \varphi_n(x_{k-1})| \leq V_{\varphi_n}([a, b]) \leq C.$$

თუ ამ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $n \rightarrow \infty$, მივიღებთ,

$$\sum_{k=1}^m |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| \leq C.$$

საიდანაც, P დანაწილების ნებისმიერობის გათვალისწინებით, დავასკვნით $V_{\varphi}([a, b]) \leq C$ უტოლობის სამართლიანობას.

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. f ფუნქციის უწყვეტობის საფუძველზე, $[a, b]$ სეგმენტის $P = (x_0, x_1, \dots, x_m)$ დანაწილება შევარჩიოთ ისეთნაირად, რომ ყოველ $[x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთზე f ფუნქციის რხევა აკმაყოფილებდეს შეფასებას:

$$\omega_f([x_{k-1}, x_k]) < \frac{\varepsilon}{3C}. \quad (3)$$

თითოეული $[x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთიდან ავირჩიოთ $\xi_k = x_k$ წერტილი. ასეთნაირად განსაზღვრული (P, ξ) მონიშნული დანაწილებისათვის შევაფასოთ შემდეგი სხვაობები:

$$\int_{[a,b]} f d\varphi - \sigma_{f,\varphi}(P, \xi), \quad \int_{[a,b]} f d\varphi_n - \sigma_{f,\varphi_n}(P, \xi).$$

$\int_{[x_{k-1}, x_k]} d\varphi = \varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})$ ტოლობების, თეორემა 16.5.1-ის და (3) შეფასებების გათვალისწინებით, გვექნება, რომ

$$\begin{aligned} & \left| \int_{[a,b]} f d\varphi - \sum_{k=1}^m f(x_k) [\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})] \right| = \\ & = \left| \sum_{k=1}^m \int_{[x_{k-1}, x_k]} f d\varphi - \sum_{k=1}^m f(x_k) \int_{[x_{k-1}, x_k]} d\varphi \right| = \\ & = \left| \sum_{k=1}^m \int_{[x_{k-1}, x_k]} [f - f(x_k)] d\varphi \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^m \omega_f([x_{k-1}, x_k]) V_{\varphi}([x_{k-1}, x_k]) < \frac{\varepsilon}{3C} V_{\varphi}([a, b]) \leq \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \quad (4)$$

ნებისმიერი n -სთვის ანალოგიურად ვაჩვენებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\left| \int_{[a,b]} f d\varphi_n - \sum_{k=1}^n f(x_k)[\varphi_n(x_k) - \varphi_n(x_{k-1})] \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (5)$$

(φ_n) მიმდევრობის φ ფუნქციისაკენ წერტილოვნად კრებადობის ძალით მოიძებნება N , ისეთი, რომ ყოველი $n \geq N$ -სთვის,

$$\left| \sum_{k=1}^n f(x_k)[\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})] - \sum_{k=1}^n f(x_k)[\varphi_n(x_k) - \varphi_n(x_{k-1})] \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (6)$$

საბოლოოდ, (4)–(6) შეფასებებიდან ელემენტარულად, რომ ყოველი $n \geq N$ -სთვის,

$$\left| \int_{[a,b]} f d\varphi - \int_{[a,b]} f d\varphi_n \right| < \varepsilon.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

§ 6. რიმან-სტილტესის ინტეგრალის გამოთვლა ზოგიერთ კონკრეტულ შემთხვევაში

თეორემა 6.1. თუ φ ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია, მაშინ ნებისმიერი უწყვეტი f ფუნქციისათვის სრულდება ტოლობა:

$$\int_{[a,b]} f d\varphi = \int_{[a,b]} f \varphi',$$

სადაც მარჯვენა მხარე წარმოადგენს ლებეგის ზომის მიხედვით აღებულ ლებეგის ინტეგრალს.

დამტკიცება. უნდა ეაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma_{f,\varphi}(P, \xi) = \int_{[a,b]} f \varphi'. \quad (1)$$

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. f ფუნქციის უწყვეტობის გამო მოიძებნება $\delta > 0$, ისეთი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის δ -ზე ნაწლები სიგრძის ნებისმიერი $[c, d]$ ქვესეგმენტისათვის,

$$\omega_f([c, d]) < \varepsilon. \quad (2)$$

ვთქვათ, (P, ξ) არის $[a, b]$ -ს ნებისმიერი მონიშნული დანაწილება, რომლის პარამეტრი δ -ზე მცირეა. P დანაწილების შემადგენელი წერტილები იყენენ

$x_0, x_1, \dots, x_n$. მაშინ, φ ფუნქციის აბსოლუტურად უწყვეტობის ძალით, ყოველი $[x_{k-1}, x_k]$ ქვესეგმენტისათვის შესრულდება ტოლობა:

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1}) = \int_{[x_{k-1}, x_k]} \varphi'$$

ამ ტოლობიდან გამოძღინარე,

$$\sigma_{f,\varphi}(P, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) [\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \int_{[x_{k-1}, x_k]} \varphi'.$$

შედეგად, (2)-ის გათვალისწინებით დაწერეთ, რომ

$$\begin{aligned} & \left| \int_{[a,b]} f\varphi' - \sigma_{f,\varphi}(P, \xi) \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{[x_{k-1}, x_k]} f\varphi' - \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \int_{[x_{k-1}, x_k]} \varphi' \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{[x_{k-1}, x_k]} (f - f(\xi_k))\varphi' \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{[x_{k-1}, x_k]} |f - f(\xi_k)| |\varphi'| < \\ &< \sum_{k=1}^n \varepsilon \int_{[x_{k-1}, x_k]} |\varphi'| = \varepsilon \int_{[a,b]} |\varphi'|. \end{aligned}$$

მიღებული შეფასებიდან, ε -ის ნებისმიერობის გათვალისწინებით, ვასკენით (1) ტოლობის სამართლიანობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შემოსაზღვრული ვარიაციის φ ფუნქციისათვის $h_\varphi(t)$ ჩანაწერით აღვნიშნოთ მისი ნახტომი $t \in [a, b]$ წერტილში, ე.ი.

$$h_\varphi(t) = \begin{cases} \varphi(a+0) - \varphi(a), & \text{თუ } t = a, \\ \varphi(t+0) - \varphi(t-0), & \text{თუ } a < t < b, \\ \varphi(b) - \varphi(b-0), & \text{თუ } t = b. \end{cases}$$

თეორემა 16.6.2. ვთქვათ, φ არის ნახტომთა ფუნქცია, რომელიც წყვეტას განიკდის t_n წერტილებში. მაშინ ნებისმიერი უწყვეტი f ფუნქციისათვის სრულდება ტოლობა:

$$\int_{[a,b]} f d\varphi = \sum_n f(t_n) h_\varphi(t_n).$$

დამტკიცება. ნაბიჯი I: ვთქვათ, φ ფუნქციას აქვს ერთადერთი წყვეტის წერტილი, ე.ი. φ -ს აქვს სახე: $\varphi = J_{t,t,r}$. განვიხილოთ ნებისმიერი (P, ξ) მონიშნული დანაწილება, ისეთი, რომ t არ შედიოდეს დანაწილების წერტილთა შორის. მაშინ გვექნება,

$$\sigma_{f,\varphi}(P, \xi) = f(\xi_k) [\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})],$$

სადაც $[x_{k-1}, x_k]$ არის დანაწილების ის სეგმენტი, რომელიც შეიცავს t წერტილს. თუ განვიხილავთ $\sigma_{f,\varphi}(P, \xi)$ ჯამების ზღვარს აღნიშნული ტიპის (P, ξ) მონიშნული დანაწილებების მისეღვით, როცა $\lambda(P) \rightarrow 0$, ადვილად დაერწმუნებით, რომ

$$\int_{[a,b]} f d\varphi = \begin{cases} f(t)[\varphi(a+0) - \varphi(a)], & \text{თუ } t = a, \\ f(t)[\varphi(t+0) - \varphi(t-0)], & \text{თუ } a < t < b, \\ f(t)[\varphi(b) - \varphi(b-0)], & \text{თუ } t = b. \end{cases}$$

რაც ტოლფასია ტოლობის:

$$\int_{[a,b]} f d\varphi = f(t)h_{\varphi}(t).$$

ამით, განსახილავ შემთხვევაში, თეორემა დამტკიცებულია.

ნაბიჯი II: ვთქვათ, φ ფუნქციას აქვს სასრული რაოდენობის წყვეტის წერტილები: $t_1, \dots, t_N$. მაშინ φ -ს ექნება სახე: $\varphi = \sum_{n=1}^N J_{t_n, l_n, r_n}$. შევნიშნოთ, რომ ყოველი t_n წერტილისათვის,

$$h_{\varphi}(t_n) = h_{J_{t_n, l_n, r_n}}(t_n) = l_n + r_n.$$

საიდანაც, ზემოთ განხილული შემთხვევის ძალით, დაწეროთ.

$$\int_{[a,b]} f d\varphi = \sum_{n=1}^N \int_{[a,b]} f dJ_{t_n, l_n, r_n} = \sum_{n=1}^N f(t_n)h_{\varphi}(t_n).$$

ამით, განსახილავ შემთხვევაში, თეორემა დამტკიცებულია.

ნაბიჯი III: ვთქვათ, φ ფუნქციას აქვს თვალად რაოდენობის წყვეტის წერტილები: t_n ($n \in \mathbb{N}$). მაშინ φ -ს ექნება სახე: $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} J_{t_n, l_n, r_n}$. აღვნიშნოთ

$$\varphi_N = \sum_{n=1}^N J_{t_n, l_n, r_n}.$$

შევნიშნოთ, რომ ყოველი $N \in \mathbb{N}$ და $n \in \overline{1, N}$ ინდექსებისათვის,

$$h_{\varphi_N}(t_n) = h_{J_{t_n, l_n, r_n}}(t_n) = l_n + r_n = h_{\varphi}(t_n). \quad (3)$$

ნახტომთა ფუნქციის თვისებების გათვალისწინებით, (φ_N) მიმდევრობა ყოველ წერტილში კრებადია φ ფუნქციისაკენ, ამასთან:

$$V_{\varphi}([a, b]) = \sum_{n=1}^{\infty} (|l_n| + |r_n|) < \infty,$$

$$V_{\varphi_N}([a, b]) = \sum_{n=1}^N (|l_n| + |r_n|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|l_n| + |r_n|) \quad (N \in \mathbb{N}).$$

საიდანაც, 16.5.4 თეორემის, გემოთ განხილული შემთხვევისა და (3) ტოლობის საფუძველზე, დავწერთ,

$$\int_{[a,b]} f d\varphi = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f d\varphi_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f(t_n) h_{\varphi}(t_n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(t_n) h_{\varphi}(t_n).$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 16.1. სამართლიანია თეორემა 16.6.2-ზე ზოგადი შემდეგი დებულება: ვთქვათ, φ არის ნახტომთა ფუნქცია, რომელიც წყვეტას განიკლის t_n წერტილებში. მაშინ ნებისმიერი შემოსაზღვრული f ფუნქციისათვის, რომელიც უწყვეტია t_n წერტილებში, სრულდება ტოლობა:

$$\int_{[a,b]} f d\varphi = \sum_n f(t_n) h_{\varphi}(t_n).$$

თეორემა 16.6.3. ვთქვათ, $P = (t_0, \dots, t_n)$ არის $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე დანაწილება და ყოველი $k \in \overline{1, n}$ -სათვის φ ფუნქცია (t_{k-1}, t_k) ინტერვალის წერტილებში ემთხვევა $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტ და შემოსაზღვრული ვარიაციის მქონე რაიმე φ_k ფუნქციას. მაშინ ნებისმიერი უწყვეტი f ფუნქციისათვის სრულდება ტოლობა:

$$\int_{[a,b]} f d\varphi = \sum_{k=1}^n \int_{[t_{k-1}, t_k]} f d\varphi_k + \sum_{k=0}^n f(t_k) h_{\varphi}(t_k).$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა $P = (a, b)$. ადვილი დასანახია, რომ ზოგადი შემთხვევა დაიყვანება აღნიშნულზე ინტეგრალის ადიტიურობის თვისების გამოყენებით.

ცხადია, φ_1 ფუნქცია a და b წერტილებში, შესაბამისად, მიიღებს $\varphi(a+0)$ და $\varphi(b-0)$ მნიშვნელობებს. შედეგად, $\varphi - \varphi_1$ ფუნქციას ექნება სახე:

$$(\varphi - \varphi_1)(x) = \begin{cases} \varphi(a+0) - \varphi(a), & \text{თუ } x = a, \\ 0, & \text{თუ } a < x < b, \\ \varphi(b) - \varphi(b-0), & \text{თუ } x = b. \end{cases}$$

მარტივი შესამოწმებელია, რომ ნებისმიერი უწყვეტი f ფუნქციისათვის,

$$\int_{[a,b]} f d(\varphi - \varphi_1) = f(a)[\varphi(a+0) - \varphi(a)] + f(b)[\varphi(b) - \varphi(b-0)].$$

საიდანაც, $\int_{[a,b]} f d\varphi = \int_{[a,b]} f d\varphi_1 + \int_{[a,b]} f d(\varphi - \varphi_1)$ ტოლობის გათვალისწინებით, მივიღებთ საჭირო ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შემდეგი დებულება გამომდინარეობს თეორემა 16.6.3-დან.

თეორემა 16.6.4. ვთქვათ, φ ფუნქცია მუდმივია ყოველ $(a, x_1), (x_1, x_2), (x_n, b)$ ინტერვალზე. მაშინ ნებისმიერი უწყვეტი f ფუნქციისათვის სრულდება ტოლობა:

$$\int_{[a,b]} f d\varphi = f(a)[\varphi(a+0) - \varphi(a)] + \\ + \sum_{k=1}^n f(x_k)[\varphi(x_k+0) - \varphi(x_k-0)] + f(b)[\varphi(b) - \varphi(b-0)].$$

შენიშვნა 16.6.2. ზემოთ დადგენილი თეორემების ძალით, უწყვეტი f ფუნქციის რიმან-სტილტესის $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალის გამოთვლა იმ შემთხვევებში, როცა φ არის აბსოლუტურად უწყვეტი, ანაც ნახტომთა ფუნქცია, შესაბამისად, დაიყვანება ლებეგის აზრით ინტეგრებისა და მწკრივის შეკრების ოპერაციებზე.

შემოსაზღვრული ვარიაციის ნებისმიერი φ ფუნქციის მიმართ რიმან-სტილტესის ინტეგრალის გამოთვლა, საზოგადოდ, არ დაიყვანება აღნიშნულ ოპერაციებზე. ასეთ სირთულეს იწვევს φ ფუნქციის სინგულარული კომპონენტი. სახელდობრ, როგორც ცნობილია, შემოსაზღვრული ვარიაციის φ ფუნქცია იშლება აბსოლუტურად უწყვეტი - A_φ , ნახტომთა - J_φ და სინგულარული - S_φ ფუნქციების ჯამის სახით. შედეგად, ნებისმიერი უწყვეტი f ფუნქციისათვის გვექნება, რომ

$$\int_{[a,b]} f d\varphi = \int_{[a,b]} f dA_\varphi + \int_{[a,b]} f dJ_\varphi + \int_{[a,b]} f dS_\varphi.$$

არანულოვანი S_φ სინგულარული კომპონენტის შემთხვევაში, მესამე ინტეგრალი, განსხვავებით პირველი და მეორე ინტეგრალებისაგან, არ დაიყვანება არც ლებეგის ზომის მიხედვით ინტეგრების და არც მწკრივის შეკრების ოპერაციებზე.

ამოცანები

1. იპოვეთ $\int_{[1,3]} x^2 d\varphi(x)$ ინტეგრალი, სადაც $\varphi(x) = 4$, როცა $x = 1$ და $\varphi(x) = x^3$, როცა $1 < x \leq 3$.
2. იპოვეთ $\int_{[-\pi, \pi]} (x+2)d(e^x(\sin x))$ ინტეგრალი.
3. იპოვეთ $\int_{[0, \pi]} (x-1)d(\cos x \sin x)$ ინტეგრალი.

§ 7. რიმან-სტილტესისა და ლებეგ-სტილტესის ინტეგრალების შედარება

იმ შემთხვევაში, როცა φ არის მრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქცია, $\int_{[a,b]} f d\varphi$ რიმან-სტილტესის ინტეგრალის გარდა, შესაძლებელია, განვიხილოთ $\int_{[a,b]} f dm_\varphi$ ლებეგ-სტილტესის ინტეგრალიც, ე.ი. ლებეგის ინტეგრალი ლებეგ-სტილტესის m_φ ზომის მიხედვით.

ისევე როგორც რიმანისა და ლებეგის ინტეგრალების შემთხვევაში, ისმის საკითხი რიმან-სტილტესისა და ლებეგ-სტილტესის ინტეგრალების შედარების შესახებ. ამ საკითხის გადაწყვეტას გვაძლევს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 16.7.1. ვთქვათ, φ არის ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქცია. თუ $f \in R_\varphi([a, b])$, მაშინ $f \in L([a, b], m_\varphi)$ და

$$\int_{[a,b]} f dm_\varphi = \int_{[a,b]} f d\varphi.$$

ვთქვათ, φ რაიმე ფუნქციაა. f ფუნქციას ეწოდოთ φ -შემოსაზღვრული, თუ მოიძებნება $\delta = \delta_f > 0$ რისკვი, ისეთი, რომ f შემოსაზღვრულია ნებისმიერ $[c, d] \subset [a, b]$ სეგმენტზე, რომლის სიგრძე ნაწლებია δ -ზე და რომელზეც φ ფუნქცია არაა მუდმივი.

ადილი დასაბამია, რომ მეცხრად მრდადი φ ფუნქციის შემთხვევაში, ყოველი φ -შემოსაზღვრული ფუნქცია იქნება შემოსაზღვრულიც.

როგორც ცნობილია, რიმანის ამრით ინტეგრებადი ფუნქცია აუცილებლად შემოსაზღვრულია. იგივეს ვერ ვიტყვით რიმან-სტილტესის ამრით ინტეგრებადი ფუნქციების შესახებ. ამის დასადაგენად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ მუდმივი φ ფუნქციის შემთხვევაში, $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალი არსებობს და ნულის ტოლია ნებისმიერი f ფუნქციისათვის. მიუხედავად აღნიშნულისა, სამართლიანია შემდეგი დებულება რიმან-სტილტესის ამრით ინტეგრებადი ფუნქციების გარკვეული თვალსაზრისით შემოსაზღვრული ყოფაქცევის შესახებ.

ლემა 16.7.1. ვთქვათ, φ ზრდადი ფუნქციაა. მაშინ ნებისმიერი $f \in R_\varphi([a, b])$ ფუნქცია არის φ -შემოსაზღვრული.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $I = \int_{[a,b]} f d\varphi$. განვიხილოთ $\delta > 0$, ისეთი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი მონიშნული (P, ξ) დანაწილებისათვის, რომლის პარამეტრი ნაწლებია δ -ზე, სრულდებოდეს შეფასებები:

$$I - 1 < \sigma_{f,\varphi}(P, \xi) < I + 1. \quad (1)$$

ვთქვათ, $[c, d] \subset [a, b]$, $d - c < \delta$ და $\varphi(d) - \varphi(c) > 0$. ეაჩვენოთ f -ის შემოსაზღვრულობა $[c, d]$ სეგმენტზე. რითაც ცხადია, ლემა დამტკიცებული იქნება. $P = (x_0, \dots, x_n)$ იყოს $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე დანაწილება δ -ზე ნაწლები პარამეტრით, რომლის რომელიღაც ორი მომდევნო წერტილი c და d

წერტილებს ემთხვევა. დავეშვათ, ეს წერტილია x_{k-1} და x_k . შემდეგ დავეშვათ დასამტკიცებელი წინადადების საწინააღმდეგო: f არაა შემოსაზღვრული $[c, d] = [x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე. თუ ξ_m ($m \neq k$) წერტილებს დაეაფიქსირებთ, ხოლო ξ_k წერტილს მიეცემთ თავისუფლებას $[x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთზე, მაშინ ადვილი დასანახია, რომ ξ_k -ს შერჩევის მეშვეობით $\sigma_{f,\varphi}(P, \xi)$ ჯამი შეიძლება გაეზადოთ მოდულით რაგინდ დიდი. ეს კი ეწინააღმდეგება (1) შეფასებებს. მიღებული წინააღმდეგობის ძალით, ლემა დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 16.7.1-დან მარტივად გამომდინარეობს შემდეგი დებულება.

ლემა 16.7.2. ვთქვათ, φ ზრდადი ფუნქციაა. მაშინ ნებისმიერი $f \in R_\varphi([a, b])$ ფუნქციისათვის მოიძებნება $[a, b]$ სეგმენტის $P = (x_0, \dots, x_n)$ დანაწილება, ისეთი, რომ ყოველ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე სრულდება ერთ-ერთი შემდეგი ორი პირობიდან: 1) φ მუდმივია $[x_{k-1}, x_k]$ -ზე; 2) φ არაა მუდმივი $[x_{k-1}, x_k]$ -ზე და f შემოსაზღვრულია $[x_{k-1}, x_k]$ -ზე.

ლემა 16.7.3. ვთქვათ, φ ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქციაა. თუ φ მუდმივია $[c, d] \subset [a, b]$ ქვესეგმენტზე, მაშინ ნებისმიერი f ფუნქციისათვის სრულდება პირობები: $f|_{[c,d]} \in R_{\varphi|_{[c,d]}}([c, d])$, $f|_{[c,d]} \in L([c, d], m_\varphi)$ და

$$\int_{[c,d]} f|_{[c,d]} d\varphi|_{[c,d]} = \int_{[c,d]} f|_{[c,d]} dm_\varphi = 0.$$

დამტკიცება. $[c, d]$ სეგმენტზე φ ფუნქციის მუდმივობის გამო,

$$m_\varphi((c, d]) = \varphi(d) - \varphi(c) = 0.$$

საიდანაც, m_φ ზომის სისრულის საფუძველზე, ვაკენით, რომ ნებისმიერი $A \subset (c, d]$ სიმრავლე m_φ -ზომადია და $m_\varphi(A) = 0$. აქედან კი უშუალოდ გამომდინარეობს $(c, d]$ -ზე განსაზღვრული ნებისმიერი f ფუნქციის ინტეგრებადობა m_φ ზომის მიმართ და $\int_{[c,d]} f dm_\varphi = 0$ ტოლობა.

$[c, d]$ -ზე განსაზღვრული ნებისმიერი f ფუნქციისათვის $\int_{[c,d]} f d\varphi$ ინტეგრალის არსებობა და ნულთან ტოლობა უშუალოდ მოწმდება რიმან-სტილტესის ინტეგრალის განსაზღვრის საფუძველზე. ამით ლემა დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 16.7.4. ვთქვათ, φ არის ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქცია, $f \in R_\varphi([a, b])$, ხოლო $P = (x_0, \dots, x_n)$ არის $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილება. თუ ყოველი $(x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთისათვის გვაქვს, რომ

$$f|_{(x_{k-1}, x_k]} \in L((x_{k-1}, x_k], m_\varphi)$$

და

$$\int_{(x_{k-1}, x_k]} f|_{(x_{k-1}, x_k]} dm_\varphi = \int_{[x_{k-1}, x_k]} f d\varphi,$$

მაშინ $f \in L([a, b], m_\varphi)$ და

$$\int_{[a, b]} f dm_\varphi = \int_{[a, b]} f d\varphi.$$

ლემა 16.7.4-ის დამტკიცება ეფუძნება ლებეგისა და რიმან-სტილტესის ინტეგრალების სტანდარტულ თვისებებს. დამატებით საჭიროა გაითვალისწინოთ $m_\varphi(\{a\}) = 0$ ტოლობა. შევნიშნოთ, რომ ასეთი თვისება დამასასიათებელია $[a, b]$ მონაკვეთზე მოცემული ნებისმიერი ლებეგ-სტილტესის ზომისათვის.

თეორემა 16.7.1-ის დამტკიცება. ნებისმიერი $[c, d] \subset [a, b]$ ქვესეგმენტისათვის, რომელზეც f ფუნქცია შემოსაზღვრულია, ვაჩვენოთ, რომ შესრულებულია პირობები:

$$f|_{(c, d]} \in L((c, d], m_\varphi) \text{ და } \int_{(c, d]} f|_{(c, d]} dm_\varphi = \int_{[c, d]} f d\varphi.$$

შედეგად, 16.7.2-16.7.4 ლემების გათვალისწინებით, თეორემა დამტკიცებული იქნება.

ქვემოთ მოცემული მსჯელობა იყენებს 9.1.1 თეორემის დამტკიცების სქემას.

$[c, d]$ სეგმენტის დანაწილებების $P_k = (x_{k,0}, \dots, x_{k,2^k})$ ($k \in \mathbb{N}$) მიმდევრობა შევარჩიოთ ისეთნაირად, რომ:

- 1) $\lambda(P_k) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$);
- 2) k -ური ეტაპის ყოველი დანაწილების სეგმენტი წარმოადგენს $(k+1)$ -ე ეტაპის დანაწილების ორი სეგმენტის გაერთიანებას.

განვიხილოთ P_k დანაწილების შესაბამისი დარბუ-სტილტესის ჯამები:

$$\Omega_k = \sum_{j=1}^{2^k} M_{k,j} [\varphi(x_{k,j}) - \varphi(x_{k,j-1})], \quad \omega_k = \sum_{j=1}^{2^k} m_{k,j} [\varphi(x_{k,j}) - \varphi(x_{k,j-1})],$$

სადაც $M_{k,j}$ არის f -ის სუპრემუმი $[x_{k,j-1}, x_{k,j}]$ სეგმენტზე, ხოლო $m_{k,j}$ f -ის ინფიმუმი იგივე სეგმენტზე. რიმან-სტილტესის ინტეგრალის თვისებების ძალით,

$$\int_{[c, d]} f d\varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k.$$

u_k და l_k ფუნქციები $(c, d]$ მონაკვეთზე განესაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$u_k(x) = M_{k,j}, \quad l_k(x) = m_{k,j} \quad (x \in (x_{k,j-1}, x_{k,j}], j = 1, \dots, 2^k).$$

აღვილი დასაბუთია, რომ $u_k \in L((c, d], m_\varphi)$, $l_k \in L((c, d], m_\varphi)$ და

$$\int_{(c, d]} u_k dm_\varphi = \Omega_k, \quad \int_{(c, d]} l_k dm_\varphi = \omega_k.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ k -ური ეტაპის ყოველი დანაწილების სეგმენტი წარმოადგენს $(k+1)$ -ე ეტაპის დანაწილების ორი სეგმენტის გაერთიანებას, ადვილად დაერწმუნდებით (l_k) მიმდევრობის კლუბალობასა და (u_k) მიმდევრობის ბრდალობაში. აქვე შევნიშნოთ, რომ

$$\inf_{[c,d]} f \leq l_k \leq f|_{(c,d]} \leq u_k \leq \sup_{[c,d]} f \quad (k \in \mathbb{N}).$$

განვიხილოთ u და l ფუნქციები, რომლებიც შესაბამისად წარმოადგენენ (u_k) და (l_k) მიმდევრობების წერტილოვან ზღვარს, ე.ი. $u(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x)$ და $l(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} l_k(x)$ ($x \in (c,d]$). u და l ფუნქციები არიან ზომადი m_φ ზომის მიმართ და აკმაყოფილებენ შეფასებებს:

$$\inf_{[c,d]} f \leq l \leq f|_{(c,d]} \leq u \leq \sup_{[c,d]} f.$$

მაეორანტული კრებალობის შესახებ ლებეგის თეორემის ძალით დავწერთ,

$$\begin{aligned} \int_{[c,d]} f d\varphi &= \lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{(c,d]} u_k d m_\varphi = \int_{(c,d]} u d m_\varphi, \\ \int_{[c,d]} f d\varphi &= \lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{(c,d]} l_k d m_\varphi = \int_{(c,d]} l d m_\varphi. \end{aligned}$$

შედეგად,

$$\int_{(c,d]} (u - l) d m_\varphi = 0.$$

საიდანაც, ეასენით $l(x) = u(x)$ ტოლობის თითქმის ყველგან შესრულებას m_φ ზომის მისხდელით. აქედან, თავის მხრივ, m_φ ზომის სისრულის საფუძველზე გვაქვს, რომ $f|_{(c,d]}$ არის ზომადი m_φ ზომის მისხდელით და $f|_{[c,d]}$ ეკვივალენტურია u და l ფუნქციების. ეს უკანასკნელი პირობა კი საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ ტოლობა:

$$\int_{(c,d]} f|_{(c,d]} d m_\varphi = \int_{[c,d]} f d\varphi.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

შემდეგი დებულება არის თეორემა 16.7.1-ის და თეორემა 16.4.1-ის შედეგი.

თეორემა 16.7.2. ვთქვათ, φ არის ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქცია. თუ $f \in C([a, b])$, მაშინ $f \in L([a, b], m_\varphi)$ და

$$\int_{[a,b]} f d m_\varphi = \int_{[a,b]} f d\varphi.$$

შესაძლებელია თეორემა 16.7.2-ის დამტკიცება უშუალოდ, თეორემა 16.7.1-ის გამოყენების გარეშე. ქვემოთ მოცემულია ასეთი დამტკიცება.

დამტკიცება. ვთქვათ, (P_k) არის $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილებათა მიმდევრობა, ისეთი, რომ $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(P_k) = 0$.

განვიხილოთ რაიმე $k \in \mathbb{N}$. $x_0, x_1, \dots, x_n$ იყოს P_k დანაწილების შემადგენელი წერტილები. f_k -თი აღვნიშნოთ ფუნქცია, რომელიც

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$$

მნიშვნელობებს ლებულობს შესაბამისად

$$[x_0, x_1], (x_1, x_2], \dots, (x_{n-1}, x_n]$$

მონაკვეთებზე. ადვილი დასანახია, რომ $f_k \in L([a, b], m_\varphi)$ და

$$\begin{aligned} \int_{[a, b]} f_k dm_\varphi &= f(x_1)m_\varphi([x_0, x_1]) + \\ &+ f(x_2)m_\varphi((x_1, x_2]) + \dots + f(x_n)m_\varphi((x_{n-1}, x_n]). \end{aligned}$$

საიდანაც, $m_\varphi(\{a\}) = 0$ ტოლობის გათვალისწინებით, დაეწერთ,

$$\begin{aligned} \int_{[a, b]} f_k dm_\varphi &= \sum_{i=1}^n f(x_i)m_\varphi((x_{i-1}, x_i]) = \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i)[\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})] = \sigma_{f, \varphi}(P_k, \xi_k), \end{aligned} \quad (2)$$

სადაც ξ_k -ს როლში აღებულია $(x_1, \dots, x_n)$ n -ეული.

უწყვეტობის გამო, f ბორელის ამრით ზომადი ფუნქციაა. შედეგად, f ზომადია m_φ ზომის მიხედვითაც. ამის შემდეგ, f -ის შემოსამღერულობის ძალით, ვასკენით, რომ $f \in L([a, b], m_\varphi)$. ახლა, თუ გავითვალისწინებთ (f_k) მიმდევრობის თანაბრად კრებადობას f ფუნქციისაყენ, (2)-ის საფუძველზე მივიღებთ,

$$\int_{[a, b]} f dm_\varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} f_k dm_\varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{f, \varphi}(P_k, \xi_k) = \int_{[a, b]} f d\varphi.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

ამოცანები

1. ვთქვათ, $\alpha > 0$ და $\beta \in \mathbb{R}$. f და φ არიან $[0, 1]$ -ზე შემდგენიარად განსაზღვრული ფუნქციები: $\varphi(x) = x^\alpha$ ($x \in [0, 1]$), $f(0) = 0$ და $f(x) = x^\beta$ ($x \in (0, 1]$). დაამტკიცეთ, რომ $f \in R_\varphi([0, 1])$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\beta \geq 0$.
2. ვთქვათ, φ რაიმე ფუნქციაა. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი $f \in R_\varphi([a, b])$ ფუნქცია არის φ -შემოსამღერული.

§ 8. რიმან-სტილტეისის აზრით ინტეგრებადობის კრიტერიუმი

თეორემა 16.8.1. ვთქვათ, φ ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქციაა. f ფუნქცია რიმან-სტილტეისის აზრით ინტეგრებადია φ ფუნქციის მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ერთდროულად შესრულებულია შემდეგი ორი პირობა:

- f არის φ -შემოსაზღვრული;
- f თითქმის ყველგან უწყვეტია m_{φ} ზომის მიხედვით.

ლემა 16.8.1. ვთქვათ, φ ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქციაა. შემოსაზღვრული f ფუნქცია რიმან-სტილტეისის აზრით ინტეგრებადია φ ფუნქციის მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა f თითქმის ყველგან უწყვეტია m_{φ} ზომის მიხედვით.

დამტკიცება. ქვემოთ ვისარგებლებთ თეორემა 16.7.1-ის დამტკიცებაში გამოყენებული აღნიშვნებით და დასკვნებით. P_k ($k \in \mathbb{N}$) იყოს $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილება, რომელიც შედგენილია $x_{k,0}, \dots, x_{k,2^k}$ წერტილებისაგან, ხოლო Π იყოს P_k ($k \in \mathbb{N}$) დანაწილებების შემადგენელი ყველა წერტილის სიმრავლე, ე.ი.

$$\Pi = \{x_{k,j} : k \in \mathbb{N}, j = 0, \dots, 2^k\}.$$

φ ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე არაუმეტეს თვალადა. ამის გათვალისწინებით, P_k დანაწილებები შეიძლება შევარჩიოთ ისე, რომ $x_{k,j}$ წერტილებში φ იყოს უწყვეტი.

φ -ს უწყვეტობის ყოველი x წერტილისათვის გვაქვს, რომ $m_{\varphi}(\{x\}) = 0$. რის გამოც, შესრულდება $m_{\varphi}(\Pi) = 0$ ტოლობა.

სამართლიანია შემდეგი დებულება: f ფუნქცია უწყვეტია $x \in [a, b] \setminus \Pi$ წერტილში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $l(x) = u(x)$. ეს დებულება მტკიცდება ზუსტად ისევე, როგორც თეორემა 9.2.1.

ვთქვათ, $f \in R_{\varphi}([a, b])$. თეორემა 16.7.1-ის დამტკიცებაში დადგენილია, რომ $u(x) = l(x)$ თითქმის ყველგან (a, b) -ზე m_{φ} ზომის მიხედვით. აქედან გამომდინარე, ზემოთ მოცემული დებულების საფუძველზე ვასკენით f ფუნქციის უწყვეტობას $[a, b] \setminus \Pi$ სიმრავლის თითქმის ყოველ წერტილში m_{φ} ზომის მიხედვით. შედეგად, $m_{\varphi}(\Pi) = 0$ პირობის გათვალისწინებით, f ფუნქცია უწყვეტი იქნება $[a, b]$ სეგმენტის თითქმის ყოველ წერტილში m_{φ} ზომის მიხედვით. ამით აუცილებლობის ნაწილი დადგენილია.

დაეუშვათ, f უწყვეტია თითქმის ყველგან m_{φ} ზომის მიხედვით. ვაჩვენოთ, რომ $\lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k$. შედეგად, გვექნება შესაძლებლობა ვიპოვოთ დანაწილება, რომლის შესაბამის დარბე-სტილტეისის ზედა და ქვედა ჯამებს შორის განსხვავება წინასწარ დასახელებულ რიცხვზე მცირე იქნება. ეს კი, როგორც ცნობილია, ნიშნავს ფუნქციის რიმან-სტილტეისის აზრით ინტეგრებადობას. აღნიშნული ტოლობის დასადგენად შევნიშნოთ, რომ:

i) u და l ფუნქციები შემოსაზღვრული და m_φ ზომის მისეღვით ზომადია;
 ii) ზემოთ მოცემული დებულების ძალით, $u(x) = l(x)$ ტოლობა სრულდება $[a, b] \setminus \Pi$ სიმრავლის თითქმის ყოველ წერტილში m_φ ზომის მისეღვით.

თუ გავითვალისწინებთ $m_\varphi(\Pi) = 0$ პირობას, დავასკვნით $u(x) = l(x)$ ტოლობის შესრულებას (a, b) მონაკვეთის თითქმის ყოველ წერტილში m_φ ზომის მისეღვით. შედეგად, დაწერეთ,

$$\int_{(a,b)} u dm_\varphi = \int_{(a,b)} l dm_\varphi.$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ მარცხენა ინტეგრალი $\lim_{k \rightarrow \infty} \int \omega_k$ ზღვრის ტოლია, ხოლო მარჯვენა კი - $\lim_{k \rightarrow \infty} \int \omega_k$ ზღვრისა, მივიღებთ $\lim_{k \rightarrow \infty} \int \omega_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \omega_k$ ტოლობას. ამით ლემა დამტკიცებულია. $\square$

$[c, d] \subset [a, b]$ მონაკვეთის მიდამო ეუწოდოთ ნებისმიერ მონაკვეთს, რომელსაც აქვს სახე: $(c - \varepsilon, d + \varepsilon) \cap [a, b]$.

ლემა 16.8.2. ვთქვათ, φ ზრდადი ფუნქციაა. მაშინ ნებისმიერი φ -შემოსაზღვრული f ფუნქციისათვის მოიძებნება $[a, b]$ სეგმენტის $P = (x_0, \dots, x_n)$ დანაწილება, ისეთი, რომ:

a) ყოველ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე სრულდება ერთ-ერთი შემდეგი ორი პირობიდან: 1) φ მუდმივია $[x_{k-1}, x_k]$ -ზე; 2) φ არაა მუდმივი $[x_{k-1}, x_k]$ -ზე და f შემოსაზღვრულია $[x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთის გარკვეულ მიდამოში;
 b) φ ფუნქცია უწყვეტია x_k წერტილებში.

დამტკიცება. δ იყოს დადებითი რიცხვი φ -შემოსაზღვრულობის განსაზღვრებიდან, ე.ი.

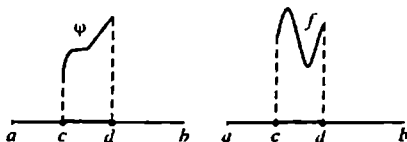
$$([c, d] \subset [a, b], d - c < \delta, \varphi(d) - \varphi(c) > 0) \Rightarrow \sup_{[c, d]} |f| < \infty. \quad (1)$$

იმის გათვალისწინებით, რომ φ ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე არაუშეტეს თვლადია, ადვილი დასაანახია, რომ მოიძებნება $[a, b]$ სეგმენტის $P = (x_0, \dots, x_n)$ დანაწილება δ -ზე ნაკლები პარამეტრით, რომლის შემადგენელ x_k წერტილებში φ არის უწყვეტი.

განვიხილოთ ნებისმიერი $[x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთი, რომელზეც φ არაა მუდმივი. თუ $[x_{k-1}, x_k]$ მდებარეობს $[a, b]$ -ს შიგნით, მაშინ ის შეგვიძლია მცირედით გავზარდოთ $[x_{k-1} - \varepsilon, x_k + \varepsilon]$ მონაკვეთამდე, ისე, რომ სიგრძე კელავე δ -ზე ნაკლები დარჩეს. მაშინ, ცხადია, φ არ იქნება მუდმივი $[x_{k-1} - \varepsilon, x_k + \varepsilon]$ -ზე და შედეგად, (1)-ის ძალით დავასკვნით f -ის შემოსაზღვრულობას $(x_{k-1} - \varepsilon, x_k + \varepsilon)$ ინტერვალზე. თუ $[x_{k-1}, x_k]$ არის კიდურა მონაკვეთი, ე.ი. $[x_{k-1}, x_k] = [a, x_1]$ ან $[x_{k-1}, x_k] = [x_{n-1}, b]$, მაშინ, ანალოგიური მსჯელობის გამოყენებით, დავადგენთ f -ის შემოსაზღვრულობას შესაბამისად $[a, x_1 + \varepsilon]$ ან $(x_{n-1} - \varepsilon, b]$ სახის მონაკვეთებზე.

თეორემა 16.8.1-ის დამტკიცება. ვთქვათ, $f \in R_{\varphi}([a, b])$. მაშინ, ლუმა 16.7.1-ის ძალით, f იქნება φ -შემოსაზღვრული. გამოვიყენოთ ლუმა 16.8.2 და ვიპოვოთ $P = (x_0, \dots, x_n)$ დანაწილება a და b თვისებებით.

$[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტს დაეარქვათ პირველი ტიპის, თუ მასზე სრულდება a ; თვისების პირველი პირობა და დაეარქვათ მეორე ტიპის, თუ მასზე სრულდება a თვისების მეორე პირობა (იხ. ნახ. 16.2).



ნახ. 16.2.

თუ $[x_{k-1}, x_k]$ არის პირველი ტიპის სეგმენტი, მაშინ $m_{\varphi}([x_{k-1}, x_k]) = 0$. შედეგად, (x_{k-1}, x_k) ინტერვალში შემავალი f -ის წყვეტის წერტილები ქმნიან ნული ზომის სიმრავლეს m_{φ} ზომის მიხედვით.

ვთქვათ, $[x_{k-1}, x_k]$ მეორე ტიპის სეგმენტია. მაშინ ლუმა 16.8.1-ის გამოყენება $f|_{[x_{k-1}, x_k]}$ და $\varphi|_{[x_{k-1}, x_k]}$ ფუნქციებისათვის მოგვცემს საშუალებას დაეასყენოთ, რომ f უწყვეტია (x_{k-1}, x_k) ინტერვალის თითქმის ყოველ წერტილში m_{φ} ზომის მიხედვით (ე.ი. (x_{k-1}, x_k) ინტერვალში შემავალი f -ის წყვეტის წერტილები ქმნიან ნული ზომის სიმრავლეს m_{φ} ზომის მიხედვით).

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $m_{\varphi}(\{x_0, \dots, x_n\}) = 0$, დაეასყენოთ f -ის ყველა წყვეტის წერტილის სიმრავლის ნულზომიანობას m_{φ} -ს მიხედვით. ამით აუცილებლობის ნაწილი დამტკიცებულია.

დაეკუთვნოს, f ფუნქცია არის φ -შემოსაზღვრული და თითქმის ყველგან უწყვეტი m_{φ} ზომის მიხედვით. ისევე, როგორც ზემოთ, გამოვიყენოთ ლუმა 16.8.2 და ვიპოვოთ $P = (x_0, \dots, x_n)$ დანაწილება a და b თვისებებით. პირველი და მეორე ტიპის სეგმენტები განესაზღვროთ ზემოთ მოცემულის მსგავსად.

თუ $[x_{k-1}, x_k]$ არის პირველი ტიპის სეგმენტი, მაშინ $\int_{[x_{k-1}, x_k]} f d\varphi$ ინტეგრალის არსებობა არის ლუმა 16.7.3-ის შედეგი.

ვთქვათ, $[x_{k-1}, x_k]$ არის მეორე ტიპის სეგმენტი. მაშინ $f|_{[x_{k-1}, x_k]}$ და $\varphi|_{[x_{k-1}, x_k]}$ ფუნქციებისათვის, ლუმა 16.8.1-ის გამოყენებით, დაეასყენოთ, რომ არსებობს ინტეგრალი $\int_{[x_{k-1}, x_k]} f d\varphi$.

ამრიგად, ყოველ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე არსებობს $\int_{[x_{k-1}, x_k]} f d\varphi$ ინტეგრალი, საიდანაც, თეორემა 16.3.3-ის საფუძველზე, მიიღება $\int_{[a, b]} f d\varphi$ ინტეგრალის არსებობა.

შემოსაზღვრული ვარიაციის ნებისმიერ φ ფუნქციას შეიძლება დაეუკავშიროთ გარკვეული ლებეგ-სტილტიესის ზომა. ამისათვის უნდა განვიხილოთ φ ფუნქციის ვარიაცია ცვლადი ზედა საზღვრით: $T_\varphi(x) = V_\varphi([a, x])$. T_φ ზრდადი ფუნქციაა, რის გამოც შენიშვნა 6.5.2-ში მითითებული წესით ის წარმოქმნის ლებეგ-სტილტიესის m_{T_φ} ზომას. ეს უკანასკნელი ზომა აღენიშნოთ m_φ -თი.

სამართლიანია თეორემა 16.8.1-ის შემდეგი განზოგადება, რომელიც მოგვყავს დაუმტკიცებლად.

თეორემა 16.8.2. ვთქვათ, φ შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციაა. f ფუნქცია რიმან-სტილტიესის აზრით ინტეგრებადია φ ფუნქციის მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ერთდროულად შესრულებულია შემდეგი ორი პირობა:

- f არის φ -შემოსაზღვრული;
- f თითქმის ყველგან უწყვეტია m_φ ზომის მიხედვით.

ამოცანები

1. ეთქვათ, φ შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციაა და T_φ არის მისი ვარიაცია ცვლადი ზედა საზღვრით. აჩვენეთ, რომ $f \in R_\varphi([a, b])$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f \in R_{T_\varphi}([a, b])$.

§ 9. ლებეგის ინტეგრალის წარმოდგენა რიმან-სტილტიესის ინტეგრალის მეშვეობით

ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ (X, S, μ) რაიმე ფიქსირებული ზომიანი სივრცეა.

შემდეგი თეორემა ლებეგის ინტეგრალს გამოსახავს განაწილების ფუნქციის მიმართ რიმან-სტილტიესის ინტეგრალის მეშვეობით.

თეორემა 16.9.1. ნებისმიერი $f \in L(X, \mu)$ ფუნქციისათვის სამართლიანია ტოლობა:

$$\int_X |f| d\mu = - \int_{(0, \infty)} t dF_f(t).$$

თეორემა 16.9.1-ს ჩვენ მივიღებთ შემდეგი უფრო ზოგადი დებულებიდან.

თეორემა 16.9.2. ვთქვათ, $\Phi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ არის უწყვეტად წარმოებადი და მკაცრად ზრდადი ფუნქცია, $\Phi(0) = 0$ და $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \infty$

თვისებებით. მაშინ ნებისმიერი $f \in \Phi(L)(X, \mu)$ ფუნქციისათვის სამართლიანია ტოლობა:

$$\int_X \Phi(|f|) d\mu = - \int_{(0, \infty)} \Phi(t) dF_f(t).$$

ვთქვათ, Δ არის წრფის რაიმე გადაუკვარებელი მონაკვეთი, ხოლო φ - მასზე განსაზღვრული მონოტონური და მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქცია. $\mathcal{I}_\Delta$ -თი აღვნიშნოთ $\{\emptyset\} \cup \{(a, b] \mid (a, b] \subset \Delta\}$ ნახევარგოლი. ν_φ -თი აღვნიშნოთ $\mathcal{I}_\Delta$ კლასზე შემდგენიარად განსაზღვრული ფუნქცია: $\nu_\varphi(\emptyset) = 0$ და $\nu_\varphi((a, b]) = |\varphi(b) - \varphi(a)|$ ($(a, b] \subset \Delta$). თორემა 4.5.3-ის მსგავსად მტკიცდება, რომ ν_φ არის ზომა. ν_φ ზომის ლებეგისეულ გაგრძელებას ეწოდება φ ფუნქციით წარმოქმნილი ლებეგ-სტილტიესის ზომა და ის აღინიშნება m_φ ჩანაწერით.

$f \in \Phi(L)(X, \mu)$ ფუნქციის F_f განაწილების ფუნქცია არის სასრული ყოველი დადებითი t -სათვის, ამასთან, F_f არის კლებადი და მარჯვნიდან უწყვეტი. აღნიშნულის საფუძველზე შეიძლება განვიხილოთ m_{F_f} ლებეგ-სტილტიესის ზომა $(0, \infty)$ მონაკვეთზე. ადვილი დასანახია, რომ ნებისმიერი $[a, b] \subset (0, \infty)$ სეგმენტის ქვესიმრავლეებზე m_{F_f} ზომა ემთხვევა $-F_f|_{[a, b]}$ ფუნქციით წარმოქმნილ ლებეგ-სტილტიესის ზომას.

ლემა 16.3.1. ვთქვათ, $\Phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ არის უწყვეტი და მკაცრად ზრდადი ფუნქცია, $\Phi(0) = 0$ და $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \infty$ თვისებებით, ხოლო f არის $\Phi(L)(X, \mu)$ კლასის ფუნქცია. მაშინ $\Phi(|f|)$ -ის განაწილების ფუნქცია μ ზომის მიხედვით ტოლია Φ -ს განაწილების ფუნქციისა m_{F_f} ზომის მიხედვით, ე.ი.

$$\mu(\{\Phi(|f|) > t\}) = m_{F_f}(\{\Phi > t\}) \quad (t \geq 0).$$

დამტკიცება. ყოველი დადებითი b -სათვის გვაქვს, რომ

$$\int_X \Phi(|f|) d\mu \geq \int_{\{|f| > b\}} \Phi(|f|) d\mu \geq \Phi(b) F_f(b).$$

შედეგად, $\lim_{b \rightarrow \infty} F_f(b) = 0$. აქედან, თავის მხრივ ელემენტობით, რომ ყოველი დადებითი a -სათვის,

$$m_{F_f}((a, \infty)) = \lim_{b \rightarrow \infty} m_{F_f}((a, b]) = \lim_{b \rightarrow \infty} [F_f(a) - F_f(b)] = F_f(a). \quad (1)$$

განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი t რიცხვი. Φ ფუნქციის თვისებების საფუძველზე ადვილი დასანახია $\{\Phi > t\} = (\Phi^{-1}(t), \infty)$ ტოლობის სამართლიანობა. საიდანაც, (1)-ის გათვალისწინებით ელემენტობით,

$$m_{F_f}(\{\Phi > t\}) = F_f(\Phi^{-1}(t)). \quad (2)$$

მეორე მხრივ გვაქვს, რომ

$$\mu(\{\Phi(|f|) > t\}) = \mu(\{|f| > \Phi^{-1}(t)\}) = F_f(\Phi^{-1}(t)). \quad (3)$$

(2) და (3) ტოლობებიდან ვასკენით ლემის სამართლიანობას. □

თეორემა 8.9.2-ის დამტკიცება. თეორემა 8.10.1-ის ძალით ვკვებება, რომ:

$$\begin{aligned} \int_X \Phi(|f|)d\mu &= \int_{(0,\infty)} \mu(\{\Phi(|f|) > t\})dm(t), \\ \int_{(0,\infty)} \Phi(t)dm_{F_f} &= \int_{(0,\infty)} m_{F_f}(\{\Phi > t\})dm(t). \end{aligned}$$

საიდანაც, ლემა 16.9.1-ის გათვალისწინებით, ვღებულობთ,

$$\int_X \Phi(|f|)d\mu = \int_{(0,\infty)} \Phi(t)dm_{F_f}.$$

უკანასკნელი ინტეგრალი თეორემა 16.7.1-ის საფუძველზე შეზღუდვანიად შეიძლება გარდაქმნათ:

$$\begin{aligned} \int_{(0,\infty)} \Phi(t)dm_{F_f} &= \lim_{a \rightarrow 0, b \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \Phi(t)dm_{F_f} = \\ &= - \lim_{a \rightarrow 0, b \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \Phi(t)dF_f = - \int_{(0,\infty)} \Phi(t) dF_f(t). \end{aligned}$$

რითაც თეორემა დამტკიცებულია. □

დ ა ნ ა რ თ ი 1

რიცხვის წარმოდგენა ორობითი წილადის სახით

I. ორობითი სეგმენტები. $[0, 1]$ სეგმენტი დაეყოთ ორ ტოლ: მარცხენა - $\Delta(0)$ და მარჯვენა - $\Delta(1)$, ნაწილად. ამ ორი სეგმენტის კლასი აღენიშნოს Ω_1 -ით. მეორე ეტაპზე, თავის მხრივ, $\Delta(0)$ დაეყოთ ორ ტოლ: მარცხენა - $\Delta(0, 0)$ და მარჯვენა - $\Delta(0, 1)$ ნაწილად, ხოლო $\Delta(1)$ - ანალოგიურ $\Delta(1, 0)$ და $\Delta(1, 1)$ ნაწილებად. მიღებული ოთხი სეგმენტის კლასი აღენიშნოთ Ω_2 -ით, თუ ამ აგებას უსასრულოდ გაეგრძელებთ, მივიღებთ სეგმენტთა კლასების

$$\Omega_n = \{\Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = 0, 1\}$$

მიმდევრობას, რომელიც ხასიათდება იმით, რომ Ω_{n+1} მიიღება Ω_n კლასის ყოველი $\Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ სეგმენტის დაყოფით ორ ტოლ: მარცხენა - $\Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, 0)$ და მარჯვენა - $\Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, 1)$, ნაწილად.

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ კლასის სეგმენტებს - ორობით სეგმენტებს, ხოლო Ω_n ($n \in \mathbb{N}$) კლასის სეგმენტებს - n -ური რიგის ორობით სეგმენტებს უწოდებენ.

$\Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ ორობითი სეგმენტის მარცხენა ბოლო აღენიშნოს $a(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ -ით.

დებულება 1. ნებისმიერი ორობითი $\Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ სეგმენტისათვის სრულდება ტოლობა $a(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{2^k}$.

ეს დებულება მარტივად მტკიცდება მათემატიკური ინდუქციის პრინციპით n -ის მიმართ.

II. ორობითი წილადები. (ε_n) მიმდევრობას, რომლის წევრები ლე-ბულობენ ნულის ან ერთის ტოლ მნიშვნელობებს, ორობითი მიმდევრობა ეწოდება.

შემდგომში ყველა ორობითი მიმდევრობის სიმრავლეს აღენიშნაეთ B -თი.

B_0 -ით (B_1 -ით) აღენიშნოთ ყველა იმ ორობითი მიმდევრობის სიმრავლე, რომლის ყველა წევრი, დაწყებული გარკვეული ნომრიდან, ნულის ტოლია (ერთის ტოლია).

შეენიშნოთ. რომ $B \setminus B_1$ ($B \setminus B_0$) შედგება ყველა იმ ორობითი მიმდევრობისაგან, რომლის ნულის ტოლ (ერთის ტოლ) წევრთა რაოდენობა უსასრულოა; ხოლო $B \setminus (B_0 \cup B_1)$ არის ყველა იმ ორობითი მიმდევრობის სიმრავლე, რომლის როგორც ნულის, ასევე ერთის ტოლი წევრების რაოდენობა უსასრულოა.

მწკრივს $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n / 2^n$, სადაც (ε_n) ორობითი მიმდევრობაა, ორობითი წილადი ეწოდება.

ეთქვას, $E \subset B$. $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n / 2^n$ ორობით წილადს, რომლისთვისაც $(\varepsilon_n) \in E$ ეუწოდოთ E -ტიპის.

ვიტყვი, რომ $x \in [0, 1]$ რიცხვი წარმოდგენილია $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n / 2^n$ ორობითი წილადის სახით, თუ $x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n / 2^n$.

III. ორობითი სეგმენტების ჩალაგებული მიმდევრობები. (I_n) მიმდევრობას ეუწოდოთ ორობითი სეგმენტების ჩალაგებული მიმდევრობა, თუ $I_n \in \Omega_n$ და $I_n \supset I_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$).

ორობითი სეგმენტების ჩალაგებულ (I_n) მიმდევრობას ეუწოდოთ $x \in [0, 1]$ წერტილისაგან მოჭიმვადი, თუ $x \in I_n$ ყოველი n -სთვის. ცხადია, ასეთ შემთხვევაში გვაქვს, რომ $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

დებულება 2. ვთქვათ, (I_n) ორობითი სეგმენტების მიმდევრობაა. შემდეგი ორი წინადადება ერთმანეთის ტოლფასია:

- 1) (I_n) ორობითი სეგმენტების ჩალაგებული მიმდევრობაა;
- 2) მოიძებნება ორობითი მიმდევრობა (ε_n) ისეთი, რომ

$$I_n = \Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

დამტკიცება. ეთქვას, (I_n) ორობითი სეგმენტების ჩალაგებული მიმდევრობაა. Ω_n ოჯახების განსაზღვრის გათვალისწინებით, ადვილი დასაანახია, რომ I_{n+1} არის I_n -ის მარცხენა ან მარჯვენა ნახევარი. შედეგად, თუ $I_n = \Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, მაშინ $I_{n+1} = \Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, 0)$ ან $I_{n+1} = \Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, 1)$. აქედან ცხადია, მიიღება 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია. შებრუნებული, 2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაცია, უშუალოდ გამომდინარეობს Ω_n ოჯახების განმარტებიდან. $\square$

დებულება 3. ვთქვათ, $x \in [0, 1]$ და (ε_n) ორობითი მიმდევრობაა. შემდეგი ორი წინადადება ერთმანეთის ტოლფასია:

- 1) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n}$;
- 2) $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.

დამტკიცება. ყოველი ორობითი (ε_n) მიმდევრობისთვის და ნატურალური n -სთვის გვექნება, რომ

$$ა) \quad \Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \left[\sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{2^k}, \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{2^k} + \frac{1}{2^n} \right];$$

$$ბ) \quad \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{2^k} + \frac{1}{2^n}.$$

ა) გამომდინარეობს ღებულება 1-დან, ხოლო ბ) არის (ε_n) -ის ორობითობის შედეგი.

აღნიშნული ორი თანაფარდობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ეკვივალენტობა. $\square$

$m/2^n$ სახის რიცხვს, სადაც $n \in \mathbb{N}$ და $m \in \mathbb{Z}$ ორობითად-რაციონალური ეწოდება. თუ რიცხვს არა აქვს აღნიშნული სახე, მაშინ მას ორობითად-ირაციონალურს უწოდებენ.

ყველა ორობითად-რაციონალური რიცხვის სიმრავლე აღვნიშნოთ $\mathbb{Q}_2$ -ით.

ღებულება 4. ვთქვათ, $x \in (0, 1)$ ორობითად-რაციონალურია და $x = p/2^q$, სადაც p კენტიია. მაშინ არსებობს ზუსტად ორი x -საკენ მოჭიმვადი ორობითი სეგმენტების ჩალაგებული მიმდევრობა - $(\Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n))$ და $(\Delta(\eta_1, \dots, \eta_n))$. ამასთან, ამ მიმდევრობებს აქვთ თვისებები:

- 1) $\varepsilon_n = \eta_n$, როცა $n < q$;
- 2) $\varepsilon_n = 1$ და $\eta_n = 0$, როცა $n \geq q$;
- 3) x არის $\Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ სეგმენტის მარჯვენა ბოლო, როცა $n \geq q$;
- 4) x არის $\Delta(\eta_1, \dots, \eta_n)$ სეგმენტის მარცხენა ბოლო, როცა $n \geq q$.

ღებულება 5. ვთქვათ, $x \in [0, 1]$ ორობითად-ირაციონალური რიცხვია. მაშინ არსებობს ერთადერთი x -საკენ მოჭიმვადი ორობითი სეგმენტების ჩალაგებული $(\Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n))$ მიმდევრობა. ამასთან, ამ მიმდევრობას აქვს $(\varepsilon_n) \in B \setminus (B_0 \cup B_1)$ თვისება.

4 და 5 ღებულებების დამტკიცებისათვის საკმარისია შევნიშნოთ სამი რამ:

ა) ყოველი n -სთვის $t \in [0, 1]$ წერტილი შედის n -ური რიგის ერთ ან ორ ორობით სეგმენტში. პირველ შემთხვევაში, t სეგმენტის შიგა წერტილია, ხოლო მეორე შემთხვევაში, t წარმოადგენს n -ური რიგის ორი მოსაზღვრე სეგმენტის საერთო ბოლოს;

ბ) თუ $t \in [0, 1]$ არის $\Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \Omega_n$ სეგმენტის მარჯვენა ბოლო და $\Delta(\eta_1, \dots, \eta_n) \in \Omega_n$ სეგმენტის მარცხენა ბოლო, მაშინ t წერტილი არის, აგრეთვე, $\Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, 1) \in \Omega_{n+1}$ სეგმენტის მარჯვენა ბოლო და $\Delta(\eta_1, \dots, \eta_n, 1) \in \Omega_{n+1}$ სეგმენტის მარცხენა ბოლო;

გ) $[0, 1]$ სეგმენტის ორობითად-რაციონალური რიცხვების სიმრავლე ემთხვევა ორობითი სეგმენტების ბოლოების სიმრავლეს.

2-5 დებულებების ძალით რიცხვის წარმოდგენები ორობითი წილადის სახით აღიწერება ამ წერტილისავე მოჭიმვადი ორობითი სეგმენტების მიმდევრობების მეშვეობით.

4. რიცხვის წარმოდგენა ორობითი წილადის სახით. ქვემოთ მოცემული თეორემები გამომდინარეობენ 2-5 დებულებებიდან.

თეორემა 1. ყოველ ორობითად-რაციონალურ $x \in (0, 1)$ რიცხვს აქვს ზუსტად ორი წარმოდგენა ორობითი წილადის სახით. ამასთან, მათ შორის ერთი არის B_0 -ტიპის, ხოლო მეორე - B_1 -ტიპის.

თეორემა 2. ყოველ ორობითად-ირაციონალურ $x \in (0, 1)$ რიცხვს აქვს ერთადერთი წარმოდგენა ორობითი წილადის სახით. ამასთან, ეს წარმოდგენა არის $B \setminus (B_0 \cup B_1)$ -ტიპის.

შენიშვნა 1. ცხადია, რომ 0 და 1 რიცხვებს აქვთ ერთადერთი წარმოდგენა ორობითი წილადის სახით. სასელდობრ, ეს წარმოდგენებია: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{2^n}$ და $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, შესაბამისად.

V. შესაბამისობა ორობით მიმდევრობებსა და რიცხვებს შორის.

თეორემა 3. შემდეგი ასახვები წარმოადგენენ ბიექციას:

$$B_0 \ni (\varepsilon_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} \in [0, 1) \cap \mathbb{Q}_2;$$

$$B_1 \ni (\varepsilon_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}_2;$$

$$B \setminus (B_0 \cup B_1) \ni (\varepsilon_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}_2;$$

$$B \setminus B_1 \ni (\varepsilon_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} \in [0, 1);$$

$$B \setminus B_0 \ni (\varepsilon_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} \in (0, 1].$$

თეორემა 3-ის დამტკიცებისათვის დაგვჭირდება შემდეგი წინადადება.

დებულება ნ. ვთქვათ, $(\varepsilon_n), (\eta_n) \in B \setminus B_1$ ან $(\varepsilon_n), (\eta_n) \in B \setminus B_0$,
და $(\varepsilon_n) \neq (\eta_n)$. მაშინ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} \neq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n}{2^n}.$$

დამტკიცება. ჯერ განვიხილოთ $(\varepsilon_n), (\eta_n) \in B \setminus B_1$ შემთხვევა. აღვნიშნოთ

$$N = \min\{n \in \mathbb{N} : \varepsilon_n \neq \eta_n\}.$$

მოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმობთ, რომ $\varepsilon_N = 1$ და $\eta_N = 0$. მაშინ თუ გავითვალისწინებთ პირობებს: $\varepsilon_n = \eta_n$ როცა $n < N$ და $(\eta_n) \in B \setminus B_1$. გვექნება,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} \geq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\varepsilon_n}{2^n} + \frac{1}{2^N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} > \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\eta_n}{2^n} + \frac{0}{2^N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\eta_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n}{2^n}.$$

მეორე შემთხვევაში მსჯელობა ანალოგიურია იმ განსხვავებით, რომ შეფასების დროს უნდა ვისარგებლოთ $(\varepsilon_n) \in B \setminus B_0$ პირობით. $\square$

თეორემა 3-ის დამტკიცება. განსახილავი ასახვები აღვნიშნოთ f_i -ით ($i \in \overline{1,5}$), მათი თანმიმდევრობის შესაბამისად.

f_1, f_2 და f_3 ასახვების სიურექტიულობა გამომდინარეობს 1 და 2 თეორემებიდან, ხოლო ინექტიურობა - დებულება 6-დან.

f_4 და f_5 ასახვების ბიექტიურობა წარმოადგენს f_1, f_2 და f_3 ასახვების ბიექტიურობის შედეგს. $\square$

VI. რიცხვის (m_n) -წარმოდგენა. ნებისმიერი $m \geq 2$ ნატურალური რიცხვისათვის შეიძლება განვიხილოთ ორობითი წილადების მსგავსი „ m -ობითი“ წილადები და მათი მეშვეობით რიცხვის წარმოდგენის საკითხი. ქვემოთ დაუმტკიცებლად იქნება მოცემული კიდევ უფრო მოგადი ხასიათის შედეგები ამ მიმართულებით.

ვთქვათ, (m_n) ერთზე მეტი ნატურალური რიცხვების რაიმე მიმდევრობაა. მწკრივს

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{M_n},$$

სადაც $1 \leq \varepsilon_n \leq m_n - 1$ და $M_n = m_1 m_2 \dots m_n$, ვუწოდოთ (m_n) ტიპის წილადი.

(m_n) ტიპის $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n / M_n$ წილადს, ვუწოდოთ $x \in [0, 1]$ რიცხვის (m_n) ტიპის წარმოდგენა. თუ $x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n / M_n$.

მთელ რიცხვთა (ε_n) მიმდევრობას ვუწოდოთ (m_n) ტიპის მიმდევრობა, თუ $1 \leq \varepsilon_n \leq m_n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

ყველა (m_n) ტიპის მიმდევრობის სიმრავლე აღენიშნოთ $B(m_n)$ -ით.

$E \subset B(m_n)$ სიმრავლეში შემაჯალ მიმდევრობებს ეუწოდოთ E -ტიპის.

$B_0(m_n)$ -ით აღენიშნოთ ყველა იმ (m_n) ტიპის მიმდევრობის სიმრავლე, რომლის ყველა წევრი, დაწყებული გარყვეული ნომრიდან, 0-ის ტოლია, ხოლო $B_1(m_n)$ -ით აღენიშნოთ ყველა იმ (m_n) ტიპის მიმდევრობის სიმრავლე, რომლის ყველა წევრი, დაწყებული გარყვეული ნომრიდან, $(m_n - 1)$ -ის ტოლია.

თუ x რიცხვს აქვს p/M_n სახე, სადაც $n \in \mathbb{N}$ და $p \in \mathbb{Z}$, მაშინ მას ეუწოდოთ (m_n) -რაციონალური, ხოლო, წინააღმდეგ შემთხვევაში - (m_n) -ირაციონალური.

ყველა (m_n) -რაციონალური რიცხვის სიმრავლე აღენიშნოთ $\mathbb{Q}(m_n)$ -ით.

1-3 თეორემების მსგავსად მტკიცდება შემდეგი დებულებები.

თეორემა 4. ყოველ (m_n) -რაციონალურ $x \in (0, 1)$ რიცხვს აქვს ზუსტად ორი წარმოდგენა (m_n) ტიპის წილადის სახით. ამასთან, მათ შორის ერთი არის $B_0(m_n)$ -ტიპის, ხოლო მეორე - $B_1(m_n)$ -ტიპის.

თეორემა 5. ყოველ (m_n) -ირაციონალურ $x \in (0, 1)$ რიცხვს აქვს ერთადერთი წარმოდგენა (m_n) ტიპის წილადის სახით. ამასთან, ეს წარმოდგენა არის $B \setminus (B_0(m_n) \cup B_1(m_n))$ -ტიპის.

თეორემა 6. შემდეგი ასახვები წარმოადგენენ ბიექციას:

$$B_0(m_n) \ni (\varepsilon_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{M_n} \in [0, 1) \cap \mathbb{Q}(m_n);$$

$$B_1(m_n) \ni (\varepsilon_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{M_n} \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}(m_n);$$

$$B \setminus (B_0(m_n) \cup B_1(m_n)) \ni (\varepsilon_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{M_n} \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}(m_n);$$

$$B \setminus B_1(m_n) \ni (\varepsilon_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{M_n} \in [0, 1);$$

$$B \setminus B_0(m_n) \ni (\varepsilon_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{M_n} \in (0, 1].$$

დ ა ნ ა რ თ ი 2

ზოგიერთი ცნობა მეტრიკული და ნორმირებული სივრცეების შესახებ

I. ეთქვათ, X რაიმე არაყარიელი სიმრავლეა. $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ ფუნქციას ეწოდება მანძილი (მეტრიკა) X სიმრავლეში, თუ d აკმაყოფილებს შემდეგ სამ პირობას:

- $d(x, y) = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$ (სიმეტრიულობის პირობა);
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (სამკუთხედის უტოლობა).

მეტრიკული სივრცე ეწოდება (X, d) წყვილს, სადაც X რაიმე არაყარიელი სიმრავლეა, ხოლო d მანძილია X -ში.

ქვემოთ ვიგულისხმობთ, რომ (X, d) რაიმე ფიქსირებული მეტრიკული სივრცეა.

ეთქვათ, $x_0 \in X$ და $\varepsilon > 0$. ღია ბირთვი და ჩაკეტილი ბირთვი ცენტრით x_0 წერტილში და რადიუსით ε , შესაბამისად, ეწოდებათ სიმრავლეებს:

$$B(x_0, \varepsilon) = \{x : d(x, x_0) < \varepsilon\}, \quad B[x_0, \varepsilon] = \{x : d(x, x_0) \leq \varepsilon\}.$$

$B(x_0, \varepsilon)$ ბირთვს x_0 წერტილის ε -მიდამოს ეწოდებენ.

$x \in X$ წერტილს ეწოდება $M \subset X$ სიმრავლის შეხების წერტილი, თუ x -ის ნებისმიერი ε -მიდამო შეიცავს M სიმრავლის ერთ წერტილს მაინც.

$x \in X$ წერტილს ეწოდება $M \subset X$ სიმრავლის იზოლირებული წერტილი, თუ $x \in M$ და მოიძებნება x -ის ε -მიდამო, ისეთი, რომ $B(x, \varepsilon) \cap M = \{x\}$.

$x \in X$ წერტილს ეწოდება $M \subset X$ სიმრავლის ზღვარი (სიმრავლის წერტილი), თუ x -ის ნებისმიერი ε -მიდამო შეიცავს M სიმრავლის წერტილთა უსასრულო რაოდენობას.

სიმრავლის შეხების წერტილი ან წარმოადგენს მის იზოლირებულ წერტილს, ანაც არის მისი ზღვარი (წერტილი).

$x \in X$ წერტილს ეწოდება $M \subset X$ სიმრავლის შიგა წერტილი, თუ მოიძებნება x -ის ε -მიდამო, რომელიც ჩართულია M სიმრავლეში.

$M \subset X$ სიმრავლეს ეწოდება ჩაკეტილი, თუ M შეიცავს ყველა თავის შესხების წერტილს.

$M \subset X$ სიმრავლეს გავერთიანებთ ყველა მისი შესხების წერტილის სიმრავლესთან, მაშინ მიიღება ჩაკეტილი სიმრავლე, რომელსაც M სიმრავლის ჩაკეტვა ეწოდება.

$M \subset X$ სიმრავლეს ეწოდება ღია, თუ M -ის ყოველი წერტილი არის M -ის შიგა წერტილი.

$M \subset X$ სიმრავლეს ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ მოიძებნება მისი შემცველი რაიჲ $B(x_0, \varepsilon)$ ბირთვი.

$M \subset X$ სიმრავლის დიამეტრი განისაზღვრება შემდეგნაირად: $\text{diam } M = \sup\{d(x, y) : x, y \in M\}$.

X -ის წერტილთა (x_n) მიმდევრობას ეწოდება კრებადი $x \in X$ წერტილისაკენ, თუ $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$. ელემენტს, რომლისკენაც კრებადია (x_n) მიმდევრობა, (x_n) -ის ზღვარს უწოდებენ (ჩანაწერი: $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) ან $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$).

მანძილს აქვს უწყვეტობის თვისება: თუ $x_n \rightarrow x$ და $y_n \rightarrow y$, მაშინ $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$. ეს ფაქტი მტკიცდება შემდეგი შეფასების მეშვეობით: $|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y)$.

სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

- x წერტილი წარმოადგენს M სიმრავლის შესხების წერტილს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მოიძებნება M სიმრავლის წერტილთა (x_n) მიმდევრობა, რომელიც კრებადია x წერტილისაკენ;
- x წერტილი წარმოადგენს M სიმრავლის ზღვარით წერტილს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მოიძებნება M სიმრავლის წყვილ-წყვილად განსხვავებულ წერტილთა (x_n) მიმდევრობა, რომელიც კრებადია x წერტილისაკენ;
- M სიმრავლე ჩაკეტილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი დამატებითი $X \setminus M$ სიმრავლე ღიაა;
- ღია სიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახის გაერთიანება ღია სიმრავლეა;
- ღია სიმრავლეთა ნებისმიერი სასრული ოჯახის თანაკვეთა ღია სიმრავლეა;
- ჩაკეტილ სიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახის თანაკვეთა ჩაკეტილი სიმრავლეა;
- ჩაკეტილ სიმრავლეთა ნებისმიერი სასრული ოჯახის გაერთიანება ჩაკეტილი სიმრავლეა;
- სიმრავლე შემოსაზღვრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი დიამეტრი სასრულია.

სიმრავლეთა Ω კლასს (G_α ოჯახს) ეწოდება M სიმრავლის ღია დაფარვა, თუ თითოეული $G \in \Omega$ (თითოეული G_α) სიმრავლე ღიაა და მათი გაერთიანება შეიცავს M -ს.

$M \subset X$ სიმრავლეს ეწოდება კომპაქტური, თუ მისი ნებისმიერი ღია დაფარვიდან გამოიყოფა სასრული ქვედაფარვა (ე.ი. სასრული ქვეკლასი (ქვე-ოჯახი), რომელიც დაფარავს M სიმრავლეს.)

ადილი დასაბამია, რომ კომპაქტურ სიმრავლეთა სასრული გაერთიანება კელე კომპაქტური სიმრავლეა.

მათემატიკური ანალიზის კურსიდან ცნობილია, რომ $\mathbb{R}^n$ სივრცის M ქვესიმრავლისათვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- M კომპაქტურია;
- M ჩაკეტილი და შემოსაზღვრულია;
- M -ის წერტილთა ნებისმიერი მიმდევრობისაგან გამოიყოფა M -ის რაიმე წერტილისაგან კრებადი ქვემიმდევრობა.

მეტრიკული სივრცის A და B ქვესიმრავლეებს შორის მანძილი განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით:

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

ლემა 1. ვთქვათ, $F_1, \dots, F_k$ არიან $\mathbb{R}^n$ სივრცის კომპაქტური და წყვილ-წყვილად თანაკეცვითი ქვესიმრავლეები. მაშინ ყოველი F_k სიმრავლე სხვა დანარჩენი F_j სიმრავლეების გაერთიანებისაგან დაშორებულია დადებითი მანძილით.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო: რომელიღაც F_k სიმრავლე სხვა დანარჩენი F_j სიმრავლეების გაერთიანებისაგან დაშორებულია ნულის ტოლი მანძილით. მაშინ მოიძებნებიან $x_m \in F_k$ და $y_m \in \bigcup_{j \neq k} F_j$ მიმდევრობები, ისე, რომ $d(x_m, y_m) \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$). შემდეგ, თუ გავითვალისწინებთ F_k და $\bigcup_{j \neq k} F_j$ სიმრავლეების კომპაქტურობას, გამოვყოფთ (x_{m_p}) და (y_{m_p}) ქვემიმდევრობებს, რომლებიც, შესაბამისად, კრებადია რაიმე $x \in F_k$ და $y \in \bigcup_{j \neq k} F_j$ წერტილებისაგან. გვეჩვენება, რომ $d(x, y) = \lim_{p \rightarrow \infty} d(x_{m_p}, y_{m_p}) = 0$. აქედან გამომდინარე, $x = y$. შედეგად, F_k და $\bigcup_{j \neq k} F_j$ სიმრავლეებს აღმოაჩნდათ არაცარიელი თანაკეცვა, რაც ეწინააღმდეგება ლემის პირობას. $\square$

II. ვთქვათ, (X, d) და (Y, ρ) რაიმე მეტრიკული სივრცეებია და მოცემულია $f : X \rightarrow Y$ ასახვა. f -ს ეწოდება უწყვეტი $x_0 \in X$ წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება $\delta > 0$, ისეთი, რომ

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

შევნიშნოთ, რომ უკანასკნელი იმპლიკაცია შემდეგი ჩართვის ტოლფასია:

$$f((B(x_0, \delta)) \subset V(f(x_0), \varepsilon).$$

აქ $B(x, r)$ და $V(y, r)$ შესაბამისად აღნიშნავენ ღია ბირთვებს (X, d) და (Y, ρ) სივრცეებში.

(X, d) სივრციდან (Y, ρ) სივრცეში მოქმედ f ასახვას ეწოდება უწყვეტი, თუ ის უწყვეტია ყოველ $x_0 \in X$ წერტილში.

თეორემა 1. ვთქვათ, (X, d) და (Y, ρ) მეტრიკული სივრცეებია. მაშინ ნებისმიერი $f: X \rightarrow Y$ ასახვისათვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

1) f უწყვეტია;

2) (Y, ρ) სივრცეში ღია ყოველი $G \subset Y$ სიმრავლისათვის მისი $f^{-1}(G)$ წინასახე ღია სიმრავლეა (X, d) სივრცეში.

დამტკიცება. 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია: ვთქვათ, $G \subset Y$ ღია სიმრავლეა. განვიხილოთ ნებისმიერი $x_0 \in f^{-1}(G)$ წერტილი. $f(x_0) \in G$ წერტილისათვის ეიპოვოთ $V(f(x_0), \varepsilon)$ მიდამო, რომელიც ჩართულია G -ში. შემდეგ, f -ის უწყვეტობის საფუძველზე, ეიპოვოთ $\delta > 0$, ისეთი, რომ

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

შედეგად, $V(f(x_0), \varepsilon) \subset G$ ჩართვის ძალით, ყოველი $x \in B(x_0, \delta)$ წერტილისათვის, $f(x) \in G$. აქედან გამომდინარე, $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(G)$. ამრიგად, $f^{-1}(G)$ -ს ნებისმიერი x_0 წერტილი არის მისი შიგა წერტილი. ამით 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია დამტკიცებულია.

2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაცია: განვიხილოთ ნებისმიერი $x_0 \in X$ წერტილი. 2) წინადადების თანახმად, ნებისმიერი მოცემული $\varepsilon > 0$ -სთვის $V(f(x_0), \varepsilon)$ ღია ბირთვის $f^{-1}(V(f(x_0), \varepsilon))$ წინასახე ღია სიმრავლეა, რის გამოც იარსებებს $B(x_0, \delta)$ მიდამო, რომელიც ჩართულია $f^{-1}(V(f(x_0), \varepsilon))$ სიმრავლეში. შედეგად, სამართლიანია ჩართვა:

$$f((B(x_0, \delta)) \subset V(f(x_0), \varepsilon).$$

ეს კი ნიშნავს f -ის უწყვეტობას x_0 წერტილში. ამით 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია და მასთან ერთად თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ვთქვათ, (X, d) და (E, ρ) მეტრიკული სივრცეებია. (E, ρ) -ს ეწოდება (X, d) -ს ქვესივრცე, თუ $E \subset X$ და ρ წარმოადგენს d მეტრიკის შეზღუდვას $E \times E$ -ზე.

თეორემა 2. ვთქვათ, (E, ρ) არის (X, d) მეტრიკული სივრცის ქვესივრცე. მაშინ ნებისმიერი $M \subset E$ სიმრავლისათვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

1) M ღიაა (E, ρ) სივრცეში;

2) M წარმოდგება $G \cap E$ სახით, სადაც G არის (X, d) სივრცეში ღია რაიმე სიმრავლე.

დამტკიცება. 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია: ბირთვები (X, d) სივრცეში აღენიშნოთ $B(x, r)$ -ით, ხოლო (E, ρ) სივრცეში - $V(x, r)$ -ით. ცხადია, რომ ნებისმიერი $x \in E$ წერტილისათვის და $r > 0$ რიცხვისთვის,

$$V(x, r) = B(x, r) \cap E. \quad (1)$$

უთქვამთ, M ღია სიმრავლეა (E, ρ) სივრცეში, ყოველი $x \in M$ -სთვის ვიპოვოთ $\varepsilon_x > 0$, რომლისთვისაც $V(x, \varepsilon_x) \subset M$. მაშინ გვექნება, რომ $M = \bigcup_{x \in M} V(x, \varepsilon_x)$. G -ს როლში ავიღოთ $\bigcup_{x \in M} B(x, \varepsilon_x)$ გაერთიანება. მაშინ G იქნება ღია სიმრავლე (X, d) სივრცეში, ამასთან, (1)-ის გათვალისწინებით გვექნება, რომ $G \cap E = M$. ამით 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია დამტკიცებულია.

2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაცია: უთქვამთ, $M = G \cap E$. სადაც G არის (X, d) სივრცეში ღია რაიმე სიმრავლე. განვიხილოთ ნებისმიერი $x \in M$ წერტილი. მაშინ, $M \subset G$ ჩართვის გამო, მოიძებნება $\varepsilon_x > 0$, რომლისთვისაც $B(x, \varepsilon_x) \subset G$. საიდანაც, (1) ტოლობის გათვალისწინებით, გვექნება, რომ

$$V(x, \varepsilon_x) = B(x, \varepsilon_x) \cap E \subset G \cap E = M.$$

ამრიგად, x არის M -ის შიგა წერტილი (E, ρ) სივრცეში. ამით 2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაცია და მასთან ერთად თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

III. $M \subset X$ სიმრავლეს ეწოდება მკვრივი $E \subset X$ სიმრავლეში, თუ E -ს ყოველი წერტილი წარმოადგენს M სიმრავლის შეხების წერტილს.

$M \subset X$ სიმრავლეს ეწოდება ყველგან მკვრივი, თუ M მკვრივია მთელ სივრცეში (ე.ი. X -ში).

$M \subset X$ სიმრავლეს ეწოდება არსად მკვრივი, თუ ნებისმიერი $B(x, \varepsilon)$ ბირთვისათვის მოიძებნება $B(y, \delta)$ ბირთვი, ისეთი, რომ $B(y, \delta) \subset B(x, \varepsilon)$ და $B(y, \delta) \cap M = \emptyset$.

(x_n) მიმდევრობას ეწოდება ფუნდამენტური, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სთვის მოიძებნება $N \in \mathbb{N}$, ისეთი, რომ $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ ყოველთვის როცა $n, m \geq N$.

(X, d) სივრცეს ეწოდება სრული, თუ მის წერტილთა ყოველ ფუნდამენტურ მიმდევრობას აქვს ზღვარი.

ლემა 2. თუ ფუნდამენტური (x_n) მიმდევრობის რაიმე ქვემიმდევრობა კრებადია, მაშინ კრებადია (x_n) მიმდევრობაც.

დამტკიცება. დაუშვათ, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{j_k} = x$. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ და მისთვის ვიპოვოთ p_1 და p_2 ინდექსები, ისეთები, რომ $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$, როცა $n, m \geq p_1$ და $d(x_{j_k}, x) < \varepsilon/2$, როცა $k \geq p_2$.

p ავიღოთ $\max(p_1, p_2)$ -ის ტოლი. განვიხილოთ ნებისმიერი $n \geq p$ ინდექსი. გვექნება, რომ: $n \geq p_1$, $j_p \geq j_{p_1} \geq p_1$ და $p \geq p_2$. რის საფუძველზეც დავწერთ,

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{j_p}) + d(x_{j_p}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ამით ლემა დამტკიცებულია. $\square$

(X, d) სივრცეს ეწოდება სეპარაბელური, თუ მასში მოიძებნება არაუმეტეს თვალადი ყველგან მკერძი ქვესიმრავლე.

ლემა 3. თუ მეტრიკული სივრცე სეპარაბელურია, მაშინ მისი ნებისმიერი ქვესივრცე სეპარაბელურია.

დამტკიცება. ეთქვათ, M არის არაუმეტეს თვალადი ყველგან მკერძი ქვესიმრავლე განსახილავ (X, d) მეტრიკულ სივრცეში. დაეუშვათ, $E \subset X$ რაიმე არატარიელი სიმრავლეა. ავადგოთ არაუმეტეს თვალადი $H \subset E$ ქვესიმრავლე, რომელიც მკერძია E -ში. ამით ლემა დამტკიცებული იქნება.

ეთქვათ, $n \in \mathbb{N}$. განვიხილოთ $B(x, 1/n)$ ($x \in M$) ბირთვები. M -ის ყველგან მკერძობის გამო, ეს ბირთვები დაფარავენ მთელ სივრცეს, და შედეგად, E სიმრავლეს. $B(x, 1/n) \cap E \neq \emptyset$ პირობის დამაკმაყოფილებელი ყოველი $x \in M$ წერტილისათვის ავარჩიოთ რაიმე y_x ელემენტი $B(x, 1/n) \cap E$ სიმრავლიდან. H_n -ით აღვნიშნოთ ყველა ასეთი y_x წერტილისაგან შედგენილი სიმრავლე. ადვილი შესამოწმებელია, რომ H_n არის E -ს არაუმეტეს თვალადი ქვესიმრავლე და E -ს ნებისმიერი წერტილისათვის მოიძებნება მისგან $2/n$ -ზე ნაკლები მანძილით დამორებული წერტილი H_n სიმრავლიდან.

H_n ($n \in \mathbb{N}$) სიმრავლეების თვისებებიდან გამომდინარე, ცხადია, რომ საძიებელი H -ის როლში შეიძლება ავიღოთ $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ გაერთიანება. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

IV. წრფივი (ან კიდევ, ვექტორული) სივრცე ეწოდება სამეულს $(L, +, \cdot)$, სადაც L რაიმე არატარიელი სიმრავლეა, $+$ არის შეკრების ოპერაცია L -ში, ხოლო $\cdot$ არის L -ის ელემენტების რიცხვზე (სყალარზე) გამრავლების ოპერაცია, რომელთაც აქვთ თვისებები:

$$1.1) x + y = y + x \text{ (კომუტაციურობა);}$$

$$1.2) x + (y + z) = (x + y) + z \text{ (ასოციაციურობა);}$$

1.3) არსებობს $0 \in L$ ელემენტი, ისეთი, რომ $x + 0 = x$ ყოველი $x \in L$ -სთვის (ნულოვანი ელემენტის არსებობა);

1.4) ყოველი $x \in L$ ელემენტისათვის არსებობს $y \in L$ ელემენტი, ისეთი, რომ $x + y = 0$ (მოპირდაპირე ელემენტის არსებობა);

$$2.1) \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x;$$

$$2.2) 1 \cdot x = x;$$

$$2.3) (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x;$$

$$2.4) \alpha(x + y) = \alpha x + \beta y.$$

წრფივ სივრცეს უწოდებენ ნამდვილს ან კომპლექსურს იმის მიხედვით, გამრავლების ოპერაცია განიხილება ნამდვილი თუ კომპლექსური სკალარების მიმართ.

სიმოქლისათვის წრფივ სივრცეს L -ით აღნიშნავენ.

$M \subset L$ ქვესივრცეს უწოდება L -ის ქვესივრცე, თუ M ჩაკეტილია შეკრებისა და სკალარზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ, ე.ი. ნებისმიერი $x, y \in M$ ელემენტებისათვის და ნებისმიერი α სკალარისათვის: $x + y \in M$ და $\alpha x \in M$.

ეთქვან, L წრფივი სივრცეა, ხოლო M არის მისი რაიმე ქვესივრცე. შემოვიღოთ შემდეგი სახის ეკვივალენტობის მიმართება L სივრცეში: $x, y \in L$ ელემენტებს ეწოდოთ ეკვივალენტური, თუ $x - y \in M$. წარმოქმნილი ეკვივალენტობის კლასების (რომელთაც M ქვესივრცის მიხედვით მოსაზღვრე კლასები ეწოდებათ) სიმრავლე აღენიშნოთ L/M ჩანაწერით. L/M -ში შეკრებისა და სკალარზე გამრავლების ოპერაციები განესაზღვროთ შემდეგნაირად: ξ_1 და ξ_2 მოსაზღვრე კლასებისათვის ავირჩიოთ $x_1 \in \xi_1$ და $x_2 \in \xi_2$ ელემენტები და $\xi_1 + \xi_2$ განესაზღვროთ, როგორც $x_1 + x_2$ ელემენტის შემცველი მოსაზღვრე კლასი; α სკალარისა და ξ მოსაზღვრე კლასისათვის ავირჩიოთ $x \in \xi$ ელემენტი და $\alpha \xi$ განესაზღვროთ, როგორც αx ელემენტის შემცველი მოსაზღვრე კლასი. L/M სიმრავლეს, აღჭურვილს ასეთი შეკრებისა და სკალარზე გამრავლების ოპერაციებით, უწოდებენ L -ის ფაქტორ-სივრცეს M ქვესივრცის მიმართ.

წრფივ სივრცეზე განსაზღვრულ ფუნქციას ფუნქციონალს უწოდებენ.

ორ წრფივ სივრცეს შორის მოქმედ ასახვას ოპერატორს უწოდებენ.

A ოპერატორს ეწოდება წრფივი, თუ ის ადიკური და ერთგვაროვანია, ე.ი. აკმაყოფილებს ტოლობებს: $A(x + y) = A(x) + A(y)$ და $A(\alpha x) = \alpha A(x)$.

ეთქვან, E რაიმე წრფივი სივრცეა ნამდვილ ან კომპლექსურ სკალარით ველის მიმართ. $\|\cdot\| : E \rightarrow [0, \infty)$ ფუნქციონალს ეწოდება ნორმა E სივრცეში, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ სამ პირობას:

- $\|x\| = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x = 0$;
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

ნორმირებული სივრცე ეწოდება $(E, \|\cdot\|)$ წყვილს, სადაც E რაიმე წრფივი სივრცეა, ხოლო $\|\cdot\|$ ნორმაა E -ში.

ყოველი ნორმა ბუნებრივად ბადებს მანძილს განსახილავ E სივრცეში. კერძოდ, $d(x, y) = \|x - y\|$ ტოლობით განსაზღვრული d ფუნქცია არის მანძილი E -ში. შედეგად, ნორმირებულ სივრცეს შეიძლება შევხედოთ, როგორც

მეტრიკულ სივრცეს და მასზე გადავიტანოთ მეტრიკულ სივრცეებთან დაკავშირებული ყველა ცნება (სისრულე, სეპარაბელურობა და ა.შ.).

სრულ ნორმირებულ სივრცეებს ბანახის სივრცეებს უწოდებენ.

ბანახის სივრცეთა ერთ-ერთი ყველაზე ცნობილი მაგალითია $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ყველა უწყვეტი ფუნქციის $C([a, b])$ სივრცე. ამ სივრცეში ალგებრული ოპერაციების როლში აიღება ფუნქციათა შეკრებისა და ფუნქციის სკალარზე გამრავლების ბუნებრივი ოპერაციები, ხოლო ნორმა განისაზღვრება შემდეგნაირად: $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

ლიტერატურა

- [1] ჭელიძე ვლ., ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორია, თბილისი, 1964.
- [2] ხარაზიშვილი ა., სიმრავლეთა თეორიის საწყისები, თბილისი, 2008.
- [3] Bruckner A.M., Differentiation of Integrals, American Mathematical Monthly, Vol. 78, No. 9, 1971.
- [4] Bruckner J.B., Bruckner A.M. and Thomson B.S., Real Analysis (2nd Edition), ClassicalRealAnalysis.com, 2008.
- [5] Engelking R., General Topology, Berlin, Heldermann-Verlag, 1989.
- [6] Folland G.B., Real Analysis: modern techniques and their applications, Wiley, New York, 1999.
- [7] de Guzmán M., Differentiation of Integrals in R^n , Springer, 1975.
- [8] de Guzmán M., Real Analysis Methods in Fourier Analysis, North-Holland, 1981.
- [9] Halmos P.R., Measure Theory, Springer, 1950.
- [10] Kharazishvili A., Nonmeasurable Sets and Functions, Amsterdam, Elsevier, 2004.
- [11] Oxtoby J., Measure and Category, Springer, 1971.
- [12] Pfeffer W., The Riemann Approach to Integration, Cambridge, Cambridge University Press, 1993.
- [13] Royden H.L. and Fitzpatrick P., Real Analysis, Prentice Hall, 2010.
- [14] Rudin W., Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, New-York, 1966.
- [15] Solovay R.M., A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, Annals of Mathematics, Vol. 92, 1–56, 1970.
- [16] Stein E.M. and Shakarchi R., Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces, Princeton University Press, 2005.
- [17] Stein E.M., Harmonic Analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals, Princeton University Press, 1993.
- [18] Wheeden R.L. and Zygmund A., Measure and integral: an introduction to real analysis, Marcel Dekker, New York, 1977.
- [19] Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г., Функциональный анализ, Киев: Высшая школа, 1990.
- [20] Брудно А.Л., Теория функций действительного переменного: избранные главы, Москва, Наука, 1971.

- [21] Булдырев В.С., Павлов Б.С., Линейная алгебра и функции многих переменных, Ленинград, 1985.
- [22] Вулих Б.З., Краткий курс теории функций вещественной переменной, Мос-ква, Наука, 1973.
- [23] Гливенко В.И., Интеграл Стильтьеса, Москва, Наука, 1936.
- [24] Дороговцев А.Я., Элементы общей теории меры и интеграла, Киев: Высшая школа, 1989.
- [25] Дьяченко М.И., Ульянов П.Л., Мера и интеграл, Москва, Факториал, 2002.
- [26] Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа, Москва, «Наука», 1981.
- [27] Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, Москва, 1934.
- [28] Медведев Ф., Развитие понятия интеграла, Москва, Наука, 1974.
- [29] Натансон И.П., Теория функций вещественной переменной, Москва, Наука, 1974.
- [30] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, Москва, Мир, 1979.
- [31] Сакс С., Теория интеграла, Москва, Иностранная литература, 1949.
- [32] Теляковский С.А., Сборник задач по теории функций действительной пере-менной, Москва, Наука, 1980.
- [33] Титчмарш Е., Теория функций, Москва, Наука, 1980.
- [34] Толстов Г.П., Мера и интеграл, Москва, Наука, 1976.
- [35] Ульянов П.Л., Бахвалов А.Н., Дьяченко М.И., Казарян К.С., Сифуэнтес П., Действительный анализ в задачах, Москва, Физматлит, 2005.
- [36] Шилов Г.Е., Математический анализ. Специальный курс, Москва, 1960.
- [37] Шилов Г. Е., Гуревич Б.Л., Интеграл, мера и производная, Москва, Наука, 1967.

საგნობრივი საძიებელი

აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია
291

აბსტრაქტული გარე ზომა 78

ადიციური სიმრავლის ფუნქცია 49

ალგებრა 38

ალგებრული რიცხვი 8

ამოზნეკილი ბაზისი 355

ამოწურვის მეთოდი 101

აპროქსიმაციულად უწყვეტობა
269, 358

არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციის
ლუბეგის ინტეგრალი 152

არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციის
ლუბეგის განუსაზღვრელი
ინტეგრალი 162

არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციის
ლუბეგის ინტეგრალი 148

არაუმეტეს თვლადი სიმრავლე 3

არსად მკერძი სიმრავლე 443

არსებითად შემოსაზღვრული
ფუნქცია 248

ბადისებური დამლა 60

ბაზისის შესაბამისი მაქსიმალური
ოპერატორი 349

ბაზისის შემადგენელი სიმრავლე
349

ბანახის ინდუცირების 305

ბანახის სივრცე 446

ბანახ-ზარეცკის თეორემა 309

ბერნშტეინის ტიპის სიმრავლე 116
ბორელის ამრითი ზომადი ფუნქცია
122

ბორელის ზომა $\mathbb{R}^n$ სივრცეში 101

ბორელის σ -ალგებრა 47

ბორელის სიმრავლე 47

ბორელ-კანტელის ლემა 59

ბორის კიბე 359

გაიშვიათების წერტილი 266, 358

განაწილების ფუნქცია 179

გარედან რეგულარული კვამიზომა
64

გარე ზომით წარმოქმნილი
(ინდუცირებული) ზომა 85

გარე მოცულობა 101

გრაფიკულად სიმრავლე 147

დამატებითი ინტერვალი 25

დანაწილების პარამეტრი 183

დარბუს ზედა ჯამი 184

დარბუს-სტილტესის ზედა ჯამი
411

დარბუს-სტილტესის ქვედა ჯამი
411

დარბუს ქვედა ჯამი 184

დიარკის ზომა 115

დიცრეტული ზომა 339

დიცრეტული მუხტი 395

დიფერენციალური 223

დიფერენცირების ბაზისი 318

ევგოროვის თეორემა 135

ეკვივალენტური სიმრავლეები 1

ეკვივალენტური ფუნქციები 134

ელემენტარული სიმრავლე 104

(m_n)-ირაციონალური რიცხვი 438

(m_n)-რაციონალური რიცხვი 438

(m_n) ტიპის წილადი 437

n -განზომილებიანი ინტერვალი

(კუბური ინტერვალი, ღია

ბირთვი) 26

(N) თვისება 308

n -ური რიგის ორობითი სეგმენტი

433

E სიმრავლეში მკერძი სიმრავლე

443

(S, T)-გომადი ასახვა 121

$F_{\sigma\delta}$ ტიპის სიმრავლე 29

F_σ ტიპის სიმრავლე 29

ε -მიდამო 439

ვარიაციული ჯამი 284

ვიტალის ამრით დაფარვა

259, 352

ვიტალის ამრით გრდადი ფუნქცია

71

ვიტალის ამრით მარჯვნიდან

უწყვეტი ფუნქცია 73

ვიტალის თეორემები 257, 259

ვიტალის თვისება 350

გემოდან უწყვეტი სიმრავლის

ფუნქცია 56

გომა 50

გომადი ფუნქცია 120

გომადი ფუნქციის ლებეგის

ინტეგრალი 165

გომიანი სივრცე 120

გომიანი სივრცეების

ბორელისეული ნამრავლი 205

გომიანი სივრცეების ლებეგისეული
ნამრავლი 203, 226

გომით კრებადი ფუნქციითა

მიმდევრობა 137

გომით წარმოქმნილი

(ინდუცირებული) გარე გომა

76

გომის ბაზისი 245

გომის ბორელისეული გაგრძელება

88

გომის გედა და ქვედა

წარმოებულები ბაზისის

მიხედვით 371

გომის ლებეგისეული გაგრძელება

80

გომის მიმართ აბსოლუტურად

უწყვეტი მუსტი 383

გომის მიმართ სინგულარული

მუსტი 392

გომის შევსება 88

გომის წარმოებული ბაზისის

მიხედვით 370

გომების ბორელისეული ნამრავლი

205

გომების ლებეგისეული ნამრავლი

203, 226

გრდადი სიმრავლეთა მიმდევრობა

39

გრდადი სიმრავლის ფუნქცია 50

ზღვართი წერტილი 439

თელადად ადიციური სიმრავლის
ფუნქცია 50

თელადად ნახევრადადიციური

სიმრავლის ფუნქცია 49

თელადი სიმრავლე 3

თელადი H -დამლა 37

თითქმის ყველგან კრებადი

ფუნქციითა მიმდევრობა 134

თითქმის ყველგან პირობის

შესრულება 133

იმოღირებული წერტილი 439
ინტეგრალის დიფერენცირება
ბაზისის მიხედვით 367
ინტეგრალის წარმოებული ბაზისის
მიხედვით 348
ინტეგრალური კლასი 181
იუნგის უტოლობა 232

კალდერონის ლემა 362
კანტორ-ბენდიქსონის თეორემა 33
კანტორ-ბერნშტეინის თეორემა 11
კანტორის სიმრავლე 33
კანტორის ფუნქცია 128
კარდინალური რიყხვი 2
k-ური რიგის ორობითი კუბი 27
კეპიგომომა 51
კეპიგომომების დეკარტული
ნამრავლი 60
კლასების დეკარტული ნამრავლი
41
კლასის კვალი სიმრავლეში 46
კლუბადი სიმრავლეთა
მიმდევრობა 39
კომპაქტური ბაზისი 352
კომპაქტური სიმრავლე 441
კომპაქტური წვეილი 64
კონდენსაციის წერტილი 31
კონტინუუმის სიმძლავრის
სიმრავლე 12
კონტინუუმის პიპოთემა 20
კრებადი მიმდევრობა 440
კომი-შეარკის უტოლობა 233

λ ფუძის მიხედვით
კარათეოდორის აზრით
გომადი სიმრავლე 81
ლუბეგის აზრით ინტეგრებადი
(ჯამებადი) ფუნქცია 165
ლუბეგის აზრით გომადი სიმრავლე
99
ლუბეგის აზრით გომადი ფუნქცია
122

ლუბეგის გედა ინტეგრალური
ჯამი 169
ლუბეგის გომა 34 სიერეში 99
ლუბეგის თეორემა თითქმის
ყველგან და გომით
კრებადობებს შორის
კაეშირის შესახებ 138
ლუბეგის თეორემა ინტეგრალის
დიფერენცირების შესახებ 25-1
ლუბეგის თეორემა მაქორანტული
კრებადობის შესახებ 174
ლუბეგის თეორემა
პირეულყოფილის ადღენის
შესახებ 197, 296
ლუბეგის ქეედა ინტეგრალური
ჯამი 169
ლუბეგის წერტილი 267
ლუბეგ-სტილტესის გომა 113
ლუბეგ-სტილტესის ინტეგრალი
-122
ლუბის თეორემა 158
ლოუალურად ჯამებადი ფუნქცია
265
ლუბინის თეორემა 141

მანძილი (მეტრეა) 439
მარტივი ფუნქცია 130
მარტივი ფუნქციის სტანდარტული
წარმოდგენა 131
მარჯვნიდან უწყვეტი მონიეეიის
ფუნქცია 72
მეტრეული სიერეე 439
მეტრეული სიერეის ქეესიერეე
-142
მინეოესკის უტოლობა 233
μ ფუძის მიხედვით ლუბეგის
აზრით გომადი სიმრავლე 79
მონიშნული დანაწილება 184
მონიშნული დანაწილების
პარამეტრი 184
მონიშნული დანაწილების შეესება
407

მონიშნული დანაწილების

შემლუღვა 407

მონოტონური ბაზისი 356

მონოტონური კლასი 39

მონოტონური სიმრავლეთა

მიმდევრობა 39

მოცულობა 60

მუსტი 377

მუსტის მიმართ დადებითი

სიმრავლე 378

მუსტის მიმართ უარყოფითი

სიმრავლე 378

მუსტის დადებითი ვარიაცია 382

მუსტის სრული ვარიაცია 382

მუსტის უარყოფითი ვარიაცია 382

მუსტის ლებეგის დამლა 394

მუსტის ჟორდანის დამლა 382

ნახევარალგებრა 38

ნახევარრგოლი 37

ნახევრადადიციური სიმრავლის

ფუნქცია 49

ნახტომთა ფუნქცია 324, 325

ნორმირებული სივრცე 445

ორობითად-ირაციონალური

რიცხვი 435

ორობითად-რაციონალური რიცხვი

435

ორობითი კუბი 27

ორობითი მიმდევრობა 433

ორობითი სეგმენტი 433

ორობითი წილადი 434

პეანო-ჟორდანის ამრით მომადი

სიმრავლე 101

p მაჩვენებლით საშუალოდ

კრებადობა 239

p ხარისხში ჯამებადი ფუნქცია

231

*G*_δ ტიპის სიმრავლე 29

*G*_{δσ} ტიპის სიმრავლე 29

რადონ-ნიკოდიმის თეორემა 385

რადონ-ნიკოდიმის წარმოებული

389

რგოლი 38

რეგულარული ბაზისი 354

რეგულარული კვამიზომა 64

რეგულარული ზომიანი სივრცე

242

რიმანის ამრით ინტეგრებადი

ფუნქცია 184

რიმანის ინტეგრალური ჯამი 184

რიმან-სტილტიესის ამრით

ინტეგრებადი ფუნქცია 403

რიმან-სტილტიესის ინტეგრალი

403

რიმან-სტილტიესის ინტეგრალური

ჯამი 403

სასრული სიმრავლის ფუნქცია 50

საფეხუროვანი ფუნქცია 244

საშუალოდ კრებადობა 239

საშუალო კვადრატულად

კრებადობა 239

სეგმენტის დანაწილება 183

სეპარაბელური მეტრიკული

სივრცე 444

σ-ალგებრა 39

σ-ალგებრების ბორელისეული

ნამრავლი 205

σ-ალგებრების ლებეგისეული

ნამრავლი 203, 226

σ-რგოლი 38

σ-შემოსაზღვრული ზომიანი

სივრცე 211

σ-შემოსაზღვრული სიმრავლის

ფუნქცია 50

სიმკვრივის ბაზისი 369

სიმკვრივის წერტილი 266, 358

სიმრავლეთა კლასი 5

სიმრავლეთა მიმდევრობის ზელა
 მღვარი 58
 სიმრავლეთა მიმდევრობის
 მღვარი 59
 სიმრავლეთა მიმდევრობის ქვედა
 მღვარი 58
 სიმრავლეთა ოჯახი 5
 სიმრავლეთა ოჯახის გაერთიანება
 5
 სიმრავლეთა ოჯახის თანაკეთა 5
 სიმრავლეთა ოჯახის სიმძლავრე
 5
 სიმრავლეთა ოჯახის წევრთაგან
 შეღგენილი კლასი 5
 სიმრავლის დიამეტრი 440
 სიმრავლის E^y კვეთა 202
 სიმრავლის E_x კვეთა 202
 სიმრავლის მახასიათებელი
 ფუნქცია 122
 სიმძლავრე 2
 სინგულარული ლებეგ-სტილტესის
 ზომა 3-11
 სინგულარული ფუნქცია 333
 სრული ვარიაცია 285
 სრული ზომა 80
 სრული ზომიანი სივრცე 208
 სრული მეტრიკული სივრცე 413
 სრულყოფილი სიმრავლე 25
 სუსტი (1, 1) ტიპი 264
 სუსტი ტიპის უტოლობა 262

ტონელის თეორემა 211, 219, 228
 ტონელის თეისება 210, 219, 228
 ტრანსცენდენტული რიცხვი 13

უბან-უბან მუდმივი ფუნქცია 325
 უწყვეტი ასახვა 412
 უწყვეტი ლებეგ-სტილტესის ზომა
 341
 უწყვეტი მუსტი 395

ფატეს თეორემა 158

ფაქტორ-სივრცე 415
 ფინიტური ფუნქცია 242
 ფ-მემოსაზღვრული ფუნქცია 422
 ფ. რისის თეორემა 140
 ფუბინის თეისება 211, 219, 228
 ფუბინის თეორემა 211, 219, 228
 ფუბინის თეორემა მწკრივის
 გაწარმოების შესახებ 329
 ფუნდამენტური მიმდევრობა 443
 ფუნქციითა ზრდადი მიმდევრობა
 151
 ფუნქციების ნახვევი 223
 ფუნქციის არსებითი ზელა
 საზღვარი 248
 ფუნქციის განზოგადებული
 პირველყოფილი 188
 ფუნქციის f^y კვეთა 210
 ფუნქციის f_x კვეთა 210
 ფუნქციის ნაზრდი მონაკვეთზე 66
 ფუნქციის პირველყოფილი 188
 ფუნქციის რიმანის ინტეგრალი
 184
 ფუნქციის საყრდენი 211
 ფუნქციის შერეული ნაზრდი
 მონაკვეთზე 67

ქვემოდას უწყვეტი სიმრავლის
 ფუნქცია 56

ღია ბირთვი 439
 ღია სიმრავლე 410

ყველაზე მეტი სიმრავლე 413

მემადგენელი ინტერვალი 24
 მემოსაზღვრული ვარიაციის
 ფუნქცია 285
 მემოსაზღვრული ვარიაციის
 ფუნქციის აბსოლუტურად
 უწყვეტი კომპონენტი 333

შემოსამღვრული ვარიაციის
ფუნქციის ლებეგის დამლა
334

შემოსამღვრული ვარიაციის
ფუნქციის ნახტომთა ფუნქცია
331

შემოსამღვრული ვარიაციის
ფუნქციის ჟორდანის დამლა
290

შემოსამღვრული ვარიაციის
ფუნქციის სინგულარული
კომპონენტი 333

შემოსამღვრული ზომიანი სივრცე
211

შემოსამღვრული მორაშიების
თვისება 353

შემოსამღვრული სიმრავლე 440

შემოსამღვრული სიმრავლის
ფუნქცია 50

შეხების წერტილი 439

შიგა მოცულობა 101

შიგა წერტილი 439

შიგნიდან რეგულარული კვამბიზმა
64

შუალედური სიმძლავრის შესახებ
თეორემა 10

ჩაკეტილი ბირთვი 439

ჩაკეტილი სიმრავლე 440

ჩეზიშევის უტოლობა 168

ცენტრირებული ბაზისი 375

ბერის მიმართ ინვარიანტული
ბაზისი 369

ბლიერად დიფერენცირება 360

ბლიერი (1,1) ტიპი 264

წაკვეთილი მაქსიმალური
ოპერატორი 350

წარმოქმნილი რგოლი (ალგებრა,
 σ -რგოლი, σ -ალგებრა,
მონოტონური კლასი) 43

წერტილოვნად კრებადი
ფუნქციათა მიმდევრობა 131

წირი 314

წირის ბუნებრივი პარამეტრიზაცია
322

წირის კვალი 314

წირის სიგრძე 316

წრფევადი წირი 316

წრფივი (ვექტორული) სივრცე 444

წრფივი სიმრავლე 23

წრფივი ოპერატორი 445

ჯამებადი ფუნქციის ლებეგის
განუსამღვრელი ინტეგრალი
171

ჟანის დამლა 378

ჟარდი-ლიტლუდის მაქსიმალური
ოპერატორი 262

ჟარდი-ლიტლუდის მაქსიმალური
ფუნქცია 262

ჰაუსდორფის განზომილება 118

ჰაუსდორფის d -განზომილებიანი
გარე ზომა 117

ჰაუსდორფის d -განზომილებიანი
ზომა 117

H-დამლა 37

ჰელდერის უტოლობა 232

ჰელის თეორემა 415

ჰომოთეტიის მიმართ
ინვარიანტული ბაზისი 367

გამომცემლობის რედაქტორი

გამოცემის მენეჯერი

გარეკანის დიზაინერი

მაია ეჯიბია

მარიკა ერქომაიშვილი

ნინო ებრალიძე

0179 თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზირი 14
14, Ilia Tchavtchavadze Ave., Tbilisi 0179
Tel.: +995 (32) 2250484, 6284; 6278
www.press.tsu.edu.ge