

გიორგი ბერძულიშვილი
გიორგი ბრეგაძე

წარმოსახვითი რიცხვებით გეომეტრიის
სწავლების მეთოდოლოგიური
თავისებურებები

ქუთაისი
2018

წიგნი განკუთვნილია სპეციალისტებისათვის, საშუალო სკოლის მათემატიკის მასწავლებლებისათვის, მათემატიკის სპეციალობის ბაკალავრიატის, მაგისტრატურის და დოქტორანტურის სტუდენტებისათვის. ის დაეხმარება საშუალო სკოლების, მათემატიკის სპეციალიზირებული სკოლების მაღალი კლასის მოსწავლეებს და მასწავლებლებს მათემატიკის ფაკულტატიურ და საწრეო მუშაობაში.

რეცენზენტები:

1. პედაგოგიკის მეცნიერებათა დოქტორი, სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პროფესორი ჯემალ ჯინჯიხაძე;

2. განათლების დოქტორი, შპს ქუთაისის №1 სკოლის მათემატიკის მკვლევარი მასწავლებელი ივანე გოქაძე.

**პროფესორ გიორგი ბერბულიშვილის
საერთო რედაქციით**

ISBN 99928-79-73-4

აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა

წინასიტყვაობა

მკითხველის წინაშე წარმოდგენილი წიგნი მათემატიკის, კერძოდ კი გეომეტრიის სწავლების საკითხებს ეძღვნება. მასში განხორციელებული მიდგომები რადიკალურად განსხვავდება საშუალო სკოლაში გეომეტრიის სწავლებაში გამოყენებული ტრადიციული სწავლებისაგან, რადგან ის ეყრდნობა კომპლექსური რიცხვებისა და კვატერნიონების გამოყენებას, რომელთა სწავლება საშუალო სკოლაში მოქმედი პროგრამებით არ ხდება. კომპლექსური რიცხვების სწავლება გათვალისწინებულია მათემატიკის ფაკულტატურ კურსში და ხშირად სკოლებში ფაკულტატურ კურსებზე ამ საკითხების სწავლება იმდენად მშრალად ხდება, რომ მოსწავლეებს ნათელი წარმოდგენა არ რჩებათ იმაზე, თუ რა საჭირო იყო ამ კურსის სწავლება, არ ჩანს კომპლექსური რიცხვების გამოყენების სფერო.

ჩვენ მიზნად დავისახეთ მეთოდურად დაგვემუშავებინა კომპლექსურ რიცხვთა გამოყენებით პლანიმეტრიის საკითხების სწავლება, რათა მტკიცე საფუძველი ჰქონოდა მის სწავლებას საშუალო სკოლების ფაკულტატიურ კურსში და ამავე დროს გვეჩვენებინა მათემატიკის სხვადასხვა დარგს შორის მტკიცე და პირდაპირი კავშირები.

წავედით უფრო შორს, კერძოდ მეთოდურად დავამუშავეთ კვატერნიონების გამოყენებით ანალიზური გეომეტრიის და სტერეომეტრიის ზოგიერთი საკითხის სწავლება. მართალია, ამ საკითხების სწავლება ფაკულტატიური კურსის პროგრამითაც არ არის გათვა-

ლისწინებული, მაგრამ ჩავთვალეთ, რომ მოსწავლეთა თვალსაწიერის გაფართოება ამ მიმართულებით ურიგო არ იქნებოდა, რადგან ტექნიკასა და ბუნებისმეტყველებაში კვატერნიონებს დიდი გამოყენება აქვს.

აღნიშნული საკითხების დამუშავება ქართულ მეტოღურ ლიტერატურაში პირველად რამდენიმე ათეული წლის წინ გ.ბერძულიშვილს ჰქონდა თავის სადისერტაციო ნაშრომში, რომელიც უმაღლეს სკოლაში მათემატიკის მასწავლებელთა მომზადებას ეხებოდა. მასში განხილული საკითხების პირდაპირ გადმოტანა საშუალო სკოლის ფაკულტატურ კურსში ცხადია ვერ მოხერხდებოდა საკითხების სირთულის დონის გამო, რისთვისაც მოგვიხდა საკმაოდ შრომატევადი სამუშაოების შესრულება, დაგვეწია განსახილავი საკითხების სირთულე და მოვემზადებინა თეორიული ბაზა საშუალო სკოლაში განხილული პლანიმეტრიის საკითხებისათვის. ჩვენი აზრით ამ საქმეს წარმატებით გავართვით თავი და გამოვიტანეთ თქვენს სამსჯავროზე.

ამ წიგნში გვერდი ავუარეთ ჩვენს ტრადიციულ მიდგომას და არ დავურთეთ რეკომენდირებული ამოცანების სისტემები, რადგან მიგვაჩნია, რომ ამის საჭიროება არ არის. მოსწავლე, თუ სტუდენტი, რომელიც წარმატებით გაერკვევა წიგნში წარმოდგენილ თეორიულ მასალაში და ყურადღებით გაარჩევს ამოხსნილ ამოცანებს, დამოუკიდებლად შეძლებს კომპლექსური რიცხვების გამოყენებით ნებისმიერი პლანიმეტრიული ამოცანის ამოხსნას. ჩვენს შემთხვევაში რეკომენდირებული ამოცანები შეზღუდავდა კომპლექსურ რიცხვთა გამოყენების არეალს.

წიგნში განხილული საკითხებისადმი მეთოდური მიდგომები ეყრდნობა ავტორების უმაღლეს და საშუალო სკოლებში ხანგრძლივი მუშაობის მანძილზე დაგროვილ პედაგოგიურ გამოცდილებას.

სიამოვნებით მივიღებთ განსხვავებულ მოსაზრებებს, წინადადებებს, შენიშვნებს და საქმიან კრიტიკას, რასაც გავითვალისწინებთ მომდევნო გამოცემებში.

ველით გამოხმაურებებს მისამართზე:

giorgi.berdzulishvili@mail.ru

გიორგი ბერძულიშვილი

გიორგი ბრეგაძე

ქუთაისი. 2018 წელი

წინასიტყვაობა.....	3
--------------------	---

I თავი

კომპლექსური რიცხვების გამოყენება პლანიმეტრიაში და მათი სწავლების მეთოდოკური თავისებურებები

§1.1. კომპლექსური რიცხვები. კომპლექსური რიცხვთა ალგებრული ფორმა	12
§1.2. მოქმედებები კომპლექსურ რიცხვებზე	16
§1.3. კომპლექსური რიცხვების გეომეტრიული ინტერ- პრეტაცია	21
§1.4. კომპლექსური რიცხვის მოდული. კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი	25
§1.5. კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფო- რმა. მუავრის ფორმულა.....	31
§1.6. კომპლექსური რიცხვის მაჩვენებლიანი ფორმა. ეილერის ფორმულა.....	34
§1.7. ფესვი კომპლექსური რიცხვიდან	37
§1.8. კომპლექსურ სიბრტყეზე ორ წერტილს შორის მან- ძილი. ორ წრფეს შორის კუთხე	38
§1.9. წრფის განტოლება კომპლექსურ სიბრტყეზე. წრფის კომპლექსური კუთხური კოეფიციენტი	41
§1.10. კომპლექსურ სიბრტყეზე $az + b\bar{z} + c = 0$ განტო- ლების გეომეტრიული აზრი.....	44
§1.11. წრფის დაყვანილი განტოლება.....	50
§1.12. ორ წრფეს შორის კუთხე.....	52

§1.13. ორი წრფის პარალელურობის და პერპენდიკულარობის კრიტერიუმები.....	53
§1.14. მანძილი წერტილიდან წრფემდე.....	55
§1.15. პითაგორას თეორემა.....	65
§1.16. კოსინუსების თეორემა.....	66
§1.17. სინუსების თეორემა.....	68
§1.18. წრეწირის განტოლება კომპლექსურ სიბრტყეზე. ოთხი წერტილის ორმაგი ფარდობა	70
§1.19. $z\bar{z} + az + b\bar{z} + c = 0$ განტოლების გეომეტრიული აზრი.....	76
§1.20. სამ წერტილზე გამავალი წრეწირის განტოლება.....	79
§1.21. ორთოგონალური წრეწირები.....	80
§1.22. წრეწირის მკვეთი ორი წრფის გადაკვეთის საერთო წერტილის აფიქსის პოვნა.....	88
§1.23. წრეწირის ორ სხვადასხვა წერტილში გავლებული მხეგების გადაკვეთის წერტილის აფიქსის პოვნა.....	90
§1.24. წერტილის წრფეზე ორთოგონალური გეგმილის აფიქსის გამოთვლა.....	91
§1.25. ჰარმონიული ოთხკუთხედი.....	93
§1.26. ვექტორები კომპლექსურ სიბრტყეზე.....	100
§1.27. კომპლექსურ სიბრტყეზე ვექტორების კოლინეარულობის და მართობულობის პირობები.....	102
§1.28. მონაკვეთის გაყოფა λ ფარდობით.....	107
§1.29. სამკუთხედების მსგავსება და ტოლობა.....	118
§1.30. წესიერი სამკუთხედის არსებობის კრიტერიუმი.....	130

§1.31. წესიერი n -კუთხედის გვერდებისა და დიაგონალების გამოთვლა.....	137
§1.32. კომპლექსურ რიცხვთა გამოყენება გეომეტრიის ზოგიერთი თეორემის დამტკიცებისას.....	148
§1.33. შვარცის სიმაღლითი სამკუთხედი.....	161
§1.34. გეომეტრიული გარდაქმნები.....	168
§1.35. კომპლექსური რიცხვების გამოყენება ანალიზურ გეომეტრიაში. ორიენტაციის ცნება.....	192
§1.36. ორიენტირებული ფიგურის ფართობი კომპლექსურ სიბრტყეზე.....	201
§1.37. ოთხკუთხედის ელემენტებს შორის ზოგიერთი მეტრული თანაფარდობის დადგენა კომპლექსური რიცხვების გამოყენებით.....	204
§1.38. ინვერსია.....	210
§1.39. წრფეების და წრეწირების სახეები ინვერსიის დროს.....	214
§1.40. ინვერსიის კონფორმულობის თვისება.....	218
§1.41. პლანიმეტრიული ამოცანების ამოხსნა კომპლექსური რიცხვების გამოყენებით.....	225

II თავი

კვატერნიონების გამოყენება სტერეომეტრიის ზოგიერთი საკითხის შესწავლისას და მათი სწავლების მეთოდოლოგიური თავისებურებები

§2.1. კვატერნიონები. მოქმედებები კვატერნიონებზე. კვატერნიონის მოდული.....	271
---	-----

§2.2.სკალარული და ვექტორული ნამრავლის შემო- ღების ერთი ხერხის შესახებ.....	278
§2.3.მოზრუნება სივრცეში	284
§2.4.მოზრუნებათა კომპოზიცია სივრცეში.....	288
მეთოდური რეკომენდაციები მასწავლებლებს.....	291
გამოყენებული ლიტერატურა.....	301

I თავი

კომპლექსური რიცხვების გამოყენება პლანიმეტრიაში და მათი სწავლების მეთოდური თავისებურებები

§1.1. კომპლექსური რიცხვები. კომპლექსურ რიცხვთა ალგებრული ფორმა

საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში გათვალისწინებული არ არის მოსწავლეებისათვის კომპლექსური რიცხვების შესწავლა. საკითხის აქტუალობის გამო მათი გაცნობა უნდა მოხდეს კლასგარეშე მუშაობაზე, ეს შეიძლება იყოს ფაკულტატიური ან მათემატიკის საგნობრივი წრის მეცადინეობა. ამიტომ პირველი კლასგარეშე მუშაობა უნდა დავიწყოთ კომპლექსური რიცხვების გაცნობით. მოსწავლეებს უნდა შევახსენოთ, რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ყოველთვის სრულდება შეკრების, გამოკლების, გამრავლების, არანულოვან რიცხვზე გაყოფის ოპერაციები და მთელ დადებით ხარისხში ახარისხების ოპერაცია. რაც შეეხება ახარისხების შებრუნებულ ოპერაციას—ამოფესვას, ის ყოველთვის არ არის შესაძლებელი. მაგალითად, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში არ არსებობს $\sqrt{-1}$, რადგან არც ერთი ნამდვილი რიცხვის კვადრატი არ არის -1 -ის ტოლი. ამ მიზეზით ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეში ამონახსნი არ გააჩნია ისეთ უმარტივეს განტოლებას, როგორიცაა $x^2 + 1 = 0$.

მოვახდინოთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ისე გაფართოება, რომ რიცხვთა ახალ სიმრავლეში ყოველ-

თვის არსებობდეს $\sqrt[n]{a}$, სადაც $n \in N$ და $n \geq 2, a \in R$ ან a არ წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვს, მაგრამ ეკუთვნის იმ რიცხვთა ახალ სისტემას, რომლითაც განხორციელდება R სიმრავლის გაფართოება. ამ ამოცანის გადაწყვეტისათვის შემოგვაქვს კომპლექსური რიცხვის ცნება.

განსაზღვრება. x და y ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული (x, y) წყვილების სიმრავლეს ეწოდება კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო მის ელემენტებს კომპლექსური რიცხვები, თუ ტოლობის, ჯამის, ნამრავლის ცნებები განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

1. ორი (x_1, y_1) და (x_2, y_2) კომპლექსური რიცხვი ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$$x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2.$$

2. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$

3. $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2).$

(x, y) კომპლექსური რიცხვი აღვნიშნოთ z ასოთი:

$$z = (x, y).$$

x და y რიცხვებს Z კომპლექსური რიცხვის კომპონენტები ეწოდება. x -ს ეწოდება (x, y) კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი ნაწილი და ის აღინიშნება $\operatorname{Re} z = x$ სიმბოლოთი, ხოლო y -ს ეწოდება (x, y) კომპლექსური რიცხვის წარმოსახვითი ნაწილი და აღნიშნავენ სიმბოლოთი $\operatorname{Im} z = y$.

კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეს აღნიშნავენ C ასოთი. რადგან კომპლექსური რიცხვების შეკრება და გამრავლება განსაზღვრულია ნამდვილ რიცხვებზე მოქმედებებით, ამიტომ კომპლექსურ რიცხვებზე შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები ექვემდებარებიან არითმეტიკის ძირითად კანონებს.

ე.ი. $\forall z_1, z_2, z_3 \in C$ რიცხვისათვის

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;
3. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;
4. $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$;

$z = (x, y)$ კომპლექსურს რიცხვს ეწოდება წარმოსახვითი, თუ $x=0$ და $y \neq 0$, მივიღებთ $(0, y)$ კომპლექსურ რიცხვს, რომელსაც ეწოდება წმინდა წარმოსახვითი რიცხვი. ახლა ავიღოთ $(x, 0)$ კომპლექსური რიცხვი, რომლის წარმოსახვითი ნაწილი უდრის 0-ს. განვიხილოთ ორი ასეთი კომპლექსური რიცხვის შეკრება და გამრავლება. განსაზღვრის ძალით გვაქვს:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0 + 0) = (x_1 + x_2, 0),$$

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 \cdot x_2 - 0 \cdot 0, x_1 \cdot 0 + 0 \cdot x_2) = (x_1 \cdot x_2, 0).$$

როგორც ვხედავთ, $(x, 0)$ სახის კომპლექსურ რიცხვებზე შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები წარმოებს ნამდვილ რიცხვებზე ამავე ოპერაციების ანალოგიურად, ამიტომ $(x, 0)$ სახის რიცხვები გაიგი-

ვებულისა x ნამდვილ რიცხვთან და ეწოდება ნამდვილი კომპლექსური რიცხვი.

კომპლექსურ რიცხვზე ნამდვილი α რიცხვის ნამრავლი განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\alpha \cdot (x, y) = (\alpha, 0) \cdot (x, y) = (\alpha \cdot x - 0 \cdot y, \alpha \cdot y + 0 \cdot x) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y).$$

აქედან,

$$1 \cdot (x, y) = (1, 0) \cdot (x, y) = (x, y),$$

$$0 \cdot (x, y) = (0, 0) \cdot (x, y) = (0, 0).$$

კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში განსაკუთრებული ადგილი უჭირავს $(0, 1)$ რიცხვს. განვსაზღვროთ ამ რიცხვის თავის თავზე ნამრავლი:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

ამრიგად, C სიმრავლეში არსებობა რიცხვი, რომლის კვადრატი უდრის -1 -ს. ამ რიცხვს აღნიშნავენ i ასოთი და უწოდებენ წარმოსახვით ერთეულს: $i^2 = -1$, ანუ $i = \sqrt{-1}$. გამოსახულება $\sqrt{-1}$ ყოველგვარ აზრს მოკლებული იყო R სიმრავლეში, C სიმრავლეში ის სავსებით გარკვეული რიცხვია, ეს არის კომპლექსური რიცხვი $(0, 1)$, i ან $i = \sqrt{-1}$ უბრალოდ ამ რიცხვის აღნიშვნაა.

ცხადია, რომ

$$i \cdot y = (0, 1) \cdot (y, 0) = (0 \cdot y - 1 \cdot 0, 0 \cdot 1 + 1 \cdot y) = (0, y)$$

და

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + i \cdot y.$$

$z = x + iy$ გამოსახულებას ეწოდება $z = (x, y)$ კომპლექსური რიცხვის ალგებრული ფორმა.

ადვილი შესამჩნევია, რომ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის გაფართოებას, ანუ $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

§1.2. მოქმედებები კომპლექსურ რიცხვებზე

როცა კომპლექსური რიცხვები მოცემულია ალგებრული ფორმით, მაშინ კომპლექსურ რიცხვებზე მოქმედებათა თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ კომპლექსურ რიცხვთა შეკრება და გამრავლება ფორმალურად ხდება როგორც მრავალწევრების შეკრება და გამრავლება:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + i \cdot y_1) + (x_2 + i \cdot y_2) = (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2); \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2) = x_1 \cdot x_2 + i \cdot x_1 \cdot y_2 + i \cdot x_2 \cdot y_1 + \\ &\quad + i^2 \cdot y_1 \cdot y_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1). \end{aligned}$$

ჩვენს მიერ მიღებულია, რომ $(x, 0)$ წყვილი გაიგივებულია x ნამდვილ რიცხვთან. ამ შეთანხმებით ნამდვილი რიცხვი წარმოადგენს კომპლექსური რიცხვის კერძო სახეს. ამავე შეთანხმებით კომპლექსურ რიცხვთა $\mathbb{C}$ სიმრავლეში განსაზღვრული შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები ძალაში რჩება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში განსაზღვრული იმავე ოპერაციების მიმართ. ახლა თუ გვინდა ეს პრინციპები ძალაში დარჩეს გამოკლებისა და გაყოფის ოპერაციების მიმართაც,

საჭირო გახდება მათი განსაზღვრება იმავე ფორმით, როგორც ეს იყო R სიმრავლის შემთხვევაში.

Z_1 და Z_2 კომპლექსური რიცხვების სხვაობა ვუწოდოთ Z კომპლექსურ რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$$z + z_2 = z_1.$$

ამრიგად,

$$z_1 - z_2 = z \Leftrightarrow z_2 + z = z_1.$$

ვთქვათ, $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ და $z = (x, y)$. მაშინ

$$(x_2, y_2) + (x, y) = (x_1, y_1),$$

$$(x_2 + x, y_2 + y) = (x_1, y_1).$$

საიდანაც, ორი კომპლექსური რიცხვის ტოლობის განსაზღვრის ძალით ვღებულობთ:

$$\begin{cases} x_2 + x = x_1, \\ y_2 + y = y_1. \end{cases}$$

აქედან,

$$x = x_1 - x_2, y = y_1 - y_2.$$

ამრიგად,

$$z_1 - z_2 = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2).$$

ცხადია, ეს ოპერაცია ცალსახადაა განსაზღვრული.

ავიღოთ $z_1 = (x_1, y_1)$ და $z_2 = (x_2, y_2)$ ორი კომპლექსური რიცხვი. თუ $x_2^2 + y_2^2 \neq 0$, მაშინ Z_1 კომპლექსური რიცხვის განაყოფი Z_2 კომპლექსურ რიცხვზე ვუწოდოთ ისეთ Z კომპლექსურ რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს

ტოლობას: $z_2 \cdot z = z_1$ და მას აღვნიშნავთ სიმბოლოთი

$$z_1 : z_2 \text{ ან } \frac{z_1}{z_2}.$$

თუ $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ და $z = (x, y)$, მაშინ

$$(x_1, y_1) : (x_2, y_2) = (x, y),$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$(x_2, y_2) \cdot (x, y) = (x_1, y_1),$$

აქედან

$$(x_2 \cdot x - y_2 \cdot y, x_2 \cdot y + y_2 \cdot x) = (x_1, y_1),$$

საიდანაც,

$$\begin{cases} x_2 \cdot x - y_2 \cdot y = x_1, \\ x_2 \cdot y + y_2 \cdot x = y_1. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამოხსნით მივიღებთ:

$$x = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

ცხადია, ეს ოპერაცია ცალსახადაა განსაზღვრული.

ამრიგად,

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{y_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right).$$

ცხადია, ფარდობა $\frac{z_1}{z_2}$, როცა $x_2^2 + y_2^2 \neq 0$, ანუ $z_2 \neq 0$

ცალსახადაა განსაზღვრული. 0-ზე გაყოფას კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში ისევე, როგორც ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში აზრი არა აქვს.

ამ ტოლობიდან ჩანს, რომ ორი ნამდვილი რიცხვის კვადრატების ჯამი კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში

იშლება შეუღლებული კომპლექსური რიცხვების ნამრავლად.

კომპლექსურ რიცხვთა გამოკლება შეიძლება ვაწარმოოთ მრავალწევრების გამოკლების ანალოგიურად:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + i \cdot y_1) - (x_2 + i \cdot y_2) = (x_1 - x_2) + i \cdot (y_1 - y_2).$$

კომპლექსური რიცხვების ფარდობის განსაზღვრისათვის გასაყოფი და გამყოფი საკმარისია გავამრავლოთ გამყოფის შეუღლებულ რიცხვზე:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + i \cdot y_1}{x_2 + i \cdot y_2} = \frac{(x_1 + i \cdot y_1)(x_2 - i \cdot y_2)}{(x_2 + i \cdot y_2)(x_2 - i \cdot y_2)} = \\ &= \frac{x_1 \cdot x_2 - i \cdot x_1 \cdot y_2 + i \cdot y_1 \cdot x_2 - i^2 \cdot y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{y_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

$z = x + i \cdot y$ კომპლექსური რიცხვის მოპირდაპირე ეწოდება $-z = -x - i \cdot y$ რიცხვს და სრულდება ტოლობა:

$$z + (-z) = (x + i \cdot y) + (-x - i \cdot y) = 0.$$

$z = x + i \cdot y$ კომპლექსური რიცხვის შეუღლებული ეწოდება $\bar{z} = x - i \cdot y$ რიცხვს და სრულდება ტოლობა:

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2.$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2,$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad z_2 \neq 0,$$

$$\overline{(\bar{z})} = z = z.$$

რადგან,

$$z = x + iy, \text{ ხოლო } \bar{z} = x - iy,$$

ამიტომ ამ ტოლობებიდან წევრ-წევრად შეკრებით და გამოკლებით მარტივად მივიღებთ, რომ:

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{i}{2}(z - \bar{z})$$

კომპლექსურ რიცხვთა C სიმრავლეში ახარისხების ოპერაცია განისაზღვრება ისევე, როგორც ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეში.

შემოვიღოთ, როგორც განსაზღვრა შეთანხმება, რომ

$$z^0 = 1, \quad \forall z \in C, \quad z \neq 0,$$

$$z^1 = z, \quad \forall z \in C, \quad z^n = (z^{n-1}) \cdot z,$$

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n-\text{ჯერ}}, \quad z^{-n} = \frac{1}{z^n}, \quad z \neq 0.$$

ცხადია, რომ

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

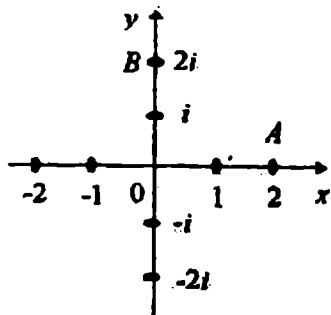
ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$\overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

§1.3. კომპლექსური რიცხვების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

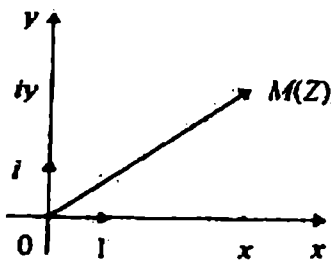
კომპლექსურ რიცხვთა C სიმრავლე გეომეტრიულად გაიგივებულია R^2 -თან. მართლაც, თუ სიბრტყეზე შემოვიღებთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა xOy სისტემას და $z = x + iy$ კომპლექსურ რიცხვს შევუსაბამებთ $M(x, y)$ წერტილს, მივიღებთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობას $z = x + iy$ კომპლექსურ რიცხვებსა და სიბრტყის $M(x, y)$ წერტილებს შორის. Z -ს უწოდებენ M წერტილს აფიქსს და მას აღნიშნავენ $M(z)$ ან $M = (z)$. სიბრტყეს, რომლის წერტილები განსაზღვრულია კომპლექსური რიცხვებით, ეწოდება კომპლექსური სიბრტყე. კომპლექსურ სიბრტყეზე ნამდვილი ღერძი ეწოდება Ox ღერძს, Oy ღერძს კი-წარმოსახვითი ღერძი.

ნამდვილი ღერძის აფიქსები ნამდვილი რიცხვებია, წარმოსახვითი ღერძის წერტილისა, კი წმინდა წარმოსახვითი რიცხვები.

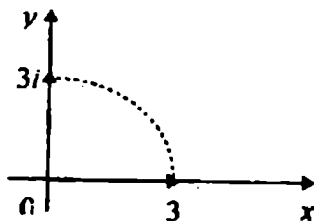


ნახ.1,

ავიღოთ M წერტილი (ნახ.1), რომელიც ეკუთვნის ox ღერძს. ჩვეულებრივ სიბრტყეზე M წერტილის კოორდინატებია 2 და 0. ე.ი. M წერტილი განსაზღვრულია დალაგებული წყვილით $(2, 0)$. კომპლექსურ სიბრტყეზე კი M წერტილის მდებარეობა სავსებით განისაზღვრება ერთი რიცხვით 2. ასევე, N წერტილი ჩვეულებრივ სიბრტყეზე განისაზღვრება დალაგებული წყვილით $(0, 2)$. კომპლექსურ სიბრტყეზე კი ის განსაზღვრულია $2i$ -თი. რა თქმა უნდა 2 იგივეა, რაც $(2, 0)$, ხოლო $2i$ არის $(0, 2)$. მაგრამ საქმე იმაშია, რომ წყვილები კომპლექსურ სიბრტყეზე იცვლება ერთი რიცხვით, M წერტილისათვის ნამდვილი რიცხვით, N წერტილისათვის კი წმინდა წარმოსახვითი რიცხვით.



ნახ.2.



ნახ.3.

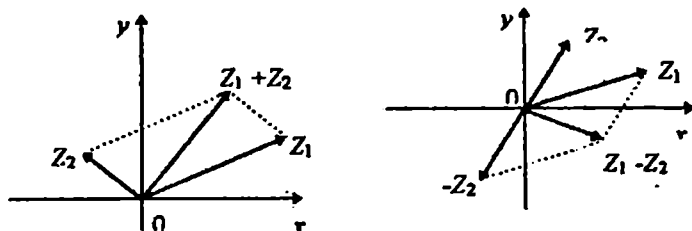
რადგან M წერტილს და ამ წერტილის $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორს ერთნაირი კოორდინატები აქვთ, ამიტომ ყოველ Z კომპლექსურ რიცხვს შეგვიძლია შევუსაბამოთ $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორი. ცხადია, სამართლიანია პირიქითაც. კომპლექსურ სიბრტყეზე $\overline{OM}$ ვექტორის კომპონენტებია x და y .

$$\overline{OM} = x + i \cdot y.$$

ჩვეულებრივი ნამდვილი სიბრტყისაგან განსხვავებით კომპლექსურ სიბრტყეზე OX ღერძის მგეზავია 1, OY ღერძის კი i . (ნახ.2).

ავიღოთ კომპლექსურ სიბრტყეზე რიცხვი, მაგალითად 3. შესაბამისი წერტილი M ან ვექტორი $\overline{OM}$ მევს OX ღერძზე. განვიხილოთ ნამრავლი $3i$. წერტილი OX ღერძიდან გადავიდა OY ღერძზე, ე.ი. $\overline{OM}$ ვექტორი შემობრუნდა 90° -იანი კუთხით. ამგვარად, i -ზე გამრავლება შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ოპერატორი, რომელიც გამოსახავს სიბრტყის მობრუნებას 90° -იანი კუთხით. (ნახ.3).

კომპლექსური რიცხვების ინტერპრეტაციიდან გამომდინარეობს, რომ ორი Z_1 და Z_2 კომპლექსური რიცხვის ჯამს გეომეტრიულად შეესაბამება ამ რიცხვების შესაბამისი ვექტორების ჯამი, ხოლო კომპლექსურ რიცხვების სხვაობას შეესაბამება შესაბამისი ვექტორების სხვაობა. (ნახ.4).



ნახ.4.

თუ a და b -შესაბამისად A და B წერტილების აფიქსებია, მაშინ $a+b$ წარმოადგენს ისეთი C წერტილის აფიქსს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}.$$

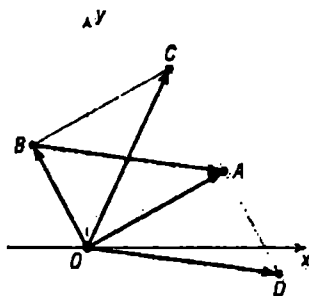
კომპლექსურ რიცხვს შეესაბამება ისეთი წერტილი, რომ

$$\overline{OD} = \overline{OA} - \overline{OB}. \text{ (ნახ. 5)}$$

ავიღოთ $z = (x, y) = x + i \cdot y$ კომპლექსური რიცხვი,

რომელიც წარმოადგენს $M(x, y)$ წერტილის აფიქსს. $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორის სიგრძეს, რომელიც გვიჩვენებს Z რიცხვის დაშორებას კოორდინატთა სათავიდან, აღნიშნავენ r ასოთი და უწოდებენ კომპლექსური რიცხვის მოდულს. Z კომპლექსური რიცხვის მოდულს აღნიშნავენ სიმბოლოთი:

$$|z| = |x + i \cdot y|.$$



ნახ. 5

გამოვსახოთ $\overline{OA}$ და $\overline{OB}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი შესაბამისად მათი a და b კომპლექსური კოორდინატების გამოყენებით.

ვთქვათ, $a = x_1 + i \cdot y_1$, $b = x_2 + i \cdot y_2$. მაშინ

$$\begin{aligned} a\bar{b} + b\bar{a} &= (x_1 + i \cdot y_1)(x_2 - i \cdot y_2) + (x_1 - i \cdot y_1)(x_2 + i \cdot y_2) = \\ &= 2(x_1x_2 + y_1y_2) = 2 \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB}. \end{aligned}$$

ამრიგად,

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \frac{1}{2}(a\bar{b} + b\bar{a})$$

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ნებისმიერი ოთხი $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ და $D(d)$ წერტილი თავისი აფიქსებით.

წარმოვადგინოთ $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი შემდეგი სახით:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = (\overline{OB} - \overline{OA})(\overline{OD} - \overline{OC}) = \overline{OB} \cdot \overline{OD} - \overline{OB} \cdot \overline{OC} - \overline{OA} \cdot \overline{OD} + \overline{OA} \cdot \overline{OC}.$$

გავითვალისწინოთ ამ ტოლობაში ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის კომპლექსური კოეფიციენტებით გამომსახველი ფორმულა, მივიღებთ:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2}(b\bar{d} + \bar{b}d - b\bar{c} - \bar{b}c - a\bar{d} + a\bar{c} + \bar{a}c)$$

თუ ჩავატარებთ გარდაქმნებს, საბოლოოდ გვექნება:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2}((a-b)(\bar{c}-\bar{d}) + (\bar{a}-\bar{b})(c-d))$$

§1.4. კომპლექსური რიცხვის მოდული.

კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი

$\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორის მიერ Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხე აღვნიშნოთ φ ასოთი. (ნახ.6).

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების სინუსისა და კოსინუსის განსაზღვრის ძალით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\sin \varphi = \frac{y}{r} \quad (1)$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} \quad (2)$$

საიდანაც,

$$r \sin \varphi = y \quad (3)$$

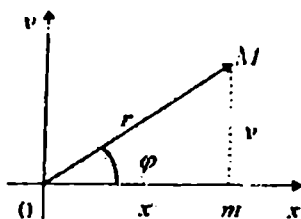
$$r \cos \varphi = x \quad (4)$$

(3) და (4) ტოლობები ავიყვანოთ კვადრატში და შევკრიბოთ წევრობრივ, მივიღებთ:

$$r^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = x^2 + y^2,$$

საიდანაც

$$r^2 = x^2 + y^2$$



ნახ.6.

აქედან კი შეგვიძლია დავწეროთ:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5)$$

ამ ფორმულით განისაზღვრება კომპლექსური რიცხვის მოდული. ცხადია, რომ $r \geq 0$ და მხოლოდ $z = 0$ კომპლექსური რიცხვის მოდული უდრის 0-ს.

შევნიშნოთ, რომ (1) და (2) ტოლობებს აკმაყოფილებს φ კუთხის მნიშვნელობათა უსასრულო სიმრავ-

ლე, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან 2π ჯერადით. კუთხეების ამ სიმრავლეს აღნიშნავენ $Argz$ სიმბოლოთი. ნებისმიერ φ კუთხეს $Argz$ სიმრავლიდან ეწოდება z კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი. Z კომპლექსური რიცხვის φ არგუმენტის იმ მნიშვნელობას. რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$-\pi < \varphi \leq \pi \text{ ან } 0 \leq \varphi < 2\pi$$

ეწოდება არგუმენტის მთავარი მნიშვნელობა და აღნიშნავენ $\arg z$ სიმბოლოთი. ამრიგად,

$$-\pi < \arg z \leq \pi \text{ ან } 0 \leq \arg z < 2\pi,$$

ხოლო

$$Arg z = \arg z + 2\pi k, \text{ სადაც } k \in Z, \text{ ე.ი. } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$Arg \bar{z} = -\arg z.$$

(5) ტოლობის ორთავე ნაწილს ავიყვანთ კვადრატში და გავითვალისწინებთ, რომ

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}); \quad y = \frac{i}{2}(z - \bar{z})$$

მაშინ, მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ:

$$z \cdot \bar{z} = r^2.$$

რომელიც გამოსახავს r რადიუსიანი წრეწირის განტოლებას ცენტრით კოორდინატთა სათავეში. თუ $r = 1$, მაშინ მივიღებთ

$$z \cdot \bar{z} = 1,$$

რომელიც გამოსახავს ერთეულოვანრადიუსიან წრეწირს ცენტრით კოორდინატთა სათავეში.

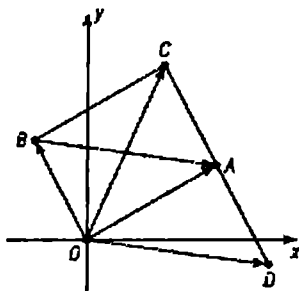
განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანა:

ამოცანა 1. D წერტილი ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრის სიმეტრიული წერტილია AB გვერდის მიმართ. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია ფორმულა:

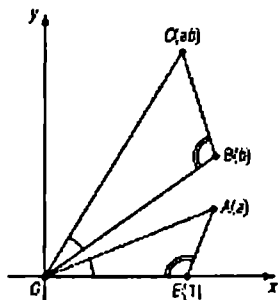
$$CD^2 = R^2 + AC^2 + BC^2 - AB^2$$

ვთქვათ, A, B, C წერტილების აფიქსებია შესაბამისად,

$$A(a), B(b), C(c).$$



ნახ.7.



ნახ.8.

კოორდინატა სათავედ ჩავთვალოთ ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის O ცენტრი. ამ წრეწირის განტოლებაა:

$$z \cdot \bar{z} = R^2$$

ოთხკუთხედი $OADB$ რომბია (ნახ.7). ცხადია, რომ

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

საიდანაც,

$$d = a + b.$$

გვაქვს:

$$\begin{aligned} CD^2 &= (d - c)(\bar{d} - \bar{c}) = (a + b - c)(\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}) = \\ &= a\bar{a} + a\bar{b} + \bar{a}b + b\bar{b} - b\bar{c} - \bar{c}b + c\bar{c} - a\bar{c} - \bar{a}c = \end{aligned}$$

$$= a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} + (a\bar{b} + \bar{a}b) - (b\bar{c} + \bar{b}c) - (a\bar{c} + \bar{a}c)$$

რადგან

$$OA = OB = OC = R, \text{ ხოლო } a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = R^2$$

ამიტომ გვაქვს:

$$CD^2 = 3R^2 + (a\bar{b} + \bar{a}b) - (b\bar{c} + \bar{b}c) - (a\bar{c} + \bar{a}c)$$

გამოვთვალოთ დასამტკიცებელი ტოლობის მარჯვენა მხარის რიცხვითი მნიშვნელობა. გვაქვს:

$$\begin{aligned} R^2 + AC^2 + BC^2 - AB^2 &= \\ &= R^2 + (a-c)(\bar{a}-\bar{c}) + (b-c)(\bar{b}-\bar{c}) - (a-b)(\bar{a}-\bar{b}) = \\ &= R^2 + a\bar{a} - a\bar{c} - c\bar{a} + c\bar{c} + b\bar{b} - b\bar{c} - c\bar{b} + c\bar{c} - a\bar{a} + a\bar{b} + b\bar{a} - b\bar{b} = \\ &= R^2 + 2c\bar{c} + (a\bar{b} + b\bar{a}) - (b\bar{c} + \bar{b}c) - (a\bar{c} + \bar{a}c) = \\ &= 3R^2 + (a\bar{b} + b\bar{a}) - (b\bar{c} + \bar{b}c) - (a\bar{c} + \bar{a}c) = CD^2. \end{aligned}$$

ამოცანა 2. M წერტილი AB რკალის შუაწერტილია. დაამტკიცეთ, რომ ამ წრეწირის ნებისმიერი N წერტილისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$|AM^2 - AN^2| = AN \cdot BN.$$

კოორდინატთა სათავედ ჩავთვალოთ მოცემული წრეწირის O ცენტრი. ვთქვათ, M, A, B და N წერტილების აფიქსებია შესაბამისად $1, a, b, n$. (ნახ.8). მაშინ წრეწირი ერთეულოვანია და მის განტოლებას აქვს სახე:

$$z \cdot \bar{z} = 1.$$

მეორეს მხრივ, რადგან, A და B წერტილები OM წრფის მიმართ სიმეტრიული წერტილებია და ერთეულოვანი წრეწირზე მდებარეობენ, ამიტომ:

$$a = \bar{b}, b = \bar{a}.$$

გვაქვს:

$$AN \cdot BN = |a - n||b - n|.$$

თუ გავითვალისწინებთ ზემოთ თქმულს, მივიღებთ:

$$AN \cdot BN = |a - n||\bar{a} - n| = |a\bar{a} - na - n\bar{a} + n^2| = |1 + n^2 - n(a + \bar{a})|.$$

რადგან,

$$AM^2 = (a-1)(\bar{a}-1) \text{ და } MN^2 = (n-1)(\bar{n}-1),$$

ამ ტოლობის ორთავე მხარე გავამრავლოთ $|n|=1$ -ზე.

გვექნება:

$$|AM^2 - MN^2||n| = |n \cdot n + \bar{n} \cdot n - n(a + \bar{a})| = |n^2 + 1 - n(a + \bar{a})| = AN \cdot BN.$$

რადგან,

$$|AM^2 - MN^2||n| = |AM^2 - MN^2|.$$

ამიტომ ადგილი აქვს დასამტკიცებელ ფორმულას.

ამოცანა 3. M და N წერტილები $ABCD$ ოთხკუთხედის AC და BD დიაგონალების შუაწერტილებია. დაამტკიცეთ, რომ,

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$$

ვთქვათ, A, B, C, D წერტილების აფიქსებია შესაბამისად:

$$A(a), B(b), C(c), D(d).$$

რადგან, M და N წერტილები AC და BD დიაგონალების შუაწერტილებია, ამიტომ M და N წერტილების შესაბამისი m და n აფიქსები ტოლია

$$m = \frac{a+c}{2}, \quad n = \frac{b+d}{2}.$$

გამოვთვალოთ დასამტკიცებელი ტოლობის მარცხენა მხარე. გვაქვს:

$$\begin{aligned} & AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = . \\ & = (a-b)(\bar{a}-\bar{b}) + (b-c)(\bar{b}-\bar{c}) + (c-d)(\bar{c}-\bar{d}) + (d-a)(\bar{d}-\bar{a}) = \\ & = 2(a\bar{a} - b\bar{b} + c\bar{c} + d\bar{d}) - (a\bar{b} + b\bar{a} + b\bar{c} + c\bar{b} + c\bar{d} + d\bar{c} + d\bar{a} + a\bar{d}). \end{aligned}$$

გამოვთვალოთ დასამტკიცებელი ტოლობის მარჯვენა მხარე. გვაქვს:

$$\begin{aligned} & AC^2 + BD^2 + 4MN^2 = \\ & = (a-c)(\bar{a}-\bar{c}) + (b-d)(\bar{b}-\bar{d}) + 4(m-n)(\bar{m}-\bar{n}) = \\ & = (a\bar{a} - b\bar{b} + c\bar{c} + d\bar{d}) - (a\bar{c} + c\bar{a} + b\bar{d} + d\bar{b}) + (a+c-b-d)(\bar{a}+\bar{c}-\bar{b}-\bar{d}) = \\ & = 2(a\bar{a} - b\bar{b} + c\bar{c} + d\bar{d}) - (a\bar{b} + b\bar{a} + b\bar{c} + d\bar{c} + c\bar{d} + d\bar{a} + a\bar{d}). \end{aligned}$$

მიღებული ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ სამართლიანია ტოლობა:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$$

§1.5. კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმა. მუავრის ფორმულა

ავიღოთ კომპლექსური რიცხვი

$$z = (x, y) = x + iy \quad (1)$$

როგორც ვიცით,

$$x = r \cos \varphi \quad (2)$$

$$y = r \sin \varphi \quad (3)$$

შევიტანოთ (1) ტოლობაში x და y მნიშვნელობები (2) და (3) ტოლობებიდან, მივიღებთ:

$$z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

ანუ,

$$z = |z|(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) \quad (4)$$

მიღებულ გამოსახულებას ეწოდება z კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმა. (ნახ.6).

ავიღოთ ტრიგონომეტრიული ფორმით ჩაწერილი ორი კომპლექსური რიცხვი:

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1) \text{ და } z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2).$$

თუ ამ რიცხვებს გადავამრავლებთ, გავითვალისწინებთ ტრიგონომეტრიიდან ცნობილ შეკრების ფორმულებს, მივიღებთ, რომ მათი ნამრავლი იქნება:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (5)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \text{Arg}z_1 + \text{Arg}z_2, \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

ე.ი. ნამრავლის არგუმენტი უდრის არგუმენტების ჯამს, ხოლო ნამრავლის მოდული უდრის თანამრავლთა მოდულების ნამრავლს.

მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით მარტივად შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ მიღებული წესი სამართლიანია თანამამრავლთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის:

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n)].$$

$$\text{Arg}(z_1 \cdot z_2 \cdots z_n) = \text{Arg}z_1 + \text{Arg}z_2 + \cdots + \text{Arg}z_n, \quad |z_1 \cdot z_2 \cdots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_n|.$$

თუ მიღებულ ფორმულებში დავუშვებთ, რომ

$$z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_n = \varphi, \quad r_1 = r_2 = \cdots = r_n = r,$$

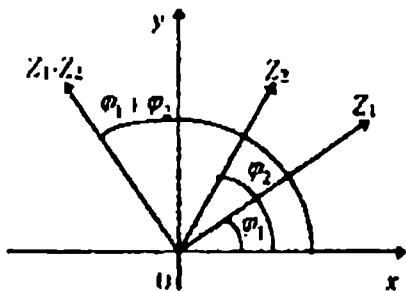
მივიღებთ,

$$z^n = r^n [\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi]. \quad (6)$$

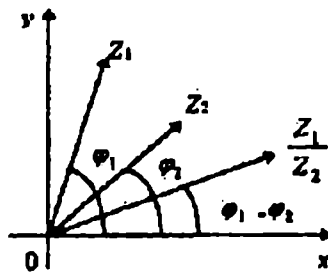
ეს ფორმულა განსაზღვრავს კომპლექსური რიცხვის n -ურ ხარისხს, როცა კომპლექსური რიცხვი მოცემულია ტრიგონომეტრიული ფორმით.

$$(r[\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi])^n = r^n [\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi] = |z|^n \cdot [\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi].$$

აქედან ცხადია, რომ $\operatorname{Arg} z^n = n \cdot \operatorname{Arg} z$, $|z^n| = |z|^n$



ნახ.9.



ნახ.10.

თუ $r=1$, მაშინ (6) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi. \quad (7)$$

ამ ფორმულას ეწოდება მუავრის ფორმულა. ეს ფორმულა ჩვენ დავადგინეთ მთელი დადებითი n რიცხვისათვის, მათემატიკური ინდუქციით მარტივად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ის სამართლიანია $n=0$ და n -ის მთელი არაუარყოფითი მნიშვნელობებისთვისაც.

(5) ფორმულას აქვს მარტივი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. რომ მივიღოთ $z_1 \cdot z_2$ კომპლექსური რიცხვის შესაბამისი წერტილი ამისათვის z_1 -ის შესაბამისი $\overline{OM_1}$ რადიუს-ვექტორი. უნდა შემოვავრუნოთ $\arg z_2$

კუთხით და შემდეგ გავჭიმოთ ეს ვექტორი $z_2 = |z_2| -$
 ჯერ (ცხადია, როცა $0 < r_2 < 1$ საქმე გვექნება შეკუმ-
 შვასთან). (ნახ.9).

განვიხილოთ z_1 და $z_2 \neq 0$, კომპლექსური რიცხვების
 ფარდობა.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \cdot \sin \varphi_2)}{(\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \cdot \sin \varphi_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{\cos^2 \varphi_2 + i \cdot \sin^2 \varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

აქედან ჩანს, რომ

$$\operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

ამ შედეგის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია მოცე-
 მულია მე-10 ნახაზზე.

§1.6. კომპლექსური რიცხვის მაჩვენებლიანი ფორმა. ეილერის ფორმულა

ავილოთ კომპლექსური რიცხვი z . თუ $|z|=1$ და
 $\varphi = \operatorname{Arg} z$, მაშინ ცხადია, რომ

$$z = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi \quad (1)$$

ხარისხოვანი მწკრივების თეორიაში მტკიცდება,
 რომ

$$\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$$

კომპლექსური რიცხვის წარმოდგენას აქვს სახე:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi \quad (2)$$

სადაც e ნეპერის რიცხვია. (2) ფორმულას ეილერის ფორმულასაც უწოდებენ. (2) ფორმულაში φ ნებისმიერი რიცხვია $-\infty < \varphi < +\infty$.

ახლა თუ ავიღებთ $z = x + i \cdot y$ კომპლექსურ რიცხვს, როგორც ვიცით,

$$z = |z|(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi).$$

თუ ამ ტოლობაში გავითვალისწინებთ (2) ფორმულას, მივიღებთ:

$$z = |z|e^{i\varphi} \quad (3)$$

კომპლექსური რიცხვის ამ სახით წარმოდგენას ეწოდება კომპლექსური რიცხვის მაჩვენებლიანი ფორმა.

თუ (2) ფორმულაში φ -ს შევცვლით $-\varphi$ -ით. მივიღებთ:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi - i \cdot \sin \varphi \quad (4)$$

თუ (2) და (4) ფორმულებს წევრ-წევრად შევკრებთ, მივიღებთ:

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2 \cdot \cos \varphi,$$

საიდანაც,

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad (5)$$

თუ (2) ტოლობას გამოვაკლებთ (4) ტოლობას წევრ-წევრად, მივიღებთ:

$$2 \cdot i \cdot \sin \varphi = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}$$

საიდანაც,

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2 \cdot i}. \quad (6)$$

მიღებული (5) და (6) ფორმულები გამოსახვენ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს მაჩვენებლიანი ფუნქციებით (წარმოსახვითი მაჩვენებლით).

თუ ვისარგებლებთ ტრიგონომეტრიული ფორმით მოცემული კომპლექსური რიცხვების გამრავლების, გაყოფის და ახარისხების ოპერაციებით, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $e^{i\varphi}$ ფუნქციას აქვს ჩვეულებრივი მაჩვენებლიანი ფუნქციის შემდეგი თვისებები:

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

განვიხილოთ კომპლექსურ მაჩვენებლიანი ფუნქცია e^z , სადაც $z = x + i \cdot y$. შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრება-შეთანხმებები:

$$e^z = e^{x+i \cdot y} = e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y) \quad (7)$$

$$\overline{e^z} = e^{x-i \cdot y} = e^x \cdot (\cos y - i \cdot \sin y) \quad (8)$$

კერძოდ, თუ $y = 0$, მივიღებთ ჩვეულებრივ მაჩვენებლიან ფუნქციას:

$$e^{x+i \cdot y} = e^x \cdot (\cos 0 + i \cdot \sin 0) = e^x.$$

თუ ვისარგებლებთ მიღებული განსაზღვრებით, მაშინ ადვილად დავამტკიცებთ, რომ:

$$1. \quad e^z \cdot e^{\bar{z}} = e^{z+\bar{z}}, \quad \text{სადაც } z_1 = x_1 + i \cdot y_1, \quad z_2 = x_2 + i \cdot y_2.$$

$$2. e^{z_1} : e^{z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2},$$

$$3. (e^z)^k = e^{zk} \text{ და ა.შ.}$$

ცხადია, რომ თუ გვაქვს ორი კომპლექსური რიცხვი:

$$z_1 = |z_1| \cdot (\cos x_1 + i \cdot \sin y_1) \quad \text{და} \quad z_2 = |z_2| \cdot (\cos x_2 + i \cdot \sin y_2).$$

მაშინ

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

$$\text{თუ } |z_2| \neq 0.$$

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = |z|^n \cdot e^{i \cdot n\varphi}.$$

§1.7. ფესვი კომპლექსური რიცხვიდან

ავიღოთ კომპლექსური რიცხვი $z = x + i \cdot y$.

განსაზღვრება. n -ური ხარისხის ფესვი z კომპლექსური რიცხვიდან, სადაც $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, ეწოდება β კომპლექსურ რიცხვს, რომლის n -ური ხარისხიც z -ის ტოლია.

განსაზღვრების ძალით:

$$\sqrt[n]{z} = \beta \Leftrightarrow \beta^n = z. \quad (1)$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ ამ განსაზღვრების საფუძველზე $z \neq 0$ კომპლექსური რიცხვიდან n -ური ხარისხის ფესვი გვაძლევს n განსხვავებულ კომპლექსურ რიცხვს (ნამდვილს, ან წარმოსახვითს) და ისინი შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

სადაც $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, ხოლო $\sqrt[n]{r}$ წარმოადგენს ფესვის არითმეტიკულ მნიშვნელობას r ნამდვილი რიცხვიდან.

§1.8. კომპლექსურ სიბრტყეზე ორ წერტილს შორის მანძილი. ორ წრფეს შორის კუთხე

ევკლიდური სიბრტყის ორ წერტილს შორის მანძილი, რომელთა აფიქსებია z_1 და z_2 , გამოითვლება ფორმულით:

$$d_{z_1 z_2} = |z_1 - z_2|.$$

ანუ

$$d_{z_1 z_2}^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}).$$

წრფეს, რომელიც გადის z_1 და z_2 წერტილებზე, აღვნიშნავთ სიმბოლოთი (z_1, z_2) .

ორ (z_1, z_2) და (z_1, z_3) წრფეს შორის $\delta_{(z_1, z_2)(z_1, z_3)}$ კუთხე გამოითვლება ფორმულით:

$$\delta_{(z_1, z_2)(z_1, z_3)} = \operatorname{Arg} \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}.$$

$$V(z_3, z_2, z_1) = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \text{ გამოსახულებას ეწოდება } z_3, z_2, z_1$$

სამი წერტილის მარტივი ფარდობა.

ორ წრფეს შორის კუთხის გამოთვლა დაფუძნებულია შემდეგ მოსაზრებაზე:

$$\delta_{(z_1, z_2)(z_1, z_3)} = \varphi_2 - \varphi_1$$

სადაც $z_3^0 = z_3 - z_1$ კომპლექსური რიცხვის არგუმენტია φ_2 , ხოლო φ_1 კი $-z_2^0 = z_2 - z_1$ კომპლექსური რიცხვის არგუმენტია. გასათვალისწინებელია ისიც, რომ

$$\delta_{(z_1, z_2)(z_1, z_3)}$$

კუთხე არის მიმართული კუთხე (z_1, z_2) და (z_1, z_3) მიმართულ წრფეებს შორის, ანუ კუთხე, რომლითაც უნდა მოვაბრუნოთ მიმართული (z_1, z_2) წრფე (სხივი სათავით z_1 და ბოლოთი z_2), საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით (დადებითი მიმართულება), რომ შეუთავსდეს მიმართულ მეორე (z_1, z_3) წრფეს.

ცხადია, რომ მიმართული (z_1, z_2) წრფე-ეს არის ყველა ისეთი z წერტილთა სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$$\text{Arg}(z, z_1, z_2) = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2} = 0 \pmod{\pi}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ (z_1, z_2) წრფე არის ყველა ისეთი z წერტილთა სიმრავლე, რომელთათვისაც

$$\text{Im } V(z, z_1, z_2) = \text{Im} \frac{z - z_2}{z_1 - z_2} = 0,$$

ე.ი. $V(z, z_1, z_2)$ რიცხვი ნამდვილია.

უკანასკნელი ტოლობა შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{\overline{z} - \overline{z_2}}{\overline{z_1} - \overline{z_2}}. \quad (1)$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, (z_1, z_2) წრფის განტოლებას აქვს აქვს (1) სახე. მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ:

$$(\overline{z_1} - \overline{z_2})z - (z_1 - z_2)\overline{z} - (\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}) = 0,$$

ანუ

$$Bz - \overline{Bz} - C = 0, \operatorname{Re} C = 0,$$

სადაც $B = \overline{z_1} - \overline{z_2}$, $C = \overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}$ სუფთად წარმოსახვითი რიცხვია.

თუ ამ ტოლობის ორთავე მხარეს გავამრავლებთ i -ზე და გავითვალისწინებთ, რომ

$$iB = A, \quad i\overline{B} = -\overline{A}, \quad iC = -(\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}),$$

მაშინ მივიღებთ:

$$Az + \overline{Az} + C = 0,$$

სადაც $\operatorname{Im} C = 0 \pmod{2\pi}$.

§1.9. წრფის განტოლება კომპლექსურ სიბრტყეზე. წრფის კომპლექსური კუთხური კოეფიციენტი.

თეორემა 1. ნებისმიერი წრფის განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს სახით

$$Az + \overline{Az} + C = 0,$$

სადაც C -ნამდვილი რიცხვია და პირიქით, ამ სახის ყველა განტოლება, რომელშიც C -ნამდვილი რიცხვია, ხოლო $A \neq 0$ არის წრფის განტოლება.

დამტკიცება. ვთქვათ, $Px + Qy + C = 0$ წრფის განტოლებაა დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში. რადგან

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{i}{2}(\bar{z} - z).$$

ამიტომ ეს განტოლება შეიძლება გადავწეროთ სახით:

$$\frac{1}{2}P(z + \bar{z}) + \frac{i}{2}Q(\bar{z} - z) + R = 0,$$

$$\frac{P - iQ}{2}z + \frac{P + iQ}{2}\bar{z} + R = 0,$$

ანუ,

$$Az + \overline{Az} + C = 0,$$

$$\text{სადაც, } C = 2R, \quad A = \frac{P - iQ}{2}, \quad \bar{A} = \frac{P + iQ}{2}.$$

პირიქით, ჩავთვალოთ, რომ $A = P - iQ$, $\bar{A} = P + iQ$ და

$$Az + \overline{Az} + C = 0$$

განტოლება გადავწეროთ სახით:

$$(P - iQ)(x + iy) + (P + iQ)(x - iy) + C = 0.$$

თუ გავხსნით ფრჩხილებს და ჩავატარებთ მსგავსი წევრების შეკრებას, მივიღებთ:

$$2Px + 2Qy + C = 0.$$

მივიღეთ პირველი ხარისხის წრფივი განტოლება x და y ცვლადების მიმართ. როგორც ცნობილია, ეს წრფის განტოლებაა.

განტოლებას $Az + \overline{Az} + C = 0$ ეწოდება წრფის თვით-შეუღლებული განტოლება, რაც იმით არის განპირობებული, რომ ამ განტოლების მარცხენა მხარე x და y ცვლადების ნამდვილი ფუნქციებია, მართლაც,

$$U = Az + \overline{Az} + C$$

$$\overline{U} = \overline{Az} + Az + C = U.$$

წრფის (1) განტოლება გარდავქმნათ და მივცეთ სახე:

$$z - z_1 = \frac{z_2 - z_1}{z_2 - \overline{z_1}} (\overline{z} - \overline{z_1}). \quad (1)$$

$k = \frac{z_2 - z_1}{z_2 - \overline{z_1}}$ გამოსახულებას ეწოდება (1) წრფის

კომპლექსური კუთხური კოეფიციენტი. შევნიშნოთ, რომ

$$|k| = \left| \frac{z_2 - z_1}{z_2 - \overline{z_1}} \right| = 1.$$

ამრიგად, (1) წრფის განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ სახით:

$$z - z_1 = k(\overline{z} - \overline{z_1}), \text{ სადაც } |k| = 1. \quad (2)$$

მარტივად ვაჩვენებთ შებრუნებული დასკვნის მართებულობასაც.

თუ წრფე გადის კოორდინატა სათავეზე, მაშინ $\overline{z_1} = \overline{z_1} = 0$ და (2) განტოლებიდან ვღებულობთ:

$$z = k\overline{z}.$$

ორი

$$z - z_1 = k_1 (\bar{z} - \bar{z}_1), \quad |k_1| = 1,$$

$$z - z_2 = k_2 (\bar{z} - \bar{z}_2), \quad |k_2| = 1$$

წრფე პარალელურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $k_1 = k_2$. კერძოდ, ეს წრფეები პარალელურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა განტოლებათა სისტემას

$$z - k_1 \bar{z} = z_1 - k_1 \bar{z}_1,$$

$$z - k_2 \bar{z} = z_2 - k_2 \bar{z}_2,$$

z და $\bar{z}$ -ის მიმართ ან არა აქვს ამონახსენი-მკაცრი პარალელობა, ან აქვთ უსასრულოდ ბევრი ამონახსენი-წრფეთა თანმთხვევა. ეს მოხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\begin{vmatrix} 1 & -k_1 \\ 1 & -k_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ანუ,

$$k_1 = k_2.$$

ორი p და q წრფე, რომელთა განტოლებებია შესაბამისად

$$z - k_1 \bar{z} = z_1 - k_1 \bar{z}_1,$$

$$z - k_2 \bar{z} = z_2 - k_2 \bar{z}_2,$$

პერპენდიკულარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $k_1 + k_2 = 0$ და პირიქით, თუ $k_1 + k_2 = 0$, მაშინ p და q წრფეები პერპენდიკულარულია.

§1.10. კომპლექსურ სიბრტყეზე $az + b\bar{z} + c = 0$ განტოლების გეომეტრიული აზრი

$z = x + iy$ და $\bar{z} = x - iy$ ტოლობებიდან ცალსახად განისაზღვრება x და y დეკარტის კოორდინატები z და $\bar{z}$ კომპლექსური რიცხვების საშუალებით:

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{i}{2}(z - \bar{z}). \quad (1)$$

კომპლექსურ z და $\bar{z}$ რიცხვებს M წერტილის შეუღლებულ კომპლექსურ კოორდინატებს უწოდებენ.

(1) ფორმულები საშუალებას იძლევა გადასვლა განვახორციელოთ ფიგურის დეკარტულ კოორდინატებში მოცემული განტოლებიდან შეუღლებული კომპლექსური რიცხვებით ჩაწერილ განტოლებაზე. უნდა შევნიშნოთ, რომ ფიგურის განტოლების განხილვა შეუღლებული კომპლექსური კოეფიციენტებით უფრო მოსახერხებელია კომპლექსურ რიცხვთა მეთოდის გამოყენებით.

ჩვენ კონკრეტულ შემთხვევაში უნდა ვიპოვოთ სიბრტყის წერტილთა სიმრავლე, რომელიც მოცემულია განტოლებით

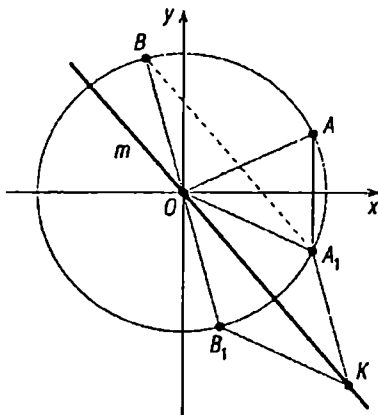
$$az + b\bar{z} + c = 0. \quad (2)$$

რომელშიც ერთი მაინც a და b კოეფიციენტებიდან ნულისაგან განსხვავებულია.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $c = 0$. ამ შემთხვევაში z და $\bar{z}$ -ის მიმართ სისტემას აქვს სახე:

$$\begin{cases} az + b\bar{z} = 0, \\ \bar{b}z + \bar{a}\bar{z} = 0. \end{cases}$$

მეორე განტოლება მიიღება პირველი განტოლებიდან კომპლექსურ შეუღლებულზე გადასვლით.



ნახ.11.

სისტემის პირველი განტოლება გავამრავლოთ $\bar{a}$ -ზე მეორე b -ზე. გვექნება

$$\begin{cases} a\bar{a}z + \bar{a}b\bar{z} = 0, \\ b\bar{b}z + \bar{a}b\bar{z} = 0. \end{cases}$$

სისტემის პირველ განტოლებას წევრ-წევრად გავმოვაკლოთ მეორე განტოლება. გვექნება:

$$(a\bar{a} - b\bar{b})z = 0.$$

თუ $a\bar{a} \neq b\bar{b}$, ე.ი. $|a| \neq |b|$, მაშინ მიღებული განტოლების ერთადერთი ამონახსენი იქნება $z = 0$, რომელიც

აგრეთვე წარმოადგენს თავიდან მოცემული $az+b\bar{z}=0$ განტოლების ამონახსენსაც.

თუ $a\bar{a}=b\bar{b}$, მაშინ $az+b\bar{z}=0$ განტოლება გადავწეროთ სახით:

$$z = -\frac{b}{a}\bar{z},$$

სადაც

$$\arg z = \arg\left(-\frac{b}{a}\right) + \arg \bar{z}.$$

რადგან

$$\arg z = -\arg \bar{z},$$

ამიტომ

$$\arg z = \arg\left(-\frac{b}{a}\right) - \arg \bar{z},$$

საიდანაც,

$$\arg z = \frac{1}{2} \arg\left(-\frac{b}{a}\right).$$

ცხადია, რომ ამ პირობებს აკმაყოფილებს ნებისმიერი სხივი, რომლის სათავეა ნულოვანი წერტილი და დახრილია ნამდვილი ღერძის მიმართ $\alpha = \frac{1}{2} \arg\left(-\frac{b}{a}\right)$ კუთხით.

ამრიგად,

$$az+b\bar{z}=0, \quad a\bar{a}=b\bar{b} \quad (3)$$

განტოლებით მოცემულია წრფე, რომელიც გადის სიბრტყის ნულოვან წერტილზე. ამ წრფის აგება მარტივად არის შესაძლებელი, თუ შევნიშნავთ, რომ მისი წერტილია $K(\bar{a}-b)$. (ნახ.11).

რადგან,

$$\overline{OK} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1},$$

სადაც, $A_1(\bar{a}), B_1(b)$.

ასევე, შესაძლებელია K წერტილის აგების გარეშეც, თუ გავითვალისწინებთ, რომ m წრფე BA_1 წრფის პარალელურია, რადგან $\overline{OK}$ და $\overline{BA_1}$ -ს ერთი და იგივე $\bar{a}-b$ კოორდინატი აქვთ. ამიტომ $\overline{OK} = \overline{BA_1}$.

მაშინ, როცა $b = \bar{a} (a = \bar{b})$, $az + b\bar{z} = 0$ განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\bar{b}z + b\bar{z} = 0$$

და მისი ფესვია

$$z = bi.$$

ამიტომ მისი შემცველი წრფე OB წრფის მართობულია.

ვთქვათ, რომ $c \neq 0$. (2) განტოლების თვისუფალი წევრი ყოველთვის შეიძლება ვაქციოთ ნამდვილ რიცხვად, თუ მას გავამრავლებთ $\bar{c}$. ამიტომ თავიდანვე ჩავთვალოთ, რომ $c = \bar{c} \neq 0$.

გვაქვს სისტემა

$$\begin{cases} az + b\bar{z} + c = 0, \\ \bar{b}z + \bar{a}\bar{z} + c = 0. \end{cases}$$

თუ სისტემის პირველ განტოლებას გამოვაკლებთ მეორე განტოლებას, მივიღებთ:

$$(a-b)z + (b-\bar{a})\bar{z} = 0.$$

განვიხილოთ ყველა შესაძლო შემთხვევაები:

თუ $a \neq \bar{b}$, მაშინ

$$\bar{z} = \frac{a-\bar{b}}{a-b} z$$

და მისი ჩასმით (1) განტოლებაში მივიღებთ:

$$az + \frac{b \cdot (a-\bar{b})}{a-b} z + c = 0.$$

ანუ,

$$(a\bar{a} - b\bar{b})z + c(a-\bar{b}) = 0.$$

როცა $|a| \neq |b|$, მას აქვს ერთადერთი ამონახსნი

$$z = \frac{c(a-\bar{b})}{a\bar{a} - b\bar{b}}.$$

როცა $|a| = |b|$, ($|c| \neq 0, a \neq b$) მაშინ სისტემას ამონახსნი არა აქვს.

თუ $a = \bar{b}$, მაშინ $a\bar{a} = b\bar{b}$, ე.ი $|a| = |b|$. ამ შემთხვევაში, როცა $c = \bar{c}$ მოცემულია წრფე.

კერძოდ, ავიღოთ $Q\left(-\frac{c}{2a}\right)$ წერტილი, $B(b)$ წერტი-

ლის შესაბამისი $\overline{OB}$ რადიუს-ვექტორი და განვიხილოთ $M(z)$ წერტილთა სიმრავლე, რომლის თითოეული წერტილისათვის $MQ \perp OB$:

$$\left(z + \frac{c}{2a}\right)\bar{b} + \left(\bar{z} + \frac{\bar{c}}{2\bar{a}}\right)b = 0. \quad (4)$$

ცხადია, რომ ეს სიმრავლე არის წრფე. როცა $a = \bar{b}$ და $c = \bar{c}$ (4) განტოლება (2) განტოლების ტოლფასია.

ამრიგად, როცა $a = \bar{b}$ და $c = \bar{c}$ (2) განტოლება წრფის განტოლებაა, რომელიც გადის $Q\left(-\frac{c}{2a}\right)$ წერტილზე და პერპენდიკულარულია $\overline{OB}(b)$ ვექტორის.

ბოლოს განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $a = \bar{b}$, მაგრამ $c \neq \bar{c}$. მაშინ განტოლებათა სისტემის

$$\begin{cases} az + b\bar{z} + c = 0, \\ \bar{b}z + \bar{a}\bar{z} + \bar{c} = 0. \end{cases}$$

ამოხსნისას მივალთ წინააღმდეგობაზე $c = \bar{c}$.

შევაჯამოთ შედეგები: განტოლება $az + b\bar{z} + c = 0$, რომელშიც ერთ-ერთი კოეფიციენტი მაინც a და b კოეფიციენტებიდან განსხვავდება ნულისაგან, განსაზღვრავს:

1. წრფეს, როცა $|a| = |b|$, $c = 0$, ასევე, როცა $a = \bar{b}$, $c = \bar{c}$.
2. ერთადერთ წერტილს, როცა $|a| \neq |b|$.
3. სხვა შემთხვევებში ცარიელ სიმრავლეს (ე.ი. როცა $|a| = |b|$, $c \neq 0$, $a = \bar{b}$, აგრეთვე, როცა $a = \bar{b}$, $c \neq \bar{c}$).

§1.11. წრფის დაყვანილი განტოლება

განვიხილოთ სისტემა

$$\begin{cases} az + b\bar{z} + c = 0, \\ \bar{b}z + a\bar{z} + \bar{c} = 0 \end{cases}$$

რომელშიც a, b და c კოეფიციენტებზე არანაირი შეზღუდვა არ ვრცელდება, გარდა ერთისა, რომ a და b კოეფიციენტები ერთდროულად ნულის ტოლი არ იყოს.

სისტემის პირველი განტოლება გავამრავლოთ $\bar{a}$ -ზე, მეორე განტოლება b -ზე. გვექნება

$$\begin{cases} a\bar{a}z + \bar{a}b\bar{z} + \bar{a}c = 0, \\ b\bar{b}z + \bar{a}b\bar{z} + b\bar{c} = 0 \end{cases}$$

სისტემის პირველ განტოლებას წევრ-წევრად გამოვაკლოთ მეორე განტოლება. გვექნება:

$$(a\bar{a} - b\bar{b})z = b\bar{c} - \bar{a}c.$$

რომელსაც აქვს ერთადერთი ამონახსნი, როცა $a\bar{a} \neq b\bar{b}$ და აქვს უამრავი ამონახსნი, როცა $a\bar{a} = b\bar{b}$ და $b\bar{c} = \bar{a}c$.

აქედან წინა გამოკვლევების შედეგებზე დაყრდნობით მივიღებთ, რომ

$$az + b\bar{z} + c = 0$$

განტოლება განსაზღვრავს

ა) ერთადერთ წერტილს, როცა $a\bar{a} \neq b\bar{b}$,

ბ) წრფეს, როცა $a\bar{a} = b\bar{b}$ და $b\bar{c} = \bar{a}c$.

გ) ცარიელ სიმრავლეს, როცა $a\bar{a} = b\bar{b}$ და $b\bar{c} \neq \bar{a}c$.

განტოლება

$$\bar{u}z + u\bar{z} + v = 0, v = \bar{v}, \quad (5)$$

აკმაყოფილებს ბ) პირობას, ამიტომ წარმოადგენს წრფის განტოლებას შეუღლებულ კომპლექსურ კოეფიციენტებში, მას წრფის დაყვანილ განტოლებასაც უწოდებენ.

იმისათვის, რომ

$$az + b\bar{z} + c = 0 \quad (a\bar{a} = b\bar{b}, \quad b\bar{c} = \bar{a}c)$$

წრფის განტოლება გარდაექმნათ და მივიყვანოთ (5) სახემდე, საკმარისია გავამრავლოთ ის $\bar{c} \neq 0$ -ზე.

განსაკუთრებულ შემთხვევას წარმოადგენს წრფის განტოლება, $az + b\bar{z} = 0$ სადაც $a\bar{a} = b\bar{b}$, რომელიც გადის სიბრტყის ნულოვან წერტილზე. ის ტოლფასია განტოლების

$$(a + \bar{b})z + (\bar{a} + b)\bar{z} = 0, \quad a + \bar{b} \neq 0 \quad (6)$$

კერძოდ, $az + b\bar{z} = 0$ და $\bar{a}z + \bar{b}\bar{z} = 0$ განტოლებების შეკრება გვაძლევს (6) განტოლებას.

შებრუნებული გარდაქმნის ჩასატარებლად (6) განტოლება გავამრავლოთ $a\bar{a} = b\bar{b}$ -ზე.

$$a(a\bar{a} + \bar{a}\bar{b})z + b(\bar{a}\bar{b} + b\bar{b})\bar{z} = 0.$$

რადგან $a\bar{a} = b\bar{b}$, ამიტომ $b\bar{b}$ შევცვალოთ $a\bar{a}$ -ით, მივიღებთ:

$$a(a\bar{a} + \bar{a}\bar{b})z + b(\bar{a}\bar{b} + a\bar{a})\bar{z} = 0$$

საიდანაც,

$$(a\bar{a} + \bar{a}b)(az + b\bar{z}) = 0$$

რადგან,

$$a + \bar{b} \neq 0$$

ამიტომ

$$az + b\bar{z} = 0.$$

როცა $a + \bar{b} = 0$, განტოლება $az + b\bar{z} = 0$ მიიღებს სახეს:

$$-\bar{b}z + b\bar{z} = 0,$$

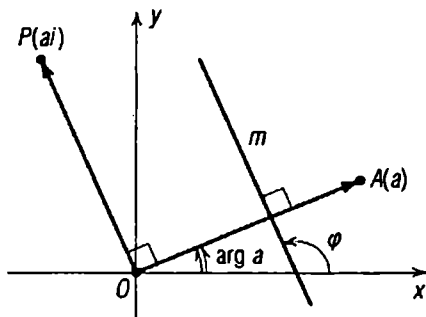
რომელიც

$$\bar{b}iz - b\bar{i}z = 0$$

განტოლების ეკვივალენტურია. ეს უკანასკნელი კი, წრფის დაყვანილი სახის განტოლებაა.

§1.12. ორ წრფეს შორის კუთხე

ვთქვათ, m წრფე მოცემულია $\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0$, $b = \bar{b}$ დაყვნილი სახის განტოლებით. რადგან ის პერპენდიკულარულია $\overline{OA}(a)$ ვექტორის, ამიტომ $\overline{OP}(ai)$ ვექტორი მისი პარალელურია (ნახ. 12).



ნახ. 12.

ცხადია, რომ Ox ღერძიდან m წრფემდე ორიენტი-
რებული კუთხე ai რიცხვის არგუმენტის ტოლია.

$$\varphi = \arg ai = \frac{\pi}{2} + \arg a.$$

დადებითად ორიენტირებული θ კუთხე

$$\overline{a_1}z + a_1\overline{z} + b_1 = 0$$

წრფიდან

$$\overline{a_2}z + a_2\overline{z} + b_2 = 0$$

წრფემდე, ტოლია მათ მიმმართველ a_1i და a_2i ვექტო-
რებს შორის კუთხის.

(1) ფორმულის თანახმად,

$$\theta = \arg \frac{a_2i}{a_1i} = \arg \frac{a_2}{a_1} \quad (2)$$

(1) და (2) ფორმულები საშუალებას იძლევა ვიპო-
ვოთ შესაბამისი კუთხეები π -ს დამატებამდე სიზუს-
ტით.

§1.13. ორი წრფის პარალელურობის და პერპენდიკულარობის კრიტერიუმები

როგორც წინა პარაგრაფში ვნახეთ, $\overline{a_1}z + a_1\overline{z} + b_1 = 0$
წრფიდან $\overline{a_2}z + a_2\overline{z} + b_2 = 0$ წრფემდე დადებითად ორიენ-
ტირებული კუთხე გამოითვლება ფორმულით:

$$\theta = \arg \frac{a_2i}{a_1i} = \arg \frac{a_2}{a_1} \quad (1)$$

(1) ტოლობებიდან გამომდინარეობს m_1 და m_2 წრფეების პარალელურობის და პერპენდიკულარობის პირობები.

კერძოდ,

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} - \text{სუფთად წარმოსახვითი რიცხვია.}$$

ეს ნიშნავს, რომ

$$m_1 \perp m_2 \Leftrightarrow \frac{a_2}{a_1} = -\frac{\overline{a_2}}{a_1},$$

ან,

$$m_1 \perp m_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_1} = -\frac{a_2}{a_2} \quad (2)$$

როცა $\theta = 0$ ან $\theta = \pi$, მივიღებთ:

$$m_1 \parallel m_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_1} = \frac{\overline{a_1}}{a_1}.$$

თუ $\overline{a}z + a\overline{z} + b = 0$ წრფე გადის $M_0(z_0)$ წერტილზე, მაშინ

$$\overline{a}z_0 + a\overline{z_0} + b = 0$$

ეს განტოლება შეგვიძლია ჩავწეროთ სახით:

$$\overline{a}(z - z_0) + a(\overline{z} - \overline{z_0}) = 0 \quad (3)$$

(2) პირობების ძალით მიღებული წრფე მოცემული წრფის მართობულია, თუ მისი z და $\overline{z}$ კოეფიციენტებია შესაბამისად a და $-\overline{a}$. ამიტომ (3) ტოლობის საფუძველზე მივიღებთ წრფის განტოლებას

$$\overline{a}(z - z_0) - a(\overline{z} - \overline{z_0}) = 0 \quad (4)$$

რომელიც $M_0(z_0)$ წერტილზე გადის და

$$\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0$$

წრფის მართობულია.

§1.14. მანძილი წერტილიდან წრფემდე

ამოვხსნათ

$$\begin{cases} \bar{a}z + a\bar{z} + b = 0 \\ \bar{a}(z - z_0) - a(\bar{z} - \bar{z}_0) = 0 \end{cases}$$

სისტემა.

გავხსნათ ფრჩხილები სისტემის მეორე განტოლებაში. გვექნება:

$$\begin{cases} \bar{a}z + a\bar{z} + b = 0 \\ \bar{a}z - \bar{a}z_0 - a\bar{z} + a\bar{z}_0 = 0 \end{cases}$$

შევკრიბოთ სისტემის პირველი და მეორე განტოლებები წევრ-წევრად. მივიღებთ:

$$2\bar{a}z - \bar{a}z_0 + a\bar{z}_0 + b = 0$$

საიდანაც,

$$z_1 = \frac{\bar{a}z_0 - a\bar{z}_0 - b}{2a}.$$

მივიღეთ $M_0(z_0)$ წერტილიდან $\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0$ წრფეზე დაშვებული მართობის M_1 ფუძის აფიქსს.

$M_0(z_0)$ წერტილიდან ამ წრფემდე d მანძილი $|M_0M_1|$ -ის ტოლია. ე.ი.

$$d = |z_1 - z_0| = \frac{|\overline{az_0} + az_0 + b|}{2|a|}. \quad (8)$$

იმისათვის, რომ სამი

$$\overline{a_1}z + a_1\overline{z} + b_1 = 0$$

$$\overline{a_2}z + a_2\overline{z} + b_2 = 0$$

$$\overline{a_3}z + a_3\overline{z} + b_3 = 0$$

წრფე (ურთიერთგადამკვეთ ან პარალელურ) წრფეთა მნულს მიეკუთვნებოდეს, უნდა შესრულდეს პირობა:

$$\begin{vmatrix} a_1 & \overline{a_1} & b_1 \\ a_2 & \overline{a_2} & b_2 \\ a_3 & \overline{a_3} & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

ამოცანა 1. წრეწირის AB და PQ ქორდები C წერტილში გადაიკვეთება. იპოვეთ AP და BQ ყველა შესაძლო წრფეების გადაკვეთის M წერტილთა სიმრავლე, თუ A, B, C წერტილები არ იცვლება, ხოლო P და Q წერტილები გაირბენს მთელ წრეწირს. (ნახ.13).

ვთქვათ, z -ნებისმიერი M წერტილის აფიქსია, რომელიც ჩვენს მიერ სამეზნ წერტილთა სიმრავლეს ეკუთვნის. მოცემული წრეწირი ჩავთვალოთ ერთეულოვან $z\overline{z}=1$ წრეწირად. მაშინ A, B, C წერტილების კოლინეარულობის პირობას აქვს სახე:

$$c + \overline{cab} = a + b.$$

ანალოგიურად, P, C, Q წერტილების, M, P, A და M, B, Q წერტილების კოლინეარულობის პირობებს აქვს სახე:

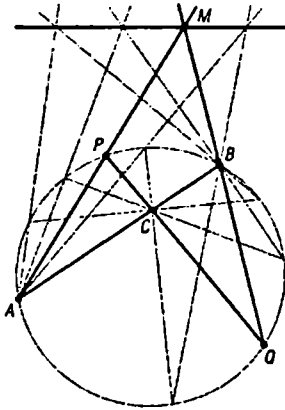
$$c + \bar{c}pq = p + q,$$

$$z + \bar{z}aq = a + p,$$

$$z + \bar{z}bq = b + q.$$

M, P, A წერტილების კოლინეარულობის პირობიდან მივიღებთ:

$$c(1 - a\bar{z})(1 - b\bar{z}) + \bar{c}(z - a)(z - b) = (z - a)(1 - b\bar{z}) + (z - b)(1 - a\bar{z}).$$



ნახ. 13.

$$p = \frac{z - a}{1 - a\bar{z}}.$$

M, B, Q წერტილების კოლინეარულობის პირობიდან მივიღებთ:

$$q = \frac{z - b}{1 - b\bar{z}}.$$

ჩავსვათ p და q -ს მიღებული მნიშვნელობები P, C, Q წერტილების კოლინეარულობის პირობაში. გვექნება:

$$c + \frac{z-a}{1-a\bar{z}} \cdot \frac{z-b}{1-b\bar{z}} \cdot \bar{c} = \frac{z-a}{1-a\bar{z}} + \frac{z-b}{1-b\bar{z}},$$

საიდანაც,

გავხსნათ ფრჩხილები. გვექნება:

$$c(1-b\bar{z}-a\bar{z}+ab\bar{z}^{-2}) + \bar{c}(z^2-az-bz+ab) = z-bz\bar{z}-a+ab\bar{z}+z-az\bar{z}-b+ab\bar{z}$$

ანუ,

$$c-bc\bar{z}-ac\bar{z}+abc\bar{z}^{-2} + \bar{c}z^2 - \bar{c}z - \bar{c}bz + ab\bar{c} - z + bz\bar{z} + a - ab\bar{z} - z + az\bar{z} + b - ab\bar{z} = 0$$

გავითვალისწინოთ, რომ

$$c + ab\bar{c} = a + b \Rightarrow c = a + b - ab\bar{c},$$

გვექნება,

$$a + b - ab\bar{c} - bc\bar{z} - ac\bar{z} + abc\bar{z}^{-2} + \bar{c}z^2 - \bar{c}z - \bar{c}bz + ab\bar{c} - z + bz\bar{z} + a - ab\bar{z} - z + az\bar{z} + b - ab\bar{z} = 0$$

მსგავსი წევრების შეერთების შემდეგ გვექნება:

$$2a + 2b - bc\bar{z} - ac\bar{z} + abc\bar{z}^{-2} + \bar{c}z^2 - \bar{c}z - \bar{c}bz - 2z + bz\bar{z} - 2ab\bar{z} + az\bar{z} = 0$$

მიღებული გამოსახულება გარდავექმნათ ასე:

$$2a + 2b - bc\bar{z} - ac\bar{z} + abc\bar{z}^{-2} + \bar{c}z^2 - \bar{c}z - \bar{c}bz - 2z - 2ab\bar{z} + z\bar{z}(a+b) = 0$$

გავითვალისწინოთ, რომ

$$c + \bar{c}ab = a + b,$$

მივიღებთ:

$$2a + 2b - bc\bar{z} - ac\bar{z} + abc\bar{z}^{-2} + \bar{c}z^2 - \bar{c}z - \bar{c}bz - 2z - 2ab\bar{z} + z\bar{z}(c + \bar{c}ab) = 0$$

ფრჩხილების გახსნის შემდეგ მივიღებთ:

$$2a + 2b - bc\bar{z} - ac\bar{z} + abc\bar{z}^{-2} + \bar{c}z^2 - \bar{c}z - \bar{c}bz - 2z - 2ab\bar{z} + cz\bar{z} + \bar{c}abz\bar{z} = 0$$

მიღებულ გამოსახულებაში წევრები დავაჯგუფოთ ასე:

$$(\bar{c}z^2 + \bar{c}abz\bar{z} - \bar{c}z - \bar{c}b\bar{z}) + (cz\bar{z} + abc\bar{z}^{-2} - \bar{c}z - \bar{c}bz) - (2z + 2ab\bar{z} - 2a - 2b) = 0.$$

საერთო მამრავლების ფრჩხილებს გარეთ გატანით მივიღებთ:

$$\bar{c}z(z+ab\bar{z}-a-b)+c\bar{z}(z+ab\bar{z}-a-b)-2(z+ab\bar{z}-a-b)=0,$$

ანუ,

$$(z+ab\bar{z}-a-b)(\bar{c}z+c\bar{z}-2)=0.$$

რაც ნიშნავს, რომ სამიეხელი სიმრავლე წარმოადგენს წრფეთა წყვილს, რომელთაგან ერთი AB წრფეა, ხოლო მეორე წრფის განტოლებაა

$$\bar{c}z+c\bar{z}-2=0. \quad (10)$$

როგორც ვხედავთ, ეს წრფე AB ქორდაზე დამოკიდებული არ არის, ის განსაზღვრულია წრეწირით და C წერტილით. მას ეწოდება C წერტილის პოლიარა $z\bar{z}=1$ წრეწირის მიმართ.

ამოცანა 2. იპოვეთ ABC სამკუთხედის ეილერის OH წრფის მიერ სამკუთხედის გვერდებთან შედგენილი კუთხეები, თუ ABC სამკუთხედის წვეროთა აფიქსებია შესაბამისად a, b, c .

ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი მივიღოთ ერთეულოვან $z\bar{z}=1$ წრეწირად. ABC სამკუთხედის H ორთოცენტრის აფიქსია $h=a+b+c$.

OH და AB წრფეების განტოლებებია შესაბამისად

$$h\bar{z}=\bar{h}z,$$

და

$$z+ab\bar{z}=a+b.$$

ჩვენ გვჭირდება დაყვანილი ფორმები

$$ih\bar{z}-i\bar{h}z=0,$$

$$(\bar{a} + \bar{b})z + (a + b)\bar{z} - (a + b)(\bar{a} + \bar{b}) = 0.$$

ორ წრფეს შორის კუთხის გამოსათვლელი ფორმულიდან გვაქვს:

$$(\overline{OH}, \overline{AB}) = \arg \frac{a+b}{-ih} = \arg \frac{\hat{i}(a+b)}{a=b+c} = \frac{\pi}{2} = \arg \frac{a+b}{a+b+c}.$$

ამოცანა 3. წრეწირზე შემოხაზულია $ABCD$ კვადრატის. კვადრატის A, B, C, D წვეროების ორთოგონალური პროექციები წრეწირის მიმართ გავლებულ ნებისმიერ მხეზზე შესაბამისად A_1, B_1, C_1, D_1 წერტილებია. დაამტკიცეთ, რომ

$$AA_1 \cdot CC_1 = BB_1 \cdot DD_1.$$

წრეწირი ჩავთვალოთ ერთეულოვნად. კოორდინატთა სისტემა ისე შევარჩიოთ, რომ AB, BC, CD, DA გვერდების წრეწირთან შეხების წერტილების აფიქსები იყოს შესაბამისად $i, -1, i, 1$. მაშინ, $ABCD$ კვადრატის წვეროთა აფიქსები იქნება შესაბამისად:

$$1+i, -1+i, -1-i, 1-i.$$

წრეწირის მიმართ მის ნებისმიერ $P(p)$ წერტილში გავლებული მხეზის განტოლებაა:

$$\bar{p}z + p\bar{z} - 2 = 0, p\bar{p} = 1.$$

წერტილიდან წრფემდე მანძილის გამოსათვლელი ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} |AA_1| \cdot |CC_1| &= \frac{1}{2} |\bar{p}(1+i) + p(1-i) - 2| \cdot \frac{1}{2} |\bar{p}(-1-i) + p(-1+i) - 2| = \\ &= \frac{1}{4} |(\bar{p}(1+i) + p(1-i) - 2)(\bar{p}(1+i) + p(1-i) + 2)| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \left| \bar{p}^2 (1+i)^2 + p^2 (1-i)^2 \right| = \frac{1}{4} \left| \bar{p}^2 (1+2i-1)^2 + p^2 (1-2i-1)^2 \right| = \\
&= \frac{1}{4} \left| 2i \cdot \bar{p}^2 - 2ip^2 \right| = \frac{1}{4} \left| 2i \cdot (\bar{p}^2 - p^2) \right| = \frac{1}{2} \left| \bar{p}^2 - p^2 \right|.
\end{aligned}$$

ანალოგიურად, გამოვთვლით, რომ,

$$\begin{aligned}
|BB_1| \cdot |DD_1| &= \frac{1}{4} \left| \bar{p}^2 (-1+i)^2 + p^2 (-1-i)^2 \right| = \\
&= \frac{1}{4} \left| \bar{p}^2 (1-2i-1)^2 + p^2 (1+2i-1)^2 \right| = \frac{1}{4} \left| -2i \cdot \bar{p}^2 + 2ip^2 \right| = \\
&= \frac{1}{4} \left| 2i \cdot (-\bar{p}^2 + p^2) \right| = \frac{1}{2} \left| -\bar{p}^2 + p^2 \right| = \frac{1}{2} \left| \bar{p}^2 - p^2 \right|.
\end{aligned}$$

ამოცანა 4. იპოვეთ ABC სამკუთხედის მედიანების (ცენტროიდის) დადაკვეთის G წერტილის და სიმაღლეების გადაკვეთის H წერტილის (ორთოცენტრის) კოორდინატები სამკუთხედის წვეროების $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ კოორდინატების საშუალებით.

სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილს ზოგჯერ სამკუთხედის ცენტროიდსაც უწოდებენ.

ცხადია, რომ ნებისმიერი ABC სამკუთხედის ცენტროიდის (მედიანების გადაკვეთის წერტილის) G წერტილისათვის სამართლიანია ვექტორული ტოლობა:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

ამიტომ G წერტილის g აფიქსი ABC სამკუთხედის A, B, C წვეროების a, b, c აფიქსების საშუალებით გამოითვლება ფორმულით:

$$g = \frac{1}{3} (a + b + c).$$

ვთქვათ, AH, BH, CH სიმაღლეები სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირს გადაიკვეთს A_1, B_1, C_1 წერტილებში. ვთქვათ, ამ წრეწირის განტოლებაა

$$z\bar{z} = 1.$$

მაშინ, ადვილი საჩვენებელია, რომ A_1, B_1, C_1 წერტილების a_1, b_1, c_1 აფიქსები გამოითვლება ფორმულებით:

$$a_1 = -\frac{bc}{a}, \quad b_1 = -\frac{ac}{b}, \quad c_1 = -\frac{ab}{c}.$$

თუ დავწერთ AA_1 და BB_1 წრფეების განტოლებებს გვექნება:

$$\begin{cases} z + aa_1\bar{z} = a + a_1 \\ z + bb_1\bar{z} = b + b_1 \end{cases}$$

თუ ამ განტოლებებიდან წევრ-წევრად გამოვრიცხავთ ცვლადებს, მივიღებთ H წერტილის $\bar{h}$ აფიქსს:

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{(a+a_1)-(b+b_1)}{aa_1-bb_1} = \frac{\left(a-\frac{bc}{a}\right)-\left(b-\frac{ac}{b}\right)}{-bc+ac} = \frac{a^2b-b^2c-ab^2+a^2c}{abc(a-b)} = \\ &= \frac{ab(a-b)+c(a-b)(a+b)}{abc(a-b)} = \frac{(a-b)(ab+bc+ac)}{abc(a-b)} = \\ &= \frac{ab+bc+ac}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}. \end{aligned}$$

საიდანაც,

$$h = a + b + c.$$

რადგან სამკუთხედის ორთოცენტრის აბსცისის გამოსათვლელ ფორმულაში სამკუთხედის წვეროს კოორდინატები შედიან სიმეტრიულად, ეს ნიშნავს, რომ ნაპოვნ H წერტილზე გადის სამკუთხედის მესამე სიმაღლეც. შევნიშნოთ, რომ $h = a + b + c$ ტოლობას

ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა კოორდინატა სისტემის სათავე ემთხვევა ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრს.

ამოცანა 5. ტოლფერდა მართკუთხა ABC სამკუთხედის A და B წვეროების პროექციები რაიმე l წრფის პარალელურად, C მართი კუთხის წვეროზე გამავალ რაიმე წრფეზე არის შესაბამისად A_1 და B_1 წერტილები. დაამტკიცეთ, რომ $CA_1^2 + CB_1^2$ ჯამი დამოკიდებულია მხოლოდ ამ ორ წრფეს შორის კუთხეზე და AB ჰიპოტენუზის სიგრძეზე.

პროექციის ღერძი ჩვთვალოთ ნამდვილ Ox ღერძად, ხოლო C წვერო-კოორდინატა O სათავედ, l წრფე გავავლოთ O და $P(p)$ წერტილებზე $|p|=1$. ამ წრფის განტოლებას აქვს სახე:

$$\bar{p}z = p\bar{z}.$$

თუ A წვეროს აფიქსია $a, |a|=r$, მაშინ B წვეროს შეესაბამება ai , (ნახ. 14). AA_1 და BB_1 წრფეებს შეესაბამებათ შესაბამისად განტოლებები:

$$\bar{p}(z-a) = p(\bar{z}-\bar{a}) \text{ და } \bar{p}(z-ai) = p(\bar{z}+i\bar{a}).$$

Ox ღერზე მდებარე პროექციის წერტილებისათვის $z=\bar{z}$. თუ ამას გავითვალისწინებთ AA_1 და BB_1 წრფეების განტოლებებში, მივიღებთ A_1 და B_1 წერტილების აფიქსებს:

$$a_1 = \frac{\bar{p}a - p\bar{a}}{\bar{p} - p}, a_1 = \frac{i \cdot (\bar{p}a + p\bar{a})}{\bar{p} - p}.$$

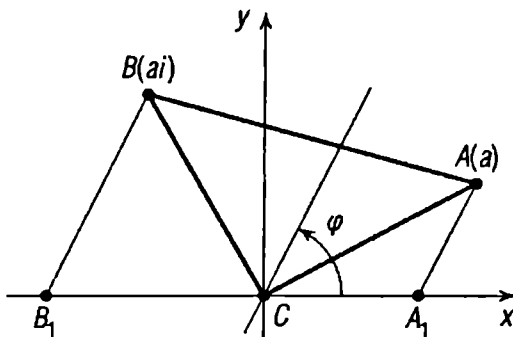
გამოვთვალოთ,

$$CA_1^2 + CB_1^2 = a_1 \overline{a_1} + b_1 \overline{b_1} = a_1^2 + b_1^2 = \frac{(\overline{pa} - p\overline{a})^2 - (\overline{pa} - p\overline{a})^2}{(\overline{p} - p)^2},$$

რადგან $|p|=1$, ამიტომ

$$p = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

ხოლო $\overline{p} = \cos \varphi - i \sin \varphi$, სადაც φ ნახაზზე გამოსახული l წრფესა და Ox ღერძს შორის ორიენტირებული კუთხეა $\varphi = \arg p$.



ნახ. 14.

თუ გავითვალისწინებთ ამ ფაქტებს, მივიღებთ:

$$CA_1^2 + CB_1^2 = \frac{(\overline{pa} - p\overline{a})^2 - (\overline{pa} - p\overline{a})^2}{(\overline{p} - p)^2} = \frac{-4p\overline{p}a\overline{a}}{(-2i \sin \varphi)^2} = \frac{r^2}{\sin^2 \varphi},$$

რადგან $p\overline{p}=1$, ამიტომ საბოლოოდ გვაქვს:

$$CA_1^2 + CB_1^2 = \frac{r^2}{\sin^2 \varphi}.$$

ამოცანა 6. ABC სამკუთხედის ცენტროიდიდან გავლებულია ნებისმიერი წრფე, რომელიც AB გვერდს არ კვეთს. დაამტკიცეთ, რომ C წვეროდან ამ წრფემდე

მანძილი ტოლია ამ წვეროდან A და B წვეროებამდე მანძილების ჯამის.

ABC სამკუთხედის ცენტროიდი ჩავთვალოთ სიბრტყის ნულოვან წერტილად, მაშინ

$$a+b+c=0.$$

თუ A, B, C წვეროების ორთოგონალურ პროექციებს $\bar{p}z + pz = 0$, $|p|=1$ წრფეზე წარმოადგენს შესაბამისად A_1, B_1, C_1 წერტილები, მაშინ უნდა დავამტკიცოთ, რომ

$$CC_1 = AA_1 + BB_1.$$

წერტილიდან წრფემდე მანძილის გამოსათვლელი ფორმულის გამოყენების შემდეგ ეს ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$|\bar{p}c + p\bar{c}| = |\bar{p}a + p\bar{a}| + |\bar{p}b + p\bar{b}|.$$

რადგან $c = -a - b$, ამიტომ უნდა დავრწმუნდეთ იმაში, რომ

$$|(\bar{p}a + p\bar{a}) + (\bar{p}b + p\bar{b})| = |\bar{p}a + p\bar{a}| + |\bar{p}b + p\bar{b}|.$$

რადგან A და B წერტილები არჩეული $\bar{p}z + pz = 0$ წრფის მიმართ ერთ ნახევარსიბრტყეშია, ამიტომ ნამდვილ $\bar{p}a + p\bar{a}$ და $\bar{p}b + p\bar{b}$ რიცხვებს ერთნაირი ნიშნები აქვთ, რაც იმას ნიშნავს, რომ დასამტკიცებელი ტოლობა სამართლიანია.

§1.15. პითაგორას თეორემა

პითაგორას თეორემა. მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზის კვადრატი კათეტების კვადრატების ჯამის ტოლია.

დამტკიცება. კოორდინატთა სისტემა ისე შევარჩიოთ, რომ მართკუთხა ABC სამკუთხედის C წვერო დაემთხვეს კოორდინატთა სათავეს, ხოლო B წერტილი იყოს ნამდვილ Ox ღერძზე, ხოლო A წერტილი წარმოსახვით Oy ღერძზე.

ვთქვათ, A წერტილის აფიქსია a , ხოლო B წერტილის აფიქსია b . ცხადია, რომ A წერტილის აფიქსი სუფთა წარმოსახვითი რიცხვია, ხოლო B წერტილის აფიქსი ნამდვილი რიცხვია.

მაშინ,

$$AC^2 = a \cdot \bar{a} = ai \cdot (-ai) = a^2,$$

$$BC^2 = b \cdot \bar{b} = b \cdot b = b^2,$$

$$AB^2 = a^2 + b^2 = AC^2 + BC^2.$$

საბოლოოდ გვაქვს: $AB^2 = AC^2 + BC^2$

თეორემა დამტკიცებულია.

§1.16. კოსინუსების თეორემა

კოსინუსების თეორემა. სამკუთხედში ნებისმიერი გვერდის კვადრატი უდრის დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამს გამოკლებული ამ გვერდებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსის გაორკეცვული ნამრავლი.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ABC სამკუთხედი. მისი წვეროთა აფიქსებია შესაბამისად a, b, c . თეორემა დავამტკიცოთ BC გვერდისათვის.

გამოვთვალოთ ორიენტირებული $\alpha = \hat{BAC}$ კუთხე. ორ

$\overline{AB}$ და $\overline{AC}$ ვექტორებს შორის კუთხის გამოსათვლელი ფორმულიდან (§1.35) გვაქვს:

$$\cos \alpha = \frac{(c-a)(\overline{b}-\overline{a}) + (\overline{c}-\overline{a})(b-a)}{2|c-a| \cdot |b-a|}.$$

გამოვთვალოთ,

$$BC^2 = (b-c)(\overline{b}-\overline{c}) = b\overline{b} - b\overline{c} - c\overline{b} + c\overline{c},$$

$$AC^2 = (c-a)(\overline{c}-\overline{a}) = c\overline{c} - c\overline{a} - a\overline{c} + a\overline{a},$$

$$AB^2 = (b-a)(\overline{b}-\overline{a}) = b\overline{b} - b\overline{a} - a\overline{b} + a\overline{a},$$

$$\begin{aligned} 2AB \cdot AC \cos \alpha &= (c-a)(\overline{b}-\overline{a}) + (\overline{c}-\overline{a})(b-a) = \\ &= c\overline{b} - c\overline{a} - a\overline{b} + a\overline{a} + b\overline{c} - a\overline{c} - b\overline{a} + a\overline{a} = \\ &= c\overline{b} - c\overline{a} - a\overline{b} + b\overline{c} - a\overline{c} - b\overline{a} + 2a\overline{a}. \end{aligned}$$

გამოვთვალოთ

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \alpha &= \\ &= b\overline{b} - b\overline{a} - a\overline{b} + a\overline{a} + c\overline{c} - c\overline{a} - a\overline{c} + a\overline{a} - c\overline{b} + c\overline{a} + \\ &+ a\overline{b} - b\overline{c} + a\overline{c} + b\overline{a} - 2a\overline{a} = b\overline{b} - b\overline{c} - c\overline{b} + c\overline{c} = BC^2 \end{aligned}$$

ე.ი.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \alpha.$$

რადგან BC გვერდის არჩევას რაიმე უპირატესობა არ გააჩნია სხვა გვერდების მიმართ, ამიტომ თეორემა სამართლიანია სამკუთხედის სხვა გვერდებისთვისაც.

თეორემა დამტკიცებულია.

კოსინუსების თეორემიდან როგორც შედეგი შესაძლებელია პითაგორას თეორემის მიღება, როცა $\alpha = \hat{BAC}$ კუთხე მართია.

§1.17. სინუსების თეორემა

სინუსების თეორემა. სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები მოპირდაპირე კუთხეების სინუსების პროპორციულია და ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის დიამეტრის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ, ABC მოცემული სამკუთხედია, რომლის წვეროთა აფიქსებია შესაბამისად a, b, c . რადგან α კუთხე ორიენტირებულია, ხოლო

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha,$$

ამიტომ რადგან სამკუთხედის გვერდის სიგრძე და სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი დადებითი რიცხვებით გამოისახება, ამიტომ ზოგად შემთხვევაში უნდა გამოვთვალოთ არა $\sin \alpha$, არამედ $|\sin \alpha|$.

ე.ი. უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$$\frac{|AB|}{|\sin C|} = \frac{|AC|}{|\sin B|} = \frac{|BC|}{|\sin A|} = 2R.$$

ვთქვათ, ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი 1 -ის ტოლია, მაშინ ამ წრეწირის განტოლებაა $z\bar{z}=1$. რადგან $A(a), B(b), C(c)$ ამ წრეწირის წერტილებია, ამიტომ

$$\bar{a} = \frac{1}{a}, \bar{b} = \frac{1}{b}, \bar{c} = \frac{1}{c}. \quad (1)$$

მეორეს მხრივ, კუთხის სინუსის გამოთვლის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\sin A = \sin \alpha = \frac{(c-a)(\bar{b}-\bar{a}) - (\bar{c}-\bar{a})(b-a)}{2|c-a| \cdot |b-a|}.$$

ამ ფორმულაში გავითვალისწინოთ (1) ფორმულები. გვექნება:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{(c-a)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) - \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)(b-a)}{2|c-a| \cdot |b-a|} = \frac{(c-a)(a-b) - (a-c)(b-a)}{2|c-a| \cdot |b-a|} = \\ &= \frac{(c-a)(a-b) - (c-a)(a-b)}{2|c-a| \cdot |b-a|} = \frac{(c-a)(b-a)(b-c)}{2abc|c-a| \cdot |b-a|}. \end{aligned}$$

აქედან მარტივად მივიღებთ:

$$|\sin A| = \left| \frac{(c-a)(b-a)(b-c)}{2abc|c-a| \cdot |b-a|} \right| = \frac{|c-a| \cdot |b-a| \cdot |b-c|}{2 \cdot |a| \cdot |b| \cdot |c| \cdot |c-a| \cdot |b-a|}.$$

რადგან $A(a), B(b), C(c)$ ერთეულოვანი წრეწირის წერტილებია, ამიტომ $|a| = |b| = |c| = 1$, ხოლო $|BC| = |b-c|$, ამიტომ გვაქვს,

$$|\sin A| = \frac{|b-c|}{2} = \frac{|BC|}{2}.$$

საიდანაც,

$$\frac{|BC|}{|\sin A|} = 2 = 2R, \quad (R=1).$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$\frac{|AB|}{|\sin C|} = 2R, \quad \frac{|AC|}{|\sin B|} = 2R.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

**§1.18. წრეწირის განტოლება კომპლექსურ
სიბრტყეზე. ოთხი წერტილის ორმაგი
ფარდობა**

წრეწირი ცენტრით z_0 წერტილში და r რადიუსით წარმოადგენს z წერტილთა სიმრავლეს, რომელთათვისაც

$$|z - z_0| = r \Rightarrow (z - z_0)(\overline{z} - \overline{z_0}) = r^2. \quad (\text{ნახ.6}).$$

ამრიგად, წრეწირის განტოლებას აქვს სახე:

$$z\overline{z} - \overline{z_0}z - z_0\overline{z} + (z_0\overline{z_0} - r^2) = 0,$$

ანუ

$$azz + bz + \overline{bz} + c = 0, \operatorname{Im} a = \operatorname{Im} c = 0. \quad (3)$$

ჭეშმარიტია შებრუნებული დასკვნაც, კერძოდ, (3) სახის ყოველი განტოლება გამოსახავს წრეწირს, რომლის z_0 ცენტრი და r რადიუსი გამოითვლება ტოლობებით:

$$\overline{z_0} = \frac{b}{a}, \quad z_0\overline{z_0} - r^2 = \frac{c}{a}.$$

თუ (3) განტოლებაში ჩავთვლით, რომ $a = 0$, მაშინ მივიღებთ $bz + \overline{bz} + c = 0$ წრფის განტოლებას.

წრეწირი, რომელიც გადის სამ z_1, z_2, z_3 წერტილზე შეიძლება აღვწეროთ როგორც ისეთი z წერტილთა სიმრავლე, რომ

$$\delta_{(z_3, \overline{z_1})(z_3, \overline{z_2})} = \delta_{(z_1, \overline{z_2})(z_1, \overline{z_3})} = 0 \pmod{\pi}$$

სადაც წრფეები და კუთხეები მიმართულია (ნახ.15).
ანუ

$$\operatorname{Arg} \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} - \operatorname{Arg} \frac{z_1 - z}{z_2 - z} = 0 \pmod{\pi}.$$

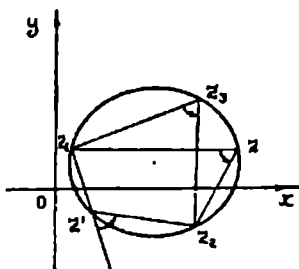
მაგრამ ეს ორმაგი ტოლობა ტოლფასია პირობისა:

$$\operatorname{Im}[W(z_1, z_2, z_3, z)] = \operatorname{Im} \frac{V(z_1, z_2, z_3)}{V(z_1, z_2, z)} = \operatorname{Im} \left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} : \frac{z_1 - z}{z_2 - z} \right) = 0, \quad (4)$$

სადაც $W(z_1, z_2, z_3, z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} : \frac{z_1 - z}{z_2 - z}$ გამოსახულებას ეწო-

დება ოთხი z_1, z_2, z_3, z წერტილის რთული, ანუ ორმაგი ფარდობა. ამრიგად, პირობა იმისა, რომ z_1, z_2, z_3, z_4 წერტილები ერთი წრეწირის (წრფის) წერტილები იყოს მდომარეობს შემდეგში:

$$\operatorname{Im}[W(z_1, z_2, z_3, z_4)] = \operatorname{Im} \left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} \right) = 0.$$



ნახ. 15.

წრეწირის (4) განტოლება, რომელიც სამ z_1, z_2, z_3 წერტილზე გადის შეიძლება ჩავწეროთ სახით:

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z}{z_2 - z} = \frac{\overline{z_1 - z_3}}{\overline{z_2 - z_3}} : \frac{\overline{z_1 - z}}{\overline{z_2 - z}}.$$

მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ:

$$A\bar{z} + B\bar{z} - \bar{B}z + C = 0, \quad \operatorname{Re} A = \operatorname{Re} C = 0,$$

სადაც

$$A = (z_1 - z_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) - (z_2 - z_3)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3);$$

$$B = \bar{z}_2(z_2 - z_3)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) - \bar{z}_1(z_1 - z_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3);$$

$$C = \bar{z}_1 z_2 (z_1 - z_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) - \bar{z}_1 \bar{z}_2 (z_2 - z_3)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3)$$

წრეწირს ერთეულოვანი ეწოდება, თუ მისი ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია, ხოლო რადიუსია 1. ერთეულოვანი წრეწირის განტოლებაა:

$$z \cdot \bar{z} = 1.$$

კოორდინატთა სათავეზე გამავალი წრფე $z = \kappa \cdot \bar{z}$ გადის ერთეულოვანი წრეწირის წერტილებზე, რომელთა აფიქსებია $\sqrt{\kappa}$. $\sqrt{\kappa}$ -ს გააჩნია ორი მნიშვნელობა. ეს მნიშვნელობები წარმოადგენენ ერთეულოვანი წრეწირის დიამეტრის ბოლოებს.

ანალიზურ გეომეტრიაში Oy ღერძის არაპარალელური წრფის κ კუთხური კოეფიციენტი ეწოდება Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხის ტანგენსს. თუ Oy ღერძის არაპარალელური წრფის კომპლექსური კუთხური კოეფიციენტი ტოლია

$$\kappa = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

მაშინ ამ წრფის Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხე იქნება $\frac{\varphi}{2}$. მართლაც, წრფე,

რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე და გააჩნია κ კუთხური კოეფიციენტი გადის წერტილებზე, რომელთა აფიქსებია $\sqrt{\kappa}$.

ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ ორ (x_1, y_1) და (x_2, y_2) წერტილზე გავლებული წრფის კუთხური კოეფიციენტი ტოლია

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (5)$$

ვიცით, რომ

$$x = \frac{1}{2}(\bar{z} + z), \quad y = \frac{i}{2}(\bar{z} - z)$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები (5) ტოლობაში და ჩავატაროთ გარდაქმნები. გვექნება:

$$k = \frac{\frac{i}{2}(\bar{z}_2 - z_2) - \frac{i}{2}(\bar{z}_1 - z_1)}{\frac{1}{2}(\bar{z}_2 + z_2) - \frac{1}{2}(\bar{z}_1 + z_1)} = i \cdot \frac{(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - (z_2 - z_1)}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - (z_2 - z_1)}.$$

რადგან,

$$z_2 - z_1 = \kappa(\bar{z}_2 - \bar{z}_1),$$

ამიტომ მივიღებთ:

$$k = i \cdot \frac{1 - \kappa}{1 + \kappa}.$$

ე.ი.

$$\frac{1 - \kappa}{1 + \kappa} = -i \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} k = -i \cdot k.$$

პირიქით,

$$\kappa = \frac{i - k}{i + k}.$$

თუ მოცემული გვაქვს ორი წრფის განტოლება კომპლექსური კუთხური კოეფიციენტით

$$z - z_1 = \kappa_1 (\bar{z} - \bar{z}_1), \quad |\kappa_1| = 1,$$

$$z - z_2 = \kappa_2 (\bar{z} - \bar{z}_2), \quad |\kappa_2| = 1,$$

მაშინ ამ ორ წრფეს შორის კუთხე გამოითვლება ფორმულით:

$$\operatorname{Arg} \frac{\sqrt{\kappa_1}}{\sqrt{\kappa_2}} (\bmod \pi).$$

კერძოდ, $z = \kappa_1 \bar{z}$ და $z = \kappa_2 \bar{z}$ ორი წრფე, რომლებიც კოორდინატთა სათავეზე გადის და მოცემული წრფეების პარალელურია, ეკუთვნიან წერტილები, რომელთა აფიქსებია $\sqrt{\kappa_1}$ და $\sqrt{\kappa_2}$, ამიტომ ამ ორი წრფეს შორის კუთხე ტოლია:

$$\operatorname{Arg} \sqrt{\kappa_1} - \operatorname{Arg} \sqrt{\kappa_2} = \operatorname{Arg} \frac{\sqrt{\kappa_1}}{\sqrt{\kappa_2}} (\bmod \pi).$$

თუ წრფე მოცემულია თვითშეუღლებული განტოლებით

$$Az + \overline{Az} + C = 0, \quad \operatorname{Im} C = 0$$

მაშინ z_0 წერტილიდან ამ წრფემდე d მანძილი გამოითვლება ფორმულით:

$$d = \frac{|Az_0 + \overline{Az_0} + C|}{2|A|}.$$

მართლაც, წრფის განტოლება, რომელიც გადის z_0 წერტილზე და მოცემული წრფის მართობულია, აქვს სახე:

$$z - z_0 = \frac{A}{A}(\bar{z} - \bar{z}_0)$$

ანუ,

$$Az - \overline{Az} - Az_0 + \overline{Az_0} = 0,$$

სისტემიდან:

$$\begin{cases} Az + \overline{Az} + C = 0 \\ Az - \overline{Az} - Az_0 + \overline{Az_0} = 0 \end{cases}$$

ვიპოვით z_0 წერტილის გეგმილს მოცემულ წრეზე

$$z' = \frac{Az_0 - \overline{Az_0} - C}{2A}.$$

საიდანაც,

$$z - z' = \frac{Az_0 - \overline{Az_0} - C}{2A}.$$

ცხადია, რომ

$$d = |z - z'| = \frac{|Az_0 - \overline{Az_0} - C|}{2|A|}.$$

თუ წრე მოცემულია თვითშეუღლებული განტოლებით $Az + \overline{Az} + C = 0$, $\text{Im} C = 0$, მაშინ ყველა z წერტილისათვის, რომლებიც ამ წრის ერთ მხარეს მდებარეობენ $Az + \overline{Az} + C > 0$, (დადებითი ნახევარსიბრტყე), ხოლო ყველა ისეთი z წერტილებისათვის, რომლებიც ამ წრის მეორე მხარეს მდებარეობენ (უარყოფითი ნახევარსიბრტყე)

$$Az + \overline{Az} + C < 0.$$

§1.19. $\bar{z}z + az + b\bar{z} + c = 0$ განტოლების გეომეტრიული აზრი

წრეწირი, რომლის ცენტრია $S(s)$ და რადიუსია R , ჩაიწერება განტოლებით:

$$(z-s)(\bar{z}-\bar{s})=R^2 \quad (1)$$

სადაც z -წრეწირის ცვლადი წერტილის აფიქსია.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს განტოლება

$$\bar{z}z + az + b\bar{z} + c = 0 \quad (2)$$

სადაც, a, b და c კომპლექსური რიცხვებია და მათზე წინასწარ არანაირი პირობა დადებული არ არის. მოთხოვნილია დავადგინოთ წერტილთა სიმრავლე, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ (2) განტოლებას.

(2) განტოლება მოსახერხებელია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$(z+b)(\bar{z}+a) = ab - c \quad (3)$$

განვიხილოთ ყველა შესაძლო შემთხვევა, რომელიც შეიძლება მიიღოს a, b და c კომპლექსურმა რიცხვებმა.

1. შევადაროთ (3) განტოლება წრეწირის (1) განტოლებას. ადვილი შესამჩნევია, რომ (3) განტოლება და ცხადია, რომ (2) განტოლებაც წარმოადგენს წრეწირს იმ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $a = \bar{b}$ და $ab - c$ ნამდვილი რიცხვია. ამ შემთხვევაში

$$ab - c = a\bar{a} - c,$$

რაც ნიშნავს, რომ c -ნამდვილი რიცხვი უნდა იყოს.

ამრიგად, განტოლება

$$z\bar{z} + a\bar{z} + b\bar{z} + c = 0, c = \bar{c}, b\bar{b} > c, \quad (4)$$

წრეწირის განტოლებაა, რომლის ცენტრია $s = -b$ და რადიუსია $R = \sqrt{b\bar{b} - c}$.

2. როცა $a = \bar{b}$ და $c = ab$, მაშინ (3) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$(z+b)(\bar{z}+\bar{b})=0$$

და მას აკმაყოფილებს ერთადერთი $s = -b$ წერტილი.

ანალოგიურ შემთხვევასთან გვაქვს საქმე, მაშინაც როცა (3) განტოლებაში $a = b = c = 0$. მაშინ, $z\bar{z} = 0$ და (3) განტოლებას აკმაყოფილებს ერთადერთი $z = 0$ წერტილი.

ასეთ შემთხვევებში, ანალოგიის გამოყენებით ამბობენ, რომ $(z+b)(\bar{z}+\bar{b})=0$ განტოლებით მოცემულია ნულოვანი რადიუსის წრეწირი, რომლის ცენტრია $s = -b$ წერტილი.

3. თუ $a = \bar{b}, c = \bar{c}$, მაგრამ $b\bar{b} < c$, მაშინ $\sqrt{b\bar{b} - c}$ სუფთად წარმოსახვითი კომპლექსური რიცხვია. ჩავთვალოთ, რომ $\sqrt{b\bar{b} - c} = R \cdot i$, მაშინ (3) განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ ასე:

$$(z+b)(\bar{z}+\bar{b}) = -R^2 \quad (5)$$

(5) განტოლებას არ აკმაყოფილებს არცერთი წერტილი, რადგან განტოლების მარცხენა ნაწილი არაუარყოფითია, ხოლო მარჯვენა ნაწილი უარყოფითია. z -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის ამ განტოლებით მო-

ცემულია წრეწირი წარმოსახვითი iR რადიუსით და ნამდვილი ცენტრით $s = -b$ აფიქსით.

4. როცა $a = \bar{b}$, მაგრამ $c \neq \bar{c}$, მაშინ (3) განტოლება წინააღმდეგობრივია: მისი მარცხენა ნაწილი ნამდვილი რიცხვია, მარჯვენა — არა. ამ შემთხვევაში ის არ გამოსახავს არანაირ გეომეტრიულ შინაარსს (წარმოსახვითსაც კი).

5. დაგვრჩა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $a \neq \bar{b}$. განვიხილოთ (2) განტოლების შეუღლებული განტოლება, რომელსაც აქვს სახე:

$$\bar{z}z + \bar{a}z + \bar{b}z + \bar{c} = 0.$$

(2) განტოლებას წევრ-წევრად გამოვაკლოთ მისი შეუღლებული განტოლება.

მივიღებთ:

$$(a - \bar{b})z + (b - \bar{a})\bar{z} + (c - \bar{c}) = 0.$$

საიდანაც,

$$\bar{z} = \frac{(a - \bar{b})z + (c - \bar{c})}{\overline{a - b}}.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (2) განტოლებაში და დავიყვანოთ სახეზე:

$$(a - \bar{b})z^2 + (a\bar{a} - b\bar{b} + c - \bar{c})z + \bar{a}c - b\bar{c} = 0. \quad (6)$$

როცა $a \neq \bar{b}$, მაშინ (2) და (6) განტოლებები ტოლფასია.

იმის მიუხედავად, ნულის ტოლია თუ ნულზე მეტია (6) კვადრატული განტოლების

$$D = (a\bar{a} - b\bar{b} + c - \bar{c})^2 - 4(a - \bar{b})(\bar{a}c - b\bar{c})$$

დისკრიმინანტი, ის განსაზღვრავს ორ ერთმანეთისაგან განსხვავებულ ნამდვილ წერტილს, როცა $D > 0$, ან ორ წერილს, რომლებიც ერთმანეთს ემთხვევა, როცა $D = 0$. ამ შემთხვევაში წერტილის აფიქსია:

$$z = \frac{a\bar{a} - b\bar{b} + c - \bar{c}}{2(\bar{b} - a)}.$$

კერძოდ, როცა $c = ab$, ისევე, როგორც (3), (6) განტოლებაც გვაძლევს

$$z_1 = -b \text{ და } z_2 = -\bar{a}$$

წერტილთა წყვილებს.

ამრიგად, (2) განტოლებით ჩაიწერება ან წრეწირი (ნამდვილი ან წარმოსახვითი, ან ნულოვანი რადიუსის) ან ორი წერტილი (რომლებიც ან ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან, ან ერთმანეთს ემთხვევა). ან წერტილთა ცარიელი სიმრავლე.

§1.20. სამ წერტილზე გამავალი წრეწირის განტოლება

თუ

$$\bar{z}z + \bar{d}z + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \gamma = 0, \gamma = \bar{\gamma}$$

წრეწირი გადის სამ A, B, C წერტილზე, რომელთა აფიქსებია შესაბამისად a, b და c , მაშინ

$$a\bar{a} + \bar{\alpha}a + \alpha\bar{a} + \gamma = 0$$

$$b\bar{b} + \bar{\alpha}b + \alpha\bar{b} + \gamma = 0$$

$$c\bar{c} + \bar{\alpha}c + \alpha\bar{c} + \gamma = 0$$

რადგან წრეწირი გადის მოცემულ სამ წერტილზე, მაშინ ცხადია, რომ ეს წერტილები არაკოლინეარულია. ამიტომ ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} 1 \cdot \bar{z}\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \gamma = 0 \\ 1 \cdot \bar{a}\bar{a} + \bar{\alpha}a + \alpha\bar{a} + \gamma = 0 \\ 1 \cdot \bar{b}\bar{b} + \bar{\alpha}b + \alpha\bar{b} + \gamma = 0 \\ 1 \cdot \bar{c}\bar{c} + \bar{\alpha}c + \alpha\bar{c} + \gamma = 0 \end{cases}$$

$1, \bar{\alpha}, \alpha$ და γ -ს მიმართ აქვს არანულოვანი ამონახსენი. ამიტომ მისი დეტერმინანტი ნულის ტოლია:

$$\begin{vmatrix} \bar{z}\bar{z} & z & \bar{z} & 1 \\ \bar{a}\bar{a} & a & \bar{a} & 1 \\ \bar{b}\bar{b} & b & \bar{b} & 1 \\ \bar{c}\bar{c} & c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

ეს განტოლება წარმოადგენს სამ წერტილზე გამავალი წრეწირის განტოლებას. ასევე, სამ წერტილზე გამავალ წრეწირის განტოლებას წარმოადგენს წინა პარაგრაფის (3) განტოლებაც გარკვეული შეზღუდვებით.

§1.21. ორთოგონალური წრეწირები

ორ გადამკვეთ წრეწირს ეწოდება ორთოგონალური, თუ პერპენდიკულარულია წრეწირების მხეხვები, რომელიც გავლებულია ამ წრეწირების საერთო წერტილებში.

ცხადია, რომ წრეწირების საერთო წერტილზე გავლებული ერთი ორთოგონალური წრეწირის მხეზი გადის მეორე წრეწირის ცენტრზე.

ადვილი საჩვენებელია, რომ (A, R) და (B, r) წრეწირები ორთოგონალურობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$AB^2 = R^2 + r^2 \quad (1)$$

ანუ,

$$(a-b)(\bar{a}-\bar{b}) = R^2 + r^2 \quad (2)$$

თუ წრეწირები მოცემულია განტოლებებით:

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \alpha_0 = 0, \alpha = \bar{\alpha}_0$$

და

$$z\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \beta_0 = 0, \beta = \bar{\beta}_0$$

$$\text{მაშინ } a = -\alpha, b = -\beta, R^2 = \alpha\bar{\alpha} - \alpha_0, r^2 = \beta\bar{\beta} - \beta_0,$$

ამიტომ წრეწირების ორთოგონალურობის (2) კრიტერიუმში ჩაიწერება ასე:

$$\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = \alpha_0 + \beta_0 \quad (3)$$

ამოცანა 1. იპოვეთ სიბრტყის წერტილთა სიმრავლე, რომელის ყოველი წერტილიდან მოცემულ A და B წერტილამდე მანძილების ფარდობა მუდმივია.

ვთქვათ, $M(z)$ -სამიეხელი წერტილთა სიმრავლის ნებისმიერი წერტილია, ხოლო A და B წერტილებს შეესაბამებათ კომპლექსური რიცხვები 1 და -1 .

პირობის ძალით:

$$\frac{MA}{MB} = \lambda = \text{const},$$

ანუ,

$$MA^2 = \lambda^2 \cdot MB^2$$

გადავიდეთ წერტილების აფიქსებზე. მივიღებთ განტოლებას:

$$(z-1)(\bar{z}-1) = \lambda^2 (z+1)(\bar{z}+1),$$

რომელიც გარდაქმნის შემდეგ მიიღებს სახეს:

$$z\bar{z}(1-\lambda^2) + (z+\bar{z})(1+\lambda^2) = \lambda^2 - 1 \quad (4)$$

როცა $\lambda=1$, მივიღებთ:

$$z+\bar{z}=0$$

ეს წარმოსახვითი ღერძის განტოლებაა, რომელიც ჩვენს შემთხვევაში AB მონაკვეთის შუამართობს წარმოადგენს.

თუ $\lambda \neq 1$, მაშინ (4) განტოლება ჩავწეროთ ასეთი ფორმით:

$$z\bar{z} + \frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}(z+\bar{z}) + 1 = 0 \quad (5)$$

შევადაროთ ეს განტოლება

$$z\bar{z} + az + b\bar{z} + c = 0$$

განტოლებას.

მარტივად დავასკვნით, რომ (5) განტოლება წარმოადგენს წრეწირს ცენტრით $s = \frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}$ და რადიუსით

$$R = \sqrt{\alpha\beta - \gamma} = \left| \frac{2\lambda}{1-\lambda^2} \right|. \text{ რადგან } \lambda \text{ ნამდვილი რიცხვია,}$$

ამიტომ ნამდვილია s რიცხვიც.

რადგან, π_1 წრეწირის ცენტრია $A(a)$ წერტილი და გადის $D(1)$ წერტილზე, ამიტომ გვაქვს:

$$(z-a)(\bar{z}-\bar{a})=(1-a)(1-\bar{a}),$$

ანუ

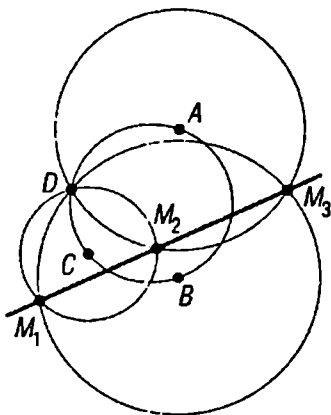
$$z\bar{z}-\bar{a}z-a\bar{z}=1-a-\bar{a}.$$

ანალოგიურად, π_2 და π_3 წრეწირების განტოლებები იქნება შესაბამისად

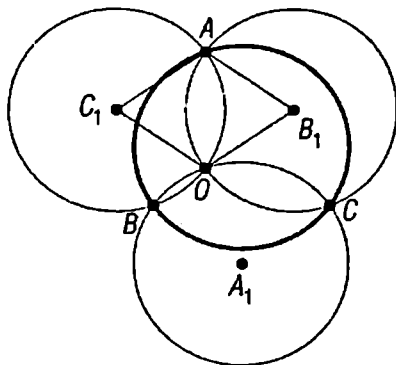
$$z\bar{z}-\bar{b}z-b\bar{z}=1-b-\bar{b}$$

და

$$z\bar{z}-\bar{c}z-c\bar{z}=1-c-\bar{c}.$$



ნახ. 17.



ნახ. 18.

ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა, რომელიც წრეწირების განტოლებებს შეიცავს

$$\begin{cases} z\bar{z}-\bar{a}z-a\bar{z}=1-a-\bar{a}. \\ z\bar{z}-\bar{b}z-b\bar{z}=1-b-\bar{b} \end{cases}$$

სისტემის განტოლებები გარდავქმნათ ასე:

$$\begin{cases} \bar{z}(z-a) = \bar{a}z + 1 - a - \bar{a}. \\ \bar{z}(z-b) = \bar{b}z + 1 - b - \bar{b} \end{cases}$$

თუ სისტემის პირველ განტოლებას წევრ-წევრად გავყოფთ მეორე განტოლებაზე, გვექნება:

$$\frac{z-a}{z-b} = \frac{\bar{a}z+1-a-\bar{a}}{\bar{b}z+1-b-\bar{b}}$$

თუ გამოვიყენებთ პროპორციის თვისებას და მსგავს წევრებს შევაერთეთ, მივიღებთ:

$$(\bar{a}-a)z^2 - [(a-b) + (\bar{a}-\bar{b}) + (\bar{a}b - a\bar{b})]z - (b-a) + (\bar{a}b - a\bar{b}) = 0$$

რადგან $A(a)$ და $B(b)$ წერტილები ერთეულოვანი წრეწირის წერტილებია, ამიტომ

$$\bar{a} = \frac{1}{a} \quad \text{და} \quad \bar{b} = \frac{1}{b}.$$

თუ ჩავსვამთ ამ მნიშვნელობებს ბოლო განტოლებაში და შევასრულებთ მარტივ გარდაქმნებს, მივიღებთ:

$$z^2 - [a+b-ab+1]z - (a+b-ab) = 0$$

ვიეტის თეორემის თანახმად კვადრატული განტოლების ფესვებია

$$1 \quad \text{და} \quad a+b-ab.$$

რადგან D წერტილის აფიქსია 1, ამიტომ მივიღეთ π_1 და π_2 წრეწირების მეორე საერთო M_3 წერტილის აფიქსი

$$m_3 = a+b-ab.$$

ანალოგიურად მივიღებთ:

$$m_2 = c+a-ac, \quad m_1 = b+c-bc.$$

საიდანაც შეგვიძლია მარტივად გამოვთვალოთ, რომ

$$\frac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1} = \frac{(a-b)(1-c)}{(a-c)(1-b)}.$$

ვაჩვენოთ, რომ ეს რიცხვი ნამდვილია, მართლაც

$$\frac{\overline{m_2 - m_1}}{\overline{m_3 - m_1}} = \frac{(\overline{a-b})(1-\overline{c})}{(\overline{a-c})(1-\overline{b})}.$$

რადგან, $\overline{a} = \frac{1}{a}$, $\overline{b} = \frac{1}{b}$ და $\overline{c} = \frac{1}{c}$, ამიტომ გვაქვს:

$$\frac{\overline{m_2 - m_1}}{\overline{m_3 - m_1}} = \frac{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)} = \frac{(b-a)(c-1)}{(c-a)(b-1)} = \frac{(a-b)(1-c)}{(a-c)(1-b)} = \frac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1}.$$

რაც ნიშნავს, რომ M_1, M_2, M_3 წერტილები კოლინეარულია.

ამოცანა 3. სამ ტოლ წრეწირს აქვს საერთო O წერტილი და მეორედ ეს წრეწირები გადაკვეთებიან A, B, C წერტილები, დაამტკიცეთ, რომ ABC შემოხაზული წრეწირი მოცემული წრეწირების ტოლია (ნახ. 18).

წრეწირების საერთო O წერტილი ჩავთვალოთ კოორდინატთა სათავედ. OBC, OCA, OAB წრეწირების ცენტრები აღვნიშნოთ შესაბამისად A_1, B_1, C_1 . $A_1B_1OC_1$ ოთხკუთხედი რომბია, $a = b_1 + c_1$ და ანალოგიურად

$$b = c_1 + b_1, c = a_1 + b_1.$$

რადგან მოცემული წრეწირები ტოლია, ამიტომ

$$|a_1| = |b_1| = |c_1| = 1.$$

ჩავთვალოთ, რომ $a_1 + b_1 + c_1 = s$. ცხადია, რომ A, B, C წერტილები

$$(z-s)(\overline{z}-\overline{s})=1$$

წრეწირის წერტილებია, რომლის ცენტრი s წერტილშია და რადიუსია 1.

შევნიშნოთ, რომ A_1, B_1, C_1 წერტილები ერთეულოვანი $z\bar{z}=1$ წრეწირის წერტილებია. s არის $A_1B_1C_1$ სამკუთხედის ორთოცენტრი. გარდა ამისა ABC სამკუთხედის ორთოცენტრი O წერტილს ემთხვევა.

მართლაც, თუ $H-ABC$ სამკუთხედის ორთოცენტრია, მაშინ როგორც ცნობილია

$$\overline{SH} = \overline{SA} + \overline{SB} + \overline{SC},$$

ცხადია,

$$\begin{aligned} h-s &= a-s+b-s+c-s = a+b+c-3s = \\ &= 2(a_1+b_1+c_1)-2s = -s, \end{aligned}$$

საიდანაც,

$$h=0.$$

ამოცანა 4. იპოვეთ წრეწირების ცენტრების სიმრავლე, რომლებიც მოცემული $z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \alpha_0 = 0$ წრეწირის მართობულია და გადიან მოცემულ $M(m)$ წერტილზე.

თუ $z\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \beta_0 = 0$ წრეწირს აქვს ამოცანის პირობით მოთხოვნილი თვისებები, მაშინ

$$\begin{cases} m\bar{m} + \bar{\beta}m + \beta\bar{m} + \beta_0 = 0 \\ \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = \alpha_0 + \beta_0 \end{cases}$$

თუ ამ სისტემიდან გამოვრიცხავთ β_0 -ს, მივიღებთ განტოლებას β -ს მიმართ.

$$(\bar{\beta} + \bar{m})\beta + (\alpha + m)\bar{\beta} + m\bar{m} - \alpha_0 = 0 \quad (1)$$

რომელიც განსაზღვრევა წრფეს. ამ წრფის ნორმალური ვექტორია $\alpha + m$. ეს ვექტორი ტოლია $\overline{AM}$ ვექტორის, სადაც $A(-\alpha)$ მოცემული წრეწირის ცენტრია. ცხადია, რომ (1) წრფე AM წრფის მართობულია.

§1.22. წრეწირის მკვეთი ორი წრფის გადაკვეთის საერთო წერტილის აფიქსის პოვნა

გამოვთვალოთ ერთეულოვანი $zz=1$ წრეწირის და AB და CD წრფეების გადაკვეთის წერტილის აფიქსი, თუ A, B, C, D წერტილები ამ წრეწირის წერტილებია.

ვთქვათ, A, B, C, D წერტილების აფიქსებია შესაბამისად a, b, c, d .

დავწეროთ AB ქორდის განტოლება. AB წრფის განტოლებას აქვს სახე:

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

საიდანაც, თუ გავშლით დეტერმინანტს, მივიღებთ:

$$\bar{a}z + a\bar{b} + b\bar{z} - \bar{a}b - \bar{b}z - a\bar{z} = 0.$$

რადგან A და B წერტილები ერთეულოვანი $zz=1$ წრეწირის წერტილებია, ამიტომ

$$\bar{a} = \frac{1}{a}, \bar{b} = \frac{1}{b}.$$

თუ $\bar{a}$ და $\bar{b}$ -ს შევცვლით მისი ტოლი გამოსახულებით მიღებულ განტოლებაში და შემდეგ გარდაქმნებით

მიღებულ გამოსახულებას გავყოფთ $b-a \neq 0$ -ზე, მივიღებთ:

$$z + ab\bar{z} = a + b.$$

ანალოგიურად, CD ქორდის განტოლებას ექნება სახე:

$$z + cd\bar{z} = c + d.$$

მაშასადამე, რომ ვიპოვოთ AB და CD წრფეების გადაკვეთის წერტილი, უნდა ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{cases} z + ab\bar{z} = a + b, \\ z + cd\bar{z} = c + d. \end{cases}$$

თუ სისტემის პირველ განტოლებას გამოვაკლებთ მეორე განტოლებას, მივიღებთ:

$$\bar{z} = \frac{(a+b) - (c+d)}{ab - cd}. \quad (1)$$

თუ $AB \perp CD$, მაშინ $ab = -cd$ და (1) დამოკიდებულება ჩაიწერება ასე:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{(a+b) - (c+d)}{ab - cd} = \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{ab} - \frac{c+d}{ab} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{ab} + \frac{c+d}{cd} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right). \end{aligned}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\bar{a} = \frac{1}{a}, \bar{b} = \frac{1}{b}, \bar{c} = \frac{1}{c}, \bar{d} = \frac{1}{d},$$

მაშინ გვექნება:

$$\bar{z} = \frac{1}{2} (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}).$$

ანუ,

$$z = \frac{1}{2}(a+b+c+d). \quad (2)$$

როცა $AB \perp CD$, მაშინ AB და CD წრფეთა გადაკვეთის წერტილის აფიქსის განსაზღვრა შესაძლებელია სამი A , B და C წერტილების აფიქსით.

მართლაც, AB და CD წრფეთა მართობულობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$cd = -ab.$$

საიდანაც,

$$d = -\frac{ab}{c}. \quad (3)$$

თუ მას ჩავსვამთ (2) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$z = \frac{1}{2}\left(a+b+c-\frac{ab}{c}\right). \quad (4)$$

§1.23. წრეწირის ორ სხვადასხვა წერტილში გავლებული მხეხების გადაკვეთის წერტილის აფიქსის პოვნა

ვიპოვოთ ერთეულოვანი $\bar{z}z=1$ წრეწირის ორ სხვადასხვა $A(a)$ და $B(b)$ წერტილებში გავლებული მხეხების გადაკვეთის წერტილის აფიქსი.

სამეხნი z წერტილის აფიქსი გამოითვლება $A(a)$ და $B(b)$ წერტილებში გავლებული მხეხების განტოლებების შემცველი სისტემის ამოხსნით. $A(a)$ და $B(b)$ წერტილებში გავლებული მხეხების განტოლებებისაგან შემდგარ სისტემას აქვს სახე:

$$\begin{cases} \bar{a}z + a\bar{z} = 2, \\ \bar{b}z + b\bar{z} = 2. \end{cases}$$

სისტემის პირველი განტოლება გავამრავლოთ b -ზე, მეორე განტოლება $-a$ და შემდეგ შევკრიბოთ წევრ-წევრად. გვექნება:

$$z = \frac{2ab}{a+b}.$$

ანუ,

$$\frac{1}{z} = \frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (4)$$

ანუ,

$$\bar{z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

§1.24. წერტილის წრფეზე ორთოგონალური გეგმილის აფიქსის გამოთვლა

გამოვთვალოთ $M(m)$ წერტილის ორთოგონალური გეგმილის აფიქსი $A(a)$ და $B(b)$ წერტილებზე გამავალ წრფეზე.

ვთქვათ, M წერტილის ორთოგონალური გეგმილი AB წრფეზე არის M' წერტილი, რომლის z აფიქსი სამიებელია. მაშინ სამი $A(a)$, $M'(z)$ და $B(b)$ წერტილი AB წრფის წერტილებია. ამიტომ ამ სამი წერტილის კოლინეარულობის პირობას აქვს სახე:

$$\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

რადგან MM' წრე AB წრფის მართობულია, ამიტომ მართობულია ვექტორები, რომელთა აფიქსებია $a-b$ და $m-z$. ე.ი. სრულდება პირობა:

$$(a-b)(\bar{m}-\bar{z}) + (\bar{a}-\bar{b})(m-z) = 0.$$

გავშალოთ (1) დეტერმინანტი და დავწეროთ სახით:

$$z(\bar{a}-\bar{b}) + a(\bar{b}-\bar{z}) + b(\bar{z}-\bar{a}) = 0.$$

ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{cases} z(\bar{a}-\bar{b}) + a(\bar{b}-\bar{z}) + b(\bar{z}-\bar{a}) = 0, \\ (a-b)(\bar{m}-\bar{z}) + (\bar{a}-\bar{b})(m-z) = 0. \end{cases}$$

სისტემის განტოლებებს მივცეთ ასეთი სახე:

$$\begin{cases} z(\bar{a}-\bar{b}) - \bar{z}(a-b) + a\bar{b} - b\bar{a} = 0, \\ z(\bar{a}-\bar{b}) + \bar{z}(a-b) - (a-b)\bar{m} - (\bar{a}-\bar{b})m = 0. \end{cases}$$

თუ შევკრებთ სისტემის პირველ და მეორე განტოლებებს წევრ-წევრად, მივიღებთ:

$$z = \frac{a(\bar{m}-\bar{b}) - b(\bar{m}-\bar{a})}{2(\bar{a}-\bar{b})} + \frac{m}{2} \quad (2)$$

გარდავქმნათ (2) ტოლობა იმ შემთხვევისათვის, როცა $A(a)$ და $B(b)$ წერტილები ერთეულოვანი $z\bar{z}=1$ წრეწირის წერტილებია.

ჩავსვათ (2) ტოლობაში $\bar{a} = \frac{1}{a}$ და $\bar{b} = \frac{1}{b}$, გვექნება:

$$\begin{aligned} z &= \frac{a\left(\bar{m} - \frac{1}{b}\right) - b\left(\bar{m} - \frac{1}{a}\right)}{2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} + \frac{m}{2} = \frac{a^2(b\bar{m} - 1) - b^2(a\bar{m} - 1)}{2(b - a)} + \frac{m}{2} = \\ &= \frac{a^2b\bar{m} - a^2 - ab^2\bar{m} + b^2}{2(b - a)} + \frac{m}{2} = \frac{(b - a)(a + b - ab\bar{m})}{2(b - a)} + \frac{m}{2} = \\ &= \frac{1}{2}(a + b + m - ab\bar{m}). \end{aligned}$$

თუ $m = 0$, მაშინ M წერტილის ორთოგონალური M' წერტილის z აფიქსი გამოითვლება ფორმულით:

$$z = \frac{1}{2}(a + b).$$

ამ ფორმულას ზოგჯერ ასეც ჩაწერენ:

$$z = \frac{\bar{a}b - a\bar{b}}{2(\bar{a} - \bar{b})}.$$

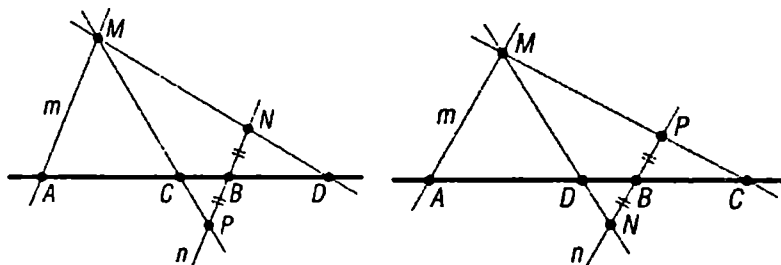
ეს ფორმულა მიიღება (2) ფორმულიდანაც, როცა $m = 0$.

§1.25. ჰარმონიული ოთხკუთხედი

ზოგად შემთხვევაში ოთხი A, B, C, D წერტილის ორ-
მაგ ფარდობას შეუძლია მიიღოს ერთმანეთისაგან
განსხვავებული ექვსი მნიშვნელობა, რომლებიც მიი-
ღება ორმაგ ფარდობაში შემავალი ყველა შესაძლო
გადანაცვლებების შემთხვევაში:

$$\omega, \frac{1}{\omega}, 1-\omega, 1-\frac{1}{\omega}, \frac{1}{1-\omega} \text{ და } 1-\frac{1}{1-\omega}$$

ამასთან, $\omega \neq 1$, რადგან ეს წერტილები ერთმანეთისაგან განსხვავებულია.



ნახ. 19.

როცა $\omega = -1$, მაშინ მიიღება ერთმანეთისაგან განსხვავებული სამი მნიშვნელობა:

$$-1, 2 \text{ და } \frac{1}{2}.$$

ამ შემთხვევაში A, B, C, D წერტილთა ოთხეულს უწოდებენ ჰარმონიულ ოთხეულს და მას გააჩნია ზოგიერთი განსაკუთრებული თვისება. რადგან $\omega = -1$ -ნამდვილი რიცხვია, ამიტომ A, B, C, D წერტილები ერთი წრფის ან ერთი წრეწირის წერტილებია.

ვთქვათ, A, B, C, D წერტილების აფიქსებია შესაბამისად a, b, c და d . დავუშვათ, A, B, C, D წერტილები კოლინეარულია და $(AB, CD) = -1$. ე.ი.

$$\frac{c-a}{b-c} : \frac{d-a}{b-d} = -1,$$

მაშინ,

$$\frac{c-a}{b-c} = -\frac{d-a}{b-d},$$

რაც ნიშნავს, რომ C და D წერტილები AB მონაკვეთს ყოფს სიდიდით ტოლ გარე და შიგა ფარდობით. ამბობენ, რომ C და D წყვილები ჰარმონიულად ყოფს A და B წყვილს.

რადგან $(CD, AB) = -1$, A და B წყვილი თავის მხრივ ჰარმონიულად ყოფს C და D წყვილს.

მოცემული სამი A, B, C წერტილებით მეოთხე D წერტილი, რომელიც C წერტილთან წყვილში ჰარმონიულად ყოფს A და B წყვილს, AB წრფეზე განისაზღვრება ცალსახად (ნახ. 19).

მოცემული A და B წერტილებიდან ნებისმიერად გავავლოთ პარალელური m და n წრფეები. ვთქვათ, ნებისმიერი წრფე, რომელიც გადის C წერტილზე ამ წრფეებს კვეთს შესაბამისად M და P წერტილებში. n წრფეზე გადავდოთ BP -ს ტოლი BN მონაკვეთი, მაშინ MN გადაკვეთს AB წრფეს სამიეზელ D წერტილში, თუ C წერტილი არ წარმოადგენს AB მონაკვეთის შუა-წერტილს.

უფრო საინტერესოა ის შემთხვევა, როცა A, B, C, D წერტილები არაკოლინეარულია, მაგრამ $(AB, CD) = -1$. ამ შემთხვევაში A, B, C, D წერტილები ერთი წრეწირის წერტილებია და მათგან არცერთი სამი წერტილი კოლინეარული არ არის.

წრეწირში ჩახაზულ $ABCD$ ოთხკუთხედს ეწოდება ჰარმონიული ოთხკუთხედი, თუ მისი A, B, C და D წვეროები ადგენენ წერტილთა ჰარმონიულ ოთხეულს.

რა განსაკუთრებული თვისებები აქვს ჰარმონიულ ოთხკუთხედს?

1. A, B, C, D წერტილების a, b, c, d აფიქსებისათვის გვაქვს:

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} = -1,$$

ანუ,

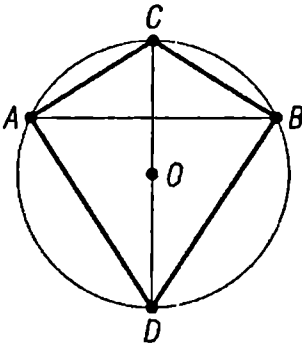
$$(a-c)(b-d) = -(b-c)(a-d) \quad (1)$$

საიდანაც,

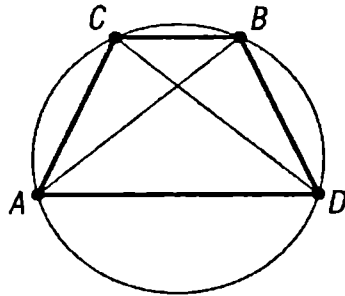
$$|a-c| \cdot |b-d| = |b-c| \cdot |a-d|.$$

ანუ,

$$|AC| \cdot |BD| = |BC| \cdot |AD|.$$



ნახ.20.



ნახ.21.

ამრიგად, ჰარმონიულ ოთხკუთხედში მოპირდაპირე გვერდების ნამრავლები ერთმანეთის ტოლია. პტოლემოსის თეორემის თანახმად, წრწირში ჩახაზულ $ABCD$ ოთხკუთხედში მოპირდაპირე გვერდების სიგრძეთა ნამრავლების ჯამი ტოლია მისი დიაგონალების ნამრავლისა.

ამიტომ $ABCD$ ჰარმონიულ ოთხკუთხედში

$$AC \cdot BD = BC \cdot AD = \frac{1}{2} AB \cdot CD \quad (2)$$

ჰარმონიული ოთხკუთხედის მაგალითია წრეწირში ჩახაზული დელტოიდი. დელტოიდი არის ამოზნექილი

ოთხკუთხედი, რომელიც მისი ერთი დიაგონალის სიმეტრიულია (ნახ. 20).

ჰარმონიულ ოთხკუთხედს წარმოადგენს აგრეთვე კვადრატი. ჰარმონიული ოთხკუთხედი შეიძლება იყოს ტრაპეციაც (ნახ. 21), რომელიც უნდა აკმაყოფილებდეს დამატებით პირობებს:

$$AC = BD, \quad AC^2 = AD \cdot BC.$$

ვთქვათ, ჰარმონიული $ABCD$ ოთხკუთხედის AB და CD დიაგონალები გადაიკვეთება M წერტილში. თუ ოთხკუთხედში ჩახაზულ წრეწირს ჩავთვლით ერთეულოვან წრეწირად, მივიღებთ:

$$\bar{m} = \frac{a+b-(c+d)}{ab-cd}$$

რადგან,

$$m = \bar{m} = \frac{\bar{a} + \bar{b} - (\bar{c} + \bar{d})}{\bar{a}\bar{b} - \bar{c}\bar{d}},$$

რადგან,

$$\bar{a} = \frac{1}{a}, \bar{b} = \frac{1}{b}, \bar{c} = \frac{1}{c}, \bar{d} = \frac{1}{d},$$

ამიტომ,

$$m = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)}{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{d}} = \frac{(a+b)cd - (c+d)ab}{cd - ab},$$

ანუ,

$$m = \frac{(c+d)ab - (a+b)cd}{ab - cd}.$$

გამოვთვალოთ $\lambda = \frac{a-m}{m-b}$ ფარდობა, რომლითაც M წერტილი AB დიაგონალს ყოფს. გვაქვს,

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{a-m}{m-b} = \frac{a - \frac{(c+d)ab - (a+b)cd}{ab-cd}}{\frac{(c+d)ab - (a+b)cd}{ab-cd} - b} = \\
&= \frac{a(ab-cd) - (c+d)ab + (a+b)cd}{(c+d)ab - (a+b)cd - b(ad-bc)} = \\
&= \frac{a^2b - acd - abc - abd + acd + bcd}{abc + abd - acd - bcd - ab^2 + bcd} = \frac{a^2b - abc - abd + bcd}{abc + abd - acd - ab^2} = \\
&= \frac{ab(a-c) - bd(a-c)}{ac(b-d) - ab(b-d)} = \frac{b(a-c)(a-d)}{a(b-d)(c-b)}.
\end{aligned}$$

ქ.ო.

$$\lambda = \frac{b(a-c)(a-d)}{a(b-d)(c-b)}.$$

რადგან,

$$\frac{a-d}{b-d} = -\frac{a-c}{b-c},$$

მაშინ,

$$\lambda = \frac{b(a-c)^2}{a(c-b)^2}.$$

გავითვალისწინოთ, რომ

$$AC^2 = (a-c)(\bar{a}-\bar{c}) = (a-c)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) \text{ და } BC^2 = -\frac{(a-c)^2}{bc},$$

მივიღებთ:

$$\lambda = \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AD^2}{BD^2}.$$

ამრიგად,

$$\frac{m-a}{b-m} = \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AD^2}{BD^2}.$$

ანალოგიურად,

$$\frac{m-c}{d-m} = \frac{BC^2}{BD^2} = \frac{AC^2}{AD^2}.$$

ე.ი. ჰარმონიულ ოთხკუთხედში დიაგონალების გადაკვეთის წერტილით მიღებული დიაგონალების მონაკვეთების ფარდობა ტოლია ამ ოთხკუთხედის მიმდებარე გვერდების სიგრძეთა კვადრატების ფარდობისა.

წრეწირისადმი გავლებული მხეხების გადაკვეთის წერტილი, რომელშიც გავლებულია ამ წრეწირში ჩახაზული ჰარმონიული ოთხკუთხედის დიაგონალების ბოლოებზე, დიაგონალების შემცველი წრფის წერტილია.

C და D წვეროებზე გავლებული მხეხების გადაკვეთის წერტილის აფიქსია $\frac{2cd}{c+d}$, რომელიც აკმაყოფილებს AB წრფის

$$z + abz = a + b$$

განტოლებას. ჩავსვათ ამ განტოლებაში მხეხის გადაკვეთის წერტილის აბსცისა. რადგან

$$\frac{\overline{2cd}}{\overline{c+d}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{d}}{\frac{1}{c} + \frac{1}{d}} = \frac{2}{c+d}.$$

ამიტომ გვექნება:

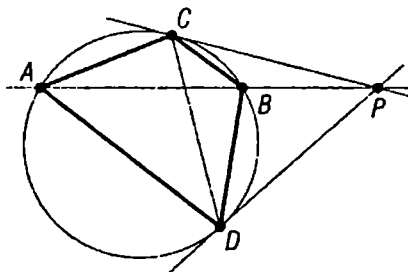
$$\frac{2cd}{c+d} + ab \cdot \frac{2}{c+d} = a + b.$$

ანუ,

$$2(ab+cd) = (a+b)(c+d),$$

საიდანაც, თუ გავხსნით ფრჩხილებს და მოვახდენთ მარტივ გარდაქმნებს, მივიღებთ:

რაც ნიშნავს, რომ $ABCD$ ოთხკუთხედი ჰარმონიულია.



656. 22.

უკანასკნელი თვისება საშუალებას გვაძლევს მოცემული სამი A, B, C წვეროთი ავაგოთ ჰარმონიული ოთხკუთხედი. მეოთხე D წვეროს აგება ხდება P წერტილის საშუალებით, რომელიც წარმოადგენს AB წრფის და ABC წრეწირის C წერტილზე გავლებული მხეზების გადაკვეთის წერტილს: D წერტილი წარმოადგენს P წერტილიდან ამ წრეწირისადმი გავლებული მეორე მხეზის წრეწირთან შეხების წერტილს (ნახ. 22).

§1.26. ვექტორები კომპლექსურ სიბრტყეზე

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ოთხი წერტილი აფიქს-
ბით:

$$A(z_1), B(z_2), C(z_3), D(z_4).$$

ორ $\overline{AB}$ და $\overline{CD}$ მიმართულ მონაკვეთებს ტოლად ჩავთვლით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება პირობა:

$$z_2 - z_1 = z_4 - z_2.$$

თუ მიმართული მონაკვეთი მოცემულია სათავის $A(z_1)$ და $B(z_2)$ ბოლოს აფიქსებით, მაშინ $\vec{a} = \overline{AB}$ ვექტორის აფიქსია $(z_2 - z_1)$ და ამ ფაქტს ასე ჩავწერთ:

$$\vec{a} = (z_2 - z_1).$$

თუ $\vec{a} = (z_1)$, $\vec{b} = (z_2)$ მაშინ ამ ორი ვექტორის ჯამი განისაზღვრება ასე:

$$\vec{a} + \vec{b} = (z_1 + z_2).$$

$\vec{a} = (z_1)$ და λ რიცხვზე ნამრავლი ეწოდება ვექტორს

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot z_1):$$

$\vec{a} = (0)$ ვექტორს ეწოდება ნულოვანი ვექტორი და ჩაიწერება ასე:

$$\vec{a} = \vec{0}.$$

$\vec{a} = (z_1)$, $\vec{b} = (-z_1)$ ვექტორებს ეწოდებათ მოპირდაპირე ვექტორები:

$$\vec{a} = -\vec{b}.$$

ვექტორებზე ოპერაციებს გააჩნია შემდეგი თვისებები:

$$1. \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c};$$

$$2. \vec{a} + \vec{0} = \vec{a};$$

$$3. \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0};$$

$$4. \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a};$$

$$5. 1 \cdot \vec{a} = \vec{a};$$

$$6. \lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a};$$

$$7. (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a};$$

$$8. \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}.$$

ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები კოლინეარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ან

$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b} \vee \vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}..$$

$\vec{a} = (z_1), \vec{b} = (z_2)$ ვექტორების კოლინეარულობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, შესრულდეს პირობა:

$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} \\ z_2 & \overline{z_2} \end{vmatrix} = 0.$$

§1.27. კომპლექსურ სიბრტყეზე ვექტორების კოლინეარულობის და მართულობის პირობები

ვთქვათ, კომპლექსურ სიბრტყეზე მოცემულია O წერტილისაგან განსხვავებული $A(a)$ და $B(b)$ წერტილები. $\vec{OA}$ და $\vec{OB}$ ვექტორები თანამიმართულია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\arg a = \arg b.$$

ანუ,

$$\arg a - \arg b = \arg \frac{a}{b} = 0.$$

ცხადია, რომ ეს ვექტორები საწინააღმდეგოდ მიმართულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ

$$\arg a - \arg b = \arg \frac{a}{b} = \pm \pi.$$

ამრიგად, იმისათვის, რომ $A(a)$ და $B(b)$ წერტილები კოორდინატთა სათავის კოლინეარული იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ფარდობა $\frac{a}{b}$ ნამდვილი რიცხვი იყოს. რაც ნიშნავს, რომ გამოსახულება

$$\frac{a}{b} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}},$$

ანუ,

$$a\bar{b} = b\bar{a}$$

არის სამი O, A, B წერტილის კოლინეარულობის პირობა. შევნიშნოთ, რომ ეს კრიტერიუმი სამართლიანია მაშინაც, როცა $a=0$ ან $b=0$.

რადგან $\frac{a}{b} = k, (k \neq 0)$ ნამდვილი რიცხვია, ამიტომ სამი წერტილის კოლინეარულობის პირობა ტოლფასია

$$a = kb, (k \neq 0), \bar{k} = k$$

პირობისა.

განვიხილოთ წერტილები $A(a), B(b), C(c)$ და $D(d)$. ვექტორები $\overrightarrow{BA}$ და $\overrightarrow{DC}$ კოლინეარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a-b, c-d$ და 0 წერტილები კოლინეარულია.

ე.ი.

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (a-b)(\bar{c}-\bar{d}) = (\bar{a}-\bar{b})(c-d) \quad (1)$$

კერძოდ, თუ $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ და $D(d)$ წერტილები ეკუთვნის ერთეულოვან $zz=1$ წრეწირს, მაშინ

$$\bar{a} = \frac{1}{a}, \bar{b} = \frac{1}{b}, \bar{c} = \frac{1}{c}, \bar{d} = \frac{1}{d}.$$

ამიტომ (1) პირობა მიიღებს სახეს:

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ab = cd.$$

(1) პირობა შეიძლება ჩავწეროთ სახით:

$$\frac{a-b}{c-d} = \frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{d}}.$$

ცხადია, რომ AB და CD მონაკვეთები პარალელურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა რიცხვი $\frac{a-b}{c-d}$ ნამდვილია.

$\overrightarrow{OA}$ და $\overrightarrow{OB}$ ვექტორები პერპენდიკულარულია

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \arg a - \arg b = \arg \frac{a}{b} = \pm \frac{\pi}{2}.$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = -\frac{\bar{a}}{\bar{b}}.$$

ანუ,

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow a\bar{b} + \bar{a}b = 0. \quad (2)$$

AB და CD მონაკვეთები პერპენდიკულარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ვექტორები აფიქსებით $a-b$ და $c-d$ პერპენდიკულარულია. (2) დამოკიდებულებების ძალით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow (a-b)(\bar{c}-\bar{d}) = (\bar{a}-\bar{b})(c-d) \quad (3)$$

თუ $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ და $D(d)$ წერტილები ეკუთვნის ერთეულოვან $zz=1$ წრეწირს, მაშინ ეს დამოკიდებულია მარტივდება და მიიღებს სახეს:

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow ab + cd = 0.$$

(3) დამოკიდებულება შეიძლება ჩავწეროთ სახით:

$$\frac{a-b}{c-d} = -\frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{d}}.$$

ეს ნიშნავს, რომ AB და CD მონაკვეთები პერპენდიკულარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა რიცხვი $\frac{a-b}{c-d}$ წარმოსახვითი კომპლექსური რიცხვია.

მოცემულია $A(a)$ და $B(b)$ წერტილებზე გამავალი წრე და $M(m)$ წერტილი. ვიპოვოთ $M(m)$ წერტილის ორთოგონალური პროექცია $A(a)$ და $B(b)$ წერტილებზე გამავალ წრეზე.

$A(a)$ და $B(b)$ წერტილებზე გამავალ წრფის განტოლება:

$$\frac{z-b}{a-b} = \frac{\bar{z}-\bar{b}}{\bar{a}-\bar{b}}.$$

ანუ,

$$z(\bar{a}-\bar{b}) + a(\bar{b}-\bar{z}) + b(\bar{z}-\bar{a}) = 0.$$

ამ წრფის მართობული წრფის განტოლებას, რომელიც გადის $M(m)$ წერტილზე აქვს სახე:

$$(\bar{a}-\bar{b})(\bar{m}-\bar{z}) + (\bar{a}-\bar{b})(m-z) = 0.$$

რომ გამოვთვალოთ საძებნი კოორდინატი, უნდა ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{cases} z(\bar{a}-\bar{b})+a(\bar{b}-\bar{z})+b(\bar{z}-\bar{a})=0, \\ (\bar{a}-\bar{b})(\bar{m}-\bar{z})+(\bar{a}-\bar{b})(m-z)=0. \end{cases}$$

ანუ,

$$\begin{cases} z(\bar{a}-\bar{b})-\bar{z}(a-b)+a\bar{b}-\bar{a}b=0, \\ (\bar{a}-\bar{b})+\bar{z}(a-b)-(a-b)\bar{m}-(\bar{a}-\bar{b})m=0. \end{cases}$$

საიდანაც,

$$z = \frac{a(\bar{m}-\bar{b})-b(\bar{m}-\bar{a})}{2(\bar{a}-\bar{b})} + \frac{m}{2}.$$

იმ შემთხვევაში, როცა A და B წერტილები $z\bar{z}=1$ წრეწირის, წერტილებია მაშინ მიღებული ფორმულები საგრძნობლად მარტივდება და მიიღებს სახეს:

$$z = \frac{a+b+m-ab\bar{m}}{2}.$$

თუ $m=0$, მაშინ M წერტილის $P(p)$ პროექცია AB წრფეზე გამოითვლება ფორმულით:

$$p = \frac{\bar{a}b - a\bar{b}}{2(\bar{a}-\bar{b})}.$$

გამოვთვალოთ $M(m)$ წერტილის მართობის ფუძის აფიქსი წრფეზე $\bar{p}z + p\bar{z} = 2p\bar{p}$. თუ $N(z)$ -საძებნი ფუძეა, მაშინ $OP \parallel MN$, ამიტომ

$$\begin{cases} (z-m)\bar{p} = (\bar{z}-\bar{m})p, \\ \bar{p}z + p\bar{z} = 2p\bar{p}. \end{cases}$$

საიდანაც,

$$\bar{z} = p + \frac{m}{2} - \frac{p\bar{m}}{2p}.$$

ერთეულოვან საბაზისო ვექტორებად ჩათვლილია ვექტორები $\bar{e}_1 = (z_1)$ და $\bar{e}_2 = (z_2)$ სადაც

$$|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = 1, \operatorname{Arg} e_1 = 0 (\bmod 2\pi), \operatorname{Arg} e_2 = \frac{\pi}{2} (\bmod 2\pi);$$

ყოველი $\vec{a}$ ვექტორისათვის $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ ბაზისში არსებობს დაშლა, ამასთან ეს დაშლა ერთადერთია შემდეგი სახით:

$$\vec{a} = x \cdot \bar{e}_1 + y \cdot \bar{e}_2.$$

სადაც $z = x + iy$ არის $\vec{a} = (z)$ ვექტორის აფიქსი.

§1.28. მონაკვეთის გაყოფა λ ფარდობით

თუ C წერტილი AB წრფის წერტილია და

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}, \quad (\lambda \neq -1),$$

მაშინ ამბობენ, რომ C წერტილი AB მონაკვეთს ყოფს λ ფარდობით, $(\lambda = \bar{\lambda})$.

ვიპოვოთ C წერტილის აფიქსი, თუ A და B წერტილების აფიქსებია შესაბამისად a და b .

ტოლობა,

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}$$

ეკვივალენტურია ტოლობის

$$\overline{OC} - \overline{OA} = \lambda \cdot (\overline{OB} - \overline{OC}).$$

თუ გადავალთ A, B, C წერტილების a, b, c აფიქსებზე, გვექნება:

$$c - a = \lambda \cdot (b - c),$$

საიდანაც,

$$c = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}, \quad \lambda = \bar{\lambda}. \quad (1)$$

როცა $\lambda = 1$, მაშინ C წერტილი AB მონაკვეთის შუაწერტილია და გვაქვს:

$$c = \frac{a + b}{2}.$$

ე.ი. მონაკვეთის შუაწერტილის აფიქსი სათავის და ბოლო წერტილების აფიქსების ნახევარჯამის ტოლია.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$\alpha = \frac{1}{1 + \lambda}, \quad \beta = \frac{\lambda}{1 + \lambda},$$

მაშინ (1) ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$c = \alpha a + \beta b, \quad \alpha + \beta = 1, \quad \alpha = \bar{\alpha}, \quad \beta = \bar{\beta}. \quad (2)$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ (2) დამოკიდებულებები წარმოადგენს აუცილებელ პირობას, რომ სამი $A(a), B(b), C(c)$ წერტილი ერთი წრფის წერტილები იყოს.

ამოცანა 1. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილიდან სამკუთხედის წვერო-

ებამდე მანძილების ჯამი სამკუთხედის კვადრატების ჯამის $\frac{1}{3}$ -ის ტოლია.

ვთქვათ, სამკუთხედის A, B, C წვეროების აფიქსებია $A(a), B(b), C(c)$.

კოორდინატთა სისტემა ისე შევარჩიოთ, რომ ABC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილი ემთხვეოდეს კოორდინატთა სათავის O წერტილს.

დავამტკიცოთ, რომ $a+b+c=0$. მართლაც, BC გვერდის A_1 შუაწერტილის აფიქსია $\frac{b+c}{2}$. როგორც ვიცით

$AO = \frac{2}{3}AA_1$. მონაკვეთის λ გაყოფის ფორმულის თანახმად $\lambda=2$.

გვაქვს,

$$\frac{a+2 \cdot \frac{b+c}{2}}{1+2} = \frac{a+b+c}{3} = 0 \Rightarrow a+b+c=0.$$

ცხადია, რომ

$$(a+b+c)(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}) = (a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c}) + (a\bar{b}+\bar{a}b+a\bar{c}+\bar{a}c+b\bar{c}+\bar{b}c) = 0.$$

საიდანაც,

$$a\bar{b}+\bar{a}b+a\bar{c}+\bar{a}c+b\bar{c}+\bar{b}c = -(a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c}). \quad (1)$$

მეორეს მხრივ,

$$OA^2 = a \cdot \bar{a}, OB^2 = b \cdot \bar{b}, OC^2 = c \cdot \bar{c}.$$

საიდანაც,

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 = a \cdot \bar{a} + b \cdot \bar{b} + c \cdot \bar{c}. \quad (2)$$

სამკუთხედის გვერდების სიგრძეთა კვადრატები გამოითვლება ტოლობებით:

$$AB^2 = (a-b)(\bar{a}-\bar{b}) = a\bar{a} - a\bar{b} - \bar{a}b + b\bar{b},$$

$$BC^2 = (b-c)(\bar{b}-\bar{c}) = b\bar{b} - b\bar{c} - \bar{b}c + c\bar{c},$$

$$AC^2 = (c-a)(\bar{c}-\bar{a}) = c\bar{c} - c\bar{a} - \bar{c}a + a\bar{a}.$$

ამ ტოლობების წევრ-წევრად შეკრებით მივიღებთ:

$$AB^2 + AC^2 + BC^2 = (a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c}) - (a\bar{b} + \bar{a}b + a\bar{c} + \bar{c}a + c\bar{b} + \bar{b}c).$$

მიღებულ ტოლობაში გავითვალისწინოთ (1) ფორმულა.

მივიღებთ:

$$AB^2 + AC^2 + BC^2 = (a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c}) + (a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c}) = 3(a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c}).$$

საიდანაც,

$$a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} = \frac{1}{3}(AB^2 + AC^2 + BC^2)$$

თუ მიღებულ ტოლობას შევადარებთ (2) ტოლობას, მივიღებთ:

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + AC^2 + BC^2).$$

რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

ამოცანა 2. A და B წერტილები წრეწირის ცენტრის მიმართ სიმეტრიული წერტილებია. დაამტკიცეთ, რომ ამ წრეწირის ნებისმიერი M წერტილისათვის მუდმივია $MA^2 + MB^2$ ჯამი.

ვთქვათ, M წერტილის აფიქსია m . კოორდინატთა სისტემა ისე შევარჩიოთ, რომ აბსცისათა ღერძი დაემთხვეს წრეწირის AB დიამეტრს, ხოლო ორდინატთა ღერძი გადიოდეს წრეწირის ცენტრზე აბსცისათა ღერ-

მართლაც, რადგან სრულდება ტოლობა

$$MA^2 + MB^2 = AB^2,$$

ამიტომ AMB სამკუთხედი მართია. რადგან M წერტილი წრეწირის ნებისმიერი წერტილია, ამიტომ თეორემა დამტკიცებულია.

ამოცანა 3. O წერტილის გარშემო 90° -იანი კუთხით მობრუნების დროს AB მონაკვეთი გადადის A_1B_1 მონაკვეთში. დაამტკიცეთ, რომ OA_1B სამკუთხედის OM მედიანა A_1B წრფის პერპენდიკულარულია. (ნახ.23).

ვთქვათ, O, A, B წერტილების აფიქსებია შესაბამისად $1, 0, b$. მაშინ A_1 და B_1 წერტილების აფიქსებია შესაბამისად $a_1 = i$ და $b_1 = bi$, ხოლო A_1B_1 მონაკვეთის M შუაწერტილის აფიქსია

$$m = \frac{1}{2}(1 + bi).$$

გვაქვს:

$$\frac{a_1 - b}{m - 0} = \frac{i - b}{\frac{1}{2}(1 + bi)} = \frac{2i(i - b)}{i - b} = 2i.$$

ეს სუფთად წარმოსახვითი კომპლექსური რიცხვია. მონაკვეთთა მართობულობის კრიტერიუმიდან გამომდინარე OM და A_1B წრფეები პერპენდიკულარულია.

ამოცანა 4. მართკუთხა ABC სამკუთხედის AB ჰიპოტენუზაზე სამკუთხედის გარეთ აგებულია კვადრეტი (ნახ.24). იპოვეთ მანძილი C მართი კუთხის წვე-

როდან Q ცენტრამდე, თუ BC და AC კათეტების სიგრძეებია a და b -ს ტოლია.

C წერტილი ჩავთვალოთ კოორდინატთა სათავედ, ხოლო CA და CB წრფეები შესაბამისად ნამდვილ და წარმოსახვით ღერძებად. მაშინ A და B წერტილების აფიქსები შესაბამისად იქნება b და ai , ამასთან $b = \bar{b}$ და $a = \bar{a}$.

90° -იანი კუთხით მობრუნების დროს $\overline{QB}$ ვექტორი გადადის $\overline{QA}$ ვექტორში. ამიტომ გვაქვს ტოლობა:

$$(ai - q)i = b - q,$$

სადაც q არის Q წერტილის აფიქსი.

ბოლო ტოლობიდან გვაქვს:

$$q = \frac{a+b}{1-i}.$$

გამოვთვალოთ

$$CQ^2 = q\bar{q} = \frac{a+b}{1-i} \cdot \frac{a+b}{1+i} = \frac{1}{2}(a+b)^2$$

საიდანაც,

$$CQ = \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b).$$

ამოცანა 5. M წერტილი ABC სამკუთხედის AB გვერდის შუაწერტილია. H -მისი ორთოცენტრია. დაამტკიცეთ, რომ

$$\overline{MC} \cdot \overline{MH} = \frac{1}{4} AB^2$$

ვთქვათ, O არის ABC სამკუთხედზე შემოხაზული ერთეულოვანი წრეწირის ცენტრი, რომლის განტო-

ლებათა $z\bar{z}=1$. ვთქვათ, ABC სამკუთხედის წვეროთა აფიქსებია შესაბამისად a, b და c . მაშინ H ორთოცენტრის h აფიქსია

$$h = a + b + c.$$

M წერტილის m აფიქსია

$$m = \frac{1}{2}(a + b).$$

მაშინ ვექტორთა სკალარული ნამრავლის გამოთვლის წესის თანახმად გვაქვს:

$$\begin{aligned}\overline{MC} \cdot \overline{MH} &= \frac{1}{2} \left[\left(c - \frac{a+b}{2} \right) \left(\frac{\bar{a} + \bar{b}}{2} + \bar{c} \right) + \left(\frac{a+b}{2} + c \right) \left(\bar{c} - \frac{\bar{a} + \bar{b}}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \left[(2c - a - b)(\bar{a} + \bar{b} + 2\bar{c}) + (a + b + 2c)(2\bar{c} - \bar{a} - \bar{b}) \right] = \\ &= \frac{1}{8} [8c\bar{c} - 2a\bar{a} - 2a\bar{b} - 2b\bar{a} - 2b\bar{b}] = \frac{1}{4} [4c\bar{c} - a\bar{a} - a\bar{b} - b\bar{a} - b\bar{b}].\end{aligned}$$

რადგან $A(a), B(b), C(c)$ წერტილები ერთეულოვანი წრეწირის წერტილებია, ამიტომ

$$OA = OB = OC = a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = 1.$$

გვაქვს:

$$\begin{aligned}\overline{MC} \cdot \overline{MH} &= \frac{1}{4} [4c\bar{c} - a\bar{a} - a\bar{b} - b\bar{a} - b\bar{b}] = \frac{1}{4} [4 - 1 - a\bar{b} - b\bar{a} - 1] = \\ &= \frac{1}{4} [2 - a\bar{b} - b\bar{a}] = \frac{1}{4} [a\bar{a} - a\bar{b} - b\bar{a} + b\bar{b}] = \frac{1}{4} (a - b)(\bar{a} - \bar{b}) = \frac{1}{4} AB^2.\end{aligned}$$

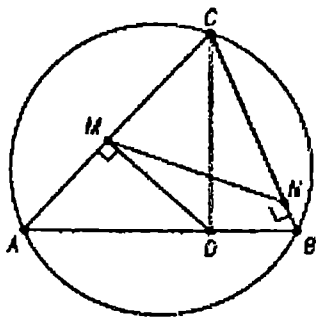
რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

ამოცანა 6. სამკუთხედის სიმაღლის ფუძიდან დანარჩენ ორ გვერდზე დაშვებულია სიმაღლეები. დაამტკიცეთ, რომ ამ პერპენდიკულარების ფუძეებს შორის

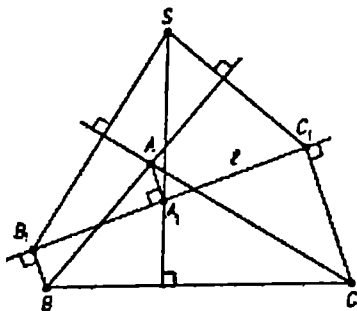
მანძილი დამოკიდებული არ არის სამკუთხედის სიმაღლის არჩევაზე (ნახ.25).

ვთქვათ, მოცემულია ABC სამკუთხედი. მასზე შემოხაზული წრეწირი ჩავთვალოთ ერთეულოვან წრეწირად და მისი განტოლებაა $z\bar{z}=1$. თუ CD -სამკუთხედის სიმაღლეა, მაშინ D წერტილის d აფიქსი გამოითვლება ფორმულით:

$$d = \frac{1}{2} \left(a + b + c - \frac{ab}{c} \right).$$



ნახ.25.



ნახ. 26.

D წერტილიდან AC და BC დაშვებული სიმაღლეების M და N წერტილების m და n აფიქსები შესაბამისად ტოლია:

$$m = \frac{1}{2}(a + c + d - ac\bar{d}), n = \frac{1}{2}(b + c + d - bc\bar{d}).$$

ამიტომ,

$$\begin{aligned} m - n &= \frac{1}{2}(a + c + d - ac\bar{d}) - \frac{1}{2}(b + c + d - bc\bar{d}) = \\ &= \frac{1}{2}(a + c + d - ac\bar{d} - b - c - d + bc\bar{d}) = \frac{1}{2}(a - b)(1 - c\bar{d}) = \end{aligned}$$

$$= \frac{(a-b) \left(1 - \frac{1}{2} c \left(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} - \frac{\bar{ab}}{c} \right) \right)}{2}.$$

რადგან A, B, C წერტილები ერთეულოვანი წრეწირის წერტილებია, ვწერთ: $\bar{a} = \frac{1}{a}, \bar{b} = \frac{1}{b}, \bar{c} = \frac{1}{c}$.

გვაქვს,

$$\begin{aligned} m-n &= \frac{(a-b) \left(1 - \frac{c}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}}{\frac{1}{c}} \right) \right)}{2} = \frac{(a-b) \left(1 - \frac{c}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{c}{ab} \right) \right)}{2} = \\ &= \frac{(a-b) \left(2 - \frac{c(ab+bc+ac-c^2)}{abc} \right)}{2} = \frac{(a-b)(2ab-ab-bc-ac+c^2)}{4ab} = \\ &= \frac{(a-b)(ab-bc-ac+c^2)}{4ab} = \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{4ab}. \end{aligned}$$

რადგან $|a|=|b|=1$, ამიტომ

$$|m-n| = \frac{|a-b||a-c||b-c|}{4|a||b|} = \frac{|a-b||a-c||b-c|}{4}.$$

ეს მანძილი სიმეტრიულია a, b და c -ს მიმართ. ე.ი. MN მანძილი დამოკიდებული არ არის სიმაღლის არჩევაზე.

ამოცანა 7. A_1, B_1, C_1 წერტილები წარმოადგენენ ABC სამკუთხედის A, B და C წვეროების ორთოგონალურ პროექციებს რაიმე l წრფის მიმართ. დაამტკიცეთ, რომ

A, B, C წერტილებზე გამავალი წრეები, რომლებიც შესაბამისად BC, CA, AB წრეების პერპენდიკულარულია, გადაიკვეთება ერთ წერტილში, რომელსაც I წრფის ორთოპოლუსი ეწოდება. (ნახ. 26).

ვთქვათ, ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის განტოლებაა $z\bar{z}=1$, ხოლო მოცემული I წრფის განტოლებაა

$$\bar{p}z + p\bar{z} = 2p\bar{p}.$$

მაშინ,

$$a_1 = p + \frac{a}{2} - \frac{p\bar{a}}{2p}.$$

იმისათვის, რომ წერტილი z კოორდინატით ეკუთვნოდეს BC წრფის მართობულ წრფეს, რომელიც A წერტილზე გადის, აუცილებელია და საკმარისი, რომ რიცხვი

$$\frac{z - a_1}{b - a} = \frac{2\bar{p}z - 2p\bar{p} - a\bar{p} + p\bar{a}}{2p(b - c)}$$

იყოს სუფთა წარმოსახვითი კომპლექსური რიცხვი. შემოწმებით დავადგენთ, რომ ეს რიცხვი ასეთია, კერძოდ, როცა

$$z = z_0 = \frac{1}{2} \left(a + b + c + 2p + \frac{abc\bar{p}}{p} \right) \quad (1)$$

$$\frac{z_0 - a_1}{b - c} = \frac{(p + ab\bar{p})(p + ac\bar{p})}{2ap\bar{p}(b - c)} = \frac{\bar{z}_0 - \bar{a}_1}{\bar{b} - \bar{c}}.$$

ცხადია, რომ $S(z_0)$ ეკუთვნის მითითებულ პერპენდიკულარს. (1) დამოკიდებულებაში ABC სამკუთხედ-

დის წვეროთა a, b, c აფიქსები სიმეტრიულად არიან განლაგებული, ამიტომ $S(z_0)$ წერტილი ასევე ეკუთვნის დანარჩენ ორ მართობსაც.

§1.29. სამკუთხედების მსგავსება და ტოლობა

განსაზღვრება 1. ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები მსგავსია და ერთნაირად ორიენტირებულია (პირველი გვარის მსგავსება), თუ

$$A_1B_1 = k \cdot AB, A_1C_1 = k \cdot AC \text{ და } B_1\hat{A}_1C_1 = B\hat{A}C$$

(კუთხეები ორიენტირებულია).

თუ A, B, C წვეროთა აფიქსებია შესაბამისად a, b, c , მაშინ ეს ტოლობები ჩაიწერება ასე:

$$|a_1 - b_1| = k \cdot |a - b|, |a_1 - c_1| = k \cdot |a - c|, \arg \frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \arg \frac{c - a}{b - a}.$$

ორი ტოლობა

$$\frac{|c_1 - a_1|}{|b_1 - a_1|} = \frac{|c - a|}{|b - a|} \text{ და } \arg \frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \arg \frac{c - a}{b - a}$$

ეკვივალენტურია ერთი ტოლობის

$$\frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{c - a}{b - a}.$$

ან,

$$\frac{c_1 - a_1}{c - a} = \frac{b_1 - a_1}{b - a} = \sigma, \quad (1)$$

სადაც σ -კომპლექსური რიცხვია. $|\sigma| = k$ -მსგავსებს კოეფიციენტი.

თუ σ -ნამდვილი რიცხვია, მაშინ

$$\sigma = \frac{c_1 - a_1}{c - a} = \frac{\overline{c_1 - a_1}}{\overline{c - a}}$$

და ამიტომ $AC \parallel A_1C_1$. ანალოგიური მსჯელობით ვაჩვენებთ, რომ $AB \parallel A_1B_1$ და $BC \parallel B_1C_1$. შესაბამისად, ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები ჰომოთეტურია.

(1) დამოკიდებულებები გამოსახავს ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედების მსგავსების და ერთნაირად ორიენტირებულობის აუცილებელ და საკმარის პირობებს.

მივცეთ მას სიმეტრიული სახე, გვაქვს

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & 1 \\ b & b_1 & 1 \\ c & c_1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

ანუ,

$$ab_1 + bc_1 + ca_1 = ba_1 + cb_1 + ac_1.$$

განსაზღვრება 2. ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები მსგავსი და საწინააღმდეგოდ ორიენტირებულია (მეორე გვარის მსგავსება), თუ

$$A_1B_1 = k \cdot AB, A_1C_1 = k \cdot AC \text{ და } B_1\hat{A}_1C_1 = -B\hat{A}C$$

(კუთხეები ორიენტირებულია).

ბოლო ტოლობა ტოლფასია ტოლობის:

$$\arg \frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = -\arg \frac{c - a}{b - a} = \arg \frac{\overline{c - a}}{\overline{b - a}}.$$

ორი ტოლობა

$$\frac{|c_1 - a_1|}{|b_1 - a_1|} = \frac{|\bar{c} - \bar{a}|}{|\bar{b} - \bar{a}|} \text{ და } \arg \frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \arg \frac{\bar{c} - \bar{a}}{\bar{b} - \bar{a}}$$

ეკვივალენტურია ერთი ტოლობის

$$\frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{\bar{c} - \bar{a}}{\bar{b} - \bar{a}}.$$

ან,

$$\frac{c_1 - a_1}{c - a} = \frac{b_1 - a_1}{b - a} = \sigma, \quad (3)$$

სადაც σ -კომპლექსური რიცხვია. $|\sigma| = k$ -მსგავსებს კოეფიციენტია.

(3) დამოკიდებულებები გამოსახავს ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედებისათვის აუცილებელ და საკმარის პირობებს, რათა ისინი მსგავსი და საწინააღმდეგოდ ორიენტირებული იყვნენ. ის შესაძლებელია ჩავწეროთ სიმეტრიული ფორმით, გვაქვს:

$$\begin{vmatrix} \bar{a} & a_1 & 1 \\ \bar{b} & b_1 & 1 \\ \bar{c} & c_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

თუ $|\sigma| = 1$, მაშინ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები ტოლია. ამ შემთხვევაში (1) დამოკიდებულებები გამოსახავს ერთნაირად ორიენტირებული სამკუთხედების ტოლობის პირობებს, ხოლო (3) დამოკიდებულებები საწინააღმდეგოდ ორიენტირებული სამკუთხედების ტოლობის პირობებს.

ამოცანა 1. ABC სამკუთხედზე შემოხაზულია წრეწირი. ამ წრეწირის მიმართ A, B და C წერტილებში

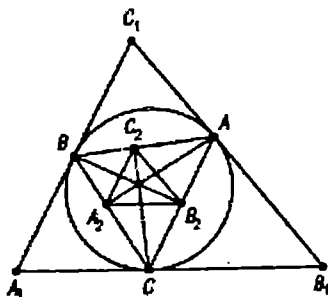
გავლებულია მხეხები. დაამტკიცეთ, რომ ასეთნაირად მიღებული $A_1B_1C_1$ სამკუთხედი $A_2B_2C_2$ სამკუთხედის ჰომოთეტურია, რომლის A_2, B_2 და C_2 წვეროებს წარმოადგენს ABC სამკუთხედის გვერდებზე დაშვებული სიმაღლეები (ნახ. 27). ჩავთვალოთ ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი ერთეულოვან წრეწირად. $A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ წერტილების აფიქსებია შესაბამისად $a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$.

გვაქვს:

$$a_1 = \frac{2bc}{b+c}, \quad a_2 = \frac{1}{2} \left(a+b+c - \frac{bc}{a} \right),$$

$$b_1 = \frac{2ac}{a+c}, \quad b_2 = \frac{1}{2} \left(a+b+c - \frac{ac}{b} \right),$$

$$c_1 = \frac{2ab}{a+b}, \quad c_2 = \frac{1}{2} \left(a+b+c - \frac{ab}{c} \right).$$



ნახ. 27.

შევამოწმოთ (1) კრიტერიუმის შესრულება.
გვაქვს,

$$\begin{aligned}\frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} &= \frac{\frac{2bc}{b+c} - \frac{2ac}{a+c}}{\frac{1}{2}\left(a+b+c - \frac{bc}{a}\right) - \frac{1}{2}\left(a+b+c - \frac{ac}{b}\right)} = \\ &= \frac{4[bc(a+c) - ac(b+c)]}{(b+c)(a+c)\left(\frac{ac}{b} - \frac{bc}{a}\right)} = \\ &= \frac{4(b-a)abc^2}{c(a-b)(a+b)(a+c)(b+c)} = -\frac{4abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{a_1 - c_1}{a_2 - c_2} &= \frac{\frac{2bc}{b+c} - \frac{2ab}{a+b}}{\frac{1}{2}\left(a+b+c - \frac{bc}{a}\right) - \frac{1}{2}\left(a+b+c - \frac{ab}{c}\right)} = \\ &= \frac{4[bc(a+b) - ab(b+c)]}{(b+c)(a+b)\left(\frac{ab}{c} - \frac{bc}{a}\right)} = \frac{4(c-a)ab^2c}{b(a-c)(a+b)(a+c)(b+c)} = \\ &= -\frac{4abc}{(a+b)(a+c)(b+c)} = \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2}.\end{aligned}$$

მაშასადამე, სრულდება (1) პირობა:

$$\begin{aligned}\frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} &= \frac{a_1 - c_1}{a_2 - c_2}, \\ \sigma &= -\frac{4abc}{(a+b)(a+c)(b+c)},\end{aligned}$$

ვაჩვენოთ, რომ $\sigma = \overline{\sigma}$.

მართლაც, რადგან $A(a), B(b), C(c)$ წერტილები ერთეულოვანი $zz = 1$ წრეწირის წერტილებია, ამიტომ

$$\bar{a} = \frac{1}{a}, \bar{b} = \frac{1}{b}, \bar{c} = \frac{1}{c}.$$

გვაქვს:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &= -\frac{4\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}+\bar{c})(\bar{b}+\bar{c})} = -\frac{4 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} = \\ &= -\frac{\frac{4}{abc}}{\frac{a+b}{ab} \cdot \frac{b+c}{bc} \cdot \frac{a+c}{ac}} = -\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(a+c)} = \sigma.\end{aligned}$$

ე.ი. σ ნამდვილი რიცხვია. რაც ნიშნავს, რომ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები ჰომოტეტიურია.

ამოცანა 2. A_1, B_1, C_1 წერტილები სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის O ცენტრის სიმეტრიული წერტილებია სამკუთხედის გვერდების მიმართ. დაამტკიცეთ, რომ $A_1B_1C_1$ სამკუთხედი მოცემული ABC სამკუთხედის ტოლია.

ვთქვათ, ABC სამკუთხედის წვეროთა აფიქსებია შესაბამისად a, b და c . O წერტილი ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრია, რომელიც ჩავთვალოთ კოორდინატთა სათავედ. მაშინ,

$$a_1 = b + c, b_1 = a + c, c_1 = a + b.$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$\frac{a_1 - b_1}{a - b} = \frac{a_1 - c_1}{a - c} = -1.$$

მართლაც,

$$\frac{a_1 - b_1}{a - b} = \frac{b + c - a - c}{a - b} = -1.$$

$$\frac{a_1 - c_1}{a - c} = \frac{b + c - a - b}{a - c} = -1.$$

მაშასადამე, სამკუთხედების ჰომოთეტიურობისა და ტოლობის კრიტერიუმებიდან გამომდინარეობს, რომ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები ჰომოთეტიურია და ტოლი, ანუ ცენტრულად სიმეტრიული არიან, სიმეტრიის ცენტრს წარმოადგენს წერტილი

$$\frac{1}{2}(a + a_1) = \frac{1}{2}(a + b + c),$$

რომელიც OH მონაკვეთის შუაწერტილია, ABC სამკუთხედის ცხრა წრეწირის წერტილი.

ამოცანა 3. მოცემულია მსგავსი და ერთნაირად ორიენტირებული ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები. AA_1, BB_1, CC_1 მონაკვეთებზე აგებულია წყვილ-წყვილად მსგავსი და ერთნაირად ორიენტირებული $AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2$ სამკუთხედები. დაამტკიცეთ, რომ $A_2B_2C_2$ სამკუთხედი ABC სამკუთხედის მსგავსია.

(2) პირობების და ამოცანის მოცემულობების ძალით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & 1 \\ b & b_1 & 1 \\ c & c_1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a & c & 1 \\ a_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$$\begin{vmatrix} a & a_2 & 1 \\ b & b_2 & 1 \\ c & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

ამის დამტკიცება შესაძლებელია გამოთვლების გარეშე.

მართლაც, პირველი დეტერმინანტის 0-თან ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ (a_1, b_1, c_1) სამეული წრფივად გამოისახება (a, b, c) და $(1, 1, 1)$ სამეულების საშუალებით.

დანარჩენი ორი დეტერმინანტის ნულთან ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ (a_2, b_2) წრფივად გამოისახება (a, b) და (a_1, b_1) -ით, ხოლო (a_2, c_2) კი (a, c) და (a_1, c_1) -ით.

ამიტომ, (a_2, b_2, c_2) სამეული წრფივად გამოისახება (a, b, c) და $(1, 1, 1)$ სამეულების წრფივი კომბინაციით. ეს ნიშნავს, რომ დეტერ-მინანტი

$$\begin{vmatrix} a & a_2 & 1 \\ b & b_2 & 1 \\ c & c_2 & 1 \end{vmatrix}$$

0-ის ტოლია.

ამოცანა 4. ორი სამკუთხედი ABC და $A_1B_1C_1$ მსგავსი და ერთნაირად ორიენტირებულია. სიბრტყის რაიმე M წერტილისათვის $\overline{MA_0}, \overline{MB_0}, \overline{MC_0}$ ვექტორები შესაბამისად ტოლია $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}, \overline{CC_1}$ ვექტორების. დაამტკიცეთ,

რომ $A_0B_0C_0$ და ABC სამკუთხედები მსგავსი და ერთნაირად ორიენტირებულია.

ჩავთვალოთ M წერტილი კოორდინატთა სათავედ. მაშინ მისი აფიქსი O -ის ტოლია.

$$a_0 = a_1 - a, b_0 = b_1 - b, c_0 = c_1 - c.$$

საიდანაც,

$$b_0 - a_0 = b_1 - a_1 - (b - a),$$

$$c_0 - a_0 = c_1 - a_1 - (c - a).$$

ამიტომ (1) დამოკიდებულებებიდან და ამოცანის პირობის ძალით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{b_1 - a_1}{b - a} = \frac{c_1 - a_1}{c - a}.$$

ცხადია, რომ

$$\frac{b_0 - a_0}{b - a} = \frac{c_0 - a_0}{c - a}.$$

(1) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს, რომ $A_0B_0C_0$ და ABC სამკუთხედები მსგავსია და ერთნაირად ორიენტირებულია.

ამოცანა 5. ორი კონგრუენტული და ერთნაირად ორიენტირებული ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები ერთ წრეწირშია ჩახაზული. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედი, რომლის წვეროებს წარმოადგენს BC და B_1C_1 , CA და C_1A_1 , AB და A_1B_1 წრფეების გადაკვეთის წერტილები, მოცემული სამკუთხედის მსგავსია.

ვთქვათ, წრეწირის განტოლებაა $zz^{\bar{}}=1$. $A_1B_1C_1$ სამკუთხედის წვეროები შეიძლება მივიღოთ ABC სამკუთ-

ხედის წვეროების მობრუნებით რაიმე $\arg \alpha$ კუთხით, $|\alpha|=1$. ამიტომ

$$a_1 = \alpha a, b_1 = \alpha b, c_1 = \alpha c.$$

თუ A_2, B_2, C_2 წერტილები შესაბამისად BC და B_1C_1 , CA და C_1A_1 , AB და A_1B_1 წრფეების გადაკვეთის წერტილებია, მაშინ

$$\frac{1}{a_2} = \frac{(b+c) - (\alpha b + \alpha c)}{bc - \alpha^2 bc} = \frac{b+c}{bc(1+\alpha)}.$$

საიდანაც,

$$a_2 = \frac{b+c}{1+\alpha}.$$

ანალოგიურად,

$$b_2 = \frac{a+c}{1+\alpha}, c_2 = \frac{a+b}{1+\alpha}.$$

მაშინ,

$$\begin{vmatrix} a & a_2 & 1 \\ b & b_2 & 1 \\ c & c_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{1+\alpha} \begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1+\alpha} [a(c+a) + b(b+c) + c(b+c) - c(c+a) - a(a+b) - b(b+c)] = 0.$$

ეს ნიშნავს, რომ $A_2B_2C_2$ და ABC სამკუთხედები მსგავსია.

ამოცანა 6. აჩვენეთ, რომ წრეწირის დიამეტრზე დაყრდნობილი კუთხე მართია.

მართლაც, ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ერთეულოვან რადიუსიანი წრეწირი, რომლის ცენტრი კოორდინატთა O სათავეს ემთხვევა და მისი განტოლებაა $\bar{z}z=1$.

აბსცისათა ღერძი დავამთხვიოთ წრეწირის AB დიამეტრს. მაშინ A და B წერტილების აფიქსები იქნება შესაბამისად -1 და 1 . რადგან, AB წრეწირის დიამეტრია ამიტომ,

$$AB = 2R = 2.$$

იმის ჩვენება, რომ დიამეტრზე დაყრდნობილი კუთხე მართია, ტოლფასია იმისა, რომ ვაჩვენოთ ABC სამკუთხედი მართკუთხაა C მართი კუთხით.

ვთქვათ, წრეწირის C წერტილის აფიქსია c . მაშინ,

$$AC^2 = (c+1)(\bar{c}+1) = c\bar{c} + c + \bar{c} + 1,$$

$$BC^2 = (c-1)(\bar{c}-1) = c\bar{c} - c - \bar{c} + 1.$$

რადგან $C(c)$ წერტილი ერთეულოვანი რადიუსის მქონე წრეწირის წერტილია, ამიტომ

$$c\bar{c} = R^2 = 1.$$

ე.ი. გვაქვს,

$$AC^2 = 2 + c + \bar{c},$$

$$BC^2 = 2 - c - \bar{c}.$$

შევკრიბოთ ეს ტოლობები წევრ-წევრად, მივიღებთ:

$$AC^2 + BC^2 = 4 = 4R^2 = AB^2.$$

რადგან სამკუთხედში შესრულებულია პითაგორას თეორემა, ეს ნიშნავს, რომ ABC სამკუთხედის C კუთხე მართია, ანუ რაც იგივეა წრეწირის დიამეტრზე დაყრდნობილი კუთხე მართია.

ამოცანა 7. M წერტილი ABC სამკუთხედის AB ჰიპოტენუზის შემცველი წრფის წერტილია. დაამტკიცეთ, რომ

$$MA^2 \cdot BC^2 + MB^2 \cdot AC^2 = MC^2 \cdot AB^2.$$

ვთქვათ, მართკუთხა ABC სამკუთხედზე შემოხა-
ზული წრეწირის რადიუსი 1-ის ტოლია, კოორდინატა
სათავე ემთხვევა წრეწირის O ცენტრს, ხოლო
ნამდვილი Ox ღერძი მოიცავს ABC სამკუთხედის
 AB ჰიპოტენუზას. მაშინ A, B, M წერტილების აფიქსები
ნამდვილი რიცხვებია, ამასთან $A(-1), B(1)$ და $M(m)$.

ვთქვათ, C წერტილის აფიქსია c . მაშინ,

$$MA^2 = (m+1)^2, BC^2 = (c-1)(\bar{c}-1) = c\bar{c} - c - \bar{c} + 1 = 2 - c - \bar{c},$$

რადგან $C(c)$ წერტილი ერთეულოვანი წრეწირის
წერტილია, ამიტომ $c\bar{c} = 1$.

$$MB^2 = (m-1)^2, AC^2 = (c+1)(\bar{c}+1) = 2 + c + \bar{c},$$

$$AB^2 = 4, MC^2 = (m-c)(\bar{m}-\bar{c}).$$

გამოვთვალოთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

$$\begin{aligned} MA^2 \cdot BC^2 &= (m+1)^2 \cdot (2 - c - \bar{c}) + (m-1)^2 \cdot (2 + c + \bar{c}) = \\ &= (m^2 + 2m + 1) \cdot (2 - c - \bar{c}) + (m^2 - 2m + 1) \cdot (2 + c + \bar{c}) = \\ &= 2m^2 - cm^2 - \bar{c}m^2 + 4m - 2mc - 2m\bar{c} + 2 - c - \bar{c} + \\ &+ 2m^2 + cm^2 + \bar{c}m^2 - 4m - 2mc - 2m\bar{c} + 2 + c + \bar{c} = \\ &= 4(m^2 - mc - m\bar{c} + 1) = 4(m^2 - mc - m\bar{c} + c\bar{c}) = \\ &= 4(m-c)(m-\bar{c}) = 4 \cdot MC^2 = AB^2 \cdot MC^2. \end{aligned}$$

ე.ი. საბოლოოდ მივიღეთ,

$$MA^2 \cdot BC^2 + MB^2 \cdot AC^2 = MC^2 \cdot AB^2.$$

§1.30. წესიერი სამკუთხედის არსებობის კრიტერიუმი

იმისათვის, რომ ორიენტირებული ABC სამკუთხედი ორიენტირებული BCA სამკუთხედის მსგავსი იყოს, ABC სამკუთხედი უნდა იყოს წესიერი. ამიტომ წინა პარაგრაფის (2) დამოკიდებულებებიდან ვდე-ბულობთ აუცილებელ და საკმარის პირობებს იმი-სათვის, რომ ABC სამკუთხედი წესიერი იყოს:

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & c & 1 \\ c & a & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

თუ გავშლით დეტერმინანტს, მივიღებთ:

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac. \quad (1)$$

გამოსახულება ჩავწეროთ ასე:

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (a^2 + 2ac + c^2) = 0,$$

ანუ,

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 = 0.$$

შემოვიღოთ $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ კომპლექსური რიცხვი,

რომელიც წარმოადგენს $z^3 = 1$ განტოლების ერთ-ერთ ფესვს, დანარჩენი ორი ფესვი ტოლია 1 და

$$\varepsilon^2 = \bar{\varepsilon} = \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}, |\varepsilon| = |\varepsilon^2| = 1.$$

$z^3 = 1$ განტოლებისათვის ვიეტის განზოგადებული თეორემის თანახმად მისი ფესვთა ჯამი 0-ის ტოლია. გვაქვს:

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0.$$

მაშინ (1) ტოლობა ეკვივალენტურია ასეთი ტოლობისა:

$$(a\varepsilon + b\varepsilon^2 + c)(a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c) = 0.$$

თუ პირველ ფრჩხილებში მოთავსებულ სამწევრს გავამრავლებთ ε^2 -ზე, მივიღებთ:

$$(a + b\varepsilon + c\varepsilon^2)(a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c) = 0.$$

ამრიგად, იმისათვის, რომ ABC სამკუთხედი წესიერი იყოს, აუცილებელია და საკმარისი შესრულდეს ერთ-ერთი მაინც ტოლობებიდან:

$$a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0 \quad (2)$$

$$a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c = 0. \quad (3)$$

პირველი ტოლობით განსაზღვრულია ისეთი ABC სამკუთხედი, რომელიც ორიენტირებულია დადებითად, ხოლო მეორე ტოლობით განსაზღვრული ABC სამკუთხედი ორიენტირებულია უარყოფითად. რადგან ε -ზე გამრავლებას შეესაბამება მობრუნება $\frac{2\pi}{3}$ კუთხით, ამიტომ სამკუთხედის დადებითი ორიენტაციის დროს

$$b - a = \varepsilon(a - c), c - b = \varepsilon(b - a). \quad (\text{ნახ.28}).$$

საიდანაც,

$$a = b - \varepsilon a + \varepsilon c, \varepsilon b = c - b + \varepsilon a,$$

ამიტომ,

$$a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 = c(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) = 0.$$

ანალოგიურად შემოწმდება დანჩენი ორი ტოლობის მართებულობა, რომელიც გამოსახავს უარყოფითად ორიენტირებულ ABC სამკუთხედს.

თუ წესიერი ABC სამკუთხედი ჩახაზულია $z\bar{z}=1$ წრეწირში, მაშინ მისი დადებითი ორიენტაციისას

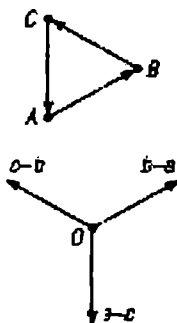
$$eb=c \text{ და } ce^2=b,$$

ხოლო ABC სამკუთხედის უარყოფითად ორიენტაციის დროს

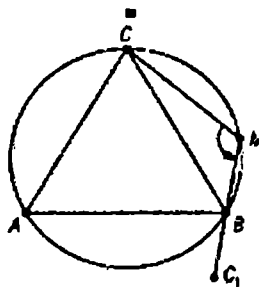
$$eb=a \text{ და } ae^2=b.$$

ამიტომ (2) და (5) დამოკიდებულებებიდან თითოეული მიიღებს სახეს:

$$a+b+c=0.$$



ნახ.28.



ნახ.29.

ბომპეიუს თეორემა. იმისათვის, რომ M წერტილი იყოს წესიერ ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის წერტილი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ MA, MB, MC მონაკვეთებიდან უდიდესი წარმოადგენდეს დანარჩენი ორი მონაკვეთის ჯამს.

დამტკიცება. პირობის აუცილებლობა გამომდინარეობს პტოლემეოსის თეორემიდან. დავამტკიცოთ საკმარისობა.

M წერტილი მივიღოთ კოორდინატთა სისტემის სათავედ. ვთქვათ, წესიერი ABC სამკუთხედი დადებითად არის ორიენტირებული. მაშინ (2) დამოკიდებულებიდან

$$a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0, \quad (\varepsilon^3 = 1, 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0).$$

თუ $MA > MB$ და $MA > MC$, მაშინ ტოლობა

$$MA = MB + MC$$

ეკვივალენტურია ტოლობის

$$|a| = |b| + |c|.$$

რადგან,

$$|a| = |b\varepsilon + c\varepsilon^2| = |\varepsilon||b + c\varepsilon| = |b + c\varepsilon|$$

და

$$|c| = |c\varepsilon|.$$

ტოლობა

$$|a| = |b| + |c|$$

ტოლფასია ასეთი ტოლობის:

$$|b + c\varepsilon| = |b| + |c\varepsilon|.$$

ამ ტოლობას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა B და $C_1(c\varepsilon)$ წერტილები M სათავის კოლინეარულია. (ნახ.29).

ამ შემთხვევაში ორიენტირებული CMB კუთხე 120° და M წერტილი ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის წერტილია. თეორემა დამტკიცებულია.

განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანა.

ამოცანა 1. ABC სამკუთხედის BC, CA, AB გვერდებზე აგებულია ერთნაირად ორიენტირებული BCA_1, CAB_1, ABC_1 სამკუთხედები. დაამტკიცეთ, რომ მათი A_0, B_0, C_0 ცენტრები წარმოადგენს ტოლგვერდა სამკუთხედის წვეროებს, რომელსაც BCA_1, CAB_1, ABC_1 სამკუთხედების საპირისპირო ორიენტაცია აქვს. (ნახ.30).

ვთქვათ, A, B, C, A_1, B_1, C_1 წერტილების აფიქსებია შესაბამისად a, b, c, a_1, b_1, c_1 . მაშინ ამოცანის პირობის ძალით

$$a + b_1\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0, \quad b + c\varepsilon + a_1\varepsilon^2 = 0, \quad c_1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2 = 0.$$

ამას გარდა,

$$a_0 = \frac{1}{3}(b + c + a_1), \quad b_0 = \frac{1}{3}(c + a + b_1), \quad c_0 = \frac{1}{3}(a + b + c_1).$$

საიდანაც ვიპოვით,

$$\begin{aligned} 3(c_0 + b_0\varepsilon + b\varepsilon^2) &= a + b + c_1 + \varepsilon(c + a + b_1) + \varepsilon^2(b + c + a_1) = \\ &= (c_1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2) + (b + c\varepsilon + a_1\varepsilon^2) + (a + b_1\varepsilon + c\varepsilon^2) = 0, \end{aligned}$$

ე.ი. $C_0B_0A_0$ სამკუთხედი წესიერია და იგივე ორიენტაცია აქვს, რაც BCA_1, CAB_1, ABC_1 სამკუთხედებს, რაც ნიშნავს, რომ $A_0B_0C_0$ სამკუთხედს ამ სამკუთხედების საპირისპირო ორიენტაცია აქვს.

ამოცანა 2. წინა ამოცანაში დაამტკიცეთ, რომ AA_0, BB_0, CC_0 გვერდების A', B', C' შუაწერტილები წარმოადგენს ტოლგვერდა სამკუთხედს, რომელსაც იგივე ორიენტაცია აქვს რაც მოცემულ ტოლგვერდა სამკუთხედებს.

ვთქვათ, A, B, C, A', B', C' წერტილების აფიქსებია შესაბამისად a, b, c, a', b', c' მაშინ ამოცანის პირობის ძალით გვაქვს:

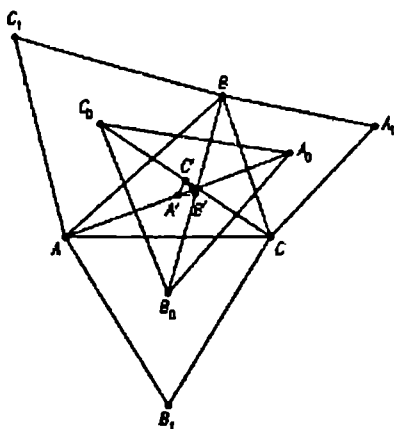
$$a' = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{3} (b + c + a_1) \right) = \frac{1}{6} (3a + b + c + a_1),$$

$$b' = \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{3} (c + a + b_1) \right) = \frac{1}{6} (3b + c + a + b_1),$$

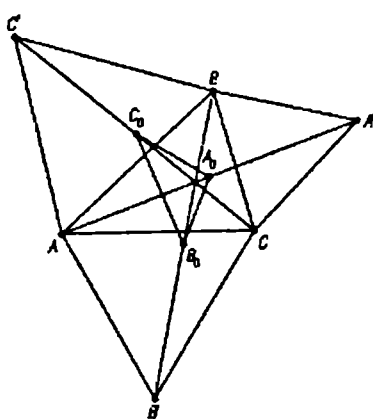
$$c' = \frac{1}{2} \left(c + \frac{1}{3} (a + b + c_1) \right) = \frac{1}{6} (3c + a + b + c_1).$$

მაგრამ, რადგან BCA_1, CAB_1, ABC_1 წესიერი სამკუთხედებია, ამიტომ

$$a_1 + b\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0, \quad b_1 + c\varepsilon + a\varepsilon^2 = 0, \quad c_1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2 = 0.$$



ნახ.30.



ნახ.31.

თუ გავითვალისწინებთ ამ ტოლობებს გვექნება:

$$a' = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{3} (b + c + a_1) \right) = \frac{1}{6} (3a + b + c - \varepsilon b - \varepsilon^2 c),$$

$$b' = \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{3}(c + a + b_1) \right) = \frac{1}{6} (3b + c + a - \varepsilon c - \varepsilon^2 a),$$

$$c' = \frac{1}{2} \left(c + \frac{1}{3}(a + b + c_1) \right) = \frac{1}{6} (3c + a + b - \varepsilon a - \varepsilon^2 b).$$

მაშინ,

$$\begin{aligned} 6(a' + \varepsilon b' + \varepsilon^2 c') &= 3ab + b + c - \varepsilon b - \varepsilon^2 c + 3b\varepsilon + c\varepsilon + a\varepsilon - \varepsilon^2 c - a + \\ &+ 3c\varepsilon^2 + a\varepsilon^2 + b\varepsilon^2 - a - b\varepsilon = (a + a\varepsilon + a\varepsilon^2) + (b + b\varepsilon + b\varepsilon^2) + \\ &+ (c + c\varepsilon + c\varepsilon^2) = a(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) + b(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) + c(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) = 0. \end{aligned}$$

რაც ნიშნავს, რომ $A'B'C'$ სამკუთხედი წესიერია და აქვს იგივე ორიენტაცია, რაც მოცემულ დანარჩენ სამ წესიერ სამკუთხედს.

ამოცანა 3. მოცემულია ABC სამკუთხედი, ააგეთ ისეთი $A_0B_0C_0$ სამკუთხედი, რომ წესიერ A_0B_0C , B_0C_0A , C_0A_0B სამკუთხედებს ერთნაირი ორიენტაცია ჰქონდეთ.

ამოცანის პირობის ძალით a_0, b_0, c_0 რიცხვები უნდა აკმაყოფილებდნენ პირობებს:

$$a + b_0\varepsilon + c_0\varepsilon^2 = 0, \quad b + c_0\varepsilon + a_0\varepsilon^2 = 0, \quad c + a_0\varepsilon + b_0\varepsilon^2 = 0.$$

პირველი და მეორე განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ c_0 . ამისათვის მეორე განტოლება გავამრავლოთ ε -ზე.

გვაქვს:

$$b\varepsilon + c_0\varepsilon^2 + a_0 = 0,$$

მიღებული ტოლობა წევრ-წევრად გამოვაკლოთ პირველ ტოლობას. მივიღებთ:

$$a - b\varepsilon + b_0\varepsilon - a_0 = 0.$$

ამ ტოლობის ორთავე მხარე გავამრავლოთ ε -ზე გვექნება:

$$a\varepsilon - b\varepsilon^2 + b_0\varepsilon^2 - a_0\varepsilon = 0.$$

მიღებული ტოლობა წევრ-წევრად გამოვაკლოთ მესამე ტოლობას. მივიღებთ:

$$c + a_0\varepsilon - a\varepsilon + b\varepsilon^2 + a_0\varepsilon = 0.$$

ანუ,

$$2a_0\varepsilon = a\varepsilon - b\varepsilon^2 - c.$$

ავაგოთ წესიერი $CA'B$ სამკუთხედი.

$$c + a'\varepsilon + b\varepsilon^2 = 0,$$

საიდანაც

$$2a_0\varepsilon = a\varepsilon + a'\varepsilon \quad \text{და} \quad a_0 = \frac{1}{2}(a + a').$$

ანალოგიურად ავაგოთ წესიერი $AB'C$ და $BC'A$ სამკუთხედები, სადაც,

$$b_0 = \frac{1}{2}(b + b') \quad \text{და} \quad c_0 = \frac{1}{2}(c + c').$$

იმისათვის, რომ ავაგოთ $A_0B_0C_0$ სამკუთხედი, აუცილებელია BC, CA და AB გვერდებზე ავაგოთ წესიერი $CA'B, AB'C$ და $BC'A$ სამკუთხედები, რომლებსაც იგივე ორიენტაცია აქვთ, რაც საძიებელ სამკუთხედს, მაშინ AA', BB', CC' მონაკვეთების შუაწერტილები იქნება საძიებელი A_0, B_0, C_0 წერტილები. (ნახ.31).

§1.31. წესიერი n -კუთხედის გვერდებისა და დიაგონალების გამოთვლა

ვთქვათ, $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ წესიერი n -კუთხედის წვეროებია, რომელიც ერთეულოვანი $z\bar{z}=1$ წრეწირის წერტილებია, რომელთა აფიქსებია $1, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$.

განვიხილოთ წესიერი n -კუთხედის $A_0 A_k$ დიაგონალი.

ცხადია, რომ:

$$A_0 A_k^2 = (z_k - 1)(\overline{z_k} - 1).$$

რადგან,

$$z_k \cdot \overline{z_k} = 1,$$

ამიტომ

$$A_0 A_k^2 = 2 - (z_k + \overline{z_k}) \quad (1)$$

ამასთან

$$z_k + \overline{z_k} = 2 \cos \frac{2\pi}{n}.$$

დაგვრჩა ვიპოვოთ $z_k + \overline{z_k} = u_k$ ჯამი, სადაც z_k წარმოადგენს

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z^2 + z + 1 = 0$$

განტოლების ფესვს. გავითვალისწინოთ, რომ

$$z^{n-k} = \overline{z^k}$$

კენტი n -ისათვის ეს შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასე:

$$\overline{z} + z^{-2} + \dots + z^{-\frac{n-1}{2}} + z^{\frac{n-1}{2}} + \dots + z^2 + z + 1 = 0,$$

ანუ,

$$\left(z^{\frac{n-1}{2}} + z^{-\frac{n-1}{2}} \right) + \dots + \left(z^2 + \overline{z^2} \right) + (\overline{z} + z) + 1 = 0 \quad (2)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$z + \overline{z} = u, \quad z^2 + \overline{z^2} = u^2 - 2, \quad z^3 + \overline{z^3} = u^3 - 3u, \dots$$

ამრიგად, ჩასმის შემდეგ მივიღებთ $\frac{n-1}{2}$ განტოლებას u -ს მიმართ და ვიპოვით u -ს $\frac{n-1}{2}$ მნიშვნელობას. თუ მიღებულ მნიშვნელობებს რიგ-რიგობით ჩავსვამთ (1) ტოლობაში, ვიპოვით

$$A_0 A_1, A_0 A_2, \dots, A_0 A_m$$

ქორდების სიგრძეებს, სადაც $m = \frac{n-1}{2}$.

თუ n ლუწია, მაშინ $n=2m$ და $z^m - 1 = 0$ განტოლების ფესვებს წარმოადგენს წესიერი მრავალკუთხედის ლუწ ნომრიანი წვეროები, ხოლო $z^m + 1 = 0$ განტოლების ფესვებია წესიერი მრავალკუთხედის კენტნომრიანი წვეროები. ამ შემთხვევაში $z_k + \overline{z_k}$ ჯამის პოვნა უნდა მოხდეს $z^m + 1 = 0$ განტოლებიდან.

განვიხილოთ მაგალითები.

როცა $n=5$, მაშინ (2) განტოლებას აქვს სახე:

$$(z^2 + \overline{z}^2) + (z + \overline{z}) + 1 = 0.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$z + \overline{z} = u,$$

მაშინ

$$z^2 + \overline{z}^2 = u^2 - 2$$

და გვაქვს:

$$u^2 + u - 1 = 0,$$

საიდანაც,

$$u_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

მაგრამ,

$$z_k + \overline{z_k} = u_k = 2 \cos \frac{2\pi k}{n},$$

და

$$u_1 = z_1 + \overline{z_1} = 2 \cos \frac{2\pi}{5} > 0,$$

$$u_2 = z_2 + \overline{z_2} = 2 \cos \frac{4\pi}{5} < 0,,$$

რაც ნიშნავს, რომ

$$u_1 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

და

$$u_2 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

ამიტომ,

$$A_0 A_1^2 = 2 - (z_1 + \overline{z_1}),$$

სადაც $z_1 + \overline{z_1} = u_1$.

ამიტომ გვაქვს:

$$A_0 A_1^2 = 2 - u_1 = 2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{5-\sqrt{5}}{2} = \frac{10-2\sqrt{5}}{4}.$$

საიდანაც,

$$|A_0 A_1| = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

ასევე,

$$A_0 A_2^2 = 2 - u_1 = 2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{5+\sqrt{5}}{2} = \frac{10+2\sqrt{5}}{4}.$$

საიდანაც,

$$|A_0 A_2| = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2}.$$

თუ $n=12$, მაშინ განტოლება

$$z^6 + 1 = 0,$$

ანუ

$$z^3 + \bar{z}^3 = 0.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$z + \bar{z} = u.$$

თუ ამ ტოლობის ორთავე მხარეს ავახარისხებთ კუბში, გვექნება:

$$u^3 = (z + \bar{z})^3 = z^3 + 3z^2\bar{z} + 3z\bar{z}^2 + \bar{z}^3 = (z^3 + \bar{z}^3) + 3z\bar{z}(z + \bar{z}).$$

რადგან

$$z\bar{z} = 1,$$

ამიტომ

$$u^3 = (z^3 + \bar{z}^3) + 3u.$$

საიდანაც,

$$z^3 + \bar{z}^3 = u^3 - 3u$$

და მივიღებთ განტოლებას

$$u^3 - 3u = 0,$$

რომლის ფესვებია

$$u_1 = \sqrt{3}, u_2 = 0, u_3 = -\sqrt{3}.$$

რაც ნიშნავს, რომ

$$A_0 A_1^2 = 2 - (z_1 + \bar{z}_1) = 2 - u_1 = 2 - \sqrt{3}.$$

საიდანაც,

$$|A_0 A_3| = \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

$$A_0 A_3^2 = 2 - (z_3 + \bar{z}_3) = 2 - u_3 = 2.$$

საიდანაც,

$$|A_0 A_3| = \sqrt{2}.$$

$$A_0 A_5^2 = 2 - (z_5 + \bar{z}_5) = 2 - u_5 = 2 + \sqrt{3}.$$

საიდანაც,

$$|A_0 A_3| = \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

განტოლება

$$z^6 - 1 = 0,$$

ტოლფასია განტოლების

$$(z^3 + 1)(z^3 - 1) = 0.$$

რომელიც თავის მხრივ ტოლფასია განტოლების

$$(z-1)(z+1)(z^2+z+1)(z^2-z+1) = 0.$$

ცხადია, რომ $z=1$ და $z=-1$ ფესვებს შეესაბამება წვე-
როები A_0 და A_6 .

განტოლებიდან

$$z^2 - z + 1 = 0$$

მივიღებთ:

$$z + \bar{z} = 1,$$

ამიტომ

$$A_0 A_1 = 1,$$

ხოლო განტოლებიდან

$$z^2 + z + 1 = 0$$

მივიღებთ:

$$z + \bar{z} = -1,$$

რაც ნიშნავს, რომ

$$|A_0 A_4| = \sqrt{3}.$$

ამოცანა 1. დაამტკიცეთ, რომ წესიერი n კუთხედის ყველა გვერდის და ყველა დიაგონალის კვადრატების ჯამი ტოლია $n^2 R^2$, სადაც R წესიერ n კუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსია.

ჩავთვალოთ, რომ $R=1$. მონაკვეთების რაოდენობა, რომელიც მრავალკუთხედის ერთ წვეროს აერთებს ყველა დანარჩენ წვეროებთან $\frac{n}{2}$ -ჯერ ნაკლებია ყველა გვერდებისა და დიაგონალების რაოდენობაზე. რადგან წესიერი მრავალკუთხედის ყველა წვერო ერთმანეთის ტოლძალოვანია, ამიტომ განსახილავი ჯამი ტოლია:

$$\begin{aligned} & (A_0 A_1^2 + A_0 A_2^2 + \dots + A_0 A_n^2) \cdot \frac{n}{2} = \\ & = \frac{n}{2} \cdot \left((z-1)(\bar{z}-1) + (z^2-1)(\bar{z}^2-1) + \dots + (z^n-1)(\bar{z}^n-1) \right). \end{aligned}$$

რადგან წესიერი n კუთხედის წვეროები წარმოადგენენ $z^n - 1 = 0$ განტოლების ფესვებს, ამიტომ

$$\bar{z} - 1 = \frac{1}{z} - 1 = \frac{1-z}{z} = z^{n-1} - 1.$$

მართლაც,

$$z(z^{n-1} - 1) = z^n - z = (z^n - 1) + (1 - z) = 1 - z.$$

ანალოგიურად შეგვილია ვაჩვენოთ, რომ

$$\bar{z}^2 - 1 = z^{n-2} - 1, \dots, \bar{z}^{n-1} - 1 = z - 1.$$

თუ გავითვალისწინებთ მიღებულ ფორმულებს, გვექნება:

$$\begin{aligned}
 & (A_0 A_1^2 + A_0 A_2^2 + \dots + A_0 A_n^2) \cdot \frac{n}{2} = \\
 & = \frac{n}{2} \cdot \left((z-1)(z^{n-1}-1) + (z^2-1)(z^{n-2}-1) + \dots + (z^{n-1}-1)(z-1) \right) = \\
 & = \frac{n}{2} \cdot \left[2(n-1) - 2(z + z^2 + z^3 + \dots + z^{n-1}) \right] = \frac{n}{2} \cdot \left[2(n-1) - 2 \frac{z^n - z}{z-1} \right] = \\
 & = \frac{n}{2} \cdot \left[2(n-1) - 2 \frac{(z^n - 1) + (1 - z)}{z-1} \right] = \frac{n}{2} \cdot \left[2(n-1) - 2 \frac{0 + (1 - z)}{z-1} \right] = \\
 & = \frac{n}{2} \cdot [2(n-1) + 2] = n^2 = n^2 R^2.
 \end{aligned}$$

ამოცანა 2. დაამტკიცეთ, რომ წესიერი ცხრაკუთხედის გვერდის სიგრძე ტოლია მისი უდიდესი და უმცირესი დიაგონალების სიგრძეთა სხვაობისა.

უნდა დავამტკიცოთ, რომ

$$|z-1| = |z^4-1| - |z^2-1|.$$

რადგან

$$z^9 - 1 = 0,$$

ამიტომ

$$(z^3 - 1)(z^6 + z^3 + 1) = 0.$$

ტოლობიდან

$$z^6 + z^3 + 1 = 0$$

გვაქვს,

$$1 + z^3 = -z^6$$

შევნიშნოთ, რომ

$$|z^4 - 1| - |z^2 - 1| = |z^4 - 1| - |z^3 - z|.$$

რადგან $z^4 - 1$ და $z^3 - z$ კომპლექსური რიცხვების შესაბამისი ვექტორები თანამიმართულია, ამიტომ მათი მოდულების სხვაობა მათი სხვაობის მოდულის ტოლია:

$$\begin{aligned} |z^4 - 1| - |z^3 - z| &= |z^4 - 1 - z^3 + z| = \\ &= |(1 + z^3)(z - 1)| = |-z^6(z - 1)| = |z - 1|. \end{aligned}$$

ამოცანა 3. დაამტკიცეთ, რომ წესიერ

$$A_0 A_1 \cdots A_{11}$$

თორმეტკუთხედში სამართლიანია ტოლობა

$$A_0 A_1 + A_0 A_3 = 2r,$$

სადაც r - წესიერ თორმეტკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსია.

ტოლობიდან

$$z^{12} - 1 = 0,$$

გამომდინარეობს,

$$z^6 + 1 = 0.$$

რადგან

$$(z^6 + 1) = (z^2 + 1)(z^4 - z^2 + 1),$$

ამიტომ

$$(z^6 + 1) = 0 \Rightarrow (z^2 + 1)(z^4 - z^2 + 1) = 0 \Rightarrow z^4 - z^2 + 1 = 0,$$

რაც ნიშნავს, რომ

$$A_0 A_1 + A_0 A_3 = |z - 1| + |z^3 - 1|.$$

$|z - 1|$ გავამრავლოთ $|z|$ -ზე.

გვექნება:

$$A_0A_1 + A_0A_3 = |z-1||z| + |z^3-1| = |z(z-1)| + |z^3-1| = |z^2-z| + |z^3-1|.$$

რადგან, ვექტორები აფიქსებულია z^2-z და z^3-1 თანამიმართულია. ამიტომ მათი მოდულების ჯამი ტოლია მათი ჯამის მოდულის. გვაქვს:

$$\begin{aligned} A_0A_1 + A_0A_3 &= |z^2-z| + |z^3-1| = |z^2-z+z^3-1| = \\ &= |(z^2-1)+z(z^2-1)| = |(z^2-1)(z+1)|. \end{aligned}$$

რადგან,

$$z^4 - z^2 + 1 = 0,$$

ამიტომ

$$z^2 + 1 = z^4.$$

გვაქვს:

$$A_0A_1 + A_0A_3 = |(z^2-1)(z+1)| = |z^4(z+1)| = |z^4| \cdot |z+1| = 1 \cdot |z+1| = |z+1|.$$

$z+1$ რიცხვს შეესაბამება $\overline{OA_0} + \overline{OA_1}$ ვექტორების ჯამი, რომლის მოდული $2r$ -ის ტოლია. მართლაც, $\overline{OA_0}$ და

$\overline{OA_1}$ ვექტორებს შორის კუთხეა $30^\circ = \frac{180^\circ}{12}$. A_1A_2 წესიერი

თორმეტკუთხედის გვერდია. $OM=r$ წესიერ თორმეტკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსია. რადგან $OA_0 = OA_1 = A_0O' = A_1O' = 1$, ამიტომ $OA_0O'A_1$ რომბია, რომლის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია M და $OM=r$. ცხადია, რომ

$$\overline{OA_0} + \overline{OA_1} = \overline{OO'}.$$

რადგან OO' რომბის დიაგონალია, ამიტომ

$$OO' \perp A_0A_1 \text{ და } OO' = 2r.$$

მაშასადამე,

$$A_0 A_1 + A_0 A_3 = 2r.$$

რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

ამოცანა 4. დაამტკიცეთ, რომ წესიერ

$$A_0 A_1 \cdots A_{14}$$

თხუთმეტკუთხედში ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\frac{1}{A_0 A_1} = \frac{1}{A_0 A_2} + \frac{1}{A_0 A_4} + \frac{1}{A_0 A_7}.$$

რადგან,

$$A_0 A_1 = |z-1|, A_0 A_2 = |z^2-1|, A_0 A_4 = |z^4-1|, A_0 A_7 = |z^7-1|.$$

ამიტომ დასამტკიცებელი ტოლობა ეკვივალენტურია ტოლობის:

$$\frac{1}{|z-1|} - \frac{1}{|z^7-1|} = \frac{1}{|z^2-1|} + \frac{1}{|z^4-1|}.$$

ანუ,

$$\frac{|z^7-1| - |z-1|}{|z-1| \cdot |z^7-1|} = \frac{|z^4-1| + |z^2-1|}{|z^2-1| \cdot |z^4-1|}.$$

მარცხენა ნაწილის მრიცხველში $|z-1|$ გავამრავლოთ z^3 -ზე, $|z|=1$, ხოლო მარჯვენა ნაწილში $|z^2-1|$ გავამრავლოთ z -ზე. აქაც $|z|=1$.

გვექნება:

$$\frac{|z^7-1| - |z^4-z^3|}{|z-1| \cdot |z^7-1|} = \frac{|z^4-1| + |z^3-z|}{|z^2-1| \cdot |z^4-1|}.$$

რადგან z^7-1 და z^4-z^3 ვექტორები თანამიმართულია, ასევე z^4-1 და z^3-z ვექტორებიც თანამი-

მართულია, ამიტომ როგორც წინა ამოცანებში, აქაც გვექნება:

$$\frac{|z^7 - 1 - z^4 + z^3|}{|z - 1| \cdot |z^7 - 1|} = \frac{|z^4 - 1 + z^3 - z|}{|z^2 - 1| \cdot |z^4 - 1|}.$$

საიდანაც,

$$\frac{|z^4(z^3 - 1) + (z^3 - 1)|}{|z - 1| \cdot |z^7 - 1|} = \frac{|z^3(z + 1) - (z + 1)|}{|z^2 - 1| \cdot |z^4 - 1|},$$

ანუ,

$$\frac{|(z^3 - 1)(z^4 + 1)|}{|z - 1| \cdot |z^7 - 1|} = \frac{|(z^3 - 1)(z + 1)|}{|z^2 - 1| \cdot |z^4 - 1|},$$

შეკვეცის შემდეგ მივიღებთ:

$$\frac{|z^4 + 1|}{|z^7 - 1|} = \frac{1}{|z^4 - 1|}.$$

რაც იგივეა:

$$|z^8 - 1| = |z^7 - 1|.$$

ეს ტოლობა ჭეშმარიტია, რადგან წესიერ თხუთმეტკუთხედში A_0A_7 და A_0A_8 ერთმანეთის ტოლია.

§1.32. კომპლექსურ რიცხვთა გამოყენება გეომეტრიის ზოგიერთი თეორემის დამტკიცებისას

თეორემა 1. ოთხკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი და ოთხკუთხედის დიაგონალების შუაწერტილები კოლინეარულია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $A_0B_0C_0D_0$ -მოცემული ოთხკუთხედია. მასში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი მდებარეობს O წერტილში და მისი განტოლებაა $zz\bar{z}=1$. წრეწირი $A_0B_0C_0D_0$ ოთხკუთხედის A_0B_0 , B_0C_0 , C_0D_0 და D_0A_0 გვერდებს ეხება შესაბამისად A, B, C და D წერტილებში, რომელთა აფიქსებია $A(a), B(b), C(c), D(d)$ (ნახ.32). ვთქვათ, M და N შესაბამისად A_0C_0 და B_0D_0 დიაგონალების შუაწერტილებია. მაშინ A_0, B_0, C_0, D_0 წერტილების აფიქსები იქნება:

$$a_0 = \frac{2ad}{a+d}, b_0 = \frac{2ab}{a+b}, c_0 = \frac{2bc}{b+c}, d_0 = \frac{2cd}{c+d}.$$

ამიტომ,

$$m = \frac{1}{2}(a_0 + c_0) = \frac{ad}{a+d} + \frac{bc}{b+c} = \frac{abc + abd + acd + bcd}{(a+d)(b+c)},$$

$$n = \frac{1}{2}(b_0 + d_0) = \frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d} = \frac{abc + abd + acd + bcd}{(a+b)(c+d)}.$$

საიდანაც,

$$\frac{m}{n} = \frac{(a+b)(c+d)}{(a+d)(b+c)}.$$

რადგან,

$$\bar{a} = \frac{1}{a}, \bar{b} = \frac{1}{b}, \bar{c} = \frac{1}{c}, \bar{d} = \frac{1}{d}.$$

ცხადია, რომ

$$\frac{\bar{m}}{\bar{n}} = \frac{(\bar{a} + \bar{b})(\bar{c} + \bar{d})}{(\bar{a} + \bar{d})(\bar{b} + \bar{c})} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} = \frac{(a+b)(c+d)}{(a+d)(b+c)} = \frac{m}{n}.$$

რაც ნიშნავს, რომ O, M და N წერტილები კოლინეარულია. თეორემა დამტკიცებულია. დამტკიცებულ თეორემას ნიუტონის თეორემას უწოდებენ.

თეორემა 2. თუ ABC სამკუთხედის BC, CA, AB გვერდების შემცველ წრფეებს გადაკვეთს რაიმე წრფე შესაბამისად A_1, B_1, C_1 წერტილებში, მაშინ AA_1, BB_1, CC_1 მონაკვეთის შუაწერტილები კოლინეარულია.

დამტკიცება. დავწეროთ ცალ-ცალკე

$$A, B_1, C; \quad C, A_1, B; \quad A_1, B_1, C_1$$

წერტილების კოლინეარულობის პირობები:

$$a(\bar{b}_1 - \bar{c}) + b_1(\bar{c} - \bar{a}) + c(\bar{a} - \bar{b}_1) = 0,$$

$$c(\bar{a}_1 - \bar{b}) + a_1(\bar{b} - \bar{c}) + b(\bar{c} - \bar{a}_1) = 0,$$

$$b(\bar{c}_1 - \bar{a}) + c_1(\bar{a} - \bar{b}) + a(\bar{b} - \bar{c}_1) = 0,$$

$$a_1(\bar{b}_1 - \bar{c}_1) + b_1(\bar{c}_1 - \bar{a}_1) + c_1(\bar{a}_1 - \bar{b}_1) = 0.$$

თუ M, N, P წერტილები AA_1, BB_1, CC_1 მონაკვეთის შუაწერტილებია, (ნახ. 33). მაშინ დარჩენილია ვაჩვენოთ:

$$m(\bar{n} - \bar{p}) + \bar{n}(\bar{p} - \bar{m}) + \bar{p}(\bar{m} - \bar{n}) = 0.$$

რადგან,

$$m = \frac{1}{2}(a + a_1), \quad n = \frac{1}{2}(b + b_1), \quad p = \frac{1}{2}(c + c_1).$$

ამიტომ, დასამტკიცებელი ტოლობა ეკვივალენტურია ტოლობის:

$$(a + a_1)(\bar{b} + \bar{b}_1 - \bar{c} - \bar{c}_1) + (b + b_1)(\bar{c} + \bar{c}_1 - \bar{a} - \bar{a}_1) + (c + c_1)(\bar{a} + \bar{a}_1 - \bar{b} - \bar{b}_1) = 0.$$

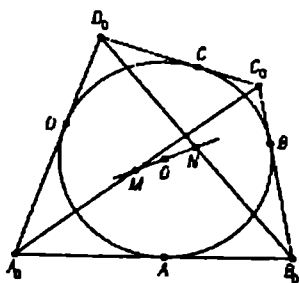
ანუ, გადამრავლების შემდეგ

$$a(\bar{b}_1 - \bar{c}) + a(\bar{b} - \bar{c}_1) + a_1(\bar{b}_1 - \bar{c}_1) + a_1(\bar{b} - \bar{c}) + b(\bar{c}_1 - \bar{a}) + b(\bar{c} - \bar{a}_1) +$$

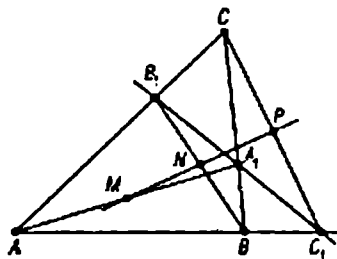
$$+b_1(\overline{c_1}-\overline{a_1})+b_1(\overline{c}-\overline{a})+c(\overline{a_1}-\overline{b})+c(\overline{a}-\overline{b_1})+c_1(\overline{a_1}-\overline{b_1})+c_1(\overline{a}-\overline{b})=0$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ბოლო ტოლობა მიიღება სამი A, B, C ; C, A, B ; A, B, C წერტილების კოლინეარულობის პირობების წევრ-წევრად შეკრებით.

ამ თეორემას, გაუსის თეორემა ეწოდება.



ნახ.32.



ნახ.33.

AB, BC, CA, A_1B_1 წრფეებით შედგენილ ფიგურას ეწოდება სრული ოთხკუთხედი, ხოლო AA_1, BB_1, CC_1 მონაკვეთებს ეწოდებათ მისი დიაგონალები. დამტკიცებული თეორემა შესაძლებელია ჩამოვაყალიბოთ ასე:

სრული ოთხკუთხედის დიაგონალების შუაწერტილები ერთ წრფეზე პევის. ამ წრფეს სრული ოთხკუთხედის გაუსის წრფე ეწოდება.

სიმსონის თეორემა. კოლინეარულია სამკუთხედის გვერდების შემცველ წრფეებზე მდებარე სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის წერტილების ორთოგონალური გეგმილები.

დამტკიცება. ვთქვათ, ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრია O , რომელიც ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს, ხოლო რადიუსია 1. სამკუთხედის წვეროთა აფიქსებია $A(a), B(b), C(c)$, M -წრეწი-

რის ნებისმიერი წერტილია. ვთქვათ, A_1, B_1, C_1 წერტილები M წერტილის გეგმილია შესაბამისად BC, CA და AB გვერდების შემცველ წრფეებზე. (ნახ.33).

მაშინ $A_1(a_1), B_1(b_1), C_1(c_1)$ წერტილების აფიქსები გამოითვლება ფორმულებით:

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(b + c + m - \frac{bc}{m} \right), b_1 = \frac{1}{2} \left(a + c + m - \frac{ac}{m} \right), c_1 = \frac{1}{2} \left(a + b + m - \frac{ab}{m} \right).$$

გამოვთვალოთ $\frac{a_1 - c_1}{b_1 - c_1}$. გვაქვს:

$$\frac{a_1 - c_1}{b_1 - c_1} = \frac{c - a - \frac{ab - bc}{m}}{c - b + \frac{ab - ac}{m}} = \frac{(c - a)(m - b)}{(c - b)(m - a)}.$$

A, B, C და M წერტილები ერთეულოვანი რადიუსის წრეწი-რის წერტილებია, ამიტომ მათი აფიქსებისათვის სამართლიანია ტოლობები:

$$\bar{a} = \frac{1}{a}, \bar{b} = \frac{1}{b}, \bar{c} = \frac{1}{c}, \bar{m} = \frac{1}{m}.$$

გამოვთვალოთ

$$\frac{\bar{a}_1 - \bar{c}_1}{\bar{b}_1 - \bar{c}_1}.$$

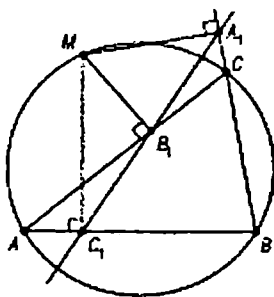
გვაქვს:

$$\frac{\bar{a}_1 - \bar{c}_1}{\bar{b}_1 - \bar{c}_1} = \frac{\left(\bar{c} - \bar{a} \right) \left(\bar{m} - \bar{b} \right)}{\left(\bar{c} - \bar{b} \right) \left(\bar{m} - \bar{a} \right)} = \frac{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{b} \right)}{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{a} \right)} =$$

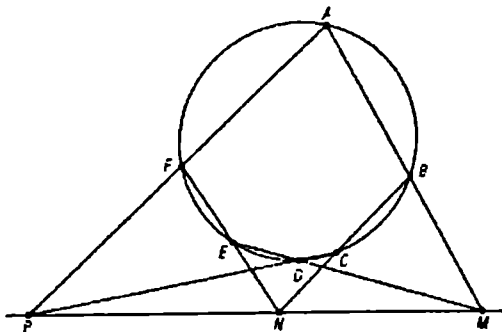
$$= \frac{(a-c)(b-m)}{(b-c)(a-m)} = \frac{(c-a)(m-b)}{(c-b)(m-a)} = \frac{a_1 - c_1}{b_1 - c_1}.$$

რაც ნიშნავს, რომ A_1, B_1, C_1 წერტილები კოლინეარულია. ამ წერტილებზე გავლებული წრფე წარმოადგენს წრეწირში ჩახაზული ABC სამკუთხედის სიმსონის წრფე M წერტილის მიმართ.

სამართლიანია ამ თეორემის შემრუნებული თეორემაც. კერძოდ:



ნახ.33.



ნახ.34.

თეორემა. რაიმე წერტილიდან სამკუთხედის გვერდების შემცველ წრფეებზე დაშვებული მართობების ფუძეები კოლინეარულია, მაშინ ეს წერტილი მოცემულ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრია.

დამტკიცება. $A_1(a_1), B_1(b_1), C_1(c_1)$ წერტილების აფიქსები გამოითვლება ფორმულებით:

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(b + c + m - \frac{bc}{m} \right), b_1 = \frac{1}{2} \left(a + c + m - \frac{ac}{m} \right), c_1 = \frac{1}{2} \left(a + b + m - \frac{ab}{m} \right).$$

რადგან A_1, B_1, C_1 წერტილები კოლინეარულია, ამიტომ ფარდობა

$$\frac{a_1 - c_1}{b_1 - c_1} = \frac{(c-a)(1-b\bar{m})}{(c-b)(1-a\bar{m})}$$

ნამდვილი რიცხვია. ამიტომ ეს რიცხვი მისი შუილლე-
ბულის ტოლია:

$$\frac{(c-a)(1-b\bar{m})}{(c-b)(1-a\bar{m})} = \frac{(\bar{c}-\bar{a})(1-\bar{b}m)}{(\bar{c}-\bar{b})(1-\bar{a}m)}.$$

საიდანაც,

$$\begin{aligned} \frac{1-\bar{m}b}{1-\bar{m}a} &= \frac{(c-b)(\bar{c}-\bar{a})(1-\bar{b}m)}{(c-a)(\bar{c}-\bar{b})(1-\bar{a}m)} = \frac{(c-b)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)(1-\bar{b}m)}{(c-a)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)(1-\bar{a}m)} = \\ &= \frac{(c-b)\frac{a-c}{ac}(1-\bar{b}m)}{(c-a)\frac{b-c}{bc}(1-\bar{a}m)} = \frac{b(1-\bar{b}m)}{a(1-\bar{a}m)} = \frac{b\left(1-\frac{m}{b}\right)}{a\left(1-\frac{m}{a}\right)} = \frac{b-m}{a-m}. \end{aligned}$$

ანუ,

$$\frac{1-\bar{m}b}{1-\bar{m}a} = \frac{b-m}{a-m}.$$

თუ ვისარგებლებთ პროპორციის თვისებით, გადა-
ვამრავლებთ წევრ-წევრად და მსგავს წევრებს შუიერ-
თებით, გვექნება:

$$\bar{m}m(a-b) - (a-b) = 0 \Rightarrow (a-b)(\bar{m}m - 1) = 0 \Rightarrow \bar{m}m = 1 \Rightarrow \bar{m} = \frac{1}{m}.$$

ეს ნიშნავს, რომ M წერტილი ეკუთვნის ABC
სამკუთხედზე შემოხაზულ $z\bar{z}=1$ ერთეულოვან წრე-
წირს.

პასკალის თეორემა. წრეწირში ჩახაზული ექვსკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების გადაკვეთის წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობს.

დამტკიცება. ვთქვათ, წრეწირში ჩახაზულია ექვსკუთხედი $ABCDEF$ და

$$AB \cap DE = M, BC \cap EF = N, CD \cap FA = P.$$

წრეწირის ცენტრი ჩავთვალოთ კოორდინატთა სისტემა, ხოლო რადიუსი 1-ის ტოლად (ნახ. 34).

გვაქვს:

$$\bar{m} = \frac{(a+b)-(d+e)}{ab-de}, \quad \bar{n} = \frac{(b+c)-(e+f)}{bc-ef}, \quad \bar{p} = \frac{(c+d)-(f+a)}{cd-fa}.$$

გამოვთვალოთ

$$\begin{aligned} \bar{m} - \bar{n} &= \frac{(a+b)-(d+e)}{ab-de} - \frac{(b+c)-(e+f)}{bc-ef} = \\ &= \frac{(a+b-d-e)(bc-ef) - (b+c-e-f)(ab-de)}{(ab-de)(bc-ef)}. \end{aligned}$$

თუ გადავამრავლებთ ფრჩხილებში მოთავსებულ გამოსახულებას და შევადერთებთ მსგავს წევრებს, მივიღებთ:

$$\bar{m} - \bar{n} = \frac{(b-e)(bc-ef+ed+af-cd-ab)}{(ab-de)(bc-ef)}.$$

ანალოგიურად,

$$\begin{aligned} \bar{n} - \bar{p} &= \frac{(b+c)-(e+f)}{bc-ef} - \frac{(c+d)-(f+a)}{cd-fa} = \\ &= \frac{(b+c-e-f)(cd-fa) - (c+d-f-a)(bc-ef)}{(ab-de)(bc-ef)}. \end{aligned}$$

აქაც, თუ გადავამრავლებთ ფრჩხილებში მოთვსებული გამოსახულებას და შევაერთებთ მსგავს წევრებს, მივიღებთ:

$$\frac{\bar{n} - \bar{p}}{n - p} = \frac{(c-f)(cd+ab-af-ed-bc+ef)}{(bc-ef)(cd-fa)}.$$

ამიტომ გვაქვს,

$$\frac{\bar{m} - \bar{n}}{n - p} = \frac{(b-e)(bc-ef+ed+af-cd-ab)}{(ab-de)(bc-ef)}.$$

$$\therefore \frac{(c-f)(cd+ab-af-ed-bc+ef)}{(bc-ef)(cd-fa)} = \frac{(b-e)(bc-ef)}{(c-f)(ab-de)}.$$

რადგან A, B, C, D, E, F წერტილები წრეწირის წერტილებია, ამიტომ

$$\bar{a} = \frac{1}{a}, \bar{b} = \frac{1}{b}, \bar{c} = \frac{1}{c}, \bar{d} = \frac{1}{d}, \bar{e} = \frac{1}{e}, \bar{f} = \frac{1}{f}.$$

ამიტომ, თუ გავითვალისწინებთ ამ დამოკიდებულებებს, გვექნება:

$$\begin{aligned} \frac{m-n}{n-p} &= \frac{(\bar{b}-\bar{e})(\bar{c}\bar{d}-\bar{f}\bar{a})}{(\bar{c}-\bar{f})(\bar{a}\bar{b}-\bar{d}\bar{e})} = \frac{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{1}{d}-\frac{1}{f}\frac{1}{a}\right)}{\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{f}\right)\left(\frac{1}{a}\frac{1}{b}-\frac{1}{d}\frac{1}{e}\right)} = \\ &= \frac{(e-b)(fa-cd)}{(f-c)(de-ab)} = \frac{(b-e)(cd-fa)}{(c-f)(ab-de)} = \frac{\bar{m}-\bar{n}}{\bar{n}-\bar{p}}. \end{aligned}$$

მივიღეთ, რომ $\frac{\bar{m}-\bar{n}}{\bar{n}-\bar{p}}$ რიცხვი თავისი შეუღლებული

ბულის ტოლია, რაც ნიშნავს, რომ M, N და P წერტილები კოლინეარულია.

მონჟის თეორემა. $ABCD$ ჩახაზულ ოთხკუთხედში წრფეები, რომლებიც გვერდების და დიაგონალების შუაწერტილებზე გადიან მოპირდაპირე გვერდების ან დიაგონალის მართობულად, ერთ წერტილში გადაიკვეთება, რომელსაც ამ ოთხკუთხედის მონჟის წერტილი ეწოდება.

დამტკიცება. ოთხკუთხედის გვერდების მართობე-
ბი, რომლებიც მის შუაწერტილებზე გადის, გადაიკვე-
თება ოთხკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრში.
მივიღოთ ოთხკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენ-
ტრი კოორდინატთა სათავედ, ხოლო მისი რადიუსი
ჩავთვალოთ ერთეულის ტოლად. ყოველი $M(z)$ წერტი-
ლისათვის, რომელიც AB შუამართობზე მდებარეობს

რიცხვი $\frac{z - \frac{1}{2}(a+b)}{a-b}$ -სუფთა წარმოსახვითია. კერძოდ,

როცა $z=0$ ის ტოლია $-\frac{a+b}{2(a-b)}$. ანალოგიურად, CD

მონაკვეთის შუაწერტილზე გამავალი AB გვერდის
მართობული $N(z)$ წერტილებისათვის და მხოლოდ

მათთვის რიცხვი $\frac{z - \frac{1}{2}(c+d)}{a-b}$ იქნება სუფთა წარმო-

სახვითი რიცხვი. როცა $z = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$, მაშინ $\frac{a+b}{2(a-b)}$

სუფთა წარმოსახვითი რიცხვია. ცხადია, რომ E წერ-
ტილი აფიქსით $\frac{1}{2}(a+b+c+d)$ ძევს მოცემულ წრეზე.

რადგან $\frac{1}{2}(a+b+c+d)$ გამოსახულება სიმეტრიულია a, b, c, d ასოების განლაგების მიმართ, ამიტომ ანალოგიურად აგებული ხუთი წრფეც გადის E წერტილზე. თეორემა დამტკიცებულია.

დეზარგის თეორემა. თუ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები ისეა განლაგებული, რომ AA_1, BB_1, CC_1 წრფეები გადაიკვეთებიან ერთ წერტილში ან პარალელური არიან, მაშინ შესაბამისი გვერდების გადაკვეთის წერტილები

$$P = AB \cap A_1B_1, Q = BC \cap B_1C_1, R = CA \cap C_1A_1,$$

ან კოლინეარულია, ან ორი შესაბამისი გვერდი პარალელურია წრფის, რომელიც დანარჩენი გვერდების გადაკვეთის წერტილებზე გამავალ წრფეს აერთებს ან სამკუთხედების შესაბამისი გვერდები პარალელურია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $AA_1 \cap BB_1 \cap C_1C_1 = S$ (ნახ.35). მივიღოთ S წერტილი სათავედ. მაშინ შეგვიძლია ჩავთვალოთ:

$$a_1 = \alpha a, \quad b_1 = \beta b, \quad c_1 = \gamma c.$$

სადაც α, β, γ ნულისაგან განსხვავებული ნამდვილი რიცხვებია. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\alpha \neq \beta \neq \gamma$. რადგან P, A_1, B_1 წერტილები კოლინეარულია, გვაქვს:

$$p = \lambda a_1 + (1 - \lambda) b_1 = \lambda \alpha a + (1 - \lambda) \beta b.$$

რადგან $\lambda = \bar{\lambda}$ და $\lambda \alpha + (1 - \lambda) \beta = 1$, საიდანაც

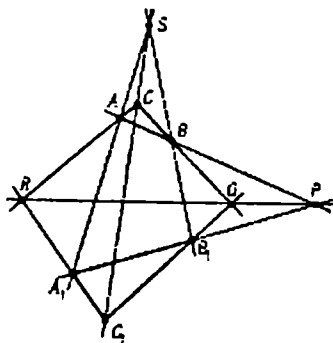
$$\lambda = \frac{1 - \beta}{\alpha - \beta} \Rightarrow 1 - \lambda = \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta}.$$

ამიტომ,

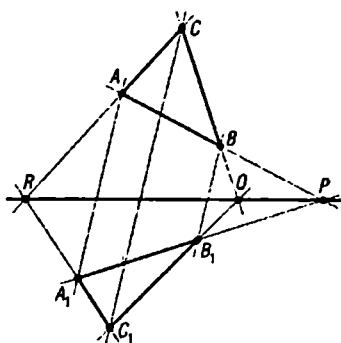
$$p = \frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha-\beta}a + \frac{\beta(\alpha-1)}{\alpha-\beta}b.$$

ანუ,

$$p(\alpha-\beta) = \alpha(1-\beta)a + \beta(\alpha-1)b.$$



ნახ.35.



ნახ.36.

a, b, c ასოების და α, β, γ კოეფიციენტების წრიული გადანაცვლებით მივიღებთ:

$$(\beta-\gamma)q = \beta(1-\gamma)b + \gamma(\beta-1)c,$$

$$(\gamma-\alpha)r = \gamma(1-\alpha)c + \alpha(\gamma-1)a.$$

უკანასკნელი სამი ტოლობა გავამრავლოთ შესაბამისად $1-\gamma, 1-\alpha, 1-\beta$ -ზე და შემდეგ შევკრიბოთ. მივიღებთ:

$$(\alpha-\beta)(1-\gamma)P + (\beta-\gamma)(1-\alpha)Q + (\gamma-\alpha)(1-\beta)R = 0.$$

შევნიშნოთ, რომ p, q, r სიდიდეების კოეფიციენტების ჯამი 0-ის ტოლია. მართლაც,

$$\begin{aligned} &(\alpha-\beta)(1-\gamma) + (\beta-\gamma)(1-\alpha) + (\gamma-\alpha)(1-\beta) = \\ &= \alpha - \alpha\gamma - \beta + \beta\gamma + \beta - \gamma - \alpha\beta + \alpha\gamma + \gamma - \alpha - \beta\gamma + \alpha\beta = 0 \end{aligned}$$

რაც ნიშნავს, რომ p, Q, R წერტილები კოლინეარულია.

თუ $\alpha = \beta \neq \gamma$, მაშინ $a_1 - b_1 = \alpha(a - b)$ ($\alpha = \bar{\alpha}$), ამიტომ $A_1B_1 \parallel AB$. P წერტილი არ არსებობს. მაშინ ეს წრფეები QR წრფის პარალელურია. მართლაც, როცა $\alpha = \beta$, გვაქვს:

$$(\alpha - \gamma)q = \alpha(1 - \gamma)b + \gamma(\alpha - 1)c,$$

$$(\gamma - \alpha)q = \gamma(1 - \alpha)c + \alpha(\gamma - 1)a.$$

ამ ტოლობების შეკრებით მივიღებთ:

$$(\alpha - \gamma)(q - r) = \alpha(1 - \gamma)(b - a).$$

რადგან ფარდობა:

$$\frac{q - r}{b - a} = \frac{\alpha(1 - \gamma)}{\alpha - \gamma}$$

ნამდვილი რიცხვია, ამიტომ $QR \parallel AB$.

როცა $\alpha = \beta = \gamma$, მაშინ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები ჰომოთეტურია.

განვიხილოთ თეორემის პირობის მეორე შემთხვევა, როცა AA_1, BB_1, CC_1 წრფეები პარალელურია. მაშინ ჩატარებული მტკიცება აზრს კარგავს, რადგან P წერტილი არ არსებობს. რადგან არსებობს P წერტილი (ნახ.35), ამიტომ ჩავთვალოთ ის კოორდინატა სათავედ. მიღებული კონფიგურაცია იმეორებს ზემოთ განხილულ $\alpha = \beta \neq \gamma$ შემთხვევას. ამიტომ მტკიცების პროცესს აქ აღარ გავიმეორებთ.

ანალოგიური მსჯელობით შესაძლებელია დავამტკიცოთ თეორემა.

მენელაის თეორემა. იმისათვის, რომ ABC სამკუთხედის BC, CA და AB გვერდებზე შესაბამისად მდებარე A_1, B_1, C_1 წერტილები კოლინეარული იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ შესრულდეს პირობა:

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = -1.$$

ამ თეორემის დამტკიცება მკითხველისათვის მიგვინდვია.

§1.33. შვარცის სიმაღლითი სამკუთხედი

განვიხილოთ ასეთი ამოცანა: მოცემულ მახვილკუთხა სამკუთხედში ჩავხაზოთ მიწიმაღური პერიმეტრის მქონე სამკუთხედი. ეს ამოცანა ცნობილ გერმანელ მათემატიკოსს, ბერლინის უნივერსიტეტის პროფესორს გერმან ამაღელუს შვარცს (1843-1921) ეკუთვნის.

შემდგომში ჩვენ დავრწმუნდებით, რომ არსებობს მხოლოდ ერთი საძიებელი სამკუთხედი: სახელდობრ მის წვეროებს წარმოადგენენ მოცემული სამკუთხედის სიმაღლეების ფუძეები. შევთანხმდეთ, ასეთ სამკუთხედს სიმაღლითი სამკუთხედი ვუწოდოთ.

შვარცმა სიმაღლითი სამკუთხედის მინიმალურობის თვისება დაამტკიცა ჰერონის პრინციპის გამოყენებით. ყოველ P, Q, R წვეროში (ნახ.37) სიმაღლითი სამკუთხედის ორი გვერდი ერთნაირ კუთხეებს ადგენენ მოცემული სამკუთხედის გვერდთან. კერძოდ, ყოველი ამ კუთხეთაგანი უდრის მოცემული

სამკუთხედის მოპირდაპირე წვეროსთან მდებარე კუთხეს. მაგალითად, თითოეული ARQ და BRP კუთხე C კუთხის ტოლია, BPR და CPQ კუთხეები A კუთხის ტოლია. დავამტკიცოთ ეს.

მართლაც, რადგან OPB და ORB კუთხეები მართია, ამიტომ $OPBR$ ოთხკუთხედზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა. მაშასადამე $\angle PBO = \angle PRO$, რადგან ეს კუთხეები ეყრდნობა მოცემული წრეწირის ერთსა და იმავე რკალს. მაგრამ

$$\angle C + \angle PBO = 90^\circ,$$

ხოლო

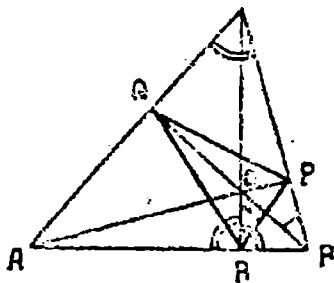
$$\angle PBO + \angle PRB = 90^\circ$$

ე.ი.

$$\angle PRB = \angle C.$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$\angle QRA = \angle C.$$

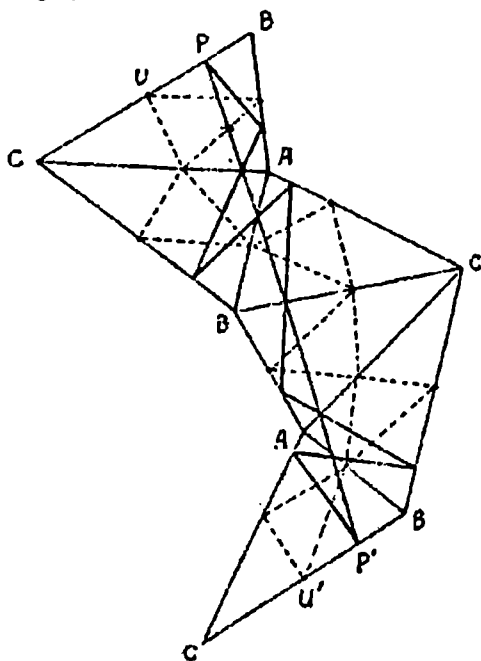


ნახ. 37

დავამტკიცოთ სიმაღლითი სამკუთხედის პერიმეტრის მინიმალურობის თვისება.

ვთქვათ ABC სამკუთხედში სიმაღლით სამკუთხედთან ერთად ჩახაზულია მეორე UVW სამკუთხედი. განვიხილოთ ამ ფიგურის სიმეტრიული ფი-

გურა ABC სამკუთხედის AC გვერდის მიმართ. შემდეგ მიღებული ფიგურის სიმეტრიული ფიგურა AB გვერდის მიმართ, შემდეგ BC გვერდის მიმართ, შემდეგ AC გვერდის მიმართ და ბოლოს AB გვერდის მიმართ. ამრიგად ჩვენ მივიღებთ ექვს ტოლ სამკუთხედს, ამასთან ყოველ მათგანში მოთავსებული იქნება სიმალლითი სამკუთხედი და მეორე ჩახაზული სამკუთხედი. (ნახ. 38).



ნახ. 38.

ბოლო სამკუთხედის BC გვერდი პარალელურია პირველი სამკუთხედის BC გვერდისა. მართლაც, პირველად AC გვერდის მიმართ სიმეტრიის დროს BC გვერდი საათის ისრის მიმართულებით მობრუნდება $2C$ კუთხით, შემდეგ ისევ საათის ისრის მიმა-

შემთხვევაში მიიღწევა. ადვილი საჩვენებლია, რომ სხვა ჩახაზული იმავე პერიმეტრის მქონე სამკუთხედი არ არსებობს. გამოვთვალოთ სიმაღლითი სამკუთხედის პერიმეტრი. რისთვისაც ვისარგებლოთ კომპლექსური რიცხვებით. ვთქვათ A, B, C წერტილების აფიქსებია შესაბამისად

$$Rz_1, Rz_2, Rz_3, |z_1| = |z_2| = |z_3|,$$

R არის ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

დავწეროთ AC წრფის განტოლება. გვაქვს:

$$\begin{aligned} z - Rz_1 &= -z_1 z_3 (\bar{z} - \overline{Rz_1}), \\ z + z_1 z_3 \bar{z} &= Rz_1 + Rz_3. \end{aligned} \quad (1)$$

შევადგინოთ B წერტილზე გამავალი AC წრფის მართობული განტოლება:

$$\begin{aligned} z - Rz_2 &= -z_1 z_3 (\bar{z} - \overline{Rz_2}), \\ z - z_1 z_3 \bar{z} &= Rz_2 - Rz_1 z_3 \bar{z}_2. \end{aligned} \quad (2)$$

(1) და (2) განტოლებების ამოხსნით ვიპოვით Q წერტილის q აფიქსს. გვაქვს:

$$q = \frac{1}{2} (\sigma_1 - z_1 \bar{z}_2 z_3), \quad \sigma_1 = z_1 + z_2 + z_3.$$

ანალოგიურად ვიპოვით R და P წერტილების r და p აფიქსებს.

$$r = \frac{1}{2} (\sigma_1 - z_2 \bar{z}_1 z_3), \quad p = \frac{1}{2} (\sigma_1 - z_1 \bar{z}_3 z_2);$$

ცხადია.

$$RQ^2 = \frac{1}{2} R (\bar{z}_1 z_2 z_3 - \bar{z}_2 z_1 z_3) \cdot \frac{1}{2} R (\bar{z}_2 z_1 \bar{z}_3 - \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_3) =$$

$$= \frac{R^2}{4} (\overline{z_1 z_2 z_3} - \overline{z_2 z_1 z_3}) \cdot (\overline{z_2 z_1 z_3} - \overline{z_1 z_2 z_3}).$$

თუ მოვახდენთ საჭირო გარდაქმნებს, მივიღებთ:

$$RQ^2 = \frac{R^2}{4} \left[2 - (z_1^2 \overline{z_2^2} + z_2^2 \overline{z_1^2}) \right]. \quad (3)$$

ანალოგიურად

$$RP^2 = \frac{R^2}{4} \left[2 - (z_3^2 \overline{z_1^2} + z_1^2 \overline{z_3^2}) \right],$$

$$PQ^2 = \frac{R^2}{4} \left[2 - (z_3^2 \overline{z_2^2} + z_2^2 \overline{z_3^2}) \right].$$

მაგრამ

$$BC^2 = a^2 = (Rz_2 - Rz_3)(R\overline{z_2} - R\overline{z_3}) = R^2 \left[2 - (z_2 \overline{z_3} + \overline{z_2} z_3) \right]$$

საიდანაც

$$\overline{z_2 z_3} + \overline{z_2 z_3} = 2 - \frac{a^2}{R^2};$$

ანალოგიურად,

$$z_3 \overline{z_1} + \overline{z_3} z_1 = 2 - \frac{b^2}{R^2},$$

$$z_2 \overline{z_1} + \overline{z_2} z_1 = 2 - \frac{c^2}{R^2};$$

(3) ტოლობა გარდავქმნათ და გავითვალისწინოთ
(4), გვექნება:

$$\begin{aligned} RQ^2 &= \frac{R^2}{4} \left[4 - (z_1^2 \overline{z_2^2} + z_2^2 \overline{z_1^2} + 2) \right] = \\ &= \frac{R^4}{4} \left[4 - (z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1})^2 \right] = \frac{R^2}{4} \left[4 - \left(2 - \frac{c^2}{R^2} \right) \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{R^2}{4} \left(4 - 4 + \frac{4c^2}{R^2} - \frac{c^4}{R^4} \right) = c^2 - \frac{c^4}{4R^4} = c^2 \left(1 - \frac{c^2}{4R^2} \right);$$

მაგრამ სინუსების თეორემის ძალით

$$\frac{c^2}{4R^2} = \sin^2 C,$$

ამიტომ

$$RQ^2 = c^2 (1 - \sin^2 c) = c^2 \cos^2 C = 4R^2 \sin^2 C \cdot \cos^2 C = R^2 \sin^2 2C;$$

საიდანაც

$$RQ = R \sin 2C;$$

ანალოგიურად

$$RP = R \sin 2B,$$

$$PQ = R \sin 2A;$$

PQR სიმაღლითი სამკუთხედის პერიმეტრი იქნება:

$$\begin{aligned} p &= RQ + PR + PQ = R(\sin 2C + \sin 2B + \sin 2A) = \\ &= R(2 \sin(B+C) \cos(B-C) + \sin(360^\circ - (2B+2C))) = \\ &= R(2 \sin(B+C) \cos(B-C) + \sin(2B+2C)) = \\ &= R(2 \sin(B+C) \cos(B-C) + 2 \sin(B+C) \cos(B+C)) = \\ &= 2R \sin(B+C)(\cos(B-C) - \cos(B+C)) = 4R \sin A \sin B \sin C. \end{aligned}$$

$$p = 4R \sin A \sin B \sin C.$$

ამ ამოცანის ამოხსნის დროს ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ A, B, C კუთხეები მახვილი იყო. რა მოხდება იმ შემთხვევაში, როცა სამკუთხედის ერთ-ერთი კუთხე, ვთქვათ C კუთხე ბლაგვია? (ნახ. 39). მაშინ P და Q წერტილები მოთავსებული იქნება

სამკუთხედის გარეთ. ამიტომ, მკაცრად თუ ვიტყვით სიმაღლითი სამკუთხედი უკვე არ შეიძლება ჩავთვალოთ მოცემულ სამკუთხედში ჩახაზულად თუ არ გვექნება წინასწარი შეთანხმება. ადვილი საჩვენებელია, რომ 39-ე ნახაზზე გამოსახულ PQR სამკუთხედს მინიმალური პერიმეტრი არა აქვს, მაგრამ ბლაგვკუთხა სამკუთხედების სიმაღლითი სამკუთხედებს გააჩნიათ ექსტრემალური თვისება, კერძოდ $p+q-r$ სახის გამოსახულებებისათვის, სადაც r -ჩახაზული სამკუთხედის ის გვერდია, რომელიც ბლაგვ კუთხეს შეესაბამება, უზრუნველყოფს მინიმალის სტაციონალურ მნიშვნელობას. ჩვენს შემთხვევაში $r=PQ$.

§1.34. გეომეტრიული გარდაქმნები

განსაზღვრება 1. ორ M და M' წერტილებს I წრფის მიმართ სიმეტრიული ეწოდება, თუ ისინი I წრფის პერპენდიკულარულ წრფეს ეკუთვნიან და ეს წრფე MM' მონაკვეთს შუაზე ყოფს. წერტილი, რომელიც I წრფეს ეკუთვნის ემთხვევა თავის სიმეტრიულ წერტილს.

განსაზღვრება 2. ღერძული სიმეტრია ეწოდება გარდაქმნას, რომლის დროსაც I წრფეზე არამდებარე ყოველ M წერტილს შეესაბამება M' წერტილი, რომელიც სიმეტრიულია I წრფის მიმართ. I წრფის წერტილები ემთხვევა თავის სიმეტრიულ წერტილებს.

ვიპოვოთ M' წერტილის $z' = F(z)$ აფიქსი, რომელიც $M(z)$ წერტილის სიმეტრიულია ნამდვილი ღერძის მიმართ.

რადგან წერტილებს, რომლებიც Ox ღერძის სიმეტრიულია, შეესაბამებათ შეუღლებული კომპლექსური რიცხვები, ამიტომ $z' = \bar{z}$. პირიქით, თუ M' წერტილის აფიქსია $z' = \bar{z}$, მაშინ $M(z)$ და $M'(\bar{z})$ წერტილები სიმეტრიული წერტილებია ნამდვილი ღერძის მიმართ.

Ox ღერძის მიმართ სიმეტრია ჩაიწერება ასე:

$$F(z) = \bar{z}.$$

თეორემა 1. წრფის მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნას, რომელიც კოორდინატთა სათავეზე გადის აქვს სახე:

$$F(z) = \bar{z}(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi).$$

სადაც φ არის I წრფესა და ნამდვილ ღერძს შორის კუთხე.

დამტკიცება. ცხადია, $OM = OM_1 = OM'$ ვექტორთა სიგრძეები ტოლია. რომ მივიღოთ OM' ვექტორი, საკმარისია OM ვექტორი მოვაბრუნოთ საათის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით 2φ კუთხით (ნახ.40). ე.ი. M' წერტილის აფიქსი მიიღება M წერტილის აფიქსის გამრავლებით $\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითად, წარმოსახვითი ღერძის მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნა ჩაიწერება ასე:

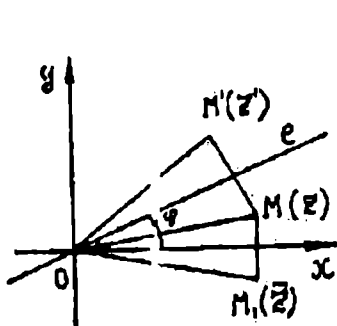
$$F(z) = -\bar{z}.$$

თეორემა 2. ღერძული სიმეტრია მოძრაობაა.

დამტკიცება. კოორდინატთა სათავე ისე შევარჩიოთ, რომ I ღერძი დაემთხვეს აბსცისათა ღერძს. მაშინ განსახილავი გარდაქმნა იქნება აბსცისათა ღერძის მიმართ სიმეტრია, ე.ი. ჩაიწერება $F(z) = \bar{z}$ ფორმულით. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს AB მონაკვეთი, რომლის ბოლოების აფიქსებია $A(z_1)$ და $B(z_2)$. მაშინ $F(z) = \bar{z}$ გარდაქმნით $A(z_1)$ წერტილი აისახება $A'(\bar{z}_1)$ წერტილში, ხოლო $B(z_2)$ კი, $B(\bar{z}_2)$ წერტილში. ცხადია,

თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცება. ვთქვათ,



Биб. 40.

რადგან $F(z) = \bar{z}$. ამიტომ A' წერტილის აფიქსია $\bar{z}$, ხოლო $G(z) = \bar{\bar{z}} = z$. ამიტომ A'' წერტილის აფიქსი იქნე-

ბა Z . ამრიგად, A და A' წერტილებს ერთი და იგივე აფიქსები აქვთ. ამიტომ ისინი ერთმანეთს ემთხვევიან და ჩვენ საქმე გვაქვს იგივე გარდაქმნასთან.

თეორემა დამტკიცებულია.

ამოცანა 1. ვთქვათ, ABC სამკუთხედის წვეროთა აფიქსებია $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$. განვიხილოთ ამ სამკუთხედის სიმეტრიული $A'B'C'$ სამკუთხედი ნამდვილი ღერძის მიმართ. ვაჩვენოთ, რომ ABC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილი (ცენტროიდი) $A'B'C'$ სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილის (ცენტროიდის) სიმეტრიულია.

ადვილი საჩვენებელია, რომ ABC სამკუთხედის ცენტროიდის აფიქსია $\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$. $A'B'C'$ სამკუთხედის წვეროთა აფიქსებია: $A'(\overline{z_1}), B'(\overline{z_2}), C'(\overline{z_3})$. ამიტომ, $\frac{1}{3}(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3})$ არის $A'B'C'$ სამკუთხედის ცენტროიდის აფიქსი. ე.ი. ABC სამკუთხედის ცენტროიდი $A'B'C'$ სამკუთხედის ცენტროიდის სიმეტრიულია ნამდვილი ღერძის მიმართ.

განსაზღვრება 3. M' წერტილს ეწოდება M წერტილის სიმეტრიული O ცენტრის მიმართ, თუ O არის MM' მონაკვეთის შუაწერტილი. O წერტილი ითვლება თავისი თავის სიმეტრიულ წერტილად.

განსაზღვრება 4. ცენტრული სიმეტრია ეწოდება გარდაქმნას, რომლის დროსაც O წერტილისაგან განსხვავებულ ყოველ M წერტილს შეესაბამება O წერტი-

ლის მიმართ სიმეტრიული M' წერტილი. O ცენტრი თავისი თავის სიმეტრიულია.

M და M' წერტილებს, რომლებიც კოორდინატა სათავის მიმართ სიმეტრიულია, აქვთ აფიქსები: $M(z)$ და $M'(-z)$. პირიქით, თუ M' წერტილის აფიქსია $-z$, მაშინ $M(z)$ და $M'(-z)$ წერტილები კოორდინატა სათავის მიმართ სიმეტრიულია, ამიტომ სიმეტრიის $F(z)$ გარდაქმნა $(0,0)$ წერტილის მიმართ ჩაიწერება სახით:

$$F(z) = -z.$$

თეორემა 4. $A(a)$ წერტილის მიმართ ცენტრული სიმეტრიის $F(z)$ გარდაქმნა ჩაიწერება სახით:

$$F(z) = 2a - z$$

დამტკიცება. $A(a)$ წერტილი MM' მონაკვეთის შუა-წერტილია (ნახ. 41).

$$a = \frac{z_1 + z}{2}.$$

საიდანაც,

$$z' = 2a - z.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5. წერტილის მიმართ სიმეტრია მოძრაობაა

დამტკიცება. კოორდინატა სისტემა ისე შევარჩიოთ, რომ კოორდინატა სათავე დაემთხვეს სიმეტრიის ცენტრს. ვთქვათ, A' და B' წერტილები $A(z_1)$ და $B(z_2)$ წერტილების სიმეტრიული წერტილებია კოორდინატა სათავის მიმართ, მაშინ $A'(-z_1)$ და $B'(-z_2)$. ხოლო AB და $A'B'$ ვექტორების აფიქსებია შესაბამისად $z_2 - z_1$ და $(-z_2) - (-z_1)$, მაგრამ

$$AB = |z_2 - z_1| = |-(z_2 - z_1)| = A'B'.$$

თეორემა 6. ერთი და იმავე ცენტრის მიმართ მიმდევრობით შესრულებული ორი სიმეტრიის გარდაქმნა იგივე გარდაქმნაა.

დამტკიცება. O წერტილი ჩავთვალოთ კოორდინატთა სათავედ. ვთქვათ,

$$M(z) \rightarrow M'(z) \rightarrow M''(z).$$

მაშინ, რადგან $F(z) = -z$, ამიტომ M' წერტილის აფიქსია $-z$, ხოლო $G(-z) = -(z) = z$. ცხადია, M'' წერტილის აფიქსია z . ამრიგად, M და M'' წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა.

თეორემა დამტკიცებულია.

ამოცანა 2. ვთქვათ, $ABCD$ პარალელოგრამის სიმეტრიის ცენტრია O წერტილი. M, N, P და Q წერტილები OAB, OBC, OBD, ODA სამკუთხედების ცენტროიდებია შესაბამისად. დავამტკიცოთ, რომ $MNPQ$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

ვთქვათ, პარალელოგრამის სიმეტრიის ცენტრი ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს. პარალელოგრამის A და C , B და D წვეროების სიმეტრიულობის გამო გვექნება:

$$A(z_1), B(-z_1), C(z_2), D(-z_2).$$

M, N, P და Q ცენტროიდების აფიქსები შესაბამისად ტოლია:

$$\frac{z_1 + z_2}{3}, \frac{z_2 - z_1}{3}, \frac{-z_1 - z_2}{3}, \frac{z_1 - z_2}{3}.$$

ხოლო,

$$NM = \frac{2}{3}z_1, PQ = \frac{2}{3}z_1.$$

ე.ი. $NM = PQ$, ამიტომ $NMPQ$ ოთხკუთხედი პარალელ-
ლოგრამია.

განსაზღვრება 5. პარალელური გადატანა ეწოდება
გარდაქმნას, რომლის დროსაც სიბრტყის ყოველ M
წერტილს შეესაბამება ისეთი M' წერტილი, რომ

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OA}.$$

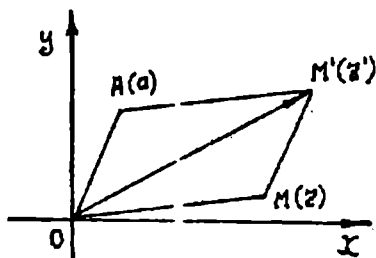
$\overrightarrow{OA}$ არის ამავე სიბრტყეში მდებარე ვექტორი.

ამრიგად, პარალელური გადატანის დროს სიბრტყის
ყოველი წერტილი გადაადგილდება ერთსა და იმავე
მანძილზე ერთი და იმავე მიმართულებით.

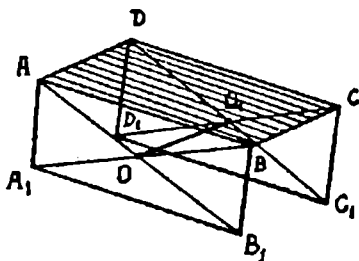
M' წერტილის z' აფიქსი, რომელიც მიიღება $M(z)$
წერტილისაგან პარალელური გადატანით ტოლია $z+a$,
სადაც $z = \overrightarrow{OA}$ (ნახ. 42). პირიქით, თუ M' წერტილის z'
აფიქსი $z+a$ -ს ტოლია, მაშინ M' წერტილი მიიღება
 $M(z)$ წერტილისაგან პარალელური გადატანით.

$$F(z) = z + a$$

წარმოადგენს პარალელური გადატანის კომპლექსურ
ფორმას.



ნახ. 42.



ნახ. 43.

თეორემა 7. პარალელური გადატანა მოძრაობაა.

დამტკიცება. მართლაც, ვთქვათ, მოცემულია AB მონაკვეთი $A(z_1), B(z_2)$ მაშინ AB მონაკვეთის სიგრძეა $|z_2 - z_1|$. $F(z) = z + a$ პარალელური გადატანისას

$$A(z_1) \rightarrow A'(a + z_1), B(z_2) \rightarrow B'(a + z_2)$$

ცხადია,

$$A'B' = |(z_2 + a) - (z_1 + a)| = |z_2 - z_1| = AB.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 8. მიმდევრობით შესრულებული ორი პარალელური გადატანის შედეგი პარალელური გადატანაა ან იგივეური გარდაქმნაა.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$A(z) \rightarrow A'(z') \rightarrow A''(z'')$$

რადგან $F(z) = z + a$, ამიტომ $A'(z + a)$, მაგრამ

$$G(z + b) = z + a + b = z + c, c = a + b.$$

ამიტომ $A''(z + c)$. ამრიგად, A'' წერტილი მიიღება A წერტილისაგან $a + b$. ვექტორის გადატანით.

თეორემა დამტკიცებულია.

ამოცანა 3. $ABCD$ პარალელოგრამის AB და CD გვერდებზე აგებულია პარალელოგრამები. AB გვერდზე პარალელოგრამის გარეთ, CD გვერდზე კი იმ მხარეს, რომელზეც თვით $ABCD$ პარალელოგრამია. დაამტკიცეთ, რომ აგებული პარალელოგრამის სიმეტრიის ცენტრებს შორის მანძილი BC გვერდის ტოლია.

ვთქვათ, პარალელოგრამის წვეროებია

$$A(z_1), B(z_2), C(z_3), D(z_4)$$

ამასთან, $z_4 = z_1 + z_3 - z_2$. (ნახ. 43).

რადგან A_1, B_1, C_1, D_1 წერტილები მიიღება A, B, C, D წერტილების პარალელური გადატანით, ამიტომ

$$AA_1, BB_1 = CC_1 = DD_1 = a,$$

სადაც a რაიმე ვექტორია.

ვთქვათ, $a = (z)$. ამიტომ

$$A_1(z_1 + z), B_1(z_2 + z), C_1(z_3 + z), D_1(z_1 + z_3 - z_2 + z),$$

ხოლო პარალელოგრამების სიმეტრიის O და O_1 წერტილების აფიქსებია

$$O\left(\frac{z_1 + z_2 + z}{2}\right) \text{ და } O_1\left(\frac{z_1 + 2z_2 - z_3 + z}{2}\right).$$

საიდანაც:

$$\overline{OO_1} = z_3 - z_2 = \overline{BC} \Leftrightarrow |\overline{OO_1}| = |\overline{BC}|.$$

განსაზღვრება 6. O წერტილის გარშემო მობრუნება ორიენტირებული α კუთხით ეწოდება გარდაქმნას, რომლის დროსაც მოცემული სიბრტყის ყოველ M წერტილს შეესაბამება იმავე სიბრტყის ისეთი M' წერტილი, რომ

$$OM = OM' \text{ და } \angle MOM' = \alpha.$$

O წერტილს ეწოდება მობრუნების ცენტრი, ხოლო α კუთხეს, მობრუნების კუთხე. O წერტილს შეესაბამება თავისი თავი.

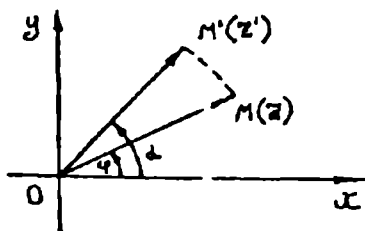
ვთქვათ, დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის სათავე ემთხვევა მობრუნების ცენტრს. მაშინ M წერტილს შეესაბამება რაიმე

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

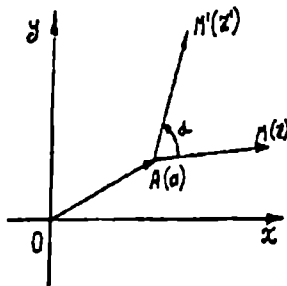
კომპლექსური რიცხვი. (ნახ. 44).

z რიცხვის $\cos\alpha + i\sin\alpha$ კომპლექსურ რიცხვზე გამრავლების შედეგად მივიღებთ რიცხვს

$$r(\cos(\varphi+\alpha) + i\sin(\varphi+\alpha)).$$



ნახ. 44.



ნახ. 45.

გეომეტრიულად ეს ნიშნავს, რომ მოცემული z რიცხვის $\cos\alpha + i\sin\alpha$ კომპლექსურ რიცხვზე გამრავლების შედეგად z რიცხვის შესაბამისი OM ვექტორი უნდა მოვაბრუნოთ საათის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით α კუთხით.

ამრიგად, კომპლექსური რიცხვების გამოყენებით კოორდინატთა სათავის მიმართ მობრუნება ჩაიწერება სახით:

$$F(z) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

თეორემა 9. α კუთხით მობრუნება ნებისმიერი $A(a)$ ცენტრის გარშემო ჩაიწერება სახით:

$$F(z) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(z-a) + a.$$

დამტკიცება. $AM' = z' - a$ (ნახ. 45). მეორეს მხრივ

$$\overline{AM'} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(z-a).$$

ამიტომ

$$z' = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(z - a) + a.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 10. მობრუნება მოძრაობაა.

დამტკიცება. ვთქვათ, კოორდინატთა O სათავე ემთხვევა მობრუნების ცენტრს. α მობრუნების კუთხეა. A და A' , B და B' შესაბამისი წერტილთა წყვილებია. თუ A და B წერტილების აფიქსებია შესაბამისად z_1 და z_2 , მაშინ A' და B' წერტილების აფიქსებია შესაბამისად $z_1(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ და $z_2(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. მაგრამ $\overline{AB} = z_2 - z_1$ და

$$\overline{A'B'} = (z_2 - z_1)(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

ცხადია, რომ

$$|AB| = |z_2 - z_1| = |(z_2 - z_1)(\cos \alpha + i \sin \alpha)| = |A'B'|.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 11. კოორდინატთა სათავეს მიმართ ორი მიმდევრობით შესრულებული მობრუნების შედეგი მობრუნებაა, ან იგივე გარდაქმნაა.

დამტკიცება. ვთქვათ, გვაქვს

$$A(z) \rightarrow A'(z') \rightarrow A''(z'')$$

მაგრამ,

$$F(z) = r(\cos \alpha + i \sin \alpha), G(z) = r'(\cos \beta + i \sin \beta),$$

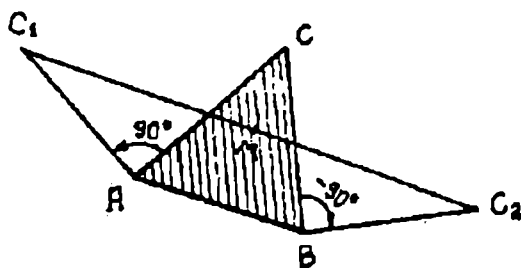
ამიტომ

$$A'(z(\cos \alpha + i \sin \alpha)), A''(z'(\cos \beta + i \sin \beta)) = z(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)).$$

ე.ი. A'' წერტილი მიიღება A წერტილის მობრუნებით $(\alpha + \beta)$ კუთხით კოორდინატთა სათავეს გარშემო.

თეორემა დამტკიცებულია.

ამოცანა 4. ABC სამკუთხედის AC გვერდი მოზრუნებულია A წვეროს გარშემო 90° -იანი კუთხით, ხოლო BC გვერდი B წვეროს გარშემო -90° -იანი კუთხით. ვთქვათ, AC და BC გვერდებმა მოზრუნების შედეგად დაიკავეს AC_1 და BC_2 მდებარეობები. დავამტკიცოთ, რომ C_1C_2 მონაკვეთის შუაწერტილი დამოკიდებული არ არის C წერტილის მდებარეობაზე. (ნახ. 46).



ნახ. 46.

ვთქვათ, სამკუთხედის წვეროთა აფიქსებია z_1, z_2, z_3 , ხოლო C_1C_2 მონაკვეთის M შუაწერტილის აფიქსია z . C_1 და C_2 წერტილების აფიქსებია: $(z_1 + i \cdot (z_3 - z_1))$ და $(z_2 - i \cdot (z_3 - z_1))$.

C_1C_2 მონაკვეთის M შუაწერტილის z აფიქსია:

$$z = \frac{z_1 + z_2 + (z_2 - z_1)}{2}.$$

როგორც ჩანს M შუაწერტილის z აფიქსის გამოსახვა არ შეიცავს Z_3 კოორდინატს, ამიტომ C_1C_2 მონაკვეთის M შუაწერტილი დამოკიდებული არ არის ABC სამკუთხედის C წვეროს მდებარეობაზე.

ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია რაიმე O წერტილი და ნულისაგან განსხვავებული რაიმე ნამდვილი k რიცხვი.

განსაზღვრება 7. ჰომოთეტია O ცენტრით და $k \neq 0$ კოეფიციენტით ეწოდება სიბრტყის ისეთ გარდაქმნას, რომლის დროსაც O წერტილისაგან განსხვავებულ ყოველ M წერტილს შეესაბამება OM წრფის ისეთი M' წერტილი, რომ

$$OM' = k \cdot OM.$$

O წერტილს შეესაბამება თავისი თავი. OM და OM' მონაკვეთები ერთნაირადაა მიმართული, თუ $k > 0$ და საწინააღმდეგოდაა მიმართული, თუ $k < 0$.

იმ შემთხვევაში, როცა $|k| > 1$, მაშინ ჰომოთეტია შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც სიბრტყის გაჭიმვა O წერტილიდან, ხოლო როცა $|k| < 1$, მაშინ ჰომოთეტია შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც სიბრტყის შეკუმშვა O ცენტრისკენ. როცა $k > 0$, მაშინ ჰომოთეტიას პირდაპირი ეწოდება, ხოლო როცა $k < 0$, მაშინ შებრუნებული. პირდაპირი ჰომოთეტიის დროს წერტილი და მისი სახე ცენტრის ერთ მხარესაა, ხოლო შებრუნებული ჰომოთეტიის დროს სხვადასხვა მხარეს.

დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა ისე შევარჩიოთ, რომ მისი O სათავე ჰომოთეტიის ცენტრს

დაემთხვეს. მაშინ ჰომოთეტიის განსაზღვრის ძალით კომპლექსური რიცხვების გამოყენებით შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$F(z) = kz$$

სადაც k -ნამდვილი რიცხვია.

თეორემა 12. ნებისმიერი $A(a)$ წერტილის მიმართ ჰომოთეტია შეიძლება ჩავწეროთ სახით:

$$F(z) = k(z-a) + a$$

დამტკიცება. $\overline{AM}' = z' - a$. მეორეს მხრივ

$$\overline{AM}' = k(z-a) \Rightarrow z' = k(z-a) + a.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

როცა $k=1$, მაშინ $F(z) = z$ და ჰომოთეტია წარმოადგენს სიბრტყის იგივეურ გარდაქმნას.

როცა $k=-1$, მაშინ $F(z) = -z$ და ჰომოთეტია წარმოადგენს კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიას.

თეორემა 13. ჰომოთეტიის დროს სიბრტყის ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთი თავისი სახის პარალელურია, ამასთან მეორე მონაკვეთის სიგრძის შეფარდება პირველი მონაკვეთის სიგრძესთან ჰომოთეტიის აბსოლუტური მნიშვნელობის ტოლია.

დამტკიცება. მართლაც, კოორდინატთა სისტემა ისე შევარჩიოთ, რომ კოორდინატთა სათავე დაემთხვეს ჰომოთეტიის ცენტრს. A და B წერტილების აფიქსება შესაბამისად Z_1 და Z_2 . $k \neq 1$ ჰომოთეტიის კოეფი-

ცენტია. მაშინ $\overline{AB} = z_2 - z_1$, $F(z) = kz$ ჰომოთეტიის დროს A' და B' წერტილების აფიქსები იქნება

$$A'(kz_1), B'(kz_2). \quad \overline{A'B'} = k(z_2 - z_1).$$

$\overline{AB}$ და $\overline{A'B'}$ ვექტორების აფიქსები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან მუდმივი k რიცხვით, ეს ნიშნავს, რომ ეს ვექტორები პარალელურია და მათი მოდულების ფარდობაა $|k|$.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 14. O საერთო ცენტრის მქონე ორი k_1 და k_2 კოეფიციენტების მქონე ჰომოთეტიების მიმდევრობით შესრულებული შედეგი ისევ ჰომოთეტიაა $k = k_1 \cdot k_2$ კოეფიციენტით.

დამტკიცება. ვთქვათ, გვაქვს

$$A(z) \rightarrow A'(z') \rightarrow A''(z'').$$

რადგან,

$$F(z) = k_1 z, G(k_1 z) = k_2 (k_1 z) = k_1 k_2 z.$$

ამრიგად, A წერტილიდან A'' წერტილზე გადასვლა ხორციელდება $H(z) = k_1 k_2 z$ ჰომოთეტიით.

თეორემა დამტკიცებულია.

გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ სიბრტყის ნებისმიერი მოძრაობა შეიძლება განხილული იქნას როგორც რაიმე ფიქსირებული O წერტილის გარშემო მობრუნება, პარალელური გადატანა ან რაიმე ფიქსირებული I წრფის მიმართ სიმეტრია, რაიმე O წერტილის გარშემო მობრუნება და პარალელური გადატანა.

კომპლექსური რიცხვების გამოყენებით ეს გეომეტრიული თეორემა შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$F(z) = az + b, \quad (1)$$

$$F(z) = a\bar{z} + b, \quad (2)$$

სადაც, $a = \cos \varphi + i \sin \varphi$, ხოლო b ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვია.

მართლაც, (1) გარდაქმნა წარმოადგენს კოორდინატთა სათავის φ კუთხით მობრუნების და b პარალელური გადატანის თანმიმდევრობით შესრულების შედეგს

ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ სიბრტყის მსგავსების ყოველი გარდაქმნა შეიძლება ჩაიწეროს სახით:

$$F(z) = az + b, \quad (3)$$

$$F(z) = a\bar{z} + b, \quad (4)$$

სადაც, $a = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, ხოლო b ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვია.

განვიხილოთ გარდაქმნები:

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (5)$$

$$z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad (6)$$

სადაც, $ad - bc \neq 0$.

თუ (5) და (6) გარდაქმნებში $c=0$, მივიღებთ (3) და (4) გარდაქმნებს. რომელთაც აქვთ შემდეგი თვისება: ინარჩუნებენ ოთხი წერტილის ორმაგ $W(z_1, z_2, z_3, z_4)$

ფარდობას-(5) გარდაქმნა, ან ცვლიან მას მისი კომპლექსური შეუღლებულით-(6) გარდაქმნა.

მართლაც, თუ z'_1, z'_2, z'_3, z'_4 წერტილები z_1, z_2, z_3, z_4 წერტილებთან დაკავშირებულია (5) დამოკიდებულებით, მაშინ

$$\begin{aligned} W(z'_1, z'_2, z'_3, z'_4) &= \frac{z'_1 - z'_2}{z'_2 - z'_3} : \frac{z'_1 - z'_4}{z'_2 - z'_4} = \\ &= \left[\left(\frac{az_1 + b}{cz_1 + d} - \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} \right) : \left(\frac{az_2 + b}{cz_2 + d} - \frac{az_3 + b}{cz_3 + d} \right) \right] : \left[\left(\frac{az_1 + b}{cz_1 + d} - \frac{az_4 + b}{cz_4 + d} \right) : \left(\frac{az_2 + b}{cz_2 + d} - \frac{az_4 + b}{cz_4 + d} \right) \right] = \\ &= \left[\frac{(ad - bc)(z_1 - z_2)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)} : \frac{(ad - bc)(z_2 - z_3)}{(cz_2 + d)(cz_3 + d)} \right] : \left[\frac{(ad - bc)(z_1 - z_4)}{(cz_1 + d)(cz_4 + d)} : \frac{(ad - bc)(z_2 - z_4)}{(cz_2 + d)(cz_4 + d)} \right] = \\ &= \left[\frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} : \frac{cz_2 + b}{cz_1 + d} \right] : \left[\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} : \frac{cz_2 + b}{cz_1 + d} \right] = \\ &= \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = W(z_1, z_2, z_3, z_4). \end{aligned}$$

ე.ი.

$$W(z'_1, z'_2, z'_3, z'_4) = W(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

ამიტომ თუ z_1, z_2, z_3, z_4 წერტილების $W(z_1, z_2, z_3, z_4)$ ორმა-გი ფარდობა ნამდვილი რიცხვია, მასინ ნამდვილი რიცხვია $W(z'_1, z'_2, z'_3, z'_4)$ ფარდობაც, სადაც z'_1, z'_2, z'_3, z'_4 წერტილები მიიღება z_1, z_2, z_3, z_4 წერტილები-საგან (5) ან (6) გარდაქმნებით. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ოთხი წერტილი, რომლებიც ერთ წრეწირს (წრფეს) ეკუთვნიან (5) და (6) გარდაქმნებით გადადიან ოთხ წერტილში, რომლებიც აგრეთვე ერთ წრეწირს (წრფეს) ეკუთვნიან.

ამრიგად, (19) და (20) გარდაქმნებს ევკლიდური სიბრტყის წრეწირი $-(\text{წრფე})$ გადაყავს (წრეწირში) წრფეში. ე.ი. წარმოადგენენ წრიულ გარდაქმნებს.

თუ (20) გარდაქმნაში დავუშვებთ, რომ

$$a = d = 0, b = c = 1,$$

მივიღებთ

$$z' = \frac{1}{z}.$$

ეს ინვერსიის გარდაქმნაა O ცენტრით და $r=1$ რადიუსით.

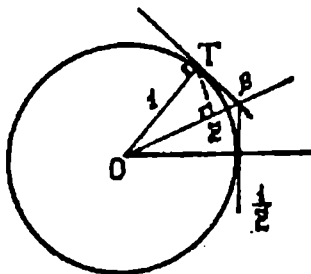
თუ (5) გარდაქმნაში დავუშვებთ, რომ

$$a = d = 0, b = c = 1,$$

მივიღებთ

$$z' = \frac{1}{z}.$$

ავაგოთ z კომპლექსური რიცხვიდან $\frac{1}{z}$ რიცხვი.



ნახ. 47.

თავიდან ავაგოთ წერტილი, რომელიც გამოსახავს რიცხვს

$$\beta = \frac{1}{z}.$$

რადგან

$$|\beta| = \frac{1}{|z|},$$

საიდანაც

$$|\beta| \cdot |z| = 1, \operatorname{Arg} \beta = -\operatorname{Arg} \bar{z} = \operatorname{Arg} z,$$

ამიტომ β წერტილი მიიღება z წერტილისაგან ინვერსიის გარდაქმნით შემდეგნაირად: Oz ღერძზე მოვებენით β წერტილს, რომელიც O წერტილიდან დაშორებულია $\frac{1}{|z|}$ მანძილით, თუ $|z| < 1$, მაშინ ეს აგება

შესრულდება შემდეგნაირად: შემოვხაზოთ ერთეულ რადიუსიანი წრეწირი ცენტრით O წერტილში, შევაერთოთ წრფით z და O წერტილები. z წერტილში აღვმართოთ Oz წრფის პერპენდიკულარი. წრფესთან გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ T -თი. გავავლოთ T წერტილში წრეწირის მხები. Oz ღერძთან გადაკვეთის წერტილი საძებნი β წერტილია. მართლაც, რადგან $OT\beta$ და OzT სამკუთხედები მსგავსია, ამიტომ

$$\frac{O\beta}{OT} = \frac{OT}{Oz}, \quad \frac{|\beta|}{1} = \frac{1}{|z|}.$$

ანუ

$$|\beta| \cdot |z| = 1.$$

მეორეს მხრივ, ცხადია, რომ

$$\operatorname{Arg} \beta = \operatorname{Arg} z.$$

ასეთ z და β წერტილებს ეწოდებათ წრეწირის მიმართ სიმეტრიული წერტილები. შევნიშნოთ, რომ

$$\bar{\beta} = \frac{1}{z},$$

ამიტომ რომ მივიღოთ საძებნი $\frac{1}{z}$ წერტილი, უნდა მოვახდინოთ β წერტილის სიმეტრიული ასახვა ნამდვილი Ox ღერძის მიმართ (ნახ. 47).

ცხადია, რომ (3) და (4) გარდაქმნები ევკლიდური სიბრტყის ყოველ z წერტილს შეუსაბამებს ახალ z' წერტილს, ხოლო (5) და (6) გარდაქმნები, სადაც $c \neq 0$ არ წარმოადგენს ევკლიდური სიბრტყის ურთიერთცალსახა გარდაქმნებს. (5) გარდაქმნაში $z = -\frac{d}{c}$ წერ-

ტილს, (6) გარდაქმნაში წერტილს $\bar{z} = -\frac{d}{c}$, რომელზედაც მნიშვნელები ნულის ტოლი ხდება, არ შეესაბამება სიბრტყის არცერთი წერტილი, რაც განპირობებულია იმით, რომ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში $\frac{z_1}{z_2}$ განაყოფს აზრი არა აქვს, როცა $z_2 = 0$. ეს უხერხულობა რომ ავიცილოთ თავიდან, შემოვიღოთ შეთანხმება $\frac{1}{0} = \infty$ და ჩავთვალოთ, რომ

$$z + \infty = \infty, \quad z - \infty = \infty, \quad z \cdot \infty = \infty, \quad \frac{\infty}{z} = \infty, \quad \frac{z}{\infty} = 0.$$

სადაც, z ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვია, ამასთან მესამე ტოლობაში $z \neq 0$, ხოლო მეორე, მეოთხე და მეხუთე ტოლობებში $z \neq \infty$. ე.ი. თუ კომპლექსურ რიცხვთა სიბრტყეს დავუმატებთ ერთ ფიქტიურ-უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს ∞ , მაშინ ასეთ გაფარ-

თოვებულ სიბრტყეზე (5) და (6) გარდაქმნები იქნება ურთიერთცალსახა. კერძოდ, (5) გარდაქმნა $z = -\frac{d}{c}$, წერტილს გადაიყვანს

$$z' = \frac{-a\frac{d}{c} + b}{\frac{c}{0}} = \frac{-ad - bc}{0} = \infty,$$

ხოლო $z = \infty$ წერტილს გადაიყვანს

$$z' = \frac{a \cdot \infty + b}{c \cdot \infty + d} = \frac{a + \frac{b}{\infty}}{c + \frac{d}{\infty}} = \frac{a + 0}{c + 0} = \frac{a}{c}.$$

ამრიგად, (5) და (6) წრიული გარდაქმნების მოქმედების არეა არა ჩვეულებრივი ევკლიდური სიბრტყე, არამედ წრიული სიბრტყე, რომელიც მიიღება ევკლიდური სიბრტყიდან უსასრულოდ დაშორებული ∞ წერტილის დამატებით. ზემოთ თქმულის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ასეთი

ამოცანა 5. მოცემულია

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (5)$$

გარდაქმნა, სადაც a, b, c, d ფიქსირებული კომპლექსური რიცხვებია, ამასთან, $ad - bc \neq 0$. ვაჩვენოთ, თუ $|c| \neq |d|$, მაშინ ამ გარდაქმნის დროს ერთეულოვანი წრეწირის სახეს წარმოადგენს წრეწირი. ვიპოვოთ მისი რადიუსი და ცენტრის აფიქსი.

(5) ფორმულა გარდავქმნათ შემდეგნაირად:

$$z' = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{az+b}{cz+d} \cdot \frac{a}{c} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c}}{z + \frac{d}{c}}.$$

1. გარდაქმნას $z \rightarrow z + \frac{d}{c}$ ერთეულოვანი წრეწირი

$(\Omega_1) = (0, 1)$ გადაჰყავს წრეწირში $(\Omega_2) = \left(\frac{d}{c}, 1\right)$;

2. გარდაქმნას $z + \frac{d}{c} \rightarrow \frac{1}{z + \frac{d}{c}}$ წარმოადგენს ნამდვი-

ლი Ox ღერძის მიმართ სიმეტრიას, რომლის დროსაც

$(\Omega_2) = \left(\frac{d}{c}, 1\right)$ წრეწირი გადადის $(\Omega_3) = \left(\frac{\bar{d}}{c}, 1\right)$ წრეწირში

და შემდგომი ინვერსიის გარდაქმნით (Ω_3) წრეწირი

გადადის (Ω_4) წრეწირში. (Ω_4) წრეწირის ასაგებად

საკმარისია $(O\Omega_3)$ წრფის გავლება და PQ დიამეტრის

P და Q ბოლოების P და Q წერტილების სახეთა

აგება. PQ არის (Ω_4) წრეწირის დიამეტრი. გამოვთვა-

ლოთ (Ω_4) წრეწირის რადიუსი და მისი ცენტრის

აფიქსი. შევნიშნოთ, რომ (Ω_1) წრეწირის მიმართ

ინვერსიას და $\left(0, \frac{1}{\sigma}\right)$ ჰომოთეტიას (Ω_3) წრეწირი

გადაჰყავს (Ω_4) წრეწირში. $\left(0, \frac{1}{\sigma}\right)$ ჰომოთეტიას (Ω_3)

წრეწირის ცენტრი გადაჰყავს (Ω_4) წრეწირის ცენტრში,

ამიტომ (Ω_4) წრეწირის ω_4 ცენტრის აფიქსი იქნება:

$$\varpi_4 = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d}{c},$$

ხოლო რადიუსი ტოლი იქნება (Ω_3) წრეწირის $R_3=1$ რადიუსის ჰომოთეტიის $\frac{1}{|\sigma|}$ კოეფიციენტზე ნამრავლის მოდულის.

$$R_4 = R_3 \cdot \frac{1}{|\sigma|} = \frac{1}{|\sigma|},$$

ხოლო,

$$\sigma = O\Omega_3^2 - R_3^2 = \frac{\bar{d}}{c} \cdot \frac{d}{c} - 1 = \frac{d\bar{d} - c\bar{c}}{cc}.$$

ამიტომ,

$$(\Omega_4) = \left(\frac{c\bar{d}}{d\bar{d} - c\bar{c}}, \frac{c\bar{c}}{|d\bar{d} - c\bar{c}|} \right).$$

3. გარდაქმნა $\frac{1}{z + \frac{d}{c}} \rightarrow \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}}$ შედგება სიბრტყის

მოზრუნებისაგან $\text{Arg} \frac{bc-ad}{c^2}$ კუთხით და ჰომოთეტიი-

საგან, რომლის ცენტრია O და კოეფიციენტი $\frac{|bc-ad|}{|c|^2}$.

ამ ორი გარდაქმნის შედეგად (Ω_4) წრეწირი გადადის (Ω_5) წრეწირში, რომლის ცენტრის ϖ_5 აფიქსია:

$$\varpi_5 = \varpi_4 \cdot \frac{bc-ad}{c^2} = \frac{c\bar{d}}{d\bar{d} - c\bar{c}} \cdot \frac{bc-ad}{c^2} = \frac{\bar{d}}{c} \cdot \frac{bc-ad}{d\bar{d} - c\bar{c}}.$$

ხოლო რადიუსია:

$$R_3 = \left| \frac{\bar{c}\bar{c}}{d\bar{d}-c\bar{c}} \cdot \frac{bc-ad}{c^2} \right| = \left| \frac{bc-ad}{d\bar{d}-c\bar{c}} \right|.$$

რადგან,

$$\left| \frac{\bar{c}\bar{c}}{c^2} \right| = \frac{|c|^2}{|c|^2} = \frac{|c|^2}{|c|^2} = 1;$$

ამრიგად,

$$(\Omega_3) = \left(\frac{\bar{d}}{c} \cdot \frac{bc-ad}{d\bar{d}-c\bar{c}}, \left| \frac{bc-ad}{d\bar{d}-c\bar{c}} \right| \right).$$

4. დაბოლოს, გადატანის გარდაქმნას

$$\frac{bc-ad}{z+\frac{d}{c}} \rightarrow \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{z+\frac{d}{c}}$$

(Ω_3) წრეწირი გადაჰყავს (Ω_6) წრეწირში, რომელთა

რადიუსები ტოლია $R_6 = R_3$, ხოლო (Ω_6) წრეწირის ϖ_6 აფიქსი ტოლია:

$$\varpi_6 = \frac{a}{c} + \frac{\bar{d}}{c} \cdot \frac{bc-ad}{d\bar{d}-c\bar{c}} = \frac{b\bar{d}-a\bar{c}}{d\bar{d}-c\bar{c}}.$$

ამრიგად, $z' = \frac{az+b}{cz+d}$ გარდაქმნის დროს, როცა

$ad-bc \neq 0$, $|c| \neq |d|$, $(\Omega_4) = (0,1)$ წრეწირი გადადის წრეწირში

$$(\Omega_6) = \left(\frac{b\bar{d}-a\bar{c}}{d\bar{d}-c\bar{c}}, \left| \frac{bc-ad}{d\bar{d}-c\bar{c}} \right| \right).$$

როცა $|c| = |d|$, მაშინ $d\bar{d}-c\bar{c} = 0$ და წრეწირი გადაგვარდება წრფეში.

§1.35. კომპლექსური რიცხვების გამოყენება ანალიზურ გეომეტრიაში. ორიენტაციის ცნება

ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ თუ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მოცემულია წერტილები

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3),$$

მაშინ ABC სამკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (1)$$

განვაზოგადოთ ეს ფორმულა იმ შემთხვევისათვის, როცა მოცემული გვაქვს A, B, C წერტილების

$$z_1 = x_1 + i \cdot y_1, \quad z_2 = x_2 + i \cdot y_2, \quad z_3 = x_3 + i \cdot y_3$$

აფიქსები და ვიპოვოთ ABC სამკუთხედის ფართობი.

როგორც ვიცით,

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{i}{2}(\bar{z} - z). \quad (2)$$

თუ (1) ფორმულაში შევიტანთ $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ მნიშვნელობებს (2) ფორმულებიდან, მოვახდენთ გარდაქმნებს, მივიღებთ:

$$S = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

საიდანაც გამომდინარეობს სამი წერტილის კოლინეარულობის პირობა. — კეროდ, თუ მოცემული გვაქვს სამი $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ წერტილი თავისი აფიქსებით, მაშინ ამ წერტილების კოლინეარულობის პირობას აქვს სახე:

$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

ამოცანა 1. M წერტილი ეკუთვნის წრფეს, რომელიც მოიცავს ABC მართკუთხა სამკუთხედის AB ჰიპოტენუზას. დაამტკიცეთ, რომ

$$MA^2 \cdot BC^2 + MB^2 \cdot AC^2 = MC^2 \cdot AB^2.$$

ვთქვათ, მართკუთხა ABC სამკუთხედის C მართი კუთხე ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს CA გვერდი Ox ღერძზე ძევს, BC გვერდი Oy ღერძზე. A წვეროს აფიქსია a , B წვეროს აფიქსი კი b . ცხადია, რომ $\overline{a} = a, \overline{b} = -b$. M წერტილის აფიქსია m . რადგან A, M და B წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობენ, ამიტომ ისინი აკმაყოფილებენ სამი წერტილის კოლინეარულობის პირობას:

$$\begin{vmatrix} m & \overline{m} & 1 \\ a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ანუ,

$$\begin{vmatrix} m & \bar{m} & 1 \\ a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ma - ab + b\bar{m} + bm - ab - a\bar{m} = 0,$$

საიდანაც,

$$m(a+b) - \bar{m}(a-b) - 2ab = 0.$$

განვიხილოთ გამოსახულებები:

$$MA^2 = (m-a)(\bar{m}-\bar{a}) = m\bar{m} - m\bar{a} - a\bar{m} + a\bar{a} = m\bar{m} - ma - a\bar{m} + a^2,$$

$$BC^2 = b \cdot \bar{b} = -b^2,$$

$$MB^2 = (m-b)(\bar{m}-\bar{b}) = (m-b)(\bar{m}+b) = m\bar{m} + bm - b\bar{m} - b^2,$$

$$AC^2 = a \cdot \bar{a} = a \cdot a = a^2,$$

$$MC^2 = m \cdot \bar{m},$$

$$AB^2 = a \cdot \bar{a} + b \cdot \bar{b} = a \cdot a - b \cdot b = a^2 - b^2.$$

გვაქვს,

$$MA^2 \cdot BC^2 + MB^2 \cdot AC^2 = (a^2 - b^2)m\bar{m} + ab(m(a+b) - \bar{m}(a+b) - 2ab),$$

$$MC^2 \cdot AB^2 = (a^2 - b^2)m\bar{m}.$$

A, M და B წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობენ, ამიტომ

$$m(a+b) - \bar{m}(a-b) - 2ab = 0.$$

მივღებულობთ:

$$MA^2 \cdot BC^2 + MB^2 \cdot AC^2 = (a^2 - b^2)m\bar{m} = MC^2 \cdot AB^2.$$

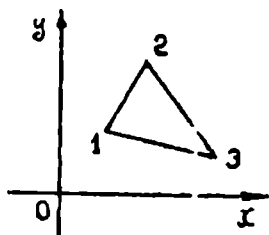
საბოლოოდ გვაქვს:

$$MA^2 \cdot BC^2 + MB^2 \cdot AC^2 = MC^2 \cdot AB^2.$$

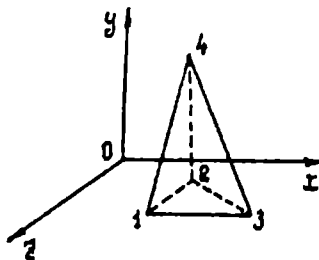
ვთქვათ, მოცემული გვაქვს მონაკვეთი რიცხვით ღერძზე. თუ მის ბოლოებს აღვნიშნავთ 1 და 2-ით,

რომელთა აბსცისებია შესაბამისად x_1 და x_2 , მაშინ ამ მონაკვეთის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით:

$$(1,2) = \frac{1}{1}(x_2 - x_1) \quad (3)$$



ნახ. 48.



ნახ. 49.

ანალოგიურად, თუ სიბრტყეზე გვაქვს სამკუთხედი წვეროებით 1, 2, 3 წერტილებში, რომელთა კოორდინატებია შესაბამისად $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, მაშინ მისი ფართობი გამოითვლება ფორმულით (ნახ. 48)

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

თუ სივრცეში მოცემული გვაქვს ტეტრაედრი წვეროებით 1, 2, 3, 4 წერტილებში შესაბამისად კოორდინატებით

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4).$$

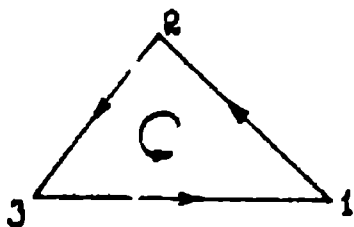
მაშინ მისი მოცულობა გამოითვლება ფორმულით: (ნახ. 49)

$$V = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 4 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

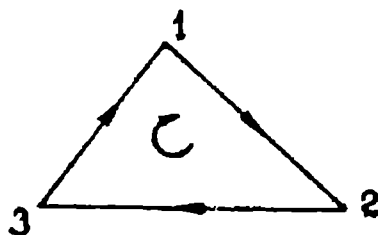
ჩვეულებრივ, მონაკვეთის სიგრძისათვის, სამკუთხედის ფართობისათვის და ტეტრაედრის მოცულობისათვის შეთანხმებულია აიღონ (1), (3) და (4) ფორმულებით მიღებული რიცხვების მხოლოდ აბსოლუტური მნიშვნელობები, მაშინ როცა შესაძლებელია ამ ფორმულებით მივიღოთ უარყოფითი რიცხვებიც.

მეზიუსმა 1827 წელს ლაიფციგში გამოცემულ წიგნში „ბაროცენტრული გამოთვლები“, პირველად განიხილა (1), (3) და (4) ფორმულებში „პლუს“ და „მინუს“ ნიშნების მიღების ერთნაირი უფლება და მისი შესაბამისი კანონზომიერებანი.

მონაკვეთისათვის ეს კანონზომიერება მარტივია: $x_2 - x_1$ სხვაობა დადებით ან უარყოფით მნიშვნელობას ღებულობს იმის მიხედვით წერტილი 1 აბსცისათა ღერძზე წერტილი 2-ის მარჯვნივ მდებარეობს თუ მარცხნივ.



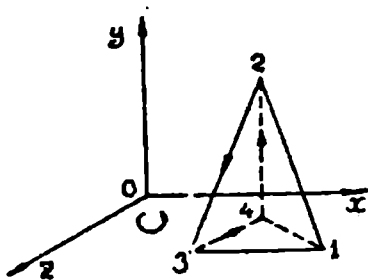
ნახ. 50.



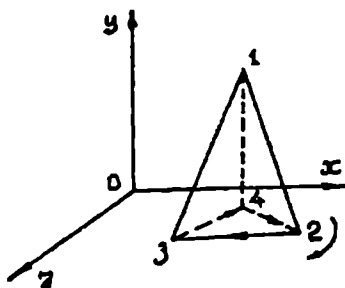
ნახ. 51.

სამკუთხედისათვის მებიუსმა დაადგინა, რომ თუ სამკუთხედის წვეროებს ავიღებთ გარკვეული რიგით და სამკუთხედის კონტურებს შემოვუვლით საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით, მაშინ (1) ფორმულა ყოველთვის დადებით ნიშანს მოგვცემს. (ნახ.50). თუ სამკუთხედის კონტურს შემოვუვლით საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით, მაშინ (1) ფორმულა ყოველთვის უარყოფით ნიშანს მოგვცემს. (ნახ. 51).

ტეტრაედრისათვის მებიუსს ნაჩვენები აქვს, რომ როცა ტეტრაედრის წვეროებს $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ თანრიგი აქვს მოცულობისათვის (4) ფორმულა გვაძლევს დადებით ნიშანს იმ შემთხვევაში, თუ 1 წვეროდან შეხედვისას 2, 3, 4 წვეროები მეორდებიან ერთიმეორის შემდგომ საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით. (ნახ.52). წინააღმდეგ შემთხვევაში, ე.ი. თუ 1 წვეროდან შეხედვისას სამკუთხედის კონტურზე შემოვლა 2, 3, 4 წვეროებიდან ხდება საათის მოძრაობის მიმართულებით, ვღებულობთ უარყოფით მოცულობას (ნახ. 53).



ნახ. 52.

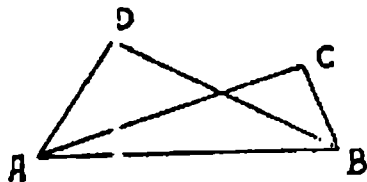


ნახ. 53.

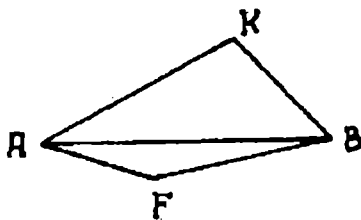
მეზიუსის გამოკვლევები საფუძვლად დაედო ორიენტაციის ცნებას. რომელსაც დიდი გამოყენება აქვს მათემატიკაში.

ორიენტირებული სამკუთხედი ეწოდება ერთ წრფეზე არამდებარე მოწესრიგებულ სამეულს, ე.ი. ისეთ სამეულს რომლისთვისაც ცნობილია რომელი ითვლება პირველ წერტილად, რომელი მეორე წერტილად და რომელი მესამედ. ორიენტირებული სამკუთხედის ჩაწერისათვის მისი წვეროების რიგი განისაზღვრება მათი ჩაწერის რიგით. თუ $\triangle ABC$ ორიენტირებულია, მაშინ მისი პირველი წვეროა A , მეორე— B და მესამე— C . ჩაწერა უკვე აღარ შეიძლება ნებისმიერი რიგით.

ორ ერთი და იმავე წვეროების მქონე ორიენტირებულ სამკუთხედს აქვს ერთნაირი შემოვლა, თუ მეორე სამკუთხედის წვეროები მიიღება პირველისაგან წრიული გადანაცვლებით. თუკი მეორე სამკუთხედის წვეროები მიიღება პირველი სამკუთხედის წვეროებისაგან წრიული გადანაცვლებით არ ხერხდება, მაშინ ამ სამკუთხედებს აქვთ საწინააღმდეგო შემოვლა.



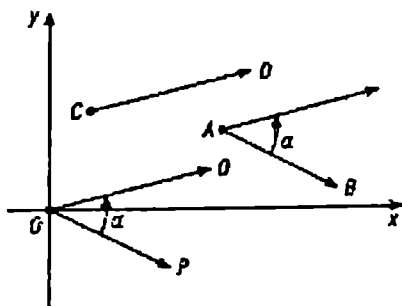
ნახ. 54.



ნახ. 55.

თუ გვაქვს ორი ორიენტირებული სამკუთხედი, რომლებიც განსხვავდებიან მხოლოდ ერთნაირი ნომრის მქონე წვეროთი, მაშინ ამ სამკუთხედებს აქვთ ერთნა-

ირი შემოვლა, თუ ეს წვეროები მდებარეობენ იმ წრფის ერთ მხარეს, რომელიც საერთო წვეროს აერთებს. თუ განსხვავებული წვეროები საერთო გვერდის შემაერთებული წრფის სხვადასხვა მხარეს მდებარეობენ, მაშინ ამ სამკუთხედებს აქვთ საწინააღმდეგო შემოვლა. მაგალითად, 54-ე ნახაზზე გამოსახულ ორიენტირებულ ABC და ABD სამკუთხედებს აქვთ ერთნაირი შემოვლა, ხოლო 55-ე ნახაზზე გამოსახულ ორიენტირებულ AKB და AFB სამკუთხედებს აქვთ საწინააღმდეგო შემოვლა.



ნახ.56.

ვთქვათ, ორიენტირებული ABC სამკუთხედის წვეროთა კოორდინატებია (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , ორიენტირებული $A'B'C'$ სამკუთხედის წვეროთა კოორდინატებია (x'_1, y'_1) , (x'_2, y'_2) , (x'_3, y'_3) . იმისათვის, რომ ორიენტირებული ABC და $A'B'C'$ სამკუთხედები ერთნაირად ორიენტირებული იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ერთი და იგივე ნიშანი ჰქონდეთ დეტერმინანტებს:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{და} \quad \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

შევვიძლია გავაკეთოთ დასკვნა: თუ ორი სამკუთხედი ერთნაირადაა ორიენტირებული, მაშინ მათ ერთნაირი შემოვლა აქვთ და თუ საწინააღმდეგოდაა ორიენტირებული, მაშინ მათი შემოვლაც საწინააღმდეგოა.

შევთანხმდეთ და $(\overline{AB}, \overline{CD})$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ ორიენტირებული კუთხე, რომელიც უნდა მოვაბრუნოთ $\overline{AB}$ ვექტორი, რომ ის დაემთხვეს $\overline{CD}$ ვექტორს. თუ $\overline{OP} = \overline{AB}$ და $\overline{OQ} = \overline{CD}$, მაშინ P და Q წერტილების აფიქსებია $b-a$ და $d-c$ (ნახ.56). ცხადია, რომ

$$\alpha = (\overline{AB}, \overline{CD}) = \arg(d-c) - \arg(b-a) = \arg \frac{d-c}{b-a}.$$

ეს ფორმულა დადებითად ორიენტირებულ ABC სამკუთხედისათვის გვაძლევს:

$$\hat{A} = \arg \frac{c-a}{b-a}, \hat{B} = \arg \frac{a-b}{c-b}, \hat{C} = \arg \frac{b-c}{a-c}.$$

თუ $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, მაშინ $\bar{z} = r(\cos \varphi - i \sin \varphi)$, სადაც

$$\sin \varphi = \frac{z - \bar{z}}{2ir}, \cos \varphi = \frac{z + \bar{z}}{2r}.$$

როცა $z = \frac{d-c}{b-a}$, მივიღებთ:

$$\sin(\overline{AB}, \overline{CD}) = \frac{\frac{d-c}{b-a} - \frac{\bar{d}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{a}}}{2i \left| \frac{d-c}{b-a} \right|} = \frac{(d-c)(\bar{b}-\bar{a}) - (\bar{d}-\bar{c})(b-a)}{2i |d-c| |\bar{b}-\bar{a}|},$$

რადგან,

$$(b-\bar{a})(\bar{b}-a)=|b-a|^2,$$

ამიტომ,

$$\sin(\widehat{AB, CD}) = \frac{(d-c)(\bar{b}-\bar{a}) - (\bar{d}-\bar{c})(b-c)}{2i|d-c||b-a|}.$$

ანალოგიურად შეიძლება მივიღოთ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსის ფორმულაც:

$$\cos(\widehat{AB, CD}) = \frac{(d-c)(\bar{b}-\bar{a}) + (\bar{d}-\bar{c})(b-c)}{2i|d-c||b-a|}.$$

§1.36. ორიენტირებული ფიგურების ფართობი კომპლექსურ სიბრტყეზე

დადებითად ორიენტირებული ABC სამკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin(\widehat{AB, AC}) = -\frac{1}{4i} [(c-a)(\bar{b}-\bar{a}) - (b-a)(\bar{c}-\bar{a})] = \\ &= \frac{1}{4i} [a(\bar{b}-\bar{c}) + b(\bar{c}-\bar{a}) + c(\bar{a}-\bar{b})]. \end{aligned}$$

ამრიგად,

$$S = \frac{1}{4i} [a(\bar{b}-\bar{c}) + b(\bar{c}-\bar{a}) + c(\bar{a}-\bar{b})].$$

ანუ, თუ ამ ტოლობას ჩავწერთ დეტერმინანტის ფორმით, მივიღებთ:

$$S = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}.$$

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს დადებითად ორიენტირებული $ABCD$ ოთხკუთხედი. ამ ოთხკუთხედის ფართობი გვამოითვლება შემდეგნაირად:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin(\widehat{AC, BD}) = \frac{1}{4i} [(d-b)(\bar{c}-\bar{a}) - (c-a)(\bar{d}-\bar{b})].$$

თუ $ABCD$ ოთხკუთხედი ჩახაზულია ერთეულოვან $zz=1$ წრეწირში, მაშინ

$$\bar{a} = \frac{1}{a}, \bar{b} = \frac{1}{b}, \bar{c} = \frac{1}{c}, \bar{d} = \frac{1}{d}$$

ამ ტოლობების ჩასმის შემდეგ მისი ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4i} [(d-b)(\bar{c}-\bar{a}) - (c-a)(\bar{d}-\bar{b})] = \frac{1}{4i} \left[(d-b) \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) - (c-a) \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{b} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{4i} \left[(d-b) \frac{a-c}{ac} - (c-a) \frac{b-d}{bd} \right] = \frac{1}{4i} \frac{(c-a)(d-b)(ac-bd)}{abcd}. \end{aligned}$$

საბოლოოდ გვაქვს,

$$S = \frac{1}{4i} \frac{(c-a)(d-b)(ac-bd)}{abcd}.$$

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარეობს, რომ პარალელური გადატანა და წერტილის მიმართ სიმეტრია სამკუთხედის ორიენტაციას არ ცვლის, ხოლო სიმეტრია წრფის მიმართ სამკუთხედის ორიენტაციას ცვლის საწინააღმდეგოთი.

გარდაქმნას, რომელიც ორიენტაციას არ ცვლის, ეწოდება I გვარის გარდაქმნა, ხოლო გარდაქმნას, რომელიც ორიენტაციას ცვლის საწინააღმდეგოთი ეწოდება II გვარის გარდაქმნა. პარალელური გადატანა და წერტილის მიმართ სიმეტრია I გვარის გარდაქ-

მნებია, ხოლო სიმეტრია წრფის მიმართ II გვარის გარდაქმნაა.

თუ მოცემული გვაქვს ორი ABC და PQR სამკუთხედის წვეროთა აფიქსები:

$$A=(z_1), B=(z_2), C=(z_3),$$

$$P=(u_1), Q=(u_2), R=(u_3),$$

მაშინ, აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ ABC და PQR სამკუთხედები მსგავსი და ერთნაირად ორიენტირებული იყოს მდგომარეობს შემდეგში:

$$\begin{vmatrix} z_1 & u_1 & 1 \\ z_2 & u_2 & 1 \\ z_3 & u_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ ABC და PQR სამკუთხედები მსგავსი, მაგრამ საწინააღმდეგოდ ორიენტირებული იყოს მდგომარეობს შემდეგში:

$$\begin{vmatrix} \overline{z_1} & u_1 & 1 \\ \overline{z_2} & u_2 & 1 \\ \overline{z_3} & u_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(z_1) და (z_2) წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ სახით:

$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

§1.37. ოთხკუთხედის ელემენტებს შორის ზოგიერთი მეტრული თანაფარდობის დადგენა კომპლექსური რიცხვების გამოყენებით

თეორემა. ნებისმიერი ამოზნექილი $ABCD$ ოთხკუთხედისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$AC^2 \cdot BD^2 = AB^2 \cdot CD^2 + BC^2 \cdot AD^2 - 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \cdot \cos(\hat{A} + \hat{B})$$

ამ ტოლობას ბრეტშნაიდერის დამოკიდებულებას უწოდებენ.

დამტკიცება. $ABCD$ ოთხკუთხედის A წვერო ჩავთვალოთ სისტემის სათავედ. ვთქვათ, $ABCD$ ოთხკუთხედის წვეროთა აფიქსებია $A(0), B(b), C(c), D(d)$.

მაშინ გვაქვს:

$$\hat{A} + \hat{C} = \arg \frac{d}{b} + \arg \frac{b-c}{d-c} = \arg \frac{d(b-c)}{b(d-c)}.$$

ამიტომ,

$$\cos(\hat{A} + \hat{C}) = \frac{d\bar{b}(b-c)(\bar{d}-\bar{c}) + \bar{d}b(\bar{b}-\bar{c})(d-c)}{2 \cdot AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA}. \quad (1)$$

ტოლობის მარცხენა მხარის მრიცხველში მოთავსებული გამოსახულება გარდაქმნის შემდეგ მიიღებს სახეს:

$$\begin{aligned} d\bar{b}(b-c)(\bar{d}-\bar{c}) + \bar{d}b(\bar{b}-\bar{c})(d-c) &= \\ &= b\bar{b}(d-c)(\bar{d}-\bar{c}) + d\bar{d}(b-c)(\bar{b}-\bar{c}) - c\bar{c}(d-b)(\bar{d}-\bar{b}). \end{aligned}$$

ჩავსვათ მიღებული მნიშვნელობა (1) დამოკიდებულებაში, გვექნება:

$$\cos(\hat{A} + \hat{C}) = \frac{b\bar{b}(d-c)(\bar{d}-\bar{c}) + d\bar{d}(b-c)(\bar{b}-\bar{c}) - c\bar{c}(d-b)(\bar{d}-\bar{b})}{2 \cdot AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA}.$$

რადგან,

$$AB^2 = b \cdot \bar{b}, \quad AD^2 = d \cdot \bar{d}, \quad AC^2 = c \cdot \bar{c}, \quad BD^2 = (b-d) \cdot (\bar{b}-\bar{d}),$$

$$CD^2 = (d-c) \cdot (\bar{d}-\bar{c}), \quad BC^2 = (b-c) \cdot (\bar{b}-\bar{c}).$$

ამიტომ გვაქვს:

$$\cos(\hat{A} + \hat{C}) = \frac{AB^2 \cdot CD^2 + AD^2 \cdot BC^2 - AC^2 \cdot BD^2}{2 \cdot AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA},$$

საიდანაც,

$$AC^2 \cdot BD^2 = AB^2 \cdot CD^2 + BC^2 \cdot AD^2 - 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \cdot \cos(\hat{A} + \hat{B})$$

თეორემა დამტკიცებულია.

პტოლემეოსის თეორემა. თუ $ABCD$ ოთხკუთხედი ჩახაზულია წრეწირში, მაშინ ამ ოთხკუთხედის დიაგონალების ნამრავლი მოპირდაპირე გვერდების ნამრავლების ტოლია.

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD. \quad (3)$$

დამტკიცება. რადგან წრეწირში ჩახაზული $ABCD$ ოთხკუთხედისათვის

$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ,$$

ამიტომ

$$\cos(\hat{A} + \hat{C}) = -1$$

და ბრეტშნაიდერის დამოკიდებულება მიიღებს სახეს:

$$AC^2 \cdot BD^2 = AB^2 \cdot CD^2 + 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA + BC^2 \cdot AD^2,$$

ანუ,

$$(AC \cdot BD)^2 = (AB \cdot CD + BC \cdot AD)^2$$

საიდანაც მიიღება დასამტკიცებელი ტოლობა.

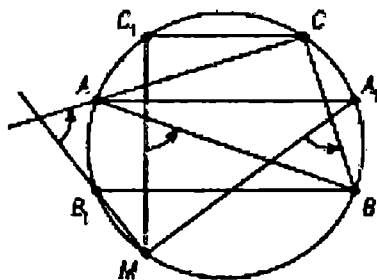
ბრეტშნაიდერის დამოკიდებულებიდან პტოლემეოსის თეორემა მიიღება იმ შემთხვევაში, როცა $ABCD$ ოთხკუთხედში სრულდება პირობა:

$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ,$$

საიდანაც ვღებულობთ, რომ

$$\cos(\hat{A} + \hat{C}) = -1.$$

მიღებულ დამოკიდებულებებს ადგილი აქვს იმ შემთხვევაშიც, როცა $\hat{BAD} = 0^\circ$ და $\hat{BCD} = 180^\circ$, ან $\hat{BAD} = 180^\circ$ და $\hat{BCD} = 0^\circ$



ნახ.57.

ამ შემთხვევებში წერტილები A, B, C და D კოლინეარულია. ცხადია, რომ თუ A, B, C და D წერტილები-სათვის სრულდება (3) დამოკიდებულება, მაშინ $ABCD$ ოთხკუთხედი ჩახაზულია წრეწირში. ე.ი. ადგილი აქვს პტოლემეოსის თეორემის შებრუნებულ თეორემას.

ამოცანა 2. წრეწირში გავლებულია სამი პარალელური AA_1, BB_1, CC_1 ქორდა. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირის ნებისმიერი M წერტილისათვის წრფეები MA_1, MB_1 და MC_1 ტოლ კუთხეებს ადგენენ შესაბამისად BC, CA და AB წრფეებთან.

ვთქვათ, მოცემული წრეწირი ერთეულოვანია და მისი განტოლებაა $\bar{z}\bar{z}=1$. ჩავთვალოთ, რომ $A(a), B(b), A_1(a_1), B_1(b_1), C_1(c_1)$. (ნახ.57). რადგან AA_1, BB_1, CC_1 ქორდები პარალელურია, ამიტომ

$$aa_1 = bb_1 = cc_1.$$

დასამტკიცებელია, რომ

$$\left(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{MB_1}, \overrightarrow{CA}\right) = \left(\overrightarrow{MC_1}, \overrightarrow{BA}\right).$$

პირველი ტოლობა ეკვივალენტურია გამოსახულების

$$\arg \frac{b-c}{a_1-m} = \arg \frac{a-c}{b_1-m}.$$

ანუ,

$$\arg \frac{(b-c)(b_1-m)}{(a_1-m)(a-c)} = 0.$$

ე.ი. ეს წილადი უნდა იყოს ნამდვილი რიცხვი. ეს მართლაც ასეა, მისი შეუღლებულია

$$\frac{(\bar{b}-\bar{c})(\bar{b}_1-\bar{m})}{(\bar{a}_1-\bar{m})(\bar{a}-\bar{c})} = \frac{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{m}\right)}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{m}\right)} =$$

$$= \frac{(c-b)(m-b_1)aa_1}{(c-a)(m-a_1)bb_1} = \frac{(b-c)(b_1-m)}{(a_1-m)(a-c)}.$$

რადგან $aa_1 = bb_1$, AA_1 და BB_1 ქორდების პარალელურობის გამო. ანალოგიურად დამტკიცდება $\left(\overline{MB_1}, \overline{CA}\right) = \left(\overline{MC_1}, \overline{BA}\right)$ კუთხეთა ტოლობაც.

ამოცანა 2. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ოთხკუთხედი, რომელიც ტრაპეცია არ არის. წრფე, რომელიც აერთებს ოთხკუთხედის ორ მოპირდაპირე გვერდის შუაწერტილებს დანარჩენ ორ გვერდთან ადგენს ტოლ კუთხეებს. დაამტკიცეთ, რომ ოთხკუთხედის დანარჩენი ორი გვერდი ერთმანეთის ტოლია.

ვთქვათ, M და N წერტილები დადებითად ორიენტირებული $ABCD$ ოთხკუთხედის BC და AD გვერდების შუაწერტილებია და

$$\left(\overline{NM}, \overline{AB}\right) = \left(\overline{DC}, \overline{NM}\right)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\arg \frac{b-a}{m-n} = \arg \frac{m-n}{c-d} \Rightarrow \arg \frac{(b-a)(c-d)}{(m-n)^2}.$$

ეს ნიშნავს, რომ ნამდვილია რიცხვი

$$\frac{(b-a)(c-d)}{(m-n)^2}$$

მაგრამ,

$$m = \frac{1}{2}(b+c), n = \frac{1}{2}(a+d).$$

ამიტომ,

$$\frac{(b-a)(c-d)}{(m-n)^2} = \frac{4(b-a)(c-d)}{((b-a)+(c-d))^2}$$

რიცხვი ნამდვილია.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$p = b-a, q = c-d.$$

მაშინ რიცხვი

$$\frac{pq}{(p+q)^2}$$

ნამდვილია.

ამიტომ,

$$\frac{(p+q)^2}{pq} = \frac{(\overline{p+q})^2}{\overline{pq}}.$$

ეს ტოლობა ეკვივალენტურია ტოლობისა:

$$(p\overline{p} - q\overline{q})(p\overline{q} - \overline{p}q) = 0.$$

რადგან $ABCD$ ოთხკუთხედი ტრაპეცია არ არის, ამიტომ AB და CD გვერდები არაპარალელურია, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$p\overline{q} \neq \overline{p}q.$$

რაც თავის მხრივ ნიშნავს, რომ

$$p\overline{p} = q\overline{q} \Rightarrow AB = CD.$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

§1.38. ინვერსია

S ცენტრისა და R რადიუსის მქონე წრეწირის მიმართ სიბრტყის ინვერსია ეწოდება გარდაქმნას, რომელსაც სიბრტყის ნებისმიერი S წერტილისაგან განსხვავებული M წერტილი გადაყავს ისეთ M' წერტილში, რომ სრულდება პირობები:

$$SM \cdot SM' = R^2$$

და M' წერტილი SM სხივის წერტილია. (S, R) წრეწირის ინვერსიის წრეწირი ეწოდება, ხოლო S წერტილი ინვერსიის ცენტრი. ზოგჯერ S წერტილს ინვერსიის პოლუსსაც უწოდებენ.

M წერტილის M' წერტილის სახის აგება ნაჩვენებია 58-ე ნახაზზე. თუ M წერტილი (S, R) წრეწირის გარეთ მდებარეობს, მაშინ ამ წერტილიდან უნდა გავავლოთ ინვერსიის წრეწირისადმი მხეები და შეხების T წერტილიდან დავუშვათ TM' მართობი SM სხივზე. STM და STM' სამკუთხედების მსგავსებიდან მივიღებთ

$$\frac{SM}{ST} = \frac{ST}{SM'}$$

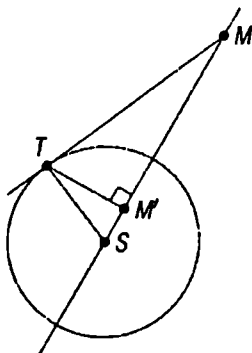
საიდანაც

$$SM \cdot SM' = ST^2 = R^2$$

ინვერსიის განმარტების ძალით M და M' წერტილებს ერთნაირი სტატუსი აქვთ. მართლაც, M' წერტილის სახე ამავე ინვერსიის დროს არის M წერტილი. ე.ი. ინვერსიის გარდაქმნა ინვოლიტურია, ანუ ისეთი გარდაქმნაა, რომელიც წარმოადგენს თავისი თავის შებრუნებულ გარდაქმნას.

ვიპოვოთ ინვერსიის გარდაქმნის ფორმულები.

ვთქვათ, S, M, M' წერტილების აფიქსებია შესაბამისად s, z, z' მაშინ $SM \cdot SM' = R^2$ ტოლობიდან გადავიდეთ ამ ტოლობის კვადრატზე.



ნახ.58.

გვაქვს:

$$(s-z)(\bar{s}-\bar{z})(s-z')(\bar{s}-\bar{z}') = R^4 \quad (1)$$

რადგან S, M, M' წერტილები კოლინეარულია, ამიტომ გვაქვს:

$$(s-z)(\bar{s}-\bar{z}') = (s-z')(\bar{s}-\bar{z}) \quad (2)$$

(1) და (2) ტოლობებიდან გვაქვს:

$$(\bar{s}-\bar{z})(s-z') = R^2,$$

საიდანაც,

$$z' = \frac{R^2}{z-s} + s \quad (3)$$

ანუ,

$$z' = \frac{\bar{z}s + R^2 - s\bar{s}}{z-s} \quad (4)$$

რადგან SM და SM' სხივები თანამიმართულია, ამიტომ (2) ტოლობის თითოეული თანამამრავლი დადებითია, რაც განაპირობებს იმას, რომ მათი ნამრავლი დადებითია და R^2 -ს უდრის.

ამრიგად, (S, R) წრეწირის მიმართ სიბრტყის ინვერსია ჩაიწერება ნებისმიერი ფორმულით (3) და (4) ფორმულებიდან.

იმ შემთხვევაში, როცა $s = 0$, მაშინ ინვერსიის ფორმულა მარტივდება

$$z' = \frac{R^2}{z} \quad (5)$$

(4) და (5) ფორმულებიდან ჩანს, რომ ინვერსიის ცენტრს სახე არა აქვს. იგივე დასკვნა შეიძლება გამოვიტანოთ ინვერსიის განსაზღვრებიდანაც.

სამართლიანია შებრუნებული დასკვნაც, კერძოდ:

სიბრტყის გარდაქმნა, რომელიც მოცემულია ფორმულით

$$z' = \frac{a\bar{z} + b}{z - a}, \quad b = \bar{b}, b + a\bar{a} > 0, \quad (6)$$

წარმოადგენს წრეწირის მიმართ ინვერსიას ცენტრით $S(a)$ წერილში და რადიუსით $R = \sqrt{b + a\bar{a}}$.

ინვერსიის ცნების გაფართოება შესაძლებელია, თუ მოთხოვნას $b + a\bar{a} > 0$ შევასუსტებთ $b + a\bar{a} \neq 0$ მოთხოვნით. როცა $b + a\bar{a} < 0$, ინვერსიის წრეწირის რადიუსი უნდა ჩავთვალოთ წარმოსახვითად $\sqrt{b + a\bar{a}} = i \cdot R$ და (3) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$z' = \frac{(iR)^2}{z-s} + s$$

ანუ,

$$z' = \frac{(iR)^2}{-z+s} + s \quad (3')$$

ეს გარდაქმნა წარმოადგენს (3) ჩვეულებრივი ინვერსიის და $z' = -z + 2s$ სიმეტრიის გარდაქმნის კომპოზიციას საერთო S ცენტრით.

ამრიგად, განზოგადებული ინვერსია ჩაიწერება

$$z' = \frac{\bar{a}z + b}{z - a}, \quad b = \bar{b}, b + a\bar{a} \neq 0, \quad (6')$$

ფორმულით.

გამოვთვალოთ AB და AB' მანძილებს შორის დამოკიდებულება, სადაც A და B -ნებისმიერი წერტილებია, ხოლო A' და B' -ამ წერტილების სახეებია ინვერსიის დროს. ინვერსიის ცენტრად მივიღოთ O სათავე, მაშინ ინვერსიის გარდაქმნის შემდეგ A წერტილის A' სახის a' აფიქსი გამოითვლება (5) ფორმულით

$$a' = \frac{R^2}{a}.$$

ანალოგიურად, B წერტილის B' სახის b' აფიქსისთვის გვექნება:

$$b' = \frac{R^2}{b}.$$

ამ ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$a' - b' = R^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = R^2 \cdot \frac{\bar{b} - \bar{a}}{a \cdot b},$$

საიდანაც,

$$|a'-b'| = R^2 \cdot \frac{|\overline{b-a}|}{|\overline{a} \cdot \overline{b}|} = R^2 \cdot \frac{|\overline{b-a}|}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}.$$

რადგან, $|\overline{b-a}| = |\overline{a-b}| = |a-b|$, $|\overline{a}| = |a|$, $|\overline{b}| = |b|$, ამიტომ

$$|a'-b'| = R^2 \cdot \frac{|a-b|}{|a| \cdot |b|}.$$

მეორეს მხრივ,

$$|a-b| = AB, |a| = OA, |b| = OB,$$

ამიტომ გვაქვს:

$$|a'-b'| = R^2 \cdot \frac{AB}{OA \cdot OB}.$$

§1.39. წრფეთა და წრეწირთა სახეები ინვერსიის დროს

ზოგადობის დაურღვევლად, ინვერსიის წრეწირი შეგვიძლია ჩავთვალოთ ერთეულოვან $z\overline{z} = 1$ წრეწირად. მაშინ ინვერსიის ფორმულას აქვს სახე:

$$z' = \frac{1}{z},$$

რომელიც პრაქტიკულად მოსახერხებელი ჩანაწერია. ჩავთვალოთ, რომ $z \neq 0$.

ვთქვათ, მოცემულია l წრფე $\overline{p}z + p\overline{z} + q = 0$, $q = \overline{q}$ განტოლებით. თუ ამ განტოლებაში ჩავსვამთ $z = \frac{1}{z'}$ და

$\overline{z} = \frac{1}{z'}$, მოვახდენთ საჭირო გარდაქმნებს, მივიღებთ:

$$q\bar{z}\bar{z} + \bar{p}z + p\bar{z} = 0, q = \bar{q} \quad (1)$$

როცა, $q = 0$, მაშინ ამ განტოლებით მოიცემა წრფე, რომელიც ემთხვევა მოცემულ l წრფეს. თუ $q \neq 0$, მაშინ ის წარმოადგენს წრეწირს, რომელიც შეიცავს ინვერსიის O ცენტრს. (1) წრეწირს, რომელიც მოცემული l წრფის სახეს წარმოადგენს ცენტრის აფიქსია $-\frac{p}{q}$ და

რადიუსია $\frac{|p|}{|q|}$. შევნიშნოთ, რომ ცენტრი $\bar{p}z = p\bar{z}$ წრფის

წერტილია, რომელიც გადის ინვერსიის ცენტრზე l წრფის მართობულად. ეს საშუალებას იძლევა მარტივად ავაგოთ მოცემული l წრფის ინვერსიით მიღებული წრეწირი.

გავავლოთ ინვერსიის ცენტრზე გამავალი m წრფე, რომელიც l წრფის მართობულია (ნახ.59). ავაგოთ $M = m \cap l$ წერტილის M' სახე ინვერსიის დროს, მაშინ OM' მონაკვეთი წარმოადგენს საძიებელი (1) წრეწირის დიამეტრს.

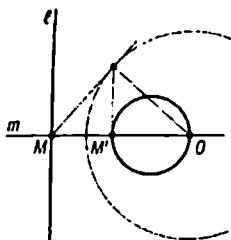
ამრიგად,

1. წრფე, რომელიც ინვერსიის ცენტრზე გადის, ამ ინვერსიის დროს აისახება თავის თავში;

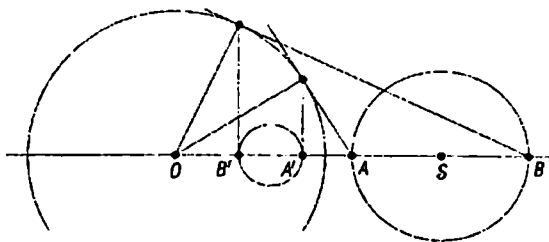
2. წრფე, რომელიც ინვერსიის ცენტრზე არ გადის, ამ ინვერსიის დროს აისახება წრეწირზე, რომელიც ინვერსიის ცენტრზე გადის.

რადგან ინვერსიის გარდაქმნა ინვოლიუტიურია, ამიტომ

3. წრეწირი, რომელიც ინვერსიის ცენტრზე გადის, აისახება წრეზე, რომელიც ინვერსიის ცენტრზე არ გადის.



ნახ. 59.



ნახ. 60.

განვიხილოთ წრეწირი

$$(z-s)(\bar{z}-\bar{s})=r^2, \quad s\bar{s} \neq r^2 \quad (2)$$

რომელიც არ გადის $z'=1/z$ ინვერსიის O ცენტრზე.

მაშინ მისი სახე ჩაიწერება განტოლებით:

$$\left(\frac{1}{z}-s\right)\left(\frac{1}{\bar{z}}-\bar{s}\right)=r^2,$$

რომელიც გარდაქმნებით დაიყვანება სახეზე:

$$(s\bar{s}-r^2)z\bar{z}-\bar{s}z-s\bar{z}+1=0 \quad (3)$$

რადგან $s\bar{s}-r^2 \neq 0$, ამიტომ (3) განტოლებით მოიცემა წრეწირი, რომლის ცენტრი მოთავსებულია $\frac{s}{s\bar{s}-r^2}$ წერ-

ტილში და მისი რადიუსია $\frac{r}{|s\bar{s}-r^2|}$. ეს წრეწირი არ

გადის ინვერსიის O ცენტრზე. ინვერსიის ცენტრი, (2) განტოლებით მოცემული წრეწირის ცენტრი და ამ წრეწირის ინვერსიით მიღებული წრეწირის ცენტრი

კოლინეარუ-ლია, რადგან $s\bar{s} - r^2$ ნამდვილი რიცხვია. ეს საშუალებას იძლევა ავაგოთ წრეწირის სახე მისი დიამეტრა-ლურად საპირისპირო სახეებით, რომლებიც ინვერსიის ცენტრის კოლინეარულია (ნახ.60).

(2) და (3) წრეწირების რადიუსების ფარდობა ტოლია

$$\frac{r}{\overline{r}} = \frac{|s\bar{s} - r^2|}{|OS^2 - r^2|}.$$

კერძო შემთხვევაში, როცა (2) წრეწირი ემთხვევა $\bar{z}\bar{z}=1$ ინვერსიის წრეწირს (როცა $s=0, r=1$), (3) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$\bar{z}\bar{z}=1,$$

ე.ი. ინვერსიის წრეწირი ამ ინვერსიით აისახება თავის თავში. უფრო მეტიც, ინვერსიის წრეწირის ყოველი წერტილი ამ ინვერსიის დროს უძრავია.

როცა $s=0$ და $r \neq 1$, მაშინ (3) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\bar{z}\bar{z} = \frac{1}{r^2},$$

ცხადია, r რადიუსიანი წრეწირი, რომელიც ინვერსიის წრეწირის კონცენტრულია ამ ინვერსიით აისახება $\frac{1}{r}$ რადიუსის წრეწირში, რომელიც ამავე ინვერსიის წრეწირის კონცენტრულია.

§1.40. ინვერსიის კონფორმულობის თვისება

ვაჩვენოთ, რომ ინვერსია ინარჩუნებს წრეწირებს შორის კუთხეს, ასევე წრფესა და წრეწირს შორის კუთხეს, მაგრამ მის ორიენტაციას ცვლის საპირისპიროდ.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ორი წრეწირი (წრფე და წრეწირი), რომელთაგან ერთი წრეწირი გადის A, B, C წერტილებზე, ხოლო მეორე წრეწირი გადის A, B, D წერტილებზე. თუ A', B', C', D' -წერტილები მოცემული წერტილების სახეებია $z' = \frac{1}{z}$ ინვერსიის დროს, მაშინ A', B', C' წერტილების w' ორმაგი ფარდობა A, B, C, D წერტილების w ფარდობის ტოლი კომპლექსური რიცხვის შეუღლებულს უდრის.

$$w' = \frac{a'-c'}{b'-c'} : \frac{a'-d'}{b'-d'} = \frac{\overline{a}-\overline{c}}{\overline{b}-\overline{c}} : \frac{\overline{a}-\overline{d}}{\overline{b}-\overline{d}} = \overline{w}.$$

w ორმაგი ფარდობის არგუმენტის გეომეტრიული აზრიდან გამომდინარეობს, რომ ის ტოლია (A, B, C) და (A, B, D) წრეწირებს შორის (წრფესა და წრეწირს შორის) ორიენტირებული კუთხისა.

$$\arg w' = \arg \overline{w} = -\arg w.$$

კერძოდ, ინვერსიის დროს ორი ორთოგონალური წრეწირი აისახება ორ ორთოგონალურ წრეწირზე (წრეწირსა და წრფეზე).

რადგან $|w'| = |w|$, ამიტომ ინვერსია ორმაგი ფარდობის დროს ინარჩუნებს წერტილებს შორის მანძილს.

ამოცანა 1. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირი, თავისი ინვერსიული წრეწირის მართობულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ ინვერსიით ის თავის თავში აისახება.

ვთქვათ, $z\bar{z}=1$ ინვერსიის წრეწირია და γ წრეწირის $(z-s)(\bar{z}-\bar{s})=r^2$ მასთან საერთო $A(a)$ წერტილი აქვს. მაშინ

$$a\bar{a}=1 \text{ და } (z-a)(\bar{z}-\bar{a})=r^2.$$

წრეწირების მართობულობის $OA \perp SA$ პირობა ჩაიწერება სახით:

$$a(\bar{a}-s)+\bar{a}(a-s)=0.$$

ანუ,

$$s\bar{a}+\bar{s}a=2.$$

თუ გავითვალისწინებთ ტოლობას $(z-s)(\bar{z}-\bar{s})=r^2$, გვექნება:

$$s\bar{s}-r^2=1.$$

წინა პარაგრაფის (2) და (3) ფორმულებზე დაყრდნობით ეს ნიშნავს, რომ γ წრეწირი ინვერსიის დროს ემთხვევა თავის თავს.

პირიქით, თუ ეს განტოლებები ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ $s\bar{s}-r^2=1$. ეს კი γ წრეწირის და $z\bar{z}=1$ ინვერსიის წრეწირის მართობულობის კრიტერიუმია.

ამოცანა 2. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირი, რომელიც შეიცავს ორ ურთიერთინვერსიულ წრეწირს, ინვერსიის წრეწირის მართობულია.

თუ $z\bar{z}=1$ წრეწირის მიმართ $z'=\frac{1}{z}$ ინვერსიის დროს გვაქვს $A\rightarrow B$ და $B\rightarrow A$ წერტილთა შესაბამისი წყვილი, მაშინ

$$a\bar{b}=\bar{a}b=1.$$

პირობის თანახმად, A და B წერტილები

$$(z-s)(\bar{z}-\bar{s})=r^2$$

წრეწირის წერტილებია. ამიტომ,

$$\begin{cases} (a-s)(\bar{a}-\bar{s})=r^2, \\ (b-s)(\bar{b}-\bar{s})=r^2. \end{cases}$$

ანუ,

$$\begin{cases} a\bar{a}-a\bar{s}-s\bar{a}+s\bar{s}-r^2=0, \\ b\bar{b}-b\bar{s}-s\bar{b}+s\bar{s}-r^2=0. \end{cases}$$

სისტემის პირველი განტოლება გავამრავლოთ b -ზე, მეორე a -ზე. გვექნება:

$$\begin{cases} a(\bar{a}b)-ab\bar{s}-s(\bar{b}a)+bs\bar{s}-br^2=0, \\ (a\bar{b})b-ab\bar{s}-s(a\bar{b})+as\bar{s}-ar^2=0. \end{cases}$$

რადგან $a\bar{b}=\bar{a}b=1$, ამიტომ სისტემიდან მივიღებთ:

$$\begin{cases} a-ab\bar{s}-s+bs\bar{s}-br^2=0, \\ b-ab\bar{s}-s+as\bar{s}-ar^2=0. \end{cases}$$

სისტემის მიღებული განტოლებებიდან პირველ განტოლებას გამოვაკლოთ მეორე განტოლება, მივიღებთ:

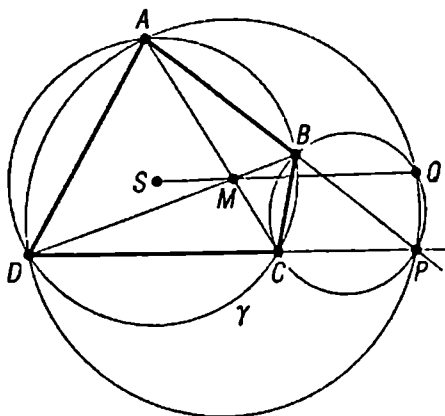
$$(a-b)+(s\bar{s}-r^2)(b-a)=0.$$

რადგან $a \neq b$, ამიტომ $(a-b)$ -ზე შეკვეცის შემდეგ მივიღებთ:

$$\overline{ss} - r^2 = 1.$$

რაც ნიშნავს, რომ მოცემული წრეწირი და ინვერსიის წრეწირები ორთოგონალურია.

ამოცანა 3. γ წრეწირში ჩახაზული $ABCD$ ოთხკუთხედის AB და CD გვერდების შემცველი წრფეები P წერტილში გადაიკვეთებიან. ADP და BCP წერტილებზე შემოხაზული წრეწირების გადაკვეთის მეორე წერტილია Q . დაამტკიცეთ, რომ Q წერტილი ოთხკუთხედის დიაგონალების გადაკვეთის M წერტილის ინვერსიული წერტილია ინვერსიის წრეწირის მიმართ. (ნახ. 61).



ნახ. 61.

P წერტილი ჩავთვალოთ სათავედ. მაშინ, ცხადია:

$$\overline{ab} = \overline{ab} \text{ და } \overline{cd} = \overline{cd}.$$

წრეწირების მკვეთების თვისებების თანახმად,

$$\overline{aa} \cdot \overline{bb} = \overline{cc} \cdot \overline{dd}.$$

$$\overline{ab} = \overline{ab} = \overline{cd} = \overline{dc}.$$

შევადგინოთ ADP და BCP წერტილებზე გამავალი წრეწირების განტოლებები. გვაქვს:

$$\begin{cases} z\bar{z}(a\bar{d} - \bar{a}d) - z\bar{a}\bar{d}(a - d) + \bar{z}ad(\bar{a} - \bar{d}) = 0, \\ z\bar{z}(b\bar{c} - \bar{b}c) - z\bar{b}\bar{c}(b - c) + \bar{z}bc(\bar{b} - \bar{c}) = 0. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამოხსნის დროს გავითვალისწინოთ (1) დამოკიდებულებები. ცხადია, რომ სისტემას აქვს არანულოვანი ამონახსნები, რომელიც შეესაბამება წრეწირის საერთო P წერტილს.

მეორე ამონახსნი ტოლია:

$$q = \frac{ac - bd}{(a + c) - (b + d)}. \quad (2)$$

თუ შევასრულებთ კოორდინატთა სისტემის გადატანას, მაშინ A, B, C, D, P, Q წერტილების აფიქსები იქნება უკვე ისეთი სხვა $a_1, b_1, c_1, d_1, p_1, q_1$ კომპლექსური რიცხვები, რომ შესრულდება პირობები

$$a = a_1 + \rho, b = b_1 + \rho, c = c_1 + \rho,$$

$$d = d_1 + \rho, p = p_1 + \rho, q = q_1 + \rho.$$

თუ ამ დამოკიდებულებებს ჩავსვამთ (2) ფორმულაში, გვექნება:

$$\begin{aligned} q &= \frac{(a_1 + \rho)(c_1 + \rho) - (b_1 + \rho)(d_1 + \rho)}{(a_1 + \rho + c_1 + \rho) - (b_1 + \rho + d_1 + \rho)} = \\ &= \frac{a_1c_1 + a_1\rho + c_1\rho + \rho^2 - b_1d_1 - b_1\rho - d_1\rho - \rho^2}{(a_1 + c_1) - (b_1 + d_1)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(a_1c_1 - b_1d_1) + [(a_1 + c_1) - (b_1 + d_1)]\rho}{(a_1 + c_1) - (b_1 + d_1)} = \\
&= \frac{a_1c_1 - b_1d_1}{(a_1 + c_1) - (b_1 + d_1)} + \frac{(a_1 + c_1) - (b_1 + d_1)}{(a_1 + c_1) - (b_1 + d_1)}\rho = \\
&= \frac{a_1c_1 - b_1d_1}{(a_1 + c_1) - (b_1 + d_1)} + \rho = q_1 + \rho.
\end{aligned}$$

ი.ი.

$$q_1 = \frac{a_1c_1 - b_1d_1}{(a_1 + c_1) - (b_1 + d_1)}.$$

რაც ნიშნავს, რომ (2) ფორმულა სამართლიანია მაშინაც, როცა კოორდინატა სათავე ემთხვევა γ წრეწირის ცენტრს. ამ შემთხვევაში

$$\frac{-}{m} = \frac{(a+c) - (b+d)}{ac - bd}.$$

ცხადია, $q = \frac{1}{m}$. ეს ნიშნავს, რომ Q წერტილი M წერტილის ინვერსიულია $ABCD$ ოთხკუთხედზე შემოხაზული γ წრეწირის მიმართ.

ამოცანა 4. იპოვეთ სამი წყვილ-წყვილად მართობული წრეწირების მიმართ ინვერსიის კომპოზიცია.

ვთქვათ, მოცემულია სამი ურთიერთმართობული წრეწირი:

$$z\bar{z}=1, (z-a)(\bar{z}-\bar{a})=r^2, (z-b)(\bar{z}-\bar{b})=R^2.$$

ამ წრეწირების წყვილ-წყვილად ურთიერთმართობულობის პირობას აქვს სახე:

$$a\bar{a}-r^2=1, b\bar{b}-R^2=1, (a-b)(\bar{a}-\bar{b})=R^2+r^2.$$

გარდავქმნათ $(a-b)(\bar{a}-\bar{b})=R^2+r^2$ გამოსახულება.

გვაქვს:

$$a\bar{a}-a\bar{b}-\bar{a}b+b\bar{b}=R^2+r^2.$$

ანუ,

$$(a\bar{a}-r^2)-(a\bar{b}+\bar{a}b)+(b\bar{b}-R^2)=0.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$a\bar{a}-r^2=1 \text{ და } b\bar{b}-R^2=1,$$

მივიღებთ:

$$a\bar{b}+\bar{a}b=2.$$

ანუ,

$$1-a\bar{b}=\bar{a}b-1.$$

f_1, f_2, f_3 ინვერსიები მოცემული წრეწირის მიმართ ჩაიწერება ფორმულებით:

$$z'=\frac{1}{z}, z'=\frac{r^2}{z-a}+a, z'=\frac{R^2}{z-b}+b.$$

ვიპოვოთ $f_2 \square f_1$ კომპოზიცია:

$$z'=\frac{r^2}{\frac{1}{z}-\bar{a}}+a=\frac{r^2z}{1-az}+a=\frac{r^2z-a\bar{a}z+a}{1-\bar{a}z}=\frac{(r^2-a\bar{a})z+a}{1-\bar{a}z},$$

რადგან, $r^2-a\bar{a}=-1$, ამიტომ

$$z'=\frac{-z+a}{1-\bar{a}z},$$

ანუ,

$$z'=\frac{z-a}{az-1}.$$

ვიპოვოთ $f_3 \square (f_2 \square f_1)$ კომპოზიცია:

$$z' = \frac{R^2}{\frac{z-a}{az-1} - \bar{b}} + b = \frac{R^2 (a\bar{z}-1)}{z-a-\bar{b}(a\bar{z}-1)} + b =$$

$$= \frac{aR^2\bar{z} - R^2 + b\bar{z} - \bar{a}b - abb\bar{z} + b\bar{b}}{\bar{z} - a - ab\bar{z} + b} = \frac{a\bar{z}(R^2 - b\bar{b}) - (R^2 - b\bar{b}) + b\bar{z} - \bar{a}b}{\bar{z}(1-ab) - a + b}.$$

რადგან $R^2 - b\bar{b} = -1$, ამიტომ გვაქვს:

$$z' = \frac{1 - a\bar{z} + b\bar{z} - \bar{a}b}{\bar{z}(1-ab) - a + b} = \frac{\bar{z}(a-b) - (1-\bar{a}b)}{\bar{z}(ab-1) + (\bar{a}-b)}.$$

ამ ფორმულით განსაზღვრულია ინვერსია ცენტრით $\frac{a-b}{ab-1}$ და რადიუსით ρ , ისეთი, რომ

$$\rho^2 = \frac{R^2 + r^2 + (a\bar{b}-1)^2}{-(a\bar{b}-1)^2}.$$

ეს რიცხვი ნამდვილია, რადგან $a\bar{b}-1$ სუფთა წარმოსახვითი კომპლექსური რიცხვია.

§1.41. პლანიმეტრიული ამოცანების ამოხსნა კომპლექსური რიცხვების გამოყენებით

კომპლექსური რიცხვების გამოყენებით შედარებით რთული პლანიმეტრიული ამოცანების ამოხსნის დროს ზოგჯერ გამოვიყენებთ სიმეტრიულ მრავალწევრებს, რისი საშუალებითაც მოვახდენთ ამოხსნის პროცესში მათემატიკური გარდაქმნების ჩატარებისათვის საჭირო

დროის ეკონომიას, ფორმულებს ჩავწერთ კომპაქტურად და სხვ. ჩვენ გამოვიყენებთ ჩანაწერებს:

$$\sigma_1 = z_1 + z_2 + z_3,$$

$$\sigma_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3,$$

$$\sigma_3 = z_1 z_2 z_3.$$

ამოცანა 1. ABC ნებისმიერი სამკუთხედია. G -მისი მედიანების გადაკვეთის წერტილია (სიმძიმის ცენტრი); H -სიმაღლეთა გადაკვეთის წერტილია (ორთოცენტრი). O -წერტილი ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრია $(O) = (ABC)$; A_1, B_1, C_1 -წერტილები შესაბამისად BC, AC და AB გვერდების შუაწერტილებია; A_2, B_2, C_2 -სიმაღლეთა ფუძეებია; AH, BH და CH მონაკვეთის შუაწერტილებია A_3, B_3, C_3 შესაბამისად (ეილერის წერტილები); A_4, B_4, C_4 -შესაბამისად H ორთოცენტრის სიმეტრიული წერტილებია BC, AC და AB წრფეების მიმართ.

დავამტკიცოთ, რომ:

1. O, G, H წერტილები კოლინეარულია და

$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}.$$

2. $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ წერტილები ერთი (O_9) წრეწირის წერტილებია, რომელსაც ეილერის წრეწირი, ანუ ABC სამკუთხედის ცხრა წერტილის წრეწირი ეწოდება. (O_9) წრეწირის ცენტრს წარმოადგენს OH მონაკვეთის შუაწერტილი. (O_9) წრეწირის რადიუსია $\frac{R}{2}$.

სადაც $R - (ABC)$ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსია.

3. A_4, B_4, C_4 - შემოხაზული წრეწირის რადიუსია.

1. ჩავთვალოთ $(O) = (ABC)$ წრეწირი ერთეულოვან წრეწირად. ვთქვათ, a, b, c შესაბამისად A, B, C წერტილების აფიქსებია. დავამტკიცოთ, რომ ABC სამკუთხედის H ორთოცენტრის აფიქსი ტოლია $a+b+c$.

BC წრფის კუთხური კოეფიციენტი:

$$\aleph = \frac{c-b}{c-b} = \frac{c-b}{\frac{1}{c} - \frac{1}{b}} = -bc.$$

ვთქვათ, M წერილის აფიქსია $a+b+c$. AM წრფის კუთხური კოეფიციენტი

$$\aleph' = \frac{a+b+c-a}{a+b+c-a} = \frac{b+c}{b+c} = \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = bc.$$

საიდანაც

$$\aleph + \aleph' = 0.$$

ეს ნიშნავს, რომ AM წრფე BC წრფის პერპენდიკულარულია. ასევე ვაჩვენებთ BMC და AC, CM და BC წრფეების პერპენდიკულარობას. ე.ი. M წერტილი $a+b+c$ აფიქსით ემთხვევა ABC სამკუთხედის H ორთოცენტრს.

რადგან G მედიანების გადაკვეთის წერტილია, ხოლო მედიანები გადაკვეთის წერტილით იყოფიან შეფარდებით 2:1 წვეროს მხრიდან, ამიტომ თუ გამოვიყენებთ მონაკვეთის l გაყოფის ფორმულას, მარტი-

ვად მივიღებთ, რომ G წერტილის აფიქსია $\frac{a+b+c}{3}$.

რადგან H ორთოცენტრის აფიქსია $a+b+c$. გამომდინარეობს, რომ $\overline{OH} = 3\overline{OG}$. ე.ი. O, G, H წერტილები კოლინეარულია.

2. BC, AC და AB გვერდების A_1, B_1, C_1 შუაწერტილების აფიქსებია:

$$a_1 = \frac{b+c}{2}, b_1 = \frac{a+c}{2}, c_1 = \frac{a+b}{2}.$$

ვთქვათ, OH მონაკვეთის შუაწერტილია E , მაშინ მისი აფიქსია

$$\varepsilon = \frac{a+b+c}{2}.$$

რადგან

$$\varepsilon - a_1 = \frac{a}{2}, \varepsilon - b_1 = \frac{b}{2}, \varepsilon - c_1 = \frac{c}{2}, |a| = |b| = |c| = 1,$$

ამიტომ

$$|\varepsilon - a_1| = |\varepsilon - b_1| = |\varepsilon - c_1| = \frac{1}{2} = \frac{R}{2}, (R=1).$$

ე.ი.

$$EA_1 = EB_1 = EC_1 = \frac{R}{2}.$$

ამრიგად, BC, AC და AB გვერდების A_1, B_1, C_1 შუაწერტილები OH მონაკვეთის E შუაწერტილიდან ერთნაირი $\frac{R}{2}$ მანძილითაა დაშორებული, ამიტომ

ისინი (A_1, B_1, C_1) წრეწირზე მდებარეობენ, რომლის ცენტრია $E\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$ და რადიუსია $\frac{R}{2}$.

AH და BC წრფეთა განტოლებებია შესაბამისად:

$$z - a = bc(\bar{z} - \bar{a}),$$

$$z - b = -bc(\bar{z} - \bar{b}),$$

ანუ

$$z - bc\bar{z} = a - \bar{a}bc,$$

$$z + bc\bar{z} = b + c.$$

ამ ტოლობების შეკრებით ვიპოვით A_2 წერტილის a_2 აფიქსს,

$$a_2 = \frac{a+b+c}{2} - \frac{bc}{2a} = \varepsilon - \frac{bc}{2a}.$$

საიდანაც,

$$EA_2 = |a_2 - \varepsilon| = \left| -\frac{bc}{2a} \right| = \frac{|bc|}{2|a|} = \frac{|b||c|}{2|a|} = \frac{1}{2} = \frac{R}{2}, |a| = |b| = |c| = 1.$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$a_3 = \frac{a+a+b+c}{2} = \frac{2\varepsilon+a}{2} = \varepsilon + \frac{a}{2},$$

ამრიგად, $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ წერტილები ეკუთვნიან წრეწირს, რომლის ცენტრია OH მონაკვეთის E შუა-წერტილი და რადიუსია $\frac{R}{2}$.

AH, BH და CH მონაკვეთების A_3, B_3, C_3 შუაწერტილების აფიქსები ტოლია:

$$a_3 = \frac{a+a+b+c}{2} = \frac{2\varepsilon+a}{2} = \varepsilon + \frac{a}{2},$$

$$b_3 = \frac{b+a+b+c}{2} = \frac{2\varepsilon+b}{2} = \varepsilon + \frac{b}{2},$$

$$c_3 = \frac{c+a+b+c}{2} = \frac{2\varepsilon+c}{2} = \varepsilon + \frac{c}{2}.$$

საიდანაც,

$$EA_3 = |a_3 - \varepsilon| = \left| \frac{a}{2} \right| = \frac{1}{2} = \frac{R}{2},$$

$$EB_3 = EC_3 = \frac{R}{2}.$$

ამრიგად, ცხრავე $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ წერტილი ეკუთვნის $\left(E, \frac{R}{2}\right)$ წრეწირს, რომლის ცენტრია OH მონაკვეთის E შუაწერტილი და რადიუსია $\frac{R}{2}$.

3. დავუბრუნდეთ AH წრფის განტოლებას:

$$z - a = bc(\bar{z} - \bar{a}),$$

რომელიც გადის A წერტილზე BC წრფის მართობულად.

ვიპოვოთ ამ წრფის გადაკვეთის წერტილთა აფიქსები ერთეულოვან $\bar{z}z = 1$ წრეწირთან.

$$z - a = bc\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{a}\right),$$

$$z - a = -bc \frac{z - a}{az}.$$

ამ განტოლების ერთ-ერთი ფესვია $z=a$ (A წერტილის აფიქსი), მეორე კი

$$z = -\frac{bc}{a}.$$

(N წერტილი, აფიქსით $-\frac{bc}{a}$ ეკუთვნის ერთეულოვან წრეწირს, მართლაც, ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$\left| -\frac{bc}{a} \right| = \left| \frac{bc}{a} \right| = \frac{|bc|}{|a|} = \frac{|b||c|}{|a|} = 1.$$

ვაჩვენოთ, რომ NH მონაკვეთის შუაწერტილი ემთხვევა A_2 წერტილს.

მართლაც, ამ მონაკვეთის შუაწერტილის აფიქსია:

$$\frac{a+b+c-\frac{bc}{a}}{2} = \frac{2\varepsilon - \frac{bc}{a}}{2} = \varepsilon - \frac{bc}{a} = a_2.$$

ამრიგად, N წერტილი A_4 წერტილს ემთხვევა.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ B და C წვეროებიდან გამოსული სიმაღლეები (ABC) წრეწირს კვეთს AC და AB წრფეების მიმართ H ორთოცენტრის სიმეტრიულ B_4 და C_4 წერტილებში.

ამოცანა 2. (ბუტენის წერტილები).

ვთქვათ, ABC სამკუთხედზე შემოხაზულია ერთეულოვანი $\bar{z}z=1$ წრეწირი. სამკუთხედის წვეროთა აფიქსებია a, b და c . ამბობენ, რომ წერტილი ABC სამკუთხედისთვის ბუტენის წერტილია, თუ ის ჩათვლილია ერთეულოვან წრეწირად (ე.ი. ისეთ

წერტილად, რომლის აფიქსი 1-ის ტოლია $z=1$) და სრულდება პირობა

$$a \cdot b \cdot c = \sigma_3 = 1.$$

დაამტკიცეთ, რომ წრეწირში ჩხაზული ABC სამკუთხედისათვის ამ წრეწირზე არსებობს ბუტენის სამი წერტილი, რომლებიც ადგენენ ტოლგვერდა სამკუთხედს.

ახალ ერთეულოვან წერტილად ავიღოთ α ($|\alpha|=1$) წერტილი. მაშინ A, B, C წერტილების ახალი აფიქსები იქნება $\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\alpha}, \frac{c}{\alpha}$. α წერტილი ბუტენის წერტილია მაშინ, თუ ამ წერტილების აფიქსების ნამრავლი 1-ის ტოლია:

$$\frac{a}{\alpha} \cdot \frac{b}{\alpha} \cdot \frac{c}{\alpha} = 1.$$

ანუ,

$$a \cdot b \cdot c = \alpha^3$$

რაც იგივეა,

$$\alpha^3 = \sigma_3.$$

უკანასკნელ განტოლებას აქვს სამი ფესვი:

$$\sqrt[3]{\sigma_3}, \varepsilon \sqrt[3]{\sigma_3}, \varepsilon^2 \sqrt[3]{\sigma_3}.$$

სადაც $\sqrt[3]{\sigma_3}$ -არის σ_3 -ის კუბური ფესვების ნებისმიერი ფესვი მისი სამი ფესვიდან, ხოლო ε -ნებისმიერია $\sqrt[3]{1}$ -ის ორი წარმოსახვითი მნიშვნელობიდან.

ანუ

$$\text{ან } \varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{ან } \varepsilon = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

ვთქვათ, მაგალითად,

$$\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ.$$

მაშინ,

$$\varepsilon^2 = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ$$

და ბუტენის წერტილების ასაგებად პირველად უნდა ავაგოთ $\sqrt[3]{\sigma_3}$ -ის არჩეული მნიშვნელობა, ხოლო შემდეგ ის უნდა გავამრავლოთ ε -ზე (მობრუნება 120° -ით) და შემდეგ კიდევ უნდა გავამრავლოთ ε -ზე (კიდევ მობრუნება 120° -ით). მივიღებთ ტოლფერდა სამკუთხედის წვეროებს აფიქსებით:

$$\sqrt[3]{\sigma_3}, \varepsilon \sqrt[3]{\sigma_3}, \varepsilon^2 \sqrt[3]{\sigma_3}.$$

ამოცანა 3. ABC სამკუთხედის BC, CA და AB გვერდებზე P წერტილის ორთოგონალური გეგმილებია შესაბამისად A_1, B_1, C_1 . ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის O ცენტრი ჩავთვალოთ კოორდინატთა სათავედ. ვთქვათ, Rz_1, Rz_2, Rz_3 - A, B, C წერტილების აფიქსებია, სადაც R -არის ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი ($|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$) ვთქვათ, P წერტილის აფიქსია p . იპოვეთ A_1, B_1, C_1 წერტილების a_1, b_1, c_1 აფიქსები და გამოსახეთ ორიენტირებული $A_1B_1C_1$ სამკუთხედის ფართობი ორიენტირებული ABC სამკუთხედის BC, CA და AB გვერდების a, b, c სიგრძეებით და P წერტილის p აფიქსით.

განიხილეთ კერძო შემთხვევები:

1. P წერტილი ემთხვევა ABC სამკუთხედის სიმძიმის G ცენტრს.

2. P წერტილი ემთხვევა ABC სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის I ცენტრს.

3. P წერტილი ემთხვევა ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის O ცენტრს.

4. P წერტილი ემთხვევა ABC სამკუთხედის H ორთოცენტრს.

BC წრფის განტოლებაა:

$$z - z_2 R = -z_2 z_3 (\bar{z} - z_2 R),$$

ანუ

$$z + z_2 z_3 \bar{z} = R(z_2 + z_3)$$

რადგან,

$$\sigma_1 = z_1 + z_2 + z_3,$$

რაც იგივეა,

$$z + z_2 z_3 \bar{z} = R(\sigma_1 - z_1). \quad (1)$$

P წერტილიდან BC გვერდზე დაშვებული მართობის განტოლებაა

$$z - p = z_2 z_3 (\bar{z} - \bar{p}).$$

ანუ,

$$z - z_2 z_3 \bar{z} = p - z_2 z_3 \bar{p}.$$

რადგან $\sigma_3 = z_1 z_2 z_3$, ამიტომ $\bar{z}_1 \sigma_3 = \bar{z}_1 z_1 z_2 z_3$, მაგრამ $\bar{z}_1 z_1 = 1$, ამიტომ $z_2 z_3 = \bar{z}_1 \sigma_3$, გვაქვს:

$$z - z_2 z_3 \bar{z} = p - \bar{z}_1 \sigma_3 \bar{p}. \quad (2)$$

(1) და (2) განტოლებების წევრ-წევრად შეკრებით მივიღებთ წერტილის აფიქსს:

$$a_1 = \frac{1}{2} (R\sigma_1 + p - Rz_1 - \bar{z}_1 \sigma_3 \bar{p})$$

ანალოგიურად,

$$b_1 = \frac{1}{2} (R\sigma_1 + p - Rz_2 - \bar{z}_2 \sigma_3 \bar{p})$$

$$c_1 = \frac{1}{2} (R\sigma_1 + p - Rz_3 - \bar{z}_3 \sigma_3 \bar{p})$$

საიდანაც,

$$S_{A_1 B_1 C_1} = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} (R\sigma_1 + p - Rz_1 - \bar{z}_1 \sigma_3 \bar{p}) & \frac{1}{2} (R\bar{\sigma}_1 + \bar{p} - Rz_1 - z_1 \bar{\sigma}_3 p) & 1 \\ \frac{1}{2} (R\sigma_1 + p - Rz_2 - \bar{z}_2 \sigma_3 \bar{p}) & \frac{1}{2} (R\bar{\sigma}_1 + \bar{p} - Rz_2 - z_2 \bar{\sigma}_3 p) & 1 \\ \frac{1}{2} (R\sigma_1 + p - Rz_3 - \bar{z}_3 \sigma_3 \bar{p}) & \frac{1}{2} (R\bar{\sigma}_1 + \bar{p} - Rz_3 - z_3 \bar{\sigma}_3 p) & 1 \end{vmatrix}$$

თუ მოვახდენთ საჭირო გარდაქმნებს, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} S_{A_1 B_1 C_1} &= \frac{i}{16} \begin{vmatrix} Rz_1 + \bar{z}_1 \sigma_3 \bar{p} & Rz_1 + z_1 \bar{\sigma}_3 p & 1 \\ Rz_2 + \bar{z}_2 \sigma_3 \bar{p} & Rz_2 + z_2 \bar{\sigma}_3 p & 1 \\ Rz_3 + \bar{z}_3 \sigma_3 \bar{p} & Rz_3 + z_3 \bar{\sigma}_3 p & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{i}{16} \left(R^2 \cdot \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} + p \bar{p} \cdot \begin{vmatrix} \bar{z}_1 & z_1 & 1 \\ \bar{z}_2 & z_2 & 1 \\ \bar{z}_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \right) = \\ &= \frac{i}{16} \left(-4i S_{ABC} + \frac{4ip \bar{p}}{R^2} S_{ABC} \right) = \frac{1}{4} S_{ABC} \left(1 - \frac{p \bar{p}}{R^2} \right) = \\ &= \frac{R^2 - p \bar{p}}{4R^2} S_{ABC} = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2} S_{ABC} \end{aligned}$$

1. P წერტილი ემთხვევა ABC სამკუთხედის სიმბიზის G ცენტრს, ანუ G სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილია, მაშინ,

$$\begin{aligned}
OP^2 = OG^2 &= p\bar{p} = \frac{1}{3}(Rz_1 + Rz_2 + Rz_3) \cdot \frac{1}{3}(R\bar{z}_1 + R\bar{z}_2 + R\bar{z}_3) = \\
&= \frac{R^2}{9}(z_1 + z_2 + z_3) \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) = \\
&= \frac{R^2}{9}[z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_1 + z_3\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_3 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_3] = \\
&= \frac{R^2}{9}\left[3 + (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) + (z_1\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1) + (z_3\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3)\right]
\end{aligned}$$

მაგრამ,

$$\begin{aligned}
a^2 &= (Rz_2 - Rz_3)(R\bar{z}_2 - R\bar{z}_3) = R^2(z_2 - z_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) = \\
&= R^2[z_2\bar{z}_2 - z_3\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_3 - z_3\bar{z}_3] = R^2\left[2 - (z_3\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3)\right]
\end{aligned}$$

საიდანაც,

$$z_3\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 = 2 - \frac{a^2}{R^2}.$$

ანალოგიურად,

$$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 2 - \frac{c^2}{R^2},$$

$$z_3\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_3 = 2 - \frac{b^2}{R^2}.$$

რადგან,

$$OG^2 = \frac{R^2}{9}\left[3 + 2 - \frac{a^2}{R^2} + 2 - \frac{b^2}{R^2} + 2 - \frac{c^2}{R^2}\right] = \frac{R^2}{9}\left[9 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{R^2}\right]$$

$$OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$$

საიდანაც,

$$R^2 - OG^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$$

ამიტომ,

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2} S_{ABC} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{36R^2} S_{ABC}.$$

მაგრამ,

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4|S_{ABC}|}$$

გვაქვს:

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{4(a^2 + b^2 + c^2)}{9a^2b^2c^2} S_{ABC}^2.$$

2. თუ P წერტილი ემთხვევა ABC სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის I ცენტრს, მაშინ

$$\overline{PP} = OP^2 = OG^2 = R^2 - 2Rr \text{ (ეილერის ფორმულა)}$$

და გვაქვს:

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{R^2 - (R^2 - 2Rr)}{4R^2} = \frac{r}{2R} S_{ABC}.$$

ერთის მხრივ,

$$|S_{ABC}| = \frac{1}{2}(a+b+c)r.$$

საიდანაც,

$$r = \frac{|2S_{ABC}|}{a+b+c},$$

მეორეს მხრივ,

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4|S_{ABC}|}$$

თუ გავითვალისწინებთ ამ ფორმულებს, გვექნება:

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{2|S_{ABC}|}{\frac{a+b+c}{abc}} \cdot S_{ABC} = \frac{4}{abc(a+b+c)} S_{ABC}^3.$$

3. იმ შემთხვევაში, როცა P წერტილი ემთხვევა ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის O ცენტრს, მაშინ

$$\overline{p\bar{p}} = OP^2 = 0$$

და გვაქვს.

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{R^2}{4R^2} S_{ABC} = \frac{1}{4} S_{ABC}.$$

რაც ისედაც მარტივად გამომდინარეობს ელემენტარული გეომეტრიული წარმოდგენებიდან.

4. იმ შემთხვევაში, თუ P წერტილი ემთხვევა ABC სამკუთხედის H ორთოცენტრს, მაშინ გვაქვს:

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{R^2 - OH^2}{4R^2} S_{ABC}.$$

რადგან, $OH = 3 \cdot OG$. ამიტომ გვაქვს:

$$\begin{aligned} S_{A_1B_1C_1} &= \frac{R^2 - (3OG)^2}{4R^2} S_{ABC} = \frac{R^2 - 9\left(R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}\right)}{4R^2} S_{ABC} = \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2}{4R^2} S_{ABC} = \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2} - 2\right) S_{ABC} = \\ &= \left[\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\frac{a^2 b^2 c^2}{4|S_{ABC}|^2}} - 2\right] S_{ABC} = \left[\frac{4(a^2 + b^2 + c^2)}{a^2 b^2 c^2} \cdot |S_{ABC}|^2 - 2\right] \cdot S_{ABC} \end{aligned}$$

რადგან, სინუსების თეორემის თანახმად,

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{4R^2} &= \sin^2 A, \quad \frac{B^2}{4R^2} = \sin^2 B, \quad \frac{c^2}{4R^2} = \sin^2 C, \\ \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2} - 2 = \frac{a^2}{4R^2} + \frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2} - 2 = \\ &= \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2 = \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + \frac{1 - \cos 2C}{2} - 2 = \\ &= -\frac{1}{2} [1 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C] = \\ &= -\frac{1}{2} [2 \cos^2 C + 2 \cos(A+C) \cos(A-B)] = \\ &= -\cos^2 C + \cos C \cos(A-B) = \\ &= -\cos^2 C - \cos(A+B) \cos(A-B) = \\ &= \cos C [\cos(A-B) - \cos C] = \cos C [\cos(A-B) - \cos(A+B)] = \\ &= 2 \cos A \cos B \cos C.\end{aligned}$$

ანუ, თუ $A_1B_1C_1$ სამკუთხედი ABC სამკუთხედის-
თვის ორთოცენტრულია, (ე.ი. A_1, B_1, C_1 წერტილები
 ABC სამკუთხედის სიმაღლის ფუძეები) მაშინ

$$S_{A_1B_1C_1} = 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \cdot S_{ABC}.$$

(შეადარეთ შვარცის სამკუთხედს).

ამოცანა 4. ვთქვათ, ერთეულოვანი რადიუსის მქონე
წრეწირში ჩახაზული ABC სამკუთხედის სიმაღლეთა
ფუძეებია A_1, B_1, C_1 . AA_1, BB_1, CC_1 წრფეებზე აღებულია
 P, Q, R წერტილები ისე, რომ

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{BB_1}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{CC_1}}{\overline{CR}} = \lambda.$$

იპოვეთ ფარდობა

$$\mu = \frac{S_{PQR}}{S_{ABC}}$$

და გამოსახეთ λ და ABC სამკუთხედის შიგა A, B, C კუთხეების საშუალებით.

ვთქვათ, A, B, C წერტილების აფიქსებია z_1, z_2, z_3 . BC და AA_1 წრფეთა განტოლებებია:

$$z + z_2 z_3 \bar{z} = z_2 + z_3,$$

$$z - z_2 z_3 \bar{z} = z_1 + \frac{z_2 z_3}{z_1}.$$

ამ ტოლობების წევრ-წევრად შეკრებით მივიღებთ A_1 წერტილის a_1 აფიქსს:

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(\sigma_1 - \frac{z_2 z_3}{z_1} \right).$$

მოცემული $\frac{\overline{AA_1}}{AP} = \lambda$ ფარდობიდან ვიპოვიოთ P წერტილის p აფიქსს:

$$\frac{a_1 - z_1}{p - z_1} = \lambda,$$

ანუ,

$$a_1 - z_1 = \lambda p - \lambda z_1,$$

საიდანაც

$$\lambda p = a_1 - z_1 + \lambda z_1 = \frac{1}{2} \left(\sigma_1 - \frac{z_1 z_3}{z_1} \right) - z_1 + \lambda z_1.$$

აქედან გვაქვს:

$$p = \frac{1}{2\lambda} \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_3}{z_1^2} \right) + \frac{\lambda - 1}{\lambda} z_1.$$

ანალოგიურად,

$$q = \frac{1}{2\lambda} \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_3}{z_1^2} \right) + \frac{\lambda-1}{\lambda} z_2,$$

$$r = \frac{1}{2\lambda} \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_3}{z_3^2} \right) + \frac{\lambda-1}{\lambda} z_3.$$

სადაც q და r შესაბამისად Q და R წერტილების აფიქსებია.

გამოვთვალოთ:

$$\begin{aligned} S_{PQR} &= \frac{i}{4} \begin{vmatrix} -\frac{\sigma_3}{2\lambda z_1^2} + \frac{\lambda-1}{\lambda} z_1 + \frac{\sigma_1}{2\lambda} & -\frac{z_1^2}{2\lambda\sigma_3} + \frac{\lambda-1}{\lambda} \cdot \frac{1}{z_1} + \frac{\sigma_2}{2\lambda\sigma_3} & 1 \\ -\frac{\sigma_3}{2\lambda z_2^2} + \frac{\lambda-1}{\lambda} z_2 + \frac{\sigma_1}{2\lambda} & -\frac{z_2^2}{2\lambda\sigma_3} + \frac{\lambda-1}{\lambda} \cdot \frac{1}{z_2} + \frac{\sigma_2}{2\lambda\sigma_3} & 1 \\ -\frac{\sigma_3}{2\lambda z_3^2} + \frac{\lambda-1}{\lambda} z_3 + \frac{\sigma_1}{2\lambda} & -\frac{z_3^2}{2\lambda\sigma_3} + \frac{\lambda-1}{\lambda} \cdot \frac{1}{z_3} + \frac{\sigma_2}{2\lambda\sigma_3} & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{i}{4} \begin{vmatrix} -\frac{\sigma_3}{2\lambda z_1^2} + \frac{\lambda-1}{\lambda} z_1 & -\frac{z_1^2}{2\lambda\sigma_3} + \frac{\lambda-1}{\lambda} \cdot \frac{1}{z_1} & 1 \\ -\frac{\sigma_3}{2\lambda z_2^2} + \frac{\lambda-1}{\lambda} z_2 & -\frac{z_2^2}{2\lambda\sigma_3} + \frac{\lambda-1}{\lambda} \cdot \frac{1}{z_2} & 1 \\ -\frac{\sigma_3}{2\lambda z_3^2} + \frac{\lambda-1}{\lambda} z_3 & -\frac{z_3^2}{2\lambda\sigma_3} + \frac{\lambda-1}{\lambda} \cdot \frac{1}{z_3} & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{i}{4} \left(\frac{1}{4\lambda^2} \begin{vmatrix} z_1^{-2} & z_1^2 & 1 \\ z_2^{-2} & z_2^2 & 1 \\ z_3^{-2} & z_3^2 & 1 \end{vmatrix} - \frac{\sigma_3(\lambda-1)}{2\lambda^2} \begin{vmatrix} z_1^{-2} & z_1^{-1} & 1 \\ z_2^{-2} & z_2^{-1} & 1 \\ z_3^{-2} & z_3^{-1} & 1 \end{vmatrix} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda-1}{2\lambda^2\sigma_3} \begin{vmatrix} z_1 & z_1^2 & 1 \\ z_2 & z_2^2 & 1 \\ z_3 & z_3^2 & 1 \end{vmatrix} - \frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2} \begin{vmatrix} z_1 & z_1^{-1} & 1 \\ z_2 & z_2^{-1} & 1 \\ z_3 & z_3^{-1} & 1 \end{vmatrix} \right). \quad (1) \end{aligned}$$

რადგან,

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} z_1^{-2} & z_1^2 & 1 \\ z_2^{-2} & z_2^2 & 1 \\ z_3^{-2} & z_3^2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sigma_3^2} \begin{vmatrix} 1 & z_1^2 & z_1^4 \\ 1 & z_2^2 & z_2^4 \\ 1 & z_3^2 & z_3^4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sigma_3^2} (z_2^2 - z_1^2)(z_3^2 - z_2^2)(z_3^2 - z_1^2) = \\
 & = -\frac{1}{\sigma_3^2} (z_2 - z_1)(z_3 - z_2)(z_3 - z_1)(z_2 + z_1)(z_3 + z_2)(z_3 + z_1) = \\
 & = -\frac{1}{\sigma_3^2} \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \end{vmatrix} (z_2 + z_1)(z_3 + z_2)(z_3 + z_1) = \\
 & = -\frac{1}{\sigma_3} \begin{vmatrix} \overline{z_1} & 1 & z_1 \\ \overline{z_2} & 1 & z_2 \\ \overline{z_3} & 1 & z_3 \end{vmatrix} (\sigma_1 - z_1)(\sigma_1 - z_2)(\sigma_1 - z_3) = \\
 & = -\frac{1}{\sigma_3} \cdot \frac{4}{i} S_{ABC} (\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_3) = -\frac{4}{i} (\sigma_1 \overline{\sigma_1} - 1) S_{ABC}.
 \end{aligned}$$

(1) ტოლობის მრგვალ ფრჩხილებში მოთავსებული პირველი შესაკრები ტოლია

$$-\frac{i(1 - \sigma_1 \overline{\sigma_1})}{\lambda^2} S_{ABC}. \quad (2)$$

თუ ანალოგიურად გამოვთვლით მეორე შესაკრებს, მივიღებთ, რომ (1) ტოლობის მრგვალ ფრჩხილებში მოთავსებული მეორე შესაკრები ტოლია

$$\frac{2i(\lambda - 1)}{\lambda^2} S_{ABC}. \quad (3)$$

(1) ტოლობის მრგვალ ფრჩხილებში მოთავსებული მესამე და მეოთხე შესაკრებები შესაბამისად ტოლია

$$\frac{2i(\lambda-1)}{\lambda^2} S_{ABC}. \quad (4)$$

$$-\frac{4i(\lambda-1)^2}{\lambda^2} S_{ABC}. \quad (5)$$

(1), (2), (3), (4), (5) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$\begin{aligned} S_{PQR} &= \frac{i}{4} \left[-\frac{i(1-\sigma_1\overline{\sigma_1})}{\lambda^2} + \frac{2i(\lambda-1)}{\lambda^2} + \frac{2i(\lambda-1)}{\lambda^2} - \frac{4i(\lambda-1)^2}{\lambda^2} \right] S_{ABC} = \\ &= \left[\frac{1-\sigma_1\overline{\sigma_1}}{\lambda^2} - \frac{\lambda-1}{\lambda^2} + \frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2} \right] S_{ABC} = \left[\frac{1-\sigma_1\overline{\sigma_1}}{\lambda^2} - \frac{(\lambda-1)(2-\lambda)}{\lambda^2} \right] S_{ABC} = \\ &= \left[\frac{1-\sigma_1\overline{\sigma_1}}{\lambda^2} + \frac{\lambda-1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda-2}{\lambda} \right] S_{ABC} = \left[\frac{1-\sigma_1\overline{\sigma_1}}{\lambda^2} + \left(1-\frac{1}{\lambda}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{\lambda}\right) \right] S_{ABC}. \end{aligned}$$

საიდანაც,

$$\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}} = -\frac{\sigma_1\overline{\sigma_1}-1}{\lambda^2} + \left(1-\frac{1}{\lambda}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{\lambda}\right).$$

გამოვთვალოთ

$$\begin{aligned} \sigma_1\overline{\sigma_1}-1 &= (z_1+z_2+z_3)(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})-1= \\ &= z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_1\overline{z_3}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_1}+z_3\overline{z_2}+z_3\overline{z_3}-1= \\ &= 2+(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1})+(z_1\overline{z_3}+z_3\overline{z_1})+(z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_2}). \end{aligned}$$

რადგან,

$$AB^2 = c^2 = (z_2-z_1)(\overline{z_2}-\overline{z_1}) = 2-(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}).$$

აქედან

$$z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1} = 2-c^2.$$

მაგრამ, რადგან

$$\frac{c}{\sin C} = 2R = 2 \Rightarrow c = 2 \sin C.$$

ამიტომ გვაქვს,

$$z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} = 2 - c^2 = 2 - 4 \sin^2 C.$$

ანალოგიურად,

$$z_2 \overline{z_3} + z_3 \overline{z_2} = 2 - a^2 = 2 - 4 \sin^2 A,$$

$$z_1 \overline{z_3} + z_3 \overline{z_1} = 2 - b^2 = 2 - 4 \sin^2 B.$$

ამიტომ,

$$\sigma_1 \overline{\sigma_1} - 1 = 4 \left(2 - (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \right) = -8 \cos A \cos B \cos C.$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\mu = \frac{S_{PQR}}{S_{ABC}} = \frac{2 \cos A \cos B \cos C}{\lambda^2} + \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \cdot \left(1 - \frac{2}{\lambda} \right).$$

მოსწავლეებს შეუძლიათ დამოუკიდებლად განიხილონ კერძო შემთხვევები λ -თან მიმართებაში და დაადგინონ როგორი სახის სამკუთხედების ფართობთა ფარდობასთან გვაქვს საქმე.

ამოცანა 5. ABC სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირზე აღებულია ნებისმიერი M წერტილი. ვთქვათ, $A_1, B_1, C_1 - M$ წერტილის ორთოგონალური გეგმილებია შესაბამისად BC, CA და AB წრფეებზე. დაამტკიცეთ, რომ A_1, B_1, C_1 წერტილები კოლინეარულია.

ვთქვათ, ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი ერთეულოვანია. A, B, C და M წერტილების აფიქსები ტოლი იყოს შესაბამისად z_1, z_2, z_3 და z_0 . შევადგინოთ $A_1 B_1 C_1$ წრფის განტოლება, რომელსაც ABC სამკუთხედის M წერტილის სიმსონის წრფესაც უწოდებენ.

BC წრფის და M წერტილზე გამავალ BC წრფის მართობულ წრფის განტოლებას აქვს სახე:

$$z - z_2 = z_2 z_3 (\bar{z} - \bar{z}_2),$$

$$z - z_0 = z_2 z_3 (\bar{z} - \bar{z}_0).$$

ანუ,

$$z + z_2 z_3 \bar{z} = z_2 + z_3,$$

$$z - z_2 z_3 \bar{z} = z_0 - z_2 z_3 \bar{z}_0.$$

შევკრიბოთ მიღებული ტოლობები წევრ-წევრად. მივიღებთ A_1 წერტილის a_1 აფიქსს, რომელიც BC წრფეზე M წერტილის ორთოგონალური გეგმილია. (ნახ. 62)

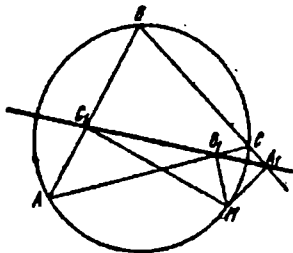
$$a_1 = \frac{1}{2}(z_0 + z_2 + z_3 - z_2 z_3 \bar{z}_0).$$

ანალოგიურად ვიპოვიტ B_1 წერტილის აფიქსს:

$$b_1 = \frac{1}{2}(z_0 + z_1 + z_3 - z_1 z_3 \bar{z}_0).$$

მარტივად შეგვიძლია გამოვთვალოთ $A_1 B_1$ წრფის კუთხური კოეფიციენტი:

$$k = \frac{a_1 - b_1}{a_1 - b_1} = \frac{z_1 z_2 z_3}{z_0} = \frac{\sigma_3}{z_0} = \sigma_3 \bar{z}_0.$$



ნახ. 62.

ე.ი. A_1B_1 წრფის განტოლება ჩაიწერება სახით:

$$z - a_1 = \sigma_3 \overline{z_0} (\overline{z} - \overline{z_1}).$$

თუ მიღებულ ტოლობაში შევიტანთ a_1 აფიქსის გამოთვლილ მნიშვნელობას და ჩვატარებთ გარდაქმნებს, მივიღებთ:

$$z - \sigma_3 \overline{z_0} \overline{z} = \frac{1}{2} (z_0 + \sigma_1 - \sigma_2 \overline{z_0} - \sigma_3 \overline{z_0^2}). \quad (1)$$

ამ განტოლების სიმეტრია z_1, z_2, z_3 ცვლადების მიმართ გვაფიქრებინებს, რომ A_1B_1 წრფე გადის C_1 წერტილზე. მართლაც, ეს ადვილი საჩვენებელია, ჩავსვათ A_1B_1 წრფის განტოლებაში C_1 წერტილის

$$c_1 = \frac{1}{2} (z_0 + z_1 + z_2 - z_1 z_2 \overline{z_0})$$

აფიქსის მნიშვნელობა და დავრწმუნდებით, რომ სრულდება პირობა:

$$\begin{vmatrix} a_1 & \overline{a_1} & 1 \\ b_1 & \overline{b_1} & 1 \\ c_1 & \overline{c_1} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

თუ z_0 წერტილი ერთეულოვანი წერტილია, მაშინ სიმსონის წრფის (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$z - \sigma_3 \overline{z} = \frac{1}{2} (1 + \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3).$$

თუ ერთეულოვან წერტილად მივიღებთ ბუტენის წერტილს $\sigma_3 = 1$, მაშინ

$$z - \sigma_3 \overline{z} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2).$$

ამოცანა 6. $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}A_{13}A_{14}$ წესიერი თოთხმეტკუთხედი ჩახაზულია წრეწირში. განვიხილოთ $T=ABC$ სამკუთხედი, რომლის წვეროებია $A=A_7, B=A_1, C=A_3$. ამ სამკუთხედის კუთხეები ეყრდნობა A_1A_3, A_3A_7, A_7A_1 რკალებს. ცხადია,

$$A=\frac{\pi}{7}, B=\frac{2\pi}{7}, C=\frac{4\pi}{7}.$$

ე.ი. T სამკუთხედის კუთხეები ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას 2-ის ტოლი მნიშვნელით. (J_a) -თი აღვნიშნოთ ABC სამკუთხედის A კუთხის გარეჩახაზული წრეწირი, ხოლო H -ით ABC სამკუთხედის ორთოცენტრი.

დავამტკიცოთ, რომ:

1. $OH = OJ_a = R\sqrt{2}$, სადაც $R-ABC$ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსია;

2. $R = 2r_a$, სადაც $r_a - (J_a)$ წრეწირის რადიუსია;

3. $J_aH = R$;

4. $a^2 + b^2 + c^2 = 7R^2$, სადაც $a = BC, b = AC, c = AB - ABC$ სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია;

5. OJ_aHA_6 პარალელოგრამია, რომლის ცენტრი ემთხვევა სამკუთხედის ეილერის წრეწირის ცენტრს;

6. HA_6 მონაკვეთის P შუაწერტილი ემთხვევა ABC სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირის და ABC სამკუთხედის ცხრა წერტილის ეილერის წრეწირის გადაკვეთის ერთ-ერთ წერტილს;

8. BC, AC, AB წრფეები გადაკვეთენ HJ , წრფეს წერტილებში, რომლებიც A, B, C წერტილების სიმეტრიულია ABC სამკუთხედის C, A, B კუთხეთა ბისექტრისების მიმართ, სადაც C და B კუთხეები ამ შემთხვევაში ABC სამკუთხედის გარე კუთხეებია (ნახ.63);

248

ვთქვათ, ABC სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირი ერთეულოვანია, მისი ცენტრია O წერტილი და A_1 -ერთეულოვანი წერტილია. ე.ი. მისი აფიქსი 1-ის ტოლია. მაშინ წესიერი თოთხმეტკუთხედის A_k წვეროების a_k აფიქსები ტოლი იქნება:

$$a_k = \cos \frac{(k-1)\pi}{7} + i \sin \frac{(k-1)\pi}{7}, k=1,2,3,\dots,14.$$

$A = A_7, B = A_1, C = A_3$ წვეროთა აფიქსები იქნება:

$$a = a_7 = \cos \frac{6\pi}{7} + i \sin \frac{6\pi}{7},$$

$$b = a_1 = 1,$$

$$c = a_3 = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}.$$

მათი ჯამი ABC სამკუთხედის H ორთოცენტრის h აფიქსის ტოლია.

$$h = 1 + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} + i \left(\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{6\pi}{7} \right).$$

საიდანაც,

$$\begin{aligned} OH^2 &= \left(1 + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right)^2 + \left(\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{6\pi}{7} \right)^2 = \\ &= 3 + 2 \left[\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right]. \end{aligned}$$

ვთქვათ,

$$x = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}.$$

ამ ტოლობის ორთავე მხარე გავამრავლოთ $\sin \frac{\pi}{7}$ -ზე.

გვექნება:

$$\begin{aligned} x \sin \frac{\pi}{7} &= 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} = \\ &= -\sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7} + \sin \pi = -\sin \frac{\pi}{7}, \end{aligned}$$

საიდანაც,

$$x = -1.$$

მივიღებთ:

$$OH^2 = 3 - 1 = 2.$$

მაშასადამე,

$$OH = \sqrt{2} = R\sqrt{2}, (R=1).$$

გამოვთვალოთ (J_a) წრეწირის I_a ცენტრის τ_a აფიქსი. შიგა B კუთხის ბისექტრისაა BA_5 ; რადგან A_5 წერტილი AC რკალს შუაზე ყოფს. აქედან გამომდინარეობს, რომ B კუთხის გარე კუთხის ბისექტრისაა BA_{12} , რადგან A_5 და A_{12} წერტილები ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის დიამეტრალურად საპირისპირო წერტილებია, ამიტომ BA_5 და BA_{12} წრფეები პერპენდიკულარულია. A შიგა კუთხის ბისექტრისაა $AA_2 = A_7A_2$. ამრიგად, I_a წარმოადგენს A_7A_2 და A_1A_{12} წრფეთა გადაკვეთის წერტილს. შევადგინოთ ამ წრფეთა განტოლებები. A_7A_2 წრფის კუთხური კოეფიციენტი 1-ის ტოლია, რადგან A_7A_2 და A_1A_8 წრფეები პარალელურია, ხოლო A_7A_2 ნამდვილი ღერძია.

$A_7 A_2$ წრფის განტოლებას აქვს სახე:

$$z - \left(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \right) = \bar{z} - \left(\cos \frac{\pi}{7} - i \sin \frac{\pi}{7} \right);$$

ანუ,

$$z - \bar{z} = 2i \cdot \sin \frac{\pi}{7}. \quad (1)$$

$A_1 A_{12}$ წრფის კუთხური კოეფიციენტი:

$$\frac{a_{12} - 1}{a_{12} - 1} = \frac{a_{12} - 1}{\frac{1}{a_{12}} - 1} = -a_{12}.$$

ამიტომ, $A_1 A_{12}$ წრფის განტოლებას აქვს სახე:

$$z - 1 = - \left(\cos \frac{11\pi}{7} + i \sin \frac{11\pi}{7} \right) (\bar{z} - 1),$$

ანუ,

$$z - 1 = \left(\cos \frac{4\pi}{7} + i \sin \frac{4\pi}{7} \right) (\bar{z} - 1). \quad (2)$$

თუ (2) განტოლებაში გავითვალისწინებთ (1) განტოლებას, მივიღებთ I_a წერტილის τ_a აფიქსს. გვაქვს:

$$z - 1 = \left(\cos \frac{4\pi}{7} + i \sin \frac{4\pi}{7} \right) \left(\bar{z} - 2i \cdot i \sin \frac{\pi}{7} \right),$$

საიდანაც,

$$z = 1 + \frac{\cos \frac{2\pi}{7}}{2 \cos \frac{\pi}{7}} + i \sin \frac{\pi}{7} = \tau_a.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$OI_a^2 = |\tau_a|^2 = 2.$$

საიდანაც,

$$OI_a = \sqrt{2} = R\sqrt{2} = OH.$$

$$2. \quad r_a = ptg \frac{A}{2} = ptg \frac{\pi}{14} \cdot \left(\sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} \right).$$

ვთქვათ,

$$y = \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7}$$

ამ ტოლობის ორთავე მხარე გავამრავლოთ $2\sin \frac{\pi}{14}$ -

ზე. მივიღებთ:

$$2\sin \frac{\pi}{14} y = 2\sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{\pi}{7} + 2\sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{2\pi}{7} + 2\sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{7},$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილში სინუსების ნამრავლები გადავაქციოთ კოსინუსების სხვაობად, გვექნება:

$$2\sin \frac{\pi}{14} y = \cos \left(\frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{14} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{14} \right) + \cos \left(\frac{2\pi}{7} - \frac{\pi}{14} \right) - \cos \left(\frac{2\pi}{7} + \frac{\pi}{14} \right) + \cos \left(\frac{3\pi}{7} - \frac{\pi}{14} \right) - \cos \left(\frac{3\pi}{7} + \frac{\pi}{14} \right),$$

$$2\sin \frac{\pi}{14} y = \cos \frac{\pi}{14} - \cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{3\pi}{14} - \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} - \cos \frac{\pi}{2},$$

$$2\sin \frac{\pi}{14} y = \cos \frac{\pi}{14},$$

$$y = \frac{1}{2} ctg \frac{\pi}{14}.$$

საიდანაც,

$$r_a = ptg \frac{A}{2} = ptg \frac{\pi}{14} \cdot \frac{1}{2} ctg \frac{\pi}{14} = \frac{1}{2} = \frac{R}{2}.$$

3. რადგან, $I_a H = h - \tau_a$, სადაც h არის H წერტილის აფიქსი, ხოლო τ_a არის I_a წერტილის აფიქსი. ამიტომ,

$$\begin{aligned}
 h - \tau_a &= \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} - \frac{\cos \frac{2\pi}{7}}{\cos \frac{6\pi}{7}} + i \sin \frac{2\pi}{7} = \\
 &= \frac{2 \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7}}{2 \cos \frac{\pi}{7}} + i \sin \frac{2\pi}{7} = \\
 &= \frac{-\cos \frac{6\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{4\pi}{7} - 1 - \cos \frac{2\pi}{7}}{2 \cos \frac{\pi}{7}} + i \sin \frac{2\pi}{7} = \\
 &= \frac{\frac{1}{2} - 1 - \cos \frac{2\pi}{7}}{2 \cos \frac{\pi}{7}} + i \sin \frac{2\pi}{7} = \frac{-\frac{1}{2} - \cos \frac{2\pi}{7}}{2 \cos \frac{\pi}{7}} + i \sin \frac{2\pi}{7} = \\
 &= \frac{\cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}}{2 \cos \frac{\pi}{7}} + i \sin \frac{2\pi}{7} = \frac{2 \cos \frac{5\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7}}{2 \cos \frac{\pi}{7}} + i \sin \frac{2\pi}{7} = \\
 &= \cos \frac{5\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7} = \cos \frac{5\pi}{7} + i \sin \frac{5\pi}{7} = a_6.
 \end{aligned}$$

ამიტომ,

$$|I_a H| = |h - \tau_a| = 1 = R.$$

4. რადგან $\frac{a^2}{4R^2} = \sin^2 \frac{\pi}{7}, \frac{b^2}{4R^2} = \sin^2 \frac{2\pi}{7}, \frac{c^2}{4R^2} = \sin^2 \frac{3\pi}{7},$

ამიტომ

$$a^2 = 4R^2 \sin^2 \frac{\pi}{7} = 4 \sin^2 \frac{\pi}{7}, \quad b^2 = 4R^2 \sin^2 \frac{2\pi}{7} = 4 \sin^2 \frac{2\pi}{7},$$

$$c^2 = 4R^2 \sin^2 \frac{3\pi}{7} = 4 \sin^2 \frac{3\pi}{7}.$$

გვაქვს:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 4 \sin^2 \frac{\pi}{7} + 4 \sin^2 \frac{2\pi}{7} + 4 \sin^2 \frac{3\pi}{7} = \\ &= 2 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{7} + 1 - \cos \frac{4\pi}{7} + 1 - \cos \frac{6\pi}{7} \right) = \\ &= 2 \left[3 - \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right) \right] = 2 \left[3 - \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = 7 = 7R^2. \end{aligned}$$

5. $\overline{I_a H} = \overline{OA_6}$, რადგან $h - \tau_a = a_6 \Rightarrow I_a H A_6 O$ პარალელოგრამია. ამ პარალელოგრამის ცენტრს წარმოადგენს OH მონაკვეთის შუაწერტილი. ე.ი. ABC სამკუთხედის ეილერის წრეწირის ცენტრი.

6. P წერტილის აფიქსია:

$$\begin{aligned} \frac{h + a_6}{2} &= \frac{1}{2} \left[1 + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} + i \left(\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{6\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{\pi}{7} + i \left(2 \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{h + a_6}{2} \right|^2 &= \frac{1}{4} \left[1 - 2 \cos \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{\pi}{7} + 4 \sin^2 \frac{2\pi}{7} + 4 \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} + \sin^2 \frac{\pi}{7} \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left[2 - 2 \cos \frac{\pi}{7} + 4 \sin^2 \frac{2\pi}{7} + 4 \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left[2 - 2 \cos \frac{\pi}{7} + 2 \left(1 - \cos \frac{4\pi}{7} \right) + 2 \left(\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7} \right) \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \left[2 - 2 \cos \frac{\pi}{7} + 2 - 2 \cos \frac{4\pi}{7} + 2 \cos \frac{\pi}{7} - 2 \cos \frac{3\pi}{7} \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \left[4 + 2 \cos \frac{3\pi}{7} - 2 \cos \frac{3\pi}{7} \right] = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1.$$

HA_6 მონაკვეთის P შუაწერტილი ეკუთვნის ABC სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირს. ABC სამკუთხედის ეილერის წრეწირის O , ცენტრი წარმოადგენს OH მონაკვეთის შუაწერტილს.

ამრიგად, O_9P არის OHA_6 სამკუთხედის შუახაზი და

$$O_9P = \frac{1}{2} OA_6 = \frac{R}{2}.$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ P წერტილი ეილერის წრეწირის წერტილია.

7. ვავენოთ, რომ $\Delta AI_4H \cong \Delta HBI_6$ და ერთნაირად ორიენტირებულია. გვაქვს:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_7 & h & 1 \\ \tau_a & h & 1 \\ h & \tau_a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_7 - h & h - \tau_a & 0 \\ \tau_a - h & 1 - \tau_a & 0 \\ h & \tau_a & 1 \end{vmatrix} = (a_7 - h)(1 - \tau_a) + (h - \tau_a)^2$$

გამოვთვალოთ,

$$a_7 - h = \cos \frac{6\pi}{7} + i \sin \frac{6\pi}{7} - 1 - \cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{6\pi}{7} - i \sin \frac{2\pi}{7} - i \sin \frac{6\pi}{7} =$$

$$= -1 - \cos \frac{2\pi}{7} - i \sin \frac{2\pi}{7},$$

$$1 - \tau_a = 1 - 1 - \frac{\cos \frac{2\pi}{7}}{2 \cos \frac{\pi}{7}} - i \sin \frac{\pi}{7} = -\frac{\cos \frac{2\pi}{7}}{2 \cos \frac{\pi}{7}} - i \sin \frac{\pi}{7},$$

$$(h - \tau_u)^2 = a_6^2 = \cos \frac{10\pi}{7} i \sin \frac{10\pi}{7} = -\cos \frac{3\pi}{7} - i \sin \frac{3\pi}{7}.$$

$$\begin{aligned} (a_7 - h)(1 - \tau_u) &= \left(1 + \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}\right) \left(\frac{\cos \frac{2\pi}{7}}{2 \cos \frac{\pi}{7}} + i \sin \frac{\pi}{7}\right) = \\ &= \left(1 + \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}\right) \frac{\cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}}{2 \cos \frac{\pi}{7}} = \\ &= \left(2 \cos^2 \frac{\pi}{7} + 2i \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7}\right) \frac{\cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}}{2 \cos \frac{\pi}{7}} = \\ &= \left(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}\right) \left(\cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}\right) = \cos \frac{3\pi}{7} + i \sin \frac{3\pi}{7}. \end{aligned}$$

რადგან,

$$\Delta = (a_7 - h)(1 - \tau_u) + (h - \tau_u)^2 = \cos \frac{3\pi}{7} + i \sin \frac{3\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7} - i \sin \frac{3\pi}{7} = 0.$$

ეს ნიშნავს, რომ $\Delta A I_A H \cong \Delta H B I_a$ და ერთნაირად ორიენტირებულია.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $\Delta A I_A H \cong \Delta I_a H C$ და ერთნაირად ორიენტირებულია.

8. დავამტკიცოთ, რომ B' წერტილი $B = A_1$ წერტილის სიმეტრიულია A შიგა კუთხის ბისექტრისის მიმართ და HJ_a წრფეს ეკუთვნის.

A შიგა კუთხის ბისექტრისის განტოლებაა:

$$z - \bar{z} = 2i \sin \frac{\pi}{7}.$$

$B = A_1$ წერტილიდან ამ ბისექტრისაზე დაშვებული პერპენდიკულარის განტოლებაა

$$z - \bar{z} = 2.$$

საიდანაც ვიპოვიტ A შიგა კუთხის ბისექტრისაზე B წერტილის B_1 გეგმილის $b_1 = 1 + i \sin \frac{\pi}{7}$ აფიქსს. B' წერტილის b' აფიქსს გამოვთვლიტ ტოლობიდან

$$\frac{b'+1}{2} = b_1 \Rightarrow b' = 1 + 2i \sin \frac{\pi}{7}.$$

რადგან,

$$h - \tau_a = \cos \frac{5\pi}{7} + i \sin \frac{5\pi}{7},$$

$$\tau_a - b' = 1 + \frac{\cos \frac{2\pi}{7}}{2 \cos \frac{\pi}{7}} + i \sin \frac{\pi}{7} - 1 - 2i \sin \frac{\pi}{7} =$$

$$= \frac{\cos \frac{2\pi}{7}}{2 \cos \frac{\pi}{7}} - i \sin \frac{\pi}{7} = \frac{\cos \frac{2\pi}{7} - i \sin \frac{2\pi}{7}}{2 \cos \frac{\pi}{7}} = - \frac{\cos \frac{5\pi}{7} + i \sin \frac{5\pi}{7}}{2 \cos \frac{\pi}{7}},$$

ამიტომ ფარდობა

$$\frac{h - \tau_a}{\tau_a - b_1} = 2 \cos \frac{\pi}{7}$$

ნამდვილი რცხვია. ეს ნიშნავს, რომ H, I_a და B წერტილები ერთ წრფეს ეკუთვნის. ანალოგიურად დამტკიცდება ამ პუნქტის დანარჩენი ორი დებულებაც.

9. OI_aA_6 სამკუთხედში

$$OA_6^2 = 1, OI_a^2 = |\tau_a|^2 = 2,$$

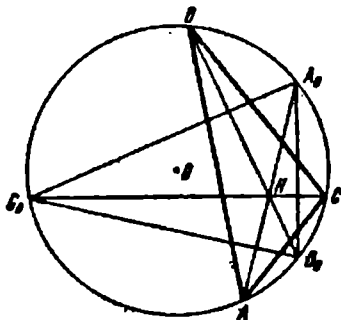
ამიტომ OI_aHA_6 პარალელოგრამიდან გვაქვს $I_aA_6^2 = 4$.

რადგან,

$$\Delta OI_aA_6 \cong \Delta A_6I_aH$$

ამიტომ ამ სამკუთხედის გვერდების სიგრძეთა კვადრატები ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას 2-ის ტოლი მნიშვნელით.

ამოცანა 7. ავაგოთ ABC სამკუთხედი ამ სამკუთხედზე შემოხაზული $O = (ABC)$ წრეწირისა და მისი შიგა A, B, C კუთხეების ბისექტრისების გადაკვეთის A_0, B_0, C_0 წერტილებით (ნახ. 64)



ნახ. 64.

ვთქვათ, $O = (ABC) = (A_0B_0C_0)$ ერთეულოვანი წრეწირია და A, B, C წერტილების აფიქსებია შესაბამისად z_1, z_2, z_3 . A შიგა კუთხის ბისექტრისის A_0 წერტილი BC ქორდით მოჭიმულ BC რკალს შუაზე ყოფს, ამასთან A და A_0 წერტილები BC გვერდის სხვადასხვა მხარე-საა.

B და B_0 წერტილები, C და C_0 წერტილები AC და AB გვერდების სხვადასხვა მხარესაა. ამიტომ A_0, B_0, C_0 წერტილების შესაბამის

$$\begin{cases} a_0 = \sqrt{z_2 z_3}, \\ b_0 = \sqrt{z_1 z_3}, \\ c_0 = \sqrt{z_1 z_2}. \end{cases} \quad (1)$$

აფიქსებს უნდა შევუსაბამოთ ისეთი ნაშნები, რომ A და A_0 , B და B_0 , C და C_0 წერტილები BC , AC და AB გვერდების სხვადასხვა მხარეს იყოს. ამისათვის უნდა ამოვხსნათ (1) სისტემა z_1, z_2, z_3 ცვლადების მიმართ.

(1) სისტემა გადავწეროთ ასე:

$$\begin{cases} z_2 z_3 = a_0^2, \\ z_1 z_3 = b_0^2, \\ z_1 z_2 = c_0^2, \end{cases} \quad (2)$$

(2) სისტემიდან მივიღებთ:

$$z_1 z_2 z_3 = \pm a_0 b_0 c_0.$$

როცა ,

$$z_1 z_2 z_3 = a_0 b_0 c_0, \quad (3)$$

მაშინ

$$z_1 = \frac{b_0 c_0}{a_0}, z_2 = \frac{a_0 c_0}{b_0}, z_3 = \frac{a_0 b_0}{c_0}. \quad (4)$$

როცა ,

$$z_1 z_2 z_3 = -a_0 b_0 c_0, \quad (5)$$

მაშინ

$$z_1 = -\frac{b_0 c_0}{a_0}, z_2 = -\frac{a_0 c_0}{b_0}, z_3 = -\frac{a_0 b_0}{c_0}. \quad (6)$$

გავარკვეოთ (4) და (6) ამონახსნებიდან რომელი აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს.

პირველად განვიხილოთ (4) ამონახსნები.

დავწეროთ BC წრფის განტოლება

$$z - z_2 = \frac{z_3 - z_2}{\bar{z}_3 - \bar{z}_2} (\bar{z} - \bar{z}_2),$$

რადგან B და C წერტილები ერთეულოვანი წრეწირის წერტილებია, ამიტომ

$$\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}, \bar{z}_3 = \frac{1}{z_3}.$$

გვექნება:

$$z - z_2 = -z_2 z_3 (\bar{z} - \bar{z}_2).$$

ეს განტოლება გარდავექმნათ ასე:

$$z + z_2 z_3 \bar{z} = z_2 + z_3,$$

ანუ,

$$\frac{z}{z_2 + z_3} + \frac{\bar{z}}{\bar{z}_2 + \bar{z}_3} - 1 = 0. \quad (7)$$

რადგან

$$z_2 + z_3 = \frac{a_0 c_0}{b_0} + \frac{a_0 b_0}{c_0} = \frac{a_0}{c_0 b_0} (b_0^2 + c_0^2),$$

$$\bar{z}_2 + \bar{z}_3 = \frac{b_0 c_0}{a_0} \left(\frac{1}{b_0^2} + \frac{1}{c_0^2} \right) = \frac{b_0^2 + c_0^2}{a_0 c_0 b_0}.$$

ამიტომ BC წრფის (7) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$f(z) = \frac{b_0 c_0}{a_0 (b_0^2 + c_0^2)} z + \frac{a_0 c_0 b_0}{b_0^2 + c_0^2} \bar{z} - 1 = 0.$$

ვიპოვოთ $f(a_0)$ და $f(z_1) = f\left(\frac{b_0 c_0}{a_0}\right)$.

გვაქვს:

$$\begin{aligned} f(a_0) &= \frac{b_0 c_0}{b_0^2 + c_0^2} + \frac{c_0 b_0}{b_0^2 + c_0^2} - 1 = -\frac{(b_0 - c_0)^2}{b_0^2 + c_0^2}, \\ f(z_1) &= \frac{b_0^2 c_0^2}{a_0^2 (b_0^2 + c_0^2)} + \frac{a_0^2}{b_0^2 + c_0^2} - 1 = \frac{(a_0^2 - b_0^2)(a_0^2 - c_0^2)}{a_0^2 (b_0^2 + c_0^2)}. \\ \frac{f(z_1)}{f(a_0)} &= -\frac{(a_0^2 - b_0^2)(a_0^2 - c_0^2)}{a_0^2 (b_0^2 + c_0^2)} \cdot \frac{b_0^2 + c_0^2}{(b_0 - c_0)^2} = -\frac{(a_0^2 - b_0^2)(a_0^2 - c_0^2)}{a_0^2 (b_0 - c_0)^2} = \\ &= -\frac{(a_0 - b_0)(a_0 - c_0)(b_0 - c_0)(a_0 + b_0)(a_0 + c_0)}{a_0^2 (b_0 - c_0)^3}. \end{aligned}$$

მაგრამ,

$$S_{A_0 B_0 C_0} = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} a_0 & \overline{a_0} & 1 \\ b_0 & \overline{b_0} & 1 \\ c_0 & \overline{c_0} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4a_0 b_0 c_0} \begin{vmatrix} a_0^2 & 1 & a_0 \\ b_0^2 & 1 & b_0 \\ c_0^2 & 1 & c_0 \end{vmatrix}.$$

საჭირო გარდაქმნების შესრულების შემდეგ მივიღებთ:

$$S_{A_0 B_0 C_0} = \frac{i}{4a_0 b_0 c_0} (c_0 - a_0)(c_0 - b_0)(b_0 - a_0).$$

საიდანაც,

$$(a_0 - c_0)(b_0 - c_0)(a_0 - b_0) = -\frac{4}{i} a_0 b_0 c_0 S_{A_0 B_0 C_0}.$$

ამრიგად,

$$\frac{f(z_1)}{f(a_0)} = 4ia_0 b_0 c_0 S_{A_0 B_0 C_0} \frac{(b_0 - c_0)(a_0 + b_0)(a_0 + c_0)}{a_0^2 (b_0 - c_0)^4}.$$

განვიხილოთ A_0' წერტილი, რომელიც A_0 წერტილის დიამეტრალურად საპირისპირო წერტილია

$$O = (ABC) = (A_0 B_0 C_0)$$

წრეწირის მიმართ. A_0' წერტილის $a_0' = -a_0$, ამიტომ

$$(a_0 + b_0)(a_0 + c_0)(b_0 - c_0) = (b_0 - a_0')(c_0 - a_0')(b_0 - c_0) = 4ia_0 b_0 c_0 S_{A_0' B_0 C_0}.$$

ამრიგად,

$$\frac{f(z_1)}{f(a_0)} = -16S_{A_0 B_0 C_0} \cdot S_{A_0' B_0 C_0} \cdot \frac{b_0^2 c_0^2}{(b_0 - c_0)^4} = -16S_{A_0 B_0 C_0} \cdot S_{A_0' B_0 C_0} \cdot \left[\frac{b_0 c_0}{(b_0 - c_0)^2} \right]^2 \quad (8)$$

ვაჩვენოთ, რომ $p = \frac{b_0 c_0}{(b_0 - c_0)^2}$ რიცხვი ნამდვილია.

მართლაც,

$$\bar{p} = \frac{\overline{b_0 c_0}}{(\overline{b_0 - c_0})^2} = \frac{\frac{1}{b_0} \cdot \frac{1}{c_0}}{\left(\frac{1}{b_0} - \frac{1}{c_0} \right)^2} = \frac{b_0 c_0}{(b_0 - c_0)^2} = p > 0.$$

შევნიშნოთ, რომ როგორც არ უნდა იყოს სამკუთხედი-მახვილკუთხა, მართკუთხა თუ ზღაგვეკუთხა, ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირისა და სამკუთხედის შიგა კუთხეების ბისექტრისების გადაკვეთით მიღებული სამკუთხედი მახვილკუთხაა. (ნახ.65).

გამოვთვალთ $A_0B_0C_0$ სამკუთხედის შიგა კუთხეები. A_0 კუთხე ეყრდნობა B_0C_0 ქორდით მოჭიმულ რკალს, ხოლო

$$\check{B}_0C_0 = \check{A}C_0 + \check{A}B_0,$$

მაგრამ,

$$\angle A_0 = \angle C_0A_0A + \angle B_0A_0A = \frac{\angle C}{2} + \frac{\angle B}{2} = \frac{\angle C + \angle B}{2}.$$

მაგრამ, რადგან,

$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi,$$

ამიტომ,

$$\angle A_0 = \frac{\pi - \angle A}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle A}{2}.$$

ანალოგიურად,

$$\angle B_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle B}{2},$$

$$\angle C_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle C}{2}.$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ A_0A_0' დიამეტრი A_0C_0 ქორდას გადაკვეთს და $A_0B_0C_0$ და $A_0'B_0C_0$ სამკუთხედებს საპირისპირო ორიენტაცია აქვთ, ამასთან $S_{A_0B_0C_0}$ და $S_{A_0'B_0C_0}$ სამკუთხედებს საპირისპირო ნიშნები აქვთ. ამიტომ (8) ფორმულიდან ვასკვნით, რომ $\frac{f(z_1)}{f(a_0)} > 0$. ე.ი. A და A_0 წერტილები BC ქორდის ერთ მხარესაა.

ამრიგად, (4) სისტემა ამოცანის ამონახსნს არ აკმაყოფილებს. ანალოგიური მსჯელობით ვაჩვენებთ, რომ

(1) სისტემის ამონახსენია (6) სისტემა თუ $A_0B_0C_0$ სამკუთხედი მახვილკუთხაა, თუ $A_0B_0C_0$ სამკუთხედი ან მართკუთხაა ან ზღაგვკუთხა, მაშინ ამოცანას ამონახსენი არა აქვს.

A, B, C წერტილები წარმოადგენენ $A_0B_0C_0$ სამკუთხედის სიმაღლეთა გადაკვეთის წერტილებს ($A_0B_0C_0$) წრეწირთან. მართლაც, B_0C_0 წრფის კუთხური კოეფიციენტია b_0c_0 , ამიტომ A_0 წერტილიდან B_0C_0 წრფეზე დაშვებული მართობის განტოლებაა:

$$z - a_0 = b_0c_0(\bar{z} - \bar{a}_0).$$

ვიპოვოთ ამ წრფისა და $z\bar{z}=1$ ერთეულოვანი წრეწირის გადაკვეთის წერტილები. გვაქვს:

$$z - a_0 = b_0c_0\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{a_0}\right),$$

საიდანაც,

$$z - a_0 = -b_0c_0 \frac{z - a_0}{a_0z}.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ განტოლების ფესვებია:

$$z = a_0 \text{ (} A_0 \text{ წერტილის აფიქსი)}$$

და

$$z_1 = -\frac{b_0c_0}{a_0} \text{ (} A \text{ წერტილის აფიქსი)}.$$

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ B და C წერტილების აფიქსებია შესაბამისად

$$z_2 = -\frac{a_0c_0}{b_0} \text{ და } z_3 = -\frac{a_0b_0}{c_0}.$$

შევნიშნოთ, რომ (1) ფორმულები უმჯობესია ჩავწეროთ სახით:

$$a_0 = -\sqrt{z_2} \cdot \sqrt{z_3}, b_0 = -\sqrt{z_1} \cdot \sqrt{z_3}, c_0 = -\sqrt{z_1} \cdot \sqrt{z_2}.$$

სადაც $\sqrt{z_1}, \sqrt{z_2}, \sqrt{z_3}$ გამოსახულებებისათვის აიღება ერთნაირი ნიშნები.

ამოცანა 8. ავაგოთ ABC სამკუთხედი ამ სამკუთხედზე შემოხაზული $O=(ABC)$ წრეწირისა და სამკუთხედის სიმაღლეების გადაკვეთის A_1, B_1, C_1 წერტილებით.

ვთქვათ, $O=(ABC)=(A_1B_1C_1)$ წრეწირი ერთეულოვანია და A_1, B_1, C_1 წერტილების აფიქსებია a_1, b_1, c_1 , ხოლო ასაგები ABC სამკუთხედის წვეროთა აფიქსები შესაბამისად z_1, z_2, z_3 , რადგან AB წრფის კუთხური კოეფიციენტია $-z_1z_2$, ამიტომ C წერტილიდან AB გვერდზე დაშვებული მართობის განტოლებაა:

$$z - z_3 = z_1z_2(\bar{z} - \bar{z}_3).$$

ვიპოვოთ ამ წრფისა და $z\bar{z}=1$ ერთეულოვანი წრეწირის გადაკვეთის წერტილები. გვაქვს:

$$z - z_3 = z_1z_2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_3}\right),$$

ანუ,

$$z - z_3 = -z_1z_2 \frac{z - z_3}{z_3z}.$$

საიდანაც

$$z = z_3 (C \text{ წერტილის აფიქსი})$$

და

$$c_1 = -\frac{z_1 z_2}{z_3} (C_1 \text{ წერტილის აფიქსი}).$$

ანალოგიურად ვიპოვით A_1 და B_1 წერტილების აფიქსებს:

$$a_1 = -\frac{z_2 z_3}{z_1} \text{ და } b_1 = -\frac{z_1 z_3}{z_2}.$$

მიღებული სისტემა ამოვხსნათ z_1, z_2, z_3 ცვლადების მიმართ. ამ ტოლობის გადამრავლებით მივიღებთ:

$$z_1 = \sqrt{b_1} \cdot \sqrt{c_1}, z_2 = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{c_1}, z_3 = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{b_1} \quad (1)$$

რადგან მარჯვენა ნაწილში მოთვსებული ორი რადიკალიდან თითოეულს შეუძლია მიიღოს ორი მნიშვნელობა, ამიტომ (1) სისტემას ექნება 8 ამონახსნი. (1) სისტემის ყველა ამონახსნი ჩაიწერება სახით:

$$z_1 = \sqrt{b_1} \cdot \sqrt{c_1}, z_2 = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{c_1}, z_3 = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{b_1},$$

$$z_1 = -\sqrt{b_1} \cdot \sqrt{c_1}, z_2 = -\sqrt{a_1} \cdot \sqrt{c_1}, z_3 = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{b_1},$$

$$z_1 = \sqrt{b_1} \cdot \sqrt{c_1}, z_2 = -\sqrt{a_1} \cdot \sqrt{c_1}, z_3 = -\sqrt{a_1} \cdot \sqrt{b_1},$$

$$z_1 = -\sqrt{b_1} \cdot \sqrt{c_1}, z_2 = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{c_1}, z_3 = -\sqrt{a_1} \cdot \sqrt{b_1},$$

$$z_1 = -\sqrt{b_1} \cdot \sqrt{c_1}, z_2 = -\sqrt{a_1} \cdot \sqrt{c_1}, z_3 = -\sqrt{a_1} \cdot \sqrt{b_1},$$

$$z_1 = -\sqrt{b_1} \cdot \sqrt{c_1}, z_2 = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{c_1}, z_3 = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{b_1},$$

$$z_1 = \sqrt{b_1} \cdot \sqrt{c_1}, z_2 = -\sqrt{a_1} \cdot \sqrt{c_1}, z_3 = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{b_1},$$

$$z_1 = \sqrt{b_1} \cdot \sqrt{c_1}, z_2 = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{c_1}, z_3 = -\sqrt{a_1} \cdot \sqrt{b_1}.$$

რადგან,

$$a_1 = -\frac{z_2 z_3}{z_1}, \quad b_1 = -\frac{z_1 z_3}{z_2}, \quad c_1 = -\frac{z_1 z_2}{z_3} \Rightarrow a_1 b_1 c_1 = -z_1 z_2 z_3. \quad (2)$$

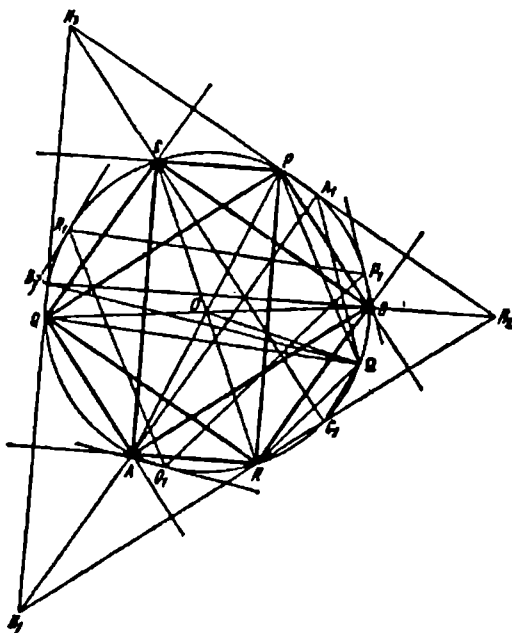
ადვილი შესამჩნევია, რომ (1) სისტემის რვა ამონახსნიდან პირველი ოთხი სამეული არ აკმაყოფილებს (2) პირობას, ამიტომ ეს სამეულები უვარგისია. მარტივი ჩასმით დავრწმუნდებით, რომ დარჩენილი ოთხი სამეული ამონახსნს წარმოადგენს.

ამრიგად, ამოცანის პირობას აკმაყოფილებს ოთხი სამკუთხედი. ავაგოთ მაგალითად სამკუთხედი, რომლის წვეროთა აფიქსებია:

$$z_1 = -\sqrt{b_1} \cdot \sqrt{c_1}, \quad z_2 = -\sqrt{a_1} \cdot \sqrt{c_1}, \quad z_3 = -\sqrt{a_1} \cdot \sqrt{b_1}.$$

ამისათვის $(A_1 B_1 C_1)$ წრეწირზე ავიღოთ ერთეულოვანი E წერტილი. $(A_1 B_1 C_1)$ წრეწირისადმი გავავლოთ EA_1 წრფის პარალელური მხეები, ასეთი ორი მხეების გავლება შეიძლება. ჩვენთვის არსებითი მნიშვნელობა არა აქვს რომელს გავავლებთ. ვთქვათ, P_1 წერტილი ამ მხეების საერთო წერტილია $(A_1 B_1 C_1)$ წრეწირთან, რომლის აფიქსი $\sqrt{a_1}$ -ის ერთ-ერთი მნიშვნელობის ტოლია. (ნახ. 60), ანალოგიურად ავაგებთ O_1 და R_1 წერტილებს, რომელთა აფიქსებია $\sqrt{b_1}$ და $\sqrt{c_1}$. რომ ავაგოთ წერტილი, რომლის აფიქსია $\sqrt{b_1} \cdot \sqrt{c_1}$, ამისათვის E წერტილიდან გავავლოთ $O_1 R_1$ წრფის პარალელური წრფე. P წერტილი წარმოადგენს გავლებული წრფისა

და $(A_1B_1C_1)$ წრეწირის გადაკვეთის წერტილს და აქვს $\sqrt{b_1} \cdot \sqrt{c_1}$ აფიქსი.



ნახ.65.

A წერტილი P წერტილის სიმეტრიულია $(A_1B_1C_1)$ წრეწირის ცენტრის მიმართ და მისი აფიქსია $-\sqrt{b_1} \cdot \sqrt{c_1}$ ანალოგიურად ავაგებთ B და C წერტილებს, რომელ-
თა აფიქსებია შესაბამისად

$$-\sqrt{a_1} \cdot \sqrt{c_1} \text{ და } -\sqrt{a_1} \cdot \sqrt{b_1}$$

ამოცანა 9. მოცემულია კუბური

$$a_0z^3 + 3a_1z^2 + 3a_2z + a_3 = 0$$

განტოლება, სადაც a_0, a_1, a_2, a_3 კომპლექსური რიცხვებია. ვთქვათ, z_1, z_2, z_3 ამ განტოლების ფესვებია. დავამტკიცოთ, რომ, თუ სრულდება პირობა:

$$2a_1^3 - 3a_0a_1a_2 + a_0^2a_3 = 0$$

მაშინ $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ წერტილები კოლინეარულია.

განვიხილოთ პარალელური გადატანა

$$z = \tau - \frac{a_1}{a_0},$$

რომელსაც ჩირნგაუზის გარდაქმნასაც უწოდებენ. ამ გარდაქმნით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} a_0 \left(\tau - \frac{a_1}{a_0} \right)^3 + 3a_1 \left(\tau - \frac{a_1}{a_0} \right)^2 + 3a_2 \left(\tau - \frac{a_1}{a_0} \right) + a_3 = \\ = a_0 \left(\tau^3 + 3 \frac{3a_0a_2 - a_1^3}{a_0^2} \tau + \frac{2a_1^2 - 3a_0a_1a_2 + a_0^2a_3}{a_0^3} \right) = 0 \end{aligned}$$

რადგან $a_0 \neq 0$, ამიტომ

$$\tau^3 + 3 \frac{3a_0a_2 - a_1^3}{a_0^2} \tau + \frac{2a_1^2 - 3a_0a_1a_2 + a_0^2a_3}{a_0^3} = 0 \Rightarrow \tau^3 + 3p\tau + q = 0,$$

სადაც,

$$p = \frac{3a_0a_2 - a_1^3}{a_0^2}, q = \frac{2a_1^2 - 3a_0a_1a_2 + a_0^2a_3}{a_0^3}.$$

თუ

$$2a_1^3 - 3a_0a_1a_2 + a_0^2a_3 = 0,$$

მაშინ

$$p = 0$$

და

$$\tau^3 + 3p\tau + q = 0$$

განტოლების ამონახსნებია

$$\tau_1 = 0, \tau_2 = i\sqrt{3p}, \tau_3 = -i\sqrt{3p}.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ τ_1, τ_2, τ_3 წერტილები კოლინეარულია, მართლაც

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ i\sqrt{3p} & -i\sqrt{3p} & 1 \\ -i\sqrt{3p} & i\sqrt{3p} & 1 \end{vmatrix} = -3p + 3p = 0.$$

რადგან τ_1, τ_2, τ_3 წერტილები მიიღება z_1, z_2, z_3 წერტილებისაგან პარალელური გადატანით, ამიტომ ცხადია, რომ z_1, z_2, z_3 წერტილები კოლინეარულია.

II თავი

კვატერნიონების გამოყენება სტერეომეტრიის ზოგიერთი საკითხის შესწავლისას და მათი სწავლების მეთოდოლოგიური თავისებურებები

§2.1. კვატერნიონები. მოქმედებები კვატერნიონებზე. კვატერნიონის მოდული

მათემატიკის სასკოლო პროგრამა არ ითვალისწინებს კვატერნიონების და სხვა წარმოსახვითი რიცხვების შესწავლას. მაგრამ ასეთი სახის რიცხვებს გამოყენება აქვთ პრაქტიკული საკითხების გადასაწყვეტად ტექნიკაში და ეფექტურად გამოიყენებენ კიდეც მას, ამიტომ გარკვეული წარმოდგენა რომ ჰქონდეთ მოსწავლეებს კვატერნიონებზე, მიზანშეწონილად ჩავთვალეთ კვატერნიონების შესწავლა და მასალის ჩართვა მათემატიკის კლასგარეშე ან საგნობრივი წრის მეცადინეობაზე.

მეთოდური თვალსაზრისით მიზანშეწონილად მიგვაჩნია საკითხის შესწავლა დავიწყოთ მიმოხილვითი მასალის გაცნობით, რომელზეც ვისაუბრებთ კვატერნიონების აღმოჩენის ისტორიაზე, მის აღმოჩენ ლორდ ჰამილტონზე, კვატერნიონების ხიდზე, რომელზე გავლის პატივიც ამ წიგნის ერთ ავტორს ჰქონდა ირლანდიაში, ლიმერიკის უნივერსიტეტში სამეცნიერო მივლინების დროს. მიგვაჩნია, რომ მოსწავლეებს გავუვლოთ პარალელები კვატერნიონებსა და კომპლექსურ რიცხვებს შორის და გავაცნოთ კვატერნიონების

გამოყენების არეალი. ამის შემდეგ უშუალოდ გადავალთ და შემოვიღებთ კვატერნიონების განსაზღვრებას, კერძოდ:

განსაზღვრება: $a+bi+cj+dk$ სახის რიცხვებს, სადაც a, b, c, d ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

კვატერნიონები ეწოდება.

a -ს ეწოდება კვატერნიონის ნამდვილი ანუ რიცხვითი ნაწილი, $bi+cj+dk$ -ს კვატერნიონის წარმოსახვითი, ანუ ვექტორული ნაწილი. კვატერნიონთა სიმრავლეს აღვნიშნავთ K -თი.

კვატერნიონებზე მოქმედებების შესრულების დროს სამართლიანია შემდეგი კანონები:

$$1. (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k,$$

$$2. \lambda(a + bi + cj + dk) = (\lambda a) + (\lambda b)i + (\lambda c)j + (\lambda d)k, \\ \forall \lambda \in R, \quad \forall (a + bi + cj + dk) \in K,$$

$$3. \forall a, b \in R, \quad q_1, q_2 \in K, \quad (aq_1)(bq_2) = (aq_2)(bq_1),$$

$$4. q_1(q_2 + q_3) = q_1q_2 + q_1q_3, \quad (q_2 + q_3)q_1 = q_2q_1 + q_3q_1,$$

$$5. \forall q_1, q_2 \in K, \quad q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k, \quad q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k, \\ q_1q_2 = (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i + \\ + (a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2)j + (a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - b_2c_1)k$$

ყველა შესაძლო i, j, k ნამრავლები გამოითვლება ტოლობით:

$$i \cdot i = i^2 = -1, \quad j \cdot j = j^2 = -1, \quad k \cdot k = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k,$$

$$j \cdot i = -k, \quad j \cdot k = i, \quad k \cdot i = j, \quad k \cdot j = -i, \quad i \cdot k = -j.$$

გამრავლების ცხრილის დამახსოვრებაში მოსწავლეებს დაეხმარება შემდეგი წესი:

თუ i, j, k გამოსახულია წრეწირის სამი წერტილით, რომლებიც განლაგებულია საათის მოძრაობის მიმართულებით, მაშინ i, j, k სამეულიდან ნებისმიერი ორის ნამრავლი უდრის მესამეს, თუ მოძრაობა ხორციელდება საათის მოძრაობის მიმართულებით და მესამეს მინუს ნიშნით, თუ მოძრაობა პირველი თანამამრავლიდან მეორე თანამამრავლისაკენ ხორციელდება საათის საპირისპირო მიმართულებით.

საზოგადოდ, ნებისმიერი ორი q_1 და q_2 კვატერნიონისათვის სამართლიანი არ არის გამრავლების გადანაცვლებადობის კანონი, ე.ი. $q_1 \cdot q_2 \neq q_2 \cdot q_1$.

მართლაც, თუ

$$q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k, \quad q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k,$$

მაშინ, განმარტების ძალით:

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) = \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_1 c_2 j + a_1 d_2 k + a_2 b_1 i + b_2 b_1 i i + c_2 b_1 i j + d_2 b_1 i k + \\ &+ a_2 c_1 j + b_2 c_1 j i + c_2 c_1 j j + d_2 c_1 j k + a_2 d_1 k + b_2 d_1 k i + c_2 d_1 k j + d_2 d_1 k k = \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_1 c_2 j + a_1 d_2 k + a_2 b_1 i - b_2 b_1 + c_2 b_1 k - d_2 b_1 j + \\ &+ a_2 c_1 j - b_2 c_1 k - c_2 c_1 + d_2 c_1 i + a_2 d_1 k + b_2 d_1 j - c_2 d_1 i - d_2 d_1 = \\ &= (a_2 a_1 - b_2 b_1 - c_2 c_1 - d_2 d_1) + (a_2 b_1 + b_2 a_1 + c_1 d_2 - d_1 c_2) i + \\ &+ (a_2 c_1 + a_1 c_2 + b_2 d_1 - d_2 b_1) j + (a_2 d_1 + d_2 a_1 + c_2 b_1 - b_2 c_1) k, \end{aligned}$$

ხოლო,

$$\begin{aligned} q_2 \cdot q_1 &= (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) = a_2 a_1 + a_2 b_1 i + \\ &+ a_2 c_1 j + a_2 d_1 k + a_1 b_2 i + b_1 b_2 i i + c_1 b_2 i j + d_1 b_2 i k + \\ &+ a_1 c_2 j + b_1 c_2 j i + c_1 c_2 j j + d_1 c_2 j k + a_1 d_2 k + b_1 d_2 k i + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_2 a_1 + a_2 b_1 i + a_2 c_1 j + a_2 d_1 k + a_1 b_2 i - b_1 b_2 + c_1 b_2 k - d_1 b_2 j + \\
&+ c_1 d_2 k j + d_1 d_2 k k = +a_1 c_2 j - b_1 c_2 k - c_1 c_2 + d_1 c_2 i + a_1 d_2 k + \\
&+ b_1 d_2 j - c_1 d_2 i - d_1 d_2 = (a_2 a_1 - b_2 b_1 - c_2 c_1 - d_2 d_1) + \\
&+ (a_2 b_1 + b_2 a_1 + c_2 d_1 - d_2 c_1) i + (a_2 c_1 + a_1 c_2 - b_2 d_1 + d_2 b_1) j + \\
&+ (a_2 d_1 + d_2 a_1 - c_2 b_1 + b_2 c_1) \neq q_1 \cdot q_2.
\end{aligned}$$

1-5 თვისებებზე დაყრდნობით დავამტკიცოთ, რომ სამართლიანია ტოლობა:

$$(q_1 \cdot q_2) \cdot q_3 = q_1 (q_2 \cdot q_3).$$

რომლის დამტკიცება დაიყვანება შემდეგი 27 ტოლობის სამართლიანობის ჩვენებას:

$$\begin{aligned}
i \cdot (i \cdot i) &= (i \cdot i) \cdot i, & j \cdot (i \cdot i) &= (j \cdot i) \cdot i, & k \cdot (i \cdot i) &= (k \cdot i) \cdot i, \\
i \cdot (i \cdot j) &= (i \cdot i) \cdot j, & j \cdot (i \cdot j) &= (j \cdot i) \cdot j, & k \cdot (i \cdot j) &= (k \cdot i) \cdot j, \\
i \cdot (i \cdot k) &= (i \cdot i) \cdot k, & j \cdot (i \cdot k) &= (j \cdot i) \cdot k, & k \cdot (i \cdot k) &= (k \cdot i) \cdot k, \\
i \cdot (j \cdot i) &= (i \cdot j) \cdot i, & j \cdot (j \cdot i) &= (j \cdot j) \cdot i, & k \cdot (j \cdot i) &= (k \cdot j) \cdot i, \\
i \cdot (j \cdot j) &= (i \cdot j) \cdot j, & j \cdot (j \cdot j) &= (j \cdot j) \cdot j, & k \cdot (j \cdot j) &= (k \cdot j) \cdot j, \\
i \cdot (j \cdot k) &= (i \cdot j) \cdot k, & j \cdot (j \cdot k) &= (j \cdot j) \cdot k, & k \cdot (j \cdot k) &= (k \cdot j) \cdot k, \\
i \cdot (k \cdot i) &= (i \cdot k) \cdot i, & j \cdot (k \cdot i) &= (j \cdot k) \cdot i, & k \cdot (k \cdot i) &= (k \cdot k) \cdot i, \\
i \cdot (k \cdot j) &= (i \cdot k) \cdot j, & j \cdot (k \cdot j) &= (j \cdot k) \cdot j, & k \cdot (k \cdot j) &= (k \cdot k) \cdot j, \\
i \cdot (k \cdot k) &= (i \cdot k) \cdot k, & j \cdot (k \cdot k) &= (j \cdot k) \cdot k, & k \cdot (k \cdot k) &= (k \cdot k) \cdot k,
\end{aligned}$$

ამ ფორმულის დამტკიცების შემდეგ მეთოდური თვალსაზრისით მიზანშეწონილია ანალოგიის დამყარება მატრიცათა გამრავლების წესთან.

$q = a + bi + cj + dk$ კვატერნიონის შეუღლებული კვატერნიონი ეწოდება კვატერნიონს

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk.$$

ცხადია, რომ

$$q + \bar{q} = 2a$$

ნამდვილი რიცხვია.

ასევე ნამდვილი რიცხვია

$$q \cdot \bar{q} = (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

q კვატერნიონის მოდული ეწოდება

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

რიცხვს, და აღინიშნება $|q|$ -თი

$$|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

ცხადია, რომ

$$q \cdot \bar{q} = |q|^2$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2,$$

ჯამის შეუღლებული ტოლია შეუღლებულთა ჯამისა.

$$\overline{q_1 \cdot q_2} = \bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2,$$

ნამრავლის შეუღლებული ტოლია შეუღლებულთა ნამრავლისა აღებული შებრუნებული თანმიმდევრობით.

ამ ტოლობის სამართლიანობა დაიყვანება შემდეგი ცხრა ტოლობის სამართლიანობის დამტკიცებაზე:

რომლის დამტკიცება დაიყვანება შემდეგი 27 ტოლობის სამართლიანობის ჩვენებას:

$$\begin{aligned} \overline{i \cdot i} &= \bar{i} \cdot \bar{i}, & \overline{j \cdot i} &= \bar{i} \cdot \bar{j}, & \overline{k \cdot i} &= \bar{i} \cdot \bar{k}, \\ \overline{i \cdot j} &= \bar{j} \cdot \bar{i}, & \overline{j \cdot j} &= \bar{j} \cdot \bar{j}, & \overline{k \cdot j} &= \bar{j} \cdot \bar{k}, \\ \overline{i \cdot k} &= \bar{k} \cdot \bar{i}, & \overline{j \cdot k} &= \bar{k} \cdot \bar{j}, & \overline{k \cdot k} &= \bar{k} \cdot \bar{k}. \end{aligned}$$

ვაჩვენოთ ამ ტოლობებიდან ერთ-ერთის, მაგალითად, $\overline{k \cdot j} = \overline{j \cdot k}$ სამარწინაობა.

მართლაც,

$$\overline{k \cdot j} = \overline{-i} = i,$$

$$\overline{j \cdot k} = \overline{(-j) \cdot (-k)} = j \cdot k = i = \overline{k \cdot j}.$$

ანალოგიურად დამტკიცდება დანარჩენი ტოლობებიც.

q_1 კვატერნიონის q_2 კვატერნიონზე მარცხენა განაყოფი ეწოდება

$$q_2 x = q_1 \quad (1)$$

განტოლების ამონახსნს და აღინიშნება სიმბოლოთი:

$$x_- = \frac{q_1}{q_2}.$$

q_1 კვატერნიონის q_2 კვატერნიონზე მარჯვენა განაყოფი ეწოდება

$$x q_2 = q_1 \quad (2)$$

განტოლების ამონახსნს და აღინიშნება სიმბოლოთი:

$$x_- = \frac{q_1}{q_2}.$$

რომ ამოვხსნათ (1) და (2) განტოლებები, ამისათვის მოვიქცეთ შემდეგნაირად:

(1) განტოლების ორთავე მხარე გავამრავლოთ $\overline{q_2}$,
ხოლო შემდეგ $\frac{1}{|\overline{q_2}|^2}$.

მივიღებთ:

$$_x = \frac{1}{|q_2|^2} \cdot \overline{q_2} \cdot q_1.$$

ანალოგიურად ვიპოვით

$$x_- = \frac{1}{|q_2|^2} \cdot q_1 \cdot \overline{q_2}.$$

მაგალითად, ვიპოვოთ k -ს მარჯვენა და მარცხენა განაყოფები $(1+i+k)$ -ზე.

ჯერ ვიპოვოთ $q_1 = k$ კვატერნიონის $q_2 = 1+i+k$ კვატერნიონზე მარცხენა განაყოფი.

გვაქვს:

$$\overline{q_2} = \overline{1+i+k} = 1-i-k.$$

$$\frac{1}{|q_2|^2} = \frac{1}{|1+i+k|^2} = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}.$$

საიდანაც,

$$_x = \frac{1}{|q_2|^2} \cdot \overline{q_2} \cdot q_1 = \frac{1}{3}(1-i-k)k = \frac{1}{3}(k-ik-k^2).$$

კვატერნიონების გამრავლების წესის თანახმად $ik = -j$, ხოლო $k^2 = -1$, ამიტომ,

$$_x = \frac{1}{3}(k+j+1).$$

ანალოგიურად,

$$x_- = \frac{1}{|q_2|^2} \cdot q_1 \cdot \overline{q_2} = \frac{1}{3}k(1-i-k) = \frac{1}{3}(k-ki-k^2) = \frac{1}{3}(k-j+1).$$

დავამტკიცოთ, რომ ორი კვატერნიონის ნამრავლის მოდული ტოლია კვატერნიონების ნამრავლების მოდულისა:

$$|q_1 \cdot q_2|^2 = |q_1|^2 |q_2|^2 \quad (3)$$

მართლაც,

$$\begin{aligned} |q_1 \cdot q_2|^2 &= (q_1 \cdot q_2) \cdot \overline{(q_1 \cdot q_2)} = (q_1 \cdot q_2) \cdot \overline{q_2} \cdot \overline{q_1} = q_1 \cdot (q_2 \cdot \overline{q_2}) \cdot \overline{q_1} = \\ &= q_1 \cdot |q_2|^2 \cdot \overline{q_1} = (q_1 \cdot \overline{q_1}) \cdot |q_2|^2 = |q_1|^2 \cdot |q_2|^2 \end{aligned}$$

თუ (3) ფორმულაში გავითვალისწინებთ:

$$q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k, \quad q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k,$$

მაშინ

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 &= (a_2 a_1 - b_2 b_1 - c_2 c_1 - d_2 d_1) + (a_2 b_1 + b_2 a_1 + c_1 d_2 - d_1 c_2)i + \\ &+ (a_2 c_1 + a_1 c_2 + b_2 d_1 - d_2 b_1)j + (a_2 d_1 + a_1 d_2 + c_2 b_1 - b_2 c_1)k, \end{aligned}$$

(3) ფორმულა მარჯვნიდან მარცხნივ წაიკითხება ასე:

$$\begin{aligned} (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2) &= (a_2 a_1 - b_2 b_1 - c_2 c_1 - d_2 d_1)^2 + \\ &+ (a_2 b_1 + b_2 a_1 + c_1 d_2 - d_1 c_2)^2 + (c_2 a_1 + c_1 a_2 + b_2 d_1 - d_2 b_1)^2 + \\ &+ (a_1 d_1 + a_2 d_1 + b_1 c_2 - c_1 b_2)^2 \end{aligned}$$

§2.2. სკალარული და ვექტორული ნამრავლის შემოღების ერთი ხერხის შესახებ

განვიხილოთ კვატერნიონების გამოყენების პრაქტიკული მაგალითები. განხილული მასალები დაეხმარება სკოლის მასწავლებლებს ვექტორების სკალარული და ვექტორული ნამრავლების შემოღება მოახდინონ კვატერნიონების გამოყენებით. ამ საკითხების სწავლე-

ბა წარმოდგენილი ფორმით განმავითარებელი სწავლების კარგი მაგალითია და ეხმარება მოსწავლეებს ახალი ცოდნის მიღება მოახდინონ საგანთაშორისი კავშირების გამოყენებით,

შემოვიღოთ სივრცეში დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. i, j, k -თი აღვნიშნოთ Ox, Oy, Oz ღერძების მიმმართველი ერთეულოვანი ვექტორები (ნახ. 66). მაშინ ნებისმიერი α -ში

$$bi + cj + dk, \quad \forall b, c, d \in R$$

წარმოადგენს რაიმე OM ვექტორს. M წერტილის კოორდინატებია (a, b, c) .

შევნიშნოთ, რომ ყოველი $q = a + bi + cj + dk$ კვატერნიონი ფორმალურად წარმოადგენს a რიცხვისა და $bi + cj + dk$ ვექტორის ჯამს.

განვიხილოთ ორი ვექტორული კვატერნიონი, რომელთა ნამდვილი ნაწილები ნულის ტოლია

$$q_1 = b_1i + c_1j + d_1k \quad \text{და} \quad q_2 = b_2i + c_2j + d_2k.$$

გადავამრავლოთ ისინი. კვატერნიონების გამრავლების წესის თანახმად გვქვია:

$$q_1q_2 = -(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + (c_1d_2 - d_1c_2)i + (d_1b_2 - b_1d_2)j + (b_1c_2 - b_2c_1)k$$

ამ კვატერნიონის რიცხვითი ნაწილია:

$$-(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2),$$

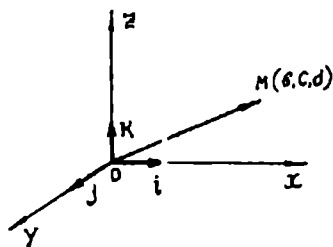
ვექტორული ნაწილი კი-

$$(c_1d_2 - d_1c_2)i + (d_1b_2 - b_1d_2)j + (b_1c_2 - b_2c_1)k$$

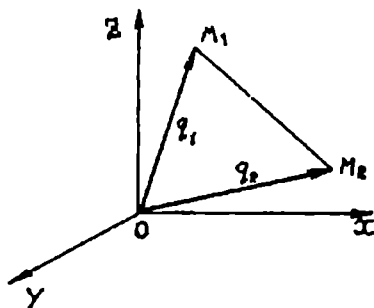
ამ გამოსახულებებს აქვთ გარკვეული გეომეტრიული აზრი, კერძოდ, ვაჩვენოთ. რომ

$$b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2 = |q_1| \cdot |q_2| \cdot \cos \varphi \quad (1)$$

ასეთი ნამრავლის გამოყენება ხშირად ხდება ანალიზურ გეომეტრიაში და მას q_1 და q_2 ვექტორების სკალარული ნამრავლი ეწოდება, ის რიცხვია და (q_1, q_2) სიმბოლოთი აღინიშნავენ.



ნახ. 66.



ნახ. 67.

ამრიგად, განსაზღვრების ძალით

$$(q_1, q_2) = |q_1| \cdot |q_2| \cdot \cos \varphi \quad (2)$$

(1) და (2) ფორმულების შედარებით მივიღებთ

$$(q_1, q_2) = b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2 \quad (3)$$

დავამტკიცოთ, ეს. მართლაც, განვიხილოთ $OM_1 M_2$ სამკუთხედი, (ნახ.67). რომელიც აგებულია q_1 და q_2 ვექტორებზე და ერთი წვერო O მდებარეობს კოორდინატთა სათავეში, ხოლო ორი დანარჩენი M_1 და M_2 წერტილებში, რომელთა კოორდინატებია შესაბამისად (b_1, c_1, d_1) და (b_2, c_2, d_2) .

გვაქვს:

$$OM_1^2 = b_1^2 + c_1^2 + d_1^2,$$

$$OM_2^2 = b_2^2 + c_2^2 + d_2^2,$$

$$M_1 M_2^2 = (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2 + (d_1 - d_2)^2$$

საიდანაც,

$$M_1 M_2^2 = OM_1^2 + OM_2^2 - 2OM_1 \cdot OM_2 \cos \varphi.$$

სადაც φ არის q_1 და q_2 ვექტორებს შორის კუთხე. ბოლო ორი ტოლობის შედარებით მივიღებთ დასამტკიცებელ (1) ტოლობას.

ამრიგად, ორი q_1 და q_2 ვექტორული კვატერნიონის ნამრავლის რიცხვითი ნაწილი ტოლია q_1 და q_2 ვექტორების სკალარული ნამრავლისა მინუს ნიშნით.

შევნიშნოთ, რომ თუ q_1 და q_2 ვექტორები პერპენდიკულარულია, მაშინ სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია. ცხადია, ამ დროს ნულის ტოლია $q_1 \cdot q_2$ ნამრავლის რიცხვითი ნაწილი. ამ შემთხვევაში $q_1 \cdot q_2$ ნამრავლი იქნება ვექტორი. მართებულია შებრუნებული დასკვნაც:

თუ $q_1 \cdot q_2$ ნამრავლი ვექტორია, მაშინ სკალარული ნამრავლი q_1 -სა q_2 -ზე ნულის ტოლია. ე.ი. $\cos \varphi = 0$ და q_1 და q_2 ვექტორები პერპენდიკულარულია.

შევნიშნოთ, რომ როცა q_1 და q_2 ვექტორები პერპენდიკულარულია, მაშინ

$$q_1 \cdot q_2 = -q_2 \cdot q_1.$$

ამ ტოლობის დამტკიცება მარტივად შეიძლება.

მართლაც, რადგან

$$q_1 q_2 = (c_1 d_2 - d_1 c_2)i + (d_1 b_2 - b_1 d_2)j + (b_1 c_2 - c_1 b_2)k,$$

$$q_2 q_1 = -(c_1 d_2 - d_1 c_2)i - (d_1 b_2 - b_1 d_2)j - (b_1 c_2 - c_1 b_2)k = -q_1 q_2.$$

განვიხილოთ $q_1 \cdot q_2$ ნამრავლის ვექტორული ნაწილი, რომელიც ტოლია

$$(c_1 d_2 - d_1 c_2)i + (d_1 b_2 - b_1 d_2)j + (b_1 c_2 - b_2 c_1)k$$

და დავადგინოთ მისი გეომეტრიული აზრი.

ანალიზურ გეომეტრიაში ამ გამოსახულებას q_1 და q_2 ვექტორების ვექტორული ნამრავლი ეწოდება და $[q_1 \cdot q_2]$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

$$[q_1 \cdot q_2] = (c_1 d_2 - d_1 c_2)i + (d_1 b_2 - b_1 d_2)j + (b_1 c_2 - b_2 c_1)k \quad (4)$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ $[q_1 \cdot q_2]$ და q_1 და q_2 ვექტორები პერპენდიკულარულია, ხოლო მისი სიგრძეა

$$|q_1| \cdot |q_2| \cdot \sin \varphi,$$

ანუ, რიცხობრივად, q_1 და q_2 ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობის ტოლია.

რომ ვაჩვენოთ $[q_1 \cdot q_2]$ და q_1 ვექტორები მართობულია, საკმარისია რომ ამ ვექტორების სკალარული ნამრავლის რიცხვითი ნაწილი იყოს ნულის ტოლი.

$q_1 \cdot q_2$ ნამრავლში თუ გავითვალისწინებთ (3) და (4) ტოლობებს, მივიღებთ:

$$[q_1 \cdot q_2] = q_1 \cdot q_2 - (q_1 \cdot q_2)$$

ამიტომ

$$\begin{aligned} q_1 \cdot [q_1 \cdot q_2] &= q_1 \cdot (q_1 \cdot q_2 - (q_1 \cdot q_2)) = \\ &= q_1^2 \cdot q_2 + (q_1 \cdot q_2) \cdot q_1 = -|q_1|^2 \cdot q_2 + (q_1 \cdot q_2) \cdot q_1 \end{aligned}$$

მარჯვენა მხარეში მივიღეთ ორი ვექტორის ჯამი, ე.ი. ისევ ვექტორი.

ანალოგიური მსჯელობით დავამტკიცებთ $[q_1 \cdot q_2]$ და q_2 ვექტორების მართობულობას.

ვიპოვოთ $[q_1 \cdot q_2]$ სიგრძე. მისი კვადრატი ტოლია

$$(c_1 d_2 - d_1 c_2)^2 + (d_1 b_2 - b_1 d_2)^2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1)^2$$

მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ:

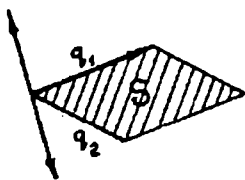
$$\begin{aligned} [q_1 \cdot q_2]^2 &= (b_1^2 + c_1^2 + d_1^2)(b_2^2 + c_2^2 + d_2^2) - (b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2)^2 = \\ &= |q_1|^2 \cdot |q_2|^2 - (q_1 \cdot q_2)^2 = |q_1|^2 \cdot |q_2|^2 - |q_1|^2 \cdot |q_2|^2 \cos^2 \phi = \\ &= |q_1|^2 \cdot |q_2|^2 (1 - \cos^2 \phi) = |q_1|^2 \cdot |q_2|^2 \sin^2 \phi = S^2. \end{aligned}$$

ანუ,

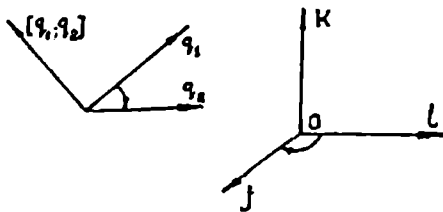
$$[q_1 \cdot q_2] = S.$$

$[q_1 \cdot q_2]$ და q_1 და q_2 ვექტორების მართობულობა და მისი ტოლობა S ფართობთან არ განსაზღვრავს მას ცალსახად (ნახ. 68). ეს თვისებები აქვს ორ ურთიერთსაწინააღმდეგო ვექტორს. რომელი მათგანია $[q_1 \cdot q_2]$ -? სამიეხელი ვექტორი გაირკვევა ასე:

q_1 , q_2 , $[q_1 \cdot q_2]$ ვექტორები სივრცეში ორიენტირებული უნდა იყოს i, j, k -ს მსგავსად. (ნახ.69).



ნახ. 68.



ნახ.69.

ამრიგად, ვექტორული კვატერნიონების გამრავლებისას სამართლიანის ფორმულა

$$[q_1 \cdot q_2] = q_1 \cdot q_2 - (q_1 \cdot q_2)$$

სადაც $(q_1, q_2) - q_1$ და q_2 ვექტორების სკალარული ნამრავლია, ხოლო $[q_1 - q_2] - q_1$ და q_2 ვექტორების ვექტორული ნამრავლი.

§2.3. მოზრუნება სივრცეში

ვთქვათ, $q = a + bi + cj + dk$ ნებისმიერი კვატერნიონია, რომლის მოდული 1-ის ტოლია

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$$

ეს კვატერნიონი ჩავწეროთ სახით

$$q = a + q'$$

სადაც q' არის $bi + cj + dk$ ვექტორი.

რადგან $|a|^2 + |q'|^2 = 1$, ამიტომ არსებობს ისეთი φ კუთხე, რომ

$$a = \cos \varphi \cdot |q'| = \sin \varphi.$$

ცხადია, $q' = |q'| \cdot p$, სადაც p -ერთეულოვანი სიგრძის ვექტორია. ცხადია

$$q = \cos \varphi + p \cdot \sin \varphi$$

შევნიშნოთ, რომ ამ სახით შესაძლებელია ნებისმიერი კვატერნიონის წარმოდგენა, რომლის მოდული 1-ის ტოლია.

გავამრავლოთ q კვატერნიონი მის პერპენდიკულარულ რაიმე v ვექტორულ კვატერნიონზე, მივიღებთ:

$$q \cdot v = (\cos \varphi + p \cdot \sin \varphi) \cdot v = v \cdot \cos \varphi + p \cdot v \cdot \sin \varphi,$$

რადგან p და v კვატერნიონები პერპენდიკულარულია, ამიტომ $q \cdot v$ ნამრავლში რიცხვითი ნაწილი

0-ის ტოლია, ვექტორული ნაწილი კი ტოლი იქნება $[q \cdot v]$ ანუ ვექტორისა, რომლის სიგრძეა

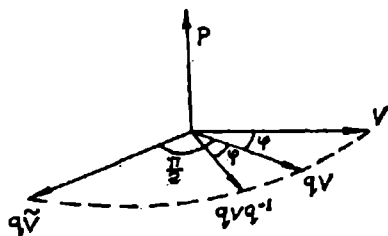
$$|p| \cdot |v| \cdot \sin \varphi = |v|,$$

რომელიც პერპენდიკულარულია p და v -სი და ორიენტირებულია p და v -ს მიმართ იმგვარად, როგორც k ვექტორია ორიენტირებული i და j -ს მიმართ. აღვნიშნოთ ეს ვექტორი $\tilde{v}$ -თი, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $\tilde{v}$ მიღებულია v -დან p ვექტორის ირგვლივ მობრუნებით $\frac{\pi}{2}$ კუთხით.

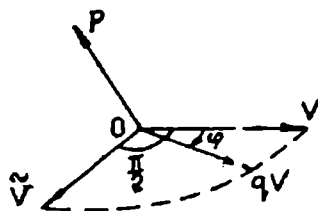
ამრიგად

$$q \cdot v = v \cdot \cos \varphi + \tilde{v} \cdot \sin \varphi$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $q \cdot v$ ვექტორი მიიღება p ვექტორის ღერძის ირგვლივ v ვექტორის მობრუნებით φ კუთხით. (ნახ. 70).



ნახ. 70.



ნახ. 71.

ამრიგად, თუ p ერთეულოვანი სიგრძის რაიმე ვექტორია, ხოლო v ვექტორი p ვექტორის პერპენდიკულარული ნებისმიერი ვექტორია, მაშინ v -ს მარცხენა ნამრავლი

$$q = \cos \varphi + p \cdot \sin \varphi$$

კვატერნიონზე ახორციელებს ν ვექტორის მობრუნებას p ღერძის ირგვლივ φ კუთხით.

აქ გარკვეული შეზღუდვაა, კერძოდ ის, რომ ν ვექტორი აირჩევა არა ნებისმიერად, არამედ ის p ვექტორის მართობული უნდა იყოს.

განვიხილოთ ახლა ზოგადი შემთხვევა. ამისათვის დაგვჭირდება მარცხნიდან გასამრავლებლად უფრო რთული გამოსახულება, კერძოდ $q \cdot \nu \cdot q^{-1}$, სადაც q^{-1} აღნიშნავს q კვატერნიონის შებრუნებულ კვატერნიონს, ე.ი. ისეთს, რომ

$$q^{-1} = \cos \varphi - p \cdot \sin \varphi.$$

მართლაც,

$$(\cos \varphi + p \cdot \sin \varphi)(\cos \varphi - p \cdot \sin \varphi) = \cos^2 \varphi - p^2 \sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

ვაჩვენოთ, რომ $q \cdot \nu \cdot q^{-1}$ ვექტორი მიიღება ν ვექტორის მობრუნებით p ღერძის ირგვლივ 2φ -ს ტოლი კუთხით.

ვთქვათ, თავიდან ν ვექტორი p ვექტორის მართობულია. ამიტომ

$$q \cdot \nu \cdot q^{-1} = q \cdot \nu \cdot (\cos \varphi - p \cdot \sin \varphi) = q \cdot \nu \cdot \cos \varphi - (p \cdot \nu) \cdot p \cdot \sin \varphi,$$

რადგან $q \cdot \nu$ ვექტორი p ვექტორის მართობულია, ამიტომ

$$(q \cdot \nu) \cdot p = -p \cdot (q \cdot \nu).$$

$p \cdot (q \cdot \nu)$ კვატერნიონი ვექტორია, რომელიც მიიღება

$q \cdot \nu$ ვექტორის მობრუნებით p ღერძის გარშემო $\frac{\pi}{2}$

კუთხით. (ნახ.71). აღვნიშნოთ ეს ვექტორი $q \cdot \vec{v}$ ამრიგად,

$$q \cdot \vec{v} \cdot q^{-1} = q \cdot \vec{v} \cdot \cos \varphi - q \vec{v} \cdot \sin \varphi,$$

მარჯვენა მხარეში მდგომი გამოსახულება წარმოადგენს ვექტორს, რომელიც მიიღება $q \cdot \vec{v}$ ვექტორის მობრუნებით p ღერძის გარშემო φ კუთხით. თუ გავითვალისწინებთ, რომ თვითონ $q \cdot \vec{v}$ ვექტორი მიიღება $\vec{v}$ ვექტორიდან ასეთივე მობრუნებით, მაშინ შევნიშნავთ, $q \cdot \vec{v} \cdot q^{-1}$ ვექტორი მიიღება $\vec{v}$ ვექტორის მობრუნებით p ღერძის ირგვლივ 2φ -ს ტოლი კუთხით.

განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა. შევნიშნოთ, რომ თუ p და $\vec{v}$ ვექტორები პროპორციულია, ე.ი.

$$\vec{v} = \lambda p \Leftrightarrow q \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot q$$

და

$$q \cdot \vec{v} \cdot q^{-1} = \vec{v} \cdot q \cdot q^{-1} = \vec{v}.$$

ვთქვათ $\vec{v}$ ნებისმიერი ვექტორია. დავშალოთ ის ორ მდგენელად

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2,$$

სადაც $\vec{v}_1$ ვექტორი p -ს მართობულია, ხოლო $\vec{v}_2$ - პროპორციულია p -სი, მაშინ

$$q \cdot \vec{v} \cdot q^{-1} = q \cdot \vec{v}_1 \cdot q^{-1} + q \cdot \vec{v}_2 \cdot q^{-1} = q \cdot \vec{v} \cdot q^{-1} + \vec{v}_2.$$

საიდანაც ჩანს, რომ $\vec{v}_1$ მდგენელი p ღერძის გარშემო მობრუნდება 2φ -ს ტოლი კუთხით, ხოლო $\vec{v}_2$ უცვლელი დარჩება. მთლიანად $\vec{v}$ ვექტორი მობრუნდება p ღერძის გარშემო 2φ -ს ტოლი კუთხით.

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ p ღერძის გარშემო 2φ -ს ტოლი კუთხით მობრუნებისას ნებისმიერი ν ვექტორი გადადის $q \cdot \nu \cdot q^{-1}$ ვექტორში, სადაც

$$q = \cos \varphi + p \cdot \sin \varphi$$

§2.4. მობრუნებათა კომპოზიცია სივრცეში

ვთქვათ, რაიმე ღერძის გარშემო შესრულდა $2\varphi_1$ -ს კუთხის ტოლი მობრუნება, რომლის მახასიათებელია p_1 ერთეულოვანი ვექტორი, ამის შემდეგ რომელიმე სხვა ღერძის მიმართ სრულდება მეორე მობრუნება $2\varphi_2$ -ს კუთხის ტოლი კუთხით, რომლის მახასიათებელია p_2 ერთეულოვანი ვექტორი. ჯამში სრულდება რაიმე ახალი მობრუნება. ვიპოვოთ მობრუნებათა კომპოზიციის ღერძი და მობრუნების კუთხე.

პირველი მობრუნების დროს ნებისმიერი ν ვექტორი გადავა

$$\nu_1 = q_1 \cdot \nu \cdot q_1^{-1}$$

ვექტორში, სადაც $q_1 = \cos \varphi_1 + p_1 \cdot \sin \varphi_1$ მეორე მობრუნების დროს ν_1 ვექტორი გადავა

$$\nu_2 = q_2 \cdot \nu_1 \cdot q_2^{-1} = q_2 \cdot (q_1 \cdot \nu \cdot q_1^{-1}) = (q_2 \cdot q_1) \cdot \nu \cdot (q_2 \cdot q_1)^{-1}$$

ვექტორში. შევნიშნოთ, რომ,

$$(q_2 \cdot q_1)^{-1} = q_2^{-1} \cdot q_1^{-1}$$

რადგან

$$(q_2 \cdot q_1) \cdot (q_1^{-1} \cdot q_2^{-1}) = 1.$$

ამრიგად, მიმდევრობით შესრულებული ორი მობრუნების დროს ν ვექტორი გადავა

$$\nu_2 = (q_2 \cdot q_1) \cdot \nu \cdot (q_1 \cdot q_2)^{-1}$$

ვექტორში, ე.ი. მიმდევრობით შესრულებული ორი მობრუნებისას, რომლებიც q_1 და q_2 კვატერნიონებს შეესაბამება, მიიღება მესამე მობრუნება, რომელსაც შეესაბამება $q_1 \cdot q_2$ კვატერნიონი.

$q_1 \cdot q_2$ კვატერნიონის გამოთვლა რთული არ არის, რადგან კვატერნიონების გამრავლების წესი ცნობილია. ვიპოვიot რა $q_1 \cdot q_2$ კვატერნიონს, წარმოვადგენთ მას სახით:

$$q_1 \cdot q_2 = \cos \psi + p \cdot \sin \psi \quad (5)$$

სადაც p ერთეულოვანი ვექტორია. მაშინ ორი მობრუნების კომპოზიცია არის მობრუნება p ღერძის გარშემო 2ψ -ს ტოლი კუთხით. მაშასადამე, კვატერნიონების გამოყენებით საკმაოდ რთული ამოცანა ამოიხსნება მარტივად.

განვიხილოთ მაგალითი: ვთქვათ, პირველი მობრუნება განიხილება Ox ღერძის გარშემო $\frac{\pi}{2}$ -ის ტოლი კუთხით, ხოლო მეორე Oy ღერძის გარშემო იმავე კუთხით.

პირველ მობრუნებას შეესაბამება კვატერნიონი

$$q_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i).$$

მეორე მობრუნებას კი შეესაბამება კვატერნიონი

$$q_2 = \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j).$$

ამ შემთხვევაში

$$q_2 \cdot q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) = \frac{1}{2}(1 + i + j + j \cdot i) = \frac{1}{2}(1 + i + j - k).$$

წარმოვადგინოთ ეს კვატერნიონი (5) სახით. შევნიშნოთ, რომ მისი ნამდვილი ნაწილია

$$\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}.$$

გამოვდივართ რა აქედან, ჩავწერთ:

$$q_2 \cdot q_1 = \cos \frac{\pi}{3} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(i + j - k) \right) \sin \frac{\pi}{3}.$$

ამრიგად, მოზრუნებათა კომპოზიციის შედეგი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც

$$p = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j - k)$$

ვექტორის გარშემო მოზრუნება $\frac{2\pi}{3}$ კუთხით.

მეთოდური რეკომენდაციები

მასწავლებლებს

1. საქართველოში განათლების რეფორმის წარმატებით განხორციელება დიდად არის დამოკიდებული იმაზე, თუ როგორი ლოგიკური აზროვნების და მიღებული ცოდნის პრაქტიკაში გამოყენების უნარებით აღჭურვილი დაამთავრებს ახალგაზრდა სკოლას. განსაკუთრებით მნიშვნელოვნად მიგვაჩნია მოსწავლე დაეუფლოს ამოცანების ამოხსნის ერთმანეთისაგან განსხვავებულ მეთოდებს და ხერხებს, რომელიც შემდგომში მას საშუალებას მისცემს თვითონვე შეადგინოს იმავე ტიპის ამოცანები. მოსწავლეს უნდა შეეძლოს ამოცანის ამოხსნა, ჩამოყალიბება, შედგენა, რისთვისაც შეიძლება გამოიყენოს მათემატიკური თვისებები, დამოკიდებულებები, გამოთვლები, გაზომვები, აგებები, გარდაქმნები და სხვ.

2. საქართველოში განათლების სიტემაში მიმდინარე რეფორმა მოითხოვს სკოლაში მიღებული ცოდნის პრაქტიკაში გამოყენების უნარ-ჩვევების ფორმირებას. მათემატიკის შესწავლაში ეს მიიღწევა ისეთი ამოცანების ამოხსნით, რომელსაც აქვს განმავითარებელი ფუნქცია და მოითხოვენ ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენებას. სწავლების დროს განსაკუთრებული ყურადღება უნდა გადავიტანოთ გამოყენებითი ხასიათის ამოცანების განხილვაზე.

მოსწავლეთა მიერ სხვადასხვაგვარი ამოცანების ამოხსნა ცოდნისა და უნარების დაუფლების, გონებრივი შესაძლებლობებისა და პიროვნული თვისებების განვითარების ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ფაქტორს წარმოადგენს. მათემატიკის სწავლება შეიძლება განვიხილოთ როგორც ამოცანათა ამოხსნის სწავლება, ამიტომ სწავლებაში გამოყენებულ ამოცანათა სისტემებზეა დამოკიდებული მოსწავლეთა გონებრივი განვითარება. ამოცანები, რომლებსაც მათემატიკის არსებული სასწავლო სახელმძღვანელოები შეიცავს განსაზღვრული ჩვევების ჩამოყალიბებაზეა ორიენტირებული.

სხვადასხვა შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის შემთხვევაში მოსწავლეებს სხვადასხვა სააზროვნო ოპერაციების შესრულება, მათთვის ცნობილი დებულებების გახსენება, ამოცანათა ამოხსნის საკუთარი გამოცდილების აქტუალიზება და ახალი ცოდნით შევსება უხდება. ასეთი შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სწავლების პროცესი მდიდარ პედაგოგიურ გარემოს ქმნის, რომელსაც ყველა მოსწავლის პიროვნულ თვისებებზე, მათ მათემატიკურ კულტურასა და აზროვნების ფორმირებაზე ზემოქმედება შეუძლია. ასეთ ამოცანებს ემოციური მომენტი შეაქვთ მოსწავლეთა გონებრივ საქმიანობაში. ამგვარად, აღნიშნულ ამოცანებთან მოსწავლეთა ურთიერთობის გამოცდილება დიდად წაადგება მათემატიკის შესწავლისადმი ინტერესის გაჩენასა და ზოგადი სასწავლო უნარების ათვისებას, რაც უზრუნველყოფს სწავლების მოტივა-

ციური და ოპერაციული სფეროების დამკვიდრებასა და განვითარებას.

3. ამოცანების სასწავლო, განმავითარებელი და აღმზრდელობითი ფუნქციები წარმატებით ხორციელდება მხოლოდ მაშინ, როცა მოსწავლეს შეთავაზებული ამოცანის ამოხსნის ინტერესი და მოთხოვნილება უჩნდება. ეს მაშინ ხდება, როცა მისთვის ამოცანის არსი გასაგებია. როცა ამოცანა ორიგინალურია შინაარსობრივი ან ამოხსნის ხერხის გამოყენების თვალსაზრისით, როცა მოსწავლეს შესაძლებლობა აქვს თავისუფლად იფიქროს, გამოავლინოს შემოქმედებითი უნარი, გააკეთოს დასკვნები, განზოგადება; როცა ის გრძნობს თავისი შრომის სარგებლიანობას; როცა მასწავლებელი ახალისებს მოსწავლეთა მხრიდან ლამაზი, რაციონალური ამოხსნების ძიების მცდელობას და მუდმივად არჩევს და ესთეტიკურ შეფასებებს აძლევს მათ მიერ გამოყენებული ამოხსნის ხერხებს. განმავითარებელი და სპეციალური ხერხების გამოყენებით ამოხსნადი ამოცანების ინტერესის გაჩენა ხელს უწყობს: მოსწავლეთა გონებრივ განვითარებას; შრომისმოყვარეობის, ხარისხისა და ცოდნის სიმტკიცის ამაღლებას; სააზროვნო საქმიანობის აქტივიზებას; ყურადღების მობილიზებას; თვალთახედვის არის გაფართოებას; მოსწავლის ხასიათის თვისებების ფორმირებას.

4. მათემატიკის სასკოლო სახელმძღვანელოებში მოცემული სავარჯიშოები ფუნქციური დანიშნულებით შეესაბამება სქემას

„თეორია → ამოცანები“.

ჩვენი აზრით, რომ უმჯობესია მათემატიკის სასკოლო პრაქტიკაში დავამკვიდროთ სქემა

„ამოცანები → თეორია → ამოცანები“,

რომელიც აუცილებელია მოსწავლეთა განმავითარებელი სწავლების პრინციპების დასამკვიდრებლად და საშუალებას იძლევა განვამტკიცოთ არა მარტო თეორიული მასალის ცოდნა, მისი გამოყენების საშუალებით, არამედ დავეხმაროთ მოსწავლეებს ახალი ცოდნის დამოუკიდებლად მოპოვებაში.

5. მათემატიკის სწავლების უმნიშვნელოვანესი ამოცანაა ყველა მოსწავლის მათემატიკური მომზადების გარანტირებული დონის უზრუნველყოფა მათი მომავალი პროფესიული არჩევანისაგან დამოუკიდებლად. საზოგადოების კომპიუტერიზაცია, თანამედროვე ინფორმაციული ტექნოლოგიების დანერგვა მოითხოვს მუშაკის მათემატიკურად განათლებულობას ყოველ სამუშაო ადგილზე. მათემატიკურ განათლებულობაში იგულისხმება მათემატიკის კონკრეტული ცოდნაც და მათემატიკის მეშვეობით გამომუშავებული აზროვნების სტილიც, რომლის ჩამოყალიბებაში მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ამოცანების საძიებო ხერხების სწავლება.

6. მოსწავლეებისათვის ამოცანების შედგენის სწავლება მეთოდურად საკმაოდ დიდ სირთულეებთან არის დაკავშირებული და მეტად ზომიერ და ფაქიზ მოპყრობას მოითხოვს. მისი მიზანმიმართული სწავლება მოსწავლეთა დაინტერესებას იწვევს და ლოგიკური აზროვნების ჩამოყალიბებას ეხმარება. ამოცანების შედგენის პროცესში მოსწავლეები ითვისებენ არა მარტო ამოცანათა შედგენის ხერხებს, არამედ საფუძვლიანად ეუფლებიან შესაბამისი სახის ამოცანების ამოხსნის ალგორითმულ და საძიებო ხერხებს.

7. ამოცანების ამოხსნის და შედგენის ურთიერკავშირში სწავლება მიზნად ისახავს ისეთი უნარების განვითარებას, როგორიცაა მოცემული ინფორმაციის გარეთ ახალი ინფორმაციის მოძიება და მოცემულის საფუძველზე ახალი ინფორმაციის შექმნა. ამოხსნის საძიებო ხერხების გამოყენებით მათემატიკის სწავლება უნდა წარმართოთ მათემატიკური ცოდნის და იმ ცოდნის მოსაპოვებლად საჭირო შემეცნების ხერხების სწავლების შეწყვილებით.

8. მასწავლებლის პროფესიული ცოდნა-ჩვევების მნიშვნელოვან მაჩვენებლად მიგვაჩნია არა მარტო ამოხსნის საძიებო ხერხების ცოდნა, არამედ რამდენად გააზრებულად და გაცნობიერებულად ფლობს ამოცანების ამოხსნის საძიებო ხერხების მეთოდურ საფუძვლებს. ამოცანების ამოხსნის საძიებო ხერხების მეთოდური საფუძვლების ცოდნა სწვლების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანა, მისი ერთ-ერთი დიდაქტიკუ-

რი პრინციპია. ვთვლით, რომ ამოცანების ამოხსნის თეორიულ საფუძვლებს მათემატიკის ყველა მასწავლებელი უნდა ფლობდეს.

9. ცოდნა-ჩვევების სრულფასოვნების მნიშვნელოვან მაჩვენებლად მიგვაჩნია არა მარტო ის, თუ რამდენად გააზრებული და გაცნობიერებულია ამოცანების ამოხსნის საძიებო ხერხების ცოდნა მოსწავლეთა მიერ, არამედ ისიც, თუ რამდენად ღრმად, საფუძვლიანად და მტკიცედ აქვს ათვისებული ის მოსწავლეს. ამიტომ, ამოცანების ამოხსნის საძიებო ხერხების ცოდნის მტკიცედ დაუფლება სწავლების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანაა და ამავე დროს დიდაქტიკური პრინციპის ერთ-ერთი შემადგენელი ნაწილია, რომელიც გულისხმობს სასწავლო მასალის ისე მიწოდებას, რომ მოსწავლე მტკიცედ იმახსოვრებდეს და ამის საფუძველზე უნარი შესწევს თავისუფლად აღადგინოს თავის მეხსიერებაში ის, რაც მან ადრე სწავლების პროცესში აღიქვა და აითვისა.

10. ცოდნა-ჩვევების განმტკიცება მჭიდროდაა დაკავშირებული გავლილი და ახალი მასალის თანმიმდევრულ ურთიერთკავშირზე, ამისათვის კი აუცილებელია მასწავლებელმა ამოცანის ამოხსნის საძიებო ხერხების სწავლება არ უნდა განახორციელოს მანამდე, ვიდრე მოსწავლეები საფუძვლიანად არ შეისწავლიან ამოცანათა ამოხსნის ალგორითმულ ხერხებს, ამავე დროს უნდა დაიცვას გავლილი მასალიდან ახალ მასალაზე გადასვლის დიდაქტიკური მოთხოვნები, რომელთა

შორის მთავარია ამოცანების ამოხსნის ალგორითმული ხერხების სისტემაში მოყვანა და უმთავრესის გამოყოფა მეორეხარისხოვნისაგან, ახალი ამოცანის დასმა და ახალი საკითხის ფაბულის ისეთი მოხაზვა, რომ მოსწავლე ნათლად ხედავდეს ამოცანების ამოხსნის საძიებო ხერხების სწავლების აუცილებლობას. ყოველივე ამით მასწავლებელი მოსწავლეებში შექმნის ამოცანების ამოხსნის საძიებო ხერხების სწავლების ადვილად დაძლევის განწყობას.

11. ამოცანების ამოხსნის საძიებო ხერხების დაუფლება მოითხოვს მოსწავლისადმი ინდივიდუალურ მიდგომას, თითოეული მოსწავლის თავისებურებების გათვალისწინებას, დავალებათა ინდივიდუალიზაციას და სხვ. მოსწავლისადმი ინდივიდუალური მიდგომის დროს საჭიროა იმის გათვალისწინება, რომ თითოეული მოსწავლე წარმოადგენს განუმეორებელ ინდივიდუალობას. მასწავლებელმა ყურადღება უნდა მიაქციოს თითოეული მოსწავლის ყოველმხრივ შესწავლას, მის ხასიათს, ტემპერამენტს, ნებისყოფას, ყურადღებას, უნარ-ჩვევებს, აკადემიურ მომზადებას, შრომისმოყვარეობას და სხვ. მასწავლებლის დაკვირვების საგანს უნდა წარმოადგენდეს ამოცანების ამოხსნის საძიებო ხერხების სწავლების პროცესი მრავალფეროვანი შინაარსით, ორგანიზაციით და მეთოდებით. ასევე მრავალმხრივია მოსწავლისადმი ინდივიდუალური მიდგომის გზები და ფორმები, რომელიც მასწავლე-

ბელმა ყველა კონკრეტულ შემთხვევაში უნდა გადაწყვიტოს ინდივიდუალურად.

12. მასწავლებელმა ამოცანების ამოხსნის საძიებო ხერხების სწავლების მთელი პროცესი უნდა ააგოს სწავლების მეცნიერულ შინაარსზე და გააზრებულ, გაცნობიერებულ შეთვისებაზე, რომელიც დამყარებულია აქტიურ დამახსოვრებაზე და ლოგიკური აზროვნების ჩამოყალიბებაზე. ყოველმხრივ განვითარებული ადამიანის აღზრდა მოითხოვს ისეთ სწავლებას, რომელიც უზრუნველყოფს მოსწავლის მიერ მეცნიერებათა საფუძვლების თანმიმდევრულ შეთვისებას.

13. ამოცანების ამოხსნის საძიებო ხერხების პრაქტიკული რეალიზება დამოკიდებულია მასწავლებლის გამოცდილებაზეც და ამოხსნის საძიებო ხერხების ფორმებსა და მეთოდურ თავისებურებებზეც. ამოცანების ამოხსნის ხერხები მოითხოვს სპეციალურ შესწავლას. ამოცანების ამოხსნის სპეციალურ ხერხებს უნდა ფლობდეს მათემატიკის ყველა მასწავლებელი.

14. მიზანშეწონილია ამოცანების ამოხსნის დროს გამოვიყენოთ სხვადასხვა ხერხი, ამასთან მეთოდურად უნდა დავასაბუთოთ გამოყენებული ხერხის უპირატესობა.

15. გეომეტრიის სწავლებას უდიდესი მნიშვნელობა ენიჭება ადამიანის აზროვნების ჩამოყალიბებაში. გეომეტრიის შესწავლისას ყურადღება უნდა დაეთმოს არა მარტო თეორიული ხასიათის მასალის შესწავლას, არამედ განსაკუთრებულად უნდა იქნეს ყურადღება გადა-

ტანილი პრაქტიკული ხასიათის ამოცანების ამოხსნის საძიებო ხერხების გამოყენებაზე. უნდა გვახსოვდეს, რომ საძიებო გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სწავლების პროცესში ხდება მოსწავლეთა ლოგიკური აზროვნების და მეცნიერული მსოფლხედველობის ჩამოყალიბება.

16. არსებობს გეომეტრიის ისეთი ამოცანები, რომლებიც თავისი შინაარსით და სირთულის ხარისხით შეესაბამებიან მათემატიკის სასკოლო კურსს, მაგრამ მათი ამოხსნა ტრადიციული მეთოდებით ან არ ხერხდება, ან ამოხსნის პროცესი დიდ დროსა და რთული მათემატიკური გარდაქმნების ჩატარებას მოითხოვს. ასეთი ამოცანების გადაწყვეტა ზოგჯერ მოსახერხებელია წარმოსახვით რიცხვებზე დაყრდნობით, კერძოდ კომპლექსური რიცხვებისა და კვატერნიონების გამოყენებით. ასეთი ამოცანების ამოხსნა დაფუძნებულია ამოცანების ამოხსნის საძიებო ხერხებთან და განმავითარებელი სწავლების თვალსაჩინო მაგალითია. ერთი მხრივ მოსწავლეები იტვისებენ ცოდნას კომპლექსური რიცხვების და კვატერნიონების შესახებ, ხოლო მეორეს მხრივ მათი საშუალებით ეუფლებიან საძიებო ხასიათის გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის მეთოდებს.

17. საშუალო სკოლაში ამოცანების ამოხსნის საძიებო ხერხების სწავლება ხელს უწყობს მოსწავლეთა შეგნებული დამოკიდებულების, პიროვნების ზნეობრივი და ინტელექტუალური ფორმირების ძირეულ გაუმჯო-

ბესებას, ეხმარება მათ ლოგიკური აზროვნების და სამყაროს ობიექტური სინამდვილის შეცნობის უნარის ჩამოყალიბებაში.

18. საკუთარი პედაგოგიური გამოცდილებით, დარგის სპეციალისტებთან და პრაქტიკოს-ნოვატორ მასწავლებლებთან კონსულტაციებით მივედით დასკვნამდე:

ამოცანების ამოხსნის საძიებო ხერხების სწავლების მეთოდика უნდა აკმაყოფილებდეს გარკვეულ მოთხოვნებს:

- ამოცანების ამოხსნის საძიებო ხერხების სწავლება უნდა განხორციელდეს კონკრეტული ამოცანების საშუალებით ამოცანების ამოხსნის დროს;
- მასწავლებელმა უნდა გამოიყენოს ისეთი კითხვები, რაც მათ დაეხმარება ამოხსნის პერსპექტიული გზის მოძებნაში;
- ამოცანების ამოხსნის საძიებო ხერხების სწავლების მეთოდика უნდა შეიცავდეს ამოცანის ანალიზს, რომელიც იძლევა ამოცანის პირობაში არსებული ინფორმაციის სრულად აღქმას და მის საფუძველზე ამოხსნის რაციონალური გზის მიგნებას;
- ამოცანის ამოხსნის ახალი საძიებო ხერხის განხილვამდე მოსწავლეებს უნდა გავაცნოთ გამოსაყენებელი ხერხის არსი და სპეციფიკა, თუ ეს შესაძლებელია მოვახდინოთ ხერხის განზოგადება. ამოცანის ამოხსნის შემდეგ მიღებული ახალი ცოდნის განმტკიცების მიზნით მოსწავლეებს საშინაო დავალებად ან დამოუკიდებელი მუშაობისათვის მივცეთ ანალოგიური ამოცანა.

ნაბეჭდი ფორმა 19

ტირაჟი 100