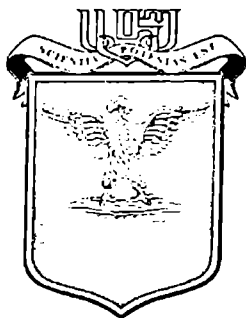


ტ. კვიციანი

თეორიული მექანიკის კურსი

სტატიკა და კინემატიკა



დამტკიცებულია სახელმძღვანელოდ
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის
სარედაქციო-საგამომცემლო საბჭოს
მიერ. 28.04.2015, ოქმი №1

სახელმძღვანელო მოიცავს თეორიული მექანიკის კურსის პირველ (სტატიკა) და მეორე (კინემატიკა) ნაწილებს.

კურსის კარგად დასაუფლებლად ყოველი თემის ბოლოში მოცემულია ბევრი მაგალითი და ამოცანა, რომელთა ამოხსნას ერთვის შესაბამისი მეთოდური მითითებანი.

ამოხსნილი ამოცანების მეთოდური მითითებების დამუშავება და შესწავლა სტუდენტს საშუალებას მისცემს, დაეუფლოს სავარჯიშოდ მიცემული ამოცანების ამოხსნის ხერხებს და სათანადო ღონეზე აითვისოს დისციპლინა.

სახელმძღვანელოში შეტანილია მყარი სხეულის სტატიკის, წერტილისა და სხეულის კინემატიკის ბევრი ამოცანა დამოუკიდებელი მუშაობისათვის, ამიტომ მისი გამოყენება შეიძლება როგორც თეორიული მექანიკის ამოცანათა კრებულისა.

განკუთვნილია უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებისათვის.

რეცენზენტები: პროფესორი ს. ხარიბეგაშვილი,
პროფესორი ნ. შავლაყაძე

© საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, 2015
ISBN 978-9941-20-569-9

<http://www.gtu.ge>

ველა უფლება დაცულია. ამ წიგნის ნებისმიერი ნაწილის (ტექსტი, ფოტო, ილუსტრაცია თუ სხვა) გამოყენება არც ერთი ფორმითა და საშუალებით (ელექტრონული თუ მექანიკური) არ შეიძლება გამომცემლის წერილობითი ნებართვის გარეშე.

საავტორო უფლებების დარღვევა ისჯება კანონით.



თეორიული მექანიკა, როგორც ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი დარგი, უმნიშვნელობანეს როლს ასრულებს ყველა სპეციალობის ინჟინრის მომზადებაში. ის არის დისციპლინა, რომელიც სტუდენტს პირველად შეასწავლის რეალური საინჟინრო ამოცანების გადაწყვეტაში მათემატიკური აპარატის გამოყენებას.

თეორიული მექანიკის ძირითად კანონებს ეყრდნობა ბევრი ზოგადი საინჟინრო დისციპლინა: მასალათა გამძლეობა, სამშენებლო მექანიკა, ჰიდრავლიკა, მექანიზმების თეორია და მანქანათა ნაწილები, გრუნტების მექანიკა და სხვ.

სამშენებლო, ჰიდროსაინჟინრო, მანქანათმშენებლობის მექანიკური, ხელსაწყოთმშენებლობის, მართული სისტემებისა და სხვა პროფილის სხვადასხვა კურსში თეორიული მექანიკის ძირითადი დებულებანი ფართოდ არის გამოყენებული.

თეორიული მექანიკის თეორემებისა და პრინციპების საფუძველზე წყდება მრავალი საინჟინრო ამოცანა, ხორციელდება ახალი კონსტრუქციებისა და ნაგებობათა დაგეგმარება.

სასწავლო გეგმების მოდერნიზება და ვადების შეზღუდულობა ძალაუნებურად იწვევს იმ ფუნდამენტური დისციპლინებისათვის გამოყოფილი საათების რაოდენობის შემცირებას, რომელთა რიცხვს მიეკუთვნება თეორიული მექანიკა. სასწავლო მასალის მისაწვდომობის და მისი საინჟინრო საქმისადმი მისადაგების მიზნით სახელმძღვანელოში მოცემულია ძირითადი დებულებების დამტკიცება, ფორმულების გამოყვანა და ტექნიკურად საინტერესო უამრავი ამოცანის ამოხსნის ნიმუში შესაბამისი მეთოდური მითითებებით.

სახელმძღვანელო შედგენილია უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების თეორიული მექანიკის სრული კურსის შესაბამისად. შეიცავს მყარი სხეულის სტატიკის, წერტილისა და სხეულის კინემატიკის თეორიულ საკითხებს, ამოცანების ამოხსნის ნიმუშებსა და ამოცანებს დამოუკიდებელი მუშაობისათვის. ამოხსნილია დაახლოებით 130 ამოცანა, ამასთან ზოგიერთი ამოხსნილია სხვადასხვა ხერხით. წიგნი შეიცავს 555 ამოცანას დამოუკიდებელი ვარჯიშისათვის (სტატიკაში – 295, კინემატიკაში – 260) და 700 საილუსტრაციო ნახაზს (სტატიკაში – 485, კინემატიკაში – 215). სრულყოფილად

გაანალიზებული სტატიკისა და კინემატიკის ძირითადი ამოცანები. სავარჯიშო ამოცანების სიუხვე და მრავალფეროვნება საშუალებას იძლევა, წინამდებარე სახელმძღვანელომ შეასრულოს ამოცანათა კრებულის როლიც. ამ წიგნით სარგებლობა შეუძლიათ იმ სტუდენტებსაც, რომლებიც თეორიულ მექანიკას სწავლობენ მოკლე პროგრამით. საგნის ხელმძღვანელის მითითების საფუძველზე მასალის ნებისმიერი ნაწილის გამოტოვება შეიძლება ისე, რომ ზიანი არ მიაღგეს დარჩენილი ნაწილის ათვისებას.

თეორიული მექანიკის კურსის დაუფლებისათვის საჭიროა არა მარტო თეორიული მასალის შესწავლა, არამედ ამოცანების ამოხსნის მყარი ჩვევების შეძენაც. ასეთ ჩვევების ჩამოყალიბებას და განმტკიცებას ისახავს მიზნად თეორიულ მექანიკაში წინამდებარე სახელმძღვანელოს გამოცემა.

თუ სტუდენტი გულმოდგინედ გაანალიზებს ამოხსნილ ამოცანებს, მისთვის ძნელი არ იქნება ამოცანების ამოხსნა. მათი ამოხსნა აუცილებელია ისეთი უმნიშვნელოვანესი საკითხების შესწავლისათვის, როგორებიცაა: მყარი სხეულის სტატიკისა და კინემატიკის ძირითადი ამოცანები, რომელთა სრულყოფილ შესწავლას საათების სიმცირის გამო ჯეროვანი ყურადღება ვერ ექცევა ლექციების კითხვისა და პრაქტიკული ვარჯიშის დროს.

სტატიკასა და კინემატიკაში მოყვანილი თეორიული და პრაქტიკული მასალის შესწავლა და ათვისება წარმოადგენს საფუძველს და აუცილებელს, რათა სტუდენტმა შეისწავლოს თეორიული მექანიკის ძირითადი ნაწილი – დინამიკა. ამასთანავე თეორიული მექანიკის ძირითადი დებულებების ცოდნადიდ დახმარებას გაუწევს ინჟინერ-ტექნიკოსებს მათ პრაქტიკულ საქმიანობაში. კერძოდ: სამშენებლო ნაგებობებისა და სხვადასხვა მექანიზმების გაანგარიშებასა და კონსტრუირებაში.

ავტორი გულითად მადლობას უხდის ყველას, ვინც საქმიანი შენიშვნებით ხელი შეუწყო წიგნის ხარისხის გაუმჯობესებას.

ავტორი

*მექანიკა – სამეცნიერო პოემაა.
ეპამილტონი*

მატერიალურ სამყაროში შემჩნეული ყოველი მოვლენა, როგორი რთულიც არ უნდა იყოს, მატერიის სხვადასხვა ფორმითა და თვისებით გვევლინება.

მატერიის ყოველგვარ ცვლილებას ეწოდება მოძრაობა, რომელიც მატერიის არსებობის ძირითადი ფორმაა. მატერიის იმ რაოდენობას, რომელიც ავსებს სივრცის გარკვეულ მოცულობას, მატერიალურ (ნივთიერი) სხეულს უწოდებენ.

მოძრაობის უმარტივესი ფორმაა მექანიკური მოძრაობა. მატერიალური ანუ ნივთიერი სხეულების მდებარეობის შეცვლას სხვა სხეულებთან შედარებით, მექანიკური მოძრაობა ეწოდება. მეცნიერების იმ დარგს კი, რომელიც მატერიალური სხეულების მოძრაობის კანონებს სწავლობს – მექანიკა.

მექანიკა ერთ-ერთი უძველესი მეცნიერებაა, რომელიც საზოგადოების განვითარებასთან ერთად ვითარდებოდა. მექანიკის შესახებ კაცობრიობის მიერ საუკუნეების მანძილზე დაგროვილი ცნობები გაბნეული იყო სხვადასხვა შრომებში და არ იყო მოყვანილი ერთიან მეცნიერულ სისტემაში. ასეთი სისტემის შექმნაში დიდი როლი შეასრულა გალილეო გალილეის (1564-1962) შრომებმა. მან პირველმა ჩამოაყალიბა მექანიკის უმნიშვნელოვანესი ცნებები: ინერციის იდეა, აჩქარების ცნება, სიჩქარეთა შეკრების კანონი, სხეულის ვარდნის კანონი და სხვ. ისააკ ნიუტონმა (1643-1727) განაზოგადა წინამორბედთა დაკვირვებები და თავისი მეცნიერული შრომების შედეგები, 1687 წელს გამოაქვეყნა მონოგრაფია "ნატურალური ფილოსოფიის მათემატიკური საწყისები", რომელშიც ჩამოაყალიბა კლასიკური მექანიკის ძირითადი კანონები.

დიფერენციალურ და ინტეგრალურ აღრიცხვაზე დაყრდნობით შეიქმნა მექანიკის ანალიზური მეთოდები, რომლის საფუძვლები გამოცემულია ლ.ეილერის (1707-1783), ჟ.დალამბერის (1713-1783), ჟ.ლანგრეჟის (1736-1813) შრომებში.

მექანიკის შემდგომი განვითარებისათვის უდიდესი მნიშვნელობა ჰქონდა რუსი მეცნიერების: მოსტოგრადსკის (1801-1862), პ.ჩეპიშევის (1821-1894), ა.ლიაპუნოვის (1857-1918), ი.მეშჩერსკის

(1859-1935), კ.ციოლკოვსკის (1957-1935), ა.კრილოვის (1863-1945), ნ.ჟუკოვსკის (1847-1921), ს.ჩაპლიგინის (1949-1842) და სხვათა შრომებს.

იმის მიხედვით, როგორ არის სხეულის ნაწილები ერთმანეთთან დაკავშირებული, ბუნებაში ძირითადად გვხვდება სამი მყარ, თხევად და აირად მდგომარეობაში. მყარია ისეთი სხეულები, რომელთა ნაწილები მტკიცედ არის დაკავშირებული ერთმანეთთან და საკუთარი ფორმა აქვს; თხევადი სხეულები ისეთია, რომელთა ნაწილებიც სუსტადაა დაკავშირებული და ფორმა არა აქვს; აირადი სხეულების ნაწილები ერთმანეთთან ძალიან სუსტად არის დაკავშირებული და საკუთარი ფორმა არა აქვს.

მყარი სხეულების მოძრაობის კანონებს მყარი სხეულის მექანიკა სწავლობს, თხევადი სხეულებისას – სითხის მექანიკა ანუ ჰიდრომექანიკა, ხოლო აირადი სხეულებისას – აერომექანიკა.

მექანიკური მოძრაობისა და ურთიერთქმედების მიხედვით ეს სხეულები მკვეთრად განსხვავებულია ერთმანეთისაგან, მაგრამ აქვს ბევრი საერთო თვისებაც. მაგალითად, შეიძლება ვისაუბროთ სხეულის სიჩქარეზე იმის მიუხედავად, რას წარმოადგენს ეს სხეული: წვიმის წვეთს, ფეხბურთის ბურთს, თვითმფრინავს, ქარს თუ თანამგზავრს. აღნიშნულიდან გამომდინარე, სიტყვა "მექანიკა" აერთიანებს არაერთ სამეცნიერო დისციპლინას: თეორიულ მექანიკას, დრეკადობის თეორიას, ჰიდროაერომექანიკას, ცის მექანიკას, მექანიზმების თეორიასა და სხვ.

თეორიულ მექანიკას საფუძვლად უდევს კანონები, რომლებსაც უწოდებენ კლასიკური მექანიკის (ან ნიუტონის) კანონებს, რომლებიც დადგენილია მრავალსაუკუნოვანი ცდებისა და დაკვირვების შედეგების განზოგადებით. ეს საშუალებას გვაძლევს, მექანიკის კანონებზე დაფუძნებული ცოდნა განვიხილოთ, როგორც ჭეშმარიტი, რომლებზე დაყრდნობითაც ინჟინრებს თამამად შეუძლიათ წარმართონ პრაქტიკული საქმიანობა.

თეორიული მექანიკა არის მეცნიერების ის დარგი, რომელიც შეისწავლის მატერიალური (ნივთიერი) სხეულების მექანიკური მოძრაობის ზოგად კანონებსა და ამ სხეულების მექანიკური ურთიერთქმედებებს.

განსახილველი ამოცანების შინაარსის მიხედვით თეორიული მექანიკა პირობითად სამ ნაწილად იყოფა: სტატიკად, კინემატიკად და დინამიკად.

სტატიკა თეორიული მექანიკის ის ნაწილია, რომელიც შეისწავლის აბსოლუტურად მყარ სხეულზე მოქმედ ძალთა სისტემის წონასწორობის პირობებს, აგრეთვე, ნებისმიერი ძალთა სისტემის უმარტივეს სახემდე დაყვანას.

კინემატიკა თეორიული მექანიკის ის ნაწილია, რომელიც სწავლობს ნივთიერი სხეულის (წერტილის) მექანიკური მოძრაობის გეომეტრიულ თვისებებს მასზე მოქმედი ძალებისა და მისი მასის გაუთვალისწინებლად.

დინამიკა არის თეორიული მექანიკის ის ნაწილი, რომელიც შეისწავლის ნივთიერი სხეულის (წერტილის) მექანიკურ მოძრაობას მისი გამომწვევი მიზეზის – მოქმედი ძალების გათვალისწინებით.

თეორიულ მექანიკაში ფართოდ გამოიყენება აბსტრაქციის (განყენების) მეთოდი. სხეულის მოძრაობის შესწავლისას გამოიყენებენ ძირითად ფაქტორებს, რომლებიც განმსაზღვრელია მოცემულ ამოცანაში. ამას მივყავართ სხეულის სხვადასხვა მოდელის განხილვაზე, რომელიც ამა თუ იმ აბსტრაქციის ხარისხია. მაგალითად, თუ სხეულის წერტილების სინქარეები მცირედ განსხვავებულია, მაშინ ამ სხეულის ზომები შეიძლება უგულებელვყოთ და განვიხილოთ როგორც მატერიალური (ნივთიერი) წერტილი.

რეალური სხეულების აბსტრაქციით მიიღება აბსოლუტურად მყარი სხეულის ცნება, ე.ი. ისეთი სხეულისა, რომლის ორ ნებისმიერ წერტილს შორის მანძილი მუდამ უცვლელი რჩება.

ცხადია, ბუნებაში აბსოლუტურად მყარი სხეული არ არსებობს, ვინაიდან ძალების მოქმედებით სხეული იცვლის ფორმას, ე.ი. განიცდის დეფორმაციას. ზოგ შემთხვევაში სხეულის დეფორმაცია შეიძლება უგულებელვყოთ. მაშასადამე, რეალური მატერიალური სხეულების ნაცვლად მექანიკაში განიხილავენ მათ ისეთ აბსტრაქციის შედეგად მიღებულ მოდელებს, როგორიცაა მატერიალური წერტილი, აბსოლუტურად მყარი სხეული და უწყვეტი ცვლადი გარემო.

პირველ შემთხვევაში უგულებელყოფილია სხეულის ზომა და ფორმა, მეორეში - მისი დეფორმაცია, მესამეში – გარემოს მოლეკულური სტრუქტურა. მას შემდეგ, რაც აგებულია ასეთი

სახის მოდელები, შეიძლება შემუშავდეს მეთოდები, რომლებიც საშუალებას მოგვცემენ, პრაქტიკისათვის საკმარისი სიზუსტით შევისწავლოთ რეალური ობიექტების წონასწორობა და მოძრაობა, რომელთა ვარგისიანობა, თავის მხრივ, მოწმდება ცდითაც და პრაქტიკულადაც.

ამრიგად, თეორიული მექანიკა სწავლობს მატერიალური წერტილისა და აბსოლუტურად მყარი სხეულების ან მათი ერთობლიობის მოძრაობის კანონებს. მყარი სხეულების მოძრაობის კანონების დადგენის შემდეგ შესაძლებელი ხდება მაღალი სიზუსტით რეალური სხეულების მოძრაობის კანონების შესწავლა.

თეორიული მექანიკის როლი და მნიშვნელობა განისაზღვრება იმით, რომ ის მეცნიერული საფუძველია ბევრი თანამედროვე ტექნიკური დარგისათვის. იმავდროულად, მექანიკის, როგორც საბუნებისმეტყველო მეცნიერების, კანონები და მეთოდები საშუალებას გვაძლევს შევისწავლოთ და ავხსნათ მნიშვნელოვანი ბუნებრივი მოვლენები და ამით ხელს შეუწყობს ბუნებისმეტყველების შემდგომ განვითარებას მთლიანად.

თეორიულ მექანიკაში დრო და სივრცე სხეულის მოძრაობასთან არ არის დაკავშირებული. სივრცის ყოველ წერტილში, ყოველი ათვლის სისტემის მიმართ დრო ერთი და იგივეა (აბსოლუტური დრო). სხეულის მოძრაობა განიხილება ევკლიდეს სამგანზომილებიან სივრცეში. თეორიული მექანიკა აგებულია ნიუტონის კანონებზე, რომლებიც მართებულია ათვლის ინერციულ სისტემაში. პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას ივლისხმება, რომ ნიუტონის კანონები მართებულია იმ ათვლის სისტემების მიმართაც, რომელთა აჩქარება ძალზე მცირეა.

1. მყარი სხეულის სტატიკა

შესავალი

1.1. სტატიკის ძირითადი ცნებები და აქსიომები

სანამ სტატიკის შესწავლას შევეუდგებით, საჭიროა განვმარტოთ მექანიკის ის ძირითადი ცნებები, რომლებიც შეგვხვდება თეორიული მექანიკის ამ ნაწილში.

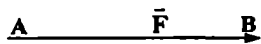
ნივთიერი წერტილი ეწოდება სხეულს, რომლის ზომები მოძრაობის ან წონასწორობის კონკრეტულ პირობებში შეიძლება უგულებელვყოთ.

მექანიკური სისტემა ეწოდება იმ ნივთიერ წერტილთა (სხეულთა) ერთობლიობას, რომლებიც ერთმანეთთან დაკავშირებულია გარკვეული სახით და ურთიერთქმედებენ.

აბსოლუტურად მყარი სხეული ეწოდება ისეთ სხეულს, რომლის ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი არანაირი ურთიერთქმედებისას არ იცვლება.

ძალა არის ნივთიერი სხეულების იმ ურთიერთქმედების ზომა, რომლის შედეგად სხეულები ერთმანეთს ანიჭებენ აჩქარებას ან დეფორმირდებიან. ძალა ვექტორული სიდიდეა. ის ხასიათდება რიცხვითი მნიშვნელობით ანუ მოდულით, მოდების წერტილით და მიმართულებით.

ვინაიდან ძალა არის ვექტორული სიდიდე, ამიტომ მას ისევე აღნიშნავენ, როგორც ვექტორს – ან $\vec{F}$ ერთი ასოთი, ან ორით $\overline{AB}$, რომელთაგან პირველი ვექტორის სათავეს აღნიშნავს, ხოლო მეორე – ბოლოს (ნახ. 1.1). ძალის მოდულს (სიდიდეს)



ნახ. 1.1

აღნიშნავენ ასე: $|\vec{F}|$ ან F , $|\overline{AB}|$ ან

AB . ორი $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ვექტორი ტოლია, თუ მათ აქვთ ერთნაირი მიმართულება და ტოლი მოდულები (სიგრძეები).

ძალის მოდულის გასაზომად მას აღარებენ ძალას, რომელიც მიღებულია ერთეულად. SI-ში ძალის ერთეულად მიღებულია ერთი ნიუტონი (1 ნ), ხოლო ტექნიკურ ერთეულთა სისტემაში – ერთი კილოგრამძალა (1 კგძ). ეს ერთეულები დაკავშირებულია თანაფარდობით:

$$1 \text{ კგძ} \approx 9,81 \text{ ნ}; \quad 1 \text{ ნ} \approx 0,102 \text{ კგძ}.$$

ძალის საზომ ერთეულად გამოიყენება უფრო დიდი ერთეულებიც, კერძოდ, მგნ (მეგანიუტონი) = 10^6 ნ, 1 კნ (კილონიუტონი) = 10^3 ნ და ა.შ.

ძალთა სისტემა ეწოდება რამდენიმე ძალის ერთობლიობას, რომლებიც მოქმედებენ მოცემულ სხეულსა ან სხეულთა სისტემაზე და აღინიშნება $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$.

ძალის ფუძე ეწოდება წრფეს, რომელზეც მდებარეობს ძალა.

ეკვივალენტურ (ტოლფასი) ძალთა ორი სისტემა ისეთ ძალთა სისტემაა, რომელთა მოქმედება ერთსა და იმავე სხეულზე ცალ-ცალკე იწვევს ერთნაირ მექანიკურ მოქმედებას.

ძალთა ორი სისტემის ტოლფასობა სიმბოლურად აღინიშნება ასე:

$$(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_k).$$

მოცემულ $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$ ძალთა სისტემის ტოლქმედი ეწოდება ისეთ $\vec{R}$ ძალას, რომლის მოქმედება სხეულსა ან ნივთიერ წერტილზე ამ ძალთა სისტემის მოქმედების ეკვივალენტურია, ე.ი. $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n) \sim \vec{R}$.

გაწონასწორებულ ძალთა სისტემა ეწოდება ისეთ ძალთა სისტემას, რომლის მოქმედებისას მყარი სხეულის მდგომარეობა უცვლელი რჩება (სხეული უძრავია ან მოძრაობს ინერციით). გაწონასწორებულ ძალთა სისტემის ტოლქმედი ნულის ტოლია.

მაწონასწორებელი ეწოდება ისეთ ძალას, რომელიც სიდიდით ტოლქმედის ტოლია და მიმართულია მისი მოქმედების ფუძის გასწვრივ საპირისპირო მხარეს.

შეჟურსულია ძალა, რომელიც მოდებულია მყარი სხეულის რომელიმე წერტილზე.

განაწილებული ეწოდება ძალას, რომელიც მოქმედებს ადებული მოცულობის, ზედაპირის ან წირის ყველა წერტილზე. განაწილებული ძალა ხასიათდება დატვირთვის q ინტენსივობით, ე.ი. ძალით, რომელიც მოქმედებს მოცულობის, ზედაპირის ფართობის ან წირის სიგრძის ერთეულზე. ჩვეულებრივ, განაწილებულ ძალას ცვლიან ტოლქმედი შეჟურსული ძალით.

შიგა ძალა ეწოდება მექანიკურ სისტემაში შემავალ სხეულებს შორის ურთიერთქმედების ძალას.

გარე ძალა ეწოდება ძალას, რომლითაც სხეული, რომელიც არ შედის მოცემულ მექანიკურ სისტემაში, მოქმედებს განსახილველი მექანიკური სისტემის სხეულზე.

სკალარული და ვექტორული სიდიდეები: თეორიული მექანიკის ამოცანების თეორიული კვლევისა და პრაქტიკულად ამოხსნისას გვხვდება ორი სახის სიდიდეები: სკალარული და ვექტორული. სკალარული ეწოდება სიდიდეს, რომელიც მთლიანად განისაზღვრება შესაბამისი განზომილების (მაგალითად, სიგრძის, ფართობის, მოცულობის, მასის, ენერგიის, ინერციის მომენტებისა და ა.შ.) მხოლოდ რიცხვითი მნიშვნელობით. ვექტორული ეწოდება ისეთ სიდიდეებს, რომელთა განსაზღვრისათვის, გარდა, მათი განზომილების რიცხვითი მნიშვნელობისა, საჭიროა აგრეთვე სივრცეში მათი მიმართულების ცოდნაც. ვექტორული სიდიდეებია ძალა, წერტილის სიჩქარე, წერტილის აჩქარება, მაგნიტური ველის დაძაბულობა და სხვ.

ვექტორებით გამოსახული ფიზიკური სიდიდეების თვისებებიდან გამომდინარე არსებობს თავისუფალი, სრიალა და არათავისუფალი (ბმული) ვექტორები. თავისუფალი ვექტორი გამოსახავს ისეთ სიდიდეს, რომელიც შეიძლება გადავიტანოთ სივრცეში ნებისმიერ ადგილზე ისე, რომ არ დაკარგოს თავდაპირველი საწყისი ფიზიკური თვისება (ე.ი. ამ ვექტორის მოდების წერტილი ნებისმიერია). სხეულის რომელიმე A წერტილზე მოდებული სრიალა ვექტორი შეიძლება მოვდოთ მისი მოქმედების ფუძის გასწვრივ ნებისმიერ B წერტილზე (ამით სხეულზე მისი მოქმედების ეფექტი არ შეიცვლება). მაგალითად, აბსოლუტურად მყარ სხეულზე მოდებული ძალის გამომსახველი ვექტორი სრიალა ვექტორია. არათავისუფალი (ანუ ბმული) ვექტორი, გამოსახავს ფიზიკურ სიდიდეს, რომელიც შეიძლება გადავიტანოთ სივრცის მხოლოდ ერთ წერტილში; მოძრავი სხეულის ფიქსირებული წერტილის სიჩქარის გამომსახველი ვექტორი ყოველთვის მიბმულია მხოლოდ ამ წერტილზე.

12. სტატიკის ძირითადი ამოცანები

აბსოლუტურად მყარი სხეულის სტატიკის შინაარსიდან გამომდინარე, განიხილება ორი ძირითადი ამოცანა:

- 1) ძალთა სისტემის დაყვანა უმარტივეს სახემდე, ე.ი. ძალთა მოცემული სისტემის ეკვივალენტური და უფრო მარტივი სისტემით შეცვლა;
- 2) ძალთა სისტემის წონასწორობის პირობების დადგენა, ე.ი. როგორ პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს წონასწორობის ობიექტზე მოდებული ძალთა სისტემა, რომ ეს ძალთა სისტემა გაწონასწორებული იყოს.

პირველი ძირითადი ამოცანა მნიშვნელოვანია არა მარტო სტატიკაში, არამედ დინამიკაშიც.

მეორე ამოცანა ხშირად განიხილება იმ შემთხვევაში, როდესაც წინასწარაა ცნობილი, რომ სხეული წონასწორობაშია, რომელიც ხორციელდება მასზე დადებულ ბმათა საშუალებით. ამ შემთხვევაში წონასწორობის პირობები ამყარებს კავშირს წონასწორობის ობიექტზე მოდებულ აქტიურ და რეაქციის ძალებს შორის.

შენიშვნა: სტატიკის ამოცანების და, ზოგადად, თეორიული მექანიკის ამოცანების ამოხსნის პროცესში წონასწორობის ან მოძრაობის განსახილველ ობიექტზე მოქმედი ძალთა სისტემა იყოფა შემდეგ ძირითად ტიპებად: 1. ერთ წერტილში თავმოყრილი ძალთა სისტემა – ა) ყველა ძალა ერთ სიბრტყეზე მდებარეობს – ბრტყელ თავმოყრილ ძალთა სისტემა; ბ) ყველა ძალა ერთ სიბრტყეზე არ მდებარეობს – სივრცით თავმოყრილ ძალთა სისტემა; 2. პარალელური ძალთა სისტემა – ა) ყველა ძალა ერთ სიბრტყეზე მდებარეობს – ბრტყელ პარალელურ ძალთა სისტემა; ბ) ყველა ძალა ერთ სიბრტყეზე არ მდებარეობს – სივრცითი პარალელური ძალთა სისტემა; 3. ძალთა სისტემა, რომელთა ფუძეები ერთ წერტილში არ იკვეთება და ყველა ძალა ერთმანეთის პარალელური არ არის – ა) ყველა ძალა ერთ სიბრტყეზე მდებარეობს – ნებისმიერი ბრტყელი ძალთა სისტემა; ბ) ყველა ძალა ერთ სიბრტყეზე არ მდებარეობს – ნებისმიერი სივრცითი ძალთა სისტემა.

13. სტატიკის აქსიომები

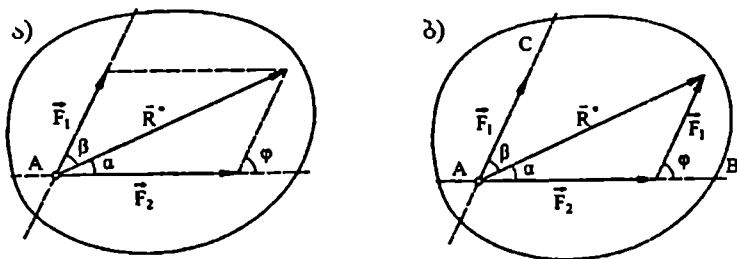
1. აქსიომა ორი ძალის წონასწორობის შესახებ. აბსოლუტურად მყარ სხეულზე მოდებული ორი ძალა გაწონასწორებულია (ნულის ეკვივალენტურია), თუ ისინი მოდებულია ტოლია და ერთი წრფის გასწვრივ ურთიერთქმედებენ ურთიერთსაპირისპირო მიმართულებით.

2. აქსიომა დამატების (უკუგდების) იმ ძალთა სისტემის შესახებ, რომელიც ნულის ეკვივალენტურია. აბსოლუტურად მყარ სხეულს მდგომარეობის შეუცვლელად შეიძლება მოვდოთ ან უკუეაგდოთ გაწონასწორებული (ნულის ტოლფასი) ძალთა სისტემა.

შედეგი. მყარი სხეულის უძრაობის ან მოძრაობის მდგომარეობის შეუცვლელად ძალა შეიძლება გადავიტანოთ მისი მოქმედების ფუძის გასწვრივ, ე.ი. აბსოლუტურად მყარ სხეულზე მოდებული ძალა სრიალა ექვტორია.

3. აქსიომა ძალთა პარალელოგრამის შესახებ. მდგომარეობის შეუცვლელად მყარი სხეულის ერთ წერტილში მოდებული ორი ძალა შეიძლება შეეცვალოთ ტოლქმედით, რომელიც მათი გეომეტრიული ჯამის ტოლია და მოდებულია იმავე წერტილში (ნახ. 12, ა). თუ ტოლქმედს $\vec{R}^*$ -ით აღვნიშნავთ, გვექნება:

$$\vec{R}^* = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (1.1)$$



ნახ. 12

ტოლქმედის მოდული ტოლია

$$R^* = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cos \varphi}. \quad (1.2)$$

შენიშვნა: პარალელოგრამის ან ძალთა სამკუთხედის მეშვეობით შეიძლება ამოვხსნათ შებრუნებული ამოცანა -

დავშალოთ $\vec{R}^*$ ძალა $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ შემდგენ ძალებად, რომლებიც მოდებულია იმავე A წერტილში და მიმართულია ცნობილი AB და AC ფუძეების გასწვრივ, ამასთან $\vec{R}^*$ ტოლქმედთან ადგენენ α და β კუთხეებს (ნახ. 12 ბ).

სინუსების თეორემის გამოყენებით გვექნება:

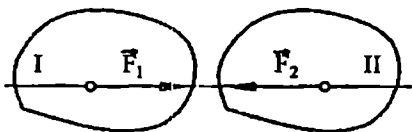
$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{R^*}{\sin(180 - \varphi)},$$

აბ

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{R^*}{\sin(\alpha + \beta)}. \quad (13)$$

4. აქსიომა მოქმედი და უქმედი ძალების ტოლობის შესახებ. ორი სხეულის ურთიერთქმედების ძალა მოდულით ტოლია და ერთი წრფის გასწვრივ ურთიერთსაპირისპიროდაა მიმართული (ნახ. 13).

5. აქსიომა გამყარების შესახებ. დეფორმირებადი სხეულის



ნახ. 13

წონასაწორობა არ დაირღვევა, თუ მას აბსოლუტურად მყარ სხეულად ჩავთვლით.

6. აქსიომა ბმის შესახებ (ბმისგან გათავისუფლების პრინციპი - რეაქციის პრინციპი).

ყოველი არათავისუფალი სხეული შეიძლება გავხადოთ თავისუფალი, თუ ბმას უქუვადგებთ და შევცვლით რეაქციის ძალით, რომელიც იმავე მექანიკურ მოქმედებას ახდენს სხეულზე, რასაც აღნიშნული ბმა.

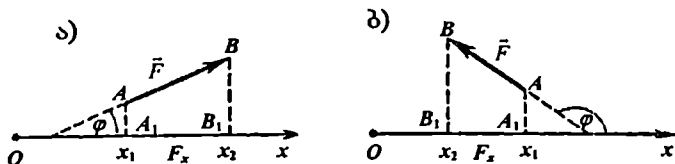
სხეულს ეწოდება თავისუფალი, თუ მას სივრცეში შეუძლია ნებისმიერი მიმართულებით და ნებისმიერ ადგილზე გადაადგილება. არათავისუფალია სხეული, თუ მისი გადაადგილება შეზღუდულია სხვა სხეულებით. სხეულს, რომელიც ზღუდავს მოცემული სხეულის გადაადგილებას, ბმა ეწოდება. სხეულისა და ბმის შეხების წერტილში წარმოიქმნება ურთიერთქმედების ძალა. ძალას, რომლითაც ბმა მოქმედებს სხეულზე, რეაქციის ძალა ეწოდება.

14. ძალის გეგმილი ღერძსა და სიბრტყეზე. ძალის ანალიზური გამოსახვა

უთქვამთ, გვაქვს რაიმე Ox ღერძი და სივრცეში მდებარე ნებისმიერ $\vec{AB} = \vec{F}$ ძალა (ნახ. 14). აღვნიშნოთ A და B წერტილების გეგმილები Ox ღერძზე A_1 და B_1 -ით. უთქვამთ, A_1 -ის კოორდინატია x_1 , ხოლო B_1 -ისა x_2 . $\vec{F}$ ძალის საწყისი და ბოლო წერტილების Ox ღერძზე გეგმილების $x_2 - x_1$ სხვაობას $\vec{F}$ ვექტორის Ox ღერძზე გეგმილი ეწოდება. Ox ღერძზე $\vec{F}$ ძალის გეგმილი F_x სიმბოლოთი აღინიშნება. ადვილია იმის ჩვენება, რომ, თუ $\vec{F}$ ძალასა და Ox ღერძს შორის კუთხეა φ , მაშინ

$$F_x = |\vec{F}| \cdot \cos \varphi = x_2 - x_1. \quad (14)$$

განსაზღვრება. $\vec{F}$ ძალის გეგმილი Ox ღერძზე ეწოდება $\vec{F}$ ძალის მოდულისა და ამ ძალის ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი φ კუთხის კოსინუსის ნამრავლს. თუ $\vec{F}$ ძალა Ox ღერძთან ადგენს მახვილ კუთხეს ($0 \leq \varphi < 90^\circ$), მაშინ $x_2 > x_1$, ე.ი. გეგმილი $F_x > 0$ (ნახ. 14, ა); თუ Ox ღერძსა და $\vec{F}$ ძალას შორის კუთხე ბლაგვია ($90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$), მაშინ $x_2 < x_1$ და გეგმილი $F_x < 0$ (ნახ. 14, ბ). ბოლოს, თუ $\varphi = 90^\circ$ ან $\varphi = 270^\circ$, მაშინ $F_x = 0$. თუ $\varphi = 0$, მაშინ $F_x = |\vec{F}|$, თუ $\varphi = 180^\circ$, მაშინ $F_x = -|\vec{F}|$.



ნახ. 14

თეორემა რაიმე ღერძზე ვექტორთა ჯამის გეგმილთა შესახებ.

ვექტორთა გეომეტრიული ჯამის გეგმილი ნებისმიერ ღერძზე ტოლია შესაბამის ვექტორთა იმავე ღერძზე გეგმილების ალგებრული ჯამისა.

მართლაც, ვთქვათ $\overline{AB} = \vec{F}_1$, $\overline{BC} = \vec{F}_2$ და $\overline{AC} = \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (ნახ. 15).

Ox ღერძზე A , B და C წერტილთა გეგმილებია A_1 , B_1 და C_1 . აღვნიშნოთ მათი კოორდინატები x_1 , x_2 , x_3 -ით, მაშინ $F_{1x} = x_2 - x_1$; $F_{2x} = x_3 - x_2$; $F_x = x_3 - x_1$. მაგრამ $x_3 - x_1 = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2)$, ე.ი.

$$F_x = F_{1x} + F_{2x}. \quad (1.5)$$

(1.5) ტოლობას ადგილი ექნება იმ შემთხვევაშიც, როცა შესაკრებ ვექტორთა რაოდენობა ნებისმიერია.

განვიხილოთ დეკარტის მართკუთხა $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემაში რაიმე $\overline{AB} = \vec{F}$ ძალა (ნახ. 1.6). Oxy სიბრტყეზე $\vec{F}$ ძალის

გეგმილი ეწოდება $\vec{F}_{xy}$ ვექტორს, რომლის საწყისი და ბოლო

ემთხვევა $\vec{F}$ ძალის საწყისი A და ბოლო B წერტილების გეგმილებს Oxy სიბრტყეზე, ე.ი. $\vec{F}_{xy} = \overline{OB'}$

თუ $\vec{F}$ ძალასა და მის $\vec{F}_{xy}$ გეგმილს შორის კუთხეა θ , მაშინ ამ გეგმილის მოდული განისაზღვრება ფორმულით:

$$F_{xy} = |\vec{F}| \cos \theta. \quad (1.6)$$

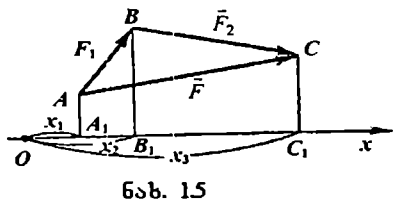
თუ ვიცით $\vec{F}_{xy}$ ვექტორის მოდული, მაშინ ადვილად განვსაზღვრავთ $\vec{F}$ ძალის გეგმილებს კოორდინატთა ღერძებზე:

$$F_x = F_{xy} \cos \varphi = F \cos \theta \cdot \cos \varphi,$$

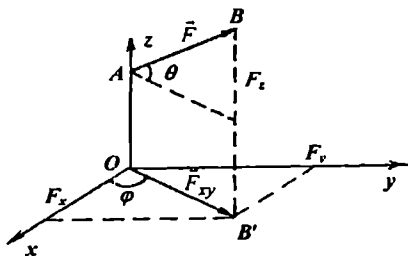
$$F_y = F_{xy} \sin \varphi = F \cos \theta \cdot \sin \varphi, \quad (1.7)$$

$$F_z = F \sin \theta,$$

სადაც φ არის $\vec{F}_{xy}$ ვექტორსა და Ox ღერძის დადებით მიმართულებას შორის კუთხე.

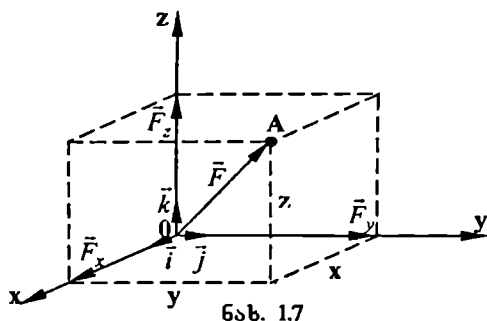


ნახ. 15



ნახ. 1.6

განვიხილოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში.



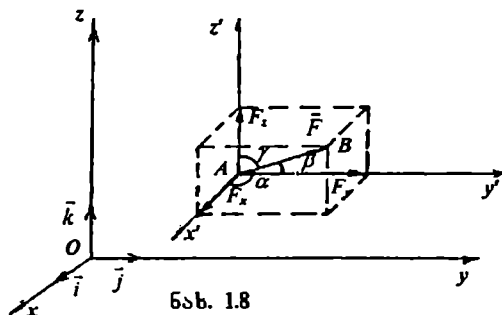
ნახ. 1.7

ისე, როგორც ნებისმიერი ვექტორი, $\vec{F}$ ძალაც შეიძლება გამოისახოს მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე მისი გეგმილებისა და ასევე მოდების წერტილის კოორდინატების საშუალებით. თუ Ox , Oy და Oz ღერძების ერთეულოვან ვექტორებს შესაბამისად $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ვექტორებით აღვნიშნავთ (ნახ. 1.7), მაშინ, გვექნება:

$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$, სადაც $\vec{F}_x = F_x \cdot \vec{i}$; $\vec{F}_y = F_y \cdot \vec{j}$; $\vec{F}_z = F_z \cdot \vec{k}$.

ამიტომ $\vec{F}$ ძალა გამოისახება მოდების O წერტილით და ტოლობით:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}. \quad (1.8)$$



ნახ. 1.8

(1.8) გამოსახავს $\vec{F}$ ძალის დაშლას დეკარტის მართკუთხა ბაზისში ანუ, როგორც ამბობენ, ძალის დაშლას მდგენელებად კოორდინატთა ღერძებში.

ახლა განვიხილოთ სივრცის ნებისმიერ A წერტილზე მოდებული $\overline{AB} = \vec{F}$ ძალა (ნახ. 1.8). ავაგოთ $Ax'y'z'$ კოორდინატთა სისტემა, რომლის ღერძები შესაბამისად პარალელურია $Oxyz$ სისტემის ღერძებისა. $\vec{F}$ ძალის მიერ Oxy სისტემის

ღერძების ღადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხეები აღვნიშნოთ α , β და γ -ით. მაშინ $\vec{F}$ ძალის გეგმილები ამ ღერძებზე განისაზღვრება ფორმულებით:

$$F_x = |\vec{F}| \cos \alpha; F_y = |\vec{F}| \cos \beta; F_z = |\vec{F}| \cos \gamma \quad (1.9)$$

$\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$, $\vec{F}_z$ ვექტორებს, რომელთა მოდულები განისაზღვრება (1.9) ფორმულებით, $\vec{F}$ ძალის მდგენელები ეწოდება, ე.ი. $\vec{F} = \vec{F}\{F_x, F_y, F_z\}$.

გეგმილების საშუალებით სრულად განისაზღვრება ძალის სიდიდე და მიმართულება. როგორც ანალიზური გეომეტრიიდან ვიცით, $\vec{F}$ ვექტორის სიგრძე ან, რაც იგივეა, $\vec{F}$ ძალის მოდული, განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (1.10)$$

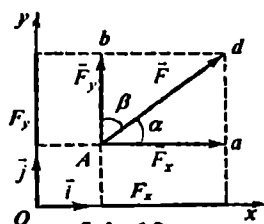
(1.9) ტოლობებიდან ვიპოვიტ მიმართულების კოსინუსებს, ხოლო შემდეგ α , β და γ კუთხეებსაც. გვაქვს:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{|\vec{F}|}; \cos \beta = \frac{F_y}{|\vec{F}|}; \cos \gamma = \frac{F_z}{|\vec{F}|}. \quad (1.11)$$

თუ $\vec{F}$ ძალა Oxy სიბრტყეზე მდებარეობს (ნახ. 1.9), მაშინ $\vec{F}$ ძალის სიდიდისა და მიმართულების განსაზღვრავად (1.10) და (1.11) ფორმულების ნაცვლად გვექნება:

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \quad (1.12)$$

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{|\vec{F}|}; \cos \beta = \frac{F_y}{|\vec{F}|}. \quad (1.13)$$



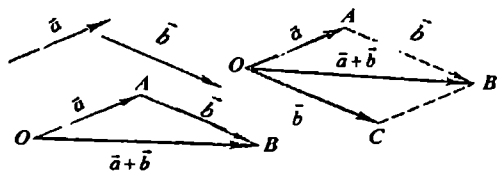
ნახ. 1.9

1.5. წრფივი ოპერაციები ვექტორებზე

1. ვექტორების შეკრება. ვთქვათ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ნებისმიერი ვექტორებია. ავიღოთ O წერტილი და ავაგოთ $\vec{OA} = \vec{a}$ ვექტორი; შემდეგ A წერტილიდან გადავდოთ $\vec{AB} = \vec{b}$ ვექტორი. პირველი შესაკრები ვექტორის საწყისი შევაერთოთ მეორე

შესაკრები ვექტორის ბოლოსთან, მივიღებთ $\overline{OB}$ ვექტორს, რომელსაც ამ ვექტორების გეომეტრიული ჯამი ეწოდება (ნახ. 1.10), ე.ი. $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = \vec{a} + \vec{b}$.

ვექტორების ეს ჯამი შეიძლება მივიღოთ სხვა ხერხითაც. O წერტილიდან გადავდოთ $\overline{OA} = \vec{a}$ ვექტორი და $\overline{OB} = \vec{b}$ ვექტორი. ავაგოთ ამ ვექტორებზე $OACB$ პარალელოგრამი.



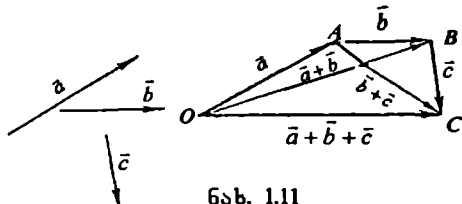
ნახ. 1.10

მაშინ O წერტილიდან გადებული OB დიაგონალი იქნება $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების გეომეტრიული ჯამი: $\overline{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ (ნახ. 1.10).

ორი ვექტორის შეკრების წესი შეიძლება განვაზოგადოთ შესაკრებ ვექტორთა ნებისმიერი რაოდენობისათვის.

ვთქვათ, მოცემულია სამი - $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორი. ჯერ

ავაგოთ $\vec{a} + \vec{b}$ ვექტორი, ხოლო შემდეგ ამ ჯამს მიუმატოთ $\vec{c}$ ვექტორი, მივიღებთ $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (ნახ. 1.11). ნახაზიდან ჩანს, რომ



ნახ. 1.11

$\overline{OA} = \vec{a}$, $\overline{AB} = \vec{b}$, $\overline{OB} = \vec{a} + \vec{b}$,

$\overline{BC} = \vec{c}$ და $\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BC} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

1.11 ნახაზის მიხედვით $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორების ჯამი შეიძლება ვიპოვოთ შემდეგი ხერხითაც:

ნებისმიერი O წერტილიდან გადავდოთ $\vec{a}$ ვექტორი. მისი ბოლო A წერტილიდან გადავდოთ $\vec{b}$ ვექტორი, ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის B ბოლოდან - $\vec{c}$ ვექტორი. პირველის საწყისი O წერტილი შევაერთოთ ბოლო $\vec{c}$ ვექტორის C ბოლოსთან. მივიღებთ $\overline{OC}$ ვექტორს, რომელიც ამ სამი ვექტორის გეომეტრიულ ჯამია, ე.ი. $\overline{OC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. მაგალითად, თუ გვაქვს $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ და $\vec{e}$ ვექტორები, მაშინ მათი $\overline{AF}$ გეომეტრიული ჯამი $ABCDEF$ ტეხილის ჩამკეტი იქნება (ნახ. 1.12) (თუ ეს ვექტო-

რები ძალებს წარმოადგენენ, მაშინ $ABCDEF$ -ს ეწოდება ძალთა მრავალკუთხედი). მაშასადამე,

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$$

ანუ

$$\vec{f} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}. \quad (1.14)$$

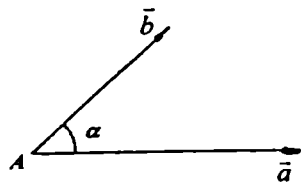
როგორც ანალიზური გეომეტრიიდან ვიცით, ტეხილის ჩამკეტი $\vec{f}$ ვექტორის კოორდინატები f_x, f_y, f_z ტოლია შესაკრები ვექტორების კოორდინატების ჯამისა. მაშასადამე, (1.14) ვექტორული ტოლობა გვაძლევს სამ სკალარულ ტოლობას:

$$f_x = a_x + b_x + c_x + d_x + e_x,$$

$$f_y = a_y + b_y + c_y + d_y + e_y, \quad (1.15)$$

$$f_z = a_z + b_z + c_z + d_z + e_z.$$

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება ამ ვექტორთა სიგრძეებისა და მათ შორის მდებარე φ კუთხის კოსინუსის ნამრავლს და აღინიშნება $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ან $(\vec{a}, \vec{b})$ სიმბოლოთი (ნახ. 1.13). მაშასადამე, ამ განსაზღვრების მიხედვით გვექნება:



ნახ. 1.13

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi. \quad (1.16)$$

სკალარულ ნამრავლს აქვს

შემდეგი ძირითადი თვისებები:

$$1. \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}; \quad 2. (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c};$$

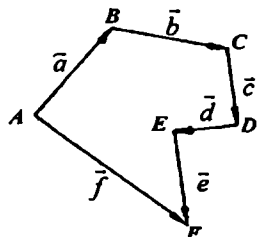
$$3. k\vec{a} \cdot \vec{b} = k \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}; \quad 4. m\vec{a} \cdot n\vec{b} = mn\vec{a} \cdot \vec{b};$$

$$5. \vec{a} \cdot \vec{b} > 0, \text{ თუ } 0 \leq \varphi < 90^\circ; \quad \vec{a} \cdot \vec{b} < 0, \text{ თუ } 90^\circ < \varphi \leq 180^\circ; \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \text{ თუ } \varphi = 90^\circ, \text{ ე.ი. როცა } \vec{a} \perp \vec{b}.$$

6. $Oxyz$ მართკუთხა კოორდინატთა ღერძების $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ მგეზავებისათვის მართებულია ტოლობები:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1; \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.$$

$$\text{ცხადია, } \vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a^2$$



ნახ. 1.12

ეთქვათ მოცემულია ორი - $\vec{a} = \vec{a}\{x_1, y_1, z_1\}$ და $\vec{b} = \vec{b}\{x_2, y_2, z_2\}$ ვექტორი. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი უდრის მათი ერთსახელა კოორდინატების ნამრავლთა ალგებრულ ჯამს:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2. \quad (1.17)$$

(1.17) არის ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის ანალიზური გამოსახვა.

თუ $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ე.ი. $\vec{a} \perp \vec{b}$ მაშინ ამ ვექტორების მართობულობის პირობა კოორდინატებში ჩაიწერება ასე:

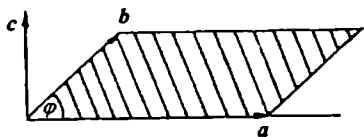
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0. \quad (1.18)$$

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის φ კუთხე გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (1.19)$$

ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი. $\vec{a}$ ვექტორის ვექტორული ნამრავლი $\vec{b}$ ვექტორზე ეწოდება ისეთ $\vec{c}$ ვექტორს, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი სამი პირობით (აღინიშნება $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ (ან $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$) (ნახ. 1.14)):

1. მისი მოდული $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, სადაც $\varphi = (\vec{a} \wedge \vec{b})$;
2. $\vec{c}$ ვექტორი მართობია $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებზე გამავალი სიბრტყისა;
3. $\vec{c}$ ვექტორი მიმართულია იმ მხარეს, რომ მის გასწვრივ მდგომი დამკვირვებლისათვის $\vec{a}$ -ს უმცირესი კუთხით $\vec{b}$ ვექტორისაკენ მობრუნება ხდებოდეს საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით (ასეთი ბრუნვა მიღებულია დადებით მიმართულებად).



ნახ. 1.14

ვექტორულ ნამრავლს აქვს შემდეგი ძირითადი თვისებები:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
2. $m(\vec{a} \times \vec{b}) = (m\vec{a}) \times \vec{b}$, აქ m - სკალარული სიდიდეა;
3. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$;
4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;
5. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, როცა $\vec{a} \parallel \vec{b}$;
6. $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.

ცხადია, კოორდინატთა მართკუთხა ღერძების $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ მგეზავები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0; \quad \vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k};$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}; \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}$$

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ორი $\vec{a} = \vec{a}\{x_1, y_1, z_1\}$ და $\vec{b} = \vec{b}\{x_2, y_2, z_2\}$ ვექტორი, მაშინ მათი ვექტორული ნამრავლი გამოითვლება ფორმულით:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k}. \quad (1.19)$$

რადგან $\vec{c} \cdot \vec{i} = c_x$; $\vec{c} \cdot \vec{j} = c_y$; $\vec{c} \cdot \vec{k} = c_z$, ამიტომ $\vec{c}\{c_x, c_y, c_z\}$ ვექტორის კოორდინატები ანუ მისი გეგმილები $Oxyz$ კოორდინატთა ღერძებზე გამოითვლება ფორმულებით:

$$c_x = y_1 z_2 - z_1 y_2,$$

$$c_y = z_1 x_2 - x_1 z_2, \quad (1.20)$$

$$c_z = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორის ვექტორული ნამრავლის მოდული შეიძლება გამოვთვალოთ ასეც:

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} \quad (1.21)$$

თუ $\vec{a} \parallel \vec{b}$, მაშინ ამ ვექტორების პარალელურობის პირობას ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (1.22)$$

1.6. არათავისუფალი მყარი სხეული. ბმები. ბმის რეაქციები და მათი ძირითადი ტიპები

სტატიკის ამოცანებში, რომლებიც ეხება მყარი სხეულის წონასწორობას, განსახილველი სხეული თითქმის არასდროს არ არის თავისუფალი.

გეომეტრიული ან ფიზიკური ხასიათის პირობებს, რომლებიც ზღუდავენ განსახილველი სხეულის მოძრაობის თავისუფლებას, მექანიკაში ბმებს უწოდებენ. მაგალითად, ჭერზე ძაფით დაკიდებული ბურთულისათვის ბმას ქმნის ძაფი, მაგიდაზე დადებული წიგნისათვის – მაგიდა, ანჯამებით დაკიდული კარისათვის – ანჯამები და სხვ.

ამრიგად, სტატისტიკაში ბმები ხორციელდება იმ მყარი ან დრეკადი სხეულების დახმარებით, რომლებიც შეერთებულია მოცემულ მყარ სხეულთან ან ეხება მას. ჩვეულებრივ, ამოცანა მდგომარეობს იმ ძალების განსაზღვრაში, რომლითაც ურთიერთქმედებენ მოცემული მყარი სხეულები და ამ სხეულზე მოდებული ბმების განმახორციელებელი სხეული.

ძალა, რომლითაც ბმა მოქმედებს მოცემულ სხეულზე რაიმე მიმართულებით ამ მყარი სხეულის გადაადგილების საწინააღმდეგოდ, ეწოდება ბმის რეაქციის ძალა.

არათავისუფალ მყარ სხეულზე მოქმედი ყველა ძალა შეიძლება დავყოთ მოცემულ (უშუალოდ მოქმედ) ანუ აქტიურ ძალებად და ბმათა რეაქციის ანუ პასიურ ძალებად.

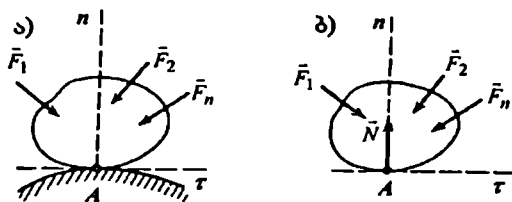
მოცემული ძალები ასახავს სხეულზე სხვა სხეულების მოქმედებას, რაც გამოიწვევს ან ცდილობს გამოიწვიოს მათი კინემატიკური მდგომარეობის შეცვლა (მოძრაობა).

მექანიკის ერთ-ერთი ძირითადი დებულებაა არათავისუფალი სხეულის ბმებისაგან გათავისუფლების პრინციპი, რომლის თანახმად არათავისუფალი სხეული შეიძლება განვიხილოთ, როგორც თავისუფალი, რომელზეც, გარდა მოცემული ძალებისა, მოქმედებს ბმის რეაქციები.

თეორიულ მექანიკაში ნივთიერი წერტილის ან მყარი სხეულის თითქმის ყველა თეორემის ან საბოლოო შედეგის ფორმულირებისას საჭირო ხდება ბმებისაგან მათი განთავისუფლება, ე.ი. როცა ბმათა შეცვლა ხდება მათი რეაქციის ძალებით. ამიტომ ძალიან მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ ბმებისაგან განთავისუფლების შედეგად რეაქციის ძალებით მათი შეცვლის მართებული წესი. ეს სტატიკის შესწავლისას ერთ-ერთი ძირითადი ამოცანაა, რომელსაც მნიშვნელოვანი ყურადღება უნდა მიექცეოდეს.

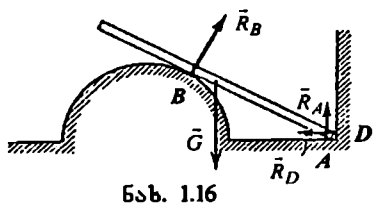
ქვემოთ მოვიყვანთ ბმის ძირითადი ტიპებისა და რეაქციის ძალებით მათი შეცვლის მაგალითებს:

1. სხეული ეყრდნობა აბსოლუტურად მყარ უძრავ გლუვ ზედაპირს A წერტილში. ასეთი ზედაპირის $\bar{N}$ რეაქცია მიმართულია მოცემული სხეულისა და საყრდენი ზედაპირის შეხების A წერტილში გამავალი საერთო ნორმალის მიმართულებით (ნახ. 1.15, ა), იმის მიუხედავად, როგორი ძალები მოქმედებს განსახილველ სხეულზე (ნახ. 1.15, ბ). რეაქციის $\bar{N}$ ძალა მიმართულია იმ მიმართულების საწინააღმდეგოდ, რომლითაც ბმა ზღუდავს სხეულის გადაადგილებას. სხეულის წონასწორობის შემთხვევაში რეაქციის ძალების რიცხვითი მნიშვნელობა განისაზღვრება სხეულზე მოდებული ძალებით, რომლებსაც, ბმის რეაქციის ძალებისაგან განსხვავებით, აქტიურ ძალებს უწოდებენ.



ნახ. 1.15

2. სხეული ეყრდნობა უძრავ წერტილს ან უძრავ ხაზს. თუ ხახუნს უგულებელვყოფთ, მაშინ ამ შემთხვევაში ბმის $\bar{R}_B$ რეაქცია სხეულზე მოდებულია მის საყრდენთან შეხების წერტილში და მიმართულია ამ წერტილში სხეულის ზედაპირის ნორმალის მიმართულებით (ნახ. 1.16).



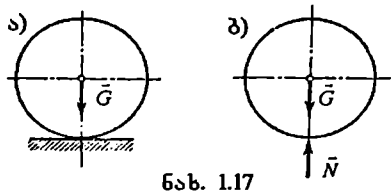
ნახ. 1.16

ვთქვათ, G წონის ძელი B წერტილში ეყრდნობა გლუვ ზედაპირს, ხოლო A და D წერტილებში – გლუვ ჰორიზონტალურ და ვერტიკალურ სიბრტყეებს (ნახ. 1.16). მაშინ ამ სიბრტყეთა $\bar{R}_D$ და $\bar{R}_A$ რეაქციებს ექნება 1.16 ნახაზზე ნაჩვენები მიმართულებები (ე.ი. ამ სიბრტყეების მართობული მიმართულება), ხოლო ბმის $\bar{R}_B$ რეაქცია სხეულზე მოდებულია საყრდენთან მისი შეხების B წერტილში და აქვს ამ

წერტილში სხეულის ზედაპირის ნორმალის მიმართულება (AB ძელის მართობულად).

მაგალითად, ვთქვათ, ჰორიზონტალურ უძრავ გლუვ ზედაპირზე წონასწორობაშია ბირთვი (ნახ. 1.17, ა). სიბრტყე ზღუდავს ბირთვის გადაადგილებას სიბრტყის ნორმალის გასწვრივ და ის არის ბირთვისათვის ბმა.

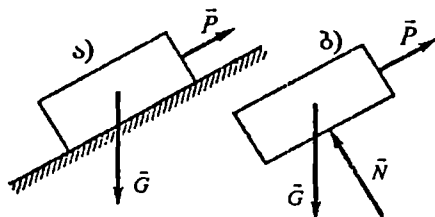
თუ წარმოდგენაში ბირთვს გავათავისუფლებთ ბმისაგან (ნახ. 1.17, ბ), მაშინ წონასწორობის მდგომარეობაში მის შესანარჩუნებლად სიბრტყესთან შეხების წერტილში, უნდა მოედოთ რეაქციის $\vec{N}$ ძალა, რომლის მოდული ბირთვის $\vec{G}$ წონის ტოლია და მიმართულია მის საწინააღმდეგოდ. მაშინ ბმისგან განთავისუფლებული ბირთვი



ნახ. 1.17

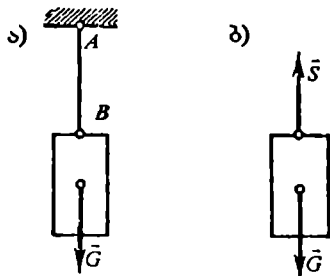
იქნება თავისუფალი სხეული, რომელზედაც მოქმედებს აქტიური $\vec{G}$ ძალა და ზედაპირის რეაქციის $\vec{N}$ ძალა (ნახ. 1.17, ბ).

ვთქვათ, გლუვ სიბრტყეზე მოთავსებულ სხეულზე მოქმედებს $\vec{G}$ და $\vec{P}$ ძალები. სიბრტყე არ ეწინააღმდეგება სხეულის გადაადგილებას სიბრტყის გასწვრივ (ნახ. 1.18, ა), მაგრამ ის ზღუდავს სხეულის გადაადგილებას სიბრტყის მართობული მიმართულებით. ამიტომ სიბრტყის მოქმედება სხეულზე გამოისახება ნორმალური $\vec{N}$ რეაქციით (ნახ. 1.18, ბ).



ნახ. 1.18

3. დრეკადი ბმები. ბმა ხორციელდება დრეკადი უჭიმარი ძაფით (ჯაჭვით ან ბაგირით), რომელსაც წრფის ფორმა აქვს (ნახ. 1.19, ა). ასეთი ბმის რეაქცია სხეულზე მოდებულია ძაფის დამაგრების B წერტილში და მიმართულია ძაფის გასწვრივ B -დან A -კენ (ნახ. 1.19, ბ). ძაფის $\vec{S}$ რეაქციის (დაჭიმუ-

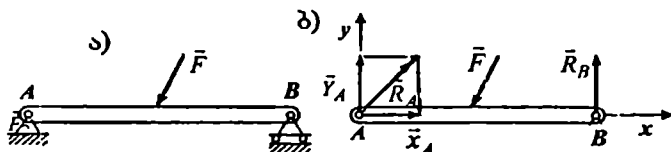


ნახ. 1.19

ლობა) მოდული ტვირთის $\vec{G}$ წონის ტოლია. ამასთანავე უნდა აღვნიშნოთ, რომ ძაფი შეიძლება მხოლოდ გაჭიმული იყოს. ამიტომ ძაფის რეაქცია შეიძლება მიმართული იყოს მხოლოდ მოცემულ სხეულზე ძაფის დამაგრების წერტილიდან მისი მეორე დამაგრებული ბოლოსაკენ.

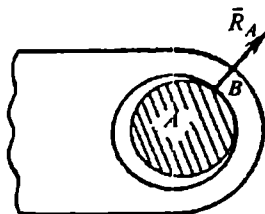
4. ეთქვას, გვაქვს AB ძელი, რომელიც წონასწორობაში იმყოფება $\vec{F}$ ძალის მოქმედებით და ერთ ბოლოში ჩამაგრებულია ცილინდრული A სახსრით, ხოლო მეორე B ბოლოთი უძრავ გლუვ ზედაპირს ეყრდნობა საგორავეებით, რომლითაც შეუძლია ამ სიბრტყეზე გადაადგილება (ნახ. 120, ა).

ასეთი B საყრდენის (ბმის) $\vec{R}_B$ რეაქცია მიმართულია იმ სიბრტყის მართობულად, რომლის გასწვრივაც შეუძლია გადაადგილება საგორავეებს, ანუ რომელ სიბრტყეზეც ძევს საგორავეები (ნახ. 120, ბ).



ნახ. 120

A საყრდენი (ბმა) განხორციელებულია ცილინდრული სახსრით. ცილინდრული ეწოდება ისეთ მოწყობილობას, რომლითაც ორი სხეული ისეა შეერთებული ერთმანეთთან, რომ აქვს საშუალება, ერთმანეთის მიმართ შეასრულონ გარკვეული გადაადგილება.



ნახ. 121

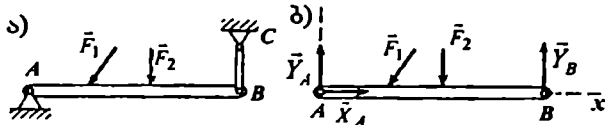
კერძოდ, AB ძელს შეუძლია მობრუნება ნახაზის სიბრტყის მართობული A ღერძის გარშემო და გადაადგილება ამ ღერძის გასწვრივ (ნახ. 121). ცილინდრული სახსრის $\vec{R}_A$ რეაქციის ძალის მიმართულება გაურკვეველია.

ვიცით, რომ ის მოდებულია A სახსარზე და მდებარეობს A ღერძის (ცილინდრის მსახველების) მართობ სიბრტყეში, მაგრამ სახსრის რეაქციის მიმართულება ამ სიბრტყეში წინასწარ უცნობია. ამიტომ მას ვშლით ორ — $\vec{X}_A$ და $\vec{Y}_A$ მდგენელებად

(ნახ. 1.20, ბ). ამოცანის ამოხსნის პროცესში განსაზღვრავენ თითოეულ მათგანს, ხოლო შემდეგ ამ მდგენელებით პოულობენ $\bar{R}_A$ რეაქციის მოდულსა და მიმართულებას ფორმულებით:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}; \quad \cos(\bar{R}_A, \hat{x}) = \frac{X_A}{R_A}; \quad \cos(\bar{R}_A, \hat{y}) = \frac{Y_A}{R_A}.$$

5. 1.22 ა ნახაზზე ნაჩვენებია $\bar{F}_1$ და $\bar{F}_2$ ძალების მოქმედებით წონასწორობის მდგომარეობაში მყოფი AB ძელი. აქ A წერტილში (საყრდენი) ბმა განხორციელებულია უძრავი ცილინდრული სახსრით. როგორც წინა შემთხვევაში, სახსრის $\bar{R}_A$ რეაქციის მოდული და მიმართულება უცნობია, ამიტომ მას დაეშლით $\bar{X}_A$ და $\bar{Y}_A$ ორ მდგენელად (ნახ. 1.22, ბ). B -ში ბმა განხორციელებულია უწონი მყარი BC ღეროს საშუალებით. ღერო B ბოლოთი სახსრით არის შეერთებული AB ძელთან, რომლის წონასწორობასაც განვიხილავთ, მეორე C ბოლოც ასევე სახსრითაა შეერთებული სხვა სხეულთან, მაგალითად, დგართან, კედელთან ან იატაკთან. ამასთანავე, არავითარი ცნობილი ძალა ამ ღეროზე არ არის მოდებული (მის წონას უგულებელყოფთ).



ნახ. 1.22

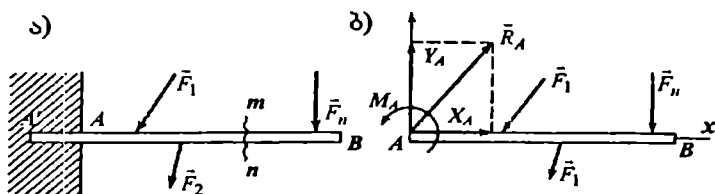
BC ღეროს $\bar{Y}_B$ რეაქცია, რომელიც მოდებულია მოცემულ AB ძელზე (სხეულზე), მიმართულია ღეროს გასწვრივ, ამასთანავე, თვით ღერომ შეიძლება განიცადოს როგორც კუმშვა, ისე გაჭიმვა (ნახ. 1.22, ბ).

იმ ძალას, რომელიც მოქმედებს ღეროზე მისი ღერძის გასწვრივ და კუმშავს ან ჭიმავს ამ ღეროს, ძალვა ეწოდება.

6. ეოქვათ, $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ ძალთა ბრტყელი სისტემის მოქმედებით წონასწორობის მდგომარეობაში გვაქვს AB ძელი, რომლის ერთი AA' ბოლო ჩამაგრებულია (ჩაჭედებულია) კედელში (ნახ. 1.23, ა). ამ შემთხვევაში კედელი არის AB ძელისათვის ბმა, რომელიც ზღუდავს როგორც ძელის ნების-

მიერი მიმართულებით გადაადგილებას, ასევე მობრუნებასაც. ვიპოვოთ ის ძალები, რომლებიც უნდა მოედოთ A წერტილზე (კეეტზე), როცა მისი AA' ნაწილს გადავაგდებთ, ე.ი. როცა ძელს გავათავისუფლებთ ბმისაგან.

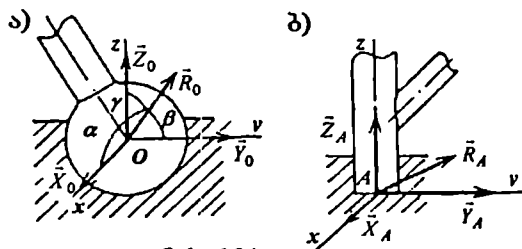
ცილინდრული სახსრისაგან განსხვავებით ჩამაგრება წარმოშობს არა მარტო მოდულითა და მიმართულებით უცნობ $\bar{R}_A$ რეაქციის ძალას ანუ $\bar{X}_A$ და $\bar{Y}_A$ მდგენელებს, არამედ რეაქციული წყვილძალის M_A მომენტსაც (ნახ. 123, ბ). X_A , Y_A , M_A სიდიდეები უნდა განისაზღვროს წონასწორობის განტოლებებიდან.



ნახ. 123

შენიშვნა. კედელში ჩამაგრებით განხორციელებულ ბმას ზოგჯერ ხისტ ჩამაგრებას უწოდებენ, ხოლო ძელის AB ნაწილს კონსოლს.

7. ბმა ხორციელდება სფერული სახსრის დახმარებით (ნახ. 124, ა). სფერული სახსარი არ ეწინააღმდეგება სხეულის ბრუნვას ამ სახსრის O ცენტრზე გამავალი ნებისმიერი ღერძის გარშემო, მაგრამ ზღუდავს ნების-



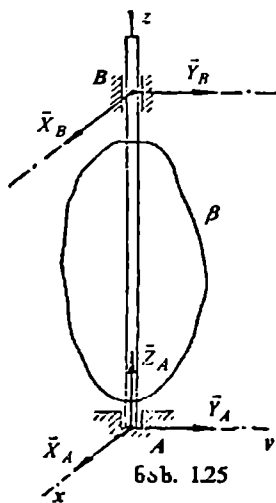
ნახ. 124

მიერ სხვა გადაადგილებას (სფერული სახსრის კარგი მაგალითია ავტომანქანის სიჩქარეთა გადასართავი სახელურის შეერთება სიჩქარეთა კოლოფთან) სფერული სახსრის $\bar{R}_0$ რეაქცია გადის სფეროს O ცენტრზე, ხოლო მისი მიმართულების წინასწარ მითითება შეუძლებელია. ამიტომ ასეთი სახის ბმისაგან განთავისუფლებისას რეაქციას დაშლიან სამ- $\bar{X}_0$, $\bar{Y}_0$ და $\bar{Z}_0$ მდგენელად. შერჩეული კოორდინატთა ღერძე-

ბის მიმართულებით (ნახ. 124, ა). ამოცანის ამოხსნის პროცესში პოულობენ მათ სიდიდეებს. ამ მდგენელების საშუალებით პოულობენ სრული რეაქციის მოდულსა და მიმართულებას ფორმულებით:

$$R_0 = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}; \quad \cos \alpha = X_0/R_0; \quad \cos \beta = Y_0/R_0; \\ \cos \gamma = Z_0/R_0.$$

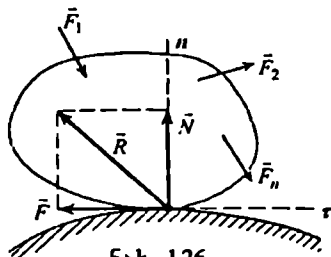
8. ბმა ხორციელდება საქუსლეს დახმარებით (ნახ. 124, ბ; 125). A საქუსლე საჭიროა ღვარის ქუსლის დასამაგრებლად. ეს შესაძლებელს ხდის განსახილველი სხეულის ბრუნვას ღვარის ღერძის გარშემო. საქუსლეს ფუძე ეწინააღმდეგება სხეულის გადაადგილებას ევრტიკალურად ქვევით (ღვარის ღერძის გასწვრივ), ხოლო საქუსლეს კედლები – სხეულის გადაადგილებას ღვარის ღერძის მართობ სიბრტყეში (ნახ. 124, ბ). ამიტომ საქუსლეს ფუძის $\vec{Z}_A$ რეაქცია მიმართულია ევრტიკალურად ზევით, ხოლო საქუსლეს კედლის $\vec{R}_A$ რეაქცია მდებარეობს ჰორიზონტალურ სიბრტყეში, მაგრამ მისი მიმართულება ამ სიბრტყეში ზოგადად უცნობია, ამიტომ ამოცანის ამოხსნის დროს საჭიროა ის დაეშალოთ $\vec{X}_A$ და $\vec{Y}_A$ ორ მდგენელად ღვარის ღერძის მართობი x და y ღერძების მიმართულებით (ნახ. 124, ბ; 125).



9. ბმა ხორციელდება უძრავი ცილინდრული საკისრის დახმარებით. B საკისარი არ ეწინააღმდეგება სხეულის ბრუნვას ღერძის გარშემო და მის სრიალს ამ ღერძის გასწვრივ (ნახ. 125). თუ ხახუნს უგულებელვყოფთ, მაშინ საკისარის $\vec{R}_B$ რეაქცია (ცილინდრული ზედაპირის რეაქცია მის კედელზე) კვეთს სხეულის ბრუნვის ღერძს და მდებარეობს ამ ღერძის მართობ სიბრტყეში; უცნობია $\vec{R}_B$ რეაქციის სიდიდე და მიმართულება. ამიტომ დავშლით $\vec{X}_B$ და

$\vec{F}_s$ ორ მდგენელად. რადგან საკისარი არ ეწინააღმდეგება სხეულის სრიალს, ბრუნვას ღერძის გასწვრივ, ამიტომ ამ ღერძის გასწვრივ რეაქცია არ არსებობს.

10. ვთქვათ სხეული ეხება მეორე სხეულის ზედაპირს, რომელიც ამ სხეულისათვის არის ბმა და წონასწორობაში იმყოფება ერთ სიბრტყეში მდებარე აქტიური ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) ძალთა სისტემის მოქმედებით. თუ შემხები სხეულების ზედაპირი აბსოლუტურად გლუვია და სხეულები აბსოლუტურად მყარი, მაშინ ბმის რეაქციის ძალის მიმართულება განსაზღვრულია 1-ელ პუნქტში მოყვანილი მეთოდით. მაგრამ ამ შემთხვევაში რეაქციის მიმართულება არ არის დამოკიდებული სხეულზე მოქმედ ძალებზე. აქტიურ ძალებზე დამოკიდებულია მხოლოდ რეაქციის ძალების რიცხვითი მნიშვნელობა. სინამდვილეში აბსოლუტურად გლუვი ზედაპირი და აბსოლუტურად მყარი სხეული არ არსებობს. სხეულთა ზედაპირები ამა თუ იმ ხარისხით არაგლუვია (ხორკლიანია) და ყველა სხეული დეფორმადია. ამასთან დაკავშირებით სხეულის წონასწორობის შემთხვევაში ხორკლიანი (მქისე) ზედაპირის $\vec{R}$ რეაქციის მოდული და მიმართულებაც დამოკიდებულია აქტიურ ძალებზე (ნახ. 126).



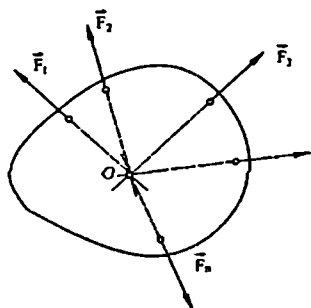
ამ შემთხვევაში $\vec{R}$ რეაქციის მიმართულება უცნობია. ამიტომ თუ მას დაეშლით მდგენელებად, ერთი მათგანი – $\vec{N}$ მიმართულია შემხები სიბრტყეების საერთო ნორმალის გასწვრივ, რომელსაც ნორმალური რეაქცია ეწოდება, ხოლო მეორე – $\vec{F}$ იმყოფება ამ ზედაპირის მხებ სიბრტყეში და მას ხახუნის ძალა ეწოდება.

თეორიულ მექანიკაში განიხილება მხოლოდ სხეულის ზედაპირებს შორის მშრალი ხახუნი, ე.ი. ისეთი ხახუნი, როცა მათ შორის დაზეოვა (გაპოხვა) არ აღინიშნება. მშრალი ხახუნის დროს უნდა განეასხვავოთ ხახუნი სხეულის უძრაობის ანუ წონასწორობის შემთხვევაში და სრიალის ხახუნი ერთი სხეულის მეორე სხეულზე მოძრაობისას.

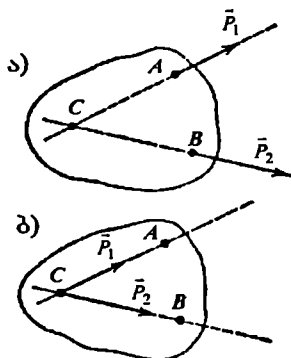
ამრიგად, ყოველი ბმის რეაქციის განსასაზღვრავად საჭიროა ვიცოდეთ მისი სამი ელემენტი: მოდული, მიმართულება და მოდების წერტილი. როგორც წესი, რეაქციის ძალის მოდების წერტილი ცნობილია. რეაქციის მიმართულება ცნობილია მხოლოდ ბმის ზოგიერთი ტიპისათვის, რაც კარგად ჩანს განხილული მაგალითებიდან.

2. თავმოყრილ ძალთა სისტემა

განსაზღვრება. თავმოყრილი ძალთა სისტემა ეწოდება ისეთ ძალთა სისტემას, რომელთა მოქმედების ფუძეები ერთ წერტილში იკეფება. $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$ ძალების თავმოყრის წერტილია O (ნახ. 2.1).



ნახ. 2.1



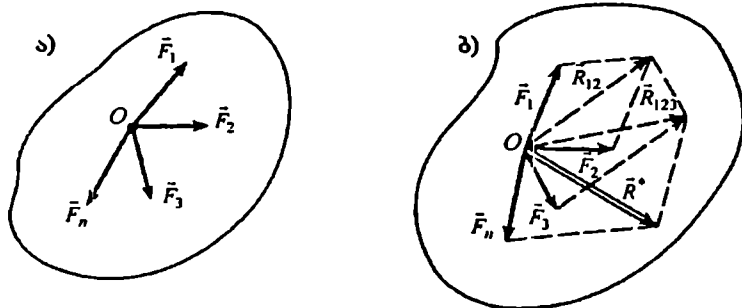
ნახ. 2.2

შენიშვნა. თეორიულ მექანიკაში მყარი სხეულზე მოდებული ძალა არის სრიალა ვექტორს რაც საშუალებას გვაძლევს ამოცანების ამოხსნისას ძალა გავასრიალოთ (გადავიტანოთ) მისი ფუძის გასწვრივ და მოვდოთ ნებისმიერ წერტილზე. მაგალითად, თუ სხეულზე მოქმედებს ერთ სიბრტყეში მდებარე ორი $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ძალა (ნახ. 2.2, ა), მაშინ ეს ორი ძალა შეიძლება გადავიტანოთ C წერტილში – მათი ფუძეების გადაკვეთის წერტილში (ნახ. 2.2, ბ). მაშასადამე, 2.1 ნახაზზე ნაჩვენები $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ ყველა ძალა შეიძლება გადავიტანოთ თავმოყრის O წერტილში, რაც გაგვიადვილებს მათი

გეომეტრიული ჯამის პონას. ამასთანავე ($\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$) ძალთა სისტემა შეიძლება იყოს ბრტყელი და სივრცითიც.

2.1. თავმოყრილ ძალთა სისტემის ტოლქმედზე დაყვანა

ტოლქმედის პონის ხერხები. 1. გეომეტრიული ხერხი. განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა. ვთქვათ სხეულზე მოქმედებს სივრცითი თავმოყრილი ($\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$) ძალთა სისტემა. რადგან მყარ სხეულზე მოდებული ძალა სრიალა ვექტორია, ამიტომ ჩავთვალოთ, რომ ისინი თავმოყრის O წერტილზე არიან მოდებული (ნახ. 2.3, ა).



ნახ. 2.3

მე-3 აქსიომის გამოყენებით (ძალთა შეკრების პარალელოგრამის წესით) მიმდევრობით შევეკრიბოთ ეს ძალები. $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ პირველი ორი ძალა შეეცვალოთ მათი $\vec{R}_{12}$ ტოლქმედით, ე.ი. $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R}_{12}$ (ნახ. 2.3, ბ). შემდეგ პარალელოგრამის წესით შევეკრიბოთ $\vec{F}_3$ და $\vec{R}_{12}$ ძალები და შეეცვალოთ მათი $\vec{R}_{123}$ ტოლქმედით

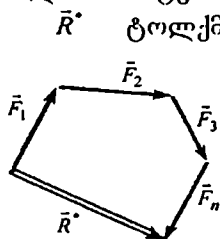
$$\vec{R}_{123} = \vec{F}_3 + \vec{R}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

და ა.შ. გაეაგრძელოთ ვექტორების შეკრების პროცესი ყველა n ძალისათვის. მივიღებთ ერთ $\vec{R}^*$ ძალას, რომელსაც ($\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$) ძალთა სისტემის ტოლქმედი ეწოდება, ხოლო მოცემულ ძალებს – ტოლქმედის მდგენელები.

თეორემა. თავმოყრილ ძაღთა სისტემა დაიყვანება ტოლქმედზე, რომელიც სისტემის ყველა ძალის გეომეტრიული ჯამის ტოლია და გადის ამ ძაღთა მოქმედების ფუძეების გადაკვეთის წერტილში:

$$\vec{R}^* = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \quad (2.1)$$

შენიშვნა. $\vec{R}^*$ ტოლქმედი ისეთივე მექანიკურ ზემოქმედებას ახდენს სხეულზე (ნივთიერ წერტილზე), როგორსაც $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$ ძაღთა სისტემა. მაშასადამე, ტოლქმედის პონით ჩვენ ამოვხსენით სტატიკის პირველი ამოცანა თავმოყრილი ძაღთა სისტემის შემთხვევისათვის.



ნახ. 2.4

$\vec{R}^*$ ტოლქმედის სიდიდე და მიმართულება აგრეთვე გამოისახება მოცემული ძაღების პარალელური და ტოლი გვერდების მქონე ტეხილი ხაზის ჩამკეტი ვექტორით (ნახ. 2.4). ამრიგად, თუ გამოვიყენებთ ძაღთა მრავალკუთხედის წესს, ტოლქმედი ძაღა შეგვიძლია ვიპოვოთ გეომეტრიული აგებით (გრაფიკულად).

2. თავმოყრილ ძაღთა სისტემის ტოლქმედის განსაზღვრა შეიძლება ანალიზური წესითაც (გეგმიღების წესით), ამასთანავე სარგებლობენ მოცემულ ღერძზე ტოლქმედი ძალის გეგმიღის თეორემით.

თეორემა. მოცემულ ღერძზე ტოლქმედის გეგმილი უდრის იმავე ღერძზე შესაკრები ძაღების გეგმიღთა აღგებრულ ჯამს.

მაშასადამე, ანალიზურად რომ ვიპოვოთ თავმოყრილ ძაღთა სიერციითი სისტემის ტოლქმედის სიდიდე და მიმართულება, ჯერ უნდა განესაზღვროთ ამ ტოლქმედის გეგმიღები კოორდინატთა Ox , Oy , Oz ღერძებზე, ე.ი. დავაგეგმილოთ (2.1) ვექტორული ტოლობა $Oxyz$ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე. მივიღებთ:

$$\begin{aligned} R_x^* &= F_{1x} + \dots + F_{nx} = \sum_{k=1}^n F_{kx}; \\ R_y^* &= F_{1y} + \dots + F_{ny} = \sum_{k=1}^n F_{ky}; \\ R_z^* &= F_{1z} + \dots + F_{nz} = \sum_{k=1}^n F_{kz}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

სადაც R_x^* , R_y^* , R_z^* არის $\vec{R}^*$ ტოლქმედის გეგმილები შესაბამის ღერძებზე; $F_{\vec{k}} = F_{k_y}$, $F_{\vec{k}} = \vec{F}_k$ ძალის გეგმილები იმავე ღერძებზე.

კოორდინატთა ღერძებზე ტოლქმედის გეგმილების განსაზღვრის შემდეგ ტოლქმედის სიდიდესა და მიმართულებას ვეძებთ ფორმულებით:

$$R^* = \sqrt{R_x^{*2} + R_y^{*2} + R_z^{*2}} \quad (2.3)$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x^*}{R^*}; \quad \cos \beta = \frac{R_y^*}{R^*}, \quad \cos \gamma = \frac{R_z^*}{R^*}, \quad (2.4)$$

სადაც α , β და γ არის $\vec{R}^*$ ვექტორის მიერ შესაბამისად Ox , Oy , Oz ღერძების დადებით მიმართულებებთან შედგენილი კუთხეები.

ბრტყელ თავმოყრილ ძალთა სისტემის შემთხვევაში (2.2), (2.3) და (2.4) ფორმულების ნაცვლად გვექნება:

$$R_x^* = \sum_{k=1}^n F_{\vec{k}} \quad , \quad R_y^* = \sum_{k=1}^n F_{k_y} \quad . \quad (2.5)$$

$$R^* = \sqrt{R_x^{*2} + R_y^{*2}} \quad (2.6)$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x^*}{R^*}; \quad \cos \beta = \frac{R_y^*}{R^*} \quad . \quad (2.7)$$

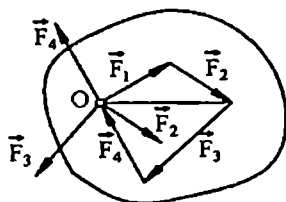
2.2. თავმოყრილ ძალთა სისტემის წონასწორობის პირობები

1. წონასწორობის გეომეტრიული პირობები.

თეორემა. მყარ სხეულზე მოდებული თავმოყრილ ძალთა სისტემის წონასწორობისთვის აუცილებელი და საკმარისია, ტოლქმედი იყოს ნულის ტოლი:

ეს პირობა შეიძლება გამოისახოს ერთი ვექტორული ტოლობით:

$$\vec{R}^* = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = 0 \quad . \quad (2.8)$$



ნახ. 2.5

წონასწორობის გეომეტრიული პირობა ნიშნავს, რომ ძალთა მრავალკუთხედი იქნება ჩაკეტილი, ე.ი. ძალთა მრავალკუთხედის აგებისას უკანასკნელი ვექტორის ბოლო ემთხვევა პირველი ვექტორის სათავეს (ნახ. 2.5).

2. წონასწორობის ანალიზური პირობები.

თეორემა. თავმოყრილ ძალთა სისტემის წონასწორობისთვის აუცილებელი და საკმარისია, სისტემის ყველა ძალის გეგმილების აღგებრული ჯამი შესაბამის კოორდინატთა ღერძზე ნულის ტოლი იყოს (ანუ ტოლქმედის გეგმილები შესაბამის ღერძებზე ნულის ტოლი იყოს):

$$R_x^* = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0,$$

$$R_y^* = \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad (2.9)$$

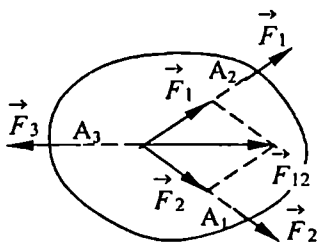
$$R_z^* = \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0,$$

სადაც R_x^* , R_y^* , R_z^* არის $\vec{R}^*$ ტოლქმედის გეგმილები შესაბამის ღერძებზე; F_{kx} , F_{ky} , F_{kz} — $\vec{F}_k$ ძალის გეგმილები იმავე ღერძებზე.

თუ თავმოყრილ ($\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$) ძალთა სისტემა მდებარეობს ერთ სიბრტყეში, მაგალითად, Oxy სიბრტყეში, მაშინ წონასწორობის (2.9) ფორმულების ნაცვლად გვექნება:

$$R_x^* = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad (2.10)$$

$$R_y^* = \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0.$$



ნახ. 2.6

თეორემა სამი ძალის შესახებ

თეორემა. თუ მყარი სხეული წონასწორობაშია ერთ სიბრტყეზე მდებარე სამი არაპარალელური ძალის მოქმედების შედეგად, მაშინ

მათი მოქმედების ფუძეები ერთ წერტილში გადაიკეთება (ნახ. 2.6).

$$\vec{F}_{1,2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad \vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_3, \quad |\vec{F}_{1,2}| = |\vec{F}_3|.$$

2.3. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები ერთ სიბრტყეში მდებარე ერთ წერტილში თავმოყრილი ძალების შეკრებაზე

ამოცანა 1. მე-3 აქსიომის გამოყენებით ვიპოვოთ $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ორი ძალის ტოლქმედის მოდული, თუ $F_1 = 10$ ნ, $F_2 = 20$ ნ და $\alpha = (\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 135^\circ$ (ნახ. 2.7).

ამოხსნა. 1. გეომეტრიული ხერხი. ვიპოვოთ მოცემული კუთხისათვის სინუსისა და კოსინუსის მნიშვნელობები:

$$\sin \alpha = \sin 135^\circ = \sin 45^\circ \approx 0,71;$$

$$\cos \alpha = \cos 135^\circ = -\cos 45^\circ \approx -0,71.$$

ამ ორი ძალის ტოლქმედი განვსაზღვროთ (1.2) ფორმულის საშუალებით:

$$\begin{aligned} R^* &= \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cos \alpha} = \\ &= \sqrt{10^2 + 20^2 + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot (-0,71)} = 14,73 \text{ ნ.} \end{aligned}$$

ვიპოვოთ $\vec{R}^*$ ტოლქმედსა და $\vec{F}_2$ ძალას შორის β კუთხე (ნახ. 2.7). ვისარგებლოთ (1.3) ფორმულით, გვექნება:

$$\frac{R^*}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{F_1}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \frac{F_1 \sin 45^\circ}{R^*} = \frac{10}{14,7} \cdot 0,71,$$

ე.ი. $\sin \beta = 0,48 \Rightarrow \beta = 28^\circ 42'$ მაშინ

$$\varphi = (\vec{R}^*, \vec{F}_1) = 135^\circ - 28^\circ 42' = 106^\circ 18'$$

2. ამოვხსნათ ამოცანა ანალიზური ხერხით. გაეატაროთ მართკუთხა Oxy კოორდინატთა ღერძები ისე, როგორც ნაჩვენებია 2.8 ნახაზზე. $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ ძალები და მათი $\vec{R}^*$ ტოლქმედი შეიძლება ჩავწეროთ კოორდინატებში შემდეგი სახით:

$$\vec{R}^* \{R_x^*, R_y^*\} = \vec{F}_1 \{F_{1x}, F_{1y}\} + \vec{F}_2 \{F_{2x}, F_{2y}\},$$

საიდანაც

$$R_x^* = F_{1x} + F_{2x} = F_1 - F_2 \cos 45^\circ = 10 - 14,14 = -4,14,$$

$$R_y^* = F_{1y} + F_{2y} = 0 + 14,14 = 14,14.$$

მაშინ $\vec{R}^*$ ტოლქმედის მოდული გამოითვლება (2.6) ფორმულით:

$$R^* = \sqrt{R_x^{*2} + R_y^{*2}} = \sqrt{(-4,14)^2 + (14,14)^2} = \sqrt{217,07} = 14,73 \text{ ნ.}$$

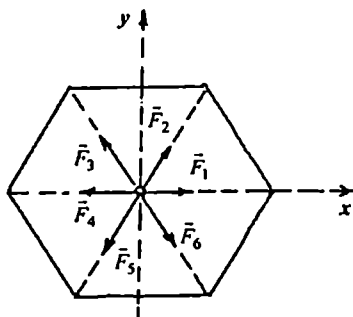
(2.7) ფორმულებით ვიპოვიტ $\vec{R}^*$ ტოლქმედის მიმართულების კოსინუსებს:

$$\cos(x, \wedge \vec{R}^*) = \frac{R_x^*}{R^*} = -\frac{4,14}{14,73} = -0,28 \Rightarrow (x, \wedge \vec{R}^*) = 106^\circ 18';$$

$$\cos(y, \wedge \vec{R}^*) = \frac{R_y^*}{R^*} = \frac{14,14}{14,73} = 0,96 \Rightarrow (y, \wedge \vec{R}^*) = 16^\circ 18'$$

$$\text{ამასთან } (\vec{R}, \wedge \vec{F}_2) = 45^\circ - 16^\circ 18' = 28^\circ 42'$$

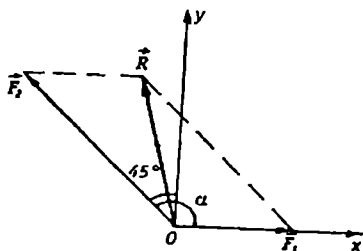
როგორც ვხედავთ გამოთვლის შედეგები ორივე ხერხის გამოყენების დროს ემთხვევა ერთმანეთს.



ნახ. 2.9

ამოცანა 2. წესიერი ექვსკუთხედის O ცენტრში მოდებულია მისი წვეროებისაკენ მიმართული $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5$ და $\vec{F}_6$ ექვსი ძალა. ვიპოვოთ მათი ტოლქმედისა და მაწონასწორებელი ძალის სიდიდე და მიმართულება (ნახ. 2.9), თუ ცნობილია ძაღთა მოდუღები: $F_1 = 1 \text{ ნ}; F_2 = 3 \text{ ნ}; F_3 = 5 \text{ ნ}; F_4 = 7 \text{ ნ}; F_5 = 9 \text{ ნ}; F_6 = 11 \text{ ნ}.$

ამოხსნა: მოცემულია ერთ სიბრტყეზე მდებარე და ერთ O წერტილში თავმოყრილი ($\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_6$) ძაღთა სისტემა. ვიპოვოთ ტოლქმედი ანაღიზური ხერხით ანუ ვიპოვიტ $\vec{R}^* = \vec{R}^* \{R_x^*, R_y^*\}$



ნახ. 2.8

ტოლქმედის R_x^* და R_y^* გეგმილები Ox და Oy ღერძებზე. კოორდინატთა Oxy სისტემა ნაჩვენებია 2.9 ნახაზზე. გვაქვს

$$R_x^* = \sum_{k=1}^6 F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} + F_{5x} + F_{6x}, \quad (1)$$

$$R_y^* = \sum_{k=1}^6 F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} + F_{5y} + F_{6y}. \quad (2)$$

(1) და (2) ტოლობები გვიჩვენებს, რომ თავმოყრილ ძალთა სისტემის ტოლქმედის რომელიმე ღერძზე გეგმილის საპონენლად საჭიროა დავაგეგმილოთ სისტემაში შემავალი ყველა ძალა ამ ღერძზე, მათი აღგებრულები ჯამი იქნება ამ ღერძზე ტოლქმედის გეგმილი.

ახლა ცალ-ცალკე გამოვთვალოთ (1) და (2)-ში შემავალი გეგმილები. გვექნება:

$$\begin{aligned} F_{1x} &= F_1 \cos 0^\circ = 1 \cdot 1 = 1 \text{ ნ}; & F_{2x} &= F_2 \cos 60^\circ = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ ნ}; & F_{3x} &= -F_3 \cos 60^\circ = \\ &= -5 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \text{ ნ}; & F_{4x} &= F_4 \cos 180^\circ = 7 \cdot (-1) = -7 \text{ ნ}; & F_{5x} &= -F_5 \cos 60^\circ = \\ &= -9 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{9}{2} \text{ ნ}; & F_{6x} &= F_6 \cos 60^\circ = 11 \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{2} \text{ ნ}. \end{aligned}$$

თუ ამ მონაცემებს შევიტანთ (1)-ში, მივიღებთ:

$$R_x^* = 1 + \frac{3}{2} - \frac{5}{2} - 7 - \frac{9}{2} + \frac{11}{2} = -6 \text{ ნ}. \quad (3)$$

ანალოგიურად გამოვთვალოთ ყველა ძალის გეგმილი Oy ღერძზე:

$$\begin{aligned} F_{1y} &= F_1 \cos 90^\circ = 0; & F_{2y} &= F_2 \cos 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ ნ}; & F_{3y} &= F_3 \cos 30^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ ნ} \\ F_{4y} &= F_4 \cos 90^\circ = 0; & F_{5y} &= -F_5 \cos 30^\circ = -\frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ ნ}; \\ F_{6y} &= -F_6 \cos 30^\circ = -\frac{11\sqrt{3}}{2} \text{ ნ}. \end{aligned}$$

თუ ამ მონაცემებს შევიტანთ (2)-ში, მივიღებთ:

$$R_y^* = 0 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} + 0 - \frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{11\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3} \text{ ნ}. \quad (4)$$

ახლა (2.6) და (2.7) ფორმულებით ვპოულობთ ტოლქმედის სიდიდეს და მიმართულებას:

$$R^* = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{6^2 + (-6\sqrt{3})^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ ნ.}$$

$$\cos(\vec{R}^*, \vec{i}) = \frac{R_x^*}{R^*} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{R}^*, \vec{i}) = 120^\circ;$$

$$\cos(\vec{R}^*, \vec{j}) = \frac{R_y^*}{R^*} = -\frac{6\sqrt{3}}{12} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\vec{R}^*, \vec{j}) = 150^\circ$$

პასუხი: $R^* = 12$ ნ; მაწონასწორებელი ძალის მიმართულება მოცემული $\vec{F}_3$ ძალის მიმართულების საწინააღმდეგოა.

2.4. საეარჯიშო ამოცანები ერთ სიბრტყეზე მდებარე ერთ წერტილში თავმოყრილ ძალთა სისტემის შეკრებაზე

2.1. განსაზღვრეთ A წერტილზე მოდებული $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ორი ძალის $\vec{R}^*$ ტოლქმედის მოდული, თუ ცნობილია $P_1 = 50$ ნ; $P_2 = 80$ ნ, $\alpha = 120^\circ$ (ნახ. 2.10).

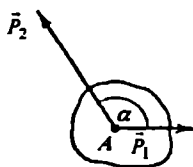
პასუხი: $R^* = 70$ ნ.

2.2. განსაზღვრეთ O წერტილზე მოდებული ორი $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალის $\vec{R}^*$ ტოლქმედის მოდული, თუ ამ ძალების მოდულები $F_1 = 6$ ნ; $F_2 = 10$ ნ (ნახ. 2.11)

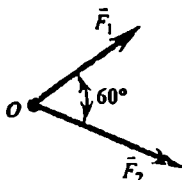
პასუხი: $R^* = 14$ ნ.

2.3. განსაზღვრეთ $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ და $\vec{F}_3$ ძალების $\vec{R}^*$ ტოლქმედის მოდული, თუ $F_1 = F_3 = 2$ ნ (ნახ. 2.12).

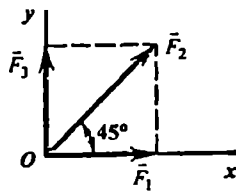
პასუხი: $R^* = 4\sqrt{2}$ ნ.



ნახ. 2.10



ნახ. 2.11



ნახ. 2.12

2.4. განსაზღვრეთ $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ორი ძალის $\vec{R}^*$ ტოლქმედის მოდული, თუ $F_1 = 10$ ნ, $F_2 = 5$ ნ $\alpha = 30^\circ$ (ნახ. 2.13).

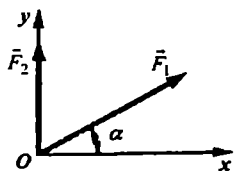
პასუხი: $R^* = 5\sqrt{7}$ ნ.

2.5. განსაზღვრეთ $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ და $\vec{F}_3$ თავმოყრილ ძალთა $\vec{R}^*$ ტოლქმედის მოდული, თუ $F_1 = 10$ ნ; $F_2 = 15$ ნ; $F_3 = 20$ ნ, ხოლო ამ ძალების მიერ Ox ღერძთან შედგენილი კუთხეები: $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$ და $\alpha_3 = 60^\circ$ (ნახ. 2.14).

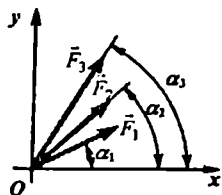
პასუხი: $R^* \approx 44,1$ ნ.

2.6. მყარი სხეულის O წერტილზე მოქმედებს ერთ სიბრტყეში მდებარე თავმოყრილ ძალთა სისტემა: $F_1 = 1$ ნ, $F_2 = 2$ ნ, $F_3 = 3$ ნ, $F_4 = 4$ ნ. განსაზღვრეთ მოცემული ძალთა სისტემის ტოლქმედის გეგმილი Oy ღერძზე, თუ ცნობილია კუთხეები: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$ (ნახ. 2.15).

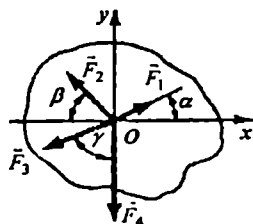
პასუხი: $R_y^* = 4,1$ ნ.



ნახ. 2.13



ნახ. 2.14



ნახ. 2.15

2.7. $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ თავმოყრილ ძალთა სისტემის ტოლქმედის მოდული $R^* = 4\sqrt{3}$ ნ და პორიზონტალურ Ox ღერძთან ადგენს $\alpha = 30^\circ$ კუთხეს. $\vec{F}_1$ ძალა მიმართულია Ox ღერძის გასწვრივ, ხოლო $\vec{F}_2$ ძალა ამ ღერძთან ადგენს $\beta = 60^\circ$ კუთხეს. განსაზღვრეთ $\vec{F}_1$ ძალის მოდული.

პასუხი: $F_1 = 4$ ნ.

2.8. $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ და $\vec{F}_4$ ბრტყელი თავმოყრილ ძალთა სისტემის ტოლქმედი ნულის ტოლია. განსაზღვრეთ $\vec{F}_1$ ძალის მოდული, თუ ცნობილია $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ სამი ძალის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე: $F_{2x}=4$ ნ, $F_{2y}=7$ ნ, $F_{3x}=-5$ ნ, $F_{3y}=-5$ ნ; $F_{4x}=-2$ ნ, $F_{4y}=0$.

პასუხი: $F_1 = \sqrt{13}$ ნ.

2.9. მოცემულია $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ორი თავმოყრილი ძალის ტოლქმედის გეგმილი Ox ღერძზე – $R_x^*=5$ ნ. ამავე ღერძზე $\vec{F}_1$ ძალის გეგმილი $F_{1x}=7$ ნ. იპოვეთ Ox ღერძზე $\vec{F}_2$ ძალის გეგმილის ალგებრული მნიშვნელობა.

პასუხი: $F_{2x}=-2$ ნ.

2.10. განსაზღვრეთ თავმოყრილი $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ორი ძალის ტოლქმედის მოდული და მიმართულების კოსინუსები, თუ ცნობილია მათი გეგმილები დეკარტის კოორდინატთა ღერძებზე: $F_{1x}=3$ ნ; $F_{1y}=6$ ნ; $F_{2x}=5$ ნ; $F_{2y}=4$ ნ.

პასუხი: $R^*=12,8$ ნ; $\cos(\vec{R}^*, \hat{i}) = \frac{5}{8}$, $\cos(\vec{R}^*, \hat{j}) = \frac{25}{32}$.

2.11. ცნობილია ერთ სიბრტყეში მდებარე თავმოყრილი $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ და $\vec{F}_3$ ძალების $\vec{R}^*$ ტოლქმედის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე: $R_x^*=18$ ნ და $R_y^*=24$ ნ, ასევე ამავე ღერძებზე $\vec{F}_2$ და $\vec{F}_3$ ძალების გეგმილები: $F_{2x}=-9$ ნ; $F_{2y}=-7$ ნ; $F_{3x}=12$; $F_{3y}=0$. განსაზღვრეთ $\vec{F}_1$ ძალის მოდული.

პასუხი: $F_1=34,4$ ნ.

2.12. მოცემულია თავმოყრილ ძალთა სისტემა: $\vec{F}_1=3\vec{i}+4\vec{j}$; $\vec{F}_2=3\vec{i}-4\vec{j}$; $\vec{F}_3=8\vec{j}$. განსაზღვრეთ ამ ძალთა სისტემის ტოლქმედის მოდული და მიმართულების კოსინუსები.

პასუხი: $R^*=10$ ნ, $\cos(\vec{R}^*, \hat{i}) = \frac{3}{5}$, $\cos(\vec{R}^*, \hat{j}) = \frac{4}{5}$.

2.13. ცნობილია ბრტყელი თავმოყრილი $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ ძალების $\vec{R}^*$ ტოლქმედის გეგმილები $R_x^* = 18$ ნ, $R_y^* = 13$ ნ. ამასთან $\vec{F}_2 = -9\vec{i} - 7\vec{j}$ ნ, $\vec{F}_3 = 12\vec{i}$ განსაზღვრეთ $\vec{F}_1$ ძალის მოდული.
პასუხი: $F_1 = 25$ ნ.

2.14. გამოთვალეთ თავმოყრილ $\vec{F}_1 = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ და $\vec{F}_2 = 6\vec{i} + 8\vec{j}$ ორ ძალას შორის კუთხე გრადუსებში და $\vec{R}^*$ ტოლქმედის მოდული.

პასუხი: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 90^\circ$ ნ; $R^* = 5\sqrt{5}$ ნ.

2.5. ბრტყელი თავმოყრილ ძაღთა სისტემის წონასწორობა

მოცემულ სხეულზე დადებული ბმების ხასიათის მიხედვით თავმოყრილ ძაღთა ბრტყელი სისტემის წონასწორობაზე ამოცანები შეიძლება დაეყოთ ორ ჯგუფად:

1. ამოცანები, რომლებშიც მოცემულ სხეულზე (რომლის წონასწორობაც განიხილება ამოცანაში) დადებული ყველა ბმის რეაქციის ფუძე ცნობილია.

ასეთი ბმებია:

ა) უწონი ღერო, რომელიც ერთი ბოლოთი სახსრულად არის შეერთებული მოცემულ სხეულთან, ხოლო მეორე ბოლოთი დამაგრებულია უძრავი სახსრის საშუალებით;

ბ) უძრავი გლუვი ზედაპირი ან უძრავი წირი, რომელსაც ეყრდნობა მოცემული სხეული;

გ) ღრეკადი ძაფი (ბაგირი, გვარლი);

დ) საკისარი.

2. ამოცანები, რომლებშიც მოცემულ სხეულზე დადებულია თუნდაც ერთი ბმა, რომლის რეაქციის მიმართულება წინასწარ უცნობია. ასეთი ბმებია უძრავი ცილინდრული სახსარი და საქუსლე.

ამოცანებში, რომლებშიც მოცემულია არათავისუფალი სხეულის წონასწორობა ერთ სიბრტყეში მდებარე ბრტყელ თავმოყრილ ძაღთა სისტემის მოქმედებისას, ამ სხეულზე ბმების დადება შეიძლება ყველაზე ხშირად ღრეკადი სხეულებით, სახსრებით დამაგრებული ძელებითა და უძრავი საყრ-

დენი სიბრტყეებით. ამ შემთხვევაში ყველა ბმის რეაქციის ფუძე ცნობილია და, მაშასადამე, ამოცანა დადის მხოლოდ ამ რეაქციების სიდიდეების განსაზღვრამდე.

არათავისუფალი მყარი სხეულის წონასწორობის შესახებ ამოცანების ამოხსნისას საჭიროა დაეცვათ შემდეგი საერთო წესი:

აუცილებლად გამოვეყნოთ ის სხეული, რომლის წონასწორობასაც ვიხილავთ მოცემულ ამოცანაში, ე.ი. სხეული, რომელზეც მოდებულია როგორც მოცემული ძალები, ასევე ძალები, რომელთა განსაზღვრა საჭიროა მოცემულ ამოცანაში.

შემდეგ უნდა გამოვარკვიოთ, რა სახის ბმებია დადებული განსახილველ სხეულზე და გაეთვალიწინოთ ამ ბმათა რეაქცია.

ამასთანავე რეკომენდებულია გამოყოფილი სხეულის დახაზვა, ნახაზზე ვექტორების სახით უნდა გამოვსახოთ მოცემული ძალები და ბმების რეაქცია, დავადგინოთ წონასწორობის რამდენ და როგორ განტოლებებს უნდა აკმაყოფილებდეს ძალთა სისტემა; შემდეგ შევადგინოთ ეს განტოლებები და ამოვხსნათ.

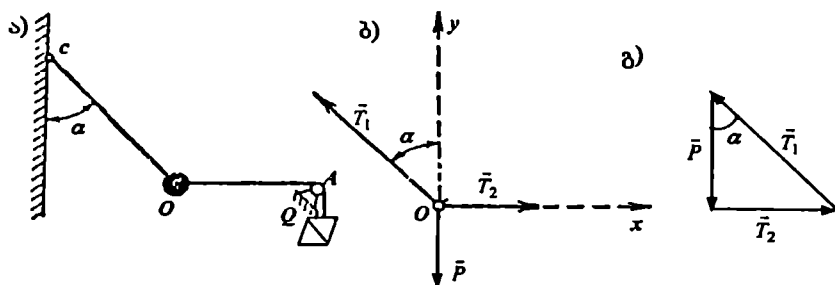
განვიხილოთ ჯერ ისეთი ამოცანების ამოხსნა, სადაც სხეულზე მოდებული ყველა ძალა, ბმების რეაქციის ჩათვლით, ერთ სიბრტყეში მდებარეობს და ერთ წერტილში იკვეთება.

ამ შემთხვევაში ამოცანა შეიძლება ამოიხსნას ორი ხერხით: გეომეტრიულად (გრაფიკულად) ან ანალიზურად (გეგმილების ხერხით).

1. ამოცანები, რომლებშიც ყველა ბმის რეაქციის მოქმედების ფუძე ცნობილია

ამოცანა 3. $P = 60\sqrt{3}$ ნ წონის O ტვირთი ჩამოკიდებულია ვერტიკალთან $\alpha = 30^\circ$ კუთხით დახრილი დრეკადი ძაფით, და წონასწორობის მდგომარეობაშია შეკავებული მეორე უჭიმარი OAQ ძაფით, რომელიც გადაკიდებულია იდეალურ A ბლოკზე. ძაფის მეორე თავისუფალ ბოლოზე მიბმულია Q წონის ტვირთი. ამასთან OAC თოკის OA მონაკვეთი პორიზონტალურია. განვსაზღვროთ მეორე ტვირთის Q წონა და OC თოკის დაჭიმულობის ძალა. O ტვირთის ზომები და თოკების წონა არ მივიღოთ მხედველობაში (ნახ. 2.16).

ამოხსნა. განვიხილოთ O ტვირთის წონასწორობა. მოცემულ ძალებად ითვლება: ვერტიკალურად მიმართული $\vec{P}$ ძალა და ჰორიზონტალურად მიმართული $\vec{T}_2$ ძალა, რომლიც მოდულით მეორე $\vec{Q}$ ტვირთის წონის ტოლია, რადგან იდეალური A ბლოკი ცვლის მხოლოდ ძალის მიმართულებას.



ნახ. 2.16

O ტვირთზე დადებული ბმა განხორციელებულია OC თოკით. გავათავისუფლოთ ის ბმებისაგან. OC და OA ძაფების $\vec{T}_1$ და $\vec{T}_2$ რეაქციები მიმართულია მათ გასწვრივ ისე, როგორც (2.16, ბ) ნახაზზეა ნაჩვენები.

მაშასადამე, O ტვირთი წონასწორობაში იმყოფება ერთ O წერტილში გადამკვეთი სამი $\vec{P}$, $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ ძალის მოქმედებით. ასეთი გაწონასწორებული ძალთა სისტემის ტოლქმედი ნულის ტოლი უნდა იყოს, ამიტომ

$$\vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0. \quad (1)$$

ამოვსხნათ ამოცანა ორი - გეომეტრიული და ანალიზური ხერხებით.

1. გეომეტრიული ხერხი. რადგან O ტვირთი წონასწორობაში იმყოფება სამი ძალის მოქმედებით, ამ ძალებზე აგებული ძალთა სამკუთხედი უნდა იყოს ჩაკეტილი (ნახ. 2.16, გ). ავაგოთ ძალთა სამკუთხედი. აგება დაეიწყოთ მოცემული $\vec{P}$ ძალიდან. გამოვსახოთ $\vec{P}$ ვექტორი, მის საწყის და ბოლო წერტილებზე გავატაროთ $\vec{T}_1$ და $\vec{T}_2$ ძალების პარალელური წრფეები. ამ წრფეების გადაკვეთის წერტილი განსაზღვრავს

ძალთა სამკუთხედის მესამე წვეროს (ნახ. 2.16, გ). $\vec{T}_1$ და $\vec{T}_2$ უცნობი ძალების მიმართულების განსაზღვრისათვის საჭიროა ძალთა სამკუთხედის პერიმეტრის შემოვლა ისე, რომ ჩაიკეტოს. ამ შემოვლის მიმართულება განისაზღვრება ცნობილი $\vec{P}$ ძალის მიმართულებით. ეს საშუალებას გვაძლევს, შევამოწმოთ, რამდენად სწორად განესაზღვრეთ უცნობი ძალების მიმართულებები.

ამ მართკუთხა სამკუთხედის ამოხსნით ეღებულობთ:

$$T_2 = P \operatorname{tg} \alpha = 60\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 60 \text{ ნ};$$

$$T_1 = \frac{P}{\cos \alpha} = \frac{60\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} = 120 \text{ ნ}.$$

მაშასადამე, ტვირთის Q წონა ძაფის T_2 დაჭიმულობის ტოლია, ე.ი.

$$Q = T_2 = P \operatorname{tg} \alpha = 60 \text{ ნ},$$

ხოლო OC ძაფის $\vec{T}_1$ დაჭიმულობის ძალის მოდული $T_1 = 120 \text{ ნ}$.

2. ანალიზური ხერხი. ამ ხერხით ამოხსნისათვის საჭიროა შევადგინოთ წონასწორობის ორი განტოლება. კოორდინატთა ღერძები შევარჩიოთ ისე, როგორც ეს 2.16, ბ ნახაზზეა ნაჩვენები. O წერტილზე მოდებული ძალები $\vec{P}$, $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ — ქმნიან ბრტყელ თავმოყრილ ძალთა სისტემას, რომლისთვისაც გვაქვს წონასწორობის ორი განტოლება. ამოცანაში უცნობია $\vec{T}_1$ და $\vec{T}_2$ ორი ძალა, ე.ი. ამოცანა სტატიკურად განსაზღვრულია.

შევადგინოთ (2.10) სახის წონასწორობის განტოლებები:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad T_2 - T_1 \sin \alpha = 0;$$

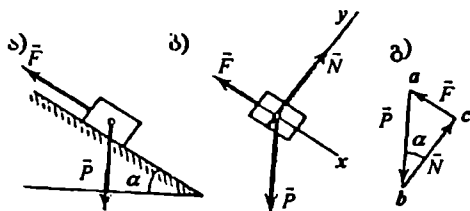
$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad T_1 \cos \alpha - P = 0.$$

საიდანაც ეპოულობთ:

$$T_1 = \frac{P}{\cos \alpha} = \frac{60\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} = 120 \text{ ნ};$$

$$T_2 = T_1 \sin \alpha = P \operatorname{tg} \alpha = 60\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 60 \text{ ნ}.$$

ამოცანა 4. პორიზონტისადმი $\alpha = 30^\circ$ კუთხით დახრილ გლუვ სიბრტყეზე დევს $P = 40$ ნ წონის ტვირთი, რომელიც წონასწორობის მდგომარეობაში შეკაეებულია სიბრტყის პარალელური $\vec{F}$ ძალით (ნახ. 2.17, ა). განვსაზღვროთ $\vec{F}$ ძალისა და ტვირთის სიბრტყეზე წნევის $\vec{Q}$ ძალის სიდიდეები.



ნახ. 2.17

ამოხსნა. საძიებელი ძალები მოქმედებს სხვადასხვა სხეულზე: $\vec{F}$ ძალა ტვირთზე, $\vec{Q}$ – გლუვ სიბრტყეზე. ამოცანის ამოხსნისას $\vec{Q}$ ძალის მაგივრად განვსაზღვრავთ სიბრტყის ნორმალურ $\vec{N}$ რეაქციის

ძალას, რომელიც სიდიდით $\vec{Q}$ -ს მოდულის ტოლია და აქვს მისი საპირისპირო მიმართულება. მოცემული $\vec{P}$ ძალა და საძიებელი $\vec{F}$ და $\vec{N}$ ძალები მოდებული იქნება ტვირთზე, ე.ი. ერთი და იმავე სხეულზე. განვიხილოთ ტვირთის წონასწორობა. გავათავისუფლოთ ბმისაგან (წარმოდგენაში, მოვაცილოთ სიბრტყე) და ტვირთი განვიხილოთ, როგორც თავისუფალი სხეული (ნახ. 2.17, ბ), რომელზეც მოქმედებს აქტიური $\vec{P}$ და $\vec{F}$ ძალები, აგრეთვე ბმის რეაქციის $\vec{N}$ ძალა (პასიური ძალა). საძიებელი უცნობი ძალების განსაზღვრისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ სხეულის წონასწორობის გეომეტრიული ან ანალიზური პირობები. განვიხილოთ ამოხსნის ორივე ხერხი.

1. გეომეტრიული ხერხი. რადგან ტვირთი ამოცანის პირობის თანახმად წონასწორობაშია, ამიტომ მასზე მოქმედი $\vec{F}$, $\vec{P}$ და $\vec{N}$ ძალებზე აგებული ძალთა სამკუთხედი ჩაკეტილი იქნება. ძალთა სამკუთხედის აგებას ვიწყებთ ცნობილი $\vec{P}$ ძალიდან. სიბრტყის ნებისმიერი a წერტილიდან შერჩეული მასშტაბით გადავდროთ $\vec{P}$ (ნახ. 2.17, გ). $\vec{P}$ ძალის საწყის და ბოლო წერტილებზე გავატაროთ $\vec{F}$ და $\vec{N}$ ძალების პარალელური წრფეები მათ გადაკვეთამდე. ამრიგად, მივიღებთ abc სამკუთხედს, რომელსაც ძალთა სამკუთხედი ეწოდება. ამას-

თან bc და ca გვერდების სიგრძე შერჩეული მასშტაბით ტოლი იქნება საძიებელი ძალების რიცხვითი მნიშვნელობებისა. ძალების მიმართულება განისაზღვრება ისრის მეთოდით: რადგან აქ ძალთა სისტემის ტოლქმედი ნულის ტოლია, ამიტომ $\vec{P}$ ვექტორის ბოლოდან გადაღებული იქნება $\vec{N} = \vec{bc}$, ხოლო c -დან $\vec{F} = \vec{ca}$. შევნიშნოთ, რომ $\angle abc = \alpha = 30^\circ$ და $\angle bca = 90^\circ$ მართკუთხა სამკუთხედის ამოხსნით, მივიღებთ:

$$F = P \sin \alpha = 40 \cdot \frac{1}{2} = 20 \text{ ნ}; \quad N = P \cos \alpha = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3} \text{ ნ}.$$

2. ანალიზური ხერხი. ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა ისე, როგორც ნაჩვენებია 2.17, ბ ნახაზზე, ე.ი. ამოცანის გამარტივების მიზნით x ღერძი გავატაროთ $\vec{N}$ ძალის მართობულად, მაშინ y ღერძი დამთხვევა $\vec{N}$ -ის მიმართულებას.

ვისარგებლოთ ერთ წერტილში თავმოყრილი ბრტყელი ძალთა სისტემის წონასწორობის (2.10) განტოლებებით, გვექნება:

$$\sum_{k=1}^3 F_{kx} = 0; \quad P \sin \alpha - F = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^3 F_{ky} = 0; \quad -P \cos \alpha + N = 0, \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow F = P \sin \alpha = 40 \cdot \frac{1}{2} = 20 \text{ ნ};$$

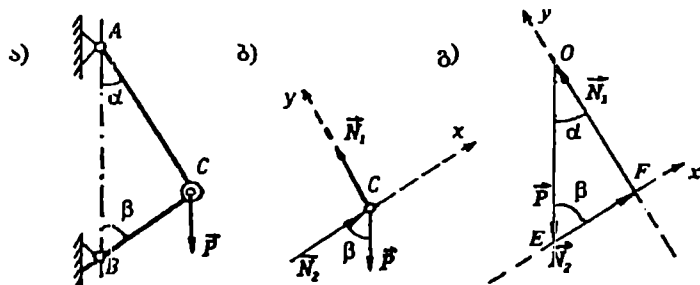
$$(2) \Rightarrow N = P \cos \alpha = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3} \text{ ნ}.$$

დახრილ გლუვ სიბრტყეზე ტვირთის წნევა $\vec{Q}$ მოდულით N -ის ტოლია, ე.ი. $Q = N = 20\sqrt{3}$ ნ. ის მიმართულია $\vec{N}$ -ის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

მაშასადამე, ორივე მეთოდით მივიღეთ ერთი და იგივე შედეგი. ამასთანავე შევნიშნოთ, რომ გეომეტრიული ხერხით ამოცანის ამოხსნა მოხერხებულია, როცა სხეულზე მოქმედი ძალების რიცხვი (მოცემული და საძიებელი) სამის ტოლია, ხოლო ანალიზური მეთოდის გამოყენება შესაძლებელია სხეულზე მოქმედი ძალების ნებისმიერი რაოდენობისათვის.

ამოცანა 5. AC და BC ღეროები სახსრებით შეერთებულია ერთმანეთთან და ვერტიკალურ კედელთან (ნახ. 2.18, ა), C სახსარზე მოქმედებს ვერტიკალური $P=400$ ნ ძალა. განვსაზღვროთ C სახსარზე ამ ღეროების რეაქცია, თუ $\alpha=30^\circ$, $\beta=60^\circ$

ამოხსნა. განვიხილოთ C სახსრის წონასწორობა (ნახ. 2.18,ბ). C სახსრის ღერძზე მოდებულია აქტიური $\vec{P}$ ძალა. AC და BC ღეროები C სახსრისთვის წარმოადგენენ ბმებს. გავათავისუფლოთ C სახსარი ბმებისაგან. შევცვალოთ ისინი $\vec{N}_1$ და $\vec{N}_2$ რეაქციებით, რომლებიც მიმართულია ღეროების გასწვრივ. ვიგულისხმობთ, რომ AC ღერო გაჭიმულია, ხოლო BC – შეკუმშული. ამიტომ $\vec{N}_1$ ძალა მიმართულია AC -ს გასწვრივ C სახსრიდან A -სკენ, ხოლო $\vec{N}_2$ – სახსრის ღერძისაკენ. მაშასადამე, C წერტილზე მოქმედებს სამი – $\vec{P}$, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ თავმოყრილი ძალა.



ნახ. 2.18

ამოცანა ჯერ ამოვხსნათ გეომეტრიულად. ვინაიდან C სახსარი წონასწორობაშია $\vec{P}$, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ ძალების მოქმედებით, ამიტომ ამ ძალების ტოლქმედი ნულის ტოლია, ე.ი. $\vec{P} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = 0$. მაშასადამე, $\vec{P}$, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ ძალებისათვის აგებული მრავალკუთხედი ჩაკეტილი უნდა იყოს, ე.ი. მივიღებთ ძალთა OEF სამკუთხედს. აგება დავიწყოთ მოცემული $\vec{P}$ ძალიდან. გამოვსახოთ ის $\vec{OE}$ ვექტორით, ხოლო შემდეგ მისი საწყისი და ბოლო წერტილებიდან გავატაროთ $\vec{N}_1$ და $\vec{N}_2$

ვექტორების პარალელური წრფეები მათ გადაკვეთამდე (ნახ. 2.18, გ). ამ ნახაზზე ვაჩვენოთ $\vec{N}_1$ და $\vec{N}_2$ ძალები, აგრეთვე α და β კუთხეები.

რადგან $\alpha + \beta = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$, მაშასადამე, OEF მართკუთხა სამკუთხედი. ამ სამკუთხედიდან გამოვთვალოთ:

$$N_1 = P \sin \beta = 400 \cdot \sin 60^\circ = 400 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 200\sqrt{3} \text{ ნ},$$

$$N_2 = P \sin \alpha = 400 \cdot \sin 30^\circ = 400 \cdot \frac{1}{2} = 200 \text{ ნ}.$$

ნახაზიდან ჩანს, რომ AC დერო გაჭიმულია, ხოლო BC -შეკუმშული. ამგვარად, მივიღეთ შემდეგი წესი: თუ ძალის გამომსახველი ვექტორი, რომლითაც დერო მოქმედებს სახსარზე და ამ დეროს რეაქციის ძალა (ძალვა) მიმართულია სახსრიდან, მაშინ დერო გაჭიმულია, თუ ეს ვექტორი მიმართულია სახსრისაკენ, მაშინ დერო შეკუმშულია.

ახლა განვიხილოთ ამ ამოცანის ამოხსნის ანალიზური ხერხი. რადგან $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$, ამიტომ კოორდინატთა სისტემის x და y ღერძებს მიემართავთ ამ ძალების ფუძეების გასწვრივ (ნახ. 2.18, გ). ამ შემთხვევაში წონასწორობის განტოლებები მიიღებს უფრო მარტივ სახეს. ვისარგებლოთ (2.10) განტოლებებით, გვექნება:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \Rightarrow N_2 - P \cos \beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \Rightarrow N_1 - P \cos \alpha = 0.$$

ამ განტოლებათა სისტემიდან მივიღებთ:

$$N_2 = P \sin \beta = 400 \cdot \cos 60^\circ = 400 \cdot 0,5 = 200 \text{ ნ};$$

$$N_1 = P \cos \alpha = 400 \cdot \cos 30^\circ = 400 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 200\sqrt{3} \text{ ნ}.$$

მაშასადამე, ორივე ხერხით ამოხსნის შედეგები ერთმანეთს ემთხვევა.

შენიშვნა. ამ ამოცანის ანალიზური ხერხით ამოხსნის დროს წინასწარ არ არის ცნობილი $\vec{N}_1$ და $\vec{N}_2$ რეაქციების მიმართულება AC და BC დეროების გასწვრივ. ასეთ შემთხვევაში ეს რეაქციები შეიძლება მიმართული იყოს AC და BC

დეროების გასწვრივ ნებისმიერ მხარეს. თუ წონასწორობის განტოლებების ამოხსნის შედეგად ამ რეაქციებისათვის მივიღებთ დადებით მნიშვნელობას, მაშინ რეაქციები მიმართული ყოფილა სწორად. თუ რომელიმე უცნობი რეაქციისათვის მივიღებთ უარყოფით მნიშვნელობას, ეს ნიშნავს, რომ ჩვენ მიერ შერჩეული რეაქციის მიმართულება უნდა შეეცვალოს საწინააღმდეგო მიმართულებით.

შემდგომისათვის შევთანხმდეთ, რომ სახსროვან ჭანჭიკზე (კვანძზე) მოდებული ღეროს უცნობი რეაქცია მივმართოთ კვანძიდან ამ ღეროს გასწვრივ. თუ წონასწორობის განტოლებების ამოხსნისას ამ რეაქციისათვის მივიღებთ დადებით მნიშვნელობას, მაშინ რეაქცია მიმართულია სწორად და, მაშასადამე, ღერო გაჭიმულია. თუ საძიებელი რეაქციისათვის მივიღებთ უარყოფით მნიშვნელობას, ის ნიშნავს, რომ სინამდვილეში ღეროს რეაქციას აქვს ჩვენი შერჩეული მიმართულების საწინააღმდეგო მიმართულება, ე.ი. იგი მიმართულია კვანძისაკენ და, მაშასადამე, მოცემული ღერო შეკუმშულია.

ამგვარად, ღეროს რეაქციის მიმართულების შესახებ მითითებული პირობის თანახმად, ამ რეაქციის ნიშნით შეიძლება განვსაზღვროთ, მოცემული ღერო გაჭიმული იქნება, თუ შეკუმშული.

2. ამოცანები, უცნობი მიმართულების მქონე რეაქციის შესაბამისი ბმებით

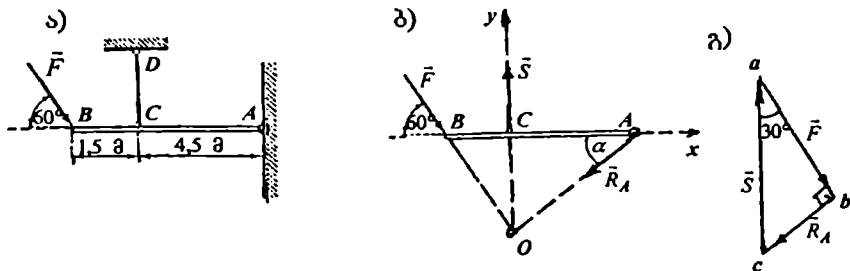
ამოცანა 6. 2.19 ა ნახაზზე გამოსახულია AB კოჭი, რომელიც პორიზონტალურ მდგომარეობაში შეკავებულია ვერტიკალური CD ღეროს საშუალებით. კოჭის ბოლოზე მოდებული $F = 6$ კნ ძალა პორიზონტალურად ადგენს 60° -იან კუთხეს. განვსაზღვროთ S ძალვა CD ღეროში და კოჭის R_A წნევა კედელზე, თუ A , C და D წერტილებში დამაგრება სახსროვანია. ღეროსა და კოჭის წონა უგულებელყოფილია.

ამოხსნა. განვიხილოთ AB კოჭის წონასწორობის პირობა, რომელზედაც მოდებულია $\vec{F}$ ძალა, CD ღეროს $\vec{S}$ ძალვა და A სახსრის $\vec{R}_A$ რეაქცია. CD ღეროს $\vec{S}$ ძალვა მიმართულია ღეროს გასწვრივ. უძრავი A სახსრის $\vec{R}_A$ რეაქცია მოდებულია კოჭის A წერტილზე, მისი მიმართულება უცნობია. $\vec{R}_A$ რეაქციის

ფუძის განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ თეორემა სამი არაპარალელური გაწონასწორებული ძალის შესახებ. რადგან AB კოჭი წონასწორობაშია ერთ სიბრტყეში მდებარე სამი ძალის მოქმედებით, აქედან გამომდინარე, ამ ძალების ფუძეები ერთ წერტილში იკვეთება. ამიტომ, $\vec{F}$ და $\vec{S}$ ძალების ფუძეებს გავაგრძელებთ მათ O წერტილში გადაკვეთამდე, მაშინ A წერტილში მოდებული $\vec{R}_A$ ძალა უნდა გადიოდეს O წერტილში და ამიტომ ის მიმართულია OA წრფის გასწვრივ (ნახ. 2.19, ბ).

$\vec{R}_A$ რეაქციის ფუძის განსაზღვრის შემდეგ ამოცანის ამოხსნა შეიძლება გეომეტრიულად (ძალთა შეკრული სამკუთხედის აგებით) ან ანალიზურად (გეგმილების მეთოდით).

ავაგოთ ძალთა სამკუთხედი. აგება დავიწყოთ ცნობილი $\vec{F}$ ძალიდან (ნახ. 2.19, გ).



ნახ. 2.19

რომ ვიპოვოთ $\vec{S}$ და $\vec{R}_A$ ძალების მიმართულება, საჭიროა ძალთა სამკუთხედისა ამ სამკუთხედის პერიმეტრის შემოვლა; ამ შემოვლის მიმართულება განისაზღვრება მოცემული $\vec{F}$ ძალის მიმართულებით. მაშინ $\vec{bc}$ ვექტორი განსაზღვრავს $\vec{R}_A$ ძალას, $\vec{ca}$ ვექტორი კი - $\vec{S}$ ძალას.

თუ აგებულ ძალთა სამკუთხედში განესაზღვრავთ კუთხეებს, მაშინ შეიძლება გამოთვალათ მისი გვერდების სიგრძე, ე.ი. ვიპოვიოთ $\vec{S}$ და $\vec{R}_A$ ძალების სიდიდეებს. განვიხილოთ BOC სამკუთხედი, რომელშიც $\angle OBC = 60^\circ$, ხოლო $\angle OCB = 90^\circ$, ამიტომ $OC = CB \lg 60^\circ = 1,5\sqrt{3}$. მართკუთხა OCA სამკუთხედიდან

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OC}{AC} = \frac{1,5\sqrt{3}}{4,5} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

მაშასადამე, Δabc -ში $\angle cab = 30^\circ$; $\angle acb = 60^\circ$, ამიტომ $\angle abc = 90^\circ$.
ამ სამკუთხედიდან ვპოულობთ

$$R_A = F \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \text{ კნ},$$

$$S = \frac{F}{\cos 30^\circ} = \frac{6}{\sqrt{3}/2} = 4\sqrt{3} \text{ კნ}.$$

ახლა ეს ამოცანა ამოვხსნათ ანალიზური ხერხით. კოორდინატთა სისტემის Cxy ღერძები ავირჩიოთ ისე, როგორც ეს ნახევრებია ნახაზზე (ნახ. 2.19, ბ). ყველა ძალა დავაგეგმილოთ ამ ღერძებზე და შევადგინოთ წონასწორობის ორი განტოლება. მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^3 F_{ix} = 0; \quad F \cos 60^\circ - R_A \cos 30^\circ = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad -F \cos 30^\circ - R_A \cos 60^\circ + S = 0.$$

აქედან

$$R_A = \frac{F \cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = 2\sqrt{3} \text{ კნ},$$

$$S = F \cos 30^\circ + R_A \cos 60^\circ = 4\sqrt{3} \text{ კნ}.$$

ამრიგად, განხილული ამოცანების ანალიზის საფუძველზე შეიძლება შემდეგი დასკვნის გამოტანა:

1. თუ მოცემულ სხეულზე, რომლის წონასწორობას განვიხილავთ ამოცანაში, ყველა დადებული ბმის რეაქციის ფუძე ცნობილია, მაშინ ამოცანის გეომეტრიული ხერხით ამოხსნის დროს საჭიროა ძალთა შეკრული მრავალკუთხედის აგება; აგება უნდა დაეწყოს მოცემული ძალებიდან. უცნობი ძალების რიცხვი არ უნდა იყოს ორზე მეტი.

იმ შემთხვევაში, როცა მოცემულ სხეულზე მოდებული ძალების რიცხვი, ბმების რეაქციების ჩათვლით, უდრის სამს, ამოცანა დაიყვანება მოცემული გვერდისა და დანარჩენი ორი გვერდის მიმართულების მიხედვით ძალთა სამკუთხედის აგებამდე.

ძალთა შეკრული მრავალკუთხედის აგების შემდეგ ორი უცნობი ძალის განსაზღვრა შეიძლება უშუალო გაზომვით ან გაანგარიშებით.

ჩვეულებრივ, ძალთა სამკუთხედის ტრიგონომეტრიული ამოხსნის დროს იყენებენ სინუსების თეორემას.

მაგრამ ზოგჯერ ძალების სიდიდის გამოსაანგარიშებლად ხელსაყრელია სინუსების თეორემის ნაცვლად მსგავსების მეთოდის გამოყენება, ე.ი. ამოცანის პირობიდან გამომდინარე ისეთი ცნობილგვერდებიანი სამკუთხედის პოვნა, რომელიც მსგავსია ძალთა სამკუთხედისა. მაშინ ძალთა სამკუთხედის უცნობი გვერდები ადვილად განისაზღვრება მსგავსი სამკუთხედების შესაბამისი გვერდების პროპორციულობის პირობიდან.

2. ამოცანის ანალიზური ხერხით ამოხსნის დროს უნდა შევარჩიოთ კოორდინატთა სისტემის ღერძები, ვიპოვოთ კუთხეები, რომლებსაც ყოველი ძალა ადგენს ამ ღერძებთან, და განვსაზღვროთ თითოეული ძალის გეგმილი კოორდინატთა ღერძებზე; კოორდინატთა თითოეულ ღერძზე ყველა ძალის გეგმილთა ჯამის ნულთან გატოლებით ვადგენთ წონასწორობის ორ განტოლებას და ეხსნით მათ.

თუ ამ განტოლებათა ამოხსნის შედეგად რომელიმე უცნობი ძალისთვის მივიღებთ უარყოფით მნიშვნელობას, მაშინ ეს ნიშნავს, რომ ძალას აქვს ჩვენ მიერ წინასწარ შერჩეული მიმართულების საწინააღმდეგო მიმართულება. მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ, თუ მოცემულ სხეულზე მოდებული ძალების რიცხვი სამზე მეტია, მაშინ საძიებელი ძალების განსაზღვრა გეომეტრიული ხერხით რთულდება. ასეთ შემთხვევაში ამოცანის ამოსახსნელად უკეთესია ანალიზური ხერხის გამოყენება.

3. როცა რომელიმე რეაქციის ძალის ფუძე უცნობია, მაგალითად, უძრავი ცილინდრული სახსრის ან საქუსლეს შემთხვევაში, ხოლო მოცემულ სხეულზე მოდებული ძალების რიცხვი უდრის სამს, მაშინ სამი არაპარალელური გაწონასწორებული ძალის ერთ წერტილში გადაკვეთის თეორემის გამოყენებით შეიძლება ვიპოვოთ წერტილი, რომელშიც გადის ეს უცნობი რეაქცია. თუ უცნობი რეაქციის მოდების წერტილიც მოცემულია, ამით განისაზღვრება ამ ძალის ფუძე. შემდეგ ამოცანის ამოხსნა შეიძლება გეომეტრიულად ან ანალიზურად, როგორც ეს მითითებული იყო ზემოთ განხილულ მაგალითებში.

2.6. სავარჯიშო ამოცანები, რომლებშიც ყველა ბმის რეაქციის მოქმედების ფუძე ცნობილია

2.15. განსაზღვრეთ BC ბაგირის $\vec{F}_3$ დაჭიმულობის ძალის მოდული, თუ ცნობილია AC ბაგირის დაჭიმულობა $F_2 = 15$ ნ. C წერტილის წონასწორობის მდგომარეობაში $\alpha = 30^\circ$, ხოლო $\beta = 60^\circ$ (ნახ. 1.20).

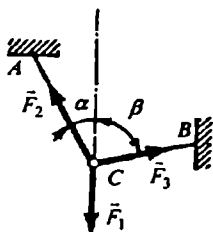
პასუხი: $F_3 = 5\sqrt{3}$ ნ.

2.16. AC და BC თოკებით დაკიდულია AB ძელი, თოკები ვერტიკალთან ადგენს α და β კუთხეებს (ნახ. 2.21). ცნობილია AC და BC თოკების დაჭიმულობები: $F_1 = 120$ ნ და $F_2 = 80$ ნ, აგრეთვე $\alpha = 45^\circ$ და $\beta = 30^\circ$ განსაზღვრეთ ძელის $\vec{G}$ წონის სიდიდე,

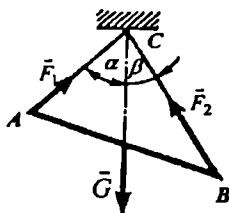
პასუხი: $G = 154$ ნ.

2.17. AC და BC ღეროები სახსრებით შეერთებულია ერთმანეთთან და ვერტიკალურ კედელთან (ნახ. 2.22). C სახსარზე მოქმედებს ტვირთის წონა. ამ ტვირთის მოქმედებით AC ღერო შეკუმშულია და ამ ღეროში ძალვა: $F_2 = 25$ ნ. მოცემულია კუთხეები: $\alpha = 60^\circ$ და $\beta = 45^\circ$. ჩათვალოთ, რომ AC და BC ღეროები უწონია, განსაზღვრეთ ძალვა BC ღეროში.

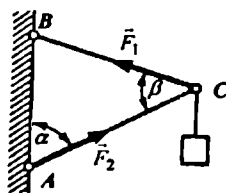
პასუხი: $F_1 = 22,5$ ნ.



ნახ. 2.20



ნახ. 2.21



ნახ. 2.22

2.18. AC და BC უწონი ღეროები შეერთებულია ერთმანეთთან C სახსრით, ხოლო იატაკთან – A და B სახსრების საშუალებით. C სახსარზე ჩამოკიდებულია ტვირთი 1. გან-

საზღვრეთ BC ღეროს რეაქცია, თუ AC ღეროში ძალეა $20\sqrt{3}$ ნ-ის ტოლია, კუთხეები: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$ (ნახ. 2.23).

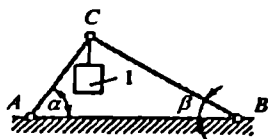
პასუხი: $S_{BC} = 20$ ნ.

2.19. $P = 2\sqrt{3}$ ნ წონის ტვირთი წონასწორობაშია შეკავებული ვერტიკალურ სიბრტყეში მდებარე AC და BC ორი თოკის საშუალებით. განსაზღვრეთ AC და BC თოკების დაჭიმულობა, თუ კუთხე $\alpha = 30^\circ$ (ნახ. 2.24).

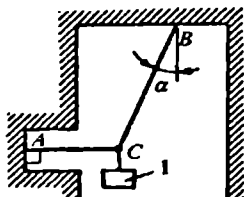
პასუხი: $S_A = 2$ ნ, $S_B = 4$ ნ.

2.20. ვერტიკალურ სიბრტყეში მდებარე OA და OB ორი ღერო სახსრებითაა შეერთებული ერთმანეთთან და ჭერთან. ისინი წონასწორობაში იჭერენ $P = 20$ ნ წონის ტვირთს, რომელიც დაკიდებულია C წერტილში მიმაგრებული ბაგირის საშუალებით (ნახ. 2.25). განსაზღვრეთ OA და OB ღეროების რეაქციები, თუ კუთხე $\alpha = 45^\circ$, კუთხე $\beta = 45^\circ$.

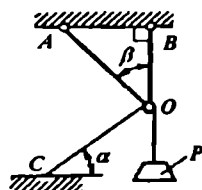
პასუხი: $S_A = -20$ ნ, $S_B = 20\sqrt{2}$.



ნახ. 2.23



ნახ. 2.24



ნახ. 2.25

2.21. $G_1 = 16\sqrt{3}$ ნ წონის ბირთვი 1 და ბირთვი 2 დაკავშირებულია D ბლოკზე გადაკიდებული ძაფით და წონასწორობაში იმყოფებიან. განსაზღვრეთ ბირთვი 2-ის წონა, თუ კუთხე $\alpha = 30^\circ$ (ნახ. 2.26).

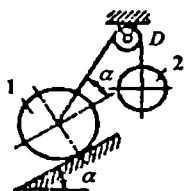
პასუხი: $G_2 = 16$ ნ.

2.22. 12 ნ წონის ერთგვაროვანი ბირთვი გლუვ დახრილ სიბრტყეზე AB თოკის საშუალებით წონასწორობის მდგომარეობაშია შეკავებული. განსაზღვრეთ ბირთვის წნევა სიბრტყეზე, თუ კუთხე $\alpha = 60^\circ$ (ნახ. 2.27).

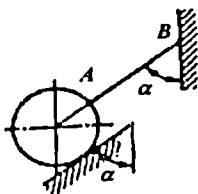
პასუხი: $N = 10,4$ ნ.

223. ვერტიკალურ სიბრტყეში მდებარე $G=8$ ნ წონის ფირფიტა შეკავებულია წონასწორობაში AB და CD ორი თოკის საშუალებით. განსაზღვრეთ CD თოკის დაჭიმულობა, თუ კუთხე $\alpha=30^\circ$ (ნახ. 228).

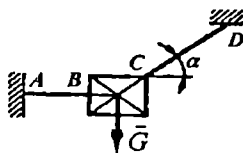
პასუხი: $S_{CD}=16$ ნ.



ნახ. 226



ნახ. 227



ნახ. 228

224. $20\sqrt{3}$ წონის ერთგვაროვანი ბირთვი ეყრდნობა ორ სიბრტყეს, რომლებიც იკვეთება $\alpha=60^\circ$ -იანი კუთხით. განსაზღვრეთ დახრილ სიბრტყეზე ბირთვის წნევის ძალა (ნახ. 229).

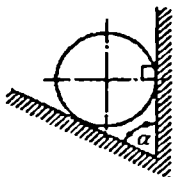
პასუხი: $N=40$ ნ.

225. $G=36\sqrt{2}$ ნ წონის ერთგვაროვანი ბირთვი 2 ეყრდნობა 1 და 3 გორგოლაჭებს. განსაზღვრეთ ბირთვის წნევა 1 გორგოლაჭზე, თუ კუთხე $\alpha=45^\circ$ (ნახ. 230).

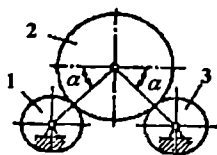
პასუხი: $N_1=36$ ნ.

226. $\vec{G}$ წონის ცილინდრი წონასწორობის მდგომარეობაში შეკავებულია AB თოკის საშუალებით. საყრდენი ზედაპირის ნორმალური რეაქცია $N=30\sqrt{2}$ ნ. განსაზღვრეთ AB თოკის $\vec{F}$ დაჭიმულობა, თუ ცნობილია კუთხეები: $\alpha=45^\circ$ და $\beta=30^\circ$ (ნახ. 231).

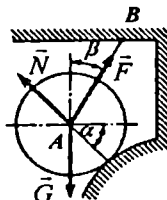
პასუხი: $F=60$ ნ.



ნახ. 229



ნახ. 230



ნახ. 231

227. $R=80$ სმ რადიუსის მქონე გლუვი ცილინდრი, რომლის წონაა $P=7$ კნ, მოთავსებულია NC ვერტიკალურ კედელსა და A საფეხურს შორის (ნახ. 232). განსაზღვრეთ ცილინდრის წნევა BC კედელზე და A საფეხურზე, თუ A წერტილიდან ცილინდრის პორიზონტალურ მხებ CC_1 სიბრტყემდე მანძილი $h=10$ სმ.

პასუხი: $N_A=8$ კნ; $N_D=3,87$ კნ.

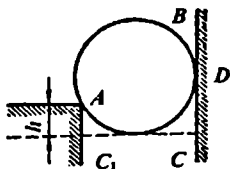
228. AB ღერო უძრავ საყრდენზე მიმაგრებულია A სახსრით (ნახ. 233, ა). ღეროს B ბოლოზე ჩამოკიდებულია $P=10$ კნ წონის ტვირთი და მიბმულია ძაფი. ძაფი გადაკიდებულია იდეალურ C ბლოკზე, მასზე ჩამოკიდებულია $Q=14,1$ კნ წონის ტვირთი. C ბლოკისა და A სახსრის ღერძები მოთავსებულია ერთ ვერტიკალზე, ამასთან $AC=AB$. სისტემის წონასწორობის შემთხვევისათვის იპოვეთ α კუთხე და ღეროში ძალვა. ღეროს წონა და ბლოკის ზომები არ მივიღოთ მხედველობაში.

პასუხი: $R_A=10$ კნ; $\alpha=90^\circ$ (ღერო პორიზონტალურია).

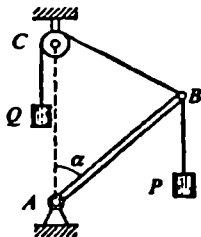
229. AB და AC ორი უწონო ღერო ერთმანეთთან და პორიზონტალურ იატაკთან სახსრებითაა შეერთებული. A სახსარზე ჩამოკიდებულია $\bar{P}$ წონის M_1 ტვირთი და მიბმულია D ბლოკზე გადადებული დრეკადი ბაგირი, რომლის თავისუფალ ბოლოზე ჩამოკიდებულია $\bar{Q}$ წონის M_2 ტვირთი (ნახ. 234). ბაგირის AD მონაკვეთი პორიზონტალურია. განსაზღვრეთ ძაღვები AB და AC ღეროებში. $\bar{Q}$ ძაღვის რა მნიშვნელობისათვის იქნება AB ღერო შეკუმშული, თუ ცნობილია α და β კუთხეები.

პასუხი: $T_{AC} = -\frac{Q \sin \alpha + P \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$; $T_{AB} = \frac{Q \sin \beta - P \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$;

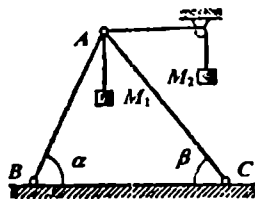
$Q < P \operatorname{ctg} \beta$.



ნახ. 232



ნახ. 233



ნახ. 234

230. $P = 6$ ტ წონის ტვირთი ჩამოკიდებულია A ბლოკზე გადაკიდებული და D ჯალამბარზე მიმაგრებული ბაგირის საშუალებით. განსაზღვრეთ ძალები ამწის AC და BC ღეროებში. ღეროებისა და ბაგირის მიმართულების განმსაზღვრელი კუთხეები მოცემულია ნახაზზე (ნახ. 2.35).

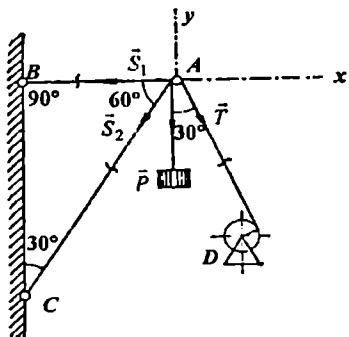
მითითება. განიხილეთ A კვანძის წონასწორობა. მასზე მოქმედი აქტიური და რეაქციის ძალები ნაჩვენებია ნახაზზე.

$$\text{პასუხი: } S_1 = \frac{2P \cos 15^\circ \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 9,4 \text{ ტ;}$$

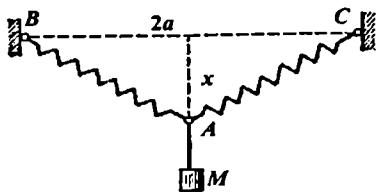
$$S_2 = \frac{2P \cos 15^\circ \sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 12,9 \text{ ტ.}$$

231. $\bar{P}$ წონის M ტვირთი ჩამოკიდებულია AB და AC ორ ერთნაირ ზამბარაზე. თითოეულის სიხისტის კოეფიციენტი $C = 500$ ნ/მ. ტვირთის დაკიდებამდე ზამბარებს ეჭირა არადეფორმირებული პორიზონტალური მდებარეობა. როგორი უნდა იყოს ტვირთის $\bar{P}$ წონის სიდიდე, რომ M ტვირთი გადაადგილდეს ვერტიკალზე $x = 4$ სმ-ით, თუ $a = 3$ სმ (ნახ. 2.36).

პასუხი: $P = 1600$ ნ.



ნახ. 2.35



ნახ. 2.36

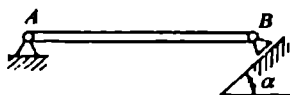
2.7. სავარჯიშო ამოცანები ისეთი ბმების შესახებ, რომელთა რეაქციის მიმართულება უცნობია

2.32. ერთგვაროვანი პორიზონტალური AB კოჭის წონა $G=180$ ნ. მოკემული კუთხე $\alpha=45^\circ$. განსაზღვრეთ A სახსრის რეაქცია (ნახ. 2.37).

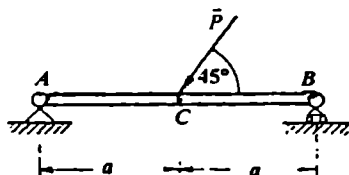
პასუხი: $R_A=90\sqrt{2}$ ნ.

2.33. AB ძელი A წერტილში უძრავი სახსრით არის დამაგრებული, ხოლო B ბოლოთი საგორავეების საშუალებით ეყრდნობა გლუვ პორიზონტალურ სიბრტყეს (ნახ. 2.38). ძელის შუა C წერტილზე მოქმედებს $\vec{P}$ ძალა. იპოვეთ საყრდენთა რეაქციები, თუ $P=2$ ტ, $a=2$ მ.

პასუხი: $R_A=1,58$ ტ. $R_B=0,71$ ტ.



ნახ. 2.37



ნახ. 2.38

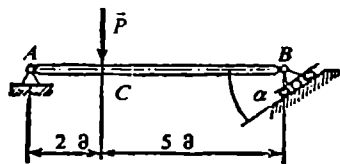
2.34. პორიზონტალური AB ძელი A წერტილში უძრავი სახსრით არის დამაგრებული, ხოლო B ბოლოთი საგორავეების საშუალებით ეყრდნობა პორიზონტალურ სიბრტყეს $\alpha=30^\circ$ კუთხით დახრილ გლუვ სიბრტყეს. C წერტილზე მოქმედებს $P=50$ კნ ძალა (ნახ. 2.39). განსაზღვრეთ საყრდენთა რეაქციები.

პასუხი: $R_A=36,6$ კნ; $R_B=16,5$ კნ.

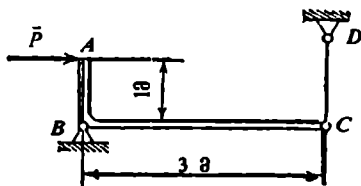
2.35. რკინის ABC ძელი უძრავ საყრდენთან B სახსრითაა შეერთებული და სახსრის თავზე მოღუნულია მარტი კუთხით. ის წონასწორობის მდგომარეობაშია შეკავებული C წერტილში მიბმული CD ჯაჭვის საშუალებით (ნახ. 2.40). ძელის A წერტილზე მოქმედებს პორიზონტალური $P=2$ კნ ძალა.

განსაზღვრეთ CD ჯაჭვის დაჭიმულობა და B ცილინდრული სახსრის R_B რეაქციის მოდული.

პასუხი: $R_B = \frac{2}{3}\sqrt{10}$ კნ; $T_{CD} = \frac{2}{3}$ კნ.



ნახ. 239



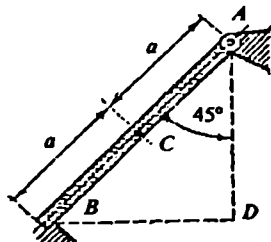
ნახ. 240

236. 241 ნახაზზე კვეთში წარმოდგენილი ფანჯრის AB ჩარჩოს შეუძლია ბრუნვა A სახსრის პორიზონტალური ღერძის გარშემო და თავისი B ბოლოთი თავისუფლად ეყრდნობა კილოს საფეხურს. იპოვეთ საყრდენთა რეაქციები, თუ მოცემულია, რომ ჩარჩოს წონა, რომელიც 89 კგ-ს უდრის, მოდებულია ჩარჩოს შუა C წერტილში და $AD = BD$.

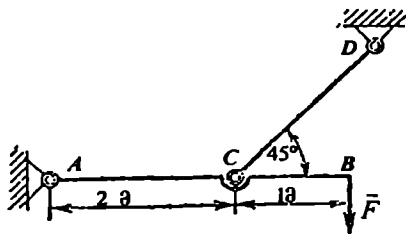
პასუხი: $R_A = 70,4$ კგ; პასუხი: $R_B = 31,5$ კგ.

237. AB კოჭი შეკავებულია პორიზონტალურ მდგომარეობაში CD ღეროთი (ნახ. 242). დამაგრება A , C და D წერტილებში სახსროვანია. განსაზღვრეთ A და D საყრდენთა რეაქციები, თუ კოჭის ბოლოზე მოქმედებს ვერტიკალური $F = 5$ ტ ძალა. ზომები ნახაზზეა მოცემული. კოჭის წონა უგულებელყოფილია.

პასუხი: $R_A = 7,9$ ტ; $R_D = 10,5$ ტ.



ნახ. 241

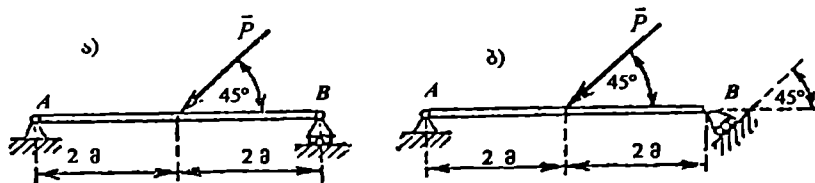


ნახ. 242

2.38. *A* საყრდენზე სახსროვნად დამაგრებული *AB* კოჭის *B* ბოლო დევს საგორავეზე. კოჭის შუა წერტილში მოდებულია $P=2$ ტ ძალა, რომელიც კოჭის ღერძთან ქმნის 45° -იან კუთხეს. განსაზღვრეთ საყრდენთა რეაქციები (ა) და (ბ) შემთხვევაში, თუ კოჭის წონა უგულებელყოფილია. ზომები აიღეთ ნახაზიდან (ნახ. 43, ა, ბ).

პასუხი: ა) $R_A = 1,58$ ტ. $R_B = 0,71$ ტ;

ბ) $R_A = 2,24$ ტ; $R_B = 1$ ტ.

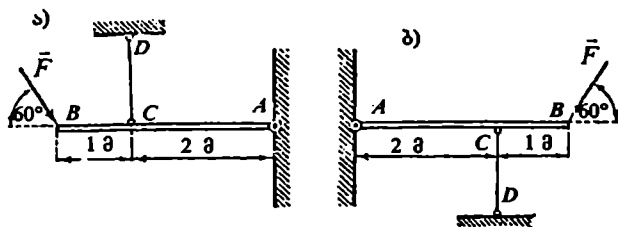


ნახ. 2.43

2.39. 2.44 ნახაზზე გამოსახულია *AB* კოჭები, რომლებიც პორიზონტალურ მდგომარეობაში შეკავებულია ვერტიკალური *CD* ღეროს საშუალებით. კოჭების ბოლოებზე მოდებული $F=3$ ტ ძალა პორიზონტალთან ადგენს 60° -იან კუთხეს. აიღეთ ზომები ნახაზიდან და განსაზღვრეთ *S* ძალვა *CD* ღეროში და კოჭის *Q* წნევა კედელზე, თუ დამაგრება *A*, *C* და *D* წერტილებში სახსროვანია. ღეროებისა და კოჭების წონა უგულებელყოფილია.

პასუხი: ა) $S = 3,9$ ტ; $Q = 1,98$ ტ;

ბ) $S = 3,9$ ტ; $Q = 1,98$ ტ.



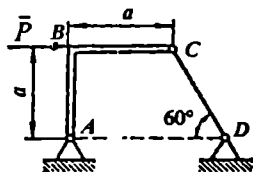
ნახ. 2.44

2.40. ABC ღერო მოღუნულია B წერტილში მართი კუთხით და სახსრიო მიმაგრებულია CD ღეროსთან (ნახ. 2.45). ამასთან $AB = BC = a$, $\angle ADC = 60^\circ$ განსაზღვრეთ A საყრდენის და CD ღეროს რეაქციები, თუ BC -ს გასწვრივ მოქმედებს $P = 60$ ნ ძალა.

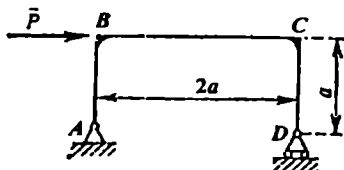
პასუხი: $R_A = 53,8$ ნ, $S_{CD} = 43,9$ ნ.

2.41. 2.46 ნახაზზე გამოსახული ჩარჩოსათვის განსაზღვრეთ საყრდენთა R_A და R_B რეაქციები, რომლებიც წარმოიქმნება B წერტილში მოდებული პორიზონტალური $P = 10\sqrt{5}$ ნ ძალით. ჩარჩოს წონა უგულებელყოფილია.

პასუხი: $R_A = 25$ ნ; $R_D = 5\sqrt{5}$ ნ.



ნახ. 2.45



ნახ. 2.46

2.8. ერთ სიბრტყეში არამდებარე თავმოყრილი ძალების შეკრება

სივრცით თავმოყრილ ძალთა სისტემის ტოლქმედი, ისევე, როგორც ერთ სიბრტყეში მდებარე თავმოყრილი ძალების შემთხვევაში, უდრის შესაკრები ძალების გეომეტრიულ ჯამს, ე.ი. სიდიდითა და მიმართულებით არის იმ ძალთა მრავალკუთხედის ჩამკეტი გვერდი, რომლის გვერდები მოცემული ძალების ტოლი და პარალელურია, მაშასადამე, გვაქვს (2.1) ტოლობა. კერძო შემთხვევაში, როცა ერთ სიბრტყეში არამდებარე შესაკრები ძალების რიცხვი უდრის სამს, მათი ტოლქმედი სიდიდითა და მიმართულებით გამოისახება ამ ძალებზე აგებული პარალელეპიპედის დიაგონალით (იხ. ნახ. 1.7 და 1.8). თავმოყრილ ძალთა სივრცითი სისტემისათვის აგებული ძალთა მრავალკუთხედი არ არის ბრტყელი ფიგურა.

ამიტომ ერთ სიბრტყეში არამდებარე ძალების შეკრების დროს ხელსაყრელია ანალიზური ხერხის გამოყენება.

ანალიზურად რომ ვიპოვოთ თავმოყრილ ძალთა სივრცითი სისტემის ტოლქმედის სიდიდე და მიმართულება, მოცემულ ღერძზე ტოლქმედის გეგმილის შესახებ თეორემის გამოყენებით ჯერ უნდა განვსაზღვროთ ამ ტოლქმედის გეგმილები კოორდინატთა Ox , Oy , Oz ღერძებზე (2.2) ფორმულებით.

კოორდინატთა ღერძებზე ტოლქმედის გეგმილების განსაზღვრის შემდეგ ტოლქმედის სიდიდესა და მიმართულებას ვეძებთ (2.3) და (2.4) ფორმულებით.

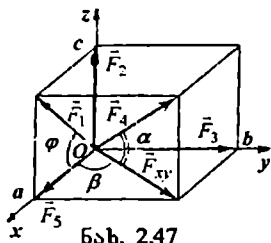
სამ ურთიერთმართობ კოორდინატთა ღერძზე ძალის გეგმილების გამოთვლის დროს უფრო, ხშირად გვხვდება შემდეგი ორი შემთხვევა:

1. ძალასა და კოორდინატთა ღერძებს შორის კუთხეები ან მოცემულია, ან ამოცანის პირობიდან, მაგალითად, შესაბამისი სამკუთხედიდან ადვილად განისაზღვრება. ამ შემთხვევაში გეგმილის სიდიდე და ნიშანი განისაზღვრება ისევე, როგორც ბრტყელ თავმოყრილ ძალთა სისტემის შემთხვევაში (იხ. 2.3 პარაგრაფი).

2. მოცემული ძალა და კოორდინატთა ღერძი, რომელზეც უნდა დავაგეგმილოთ ეს ძალა, ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობს და მათ შორის კუთხე არ არის მოცემული. ამ შემთხვევაში ხშირად მიზანშეწონილია ჯერ დავაგეგმილოთ მოცემული ძალა იმ საკოორდინატო სიბრტყეზე, რომელზეც დევს გეგმილის ღერძი, შემდეგ კი ამ სიბრტყეზე მიღებული გეგმილი დავაგეგმილოთ სათანადო კოორდინატთა ღერძზე. ამისათვის ჯერ უნდა ვიპოვოთ კუთხე მოცემულ ძალასა და იმ საკოორდინატო სიბრტყეს შორის, რომელზეც ამ ძალას ვაგეგმილებთ, შემდეგ კი განვსაზღვროთ კუთხე ამ სიბრტყეზე ძალის გეგმილსა და კოორდინატთა მოცემულ ღერძს შორის (იხ. 1.4 პარაგრაფი).

ამოცანა 7. განვსაზღვროთ 2.47 ნახაზზე გამოსახული სივრცითი თავმოყრილ ძალთა სისტემის ტოლქმედის მოდული და მიმართულება, თუ ძალების მოდულებია: $F_1 = 5$ კნ; $F_2 = 2$ კნ; $F_3 = 3$ კნ; $F_4 = 10\sqrt{2}$ კნ; $F_5 = 2$ კნ, ამასთან მართკუთხა პარალელეპიპედის O წვეროდან გამოსული წიბოების სიგრძეა $a = 3$ მ; $b = 4$ მ და $c = 5$ მ.

ამოხსნა. საძიებელი $\vec{R}$ ტოლქმედის მოძული შეიძლება



ნახ. 2.47

განესაზღვროთ, როგორც $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_5$ ძალებზე აგებული ძალთა მრავალკუთხედის ჩამკეტი გვერდის სიგრძე, ე.ი. $\vec{R} = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_5$. მაგრამ, ვინაიდან ამ ძალებზე აგებული მრავალკუთხედი სივრცითი ტეხილია და $\vec{R}$ ტოლქმედის სიდიდისა და მიმართულების განსაზღვრისათვის საჭიროა ავაგოთ ან მოდელი, ანდა გამოვიყენოთ მხაზე-

ლობითი გეომეტრიის რთული მეთოდები.

ამ ამოცანის ამოხსნა შესაძლებელია გაცილებით მარტივად, გეგმილების მეთოდის გამოყენებით.

მაშასადამე, ტოლქმედის სიდიდისა და მიმართულების განსაზღვრისათვის ვიპოვოთ მისი გეგმილები Ox , Oy , Oz სამ ღერძზე, რომლებიც მიმართულია მართკუთხა პარალელებიკედის წიბოების გასწვრივ, ისე, როგორც 2.47 ნახაზზეა ნაჩვენები. $\vec{R}$ ტოლქმედის გეგმილები განესაზღვროთ (2.2) ფორმულებით.

მოცემულ შემთხვევაში ამ ფორმულებს აქვს სახე:

$$\begin{aligned} R_x &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} + F_{5x}, \\ R_y &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} + F_{5y}, \\ R_z &= F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + F_{4z} + F_{5z}. \end{aligned} \quad (1)$$

გამოვთვალოთ Ox , Oy , Oz ღერძებზე გეგმილები:

$$\begin{aligned} F_{1x} &= F_1 \cos \varphi; \quad F_{1y} = F_1 \cos 90^\circ = 0; \quad F_{1z} = F_1 \sin \varphi; \\ F_{2x} &= F_2 \cos 90^\circ = 0; \quad F_{2y} = F_2 \cos 90^\circ = 0; \quad F_{2z} = F_2; \\ F_{3x} &= F_3 \cos 90^\circ = 0; \quad F_{3y} = F_3; \quad F_{3z} = F_3 \cos 90^\circ = 0; \\ F_{4x} &= F_4 \cos \alpha \cos \beta; \quad F_{4y} = F_4 \cos \alpha \sin \beta; \quad F_{4z} = F_4 \sin \alpha; \\ F_{5x} &= F_5; \quad F_{5y} = F_5 \cos 90^\circ = 0; \quad F_{5z} = F_5 \cos 90^\circ = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

შენიშვნა: $\vec{F}_4$ ძალის გეგმილი Oxy სიბრტყეზე არის $\vec{F}_{xy}$ ვექტორი (იხ. 1.4 პარაგრაფი), ე.ი. $\vec{F}_{xy} = \vec{F}_4 \cos \alpha$.

ახლა 2.47 ნახაზიდან ვიპოვოთ α , β და φ კუთხეები კოსინუსები და სინუსები:

$$\cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}; \quad \sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{4}{5};$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{3}{\sqrt{34}} = 0,52; \quad \sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{5}{\sqrt{34}} = 0,91.$$

ჩავსვათ მოცემული და მიღებული რიცხვითი მნიშვნელობები (1)-სა და (2)-ში, მივიღებთ:

$$R_x = F_1 \cos \varphi + F_4 \cos \alpha \cdot \cos \beta + F_5 = 5 \cdot 0,52 + \\ + 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + 2 = 10 \text{ კნ};$$

$$R_y = F_3 + F_4 \cos \alpha \cdot \sin \beta = 3 + 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} = 11 \text{ კნ};$$

$$R_z = F_1 \sin \varphi + F_2 + F_4 \sin \alpha = 5 \cdot 0,91 + 2 + 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 16,6 \text{ კნ}.$$

ახლა (2.3) ფორმულით ადვილად მიიღება $\vec{R}$ ტოლქმედის მოდული:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{10,6^2 + 11^2 + 16,6^2} = 22,6 \text{ კნ}.$$

გამოვთვალოთ მიმართულების კოსინუსები (2.4) ფორმულებით:

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{10,6}{22,6} = 0,45; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R} = \frac{11}{22,6} = 0,49;$$

$$\cos \gamma = \frac{16,6}{22,6} = 0,73,$$

საიდანაც

$$\alpha = (\vec{R}, \hat{x}) = 63^\circ 50'; \quad \beta = (\vec{R}, \hat{y}) = 60^\circ 50'; \quad \gamma = (\vec{R}, \hat{z}) = 42^\circ 50'$$

2.9. სავარჯიშო ამოცანები ერთ სიბრტყეში არამდებარე
თავმოყრილი ძალების შეკრებაზე

2.42. მოცემულია $\vec{F}$ ძალის გეგმილები $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე: $F_x = 3$ ნ, $F_y = \sqrt{31}$ ნ, $F_z = 2\sqrt{6}$ ნ. განსაზღვრეთ ამ ძალის მოდული.

პასუხი: $F = 8$ ნ.

2.43. განსაზღვრეთ $\vec{F} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \sqrt{5}\vec{k}$ ნ ძალის მიერ x , y და z ღერძებთან შესაბამისად შედგენილი α , β და γ კუთხეთა კოსინუსები.

პასუხი: $\cos \alpha = \frac{2}{5}$; $\cos \beta = \frac{4}{5}$; $\cos \gamma = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

2.44. იპოვეთ $\vec{F}_1 = 7\vec{i} + 10\vec{j}$ ნ, $\vec{F}_2 = -5\vec{i} + 15\vec{j} + 12\vec{k}$ ნ და $\vec{F}_3 = -23\vec{j} - 11\vec{k}$ ნ თავმოყრილი ძალების ტოლქმედის მოდული და Ox ღერძთან შედგენილი α კუთხის კოსინუსი.

პასუხი: $R = 3$ ნ; $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

2.45. დეკარტის $Oxyz$ კოორდინატთა ღერძების O სათავეში მოდებულია $\vec{F}_1 = 5\vec{i} + 7\vec{j} + \sqrt{26}\vec{k}$ ნ და $\vec{F}_2 = 4\vec{i} + 9\vec{j} + \sqrt{26}\vec{k}$ ნ ორი ძალა. იპოვეთ ამ ძალთა სისტემის ტოლქმედის მოდული.

პასუხი: $R = 21$ ნ.

2.46. განსაზღვრეთ $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$ ნ ძალის მიერ $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის ღერძებთან შედგენილი α , β და γ კუთხეთა კოსინუსები და კუთხეები გრადუსებში.

პასუხი: $\cos \alpha = \frac{3}{5}$; $\cos \beta = 0$; $\cos \gamma = \frac{4}{5}$; $\alpha = 53^\circ$, $\beta = 90^\circ$,

$\gamma = 37^\circ$

2.47. განსაზღვრეთ $\vec{F} = 3\vec{i} + 7\vec{j} + \sqrt{6}\vec{k}$ ძალის Ox ღერძთან შედგენილი α კუთხე გრადუსებში.

პასუხი: $\cos \alpha = \frac{3}{8}$ $\alpha = 68^\circ$

248. სივრცით ძალთა სისტემის $\vec{R}$ ტოლქმედის მოდული $40\sqrt{3}$ ნ-ის ტოლია. განსაზღვრეთ მისი გეგმილი Oy ღერძზე, თუ ცნობილია $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$ (ნახ. 248).

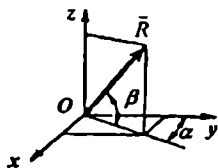
პასუხი: $R_y = 30$ ნ.

249. განსაზღვრეთ $\vec{F}$ ძალის გეგმილი Ox ღერძზე, თუ $F = 200$ ნ. $\vec{F}$ ვექტორი Oxy სიბრტყესთან დახრილია $\alpha = 60^\circ$ - იანი კუთხით, ხოლო ამ სიბრტყეზე მისი $\vec{F}_{xy}$ გეგმილი Ox ღერძთან ადგენს $\beta = 60^\circ$ კუთხეს (ნახ. 249).

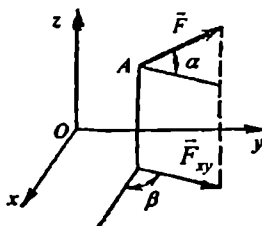
პასუხი: $F_x = 50$ ნ.

250. განსაზღვრეთ $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ და $\vec{F}_3$ სამი თავმოყრილი ძალის ტოლქმედის მოდული, $F_1 = \sqrt{10}$ ნ, $F_2 = 2\sqrt{3}$ ნ, $F_3 = 3$ ნ, თუ კუთხე $\beta = 60^\circ$

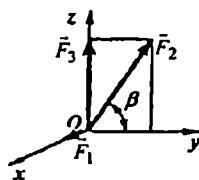
პასუხი: $R = 7$ ნ.



ნახ. 248



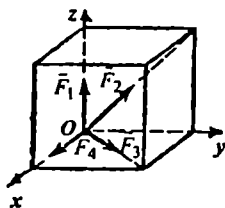
ნახ. 249



ნახ. 250

251. იპოვეთ კუბის O წერტილზე მოდებული ოთხი $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,

$\vec{F}_3$ და $\vec{F}_4$ თავმოყრილი ძალთა სისტემის $\vec{R}$ ტოლქმედის მოდული. $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_4$ ძალები კუბის წიბოების გასწვრივ არის მიმართული, ხოლო $\vec{F}_2$ და $\vec{F}_3$ - შესაბამისად უკანა და ქვედა წახნაგების დიაგონალების გასწვრივ. ძალების მოდულები ტოლია: $F_1 = F_4 = 2$ ნ; $F_2 = F_3 = 2\sqrt{2}$ ნ



ნახ. 251

(ნახ. 251).

პასუხი: $R = 4\sqrt{2}$ ნ.

2.10. ერთ სიბრტყეში არამდებარე (სივრცითი) თავმოყრილ ძალთა სისტემის წონასწორობა

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ იმ სხეულის წონასწორობას, რომელზედაც მოდებულია ერთ სიბრტყეში არამდებარე თავმოყრილ ძალთა სისტემა.

ზოგადად, ამოცანები, რომლებიც ეხება არაბრტყელ თავმოყრილ ძალთა სისტემის წონასწორობას, უფრო ადვილად ამოიხსნება ანალიზური ხერხით, წონასწორობის სამი განტოლების დახმარებით. ამასთანავე ყურადღება უნდა მიექცეს კოორდინატთა ღერძებზე ძალთა გეგმილების მოძებნას.

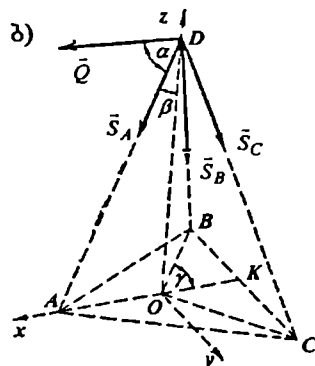
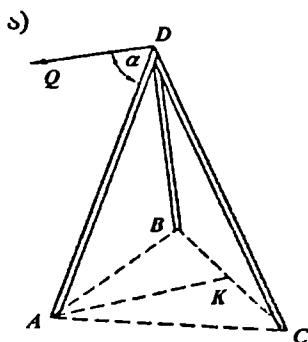
უნდა გავითვალისწინოთ, რომ, როდესაც გვაქვს ერთ სიბრტყეში არამდებარე ოთხი ძალის გაწონასწორებული სისტემა, მაშინ ამოცანის ამოხსნა უფრო გაადვილდება, თუ ორ მოცემულ ძალას შევცვლით მათი ტოლქმედით; რადგან სამი გაწონასწორებული ძალა ყოველთვის ერთ სიბრტყეში მდებარეობს, ამიტომ ერთ სიბრტყეში არამდებარე ოთხი თავმოყრილი ძალის წონასწორობის ამოცანა შეიძლება დავიყვანოთ სამი ძალის ბრტყელი სისტემის წონასწორობის ამოცანამდე, რომლის ამოხსნა განვიხილეთ 2.5 პარაგრაფში.

ამოცანა 8. $ABCD$ სამფეხას D კვანძზე მოდებულია სამფეხას ($BK = KC$) სიმეტრიის DAK სიბრტყეში მდებარე $Q = 100$ კნ ძალა, რომელიც AD ღეროსთან ადგენს $\alpha = 60^\circ$ კუთხეს (ნახ. 2.52, ა). განვსაზღვროთ AD , BD და CD ღეროებში ძალები, თუ $ABCD$ წესიერი ტეტრაედრია, A , B , C და D – სახსრები. ღეროების წონა უგულებელყოფილია.

ამოხსნა. განვიხილოთ D კვანძის წონასწორობა, რომელზედაც მოდებულია ღეროების $\vec{S}_A$, $\vec{S}_B$, $\vec{S}_C$ რეაქციები და აქტიური $\vec{Q}$ ძალა (ნახ. 2.52, ბ).

ვინაიდან ღეროები სახსრებით არიან დამაგრებული და მათ წონას უგულებელყოფთ, ამიტომ ღეროთა რეაქციები მიმართულია მათ გასწვრივ. დაუშვათ, რომ ღეროები გაჭიმულია, ე.ი. რეაქციები მოგეზულება D კვანძიდან. $\vec{Q}$, $\vec{S}_A$, $\vec{S}_B$, $\vec{S}_C$ ძალები არ მდებარეობს ერთ სიბრტყეში.

შევადგინოთ ამ ძალთა წონასწორობის სამი განტოლება. ამისათვის ჯერ შევარჩიოთ კოორდინატთა $Oxyz$ ღერძების სისტემა, ისე, როგორც ეს ნაჩვენებია 2.52, ბ ნახაზზე.



ნახ. 2.52

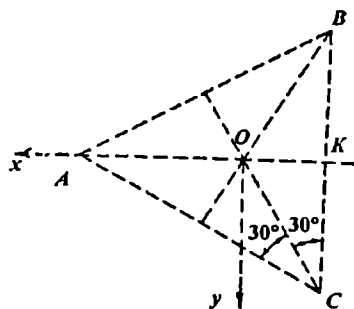
წონასწორობის განტოლებების შესადგენად ვისარგებლოთ (2.9) ფორმულებით, გვექნება:

$$\sum_{k=1}^4 F_{kx} = 0; \quad Q \sin(\alpha + \beta) + S_A \sin \beta - S_B \sin \beta \cdot \cos \gamma - S_C \sin \beta \cos \gamma = 0, \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^4 F_{ky} = 0; \quad -S_B \sin \beta \cdot \sin \gamma + S_C \sin \beta \sin \gamma = 0, \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^4 F_{kz} = 0; \quad -S_A \cos \beta - S_B \cos \beta - S_C \cos \beta - Q \cos(\alpha + \beta) = 0. \quad (3)$$

აქ კუთხე $\beta = \angle ADO$.



ნახ. 2.53

ამოვხსნათ მიღებული განტოლებები. (2) განტოლებიდან: $S_C = S_B$.

აღვნიშნოთ

$$\angle ADO = \angle BDO = \angle CDO = \beta,$$

$$\text{მაშინ } \sin \beta = \frac{AO}{AD}.$$

2.53 ნახაზიდან ჩანს, რომ $AO = OC$;

$$a = 2(AO) \cos 30^\circ; \Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

მაშასადამე,

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \beta = 35^{\circ}15'$$

(1) განტოლებიდან:

$$0,577S_A - 0,577S_B = -99,5. \quad (4)$$

(3) განტოლებიდან:

$$0,816S_A + 1,632S_B = 9,15. \quad (5)$$

(4) და (5) განტოლებათა სისტემის ამოხსნით მივიღებთ:

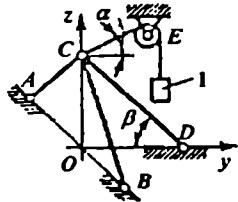
$$S_A = -112,3 \text{ კნ}; S_B = S_C = 61,7 \text{ კნ}.$$

რადგან $\bar{S}_A$ ძალისათვის მივიღეთ უარყოფითი მნიშვნელობა, ამიტომ ჩვენ მიერ შერჩეული მისი მიმართულება უნდა შევცვალოთ საწინააღმდეგო მიმართულებით. მაშასადამე, AD ღერო გაჭიმული კი არ არის, როგორც ეს ვაჩვენეთ, არამედ შეკუმშულია.

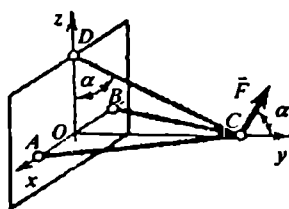
2.11. სავარჯიშო ამოცანები ერთ სიბრტყეზე არამდებარე თავმოყრილ ძალთა სისტემის წონასწორობაზე

2.52. C წერტილში სახსრულად შეერთებული BC , DC და AC ღეროებისა და E დოლზე გადაკიდებული თოკის საშუალებით წონასწორობაშია 60 ნ წონის ტვირთი 1. განსაზღვრეთ DC ღეროს S ძალვა, თუ ცნობილია კუთხეები: $\alpha = 30^{\circ}$ და $\beta = 45^{\circ}$ (ნახ. 2.54).

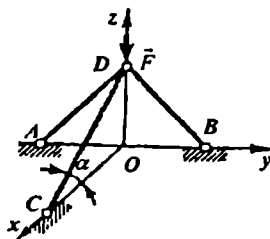
პასუხი: $S_x = -73,5$ ნ.



ნახ. 2.54



ნახ. 2.55



ნახ. 2.56

2.53. სამი AC , BC და DC ღერო შეერთებულია სახსრულად C წერტილში. განსაზღვრეთ ძალვა CD ღეროში, თუ

მოცემულია $F = 50$ ნ დალა და კუთხე $\alpha = 60^\circ$. $\vec{F}$ დალა Oyz სიბრტყეშია მოთავსებული (ნახ. 2.55).

პასუხი: $S_{CD} = -50\sqrt{3}$ ნ.

2.54. AD , BD და CD სამი ღერო სახსრულადაა შეერთებული D წერტილში. განსაზღვრეთ CD ღეროში ძალვა, თუ $F = 50$ ნ დალა მოთავსებულია oxz სიბრტყეში და კუთხე $\alpha = 30^\circ$ (ნახ. 2.56).

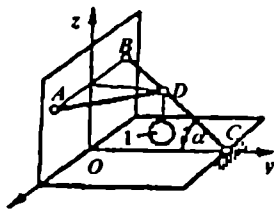
პასუხი: $S_{CD} = -16$ ნ.

2.55. AD , BD და CD სამი ღერო შეერთებულია D სახსარში. განსაზღვრეთ ძალვა CD ღეროში, თუ 1 ტვირთის წონა $G_1 = 20$ ნ, კუთხე $\alpha = 45^\circ$ (ნახ. 2.57).

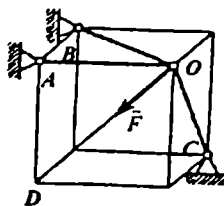
პასუხი: $S_{CD} = -20\sqrt{2}$ ნ.

2.56. AO , BO და CO სამი ღერო ერთმანეთთან O სახსრითაა შეერთებული. განსაზღვრეთ CO ღეროს რეაქცია, რომელიც აღიძვრება O სახსარზე მოდებული $F = 12$ ნ ძალის მოქმედებით, თუ $AB = AO = AD$ (ნახ. 2.58).

პასუხი: $S_{CO} = 13,9$ ბ.



ნახ. 2.57



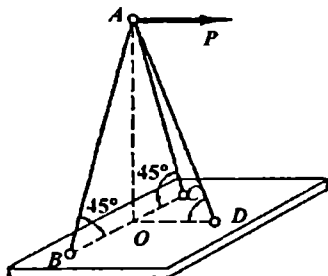
ნახ. 2.58

2.57. AB , AC და AD სამი ღერო სახსრებითაა შეერთებული ერთმანეთთან და ჰორიზონტალურ იატაკთან (ნახ. 2.59). ABC და AOD სიბრტყეები ვერტიკალური და ურთიერთმართობულია. A კვანძზე მოდებულია OD -ს პარალელური $\vec{P}$ ძალა. განსაზღვრეთ ღეროებში ძალები, თუ $\angle ABO = \angle ACO = 45^\circ$, $\angle ADO = 60^\circ$, $P = 0,6$ კნ.

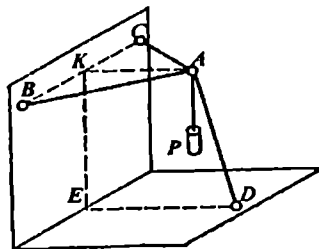
პასუხი: $S_B = S_C = 0,735$ კნ, $S_D = -1,2$ კნ.

2.58. A სახსარზე ჩამოკიდებულია $\vec{P}$ წონის ტვირთი (ნახ. 2.60) ABC სიბრტყე პორიზონტალურია, ხოლო $KADE$ - ვერტიკალური. AD პორიზონტთან დახრილია 30° კუთხით, $\angle ABK = \angle ACK = 45^\circ$ არ მიიღოთ მხედველობაში ღეროების წონა და ჩათვალოთ, რომ A, B, C და D წერტილებში შეერთებები სახსრულია. განსაზღვრეთ ძალები AB, AC, AD ღეროებში, თუ $P = 2,4$ კნ.

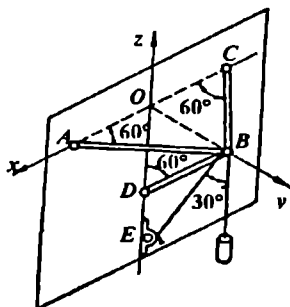
პასუხი: $S_B = S_C = -0,98$ კნ, $S_D = -2,77$ კნ.



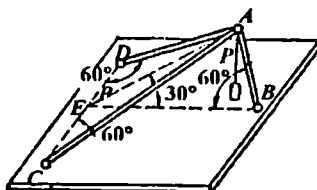
ნახ. 2.59



ნახ. 2.60



ნახ. 2.61



ნახ. 2.62

2.59. AB, BC და BD ღეროები ერთმანეთთან და ვერტიკალურ სიბრტყესთან შეერთებულია სახსრებით. E ჯალამბარზე დახეული დრეკადი ბაგირი გადაკიდებულია B ბლოკზე და მეორე ბოლოზე ჩამოკიდებულია $\vec{P}$ წონის ტვირთი (ნახ. 2.61). განსაზღვრეთ ღეროებში ძალები, თუ $P = 7$ კნ და ღეროების წონას უგულებელყოფთ.

პასუხი: $S_A = S_C = 7,9$ კნ; $S_D = -18,7$ კნ.

2.60. AB , AC და AD ღეროები ერთმანეთთან და პორიზონტალურ იატაკთან სახსრებით არის შეერთებული და მათ წონასწორობის მდგომარეობაში უკავია A სახსარზე ჩამოკიდებული $\bar{P}$ წონის ტვირთი (ნახ. 2.62). ABE სიბრტყე ვერტიკალურია, $\angle BEA = 30^\circ$, $\angle ABE = \angle ACE = \angle ADE = 60^\circ$. განსაზღვრეთ ღეროებში ძალები, თუ $P = 1,8$ კნ, ღეროების წონა არ მიიღოთ მხედველობაში.

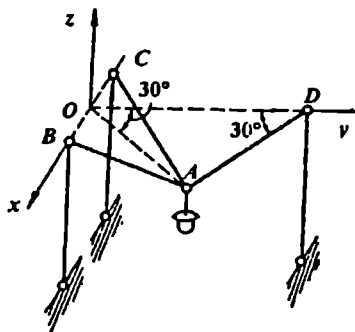
პასუხი: $S_B = -1,56$ კნ; $S_C = S_D = -0,52$ კნ.

2.61. P წონის ნათურა ჩამოკიდებულია A წერტილზე, რომელიც შეკავებულია სამი ბაგირის საშუალებით (ნახ. 2.63). განსაზღვრეთ ბაგირებში დაჭიმულობები, თუ $AB = BC = AC$ და $P = 3$ ნ.

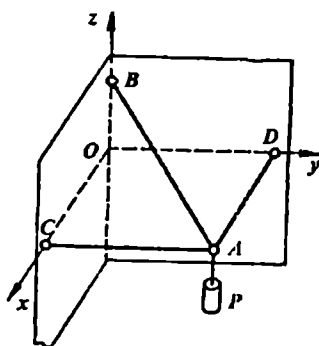
პასუხი: $T_B = T_C = \sqrt{3}$ ნ; $T_D = 3$ ნ.

2.62. $P = 4,8$ კნ წონის ტვირთი შეკავებულია AB , BC და AD უწონი სამი ღეროს საშუალებით. ღეროების A , B , C და D წერტილებში შეერთება სახსროვანია და მათი სიგრძეები: $AB = 130$ სმ, $AC = 40$ სმ და $AD = 30$ სმ (ნახ. 2.64). განსაზღვრეთ ღეროებში ძალები.

პასუხი: $S_B = 5,2$ კნ; $S_C = -1,6$ კნ; $S_D = -1,2$ კნ.



ნახ. 2.63

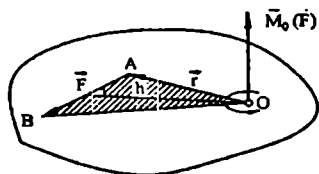


ნახ. 2.64

3. ძალის მომენტი წერტილისა და ღერძის მიმართ

3.1. ძალის ექვტორული მომენტი წერტილის მიმართ

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს სხეულის რომელიმე A წერტილზე მოდებული $\vec{F}$ ძალა (ნახ. 3.1). ავირჩიოთ სივრცეში რაიმე O წერტილი და ამ წერტილიდან $\vec{F}$ ძალის ფუძეზე დაუშვათ მართობი. მისი სიგრძე აღვნიშნოთ h -ით. h სიდიდეს ძალის მხარი ეწოდება, ხოლო O წერტილს – მომენტის ცენტრი.



ნახ. 3.1

$\vec{F}$ ძალის ექვტორული მომენტი O წერტილის მიმართ აღვნიშნოთ $\vec{M}_0(\vec{F})$ სიმბოლოთი ან $\vec{M}_0$ -ით.

განსაზღვრება. $\vec{F}$ ძალის ექვტორული მომენტი O წერტილის მიმართ ეწოდება $\vec{M}_0(\vec{F})$ ექვტორს, რომლის

სიგრძე $\vec{F}$ ძალის სიდიდისა და h მხარის ნამრავლის ტოლია და მოდებულია O წერტილზე იმ სიბრტყის მართობულად, რომელიც O წერტილსა და $\vec{F}$ ძალაზე გადის და მიმართულია ისე, რომ მის გასწვრივ მდგომი დამკვირვებლის მიმართ ძალა ცდილობს, სხეული საათის ისრის მოძრაობის საპირისპიროდ მოაბრუნოს (ნახ. 3.1).

თუ ექვტორული მომენტის განმარტებას შევადარებთ ორი ექვტორის ექვტორული ნამრავლის განმარტებას, მაშინ ძალის ექვტორული მომენტი შეიძლება წარმოვადგინოთ $\vec{OA} = \vec{r}$ რადიუს-ექვტორისა და $\vec{F}$ ძალის ექვტორული ნამრავლის სახით:

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3.1)$$

განსაზღვრების მიხედვით $\vec{M}_0$ ექვტორი არის ბმული ექვტორი და მისი სიგრძე

$$|\vec{M}_0| = |\vec{F}| \cdot h. \quad (3.2)$$

ზოგჯერ სასარგებლოა (3.2) ფორმულა ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$|\vec{M}_0| = 2S, \quad (3.3)$$

სადაც S არის OAB სამკუთხედის ფართობი.

SI სისტემაში მომენტის საზომი ერთეულია ნ·მ, ხოლო ტექნიკურ ერთეულთა სისტემაში – კგძმ.

ვექტორული მომენტის თვისებები შემდეგია:

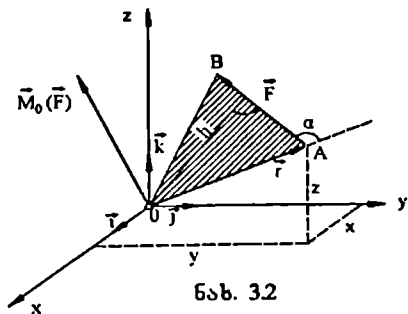
1. თუ ძალა ნულის ტოლია ან მისი ფუძე გადის მომენტთა ცენტრზე, მაშინ ვექტორული მომენტი ნულის ტოლია;
2. თუ ძალას შეეუცვლით გეზს საპირისპიროდ, მაშინ $\vec{M}_0$ -იც შეიცვლის გეზს საპირისპიროდ;
3. ვექტორული მომენტი არ შეიცვლება, თუ ძალას მის ფუძეზე გავასრიალებთ.

3.2. ძალის ვექტორული მომენტის ანალიზური გამოსახვა

ავირჩიოთ კოორდინატთა სათავე მომენტთა O წერტილში (ნახ. 3.2). ვთქვათ $\vec{F}$ ძალის მოდების A წერტილის კოორდინატებია x, y, z , ხოლო $\vec{F}$ ძალის $Oxyz$ კოორდინატთა ღერძებზე გეგმილები – F_x, F_y, F_z . კოორდინატთა ღერძების მგეზავები აღვნიშნოთ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ -თი (ნახ. 3.2).

ასეთ შემთხვევაში $\vec{F}$ ძალის ვექტორული მომენტი O წერტილის მიმართ შეიძლება გამოვსახოთ მესამე რიგის დეტერმინანტით:

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}. \quad (3.4)$$



თუ (3.4) ტოლობის ორივე მხარეს სკალარულად გავამრავლებთ ჯერ $\vec{i}$ -ზე, შემდეგ $\vec{j}$ -სა და ბოლოს $\vec{k}$ -ზე, მაშინ ვექტორული მომენტის გეგმილები შესაბამის კოორდინატთა ღერძებზე იქნება:

$$\begin{aligned} M_{ax}(\vec{F}) &= yF_z - zF_y, \\ M_{ay}(\vec{F}) &= zF_x - xF_z, \\ M_{az}(\vec{F}) &= xF_y - yF_x. \end{aligned} \quad (3.5)$$

ამ გეგმილების საშუალებით გამოითვლება $\vec{M}_0$ ვექტორის სიგრძე და გეზი. მაშასადამე, ვექტორული მომენტის მოდული:

$$|\vec{M}_0(\vec{F})| = \sqrt{(yF_z - zF_y)^2 + (zF_x - xF_z)^2 + (xF_y - yF_x)^2}, \quad (3.6)$$

ხოლო მისი მიმართულება (გეზი) გამოითვლება ფორმულებით:

$$\cos \alpha = \frac{M_{0x}}{M_0}, \quad \cos \beta = \frac{M_{0y}}{M_0}, \quad \cos \gamma = \frac{M_{0z}}{M_0}, \quad (3.7)$$

სადაც α -თი, β -თი და γ -თი აღნიშნულია $\vec{M}_0$ ვექტორის მიერ კოორდინატთა Ox , Oy და Oz ღერძებთან შედგენილი კუთხეები.

შენიშვნა: (3.1)-დან $|\vec{M}_0(\vec{F})| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \alpha$. 3.2 ნახაზიდან $|\vec{r}| \sin \alpha = h$, ე.ი. $|\vec{M}_0(\vec{F})| = |\vec{F}| \cdot h$. მაშასადამე მივიღებთ (3.2) ტოლობა.

ახლა, თუ მომენტთა ცენტრად ავირჩევთ სივრცის რაიმე $C(x_c, y_c, z_c)$ წერტილს და მას მომენტთა ახალ ცენტრს ეუწოდებთ, მაშინ $\vec{OA} = \vec{r}$ რადიუს - ვექტორის მაგივრად გვექნება $\vec{CA} = \vec{CA}(x - x_c, y - y_c, z - z_c)$ რადიუს-ვექტორი. თუ ვექტორულ მომენტს ახალი C ცენტრის მიმართ აღვნიშნავთ $\vec{M}_c(\vec{F})$ -ით, ხოლო მის გეგმილებს M_{cx} , M_{cy} და M_{cz} -ით მაშინ (3.4) გამოსახულება ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\vec{M}_c(\vec{F}) = \vec{CA} \times \vec{F},$$

ანუ

$$\vec{M}_c(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x - x_c & y - y_c & z - z_c \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \quad (3.8)$$

თუ დავაგეგმილებთ (3.8) ტოლობას კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} M_{cx}(\vec{F}) &= (y - y_c)F_z - (z - z_c) \cdot F_y, \\ M_{cy}(\vec{F}) &= (z - z_c)F_x - (x - x_c) \cdot F_z, \\ M_{cz}(\vec{F}) &= (x - x_c)F_y - (y - y_c) \cdot F_x. \end{aligned} \quad (3.9)$$

ცხადია, $\bar{M}_c$ ვექტორის სიგრძისა და მიმართულების მოსაძებნად გვეყენება (3.6) და (3.7) ფორმულების ანალოგიური ფორმულები.

3.3. ძალის სკალარული მომენტი ცენტრის (ანუ წერტილის) მიმართ

ცდები გვიჩვენებს, რომ მყარ სხეულზე ძალების მოქმედებამ მის გადატანით გადაადგილებასთან ერთად შეიძლება გამოიწვიოს რაიმე წერტილის გარშემო მობრუნებაც. ბრუნვის ეფექტს ახასიათებენ ძალის მომენტი.

განვიხილოთ მყარი სხეულის A წერტილზე მოდებული ძალა (ნახ. 3.3). დაეუშვათ, რომ ძალა ცდილობს, შემოაბრუნოს სხეული O ცენტრის გარშემო. O ცენტრიდან ძალის ფუძეზე დაშვებულ მართობის h სიგრძეს ეწოდება $\bar{F}$ ძალის მხარი O ცენტრის მიმართ. რადგან მყარ სხეულზე მოდებული ძალა სრიალა ვექტორია და ის შეიძლება მოვდოთ მისი მოქმედების ფუძის ნებისმიერ წერტილზე, ამიტომ ბრუნვის ეფექტი დამოკიდებული იქნება: 1. $\bar{F}$ ძალის მოდულსა და h მხარის სიგრძეზე; 2. O წერტილსა და $\bar{F}$ ძალაზე გამავალ ბრუნვის OAB სიბრტყის მდებარეობაზე; 3. ამ სიბრტყეზე მობრუნების მიმართულებაზე.

მაშასადამე, ბრუნვის ეფექტის რაოდენობრივ ზომად შემოვიღოთ ძალის მომენტის შემდეგი ცნება:

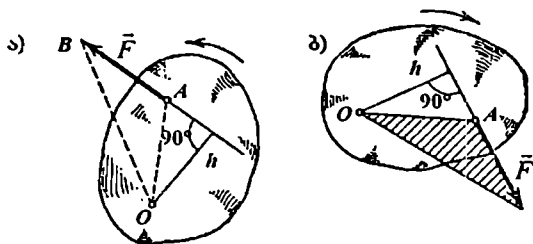
განსაზღვრება. $\bar{F}$ ძალის სკალარული მომენტი O წერტილის მიმართ ეწოდება $\bar{F}$ ძალის მოდულისა და მისი h მხარის ნამრავლს, აღებული „+“ ან „-“ ნიშნით იმის მიხედვით, რა მიმართულებით უფლის $\bar{F}$ ძალა O წერტილს.

აღენიშნოთ ძალის სკალარული მომენტი $M_o(\bar{F})$ ან M_o სიმბოლოთი, მაშინ

$$M_o(\bar{F}) = \pm |\bar{F}| \cdot h. \quad (3.10)$$

ძალის მომენტი დადებითია, თუ მის მოქმედების შედეგად სხეული ცდილობს შემობრუნდეს O წერტილის მიმართ საათის ისრის ბრუნვის საპირისპიროდ (ნახ. 3.3, ა); საათის

ისრის მოძრაობის თანხვედრილად, მობრუნებისას კი, უარყოფითია (ნახ. 3.3, ბ).



ნახ. 3.3

SI სისტემაში ძალის სკალარული მომენტის საზომი ერთეულია ნ.მ, ტექნიკურ ერთეულთა სისტემაში კი - კგძ.მ.

ძალის სკალარული მომენტის განსაზღვრების თანახმად, შეგვიძლია მოვიყვანოთ მისი შემდეგი თვისებები:

1. ძალის სკალარული მომენტი არ შეიცვლება, თუ ძალას მის ფუძეზე გავასრიანებთ.

2. ძალის მომენტი O ცენტრის მიმართ ნულის ტოლია, თუ ძალა ნულს უდრის ანდა მისი ფუძე გადის მომენტთა O ცენტრზე (მხარი უდრის ნულს).

3. ძალის სკალარული მომენტი რიცხობრივად OAB სამკუთხედის გაორკეცებული ფართობის ტოლია, ე.ი.

$$M_0 = \pm 2S_{\Delta OAB}. \quad (3.11)$$

ახლა გამოვსახოთ სკალარული M_0 მომენტი ანალიზურად. მომენტთა ცენტრად ავიღოთ O წერტილი (ნახ. 3.2). ეთქვას $\vec{F}$ ძალა მდებარეობს Oxy სიბრტყეში, ე.ი. $\vec{F} = \vec{F}\{F_x, F_y, 0\}$, ხოლო მისი მოდების წერტილი $A = A(x, y, 0)$. მაშინ (3.5) ფორმულებიდან მივიღებთ, რომ $M_{0x}(\vec{F}) \equiv 0$ და $M_{0y}(\vec{F}) \equiv 0$. მაშასადამე,

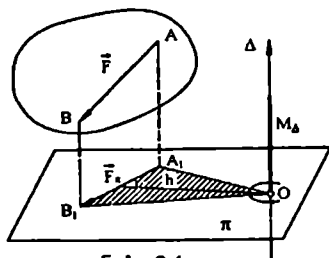
$$M_0 = xF_y - yF_x. \quad (3.12)$$

(3.12) ფორმულა არის სკალარული მომენტის ანალიზური გამოსახვა. ასევე შეგვიძლია ვიპოვოთ სკალარული მომენტის გამოსათვლელი ფორმულა, თუ მომენტთა ცენტრად ავირჩევთ $C = C(x_c, y_c, 0)$ წერტილს. მაშინ (3.9) ფორმულებიდან მივიღებთ ახალი C ცენტრის მიმართ სკალარული მომენტის ანალიზური გამოსახვას:

$$M_c = (x - x_c)F_y - (y - y_c)F_x. \quad (3.13)$$

3.4. ძალის მომენტი ღერძის მიმართ

ვთქვათ, მყარი სხეულის A წერტილზე მოდებულია $\vec{F}$ ძალა. საჭიროა განვსაზღვროთ $\vec{F}$ ძალის მომენტი რაიმე Δ ღერძის მიმართ (ნახ. 3.4). ამისათვის Δ ღერძზე ავირჩიოთ ნებისმიერი O წერტილი. O წერტილზე Δ ღერძის მართობულად გავატაროთ π სიბრტყე.



ნახ. 3.4

დავაგეგმილოთ ამ სიბრტყეზე $\vec{F}$ ძალა. მაშინ π სიბრტყეზე მივიღებთ $\vec{F}_x$ ვექტორს, რომლის O წერტილის მიმართ სკალარული მომენტის შემოღებით მივდივართ შემდეგ ცნებად:

Δ ღერძის მიმართ ძალის მომენტი ეწოდება ამ ღერძის პერპენდიკულარულ სიბრტყეზე ძალის გეგმილის სკალარულ მომენტს ღერძისა და სიბრტყის გადაკვეთის წერტილის მიმართ (ნახ. 3.4):

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_x) = \pm |\vec{F}_x| \cdot h = \pm 2S_{\Delta O A_1 B_1}, \quad (3.14)$$

სადაც $\vec{F}_x$ არის $\vec{F}$ ძალის გეგმილი Δ ღერძის მართობულ π სიბრტყეზე.

ძალის მომენტი ღერძის მიმართ იქნება დადებითი, თუ ღერძის პერპენდიკულარულ სიბრტყეზე ძალის გეგმილი ცდილობს ღერძის დადებითი მიმართულების მიმართ შემობრუნებას საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. ღერძის მიმართ ძალის მომენტი ნულის ტოლია, თუ:

1. ძალა ღერძის პარალელურია;
2. ძალის მოქმედების ფუძე ღერძს გადაკვეთს;
3. ღერძის მიმართ მომენტი შეიცვლის ნიშანს, თუ ძალას შევუცვლით გეზს.

3.5. დამოკიდებულება ღერძის მიმართ ძალის მომენტისა და ღერძზე მდებარე წერტილის მიმართ ძალის ვექტორულ მომენტს შორის

თეორემა. ღერძის მიმართ $\vec{F}$ ძალის მომენტი ტოლია ამ ღერძზე აღებული ნებისმიერი წერტილის მიმართ $\vec{F}$ ძალის ვექტორული მომენტის გეგმილისა ამ ღერძზე (ნახ. 3.5):

$$M_z = |\vec{M}_0(\vec{F})| \cdot \cos \alpha = \text{გეგმა } \vec{M}_0(\vec{F}). \quad (3.15)$$

დამტკიცება: OAB და OA_1B_1 სიბრტყეებს შორის ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე აღვნიშნოთ φ -თი. რადგან OA_1B_1 არის OAB სამკუთხედის ორთოგონალური გეგმილი z ღერძის პერპენდიკულარული π სიბრტყეზე, ამიტომ

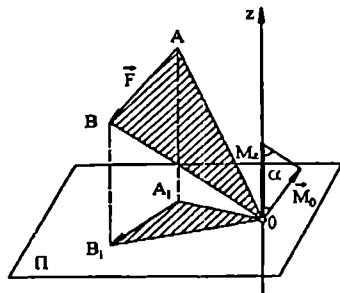
$$S_{\Delta OA_1B_1} = S_{\Delta OAB} \cos \varphi. \quad (3.16)$$

$\vec{F}$ ძალის ვექტორული $\vec{M}_0$ მომენტი მართობია OAB სამკუთხედის სიბრტყისა, ამიტომ $\vec{M}_0$ ვექტორსა და Oz ღერძს შორის α კუთხე და φ ხაზოვანი კუთხე შესაბამისად მართობულ-გვერდებიანი კუთხეებია. აქედან გამომდინარე ეს კუთხეები აკმაყოფილებენ პირობებს: $\varphi = \alpha$ ან $\varphi + \alpha = 180^\circ$, ე.ი. $\cos \alpha = \pm \cos \varphi$.

გავამრავლოთ (3.16) ტოლობის ორივე მხარე 2-ზე, მაშინ (3.3) და (3.14) ფორმულების თანახმად გვექნება:

$$M_z(\vec{F}) = \pm 2S_{\Delta OA_1B_1}; \quad |\vec{M}_0| = 2S_{\Delta OAB},$$

საიდანაც გამომდინარეობს (3.15) ტოლობა.



ნახ. 3.5

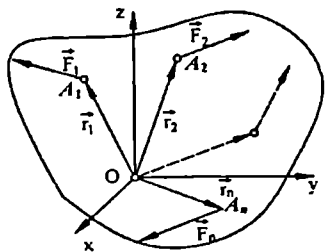
3.6. ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორისა და ნაკრები მომენტის ცნება

ეთქვათ, გვაქვს სივრცეში ნებისმიერად განლაგებული $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$ ძალთა სისტემა, მოდებული შესაბამისად

$A_1, A_2, \dots, A_n$ წერტილებში (ნახ. 3.6). შემოვიღოთ მექანიკის მნიშვნელოვანი ცნებები: 1. ნაკრები ვექტორისა და 2. ნაკრები მომენტისა.

განსაზღვრება. მოცემულ ძალთა სისტემის ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორი ეწოდება ვექტორს, რომელიც მოცემული ძალების გეომეტრიული ჯამის ტოლია:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \quad (3.17)$$



ნახ. 3.6

ახლა მომენტთა ცენტრად ავირჩიოთ O წერტილი.

განსაზღვრება. რომელიმე O წერტილის მიმართ მოცემულ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორული $\vec{M}_0$ მომენტი ეწოდება ყველა ძალის ვექტორული მომენტების გეომეტრიულ ჯამს O წერტილის მიმართ (ნახ. 3.6):

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \dots + \vec{r}_n \times \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k, \quad (3.18)$$

სადაც $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ არის შესაბამისად $A_1, A_2, \dots, A_n$ წერტილების რადიუს-ვექტორები.

3.7. ნაკრები ვექტორისა და ნაკრები მომენტის განმსაზღვრელი ფორმულები დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში

გამოვსახოთ ანალიზურად მოცემულ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი $\vec{R} = \vec{R}\{R_x, R_y, R_z\}$ და მომენტთა O ცენტრის მიმართ ნაკრები ვექტორული მომენტი $\vec{M}_0 = \vec{M}_0\{M_{0x}, M_{0y}, M_{0z}\}$. ეთქვას, მოცემულია k -ური ძალის გეგმილები, ე.ი. $\vec{F}_k = \vec{F}_k\{F_{kx}, F_{ky}, F_{kz}\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, და ამ ძალის მოდების წერტილის კოორდინატები $A_k = A_k\{x_k, y_k, z_k\}$. მაშინ ისე, როგორც ნებისმიერი ვექტორის მოდული (სიგრძე), ნაკრები ვექტორის მოდულიც გამოითვლება ფორმულით:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (3.19)$$

სადაც

$$R_x = \sum F_{kx}, \quad R_y = \sum F_{ky}, \quad R_z = \sum F_{kz}, \quad (3.20)$$

$R = |\vec{R}|$ ნაკრები ვექტორის მოდულია; R_x, R_y, R_z - ნაკრები ვექტორის გეგმილები კოორდინატთა შესაბამის ღერძებზე, $F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} - \vec{F}_k$ ძალის გეგმილები იმავე ღერძებზე.

კოორდინატთა შესაბამის ღერძებთან ნაკრები ვექტორის მიერ შედგენილი კუთხეების კოსინუსები განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}, \quad (3.21)$$

სადაც $(\vec{i}, \wedge \vec{R}) = \alpha, \quad (\vec{j}, \wedge \vec{R}) = \beta, \quad (\vec{k}, \wedge \vec{R}) = \gamma$ არის შესაბამისად Ox, Oy და Oz ღერძებთან $\vec{R}$ -ის მიერ შედგენილი კუთხეები; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ შესაბამისად Ox, Oy, Oz ღერძების მგეზავებია.

ნაკრები მომენტის მოდული, შერჩეული მომენტთა O ცენტრის მიმართ განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$M_0 = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2}, \quad (3.22)$$

სადაც

$$\begin{aligned} M_{ox} &= \sum M_x(\vec{F}_k), \\ M_{oy} &= \sum M_y(\vec{F}_k), \\ M_{oz} &= \sum M_z(\vec{F}_k) \end{aligned} \quad (3.23)$$

(M_{ox}, M_{oy}, M_{oz} არის O ცენტრის მიმართ ნაკრები მომენტის გეგმილები შესაბამისად Ox, Oy და Oz კოორდინატთა ღერძებზე).

თუ მოცემულია $\vec{F}_k, \quad k=1,2,\dots,n$, ძალის გეგმილები კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემის ღერძებზე და ამ ძალის მოდების A_k წერტილის x_k, y_k, z_k კოორდინატები, მაშინ (3.5) ტოლობების გათვალისწინებით (3.23) გამოსახულებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned}
M_{ox} &= \sum (y_k F_{kz} - z_k F_{ky}), \\
M_{oy} &= \sum (z_k F_{kx} - x_k F_{kz}), \\
M_{oz} &= \sum (x_k F_{ky} - y_k F_{kx}).
\end{aligned}
\tag{3.24}$$

ნაკრები მომენტის კოორდინატთა შესაბამის ღერძებთან შედგენილი კუთხეების კოსინუსები იქნება:

$$\cos \alpha_1 = \frac{M_{ox}}{M_0}, \quad \cos \beta_1 = \frac{M_{oy}}{M_0}, \quad \cos \gamma_1 = \frac{M_{oz}}{M_0}, \tag{3.25}$$

სადაც $\alpha_1 = (\vec{i}, \wedge \vec{M}_0)$, $\beta_1 = (\vec{j}, \wedge \vec{M}_0)$, $\gamma_1 = (\vec{k}, \wedge \vec{M}_0)$.

$\vec{R}$ და $\vec{M}_0$ ვექტორების სიგრძეებისა და კოორდინატთა ღერძების მიმართ მიმართულების კოსინუსების განსაზღვრას, მათი გვერდებისა და სისტემაში შემავალი ძალების მოდების წერტილების კოორდინატებით, ამ ვექტორების ანალიზური გამოსახვა ეწოდება.

დაუშვათ, რომ $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ ძალთა სისტემა ნებისმიერადაა განლაგებული და მდებარეობს Oxy სიბრტყეში. მაშინ ამ ძალთა სისტემის ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორიც ამ სიბრტყეში მდებარეობს და გვექნება:

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}; \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}; \quad R_z \equiv 0; \tag{3.26}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}; \tag{3.27}$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}. \tag{3.28}$$

ამ შემთხვევაში O ცენტრის მიმართ ბრტყელ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორული $\vec{M}_0$ მომენტი $\vec{R}$ ვექტორის მართობული იქნება და, მაშასადამე, არის Oz ღერძის პარალელური. ამ შემთხვევაში

$$M_{0x} \equiv 0; \quad M_{0y} \equiv 0; \quad M_0 = M_{0z} = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^n M_0(\vec{F}_k), \tag{3.29}$$

სადაც M_0 არის ძალთა სისტემის ნაკრები სკალარული მომენტი O წერტილის მიმართ.

შესაბამისად ამისა, რაიმე O წერტილის მიმართ ბრტყელ ძალთა სისტემის ნაკრები სკალარული M_0 მომენტი ეწოდება

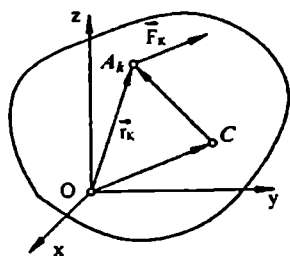
სისტემის ყველა ძალის მომენტების ალგებრულ ჯამს იმავე O წერტილის მიმართ.

თუ გავიხსენებთ $\bar{F}$ ძალის O წერტილის მიმართ სკალარული მომენტის ანალიზურ გამოსახვას (იხ. (3.12) ფორმულა), მაშინ ბრტყელ ძალთა სისტემის ნაკრები სკალარული მომენტი O ცენტრის მიმართ ანალიზურად გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$M_0 = \sum_{k=1}^n M_0(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^n (x_k F_{ky} - y_k F_{kx}). \quad (3.30)$$

3.8. ნაკრები მომენტის დამოკიდებულება დაყვანის ცენტრის შერჩევაზე

მომენტთა ახალ ცენტრად ავირჩიოთ $C(x_c, y_c, z_c)$ წერტილი (ნახ. 3.7). ახალი C ცენტრის მიმართ



ნახ. 3.7

ნაკრები ვექტორული მომენტი აღვნიშნოთ $\bar{M}_c$ -ით, ხოლო მისი გეგმილები – M_{cx} , M_{cy} , M_{cz} -ით. დავამტკიცოთ თეორემა, რომელიც ამყარებს დამოკიდებულებას ძველი O და ახალი C ცენტრების მიმართ ნაკრებ ვექტორულ მომენტებს შორის. ნაკრები ვექტორული მომენტის განმარტების თანახმად (იხ. (3.18) ფორმულა) გვექნება:

$$\bar{M}_c = \sum_{k=1}^n \overline{CA_k} \times \bar{F}_k, \quad (3.31)$$

სადაც $\overline{CA_k}$ $\bar{F}_k$ ძალის მოდების A_k წერტილის რადიუს-ვექტორია ახალი C ცენტრის მიმართ.

3.7 ნახაზიდან $\overline{CA_k} = \bar{r}_k - \overline{OC}$ შევიტანოთ (3.31)-ში, მივიღებთ:

$$\bar{M}_c = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k - \overline{OC} \times \sum_{k=1}^n \bar{F}_k.$$

$$(3.18)\text{-ის თანახმად } \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k = \bar{M}_0, \quad \text{ხოლო } \sum_{k=1}^n \bar{F}_k = \bar{R},$$

ამასთან $\overline{OC} \times \bar{R} = -\overline{CO} \times \bar{R}$, მაშინ საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\vec{M}_c = \vec{M}_0 + \vec{CO} \times \vec{R}. \quad (3.32)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $\vec{CO} \times \vec{R}$ ძველ O ცენტრზე მოდებული ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორის ვექტორული მომენტია ახალი C ცენტრის მიმართ. (3.32) ფორმულა გამოსახავს ძველი ცენტრის მიმართ ნაკრებ $\vec{M}_0$ მომენტსა და ახალი ცენტრის მიმართ ნაკრებ $\vec{M}_c$ მომენტს შორის დამოკიდებულებას. ეს შეიძლება თეორემის სახით ასე ჩამოვაყალიბოთ:

ახალი ცენტრის მიმართ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორული მომენტი ტოლია ძველი ცენტრის მიმართ ნაკრებ ვექტორულ მომენტს მიმატებული ძველ ცენტრზე მოდებული ნაკრები ვექტორის ვექტორული მომენტი ახალი ცენტრის მიმართ.

თუ (3.32) ტოლობას დავაგეგმილებთ კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} M_{cx} &= M_{0x} - y_z R_z + z_c R_y; \\ M_{cy} &= M_{0y} - z_c R_x + x_c R_z; \\ M_{cz} &= M_{0z} - x_c R_y + y_c R_x. \end{aligned} \quad (3.33)$$

(3.33) ფორმულები გამოსახავს სისტემის ნაკრები ვექტორული მომენტის კოორდინატებს ახალი C ცენტრის მიმართ.

თუ ძალთა სისტემა მოთავსებულია ერთ სიბრტყეზე, მაგალითად, Oxy -ზე, მაშინ ცხადია, რომ $R_z \equiv 0$, $z_k \equiv 0$; $M_{0x} \equiv 0$, $M_{0y} \equiv 0$, $M_{cx} \equiv 0$ და $M_{cy} \equiv 0$, ამიტომ (3.33) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$M_c = M_0 - x_c R_y + y_c R_x. \quad (3.34)$$

(3.34) ფორმულა გამოსახავს ძალთა სისტემის ნაკრებ სკალარულ მომენტს ახალი ცენტრის მიმართ.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ძალთა სისტემის ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორი ნულის ტოლია, მაშინ (3.32) ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\vec{M}_c = \vec{M}_0. \quad (3.35)$$

მაშასადამე, როცა ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია, ნაკრები ვექტორული მომენტის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული მომენტთა ცენტრის არჩევაზე. თუ ძალთა სისტემის

ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია და ამავე დროს ძალთა სისტემა მდებარეობს ერთ სიბრტყეზე, მაშინ ნაკრები სკალარული მომენტის მნიშვნელობა არ იქნება დამოკიდებული მომენტთა ცენტრის არჩევაზე ($M_c = M_o$).

(3.32) ფორმულა ანუ მოყვანილი თეორემა ფართოდ გამოიყენება. ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ცნობილია ძალთა სისტემის ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორი და ნაკრები ვექტორული მომენტი რაიმე ერთი წერტილის მიმართ, მაშინ (3.33) და (3.34) ფორმულებით გამოითვლება ნაკრები ვექტორული (სკალარული) მომენტები ყოველი წერტილის მიმართ. კერძოდ, თუ ნაკრები ვექტორი და ნაკრები ვექტორული მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ ნულს უდრის, მაშინ ნაკრები ვექტორული (სკალარული) მომენტი ყოველი წერტილის მიმართ ნულის ტოლი იქნება.

3.9. ამოცანათა ამოხსნის ნიმუშები წერტილისა და ღერძის მიმართ ძალის მომენტის გამოთვლაზე

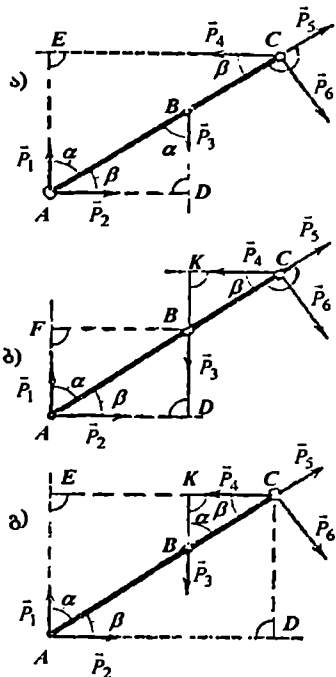
სტატიკისა და შემდეგ დინამიკის ამოცანების ამოხსნისას წერტილისა და ღერძის მიმართ ძალის მომენტის გამოთვლა არა ნაკლებ მნიშვნელოვან როლს ასრულებს, ვიდრე ძალის გეგმილები. ამიტომ საჭიროა ვიცოდეთ ამ სიდიდეების უშეცდომოდ გამოთვლა.

იმისათვის, რომ აღნიშნული სიდიდეების გამოთვლისას არ დაეუშვათ შეცდომა, საჭიროა გავეცნოთ მათი განსაზღვრის მაგალითებს.

ამოცანა 9. AC ძელის A , B და C წერტილებზე მოდებულია $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_6$ ექვსი ძალა (ნახ. 3.8, ა). განესაზღვროთ მოცემული ექვსი ძალის მომენტი A , B და C წერტილების მიმართ, თუ $P_1 = 30$ ნ, $P_2 = 50$ ნ, $P_3 = 25$ ნ, $P_4 = 40$ ნ, $P_5 = 35$ ნ, $P_6 = 54$ ნ, $AB = 1,2$ მ, $BC = 0,8$ მ, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$

ამოხსნა 1. განესაზღვროთ მოცემული ექვსი ძალის სკალარული მომენტი A წერტილის მიმართ (ნახ. 3.8, ა).

1. A წერტილზე გადის $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ და $\vec{P}_5$ ძალების ფუძეები. ამიტომ ამ ძალების მხრები ნულის ტოლია. მაშასადამე, ამ



ნახ. 3.8

ძალების სკალარული მომენტები A წერტილის მიმართ ნულის ტოლია (იხ. 3.3 პარაგრაფი, მე-2 თვისება):

$$M_A(\vec{P}_1) = 0; \quad M_A(\vec{P}_2) = 0; \quad M_A(\vec{P}_3) = 0.$$

2. ვიპოვოთ $\vec{P}_3$ ძალის მომენტი.

A წერტილიდან $\vec{P}_3$ ძალის ფუძეზე დაეშვათ AD მართობი, მივიღებთ $\vec{P}_3$ ძალის AD მხარს. AD მხრის სიგრძეს ვიპოვოთ ABC მართკუთხა სამკუთხედიდან:

$$AD = AB \sin \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ მ.}$$

მომენტის მნიშვნელობა უარყოფითია ($\vec{P}_3$ ძალა AD მხარს A წერტილის გარშემო შემოაბრუნებს საათის ისრის ბრუნვის მიმართულებით). მაშასადამე,

$$M_A(\vec{P}_3) = -P_3 \cdot AD = -25\sqrt{3} \text{ ნ.მ.}$$

3. ვიპოვოთ $\vec{P}_4$ ძალის მომენტი.

$\vec{P}_4$ ძალის მხარი არის $\vec{P}_4$ -ის CE

ფუძეზე დაშვებული AE მართობის სიგრძე. ACE მართკუთხა სამკუთხედიდან

$$AE = AC \sin \beta = 2 \cdot \sin 30^\circ = 1,0 \text{ მ.}$$

მომენტის მნიშვნელობა დადებითია ($\vec{P}_4$ ძალა AE მხარის A წერტილის გარშემო შემოაბრუნებს საათის ისრის ბრუნვის საპირისპირო მიმართულებით). მაშასადამე,

$$M_A(\vec{P}_4) = P_4 \cdot AE = 40 \cdot 1 = 40 \text{ ნ.მ.}$$

4. ვიპოვოთ $\vec{P}_6$ ძალის მომენტი. AC მონაკვეთი არის $\vec{P}_6$ ძალის მხარი A წერტილის მიმართ, რადგან $\vec{P}_6 \perp AC$. მომენტის მნიშვნელობა უარყოფითია:

$$M_A(\vec{P}_6) = -P_6 \cdot AC = -54 \cdot 2 = -108 \text{ ნ.მ.}$$

ამოხსნა 2. ვიპოვოთ მომენტები B წერტილის მიმართ (ნახ. 3.8, ბ).

1. B წერტილზე გადის $\vec{P}_3$ და $\vec{P}_5$ ძალების ფუძეები. მაშასადამე,

$$M_B(\vec{P}_3) = 0 \text{ და } M_B(\vec{P}_5) = 0.$$

2. განვსაზღვროთ $\vec{P}_1$ ძალის მომენტი. $\vec{P}_1$ ძალის მხარი

$$BF = AB \sin \alpha = 1,2 \cdot \sin 60^\circ = 0,6\sqrt{3} \text{ მ.}$$

სკალარული მომენტის მნიშვნელობა უარყოფითია:

$$M_B(\vec{P}_1) = -P_1 \cdot BF = -30 \cdot 0,6\sqrt{3} = -18\sqrt{3} \text{ ნ.მ.}$$

3. ვიპოვოთ $\vec{P}_2$ ძალის მომენტი. $\vec{P}_2$ ძალის მხარი

$$BD = AB \sin \beta = 1,2 \cdot \sin 30^\circ = 0,6 \text{ მ.}$$

მომენტი დადებითია:

$$M_B(\vec{P}_2) = P_2 \cdot BD = 50 \cdot 0,6 = 30 \text{ ნ.მ.}$$

4. ვიპოვოთ P_4 ძალის მომენტი. $\vec{P}_4$ ძალის მხარი

$$BK = BC \sin \beta = 0,8 \cdot \sin 30^\circ = 0,4 \text{ მ.}$$

მომენტის მნიშვნელობა დადებითია:

$$M_B(\vec{P}_4) = P_4 \cdot BK = 40 \cdot 0,4 = 16 \text{ ნ.მ.}$$

5. ვიპოვოთ $\vec{P}_6$ ძალის მომენტი. $\vec{P}_6$ ძალის მხარია BC მონაკვეთი ($BC \perp \vec{P}_6$). მომენტი უარყოფითია:

$$M_B(\vec{P}_6) = -P_6 \cdot BC = -54 \cdot 0,8 = -43,2 \text{ ნ.მ.}$$

ამოხსნა 3. C წერტილის მიმართ მოცემული ექვსი ძალის სკალარული მომენტების მნიშვნელობათა გამოთვლა მიზანშეწონილია შეასრულოთ დამოუკიდებლად (ნახ. 3.8, გ)

პასუხი: $M_C(\vec{P}_4) = 0$, $M_C(\vec{P}_5) = 0$; $M_C(\vec{P}_6) = 0$; $M_C(\vec{P}_1) = -30\sqrt{3}$ ნ.მ, $M_C(\vec{P}_2) = 50$ ნ.მ; $M_C(\vec{P}_3) = 10$ ნ.მ.

განვიხილოთ ამოცანაში ძალები ისე იყო განლაგებული, რომ მომენტთა A , B და C ცენტრების მიმართ მათი მხრები მარტივად განისაზღვრებოდა, როგორც მართკუთხა სამკუთხედების კათეტები, რომლებშიც მოცემულია ჰიპოტენუზის სიგრძე და მახვილი კუთხე ან მხრები მოცემული იყო ამოცანის პირობაში (BC და AC).

ხანდახან მოცემული ძალთა სისტემის ზოგიერთი ძალა აღმოჩნდება ისეთ მდგომარეობაში, რომ მომენტთა ცენტრის მიმართ მისი მხრის განსაზღვრა ძნელია და საჭირო ხდება წინასწარ გამოვთვალოთ ერთი ან ორი მონაკვეთის სიგრძე. ასეთ შემთხვევაში მიზანშეწონილია ძალა დავშალოთ ორ მდგენელად და მისი სკალარული მომენტის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ვარიაციონის თეორემა (იხ. 6.3 პარაგრაფი).

ამოცანა 10. განესაზღვროთ A , B და C წერტილებზე მოდებული $P_1 = 40$ ნ. $P_2 = 60$ ნ, $P_3 = 30$ ნ და $P_4 = 50$ ნ ძალების სკალარული მომენტები A წერტილის მიმართ (ნახ. 3.9). კუთხეები $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 45^\circ$; $AB = 2,5$ მ; $BC = 1,5$ მ.

ამოხსნა. 1. $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ და $\vec{P}_3$ ძალების სკალარული მომენტები A წერტილის მიმართ გამოითვლება წინა ამოცანის ანალოგიურად:

$$M_A(\vec{P}_1) = 0; \quad M_A(\vec{P}_2) = -75 \text{ ნ}\cdot\text{მ}; \quad M_A(\vec{P}_3) = 0.$$

2. ვიპოვოთ $\vec{P}_4$ ძალის მომენტი.

I ვარიანტი. (ნახ. 3.9). A წერტილის მიმართ $\vec{P}_4$ ძალის მხარია AE მონაკვეთი. მოცემულ შემთხვევაში ეს მონაკვეთი უნდა განისაზღვროს $\triangle AEF$ -დან, მაგრამ ამ სამკუთხედში ცნობილია მხოლოდ $\angle EAF = \beta$. მაშასადამე, წინასწარ საჭიროა განესაზღვროთ მისი რომელიმე გვერდის სიგრძე. 3.9 ნახაზიდან

$$AF = AB - FB.$$

$\triangle CBF$ -დან ვიპოვიოთ FB -ს სიდიდეს ($\angle BCF = \beta$):

$$FB = CB \operatorname{tg} \beta,$$

მაშასადამე,

$$AF = AB - CB \operatorname{tg} \beta.$$

ახლა შეიძლება განესაზღვროთ AE მხარი:

$$AE = AF \cos \beta = (AB - CB \operatorname{tg} \beta) \cos \beta.$$

საიდანაც

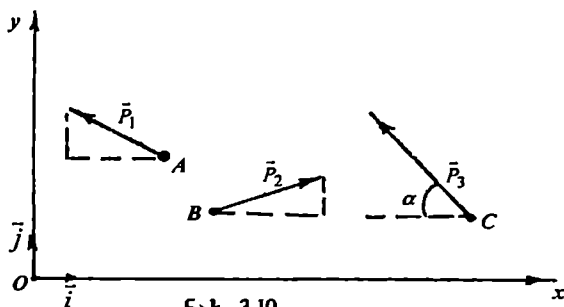
$$AE = AB \cos \beta - CB \sin \beta.$$

მომენტი დადებითია. მაშასადამე,

$$M_A(\vec{P}_4) = P_4 \cdot AE = P(AB \cos \beta - CB \sin \beta);$$

$$M_A(\vec{P}_4) = 50(2,5 \cos 45^\circ - 1,5 \sin 45^\circ) \text{ და } M_A(P_4) = 25\sqrt{2} \text{ ნ}\cdot\text{მ}.$$

ამოხსნა. წინა განხილულ მაგალითებში მომენტთა ცენტრის მიმართ ძალის სკალარული მომენტის გამოთვლისას ვსარგებლობდით წერტილის მიმართ ძალის სკალარული მომენტის განსაზღვრებით ანუ (3.10) ფორმულით – $(M_0(\vec{F}) = \pm |\vec{F}| \cdot h)$.



ნახ. 3.10

ახლა მოცემული გვაქვს ძალის მოდეების წერტილის კოორდინატები და ძალის მდგენელთა მნიშვნელობები. ამიტომ წერტილის მიმართ ძალის სკალარული მომენტის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ სკალარული მომენტის (3.12) ანალიზური გამოსახულებით:

$$M_0 = xF_y - yF_x,$$

სადაც x , y არის ძალის მოდეების წერტილის კოორდინატები; F_x , F_y – $\vec{F}$ ძალის გეგმილები შესაბამისად Ox და Oy ღერძებზე.

1. ვიპოვოთ O წერტილის მიმართ $\vec{P}_1$ ძალის სკალარული მომენტი:

$$M_0(\vec{P}_1) = x_1 P_{1y} - y_1 P_{1x} = 3 \cdot 1,5 - 4 \cdot (-2) = 11,5 \text{ ნ.მ.}$$

2. ვიპოვოთ $\vec{P}_2$ ძალის სკალარული მომენტი:

$$M_0(\vec{P}_2) = x_2 P_{2y} - y_2 P_{2x} = 4 \cdot 1,2 - 2 \cdot 3 = -1,2 \text{ ნ.მ.}$$

3. ვიპოვოთ $\vec{P}_3$ ძალის სკალარული მომენტი:

$$M_A(\vec{P}_3) = x_3 P_{3y} - y_3 P_{3x},$$

$$\text{სადაც } P_{3y} = P_3 \sin 60^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}; \quad P_{3x} = P_3 \cos \alpha = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5.$$

მაშინ

$$M_A(\vec{P}_3) = 8 \cdot 5\sqrt{3} - 2 \cdot 5 = 40\sqrt{3} - 10 \approx 59,2 \text{ ნ·მ.}$$

ამოცანა 12. $A = A(3; 4)$ წერტილზე მოდებულია $\vec{P} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ ნ ძალა. განვსაზღვროთ $\vec{P}$ ძალის სკალარული მომენტი $C = C(7; 3)$ წერტილის მიმართ.

ამოხსნა. ცხადია, (3.12) ფორმულით $\vec{P}$ ძალის სკალარულ მომენტს C წერტილის მიმართ ვერ გამოეთვლით, რადგან ის მიღებულია იმ შემთხვევისათვის, როცა მომენტთა ცენტრად არჩეულია კოორდინატთა O სათავე.

ამ შემთხვევაში უნდა ვისარგებლოთ ახალი C ცენტრის მიმართ სკალარული მომენტის ანალიზური (3.13) ფორმულით, ე.ი.

$$M_c = (x - x_c)P_y - (y - y_c)P_x.$$

ჩვენს შემთხვევაში $x = 3$; $x_c = 7$; $y = 4$; $y_c = 3$; $P_x = -3$; $P_y = 2$. ამიტომ გვექნება:

$$M_c(\vec{P}) = (3 - 7) \cdot 2 - (4 - 3) \cdot (-3) = -9 \text{ ნ·მ.}$$

ამოცანა 13. განვსაზღვროთ $\vec{F} = 4\vec{j} + 5\vec{k}$ ნ ძალის ვექტორული მომენტის მოდული კოორდინატთა O სათავეის მიმართ (ნახ. 3.11), თუ $\vec{F}$ ძალის მოდების A წერტილის რადიუს-ვექტორი $\vec{r}_A = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ მ.

ამოხსნა. $\vec{F}$ ძალის ვექტორული მომენტი O წერტილის მიმართ აღვნიშნოთ $\vec{M}_0(\vec{F})$ -ით, ხოლო მისი გეგმილები — M_{0x} , M_{0y} , M_{0z} -ით. მათი სიდიდეების მოსაძებნად უნდა ვისარგებლოთ (3.5) ფორმულებით. ჩვენს შემთხვევაში $x = 4$ მ; $y = -2$ მ; $z = 3$ მ; $F_x = 0$; $F_y = 4$ ნ; $F_z = 5$ ნ. თუ (3.5) ფორმულებში ჩავსვამთ ამ რიცხვით მონაცემებს, მივიღებთ:

$$M_{0x} = yF_z - zF_y = -2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = -22 \text{ ნ·მ;}$$

$$M_{0y} = zF_x - xF_z = 3 \cdot 0 - 4 \cdot 5 = -20 \text{ ნ·მ;}$$

$$M_{0z} = xF_y - yF_x = 4 \cdot 4 - (-2) \cdot 0 = 16 \text{ ნ·მ.}$$

ამით მოძებნილია ვექტორული მომენტის მდგენელები. ახლა განვსაზღვროთ $\vec{M}_0(\vec{F})$ ვექტორის სიგრძე (3.6) ფორმულის საშუალებით:

$$M_0 = |\vec{M}_0(\vec{F})| = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2} = \\ = \sqrt{(-22)^2 + (-20)^2 + 16^2} = 33,76 \text{ ნ.მ.}$$

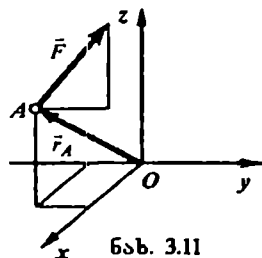
ხოლო გეზი განისაზღვრება ფორმულებით:

$$\cos \alpha = \frac{M_{0x}}{M_0} = -\frac{22}{33,76} = -0,652,$$

$$\cos \beta = \frac{M_{0y}}{M_0} = -\frac{20}{33,76} = -0,593,$$

$$\cos \gamma = \frac{M_{0z}}{M_0} = \frac{16}{33,76} = 0,474,$$

სადაც α, β, γ აღნიშნავს იმ კუთხეებს, რომელსაც $\vec{M}_0(\vec{F})$ ვექტორი ქმნის კოორდინატთა ღერძებთან.



ნახ. 3.11

ამოცანა 14. $\vec{F} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ ნ ძალის მოდების A წერტილის კოორდინატთა სათავეს მიმართ რადიუს-ვექტორი $\vec{r} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ მ. განვსაზღვროთ მისი მომენტი $C = C(1; -1; -2)$ წერტილის მიმართ.

ამოხსნა. $\vec{F}$ ძალის ვექტორული მომენტი C წერტილის მიმართ აღვნიშნოთ $\vec{M}_c(\vec{F})$ -ით. მისი გეგმილები - M_{cx}, M_{cy}, M_{cz} -ით. თუ ჩავსვათ (3.9) ფორმულებში $\vec{F}$ ძალის $F_x = 2, F_y = 3, F_z = 2$ გეგმილებს და $A = A(3; -1; 2)$ და $C = C(1; -1; -2)$ წერტილის კოორდინატებს, მივიღებთ:

$$M_{cx} = (-1+1) \cdot 2 - (2+2) \cdot 3 = -12,$$

$$M_{cy} = (2+2) \cdot 2 - (3-1) \cdot 3 = 4,$$

$$M_{cz} = (3-1) \cdot 3 - (-1+1) \cdot 3 = 6.$$

$\vec{M}_c(\vec{F})$ ვექტორის სიგრძე განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$M_c = |\vec{M}_c(\vec{F})| = \sqrt{M_{cx}^2 + M_{cy}^2 + M_{cz}^2} = \sqrt{(-12)^2 + 4^2 + 6^2} = 14 \text{ ნ.მ.}$$

გეზი განისაზღვრება მიმართულების კოსინუსებით:

$$\cos \alpha = \frac{M_x}{M_c} = -\frac{6}{7}; \quad \cos \beta = \frac{M_y}{M_c} = -\frac{2}{7}, \quad \cos \gamma = \frac{M_z}{M_c} = \frac{3}{7},$$

სადაც α , β და γ არის $\vec{M}_c(\vec{F})$ ვექტორის მიერ კოორდინატა ღერძებთან შედგენილი კუთხეები.

ამოცანა 15. მოცემულია სამკუთხედის წვეროების კოორდინატები: $A = A(4; 2; 2)$; $B = B(1; -2; -4)$; $C = C(5; 2; -3)$. განესაზღვროთ ამ სამკუთხედის ფართობი.

ამოხსნა. თუ გავიხსენებთ (3.3) ფორმულას, მაშინ ABC სამკუთხედის S ფართობი ვექტორული მომენტის სიგრძის საშუალებით გამოისახება ასე:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{M}_c|, \quad (1)$$

სადაც $\vec{M}_c$ ვექტორი აღნიშნავს $\vec{AB}$ ვექტორის ვექტორულ მომენტს C წერტილის მიმართ. ამოცანის პირობის თანახმად $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (-3; -4; -6)$. მისი მოდების წერტილის კოორდინატებია $x = 4$, $y = 2$, $z = 2$, ხოლო მომენტთა ცენტრის კოორდინატები — $x_c = 5$, $y_c = 2$, $z_c = -3$. თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (3.9) ფორმულაში, მივიღებთ:

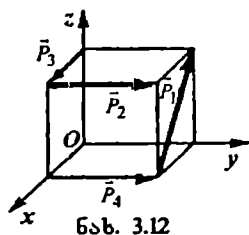
$$M_x = 20; \quad M_y = -21; \quad M_z = 5,$$

საიდანაც

$$|\vec{M}_c| = \sqrt{866},$$

ხოლო $S = \sqrt{214,5}$.

ამოცანა 16. კუბის წიბოებისა და წახნაგის დიაგონალის



ნახ. 3.12

გასწვრივ მოქმედებს $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ და $\vec{P}_4$ ოთხი ძალა (ნახ. 3.12). განესაზღვროთ ამ ძალების მომენტები Ox , Oy და Oz ღერძების მიმართ ცალ-ცალკე. თუ კუბის წიბო $a = 2$ მ, $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 10$ ნ.

ამოხსნა. 1. განესაზღვროთ მოცემულ ძალთა მომენტები Ox ღერძის მიმართ.

$\vec{P}_3$ ძალა პარალელურია Ox ღერძისა, ხოლო $\vec{P}_4$ ძალა კვეთს მას. ამიტომ

$$M_x(\vec{P}_3) = 0 \text{ და } M_x(\vec{P}_4) = 0.$$

$\vec{P}_2$ ძალა მდებარეობს Ox ღერძის მართობულ წახნაგზე (წინა წახნაგის წიბოზე) და ის Ox ღერძის გასწვრივ მდგომი დამკვირვებლის მიმართ $\vec{P}_2$ ძალის მხარს მოაბრუნებს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით, ამიტომ მომენტი უარყოფითია:

$$M_x(\vec{P}_2) = -P_2 \cdot a = -10 \cdot 2 = -20 \text{ ნ.მ.}$$

ვიპოვოთ $\vec{P}_1$ ძალის მომენტი. დაეშალოთ $\vec{P}_{1x}$ და $\vec{P}_{1z}$ მდგენელებად. $\vec{P}_{1x}$ პარალელურია Ox ღერძისა, ამიტომ $M_x(\vec{P}_{1x}) = 0$, ხოლო $\vec{P}_{1z}$ არის $\vec{P}_1$ ძალის გეგმილი Ox ღერძის მართობულ სიბრტყეში. ის Ox ღერძის გასწვრივ მდგომი დამკვირვებლის მიმართ მის მხარს შემოაბრუნებს საათის ისრის ბრუნვის საპირისპირო მიმართულებით, ამიტომ მომენტი დადებითია. მაშასადამე,

$$M_x(\vec{P}_1) = P_{1x} \cdot a = P_1 \cos 45^\circ \cdot a = 10\sqrt{5} \text{ ნ.მ.}$$

2. ვიპოვოთ მოცემული ძალების მომენტები Oy ღერძის მიმართ. $\vec{P}_2$ და $\vec{P}_4$ ორი ძალა Oy ღერძის პარალელურია, ამიტომ

$$M_y(\vec{P}_2) = 0 \text{ და } M_y(\vec{P}_4) = 0.$$

$\vec{P}_3$ ძალა Oy ღერძის გასწვრივ მდგომ დამკვირვებელს უვლის საათის ისრის ბრუნვის საპირისპირო მიმართულებით, ამიტომ მომენტი დადებითია. მაშასადამე,

$$M_y(\vec{P}_3) = P_3 \cdot a = 10 \cdot 2 = 20 \text{ ნ.მ.}$$

$\vec{P}_1$ ძალის $\vec{P}_{1x}$ მდგენელი კვეთს Oy ღერძს და მისი მომენტი ნულის ტოლია. $\vec{P}_{1z}$ ძალა Oy ღერძს უვლის საათის ისრის ბრუნვის თანხედენილად, ამიტომ მომენტი უარყოფითია. მაშასადამე,

$$M_y(\vec{P}_1) = -P_{1z} \cdot a = -P_1 \cos 45^\circ \cdot a = -10\sqrt{5} \text{ ნ.მ.}$$

3. Oz ღერძის მიმართ მოცემულ ძალებს მომენტები გამოთვალეთ დამოუკიდებლად.

$$\text{პასუხი: } M_z(\vec{P}_3) = 0; \quad M_z(\vec{P}_1) = 10\sqrt{2} \text{ ნ.მ.; } M_z(\vec{P}_2) = 20 \text{ ნ.მ.};$$

$$M_z(\vec{P}_4) = 20 \text{ ნ.მ.}$$

3.10. სავარჯიშო ამოცანები წერტილისა და ღერძის მიმართ მომენტებისა და ნაკრები მომენტის გამოთვლაზე

3.1. კვადრატის წვეროებზე მოდებულია მის სიბრტყეში მდებარე $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = 4$ ნ. ექვსი ძალა. განსაზღვრეთ ამ ძალების ნაკრები მომენტი B წერტილის მიმართ, თუ მანძილი $l = (1,5\sqrt{2} - 1)$ მ (ნახ. 3.13).

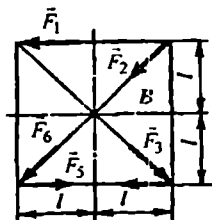
პასუხი: $M_B = 14$ ნ·მ.

3.2. მართკუთხა სამკუთხედის წვეროებზე მოდებულია ძალები: $F_1 = 12$ ნ, $F_2 = 4$ ნ, $F_3 = 2$ ნ. განსაზღვრეთ α კუთხის მნიშვნელობა გრადუსებში, რომლის დროსაც ამ ძალების ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორი Oy ღერძის პარალელურია (ნახ. 3.14).

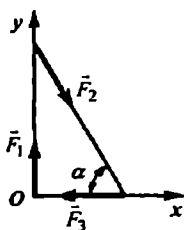
პასუხი: $\alpha = 60^\circ$

3.3. მართკუთხა ფირფიტაზე მოდებულია ძალები $F_1 = 4$ ნ, $F_2 = 6\sqrt{3}$ ნ, $F_3 = 4$ ნ, $F_4 = 2$ ნ. განსაზღვრეთ მოცემულ ძალთა სისტემის ნაკრები სკალარული მომენტი A წერტილის მიმართ, თუ მანძილი $l = 1$ მ, კუთხე $\alpha = 30^\circ$ (ნახ. 3.15).

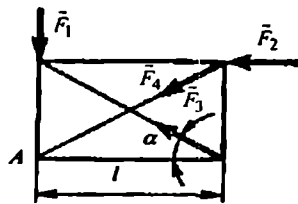
პასუხი: $M_A = 8$ ნ·მ.



ნახ. 3.13



ნახ. 3.14



ნახ. 3.15

3.4. მართკუთხა სამკუთხედის წვეროებზე მოდებულია ძალები: $F_1 = 3$ ნ, $F_2 = 6$ ნ, $F_3 = 14$ ნ. განსაზღვრეთ α კუთხის მნიშვნელობა გრადუსებში, როდესაც ამ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი Ox ღერძის პარალელურია (ნახ. 3.16).

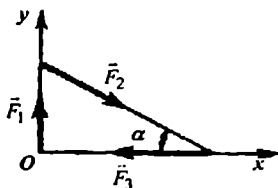
პასუხი: $\alpha = 30^\circ$

3.5. მართკუთხედის წვეროებზე მოდებულია ოთხი ძალა: $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 10$ ნ. განსაზღვრეთ ამ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორის მოდული, თუ კუთხე $\alpha = 60^\circ$ (ნახ. 3.17).

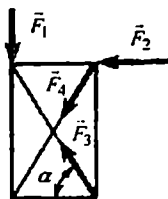
პასუხი: $R = 10\sqrt{5}$ ნ.

3.6. კუადრატზე მოდებულია თითოეული 8 ნ-ის ტოლი ექვსი ძალა. განსაზღვრეთ ამ ძალთა სისტემის ნაკრები მომენტი A წერტილის მიმართ, თუ მანძილი $\ell = \sqrt{2}$ მ (ნახ. 3.18).

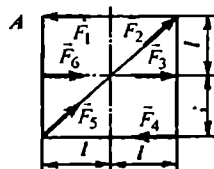
პასუხი: $M_A = 32$ ნ.მ.



ნახ. 3.16



ნახ. 3.17



ნახ. 3.18

3.7. მოცემულია $F_1 = F_2 = F_3 = 2$ ნ, $F_4 = 10$ ნ ბრტყელი ძალთა სისტემა. განსაზღვრეთ ამ ძალთა სისტემის ნაკრები სკალარული მომენტი A წერტილის მიმართ, თუ წრეწირის რადიუსი $r = \sqrt{2}$ მ (ნახ. 3.19).

პასუხი: $M_A = 16$ ნ.

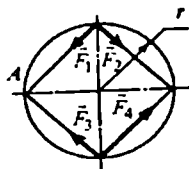
3.8. განსაზღვრეთ $\vec{F}$ და $\vec{G}$ ძალების ნაკრები სკალარული მომენტი A წერტილის მიმართ, თუ $F = 5\sqrt{3}$ ნ, $G = 10$ ნ, მანძილი $l = 0,2$ მ, კუთხე $\varphi = 60^\circ$ (ნახ. 3.20).

პასუხი: $M_A = -02$ ნ.მ.

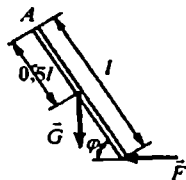
3.9. ტოლგვერდ სამკუთხედის წვეროებზე მოდებულია ძალები $F_1 = F_2 = F_3 = 4$ ნ. განსაზღვრეთ ამ ძალთა სისტემის ტოლკმედის მოდული (ნახ. 3.21).

პასუხი: $R = 4$ ნ.

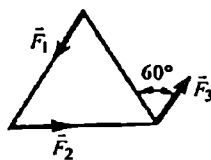
3.10. მოცემულია ძალები $F_1 = F_2 = F_3 = 12$ ნ, $F_4 = 14$ ნ. განსაზღვრეთ მოცემული ძალები სისტემის ნაკრები სკალარული მომენტი O წერტილის მიმართ, თუ $r = \sqrt{2}$ მ (ნახ. 3.22).
პასუხი: $M_0 = 2$ ნ·მ.



ნახ. 3.19



ნახ. 3.20



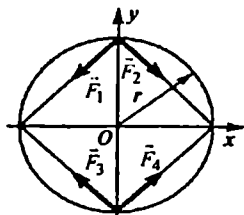
ნახ. 3.21

3.11. მოცემულია ბრტყელ ძალები სისტემა: $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 4$ ნ; $F_5 = 5$ ნ. განსაზღვრეთ ამ ძალები სისტემის ნაკრები ვექტორის მოდული (ნახ. 3.23).

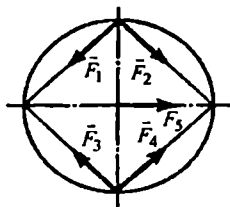
პასუხი: $R = 5$ ნ.

3.12. განსაზღვრეთ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ ბრტყელ ძალები სისტემის ტოლქმედის მიერ Ox ღერძთან შექმნილი α კუთხის გრადუსული ზომა, თუ ამ ძალების მოდულები ერთმანეთის ტოლია (ნახ. 3.24).

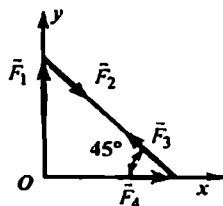
პასუხი: $\alpha = 45^\circ$



ნახ. 3.22



ნახ. 3.23



ნახ. 3.24

3.13. α კუთხის რა მნიშვნელობისათვის იქნება სამი ძალის ტოლქმედი ვერტიკალურად მიმართული, თუ ძალები $F_1 = 6$ ნ, $F_2 = 4$ ნ, $F_3 = 8$ ნ (ნახ. 3.25).

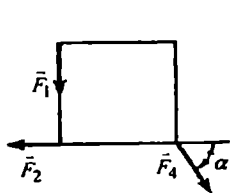
პასუხი: $\alpha = 60^\circ$.

3.14. კვადრატზე მოდებულია ოთხი ძალა, ამასთან $F_1 = F_2 = F_3 = 5$ ნ. განსაზღვრეთ $\vec{F}_4$ ძალის მოდული, თუ ამ ძალთა სისტემის ტოლქმედი $R = 7$ ნ (ნახ. 3.26).

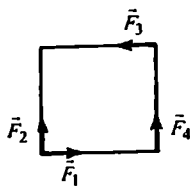
პასუხი: $F_4 = 2$ ნ.

3.15. წესიერ ექვსკუთხედზე მოდებულია ტოლი მოდულის ხუთი ძალა. განსაზღვრეთ ამ ძალთა სისტემის ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორის მიერ Ox ღერძთან შედგენილი α კუთხის გრადუსული მნიშვნელობა (ნახ. 3.27).

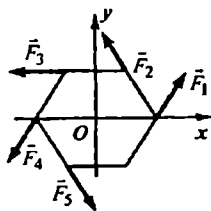
პასუხი: $\alpha = 180^\circ$



ნახ. 3.25



ნახ. 3.26



ნახ. 3.27

3.16. განსაზღვრეთ განაწილებული დატვირთვის მომენტი Oy ღერძის მიმართ, თუ $\vec{q}$ პარალელურია z ღერძისა. მოცემულია: $q = 3$ ნ/მ, $OA = 2$ მ, $AB = 2$ მ (ნახ. 3.28).

პასუხი: $M_y = 18$ ნ·მ.

3.17. განსაზღვრეთ განაწილებული დატვირთვის მომენტი Ox ღერძის მიმართ, თუ $q_0 = 200$ ნ/მ, $a = 3$ მ, $b = 6$ მ (ნახ. 3.29).

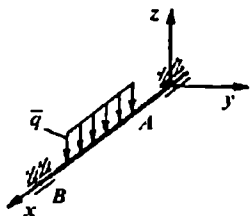
პასუხი: $M_x = -300$ ნ·მ.

3.18. $\vec{F} = 3\vec{j} + 4\vec{k}$ ძალა მოდებულია A წერტილზე, რომლის რადიუს-ვექტორია $\vec{r}_A = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ განსაზღვრეთ ამ ძალის მომენტი Oz ღერძის მიმართ (ნახ. 3.30).

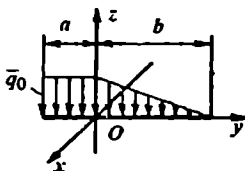
პასუხი: $M_z = 9$ ნ·მ.

3.19. $a = 0,1$ მ წიბოს მქონე კუბზე მოქმედებს ($\vec{F}_1, \vec{F}_1'$) და ($\vec{F}_2, \vec{F}_2'$) წყვილძალები. განსაზღვრეთ ამ წყვილძალების ტოლქმედი წყვილძალის მომენტი, თუ $F_1 = F_1' = 10$ ნ, $F_2 = F_2' = 50$ ნ (ნახ. 3.31).

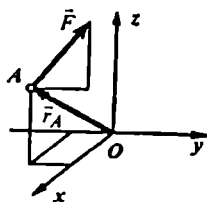
პასუხი: $M \approx 5,75$ ნ·მ.



ნახ. 3.28.



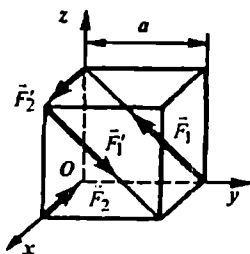
ნახ. 3.29



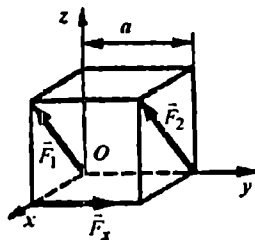
ნახ. 3.30

3.20. $a = 0,8$ მ წიბოს მქონე კუბზე მოქმედებს ძალები: $F_1 = F_2 = 6$ ნ და $F_3 = 3$ ნ. განსაზღვრეთ ამ ძალების ნაკრების მომენტის მოდული, დაყვანის O ცენტრის მიმართ.

პასუხი: $M_o \approx 3,54$ ნ·მ.



ნახ. 3.31



ნახ. 3.32

3.21. $\vec{F} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ ძალა მოდებულია $A(3; 1; -2)$ წერტილში. განსაზღვრეთ y და x ღერძების მიმართ $\vec{F}$ ძალის მომენტების ფარდობა.

პასუხი: $M_y : M_x = 16$.

3.22. $\vec{F}_1 = \vec{F}_1'(1; 2; -2)$ და $\vec{F}_2 = \vec{F}_2'(3; 1; 2)$ ძალების მოდების წერტილების რადიუს-ვექტორები კოორდინატთა სათავის

განსაზღვრეთ γ ღერძის მიმართ $\vec{F}_1$ ძალის მომენტის ფარდობა x ღერძის მიმართ $\vec{F}_2$ ძალის მომენტთან.

პასუხი: $M_{1\gamma} : M_{2x} = -0,75$.

323. $A(4; 5; 3)$ წერტილზე მოდებულია $\vec{F} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$ ძალა. განსაზღვრეთ $C(2; 2; -1)$ წერტილის მიმართ $\vec{F}$ ძალის ვექტორული მომენტის მოდული (კოორდინატები – მეტრებში).

პასუხი: $M = 2\sqrt{34}$ ნ.მ.

324. მოცემულია სამკუთხედის წვეროების კოორდინატები: $A(1; 2; 3)$, $B(3; -4; -1)$ და $C(2; 0; 3)$. განსაზღვრეთ ამ სამკუთხედის ფართობი (ზომები – მეტრებში).

პასუხი: $S = \frac{1}{2} |M| = \sqrt{21}$ მ².

325. მოცემულია სამკუთხედის წვეროების კოორდინატები: $A(3; 5; 2)$, $B(4; 7; 4)$ და $C(2; 0; -1)$. განსაზღვრეთ ამ სამკუთხედის ფართობი (ზომები – მეტრებში).

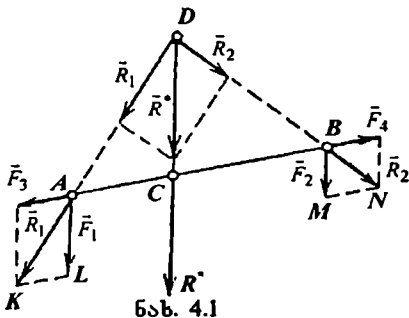
პასუხი: $S \approx 2,55$ მ².

4. პარალელური ძალთა სისტემა და წყვილძალთა თეორია

4.1. პარალელური ძალების შეკრება

ვთქვათ, მყარ სხეულზე მოქმედებს პარალელური $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ორი ძალა. გავეცნოთ მათი შეკრების წესს. შესაძლებელია ორი შემთხვევა: 1. როცა ძალებს აქვთ ერთნაირი გეზი და 2. როცა ძალებს აქვთ ურთიერთსაპირისპირო გეზი.

შემთხვევა 1. ვთქვათ $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალები მოდებულია შესაბამისად A და B წერტილებში (ნახ. 4.1). დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა:



პარალელური და ერთ მხარეს მიმართული ორი ძალა დაიყვანება ტოლქმედზე, რომელიც ამ ძალების პარალელურია, მისი სიდიდე ტოლია მდგენელი ძალების მოდულების ჯამისა და იმავე მხარესაა მიმართული.

ტოლქმედის ფუძე ძალთა მოდების წერტილების შემავრთებელ მონაკვეთს შიგნიდან ყოფს მდგენელი ძალების მოდულების უკუპროპორციულ მონაკვეთებად (ნახ. 4.1):

$$|\vec{R}| = |\vec{F}_1| + |\vec{F}_2|; \quad \frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|} = \frac{|CB|}{|AC|}. \quad (4.1)$$

დამტკიცება. A და B წერტილებზე მოვდოთ გაწონასწორებული $(\vec{F}_3, \vec{F}_4)$ ძალთა სისტემა, რომელთა მოქმედების ფუძე ემთხვევა AB წრფეს; $\vec{F}_4 = -\vec{F}_3$. მაშინ მიღებული $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4)$ ან $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$. მაშასადამე, $(\vec{F}_1, \vec{F}_3)$ და $(\vec{F}_2, \vec{F}_4)$ ძალთა სისტემები შეიძლება შევცვალოთ შესაბამისი ტოლქმედი ძალებით: $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_3$ და $\vec{R}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_4$, ხოლო მიღებული თავმოყრილი $\vec{R}_1$ და $\vec{R}_2$ ძალთა ფუძეები იკვეთება D წერტილში (ნახ. 4.1). მაშასადამე, ეს ძალებიც შეიძლება შეიცვალოს D წერტილზე მოდებული $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$ ტოლქმედით. რადგან

$\vec{F}_4 = -\vec{F}_3$ და $\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$, ამიტომ $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, ხოლო მისი მოდული ტოლია შემდგენი ძალების მოდულების ჯამისა: $|\vec{R}| = |\vec{F}_1| + |\vec{F}_2|$. რადგან მყარ სხეულზე მოდებული ძალა სრიალა ექტორია, ამიტომ შეგვიძლია $\vec{R}$ ტოლქმედი გადავიტანოთ თავის ფუძის გასწვრივ და მოვდოთ AB მონაკვეთის C წერტილზე; შედეგად მოცემული $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ ძალთა სისტემა შეიცვლება ერთი ძალით – $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ ტოლქმედით, რომელიც მოგეზულია იმავე მხარეს, რომელზეც მოცემული ძალები და მოდებულია AB მონაკვეთის C წერტილზე. აგებული 4.1 ნახაზიდან გამომდინარეობს, რომ ADC სამკუთხედი მსგავსია KAL სამკუთხედისა, ამიტომ $\frac{AC}{KL} = \frac{DC}{AL}$ და $\frac{BC}{MN} = \frac{DC}{BM}$. გაეითვალისწინოთ, რომ $KL = MN = |\vec{F}_3|$, $AL = |\vec{F}_1|$, $BM = |\vec{F}_2|$, საბოლოოდ მივიღებთ:

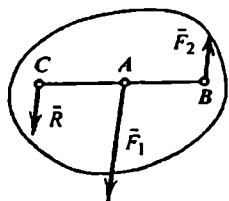
$$\frac{AC}{BC} = \frac{|\vec{F}_2|}{|\vec{F}_1|}, \quad (4.2)$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თუ მხედველობაში მივიღებთ პროპორციის თვისებას და გაეითვალისწინოთ, რომ $BC + AC = AB$, ხოლო $|\vec{F}_1| + |\vec{F}_2| = |\vec{R}|$, მაშინ (4.2)-დან მივიღებთ:

$$\frac{BC}{|\vec{F}_1|} = \frac{AC}{|\vec{F}_2|} = \frac{AB}{|\vec{R}|}. \quad (4.3)$$

ანალოგიურად დამტკიცდება მე-2 შემთხვევაც, როცა $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ პარალელური ძალები ($|\vec{F}_1| \neq |\vec{F}_2|$) მოგეზულია ურთიერთსაპირისპიროდ (ნახ. 4.2). ამ შემთხვევაში თეორემა ჩამოყალიბდება ასე:



ნახ. 4.2

თეორემა. მოდულით არატოლი და ურთიერთსაპირისპიროდ მიმართული ორი პარალელური ძალა დაიყვანება ტოლქმედზე, რომელიც ამ ძალების პარალელურია, სიდიდით ტოლია მდგენელი ძალების სიდიდეების სხვაობისა და მოდულით მეტი ძალის მხარესაა მიმართული (ნახ. 4.3):

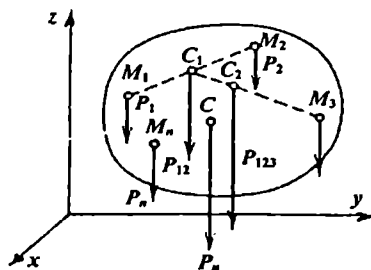
ტოლქმედის ფუძე ამ ძალების შემაერთებელი წრფის მონაკვეთს გარედან ყოფს მდგენელი ძალების სიდიდეების უკუპროპორციულად.

$$|\vec{R}| = |\vec{F}_1| - |\vec{F}_2|, \quad \frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|} = \frac{|CB|}{|AC|}.$$

ცხადია, ამავე წესით შეგვიძლია დავშალოთ სხეულის მოცემულ წერტილებზე მოდებული ერთი ძალა მის შემდგენ ორ პარალელურ ძალად.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა მყარი სხეულის $M_1, M_2, \dots, M_n$ წერტილებზე მოდებულია ერთ მხარეს მოგებული პარალელური ($\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$) ძალთა სისტემა (ნახ. 4.3).

პარალელური ძალების შეკრების (4.1) წესის მიხედვით შეგვიძლია $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ძალები



ნახ. 4.3

შეეცვალოთ C_1 წერტილზე მოდებული $\vec{P}_{12} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$ ძალით.

ახლა იმავე წესით შევკრიბოთ $\vec{P}_{12}$ და $\vec{P}_3$ ძალები და გვექნება C_2 წერტილზე მოდებული $\vec{P}_{123} = \vec{P}_{12} + \vec{P}_3 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3$ ძალა. ანალოგიური წესით გავაგრძელოთ ტოლქმედი ძალის შემდეგ ძალასთან შეკრება მიმდევრობით ბოლო ძალამდე. მივიღებთ ერთ $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n$ ძალას, რომელიც არის მოცემულ ($\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$) ძალთა სისტემის ტოლქმედი და ის მოდებულია სხეულის C წერტილზე. ვიპოვეთ ამ წერტილის კოორდინატები. ჩავთვალოთ, რომ ძალთა მოდების კოორდინატები ცნობილია. მაშინ C_1 წერტილი M_1C_1 მონაკვეთს ყოფს $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ძალთა მოდულების უკუპროპორციულ

მონაკვეთებად, ე.ი. $\frac{M_1C_1}{C_1M_2} = \frac{|\vec{P}_2|}{|\vec{P}_1|}$. მაგრამ, როგორც ანალიზური

გეომეტრიდანაა ცნობილი, C_1 წერტილის კოორდინატები, რომელიც ასეთი პროპორციით ყოფს მონაკვეთს, განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულებით:

$$x_{c_1} = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2}; \quad y_{c_1} = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2}{P_1 + P_2}; \quad z_{c_1} = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2}{P_1 + P_2}.$$

ანალოგიურად $\bar{P}_{123}$ ძალის მოდების C_2 წერტილის კოორდინატები განისაზღვრება $\left(\frac{C_1 C_2}{C_2 M_3} = \frac{P_3}{P_{12}} \right)$ ასე:

$$\begin{aligned} x_{c_2} &= \frac{P_{12} x_{c_1} + P_3 x_3}{P_{12} + P_3} = \frac{(P_1 + P_2)(P_1 x_1 + P_2 x_2)/(P_1 + P_2) + P_3 x_3}{P_1 + P_2 + P_3} = \\ &= \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3}{P_1 + P_2 + P_3} \end{aligned}$$

და ა.შ. (აქ $P_1, P_2, \dots$ არის $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ ძალთა მოდულები).

მაშასადამე, ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით შეიძლება დაეასკენათ, რომ სხეულზე მოქმედი ერთნაირი გეზის მქონე პარალელურ $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ ძალებს აქვს ტოლქმედი

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k, \quad (4.4)$$

რომელიც სისტემის ძალების პარალელურია, მოგეზუდია მათი მიმართულებით და მოდებულია C წერტილზე, რომლის კოორდინატები განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულებებით:

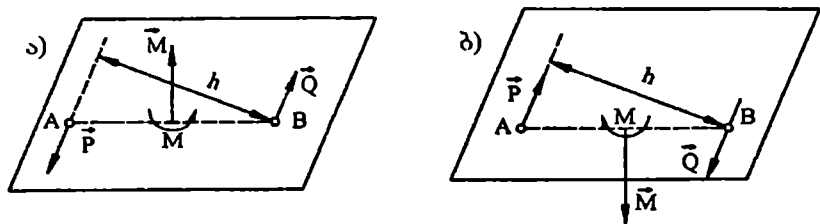
$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_{kx} \cdot x_k}{\sum_{k=1}^n F_k}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_{ky} \cdot y_k}{\sum_{k=1}^n F_k}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_{kz} \cdot z_k}{\sum_{k=1}^n F_k}, \quad (4.5)$$

სადაც x_k, y_k, z_k არის $\bar{F}_k$ ძალის მოდების წერტილის კოორდინატები.

4.2. წყვილძალა და მისი მომენტი

განვიხილოთ მყარ სხეულზე მოდებული ორი ძალის სისტემა, რომლებიც მოდულით ტოლია, ერთმანეთის პარალელურია, მიმართულებით ურთიერთსაპირისპიროა და მათი მოქმედების ფუძეები ერთმანეთს არ ემთხვევა (ნახ. 4.4). წინა შემთხვევისაგან განსხვავებით ასეთი ძალთა სისტემა არ შეიძლება შეიცვალოს ერთი ძალით, ე.ი. მათ არა აქვს

ტოლქმედი, მაგრამ არ არის გაწონასწორებული, რამდენადაც ისინი ერთი წრფის გასწვრივ არ არიან მოგესული. ამიტომ მას განიხილავენ, როგორც დამოუკიდებელ ძალოვან ფაქტორს და მას წყვილძალას უწოდებენ.



ნახ. 4.4

წყვილძალის ცნება მექანიკის ერთ-ერთი ძირითადი ცნებაა, ისე როგორც ძალის ცნება.

თეორიული მექანიკის შესწავლისას საჭიროა ნათლად გავერკეთო, რომ სტატიკაში განიხილება ორი უმარტივესი ელემენტი: ძალა და წყვილძალა. ნებისმიერი ორი ძალა, გარდა წყვილძალისა, ყოველთვის შეგვიძლია შევცვალოთ ერთი ძალით – ტოლქმედით. წყვილძალა არ ექვემდებარება შემდგომ გამარტივებას, ის უმარტივესი ელემენტია.

განსაზღვრება. წყვილძალა ეწოდება მოდულით ტოლ და ურთიერთსაპირისპიროდ მიმართულ იმ ორ ძალას, რომელთა მოქმედების ფუძეები პარალელური წრფეებია.

ეთქვათ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ძალები მდებარეობს პარალელურ წრფეებზე და მართებულია ტოლობები:

$$\vec{P} + \vec{Q} = 0; \quad \vec{P} = -\vec{Q}; \quad |\vec{P}| = |\vec{Q}|.$$

მაშინ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ძალების ერთობლიობა არის წყვილძალა, რომელიც აღინიშნება $(\vec{P}, \vec{Q})$ სიმბოლოთი. სიბრტყეს, რომელზეც მდებარეობს $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ძალები, წყვილძალის სიბრტყე ეწოდება. წყვილძალთა მოქმედების ფუძეებს შორის უმოკლეს მანძილს წყვილძალის მხარი ეწოდება (ნახ. 4.4).

მყარ სხეულზე მოდებული წყვილძალა ცდილობს, გამოიწვიოს ამ სხეულის მობრუნების ეფექტი. ამ ეფექტის სიდიდე ხასიათდება წყვილძალის მომენტით. როგორც ვნახეთ,

წყვილძალის ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია. ამის გამო წყვილძალის ნაკრები მომენტი არ არის დამოკიდებული მომენტთა ცენტრის არჩევაზე. თუ წყვილძალის ვექტორულ მომენტს აღვნიშნავთ $\vec{M}$ -ით, მაშინ წყვილძალის ვექტორული მომენტი შეიძლება წარმოვადგინოთ ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლის სახით:

$$\vec{M} = \vec{BA} \times \vec{P} = \vec{AB} \times \vec{Q}, \quad (4.6)$$

სადაც A და B არის $(\vec{P}, \vec{Q})$ წყვილძალის ძალთა მოდების წერტილები (ნახ. 4.4).

(4.6) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$|\vec{M}| = |\vec{BA}| \cdot |\vec{P}| \sin(\vec{BA}, \vec{P})$$

მაგრამ $|\vec{BA}| \cdot \sin(\vec{BA}, \vec{P}) = h$, სადაც h არის $(\vec{P}, \vec{Q})$ წყვილძალის მხარი, ამიტომ

$$|\vec{M}| = |\vec{P}| \cdot h = |\vec{Q}| \cdot h. \quad (4.7)$$

მაშასადამე, წყვილძალა განისაზღვრება წყვილძალის ვექტორული მომენტით:

განსაზღვრება. წყვილძალის ვექტორული მომენტი ეწოდება თავისუფალ $\vec{M}$ ვექტორს, რომლის სიგრძე წყვილძალის ერთ-ერთი ძალის სიდიდისა და მისი მხარის ნამრავლის ტოლია და მოდებულია წყვილძალის მოქმედების სიბრტყის რომელიმე წერტილში, მართებულია ამ სიბრტყისა და მიმართულია იმ მხარეს, საიდანაც ჩანს წყვილძალის ბრუნვა საათის ისრის მოძრაობის საპირისპიროდ (ნახ. 4.4, ა, ბ).

ახლა გამოვთვალოთ წყვილძალის სკალარული მომენტი. მომენტთა ცენტრად ავირჩიოთ A წერტილი, მაშინ ნაკრები მომენტი იქნება

$$M = M_A(\vec{P}) + M_A(\vec{Q}). \quad (4.8)$$

მაგრამ $M_A(\vec{P}) = 0$, ამიტომ 4.6, ა ნახაზის თანახმად გვექნება

$$M = M_A(\vec{Q}) = |\vec{Q}| \cdot h,$$

ხოლო 4.6, ბ ნახაზის თანახმად კი –

$$M = M_A(\vec{Q}) = -|\vec{Q}| \cdot h.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $|\vec{Q}| = |\vec{P}|$, მაშინ წყვილძალის სკალარულ M მომენტს განვსაზღვრავთ შემდეგი ფორმულით:

$$M = \pm |\vec{Q}| \cdot h = \pm |\vec{P}| \cdot h. \quad (4.9)$$

შენიშვნა. თუ მომენტთა ცენტრად შევარჩევთ წყვილძალის მოქმედების სიბრტყის ნებისმიერ C წერტილს და გამოვთვლით ამ წერტილის მიმართ ნაკრებ მომენტს, მივიღებთ (4.9) ფორმულით გამოსახულ შედეგს.

ამრიგად, გვექნება შემდეგი განსაზღვრება:

წყვილძალის სკალარული მომენტი ტოლია წყვილძალის ერთ-ერთი ძალის სიდიდისა და მისი მხრის ნამრავლისა, აღებული „+“ ან „-“ ნიშნით იმის მიხედვით, როგორი მიმართულების ბრუნვა აღინიშნება.

4.4 ა ნახაზის შემთხვევაში გვექნება „+“ ნიშანი, ხოლო 4.4, ბ ნახაზის შემთხვევაში „-“ ნიშანი.

4.3. წყვილძალების ტოლფასობა სიბრტყეზე

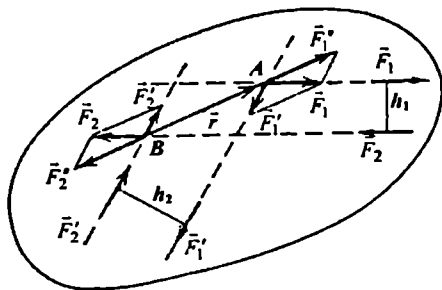
ორ წყვილძალას ეწოდება ტოლფასი (ეკვივალენტური), თუ მათი მოქმედების ეფექტი ერთი და იმავე სხეულზე ერთნაირია.

დავამტკიცოთ ტოლფასობის შემდეგი თეორემა:

ერთ სიბრტყეზე მდებარე ორი წყვილძალა ტოლფასია, თუ მათი სკალარული მომენტები ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ მყარ

სხეულზე მოქმედებს $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ წყვილძალა (ნახ. 4.5). გავასრიალოთ $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალები თავიანთი ფუძეების გასწვრივ და მოვდოთ შესაბამისად A და B წერტილებზე. ამ წერტილებზე $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ წყვილძალის მოქმედების სიბრტყეში მდებარე ორი პარალელური წრფე გაკატაროთ ისე, რომ



ნახ. 4.5

გადაკეთონ წყვილის მოქმედების ფუძეები. გაკატაროთ AB

წრფე და პარალელოგრამის წესით (როგორც ეს ნაჩვენებია 4.5 ნახაზზე) დაეშალოთ $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალები მდგენელებად: $\vec{F}_1 = \vec{F}_1' + \vec{F}_1''$, ხოლო $\vec{F}_2 = \vec{F}_2' + \vec{F}_2''$ რადგან $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ და დაშლა მოეხდინეთ პარალელურ მდგენელებად, ამიტომ $\vec{F}_1' = -\vec{F}_2'$, $\vec{F}_1'' = -\vec{F}_2''$ ამასთან $\vec{F}_1''$ და $\vec{F}_2''$ ძალები მდებარეობს ერთ ფუძეზე და მოგეზულია ურთიერთსაპირისპიროდ, ე.ი. $(\vec{F}_1'', \vec{F}_2'') \sim 0$, მაშასადამე, მე-2 აქსიომის თანახმად ისინი შეიძლება უქუცავდნოთ. ამიტომ

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim (\vec{F}_1', \vec{F}_1'', \vec{F}_2', \vec{F}_2'') \sim (\vec{F}_1', \vec{F}_2').$$

მაშასადამე, მოცემული $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ წყვილძალა მისი ძალების ტოლფასი გარდაქმნით შეეცვალეთ $(\vec{F}_1', \vec{F}_2')$ წყვილძალით. ახლა, დავამტკიცოთ, რომ ამ წყვილძალების სკალარული მომენტები ტოლია. მათი ბრუნვის მიმართულებები ერთი და იგივეა. ჯერ გამოთვალოთ $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ და $(\vec{F}_1', \vec{F}_2')$ წყვილძალების $\vec{M}$ და $\vec{M}'$ მომენტები, გვექნება: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_1$; $\vec{M}' = \vec{r} \times \vec{F}_1'$ რადგან $\vec{F}_1 = \vec{F}_1' + \vec{F}_1''$, ამიტომ $\vec{M} = \vec{r} \times (\vec{F}_1' + \vec{F}_1'') = \vec{r} \times \vec{F}_1' + \vec{r} \times \vec{F}_1'' = \vec{r} \times \vec{F}_1' = \vec{M}'$, რადგან $\vec{r} \parallel \vec{F}_1''$, ამიტომ $\vec{r} \times \vec{F}_1'' = 0$.

მაშასადამე, თეორემა დამტკიცებულია და შეიძლება გაეაკეთოს შემდეგი დასკვნები:

1. რადგან მოცემული $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ და მიღებული $(\vec{F}_1', \vec{F}_2')$ წყვილძალები მდებარეობს ერთ სიბრტყეში და მათი ვექტორული მომენტები ტოლია, ამიტომ მათი სკალარული მომენტებიც ტოლია, ე.ი. სიბრტყეში მდებარე ორი წყვილძალა ტოლფასია, თუ მათი სკალარული მომენტები ტოლია.

2. ბრუნვის მიმართულებისა და მისი მომენტის შეუცვლელად შეიძლება წყვილძალის გადაადგილება და მობრუნება მისი მოქმედების სიბრტყეში.

3. შეიძლება წყვილძალას ერთდროულად შეეუცვალოთ ძალის მოდული და მხარი ისე, რომ მისი მომენტი უცვლელი დარჩეს.

4.4. წყვილძალების ტოლფასობა სივრცეში

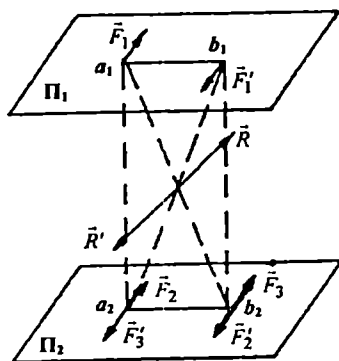
წყვილძალის ვექტორული მომენტის განსაზღვრის თანახმად, ის წყვილძალის მოქმედების სიბრტყის მართობია. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ წყვილძალების ვექტორული მომენტები პარალელურია, მაშინ ისინი მდებარეობს ან ერთ სიბრტყეზე, ან პარალელურ სიბრტყეებზე. მივიღოთ ეს მხედველობაში და დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა:

სივრცეში მდებარე ორი წყვილძალა ტოლფასია, თუ მათი ვექტორული მომენტები ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ, სხეულზე მოქმედებს Π_1 სიბრტყეში მდებარე $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$ წყვილძალა $\vec{M}_1$ მომენტით (ნახ. 4.6). ვაჩვენოთ, რომ ეს წყვილძალა შეიძლება შეიცვალოს Π_2 სიბრტყეში მდებარე $\vec{M}_1$ მომენტის მქონე $(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$ წყვილძალით. გავატაროთ Π_1 სიბრტყის პარალელური Π_2 სიბრტყე და მასზე აღვნიშნოთ a_2b_2 მონაკვეთი, რომელიც a_1b_1 მონაკვეთის ტოლი და პარალელურია. აგების თანახმად $a_2b_2 = a_1b_1$ და $a_2b_2 \parallel a_1b_1$. a_1 და b_1 წერტილებზე მოვდოთ ოთხი გაწონასწორებული ძალა, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_3 = \vec{F}_1 \Rightarrow F_2 = F_3 = F_1; \quad \vec{F}_2' = \vec{F}_3' = \vec{F}_1' \Rightarrow F_2' = F_3' = F_1'$$

$a_1b_1b_2a_1$ ფიგურა არის პარალელოგრამი, რომლის დიაგონა-



ნახ. 4.6

ლები გადაკვეთის C წერტილით იყოფა შუაზე. მივიღოთ ეს მხედველობაში და შევკრიბოთ პარალელური $\vec{F}_1$, $\vec{F}_3$ და $\vec{F}_1'$, $\vec{F}_3'$ ძალები. ცხადია, რომ ამ ძალების $\vec{R}_1$ და $\vec{R}_2$ ტოლქმედები მოდებული იქნება C წერტილში და აკმაყოფილებს პირობას: $\vec{R} = -\vec{R}'$, $|\vec{R}| = |\vec{R}'|$, ე.ი. იქმნება გაწონასწორებულ ძალთა სისტემა, რომლებიც შეიძლება მოვხსნათ. შედეგად $(\vec{F}, \vec{F}')$ წყვილძალა შეიცვალა ასეთივე $(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$ წყვილძალით, მაგ-

რამ მოთავსებულია Π_2 სიბრტყეში, რაც ამტკიცებს თეორემას.

მაშასადამე, 4.3 პარაგრაფში მოყვანილ წყვილძალების შესახებ დასკვნებს დაემატება თვისება 4: წყვილძალა შეიძლება გადავიტანოთ მისი მოქმედების სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეში.

4.5. წყვილძალების შეკრება სივრცეში

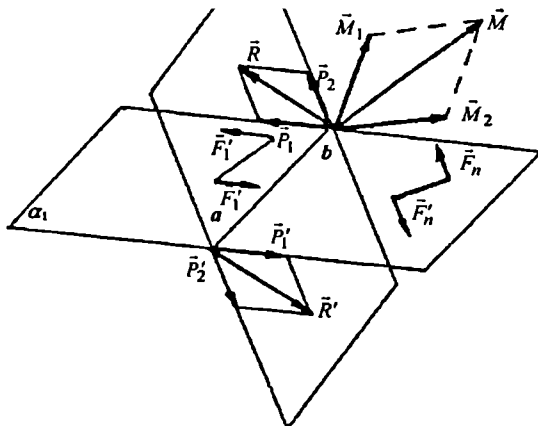
თეორემა 1. მყარ სხეულზე მოქმედი წყვილძალთა სისტემა ერთი ისეთი წყვილძალის ტოლფასია, რომლის ვექტორული მომენტი შესაკრები წყვილძალების ვექტორული მომენტების გეომეტრიული ჯამია.

დამტკიცება. ვთქვათ მყარ სხეულზე მოქმედებს $(\vec{F}_1, \vec{F}_1'), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}_n')$ წყვილძალთა სისტემა. აქ შესაძლებელია განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები: 1. წყვილძალები მდებარეობს ან ერთ სიბრტყეზე, ან პარალელურ სიბრტყეებში. 2. წყვილძალები მდებარეობს არაპარალელურ ანუ ურთიერთგადამკვეთ სიბრტყეებში.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა წყვილძალები ურთიერთგადამკვეთ სიბრტყეებში იმყოფება.

ჯერ განვიხილოთ $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$ და $(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$ ორი წყვილძალა, რომლებიც შესაბამისად მდებარეობენ ურთიერთგადამკვეთ α_1 და α_2 სიბრტყეებზე (ნახ. 4.7). მათი ვექტორული მომენტებია $\vec{M}_1$ და $\vec{M}_2$. სიბრტყეები იკვეთება ab წრფეზე. დავიყვანოთ ორივე წყვილძალა ab მხარზე და დაყვანილი წყვილძალები აღვნიშნოთ $(\vec{P}_1, \vec{P}_1')$ და $(\vec{P}_2, \vec{P}_2')$ სიმბოლოებით; ამ წყვილძალებს ექნება ერთი და იგივე $\vec{M}_1$ და $\vec{M}_2$ მომენტები.

a და b წერტილებზე მოდებული ძალები შევეკრიბოთ მე-3 აქსიომის თანახმად; შეკრების შედეგად მივიღებთ $\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$ და $\vec{R}' = \vec{P}_1' + \vec{P}_2'$. რადგანაც $\vec{P}_1, \vec{P}_1'$ და $\vec{P}_2, \vec{P}_2'$ ქმნის წყვილძალებს, გვაქვს $\vec{R} = -\vec{R}'$ მაშასადამე, $(\vec{P}_1, \vec{P}_1')$ და $(\vec{P}_2, \vec{P}_2')$ ორი წყვილძალის სისტემა ტოლფასია ერთი $(\vec{R}, \vec{R}')$ წყვილძალისა. ვიპოვოთ ამ წყვილძალის ვექტორული მომენტი. ვისარგებლოთ (4.6) ფორმულით, გვექნება:



ნახ. 4.7

$$\vec{M} = \vec{ba} \times \vec{R} = \vec{ba} \times (\vec{P}_1 + \vec{P}_2) = \vec{ba} \times \vec{P}_1 + \vec{ba} \times \vec{P}_2,$$

მაგრამ

$$\vec{ba} \times \vec{P}_1 = \vec{M}_1 \text{ და } \vec{ba} \times \vec{P}_2 = \vec{M}_2,$$

და მაშასადამე,

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2. \quad (4.10)$$

ამრიგად, ორი წყვილძალის შემთხვევისათვის თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ, მყარ სხეულზე მოქმედებს n წყვილძალა: $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$, $(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$, ..., $(\vec{F}_n, \vec{F}_n')$, რომელთა მომენტებს შესაბამისად აღვნიშნავთ $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n$ -ით. თუ წყვილძალების შეკრების თეორემას ჯერ გამოვიყენებთ პირველი ორი წყვილძალისათვის, მივიღებთ მათ ტოლფას $(\vec{R}_1, \vec{R}_1')$ წყვილძალას $\vec{M}_1'$ მომენტით, ე.ი. გვექნება

$$\vec{M}_1' = \vec{M}(\vec{R}_1, \vec{R}_1') = \vec{M}_1 + \vec{M}_2.$$

ახლა შეეკრიბოთ მიღებული $(\vec{R}_1, \vec{R}_1')$ და მესამე $(\vec{F}_3, \vec{F}_3')$ წყვილძალები. შეკრების შედეგად მივიღებთ მათ ტოლფას $(\vec{R}_2, \vec{R}_2')$ წყვილძალას $\vec{M}_2'$ მომენტით:

$$\vec{M}_2' = \vec{M}_1' + \vec{M}_3 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3.$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ მიმდევრობით, ბოლოს

მივიღებთ ერთ ტოლქმედ $(\bar{R}, \bar{R}')$ წყვილძალას, რომლის ვექტორული მომენტი:

$$\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n = \sum_{k=1}^n \bar{M}_k \quad (4.11)$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია ზოგადი სახით.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა 1. თუ წყვილძალები პარალელურ სიბრტყეებში მდებარეობს, მაშინ 4.4 პარაგრაფში მოყვანილი მე-4 თვისების თანახმად შეგვიძლია ყველა წყვილძალა ერთ სიბრტყეზე გადავიტანოთ. მაშასადამე, საჭიროა ერთ სიბრტყეში მდებარე წყვილძალების შეცვლა ერთი წყვილძალით, რომელიც მათ მაგივრობას შეასრულებს. ამ შემთხვევაში ერთ სიბრტყეში მდებარე წყვილძალების შეკრების მე-2 თეორემა ჩამოყალიბდება ასე:

მყარ სხეულზე მოქმედი ერთ სიბრტყეში მდებარე წყვილძალთა სისტემა ერთი ისეთი წყვილძალის ტოლფასია, რომლის სკალარული მომენტი მდგენელი წყვილძალების სკალარული მომენტების ალგებრული ჯამის ტოლია:

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum_{k=1}^n M_k \quad (4.12)$$

დამტკიცება. 4.3 პარაგრაფში მოყვანილი მე-3 თვისების თანახმად, ყველა მოცემული წყვილძალა შეიძლება გარდავქმნათ ისე, რომ მათი მხარი იყოს ამ სიბრტყეზე მდებარე AB მონაკვეთის სიგრძის ტოლი. მაშინ გარდაქმნის შედეგად A წერტილზე მოდებული იქნება $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ ძალები, ხოლო B წერტილზე – მათი საპირისპირო მიმართულების $\bar{P}'_1, \bar{P}'_2, \dots, \bar{P}'_n$ ძალები. აღენიშნოთ მდგენელი წყვილძალების სკალარული მომენტები $M_1, M_2, \dots, M_n$ -ით, შეეკრიბოთ A და B წერტილებზე მოდებული ძალები. გვექნება:

$$\bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \dots + \bar{P}_n = \bar{P},$$

$$\bar{P}'_1 + \bar{P}'_2 + \dots + \bar{P}'_n = \bar{P}'.$$

მივიღეთ $\bar{P}$ და $\bar{P}'$ ორი ძალა. ეს ძალები ქმნის $(\bar{P}, \bar{P}')$ წყვილძალას, რომელსაც ტოლქმედი წყვილძალა ეწოდება.

განესაზღვროთ მისი მომენტი $M = M_B(\bar{P}) = M_A(\bar{P}')$. მაშასადამე,

$$M = M_B(\vec{P}) = M_B(\vec{P}_1) + M_B(\vec{P}_2) + \dots + M_B(\vec{P}_n). \quad (4.13)$$

ცხადია, რომ (4.13)-ში შემავალი შესაკრებები მდგენელი წყვილბალების სკალარული მომენტებია, ამიტომ (4.13)-დან მივიღებთ (4.12) ფორმულას, რაც ამტკიცებს მე-2 თეორემას.

ამრიგად, ურთიერთგადამკვეთ სიბრტყეებში მდებარე წყვილბალების შესაკრებად საჭიროა მათი ვექტორული მომენტების შეკრება ((4.11) ფორმულა). კერძო შემთხვევაში, როცა ყველა შესაკრები წყვილბალა მდებარეობს ერთ სიბრტყეში ან პარალელურ სიბრტყეებში, უნდა ვიპოვოთ შესაკრები წყვილბალების სკალარული მომენტების ალგებრული ჯამი ((4.12) ფორმულა).

4.6. წყვილბაღთა სისტემის წონასწორობის პირობა და წონასწორობის განტოლებები

ვთქვათ, მყარ სხეულზე მოქმედებს სიერცეში მდებარე $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$, $(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$, ..., $(\vec{F}_n, \vec{F}_n')$ წყვილბაღთა სისტემა და სხეული იმყოფება წონასწორობაში.

შეკრების თეორემის ძალით (4.11) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ წყვილბაღთა სისტემა ტოლფასია ტოლქმედი წყვილბაღისა, ამიტომ იმ სხეულის წონასწორობისათვის, რომელზედაც მოქმედებს წყვილბაღთა სისტემა, მართებული იქნება შემდეგი თეორემა:

სხეულის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა, რომ მასზე მოქმედი წყვილბაღების ტოლქმედი წყვილბაღის ვექტორული მომენტი ტოლი იყოს ნულისა.

მაშასადამე, წონასწორობის ვექტორულ განტოლებას ექნება სახე:

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_k = 0. \quad (4.14)$$

(4.14)-ის $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე დაგეგმილებით მივიღებთ:

$$M_x = \sum_{k=1}^n M_{kx} = 0; \quad M_y = \sum_{k=1}^n M_{ky} = 0; \quad M_z = \sum_{k=1}^n M_{kz} = 0. \quad (4.15)$$

(4.15) გამოსახულება წყვილბაღთა სისტემის წონასწორობის განტოლებებია. თუ წყვილბაღთა სისტემა მოთავსებულია ერთ სიბრტყეში, მაშინ წონასწორობის განტოლება იქნება:

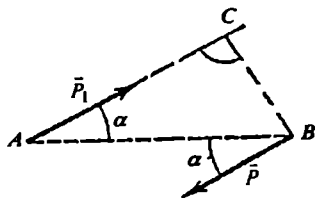
$$M = \sum_{k=1}^n M_k = 0, \quad (4.16)$$

სადაც M არის ერთ სიბრტყეზე მდებარე წვეილძალების ტოლქმედი წვეილძალის სკალარული მომენტი. მაშასადამე, გვექნება შემდეგი თეორემა: ერთ სიბრტყეზე მდებარე წვეილძალების წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა, რომ ამ წვეილების მომენტების ალგებრული ჯამი ტოლი იყოს ნულისა.

4.7. წვეილძალების მომენტები. წვეილძალების შეკრება. წვეილძალების წონასწორობა

ამოცანა 17. განესაზღვროთ ($\vec{P}, \vec{P}_1$) წვეილძალის სკალარული მომენტი (ნახ. 4.8), თუ $P_1 = P = 20$ ნ, $AB = 0,5$ მ, $\alpha = 30^\circ$

ამოხსნა. 1. წვეილძალის სკალარული მომენტის განსაზღვრის დროს, უპირველეს ყოვლისა, საჭიროა სწორად განესაზღვროთ მხარი. ამასთანავე აუცილებელია განესაზღვროთ შემდეგი ცნებები: წვეილძალის მხარი და წვეილძალის ძალთა მოდების წერტილებს შორის მანძილი.



ნახ. 4.8

როგორც ვიცით, მყარი სხეულის მექანიკაში ძალა სრიალა ვექტორია, ამიტომ ძალის მოქმედება სხეულზე არ შეიცვლება, თუ მოვდებთ მისი ფუძის ნებისმიერ წერტილში. მაშასადამე, წვეილძალის შემდგენი ძალების მოდების წერტილებს შორის მანძილი შეიძლება შეიცვალოს განესაზღვრელად. მაგრამ ამ გადატანის შემთხვევაში წვეილძალის მხარი დარჩება უცვლელი.

კერძო შემთხვევაში ძალების მოდების წერტილების შემართებული მონაკვეთი შეიძლება დავამთხვიოთ წვეილძალის მხარს.

იმისათვის, რომ განესაზღვროთ მოცემული წვეილძალის მომენტი, ერთ-ერთი ძალის მოდების წერტილიდან, მაგალითად, B წერტილიდან $\vec{P}_1$ ძალის ფუძეზე დაუშვათ BC პერპენდიკულარი. $BC = h$ მანძილი არის წვეილძალის მხარი. მაშინ ABC მართკუთხა სამკუთხედიდან

$$BC = AB \cdot \sin \alpha = 0,5 \cdot \sin 30^\circ = 0,25 \text{ მ.}$$

2. ვიპოვოთ წყვილძალის მომენტი:

$$M = -P \cdot BC = -20 \cdot 0,25 = -5 \text{ ნ.მ.}$$

ამოცანა 18. როგორ შეიცვლება $(\vec{P}, \vec{P}_1)$ წყვილძალის მომენტი (ნახ. 4.9, ა), თუ $\vec{P}$ და $\vec{P}_1$ ძალებს შემოვებრუნებთ ისე, რომ მათი მხარი გახდეს AB მონაკვეთი? ($P = 50$ ნ, $AB = 0,4$ მ და $\alpha = 135^\circ$).

ამოხსნა. 1. მოცემული მდებარეობისათვის ვიპოვოთ $(\vec{P}, \vec{P}_1)$ წყვილძალის სკალარული მომენტი (ნახ. 4.9, ა). B წერტილიდან $\vec{P}$ ძალის მოქმედების ფუძეზე დაუშვათ BC მართობი (მხარი) და ვიპოვოთ მისი სიგრძე:

$$BC = AB \sin(180^\circ - \alpha) = 0,4 \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{5} \text{ მ.}$$

მოცემული მდებარეობისათვის წყვილძალის სკალარული მომენტი

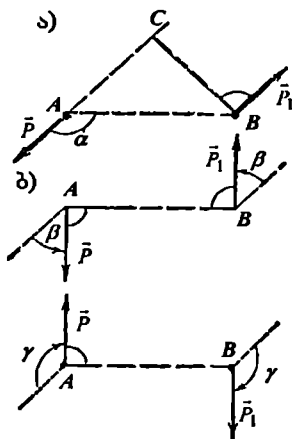
$$M_s = P \cdot BC = 50 \cdot \frac{\sqrt{2}}{5} = 10\sqrt{2} \text{ ნ.მ.}$$

2. მოცემული მდებარეობიდან $\vec{P}$ და $\vec{P}_1$ ძალები მოვებრუნოთ $\beta = \alpha - 90^\circ$ კუთხით საათის ისრის ბრუნვის საპირისპირო მიმართულებით (ნახ. 4.9, ბ). ასეთ მდებარეობაში AB მონაკვეთი ანუ ძალების მოდების წერტილებს შორის მანძილი არის წყვილძალის მხარი, ამიტომ

$$M_s = P \cdot AB = 50 \cdot 0,4 = 20 \text{ ნ.მ.}$$

3. შევადაროთ მიღებული შედეგები. ვნახათ, რომ მობრუნების შედეგად წყვილძალის მომენტი გაიზარდა $+20 - 10\sqrt{2} \approx 5,85$ ნ.მ სიდიდით.

4. ადვილი შესამჩნევია, რომ $\vec{P}$ და $\vec{P}_1$ ძალები გახდება AB მონაკვეთის მართობული, თუ ამ ძალებს γ კუთხით მოვებრუნებთ საათის ისრის თანხვედნილი მიმართულებით



ნახ. 4.9

(ნახ. 4.9, გ). ცხადია, ამ შემთხვევაშიც წყვილძალის მხარი იქნება AB მონაკვეთი, ხოლო მომენტი

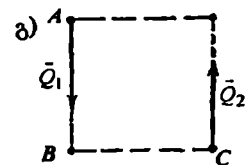
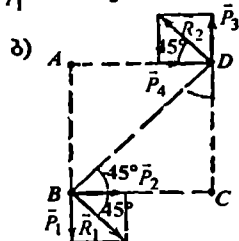
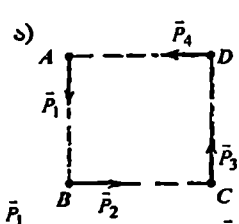
$$M_0 = -P \cdot AB = -50 \cdot 0,4 = -20 \text{ ნ.მ.}$$

წყვილძალის მომენტმა შეიცვალა ნიშანი.

ამოცანა 19. კვადრატის A, B, C და D წვეროებზე ისეა მოდებული ძალები, რომ ქმნის $(\vec{P}_1, \vec{P}_3)$ და $(\vec{P}_2, \vec{P}_4)$ ორ წყვილძალას. განესაზღვროთ ამ წყვილძალების ტოლქმედი წყვილძალის მომენტი, თუ $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 12 \text{ ნ.}$ კვადრატის წიბოს სიგრძეა $0,5 \text{ მ}$ (ნახ. 4.10, ა).

ამოხსნა 1. ორივე წყვილძალის მხარი კვადრატის გვერდის ტოლია, ამიტომ

$$M = M_{13} + M_{24} = P_1 \cdot AD + P_2 \cdot AB = 12 \cdot 0,5 + 12 \cdot 0,5 = 12 \text{ ნ.მ.}$$



ნახ. 4.10

მაშასადამე,

ამოხსნა 2. $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_3$ ძალები A და C წერტილებიდან გადავიტანოთ შესაბამისად B და D წერტილებში (ნახ. 4.10, ბ). B და D წერტილებში მივიღებთ თავმოყრილ $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$; $\vec{P}_3$ და $\vec{P}_4$ ძალოთა ორ სისტემას, რომელთა მოდულები ტოლია.

2. B და D წერტილებზე მოდებული ძალები წყვილ-წყვილად შევკრიბოთ. ორივე შემთხვევაში გვექნება:

$$R_1 = R_2 = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = 12\sqrt{2} \text{ ნ.}$$

3. $\vec{R}_1$ და $\vec{R}_2$ მიმართულია BD დიაგონალის მართობულად და ქმნის $(\vec{R}_1, \vec{R}_2)$ წყვილძალას, რომლის მხარია BD დიაგონალის სიგრძე. ამასთან ეს წყვილძალა მოცემული წყვილძალების შემცველია (ტოლფასი).

4. ეპოვოთ $(\vec{R}_1, \vec{R}_2)$ წყვილძალის მომენტი:

$$M = R_1 \cdot BO = R_1 \cdot AB \cdot \sqrt{2}.$$

$$M = 12\sqrt{2} \cdot 0,5\sqrt{2} = 12 \text{ ნ·მ.}$$

მე-2 ამოხსნის თანახმად, მივიღეთ ტოლქმედი ($\vec{R}_1, \vec{R}_2$) წყვილდალა BD (დიაგონალის) მხრით. მაგრამ ტოლქმედი წყვილდალა შეიძლება წარმოვადგინოთ სხვა სახითაც. მაგალითად, $ABCD$ კვადრატის ნებისმიერ ორ წვეროზე მოდებული ($\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$) წყვილდალით, სადაც $Q_1 = Q_2 = 24 \text{ ნ}$ (იხ. წყვილდალების ტოლფასობა).

ამოცანა 20. AB ძელის A და B წერტილებზე მოდებულია ვერტიკალური $\vec{P}_A$ და $\vec{P}_B$ ძალები, რომლებიც ქმნიან ($\vec{P}_A, \vec{P}_B$) წყვილდალას (ნახ. 4.11, ა). ძელის C და D წერტილებზე მოვდოთ ისეთი ორი ძალა, რომელთა ფუძეები მართობული იქნება AB ძელისა და უზრუნველყოფს ძელის წონასწორობას, თუ ცნობილია, რომ: $AB = 3 \text{ მ}$; $CD = 1 \text{ მ}$; $P_A = P_B = 100 \text{ ნ}$; $\alpha = 60^\circ$.

ამოხსნა. 1. წყვილდალა შეიძლება გააწონასწოროს მხოლოდ წყვილდალამ. ამიტომ C და D წერტილებზე უნდა მოვდოთ ახალი წყვილდალა, რომლის მომენტი მოდულით ტოლი იქნება მოცემული ($\vec{P}_A, \vec{P}_B$) წყვილდალის მომენტის მოდულისა, მაგრამ უნდა პქონდეს საწინააღმდეგო ნიშანი.

რადგან მოცემული წყვილდალის მოქმედებით AB ძელი შემობრუნდება საათის ისრის ბრუნვის მიმართულებით, ამიტომ საძიებელმა ძალებმა უნდა შემოაბრუნოს მისი საწინააღმდეგო მიმართულებით (ნახ. 4.11, ბ).

2. თუ გამოვიყენებთ წონასწორობის პირობას: $M_{AB} + M_{CD} = 0$, გვექნება

$$-P_A \cdot AE + P_C \cdot CD = 0, \quad (1)$$

სადაც $AE = AB \cdot \cos \alpha = 3 \cdot \frac{1}{2} = 1,5 \text{ მ}$.

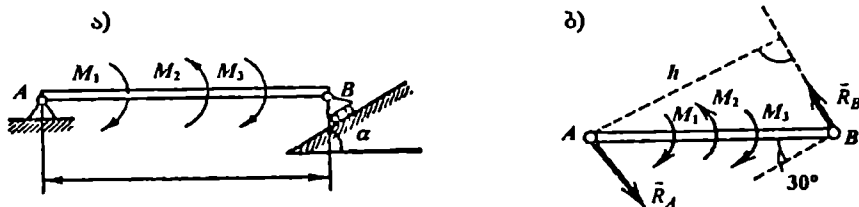
მაშინ (1)-დან მივიღებთ:

$$P_C = \frac{P_A \cdot AE}{CD} = \frac{100 \cdot 1,5}{1} = 150 \text{ ნ.}$$

მაშასადამე, C და D წერტილებზე საჭიროა მოედოთ $\vec{P}_C$ და $\vec{P}_D$ ძალები, თითოეული მათგანის მოდულია 1506, როგორც ეს ნაჩვენებია 4.11, ბ ნახაზზე.

ამოცანა 21. $AB=10$ მ სიგრძის ძელი ერთი ბოლოთი მიმაგრებულია A უძრავი სახსრით, ხოლო მეორეთი – პორიზონტისადმი $\alpha=30^\circ$ კუთხით დახრილ სიბრტყეზე მდებარე B მოძრავი სახსრით (საგორაეებით). ძელზე მოქმედებს ერთ სიბრტყეზე მდებარე სამი წყვილძალა M_1 , M_2 და M_3 მომენტებით (ნახ. 4.12, ა). განესაზღვროთ A და B საყრდენთა რეაქციები, თუ $|M_1|=8$ კნ·მ; $|M_2|=10$ კნ·მ; $|M_3|=12$ კნ·მ.

ამოხსნა. განვიხილოთ AB ძელის წონასწორობა (ნახ. 4.12, ბ). მასზე მოქმედებს სამი წყვილძალა და საყრდენთა $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B$ რეაქციები. $\vec{R}_B$ რეაქციის ფუძე ცნობილია, ის მიმართულია დახრილი სიბრტყის მართობულად, ხოლო $\vec{R}_A$ რეაქციის ძალის სიდიდე და მიმართულება უცნობია. რადგან AB ძელზე მოქმედებს ერთ სიბრტყეში მდებარე წყვილძალები, ამიტომ მათ გააწონასწორებს მხოლოდ ამავე სიბრტყეში მდებარე წყვილძალა. მაშასადამე, $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B$ რეაქციის ძალებმა უნდა შეადგინოს ამავე სიბრტყეში მდებარე წყვილძალა და გააწონასწოროს მოცემული წყვილძალები.



ნახ. 4.12

AB ძელი გავათავისუფლოთ ბმებისაგან. ზემოთქმულიდან გამომდინარე $\vec{R}_A$ რეაქცია პარალელური იქნება $\vec{R}_B$ რეაქციისა, ამასთან $|\vec{R}_A|=|\vec{R}_B|$ და $\vec{R}_A=-\vec{R}_B$ (ნახ. 4.12, ბ). მაშასადამე, ეს

ძალები $\vec{R}_A, \vec{R}_B$ წყვილდალას, რომლის მხარი
 $h = AB \cdot \cos 30^\circ$

ამრიგად, AB ძელი წონასწორობაშია ერთ სიბრტყეში მდებარე ოთხი წყვილდალის მოქმედებით. ვისარგებლოთ ერთ სიბრტყეში მდებარე წყვილდალების წონასწორობის (4.16) პირობით. გვექნება:

$$\sum_{k=1}^4 M_k = 0; \quad -|M_1| + |M_2| - |M_3| + R_B \cdot h = 0,$$

საიდანაც

$$R_B = \frac{|M_1| - |M_2| + |M_3|}{AB \cos 30^\circ} = \frac{8 - 10 + 12}{10 - \sqrt{3}/2} = 1,16 \text{ კნ.}$$

R_B -ს მნიშვნელობა მივიღეთ დადებითი, რაც იმას ნიშნავს, რომ რეაქციის ძალების მიმართულებები სწორადაა შერჩეული:

$$R_A = R_B = 1,16 \text{ კნ.}$$

ამოცანა 22. მყარ სხეულზე მოდებულია ორი წყვილდალა, რომელთა მომენტებია: $M_1 = 40$ ნ·მ და $M_2 = 30$ ნ·მ. განვსაზღვროთ იმ წყვილდალის ვექტორული მომენტი, რომელიც მიიღება მოცემული წყვილდალების შეკრებით. ეს წყვილდალები მდებარეობს ურთიერთგადაკვეთ სიბრტყეზე, რომლის ორ წახნაგა კუთხე 60° -ის ტოლია.

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად საძიებელი წყვილდალის ვექტორული $\vec{M}$ მომენტი $\vec{M}_1$ -ისა და $\vec{M}_2$ -ის გეომეტრიული ჯამის ტოლია, ე.ი.

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2.$$

რადგან წყვილდალის ვექტორული მომენტი თავისუფალი ვექტორია, ამიტომ შეგვიძლია $\vec{M}_1$ და $\vec{M}_2$ ვექტორები მოვდოთ სიბრტყეების გადაკვეთის წრფის რომელიმე წერტილზე და პარალელოგრამის წესით შევკრიბოთ ისინი. მაშინ $\vec{M}$ ვექტორის მოდული ტოლი იქნება

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2M_1M_2 \cos(\vec{M}_1, \vec{M}_2)} =$$

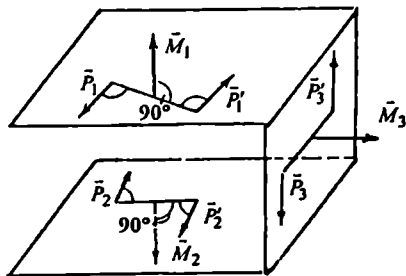
$$= \sqrt{1600 + 900 + 2 \cdot 40 \cdot 30 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{3700} \approx 61 \text{ ნ.მ.}$$

რადგან $(\vec{M}_1, \vec{M}_2) = 60^\circ$

ამოცანა 23. $(\vec{P}_1, \vec{P}_1')$ და $(\vec{P}_2, \vec{P}_2')$ წყვილძალები მოთავსებულია პარალელურ სიბრტყეებზე, რომელთა მომენტებია შესაბამისად $M_1 = 25 \text{ ნ.მ}$ და $M_2 = 10 \text{ ნ.მ}$. $(\vec{P}_3, \vec{P}_3')$ წყვილძალა, რომლის მომენტიცა $M_3 = 20 \text{ ნ.მ}$, მოთავსებულია აღნიშნული სიბრტყეების მართობულ სიბრტყეზე (ნახ. 4.13). განვსაზღვროთ ტოლფასი წყვილძალის მომენტი.

ამოხსნა. ჯერ შევკრიბოთ პარალელურ სიბრტყეზე მდებარე წყვილძალები. ამისათვის საკმარისია ვიპოვოთ M_1 და M_2 მომენტების ალგებრული ჯამი. იმის გათვადისწინებით, რომ ამ წყვილძალებს აქვს ბრუნვის ურთიერთსაპირისპირო მიმართულება გვეჩვენება.

$$M_{12} = M_1 + M_2 = 25 - 10 = 15 \text{ ნ.მ.}$$



ნახ. 4.13

ახლა წყვილძალა $\vec{M}_{12}$ მომენტით შევკრიბოთ წყვილძალასთან, რომლის მომენტიცა $\vec{M}_3$. რადგან $\vec{M}_{12} \perp \vec{M}_3$, ამიტომ ტოლფასი წყვილძალის მოდული ტოლი იქნება:

$$M = \sqrt{M_{12}^2 + M_3^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \text{ ნ.მ.}$$

5. სტატისტიკის ძირითადი თეორემა და ნებისმიერ ძალთა სისტემის წონასწორობის პირობა

5.1. ლემა ძალის პარალელური გადატანის შესახებ

როგორც ცნობილია, მყარ სხეულზე მოდებული ძალა შეიძლება გადავიტანოთ სხეულის ნებისმიერ წერტილში მისი მოქმედების ფუძის გასწვრივ. ხშირად საჭიროა მყარ სხეულზე მოდებული ძალა თავისთავის პარალელურად გადავიტანოთ და მოვდოთ სხეულის რომელიმე წერტილზე. ამ წერტილს დაყვანის ცენტრი ეწოდება.

დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა:

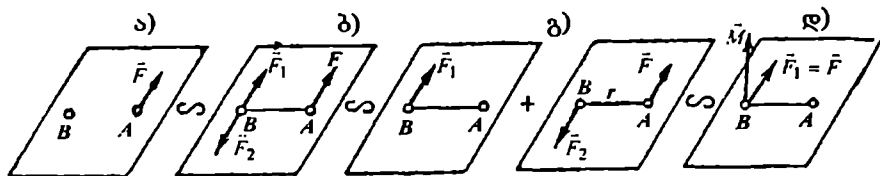
ძალა შეიძლება გადავიტანოთ თავისთავის პარალელურად სხეულის ნებისმიერ წერტილში, თუ მას დაეუმატებთ წყვილ-ძალას, რომლის ვექტორული მომენტი ტოლია მოცემული ძალის ვექტორული მომენტისა ახალი მოდების წერტილის მიმართ.

დამტკიცება. ვთქვათ მყარი სხეულის A წერტილზე მოდებულია $\vec{F}$ ძალა (ნახ. 5.1, ა). იმ B წერტილზე (დაყვანის ცენტრზე), სადაც გვინდა გადავიტანოთ $\vec{F}$ ძალა, მოვდოთ გაწონასწორებული ისეთი $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ორი ძალა, რომ $\vec{F}_1 = \vec{F} = -\vec{F}_2$ (ნახ. 5.1, ბ). მაშინ გვექნება: $\vec{F} \in (\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2)$. $\vec{F}$ და $\vec{F}_2$ ძალები ქმნის წყვილძალას, ამიტომ სამი $(\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2)$ ძალის სისტემა შეიძლება განვიხილოთ როგორც B წერტილზე მოდებული $\vec{F}_1 = \vec{F}$ ძალისა და $(\vec{F}, \vec{F}_2)$ წყვილძალის ერთობლიობა. მაშასადამე, $\vec{F} \in \{\vec{F}_1$ ძალისა და $(\vec{F}, \vec{F}_2)$ წყვილძალისა $\}$ (ნახ. 5.1, გ). $(\vec{F}, \vec{F}_2)$ წყვილძალას მიკავშირებული წყვილძალა ეწოდება და განისაზღვრება მისი $\vec{M} = \vec{M}(\vec{F}, \vec{F}_2) = \vec{M}_B(\vec{F})$ მომენტით.

ამრიგად, A წერტილზე მოდებული $\vec{F}$ ძალის მაგივრად მივიღეთ დაყვანის B ცენტრზე მოდებული $\vec{F}_1$ ძალა ($\vec{F}_1 = \vec{F}$) და $(\vec{F}, \vec{F}_2)$ მიკავშირებული წყვილძალა (ნახ. 5.1, დ), რომლის

ვექტორული მომენტი ტოლია მოცემული $\vec{F}$ ძალის ვექტორული მომენტისა დაყვანის B (ცენტრის მიმართ, ე.ი.

$$\vec{M}(\vec{F}, \vec{F}_2) = M_B(\vec{F}) = \overline{BA} \times \vec{F}. \quad (5.1)$$



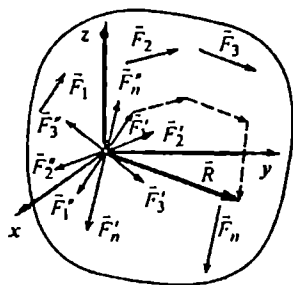
ნახ. 5.1

$\vec{F}$ ძალის $\vec{F}_1$ ძალით და $(\vec{F}, \vec{F}_2)$ წყვილძალით შეცვლის პროცესს ძალის მოცემულ ცენტრზე დაყვანა ეწოდება. ამით ლემა დამტკიცებულია.

5.2. სივრცეში მდებარე ძალთა სისტემის ერთ ძალამდე და ერთ წყვილძალამდე დაყვანა

დავამტკიცოთ სტატიკის ძირითადი (პუანსოს) თეორემა:

სივრცეში მდებარე ნებისმიერი ძალთა სისტემა, რომელიც მოდებულია მყარ სხეულზე, შეიძლება დავიყვანოთ სხეულის რომელიმე წერტილზე მოდებულ ერთ ძალამდე და ერთ წყვილძალამდე. ძალა ტოლია ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორისა, ხოლო წყვილძალის ვექტორული მომენტი – ამ წერტილის მიმართ სისტემის ნაკრები ვექტორული მომენტისა.



ნახ. 5.2

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია მყარ სხეულზე მოდებული ნებისმიერი $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ ძალთა სისტემა. დაყვანის ცენტრად ავირჩიოთ სხეულის ნებისმიერი O წერტილი და მასზე დავიყვანოთ მოცემული ძალთა სისტემის ყოველი ძალა (ნახ. 5.2). მივიღებთ:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim \left\{ \vec{F}_1', \vec{F}_2', \dots, \vec{F}_n', (\vec{F}_1, \vec{F}_1'), (\vec{F}_2, \vec{F}_2'), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}_n') \right\},$$

სადაც $\vec{F}_1 = \vec{F}_1' = -\vec{F}_1'', \dots, \vec{F}_n = \vec{F}_n' = -\vec{F}_n''$.

მაშასადამე, 5.1 პარაგრაფში მოყვანილი ლემის თანახმად, n ძალისაგან შედგენილი ძალთა სისტემა შეეცვალებოდა მისი ტოლფასი $3n$ ძალისაგან შედგენილი სისტემით, ე.ი. დაყვანის O ცენტრზე მოდებული თავმოყრილ $(\vec{F}_1', \vec{F}_2', \dots, \vec{F}_n')$ ძალთა სიტემითა და მყარ სხეულზე მოდებული მიკავშირებული n წყვილძალით $\left\{ (\vec{F}_1, \vec{F}_1'), (\vec{F}_2, \vec{F}_2'), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}_n') \right\}$.

მიკავშირებულ წყვილძალების ვექტორული მომენტები (5.1) ფორმულის ძალით შეიძლება გამოვსახოთ მოცემული ძალთა სისტემის ძალების ვექტორული მომენტების საშუალებით:

$$\vec{M}_k = \vec{M}(\vec{F}_k, \vec{F}_k') = \vec{M}_0(\vec{F}_k); \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (5.2)$$

თავმოყრილ $(\vec{F}_1', \vec{F}_2', \dots, \vec{F}_n')$ ძალთა სისტემა შეეცვალებოდა მათი $\vec{R}$ ტოლქმედით, რომელიც $\vec{F}_1', \vec{F}_2', \dots, \vec{F}_n'$ ძალების გეომეტრიული ჯამის ტოლია. $\vec{R}$ ტოლქმედი გეომეტრიულად გამოსახავს ამ ძალებზე აგებულ ძალთა მრავალკუთხედის ჩამკეტ ვექტორს (ნახ. 5.2).

ამრიგად,

$$(\vec{F}_1', \vec{F}_2', \dots, \vec{F}_n') \sim (\vec{R}),$$

სადაც

$$\vec{R} = \vec{F}_1' + \vec{F}_2' + \dots + \vec{F}_n' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k.$$

თავმოყრილი $(\vec{F}_1', \vec{F}_2', \dots, \vec{F}_n')$ ძალთა სისტემისათვის $\vec{R}$ ვექტორი არის ტოლქმედი, ხოლო მოცემული $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ ძალთა სისტემისათვის მხოლოდ მათი გეომეტრიული ჯამი ანუ მხოლოდ ნაკრები ვექტორია.

წყვილძალების შეკრების შესახებ თეორემის ძალით მიკავშირებულ წყვილძალთა $\{(\vec{F}_1, \vec{F}_1''), (\vec{F}_2, \vec{F}_2''), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}_n'')\}$ სისტემა

შეიძლება შევცვალოთ ერთი $(\vec{F}, \vec{F}'')$ წყვილძალით, რომლის ვექტორული მომენტიცა $\vec{M}(\vec{F}, \vec{F}'') = \vec{M}_0$, სადაც $\vec{M}_0$ არის ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორული მომენტი. O ინდექსი აღნიშნავს, რომ დაყვანის ცენტრად აღებულია O წერტილი.

ამრიგად, დამტკიცებულია სტატიკის ძირითადი თეორემა, რომ მყარ სხეულზე მოქმედი ნებისმიერი ძალთა სისტემა ზოგად შემთხვევაში დაიყვანება ერთ ძალამდე და წყვილძალამდე. ე.ი. ყოველი ძალთა სისტემა შეიძლება დაიყვანოს ნაკრებ ვექტორზე და ნებისმიერი ცენტრის მიმართ ნაკრებ ვექტორულ მომენტზე.

ეს თეორემა მოკლედ შეიძლება ასე გამოვსახოთ:

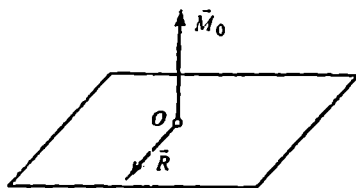
$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{R}, \vec{M}_0). \quad (5.3)$$

5.3. ერთ სიბრტყეზე მდებარე ძალთა სისტემის ერთ ძალამდე და ერთ წყვილძალამდე დაყვანა

სტატიკის ძირითადი თეორემა (პუანსოს თეორემა) მართებულია ნებისმიერ ძალთა სისტემისათვის. ის მართებულია აგრეთვე მყარ სხეულზე მოდებული ნებისმიერი ბრტყელ ძალთა სისტემისათვისაც. ზოგად შემთხვევაში ნებისმიერი ძალთა სისტემა შეიძლება დაიყვანოს ერთ ძალამდე და ერთ წყვილძალამდე.

ბრტყელ ძალთა სისტემის ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორი მდებარეობს ძალების მოქმედების სიბრტყეში. თუ დაყვანის ცენტრად ავირჩევთ ამ სიბრტყის წერტილს, მაშინ ყველა მიკავშირებული წყვილძალა აგრეთვე ამ სიბრტყეში მდებარეობს, ხოლო წყვილძალების ვექტორული მომენტებიც ამ სიბრტყის მართობული და ურთიერთპარალელურია. ამრიგად, მიკავშირებული წყვილძალების ტოლფასი $(\vec{F}, \vec{F}')$ წყვილძალის $\vec{M}_0$ მომენტი არის პარალელური ვექტორების გეომეტრიული

ჯამი და ძალების მოქმედების სიბრტყის მართობულია. მაშასადამე, ბრტყელ ძალთა სისტემისათვის ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორი და ნაკრები $\vec{M}_0$ მომენტი ყოველთვის ურთიერთპერპენდიკულარულია (ნახ. 53).



ნახ. 53

ბრტყელ ძალთა სისტემის განხილვისას საქმე გვაქვს წყვილძალებთან, რომლებიც ძალების მოქმედების სიბრტყეში მდებარეობენ. ამიტომ ბრტყელ ძალთა სისტემის შემთხვევაში არავითარი საჭიროება არ არსებობს, წყვილძალის მომენტს მივანიჭოთ ვექტორული შინაარსი. ამ შემთხვევაში ნაკრები

მომენტი მიკავშირებული წყვილძალების სკალარული მომენტების ალგებრული ჯამის ტოლია. მაშასადამე, ის დაყვანის ცენტრის მიმართ ძალთა სისტემის მდგენელი ძალების სკალარული მომენტების ალგებრული ჯამის ტოლია.

ბრტყელ ძალა სისტემის შემთხვევაში ნაკრები ვექტორული მომენტის ნაცვლად გამოიყენება ნაკრები სკალარული მომენტის ცნება. ამრიგად, ბრტყელ ძალთა სისტემისათვის სტატიკის ძირითადი თეორემა ჩამოყალიბდება ასე:

ერთ სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი ძალთა სისტემა, რომელიც მოდებულია მყარ სხეულზე, შეიძლება დაიყვანოს ძალთა სისტემის მოქმედების სიბრტყის ნებისმიერ წერტილზე მოდებულ ერთ ძალამდე და ერთ წყვილ ძალამდე. ძალა ტოლია ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორისა, ხოლო წყვილძალის მომენტი—ნაკრები სკალარული მომენტისა ამ წერტილის მიმართ.

ეს თეორემა მოკლედ ასე გამოისახება:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{R}, M_0), \quad (5.4)$$

სადაც

$$\vec{R} = \vec{F}_1' + \vec{F}_2' + \dots + \vec{F}_n' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k, \quad (5.5)$$

$$M_0 = M_0(\vec{F}_1) + M_0(\vec{F}_2) + \dots + M_0(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^n M_0(\vec{F}_k). \quad (5.6)$$

ამრიგად, ზემოთ მოყვანილი თეორემების დამტკიცების საფუძველზე ჩვენ ამოვხსენით სტატიკის პირველი ძირითადი ამოცანა: ნებისმიერი ძალთა სისტემის ტოლფასი (ეკვივალენტური) და უფრო მარტივი სისტემით შეცვლის შესახებ.

5.4. ნებისმიერი ძალთა სისტემის წონასწორობის პირობა

განვიხილოთ სტატიკის მეორე ძირითადი ამოცანა და დავადგინოთ, როგორ პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს წონასწორობის ობიექტზე მოდებული სივრცეში მდებარე ნებისმიერი ძალთა სისტემა, რომ ეს ძალთა სისტემა გაწონასწორებულიყოს, ე.ი. დავადგინოთ მათი წონასწორობის პირობები.

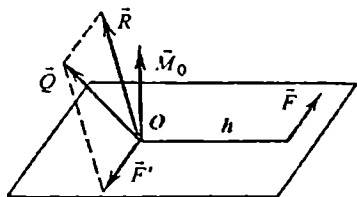
ამისათვის დავამტკიცოთ სტატიკის მეორე ძირითადი თეორემა სივრცეში მდებარე ძალთა სისტემის წონასწორობის შესახებ:

თავისუფალ მყარ სხეულზე მოდებული ნებისმიერი სივრცით ძალთა სისტემის წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა, ამ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები ვექტორული მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ ნულის ტოლი იყოს.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემული გვაქვს მყარ სხეულზე მოდებული $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ ძალთა სისტემა, რომლის ნაკრები ვექტორია $\vec{R}$, ხოლო ნაკრები ვექტორული მომენტი – $\vec{M}_0$. ცხადია, თუ სისტემა წონასწორობაშია, მაშინ მისი ტოლფასი სისტემა, რომელიც შედგება $\vec{R}$ და $\vec{M}_0$ ვექტორებისაგან, აგრეთვე წონასწორობაშია. იმისათვის, რომ $(\vec{R}, \vec{M}_0)$ სისტემა იყოს ნულის ტოლფასი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ნულის ტოლი იყოს როგორც ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორი, ასევე $(\vec{F}, \vec{F})$ წყვილძალის მომენტიც, რომელიც ნაკრები $\vec{M}_0$ მომენტის ტოლია.

ავირჩიოთ დაყვანის ცენტრად რაიმე O წერტილი. სტატიკის ძირითადი თეორემის ძალით განსაზღვრული სისტემა დავიყვანოთ ერთ ძალამდე და ერთ წყვილძალამდე.

მაშინ გვექნება O წერტილზე მოდებული ერთი $\vec{R}$ ძალა და ერთი $(\vec{F}, \vec{F}')$ წყვილძალა $\vec{M}_0$ მომენტი. გადავიტანოთ



ნახ. 5.4

წვეილძალა მის სიბრტყეში ისე, რომ $\vec{F}'$ ძალა იყოს მოდებული O წერტილზე. მაშინ O წერტილზე მოდებული იქნება $\vec{F}'$ და $\vec{R}$ ორი ძალა (ნახ. 5.4). შევეკრიბოთ ისინი, მივიღებთ $\vec{Q} = \vec{R} + \vec{F}'$ ძალას, რომელიც უკვე არ მდებარეობს $(\vec{F}, \vec{F}')$

წვეილძალის მოქმედების სიბრტყეში.

ამრიგად, მივიღეთ მნიშვნელოვანი შედეგი ნებისმიერი სივრცითი ძალთა სისტემა შეიძლება დაიყვანოს $\vec{Q}$ და $\vec{F}$ ორ ძალაზე, რომლებიც ზოგად შემთხვევაში ერთ სიბრტყეზე არ მდებარეობენ.

დავამტკიცოთ თეორემის პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, მოცემული ძალთა სისტემა ნულის ტოლფასია, მაშინ $\vec{Q}$ და $\vec{F}$ ძალთა სისტემაც ნულის ტოლფასი უნდა იყოს. რადგან სხეულზე მოქმედებს მხოლოდ ორი ძალა და სხეული წონასწორობაშია, ამიტომ I პრინციპის თანახმად ამ ორ ძალას უნდა ჰქონდეს მოქმედების საერთო ფუძე და, ამის გარდა, სრულდებოდეს $\vec{Q} = -\vec{F}$ პირობა. მაგრამ ეს შეიძლება მოხდეს იმ შემთხვევაში, როცა $\vec{F}$ ძალის ფუძე გადის O წერტილზე, ე.ი. თუ $h=0$. ეს იმას ნიშნავს, რომ ნაკრები მომენტი ნულის ტოლია ($\vec{M}_0=0$). რადგან $\vec{Q} + \vec{F} = 0$, ხოლო $\vec{Q} = \vec{F}' + \vec{R}$, ამიტომ $\vec{R} + \vec{F}' + \vec{F} = 0$. აქ $\vec{F}$ და $\vec{F}'$ ძალები ქმნის წვეილძალას, ე.ი. $\vec{F} + \vec{F}' = 0$, ამიტომ $\vec{R} = 0$.

ამრიგად, დავამტკიცეთ, თუ სხეული წონასწორობაშია, მაშინ ნაკრები ვექტორი და ნაკრები ვექტორული მომენტი ცალ-ცალკე ნულის ტოლია.

ამით დამტკიცებულია წონასწორობის პირობის აუცილებლობა.

ახლა დამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ეთქვათ, სხეულზე მოდებულ ძალთა სისტემის ნაკრები $\bar{R}$ ვექტორი ნულის ტოლია, მაშინ დაყვანის O ცენტრზე მოდებული ძალთა სისტემა ნულის ტოლფასია (იხ. 5.5 ფორმულა), ე.ი.

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \approx 0,$$

ხოლო როცა $\bar{M}_0 = 0$, მაშინ სხეულზე მოდებული წყვილძალთა სისტემა ნულის ტოლფასია. მაშასადამე, მოცემული ძალთა სისტემა $\bar{R}$ ნულის ტოლფასია.

მაშასადამე, თუ სხეულზე მოდებული ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები ვექტორული მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ ნულს უდრის, მაშინ ნაკრები ვექტორი და ნაკრები ვექტორული მომენტი ყველა სხვა წერტილის მიმართაც ნულის ტოლი იქნება. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $(\bar{R}, \bar{M}_0) \approx 0$ ანუ ჩვენი თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა მყარ სხეულზე

მოდებული $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ ნებისმიერი ძალთა სისტემა ერთ სიბრტყეზე მდებარეობს. ამ შემთხვევაში ბრტყელ ძალთა სისტემის წონასწორობის თეორემა ჩამოყალიბდება ასე:

თავისუფალ მყარ სხეულზე მოდებული ნებისმიერი ბრტყელი ძალთა სისტემის წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა, ამ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები სკალარული მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ, ნულის ტოლი იყოს.

ამ თეორემის დამტკიცებას არ მოვიყვანთ, რადგან მისი დამტკიცება ზუსტად ანალოგიურია სივრცეში მდებარე ძალთა სისტემის წონასწორობის თეორემის დამტკიცებისა.

ყურადღება მივაქციოთ იმ ფაქტს, რომ ბრტყელ ძალთა სისტემისთვის ნაკრები ვექტორული $\bar{M}_0$ მომენტის ნაცვლად გამოიყენება ნაკრები სკალარული M_0 მომენტის ცნება. მაშასადამე, წონასწორობის თეორემა მოკლედ ასე გამოისახება:

$$(\bar{R}, M_0) \approx 0,$$

ანუ

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \approx 0.$$

5.5. სივრცეში მდებარე ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებების ვექტორული ფორმა

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს მყარ სხეულზე მოდებული წონასწორობაში მყოფი, სივრცეში მდებარე $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ ძალთა სისტემა.

ვიცით, რომ თუ ძალთა სისტემა წონასწორობაშია, მაშინ ეს ძალთა სისტემა ნულის ტოლფასია, ე.ი. $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim 0$. ეს პირობა რომ შესრულდეს, საჭიროა ამ ძალთა სისტემის ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორი და ნაკრები ვექტორული $\vec{M}_0$ მომენტი ცალ-ცალკე ნულს უნდა უდრიდეს, ე.ი.

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{M}_0 = 0, \quad (5.7)$$

სადაც $\vec{R}$ არის ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი, ხოლო $\vec{M}_0$ — ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორული მომენტი რაიმე O წერტილის მიმართ.

თუ გავიხსენებთ ნაკრები ვექტორისა და ნაკრები ვექტორული მომენტების განმარტებებს (იხ. (3.17) და (3.18) ფორმულები), გვექნება:

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = 0; \quad \vec{M}_0 = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k = 0, \quad (5.8)$$

სადაც $\vec{F}_k$ არის სისტემის k -ური ძალა; $\vec{r}_k \times \vec{F}_k$ — ძალის რადიუს-ვექტორი მომენტთა ცენტრის მიმართ. (5.7) ან რაც იგივეა, (5.8) განტოლებები არის ნებისმიერი ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებები ვექტორული ფორმით.

5.6. სივრცეში მდებარე ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებების ანალიზური ფორმა

რადგან წონასწორობაში მყოფ მყარ სხეულზე მოდებული ძალთა სისტემის ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორი და ნაკრები ვექტორული $\vec{M}_0$ მომენტი ნულს უდრის, ამიტომ მათი გეგმილებიც $Oxyz$ სისტემის კოორდინატთა ღერძებზე, აგრეთვე ნულს უნდა უდრიდეს და გვექნება:

$$\begin{aligned} R_x &= 0; & R_y &= 0; & R_z &= 0, \\ M_{ox} &= 0; & M_{oy} &= 0; & M_{oz} &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

თუ გავიხსენებთ R_x , R_y , R_z , M_{ox} , M_{oy} , M_{oz} გეგმილთა მნიშვნელობებს (იხ. (3.20) და (3.24) ფორმულები), მაშინ მივიღებთ:

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0. \quad (5.10)$$

$$M_{ox} = \sum_{k=1}^n (y_k F_{kz} - z_k F_{ky}) = 0;$$

$$M_{oy} = \sum_{k=1}^n (z_k F_{kx} - x_k F_{kz}) = 0; \quad (5.11)$$

$$M_{oz} = \sum_{k=1}^n (x_k F_{ky} - y_k F_{kx}) = 0,$$

სადაც x_k , y_k , z_k არის $\vec{F}_k$ ძალის მოდების $A_k = A_k(x_k, y_k, z_k)$ წერტილის კოორდინატები; F_{kx} , F_{ky} , F_{kz} — $\vec{F}_k$ ძალის გეგმილები Oxyz სისტემის კოორდინატთა შესაბამის ღერძებზე.

(5.10) და (5.11) განტოლებებს ეწოდება სივრცეში მდებარე ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებები დეკარტის კოორდინატებში ანუ წონასწორობის განტოლებები ანალიზური ფორმით.

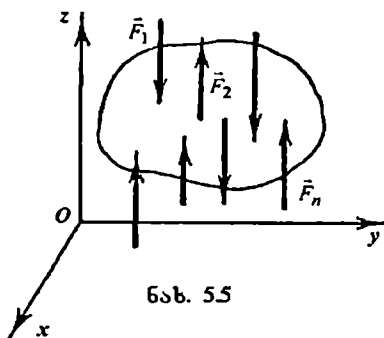
ამრიგად, მყარ სხეულზე მოდებული სივრცით ძალთა სისტემის წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა, დეკარტის კოორდინატთა სისტემის შესაბამის ღერძზე ყველა ძალის გეგმილების აღგებრული ჯამი ტოლი იყოს ნულისა და ამ ღერძების მიმართ სისტემის ძალების მომენტების აღგებრული ჯამი, აგრეთვე ნულის ტოლი იყოს.

მყარ სხეულზე მოდებული ნებისმიერი სივრცითი ძალთა სისტემის წონასწორობის შესახებ ამოცანების ამოხსნისას, საშუალება გვაქვს (5.10) და (5.11) განტოლებების მეშვეობით განესაზღვროთ ექვსი უცნობი სიდიდე.

მყარ სხეულზე მოდებული სივრცითი ძალთა სისტემის (5.10) და (5.11) წონასწორობის განტოლებებიდან მიიღება წონასწორობის განტოლებები ძალთა სისტემის კერძო (სივრცეში მდებარე პარალელურ ძალთა სისტემის; ერთ სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი ძალთა სისტემის; ერთ სიბრტყეზე მდებარე პარალელური ძალთა სისტემის; სივრცეში მდებარე თავმოყრილი ძალთა სისტემის და სიბრტყეზე მდებარე თავმოყრილი ძალთა სისტემის) შემთხვევებისათვის.

5.7. სივრცითი პარალელური ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებები

განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა მყარ სხეულზე მოდებული ძალები პარალელურია. ცხადია, წონასწორობისათვის სხეულზე მოდებული ძალების ნაკრები ვექტორი და ნაკრები ვექტორული მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ აქაც ნულის ტოლი უნდა იყოს.



ნახ. 5.5

ეთქვათ, მყარ სხეულზე მოდებულია სივრცეში მდებარე

პარალელური ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) ძალთა სისტემა. ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ Oz ღერძი მოცემული ძალების პარალელური იყოს (ნახ. 5.5).

მაშინ Ox და Oy ღერძებზე $\vec{F}_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) ძალის გეგმილები ნულის ტოლია ($F_{kx} \equiv 0, F_{ky} \equiv 0$ ე.ი.

$\vec{F}_1 = \vec{F}_1(0, 0, F_{1z}), \vec{F}_2 = \vec{F}_2(0, 0, F_{2z}), \dots, \vec{F}_n = \vec{F}_n(0, 0, F_{nz})$ და წონასწორობის (5.10) განტოლებათა სისტემიდან დაგვრჩება მხოლოდ მე-3 განტოლება. რადგან ძალები Oz ღერძის პარალელურია, ამიტომ ძალის ღერძის მიმართ მომენტის თვისების თანახმად $\vec{F}_k, k=1, 2, \dots, n$ ძალის მომენტი Oz ღერძის მიმართ ნულის ტოლია ($M_{oz}(\vec{F}_k) \equiv 0$) და წონასწორობის (5.11) განტოლებათა სისტემის მე-3 განტოლება იგივეურად ნულის ტოლია, ე.ი. ამ განტოლებებიდან დაგვრჩა პირველი ორი.

ამრიგად, სივრცეში მდებარე და Oz ღერძის პარალელური ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებებს ექნება შემდეგი სახე:

$$R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = 0,$$

$$M_{ox} = \sum_{k=1}^n M_{ox}(\vec{F}_k) = y_1 F_{1z} + y_2 F_{2z} + \dots + y_n F_{nz} = 0, \quad (5.12)$$

$$M_{oy} = \sum_{k=1}^n M_{oy}(\vec{F}_k) = x_1 F_{1z} + x_2 F_{2z} + \dots + x_n F_{nz} = 0,$$

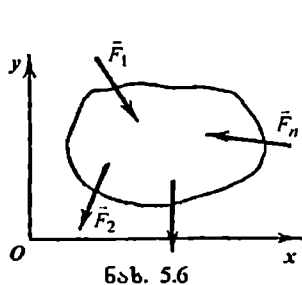
სადაც x_k, y_k არის $\vec{F}_k$ ძალის მოდების წერტილის კოორდინატები.

მაშასადამე, პარალელური ძალების შემთხვევაში წონასწორობის განტოლებათა რიცხვი, როგორც ენახეთ, არის სამი და არა ექვსი, როგორც ეს გეგონდა ნებისმიერი ძალების შემთხვევაში (იხ. 5.6 პარაგრაფი), რადგან მოცემული ძალების გეგმილები Ox და Oy ღერძებზე და მომენტები Oz ღერძის მიმართ ნულს უდრის.

პარალელურ ძალთა შემთხვევაში, ამოცანა სტატიკურად განსაზღვრული რომ იყოს, წონასწორობის განტოლებებში უნდა შედიოდეს არაუმეტეს სამი უცნობი.

5.8. ერთ სიბრტყეში მდებარე ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებები

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს მყარ სხეულზე მოდებული ერთ სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი ძალთა სისტემა – $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$.



ნახ. 5.6

Ox და Oy ღერძები მოვათავსოთ ძალების მოქმედების სიბრტყეში (ნახ. 5.6). რადგან Oz ღერძი მოცემული ძალების პერპენდიკულარულია,

ამიტომ $\sum_{k=1}^n F_k \equiv 0$, ე.ი. (5.10)-ის მე-3

განტოლება იგივეურად სრულდება. მაშასადამე, ამ სისტემიდან დარჩება პირველი ორი განტოლება. პირობის

თანახმად, თითოეული ძალა და Ox, Oy ღერძები მდებარეობს ერთ სიბრტყეში. ღერძის მიმართ ძალის მომენტის თვისების თანახმად, ძალის მომენტი ღერძის მიმართ ნულის ტოლია, თუ ძალა და ღერძი ერთ სიბრტყეში მდებარეობს (ძალა ან კვეთს ღერძს, ან მისი პარალელურია). ამიტომ წონასწორობის (5.11) განტოლებათა სისტემიდან პირველი ორი განტოლება იგივეურად სრულდება, ე.ი. $M_{ox} \equiv 0, M_{oy} \equiv 0$. მეორე მხრივ, $\vec{F}_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) ძალის მოდების წერტილის კოორდინატი $z_k \equiv 0$ და ამ ძალის გეგმილი Oz ღერძზე $F_{kz} \equiv 0$, ამიტომ (5.11) განტოლებათა სისტემიდან დაგვრჩება მხოლოდ ღერძის მიმართ

მომენტების მე-3 განტოლება, რომელიც არის ნაკრები სკალარული მომენტი O წერტილის მიმართ და მისი ნულთან ტოლობის პირობა. (5.10) და (5.11) განტოლებათა სისტემიდან ნებისმიერი ბრტყელი ძალთა სისტემისათვის იგივეური განტოლებების გადაგდების შემდეგ დაგვრჩება წონასწორობის შემდეგი სამი განტოლება:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n (x_k F_{ky} - y_k F_{kx}) = 0, \quad (5.13)$$

სადაც x_k, y_k არის $\vec{F}_k$ ძალის მოდების წერტილის კოორდინატები; F_{kx}, F_{ky} - $\vec{F}_k$ ძალის გეგმილები შესაბამისად Ox და Oy ღერძებზე.

ზოგჯერ ამოცანის ამოხსნის შემთხვევაში (5.13) წონასწორობის მესამე განტოლება, ე.ი. მომენტების განტოლება, შეიძლება შედგენილი იყოს მომენტის განმარტების საფუძველზე და (5.13) ჩაიწერება ასეთი სახით:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_o(\vec{F}_k) = M_o(\vec{F}_1) + M_o(\vec{F}_2) + \dots + M_o(\vec{F}_n) = 0. \quad (5.14)$$

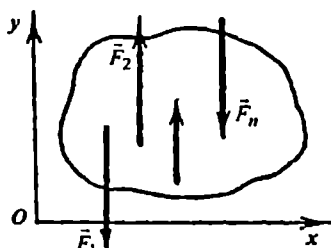
(5.13) ან, რაც იგივეა, (5.14) განტოლებებს ნებისმიერი ბრტყელ ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებები ეწოდება.

5.9. ერთ სიბრტყეზე მდებარე პარალელური ძალების წონასწორობის განტოლებები

ეთქვათ, მოცემული გვაქვს Oxy სიბრტყეში მდებარე

პარალელური $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ ძალთა სისტემა. როგორც ვიცით, წონასწორობისათვის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები სკალარული მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ ნულის ტოლი უნდა იყოს.

ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ Oy ღერძი მოცემული ძალების პარალელური იყოს (ნახ. 5.7).



ნახ. 5.7

მაშინ გეექნება: $\vec{F}_1 = \vec{F}_1(0, F_{1y}), \vec{F}_2 = \vec{F}_2(0, F_{2y}), \dots, \vec{F}_n = \vec{F}_n(0, F_{ny})$.

მაშასადამე, (5.14) წონასწორობის პირველი განტოლება იგივეობაა ($F_{kx} \equiv 0; F_{kx} \equiv 0$), თითოეული ძალის გეგმილი Ox ღერძზე ნულის ტოლია და ის ამოვარდება ამ განტოლებებიდან. ხოლო Oy ღერძზე ამ ძალების გეგმილების ჯამი გარდაიქმნება მოცემული ძალების ალგებრულ ჯამად ($F_k = \pm |\vec{F}_k|, k=1, 2, \dots, n$).

ამრიგად, ერთ სიბრტყეში მდებარე პარალელურ ძალთა სისტემისთვის (5.14)-დან მივიღებთ წონასწორობის შემდეგ ორ განტოლებას:

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_0(\vec{F}_k) = x_1 F_{1y} + x_2 F_{2y} + \dots + x_n F_{ny} = 0. \quad (5.15)$$

(5.15) განტოლებებს სიბრტყეზე მდებარე პარალელურ ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებები ეწოდება.

შენიშვნა 1. თუ განსახილველი სხეული არათავისუფალია, მაშინ რეაქციის პრინციპის თანახმად (იხ. 1.2 პარაგრაფი) ჩვენ შეგვიძლია ბმის მაგივრად სხეულს მოვდოთ რეაქციის ძალა, რომელიც იმავე მექანიკურ მოქმედებას გამოხატავს, რასაც აღნიშნული ბმა. ამრიგად, სხეულზე მოდებული იქნება უშუალოდ მოქმედი (აქტიური) და ბმის რეაქციის ძალები, რომლებიც წონასწორობაში უნდა იყოს.

არათავისუფალი სხეულის შემთხვევაში (5.10), (5.11), (5.12), (5.13) და (5.15) განტოლებებში, უშუალოდ მოდებული ძალების გარდა, შევა რეაქციის ძალებიც.

შენიშვნა 2. (5.10) და (5.11) წონასწორობის განტოლებებიდან მიიღება აგრეთვე თავმოყრილ ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებები. ამ შემთხვევაში (5.11) განტოლებები იგივეობები იქნება. სივრცეში მდებარე თავმოყრილი ძალთა სისტემისთვის გვექნება (5.10) განტოლებები. ხოლო ერთ სიბრტყეში მდებარე თავმოყრილ ძალთა სისტემის წონასწორობისთვის (5.10)-დან დაგვრჩება რომელიმე ორი, იმისდა მიხედვით, რომელ სიბრტყეში მდებარეობს ეს ძალები.

6. ბრტყელ ძალთა სისტემა. ვარიაციონის თეორემა

6.1. ნებისმიერი ბრტყელ ძალთა სისტემის ტოლქმედის განსაზღვრა

ვთქვათ, მოცემულია მყარ სხეულზე მოდებული და ერთ სიბრტყეზე ნებისმიერად განლაგებული ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) ძალთა სისტემა. ეს სისტემა დაიყვანება უფრო მარტივ ძალთა სისტემაზე, რომელიც შედგება ერთი ძალისა და ერთი წყვილძალისაგან (იხ. 5.3 პარაგრაფი პუანსოს თეორემა). ეს შესაძლებელია, თუ ნაკრები ვექტორი და ნაკრები სკალარული მომენტი ერთდროულად არ უდრის ნულს.

ნებისმიერი ბრტყელ ძალთა სისტემისთვის ერთ ძალამდე და ერთ წყვილძალამდე დაყვანა აუცილებელია განვიხილოთ, როგორც ტოლქმედის ან, თუ სისტემას ტოლქმედი არა აქვს, ნაკრები მომენტის (ტოლქმედი წყვილძალის) განსაზღვრის წინასწარი ოპერაცია.

პუანსოს თეორემიდან გამომდინარე, ერთ სიბრტყეზე მდებარე ძალთა სისტემა განისაზღვრება მისი ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორითა და ნაკრები სკალარული M_0 მომენტით. გავიხსენოთ, რომ, თუ მოცემული ძალთა სისტემის ყველა ძალას გადავიტანთ ნებისმიერ O წერტილში, რომელსაც დაყვანის ცენტრი ეწოდება, მივიღებთ ამ ცენტრზე მოდებულ ერთ $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$ ძალას, რომელიც ნაკრები ვექტორის ტოლია და წყვილძალას $M_0 = \sum M_0(\vec{F}_k)$ მომენტით.

გავიხსენოთ, რომ მოცემული სისტემის ძალთა გეომეტრიულ ჯამს ამ ძალთა ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორი ეწოდება. მისი გეგმილები, მოდული და მიმართულება განისაზღვრება (3.26), (3.27) და (3.28) ფორმულებით.

აგრეთვე გავიხსენოთ, რომ რომელიმე O წერტილის მიმართ ბრტყელი სისტემის ძალთა სკალარული მომენტების ალგებრულ ჯამს ეწოდება ამ ძალთა სისტემის ნაკრები სკალარული M_0 მომენტი იმავე O წერტილის მიმართ. მისი მნიშვნელობა განისაზღვრება (3.29) ან (3.30) ფორმულებით.

მაშასადამე, ერთ სიბრტყეზე მდებარე ძალთა სისტემის

დასახასიათებლად გვექნება სამი სიდიდე: R_x , R_y და M_0 . ამ სიდიდეთა საშუალებით საცესებით განისაზღვრება ერთ სიბრტყეზე მდებარე ძალთა სისტემა.

ნაკრები მომენტი იცვლება დაყვანის ცენტრის შეცვლით. ნაკრები მომენტის დამოკიდებულება დაყვანის ცენტრის შერჩევაზე, გამოისახება (334) ფორმულით:

$$M_c = M_0 - x_c R_y + y_c R_x,$$

ანუ

$$M_c = M_0 + M_c(\bar{R}),$$

სადაც O და C ორი სხვადასხვა დაყვანის ცენტრია.

რადგან მოცემული ძალთა ბრტყელი სისტემის O ცენტრამდე დაყვანის შედეგად მიღებული $\bar{R}$ ძალა და წყვილძალა M_0 მომენტით ერთ სიბრტყეში მდებარეობს. ამიტომ ისინი შეიძლება დავიყვანოთ C წერტილში მოდებულ ერთ $\bar{R}^* = \bar{R}$ ძალამდე. ეს $\bar{R}^*$ ძალა არის მოცემული ძალთა ბრტყელი სისტემის ტოლქმედი.

განსაზღვრება. მყარ სხეულზე ნებისმიერად მოდებული ძალთა სისტემის ტოლქმედი ეწოდება ერთ ისეთ ძალას, რომელიც მოცემული ძალთა სისტემის ტოლფასია.

მყარ სხეულზე მოქმედი ერთ სიბრტყეში მდებარე ძალთა ორი სისტემა ტოლფასია, თუ მათი ნაკრები ვექტორები და ნაკრები სკალარული მომენტები რაიმე წერტილის მიმართ ტოლია.

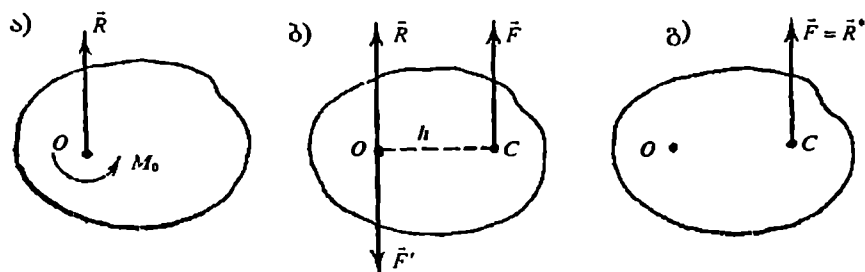
ახლა დავამტკიცოთ შედეგი თეორემა:

თუ მყარ სხეულზე მოდებული ერთ სიბრტყეში მდებარე ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ მოცემული ძალთა სისტემა ტოლფასია ერთი ძალისა, ე.ი. დაიყვანება ტოლქმედამდე.

დამტკიცება. ვთქვათ, დაყვანის O ცენტრის მიმართ მოცემული ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები სკალარული მომენტი განსხვავდება ნულისაგან, ე.ი. $\bar{R} \neq 0$, $M_0 \neq 0$ (ნახ. 6.1, ა).

6.1, ა ნახაზზე რკალური ისარი სიმბოლურად გამოსახავს დაყვანის შედეგად მიღებულ წყვილძალის M_0 მომენტს, რომელიც დაყვანის O ცენტრის მიმართ ძალთა სისტემის ნაკრები სკალარული მომენტის ტოლია. ძალთა სისტემის

ერთ ძალამდე დასაყვანად ახალი დაყვანის C ცენტრი ავირჩიოთ ისე, რომ მის მიმართ ნაკრები სკალარული M_0 მომენტი ნულის ტოლი იყოს. ერთ სიბრტყეში მდებარე წვეილძალების ტოლფასობის შესახებ თეორემის ძალით, წვეილძალა შეიძლება მის სიბრტყეში შემოვაბრუნოთ, გადავიტანოთ და შევუცვალოთ მხარი და ძალის მოდული ისე, რომ მისი სკალარული მომენტი უცვლელი დარჩეს.



ნახ. 6.1.

წვეილძალა წარმოვადგინოთ ისეთ $(\vec{F}, \vec{F}')$ წვეილძალად, რომ მართებული იყოს $\vec{F} = \vec{R} = -\vec{F}'$ ტოლობა. ამასთან წვეილძალის შემდგენი $\vec{F}'$ ძალა მოედოთ დაყვანის O ცენტრზე და მიემართოთ $\vec{R}$ ძალის საპირისპირო მიმართულებით (ნახ. 6.1, ბ). მაშინ $\vec{R} + \vec{F}' = 0$, ე.ი. $(\vec{R}, \vec{F}')$ ~ 0 . ეს ძალთა სისტემა, როგორც ნულის ტოლფასი, შეიძლება მოვაცილოთ. მაშასადამე, მოცემული ძალთა სისტემა ტოლფასია C წერტილზე მოდებული ერთადერთი $\vec{F}$ ძალისა (ნახ. 6.1, გ); ეს ძალა არის მოცემული ძალთა სისტემის ტოლქმედი. აღვნიშნოთ ტოლქმედი $\vec{R}^*$ -ით, ე.ი. $\vec{F} = \vec{R}^*$, გვაქვს

$$(\vec{R}, \vec{F}, \vec{F}') \sim (\vec{F}) \sim (\vec{R}^*). \quad (6.1)$$

ამრიგად, ბრტყელი ძალთა სისტემის ერთ ძალამდე და ერთ წვეილძალამდე დაყვანისას, იმ შემთხვევაში, როცა $\vec{R} \neq 0$ და $M_0 \neq 0$, სისტემა დაიყვანება ტოლქმედ $\vec{R}^* = \sum \vec{F}_k$ ძალამდე, რომელიც არ გადის დაყვანის O ცენტრზე.

ცხადია, დაყვანის ძველი O ცენტრიდან $\vec{R}^*$ ტოლქმედის მოქმედების ფუძემდებ $h=|OC|$ მანძილი შეიძლება ვიპოვოთ შემდეგი პირობიდან - $|M_0|=h|\vec{F}|=h|\vec{R}|$, საიდანაც

$$h = \frac{|M_0|}{R}. \quad (6.2)$$

O წერტილიდან h მანძილი ისე უნდა გადავდოთ, რომ $(\vec{F}, \vec{F}')$ წყვილძალის მომენტი დამოთხვეს ნაკრებ სკალარულ M_0 მომენტს (ნახ. 6.1, ბ).

6.2. ვარინიონის თეორემა ბრტყელ ძალთა სისტემისათვის

იმ ძალთა სისტემისათვის, რომელიც ტოლქმედზე დაიყვანება, მართებულია ტოლქმედის მომენტის შესახებ ვარინიონის შემდეგი თეორემა:

თუ განსახილველი ბრტყელ ძალთა სისტემა დაიყვანება ტოლქმედზე, მაშინ ტოლქმედის სკალარული მომენტი ნებისმიერი წერტილის მიმართ ტოლია იმავე წერტილის მიმართ ყველა მოცემული ძალის სკალარულ მომენტთა ალგებრული ჯამისა (ნაკრები სკალარული მომენტისა).

დამტკიცება. ვთქვათ, ძალთა სისტემა დაიყვანება $\vec{R}=\vec{R}^*$ ტოლქმედზე, რომელიც O წერტილზე გადის. ახლა დაყვანის ახალ ცენტრად ავიღოთ C წერტილი. ნაკრები სკალარული მომენტი ამ წერტილის მიმართ ტოლია სისტემის ყველა ძალის სკალარული მომენტების ალგებრული ჯამისა:

$$M_c = \sum_{k=1}^n M_c(\vec{F}_k). \quad (6.3)$$

მეორე მხრივ ახალი ცენტრის მიმართ ნაკრებ სკალარულ მომენტს აქვს სახე:

$$M_c = M_0 + M_c(\vec{R}^*).$$

რადგან დაყვანის O ცენტრის მიმართ ნაკრები სკალარული მომენტი ნულის ტოლია ($M_0=0$), ამ ფორმულიდან გვექნება:

$$M_c = M_c(\vec{R}^*) \quad (6.4)$$

(6.3) და (6.4) დამოკიდებულებათა შედარებით მივიღებთ:

$$M_c(\vec{R}^*) = \sum_{k=1}^n M_c(\vec{F}_k), \quad (6.5)$$

სწორედ ეს (6.5) ამტკიცებს ვარიინონის თეორემას.

ამ თეორემის საშუალებით შეიძლება მივიღოთ ტოლქმედის მოქმედების ფუძის განტოლება. ეთქვას $\vec{R}^*$ ტოლქმედი მოდებულია რაიმე $C=C(x,y)$ წერტილზე (ნახ. 6.2). ამასთან, როცა დაყვანის ცენტრად არჩეულია კოორდინატთა O სათავე, მაშინ ცნობილია ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორი და ნაკრები სკალარული M_0 მომენტი.

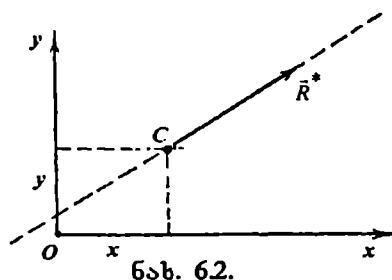
ახალი C ცენტრის მიმართ ნაკრები სკალარული მომენტი განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით (იხ. 3.34 ფორმულა):

$$M_c = M_0 - xR_y + yR_x. \quad (6.6)$$

ვარიინონის თეორემის თანახმად $M_0 = M_0(\vec{R}^*)$, ე.ი. $M_c = 0$, ამიტომ (6.6)-დან გვექნება:

$$M_0 = xR_y - yR_x. \quad (6.7)$$

ტოლქმედის თავის ფუძის გასწვრივ სხვა წერტილში გადატანისას M_0 , R_x და R_y სიდიდეები არ იცვლება, მაშასადამე, (6.7)



ნახ. 6.2.

განტოლებაში x და y კოორდინატები ტოლქმედის მოქმედების ფუძის (წრფის) მიმდინარე კოორდინატებია.

(6.7) განტოლება არის ტოლქმედის მოქმედების ფუძის – წრფის განტოლება. ამრიგად, (6.7) წრფეს ცენტრალურ ღერძს უწოდებენ, განტოლებას კი – ცენტრალური ღერძის განტოლებას. როცა $R_x \neq 0$, მაშინ ის შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$y = \frac{R_y}{R_x} \cdot x - \frac{M_0}{R_x}. \quad (6.8)$$

6.3. ბრტყელ ძალთა სისტემის დაყვანა უმარტივეს სახემდე

სიბრტყეზე ნებისმიერად განლაგებული $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ ძალთა სისტემის შეკრება შეიძლება მოცემული ძალთა სისტემის ნებისმიერად შერჩეულ O ცენტრზე დაყვანით, რომელსაც დაყვანის ცენტრი ეწოდება.

ამასთან დაკავშირებით, ძალთა სისტემის მოცემულ ცენტრზე დაყვანის შედეგად შესაძლებელია შეგვხვდეს შემდეგი შემთხვევები:

1. თუ დაყვანის შედეგად აღმოჩნდება, რომ ნაკრები ვექტორი არ უდრის ნულს, ხოლო ნაკრები სკალარულ მომენტი O წერტილის მიმართ ნულის ტოლია:

$$\vec{R} \neq 0, \quad M_O = 0, \quad (6.8')$$

მაშინ ძალთა სისტემა დაიყვანება დაყვანის O ცენტრში მოდებულ ტოლქმედამდე, რომელიც ნაკრები ვექტორის ტოლია.

ტოლქმედის მოქმედების ფუძის (წრფის) ანუ სისტემის ცენტრალური ღერძის განტოლება იქნება:

$$xR_y - yR_x = 0, \quad (6.9)$$

სადაც x, y არის წრფის მიმდინარე კოორდინატები, ხოლო დაყვანის O ცენტრი ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს.

2. თუ დაყვანის შედეგად აღმოჩნდება, რომ ნაკრები ვექტორი უდრის ნულს, ხოლო ნაკრები სკალარული მომენტი O წერტილის მიმართ ნულისაგან განსხვავებულია,

$$\vec{R} = 0, \quad M_O \neq 0, \quad (6.10)$$

მაშინ მოცემული ძალთა სისტემა ტოლფასია ერთი წყვილი ძალისა, რომლის მომენტი ამ სისტემის ნაკრები M_O მომენტის ტოლია და ამ შემთხვევაში არ არის დამოკიდებული დაყვანის ცენტრის შერჩევაზე.

3. თუ ნაკრები ვექტორი და ნაკრები სკალარული მომენტი O წერტილის მიმართ არ უდრის ნულს,

$$\vec{R} \neq 0, \quad M_O \neq 0, \quad (6.11)$$

მაშინ ძალთა სისტემა დადის ერთ ტოლქმედამდე, რომელიც არ გადის დაყვანის O ცენტრზე და ის ნაკრები ვექტორის ტოლია. ამიტომ ტოლქმედის მომენტი ნებისმიერი წერტილის

მიმართ ტოლია იმავე წერტილის მიმართ ყველა მოცემული ძალის სკალარულ მომენტთა ალგებრული ჯამისა (ვარიაციონის თეორემა).

დაყვანის O ცენტრიდან სისტემის ცენტრალურ ღერძამდე მანძილი განისაზღვრება (6.2) ფორმულით:

$$h = \frac{|M_0|}{R}.$$

ცენტრალური ღერძის განტოლება განისაზღვრება (6.7) განტოლებით:

$$xR_y - yR_x = M_0,$$

სადაც x, y – წრფის მიმდინარე კოორდინატებია, ხოლო კოორდინატა სათავე ემთხვევა დაყვანის O ცენტრს.

4. თუ ნაკრები ვექტორი და ნაკრები სკალარული მომენტი დაყვანის O ცენტრის მიმართ ნულის ტოლია,

$$\vec{R} = 0, \quad M_0 = 0, \quad (6.12)$$

მაშინ ძალთა სისტემა იმყოფება წონასწორობაში.

6.4. ბრტყელ ძალთა სისტემის უმარტივეს სახემდე დაყვანის ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები

ამოცანის ამოხსნის გეგმა

1. ავირჩიოთ კოორდინატა სისტემა (თუ სისტემა ამოცანის პირობაში არ არის მოცემული).

ამოცანის ამოხსნის გამარტივების მიზნით საჭიროა კოორდინატა სათავე მოვათავსოთ იმ წერტილში, სადაც გადის მოცემულ ძალთა ფუძეების მეტი რაოდენობა, ხოლო კოორდინატა სისტემის ღერძები მივმართოთ ისე, რომ ამ ღერძებზე ძალების გეგმილები ადვილად გამოეთვალათ.

2. (3.26) ფორმულების საშუალებით ვიპოვოთ არჩეულ კოორდინატა სისტემის ღერძებზე ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორის გეგმილები.

3. (3.27) და (3.28) ფორმულებით განვსაზღვროთ სისტემის ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორის მოდული და მიმართულება.

4. (3.29) ან (3.30) ფორმულების საშუალებით გამოვთვალოთ ნაკრები სკალარული M_0 მომენტი კოორდინატთა სისტემის სათავეს მიმართ.

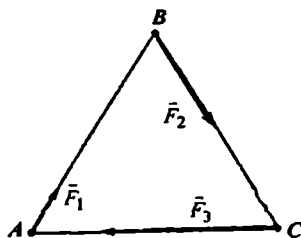
5. თუ სისტემის ნაკრები ვექტორი $\vec{R} \neq 0$, ნაკრები მომენტი $M_0 \neq 0$, მაშინ (6.7) ფორმულით ვიპოვიოთ ძალთა სისტემის ცენტრალური ღერძის განტოლებას, როცა $\vec{R} \neq 0$, $M_0 = 0$, მაშინ ვისარგებლოთ (6.9) ფორმულით.

6. (6.2) ფორმულის გამოყენებით განვსაზღვროთ მანძილი კოორდინატთა სათავედან ცენტრალურ ღერძამდე.

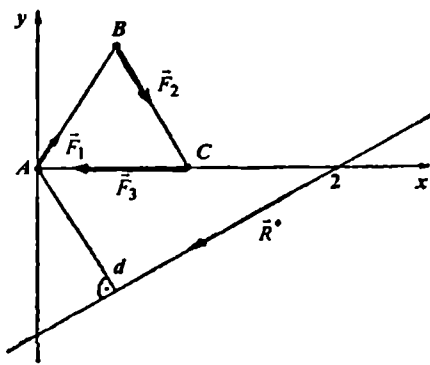
ამოცანა 24. ტოლგვერდა სამკუთხედის A, B და C წვეროებზე მოდებულია $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ და $\vec{F}_3$ ძალები (ნახ. 6.3).

დავითყვანოთ მიცემული ძალთა სისტემა უმარტივეს სახემდე და განვსაზღვროთ ამ ძალთა სისტემის ტოლქმედი, თუ $F_1=10$ ნ, $F_2=20$ ნ, $F_3=30$ ნ, $AB=a=1$ მ.

ამოხსნა. 1. ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა, როგორც ეს ნაჩვენებია 6.4 ნახაზზე.



ნახ. 6.3



ნახ. 6.4

2. (3.26) ფორმულების საშუალებით არჩეულ სისტემის ღერძებზე ვიპოვოთ ნაკრები ვექტორის გეგმილები:

$$R_x = \sum F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x};$$

$$R_y = \sum F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y},$$

სადაც

$$F_{1x}=F_1\cos 60^0; \quad F_{2x}=F_2\cos 60^0; \quad F_{3x}=-F_3;$$

$$F_{1y}=F_1\sin 60^0; \quad F_{2y}=-F_2\sin 60^0; \quad F_{3y}=0.$$

მაშასადამე,

$$R_x=-15 \text{ ნ}; \quad R_y=-5\sqrt{3} \text{ ნ}.$$

3. (3.27) და (3.28) ფორმულების გამოყენებით ვიპოვოთ ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორის სიდიდე და მიმართულება:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}; \quad R = 10\sqrt{3} \text{ ნ}.$$

$$\cos(\vec{R}, i) = \frac{R_x}{R} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\vec{R}, i) = 210^0$$

$$\cos(\vec{R}, \hat{j}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\vec{R}, \hat{j}) = -0,5.$$

4. (3.29) ფორმულის თანახმად ვიპოვოთ სისტემის ნაკრები სკალარული მომენტი კოორდინატთა A სათავის მიმართ:

$$M_A = \sum M_A(\vec{F}_i) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) + M_A(\vec{F}_3);$$

$$M_A(\vec{F}_1) = 0; \quad M_A(\vec{F}_2) = -F_2 \cdot a \sin 60^0; \quad M_A(\vec{F}_3) = 0,$$

ამრიგად

$$M_A = -10\sqrt{3} \text{ ნ.მ}.$$

რადგანაც $\vec{R} \neq 0$ და $M_0 \neq 0$, ამიტომ საკმე გვაქვს ბრტყელ ძალთა სისტემის ცენტრზე დაყვანის მესამე შემთხვევასთან, ე.ი. სისტემა ტოლფასია $\vec{R}^*$ ტოლქმედისა, რომელიც სისტემის ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორის ტოლია და არ გადის A წერტილზე.

5. (6.7) განტოლების თანახმად ვიპოვოთ სისტემის ცენტრალური ღერძის განტოლება: $xR_y - yR_x = M_0$; $x - \sqrt{3}y - 2 = 0$.

6. (6.2) ფორმულით განვსაზღვროთ კოორდინატთა სათავიდან ცენტრალურ ღერძამდე მანძილი:

$$d = \frac{|M_0|}{R}, \quad d = 1 \text{ მ}.$$

ამოცანა 25. მართკუთხა სამკუთხედის A, B და C წვეროებზე მოდებულია $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ ოთხი ძალა (ნახ.6.5,ა).

განესაზღვროთ სამკუთხედის კათეტების სიგრძეთა ფარდობა, იმ პირობით, რომ ამ სისტემის ტოლქმედის ფუძე გადიოდეს A წვეროზე, თუ $F_1=F_2=F_3=F_4=162$ კნ, $\vec{F}_3 \perp \overline{AB}$, $\vec{F}_4 \perp \overline{BC}$, $AB=a$, $AC=b$.

ამოხსნა. 1. ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა ისე, როგორც ეს ნაჩვენებია ნახაზზე (ნახ. 6.5, ბ)

2. (3.26) ფორმულებით ვიპოვოთ ნაკრები ვექტორის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე:

$$R_x = \sum F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x};$$

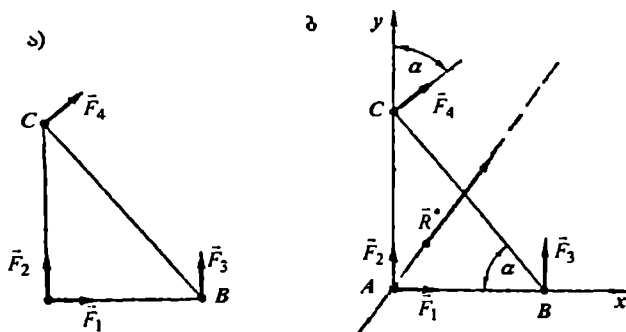
$$R_y = \sum F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y},$$

სადაც $F_{1x}=F$; $F_{2x}=0$; $F_{3x}=0$; $F_{4x}=F\sin\alpha$;

$F_{1y}=0$; $F_{2y}=F$; $F_{3y}=F$; $F_{4y}=F\cos\alpha$;

მაშასადამე,

$$R_x=F(1+\sin\alpha), \quad R_y=F(2+\cos\alpha).$$



ნახ. 6.5

3. ვიპოვოთ ნაკრები ვექტორის სიდიდე და მიმართულება (3.27) და (3.28) ფორმულებით:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}; \quad R = F\sqrt{(1+\sin\alpha)^2 + (2+\cos\alpha)^2};$$

$$\cos(\hat{R}, i) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\hat{R}, i) = \frac{F(1+\sin\alpha)}{R};$$

$$\cos(\hat{R}, j) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\hat{R}, j) = \frac{F(2+\cos\alpha)}{R}.$$

4. (3.29) ფორმულის გამოყენებით ვიპოვოთ მოცემული ძალთა სისტემის ნაკრები სკალარული მომენტი A წერტილის მიმართ:

$$M_A = \sum M_A(\vec{F}_k) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) + M_A(\vec{F}_3) + M_A(\vec{F}_4);$$

$$M_A(\vec{F}_1) = M_A(\vec{F}_2) = 0; \quad M_A(\vec{F}_3) = F \cdot a; \quad M_A(\vec{F}_4) = -F \cdot b \sin \alpha.$$

ამოცანის პირობის თანახმად $M_A = 0$. მაშასადამე,

$$M_A = F(a - b \sin \alpha) = 0.$$

ამ ტოლობიდან გვექნება:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

ამრიგად, მივიღებთ b -ს მიმართ ბიკვადრატულ განტოლებას: $b^4 - a^2 b^2 - a^4 = 0$.

ამ განტოლებიდან ვიპოვით: $b = 1,27a$.

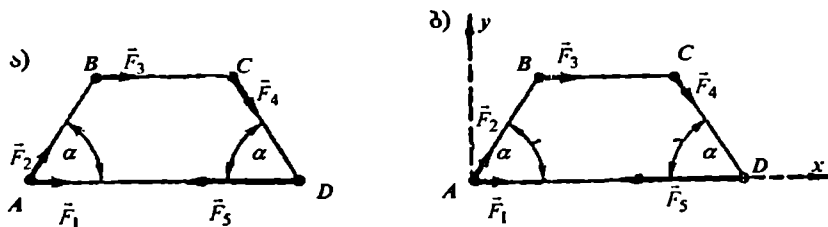
ამასთანავე b -ს ამ მნიშვნელობისათვის სისტემა ტოლფასია ტოლქმედისა, რომლის ფუძე გადის კოორდინატთა სისტემის სათავეს A წერტილში:

$$R_x = 289 \text{ კნ}, \quad R_y = 424 \text{ კნ}; \quad R = 513 \text{ კნ}.$$

5. (6.9) ფორმულით განვსაზღვროთ ძალთა სისტემის ცენტრალური ღერძის განტოლება:

$$xR_y - yR_x = 0, \quad y = 1,47x.$$

ამოცანა 26. ტრაპეციის A, B, C და D წვეროებზე მოდებულია $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 100$ კნ, $F_5 = 300$ კნ ძალები (ნახ. 6.6, ა). დავიყვანოთ ეს ძალთა სისტემა უმარტივეს სახემდე, თუ $AD = 1,8$ მ, $BC = 0,9$ მ, $\alpha = 60^\circ$ და განვსაზღვროთ რისი ტოლფასია სისტემა?



ნახ. 6.6.

ამოხსნა. 1. ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა, როგორც ნაჩვენებია 6.6, ბ ნახაზზე.

2. (3.26) ფორმულებით ვიპოვოთ ნაკრები ვექტორის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე:

$$R_x = \sum F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} + F_{5x};$$

$$R_y = \sum F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} + F_{5y};$$

$$F_{1x}=100 \text{ კნ}, F_{2x}=50 \text{ კნ}, F_{3x}=100 \text{ კნ}, F_{4x}=50 \text{ კნ}; F_{5x}=300 \text{ კნ};$$

$$F_{1y}=0, F_{2y}=50\sqrt{3} \text{ კნ}, F_{3y}=0 \text{ კნ}, F_{4y}=-50\sqrt{3} \text{ კნ}; F_{5y}=0.$$

მაშასადამე,

$$R_x=0, R_y=0, R=0.$$

3. (3.29) ფორმულით განვსაზღვროთ სისტემის ნაკრები სკალარული მომენტი კოორდინატთა A სათავის მიმართ:

$$M_A = \sum M_A(\vec{F}_k) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) + M_A(\vec{F}_3) + M_A(\vec{F}_4) + M_A(\vec{F}_5)$$

$$M_A(\vec{F}_1) = M_A(\vec{F}_2) = M_A(\vec{F}_5) = 0;$$

$$M_A(\vec{F}_3) = -78 \text{ კნ.მ}; M_A(\vec{F}_4) = -156 \text{ კნ.მ};$$

$$M_A = -234 \text{ კნ.მ}.$$

ამრიგად, მოცემული სისტემა ტოლფასია წყვილძალის $M_A = -234 \text{ კნ.მ}$ მომენტით, ე.ი. საქმე გვაქვს დაყვანის მე-2 შემთხვევასთან.

ამოცანა 27. სისტემა შედგება სამი ძალისაგან:

$$\vec{F}_1 = -2\vec{i} + 3\vec{j} \text{ ნ, მოდების } A_1(4;2) \text{ წერტილით};$$

$$\vec{F}_2 = 3\vec{i} - 4\vec{j} \text{ ნ, მოდების } A_2(-3;3) \text{ წერტილით};$$

$$\vec{F}_3 = 4\vec{i} + 5\vec{j} \text{ ნ, მოდების } A_3(-3;-1) \text{ წერტილით}$$

(x_k, y_k - მეტრობით).

დავიყვანოთ სისტემა უმარტივეს სახეზე და განვსაზღვროთ, რისი ტოლფასია სისტემა.

ამოხსნა. 1. ვიპოვოთ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორის გეგმილები კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე:

$$R_x = \sum_{k=1}^3 F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x};$$

$$R_y = \sum_{k=1}^3 F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y};$$

$$F_{1x} = -2 \text{ ნ}; \quad F_{2x} = 3 \text{ ნ}; \quad F_{3x} = 4 \text{ ნ}; \quad F_{1y} = 3 \text{ ნ}; \quad F_{2y} = -4 \text{ ნ}; \quad F_{3y} = 5 \text{ ნ};$$

მაშასადამე,

$$R_x = 5 \text{ ნ}, \quad R_y = 4 \text{ ნ}.$$

2. განვსაზღვროთ ნაკრები ვექტორის მოდული და მიმართულება:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}; \quad R = \sqrt{41} \text{ ნ}.$$

$$\cos(\hat{R}, \hat{i}) = 0,78, \quad \cos(\hat{R}, \hat{j}) = 0,62, \quad (\hat{R}, \hat{i}) = 38^\circ 40'.$$

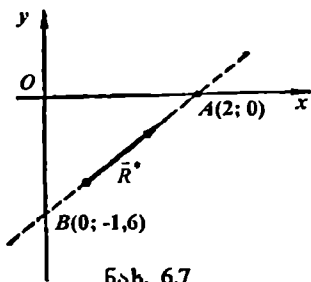
3. (3.30) ფორმულით განვსაზღვროთ კოორდინატთა სისტემის სათაის მიმართ ნაკრები სკალარული მომენტი:

$$M_0(\vec{F}_1) = x_1 F_{1y} - y_1 F_{1x}, \quad M_0(\vec{F}_1) = 16 \text{ ნ.მ};$$

$$M_0(\vec{F}_2) = x_2 F_{2y} - y_2 F_{2x}, \quad M_0(\vec{F}_2) = 3 \text{ ნ.მ};$$

$$M_0(\vec{F}_3) = x_3 F_{3y} - y_3 F_{3x}, \quad M_0(\vec{F}_3) = -11 \text{ ნ.მ}.$$

$$M_0 = \sum_{k=1}^3 M_0(\vec{F}_k), \quad M_0 = 8 \text{ ნ.მ}.$$



ნახ. 6.7

მაშასადამე, $R \neq 0$, $M_0 \neq 0$, ე.ი. სისტემა

ტოლფასია $\vec{R}^*$ ტოლქმედისა, რომელიც ძალთა სისტემის ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორის ტოლია (ძალთა სისტემის ცენტრზე დაყვანის მესამე შემთხვევა).

4. (6.7) ფორმულით ვიპოვოთ სისტემის ცენტრალური ღერძის განტოლება:

$$xR_y - yR_x = M_0, \quad 4x - 5y - 8 = 0.$$

5. განვსაზღვროთ კოორდინატთა სათაიდან ცენტრალურ ღერძამდე მანძილი (6.2) ფორმულით:

$$d = \frac{|M_0|}{R^*}, \quad d = 1,25 \text{ მ} \quad (\text{ნახ. 6.7}).$$

ამოცანა 28. სისტემა შედგება $F_1=F_2=F_3=100$ კნ სამი ძალისაგან, ამასთანავე ცნობილია ამ ძალების მოქმედების ფუძეთა განტოლებები:

$$\vec{F}_1\text{-ის: } 3x+2y-12=0; \quad (1)$$

$$\vec{F}_2\text{-ის: } 3x-5y+15=0; \quad (2)$$

$$\vec{F}_3\text{-ის: } x-y-4=0. \quad (3)$$

დავიყვანოთ სისტემა უმარტივეს სახემდე და განესაზღვროთ, რისი ტოლფასია ეს სისტემა, თუ ძალები მიმართულია ისე, რომ ცდილობენ სიბრტყე კოორდინატთა სათავის გარშემო მოაბრუნონ საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით (x, y მეტრობით).

ამოხსნა. 1. ვიპოვოთ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე (ნახ. 6.8):

$$R_x = \sum_{k=1}^3 F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x};$$

$$F_{1x} = -F_1 \cos \alpha_1, \quad F_{2x} = -F_2 \cos \alpha_2,$$

$$F_{3x} = F_3 \cos \alpha_3,$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 6^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}; \quad \cos \alpha_2 = \frac{5}{\sqrt{34}};$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$R_x = \left(-\frac{2}{\sqrt{13}} - \frac{5}{\sqrt{34}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot 100;$$

$$R_x = -71 \text{ კნ.}$$

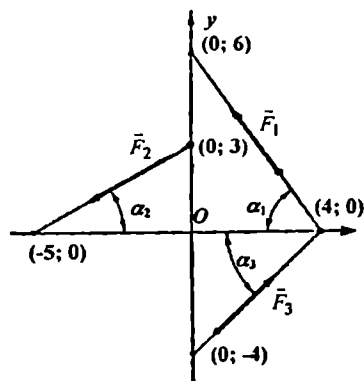
$$R_y = \sum_{k=1}^3 F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y};$$

$$F_{1y} = F_1 \sin \alpha_1, \quad F_{2y} = -F_2 \sin \alpha_2,$$

$$F_{3y} = F_3 \sin \alpha_3,$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{3}{\sqrt{13}}; \quad \sin \alpha_2 = \frac{3}{\sqrt{34}}; \quad \sin \alpha_3 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$R_y = \left(\frac{3}{\sqrt{13}} - \frac{3}{\sqrt{34}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot 100, \quad R_y = 102 \text{ კნ.}$$



ნახ. 6.8

2. განესაზღვროთ ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორის მოდული და მიმართულება ფორმულებით:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}; \quad \cos(\vec{R}, \hat{i}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\vec{R}, \hat{j}) = \frac{R_x}{R};$$

$$R = 121 \text{ კნ}, \quad \cos(\vec{R}, \hat{i}) = 0,57, \quad \cos(\vec{R}, \hat{j}) = 0,82;$$

მაშასადამე, $(\vec{R}, \hat{i}) = 55^\circ 10'$.

3. კოორდინატთა სათავის მიმართ ვიპოვოთ სისტემის ნაკრები სკალარული M_0 მომენტი:

$$M_0 = \sum M_0(\vec{F}_k),$$

$$M_0(\vec{F}_1) = F_1 \cdot d_1, \quad M_0(\vec{F}_2) = F_2 \cdot d_2, \quad M_0(\vec{F}_3) = F_3 \cdot d_3,$$

სადაც d_1 , d_2 და d_3 მანძილებია კოორდინატთა სათავიდან ძალების მოქმედების წრფეებამდე და გამოითვლება ფორმულით:

$$d_k = \frac{c_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}.$$

აქ a_k და b_k შესაბამისად x და y ცვლადების კოეფიციენტებია, ხოლო c_k - თავისუფალი წევრი. გვექნება:

$$d_1 = \frac{12}{\sqrt{13}}, \quad d_2 = \frac{15}{\sqrt{34}}, \quad d_3 = \frac{4}{\sqrt{2}}.$$

მივიღებთ:

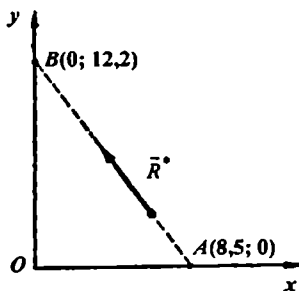
$$M_0 = 870 \text{ კნ.მ.}$$

რადგან $R \neq 0$, $M_0 \neq 0$, ამიტომ ძალთა სისტემა ტოლფასია $\vec{R}^*$

ტოლქმედისა, რომელიც ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორის ტოლია (სისტემის უმარტივეს სახემდე დაყვანის მესამე შემთხვევა).

4. ვიპოვოთ ძალთა სისტემის ცენტრალური ღერძის განტოლება ფორმულით:

$$xR_y - yR_x = M_0, \quad 102x + 71y - 870 = 0.$$



ნახ. 6.9

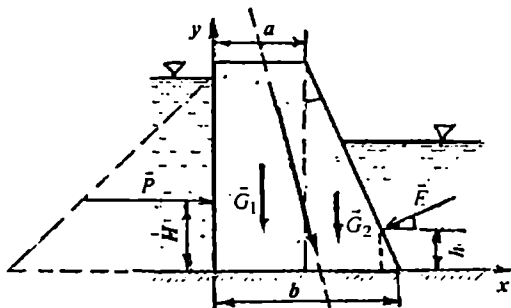
5. განესაზღვროთ კოორდინატთა სათავიდან ცენტრალურ ღერძამდე მანძილი ფორმულით:

$$d = \frac{|M_0|}{R^*}, \quad d=7,2 \text{ მ (ნახ. 6.9)}.$$

ამოცანა 29. გრავიტაციული კაშხლის ზედა და ქვედა ბიეფის კედლებზე მოქმედებს წყლის წნევა. ზედა კედელზე მოქმედი წნევის ტოლქმედი $\vec{P}$ ძალა მოდებულია ფუძიდან $H=4$ მ მანძილზე, ხოლო ქვედა კედელზე ტოლქმედი $\vec{F}$ ძალა მოდებულია ფუძიდან $h=2,4$ მ მანძილზე (ნახ. 6.10). კაშხლის მართკუთხა ნაწილის სიმძიმის ძალა $\vec{G}_1$ მოდებულია მის ცენტრზე, ხოლო კაშხლის სამკუთხა ნაწილის სიმძიმის ძალა $\vec{G}_2$ ძალა მოდებულია ამ ნაწილის ვერტიკალური კედელიდან სამკუთხედის ფუძის $\frac{1}{3}$ მანძილზე.

დაეიყვანოთ კაშხალზე მოდებული ძალოთა სისტემა უმარტივეს სახემდე და განესაზღვროთ იმ ფუძის რეაქცია, რომელზეც დგას კაშხალი, თუ $P=2000$ ტ, $G_1=3000$ ტ, $G_2=1500$ ტ, $a=5$ მ, $b=10$ მ, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$.

ამოხსნა. 1. კოორდინატთა სისტემა შევარჩიოთ ისე, როგორც ნაჩვენებია 6.10 ნახაზზე.



ნახ. 6.10

2. ეიპოვოთ $\vec{P}, \vec{F}, \vec{G}_1, \vec{G}_2$ ძალოთა სისტემის ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე:

$$R_x = P - F \sin \alpha; \quad R_y = -G_1 - G_2 - F \cos \alpha;$$

$$\text{რადგან } \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}, \text{ ამიტომ } \sin \alpha = \frac{5}{13}, \quad \cos \alpha = \frac{12}{13}.$$

მაშასადამე,

$$R_x = 800 \text{ ტ}, \quad R_y = -5000 \text{ ტ}.$$

3. განვსაზღვროთ სისტემის ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორის სიდიდე და მიმართულება ფორმულებით:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad R = 5060 \text{ ტ};$$

$$\cos(\vec{R}, \hat{i}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\vec{R}, \hat{j}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\vec{R}, \hat{i}) = 0,159,$$

$$\cos(\vec{R}, \hat{j}) = -0,989, \quad (\vec{R}, \hat{i}) = 273^\circ 10'$$

4. განვსაზღვროთ კოორდინატთა სათავის მიმართ ნაკრები სკალარული მომენტი:

$$M_0 = \sum M_0(\vec{F}_k) = M_0(\vec{G}_1) + M_0(\vec{G}_2) + M_0(\vec{P}) + M_0(\vec{F}), \quad (1)$$

$$M_0(\vec{G}_1) = -G_1 \cdot \frac{a}{2}; \quad M_0(\vec{G}_2) = -G_2 \cdot \left[a + \frac{1}{3}(b-a) \right];$$

$$M_0(\vec{P}) = -P \cdot H; \quad M_0(\vec{F}) = x_A F_y - y_A F_x,$$

სადაც $y_A = h = 2,4 \text{ მ}$, ΔABC -დან $CB = h \operatorname{tg} \alpha = 1 \text{ მ}$, მაშასადამე,
 $x_A = 9 \text{ მ}$.

(1)-ში რიცხვითი მონაცემების ჩასმით მივიღებთ:

$$M_0 = -27200 \text{ ტ.მ.}$$

რადგან ნაკრები ვექტორი $\vec{R} \neq 0$ და ნაკრები სკალარული მომენტი $M_0 \neq 0$, ამიტომ კაშხალზე მოდებული $\vec{P}, \vec{F}, \vec{G}_1, \vec{G}_2$ ძალთა სისტემა დაიყვანება $\vec{R}^* = \vec{R}$ ტოლქმედზე, რომლის მოდული $R^* = 5060 \text{ ტ}$ (ძალთა სისტემის დაყვანის მე-3 შემთხვევაში).

5. ვიპოვოთ ძალთა სისტემის ცენტრალური ღერძის განტოლება ფორმულით:

$$xR_y - yR_x = M_0, \quad 25x + 4y - 136 = 0.$$

6.10 ნახაზზე ნაჩვენებია კაშხალზე მოდებული ძალთა სისტემის $\vec{R}^*$ ტოლქმედი. კაშხლის საძირკვლის (გრუნტის)

რეაქცია მიმართულია ცენტრალური ღერძის გასწვრივ, მაგრამ $\vec{R}^*$ ტოლქმედის საპირისპირო მიმართულებით. ცხადია, რეაქციისა და $\vec{R}^*$ ტოლქმედის მოდულები ერთმანეთის ტოლია.

6.5. მყარი სხეულის წონასწორობა ბრტყელი ძალთა სისტემის მოქმედებით

5.6 პარაგრაფში იყო ნაჩვენები, რომ სივრცეში ნებისმიერად განლაგებული ძალთა სისტემის წონასწორობის (5.10) და (5.11) განტოლებათა სისტემიდან, როგორც კერძო შემთხვევა, მივიღეთ ნებისმიერი ბრტყელი ძალთა სისტემის წონასწორობის (5.13) ან (5.14) განტოლებათა სისტემა.

ახლა ნებისმიერად განლაგებული ბრტყელი ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) ძალთა სისტემის წონასწორობის შესახებ ჩამოვაყალიბოთ სტატიკის მეორე ძირითადი თეორემა:

თავისუფალ მყარ სხეულზე მოდებული ნებისმიერი ბრტყელი ძალთა სისტემის წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა, რომ ამ ძალების ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორი და მათი მოქმედების სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი O წერტილის მიმართ ნაკრები სკალარული M_0 მომენტი ნულის ტოლი იყოს.

მაშასადამე, ბრტყელ ძალთა ნებისმიერი სისტემის წონასწორობის ეს პირობები ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = 0, \quad M_0 = \sum_{k=1}^n M_0(\vec{F}_k) = 0, \quad (6.13)$$

სადაც $\vec{R}$ არის ნაკრები ვექტორი, M_0 ნაკრები სკალარული მომენტი O წერტილის მიმართ.

(3.26) და (3.29)-ის საფუძველზე წონასწორობის (6.13) პირობა კოორდინატებში გამოისახება შემდეგი სამი განტოლებით:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0, \\ \sum_{k=1}^n M_0(\vec{F}_k) &= M_0(\vec{F}_1) + M_0(\vec{F}_2) + \dots + M_0(\vec{F}_n) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

ამრიგად, მყარ სხეულზე მოდებული ნებისმიერი ბრტყელი ძალთა სისტემის წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა, რომ ორ კოორდინატთა ღერძზე ძალების გეგმილებისა და მათი მოკმედების სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი O წერტილის მიმართ ყველა ძალის სკალარული მომენტების ალგებრული ჯამი ნულის ტოლი იყოს.

თუ ცნობილია $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ძალების მოდების წერტილების კოორდინატები, ე.ი. $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$ და გავიხსენებთ ძალთა სისტემის ნაკრები სკალარული მომენტის ანალიზურ გამოსახვას (იხ. (3.30) ფორმულა), მაშინ (6.14) სისტემის მესამე განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\sum_{k=1}^n (x_k F_{ky} - y_k F_{kx}) = x_1 F_{1y} - y_1 F_{1x} + x_2 F_{2y} - y_2 F_{2x} + \dots + x_n F_{ny} - y_n F_{nx} = 0, \quad (6.15)$$

სადაც x_k, y_k ($k=1, 2, \dots, n$) არის $\vec{F}_k$ ძალის მოდების წერტილის კოორდინატები, ხოლო F_{kx}, F_{ky} — $\vec{F}_k$ ძალის გეგმილები შესაბამის ღერძებზე.

(6.14) განტოლებებს სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებები ეწოდება.

6.6. ბრტყელ ძალთა სისტემის წონასწორობის პირობის სხვა ფორმები

სიბრტყეზე ნებისმიერად განლაგებული ძალთა სისტემის წონასწორობის (6.14) სახით ჩაწერილ განტოლებებს ეუწოდოთ წონასწორობის განტოლებათა ძირითადი ფორმა (სახე). საინჟინრო პრაქტიკაში განსახილველი ბრტყელ ძალთა სისტემისთვის ხშირად მიზანშეწონილია წონასწორობის პირობის სხვა ფორმების გამოყენება.

არსებობს სიბრტყეზე ნებისმიერად განლაგებულ ძალთა სისტემის წონასწორობის არსებობს კიდევ ორი ეკვივალენტური პირობა. განვიხილოთ ისინი ცალ-ცალკე:

1. სამი მომენტის თეორემა. თავისუფალ მყარ სხეულზე მოდებული ნებისმიერი ბრტყელ ძალთა სისტემის წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა, რომ ძალების

მოქმედების სიბრტყეში ერთ წრფეზე არამდებარე სამი ნებისმიერი A , B და C წერტილის მიმართ ნაკრები სკალარული მომენტები უდრიდეს ნულს, ე.ი.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) &= M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) + \dots + M_A(\vec{F}_n) = 0, \\ \sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) &= M_B(\vec{F}_1) + M_B(\vec{F}_2) + \dots + M_B(\vec{F}_n) = 0, \\ \sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) &= M_C(\vec{F}_1) + M_C(\vec{F}_2) + \dots + M_C(\vec{F}_n) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

დამტკიცება. ვთქვათ, ძალთა სისტემა წონასწორობაშია. ვაჩვენოთ, რომ მართებულია (6.16) პირობები. ბრტყელ ძალთა სისტემისათვის სტატიკის მეორე ძირითადი თეორემის ძალით, სისტემის ძალთა მოქმედების სიბრტყის ნებისმიერი წერტილის მიმართ ნაკრები სკალარული მომენტი ნულის ტოლია. ამიტომ ამ სიბრტყის ნებისმიერი A , B და C წერტილების მიმართაც შესრულდება (6.16) ტოლობები. ამით თეორემის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ საკმარისობა. ვთქვათ (6.16) ტოლობები მართებულია. ვაჩვენოთ, რომ ძალთა სისტემა წონასწორობაშია, ე.ი. $\vec{R}=0$, $M_A=0$. დაყვანის ახალ ცენტრებად ავირჩიოთ B და C წერტილები, მაშინ ძველი A და ახალი B და C ცენტრების მიმართ ნაკრები სკალარულ მომენტებს შორის დამოკიდებულებებს ექნება შემდეგი სახე:

$$M_B = M_A + M_B(\vec{R}) = \pm h_B |\vec{R}|; \quad (6.17)$$

$$M_C = M_A + M_C(\vec{R}) = \pm h_C |\vec{R}|.$$

ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორი მოდებულია A წერტილზე. (6.16) და (6.17) ტოლობების თანახმად $h_B |\vec{R}| = 0$, $h_C |\vec{R}| = 0$. ვინაიდან A , B და C წერტილები ერთ წრფეზე არ მდებარეობს, ამიტომ $\vec{R}$ -ის ფუძე ერთდროულად ვერ გაივლის B და C წერტილებში, მაშასადამე, ან $h_B \neq 0$, ან $h_C \neq 0$, ე.ი. $\vec{R} = 0$. ამით თეორემის საკმარისობა და თეორემაც დამტკიცებულია.

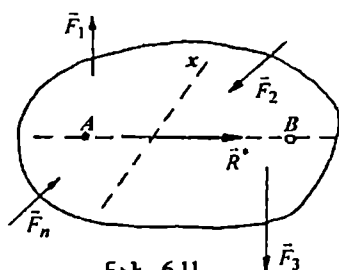
(6.16) განტოლებებს ბრტყელ ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებებსაც უწოდებენ (წონასწორობის მეორე ფორმა).

2. თეორემა. თავისუფალ მყარ სხეულზე მოდებული ნებისმიერი ბრტყელ ძალთა სისტემის წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა, რომ ძალთა მოქმედების სიბრტყეში მდებარე A და B ნებისმიერი ორი წერტილის მიმართ ნაკრები სკალარული მომენტი და ამ ძალების გეგმილების ჯამი A და B წერტილების შემაერთებული წრფის არამართობულ ღერძზე უდრიდეს ნულს, ე.ი.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

სადაც x ღერძად უნდა მივიღოთ ნებისმიერი წრფე, რომელიც AB წრფის მართობული არ იქნება.

დამტკიცება. (6.18) ტოლობების აუცილებლობა უშუალოდ გამომდინარეობს წონასწორობის განტოლებათა ძირითადი (6.14) ფორმიდან. (6.18) სისტემის პირველი ორი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ თუ სისტემას აქვს ტოლქმედი $\vec{R}^* \neq 0$, მაშინ მისი მოქმედების ფუზე გადის A და B წერტილებზე (ნახ. 6.11). $\vec{R}^*$ ტოლქმედის გეგმილი AB წრფის არაპერპენდიკულარულ x ღერძზე განსხვავებული იქნება ნულისაგან. მაგრამ ეს იმას ნიშნავს, რომ (6.18) სისტემის მესამე განტოლება არ სრულდება. მაშასადამე, ტოლქმედი უნდა



ნახ. 6.11

იყოს ნულის ტოლი და სისტემა იმყოფება წონასწორობაში. ამით თეორემის საკმარისობა და თეორემაც დამტკიცებულია.

(6.18) განტოლებათა სისტემა გამოსახავს ბრტყელი ძალთა სისტემის წონასწორობის პირობას (წონასწორობის მესამე ფორმა).

კერძო შემთხვევაში, თუ ბრტყელი სისტემის ყველა ძალა პარა-

ლელურია, მაშინ ასეთი ძალების წონასწორობის (6.18) პირობა გამოისახება არა სამი, არამედ ორი განტოლებით:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

ამასთანავე, x ღერძი მოცემული ძალების პარალელურია.

ბრტყელი პარალელური ძალების წონასწორობის პირობა შეიძლება გამოისახოს სხვა ფორმითაც:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

ამასთანავე, AB წრფე, მოცემული ძალების პარალელური არ არის.

შენიშვნა 1. თუ წონასწორობის ობიექტი (სხეული) არათავისუფალია, მაშინ რეაქციის პრინციპის თანახმად (იხ. 1.2 პარაგრაფი), შეგვიძლია ბმის მაგიერ სხეულს მოედოთ რეაქციის ძალა, რომელიც იმავე მექანიკურ მოქმედებას გამოხატავს, რასაც აღნიშნული ბმა. ამრიგად, სხეულზე მოქმედებს აქტიური და რეაქციის ძალები, რომლებიც წონასწორობაში უნდა იყოს.

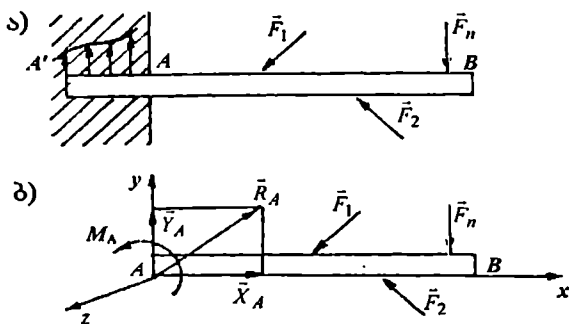
შენიშვნა 2. წონასწორობის განტოლებათა შედგენის დროს ხშირად ხელსაყრელია მომენტების ცენტრად ისეთი წერტილის შერჩევა, რომელზეც გადის ორი უცნობი ძალის ფუძე ასეთ შემთხვევაში ამ წერტილის მიმართ მომენტების განტოლებაში შევა მხოლოდ ერთი უცნობი ძალა და მისი განსაზღვრა ადვილია ამ განტოლებიდან.

მაგალითად, განვიხილოთ AB ძელი, რომლის A ბოლო ხისტადაა ჩამაგრებული კედელში (ნახ. 6.12,ა), ძელზე მოქმედებს ნებისმიერი ბრტყელ ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) ძალთა სისტემა.

AB ძელი არათავისუფალი სხეულია, ბმა არის კედელი. თუ გავათავისუფლებთ ბმისაგან ანუ ჩამაგრებისაგან (წარმოდგენაში მოვხსნათ კედელი) ძელის AA' ნაწილზე უნდა მოედოთ განაწილებული ძალები (დატვირთვა). თუ ამ ძალებს

დაიყვანო A წერტილზე, მაშინ მივიღებთ AA' მონაკვეთზე განაწილებული ძალების ნაკრებ $\vec{R}_A$ ვექტორს, აგრეთვე წყვილძალას M_A მომენტით განაწილებული ძალთა სისტემის ნაკრებ სკალარულ მომენტს A წერტილის მიმართ. Ax და Ay ღერძების მიმართ, თუ დაეშლით $\vec{R}_A$ ძალას $\vec{X}_A$ და $\vec{Y}_A$ მდგენელებად, მივიღებთ სამ — X_A , Y_A , M_A უცნობ რეაქციულ სიდიდეს, როგორც ეს ნაჩვენებია 6.12, ბ ნახაზზე. ახლა, თუ მომენტთა ცენტრად ავირჩევთ A წერტილს, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$M_A + \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0.$$



ნახ. 6.12.

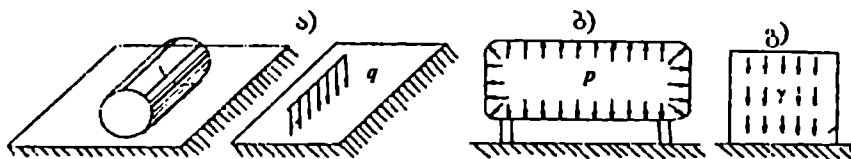
ცხადია, ეს განტოლება არ შეიცავს X_A და Y_A უცნობებს ($M_A(\vec{X}_A) = M_A(\vec{Y}_A) = 0$), ამიტომ ამ განტოლებიდან ადვილად განისაზღვრება საძიებელი რეაქტიული M_A მომენტი.

6.7. განაწილებული ძალები

აქამდე ძალა, როგორც მატერიალური სხეულების ურთიერთქმედების ზომა, განიხილებოდა მყარი სხეულის გარკვეულ წერტილზე მოდებული ვექტორის სახით, ამიტომ ასეთ ძალას უწოდებენ შეყურსულ ძალას. ბუნებაში არსებობს მატერიალური სხეულების ურთიერთქმედების ფართო კლასი, რომელთა შეყურსული (ერთ წერტილზე მოდებული) ვექტორის სახით

წარმოდგენა წინასწარ შეუძლებელია. მაგალითად, სხეულების ურთიერთქმედებებს, სხეულებზე სითხისა და გაზის წნევის ძალებს, სიმძიმის ძალებს, ელექტრომაგნიტურ ძალებსა და ა.შ. ვერ გამოვსახავთ გარკვეულ წერტილზე მოდებული ძალით.

განასხვავებენ წრფეზე (მონაკვეთზე), ზედაპირსა და სხეულის მოცულობაზე მოდებულ განაწილებულ ძალებს. მაგალითად, მძიმე ცილინდრული სატკეპნის ზემოქმედება ხდება პორიზონტალურ ზედაპირზე წრფის გასწვრივ (მოცემულ შემთხვევაში ცილინდრის პორიზონტალურ ზედაპირთან შეხების მსახველის გასწვრივ) განაწილებული ძალებით (ნახ. 6.13, ა); ზედაპირზე განაწილებული ძალების მაგალითია გაზის წნევა ტურტლის კედლებზე (ნახ. 6.13, ბ), ხოლო მოცულობაზე განაწილებული ძალების საილუსტრაციო მაგალითია სხეულზე სიმძიმის ძალების მოქმედება (ნახ. 6.13, გ).



ნახ. 6.13

თეორიულ მექანიკაში ყველა აქსიომა და თეორემა მართებულია მხოლოდ მყარ სხეულებზე მოდებული შეჭურსული ძალებისათვის. ამიტომ ამ თეორემების გამოყენებისათვის აუცილებელია ყოველი განაწილებული დატვირთვა შევცვალოთ მისი ტოლქმედით, ე.ი. შეჭურსული ძალით. ასეთი შეცვლა მართებულია, რადგან თეორიულ მექანიკაში განიხილება აბსოლუტურად მყარი სხეულები.

განაწილებული დატვირთვა ხასიათდება მისი q ინტენსივობით, ე.ი. ძალის სიდიდით, რომელიც მოდის: სხეულის ერთეულოვან მოცულობაზე (q_v - მოცულობითი ძალების შემთხვევაში); ერთეულ ფართობზე (q_s - ზედაპირული ძალების შემთხვევაში); ერთეულოვან სიგრძეზე (q - იმ შემთხვევაში, როცა შეიძლება სხეულის სიგანის უგულებელყოფა). ბოლო შემთხვევაში განაწილებულ დატვირთვას ბრტყელი ეწოდება.

განაწილებული დატვირთვების ინტენსივობები გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$q_v = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta V}, \quad (6.21)$$

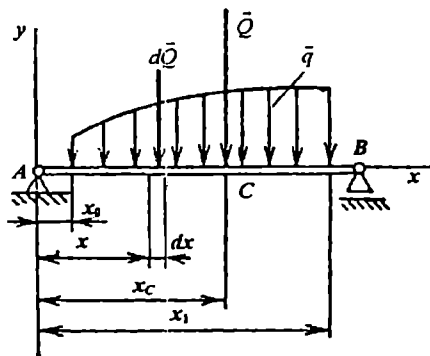
$$q_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}, \quad (6.22)$$

$$q = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta l}, \quad (6.23)$$

სადაც ΔV , ΔS , Δl ინტენსივობის წერტილის მიდამოში გამოყოფილი ელემენტის მოცულობა, ფართობი და სიგრძეა; ΔF - ამ ელემენტზე მოქმედი ძალა.

SI-ში q_v , q_s , და q ინტენსივობის განზომილებებია შესაბამისად: ნ/მ³, ნ/მ², ნ/მ. იყენებენ აგრეთვე კგ/სმ³, კგ/სმ², კგ/სმ განზომილებებსაც.

ახლა განვიხილოთ ბრტყელი განაწილებული დატვირთვა, რომლის ინტენსივობა იცვლება $q=f(x)$ კანონის თანახმად (ნახ. 6.14).



ნახ. 6.14

dx სიგრძის ელემენტარულ მონაკვეთზე დატვირთვის ინტენსივობა შეიძლება ჩავთვალოთ მუდმივად, მაშინ განაწილებული დატვირთვის შეცვლა შეიძლება შეყურსული $dQ=qdx$ ძალით. თუ გავიხსენებთ (4.4) და (4.5) ფორმულებს და მათში ჯამებს შევცვლით ინტეგრალებით, მივიღებთ ბრტყელი განაწილებული დატვირთვის ტოლქმედის მნიშვნელობას:

$$Q = \int_{x_0}^{x_1} dQ = \int_{x_0}^x q dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx. \quad (6.24)$$

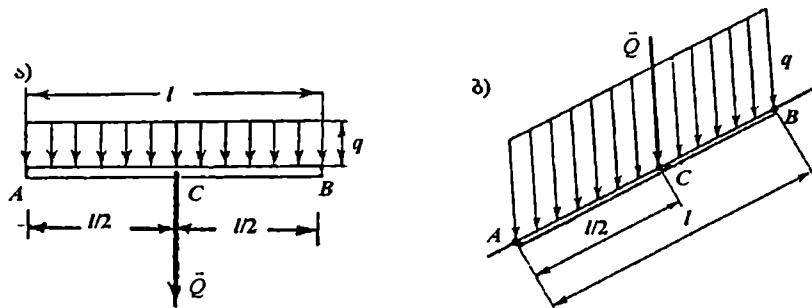
$\bar{Q}$ ტოლქმედი პარალელურია განაწილებული ძალებისა (დატვირთვის) და მოდებულია C წერტილზე, რომლის x_c კოორდინატი იქნება:

$$x_c = \frac{\int_{x_0}^{x_1} x dQ}{Q} = \frac{\int_{x_0}^{x_1} x f(x) dx}{\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx}. \quad (6.25)$$

ახლა განვიხილოთ წრფის მონაკვეთსა და წრეწირის რკალზე განაწილებული დატვირთვების შეკურსული ძალებით შეცვლის შემთხვევები:

1. ეთქვას, AB წრფის ℓ მონაკვეთზე მოქმედებს განაწილებული პარალელური ძალები, რომლის q ინტენსივობა მუდმივია (ნახ. 6.15, ა). თუ ვისარგებლებთ (6.24) და (6.25) ფორმულებით, გვექნება:

$$Q = \int_0^{\ell} q dx = q \cdot \ell; \quad x_C = \frac{1}{2} \ell. \quad (6.26)$$



ნახ. 6.15

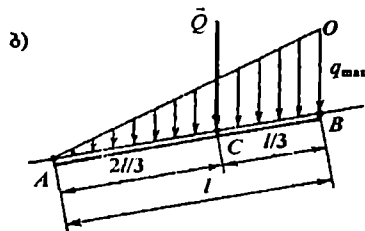
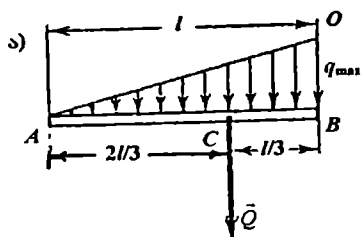
მაშასადამე, $\bar{Q}$ ტოლქმედი თანაბრად განაწილებული დატვირთვის პარალელურია და მოდებულია ℓ მონაკვეთის შუა C წერტილში (ნახ. 6.15, ა). თუ თანაბრად განაწილებული დატვირთვა q ინტენსივობით მოქმედებს პარალელური ძალებისადმი დახრილი წრფის ℓ მონაკვეთზე (იხ. ნახ. 6.15, ბ), მაშინ $\bar{Q}$ ტოლქმედი პარალელურია განაწილებული ძალებისა; მისი მოდული და მოდების C წერტილის კოორდინატი გამოითვლება იმავე (6.26) ფორმულებით, ხოლო $\bar{Q}$ ტოლქმედის მოდული – ℓ მონაკვეთითა და განაწილებული ძალებით შექმნილი პარალელოგრამის ფართობს არ ემთხვევა.

2. განვიხილოთ AB წრფის ℓ მონაკვეთი, რომელზედაც მოქმედებს განაწილებული პარალელური ძალები, რომელთა ინტენსივობა იცვლება წრფივი კანონით (ნახ. 6.16, ა). ჩვეულებრივ, ასეთ ძალებს სამკუთხედზე განაწილებულს უწოდებენ. სამკუთხედზე განაწილებული დატვირთვა დაიყვანება $\bar{Q}$ ტოლქმედზე, რომლის მოდული (6.24)-ის თანახმად იქნება:

$$Q = \int_0^{\ell} f(x) dx = \int_0^{\ell} \frac{q_{\max}}{\ell} x dx = \frac{q_{\max}}{\ell} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\ell} = \frac{q_{\max} \ell}{2},$$

ე.ი.

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} \ell. \quad (6.27)$$



ნახ. 6.16

$\bar{Q}$ ტოლქმედის მოდების C წერტილის x_c კოორდინატი (6.25)-ის თანახმად იქნება:

$$x_c = \frac{\int_0^{\ell} x f(x) dx}{Q} = \frac{\int_0^{\ell} \frac{q_{\max}}{\ell} x^2 dx}{\frac{q_{\max} \ell}{2}} = \frac{2x^3}{3\ell^2} \Big|_0^{\ell} = \frac{2}{3} \ell,$$

ე.ი.

$$x_c = \frac{2}{3} \ell. \quad (6.28)$$

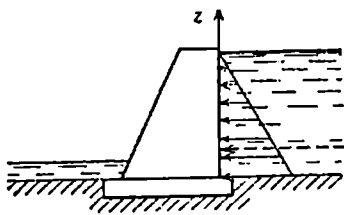
მაშასადამე, მივიღეთ, რომ სამკუთხედის წესით განაწილებული პარალელური ძალების ტოლქმედი გადის სამკუთხედის სიმძიმის ცენტრზე. ის A წერტილიდან დაშორებულია

$AC = \frac{2}{3} AB = \frac{2}{3} \ell$ მანძილით, ხოლო BO გვერდიდან – $CB = \frac{1}{3} AC = \frac{1}{3} \ell$ მანძილით.

6.16 ბ ნახაზზე ასახულია შემთხვევა, როცა AB წრფის ℓ მონაკვეთი დახრილია განაწილებული ძალების მიმართ. ამ შემთხვევაშიც $\bar{Q}$ ტოლქმედის მოდული გამოითვლება $Q = \frac{1}{2} q_{\max} \ell$ ფორმულით და მისი მოდების C წერტილი $AB = \ell$ მონაკვეთს იმავე პროპორციით ყოფს, როგორც 6.16, ა ნახაზის შემთხვევაში, ე.ი. $AC = \frac{2}{3} AB = \frac{2}{3} \ell$ და $CB = \frac{1}{3} AC = \frac{1}{3} \ell$. ამგვარ სიტუაციაში ტოლქმედის სიდიდე არ უდრის AOB სამკუთხედის ფართობს.

შეენიშნოთ, რომ 6.16, ა ნახაზზე მოყვანილი დატვირთვის კარგი მაგალითი არის წყლის წნევა კაშხალზე (ნახ. 6.17). ამ შემთხვევაში ინტენსივობა ზედაპირიდან ფსკერამდე იცვლება წრფივი კანონით, ამასთან $0 \leq q \leq q_{\max}$.

3. ძალები, თანაბრად არის განაწილებული წრეწირის რკალზე (ნახ. 6.18). ასეთი ძალების მაგალითია პიდროსტატიკური წნევა ცილინდრული ჭურჭლის გვერდითა კედელზე.



ნახ. 6.17

ცხადია, სიმეტრიის Ox ღერძის პერპენდიკულარულ Oy ღერძზე ამ ძალების გეგმილთა ჯამი ნულის ტოლია. მაშასადამე, მათი $\bar{Q}$ ტოლ-

ქმედი მიმართულია Ox ღერძის გასწვრივ. მისი მოდული:

$$Q = Q_x = \sum (q \cdot \Delta \ell_x) \cdot \cos \varphi_k, \quad (6.29)$$

სადაც $q \cdot \Delta \ell_k$ არის $\Delta \ell_k$ სიგრძის ელემენტარულ რკალზე მოქმედი ძალა; φ_k ამ ძალის Ox ღერძთან შექმნილი კუთხე. მაგრამ 6.18 ნახაზიდან ჩანს, რომ $\Delta \ell_k \cdot \cos \varphi_k = \Delta y_k$, რადგან $q = \text{const}$ ამიტომ (6.29)-დან მივიღებთ:

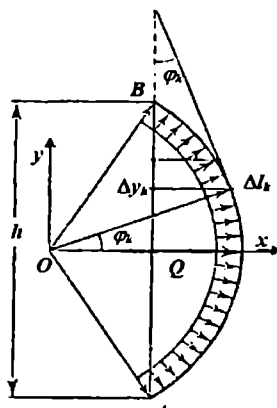
$$Q = \sum q \cdot \Delta y_k = q \cdot \sum \Delta y_k = q \cdot AB.$$

ამრიგად,

$$Q=q \cdot h,$$

(6.30)

სადაც h არის $\overset{\smile}{AB}$ რკალის მომჭიმავი ქორდის სიგრძე.



ნახ. 6.18

6.8. სტატიკურად განსაზღვრული და სტატიკურად განუსაზღვრელი ამოცანები

მყარ სხეულზე მოდებული ერთ სიბრტყეში მდებარე ძალთა სისტემის წონასწორობის შემთხვევაში ისეთ ამოცანებს, რომლებშიც უცნობი სიდიდეების რიცხვი არ აღემატება წონასწორობის დამოუკიდებელ განტოლებათა რიცხვს, სტატიკურად განსაზღვრული ეწოდება.

ნებისმიერად განლაგებული ძალთა ბრტყელი სისტემის წონასწორობის ამოცანა სტატიკურად განსაზღვრული რომ იყოს, უცნობი სიდიდეების რიცხვი არ უნდა აღემატებოდეს სამს, რადგან ნებისმიერი ბრტყელ ძალთა სისტემის მოქმედებისას მყარი სხეულის წონასწორობის დროს ზოგადად შეიძლება შევადგინოთ წონასწორობის მხოლოდ სამი განტოლება {(6.14) ან (6.16) ან (6.18) განტოლებები}.

თუ მოცემული სხეული წონასწორობაში იმყოფება ბრტყელ პარალელურ ძალთა სისტემის ან ერთ წერტილში თავმოყრილ ძალთა სისტემის მოქმედებით, მაშინ უცნობი სიდიდეების რიცხვი ორზე მეტი არ უნდა იყოს, რადგან ამ

შემთხვევაში გვაქვს წონასწორობის მხოლოდ ორი განტოლება ((6.19) ან (6.20) ან (2.5) განტოლებები).

თუ გვაქვს n სხეულისაგან შედგენილი სისტემა და მასზე მოქმედებს ერთ სიბრტყეში მდებარე პარალელური ძალთა სისტემა, მაშინ ამოცანა სტატიკურად განსაზღვრული რომ იყოს, უცნობი სიდიდეების რიცხვი არ უნდა იყოს $2n-ზე$ მეტი, რადგან ამ შემთხვევაში თითოეული სხეულისათვის შეგვიძლია შევადგინოთ წონასწორობის მხოლოდ ორი განტოლება, ე.ი. სულ $2n$ განტოლება. თუკი სხეულთა ამ სისტემაზე მოდებულია ნებისმიერი ბრტყელი ძალთა სისტემა, მაშინ ამოცანა სტატიკურად განსაზღვრული რომ იყოს, უცნობი სიდიდეების რიცხვი არ უნდა აღემატებოდეს $3n-ს$, რადგან თითოეულ სხეულისათვის ნებისმიერი ბრტყელი ძალთა სისტემის მოქმედების დროს შეგვიძლია შევადგინოთ წონასწორობის სამი განტოლება, ე.ი. სულ $3n$.

სტატიკის ამოცანებში არცთუ იშვიათად უცნობთა რიცხვი აღემატება განტოლებათა რიცხვს. ამ შემთხვევაში ვერ მოვძებნით ყველა უცნობს. ასეთ დროს ამბობენ, რომ საქმე გვაქვს სტატიკურად განუსაზღვრელ ამოცანასთან.

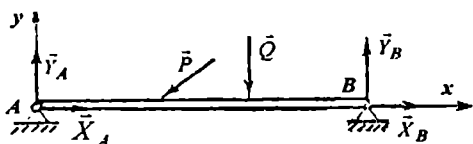
ამოცანას სტატიკურად განუსაზღვრელი ეწოდება, თუ უცნობ სიდიდეთა რიცხვი აღემატება სხეულზე მოდებული ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებათა რიცხვს, ე.ი. ამოცანა, რომლის ამოხსნა შეუძლებელია მყარი სხეულის სტატიკის მეთოდებით და რომელთა ამოხსნისათვის უნდა გავითვალისწინოთ სხეულზე მოქმედი ძალებისაგან გამოწვეული დეფორმაციებიც.

ამრიგად, სტატიკურად განუსაზღვრელი ამოცანის ამოსახსნელად საკმარისი არ არის სტატიკის განტოლებები, რომლებიც გამოყვანილია აბსოლუტურად მყარი სხეულებისათვის. ასეთი ამოცანების ამოხსნისას მხედველობაში უნდა მივიდეთ სხეულის დრეკადობის თვისებები. სხეულის დრეკადობის თვისებების გათვალისწინებით სხეულის წონასწორობა თეორიული მექანიკის კურსში კი არა დეფორმადი სხეულების მექანიკაში შეისწავლება.

განვიხილოთ სტატიკურად განსაზღვრული და სტატიკურად განუსაზღვრელი ამოცანები, რომლებშიც საჭიროა

მოცემული დატვირთვების მიხედვით განსაზღვროთ საყრდენთა რეაქციები.

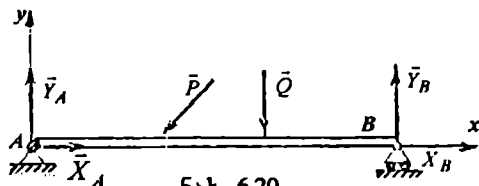
6.19 ნახაზზე გამოსახულია AB ძელი, რომელზეც მოდებულია $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ცნობილი ძალები. რადგან A და B ბმები (საყრდენები) განხორციელებულია უძრავი ცილინდრული სახსრების საშუალებით და მათ რეაქციათა ფუძეები უცნობია, ამიტომ $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B$ რეაქციათაგან თითოეული კოორ-



ნახ. 6.19

დინატთა ღერძების გასწვრივ უნდა დაიშალოს ორ მდგენელად, ე.ი. $\vec{R}_A = \vec{R}_A(X_A, Y_A)$ და $\vec{R}_B = \vec{R}_B(X_B, Y_B)$. ამ ამოცანაში გვაქვს X_A, Y_A, X_B, Y_B ოთხი უცნობი სიდიდე და წონასწორობის სამი განტოლება. მაშასადამე, ამოცანა სტატიკურად განუსაზღვრელია.

6.20 ნახაზის შემთხვევაში B საყრდენი განხორციელებულია ე.წ. საგორავეებით, ამიტომ B საყრდენის $\vec{R}_B$ რეაქციის ფუძე ცნობილია. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში გვაქვს X_A, Y_A, R_B სამი უცნობი და წონასწორობის სამი განტოლება. ე.ი. ამოცანა სტატიკურად განსაზღვრულია.



ნახ. 6.20

6.9. მყარი სხეულის წონასწორობის ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები მასზე ბრტყელ ძალთა სისტემის მოქმედებისას

მყარ სხეულზე მოდებული ნებისმიერი ბრტყელი ძალთა სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა, რომ ამ ძალთა სისტემის ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორი და მათი მოქმედების სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი O წერტილის

მიმართ ნაკრები სკალარული M_0 მომენტი ნულის ტოლი იყოს.

ბრტყელი ძალთა სისტემის წონასწორობის ამოცანები შეიძლება გავეყოთ ორ ძირითად ჯგუფად, სახელდობრ:

1. ამოცანები ბრტყელი პარალელური ძალთა სისტემის წონასწორობაზე;

2. ამოცანები ნებისმიერად განლაგებულ ძალთა ბრტყელი სისტემის წონასწორობაზე.

მეორე ტიპის ამოცანები განსახილველ სხეულზე მოდებული ბმების ბუნების მიხედვით შეიძლება დაიყოს შემდეგ ორ ჯგუფად: ა) ამოცანები, რომლებშიც ყველა ბმის რეაქციის ფუძე ცნობილია; ბ) ამოცანები, რომელშიც ერთ-ერთი ბმის რეაქციის ფუძე უცნობია.

I თავის 1.6 პარაგრაფში მოცემული ზოგადი მითითებანი ბმათა რეაქციის მიმართულებისა და არათავისუფალი მყარი სხეულის წონასწორობის ამოცანების ამოხსნის შესახებ, ძალაში რჩება ამ პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნის დროსაც.

ამოცანა სტატიკურად განსაზღვრული რომ იყოს, უცნობი რეაქციების რიცხვი სამს არ უნდა აღემატებოდეს, რადგან ბრტყელ ძალთა სისტემის მოქმედებისას მყარი სხეულის წონასწორობის დროს, ზოგადად, შეგვიძლია შევადგინოთ წონასწორობის სამი – (6.14), (6.16) ან (6.18) განტოლება.

წონასწორობის განტოლებათა შედგენის დროს (როგორც 6.5 პარაგრაფში იყო ნახევნები) ხშირად ხელსაყრელია მომენტების ცენტრად ისეთი წერტილის შერჩევა, რომელზეც გადის ორი უცნობი ძალის ფუძე, მაშინ ამ წერტილის მიმართ მომენტების განტოლებაში შევა მხოლოდ ერთი უცნობი ძალა, რომლის განსაზღვრა ადვილია ამ განტოლებიდან. თუ მოცემული სხეული წონასწორობაში იმყოფება ძალთა ბრტყელი პარალელური სისტემის მოქმედებით, მაშინ უცნობი რეაქციების რიცხვი ორზე მეტი არ უნდა იყოს, რადგან ამ შემთხვევაში გვაქვს წონასწორობის მხოლოდ ორი განტოლება ((6.19) ან (6.20) განტოლებები).

ამოცანების ამოხსნისას, რომლებიც ეხება არათავისუფალი მყარი სხეულის წონასწორობას, საჭიროა:

1. გამოვეყოთ სხეული, რომლის წონასწორობასაც ვიხილავთ მოცემულ ამოცანაში;

2. გავათავისუფლოთ წონასწორობის ობიექტი ბმებისაგან და შევცვალოთ ისინი რეაქციებით;

3. განვიხილოთ სხეული, როგორც თავისუფალი და მოვდოთ მასზე მოქმედი ყველა აქტიური და რეაქციის ძალები;

4. ავარჩიოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა;

5. შევადგინოთ ნებისმიერი ბრტყელი ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებები, რომლებშიც აქტიური ძალების გარდა, შევა ბმების რეაქციები;

6. ამოვხსნათ მიღებული განტოლებები.

ამოცანა 30. კოჭი უძრავ საყრდენთან შეერთებულია A სახსრით, ხოლო B წერტილში ეყრდნობა საგორავეს B სახსრით. კოჭის D წერტილზე მოდებულია შეყურსული $P=8$ კნ ძალა, ხოლო CB მონაკვეთზე – თანაბრად განაწილებული დატვირთვა $q=2$ კნ/მ ინტენსივობით. განვსაზღვროთ საყრდენთა რეაქციები (ნახ. 6.21, ა)

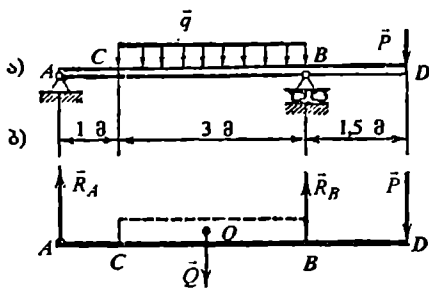
ამოხსნა. 1. განვიხილოთ AD კოჭის წონასწორობა (ნახ. 6.21, ბ).

2. AD კოჭზე $\vec{P}$ შეყურსული ძალის გარდა, მოქმედებს CB უბანზე თანაბრად განაწილებული დატვირთვა q ინტენსივობით. შევცვალოთ ეს დატვირთვა ტოლქმედი $\vec{Q}$ ძალით,

რომელიც მოდებული იქნება CB მონაკვეთის შუა O წერტილში (იხ. 6.6 პარაგრაფი), ხოლო მისი მოდული:

$$Q=CB \cdot q=3 \cdot 2=6 \text{ კნ.}$$

3. გავათავისუფლოთ კოჭი ბმებისაგან, შევცვალოთ ისინი რეაქციებით. ბმები: უძრავი ცილინდრული A სახსარი (საყრდენი) და მოძრავი ცილინდრული B სახსარი. A სახსრის $\vec{R}_A$ რეაქციის სიდიდე და მიმართულება უცნობია, ხოლო მოძრავი B საყრდენის რეაქცია მიმართულია იმ სიბრტყის ნორმალის გასწვრივ, რომელზეც დევს საგორავეები ჩვენს



ნახ. 6.21

შემთხვევაში – ვერტიკალურად, რადგან კოჭზე მოქმედი აქტიური $\bar{P}$, $\bar{Q}$ და რეაქციის $\bar{R}_B$ ძალები პარალელურია, ამიტომ უძრავი ცილინდრული A სახსრის $\bar{R}_A$ რეაქცია მიმართული იქნება ამ ძალების პარალელურად. ამრიგად, თავისუფალ AD კოჭზე მოქმედებს $\bar{R}_A$, $\bar{P}$, $\bar{Q}$ და $\bar{R}_B$ პარალელური ძალთა სისტემა (ნახ. 6.21,ბ).

4. შევადგინოთ B და A წერტილების მიმართ მომენტების ორი განტოლება (იხ. (6.20) განტოლება):

$$\sum M_B(\bar{F}_k) = 0; -R_A \cdot BA + Q \cdot BO - P \cdot BD = 0; \quad (1)$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0; -Q \cdot AO + R_B \cdot AB - P \cdot AD = 0. \quad (2)$$

5. ამოვხსნათ მიღებული განტოლებები.

(1) განტოლებიდან:

$$R_A = \frac{Q \cdot OB - P \cdot BD}{BA} = \frac{6 \cdot 1,5 - 8 \cdot 1,5}{4}, \quad R_A = -0,75 \text{ კნ.}$$

$\bar{R}_A$ რეაქციის უარყოფითი ნიშანი გვიჩვენებს, რომ ის მიმართულია არა ზევით, როგორც ეს 6.21, ბ ნახაზზეა ნაჩვენები, არამედ ქვემოთ. მე-(2) განტოლებიდან:

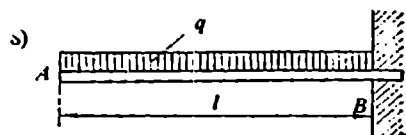
$$R_B = \frac{Q \cdot AD + P \cdot AD}{AB} = \frac{6 \cdot 2,5 + 8 \cdot 5,5}{4}, \quad R_B = 14,75 \text{ კნ.}$$

მაშასადამე, A სახსრის $\bar{R}_A$ რეაქცია მიმართულია ვერტიკალურად ქვევით და $R_A = 0,75$ კნ, ხოლო $\bar{R}_B$ რეაქცია მიმართულია ვერტიკალურად ზევით და $R_B = 14,75$ კნ.

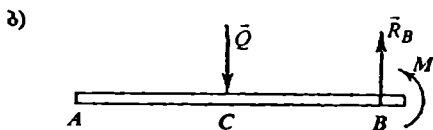
ამოცანა 31. $\ell = 1,2$ მ სიგრძის AB კოჭი ხისტადაა ჩამაგრებული კედელში. კოჭზე მოქმედებს თანაბრად განაწილებული დატვირთვა $q = 1,25$ კნ/მ ინტენსივობით. განვსაზღვროთ ჩამაგრების რეაქცია (ნახ. 6.22, ა).

ამოხსნა. 1. განვიხილოთ AB კოჭის წონასწორობა (ნახ. 6.22, ბ).

2. AB კოჭზე მოქმედი თანაბრად განაწილებული დატვირთვა შევცვალოთ ტოლქმედი $\bar{Q}$ ძალით, რომელიც მოდებული იქნება AB მონაკვეთის შუა C წერტილში და მისი მოდული:



$$Q = q \cdot l = 1,25 \text{ კნ/მ} \cdot 1,2 \text{ მ} = 1,5 \text{ კნ.}$$



ნახ. 6.22.

3. გაერთიანებული AB კოჭი ბმებისაგან, შევცვალოთ ისინი რეაქციებით. ბმას ახორციელებს ვერტიკალური კედელი, რომელშიც ჩატედილია ძელი (იხ. 1.6 პარაგრაფი, პუნქტი 6). ჩვენს შემთხვევაში $\bar{R}_B$ რეაქცია მიმართული იქნება $\bar{Q}$ ძალის პარალელურად, ე.ი. ვერტიკალურად,

რადგან კედელში მოთავსებული ძელის ნაწილზე ზევიდან მოქმედი განაწილებული ძალები იქნება პარალელური და ვერტიკალურად ქვევით მიმართული, ხოლო ქვევიდან მოქმედი ძალები - ვერტიკალურად ზევით მიმართული. ბმებისაგან განთავისუფლების შედეგად უნდა მოვდოთ აგრეთვე რეაქციული წყვილძალა M მომენტით (ნახ. 6.22, ბ).

4. შევადგინოთ $\bar{Q}$, $\bar{R}_B$ ძალებისა და M მომენტისათვის წონასწორობის (6.19) ორი განტოლება:

$$\sum M_B(\bar{F}_k) = 0; \quad Q \cdot \frac{AB}{2} + M = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad -Q + R_B = 0. \quad (2)$$

5. ამოვხსნათ მიღებული განტოლებები:

$$(1) \text{ განტოლებიდან: } M = -Q \cdot \frac{AB}{2} = -1,5 \cdot \frac{1,2}{2}, \quad M = -0,9 \text{ კნ.მ.}$$

$$(2) \text{ განტოლებიდან } R_B = Q = 1,5 \text{ კნ.}$$

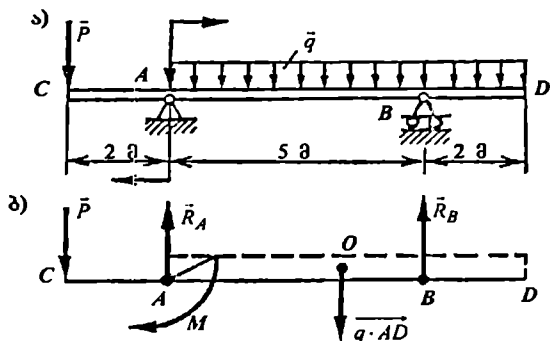
მიღებული M მომენტის ნიშანი უარყოფითია, მაშასადამე, რეაქციულ წყვილძალას აქვს 6.22, ბ ნახაზზე ნაჩვენები მიმართულების საპირისპირო მიმართულება. $\bar{R}_B$ რეაქციის დადებითი ნიშანი კი გვიჩვენებს, რომ ის მიმართულია ისე, როგორც ნაჩვენებია ნახაზზე.

ამოცანა 32. ორკონსოლიანი CD კოჭი A წერტილში ჩამაგრებულია უძრავი ცილინდრული სახსრით, ხოლო B წერტილს ეყრდნობა საგორავებით. მის C წერტილზე

მოდებულია შეყურსული $P=10$ კნ ძალა, წყვილძალა $M=40$ კნ.მ მომენტი და კოჭის AD მონაკვეთზე თანაბრად განაწილებული დატვირთვა $q=0,8$ კნ/მ ინტენსივობით (ნახ. 6.23,ა). განვსაზღვროთ კოჭის A და B საყრდენების რეაქციები.

ამოხსნა. 1. განვიხილოთ CD კოჭის წონასწორობა (ნახ. 6.23,ბ).

2. კოჭზე მოვდოთ აქტიური ძალები: $\vec{P}$, $\vec{Q}$ – თანაბრად განაწილებულ დატვირთვის ტოლქმედი, რომლის მოდული $Q=q \cdot AD$ კნ და მოდებულია AD მონაკვეთის შუა O წერტილზე, მოვდოთ აგრეთვე წყვილძალის M მომენტი (ნახ. 6.23,ბ).



ნახ. 6.23

3. გავათავისუფლოთ კოჭი ბმებისაგან, შევცვალოთ ისინი რეაქციებით. ბმებია A – უძრავი სახსროვანი საყრდენი და B საგორავებიანი საყრდენი, ამასთან $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B$ რეაქციის ძალების ფუძეები იქნება $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ძალების ფუძეების პარალელური.

4. შევადგინოთ B და A წერტილების მიმართ მომენტების ორი განტოლება:

$$\sum M_B(\vec{F}_k) = 0; P \cdot BC - R_A \cdot BA - M + Q \cdot BO = 0; \quad (1)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = 0; P \cdot AC - M - Q \cdot AO + R_B \cdot AB = 0. \quad (2)$$

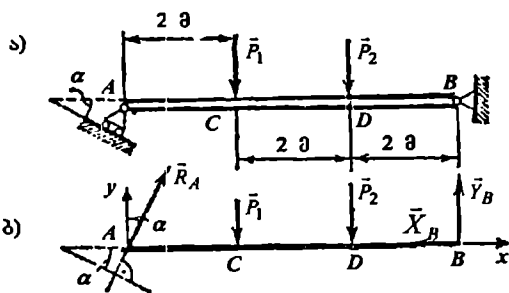
5. ამოვხსნათ ეს განტოლებები, მივიღებთ:

$R_A=7,68$ კნ და $R_B=7,92$ კნ.

ამოცანა 33. AB კოჭი A წერტილში საგორავეებით ეყრდნობა ჰორიზონტისადმი α კუთხით დახრილ სიბრტყეს, ხოლო B წერტილში ჩამაგრებულია უძრავი ცილინდრული სახსრით (ნახ. 624,ა). კოჭის C და D წერტილებში მოდებულია $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ძალები. განვსაზღვროთ A და B საყრდენთა რეაქციები, თუ $\alpha=30^\circ$, $P_1=24$ ნ, $P_2=30$ ნ.

ამოხსნა. 1. განვიხილოთ AB კოჭის წონასწორობა (ნახ. 624,ბ).

2. გავათავისუფლოთ AB კოჭი მასზე დადებული ბმები-საგან, შევცვალოთ ისინი რეაქციებით. ბმებია მოძრავი A ცილინდრული სახსარი და B უძრავი ცილინდრული სახსარი. $\vec{R}_A$ რეაქციის ფუძე მიმართულია იმ სიბრტყის მართობულად, რომელზეც ძეგს საგორავეები, ხოლო $\vec{R}_B$ რეაქციის სიდიდე და მიმართულება უცნო-



ნახ. 624

ბია. დაეშალოთ ის $\vec{X}_B$ და $\vec{Y}_B$ ორ მდგენელად (ნახ. 624,ბ).

3. კოორდინატთა Axy სისტემა შევარჩიოთ ისე, როგორც 6.24, ბ ნახაზზეა ნაჩვენები და შევადგინოთ წონასწორობის (6.14) სახის

განტოლებები:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad R_A \sin \alpha - X_B = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad R_A \cos \alpha - P_1 - P_2 + Y_B = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad -P_1 \cdot AC - P_2 \cdot AD + Y_B \cdot AB = 0. \quad (3)$$

4. ამოვხსნათ მიღებული განტოლებები.

მე-3 განტოლებიდან: $Y_B = \frac{P_1 \cdot AB + P_2 \cdot AD}{AB}; \quad Y_B = 28 \text{ ნ};$

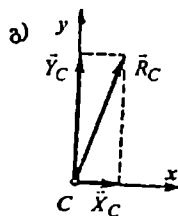
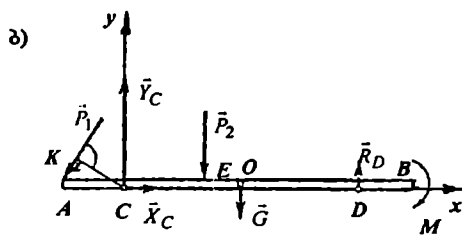
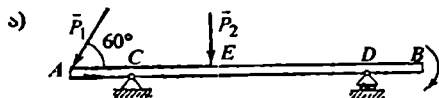
მე-2 განტოლებიდან: $R_A = \frac{P_1 + P_2 - Y_B}{\cos \alpha}; \quad R_A = 30 \text{ ნ}.$

(1) განტოლებიდან: $X_B = R_A \cdot \sin \alpha. \quad X_B = 15 \text{ ნ};$

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}; \quad R_B = 31,8 \text{ კნ.}$$

ამოცანა 34. $G=15$ კნ წონის ერთგვაროვან AB ძელზე მოდებულია $P_1=40$ კნ, $P_2=30$ კნ ძალები და წყვილძალა $|M|=30$ კნ.მ მომენტი (ნახ. 6.25,ა). განესაზღვროთ C და D საყრდენთა რეაქციები, თუ $AB=9$ მ; $AC=1,5$ მ; $CD=6$ მ; $CE=2$ მ.

ამოხსნა. განვიხილოთ AB ძელზე მოდებული ბრტყელ ძალთა სისტემის წონასწორობა (ნახ. 6.25,ბ).



ნახ. 6.25

2. გამოვსახოთ ძელზე მოდებული $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ აქტიური ძალები და ძელის სიმძიმის $\vec{G}$ ძალა, რომელიც მოდებულია AB ძელის შუა O წერტილში (რადგან ძელი ერთგვაროვანია და აქვს მუდმივი განივკვეთი), აგრეთვე წყვილძალის M მომენტი.

3. გავათავისუფლოთ ძელი მასზე დადებული ბმებისაგან. ბმებია უძრავსახსროვანი C საყრდენი და D საყრდენი საგორავებით. შეეცვალოთ ეს ბმები შესაბამისი რეაქციებით: $\vec{R}_D$ რეაქცია მიმართულია იმ სიბრტყის მართობულად, რომელზეც საგორავები ძევს, ე.ი. ვერტიკალურად, C საყრდენის $\vec{R}_C$ რეაქციის მოდული და მიმართულება უცნობია. ჩვენთვის

ცნობილია, რომ მისი ფუძე გადის C წერტილზე და მდებარეობს C სახსრის ღერძის მართობულ, ე.ი. ნახაზის სიბრტყეში. ავირჩიოთ კოორდინატა სისტემა (ნახ. 6.25, ბ) და $\vec{R}_C$ რეაქცია დაეშალოთ ღერძების გასწვრივ მიმართულ $\vec{X}_C$ და $\vec{Y}_C$ მდგენელებად.

4. ბმებისაგან განთავისუფლების შემდეგ მივიღებთ, რომ AB ძელი წონასწორობაშია ერთ სიბრტყეში ნებისმიერად განლაგებული $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{G}$, $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$, $\vec{R}_D$ ძალებისა და წყვილძალის M მომენტის მოქმედებით. შევადგინოთ ამ ძალთა სისტემის წონასწორობის შემდეგი განტოლებები:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum M_C(\vec{F}_k) = 0.$$

მომენტთა ცენტრად ავირჩიოთ C წერტილი, რადგან ამ წერტილზე გადის უცნობი $\vec{X}_C$ და $\vec{Y}_C$ ორი ძალის ფუძეები და მათი მომენტები ამ წერტილის მიმართ იქნება ნულის ტოლი:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad -P_1 \cos 60^\circ + X_C = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad -P_1 \cos 30^\circ + Y_C - P_2 - G + R_D = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = 0; \quad P_1 \cdot CK - P_2 \cdot CE - G \cdot CD + R_D \cdot CD - |M| = 0. \quad (3)$$

აქ CK არის $\vec{P}_1$ ძალის მხარი მომენტთა C წერტილის მიმართ, ე.ი. C ცენტრიდან $\vec{P}_1$ ძალის ფუძეზე დაშვებული მართობის სიგრძე

$$CK = AC \cdot \sin 60^\circ = 1,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1,3 \text{ მ.}$$

5. ამოცხსნათ მიღებული (1), (2) და (3) განტოლებათა სისტემა უცნობი $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$, და $\vec{R}_D$ სიდიდეების მიმართ:

$$(1) \text{ განტოლებიდან: } X_C = P_1 \cdot \cos 60^\circ = 40 \cdot \frac{1}{2} = 20 \text{ კნ;}$$

მე-(3) განტოლებიდან:

$$\begin{aligned} R_D &= \frac{-P_1 \cdot CK + P_2 \cdot CE + G \cdot CD + |M|}{CD} = \\ &= \frac{-40 \cdot 1,3 + 30 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 30}{6} = 13,8 \text{ კნ;} \end{aligned}$$

მე-(2) განტოლებიდან:

$$Y_C = P_1 \cos 30^\circ + P_2 + G - R_D = 40 \cdot 0,866 + 30 + 15 - 13,8 = 65,8 \text{ კნ.}$$

მივიღეთ, რომ $X_C > 0$, $Y_C > 0$ და $R_D > 0$. მაშასადამე, ჩვენ მიერ არჩეული მიმართულებები შეესაბამება ჭეშმარიტ მიმართულებებს.

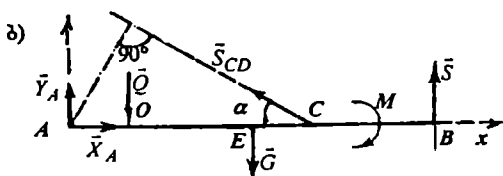
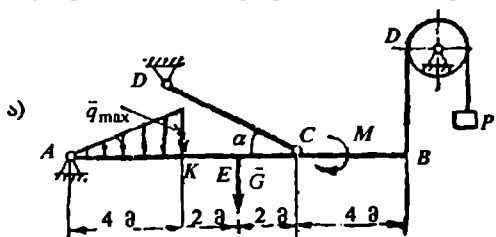
ახლა ვიპოვოთ $\bar{R}_C$ რეაქციის მოდული და მიმართულება (ნახ. 6.25, გ):

$$R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = \sqrt{20^2 + 68,5^2} = 68,8 \text{ კნ.}$$

$$\cos(\hat{\bar{R}}_C, \hat{i}) = \frac{X_C}{R_C} = 0,231 \Rightarrow (\hat{\bar{R}}_C, \hat{i}) \approx 73^\circ;$$

$$\cos(\hat{\bar{R}}_C, \hat{j}) = \frac{Y_C}{R_C} = 0,956 \Rightarrow (\hat{\bar{R}}_C, \hat{j}) \approx 17^\circ$$

ამოცანა 35. AB კოჭი A წერტილში უძრავი ცილინდრული სახსრითაა ჩამაგრებული, ხოლო C წერტილში – CD ღეროთი. კოჭის AK უბანზე მოდებულია სამკუთხედის წესით განაწილებული დატვირთვა $q_{\max} = 6$ კნ/მ ინტენსივობით, E წერტილში მოდებულია $G = 20$ კნ ძალა და წვევილძალა $M = 12$ კნ.მ მომენტით. კოჭის B წერტილზე მიბმულია ძაფი, რომელიც გადაკიდებულია იდეალურ D ბლოკზე. ძაფის თავისუფალ ბოლოზე დაკიდებულია $P = 40$ კნ ტვირთი (ნახ. 6.26, ა). განვსაზღვროთ A საყრდენისა და CD ღეროს რეაქციები, თუ $\alpha = 30^\circ$.



ნახ. 6.26

კნ.მ მომენტით. კოჭის B წერტილზე მიბმულია ძაფი, რომელიც გადაკიდებულია იდეალურ D ბლოკზე. ძაფის თავისუფალ ბოლოზე დაკიდებულია $P = 40$ კნ ტვირთი (ნახ. 6.26, ა). განვსაზღვროთ A საყრდენისა და CD ღეროს რეაქციები, თუ $\alpha = 30^\circ$.

ამოხსნა. 1. განვიხილოთ AB კოჭის წონასწორობა (ნახ. 6.26, ბ).

2. გავათავისუფლოთ ბმებისაგან, მათ ნაცვლად მოვდოთ რეაქციები. ბმებია: A უძრავსახსრიანი საყრდენი, CD ღერო და ძაფი. $\vec{R}_A$ რეაქციის სიდიდე და მიმართულება უცნობია, ამიტომ დავშალოთ ის $\vec{X}_A$ და $\vec{Y}_A$ მდგენელებად. ვაჩვენოთ აგრეთვე CD ღეროს $\vec{S}_{CD}$ რეაქცია და ძაფის $\vec{S}$ რეაქცია, რომლის მოდული $S=P$.

სამკუთხედის წესით განაწილებული დატვირთვა შევცვალოთ $\vec{Q}$ შეყურსული ძალით, რომლის მოდული განისაზღვრება ტოლობით $Q = \frac{q_{\max} \cdot AK}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12$ კნ და მოდებულია ამ დატვირთვის სიმძიმის O ცენტრში, ე.ი. $AO = \frac{2}{3} \cdot AK = \frac{8}{3}$ მ.

3. კოჭზე მოდებული $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Q}$, $\vec{G}$, $\vec{S}_{CD}$, $\vec{S}$ და M ბრტყელი ძალთა სისტემისათვის შევადგინოთ წონასწორობის სამი განტოლება:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A - S_{CD} \cos 30^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A - Q - G + S_{CD} \cos 60^\circ + S = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = 0;$$

$$-Q \cdot AO - G \cdot AE + S_{CD} \cdot AC \sin \alpha - M + S \cdot AB = 0. \quad (3)$$

4. ამოვხსნათ მიღებული განტოლებები, გვექნება:

(3) განტოლებიდან:

$$S_{CD} = \frac{Q \cdot AO + G \cdot AE + M - S \cdot AB}{AC \sin \alpha} = \frac{12 \cdot \frac{8}{3} + 20 \cdot 6 + 12 - 16}{8 \cdot 0,5},$$

$$S_{CD} = 37 \text{ კნ.}$$

(1) - განტოლებიდან:

$$X_A = S_{CD} \cdot \cos 30^\circ = 37 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad X_A = 32 \text{ კნ;}$$

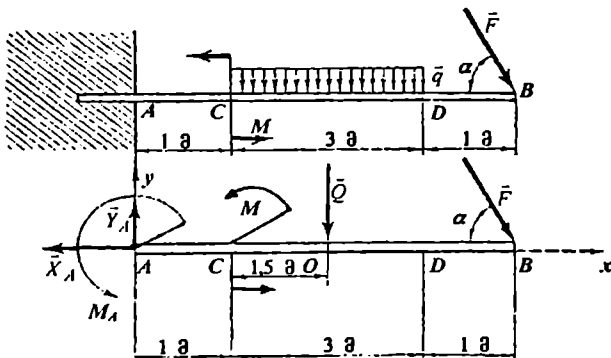
(2) განტოლებიდან:

$$Y_A = Q + G - S_{CD} \cos 60^\circ - S = 12 + 20 - 37 \cdot \frac{1}{2} - 16; \quad Y_A = -2,5 \text{ კნ.}$$

X_A და S_{CD} მნიშვნელობები დადებითი აღმოჩნდა. ეს მიგვითითებს იმაზე, რომ ამ ძალების მიმართულებები ემთხვევა მათ ნამდვილ მიმართულებას, ხოლო Y_A -ს უარყოფითი ნიშანი მიგვითითებს, რომ ის ნახაზზე ნაჩვენები მიმართულების საპირისპიროა.

ამოცანა 36. კედელში ჩამაგრებული AB ძელის CD მონაკვეთზე მოდებულია თანაბრად განაწილებული დატვირთვა $q=80$ კნ/მ ინტენსივობით, ხოლო B წერტილში მოდებულია $F=200$ კნ ძალა, რომელიც ძელთან $\alpha=45^\circ$ კუთხეს ადგენს, ამის გარდა, ძელზე მოქმედებს წყვილძალა $M=120$ კნ.მ მომენტი.

განვსაზღვროთ ჩამაგრების რეაქციები (ნახ. 6.27,ა).



ნახ. 6.27

ამოხსნა. 1. განვიხილოთ AB ძელის წონასწორობა (ნახ. 6.27,ბ).

2. გავათავისუფლოთ ძელი ბმებისაგან. ბმა არის A წერტილში ხისტი ჩამაგრება – კედელი. ჩამაგრების მოქმედება შეეცვალოთ $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ რეაქციის ძალებით და რეაქციული M_A მომენტით (ნახ. 6.27,ბ). ახლა განვიხილოთ ძელი, როგორც თავისუფალი სხეული, რომელზეც მოდებულია ერთ სიბრტყეში ნებისმიერად განლაგებული $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Q}$, $\bar{F}$ ძალები და M და M_A წყვილძალები. თანაბრად განაწილებული დატვირთვის ტოლქმედის მოდული:

$$Q = q \cdot CD = 80 \cdot 3 = 240 \text{ კნ.}$$

3. შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad F \cos \alpha - X_A = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A - Q - F \sin \alpha = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad M_A + M - Q \cdot AO - F \sin \alpha \cdot AB = 0. \quad (3)$$

4. ამოვხსნათ მიღებული განტოლებები:

(1) - განტოლებიდან:

$$X_A = F \cos 45^\circ = 200 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad X_A = 100\sqrt{2} \text{ კნ.}$$

(2) - განტოლებიდან:

$$Y_A = Q + F \sin \alpha = 240 + 200 \cdot 0,5; \quad Y_A = 340 \text{ კნ.}$$

(3) განტოლებიდან:

$$M_A = Q \cdot AO + F \sin \alpha \cdot AB - M = 240 \cdot 2,5 + 200 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 5 - 120,$$

$$M_A = 1185 \text{ კნ.მ.}$$

6.10. რამდენიმე მყარი სხეულისაგან შედგენილი სისტემის წონასწორობა

საინჟინრო ნაგებობათა სტატიკური გაანგარიშება ხშირ შემთხვევაში დაიყვანება რაიმე ბმებით ერთმანეთთან შეერთებულ სხეულთა სისტემისაგან შედგენილი კონსტრუქციის წონასწორობის პირობების განხილვაზე. ბმებს, რომლებიც აერთებენ მოცემული კონსტრუქციის ნაწილებს, ვუწოდებთ შიგა ბმებს. ისინი განსხვავებით გარე ბმებისაგან, კონსტრუქციას ამაგრებენ სხეულებთან (საყრდენებთან), რომლებიც არ ეკუთვნიან კონსტრუქციას).

ერთმანეთთან შეერთებული მყარი სხეულების სისტემის შემთხვევაში თითოეულ სხეულზე მოქმედი ძალები შეიძლება დაიყოს ორ ჯგუფად:

1) გარე ძალებად;

2) შიგა ძალებად.

შიგა ძალები ეწოდება მოცემულ სისტემაში შემავალ სხეულებს შორის ურთიერთქმედების ძალებს.

ქმედებისა და უქუქმედების ტოლობის კანონის თანახმად, შიგა ძალები სიდიდით ყოვეთვის წყვილ-წყვილად ერთმანეთის ტოლი და მიმართულია ურთიერთსაწინააღმდეგოდ, მაგრამ მოდებულია ამ სისტემის ორ სხვადასხვა ურთიერთმოქმედ სხეულზე.

გარე ძალები ეწოდება მოცემულ სისტემაში შემავალი და მასში არაშემავალი სხეულების ურთიერთქმედების ძალებს.

სხეულთა სისტემის წონასწორობის ამოცანის ამოხსნის დროს უნდა გავითვალისწინოთ, რომ თითოეულ სხეულზე ცალ-ცალკე მოდებული ყველა გარე და შიგა ძალა გაწონასწორებულია.

მაშასადამე, ბრტყელ ძალთა სისტემის შემთხვევაში შეიძლება თითოეული სხეულისათვის წონასწორობის სამი განტოლების შედგენა.

ამრიგად, n სხეულისაგან შედგენილი სისტემისათვის შეიძლება მარტო $3n$ განტოლების შედგენა. ამიტომ, თუ უცნობი ძალების რაოდენობა $3n$ -ს არ აღემატება, მაშინ ასეთი ამოცანა არის სტატიკურად განსაზღვრული.

თუ უცნობი ძალების რიცხვი $3n$ -ს აღემატება, მაშინ ასეთი ამოცანა არ შეიძლება ამოიხსნას მარტო აბსოლუტურად მყარი სხეულის სტატიკის განტოლებათა საფუძველზე, ამიტომ მას სტატიკურად განუსაზღვრელი ამოცანა ეწოდება.

რადგან შიგა ძალები წყვილ-წყვილად ტოლია და მიმართულია ერთი წრფის გასწვრივ ურთიანააღმდეგოდ მხარეს, ამიტომ ნებისმიერი წერტილის მიმართ მათი მომენტების აღგებრული ჯამი და ნებისმიერ ღერძზე მათი გეგმილების ჯამი ნულის ტოლია. ამიტომ, თუ თითოეული სხეულისათვის ცალკე შევადგენთ წონასწორობის განტოლებას (რაიმე წერტილის მიმართ მომენტთა განტოლებას ან რაიმე ღერძზე გეგმილთა განტოლებას) და შემდეგ ყველა ამ განტოლებას შევეკრებთ, მაშინ შიგა ძალების შემცველი წევრები წყვილ-წყვილად გააბათილებენ ერთმანეთს, მაშასადამე, მიღებულ განტოლებაში შევა მარტო გარე ძალები.

ამრიგად, თუ სხეულთა სისტემა წონასწორობაში იმყოფება, მაშინ ამ სისტემაზე მოდებული გარე ძალები აკმაყოფილებს წონასწორობის იმავე სამ განტოლებას, რასაც ერთი აბსოლუტური მყარი სხეულის წონასწორობის შემთხვევაში.

ეს განტოლებები არის სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების წონასწორობის პირობა.

ამ განტოლებებიდან განისაზღვრება ყველა გარე რეაქცია, თუ გარე რეაქციების რიცხვი სამზე მეტი არ არის, ხოლო თუ გარე რეაქციების რიცხვი აღმოჩნდება სამზე მეტი ან ამოცანაში გარე რეაქციების გარდა, მოსაძებნია უცნობი შიგა ძალები, მაშინ ამოცანის ამოხსნისათვის საჭიროა გამოვიყენოთ სისტემის დანაწევრების მეთოდი, ე.ი. სისტემაში შემავალი თითოეული სხეულის წონასწორობა უნდა განვიხილოთ ცალ-ცალკე და ყოველი ამ სხეულისათვის შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები განსახილველ სხეულზე მოდებული ყველა ძალის გათვალისწინებით. როცა სისტემა შედგება ორი მყარი სხეულისაგან, მაშინ დანაწევრების მეთოდის გამოყენებით ზოგად შემთხვევაში მივიღებთ წონასწორობის მხოლოდ ექვს განტოლებას (თითოეული სხეულისათვის სამ-სამ განტოლებას).

წონასწორობის ექვსი განტოლების შესადგენად შეიძლება გამოვიყენოთ სხვა ხერხიც, სახელდობრ: ჯერ შევადგინოთ წონასწორობის სამი განტოლება მთელი სისტემისათვის (როგორც ერთი აბსოლუტურად მყარი სხეულისათვის) და შემდეგ ამ სამ განტოლებას დაეუმატოთ მოცემული სისტემის ერთ-ერთი სხეულისათვის შედგენილი წონასწორობის სამი განტოლება. მეორე ხერხს არცთუ იშვიათად იყენებენ, რადგან მთელი სისტემისათვის შედგენილ წონასწორობის განტოლებებში შედის მარტო გარე ძალები, ამიტომ ეს განტოლებები, ჩვეულებრივ, უფრო მარტივია.

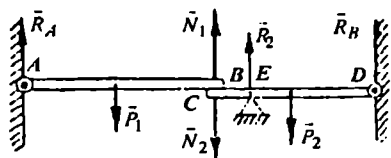
მყარი სხეულის სისტემის წონასწორობის ამოცანები ამ სხეულების ერთმანეთთან შეერთების სახის მიხედვით შეიძლება დავეყოთ შემდეგ სამ ტიპად:

1. სისტემაში შემავალი სხეულები თავისუფლად ეყრდნობა ერთმანეთს;

2. სისტემაში შემავალი სხეულები ერთმანეთთან შეერთებულია მოქნილი ძაფით ან უწონი ღეროს საშუალებით, რომლის ბოლოებიც ამ სხეულებზე მიმაგრებულია სახსრებით;

3. სისტემაში შემავალი სხეულები ერთმანეთთან შეერთებულია სახსრების საშუალებით.

პირველი ტიპის ამოცანებში შიგა ძალები, ე.ი. ამ სხეულთა ერთმანეთზე წნევის ძალები, მიმართულია მათი შეხების წერტილში, ამ სხეულების ზედაპირების საერთო ნორმალის მიმართულებით ან ერთ-ერთი სხეულის ზედაპირის მეორესთან შეხების წერტილში გამავალი ნორმალის გასწვრივ (ნახ. 6.28).



ნახ. 6.28

P_1 კბ წონის AB კოჭს შეუძლია ბრუნვა უძრავი ცილინდრული A სახსრის ღერძის გარშემო და B ბოლოთი თავისუფლად ეყრდნობა მეორე P_2 კბ წონის CD კოჭს; CD კოჭი დაყრდნობილია E წერტილში და

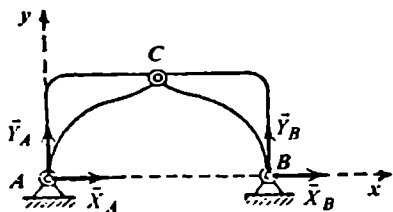
D სახსრით შეერთებულია კედელთან. მოცემულ შემთხვევაში სისტემა შედგენილია ორი სხეულისაგან AB და CD კოჭებისაგან.

მოცემული სისტემის შიგა ძალები არის კოჭებს შორის ურთიერთქმედების ძალები, ე.ი. AB კოჭის $\bar{N}_1$ წნევა CD კოჭზე და $\bar{N}_2$ ძალა, რომლითაც CD კოჭი მოქმედებს AB კოჭზე. კმედებისა და უკუქმედების ტოლობის კანონის თანახმად, $\bar{N}_1$ და $\bar{N}_2$ ძალები სიდიდით ტოლია და ურთიერთსაწინააღმდეგოდაა მიმართული, ე.ი. $\bar{N}_1 = -\bar{N}_2$. კოჭების $\bar{P}_1$ და $\bar{P}_2$ ძალები მოცემული სისტემისათვის გარე ძალებია. ასევე A და D სახსრების $\bar{R}_A$ და $\bar{R}_D$ რეაქციები და E საყრდენის $\bar{R}_E$ რეაქცია მოცემული სისტემისათვის გარე ძალებია, რადგან A და D სახსრები და E საყრდენი არ ეკუთვნის ორი კოჭისაგან შედგენილ განსახილველ სისტემას.

მეორე ტიპის ამოცანებში ძაფის ან ღეროს გასწვრივ მიმართული მათი რეაქციები შიგა ძალებია.

მესამე ტიპის შემთხვევაში შიგა ძალა, ე.ი. ძალა, რომლითაც ერთი სხეული მოქმედებს მეორეზე, მოდებულია სახსრის ცენტრში, მაგრამ მისი მიმართულება უცნობია. ამიტომ ასეთი ამოცანების ამოხსნის დროს შიგა ძალას შლიან ორ მდგენელად, რომლებიც მიმართულია კოორდი-

ნატოა ღერძების გასწვრივ. ამ ჯგუფის ამოცანებს შორის უნდა აღინიშნოს მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევა, სახელდობრ, სისტემა შედგება ორი სხეულისაგან სამი სახსრით, რომელთაგანაც ორი უძრავი საყრდენი სახსარია, ხოლო მესამე ამ ორ სხეულს აკავშირებს ერთმანეთთან. მაგალითად, ასეთ ამოცანას ეხედებით სამსახსროვანი თაღის შემთხვევაში (ნახ. 6.29).



ნახ. 6.29

თუ, სამსახსროვანი თაღი ბრტყელ ძალთა სისტემის მოქმედებით წონასწორობაში იმყოფება, მაშინ შეგვიძლია შევადგინოთ წონასწორობის მხოლოდ ექვსი განტოლება (სამ-სამი განტოლება თაღის თითოეული AC და BC ნაწილისათვის).

რადგან რეაქციის მიმართულება ყოველ A, B და C სახსარში უცნობია, ამიტომ სახსროვანი თაღის წონასწორობის ამოცანის ამოხსნის დროს საჭიროა თითოეული ამ რეაქციის დაშლა ორ მდგენელად (კოორდინატთა x და y ღერძების მიმართ). მაშასადამე, სულ გვექნება ექვსი უცნობი რეაქცია, რომლებიც შეიძლება ვიპოვოთ წონასწორობის ექვსი განტოლებიდან, ასე, რომ სამსახსროვანი თაღის წონასწორობის ამოცანა სტატიკურად განსაზღვრულია.

შევნიშნოთ, რომ, თუ შევადგენთ წონასწორობის პირობებს სამსახსროვან თაღზე მოქმედი ძალებისათვის (ნახ. 6.29), მივიღებთ სამ განტოლებას $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$ ოთხი უცნობით. თუ დამატებით განვიხილავთ მის მარცხენა ან მარჯვენა ნახევრის წონასწორობას, მივიღებთ კიდევ სამ განტოლებას, რომელშიც იქნება ახალი $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$ ორი უცნობი. მიღებული ექვსი განტოლებიდან ვიპოვით ყველა ექვს უცნობს.

მსგავსი ამოცანების ამოხსნის მეორე ხერხი მდგომარეობს იმაში, რომ კონსტრუქციას ყოფენ ცალკეულ სხეულებად და აღგენენ წონასწორობის პირობებს თითოეული სხეულისათვის ცალ-ცალკე.

აღსანიშნავია, რომ, თუ მოვაშორებთ გარე ბმებს A და B საყრდენებს, მაშინ თაღი არ იქნება მყარი, რადგან მის ნაწილებს შეუძლია მობრუნება C სახსრის ირგვლივ.

მე-5 გამყარების პრინციპის საფუძველზე კონსტრუქციაზე მოქმედი ძალთა სისტემა წონასწორობისას უნდა აკმაყოფილებდეს მყარი სხეულის წონასწორობის პირობას (ამ პირობებში შევა მხოლოდ გარე რეაქციები $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$). მაგრამ ეს პირობები, რომელიც მითითებული იყო, როგორც აუცილებელი, არ იქნებიან საკმარისი. ამიტომ მათგან შეუძლებელია ყველა სიდიდის განსაზღვრა. ამოცანის ამოსახსნელად აუცილებელია დამატებით განვიხილოთ კონსტრუქციის ერთი ან რამდენიმე ნაწილის წონასწორობა.

6.11. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები რამდენიმე მყარი სხეულისაგან შედგენილი სისტემის წონასწორობაზე

ამოცანა 37. $Q=100$ კგ წონის ბირთვი ეყრდნობა ვერტიკალურ კედელს და ამ კედელთან α კუთხით დახრილ OA ძელს, ამასთან მასზე მოქმედებს $\bar{F}$ ძალა (ნახ. 6.30, ა). $\bar{P}$ წონის ერთგვაროვანი OA ძელი დამაგრებულია O წერტილში სახსრით და დახრილ მდგომარეობაში შეკავებულია ვერტიკალური AM ბაგირით. უზულებელყოთ სახსნი, განვსაზღვროთ ბირთვის წნევა OA ძელსა და კედელზე, O სახსრის რეაქცია და ბაგირის დაჭიმულობა, თუ $\alpha=60^\circ$, $P=60$ კგ, $\beta=30^\circ$, $F=60$ კგ, $OA=\ell$ მ, $R=\frac{1}{4}\ell$ მ.

ამოხსნა. თუ დავაკვირდებით ამ ამოცანაში გვაქვს ხუთი უცნობი: $\bar{N}_D$ – ბირთვის წნევა კედელზე; $\bar{N}_k$ – ბირთვის წნევა OA ძელზე; $\bar{T}$ – AM ბაგირის დაჭიმულობა; $\bar{R}_0$ – რეაქციის სიდიდე და მიმართულება.

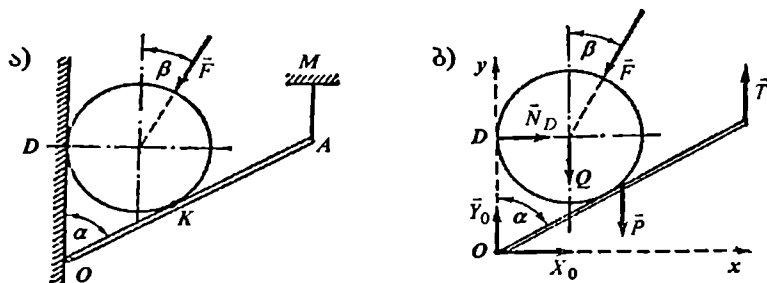
ჯერ სისტემა განვიხილოთ, როგორც მთლიანი მყარი სხეული ანუ ერთად აღებული ბირთვისა და ძელის წონასწორობა, ხოლო შემდეგ – მხოლოდ ბირთვის წონასწორობა, მაშასადამე, დავიცვათ ამოცანის ამოხსნის გეგმა.

1. ძელის და ბირთვის წონასწორობა

1. განვიხილოთ ძელისა და ბირთვის წონასწორობა (ნახ.6.30,ბ).

2. გამოვსახოთ ძელსა და ბირთვზე მოქმედი ძალები:

$\vec{Q}$ – ბირთვის წონა, $\vec{F}$ ძალა და $\vec{P}$ – ერთგვაროვანი ძელის წონა.



ნახ. 6.30

3. გავათავისუფლოთ ბირთვი და ძელი ბმებისაგან, შევცვალოთ ბმების მოქმედება რეაქციებით. ბმებია: ვერტიკალური კედელი, ცილინდრული O სახსარი და AM ბაგირი. კედლის $\vec{N}_D$ რეაქცია მიმართულია კედლის მართობულად (ბირთვის რადიუსის გასწვრივ). AM ბაგირის რეაქცია მიმართულია ბაგირის გასწვრივ. $\vec{R}_0$ რეაქცია დავშალოთ $\vec{X}_0$ და $\vec{Y}_0$ ორ მდგენელად.

4. Oxy კოორდინატთა სისტემა ავირჩიოთ ისე, როგორც 6.30. ბ ნახაზზეა ნაჩვენები.

5. ბირთვსა და ძელზე მოქმედი ($\vec{N}_D, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Q}, \vec{F}, \vec{T}$) ძალთა სისტემა ნებისმიერადაა განლაგებული Oxy სიბრტყეში. შევადგინოთ ამ ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებები:

$$\sum_{k=1}^7 F_{kx} = 0; \quad X_0 + N_D - F \sin \beta = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^7 F_{ky} = 0; \quad Y_0 - P + T - Q - F \cos \beta = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^7 M_0(\vec{F}_k) = 0; T\ell \cdot \sin \alpha - P \cdot \frac{\ell}{2} \sin \alpha - N_D \cdot OD - Q \cdot R = 0. \quad (3)$$

აქ გვაქვს X_0, Y_0, T, N_D ოთხი უცნობი და სამი განტოლება.

$$\text{მე3-ში } OD = R \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

II ბირთვის წონასწორობა

1. განვიხილოთ ბირთვის წონასწორობა (ნახ. 6.31);

2. გამოვსახოთ აქტიური ძალები: $\vec{Q}$ – ბირთვის წონა და $\vec{F}$ ძალა;

3. გავათავისუფლოთ ბირთვი ბმებისაგან, შევცვალოთ ბმების მოქმედება რეაქციებით: ბმეზა OA ძელი და ვერტიკალური კედელი. კედლის $\vec{N}_D$ რეაქცია მიმართულია კედლის პერპენდიკულარულად, ძელის $\vec{N}_K$ რეაქცია კი – ძელის მართობულად;

4. Oxy კოორდინატთა სისტემა ავირჩიოთ ისე, როგორც ეს ნაჩვენებია 6.31 ნახაზზე;

5. შევადგინოთ ბირთვზე მოქმედი ძაღთა სისტემის წონასწორობის გან-

ტოლებები. ბირთვზე მოქმედი ($\vec{N}_D, \vec{F}, \vec{Q}, \vec{N}_K$) ძაღთა სისტემა არის Oxy სიბრტყეში მდებარე თავმოყრილ ძაღთა სისტემა. მაშასადამე, წონასწორობის განტოლებები იქნება:

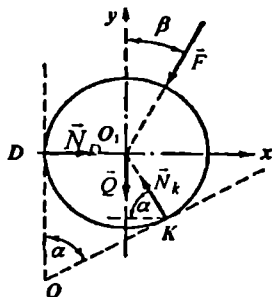
$$\sum_{k=1}^4 F_{kx} = 0; \quad N_D - N_K \cos \alpha - F \sin \beta = 0; \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^4 F_{ky} = 0; \quad N_K \sin \alpha - F \cos \beta - Q = 0. \quad (5)$$

6. მიღებული ხუთი განტოლებიდან შედგენილი სისტემა ამოვხსნათ X_0, Y_0, T, N_D, N_K უცნობების მიმართ:

$$X_0 + N_D - F \sin \beta = 0; \quad (6)$$

$$Y_0 - P - Q + T - F \cos \beta = 0; \quad (7)$$



ნახ. 6.31

$$T \sin \alpha - \frac{1}{2} P \sin \alpha - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot N_D - \frac{1}{4} Q = 0; \quad (8)$$

$$N_0 - N_k \cos \alpha - F \sin \beta = 0; \quad (9)$$

$$N_k \sin \alpha - F \cos \beta - Q = 0. \quad (10)$$

$$(10) \text{ განტოლებიდან: } N_k = \frac{Q + F \cos \beta}{\sin \alpha}; \quad N_k = 176 \text{ კგ};$$

$$(9) \text{ განტოლებიდან: } N_D = N_k \cos \alpha + F \sin \beta; \quad N_D = 118 \text{ კგ.}$$

$$(6) \text{ განტოლებიდან: } X_0 = F \sin \beta - N_D; \quad X_0 = -88 \text{ კგ};$$

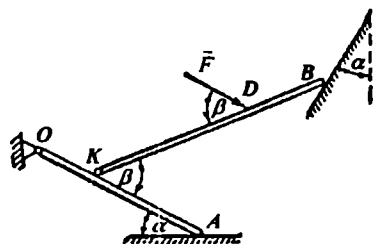
$$(8) \text{ განტოლებიდან:}$$

$$T = \frac{\frac{1}{2} P \cdot \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot N_D + \frac{1}{4} Q}{\sin \alpha}; \quad T = 128 \text{ კგ};$$

$$(7) \text{ განტოლებიდან: } Y_0 = P + Q - T + F \cos \beta; \quad Y_0 = 104 \text{ კგ.}$$

$$\text{პასუხი: } N_D = 118 \text{ კგ}; N_k = 176 \text{ კგ}; T = 128 \text{ კგ}; X_0 = -88 \text{ კგ}; Y_0 = 104 \text{ კგ.}$$

ამოცანა 38. $P=100$ კგ წონის ერთგვაროვანი $OA=a$ სიგრძის ღერო ერთი ბოლოთი O სახსრითაა დამაგრებული, ხოლო მეორე A ბოლოთი ეყრდნობა ჰორიზონტალურ გლუვ იატაკს (ნახ. 6.32). $Q=100$ კგ წონის ერთგვაროვანი $KB=b$ ღერო K წერტილში სახსრულადაა მიმაგრებული OA ღეროსთან, ხოლო მეორე B ბოლოთი ეყრდნობა გლუვ დახრილ სიბრტყეს. ღეროს D წერტილში მოდებულია $\vec{F}$ ძალა. განვსაზღვროთ O და K სახსრების რეაქციები, აგრეთვე A და B წერტილებში საყრდენთა რეაქციები, თუ $OK = \frac{a}{3}$; $BD = \frac{b}{3}$;



ნახ. 6.32

$\alpha=30^\circ$; $\beta=60^\circ$; $F=60$ კგ.

ამოხსნა. ამ ამოცანაში

გვაქვს ექვსი უცნობი: $\vec{N}_A$

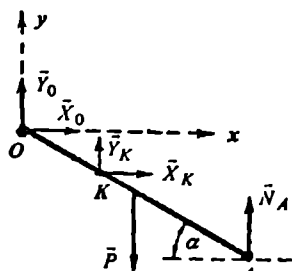
(სიდიდე); $\vec{N}_B$ (სიდიდე); $\vec{R}_O$

(სიდიდე და მიმართულება). $\vec{R}_K$

(სიდიდე და მიმართულება). ამოცანის ამოხსნისას ცალ-ცალკე განვიხილოთ OA და KB ღეროების წონასწორობა.

I. OA ღეროს წონასწორობა

1. განვიხილოთ OA ღეროს წონასწორობა (ნახ. 6.33).
2. გამოვსახოთ აქტიური ძალა $\vec{P}$ – ღეროს წონა.
3. გავათავისუფლოთ ღერო ბმებისაგან, ბმები შევცვალოთ რეაქციებით. ბმებია: ა) O ცილინდრული სახსარი; ბ) A წერტილში გლუვი იატაკი და გ) BK ღერო. O სახსრის რეაქცია დაეშალოთ $\vec{X}_0$, $\vec{Y}_0$ ორ მდგენელად. K სახსრის რეაქცია ასევე დაეშალოთ $\vec{X}_k$ და $\vec{Y}_k$ ორ მდგენელად. A წერტილში $\vec{N}_A$ რეაქცია მიმართულია გლუვი იატაკის მართობულად.



ნახ. 6.33

4. Oxy კოორდინატთა სისტემა ავირჩიოთ ისე, როგორც ეს ნაჩვენებია 6.33 ნახაზზე.

5. OA ღეროზე მოქმედი ძალები სისტემა არის ნებისმიერ ბრტყელ ძალები სისტემა. შევადგინოთ ამ ძალები სისტემის წონასწორობის განტოლებები:

$$\sum_{k=1}^6 F_{kx} = 0; \quad X_0 + X_k = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^6 F_{ky} = 0; \quad Y_0 + Y_k + N_A - P = 0; \quad (2)$$

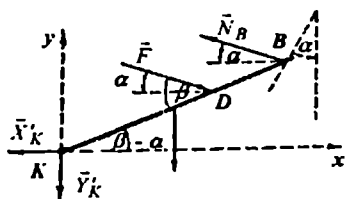
$$\sum_{k=1}^6 M_o(\vec{F}_k) = 0; .$$

$$X_k \cdot \frac{a}{3} \sin \alpha + Y_k \cdot \frac{a}{3} \cos \alpha + N_A \cdot a \cos \alpha - P \cdot \frac{a}{2} \cos \alpha = 0 . \quad (3)$$

II. BK ღეროს წონასწორობა

1. განვიხილოთ BK ღეროს წონასწორობა (ნახ. 6.34).
2. გამოვსახოთ ღეროზე მოქმედი აქტიური ძალები: $\vec{F}$ და $\vec{Q}$ – ერთგვაროვანი ღეროს წონა.

3. BK ღერო გავათავისუფლოთ ბმებისაგან, მათი მოქმედება შევცვალოთ რეაქციებით. ბმებია: ა) დახრილი გლუვი კედელი და ბ) OA ღერო, რომელიც BK ღეროსთან K სახსრის საშუალებითაა მიმაგრებული. K სახსრის რეაქცია დაეშალოთ $\bar{X}'_k$ და $\bar{Y}'_k$ ორ მდგენელად, ამასთან ძალების ქმედებისა და უქუქმედების პრინციპის თანახმად $X'_k = X_k$, $Y'_k = Y_k$; $\bar{X}_k$ მდგენელი



ნახ. 634

მიმართულია $\bar{X}'_k$ მდგენელის

საპირისპირო მხარეს, ე.ი. $\bar{X}'_k = -\bar{X}_k$, ხოლო $\bar{Y}'_k$ მდგენელი მიმართულია $\bar{Y}_k$ -ს საწინააღმდეგო მიმართულებით, ე.ი. $\bar{Y}'_k = -\bar{Y}_k$.

4. ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა ისე, როგორც ეს 634 ნახაზზეა ნაჩვენები.

5. მიღებული ძალთა სისტემა არის ერთ სიბრტყეზე ნებისმიერად განლაგებული ძალთა სისტემა.

შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -X'_k + F \cos \alpha - N_B \cos \alpha = 0; \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad -Y'_k - Q - F \sin \alpha + N_B \sin \alpha = 0; \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n M_K(\bar{F}_k) = 0; \quad -Q \cdot \frac{b}{2} \cos(\beta - \alpha) - F \cdot \frac{2}{3} b \sin \beta + N_B \cdot b \cdot \sin \beta = 0. \quad (6)$$

6. ამოვხსნათ (1)-(6) განტოლებებისაგან შედგენილი სისტემა, რომელიც შეიცავს $\bar{X}_0$, $\bar{Y}_0$, $\bar{X}_k$, $\bar{Y}_k$, $\bar{N}_A$, $\bar{N}_B$ ექვს უცნობს (სადაც $\bar{X}_0$, $\bar{Y}_0$, $\bar{N}_A$, $\bar{N}_B$ გარე ძალებია, ხოლო $\bar{X}_k$, $\bar{Y}_k$ - შიგა ძალები):

$$X_0 + X_k = 0; \quad (7)$$

$$Y_0 + Y_k + N_A - P = 0; \quad (8)$$

$$\frac{X_k}{3} \sin \alpha + \frac{Y_k}{3} \cos \alpha + N_A \cos \alpha - \frac{P}{2} \cos \alpha = 0; \quad (9)$$

$$X_k - F \cos \alpha + N_B \cos \alpha = 0; \quad (10)$$

$$Y_k + Q + F \sin \alpha - N_B \sin \alpha = 0; \quad (11)$$

$$\frac{Q}{2} \cos(\beta - \alpha) + \frac{2}{3} F \sin \beta - N_B \sin \beta = 0. \quad (12)$$

მე-(12) განტოლებიდან:

$$N_B = \frac{\frac{Q}{2} \cos(\beta - \alpha) + \frac{2}{3} F \sin \beta}{\sin \beta}; \quad N_B = 120 \text{ კგ.}$$

მე-(11) განტოლებიდან:

$$Y_k = (N_B - F) \sin \alpha - Q; \quad Y_k = -130 \text{ კგ.}$$

მე-(10) განტოლებიდან:

$$X_k = F \cos \alpha - N_B \cos \alpha; \quad X_k = -52 \text{ კგ.}$$

მე-(9) განტოლებიდან:

$$N_A = \frac{\frac{P}{2} \cos \alpha - \frac{Y_k}{3} \cos \alpha - \frac{X_k}{3} \sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad N_A = 103 \text{ კგ.}$$

მე-(8) განტოლებიდან:

$$Y_0 = P - N_A - Y_k; \quad Y_0 = 127 \text{ კგ.}$$

მე-(7) განტოლებიდან:

$$X_0 = -X_k; \quad X_0 = 52 \text{ კგ.}$$

პასუხი: $X_0 = 52 \text{ კგ; } Y_0 = 127 \text{ კგ; } X_k = -52 \text{ კგ; } Y_k = -130;$
 $N_A = 103 \text{ კგ; } N_B = 120 \text{ კგ.}$

ამოცანა 39. ხიდი შედგება ერთმანეთთან C სახსრით შეერთებული AC და CB ორი ნაწილისაგან, რომლებიც ნაპირის ბურჯებთან შეერთებულია A და B ცილინდრული სახსრებით (საყრდენებით) (ნახ. 6.35). ხიდის AC და CB ნაწილების $\bar{G}_1$ და $\bar{G}_2$ წონა ერთნაირია და მოდებულია მათი სიმძიმის D და E წერტილებში. ხიდზე მოთავსებულია $\bar{Q}_1$ და $\bar{Q}_2$ წონის ტვირთები. განესაზღვროთ C სახსარში წნევა და A და B სახსრების რეაქციები ნახაზზე მოცემული ზომების მიხედვით, თუ $G_1 = G_2 = 130 \text{ კნ, } Q_1 = 10 \text{ კნ, } Q_2 = 40 \text{ კნ.}$

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A + X_B = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A - G_1 - Q_1 - Q_2 - G_2 + Y_B = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad -G_1 \cdot 1,5 - Q_1 \cdot 5 - Q_2 \cdot 11 - G_2 \cdot 12,5 + Y_B \cdot 14 = 0. \quad (3)$$

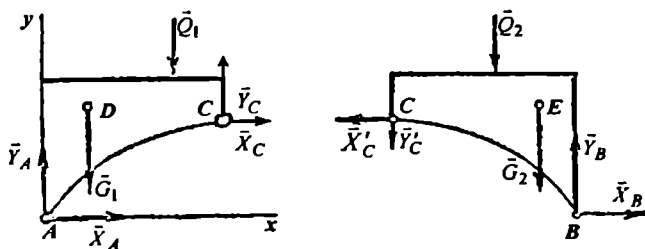
მე-(3) განტოლებიდან:

$$Y_B = \frac{G_1 \cdot 1,5 + Q_1 \cdot 5 + Q_2 \cdot 5 + G_2 \cdot 11 + G_2 \cdot 12,5}{14}; \quad Y_B = 165 \text{ კნ.}$$

მე-(2) განტოლებიდან: $Y_A = G_1 + Q_1 + G_2 - Y_B$; $Y_A = 145 \text{ კნ.}$

(1) განტოლება შეიცავს ორ უცნობს, ამიტომ ამ ეტაპზე X_A და X_B უცნობებს ვერ განესაზღვრავთ.

ახლა განვიხილოთ ხიდის მარცხენა ნაწილზე მოდებული ძალები სისტემის წონასწორობა. ხიდის ამ ნაწილზე მოედოთ მოცემული $\vec{G}_1$ და $\vec{Q}_1$ ძალები და ბმის რეაქციები $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{X}_C$ და $\vec{Y}_C$, სადაც $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ შიგა ძალებია. ხიდის მარჯვენა ნაწილზე მოდებულია $\vec{G}_2$, $\vec{Q}_2$, $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$, $\vec{X}_C'$, $\vec{Y}_C'$ ძალები (ნახ. 637).



ნახ. 637

შევადგინოთ ხიდის მარცხენა ნაწილზე მოდებული ნებისმიერი ბრტყელი ($\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{G}_1$, $\vec{Q}_1$, $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$) ძალები სისტემის წონასწორობის სამი განტოლება:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A + X_C = 0; \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A - G_1 - Q_1 + Y_C = 0; \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = 0; \quad Q_1 \cdot 2 + G_1 \cdot 5,5 + X_A \cdot 4 - Y_A \cdot 7 = 0. \quad (6)$$

მე-(6) განტოლებიდან:

$$X_A = \frac{Y_A \cdot 7 - Q_1 \cdot 2 - G_1 \cdot 5,5}{4}; \quad X_A = 70 \text{ კნ.}$$

მე-(5) განტოლებიდან: $Y_C = G_1 + G_2 - Y_A$; $Y_C = -5 \text{ კნ.}$

მე-(4) განტოლებიდან: $X_C = -X_A = -70 \text{ კნ.}$

X_C და Y_C სიდიდეების მინუს ნიშანი გვიჩვენებს, რომ $\vec{X}_C$ და $\vec{Y}_C$ ვექტორების ჯეშმარიტი მიმართულება ნახაზზე ნაჩვენები მიმართულების საპირისპიროა, მაშასადამე, $\vec{X}'_C$ და $\vec{Y}'_C$ ვექტორების მიმართულებებიც ნახაზზე ნაჩვენები მიმართულებების საპირისპირო იქნება.

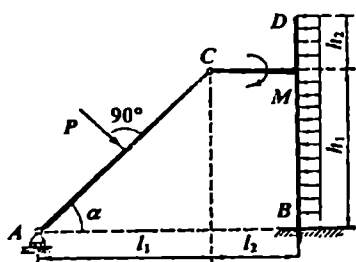
(1) განტოლებიდან: $X_B = -X_A = -70 \text{ კნ.}$

ამრიგად, B სახსრის $\vec{R}_B$ რეაქციის $\vec{X}_B$ პორიზონტალური მდგენელი მიმართული უნდა იყოს არა მარჯვნივ, არამედ მარცხნივ.

პასუხი: $X_A = 70 \text{ კნ.}$; $Y_A = 145 \text{ კნ.}$; $X_B = -70 \text{ კნ.}$; $X_C = -70 \text{ კნ.}$

$Y_C = -5 \text{ კნ.}$

ამოცანა 40. ბრტყელი კონსტრუქცია შედგება C სახსრით ერთმანეთთან შეერთებული AC და BDC ორი მყარი სხეულისაგან (ნახ. 6.38). კონსტრუქციაზე მოქმედებს $\vec{P}$ ძალა, წვეილძალა M მომენტი და თანაბრად განაწილებული დატვირთვა q ინტენსივობით. განესაზღვროთ მოცემული შედგენილი კონსტრუქციის A და B საყდენთა რეაქციები და წნევა შუალედურ C სახსარში. თუ



ნახ. 6.38

$$P=12 \text{ კნ}; M=24 \text{ კნ.მ}; q=2 \text{ კნ/მ}; h_1=4 \text{ მ}; h_2=2 \text{ მ}, \ell_1=3 \text{ მ}, \ell_2=2 \text{ მ},$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}.$$

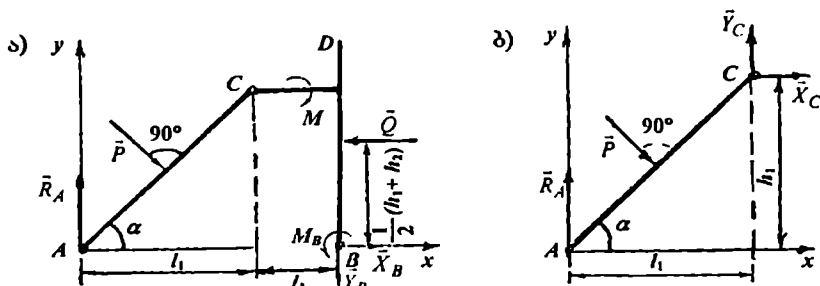
ამოხსნა. თავდაპირველად განვიხილოთ მთელი კონსტრუქციის წონასწორობა, როგორც ერთი მყარი სხეულისა, ხოლო შემდეგ კონსტრუქციის AC სხეულზე მოდებული ძალების წონასწორობა.

I. ACDB სხეულის წონასწორობა

1. განვიხილოთ მთელ კონსტრუქციაზე მოდებული გაწონასწორებული ძალთა სისტემა (ნახ. 6.39, ა).

2. გამოვსახოთ კონსტრუქციაზე მოქმედი აქტიური ძალები: $\vec{P}$ – ძალა; $\vec{Q}$ – თანაბრად განაწილებული დატვირთვის ტოლქმედი, რომლის მოდული ტოლია: $Q=q \cdot (h_1+h_2)=2(4+2)=12 \text{ კნ}$. მოდების წერტილის x, y კოორდინატებია:

$$x = \ell_1 + \ell_2 = 3 + 2 = 5 \text{ მ}; \quad y = \frac{1}{2}(h_1 + h_2) = \frac{1}{2}(4 + 2) = 3 \text{ მ};$$



ნახ. 6.39

3. გავათავისუფლოთ კონსტრუქცია ბმებისაგან, ბმების მოქმედებები შევცვალოთ რეაქციებით. ბმებია A საგორავებით განხორციელებული საყრდენი და B უძრავი ჩამაგრება. A საყრდენის $\vec{R}_A$ რეაქცია მიმართულია ჰორიზონტალური ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ ვერტიკალურად; ჩამაგრების რეაქცია ტოლფასია ერთი $\vec{R}_B$ ძალისა (სიდიდე და მიმართულება უცნობია) და წყვილძალისა M_B მომენტით. $\vec{R}_B$

რეაქციას დავშლით $\bar{X}_B$ და $\bar{Y}_B$ ორ მდგენელად. ამრიგად, გვაქვს ერთ სიბრტყეში მდებარე ძალები შემდეგი სისტემა: $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{R}_A$, $\bar{X}_B$, $\bar{Y}_B$; წყვილძალა M მომენტი და რეაქციული წყვილძალა M_A მომენტი.

4. კოორდინატთა სისტემა ავირჩიოთ ისე, როგორც ნაჩვენებია 6.39, ა ნახაზზე;

5. შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad P \sin \alpha - Q + X_B = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad -P \cos \alpha + R_A - Y_B = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0;$$

$$-P \cdot \frac{AC}{2} + Q \cdot \frac{h_1 + h_2}{2} - M + M_B - Y_B \cdot (\ell_1 + \ell_2) = 0. \quad (3)$$

II. კონსტრუქციის AC ნაწილის წონასწორობა

1. განვიხილოთ კონსტრუქციის AC მარცხენა ნაწილის წონასწორობა (ნახ. 6.39, ბ).

2. ნახაზზე ვაჩვენოთ აქტიური ძალები: AC მყარ სხეულზე მოქმედი $\bar{P}$ ძალა;

3. გავათავისუფლოთ AC სხეული ბმებისაგან, ბმების მოქმედება შევცვალოთ რეაქციებით. ბმებია: ა) A საგორავეები და ბ) კონსტრუქციის მარჯვენა CDB ნაწილი, რომელთანაც AC შეერთებულია C სახსრის საშუალებით. $\bar{R}_A$ რეაქცია მიმართულია ვერტიკალურად. C სახსრის რეაქცია დავშალოთ $\bar{X}_C$ და $\bar{Y}_C$ ორ მდგენელად, ამასთან კმედებისა და უკუქმედების პრინციპის საფუძველზე $\bar{X}_C' = -\bar{X}_C$, $\bar{Y}_C' = -\bar{Y}_C$, სადაც $\bar{X}_C$ და $\bar{Y}_C$ არის კონსტრუქციის CDB ნაწილის C წერტილში მოდებული AC ნაწილის რეაქციები, ხოლო $\bar{X}_C'$ და $\bar{Y}_C'$ - AC ნაწილზე იმავე წერტილში მოდებული CDB ნაწილის რეაქციები.

4. კოორდინატთა სისტემა ავირჩიოთ ისე, როგორც ნაჩვენებია 6.39, ბ ნახაზზე.

5. შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad P \sin \alpha + X_C = 0; \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad R_A - P \cos \alpha + Y_C = 0; \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n M_C(\bar{F}_k) = 0; \quad -R_A \cdot l_1 + P \cdot \frac{AC}{2} = 0. \quad (6)$$

6. ამოვხსნათ მიღებული ექვსი (1)–(6) განტოლება $\bar{R}_A$, $\bar{X}_C$, $\bar{Y}_C$, $\bar{X}_B$, $\bar{Y}_B$, $\bar{M}_B$ ექვსი უცნობით:

$$P \sin \alpha - Q + X_B = 0; \quad (7)$$

$$-P \cos \alpha + R_A - Y_B = 0; \quad (8)$$

$$-P \cdot \frac{AC}{2} + Q \cdot \frac{1}{2}(h_1 + h_2) - M + M_B - Y_B \cdot (l_1 + l_2) = 0; \quad (9)$$

$$P \sin \alpha + X_C = 0; \quad (10)$$

$$R_A - P \cos \alpha + Y_C = 0; \quad (11)$$

$$-R_A \cdot l_1 + P \cdot \frac{AC}{2} = 0. \quad (12)$$

მე-(12) განტოლებიდან:

$$R_A = P \frac{AC}{2l_1} = \frac{P}{2 \cos \alpha}; \quad R_A = 10 \text{ კნ.}$$

მე-(11) განტოლებიდან:

$$Y_C = P \cos \alpha - R_A; \quad Y_C = -2,8 \text{ კნ.}$$

მე-(10) განტოლებიდან:

$$X_C = -P \sin \alpha; \quad X_C = -9,6 \text{ კნ.}$$

მე-(8) განტოლებიდან:

$$Y_B = R_A - P \cos \alpha; \quad Y_B = 2,8 \text{ კნ.}$$

მე-(7) განტოლებიდან:

$$X_B = Q - P \sin \alpha; \quad X_B = 2,4 \text{ კნ.}$$

მე-(9) განტოლებიდან:

$$M_B = P \cdot \frac{AC}{2} - Q \cdot \frac{1}{2}(h_1 + h_2) + M + Y_B \cdot (l_1 + l_2); \quad M_B = 32 \text{ კნ.მ.}$$

პასუხი: $R_A = 10 \text{ კნ.}$; $X_C = -9,6 \text{ კნ.}$; $Y_C = -2,8 \text{ კნ.}$; $X_B = 2,4 \text{ კნ.}$; $Y_B = 2,8 \text{ კნ.}$; $M_B = 32 \text{ კნ.მ.}$

შენიშვნა. მითითებულ ამოცანათა კლასიფიკაცია და ამოცანათა ტიპები არ ამოწურავს რამდენიმე სხეულისაგან შედგენილი სისტემის წონასწორობის შესახებ ამოცანათა ყველა სახეს.

ამოცანების ამოხსნის ნიმუშების გარდა, შეიძლება შეგვხვდეს ამოცანები სამი ან მეტი სხეულისაგან შედგენილი

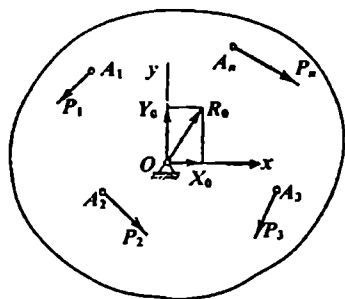
სისტემის წონასწორობაზე. ყველა ასეთი ამოცანის ამოხსნის მეთოდი იგივეა, რაც სისტემის ორი სხეულის დამაკავშირებელი ერთი შიგა ბმის შემთხვევაში.

6.12. ბერკეტი. მდგრადობა გადაყირავებაზე. გადაყირავებაზე მდგრადობის კოეფიციენტი

ბერკეტი ეწოდება მყარ სხეულს, რომელსაც შეუძლია ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო ამ ღერძის მართობი სიბრტყეში მდებარე ძალების მოქმედებით (ნახ. 6.40).

ბერკეტზე მოდებული ძალების მოქმედების სიბრტყისა და ბრუნვის ღერძის გადაკვეთის წერტილს ეწოდება ბერკეტის საყრდენი წერტილი.

როდესაც ბერკეტის $A_1, A_2, \dots, A_n$ წერტილებზე მოდებულია ნახაზის სიბრტყეში მდებარე მოცემული $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ ძალები, ხოლო ბერკეტის ღერძი ამ სიბრტყის მართობია და გადის O წერტილში (ნახ. 6.40), მაშინ O წერტილი იქნება საყრდენი წერტილი.



ნახ. 6.40

ბერკეტის ღერძის $\vec{R}_0$ რეაქცია, რომელიც გაწონასწორებულია მოცემული ძალებით, დევს ამ ძალების მოქმედების სიბრტყეში, მაგრამ მისი მიმართულება უცნობია. დავშალოთ

ის $\vec{X}_0$ და $\vec{Y}_0$ ორ მდგენელებად

და შევადგინოთ ბერკეტის წონასწორობის სამი განტოლება:

$$\sum P_{kx} = 0; \quad X_0 + \sum_{k=1}^n P_{kx} = 0;$$

$$\sum P_{ky} = 0; \quad Y_0 + \sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \quad (6.31)$$

$$\sum M_{Ok} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_{Ok} = 0.$$

აქ $\sum_{k=1}^n P_{kx}$ და $\sum_{k=1}^n P_{ky}$ არის მოცემული ძალების გეგმილთა ჯამი შესაბამისად Ox და Oy ღერძებზე; X_0 და Y_0 - ბერკეტის

რეაქციის ძალის გეგმილება იმავე ღერძებზე: $\sum_{k=1} M_{O_k} - \text{მოცე-}$

მული ძალების მომენტთა ალგებრული ჯამი საყრდენი O წერტილის მიმართ.

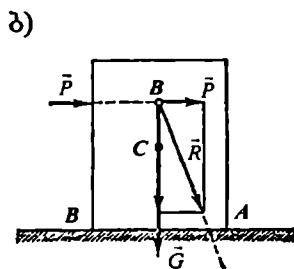
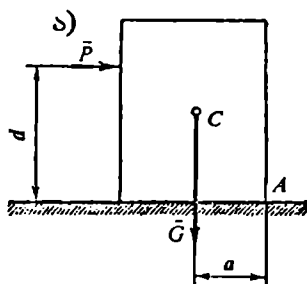
(6.31)-ის მე-3 განტოლება, რომელიც არ შეიცავს ბერკეტის ღერძის რეაქციას, ბერკეტის წონასწორობის პირობაა, რომელსაც ბერკეტის წონასწორობის შემთხვევაში აკმაყოფილებს მოცემული $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n)$ ძალთა სისტემა. ეს პირობა ჩამოყალიბდება ასე:

თუ ბერკეტი წონასწორობაში იმყოფება, მაშინ ბერკეტის საყრდენი წერტილის მიმართ მასზე მოდებული ყველა ძალის სკალარული მომენტის ალგებრული ჯამი ნულის ტოლია:

$$\sum_{k=1}^n M_0(\vec{P}_k) = 0. \quad (6.32)$$

წონასწორობის (6.31)-ის პირველი ორი განტოლებიდან განისაზღვრება ბერკეტის ღერძის $\vec{R}_0$ რეაქციის მოდული და მიმართულება. (6.32) განტოლებიდან, რომელიც სრულდება ბერკეტის წონასწორობის შემთხვევაში, მივიღებთ სხეულების გადაყირაებაზე მდგრადობის პირობას.

განვიხილოთ G წონის მართკუთხა პარალელებიპედი (ნახ. 6.41, ა), რომელზეც ფუძიდან d სიმაღლეზე მოქმედებს ჰორიზონტალური $\vec{P}$ ძალა, რომელსაც შეუძლია არა მარტო დაძრას სხეული, არამედ ფუძის A წიბოს გარშემო შემობრუნებით გადააყირავოს კიდევაც.



ნახ. 6.41

განვიხილოთ $\bar{P}$ ძალის გადაყირავენებაზე მოქმედება, იმ შემთხვევაში, როცა მისი სიდიდე არ არის საკმარისი იმისათვის, რომ დაძრას (დააცუროს) სხეული. ბერკეტის ბრუნვის A ღერძიდან სიმძიმის $\bar{G}$ ძალის მოქმედების ფუძემდებ მანძილი აღვნიშნოთ a -თი.

საყრდენი A წერტილის მიმართ გამოთვალეთ მოცემული $\bar{P}$ და $\bar{G}$ ძალების მომენტების ჯამი:

$$\sum M_A = 0; \quad G \cdot a - P \cdot d = 0 \quad \text{აქედან } G a = P d.$$

$\bar{G}$ და $\bar{P}$ ძალების მომენტების აბსოლუტურ მნიშვნელობებს ეუწოდეთ შესაბამისად დამჭერი და გადაყირავენებელი, ე.ი.

$$M_g = G \cdot a; \quad M_p = P \cdot d.$$

ამ შემთხვევაში სხეულის ზღვრული მდგრადობის მდგომარეობაში

$$M_g = M_p.$$

როცა სხეული იმყოფება მდგრად წონასწორობაში, მაშინ

$$M_g > M_p.$$

ტექნიკაში გადაყირავენებაზე მდგრადობა მიღებულია განისაზღვროს დამჭერი (შემაკავებელი) მომენტისა და გადაყირავენებელი მომენტის სიდიდეთა ფარდობით, ე.ი.

$$K = \frac{M_g}{M_p}, \quad (6.33)$$

სადაც K გადაყირავენებაზე მდგრადობის კოეფიციენტია.

ცხადია, ზღვრული მდგრადობის შემთხვევაში $K=1$, ხოლო მდგრადი წონასწორობის შემთხვევაში – $K>1$.

იმის განსაზღვრისათვის, სხეულზე ძალების მოქმედების შედეგად იგი გადაყირავენდება, თუ შეინარჩუნებს მდგრად წონასწორობას, გამოიყენება გრაფიკული მეთოდი. ამისათვის ვიპოვოთ $\bar{P}$ და $\bar{G}$ ძალების ფუძეთა გადაკვეთის B წერტილი. გადავიტანოთ ეს ძალები თავიანთ ფუძეების გასწვრივ და მოვდოთ B წერტილში. ვიპოვოთ $\bar{P} + \bar{G} = \bar{R}$ ტოლქმედი (ნახ. 6.41, ბ).

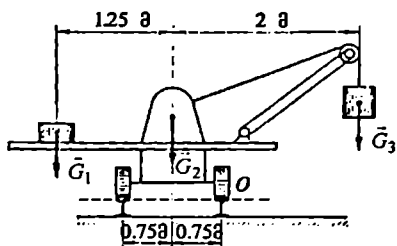
ახლა განვსაზღვროთ $\bar{R}$ ტოლქმედის ფუძის საყრდენ სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილი.

განსახილველ მაგალითში შესაძლოა სამი შემთხვევა:

1. როდესაც გადაკეთვის წერტილი მდებარეობს A წიბოს მარცხნივ, მაშინ სხეული მდგრად მდგომარეობაშია;
2. როდესაც $\bar{R}$ ტოლქმედის ფუძე A წიბოს, მაშინ სხეული ზღვრულ მდგრად მდგომარეობაში იმყოფება;
3. თუ $\bar{R}$ ტოლქმედის ფუძის სიბრტყესთან გადაკეთვის წერტილი A წიბოს მარჯვნივ ძევს, მაშინ სხეული გადაყირავდება.

6.13. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები ბერკეტის წონასწორობაზე

ამოცანა 41. განესაზღვროთ დატვირთული ამწის იმ საპირწონე ტვირთის წონა, რომელიც უზრუნველყოფს გადაყირავებაზე მდგრადობის კოეფიციენტის $K=1,5$ მნიშვნელობას, თუ ამწის წონა $G_2=50$ კნ, ტვირთის წონა $G_3=40$ კნ. ზომები ნაჩვენებია 6.42 ნახაზზე.



ნახ. 6.42

ამოხსნა. G_3 ტვირთის მოქმედებით ამწეს გადაყირავება მოსალოდნელია O ღერძის გარშემო ბრუნვით, რომელიც მარჯვენა ლიანდაგს ემთხვევა. გადაყირავებაზე შემკავებელ ძალებს მიეკუთვნება ამწის $\bar{G}_2$ და საპირწონეს $\bar{G}_1$ წონები. განესაზღვროთ $\bar{G}_3$ გადამყირავებელი ძალის მო-

მენტის აბსოლუტური მნიშვნელობა O ღერძის მიმართ:

$$M_O = G_3 \cdot 1,25 = 50 \text{ კნ.მ.}$$

განესაზღვროთ O ღერძის მიმართ $\bar{G}_1$ და $\bar{G}_2$ დამჭერი ძალების მომემტა ჯამის აბსოლუტური მნიშვნელობა:

$$M_O = G_1 \cdot 2 + G_2 \cdot 0,75 = 2 \cdot G_1 + 50 \cdot 0,75 = 2G_1 + 37,5 \text{ კნ.მ.}$$

ვისარგებლოთ სხეულის გადაყირავებაზე მდგრადობის კოეფიციენტით:

$$K = \frac{M_{\text{გ}}}{M_0},$$

საიდანაც $M_{\text{გ}} = K \cdot M_0$; $2G_1 + 37,5 = 1,5 \cdot 50$; $G_1 = 18,75 \text{ კნ.მ.}$

ამოცანა 42. გადაყირავენაზე მდგრადობის პირობიდან განესაზღვროთ მართკუთხა განიეკეთის ბეტონის კაშხლის a სიგანე, თუ კაშხლის სიმაღლე $h=3,5$ მ, 1 მ^3 ბეტონის წონა $\gamma=22,5$ კნ/მ³, კაშხლის 1 მ სიგრძეზე წყლის წნევა ზედა ბიეფის მხრიდან $P_1=45$ კნ, ქვედა ბიეფის მხრიდან $P_2=11,25$ კნ. $\bar{P}_1$ და $\bar{P}_2$ ძალების მოდების წერტილებიდან კაშხლის ფუძემდე მანძილები $h_1=1$ მ, $h_2=0,5$ მ (ნახ. 6.43).

ამოხსნა. განვიხილოთ ბეტონის კაშხალი, როგორც მართკუთხა პარალელეპიპედი, რომლის ზომებია h , a და 1 მ.

იმის გამო, რომ $P_1 > P_2$ და $h_1 > h_2$, კაშხლის გადაყირავენა მოსალოდნელია O ღერძის გარშემო ბრუნვით.

გადაყირავენის გამომწვევი ძალა არის $\bar{P}_1$, რომელიც ცდილობს O წერტილის გარშემო შემობრუნოს კაშხალი საათის ისრის ბრუნვის თანხედენილად.

გადაყირავენას ეწინააღმდეგება $\bar{G}$ და $\bar{P}_2$ ძალები, რომლებიც O წერტილისადმი მი-

მართულია საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგოდ.

განესაზღვროთ გადამყირავენებელი მომენტი:

$$M_0 = P_1 \cdot h_1 = 45 \cdot 1 = 45 \text{ კნ.მ.}$$

განესაზღვროთ დამჭერი მომენტი:

$$M_{\text{გ}} = G \cdot \frac{a}{2} + P_2 \cdot h_2,$$

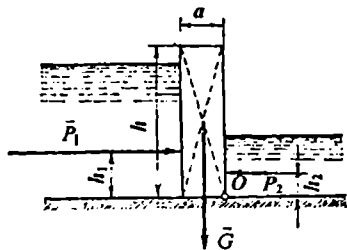
ე.ი. 1 მ სიგრძის კაშხლის წონა განისაზღვრება ფორმულით:

$$G = \gamma \cdot h \cdot a \cdot 1,$$

სადაც $h \cdot a \cdot 1$ — მოცულობაა.

მაშინ

$$M_{\text{გ}} = \gamma \cdot h \cdot a \cdot 1 \cdot \frac{a}{2} + P_2 \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot 22,5 \cdot 3,5 a^2 +$$



ნახ. 6.43

$$+11,25 \cdot 0,5 = (39,4a^2 + 5,6) \text{ კნ.მ.}$$

კაშხლის მინიმალურ სიგანეს შეესაბამება მდგომარეობის კოეფიციენტის $K=1$ მნიშვნელობა. მაშინ გვექნება:

$$K = \frac{M_{\text{დ}}}{M_{\text{ბ}}} = 1 \Rightarrow M_{\text{დ}} = M_{\text{ბ}}, \quad 39,4a^2 + 5,6 = 45 \Rightarrow a = 1 \text{ მ.}$$

ამოცანა 43. წყლის სადაწნევო კოეფიციენტი შედგება $a=6$ მ სიმაღლისა და $d=4$ მ დიამეტრის ცილინდრული ავზისაგან, რომელიც დამაგრებულია სიმეტრიულად განლაგებულ და პორიზონტისადმი დახრილ ოთხ ბოძზე (ნახ. 6. 44,ა), ავზის ფსკერი მიწიდან $h=17$ მ სიმაღლეზეა; კოეფიციენტი $P=8$ ტ; ავზზე მოქმედებს ქარისგან გამოწვეული განაწილებული დატვირთვა, რომელიც მოდებულია ქარის მოძრაობის მიმართულების მართობულ სიბრტყეზე ავზის გვერდის S ფართობზე; ამასთანავე ქარის კუთრი წნევა $q=125$ კგ/მ². განვსაზღვროთ ბოძების ფუძეებს შორის აუცილებელი $AB=x$ მანძილი.

ამოხსნა 1. განვიხილოთ სადაწნევო კოეფიციენტის წონასწორობა (ნახ. 6.44,ბ). რადგან საჭიროა ბოძებს შორის კრიტიკული AB მანძილის განსაზღვრა, კონკრეტულად $AB=x_{\min}$, ამიტომ ჩავთვალოთ, რომ კოეფიციენტი იმყოფება არამდგრადი წონასწორობის მდგომარეობაში, ე.ი. ბოძებს შორის მანძილის მცირედი შემცირებითაც კოეფიციენტი ქარის მოქმედებით გადაყირავდება საათის ისრის ბრუნვის საპირისპირო მიმართულებით A სახსრის გარშემო მობრუნებით. მაშასადამე, არამდგრადი წონასწორობის შემთხვევაში უნდა ჩავთვალოთ, რომ კოეფიციენტი B საყრდენებით მხოლოდ ეხება მიწას, ე.ი. B საყრდენების რეაქცია ამ მომენტში ნულის ტოლია ($R_B=0$).

2. გამოვსახოთ კოეფიციენტი მოქმედი აქტიური ძალები. $\bar{P}$ კოეფიციენტის სიმძიმის ძალა, $\bar{Q}$ - ავზზე მოქმედი ქარის ძალა.

3. სადაწნევო კოეფიციენტი გავათავისუფლოთ ბმებისაგან, რადგან $\bar{R}_B=0$, ამიტომ მთელი წნევა გადავიტანოთ A საყრდენზე, მაშასადამე, გვაქვს ერთი $\bar{R}_A$ რეაქცია. ამრიგად, სადაწნევო კოეფიციენტი წონასწორობაში იმყოფება $\bar{P}$, $\bar{Q}$ და $\bar{R}_A$ სამი ძალის მოქმედებით.

4. შევადგინოთ წონასწორობის მხოლოდ ერთი განტოლება (ბერკეტის წონასწორობის პირობა):

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad M_A(\vec{Q}) + M_A(\vec{P}) + M_A(\vec{R}_A) = 0,$$

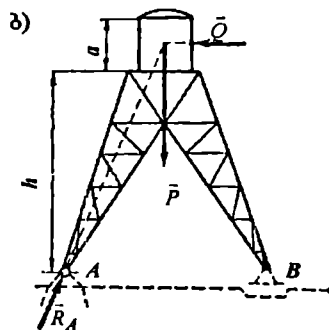
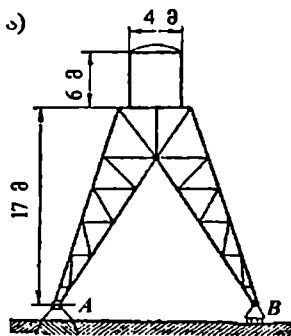
სადაც $M_A(\vec{Q}) = Q\left(h + \frac{a}{2}\right); \quad M_A(\vec{P}) = P \cdot \frac{x}{2}; \quad M_A(\vec{R}_A) = 0;$

მაშასადამე,

$$Q\left(h + \frac{a}{2}\right) - P \cdot \frac{x}{2} = 0; \quad x = \frac{2Q}{P}\left(h + \frac{a}{2}\right),$$

მაგრამ $Q = qS = qad;$

$$x = \frac{2qad}{P}\left(h + \frac{a}{2}\right) = 15 \text{ მ.}$$



ნახ. 6.44

ცხადია, როცა $x \geq 15$ მ, მაშინ დამჭერი მომენტი უფრო დიდი იქნება, ვიდრე გადამყირავებელი მომენტი.

6.14. სავარჯიშო ამოცანები მყარ სხეულზე მოდებული ბრტყელ ძალთა სისტემის წონასწორობაზე

ამოცანა 6.1. განსაზღვრეთ D საყრდენის $\vec{R}_D$ რეაქციის ძალა, თუ ძალები $F_1 = 36\sqrt{2}$ ნ, $F_2 = 8\sqrt{3}$ ნ, ზომები $AB = 1$ მ, $BC = 3$ მ, $CD = 2$ მ (ნახ. 6.45).

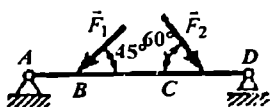
პასუხი: $R_D = 14$ ნ.

ამოცანა 6.2. განსაზღვრეთ წყვილძალის M მომენტი იმ პირობით, რომ B საყრდენის რეაქცია $R_B = 250$ ნ, ამასთან თანაბრად განაწილებული დატვირთვის ინტენსივობა $q = 150$ ნ/მ, ზომები $AC = CB = 2$ მ (ნახ. 6.46).

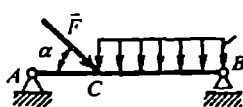
პასუხი: $M = 200$ ნ-მ.

ამოცანა 6.3. AB ძელზე მოქმედებს $q = 3$ ნ/მ ინტენსივობის განაწილებული დატვირთვა და $F = 6$ ნ ძალა. განსაზღვრეთ B საყრდენის $\bar{R}_B$ რეაქცია, თუ $AC = \frac{1}{3} \cdot AB = 2$ მ, კუთხე $\alpha = 30^\circ$ (ნახ. 6.47).

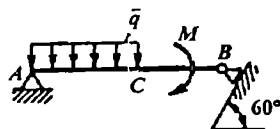
პასუხი: $R_B = 9$ ნ.



ნახ. 6.45



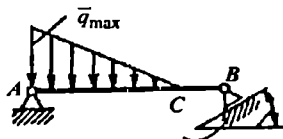
ნახ. 6.46



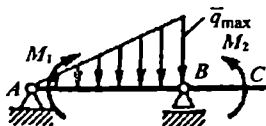
ნახ. 6.47

ამოცანა 6.4. AB ძელზე მოქმედებს განაწილებული დატვირთვა $q_{\max}$ ინტენსივობით. B საყრდენის რეაქცია $R_B = 24\sqrt{3}$ ნ. განსაზღვრეთ $q_{\max}$, თუ ზომები $AB = 8$ მ, $AC = 6$ მ (ნახ. 6.48).

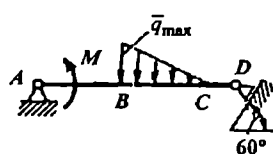
პასუხი: $q_{\max} = 72$ ნ/მ.



ნახ. 6.48



ნახ. 6.49



ნახ. 6.50

ამოცანა 6.5. AC ძელზე, მოქმედებს $q = 3$ ნ-მ ინტენსივობით განაწილებული დატვირთვა და წყვილძალები, რომელთა მომენტებია $M_1 = 2$ ნ-მ და $M_2 = 6$ ნ-მ. განსაზღვრეთ B საყრდენის რეაქცია, თუ სიგრძე $AB = 4$ მ (ნახ. 6.49).

პასუხი: $R_B = 3$ ნ.

ამოცანა 6.6. განსაზღვრეთ D საყრდენის რეაქცია, თუ წყვილძაღის მომენტი $M = 13$ ნ·მ, განაწილებული დატვირთვის ინტენსივობა $q_{\max} = 8$ ნ/მ, ზომები: $AB = BC = 3$ მ, $CD = 1$ მ (ნახ. 6.50).

პასუხი: $R_D = 10$ ნ.

ამოცანა 6.7. AC ძელი ერთი ბოლოთი ჩამაგრებულია C სახსრით, ხოლო მეორე A ბოლოზე მიბმულია ბლოკზე გადაკიდებული AD თოკი და იკავებს მას ჰორიზონტალურ მდგომარეობაში თოკის ბოლოზე მიბმული 1 ტვირთის მეშვეობით. განსაზღვრეთ თანაბრად განაწილებული დატვირთვის q ინტენსივობა, თუ $BC = 5$ მ, $AC = 8$ მ, კუთხე $\alpha = 30^\circ$ და 1 ტვირთის წონა $G = 20$ ნ (ნახ. 6.51).

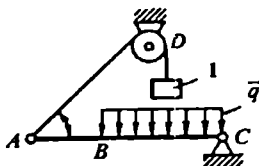
პასუხი: $q = 6,4$ ნ/მ.

ამოცანა 6.8. AB ძელი A ბოლოთი ჩამაგრებულია კედელში და მასზე მოქმედებს $F = 4$ ნ ძალა და წყვილძალა, რომლის მომენტი $M = 2$ ნ·მ. განსაზღვრეთ ჩამაგრებაში რეაქციის M_A მომენტი, $AB = 4$ მ (ნახ. 6.52).

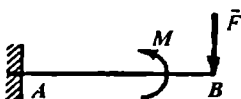
პასუხი: $M_A = 14$ ნ·მ.

ამოცანა 6.9. AB კონსოლურ ძელზე მოქმედებს ორი წყვილძალა, რომელთა მომენტებია: $M_1 = 1790$ ნ·მ და $M_2 = 2135$ ნ·მ. განსაზღვრეთ ჩამაგრებაში რეაქციის M მომენტი (ნახ. 6.53).

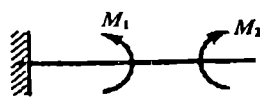
პასუხი: $M = -345$ ნ·მ.



ნახ. 6.51



ნახ. 6.52



ნახ. 6.53

ამოცანა 6.10. AD ძელზე მოქმედებს წყვილძალა, რომლის მომენტი $M = 200$ ნ·მ, $q = 20$ ნ/მ ინტენსივობის განაწილებული დატვირთვა და $\vec{F}$ ძალა. განსაზღვრეთ $\vec{F}$ ძალის სიდიდე, თუ A ჩამაგრებაში რეაქციის მომენტი $M_A = 640$ ნ·მ, ზომები $AB = BC = CD = 2$ მ (ნახ. 6.54).

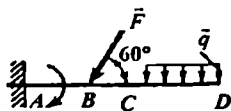
პასუხი: $F = 80\sqrt{3}$.

ამოცანა 6.11. განსაზღვრეთ AC ძელის A -ში ჩამაგრების რეაქციის M_A მომენტი, თუ $F_1 = 50$ ნ, $F_2 = 100\sqrt{3}$ ნ, $AB = BC = 2$ მ (ნახ. 6.55).

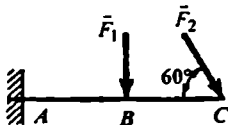
პასუხი: $M_A = 700$ ნ·მ.

ამოცანა 6.12. განსაზღვრეთ A საყრდენის რეაქცია, თუ AB კოჭის სიგრძე $l = 2$ მ, კოჭზე მოქმედებს განაწილებული დატვირთვა $q_{\max} = 30$ ნ/მ ინტენსივობით, კუთხე $\alpha = 60^\circ$ (ნახ. 6.56).

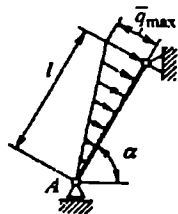
პასუხი: $R_A = 20$ ნ.



ნახ. 6.54



ნახ. 6.55



ნახ. 6.56

ამოცანა 6.13. განსაზღვრეთ AD ძელზე მოქმედი განაწილებული დატვირთვის q ინტენსივობა, თუ ჩამაგრებაში რეაქციის მომენტი $M_A = 52$ ნ·მ, $F = 20\sqrt{3}$ ნ, წყვილძალის მომენტი $M = 42$ ნ·მ, ზომები $AB = CD = 2$ მ, $BC = 1$ მ (ნახ. 6.57).

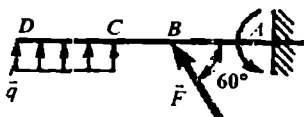
პასუხი: $q = 8$ ნ/მ.

ამოცანა 6.14. განსაზღვრეთ AD ძელზე მოქმედი $\vec{F}$ ძალის სიდიდე იმ პირობით, რომ ჩამაგრებაში რეაქციის მომენტი $M_A = 3700$ ნ·მ, თანაბრად განაწილებული დატვირთვის ინტენსივობა $q = 200$ ნ/მ, ზომები $AB = BC = 2$ მ, $CD = 3$ მ (ნახ. 6.58).

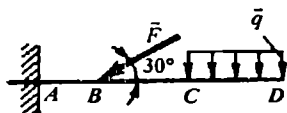
პასუხი: $F = 400$ ნ.

ამოცანა 6.15. ერთგვაროვანი AB კოჭი, რომლის წონა $G=100$ კნ, ჩამაგრებულია A -ში სახსრულად და B ბოლოთი ეყრდნობა ვერტიკალურ გლუვ კედელს. განსაზღვრეთ კოჭის დაწნევა გლუვ კედელზე, თუ კუთხე $\alpha=60^\circ$ (ნახ. 6.59).

პასუხი: $N_B=50\sqrt{3}$ ნ.



ნახ. 6.57



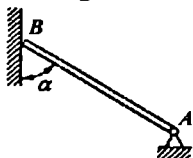
ნახ. 6.58

ამოცანა 6.16. განსაზღვრეთ 1 ტვირთის P წონა, რომელიც საჭიროა AB ერთგვაროვანი ძელის პორიზონტალურ წონასწორობის მდგომარეობაში შესაქავეებლად, თუ ძელის წონა $G=200\sqrt{3}$ ნ (ნახ. 6.60).

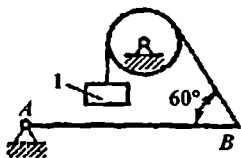
პასუხი: $P=200$ ნ.

ამოცანა 6.17. AD კოჭზე მოქმედებს წვეილძალა $M=100$ ნ-მ მომენტი, განაწილებული დატვირთვის ინტენსივობა $q=20$ ნ/მ და შეეყურსული ძალა $F=20\sqrt{3}$ ნ. განსაზღვრეთ ჩამაგრების M_A მომენტი, თუ ზომები $AB=BC=CD=2$ მ (ნახ. 6.61).

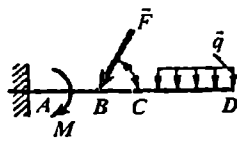
პასუხი: $M_A=360$ ნ-მ.



ნახ. 6.59



ნახ. 6.60



ნახ. 6.61

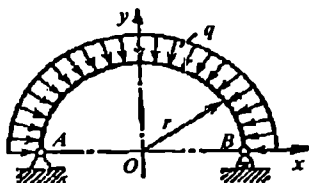
ამოცანა 6.18. $r=2$ მ რადიუსის წრიული AB უწონო კოჭზე მოქმედებს თანაბრად განაწილებული რადიალური დატვირთვა. განსაზღვროთ ამ დატვირთვის q ინტენსივობა, თუ A საყრდენის რეაქცია $R_A=200$ ნ (ნახ. 6.62).

პასუხი: $q=100$ 100 ნ/მ.

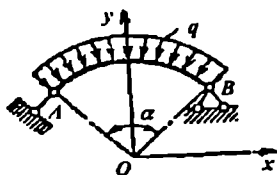
ამოცანა 6.19. წრიული რკალის ფორმის მქონე AB კოჭზე მოქმედებს თანაბრად განაწილებული რადიალური დატვირთვა

$q=2$ ნ/მ ინტენსივობით. განსაზღვრეთ A და B საყრდენთა რეაქციები (ნახ. 6.63).

პასუხი: $R_A=R_B=2$ ნ.



ნახ. 6.62



ნახ. 6.63

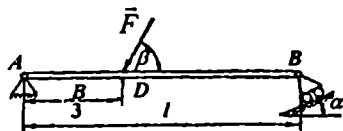
ამოცანა 6.20. $P=200$ კგ წონის ერთგვაროვანი AB კოჭი A წერტილში უძრავი სახსრითაა ჩამაგრებული, ხოლო მეორე ბოლოთი საგორავებით ეყრდნობა პორიზონტისადმი $\alpha=30^\circ$ კუთხით დახრილ სიბრტყეს (ნახ. 6.64). კოჭის D წერტილში მოდებულია $F=100$ კგ ძალა, რომელიც კოჭთან ადგენს $\beta=60^\circ$ კუთხეს. განსაზღვრეთ A და B საყრდენთა რეაქციები.

პასუხი: $X_A=124$ კგ; $Y_A=158$ კგ; $R_B=149$ კნ.

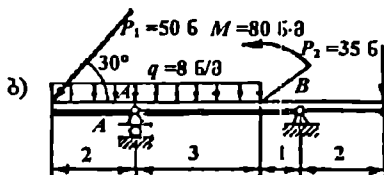
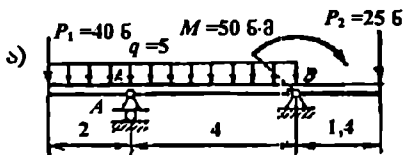
ამოცანა. 6.21, ა, ბ. ორკონსოლიანი კოჭი A წერტილს ეყრდნობა საგორავებით, ხოლო B-ში ჩამაგრებულია უძრავ-სახსროვანი საყრდენით (ნახ. 65). განსაზღვრეთ საყრდენთა რეაქციები (დატვირთვები და ზომები ნახევრებია ნახაზზე).

პასუხი: ა) $R_A=61,25$ კნ; $R_B=33,75$ კნ;

ბ) $R_A=95$ კნ; $X_B=32,1$ კნ; $Y_B=18,4$ კნ.



ნახ. 6.64



ნახ. 6.65 ა, ბ

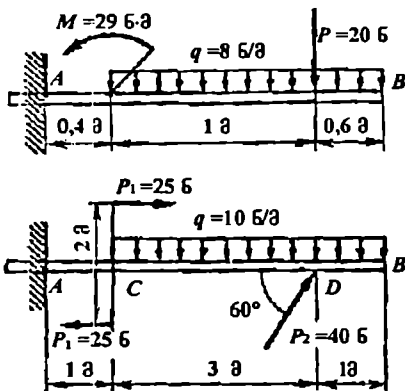
ამოცანა 6.22. ა, ბ. კონსოლური AB კოჭი მარცხენა ბოლოთი ჩატყედილია ვერტიკალურ კედელში (ნახ. 6.66 ა, ბ). დატვირთვები და ზომები ნაჩვენებია 6.66 ა,ბ ნახაზებზე. განსაზღვრეთ ჩამაგრების სრული რეაქცია და რეაქციული მომენტი.

პასუხი: ა) $R_A=32.8$ ნ; $(\vec{R}_A, \vec{A}_B)=90^\circ$; $M_A=18,4$ ნ.მ.

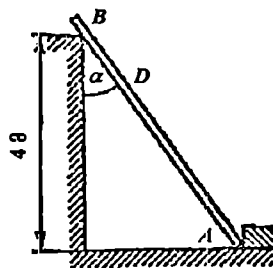
ბ) $R_A=\sqrt{X_A^2+Y_A^2}=20,7$ ნ; $(\vec{R}_A, \vec{A}_B)=164^\circ 20'$; $M_A=31,6$ კნ.

ამოცანა 6.23. $G=400$ ნ წონის ერთგვაროვანი $AB=5$ მ სიგრძის ძელი A ბოლოთი ეყრდნობა გლუვ ჰორიზონტალურ იატაკს და გლუვ ვერტიკალურ საფეხურს, ხოლო D წერტილში – ვერტიკალურ კედელს, რომელთანაც ადგენს $\alpha=30^\circ$ კუთხეს (ნახ. 6.67). განსაზღვრეთ A და D საყრდენთა რეაქციები.

პასუხი: $R_0 \approx 108$ ნ; $X_A=93,4$ ნ; $Y_A=346$ ნ.



ნახ. 6.66 ა, ბ



ნახ. 6.67

ამოცანა 6.24. $P=600$ ნ წონისა და $\ell=4$ მ სიგრძის ერთგვაროვანი კოჭი ერთი ბოლოთი ეყრდნობა გლუვ იატაკს, შუალედური B წერტილით კი – $H=3$ მ სიმაღლის ვერტიკალურ კედელს, რომელთანაც 30° -იან კუთხეს ადგენს. ასეთ მდგომარეობაში

რეობაში კოჭი დაკავებულია იატაკზე გაჭიმული თოკის მეშვეობით. განსაზღვრეთ თოკის T დაჭიმულობა და კედლის R_B და იატაკის R_C რეაქციები (ნახ. 6.68).

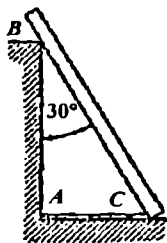
პასუხი: $T=150$ ნ; $R_B=173$ ნ; $R_C=513$ ნ.

ამოცანა 6.25. $P=200$ ნ წონის ერთგვაროვანი AB კოჭი 60° -იანი კუთხით ეყრდნობა გლუვ იატაკს B წერტილში და ამის გარდა დაკავებულია ორი C და D საყრდენით. განსაზღვრეთ საყრდენთა რეაქციები B , C და D წერტილებში, თუ $AB=3$ მ, $CB=0,5$ მ, $BD=1$ მ (ნახ. 6.69).

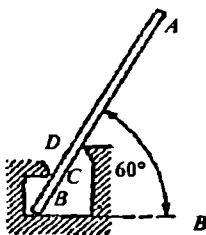
პასუხი: $R_B=200$ ნ; $R_C=300$ ნ; $R_D=300$ ნ.

ამოცანა 6.26. ერთგვაროვანი AB კიბე მიუდებელია გლუვ კედელზე პორიზონტთან 45° -იანი კუთხით. კიბის წონა $P=2006$. ქვედა ბოლოდან კიბის სიგრძის $\frac{1}{3}$ მანძილზე D წერტილში დგას $G=600$ ნ წონის ადამიანი (ნახ. 6.70). იპოვეთ კიბის წნევა A საყრდენსა და B კედელზე.

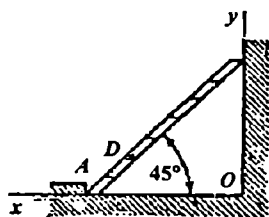
პასუხი: $X_A=300$ ნ; $Y_A=-800$ ნ; $X_B=-300$ ნ.



ნახ. 6.68



ნახ. 6.69



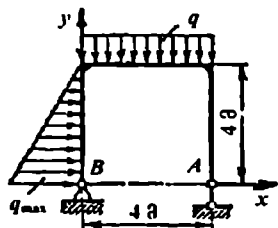
ნახ. 6.70

ამოცანა 6.27. ჩარჩოზე მოქმედებს თანაბრად განაწილებული დატვირთვა $q=2$ კნ/მ ინტენსივობით და სამკუთხედის წესით განაწილებული დატვირთვა $q_{\max}=3$ კნ/მ ინტენსივობით. განსაზღვრეთ A და B საყრდენთა რეაქციები (ნახ. 6.71).

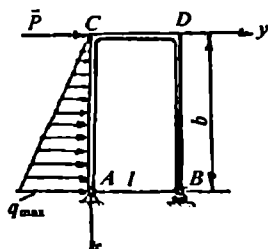
პასუხი: $R_A=6$ კნ; $X_B=-6$ კნ; $Y_B=2$ კნ.

ამოცანა 6.28. განსაზღვრეთ ACDB წარმოს A და B საყრდენთა რეაქციები, რომლებიც აღიძვრება ჰორიზონტალური $P=2$ კნ ძალისა და სამკუთხედის წესით განაწილებული $q_{\max}=0.2$ კნ/მ დატვირთვის მოქმედებით, თუ $b=3$ მ, $\ell=1.5$ მ (ნახ. 6.72).

პასუხი: $X_A=4.2$ კნ; $X_B=-4.2$ კნ; $Y_A=-2.3$ კნ.



ნახ. 6.71

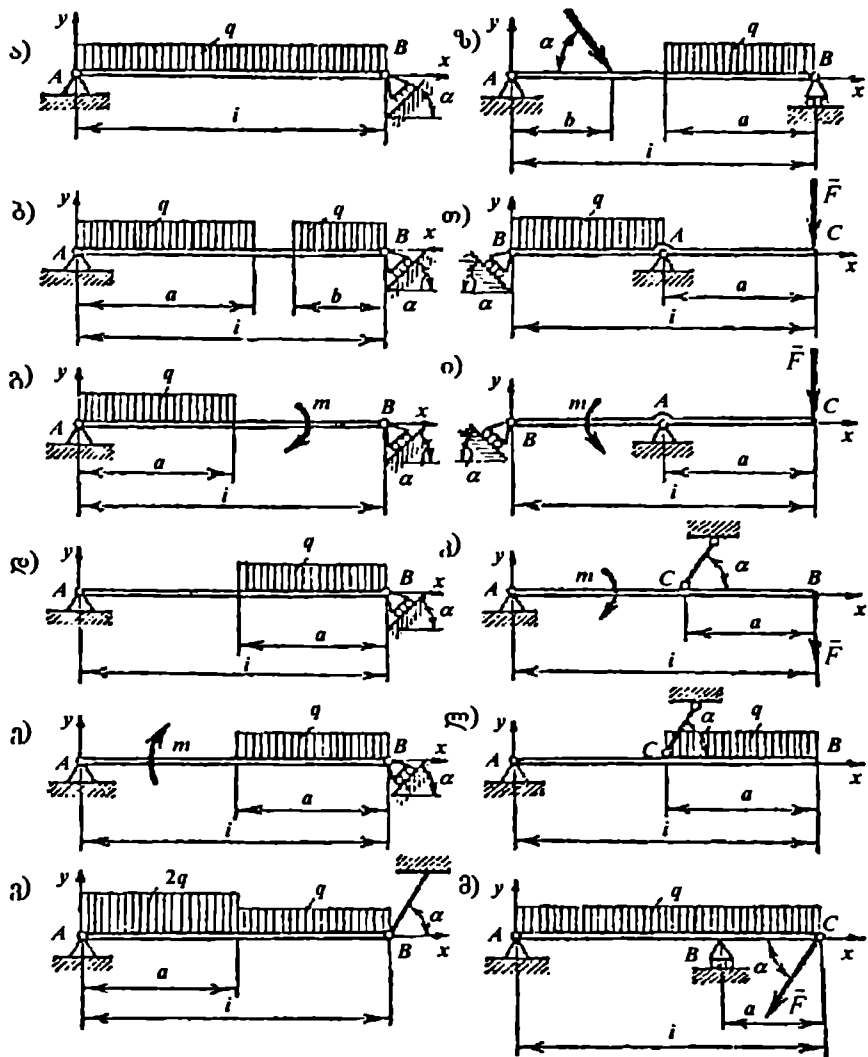


ნახ. 6.72

ამოცანა 6.29. სქემებზე ნაჩვენებია კოჭები, მათზე მოდებული დატვირთვებით, ზომებით და მათზე დადებული ბრუნებით. განსაზღვრეთ საყრდენთა რეაქციები. კოჭების წონა მხედველობაში არ მიიღოთ. რიცხვითი მონაცემები აიღეთ 6.1 ცხრილიდან.

ცხრილი 6.1

ამოცანა № 629	სქემა	ℓ , მ	a , მ	b , მ	q , კნ/მ	F , კნ	α , გრად	m , კნ.მ
ნახ. 6.73	ა	4	-	-	2	-	30	-
	ბ	4	2	1	2	-	60	-
	გ	4	2	-	2	-	30	2
	დ	4	2	-	2	-	45	-
	ე	3	2	-	2	-	30	3
	ვ	3	1	-	2	-	45	-
	ზ	3	1	1	2	4	60	-
	თ	2	1	-	3	1	30	-
	ი	3	1	-	-	4	60	6
	კ	4	2	-	-	4	45	1
	ლ	5	2	-	2	-	60	-
	მ	4	1	-	2	2	60	-



6аб. 6.73

პასუხები:

ამოცანა №	სქემა	X_A , კნ	Y_A , კნ	R_B , კნ	T , კნ
6.73	ა	2,31	4,00	4,62	-
	ბ	4,76	3,25	5,50	-
	გ	0,86	2,50	1,73	-
	დ	3,00	1,00	4,24	-
	ე	0,33	2,12	4,24	-
	ვ	-3,33	4,67	-	4,71
	ზ	-2,00	2,64	2,82	-
	თ	-0,29	3,50	0,58	-
	ი	-1,73	3,00	2,00	-
	კ	-8,50	-4,50	-	12,02
	ლ	-3,08	-1,33	-	6,16
	მ	1,00	2,09	7,64	-

6.15. რამდენიმე მყარი სხეულისაგან შედგენილი სისტემის წონასწორობაზე სავარჯიშო ამოცანები

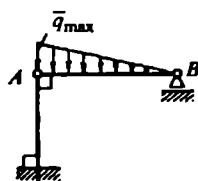
ამოცანა 6.30. AB კოჭზე მოქმედებს სამკუთხედის წესით განაწილებული დატვირთვა $q_{\max}=3$ კნ/მ ინტენსივობით. განსაზღვრეთ B საყრდენის რეაქცია, თუ $AB=2$ მ (ნახ. 6.74).

პასუხი: $R_B=1$ კნ.

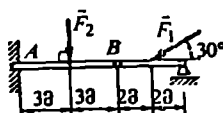
ამოცანა 6.31. ორი ღერო ერთმანეთთან B სახსრითაა შეერთებული (ნახ. 6.75). განსაზღვრეთ A ჩამაგრებაში მომენტი, თუ ძალები $F_1=60$ ნ; $F_2=50$ ნ.

პასუხი: $M_A=240$ ნ.მ.

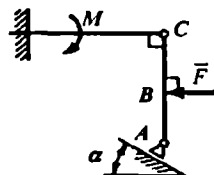
ამოცანა 6.32. განსაზღვრეთ A საყრდენის რეაქცია კნ-ში, თუ ძალა $F=3$ ნ, $\alpha=30^\circ$, ზომები $AB=BC$ (ნახ. 6.76).



ნახ. 6.74



ნახ. 6.75



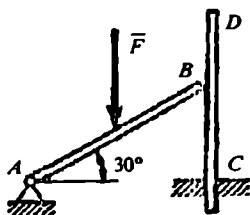
ნახ. 6.76

ამოცანა 6.33. AB ღერო თავისუფლად ეყრდნობა ვერტიკალურ CD ღეროს, რომლის ერთი ბოლო ჩაჭედილია საძირკველში. AB ღეროს შუა წერტილში მოდებულია $F=2$ კნ ძალა. განსაზღვრეთ B წერტილში რეაქციის ძალა კნ-ში (ნახ. 6.77).

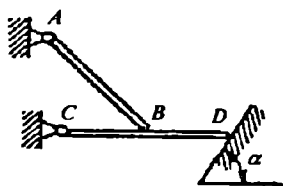
პასუხი: $R_B=1,73$ კნ.

ამოცანა 6.34. $P=200$ ნ წონის ერთგვაროვანი AB კოჭი თავისუფლად ეყრდნობა B წერტილში პორიზონტალურ CD კოჭს. განსაზღვრეთ რეაქციის ძალა D წერტილში, თუ $CB=BD$, კუთხე $\alpha=60^\circ$. CD კოჭის წონა უგულებელყავით (ნახ. 6.78).

პასუხი: $R_D=100$ ნ.



ნახ. 6.77



ნახ. 6.78

ამოცანა 6.35. ურთიერთპერპენდიკულარული AB და CD ღეროები ერთმანეთთან C სახსრით არის შეერთებული (ნახ. 7.79). ღეროებზე მოდებულია Q-ს ტოლი სამი ძალა. ღეროების წონა უგულებელყავით და განსაზღვრეთ უძრავსახსროვან A და D საყრდენთა რეაქციები.

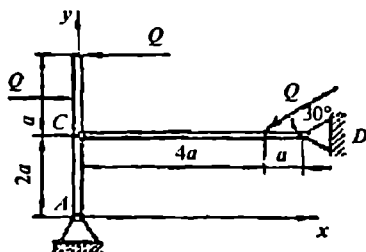
პასუხი: $X_A=-25$ ნ; $Y_A=5$ ნ; $X_D=25(1+\sqrt{3})$ ნ; $Y_D=20$ ნ.

ამოცანა 6.36. AB და AC ღეროები C სახსარში მართი კუთხით არის შეერთებული (ნახ. 6.80) მათზე მოქმედებს $(\vec{P}, \vec{P}')$ (წყვილძალა, რომლის მდგენელი $P=2$ კნ და $Q=3$ კნ. უგულებელყავით ღეროების წონა და განვსაზღვროთ B და C საყრდენთა და A სახსრის რეაქციები.

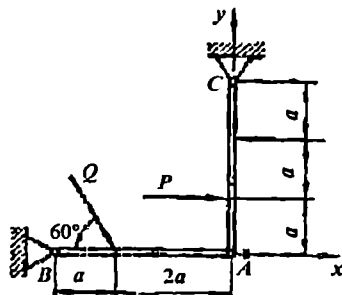
პასუხი: $X_B=-2,17$ კნ; $X_C=0,67$ კნ; $X_A=\pm 0,67$ კნ; $Y_B=1,72$ კნ, $Y_C=0,87$ კნ; $Y_A=\pm 0,87$ კნ.

ამოცანა 6.37. $P=60$ კნ წონის თხელკედლიანი ერთგვაროვანი მილი, რომლის რადიუსია $r=2,5$ მ, ეყრდნობა ვერტიკალურ კედელსა და $G=15$ კნ წონის ერთგვაროვან ჰორიზონტალურ AE კოჭს, რომელიც A საყრდენთან მიმაგრებულია სახსრით და ეყრდნობა გლუვ B საყრდენს. (ნახ. 6.81). კოჭზე მოდებულია თანაბრად განაწილებული დატვირთვა $q=7$ კნ/მ ინტენსივობით. $AB=6$ მ, $BE=2$ მ, $\ell=4$ მ. განსაზღვრეთ საყრდენთა რეაქციები.

პასუხი: $X_A=45$ კნ; $Y_A=6$ კნ; $R_B=111$ კნ; $R_D=45$ კნ.



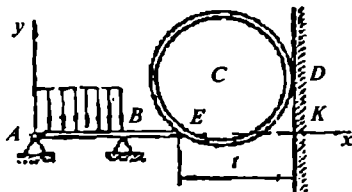
ნახ. 6.79



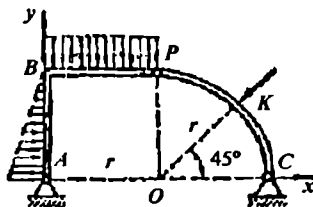
ნახ. 6.80

ამოცანა 6.38. ABDC სამსახსრიანი თაღის BD მონაკვეთზე მოდებულია თანაბრად განაწილებული დატვირთვა $q=0,83$ კნ/მ ინტენსივობით, ხოლო AB მონაკვეთზე მოქმედებს წრფივი კანონით განაწილებული დატვირთვა $q_{\max}=1,2$ კნ/მ ინტენსივობით. ძალა $F=2$ კნ, $OA=OD=OC=r=5$ მ, $\angle KOC=45^\circ$ უგულებელყავით თაღის წონა, განსაზღვრეთ A და C საყრდენთა რეაქციები (ნახ. 6.82).

პასუხი: $X_A=-0,79$ კნ; $Y_A=0,21$ კნ; $X_C=-0,79$ კნ; $Y_C=2,21$ კნ.



ნახ. 6.81



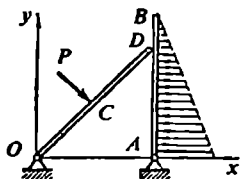
ნახ. 6.82

ამოცანა 6.39. ვერტიკალურ AB კოჭზე მოქმედებს სამკუთხედის წესით განაწილებული დატვირთვა $q_{\max}=3$ კნ/მ ინტენსივობით, ხოლო დახრილ OD კოჭზე მის მართობულად მოდებულია $P=15$ კნ ძალა. OD კოჭი ორივე ბოლოთი სახსრებითაა მიმაგრებული (ნახ. 6.83). უგულებელყავით კოჭების წონა და განსაზღვრეთ O და A საყრდენათა რეაქციები, თუ $OC=CD=5$ მ, $AB=12$ მ, $AD=8$ მ.

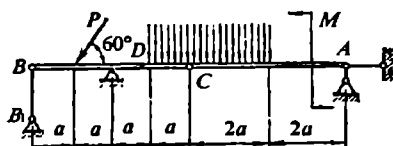
პასუხი: $X_O=-3$ კნ; $Y_O=8,5$ კნ; $X_A=9$ კნ; $Y_A=0,5$ კნ.

ამოცანა 6.40. შედგენილ AB კოჭზე მოდებულია $P=20$ კნ ძალა, წყვილძალა $M=30$ კნ.მ მომენტით და თანაბრად განაწილებული დატვირთვა $q=2$ კნ/მ ინტენსივობით (ნახ. 6.84), $a=3$ მ, C წერტილში კოჭის ნაწილები სახსრით არის გადამბმული. უგულებელყავით კონსტრუქციის წონა და განსაზღვრეთ უძრავსახსროვანი A საყრდენის რეაქცია, BB_1 ღეროსა და გლუვი D საყრდენის რეაქციები, რომელზეც თავისუფლად ეყრდნობა კოჭი.

პასუხი: $X_A=10$ კნ; $Y_A=0,5$ კნ; $Y_D=42,2$ კნ; $Y_B=-7,34$ კნ.



ნახ. 6.83



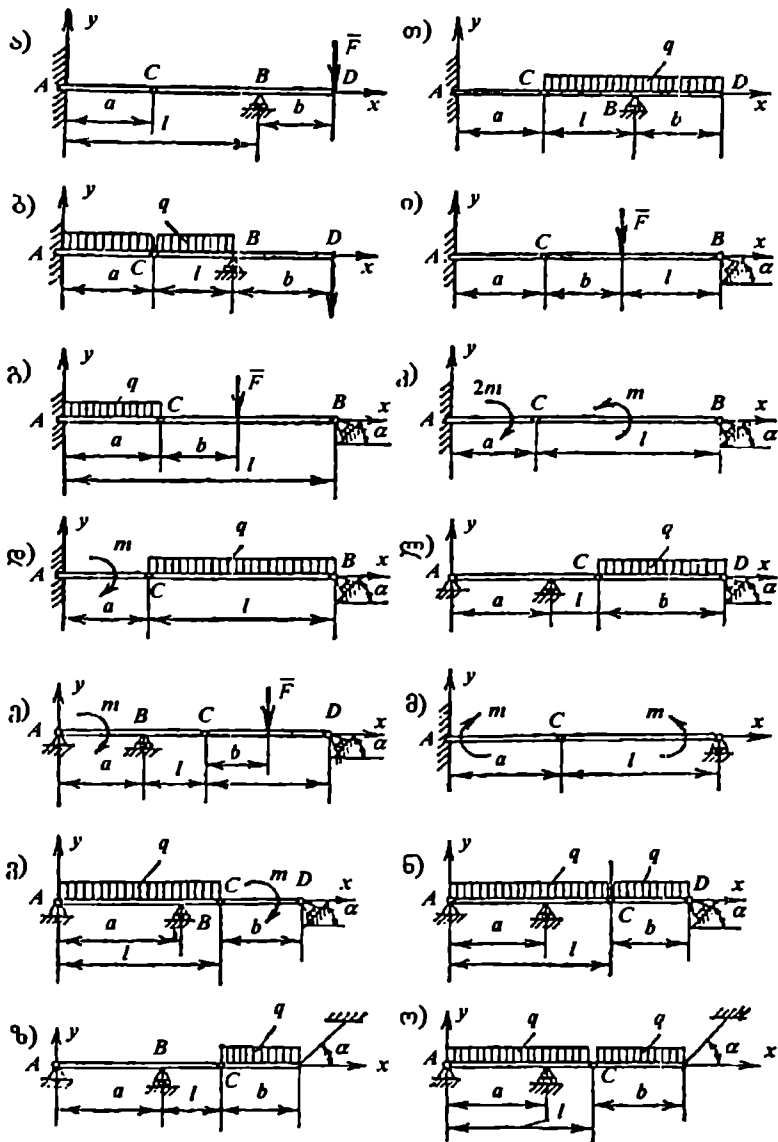
ნახ. 6.84

ამოცანა 6.41. (1-14). განსაზღვრეთ კოჭის A და B საყრდენთა რეაქციები, აგრეთვე შუალედური C სახსრის რეაქცია (ნახ. 6.85). კოჭების წონა უგულებელყავით (მონაცემები იხ. 6.2 ცხრილში).

№	სკემა	ℓ, მ	a, მ	b, მ	c, მ	q, კნ.მ	m, კნ.მ	α, გრად	F, კნ
1	ა	2	1	1	—	—	—	—	3
2	ბ	2	2	1	—	0,5	—	—	—
3	გ	2	1	1	—	1	—	—	2
4	დ	1	2	1	—	—	—	30	2
5	ე	6	2	1	—	1	—	45	2
6	ვ	2	2	—	—	—	2	30	—
7	ზ	6	3	—	—	2	4	30	—
8	თ	6	2	2	—	0,5	—	30	—
9	ი	6	2	1	2	—	2	45	3
10	კ	4	2	—	—	—	3	—	—
11	ლ	6	2	2	—	0,5	2	60	—
12	მ	6	2	2	—	1	—	45	—
13	ნ	6	2	2	—	1	—	45	—
14	ო	6	2	1	—	1	—	30	—

პასუხები:

№	X _A , კნ	Y _A , კნ	X _C , კნ	m _A , კნ.მ	Y _C , კნ	X _B , კნ	R _D , კნ	T, კნ
1	0,00	-3,00	-3,00	0,00	±3,00	6,00	—	—
2	0,00	0,37	0,75	0,00	±0,37	1,12	—	—
3	0,00	1,00	0,50	0,00	0,00	4,00	—	—
4	0,58	1,00	2,00	±0,58	±1,00	1,15	—	—
5	0,50	3,50	5,00	±0,50	±1,50	0,71	—	—
6	-0,58	1,00	6,00	±0,58	±1,00	-1,16	—	—
7	3,46	6,00	22,00	±0,47	±6,00	6,93	—	—
8	0,29	-1,50	—	0,29	±0,50	2,00	0,58	—
9	1,50	-5,50	—	±1,50	±1,50	7,00	2,12	—
10	0,00	0,75	4,50	0,00	±0,75	-0,75	—	—
11	1,73	0,50	—	±1,73	±1,00	1,50	2,00	—
12	1,00	-5,00	—	±1,00	±1,00	12,00	1,41	—
13	-1,00	-3,00	—	±1,00	±1,00	4,00	—	1,41
14	-0,87	-4,00	—	±0,87	±0,50	10,50	—	1,00



Заб. 6.85

6.16. ბრტყელი წამწის (ფერმის) გაანგარიშება

ბრტყელი წამწე (ფერმა) გეომეტრიული არაცვლადი სისტემაა, რომელიც მდებარეობს ერთ სიბრტყეზე და შედგება ერთმანეთთან სახსრების საშუალებით დაკავშირებული მყარი ღეროების ერთობლიობისაგან. წამწის კვანძები ეწოდება სახსრებს, სადაც თავს იყრის წამწის ღეროები.

მარტივი ბრტყელი წამწე ეწოდება კონსტრუქციას, რომელიც შედგება სამი ღეროსგან შექმნილი სამკუთხედებისაგან.

მარტივ ბრტყელ წამწეში ღეროების რაოდენობა წამწის კვანძების რაოდენობასთან დაკავშირებულია შემდეგი თანადრობით:

$$S = 2n - 3, \quad (6.34)$$

სადაც S – ღეროების რაოდენობაა; n – კვანძების რაოდენობა.

მარტივი წამწე სტატიკურად რკვევადია, რადგან წონასწორობის დამოუკიდებელი განტოლებების რაოდენობა საძიებელი უცნობი სიდიდეების რაოდენობის ტოლია. უცნობი სიდიდეებია საყრდენი რეაქციები და წამწის ღეროებში აღძრული ძალები.

წამწეს გაანგარიშება მდგომარეობს საყრდენი რეაქციებისა და ღეროებში აღძრული ძალების განსაზღვრაში, რომლებიც წარმოიქმნება მოცემული დატვირთვის მოქმედების შედეგად. ამავდროულად, იგულისხმება, რომ:

1. გარე აქტიური ძალები მოდებულია მხოლოდ წამწის კვანძებში;

2. ღეროების წონა უგულებელყოფილია;

3. კვანძები აროს იდეალური სახსრები (ხახუნის ძალა მხედველობაში არ მიიღება).

წამწის გაანგარიშებას იწყებენ საყრდენი რეაქციის განსაზღვრით, შემდეგ კი განსაზღვრავენ ძალებს წამწის ღეროებში. გაანგარიშებისას იყენებენ:

ა) კვანძთა ამოკვეთის ხერხს;

ბ) განკვეთის ხერხს (რიტერის ხერხი).

კვანძთა ამოკვეთის ხერხი. ამოკვეთენ წამწის კვანძს, მოსდებენ შესაბამის გარე ძალას და ღეროების რეაქციას,

რომლებიც ქმნიან თავმოყრილი ძალების ბრტყელ სისტემას. თითოეული კვანძისთვის შეადგენენ წონასწორობის ორ განტოლებას შერჩეულ კოორდინატა ღერძებზე ძალების დაგეგმილებით. გამოთვლების გამარტივების მიზნით კვანძების ამოკვეთის თანმიმდევრობა ნაკარნახებია იმ პირობით, რომ უცნობი ძალების რიცხვი თითოეულ კვანძში არ აღემატებოდეს ორს.

ამ მეთოდით მოხერხებულია ვისარგებლოთ მაშინ, როცა საჭიროა ძალების პოვნა წამწის (ფერმის) ყველა ღეროში.

გაანგარიშების დაწყების მომენტისათვის ჩვენთვის უცნობია, რომელი ღეროა გაჭიმული, ხოლო რომელი – შეკუმშული. ამიტომ პირობითად ჩავთვალოთ, რომ ყველა ღერო გაჭიმულია. ეს იმას ნიშნავს, რომ ყველა ღეროს რეაქცია მიმართულია კვანძიდან. თუ ანგარიშის შედეგად რომელიმე ღეროში ძალების მნიშვნელობა უარყოფითი იქნება, ეს იმის მანკვენებელია, რომ აღებული ღერო გაჭიმული კი არა, შეკუმშულია.

წამწის ცალკეულ ღეროებში ძალები შეიძლება ნულის ტოლი იყოს. ასეთ ღეროებს მიღებულია, ეუწოდოთ ნულოვანი. ისინი შეიძლება განისაზღვროს ფერმის გაანგარიშების შესრულების გარეშე. მართლაც, კვანძების წონასწორობის განტოლებებიდან გამომდინარეობს შემდეგი:

1. თუ წამწის (ფერმის) კვანძში თავს იყრის ორი ღერო და კვანძზე არ მოქმედებს გარე დატვირთვა, მაშინ ეს ღეროები ნულოვანია;

2. თუ დაუტვირთავ კვანძში თავს იყრის სამი ღერო, რომელთაგან ორი მიმართულია ერთი წრფის გასწვრივ, მაშინ მესამე ღერო ნულოვანია;

3. თუ ბრტყელი ფერმის კვანძში თავმოყრილია ორი ღერო, მოდებულია გარე ძალა, რომელიც მიმართულია ერთ-ერთი ღეროს გასწვრივ, მაშინ ამ ღეროს ძალვა გარე ძალის მოდულის ტოლია, ხოლო მეორე ღერო ნულოვანია.

განკვეთის ხერხი (რიტერის ხერხი). შესაძლებელია ნებისმიერ ღეროში ვიპოვოთ ძალვა სხვა ღეროებში ძალები-საგან დამოუკიდებლად. ეს ხერხი ასეთია: წამწე წარმოდგენით გავყოთ ორ ნაწილად. განკვეთა ისე ტარდება, რომ გადაიკვეთოს არაუმეტეს სამი ღერო. განიხილება ნებისმიერი

ნაწილის წონასწორობა საყრდენთა რეაქციებისა და გაკვეთილ ღეროებში ძალების გათვალისწინებით. ძალებს მიმართავენ გადაკვეთიდან გარეთ იმ დაშვებით, რომ ღეროები დაჭიმულია.

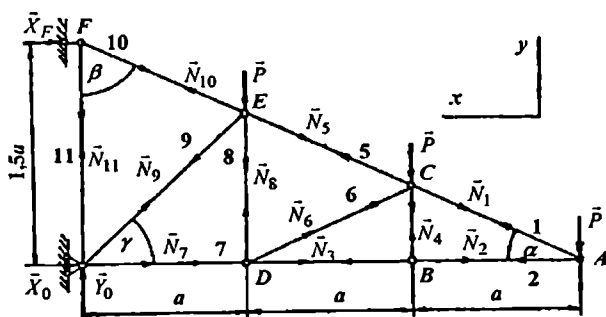
წონასწორობის განტოლებას ისე შეადგენენ, რომ ის შეიცავდეს მხოლოდ ერთ უცნობ ძალეას.

ეს არის ან ძალთა მომენტების ჯამი რიტერის წერტილების მიმართ, ან ძალთა გეგმილების ჯამი ღერძზე.

გადაკვეთილი სამი ღეროდან ნებისმიერისთვის რიტერის წერტილი ეწოდება იმ წერტილს, რომელშიც გადაიკვეთება დანარჩენი ორი ღეროს ძალები.

6.17. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები ბრტყელი წამწის ღეროებში ძალების განსაზღვრაზე

ამოცანა 44. განესაზღვროთ ძალები 6.86 ნახაზზე გამოსახული კონსოლური წამწის (ფერმის) ღეროებში, როცა $P=20$ კნ; $a=2$ მ.



ნახ. 6.86

ამოხსნა. ამ წამწეში კევანძთა რიცხვი $n=7$, ხოლო ღეროთა რიცხვი $S=11$. მაშასადამე, (6.34) ტოლობა სრულდება და წამწე არის ხისტი ზედმეტი ღეროების გარეშე.

წამწე გავათავისუფლოთ ბმებისგან, ბმები შევცვალოთ რეაქციებით. O უძრავსახსროვანი საყრდენის $\bar{R}_0$ რეაქცია

დაეშალოთ $\bar{X}_0$ და $\bar{Y}_0$ მდგენელებად/ F საყრდენში გვექნება $\bar{X}_F$ რეაქცია. შევადგინოთ მდგენელი ფერმისთვის წონასწორობის განტოლებები და განესაზღვროთ საყრდენთა რეაქციები:

$$\Sigma F_{kx}=0; -X_F-X_0=0, \quad (1)$$

$$\Sigma F_{ky}=0; Y_0-3P=0, \quad (2)$$

$$\Sigma M_Z=0; X_0 \cdot 1,5a - P \cdot a - P \cdot 2a - P \cdot 3a = 0. \quad (3)$$

$$(3) \text{ განტოლებიდან } X_0 = \frac{6P}{1,5} = 80 \text{ კნ;}$$

$$(2) \text{ განტოლებიდან } Y_0 = 3P = 60 \text{ კნ;}$$

$$(1) \text{ განტოლებიდან } X_F = -X_0 = -80 \text{ კნ.}$$

ახლა გადავიდეთ ღეროებში ძალების განსაზღვრაზე. კევანძები გადაენომროთ A, B, C, ... ასოებით, ხოლო ღეროები არაბული ციფრებით. საძიებელი ძალები აღვნიშნოთ $\bar{N}_1$ (1 ღეროში), $\bar{N}_2$ (2 ღეროში) და ა.შ.

პირველად ამოვჭრათ A კევანძი, რომელშიც თავს იყრის ორი ღერო. ჩავთვალოთ, რომ ორივე ღერო იჭიმება, ე.ი. მიემართოთ ძალები კევანძიდან. შევადგინოთ თავმოყრილ ბრტყელ ძალა სისტემის წონასწორობის ორი განტოლება:

$$\Sigma F_{kx}=0; N_2 + N_1 \cos \alpha = 0, \quad (4)$$

$$\Sigma F_{ky}=0; -P + N_1 \sin \alpha = 0. \quad (5)$$

6.86 ნახაზიდან განესაზღვროთ α , β და γ კუთხეები. გვექნება:

$$\tan \alpha = \frac{15a}{3a} = 0,5, \quad \sin \alpha = 0,4472, \quad \cos \alpha = 0,8944, \quad \sin \beta = 0,8944,$$

$$\cos \beta = 0,4472, \text{ საიდანაც } \alpha = 26^\circ 34', \quad \beta = 90^\circ - \alpha = 63^\circ 26', \quad \gamma = 90^\circ,$$

$$(5) \text{ განტოლებიდან } N_1 = \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{20}{0,4472} = 44,723 \text{ კნ.}$$

$$(4) \text{ განტოლებიდან } N_2 = -N_1 \cdot \cos \alpha = -44,72 \cdot 0,8944 \approx -40 \text{ კნ.}$$

თუ $N_2 < 0$ ეს იმას ნიშნავს, რომ აღნიშნული ღერო გაჭიმული კი არა, შეკუმშულია.

შემდეგ ამოსატრელად შეიძლება ავირჩიოთ B კევანძი, რადგან აქ თავს იყრის სამი ძალა, რომელთაგანაც ერთი უკვე ცნობილია. შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$\Sigma F_{kx}=0; -N_2+N_3=0, \Rightarrow N_3=N_2=-40 \text{ კნ.}$$

$$\Sigma F_{ky}=0; -N_4=0, \Rightarrow N_4=0.$$

მაშასადამე, თუ კვანძზე აქტიური ძალა არ მოქმედებს და კვანძში თავს იყრის სამი ღერო, რომელთაგან ორი მდებარეობს ერთ წრფეზე, მაშინ მესამე ღერო ნულოვანია.

ახლა განვიხილოთ C კვანძი. 1 და 4 ღეროებში ძალები ცნობილია, მაშასადამე, უცნობია $\bar{N}_5$ და $\bar{N}_6$ ძალები. დავწეროთ C კვანძის წონასწორობის პირობები:

$$\Sigma F_{kx}=0; N_5 \cos \alpha + N_6 \cos \alpha - N_1 \cos \alpha = 0, \quad (6)$$

$$\Sigma F_{ky}=0; N_5 \sin \alpha - N_6 \sin \alpha - N_1 \sin \alpha - N_4 - P = 0. \quad (7)$$

ამ სისტემის ამოსახსნელად (6) განტოლება გავამრავლოთ $\cos \alpha$ -ზე, შემდეგ მიღებული განტოლება ჯერ შევკრიბოთ (7)-თან, ხოლო შემდეგ გამოვაკლოთ (7) განტოლება. მივიღებთ:

$$N_5 = \frac{p + 2N_1 \sin \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{20 + 2 \cdot 44,72 \cdot 0,4472}{2 \cdot 0,4472} \approx 67,1 \text{ კნ,}$$

$$N_6 = -\frac{p}{2 \sin \alpha} = -\frac{20}{2 \cdot 0,4472} \approx -22,4 \text{ კნ.}$$

ახლა შეიძლება განვიხილოთ D კვანძის წონასწორობა:

$$\Sigma F_{kx}=0; N_7 - N_6 \cos \alpha - N_3 = 0, \quad (8)$$

$$\Sigma F_{ky}=0; N_8 + N_6 \sin \alpha = 0. \quad (9)$$

(8) - განტოლებიდან:

$$N_7 = N_6 \cos \alpha + N_3 = -22,4 \cdot 0,8944 - 40 = -60 \text{ კნ;}$$

(9) - განტოლებიდან:

$$N_8 = N_6 \sin \alpha = 22,4 \cdot 0,4472 \approx 10 \text{ კნ.}$$

ამოვჭრათ E კვანძი და შევადგინოთ თავმოყრილი ძალების წონასწორობის განტოლებები:

$$\Sigma F_{kx}=0; N_{10} \cos \alpha + N_9 \cos \gamma - N_5 \cos \alpha = 0, \quad (10)$$

$$\Sigma F_{ky}=0; -P + N_{10} \sin \alpha - N_9 \sin \gamma - N_8 - N_5 \sin \alpha = 0. \quad (11)$$

(10) - განტოლებიდან:

$$N_{10} = N_5 - N_9 \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} \approx 67,1 - 0,7906 N_9.$$

ჩავსვათ N_{10} -ის მნიშვნელობა (11)-ში, მივიღებთ:

$-20+(67,1-0,7906N_9) \cdot 0,4472-0,7071 \cdot N_9-10-67,1 \cdot 0,4472=0$,
საიდანაც გვექნება:

$$N_9 = -28,3 \text{ კნ}; \quad N_{10} = 89,4 \text{ კნ}.$$

განვიხილოთ F კვანძი:

$$\Sigma F_{\text{კ}}=0; \quad -X_F - N_{10} \sin \beta = 0, \quad (12)$$

$$\Sigma F_{\text{კ}_y}=0; \quad -N_{11} - N_{10} \cos \beta = 0, \quad (13)$$

$$(13)\text{-დან } N_{11} = -N_{10} \cos \beta = -89,44 \cdot 0,4472 \approx -40 \text{ კნ}.$$

$$(12)\text{-დან } X_F = -N_{10} \sin \beta = -89,44 \cdot 0,8944 \approx -80 \text{ კნ}.$$

ცხადია, X_F -ის მნიშვნელობა განსაზღვრული გეკონდა და მივიღეთ იგივე მნიშვნელობა, ე.ი. გაანგარიშება სწორადაა წარმართული.

ამრიგად, განსაზღვრეთ ყველა ღეროში საძიებელი ძალები.

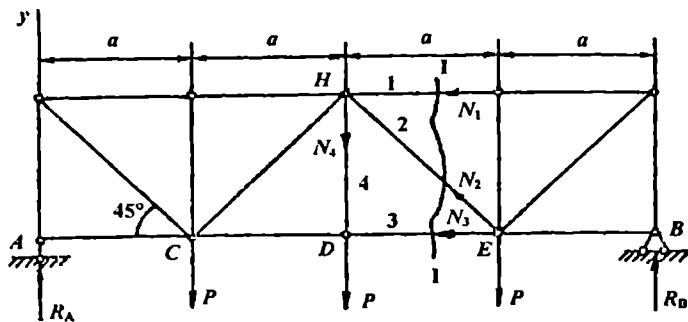
ამოცანა 45. 6.87 ნახაზზე გამოსახული ხიდის წამწეს C, D და E კვანძებში მოდებულია სამი ერთნაირი $P=20$ კნ ძალა. განსაზღვროთ 1, 2, 3 და 4 ღეროებში ძალები, რომლებიც გამოწვეულია მოცემული დატვირთვებით. ირიბანები ჰორიზონტთან ადგენს 45° -იან კუთხეს.

ამოხსნა. წამწე და დატვირთვებიც სიმეტრიულია, ამიტომ საყრდენი $\bar{R}_A$ და $\bar{R}_B$ რეაქციათა მოდულები ტოლი იქნება და მათი რიცხვითი მნიშვნელობა არის მთელი გარე დატვირთვის ნახევარი:

$$R_A = R_B = \frac{3P}{2} = 30 \text{ კნ}.$$

რადგან ამოცანის პირობის თანახმად საჭიროა ძალების განსაზღვრა მხოლოდ ზოგიერთ ღეროში, ამიტომ გამოვიყენოთ კვეთის მეთოდი (რიტერის მეთოდი). ეს მეთოდი მდგომარეობს იმაში, რომ წამწეს გაკვეთით ყოფენ ორ ნაწილად. უნდა გადიკვეთოს სამი ღერო, რომელთა შორის საჭიროა რომელიმე ღეროს ძალების განსაზღვრა და განიხილება წამწის ერთი ნაწილის წონასწორობა. ჩვენს შემთხვევაში გავატაროთ I-I კვეთი და განვიხილოთ წამწის მარჯვენა ნაწილის წონასწორობა. მომენტთა ცენტრად ავირჩიოთ E წერტილი, შეიძლება ჩაეწეროს:

$$\Sigma M_E=0; \quad N_1 a + R_B a = 0, \Rightarrow N_1 = -R_B = -\frac{3}{2} P = -30 \text{ კნ}.$$



ნახ. 6.87

H წერტილი მივიღოთ მომენტთა ცენტრად. ანალოგიურად მივიღებთ:

$$\Sigma M_H = 0; -N_3 \cdot a - P \cdot a + R_B \cdot 2a = 0, \text{ აქედან } N_3 = 2P = 40 \text{ კნ.}$$

ახლა, N_2 ძალვის საპოვნელად წამწის მარჯვენა ნაწილზე მოდებული ძალები დავაგებმილოთ y ღერძზე და მათი ჯამი გაგუტოლოთ ნულს. გვექნება:

$$\Sigma F_{ky} = 0; N_2 \cos 45^\circ - P + R_B = 0,$$

საიდანაც ვიპოვიტ:

$$N_2 = \frac{P - R_B}{\cos 45^\circ} = -\frac{P}{\sqrt{2}} = -10\sqrt{2} \text{ კნ.}$$

N_4 -ის სიდიდის საპოვნელად შევადგინოთ D კვანძის წონასწორობის განტოლება მოდებული ძალების y ღერძზე დაგვგებმილებით, მივიღებთ: $N_4 = P = 20$ კნ.

6.18. საეარჯიშო ამოცანები ბრტყელი ფერმის ღეროებში ძალების განსაზღვრაზე

1. კვანძთა ამოკვეთის ხერხი

ამოცანა 6.42. ფერმა შედგება ერთნაირი სიგრძის ღეროებისაგან. განსაზღვრეთ საყრდენთა რეაქციები და ძალვა AB ღეროში, თუ ძალები: $F_1 = 100$ ნ. $F_2 = 100$ ნ (ნახ. 6.88).

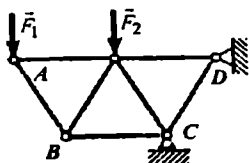
პასუხი: $R_C = 500$ ნ; $R_D = 800$ ნ; $N = -115$ ნ.

ამოცანა 6.43. განსაზღვრეთ საყრდენთა რეაქციები და ძალვა AB ღეროში, თუ ძალა $F = 40$ ნ (ნახ. 6.89).

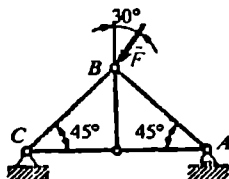
პასუხი: $R_A = 7,3$ ნ; $X_C = 20$ ნ; $Y_C = 27,3$ ნ; $N = -10,4$ ნ.

ამოცანა 6.44. განსაზღვრეთ საყრდენთა რეაქციები და ძალვა AB ღეროში, თუ ძალა $F = 400$ ნ (ნახ. 6.90).

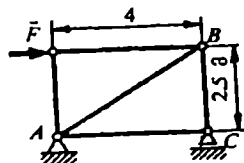
პასუხი: $R_A = 450$ ნ; $R_C = 250$ ნ; $N = 450$ ნ.



ნახ. 6.88



ნახ. 6.89



ნახ. 6.90

ამოცანა 6.45. განსაზღვრეთ საყრდენთა რეაქციები და ძალვა AB ღეროში, თუ ძალა $F = 300$ ნ (ნახ. 6.91).

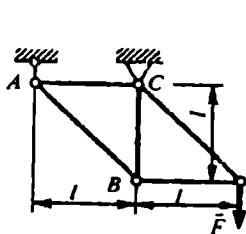
პასუხი: $R_A = 300$ ნ; $R_C = 600$ ნ; $N = -424$ ნ.

ამოცანა 6.46. განსაზღვრეთ საყრდენთა რეაქციები და ძალვა AB ღეროში, თუ ძალა $F = 600$ ნ, ხოლო ყველა კორიზონტალური და ვერტიკალური ღეროების სიგრძე ერთმანეთის ტოლია (ნახ. 6.92).

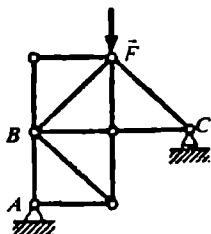
პასუხი: $R_A = R_C = 300$ ნ; $N = -300$ ნ.

ამოცანა 6.47. განსაზღვრეთ ძალვა AB ღეროში, თუ ძალა $F = 80$ ნ, ხოლო ყველა ღეროს სიგრძე ერთმანეთის ტოლია (ნახ. 6.93).

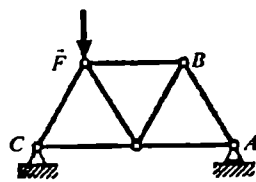
პასუხი: $R_A = 20$ ნ; $R_C = 60$ ნ; $N = -23,1$ ნ.



ნახ. 6.91



ნახ. 6.92



ნახ. 6.93

ამოცანა 6.48. ფერმის D, C, E კვანძებზე მოდებულია სამი ძალა: $P_1 = 10$ კნ; $P_2 = 20$ კნ და $P_3 = 30$ კნ (ნახ. 6.94). განსაზღვრეთ ძალები ფერმის ყველა ღეროში.

პასუხი: $X_B = 10$ კნ; $Y_B = 24$ კნ; $R_A = 26$ კნ.

ღეროს ნომერი	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ძალე, კნ	-36,8	26	20	-24	10	26	-6	-34	34

ამოცანა 6.49. ფერმის C კვანძზე მოდებულია ვერტიკალური $P_1 = 25$ კნ ძალა, ხოლო E კვანძზე – ჰორიზონტალური $P_2 = 1$ კნ ძალა. $AC = AD = CD = DB$, $DE \parallel AC$. განსაზღვრეთ საყრდენთა რეაქციები და ღეროებში ძალები (ნახ. 6.95).

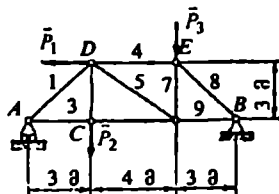
პასუხი: $X_A = 1$ კნ; $Y_A = 1,72$ კნ; $R_B = 0,28$ კნ.

ღეროს ნომერი	1	2	3	4	5	6	7
ძალე, კნ	-0,01	-1,98	0,50	-1,43	-0,50	0,49	-0,57

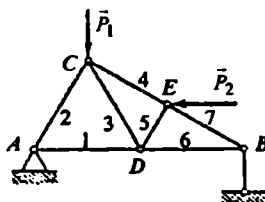
ამოცანა 6.50. ფერმის E კვანძზე მოდებულია ვერტიკალური $P_1 = 20$ კნ ძალა, ხოლო D კვანძზე – $P_2 = 10$ კნ ძალა, რომელიც CD ღეროსთან 45° კუთხითაა დახრილი. განსაზღვრეთ საყრდენთა რეაქციები და ძალები ღეროებში (ნახ. 6.96).

პასუხი: $X_A = 7,07$ კნ; $Y_A = 15,30$ კნ; $R_B = 11,77$ კნ.

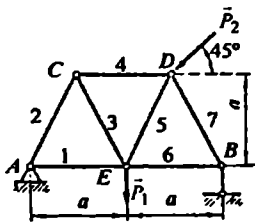
ღეროს ნომერი	1	2	3	4	5	6	7
ძალე, კნ	0,58	-17,07	17,07	-15,30	5,26	5,89	-13,16



ნახ. 6.94



ნახ. 6.95



ნახ. 6.96

ამოცანა 6.51. ფერმის E კვანძზე BC -ს მართობულად მოდებულია $P = 10$ კნ ძალა, ხოლო C და D კვანძებზე ვერტიკალური – $P_2 = 10$ კნ და $P_3 = 20$ კნ ძალები.

$AD = BD = CD$, $DE \perp BC$, $DK \perp AC$. განსაზღვრეთ საყრდენის რეაქციები და ძალები ღეროებში (ნახ. 6.97).

პასუხი: $X_A = 7,07$ კგ; $Y_A = 18,5$ კგ; $R_B = 18,5$ კგ.

დეროს ნომერი	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ძალეა, კნ	11,5	-25,2	0	-26,2	27,1	-26,2	-10,0	-26,2	18,5

2. ფერმის განკვეთის ხერხი (რიტერის ხერხი)

ამოცანა 6.54. განსაზღვრეთ ფერმის მე-6 ღეროში ძალვა, თუ $F = 360$ ნ (ნახ. 6.100).

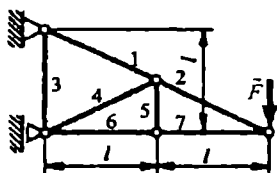
პასუხი: $N_6 = -720$ ნ.

ამოცანა 6.55. განსაზღვრეთ ფერმის მე-3 ღეროში ძალვა, თუ $F = 460$ ნ (ნახ. 6.101).

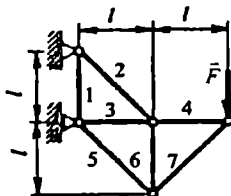
პასუხი: $N_3 = -460$ ნ.

ამოცანა 6.56. განსაზღვრეთ ფერმის მე-4 ღეროში ძალვა, თუ $F = 340$ ნ (ნახ. 6.102).

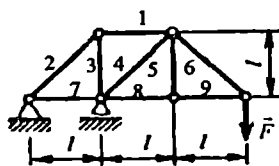
პასუხი: $N_4 = -481$ ნ.



ნახ. 6.100



ნახ. 6.101



ნახ. 6.102

ამოცანა 6.57. განსაზღვრეთ ძალვა მე-2 ღეროში, თუ $F_1 = F_2 = 520$ ნ (ნახ. 6.103).

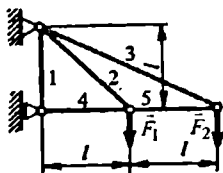
პასუხი: $N_2 = 735$ ნ.

ამოცანა 6.58. განსაზღვრეთ ძალვა მე-6 ღეროში, თუ $F_1 = F_2 = F_3 = 380$ ნ (ნახ. 6.104).

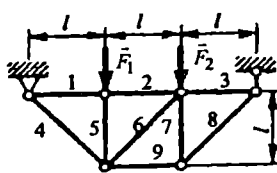
პასუხი: $N_6 = 0$.

ამოცანა 6.59. განსაზღვრეთ ძალვა 1 ღეროში, თუ $F = 120$ ნ და ყველა ღეროს სიგრძე ერთმანეთის ტოლია (ნახ. 6.105).

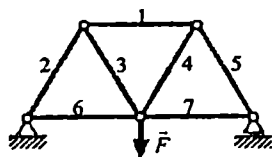
პასუხი: $N_1 = -69,3$ ნ.



ნახ. 6.103



ნახ. 6.104



ნახ. 6.105

ამოცანა 6.60. $ABCD$ ბრტყელი ფერმის D , C და E კვანძებზე შესაბამისად მოდებულია $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ და $\bar{P}_3$ ძალები (ნახ. 6.106). $P_1 = P_2 = P_3 = 20$ კნ, $AD = AE = BE = BC$ განსაზღვრეთ 6, 7 და 8 ღეროებში ძალები.

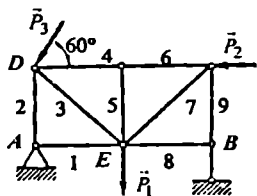
პასუხი: $N_6 = -15,0$ კნ; $N_7 = -7,07$ კნ; $N_8 = 0$.

ამოცანა 6.61. $ABCD$ ფერმის D და E კვანძებზე მოდებულია შესაბამისად $\bar{P}_1$ და $\bar{P}_2$ ძალები, ამასთან $\bar{P}_1$ მიმართულია ვერტიკალურად, ხოლო $\bar{P}_2$ ძალა – DE ღეროს გასწვრივ (ნახ. 6.107). $P_1 = P_2 = 40$ კნ. განსაზღვრეთ ძალები 4, 5 და 6 ღეროებში.

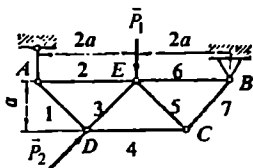
პასუხი: $N_4 = 11,72$ კნ; $N_5 = -8,28$ კნ; $N_6 = -34,14$ კნ.

ამოცანა 6.62. $ADCB$ ფერმის D , C და E კვანძებზე შესაბამისად მოდებულია $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ და $\bar{P}_3$ ძალები. $P_1 = 10$ კნ, $P_2 = 20$ კნ; $P_3 = 30$ კნ. განსაზღვრეთ 4, 5 და 7 ღეროებში ძალები, თუ საყრდენთა რეაქციებია: $R_A = 26$ კნ; $X_B = 10$ კნ; $Y_B = 24$ კნ (ნახ. 6.108). ზომები ნაჩვენებია ნახაზზე.

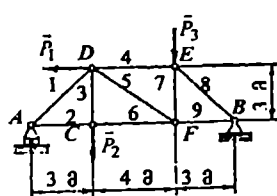
პასუხი. $N_4 = -24$ კნ; $N_5 = 10$ კნ; $N_6 = 26$ კნ.



ნახ. 6.106



ნახ. 6.107



ნახ. 6.108

7. ხახუნი

7.1. სტატიკური უძრაობისა და სრიალის ხახუნი. წონასწორობა ხახუნის დროს

უძრაობის ხახუნი განპირობებულია შემხები ზედაპირების სიმკისით.

უძრაობის ხახუნის ძალა მიმართულია სხეულის შესაძლო მოძრაობის საპირისპირო მხარეს (ნახ. 7.1). ხახუნის ძალის მაქსიმალური მნიშვნელობა ნორმალური წნევის პროპორციულია და მიიღწევა წონასწორობის მდებარეობიდან სხეულის გამოსვლისას

$$F_b \leq f_k \cdot N, \quad (7.1)$$

სადაც f_k უგანზომილებო სიდიდეა, რომელსაც უძრაობის ანუ სტატიკური ხახუნის კოეფიციენტი ეწოდება; N ნორმალური წნევაა, F_b – ხახუნის ძალა.

წონასწორობის მდებარეობიდან სხეულის გამოსვლის შემდეგ უძრაობის ხახუნის ძალა მცირდება და მოძრაობისას მას სრიალის ხახუნის ძალას უწოდებენ. ამიტომ სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი ნაკლებია უძრაობის ხახუნის კოეფიციენტზე.

სრიალის ხახუნი ეწოდება წინააღმდეგობას, რომელიც წარმოიშობა ორი სხეულის ფარდობითი სრიალის დროს. ამიტომ ერთ-ერთ მოხახუნე სხეულზე მოდებული სრიალის ხახუნის ძალა მეორე სხეულის მიმართ მისი ფარდობითი სიჩქარის საწინააღმდეგოდაა მიმართული.

ცდით დადგენილია, რომ ხახუნის ძალის სიდიდე ერთი მოხახუნე სხეულის მეორე სხეულზე ნორმალური წნევის პროპორციულია, ე.ი.

$$F_b = f \cdot N, \quad (7.2)$$

პროპორციულობის f კოეფიციენტს (განყენებული რიცხვია) სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი ეწოდება.

როგორც ცდა გვიჩვენებს, f კოეფიციენტის სიდიდე დამოკიდებულია მოხახუნე სხეულების მასალაზე, ამ სხეულების ზედაპირების მდგომარეობასა და მათ ფარდობით

სიჩქარეებზე. როგორც ზემოთაც აღვნიშნეთ, თუ მოხახუნე სხეულები უძრავ მდგომარეობაში იმყოფება, მაშინ ხახუნს ეწოდება სტატიკური. სტატიკური ხახუნის ძალის მაქსიმალური სიდიდე, ე.ი. ძალის სიდიდე, რომელიც მოხახუნე სხეულების ფარდობითი სრიალის დაწყების მომენტს შეესაბამება, განისაზღვრება იმავე ფორმულით, რომლითაც ფარდობითი მოძრაობის დროს ხახუნის შემთხვევაში:

$$F_{\max} = f_s \cdot N, \quad (7.3)$$

სადაც f_s ხახუნის სტატიკური კოეფიციენტია.

ეს კოეფიციენტი, ზოგადად ცოტა მეტია, ვიდრე ხახუნის კოეფიციენტი მოძრაობის დროს.

აქედან გამომდინარეობს, რომ სტატიკური ხახუნის ძალის სიდიდე ყოველთვის აკმაყოფილებს (7.1) პირობას.

7.2. სრიალის ხახუნის კანონები. ხახუნის კუთხე და კონუსი

1. სრიალის ხახუნის ძალა მიმართულია სხეულის შესაძლო მოძრაობის საპირისპიროდ და იცვლება ნულიდან მაქსიმალურ მნიშვნელობამდე.

2. ხახუნის ძალა არ არის დამოკიდებული შემხები ზედაპირების ფართობზე.

3. მაქსიმალური ხახუნის ძალა ნორმალური წნევის პროპორციულია:

$$F_{\max} = f \cdot N. \quad (7.4)$$

ნორმალური წნევა ეწოდება სრულ წნევას მოხახუნე ზედაპირების მთელს ფართობზე.

4. სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი დამოკიდებულია მოხახუნე ზედაპირების მასალასა და ფიზიკურ მდგომარეობაზე.

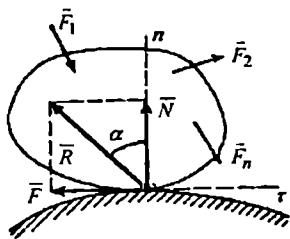
მქისე (ხორკლიანი) ზედაპირზე მოთავსებული სხეულის წონასწორობის მრავალი ამოცანის ამოხსნა მოხერხებულია გეომეტრიული გზით. ამ მიზნით შემოვიღოთ ხახუნის კუთხისა და ხახუნის კონუსის ცნება. ვთქვათ, მქისე ზედაპირზე მდებარე სხეულზე მოდებულია აქტიური ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) ძალები და სხეული იმყოფება წონასწორობის მდგომარეობაში.

მოცემულ სხეულსა და საყრდენ ზედაპირს შორის ხახუნის არსებობის გამო, ამ ზედაპირის სრული $\vec{R}$ რეაქცია არის ნორმალური $\vec{N}$ რეაქციისა და $\vec{F}_x$ ხახუნის ძალის ტოლ-ქმედი (ნახ. 7.1).

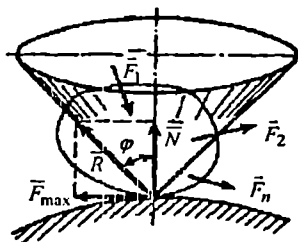
ნორმალურ $\vec{N}$ რეაქციასა და სრულ $\vec{R}$ რეაქციას შორის მდებარე φ კუთხეს, რომელიც შეესაბამება ხახუნის ძალის მაქსიმალურ მნიშვნელობას, ეწოდება ხახუნის კუთხე (ნახ. 7.2):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{\max}}{N} = \frac{f \cdot N}{N} = f \quad (7.5)$$

ე.ი. ხახუნის კუთხის ტანგენსი სრიალის ხახუნის კოეფიციენტის ტოლია.



ნახ. 7.1



ნახ. 7.2

სტატიკის ამოცანების ამოხსნის მეთოდი ხახუნის არსებობის დროს რჩება იგივე, რაც ხახუნის არარსებობის შემთხვევაში, ე.ი. დაიყვანება წონასწორობის განტოლებების შედგენასა და ამოხსნაზე, მაგრამ ამ განტოლებებში მოცემულ სხეულზე მოდებული ცნობილი ძალებისა და ზემოთ განხილული რეაქციების გარდა, შევა კიდევ ხახუნის ძალები. ამასთანავე, მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ ის, რომ ასეთ ამოცანებში გაანგარიშება ხდება ხახუნის ძალის მაქსიმალურ სიდიდეზე. ამიტომ ეს ძალები განისაზღვრება (7.3) ფორმულით.

ამოცანები, რომლებიც ეხება ხახუნის არსებობის დროს სხეულების წონასწორობას, შეიძლება გაიყოს ორ ძირითად ტიპად:

I. ამოცანები, რომლებიც ეკუთვნის ერთი მყარი სხეულის წონასწორობას;

II. ამოცანები, რომელშიც განხილულია სხეულთა სისტემის წონასწორობა.

პირველი ტიპის ამოცანები შეიძლება კიდევ გაიყოს შემდეგ ორ ჯგუფად:

1. ამოცანები, რომლებიც უნდა ამოიხსნას წონასწორობის ორი განტოლებით (გეგმილთა ორი განტოლებით);

2. ამოცანები, რომლებიც უნდა ამოიხსნას წონასწორობის სამი განტოლებით.

ხახუნის კონუსი ეწოდება კონუსს, რომელსაც შემოწერს $\bar{R}$ სრული რეაქცია $\bar{N}$ ნორმალური რეაქციის მიმართულების გარშემო. თუ ხახუნის f კოეფიციენტი ყველა მიმართულებით ერთნაირია, მაშინ ხახუნის კონუსი წრიული იქნება.

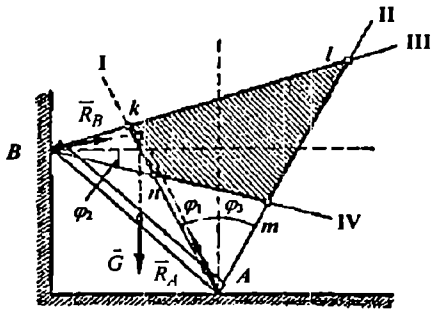
მქისე ზედაპირზე სხეულის წონასწორობისთვის აუცილებელი და საკმარისია, აქტიური ძალების ტოლქმედი იმყოფებოდეს ხახუნის კონუსის შიგნით ან კონუსის მსახველზე გადიოდეს, ე.ი. ამ შემთხვევაში $\alpha \leq \varphi$ (ნახ. 7.1, 7.2).

განვიხილოთ $\bar{G}$ წონის AB ძელის წონასწორობა, რომელიც ეყრდნობა მქისე ვერტიკალურ კედელსა და ჰორიზონტალურ იატაკს. ხახუნის კოეფიციენტი A წერტილში უდრის f_1 -ს, ხოლო B წერტილში – f_2 -ს (ნახ. 7.3). A და B წერტილებში აღძრულ $\bar{R}_A$ და $\bar{R}_B$ რეაქციათა ფუძეები არ გამოდიან ხახუნის კონუსის საზღვრიდან. გავატაროთ

საყრდენი კედლისა და იატაკის მართობი წრფეები. გადავზომოთ ამ წრფეებიდან ხახუნის კუთხის $\varphi_1 = \arctg f_1$ და $\varphi_2 = \arctg f_2$ კუთხეები. გავატაროთ $A-I$, $A-II$, $B-III$ და $B-IV$ წრფეები, მივიღებთ ხახუნის კონუსების საზღვრებს. AB ძელის წონასწორობის შემ-

თხვევაში $\bar{R}_A$ და $\bar{R}_B$ სრულ

რეაქციათა ფუძეები უნდა იკვეთებოდეს მიღებული $k\ell mn$ ოთხკუთხედის შიგნით. $k\ell mn$ ოთხკუთხედს წონასწორობის არე ეწოდება.



ნახ. 7.3

AB ძელზე მოდებულია სამი ძალა: მისი $\vec{G}$ წონა და საყრდენების $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B$ ორი რეაქცია. წონასწორობის შემთხვევაში ეს სამი ძალა უნდა იკვეთებოდეს ერთ წერტილში.

ძელის წონასწორობის შემთხვევაში $k\ell m$ ოთხკუთხედის ფართობის ნებისმიერი წერტილი შეიძლება იყოს A და B წერტილებში აღძრული სრულ რეაქციათა ფუძეების გადაკეთის წერტილი. ამიტომ ძელის სიმძიმის $\vec{G}$ ძალის ფუძე უნდა კვეთდეს წონასწორობის არეს.

იმ შემთხვევაში, როცა სიმძიმის $\vec{G}$ ძალის ფუძე გადის წონასწორობის მიდამოს k წერტილში, ძელი იმყოფება ზღვრული წონასწორობის მდგომარეობაში.

ძელი ნახაზზე ნაჩვენებ მდებარეობას ვერ შეინარჩუნებს, თუ სიმძიმის ძალის ფუძე გადის $k\ell m$ ოთხკუთხედის გარეთ.

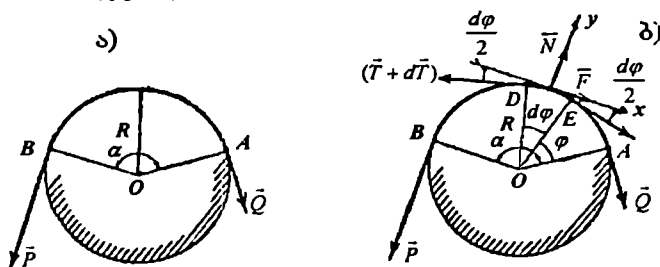
თუ ძელზე მოდებულია რამდენიმე მოცემული ძალა და ისინი დაიყვანება ტოლქმედ ძალაზე, მაშინ ამ ტოლქმედის ფუძე ძელის წონასწორობის შემთხვევაში უნდა გადიოდეს წონასწორობის მიდამოში, ე.ი. $k\ell m$ ოთხკუთხედის შიგნით.

7.3. ბაგირის (ძაფის) ხახუნის ცილინდრულ ზედაპირზე

განვიხილოთ დრეკადი სხეულების ხახუნი. ეთქვათ, ბაგირი გადაკიდებულია უძრავ R რადიუსიან ცილინდრზე და მას ეხება α კუთხის შესაბამის AB რკალზე (ნახ. 7.4, ა). საჭიროა განესაზღვროთ ბაგირის დაჭიმულობის $\vec{Q}$ ძალა, რომელიც საკმარისია ბაგირის მეორე ბოლოზე მოდებული $\vec{P}$ ძალის გასაწონასწორებლად, თუ ბაგირსა და ცილინდრს შორის აღინიშნება ხახუნი.

ცდა გვიჩვენებს, რომ ხახუნის არსებობის გამო $\vec{Q}$ ძალა გაცილებით ნაკლებია $\vec{P}$ ძალის სიდიდეზე. ეს ამოცანა სტატიკურად განსაზღვრული იქნება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა განიხილება ზღვრული წონასწორობის მდგომარეობა

და ხახუნის ძალები პროპორციულია შესაბამისი ნორმალური წნევებისა. ლაპარაკია იმ კრიტიკულ მდგომარეობაზე, რომლის დროსაც $\bar{P}$ ძალას უკვე შესწევს უნარი, გამოიწვიოს ბაგირის სრიალი უძრავი ცილინდრის ზედაპირზე (საათის ბრუნვის საწინააღმდეგოდ).



ნახ. 7.4

ნორმალური წნევები და ხახუნის ძალები უწყვეტადაა განაწილებული ცილინდრთან ბაგირის შეხების მთელ $l = R\alpha$ სიგრძეზე. ბაგირის ერთეულოვან სიგრძეზე ამ ძალების შესაბამისი მნიშვნელობები აღვნიშნოთ $\bar{N}$ -ითა და $\bar{F}$ -ით. ცხადია, ეს ძალები იმ φ კუთხის ფუნქციებია, რომელიც განსაზღვრავს ელემენტის მდებარეობას, ე.ი. $N = N(\varphi)$, $F = F(\varphi) = fN(\varphi)$. ცილინდრთან ბაგირის შეხების ყოველ წერტილში ბაგირის დაჭიმულობა ასევე φ -ს ფუნქციაა, ე.ი. $T = T(\varphi)$.

გამოყოთ ბაგირის $dl = R d\varphi$ სიგრძის DE ელემენტი. ამ ელემენტზე მოქმედებს ცილინდრის ორი რეაქცია: $\bar{F}dl$ და $\bar{N}dl$, აგრეთვე ელემენტის D და E წერტილებზე მოდებული ბაგირის დაჭიმულობის $\bar{T}_1 = \bar{T} + d\bar{T}$ და $\bar{T}$ ორი ძალა, სადაც $d\bar{T}$ არის D და E წერტილებში დაჭიმულობების სხვაობა (ნახ. 7.4, ბ).

შევადგინოთ ბაგირის DE ელემენტის წონასწორობის განტოლებები. ამისათვის ელემენტის შუა წერტილზე მოდებული ძალები დავაგვიგმილოთ x და y ღერძებზე:

$$\sum F_{\kappa} = 0; \quad Fdl - T_1 \cos \frac{d\varphi}{2} + T \cos \frac{d\varphi}{2} = 0,$$

$$\sum F_{\kappa y} = 0; \quad Ndl - T_1 \sin \frac{d\varphi}{2} - T \sin \frac{d\varphi}{2} = 0.$$

$d\varphi$ კუთხის სიმცირის გამო შეგვიძლია დაუშვათ, რომ $\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$, $\cos \frac{d\varphi}{2} \approx 1$. გარდა ამისა, მიღებულ განტოლებათა სისტემაში, თუ ამ დაშვებებთან ერთად გავითვალისწინებთ T_1 -ის და $dl = Rd\varphi$ -ის მნიშვნელობებსაც, გვექნება:

$$NR - T = 0, \quad (ა)$$

$$FR + \frac{dT}{d\varphi} = 0. \quad (ბ)$$

(ა) განტოლებიდან: $T = NR$, რადგან $F = fN$, ამიტომ (ბ) განტოლება შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$dT = -fTd\varphi,$$

ანუ

$$\frac{dT}{T} = -fd\varphi. \quad (გ)$$

შევნიშნოთ, რომ $\varphi = 0$ კვეთში ბაგირის დაჭიმულობის სიდიდეა Q , ხოლო $\varphi = \alpha$ კვეთში დაჭიმულობის სიდიდეა P . მაშასადამე თუ ვაინტეგრირებთ (7.3) განტოლებას $\varphi = 0$ -დან $\varphi = \alpha$ -მდე საზღვრებში, გვექნება:

$$\ln \frac{Q}{P} = -f\alpha \quad (7.6)$$

და საბოლოოდ

$$Q = P \cdot e^{-f\alpha} \quad (7.7)$$

(7.7) ფორმულა (ეილერის ფორმულა) საშუალებას იძლევა, განესაზღვროთ $\bar{Q}$ ძალის უმცირესი მნიშვნელობა, რომელსაც შეუძლია გააწონასწოროს $\bar{P}$ ძალა.

შეიძლება დავსვათ კითხვა შებრუნებულადაც: $\bar{Q}$ ძალის რა მნიშვნელობის შემთხვევაში დაიწყებს ბაგირი ცილინდრზე

სრიალს საათის ისრის ბრუნვის თანხედენილი მიმართულებით, ე.ი. $\vec{Q}$ ძალის რა მნიშვნელობაა საჭირო, რომ მან ერთდროულად დაძლიოს $\vec{P}$ ძალისა და ხახუნის წინააღმდეგობა? ამისათვის საკმარისია (7.6) განტოლებაში ნიშნის შეცვლა, მივიღებთ:

$$Q = Pe^{f\alpha} \quad (7.8)$$

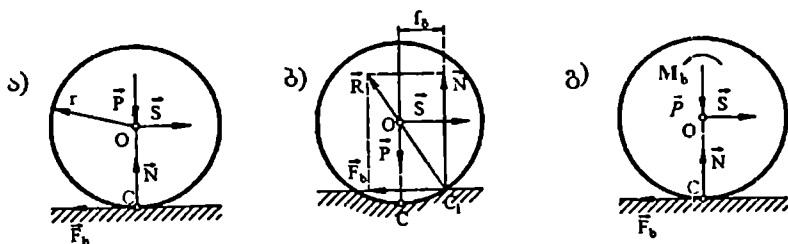
ამრიგად, თუ $\vec{Q}$ ძალის სიდიდე აკმაყოფილებს უტოლობებს

$$Pe^{-f\alpha} \leq Q \leq Pe^{f\alpha},$$

მაშინ ბაგირი იქნება წონასწორობის მდგომარეობაში.

7.4. გორვის ხახუნი

გორვის ხახუნი წარმოიქმნება იმ მგორავ სხეულსა და საყრდენ ზედაპირს შორის დეფორმაციის შედეგად, რომლებიც სინამდვილეში არაა აბსოლუტურად მყარი. ამიტომ ნორმალური რეაქცია მოძრაობის მიმართულებით წაინაცვლებს მგორავი სხეულის ცენტრის მიმართ რაღაც სიდიდით, რომელიც წონასწორობიდან სხეულის გამოსვლისას მაქსიმუმს აღწევს და რომელსაც f_g გორვის ხახუნის კოეფიციენტი ეწოდება (ნახ. 7.5 ა,ბ).



ნახ. 7.5

გორვის ხახუნის კოეფიციენტს სიგრძის განზომილება აქვს, განსხვავებით სრიალის ხახუნის უგანზომილებო კოეფიციენტისგან. ჩვეულებრივ, ნორმალურ რეაქციას ატარებენ საგორავის ცენტრში, ამავდროულად სხეულს ამატებენ

წყვილძალას M_b მომენტი (ნახ. 7.5, გ), რომელსაც გორვის ხახუნის მომენტი ეწოდება:

$$M_b = f_g \cdot N. \quad (7.9)$$

7.5. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები ხახუნის არსებობის შემთხვევაში ბრტყელ ძალთა სისტემის წინასწორობაზე

ამოცანა 46. $G=80$ ნ წონის A სხეული მოთავსებულია მაგიდის პორიზონტალურ მკისე (ხორკლიან) ზედაპირზე. სხეულზე მიბმულია ძაფი, რომელიც გადაკიდებულია იდეალურ B ბლოკზე (ნახ. 7.6, ა). როგორი $\bar{P}$ წონის ტვირთი უნდა მივაბათ ძაფის ბოლოზე, რომ არ დაირღვეს A სხეულის წინასწორობა. მაგიდის ზედაპირთან ტვირთის ხახუნის კოეფიციენტი $f=0,4$.

ამოხსნა:

1. უგულებელყოთ ტვირთის ზომები, ჩავთვალოთ, რომ ყველა ძალა მოდებულია A წერტილზე.

2. როცა სხეული მოთავსებულია პორიზონტალურ სიბრტყეზე, მაშინ მასზე მოქმედებს მხოლოდ ორი ძალა: სიმძიმის $\bar{G}$ ძალა და მის საწინააღმდეგოდ მიმართული საყრდენის (ზედაპირის) რეაქცია $\bar{R}_A = \bar{N}$ (ნახ. 7.6, ბ).

3. თუ A ტვირთზე მოედებთ მაგიდის ზედაპირის პარალელურ რაიმე $\bar{P}$ ძალას, მაშინ $\bar{G}$ და $\bar{P}$ ძალების მაწონასწორებელი $\bar{R}_A$ რეაქცია იწყებს ევრტიკალიდან გადახრას. მაგრამ A სხეული შეინარჩუნებს წინასწორობას მანამდე, სანამ $\bar{P}$ ძალის სიდიდე არ გადააჭარბებს ხახუნის ძალის მაქსიმალურ $\bar{F}_{\max}$ -ის მნიშვნელობას, რომელიც შეესაბამება ფკუთხის ზღვრულ მნიშვნელობას (ნახ. 7.6, გ).

4. დაეშალოთ $\bar{R}_A$ რეაქცია $\bar{F}_b = \bar{F}_{\max}$ და $\bar{N}$ ორ მდგენელად. მივიღებთ A წერტილზე მოდებულ $\bar{G}$, $\bar{P}$, $\bar{F}_b$, $\bar{N}$ ოთხი ძალის სისტემას (ნახ. 7.6, დ). ეს ძალები დაეაგეგმილთ x და y ღერძებზე, მივიღებთ წინასწორობის შემდეგ ორ განტოლებას:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad P - F_{\max} = 0; \quad (1)$$

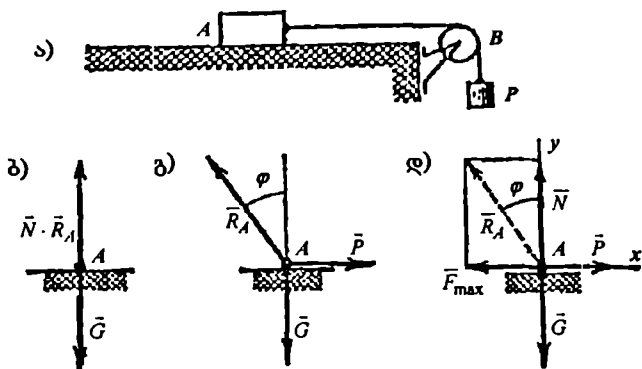
$$\sum F_{ky} = 0; \quad N - G = 0. \quad (2)$$

(1) განტოლებიდან $P = F_{\max}$, მაგრამ $F_{\max} = f \cdot N$, ხოლო (2)-დან $N = G$, მივიღებთ:

$$P = f \cdot G = 0,4 \cdot 80 = 32 \text{ ნ.}$$

ამრიგად, A სხეულის წონასწორობა შენარჩუნდება მანამ, სანამ ძაფის ბოლოზე ჩამოკიდებული ტვირთის $\bar{P}$ წონის სიდიდე არ გადააჭარბებს 32 ნ-ს.

ამოცანა 47. პორიზონტისადმი α და β კუთხეებით დახრილ AC და BC სიბრტყეებზე მოთავსებულია 1 და 2 ტვირთები, რომლებიც ერთმანეთთან დაკავშირებულია D ბლოკზე გადაკიდებული ძაფის საშუალებით (ნახ. 7.7, ა). 1 ტვირთის AC სიბრტყესთან ხახუნის კოეფიციენტია f_1 , ხოლო მე-2 ტვირთის BC სიბრტყესთან ხახუნის კოეფიციენტი f_2 . პირველი სხეულის წონაა $\bar{G}$. რა $\bar{Q}$ წონა უნდა ჰქონდეს მეორე ტვირთს, რომ სისტემა იყოს წონასწორობაში, თუ $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $f_1 = 0,4$, $f_2 = 0,2$, $G = 100$ ნ.



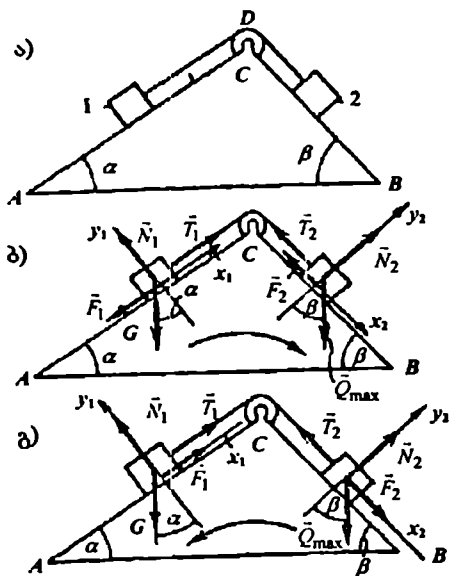
ნახ. 7.6

ამოხსნა 1. დაეუშვათ, რომ დახრილ სიბრტყეებზე მოთავსებული 1 და 2 ტვირთი იმყოფება წონასწორობაში.

2. თუ მეორე ტვირთის წონას თანდათან გავზრდით, მაშინ

მისი წონის რაღაცა $Q_{\max}$ მნიშვნელობის მიღწევისას წონასწორობა დაირღვევა და ორივე ტვირთი დაიწყებს მოძრაობას მარჯვნივ (მეორე სხეული CB-ზე ქვევით, ხოლო პირველი AC-ზე ზევით).

გამოვსახოთ ორივე სხეულზე მოდებული ძალები ზღერული წონასწორობის მდგომარეობაში (ნახ. 7.7, ბ), ე.ი. მოძრაობის დაწყების წინა მომენტისათვის. თითოეულ სხეულზე მოქმედებს მათი $\vec{G}$ და $\vec{Q}_{\max}$ წონები; დახრილი



ნახ. 7.7

სიბრტყეების ნორმალური $\vec{N}_1$ და $\vec{N}_2$ რეაქციები; სხეულების შესაძლო მოძრაობის საწინააღმდეგოდ მიმართული ხახუნის $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალები; ძაფების $\vec{T}_1$ და $\vec{T}_2$ დაჭიმულობები (რეაქციები).

3. განვიხილოთ თითოეული სხეულის წონასწორობა ცალკე. მხედველობაში არ მივიღოთ ტვირთების ზომა, ე.ი. ჩაეთვალოთ, რომ სხეულებზე მოქმედებს თავმოყრილ ძაღთა სისტემები.

პირველ სხეულზე მოდებული ძაღთა სისტემისთვის მივიღებთ წონასწორობის შემდეგ განტოლებებს:

$$\sum F_{1x} = 0; \quad T_1 - F_1 - G \sin \alpha = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{1y} = 0; \quad N_1 - G \cos \alpha = 0. \quad (2)$$

მეორე სხეულზე მოქმედ ძაღთა სისტემის წონასწორობის განტოლებები იქნება:

$$\sum F_{2x} = 0; \quad -T_2 - F_2 + Q \sin \beta = 0; \quad (3)$$

$$\sum F_{2y} = 0; \quad N_2 - Q_{\max} \cos \alpha = 0. \quad (4)$$

$$(1) \text{ განტოლებიდან: } T_1 = G \sin \alpha + F_1 = G \sin \alpha + f_1 N_1$$

$$(2) \text{ განტოლებიდან: } N_1 = G \cos \alpha,$$

ამიტომ

$$T_1 = G(\sin \alpha + f_1 \cos \alpha). \quad (5)$$

$$(3) \text{ განტოლებიდან: } T_2 = Q_{\max} \sin \beta - F_2 = Q_{\max} \sin \beta - f_2 N_2$$

$$(4) \text{ განტოლებიდან: } N_2 = Q_{\max} \cos \beta,$$

ამიტომ

$$T_2 = Q_{\max}(\sin \beta - f_2 \cos \beta). \quad (6)$$

D ბლოკზე გადაკიდებული ძაფის დაჭიმულობა მის მთელ სიგრძეზე ერთნაირია (D ბლოკზე ხახუნის უგულებელყოფილია), ამიტომ $T_1 = T_2$. მაშასადამე, (5) და (6) განტოლებების შედარებიდან მივიღებთ:

$$G(\sin \alpha + f_1 \cos \alpha) = Q_{\max}(\sin \beta - f_2 \cos \beta).$$

აქედან განვსაზღვროთ $Q_{\max}$:

$$Q_{\max} = G \frac{\sin \alpha + f_1 \cos \alpha}{\sin \beta - f_2 \cos \beta}. \quad (7)$$

4. ახლა წარმოვიდგინოთ, რომ მე-2 სხეულის წონა თანდათან მცირდება. ტვირთის წონის რაღაც $Q_{\min}$ მნიშვნელობისათვის წონასწორობა ისევ დაირღვევა. მაგრამ ახლა ტვირთები იმოძრავენ მარცხნივ (1 ტვირთი ქვევით AC სიბრტყეზე, 2 ტვირთი - ზევით BC სიბრტყეზე).

მოვდოთ ტვირთებზე მოქმედი ძალები და განვიხილოთ მათი წონასწორობა ზღვრულ მდგომარეობაში, ე.ი. მოძრაობის დაწყების წინ (ნახ. 7.7, გ).

წინა შემთხვევისგან განსხვავებით ხახუნის $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალები შეიცვლის მიმართულებას, რადგან შეიცვალა სხეულების სრიალის მიმართულება.

განვიხილოთ თითოეული სხეულის წონასწორობა ცალ-ცალკე, მივიღებთ წონასწორობის შემდეგ განტოლებებს:

1 სხეულისათვის:

$$\sum F_{1x} = 0; \quad T_1 + F_1 - G \sin \alpha = 0; \quad (8)$$

$$\sum F_{1y} = 0; \quad N_1 - G \cos \alpha = 0. \quad (9)$$

მე-2 სხეულისათვის:

$$\sum F_{2x} = 0; \quad -T_2 + F_2 + Q_{\min} \sin \beta = 0; \quad (10)$$

$$\sum F_{2y} = 0; \quad N_2 - Q_{\min} \cos \beta = 0. \quad (11)$$

ამოვხსნათ (8), (9), (10) და (11) განტოლებათა სისტემები წინა სისტემების ანალოგიურად, მივიღებთ:

$$Q_{\min} = G \frac{\sin \alpha - f_1 \cos \alpha}{\sin \beta + f_2 \cos \beta}. \quad (12)$$

ამრიგად, 1 და 2 სხეულები იმყოფება წონასწორობაში, თუ დაცულია შემდეგი პირობა:

$$Q_{\min} < Q < Q_{\max}.$$

ამასთან $Q_{\min}$ და $Q_{\max}$ მნიშვნელობები დამოკიდებულია პირველი ტვირთის წონაზე, ხახუნის კოეფიციენტებსა და სიბრტყეების დახრის α და β კუთხეების სიდიდეზე.

თუ ჩავსვამთ (7) და (8) გამოსახულებებში მოცემულ რიცხვით მონაცემებს, გექნება:

$$Q_{\max} = 100 \cdot \frac{\sin 30^\circ + 0,4 \cdot \cos 30^\circ}{\sin 60^\circ - 0,2 \cos 60^\circ}; \quad Q_{\max} = 110,5 \text{ ნ},$$

$$Q_{\min} = 100 \cdot \frac{\sin 30^\circ - 0,4 \cdot \cos 30^\circ}{\sin 60^\circ + 0,2 \cos 60^\circ}; \quad Q_{\min} = 16 \text{ ნ},$$

ე.ი. 2 ტვირთის წონა სხეულების წონასწორობის შემთხვევაში აკმაყოფილებს პირობას:

$$16 \text{ ნ} < Q < 110,5 \text{ ნ}.$$

ან კიდევ, თუ $G=100$ ნ, $\alpha=\beta=45^\circ$, $f_1=f_2=0,2$, მაშინ ტვირთების წონასწორობის შემთხვევაში ტვირთის $\bar{Q}$ წონის სიდიდე დააკმაყოფილებს პირობას:

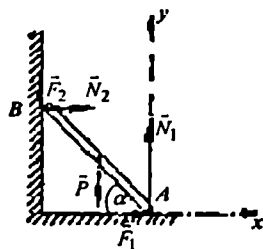
$$66,7 \text{ ნ} < Q < 150 \text{ ნ}.$$

ამოცანა 48. $AB=\ell$ მ სიგრძისა და P წონის ძელი ეყრდნობა მქისე ვერტიკალურ კედელს და მქისე პორიზონტალურ იატაკს (ნახ. 7.8). A წერტილში ხახუნის კოეფიციენტი $f_1=0,4$, ხოლო B წერტილში – $f_2=0,5$.

განესაზღვროთ ძელის დახრის ის უმცირესი α კუთხე, რომლის დროსაც მას შეუძლია დარჩეს წონასწორობაში.

ამოხსნა. 1. ანალიზური ხერხი.

AB ძელი გაერთიანებული ბმებისა-
გან. ბმებია ვერტიკალური კედელი და
იატაკი. ბმების მაგიერად AB ძელს
მოვდოთ რეაქციები. A და B წერტი-
ლებში მოდებული იატაკისა და კედლის
ნორმალური რეაქციები აღვნიშნოთ $\vec{N}_1$
და $\vec{N}_2$ -ით, ხოლო იმავე წერტილებში



ნახ. 7.8

მოდებული ხახუნის ძალები $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ -ით. AB ძელი წონას-
წორობაში იმყოფება $\vec{N}_1, \vec{F}_1, \vec{N}_2, \vec{F}_2, \vec{P}$ ხუთი ძალის მოქმედე-
ბით. ავირჩიოთ კოორდინატთა Axy სისტემა და შევადგინოთ
ძელის ზღვრული წონასწორობის სამი განტოლება:

$$\sum F_x = 0; \quad N_2 - F_1 = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0; \quad N_1 + F_2 - P = 0. \quad (2)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad P \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \cos \alpha - N_2 \cdot \ell \sin \alpha - F_2 \ell \cdot \cos \alpha = 0. \quad (3)$$

(3)-ში α კუთხე აღვნიშნავს ძელის დახრის უმცირეს
კუთხეს, რომლის დროსაც ძელი იმყოფება უძრაობისა და
სრიალს შორის საზღვარზე. ამიტომ

$$F_1 = f_1 N_1 = 0,4 N_1 \text{ და } F_2 = f_2 N_2 = 0,5 N_2.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (1), (2) და (3) განტოლე-
ბებში და (1) განტოლებას ℓ -ზე შევკვეცავთ, მივიღებთ:

$$N_2 = 0,4 N_1; \quad (4)$$

$$N_1 = P - 0,5 N_2; \quad (5)$$

$$P \cos \alpha - 2 N_2 \sin \alpha - N_2 \cos \alpha = 0. \quad (6)$$

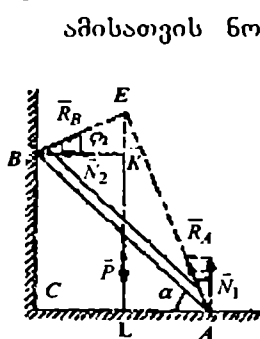
(4) და (5) განტოლებიდან ვპოულობთ:

$$N_2 = \frac{0,4P}{1+0,2} = \frac{1}{3} P.$$

N_2 -ის მიღებული მნიშვნელობა ჩავსვით (6) განტოლებაში
და ამ განტოლების ყველა წევრი გავყოთ $\cos \alpha$ -ზე, მაშინ

$$\frac{2 \operatorname{tg} \alpha + 1}{3} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 1 \text{ და } \alpha = 45^\circ.$$

2. ამოცანის ამოხსნის გეომეტრიული ხერხი (ნახ. 7.9). A და B წერტილებში ავაგოთ $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B$ სრული რეაქციების ფუძეები, ამასთან $\vec{R}_A = \vec{N}_1 + \vec{F}_1$ და $\vec{R}_B = \vec{N}_2 + \vec{F}_2$.



ნახ. 7.9

$\vec{F}_1$ ძალის ფუძის მხარეს გადავზომოთ ხახუნის კუთხის $\varphi_1 = \arctg 0,4$ ტოლი კუთხე. მაშინ მივიღებთ $\vec{R}_A$ ძალის ფუძეს. ზუსტად ასევე $\vec{N}_2$ ძალის ფუძიდან $\vec{F}_2$ ძალის ფუძისაკენ ხახუნის $\varphi_2 = \arctg 0,5$ კუთხის ტოლი კუთხის გადაზომვით მივიღებთ სრული $\vec{R}_B$ რეაქციის ფუძეს. რადგან ძელი წონასწორობაში იმყოფება

მასზე მოდებული $\vec{P}$, $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$ სამი ძალის მოქმედებით, ამიტომ ამ ძალების ფუძეები ერთ წერტილში იკვეთება.

თუ $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B$ ძალების ფუძეებს გავაგრძელებთ E წერტილში გადაკვეთამდე, მაშინ $\vec{P}$ ძალის ფუძე უნდა გავიდეს E წერტილზე. $\vec{P}$ და $\vec{N}_2$ ძალების ფუძეების გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ K-თი (ნახ. 7.9).

განვიხილოთ BKE სამკუთხედი. ამ სამკუთხედიდან გვაქვს:

$$\frac{EK}{BK} = \operatorname{tg} \varphi_2 = 0,5,$$

მაგრამ

$$BK = \frac{l}{2} \cos \alpha, \text{ ხოლო } EK = EL - LK.$$

ELA სამკუთხედიდან

$$EL = L \operatorname{ctg} \varphi_1 = \frac{l}{2} \cos \alpha \operatorname{ctg} \varphi_1 = \frac{10}{4} \frac{l}{2} \cos \alpha = \frac{5}{4} l \cos \alpha$$

და

$$KL = BC = l \sin \alpha.$$

მაშასადამე,

$$EK = \frac{5}{4}l \cos \alpha - l \sin \alpha = \frac{l}{2} \left(\frac{5}{2} \cos \alpha - 2 \sin \alpha \right).$$

ამრიგად,

$$\frac{\frac{5}{2} \cos \alpha - 2 \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} - 2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \quad \text{და} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{5-1}{4} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

ამოცანა 49. ცილინდრზე გადაკიდებული ბაგირის ერთ ბოლოზე მიბმულია $P = 20$ კნ წონის ტვირთი, რომელიც წონასწორობაშია ბაგირის $Q = 2$ კნ დაჭიმულობით. განესაზღვროთ ცილინდრის ბაგირის მოდების რკალის შესაბამისი α კუთხის სიდიდე, თუ ბაგირსა და ცილინდრს შორის ხახუნის კოეფიციენტი $f = 0,2$.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ (7.6) ფორმულით. გვექნება:

$$\ln \frac{2}{20} = -0,2\alpha \Rightarrow \alpha = 5 \cdot \ln 10 \approx 11,5 < 2 \cdot 2\pi$$

მაშასადამე,

$$\alpha = 11,5 < 2 \cdot 2\pi.$$

ამრიგად, ბაგირის მოდება ცილინდრზე ცოტა ნაკლებია ორ შემთხვევაზე.

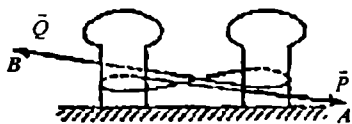
ამოცანა 50. ცილინდრზე გადაკიდებული ბაგირის ერთ ბოლოზე მობმულია $P = 20$ კნ წონის ტვირთი; ცილინდრზე ბაგირის მოდების შესაბამისი კუთხე $\alpha = 11,5$. ვიპოვოთ ბაგირის მეორე ბოლოზე მოდებული $\bar{Q}$ ძალის ის სიდიდე, რომელიც საჭიროა ტვირთის ასაწევად, თუ ხახუნის კოეფიციენტი $f = 0,2$.

ამოხსნა. მოცემულ შემთხვევაში საჭიროა გამოვიყენოთ (7.8) ფორმულა, გვექნება:

$$Q = P e^{f\alpha} = 20 \cdot e^{0,2 \cdot 11,5} \approx 200 \text{ კნ.}$$

თუ შევადარებთ მიღებულ შედეგს წინა ამოცანასთან, დავასკვნით, რომ ბაგირი წონასწორობაში იქნება, თუ $20 \text{ კნ} \leq Q \leq 200 \text{ კნ}$. როცა $Q < 20$ კნ, იწყება მოძრაობა $\bar{P}$ ძალის მხარეს, ხოლო როცა $Q > 200$ კნ – მოძრაობა $\bar{Q}$ ძალის მხარეს.

ამოცანა 51. ნავსადგომში მეზღვაური ნავს აკავებს ბაგირით, რომელსაც მიღებზე გადაკიდებს რეიანის ფორმით. ამასთან ბაგირის ერთი A ბოლო მიმაგრებულია ნავთან, ხოლო მეორე B ბოლო მეზღვაურს ხელში უკავია (ნახ. 7.10). ბაგირის თითოეულ მილზე მოდების კუთხე $\frac{5\pi}{3}$ -



ნახ. 7.10

ის ტოლია. განვსაზღვროთ ნავის მოქმედებით ბაგირში აღძრული დაჭიმულობის იმ მაქსიმალური $\bar{P}$ ძალის მნიშვნელობა, რომლის შეკავებაც შეუძლია მეზღვაურს $Q = 50$ კგ ძალით, თუ ბაგირსა და მიღებს შორის ხახუნის კოეფიციენტი $f = 0,2$.

ამოხსნა. ერთხელ შემოხვევისას მოდების საერთო კუთხე $\varphi_1 = 2 \cdot \frac{5\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$, ხოლო ორი და სამი „რეიანის“ შემთხვევაში, შესაბამისად გვექნება: $\varphi_2 = \frac{20\pi}{3}$ და $\varphi_3 = 10\pi$ გამოვიყენოთ (7.8) ფორმულა:

$$P_1 = Q \cdot e^{f\varphi_1} = 50e^{0,2 \cdot \frac{10\pi}{3}} = 404 \text{ კგ},$$

$$P_2 = Q \cdot e^{f\varphi_2} = 50e^{0,2 \cdot \frac{20\pi}{3}} = 3270 \text{ კგ},$$

$$P_3 = Q \cdot e^{f\varphi_3} = 50e^{0,2 \cdot 10\pi} = 26400 \text{ კგ}.$$

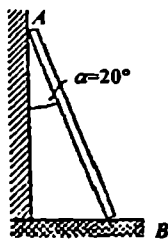
ამრიგად, რეიანის ფორმით ბაგირის მიღებზე სამჯერ გადახვევისას ბაგირსა და მიღებს შორის ხახუნის არსებობის გამო ერთ მეზღვაურს შეუძლია შეაკავოს ნავის (გემის) გაქაჩვით გამოწვეული 26,4 ტონა, ე.ი. 528-ჯერ მეტი ძალა, ვიდრე მან მოსდო ბაგირს B ბოლოზე.

7.6. სავარჯიშო ამოცანები ხახუნის არსებობის შემთხვევაში ბრტყელძალთა სისტემის წონასწორობაზე

ამოცანა 7.1. AB კიბე A წერტილით ეყრდნობა გლუვ ვერტიკალურ კედელს, ხოლო B წერტილით – მქისე პორი-

ზონტალურ იატაკს (ნახ. 7.11). განსაზღვრეთ B წერტილში კიბესა და იატაკს შორის ხახუნის f კოეფიციენტის ის უმცირესი მნიშვნელობა, როცა კიბე დარჩება წონასწორობაში, თუ კიბის წონა $G=120$ ნ.

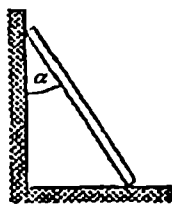
პასუხი: $f=0,2$, როცა $f \geq 0,2$ კიბე დარჩება წონასწორობაში.



ნახ. 7.11

ამოცანა 72. წინა ამოცანაში კიბესა და იატაკს შორის ხახუნის კოეფიციენტი $f=0,4$. შეუძლია თუ არა $P=70$ კგ წონის ადამიანს ავიდეს კიბის თავზე ისე, რომ კიბე დარჩეს წონასწორობის მდგომარეობაში?

პასუხი: $F_{\max} = 323$ ნ, $F_b = 272$ ნ; $F_{\max} > F_b$, ამიტომ შეუძლია ავიდეს კიბის თავზე.



ნახ. 7.12

ამოცანა 73. ერთგვაროვანი კიბე ეყრდნობა მქისე ვერტიკალურ კედელსა და იატაკს. განსაზღვრეთ α კუთხის ის მნიშვნელობები, რომლის დროსაც კიბე იქნება წონასწორობაში, თუ ხახუნის კოეფიციენტი კედელსა და იატაკთან ერთნაირია და f -ის ტოლია (ნახ. 7.12).

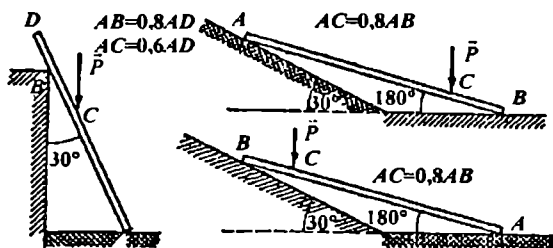
პასუხი: $\operatorname{tg} \alpha < \frac{2f}{1-f^2}$ ანდა $\operatorname{tg} \alpha < \frac{2\operatorname{tg} \varphi}{1-\operatorname{tg}^2 \varphi} = \operatorname{tg} 2\varphi \Leftrightarrow \alpha < 2\varphi$.

ამოცანა 74. $G=800$ ნ წონის ერთგვაროვანი AB ძელი ეყრდნობა A წერტილში მქისე ზედაპირს, ხოლო B წერტილში – გლუვ ზედაპირს (ნახ. 7.13, ა,ბ,გ). ძელის C წერტილში მოდებულია ვერტიკალური $P=300$ ნ ძალა. განსაზღვრეთ გლუვი საყრდენის რეაქცია, მქისე ზედაპირთან ძელის სახუნის კოეფიციენტი, რომლის დროსაც შესაძლებელია ძელის წონასწორობა. იპოვეთ აგრეთვე 3 არაგლუვი ზედაპირის სრული რეაქციის მოდული და მიმართულება.

პასუხი: ა) $R_B=363$ ნ; $f \geq 0,342$; $R_A=970$ ნ; $(R_A, A_D)=8^\circ$.

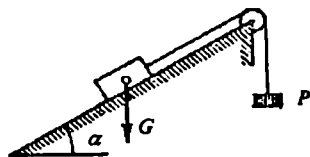
ბ) $R_n=640\text{ ჰ}$; $f \geq 0,577$; $R_A=460\text{ ჰ}$; $\bar{R}_A$ -მიმართულია ვერტიკალურად;

გ) $R_B=622\text{ ჰ}$; $f \geq 0,552$; $R_A=642\text{ ჰ}$; $(\bar{R}_A, \overrightarrow{AD}) = 43^\circ$



ნახ. 7.13

ამოცანა 7.5. განსაზღვრეთ ტვირთის P წონის მნიშვნელობა, რომელსაც წონასწორობის მდგომარეობაში უკავია დახრილ მქისე ზედაპირზე მოთავსებული G წონის ტვირთი (ნახ. 7.14), თუ α კუთხე ხახუნის ფ კუთხეზე მეტია.



ნახ. 7.14

$$\text{პასუხი: } G \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} \leq P \leq G \cdot \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}.$$

ამოცანა 7.6. პორიზონტისადმი α კუთხით დახრილ სიბრტყეზე დევს P წონის A ტვირთი, რომელიც იდეალურ B ბლოკზე გადაკიდებული ძაფით გადამებულია Q წონის ტვირთთან (ნახ. 7.15). განსაზღვრეთ, რა საზღვრებში იცვლება Q ტვირთის წონა, როცა A სხეული შეინარჩუნებს წონასწორობას, თუ სტატიკური ხახუნის კოეფიციენტი A ტვირთსა და დახრილ სიბრტყეს შორის f -ის ტოლია.

$$\text{პასუხი: } P(\sin \alpha - f \cos \alpha) \leq Q \leq P(\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

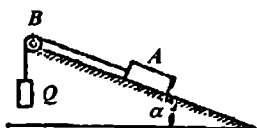
ამოცანა 7.7. r რადიუსიანი A ლილვი და R რადიუსიანი B შიგნით ერთმანეთთან ხისტად არის მიმაგრებული და მოდებულია წყვილძალა M მომენტით (ნახ. 7.16). A ლილვს ხუნდები აწევა Q ძალით. განსაზღვრეთ P ძალის უმცირესი

ხუნდები აწეება Q ძალით. განსაზღვრეთ P ძალის უმცირესი მნიშვნელობა, რომელიც საჭიროა მოედოთ B შიკვის ორ სხვა სამუხრუჭე ხუნდზე, იმისათვის, რომ ღილევი იმყოფებოდეს წონასწორობის მდგომარეობაში, თუ ღილეზე სტატიკური ხახუნის კოეფიციენტი f_1 -ის ტოლია, ხოლო შიკვზე – f_2 -ისა.

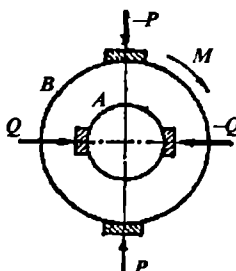
პასუხი: $P = \frac{M - 2f_1 R Q}{2f_2 R}$, როცა $M > 2f_1 R Q$.

ამოცანა 7.8. $AB=40$ სმ სიგრძის ერთგვაროვანი ღერო A ბოლოთი ეყრდნობა ხორკლიან კედელს და წონასწორობაშია შეკაეებული CD უწონო ძაფის საშუალებით (ნახ. 7.17). განსაზღვრეთ ღეროსა და კედელს შორის ხახუნის სტატიკური კოეფიციენტი, თუ $BC=15$ სმ, $AD=25$ სმ, ხოლო წონასწორობის შემთხვევაში α კუთხის უმცირესი მნიშვნელობა 45° -ის ტოლია.

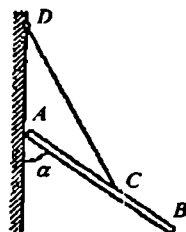
პასუხი: $f=0,646$.



ნახ. 7.15

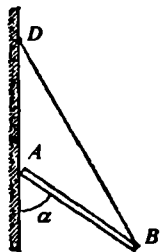


ნახ. 7.16



ნახ. 7.17

ამოცანა 7.9. $G=10$ კნ წონის ერთგვაროვანი AB ძელი წონასწორობაშია უწონო BD ძაფის საშუალებით. ძელი კედელთან ადგენს α კუთხეს, ამასთან $AD=AB$. განსაზღვრეთ α კუთხის ზღვრული მნიშვნელობისათვის ძაფის დაჭიმულობა და კედლის ნორმალური რეაქცია, თუ ძელსა და კედელს შორის ხახუნის კოეფიციენტი $f=0,5$ (ნახ. 7.18).



ნახ. 7.18

პასუხი: $N=R_A \cos \varphi=4$ კნ; $S=5,97$ კნ; $R_A=4,47$ კნ.

ამოცანა 7.10. $P=32$ ნ წონის ერთგვაროვანი გლუვი სოლი ეყრდნობა ერთნაირ A და B პრიზმულ სხეულებს (ნახ. 7.19). A და B სხეულებსა და ჰორიზონტალურ სიბრტყეებს შორის სტატიკური ხახუნის კოეფიციენტი $f=0,6$, ამასთან $2\alpha=30^\circ$. განსაზღვრეთ A სხეულის უმცირესი Q წონა, როცა სისტემა წონასწორობაშია.

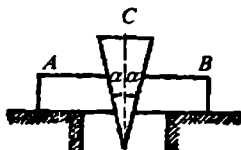
პასუხი: $Q=84$ ნ.

ამოცანა 7.11. AD და BD ღეროები ერთმანეთთან და A და B ცოციებთან ცილინდრული სახსრებითაა შეერთებული (ნახ. 7.20). თითოეული ღეროს წონა $P=20$ ნ, ხოლო ცოციების წონა $Q=5$ ნ, ცოციებსა და ჰორიზონტალურ სიბრტყეს შორის ხახუნის სტატიკური კოეფიციენტი $f=0,4$, $AD=BD$. A , B , D სახსრებში უგულებელყოთ ხახუნი და განესაზღვროთ φ კუთხის უდიდესი მნიშვნელობა, როცა სისტემა წონასწორობაშია.

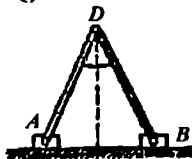
პასუხი: $\varphi=90^\circ$.

ამოცანა 7.12. OA მრუდმხარა და AB ბარბაცა ერთნაირი სიგრძისა და P წონის ერთგვაროვან ღეროებია (ნახ. 7.21). განსაზღვრეთ მექანიზმის ვერტიკალურ სიბრტყეში მდებარეობისას φ კუთხის ის უმცირესი მნიშვნელობა, როცა მექანიზმი წონასწორობაში იმყოფება, თუ Q წონის ცოციასა და მის მიმმართველს შორის ხახუნის სტატიკური კოეფიციენტი f -ის ტოლია.

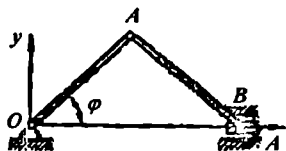
პასუხი: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{P}{2f(P+Q)}$.



ნახ. 7.19



ნახ. 7.20



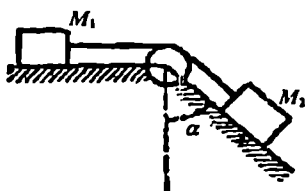
ნახ. 7.21

ამოცანა 7.13. ერთნაირი წონის M_1 და M_2 ტვირთები ერთ-მანეთთან ბლოკზე გადაკიდებული ძაფით არის გადაბმული და მოთავსებული არაგლუვ სიბრტყეებზე (ნახ. 7.22). ტვირთებსა და სიბრტყეებს შორის ხახუნის სტატიკური კოეფიციენტი $f=0,5$. უგულებელყოთ ბლოკზე ხახუნი და განესაზღვროთ წონასწორობის შექმნევაში α კუთხის უმცირესი მნიშვნელობა.

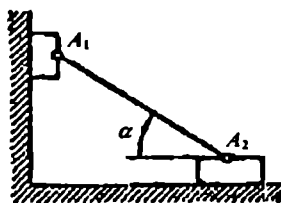
პასუხი: $\alpha = \arcsin 0,6$.

ამოცანა 7.14. $P_1=30$ ნ წონის A_1 ტვირთსა და ვერტიკალურ კედელს შორის ხახუნის სტატიკური კოეფიციენტი $f_1=0,4$, ხოლო $P_2=50$ ნ წონის A_2 ტვირთსა და ჰორიზონტალურ სიბრტყეს შორის – $f_2=0,5$ (ნახ. 7.23). A_1 და A_2 ტვირთებთან უწონო დერო სახსრებითაა შეერთებული. განსაზღვრეთ α კუთხის ის უმცირესი მნიშვნელობა, როცა სისტემა წონასწორობაში იქნება.

პასუხი: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_1 - f_1 f_2 P_2}{f_2 (P_1 + P_2)} = \frac{1}{2}$, $\alpha = 26^\circ 34'$.



ნახ. 7.22



ნახ. 7.23

8. ძალთხრახანი. ნებისმიერი სივრცითი ძალთა სისტემის დაყვანა უმარტივეს სახეში

8.1. ნებისმიერი სივრცითი ძალთა სისტემის ინვარიანტები

განვიხილოთ მყარ სხეულზე მოდებული სივრცეში მდებარე ნებისმიერი $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ ძალთა სისტემა. მისი ნაკრები ვექტორი აღენიშნოთ $\vec{R}$ -ით, ხოლო ნაკრები ვექტორული მომენტი რომელიმე O წერტილის მიმართ — $\vec{M}_O$ -ით. ნაკრები ვექტორის გეგმილები დეკარტის კოორდინატთა ღერძებზე იყოს R_x, R_y, R_z , ხოლო ნაკრები ვექტორული მომენტისა M_x, M_y, M_z . ძალთა ნებისმიერი სისტემა სავსებით განსაზღვრულია, თუ ვიცით ძალთა სისტემის $R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z$ კოორდინატები.

მოცემული ძალთა სისტემის უმარტივეს სახეზე დაყვანისას ვირჩევთ დაყვანის რაიმე O ცენტრს, ამიტომ ბუნებრივია, ისეთი სიდიდეების შემოტანაც, რომელთა მნიშვნელობები არ იქნება დამოკიდებული დაყვანის ცენტრის არჩევაზე.

განსაზღვრება. სტატიკაში განსახილველ ძალთა სისტემისათვის ისეთ სიდიდეებს, რომლებიც არ იცვლება დაყვანის ცენტრის ცვლილების შედეგად, ინვარიანტებს უწოდებენ. რადგან დაყვანის ნებისმიერი ცენტრის მიმართ ნაკრები ვექტორი გამოისახება მოცემული ძალთა სისტემის გეომეტრიული ჯამით, ამიტომ მისი მოდული და მიმართულება არ არის დამოკიდებული დაყვანის ცენტრის არჩევაზე. მაგალითად, დაყვანის O ცენტრის მიმართ ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორი და ახალი C ცენტრის მიმართ ნაკრები $\vec{R}_1$ ვექტორი, ერთი და იმავე ძალთა სისტემის გეომეტრიული ჯამი არის. ამიტომ

$$\vec{R} = \vec{R}_1 = \text{in var.} \quad (8.1)$$

ამრიგად, ძალთა სისტემის ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორი სტატიკის ვექტორული ინვარიანტია. ნაკრები ვექტორის მოდულის კვადრატს სტატიკის პირველ ინვარიანტს უწოდებენ და აღნიშნავენ I_1 სიმბოლოთი, ე.ი.

$$I_1 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2. \quad (8.2)$$

რაც შეეხება რაიმე ცენტრის მიმართ ძალთა სისტემის ნაკრებ ვექტორულ მომენტს, ის დამოკიდებულია დაყვანის ცენტრის არჩევაზე (იხ. 3.8 პარაგრაფი) და დაყვანის ახალი ცენტრის მიმართ განისაზღვრება ფორმულით (იხ. (3.12) ფორმულა):

$$\vec{M}_C = \vec{M}_O + \vec{CO} \times \vec{R}, \quad (8.3)$$

სადაც $\vec{M}_O$ და $\vec{M}_C$ - ნაკრები ვექტორული მომენტებია O და C წერტილების მიმართ. (8.3) ტოლობაში $\vec{CO} \times \vec{R}$ შესაყრები არის ძველ O ცენტრზე მოდებული ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორის ვექტორული მომენტი ახალი C ცენტრის მიმართ.

მეორე სკალარული ინვარიანტის მისაღებად გავამრავლოთ (8.3) ტოლობის ორივე მხარე სკალარულად ნაკრებ $\vec{R}$ ვექტორზე. მივიღებთ:

$$\vec{M}_C \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} + (\vec{CO} \times \vec{R}) \cdot \vec{R}.$$

რადგან $(\vec{CO} \times \vec{R})$ ვექტორი $\vec{R}$ ვექტორის მართობულია, ამიტომ მათი სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია. გვექნება:

$$\vec{M}_C \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = \text{in var}. \quad (8.4)$$

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის თვისების თანახმად (8.4) შეიძლება ჩაეწვით:

$$M_{Cx}R_x + M_{Cy}R_y + M_{Cz}R_z = M_{Ox}R_x + M_{Oy}R_y + M_{Oz}R_z,$$

სადაც M_{Cx} , M_{Cy} , M_{Cz} არის $\vec{M}_C$ ვექტორის გეგმილები შესაბამის ღერძზე.

(8.4) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ ძველი O და ახალი C ცენტრების მიმართ ნაკრები ვექტორული მომენტების სკალარული ნამრავლი ნაკრებ $\vec{R}$ ვექტორზე არ არის დამოკიდებული დაყვანის ცენტრის არჩევაზე, ე.ი. ნებისმიერი სივრცითი ძალთა სისტემის მეორე ინვარიანტია და I_2 სიმბოლოთი აღინიშნება. მაშასადამე,

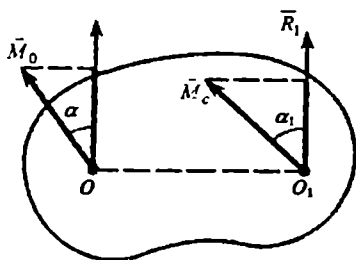
$$I_2 = \vec{R} \cdot \vec{M}_O = R_x M_{Ox} + R_y M_{Oy} + R_z M_{Oz}. \quad (8.5)$$

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის თვისების თანახმად (8.4) ტოლობა შეიძლება ჩაეწეროს შემდეგი სახითაც:

$$M_C \cdot R \cdot \cos \alpha_1 = M_0 \cdot R \cdot \cos \alpha,$$

სადაც $\alpha_1 = (\vec{M}_C, \vec{R})$, $\alpha = (\vec{M}_0, \vec{R})$. თუ $\vec{R} \neq 0$ (ნახ. 8.1), მაშინ გვექნება:

$$M_C \cdot \cos \alpha_1 = M_0 \cos \alpha. \quad (8.6)$$



ნახ. 8.1

აქ თითოეული ნამრავლი არის ნაკრები მომენტის გეგმილი ნაკრები ვექტორის მიმართულებაზე. (8.6) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ ნაკრები ვექტორული მომენტის გეგმილი ნაკრები ვექტორის მიმართულებაზე არ არის დამოკიდებული დაყვანის ცენტრის არჩევაზე.

ამ ფაქტის საფუძველზე შეიძლება ვამტკიცოთ, რომ დაყვანის იმ ცენტრის მიმართ, რომლისთვისაც ნაკრები ვექტორული მომენტი და ნაკრები ვექტორი მიმართული იქნება ერთი წრფის გასწვრივ, მაშინ ნაკრები ვექტორული მომენტის მოდული იქნება მინიმალური. ამ შემთხვევაში ნაკრები ვექტორული მომენტის მოდული და მისი გეგმილი ნაკრები ვექტორის მიმართულებაზე ერთმანეთის ტოლია.

(8.6) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ნაკრები ვექტორული მომენტის გეგმილი ნაკრებ ვექტორზე ინვარიანტია. თუ ნაკრები ვექტორული მომენტის გეგმილს ნაკრები ვექტორის მიმართულებაზე აღვნიშნავთ M^* -ით, ე.ი. $M^* = M_0 \cdot \cos \alpha$, მაშინ

$$M^* = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_0}{R} = \frac{R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}}. \quad (8.7)$$

ამ ფორმულით გამოითვლება ნებისმიერი სიერცითი ძალთა სისტემის ნაკრები მომენტის მინიმალური მნიშვნელობა.

თუ მხედველობაში მივიღებთ (8.2) და (8.5) ფორმულებს, ე.ი. პირველ და მეორე ინვარიანტებს, მივიღებთ:

$$M^* = \frac{I_2}{\sqrt{I_1}}. \quad (8.8)$$

ცხადია, ვექტორული $\vec{M}_0$ მომენტის გეგმილი ნაკრები ვექტორის მიმართულებაზე (M') ინვარიანტების ფარდობაა, ამიტომ ისიც ინვარიანტია.

ამრიგად, ნებისმიერი სივრცითი ძალთა სისტემისათვის გვაქვს ორი ინვარიანტი: პირველი ინვარიანტი (ვექტორული) არის მოცემული ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი, სკალარული კი — მისი მოდულის კვადრატი, მეორე (სკალარულ) ინვარიანტი ნაკრები ვექტორული მომენტისა და ნაკრები ვექტორის სკალარული ნამრავლი, და, როგორც შედეგი, ნაკრები ვექტორული მომენტის გეგმილია ნაკრები ვექტორის მიმართულებაზე.

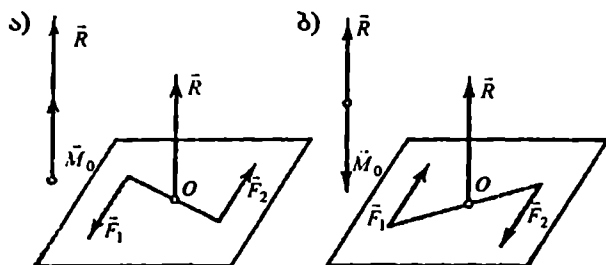
8.2. ნებისმიერი სივრცითი ძალთა სისტემის დაყვანა ძალთხრახნამდე

ძალთა სისტემის დაყვანის შედეგად (იხ. 5.2 პარაგრაფი) შეიძლება მივიღოთ ერთი $\vec{R}$ ძალა და ერთი $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ წყვილძალა $\vec{M}_0$ მომენტით. როცა წყვილძალის სიბრტყე $\vec{R}$ ძალის პერპენდიკულარულია, ე.ი. $\vec{R}$ და $\vec{M}_0$ ვექტორები კოლინეარული ვექტორებია, ასეთ შემთხვევაში ძალთა სისტემა დაიყვანება ძალთხრახნამდე (დინამამდე).

განსაზღვრება. $\vec{R}$ ძალისა და $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ წყვილძალის ერთობლიობას, რომლის ვექტორული $\vec{M}_0$ მომენტი $\vec{R}$ ვექტორის პარალელურადაა მიმართული, ძალთხრახნინი (დინამა) ეწოდება. დინამას მოქმედების წრფეს ცენტრალური ხრახნული ღერძი ეწოდება.

განასხვავებენ მარჯვენა და მარცხენა ძალთხრახნს (ნახ. 8.2, ა, ბ). 8.2, ა ნახაზზე ნაჩვენებია მარჯვენა ძალთხრახნი, რომელიც შედგება ძალთა სისტემის ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორისა და $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ წყვილძალისგან, რომლის $\vec{M}_0$ მომენტი ძალთა სისტემის ნაკრები მომენტის ტოლია. 8.2, ბ ნახაზზე ნაჩვენებია მარცხენა ძალთხრახნი, რომელიც იმავე ვექტორებისგან შედგება.

შეიძლება დაისვას კითხვა – რა შემთხვევაში შეიძლება დავიყუანოთ ძალთა სისტემა ძალთხრახნამდე? ამ კითხვას პასუხს გაცემს შემდეგი თეორემა:



ნახ. 8.2

თუ მეორე სტატიკური ინვარიანტი არ უდრის ნულს, მაშინ ძალთა სისტემა შეიძლება დავიყუანოთ ძალთხრახნამდე.

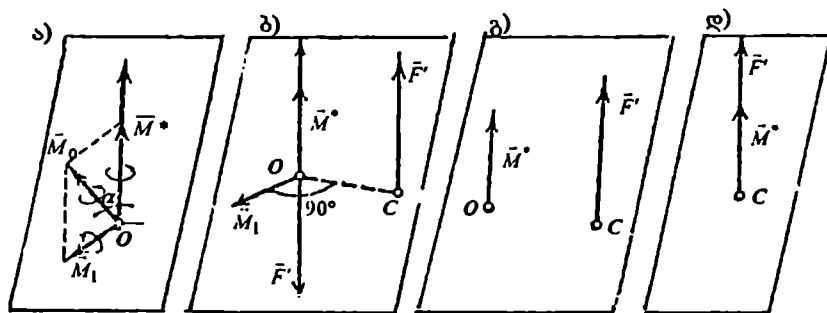
დამტკიცება. ეთქვათ ძალთა სისტემა ნებისმიერი O წერტილის მიმართ დაიყვანება ერთ ძალამდე, რომელიც ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორის ტოლია და წვეილძალამდე $\vec{M}_0$ მომენტით, რომელიც ძალთა სისტემის O წერტილის მიმართ ნაკრები მომენტის ტოლია. თეორემის პირობის ძალით $I_2 = \vec{R} \cdot \vec{M}_0 \neq 0$, ამიტომ $\vec{R} \neq 0$ და $\vec{M}_0 \neq 0$ და $\vec{R} \perp \vec{M}_0$. დაეშალოთ $\vec{M}_0$ ვექტორი $\vec{M}_1$ და $\vec{M}^*$ ორ მდგენელად, რომელთაგან $\vec{M}^*$ მიმართულია ნაკრები ვექტორის გასწვრივ, ხოლო $\vec{M}_1$ – მის მართობულად (ნახ. 8.3, ა), ე.ი.

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_1 + \vec{M}^*, \quad (8.9)$$

სადაც $M_1 = M_0 \sin \alpha$, $M^* = M_0 \cos \alpha$. M_1 მდგენელი არის მის პერპენდიკულარულ სიბრტყეში მდებარე $(\vec{F}, \vec{F}')$ წვეილძალის მომენტი.

$\vec{F}$ და $\vec{F}'$ ძალები შეეარჩიოთ ისე, რომ მართებული იყოს ტოლობები: $\vec{F} = \vec{R}$, $\vec{F}' = \vec{R}$, $|\vec{F}| |\vec{F}'| = |\vec{R}|$. ამასთანავე $\vec{F}$ ძალა მოედოთ დაყვანის O ცენტრზე (ნახ. 8.3, ბ). ცხადია, ძალთა სისტემა $(\vec{R}, \vec{F}) \equiv 0$, ამიტომ ისინი შეიძლება გადავაგდოთ

(ნახ. 8.3, გ). რადგან $\vec{M}^*$ თავისუფალი ვექტორია, ამიტომ ის O წერტილიდან შეიძლება გადავიტანოთ C წერტილში (ნახ. 8.3, დ). ამრიგად, მოცემული ძალთა სისტემა დაიყვანეთ C წერტილზე მოდებული ერთ $\vec{F}' = \vec{R}$ ძალამდე და წყვილ-ძალამდე $\vec{M}^*$ მომენტი (ნახ. 8.3, დ), რომელიც მდებარეობს $\vec{F}'$ ძალის პერპენდიკულარულ სიბრტყეში, ე.ი. მივიღებთ ძალთხრახნს (დინამა). ამით თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 8.3.

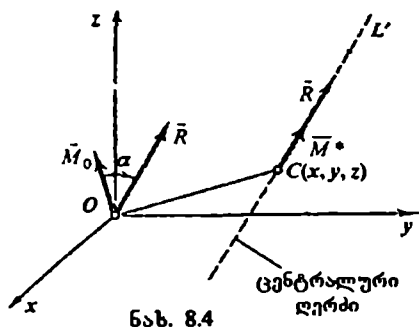
(8.8) ფორმულიდან ჩანს, რომ დადებით მქორე ინვარიანტს ($I_2 > 0$) შეესაბამება მარჯვენა ძალთხრახნი, ხოლო უარყოფით მქორე ინვარიანტს ($I_2 < 0$) – მარცხენა ძალთხრახნი.

$C=C(x,y,z)$ წერტილი არ არის ერთადერთი, სადაც ძალთა სისტემა დაიყვანება ძალთხრახნამდე. მართლაც, ძალა შეიძლება გადაიტანოთ თავის ფუძის გასწვრივ ნებისმიერ წერტილში, ხოლო წყვილძალის მომენტი თავისუფალი ვექტორია. მაშასადამე, C წერტილზე გამავალი $\vec{F}' = \vec{R}$ ძალის მოქმედების წრფის ყოველი წერტილი გამოდგება დაყვანის ახალ ცენტრად, რომ ძალთა სისტემა დაიყვანოთ ძალთ-ხრახნამდე. ამ წრფეს ცენტრალური ანუ ცენტრალური ხრახნული ღერძი ეწოდება.

ახლა ვიპოვოთ ცენტრალური ღერძის განტოლება. ვთქვათ, C ცენტრალური ღერძის წერტილია (ნახ. 8.4). მაშინ

ამ წერტილისთვის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები ვექტორული მომენტი უნდა იყოს კოლინეარული. (8.3) ფორმულის საფუძველზე C წერტილის მიმართ ნაკრები ვექტორული მომენტი შეიძლება ჩაეწეროს შემდეგი სახით:

$$\vec{M}^* = \vec{M}_0 - \vec{OC} \times \vec{R}.$$



ნახ. 8.4

მაშინ ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორისა და C წერტილის მიმართ ნაკრები $\vec{M}^*$ მომენტის კოლინეარობის პირობა შეიძლება ჩაეწეროს შემდეგი სახით:

$$p \vec{R} = \vec{M}^*,$$

სადაც p - ძალთხრახნის პარამეტრია, რომელსაც სიგრძის განზომილება აქვს. ამრიგად,

$$p \vec{R} = \vec{M}_0 - \vec{OC} \times \vec{R}. \quad (8.10)$$

(8.10) განტოლებაში შემავალი ვექტორები ჩაეწეროს ასე:

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}, \quad \vec{M}_0 = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}, \quad \vec{OC} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

მაშინ (8.10) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$p(R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}) = (M_x - yR_z + zR_y) \vec{i} + \\ + (M_y - zR_x + xR_z) \vec{j} + (M_z - xR_y + yR_x) \vec{k}.$$

გავუტოლოთ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ერთეულოვანი ვექტორების კოეფიციენტები ერთმანეთს, გვექნება:

$$\begin{aligned} pR_x &= M_x - (yR_z - zR_y), \\ pR_y &= M_y - (zR_x - xR_z), \\ pR_z &= M_z - (xR_y - yR_x). \end{aligned} \quad (8.11)$$

ამ განტოლებიდან მივიღებთ საძიებელი წრფის განტოლებას, გვექნება:

$$\frac{M_x - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_y - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_z - (xR_y - yR_x)}{R_z}. \quad (8.12)$$

ამ განტოლებას ცენტრალური ღერძის განტოლებას უწოდებენ, ხოლო წრევს ცენტრალურ ღერძს.

8.3. ნებისმიერი – სივრცითი ძალთა სისტემის დაყვანა უმარტივეს სახემდე

სივრცეში მდებარე ნებისმიერი $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ ძალთა სისტემა ზოგად შემთხვევაში შეიძლება დაიყვანოს სხეულის რომელიმე O წერტილზე მოდებულ ერთ ძალამდე, რომელიც სისტემის ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორის ტოლია და ერთ წყვილძალამდე, რომლის ვექტორული მომენტი ტოლია დაყვანის O ცენტრის მიმართ სისტემის ნაკრები ვექტორული $\vec{M}_O$ მომენტისა (იხ. 5.2 პარაგრაფი), ე.ი.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{R}, \vec{M}_O), \quad (8.13)$$

სადაც

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \sum_{k=1}^n \vec{F}_k; \\ \vec{M}_O &= \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Oxyz კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე $\vec{R}$ ვექტორის გეგმილები, მოდული და მიმართულება განისაზღვრება (3.20), (3.19) და (3.21) ფორმულებით, ხოლო $\vec{M}_O$ ვექტორისა – (3.23), (3.22) ან (3.24) და (3.25) ფორმულებით.

სივრცითი ძალთა სისტემის შეკრებისას (ძალთა სისტემის O ცენტრზე დაყვანისას) შესაძლებელია შემდეგი შემთხვევები:

1. თუ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი არ უდრის ნულს, ხოლო ნაკრები ვექტორული მომენტი დაყვანის O ცენტრის მიმართ ნულის ტოლია:

$$\vec{R} \neq 0, \quad \vec{M}_O = 0,$$

მაშინ სისტემა დაიყვანება დაყვანის O ცენტრში მოდებულ $\vec{R}$ ტოლქმედამდე, რომელიც ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორის ტოლია,

ე.ი. $\vec{R}^* = \vec{R}$. $\vec{R}$ ტოლქმედის მოქმედების წრფის - ცენტრალური ღერძის განტოლება იქნება:

$$\frac{x}{R_x} = \frac{y}{R_y} = \frac{z}{R_z}, \quad (8.15)$$

სადაც x, y, z არის ცენტრალური ღერძის მიმდინარე კოორდინატები, ხოლო კოორდინატთა სათავე ემთხვევა დაყვანის O ცენტრს.

2. თუ სისტემის ნაკრები ვექტორი უდრის ნულს, ხოლო დაყვანის O ცენტრის მიმართ ნაკრები ვექტორული მომენტი არ უდრის ნულს,

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{M}_0 \neq 0, \quad (8.17)$$

მაშინ სისტემა წყვილდალის ტოლფასია, რომლის მომენტი ნაკრები ვექტორული $\vec{M}_0$ მომენტის ტოლია.

3. თუ ნაკრები ვექტორი და დაყვანის O ცენტრის მიმართ ნაკრები ვექტორული მომენტი არ უდრის ნულს და ურთიერთ-მართობულანია ანუ

$$\vec{R} \neq 0, \quad \vec{M}_0 \neq 0; \quad \vec{R} \perp \vec{M}_0, \quad (8.18)$$

მაშინ სისტემა ტოლფასია $\vec{R}^*$ ტოლქმედისა, რომელიც სისტემის ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორის ტოლია, ე.ი. $\vec{R}^* = \vec{R}$. დაყვანის O ცენტრიდან ტოლქმედის ფუძემდე (სისტემის ცენტრალურ ღერძამდე) d მანძილი განისაზღვრება ფორმულით:

$$d = \frac{|\vec{M}_0|}{R}. \quad (8.19)$$

ცენტრალური ღერძის განტოლება მოიცემა (8.12) ფორმულით.

თუ (8.18) ფორმულათა პირობები მართებულია, მაშინ ტოლქმედის მოქმედების ფუძე (წრფე) განისაზღვრება რომელიმე ორი განტოლებით შემდეგი სამი განტოლებიდან:

$$yR_z - zR_y = M_x; \quad zR_x - xR_z = M_y; \quad xR_y - yR_x = M_z, \quad (8.20)$$

სადაც x, y, z ცენტრალური ღერძის მიმდინარე კოორდინატებია, ხოლო კოორდინატთა სათავე ემთხვევა დაყვანის O ცენტრს.

4. თუ ნაკრები ვექტორი და დაყვანის O ცენტრის მიმართ ნაკრები ვექტორული მომენტი ნულისგან განსხვავებული ურთიერთმართობულია:

$$\vec{R} \neq 0; \quad \vec{M}_O \neq 0;$$

$$R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z \neq 0, \quad (8.21)$$

მაშინ სისტემა დაიყვანება ძალთხრახნზე, ე.ი. ტოლფასია ძალისა და წყვილძალისა, ძალა ტოლია ნაკრები ვექტორისა, რომელიც წყვილძალის სიბრტყის მართობულია.

ცენტრალური ღერძიდან დაყვანის O ცენტრამდე მანძილი განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$d = \frac{|M_O \cdot \sin \alpha|}{R}. \quad (8.22)$$

ცენტრალური ღერძის განტოლება განისაზღვრება (8.12) ფორმულით. ძალხრახნის პარამეტრი განისაზღვრება ფორმულით:

$$p = \frac{|M_O| \cos(\vec{R}, \wedge \vec{M}_O)}{R}, \quad (8.23)$$

ამასთან, თუ $p > 0$, მაშინ გვექნება მარჯვენა ძალთხრახნი, წინააღმდეგ შემთხვევაში - მარცხენა.

5. თუ ნაკრები ვექტორი და დაყვანის O ცენტრის მიმართ ნაკრები მომენტი უდრის ნულს ანუ

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{M}_O = 0, \quad (8.24)$$

მაშინ ძალთა სისტემა წონასწორობაშია.

ამოცანების ამოხსნის გეგმა. 1. ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა, თუ სისტემა ამოცანის პირობაში არ არის მოცემული.

ამოცანის ამოხსნის გამარტივების მიზნით საჭიროა კოორდინატთა ღერძები მივმართოთ ისე, რომ ძალთა მოქმედების ფუძეთა ერთი ნაწილი კვეთდეს კოორდინატთა ღერძებს, ხოლო მეორე ნაწილი იყოს ამ ღერძების პარალელური.

2. (3.20) ფორმულების მიხედვით ვიპოვოთ არსებული კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორის გეგმილები.

3. (3.19) და (3.21) ფორმულებით განესაზღვროთ სისტემის ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორის მოდული და მიმართულება.

4. (3.23) ან (3.24) ფორმულების საშუალებით განესაზღვროთ კოორდინატა სათავის მიმართ ნაკრები ვექტორული $\vec{M}_0$ მომენტის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე.

5. (3.22) და (3.25) ფორმულების მიხედვით ვიპოვოთ კოორდინატთა სათავის მიმართ ნაკრები ვექტორული $\vec{M}_0$ მომენტის მოდული და მიმართულება.

6. თუ $\vec{R} \neq 0$, მაშინ მოცემულ ძალთა სისტემას აქვს ცენტრალური ღერძი, რომლის განტოლება იქნება:

ა) იმ შემთხვევაში, როცა $M_0=0$, მაშინ (8.15)-ის სახით;

ბ) იმ შემთხვევაში, როცა $I_2=R_xM_x+R_yM_y+R_zM_z=0$, მაშინ (8.20)-ის სახით;

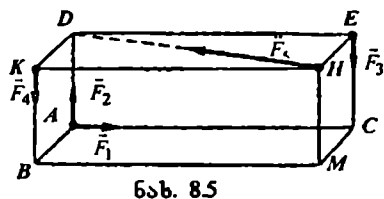
გ) იმ შემთხვევაში, როცა $R_xM_x+R_yM_y+R_zM_z \neq 0$, მაშინ (8.12)-ის სახით.

7. მანძილი ცენტრალური ღერძიდან კოორდინატთა სათავემდე განესაზღვროთ (8.19) ან (8.22) ფორმულებით.

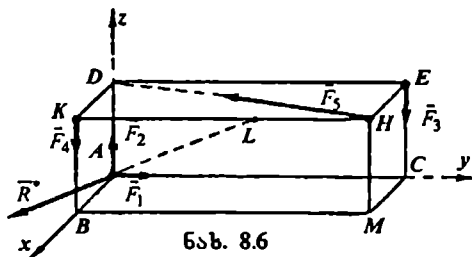
8.4. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები ნებისმიერი სივრცითი ძალთა სისტემის უმარტივეს სახემდე დაყვანაზე

ამოცანა 52. მართკუთხა პარალელებიპედის A, K, E, H წვეროებზე მოდებულია $F_1=F_2=F_3=F_4=F$; $F_5=3F$ ძალები (ნახ. 8.5). დაიყვანოთ სისტემა უმარტივეს სახემდე, თუ $AB=DK=a$; $AC=2\sqrt{2}a$.

ამოხსნა. ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა ისე, როგორც 8.6 ნახაზზეა ნაჩვენები.



ნახ. 8.5



ნახ. 8.6

2. (3.20) ფორმულებით ვიპოვოთ ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორის გეგმილები შერჩეული კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე.

$$R_x = \sum F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} + F_{5x};$$

$$R_y = \sum F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} + F_{5y};$$

$$R_z = \sum F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + F_{4z} + F_{5z};$$

$$R_x = -F_5 \cdot \frac{DK}{DH} = -3F \cdot \frac{a}{3a} = -F;$$

$$R_y = F_1 - F_5 \cdot \frac{HK}{HD} = F - 3F \cdot \frac{2\sqrt{2}a}{3a} = -1,82F;$$

$$R_z = F_2 - F_3 - F_4 = -F.$$

ამრიგად,

$$R_x = -F; \quad R_y = -1,82F; \quad R_z = -F.$$

3. განვსაზღვროთ ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორის სიდიდე და მიმართულება (3.19) და (3.21) ფორმულებით:

$$R = \sqrt{(-F)^2 + (-1,82F)^2 + (-F)^2} = 2,3F;$$

$$\cos(\vec{R}, \hat{i}) = \frac{R_x}{R} = -0,43; \quad \cos(\vec{R}, \hat{j}) = \frac{R_y}{R} = -0,49;$$

$$\cos(\vec{R}, \hat{k}) = \frac{R_z}{R} = -0,43.$$

4. ვიპოვოთ კოორდინატთა სათავეს მიმართ ნაკრები ვექტორული $\vec{M}_0$ მომენტის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე:

$$M_x = \sum M_x(\vec{F}_k) = M_x(\vec{F}_1) + M_x(\vec{F}_2) + M_x(\vec{F}_3) + M_x(\vec{F}_4) + M_x(\vec{F}_5);$$

$$M_y = \sum M_y(\vec{F}_k) = M_y(\vec{F}_1) + M_y(\vec{F}_2) + M_y(\vec{F}_3) + M_y(\vec{F}_4) + M_y(\vec{F}_5);$$

$$M_z = \sum M_z(\vec{F}_k) = M_z(\vec{F}_1) + M_z(\vec{F}_2) + M_z(\vec{F}_3) + M_z(\vec{F}_4) + M_z(\vec{F}_5);$$

$$M_x(\vec{F}_1) = M_x(\vec{F}_2) = M_x(\vec{F}_4) = 0; \quad M_x(\vec{F}_3) = -F_3 \cdot AC = -2\sqrt{2}aF;$$

$$M_x(\vec{F}_5) = F_5 \cdot \cos(\angle HDE) \cdot AD = 2\sqrt{2}aF$$

მაშინ,

$$M_x = -2\sqrt{2}aF + 2\sqrt{2}aF = 0; \quad M_y(\vec{F}_1) = M_y(\vec{F}_2) = M_y(\vec{F}_3) = 0;$$

$$M_y(\vec{F}_4) = F_4 \cdot AB = aF; \quad M_y(\vec{F}_5) = -F_5 \cdot \cos(\angle KDH) \cdot AD = -aF,$$

მაშასადამე,

$$M_y = aF - aF = 0; \quad M_z(\vec{F}_1) = M_z(\vec{F}_2) = M_z(\vec{F}_3) = M_z(\vec{F}_4) = M_z(\vec{F}_5) = 0.$$

ამრიგად, $M_x = M_y = M_z = 0$.

5. განვსაზღვროთ ნაკრები ვექტორული მომენტის სიდიდე და მიმართულება (3.22) და (3.25) ფორმულებით. მივიღებთ: $M_0 = 0$.

ამრიგად, მოცემულ შემთხვევაში საქმე გვაქვს სივრცითი ძალთა სისტემის ცენტრზე დაყვანის პირველ (9.15) შემთხვევასთან: $\vec{R} \neq 0$, $\vec{M}_0 = 0$, ე.ი. სისტემა ტოლფასია $\vec{R}^*$ ტოლქმედისა, რომელიც მოდებულია კოორდინატთა A სათავეზე და ნაკრები ვექტორის ტოლია.

6. ვიპოვოთ სისტემის ცენტრალური ღერძის განტოლება – $\vec{R}^*$ ტოლქმედის მოქმედების წრფის განტოლება (9.15) ფორმულით:

$$\frac{x}{R_x} = \frac{y}{R_y} = \frac{z}{R_z}.$$

მივიღებთ: $y = 1,82x$; $z = 1,82x$. ეს წრფე გადის კოორდინატთა A სათავეზე და L წერტილზე (ნახ. 8.6).

ამოცანა 53. მართკუთხა პარალელეპიპედის D, K და E წერტილებზე მოდებულია სამი ძალა: $F_1 = F_2 = F_3 = Q$ (ნახ. 8.7).

დავიყვანოთ სისტემა უმარტივეს სახემდე, თუ $AB = AD = a$, $AK = 2a$.

ამოხსნა. 1. ავირჩიოთ კოორდინატთა Kxyz სისტემა, როგორც 8.8 ნახაზზეა ნაჩვენები

2. ვიპოვოთ ნაკრები ვექტორის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე:

$$R_x = \sum F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = F_3 = Q;$$

$$R_y = \sum F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = F_1 = Q;$$

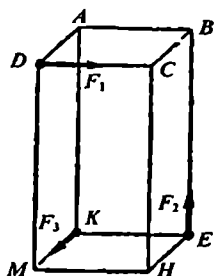
$$R_z = \sum F_{iz} = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} = F_2 = Q.$$

3. განვსაზღვროთ ნაკრები ვექტორის სიდიდე და მიმართულება:

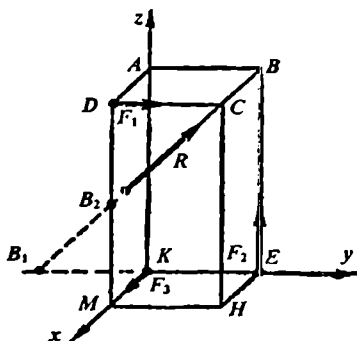
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \quad R = \sqrt{3} \cdot Q;$$

$$\cos(\vec{R}, \hat{i}) = \cos(\vec{R}, \hat{j}) = \cos(\vec{R}, \hat{k}) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4. ვიპოვოთ კოორდინატა სათავის მიმართ აღებული ნაკრები ვექტორული მომენტის გეგმილები კოორდინატა ღერძებზე:



ნახ. 8.7



ნახ. 8.8

$$M_x = \sum M_x(\vec{F}_k) = M_x(\vec{F}_1) + M_x(\vec{F}_2) + M_x(\vec{F}_3) = \\ = -F_1 \cdot 2a + F_2 \cdot a + 0 = -a \cdot Q;$$

$$M_y = \sum M_y(\vec{F}_k) = M_y(\vec{F}_1) + M_y(\vec{F}_2) + M_y(\vec{F}_3) = 0;$$

$$M_z = \sum M_z(\vec{F}_k) = M_z(\vec{F}_1) + M_z(\vec{F}_2) + M_z(\vec{F}_3) = F_1 \cdot a = a \cdot Q.$$

5. განესაზღვროთ კოორდინატთა სათავის მიმართ ნაკრები ვექტორული მომენტის მოდული და მიმართულება:

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}; \quad M_0 = \sqrt{2} \cdot aQ;$$

$$\cos(\vec{M}_0, \hat{i}) = \frac{M_x}{M_0} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos(\vec{M}_0, \hat{j}) = \frac{M_y}{M_0} = 0; \quad \cos(\vec{M}_0, \hat{k}) = \frac{M_z}{M_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

მივიღეთ: $\vec{R} \neq 0$; $\vec{M}_0 \neq 0$; $\vec{R} \perp \vec{M}_0$; რადგან $R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = 0$.

ამრიგად, სივრცითი ძალთა სისტემის ცენტრზე დაყვანის მოცემულ შემთხვევაში საქმე გვაქვს მე-3 შემთხვევასთან (იხ. 8.18 ფორმულა), ე.ი. სისტემა ტოლფასია $\vec{R}^*$ ტოლქმედი ძალისა, რომელიც ნაკრები ვექტორის ტოლია.

6. ვიპოვოთ სისტემის ცენტრალური ღერძის განტოლება (8.20) ფორმულებით, მივიღებთ:

$$x = z; \quad x - y = a.$$

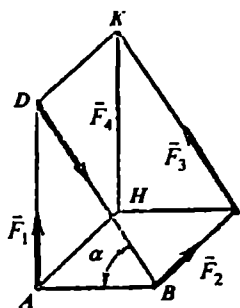
თუ $z_1=0$, მაშინ $x_1=0$, $y_1=-a$, ხოლო თუ $z_2=a$, მაშინ $x_2=a$, $y_2=0$. მაშასადამე, ცენტრალური ღერძი გადის $B_1(0; -a, a)$ და $B_2(a; 0, a)$ წერტილებზე (ნახ. 8.8).

7. (8.19) ფორმულით ვიპოვოთ კოორდინატა სათავედან ცენტრალურ ღერძამდე მანძილი:

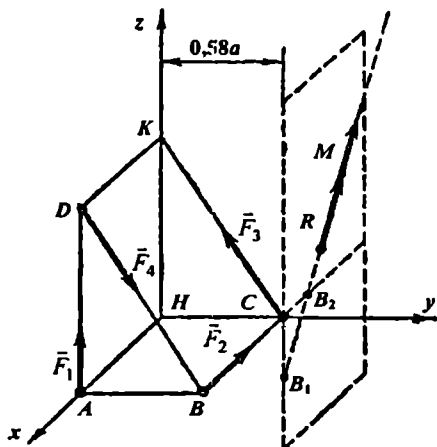
$$d = \frac{|\vec{M}_0|}{R}, \quad d = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot a.$$

ამოცანა 54. პრიზმის A, B, C, D წვეროებზე მოდებულია $F_1=1,3Q$; $F_2=Q$; $F_3=F_4=2Q$ ძალები (ნახ. 8.9). დავეყვანოთ სისტემა უმარტივეს სახემდე, თუ $AH=BC=DK=AD=HK=a$, $\alpha=60^\circ$, $\angle DAB=\angle KHC=90^\circ$.

ამოხსნა. 1. ავირჩიოთ კოორდინატა $Hxyz$ სისტემა, როგორც 8.10 ნახაზზეა ნაჩვენები.



ნახ. 8.9



ნახ. 8.10

2. ვიპოვოთ ნაკრები ვექტორის გეგმილები კოორდინატა ღერძებზე:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}; \quad R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y}; \quad R_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + F_{4z};$$

$$F_{1x}=0; \quad F_{2x}=-F_2=-Q; \quad F_{3x}=0; \quad F_{4x}=0;$$

$$F_{1y}=0; \quad F_{2y}=0; \quad F_{3y}=-\sqrt{3} \cos \alpha = -Q; \quad F_{4y}=F_4 \cos \alpha = Q;$$

$$F_{1z}=F_1=1,31Q; \quad F_{2z}=0; \quad F_{3z}=F_3 \sin \alpha = 1,73Q; \quad F_{4z}=-F_4 \sin \alpha = -1,73Q;$$

მაშასადამე, $R_x = -Q$; $R_y = 0$; $R_z = 1,31Q$.

3. ვიპოვოთ ნაკრები ვექტორის მოდული და მიმართულება:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \quad R = 1,65Q;$$

$$\cos(\vec{R}, \hat{i}) = \frac{R_x}{R} = -0,6; \quad \cos(\vec{R}, \hat{j}) = \frac{R_y}{R} = 0; \quad \cos(\vec{R}, \hat{k}) = \frac{R_z}{R} = 0,8.$$

მაშასადამე, ნაკრები ვექტორის ფუძე დევს Hxz სიბრტყეში და Hx ღერძის მიმართ დახრილია 127° კუთხით.

4. ვიპოვოთ კოორდინატთა სათავეს მიმართ აღებული ნაკრები ვექტორული მომენტის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე:

$$M_x = M_x(\vec{F}_1) + \dots + M_x(\vec{F}_4); \quad M_y = M_y(\vec{F}_1) + \dots + M_y(\vec{F}_4);$$

$$M_z = M_z(\vec{F}_1) + \dots + M_z(\vec{F}_4).$$

$$M_x(\vec{F}_1) = M_x(\vec{F}_2) = 0; \quad M_x(\vec{F}_3) = F_3 \cdot HK \cdot \sin 30^\circ = a \cdot Q;$$

$$M_x(\vec{F}_4) = -F_4 \cdot HK \cdot \sin 30^\circ = -a \cdot Q;$$

$$M_y(\vec{F}_1) = -F_1 \cdot AH = -1,31Qa; \quad M_y(\vec{F}_2) = 0; \quad M_y(\vec{F}_3) = 0;$$

$$M_y(\vec{F}_4) = F_4 \cdot AH \cdot \cos 30^\circ = 1,73aQ;$$

$$M_z(\vec{F}_1) = 0; \quad M_z(\vec{F}_2) = F_2 \cdot HC = 0,58aQ; \quad M_z(\vec{F}_3) = 0;$$

$$M_z(\vec{F}_4) = F_4 \cdot AH \cdot \sin 30^\circ = aQ.$$

მაშასადამე,

$$M_x = 0; \quad M_y = 0,42aQ; \quad M_z = 1,58aQ.$$

5. განვსაზღვროთ ნაკრები ვექტორული მომენტის მოდული და მიმართულება:

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}; \quad M_0 = 1,63a \cdot Q;$$

$$\cos(\vec{M}_0, \hat{i}) = \frac{M_x}{M_0} = 0; \quad \cos(\vec{M}_0, \hat{j}) = \frac{M_y}{M_0} = 0,25;$$

$$\cos(\vec{M}_0, \hat{k}) = \frac{M_z}{M_0} = 0,37$$

მაშასადამე, $\vec{M}_0$ ექტორი მოთავსებულია Hyz სიბრტყეში და Hy ღერძთან დახრილია 76° -იანი კუთხით.

ამრიგად, მივიღებთ:

$$R \neq 0, \quad \vec{M}_0 \neq 0, \quad \vec{R} \nparallel \vec{M}_0,$$

რადგან

$$R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z \neq 0.$$

მოცემულ შემთხვევაში საქმე გვაქვს სივრცით ძალთა სისტემის ცენტრზე დაყვანის მე-4 შემთხვევასთან (იხ. 8.21. ფორმულა), ე.ი. სისტემა ტოლფასია ძალთხრახნისა.

6. ვიპოვოთ სისტემის ცენტრალური ღერძის ანუ ცენტრალური ხრახნული ღერძის განტოლება (8.12) ფორმულით.

$$\text{მივიღებთ: } y=0,58a; \quad 1,31x+z+0,42a=0.$$

სისტემის ცენტრალური ღერძი დევს სიბრტყეზე, რომელიც Hxz სიბრტყის პარალელურია და მისგან დაშორებულია $0,58a$ მანძილით. ის გადის $B_1(0; 0,58a; -0,42a)$ და $B_2(-0,32a; 0,58a; 0)$ წერტილებზე (ნახ. 8.10).

7. (8.22) ფორმულით განესაზღვროთ ცენტრალური ღერძიდან კოორდინატთა სათავემდე მანძილი:

$$d = \frac{|M_0 \sin(\vec{R}, \vec{M}_0)|}{R}.$$

$(\vec{R}, \vec{M}_0)$ – კუთხის საპოვნელად გამოვიყენოთ ფორმულა:

$$\cos(\vec{R}, \vec{M}_0) = \frac{R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z}{RM_0}.$$

$$\text{მივიღებთ: } \cos(\vec{R}, \vec{M}_0) = 0,775 \Rightarrow (\vec{R}, \vec{M}_0) = 33^\circ$$

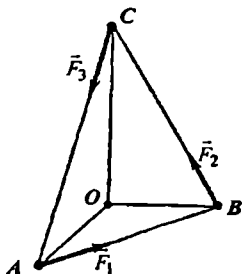
$$\text{მაშასადამე, } d=0,63a.$$

მიღებული შედეგების ანალიზი გვიჩვენებს, რომ მოცემული ძალთა სისტემა ტოლფასია ერთი ძალისა (რომელიც ნაკრები ექტორის ტოლია და მისი ფუძე მდებარეობს ცენტრალურ ღერძზე) და ერთი წყვილძალისა, რომლის სიბრტყე ცენტრალური ღერძის პერპენდიკულარულია.

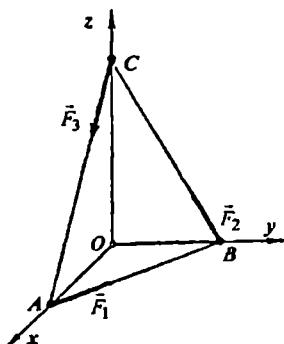
ამ წვეტილბალის $\vec{M}^*$ მომენტის სიდიდე $M^* = M_0 \cos(\vec{R}, \vec{M}_0) = 1,26Qa$, ძალთხრახნის პარამეტრი $P = \frac{M_0 \cos(\vec{R}, \vec{M}_0)}{R} = 0,76$ (რადგან $P > 0$, გვაქვს მარჯვენა ძალთხრახნი).

ამოცანა 55. პირამიდის A, B და C წვეროებზე მოდებულია $F_1 = F_2 = Q$ ძალები, $F_3 = \sqrt{1,5}Q$. დავიყვანოთ სისტემა უმარტივეს სახემდე, თუ $AB = BC = a$, $\angle OAB = 30^\circ$ (ნახ. 8.11).

ამოხსნა. 1. ავირჩიოთ ის კოორდინატთა სისტემა, რომელიც 8.12 ნახაზზეა ნაჩვენები.



ნახ. 8.11



ნახ. 8.12

2. ვიპოვოთ ნაკრებ $\vec{R}$ ვექტორის გეგმილები არჩეულ კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}; \quad R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}; \quad R_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z};$$

$$F_{1x} = -F_1 \cos 30^\circ = -\sqrt{1,5}Q; \quad F_{2x} = 0; \quad F_{3x} = F_3 \cos 45^\circ = \sqrt{1,5}Q;$$

$$F_{1y} = -F_1 \cos 60^\circ = \frac{1}{2}Q; \quad F_{2y} = -F_2 \cos 60^\circ = -\frac{1}{2}Q; \quad F_{3y} = 0.$$

$$F_{1z} = 0; \quad F_{2z} = F_2 \cos 30^\circ = \sqrt{1,5}Q; \quad F_{3z} = -F_3 \cos 45^\circ = -\sqrt{1,5}Q.$$

მაშასადამე, $R_x = R_y = R_z = 0$.

3. (3.20) ფორმულით განესაზღვროთ ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორის სიდიდე და მიმართულება.

მივიღებთ: $|\vec{R}|=0$.

4. ვიპოვოთ კოორდინატთა სისტემის სათავეს მიმართ აღებული ნაკრები ვექტორული მომენტის გვემძლევი კოორდინატთა ღერძებზე:

$$M_x = M_x(\vec{F}_1) + M_x(\vec{F}_2) + M_x(\vec{F}_3);$$

$$M_y = M_y(\vec{F}_1) + M_y(\vec{F}_2) + M_y(\vec{F}_3);$$

$$M_z = M_z(\vec{F}_1) + M_z(\vec{F}_2) + M_z(\vec{F}_3).$$

$$M_x(\vec{F}_1) = M_x(\vec{F}_3) = 0; \quad M_x(\vec{F}_2) = F_2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a \cdot Q;$$

$$M_y(\vec{F}_1) = 0; \quad M_y(\vec{F}_2) = 0; \quad M_y(\vec{F}_3) = F_3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot \sin 45^\circ = \frac{3}{4} a \cdot Q;$$

$$M_z(\vec{F}_1) = F_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a \cdot Q; \quad M_z(\vec{F}_2) = M_z(\vec{F}_3) = 0.$$

მაშასადამე,

$$M_x = \frac{\sqrt{3}}{4} a \cdot Q; \quad M_y = \frac{3}{4} a \cdot Q; \quad M_z = \frac{\sqrt{3}}{4} a \cdot Q.$$

5. ვიპოვოთ ნაკრები ვექტორული მომენტის სიდიდე და მიმართულება:

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}; \quad M_0 = \frac{\sqrt{15}}{4} a \cdot Q;$$

$$\cos(\vec{M}_0, \hat{i}) = \frac{M_x}{M_0} = \frac{\sqrt{5}}{5}; \quad \cos(\vec{M}_0, \hat{j}) = \frac{M_y}{M_0} = \frac{\sqrt{15}}{5};$$

$$\cos(\vec{M}_0, \hat{k}) = \frac{M_z}{M_0} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

ამრიგად, მივიღებთ:

$$\vec{R}=0; \quad \vec{M}_0 \neq 0.$$

მოცემულ შემთხვევაში გვაქვს სივრცითი ძალთა სისტემის ცენტრზე დაყვანის მეორე შემთხვევა (იხ. (8.17) ფორმულა), ე.ი. სისტემა წყვილძალის ტოლფასია, რომლის მომენტი ნაკრები ვექტორული $\vec{M}_0$ მომენტის ტოლია.

ამოცანა 56. ძალთა სისტემა შედგება სამი ძალისაგან:

$\vec{F}_1 = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}$ კნ, მოდებული $A_1(-3; 4; 5)$ წერტილზე.

$\vec{F}_2 = 8\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}$ კნ, მოდებული $A_2(1; 2; -2)$ წერტილზე.

$\vec{F}_3 = 10\vec{i} + 5\vec{j} - 8\vec{k}$ კნ, მოდებული $A_3(-5; -3; 7)$ წერტილზე.

(წრფივი ზომები მეტრებში). დავიყვანოთ სისტემა უმარტივეს სახემდე.

ამოხსნა. 1. ვიპოვოთ ნაკრები ვექტორის გეგმილები კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე:

$$R_x = \sum F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}; \quad R_x = 20 \text{ კნ};$$

$$R_y = \sum F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}; \quad R_y = 3 \text{ კნ};$$

$$R_z = \sum F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z}; \quad R_z = -10 \text{ კნ}.$$

2. განესაზღვროთ ნაკრები ვექტორის მოდული და მიმართულება:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \quad R = 22,5 \text{ კნ}; \quad \cos(\vec{R}, \hat{i}) = \frac{R_x}{R}; \quad \cos(\vec{R}, \hat{i}) = 0,89;$$

$$\cos(\vec{R}, \hat{j}) = \frac{R_y}{R}; \quad \cos(\vec{R}, \hat{j}) = 0,13; \quad \cos(\vec{R}, \hat{k}) = \frac{R_z}{R};$$

$$\cos(\vec{R}, \hat{k}) = -0,44.$$

3. ვიპოვოთ კოორდინატთა სათავის მიმართ აღებული ნაკრები ვექტორული მომენტის გეგმილები (8.14) ფორმულით:

$$M_x = \sum (y_k F_{kz} - z_k F_{ky}) = (y_1 F_{1z} - z_1 F_{1y}) + (y_2 F_{2z} - z_2 F_{2y}) + \\ + (y_3 F_{3z} - z_3 F_{3y}); \quad M_x = -65 \text{ კნ.მ};$$

$$M_y = \sum_{k=1}^n (z_k F_{kx} - x_k F_{kz}) = (z_1 F_{1x} - x_1 F_{1z}) + (z_2 F_{2x} - x_2 F_{2z}) + \\ + (z_3 F_{3x} - x_3 F_{3z}); \quad M_y = -6 \text{ კნ.მ};$$

$$M_z = \sum (x_k F_{ky} - y_k F_{kx}) = (x_1 F_{1y} - y_1 F_{1x}) + (x_2 F_{2y} - y_2 F_{2x}) + \\ + (x_3 F_{3y} - y_3 F_{3x}); \quad M_z = -37 \text{ კნ.მ};$$

4. კოორდინატთა სისტემის სათავის მიმართ განესაზღვროთ აღებული ნაკრები ვექტორული მომენტის სიდიდე და მიმართულება:

$$R_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad M_0 = 75 \text{ კმ.მ.} \quad \cos(\vec{M}_0, \hat{i}) = \frac{M_x}{M_0};$$

$$\cos(\vec{M}_0, \hat{j}) = -0.86;$$

$$\cos(\vec{M}_0, \hat{j}) = \frac{M_y}{M_0}; \quad \cos(\vec{M}_0, \hat{j}) = -0.08; \quad \cos(\vec{M}_0, \hat{k}) = \frac{M_z}{M_0};$$

$$\cos(\vec{M}_0, \hat{k}) = -0.49.$$

რადგან მართებულია პირობა: $R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z \neq 0$, ამიტომ მოცემული ძალთა სისტემა ძალთხრახნის ტოლფასია ($\vec{R} \neq 0$; $\vec{M}_0 \neq 0$; $\vec{R} \perp \vec{M}_0$).

5. ვიპოვოთ ცენტრალური ხრახნული ღერძის განტოლება (8.12) ფორმულით. მივიღებთ:

$$6x - 50y - 3z + 139 = 0; \quad 109x - 60y + 200z + 179 = 0.$$

დავუშვათ, $z_1 = 0$, ვიპოვიტ: $x_1 = -0,12$ მ; $y_1 = 2,76$ მ. დავუშვათ, $z_2 = 1$ მ, ვიპოვიტ: $x_2 = -2,12$ მ; $y_2 = 2,46$ მ. მაშასადამე, ცენტრალური ღერძი გადის $A(-0,12; 2,76; 0)$ და $B(-2,12; 2,46; 1)$ წერტილებზე.

6. ვიპოვოთ კოორდინატთა სათავედან ცენტრალურ ღერძამდე მანძილი შემდეგი ფორმულით:

$$d = \frac{|\vec{M}_0 \sin(\vec{R}, \hat{\vec{M}}_0)|}{M}$$

($\vec{R}, \hat{\vec{M}}_0$) კუთხის საპოვნელად გამოვიყენოთ ფორმულა:

$$\cos(\vec{R}, \hat{\vec{M}}_0) = \frac{R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z}{|\vec{R}| \cdot |\vec{M}_0|},$$

მივიღებთ, $\cos(\vec{R}, \hat{\vec{M}}_0) = -0,56 \Rightarrow (\vec{R}, \hat{\vec{M}}_0) = 124^\circ$ მაშასადამე, $d = 2,76$ მ.

ამრიგად, მოცემული ძალთა სისტემა ტოლფასია ერთი ძალისა და წყვილძალისა. ძალა ცენტრალურ ღერძზე მდებარეობს და ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორის ტოლია, ხოლო წყვილძალის სიბრტყე ცენტრალური ღერძის პერპენდიკულარულია. ამ წყვილძალის მომენტის მოდული $M' = M_0 |\cos(\vec{R}, \hat{\vec{M}}_0)| = 40$ კმ.მ, ძალთხრახნის პარამეტრი

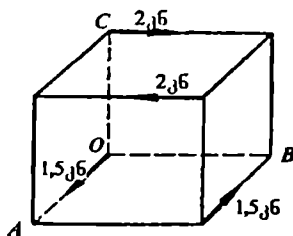
$p = \frac{M_0 \cos(\vec{R}, \wedge \vec{M}_0)}{R} = -1,86$ (რადგან $p < 0$, ამიტომ გვაქვს მარცხენა ძალთხრახნი).

8.5. საეარჯიშო ამოცანები ნებისმიერი სიერციითი ძალთა სისტემის უმარტივეს სახემდე დაყვანაზე

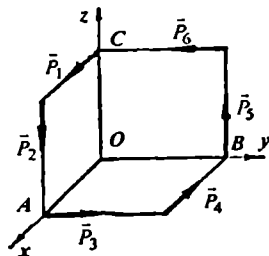
ამოცანა 8.1. მართკუთხა პარალელეპიპედის წიბოების გასწვრივ მოდებულია ძალები (ნახ. 8.13). დაიყვანეთ ძალთა სისტემა უმარტივეს სახემდე, თუ $OA=30$ სმ, $OB=40$ სმ.

პასუხი: $R=0$, $M_0=0$, ე.ი. ძალთა სისტემა გაწონასწორებულია.

ამოცანა 8.2. სამწახნაგას წიბოების გასწვრივ მოდებულია ექვსი ძალა: $p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=p_6=p$. $OA=OB=OC=a$. დაიყვანეთ ეს ძალთა სისტემა უმარტივეს სახემდე (ნახ. 8.14).



ნახ. 8.13



ნახ. 8.14

პასუხი: დაიყვანება წყვილძალამდე $M = 2\sqrt{3} \cdot a \cdot p$ მომენტით. $\vec{M}$ ვექტორი კოორდინატთა ღერძებთან ადგენს ერთი და იმავე კუთხეს.

ამოცანა 8.3. $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ და $\vec{F}_4$ ძალები მოდებულია მართი პრიზმის წიბოების გასწვრივ (ნახ. 8.15). ეს ძალთა სისტემა დაიყვანეთ უმარტივეს სახემდე, თუ $F_1=F_2=F_3=F_4=F$; $OA=a$, $\angle COC_1=60^\circ$.

პასუხი: წყვილძალა $M = F \cdot a \cdot \sqrt{3}$ მომენტით; $\cos(\vec{M}, \wedge x) = 0$;

$$\cos(\vec{M}, \wedge y) = -\frac{1}{2}; \cos(\vec{M}, \wedge z) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

ამოცანა 8.4. წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძეთა წიბოების გასწვრივ მოდებულია ექვსი $\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_6$ ძალა (ნახ. 8.16). დაიყვანეთ ეს ძალთა სისტემა უმარტივეს სახემდე, თუ პრიზმის სიმაღლეა a , $P_1=P_2=P_3=P_4=P_5=P_6=2P$.

პასუხი: წყვილძალა მომენტი $M=Pa$, $\cos(\vec{M}, \hat{x}) = \frac{1}{2}$;
 $\cos(\vec{M}, \hat{y}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos(\vec{M}, \hat{z}) = 0$.

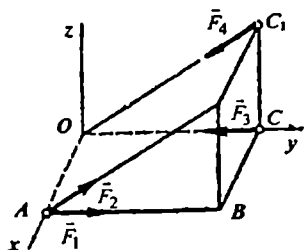
ამოცანა 8.5. დაიყვანეთ ძალთა სისტემა უმარტივეს სახემდე:

$\vec{F}_1 = P\vec{j} - P\vec{k}$; $\vec{F}_2 = -P\vec{i} + P\vec{k}$; $\vec{F}_3 = P\vec{i} - P\vec{j}$, რომლებიც შესაბამისად მოდებულია $A_1(0, a, 0)$, $A_2(0, b, 0)$, $A_3(0, c, 0)$ წერტილებზე.

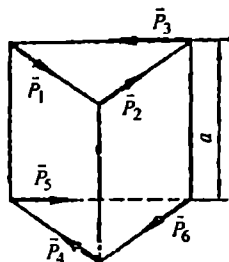
პასუხი: წყვილძალთა მომენტი $M = P\sqrt{(b-a)^2 + (b-c)^2}$

ამოცანა 8.6. მართი პრიზმის წიბოების გასწვრივ მოდებულია ხუთი ძალა: $P_1=P_3=P_4=P_5=P$; $P_2 = \sqrt{2}P$; $OA=OC=a$, $OB=2a$. დაიყვანეთ ეს ძალთა სისტემა უმარტივეს სახემდე (ნახ. 8.17).

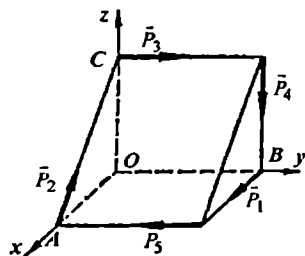
პასუხი: წყვილძალის მომენტი $M = P \cdot a \cdot \sqrt{13}$, $\cos(\vec{M}, \hat{x}) =$
 $= \cos(\vec{M}, \hat{z}) = -\frac{3}{\sqrt{13}}$; $\cos(\vec{M}, \hat{y}) = -\frac{1}{\sqrt{13}}$.



ნახ. 8.15



ნახ. 8.16



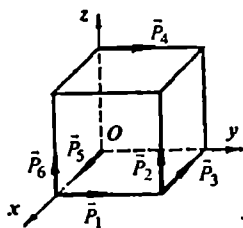
ნახ. 8.17

ამოცანა 8.7. კუბის წიბოების გასწვრივ მოდებულია ექვსი ძალა: $P_1=P_2=P_3=P_4=P_5=P_6=P$ (ნახ. 8.18). დაიყვანეთ ეს ძალები სისტემა უმარტივეს სახემდე, თუ წიბოს სიგრძე a -ს ტოლი.

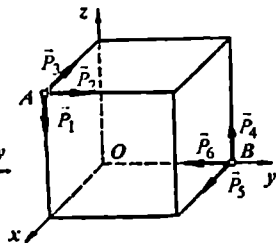
პასუხი: ტოლქმედი $R^* = 2\sqrt{2}P$, ცენტრალური ღერძის განტოლება:
$$\begin{cases} x = a; \\ y = z. \end{cases}$$

ამოცანა 8.8. კუბის A და B წვეროებზე მოდებულია ექვსი ძალა $P_1=P_2=P_3=Q_1$; $P_4=P_5=P_6=Q_2$ (ნახ. 8.19). დაიყვანეთ ეს ძალები სისტემა უმარტივეს სახემდე, თუ კუბის წიბოს სიგრძე a -ს ტოლია.

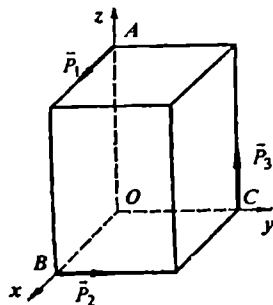
პასუხი: ტოლქმედი $R^* = (Q_2 - Q_1)\sqrt{3}$, რომლის მოქმედების ფუძის განტოლებაა
$$\begin{cases} x - z = 0; \\ x + y = a. \end{cases}$$



ნახ. 8.18



ნახ. 8.19



ნახ. 8.20

ამოცანა 8.9. მართკუთხა პარალელებიპედის წიბოების გასწვრივ მოდებულია სამი ძალა (ნახ. 8.20) – $P_1=106$, $P_2=156$, $P_3=30$ ნ; $OB=10$ სმ. რისი ტოლი უნდა იყოს OA და OB წიბოების სიგრძე, რომ სისტემის ცენტრალური ხრახნული ღერძი გადიოდეს კოორდინატთა სათავეში.

პასუხი: $OA=7\frac{1}{2}$ სმ; $OB=1\frac{2}{3}$.

ამოცანა 8.10. სისტემა რომელიც შედგება $\vec{F}$ ძალისა და წყვილძალისაგან $\vec{M}_0$ მომენტი (ნახ. 8.21), დაიყვანეთ უმარტივეს სახემდე, თუ $OA=OB=OC=a$.

პასუხი: ძალთხრახნი $R'=F$, ცენტრალური ღერძის განტოლება

$$\begin{cases} x+z=a-\frac{M_0}{F}; \\ y=\frac{M_0}{2F}. \end{cases}$$

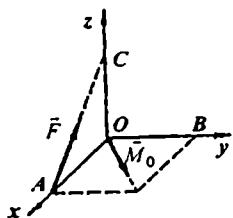
ამოცანა 8.11. დაიყვანეთ $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალთა სისტემა უმარტივეს სახემდე (ნახ. 8.22). $F_1=F_2=F$; $OA=OD=a$; $OB=OC=2a$.

პასუხი: ძალთხრახნი $R'=F\sqrt{3}$; $M=\frac{\sqrt{3}}{6}aF$, ცენტრალური ღერძის განტოლება

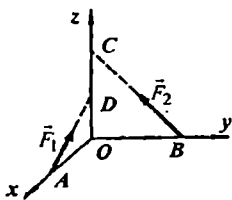
$$\begin{cases} y-x=\frac{a}{3}; \\ 2x+z=\frac{7}{6}a. \end{cases}$$

ამოცანა 8.12. კუბის a სიგრძის წიბოების გასწვრივ მიმართულია $P_1=P_2=P_3=P_4=P$ ძალები (ნახ. 8.23). დაიყვანეთ ეს ძალთა სისტემა უმარტივეს სახემდე.

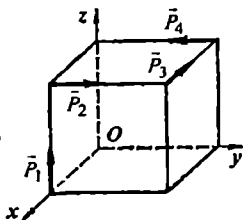
პასუხი: ძალთხრახნი $R'=P\sqrt{2}$, $M=Pa\sqrt{2}$; ცენტრალური ღერძის განტოლება:

$$\begin{cases} y=a; \\ x+z=2a. \end{cases}$$


ნახ. 8.21



ნახ. 8.22



ნახ. 8.23

ამოცანა 8.13. სისტემა შედგება $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ სამი ძალისაგან: $\vec{F}_1$ ძალის ფუძის განტოლებაა $x-10=0, y=0$; $\vec{F}_2$ -ის ფუძის განტოლება $-x=0, y-5=0$, ხოლო $\vec{F}_3$ -ის ფუძის განტოლება $y=0, z=0$. დაიყვანეთ სისტემა უმარტივეს სახემდე, თუ $F_1=F_2=F_3=10$ კნ, $F_{1y}>0, F_{2z}>0, F_{3z}>0$ (წრფივი ზომები, მეტრებში).

პასუხი: სისტემა ტოლფასია $R^*=10\sqrt{3}$ კნ ტოლქმედისა. ცენტრალური ღერძის განტოლება:

$$\begin{cases} x-y=10; \\ y+z=15. \end{cases} \quad \text{კოორდინატა სათავიდან ცენტრალურ}$$

ღერძამდე მანძილი $d=10,8$ მ.

ამოცანა 8.14. სისტემა შედგება სამი ძალისაგან:

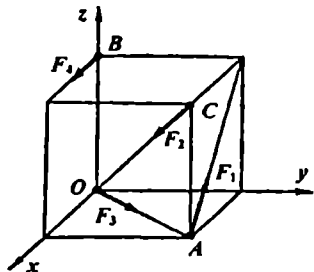
$\vec{F}_1 = 4\vec{i} + F_{1y}\vec{j} - 8\vec{k}$ კნ, მოდებული $A_1(x_1; 2; -5)$ წერტილზე;

$\vec{F}_2 = F_{2x}\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$ კნ, მოდებული $A_2(7; y_2; 10)$ წერტილზე,

$\vec{F}_3 = -6\vec{i} + 4\vec{j} + F_{3z}\vec{k}$ კნ, მოდებული $A_3(4; -8; z_3)$ წერტილზე (წრფივი ზომები მეტრებში).

განსაზღვრეთ $F_{1y}, F_{2x}, F_{3z}, x_1, y_2, z_3$ სიდიდეები, თუ ცნობილია, რომ სისტემა ტოლფასია ერთი ძალისა, რომელიც ნაკრები $\vec{R}(10; 0; -5)$ ვექტორის ტოლია. სისტემის ნაკრები ვექტორული მომენტი x ღერძის მიმართ ნულის ტოლია, კოორდინატა სისტემის სათავიდან ცენტრალურ ღერძამდე მანძილი $d=50$ მ.

პასუხი: $F_{2x}=12$ კნ, $F_{1y}=-7$ კნ; $F_{3z}=8$ კნ; $x_1=69$ მ; $y_2=-41,8$ მ; $z_3=16$ მ.



ნახ. 8.24

ამოცანა 8.15. კუბის A, C, O, B წვეროებზე მოდებულია $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ და $\vec{F}_4$ ძალები (ნახ. 8.24). განსაზღვრეთ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ ძალების მოდულები, თუ მოცემული ძალთა სისტემა ტოლფასია წვეილძალისა. ამასთან, $F_4=1000$ კნ,

კუბის წიბოს სიგრძე $a=2$ მ. რისი ტოლია ამ სისტემის წყვილძალის მომენტი?

პასუხი: $F_1=F_3=1415$ კნ; $F_2=1732$ კნ; $M=2882$ კნ.მ.

ამოცანა 8.16. სხეულზე მოდებულია ორი ძალა: $\vec{P}_1 = P\vec{j}$,

მიმართული Oy ღერძის გასწვრივ და $\vec{P}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}P\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}P\vec{k}$,

მიმართული Oxz სიბრტეზე მდებარე $x+z=a$ წრფის გასწვრივ დაიყვანეთ ეს სისტემა უმარტივეს სახემდე.

პასუხი: ძალთხრახნი $R^* = P\sqrt{2}$, $M = \frac{1}{2}Pa$. ცენტრალური ღერძის განტოლება:

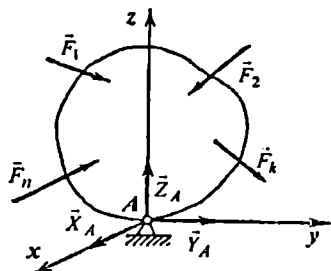
$$\begin{cases} x + \sqrt{2}y - z = 0; \\ x - \sqrt{2}y + 3z = a. \end{cases}$$

9.1. მყარი სხეულის წონასწორობის კერძო შემთხვევები

განვიხილოთ არათავისუფალი მყარი სხეულის წონასწორობა, როცა სხეული დამაგრებულია მხოლოდ ნაწილობრივ, ე.ი., როცა სხეულზე დადებული ბმები ვერ უზრუნველყოფს სხეულის წონასწორობას.

განვიხილოთ წონასწორობის ოთხი კერძო შემთხვევა.

1. მყარ სხეულს აქვს ერთი უძრავი წერტილი. ვთქვათ, იდეალური სფერული სახსრით სხეული A წერტილში მიმაგრებულია (ნახ. 9.1) და მასზე მოდებულია ნებისმიერი სივრცითი ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) ძალთა სისტემა.



ნახ. 9.1

A წერტილში მოვათავსოთ უძრავი xyz კოორდინატთა სისტემა. გავათავისუფლოთ სხეული ბმისაგან და შევცვალოთ ის $\vec{R}_A$ რეაქციით. რადგან მისი მოდული და მიმართულება უცნობია, ამიტომ წარმოვაღვიწიოთ x, y, z ღერძების გასწვრივ მიმართული სამი უცნობი მდგენელი: $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$ და $\vec{Z}_A$ -ით.

შევადგინოთ (5.10) და (5.11) სახის წონასწორობის განტოლებები. ამისათვის კოორდინატთა ღერძებზე დავაგვიგმილოთ სხეულზე მოქმედი ყველა ძალა, შევეკრიბოთ სათანადო ღერძებზე გეგმილები და მათი ჯამი გავუტოლოთ ნულს; ასევე ვიპოვოთ სხეულზე მოდებული ყველა ძალის მომენტი კოორდინატთა ღერძების მიმართ, შევეკრიბოთ მომენტები სათანადო ღერძების მიმართ და მათი ჯამი ნულს გავუტოლოთ, მაშინ მივიღებთ:

$$X_A + \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad Y_A + \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad Z_A + \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \quad (9.1)$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Ax}(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_{Ay}(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_{Az}(\vec{F}_k) = 0. \quad (9.2)$$

(9.2) განტოლებებიდან ჩანს, რომ ისინი არ შეიცავს რეაქციის მდგენელებს, ამიტომ გამოსახავენ სხეულის წონას-

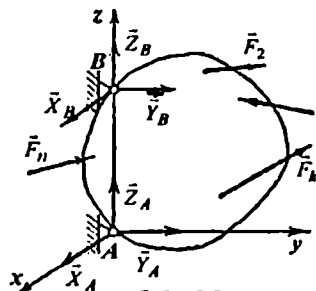
წორობის პირობებს, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს სხეულზე მოდებული მოცემული ძალთა სისტემა.

ამრიგად, ერთ წერტილში დამაგრებული მყარი სხეულის წონასწორობის პირობაა, უძრავ წერტილზე გამავალი ურთიერთმართობი ღერძების მიმართ მოცემული აქტიური ძალების მომენტების ალგებრული ჯამი ნულის ტოლი იყოს.

(9.1) განტოლებები გამოიყენება რეაქციის X_A , Y_A , Z_A გეგმილების განსაზღვრისათვის. მაშასადამე, (9.1) პირობის შესრულებისას რეაქციის ძალა აწონასწორებს სხეულზე მოდებულ მოცემული ძალების სისტემას.

2. მყარ სხეულს აქვს ორი უძრავი წერტილი. ეთქვას, მოცემული გვაქვს მყარი სხეული, რომლის ორი წერტილი სახსრების საშუალებით მიმაგრებულია უძრავ A და B ორ წერტილთან (ნახ. 92).

ავირჩიოთ კოორდინატთა სათავე A წერტილში და z ღერძი მივმართოთ ისე, რომ გადიოდეს B წერტილში. შევცვალოთ ბმები $\bar{R}_A$ და $\bar{R}_B$ რეაქციებით, მათი მდგენელები მივმართოთ კოორდინატთა ღერძების გასწვრივ (ნახ. 92). უძრავ A და B წერტილებს შორის მანძილი აღვნიშნოთ h -ით. მაშინ მყარი სხეულის წონასწორობის (5.9) და (5.10) განტოლებები ჩაიწერება შემდეგი სახით:



ნახ. 92

$$\left. \begin{aligned} X_A + X_B + \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0, \\ Y_A + Y_B + \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0, \\ Z_A + Z_B + \sum F_k &= 0, \\ -h \cdot Y_B + \sum_{k=1}^n M_{Ax}(\bar{F}_k) &= 0, \\ h \cdot X_B + \sum_{k=1}^n M_{Ay}(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n M_{Az}(\bar{F}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

(9.3) განტოლებათა სისტემის ბოლო განტოლება არ შეიცავს რეაქციის ძალების გეგმილებს და ამყარებს აქტიურ ძალებს შორის კავშირს, რომელიც საჭიროა სხეულის წონასწორობისათვის. ამიტომ ის გამოსახავს წონასწორობის პირობას. მაშასადამე, ორი წერტილით დამაგრებული სხეულისათვის ეს განტოლება გვიჩვენებს, რომ მოცემული $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ ძალთა სისტემის მომენტების აღგებრული ჯამი Az ღერძის მიმართ, რომელიც ბრუნვის ღერძია, უნდა უდროდეს ნულს. ამ მომენტს მაბრუნებელი მომენტი ეწოდება. (9.3) სისტემის პირველი ხუთი განტოლებიდან უნდა განისაზღვროს $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B$ რეაქციების $X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B, Z_B$ უცნობი მდგენელები.

შევნიშნოთ, რომ არ შეიძლება ცალ-ცალკე განისაზღვროს Z_A და Z_B მდგენელები. სისტემის მესამე განტოლებიდან განისაზღვრება მხოლოდ მათი $Z_A + Z_B$ ჯამი და, მაშასადამე, თითოეული ამ უცნობისათვის მყარი სხეულის ამოცანა სტატიკურად განუსაზღვრელია. მაგრამ თუ B წერტილში ბმა სფერული სახსრის ნაცვლად განხორციელებულია ცილინდრული სახსრით (ე.ი. საკისარით), რომელიც არ ეწინააღმდეგება Az ღერძის გასწვრივ სხეულის გადაადგილებას, მაშინ $Z_B = 0$ და ამოცანა სტატიკურად განსაზღვრული იქნება.

3. სხეულს აქვს ბრუნვის ღერძი, რომლის გასწვრივ მას შეუძლია სრიალი. ეს იმას ნიშნავს, რომ A და B წერტილებში ბმები განხორციელებულია ცილინდრული სახსრებით, ამასთან $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B$ რეაქციების მდგენელები ბრუნვის ღერძის გასწვრივ ნულის ტოლია. მაშასადამე, წონასწორობის განტოლებები მიიღებს შემდეგ სახეს:

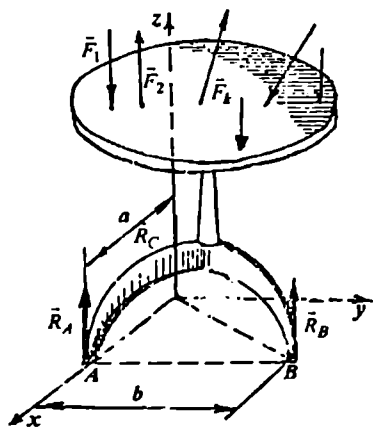
$$\left. \begin{aligned}
 X_A + X_B + \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0, \\
 Y_A + Y_B + \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0, \\
 \sum_{k=1}^n F_{kz} &= 0, \\
 -h \cdot Y_B + \sum_{k=1}^n M_{Ax}(\bar{F}_k) &= 0, \\
 h \cdot X_B + \sum_{k=1}^n M_{Ay}(\bar{F}_k) &= 0, \\
 \sum_{k=1}^n M_{Az}(\bar{F}_k) &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

(9.4) სისტემის მე-3 და მე-6 განტოლებები არის სხეულის წონასწორობის პირობა, ხოლო დანარჩენი განტოლებებიდან განისაზღვრება უცნობი X_A , X_B , Y_A და Y_B სიდიდეები.

4. სხეული ეყრდნობა გლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეს სამ წერტილში, ამასთან ეს წერტილები არ მდებარეობს ერთ წრფეზე. ვთქვათ, სხეულზე მოდებულია ნებისმიერი სივრცითი ($\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$) ძალთა სისტემა და A , B და C წერტილებით ეყრდნობა ჰორიზონტალურ გლუვ სიბრტყეს. კოორდინატთა ღერძები ავირჩიოთ ისე, როგორც ნაჩვენებია ნახაზზე (ნახ. 9.3). ბმები შეეცვალოთ ვერტიკალური $\bar{R}_A$, $\bar{R}_B$ და $\bar{R}_C$ რეაქციებით. მაშინ წონასწორობის (5.9) და (5.10) განტოლებები ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0, \\
 \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0, \\
 R_A + R_B + R_C + \sum_{k=1}^n F_{kz} &= 0, \\
 b \cdot R_B + \sum_{k=1}^n M_{Cx}(\bar{F}_k) &= 0, \\
 -a \cdot R_A - a \cdot R_B + \sum_{k=1}^n M_{Cy}(\bar{F}_k) &= 0, \\
 \sum_{k=1}^n M_{Cz}(\bar{F}_k) &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

(9.5) სისტემის მესამე - მეხუთე განტოლებებიდან ვიპოვით



ნახ. 9.3

უცნობ რეაქციათა მოდულებს, ხოლო პირველი, მეორე და მესამე განტოლებები ერთმანეთთან აკავშირებს აქტიურ ძალებს, რაც არის სხეულის წონასწორობის აუცილებელი პირობები. რა თქმა უნდა, სხეულის წონასწორობისათვის აუცილებელია, შესრულდეს პირობები: $R_A \geq 0$, $R_B \geq 0$, $R_C \geq 0$, რადგანაც საყრდენ წერტილებში უნდა წარმოიშვას მხოლოდ ეპერტიკალურად ზევით მიმართული რეაქციები.

თუ სხეული ჰორიზონტალურ სიბრტყეს სამზე მეტ წერტილში ეყრდნობა, მაშინ ამოცანა სტატიკურად განუსაზღვრელია, რადგან ამ შემთხვევაში რეაქციათა განსასაზღვრავად გვექნება მხოლოდ სამი განტოლება, ხოლო უცნობ რეაქციათა რიცხვი იქნება სამზე მეტი.

9.2. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები ნებისმიერ სივრცითი ძალთა სისტემის წონასწორობაზე

იმისათვის, რომ სივრცეში მდებარე ნებისმიერი ძალთა სისტემა იყოს წონასწორობაში, აუცილებელია და საკმარისი, რომ სამ ურთიერთმართობულ ღერძზე ძალების გეგმილთა ჯამი და ამ ღერძის მიმართ სისტემის ყველა ძალის მომენტის ჯამი ნულის ტოლი იყოს (იხ. § 5, (5.9) და (5.10) ფორმულები):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; & \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; & \sum_{k=1}^n F_{kz} &= 0; \\ \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) &= 0; & \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) &= 0; & \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

წონასწორობის უფრო მარტივი განტოლებების მისაღებად რეკომენდებულია კოორდინატთა ღერძები გავატაროთ ისე, რომ

კეთდნენ მეტ უცნობ ძაღას. იმ შემთხვევაში, როცა ძაღის მომენტის გამოთვლა რომელიმე ღერძის მიმართ ძნელდება, რეკომენდებულია ძაღა დაიშაღოს ორ ურთიერთმართობ მდგენელად (რომელთაგან ერთი რომელიმე ღერძის პარალელურია, მეორე მართობული), ხოლო შემდეგ ვისარგებლოთ ვარინიონის შემდეგი თეორემით: რომელიმე ღერძის მიმართ ტოლქმედის მომენტი ტოლია იმავე ღერძის მიმართ მდგენელი ძაღების მომენტთა ჯამისა:

$$M_x(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k).$$

ამოცანების ამოხსნის დროს უნდა დავიცვათ შემდეგი გეგმა:

1. გამოვყოთ ის სხეული, რომლის წონასწორობაც არის განსახილველი;
2. წონასწორობის ობიექტზე (სხეულზე) გამოვსახოთ მოდებული აქტიური ძაღები;
3. გავათავისუფლოთ სხეული ბმებისაგან, ბმების მოქმედება შევცვალოთ რეაქციებით;
4. ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა;
5. შევადგინოთ წონასწორობის (9.6) განტოლებები;
6. ამოვხსნათ მიღებული განტოლებები.

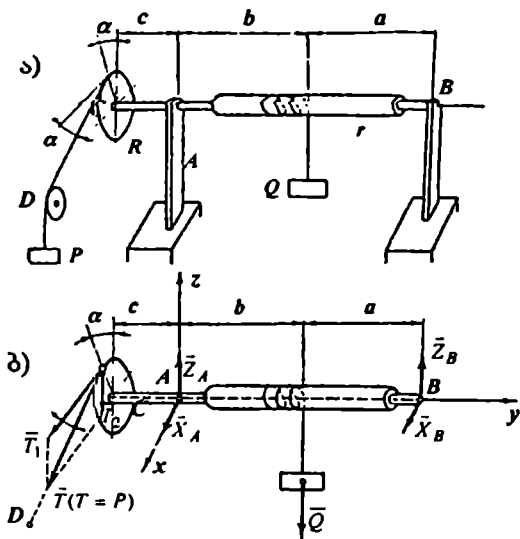
ამოცანა 57. A და B ცილინდრულ საკისარებზე მდებარე ლიღზე ჩამოცმულია R რადიუსიანი ბორბალი და r რადიუსიანი დოღი (ნახ. 9.4, ა). ბორბალზე დახვეულია D იდეალურ ბლოკზე გადაკიდებული ძაღი, რომელზეც მიბმულია $\vec{P}$ წონის ტვირთი, ძაღი პორიზონტისადმი დახრილია α კუთხით. ამასთან, სხეული წონასწორობაშია r რადიუსიან დოღზე დახვეული ძაღის ბოლოზე ჩამოკიდებული $\vec{Q}$ ტვირთის საშუალებით.

განესაზღვროთ A და B საკისრებში რეაქციები და $\vec{Q}$ ტვირთის სიდიდე (მხედველობაში არ მივიღოთ ლიღის წონა), თუ $R=12$ სმ; $r=2$ სმ; $P=20$ კნ, $\alpha=30^\circ$, $a=40$ სმ, $b=40$ სმ, $c=20$ სმ.

ამოხსნა. 1. განვიხილოთ ღილევის წონასწორობა მასთან მკეიდრად მიმაგრებულ ბორბალსა და დოლთან ერთად (ნახ. 9.4, ბ).

2. გამოვსახოთ წონასწორობის ობიექტზე მოდებული აქტიური ძალები: $\vec{T}$ - D ბლოკზე გადაკიდებული ძაფის დაჭიმულობა, რომლის მოდული ტოლია $\vec{P}$ ძალის მოდულის s , ე.ი. $T=P$; $\vec{Q}$ - Q ტვირთის წონა.

3. გაავთავისუფლოთ ღილევი ბმებისაგან, მათი მოქმედება შევცვალოთ რეაქციებით. ბმებია A და B საკისრები. რადგან წონასწორობის ობიექტზე მოქმედი აქტიური ძალები AB ღერძის მართობულია, ამიტომ $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B$ რეაქციები ასევე მდებარეობს AB-ს მართობულ სიბრტყეში. ეს რეაქციები დაიშლება მდგენელებად: $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Z}_A$; $\vec{R}_B = \vec{X}_B + \vec{Z}_B$. მოცემულ ამოცანაში გვაქვს ხუთი უცნობი: $\vec{X}_A$, $\vec{Z}_A$, $\vec{X}_B$, $\vec{Z}_B$ და $\vec{Q}$ ძალა.



ნახ. 9.4

4. ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა ისე, როგორც ნაჩვენებია 9.4, ბ ნახაზზე.

5. შევადგინოთ წონასწორობის (9.6) განტოლებები. რადგან წონასწორობის ობიექტზე მოდებული ყველა ძალა y ღერძის მართობულია, ამიტომ $\sum F_{iy} \equiv 0$ და (9.6) სისტემიდან მივიღებთ შემდეგ ხუთ განტოლებას:

$$\sum F_x = 0; X_A + X_B + P \cos \alpha = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_z = 0; Z_A + Z_B - P \sin \alpha - Q = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_x(\vec{F}_i) = 0; (a+b)Z_B + C \cdot P \sin \alpha - b \cdot Q = 0; \quad (3)$$

$$\sum M_y(\vec{F}_i) = 0; R \cdot P - rQ = 0; \quad (4)$$

$$\sum M_z(\vec{F}_i) = 0; -(a+b)X_B + C \cdot P \cos \alpha = 0. \quad (5)$$

(4)-განტოლებიდან

$$Q = \frac{R}{r} P; \quad Q = 120 \text{ კნ};$$

(5)-განტოლებიდან

$$X_B = \frac{c}{a+b} \cdot P \cos \alpha; \quad X_B = 4,33 \text{ კნ};$$

(1)-განტოლებიდან

$$X_A = \frac{a+b+c}{a+b} \cdot P \cos \alpha; \quad X_A = -21,63 \text{ კნ};$$

(3)-განტოლებიდან

$$Z_B = \frac{P(6b - c \sin \alpha)}{a+b}; \quad Z_B = 58,75 \text{ კნ};$$

(2)-განტოლებიდან

$$Z_A = \frac{a+b+c}{a+b} \cdot P \sin \alpha - \frac{6bP}{a+b}; \quad Z_A = -47,5 \text{ კნ}.$$

პასუხი: $Q=120 \text{ კნ}$; $X_A=-21,63 \text{ კნ}$; $Z_A=-47,5 \text{ კნ}$; $X_B=4,33 \text{ კნ}$; $Z_B=58,75 \text{ კნ}$.

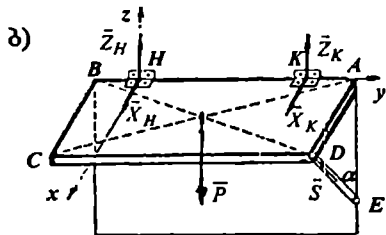
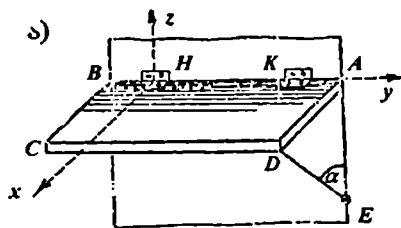
ამოცანა 58. ვაგონის ABCD თარო, რომელსაც შეუძლია AB ღერძის გარშემო ბრუნვა, ჰორიზონტალურ მდგომარეობაში შეკავებულია ვერტიკალურ კედელზე E სახსრით მიმაგრებული SD ღეროთი (ნახ. 9.5, ა). თაროსა და მასზე მდებარე ტვირთის საერთო წონა $P=80 \text{ კნ}$ და მოდებულია ABCD

მართკუთხედის ცენტრში. ზომები: $AB=180$ სმ, $AD=80$ სმ; $AK=BH=40$ სმ, $DE=100$ სმ. განესაზღვროთ $\vec{S}$ ძალა DE ღეროში და K და H ანჯამების რეაქცია, თუ ED ღეროს წონა უგულებელყოფილია.

ამოხსნა. 1. განვიხილოთ ABCD თაროს წონასწორობა (ნახ. 9.5, ბ);

2. გამოვსახოთ წონასწორობის ობიექტზე მოქმედი აქტიური ძალები: $\vec{P}$ – თაროს და ტვირთის სიმძიმის ძალა;

3. გავათავისუფლოთ სხეული ბმებისაგან, მათი მოქმედება და შევცვალოთ რეაქციებით. ბმებია DE ღერო; H და K ანჯამები. DE ღეროს $\vec{S}$ რეაქცია მოდებულია თაროს D წერტილში და მიმართულია ამ ღეროს გასწვრივ. ანჯამები შეიძლება განვიხილოთ როგორც საკისრები. რადგან თაროზე მოდებული $\vec{P}$ და $\vec{S}$ ძალები y ღერძის მართობულია ($\vec{S}$ ძალა ძეგს ZHX სიბრტყის პარალელურ ADE სამკუთხედის სიბრტყეში), ამიტომ H და K წერტილებში y ღერძის გასწვრივ რეაქციები ნულის ტოლია, ე.ი. $\vec{R}_H$ და $\vec{R}_K$ რეაქციები Hx ღერძის მართობულია. დაეშალოთ თითოეული მათგანი x და z ღერძების პარალელურ მდგენელებად: $\vec{R}_H = \vec{X}_H + \vec{Z}_H$; $\vec{R}_K = \vec{X}_K + \vec{Z}_K$.



ნახ. 9.5

ამრიგად, ამოცანაში გვაქვს ხუთი უცნობი ძალა: $\vec{X}_H, \vec{Z}_H, \vec{X}_K, \vec{Z}_K, \vec{S}$.

4. შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები. ვისარგებლოთ (9.1) და (9.2) ტოლობებით. უცნობი ძალების განსაზ-

ღერისათვის გვექნება ხუთი განტოლება (ყ ღერძზე გეგმილების განტოლება იგივეობად იქცევა, რადგან თაროზე მოდებული ყველა ძალა y ღერძის მართობია):

$$\sum F_x = 0; X_H + X_k + S \cdot \sin \alpha = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_z = 0; Z_H + Z_k + S \cdot \cos \alpha - P = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0; M_x(\vec{P}) + M_x(\vec{S}) + M_x(\vec{Z}_k) = 0; \quad (3)$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = 0; M_y(\vec{P}) + M_y(\vec{S}) = 0; \quad (4)$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = 0; M_z(\vec{X}_k) + M_z(\vec{S}) = 0. \quad (5)$$

$\sin \alpha$ და $\cos \alpha$ -ს განსაზღვრისათვის განვიხილოთ ADE მართკუთხა სამკუთხედი, რომლიდანაც გვექნება:

$$\sin \alpha = \frac{AD}{ED} = \frac{80}{100} = \frac{4}{5} \quad \text{და} \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{3}{5}.$$

ახლა 9.5,ბ ნახაზის მიხედვით განესაზღვროთ კოორდინატთა ღერძების მიმართ მომენტები:

$$M_x(\vec{Z}_k) = Z_k \cdot HK = 100Z_k; \quad M_x(\vec{X}_k) = -X_k \cdot HK = 100X_k;$$

$$M_x(\vec{P}) = -P \cdot \frac{HK}{2} = -50P; \quad M_y(\vec{P}) = P \cdot \frac{AD}{2} = 40P.$$

$\vec{S}$ ძალის მომენტებს Hx , Hy , Hx ღერძის მიმართ გამოეთვლით ფორმულებით: $M_x = yF_z - zF_y$; $M_y = zF_x - xF_z$; $M_z = xF_y - yF_x$, სადაც x, y, z არის D წერტილის კოორდინატები. აქედან გამომდინარე:

$$M_x(\vec{S}) = y \cdot S_z = HA \cdot S \cdot \cos \alpha = 180 \cdot \frac{3}{5} \cdot S = 108S;$$

$$M_y(\vec{S}) = -x \cdot S_z = -AD \cdot S \cdot \cos \alpha = -80 \cdot \frac{3}{5} \cdot S = -48S;$$

$$M_z(\vec{S}) = -y \cdot S_x = -HA \cdot S \cdot \sin \alpha = -140 \cdot \frac{4}{5} \cdot S = -112S$$

მაშასადამე, წონასწორობის (1)-(5) განტოლებები გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$X_H + Y_k + \frac{4}{5}S = 0; \quad (6)$$

$$Z_H + Z_k + \frac{3}{5}S - 80 = 0; \quad (7)$$

$$100Z_k + 108 \cdot S - 50 \cdot 80 = 0; \quad (8)$$

$$40 \cdot 80 - 48 \cdot S = 0; \quad (9)$$

$$-100X_k - 112S = 0. \quad (10)$$

$$(9) \text{ განტოლებიდან: } S = \frac{3200}{112} \approx 28,6 \text{ კნ};$$

$$(10) \text{ განტოლებიდან: } X_k = -\frac{112}{100} \cdot S \approx -32 \text{ კნ};$$

$$(6) \text{ განტოლებიდან: } X_H = -X_k - \frac{4}{5} \cdot S = 9,1 \text{ კნ};$$

$$(8) \text{ განტოლებიდან: } Z_k = \frac{4000 - 108S}{100} \approx 9,1 \text{ კნ};$$

$$(7) \text{ განტოლებიდან: } Z_H = -Z_k - \frac{3}{5} \cdot S + 80 \approx 53,7 \text{ კნ};$$

Z_k და X_k ძალებისათვის მიღებული მინუს ნიშანი გვიჩვენებს, რომ ამ ძალებს აქვს ნახაზზე მითითებული მიმართულების საწინააღმდეგო მიმართულება.

პასუხი: $S=28,6$ კნ; $X_H=9,1$ კნ; $X_k=-32$ კნ; $Z_H=53,7$ კნ; $Z_k=9,1$ კნ.

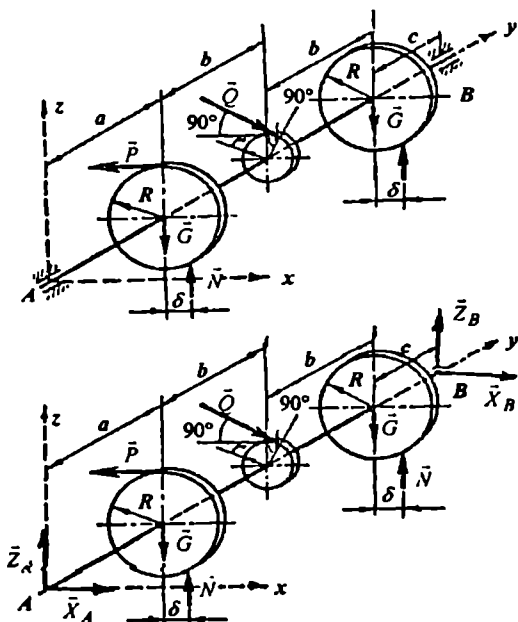
ამოცანა 59. A და B საკისარებზე მდებარე ჰორიზონტალური (ნახ. 9.6, ა) ლილვის ღერძის მართობულად ჩამოცმულია R და r რადიუსის მქონე ორი ბორბალი. კონსტრუქციაზე მოდებული ძალები და ზომები ნაჩვენებია ნახაზზე, ამასთან ამ ძალების მოქმედებით ლილვი წონასწორობაშია.

განვსაზღვროთ $\bar{P}$ ძალის სიდიდე და რეაქციები A და B საკისრებში, თუ $Q=10$ კნ; $G=N=8$ კნ; $a=40$ სმ; $b=30$ სმ; $c=20$ სმ; $R=25$ სმ; $r=15$ სმ; $\delta=5$ სმ; $\bar{Q} \perp Ay$; $\bar{P} \parallel Ax$; $\bar{N} \parallel Az$.

ამოხსნა. 1. განვიხილოთ კონსტრუქციის წონასწორობა (ნახ. 9.6, ბ).

2. გავათავისუფლოთ AB ლილვი ბმებისაგან, ბმების მოქმედება შევცვალოთ რეაქციებით. ბმებია A და B საკისრები. რადგან წონასწორობის ობიექტზე მოქმედი აქტიური ძალები მდებარეობს AB ღერძის (Ay ღერძის) მართობულ სიბრტყეებში, ამიტომ $\bar{R}_A$ და $\bar{R}_B$ რეაქციებიც მდებარეობს Ay

ღერძის მართობ სიბრტყეებში. ეს რეაქციები დავშალოთ მდგენელებად: $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Z}_A$; $\vec{R}_B = \vec{X}_B + \vec{Z}_B$.



ნახ. 9.6

3. შევადგინოთ წონასწორობის (9.6) სახის განტოლებები: მიღებული სივრცითი ძალთა სისტემის ყველა ძალა Ay ღერძის პერპენდიკულარულია, ამიტომ $\sum F_{Ay} = 0$. გვექნება წონასწორობის ხუთი განტოლება $\vec{X}_A$, $\vec{Z}_A$, $\vec{X}_B$, $\vec{Z}_B$ და $\vec{P}$ ხუთი უცნობით:

$$\sum F_x = 0; X_A - P + Q \cdot \cos 30^\circ + X_B = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_z = 0; Z_A + N - G - Q \cdot \sin 30^\circ - G + N + Z_B = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_x(\vec{F}_i) = 0;$$

$$-G \cdot a + N \cdot a - Q \cdot \sin 30^\circ (a + b) - G(a + 2b) + N(a + 2b) + Z_B(a + 2b + c) = 0; \quad (3)$$

$$\sum M_y(\vec{F}_i) = 0; -P \cdot R - N \cdot \delta + M_y(\vec{Q}) - N \cdot \delta = 0; \quad (4)$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = 0; P \cdot a - Q \cdot \cos 30^\circ (a+b) - X_B(a+2b+c) = 0. \quad (5)$$

გამოთვალათ მე-4 განტოლებაში $M_y(\vec{Q})$ გამოსახულება, გვექნება:

$$M_y(\vec{Q}) = zQ_x - xQ_z,$$

სადაც z და x არის $\vec{Q}$ ძალის მოდულის წერტილის კოორდინატები.

$$z = r \cos 30^\circ, \quad x = r \cos 60^\circ, \quad Q_x = Q \cos 30^\circ, \quad Q_z = -Q \cos 60^\circ, \quad \text{ამიტომ}$$

$$M_y(\vec{Q}) = r \cos 30^\circ \cdot Q \cos 30^\circ + r \cos 60^\circ \cdot Q \cos 60^\circ = r \cdot Q.$$

ახლა (1)-(5) განტოლებებში ჩავსვათ რიცხვითი მონაცემები და გავეთვალისწინოთ, რომ $N=G$. მივიღებთ:

$$X_A + X_B - P + 5\sqrt{3} = 0; \quad (6)$$

$$Z_A + Z_B - 5 = 0; \quad (7)$$

$$12Z_B - 35 = 0; \quad (8)$$

$$25P - 50 = 0; \quad (9)$$

$$12X_B - 4P + 35\sqrt{3} = 0. \quad (10)$$

4. ამოვხსნათ ხუთი განტოლება ხუთი უცნობით:

მე-(9) განტოლებიდან: $P=2$ კნ;

მე-(8) განტოლებიდან: $Z_B=2,92$ კნ;

მე-(10) განტოლებიდან: $X_B=4,39$ კნ;

მე-(7) განტოლებიდან: $Z_A=2,08$ კნ;

მე-(6) განტოლებიდან: $X_A=-11,05$ კნ.

პასუხი: $P=2$ კნ; $X_A=-11,05$ კნ; $Z_A=2,08$ კნ; $X_B=4,39$ კნ; $Z_B=2,92$ კნ.

9.3. სავარჯიშო ამოცანები სივრცითი ძალთა სისტემის წონასწორობაზე

1. პარალელური ძალთა სისტემა

9.1. $G=500$ ნ წონის პორიზონტალური ერთგვაროვანი კვადრატული ABCD ფილა დაკიდებულია A, D, E წერტილით 1, 2, 3 სამი ვერტიკალური ღეროთი. განსაზღვრეთ ძალვა 1 ღეროში, თუ $AD=2AE$ (ნახ. 9.7).

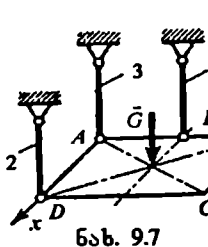
პასუხი: $S_1=500$ ნ.

9.2. ერთგვაროვანი კვადრატული ABCD ფილა პორიზონტალურ მდებარეობაში დაკიდებულია 1, 2, 3 სამი ვერტიკალური ღეროთი. რა სიდიდის $\bar{Q}$ ძალა უნდა მოედოთ A წერტილში, რომ მე-3 ღეროში ძალვა იყოს ნულის ტოლი, თუ $G=100$ ნ; $a=1$ მ (ნახ. 9.8).

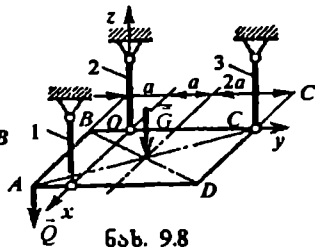
პასუხი: $Q=100$ ნ.

9.3. $G=115$ ნ წონის ABCD კვადრატული ფირფიტა პორიზონტალურ მდებარეობაში მიმაგრებულია სამ ვერტიკალურ 1, 2, 3 ღეროსთან. A წერტილზე მოდებულია ვერტიკალური $Q=185$ ნ ძალა. BD ღერძის მიმართ წონასწორობის მომენტების განტოლებიდან განსაზღვრეთ ძალვა მე-2 ღეროში (ნახ. 9.9).

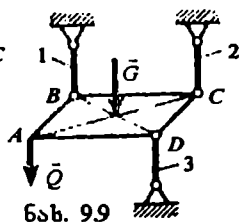
პასუხი: $S_2=-185$ ნ.



ნახ. 9.7



ნახ. 9.8



ნახ. 9.9

9.4. $G=500$ ნ წონის ABC მართკუთხა სამკუთხედის ფორმის ერთგვაროვანი ფირფიტა პორიზონტალურ მდებარეობაში შეკავებულია A, C და D წერტილებზე მიბმული თოკების საშუალებით (ნახ. 9.10). განსაზღვრეთ D წერტილზე მიბმული თოკის დაჭიმულობა, თუ $a=1$ მ.

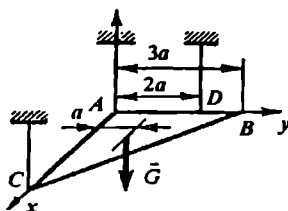
პასუხი: $T_D=250$ ნ.

9.5. ABC მართკუთხა სამკუთხედის ფორმის ერთგვაროვანი ჩარჩო პორიზონტალურ მდებარეობაში შეკავებულია 1, 2, 3 სამი ბაგირის საშუალებით (ნახ. 9.11). განსაზღვრეთ მე-3 ბაგირის დაჭიმულობა, თუ ჩარჩოს ნაწილის წონებია: $G_1=G_3=101$ ნ; $G_2=143$ ნ.

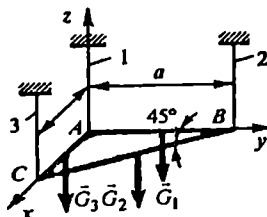
პასუხი: $S_3=122$ ნ.

9.6. ABCD ფირფიტა პორიზონტალურ მდებარეობაში შეკავებულია მასთან სახსრებით მიმაგრებული 1, 2, 3 ღეროებით. ფირფიტის წონა $G_1=10$ ნ. ფირფიტის A და D წერტილებში სახსრებით ჩამოკიდებულია მეორე ფირფიტა, რომლის წონა $G_2=8$ ნ, მისი სიგანე $EF=AD$. განსაზღვრეთ ძალვა 1 ღეროში, თუ მანძილი $a=0,4$ მ (ნახ. 9.12).

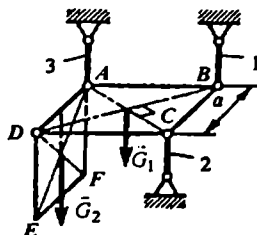
პასუხი: $S_1=-4$ ნ.



ნახ. 9.10



ნახ. 9.11



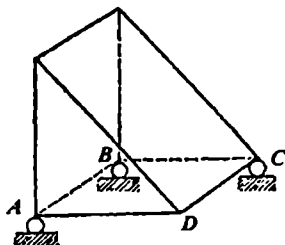
ნახ. 9.12

9.7. P წონის ერთგვაროვანი მართკუთხა სოლი A, B და C წერტილებით ეყრდნობა საგორაეებს (ნახ. 9.13). განსაზღვრეთ საყრდენთა რეაქციები.

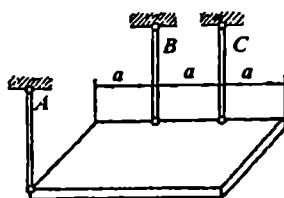
პასუხი: $N_A = \frac{1}{2}P$; $N_B = \frac{1}{6}P$; $N_C = \frac{1}{3}P$

9.8. $P=1,8$ კნ წონის ერთგვაროვანი ფილა შეკავებულია პორიზონტალურ მდგომარეობაში ვერტიკალური სამი უწონო ღეროს საშუალებით, რომლებიც ფილასთან და ჭერთან სახსრებითაა შეერთებული. განსაზღვრეთ ძალები ღეროებში (ნახ. 9.14).

პასუხი: $S_A=-S_B=0,9$ კნ; $S_C=1,8$ კნ.



ნახ. 9.13



ნახ. 9.14

9.9. OA ლილვთან მართი კუთხით მიდგულებულია BC და DE ღეროები (ნახ. 9.15). DE ღეროზე მოდებულია თანაბრად განაწილებული დატვირთვა $q=0,5$ ნ/მ ინტენსივობით. განსაზღვრეთ $\bar{F}$ ძალის მოდული, რომელიც აწონასწორებს განაწილებულ დატვირთვას, თუ $\bar{F} \parallel Oxz$.

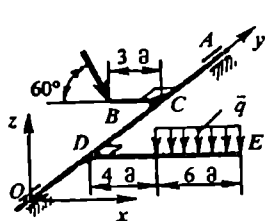
პასუხი: $F=8,08$ ნ.

9.10. AOB ლილვზე მართი კუთხით მიდგულებულია DE და BC ორი ღერო (ნახ. 9.16). DE ღეროზე მოქმედებს სამკუთხედის წესით განაწილებული დატვირთვა $q_{\max}=0,5$ ნ/მ ინტენსივობით, ხოლო BC ღეროს C წერტილზე მოდებულია $\bar{F} \parallel Oxz$ ძალა, რომელიც პორიზონტთან ადგენს $\alpha=30^\circ$ კუთხეს. წონასწორობის შემთხვევისათვის განსაზღვრეთ $\bar{F}$ ძალის მოდული.

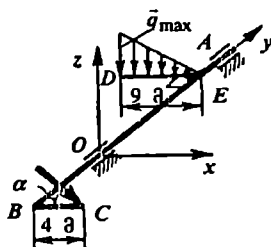
პასუხი: $F=6,75$ ნ.

9.11. $G=30$ ნ წონის OABC ფილა პორიზონტალურ მდებარეობაშია შეკავებული O და A სახსრებით და BD ბაგირით. განსაზღვრეთ ბაგირის დაჭიმულობა, თუ $a=2$ მ და კუთხე $\alpha=60^\circ$ (ნახ.9.17).

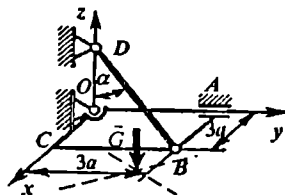
პასუხი: $T=30$ ნ.



ნახ. 9.15



ნახ. 9.16



ნახ. 9.17

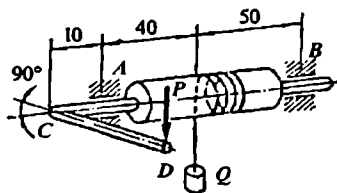
9.12. A და B საკისარებზე მდებარე ლილვზე ჩამოცმულია r რადიუსის მქონე დოლი, რომელზეც დახვეულია თოკი. მის ბოლოზე მიბმულია $Q=1000$ ნ წონის ტვირთი (ნახ. 9.18). ლილვის მართობულად C წერტილში მიმაგრებულია CD

სახელური. როგორი $\bar{P}$ ძალა უნდა მოვედოთ სახელურის მართობულად C წერტილში, რომ სისტემა იყოს წონასწორობაში, როცა CD პორიზონტალურ მდებარეობაშია. განსაზღვრეთ აგრეთვე რეაქციები A და B საკისარებში, თუ $CD=50$ სმ, $r=11$ სმ (დანარჩენი ზომები სანტიმეტრებში ნაჩვენებია ნახაზზე, დოლის წონა უგულებელყოფილია).

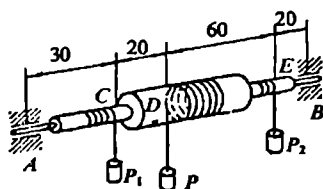
პასუხი: $P=220$ ნ; $R_A=800$ ნ; $R_B=420$ ნ.

9.13. AB პორიზონტალურ ღილეზე ხისტად მიმაგრებულია C, D, E დოლები (ნახ. 9.19). უგულებელყავით დოლების წონა და სისტემის წონასწორობის შემთხვევისათვის განსაზღვრეთ $\bar{P}$ ძალის მოდული და A და B საკისრების რეაქციები, თუ $P_1=1$ კნ; $P_2=2$ კნ; დოლების რადიუსები: $r_D=2r_C=2r_E$.

პასუხი: $P=1,5$ კნ; $R_A=2,0$ კნ; $R_B=2,5$ კნ.



ნახ. 9.18



ნახ. 9.19

9.14. A და B საკისრებზე მდებარე პორიზონტალურ ღილეზე ჩამოცმულია შკივი. შკივზე გადაკიდებული ძაფი, რომლის C ბოლო მიმაგრებულია, ხოლო მეორე ბოლოზე მიბმულია $P=10$ კნ წონის D ტვირთი (ნახ. 9.20). $AC=90$ სმ, $OB=60$ სმ, $\alpha=30^\circ$. განსაზღვრეთ რეაქციები საკისარებში, თუ სისტემა წონასწორობაშია.

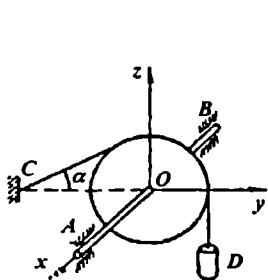
პასუხი: $Y_A=2\sqrt{3}$; $Z_A=6$ კნ; $Y_B=3\sqrt{3}$ კნ; $Z_B=9$ კნ.

9.15. $P=180$ ნ წონის ერთგვაროვანი ABC ფილა პორიზონტალურ მდებარეობაშია შეკავებულია A და B ანჯამებისა და CD თოკის საშუალებით (ნახ. 9.21). $AC=BC=75$ სმ; $AB=90$ სმ $CD=156$ სმ. განსაზღვრეთ თოკის $\bar{T}$ დაჭიმულობა და A და B საკისარების რეაქციები.

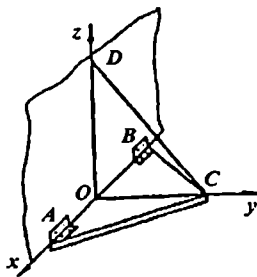
პასუხი: $T=65$ ნ; $Y_A=Y_B=12,5$ ნ; $Z_A=Z_B=60$ ნ

9.16. $Q=160$ ნ წონის ფანჯარა DE თოკის საშუალებით ვერტიკალთან $\alpha=30^\circ$ კუთხითაა შეკავებული (ნახ. 9.22). $OA=BC=25$ სმ, $AB=100$ სმ; $\angle OED=60^\circ$; $OD=50$ სმ. განსაზღვრეთ თოკის დაჭიმულობა და A და B ანჯამების რეაქცია.

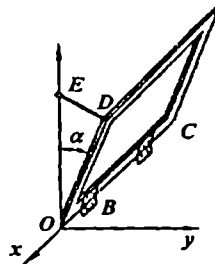
პასუხი: $T=40$ ნ; $Y_A=25\sqrt{3}$ ნ; $Z_A=55$ ნ; $Y_B=-5\sqrt{3}$ ნ; $Z_B=855$.



ნახ. 9.20



ნახ. 9.21



ნახ. 9.22

9.17. C შკივზე დახვეული თოკი გადაკიდებულია ბლოკზე, მეორე ბოლოზე მიბმულია $P_2=270$ ნ წონის ტვირთი. თოკი ვერტიკალთან ადგენს $\alpha=\arcsin 0,6$ კუთხეს (ნახ. 9.23). შკივის რადიუსი $r=20$ სმ, $AB=30$ სმ, $BC=40$ სმ, $CD=50$ სმ, $AE=60$ სმ. უგულვებელყოთ ხახუნი, განსაზღვრეთ ტვირთის P_1 წონა, რეაქციები B და D საკისრებში, როცა სისტემა წონასწორობაშია.

პასუხი: $P_1=90$ ნ; $Y_B=90$ ნ; $Z_B=0$; $Y_D=72$ ნ; $Z_D=-126$ ნ.

9.18. C შკივზე დახვეული ბაგირი დაჭიმეს ისე, რომ BE ღერო ვერტიკალიდან გადახარეს $\alpha=30^\circ$ კუთხით, რის შემდეგ ბაგირის H ბოლო მიამაგრეს კედელზე (ნახ. 9.24). განსაზღვრეთ ბაგირის დაჭიმულობა და რეაქციები A და D საკისარებში, როცა მოქმედებს E ბირთვი. ბირთვის წონა 420 ნ-ია, შკივის რადიუსი $R=0,4$ მ, ბირთვის რადიუსი $r=0,2$ მ, $AB=0,4$ მ, $BC=0,5$ მ, $CD=0,6$ მ, $BE=0,6$ მ $BE \perp AD$ და $HK \perp Dy$.

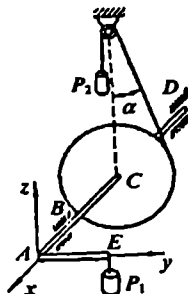
პასუხი: $T=420$ კნ; $Y_A=108$ ნ; $Z_A=308$ ნ; $Y_B=252$ ნ; $Z_D=112$ ნ.

9.19. სამწახნაგაზე მოქმედებს სამი წყვილძალა, M_1 , M_2 და M_3 მომენტებით (ნახ. 9.25). უგულებელყავით კონსტრუქციის წონა, განსაზღვრეთ A , B და C საკისრების რეაქციები, თუ $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$.

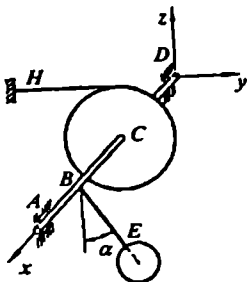
$$\text{პასუხი: } X_B = -X_C = \frac{1}{2bc}(-M_1a + M_2b + M_3c);$$

$$Y_C = -Y_A = \frac{1}{2ac}(M_1a - M_2b + M_3c);$$

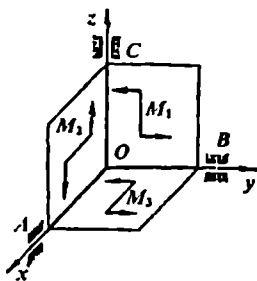
$$Z_A = -Z_B = \frac{1}{2ab}(M_1a + M_2b - M_3c).$$



ნახ. 9.23



ნახ. 9.24



ნახ. 9.25

9.20. მართი კუთხით მოღუნული კონსოლური OAB ღეროს O ბოლო ჩამაგრებულია კედელში და მის B წერტილში მოდებულია ვერტიკალური $\vec{P}$ ძალა (ნახ. 9.26). უგულებელყავით ღეროს წონა და განსაზღვრეთ რეაქციები O ჩამაგრებაში, თუ $P=10$ კნ; $a=2$ მ, $b=0,8$ მ და $OA \perp AB$.

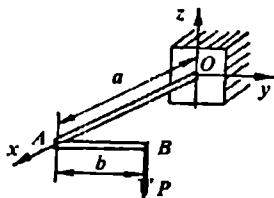
პასუხი: $X_0=0$; $Y_0=0$; $Z_0=10$ კნ; $M_{0x}=-8$ კნ.მ; $M_{0y}=-20$ კნ.მ; $M_{0z}=0$.

9.21. $2l=4$ მ სიგრძის კონსოლურ AB ძელზე მოქმედებს პორიზონტალური $\vec{P}_2$ ძალა და წყვილძალა M მომენტით (ნახ. 9.27). განსაზღვრეთ A წერტილში ჩამაგრების რეაქციები, თუ ძელის წონა $P_1=20$ ნ; $P_2=30$ ნ; $M=12$ ნ.მ.

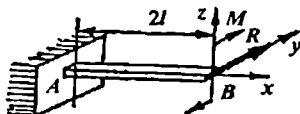
პასუხი: $X_A=0$ ნ; $Y_A=-30$ ნ; $Z_A=20$ ნ; $M_{Ax}=-12$ კნ.მ; $M_{Ay}=-40$ კნ.მ; $M_{Az}=120$ ნ.მ.

922. $OA=4$ მ სიმაღლის ბოძზე მიმაგრებულია Axy სიბრტყეში მდებარე ორი ბაგირი (ნახ. 928), რომელთა დაჭიმულობის ძალები: $T_1=390$ ნ და $T_2=260$ ნ. განსაზღვრეთ O წერტილში ხისტი ჩაშვრების რეაქცია, თუ ბოძის წონა $P=1,5$ კნ, $\vec{T}_1 \perp \vec{T}_2$, $\alpha = \arctg \frac{5}{12}$.

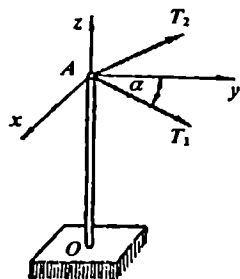
პასუხი: $X_0=90$ ნ; $Y_0=-4060$ ნ; $Z_0=1,5$ კნ; $M_{0x}=18,4$ ნ.მ; $M_{0y}=3,6$ ნ.მ; $M_{0z}=0$.



ნახ. 926



ნახ. 927



ნახ. 928

923. $\alpha=60^\circ$ კუთხით გაღებულ კარზე მიბმულია BEM თოკი, რომლის M ბოლოზე მიბმულია $P=44$ ნ წონის ტვირთი (ნახ. 929). $G=264$ ნ წონის კარი წონასწორობის მდგომარეობაში შეკავებულია C სახელურზე Oy ღერძის პარალელურად მოდებული $\vec{F}$ ძალის საშუალებით. $AB=AE=0,9$ მ, $OA=2,2$ მ, $CD=1$ მ. უგულებელყავით ხახუნი და განსაზღვრეთ $\vec{F}$ ძალის მოდული, A საკისრისა და O საქუსლეს რეაქციები.

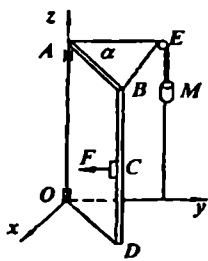
პასუხი: $F=44$ ნ, $X_A=-5\sqrt{3}$ ნ, $Y_A=-29$ ნ; $X_O=27\sqrt{3}$ ნ; $Y_O=51$ ნ; $Z_O=264$ ნ.

924. $P=100$ ნ წონის ერთგვაროვანი მართკუთხა ფილა ჰორიზონტალურ მდგომარეობაში შეკავებულია A სფერული სახსრით, D ანჯამითა და CE უწონო თოკით, რომელიც BE ვერტიკალთან ადგენს 60° -იან კუთხეს (ნახ. 9.30). განსაზღვრეთ ბმათა რეაქციები, თუ $AB=120$ სმ, $AD=100$ სმ.

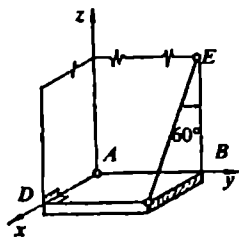
პასუხი: $T=100$ ნ, $X_A=50\sqrt{3}$ ნ, $Y_A=-Y_D=60\sqrt{3}$ ნ; $Z_A=50$ ნ; $Z_D=0$.

925. $G=300$ ნ წონის ერთგვაროვანი მართკუთხა ფილა პორიზონტალურ მდებარეობაში შეკავებულია A სფერული სახსრით, D ანჯამითა და უწონო $CE=1$ მ სიგრძის თოკით (ნახ. 9.31). $BC=30$ სმ, $CD=40$ სმ. განსაზღვრეთ ბმათა რეაქციები.

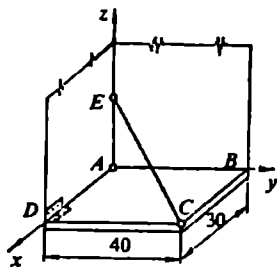
პასუხი: $T=100\sqrt{3}$ ნ, $X_A=30\sqrt{3}$ ნ, $Y_A=40\sqrt{3}$ ნ; $Z_A=150$ ნ; $Y_D=Z_D=0$



ნახ. 9.29

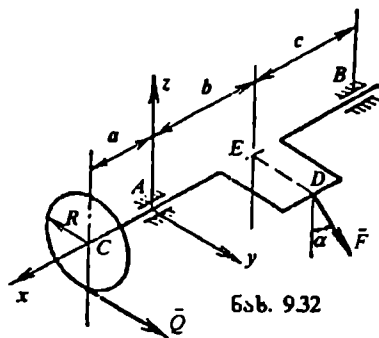


ნახ. 9.30



ნახ. 9.31

926. მუხლუხა ლილვს შეუძლია A და B საკისრებში ბრუნვა. ლილვის ბოლოზე ჩამოცმულია $R=20$ სმ რადიუსის შკივი. Axy სიბრტყეში მდებარე მუხლუხას შუა D წერტილში მოდებულია $\vec{F}$ ძალა, რომელიც ლილვის მართობ სიბრტყეში მდებარეობს და ვერტიკალთან ადგენს $\alpha=30^\circ$ -იან კუთხეს (ნახ.

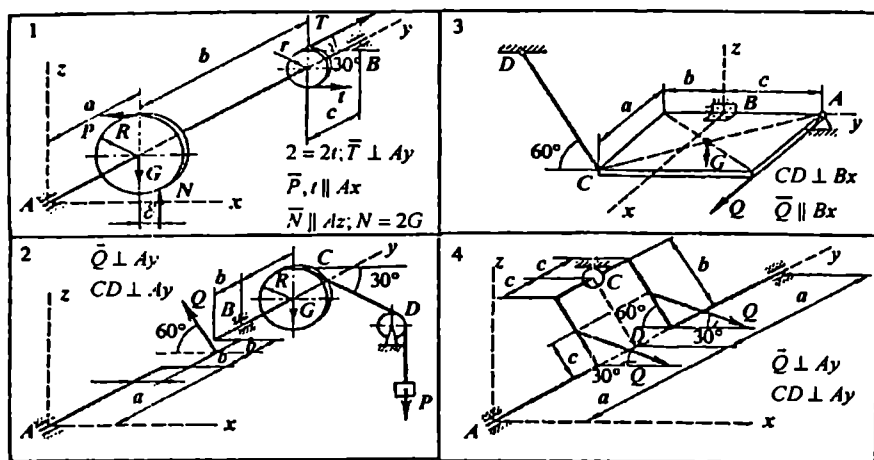


ნახ. 9.32

9.32). განსაზღვრეთ შკივზე Ay ღერძის პარალელურად მოდებული $\vec{Q}$ ძალის მოდული, A და B საკისრებში რეაქციები, თუ ლილვი წონასწორობაშია. $F=20$ კნ. $ED=15$ სმ; $a=15$ სმ; $b=20$ სმ; $c=25$ სმ.

პასუხი: $Q=13$ კნ, $Y_A=-22,96$; $Z_A=-9,64$ ნ; $Y_B=-11$ კნ; $Z_B=7,70$.

927. კონსტრუქციები, მათზე მოდებული ძალები და ზომები ნაჩვენებია ნახაზზე (ნახ. 933, 1, 2, 3, 4). განსაზღვრეთ საყრდენთა რეაქციები და უცნობი ძალა, თუ მოცემულია:



ნახ. 933

1. $T=2\text{ კნ}$; $t=1\text{ კნ}$; $N=2\text{ კნ}$; $G=1\text{ კნ}$; $a=20\text{ სმ}$; $b=30\text{ სმ}$; $c=15\text{ სმ}$; $R=15\text{ სმ}$; $r=10\text{ სმ}$; $\delta=5\text{ სმ}$.

პასუხი: $P=0$, $X_A=0,1\text{ კნ}$; $Z_A=1,77\text{ კნ}$; $X_B=-2,10\text{ კნ}$; $Z_B=-0,77\text{ კნ}$.

2. $Q=10\text{ კნ}$; $G=5\text{ კნ}$; $a=40\text{ სმ}$; $b=20\text{ სმ}$; $c=40\text{ სმ}$; $R=20\text{ სმ}$; $r=5\text{ სმ}$.

პასუხი: $P=2,17\text{ კნ}$, $X_A=0,56\text{ კნ}$; $Z_A=3,31\text{ კნ}$; $X_B=2,57\text{ კნ}$; $Z_B=-5,89\text{ კნ}$.

3. $Q=6\text{ კნ}$; $G=2\text{ კნ}$; $a=60\text{ სმ}$; $b=40\text{ სმ}$; $c=60\text{ სმ}$.

პასუხი: $S=1,15\text{ კნ}$, $X_A=7,84\text{ კნ}$; $Z_A=-0,67\text{ კნ}$; $X_B=1,27\text{ კნ}$; $Z_B=1,67\text{ კნ}$.

4. $Q=4\text{ კნ}$; $a=60\text{ სმ}$; $b=40\text{ სმ}$; $c=20\text{ სმ}$.

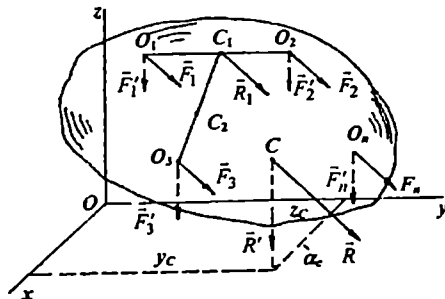
პასუხი: $X_A=-2\sqrt{3}\text{ კნ}$; $Z_A=4\text{ კნ}$; $X_B=-2\sqrt{3}\text{ კნ}$; $Z_B=4\text{ კნ}$; $Z_c=4\text{ კნ}$.

10. სიმპიზის ცენტრი

10.1. პარალელური ძალების ცენტრი

ეთქვათ, მყარ სხეულზე მოდებულია ერთ მხარეს მოგეზული ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) პარალელურ ძალთა სისტემა. ვგულისხმობთ, რომ მოცემული ძალთა სისტემის $\vec{R}$ ნაკრები ვექტორი არ უდრის ნულს, ე.ი. სხეული წონასწორობაში არ იმყოფება (ნახ. 10.1). ცხადია, რომ $\vec{R}$ ტოლქმედი მოცემული ძალების პარალელურია, მისი სიდიდე მდგენელი ძალების მოდულების ჯამის ტოლია და მოგეზულია მათი მიმართულებით (იხ. 4.1 პარაგრაფი):

$$R = \sum_{k=1}^n F_k. \quad (10.1)$$



ნახ. 10.1

($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) ძალთა სისტემის თითოეული ძალა მოეაზრუნოთ მათი მოდების წერტილების გარშემო ერთი და იმავე მხარეს ერთი და იმავე კუთხით. მობრუნების შედეგად მიღებული ძალები აღენიშნოთ $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$ -ით, რომლებიც 10.1 ნახაზზე პუნქტირითაა გამოსახული. პირობის თანახმად, მოცემული და მობრუნების შედეგად მიღებული ძალების მოდულები ტოლია, ე.ი. $F_1 = F'_1, F_2 = F'_2, \dots, F_n = F'_n$, ამიტომ მობრუნებით მიღებული ძალების $\vec{R}'$ ტოლქმედის მოდული ტოლი იქნება მოცემული ძალების $\vec{R}$ ტოლქმედის მოდულისა:

$$R' = R. \quad (10.2)$$

ვაჩვენოთ, რომ ძალების მობრუნების კუთხისგან დამოუკიდებლად $\vec{R}'$ ტოლქმედის ფუძე გადის $\vec{R}$ ტოლქმედის მოდების C წერტილში. მართლაც, თუ შევკრებთ $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ორ ძალას, ენახათ, რომ ძალების ერთი და იმავე კუთხით ნებისმიერი მობრუნებისას მათი $\vec{R}_1$ ტოლქმედი გაივლის C_1 წერტილში, რომელიც ამ ძალების მოდების O_1 და O_2 წერტილების შემაერთებელ წრფეზე მდებარეობს. $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალების ერთი და იმავე კუთხით ნებისმიერი მობრუნებისას, C_1 წერტილიდან O_1 და O_2 წერტილებამდე მანძილი უცვლელი დარჩება და მართებული იქნება $F_1 \cdot C_1 O_1 = F_2 \cdot C_1 O_2$ ტოლობა, ამასთან $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. ახლა შევკრიბოთ $\vec{R}_1$ და $\vec{F}_3$ ძალები, შემდეგ ანალოგიური წესით გავაგრძელოთ შეკრება მიმდევრობით ბოლო ძალამდე, მივიღებთ ერთ $\vec{R}$ ტოლქმედ ძალას:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k,$$

რომელიც მოდებულია C წერტილზე. თუ (4.1) ფორმულის თანახმად შევკრებთ $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$ ძალებს, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $\vec{R}' = \sum_{k=1}^n \vec{F}'_k$ ტოლქმედის ფუძეც გაივლის C წერტილში.

განსაზღვრება. პარალელური ძალთა ცენტრი ეწოდება ისეთ C წერტილს, რომელზეც გადის ტოლქმედის ფუძე, მისი მდებარეობა დამოკიდებულია ძალების სიდიდეებზე, მათი მოდების წერტილებზე და არ არის დამოკიდებული იმაზე, როგორ ეაბრუნებთ ძალებს ერთი და იმავე კუთხით მათი მოდების წერტილების გარშემო.

აეირჩიოთ დეკარტის მართკუთხა Oxyz კოორდინატთა სისტემა (ნახ. 10.1) და განვსაზღვროთ C წერტილის მდებარეობა. ძალების მოდების წერტილები აღვნიშნოთ $O_1(x_1, y_1, z_1)$, $O_2(x_2, y_2, z_2), \dots, O_n(x_n, y_n, z_n)$ -ით, ხოლო C ცენტრის კოორდინატები

x_C, y_C, z_C -ით. $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ ძალთა სისტემის ყველა ძალა მოვაბრუნოთ ისე, რომ ისინი Oz ღერძის პარალელური იყოს. მობრუნებული $(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n)$ ძალთა სისტემისათვის გამოვიყენოთ ვარიაციონის თეორემა, რომელიც შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$M_y(\vec{R}') = \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k). \quad (10.3)$$

მაგრამ (10.1)-ის თანახმად:

$$M_y(\vec{R}') = R' \cdot x_C = R \cdot x_C.$$

მხედველობაში მივიღოთ, რომ

$$M_y(\vec{F}'_1) = F'_1 \cdot x_1 = F_1 \cdot x_1, \dots, M_y(\vec{F}'_n) = F_n \cdot x_n,$$

მივიღებთ:

$$R \cdot x_C = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n.$$

აქედან ვიპოვიტ:

$$x_C = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n} = \frac{\sum F_k x_k}{R}.$$

თუ მოცემულ $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ ძალთა სისტემას მოვაბრუნებთ ისე, რომ Ox ღერძის პარალელური იყოს, ხოლო შემდეგ მოვაბრუნებთ ისე, რომ Oy ღერძის პარალელური გახდეს, მაშინ y_C და z_C კოორდინატებისთვის მივიღებთ ანალოგიურ ფორმულებს.

ამრიგად, პარალელური ძალების C ცენტრის კოორდინატები გამოითვლება ფორმულებით:

$$x_C = \frac{\sum F_k \cdot x_k}{R}, \quad y_C = \frac{\sum F_k \cdot y_k}{R}, \quad z_C = \frac{\sum F_k \cdot z_k}{R}. \quad (10.4)$$

შენიშვნა. (10.4) ფორმულები ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით მიღებული გეკონდა მე-4 თავში (იხ. (4.5) ფორმულები).

ადვილია შევამოწმოთ, რომ (10.1) და (10.4) ფორმულები მართებულია იმ შემთხვევაშიც, როცა ძალები პარალელურია და ყველა ერთ მხარეს არ არის მოგებული. ამ შემთხვევაში უნდა განვიხილოთ არა $\vec{F}_k$ ძალების მოდულები, არამედ

მათი გეგმილები ძალების პარალელურ ღერძზე, ამის გარდა, უნდა დადგინდეს, რომ $\vec{R} \neq 0$.

10.2. მყარი სხეულის სიმძიმის ცენტრი

დედამიწის მახლობლობაში სხეულის ყოველ ნაწილზე მოქმედი მიზიდულობის ძალები მიმართულია დედამიწის ცენტრისაკენ. რადგან სხეულების ზომა ძალიან მცირეა დედამიწის რადიუსთან შედარებით, ამიტომ ეს ძალები შეიძლება ჩავთვალოთ პარალელურ ძალებად, რომლებიც სხეულის ნებისმიერი მობრუნებისას ყოველი ნაწილაკისათვის ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას და რჩება ერთმანეთის პარალელური.

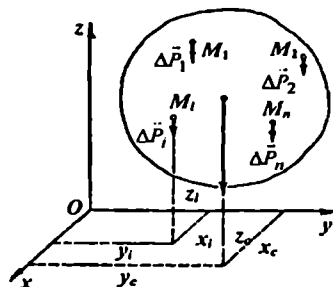
ნებისმიერი ფორმის მქონე სხეული (წარმოდგენით) კოორდინატი სიბრტყეების პარალელური სიბრტყეებით დავყოთ ელემენტარულ მოცულობებად. n ნაწილად დაყოფის შედეგად მიღებული თითოეულ ელემენტარულ ნაწილაკზე მოდებული სიმძიმის (მიზიდულობის) ძალა აღვნიშნოთ $\Delta \vec{P}_i$ -თი. შევეკრიბოთ ეს ძალები პარალელური ძალების შეკრების წესის მიხედვით, მივიღებთ ერთ $\vec{P}$ ძალას, რომელსაც სხეულის სიმძიმის ძალა ეწოდება. ის არის პარალელური $\Delta \vec{P}_i$ ძალების ტოლქმედი და მოდებულია პარალელური ძალების C ცენტრში. ამ წერტილს სხეულის სიმძიმის ცენტრი ეწოდება. $\vec{P}$ ტოლქმედის მოდული სხეულის წონის ტოლია:

$$P = \sum \Delta P_i. \quad (10.5)$$

$\vec{P}$ ტოლქმედი მიმართული იქნება $\Delta \vec{P}_i$ ძალების პარალელურად დედამიწის ცენტრისაკენ.

მყარ სხეულში სიმძიმის ცენტრს უკავია ზუსტად განსაზღვრული მდებარეობა, რომელიც არ არის დამოკიდებული განსახილველი სხეულის მდებარეობაზე.

აღვნიშნოთ სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები x_C , y_C , z_C -ით, ხოლო სხეულის ნებისმიერი ელემენტარული



ნახ. 10.2

ნაწილაკის კოორდინატები – x_i, y_i, z_i -ით (ნახ. 10.2). სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები შეიძლება განვსაზღვროთ, როგორც პარალელურ ძალთა ცენტრის კოორდინატები.

სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებისათვის (10.4) ფორმულები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum x_i \cdot \Delta P_i}{P} = \frac{x_1 \cdot \Delta P_1 + x_2 \cdot \Delta P_2 + \dots + x_n \cdot \Delta P_n}{\Delta P_1 + \Delta P_2 + \dots + \Delta P_n}, \\ y_C &= \frac{\sum y_i \cdot \Delta P_i}{P} = \frac{y_1 \cdot \Delta P_1 + y_2 \cdot \Delta P_2 + \dots + y_n \cdot \Delta P_n}{\Delta P_1 + \Delta P_2 + \dots + \Delta P_n}, \\ z_C &= \frac{\sum z_i \cdot \Delta P_i}{P} = \frac{z_1 \cdot \Delta P_1 + z_2 \cdot \Delta P_2 + \dots + z_n \cdot \Delta P_n}{\Delta P_1 + \Delta P_2 + \dots + \Delta P_n}, \end{aligned} \quad (10.6)$$

სადაც $\sum x_i \cdot \Delta P_i$; $\sum y_i \cdot \Delta P_i$; $\sum z_i \cdot \Delta P_i$, გამოსახულებებს ეწოდება მოცემული ΔP_i პარალელური ძალთა სისტემის სტატიკური მომენტები შესაბამისად Oyz , Oxz და Oxy კოორდინატთა სიბრტყეების მიმართ.

(10.6) ფორმულებში x_i, y_i, z_i კოორდინატები აღგებრულ სიდიდეებია, ხოლო ΔP_i -ის მნიშვნელობები ყოველთვის დადებითია, რადგან ეს ძალები მიმართულია მხოლოდ ერთ მხარეს.

(10.6) ფორმულებით შეგვიძლია გამოეთვალოთ სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, თუ სხეულს დავყოფთ არა ელემენტარულ ნაწილაკებად, არამედ $\bar{P}_i$ წონის ცალკეულ სხეულებად, რომელთა სიმძიმის ცენტრის x_i, y_i, z_i კოორდინატები ცნობილია.

განვსაზღვროთ ერთგვაროვანი სხეულის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა.

ერთგვაროვანი სხეულის წონა განისაზღვრება $P = \gamma V$ ფორმულით, სადაც V არის სხეულის მოცულობა, γ - ერთეუ-

ლოვანი მოცულობის წონა. ყოველი ნაწილაკის წონა ანალოგიურად განისაზღვრება ფორმულით: $\Delta P_i = \gamma \Delta V_i$, სადაც ΔV_i ელემენტარული სხეულის M_i ნაწილაკის მოცულობაა. ამ მონაცემების (10.6) ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum x_i \cdot \Delta V_i}{V} = \frac{x_1 \cdot \Delta V_1 + x_2 \cdot \Delta V_2 + \dots + x_n \cdot \Delta V_n}{V_1 + V_2 + \dots + V_n}, \\ y_c &= \frac{\sum y_i \cdot \Delta V_i}{V} = \frac{y_1 \cdot \Delta V_1 + y_2 \cdot \Delta V_2 + \dots + y_n \cdot \Delta V_n}{V_1 + V_2 + \dots + V_n}, \\ z_c &= \frac{\sum z_i \cdot \Delta V_i}{V} = \frac{z_1 \cdot \Delta V_1 + z_2 \cdot \Delta V_2 + \dots + z_n \cdot \Delta V_n}{V_1 + V_2 + \dots + V_n}, \end{aligned} \quad (10.7)$$

სადაც $V = \sum V_i$ - სხეულის მოცულობაა.

$\sum x_i \cdot \Delta V_i$; $\sum y_i \cdot \Delta V_i$ და $\sum z_i \cdot \Delta V_i$ გამოსახულებებს ეწოდება მოცულობის სტატიკური მომენტები შესაბამისად Oyz , Oxz და Oxy სიბრტყეების მიმართ.

შეგნიშნოთ, რომ, თუ სხეულის დაყოფის n რიცხვს უსასრულოდ გაეზრდით, მაშინ ΔP_k უნდა შეეცვალოთ dP ღიფერენციალით და ჯამი ინტეგრალით, ამიტომ (10.6) ფორმულები შეიძლება ჩაეწეროს შემდეგი სახით:

$$x_c = \frac{1}{P} \int_{(V)} x \cdot dP; \quad y_c = \frac{1}{P} \int_{(V)} y \cdot dP; \quad z_c = \frac{1}{P} \int_{(V)} z \cdot dP \quad (10.8)$$

ანალოგიურად (10.7) ფორმულები მიიღებს შემდეგ სახეს:

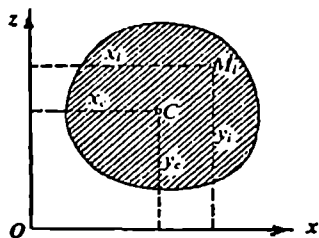
$$x_c = \frac{1}{V} \int_{(V)} x \cdot dV; \quad y_c = \frac{1}{V} \int_{(V)} y \cdot dV; \quad z_c = \frac{1}{V} \int_{(V)} z \cdot dV \quad (10.9)$$

როგორც ვხედავთ, ერთგვაროვანი სხეულის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა დამოკიდებულია მხოლოდ მის გეომეტრიულ ფორმაზე და არა γ -ს მნიშვნელობაზე. ამ მიზეზით C წერტილს, რომლის კოორდინატები განისაზღვრება (10.7) და (10.9) ფორმულებით, V მოცულობის სხეულის სიმძიმის ცენტრი ეწოდება.

10.3. ბრტყელი ფიგურის სიმძიმის ცენტრი. კოორდინატთა ღერძების მიმართ ბრტყელი ფიგურის ფართობის სტატიკური მომენტები

თუ განსახილველი სხეულის ერთ-ერთი განზომილება მცირეა დანარჩენ ორ განზომილებაზე, მაშინ ეს სხეული შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ბრტყელი ფიგურა. ბრტყელი ფიგურის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა განისაზღვრება x_C და y_C კოორდინატებით (ნახ. 10.3).

დაეყოთ ფიგურის ფართობი ელემენტარულ ფართობებად.



ნახ. 10.3

თითოეული ელემენტარული M_i ფართობის წონა განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$\Delta P_i = \gamma_s \cdot \Delta S_i, \quad P = \gamma_s \cdot S,$$

სადაც γ_s ხვედრითი წონაა, ΔS_i ზედაპირის ელემენტარული ნაწილაკის ფართობი; $S = \sum S_i$ მთელი ზედაპირის ფართობი. აღვნიშნოთ M_i ელემენტარული ფართობის სიმ-

ძიმის ცენტრის კოორდინატები x_i და y_i -თი. მაშინ ბრტყელი ფიგურის ფართობის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები განისაზღვრება (10.6) ფორმულებით:

$$x_C = \frac{\sum x_i \Delta P_i}{P} = \frac{\sum x_i \gamma_s \Delta S_i}{\gamma_s \cdot S} = \frac{\sum x_i \Delta S_i}{S},$$

ამრიგად,

$$x_C = \frac{\sum x_i \Delta S_i}{S}; \quad y_C = \frac{\sum y_i \Delta S_i}{S}, \quad (10.10)$$

სადაც აჯამება ერცელდება ყველა ელემენტის ფართობზე.

თუ ბრტყელი ფიგურა შემოსაზღვრულია $x=a$, $x=b$, ($b>a$), $y=0$ წრფეებითა და $y=f(x)$ წირით ან $y=c$; $y=d$; ($d>c$); $x=0$ წრფეებითა და $x=f(y)$ წირით, მაშინ ბრტყელი ფიგურის ფართობის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით (იხ. (6.25) ფორმულა):

$$x_c = \frac{\int x dS}{S} = \frac{\int_a^b x \cdot f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx},$$

$$y_c = \frac{\int y dS}{S} = \frac{\int_c^d y \cdot f(y) dy}{\int_c^d f(y) dy}. \quad (10.11)$$

(10.10) და (10.11) ფორმულები გვიჩვენებს, რომ ბრტყელი ფიგურის ფართობის სიმძიმის ცენტრის x_c და y_c კოორდინატები დამოკიდებული არ არის ფირფიტის ნივთიერების მახასიათებელ γ_s მუდმივ სიდიდეზე და მათი მნიშვნელობები დამოკიდებულია მხოლოდ ფირფიტის გეომეტრიულ მახასიათებლებზე.

ახლა განვსაზღვროთ x და y ღერძების მიმართ ბრტყელი ფიგურის ფართობის სტატიკური მომენტები. აღვნიშნოთ ეს სიდიდეები $M_x(S)$ და $M_y(S)$ -ით. მაშინ (10.10) ფორმულების საფუძველზე გვექნება:

$$M_x(S) = \sum y_i \cdot S_i = y_1 \cdot S_1 + y_2 \cdot S_2 + \dots + y_n \cdot S_n,$$

$$M_y(S) = \sum x_i \cdot S_i = x_1 \cdot S_1 + x_2 \cdot S_2 + \dots + x_n \cdot S_n. \quad (10.12)$$

ამრიგად, ბრტყელი ფიგურის სტატიკური მომენტი რაიმე ღერძის მიმართ ტოლია ფიგურის ფართობის ნამრავლისა მისი სიმძიმის ცენტრიდან ღერძამდე მანძილის ალგებრულ მნიშვნელობაზე.

(10.11) ფორმულების თანახმად გვექნება:

$$M_x(S) = \int_c^d y \cdot f(y) dy; \quad M_y(S) = \int_a^b x \cdot f(x) dx. \quad (10.13)$$

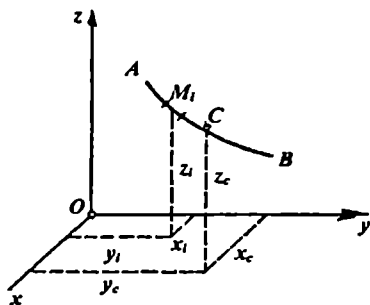
ღერძის მიმართ ბრტყელი ფიგურის ფართობის სტატიკური მომენტის განზომილებაა სმ^3 ან მ^3 .

თუ ცნობილია ბრტყელი ფიგურის ფართობის სტატიკური მომენტები კოორდინატთა ღერძების მიმართ, მაშინ მისი სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$x_c = \frac{M_y(S)}{S}; \quad y_c = \frac{M_x(S)}{S}. \quad (10.14)$$

10.4. წირის სიმძიმის ცენტრი

განვიხილოთ ერთგვაროვანი მატერიალური სხეული, რომლის ერთი განზომილება გაცილებით აღემატება დანარჩენ ორ განზომილებას. მაგალითად, მავთულის AB ნაჭერი, რომლის განივეკეთი მუდმივია (ნახ. 10.4). AB მავთულის წონა



ნახ. 10.4

დინატები აღენიშნოთ x_i , y_i , z_i -ით. მაშინ AB მავთულის სიმძიმის C ცენტრის კოორდინატები (10.4) ფორმულების მიხედვით, მიიღებს სახეს:

$$x_C = \frac{\sum x_i \Delta P_i}{P} = \frac{\sum x_i \rho \Delta l_i}{\rho \cdot L} = \frac{\sum x_i \Delta l_i}{L},$$

ანუ

$$x_C = \frac{\sum x_i \Delta l_i}{L}; \quad y_C = \frac{\sum y_i \Delta l_i}{L}; \quad z_C = \frac{\sum z_i \Delta l_i}{L}. \quad (10.15)$$

(10.9) ფორმულების შესაბამისად, (10.15) ფორმულები შეიძლება ჩაეწეროს ასე:

$$x_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} x dl; \quad y_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} y dl; \quad z_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} z dl. \quad (10.16)$$

ერთგვაროვანი AB მავთულის სიმძიმის ცენტრს ზოგად შემთხვევაში წირის სიმძიმის ცენტრი ეწოდება.

10.5. სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატების განსაზღვრის ხერხები

1. სიმეტრიის მეთოდი: ა) თუ ერთგვაროვან სხეულს აქვს სიმეტრიის სიბრტყე, მაშინ სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს ამ სიბრტყეზე;

ბ) თუ ერთგვაროვან სხეულს აქვს სიმეტრიის ღერძი, მაშინ სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს ამ ღერძზე;

გ) თუ ერთგვაროვან სხეულს აქვს სიმეტრიის ცენტრი, (მაგალითად, წრიული რგოლი, მართკუთხა ან წრიული ფირფიტა, წესიერი მრავალკუთხედი და ელიფსი, მართკუთხა პარალელეპიპედისა და ბირთვის მოცულობები და სხვა სხეულები), მაშინ სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს მათი სიმეტრიის გეომეტრიულ ცენტრში.

დაეუშვათ, ერთგვაროვან სხეულს აქვს სიმეტრიის სიბრტყე, მაშინ ამ სიბრტყით ის გაიყოფა ისეთ ორ ნაწილად, რომელთა P_1 და P_2 წონები ერთმანეთის ტოლი იქნება, ხოლო ამ სხეულების სიმძიმის ცენტრები სიმეტრიის სიბრტყიდან ერთნაირი მანძილით დაშორებული იქნება. მაშასადამე, სხეულის სიმძიმის ცენტრი, რომელზეც გადის ტოლი და პარალელური $\bar{P}_1$ და $\bar{P}_2$ ორი ძალის ტოლქმედის ფუძე, მოთავსებული იქნება სიმეტრიის სიბრტყეში. ანალოგიური შედეგი მიიღება ბ) და გ) შემთხვევებში, როცა სხეულს აქვს სიმეტრიის ღერძი ან სიმეტრიის ცენტრი.

2. ნაწილებად დაყოფის მეთოდი. რთული ფორმის სხეულებს ყოფენ ნაწილებად, რომელთა სიმძიმის ცენტრი ცნობილია. სხეულის სიმძიმის ცენტრის გამოსათვლელ ზემოთ მოყვანილ ფორმულაში შევა ამ ნაწილების მოცულობა ან ფართობი, ან წირის ნაწილების სიგრძე.

3. უარყოფითი ფართობის მეთოდი. ამ მეთოდს იყენებენ იმ სხეულების სიმძიმის ცენტრის მდებარეობის განსაზღვრისათვის, რომელსაც აქვს ამოჭრილი (ცარიელი) ნაწილები. ასეთ შემთხვევაში სხეულს დაყოფენ ნაწილებად და თვლიან, რომ სხეულის ამოჭრილ (ცარიელი) ნაწილებს აქვს უარყოფითი ფართობი.

4. ინტეგრების მეთოდი. ერთგვაროვან სხეულებს დაანაწილებენ ნებისმიერ უსასრულო მცირე ელემენტებად და სიმძიმის ცენტრის მდებარეობას განსაზღვრავენ (10.10), (10.15) ფორმულების ნაცვლად (10.11), (10.16) ფორმულებით.

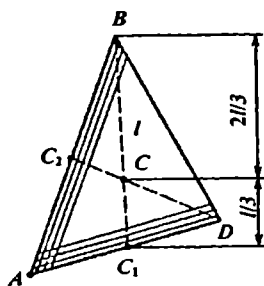
5. ექსპერიმენტული მეთოდი. რთული კონფიგურაციის არაერთგვაროვანი სხეულების სიმძიმის ცენტრები შეიძლება განესაზღვროთ ჩამოკიდების ან აწონის მეთოდით.

10.6. ზოგიერთი ერთგვაროვანი სხეულის სიმძიმის ცენტრი

განვიხილოთ მატერიალური სხეულების, წირების, ბრტყელი ფიგურებისა და სხეულების სიმძიმის ცენტრის განსაზღვრის მაგალითები.

1. l სიგრძის მატერიალური წრფივი მონაკვეთი. ერთგვაროვანი წრფივი მონაკვეთის სიმძიმის ცენტრი მოთავსებულია მის შუა C წერტილში. თუ მას მრუდწირული ფორმა აქვს, მაშინ სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები გამოითვლება (10.15) ან (10.16) ფორმულებით.

2. სამკუთხედის ფართობის სიმძიმის ცენტრი. განვიხილოთ ერთგვაროვანი ABD სამკუთხედი და განესაზღვროთ მისი ფართობის სიმძიმის ცენტრი (ნახ. 10.5). ამისათვის



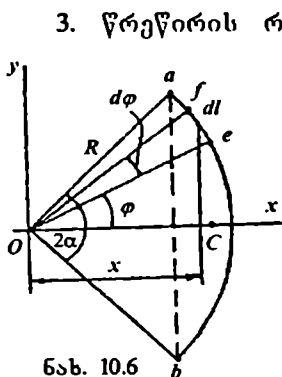
ნახ. 10.5

დავანაწილოთ სამკუთხედი AD გვერდის პარალელური მონაკვეთებით. რაც უფრო დიდი იქნება დანაწილების რიცხვი, იმდენად ვიწრო იქნება თითოეული ზოლი. დაყოფის რიცხვის გაზრდით ეს ზოლები ზღვარში შეიძლება მივიჩნიოთ წრფივ მონაკვეთებად. ცხადია, თითოეული ზოლის სიმძიმის ცენტრი იქნება მის შუა წერტილში. ამ ზოლების სიმძიმის ცენტრები განლაგებული იქნება BC_1

მედიანაზე.

ახლა დავყოთ სამკუთხედი AB გვერდის პარალელური წრფეებით ზოლებად. მიღებული ზოლების სიმძიმის ცენტრები განლაგდება DC_2 მედიანაზე. აქედან დავასკენით, რომ სამ-

კუთხედის ფართობის სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს BC_1 და BC_2 მედიანების გადაკვეთის C წერტილში, სადაც გაივლის მესამე BD გვერდის მედიანაც: C წერტილი მედიანებს ყოფს 1:2 შეფარდებით, ე.ი., თუ $BC_1=l$, მაშინ $C_1C=\frac{1}{3}l$, $CB=\frac{2}{3}l$.



ნახ. 10.6

3. წრეწირის რკალის სიმძიმის ცენტრი. ვთქვათ, მატერიალური წირი არის R რადიუსიანი წრეწირის ab რკალი, რომლის ცენტრალური aob კუთხე 2α -ს ტოლია. Ox ღერძი დავამთხვიოთ $\angle aob$ -ს ბისექტრიას. სიმეტრიის გამო რკალის სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს Ox ღერძზე: $y_C=0$. (ნახ. 10.6).

სიმძიმის C ცენტრის x_C აბსცისას განსასაზღვრავად ვისარგებლოთ (10.17)-ის პირველი ფორმულით. შემოვიღოთ პოლარული φ კოორდინატი და ab რკალზე გამოვყოთ უსასრულო მცირე dl სიგრძის ef ელემენტი. ამ ელემენტის სიმძიმის ცენტრის x კოორდინატი იქნება $x=R\cos\varphi$, ხოლო სიგრძე $dl=Rd\varphi$, ab რკალის სიგრძე $l=2R\alpha$. მაშინ ab რკალის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატისათვის მივიღებთ:

$$x_C = \frac{1}{l} \int_{(l)} x dl = \frac{1}{2\alpha R} \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \varphi \cdot R d\varphi = \frac{R}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi = \frac{R}{2\alpha} \cdot \sin \varphi \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{R}{2\alpha} [\sin \alpha - \sin(-\alpha)] = R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

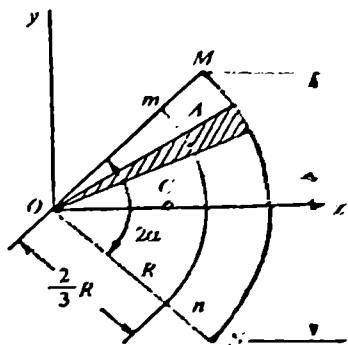
ამრიგად, წრეწირის რკალის სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს მის სიმეტრიის ღერძზე და წრეწირის ცენტრიდან დაშორებულია მანძილით:

$$x_C = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}, \quad (10.17)$$

სადაც α - არის ცენტრალური კუთხის ნახევარი რადიანებში.

4. წრიული სექტორის ფართობის სიმძიმის ცენტრი. განვიხილოთ ერთგვაროვანი წრის OMN სექტორი (ნახ. 10.7).

წრის რადიუსი აღენიშნათ R -ით, ხოლო ცენტრ-გარე კუთხე - 2α -ით. (ვახდია, სიმეტრიის გამო სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს ცენტრალური კუთხის ბისექტრისზე, რომელიც MN რკალს შუაზე ყოფს. ავირწიოთ კოორდინატა სათავე O წერტილში, ხოლო Ox ღერძი ბისექტრისას დავამთხვიოთ. სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს ამ ღერძზე. მოვიკებნოთ მისი აბსცისა. ამისათვის OMN სექტორი დავყოთ ელემენტარულ სექტორებად (ნახ. 10.7). ყოველი ასეთი ელემენტარული სექტორი შეიძლება ჩავთვალოთ ტოლფერდა სამკუთხედად, რომლის სიმძიმის A ცენტრი O წვეროდან დაშორებულია $\frac{2}{3}R$ მანძილით. მაშასადამე, წრიული OMN სექტორის სიმძიმის



ცენტრი ემთხვევა mn რკალის სიმძიმის ცენტრს, რომლის მდებარეობა განისაზღვრება (10.19) ფორმულით.

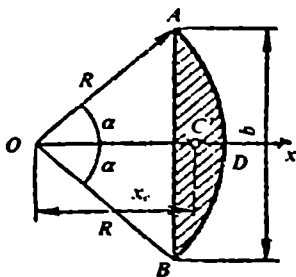
საბოლოოდ მივიღებთ, რომ წრიული სექტორის სიმძიმის C ცენტრი მდებარეობს სიმეტრიის ღერძზე, რომელიც O ცენტრიდან დაშორებულია მანძილით:

$$x_c = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{R^2 b}{3S}, \quad (10.19)$$

სადაც S სექტორის ფართობია; b - MN ქორდის სიგრძე.

5. წრიული სეგმენტის ფართობის სიმძიმის ცენტრი განესაზღვროთ R რადიუსიანი ADB წრიული სეგმენტის ფართობის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა (ნახ. 10.8).

ამოხსნა. რადგან წრიულ სეგმენტს აქვს სიმეტრიის ღერძი, ამიტომ მისი სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს ამ ღერძზე. სიმეტრიის ღერძად მივიღოთ Ox ღერძი, კოორდინატა სათავე ავიღოთ O წერტილში (ნახ. 10.8). ADB წრიული სეგმენტის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატების საპოვნელად შევაგსოთ მისი ფართობი წრიულ $OADB$ სექტორადღე.



ნახ. 10.8

AOB სამკუთხედის ფართობი იქნება:

$S_1 = \frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha$. სამკუთხედის ფართობის სიმძიმის ცენტრის აბსცისა:

$$x_1 = \frac{2}{3} R \cos \alpha.$$

OADB წრიული სექტორის ფართობი განისაზღვრება ფორმულით:

$$S_2 = \frac{\pi R^2 2\alpha}{360} = R^2 \alpha; \quad \text{მისი სიმძიმის}$$

ცენტრის აბსცისა $x_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot R$.

თუ OAB სამკუთხედის ფართობს ჩათვლით უარყოფითად, მაშინ ADB წრიული სექტორის ფართობის სიმძიმის ცენტრის აბსცისა იქნება:

$$x_c = \frac{S_2 \cdot x_2 - S_1 \cdot x_1}{S_2 - S_1} = \frac{R^2 \alpha \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot R - \frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha \cdot \frac{2}{3} R \cos \alpha}{R^2 \alpha - \frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha};$$

ანუ

$$x_c = \frac{4R \sin^3 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)}. \quad (10.18)$$

ახლა (10.18) შეიძლება ჩაწეროთ სხვა სახითაც:

$$S = S_2 - S_1 = 0,5 R^2 (2\alpha - \sin 2\alpha)$$

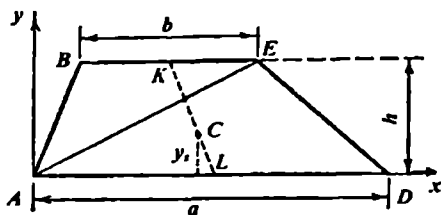
სადაც S - წრიული სექტორის ფართობია.

$$\text{საიდანაც } 2\alpha - \sin 2\alpha = \frac{2S}{R^2}.$$

თუ AB ქორდის სიგრძეს აღვნიშნავთ b -თი, გვექნება $b = AB = 2R \sin \alpha$, სადაც $R \sin \alpha = 0,5b$. თუ მიღებულ მონაცემებს შევიტანთ (10.18)-ში, გვექნება:

$$x_c = \frac{b^3}{12S}. \quad (10.18')$$

6. ტრაპეციის ფართობის სიმძიმის ცენტრი. განვსაზღვროთ ერთგვაროვანი ABED ტრაპეციის ფართობის სიმძიმის C ცენტრი. აღვნიშნოთ AD გვერდის სიგრძე a -თი, BC-სი – b -თი, ხოლო ტრაპეციის სიმაღლე – h -ით (ნახ. 10.9). ABCD ტრაპეცია დავეყოთ AD და BC ფუძეების პარალელური წრფეებით სოლებად. თითოეული ზოლის სიმძიმის ცენტრები მოთავსდება BE და AD ფუძეების შუა წერტილების შემადგენელ KL წრფეზე, მაშასადამე, ტრაპეციის სიმძიმის ცენტრიც უნდა მდებარეობდეს ამ წრფეზე. იმისათვის, რომ ეიპოვოთ ტრაპეციის სიმძიმის C ცენტრის ორდი-



ნახ. 10.9

ნატა ანუ მანძილი ქვედა ფუძიდან C წერტილამდე, დავეყოთ ტრაპეცია ABE და ADE სამკუთხედებად. ამ სამკუთხედებისათვის შესაბამისად გვაქვს

$$y_1 = \frac{2}{3} \cdot h; \quad S_1 = \frac{1}{2} \cdot bh; \quad y_2 = \frac{1}{3} h; \quad S_2 = \frac{1}{2} \cdot ah.$$

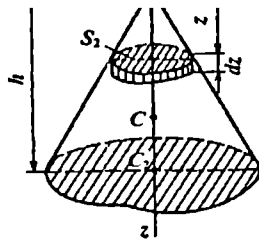
ვისარგებლოთ (10.14) ფორმულით, მივიღებთ:

$$y_C = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{h(a + 2b)}{3(a + b)}. \quad (10.20)$$

(10.20) ფორმულიდან გამომდინარეობს ტრაპეციის ფართობის სიმძიმის ცენტრის აგების გეომეტრიული წესი. თუ A წერტილიდან AD გვერდის გაგრძელებაზე გადავდებთ მარცხნივ b -ს ტოლ მონაკვეთს, ხოლო BC გვერდის გაგრძელებაზე – a -ს ტოლ მონაკვეთს მარჯვნივ და ამ მონაკვეთების ბოლოებს შევაერთებთ ერთმანეთთან, მაშინ ეს წრფე KL მონაკვეთს გადაკვეთს ტრაპეციის სიმძიმის C ცენტრში.

7. ერთგვაროვანი კონუსის სიმძიმის ცენტრი. განვსაზღვროთ კონუსის მოცულობის სიმძიმის ცენტრი (ნახ. 10.10). სიმარტივისათვის განვიხილოთ მართი კონუსი, რომლის სიმაღლე ემთხვევა სიმეტრიის ღერძს. კონუსის სიმაღლე არის მონაკვეთი, რომელიც აერთებს მის O წვეროს ფუძის ფართობის

სიმძიმის C_1 ცენტრთან. კოორდინატა სათავე მოვათავსოთ კონუსის წვეროში, ხოლო Oz ღერძი დავამთხვიოთ სიმეტრიის ღერძს. ცხადია, ასეთ შემთხვევაში კონუსის მოცულობის სიმძიმის ცენტრი იქნება Oz ღერძზე.



ნახ. 10.10

კონუსი დაეყოთ Oz ღერძის მართობული სიბრტყეებით dz სისქის თხელ ფირფიტებად, რომელთა ფართობია S_z . ყველა მიღებული კვეთი (ფირფიტა) მსგავსი იქნება კონუსის ფუძისა. კონუსის მოცულობის სიმძიმის ცენტრის z_c კოორდინატი გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$z_c = \frac{1}{V} \int z dV$$

აღვნიშნოთ $OC_1=h$, მაშინ მსგავსების საფუძველზე შეიძლება დაეწეროს:

$$\frac{S_z}{S} = \frac{z^2}{h^2} \Rightarrow S_z = \frac{S}{h^2} \cdot z^2.$$

გავითვალისწინოთ, რომ $dV=S_z dz$, $V=\frac{1}{3}Sh$, მაშინ გვექნება:

$$z_c = \frac{\int z \cdot \frac{S}{h^2} \cdot dz}{\frac{1}{3}Sh} = \frac{3}{h^3} \int z^3 dz = \frac{3}{4}h,$$

ანუ $z_c=OC=\frac{3}{4}h.$ (10.21)

ამრიგად, მართი კონუსის მოცულობის სიმძიმის C ცენტრი O წვეროდან დაშორებულია $3/4h$ მანძილით, ხოლო ფუძიდან – $1/4h$ მანძილით. ეს შედეგი მართებულია ნებისმიერი კონუსისა და ნებისმიერი პირამიდისათვის, როგორც მართი, ასევე დახრილისათვის, ე.ი. პირამიდის ან კონუსის მოცულობის სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს ფუძიდან $1/4h$ მანძილზე.

8. ერთგვაროვანი ნახევარბირთვის მოცულობის სიმძიმის ცენტრი. ნახევარბირთვს აქვს სიმეტრიის ღერძი. სიმეტრიის ღერძს დავამთხვიოთ Ox ღერძი (ნახ. 10.11). Ox ღერძის

მართობული სიბრტყეებით ნახევარბირთვი დავეყოთ dx სისქის ფირფიტებად. მიღებულ დისკებს ექნება განსხვავებული რადიუსები. აღენიშნოთ ისინი y ცვლადით. ცნობილია, რომ წრეწირის განტოლებას აქვს სახე:

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

სადაც R არის ნახევარბირთვის რადიუსი. სიმძიმის C ცენტრის კოორდინატი გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$x_c = \frac{1}{V} \int x dV,$$

სადაც x არის ელემენტარული ფირფიტის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატი. ნახევარბირთვის მოცულობა: $V = \frac{2\pi}{3} R^3$ ელემენტარული ფირფიტის მოცულობა $dV = \pi x^2 dx = \pi y^2 dx = \pi(R^2 - x^2)dx$, რადგან ფირფიტის რადიუსი $r = y$. შევასრულოთ ინტეგრირება $x=0$ -დან $x=R$ -მდე საზღვრებში. მივიღებთ:

$$x_c = \frac{1}{V} \int x dV = \frac{\int_0^R x \pi (R^2 - x^2) dx}{\frac{2}{3} \pi R^3} = \frac{1}{2R^3} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{3}{8} R.$$

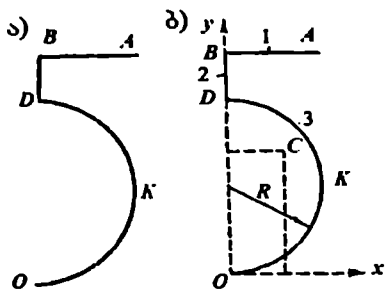
ამრიგად, ნახევარბირთვის მოცულობის სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს მისი ცენტრიდან

$$OC = x_c = \frac{3}{8} R \quad (10.23)$$

მანძილზე. ეს მანძილი ნაკლებია ნახევარბირთვის R რადიუსის ნახევარზე.

10.7. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები ერთგვაროვანი სხეულის სიმძიმის ცენტრის განსაზღვრაზე

ამოცანა 60. 10.12, ა ნახაზზე ნაჩვენებია $ABDKO$ ფიგურა, რომელიც დამზადებულია ერთნაირი მასალის ერთგვაროვანი ღეროებისაგან. განვსაზღვროთ ამ ფიგურის სიმძიმის ცენტრის



ნახ. 10.12

$$x_c = \frac{l_1 \cdot x_1 + l_2 \cdot x_2 + l_3 \cdot x_3}{l_1 + l_2 + l_3},$$

$$y_c = \frac{l_1 \cdot y_1 + l_2 \cdot y_2 + l_3 \cdot y_3}{l_1 + l_2 + l_3},$$

სადაც $l_1=4$; $l_2=2$; $l_3 = \frac{2\pi R}{2} = 4\pi$; $x_1=2$; $x_2=0$;

$$x_3 = R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 4 \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\pi/2} = \frac{8}{\pi}; \quad y_1=10; y_2=9; y_3=4.$$

x_1, y_1 ; x_2, y_2 ; x_3, y_3 არის 1, 2, 3 ღეროების სიმძიმის ცენტრების კოორდინატები. ჩავსვათ რიცხვითი მნიშვნელობები (x_c) და (y_c) ფორმულებში, მივიღებთ:

$$x_c=2,15 \text{ მ}; \quad y_c=5,88 \text{ მ}.$$

ამოცანა 61. ვიპოვოთ დაშტრიხული ბრტყელი ფიგურის ფართობის სიმძიმის ცენტრი (ნახ. 10.13).

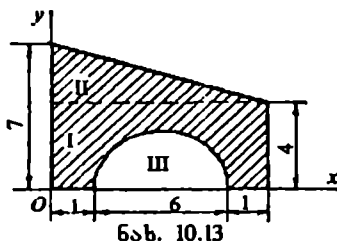
ამოხსნა. დავეთვათ ფიგურა სამ ფიგურად: I – მართკუთხედად, II – სამკუთხედად და III – ნახევარწრედ.

Oxy სისტემაში განვსაზღვროთ ამ სხეულების სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები და ფართობები:

I - მართკუთხედისთვის $S_1=8 \cdot 4=32 \text{ სმ}^2$; $x_1=4 \text{ სმ}$; $y_1=2 \text{ სმ}$;

II - სამკუთხედისთვის $S_2 = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12 \text{ სმ}^2$; $x_2 = \frac{1}{3} \cdot 8 = \frac{8}{3} \text{ სმ}$;

$$y_2 = 4 + \frac{1}{3} \cdot 3 = 5 \text{ სმ}.$$



ნახ. 10.13

მდებარეობა, თუ $AB=4 \text{ მ}$, $BD=2 \text{ მ}$ და DKO ნახევარწრის რადიუსი $R=4 \text{ მ}$.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ დაყოფის მეთოდი. დავეთვათ ფიგურა 1, 2, 3 ღეროებად (ნახ. 10.12,ბ). ამ შემთხვევაში სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

III - ნახევარწრისთვის:

$$S_3 = \frac{1}{2} \pi R^2 = \frac{1}{2} \cdot 3,14 \cdot 3^2 = 14,13 \text{ სმ}^2; x_3 = 4 \text{ სმ.}$$

$$y_3 = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi} \approx 1,27 \text{ სმ.}$$

ვისარგებლოთ (10.10) ფორმულებით და გამოვიყენოთ უარყოფით ფართობთა მეთოდი, გვექნება:

$$x_c = \frac{\sum x_i \cdot \Delta S_i}{\sum S_i} = \frac{32 \cdot 4 + 12 \cdot \frac{8}{3} - 14,13 \cdot 4}{32 + 12 - 14,13} \approx 3,46 \text{ სმ,}$$

$$y_c = \frac{\sum y_i \cdot \Delta S_i}{\sum S_i} = \frac{32 \cdot 2 + 12 \cdot 5 - 14,13 \cdot 1,27}{32 + 12 - 14,13} \approx 3,55 \text{ სმ.}$$

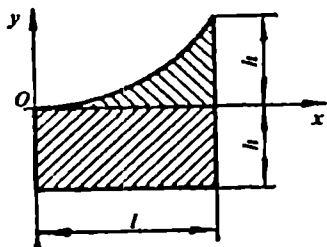
ამოცანა 62. ფიგურა შემოსაზღვრულია $x=0$, $x=l$, $y=h$, $y=-h$ წრფეებითა და პარაბოლით, რომლის წვერო მოთავსებულია O წერტილში (ნახ. 10.14). განესაზღვროთ მიღებული ფიგურის ფართობის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ დაყოფის მეთოდი. პირველი ფიგურა იყოს პარაბოლური სამკუთხედი, რომლის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები აღვნიშნოთ x_1 -ითა და y_1 -ით, ხოლო ფართობი - S_1 -ით. მეორე ფიგურა არის მართკუთხედი l და h გვერდებით, მისი სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები იყოს x_2 და y_2 , ხოლო ფართობი - S_2 .

ნახაზის თანახმად, პარაბოლის განტოლება იქნება $y=mx^2$. განესაზღვროთ m კოეფიციენტი, როცა $x=l$, მაშინ $y=h$, მივიღებთ: $m = \frac{h}{l^2}$. ამრიგად, პარაბოლის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$y = \frac{h}{l^2} x^2$$

სიმძიმის ცენტრის x_1 და y_1 კოორდინატების გამოსათვლელად ვისარგებლოთ (10.11) ფორმულებით:



ნახ. 10.14

$$x_1 = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}; \quad y_1 = \frac{\int_a^b yf(y)dy}{\int_a^b f(y)dy}, \quad (1)$$

სადაც $f(x) = y = \frac{h}{l^2} x^2$; $a=0$, $b=l$; $f(y) = x = \frac{l}{\sqrt{h}} \cdot \sqrt{y}$; $x \geq 0$, $y \geq 0$; $c=0$;

$d=h$. ახლა გამოვთვალოთ (1)-ის პირველი ფორმულის მნიშვნელი და მრიცხველი:

$$S_1 = \int_a^b f(x)dx = \int_0^l \frac{h}{l^2} x^2 dx = \frac{l}{3l^2} \cdot x^3 \Big|_0^l = \frac{1}{3} hl.$$

$$\int_a^b xf(x)dx = \int_0^l \frac{h}{l^2} x^3 dx = \frac{h}{4l^2} \cdot x^4 \Big|_0^l = \frac{1}{4} hl^2$$

$$\text{მაშასადამე, } x_1 = \frac{1}{4} hl^2 : \frac{1}{3} hl = \frac{3}{4} l.$$

ანალოგიურად გამოვთვალოთ y_1 -ს და მივიღებთ: $y_1 = 3/10h$. მეორე ფიგურის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები იქნება:

$$x_2 = \frac{1}{2} l \text{ და } y_2 = -\frac{1}{2} h.$$

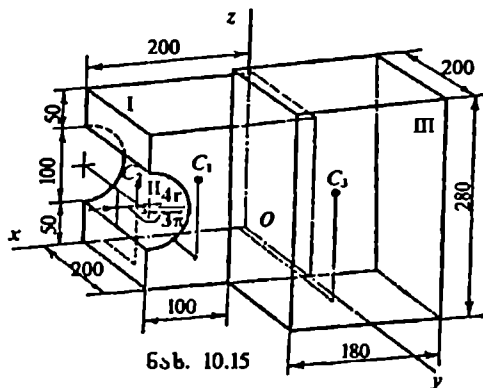
ფიგურის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$x_c = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{\frac{3}{4} l \cdot \frac{1}{3} hl + \frac{1}{2} l \cdot hl}{\frac{1}{3} hl + hl} = \frac{9}{16} l.$$

$$y_c = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{\frac{3}{10} h \cdot \frac{1}{3} hl - \frac{1}{2} h \cdot hl}{\frac{4}{3} hl} = -\frac{3}{10} h.$$

პასუხი: ფიგურის ფართობის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები: $x_c = 0,5625l$; $y_c = -0,3h$.

ამოცანა 63. განვსაზღვროთ იმ სხეულის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა, რომელიც შედგება: I – კუბისაგან; II – კუბიდან ამოჭრილი ნახევარცილინდრისაგან; III – მრავალკუთხა პარალელეპიპედისაგან (ნახ. 10.15) (ზომები მმ-ში).



ნახ. 10.15

ამოხსნა. 1. ავირჩიოთ კოორდინატა $Oxyz$ სისტემა ისე, როგორც 10.5 ნახაზზეა ნაჩვენები. აღნიშნოთ I, II და III სხეულების სიმძიმის ცენტრები C_1 , C_2 და C_3 -ით. გამოვთვალოთ თითოეული სხეულის მოცულობა და C_1 , C_2 , C_3 წერტილების კოორდინატები, ამასთან, ნახევარცილინდრის მოცულობა ჩავთვალოთ უარყოფითად:

$V_1=8000 \text{ სმ}^3$; $C_1(10; 10; 10)$, $V_2=-758 \text{ სმ}^3$; $C_2(17,9; 10; 10)$,
 $V_3=10080 \text{ სმ}^3$; $C_3(1; 30; 14)$.

2. გამოვთვალოთ სხეულის სიმძიმის C ცენტრის კოორდინატები შემდეგი ფორმულებით:

$$x_c = \frac{x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3}{V_1 + V_2 + V_3} = \frac{8000 \cdot 10 - 785 \cdot 17,9 + 10080 \cdot 1}{8000 - 785 + 10080} \approx 44 \text{ მმ};$$

$$y_c = \frac{y_1V_1 + y_2V_2 + y_3V_3}{V_1 + V_2 + V_3} = \frac{8000 \cdot 10 - 785 \cdot 10 + 10080 \cdot 30}{8000 - 785 + 10080} \approx 216 \text{ მმ};$$

$$z_c = \frac{z_1V_1 + z_2V_2 + z_3V_3}{V_1 + V_2 + V_3} = \frac{8000 \cdot 10 - 785 \cdot 10 + 10080 \cdot 14}{8000 - 785 + 10080} \approx 106 \text{ მმ}.$$

ამრიგად, მოცემული სხეულის სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს $C(44; 216; 106)$ წერტილში.

10.8. სავარჯიშო ამოცანები ერთგვაროვანი სხეულის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობის განსაზღვრაზე

1. ერთგვაროვანი წვრილი მავთულისაგან (ღეროსაგან) შედგენილი სხეულის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობის განსაზღვრა

10.1. ერთგვაროვანი წვრილი მავთული მოღუნულია მართი კუთხეებით (ნახ. 10.16). განსაზღვრეთ სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, თუ $a=4$, სმ; $b=6$ სმ; $c=2$ სმ.

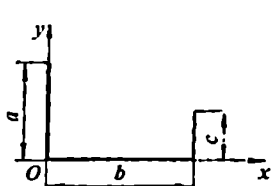
პასუხი: $x_C=2,50$ სმ; $y_C=0,83$ სმ.

10.2. ერთგვაროვანი წვრილი მავთული მოღუნულია მართი კუთხეებით (ნახ. 10.17). განსაზღვრეთ სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა.

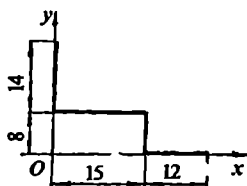
პასუხი: $x_C=10,4$ სმ; $y_C=7,4$ სმ.

10.3. იპოვეთ ბრტყელი წამწეს სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა, თუ $a=10$ სმ (ნახ. 10.18)

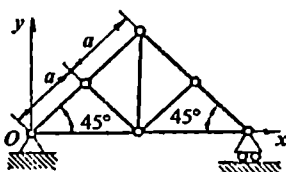
პასუხი: $x_C=14,14$ სმ; $y_C=4,43$ სმ.



ნახ. 10.16



ნახ. 10.17



ნახ. 10.18

10.4. წვრილი მავთულისგან დამზადებული სამკუთხედის წვეროთა კოორდინატებია $O(0; 0)$, $A(6; 0)$, $B(6; 8)$. განსაზღვრეთ სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, თუ სიგრძეები მოცემულია სანტიმეტრებში.

პასუხი: $x_C=4$ სმ; $y_C=3$ სმ.

10.5. წვრილი AB მავთულისგან დამზადებულია r რადიუსიანი ($OA=OB=r$) წრეწირის მეოთხედი. განსაზღვრეთ სიმძიმის C ცენტრის მდებარეობა.

პასუხი: $OC = x_C = \frac{3\sqrt{2}}{4 + \pi} \cdot r \approx 0,594 r$.

10.6. განსაზღვრეთ 10.19 ნახაზზე გამოსახული ღეროვანი სისტემის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, თუ $a = 2$ მ, $b = 3$ მ.

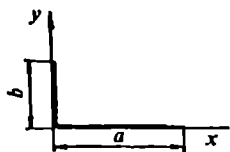
პასუხი: $x_c = 0,4$ მ, $y_c = 0,9$ მ.

10.7. განსაზღვრეთ 10.20 ნახაზზე გამოსახული ღეროვანი სისტემის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, თუ $a = 4$ მ, $b = 3$ მ.

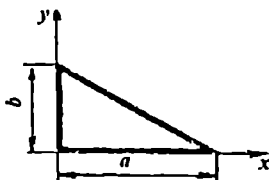
პასუხი: $x_c = 1,5$ მ, $y_c = 1,2$ მ.

10.8. განსაზღვრეთ 10.21 ნახაზზე ასახული ღეროვანი სისტემის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, თუ $a = 4$ მ.

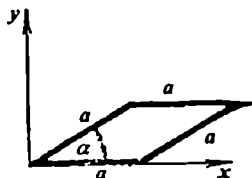
პასუხი: ა) $x_c = 3$ მ, $y_c = \sqrt{3}$ მ.



ნახ.10.19.



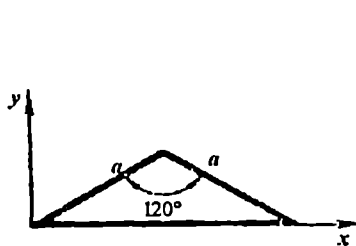
ნახ.10.20



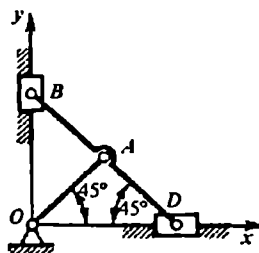
ნახ. 10.21

10.9. განსაზღვრეთ 10.22 ნახაზზე მოცემული ღეროვანი სისტემის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, თუ $a = 4$ მ.

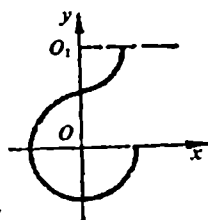
პასუხი: $x_c = 2\sqrt{3}$ მ, $y_c = 2(2 - \sqrt{3})$ მ.



ნახ. 10.22



ნახ.10.23



ნახ. 10.24

10.10. ელიფსოგრაფის მოცემული მდებარეობისათვის იპოვეთ სიმძიმის ცენტრის y_c კოორდინატი, თუ ერთგვაროვანი OA და BD ღეროების წონა შესაბამისად 8 ნ და 12 ნ-ია, ხოლო

B და D ცოცხების წონაა 5 კნ, სიგრძე $OA = 3\sqrt{2}$ მ (ნახ. 10.23).

პასუხი: $y_c = 2,6$ მ.

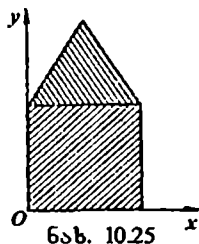
10.11. მათული შედგება r რადიუსიანი ორი რკალისაგან (ნახ. 10.24). განსაზღვრეთ სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

პასუხი: $x_c = 0$; $y_c = \frac{\pi - 2}{2\pi} \cdot r \approx 0,182 r$.

2. ერთგვაროვანი ფირფიტებისაგან შედგენილი ფიგურის ფართობის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობის განსაზღვრა

10.12. ფიგურა შედგენილია კვადრატისა და ტოლგვერდა სამკუთხედისაგან (ნახ. 10.25). განსაზღვრეთ ფიგურის ფართობის სიმძიმის C ცენტრის მდებარეობა, თუ კვადრატის გვერდის სიგრძე $a = 10$ სმ.

პასუხი: $x_c = 5,0$ სმ; $y_c = 7,4$ სმ.



10.13. განსაზღვრეთ ტრაპეციის ფორმის ფირფიტის ფართობის სიმძიმის C ცენტრის კოორდინატები, თუ ტრაპეციის წვეროთა კოორდინატებია: $O(0; 0)$, $A(18; 0)$, $B(12; 6)$, $D(0; 6)$ (სიგრძეები სანტიმეტრებში).

პასუხი: $x_c = 7,6$ სმ; $y_c = 2,8$ სმ.

10.14. იპოვეთ 10.26 ნახაზზე გამოსახული ფირფიტის ფართობის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, რომლის ზომები მოცემულია სანტიმეტრებში.

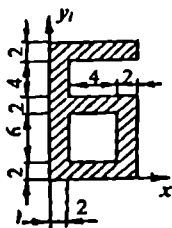
პასუხი: $x_c = 3,7$ სმ; $y_c = 7,7$ სმ.

10.15. კვადრატის გვერდისაგან ამოჭრილია r რადიუსიანი წრის მეოთხედი (ნახ. 10.27). განსაზღვრეთ დარჩენილი ნაწილის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა, თუ კვადრატის გვერდის სიგრძე $a = r$.

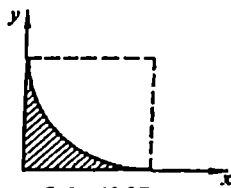
პასუხი: $x_c = y_c = \frac{10 - 3\pi}{3(4 - \pi)} \cdot a = 0,223a$.

10.16. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ფორმის ფირფიტისაგან ამოჭრილია r რადიუსის მქონე წრის მეოთხედი (ნახ. 10.28). განსაზღვრეთ დარჩენილი ფიგურის ფართობის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა, თუ კათეტის სიგრძე $3r$ -ის ტოლია და $r=5$ სმ;

$$\text{პასუხი: } x_C = y_C = \frac{50r}{3(18-\pi)} = 5,6 \text{ სმ.}$$



ნახ. 10.26

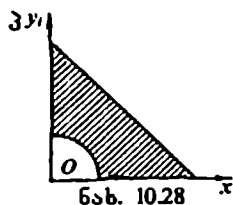


ნახ. 10.27

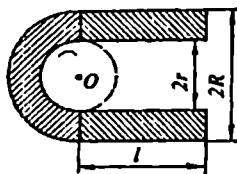
10.17. 10.29 ნახაზზე გამოსახული ფიგურა შედგება ორი მართკუთხედისა და ნახევარგოლისაგან. იპოვეთ I -ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ფიგურის ფართობის სიმძიმის ცენტრი დაემთხვევა წრეწირის C ცენტრს, თუ $R=2r=10$ სმ.

$$\text{პასუხი: } l = R\sqrt{\frac{7}{6}} \approx 10,8 \text{ სმ.}$$

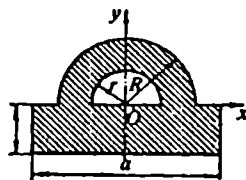
10.18. იპოვეთ ტრანსპორტირის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა (ნახ. 10.30), რომლის ზომები: $a=14$ სმ; $b=3$ სმ; $R=6$ სმ; $r=4$ სმ;



ნახ. 10.28

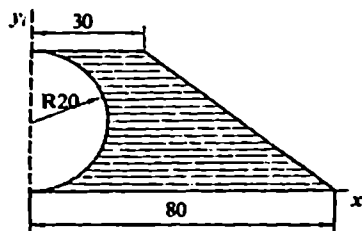


ნახ. 10.29

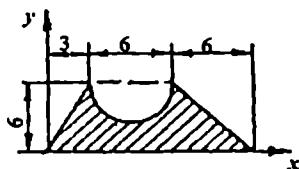


ნახ. 10.30

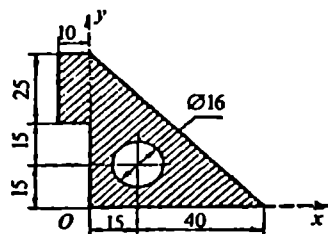
10.19-10.24. განსაზღვრეთ 10.31-10.36 ნახაზებზე გამოსახული ფიგურების დაშტრიხული ნაწილების ფართობის სიმძიმის ცენტრების მდებარეობა, თუ ზომები მოცემულია სანტიმეტრებში:



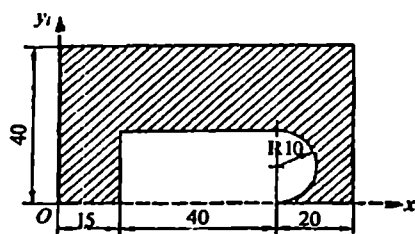
ნახ. 10.31



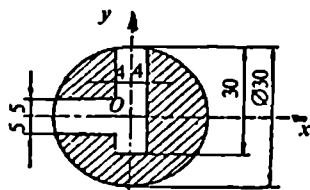
ნახ. 10.32



ნახ. 10.33

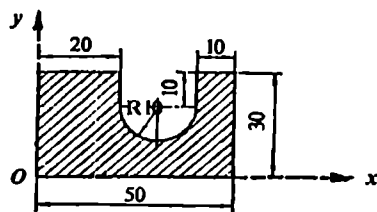


ნახ. 10.34



ნახ. 10.35

30



ნახ. 10.36

პასუხები: 10.19. $x_c=37,8$; $y_c=15,7$ სმ.

$$10.20. \quad x_c = \frac{6(16 - \pi)}{14 - \pi} \approx 7,1 \text{ სმ}; \quad y_c = \frac{2(20 - 3\pi)}{14 - \pi} \approx 1,95 \text{ სმ};$$

$$10.21. \quad x_c=15,03 \text{ სმ}; \quad y_c=22,63 \text{ სმ}.$$

$$10.22. \quad x_c=36,81 \text{ სმ}; \quad y_c=24,68 \text{ სმ}.$$

$$10.23. \quad x_c=23,44 \text{ სმ}; \quad y_c=13,15 \text{ სმ}.$$

$$10.24. \quad x_c=22,04 \text{ სმ}; \quad y_c=10,63 \text{ სმ}.$$

10.25. h სიმაღლის მართკუთხედიდან ამოჭრეს პარაბოლური სეგმენტი (ნახ. 10.37). განსაზღვრეთ ღარჩენილი ფიგურის ფართობის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა.

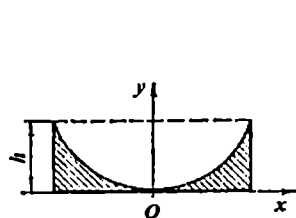
$$\text{პასუხი: } x_c=0; \quad y_c=0,3h.$$

10.26. იპოვეთ 10.38 ნახაზზე გამოსახული ფიგურის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, რომელიც შედგება მართკუთხედისა და პარაბოლური სეგმენტისაგან. მართკუთხედის h სიმაღლე ტოლია სეგმენტის სიმაღლისა.

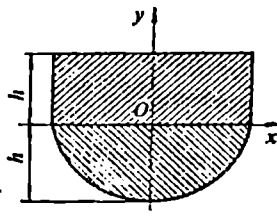
პასუხი: $x_c=0$; $y_c=0,14h$ სმ.

10.27. იპოვეთ პარაბოლური სამკუთხედის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები (ნახ. 10.39). პარაბოლის წვერო მოთავსებულია კოორდინატთა O სათავეში, h და l ცნობილი სიდიდეებია.

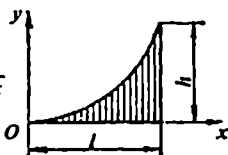
პასუხი: $x_c=0,75l$; $y_c=0,3h$.



ნახ. 10.37



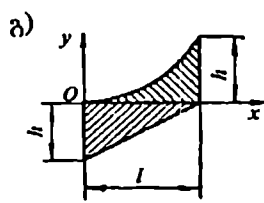
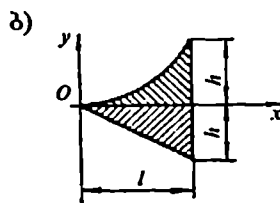
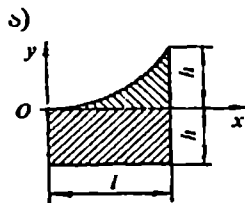
ნახ. 10.38



ნახ. 10.39

10.28. იპოვეთ ფიგურის ფართობის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, რომელიც შემოსაზღვრულია წრფეებითა და პარაბოლით, რომლის ცენტრი მოთავსებულია კოორდინატთა O სათავეში (ნახ. 10.40, ა, ბ, გ).

პასუხი: ა) $x_c=0,5625l$; $y_c=0,3h$; ბ) $x_c=0,7l$; $y_c=-0,08h$; გ) $x_c=0,5l$; $y_c=-0,08h$.



ნახ. 10.40

3. ერთგვაროვანი მარტივი გეომეტრიული ფორმის
ნაწილებისაგან შედგენილი სხეულის სიმძიმის
ცენტრის მდებარეობის განსაზღვრა

10.29. სხეული შედგება პრიზმისა და პირამიდისაგან (ნახ. 10.41). განსაზღვრეთ პრიზმის H სიმაღლე იმ პირობით, რომ სხეულის სიმძიმის ცენტრი მდებარეობდეს $ABCD$ სიბრტყეში და პირამიდის სიმაღლე $H_1=1,2$ მ.

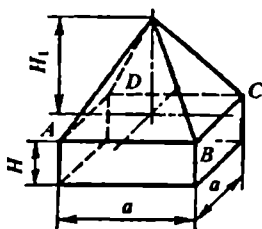
პასუხი: $H=0,49$ მ.

10.30. სხეული შედგება ცილინდრისა და კონუსისაგან (ნახ. 10.42). განსაზღვრეთ სხეულის სიმძიმის ცენტრის z_c კოორდინატი, თუ $H_1=2H=0,4$ მ.

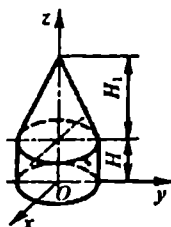
პასუხი: $z_c=0,18$ მ.

10.31. სხეული შედგება მართკუთხა პარალელეპედისა და პირამიდისაგან (ნახ. 10.43). განსაზღვრეთ ერთგვაროვანი სხეულის სიმძიმის ცენტრის z_c კოორდინატი, თუ $H_1=2H=1,2$ მ.

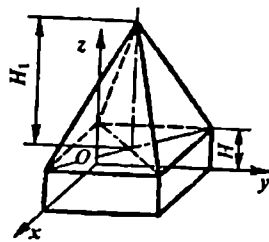
პასუხი: $z_c=0,45$ მ.



ნახ. 10.41



ნახ. 10.42



ნახ. 10.43

10.32. განსაზღვრეთ ერთგვაროვანი სხეულის სიმძიმის ცენტრის y_c კოორდინატი (ნახ. 10.44), თუ მოცემულია შემდეგი ზომები: $r=0,2$ მ; $a=0,5$ მ; $b=1,5$ მ; $c=1,8$ მ;

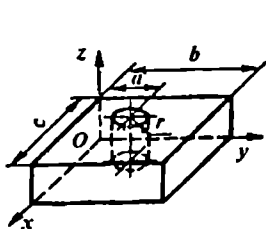
პასუხი: $y_c=0,762$ მ.

10.33. სხეული შედგება ორი ცილინდრისაგან (ნახ. 10.45). განსაზღვრეთ ერთგვაროვანი სხეულის სიმძიმის ცენტრის z_c კოორდინატი, თუ სიმაღლე $H_1=2H$, რადიუსი $R=2r$, სიმაღლე $H=0,5$ მ.

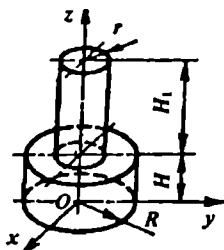
პასუხი: $z_c=0,5$ მ.

1034. სხეული შედგება მართკუთხა პარალელეპიპედისა და კონუსისაგან (ნახ. 10.46). განსაზღვრეთ ერთგვაროვანი კონუსის R რადიუსი იმ პირობით, რომ ერთგვაროვანი სხეულის სიმძიმის ცენტრი მდებარეობდეს $ABCD$ სიბრტყეში. სიმაღლე $H_1=3H$, ხოლო $a=2$ მ.

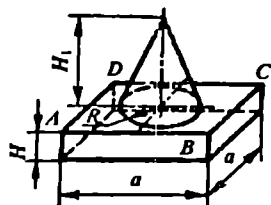
პასუხი: $R=0,92$ სმ.



ნახ. 10.44



ნახ. 10.45



ნახ. 10.46

1035. განსაზღვრეთ მართკუთხა მაგიდის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა (ნახ. 10.47), თუ მაგიდის თითოეული ფეხის წონა 106-ია, ხოლო დაფის წონა 40 მ (ზომები მოცემულია მეტრებში).

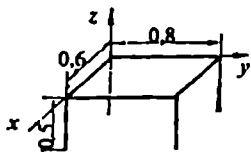
პასუხი: $x_C=0,3$ მ. $y_C=0,4$ მ, $z_C=-0,125$ მ.

1036. განსაზღვრეთ წაკეთილი მართკუთხა პრიზმის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა (ნახ. 10.48). ზომები მოცემულია სანტიმეტრებში.

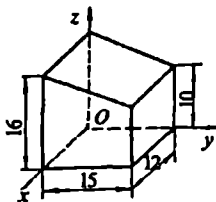
პასუხი: $x_C=6$ სმ, $y_C=6,923$ სმ, $z_C=6,615$ სმ.

1037. სხეული შედგება ორი ცილინდრისაგან (ნახ. 10.49). განსაზღვრეთ სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, თუ $r_1=2r_2=8$ სმ; $h_1=6$ სმ; $h_2=5$ სმ.

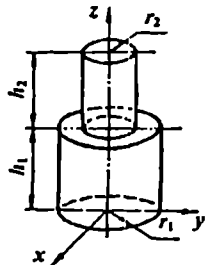
პასუხი: $x_C=y_C=0$; $z_C = \frac{h_1^2 r_1^2 + (2h_1 + h_2)h_2^2 r_2^2}{2(h_1 r_1^2 + h_2 r_2^2)} = 9,4$ სმ.



ნახ. 10.47



ნახ. 10.48



ნახ. 10.49

4. კოორდინატთა ღერძებისა და სიბრტყეების მიმართ
სტატიკური მომენტების განსაზღვრა

10.38. განსაზღვრეთ სამკუთხედის ფართობის სტატიკური მომენტები x და y ღერძების მიმართ, თუ სამკუთხედის წვეროებია: $O(0; 0)$, $A(9; 0)$ და $B(3; 6)$. ზომები მოცემულია სანტიმეტრებში.

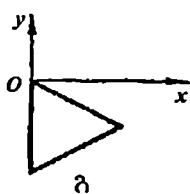
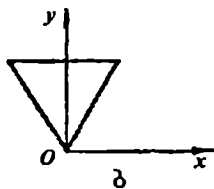
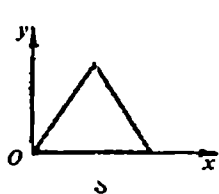
პასუხი: $S_x=54$ სმ³, $S_y=108$ სმ³.

10.39. განსაზღვრეთ ტოლგვერდა სამკუთხედის ფართობის სტატიკური მომენტები x და y ღერძების მიმართ (ნახ. 10.50 ა, ბ, გ), თუ გვერდის სიგრძე $a=4$ სმ.

პასუხები: ა) $S_x = \frac{a^3}{8} = 8$ სმ³; $S_y = \frac{\sqrt{3}}{8} a^3 = 8\sqrt{3}$ სმ³;

ბ) $S_x = \frac{a^3}{4} = 16$ სმ³; $S_y = 0$ სმ³;

გ) $S_x = -\frac{a^3\sqrt{3}}{8} = -8\sqrt{3}$ სმ³; $S_y = \frac{a^3}{8} = 8$ სმ³.



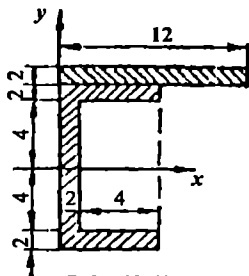
ნახ. 10.50

10.40. განსაზღვრეთ 10.51 ნახაზზე გამოსახული ფიგურის ფართობის სტატიკური მომენტები x და y ღერძების მიმართ. ზომები მოცემულია სანტიმეტრებში.

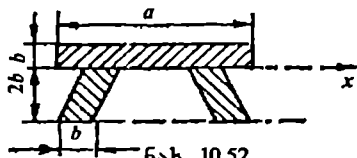
პასუხი: $S_x=168$ სმ³; $S_y=232$ სმ³.

10.41. განსაზღვრეთ ფიგურის a სიგრძე (ნახ. 10.52), რომლისთვისაც ფიგურის ფართობის სტატიკური მომენტი x ღერძის მიმართ ნულის ტოლია, თუ ცნობილია $b=5$ სმ.

პასუხი: $a=8b = 40$ სმ.



ნახ. 10.51



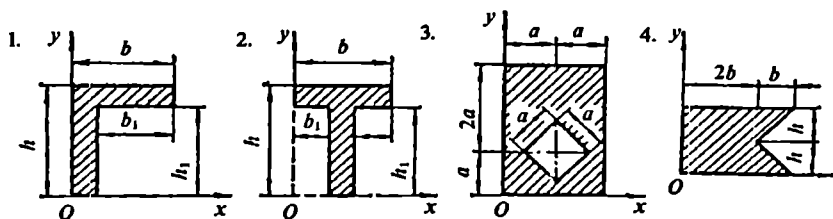
ნახ. 10.52

10.42. განსაზღვრეთ 10.53 ნახაზზე გამოსახული ფიგურების ფართობის სტატიკური მომენტები x და y ღერძების მიმართ.

პასუხი: 1. $S_x = \frac{1}{2}(bh^2 - b_1h_1^2)$; $S_y = \frac{1}{2}[b^2h - (2b - b_1)b_1h_1]$;

2. $S_x = \frac{1}{2}bh^2 - b_1h_1^2$; $S_y = \frac{1}{2}b^2h - bb_1h_1$;

3. $S_x = 8a^3$; $S_y = 5a^3$; 4. $S_x = 5bh^2$; $S_y = \frac{19}{3}b^2h$.

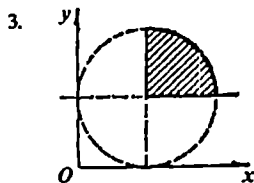
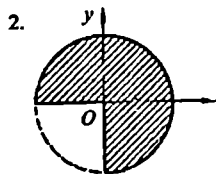


ნახ. 10.53

10.43. განსაზღვრეთ r რადიუსიანი წრის ნაწილების ფართობების სტატიკური მომენტები x და y ღერძების მიმართ (ნახ. 10.54).

პასუხები: 1. $S_x = \frac{2}{3}r^3$; $S_y = \frac{1}{2}\pi r^3$; 2. $S_x = S_y = \frac{1}{3}r^3$;

3. $S_x = S_y = 1,12r^3$.



ნახ. 10.54

$$3. S_x = S_y = 1,12r^3.$$

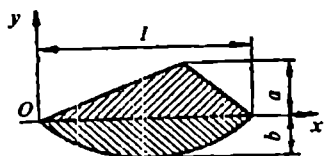
10.44. ფიგურა შედგება პარაბოლური სეგმენტისა და სამკუთხედისაგან (ნახ. 10.55). განსაზღვრეთ ფიგურის ფართობის სტატიკური მომენტი x ღერძის მიმართ.

$$\text{პასუხი: } S_x = \frac{l}{30}(5a^2 - 8b^2).$$

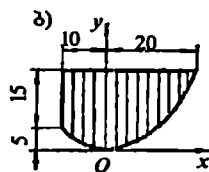
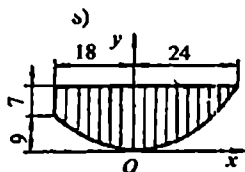
10.45. ფიგურა შემოსაზღვრულია პარაბოლითა და წრეებით (ნახ. 10.56 ა, ბ), ამასთან პარაბოლის წვერო მოთავსებულია O წერტილში. განსაზღვრეთ ფიგურის ფართობის სტატიკური მომენტები x და y ღერძების მიმართ (ზომები მოცემულია სანტიმეტრებში).

$$\text{პასუხი: ა) } S_x = 4625,8 \text{ სმ}^3; S_y = 441 \text{ სმ}^3;$$

$$\text{ბ) } S_x = 5175 \text{ სმ}^3; S_y = 1125 \text{ სმ}^3.$$



ნახ. 10.55



ნახ. 10.56

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. სტატიკის რა ძირითადი ცნებები იცით?
2. რა არის სტატიკის ორი ძირითადი ამოცანა?
3. რა არის სტატიკის ძირითადი პრინციპები?
4. რას ეწოდება თავმოყრილ ძალთა სისტემა?
5. რაში მდგომარეობს თავმოყრილი ძალების წონასწორობის პირობა?
6. რა ხერხები არსებობს თავმოყრილი ძალების წონასწორობის ამოცანების ამოსახსნელად?
7. ჩამოაყალიბეთ სამი ძალის თეორემა.
8. რას ეწოდება ძალის სკალარული მომენტი წერტილის მიმართ?

9. რას ეწოდება ძალის ვექტორული მომენტი წერტილის მიმართ და როგორ გამოისახება ის ანალიზურად?
10. რას ეწოდება ღერძის მიმართ ძალის მომენტი?
11. რა დამოკიდებულება არსებობს ძალის ვექტორულ მომენტსა და ღერძის მიმართ ძალის მომენტს შორის?
12. რომელ წერტილზეა მოდულით არატოლი პარალელური ძალების ტოლქმედი და სიდიდით რას უდრის ის?
13. რას ეწოდება წყვილძალა და რას უდრის მისი ტოლქმედი?
14. რას ეწოდება წყვილძალის ვექტორული მომენტი, როგორი ვექტორია ის და რა მიმართულება აქვს?
15. ჩამოაყალიბეთ წყვილძალების ეკვივალენტურობისა (ტოლფასობის) და შეკრების თეორემები.
16. რა არის წყვილძალების წონასწორობის პირობა?
17. როგორ დაიყვანება ძალა მოცემულ ცენტრზე და რას ეწოდება მიკავშირებული წყვილძალა?
18. ჩამოაყალიბეთ პუანსოს თეორემა (სტატიკის I ძირითადი თეორემა).
19. რას ეწოდება ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები ვექტორული მომენტი?
20. რა ფორმულებით გამოითვლება ნაკრები ვექტორისა და ნაკრები მომენტის სიდიდე, მათი გეგმილები დეკარტის კოორდინატთა ღერძებზე და მიმართულების კოსინუსები?
21. რას ეწოდება სტატიკური ინვარიანტები და ძალთხრახნი (დინამა)?
22. ძალთა სისტემის დაყვანის რა შემთხვევები არსებობს და როდის დაიყვანება ის ძალთხრახნზე?
23. დაწერეთ ძალთა სისტემის ცენტრალური ხრახნული ღერძის განტოლება.
24. როდის აქვს ძალთა სისტემას მინიმალური ნაკრები მომენტი?
25. ჩამოაყალიბეთ ვარიონინის თეორემა ტოლქმედის მომენტის შესახებ.
26. ჩამოაყალიბეთ ნებისმიერი ძალთა სისტემის წონასწორობის თეორემა (სტატიკის ძირითადი თეორემა)?
27. როგორ ჩაიწერება სივრცითი ნებისმიერი და პარალელური ძალთა სისტემების წონასწორობის პირობები ანალიზურად?
28. რაში მდგომარეობს ერთ სიბრტყეზე მდებარე ძალთა სისტემის წონასწორობის თეორემა (სტატიკის ძირითადი თეორემა)?

29. რა სახე აქვს სიბრტყეზე მდებარე ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებებს?
30. სტატიკის როგორ ამოცანებს ეწოდება სტატიკურად განსაზღვრული და სტატიკურად განუსაზღვრელი?
31. რა პირობა უნდა დაკმაყოფილდეს, რომ ამოცხსნათ სტატიკურად განსაზღვრული (რკვევადი) ამოცანები.
32. ჩამოაყალიბეთ სრიალის ხახუნის კანონები.
33. რას ეწოდება ხახუნის კუთხე და კონუსი?
34. რას ეწოდება გორვისა და ტრიალის ხახუნი?
35. როგორ კონსტრუქციას ეწოდება წამწე (ფერმა)?
36. ჩამოაყალიბეთ ლემა, რომელიც განსაზღვრავს წამწის ნულოვან ღეროს.
37. რა არის კვანძების ამოჭრის არსი წამწის ელემენტებში ძალების განსაზღვრისას?
38. რა შემთხვევაშია რეკომენდებული რიტერის მეთოდი და რა არის ამ მეთოდის არსი?
39. რას ეწოდება პარალელური ძალების ცენტრი და როგორ მოიძებნება იგი?
40. რომელი ფორმულებით შეიძლება გამოთვალეთ პარალელური ძალების ცენტრის კოორდინატები?
41. რა წერტილს ეწოდება სხეულის სიმძიმის ცენტრი?
42. რა ფორმულებით გამოითვლება ერთგვაროვანი წირების, ფართობისა და სხეულის სიმძიმის ცენტრები?
43. რა ხერხებით შეიძლება გამოითვალოს სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები?

წერტილისა და მყარი სხეულის კინემატიკა

11. წერტილის კინემატიკა. ძირითადი ცნებები
და ამოცანები

კინემატიკა თეორიული მექანიკის ის ნაწილია, რომელიც შეისწავლის ნივთიერი სხეულის (წერტილის) მექანიკური მოძრაობის გეომეტრიულ თვისებებს მათზე მოქმედი ძალებისა და მათი მასის გაუთვალისწინებლად.

სხეული მოძრაობს დროსა და სივრცეში. სივრცეს განიხილავენ, როგორც სამგანზომილებიან ევკლიდურს. ამ სივრცეში დრო ერთნაირია ყოველ წერტილში და არ არის დამოკიდებული ნივთიერი სხეულის მოძრაობაზე.

მექანიკური მოძრაობა არის ერთი სხეულის მდებარეობის შეცვლა მეორე სხეულის მიმართ, რომელსაც ათვლის სხეულს უწოდებენ.

ათვლის სისტემა ეწოდება კოორდინატთა სისტემას, რომელიც დაკავშირებულია ერთ-ერთ სხეულთან, რომლის მიმართ შეისწავლება მეორე სხეულის მოძრაობა. თუ სხეული მოძრაობს, ათვლის სისტემა მოძრავია, ხოლო თუ სხეული უძრავია, ათვლის სისტემაც უძრავია.

კინემატიკის ძირითადი ამოცანებია:

1. სხეულის მოძრაობის კანონის დადგენა არჩეული ათვლის სისტემის მიმართ.

2. მოცემული სხეულის მოძრაობის კანონის მიხედვით ამ მოძრაობის (ტრაექტორიის, სიჩქარის, აჩქარების, კუთხური სიჩქარისა და კუთხურ აჩქარების და ა.შ.) კინემატიკური მახასიათებლების განსაზღვრა.

11.1. წერტილის ტრაექტორია და მოძრაობის
მოცემის ხერხები

სხეულის მოძრაობის პროცესში მისი ყველა წერტილი ზოგად შემთხვევაში სხვადასხვა მოძრაობას ასრულებს. მაგალითად, წრფივ ლიანდაგზე თვლების გორვისას მისი ღერძის წერტილები მოძრაობს წრფეზე, ხოლო ფერსოს წერტილები შემოწერს რთულ მრუდებს, რომელთაც ციკლოიდებს უწოდებენ.

ამიტომ სხეულის მოძრაობის შესწავლას წინ უნდა უძღოდეს წერტილის მოძრაობის გამოკვლევა.

სხეულის მოძრაობისას ყოველი წერტილი აღწერს უწყვეტ წირს, რომელსაც წერტილის ტრაექტორია ეწოდება. თუ წერტილის ტრაექტორია არის წრფე, მის მოძრაობას წრფივი ეწოდება; თუ წერტილის ტრაექტორია მრუდია, მაშინ ამბობენ, რომ წერტილი ასრულებს მრუდწირულ მოძრაობას.

წერტილის მოძრაობა მოცემულია, თუ ცნობილია ხერხი, რომლითაც შესაძლებელია დროის ნებისმიერ მომენტში დადგინდეს მისი მდებარეობა ათვლის არჩეული სისტემის მიმართ.

განვიხილოთ წერტილის მოძრაობის მოცემის ხერხები.

1. წერტილის მოძრაობის მოცემის ვექტორული ხერხი. ვთქვათ, M წერტილი (ნახ. 11.1) მოძრაობს რომელიმე ათვლის $Oxyz$ სისტემის მიმართ AB ტრაექტორიაზე. ამ წერტილის მდებარეობა დროის ნებისმიერ t მომენტში შეიძლება განვსაზღვროთ, თუ მოცემულია $\vec{r}$ ვექტორი, რომელიც კოორდინატთა O სათავეს აერთებს M წერტილთან. $\vec{r}$ ვექტორს ეწოდება M წერტილის რადიუს-ვექტორი. დროთა განმავლობაში $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორი იცვლება როგორც სიდიდის, ისე მიმართულების მიხედვით. მაშასადამე, ის არის t სკალარული არგუმენტის ვექტორული ფუნქცია, რაც სიმბოლურად ასე ჩაიწერება:

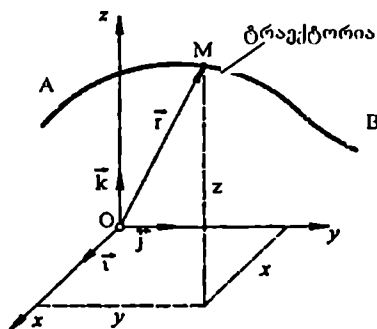
$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (11.1)$$

(11.1) ტოლობას ეწოდება წერტილის მოძრაობის ვექტორული განტოლება, ანუ წერტილის მოძრაობის კანონი ვექტორული ფორმით. წერტილის მოძრაობის მოცემის ასეთ ხერხს ვექტორული ეწოდება.

ამრიგად, წერტილის მდებარეობა ათვლის $Oxyz$ სისტემის მიმართ იქნება სრულიად განსაზღვრული, თუ დროის ყოველ მომენტისათვის ცნობილი იქნება O წერტილის მიმართ $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორის მოდული და მიმართულება.

t არგუმენტის ცვლილებისას $\vec{r}$ ვექტორების ბოლოების გომეტრიულ ადგილს ეწოდება ამ ვექტორის პოდოგრაფი. ამრიგად, $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორის პოდოგრაფი იქნება მოძრავი M წერტილის ტრაექტორია.

პოდოგრაფი არის წირი, რომელსაც რადიუს-ვექტორის ბოლო აღწერს მისი არგუმენტის ცვლილებისას, როცა ვექტორის სათავე ერთსა და იმავე წერტილშია (ნახ. 11.1).



ნახ. 11.1

2. მოძრაობის მოცემის კოორდინატული ხერხი. მოძრაობის მოცემის კოორდინატული ხერხის დანიშნულებაა წერტილის კოორდინატების მოცემა, როგორც t დროის ფუნქციისა.

კოორდინატთა სისტემა შეიძლება იყოს სხვადასხვა: დეკარტის, ბუნებრივი, პოლარული, სფერული, ცილინდრული და ა.შ.

$Oxyz$ სისტემაში (ნახ. 11.1) წერტილის მდებარეობა შეიძლება

განესაზღვროთ აგრეთვე მისი x , y და z კოორდინატებით. ცხადია, თუ წერტილი მოძრაობს, ე.ი. იცვლება მისი მდებარეობა დროში, მაშინ წერტილის კოორდინატები იქნება დროის ფუნქცია, ამიტომ დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში წერტილის მოძრაობის განტოლებებს აქვს შემდეგი სახე:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (11.2)$$

თუ წერტილი მოძრაობს Oxy სიბრტყეში, მაშინ გვექნება მოძრაობის მხოლოდ ორი განტოლება:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t). \quad (11.3)$$

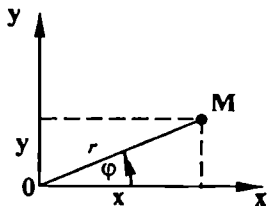
თუ წერტილი სიბრტყეზე მოძრაობს, მაშინ ზოგჯერ მიზანშეწონილია ვისარგებლოთ პოლარული კოორდინატებით (ნახ. 11.2). ამ შემთხვევაში მოძრაობის განტოლებები ასეთი იქნება:

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t). \quad (11.4)$$

დეკარტისა და პოლარულ კოორდინატებს შორის კავშირი ასე გამოისახება:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (11.5)$$

(11.2) და (11.3) მოძრაობის განტოლებები, აგრეთვე წერტილის ტრაექტორიის განტოლებები პარამეტრული სახისაა. ტრაექტორიის განტოლება რომ მივიღოთ კოორდინატული ფორმით, აუცილებელია (11.2) და (11.3) განტოლებებიდან გამოვირიცხოთ t დრო. ამისათვის ერთ-ერთი განტოლება, ეთქვას $x = f_1(t)$, ამოვხსნათ t -ს მიმართ, ე.ი. $t = F(x)$ და ჩავსვათ დანარჩენ განტოლებებში, მივიღებთ:



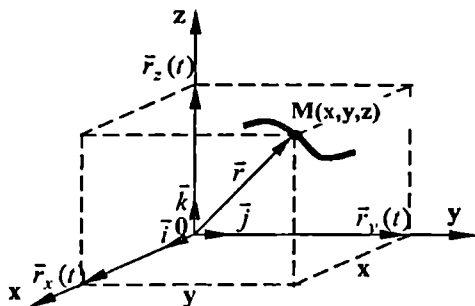
ნახ. 11.2

$$y = \varphi_1(F(x)), \quad z = \varphi_2(F(x)). \quad (11.6)$$

ვექტორული ხერხიდან კოორდინატულზე გადასვლა. M წერტილის ვექტორული სახით მოძრაობა დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში გამოისახება ასე:

$$\vec{r} = r_x(t) \cdot \vec{i} + r_y(t) \cdot \vec{j} + r_z(t) \cdot \vec{k}, \quad (11.7)$$

სადაც $r_x(t) = x$, $r_y(t) = y$, $r_z(t) = z$ რადიუს-ვექტორის $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე გეგმილება, რომლებიც M წერტილის კოორდინატების ტოლია (ნახ. 11.3).



ნახ. 11.3

(11.2)-ის გათვალისწინებით (11.7) შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}. \quad (11.8)$$

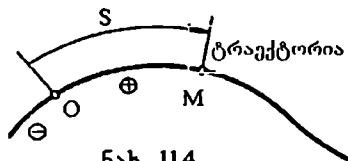
(11.8) გამოსახულებიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ წერტილის მოძრაობა მოცემულია ვექტორულად, მაშინ შეიძლება გადასვლა კოორდინატულზე და პირიქით.

3. წერტილის მოძრაობის მოცემის ბუნებრივი ხერხი.

მოძრაობის მოცემის ბუნებრივი ხერხი. წერტილის მოძრაობა ცნობილია, თუ მოცემულია (ნახ. 11.4):

1. წერტილის ტრაექტორია;
2. ათვლის სათავე (O წერტილი);
3. მოძრაობის მიმართულება;
4. ტრაექტორიაზე წერტილის მოძრაობის კანონი.

ამ კანონს აქვს შემდეგი სახე:



ნახ. 11.4

$$S = S(r). \quad (11.9)$$

მაშასადამე, ბუნებრივი ანუ ნატურალური ხერხით წერტილის მოძრაობა განისაზღვრება მისი ტრაექტორიითა და ამ ტრაექტორიაზე მოძრაობის (11.9) განტოლებით. ამ განტოლებას ეწოდება M წერტილის მოძრაობის კანონი ანუ ტრაექტორიაზე მოძრაობის განტოლება.

მოძრაობის კანონში ($S = S(r)$) S -ს რეალური (მრუდწირულ) კოორდინატი ეწოდება.

რეალური კოორდინატი არ უნდა აგვერიოს წერტილის მიერ გავლილ მანძილში.

მოძრაობის მოცემის ბუნებრივი ხერხის შემთხვევაში წერტილის მოძრაობის გამოსაკვლევად გამოიყენება ბუნებრივი ღერძები (ბუნებრივი სამწახნაგას ღერძები): მხები, მთავარი ნორმალი, ბინორმალი.

ტრაექტორიაზე წერტილის მოძრაობისას ბუნებრივი ღერძები წერტილთან ერთად გადაადგილდება.

ცხადია, რომ მოძრაობის მოცემის ბუნებრივი ხერხით სარგებლობა მოხერხებულია იმ შემთხვევაში, როცა წერტილის ტრაექტორია წინასწარაა ცნობილი.

11.2 წერტილის სიჩქარე

წერტილის სიჩქარე არის სიდიდე, რომელიც ახასიათებს წერტილის მდებარეობის ცვლილებას სივრცეში. რაზღვანობა ის განსაზღვრავს წერტილის გადაადგილების მიმართულებას, ამიტომ სიჩქარე ვექტორული სიდიდეა და აღინიშნება $\vec{v}$ სიმბოლოთი.

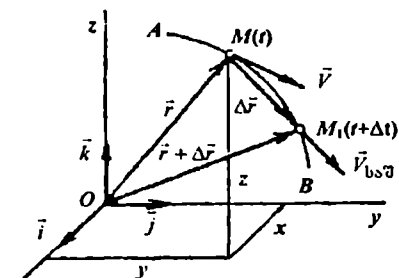
გავეცნოთ წერტილის სიჩქარის ცნებას და მისი გამოთვლის მეთოდებს მოძრაობის ვექტორული, კოორდინატული და ბუნებრივი ხერხით მოცემისას:

1. წერტილის სიჩქარის განსაზღვრა, როცა მოძრაობა მოცემულია ვექტორული ხერხით. ვთქვათ, წერტილი მოძრაობს AB წირზე და მისი მდებარეობა დროის მოცემულში მომენტისთვის განისაზღვრება ვექტორული $\vec{r} = \vec{r}(t)$ განტოლების მიხედვით. დაეუშვათ, M წერტილის რადიუს-ვექტორი $\Delta \vec{r}$ დროის შუალედში შეიცვალა $\Delta \vec{r}$ სიდიდით, ე.ი.

$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$, რომელსაც Δt დროში წერტილის გადაადგილება ეწოდება (ნახ.11.5). მაშინ Δt დროის შუალედში M წერტილის საშუალო სიჩქარე ეწოდება ვექტორულ სიდიდეს

$$\vec{V}_{\text{საშ}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (11.10)$$

$\vec{V}_{\text{საშ}}$ ვექტორი მიმართულია ისე, როგორც $\Delta \vec{r}$ ვექტორი, ე.ი.



ნახ. 11.5

MM_1 ქორდის გასწვრივ. საშუალო სიჩქარის სიდიდე დამოკიდებულია Δt დროის შერჩეულ ინტერვალზე და ამიტომ შედარებით იშვიათად გამოიყენება. დროის ადებულ მომენტში წერტილის სიჩქარის განსაზღვრისათვის გამოიყენება მისი ზღვრული მნიშვნელობა, როცა დროის Δt ინტერვალი

მიისწრაფის ნულისაკენ, ე.ი.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_{\text{საშ}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (11.11)$$

თუ გავიხსენებთ ფუნქციის წარმოებულის ცნებას, მაშინ (11.11) დამოკიდებულების საფუძველზე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი:

განსაზღვრება. წერტილის ვექტორული სიჩქარე დროის ადებულ მომენტში ეწოდება რადიუს-ვექტორის პირველი რიგის წარმოებულს დროით:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (11.12)$$

t დროით წარმოებულს მექანიკაში აღნიშნავენ წერტილით ცვლადის ზემოთ.

როცა Δt მიისწრაფის ნულისაკენ, მაშინ MM_1 ქორდა და, მაშასადამე, საშუალო სიჩქარის $\vec{V}_{\text{საშ}}$ ვექტორიც შემობრუნდება M წერტილის გარშემო, უახლოვდება M წერტილში გატარებულ ტანგენტის მხებს და ზღვარში დაემთხვევა მას. ამიტომ M წერტილის სიჩქარის $\vec{V}$ ვექტორი მიმართულია წერ-

ტილის ტრაექტორიის მხეების გასწვრივ მისი მოძრაობის მხარეს (ნახ. 11.5).

SI სისტემაში წერტილის სიჩქარის საზომი ერთეულია 1 მ/წმ. ხშირად გამოიყენება სიჩქარის საზომი სხვა ერთეულებიც, მაგალითად, 1 კმ/სთ=5/18 მ/წმ; 1 მ/წთ; 1 კმ/წთ; 1კმ/წმ და სხვ.

2. წერტილის სიჩქარის განსაზღვრა, როცა მოძრაობა მოცემულია კოორდინატული ხერხით. ვთქვათ, წერტილის მოძრაობა განსაზღვრულია კოორდინატული (11.2) ფორმით. განესაზღვროთ სიჩქარის $\vec{V}$ ვექტორის გეგმილები დეკარტის Oxyz კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე (ნახ. 11.5) (11.8) გამოსახულების თანახმად,

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

სადაც x , y და z ტრაექტორიაზე წერტილის მიმდინარე კოორდინატებია და განისაზღვრება (11.2) ფორმულებით, ხოლო $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ღერძების მგეზავები ერთეულოვანი სიგრძის მუდმივი ვექტორებია. თუ $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორს გავაწარმოებთ t დროით, მივიღებთ:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}. \quad (11.13)$$

$\vec{V}$ ვექტორის გეგმილები x, y, z ღერძებზე აღვნიშნოთ V_x, V_y, V_z -ით, მაშინ $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$, ამიტომ ეს გეგმილები (11.13)-ის თანახმად იქნება:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \quad (11.14)$$

როცა წერტილის მოძრაობის განტოლებები მოცემულია დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებში, მაშინ წერტილის სიჩქარე განისაზღვრება უძრავ ღერძებზე მისი გეგმილების საშუალებით.

წერტილის სიჩქარის ვექტორის მოდული $|\vec{V}| = V$ დეკარტის კოორდინატებში გამოითვლება ფორმულით:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad (11.15)$$

სადაც V_x, V_y, V_z სიჩქარის $\vec{V}$ ვექტორის გეგმილებია შესაბამის კოორდინატთა ღერძებზე:

სიჩქარის $\vec{V}$ ვექტორის მიერ კოორდინატთა ღერძებთან შედგენილ კუთხეთა კოსინუსებია:

$$\cos \alpha = \frac{V_x}{V}, \quad \cos \beta = \frac{V_y}{V}, \quad \cos \gamma = \frac{V_z}{V}, \quad (11.16)$$

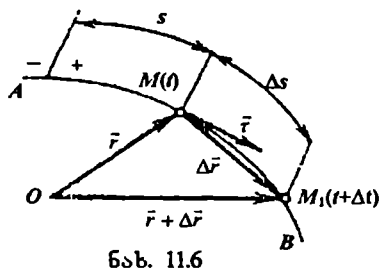
სადაც $\alpha = (\vec{V}, \hat{i})$, $\beta = (\vec{V}, \hat{j})$, $\gamma = (\vec{V}, \hat{k})$ არის შესაბამისად Ox , Oy , Oz ღერძებთან $\vec{V}$ ვექტორის მიერ შედგენილი კუთხეები.

სიჩქარეთა ჰოდოგრაფის პარამეტრულ განტოლებებს აქვს შემდეგი სახე:

$$x_1 = V_x = \dot{x}; \quad y_1 = V_y = \dot{y}; \quad z_1 = V_z = \dot{z},$$

სადაც x_1 , y_1 , z_1 არის სიჩქარის ვექტორის ბოლო წერტილის მიერ შემოხაზული წირის მიმდინარე კოორდინატები, ხოლო O_1x_1 , O_1y_1 , O_1z_1 ღერძები შესაბამისად Ox , Oy და Oz ღერძების პარალელურია.

3. წერტილის სიჩქარის განსაზღვრა, როცა მოძრაობა მოცემულია ბუნებრივი ხერხით. ეთქვას, M წერტილი მოძრაობს AB ტრაექტორიაზე. დროის t მომენტისათვის M წერტილის მრუდწირული კოორდინატია S , ხოლო O წერტილის მიმართ რადიუს-ვექტორი – $\vec{r}$ ეთქვას,



ნახ. 11.6

Δt დროის ინტერვალში M წერტილის რადიუს-ვექტორმა მიიღო $\Delta \vec{r}$ ნაზრდი, ხოლო მრუდწირულმა S კოორდინატმა – ΔS ნაზრდი (ნახ. 11.6). მაშინ დროის მოცემული t მომენტისათვის M წერტილის სიჩქარის $\vec{V}$ ვექტორი ტოლი იქნება:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S},$$

სადაც $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$, ხოლო $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S} = \frac{d\vec{r}}{dS}$.

მაშასადამე,

$$\vec{V} = \frac{dS}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dS}. \quad (11.17)$$

განესაზღვროთ $\frac{d\vec{r}}{dS}$ ვექტორის მოდული და მიმართულება.

ცხადია, $\left| \frac{d\vec{r}}{dS} \right| = \left| \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S} \right| = 1$, რადგან უსასრულოდ მცირე ქორდის მოჭიმული რკალის სიგრძესთან ფარდობის ზღვარი იქნება 1-ის ტოლი. $\frac{d\vec{r}}{dS}$ ვექტორის მიმართულება ემთხვევა $\Delta \vec{r}$ -ის მიმართულებას, როცა $\Delta S > 0$ და მის საწინააღმდეგოდაა მიმართული, როცა $\Delta S < 0$, ე.ი. $\frac{d\vec{r}}{dS}$ ვექტორი ყოველთვის მიმართულია MM₁ ქორდის გასწვრივ S კოორდინატის ზრდის მხარეს. ამიტომ $\frac{d\vec{r}}{dS} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S}$ ვექტორი მიმართულია ტრაექტორიის M წერტილში გატარებული მხების გასწვრივ S მრუდწირული კოორდინატის ზრდის მხარეს. ის არ არის დამოკიდებული წერტილის მოძრაობის მიმართულებაზე. მაშასადამე,

$$\frac{d\vec{r}}{dS} = \vec{\tau} \quad (11.18)$$

ეს ვექტორი არის ტრაექტორიის M წერტილში გატარებული მხების ერთეულოვან ვექტორი, რომელიც მიმართულია S რკალის ათევის დადებითი მიმართულების მხარეს. მაშინ სიჩქარის $\vec{V}$ ვექტორი, როცა ტრაექტორიაზე მოძრაობის კანონი მოცემულია ბუნებრივი ფორმით, (11.17)-ის თანახმად იქნება:

$$\vec{V} = \frac{dS}{dt} \cdot \vec{\tau} = \dot{S} \cdot \vec{\tau} \quad (11.19)$$

აქ სკალარული სიდიდე

$$V = \frac{dS}{dt} = \dot{S} \quad (11.20)$$

წერტილის $\vec{V}$ ვექტორული სიჩქარის გეგმილია მისი ტრაექტორიის M წერტილში გატარებულ მხებზე. ის აღინიშნება V_{τ} -თი, ან უბრალოდ V-თი და ეწოდება წერტილის სკალარული სიჩქარე. მაშასადამე,

$$\vec{V} = V\vec{\tau} \quad (11.21)$$

ამრიგად (11.19) ანუ (11.21) ფორმულა გამოსახავს წერტილის ვექტორულ და სკალარულ სინქარებს შორის დამოკიდებულებას. (11.20)-ის თანახმად შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ:

განსაზღვრება. წერტილის სკალარული სინქარე ეწოდება მრუდწირული (რკალური) კოორდინატის პირველი რიგის წარმოებულს დროით. ეს სიდიდე შეიძლება იყოს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი. თუ $\dot{S} > 0$, მაშინ $S = f(t)$ ფუნქცია ზრდადია, ე.ი. წერტილი მოძრაობს S კოორდინატის ზრდის მხარეს, თუ $\dot{S} < 0$, მაშინ წერტილი მოძრაობს S კოორდინატის კლების მხარეს. ცხადია, წერტილის ვექტორული სინქარის მოდული სკალარული სინქარის აბსოლუტური მნიშვნელობის ტოლია, ე.ი.

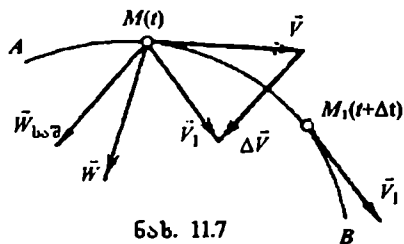
$$|\vec{V}| = |\vec{V} \cdot \vec{e}| = |\vec{V}| \cdot |\vec{e}| = |\vec{V}|.$$

11.3. წერტილის აჩქარება

წერტილის აჩქარება არის სიდიდე, რომელიც ახასიათებს წერტილის სინქარის ცვლილებას. ცხადია, ისევე როგორც სინქარე აჩქარებაც, ვექტორული სიდიდეა და აღინიშნება $\vec{W}$ სიმბოლოთი.

ახლა განვსაზღვროთ წერტილის აჩქარება მისი მოძრაობის ვექტორული, კოორდინატული და ბუნებრივი ხერხით მოცემული განტოლებების მიხედვით.

1. წერტილის აჩქარების განსაზღვრა, როცა მოძრაობა მოცემულია ვექტორული სახით. ვთქვათ, წერტილი მოძრაობს AB ტრაექტორიაზე და დროის t მომენტისათვის იმყოფება M წერტილში და აქვს $\vec{V}$ სინქარე, ხოლო დროის $t + \Delta t$ მომენტისათვის გადაადგილდა M_1 წერტილში და ამ წერტილში მისი



ნახ. 11.7

სინქარეა $\vec{V}_1$ (ნახ. 11.7). იმისათვის, რომ მივიღოთ სინქარის ნაზრდი $\Delta \vec{V}$, გადავიტანოთ $\vec{V}_1$ სინქარე და მოვდოთ M წერტილში: $\Delta \vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}$

წერტილის საშუალო ვექტორული აჩქარება Δt დროის შუალედში ეწოდება სიჩქარის $\Delta \vec{V}$ ნაზრდის ფარდობას დროის Δt შუალედთან:

$$\bar{W}_{\text{სა}} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}. \quad (11.22)$$

(11.22)-დან ჩანს, რომ $\bar{W}_{\text{სა}}$ ვექტორის მიმართულება ემთხვევა $\Delta \vec{V}$ ვექტორის მიმართულებას. საშუალო ვექტორული აჩქარების ზღვარს, როცა $\Delta t \rightarrow 0$, ეწოდება წერტილის ვექტორული აჩქარება დროის აღებულ t მომენტში:

$$\bar{W} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{W}_{\text{სა}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}. \quad (11.23)$$

თუ გავიხსენებთ ფუნქციის წარმოებულის ცნებას და გავითვალისწინებთ, რომ $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$, მაშინ შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი განსაზღვრება:

წერტილის ვექტორული აჩქარება დროის აღებულ მომენტში ეწოდება ვექტორული სიჩქარის პირველი რიგის წარმოებულს დროით ან რადიუს-ვექტორის მეორე რიგის წარმოებულს დროით:

$$\bar{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}} \quad (11.24)$$

განვსაზღვროთ აჩქარების ვექტორის მიმართულება. $\bar{W}_{\text{სა}}$ ვექტორი ძვეს $\vec{V}$ და $\vec{V}_1$ ვექტორების სიბრტყეში, რომელიც M წერტილზეა გატარებული. Δt დროის შუალედის შემცირებისას M_1 წერტილი უახლოვდება M წერტილს და რამდენადაც $\vec{V}_1$ იცვლის მიმართულებას, შესაბამისად $(\vec{V}, \vec{V}_1)$ სიბრტყეც სივრცეში შეიცვლის მდებარეობას. ზღვარში, როცა $\Delta t \rightarrow 0$ და $M_1 \rightarrow M$, მაშინ $\vec{V}$ და $\vec{V}_1$ ვექტორები განსაზღვრავს სიბრტყეს, რომელსაც M წერტილში წირის (ტრაექტორიის) მიმხები სიბრტყე ეწოდება. ამრიგად, აჩქარების $\bar{W}$ ვექტორი მდებარეობს მიმხებ სიბრტყეში და მიმართულია ტრაექტორიის ჩაზნექილობის მხარეს (რადგან $\Delta \vec{V}$ მიმართულია ტრაექტორიის ჩაზნექილობის მხარეს).

აჩქარების ვექტორი მიმართულია: წრფის გასწვრივ, თუ მოძრაობა წრფივია; ტრაექტორიის ჩანსეკილობის მხარეს, თუ მოძრაობა მრუდწირულია (ნახ. 11.7). ზოგადად $\vec{W}$ მიმართულია სიჩქარის ვექტორის პოდოგრაფის მხების გასწვრივ.

2. წერტილის აჩქარების განსაზღვრა, როცა მოძრაობა მოცემულია კოორდინატული ფორმით. ვთქვათ, წერტილის მოძრაობა მოცემულია კოორდინატული ხერხით, ე.ი. (11.2) განტოლებებით:

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t).$$

თუ (11.13) ტოლობას გავაწარმოებთ t დროით ერთხელ, მივიღებთ:

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k}. \quad (11.25)$$

თუ $\vec{W}$ ვექტორის გეგმილებს x , y და z ღერძებზე აღვნიშნავთ W_x , W_y და W_z -ით, მაშინ გვექნება:

$$W_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad W_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \quad W_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}, \quad (11.26)$$

ან (11.14) ფორმულების გათვალისწინებით:

$$W_x = \frac{dV_x}{dt} = \dot{V}_x, \quad W_y = \frac{dV_y}{dt} = \dot{V}_y, \quad W_z = \frac{dV_z}{dt} = \dot{V}_z. \quad (11.27)$$

ამრიგად, წერტილის აჩქარების გეგმილები უძრავ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე ტოლია წერტილის შესაბამისი კოორდინატის მეორე რიგის წარმოებულისა დროით ან წერტილის სიჩქარის შესაბამისი გეგმილების პირველი რიგის წარმოებულისა დროით.

კოორდინატთა ღერძებზე აჩქარების ცნობილი გეგმილების საშუალებით შეიძლება განვსაზღვროთ აჩქარების ვექტორის მოდული ($|\vec{W}| = W$) შემდეგი ფორმულით:

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \quad (11.28)$$

აჩქარების ვექტორის მიერ კოორდინატთა ღერძებთან შედგენილ კუთხეთა კოსინუსებია:

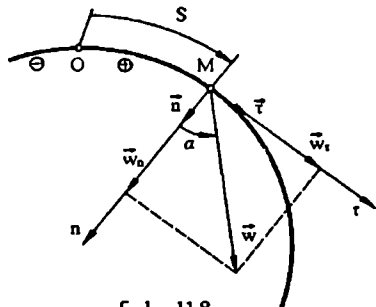
$$\cos \alpha_1 = \frac{W_x}{W}, \quad \cos \beta_1 = \frac{W_y}{W}, \quad \cos \gamma_1 = \frac{W_z}{W}, \quad (11.29)$$

სადაც $\alpha_1 = (\vec{W}, \vec{i})$, $\beta_1 = (\vec{W}, \vec{j})$, $\gamma_1 = (\vec{W}, \vec{k})$.

SI -ში აჩქარების განზომილებაა მ/წმ².

3. წერტილის აჩქარების განსაზღვრა, როცა მოძრაობა მოცემულია ბუნებრივი ხერხით. ამ შემთხვევაში ტრაექტორიაზე M წერტილის მდებარეობა ხასიათდება $S=S(t)$ კანონით. დავამტკიცოთ ვექტორული აჩქარების მხები და ნორმალურ მდგენელებად დაშლის შესახებ შემდეგი თეორემა:

მოძრაობის ბუნებრივი ხერხით მოცემისას წერტილის ვექტორული აჩქარება მხები და ნორმალური აჩქარებების გეომეტრიული ჯამის ტოლია.



ნახ. 11.8

დამტკიცება. ტრაექტორიის M წერტილზე გავატაროთ მხები (τ) ღერძი, მისი მგეზავი აღენიშნოთ $\vec{\tau}$ -თი. გავატაროთ M წერტილზე მიმხებ სიბრტყეში მხები (τ) ღერძის მართობი (n) ღერძი, რომელსაც მთავარი ნორმალი ეწოდება. მისი მგეზავი აღენიშნოთ $\vec{n}$ -ით. M წერტილზე გავატაროთ აგრეთვე მიმხები სიბრტყის მართობულად (b) ღერძი ბინორ-

მალი (ნახ. 11.8), $\vec{b}$ -თი აღენიშნოთ მისი მგეზავი (ნახაზზე ეს ღერძი არაა ნაჩვენები).

მხები, მთავარი ნორმალი და ბინორმალი ურთიერთმართობი ღერძებია. გვაქვს ურთიერთმართობი ღერძთა სისტემა, რომელსაც ნატურალური ანუ ბუნებრივი ღერძთა სისტემა ეწოდება.

ცხადია, ბუნებრივი ღერძთა სისტემა უნდა გავატაროთ ტრაექტორიის მოცემულ წერტილზე. ამიტომ $\vec{\tau}$ ვექტორი არის მუდმივი სიგრძის მქონე ვექტორი ($|\vec{\tau}|=1$) და არა მუდმივი ვექტორი. ის ტრაექტორიაზე წერტილის მოძრაობასთან ერთად იცვლის მიმართულებას, ე.ი. ცვლადი ვექტორია.

ახლა სიჩქარის $\vec{V}$ ვექტორი წარმოვადგინოთ (11.19) ფორმულით:

$$\vec{V} = V \cdot \vec{\tau} = \dot{S} \cdot \vec{\tau}$$

ჩავსვათ $\vec{V}$ -ს ეს მნიშვნელობა (11.24) ფორმულაში და გამოვიყენოთ ორი ფუნქციის ნამრავლის წარმოებულის გამოთვლის მეთოდი, გვექნება:

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V \cdot \vec{\tau}) = \frac{dV}{dt} \cdot \vec{\tau} + V \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (11.30)$$

აქ ტოლობის მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები $\frac{dV}{dt} \cdot \vec{\tau}$ მიმართულია ტრაექტორიის მხეების გასწვრივ S კოორდინატის ზრდის მხარეს, როცა $\frac{dV}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2} = \ddot{S} > 0$ და საწინააღმდეგოდ,

როცა $\ddot{S} < 0$. მეორე შესაკრების სიდიდე დამოკიდებულია $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ წარმოებულზე. როგორც გეომეტრიის კურსიდან ვიცით, $\vec{\tau}$ ვექტორის წარმოებული t სკალარული არგუმენტით ვექტორია, რომელიც $\vec{\tau}$ ვექტორის მართობულია, ე.ი. $\frac{d\vec{\tau}}{dt} \perp \vec{\tau}$ ის $\vec{\tau}$ -ს მოდულისა და მისი მობრუნების φ კუთხის t დროით წარმოებულის ნამრავლის ტოლია:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = |\vec{\tau}| \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{n} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{n}.$$

სადაც $\vec{n}$ არის ერთეულოვანი ვექტორი, რომელიც ტრაექტორიის წერტილში მხეების მართობია, მდებარეობს მიმხეების სიბრტყეში და მიმართულია ტრაექტორიის ჩაზნექილობის მხარეს, ე.ი. ტრაექტორიის მთავარი ნორმალის ერთეულოვანი ვექტორია. მაშინ:

$$\frac{dS}{dt} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = V \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{n} = V \cdot \frac{d\varphi}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} \cdot \vec{n} = V^2 \cdot \frac{d\varphi}{dS} \cdot \vec{n}.$$

გეომეტრიის კურსიდან აგრეთვე ცნობილია, რომ მხეების ელემენტარული მობრუნების კუთხის წირის შესაბამისი რკალის სიგრძესთან ფარდობის ზღვარი წირის ადებულ წერტილში K სიმრუდის ტოლია, მდებარეობს მთავარ ნორმალზე და მიმართულია წირის ჩაზნექილობისაკენ. თავის მხრივ ტრაექტორიის ადებულ წერტილში K სიმრუდე წირის სიმრუდის ρ რადიუსის შებრუნებული სიდიდეა, ე.ი. $\frac{d\varphi}{ds} = K = \frac{1}{\rho}$. მაშასადამე, (11.30) ფორმულის მარჯვენა მხარის

მეორე შესაკრები შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$V^2 \cdot \frac{d\phi}{ds} \vec{n} = \frac{V^2}{\rho} \cdot \vec{n}. \quad (11.31)$$

თუ (11.31)-ს ჩაესვამთ (1.30)-ში, მივიღებთ:

$$\vec{W} = \frac{dV}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho} \cdot \vec{n}. \quad (11.32)$$

ეს ფორმულა ასახავს $\vec{W}$ აჩქარების დაშლას მხეხ და ნორმალურ მდგენელებად (ნახ. 11.8), ე.ი. აჩქარება დაიშალა ორ ურთიერთმართობულ მდგენელად. პირველი შესაკრები მდებარეობს ტრაექტორიის მხეხზე, ამიტომ მას მხეხი მდგენელი ანუ მხეხი აჩქარება ეწოდება და აღინიშნება $\vec{W}_\tau$ სიმბოლოთი; მეორე შესაკრები მდებარეობს ტრაექტორიის მთავარ ნორმალზე და მიმართულია წირის ჩაზნექილობისაკენ, ამიტომ მას ნორმალური მდგენელი, ანუ ნორმალური აჩქარება ეწოდება და აღინიშნება $\vec{W}_n$ სიმბოლოთი. აჩქარების $\vec{W}$ ვექტორი მდებარეობს მიმხეხ სიბრტყეში, ამიტომ მისი მდგენელი ამ სიბრტყის მართობულ ღერძზე ბინორმალზე ნულის ტოლია ($\vec{W}_b = 0$).

აღნიშვნების საფუძველზე მხეხი აჩქარება იქნება:

$$\vec{W}_\tau = \frac{dV}{dt} \cdot \vec{\tau} = W_\tau \cdot \vec{\tau}, \quad (11.33)$$

$\vec{W}_\tau$ -ს გეგმილი მხეხ ღერძზე ანუ მისი სკალარული სიდიდე:

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = \dot{V} = \dot{S}. \quad (11.34)$$

ნორმალური აჩქარება:

$$\vec{W}_n = \frac{V^2}{\rho} \cdot \vec{n} = \frac{\dot{S}^2}{\rho} \cdot \vec{n} \quad (11.35)$$

ყოველთვის მიმართულია სიმრუდის ცენტრისკენ და მისი აბსოლუტური მნიშვნელობა ანუ W აჩქარების გეგმილი ნორმალზე:

$$W_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\dot{S}^2}{\rho}. \quad (11.36)$$

ამრიგად, მოძრაობის ბუნებრივი ხერხით მოცემისას წერტილის ვექტორული აჩქარება განისაზღვრება, როგორც მისი მხეხი და ნორმალური მდგენელების გეომეტრიული ჯამი:

$$\vec{W} = \vec{W}_r + \vec{W}_n = \frac{dV}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho} \cdot \vec{n}. \quad (11.37)$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

აჩქარების ექვტორის მოდული ტოლია:

$$|\vec{W}| = \sqrt{W_r^2 + W_n^2} = \sqrt{\dot{V}^2 + \frac{V^4}{\rho^2}}. \quad (11.38)$$

აჩქარების ექვტორის ნორმალიდან გადახრის კუთხის ტანგენსი

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{W_r}{W_n}. \quad (11.39)$$

მხები აჩქარებით ხასიათდება წერტილის სიჩქარის მოდულის ცვლილება, ხოლო ნორმალურით – სიჩქარის მიმართულების ცვლილება.

სიბრტყეზე წერტილის მოძრაობისას, მისი მხები და ნორმალური აჩქარება შეიძლება განისაზღვროს სიჩქარისა და აჩქარების დეკარტის კოორდინატთა ღერძებზე გეგმილების საშუალებით:

$$W_r = \frac{V_x W_x + V_y W_y}{V}, \quad (11.40)$$

$$W_n = \frac{|V_x W_y - V_y W_x|}{V}. \quad (11.41)$$

შენიშვნა: ნორმალური აჩქარების გამოთვლა ზოგჯერ მოხერხებულია შემდეგი ფორმულით:

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_r^2}, \quad (11.42)$$

სადაც W და W_r შესაბამისად განისაზღვრება (11.28) და (11.40) ფორმულებით, ხოლო (11.36)-დან სიბრტყის რადიუსი:

$$\rho = \frac{V^2}{W_n}. \quad (11.43)$$

11.4 მოძრაობის მოცემის კოორდინატული ხერხიდან ბუნებრივ გადასვლა

ვთქვათ, წერტილის მოძრაობა მოცემულია კოორდინატული ხერხით: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$. კოორდინატული ხერხიდან ბუნებრივზე გადასასვლელად აუცილებელია:

1. დავადგინოთ ტრაექტორია, ე.ი. მივიღოთ ტრაექტორიის განტოლება ცხადი სახით

$$y = \varphi_1(x), \quad z = \varphi_2(x);$$

2. განვსაზღვროთ მოძრაობის კანონი $S = S(t)$ ამ ტრაექტორიის მიხედვით. მაგალითად, როცა მოძრაობა მიმართულია S რკალის ათვლის დადებით მხარეს, მაშინ მართებულია შემდეგი ფორმულა:

$$S = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt; \quad (11.44)$$

3. დავადგინოთ ათვლის სათავე მოძრაობის განტოლებაში საწყისი t_0 დროის ჩასმით. თუ ეს დრო არ არის მოცემული, ჩავსებათ $t_0 = 0$.

4. განვსაზღვროთ S კოორდინატის დადებითი მიმართულება, რომელიც შეიძლება დავადგინოთ ან სიჩქარის ვექტორით, ან მოძრაობის განტოლებაში დროის მნიშვნელობის ჩასმით, რათა ტრაექტორიაზე მივიღოთ ახალი წერტილი.

ამრიგად, თუ ცნობილია $V = V(t)$ ფუნქცია, მაშინ რკალური კოორდინატი შეიძლება განისაზღვროს (11.44)-ის ანალოგიური შემდეგი ფორმულით:

$$S = \int_0^t V(t) dt + S_0, \quad (11.45)$$

სადაც S_0 არის რკალური კოორდინატის მნიშვნელობა, როცა $t = 0$.

თუ რკალის ათვლის წერტილი ემთხვევა წერტილის საწყის მდებარეობას, მაშინ $S_0 = 0$ და

$$S = \int_0^t V(t) dt. \quad (11.46)$$

რადგან ტრაექტორიაზე წერტილმა შეიძლება შეიცვალოს მოძრაობის მიმართულება, ამიტომ წერტილის მიერ $(0; t)$ შუალედში გავლილი l მანძილი განისაზღვრება იმ ცალკეული რკალების სიგრძეთა ჯამით, რომელზეც წერტილის V სიჩქარე ინარჩუნებს თავის ნიშანს. მაშასადამე,

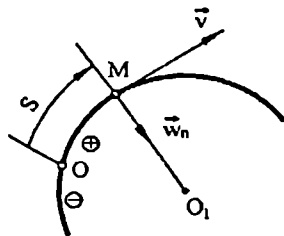
$$l = |S_1 - S_0| + |S_2 - S_1| + \dots + |S - S_n|, \quad (11.47)$$

სადაც $S_1, S_2, \dots, S_n$ – რკალური კოორდინატების მნიშვნელობებია დროის $t_1, t_2, \dots, t_n$ მომენტებში, რომლის დროსაც V სიჩქარე იცვლის თავის ნიშანს.

11.5 წერტილის მოძრაობის ზოგიერთი კერძო შემთხვევა

1. თუ წერტილი წრფეზე მოძრაობს თანაბრად, მაშინ $V = \text{const}$, $W_r = \dot{V} = 0$, სიმრუდის რადიუსი $\rho \rightarrow \infty$ და $W_n = 0$, მაშასადამე, $W = 0$. მოძრაობა წრფივი და თანაბარია.

2. თუ წერტილი წირზე მოძრაობს თანაბრად, მაშინ $V = \text{const}$ და $W_r = \dot{V} = 0$. ამასთან $W_n \neq 0$ და მოძრაობა მრუდწირული და თანაბარია (ნახ. 11.9).



ნახ. 11.9

ამ შემთხვევაში $\vec{W}$ აჩქარება მიმართულია ტრაექტორიის ნორმალის გასწვრივ და მისი მოდული ტოლია:

$$W = W_n = \frac{V^2}{\rho}.$$

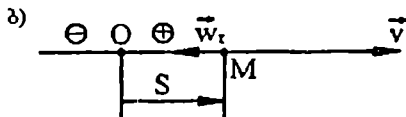
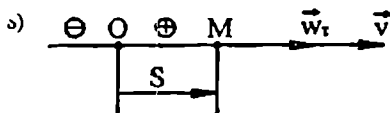
3. $W_n = 0$, $W_r \neq 0$. მოძრაობა წრფივი და არათანაბარია.

ამ შემთხვევაში ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი $\rho \rightarrow \infty$ და, მაშასადამე, $W_n = 0$, ხოლო $\vec{W}$ აჩქარება მიმართულია წრფივი ტრაექტორიის გასწვრივ და მისი მოდული ტოლია:

$$W = |W_r| = |\dot{V}| = |\dot{S}|.$$

ა) წრფივი აჩქარებული (ნახ. 11.10, ა).

ბ) წრფივი შენელებული (ნახ. 11.10 ბ).



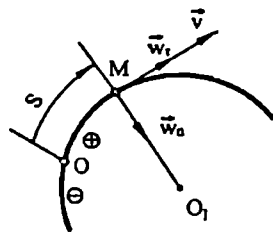
ნახ. 11.10

4. $W_{rr} \neq 0$, $W_r \neq 0$ მოძრაობა მრუდწირული და არათანაბარია.

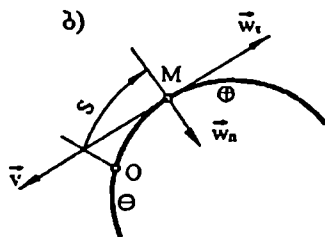
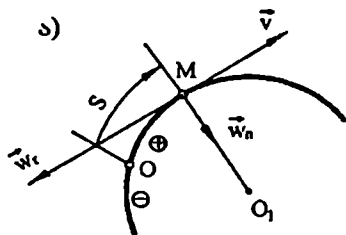
ა) მრუდწირული აჩქარებული ($W_r > 0$, $V > 0$) (ნახ. 11.11).

ბ) მრუდწირული შენელებული (ნახ. 11.12, ა,ბ).

1. $W_r < 0$, $V > 0$; 2. $W_r > 0$, $V < 0$.



ნახ. 11.11



ნახ. 11.12

წერტილის თანაბარი მოძრაობის განტოლება ნებისმიერი ფორმის ტრაექტორიაზე ($V = const$)

$$S = Vt \quad (11.48)$$

წერტილის თანაბარცვლადი მოძრაობის განტოლება ნებისმიერი ფორმის ტრაექტორიაზე ($W_r = const$)

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2} W_r t^2, \quad (11.49)$$

სადაც S_0 საწყისი მდებარეობის კოორდინატია; V_0 – საწყისი სიჩქარე.

თუ $W_r > 0$, მაშინ მოძრაობა თანაბარაჩქარებულია.

თუ $W_r < 0$, მაშინ მოძრაობა თანაბარშენელებულია.

თანაბარცვლადი მოძრაობის სიჩქარე W_r -ს ნიშნის შესაბამისად იქნება

$$V = V_0 \pm W_r t, \quad (11.50)$$

ასევე

$$S = S_0 + \frac{V + V_0}{2} \cdot t, \quad (11.51)$$

$$S = S_0 + \frac{V^2 - V_0^2}{2W_r}. \quad (11.52)$$

11.6. წერტილის კინემატიკის ძირითადი ამოცანები და მეთოდური მითითებები მათ ამოსახსნელად

წერტილის კინემატიკის ამოცანები შეიძლება დავყოთ რამდენიმე ძირითად ტიპად. განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი და ვაჩვენოთ მათი ამოხსნის მეთოდები.

ამოცანა 1. წერტილის მოძრაობის განტოლებების შედგენა მოცემული ამოცანის პირობის მიხედვით.

ასეთ ამოცანებს ძირითადად იყენებენ წერტილის მოძრაობის განტოლებების შედგენის მეთოდების გაცნობის მიზნით, მაგალითად, მძიმე სხეულის ფრენისას მისი წერტილების მოძრაობის განტოლებების შედგენისთვის, ბორბლის უსრიალოდ გორვისას მისი ფერსოს წერტილების მოძრაობის განტოლებების შედგენისთვის და სხვ. ამ ტიპის ამოცანებში წერტილის მოძრაობა განიხილება მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში და კოორდინატული ფორმით მიღებული წერტილის მოძრაობის კანონი გამოიყენება საძიებელი კინემატიკური სიდიდეების განსასაზღვრავად.

წერტილის მოძრაობის განტოლებების შედგენაზე ამოცანების ამოხსნის დროს აუცილებლად უნდა განვიხილოთ მოძრავი წერტილის არა საწყისი ან საბოლოო მდებარეობა, არამედ მისი მდებარეობა დროის ნებისმიერ t მომენტში და მიმდინარე კოორდინატები გამოვსახოთ როგორც $x(t)$ დროის გარკვეული ფუნქციები.

ამოცანა 2. დეკარტის კოორდინატებში მოცემული მოძრაობის განტოლებების მიხედვით წერტილის ტრაექტორიის, სიჩქარის და აჩქარების განსაზღვრა

თუ წერტილის მოძრაობა განსაზღვრულია დეკარტის კოორდინატებში მოცემულ (11.2) განტოლებებით, მაშინ წერტილის ტრაექტორიის მოსაძებნად საკმარისია მოძრაობის განტოლებებიდან t პარამეტრის გამორიცხვა.

სიჩქარისა და აჩქარების ვექტორების სიდიდე და მიმართულება განისაზღვრება დეკარტის კოორდინატთა ღერძებზე მათი გეგმილების საშუალებით, ამასთანავე სიჩქარის სიდიდე და მიმართულება გამოითვლება (11.15) და (11.16) ფორმულებით,

ხოლო (11.14) ფორმულები მიიღება (11.2) მოძრაობის განტოლებების გაწარმოებით. აჩქარების სიდიდე და მიმართულება გამოითვლება (11.28) და (11.29) ფორმულებით, ხოლო აჩქარების გეგმიდები მიიღება (11.26) ან (11.27) ფორმულებით, აგრეთვე (11.2) განტოლებების გაწარმოებით.

ამოცანა 3. წერტილის სიჩქარისა და აჩქარების განსაზღვრა, როცა მისი მოძრაობა განისაზღვრება ბუნებრივი ხერხით

ასეთ ამოცანებში ძირითადად მოითხოვება მოძრაობის კინემატიკური ელემენტების (სიჩქარე, მხები, ნორმალური და სრული აჩქარებები) განსაზღვრა, როგორც დროის მოცემული ფუნქციებისა ან მათი სიდიდეების პოვნა დროის ნებისმიერ მომენტში.

ამოცანა იხსნება წერტილის მოძრაობის (11.9) განტოლების გაწარმოებით, ე.ი. სიჩქარე, მხები, ნორმალური და სრული აჩქარებები გამოითვლება (11.20), (11.34), (11.36) და (11.38) ფორმულებით.

იმ შემთხვევაში, როცა ცნობილია ტრაექტორია და საჭიროა განესაზღვროთ წერტილის მოძრაობის კანონი, თუ მოცემულია სიჩქარე ან აჩქარება, როგორც დროის ფუნქციები, ან მუდმივი სიდიდეებია, მაშინ ამოცანა იხსნება ამ ფუნქციების ინტეგრირებით, მაგალითად, (11.45) ან (11.46) ფორმულების გამოყენებით. ამასთანავე ამოცანის პირობაში მოცემული უნდა იყოს საწყისი ან საბოლოო პირობები, რომლებიც გამოიყენება ინტეგრირების მუდმივების განსაზღვრავად. წერტილის მოძრაობის კანონის განსაზღვრის შემდეგ დანარჩენი საძიებელი კინემატიკური სიდიდეები გამოითვლება ზემოთ მითითებული ფორმულებით.

ამოცანა 4. წერტილის მოძრაობის კანონი მოცემულია კოორდინატული ფორმით, საჭიროა განესაზღვროთ ტრაექტორია და ტრაექტორიაზე წერტილის მოძრაობის კანონი, სიჩქარე, მხები, ნორმალური და სრული აჩქარებები, აგრეთვე მოძრაობის სხვა კინემატიკური სიდიდეები.

ამოცანა 5. მოცემულია წერტილის მოძრაობის (11.2) კანონი, საჭიროა განესაზღვროთ ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი.

ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსს გამოთვლიან შემდეგი თანმიმდევრობით:

1. პოულობენ $\vec{r}$ სიჩქარის გეგმილებსა და სიდიდეს (11.14) (11.15) ფორმულებით, ე.ი. პოულობენ $V_x = \dot{x}$; $V_y = \dot{y}$; $V_z = \dot{z}$;
 $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$ სიდიდეებს;

2. გამოთვლიან მხეხ აჩქარებას $W_r = \frac{dV}{dt}$ ფორმულით;

3. გამოთვლიან სრული აჩქარების გეგმილებსა და სიდიდეს (12.6), (12.8) ფორმულებით, ე.ი. პოულობენ $W_x = \ddot{x}$;
 $W_y = \ddot{y}$; $W_z = \ddot{z}$; $W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}$ სიდიდეებს;

4. (11.42) ან (11.41) ფორმულით გამოთვლიან ნორმალურ აჩქარებას;

5. (11.43) ფორმულით გამოითვლიან საძიებელი სიმრუდის ρ რადიუსს.

ამოცანა 6. კომბინირებული ამოცანები

ზემოთ განხილული ამოცანების ტიპის გარდა, გვხვდება ამოცანები, რომლებიც ეკუთვნიან თითოეულ ამ ტიპს, რომლებიც მოძრაობის ტრაექტორიის მიხედვით შეიძლება გავყოთ ორ ჯგუფად:

ა) ამოცანები წერტილის წრფივი მოძრაობის შესახებ;

ბ) ამოცანები წერტილის მრუდწირული მოძრაობის შესახებ.

შენიშვნა. თუ მოცემულია ტრაექტორიის განტოლება სიბრტყეზე დეკარტის კოორდინატებში, ე.ი. $y = f(x)$, ან ვექტორით სიმრუდის რადიუსს ტრაექტორიის იმ წერტილებში, სადაც სიჩქარე იცვლის ნიშანს, მაშინ (11.43) ფორმულით მიიღება $\frac{0}{0}$

სახის განუზღვრელობა. რადიუსის გამოსათვლელად საჭიროა განუზღვრელობის გახსნა. ამ შემთხვევაში ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსის უმჯობესია გამოსათვლელად ვისარგებლოთ შემდეგი ფორმულით:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|}. \quad (11.53)$$

თუ სიმრუდის C ცენტრის კოორდინატებს აღვნიშნავთ X_c და Y_c -თი, მაშინ

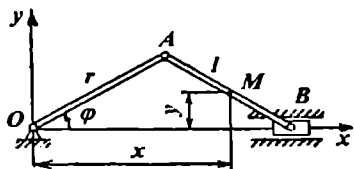
$$X_c = x - \frac{y'(1+(y')^2)}{y''}, \quad Y_c = y - \frac{1+(y')^2}{y''}. \quad (11.54)$$

11.7. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები წერტილის მოძრაობის განტოლების შედგენაზე

ამოცანა 7. ეიპოვოთ მრუდმხარა მექანიზმის M წერტილის მოძრაობის განტოლებები და ტრაექტორია (ნახ. 11.13). თუ

$$r = l = 30 \text{ სმ}, \quad MB = \frac{l}{3} = 10 \text{ სმ},$$

$$\varphi = 2\pi t \text{ (t-წამებში)}.$$



ნახ. 11.13

ამოხსნა. დავადგინოთ M წერტილის მოძრაობის კანონი კოორდინატული ფორმით. ამისათვის გავატაროთ Oxy კოორდინატთა სისტემის ღერძები, როგორც ეს

ნაჩვენებია 11.13 ნახაზზე. განვსაზღვროთ M წერტილის კოორდინატები, როგორც φ კუთხის ფუნქციები. რადგან $l = r$, ამიტომ $\angle AOB = \angle ABO = \varphi$. მაშასადამე, ნახაზიდან გვექნება

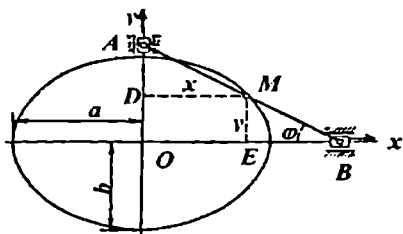
$$x = r \cos \varphi + \frac{2}{3} l \cos \varphi = \frac{5}{3} r \cos \varphi; \quad y = \frac{1}{3} l \sin \varphi.$$

ჩავსვათ ამ განტოლებებში $r = 30$, $l = 30$ და $\varphi = 2\pi t$ მნიშვნელობები. მივიღებთ M წერტილის მოძრაობის განტოლებებს:

$$x = 50 \cos 2\pi t; \quad y = 10 \sin 2\pi t.$$

ახლა იმისათვის, რომ ეიპოვოთ M წერტილის ტრაექტორიის განტოლება საჭიროა გამოვირიცხოთ მიღებული მოძრაობის განტილებებიდან t პარამეტრი, გვაქვს:

$$\left. \begin{aligned} \cos 2\pi t &= \frac{x}{50} \\ \sin 2\pi t &= \frac{y}{10} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \cos^2 2\pi t &= \frac{x^2}{50^2} \\ \sin^2 2\pi t &= \frac{y^2}{10^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{50^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1.$$



ნახ. 11.14

M წერტილის მიღებული ტრაექტორიის განტოლება არის ელიფსის განტოლება 50 სმ და 10 სმ ნახევარღერძებით და ცენტრით კოორდინატთა $O(0;0)$ სათავეში.

ამოცანა 8. AB სახაზავის ბოლოები მოძრაობს პერპენდიკულარულ Oy და Ox ღერძებზე, ამასთან, კუთხე $OAB = \varphi = 2t$ კანონის თანახმად იცვლება. შევადგინოთ AB სახაზავის M წერტილის მოძრაობის განტოლებები და განვსაზღვროთ მისი ტრაექტორია, თუ $AM = a = 8$ სმ და $BM = b = 6$ სმ (ნახ. 11.14).

ამოხსნა. მართკუთხა AMD და MBE სამკუთხედებიდან M წერტილის x და y კოორდინატები ტოლი იქნება:

$$x = DM = AM \cos \varphi = a \cos \varphi; \quad y = EM = BM \sin \varphi = b \sin \varphi. \quad (1)$$

ჩავსვათ (1)-ში $a = 8$, $b = 6$ და $\varphi = 2t$ მნიშვნელობები, მივიღებთ M წერტილის მოძრაობის განტოლებებს:

$$x = 8 \cos 2t; \quad y = 6 \sin 2t,$$

M წერტილის ტრაექტორიის საპოვნელად გამოვირიცხოთ t დრო ამ განტოლებებიდან, გექნება:

$$\frac{x}{8} = \cos 2t; \quad \frac{y}{6} = \sin 2t.$$

ავიყვანოთ კვადრატში ეს განტოლებები და შევეკრიბოთ:

$$\frac{x^2}{64} = \cos^2 2t; \quad \frac{y^2}{36} = \sin^2 2t \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = \cos^2 2t + \sin^2 2t.$$

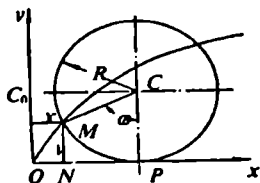
მაშასადამე,

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

მიღებული M წერტილის ტრაექტორიის განტოლება ელიფსის განტოლებათა $a=8$ სმ; $b=6$ სმ ნახევარღერძებითა და ცენტრით კოორდინატთა O სათავეში (ნახ. 11.14).

AB სახაზავზე M წერტილის მდებარეობის შეცვლისას შეიცვლება ელიფსის ფორმაც, ე.ი. ნახევარღერძების სიდიდეებიც.

ამოცანა 9. შევადგინოთ მატარებლის $R=0,8$ მ რადიუსის მქონე თვლის ფერსოს M წერტილის მოძრაობის განტოლება, თუ მატარებელი წრფივ უბანზე მოძრაობს მუდმივი $V=24$ მ/წმ სიჩქარით და თვალი გორავს უსრიალოდ. წერტილის საწყისი მდებარეობა მივიღოთ კოორდინატთა სათავედ (ნახ. 11.15).



ნახ. 11.15

ამოხსნა. საწყის მომენტში ღიანდაგთან თვლის შეხების წერტილი აღენიშნოთ O -თი და მივიღოთ იგი საწყის მდებარეობად. 11.15. ნახაზზე ნაჩვენებია დროის მიმდინარე მომენტში M წერტილის მდებარეობა თვლის ფერსოზე

და C ცენტრის მდებარეობა. რადგან თვალი ღიანდაგზე გორავს უსრიალოდ, ამიტომ წრის PM რკალის სიგრძე ტოლია გზის ღიანდაგის OP მონაკვეთისა, სადაც P ღიანდაგთან თვლის შეხების წერტილია დროის აღებულ მომენტში.

განვიხილოთ M წერტილის მოძრაობა. ვთქვათ მისი მიმდინარე კოორდინატებია x და y . აღენიშნოთ ცენტრალური PCM კუთხე φ -თი, მივიღებთ:

$$x = OP - NP = R\varphi - R\sin\varphi, \quad (1)$$

$$y = NM = R - R\cos\varphi. \quad (2)$$

მაშასადამე, M წერტილის მოძრაობის განტოლებებს ექნება შემდეგი სახე:

$$x = R(\varphi - \sin\varphi), \quad (3)$$

$$y = R(1 - \cos\varphi). \quad (4)$$

PM რკალის სიგრძე ტოლია ღიანდაგის OP მონაკვეთის სიგრძისა, ხოლო თვით OP მონაკვეთი ტოლია თვლის C ცენტრის მიერ საწყისი C_0 მდებარეობიდან გაველილი მანძილისა. თვლის C ცენტრი მოძრაობს თანაბრად V სიჩქარით, მაშასადამე, მანძილი $C_0C = PM = Vt$, ე.ი.

$$Vt = R\varphi, \quad (5)$$

საიდანაც

$$\varphi = \frac{V}{R} \cdot t = 30t \quad (6)$$

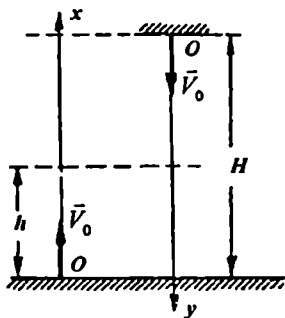
ჩავსვით φ -ს მნიშვნელობა (3) და (4)-ში, მივიღებთ:

$$x = 24r - 0,8 \sin 30t, \quad (7)$$

$$y = 0,8 - 0,8 \cos 30t. \quad (8)$$

(7) და (8) ფორმულები თვლის ფერსოს M წერტილის მოძრაობის განტოლებებია. წირი, რომელსაც აღწერს ჰორიზონტალურ წრფივ ლიანდაგზე უსრიალოდ მგორავი თვლის ფერსოს წერტილი, არის ციკლოიდა.

ამოცანა 10. სხეული აისროლეს საწყისი V_0 სიჩქარით ვერტიკალურად ზევით. იმავედროულად ზღვრული H სიმაღლიდან, რომელსაც შეიძლება მიაღწიოს ზევით ასროლილმა სხეულმა, იმავე V_0 სიჩქარით იწყებს ვარდნას ვერტიკალურად ქვევით მეორე სხეული (ნახ. 11.16). განვსაზღვროთ დროის $t = t_1$ მომენტი, როდესაც სხეულები შეხვდება ერთმანეთს ანუ მიწიდან რა h მანძილით იქნება დაშორებული ეს სხეულები, აგრეთვე ვიპოვოთ მათი V_1 და V_2 სიჩქარეები დროის t_1 მომენტისათვის.



ნახ. 11.16

ამოხსნა. 1. დავადგინოთ ორივე სხეულის მოძრაობისა და სიჩქარეების ცვლილების კანონები. ამისათვის ვისარგებლოთ (11.49) და (11.50) ფორმულებით.

პირველი სხეული ადის ზევით და მოძრაობს თანაბარ-შენელებულად. მაშასადამე,

$$V_x = V_0 - gt, \quad (1)$$

$$x = V_0 t - \frac{1}{2} gt^2. \quad (2)$$

მეორე სხეული ეშვება ქვევით და მოძრაობს თანაბარ-აჩქარებულად, მაშასადამე,

$$V_y = V_0 + gt, \quad (3)$$

$$y = V_0 t + \frac{1}{2} gt^2 \quad (4)$$

2. (1), (2), (3) და (4)-დან ვიპოვოთ საძიებელი სიდიდეები:

$$V_1 = V_0 - g t_1, \quad (5)$$

$$h = V_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2, \quad (6)$$

$$V_2 = V_0 + g t_1, \quad (7)$$

$$H - h = V_0 t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2 \quad (8)$$

მივიღეთ ოთხი განტოლება V_1 , V_2 , t_1 , h , H ხუთი უცნობით; მაგრამ, როცა $t = \tau$, მაშინ $x = H$ და $V_x = 0$; სადაც $t = \tau$ ის დროა, რომელიც, სჭირდება პირველ სხეულს მაქსიმალურ H სიმაღლეზე ასასვლელად. (1) და (2) განტოლებებიდან ვიპოვოთ, რომ

$$H = \frac{V_0^2}{2g}. \quad (9)$$

(6), (8) და (9) განტოლებებიდან

$$t_1 = \frac{V_0}{4g}; \quad h = \frac{7V_0^2}{32g}.$$

(5) და (7) განტოლებებიდან გვექნება:

$$V_1 = \frac{3}{4}V_0; \quad V_2 = \frac{5}{4}V_0.$$

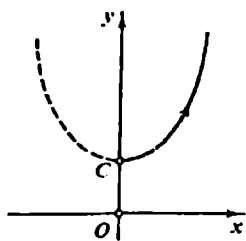
11.8. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები წერტილის ტრაექტორიის განსაზღვრაზე დეკარტის კოორდინატებში მოცემული მოძრაობის განტოლებების მიხედვით

ამოცანა 11. მოცემულია Oxy სიბრტყეზე წერტილის მოძრაობის განტოლებები: $x = 2t$; $y = 4t^2 + 2$. ვიპოვოთ ტრაექტორიის განტოლება კოორდინატული ფორმით და ტრაექტორიაზე წერტილის საწყისი მდებარეობა.

ამოხსნა. ტრაექტორიის განტოლების საპოვნელად მოძრაობის მოცემული განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ t დრო:

$$t = \frac{x}{2} \Rightarrow y = x^2 + 2. \text{ მიღებული წირი არის პარაბოლა, რომლის }$$

სიმეტრიის ღერძია Oy (ნახ. 11.17). რადგან ამოცანის ტექსტში



ნახ. 1.17

დროის ინტერვალში მოცემული არ არის, ამიტომ მივიღოთ, რომ დრო იცვლება ნულიდან უსასრულობამდე. მაშინ მოძრაობის განტოლებებიდან მივიღებთ წერტილის კოორდინატების ცვლილების საზღვრებს: თუ $0 \leq t < \infty$, მაშინ $0 \leq x < \infty$, $2 \leq y < \infty$. მაშასადამე, წერტილის ტრაექტორიის მხოლოდ ნაწილი იქნება პარაბოლა, რომელიც 11.17 ნახაზზე კონტურითაა გამოსახული. დროის საწყის მომენტში,

როცა $t = 0$, წერტილი იმყოფება $C(0; 2)$ წერტილში.

ამოცანა 12. წერტილის მოძრაობის განტოლება მოცემულია ექვტორული ფორმით:

$$\vec{r} = (2 + 3t^2)\vec{i} + (1 - 2t^2)\vec{j} + (2 + t^2)\vec{k}. \quad (1)$$

ვიპოვოთ წერტილის ტრაექტორია კოორდინატული ფორმით.

ამოხსნა. (1) განტოლების მიხედვით $x = 2 + 3t^2$; $y = 1 - 2t^2$; $z = 2 + t^2$. განვსაზღვროთ თითოეული განტოლებიდან t პარამეტრი:

$$t^2 = \frac{x-2}{3}, \quad t^2 = \frac{z-1}{-2}, \quad t^2 = \frac{z-2}{1},$$

აქედან

$$\frac{x-2}{3} = \frac{z-1}{-2} = \frac{z-2}{1} \quad (2 \leq x < \infty). \quad (2)$$

(2) არის წერტილის ტრაექტორია.

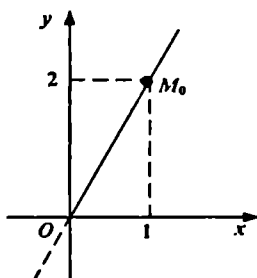
ამრიგად, მივიღებთ, რომ წერტილის ტრაექტორია ყოფილა წრფის $2 \leq x < \infty$ ნაწილი.

ამოცანა 13. მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლებები: $x = t^2 - 2t + 1$; $y = 2t^2 - 4t + 2$. ვიპოვოთ წერტილის ტრაექტორია, ტრაექტორიაზე მისი საწყისი მდებარეობა და მოძრაობის მიმართულება.

ამოხსნა. განვსაზღვროთ ტრაექტორიის განტოლება: $y = 2(t^2 - 2t + 1)$, $t^2 - 2t + 1 = x$, ე.ი. $y = 2x$. მაგრამ ტრაექტორია არ იქნება მთლიანად მიღებული წრფე (ნახ. 11.18).

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ წერტილის კოორდინატების ცვლილების საზღვრები, ამისათვის საჭიროა ვიპოვოთ x -ის

მნიშვნელობები, როცა $t=0$, $t \rightarrow \infty$ და ექსტრემუმის წერტილებში: $t=0 \Rightarrow x=1$, $t \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow \infty$, $\frac{dx}{dt} = 2t - 2 = 0 \Rightarrow t=1$. გვაქვს



ნახ. 11.18

ექსტრემუმის ერთი წერტილი, ეს მინიმუმის წერტილია, რადგან $\frac{d^2x}{dt^2} = 2 > 0$. ამიტომ

$x_{\min} = x(1) = 0$, $y(1) = 0$; მაშასადამე, წერტილი იწყებს მოძრაობას საწყის $M_0(1;2)$ მდებარეობიდან $O(0;0)$ სათავისაკენ, მაგრამ O სათავეში მოძრაობა იცვლის მიმართულებას საწინააღმდეგო მიმართულებით და შემდეგ მოძრაობის მიმართულება უცვლელი რჩება. ამრიგად, წერტილის ტრაექტორიაა

$y=2x$ წრფის არა $1 \leq x < \infty$ ნაწილი, არამედ $0 \leq x < \infty$ ნაწილი (ნახ. 11.18).

ამოცანა 14. წერტილის მოძრაობის განტოლებებია:

$$x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 3; \quad y = 4 - 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right). \quad (1)$$

ეიპოვოთ წერტილის ტრაექტორია და ტრაექტორიაზე წერტილის საწყისი მდებარეობა.

ამოხსნა. წერტილის მოძრაობის (1) განტოლებები ტრაექტორიის პარამეტრული განტოლებებია. იმისათვის, რომ მივიღოთ ტრაექტორიის განტოლება კოორდინატული ფორმით ანუ წირის განტოლება, რომელზედაც მოძრაობს წერტილი, საჭიროა (1) განტოლებებიდან გამოვირიცხოთ t პარამეტრი (დრო):

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{x+3}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{y-4}{-2}. \quad (2)$$

თუ (2) ტოლობებს ავიყვანთ კვადრატში და შევეკრიბოთ, მივიღებთ:

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 4.$$

მივიღეთ ტრაექტორიის განტოლება, რომელიც წრეწირის განტოლებაა $O_1(-3;4)$ ცენტრითა და $R=2$ რადიუსით. როგორც ვიცით, $|\sin t| \leq 1$ და $|\cos t| \leq 1$. აქედან გამომდინარე $x \in [-5; -1]$ და $y \in [2; 6]$. როცა $t=0$, მაშინ $x=-1$ და $y=4$, მაშასადამე, წერტილი საწყის მომენტში იმყოფება $M_0(-1;4)$ წერტილში.

ამოცანა 15. მოცემულია Oxy სიბრტყეზე წერტილის მოძრაობის განტოლებები:

$$x = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 1; \quad y = 3 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right).$$

ვიპოვოთ წერტილის ტრაექტორია და გამოვიკვლიოთ მისი მოძრაობა.

ამოხსნა. წერტილის მოძრაობის მოცემული განტოლებები არის ტრაექტორიის განტოლებები პარამეტრული ფორმით (t დრო პარამეტრია). იმ წირის განტოლების მისაღებად, რომელზედაც მოძრაობს წერტილი ანუ კოორდინატული ფორმის ტრაექტორიის მისაღებად გამოვიყენოთ მოძრაობის განტოლებებიდან t პარამეტრი. გამოვიყენოთ $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ ფორმულა, გვექნება:

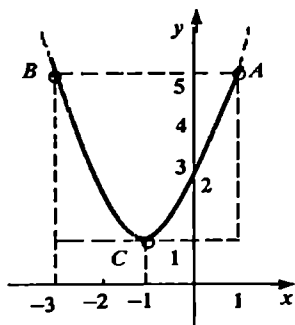
$$y = 3 - 2\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right).$$

მოძრაობის პირველი განტოლებიდან $\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \frac{x+1}{2}$, მაშინ მივიღებთ:

$$y = (x+1)^2 + 1.$$

მივიღებთ ტრაექტორიის განტოლებას, რომელიც არის პარაბოლა. მისი წვერო $(-1; 1)$ წერტილში მდებარეობს, ხოლო შტოები მიმართულია ზემოთ (ნახ. 11.19). ამასთან მთლიანად პარაბოლა არ არის წერტილის ტრაექტორია. მოძრაობის განტოლებებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\left|\frac{x+1}{2}\right| \leq 1 \Rightarrow -3 \leq x \leq 1, \quad \left|\frac{y-3}{-2}\right| \leq 1 \Rightarrow 1 \leq y \leq 5.$$



ნახ. 11.19

ამრიგად, წერტილის ტრაექტორია ემთხვევა პარაბოლის იმ ნაწილს, რომელიც მდებარეობს $x = -3$, $x = 1$, $y = 1$, $y = 5$ წრფეებით შემოსაზღვრული მართკუთხედის შიგნით (ნახ. 11.19), მაშასადამე, წერტილის ტრაექტორია არის პარაბოლის ის ნაწილი, რომელიც აკმაყოფილებს $-3 \leq x \leq 1$ პირობას. ვიპოვოთ წერტილის საწყისი მდებარეობა. როცა $t = 0$ გვაქვს $x|_{t=0} = -1$;

$x|_{t=0}=1$, ე.ი. წერტილი საწყის მომენტში იმყოფება პარაბოლის $C(-1;1)$ წვეროში. როცა t დრო იცვლება 0-დან 3 წმ-მდე, მაშინ x აბსცისა იზრდება -1-დან 1-მდე, ხოლო y ორდინატა 1-დან 5-მდე. ე.ი. როცა $t=t_1=3$ წმ, მაშინ $x|_{t=3}=1$; $y|_{t=3}=5$. მაშასადამე, წერტილი პარაბოლაზე მოძრაობს მარჯვნივ და დროის ამ მომენტში აღწევს $A(1;5)$ წერტილამდე, სადაც მყისიერად იცვლის მოძრაობის მიმართულებას. როცა t იცვლება $3 \leq t \leq 9$ წმ შუალედში, მაშინ წერტილი მოძრაობს პარაბოლაზე მარცხნივ, გაივლის პარაბოლას წვეროს $t=t_2=6$ წმ მომენტში, ხოლო $t=t_3=9$ წმ მომენტში მიაღწევს $B(-3; 5)$ წერტილამდე და დროის $t_3=9$ წმ მომენტიდან იწყებს ისევ პარაბოლაზე მარჯვნივ მოძრაობას, დროის $t=t_4=12$ წმ მომენტში გაივლის წვეროს და ა.შ. მაშასადამე, წერტილი დროის განმავლობაში ასრულებს რხევით მოძრაობას პარაბოლას გასწვრივ.

11.9. სავარჯიშო ამოცანები წერტილის ტრაექტორიის განსაზღვრაზე, როცა წერტილის მოძრაობა მოცემულია ვექტორული და კოორდინატული ფორმით

ამოცანა 11.1. მოცემულია M წერტილის მოძრაობის განტოლება ვექტორული ფორმით. იპოვეთ წერტილის ტრაექტორიის განტოლება, ააგეთ ტრაექტორიის ნახაზი, აწვეწეთ ტრაექტორიაზე წერტილის საწყისი მდებარეობა და მისი მოძრაობის მიმართულება, თუ წერტილი მოძრაობს $\vec{r} = \vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ კანონის თანახმად:

1. $\vec{r} = 2t\vec{i} + 3t\vec{j}$; 2. $\vec{r} = (2t+1)\vec{i} + (2-3t)\vec{j}$;
3. $\vec{r} = (4t+3)\vec{i} + (2t-5)\vec{j}$; 4. $\vec{r} = (2t+3)\vec{i} + (t^2)\vec{j}$;
5. $\vec{r} = t^2\vec{i} + (5-2t^2)\vec{k}$; 6. $\vec{r} = (t^2+2)\vec{i} + (t^2+3)\vec{j}$;
7. $\vec{r} = (2+3t)\vec{i} + (1-2t)\vec{j} + (2+t)\vec{k}$; 8. $\vec{r} = 3\cos\frac{\pi}{6} \cdot \vec{i} + 3\sin\frac{\pi}{6} \cdot \vec{j}$;
9. $\vec{r} = \left(1 - 2\cos\frac{\pi}{4}t\right)\vec{i} + \left(3 + 2\sin\frac{\pi}{4}t\right)\vec{j}$;
10. $\vec{r} = (3 + 2\cos 2t)\vec{i} + (2 - 3\sin 2t)\vec{j}$.

პასუხები:

1. $3x - 2y = 0$; $z = 0$; $M_0(0;0)$; $(0 \leq x < \infty)$.
2. $3x + 2y = 7$; $z = 0$; $M_0(1;2)$; $(1 \leq x < \infty)$.
3. $x - 2y = 13$; $z = 0$; $M_0(3;-5)$; $(3 \leq x < \infty)$.
4. $y = \frac{1}{4}(x-3)^2$; $z = 0$; $M_0(3;0)$; $(3 \leq x < \infty)$.
5. $2x + z = 5$; $y = 0$; $M_0(0;5)$; $(0 \leq x < \infty)$.
6. $x - y = -1$; $z = 0$; $M_0(2;3)$; $(2 \leq x < \infty)$.
7. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}$; $M_0(2;1;2)$; $(2 \leq x < \infty)$.
8. $x^2 + y^2 = 9$; $z = 0$; $M_0(3;0)$, $(-3 \leq x \leq 3)$;
9. $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$; $z = 0$; $M_0(-1;3)$; $(-1 \leq x \leq 3)$.
10. $\frac{(x-3)^4}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$, $z = 0$; $M_0(5;2)$; $(1 \leq x \leq 5)$.

ამოცანა 112. მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლებები კოორდინატული ფორმით: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$. იპოვეთ Oxy სიბრტყეზე წერტილის ტრაექტორია და საწყისი მდებარეობა.

1. $x = 5t + 2,5$; $y = 2t + 1$.
2. $x = 2t$; $y = 4t^2$
3. $x = 4t^2$; $y = 2t$.
4. $x = t + 2$; $y = 3t^2 + 4t + 5$.
5. $x = t^2 - 2t$; $y = 2t^2 - 4t$
6. $x = 2t^2 - 3t$; $y = 4t^2 - 6t$.
7. $x = 3t^2 - t$; $y = 5t^2 - \frac{5}{3}t$.
8. $x = t - 3t^2$; $y = \frac{5}{3}t - 5t^2$.
9. $x = 5\sin^2 \frac{\pi}{6}t$; $y = -5\cos^2 \frac{\pi}{6}t - 3$.
10. $x = 8\cos^2 \frac{\pi}{6}t + 2$; $y = -8\sin^2 \frac{\pi}{6}t - 7$.
11. $x = 3t$; $y = 6t - 5t^2$
12. $x = 5 - 2\cos \frac{\pi}{3}t$; $y = 3\sin \frac{\pi}{3}t - 2$.
13. $x = 7\sin \frac{\pi}{6}t^2 + 3$; $y = 2 - 7\cos \frac{\pi}{6}t^2$
14. $x = 5\cos \frac{\pi}{3}t$; $y = -5\sin \frac{\pi}{3}t$.

$$15. x = 4 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 3; \quad y = -4 - 8 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right).$$

$$16. x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 3; \quad y = -4 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

$$17. x = 4t; \quad y = \frac{1}{t+2}. \quad 18. x = 1 + \sqrt{1+t}; \quad y = 1 + \ln \sqrt{1+t}$$

$$19. x = 2(e^t + e^{-t}); \quad y = 2(e^t - e^{-t}).$$

$$20. x = 2tg \frac{t}{2}; \quad y = 3 \sin t \quad (t < \pi).$$

$$21. x = 3tg \frac{t}{2}; \quad y = \cos t \quad (t < \pi).$$

პასუხები:

$$1. 2x - 5y = 0, \quad M_0(2,5; 1); \quad (2,5 \leq x < \infty).$$

$$2. y = x^2; \quad M_0(0,0); \quad (0 \leq x < \infty).$$

$$3. x = y^2; \quad M_0(0;0); \quad (0 < y < \infty).$$

$$4. y = 3x^2 - 8x + 9; \quad M_0(2;5); \quad \left(3\frac{2}{3} \leq y < \infty\right).$$

$$5. y = 2x; \quad M_0(0;0); \quad (-1 \leq x < \infty).$$

$$6. y = 2x; \quad M_0(0;0); \quad \left(-\frac{3}{8} \leq x < \infty\right).$$

$$7. 5x - 3y = 0; \quad M_0(0;0); \quad \left(-\frac{1}{12} \leq x < \infty\right).$$

$$8. 5x - 3y = 0; \quad M_0(0;0); \quad \left(-\infty < x \leq \frac{1}{12}\right).$$

$$9. x - y = 8; \quad M_0(0;5); \quad (0 \leq x \leq 5).$$

$$10. x - y = 17; \quad M_0(10;-7); \quad (2 \leq x \leq 10).$$

$$11. y = 2x - \frac{5}{9}x^2; \quad M_0(0;0); \quad \left(-\infty < y \leq \frac{9}{5}\right).$$

$$12. \frac{(x-5)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1; \quad M_0(3;-2); \quad (5 \leq x \leq 7).$$

$$13. (x-3)^2 + (y-2)^2 = 49; \quad M_0(3;-5); \quad (-4 \leq x \leq 10).$$

$$14. x^2 + y^2 = 25; \quad M_0(5;0); \quad (-5 \leq x \leq 5).$$

$$15. y = 4 - (x - 3)^2; \quad M_0(7; -12); \quad (-12 \leq x \leq 4).$$

$$16. y = (x + 3)^2 - 4; \quad M_0(-1; 0); \quad (-4 \leq y \leq 0).$$

$$17. y = \frac{4}{x+8}; \quad M_0\left(0; \frac{1}{2}\right); \quad (-8 < x < \infty).$$

$$18. y = 1 + \ln(x - 1), \quad M_0(2; 1); \quad (2 \leq x < \infty).$$

$$19. x^2 - y^2 = 4; \quad M_0(4; 0); \quad (4 \leq x < \infty).$$

$$20. y = \frac{12x}{4 + x^4}; \quad M_0(0; 1); \quad (0 \leq x < \infty).$$

$$21. y = \frac{9 - x^2}{9 + x^2}; \quad M_0(0; 1); \quad (0 \leq x < \infty).$$

11.10. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები ტრაექტორიაზე
წერტილის მოძრაობის კანონისა და გაველილი
მანძილის განსაზღვრაზე

ამოცანა 16. ტრაექტორიაზე წერტილის მოძრაობის განტოლება ბუნებრივი სახით, შევადგინოთ აგრეთვე დროის $t = 5$ წმ მომენტისათვის რეალური S კოორდინატისა და გაველილი l მანძილის მნიშვნელობები, თუ მისი სიჩქარე

$$V = 2t + 1 \text{ სმ/წმ.} \quad (1)$$

ამოხსნა. ტრაექტორიაზე წერტილის მოძრაობის განტოლებების მოსაძებნად ვისარგებლით (11.46) ფორმულით:

$$S = \int_0^t V(t) dt = \int_0^t (2t + 1) dt = (t^2 + t) \Big|_0^t$$

ანუ

$$S = t^2 + t \text{ სმ.} \quad (2)$$

მიღებული (2) განტოლება არის წერტილის ტრაექტორიაზე მოძრაობის კანონი ანუ მოძრაობის განტოლება ბუნებრივი სახით.

(1)-დან გამომდინარეობს, რომ V სიჩქარე ნიშანს არ იცვლის.

ახლა განვსაზღვროთ $t = 5$ წმ მომენტისათვის რეალური S კოორდინატისა და გაველილი l -ის მნიშვნელობები:

$$S_0 = S|_{t=0} = 0; \quad S_1 = S|_{t=5} = 30 \text{ სმ;}$$

$$l = |S_1 - S_0| = 30 \text{ სმ.}$$

ამოცანა 17. ვიპოვოთ ტრაექტორიაზე წერტილის მოძრაობის კანონი, აგრეთვე დროის $t=15$ წმ მომენტისათვის წერტილის რკალური S კოორდინატისა და გავლილი l მანძილის მნიშვნელობები, თუ მისი V სიჩქარე განისაზღვრება განტოლებით:

$$V = \pi - 2\pi \sin \frac{\pi}{6} \text{ მ/წმ.} \quad (1)$$

ამოხსნა. ტრაექტორიაზე წერტილის მოძრაობის კანონის მოსაძებნად ვისარგებლით (11.46) ფორმულით:

$$S = \int_0^t \left(\pi - 2\pi \sin \frac{\pi}{6} \right) dt = \left(\pi + 12 \cos \frac{\pi}{6} \right) \Big|_0^t$$

საიდანაც

$$S = \pi + 12 \cos \frac{\pi}{6} - 12 \text{ სმ.} \quad (2)$$

(2) გამოსახულება შეესაბამება ტრაექტორიაზე წერტილის მოძრაობის კანონს.

ვიპოვოთ დროის $t_1, t_2, \dots$ მომენტები, რომლებშიც წერტილის სიჩქარე იცვლის ნიშანს. (1)-დან გვაქვს

$$0 = \pi - 2\pi \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

საიდანაც

$$t_{k+1} = (-1)^k + 6k \text{ წმ } (k=0,1,2;\dots).$$

მაშასადამე, პირველ 15 წმ-ის განმავლობაში სიჩქარე ნიშანს იცვლის $t_1=1$ წმ, $t_2=5$ წმ, $t_3=13$ წმ დროის მომენტებში.

განვსაზღვროთ დროის $t_0=0$; $t_1=1$ წმ; $t_2=5$ წმ; $t_3=13$ წმ და $t_4=15$ წმ მომენტში რკალური S კოორდინატის მნიშვნელობები.

$$S_0 = 0 \text{ მ; } S_1 = S|_{t_1=1} = \pi + 6\sqrt{3} - 12 \text{ მ;}$$

$$S_2 = S|_{t_2=5} = 5\pi - 6\sqrt{3} - 12 \text{ მ; } S_3 = S|_{t_3=13} = 13\pi + 6\sqrt{3} - 12 \text{ მ;}$$

$$S_4 = S|_{t_4=15} = 15\pi - 12 \text{ მ.}$$

ვისარგებლოთ (1.47) ფორმულით და ვიპოვოთ წერტილის მიერ პირველი 15 წმ-ში გავლილი მანძილი. გვექნება:

$$\begin{aligned} l &= |S_1 - S_0| + |S_2 - S_1| + |S_3 - S_2| + |S_4 - S_3| = \\ &= |\pi + 6\sqrt{3} - 12| + |5\pi - 6\sqrt{3} - \pi - 6\sqrt{3}| + |13\pi + 6\sqrt{3} - 5\pi + 6\sqrt{3}| + \\ &+ |15\pi - 13\pi - 6\sqrt{3}| \approx 59,7 \text{ მ.} \end{aligned}$$

ამოცანა 18. დეკარტის კოორდინატებში მოცემული წერტილის მოძრაობის

$$\begin{aligned}x &= t^2 - 2t, \\y &= 2t^2 - 4t\end{aligned}\quad (1)$$

განტოლებების მიხედვით ვიპოვოთ ტრაექტორიაზე მოძრაობის განტოლება (ე.ი. წერტილის S რეალური კოორდინატი უნდა გამოესახოს, როგორც t დროის ფუნქცია), აგრეთვე S რეალური კოორდინატისა და გავლილი მანძილის მნიშვნელობები დროის $t=5$ წმ მომენტისათვის, თუ საწყის მომენტში წერტილი იმყოფება კოორდინატთა სათავეში.

ამოხსნა. ტრაექტორიაზე წერტილის მოძრაობის კანონის მოსაძებნად საჭიროა მოძრაობის მოცემული (1) განტოლებებიდან V სიჩქარის განსაზღვრა. ამისათვის ვიპოვოთ $\vec{V}$ სიჩქარის V_x და V_y გეგმილები დეკარტის კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე. გვექნება:

$$V_x = \dot{x} = 2t - 2; \quad V_y = \dot{y} = 4t - 4,$$

საიდანაც $V_y = 2V_x = 4(t-1) > 0$, როცა $t > 1$ და $V_y = 2V_x = 4(t-1) < 0$, როცა $t < 1$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $V = |V|$, როცა $t > 1$ და $V = -|V|$, როცა $t < 1$, სადაც

$$|V| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{4(t-1)^2 + 16(t-1)^2} = 2\sqrt{5} |t-1|.$$

მაშასადამე,

$$V = 2\sqrt{5}(t-1). \quad (2)$$

ახლა შევადგინოთ განტოლება: $ds = V dt$.

აქედან, ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\int_0^S ds = \int_0^t V \cdot dt \Rightarrow S - S_0 = 2\sqrt{5} \int_0^t (t-1) dt.$$

საწყისი პირობების თანახმად, $S_0 = 0$, მაშინ

$$S = 2\sqrt{5} \int_0^t (t-1) dt = \sqrt{5}(t-1)^2 \Big|_0^t = \sqrt{5}(t-1)^2 - \sqrt{5},$$

ანუ

$$S = \sqrt{5}(t^2 - 2t). \quad (3)$$

(3) არის ტრაექტორიაზე წერტილის მოძრაობის კანონი.

(2)-დან გამომდინარეობს, რომ წერტილის სიჩქარე იცვლის ნიშანს $t=1$ მომენტისათვის.

მაშასადამე, დროის პირველი 5 წმ-ის განმავლობაში სიჩქარე იცვლის ნიშანს დროის $t=t_1=1$ წმ მომენტში.

გამოვთვალოთ S კოორდინატის მნიშვნელობები დროის $t_0=0$, $t_1=1$ წმ, $t_2=5$ წმ მომენტისათვის:

$$S_0 = S|_{t=0} = 0; \quad S_1 = S|_{t=1} = -\sqrt{5} \text{ სმ}; \quad S_2 = S|_{t=5} = 15\sqrt{5} \text{ სმ}.$$

(11.47) ფორმულით ვიპოვიტ დროის $t=5$ წმ-ის განმავლობაში წერტილის მიერ გავლილი მანძილი:

$$l = |S_1 - S_0| + |S_2 - S_1| = |-\sqrt{5} - 0| + |15\sqrt{5} + \sqrt{5}| = \sqrt{5} + 16\sqrt{5} = 17\sqrt{5} \text{ სმ}.$$

ამოცანა 19. ვიპოვოთ წერტილის ტრაექტორია და ტრაექტორიაზე მოძრაობის კანონი (რეალური კოორდინატი ათელილია წერტილის საწყისი მდებარეობიდან), თუ მისი კოორდინატები იცვლება შემდეგი განტოლებების თანახმად:

$$x = 8 \sin^2 \pi t; \quad y = 5 + 4 \sin 2\pi t, \quad (1)$$

(x, y – სმ-ში, t – წმ-ში).

ამოხსნა. ტრაექტორიის განტოლების მოსაძებნად გამოვირიცხოთ t დრო (1) განტოლებებიდან. ამისათვის გარდავქმნათ ისინი:

$$x = 8 \cdot \frac{1 - \cos 2\pi t}{2} \Rightarrow \frac{x-4}{-4} = \cos 2\pi t;$$

$$y = 5 + 4 \sin 2\pi t \Rightarrow \frac{y-5}{4} = \sin 2\pi t.$$

ავიყვანოთ ეს განტოლებები კვადრატში და შევეკრიბოთ:

$$\left(\frac{x-4}{-4}\right)^2 + \left(\frac{y-5}{4}\right)^2 = 1,$$

ანუ

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 16. \quad (2)$$

(2) არის ტრაექტორიის განტოლება, რომელიც წარმოადგენს წრეწირს $O_1(4;5)$ (ცენტრით და $R=4$ სმ რადიუსით).

ვიპოვოთ $\vec{r}$ სიჩქარის გეგმილები Oxy კოორდინატთა ღერძებზე:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(8\sin^2 \pi t) = 16\pi \sin \pi t \cdot \cos \pi t = 8\pi \sin 2\pi t \quad \text{სმ/წმ};$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(5 + 4\sin 2\pi t) = 8\pi \cos 2\pi t \quad \text{სმ/წმ}.$$

მაშასადამე,

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(8\pi \sin 2\pi t)^2 + (8\pi \cos 2\pi t)^2} = 8\pi \quad \text{სმ/წმ}.$$

(11.46) ფორმულის თანახმად, გვექნება:

$$S = \int_0^t V dt = \int_0^t 8\pi dt = 8\pi t \Big|_0^t = 8\pi t \quad \text{სმ}. \quad (3)$$

(3) ასახავს წერტილის ტრაექტორიაზე მოძრაობის კანონს.

11.11. სავარჯიშო ამოცანები ტრაექტორიაზე წერტილის მოძრაობის განტოლებისა და გავლილი გზის განსაზღვრაზე, როცა მოცემულია $V = V(t)$ სიჩქარის ცვლილების კანონი ან წერტილის მოძრაობის განტოლებები კოორდინატული ფორმით

ამოცანა 11.3. განსაზღვრეთ ტრაექტორიაზე წერტილის მოძრაობის განტოლება, აგრეთვე დროის $t=5$ წმ მომენტისათვის რკალური S კოორდინატისა და გავლილი მანძილის მნიშვნელობები, თუ წერტილის V სიჩქარე მოცემულია განტოლებებით:

1. $V = 10 \quad \text{სმ/წმ};$
2. $V = \begin{cases} 2 \text{ სმ/წმ, როცა } 0 \leq t \leq 3 \\ (5-t) \text{ სმ/წმ, როცა } 3 \leq t \leq 5; \end{cases}$
3. $V = (2t+1) \quad \text{სმ/წმ};$
4. $V = (3-t) \quad \text{სმ/წმ};$
5. $V = \frac{\pi}{5} \sin \frac{8\pi t}{15} \quad \text{სმ/წმ};$
6. $V = \left(3 + \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi t}{5}\right) \text{ სმ/წმ};$
7. $V = \left(\pi + 2\pi \cos \frac{2\pi t}{5}\right) \text{ სმ/წმ};$
8. $V = (t^2 - 3t + 2) \text{ სმ/წმ}.$

პასუხები:

1. $S = 10t \text{ სმ}; \quad S|_{t=5 \text{ წმ}} = 50 \text{ სმ}; \quad l|_{t=5 \text{ წმ}} = 50 \text{ სმ};$
2. $S = 2t \text{ სმ} \quad (0 \leq t \leq 3); \quad S = (5t - 0,5t^2 - 4,5) \text{ სმ} \quad (3 \leq t \leq 5);$
 $S|_{t=5 \text{ წმ}} = 8 \text{ სმ}; \quad l|_{t=5 \text{ წმ}} = 8 \text{ სმ}.$

3. $S = (t^2 + t)$ სმ; $S|_{t=5 \text{ წმ}} = 30$ სმ; $l|_{t=5 \text{ წმ}} = 30$ სმ.
4. $S = \left(3t - \frac{1}{2}t^2\right)$ სმ; $S|_{t=5 \text{ წმ}} = 2,5$ სმ; $l|_{t=5 \text{ წმ}} = 6,5$ სმ.
5. $S = -\frac{3}{8}\cos\frac{8\pi t}{15}$ სმ; $S|_{t=5 \text{ წმ}} = \frac{3}{16}$ სმ; $l|_{t=5 \text{ წმ}} = \frac{15}{16}$ სმ.
6. $S = \left(3t + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi t}{5}\right)$ სმ; $S|_{t=5 \text{ წმ}} = 15$ სმ; $l|_{t=5 \text{ წმ}} = 15$ სმ.
7. $S = \left(\pi + 5\sin\frac{2\pi t}{5}\right)$ სმ; $S|_{t=5 \text{ წმ}} = 5\pi$ სმ; $l|_{t=5 \text{ წმ}} = \left(\frac{5\pi}{3} + 10\sqrt{3}\right)$ სმ;
8. $S = \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t\right)$ სმ; $S|_{t=5 \text{ წმ}} = \frac{85}{6}$ სმ; $l|_{t=5 \text{ წმ}} = 14,5$ სმ.

ამოცანა 11.4. წერტილის კოორდინატები იცვლება $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ განტოლებების თანახმად. იპოვეთ ტრაექტორიის განტოლება და ტრაექტორიაზე წერტილის მოძრაობის კანონი საწყისი მდებარეობიდან ათვლილი მრუდწირული (რკალური) კოორდინატით.

1. $x = 5t + 2$; $y = 12t + 3$. 2. $x = t - \sin t$; $y = 1 - \cos t$.
2. $x = 7\cos 2t$; $y = 7\sin 2t$. 4. $x = 1 - 3e^{2t}$; $y = 2 + 4e^{2t}$
5. $x = 2\sin^3 t$; $y = 2\cos^3 t$. 6. $x = \frac{1}{2}t^2$; $y = \frac{1}{3}t^3$
7. $x = 4t$; $y = 2(e^t + e^{-t})$. 8. $x = 8\sin^2 \pi t$; $y = 5 + 4\sin 2\pi t$.
9. $x = 20\cos^2 \pi t - 6$; $y = 21\sin^2 \pi t - 9$. 10. $x = 3t^2 + 1$; $y = 6t$.
11. $x = \cos^2 t$; $y = 4\sin t$. 12. $x = 3t^2 + 5$; $y = 4t^2 + 3$;
13. $x = 2\sin 2t$; $y = 2\cos 2t$.
14. $x = 12t - 5$; $y = 4t + 3$; $z = 3t + 1$.
15. $x = 12t^2 + 5$; $y = 3t^2 - 4$; $z = 20t^2 + 3$.

პასუხები:

1. $12x - 5y - 9 = 0$; $S = 13t$. 2. $x = \arccos(1 - y) - \sqrt{2y - y^2}$;
 $S = 8\sin^2 \frac{t}{4}$.

3. $x^2 + y^2 = 49$; $S = 14t$.
4. $4x + 3y - 10 = 0$; $S = 5(e^{2t} - 1)$.
5. $x^{2/3} + y^{2/3} = 5^{2/3}$; $S = 7,5 \sin^2 t$
6. $8x^3 - 9y^2 = 0$; $S = \frac{1}{3}[(1+t^2)^{3/2} - 1]$.
7. $y = 4ch \frac{x}{4}$; $S = 4 \sin t$
8. $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 16$; $S = 8\pi t$.
9. $21x + 20y - 114 = 0$; $S = 29 \sin^2 \pi t$.
10. $y' = 12(x-1)$; $S = 3\left[t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(1 + \sqrt{1+t^2}\right)\right]$.
11. $y^2 = 16(1-x)$; $S = \sin t \sqrt{4 + \sin^2 t} + 4 \ln\left(\sin t + \sqrt{4 + \sin^2 t}\right) - \ln 16$.
12. $4x - 3y - 11 = 0$; $S = 5t^2$.
13. $x^2 + y^2 = 4$; $S = 4t$.
14. $\frac{x+5}{12} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{3}$; $S = 13t$.
15. $\frac{x-5}{12} = \frac{y+4}{9} = \frac{z-3}{20}$; $S = 25t^2$

11.12. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები წერტილის ტრაექტორიის, სიჩქარისა და აჩქარების განსაზღვრაზე დეკარტისა და ბუნებრივ კოორდინატებში მოცემული მოძრაობის განტოლებების მიხედვით

ამოცანა 20. მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლებები:

$$x = 4 + 6t^2; \quad y = 3t^2 - 1 \quad (1)$$

(x, y – სანტიმეტრებში; t – წამებში).

განესაზღვროთ: 1. წერტილის ტრაექტორია; 2. დროის $t=2$ წმ მომენტისათვის წერტილის სიჩქარე და მიმართულება; 3. სიჩქარეთა პოდოგრაფი; 4. წერტილის აჩქარების სიდიდე და მიმართულება.

ამოხსნა. 1. მოძრაობის (1) განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ t პარამეტრი, მივიღებთ ტრაექტორიის განტოლებას, რომელზეც მოძრაობს წერტილი. გვექნება:

$$y = \frac{1}{2}x - 3. \quad (2)$$

(2) არის წერტილის ტრაექტორია, რომელიც წრფის ის ნაწილია, რომელიც აკმაყოფილებს $4 \leq x < \infty$ პირობას.

2. ვიპოვოთ სიჩქარის გეგმილები (11.14) ფორმულების გამოყენებით:

$$V_x = \dot{x} = 12t \text{ სმ/წმ}; \quad V_y = \dot{y} = 6t \text{ სმ/წმ},$$

საიდანაც

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{180t^2} = 6\sqrt{5}t \text{ სმ/წმ}.$$

მაშასადამე,

$$V|_{t=2} = 12\sqrt{5} \text{ სმ/წმ}.$$

სიჩქარის მიმართულება განისაზღვრება მიმართულების კოსინუსებით (იხ. (11.16) ფორმულები):

$$\cos(\vec{V}, \hat{x}) = \frac{V_x}{V} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \cos(\vec{V}, \hat{y}) = \frac{V_y}{V} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

მაშასადამე, $t = 2$ წმ მომენტისათვის $(\vec{V}, \hat{x}) = 26^\circ 45'$;
 $(\vec{V}, \hat{y}) = 63^\circ 15'$

3. ვიპოვოთ სიჩქარეთა პოლოგრავის განტოლება პარამეტრული ფორმით:

$$x = V_x = 12t; \quad y_1 = V_y = 6t.$$

გამოვირიცხოთ t . მივიღებთ:

$$y_1 = \frac{1}{2}x_1$$

სიჩქარეთა პოლოგრავი არის ამ წრფის ის ნაწილი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: $0 \leq x_1 \leq \infty$.

4. (11.27) ფორმულების საშუალებით ვიპოვოთ $\vec{W}$ აჩქარების გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე:

$$W_x = \dot{V}_x = 12 \text{ სმ/წმ}^2; \quad W_y = 6 \text{ სმ/წმ}^2,$$

აქედან

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = 6\sqrt{5} \text{ სმ/წმ}^2.$$

(11.29) ფორმულებით ვიპოვიოთ $\vec{W}$ აჩქარების მიმართულების კოსინუსებს:

$$\cos(\vec{W}, \wedge x) = \frac{W_x}{W} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \cos(\vec{W}, \wedge y) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{მაშასადამე, } (\vec{W}, \wedge x) = 26^\circ 45'; \quad \cos(\vec{W}, \wedge y) = 63^\circ 15'$$

ამოცანა 21. მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლებები:

$$x = t^2 + 2t; \quad y = \frac{4}{3}t^3 + 3t,$$

(x, y – სანტიმეტრებში; t – წამებში).

განვსაზღვროთ: 1. დროის $t = \frac{1}{2}$ წმ მომენტში წერტილის სიჩქარის მოდული და მიმართულება; 2. სიჩქარეთა პოდოგრაფი; 3. დროის $t = \frac{3}{16}$ წმ მომენტისათვის წერტილის აჩქარება და მიმართულება.

ამოხსნა. 1. ვიპოვოთ $\vec{V}$ სიჩქარის გეგმილები Oxy კოორდინატთა ღერძებზე (11.14) ფორმულების გამოყენებით:

$$V_x = \dot{x} = 2t + 2; \quad V_y = 4t^2 + 3.$$

დროის ნებისმიერი მომენტისათვის $\vec{V}$ სიჩქარის მოდულს გამოვოვლით (11.15) ფორმულის გამოყენებით:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(2t + 2)^2 + (4t^2 + 3)^2} \text{ სმ/წმ.}$$

მაშასადამე,

$$V|_{t=\frac{1}{2}} = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ სმ/წმ.}$$

სიჩქარის მიმართულებას გავიგებთ (11.16) ფორმულებით:

$$\cos(\vec{V}, \wedge x) = \frac{V_x}{V} = \frac{3}{5}; \quad \cos(\vec{V}, \wedge y) = \frac{4}{5}.$$

მაშასადამე, დროის $t = \frac{1}{2}$ წმ მომენტისათვის $\vec{V}$ სიჩქარე Ox და Oy ღერძებთან ადგენს შესაბამისად $37^\circ 43'$ და $52^\circ 17'$ -ის ტოლ კუთხეებს.

2. პარამეტრული ფორმით ვიპოვოთ სიჩქარეთა პოდოგრაფის განტოლებები შემდეგი ფორმულებით:

$$x_1 = V_x = \dot{x}; \quad y_1 = V_y = \dot{y}.$$

გვექნება

$$x_1 = 2t + 2; \quad y_1 = 4t^2 + 3.$$

ამ განტოლებებიდან t პარამეტრის გამორიცხვით მივიღებთ სიქარეთა პოდოგრაფის განტოლებას კოორდინატული ფორმით:

$$y_1 = (x_1 - 2)^2 + 3. \quad (1)$$

წერტილის პოდოგრაფის (1) განტოლება წარმოადგენს პარაბოლის ნაწილს, რომელიც აკმაყოფილებს $2 \leq x_1 < \infty$ პირობას.

3. (11.27) ფორმულების გამოყენებით ვიპოვოთ $\vec{W}$ აჩქარების გეგმილები კოორდინატა ღერძებზე:

$$W_x = \dot{V}_x = 2; \quad W_y = \dot{V}_y = 8t.$$

$\vec{W}$ აჩქარების სიდიდეს გამოვთვლით (11.28) ფორმულით:

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = \sqrt{4 + 64t^2} \text{ სმ/წმ}^2.$$

მაშასადამე,

$$W|_{t=\frac{3}{16}} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = 2,5 \text{ სმ/წმ}^2.$$

აჩქარების მიმართულება განისაზღვრება მიმართულების კოსინუსებით (11.29) ფორმულების გამოყენებით:

$$\cos(\vec{W}, \hat{x}) = \frac{W_x}{W} = \frac{2}{2,5} = \frac{4}{5}; \quad \cos(\vec{W}, \hat{y}) = \frac{W_y}{W} = \frac{3}{5}.$$

მაშასადამე, $t = \frac{3}{16}$ წმ მომენტისათვის $\vec{W}$ ვექტორის მიერ

Ox და Oy ღერძებთან შედგენილი კუთხეებია შესაბამისად $52^\circ 17'$ და $37^\circ 43'$.

ამოცანა 22. მოცემულია ქვემეხიდან გასროლილი ჭურვის მოძრაობის განტოლებები (ნახ. 11.19):

$$x = 250t; \quad y = 430t - 4,9t^2, \quad (1)$$

(x, y – მეტრებში; t – წამებში).

განვსაზღვროთ: 1. წერტილის ტრაექტორია; 2. ფრენის ხანგრძლივობა; 3. ფრენის L სიშორე; 4. წერტილის სიქარის მოდული და მიმართულება ჭურვის დაცემის მომენტში; 5. წერტილის აჩქარების სიდიდე და მიმართულება დაცემის მომენტში.

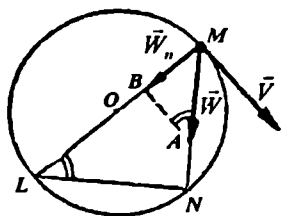
$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = 9,8 \text{ მ/წმ}^2.$$

$\vec{W}$ აჩქარების მიმართულებას განესაზღვრავთ მიმართულების კოსინუსებით:

$$\cos(\vec{W}, \hat{x}) = \frac{W_x}{W} = \frac{0}{9,8} = 0; \quad \cos(\vec{W}, \hat{y}) = \frac{W_y}{W} = -1,$$

ე.ი. $\vec{W}$ აჩქარება მიმართულია Oy ღერძის პარალელურად ვერტიკალურად ქვევით (ნახ. 11.20).

ამოცანა 23. R რადიუსის მქონე წრეწირზე მოძრაობს წერტილი, რომლის სიჩქარე დროის გარკვეულ მომენტში 90 სმ/წმ -ის ტოლია, ხოლო $\vec{W}$ აჩქარება მიმართულია $MN = \ell = 36$ სმ-ის ტოლი ქორდის გასწვრივ. ვიპოვოთ წერტილის აჩქარება ამ მომენტში (ნახ. 11.21).



ნახ. 11.21

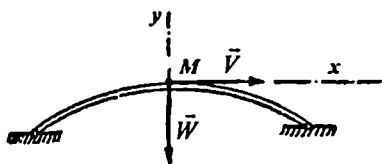
ამოხსნა. ეთქვათ, $\vec{W}$ და $\vec{W}_n$ ვექტორები მიმართულია MN ქორდისა და ML დიამეტრის გასწვრივ და $\vec{MA} = \vec{W}$, $\vec{MB} = \vec{W}_n$. მაშინ MAB და MLN მართკუთხა სამკუთხედების მსგავსებიდან გამომდინარე:

$$\frac{W}{W_n} = \frac{ML}{MN} = \frac{2R}{\ell},$$

აქედან

$$W = \frac{2R}{\ell} W_n = \frac{2R}{\ell} \cdot \frac{V^2}{R} = \frac{2V^2}{\ell} = \frac{2 \cdot 15^2}{36} = 12,5 \text{ სმ/წმ}^2.$$

ამოცანა 24. ავტომობილი მიდის ამოზნექილ ხიდზე მუდმივი $V = 108$ კმ/სთ სიჩქარით, ამასთანავე, ავტომობილის სიმძიმის ცენტრი აღწერს $y = -\frac{1}{32}x^2$ პარაბოლას (x და y გამოსახულია მეტრებით).



ნახ. 11.22

გამოსახულია მეტრებით).

ვიპოვოთ ავტომობილის სიმძიმის ცენტრის აჩქარება, როცა ის პარაბოლის წვეროში იმყოფება (ნახ. 11.22).

ამოხსნა. განესაზღვროთ საბუნი $\vec{W}$ აჩქარების გეგმილები

ბუნებრივ ღერძებზე. რადგან $V = \text{const}$, ამიტომ $W_r = \frac{dV}{dt} = 0$,

მაშასადამე, $W = W_n = \frac{V^2}{\rho}$. მაგრამ $V = 108 \text{ კმ/სთ} = 30 \text{ მ/წმ}$, ამიტომ

$W = \frac{900}{\rho}$. აქ უცნობია ხიდის სიმრუდის ρ რადიუსი. რადგან

მოცემულია ტრაექტორიის განტოლება, ამიტომ ρ სიმრუდის რადიუსის განსაზღვრისათვის ვისარგებლოთ (11.53) ფორმულით:

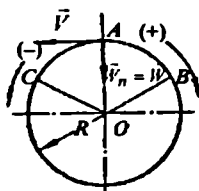
$$\rho = \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{|y''|}, \quad (1)$$

სადაც $y' = \frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{32} x^2 \right) = -\frac{1}{16} x$, ხოლო $y'' = \frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{16} x \right) = -\frac{1}{16}$.

პარაბოლას წვერო Oxy კოორდინატთა სათავეშია, ამიტომ $x = 0$, ცხადია, $y' = -\frac{x}{16} = 0$ და (1)-დან მივიღებთ:

$$\rho = 16 \text{ მ, ხოლო } W = \frac{900}{16} = 56.25 \text{ მ/წმ}^2.$$

ამოცანა 25. $R = 30$ სმ რადიუსის მქონე წრეწირის რკალზე წერტილი მოძრაობს $S = 30 \sin \pi t$ (t -წმ-ში, s -სმ-ში) კანონის თანახმად. დროის $t = 5$ წმ მომენტისათვის ვიპოვოთ წერტილის სიჩქარე, სრული აჩქარება და მიმართულებები.



ნახ. 11.23

ამოხსნა. ეთქვათ, მოძრავი წერტილი საწყის მომენტში იმყოფება A წერტილში (ნახ. 11.23). წრეწირზე წერტილის საათის ისრის ბრუნვის თანხედენილი მოძრაობა მივიღოთ დადებით მიმართულებად.

დროის n ებისმიერ მომენტისათვის სიჩქარე გამოითვლება (11.20) ფორმულით. მაშასადამე,

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} (30 \sin \pi t) = 30\pi \cdot \cos \pi t \text{ სმ/წმ.}$$

დროის $t = 5$ წმ მომენტისათვის

$$V = 30\pi \cos 5\pi = -30\pi \text{ სმ/წმ.}$$

ნიშანი მინუსი გვიჩვენებს, რომ დროის მოცემულ მომენტისათვის წერტილის სიჩქარე რკალის ზრდის საწინააღმდეგოდაა მიმართული.

სრული აჩქარების გამოსათვლელად საჭიროა ჯერ გამოვთვალოთ მსებ და ნორმალურ აჩქარებათა სიდიდე.

დროის ნებისმიერი მომენტისათვის მსები აჩქარება გამოითვლება (11.34) ფორმულით, ე.ი.

$$W_r = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} (30\pi \cos \pi t) = -30\pi^2 \sin \pi t \text{ სმ/წმ}^2.$$

დროს $t = 5$ წმ მომენტისათვის

$$W_r = -30\pi^2 \sin 5\pi = 0.$$

დროის ნებისმიერ მომენტისათვის ნორმალური აჩქარება გამოითვლება (11.36) ფორმულით:

$$W_n = \frac{V^2}{R} = \frac{(30\pi \cos \pi t)^2}{30} = 30\pi^2 \cos^2 \pi t \text{ სმ/წმ}^2.$$

დროის $t = 5$ წმ მომენტისათვის

$$W_n = 30\pi^2 \cos^2 5\pi = 30\pi^2 \text{ სმ/წმ}^2.$$

ნორმალური აჩქარება მიმართულია რადიუსის გასწვრივ ცენტრისაკენ.

სრული აჩქარება დროის ნებისმიერ მომენტში გამოითვლება (11.38) ფორმულით

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{W_r^2 + W_n^2} = \sqrt{(-30\pi^2 \sin \pi t)^2 + (30\pi^2 \cos^2 \pi t)^2} = \\ &= 30\pi^2 \sqrt{\sin^2 \pi t + \cos^4 \pi t} \end{aligned}$$

დროის $t = 5$ წმ მომენტში მსები აჩქარება $W_r = 0$, მაშასადამე, სრული აჩქარება სიდიდითა და მიმართულებით ნორმალური აჩქარების ტოლია, ე.ი.

$$W = W_n = 30\pi^2 \text{ სმ/წმ}^2.$$

ამოცანა 26. მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლებები:

$$x = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 1; \quad y = -2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 3, \quad (1)$$

(x, y – სანტიმეტრებში; t – წამებში).

განვსაზღვროთ: 1. წერტილის ტრაექტორია, წერტილის მდებარეობები ტრაექტორიაზე დროის საწყის და $t = 1$ წმ

მომენტებში; 2. დროის $t_1 = 1$ წმ მომენტში წერტილის სიჩქარე, აგრეთვე დროის ის მომენტები, რომლებშიც სიჩქარე პირველი 7 წმ-ის განმავლობაში ნულის ტოლი ხდება; 3. დროის $t = 1$ წმ მომენტში წერტილის სრული, მხები და ნორმალური აჩქარებები; 4. ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსები $t = 1$ წმ მომენტში და როცა სიჩქარე ნულის ტოლი ხდება.

ამოხსნა. იმისათვის, რომ (1) ტრაექტორიის პარამეტრული განტოლებებიდან მივიღოთ ტრაექტორიის განტოლება ჩვეულებრივი კოორდინატული ფორმით, გამოვირიცხოთ მოძრაობის (1) განტოლებებიდან t პარამეტრი.

გამოვიყენოთ შემდეგი ფორმულა:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \quad \text{ანუ} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right). \quad (2)$$

(1) და (2) განტოლებებიდან მივიღებთ

$$\frac{y-3}{-2} = 1 - 2 \cdot \frac{(x-1)^2}{4},$$

საიდანაც

$$y = (x-1)^2 + 1. \quad (3)$$

რადგან $|\sin \alpha| \leq 1$ და $|\cos \alpha| \leq 1$, ამიტომ $\left|\frac{x-1}{2}\right| \leq 1$ და

$\left|\frac{y-3}{-2}\right| \leq 1$. ამიტომ, (3) წერტილის ტრაექტორია არის პარაბოლის ის ნაწილი, რომლის მიმდინარე x და y კოორდინატები $-1 \leq x \leq 3$, $1 \leq y \leq 5$ უტოლობებს აკმაყოფილებს.

ახლა ვიპოვოთ დროის საწყის და დროის $t = 1$ წმ მომენტებში წერტილის მდებარეობა ტრაექტორიაზე:

$$x|_{t=0} = 1, \quad y|_{t=0} = 1, \quad x|_{t=1} = \sqrt{2} + 1, \quad y|_{t=1} = 3.$$

მაშასადამე, საწყის მომენტში წერტილი პარაბოლას (1; 1) წვეროში იმყოფება, ხოლო $t = 1$ წმ მომენტისათვის — $(\sqrt{2} + 1; 3)$ წერტილში.

2. წერტილის სიჩქარის განსასაზღვრავად ვპოულობთ სიჩქარის გეგმილებს Oxy კოორდინატთა ღერძებზე:

$$V_x = \dot{x} = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right); \quad V_y = \dot{y} = \pi \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right),$$

საიდანაც

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \pi \sqrt{\frac{1}{4} \cos^2\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)}.$$

როცა $t=0$, მაშინ $V_x = \frac{\pi}{2}$; $V_y = 0$; $V = \frac{\pi}{2}$. როცა $t=1$ წმ,

$$\text{მაშინ } V_x = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi \text{ სმ/წმ; } V_y = \pi \text{ სმ/წმ; } V = \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi \text{ სმ/წმ.}$$

ახლა განვსაზღვროთ დროის ის მომენტები, რომლებშიც მოძრაობის დაწყებიდან პირველი 7 წმ-ის განმავლობაში წერტილის სინქარე ნულის ტოლი ხდება:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 0 \Rightarrow t = 2 + 4k \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

დროის ამ მომენტებისათვის $V_x = V_y = V = 0$. მაშასადამე, $t_1 = 2$ წმ, $t_2 = 6$ წმ მომენტებში წერტილი ჯერ იმყოფება პარაბოლის (3; 5) მარჯვენა უმაღლეს და შემდეგ (-1; 5) მარცხენა უმაღლეს წერტილებში, ე.ი. ამ ადგილებში წერტილის სინქარე იცვლის მიმართულებას და ასრულებს რხევით მოძრაობას $-1 \leq x \leq 3$ საზღვრებში.

ანალოგიურად, წერტილის აჩქარების გეგმილება:

$$W_x = \dot{V}_x = \ddot{x} = -\frac{\pi^2}{8} \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right); \quad W_y = \dot{V}_y = \ddot{y} = \frac{\pi^2}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right),$$

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = \frac{\pi^2}{8} \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 16 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)}.$$

როცა $t=1$ წმ, მაშინ

$$W_x = -\frac{\pi^2 \sqrt{2}}{16} \text{ სმ/წმ}^2; \quad W_y = 0; \quad W = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{16} \text{ სმ/წმ}^2.$$

მხებ აჩქარებას, როცა $t=1$ წმ, ვპოულობთ (11.40) ფორმულის გამოყენებით:

$$W_r = \frac{V_x W_x + V_y W_y}{V} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi \cdot \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{16}}{\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi} = -\frac{\sqrt{2}\pi^2}{48} \text{ სმ/წმ}^2.$$

ამგვარად, მხები აჩქარების მოდული

$$W_r = \frac{\sqrt{2}\pi^2}{48} \text{ სმ/წმ}^2.$$

გამოსახულების წინ ნიშანი „-“ გვიჩვენებს, რომ წერტილი მოძრაობს შენელებულად, რის შედეგადაც $\bar{W}_r$ და $\bar{V}$ ვექტორებს აქვს ურთიერთსაპირისპირო მიმართულება.

დროის მოცემულ მომენტისათვის ნორმალური აჩქარება გამოვთვალოთ (11.42) ფორმულით:

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_r^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}\right)^2 - \left(\frac{\pi^2\sqrt{2}}{48}\right)^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ სმ/წმ}^2.$$

ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი იმ წერტილში, სადაც $t=1$ წმ მომენტისათვის წერტილი იმყოფება გამოითვლება (11.43) ფორმულით:

$$\rho = \frac{V^2}{W_n} = \frac{\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi\right)^2}{\frac{\pi^2}{16}} = 18 \text{ სმ}.$$

ახლა გამოვთვალოთ ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი ტრაექტორიის იმ წერტილებში, სადაც სიჩქარე $V=0$ ანუ $t_1=2$ წმ და $t_2=6$ წმ მომენტებისათვის. ამ შემთხვევაში სიმრუდის რადიუსის (11.43) ფორმულის გამოთვლისას მივიღებთ $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობას, ამიტომ ამ შემთხვევაში სიმრუდის რადიუსის გამოსათვლელად უმჯობესია ვისარგებლოთ (11.52) ფორმულით:

$$y = \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{|y''|}. \quad (3)$$

აქ y განსაზღვრულია (3) ტოლობით, ამიტომ

$$y' = \frac{d}{dx}((x-1)^2 + 1) = 2(x-1), \quad y'' = 2.$$

(1) ტოლობიდან, როცა $t=2$, მაშინ $x=3$, ხოლო როცა $t=6$, მაშინ $x=-1$. მაშასადამე,

$$\rho|_{t=2\text{წმ}} = \frac{(1+16)^{3/2}}{2} \approx 35 \text{ სმ}; \quad \rho|_{t=6\text{წმ}} = \frac{(1+16)^{3/2}}{2} \approx 35 \text{ სმ}.$$

ამოცანა 27. *Oxy* სიბრტყეში წერტილი მოძრაობს *Ox* ღერძის პარალელური მუდმივი $\vec{W}$ აჩქარებით. განვსაზღვროთ ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი იმ წერტილში, რომელშიც იმყოფება $t=2$ წმ მომენტისათვის, თუ საწყისი სიჩქარეა $\vec{V}_0$, რომელიც *Oy* ღერძთან $\alpha=30^\circ$ -იანი კუთხეს ადგენს, ამასთან $W=4$ მ/წმ და $V_0=8$ მ/წმ.

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად, საწყის $t=0$ მომენტში $V_x = V_0 \sin \alpha$ და $V_y = V_0 \cos \alpha$. ამასთანავე $\vec{W}$ აჩქარების სიდიდე და მიმართულება მუდმივია. ამიტომ დროის ნებისმიერი t მომენტისათვის გვექნება ტოლობები:

$$\ddot{x} = W_x = 4; \quad \ddot{y} = W_y = 0.$$

ამ ტოლობათა ინტეგრებით მივიღებთ:

$$V_x = \dot{x} = 4t + c_1; \quad V_y = \dot{y} = c_2.$$

როცა $t=0$, მაშინ:

$$c_1 = V_0 \sin \alpha = 4; \quad c_2 = V_0 \cos \alpha = 4\sqrt{3}.$$

მაშასადამე,

$$V_x = 4t + 4 \text{ სმ/წმ}; \quad V_y = 4\sqrt{3} \text{ სმ/წმ},$$

ახლა ვიპოვოთ სიჩქარე:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 4\sqrt{t^2 + 2t + 4}$$

და მხები აჩქარება

$$W_r = \frac{dV}{dt} = \frac{2(t+1)}{\sqrt{t^2 + 2t + 4}}.$$

დროის $t=2$ წმ მომენტისათვის მივიღებთ:

$$V|_{t=2} = 8\sqrt{3} \text{ სმ/წმ}; \quad W_r|_{t=2} = \sqrt{3} \text{ სმ/წმ}^2.$$

ამოცანის პირობის თანახმად, $W=4$ სმ/წმ², მაშინ $t=2$ წმ მომენტისათვის გვექნება:

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_r^2} = \sqrt{16 - 3} = 2\sqrt{3} \text{ სმ/წმ}^2.$$

ამის შემდეგ ვიპოვოთ ტრაექტორიის სიმრუდის ρ რადიუსს დროის $t=2$ წმ მომენტისათვის:

$$\rho|_{t=2} = \frac{V^2}{W_n} = \frac{(8\sqrt{3})^2}{2\sqrt{3}} = 32\sqrt{3} \text{ მ}.$$

11.13. სავარჯიშო ამოცანები წერტილის ტრაექტორიის, სიჩქარისა და აჩქარების განსაზღვრაზე დეკარტის კოორდინატებში მოცემული მოძრაობის განტოლებების მიხედვით

ამოცანა 11.5. იპოვეთ: 1. წერტილის ტრაექტორია, დახაზეთ ის, აღნიშნეთ ტრაექტორიაზე წერტილის საწყისი მდებარეობა და მოძრაობის მიმართულება; 2. დროის $t=1$ წმ მომენტისათვის სიჩქარე და აჩქარება, თუ მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლებები (x, y – სანტიმეტრებში; t – წამებში):

1. $x = 4t$; $y = 3t$
2. $x = 3t + 2$; $y = 4t + 1$.
3. $x = 4t + 3$; $y = 2t - 5$.
4. $x = 2t + 3$; $y = t^2$
5. $x = t + 2$; $y = 3t^2 + 4t + 5$.
6. $x = 3t^2 - t + 1$; $y = 5t^2 - \frac{5}{3}t - 2$.
7. $x = 5t^2 - \frac{5}{3}t - 3$; $y = 3t^2 - t + 3$.
8. $x = 3 - 3t^2 + t$; $y = 4 - 5t^2 + \frac{5}{3}t$.
9. $x = 2t$; $y = \frac{1}{t + 0,5}$.
10. $x = -2t - 2$; $y = -\frac{2}{t + 1}$.

პასუხები:

1. $3x - 4y = 0$ ($0 \leq x < \infty$); $M_0(0;0)$; $V = 5$ სმ/წმ; $W = 0$.
2. $4x - 3y = 0$ ($2 \leq x < \infty$); $M_0(2;1)$; $V = 5$ სმ/წმ; $W = 0$.
3. $x - 2y - 13 = 0$ ($3 \leq x < \infty$); $M_0(3;-5)$; $V = 2\sqrt{5}$ სმ/წმ; $W = 0$.
4. $y = \frac{1}{4}(x-3)^2$ ($3 \leq x < \infty$); $M_0(3;0)$; $V = 2\sqrt{2}$ სმ/წმ; $W = 2$ სმ/წმ².
5. $y = 3x^2 - 8x + 9$ ($2 \leq x < \infty$); $M_0(2;5)$; $V = 10,05$ სმ/წმ; $W = 6$ სმ/წმ².
6. $5x - 3y - 11 = 0$ ($\frac{11}{12} \leq x < \infty$); $M_0(1;-2)$; $V = 9,7$ სმ/წმ; $W = 11,7$ სმ/წმ².
7. $3x - 5y + 18 = 0$ ($-3\frac{5}{36} \leq x < \infty$); $M_0(-3;3)$; $V = 9,7$ სმ/წმ; $W = 11,7$ სმ/წმ².

$$8. 5x - 3y - 3 = 0 \quad \left(-\infty < x \leq 3\frac{1}{12} \right); M_0(3;4); V = 9,7 \text{ სმ/წმ};$$

$$W = 11,7 \text{ სმ/წმ}^2.$$

$$9. y = \frac{2}{x+1} \quad (0 \leq x < \infty); M_0(0;2); V = 2,05 \text{ სმ/წმ}; W = 1,73 \text{ სმ/წმ}^2.$$

$$10. y = \frac{4}{x} \quad (-\infty < x \leq -2); M_0(-2;-2); V = 2,06 \text{ სმ/წმ}; W = 0,5 \text{ სმ/წმ}^2.$$

ამოცანა 11.6. იპოვეთ: 1. წერტილის ტრაექტორია, ტრაექტორიაზე მისი საწყისი მდებარეობა; 2. წერტილის სინქარისა და აჩქარების მოდულები დროის $t = \frac{\pi}{2}$ წმ მომენტისათვის, თუ წერტილის მოძრაობა მოცემულია განტოლებებით (x, y – სანტიმეტრებში; t – წამებში):

$$1. x = \sin t; y = \cos t.$$

$$2. x = 2 \sin 2t; y = 2 \cos 2t$$

$$3. x = \sin^2 t; y = \cos^2 t.$$

$$4. x = 2 \sin^2 2t; y = 3 \cos^2 2t.$$

$$5. x = 2 - 2 \sin t; y = 3 - 2 \cos t; \quad 6. x = 2 \cos^2 t + 3; y = 3 - 4 \sin^2 t.$$

პასუხები:

$$1. x^2 + y^2 = 1 \quad (-1 \leq x \leq 1); M_0(0;1); V = 1 \text{ სმ/წმ}; W = 1 \text{ სმ/წმ}^2.$$

$$2. x^2 + y^2 = 4 \quad (-2 \leq x \leq 2); M_0(0;2); V = 4 \text{ სმ/წმ}; W = 8 \text{ სმ/წმ}^2.$$

$$3. x + y = 0 \quad (0 \leq x \leq 1); M_0(0;1); V = 0 \text{ სმ/წმ}; W = 2\sqrt{2} \text{ სმ/წმ}^2.$$

$$4. 3x + 2y - 6 = 0 \quad (0 \leq x \leq 2); M_0(0;3); V = 0; W = 14,4 \text{ სმ/წმ}^2.$$

$$5. (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4 \quad (0 \leq x \leq 4); M_0(2;1); V = 2 \text{ სმ/წმ}; W = 2 \text{ სმ/წმ}^2.$$

$$6. 2x - y - 7 = 0 \quad (3 \leq x \leq 5); M_0(5;3); V = 0; W = 4\sqrt{2} \text{ სმ/წმ}^2.$$

ამოცანა 11.7. მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლებები:

$$x = 2 + t^3; y = -3t^3 + 4$$

(x, y – სანტიმეტრებში; t – წამებში).

განსაზღვრეთ: 1. წერტილის ტრაექტორია; 2. წერტილის სინქარე; 3. სინქარეთა პოლოგრავი; 4. წერტილის აჩქარება.

$$\text{პასუხი: } 1. y = -3x + 10 \quad (2 \leq x < \infty); 2. V = 3\sqrt{10} \cdot t^2 \text{ სმ/წმ};$$

3. $y_1 = -3x_1$ ($0 \leq x_1 < \infty$); 4. $W = 6\sqrt{10} \cdot t$ სმ/წმ².

ამოცანა 11.8. მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლებები:

$$x = 3t; \quad y = \frac{2}{t}$$

(x, y – სანტიმეტრებში; t – წამებში).

განსაზღვრეთ: 1. წერტილის ტრაექტორია; 2. დროის ის მომენტი, როცა წერტილის სიჩქარე $V = 5$ სმ/წმ; 3. წერტილის აჩქარება დროის $t = 1$ წმ მომენტისათვის.

პასუხი: 1. $y = \frac{6}{x}$ ($0 < x < \infty$). 2. $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ წმ; 3. $W = \frac{4}{t^3} = 4$ სმ/წმ².

ამოცანა 11.9. მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლებები:

$$x = 2t; \quad y = e^{-4t} \sin 4t.$$

განსაზღვრეთ: 1. წერტილის ტრაექტორია; 2. დროის ის მომენტი, როცა წერტილის $\vec{V}$ სიჩქარე Ox ღერძის პარალელურია; 3. დროის ის მომენტი, როცა წერტილი გადაკვეთს Ox ღერძს.

პასუხი: 1. $y = e^{-2x} \sin 2x$ ($0 \leq x < \infty$); 2. $t = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4}$

($k = 0, 1, 2, \dots$); 3. $t = \frac{n\pi}{4}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

ამოცანა 11.10. წერტილი მოძრაობს ევრტიკალურ სიბრტყეში შემდეგი განტოლებების თანახმად:

$$x = t; \quad y = \sin t^2$$

(x, y – სანტიმეტრებში; t – წამებში).

განსაზღვრეთ: 1. დროის უახლოეს მომენტში წერტილის სიჩქარე, როცა ის გადაკვეთს Ox ღერძს; 2. წერტილის აჩქარების მნიშვნელობა დროის ამ მომენტისათვის; 3. წერტილის სიჩქარე, როცა ის ტრაექტორიის ყველაზე მაღალ წერტილს მიაღწევს.

პასუხი: 1. $V = 3,68$ სმ/წმ; 2. $W = 2$ სმ/წმ²; 3. $V = 1$ სმ/წმ.

ამოცანა 11.11. მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლებები:

$$x = 3t; \quad y = 4t - 3t^2$$

(x, y – სანტიმეტრებში; t – წამებში).

განსაზღვრეთ: 1. წერტილის ტრაექტორია; 2. დროის ის მომენტები, როცა წერტილი იმყოფება Ox ღერძზე; 3. დროის ის მომენტი, როცა წერტილის სიჩქარეს აქვს მინიმალური მნიშვნელობა; 4. დროის $t = \frac{1}{6}$ წმ მომენტისათვის α კუთხე $\vec{V}$ სიჩქარისა და $\vec{W}$ აჩქარების ვექტორებს შორის.

პასუხი: 1. $y = \frac{4x - x^2}{3}$ ($0 \leq x < \infty$); 2. $t_1 = 0$; $t_2 = \frac{4}{3}$ წმ;

3. $t = \frac{2}{3}$ წმ; 4. $\alpha = (\vec{V}, \vec{W}) = 135^\circ$.

ამოცანა 11.12. მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლებები:

$$x = \frac{1}{2}t^2; \quad y = \frac{1}{3}t^3$$

(x, y – სანტიმეტრებში; t – წამებში).

განსაზღვრეთ დროის ის მომენტები, როცა $\vec{V}$ სიჩქარისა და $\vec{W}$ აჩქარების ვექტორებს შორის α კუთხის კოსინუსი $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

პასუხი: $t_1 = \frac{1}{2}$ წმ; $t_2 = 1$ წმ.

ამოცანა 11.13. მოცემულია M_1 და M_2 წერტილების მოძრაობის განტოლებები:

$$1. x = t; \quad y = 2t^2; \quad 2. x = t^2; \quad y = 2t^4$$

(x, y – სანტიმეტრებში; t – წამებში).

განსაზღვრეთ: 1. წერტილთა ტრაექტორიები; 2. დროის $t = T$ მომენტი, როცა ერთი წერტილი დაეწევა მეორეს; 3. დროის ამ

მომენტისათვის წერტილთა სიჩქარეები; 4. დროის T მომენტისათვის წერტილების აჩქარება.

პასუხი: 1. $y = 2x^2$ ($0 \leq x < \infty$); $y = 2x^2$ ($0 \leq x \leq \infty$).

2. $T = 1$ წმ; 3. $V_1 = 4,12$ სმ/წმ; $V_2 = 8,25$ სმ/წმ.

4. $W_1 = 4$ სმ/წმ²; $W_2 = 24,1$ სმ/წმ².

ამოცანა 11.14. მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლებები:

$$x = t^2; y = t^3$$

(x, y – სანტიმეტრებში; t – წამებში).

განსაზღვრეთ $(1;1)$ წერტილში ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი.

პასუხი: $\rho = 7,81$ სმ.

ამოცანა 11.15. მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლებები:

$$x = 4t - 4 \sin 2t; y = 2 - 4 \cos 2t$$

(x, y – სანტიმეტრებში; t – წამებში).

განსაზღვრეთ წერტილის ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი დროის იმ მომენტებისათვის, როდესაც ის Ox ღერძს გადაკვეთს.

პასუხი: $\rho = 2\sqrt{3}$ სმ.

ამოცანა 11.16. წერტილის მოძრაობის განტოლებებია:

$$x = 4 \cos^3 t; y = 4 \sin^3 t.$$

განსაზღვრეთ დროის $t = \frac{\pi}{4}$ წმ მომენტისათვის ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი.

პასუხი: $\rho = 6$ სმ.

ამოცანა 11.17. წერტილის მოძრაობის განტოლებებია:

$$x = t; y = \sin t^2$$

(x, y – სანტიმეტრებში; t – წამებში).

განსაზღვრეთ წერტილის ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი დროის იმ უახლოესი მომენტისათვის, როცა ის გადაკვეთს Ox ღერძს.

პასუხი: $\rho = 25,1$ სმ.

ამოცანა 11.18. წერტილის მოძრაობის განტოლებებია:

$$x = t; \quad y = t^2$$

(x, y – მეტრებში; t – წამებში).

განსაზღვრეთ წერტილის სიჩქარე და აჩქარება, აგრეთვე ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი იმ წერტილში, სადაც ის მიაღწევს თავის სიდიდის მინიმალურ მნიშვნელობას.

პასუხი: $V = 1 \text{ მ/წმ}$; $W = 2 \text{ მ/წმ}$; $\rho = 0,5 \text{ მ}$.

ამოცანა 11.19. წერტილი წრფეზე მოძრაობს შემდეგი განტოლების თანახმად:

$$x = 15 \sin\left(\frac{\pi}{10}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

(x, y – სანტიმეტრებში; t – წამებში).

განსაზღვრეთ წერტილის მაქსიმალური სიჩქარე და აჩქარება და დროის ის მომენტები, როცა წერტილი მათ მიაღწევს.

პასუხი: $V_{\max} = 1,5\pi \text{ სმ/წმ}$, როცა $t = \frac{20}{3} \text{ წმ}$; $W_{\max} = 0,15\pi^2 \text{ სმ/წმ}^2$,

როცა $t = \frac{5}{3} \text{ წმ}$.

ამოცანა 11.20. წერტილის მოძრაობის განტოლებებია:

$$x = 10t^2; \quad y = 20t^2; \quad z = 20t^2$$

(x, y, z – სანტიმეტრებში; t – წამებში).

განსაზღვრეთ წერტილის ტრაექტორია, სიჩქარე და აჩქარება დროის $t = \frac{1}{2} \text{ წმ}$ მომენტისათვის, აგრეთვე ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი ამავე მომენტისათვის.

პასუხი: $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$; $V = 30 \text{ სმ/წმ}$; $W = 60 \text{ სმ/წმ}^2$; $\rho = \infty$.

ამოცანა 11.21. მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლებები:

$$x = 8 \cos 2\pi t; \quad y = 8 \sin 2\pi t$$

(x, y – სანტიმეტრებში; t – წამებში).

განსაზღვრეთ ტრაექტორიის განტოლება, წერტილის სიჩქარისა და აჩქარების მოდულები და მიმართულებები.

$$\text{პასუხი: } x = -\frac{1}{4}y^2 + 8; \quad V = 8\pi \text{ სმ/წმ}; \quad (\vec{V}, \wedge x) = 90^\circ; \quad (\vec{V}, \wedge y) = 0^\circ;$$

$$W = 32\pi^2 \text{ სმ/წმ}^2; \quad (\vec{V}, \wedge x) = 180^\circ; \quad (\vec{V}, \wedge y) = 90^\circ.$$

ამოცანა 11.22. მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლებები:

$$x = 6 \sin \frac{\pi}{2} t; \quad y = 8 \cos \frac{\pi}{2} t$$

(x, y – სანტიმეტრებში; t – წამებში).

დროის $t = 5$ წმ მომენტისათვის განსაზღვრეთ ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი.

$$\text{პასუხი: } \rho = 10 \frac{2}{3} \text{ სმ.}$$

ამოცანა 11.23. მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლებები:

$$x = 3e^{2t}; \quad y = 4e^{-2t}$$

(x, y – სანტიმეტრებში; t – წამებში).

განსაზღვრეთ წერტილის ტრაექტორია, წერტილის საწყისი სიჩქარე და აჩქარება, აგრეთვე საწყის მდებარეობაში ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი და სიმრუდის C ცენტრის კოორდინატები.

$$\text{პასუხი: } y = \frac{12}{x} \quad (3 \leq x < \infty); \quad V_0 = 10 \text{ სმ/წმ}; \quad W = 20 \text{ სმ/წმ};$$

$$\rho = 5,1 \text{ სმ}; \quad x_c = 4 \frac{1}{6} \text{ სმ}; \quad y_c = 7 \frac{1}{8} \text{ სმ.}$$

ამოცანა 11.24. ქვემეხიდან ჭურვი V_0 სიჩქარით გაისროლეს ჰორიზონტისადმი α კუთხით დახრილი მიმართულებით. თავისუფალი ვარდნის აჩქარებაა g . ჩავთვალოთ, რომ ჭურვის საწყისი მდებარეობა ემთხვევა კოორდინატთა O სათავეს. Ox ღერძი ჰორიზონტალურადაა მიმართული მოძრაობის მხარეს, ხოლო Oy ღერძი – ვერტიკალურად ზევით. განსაზღვრეთ: 1. ჭურვის მოძრაობის განტოლებები; 2. მისი ტრაექტორიის განტოლება; 3. ჭურვის ფრენის მაქსიმალური h სიმაღლე; 4. ფრენის l

სიშორე; 5. ქვემეხის ლულის დახრის ის β კუთხე, რომლის დროსაც ფრენის სიშორე მაქსიმალურია.

პასუხი: 1. $x = V_0 t \cos \alpha$; $y = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 t \sin \alpha$;

2. $y = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x + \tan \alpha \cdot x$; 3. $h = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$; 4. $l = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$;

5. $\beta = 45^\circ$

ამოცანა 11.25. მოცემული მოძრაობის განტოლებების მიხედვით დაადგინეთ M წერტილის ტრაექტორია და დროის $t = t_1$ წმ მომენტისათვის განსაზღვრეთ წერტილის მდებარეობა ტრაექტორიაზე, მისი სიჩქარე, სრული, მხეები და ნორმალური აჩქარებები, აგრეთვე ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი შესაბამის წერტილში.

ამოხსნისათვის საჭირო მონაცემები მოცემულია 11.1-ელ ცხრილში.

ცხრილი 11.1

№	მოძრაობის განტოლებები		t, წმ
	$x = f_1(t)$ სმ	$y = f_2(t)$ სმ	
1	2	3	4
1	$x = t^2 + 2t + 1$	$y = 2t^2 + 4t - 3$	$\frac{1}{2}$
2	$x = 2 - 3t + 6t^2$	$y = 3 - \frac{3}{2}t + 3t^2$	1
3	$x = 3 + 3t^2 - t$	$y = 4 + 5t^2 - \frac{5}{3}t$	1
4	$x = 5t^2 + \frac{5}{3}t - 3$	$y = 3t^2 + t + 3$	1
5	$x = t^2$	$y = 5 - 2t^2$	1
6	$x = t^3 + 2$	$y = 3 - t^3$	1
7	$x = 3t$	$y = 6t - 5t^2$	1
8	$x = t^2$	$y = \frac{1}{3}t^3$	1
9	$x = \frac{1}{2}t^2$	$y = \frac{1}{3}t^3$	1

№	მოძრაობის განტოლებები		t, წმ
	$x = f_1(t)$ სმ	$y = f_2(t)$ სმ	
1	2	3	4
10	$x = 3t$	$y = 4t - 3t^2$	1
11	$x = 2t + 3$	$y = t^2$	1
12	$x = t + 2$	$y = 3t^2 + 4t + 5$	1
13	$x = 3t$	$y = 3t^2 + 1$	$\frac{1}{3}$
14	$x = 2t + 1$	$y = 4t^2 + 2t - 2$	$\frac{1}{2}$
15	$x = 2t + 3$	$y = 4t^2 - 4t$	$\frac{1}{2}$
16	$x = t^2 - t$	$y = 2 - (t^2 - t)^2$	2
17	$x = -5t$	$y = -10t^2 + 3$	1
18	$x = 3t$	$y = 8t - 6t^2$	1
19	$x = 3t + 6$	$y = -\frac{3}{t+2}$	1
20	$x = 4t + 4$	$y = -\frac{4}{t+1}$	1
21	$x = 4t$	$y = \frac{1}{t+2}$	1
22	$x = 1 - 3e^{2t}$	$y = 2 + 4e^{2t}$	0
23	$x = 3e^{2t}$	$y = 2e^{-2t}$	0
24	$x = 2e^{2t} - 3e^{-2t}$	$y = 3e^{-2t} - 2e^{2t}$	0
25	$x = -2e^{3t}$	$y = 3e^{-3t}$	0
26	$x = 4\sin^2 \frac{\pi}{3}t + 2$	$y = 4\sin^2 \frac{\pi}{3}t$	1
27	$x = 8\cos^2 \frac{\pi}{6}t + 2$	$y = -8\sin^2 \frac{\pi}{6}t - 7$	1
28	$x = 7\cos 2t$	$y = 7\sin 2t$	$\frac{\pi}{6}$
29	$x = 1 - 2\cos \frac{\pi}{4}t$	$y = 3 + 2\sin \frac{\pi}{4}t$	1

№	მოდულის განტოლებები		t, წმ
	$x = f_1(t)$ სმ	$y = f_2(t)$ სმ	
1	2	3	4
30	$x = 5 - 2 \cos \frac{\pi}{3} t$	$y = -2 + 3 \sin \frac{\pi}{3} t$	1
31	$x = 6 \sin \frac{\pi}{6} t^2 - 2$	$y = 6 \cos \frac{\pi}{6} t^2 + 3$	1
32	$x = -3 - 9 \sin \frac{\pi}{6} t^2$	$y = -9 \cos \frac{\pi}{6} t^2 + 5$	1
33	$x = 2 \cos \frac{\pi}{3} t^2 - 2$	$y = -2 \sin \frac{\pi}{3} t^2 + 3$	1
34	$x = 8 \sin^2 \pi t$	$y = 5 + 4 \sin 2\pi t$	$\frac{1}{6}$
35	$x = 2 \sin \frac{\pi}{3} t^2 - 2$	$y = -2 \sin \frac{\pi}{3} t^2 + 3$	1
36	$x = 1 + 3 \cos \frac{\pi}{3} t^2$	$y = 3 \sin \frac{\pi}{3} t^2 + 3$	1
37	$x = 7 \sin^2 \frac{\pi}{6} t - 5$	$y = -7 \cos^2 \frac{\pi}{6} t$	1
38	$x = 3 - 6 \sin \frac{\pi}{6} t$	$y = 2 - 3 \cos \frac{\pi}{3} t$	1
39	$x = 2 - 3 \cos \frac{\pi}{3} t$	$y = 3 \sin \frac{\pi}{6} t - 2$	1
40	$x = 2 \sin^2 \frac{\pi}{4} t - 2$	$y = 2 \cos \frac{\pi}{4} t + 3$	1
41	$x = \sin \frac{\pi}{2} t - 2$	$y = 2 \cos^2 \frac{\pi}{4} t + 1$	1
42	$x = 3 - 2 \sin \frac{\pi}{8} t$	$y = 2 \cos \frac{\pi}{4} t - 1$	2
43	$x = 4 \cos \frac{\pi}{3} t - 3$	$y = 2 \sin \frac{\pi}{6} t + 1$	1
44	$x = -2 \cos \frac{\pi}{4} t + 3$	$y = 2 \sin \frac{\pi}{8} t - 1$	1
45	$x = 12 \cos \frac{\pi}{6} t$	$y = 8 \cos \frac{\pi}{3} t + 6$	1

№	მოძრაობის განტოლებები		t, წმ
	$x = f_1(t)$ სმ	$y = f_2(t)$ სმ	
1	2	3	4
46	$x = 2 \cos \frac{\pi}{4} t$	$y = 2 \cos \frac{\pi}{2} t - 4$	1
47	$x = 3 - 4 \cos \pi t$	$y = 2 + 3 \cos 2\pi t$	1
48	$x = 2 \sin \frac{\pi}{4} t$	$y = 3 - \cos \frac{\pi}{2} t$	1
49	$x = 5 \sin^2 \frac{\pi}{6} t$	$y = -5 \cos^2 \frac{\pi}{6} t - 5$	1
50	$x = 7 \sin \frac{\pi}{6} t^2 + 3$	$y = 2 - 7 \sin \frac{\pi}{6} t^2$	1

11.14. წერტილის მოძრაობის განტოლებები ცილინდრული, სფერული და პოლარული კოორდინატებით

ცილინდრულ კოორდინატებით წერტილის მდებარეობას განსაზღვრავს ρ რადიუსი, φ კუთხე (აზიმუტი) და z აპლიკატი (ნახ. 11.24). მაშასადამე, თუ ცნობილია ρ , φ და z , როგორც დროის ფუნქციები, მაშინ მოცემული იქნება მოძრაობის განტოლებები:

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t), \quad (11.55)$$

სადაც ρ -ს, φ -ს და z -ს M წერტილის ცილინდრული კოორდინატები ეწოდება. (11.55) არის წერტილის მოძრაობის განტოლებები ცილინდრული კოორდინატებით.

სფერული კოორდინატებით წერტილის მდებარეობას განსაზღვრავს r პოლარული რადიუსი, φ კუთხე (სიგრძედი) და θ კუთხე (პოლუსური კუთხე) (ნახ. 11.25). მოძრაობა მოცემული იქნება, თუ

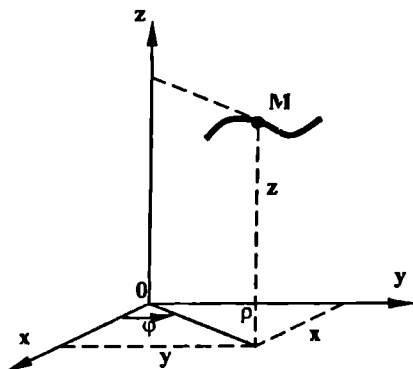
$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad \theta = \theta(t) \quad (11.56)$$

დროის ცნობილი ფუნქციებია.

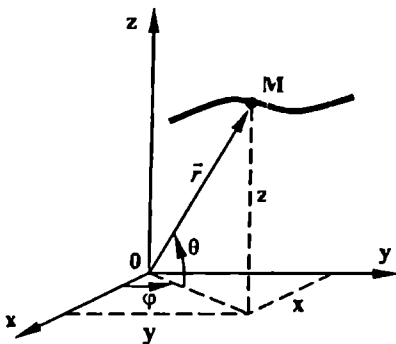
ცილინდრული და სფერული კოორდინატებისა და დეკარტის კოორდინატების ურთიერთკავშირი შესაბამისად გამოისახება ფორმულებით (ნახ. 11.24 და 11.25):

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z; \quad (11.56)$$

$$x = r \cos \theta \cos \varphi, \quad y = r \cos \theta \sin \varphi, \quad z = r \sin \theta. \quad (11.57)$$



ნახ. 11.24



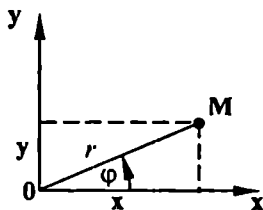
ნახ. 11.25

თუ წერტილი სიბრტყეზე მოძრაობს, მაშინ ზოგჯერ მიზანშეწონილია ვისარგებლოთ პოლარული კოორდინატებით (ნახ. 11.25). ამ შემთხვევაში მოძრაობის განტოლებები იქნება:

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t). \quad (11.58)$$

დეკარტისა და პოლარულ კოორდინატებს შორის კავშირი გამოისახება ასე:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (11.59)$$



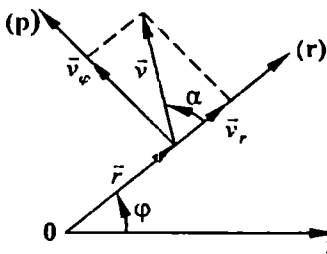
ნახ. 11.26

11.15. წერტილის სიჩქარის გამოსახვა პოლარული კოორდინატებით

წერტილის სიჩქარე რადიალური და განივი სიჩქარეების გეომეტრიული ჯამის ტოლია (ნახ. 11.27):

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_\varphi, \quad (11.60)$$

სადაც $\vec{V}_r$ რადიალური ანუ გრძივი სიჩქარეა; $\vec{V}_\theta$ — ტრანსვერსალური ანუ განივი სიჩქარე.



ნახ. 11.27

კუთხის ტანგენსი

რადიალურ და განივ სიჩქარეთა სიდიდე შესაბამისად არის:

$$V_r = \frac{dr}{dt}, \quad V_\theta = r \frac{d\phi}{dt}. \quad (11.61)$$

სიჩქარე

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2} \quad (11.62)$$

წერტილის სიჩქარის რადიალურ სიჩქარესთან გადახრის

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_\theta}{V_r}. \quad (11.63)$$

$\vec{W}$ აჩქარება გამოითვლება პოლარულ (r) და (ϕ) კოორდინატებზე გეგმილების საშუალებით:

$$W_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2; \quad W_\theta = 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}, \quad (11.64)$$

$$W = \sqrt{W_r^2 + W_\theta^2} \quad (11.65)$$

თუ მოძრაობა მოცემულია ცილინდრულ კოორდინატებში, მაშინ (z) ღერძზე დამატებით გვექნება გეგმილი, ე.ი.

$$V_z = \dot{z}; \quad W_z = \ddot{z},$$

მაშინ

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2 + V_z^2}; \quad W = \sqrt{W_r^2 + W_\theta^2 + W_z^2}$$

(r), (ϕ), (θ) სფერულ კოორდინატთა ღერძებზე სიჩქარის გეგმილები იქნება:

$$\left. \begin{aligned} V_r &= \dot{r}; \\ V_\phi &= r \cos \theta \cdot \dot{\phi}; \\ V_\theta &= r \dot{\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (11.66)$$

სფერულ კოორდინატთა ღერძებზე აჩქარების გეგმილებია:

$$\left. \begin{aligned} W_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \cos^2 \theta \cdot \dot{\phi}^2; \\ W_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + r \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\phi}^2; \\ W_\phi &= r\ddot{\phi} \cos \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \cos \theta - 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (11.67)$$

11.16. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები

ამოცანა 28. წერტილის მოძრაობა სიბრტყეზე მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში პარამეტრული განტოლებებით:

$$r = 2 + 2t^2; \quad \varphi = \arctg t$$

(r -სანტიმეტრებში, φ -რადიანებში, t – წამებში).

ვიპოვოთ ტრაექტორია, აგრეთვე დროის $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ წმ მომენტი-სათვის სიჩქარისა და აჩქარების მოდულები.

ამოხსნა. 1. ვიპოვოთ წირი, რომელზეც მოძრაობს წერტილი, ამისათვის მოძრაობის განტოლებებიდან გამოვირიცხოთ t , გვექნება:

$$\operatorname{tg} \varphi = t; \quad r = 2 + 2t^2 \varphi = \frac{2}{\cos^2 \varphi}.$$

მაშასადამე, საძიებელი წირის განტოლებაა $r = \frac{2}{\cos^2 \varphi}$. ამ განტოლების დეკარტის კოორდინატებში გადასაყვანად გამოვიყენოთ (11.59) ფორმულები. გვაქვს:

$$r^2 \cos^2 \varphi = 2r$$

ანუ

$$x^2 = 2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

აქედან

$$y = \pm \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 4}.$$

ეს მრუდი შედგება ორი შტოსაგან. რადგან $t \geq 0$, ამიტომ წერტილი აღწერს მხოლოდ ზედა მარჯვენა შტოს, რომელიც წერტილის ტრაექტორიაა.

2. წერტილის სიჩქარის გასაგებად გამოვთვალოთ მისი გეგმილები (11.61) ფორმულებით:

$$V_r = \dot{r} = 4t; \quad V_\varphi = r\dot{\varphi} = 2.$$

აქედან სიჩქარე

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2} = 2\sqrt{1 + 4t^2}$$

როცა $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ წმ, მაშინ

$$V|_{t=\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4 \text{ სმ/წმ.}$$

პოლარულ რადიუსთან $\bar{r}$ სინქარის მიერ შედგენილ α კუთხეს განვსაზღვრავთ (11.63) ფორმულით:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_{\varphi}}{V_r} = \frac{1}{2t}.$$

როცა $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, მაშინ

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ.$$

3. ვიპოვოთ აჩქარების გეგმილები (11.64) ფორმულების გამოყენებით:

$$W_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{2 + 4t^2}{1 + t^2};$$

$$W_{\varphi} = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{4t}{1 + t^2},$$

აჩქარება

$$W = \sqrt{W_r^2 + W_{\varphi}^2} = \frac{2\sqrt{4t^4 + 8t^2 + 1}}{1 + t^2}.$$

როცა $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ წმ, მაშინ

$$W = \frac{2\sqrt{37}}{7} \approx 1,74 \text{ სმ/წმ}^2.$$

პოლარულ რადიუსთან $\bar{W}$ -ს მიერ შედგენილი β კუთხე განისაზღვრება ფორმულით:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{W_{\varphi}}{W_r} = \frac{2t}{1 + 2t^2}.$$

როცა $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ წმ, მაშინ

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2\sqrt{3}}{5} \Rightarrow \beta = 34^\circ 40'$$

ამოცანა 29. მოცემულია სფერულ კოორდინატებში წერტილის მოძრაობის განტოლებები:

$$r = e^{2t}; \quad \varphi = 4t; \quad \theta = 2t.$$

(r – სანტიმეტრებში, φ, θ – რადიანებში; t – წამებში).

დროის $t = \frac{\pi}{4}$ წმ მომენტისათვის ეიპოვოთ წერტილის სიჩქარისა და აჩქარების მოდულები.

ამოხსნა. 1. ეიპოვოთ სიჩქარის გეგმილები (11.66) ფორმულის გამოყენებით:

$$V_r = \dot{r} = 2e^{2t}; \quad V_\varphi = r \cos \theta \cdot \dot{\varphi} = 4e^{2t} \sin 2t;$$

$$V_\theta = r \dot{\theta} = 2e^{2t}$$

აქედან

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2 + V_\theta^2} = 2e^{2t} \sqrt{2 + 4 \sin^2 2t};$$

$$V|_{t=\frac{\pi}{4}} = 2e^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{6} \approx 23,6 \text{ სმ/წმ.}$$

2. ეიპოვოთ აჩქარების გეგმილები (11.55) ფორმულის გამოყენებით:

$$W_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2 = -16e^{2t} \cdot \sin^2 2t$$

$$W_\varphi = r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta =$$

$$= 16e^{2t} (\sin 2t + \cos 2t).$$

$$W_\theta = r\ddot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\varphi}^2 = 8e^{2t} (1 - \sin 4t)$$

$$W = 8e^{2t} \sqrt{5 + 4 \sin 2t \cos 2t + 4 \sin^2 2t},$$

$$W|_{t=\frac{\pi}{4}} = 24e^{\frac{\pi}{2}} = 115,6 \text{ სმ/წმ.}$$

11.17. სავარჯიშო ამოცანები

ამოცანა 11.26. პოლარულ კოორდინატებში მოცემული მოძრაობის განტოლებების მიხედვით განსაზღვრეთ წერტილის ტრაექტორია, სიჩქარე და აჩქარება (r – სანტიმეტრებში; φ – რადიანებში; t – წამებში):

1. $r = 2a \sin \omega t$; $\varphi = \omega t$.

2. $r = at$; $\varphi = bt$.

3. $r = at$; $\varphi = \frac{b}{t}$.

4. $r = 5e^t$; $\varphi = \frac{t}{2}$.

$$5. r = 3e^{-2t}; \quad \varphi = 4t$$

$$6. r = 2\sin t; \quad \varphi = \frac{t}{3}.$$

$$7. r = a\cos t; \quad \varphi = \frac{1}{2}t$$

$$8. r = a(1 + \cos \omega t); \quad \varphi = \omega t.$$

პასუხები:

$$1. r = 2a\sin \varphi - \text{წრეწირი}; \quad V = 2a\omega; \quad W = 4a\omega^2 - \text{მიმართული წრეწირის რადიუსის გასწვრივ ცენტრისაკენ}.$$

$$2. r = \frac{a}{b}\varphi - \text{არქიმედეს სპირალი}; \quad V = a\sqrt{1+b^2t^2} \text{ სმ/წმ};$$

$$\text{tg}(\vec{V}, \wedge r) = \varphi; \quad W = ab\sqrt{4+b^2t^2} \text{ სმ/წმ}^2; \quad \text{tg}(W, \wedge r) = -\frac{2}{\varphi}.$$

$$3. r = \frac{ab}{\varphi} - \text{ჰიპერბოლური სპირალი}; \quad V = \frac{a}{t}\sqrt{b^2+t^2} \text{ სმ/წმ};$$

$$\text{tg}(V, \wedge r) = -\varphi; \quad W = \frac{ab^2}{t^3} \text{ სმ/წმ}^2; \quad \text{tg}(W, \wedge r) = \text{tg} \pi = 0.$$

$$4. r = 5e^{2\varphi} - \text{ლოგარითმული სპირალი}; \quad V = 2,5\sqrt{5} \cdot e' \text{ სმ/წმ};$$

$$\text{tg}(V, \wedge r) = \frac{1}{2}; \quad W = 6,25e' \text{ სმ/წმ}^2; \quad \text{tg}(W, \wedge r) = \frac{4}{3}.$$

$$5. r = 3e^{-\frac{1}{2}\varphi} - \text{ლოგარითმული სპირალი}; \quad V = 2\sqrt{5} \cdot r \text{ სმ/წმ};$$

$$\text{tg}(V, \wedge r) = -2; \quad W = 16r \text{ სმ/წმ}^2; \quad \text{tg}(W, \wedge r) = \frac{4}{3}.$$

$$6. r = 2\sin 3\varphi; \quad V = \frac{2}{3}\sqrt{1+8\cos^2 t} \text{ სმ/წმ}; \quad \text{tg}(V, \wedge r) = \frac{1}{3}\text{tg} t;$$

$$W = \frac{4}{3}\sqrt{9+16\sin^2 t} \text{ წმ/წმ}^2; \quad \text{tg}(W, \wedge r) = -\frac{3}{5}t.$$

$$7. r = a\cos 2\varphi; \quad V = \frac{a}{2}\sqrt{1+3\sin^2 t} \text{ სმ/წმ}; \quad \text{tg}(V, \wedge r) = -\frac{1}{2}ctg t;$$

$$W = \frac{a}{4}\sqrt{16+9\cos^2 t} \text{ სმ/წმ}^2; \quad \text{tg}(W, \wedge r) = \frac{4}{5}\text{tg} t.$$

$$8. r = a(1 + \cos \varphi); \quad V = 2a\omega \cos \frac{\omega t}{2} \text{ სმ/წმ}; \quad \text{tg}(V, \wedge r) = -\frac{1}{ctg \frac{\varphi}{2}};$$

$$W = a\omega^2 \sqrt{5+4\cos \omega t} \text{ სმ/წმ}^2; \quad \text{tg}(W, \wedge r) = -\frac{2\sin \varphi}{1+2\cos \varphi}.$$

12. მყარი სხეულის მოძრაობის უმარტივესი შემთხვევები

12.1. მყარი სხეულის თავისუფლების ხარისხი და მისი მოძრაობის მოცემის ხერხი

ისე, როგორც სტატიკაში, კინემატიკაშიც ყველა სხეულს განვიხილავთ, როგორც აბსოლუტურად მყარს. ყოველი სხეული შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ამ სხეულის მოცულობაში მოთავსებული წერტილების ერთობლიობა. მაშასადამე, მყარი სხეული ნივთიერი წერტილთა უცვლელი სისტემაა. სხეულის მოძრაობისას ზოგად შემთხვევაში მისი ცალკეული წერტილი სხვადასხვა ტრაექტორიაზე მოძრაობს და დროის ყოველ მომენტისათვის სხვადასხვა სიჩქარე და აჩქარებები აქვს.

მყარი სხეულის კინემატიკის ამოცანები შეიძლება დავეთოთ ორ ჯგუფად: 1. მთლიანი სხეულის მოძრაობის მოცემა და ამ მოძრაობის კინემატიკური მახასიათებლების განსაზღვრა; 2. სხეულის ცალკეული წერტილების მოძრაობის კინემატიკური მახასიათებლების განსაზღვრა.

წინასწარ საჭიროა დავაზუსტოთ „მყარი სხეულის მოძრაობის მოცემის“ ცნება. ჩვენ ვამბობთ, რომ მყარი სხეულის მოძრაობა მოცემულია, თუ გვაქვს მეთოდი, რომლის საშუალებითაც ათელის საფარდი სისტემის მიმართ დროის ყოველ მომენტში დავადგენთ მისი ნებისმიერი წერტილის მდებარეობას.

წინასწარ შეიძლება მოგვეჩვენოს, რომ მყარი სხეულის მოძრაობის მოსაცემად საჭიროა მისი ყველა წერტილის მოძრაობის მოცემა, ე.ი. საჭიროა გვეჩვენეს წერტილების მოძრაობის განტოლებათა უსასრულო სიმრავლე. მაგრამ სინამდვილეში ეს ასე არ არის, რადგან სხეულის ცალკეული წერტილების გადაადგილება დაკავშირებულია მათ შორის მანძილების უცვლელობაზე.

არჩეული საფარდი სისტემის მიმართ სხეულის მდებარეობის დასახასიათებლად დროის ყოველ მომენტში დავგჭირდება გარკვეული, ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი სიდიდეების შემოღება. ამ სიდიდეებს სხეულის მოძრაობის პარამეტრები ეწოდება. მათი რიცხვი დამოკიდებულია სხეულის მოძრაობის ბუნებაზე (ფორმაზე). ამიტომ სხვადასხვა მოძრა-

ობისათვის დამოუკიდებელ პარამეტრთა რიცხვი სხვადასხვა იქნება.

ვანერნოთ, რომ ზოგად შემთხვევაში სივრცეში სხეულის მდებარეობა მთლიადად განისაზღვრება ექვსი დამოუკიდებელი პარამეტრით. ამისათვის სხეულში ავიღოთ ერთ წრფეზე არამდებარე ნებისმიერი A , B და C სამი წერტილი, რომელთა კოორდინატებია შესაბამისად (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) და (x_3, y_3, z_3) . რადგან ამ წერტილებს შორის მანძილები უცვლელია ($|AB|=d_1$, $|AC|=d_2$, $|BC|=d_3$), ამიტომ შეგვიძლია დაწეროთ:

$$\begin{aligned}(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 &= d_1^2, \\(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 &= d_2^2, \\(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 &= d_3^2.\end{aligned}\tag{12.1}$$

რადგან საქმე გვაქვს სხეულის მოძრაობასთან, ამიტომ მართებული იქნება ტოლობები: $x_k = x_k(t)$, $y_k = y_k(t)$, $z_k = z_k(t)$, $k=1,2,3$, ე.ი. A , B და C წერტილების კოორდინატები დროის ფუნქციებია.

მაშასადამე, სულ გვაქვს $3n-s$ კოორდინატი, რომელთაგან დამოუკიდებელი იქნება მხოლოდ $s=6$, დანარჩენი სამი განისაზღვრება (12.1) განტოლებებიდან, რომელთა რიცხვი $m=3$ (დამოუკიდებელ პარამეტრთა რიცხვი: $s=3n-m$).

სხეულში A , B და C წერტილები ნებისმიერად ავიღეთ, რაც საშუალებას გვაძლევს დავასკვნათ, რომ ნებისმიერი ფიქსირებული ათელის კოორდინატთა სისტემის მიმართ სხეულის მდებარეობა სრულად განისაზღვრება ექვსი დამოუკიდებელი პარამეტრით. თუ სხეული დამაგრებულია რომელიმე წერტილით, მაშინ მისი მდებარეობა განისაზღვრება სამი პარამეტრით.

განსაზღვრება. ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი ისეთი პარამეტრების რიცხვს, რომელთა მოცემითაც დროის ყოველ მომენტში ცალსახად განისაზღვრება სივრცეში სხეულის მდებარეობა, სხეულის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვს უწოდებენ.

ცხადია, სხეულის მდებარეობის განმსაზღვრელი დამოუკიდებელი პარამეტრები დროის მოცემული ცალსახა ფუნქცი

ქვემოთ გავეცნობით სხეულის მოძრაობის სხვადასხვა კერძო შემთხვევებს და მისი კინემატიკური პარამეტრების განსაზღვრის მეთოდებს.

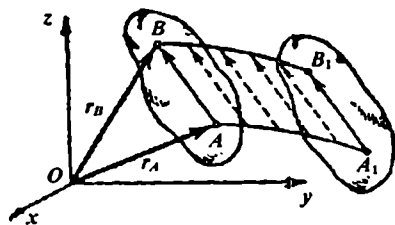
12.2. მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა

განსაზღვრება. გადატანითი მოძრაობა ეწოდება მყარი სხეულის ისეთ მოძრაობას, როდესაც ამ სხეულის ნებისმიერ ორ წერტილზე გამავალი წრფის მონაკვეთი სხეულის გადაადგილებისას დროის ყოველი მომენტში თავისი საწყისი მდებარეობის პარალელური რჩება.

გადატანითი მოძრაობა არ უნდა აგვერიოს წრფივ მოძრაობაში. გადატანითი მოძრაობისას მყარი სხეულის წერტილები გადაადგილდება როგორც წრფივ, ისე მრუდწირულ ტრაექტორიაზე.

მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა ძირითადად ხასიათდება შემდეგი თეორემით:

გადატანითი მოძრაობისას მყარი სხეულის ყველა წერტილი შემოწერს ერთნაირ ტრაექტორიას და დროის ყოველ მომენტში სიდიდითა და მიმართულებით ტოლი სიჩქარე და ტოლი აჩქარება აქვს.



ნახ. 12.1

დამტკიცება. განვიხილოთ $Oxyz$ სისტემის მიმართ გადატანითად მოძრავი მყარი სხეული. სხეულში ავირჩიოთ ორი ნებისმიერი A და B წერტილი, რომელთა მდებარეობა დროის t მომენტში განისაზღვრება $\vec{r}_A$ და $\vec{r}_B$ რადიუს-ვექტორებით (ნახ. 12.1). გაავლოთ ამ წერტილების შემაერთებელი $\overline{AB}$ ვექტორი. განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ $\overline{AB}$ და $\overline{A_1B_1}$ ვექტორები ტოლი და თანამიმდევრული ვექტორებია. ნახაზიდან ჩანს, რომ:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB}. \quad (12.2)$$

აქ $\overline{AB}$ ვექტორის მოდული მუდმივია, როგორც მყარი სხეულის ნებისმიერი ორ წერტილს შორის მანძილი. განსაზ-

ღვრების თანახმად, ის არ იცვლის მიმართულებას, ამიტომ მუდმივი ვექტორია.

(12.2) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ B წერტილის რადიუს-ვექტორის პოდოგრაფი ამ წერტილის ტრაექტორიაა. თუ მოვახდენთ $\vec{r}_A$ რადიუს-ვექტორის პოდოგრაფის პარალელურ გადატანას $\overline{AB}$ ვექტორით, მაშინ A წერტილის ტრაექტორია დაემთხვევა B წერტილის ტრაექტორიას. მაშასადამე, ეს ტრაექტორიები ერთნაირია.

ახლა (12.2) ტოლობა გავაწარმოთ t დროით, მივიღებთ:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\overline{AB}}{dt}.$$

მხედველობაში მივიღოთ, რომ $\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{v}_B$, $\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A$, ხოლო,

როგორც მუდმივი ვექტორის წარმოებული, $\frac{d\overline{AB}}{dt} = 0$, გვქვნება:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A. \quad (12.3)$$

მაშასადამე, მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობისას მისი წერტილების სიჩქარე ერთნაირია.

გავაწარმოთ (12.3) ტოლობა დროით და მხედველობაში

მივიღოთ, რომ $\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \vec{w}_A$, $\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{w}_B$, გვქვნება:

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A. \quad (12.4)$$

შედეგი. გადატანითი მოძრაობა მთლიანად ხასიათდება მისი ერთი რომელიმე წერტილის მოძრაობით.

მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობის კანონის მოსაცემად საკმარისია ვიცოდეთ მისი რომელიმე წერტილის (x, y, z) კოორდინატები, როგორც დროის ფუნქციები, ე.ი.

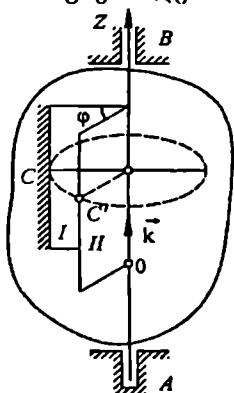
$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (12.5)$$

სხეულის ცალკეული წერტილის მოძრაობას ზოგად შემთხვევაში არა აქვს არავითარი შეზღუდვა. ამიტომ სხეულის გადატანითად მოძრაობისას თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი 3-ის ტოლია და (12.5) ტოლობები არის სხეულის გადატანითი მოძრაობის განტოლებები.

12.3. მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობა. კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება

განსაზღვრება. ბრუნვითი მოძრაობა ეწოდება მყარი სხეულის ისეთ მოძრაობას, რომლის დროსაც სხეულთან მკვიდრად დაკავშირებული რომელიმე წერტილის ყველა წერტილი უძრავი რჩება შერჩეულ ათვლის სისტემაში (ნახ. 12.2).

ამ უძრავ წერტილს ეწოდება ბრუნვის ღერძი. 12.2 ნახაზზე z ბრუნვის ღერძია.



ნახ. 12.2

დავაფიქსიროთ დროის t_0 მომენტი და გავატაროთ ბრუნვის ღერძზე გამავალი I და II ორი ნახევარსიბრტყე ისე, რომ I იყოს უძრავი, ხოლო II – მბრუნავ სხეულთან მკვიდრად მიმაგრებული და მასთან ერთად მბრუნავი (ნახ. 12.2). მაშინ სხეულის მდებარეობა განსაზღვრულია დროის ყოველ $t \geq t_0$ მომენტში, თუ ბრუნვის Az ღერძის ირგვლივ I და II ნახევარსიბრტყეებს შორის მობრუნების φ კუთხე მოცემულია, როგორც დროის ფუნქცია:

$$\varphi = \varphi(t). \quad (12.6)$$

(12.6) ტოლობას მყარი სხეულის უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვის განტოლება ანუ ბრუნვის კანონი ეწოდება. $\varphi - \varphi_0$ სხვაობას, სადაც φ_0 საწყისი კუთხეა, მობრუნების კუთხე ანუ სხეულის კუთხური გადაადგილება ეწოდება. ამრიგად, სხეულის უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვის დასახასიათებლად საკმარისია ერთი დამოუკიდებელი φ პარამეტრის შემოღება. ამიტომ ამ შემთხვევაში სხეულს აქვს ერთი თავისუფლების ხარისხი.

სხეულის მდებარეობის ცალსახა განსაზღვრისათვის აუცილებელია ვიცოდეთ მობრუნების კუთხის სიდიდე და ათვლის მიმართულება. ათვლის დადებით მიმართულებად მიიჩნევა სხეულის მოძრაობა საათის ისრის ბრუნვის საპირისპიროდ, თუ დავაკვირდებით ღერძის დადებითი მიმართულების მხრიდან. მობრუნების კუთხე იზომება რადიანებით. თუ ცნობილია ბრუნთა N რიცხვი დროის რომელიმე შუალედში, მაშინ მობრუნების კუთხე ტოლი იქნება:

$$\varphi = 2\pi \cdot N. \quad (12.7)$$

კუთხური სინქარით ხასიათდება მობრუნების კუთხის ცვლილების სისწრაფე და მიმართულება.

განსაზღვრება. დროის მოცემულ მომენტში სკალარული კუთხური სინქარის სიდიდე ტოლია მობრუნების კუთხის პირველი რიგის წარმოებულისა დროით:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (12.8)$$

წარმოებულის ნიშანი განსაზღვრავს ბრუნვის მიმართულებას. თუ $\omega > 0$, მაშინ ბრუნვის მიმართულება საათის ისრის მოძრაობის საპირისპიროა; თუ $\omega < 0$, მაშინ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულების თანხვედრილია.

კუთხური სინქარის განზომილებაა $\frac{\text{რად}}{\text{წმ}}$, ან წმ⁻¹.

კუთხური აჩქარებით ხასიათდება კუთხური სინქარის ცვლილების სისწრაფე და მიმართულება.

განსაზღვრება. დროის მოცემულ მომენტში სკალარული კუთხური აჩქარება ტოლია კუთხური სინქარის პირველი რიგის წარმოებულისა დროით ან მობრუნების კუთხის მეორე რიგის წარმოებულისა დროით:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \quad (12.9)$$

წარმოებულის ნიშანი განსაზღვრავს კუთხური სინქარის მიმართულებას. თუ $\varepsilon > 0$, მაშინ კუთხური სინქარე მიმართულია საათის ისრის მოძრაობის საპირისპიროდ; თუ $\varepsilon < 0$, მაშინ კუთხური სინქარის მიმართულება საათის ისრის მოძრაობის თანხვედრილია.

კუთხური აჩქარების განზომილებაა $\frac{\text{რად}}{\text{წმ}^2}$ ან წმ⁻².

დროის მოცემულ მომენტში კუთხური სინქარე და კუთხური აჩქარება ერთნაირია მყარი სხეულის ყველა წერტილისთვის.

თუ დროის განმავლობაში კუთხური სინქარის მოდული იზრდება, სხეულის ბრუნვას აჩქარებული ეწოდება, ხოლო თუ მცირდება – შენელებული. ადვილი შესამჩნევია, რომ ბრუნვა იქნება აჩქარებული, თუ ω და ε სიდიდეებს აქვს ერთნაირი ნიშანი, ხოლო შენელებული როცა აქვთ სხვადასხვა ნიშანი.

12.4. თანაბარი და თანაბარცვლადი ბრუნვა

თუ სხეულის მოძრაობის მთელი დროის განმავლობაში მისი კუთხური სიჩქარე მუდმივი რჩება ($\omega = \text{const}$), მაშინ სხეულის ბრუნვას თანაბარი ეწოდება.

თანაბარი ბრუნვის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (12.10)$$

თანაბარი ბრუნვისას სხეულის კუთხური სიჩქარის განსაზღვრა შესაძლებელია, თუ წუთში ბრუნთა რიცხვი მოცემულია შემდეგი ფორმულით:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}, \quad (12.11)$$

სადაც n არის ბრუნთა რიცხვი წუთში.

შენიშვნა 1. ძალიან ნელა მბრუნავი სხეულის ბრუნთა რიცხვი მოხერხებულია დაეთვალოთ არა წუთებში, არამედ დროის სხვა ერთეულებში. მაგალითად, დედამიწა თავის ღერძის გარშემო შემობრუნებას ანდომებს ერთ დღე-ღამეს. მოუხერხებელი იქნებოდა გვეთქვა, რომ დედამიწა აკეთებს

$\frac{1}{24 \cdot 60} = \frac{1}{1440}$ ბრ/წუთ-ში. ამიტომ დედამიწის ω კუთხური

სიჩქარე გამოვთვალოთ არა (12.11) ფორმულით, არამედ ვისარგებლოთ მოსაზრებით, რომ დედამიწა აკეთებს ერთ ბრუნს დღე-ღამეში (2π რადიანს), ხოლო დღე-ღამეში 86400 წამია, მაშასადამე,

$$\omega = \frac{2\pi}{86400} = 10^{-7} \cdot 727 \text{ რად/წმ.}$$

სხეულების ყველაზე ნელი ბრუნვა გვხვდება ვარსკვლავთა სამყაროში. მაგალითად, გალაქტიკის ცენტრის გარშემო მზის ბრუნვის პერიოდი 190 მილიონ წელს შეადგენს. ამასთან, უნდა აღინიშნოს, რომ ტექნიკაში შექმნილია ისეთი ხელსაწყო, რომელიც მილიონობით ბრუნს ასრულებს წამში.

თუ სხეულის მოძრაობის მთელი დროის განმავლობაში კუთხური აჩქარება მუდმივი რჩება ($\varepsilon = \text{const}$), მაშინ სხეულის ბრუნვას თანაბარცვლადი ეწოდება.

თანაბარცვლადი ბრუნვის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2 \quad (12.12)$$

თანაბარცვლადი ბრუნვისას დროის ყოველ მომენტში სხეულის კუთხურ სიჩქარე გამოისახება ფორმულით:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (12.13)$$

(12.12) და (12.13) ფორმულების ერთობლიობა არის თანაბარცვლადი ბრუნვის ძირითადი განტოლებები.

ამ ფორმულებში სულ შედის ექვსი სიდიდე: მოცემული ამოცანისათვის φ_0 , ω_0 და ε სამი მუდმივი და φ , ω , t – სამი ცვლადი. მაშასადამე, თანაბარცვლადი ბრუნვის ყოველი ამოცანის პირობა აუცილებლად უნდა შეიცავდეს არანაკლებ ოთხ ცნობილ სიდიდეს.

ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნის მოხერხებულობისათვის (12.12) და (12.13) ფორმულებიდან შეიძლება მივიღოთ კიდევ ორი დამხმარე ფორმულა.

(12.12) და (12.13) განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ ε კუთხური აჩქარება, გვექნება:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\omega_0 + \omega}{2} \cdot t. \quad (12.14)$$

ახლა აღნიშნული განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ t დრო, მივიღებთ:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}. \quad (12.15)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა თანაბარაჩქარებული მოძრაობა იწყება წონასწორობის მდგომარეობიდან, მაშინ $\varphi_0 = 0$ და $\omega_0 = 0$. ამიტომ ზემოთ მოყვანილი ძირითადი და დამხმარე ფორმულები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\varphi = \omega t; \quad (12.16)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \varepsilon t^2; \quad (12.17)$$

$$\omega = \varepsilon t; \quad (12.18)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \omega t, \quad (12.19)$$

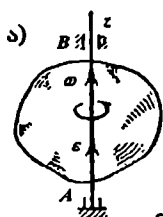
$$\varphi = \frac{\omega^2}{2\varepsilon}. \quad (12.20)$$

შენიშვნა 1. იმისათვის, რომ სხეულის ნებისმიერი M წერტილის სიჩქარე და აჩქარება ჩავეწეროთ ვექტორული ფორმულებით, მიზანშეწონილია, შემოვიტანოთ ვექტორული კუთხური სიჩქარის ცნება.

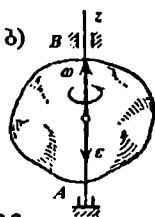
განსაზღვრება. ვექტორული კუთხური სიჩქარე ეწოდება ისეთ $\vec{\omega}$ ვექტორს, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი პირობებით: $\vec{\omega}$ ვექტორის მოდული უდრის სკალარული კუთხური სიჩქარის აბსოლუტურ მნიშვნელობას, ე.ი. $|\vec{\omega}| = \omega = |\dot{\phi}|$; ის სრიალა ვექტორია, რომელიც მდებარეობს ბრუნვის ღერძზე და მოგვჩუქნია იმ მხარეს, საიდანაც სხეულის ბრუნვის მიმართულება მოჩანს საათის ისრის ბრუნვის საპირისპიროდ. ასეთი ვექტორი ასევე განსაზღვრავს კუთხური სიჩქარის მოდულს, ბრუნვის ღერძსა და სხეულის ღერძის გარშემო ბრუნვის მიმართულებას. მაშასადამე,

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k} = \dot{\phi} \vec{k}, \quad (12.21)$$

სადაც $\vec{k}$ არის z ღერძის ერთეულოვანი ვექტორი, ω — კუთხური სკალარული სიჩქარე.



ნახ. 12.3



ანალოგიურად სხეულის კუთხური აჩქარება შეიძლება გამოვსახოთ $\vec{\epsilon}$ ვექტორის (ვექტორული კუთხური აჩქარების) სახით, რომელიც ბრუნვის ღერძის გასწვრივაა მიმართული. $\vec{\epsilon}$ ვექტორისათვის გვექნება:

$$\vec{\epsilon} = \epsilon \cdot \vec{k} = \dot{\omega} \vec{k} = \dot{\phi} \vec{k}. \quad (12.22)$$

თუ ω -სა და ϵ -ს ერთნაირი ნიშანი აქვს, მაშინ სხეულის ბრუნვა თანაბარაჩქარებულია: $\vec{\omega}$ და $\vec{\epsilon}$ ვექტორები მიმართულია ერთსა და იმავე მხარეს (ნახ. 12.3, ა). თუ ω -სა და ϵ -ს სხვადასხვა ნიშნები აქვს, მაშინ ბრუნვა თანაბარშენელებულია. $\vec{\omega}$ და $\vec{\epsilon}$ ვექტორები მიმართულია ურთიერთსაპირისპიროდ (ნახ. 12.3, ბ).

12.5. უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის წერტილების სიჩქარე და აჩქარება

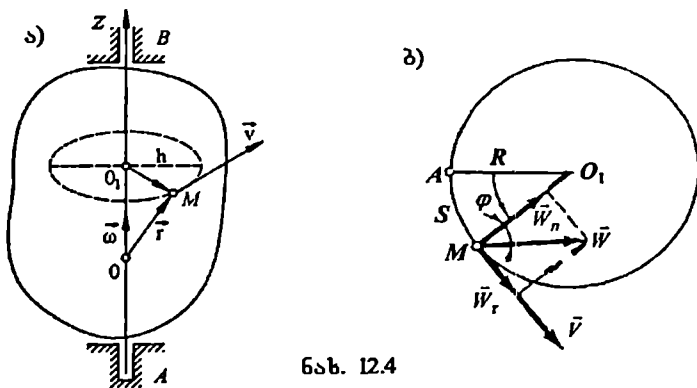
უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვისას სხეულის ყოველი წერტილი მოძრაობს წრეწირზე, რომლის ცენტრი ბრუნვის ღერძზე მდებარეობს. წრეწირის სიბრტყე ბრუნვის ღერძის მართობულია და რადიუსი წერტილიდან ღერძამდე მანძილის ტოლია.

ამ თავში მოყვანილი ამოცანების ამოხსნისას ძალიან მნიშვნელოვანია ნათლად წარმოვადგინოთ ურთიერთდამოკიდებულება φ , ω და ε კუთხურ სიდიდეებსა და სხეულის სხვადასხვა წერტილის მოძრაობის მახასიათებელ S , V , W , და W_n წრფივ სიდიდეებს შორის.

განვიხილოთ მყარი სხეულის უძრავი OO_1 ანუ ღერძის გარშემო ბრუნვისას ბრუნვის z ღერძიდან $h=R$ მანძილზე მყოფი რომელიმე M წერტილი (ნახ. 12.4, ა). სხეულის ბრუნვისას M წერტილი შემოწერს R რადიუსიან წრეწირს, რომლის სიბრტყე ბრუნვის z ღერძის მართობულია, ხოლო O_1 ცენტრი მდებარეობს ბრუნვის ღერძზე. ვთქვათ, დროის რაიმე $[t_0, t]$ შუალედში M წერტილი გადაადგილდა A -დან M მდებარეობაში, ე.ი. შემობრუნდა φ კუთხით (ნახ. 12.4, ბ), მაშინ $S = R\varphi$ და M წერტილის სიჩქარე $V = \frac{dS}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt}$.

მაშასადამე, M წერტილის სიჩქარე იქნება:

$$V = R\omega. \quad (12.23)$$



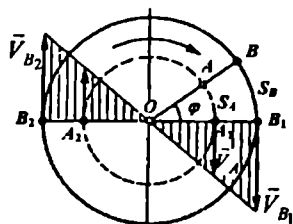
ნახ. 12.4

კუთხური სიჩქარისაგან განსხვავებით, V სიჩქარეს ხანდახან უწოდებენ M წერტილის ხაზოვან სიჩქარეს.

მაშასადამე, უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვისას სხეულის წერტილის ხაზოვანი სიჩქარე რიცხობრივად კუთხური სიჩქარისა და წერტილიდან ღერძამდე მანძილის ნამრავლის ტოლია და მიმართულია M წერტილის მიერ შემოწერილი წრეწირის მხების გასწვრივ, მოძრაობის მხარეს.

რადგან მოცემული მომენტისათვის სხეულის ყველა წერტილის ω კუთხური სიჩქარე ერთი და იგივეა, ამიტომ (12.23)-დან გამომდინარეობს, რომ მბრუნავი სხეულის წერტილების სიჩქარე ღერძიდან მათი დაშორების მანძილების პროპორციულია (ნახ. 12.5).

ახლა გამოვსახოთ M წერტილის ვექტორული $\vec{V}$ სიჩქარე (ნახ. 12.4, ა). გავატაროთ M წერტილის $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორი ბრუნვის ღერძზე მდებარე ნებისმიერი O წერტილის მიმართ. ვაჩვენოთ, რომ M წერტილის ვექტორული სიჩქარე გამოისახება შემდეგი ფორმულით:



ნახ. 12.5

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (12.24)$$

ცხადია, $\vec{\omega} \times \vec{r}$ ვექტორი $\vec{\omega}$ და $\vec{r}$ ვექტორებზე გამავალი OO_1M სიბრტყის მართობულია, მისი მიმართულება ემთხვევა $\vec{V}$ ვექტორის მიმართულებას, ე.ი. M წერტილის ტრაექტორიის მხებს და მიმართულია სხეულის ბრუნვის მხარეს (ზუსტად ასევეა მიმართული $\vec{V}$ -ც), $\vec{\omega} \times \vec{r}$ ვექტორული ნამრავლის მოდული იქნება: $|\vec{\omega} \times \vec{r}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin|\vec{\omega}, \vec{r}|$, მაგრამ OO_1M მართკუთხა სამკუთხედიდან $|\vec{r}| \sin(\vec{\omega}, \vec{r}) = h = R$, ამიტომ

$$V = \omega R,$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

(12.24) ფორმულა განსაზღვრავს სხეულის ნებისმიერი წერტილის ვექტორულ სიჩქარეს, როცა ის ასრულებს ბრუნვას. (12.24) ფორმულას ეილერის ფორმულას უწოდებენ.

12.4, ა ნახაზის თანახმად, $\vec{\omega} = \vec{\omega}(0, 0, \omega)$, $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$, ამიტომ

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix}. \quad (12.25)$$

თუ ამ ტოლობას დავაგეგმილებთ x , y , z ღერძებზე, მივიღებთ:

$$V_x = -\omega y, \quad V_y = \omega x, \quad V_z = 0. \quad (12.26)$$

თუ განვიხილავთ ზოგად შემთხვევას, როცა ბრუნვის ღერძს $Oxyz$ სისტემის მიმართ ნებისმიერი მდებარეობა უკავია, ე.ი. $\vec{\omega} = \vec{\omega}(x, y, z)$, $\vec{r} = \vec{r}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$, სადაც x , y , z არის M წერტილის კოორდინატები, ხოლო x_0 , y_0 , z_0 – ბრუნვის ღერძზე მდებარე ($\vec{r}$ ვექტორის სათავეს) წერტილის კოორდინატები. ამ შემთხვევაში, გვექნება:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix}. \quad (12.27)$$

ამ ტოლობის $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე დავაგეგმილებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} V_x &= \omega_y(z - z_0) - \omega_z(y - y_0), \\ V_y &= \omega_z(x - x_0) - \omega_x(z - z_0), \\ V_z &= \omega_x(y - y_0) - \omega_y(x - x_0). \end{aligned} \quad (12.28)$$

(12.28) ფორმულებიდან ადვილად მიიღება (12.26) ფორმულები, აგრეთვე ის კერძო შემთხვევები, როცა: ა) ბრუნვის ღერძი გადის კოორდინატთა სათავეში; ბ) როცა ბრუნვის ღერძი z ღერძის პარალელურია.

ამრიგად, ზოგად შემთხვევაში მყარი სხეულის უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვისას სინქარის $\vec{V}$ ვექტორის გეგმილები გამოითვლება (12.28) ფორმულების, ხოლო მისი მოდული და მიმართულების კოსინუსები – წერტილის კინემატიკის ფორმულების საშუალებით.

მყარი სხეულის M წერტილის აჩქარების მოსაძებნად გავაწარმოოთ (12.24) ტოლობა დროით. მივიღებთ:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

რადგან $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$, $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}$, $\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{W}$, ამიტომ გვექნება:

$$\vec{W} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V} \quad (12.29)$$

ვაჩვენოთ, რომ (12.29) ფორმულის პირველი შესაკრები არის M წერტილის მხების აჩქარება, ხოლო მეორე – მის ნორმალური აჩქარება. $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ ვექტორი მიმართულია ამ ვექტორებზე გამავალი სიბრტყის მართობულად, ე.ი. M წერტილის ტრაექტორიის მხების გასწვრივ. მისი მოდული (11.34) და (12.23) ფორმულების თანახმად, იქნება (ნახ. 12.6, ა):

$$W_r = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon = \varepsilon \cdot r \sin(\vec{\varepsilon}, \vec{r}) = |\vec{\varepsilon} \times \vec{r}|.$$

$\vec{\omega} \times \vec{V}$ ვექტორული ნამრავლისათვის გვექნება (ნახ. 12.6, ა):

$$|\vec{\omega} \times \vec{V}| = \omega \cdot V \sin(\vec{\omega} \wedge \vec{V}) = \omega V = \frac{V^2}{R}.$$

რადგანაც $\vec{\omega} \perp \vec{V}$, ამიტომ $\vec{\omega} \times \vec{V}$ ვექტორი მიმართულია ბრუნვის ღერძისაკენ, ხოლო მისი მოდული $\frac{V^2}{R}$ -ის ტოლია.

(11.36) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ $\vec{\omega} \times \vec{V}$ ვექტორი არის უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის M წერტილის ნორმალური აჩქარება:

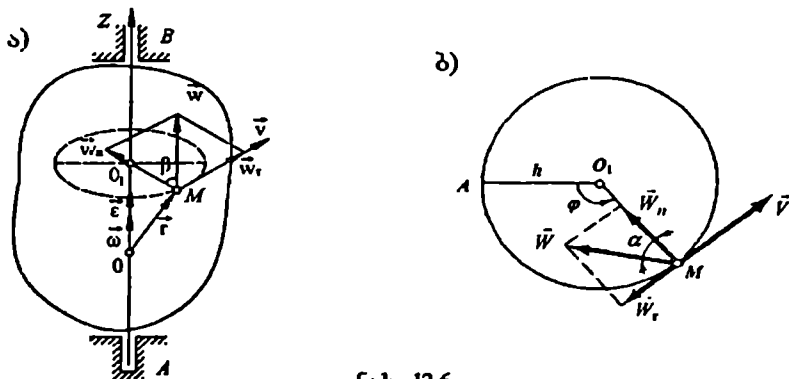
$$|\vec{W}_n| = W_n = |\vec{\omega} \times \vec{V}| = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R.$$

M წერტილის აჩქარების საპოვნელად გვექნება შემდეგი ფორმულები:

$$W_r = R\varepsilon, \quad W_n = R\omega^2 \quad (12.30)$$

თუ სხეული ბრუნავს აჩქარებულად, ამ შემთხვევაში M წერტილის $\vec{W}_r$ მხების აჩქარება და $\vec{V}$ სიჩქარე მიმართულია არიან წრეწირის მხების გასწვრივ ერთი და იმავე მხარეს (ნახ. 12.4, ბ). თუკი სხეული ბრუნავს შენელებულად, მაშინ $\vec{W}_r$ და $\vec{V}$ ვექტორები მიმართულია ურთიერთსაწინააღმდეგო

მიმართულებით (ნახ. 12.6, ბ). რაც შეეხება M წერტილის $\vec{W}_n$ ნორმალურ აჩქარებას, ის ყოველთვის მიმართულია M წერტილის მიერ შემოწერილი წრეწირის რადიუსის გასწვრივ ცენტრისაკენ (ნახ. 12.4, ბ, 12.6, ბ).



ნახ. 12.6

$\vec{W}$ სრული აჩქარების მოდული ტოლია:

$$W = \sqrt{W_r^2 + W_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (12.31)$$

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ $\vec{W}$ ვექტორის მიმართულება, საკმარისია გამოვთვალოთ α კუთხე, რომელსაც ეს ვექტორი ადგენს O_1M რადიუსთან. 12.4, ბ და 12.6, ბ ნახაზებიდან ჩანს, რომ

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|W_r|}{W_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \quad (12.32)$$

მაშასადამე, თანაბარცვლადი ბრუნვისას სხეულის ნებისმიერი წერტილის მხები, ნორმალური და სრული აჩქარებები გამოითვლება (12.30) და (12.31) ფორმულებით, ხოლო თანაბარი ბრუნვისას ($\omega = \text{const}$, $\varepsilon = 0$) სხეულის ნებისმიერი წერტილის მხები ნორმალური და სრული აჩქარებები – შემდეგი ფორმულებით:

$$W_r = 0; \quad W_n = \omega^2 R, \quad (12.33)$$

$$W = W_n = \omega^2 R. \quad (12.34)$$

შენიშვნა 3. თუ წერტილის კინემატიკის ანუ სხეულის გადატანითი მოძრაობის ფორმულებს შევადარებთ სხეულის უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვის ფორმულებს, ადვილად შევამჩნევთ, რომ ძირითადად ეს ფორმულები ანალოგიურია. იმისათვის, რომ სხეულის გადატანითი მოძრაობის ფორმულებიდან მივიღოთ ბრუნვითი მოძრაობის ფორმულები, საჭიროა S წრფივი გადაადგილების მაგივრად ჩავსვათ φ კუთხური გადაადგილება, V ხაზოვანი სიჩქარის მაგივრად – ω კუთხური სიჩქარე, W წრფივი აჩქარებების მაგივრად – ε კუთხური აჩქარება.

გადატანით და ბრუნვით მოძრაობათა ფორმულების შესადარებლად მოხერხებულია ჩაწეროთ ისინი 12.1 ცხრილის სახით:

ცხრილი 12.1

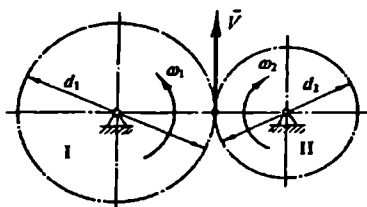
მოძრაობის კინემატიკური ზომა	მოძრაობის ხასიათი	მოძრაობის სახე	
		გადატანითი	ბრუნვითი
გადაადგილება	არათანაბარი	$S = S(t)$	$\varphi = \varphi(t)$
	თანაბარი	$S = Vt$	$\varphi = \omega t$
	თანაბარცვლადი	$S = V_0 t + W \frac{t^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}$
სიჩქარე	არათანაბარი	$V = \frac{dS}{dt} = \dot{S}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$
	თანაბარი	$V = const$	$\omega = const$
	თანაბარცვლადი	$V = V_0 + Wt$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
მხები აჩქარება	არათანაბარი	$W_r = \frac{dV}{dt} = \dot{V}$	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}$
	თანაბარი	$W_r = 0$	$\varepsilon = 0$
	თანაბარცვლადი	$W_r = const$	$\varepsilon = const$
ნორმალური აჩქარება		$W_n = \frac{V^2}{\rho}$	$W_n = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R$

12.6. ბრუნვითი მოძრაობის გადაცემა ერთი სხეულიდან მეორეზე

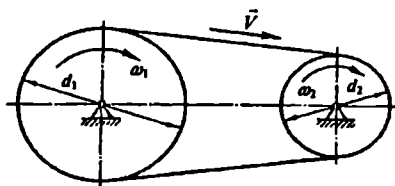
ერთი სხეულიდან მეორეზე მოძრაობის გადაცემა ხორციელდება სხვადასხვა მექანიზმების საშუალებით, რომლებსაც გადამცემები ეწოდება. ასეთი მექანიზმების ყველაზე გავრცელებული სახეებია: კბილანა გადამცემები, ფრიქციული გადამცემები (ნახ. 12.7) და დრეკადი ბმებით გადაცემები, მაგალითად, ღვედური, ბაგირული, ლენტური და ჯაჭვური (ნახ. 12.8). ამ მექანიზმების საშუალებით ხორციელდება მამოძრავებელი წყაროდან (მაგალითად, წამყვანი ლილვიდან) მიმღებზე (ამყოლი ლილვზე) ბრუნვითი მოძრაობის გადაცემა.

გადამცემები ხასიათდება გადაცემათა რიცხვით. გადაცემათა ფარდობა ხასიათდება წამყვანი და ამყოლი რგოლების კუთხურ სიჩქარეთა ფარდობით, რომელიც ერთზე მეტია ან ნაკლები, ან ერთის ტოლია. მაშასადამე, გადაცემათა რიცხვს თუ აღვნიშნავთ U -თი, გვექნება:

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (12.33)$$



ნახ. 12.7



ნახ. 12.8

სადაც ინდექსი 1 ეკუთვნის წამყვანს, ხოლო ინდექსი 2 – ამყოლს. თუ $\omega_1 < \omega_2$, მაშინ გადაცემას ეწოდება შემცირებული, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში – გაზრდილი.

I და II კბილანა თვლების შეხების წერტილის სიჩქარე ერთნაირია, თუ ამ სიჩქარის მოდულს აღვნიშნავთ V -თი, გვექნება (ნახ. 12.7):

$$V = \frac{\omega_1 d_1}{2} = \frac{\omega_2 d_2}{2}. \quad (12.34)$$

მაშასადამე

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (12.35)$$

წყვილი კბილანასათვის, გვექნება

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}, \quad (12.36)$$

სადაც z_1 და z_2 არის I და II კბილანა თვლების კბილანათა რიცხვი.

12.8 ნახაზის შესაბამისად, თუ არ ხდება სრიალი, გვექნება:

$$\nu = \frac{\omega_1 d_1}{2} = \frac{\omega_2 d_2}{2}, \quad (12.37)$$

მაშინ ღვედური გადაცემისათვის მივიღებთ

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1}. \quad (12.38)$$

ჯაჭვური გადაცემისათვის

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (12.39)$$

12.7. ამოცანათა ამოხსნის ნიმუშები უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის მობრუნების კუთხის, კუთხური სიჩქარისა და კუთხური აჩქარების განსაზღვრაზე

უძრავი ღერძის გარშემო სხეულის ბრუნვის შესახებ ამოცანები შეიძლება დავეყთ სამ ძირითად ტიპად: 1 – სხეულის მობრუნების კუთხის, კუთხური სიჩქარისა და კუთხური აჩქარების განსაზღვრის; 2 – მბრუნავი სხეულის წერტილების წრფივი კინემატიკური პარამეტრების განსაზღვრის; 3 – ერთი სხეულიდან მეორეზე მოძრაობის გადაცემაზე ამოცანებად.

ამ ძირითადი ამოცანების ამოხსნის მეთოდების გასაცნობად განვიხილოთ თითოეული ტიპის რამდენიმე ამოცანის ამოხსნა.

პირველი ტიპის ამოცანები

ამოცანა 30. მქნევარას ბორბალი ბრუნავს უძრავი ღერძის გარშემო $\omega = 16$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით. განვსაზღვროთ

რამდენ ბრუნს გააკეთებს ბორბალი $t=5$ წთ-ის განმავლობაში.

ამოხსნა. პირველი ხერხი: 1) ვიპოვოთ $t=5$ წთ=300 წმ განმავლობაში ბორბლის მობრუნების კუთხე რადიანებში. რადგან $\omega = \text{const}$, ამიტომ, გვექნება:

$$\varphi = \omega t = 16 \cdot 300 = 4800 \text{ რად.}$$

2) (12.7) ფორმულით ვიპოვოთ ბორბლის ბრუნთა რიცხვი

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{4800}{2\pi} \approx 764 \text{ ბრუნნი.}$$

მეორე ხერხი:

1) $\omega = 16$ რად/წმ გადავიყვანოთ $\frac{\text{ბრ}}{\text{წთ}}$ -ში, გვექნება

$$n = \frac{30\omega}{\pi} \approx 152,8 \text{ ბრ/წთ.}$$

2) მხედველობაში მივიღოთ, რომ თანაბარი ბრუნვის განტოლება შეიძლება წარმოვადგინოთ ასე: $N = nt$, სადაც N იზომება ბრუნებში, $n - \frac{\text{ბრ}}{\text{წთ}}$ -ში, $t -$ წუთებში. მაშინ N -სათვის გვექნება:

$$N = 152,8 \cdot 5 = 764 \text{ ბრუნნი.}$$

ამოცანა 31. რეაქტიული ძრავას ტურბინის საწყისი ბრუნთა რიცხვი n_0 -ის ტოლია. დროის რაღაც მომენტიდან ის იწყებს თანაბარაჩქარებულ ბრუნვას და დროის ამ მომენტიდან 1 წთ-ის გაელის შემდეგ მისი ბრუნთა რიცხვი n -ს აღწევს. განსაზღვრეთ ტურბინის კუთხური აჩქარება და ტურბინის მიერ 1 წთ-ში გაკეთებული ბრუნთა რიცხვი, თუ $n_0 = 2100$ ბრ/წთ, $n = 3600$ ბრ/წთ.

ამოხსნა. რადგან ტურბინა მოძრაობს თანაბარაჩქარებულად, ამიტომ გამოვიყენოთ (12.12) და (12.13) ფორმულები:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2, \quad (1)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad (2)$$

ჩავთვალოთ, რომ $\varphi_0 = 0$.

მოცემულ შემთხვევაში

$$\omega_0 = \frac{\pi \omega_0}{30} = \frac{\pi \cdot 2100}{30} = 70\pi \text{ რად/წმ};$$

$$\omega = \frac{\pi \omega}{30} = \frac{\pi \cdot 3600}{30} = 120\pi \text{ რად/წმ};$$

$$t = 60 \text{ წმ.}$$

(2)-ში ამ მნიშვნელობების ჩასმით ვიპოვით ტურბინის ε კუთხურ აჩქარებას:

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{120\pi - 70\pi}{60} = \frac{5}{6}\pi \text{ რად/წმ}^2.$$

ხოლო ტურბინის მობრუნების კუთხეს გავიგებთ (1)-დან

$$\varphi = 70\pi \cdot 60 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}\pi \cdot 60^2 = 5700\pi \text{ რად.}$$

60 წმ-ში ტურბინის ბრუნთა რიცხვის საპოვნელად ვისარგებლოთ (12.7) ფორმულით, გვექნება:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{5700\pi}{2\pi} = 2850 \text{ ბრ.}$$

ამოცანა 32. გაქანების პერიოდში მქნევარა თავისი ღერძის გარშემო ბრუნავს $\varphi = 10\pi t^3$ კანონის თანახმად. განვსაზღვროთ მქნევარას კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება, როცა ის გააკეთებს $N = 5$ ბრუნს.

ამოხსნა. ბრუნვითი მოძრაობის მოცემული კანონიდან (12.8) და (12.9) ფორმულების საშუალებით დროის აღებულ მომენტისათვის ვიპოვით მქნევარას ω კუთხური სიჩქარესა და ε კუთხურ აჩქარებას:

$$\omega = \dot{\varphi} = 30\pi t^2, \quad (1)$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = 60\pi t. \quad (2)$$

რადგან მქნევარამ გააკეთა 5 ბრ, ამიტომ მობრუნების კუთხე $\varphi = 2\pi N = 10\pi$ რად. ახლა ვიპოვოთ, t დროის რა მომენტისათვის იქნება მქნევარას მობრუნების კუთხე $\varphi = 10\pi$ რადიანის ტოლი:

$$10\pi t^3 = 10\pi,$$

საიდანაც $t = 1$ წმ. მაშინ (1) და (2) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$\omega = 30\pi \text{ რად/წმ},$$

$$\varepsilon = 60\pi \text{ რად/წმ}.$$

ამოცანა 33. ლილვი ბრუნავს თავის ღერძის გარშემო ისე, რომ მისი ბრუნთა რიცხვი $n=120$ ბრ/წთ, ძრავას გამორთვის შემდეგ ლილვი თანაბარშენელებულად ბრუნავს და $N=40$ ბრ-ის გაკეთების შემდეგ ჩერდება. იპოვეთ, რა დრო გავიდა ძრავას გამორთვიდან ლილვის გაჩერებამდე.

ამოხსნა. რადგან ლილვი ბრუნავს თანაბარშენელებულად, ამიტომ მისთვის გამოვიყენოთ (12.12) და (12.13) ფორმულები (სადაც $\phi_0=0$). ლილვის საწყისი კუთხური სიჩქარე იქნება ω_0 -ის ის მნიშვნელობა, რომელიც მას ჰქონდა ძრავას გამორთვამდე, ე.ი.

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 120}{30} = 4\pi \text{ რად/წმ.}$$

რადგან გაჩერების მომენტიდან კუთხური სიჩქარე $\omega=0$, ამიტომ (12.13)-დან, გვექნება

$$0 = 4\pi + \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = -\frac{4\pi}{t}.$$

რადგან ლილვმა გაჩერებამდე $N=40$ ბრ გააკეთა, ამიტომ მობრუნების კუთხე $\varphi=2\pi N=2\pi \cdot 40=80\pi$ რად. ჩავსვათ ε და φ -ის ნაპოვნი მნიშვნელობები (2.12)-ში, გვექნება:

$$80\pi = 4\pi - \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{t} \cdot t^2,$$

საიდანაც

$$t = 40 \text{ წმ.}$$

ამოცანა 34. $n_0=90$ ბრ/წთ სიხშირით მობრუნავი მქნევარა დროის რომელიმე მომენტიდან იწყებს თანაბარაჩქარებულ ბრუნვას და 1,5 წთ-ში მისი ბრუნთა რიცხვი აღწევს $n=150$ ბრ/წთ-ს. განვსაზღვროთ: მქნევარას კუთხური სიჩქარე; რამდენ ბრუნს გააკეთებს მქნევარა 1,5 წთ-ში; რა სიჩქარე ექნება მქნევარას ცილინდრული ზედაპირზე მდებარე წერტილებს თანაბარაჩქარებულ მოძრაობის დაწყებიდან 45 წმ-ის გავლის შემდეგ, თუ მქნევარას დიამეტრია 1,2 მ?

ამოხსნა. ყველა კუთხური სიდიდე გამოვსახოთ რადიანებში:

1. თუ $n_0=90$ ბრ/წთ, მაშინ

$$\omega_0 = \frac{\pi n_0}{30} = \frac{\pi \cdot 90}{30} = 3\pi \text{ რად/წმ;}$$

თუ $n=150$ ბრ/წთ, მაშინ

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 150}{30} = 5\pi \text{ რად/წმ.}$$

2. (12.13) განტოლებიდან ეიპოვით ε კუთხურ აჩქარებას, იმ პირობით, რომ კუთხური სიჩქარის ω_0 -დან ω -მდე ცვლილება მოხდა $t=1,5$ წთ=90 წმ-ის განმავლობაში:

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{5\pi - 3\pi}{90} = \frac{\pi}{45} \text{ რად/წმ}^2 \approx 0,07 \text{ რად/წმ}^2.$$

3. $t=1,5$ წთ = 90 წმ დროის განმავლობაში სხეულის მობრუნების კუთხეს ეიპოვით (12.14) ფორმულით, ამასთან $\varphi_0 = 0$:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\omega + \omega_0}{2} \cdot t = \frac{5\pi + 3\pi}{2} \cdot 90 = 360\pi \text{ რად.}$$

4. ეიპოვით, ბრუნთა რა რიცხვს შეესაბამება მობრუნების ეს კუთხე. ვისარგებლოთ (12.7) ფორმულით, გვექნება:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{360\pi}{2\pi} = 180 \text{ ბრუნნი.}$$

მაშასადამე, მქნევარა თანაბარაჩქარებული ბრუნვისას აკეთებს 180 ბრუნს.

5. ახლა განვსაზღვროთ თანაბარაჩქარებული ბრუნვის დაწყებიდან $t_1=45$ წმ-ის გაელის შემდეგ მქნევარას ფერსოზე მდებარე წერტილების სიჩქარე $V_1 = \omega_1 R$ ფორმულის ძალით. ამისათვის საჭიროა დროის ამ მომენტისათვის (12.13) ფორმულით ეიპოვოთ მქნევარას ω_1 კუთხური სიჩქარე:

$$\omega_1 = \omega_0 + \varepsilon_1 = 3\pi + \frac{\pi}{45} \cdot 45 = 4\pi \text{ რად/წმ.}$$

ეიციით, რომ $R = \frac{d}{2} = \frac{1,2}{2} = 0,6$ მ, მივიღებთ:

$$V_1 = \omega_1 \cdot R = 4\pi \cdot 0,6 = 2,4\pi \approx 7,54 \text{ მ/წმ.}$$

ამოცანა 35. პირველი 20 წამის განმავლობაში ლილვის ბრუნვა ხდება $\varphi = 1,2t^3$ განტოლების თანახმად.

განვსაზღვროთ 20 წმ-ის ბოლოსათვის და ბრუნვის დაწყების მომენტში ლილვის კუთხური სიჩქარე; აგრეთვე დროის მე-10 და 20 წმ-ის ბოლოს კუთხური აჩქარება; რამდენ ბრუნს გააკეთებს ლილვი 20 წმ-ის განმავლობაში?

ამოხსნა. 1. განვსაზღვროთ 20 წმ-ის განმავლობაში ლილვის ბრუნთა რიცხვი. ამისათვის წინასწარ განვსაზღვროთ $t=20$ წმ-ში მობრუნების კუთხის სიდიდე:

$$\varphi = 1,2t^3 = 1,2 \cdot 20^3 = 9600 \text{ რად.}$$

მაშასადამე,

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{9600}{2\pi} \approx 1529 \text{ ბრუნი.}$$

2. ვიპოვოთ ლილვის კუთხური სიჩქარის ცვლილების კანონი (12.8) ფორმულის თანახმად

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 3,6t^2.$$

3. ვიპოვოთ დროის $t=20$ წმ მომენტისათვის ლილვის საბოლოო კუთხური სიჩქარე:

$$\omega_0 = 3,6 \cdot t^2 = 3,6 \cdot 20^2 = 1400 \text{ რად/წმ.}$$

გამოვსახოთ ეს კუთხური სიჩქარე ბრ/წთ-ებში, გვექნება

$$n_0 = \frac{30\omega_0}{\pi} \approx 13758 \text{ ბრ/წთ.}$$

4. ვიპოვოთ ლილვის კუთხური აჩქარების განტოლება (12.9) ფორმულის თანახმად

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 7,2t.$$

5. ვიპოვოთ დროის საწყისი ($t_0=0$), მე-10 წმ-ისა ($t_1=10$ წმ) და მე-20 წამის ($t_2=20$ წმ) ბოლოს ლილვის კუთხური აჩქარება:

$$\varepsilon_0 = 7,2 \cdot 0 = 0; \quad \varepsilon_1 = 7,2 \cdot 10 = 72 \text{ რად/წმ}^2, \quad \varepsilon_2 = 7,2 \cdot 20 = 144 \text{ რად/წმ}^2.$$

12.8. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის წერტილების სიჩქარეებისა და აჩქარებების განსაზღვრაზე

ამოცანა 36. $R=0,5$ მ რადიუსიანი თვალი თანაბრად ბრუნავს ღერძის გარშემო და 1 წმ-ში ასრულებს 4 ბრუნს. ვიპოვოთ თვალის ფერსოზე მდებარე წერტილის სიჩქარე და აჩქარება.

ამოხსნა. რადგან თვალი ბრუნავს თანაბრად, ამიტომ (12.10) ფორმულის თანახმად

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t}.$$

$t=1$ წმ დროის განმავლობაში თვლის მობრუნების კუთხე უდრის $\varphi - \varphi_0 = 4 \cdot 2\pi = 8\pi$ რადიანს, მაშასადამე,

$$\omega = \frac{8\pi}{1} = 8\pi \text{ წმ}^{-1}.$$

(12.23) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$V = \omega \cdot R = 8\pi \cdot 0,5 \approx 12,6 \text{ მ/წმ}.$$

რადგან $V = \text{const}$, ამიტომ $W_r = 0$ და სრული აჩქარება ნორმალური აჩქარების ტოლი იქნება:

$$W = W_n = R \cdot \omega^2 = 0,5 \cdot 64\pi^2 \approx 315,5 \text{ მ/წმ}^2.$$

ამოცანა 37. $d = 0,06$ მ დიამეტრის მქონე ლილვი ბრუნავს თანაბრად $n = 1200$ ბრ/წთ სიხშირით. განესაზღვროთ ლილვის ზედაპირზე მდებარე წერტილების სიჩქარე და აჩქარება (ნახ. 12.9).

ამოხსნა. ლილვის ზედაპირზე მდებარე ნებისმიერი წერტილის სიჩქარეს ვიპოვოთ (12.23) და (12.11) ფორმულების გამოყენებით. გვექნება:

$$V = \omega R = \frac{\pi n}{30} \cdot R = \frac{\pi \cdot 1200}{30} \cdot \frac{0,06}{2} \approx 3,77 \text{ მ/წმ}.$$

ლილვი ბრუნავს თანაბრად, მაშასადამე, მის ზედაპირზე მდებარე წერტილების სიჩქარეთა მოდულები იქნება უცვლელი. რადგან $V = \text{const}$, ამიტომ მსხები აჩქარება

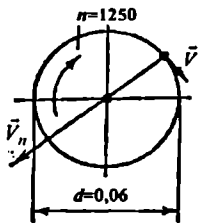
$$W_r = \dot{V} = 0.$$

ნორმალურ აჩქარებას გავიგებთ (12.30) ფორმულით:

$$W_n = \frac{V^2}{R} = \frac{3,77^2}{0,03} = 474 \text{ მ/წმ}^2,$$

რომელიც აგრეთვე მოცემულ მომენტში იქნება უცვლელი, ამიტომ ლილვის ფერსოზე მდებარე წერტილების სრული აჩქარება $W = W_n = 474 \text{ მ/წმ}^2$.

ამოცანა 38. განესაზღვროთ დედამიწის ეკვატორსა და $\alpha = 41^\circ 43'$ განედზე მდებარე თბილისის ზედაპირებზე მდებარე



ნახ. 12.9

A და C წერტილების სიჩქარეები. მხედველობაში მივიღოთ მხოლოდ ღერძის გარშემო დედამიწის ბრუნვა (ნახ. 12.10). დედამიწის საშუალო რადიუსი $R = 6370$ კმ-ია და $\cos 41^\circ 43' = 0,7503$.

ამოხსნა. დედამიწა თავის ღერძის გარშემო ერთ ბრუნს (2π რად) ასრულებს დღე-ღამის განმავლობაში (86400 წმ). დედამიწის კუთხური სიჩქარე იქნება:

$$\omega = \frac{2\pi}{86400} = 727 \cdot 10^{-7} \text{ რად/წმ.}$$

ეკვატორზე მდებარე A წერტილის სიჩქარის საპოვნელად ვისარგებლოთ (12.23) ფორმულით, გვექნება:

$$V_A = \omega R = 727 \cdot 10^{-7} \cdot 6370 \cdot 10^3 = 463 \text{ მ/წმ.}$$

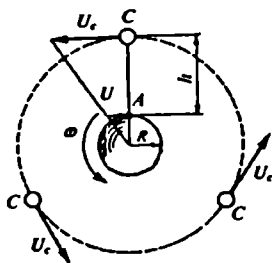
იმისათვის, რომ ვიპოვოთ თბილისში მდებარე რომელიმე C წერტილის სიჩქარე, საჭიროა ვიპოვოთ თბილისიდან დედამიწის ღერძამდე დაშორების r მანძილი (თბილისი ბრუნავს დედამიწის ღერძის გარშემო r რადიუსიან წრეწირზე). 12.10 ნახაზის მიხედვით

$$r = R \cos \alpha = 6371 \cdot 10^3 \cdot 0,7503 \approx 478 \cdot 10^4 \text{ მ.}$$

მაშინ

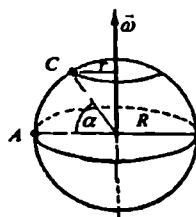
$$V_c = \omega \cdot r = 727 \cdot 10^{-7} \cdot 478 \cdot 10^4 \approx 348 \text{ მ/წმ.}$$

ამოცანა 39. ტელემაუწყებლობის სატრანსლაციო სისტემის პროექტით უნდა გაეშვათ დედამიწის სამი ხელოვნური თანამგზავრი. ეს თანამგზავრები ეკვატორის სიბრტყეში მდებარე წრიულ ორბიტაზე ტოლგვერდა სამკუთხედის წვეროებში უნდა განლაგებულიყო დედამიწის მიმართ უძრავად (ნახ. 12.11). რა სიჩქარით უნდა მოძრაობდეს თანამგზავრები, თუ დედამიწიდან $h = 35800$ კმ მანძილზე იმყოფებიან? განსაზღვრეთ აგრეთვე ეკვატორზე მდებარე A წერტილის სიჩქარე, თუ ეკვატორის რადიუსი $R = 6370$ კმ.



ნახ. 12.11

ამოხსნა. თუ თანამგზავრები დედამიწის მიმართ უძრავი იქნება, მაშინ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ დედამიწასთან ერთად ისინი ადგენენ უცვლელ



ნახ. 12.10

სისტემას. ჯერ განვსაზღვროთ A წერტილის $\vec{V}_A$ სიჩქარის მოდული, გვექნება:

$$V_A = \omega \cdot R = 727 \cdot 10^{-7} \cdot 6370 \cdot 10^3 \approx 433 \text{ მ/წმ.}$$

რადგან თანამგზავრები დედამიწასთან ერთად მოძრაობენ დედამიწის ღერძის გარშემო, ამიტომ ამ სისტემის წერტილთა სიჩქარეები პირდაპირპროპორციულია ბრუნვის ღერძიდან მათი დაშორებისა:

$$\frac{V_c}{V_A} = \frac{R+h}{R} \Rightarrow V_c = \frac{V_A(R+h)}{R},$$

ე.ი.

$$V_c = \frac{463(6370 + 35800) \cdot 10^3}{6370 \cdot 10^3} = 3060 \text{ მ/წმ.}$$

ამოცანა 40. გაქანების პერიოდში მქნევარა ბრუნავს $\varphi = 2\pi$ კანონის თანახმად. განვსაზღვროთ ბრუნვის ღერძიდან $R = 0,5$ მ მანძილებით დაშორებული წერტილების ხაზოვანი სიჩქარე და აჩქარება იმ მომენტისათვის, როცა ამ წერტილების მხები და ნორმალური აჩქარებები ერთმანეთს გაუტოლდება.

ამოხსნა. ჯერ (12.8) და (12.9) ფორმულების გამოყენებით ვიპოვოთ მქნევარას კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება

$$\omega = \dot{\varphi} = 6t^2 \text{ წმ}^{-1}; \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = 12t \text{ წმ}^{-2}. \quad (1)$$

წერტილთა მხები და ნორმალური აჩქარებებისათვის გვაქვს (12.30) ფორმულები, ე.ი. $W_t = R\varepsilon$; $W_n = R\omega^2$. განვსაზღვროთ ის t დრო, როცა $W_t = W_n$. ცხადია, ამ მომენტისათვის $\varepsilon = \omega^2$, ანუ $12t = 6t^2$, საიდანაც $t = 2$ წმ.

ჩავსვათ t დროის ეს მნიშვნელობა (1)-ში და ვიპოვიოთ ω -სა და ε -ის მნიშვნელობებს, ე.ი.

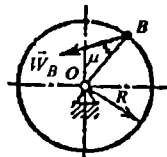
$$\omega = 6 \cdot 2^2 = 24 \text{ წმ}^{-1}; \quad \varepsilon = 12 \cdot 2 = 24 \text{ წმ}^{-2}.$$

დროის ამ მომენტისათვის საძიებელი აჩქარება გამოვთვალოთ (2.31) ფორმულით გვექნება:

$$W = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0,5 \cdot \sqrt{24^2 + 24^4} = 288 \text{ მ/წმ}^2.$$

რადგან $\lg \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 1$, ამიტომ, საძიებელი აჩქარების $\vec{W}$ ვექტორი R რადიუსთან შეადგენს $\alpha = 45^\circ$ კუთხეს.

ამოცანა 41. $R=0,5$ მ რადიუსიანი ბორბალი იწეებს O ღერძის გარშემო ბრუნვას უძრავი მდგომარეობიდან თანაბარ-აჩქარებულად. ბორბლის ფერსოზე მდებარე B წერტილს გარკვეულ მომენტში აქვს $W=40$ მ/წმ² აჩქარება, რომელიც რადიუსთან ადგენს $\mu=30^\circ$ კუთხეს. განესაზღვროთ ბორბლის ბრუნვის განტოლება, დროის $t=5$ წმ მომენტისათვის B წერტილის სიჩქარე და ნორმალური აჩქარება (ნახ. 12.12).



ნახ. 12.12

ამოხსნა. როგორც ვიცით, $W_r = R\varepsilon$. ამოცანის პირობის თანახმად (ნახ. 12.12),

$$W_r = W \cdot \cos 60^\circ = 40 \cdot \frac{1}{2} = 20 \text{ მ/წმ}^2.$$

თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ წინა ფორმულაში, მივიღებთ:

$$0,5 \cdot \varepsilon = 20, \text{ საიდანაც } \varepsilon = 40 \text{ რად/წმ}^2.$$

თანაბარცვლადი ბრუნვის (12.12) განტოლებაში $\varphi_0 = \omega_0 = 0$, ე.ი. (12.17) განტოლებიდან მობრუნების კუთხე $\varphi = \frac{1}{2} \varepsilon t^2$ და გვაქვს

$$\varphi = 20t^2 \text{ (ბრუნვის განტოლება).}$$

ახლა ვიპოვოთ B წერტილის სიჩქარე და ნორმალური აჩქარება, ამისათვის გამოვიყენოთ (12.23) და (12.30) ფორმულები, ე.ი.

$$V = \omega R, \quad W_n = R\omega^2.$$

ცხადია, $\omega = \dot{\varphi} = 40t$, როცა $t=5$ წმ, მაშინ $\omega = 200$ რად/წმ, ამიტომ

$$V = 200 \cdot 0,5 = 100 \text{ მ/წმ},$$

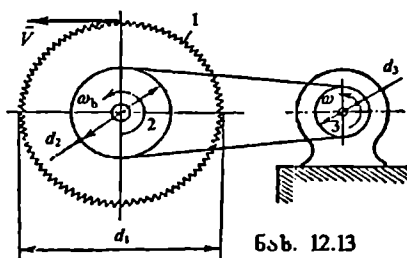
ხოლო

$$W_n = 0,5 \cdot 200^2 = 20000 \text{ მ/წმ}^2.$$

12.9. ამოცანები ამოხსნის ნიმუშები ერთი სხეულიდან მეორეზე ბრუნვითი მოძრაობის გადაცემაზე

ამოცანა 42. ელექტროხერხი 1-ის დიამეტრი $d_1 = 600$ მმ. ხერხის ღერძზე ჩამოცმულია $d_2 = 300$ მმ დიამეტრის თვალი

2, ხოლო ეს თვალი უსასრულო ღვედითაა შეერთებული ძრავას თვალთან, რომლის დიამეტრი $d_3 = 120$ მმ (ნახ. 12.13). რა კუთხური სიჩქარით უნდა მოძრაობდეს ძრავას თვალი,



ნახ. 12.13

რომ ხერხის კბილების სიჩქარე არ აღემატებოდეს 15 მ/წმ-ს?

ამოხსნა. 1. რადგან ხერხი 1 და თვალი 2 ჩამოცმული არის ერთი და იმავე ღერძზე (ლილეზე), ამიტომ მათ აქვს ერთი და იგივე ω_b კუთხური სიჩქარე. ამასთან, ხერხის კბილების V_b მ/წმ ხაზოვანი სიჩქარე

დამოკიდებულია ω_b -ზე.

$$V_b = R\omega_b, \text{ რადგან } R = \frac{1}{2}d_b,$$

ამიტომ

$$V_b = \frac{1}{2}d_b \cdot \omega_b.$$

2. ვიპოვოთ თვალი 2-ის კუთხური სიჩქარე, რომელიც უზრუნველყოფს ხერხის კბილების საჭირო სიჩქარეს:

$$\omega_b = \frac{2V_b}{d_b} = \frac{2 \cdot 15}{0,6} = 50 \text{ რად/წმ},$$

$$(d_b = d_2 = 600 \text{ მმ} = 0,6 \text{ მ}).$$

3. ახლა ვიპოვოთ ძრავას თვალის ω კუთხური სიჩქარე. 2 და 3 თვლები შეერთებულია უჭიმი ღვედით, რომელიც არ სრიალებს თვლებზე. ამიტომ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ მისი ყველა წერტილი მოძრაობს ერთი და იმავე მოდულით ტოლი $\vec{V}$ სიჩქარით. ეს იმას ნიშნავს, რომ 2 და 3 თვლების ფერსობებზე მდებარე წერტილთა სიჩქარე ერთნაირია და $\vec{V}$ -ს მოდულის ტოლი არის. (12.34) ფორმულის ძალით გვექნება:

$$V = \frac{d_2}{2} \cdot \omega_b = \frac{d_3}{2} \cdot \omega \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_b} = \frac{d_2}{d_3},$$

საიდანაც

$$\omega = \frac{d_2}{d_3} \cdot \omega_b = \frac{300}{120} \cdot 50 = 125 \text{ რად/წმ}.$$

4. თუ ამ კუთხურ სინქარეს გადავიყვანოთ ბრ/წთ-ში, მაშინ გვექნება:

$$n = \frac{300\omega}{\pi} \approx 1200 \text{ ბრ/წთ.}$$

მაშასადამე, იმისათვის, რომ ხერხის კბილებს ჰქონდეს არაუმეტეს 15 მ/წმ სინქარე, ძრავას თვალი უნდა ბრუნავდეს $\omega = 125$ რად/წმ კუთხური სინქარით (ანუ 1200 ბრ/წთ).

ამოცანა 43. $r_1 = 1,2$ მ რადიუსიანი კბილანა მოდებულია $r_2 = 0,8$ მ რადიუსიან კბილანაზე. $r_3 = 0,6$ მ რადიუსიან ლილვზე დახვეულია ძაფი, რომლის ბოლოზე დაკიდებული P ტვირთი ვერტიკალურად ქვევით მოძრაობს $S = 2r_1^2$ მ კანონის თანახმად. განვსაზღვროთ $t = 1$ წმ მომენტისათვის II კბილანას კუთხური სინქარე და კუთხური აჩქარება, აგრეთვე მის ფერსოზე მდებარე B წერტილის მხები, ნორმალური და სრული აჩქარება (ნახ. 12.14).

ამოხსნა. რადგან ძაფი უჭიმარია, ამიტომ P ტვირთისა და ლილვის ფერსოზე მდებარე C წერტილის სინქარეები ერთმანეთის ტოლია, ამიტომ გვექნება:

$$V_c = \dot{S} = 6t^2 \text{ სმ/წმ.}$$

A წერტილი ერთდროულად ეკუთვნის როგორც I კბილანას, ისე II კბილანასაც, ამიტომ

$$V_A = \omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2, \quad (1)$$

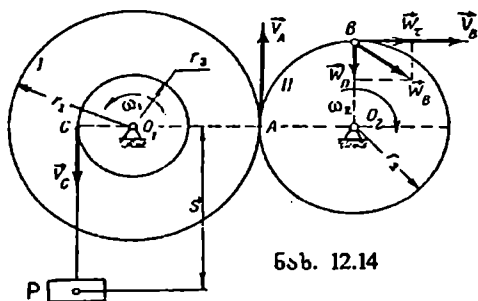
სადაც ω_1 და ω_2 შესაბამისად I და II კბილანების

კუთხური სინქარეებია. (1)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (2)$$

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ ω_2 , საჭიროა ჯერ ვიპოვიოთ ω_1 . შევნიშნოთ, რომ I კბილანისა და ლილვის კუთხური სინქარე ერთი და იგივეა. ამიტომ (12.23)-ის თანახმად გვექნება:

$$\omega_1 = \frac{V_c}{r_3} = \frac{6t^2}{0,6} = 10t^2 \text{ წმ}^{-1},$$



ნახ. 12.14

ხოლო (12.9)-ის თანახმად I კბილანას კუთხური აჩქარება ტოლი იქნება:

$$\varepsilon_1 = \dot{\omega}_1 = 20r \text{ წმ}^{-2}.$$

I და II კბილანები ბრუნავს თანაბრაჩქარებულად, ამიტომ (12.28) ფორმულის თანახმად გვექნება: $\omega_1 = \varepsilon_1 t$ და $\omega_2 = \varepsilon_2 t$, საიდანაც

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (3)$$

(3)-დან ვიპოვით II კბილანას საძიებელ ω_2 კუთხურ სიჩქარეს და ε_2 კუთხურ აჩქარებას:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2} = 10r^2 \cdot \frac{1,2}{0,8} = 15r^2 \text{ წმ}^{-1};$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{r_1}{r_2} = 20r^2 \cdot \frac{1,2}{0,8} = 30r \text{ წმ}^{-2}.$$

როცა $t=1$ წმ, მაშინ $\omega_2 = 15 \text{ წმ}^{-1}$ და $\varepsilon_2 = 30 \text{ წმ}^{-2}$.

II კბილანას ფერსოზე მდებარე B წერტილის მხები, ნორმალური და სრული აჩქარებების გამოსათვლელად ვისარგებლოთ (12.30) და (12.31) ფორმულებით, გვექნება:

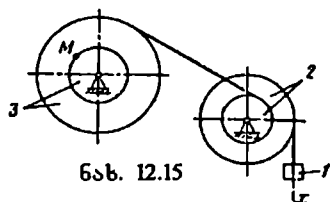
$$W_r = r_2 \varepsilon_2 = 0,8 \cdot 30r^2 = 24r^2 \text{ მ/წმ}^2;$$

$$W_n = r_2 \omega_2^2 = 0,8 \cdot 225r^4 = 180r^4 \text{ მ/წმ}^2.$$

$$W = r_2 \sqrt{\varepsilon_2^2 + \omega_2^4} = 12r \sqrt{4 + 225r^4} \text{ მ/წმ}^2.$$

როცა $t=1$ წმ, მაშინ $W_r = 24 \text{ მ/წმ}^2$, $W_n = 180 \text{ მ/წმ}^2$, $W \approx 182 \text{ მ/წმ}^2$.

ამოცანა 44. მოცემულია I ტვირთის წრფივი გადატანითი მოძრაობის განტოლება: $x = 20t^2$ სმ. განვსაზღვროთ მექანიზმის M წერტილის სიჩქარე, მხები, ნორმალური და სრული აჩქარება დროის იმ მომენტში, როცა ტვირთის მიერ გავლილი მანძილი $S = 80$ სმ-ია, თუ $R_2 = 30$ სმ, $r_2 = 15$ სმ, $R_3 = 40$ სმ, $r_3 = 20$ სმ (ნახ. 12.15).



ნახ. 12.15

ამოხსნა. გავიგოთ დროის t_1 მომენტი, როცა ტვირთის მიერ გავლილი მანძილი $S = 80$ სმ-ს:

$$S = x(t_1) - x(0) = 20t_1^2,$$

საიდანაც

$$t_1 = \sqrt{\frac{80}{20}} = 2 \text{ წმ.}$$

მოძრაობის განტოლების დროით გაწარმოებით მივიღებთ ტვირთის სიჩქარეს:

$$V_1 = \dot{x} = 40t \text{ სმ/წმ.}$$

2 რგოლის კუთხური სიჩქარე

$$\omega_2 = \frac{V_1}{R_2} = \frac{40t}{30} = \frac{4}{3}t \text{ წმ}^{-1}.$$

r_2 და R_3 რადიუსიანი ბორბლების ფერსოებზე მდებარე წერტილების ხაზოვანი სიჩქარე ერთი და იმავე V_2 -ის ტოლია. ნახაზიდან გვაქვს:

$$V_2 = r_2 \cdot \omega_2 = 15 \cdot \frac{4}{3}t = 20t \text{ სმ/წმ.}$$

მაშასადამე მე-3 ბორბლის კუთხური სიჩქარე:

$$\omega_3 = \frac{V_2}{R_3} = \frac{20t}{40} = \frac{1}{2}t \text{ წმ}^{-1}.$$

კუთხური აჩქარება

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = \frac{1}{2} \text{ წმ}^{-2} = \text{const.}$$

M წერტილის სიჩქარე

$$V = r_3 \cdot \omega_3 = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10 \text{ სმ/წმ.}$$

როცა $t = 2$ წმ, მაშინ $V = 20$ სმ/წმ

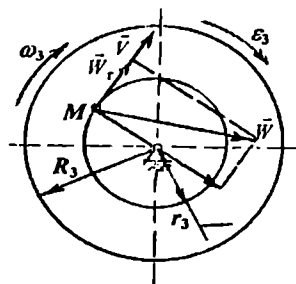
და $\vec{V}$ ვექტორი მიმართულია r_3 რადიუსის მართობულად მე-3 ბორბლის ბრუნვის მხარეს (ნახ. 12.16).

M წერტილის მხები აჩქარება

$$W_r = r_3 \cdot \varepsilon_3 = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10t \text{ სმ/წმ}^2.$$

$\vec{W}_r$ ვექტორს აქვს $\vec{V}$ სიჩქარის მიმართულება, რადგან განსახილველ მაგალითში ბორბლის ბრუნვა აჩქარებულია ($W_r > 0$).

M წერტილის ნორმალური აჩქარება



ნახ. 12.16

$$W_n = r_3 \cdot \omega_3^2 = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 20 \text{ სმ/წმ}^2.$$

$\vec{W}_n$ ვექტორი მიმართულია ბორბლის r_3 რადიუსის გასწვრივ ცენტრისაკენ (ნახ. 12.16).

სრული აჩქარება

$$W = \sqrt{W_r^2 + W_n^2} = \sqrt{10^2 + 20^2} = 10\sqrt{5} \text{ სმ/წმ}^2.$$

12.10. სავარჯიშო ამოცანები უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის მობრუნების კუთხის, კუთხური სიჩქარისა და კუთხური აჩქარების განსაზღვრახე

12.1. განსაზღვრეთ საათის: 1. წამის ისრის; 2. წუთის ისრის; 3. საათის მანქანებელი ისრის კუთხური სიჩქარე.

პასუხი: $\omega_{\text{წმ}} = 0,105 \text{ რად/წმ}$, $\omega_{\text{წთ}} = 0,00175 \text{ რად/წმ}$,

$\omega_{\text{სა}} = 0,000145 \text{ რად/წმ}$.

12.2. დენის გამორთვის შემდეგ $\omega = 20\pi \text{ წმ}^{-1}$ კუთხური სიჩქარით მბრუნავმა ვენტილატორმა გაჩერებამდე შეასრულა 60 ბრუნი. განსაზღვრეთ, რა დრო გავიდა დენის გამორთვიდან ვენტილატორის გაჩერებამდე, აგრეთვე კუთხური აჩქარება, თუ ის მუდმივი იყო.

პასუხი: $t = 12 \text{ წმ}$; $\varepsilon = \frac{5}{3}\pi \approx 4,8 \text{ რად/წმ}^2$.

12.3. ძრავას გამორთვის შემდეგ $n = 1200 \text{ ბრ/წთ}$ კუთხური სიჩქარით მბრუნავმა პროპელერმა გაჩერებამდე შეასრულა 80 ბრუნი. განსაზღვრეთ, რა დრო გავიდა პროპელერის გაჩერებამდე, თუ პროპელერის ბრუნვა თანაბრად შენელებულია.

პასუხი: $t = 8 \text{ წმ}$.

12.4. ლილვი მოძრაობს მუდმივი $\varepsilon = \frac{\pi}{4} \text{ წმ}^{-2}$ კუთხური აჩქარებით. პირველი 12 წმ-ის განმავლობაში მან შეასრულა 39 ბრუნი. განსაზღვრეთ საწყის მომენტში და 20 წმ-ის ბოლოს ლილვის კუთხური სიჩქარე.

პასუხი: $\omega_0 = 5\pi \text{ რად/წმ}$, $\omega = 10\pi \text{ რად/წმ}$.

12.5. ლილვი თანაბრად ბრუნავს და 5 წთ-ში ასრულებს 750 ბრუნს. განსაზღვრეთ ლილვის კუთხური სიჩქარე.

პასუხი: $\omega = 25\pi$ რად/წმ.

12.6. მქნევარას ბორბალი თანაბრად ბრუნავს $\omega = 20$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით. რამდენ ბრუნს ასრულებს ბორბალი 10 წუთში.

პასუხი: $N = 1910$ ბრ.

12.7. მქნევარა თვალი უძრავი მდგომარეობიდან იწყებს თანაბრჩქარებულ ბრუნვას; მოძრაობის დაწყებიდან 10 წთ-ის შემდეგ მას აქვს 120 ბრ/წთ-ის შესაბამისი კუთხური სიჩქარე, რამდენ ბრუნს ასრულებს თვალი 10 წუთში.

პასუხი: $N = 600$ ბრ.

12.8. ელექტროძრავას ლილვი დენის გამორთვის შემდეგ ბრუნავს თანაბარშენელებულად და 20 წმ-ში ჩერდება. განსაზღვრეთ ლილვის კუთხური აჩქარება და 20 წმ-ში შესრულებული ბრუნთა რიცხვი.

პასუხი: $\varepsilon = -\pi$ რად/წმ², $N = 100$ ბრუნი.

12.9. ლილვი უძრავი მდგომარეობიდან იწყებს ბრუნვას $\varepsilon = 2\pi$ რად/წმ² კუთხური აჩქარებით. იპოვეთ ლილვის კუთხური სიჩქარე და 20 წმ-ში გაკეთებული ბრუნთა რიცხვი.

პასუხი: $\omega = 40\pi$ რად/წმ, $N = 200$ ბრუნი.

12.10. სხეული უძრავი მდგომარეობიდან იწყებს თანაბრჩქარებულ ბრუნვას. იმ მომენტში, როცა მისი კუთხური სიჩქარე რიცხობრივად მობრუნების კუთხის ტოლია, ის აკეთებს 120 ბრ/წთ-ში. რისი ტოლია სხეულის კუთხური აჩქარება და რამდენი ბრუნი გააკეთა პირველ 18 წმ-ში?

პასუხი: $\varepsilon = 2\pi$ რად/წმ², $N = 162$ ბრუნი.

12.11. ფირფიტა უძრავი მდგომარეობიდან იწყებს თანაბრჩქარებულ ბრუნვას. დროის $t_1 = 8$ წმ მომენტისათვის მისი კუთხური სიჩქარე $\omega_1 = 4\pi$ წმ⁻¹. რამდენ ბრუნს გააკეთებს ფირფიტა დროის $t_1 = 8$ წმ მომენტიდან $t_2 = 12$ წმ მომენტამდე.

პასუხი: $N = 10$ ბრუნი.

12.12. სხეული ბრუნავს თანაბარჩქარეულად. დროის $t_1 = 10$ წმ მომენტისათვის მას ჰქონდა $\omega_1 = \pi$ რად/წმ კუთხური სიჩქარე, ხოლო $t_2 = 20$ წმ მომენტისათვის $\omega_2 = 1,5$ რად/წმ. რისი ტოლია სხეულის კუთხური აჩქარება და საწყისი კუთხური სიჩქარე? რა კუთხით შემობრუნდება სხეული t_1 მომენტიდან t_2 მომენტამდე?

პასუხი: $\varepsilon = \frac{\pi}{20}$ რად/წმ²; $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ რად/წმ²; $\varphi = 12,5\pi$ რად.

12.13. უძრავი ღერძის გარშემო სხეულის ბრუნვა მოცემულია $\varphi = 10t - 2t^3$ კანონით (φ —რადიანებში, t —წამებში). დროის $t = 1$ წმ მომენტისათვის ბრუნვა აჩქარებულია, თუ შენელებული?

პასუხი: შენელებული უარყოფითი მიმართულებით.

12.14. სხეულის კუთხური აჩქარება განისაზღვრება

$\varepsilon = 6t - t^2 \left(\frac{\text{რად}}{\text{წმ}^2} \right)$ განტოლებით. განსაზღვრეთ მისი კუთხური სიჩქარე დროის $t = 2$ წმ მომენტისათვის, თუ საწყისი კუთხური სიჩქარე $\omega_0 = 0$.

პასუხი: $\omega = 4$ რად/წმ.

12.15. ლილვი უძრავი მდგომარეობიდან იწყებს ბრუნვას ისე, რომ მისი კუთხური აჩქარება $\varepsilon = 3t \left(\frac{\text{რად}}{\text{წმ}^2} \right)$ განტოლებით განისაზღვრება. იპოვეთ დროის $t = 4$ წმ მომენტისათვის ლილვის კუთხური სიჩქარე, აგრეთვე ბრუნვის კანონი, იმ შემთხვევისათვის, როცა $t = 0$, მაშინ $\varphi_0 = 0$.

პასუხი: $\omega = 24$ რად.წმ; $\varphi = \frac{1}{2}t^3$ რად.

12.16. უძრავი ღერძის გარშემო სხეულის ბრუნვისას მისი კუთხური აჩქარება $\varepsilon = 6t - 3t^2 \left(\frac{\text{რად}}{\text{წმ}^2} \right)$ განტოლებით განისაზღვრება. დროის $t = 2$ წმ მომენტისათვის იპოვეთ კუთხური სიჩქარე, თუ საწყისი კუთხური სიჩქარე $\omega_0 = 0$.

პასუხი: $\omega = 4$ რად/წმ.

12.17. გაქანების პერიოდში მქნევარა ბრუნავს თავისი ღერძის გარშემო $\varphi = \frac{\pi}{4}t^3$ კანონის თანახმად. განსაზღვრეთ მქნევარას კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება იმ მომენტში, როცა ის 27 ბრუნს შეასრულებს.

პასუხი: $\omega = 27\pi$ წმ⁻¹; $\varepsilon = 9\pi$ წმ⁻².

12.18. მქნევარა უძრაობის მდგომარეობიდან იწყებს თანაბარ-აჩქარებულ ბრუნვას $\varepsilon = 0,5$ რად/წმ² კუთხური აჩქარებით. რამდენ წამში მიაღწევს მისი ბრუნთა რიცხვი 360 ბრ/წთ-ს? რამდენი წამი უნდა იბრუნოს მქნევარამ იგივე კუთხური აჩქარებით, რომ მოძრაობის დაწყებიდან შეასრულოს 600 ბრუნი?

პასუხი: $t_1 = 75,4$ წმ, $t_2 = 123$ წმ.

12.19. ძრავას როტორი, რომლის სიჩქარეა 12000 ბრ/წთ, დროის $\Delta t_1 = t_1 - 0 = 25$ წმ-ის განმავლობაში ბრუნავდა $\varepsilon = -30$ რად/წმ² კუთხური აჩქარებით. შემდეგ დროის $\Delta t_2 = t_2 - t_1 = 45$ წმ-ის განმავლობაში როტორი ბრუნავდა თანაბრად, ხოლო დროის $\Delta t_3 = t_3 - t_2 = 26$ წმ-ის განმავლობაში – თანაბრ-აჩქარებულად და გაჩერდა. რამდენი ბრუნი გააკეთა როტორმა მოძრაობის დაწყებიდან გაჩერებამდე?

პასუხი: $N \approx 8200$ ბრუნი.

12.20. სხეული ბრუნავს $\varphi = 5t + 1,2t^2$ განტოლების თანახმად. განსაზღვრეთ რა დროში მიაღწევს სხეულის ω კუთხური სიჩქარე 70 რად/წმ-ს? რამდენ ბრუნის გაკეთებას მოასწრებს სხეული ამ დროში და რა მნიშვნელობას მიაღწევს მისი ε კუთხური აჩქარება?

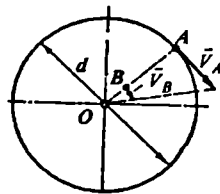
პასუხი: $t = 4,25$ წმ; $N \approx 18$ ბრუნი; $\varepsilon = 30,6$ რად/წმ².

12.21. ლილვის შკივის დიამეტრია 40 მმ. რა კუთხური აჩქარებით უნდა ბრუნავდეს ლილვი შკივთან ერთად, რომ შკივის ფერსოზე მდებარე წერტილებმა იმოძრაონ $S = 0,01t^2$ მ კანონის თანახმად. განსაზღვრეთ, მოძრაობის დაწყებიდან $t = 20$ წმ-ის გასვლის შემდეგ შკივის კუთხური სიჩქარე და ამ დროის განმავლობაში შესრულებულ ბრუნთა რიცხვი.

პასუხი: $\varepsilon = 1$ რად/წმ²; $\omega = 21$ რად/წმ; $N = 32$ ბრუნი.

12.11. საეარჯიშო ამოცანები უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის წერტილთა სიჩქარისა და აჩქარების განსაზღვრაზე

12.22. უძრავი O ღერძის გარშემო მბრუნავი თვალის ფერსოზე მდებარე A წერტილის სიჩქარე $V_A = 50$ სმ/წმ, ხოლო B წერტილის სიჩქარე $V_B = 10$ სმ/წმ (ნახ. 12.17). განსაზღვრეთ თვალის კუთხური სიჩქარე და დიამეტრი, თუ $OB = 5$ სმ.



ნახ. 12.17

პასუხი: $\omega = 2$ რად/წმ; $d = 50$ სმ.

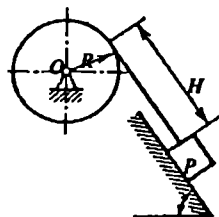
12.23. თვალი თანაბრად ბრუნავს O ღერძის გარშემო. ბრუნვის ღერძიდან $OA = 3$ სმ მანძილით დაშორებული A წერტილის სიჩქარე $V_A = 18$ სმ/წმ. განსაზღვრეთ ერთ წუთში თვალის შემობრუნების φ კუთხე, აგრეთვე ბრუნვის ღერძიდან 12 სმ მანძილით დაშორებული B წერტილის სიჩქარე და აჩქარება.

პასუხი: $\varphi = 360$ რად; $V_B = 0,72$ მ/წმ; $W_B = 4,32$ მ/წმ².

12.24. $I = 1$ მ რადიუსიანი მქნევარა ბრუნავს $\varphi = 2t^2$ (ფრადიანებში, t -წამებში) კანონის თანახმად. განსაზღვრეთ მქნევარას ფერსოზე მდებარე წერტილის სიჩქარე დროის იმ მომენტში, როცა წერტილის მხები აჩქარება მისი ნორმალური აჩქარების ტოლია, აგრეთვე იპოვეთ დროის ის მომენტი, როცა აჩქარება რადიუსთან შეადგენს 45° -იან კუთხეს.

პასუხი: $V = 2$ მ/წმ; $t = 0,5$ წმ.

12.25. $R = 0,5$ მ რადიუსიანი ფირფიტა მოძრაობაში მოჰყავს P ტვირთს, რომელიც დახრილ სიბრტყეზე ეშვება და მოძრაობს $x = 2t$ მ კანონის თანახმად (ნახ. 12.18). განსაზღვრეთ ფირფიტის ფერსოს წერტილების აჩქარება.



ნახ. 12.18

პასუხი: $W = 8$ მ/წმ².

12.26. $OABO_1$ სახსროვანი პარალელოგრამის OA რგოლი ბრუნავს $\varphi = 4t - t^2$ (ფრადიანებში, t -წამებში) კანონის თანახმად (ნახ. 12.19). განსაზღვრეთ AB რგოლის M წერტილის: 1. $\vec{V}$ სიჩქარის მოდული და მიმართულება; 2. მხები $\vec{W}$, აჩქარების

მოდული და მიმართულება; 3) ნორმალური $\vec{W}_n$ აჩქარების მოდული და მიმართულება დროის $t=1$ წმ მომენტისათვის, თუ $OA=AM=MB=0,5$ მ და დროის ამ მომენტისათვის $OA \perp OO_1$.

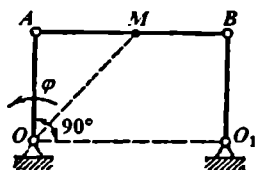
პასუხი: 1. $V=1$ მ/წმ, $\vec{V} \perp OA$ და მიმართულია φ -ს ზრდის მიმართულების მხარეს; 2. $W_r=1$ მ/წმ², $\vec{W}_r \perp OA$ მიმართულია φ -ს ზრდის მიმართულების საწინააღმდეგოდ; 3. $W_n=2$ მ/წმ², $\vec{W}_n$ პარალელურია OA -სი.

12.27. DE ლილვი ბრუნავს ჰორიზონტალური ღერძის გარშემო $\varphi=2t$ (φ -რადიანებში, t -წამებში) კანონის თანახმად. იპოვეთ ლილვზე მიდუღებული AB ღეროს A წერტილის სიჩქარის სიდიდე, თუ $AB=4$ მ, $AC=CB$ და $\alpha=30^\circ$ (ნახ. 12.20).

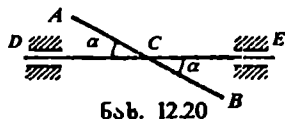
პასუხი: $V_A=2$ მ/წმ.

12.28. $R=1$ მ რადიუსიანი ნახევარწირის ფორმის ფირფიტა თანაბრად ბრუნავს ვერტიკალური z ღერძის გარშემო $\omega=1$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით (ნახ. 12.21). განსაზღვრეთ ფირფიტის სიმძიმის C ცენტრის აჩქარება.

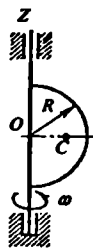
პასუხი: $W_C = \frac{4}{3\pi}$ მ/წმ².



ნახ. 12.19



ნახ. 12.20



ნახ. 12.21

12.29. $R=0,5$ მ რადიუსიანი ფირფიტა თანაბრად ბრუნავს უძრავი O ღერძის გარშემო, ისე, რომ $t=1$ წმ-ში ასრულებს 4 ბრუნს. რისი ტოლია ფირფიტას ფერსოს A წერტილის სიჩქარე დროის იმ მომენტისათვის, როცა მხეები აჩქარება ნორმალური აჩქარების ტოლი იქნება.

პასუხი: $V_A=4\pi$ მ/წმ, $W_A=32\pi^2$ მ/წმ².

12.30. $R=1$ მ რადიუსიანი მქნევარა ბრუნავს $\varphi = t^3 - 3t^2$ (φ რადიანებში, t -წამებში) კანონის თანახმად. განსაზღვრეთ მქნევარას ფერსოს წერტილების ნორმალური აჩქარება და სინქარის მოდული დროის იმ მომენტიდან, როცა მხები აჩქარება ნულის ტოლი გახდება.

პასუხი: $W_n = 9$ მ/წმ²; $V = 3$ მ/წმ.

12.31. OA ღერო ბრუნავს O წერტილზე გამავალი OA ღეროს მართობული ღერძის გარშემო. დროის ადებულ მომენტში ღეროს B წერტილის მხები აჩქარებაა 5 სმ/წმ², ხოლო ნორმალური აჩქარება – 12 სმ/წმ²-ის. განსაზღვრეთ A და B წერტილების სიჩქარე და A წერტილის სრული აჩქარება, თუ $OB = 2AB = 6$ სმ.

პასუხი: $V_A = 9\sqrt{2}$ სმ/წმ²; $V_B = 6\sqrt{2}$ სმ/წმ; $W_A = 19,5$ სმ/წმ².

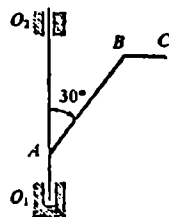
12.32. წრიული ფირფიტა ბრუნავს მისი O ცენტრზე გამავალი ფირფიტის სიბრტყის მართობული ღერძის გარშემო. განსაზღვრეთ ფირფიტის ფერსოს A წერტილის მხები და სრული აჩქარებები, თუ ფირფიტის რადიუსის შუა წერტილის ნორმალური აჩქარება 9 სმ/წმ²-ია და სრულ აჩქარებასთან ადგენს 30° -იან კუთხეს.

პასუხი: $W_r = 6\sqrt{3}$ სმ/წმ²; $W = 12\sqrt{3}$ სმ/წმ².

12.33. ტოლგვერდა ABC სამკუთხედის ფორმის ფირფიტა უძრაობის მდგომარეობიდან იწყებს ბრუნვას უძრავი AC გვერდის გარშემო ისე, რომ მობრუნების კუთხე იზრდება დროის კუბის პროპორციულად. დროის $t=1$ წმ მომენტიდან, თვის მისი კუთხური სიჩქარე $\omega = 12$ წმ⁻¹. იპოვეთ ფირფიტის სიმძიმის ცენტრის სიჩქარე და აჩქარება დროის $t=2$ წმ მომენტიდან, თუ სამკუთხედის გვერდის სიგრძე $a = 10\sqrt{3}$ სმ.

პასუხი: $V = 2,4$ მ/წმ; $W = 115,2$ მ/წმ².

12.34. გადაღუნული ABC ღერო უძრაობის მდგომარეობიდან იწყებს ბრუნვას უძრავი O_1O_2 ღერძის გარშემო მუდმივი $\varepsilon = 3$ წმ⁻² კუთხური აჩქარებით (ნახ. 12.22). იპოვეთ C წერტილის მხები და ნორმალური აჩქარებები ღეროს მე-6 ბრუნის ბოლოს, თუ $AB = 10$ სმ, $BC = 4$ სმ და $BC \perp O_1O_2$ (ნახ. 12.22).



ნახ. 12.22

პასუხი: $W'_c = 27$ სმ/წმ²; $W''_c = 648\pi$ სმ/წმ².

12.35. $R=8$ სმ რადიუსიანი ფირფიტა ბრუნავს ფირფიტის მართობული cz ღერძის გარშემო $\varphi = \frac{1}{3}t^3$ კანონის თანახმად. განსაზღვრეთ ფირფიტის დიამეტრის M და N ბოლო წერტილების სიჩქარე და აჩქარება ღრრის $t=2$ წმ მომენტი-სათვის, თუ $ON > OM$ და C წერტილი ფირფიტის O ცენტრიდან დაშორებულია $OC=4$ სმ მანძილით.

პასუხი: $V_M = 16$ სმ/წმ; $V_N = 48$ სმ/წმ; $W_M = 16\sqrt{17}$ სმ/წმ²;
 $W_N = 48\sqrt{17}$ სმ/წმ².

12.36. ღილვი იწყებს თანაბრად აჩქარებულ ბრუნვას $\omega_0 = 2\pi$ წმ⁻¹ საწყისი კუთხური სიჩქარით და 10 წმ-ის განმავლობაში ასრულებს 30 ბრუნს. იპოვეთ ღილვის ბრუნვის ღერძიდან 0,5 მ მანძილზე დაშორებული წერტილის აჩქარება იმ მომენტში, როცა ამ წერტილის სიჩქარე უდრის 2π მ/წმ.

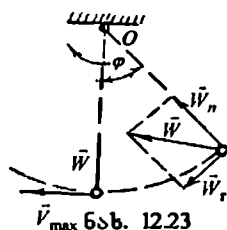
პასუხი: $W \approx 8\pi$ მ/წმ².

12.37. $l=2,4$ მ სიგრძის ძაფზე ჩამოკიდებული ქანქარა ირხევა ვერტიკალურ სიბრტყეში უძრავი ჰორიზონტალური O ღერძის გარშემო

$\varphi = \frac{16}{\pi} \sin \frac{3\pi}{4}t$ კანონის თანახმად, სადაც φ -

ქანქარას ვერტიკალიდან გადახრის კუთხეა (რადიანებში). განსაზღვრეთ ქანქარას სიჩქარე და აჩქარება იმ მომენტში, როცა მისი კუთხური სიჩქარე აღწევს უდიდეს მნიშვნელობას (ნახ. 2.23).

პასუხი: $V_{\max} = 30$ მ/წმ; $W_r = 0$; $W = W_n = 360$ მ/წმ².



$\vec{V}_{\max}$ ნახ. 12.23

12.12. სავარჯიშო ამოცანები ერთი სხეულიდან მეორეზე ბრუნვითი მოძრაობის გადაცემაზე

12.38. ბორბალი 1 ბრუნავს $\varphi_1 = 20t$ (რადიანებში, t - წამებში) კანონის თანახმად (ნახ. 12.24). განსაზღვრეთ ღრრის $t=3,14$ წმ-ის განმავლობაში მე-2 ბორბლის მიერ შესრულებული ბრუნთა რიცხვი, თუ ბორბლების რადიუსებია: $R_1=0,8$ მ, $R_2=0,5$ მ.

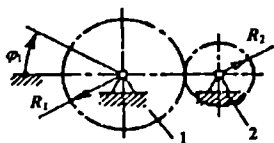
პასუხი: $N=16$ ბრუნი.

12.39. კბილანა თვალი 1 ბრუნავს თანაბრად $\varepsilon_1 = 4$ რად/წმ² კუთხური აჩქარებით (ნახ. 12.25). განსაზღვრეთ დროის $t = 2$ წმ მომენტისათვის M წერტილის სიჩქარე, თუ კბილანა ბორბლების რადიუსები — $R_1 = 0,4$ მ, $R_2 = 0,5$ მ. მოძრაობა იწყება წონასწორობის მდგომარეობიდან.

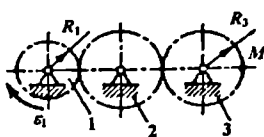
პასუხი: $V_M = 3,2$ მ/წმ.

12.40. ტვირთი 1 აიწევა დოლი 2-ზე დახვეული ბაგირის საშუალებით (ნახ. 12.26). ტვირთის მოძრაობის კანონი მოცემულია $S = 7 + 5t^2$ სმ განტოლებით. განსაზღვრეთ დროის $t = 3$ წმ მომენტისათვის დოლის კუთხური სიჩქარე, თუ მისი დიამეტრი $d = 50$ სმ.

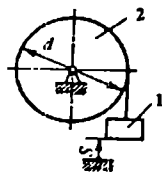
პასუხი: $\omega = 1,2$ რად/წმ.



ნახ. 12.24



ნახ. 12.25



ნახ. 12.26

12.41. როგორი უნდა იყოს კბილანა 1-ის ბრუნთა რიცხვი $n_1 \left(\frac{\text{ბრ}}{\text{წთ}} \right)$, რომ ტვირთმა 3-მა იმოძრაოს $V = 90$ სმ/წმ მუდმივი სიჩქარით, თუ კბილანა თვლებზე კბილანების რიცხვი: $z_1 = 26$, $z_2 = 78$ და დოლის რადიუსი $r = 10$ სმ (ნახ. 12.27).

პასუხი: $n_1 = 258$ ბრ/წთ.

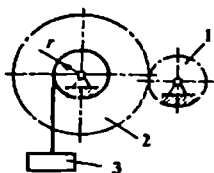
12.42. კბილანა თვალი 1-ის კუთხური სიჩქარე იცვლება $\omega = 2t^2$ კანონის თანახმად (ნახ. 12.28). იპოვეთ ტვირთი 3-ის აჩქარება დროის $t = 2$ წმ მომენტისათვის, თუ კბილანების რადიუსებია: $R_1 = 1$ მ, $R_2 = 0,8$ მ და დოლის რადიუსი $r = 0,4$ მ.

პასუხი: $W_3 = 4$ მ/წმ².

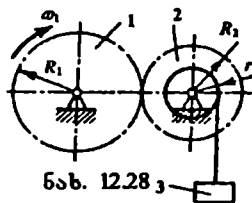
12.43. $d_1 = 400$ მმ დიამეტრიანი კბილანა თვალი O_1 ღერძის გარშემო ბრუნავს $n_1 = 180$ ბრ/წთ სიხშირით (ნახ. 12.29). რას უნდა უდრიდეს მეორე კბილანა თვალის d_2 დიამეტრი,

რომელიც პირველ კბილანასთან მოდებაშია, რომ ბრუნავდეს $n_2 = 600$ ბრ/წთ სიხშირით. განსაზღვრეთ ორივე კბილანას ფერსოებზე მდებარე წერტილების ნორმალური აჩქარებები.

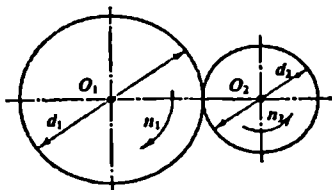
პასუხი: $d_2 = 126$ მმ; $W_m = 74,6$ მ/წმ²; $W_m = 249$ მ/წმ².



ნახ. 12.27



ნახ. 12.28



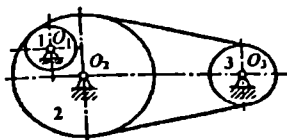
ნახ. 12.29

12.44. ბორბალი 1 ბრუნავს O_1 ღერძის გარშემო და მოძრაობაში მოჰყავს შკივი 2, ხოლო შკივი 2-ს უსასრულო ღვედით მოძრაობაში მოჰყავს შკივი 3 (ნახ. 12.30). უგულებელყავით ღვედის შკივებზე სრიალი, განსაზღვრეთ შკივი 3-ის ω , კუთხური სიჩქარე, თუ ბორბალი 1-ის კუთხური სიჩქარე $\omega_1 = 10$ რად/წმ და რადიუსები $R_1 = 0,2$ მ, $R_2 = 0,5$ მ, $R_3 = 0,25$ მ.

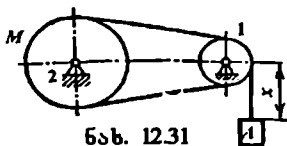
პასუხი: $\omega_3 = 8$ რად/წმ.

12.45. A ტვირთი, ეშვება ქვევით $x = (t^2 - t)$ მ კანონის თანახმად და მოძრაობაში მოჰყავს ღვედური გადამცემი (ნახ. 12.31). განსაზღვრეთ მე-2 შკივის კუთხური აჩქარება, აგრეთვე მის ფერსოს M წერტილის აჩქარება დროის $t = 1$ წმ მომენტისათვის, თუ $R_1 = 0,5$ მ, $R_2 = 1$ მ.

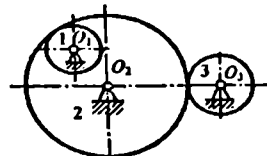
პასუხი: $\varepsilon_2 = 2$ რად/წმ²; $W = \sqrt{5}$ მ/წმ².



ნახ. 12.30



ნახ. 12.31



ნახ. 12.32

12.46. მექანიკურ გადამცემში 1 ბორბლიდან მოძრაობა გადაეცემა ბორბალ 3-ს (ნახ. 12.32). განსაზღვრეთ მე-3

ბორბლის ω , კუთხური სიჩქარე, თუ 1 ბორბლის კუთხური სიჩქარე $\omega_1 = 15$ რად/წმ და კბილების რაოდენობა: $z_1 = 20$, $z_2 = 50$, $z_3 = 25$.

პასუხი: $\omega_4 = 12$ რად/წმ.

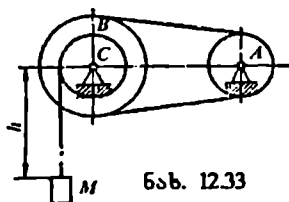
12.47. B შკივი და C ლილევი ერთმანეთთან ხისტად არიან მიკავშირებული და ბრუნავს საერთო ღერძის გარშემო (ნახ. 12.33). A და B შკივები უსასრულო ღვედითაა დაკავშირებული, ხოლო C ლილეზე დახვეულია თოკი, რომლის ბოლოზე მიმაგრებულია M ტვირთი. A შკივი უძრავი მდგომარეობიდან იწყებს ბრუნვას მუდმივი $\varepsilon_A = 2$ წმ⁻² კუთხური აჩქარებით. იპოვეთ M ტვირთის მოძრაობის განტოლება, აგრეთვე ლილევის ფერსოს წერტილების მხები, ნორმალური და სრული აჩქარებები, დროის $t = 2$ წმ მომენტისათვის, თუ რადიუსები: $R_A = 10$ სმ, $R_B = 20$ სმ, $R_C = 5$ სმ, ამასთან ღვედი შკივებზე მოძრაობს უსრიალოდ.

პასუხი: $h = 2,5t^2$ სმ; $V = 10$ სმ/წმ; $W_r = 5$ სმ/წმ²;

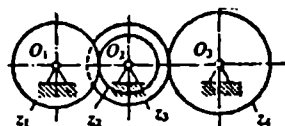
$W_n = 20$ სმ/წმ²; $W = 10\sqrt{5}$ სმ/წმ².

12.48. კბილანა თელები ერთმანეთთან მოდებულია და ბრუნავს უძრავი პარალელური O_1 , O_2 და O_3 ღერძების გარშემო (ნახ. 12.34). წამყვანი კბილანა თვალი ბრუნავს $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$ წმ⁻¹ კუთხური სიჩქარით. განსაზღვრეთ ω_4 კუთხური სიჩქარე და გადაცემათა U რიცხვი, თუ კბილანების რაოდენობა: $z_1 = 30$, $z_2 = 20$, $z_3 = 25$, $z_4 = 60$.

პასუხი: $\omega_4 = \frac{5}{16}\pi$ წმ⁻¹; $U = \frac{8}{5}$.



ნახ. 12.33

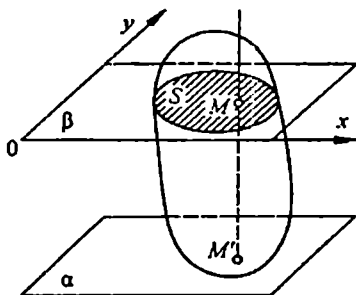


ნახ. 12.34

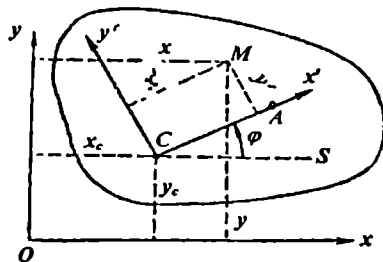
13. მყარი სხეულის ბრტყელ-პარალელური მოძრაობა

13.1. ზოგადი ცნობები

β სიბრტყეში, რომელიც უძრავი α სიბრტყის პარალელურია, გაეატაროთ Oxy კოორდინატთა სისტემა (ნახ. 13.1) და განვიხილოთ S კვების მოძრაობა ამ სიბრტყეში (ნახ. 13.2).



ნახ. 13.1



ნახ. 13.2

მყარი სხეულის β სიბრტყით გადაკვეთისას მიღებული ბრტყელი S ფიგურის უძრავი Oxy სისტემის მიმართ მოძრაობის მოსაცემად, საკმარისია აღვწეროთ მოძრაობა ნებისმიერი CA მონაკვეთისა, რომელიც S კვების ეკუთვნის. CA მონაკვეთის მდებარეობა განისაზღვრება პოლუსად შერჩეული C წერტილის x_c, y_c კოორდინატებით და ამ მონაკვეთის მობრუნების φ კუთხით, რომელიც შერჩეული საწყისი მდებარეობიდან აითვლება (ნახ. 13.2).

ბრტყელ-პარალელური მოძრაობა პოლუსთან ერთად გადატანითი და პოლუსის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობების ერთობლიობაა.

ბრტყელი ფიგურის მდებარეობის განსაზღვრავად მასთან მკვიდრად მივაკავშიროთ $Cx'y'$ კოორდინატთა სისტემა, რომელიც ბრტყელ S ფიგურასთან ერთად მოძრაობს.

მყარი სხეულის ბრტყელი მოძრაობის განტოლებებს უძრავი Oxy კოორდინატთა სისტემის მიმართ აქვთ შემდეგი სახე:

$$x_c = f_1(t), \quad y_c = f_2(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad (13.1)$$

სადაც x_c და y_c ბრტყელი S ფიგურის ნებისმიერი C წერტილის (პოლუსის) კოორდინატებია, φ — კუთხე უძრავი Ox და ფიგურასთან მკეიდრად მიკავშირებული Cx' ღერძებს შორის (ნახ. 13.2).

პირველი ორი განტოლება აღწერს ბრტყელი ფიგურის გადატანით მოძრაობას. ბრტყელი ფიგურის გადატანითი მოძრაობა დამოკიდებულია პოლუსის შერჩევაზე. (13.1)-ის მესამე განტოლება აღწერს ბრტყელი ფიგურის ბრუნვით მოძრაობას, რომელიც არ არის დამოკიდებული პოლუსის შერჩევაზე.

განსაზღვრება. ბრტყელი ან ბრტყელ-პარალელური ეწოდება მყარი სხეულის ისეთ მოძრაობას, როდესაც მისი ყველა წერტილი გადაადგილდება რომელიმე უძრავი სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეებზე.

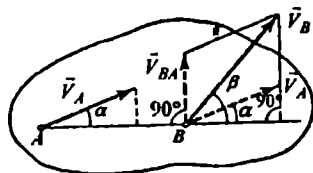
მაშასადამე, თუ მყარი სხეულის მოძრაობის დროს მისი ნებისმიერი წერტილიდან მოცემულ უძრავ სიბრტყეზე მანძილი უცვლელი რჩება, მაშინ სხეულის ასეთ მოძრაობას ეწოდება ბრტყელი მოძრაობა.

სხეულის ბრტყელი მოძრაობის შესწავლა დაიყვანება ბრტყელი ფიგურის თავის სიბრტყეში (რომელიც წარმოადგენს მოცემული უძრავი სიბრტყის პარალელური სიბრტყით სხეულის კვეთს) მოძრაობის შესწავლაზე და ეფუძნება იმ ძირითად თეორემებს, რომლებიც საშუალებას იძლევიან დავადგინოთ ბრტყელი ფიგურის მოძრაობის განტოლების შედგენის მეთოდები, განესაზღვროთ ფიგურის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე და აჩქარება და, მაშასადამე, მყარი სხეულის ნებისმიერი წერტილისა.

ეს თეორემებია:

თეორემა 1. ბრტყელი ფიგურის ყოველგვარი გადაადგილება საკუთარ სიბრტყეში შეიძლება განვახორციელოთ, როგორც ნებისმიერად არჩეულ წერტილთან (პოლუსთან) გადატანითი და არჩეული წერტილის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობების ერთობლიობა.

თეორემა 2. ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი არაგადატანითი გადაადგილება თავის სიბრტყეში შეიძლება განხორციელდეს გარკვეული ცენ-



ნახ. 13.3

ტრის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობის სახით.

თეორემა 3. ბრტყელი ფიგურის ორი წერტილის სიჩქარეთა გეგმილები ამ წერტილებზე გამავალ წრფეზე ერთმანეთის ტოლია. ამავდროულად გეგმილებს ერთნაირი ნიშანი უნდა ჰქონდეს (იხ. ნახ. 13.3):

$$V_B \cos \beta = V_A \cos \alpha. \quad (13.2)$$

13.2. მყარი სხეულის წერტილების სიჩქარისა და აჩქარების განსაზღვრის ანალიზური მეთოდი

ბრტყელი ფიგურის რომელიმე წერტილის კინემატიკური მახასიათებლების ანალიზური განსაზღვრა ეფუძნება თეორემა 1-ს.

ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი M წერტილის მოძრაობის განტოლებებს აქვს შემდეგი სახე:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_c + x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y &= y_c + x' \sin \varphi + y' \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (13.3)$$

სადაც x და y არის M წერტილის კოორდინატები Oxy კოორდინატთა სისტემის მიმართ, x', y' — M წერტილის კოორდინატები მოძრავი $Cx'y'$ სისტემის მიმართ.

თუ (13.3) განტოლებებიდან გამოვრიცხავთ t პარამეტრს, მივიღებთ წერტილის ტრაექტორიის განტოლებას. (13.3) განტოლებების მეშვეობით განვსაზღვრავთ აგრეთვე M წერტილის სიჩქარისა და აჩქარების მოდულებს:

$$V_x = \dot{x} = V_{cx} - \omega(y - y_c), \quad V_y = \dot{y} = V_{cy} - \omega(x - x_c), \quad (13.4)$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

$$W_x = \ddot{x} = W_{cx} - \varepsilon(y - y_c) - \omega^2(x - x_c), \quad (13.5)$$

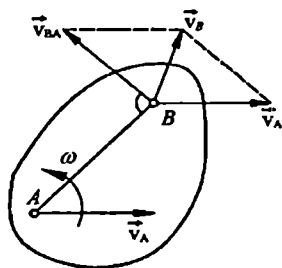
$$W_y = \ddot{y} = W_{cy} + \varepsilon(x - x_c) - \omega^2(y - y_c),$$

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}$$

ბრტყელი ფიგურის მოძრაობა თავის სიბრტყეში შეიძლება დაიშალოს ორ მოძრაობად: 1. გადატანით მოძრაობად, რომლის სიჩქარე პოლუსად მიღებული რომელიმე A წერტილის სიჩქარის ტოლია; 2. ამ პოლუსის გარშემო ბრუნვით მოძრაობად (მოძრავი ფიგურის სიბრტყის მართობ და პოლუსზე გამავალი

დერძის გარშემო ბრუნვით მოძრაობად), ამასთანავე ბრუნვითი მოძრაობის კუთხური სიჩქარე არ არის დამოკიდებული პოლუსის შერჩევაზე. მაშასადამე, ბრტყელი ფიგურის თავის სიბრტყეში მოძრაობისას მისი ნებისმიერი წერტილის სიჩქარისა და აჩქარების გამოთვლა შესაძლებელია სხვა ხერხითაც. თუ ცნობილია A პოლუსის სიჩქარის ვექტორი და პოლუსის გარშემო ფიგურის ბრუნვითი მოძრაობის $\varphi = \varphi(t)$ კანონი, მაშინ პირველი თეორემის საფუძველზე ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი B წერტილის სიჩქარე ტოლია A პოლუსის სიჩქარისა და პოლუსის გარშემო სხეულთან ერთად B წერტილის ბრუნვითი მოძრაობის სიჩქარის გეომეტრიული ჯამისა (ნახ. 13.4), ე.ი.

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \quad (13.6)$$



ნახ. 13.4

სადაც $\vec{V}_B$ წერტილის საძიებელი სიჩქარეა; $\vec{V}_A$ —პოლუსის სიჩქარე; $\vec{V}_{BA}$ — B წერტილის სიჩქარე A წერტილის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობისას

$$V_{BA} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot BA = \omega \cdot r, \quad (13.7)$$

სადაც $r = AB$ მანძილია B წერტილიდან A პოლუსამდე, ω — ბრტყელი ფიგურის მყისი კუთხური სიჩქარე.

რადგან სიჩქარის $\vec{V}_{BA}$ ვექტორი პერპენდიკულარულია A და B წერტილებზე გამავალი წრფისა, ამიტომ, აქედან გამომდინარეობს 13.1 პუნქტში მოყვანილი თეორემა 3 (იხ. ნახ. 13.3).

13.3. სიჩქარეთა მყისი ცენტრი

ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე შეიძლება განესაზღვროთ სიჩქარეთა მყისი ცენტრის საშუალებით.

განსაზღვრება. სიჩქარეთა მყისი ცენტრი (სმ(ვ)) ეწოდება ბრტყელი ფიგურის მოძრაობის სიბრტყეზე მდებარე იმ წერტილს, რომლის სიჩქარე დროის მოცემულ მომენტში ნულის ტოლია.

სმც-ის მიმართ ბრტყელი ფიგურა ასრულებს მყის ბრუნვით მოძრაობას.

მყარი სხეულის უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვისას მისი წერტილების სიჩქარეთა განაწილების კანონიდან გამომდინარე, დავადგინოთ სიჩქარეთა მყისი ცენტრის შემდეგი სამი თვისება: 1. სმც-ის სიჩქარე ნულის ტოლია; 2. სიჩქარეთა მყისი ცენტრი ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერ წერტილზე მისი სიჩქარის ვექტორისადმი აღმართულ პერპენდიკულარზე მდებარეობს; 3) თუ პოლუსად მივიღებთ სიჩქარეთა P მყის ცენტრს, ე.ი. წერტილს, რომლის სიჩქარე დროის ადებულ მომენტში ნულის ტოლია, მაშინ ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი A წერტილის სიჩქარე PA მონაკვეთის პერპენდიკულარულია, მიმართულია ფიგურის ბრუნვის მხარეს და სიდიდით ტოლია მყისი ω კუთხური სიჩქარის წერტილიდან მყის ცენტრამდე PA მანძილზე ნამრავლის (ნახ. 13.5), ე.ი.

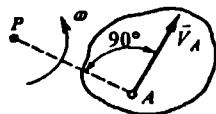
$$V_A = \omega \cdot PA. \quad (13.8)$$

მაშასადამე,

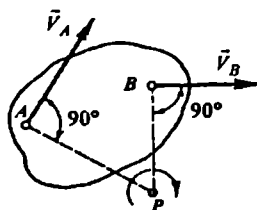
$$\omega = \frac{V_A}{PA}. \quad (13.9)$$

ზემოთ ჩამოთვლილი თვისებების საფუძველზე შეიძლება დავადგინოთ ბრტყელი ფიგურის სიჩქარეთა მყისი ცენტრის განსაზღვრის შემდეგი ხუთი მეთოდი:

1. ცნობილია ω კუთხური სიჩქარე და ბრტყელი ფიგურის რომელიმე A წერტილის $\vec{V}_A$ სიჩქარის მოდული. ამ შემთხვევაში სიჩქარეთა P მყისი ცენტრი მდებარეობს A წერტილზე $\vec{V}_A$ ვექტორისადმი აღმართულ პერპენდიკულარულ წრფეზე სმც-დან $PA = V_A / \omega$ მანძილზე (ნახ. 13.5).



ნახ. 13.5



ნახ. 13.6

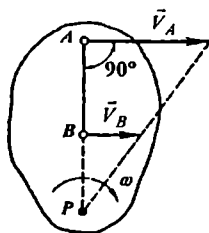
2. ცნობილია ბრტყელი ფიგურის A და B ორი წერტილის სიჩქარის ვექტორის მიმართულება, მაშინ სმც მდებარეობს $\vec{V}_A$ და $\vec{V}_B$ სიჩქარეთა ვექტორებისადმი A და B წერტილებზე გაღებული პერპენდიკულარული წრფეების გადაკვეთის P წერტილში (ნახ. 13.6), ამასთან

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{\omega \cdot PA}{\omega \cdot PB} = \frac{PA}{PB},$$

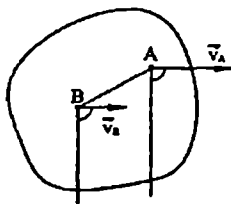
ე.ი. ბრტყელი ფიგურის წერტილების სინქარე პირდაპირპროპორციულია სინქარეთა მყისი ცენტრიდან მათი დაშორების მანძილისა.

3. ცნობილია, რომ ბრტყელი ფიგურის A და B წერტილების სინქარეები ურთიერთპარალელურია და მიმართულია ერთ მხარეს, მათი მოდულები ერთმანეთისგან განსხვავდება, ე.ი. $V_A \neq V_B$, ამ შემთხვევაში სმც მდებარეობს $\vec{V}_A$ და $\vec{V}_B$ ვექტორების საწყისებსა და ბოლოებზე გავლებული წრფეების გადაკვეთის P წერტილში (ნახ. 13.7). თუ A და B წერტილების სინქარეთა ვექტორები ერთმანეთის ტოლია, მაშინ სინქარეთა მყისი ცენტრი მოცემულ მომენტში უსასრულობაში მდებარეობს, მყისი კუთხური სინქარე ნულის ტოლია, ბრტყელი ფიგურის ყველა წერტილის სინქარე ერთნაირია და მოძრაობა მყისი გადატანითა (ნახ. 13.8).

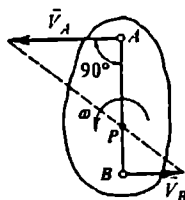
4. ცნობილია, რომ ბრტყელი ფიგურის A და B წერტილების სინქარე ერთმანეთის პარალელურია, მიმართულია ურთიერთსაპირისპიროდ და AB მონაკვეთის პერპენდიკულარულია (ნახ. 13.9). ამ შემთხვევაში სინქარეთა P მყისი ცენტრი მდებარეობას $\vec{V}_A$ და $\vec{V}_B$ ვექტორების ბოლოებზე გავლებული წრფის AB წრფესთან გადაკვეთის P წერტილში.



ნახ. 13.7.



ნახ. 13.8.



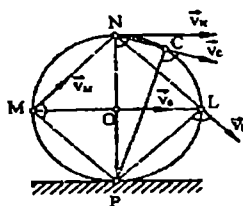
ნახ. 13.9.

5. ცნობილია, რომ ბრტყელი ფიგურა (ბორბალი) უსრიალოდ მიგორავს უძრავ ზედაპირზე. ამ შემთხვევაში სმც იქნება ბორბლის ზედაპირთან შეხების P წერტილში (ნახ. 13.10).

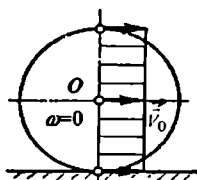
ასეთ სიტუაციაში $V_0 = \omega \cdot PO$, $\vec{V}_0 \perp PO$; $V_M = \omega \cdot PM$, $\vec{V}_M \perp PM$; $V_N = \omega \cdot PN$, $\vec{V}_N \perp PN$, $V_C = \omega \cdot PC$, $\vec{V}_C \perp PC$; $V_L = \omega \cdot PL$, $\vec{V}_L \perp PL$ და ა.შ. მაშასადამე, ბორბლის ფერსოზე

მდებარე ნებისმიერი წერტილის სიჩქარის ვექტორის ფუძე გადის N წერტილზე (ნახ. 3.10).

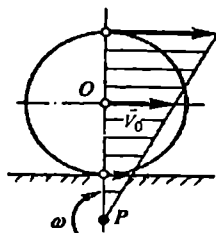
3.11-3.14 ნახაზებზე ნაჩვენებია სიჩქარეთა მყისი ცენტრის მდებარეობა და ვერტიკალურ დიამეტრზე სიჩქარეთა განაწილების ეპიურები შემოხვევებისათვის, როცა: ა) ბორბალი სრიალებს და გორვა არ ხდება; სმც მდებარეობს უსასრულობაში, მყისი კუთხური სიჩქარე $\omega = 0$ და ფიგურა ასრულებს მყის გადატანით მოძრაობას (ნახ. 11); ბ) ბორბალი გორავს და აღინიშნება სრიალიც (ნახ. 3.12); გ) ბორბალი ნაწილობრივ ბუქსაობს (ნახ. 3.13); დ) როცა ბორბალი ადგილზე ბუქსაობს (ნახ. 3.14).



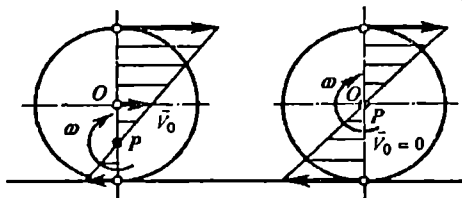
ნახ. 3.10



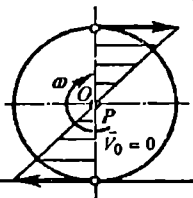
ნახ. 3.11



ნახ. 3.12



ნახ. 3.13



ნახ. 3.14

13.4. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები თავის სიბრტყეში მოძრავი ბრტყელი ფიგურის წერტილების სიჩქარეთა განსაზღვრაზე

მეთოდური მითითებები. ამოცანების ამოხსნისას ბრტყელი ფიგურა (მექანიზმი) ნახაზზე უნდა გამოვსახოთ იმ მდებარეობაში, რომელშიც უნდა მოხდეს შესაბამისი წერტილების სიჩქარეთა განსაზღვრა. ამ ამოცანების ამოხსნის დროს თანმიმდევრობით უნდა განვიხილოთ მექანიზმის ცალკეული რგოლების მოძრაობა, დაწყებული იმ წევრიდან, რომლის მოძ-

რაობაც მოცემულია და ერთი წვერიდან მეორეზე გადასვლის დროს განვსაზღვროთ მექანიზმის ამ წვერების საერთო წერტილების სიჩქარე. უნდა აღვნიშნოთ, რომ სიჩქარეთა მყისი ცენტრი შეიძლება ვიპოვოთ მხოლოდ თითოეული წვერისათვის ცალ-ცალკე; ეს ეხება კუთხურ სიჩქარეებსაც. შევნიშნოთ, რომ მექანიზმის ყოველ წვერს მოცემული მომენტისათვის აქვს თავისი სიჩქარეთა მყისი ცენტრი და თავისი კუთხური სიჩქარე.

თუ მოცემულია ბრტყელი ფიგურის მოძრაობის განტოლებები, მაშინ ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე და აჩქარება შეიძლება განვსაზღვროთ (13.4) და (13.5) ფორმულების გამოყენებით.

წერტილის სიჩქარე შეიძლება განვსაზღვროთ სხვა მეთოდითაც, კერძოდ, თუ ვისარგებლებთ (13.6) ფორმულით ნაჩვენები გეომეტრიული პირობებით.

ამოცანა 45. $AB=2$ მ სიგრძის ღერო მოძრაობს ნახაზის სიბრტყეში (ნახ. 13.15). $\vec{V}_A$ და $\vec{V}_B$ სიჩქარეები AB ღეროს ღერძზე გავლებულ x ღერძთან შესაბამისად α და β კუთხეებს ადგენს. განვსაზღვროთ $\vec{V}_B$ სიჩქარის მოდული და ღეროს ω კუთხური სიჩქარე, თუ $\alpha=30^\circ$, $\beta=60^\circ$ და $V_A=2\sqrt{3}$ მ/წმ.

ამოხსნა. $\vec{V}_B$ სიჩქარის მოდულის საპოვნელად ვისარგებლოთ 13.1 პუნქტში მოყვანილი მუ-3 თეორემით. გვექნება:

$$V_B \cos \beta = V_A \cos \alpha \Rightarrow V_B = \frac{V_A \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 6 \text{ მ/წმ.}$$

ღეროს ω კუთხური სიჩქარის საპოვნელად განვსაზღვროთ ღეროს სიჩქარეთა P მყისი ცენტრის მდებარეობა. A და B წერტილებზე აღვმართოთ მართობები $\vec{V}_A$ და $\vec{V}_B$ სიჩქარეებისადმი, მათი გადაკვეთის P წერტილი იქნება AB -ს სიჩქარეთა მყისი ცენტრი. ამიტომ

$$\omega = \frac{V_A}{PA}.$$

$\triangle APB$ -ში $\angle ABP = \angle BPA = 30^\circ$, ამიტომ $PA = AB = 2$ მ.

მაშასადამე,

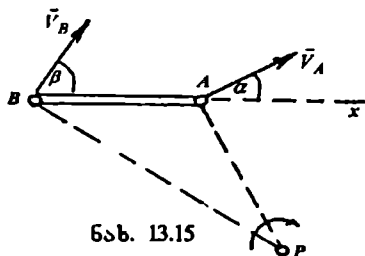
$$\omega = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ რად/წმ.}$$

მეორე მხრივ, $\vec{V}_B$ სიჩქარის მოდული შეიძლება განვსაზღვროთ მეორე ხერხითაც. (13.8) ფორმულის ძალით, გვექნება:

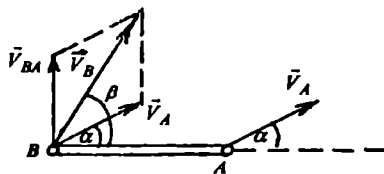
$$V_B = \omega \cdot PB,$$

სადაც $PB = AB\sqrt{2} = 2\sqrt{3}$ მ, მაშინ

$$V_B = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 6 \text{ მ/წმ.}$$



ნახ. 13.15



ნახ. 13.16

$\vec{V}_B$ სიჩქარის მოდული შეიძლება განვსაზღვროთ მესამე ხერხითაც. პოლუსად შევარჩიოთ A წერტილი (ნახ. 13.16) და ვისარგებლოთ § 13.1-ის თეორემა 1-ით. (13.6) ფორმულის თანახმად, გვექნება:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA},$$

სადაც $\vec{V}_B$ არის წერტილის საძიებელი სიჩქარე; $\vec{V}_A$ – პოლუსის სიჩქარე; $\vec{V}_{BA}$ – B წერტილის სიჩქარე A წერტილის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობისას, ე.ი.

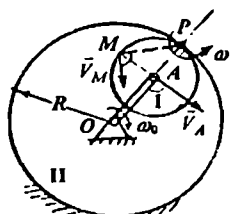
$$V_{BA} = AB \cdot \omega = 2\sqrt{3} \text{ მ/წმ.}$$

$\vec{V}_B$ სიჩქარის მოდულის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ კოსინუსების თეორემით, მივიღებთ:

$$V_B = \sqrt{V_A^2 + V_{BA}^2 + 2V_A V_{BA} \cos 60^\circ} = \sqrt{12 + 12 + 12} = 6 \text{ მ/წმ.}$$

ამრიგად, $\vec{V}_B$ სიჩქარის მოდულის გამოთვლისას სამივე შემთხვევაში მივიღეთ ერთი და იგივე შედეგი. ამიტომ ამოცანის ამოხსნისას სასურველია ვისარგებლოთ იმ ხერხით, რომელიც მოცემულ შემთხვევაში უფრო ხელსაყრელია.

ამოცანა 46. $r=20$ სმ რადიუსიანი I კბილანა თვალი წამო-
დებულია $R=60$ სმ რადიუსიანი უძრავი კბილანა ბორბალ-
თან. OA მრუდმხარა ბრუნავს უძრავი O ღერძის გარშემო



ნახ. 13.17

$\omega_0=1,5$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით და
მოძრაობაში მოჰყავს I კბილანა თვალი.
ვივოვით I კბილანა თვალის კუთხური
სიჩქარე და მის ფერსოზე მდებარე M
წერტილის სიჩქარის მოდული, თუ
 $OA \perp AM$ (ნახ. 13.17).

ამოხსნა. განესაზღვროთ OA მრუდმხა-
რას A წერტილის $\vec{V}_A$ სიჩქარის მოდული:

$$V_A = \omega_0 \cdot OA = \omega_0(R-r) = 1,5 \cdot 40 = 60 \text{ სმ/წმ.}$$

I კბილანა თვალის სიჩქარეთა მყისი ცენტრია P წერტილი,
ამიტომ I კბილანა თვალის კუთხური სიჩქარე იქნება:

$$\omega = \frac{V_A}{PA} = \frac{V_A}{r} = \frac{60}{20} = 3 \text{ რად/წმ,}$$

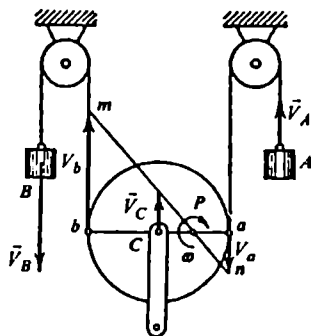
ხოლო M წერტილის სიჩქარის მოდული:

$$V_M = \omega \cdot PM = \omega \cdot r\sqrt{2} = 3 \cdot 20\sqrt{2} = 60\sqrt{2} \text{ სმ/წმ.}$$

ამოცანა 47. განესაზღვროთ $r=20$ სმ რადიუსის მკონე
ბლოკის C წერტილის სიჩქარის მოდული და მისი ω კუთხური
სიჩქარე, თუ A ტვირთი ადის ზევით
 $V_A=20$ სმ/წმ სიჩქარით, ხოლო B
ტვირთი ჩამოდის $V_B=60$ სმ/წმ
სიჩქარით (ნახ. 13.18). ამასთან
მოძრავ ბლოკზე შემოხვეული ძაფი
მოძრაობისას ბლოკთან არ სრიალებს,
ხოლო მისი შტოები მიმართულია
ვერტიკალურად.

ამოხსნა. რადგან ძაფი მოძრავ
ბლოკზე არ სრიალებს, ამიტომ
ბლოკის a და b წერტილების სიჩქა-
რე მოდულით ტოლია ტვირთების
სიჩქარეებისა, ე.ი. $V_a = V_A$ და $V_b = V_B$.

რაკი ვიცით ბლოკის a და b ორი წერტილის სიჩქარე,



ნახ. 13.18

რომლებიც ერთმანეთის პარალელურია და მიმართულია ურთიერთსაპირისპიროდ, §13.3-ის 13.9 ნახაზის თანახმად ვიპოვიოთ მოძრავი ბლოკის სიჩქარეთა P მყისი ცენტრის მდებარეობას (ნახ. 13.18).

ჯერ ვიპოვოთ მოძრავი ბლოკის ω კუთხური სიჩქარე:

$$\omega = \frac{V_A}{Pa} = \frac{V_B}{Pb}. \quad (1)$$

anp და amp მსგავსი სამკუთხედებია, ამიტომ შეგვიძლია დაეწეროთ შემდეგი პროპორცია:

$$\frac{V_b}{bP} = \frac{V_a}{aP}, \quad (2)$$

სადაც $bP + aP = 2r$, $bP = 2r - aP$, მაშინ (2)-დან მივიღებთ:

$$aP = \frac{V_a(2r - aP)}{V_b} \Rightarrow$$

$$aP = \frac{2rV_A}{V_A + V_B} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 20}{20 + 60} = 10 \text{ სმ.}$$

(1)-ის თანახმად

$$\omega = \frac{20}{10} = 2 \text{ რად/წმ.}$$

რადგან ვიცით მოძრავი ბლოკის ω კუთხური სიჩქარე და მისი სიჩქარეთა P მყისი ცენტრის მდებარეობა, ამიტომ ადვილად განისაზღვრება $\vec{V}_c$ სიჩქარის მოდული:

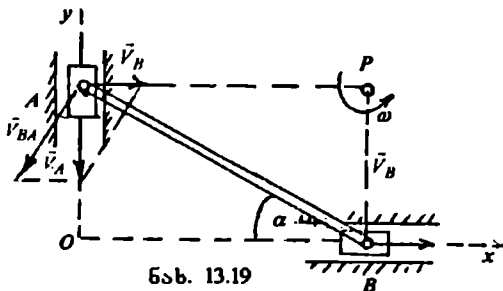
$$V_c = \omega \cdot Pc = \omega \cdot (r - aP) = 2(20 - 10) = 20 \text{ სმ/წმ.}$$

ამოცანა 48. ელიფსოგრაფის AB სახაზავის B ცოცია მოძრაობს Ox ღერძის გასწვრივ $x=10l$ კანონის თანახმად (x -სანტიმეტრობით, t -წამობით) (ნახ. 13.19). განესაზღვროთ სახაზავის ω კუთხური სიჩქარე და A ცოციას $\vec{V}_A$ სიჩქარის მოდული სახაზავის იმ მდებარეობისათვის, როცა ის Ox ღერძთან $\alpha = 30^\circ$ -იან კუთხეს ადგენს, თუ $AB = 20$ სმ.

ამოხსნა. B წერტილის $\vec{V}_B$ სიჩქარე მიმართულია Ox ღერძის გასწვრივ და მისი მოდული ტოლია:

$$V_B = \dot{x} = 10 \text{ სმ/წმ.}$$

A წერტილის სიჩქარე მიმართულია Oy ღერძის გასწვრივ - A -დან O -სკენ. თუ A და B წერტილებზე მათი სიჩქარეები-



ნახ. 13.19

სადმი აღემაართავეთ მართობებს, მაშინ მათი გადაკეუთის P წერტილი იქნება AB სახაზავის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი და ω კუთხური სიჩქარე ტოლი იქნება:

$$\omega = \frac{V_B}{PB} = \frac{V_B}{AB \sin 30^\circ} = \frac{10}{\frac{1}{2} \cdot 20} = 1 \text{ რად/წმ.}$$

A წერტილის $\vec{V}_A$ სიჩქარის მოდული შეიძლება გამოვთვალოთ სამი ხერხით.

I ხერხი - $V_A = \omega \cdot AP = \omega \cdot AB \cos 30^\circ = 10\sqrt{3} \approx 17,3$ სმ/წმ.

II ხერხი - ვისარგებლოთ § 13.1-ის მე-3 თეორემით, გვექნება:

$$V_A \cos 60^\circ = V_B \cos 30^\circ \Rightarrow V_A = \frac{V_B \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = V_B \sqrt{3} \approx 17,3 \text{ სმ/წმ.}$$

III ხერხი - პოლუსად მივიღოთ B წერტილი და ვისარგებლოთ (13.6) ფორმულით, გვექნება:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \quad (1)$$

სადაც $\vec{V}_{BA}$ არის A წერტილის B წერტილის გარშემო ბრუნვის სიჩქარე (ნახ. 3.20). მისი მოდული ტოლი იქნება:

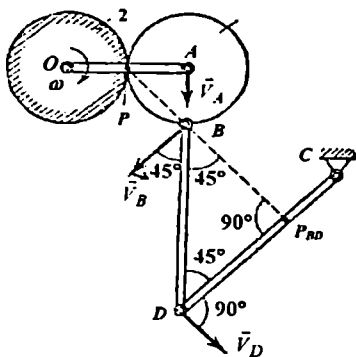
$$V_{BA} = \omega \cdot AB = 1 \cdot 20 = 20 \text{ სმ/წმ.}$$

რადგან $(\vec{V}_B, \vec{V}_{BA}) = 120^\circ$, ამიტომ $\vec{V}_A$ -ს მოდულის გასაგებად ვისარგებლოთ კოსინუსების თეორემით:

$$\begin{aligned} V_A &= \sqrt{V_B^2 + V_{BA}^2 + 2V_B V_{BA} \cos 120^\circ} = \\ &= \sqrt{100 + 400 - 10 \cdot 20} = 10\sqrt{3} \approx 17,3 \text{ სმ/წმ.} \end{aligned}$$

ცხადია, სამივე შემთხვევაში მივიღეთ V_A -ს ერთი და იგივე შედეგი, ამასთან შევნიშნოთ, რომ ამოცანების ამოხსნისას სავალდებულო არ არის სამივე ხერხის გამოყენება.

ამოცანა 49. OA მრუდმხარა ბრუნავს უძრავი O ღერძის გარშემო $\omega_{OA} = 4$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით და თან მიაქვს მოძრავი 1 კბილანას ღერძი. 1 კბილანა მიგორავს უძრავ 2 კბილანაზე. $BD = 60$ სმ სიგრძის ბარბაცას B სახსარი



ნახ. 13.20

მიერთებულია 1 კბილანასთან, ხოლო D სახსრით CD მრუდმხარასთან (ნახ. 13.20). განესაზღვროთ A , B და D წერტილების სიჩქარე, აგრეთვე 1 კბილანას და BD ბარბაცას კუთხური სიჩქარე, თუ მოძრავი და უძრავი კბილანების რადიუსები ერთმანეთის ტოლია, ე.ი. $r_1 = r_2 = r = 20$ სმ.

ამოხსნა. OA მრუდმხარას A წერტილი მოძრაობს $OA = 2r$ რადიუსიან წრეწირზე, ამიტომ $\vec{V}_A$ სიჩქარის მოდული ტოლი იქნება:

$$V_A = OA \cdot \omega_{OA} = 40 \cdot 4 = 160 \text{ სმ/წმ.}$$

$\vec{V}_A \perp OA$ და მიმართულია მოძრაობის მხარეს.

1 კბილანას სიჩქარეთა მყისი ცენტრი მდებარეობს უძრავ 2 კბილანასთან შეხების P წერტილში. ამიტომ $\vec{V}_B \perp PB$ და 1 კბილანას ω_1 კუთხური სიჩქარე იქნება:

$$\omega_1 = \frac{V_A}{r} = \frac{160}{20} = 8 \text{ რად/წმ.}$$

B წერტილი ერთდროულად ეკუთვნის 1 კბილანას და BD ბარბაცას. მისი სიჩქარე შეიძლება განესაზღვროთ ორი ხერხით: I. $V_B = \omega_1 \cdot PB = 8 \cdot 20\sqrt{2} = 160\sqrt{2}$ სმ/წმ.

II. მე-3 თეორემის თანახმად, $\vec{V}_A$ და $\vec{V}_B$ სიჩქარეები დავაგეგმილთ AB წრეზე, გვექნება:

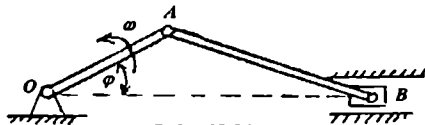
$$V_B \cos 45^\circ = V_A \Rightarrow V_B = \frac{V_A}{\cos 45^\circ} = V_A \sqrt{2} = 160\sqrt{2} \text{ სმ/წმ.}$$

ახლა BD ბარბაცას ω_{BD} კუთხური სიჩქარის გასაგებად ვიციტ $\vec{V}_B$ სიჩქარე და D წერტილის სიჩქარის მიმართულება ($\vec{V}_D \perp CD$). B და D წერტილებზე აღემათოთ $\vec{V}_B$ და $\vec{V}_D$ სიჩქარეთა მართობები და ვიპოვიტ BD ბარბაცას სიჩქარეთა P_{BD} მყის ცენტრს. ამასთან, $\triangle BDP_{BD}$ -დან ადვილად ვიპოვიტ BP_{BD} მონაკვეთის სიგრძეს, გვექნება:

$$BP_{BD} = BD \sin 45^\circ = 60 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 30\sqrt{2} \text{ სმ.}$$

$$\omega_{BD} = \frac{V_B}{BP_{BD}} = \frac{160\sqrt{2}}{30\sqrt{2}} = \frac{16}{3} \text{ რად/წმ.}$$

ამოცანა 50. მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის (ნახ. 13.21) $OA = 20$ სმ სიგრძის მრუდმხარა უძრავი O ღერძის გარშემო ბრუნავს $\omega = 2$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით. მექანიზმის სამი სხვადასხვა მდებარეობის (1. $\varphi = 90^\circ$, 2. $\varphi = 0$ და 3. $\varphi = 30^\circ$)



ნახ. 13.21

შემთხვევაში განესაზღვროთ A და B წერტილების სიჩქარე, $AB = 50$ სმ სიგრძის ბარბაცას კუთხური სიჩქარე და მასზე ისეთი E წერტილის სიჩქარე, რომლის მოდული

უმცირესია AB ბარბაცას წერტილების სიჩქარეებს შორის.

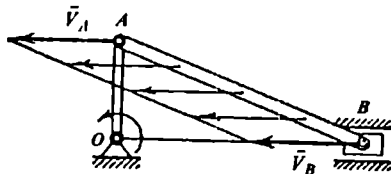
ამოხსნა. A წერტილი მოძრაობს OA რადიუსიან წრეწირზე, ამიტომ მისი მექანიზმის ნებისმიერი მდებარეობისათვის სიჩქარის მოდული

$$V_A = OA \cdot \omega = 20 \cdot 2 = 40 \text{ სმ/წმ.}$$

$\vec{V}_A$ მიმართულია OA მრუდმხარას მართობულად მოძრაობის მხარეს. B წერტილის სიჩქარე მიმართულია OB წრფის გასწვრივ. ეს მონაცემები საკმარისია AB ბარბაცას ყველა კინემატიკური მახასიათებლის განსაზღვრავად მექანიზმის სამივე მდებარეობაში.

1. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\varphi = 90^\circ$ (ნახ. 13.22). მექანიზმის ამ მდებარეობაში A და B

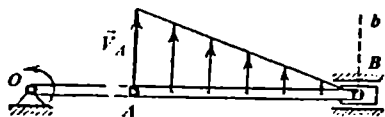
წერტილებზე $\vec{V}_A$ და $\vec{V}_B$ სიჩქარეებისადმი აღმართული მართობები უსასრულობაში იკვეთება (იხ. §13.3, ნახ. 13.8). მაშასადამე, მექანიზმის ამ მდებარეობაში AB ბარბაცა ასრულებს მყის გადატანით მოძრაობას $\omega_{AB} = 0$ და მისი ყველა წერტილის სიჩქარე მოდულით და მიმართულებით $\vec{V}_A$ სიჩქარის ტოლია (იხ. ნახ. 13.22).



ნახ. 13.22

2. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\varphi = 0$ (ნახ. 13.23). ნახაზიდან ჩანს, რომ $\vec{V}_A$ სიჩქარის მართობი AB და $\vec{V}_B$ სიჩქარის

მართობი Bb იკვეთებიან B წერტილში. მაშასადამე, მექანიზმის მოცემული მდებარეობისათვის B წერტილი არის AB ბარბაცას სიჩქარეთა მყისი ცენტრი, ე.ი. $V_B = 0$, ხოლო



ნახ. 13.23

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AB} = \frac{40}{50} = 0,8 \text{ რად/წმ.}$$

AB ბარბაცას სიჩქარეთა განაწილების ეპიურა ნაჩვენებია

ნახ. 13.23-ზე.

3. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\varphi = 30^\circ$ (ნახ. 13.24). AB ბარბაცას A და B წერტილების სიჩქარეების მიმართულებები ცნობილია, ამიტომ ამ წერტილებზე $\vec{V}_A$ და $\vec{V}_B$ სიჩქარეებისადმი აღმართული მართობების გადაკვეთის P წერტილი იქნება AB -ს სიჩქარეთა მყისი ცენტრი.

(13.9) ფორმულის თანახმად AB ბარბაცას ω_{AB} კუთხური სიჩქარე ტოლია:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{PA}, \quad (1)$$

$$V_B = \omega_{AB} \cdot PB. \quad (2)$$

13.24 ნახაზის მიხედვით გამოვთვალოთ PA და PB მონაკვეთების სიგრძეები. $\triangle OAC$ -დან $AC = OA \sin 30^\circ = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$ სმ.

$\triangle ACB$ -დან

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{2500 - 100} = 20\sqrt{6} \text{ სმ. } BC = AD; \triangle APD \text{-დან}$$

$$AP = \frac{AD}{\cos 30^\circ} = \frac{20\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 40\sqrt{2} \text{ სმ; } PD = \frac{1}{2} AP = 20\sqrt{2} \text{ სმ,}$$

$$PB = PD + DB = PD + AC = (20\sqrt{2} + 10) \approx 38,2 \text{ სმ.}$$

(1) ფორმულაში რიცხვითი მონაცემების ჩასმით ვიპოვიტ ω_{AB} კუთხურ სიჩქარეს, (2)-დან - $\vec{V}_B$ სიჩქარის მოდულს, გვექნება:

$$\omega_{AB} = \frac{40}{40\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71 \text{ რად/წმ,}$$

$$V_B = \omega_{AB} \cdot PB = 0,71 \cdot 38,2 = 27,1 \text{ სმ/წმ.}$$

AB ბარბაცაზე უმცირესი სიჩქარე ექნება იმ E წერტილს, რომელიც ყველაზე ახლოსაა სიჩქარეთა P მყის ცენტრთან, ე.ი. E წერტილი მდებარეობს P წერტილიდან AB -ზე დაშვებული მართობზე და $\vec{V}_E$ სიჩქარის მოდული იქნება:

$$V_E = \omega_{AB} \cdot PE. \quad (3)$$

PE მართობის სიგრძის გამოსათვლელად განვიხილოთ $\triangle APB$, სადაც $\angle APB = 60^\circ$ აღვნიშნოთ $\angle PAB = \alpha$, მაშინ სინუსების თეორემის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\frac{PB}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{PB \sin 60^\circ}{AB}.$$

$\triangle APE$ -დან

$$PE = AP \cdot \sin \alpha = \frac{AP \cdot BP \sin 60^\circ}{AB} = \frac{40\sqrt{2} \cdot (20\sqrt{2} + 10) \cdot 0,86}{50} \approx 37,1 \text{ სმ.}$$

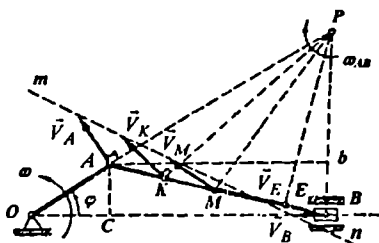
(3) ფორმულაში რიცხვით მნიშვნელობის ჩასმით მივიღებთ:

$$V_E = 0,71 \cdot 37,1 = 26,34 \text{ სმ/წმ.}$$

მექანიზმის მოცემული მდებარეობისათვის AB ბარბაცას წერტილების სიჩქარე ისეა განაწილებული, რომ მისი ყველა წერტილი ბრუნავს სიჩქარეთა P მყის ცენტრის გარშემო.

$\vec{V}_A$ და $\vec{V}_B$ სიჩქარეთა ბოლოებზე გაატაროთ mn წრფე. მაშინ სიჩქარეთა ეპიურას 13.24

ნახაზზე ნაჩვენები ფორმა ექნება, ე.ი. მათი სიდიდე იცვლება წრფივი კანონით. ცხადია, E წერტილის ბრუნვის რადიუსია EP , M -ის - MP , K -სი - KP და ა.შ.



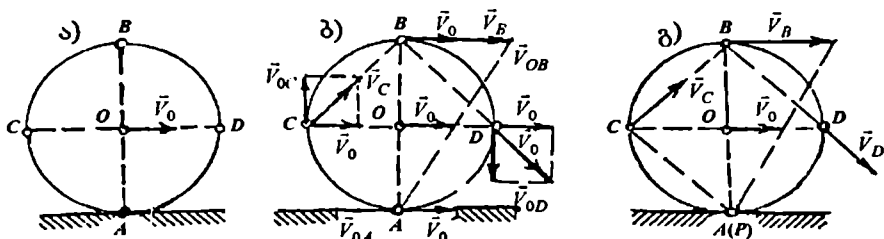
ნახ. 13.24

ამოცანა 51. R რადიუსიანი ბორბალი უსრიალოდ მიგორავს პორიზონტალურ ლიანდაგზე (ნახ. 13.25, ა). მოცემულ მდებარეობაში ბორბლის O ცენტრის სიჩქარე $V_O = 2\sqrt{2}$ მ/წმ.

განვსაზღვროთ ბორბლის ურთიერთმართობული დიამეტრების ბოლო A, B, C და D წერტილების სიჩქარე.

ამოხსნის I ვარიანტი. პოლუსად მივიღოთ ბორბლის O ცენტრი, ვისარგებლოთ (13.6) ფორმულით (ნახ. 13.25, ბ), მაშინ ბორბლის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე პოლუსის $\vec{V}_O$ სიჩქარის

ქარისა და ამ წერტილის პოლუსის გარშემო ბრუნვის სიჩქარის გეომეტრიული ჯამის ტოლია (ნახ. 13.25, ბ). რადგან ბორბალი უსრიალიდ მიგორავს, ამიტომ ბორბლის ღიანდაგთან შეხების A წერტილის სიჩქარე ნულის ტოლია: $V_A = 0$. A წერტილი არის ბორბლის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი.



ნახ. 13.25

A წერტილის O პოლუსის გარშემო ბრუნვის $\vec{V}_{OA}$ და $\vec{V}_0$ სიჩქარეები მოდულით ტოლია და მიმართულია ურთიერთსაპირისპიროდ:

$$\vec{V}_{OA} = -\vec{V}_0.$$

A , C , B და D წერტილებიდან O პოლუსამდე მანძილები ტოლია. მაშასადამე, ამ წერტილების პოლუსის გარშემო ბრუნვის სიჩქარეთა მოდულებიც ერთმანეთის ტოლია:

$$V_{OC} = V_{OB} = V_{OD} = V_{OA} = V_0.$$

ყოველი ჩამოთვლილი წერტილიდან გადაედოთ $\vec{V}_0$ და პოლუსის გარშემო ბრუნვის სიჩქარის ვექტორები, რომლებიც შესაბამისი რადიუსების მართობულია. ვიპოვოთ მათი გეომეტრიული ჯამი, ხოლო შემდეგ გამოვთვალოთ მათი მოდულების მნიშვნელობები:

$$V_c = \sqrt{V_0^2 + V_{OC}^2} = \sqrt{V_0^2 + V_0^2} = V_0\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 \text{ მ/წმ};$$

$$V_B = V_0 + V_{OB} = V_0 + V_0 = 2V_0 = 4\sqrt{2} \text{ მ/წმ} \approx 5,74 \text{ მ/წმ};$$

$$V_D = \sqrt{V_0^2 + V_{OD}^2} = \sqrt{V_0^2 + V_0^2} = V_0\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 \text{ მ/წმ}.$$

ამოხსნის მე-2 ვარიანტი. ბორბლის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი მივიღოთ პოლუსად. მაშინ ბორბლის ყველა წერტილის სიჩქარე გამოითვლება, როგორც სიჩქარეთა P მყისი ცენტრის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობის სიჩქარე. ნებისმიერი წერტი-

ლის სიჩქარის მოდული გამოითვლება სიჩქარეთა მყისი ცენტრიდან მათი დაშორების პროპორციულად (ნახ. 13.25, გ):

$$V_B = AB \cdot \omega = 2R \cdot \frac{V_0}{R} = 2V_0 \text{ ან } V_B = V_0 \cdot \frac{PB}{PO} = V_0 \cdot 2 = 4\sqrt{2} \approx 5,74 \text{ მ/წმ.}$$

რადგან $PC = PD = R\sqrt{2}$, ამიტომ

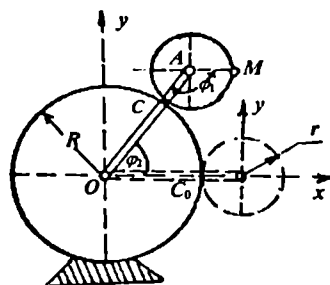
$$V_C = V_0 \cdot \frac{PC}{PO} = V_0 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 \text{ მ/წმ,}$$

$$V_D = V_C \cdot \frac{PD}{PO} = V_C \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 \text{ მ/წმ.}$$

ნაპოვნ სიჩქარეთა ვექტორები მართობულია სიჩქარეთა P მყის ცენტრთან შემაერთებელი მონაკვეთისა და მიმართულია მოძრაობის მხარეს (ნახ. 13.25, ბ).

სიჩქარეთა ანალოგური განაწილება აღინიშნება, როცა ბორბალი უსრიალოდ მიგორავს ნებისმიერი ფორმის ზედაპირზე.

ამოცანა 52. $r = 10$ სმ სიგრძის რადიუსიანი კბილანა მოძრაობაში მოჰყავს OA მრუდმხარას და უსრიალოდ მიგორავს $R = 20$ სმ რადიუსიან უძრავ კბილანა თვალზე.



ნახ. 13.26

მრუდმხარა ბრუნავს O ღერძის გარშემო თანაბარჩქარეულად $\varepsilon = 2$ სმ/წმ² კუთხური აჩქარებით.

ვიპოვოთ მოძრავი თვალის მოძრაობის განტოლებები, თუ ცნობილია საწყისი პირობები: როცა $t = 0$, მაშინ მრუდმხარას კუთხური სიჩქარე $\omega_0 = 0$ და საწყისი კუთხე

$\phi_0 = 0$ (ნახ. 13.26). ნებისმიერი t დროის მომენტისათვის განვსაზღვროთ აგრეთვე M წერტილის სიჩქარე, რომელიც r რადიუსიან ფერსოზე მდებარეობს და ემთხვევა OA ღერძის საწყის მიმართულებას.

ამოხსნა. r რადიუსიანი თვალი ასრულებს რთულ მოძრაობას. ის ბრუნავს A წერტილზე გამავალი ნახაზის სიბრტყის მართობული თავის ღერძის გარშემო, აგრეთვე OA მრუდმხარასთან ერთად უძრავი O ღერძის გარშემო.

განვსაზღვროთ მრუდმხარას ბრუნვითი მოძრაობის კანონი.

მოცემული გვაქვს, რომ მრუდმხარა ბრუნავს მუდმივი ε აჩქარებით, მაშასადამე,

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \varepsilon \Rightarrow \frac{d\varphi_1}{dt} = \varepsilon t + c_1, \quad (1)$$

$$\varphi_1 = \varepsilon \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2. \quad (2)$$

(1) და (2)-ში საწყისი პირობების ჩასმით მივიღებთ: $c_1 = 0$, $c_2 = 0$.

ამრიგად, მრუდმხარას ბრუნვითი მოძრაობის კანონი იქნება:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \varepsilon t^2 \quad (3)$$

მოძრავი თვალის თავის სიბრტყეში მოძრაობის განტოლებების შესადგენად ავიღოთ უძრავი Oxy კოორდინატთა სისტემა (ნახ. 13.26), ხოლო პოლუსად მივიღოთ A წერტილი. დროის რომელიმე მომენტისათვის A წერტილის კოორდინატები ტოლი იქნება

$$x = (R+r) \cos \varphi_1, \quad (4)$$

$$y = (R+r) \sin \varphi_1. \quad (5)$$

მრუდმხარას φ_1 კუთხით მობრუნებისას მოძრავი თვალი მასთან ერთად შემობრუნდება აგრეთვე φ_1 კუთხით, ხოლო მრუდმხარას მიმართ თავისი ღერძის გარშემო — φ_2 კუთხით, ე.ი. $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ კუთხით.

განვსაზღვროთ φ_2 კუთხე. საწყის მომენტში, როცა $\varphi_1 = 0$, მაშინ M წერტილი Ox ღერძზე c_0 მდებარეობაშია. როცა OA შემობრუნდება φ_1 კუთხით, მაშინ AM რადიუსი დაიკავებს OA -ს მიმართ φ_2 კუთხის შესაბამის მდებარეობას.

რადგან c_0c რკალის სიგრძე ტოლია CM რკალის სიგრძისა, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ ტოლობა:

$$R \cdot \varphi_1 = r \cdot \varphi_2 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{R}{r} \cdot \varphi_1,$$

ანუ

$$\varphi_2 = \frac{R}{2r} \cdot \varepsilon t^2, \quad (6)$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \left(1 + \frac{R}{r}\right) \cdot \frac{1}{2} \varepsilon t^2. \quad (7)$$

ჩავსვათ φ -ის მნიშვნელობა (4) და (5) განტოლებებში და (7)-თან ერთად მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} x &= (R+r) \cos \frac{\varepsilon t^2}{2}, \\ y &= (R+r) \sin \frac{\varepsilon t^2}{2}, \\ \varphi &= \left(1 + \frac{R}{r}\right) \frac{\varepsilon t^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ჩავსვათ რიცხვითი მნიშვნელობები (8)-ში, მივიღებთ მოძრავი თვალის თავის სიბრტყეში მოძრაობის განტოლებებს:

$$\left. \begin{aligned} x &= 30 \cos t^2, \\ y &= 30 \sin t^2, \\ \varphi &= 1,5 t^2. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

რადგან M წერტილის სიჩქარე ტოლია A პოლუსის სიჩქარის და M წერტილის A -ს მიმართ ფარდობითი მოძრაობის სიჩქარის გეომეტრიული ჯამისა, ამიტომ M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარის გასაგებად ვისარგებლოთ შემდეგი ტოლობით:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}, \quad (10)$$

სადაც

$$V_A = (R+r)\omega = (R+r) \frac{d\varphi_1}{dt} = (R+r)\varepsilon t,$$

ამ ფორმულაში რიცხვითი მნიშვნელობების ჩასმით მივიღებთ:

$$V_A = (20+10) \cdot 2t = 60t \text{ სმ/წმ}. \quad (11)$$

$\vec{V}_{MA}$ ვექტორი მიმართულია R რადიუსის მართობულად.

$\vec{V}_{MA}$ - ვექტორის მოდული ტოლი იქნება:

$$V_{MA} = r \cdot \omega_{MA} = r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = r \left(1 + \frac{R}{r}\right) \varepsilon t,$$

ე.ი.

$$V_{MA} = 10 \left(1 + \frac{20}{10}\right) 2t = 60t \text{ სმ/წმ}.$$

$\vec{V}_M$ სიჩქარის მოდულს განვსაზღვრავთ კოსინუსების თეორემით:

$$V_M = \sqrt{V_A^2 + V_{MA}^2 + 2V_A V_{MA} \cos \alpha}, \quad (12)$$

სადაც კუთხე

$$\alpha = (\vec{V}, \wedge \vec{V}_{BA}) = 180 - \varphi_2,$$

და

$$\varphi_2 = \varphi_1 \frac{R}{r} = \frac{\varepsilon t^2}{2} \cdot \frac{R}{r} = \frac{2t^2}{2} \cdot \frac{20}{10} = 2t^2.$$

მაშასადამე, ზემოთ მიღებული მონაცემების (12)-ში ჩასმით მივიღებთ:

$$V_M = \sqrt{V_A^2 + V_{MA}^2 + 2V_A V_{BA} \cos(180^\circ - \varphi_2)} = 60t \sqrt{2(1 - \cos 2t^2)}.$$

საბოლოოდ

$$V_M = 60\sqrt{2t} \cdot \sin 2t \text{ მ/წმ.}$$

13.5. საეარჯიშო ამოცანები ბრტყელი ფიგურის წერტილების სიჩქარეების განსაზღვრაზე

13.1. AB ღერო მოძრაობს ნახაზის სიბრტყეში (ნახ. 13.27). დროის რომელიმე მომენტში A წერტილის $\vec{V}_A$ სიჩქარე AB ღეროსთან ადგენს 30° -იან კუთხეს, ხოლო B წერტილის $\vec{V}_B$ სიჩქარე დროის ამ მომენტისათვის ემთხვევა AB -ს მიმართულებას. განსაზღვრეთ B წერტილის სიჩქარის მოდული, თუ $V_A = 2\sqrt{3}$ მ/წმ.

პასუხი: $V_B = 3$ მ/წმ.

13.2. AB ღერო მოძრაობს ნახაზის სიბრტყეში ისე, რომ მისი B წერტილის სიჩქარე ყოველთვის მიმართულია BC წრფის გასწვრივ, რომელიც პორიზონტთან ადგენს $\alpha = 45^\circ$ კუთხეს (ნახ. 13.28). რას უდრის B წერტილის $\vec{V}_B$ სიჩქარის მოდული, თუ დროის ადებულ მომენტში A წერტილის სიჩქარე $V_A = 5$ მ/წმ და მიმართულია AB მონაკვეთის მართობულად.

პასუხი: $V_B = 0$.

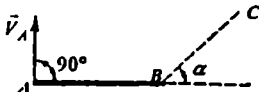
13.3. $AB = 0,5$ მ სიგრძის ღერო მოძრაობს ნახაზის სიბრტყეში. დროის რომელიმე მომენტისათვის A წერტილის $\vec{V}_A$ სიჩქარე AB ღეროსთან ადგენს 45° კუთხეს, ხოლო B წერტილის სიჩქარე – 60° -იან კუთხეს (ნახ. 13.29). იპოვეთ B წერტილის

$\vec{V}_B$ სიჩქარის მოდული და AB ღეროს კუთხური სიჩქარე, თუ $V_A = 2$ მ/წმ.

პასუხი: $V_B = 2\sqrt{2}$ მ/წმ, $\omega = 2,06$ რად/წმ.



ნახ. 13.27



ნახ. 13.28



ნახ. 13.29

13.4. მექანიზმის OA მრუდმხარა O ღერძის გარშემო ბრუნავს თანაბრად და OB მიმართულებასთან ადგენს $\varphi = 90^\circ$ კუთხეს (ნახ. 13.30). განსაზღვრეთ B წერტილის სიჩქარე, თუ $OA = 2$ მ და $\omega = 1,5$ წმ⁻¹.

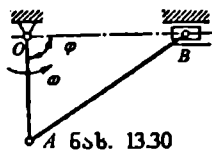
პასუხი: $V_B = 3$ მ/წმ.

13.5. მექანიზმის OA მრუდმხარა და AB ბარბაცა დროის მოცემულ მომენტში ერთ წრეზე მდებარეობს (ნახ. 13.31). განსაზღვრეთ AB ბარბაცას კუთხური სიჩქარე, თუ OA ბრუნავს $\omega = 120\pi$ წმ⁻¹ კუთხური სიჩქარით, $OA = 0,5$ მ და $AB = 1,57$ მ.

პასუხი: $\omega_{AB} = 120$ რად/წმ.

13.6. მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის მოცემულ მდებარეობისათვის განსაზღვრეთ AB ბარბაცას კუთხური სიჩქარე, თუ A წერტილის სიჩქარე $V_A = 6$ მ/წმ, ხოლო $AB = \sqrt{3}$ მ (ნახ. 13.32).

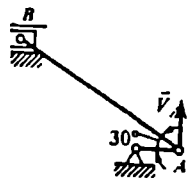
პასუხი: $\omega_{AB} = 4$ რად/წმ.



ნახ. 13.30



ნახ. 13.31



ნახ. 13.32

13.7. მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის მოცემულ მდებარეობისათვის განსაზღვრეთ B წერტილის სიჩქარე, თუ $\omega = 2$ წმ⁻¹, $OA = 2\sqrt{3}$ მ (ნახ. 13.33).

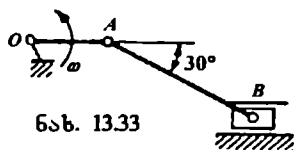
პასუხი: $V_B = 4$ მ/წმ.

13.8. განსაზღვრეთ OA მრუდმხარას კუთხური სიჩქარე ნახაზზე ნაჩვენები მდებარეობისათვის, თუ ბარბაცას B წერტილის სიჩქარე $V_B = 2$ მ/წმ, ხოლო მრუდმხარას სიგრძე $OA = 0,1$ მ (ნახ. 13.34).

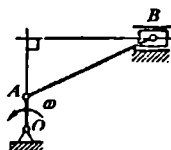
პასუხი: $\omega = 20$ რად/წმ.

13.9. 1 ტვირთის სიჩქარე $V_1 = 0,5$ მ/წმ (ნახ. 13.35). განსაზღვრეთ მოძრავი 2 დოლის კუთხური სიჩქარე, თუ მისი რადიუსი $R = 0,1$ მ.

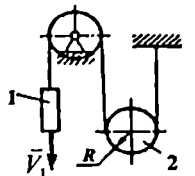
პასუხი: $\omega_2 = 2,5$ რად/წმ.



ნახ. 13.33



ნახ. 13.34



ნახ. 13.35

13.10. დოლის კუთხური სიჩქარე $\omega = 5$ რად/წმ (ნახ. 13.36). საფეხურიანი სატკეპნელა უსრიალოდ მიგორავს პორიზონტალურ სიბრტყეზე. განსაზღვრეთ სატკეპნელას M წერტილის სიჩქარე, თუ რადიუსები $r = 0,4$ მ, $R = 0,6$ მ.

პასუხი: $V_M = 0,4$ მ/წმ.

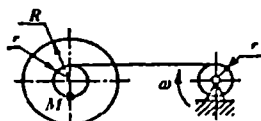
13.11. სახსროვანი $OABO_1$ მექანიზმის OA მრუდმხარა ბრუნავს O ღერძის გარშემო $\omega_1 = 4$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით (ნახ. 13.37). განსაზღვრეთ AB და O_1B რგოლების კუთხური სიჩქარე, თუ $OA = 0,5$ მ, $O_1B = 1$ მ.

პასუხი: $\omega_2 = 0$; $\omega_3 = 2$ რად/წმ.

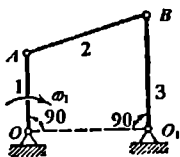
13.12. $d = 2\sqrt{2}$ მ სიგრძის გვერდის მქონე კვადრატის ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას (ნახ. 13.38). დროის მოცემული მომენტისათვის ცნობილია მისი კუთხური სიჩქარე $\omega = 2$

რად/წმ და A წვეროს სიჩქარე $V_A = 6$ მ/წმ. განსაზღვრეთ კეადრატის B წვეროს სიჩქარე.

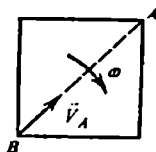
პასუხი: $V_B = 10$ მ/წმ.



ნახ. 13.36



ნახ. 13.37



ნახ. 13.38

13.13. $a = 1,5$ მ სიგრძის გვერდის მქონე $ABCD$ კეადრატი ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას (ნახ. 13.39). დროის მოცემული მომენტისათვის ცნობილია მისი კუთხური სიჩქარე $\omega = 2$ რად/წმ, აგრეთვე A წერტილის $\vec{V}_A$ სიჩქარე, რომელიც AB გვერდის გასწვრივია მიმართული და მისი მოდული $V_A = 4$ მ/წმ. განსაზღვრეთ კეადრატის B და D წერტილების სიჩქარეები.

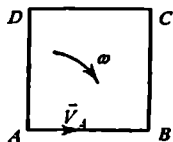
პასუხი: $V_B = 5$ მ/წმ; $V_D = 7$ მ/წმ.

13.14. $OABO_1$ მექანიზმის OA მრუდმხარა ბრუნავს $\omega_1 = 2$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით (ნახ. 13.40). მექანიზმის მოცემული მდებარეობისათვის განსაზღვრეთ BO_1 რგოლის ω_2 კუთხური სიჩქარე, თუ $OA = 1,5$ მ, $AB = 2$ მ და $O_1B = 2$ მ.

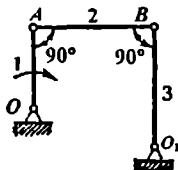
პასუხი: $\omega_2 = 1,5$ რად/წმ.

13.15. ელიფსოგრაფის AB სახაზავის A ცოცია მოძრაობს $V_A = 2\sqrt{3}$ მ/წმ სიჩქარით (ნახ. 13.41). განსაზღვრეთ B ცოციას V_B სიჩქარე იმ მომენტისათვის, როცა კუთხე $\alpha = 30^\circ$.

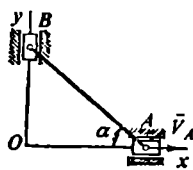
პასუხი: $V_B = 6$ მ/წმ.



ნახ. 13.39



ნახ. 13.40



ნახ. 13.41

13.16. ოთხსახსროვანი $OABO_1$ მექანიზმის OA მრუდმხარა ბრუნავს O წერტილზე გამავალი ღერძის გარშემო $\omega_1 = 2$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით (ნახ. 13.42). განსაზღვრეთ მექანიზმის AB და BO_1 რგოლების ω_2 და ω_3 კუთხური სიჩქარეები, თუ $OA = 20$ სმ. $O_1B = 50$ სმ.

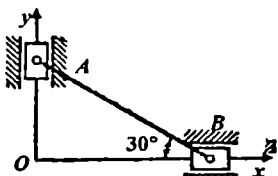
პასუხი: $\omega_2 = 0$ რად/წმ; $\omega_3 = 0,8$ რად/წმ.

13.17. ელიფსოგრაფის AB სახაზავის B ცოცია მოძრაობს Ox ღერძის გასწვრივ $x = 30t$ (x -სანტიმეტრობით, t -წამობით) კანონის თანახმად (ნახ. 13.43). განსაზღვრეთ AB სახაზავის ω კუთხური სიჩქარე ღერძის იმ მომენტისათვის, როცა AB სახაზავი Ox ღერძთან 30° -იან კუთხეს ადგენს და $AB = 30$ სმ.

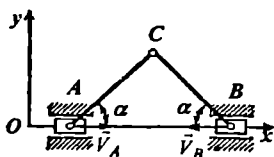
პასუხი: $\omega = 2$ რად/წმ.

13.18. მექანიზმის A და B ცოციები Ox ღერძის გასწვრივ მოძრაობს მოდულით ტოლი: $V_A = V_B = V$ სიჩქარეებით ურთიერთსაპირისპიროდ ერთმანეთის შესახვედრად (ნახ. 13.44). განსაზღვრეთ მექანიზმის C წერტილის სიჩქარე, თუ $AC = CB$ და ისინი მოცემულ მომენტში Ox ღერძთან ადგენენ $\alpha = 45^\circ$ კუთხეებს.

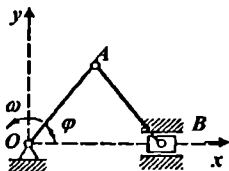
პასუხი: $V_C = V$ მ/წმ.



ნახ. 13.43



ნახ. 13.44



ნახ. 13.45

13.19. მრუდმხარა ბარბაცა მექანიზმის OA მრუდმხარა აკეთებს $n = 60$ ბრ/წთ. განსაზღვრეთ B ცოციას სიჩქარე ღერძის იმ მომენტისათვის, როცა OA ბარბაცა Ox ღერძთან ადგენს $\varphi = 60^\circ$ კუთხეს, თუ $OA = AB = 20$ სმ (ნახ. 13.45).

პასუხი: $V_B = 0,4\pi\sqrt{3}$ მ/წმ.

13.20. ბორბალი უსრიალოდ მიგორავს წრფივ ლიანდაგზე (ნახ. 13.46). მისი C ცენტრი მოძრაობს მუდმივი $\vec{V}_C$ სიჩქარით.

განსაზღვრეთ A და B წერტილების სიჩქარე, თუ $V_C = 3\sqrt{2}$ მ/წმ, $R = \sqrt{2}$, $CB = \frac{1}{2}R$.

პასუხი: $V_A = 6$ მ/წმ; $V_B = 4,5\sqrt{2}$ მ/წმ.

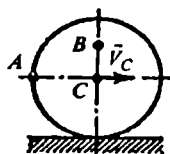
13.21. $R = 0,5$ მ რადიუსიანი ბორბალი უსრიალოდ მიგორავს პორიზონტალურ ლიანდაგზე $\omega = 4$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით (ნახ. 13.47). განსაზღვრეთ ბორბლის O , A , B და D წერტილების სიჩქარე.

პასუხი: $V_O = 2$ მ/წმ, $V_B = 4$ მ/წმ,

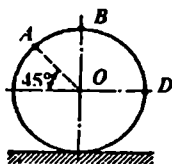
$V_D = 2\sqrt{2}$ მ/წმ, $V_A = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$ მ/წმ.

13.22. ეპიცikliური მექანიზმი შედგება ორი ერთნაირი $R = 0,5$ მ რადიუსიანი ბორბლისაგან, რომელთაგან 1 უძრავია, ხოლო 2 – მოძრაობაში მოჰყავს OA მრუდმხარას, რომელიც ბრუნავს $\omega = 3$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით. 2 ბორბალთან სახსრულადაა მიერთებული BC ბარბაცა, ამასთან C ცოცია მოძრაობს პორიზონტალურ მიმართულებში. განსაზღვრეთ მექანიზმის მოცემული მდებარეობისათვის C ცოციას V_C სიჩქარე (ნახ. 13.48).

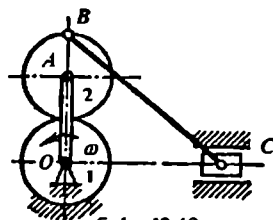
პასუხი: $V_C = 4\omega R = 6$ მ/წმ.



ნახ. 13.46



ნახ. 13.47



ნახ. 13.48

13.23. დიფერენციალურ მექანიზმში OA მრუდმხარა $\omega = 2$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით ბრუნავს უძრავი O ღერძის გარშემო (ნახ. 13.49). ბორბალი 1 იმავე ღერძის გარშემო ბრუნავს $\omega_1 = 4$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით. იპოვეთ C წერტილის სიჩქარე ნახაზზე ნაჩვენები მდებარეობისათვის, თუ OA მრუდმხარა და ბორბალი 1 ბრუნავს: ა) ერთი მიმართულებით

ბით. ბ) ბრუნავს ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულებით, თუ ბორბლების რადიუსებია: $r_1 = r_2 = 0,1$ მ.

პასუხი: ა) $V_x = 0,4$ მ/წმ; ბ) $V_c = 1,2$ მ/წმ.

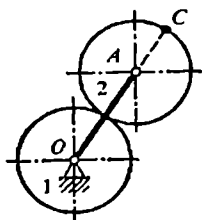
13.24. პლანეტარულ მექანიზმში ბორბალი 2 მოძრაობაში მოჰყავს OA მრუდმხარას, რომელიც ბრუნავს უძრავი ბორბალი 1-ის O (ცენტრზე გამავალი ღერძის გარშემო (ნახ. 13.50). იპოვეთ ბორბალი 2-ის C წერტილის სიჩქარე ნახაზზე ნაჩვენები მდებარეობისათვის, თუ OA მრუდმხარას კუთხური სიჩქარე $\omega = 2$ რად/წმ და რადიუსები $r_1 = r_2 = 0,1$ მ.

პასუხი: $V_c = 0,8$ მ/წმ.

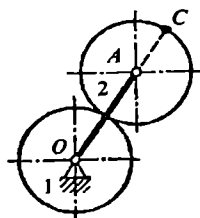
13.25. $OA = 2r$ სიგრძის მრუდმხარა უძრავი O ღერძის გარშემო ბრუნავს ω კუთხური სიჩქარით და თან მიაქვს მოძრავი კბილანა თვალი 1-ის A ღერძი (ნახ. 13.51). მოძრავი კბილანა თვალი 1 მიგორავს უძრავ კბილანა თვალ 2-ზე. ამასთან მოძრავ კბილანაზე C სახსრით მიერთებულია CB ბარბაცა. უძრავ და მოძრავ კბილანა თვლებს აქვს ტოლი სიგრძის რადიუსები. განსაზღვრეთ CB ბარბაცას კუთხური სიჩქარე, აგრეთვე A , C და B წერტილების სიჩქარე იმ მომენტისათვის, როცა OC რადიუსი OA მრუდმხარას მართობულია, თუ $r = \sqrt{2}$ მ, $AB = 3\sqrt{2}$ მ.

პასუხი: $V_A = 4\sqrt{2}$ მ/წმ; $\omega_1 = 4$ რად/წმ; $V_c = 8$ მ/წმ;

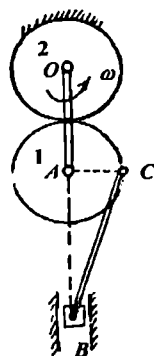
$\omega_{BC} = \sqrt{2}$ რად/წმ; $V_B = 7,64$ მ/წმ.



ნახ. 13.49



ნახ. 13.50



ნახ. 13.51

13.26. მექანიზმის მოცემული მდებარეობისათვის განესაზღვროთ A , B და C წერტილების სიჩქარე და მისი ყველა რგოლის კუთხური სიჩქარე, თუ $\omega = 2$ რად/წმ, $OA = 24$ სმ, $AB = 24\sqrt{3}$ სმ, $\alpha = 60^\circ$, $r = 4\sqrt{3}$ სმ (ნახ. 13.52).

პასუხი: $V_A = 48$; $\omega_{AB} = \frac{2}{3}$ რად/წმ;

$\omega_c = 8$ რად/წმ; $V_B = 32\sqrt{3}$ სმ/წმ; $V_C = 32\sqrt{6}$ სმ/წმ.

13.27. მექანიზმის მოცემული მდებარეობისათვის განესაზღვროთ A , B , C და N წერტილების სიჩქარე, აგრეთვე ყველა რგოლის კუთხური სიჩქარე, თუ $\omega = 4$ რად/წმ, $OA = 20$ სმ, $AB = 90$ სმ, $r = 10$ სმ, $R = 20$ სმ, $h = 30$ სმ (ნახ. 13.53).

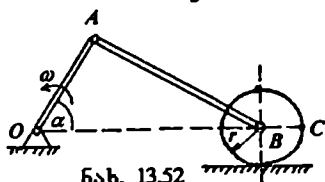
პასუხი: $V_A = 80$ მ/წმ; $\omega_{AB} = 2$ რად/წმ; $V_B = 60$ მ/წმ;

$\omega_c = 6$ რად/წმ; $V_N = 180$ მ/წმ; $V_C = 60\sqrt{5}$ სმ/წმ.

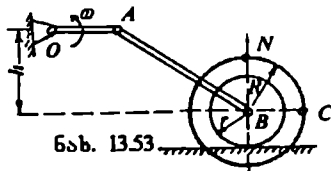
13.28. მექანიზმის მოცემული მდებარეობისათვის განესაზღვროთ A , B , C და N წერტილების სიჩქარე, თუ $V_0 = 30$ სმ/წმ, $r = 6$ სმ, $R = 8$ სმ, $AB = 12$ სმ (ნახ. 13.54).

პასუხი: $V_A = V_C = 50$ სმ/წმ;

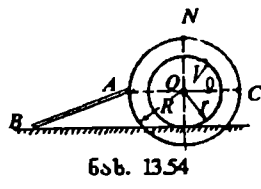
$V_B = 25\sqrt{2}$ სმ/წმ; $\omega_{AB} \approx 2,2$ რად/წმ; $V_N = 2V_0 = 60$ სმ/წმ.



ნახ. 13.52



ნახ. 13.53



ნახ. 13.54

13.29. მექანიზმის მოცემული მდებარეობისათვის განესაზღვროთ A , B და C წერტილების სიჩქარე, აგრეთვე AB და BC რგოლების კუთხური სიჩქარეები (ნახ. 13.55), თუ $\omega = \sqrt{3}$ რად/წმ, $OA = 20$ სმ, $AB = 30\sqrt{3}$ სმ, $BC = 10\sqrt{3}$ სმ, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

პასუხი: $V_A = 20\sqrt{3}$ სმ; $V_B = 60$ სმ/წმ;

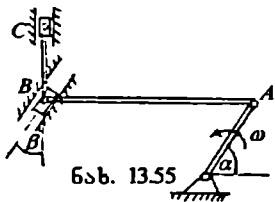
$V_C = 30$ სმ/წმ; $\omega_{AB} = \frac{2}{3}$ რად/წმ; $\omega_{BC} = 1$ რად/წმ.

13.30. O ღერძის გარშემო $\omega = 2$ რად/წმ მუდმივი კუთხური სიჩქარით მბრუნავი OB ღერო ამოძრავებს AD ღეროს, რომლის A და C წერტილები მოძრაობს ღერძებზე: A - პორიზონტალური Ox ღერძზე, C - ვერტიკალურ Oy ღერძზე. განსაზღვრეთ AD ღეროს D წერტილის სიჩქარე, როცა $\varphi = 45^\circ$ და იპოვეთ ამ წერტილის ტრაექტორიის განტოლება, თუ $AB = OC = BC = CD = 12$ სმ (ნახ. 13.56).

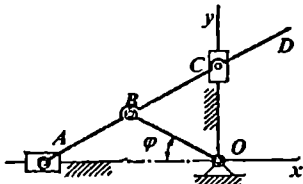
პასუხი: $V_D = 0,54$ მ/წმ; $\left(\frac{x}{12}\right)^2 + \left(\frac{y}{36}\right)^2 = 1$.

13.31. იპოვეთ არაცენტრული მრუდმხარა მექანიზმის B ცოცხის სიჩქარე $\omega = 1,5$ წმ⁻¹ კუთხური სიჩქარით O ღილის გარშემო მბრუნავი OA მრუდმხარას ორი პორიზონტალური და ორი ვერტიკალური მდებარეობისათვის, თუ $OA = 40$ სმ, $AB = 50$ სმ, $OC = 20$ სმ (ნახ. 13.57).

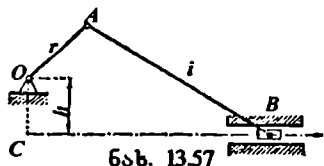
პასუხი: $V_1 = V_3 = 45$ სმ/წმ; $V_2 = V_4 = 60$ სმ/წმ.



ნახ. 13.55



ნახ. 13.56



ნახ. 13.57

13.32. 13.58 ნახაზზე გამოსახული მექანიზმის $OA = 30$ სმ სიგრძის მრუდმხარა ბრუნავს O ღერძის გარშემო $\omega = 2,5$ წმ⁻¹ კუთხური სიჩქარით. II კბილანა თვალი უსრიალოდ მიგორავს უძრავ I თვალზე და მოძრაობაში მოჰყავს $BC = 50$ სმ სიგრძის ბარბაცა. განსაზღვრეთ ბარბაცას კუთხური სიჩქარე და B , C წერტილებში სიჩქარეები იმ მომენტისათვის, როდესაც AB რადიუსი მართობულია OA მრუდმხარასი და ბარბაცასთან ადგენს $\alpha = 30^\circ$ -იან კუთხეს.

პასუხი: $V_B = 75\sqrt{2}$ სმ/წმ; $\omega_{BC} = \sqrt{3}$ წმ⁻¹; $V_C \approx 118,3$ სმ/წმ.

13.33. $OA = 20$ სმ სიგრძის მრუდმხარა ბრუნავს ნახაზის სიბრტყის მართობული უძრავი O ღერძის გარშემო $\omega = 2$

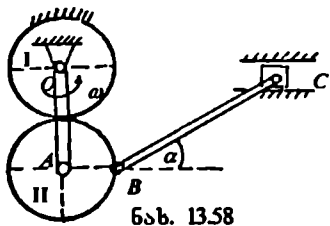
რად/წმ კუთხური სიჩქარით (ნახ. 13.59). მის A ბოლოზე ჩამოცმულია $r = 10$ სმ რადიუსიანი ბორბალი, რომელიც უსრიალოდ მიგორავს უძრავი თხელკედლიანი ცილინდრის შიგა ზედაპირზე. განსაზღვრეთ მე-2 ბორბლის ფერსოზე მდებარე B, C, D და E წერტილების სიჩქარე, თუ $BD \perp OC$.

პასუხი: $V_C = 0$; $V_B = V_D = 40\sqrt{2}$ სმ/წმ; $V_E = 80$ სმ/წმ.

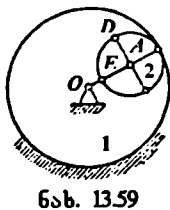
13.34. r_1 რადიუსიანი მოძრავი გორგოლატი 1 და უძრავი გორგოლატი 2 შეერთებულია უჭიმადი ძაფის საშუალებით (ნახ. 13.60). K ტვირთი, რომელიც მიმაგრებულია ამ ძაფის ბოლოში, ეშვება ქვევით $x = 2t^2$ მ კანონის თანახმად. ნახაზზე ნაჩვენები მდებარეობისათვის, რომელიც შეესაბამება დროის $t = 1$ წმ მომენტს, განსაზღვრეთ მოძრავი გორგოლატის ფერსოზე მდებარე C, D, B და E წერტილების სიჩქარე, თუ $r_1 = 0,2$ მ, ხოლო $CD \perp BE$. იპოვეთ აგრეთვე 1 გორგოლატის კუთხური სიჩქარე.

პასუხი: $V_C = 0$; $V_O = 2$ მ/წმ; $V_D = 4$ მ/წმ; $V_B = V_E = 2\sqrt{2}$ მ/წმ;

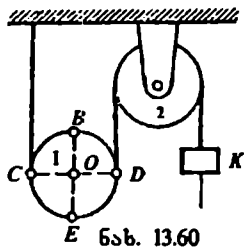
$\omega = 10$ რად/წმ.



ნახ. 13.58



ნახ. 13.59



ნახ. 13.60

13.35. მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის OA მრუდმხარა ბრუნავს O ღერძის გარშემო თანაბრად $\omega_{OA} = 6\pi$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით (ნახ. 13.61). იპოვეთ AB ბარბაცას ω კუთხური სიჩქარე და მისი შუა M წერტილის სიჩქარე ბარბაცას ოთხი

სხვადასხვა მდებარეობისთვის, რომელთათვისაც $\angle AOB$ შესაბამისად ტოლია: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. თუ $OA = 40$ სმ, $AB = 2$ მ.

პასუხი: I. $\omega = -\frac{6}{5}\pi$ რად/წმ; $V_M = 3,77$ მ/წმ;

II. $\omega = 0$; $V_M = 7,54$ მ/წმ;

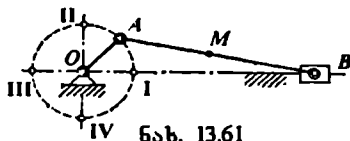
III. $\omega = \frac{6}{5}\pi$ რად/წმ; $V_M = 3,77$ მ/წმ;

IV. $\omega = 0$; $V_M = 7,54$ მ/წმ.

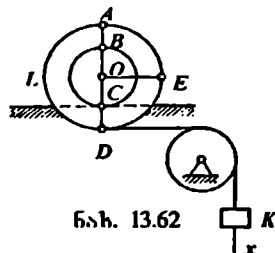
13.36. K ტვირთი უჭიმარი ძაფის საშუალებით დაკავშირებულია L კოჭასთან და ეშვება ძირს $x = t^2$ მ კანონის თანახმად (ნახ. 13.62). ამასთან L კოჭა უსრიალოდ მიგორავს უძრავი პორიზონტალურ ლიანდაგზე. განსაზღვრეთ კოჭას იმ C, A, O და E წერტილების სიჩქარე დროის $t = 1$ წმ მომენტისათვის, რომელიც უკავია მექანიზმს ნახაზზე ნაჩვენები მდებარეობისთვის, ასევე იპოვეთ კოჭას კუთხური სიჩქარე ω , თუ $AD \perp OE$, ხოლო $OD = 2OC = 0,2$ მ.

პასუხი: $V_C = 0$; $V_A = 6$ მ/წმ; $V_H = 4$ მ/წმ; $V_O = 2$ მ/წმ;

$V_E = 4,46$ მ/წმ; $\omega = 20$ რად/წმ.



ნახ. 13.61



ნახ. 13.62

13.6. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი წერტილის აჩქარების განსაზღვრაზე

მოძრავი ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი წერტილის აჩქარება შეიძლება განესაზღვროთ ორი ხერხით: 1 – როგორც ფიგურის გადატანითი და ბრუნვითი მოძრაობის დროს ამ წერტილების აჩქარებათა გეომეტრიული ჯამი (იხ. (13.10) ფორმულა) და 2 – როგორც ამ წერტილის აჩქარება, აჩქარებათა

მყისი ცენტრის გარშემო ფიგურის ბრუნვითი მოძრაობის დროს.

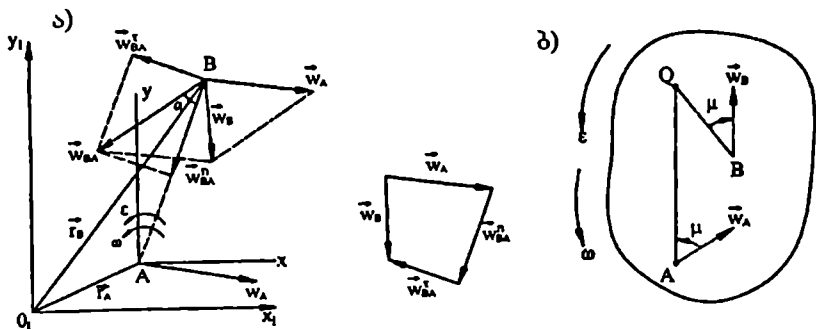
ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი წერტილის აჩქარება ტოლია პოლუსის აჩქარებისა და პოლუსის გარშემო ბრტყელი ფიგურის ბრუნვითი მოძრაობისას მოცემული წერტილის აჩქარების გეომეტრიული ჯამისა (ნახ. 13.63):

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA} = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^r + \vec{W}_{BA}^n, \quad (13.10)$$

სადაც $\vec{W}_B$ საძიებელი წერტილის აჩქარებაა; $\vec{W}_A$ - პოლუსის აჩქარება; $\vec{W}_{BA}$ - B წერტილს აჩქარება A პოლუსის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობისას ($\vec{W}_{BA}^n = \vec{\omega} \times \vec{V}_{BA}$, $\vec{W}_{BA}^r = \vec{\varepsilon} \times \vec{AB}$, ამ მდგენელების სიდიდეები იქნება $W_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB$, $W_{BA}^r = \varepsilon \cdot AB$, ხოლო $W_{BA} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$).

წერტილის აჩქარების მოდული რომ ვიპოვოთ, (13.10) განტოლების თანახმად ავაგოთ აჩქარების გეგმა (აჩქარების მრავალკუთხედი) ან ეს განტოლება შერჩეულ კოორდინატთა ღერძზე დაეაგეგმილოთ აჩქარების ვექტორების მიმართულების გათვალისწინებით (ნახ. 13.63, ა).

აჩქარების მყისი ცენტრი (ამც) ეწოდება ბრტყელი ფიგურის სიბრტყეზე მდებარე იმ Q წერტილს, რომლის აჩქარება დროის მოცემულ მომენტში ნულის ტოლია.



ნახ. 13.63

თუ ცნობილია ბრტყელი ფიგურის A წერტილის აჩქარება, მისი კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება, მაშინ ამც-ის ასაგებად საჭიროა (ნახ. 13.63, ბ):

1. განისაზღვროს μ კუთხე $\varepsilon\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$ ფორმულის მიხედვით;

2. მოკაბრუნოთ წერტილის აჩქარების ვექტორი μ კუთხით კუთხური აჩქარების თანხვედრილი მიმართულებით;

3. გადავზომოთ $AQ = \frac{W_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$ მონაკვეთი აჩქარების $\vec{W}_A$

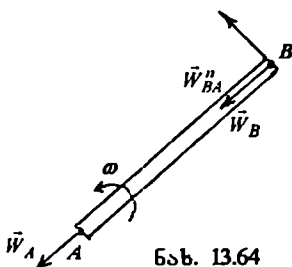
ვექტორის მობრუნებული მიმართულებით.

ამც-ს მეშვეობით შეიძლება ნებისმიერი წერტილის აჩქარების პოვნა. ამისათვის ვიპოვოთ B წერტილის აჩქარება:

$W_B = BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ კუთხური აჩქარების საპირისპირო მიმართულებით. BQ მონაკვეთიდან μ კუთხით გადავზომოთ B წერტილის აჩქარების ვექტორი (ნახ. 13.64, ბ).

ზოგადად, სმც და ამც სხვადასხვა წერტილებია.

ამოცანა 53. 2 მ სიგრძის AB ღერო ასრულებს ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას (ნახ. 13.64). განესაზღვროთ B წერტილის აჩქარების მოდული, თუ მოცემულ მომენტში A წერტილის აჩქარება $W_A = 1$ მ/წმ², ღეროს კუთხური სიჩქარე $\omega = 1$ წმ⁻¹, კუთხური აჩქარება $\varepsilon = 0$.



ამოხსნა. პოლუსად ავირჩიოთ A წერტილი, მაშინ B წერტილის აჩქარება იქნება:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}.$$

სადაც $\vec{W}_{BA}$ არის B წერტილის A წერტილის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობის აჩქარება, ამიტომ მას დაეშლით მხეხ და ნორმალურ მდგენელებად:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^r + \vec{W}_{BA}^n, \quad (1)$$

სადაც $W_A = 1$ მ/წმ²; $W_{BA}^r = \varepsilon \cdot AB = 0$, $W_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB = 2$. დაეაგებმილოთ (1) ტოლობა BA -ს მიმართულებაზე (ვინაიდან $\vec{W}_{BA}^r = 0$, ამიტომ $\vec{W}_{BA}$ -ს ექნება მხოლოდ ერთი მდგენელი $\vec{W}_{BA}^n$), გვექნება: $W_B = W_A + W_{BA}^n = 1 + 2 = 3$ მ/წმ².

ამოცანა 54. AB ღერო მოძრაობს ნახაზის სიბრტყეში (ნახ. 13.65). დროის მოცემულ მომენტში A წერტილის აჩქარება $W_A = 1$ მ/წმ², ღეროს კუთხური სიჩქარე $\omega = 2$ წმ⁻¹, კუთხური

აჩქარება $\varepsilon = 2 \text{ წმ}^{-2}$. განვსაზღვროთ ღეროს B წერტილის აჩქარება, თუ $AB = 1 \text{ მ}$.

ამოხსნა. პოლუსად მივიღოთ A წერტილი, მაშინ B წერტილის აჩქარება იქნება:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}.$$

$\vec{W}_{BA}$ არის B წერტილის A წერტილის მიმართ ბრუნვითი მოძრაობის აჩქარება, ამიტომ მას დავშლით მხებ და ნორმალურ მდგენელებად (ნახ. 13.65), ე.ი. გვექნება:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^r + \vec{W}_{BA}^n, \quad (1)$$

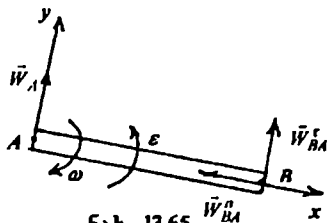
სადაც $W_{BA}^r = \varepsilon \cdot AB = 2 \cdot 1 = 2 \text{ მ/წმ}^2$, $W_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB = 4 \text{ მ/წმ}^2$.

დავაგეგმილოთ (1) ტოლობა x და y ღერძებზე, გვექნება:

$$W_{Bx} = -W_{BA}^n = -4, \quad W_{By} = W_A + W_{BA}^r = 1 + 2 = 3,$$

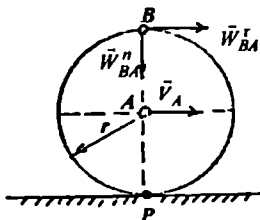
მაშინ W_B გამოითვლება ფორმულით:

$$W_B = \sqrt{W_{Bx}^2 + W_{By}^2} = 5 \text{ მ/წმ}^2.$$



ნახ. 13.65

ამოცანა 55. $r = 0,1 \text{ მ}$ რადიუსის მქონე თვალი უსასრულოდ მიგორავს პორიზონტალურ წრფივ ლიანდაგზე (ნახ. 13.66). ვიპოვოთ ვერტიკალური დიამეტრის ბოლო B წერტილის აჩქარება, თუ A ცენტრი გადაადგილდება $V_A = 2 \text{ მ/წმ}$ მუდმივი სიჩქარით.



ნახ. 13.66

ამოხსნა. თვლის სიჩქარეთა მყისი ცენტრია თვლის ლიანდაგთან შეხების P წერტილი. თვლის ბრუნვის კუთხური

სიჩქარე $\omega = \frac{V_A}{r} = 20 \text{ რად/წმ}$, ხოლო კუთ-

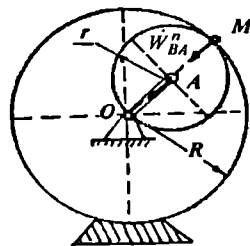
ხური აჩქარება $\varepsilon = 0$. თვლის A წერტილი მოძრაობს წრფივად და თანაბრად ($V_A = \text{const}$), ამიტომ $W_A = 0$. პოლუსად ავიღოთ A წერტილი, მაშინ B წერტილის აჩქარება იქნება:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA} = \vec{W}_{BA}^r + \vec{W}_{BA}^n, \quad (1)$$

სადაც $W_{BA}^r = \varepsilon \cdot r = 0$; $W_{BA}^n = \omega^2 \cdot r = 40 \text{ მ/წმ}^2$ (ბრუნვის კუთხური

სინქარე და აჩქარება არ არის დამოკიდებული პოლუსის არჩევაზე). (1) მიიღებს შემდეგ სახეს: $\vec{W}_B = \vec{W}_{BA}''$, ე.ი. $W_{By} = W_{BA}'' = 40$ მ/წმ².

ამოცანა 56. მექანიზმის OA მრუდმხარა ბრუნავს $\varphi = 0,5t$ კანონის თანახმად (ნახ. 13.67). მექანიზმის მოცემული მდებარეობისთვის განვსაზღვროთ თვლის M წერტილის $\vec{W}_A$ აჩქარება, თუ $R = 2r = 20$ სმ, ამასთან R რადიუსიანი თვალი უძრავია.



ნახ. 13.67

ამოხსნა. OA მრუდმხარა ბრუნავს r რადიუსიანი თვალის O წერტილის გარშემო. ბრუნვის კუთხური სინქარე და აჩქარება იქნება: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 0,5$ რად/წმ, $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$. A წერტილის აჩქარება ჩაიწერება ასეთი სახით:

$$\vec{W}_A = \vec{W}_A' + \vec{W}_A'',$$

სადაც $W_A' = \varepsilon \cdot OA = 0$, $W_A'' = \omega^2 \cdot OA = 0,25 \cdot 10 = 2,5$ სმ/წმ²,

მაშასადამე, $\vec{W}_A = \vec{W}_A''$ და $W_A = W_A'' = 2,5$ სმ/წმ² (ნახ. 13.67).

პოლუსად მივიღოთ A წერტილი, მაშინ გვექნება:

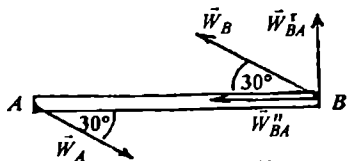
$$\vec{W}_M = \vec{W}_A + \vec{W}_{MA}' + \vec{W}_{MA}'', \quad (1)$$

სადაც $W_{MA}' = \varepsilon \cdot AM = 0$, $W_{MA}'' = \omega^2 \cdot AM = 2,5$ სმ/წმ².

(1) ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს $\vec{W}_M = \vec{W}_A + \vec{W}_{MA}''$. დავაგებმიღოთ ეს ტოლობა MO -ზე, მივიღებთ:

$$W_M = W_A + W_{MA}'' = 2,55 + 2,5 = 5 \text{ სმ/წმ}^2.$$

ამოცანა 57. $AB = 40$ სმ სიგრძის ღერო მოძრაობს ნახაზის სიბრტყეში (ნახ. 13.68). ღეროს რაღაც მომენტში A და B წერტილების აჩქარებებია: $W_A = 2$ მ/წმ², $W_B = 6$ მ/წმ². განვსაზღვროთ ღეროს ε კუთხური აჩქარება.



ნახ. 13.68

ამოხსნა. პოლუსად მივიღოთ A

წერტილი. მივიღებთ:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^r + \vec{W}_{BA}^n, \quad (1)$$

სადაც

$$W_{BA}^r = \varepsilon \cdot AB \Rightarrow \varepsilon = \frac{W_{BA}^r}{AB}. \quad (2)$$

დავაგეგმილოთ (1) ტოლობა $\vec{W}_{BA}^r$ მიმართულებათ, გვექნება:

$$W_B \sin 30^\circ = -W_A \sin 30^\circ + W_{BA}^r,$$

საიდანაც

$$W_{BA}^r = 4 \text{ მ/წმ}^2,$$

მაშინ (2)-დან მივიღებთ

$$\varepsilon = W_{BA}^r : AB = 10 \text{ წმ}^{-2}.$$

ამოცანა 58. მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის OA მრუდმხარა ბრუნავს O ღერძის გარშემო შენელებულად $\omega_0 = 2$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით და $\varepsilon_0 = 4$ რად/წმ კუთხური აჩქარებით (ნახ. 13.69). მექანიზმის მოცემული მდებარეობისათვის განესაზღვროთ A , B და C წერტილების სიჩქარე, აგრეთვე B ცოცხის აჩქარება და AB ბარბაცას კუთხური აჩქარება, თუ მრუდმხარას სიგრძე $OA = 30$ სმ. ბარბაცას სიგრძე $AB = 90$ სმ და C ისეთი წერტილია, რომელსაც AB ბარბაცაზე უმცირესი სიჩქარე აქვს.

ამოხსნა 1. წერტილების სიჩქარის განსაზღვრა. OA მრუდმხარას A წერტილი ბრუნავს OA რადიუსიან წრეწირზე, ამიტომ

$$V_A = OA \cdot \omega_0 = 30 \cdot 2 = 60 \text{ სმ/წმ}.$$

AB ბარბაცას A წერტილის სიჩქარე OA მრუდმხარას მართობულია, ხოლო B ცოცხის სიჩქარე მიმართულია პერიფერიული წრფის გასწვრივ.

AB ბარბაცას სიჩქარეთა P მყისი ცენტრი მდებარეობს A და B წერტილებიდან მათი სიჩქარეებისადმი აღმართული მართობების გადაკვეთის P წერტილში (ნახ. 13.69).

AB რგოლის კუთხური სიჩქარე:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{PA} = \frac{V_A}{AB \cos 30^\circ} = \frac{4}{9} \sqrt{3} \text{ რად/წმ}.$$

B და C წერტილების სიჩქარეები:

$$V_B = \omega_{AB} \cdot PB, \quad V_C = \omega_{AB} \cdot PC,$$

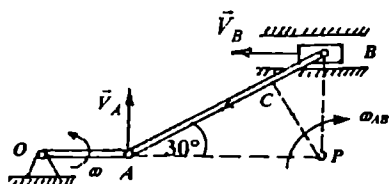
სადაც $PB = AB \sin 30^\circ = 45$ სმ.

$$PC = AP \cdot \sin 30^\circ = AB \cos 30^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{45}{2} \sqrt{3} \text{ სმ.}$$

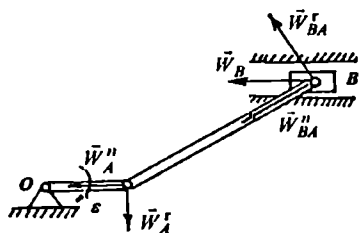
ამიტომ

$$V_B = \frac{4}{9} \sqrt{3} \cdot 45 = 20\sqrt{3} \text{ სმ/წმ}, \quad V_C = \frac{4}{9} \sqrt{3} \cdot \frac{45}{2} \sqrt{3} = 30 \text{ სმ/წმ.}$$

$\vec{V}_C$ ვექტორი მიმართულია PC მონაკვეთის მართობულად, ე.ი. BA -ს გასწვრივ.



ნახ. 13.69



ნახ. 13.70

2. წერტილების აჩქარების განსაზღვრა. რადგან AB ბარბაცა ასრულებს ბრტყელ-პარაბოლურ მოძრაობას, ამიტომ B ცოცხას ანუ AB ბარბაცას B წერტილის აჩქარების საპოვნელად საჭიროა ვიცოდეთ მისი სხვა რომელიმე წერტილის აჩქარება. ცხადია, რომ ასეთია A წერტილი, რომელიც ერთდროულად ეკუთვნის OA მრუდმხარას და AB ბარბაცას. ვიპოვოთ A წერტილის აჩქარება:

$$\vec{W}_A = \vec{W}_A^I + \vec{W}_A^{II},$$

სადაც

$$W_A^I = \varepsilon_0 \cdot OA = 30 \cdot 4 = 120 \text{ სმ/წმ}^2, \quad W_A^{II} = \omega_0^2 \cdot OA = 4 \cdot 30 = 120 \text{ სმ/წმ}^2.$$

$\vec{W}_A^I$ ვექტორი მიმართულია OA -ს მართობულად - ε_0 კუთხური აჩქარების მხარეს, $\vec{W}_A^{II}$ ვექტორი მიმართულია A -დან ბრუნვის O ცენტრისაკენ.

პოლუსად მივიღოთ A წერტილი და ბრტყელი ფიგურის წერტილების აჩქარებათა შესახებ თეორემის თანახმად B წერტილის აჩქარების საპოვნელად დავწეროთ შემდეგი ტოლობა (ნახ. 13.70):

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}'' + \vec{W}_{BA}' = \vec{W}_A'' + \vec{W}_A' + \vec{W}_{BA}'' + \vec{W}_{BA}' . \quad (1)$$

ამ ტოლობაში A წერტილის აჩქარება უკვე ცნობილია მოდულითა და მიმართულებით. $\vec{W}_{BA}''$ აჩქარების ვექტორი ყოველთვის მიმართულია პოლუსისაკენ და მოდულით ტოლია:

$$W_{BA}'' = \omega_{AB}^2 \cdot AB = \left(\frac{4\sqrt{3}}{9} \right)^2 \cdot 90 = \frac{160}{3} \text{ სმ/წმ}^2.$$

$\vec{W}_{BA}'$ აჩქარების ვექტორი მიმართულია AB -ს მართობულად, მისი მოდული $W_{BA}' = \varepsilon_{AB} \cdot AB$, ხოლო B წერტილის $\vec{W}_B$ აჩქარება მიმართულია პორიზონტალურად B ცოცხას მიმმართეელის გასწვრივ.

(1) ტოლობაში ჩვენთვის უცნობია მხოლოდ $\vec{W}_B$ და $\vec{W}_{BA}'$ ვექტორთა მოდულები. დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა უცნობი $\vec{W}_B$ -ს მართობულ PB მიმართულებაზე:

$$0 = -W_A' + W_{BA}' \cos 30^\circ - W_{BA}'' \cos 60^\circ . \quad (2)$$

ახლა დავაგეგმილოთ $\vec{W}_{BA}'$ -ს მართობულ AB მიმართულებაზე, მივიღებთ:

$$-W_B \cos 30^\circ = -W_A'' \cos 30^\circ - W_A' \cos 60^\circ - W_{BA}'' . \quad (3)$$

(2) განტოლებიდან ვიპოვიტ W_{BA}' -ს:

$$W_{BA}' = \frac{W_{BA}'' \cos 60^\circ + W_A' \cos 30^\circ}{\cos 30^\circ} \approx 169,6 \text{ სმ/წმ}^2.$$

(3) განტოლებიდან ვიპოვიტ W_B -ს:

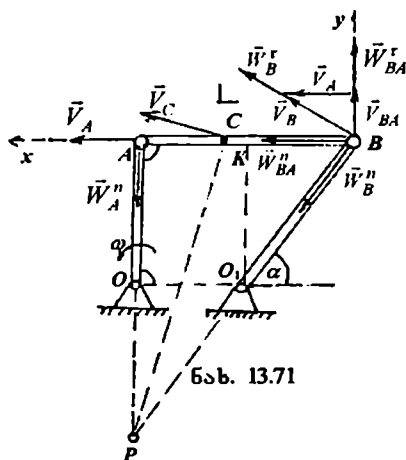
$$W_B = \frac{W_A'' \cos 30^\circ + W_A' \cos 60^\circ + W_{BA}''}{\cos 30^\circ} = 250,7 \text{ სმ/წმ}^2.$$

AB ბარბაცას ε_{AB} კუთხური აჩქარება ვიპოვოთ $W_{BA}' = \varepsilon_{AB} \cdot AB$ ტოლობიდან, გვაქვს:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{W_{BA}'}{AB} \approx 1,9 \text{ რად/წმ}^2.$$

ამოცანა 59. $OABO_1$ მრუდმხარა მექანიზმში $OA = 2$ სმ სიგრძის წამყვანი მრუდმხარა ბრუნავს O ღერძის გარშემო $\omega = 1,5$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით და AB ღეროს საშუალებით ამოძრავებს O_1B მრუდმხარას (ნახ. 13.71).

განვსაზღვროთ C და B წერტილების სიქარეები, AB და O_1B რგოლების კუთხური სიქარეები, აგრეთვე B წერტილის მსხები და ნორმალური აიქარებები, თუ $AB = 20\sqrt{3}$ სმ, $\angle AOO_1 = \angle OAB = 90^\circ$ და $\alpha = \angle ABO_1 = 60^\circ$, $AC = CB$.



ამოხსნა. 1. წერტილების სიქარის განსაზღვრა (ნახ. 13.71). მექანიზმის მოცემული მდებარეობისათვის განვსაზღვროთ OA მრუდმხარას A თითის სიქარე:

$$V_A = \omega \cdot OA = 1,5 \cdot 20 = 30 \text{ სმ/წმ.}$$

A წერტილის სიქარე OA მრუდმხარას მართობულია. B წერტილის სიქარე მიმართულია O_1B მრუდმხარას მართობულად. AB ბარბაცას სიქარეთა P მისი ცენტრი იმყოფება A და B წერტილებიდან მათი სიქარეებისადმი აღმართული

მართობების გადაკვეთის წერტილში.

AB რგოლის კუთხური სიქარე

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{30}{20\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{30}{60} = 0,5 \text{ რად/წმ.}$$

B და C წერტილების სიქარეები:

$$V_B = \omega_{AB} \cdot PB; \quad V_C = \omega_{AB} \cdot PC,$$

$$\text{სადაც } PB = \frac{AB}{\cos 60^\circ} = \frac{20\sqrt{3}}{0,5} = 40\sqrt{3} \text{ სმ;}$$

$$PC = \sqrt{PA^2 + AC^2} = \sqrt{60^2 + (10\sqrt{3})^2} \approx 62,4 \text{ სმ.}$$

ამიტომ

$$V_B = 0,5 \cdot 40\sqrt{3} = 20\sqrt{3} \approx 34,6 \text{ სმ/წმ;} \quad V_C = 0,5 \cdot 62,4 = 31,2 \text{ მ/წმ.}$$

მეორეს მხრივ, B წერტილი ეკუთვნის ნახაზის სიბრტყეში მოძრავ AB რგოლს. თუ ამ მოძრაობის შემთხვევაში პოლუსად მივიღებთ A წერტილს, გვექნება:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}.$$

ამასთანავე, A პოლუსის გარშემო B წერტილის ბრუნვითი მოძრაობის $\vec{V}_{BA}$ სიჩქარე AB -ს მართობია. თუ ამ ვექტორულ ტოლობას დავაგეგმილებთ ნახაზზე ნაჩვენები x და y ღერძებზე, მივიღებთ:

$$V_B \cos 30^\circ = V_A \text{ და } V_{BA} = V_B \cos 60^\circ.$$

აქედან ვპოულობთ:

$$V_B = \frac{V_A}{\cos 30^\circ} = 20\sqrt{3} \text{ სმ/წმ, } V_{BA} = \frac{1}{2}V_B = 10\sqrt{3} \text{ სმ/წმ.}$$

O_1B რგოლის კუთხური სიჩქარე იქნება

$$\omega_{OB} = \frac{V_B}{O_1B} = \frac{V_B \sin 60^\circ}{OA} = \frac{20\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{20} = 1,5 \text{ მ}^{-1}.$$

2. წერტილის აჩქარების განსაზღვრა.

B წერტილის $\vec{W}_B$ აჩქარება არის O_1B მრუდმხარას გასწვრივ B წერტილიდან O_1 -კენ მიმართული ნორმალური $\vec{W}_B''$ აჩქარებისა და O_1B -ს მართობი მხები $\vec{W}_B'$ აჩქარების გეომეტრიული ჯამი, ე.ი.

$$\vec{W}_B = \vec{W}_B'' + \vec{W}_B'.$$

მეორეს მხრივ, რადგან B წერტილი ეკუთვნის AB რგოლსაც, ამიტომ

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}'' + \vec{W}_{BA}'.$$

ამასთანავე A პოლუსის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობის დროს B წერტილის ნორმალური $\vec{W}_{BA}''$ აჩქარება მიმართულია BA -ს გასწვრივ, B წერტილის მხები $\vec{W}_{BA}'$ აჩქარება კი AB -ს მართობია. ამგვარად, მივიღეთ შემდეგი ტოლობა:

$$\vec{W}_B'' + \vec{W}_B' = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}'' + \vec{W}_{BA}'.$$

ამ ვექტორული ტოლობის x ღერძზე დაგეგმილებით მივიღებთ:

$$W_B'' \cos 60^\circ + W_B' \cos 30^\circ = W_{BA}'.$$
(1)

B წერტილის საძებნი ნორმალური W_B'' აჩქარების მოძუდი უდრის

$$W_B'' = \frac{V_B^2}{O_1B} = \frac{V_B^2 \sin 60^\circ}{OA} = \frac{1200 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{20} = 30\sqrt{3} \text{ სმ/წმ}^2,$$

ხოლო $\vec{W}_{BA}''$ -ის მოდული ტოლი იქნება:

$$W_{BA}'' = \omega_{AB}^2 \cdot AB = \frac{1}{4} \cdot 20\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \text{ სმ/წმ}^2.$$

ამ მნიშვნელობების (1) განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ:

$$30\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot W_B^r = 5\sqrt{3}.$$

აქედან გამომდინარე

$$W_B^r = -20 \text{ სმ/წმ}^2.$$

რადგან მხები აჩქარება მივიღეთ უარყოფითი, ეს ნიშნავს, რომ $\vec{W}_B^r$ ვექტორი მიმართული უნდა იყოს ნახაზზე ნაჩვენები მიმართულების საწინააღმდეგოდ, ე.ი. ის მიმართულია $\vec{V}_B$ სიჩქარის საწინააღმდეგოდ, მაშასადამე, მრუდმხარას ბრუნვა შენელებულია.

ამოცანა 60. $R=40$ სმ რადიუსიანი ბორბალი უსრიალოდ მიგორავს ჰორიზონტალურ წრფივ ღლიანდაგზე ისე, რომ მოცემული მომენტისათვის მისი O ცენტრის სიჩქარე და აჩქარება შესაბამისად $V_0=40$ სმ/წმ და $W_0=-40$ მ/წმ²-ია. დროის მოცემულ მომენტისათვის ვიპოვოთ ბორბლის ჰორიზონტალური დიამეტრის მარცხენა ბოლო A წერტილის აჩქარება,

აგრეთვე ბორბლის სიჩქარეთა P მყისი ცენტრის აჩქარება (ნახ. 13.72, ა).

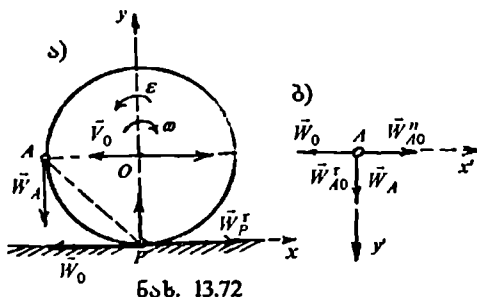
ამოხსნა. ამოცანა ამოვხსნათ ორი ხერხით — 1. (13.10) ფორმულის გამოყენებით: რადგან ბორბლის O ცენტრის $\vec{V}_0$ სიჩქარე და $\vec{W}_0$ აჩქარება ცნობილია, ამიტომ შეგვიძლია O მივიღოთ

პოლუსად. ამასთან A წერტილის $\vec{W}_A$ აჩქარება განესაზღვროთ შემდეგი ფორმულით:

$$\vec{W}_A = \vec{W}_0 + \vec{W}_{AO}^r + \vec{W}_{AO}'' , \quad (1)$$

სადაც

$$W_{AO}^r = AO \cdot |\varepsilon| = R \cdot |\varepsilon| , \quad (2)$$



ნახ. 13.72

$$W_{AO}'' = AO \cdot \omega^2 = R \cdot \omega^2 \quad (3)$$

ცალკე განვიხილოთ A წერტილი (ნახ. 13.72, ბ) და მოვდოთ მასზე $\vec{W}_0$, $\vec{W}_{AO}'$ და $\vec{W}_{AO}''$ ვექტორები. სწორედ ამ ვექტორების გეომეტრიული ჯამით განესაზღვრავთ საძიებელი $\vec{W}_A$ ვექტორის მოდულს (იხ. (1)). ამისათვის საჭიროა $\vec{W}_0$ ვექტორი (აზრობრივად) გადავიტანოთ O წერტილიდან A წერტილში და რადგან ბრუნვა შენელებულია, $\vec{W}_{AO}'$ ვექტორი მიემართოთ ბრუნვის საწინააღმდეგოდ. რაც შეეხება $\vec{W}_{AO}''$ ვექტორს, ის ყოველთვის A წერტილიდან O -სკენაა მიმართული. როგორც ვიცით, ბორბლის სინქარეთა მყისი ცენტრი ემთხვევა ლიანდაგთან მისი შეხების P წერტილს, ამიტომ ბორბლის კუთხური სინქარე:

$$\omega = \frac{V_0}{PO} = \frac{V_0}{R} = \frac{40}{40} = 1 \text{ წმ}^{-1}.$$

შევნიშნოთ, რომ $V_0 = 40$ სმ/წმ არ ნიშნავს, რომ $V_0 = \text{const}$. $\vec{V}_0$ სინქარის მოდული იცვლება დროის მიხედვით, რადგან $\vec{W}_0 \neq 0$.

ცხადია, ბორბლის კუთხური აჩქარება

$$\varepsilon = \frac{W_0}{R} = \frac{-40}{40} = -1 \text{ წმ}^{-2}.$$

თუ (2) და (3)-ში ჩავსვამთ რიცხვით მონაცემებს, გექნება:

$$W_{AO}' = 40 \cdot 1 = 40 \text{ სმ/წმ}^2, \quad W_{AO}'' = 40 \cdot 1 = 40 \text{ სმ/წმ}^2.$$

რადგან ბრუნვა შენელებულია, ამიტომ ω და ε -ის ნიშნები სხვადასხვაა (მათი მიმართულებები ნაჩვენებია ნახაზზე).

თუ (1) ვექტორულ ტოლობას დაეაგეგმილებთ Ax' და Ay' ღერძებზე (ნახ. 13.73, ბ), მივიღებთ:

$$W_{Ax'} = W_{AO}'' - W_0 = R\omega^2 - W_0 = 40 \cdot 1 - 40 = 0,$$

$$W_{Ay'} = W_{AO}' = R|\varepsilon| = 40 \cdot 1 = 40 \text{ სმ/წმ}^2.$$

A წერტილის $\vec{W}_A$ აჩქარების მოდული ტოლი იქნება:

$$W_A = \sqrt{W_{Ax'}^2 + W_{Ay'}^2} = 40 \text{ სმ/წმ}^2.$$

$\vec{W}_A$ ვექტორის მიმართულება ნაჩვენებია 13.72, ა ნახაზზე.

ახლა ანალოგიური ხერხით განვსაზღვროთ P წერტილის აჩქარება, გვაქვს

$$\vec{W}_P = \vec{W}_0 + \vec{W}_{PO}^r + \vec{W}_{PO}^n, \quad (4)$$

სადაც

$$W_{PO}^r = PC \cdot |\varepsilon| = R \cdot \frac{|W_0|}{R} = |W_0| = 40 \text{ სმ/წმ}^2,$$

$$W_{PO}^n = PC \cdot \omega^2 = R\omega^2 = 40 \text{ სმ/წმ}^2.$$

(4) ტოლობა დავაგეგმილთ Px და Py ღერძებზე (ნახ. 3.72, ა), მივიღებთ:

$$W_{Px} = -W_0 + W_{PO}^r = 0,$$

$$W_{Py} = W_{PO}^n = R\omega^2 = 40 \text{ სმ/წმ}^2.$$

ამ მნიშვნელობებიდან ვიპოვით ბორბლის სიჩქარეთა P მყისი ცენტრის $\vec{W}_P$ აჩქარების მოდულს, ე.ი.

$$W_P = \sqrt{W_{Px}^2 + W_{Py}^2} = W_{PO}^n = 40 \text{ სმ/წმ}^2.$$

$\vec{W}_P$ ვექტორი მიმართულია ვერტიკალურად P -დან O -სკენ. მაშასადამე, მიუხედავად იმისა, რომ P წერტილის სიჩქარე ნულის ტოლია მოცემულ მომენტში მას აქვს W_P აჩქარება.

2. ახლა ამოცანა ამოვსნათ აჩქარებათა მყისი ცენტრის გამოყენებით (იხ. § 13.5), ე.ი. (13.11) ფორმულის გამოყენებით $W_A = W_{AQ} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ რადგან ვიცით O წერტილის $\vec{W}_0$ აჩქარების მოდული და მიმართულება, აგრეთვე ბორბლის ω კუთხური სიჩქარე და ε კუთხური აჩქარება, განვსაზღვრავთ აჩქარებათა Q მყისი ცენტრის მდებარეობას (ნახ. 13.72).

$$OQ = \frac{|\vec{W}_0|}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}} = \frac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2} \text{ სმ.}$$

OQ მონაკვეთის მიერ $\vec{W}_0$ ვექტორთან შედგენილი კუთხე ტოლია

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} = 1.$$

მაშასადამე, $\alpha = 45^\circ$ და გადაიზომება $\vec{W}_0$ ვექტორიდან ε -ის მიმართულებით (ნახ. 13.72). მართკუთხა $\triangle OPQ$ ტოლფერდაა, ამიტომ

$$AQ = PQ = OQ = 20\sqrt{2} \text{ სმ.}$$

P წერტილის $\vec{M}_P$ აჩქარების მოდული ტოლია:

$$W_P = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 20\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 40 \text{ სმ/წმ}^2.$$

ამასთან $\vec{M}_A$ და $\vec{M}_P$ ექვტორები პარალელურია და მიმართულია ურთიერთსაწინააღმდეგოდ.

13.7. სავარჯიშო ამოცანები ბრტყელი ფიგურის წერტილების აჩქარების განსაზღვრაზე

13.38. ბორბალი უსრიალოდ მიგორავს Ox ღერძის გასწვრივ $x=2t$ მ, $y=0,5$ მ კანონის თანახმად (ნახ. 13.73). განსაზღვრეთ ბორბლის ε კუთხური აჩქარება.

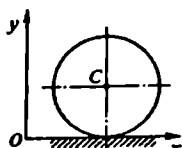
პასუხი: $\varepsilon = 8 \text{ წმ}^{-2}$.

13.39. დოლზე დახვეულია ძაფი და მისი C ცენტრი მოძრაობს ქვევით $y_C = 0,3t^2$ მ კანონის თანახმად (ნახ. 13.74). განსაზღვრეთ დოლის კუთხური აჩქარება, თუ რადიუსი $r = 0,066$ მ.

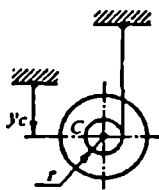
პასუხი: $\varepsilon = 10 \text{ წმ}^{-2}$.

13.40. დოლი 1 ბრუნავს $\varphi = 0,3t^2$ კანონის თანახმად (ნახ. 13.75). განსაზღვრეთ ბლოკი 2-ის კუთხური სინქარე, თუ რადიუსებია $R = 0,1$ მ, $r = 0,06$ მ.

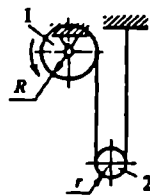
პასუხი: $\varepsilon = 0,5 \text{ წმ}^{-2}$.



ნახ. 13.73



ნახ. 13.74



ნახ. 13.75

13.41. OA მრუდმხარა O ღერძის გარშემო ბრუნავს $\varphi = 0,5t^2$ კანონის თანახმად. განსაზღვრეთ მე-2 ბორბლის კუთხური სინქარე, რომელიც უსრიალოდ მიგორავს უძრავი 1 ბორბლის ფერსოზე (ნახ. 13.76).

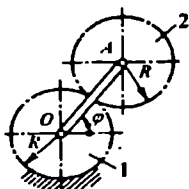
პასუხი: $\varepsilon = 2 \text{ წმ}^{-2}$.

13.42. OA მრუდმხარა O წერტილის გარშემო ბრუნავს $\varphi = 0,4t^2$ კანონის თანახმად (ნახ. 13.77). განსაზღვრეთ r რადიუსიანი თვალის კუთხური სიჩქარე, თუ მოძრაი და უძრავი თვლების რადიუსებია: $r = 0,1$ მ, $R = 0,2$ მ.

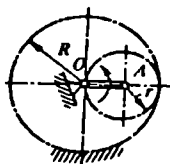
პასუხი: $\varepsilon = 0,8$ წმ⁻².

13.43. $AB = 2$ მ სიგრძის ღერო ნახაზის სიბრტყეში ასრულებს ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას (ნახ. 13.78). განსაზღვრეთ B წერტილის აჩქარება, თუ A წერტილის აჩქარების მოდული — $W_A = 1$ მ/წმ², AB ღეროს კუთხური სიჩქარე $\omega = 1$ რად/წმ, კუთხური აჩქარება $\varepsilon = 0$.

პასუხი: $W_B = 3$ მ/წმ².



ნახ. 13.76



ნახ. 13.77



ნახ. 13.78

13.44. AB ღერო მოძრაობს ნახაზის სიბრტყეში (ნახ. 13.79). დროის ალებულ მომენტში A წერტილის აჩქარების მოდული $W_A = 1$ მ/წმ², AB -ს კუთხური სიჩქარე $\omega = 2$ რად/წმ, კუთხური აჩქარება $\varepsilon = 2$ რად/წმ². განსაზღვრეთ ღეროს B წერტილის აჩქარება, თუ $AB = 1$ მ.

პასუხი: $W_B = 5$ მ/წმ².

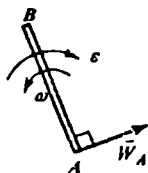
13.45. ბორბალი პორიზონტალურ ლიანდაგზე უსრიალოდ მიგორავს (ნახ. 13.80). განსაზღვრეთ ბორბლის B წერტილის აჩქარება იმ მომენტისათვის, როცა ბორბლის A ცენტრის სიჩქარე $V_A = 0$, ხოლო აჩქარება — $W_A = 2$ მ/წმ².

პასუხი: $W_B = 2,83$ მ/წმ².

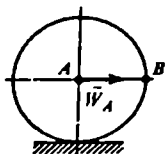
13.46. წრიული ფირფიტა ასრულებს ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას (ნახ. 13.81). განსაზღვრეთ B წერტილის აჩქარება, თუ A წერტილის აჩქარების მოდული $W_A = 3$ მ/წმ²-ია,

კუთხური სიჩქარე $\omega = 1$ რად/წმ, კუთხური აჩქარება $\varepsilon = 0$, მანძილი $AB = 0,5$ მ.

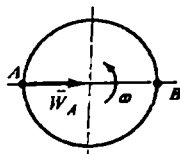
პასუხი: $W_B = 2,5$ მ/წმ².



ნახ. 13.79



ნახ. 13.80



ნახ. 13.81

13.47. $r = 0,1$ მ რადიუსის მქონე ბორბალი ჰორიზონტალურ ლიანდაგზე მიგორავს უსრიალოდ (ნახ. 13.82). განსაზღვრეთ B წერტილის აჩქარება, თუ ბორბლის A ცენტრი გადაადგილდება მუდმივი $V_A = 2$ მ/წმ სიჩქარით.

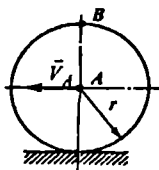
პასუხი: $W_B = 40$ მ/წმ².

13.48. OA მრუდმხარა O ღერძის გარშემო ბრუნავს $\varphi = 0,5t$ კანონის თანახმად (ნახ. 13.83). განსაზღვრეთ მოძრავი თვალის M წერტილის აჩქარება, თუ $R = 2r = 0,2$ მ.

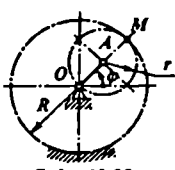
პასუხი: $W_M = 0,05$ მ/წმ².

13.49. პლანეტარული მექანიზმის OA მრუდმხარა O ღერძის გარშემო ბრუნავს მუდმივი $\omega = 1$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით (ნახ. 13.84). განსაზღვრეთ მოძრავი თვალის სიჩქარეთა მყისი ცენტრის აჩქარება, თუ $R = 0,1$ მ.

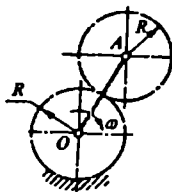
პასუხი: $W_p = 0,2$ მ/წმ².



ნახ. 13.82



ნახ. 13.83



ნახ. 13.84

13.50. $AB = 40$ სმ სიგრძის ღერო მოძრაობს ნახაზის სიბრტყეში (ნახ. 13.85). დროის რომელიმე მომენტისათვის A და B წერტილების აჩქარებებია: $W_A = 2$ მ/წმ² და $W_B = 6$ მ/წმ². განსაზღვრეთ ღეროს კუთხური აჩქარება.

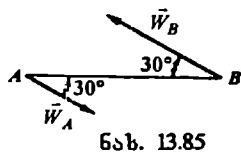
პასუხი: $\varepsilon = 10$ რად/წმ².

13.51. მართკუთხა ფირფიტა ასრულებს ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას (ნახ. 13.86). იპოვეთ მისი კუთხური სიჩქარე, თუ A წერტილის აჩქარება $W_A = 1$ მ/წმ², $W_B = 6$ მ/წმ, მანძილი $AB = 1$ მ, კუთხე $\alpha = 60^\circ$

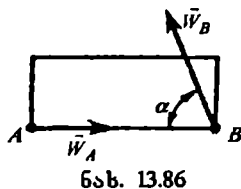
პასუხი: $\omega = 2$ რად/წმ.

13.52. $AB = 50$ სმ სიგრძის ღერო მოძრაობს ნახაზის სიბრტყეში (ნახ. 13.87). დროის რომელიმე მომენტში მისი A და B წერტილის აჩქარებებია: $W_A = 2$ მ/წმ² და $W_B = 3$ მ/წმ². განსაზღვრეთ ღეროს კუთხური აჩქარება.

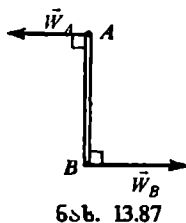
პასუხი: $\varepsilon = 10$ რად/წმ².



ნახ. 13.85



ნახ. 13.86



ნახ. 13.87

13.53. განსაზღვრეთ მრუდმხარა მექანიზმის მოცემული მდებარეობისათვის B წერტილის აჩქარება, თუ OA მრუდმხარას კუთხური სიჩქარე $\omega = 1$ რად/წმ = $const$; რგოლების სიგრძეებია: $OA = 0,3$ მ, $AB = 0,5$ მ (ნახ. 13.88).

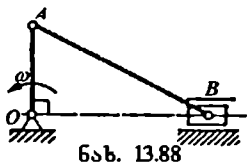
პასუხი: $W_B = 0,225$ მ/წმ².

13.54. განსაზღვრეთ მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის მოცემული მდებარეობისათვის AB ბარბაცას ε კუთხური აჩქარება, თუ OA მრუდმხარა ბრუნავს მუდმივი $\omega = 10$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით, ხოლო რგოლების სიგრძეებია – $OA = 0,3$ მ, $AB = 0,45$ მ (ნახ. 13.89).

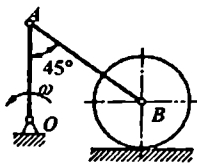
პასუხი: $\varepsilon = 94,3$ რად/წმ².

13.55. მექანიზმის მოცემული მდებარეობისათვის განსაზღვრეთ B (კოციას აჩქარება, თუ $R=50$ სმ რადიუსის მქონე ბორბალი უსრიალოდ მიგორავს ჰორიზონტალურ ღლიანდაგზე და მის O ცენტრს აქვს მუდმივი $V_0=5$ მ/წმ სიჩქარე; კუთხე $\alpha=30^\circ$ (ნახ. 13.90).

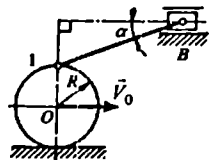
პასუხი: $W_B = 28,4$ მ/წმ².



ნახ. 13.88



ნახ. 13.89



ნახ. 13.90

13.56. $AB=1$ სმ სიგრძის გვერდის მქონე კვადრეტი მოძრაობს თავის სიბრტყეში (ნახ. 13.91). დროის მოცემულ მომენტში მისი A წვეროს აჩქარება $W_A=\sqrt{2}$ მ/წმ², კუთხური სიჩქარე $\omega=1$ რად/წმ, კუთხური აჩქარება $\varepsilon=0$. იპოვეთ დროის ამ მომენტისათვის B წვეროს აჩქარება.

პასუხი: $W_B=1$ მ/წმ².

13.57. კვადრეტი, რომლის გვერდის სიგრძე $d=0,5$ მ, ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას (ნახ. 13.92). დროის მოცემული მომენტისათვის ცნობილია მისი $\omega=2$ რად/წმ კუთხური სიჩქარე, $\varepsilon=0$ კუთხური აჩქარება, B წერტილის აჩქარება $W_B=4$ მ/წმ², რომელიც მიმართულია BC გვერდის გასწვრივ, ქვევით. განსაზღვრეთ კვადრატის C წერტილის W_C აჩქარება.

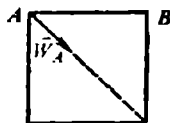
პასუხი: $W_C=W_B+\omega^2 d=6$ მ/წმ².

13.58. $ABCD$ კვადრეტი, რომლის გვერდის სიგრძე $d=1$ მ ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას (ნახ. 13.93). დროის მოცემული მომენტისათვის ცნობილია B წვეროს აჩქარება $W_B=4$ მ/წმ² და მისი აჩქარებათა მყისი ცენტრი ემთხვევა C წერტილს. განსაზღვრეთ D წვეროს $\vec{W}_D$ აჩქარების მოდული.

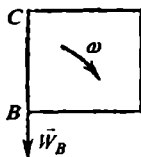
პასუხი: $W_D=4$ მ/წმ².

13.59. $ABCD$ კუბის კედრები, რომლის გვერდის სიგრძეა a ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას (ნახ. 13.94). დროის მოცემული მომენტისათვის ცნობილია, რომ მისი კუთხური სიჩქარე $\omega = 0$, კუთხური აჩქარება ε და AB გვერდის გასწვრივ მიმართული A წერტილის აჩქარება $-W_A$. განსაზღვრეთ D და B წერტილების აჩქარებები.

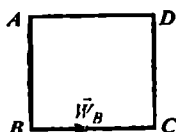
$$\text{პასუხი: } W_D = W_A + \varepsilon a; \quad W_B = \sqrt{W_A^2 + \varepsilon^2 a^2}$$



ნახ. 13.91



ნახ. 13.92



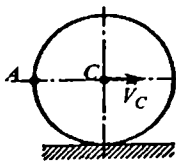
ნახ. 13.93

13.60. $R=1$ მ რადიუსიანი ბორბალი უსრიალოდ მიგორავს ჰორიზონტალურ ლიანდაგზე (ნახ. 13.95). მისი C ცენტრი მოძრაობს მუდმივი $V_C = 2$ მ/წმ სიჩქარით. განსაზღვრეთ მისი A წერტილის $\vec{V}_A$ სიჩქარის მოდული, W_A აჩქარება, ნორმალურ W_A^n და მხებ W_A^t აჩქარებათა მოდულები, აგრეთვე A წერტილის ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი ρ . თუ A წერტილი დროის მოცემულ მომენტში ემთხვევა ჰორიზონტალური დიამეტრის ბოლო მარცხენა წერტილს.

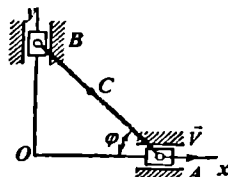
$$\text{პასუხი: } V_A = 2\sqrt{2} \text{ მ/წმ; } W_A = 4 \text{ მ/წმ}^2; \quad W_A^t = 2\sqrt{2} \text{ მ/წმ}^2; \\ W_A^n = 2\sqrt{2} \text{ მ/წმ}^2; \quad \rho = 2\sqrt{2} \text{ მ.}$$



ნახ. 13.94



ნახ. 13.95



ნახ. 13.96

13.61. ელიფსოგრაფის AB სახაზავის A ცოცია მოძრაობს მუდმივი $V = 2$ მ/წმ სიჩქარით (ნახ. 13.96). განსაზღვრეთ AB ბარბაცას ε კუთხური აჩქარება დროის იმ მომენტისათვის,

როცა მისი Ox ღერძთან შედგენილი კუთხე $\varphi = 45^\circ$, თუ $AB = 1$ მ და აჩვენეთ, როგორ მოძრაობას ასრულებს მექანიზმის B ცოცია დროის აღებულ მომენტში.

პასუხი: $\varepsilon = 8$ რად/წმ², $W_B = 8\sqrt{2}$ მ/წმ².

მოძრაობს აჩქარებით B -დან O -სკენ ქვევით.

13.62. $R = 1$ მ რადიუსიანი ბორბალი უსრიალოდ მიგორავს პორიზონტალურ წრფივ ლიანდაგზე, ამასთან მისი C ცენტრის სიჩქარე $V_C = 2$ მ/წმ, აჩქარება $W_C = 4$ მ/წმ². განსაზღვრეთ იმ წერტილის სიჩქარე, რომელიც დროის მოცემულ მომენტში არის აჩქარებათა მყისი ცენტრი (ნახ. 13.97).

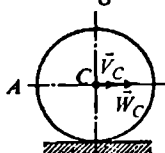
პასუხი: $V = \sqrt{2}$ მ/წმ.

13.63. მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის B ცოცია მოძრაობს Ox ღერძის გასწვრივ მუდმივი $V = 0,4$ მ/წმ სიჩქარით (ნახ. 13.98). განსაზღვრეთ A წერტილის W_A აჩქარება, OA მრუდმხარასა და AB ბარბაცას ε_1 , ε_2 კუთხური აჩქარებები მექანიზმის იმ მდებარეობისათვის, როცა OA მრუდმხარა ვერტიკალურია, თუ $OA = 0,2$ მ, $\angle ABD = 30^\circ$

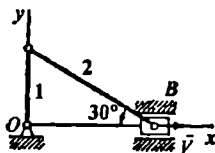
პასუხი: $W_A = \frac{1,6}{\sqrt{3}}$ მ/წმ², $\varepsilon_1 = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ რად/წმ², $\varepsilon_2 = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ რად/წმ².

13.64. მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის OA მრუდმხარა ბრუნავს O ღერძის გარშემო მუდმივი $\omega_1 = 6$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით. განსაზღვრეთ AB ბარბაცას ε კუთხური აჩქარება, როდესაც OA და AB პორიზონტალურ მდებარეობაში იმყოფებიან, თუ $OA = 0,2$ მ, $AB = 0,6$ მ (ნახ. 13.99).

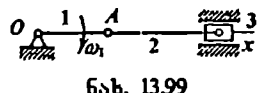
პასუხი: $\varepsilon_2 = 0$.



ნახ. 13.97



ნახ. 13.98



ნახ. 13.99

13.65. $AB = 0,5$ მ სიგრძის მონაკვეთი ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას (ნახ. 13.100). მისი ბოლოების აჩქარებები ტოლია:

$W_A = 4$ მ/წმ², $W_B = 2$ მ/წმ² და მიმართულია მონაკვეთის გასწვრივ. განსაზღვრეთ მონაკვეთის ω კუთხური სიჩქარე და ε კუთხური აჩქარება.

პასუხი: $\omega = 2$ რად/წმ; $\varepsilon = 0$.

13.66. $a = 0,1$ მ გვერდის მქონე $ABCD$ კვადრეტი მოძრაობს ნახაზის სიბრტყეში (ნახ. 13.101). დროის მოცემულ მომენტში მისი A და B წვეროების აჩქარებები ერთმანეთის ტოლია $W_A = W_B = 0,2$ მ/წმ² და მიმართულია AB გვერდის გასწვრივ. განსაზღვრეთ კვადრატის ω კუთხური სიჩქარე და ε კუთხური აჩქარება.

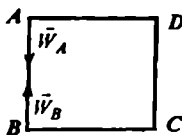
პასუხი: $\omega = 2$ რად/წმ; $\varepsilon = 0$.

13.67. R რადიუსიანი ბორბალი უსრიალოდ გორავს ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე, ამასთან ბორბლის C -ცენტრის სიჩქარე მუდმივია და $\vec{V}$ -ს ტოლი. ბორბალთან სახსრულადაა მიერთებული AB ღერო, რომლის სიგრძე $l > 2R$. AB ღეროს მეორე A ბოლო მისრიალებს იმავე ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე. 13.102 ნახაზზე ნაჩვენებია მდებარეობისათვის განსაზღვრეთ AB ღეროს კუთხური აჩქარება ε , დაადგინეთ ღეროს A და B წერტილების აჩქარებებს შორის თანაფარდობა და იპოვეთ AB ღეროზე ისეთი D წერტილი, რომელსაც მოცემული მდებარეობისათვის ექნება მოდულით უმცირესი აჩქარება.

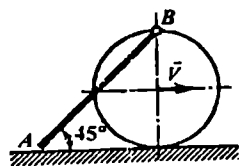
პასუხი: $\varepsilon = \frac{V^2}{2R^2}$, $W_A = W_B \neq 0$, $AD = R\sqrt{2}$.



ნახ. 13.100



ნახ. 13.101



ნახ. 13.102

14. წერტილის რთული მოძრაობა

14.1. წერტილის აბსოლუტური და ფარდობითი მოძრაობა, წარმტანი მოძრაობა

აქამდე ჩვენ განვიხილავდით წერტილის მოძრაობას რომელიმე ათვლის ოჯხ უძრავი სისტემის მიმართ. მაგრამ მექანიკის ამოცანების ამოხსნის დროს ხშირად გვხვდება ისეთი, როცა ოჯხ სისტემა თვით არის მოძრავი. ასეთ დროს მიზანშეწონილია, უძრავ სისტემად რომელიმე სხვა ოჯხს სისტემა ავირჩიოთ. ამ დროს საჭიროა წერტილის მოძრაობა განვიხილოთ ერთდროულად ათვლის ორი სისტემის მიმართ, რომელთაგან ერთი (ოჯხი) ითვლება ძირითადად ან პირობითად უძრავად, ხოლო მეორე (ოჯხ) გარკვეულ მოძრაობას ასრულებს პირველის მიმართ და მას მოძრავ სისტემას უწოდებენ. უძრავი სისტემის მიმართ წერტილის მიერ შესრულებული მოძრაობა შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც ორი მოძრაობის ერთობლიობა: ათვლის მოძრავი სისტემის მიმართ მოძრაობა და მოძრავ სისტემასთან ერთად უძრავი სისტემის მიმართ მოძრაობა, იმ პირობით, რომ წერტილი უძრავია მოძრავ სისტემის მიმართ. ათვლის უძრავი სისტემის მიმართ წერტილის მიერ შესრულებულ მოძრაობას უწოდებენ შედგენილს ან რთულს. მაგალითად, მეტროს ესკალატორზე მოსიარულე ადამიანი მეტროს გვირაბის უძრავი კედლების (ათვლის უძრავი სისტემის) მიმართ ასრულებს რთულ მოძრაობას, რომელიც შედგება მოძრავი ესკალატორის (ათვლის მოძრავი სისტემის) მიმართ ადამიანის მოძრაობისაგან და ესკალატორთან ერთად უძრავი კედლების მიმართ მოძრაობისაგან (იგულისხმება, რომ ესკალატორზე ადამიანი უძრავ მდგომარეობაშია). ანალოგიურად, შეიძლება წარმოვიდგინოთ ადამიანის სეირნობა მოძრავი გემის გემბანზე. ასეთ შემთხვევაში ადამიანი ასრულებს მოძრაობას, როგორც გემის, ასევე უძრავი ნაპირის მიმართ და ადამიანის მოძრაობა ნაპირის მიმართ არის რთული მოძრაობა, რომელიც შედგება ადამიანის გემის მიმართ მოძრაობისაგან და გემთან ერთად ნაპირის მიმართ მოძრაობისაგან. ადამიანის ასეთი რთული

მოძრაობა შეიძლება დაეშალოთ ორ უფრო მარტივ და იოლად გამოსაკვლევ მოძრაობად. ათელის მოძრავი სისტემის შემოტანის გზით წერტილის რთული მოძრაობის უფრო მარტივად დაშლის ხერხია წერტილის. შემდეგ სხეულის რთული მოძრაობის თეორიის პრაქტიკულ ღირებულებას. ამას გარდა, ამ თეორიის შედეგები გამოიყენება დინამიკაში, ძალების ზემოქმედებისას სხეულის ფარდობითი წონასწორობისა და ფარდობითი მოძრაობის შესასწავლად.

ზემოთ მოყვანილი მაგალითების საფუძველზე შეკადრებოთ M წერტილის რთული მოძრაობის მათემატიკური მოდელი.

ვთქვათ, S სხეული და მასთან მკვიდრად მიკავშირებული $Oxyz$ სისტემა მოძრაობს უძრავი $Ox_1y_1z_1$ სისტემის მიმართ (ნახ. 14.1, ა). ამავდროულად M წერტილი მოძრაობს S სხეულის (მოძრავი $Oxyz$ სისტემის) მიმართ, ე.ი. M წერტილი უძრავი სისტემის მიმართ შეასრულებს რთულ მოძრაობას. M წერტილის მოძრაობას უძრავი სისტემის მიმართ რთული მოძრაობა ეწოდება, ხოლო მის კინემატიკურ მახასიათებლებს (ტრაექტორია, სიჩქარე, აჩქარება) აბსოლუტური ეწოდება. M წერტილის მოძრაობას მოძრავი სისტემის მიმართ ფარდობითი მოძრაობა ეწოდება, ხოლო მის კინემატიკურ მახასიათებლებს (ტრაექტორია, სიჩქარე, აჩქარება) – ფარდობითი. თუ წარმოვიდგენთ, რომ M წერტილი დროის რომელიღაც მომენტისათვის მიმაგრებულია (უძრავია) S სხეულზე, მაშინ ის იმოძრავებს უძრავ სისტემის მიმართ, როგორც S სხეულის ფიქსირებული წერტილი. შესაბამისად ამისა, წერტილის მოძრაობას უძრავი სისტემის მიმართ, როცა ის უძრავია მოძრავი სისტემის მიმართ, წარმტანი მოძრაობა ეწოდება, ხოლო მის კინემატიკურ მახასიათებლებს (სიჩქარე, აჩქარება) – წარმტანი.

1. ძირითადი ცნებები და განმარტებები. რთული ეწოდება ისეთ მოძრაობას, რომლის დროსაც წერტილი ერთდროულად მონაწილეობს ორ ან მეტ მოძრაობაში (ნახ. 14.1, ა, ბ).

აბსოლუტური მოძრაობა ეწოდება M წერტილის მოძრაობას ათელის იმ ძირითადი $Ox_1y_1z_1$ სისტემის მიმართ, რომელსაც პირობითად მიიჩნევენ უძრავად.

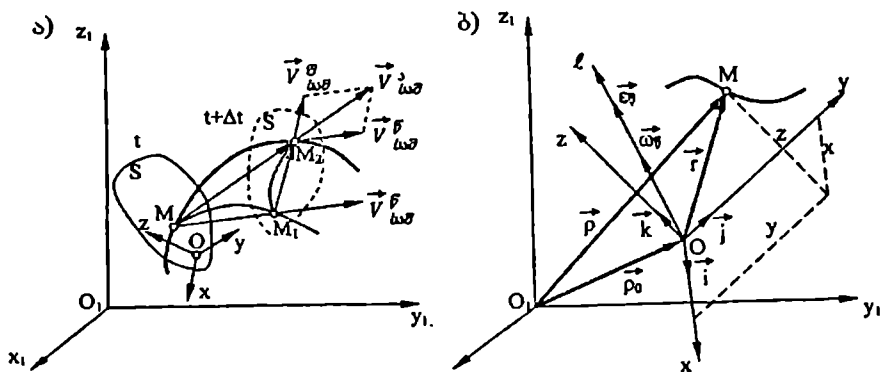
ფარდობითი მოძრაობა ეწოდება M წერტილის მოძრაობას ათელის მოძრავი სისტემის $Oxyz$ მიმართ.

წარმტანი მოძრაობა ეწოდება მოძრავი ათელის $Oxyz$ სისტემის მოძრაობას ძირითადი (უძრავი) ათელის $O_1x_1y_1z_1$ სისტემის მიმართ.

აბსოლუტური სიჩქარე და აბსოლუტური აჩქარება ეწოდება M წერტილის სიჩქარეს და აჩქარებას კოორდინატთა ძირითადი (უძრავი) $O_1x_1y_1z_1$ სისტემის მიმართ. მათ აღნიშნავენ ასე: $\vec{V}_a$ და $\vec{W}_a$.

ფარდობითი სიჩქარე და ფარდობითი აჩქარება ეწოდება M წერტილის სიჩქარეს და აჩქარებას კოორდინატთა მოძრავი $Oxyz$ ათელის სისტემის მიმართ. მათ აღნიშნავენ ასე: $\vec{V}_g$ და $\vec{W}_g$.

წარმტანი სიჩქარე და წარმტანი აჩქარება ეწოდება მოძრავი სისტემის იმ წერტილის სიჩქარესა და აჩქარებას, რომელსაც მოცემულ მომენტში ემთხვევა M მოძრავი წერტილი. მათთვის მიღებულია შემდეგი აღნიშვნები: $\vec{V}_r$ და $\vec{W}_r$.



ნახ. 14.1

2. ფარდობითი, აბსოლუტური და წარმტანი მოძრაობის განტოლებები. მოძრავი $Oxyz$ სისტემის მიმართ M წერტილის კოორდინატებია x, y, z . მაშასადამე, ფარდობითი მოძრაობის განტოლებებს ექნება სახე (ნახ. 14.1, ბ):

$$x = f_1(t); y = f_2(t); z = f_3(t). \quad (14.1)$$

ვინაიდან $\vec{\rho}$ ვექტორი არის $\vec{r}_0$ და $\vec{r}$ ვექტორების გეომეტრიულ ჯამი (ნახ. 14.1, ბ), ამიტომ

$$\vec{\rho} = \vec{r}_0 + \vec{r} = \vec{r}_0 + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (14.2)$$

სადაც x , y და z განისაზღვრება (14.1) ფორმულებით, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – მოძრავი Ox , Oy , Oz ღერძების მგზავებია. (14.2)-ში ყველა სიდიდე ცვლადია, მათ შორის $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – ც. ეს ტოლობა გამოსახავს წერტილის აბსოლუტური მოძრაობის განტოლებას ვექტორული სახით.

თუ წერტილი მოძრაობს სიბრტყეზე, მაგალითად, Ox_1y_1 სიბრტყეზე, მაშინ (14.1) და (14.2) განტოლებები ასეთ სახეს მიიღებს:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t), \quad (14.3)$$

$$\vec{\rho} = \vec{r}_0 + x\vec{i} + y\vec{j} \quad (14.4)$$

M წერტილის მოძრაობა როცა ის $Oxyz$ სისტემის მიმართ უძრავია, ე.ი. მოძრაობს, როგორც მოძრავი სისტემის წერტილი, ეწოდება წარმტანი მოძრაობა. ამიტომ როცა x , y და z მუდმივი სიდიდეებია (14.2) და (14.4) განტოლებები იქნება წარმტანი მოძრაობის განტოლებები.

14.2. სიჩქარეთა შეკრების თეორემა

თეორემა. რთული მოძრაობისას წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე ტოლია წარმტანი და ფარდობითი სიჩქარეების გეომეტრიული ჯამისა:

$$\vec{V}_s = \vec{V}_f + \vec{V}_g. \quad (14.5)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ მოძრავი S სხეულის მდებარეობა დროის t და $t + \Delta t$ ორი მომენტისათვის. M წერტილი, რომელიც მოძრაობს S სხეულის მიმართ და ამ სხეულთან ერთად ათვლის უძრავი $O_1x_1y_1z_1$ სისტემის მიმართაც ასრულებს რთულ მოძრაობას და MM_2 წირზე გადაადგილდება M -დან M_2 მდებარეობაში (ნახ. 14.1, ა). M წერტილის რთული მოძრაობა წარმოდგენით შეიძლება შეეცვალოთ ორი მარტივი მოძრაობის ჯამის სახით: 1. M წერტილი უძრავია მოძრავი სისტემის მიმართ და მოძრაობს ათვლის უძრავი სისტემის მიმართ, როგორც S სხეულის ფიქსირებული წერტილი, ე.ი.

მისი მოძრაობა იქნება წარმტანი; 2. M წერტილის ფარდობითი მოძრაობა მოძრავი სისტემის მიმართ. პირველ შემთხვევაში M წერტილი გადაადგილდება MM_1 წირზე M -დან M_1 მდებარეობაში, ხოლო მეორე შემთხვევაში – M_1M_2 წირზე M_1 -დან M_2 მდებარეობაში.

M წერტილის აბსოლუტური, ფარდობითი და წარმტანი მოძრაობისას შესრულებული გადაადგილებები რაიმე ტრაექტორიებზე (ზოგად შემთხვევაში – მრუდწირულზე) შეიძლება წარმოვადგინოთ $\overline{MM_2}$, $\overline{M_1M_2}$ და $\overline{MM_1}$ ვექტორების სახით. მაგრამ $\overline{MM_2}$ ვექტორი ტოლია $\overline{M_1M_2}$ და $\overline{MM_1}$ ვექტორების გეომეტრიული ჯამის (ნახ. 14.1, ა):

$$\overline{MM_2} = \overline{M_1M_2} + \overline{MM_1}. \quad (14.6)$$

გავეთ (14.6) ტოლობის ორივე მხარე Δt -ზე, მივიღებთ:

$$\frac{\overline{MM_2}}{\Delta t} = \frac{\overline{M_1M_2}}{\Delta t} + \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}. \quad (14.7)$$

$\frac{\overline{MM_2}}{\Delta t}$ ვექტორი წარმოადგენს M წერტილის საშუალო აბ-

სოლუტურ სიჩქარეს Δt დროის შუალედში; $\frac{\overline{M_1M_2}}{\Delta t}$ – ვექტორი

განსაზღვრავს M წერტილის საშუალო სიჩქარეს მოძრავი სისტემის მიმართ, ე.ი. არის წერტილის ფარდობითი

მოძრაობის საშუალო სიჩქარეს Δt დროის შუალედში; $\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}$ –

ვექტორი განსაზღვრავს M წერტილის წარმტანი მოძრაობის საშუალო სიჩქარეს Δt დროის შუალედში.

ამრიგად, (14.7) ტოლობა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\vec{v}_{\text{საშ}} = \vec{v}_{\text{საშ}}^{\text{ფ}} + \vec{v}_{\text{საშ}}^{\text{წ}}. \quad (14.8)$$

$\vec{v}_{\text{საშ}}$, $\vec{v}_{\text{საშ}}^{\text{ფ}}$, $\vec{v}_{\text{საშ}}^{\text{წ}}$ ვექტორები შესაბამისი გადაადგილების ვექტორების პროპორციულია (ნახ. 14.1, ა). ახლა განვიხილოთ (14.8) ტოლობის ზღვარი, როცა $\Delta t \rightarrow 0$. გვექნება:

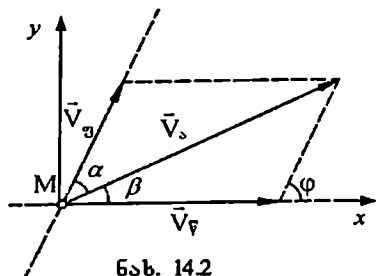
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{\text{საშ}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{\text{საშ}}^{\text{ფ}} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{\text{საშ}}^{\text{წ}},$$

სადაც $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_{\text{სა}} = \vec{V}_s$, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_{\text{შ}} = \vec{V}_\Psi$ და $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_{\text{სა}}^* = \vec{V}_\varphi$. $\vec{V}_s$, $\vec{V}_\Psi$ და $\vec{V}_\varphi$ ვექტორები წარმოადგენენ აბსოლუტური, ფარდობითი და წარმტან მოძრაობათა სიჩქარეებს დროის ადებულ მომენტში, ანუ არის ტეშმარიტი სიჩქარეებო. ამრიგად, მართებულია შემდეგი ტოლობა:

$$\vec{V}_s = \vec{V}_\Psi + \vec{V}_\varphi.$$

ამით დამტკიცებულია თეორემა, რომელსაც მექანიკაში განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს.

ბრტყელი მოძრაობის ზოგად შემთხვევაში, აბსოლუტური სიჩქარის მოდულს პოულობენ (14.5) გამოსახულების დაგვეყმით კოორდინატთა Mxy ღერძებზე (ნახ. 14.2), რადგან ფარდობით და წარმტან სიჩქარეებს შორის კუთხე შეიძლება იცვლებოდეს 0-დან 180°-მდე:



ნახ. 14.2

$$V_s = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}, \quad (14.9)$$

სადაც

$$\begin{aligned} V_x &= V_{\varphi x} + V_{\Psi x}, \\ V_y &= V_{\varphi y} + V_{\Psi y}. \end{aligned} \quad (14.10)$$

თუ ცნობილია $\varphi = (\vec{V}_\Psi, \vec{V}_\varphi)$

კუთხე, მაშინ აბსოლუტური სიჩქარის მოდულსა და მიმართულებას განვსაზღვრავთ ფორ-

მულებით (ნახ. 4.2):

$$V_s = \sqrt{V_\Psi^2 + V_\varphi^2 + 2V_\Psi V_\varphi \cos \varphi}, \quad (14.11)$$

$$\frac{V_s}{\sin \varphi} = \frac{V_\varphi}{\sin \alpha} = \frac{V_\Psi}{\sin \beta}, \quad (14.12)$$

სადაც $\alpha = (\vec{V}_s, \vec{V}_\Psi)$; $\beta = (\vec{V}_s, \vec{V}_\varphi)$.

14.3. სკალარული არგუმენტის ვექტორული ფუნქციის აბსოლუტური და ფარდობითი წარმოებულები

წერტილის რთული მოძრაობის კინემატიკური პარამეტრების განსაზღვრის შემთხვევაში გვიხდება ათვლის სისტემების მიმართ ვექტორული სიდიდეების დროში ცვლილების გან-

ხილვა. ამიტომ გასნდა ერთმანეთის მიმართ ფარდობითად მოძრავი ათეღის სისტემების მიმართ ვექტორული სიდიდეების წარმოებულების გამოთვლის აუცილებლობა. გავეცნოთ ასეთი გამოთვლების პროცედურებს.

განვიხილოთ t დროზე დამოკიდებული ნებისმიერი $\vec{P} = \vec{P}(t)$ ვექტორი. მისი ათეღის უძრავ სისტემაში t დროით წარმოებულს სრული ანუ აბსოლუტური წარმოებული ეწოდება. მას აღნიშნავენ $\frac{d\vec{P}}{dt}$ -თი. მოძრავი სისტემის მიმართ $\vec{P}(t)$ ვექტორის ცვლილების გათვალისწინებით მის წარმოებულს ფარდობითი ანუ ლოკალური ეწოდება და აღნიშნავენ $\frac{d\vec{P}}{dt}$ -თი. ეიპოვოთ ამ წარმოებულებს შორის კავშირი.

დაეშალოთ $\vec{P}$ ვექტორი მოძრავი $Oxyz$ სისტემის ღერძების მიმართ მდგენელებად:

$$\vec{P} = P_x \cdot \vec{i} + P_y \cdot \vec{j} + P_z \cdot \vec{k}, \quad (14.13)$$

სადაც P_x, P_y, P_z არის $\vec{P}$ -ვექტორის გეგმილები ათეღის მოძრავი სისტემის Ox, Oy, Oz ღერძებზე; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — შესაბამისად ამ ღერძების მგეზაველა.

რადგან $Oxyz$ სისტემა მოძრაობს უძრავი სისტემის მიმართ, ამიტომ წერტილის რთული მოძრაობისას უძრავი სისტემის მიმართ იცვლება $\vec{P}$ ვექტორის P_x, P_y, P_z გეგმილები და $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ მგეზავეებიც. მაშასადამე, (14.13)-ის გაწარმოებით მივიღებთ $\vec{P}$ ვექტორის შემდეგ სრულ წარმოებულს:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dP_x}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dP_y}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dP_z}{dt} \cdot \vec{k} + P_x \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} + P_y \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} + P_z \cdot \frac{d\vec{k}}{dt}. \quad (14.14)$$

(14.14) ფორმულის პირველი სამი შესაკრები მიიღება იმ პირობით, რომ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ მუდმივი ვექტორებია და არის $\vec{P}$ ვექტორის ფარდობითი წარმოებულის მდგენელები, ეი.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dP_x}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dP_y}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dP_z}{dt} \cdot \vec{k}. \quad (14.15)$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ერთეულოვანი ვექტორების t არგუმენტით წარმოებულების გამოსათვლელად ვისარგებლოთ (ჩვენთვის უკვე

(ცნობილი) $\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{n}$ ფორმულით. მასში დავეშვათ, რომ $\vec{r} = \vec{i}$, $\vec{n} = \vec{j}$, ე.ი.

$$\frac{d\vec{i}}{ds} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{j}$$

ამასთან

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{i}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

და, რადგანაც $\vec{i}$ მუდმივსიგრძიანი ერთეულოვანი ვექტორია, ამიტომ $\rho = 1$, $ds = d\varphi$. ამ შუალედური შედეგების გათვალისწინებით ერთეულოვანი $\vec{i}$ ვექტორის წარმოებულისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{j}$$

გავითვალისწინოთ, რომ მობრუნების კუთხის წარმოებული დროით არის ω კუთხური სიჩქარე, მაშინ შეგვიძლია ჩაწეროთ:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}, \quad (14.16)$$

სადაც ორი ბოლო ფორმულა ჩაწერილია პირველის ანალოგიით.

ათვლის უძრავი $Oxyz$ სისტემის მიმართ მოძრაობის ბრუნვით ნაწილს წარმოადგენს მოძრავი $Oxyz$ სისტემის O წერტილზე გამავალი l მყისი ღერძის გარშემო ბრუნვა, რომლის კუთხური ვექტორული სიჩქარეა $\vec{\omega}$ ვექტორი (ნახ. 14.1, ბ). ის უნდა მივმართოთ იმ სიბრტყის მართობულად, რომელიც გადის $\vec{i}$ და $\vec{j}$ ვექტორებზე. $\vec{\omega}$ ვექტორის მიმართულება შევარჩიოთ ისე, რომ მის გასწვრივ მდგომი დამკვირვებელი ხედავდეს $\vec{i}$ -ს მობრუნებას $\vec{j}$ ვექტორისაკენ მათ სიბრტყეში 90° -იან კუთხით საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგოდ.

თუ (14.14) ფორმულაში ჩაესვამთ (14.15) და (14.16) ფორმულებს, მივიღებთ:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{\omega} \times (P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k})$$

და (14.13)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{P}. \quad (14.17)$$

სრულ და ლოკალურ წარმოებულებს შორის (14.17) დამოკიდებულებას ბურის ფორმულას უწოდებენ.

სინქარეთა შეკრება. ახლა, ვაჩვენოთ, რომ (14.5) ფორმულის მიღება შესაძლებელია სხვა ხერხითაც. გავატაროთ $\vec{r}$ და $\vec{p}$ ვექტორები, რომლებიც განსაზღვრავენ M წერტილის მდებარეობას კოორდინატთა მოძრავი და უძრავი ღერძების მიმართ. გავატაროთ აგრეთვე O წერტილის $\vec{p}_0$ რადიუს-ვექტორი (ნახ. 14.1, ბ). დროის ნებისმიერი მომენტისათვის ეს სამი ვექტორი დაკავშირებულია ტოლობით:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \vec{r}$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა t დროით. გავითვალისწინოთ ამ ვექტორების ცვლილება უძრავი ღერძების მიმართ, ე.ი. გამოვთვალოთ ვექტორების სრული წარმოებულებები. მივიღებთ:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (14.18)$$

წერტილის ვექტორული სინქარის განსაზღვრების თანახმად

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{V}, \text{ არის } M \text{ წერტილის აბსოლუტური სინქარე, ხოლო}$$

$$\frac{d\vec{p}_0}{dt} = \vec{V}_0 - O \text{ წერტილის აბსოლუტური სინქარე. } \frac{d\vec{r}}{dt} \text{ წარმოე-}$$

ბულის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ბურის (14.17) ფორმულით, გვექნება:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

ფარდობითი წარმოებული $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_r$ არის მოძრავი ათვის

სისტემის მიმართ M წერტილის ფარდობითი სინქარე, ხოლო $\vec{\omega}$ ვექტორი - $Oxyz$ სისტემის ბრუნვითი მოძრაობის კუთხური სინქარე. ამრიგად, მივიღებთ

$$\vec{V}_s = \vec{V}_0 + \vec{\omega}_\varphi \times \vec{r} + \vec{V}_\eta. \quad (14.19)$$

(14.19) ტოლობის მარჯვენა მხარის პირველი ორი შესაკრები არის M წერტილის სინქარე უძრავი $Oxyz$ სისტემის მიმართ, როცა ის უძრავია მოძრავი $Ox'y'z'$ სისტემის მიმართ. ამრიგად, ეს ჯამი არის წარმტანი სინქარე, ე.ი. $\vec{V}_\varphi = \vec{V}_0 + \vec{\omega}_\varphi \times \vec{r}$ მაშასადამე, (14.19) ფორმულა ისევ ამტკიცებს სინქარეთა შეკრების თეორემას (იხ. 14.5 ფორმულა):

$$\vec{V}_s = \vec{V}_\eta + \vec{V}_\varphi,$$

ე.ი. წერტილის აბსოლუტური მოძრაობის სინქარე ფარდობითი და წარმტან სინქარეთა გეომეტრიული ჯამის ტოლია.

14.4. აჩქარებათა შეკრების თეორემა წარმტანი მოძრაობის ზოგად შემთხვევაში

განვიხილოთ M წერტილის რთული მოძრაობა, როცა ათვლის მოძრავი სისტემა გადატანითაან ერთად რომელიმე ღერძის გარშემო ბრუნვით მოძრაობასაც ასრულებს, დამტკიცოთ თეორემა, რომელსაც კორიოლისის თეორემას უწოდებენ.

თეორემა. რთული მოძრაობისას წერტილის აბსოლუტური აჩქარება ფარდობითი, წარმტანი, და კორიოლისის აჩქარებების გეომეტრიული ჯამის ტოლია:

$$\vec{W}_s = \vec{W}_\varphi + \vec{W}_\eta + \vec{W}_j, \quad (14.20)$$

სადაც $\vec{W}_\eta$ ფარდობითი მოძრაობის აჩქარებაა; $\vec{W}_\varphi$ - წარმტანი მოძრაობის აჩქარება; $\vec{W}_j$ - კორიოლისის აჩქარება:

დამტკიცება. წერტილის აბსოლუტური აჩქარების განსაზღვრად გამოვთვალოთ მისი აბსოლუტური სინქარის (14.19) სრული წარმოებული:

$$\vec{W}_s = \frac{d\vec{V}_s}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{V}_0 + \vec{\omega}_\varphi \times \vec{r} + \vec{V}_\eta) = \frac{d\vec{V}_0}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_\varphi}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega}_\varphi \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{V}_\eta}{dt}.$$

$\vec{r}$ და $\vec{W}_\eta$ ვექტორების სრული წარმოებულების გამოსათვლელად ვისარგებლოთ (14.17) ფორმულით, გვექნება:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega}_\varphi \times \vec{r}, \quad \frac{d\vec{V}_\Psi}{dt} = \frac{d\vec{V}_\Psi}{dt} + \vec{\omega}_\varphi \times \vec{V}_\Psi.$$

ამასთანავე გავითვალისწინოთ, რომ

$$\frac{d\vec{V}_0}{dt} = \vec{W}_0, \quad \frac{d\vec{\omega}_\varphi}{dt} = \vec{\varepsilon}_\varphi, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_\Psi, \quad \frac{d\vec{V}_\Psi}{dt} = \vec{W}_\Psi,$$

მაშინ წერტილის აბსოლუტური აჩქარებისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$\vec{W}_\Psi = \vec{W}_0 + \vec{\varepsilon}_\varphi \times \vec{r} + \vec{\omega}_\varphi \times (\vec{\omega}_\varphi \times \vec{r}) + \vec{W}_\Psi + 2\vec{\omega}_\varphi \times \vec{V}_\Psi, \quad (14.21)$$

სადაც $\vec{W}_0$ არის O წერტილის აჩქარება; $\vec{\varepsilon}_\varphi$ – მყისი წარმტანი კუთხური აჩქარება (ნახ. 14.1, ბ); $\vec{\varepsilon}_\varphi \times \vec{r} - M$ წერტილის ბრუნვითი მოძრაობის აჩქარება იმ პირობით, რომ $\vec{V}_\Psi = 0$, ე.ი. ის მოძრაობს მხოლოდ მოძრავ კოორდინატთა სისტემასთან ერთად და მოცემულ მომენტში არ ასრულებს ფარდობით მოძრაობას; $\vec{\omega}_\varphi \times (\vec{\omega}_\varphi \times \vec{r})$ – იმავე პირობით M წერტილის ღერძისკენული აჩქარება. მაშასადამე, (14.21) ფორმულის მარჯვენა მხარის პირველი სამი შესაკრები გვაძლევს თავისუფალი M წერტილის წარმტან აჩქარებას ათელის უძრავი სისტემის მიმართ იმ შემთხვევაში, როცა ის ათელის მოძრავ სისტემასთან ერთად ზოგად მოძრაობას ასრულებს, ე.ი.

$$\vec{W}_\varphi = \vec{W}_0 + \vec{\varepsilon}_\varphi \times \vec{r} + \vec{\omega}_\varphi \times (\vec{\omega}_\varphi \times \vec{r}). \quad (14.22)$$

(14.21) ფორმულის მარჯვენა მხარის ბოლო წევრს კოორიოლისის აჩქარება ეწოდება და აღინიშნება $\vec{W}_j$ სიმბოლოთი:

$$\vec{W}_j = 2\vec{\omega}_\varphi \times \vec{V}_\Psi. \quad (14.23)$$

აბსოლუტური აჩქარების ეს მდგენელი წარმოიშობა ფარდობითი და წარმტანი მოძრაობების ურთიერთქმედების შედეგად.

კოორიოლისის აჩქარებით ხასიათდება: 1. წერტილის წარმტანი სიჩქარის მოდულის ცვლილება მისი ფარდობითი მოძრაობის შედეგად; 2. ფარდობითი სიჩქარის ვექტორის მიმართულების ცვლილება წარმტან-ბრუნვითი მოძრაობის შედეგად.

საბოლოოდ (14.21) ფორმულა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\vec{W}_s = \vec{W}_y + \vec{W}_\varphi + \vec{W}_j.$$

ამით კოროლისის თეორემა დამტკიცებულია.

აბსოლუტური აჩქარების მოდულს ეიპოვით შემდეგი ფორმულით:

$$W_s = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}, \quad (14.24)$$

სადაც W_x, W_y, W_z აბსოლუტური აჩქარების ვექტორის გეგმილებია დეკარტის კოორდინატა ღერძებზე.

შენიშვნა. ყველაზე ზოგად შემთხვევაში, როდესაც წერტილის აბსოლუტური, ფარდობითი და წარმტანი მოძრაობები მრუდწირულია, მაშინ წერტილის აბსოლუტური, ფარდობითი და წარმტანი აჩქარებები შეიძლება დავშალოთ მხებ და ნორმალურ მდგენელებად და (14.20) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\vec{W}_s' + \vec{W}_s'' = \vec{W}_\eta' + \vec{W}_\eta'' + \vec{W}_\varphi' + \vec{W}_\varphi'' + \vec{W}_j. \quad (14.25)$$

ახლა, უფრო დაწვრილებით შევჩერდებით კორიოლისის $\vec{W}_j$ აჩქარებაზე. ამ ვექტორის მოდული გამოითვლება, როგორც ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლის მოდული, გვექნება:

$$W_j = 2\omega_\varphi \cdot V_\eta \sin \alpha, \quad (14.26)$$

სადაც $\alpha = (\vec{\omega}_\varphi, \vec{V}_\eta)$.

კორიოლისის აჩქარება შესაძლებელია ნულის ტოლი იყოს, თუ:

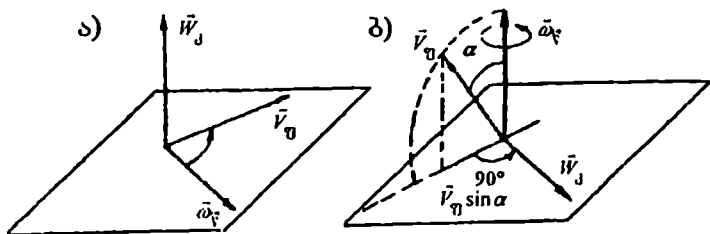
1. $\vec{\omega}_\varphi = 0$; წარმტანი მოძრაობა არის გადატანითი ან ბრუნვითი მოძრაობისას ნულის ტოლი დროის რაღაც მომენტში.

2. $V_\eta = 0$; ფარდობითი სიჩქარე მოცემულ მომენტში ნულის ტოლია.

3. $\sin(\vec{\omega}_\varphi, \vec{V}_\eta) = 0$; წარმტანი მოძრაობის $\vec{\omega}_\varphi$ კუთხური სიჩქარის ვექტორი პარალელურია $\vec{V}_\eta$ ფარდობითი სიჩქარის ვექტორის.

კორიოლისის აჩქარების $\vec{W}_j$ ვექტორის მიმართულება განისაზღვრება ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლის წესის მიხედვით. ეს ნიშნავს, რომ $\vec{W}_j$ ვექტორი მიმართული იქნება

$\vec{M}_J$ და $\vec{V}_\Phi$ ვექტორებზე გამავალი სიბრტყის მართობულად იმ მხარეს საიდანაც $\vec{M}_J$ ვექტორის $\vec{V}_\Phi$ -საკენ უახლოესი მობრუნება მოჩანს საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით (ნახ. 143, ა).



ნახ. 143

იმ შემთხვევაში, როცა $\vec{M}_J$ და $\vec{V}_\Phi$ ვექტორები ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობს, მაშინ $\vec{M}_J$ ვექტორი უნდა გადაეიტანოს თავის თავის პარალელურად და მოედოთ $\vec{V}_\Phi$ ვექტორის სათავეში. ასეთი ოპერაცია მართებულია, რამდენადაც $\vec{M}_J$ თავისუფალი ვექტორია.

კორიოლისის აჩქარების მოდულისა და მიმართულების დასადგენად გამოიყენება აგრეთვე ჟუკოვსკის მეთოდი (ნახ. 143, ბ): ფარდობითი სიჩქარის $\vec{V}_\Phi$ ვექტორი დავაგებმილოთ $\vec{M}_J$ ვექტორის მართობულ სიბრტყეზე. $\vec{V}_\Phi \sin \alpha$ გეგმილი მოვაბრუნოთ 90° -იანი კუთხით $\vec{M}_J$ ვექტორის გარშემო წარმტანი მოძრაობის (ბრუნვის) მიმართულებით და გავამრავლოთ 2ω -ზე. მოდულით $2\omega V_\Phi \sin \alpha$ -ს ტოლი ასეთი წესით აგებული ვექტორი იქნება საძიებელი კორიოლისის $\vec{M}_J$ აჩქარება.

14.5. აჩქარებათა შეკრების თეორემა
წარმტანი გადატანითი მოძრაობის შემთხვევაში

თეორემა. წარმტანი გადატანითი მოძრაობისას წერტილის აბსოლუტური აჩქარება ფარდობითი და წარმტანი აჩქარებების გეომეტრიული ჯამის ტოლია:

$$\vec{W}_s = \vec{W}_g + \vec{W}_f. \quad (14.27)$$

დამტკიცება. როგორც ზემოთ ვნახეთ (იხ. (14.22)), ათვლის მოძრავე სისტემის მოძრაობის ზოგად შემთხვევაში წერტილის წარმტანი აჩქარება სამი შესაკრებისაგან შედგებოდა. თუ მოძრავე $Oxyz$ სისტემა ასრულებს გადატანით მოძრაობას, ე.ი. წარმტანი მოძრაობა გადატანითია, მაშინ ცხადია, რომ $\vec{w}_f = 0$, (14.22)-დან გამომდინარე გვექნება $\vec{W}_f = \vec{W}_0$, ხოლო (14.23)-დან $-\vec{W}_j = 0$. მაშინ (14.21) განტოლება მიიღებს (14.27)-ის სახეს. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

წერტილის აბსოლუტური აჩქარების მოდული და მიმართულება განისაზღვრება ფორმულებით:

$$W_s = \sqrt{W_g^2 + W_f^2 + 2W_g \cdot W_f \cos \varphi}, \quad (14.28)$$

$$\frac{W_s}{\sin \varphi} = \frac{W_g}{\sin \alpha} = \frac{W_f}{\sin \beta}, \quad (14.29)$$

სადაც $\varphi = (\vec{W}_g, \wedge \vec{W}_f)$, $\alpha = (\vec{W}_s, \wedge \vec{W}_g)$, $\beta = (\vec{W}_s, \wedge \vec{W}_f)$.

14.6. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები წერტილის რთული მოძრაობისას მისი აბსოლუტური სიჩქარისა და აბსოლუტური აჩქარების განსაზღვრაზე

ამოცანა 61. ველოსიპედისტი მიდის $V_f = 15$ მ/წმ სიჩქარით.

იპოვეთ ველოსიპედის M_1 და M_2 პედალების აბსოლუტური $\vec{V}_s$ და $\vec{V}_z$ სიჩქარეთა მოდულები დროის იმ მომენტისათვის, როცა პედალების ბარბაცა პორიზონტისადმი დახრილია $\alpha = 30^\circ$ კუთხით, თუ ამ ბარბაცას სიგრძე $a = 0,8$ მ, ხოლო მისი კუთხური სიჩქარე $\omega = 20$ წმ⁻¹ (ნახ. 14.4).

ამოხსნა. 1. განსახილველ მომენტისათვის M_1 და M_2 წერტილები (პედალები) გამოვსახოთ ნახაზზე.

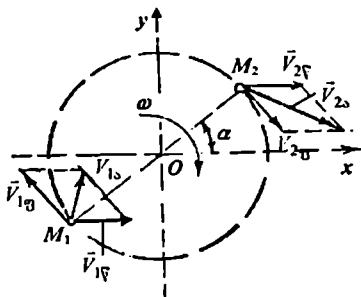
2. ავირჩიოთ ველოსიპედის ჩარჩოსთან მკვიდრად მიმაგრებული $Oxyz$ კოორდინატა სისტემა. ეს კოორდინატა სისტემა ასრულებს გადატანით მოძრაობას.

3. ა) გამოვყოთ M_1 და M_2 წერტილების წარმტანი მოძრაობა. ამისათვის აზრობრივად მივამაგროთ ისინი მოძრავ კოორდინატა სისტემას. ამ შემთხვევაში მოცემული წერტილები ველოსიპედის ჩარჩოს მიმართ უძრავია და ჩარჩოსთან ერთად მოძრაობს გადატანითად.

ბ) განვსაზღვროთ M_1 და M_2 წერტილების წარმტანი სიჩქარეები. გადატანითი მოძრაობისთვის თვისების თანახმად ყველა წერტილს აქვს ერთნაირი სიჩქარე, ე.ი.

$$V_{1\tau} = V_{2\tau} = V_{\tau} = 15 \text{ მ/წმ.}$$

გ) გამოვსახოთ ნახაზზე M_1 და M_2 წერტილების წარმტანი სიჩქარეები (ნახ. 14.4).



ნახ. 14.4

4. ა) გამოვყოთ M_1 და M_2 წერტილების ფარდობითი მოძრაობები. ამისათვის წარმოვიდგინოთ, რომ მოძრავი კოორდინატა სისტემა გაჩერებულია; ამ შემთხვევაში M_1 და M_2 წერტილების შემაერთებული ბარბაცა ბრუნვით მოძრაობას ასრულებს Oz ღერძის გარშემო (Oz ნახაზის სიბრტყის მართობია) ω კუთხური სიჩქარით

(ნახ. 14.4).

ბ) გამოვთვალოთ M_1 და M_2 წერტილების ფარდობითი სიჩქარეები

$$V_{1\theta} = V_{2\theta} = \omega \cdot \frac{a}{2} = 20 \cdot 0,4 = 8 \text{ მ/წმ.}$$

გ) ნახაზზე გამოვსახოთ ამ წერტილების ფარდობითი სიჩქარეები:

$$\vec{V}_{1\theta} \perp \overrightarrow{OM_1}; \quad \vec{V}_{2\theta} \perp \overrightarrow{OM_2}.$$

5. ნახაზზე გამოვსახოთ M_1 და M_2 წერტილების აბსოლუტური $\vec{V}_{1s}$ და $\vec{V}_{2s}$ სიჩქარეები, როგორც ფარდობითი და წარმტანი სიჩქარეებზე აგებული პარალელოგრამების დიაგონალები, (რადგან $\vec{V}_s = \vec{V}_g + \vec{V}_f$).

6. ვიპოვოთ $\vec{V}_{1s}$ და $\vec{V}_{2s}$ სიჩქარეების სიდიდეები და მიმართულებები:

$$V_{1s} = \sqrt{V_{1f}^2 + V_{1g}^2 + 2V_{1f} \cdot V_{1g} \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{15^2 + 8^2 + 2 \cdot 15 \cdot 8 \left(-\frac{1}{2}\right)} = 13 \text{ მ/წმ.}$$

$$\text{აღვნიშნოთ: } \alpha_1 = (\vec{V}_{1s}, \wedge \vec{V}_{1g}); \beta = (\vec{V}_{1g}, \wedge \vec{V}_{1f}) = 120^\circ \text{ მაშინ}$$

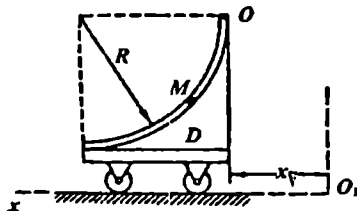
$$\frac{V_{1f}}{\sin \alpha_1} = \frac{V_{1s}}{\sin 120^\circ} \Rightarrow \sin \alpha_1 = \frac{V_{1f} \sin 120^\circ}{V_{1s}} = \frac{15 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 13} \Rightarrow \alpha_1 = 88^\circ$$

$$V_{2s} = \sqrt{V_{2f}^2 + V_{2g}^2 + 2V_{2f} \cdot V_{2g} \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{15^2 + 8^2 + 2 \cdot 15 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}} = 20,2 \text{ მ/წმ.}$$

$$\text{აღვნიშნოთ: } \alpha_2 = (\vec{V}_{2s}, \wedge \vec{V}_{2g}); \beta_2 = (\vec{V}_{2g}, \wedge \vec{V}_{2f}) = 60^\circ \text{ მაშინ}$$

$$\frac{V_{2f}}{\sin \alpha_2} = \frac{V_{2s}}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \sin \alpha_2 = \frac{V_{2f} \sin 60^\circ}{V_{2s}} = \frac{15\sqrt{3}}{2 \cdot 20,2} \Rightarrow \alpha_2 = 39^\circ.$$

ამოცანა 62. D სხეული (ურიკა) მიგორავს ჰორიზონტალურ ლიანდაგზე O_1x ღერძის გასწვრივ.

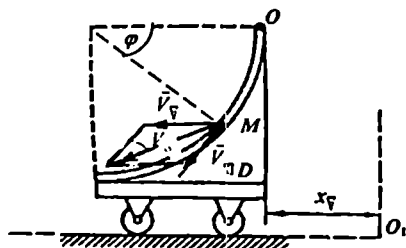


ნახ. 145

ამასთან D სხეულზე მკეიდრად მიმაგრებულ $R = 48$ სმ რადიუსის მქონე მილაკის შიგნით მოძრაობს M წერტილი (ნახ. 14.5). განვსაზღვროთ დროის $t = 2$ წმ მომენტი-სათვის M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე და აბსოლუტური აჩქარება, M წერტილის

ფარდობითი მოძრაობის $OM = S_g = 4\pi t^2$ და D სხეულის წარმტანი მოძრაობის $x_f = t^3 + 4t$ განტოლებებით (s_g, x_f - სანტიმეტრებში; t - წამებში).

ამოხსნა. D სხეულზე ეიპოვოთ M წერტილის მდებარეობა დროის მოცემულ $t=2$ წმ მომენტისათვის. M წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება φ კუთხით (ნახ. 14.6)



ნახ. 14.6

$$\varphi = \frac{OM}{R} = \frac{4\pi^2}{R}.$$

როცა $t=2$ წმ

$$\varphi = \frac{4\pi \cdot 2^2}{48} = \frac{\pi}{3} \text{ რად.}$$

M წერტილის აბსოლუტურ სიჩქარეს განვსაზღვრავთ, როგორც ფარდობითი და წარმტანი სიჩქარეების გეომეტრიულ

ჯამს ((14.5) ფორმულა):

$$\vec{V}_a = \vec{V}_g + \vec{V}_\varphi.$$

M წერტილის ფარდობითი სიჩქარე:

$$V_\varphi = \frac{ds_\varphi}{dt} = 8\pi.$$

როცა $t=2$ წმ

$$V_\varphi = 8\pi \cdot 2 = 16\pi = 50,24 \text{ სმ/წმ.}$$

V_φ -ის დადებითი ნიშანი გვიჩვენებს, რომ წერტილის ფარდობითი მოძრაობა ხდება $OM = s_\varphi$ -ის დადებითი ათეულის მიმართულებით. ფარდობითი სიჩქარის ეექტორი მიმართულია მილაკის მხეების გასწვრივ (ნახ. 14.6).

განვსაზღვროთ წარმტანი სიჩქარე. წარმტანი მოძრაობისას M წერტილი უძრავია D სხეულის მიმართ, ე.ი. ის მოძრაობს D სხეულთან ერთად, როგორც D სხეულის წერტილი. მაშასადამე,

$$V_\varphi = \frac{dx_\varphi}{dt} = 3t^2 + 4.$$

როცა $t=2$ წმ

$$V_\varphi = 3 \cdot 2^2 + 4 = 16 \text{ სმ/წმ.}$$

$\vec{V}_\varphi$ ეექტორი მიმართულია O_1x ღერძის პარალელურად მოძრაობის მხარეს (ნახ. 14.6).

აბსოლუტური სიჩქარის სიდიდე შეიძლება ვიპოვოთ (14.6) ან (14.8) ფორმულით. როგორც 14.6-ე ნახაზიდან ჩანს

$$V_x = V_{\text{ფ}} \sin 30^\circ + V_{\text{ვ}};$$

$$V_y = -V_{\text{ფ}} \cos 60^\circ$$

მაშასადამე,

$$V_x = 41,12 \text{ სმ/წმ}; V_y = -25,12 \text{ სმ/წმ}; V_s = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 48,2 \text{ სმ/წმ}.$$

წერტილის აბსოლუტური აჩქარება წარმტანი გადატანითი მოძრაობის დროს ფარდობით და წარმტან აჩქარებათა გეომეტრიული ჯამის ტოლია (იხ. (14.10) ფორმულა):

$$\vec{W}_s = \vec{W}_{\text{ფ}} + \vec{W}_{\text{ვ}},$$

ანუ გაშლილი სახით

$$\vec{W}_s = \vec{W}_{\text{ფრ}} + \vec{W}_{\text{ფი}} + \vec{W}_{\text{ფ}}.$$

ფარდობითი მხევი აჩქარების სიდიდე

$$W_{\text{ფრ}} = \frac{dV_{\text{ფ}}}{dt} = \frac{d^2 S_{\text{ფ}}}{dt^2} = 8\pi = 25,12 \text{ სმ/წმ}^2.$$

$W_{\text{ფი}}$ -ს დადებითი ნიშანი გვიჩვენებს, რომ $\vec{W}_{\text{ფრ}}$ ვექტორი მიმართულია $S_{\text{ფ}}$ -ის დადებითი ათეულის მიმართულებით, ე.ი. $\vec{V}_{\text{ფ}}$ -ის თანხვედრილად (ფარდობითი მოძრაობა აჩქარებულია).

ფარდობითი ნორმალური აჩქარება

$$W_{\text{ფი}} = \frac{V_{\text{ფ}}^2}{R} = \frac{64\pi^2 t^2}{48}.$$

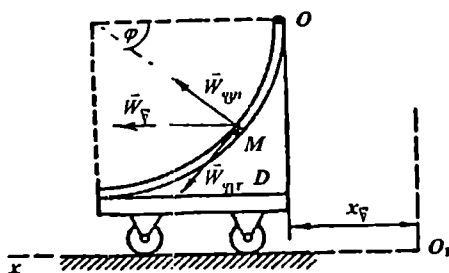
როცა $t = 2$ წმ

$$W_{\text{ფი}} = \frac{64 \cdot \pi^2 \cdot 2^2}{48} = 52,6 \text{ სმ/წმ}^2.$$

$\vec{W}_{\text{ფი}}$ ვექტორი მიმართუ-

ლია რადიუსის გასწვრივ M წერტილის ფარდობითი მოძრაობის ტრაექტორიის სიმრუდის ცენტრისაკენ (ნახ. 14.7).

წარმტანი აჩქარება



ნახ. 14.7

$$W_{\varphi} = \frac{dV_{\varphi}}{dt} = \frac{d^2 x_{\varphi}}{dt^2} = 6t.$$

როცა $t = 2$ წმ

$$W_{\varphi} = 6 \cdot 2 = 12 \text{ სმ/წმ}^2.$$

$\vec{W}_{\varphi}$ ვექტორი მიმართულია M -დან მოძრაობის მხარეს O_1x ღერძის პარალელურად (ნახ. 14.7).

აბსოლუტური აჩქარების მოძულს ეპოულობთ გვემილების საშუალებით:

$$W_x = W_{\varphi r} \cos 60^\circ + W_{\varphi r} \cos 30^\circ + W_{\varphi},$$

$$W_y = W_{\varphi r} \cos 30^\circ - W_{\varphi r} \cos 60^\circ,$$

საიდანაც

$$W_x = 48,0 \text{ სმ/წმ}^2; \quad W_y = 32,94 \text{ სმ/წმ}^2;$$

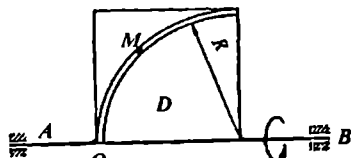
$$W_o = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = 58,24 \text{ სმ/წმ}^2.$$

ამოცანა 63. M წერტილი მოძრაობს $R = 20$ სმ რადიუსიან წრეწირის რკალზე და D სხეულის მიმართ ასრულებს ფარდობით მოძრაობას. დროის $t = \frac{1}{3}$ წმ მომენტისათვის განესაზღვროთ M წერტილის აბსოლუტური აჩქარება, M წერტილის ფარდობითი მოძრაობისა და D სხეულის წარმტანი მოძრაობის

$$OM = S_{\varphi} = 60\pi t^2,$$

$$\varphi = 9t^2 + 6t$$

(S_{φ} – სანტიმეტრებში; φ – რადიანებში; t – წამებში) მოცემული განტოლებებით (ნახ. 14.8).



ნახ. 14.8

ამოხსნა. ჩავთვალოთ, რომ დროის მოცემული მომენტისათვის D სხეულის მდებარეობა ემთხვევა ნახაზის სიბრტყეს (ნახ. 14.8). D სხეულზე M წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება $\alpha = \frac{S_{\varphi}}{R}$ კუთხით

(ნახ. 4.9), როცა $t = \frac{1}{3}$ წმ

$$\alpha = \frac{60\pi}{20 \cdot 9} = \frac{\pi}{3} \text{ რად.}$$

M წერტილის აბსოლუტურ სიჩქარეს განვსაზღვრავთ, როგორც ფარდობითი და წარმტანი სიჩქარეების გეომეტრიულ ჯამს:

$$\vec{V}_s = \vec{V}_\Psi + \vec{V}_\varphi.$$

$OM = S_\Psi$ რკალზე M წერტილის D სხეულის მიმართ მოძრაობა არის ფარდობითი (ნახ. 14.8). ამიტომ ფარდობითი $\vec{V}_\Psi$ სიჩქარის ვექტორის გეგმილი მოძრაობის ტრაექტორიის მხეზე იქნება

$$V_\Psi = \frac{dS_\Psi}{dt} = 120\pi t.$$

როცა $t = \frac{1}{3}$ წმ.

$$V_\Psi = 120\pi \cdot \frac{1}{3} = 40\pi \text{ სმ/წმ.}$$

V_Ψ -ის დადებითი ნიშანი გვიჩვენებს, რომ ფარდობითი მოძრაობა ემთხვევა S_Ψ -ის ათვლის დადებით მიმართულებას. $\vec{V}_\Psi$ ვექტორი მიმართულია R რადიუსიანი წრეწირის რკალის მხეების გასწვრივ S_Ψ -ის ზრდის მხარეს.

D სხეული ბრუნავს უძრავი AB ღერძის გარშემო. თუ ჩავთვლით, რომ M წერტილის წარმტანი მოძრაობა მისი $CM = r$ რადიუსიან წრეწირზე მოძრაობაა, მაშინ $CM \perp AB$ (ნახ. 14.9).

წარმტან სიჩქარეს განვსაზღვრავთ ფორმულით:

$$V_\varphi = r \cdot \omega, \quad (1)$$

სადაც ω არის D სხეულის კუთხური სიჩქარე

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(9t^2 + 6t) = 18t + 6.$$

როცა $t = \frac{1}{3}$ წმ,

$$\omega = 18 \cdot \frac{1}{3} + 6 = 12 \text{ წმ}^{-1}.$$

ω სიდიდის დადებითი ნიშანი გვიჩვენებს, რომ D სხეული ბრუნვას ϕ კუთხის ზრდის მიმართულებით.

EMC მართკუთხა სამკუთხედიდან (ნახ. 14.9) განვსაზღვრავთ r -ს, გვექნება:

$$r = EM \sin \alpha = R \sin \alpha = 20 \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ სმ.}$$

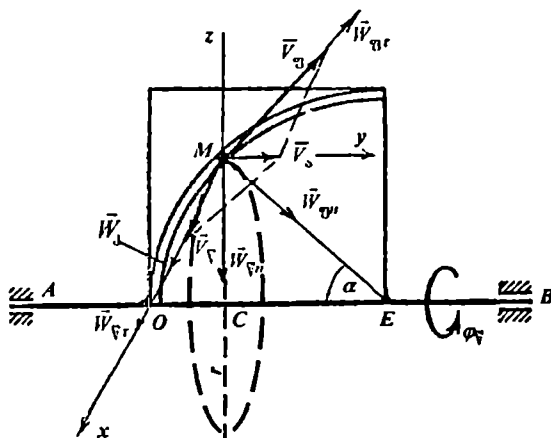
(1)-დან

$$V_{\phi} = r \cdot \omega = 10\sqrt{3} \cdot 12 = 120\sqrt{3} \text{ სმ/წმ.}$$

$\vec{V}_{\phi}$ ვექტორი მიმართულია r რადიუსიანი წრეწირის მხეების გასწვრივ ϕ კუთხის ზრდის მხარეს.

რადგან $(\vec{V}_{\phi}, \vec{V}_{\phi}) = 90^\circ$, ამიტომ M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარის მოდული

$$V_s = \sqrt{V_{\phi}^2 + V_{\phi}^2} = \sqrt{(40\pi)^2 + (120\sqrt{3})^2} = 242,6 \text{ სმ/წმ.}$$



ნახ. 14.9

M წერტილის აბსოლუტური აჩქარება ფარდობით, წარმტან და კოორდინატის აჩქარებათა გეომეტრიული ჯამის ტოლია:

$$\vec{W}_s = \vec{W}_{\phi} + \vec{W}_{\phi},$$

ანუ გაშლილი სახით

$$\vec{W}_s = \vec{W}_{gr} + \vec{W}_{\varphi} + \vec{W}_{fr} + \vec{W}_{fn} + \vec{W}_j. \quad (2)$$

ფარდობითი მხები აჩქარების მოდული

$$W_{gr} = \frac{d^2 S_{\varphi}}{dt^2} = 120\pi = 376,8 \text{ სმ/წმ}^2.$$

$\vec{W}_{gr}$ -ს დადებითი ნიშანი გვიჩვენებს, რომ $\vec{W}_{gr}$ ვექტორი მიმართულია S_{φ} -ის დადებითი ათელის მიმართულებით, ე.ი. ისევე როგორც $\vec{V}_{\varphi}$ (ფარდობითი მოძრაობა აჩქარებულია) (ნახ. 14.9).

ფარდობითი ნორმალური აჩქარება

$$W_{\varphi} = \frac{V_{\varphi}^2}{R} = \frac{(40\pi)^2}{20} = 1004,8 \text{ სმ/წმ}^2.$$

$\vec{W}_{\varphi}$ ვექტორი მიმართულია R რადიუსის გასწვრივ M -დან E -სკენ. წარმტანი მხები აჩქარება

$$W_{fr} = r\varepsilon = r \frac{d^2 \phi_{\varphi}}{dt^2} = 10\sqrt{3} \cdot 18 = 311,4 \text{ სმ/წმ}^2.$$

ε -სა და W_{fr} -ს ნიშნების თანმთხვევა გვიჩვენებს, რომ D სხეულის ბრუნვა აჩქარებულია. $\vec{W}_{fr}$ ვექტორი მიმართულია r რადიუსიანი წრეწირის მხების გასწვრივ და ემთხვევა $\vec{V}_{\varphi}$ -ის მიმართულებას (ნახ. 14.9).

წარმტანი ნორმალური აჩქარება

$$W_{fn} = r \cdot \omega^2 = 10\sqrt{3} \cdot 12^2 = 2491,2 \text{ სმ/წმ}^2.$$

$\vec{W}_{fn}$ ვექტორი მიმართულია M -დან r რადიუსიან წრეწირის C ცენტრისაკენ.

კორიოლისის აჩქარება

$$\vec{W}_j = 2\vec{\omega}_{\varphi} \times \vec{V}_{\varphi}.$$

კორიოლისის აჩქარების მოდული

$$W_j = 2\omega_{\varphi} \cdot V_{\varphi} \sin(\vec{\omega}_{\varphi}, \wedge \vec{V}_{\varphi}),$$

სადაც $\sin(\vec{\omega}_{\varphi}, \wedge \vec{V}_{\varphi}) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, მაშინ

$$W_j = 2 \cdot 12 \cdot 40\pi \cdot \frac{1}{2} = 1507,2 \text{ სმ/წმ}^2.$$

ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლის თვისების შესაბამისად $\vec{W}_j$ ვექტორი, მიმართულია ამ ვექტორებზე გამავალი სიბრტყის მართობულად, და ჩვენს შემთხვევაში იგი $\vec{W}_{fr}$ -ს ემთხვევა (ნახ. 14.9).

M წერტილის აბსოლუტური აჩქარების მოდულს გავიგებთ $Mxyz$ კოორდინატთა ღერძებზე (2) ტოლობის დაგეგმილებით:

$$W_{sx} = W_{fr} + W_j = 311,4 + 1507,2 = 1818,6 \text{ სმ/წმ}^2;$$

$$W_{sy} = W_{\varphi r} \cos 60^\circ + W_{fr} \cos 30^\circ = 1004,8 \cdot \frac{1}{2} + 376,8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 826,5 \text{ სმ/წმ}^2;$$

$$W_{sz} = -W_{\varphi r} - W_{\varphi r} \cos 30^\circ + W_{fr} \cos^\circ = -2491,2 - 1004,8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 276,8 \cdot \frac{1}{2} = -3166,9 \text{ სმ/წმ}^2;$$

$$W_s = \sqrt{W_{sx}^2 + W_{sy}^2 + W_{sz}^2} = \sqrt{(1818,6)^2 + (826,5)^2 + (-3166,9)^2} = 3744,4 \text{ სმ/წმ}^2.$$

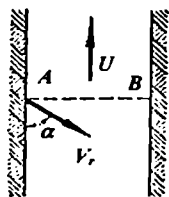
14.7. სავარჯიშო ამოცანები წერტილის რთული მოძრაობისას მისი აბსოლუტური სიჩქარისა და აბსოლუტური აჩქარების განსაზღვრაზე

14.1. $V_1 = 140$ კმ/სთ სიჩქარით მიმავალი მატარებლის მგზავრმა შენიშნა, რომ $l = 600$ მ სიგრძის მატარებელმა $t = 6$ წმ-ის განმავლობაში ჩაუარა. განსაზღვრეთ შემხვედრი მატარებლის სიჩქარე.

პასუხი: $V_2 = 100$ კმ/სთ.

14.2. მოტორიან ნავს ფარდობითი $V_{\varphi} = 3,6$ მ/წმ სიჩქარით უნდა გადაეცურა 480 მ სიგანის მდინარე ღინების მართობულად. მდინარის ღინების გავლენის გამო ნავმა მეორე ნაპირს მიაღწია 500 მ-ის გავლის შემდეგ. განსაზღვრეთ მდინარის სიჩქარე იმ პირობით, რომ მდინარის სიჩქარე მთელ სიგანეზე მუდმივია.

პასუხი: $V = 1,05$ მ/წმ.



ნახ. 14.10

14.3. ნავს 234 მ სიგანის მდინარის გადასალახად უკავია ნაპირის მიმართ α კუთხით დახრილი მიმართულება და 2,5 წთ-ში მიაღწია მდინარის ნაპირის მეორე მხარეს B პუნქტში, რომელიც მდებარეობს ნაპირის (დინების) მართობულ AB წრფეზე (ნახ. 14.10). განსაზღვრეთ α კუთხე და მდინარის მიმართ ნავის ფარდობითი სიჩქარე, თუ დინების სიჩქარე $U = 3,24$ კმ/სთ მუდმივია მთელ სიგანეზე.

პასუხი: $\alpha = 60^\circ$; $V_{\text{გ}} = 3$ მ/წმ.

14.4. მეტროს ესკალატორი, რომელსაც 150 საფეხური აქვს მოძრაობს ქვევით $V = 1$ მ/წმ სიჩქარით. რა ფარდობითი სიჩქარით გადაადგილდება ესკალატორზე ადამიანი, თუ მან 100 საფეხური დათვალა.

პასუხი: $V_{\text{გ}} = 2$ მ/წმ.

14.5. ნავმისადგომიდან მდინარის დინების მართობული მიმართულებით ერთდროულად გამოვიდა ორი ნავი, რომელთა ფარდობითი სიჩქარეები: $V_1 = 100$ მ/წთ და $V_2 = 75$ მ/წთ. მდინარის მეორე ნაპირთან მეორე ნავი მივიდა პირველის მისვლიდან 1,5 წთ-ში. განსაზღვრეთ ნავების მოძრაობის დროები და მდინარის სიგანე. ჩათვალით, რომ მთელ სიგანეზე მდინარის სიჩქარე მუდმივია.

პასუხი: $t_1 = 4,5$ წთ; $t_2 = 6$ წთ; $l = 450$ მ.

14.6. მოძრავ ესკალატორზე ქვევით მიდის ორი კაცი შესაბამისად $V_1 = 1,6$ მ/წმ და $V_2 = 0,8$ მ/წმ ფარდობითი სიჩქარით და მეტროს გვირაბში ჩადიან $t_1 = 1,5$ და $t_2 = 2$ წუთის შემდეგ. რამდენ წუთში ჩავა ექსკავატორის ბოლოში ესკალატორზე უძრავად მდგომი ადამიანი?

პასუხი: $t_3 = 3$ წთ.

14.7. ესკალატორის საფეხურებზე ფარდობითი $V_1 = 1$ მ/წმ სიჩქარით და ეშვება გოგონა, რომელმაც დათვალა $n_1 = 60$ საფეხური, ხოლო ბიჭმა, რომელიც მიდის $V_2 = 2$ მ/წმ ფარ-

დობითი სიჩქარით. მან დათვალა $n_2 = 80$ საფეხური. რამდენი საფეხური აქვს ესკალატორს და რას უდრის მისი სიჩქარე?

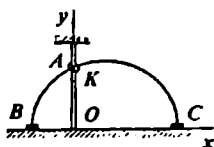
$$\text{პასუხი: } n = n_1 \cdot n_2 \frac{V_2 - V_1}{n_1 V_2 - n_2 V_1} = 120; \quad V = V_1 \cdot V_2 \frac{n_2 - n_1}{n_1 V_2 - n_2 V_1} = 1 \text{ მ/წმ.}$$

14.8. K რგოლი აერთებს უძრავ OA ღეროსა და $r = 85$ სმ რადიუსის მქონე ნახევარწრიულ მავთულს, რომელიც მოძრაობს Ox ღერძის გასწვრივ $V = 30$ სმ/წმ სიჩქარით (ნახ. 4.11). განსაზღვრეთ, რგოლის ფარდობითი და აბსოლუტური სიჩქარეები იმ მომენტისათვის, როცა $OB = 16$ სმ.

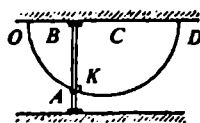
$$\text{პასუხი: } V_g = 34 \text{ სმ/წმ; } V_s = 16 \text{ სმ/წმ.}$$

14.9. K რგოლი აერთებს გადატანითად მოძრავ AB ღეროსა და $OC = r = 12$ სმ რადიუსიან ნახევარწრიულ უძრავ OD მავთულს (ნახ. 4.12). განსაზღვრეთ K რგოლის ფარდობითი და აბსოლუტური სიჩქარეები იმ მომენტში, როცა $OB = BC = 6$ სმ.

$$\text{პასუხი: } V_g = \sqrt{3} \text{ სმ/წმ; } V_s = 2\sqrt{3} \text{ სმ/წმ.}$$



ნახ. 4.11

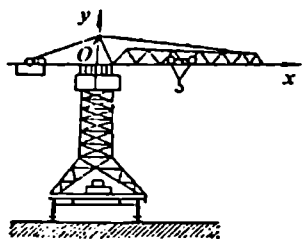


ნახ. 4.12

14.10. $r = 8$ სმ რადიუსის მქონე წრიული ფირფიტა თანაბრად ბრუნავს მის ცენტრზე გამავალი ფირფიტის სიბრტყის მართობული ღერძის გარშემო მუდმივი $\omega = 4$ წმ⁻¹ კუთხური სიჩქარით. ფირფიტის ფერსოზე მოძრაობს M წერტილი $V_g = 12$ სმ/წმ ფარდობითი სიჩქარით. იპოვეთ M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე.

პასუხი: $V_s = 44$ სმ/წმ, როცა წერტილი მოძრაობს ფირფიტის ბრუნვის თანხედენილი მიმართულებით; $V_s = 20$ სმ/წმ, როცა წერტილი მოძრაობს ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

14.11. ამწე კრანის ისარზე მოძრაობს ურიკა $x = 20 \sin^2 \frac{\pi}{40} t$



ნახ. 14.13

კანონის თანახმად (x – სანტიმეტრებში, t – წამებში) (ნახ. 14.13). დროის $t = 10$ წმ მომენტში განსაზღვრეთ ურიკის აბსოლუტური სიჩქარე, თუ კრანის ისარი ვერტიკალური ღერძის გარშემო შემობრუნდება $\omega = \frac{\pi}{40}$ წმ⁻¹ კუთხური სიჩქარით.

პასუხი: $V_s = \frac{\pi}{4} \sqrt{5}$ მ/წმ.

14.12. M წერტილის D სხეულის მიმართ ფარდობითი მოძრაობა აღიწერება $x_{\theta} = 4t^3 + 2t$ მ განტოლებით, ხოლო D სხეულის წარმტანი მოძრაობა – $S_{\varphi} = 3t^2 + 2t$ მ განტოლებით. დროის $t = \frac{1}{2}$ წმ მომენტისათვის განსაზღვრეთ M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე, თუ $\alpha = (\vec{V}_s, \vec{V}_{\varphi}) = \frac{\pi}{3}$.

პასუხი: $V_s = 5$ მ/წმ.

14.13. M წერტილის D სხეულის მიმართ ფარდობითი მოძრაობის სიჩქარეა $V_{\theta} = 3$ მ/წმ, ხოლო D სხეულის მოძრაობა აღიწერება $S_{\varphi} = 8 \sin t$ განტოლებით. დროის $t = \frac{\pi}{3}$ წმ მომენტისათვის განსაზღვრეთ M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე, თუ $\alpha = (\vec{V}_s, \vec{V}_{\varphi}) = \frac{\pi}{2}$.

პასუხი: $V_s = 3$ მ/წმ.

14.14. მილაკში, რომელსაც ნახევარი წრის ფორმა აქვს, $V_{\theta} = 4$ მ/წმ მუდმივი ფარდობითი სიჩქარით მოძრაობს M ბურთულა (ნახ. 14.14). განსაზღვრეთ ბურთულის აბსოლუტური სიჩქარის მოდული M_1 მდებარეობაში, თუ მილაკი

ბრუნავს უძრავი ღერძის გარშემო $\omega = 3$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით და მიღაკის რადიუსი $R = 1$ მ.

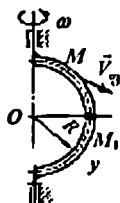
პასუხი: $V_s = 5$ მ/წმ.

14.15. წრიული ფორმის ფირფიტა ბრუნავს Oz ღერძის გარშემო (ნახ. 14.15). მის ფერსოზე მუდმივი $V_s = 9$ მ/წმ ფარდობითი სიჩქარით მოძრაობს M წერტილი. განსაზღვრეთ M წერტილის წარმტანი $\vec{V}_f$ სიჩქარის მოდული, დროის იმ მომენტისათვის, როცა მისი აბსოლუტური სიჩქარე $V_s = 15$ მ/წმ.

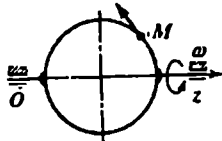
პასუხი: $V_f = 12$ მ/წმ.

14.16. წრიული ფორმის ფირფიტა ბრუნავს Oz ღერძის გარშემო $\varphi = \frac{12}{\pi} \sin \frac{\pi}{3} t$ კანონის თანახმად (ნახ. 14.16). ფირფიტას ფერსოზე მოძრაობს M წერტილი $AM = S_\varphi = 2t^3 - 2t$ კანონის შესაბამისად. განსაზღვრეთ დროის $t = 1$ წმ მომენტისათვის M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარის მოდული, თუ $R = 1$ მ.

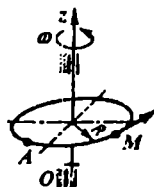
პასუხი: $V_s = 8$ მ/წმ.



ნახ. 14.14



ნახ. 14.15



ნახ. 14.16

14.17. $ABCD$ ფირფიტა ბრუნავს Oz ღერძის გარშემო $\omega = 4t$ კუთხური სიჩქარით. ფირფიტის BC გვერდზე B -დან C -ს მიმართულებით მოძრაობს M წერტილი მუდმივი $V_s = 9$ მ/წმ სიჩქარით (ნახ. 14.17). განსაზღვრეთ M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარის მოდული დროის $t = 3$ წმ მომენტისათვის, თუ AB გვერდის სიგრძე 1 მ-ის ტოლია.

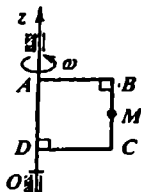
პასუხი: $V_s = 15$ მ/წმ.

14.18. კონუსი ბრუნავს Oz ღერძის გარშემო $\omega = 3$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით. კონუსი მსახველზე A -დან B -სკენ მოძრაობს M წერტილი, რომლის ფარდობითი სიჩქარე $V_{\pi} = 4$ მ/წმ (ნახ. 14.18). განსაზღვრეთ M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარის მოდული იმ მდებარეობაში, როცა $AM = 2$ მ. თუ კუთხე $\alpha = 30^\circ$.

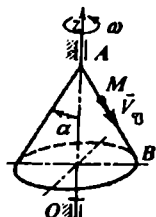
პასუხი: $V_s = 5$ მ/წმ.

14.19. კონუსის მსახველი სიმაღლესთან ადგენს 30° -იანი კუთხეს. კონუსის მსახველზე მოძრაობს წერტილი $AM = S_{\pi} = 2t$ განტოლების შესაბამისად. კონუსი ბრუნავს Oz ღერძის გარშემო $\varphi = 2t^2$ კანონით (ნახ. 14.19). განსაზღვრეთ დროის $t = 2$ წმ მომენტისათვის M წერტილის წარმტანი სიჩქარის მოდული.

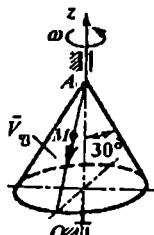
პასუხი: $V_f = 16$ მ/წმ.



ნახ. 14.17



ნახ. 14.18



ნახ. 14.19

14.20-14.26. M წერტილი D სხეულის მიმართ მოძრაობს ფარდობითად $OM = S_{\pi} = f_1(t)$ კანონის მიხედვით. D სხეულის წარმტანი გადატანითი მოძრაობა აღიწერება $x_f = f_2(t)$ კანონის თანახმად. დროის $t = t_1$ მომენტისათვის განსაზღვრეთ M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე და აბსოლუტური აჩქარება M წერტილის ფარდობითი მოძრაობისა და D სხეულის წარმტანი მოძრაობის მოცემული განტოლებებით, თუ მოცემულია:

14.20. $x_f = 7t + 4t^2$ სმ; $OM = S_{\pi} = 20\pi t^2$ სმ; $t_1 = \frac{1}{2}$ წმ; $R = 30$ სმ.

პასუხი: $V_s = 65,7$ სმ/წმ; $W_s = 169,3$ სმ/წმ².

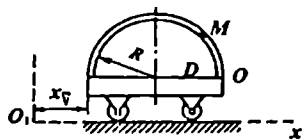
14.21. $x_f = 29 \left(1 + \sin \frac{\pi}{3} t \right)$ სმ; $OM = S_{\pi} = \pi(2t^2 + 3t)$ სმ; $t_1 = 1$ წმ;

$R = 30$ სმ.

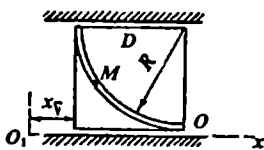
პასუხი: $V_s = 19,9$ სმ/წმ; $W_s = 56,5$ სმ/წმ².

14.22. $x_F = (t^2 + 4t)$ სმ; $OM = S_0 = 4\pi t^2$ სმ; $t_1 = 2$ წმ; $R = 48$ სმ.

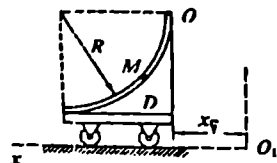
პასუხი: $V_s = 43,5$ სმ/წმ; $W_s = 29,3$ სმ/წმ².



ფიგ. 14.20



ფიგ. 14.21



ფიგ. 14.22

14.23. $x_F = (2t^3 - 2t^2)$ სმ; $OM = S_0 = (3t^2 + t)$ სმ; $t_1 = 2$ წმ; $\alpha = 30^\circ$.

პასუხი: $V_s = 33,9$ სმ/წმ; $W_s = 29,3$ სმ/წმ².

14.24. $x_F = (3t^2 - 8t)$ სმ; $OM = S_0 = 4 \sin \frac{\pi}{3} t^2$ სმ; $t_1 = 2$ წმ.

პასუხი: $V_s = 7,3$ სმ/წმ; $W_s = 8,6$ სმ/წმ².

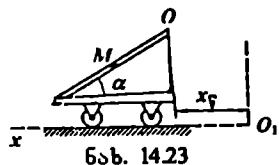
14.25. $x_F = (4t + 16t^2)$ სმ; $OM = S_0 = 10\pi \sin \frac{\pi}{8} t$ სმ; $t_1 = 1$ წმ; $R = 30$ სმ.

პასუხი: $V_s = 44,8$ სმ/წმ; $W_s = 24,1$ სმ/წმ².

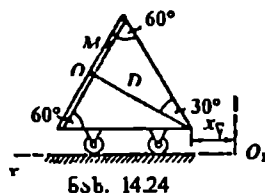
14.26. $x_F = 20 \left(\cos \frac{\pi}{2} t + 1 \right)$ სმ; $OM = S_0 = 5\pi t^2$ სმ; $t_1 = 2$ წმ;

$R = 24$ სმ.

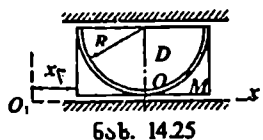
პასუხი: $V_s = 64,3$ სმ/წმ; $W_s = 165,6$ სმ/წმ².



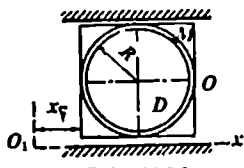
ფიგ. 14.23



ფიგ. 14.24



ფიგ. 14.25



ფიგ. 14.26

14.27.-14.34. M წერტილი D სხეულის მიმართ მოძრაობს $OM = S_y = f_1(t)$ განტოლების თანახმად, ხოლო D სხეული უძრავი სისტემის მიმართ მოძრაობს $\varphi = f_2(t)$ კანონის შესაბამისად. დროის $t = t_1$ მომენტისათვის განსაზღვრეთ M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე და აბსოლუტური აჩქარება, M წერტილის ფარდობითი მოძრაობისა და D სხეულის წარმტანი მოძრაობის მოცემული განტოლებებით, თუ მოცემულია:

14.27. $OM = S_y = 40\pi \cos \frac{\pi}{6} t$ სმ; $\varphi = 3t - 0,5t^3$ რად; $t_1 = 2$ წმ;

$R = 30$ სმ.

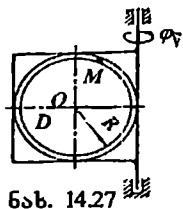
პასუხი: $V_s = 64,3$ სმ/წმ; $W_s = 165,6$ სმ/წმ².

14.28. $OM = S_y = 6(t + 0,5t^2)$ სმ; $\varphi = (t^3 - 5t)$ რად; $t_1 = 2$ წმ;
 $\alpha = 30^\circ$.

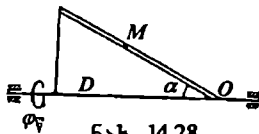
პასუხი: $V_s =$ სმ/წმ; $W_s =$ სმ/წმ².

14.29. $OM = S_y = 10(1 + \sin 2\pi t)$ სმ; $\varphi = (4t + 1,6t^2)$ რად; $t_1 = \frac{1}{8}$ წმ.

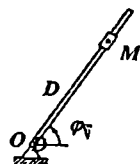
პასუხი: $V_s =$ სმ/წმ; $W_s =$ სმ/წმ².



ნახ. 14.27



ნახ. 14.28



ნახ. 14.29

14.30. $OM = S_y = 25 \sin \frac{\pi}{3} t$ სმ; $\varphi = (2t^2 - 0,5t)$ რად; $t_1 = 4$ წმ;

$a = 25$ სმ.

პასუხი: $V_s =$ სმ/წმ; $W_s =$ სმ/წმ².

14.31. $OM = S_y = 5\sqrt{2}(t^2 + 1)$ სმ; $\varphi = (0,2t^2 + t)$ რად; $t_1 = 2$ წმ;
 $\alpha = 60$ სმ, $\alpha = 45^\circ$

პასუხი: $V_s =$ სმ/წმ; $W_s =$ სმ/წმ².

14.32. $OM = (8t^3 + 2t)$ სმ; $\varphi = 0,5t^2$ რად; $t_1 = 1$ წმ; $a = 4\sqrt{5}$ სმ.

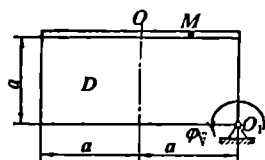
პასუხი: $V_s =$ სმ/წმ; $W_s =$ სმ/წმ².

14.33. $OM = x_{\varphi} = (10t + t^3)$ სმ; $\varphi_{\varphi} = (8t - t^2)$ რად; $t_1 = 2$ წმ;
 $\alpha = 60^\circ$, $t_2 = 2$ წმ.

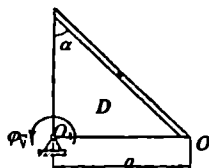
პასუხი: $V_s =$ სმ/წმ; $W_s =$ სმ/წმ².

14.34. $OM = S_{\eta} = \pi(t + t^2)$ სმ; $\varphi_{\varphi} = (2t - 4t^2)$ რად; $t_1 = 1$ წმ;
 $R = 25$ სმ.

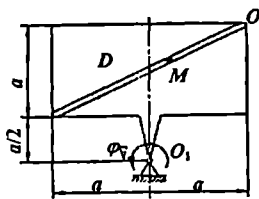
პასუხი: $V_s =$ სმ/წმ; $W_s =$ სმ/წმ².



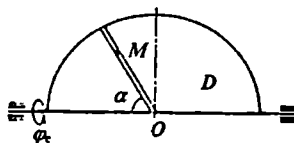
ნახ. 14.30



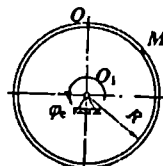
ნახ. 14.31



ნახ. 14.32



ნახ. 14.33



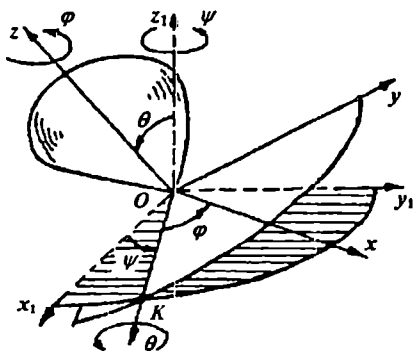
ნახ. 14.34

15. მყარი სხეულის მოძრაობა ერთი უძრავი
წერტილის გარშემო (სუბერული მოძრაობა)

15.1. ვილერის კუთხეები. მოძრაობის განტოლებები

განსაზღვრება. უძრავი წერტილის გარშემო სხეულის ბრუნვა ეწოდება ისეთ მოძრაობას, რომლის დროსაც მისი ერთი წერტილი მოძრაობის მთელი დროის განმავლობაში უძრავი რჩება. ზოგჯერ ამ მოძრაობას სფერულ მოძრაობასაც უწოდებენ, რადგან სხეულის ყველა წერტილი მოძრაობს სფერულ ზედაპირზე, რომლის ცენტრი ემთხვევა უძრავ წერტილს.

12.1 პარაგრაფში აღენიშნეთ, რომ თავისუფალ მყარ სხეულს აქვს ექვსი თავისუფლების ხარისხი. თუ სხეულის ერთ წერტილს დავამაგრებთ, მაშინ მოაკლდება თავისუფლების სამი ხარისხი. მაშასადამე, ერთი უძრავი წერტილის მქონე სხეულს აქვს თავისუფლების სამი ხარისხი. ამიტომ რომელიმე კოორდინატთა სისტემის მიმართ სხეულის მდებარეობის მოსაყვამად დაგვჭირდება სამი პარამეტრი. ეს შეიძლება მოცემული იყოს სხვადასხვა მეთოდით. განსახილველი მოძრაობის გამოსაკვლევეად მოხერხებული გამოდგა ცის მექანიკაში მიღებული ვილერის კუთხეები.



ნახ. 15.1

სხეულის უძრავ O წერტილში გავატაროთ უძრავი Ox_1y_1 კოორდინატთა სისტემა. $Oxyz$ კოორდინატთა მეორე სისტემა მკვიდრად დავაკავშიროთ სხეულთან (ნახ. 15.1). Oxy და Ox_1y_1 სიბრტყეების გადაკვეთის OK წრფეს საკვანძო ანუ ნუტაციის წრფე ეწოდება. მაშინ Ox_1y_1 სისტემის მიმართ $Oxyz$ სამწახნაგას და მასთან ერთად თვით სხეულის მდებარეობაც სრუ-

ლიად განისაზღვრება კუთხეებით:

$$\varphi = \angle KOx, \quad \psi = \angle x_1OK, \quad \theta = \angle z_1Oz.$$

ამ კუთხეებს ეილერის კუთხეები ეწოდება და აქვს შემდეგი სახელწოდებები: φ – საკუთარი ბრუნვის კუთხე; ψ – პრეცესიის კუთხე, θ – ნუტაციის კუთხე. ეილერის კუთხეების ათეულის დადებითი მიმართულება წრიული ისრებით ნაჩვენებია 15.1 ნახაზზე. φ კუთხის ცვლილებისას სხეული ბრუნავს KOx კუთხით განსაზღვრული სიბრტყის მართობული Oz ღერძის გარშემო.

ამრიგად, მოძრავ კოორდინატთა Ox ღერძის მდებარეობას საკვანძო OK წრფის მიმართ განსაზღვრავს საკუთარი ბრუნვის φ კუთხე, რომლის მიმართულებას იძლევა პრეცესიის ψ კუთხე. ψ კუთხის ცვლილებისას სხეული Oz_1 ღერძის გარშემო ბრუნავს, ხოლო ნუტაციის θ კუთხის ცვლილებისას სხეული შემობრუნდება საკვანძო OK წრფის გარშემო.

დროის ნებისმიერ მომენტში ერთი უძრავი წერტილის მქონე სხეულის მდებარეობის განსაზღვრავად საჭიროა მოცემული იყოს ეილერის კუთხეები, როგორც დროის ცალსახა ფუნქციები:

$$\varphi = f_1(t), \quad \psi = f_2(t), \quad \theta = f_3(t). \quad (15.1)$$

(15.1) ტოლობები უძრავი წერტილის გარშემო მბრუნავი სხეულის მოძრაობის განტოლებებია.

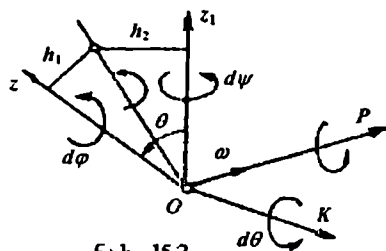
15.2. ეილერ-დალამბერის თეორემა

თეორემა. სხეული, რომელსაც აქვს ერთი უძრავი წერტილი, შეიძლება გადავიყვანოთ ერთი მდებარეობიდან სხვა ნებისმიერში უძრავ წერტილზე გამავალი გარკვეული ღერძის გარშემო ერთი მობრუნებით.

დამტკიცება. ეთქვათ, დროის რომელიმე t მომენტისათვის სხეულის მდებარეობა განისაზღვრება $\varphi(t)$, $\psi(t)$ და $\theta(t)$ კუთხეებით. დროის dt შუალედში სხეულის ელემენტარული გადაადგილება შედგება მისი Oz , Oz_1 და OK ღერძების გარშემო შესაბამისად $d\varphi$, $d\psi$ და $d\theta$ კუთხეების ერთობლივი მობრუნებისაგან (ნახ. 15.1). გავანალიზოთ, რა შედეგს მივიღებთ Oz და Oz_1 ღერძების გარშემო სხეულის ბრუნვათა შეკრებით (ნახ. 15.2).

შევასრულოთ ამ ღერძების გარშემო სხეულის მობრუნება და შეკრება. Oz ღერძის გარშემო სხეულის $d\varphi$ -ის კუთხით

მობრუნებისას სხეულის zOz_1 სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი წერტილი, რომელიც Oz ღერძიდან h_1 მანძილითაა დაშორებული, მიიღებს zOz_1 სიბრტყის მართობული $h_1 d\varphi$ ელემენტარულ გადაადგილებას. იმავედროულად სხეულის Oz_1 ღერძის გარშემო $d\psi$ კუთხის მობრუნებისას იგივე წერტილი საპირისპირო მიმართულებით მიიღებს $h_2 d\psi$ გადაადგილებას, სადაც h_2 არის წერტილიდან Oz_1 ღერძამდე მანძილი. მაშინ zOz_1 კუთხის შიგნით მოცემებით ისეთ B წერტილს, რომლისთვისაც მართებული იქნება $h_1 d\varphi = h_2 d\psi$ ტოლობა. ეს იმას ნიშნავს, რომ Oz და Oz_1 ღერძების გარშემო მობრუნებით გამოწვეული ელემენტარული გადაადგილება ისეთივე იქნება, როგორც O და B ორი უძრავი წერტილის მქონე სხეულის შემთხვევაში, ე.ი. ის არის სხეულის OB ღერძის გარშემო ელემენტარული მობრუნება. თუ ამ მობრუნების კუთხეს შევკრებთ OK ღერძის გარშემო მობრუნების ელემენტარულ $d\theta$ კუთხესთან, მივაღწეოთ დასკვნამდე, რომ OB და OK ღერძების გარშემო მობრუნების ჯამური ეფექტი ეკვივალენტური იქნება OP ღერძის გარშემო ერთი ელემენტარული მობრუნებისა, სადაც OP ღერძი გადის სხეულის უძრავ O წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 15.2

სხეულის უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვა შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ღერძის გარშემო უსასრულო მცირე ბრუნვათა ერთობლიობა. მართლაც, დროის ყოველი მომენტი-სათვის სხეულის უძრავი წერტილის გარშემო ბრუნვა შეიძლება შევცვალოთ O წერტილზე გამავალი OP ღერძის გარშემო ბრუნვით. OP ღერძს, რომლის გარშემო დროის გარკვეულ მომენტში სხეული ბრუნვას ასრულებს, ბრუნვის მყისი ღერძი ეწოდება. ამ ღერძის მდებარეობა სხეულის მოძრაობის დროს იცვლება, ამასთან მისი ყველა წერტილის სიჩქარე ყოველთვის ნულის ტოლია. ბრუნვის უძრავი ღერძისაგან მყისი ღერძი იმით განსხვავდება, რომ ზოგადად, მისი მიმართულება სივრცესა და სხეულში დროის ყოველ მომენტში იცვლება.

15.3. სხეულის მყისი კუთხური სიჩქარე და ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე უძრავი წერტილის გარშემო ბრუნვისას

განსაზღვრება. სხეულის მყისი ვექტორული კუთხური სიჩქარე არის $\vec{\omega}$ ვექტორი, რომელიც მდებარეობს ბრუნვის მყის OP ღერძზე და მოდებულია ისე, რომ ბრუნვა $\vec{\omega}$ -ს მიმართ ხდება დადებითი მიმართულებით (ნახ. 15.2). როცა ვისარგებლებთ ეილერ-დაღამბერის თეორემის დამტკიცებისას გამოყენებული მეთოდით, შეიძლება დავასკვნათ, რომ თუ სხეული ერთდროულად მონაწილეობს მყის ბრუნვებში რამდენიმე ღერძის გარშემო, მაშინ ჯამური მოძრაობა არის მყისი ბრუნვების ერთობლიობა. ღერძების გარშემო რომლებიც გადიან სხეულის უძრავ წერტილზე, ხოლო ამ მოძრაობის მყისი კუთხური სიჩქარე ყველა ღერძის გარშემო მყის კუთხურ სიჩქარეთა გეომეტრიული ჯამის ტოლია, ე.ი.

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \dots + \vec{\omega}_n. \quad (15.2)$$

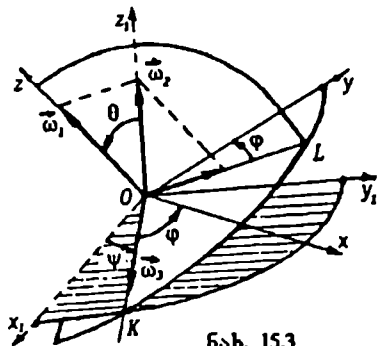
ეთქვას, სხეულის მოძრაობა მოცემულია (15.1) განტოლებით. განვსაზღვროთ სხეულის კუთხური $\vec{\omega}$ სიჩქარე. ავირჩიოთ უძრავი $Ox_1y_1z_1$ კოორდინატთა სისტემა და გავატაროთ სხეულთან მკვიდრად მიმაგრებული $Oxyz$ ღერძები (ნახ. 15.3).

მოძრავი სისტემის მდებარეობა უძრავის მიმართ განისაზღვრება ეილერის φ , ψ და θ კუთხეებით. სხეულის Oz , Oz_1 და OK ღერძების გარშემო ბრუნვის კუთხური ვექტორული სიჩქარეები აღვნიშნოთ $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ და $\vec{\omega}_3$ -ით, ამასთან ამ ვექტორების მოდულები იქნება:

$$\omega_1 = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad \omega_2 = \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}, \quad \omega_3 = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}. \quad (15.3)$$

(15.2) ფორმულის თანახმად სხეულის კუთხური სიჩქარე დროის ყოველ მომენტში ტოლი იქნება:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3, \quad (15.4)$$



ნახ. 15.3

ანუ მისი გეგმილები Oxy მოძრავ ღერძებზე იქნება:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega_{1x} + \omega_{2x} + \omega_{3x}, \\ \omega_y &= \omega_{1y} + \omega_{2y} + \omega_{3y}, \\ \omega_z &= \omega_{1z} + \omega_{2z} + \omega_{3z}.\end{aligned}\tag{15.5}$$

განესაზღვროთ ეს გეგმილები. $\vec{\omega}_1$ და $\vec{\omega}_3$ ვექტორებისათვის გვექნება (ნახ. 15.3):

$$\begin{aligned}\omega_{1x} &= \omega_{1y} = 0, \quad \omega_{1z} = \dot{\varphi}; \\ \omega_{3x} &= \dot{\theta} \cos \varphi, \quad \omega_{3y} = -\dot{\theta} \sin \varphi, \quad \omega_{3z} = 0.\end{aligned}$$

იმისათვის, რომ განესაზღვროთ $\vec{\omega}_2$ ვექტორის გეგმილები, გავატაროთ Oz და Oz_1 ღერძებზე სიბრტყე, რომელიც Oxy სიბრტყეს გადაკვეთს OL წრფეზე. რადგან კვანძთა OK წრფე მართობულია z_1Oz სიბრტყისა, ამიტომ ის OL წრფის მართობულიცაა, მაშინ, თუ $\vec{\omega}_2$ ვექტორის OL წრფეზე მდგენელს დავაგეგმილებთ Ox და Oy ღერძებზე (ნახ. 15.3), მივიღებთ:

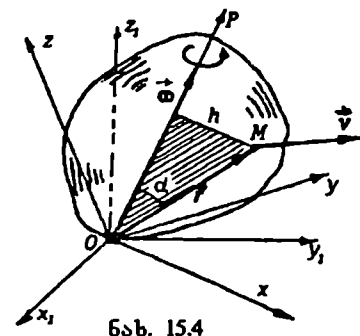
$$\omega_{2x} = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi, \quad \omega_{2y} = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi, \quad \omega_{2z} = \dot{\psi} \cos \theta.$$

ჩავსვათ (15.5) ფორმულებში $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ და $\vec{\omega}_3$ ვექტორების გეგმილების გამოთვლილი მნიშვნელობები, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta.\end{aligned}\tag{15.6}$$

მიღებულ (15.6) განტოლებებს ეილერის კინემატიკური განტოლებები ეწოდება.

სხეულის ცნობილი კუთხური სიჩქარით ადვილად გამოვთვალოთ მისი წერტილების სიჩქარესა და აჩქარებებს. ვთქვათ, სხეულის რომელიმე M წერტილებიდან



ნახ. 15.4

ბრუნვის მყის OP ღერძამდე მანძილია h (ნახ. 15.4), ხოლო ამ წერტილის რადიუს-ვექტორი — $\vec{r}$. მაშინ სიჩქარის $\vec{v}$ ვექტორი შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}, \quad (15.7)$$

სადაც $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ არის მოძრავი x , y და z ღერძების მგეზავეები, ხოლო x , y და z რადიუს-ვექტორის გეგმილები იმავე ღერძებზე. (15.7) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\begin{aligned} \vec{V} &= V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} = \\ &= (\omega_y z - \omega_z y) \vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z) \vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x) \vec{k} \end{aligned} \quad (15.8)$$

მაშასადამე,

$$\begin{aligned} V_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ V_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ V_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \quad (15.9)$$

(15.9) ფორმულების საშუალებით ვიპოვიტ სიჩქარის $\vec{V}$ ვექტორის $|\vec{V}| = V$ მოდულს: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$ მეორეს მხრივ

$$|\vec{V}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin \alpha,$$

სადაც $|\vec{r}| \sin \alpha = h$ (ნახ. 15.4). გვექნება:

$$V = \omega \cdot h. \quad (15.10)$$

$\vec{V}$ ვექტორი მიმართულია POM სიბრტყის მართობულად მოძრაობის მხარეს. (15.7) და (15.9) ფორმულებს ეილერის ფორმულები ეწოდება.

15.4. სხეულის ნებისმიერი წერტილის აჩქარება უძრავი წერტილის გარშემო ბრუნვისას

ახლა ვიპოვოთ M წერტილის აჩქარება. გავაწარმოვოთ (15.7) ტოლობა დროით, მივიღებთ:

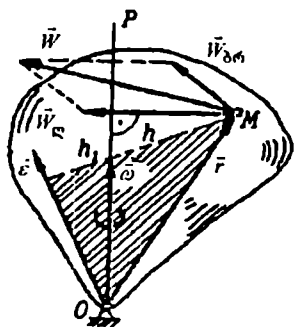
$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

რადგან $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$, ხოლო $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}$, ამიტომ გვექნება

$$\vec{W} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V} \quad (15.11)$$

მიღებულ ტოლობას ხშირად რივალსის ფორმულას უწოდებენ. (15.11) ტოლობის პირველ შესაკრებს ეწოდება ბრუნვითი აჩქარება. მას აღნიშნავენ $\vec{W}_{\text{ბრ}}$ - სიმბოლოთი, ე.ი. გვექნება:

$$\vec{W}_{\text{ბრ}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \quad (15.12)$$



ნახ. 15.5

ეს ვექტორი მიმართულია M წერტილზე და $\vec{\varepsilon}$ ვექტორზე გამავალი სიბრტყის მართობულად (ნახ. 15.5). მისი მოდული ტოლია:

$$W_{\text{ბრ}} = \varepsilon \cdot r \sin(\vec{\varepsilon}, \vec{r}) = \varepsilon \cdot h_1. \quad (15.13)$$

სრული აჩქარების მეორე შესაკრებს ღერძისკენულ აჩქარებას უწოდებენ. მას $\vec{W}_{\text{ღ}}$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ, ე.ი.

$$\vec{W}_{\text{ღ}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{V} \quad (15.14)$$

$\vec{W}_{\text{ღ}}$ ვექტორი მიმართულია M წერტილიდან მყის OP ღერძზე დაშვებული მართობის გასწვრივ (ის ერთდროულად $\vec{\omega}$ და $\vec{V}$ ვექტორების პერპენდიკულარულია), ე.ი. h მონაკვეთის გასწვრივ, რომელიც წარმოადგენს M წერტილის დაშორებასა მყის OP ღერძიდან. ღერძისკენული აჩქარების მოდული განისაზღვრება ფორმულით:

$$W_{\text{ღ}} = \omega V \sin 90^\circ = \omega \cdot V = \omega^2 h. \quad (15.15)$$

ამრიგად, სფერული მოძრაობისას სხეულის ნებისმიერი წერტილის სრული აჩქარება ბრუნვით და ღერძისკენულ აჩქარებათა გეომეტრიული ჯამის ტოლია:

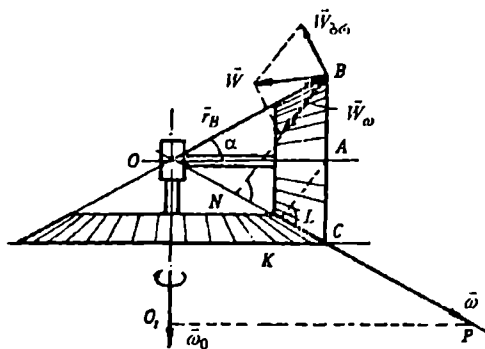
$$\vec{W} = \vec{W}_{\text{ბრ}} + \vec{W}_{\text{ღ}}. \quad (15.16)$$

რადგან ბრუნვითი და ღერძისკენული აჩქარებები ერთმანეთის მართობული არ არის, ამიტომ წერტილის სრული აჩქარება გამოითვლება ისევე, როგორც პარალელეოგრამის დიაგონალის სიგრძე შემდეგი ფორმულით:

$$W = \sqrt{W_{\text{ბრ}}^2 + W_{\text{ღ}}^2 + 2W_{\text{ბრ}} \cdot W_{\text{ღ}} \cdot \cos(\vec{W}_{\text{ბრ}}, \vec{W}_{\text{ღ}})}. \quad (15.17)$$

ამოცანა 64. განესაზღვროთ კონუსური სატკეპნის B წერტილის სიჩქარე და აჩქარება, რომელიც უსრიალოდ მიგორავს

უძრავ კონუსურ K ზედაპირზე (ნახ. 15.6). მოცემულია: სატკეპნის დიამეტრი $BC = 30$ სმ, $OA = 20$ სმ, სატკეპნის ცენტრის



ნახ. 15.6

სიჩქარე $V_A = 40$ სმ/წმ, რომელიც მიმართულია ნახაზის სიბრტყის მართობულად მკითხველისაკენ.

ამოხსნა. სატკეპნი მოძრაობს უძრავი O წერტილის გარშემო. რადგან სრიალი არ აღინიშნება, ამიტომ C წერტილის სიჩქარე $V_C = 0$. ეს იმას ნიშნავს, რომ ბრუნვის მყისი OP ღერძი გადის C წერტილზე და, სატკეპნის

მყისი კუთხური სიჩქარის $\vec{\omega}$ ვექტორი მიმართულია OP -ს გასწვრივ C წერტილიდან P -სკენ. კუთხური სიჩქარის მოდული განისაზღვრება შემდეგი ტოლობიდან:

$$\omega = \frac{V_A}{AL} = \frac{V_A}{OA \sin \alpha}.$$

OAB სამკუთხედიდან გვაქვს:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{BC}{2OA}, \quad \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{BC}{\sqrt{4(OA)^2 + (BC)^2}},$$

მაშინ

$$\omega = \frac{V_A \sqrt{(BC)^2 + 4(OA)^2}}{OA \cdot BC} = \frac{40 \sqrt{30^2 + 4 \cdot 20^2}}{20 \cdot 30} = \frac{10}{3} \approx 3,33 \text{ წმ}^{-1}.$$

CBN და CAL სამკუთხედების მსგავსებიდან გამომდინარეობს, რომ $BN = 2AL$. ამიტომ B წერტილის სიჩქარე A წერტილისაზე ორჯერ მეტია, ე.ი. $V_B = 2V_A = 80$ სმ/წმ. V_B ვექტორი მიმართულია ნახაზის სიბრტყის მართობულად მკითხველისაკენ.

სატკეპნის OO_1 ღერძის გარშემო თანაბრად ბრუნვისას, მისი კუთხური აჩქარების $\vec{\varepsilon}$ ვექტორი შეიძლება განესაზღვროთ როგორც $\vec{\omega}$ ვექტორის ბოლოს სიჩქარე. რამდენადაც ამ

ვექტორის ბოლო მოძრაობს წრეწირზე (ნახ. 15.6), შეიძლება ჩავწეროთ:

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_0 \times \vec{\omega},$$

სადაც $\vec{\omega}_0$ არის OAC სიბრტყის OO_1 ღერძის გარშემო ბრუნვის კუთხური ვექტორული სიჩქარე (ნახ. 15.6).

მისი მოდული იქნება:

$$\omega_0 = \frac{V_A}{OA} = \frac{40}{20} = 2 \text{ წმ}^{-1}.$$

ახლა შეგვიძლია გამოეთვალათ $\vec{\varepsilon}$ კუთხური აჩქარების მოდული:

$$\varepsilon = \omega_0 \cdot \omega \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right);$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \lg^2 \alpha}} = \frac{20A}{\sqrt{(BC)^2 + 4(OA)^2}};$$

$$\varepsilon = 2 \cdot 3,33 \cdot \frac{2 \cdot 20}{\sqrt{30^2 + 4 \cdot 20^2}} \approx 5,33 \text{ წმ}^{-2}.$$

ცნობილი კუთხური აჩქარების საშუალებით გამოითვლება B წერტილის აბსოლუტური $\vec{W}_B$ აჩქარება. (15.16) ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_{\Delta B}^B + \vec{W}_{\Gamma}^B$$

(15.13) და (15.15) ფორმულების მიხედვით:

$$W_{\Delta B}^B = \varepsilon \cdot r_B \cdot \sin(\vec{\varepsilon}, \vec{r}_B), \quad W_{\Gamma}^B = \omega^2 \cdot BN$$

რადგან $\vec{\varepsilon} \perp \vec{r}_B$, ამიტომ $\sin(\vec{\varepsilon}, \vec{r}_B) = 1$. გიპოვოთ:

$$r_B = \sqrt{(OA)^2 + (BC/2)^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25 \text{ სმ},$$

$$BN = r_B \sin 2\alpha = 25 \cdot \sin 73,8^\circ \approx 25 \cdot 0,36 = 24 \text{ სმ}.$$

მაშინ

$$\vec{W}_{\Delta B}^B = \varepsilon \cdot r_B \sin(\vec{\varepsilon}, \vec{r}_B) \approx 5,33 \cdot 25 \cdot 1 = 133,3 \text{ სმ/წმ}^2,$$

$$\vec{W}_{\Gamma}^B = \omega^2 \cdot BN = 3,33^2 \cdot 24 \approx 266 \text{ სმ/წმ}^2.$$

$\vec{W}_{\Delta B}^B$ ვექტორი მიმართულია OB -ს მართობულად და მდებარეობს BOC სიბრტყეში, ხოლო $\vec{W}_{\Gamma}^B$ ვექტორი მიმართულია BN

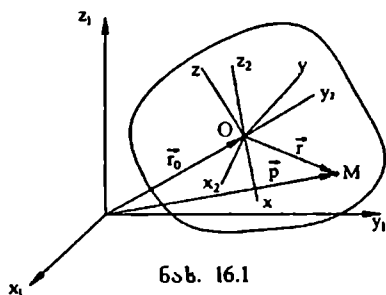
წრფის გასწვრივ B -დან N -ისაკენ (ნახ. 15.6). $(\vec{W}_{\text{ზო}}^B, \vec{W}_{\text{წ}}^B) = 90 + (90 - 2\alpha) = 180 - 2\alpha$. (15.17) ფორმულით, ეიპოვით:

$$W_B = \sqrt{133,3^2 + 266^2 - 2 \cdot 133 \cdot 266 \cdot 0,279} \approx 262,2 \text{ სმ/წმ}^2.$$

ამოცანა ამოხსნილია.

16. მყარი სხეულის თავისუფალი მოძრაობა

კოორდინატთა $O_1x_1y_1z_1$ უძრავი სისტემის მიმართ მყარი სხეულის თავისუფალი მოძრაობა დაეშალოთ გადატანით და პოლუსის გარშემო ბრუნვით მოძრაობებად. O პოლუსში



ნახ. 16.1

ავიღოთ მოძრავი ორი კოორდინატთა სისტემა: $Ox_2y_2z_2$ სისტემა სხეულთან დაკავშირებულია ერთი უძრავი წერტილით (O პოლუსი) და მოძრაობა გადატანითია, ხოლო მეორე $Oxyz$ სისტემის მოძრაობა ეილერის კუთხეებით აღიწერება (ნახ. 16.1) და ის სფერული მოძრაობაა.

მყარი სხეულის თავისუფალი მოძრაობის განტოლებებია:

$$\begin{aligned} x_0 &= f_1(t), \quad y_0 = f_2(t), \quad z_0 = f_3(t), \\ \psi &= \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t). \end{aligned} \quad (16.1)$$

16.1. წერტილის სიჩქარე

მყარი სხეულის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე ტოლია პოლუსის სიჩქარისა და პოლუსის გარშემო სხეულის სფერული მოძრაობისას ამ წერტილის სიჩქარის გეომეტრიული ჯამისა:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (16.2)$$

სადაც $\vec{r}$ არის M წერტილის რადიუს-ვექტორი O პოლუსის მიმართ.

16.2. წერტილის აჩქარება

თავისუფალი მყარი სხეულის ნებისმიერი წერტილის აჩქარება ტოლია პოლუსის აჩქარების, ბრუნვითი და ღერძისკენული აჩქარებების გეომეტრიული ჯამისა პოლუსის გარშემო სხეულის სფერული მოძრაობისას:

$$\vec{W}_M = \vec{W}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (16.3)$$

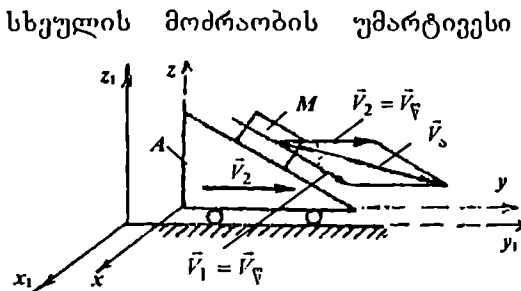
17. მყარი სხეულის რთული მოძრაობა

17.1. შესავალი

რთული ეწოდება რომელიმე უძრავი ათვლის სისტემის მიმართ მყარი სხეულის ისეთ მოძრაობას, რომელიც შედგება ფარდობითი და წარმტანი მოძრაობებისაგან. რთული მოძრაობისას სხეული ერთდროულად მონაწილეობს მინიმუმ ორ მოძრაობაში მაინც. ისე, როგორც წერტილის რთული მოძრაობის შემთხვევაში, რომელიმე მოძრავი სისტემის მიმართ მყარი სხეულის მოძრაობის ფარდობითი ეწოდება, ხოლო ათვლის უძრავ სისტემის მიმართ მყარი სხეულის მოძრავ სისტემასთან ერთად მოძრაობას – წარმტანი. მყარი სხეულის აბსოლუტური მოძრაობა ეწოდება მის რთულ ანუ უძრავი ათვლის სისტემის მიმართ მაჯამებული მოძრაობას.

17.2. მყარი სხეულის გადატანით მოძრაობათა შეკრება

განვიხილოთ მყარი სხეულის მოძრაობის უმარტივესი შემთხვევა, როცა, როგორც წარმტანი, ისე ფარდობითი მოძრაობა არის გადატანითი მოძრაობა. მაგალითად, განვიხილოთ M სხეული, რომელიც მოძრავი A პრიზმის დახრილ წახნაგზე მოძრაობს (ნახ.



ნახ. 17.1

17.1). ამ შემთხვევაში M სხეულის მოძრაობა მოძრავი A პრიზმის ანუ მასთან მკვიდრად მიკავშირებული $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის მიმართ არის ფარდობითი მოძრაობა. ამასთან M სხეულის მოძრაობა A პრიზმის მიმართ გადატანითია. ამიტომ მის ყველა წერტილს აქვს $\vec{V}_1 = \vec{V}_\eta$ სიჩქარე, ხოლო ათვლის უძრავი $O_1x_1y_1z_1$ კოორდინატთა სისტემის ღერძების მიმართ A პრიზმისა და მასთან ერთად $Oxyz$ სისტემის ღერძები ასრულებს წარმტან-გადატანით მოძრაობას. აქედან გამომდინარე, A პრიზმისა ყველა წერტილს აქვს $\vec{V}_2 = \vec{V}_\zeta$ სიჩქარე. სიჩქარეთა შეკრების თეორემის თანახმად აბსოლუტურ მოძრაობაში M სხეულის ყველა წერტილს დროის ადგილზე მომენტში ექნება ერთი და იგივე $\vec{V}_s$ სიჩქარე. აქედან გამომდინარეობს, რომ მაჯამებული მოძრაობაც, იქნება გადატანითი, ხოლო მაჯამებული სიჩქარე შემადგენელი მოძრაობების სიჩქარეთა გეომეტრიული ჯამის ტოლი:

$$\vec{V}_s = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_\eta + \vec{V}_\zeta, \quad (17.1)$$

ე.ი. სხეულის აბსოლუტური მოძრაობაც გადატანითია. M სხეულის ნამდვილი ანუ აბსოლუტური გადაადგილება დაემთხვევა მისი აბსოლუტური $\vec{V}_s$ სიჩქარის მიმართულებას (იხ. ნახ. 17.1).

თუ სხეული ერთდროულად მონაწილეობს n გადატანით მოძრაობაში, მაშინ (17.1) ფორმულის მიმდევრობით გამოყენებით შეიძლება ეჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაშიც მაჯამებული მოძრაობა აგრეთვე გადატანითია და მისი სიჩქარე შემადგენელი მოძრაობების სიჩქარეთა გეომეტრიული ჯამის ტოლია:

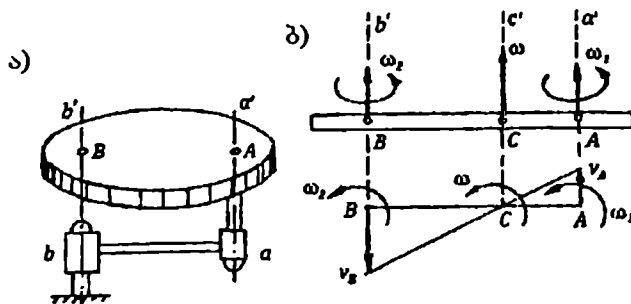
$$\vec{V}_M = \sum_{i=1}^n \vec{V}_i. \quad (17.2)$$

17.3. პარალელური ღერძების გარშემო ბრუნვათა შეკრება

თუ სხეულის ფარდობითი და წარმტანი მოძრაობები არის პარალელური ღერძების გარშემო ბრუნვითი მოძრაობები, მაშინ სხეულში აბსოლუტურ სიჩქარეთა განაწილება ყოველ

მოცემულ მომენტში ისეთივე იქნება, როგორც ღერძის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობის შემთხვევაში. მას სხეულის ბრუნვის მყისი ღერძი ეწოდება. ბრუნვის მყისი ღერძი წარმტანი და ფარდობითი ბრუნთა ღერძების პარალელურია.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა სხეულის წარმტანი მოძრაობა არის bb' ღერძის გარშემო ω_2 კუთხური სიჩქარით ბრუნვითი მოძრაობა, ხოლო ფარდობითი – ასევე aa' ღერძის გარშემო ω_1 კუთხური სიჩქარით ბრუნვითი მოძრაობა (ნახ. 17.2, ა). ცხადია, რომ მაჯამებელი მოძრაობა განხორციელდება ბრუნვის ღერძების მართობულ სიბრტყეში, ე.ი. შესრულდება ბრტყელი მოძრაობა. ამ დროს შესაძლებელია ორი შემთხვევა: 1. $\vec{\omega}_1$ და $\vec{\omega}_2$ ვექტორები მიმართულია ერთი და იმავე მხარეს. A და B წერტილების სიჩქარეთა მოდულები შესაბამისად გამოითვლება ფორმულებით: $V_A = \omega_2 \cdot AB$, $V_B = \omega_1 \cdot AB$. $\vec{V}_A$ და $\vec{V}_B$ სიჩქარეთა ბოლოებზე გატარებული წრფის AB წრფესთან გადაკვეთის C წერტილი იქნება სიჩქარეთა მყისი ცენტრი (იხ. 13.3 პარაგრაფი, ნახ. 13.9), ხოლო Cc' ღერძი დაემთხვევა სხეულის ბრუნვის მყის ღერძს (ნახ. 17.2, ბ). (13.9) ფორმულის მიხედვით გვექნება:



ნახ. 17.2

$$\omega = \frac{V_B}{BC} = \frac{V_A}{AC}.$$

თუ გამოვიყენებთ პროპორციის თვისებას, აქედან მივიღებთ:

$$\omega = \frac{V_A + V_B}{BC + AC} = \frac{V_A + V_B}{AB}.$$

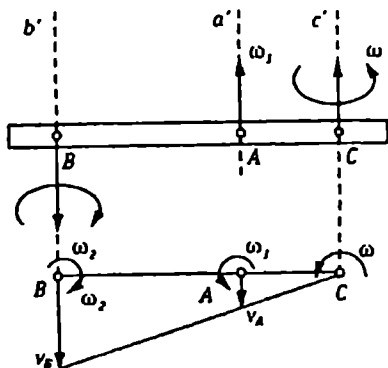
რადგან $V_A = \omega_2 \cdot AB$, $V_B = \omega_1 \cdot AB$, ამიტომ შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \quad (17.3)$$

$$\frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB}. \quad (17.4)$$

ამრიგად, პარალელური ღერძების გარშემო ერთნაირად მიმართული ორი ბრუნვა შეიძლება შევცვალოთ ამ ღერძების პარალელური მყისი ღერძის გარშემო ბრუნვით, ე.ი. მაჯამებელი მოძრაობა არის აბსოლუტური კუთხური სიჩქარით მყისი ბრუნვა, რომლის კუთხური სიჩქარე შემადგენელ ბრუნთა კუთხური სიჩქარეთა ჯამის ტოლია. მყისი ღერძი გადის წერტილზე, რომელიც ღერძებს შორის მანძილს შიგნიდან ყოფს შემადგენელ ბრუნვათა კუთხური სიჩქარეების უკუპროპორციულ ნაწილებად. აბსოლუტური კუთხური სიჩქარის მიმართულება ბრუნვის მყისი ღერძის თანხვედრილია.

2. ω_1 და ω_2 პარალელური ვექტორებს ურთიერთსაპირ-



ნახ. 17.3

რისპირო მიმართულება აქვს, ამასთან $|\omega_1| \neq |\omega_2|$. გარკვეულობისათვის დაუშვათ, რომ $\omega_1 > \omega_2$. მაშინ წინა შემთხვევის ანალოგიურად ვიპოვიოთ $V_A = \omega_2 \cdot AB$ და $V_B = \omega_1 \cdot AB$ სიჩქარეებს. მაგრამ ამ შემთხვევაში $\vec{V}_A$ და $\vec{V}_B$ სიჩქარეთა ვექტორები ერთ მხარესაა მიმართული (ნახ. 17.3). მოცემულ შემთხვევაში ბრუნვის მყისი Cc' ღერძი გადის C წერ-

ტილზე, ამასთან

$$\omega = \frac{V_B}{BC} = \frac{V_A}{AC} = \frac{V_B - V_A}{BC - AC} = \frac{V_B - V_C}{AB}.$$

თუ ამ ტოლობაში ჩავსვამთ $\vec{V}_A$ და $\vec{V}_B$ სიჩქარეთა მოდულების მნიშვნელობებს, მივიღებთ:

$$\omega = \omega_1 - \omega_2, \quad (17.5)$$

$$\frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB}. \quad (17.6)$$

მაშასადამე, როცა ბრუნვებს ურთიერთსაპირისპირო მიმართულება და განსხვავებული კუთხური სიჩქარეები აქვს, მაშინ არათანაბარი კუთხური სიჩქარის ორი ურთიერთსაპირისპირო ბრუნვა დაიყვანება ბრუნვის მყისი ღერძის გარშემო ბრუნვაზე, რომლის კუთხური სიჩქარე შემადგენელი ბრუნვების კუთხურ სიჩქარეთა სხვაობის ტოლია (იხ. ნახ. 17.5).

ბრუნვის მყისი Cc' ღერძი გადის წერტილზე, რომელიც ღერძებს შორის მანძილს გარედან ყოფს შემადგენელ ბრუნვათა კუთხური სიჩქარის უკუპროპორციულ ნაწილებად და მოდულით უფრო დიდი კუთხური სიჩქარის ბრუნვითი ღერძის მიღმა იმყოფება (იხ. ნახ. 17.6).

აბსოლუტური კუთხური სიჩქარე მიმართულია მოდულით უფრო დიდი კუთხური სიჩქარის მხარეს.

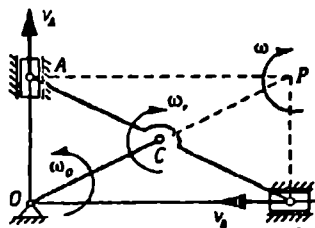
განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა ბრუნვები ურთიერთსაპირისპიროდაა მიმართული და აქვს ტოლი კუთხური სიჩქარე, ე.ი. $\omega_2 = -\omega_1$, $|\omega_2| = |\omega_1|$. პარალელური ღერძების გარშემო მყარი სხეულის ბრუნვათა ერთობლიობას, ტოლი და ურთიერთსაპირისპირო მიმართულებების კუთხური სიჩქარეებით ბრუნვათა წყვილი ეწოდება. ω_1 და ω_2 ვექტორები ქმნიან კუთხური სიჩქარეთა წყვილს. ამ შემთხვევაში (17.5) ფორმულის თანახმად $\omega = 0$, ხოლო სიჩქარეთა მყისი ცენტრი მიისწრაფის უსასრულობისაკენ. ეს ნიშნავს, რომ მოცემულ მომენტში სხეულის ყველა წერტილს ერთნაირი სიჩქარე აქვს $V = \omega_1 \cdot AB = \omega_2 AB$, რაც აღინიშნება სხეულის გადატანითი მოძრაობის დროს. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ბრუნთა წყვილი $\omega_1 = -\omega_2$ ეკვივალენტურია $\vec{V}$ სიჩქარით გადატანითი მოძრაობისა.

ამრიგად, მყარი სხეულის აბსოლუტური მოძრაობა არის მყისი გადატანითი, ე.ი. ყველა წერტილის სიჩქარე მოცემულ მომენტში ერთნაირია, ბრუნვა წყვილის ღერძის პერპენდიკულარულია და ამ სიჩქარის სიდიდე ტოლია რომელიმე წყვილის კუთხური სიჩქარის ღერძებს შორის უმოკლეს d მანძილზე ნამრაველს:

$$V = \omega_1 d = \omega_2 d. \quad (17.7)$$

ამოცანა 65. ელიფსოგრაფის AB სახაზავი მოძრაობს O ღერძის გარშემო ω_0 კუთხური სიჩქარით მბრუნავი OC მრუდმხარას საშუალებით, რომელიც ბრუნავს საათის ისრის

ბრუნვის საპირისპირო მიმართულებით (ნახ. 17.4). განესაზღვროთ მრუდმხარას მიმართ AB სახაზავის ფარდობითი და აბსოლუტური კუთხური სიჩქარე, თუ $OC = AC = BC$



ნახ. 17.4

ამოხსნა. A და B წერტილების სიჩქარე მიმართულია ცოცვიების მიმმართელების გასწვრივ. $\vec{V}_A$ და $\vec{V}_B$ სიჩქარეებისადმი აღმართოთ მართობები, რომლებიც გადაიკვეთება P წერტილში. მიღებული წერტილი არის AB სახაზავის აბსოლუტური მოძრაობის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი. ω კუთხური სიჩქარით მოძრავი სახაზავის აბსოლუტური მოძრაობა დაეშალოთ ორ შემადგენელ მოძრაობად: O წერტილის გარშემო $\omega_0 = \omega_0$ კუთხური სიჩქარით მბრუნავ წარმტან მოძრაობად და C ღერძის გარშემო $\omega_{\text{წ}}$ კუთხური სიჩქარით ბრუნვის ფარდობით მოძრაობად.

რადგან P წერტილი მდებარეობს OC მონაკვეთის გარეთ, ამიტომ ფარდობით და წარმტანი კუთხურ სიჩქარეებს ექნება ურთიერთსაპირისპირო მიმართულება (ნახ. 17.7). (17.5) და (17.6) ფორმულების საშუალებით ვიპოვიოთ:

$$\frac{\omega_{\text{წ}}}{\omega_0} = \frac{OP}{CP} = \frac{2 \cdot OC}{OC} = 2; \quad \omega_{\text{წ}} = 2\omega_0 = 2\omega_0;$$

$$\omega = \omega_{\text{წ}} - \omega_0 = 2\omega_0 - \omega_0 = \omega_0.$$

17.4. კბილა გადაცემის კინემატიკური გადაცემა ვილისის მეთოდით

ვილისის მეთოდს იყენებენ კბილა მექანიზმების კუთხური სიჩქარის განსაზღვრისას, რომელშიც არის მოძრავი ღერძის მიმართ მბრუნავი კბილა თვალი, ე.ი. პლანეტური ან დიფერენციალური მექანიზმები.

17.5 ა ნახაზზე ასახულია პლანეტარული კბილა მექანიზმი, რომელშიც 1 თვალი უძრავია, დანარჩენი თვლები მოძრაობს მრუდმხარას (OO_3) მეშვეობით, რომელსაც სატარი ეწოდება. სატარის ღერძი ემთხვევა უძრავი თვლის ღერძს. 17.5 ბ

ნახაზზე ასახულია დიფერენციალური კბილა მექანიზმი, რომელშიც 1 თვალი და სატარი (მრუდმხარა OA) ბრუნავენ ერთსა და იმავე ღერძის გარშემო.

ვილისის მეთოდი დამუშავებულია პარალელური ღერძების გარშემო ბრუნვათა შეკრების თეორიის შესაბამისად. კბილა თვალი მონაწილეობს შემდეგ ორ მოძრაობაში:

ა) კბილა თვლების ფარდობით ბრუნვაში სატარის მიმართ;

ბ) გადატანით ბრუნვაში სატართან ერთად მისი ღერძის გარშემო (თითოეული კბილა თვლის კუთხური სიჩქარე არის სატარის კუთხური სიჩქარე).

განსაზღვრავთ კბილანებისა და განსაზღვრავთ დამოკიდებულებას იმ ფარდობით კუთხურ სიჩქარეთა შორის, რომლებიც აბსოლუტური და გა-

დატანითი კუთხური სიჩქარეთა სხვაობის ტოლია. ფარდობით კუთხურ სიჩქარეთა ურთიერთ შეფარდება თვლების რადიუსის ან კბილანების რაოდენობის უკუპროპორციულია და „მინუს“ ნიშნით გამოისახება, როდესაც გარე მოდებია, ხოლო „პლუს“ ნიშნით – როდესაც შიგა მოდებია.

მთელი მექანიზმისათვის ზოგადი ფორმულა ასე გამოისახება:

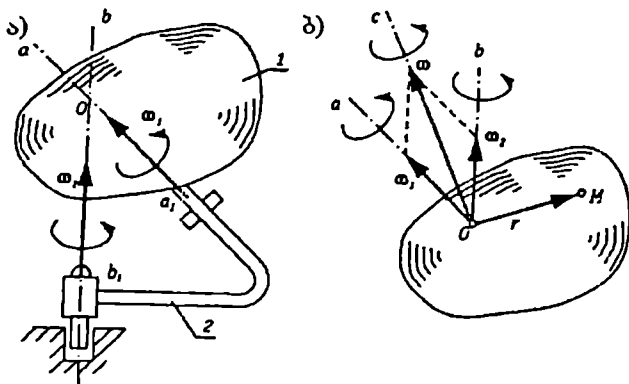
$$\frac{\omega_1 - \omega_n}{\omega_n - \omega_k} = (-1)^n i_{1-n}, \quad (17.8)$$

სადაც m გარე მოდების რიცხვია, i_{1-n} – გადაძვრის რიცხვი პირველიდან ბოლო თვალამდე; ω_k – სატარის კუთხური სიჩქარე.

17.5. გადაძვრითი ღერძების გარშემო ბრუნვათა შეკრება

დაუშვათ, რომ 1 სხეულის ფარდობითი მოძრაობა bb_1 ლილვთან მკვიდრად მიმაგრებული aa_1 ღერძის გარშემო ω_1 კუთხური სიჩქარით ბრუნვაა (ნახ. 17.6, ა). bb_1 ლილვის ω_2 კუთხური სიჩქარით ბრუნვა 2 მრუდმხარასა და aa_1 ღერძთან

ერთად არის 1 სხეულის წარმგანი მოძრაობა. aa_1 და bb_1 ღერძები ერთ სიბრტყეში მდებარეობს და გადაიკვეთებიან O წერტილში. ცხადია, რომ O წერტილის სიჩქარე, როგორც ორივე ღერძზე მდებარე ნულის ტოლია. ეს ნიშნავს, რომ სხეულის მაჯამებელი მოძრაობა არის O წერტილზე გამავალი მყისი ღერძის გარშემო ω კუთხური სიჩქარით ბრუნვა (იხ. § 15).



ნახ. 17.6

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ $\vec{\omega}$ ვექტორი, საჭიროა ვიპოვოთ 1 სხეულის რომელიმე M წერტილის სიჩქარე. ვთქვათ, O წერტილის მიმართ M წერტილის რადიუს-ვექტორია $\vec{r}$ (ნახ. 17.6, ბ). (15.7) ფორმულის მიხედვით M წერტილის ფარდობითი მოძრაობის სიჩქარე იქნება: $\vec{V}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}$. მაშასადამე, სიჩქარეთა შეკრების თეორემის მიხედვით M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე ტოლია:

$$\vec{V}_s = \vec{V}_M + \vec{V}_r = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times r^2 \quad (17.9)$$

მეორეს მხრივ 1 სხეულის მარეზულტირებელი მოძრაობა არის ω მყისი კუთხური სიჩქარით ბრუნვა, ამიტომ M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე იქნება:

$$\vec{V}_s = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (17.10)$$

თუ შევადარებთ (17.9) და (17.10) ფორმულებს, მივიღებთ:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2. \quad (17.11)$$

ამრიგად, გადამკვეთი ღერძების გარშემო ბრუნვების შეკრებით მიიღება ბრუნვითი მოძრაობა. ხდება მყისი ღერძის გარშემო ბრუნვისას აბსოლუტური კუთხური სიჩქარით და შემადგენელ ბრუნთა კუთხური სიჩქარეების გეომეტრიული ჯამის ტოლი.

თუ სხეული ასრულებს რამდენიმე ბრუნვისაგან შედგენილ მოძრაობას, რომელთა ბრუნვის ღერძები ერთ წერტილში იკვეთება, მაშინ სხეულის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე ისეთია, თითქოს სხეული $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით ბრუნავს იმ ღერძის გარშემო, რომელიც გადაკვეთის წერტილში გადის. ამიტომ (17.11) ფორმულის მიხედვით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\vec{V}_s = \vec{\omega}_1 \times \vec{r} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \dots + \vec{\omega}_n \times \vec{r}_n,$$

ა6

$$\vec{V}_s = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \dots + \vec{\omega}_n) \times \vec{r}$$

მაგრამ $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n$ ვექტორები თავმოყრილი ვექტორებია, ამიტომ, თუ მათ ჯამს აღვნიშნავთ $\vec{\omega}$ -თი, მივიღებთ (15.2) ფორმულას. გვქვია:

$$\vec{V}_s = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

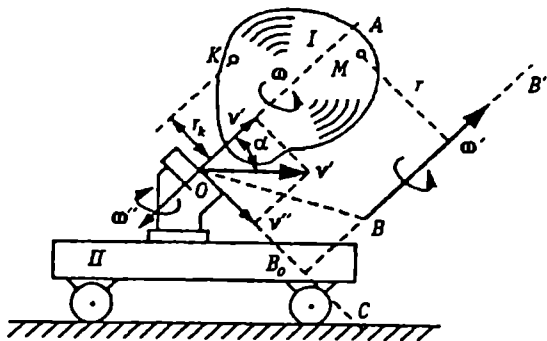
სადაც

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \dots + \vec{\omega}_n = \sum_{k=1}^n \vec{\omega}_k. \quad (17.12)$$

17.6. გადატანითი და ბრუნვითი მოძრაობების შეკრება

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც მყარი სხეული ერთ-დროულად ასრულებს წარმტან გადატანით მოძრაობას $\vec{V}$ სიჩქარით და ფარდობით ბრუნვით მოძრაობას $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით.

ვთქვათ, I სხეული ასრულებს რთულ მოძრაობას, რომელიც შედგება $\vec{V}$ სიჩქარით მოძრავი II ბაქანის გადატანითი მოძრაობისა და OA ღერძის გარშემო ω კუთხური სიჩქარით ბრუნვისაგან (ნახ. 17.7). ბაქნის მოძრაობა არის წარმტანი, ხოლო I სხეული OA ღერძის გარშემო ბრუნვა – ფარდობითი.



ნახ. 17.7

აღენიშნოთ $\vec{V}$ და $\vec{\omega}$ ვექტორებს შორის კუთხე α -თი. დაე-
შალოთ $\vec{V}$ ვექტორი მდგენელებად: $V' = \vec{V} \cos \alpha$, $V'' = \vec{V} \sin \alpha$,
სადაც $\vec{V}' \parallel \vec{\omega}$ და $\vec{V}'' \perp \vec{\omega}$.

$\vec{V}$ სიჩქარის $\vec{V}''$ მდგენელი შეიძლება შეეცვალოს ბრუნ-
ვითა წყვილით, თუ მივიღებთ $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$, $\vec{\omega}'' = -\vec{\omega}$. ამასთან OB
მხარი განისაზღვრება $V'' = \omega' \cdot OB$ ტოლობიდან, საიდანაც
(იმის გათვალისწინებით, რომ $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$).

$$OB = \frac{V''}{\omega} = \frac{V}{\omega} \sin \alpha. \quad (17.13)$$

შეკრების დროს $\vec{\omega}$ და $\vec{\omega}''$ ვექტორები ნულს გვაძლევს,
ამიტომ ისინი შეიძლება მოვაცილოთ. შედეგად I სხეული
შეასრულებს ბრუნვით მოძრაობას $\vec{\omega}'$ კუთხური სიჩქარითა და
 $\vec{V}'$ სიჩქარით გადატანით მოძრაობას, რომელიც $\vec{\omega}$ ვექტორის
პარალელურია. ასეთ მოძრაობას ეწოდება ხრახნული, ხოლო
 BB' წრფეს – ხრახნის ღერძი. სხეულის ხრახნულ ღერძზე
მდებარე წერტილები ასრულებს გადატანით მოძრაობას BB'
ღერძის გასწვრივ. BB' ღერძის გარშემო სხეულის ერთი
მობრუნების დროის შუალედს ამ წერტილებს შორის მანძილს
ხრახნის ბიჯი ეწოდება. აღენიშნოთ ერთი ბრუნის დრო T -თი,
ხოლო ხრახნის ბიჯი h -ით, ვიპოვიოთ:

$$h = VT; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \Rightarrow h = \frac{2\pi V \cos \alpha}{\omega}.$$

ხრახნული ღერძიდან r მანძილით დაშორებული M წერტილის $\vec{V}_M$ სიჩქარე გადატანითი $\vec{V}'$ სიჩქარისა და ბრუნვითი მოძრაობისაგან მიღებული მისი მართობული $\vec{\omega}r$ სიჩქარის გეომეტრიული ჯამის ტოლია. მაშასადამე,

$$V_M = \sqrt{(\vec{V}')^2 + \omega^2 r^2} = \sqrt{V'^2 \cos^2 \alpha + \omega^2 r^2} \quad (17.14)$$

განვიხილოთ სამი კერძო შემთხვევა.

1. გადატანითი მოძრაობის სიჩქარე ფარდობითი მოძრაობის ღერძის პერპენდიკულარულია ($\vec{V}' \perp \vec{\omega}$). ამ შემთხვევაში სხეულის რთული მოძრაობა შედგება OA ღერძის გარშემო ω კუთხური სიჩქარით ბრუნვისა და OC ღერძის გასწვრივ მიმართული გადატანითი მოძრაობის $\vec{V}'$ სიჩქარისაგან (ნახ. 17.6). მაშინ წარმტანი გადატანითი და ფარდობითი ბრუნვითი მოძრაობების შეკრებით მიიღება ერთი ბრუნვა იმ მყისი ღერძის გარშემო, რომელიც ფარდობითი ბრუნვის ღერძის პარალელურია, და ფარდობითი ბრუნვის კუთხური სიჩქარე ტოლია ბრუნვითი მოძრაობის კუთხური სიჩქარისა. ბრუნვის მყისი BB' ღერძის მდებარეობა (17.13) ფორმულიდან განისაზღვრება, როცა $\sin \alpha = 1$. თუ აღვნიშნავთ $OB_0 = d$, მაშინ ბრუნვის მყის ღერძსა და ბრუნვითი მოძრაობის ღერძს შორის მანძილი ტოლი იქნება:

$$d = \frac{V'}{\omega}, \quad (17.15)$$

ამასთან B_0 წარმოადგენს სიჩქარეთა მყის ცენტრს.

2. წარმტანი გადატანითი მოძრაობის სიჩქარე ფარდობითი ბრუნვითი მოძრაობის კუთხური სიჩქარის ვექტორის პარალელურია ($\vec{V}' \parallel \vec{\omega}$). მოძრაობას, რომლის დროსაც წარმტანი გადატანითი მოძრაობის სიჩქარის ვექტორი ფარდობითი ბრუნვითი მოძრაობის კუთხური სიჩქარის ვექტორის პარალელურია, ხრახნული ან კინემატიკური ხრახნი ეწოდება.

ხრახნული მოძრაობის შეცვლა ერთი ჯამური მოძრაობით არ შეიძლება, ე.ი. მისი გამარტივება შეუძლებელია. თუ სხეული ხრახნულ მოძრაობას ასრულებს, მაშინ გადატანითი მოძრაობის სიჩქარის და კუთხური სიჩქარის ვექტორებს შეიძლება ჰქონდეს, როგორც ერთნაირი, ისე საპირისპირო მიმართულებები. სხეულის ხრახნული მოძრაობა ხასიათდება P პარამეტრით:

$$P = \frac{V'}{\omega}. \quad (17.16)$$

ხრახნის პარამეტრი არის სხეულის გადაადგილება ხრახნული მოძრაობის ღერძის მიმართულებით, როდესაც სხეული 1 რადიანით მობრუნდება. თუ სიჩქარე და კუთხური სიჩქარე ცვლადია, მაშინ ხრახნის პარამეტრიც ცვლადია. ხრახნული მოძრაობა ხასიათდება ხრახნის ბიჯის სიდიდით, ე.ი. მანძილით, რომელზეც სხეულის წერტილი გადაადგილდება ხრახნული მოძრაობის ღერძის გარშემო ერთი შემობრუნებისას. თუ გადატანითი მოძრაობის კუთხური სიჩქარე მუდმივია, მაშინ ხრახნის ბიჯი შეიძლება განისაზღვროს შემდეგი ფორმულით:

$$h = 2\pi P = \frac{2\pi V}{\omega}. \quad (17.17)$$

თუ კუთხური სიჩქარე და გადატანითი მოძრაობის სიჩქარე მუდმივია, მაშინ მყარი სხეულის მოძრაობა მყისი ხრახნულია.

ნებისმიერი K წერტილის სიჩქარე, რომელიც არ მდებარეობს ხრახნის OA ღერძზე, (17.14) ფორმულის მიხედვით ტოლი იქნება:

$$V_k = \sqrt{V^2 + \omega^2 r_k^2}, \quad (17.18)$$

სადაც r_k არის K წერტილიდან OA ღერძამდე მანძილი.

3. წარმტანი გადატანითი მოძრაობის სიჩქარე კუთხითაა მიმართული ფარდობითი ბრუნვითი მოძრაობის კუთხური სიჩქარის ვექტორთან. როდესაც წარმტანი გადატანითი და ბრუნვითი ფარდობითი მოძრაობების სიჩქარეების ვექტორები ერთმანეთთან შეადგენს რაღაც α კუთხეს. ამ დროს წარმტანი გადატანითი და ბრუნვითი ფარდობითი მოძრაობების შეკრებით მიიღება ერთი მყისი ხრახნული მოძრაობა.

მყისი ხრახნული ღერძი პარალელურია ფარდობითი ბრუნვის ღერძის და მისგან დაშორებულია მანძილით:

$$d = \frac{V \sin \alpha}{\omega}. \quad (17.19)$$

ხრახნის პარამეტრი ტოლია

$$p = \frac{V \cos \alpha}{\omega}. \quad (17.20)$$

როცა გადატანითი მოძრაობის სიჩქარე რაღაც კუთხეს შეადგენს ფარდობითი ბრუნვითი მოძრაობის კუთხური სიჩქარის ვექტორთან – ასეთი მოძრაობა შეიძლება შეიცვალოს ხრახნული მოძრაობით მყისი ხრახნული ღერძის გარშემო.

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. რას შეისწავლის კინემატიკა და რა არის მისი ძირითადი ამოცანა?
2. ჩამოთვალეთ წერტილისთვის მოძრაობის მიცემის ძირითადი ხერხები და დაწერეთ შესაბამისი მოძრაობის განტოლებები.
3. რას ეწოდება წერტილის ტრაექტორია და როგორ ვიპოვოთ მის განტოლებას?
4. რას ეწოდება წერტილის ვექტორული სიჩქარე და ვექტორული აჩქარება დროის მოცემულ მომენტში? (დაწერეთ ვექტორული ფორმულები).
5. დაწერეთ წერტილის ვექტორული სიჩქარისა და აჩქარების სიდიდის და მიმართულების გამოსათვლელი ფორმულები.
6. რას ეწოდება წერტილის სკალარული სიჩქარე და რა კავშირი აქვს წერტილის ვექტორულ სიჩქარესთან?
7. მოძრაობის ბუნებრივი ხერხით მიცემისას რისი ტოლია წერტილის ვექტორული აჩქარება (აჩქარების დაშლა მხებ და ნორმალურ მდგენელებად)?
8. რა ფორმულებით გამოისახება წერტილის მხები და ნორმალური აჩქარებები და მათი მნიშვნელობები?
9. როგორი მოძრაობის დროს არის ნულის ტოლი წერტილის მხები აჩქარება?
10. როგორი მოძრაობის დროს არის ნულის ტოლი წერტილის ნორმალური აჩქარება?
11. რა ფორმულებით ჩაიწერება წერტილის თანაბარი და თანაბრადცვლადი მოძრაობის განტოლებები?
12. დაწერეთ წერტილის ცილინდრული, სფერული და პოლარული კოორდინატებში მოძრაობის განტოლებები.
13. რა ფორმულებით გამოითვლება წერტილის სიჩქარე პოლარული კოორდინატებში?
14. რას ეწოდება სხეულის გადატანითი მოძრაობა და როგორია ამ მოძრაობის განტოლებები?
15. რა თვისებები აქვს სხეულის წერტილების სიჩქარეებს და აჩქარებებს, თუ ის გადატანით მოძრაობას ასრულებს?
16. სხეულის როგორ მოძრაობას ეწოდება ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო და როგორია მისი ბრუნვის განტოლება?

17. რას ეწოდება სხეულის კუთხური სკალარული სიჩქარე და კუთხური სკალარული აჩქარება? დაწერეთ შესაბამისი ფორმულები.
18. სად მდებარეობს სხეულის კუთხური ვექტორული სიჩქარის და აჩქარების ვექტორები და რა მიმართულება აქვთ მათ?
19. რომელი ფორმულით გამოითვლება სხეულის ნებისმიერი წერტილის ვექტორული სიჩქარე, თუ სხეული ბრუნავს უძრავი ღერძის გარშემო?
20. რომელი ფორმულით გამოითვლება სხეულის ნებისმიერი წერტილის ვექტორული აჩქარება, თუ სხეული ბრუნავს უძრავი ღერძის გარშემო?
21. რომელი ფორმულებით გამოითვლება ბრუნვითი და ცენტრისკენული აჩქარებები სხეულის ბრუნვისას უძრავი ღერძის გარშემო?
22. რომელი ფორმულით გამოითვლება სხეულის ნებისმიერი წერტილის სრული აჩქარება, თუ სხეული ბრუნავს უძრავი ღერძის გარშემო?
23. რომელი ფორმულებით გამოითვლება თანაბარი და თანაბარცვლადი ბრუნვის განტოლებები?
24. წერტილის როგორ მოძრაობას ეწოდება რთული ანუ აბსოლუტური? ფარდობითი? წარმტანი?
25. ჩამოაყალიბეთ სიჩქარეთა შეკრების კანონი. რა ფორმულით გამოითვლება აბსოლუტური სიჩქარის მოდული?
26. ჩამოაყალიბეთ აჩქარებათა შეკრების კანონი (კორიოლისის თეორემა).
27. რომელი ფორმულებით გამოისახება აჩქარებათა შეკრების კანონი და კორიოლისის აჩქარება?
28. როგორ განისაზღვრება კორიოლისის აჩქარების მიმართულება და როდის არის იგი ნულის ტოლი?
29. სხეულის როგორ მოძრაობას ეწოდება ბრტყელი ანუ ბრტყელ-პარალელური და როგორია მისი მოძრაობის განტოლებები?
30. როგორ განისაზღვრება სხეულის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე ბრტყელი მოძრაობის შემთხვევაში?
31. რას ეწოდება სიჩქარეთა მყისი ცენტრი და როგორ განისაზღვრება ის გეომეტრიულად?
32. როგორ განისაზღვრება სხეულის ნებისმიერი წერტილის აჩქარება, თუ ის ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას?

33. რას ეწოდება აჩქარებათა მყისი ცენტრი და როგორ განისაზღვრება ის?
34. როგორ განისაზღვრება უძრავი წერტილის გარშემო მბრუნავი სხეულის მდებარეობა და რა სახე აქვს მისი მოძრაობის განტოლებებს?
35. ჩამოაყალიბეთ ეილერ-დალამბერის თეორემა. რა სახე აქვს კუთხური სინქარის ვექტორის სიდიდის გამოსათვლელ ფორმულებს?
36. რომელი ფორმულებით გამოისახება სინქარეთა და აჩქარებათა განაწილების კანონები, თუ სხეული ბრუნავს უძრავი წერტილის გარშემო?
37. რომელი ფორმულით გამოისახება სხეულის თავისუფალი მოძრაობის განტოლებები?
38. რომელი ფორმულებით გამოისახება სინქარეთა და აჩქარებათა განაწილების კანონები, თუ სხეული თავისუფლად მოძრაობს?
39. განსაზღვრეთ მყარი სხეულის რთული მოძრაობა. რას ნიშნავს გადატანით მოძრაობათა შეკრება? გადამკვეთი ღერძების გარშემო და პარალელურ ღერძების გარშემო ბრუნვათა შეკრება?
40. რაში მდგომარეობს ეილისის მეთოდი?
41. რას ნიშნავს გადატანითი და ბრუნვითი მოძრაობების შეკრება?

1. Айзенберг Т.В., Воронков М.И., Осецкий В.М. Руководство к решению задач по теоретической механике. «Высшая школа». М.: 1982. – 390 с.
2. Аппель П. Теоретическая механика. т. I. М., Физматгиз, 1960.
3. Аркуша А.И. Руководство к решению задач по теоретической механике. «Высшая школа», М.: 1986. – 290 с.
4. Бать М.И., Джanelidze Г.Ю., Келзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. т. I. М.: Наука, 1998. – 624 с.
5. კეციანი ტ., გეგელაშვილი თ. თეორიული მექანიკა (სტატიკა, კინემატიკა). თბილისი, ტექნიკური უნივერსიტეტი, 2005. – 290 გვ.
6. Березкин Е.Н. Курс теоретической механики. М., изд-во МГУ, 1984. – 382 с.
7. Бражниченко Н.А., Кон В.Л., Маниберг Б.Л. и др. Сборник задач по теоретической механике. М.: Высшая школа, 1992. – 520 с.
8. Будник Ф.Г., Зингерман Ю.М., Селенский. Сборник задач по теоретической механике. «Высшая школа». М.: 1997. – 176 с.
9. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. т. I. – СПб.: Лань, 1998. – 270 с.
10. Гернет М.М. Курс теоретической механики. «Высшая школа». М.: 1986. – 344 с.
11. გორგიძე ა. თეორიული მექანიკის კურსი. წიგნი I. თბილისი, განათლება, 1972. – 338 გვ.
12. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах. «Высшая школа». М.: 1986. – 304 с.
13. Кабальский М.М., Кривошей В.Д., Савицкий Н.И., Чайковский Т.Н. Типовые задачи по теоретической механике и методы их решения. Киев. – 1985. – 512 с.
14. Кепе О.Э. Сборник коротких задач по теоретической механике. «Высшая школа», М.: 1999. – 368 с.
15. კეციანი ტ. თეორიული მექანიკის კურსი. ტექნიკური უნივერსიტეტი, თბილისი. 2011. – 216 გვ.
16. კეციანი ტ., კვარაცხელია ა., მაძალუა ზ. საინჟინრო მექანიკა. თბილისი, 2014. – 228 გვ.
17. კეციანი ტ., ფაჩულაია ვ., გარდაფხაძე თ. თეორიული მექანიკა (სტატიკა, ამოცანათა კრებული) ტექნიკური უნივერსიტეტი. 2006. – 96 გვ.
18. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. т. I. М.: Наука, 1988. – 440 с.

19. Эрдеди А.А., Медведев Ю.А., Эрдеди Н.А. Техническая механика. «Высшая школа». М.: 2001. – 304 с.
20. Маркеев А.П. М.: Теоретическая механика. М.: Наука, 1999. – 414 с.
21. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука, 1985. – 580 с.
22. Молотников В.Я. основы теоретической механики. Ростов-на-Дону, Феникс, 2004. – 376 с.
23. Мисюрев М.А. Методика решения задач по теоретической механике. «Высшая школа». М.: 1982. – 306.
24. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1995. – 560 с.
25. Попов М.В. Курс теоретической механики. М.: Наука, 1986. – 336 с.
26. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1998. – 414 с.
27. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. т. I. «Наука», М.: 1987. – 456 с.
28. Тимофеев С.И. Теоретическая механика (статика и кинематика). Ростов-на-Дону «ФЕНИКС». 2010. – 154 с.
29. Тимофеев С.И., Санченкова С.С. Статика и кинематика. МОРФ. 1996. – 132 с.
30. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., «Наука», 1992. – 428 с.
31. Федута А.А., Чигорев А.В., Чигорев Ю.В. Теоретическая механика и математические методы. Мн.: Технопринт, 2000. – 500 с.
32. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. М.Л.: Лань, 2001. – 764 с.
33. Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. «Высшая школа». М.: - 1995. – 366 с.
34. Muraj R., Spiegel Ph.D. Teoretical mechanical mechanics Si (metric) editon. Mcuran-hill bok kompn. Bew-York, 1992. – 370 p.

წინასიტყვაობა	3
შინაგვარი	5
1. მხარი სხეულის სტატისტიკა	9
1.1. სტატისტიკის ძირითადი ცნებები და აქსიომები	9
1.2. სტატისტიკის ძირითადი ამოცანები	12
1.3. სტატისტიკის აქსიომები	13
1.4. ძალის გეგმილი ღერძსა და სიბრტყეზე. ძალის ანალიზური გამოსახვა	15
1.5. წრფივი ოპერაციები ვექტორებზე	18
1.6. არათავისუფალი მყარი სხეული. ბმები. ბმის რეაქციები და მათი ძირითადი ტიპები	22
2. თავმოყრილ ძალთა სისტემა	31
2.1. თავმოყრილ ძალთა სისტემის ტოლქმედზე დაყვანა	32
2.2. თავმოყრილ ძალთა სისტემის წონასწორობის პირობები	34
2.3. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები ერთ სიბრტყეში მდებარე ერთ წერტილში თავმოყრილი ძალების შეკრებაზე	36
2.4. სავარჯიშო ამოცანები ერთ სიბრტყეზე მდებარე ერთ წერტილში თავმოყრილი ძალთა სისტემის შეკრებაზე	39
2.5. ბრტყელი თავმოყრილ ძალთა სისტემის წონასწორობა	42
1. ამოცანები, რომლებშიც ყველა ბმის რეაქციის მოქმედების ფუძე ცნობილია	43
2. ამოცანები, უცნობი მიმართულების მქონე რეაქციის შესაბამისი ბმებით	50
2.6. სავარჯიშო ამოცანები, რომლებშიც ყველა ბმის რეაქციის მოქმედების ფუძე ცნობილია	54
2.7. სავარჯიშო ამოცანები, ისეთი ბმების შესახებ, რომელთა რეაქციის მიმართულება უცნობია	59
2.8. ერთ სიბრტყეში არამდებარე თავმოყრილი ძალების შეკრება	62

2.9. სავარჯიშო ამოცანები ერთ სიბრტყეში არამდე- ბარე თავმოყრილი ძალების შეკრებაზე	66
2.10. ერთ სიბრტყეში არამდებარე (სივრცითი) თავმოყრილ ძალთა სისტემის წონასწორობა	68
2.11. სავარჯიშო ამოცანები ერთ სიბრტყეზე არა- მდებარე თავმოყრილ ძალთა სისტემის წონასწო- რობაზე	70
3. ძალის მომენტი წერტილისა და ღერძის მიმართ	74
3.1. ძალის ვექტორული მომენტი წერტილის მიმართ	74
3.2. ძალის ვექტორული მომენტის ანალიზური გამოსახვა	75
3.3. ძალის სკალარული მომენტი ცენტრის (ანუ წერტილის) მიმართ	77
3.4. ძალის მომენტი ღერძის მიმართ	79
3.5. დამოკიდებულება ღერძის მიმართ ძალის მომენტსა და ღერძზე მდებარე წერტილის მიმართ ძალის ვექტორულ მომენტს შორის	80
3.6. ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორისა და ნაკრები მომენტის ცნება	80
3.7. ნაკრები ვექტორისა და ნაკრები მომენტის განმსახდრელი ფორმულები დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში	81
3.8. ნაკრები მომენტის დამოკიდებულება დაყვანის ცენტრის შერჩევაზე	84
3.9. ამოცანათა ამოხსნის ნიმუშები წერტილისა და ღერძის მიმართ ძალის მომენტის გამოთვლაზე	86
3.10. სავარჯიშო ამოცანები წერტილისა და ღერძის მიმართ მომენტებისა და ნაკრები მომენტის გამოთვლაზე	96
4. პარალელურ ძალთა სისტემა და წყვილძალთა თეორია	102
4.1. პარალელური ძალების შეკრება	102
4.2. წყვილძალა და მისი მომენტი	105
4.3. წყვილძალების ტოლფასობა სიბრტყეზე	108
4.4. წყვილძალების ტოლფასობა სივრცეში	110

4.5. წყვილძალების შეკრება სიერცეში	111
4.6. წყვილძალთა სისტემის წონასწორობის პირობა და წონასწორობის განტოლებები	114
4.7. წყვილძალების მომენტები. წყვილძალების შეკრება. წყვილძალების წონასწორობა	115
5. სტატიკის ძირითადი თეორემა და ნებისმიერ ძალთა სისტემის წონასწორობის პირობა	122
5.1. ღემა ძალის პარალელური გადატანის შესახებ	122
5.2. სიერცეში მდებარე ძალთა სისტემის ერთ ძალამდე და ერთ წყვილძალამდე დაყვანა	123
5.3. ერთ სიბრტყეზე მდებარე ძალთა სისტემის ერთ ძალამდე და ერთ წყვილძალამდე დაყვანა	125
5.4. ნებისმიერი ძალთა სისტემის წონასწორობის პირობა	127
5.5. სიერცეში მდებარე ძალთა სისტემის წონასწო- რობის განტოლებების ვექტორული ფორმა	130
5.6. სიერცეში მდებარე ძალთა სისტემის წონასწო- რობის განტოლებების ანალიზური ფორმა	130
5.7. სიერცითი პარალელური ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებები	132
5.8. ერთ სიბრტყეში მდებარე ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებები	133
5.9. ერთ სიბრტყეზე მდებარე პარალელური ძალების წონასწორობის განტოლებები	134
6. ბრტყელ ძალთა სისტემა. ვარიაციონის თეორემა	136
6.1. ნებისმიერი ბრტყელ ძალთა სისტემის ტოლქმედის განსაზღვრა	136
6.2. ვარიაციონის თეორემა ბრტყელ ძალთა სისტემა- სათვის	139
6.3. ბრტყელ ძალთა სისტემის დაყვანა უმარტივეს სახემდე	141
6.4. ბრტყელ ძალთა სისტემის უმარტივეს სახემდე დაყვანის ამოცანების ამოხსნის ნიშნუბები	142
6.5. მყარი სხეულის წონასწორობა ბრტყელი ძალთა სისტემის მოქმედებით	153

6.6. ბრტყელ ძალთა სისტემის წონასწორობის პირობის სხვა ფორმები	154
6.7. განაწილებული ძალები	158
6.8. სტატიკურად განსაზღვრული და სტატიკურად განუსაზღვრელი ამოცანები	164
6.9. მყარი სხეულის წონასწორობის ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები მასზე ბრტყელ ძალთა სისტემის მოქმედებისას	166
6.10. რამდენიმე მყარი სხეულისაგან შედგენილი სისტემის წონასწორობა	178
6.11. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები რამდენიმე მყარი სხეულისაგან შედგენილი სისტემის წონასწორობაზე	183
6.12. ბერკეტი. მდგრადობა გადაყირავენებაზე. გადაყირავენებაზე მდგრადობის კოეფიციენტი	196
6.13. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები ბერკეტის წონასწორობაზე	199
6.14. სავარჯიშო ამოცანები მყარ სხეულზე მოდებული ბრტყელ ძალთა სისტემის წონასწორობაზე	202
6.15. რამდენიმე მყარი სხეულისაგან შედგენილი სისტემის წონასწორობაზე სავარჯიშო ამოცანები	212
6.16. ბრტყელი წამწის (ფერმის) გაანგარიშება	217
6.17. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები ბრტყელი წამწის ღეროებში ძალების განსაზღვრაზე	220
6.18. სავარჯიშო ამოცანები ბრტყელი ფერმის ღეროებში ძალების განსაზღვრაზე	224
7. ხახუნი	230
7.1. სტატიკური უძრავობისა და სრიალის ხახუნი. წონასწორობა ხახუნის დროს	230
7.2. სრიალის ხახუნის კანონები. ხახუნის კუთხე და კონუსი	231
7.3. ბაგირის (ძაფის) ხახუნი ცილინდრულ ზედაპირზე	234
7.4. გორვის ხახუნი	237

7.5. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები ხახუნის არსებობის შემთხვევაში ბრტყელ ძალთა სისტემის წონასწორობაზე	238
7.6. საეარჯიშო ამოცანები ხახუნის არსებობის შემთხვევაში ბრტყელძალთა სისტემის წონასწორობაზე	246
8. ძალთხრახნი. ნებისმიერი სივრცითი ძალთა სისტემის დაყვანა უმარტივეს სახემდე	252
8.1. ნებისმიერი სივრცითი ძალთა სისტემის ინვარიანტები	252
8.2. ნებისმიერი სივრცითი ძალთა სისტემის დაყვანა ძალთხრახნამდე	255
8.3. ნებისმიერი – სივრცითი ძალთა სისტემის დაყვანა უმარტივეს სახემდე	259
8.4. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები ნებისმიერი სივრცითი ძალთა სისტემის უმარტივეს სახემდე დაყვანაზე	262
8.5. საეარჯიშო ამოცანები ნებისმიერი სივრცითი ძალთა სისტემის უმარტივეს სახემდე დაყვანაზე	273
9. ნებისმიერი სივრცითი ძალთა სისტემა	279
9.1. მყარი სხეულის წონასწორობის კერძო შემთხვევები	279
9.2. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები ნებისმიერ სივრცითი ძალთა სისტემის წონასწორობაზე	283
9.3. საეარჯიშო ამოცანები სივრცითი ძალთა სისტემის წონასწორობაზე	291
10. სიმძიმის ცენტრი	301
10.1. პარალელური ძალების ცენტრი	301
10.2. მყარი სხეულის სიმძიმის ცენტრი	304
10.3. ბრტყელი ფიგურის სიმძიმის ცენტრი. კოორდინატთა ღერძების მიმართ ბრტყელი ფიგურის ფართობის სტატიკური მომენტები	307
10.4. წირის სიმძიმის ცენტრი	309
10.5. სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატების განსაზღვრის ხერხები	310

10.6. ზოგიერთი ერთგვაროვანი სხეულის სიმძიმის ცენტრი	311
10.7. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები ერთგვაროვანი სხეულის სიმძიმის ცენტრის განსაზღვრაზე	317
10.8. სავარჯიშო ამოცანები ერთგვაროვანი სხეულის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობის განსაზღვრაზე	322
კითხვები თვითშემოწმებისათვის	332

მეორე ნაწილი

წერტილისა და მყარი სხეულის კინემატიკა

11. წერტილის კინემატიკა. ძირითადი ცნებები და ამოცანები	335
11.1. წერტილის ტრაექტორია და მოძრაობის მოცემის ხერხები	335
11.2 წერტილის სიჩქარე	339
11.3. წერტილის აჩქარება	344
11.4 მოძრაობის მოცემის კოორდინატული ხერხიდან ბუნებრივ გადასვლა	350
11.5 წერტილის მოძრაობის ზოგიერთი კერძო შემთხვევა	352
11.6. წერტილის კინემატიკის ძირითადი ამოცანები და მეთოდური მითითებები მათ ამოსახსნელად	354
11.7. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები წერტილის მოძრაობის განტოლების შედგენაზე	357
11.8. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები წერტილის ტრაექტორიის განსაზღვრაზე დეკარტის კოორდინატებში მოცემული მოძრაობის განტოლებების მიხედვით	361
11.9. სავარჯიშო ამოცანები წერტილის ტრაექტორიის განსაზღვრაზე, როცა წერტილის მოძრაობა მოცემულია ვექტორული და კოორდინატული ფორმით	365
11.10. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები ტრაექტორიაზე წერტილის მოძრაობის კანონისა და გაწვლილი მანძილის განსაზღვრაზე	368

11.11. სავარჯიშო ამოცანები ტრაექტორიაზე წერტილის მოძრაობის განტოლებისა და გავლილი გზის განსაზღვრაზე, როცა მოცემულია $V = V(t)$ სიჩქარის ცვლილების კანონი ან წერტილის მოძრაობის განტოლებები კოორდინატული ფორმით	372
11.12. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები წერტილის ტრაექტორიის, სიჩქარისა და აჩქარების განსაზღვრაზე დეკარტისა და ბუნებრივ კოორდინატებში მოცემული მოძრაობის განტოლებების მიხედვით	374
11.13. სავარჯიშო ამოცანები წერტილის ტრაექტორიის, სიჩქარისა და აჩქარების განსაზღვრაზე დეკარტის კოორდინატებში მოცემული მოძრაობის განტოლებების მიხედვით	386
11.14. წერტილის მოძრაობის განტოლებები ცილინდრული, სფერული და პოლარული კოორდინატებით	396
11.15. წერტილის სიჩქარის გამოსახვა პოლარული კოორდინატებით	397
11.16. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები	399
11.17. სავარჯიშო ამოცანები	401
12. მყარი სხეულის მოძრაობის უმარტივესი შემთხვევები	403
12.1. მყარი სხეულის თავისუფლების ხარისხი და მისი მოძრაობის მოცემის ხერხი	403
12.2. მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა	405
12.3. მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობა. კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება	407
12.4. თანაბარი და თანაბარცვლადი ბრუნვა	409
12.5. უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის წერტილების სიჩქარე და აჩქარება	412
12.6. ბრუნვითი მოძრაობის გადაცემა ერთი სხეულიდან მეორეზე	418
12.7. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის მობრუნების კუთხის,	

კუთხური სიჩქარისა და კუთხური აჩქარების განსაზღვრაზე	419
12.8. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის წერტილების სიჩქარეებისა და აჩქარებების განსაზღვრაზე	424
12.9. ამოცანები ამოხსნის ნიმუშები ერთი სხეულიდან მეორეზე ბრუნვითი მოძრაობის გადაცემაზე	428
12.10. სავარჯიშო ამოცანები უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის მობრუნების კუთხის, კუთხური სიჩქარისა და კუთხური აჩქარების განსაზღვრაზე	433
12.11. სავარჯიშო ამოცანები უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის წერტილთა სიჩქარისა და აჩქარების განსაზღვრაზე	437
12.12. სავარჯიშო ამოცანები ერთი სხეულიდან მეორეზე ბრუნვითი მოძრაობის გადაცემაზე	440
13. მყარი სხეულის ბრტყელ-პარალელური მოძრაობა	444
13.1. ზოგადი ცნობები	444
13.2. მყარი სხეულის წერტილების სიჩქარისა და აჩქარების განსაზღვრის ანალიზური მეთოდი	446
13.3. სიჩქარეთა მყისი ცენტრი	447
13.4. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები თავის სიბრტყეში მოძრავი ბრტყელი ფიგურის წერტილების სიჩქარეთა განსაზღვრაზე	450
13.5. სავარჯიშო ამოცანები ბრტყელი ფიგურის წერტილების სიჩქარეების განსაზღვრაზე	464
13.6. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი წერტილის აჩქარების განსაზღვრაზე	474
13.7. სავარჯიშო ამოცანები ბრტყელი ფიგურის წერტილების აჩქარების განსაზღვრაზე	487
14. წერტილის რთული მოძრაობა	495
14.1. წერტილის აბსოლუტური და ფარდობითი მოძრაობა, წარმტანი მოძრაობა	495

14.2. სინქარეთა შეკრების თეორემა	498
14.3. სკალარული არგუმენტის ვექტორული ფუნქციის აბსოლუტური და ფარდობითი წარმოებულები	500
14.4. აჩქარებათა შეკრების თეორემა წარმტანი მოძრაობის ზოგად შემთხვევაში	504
14.5. აჩქარებათა შეკრების თეორემა წარმტანი გადატანითი მოძრაობის შემთხვევაში	508
14.6. ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები წერტილის რთული მოძრაობისას მისი აბსოლუტური სინქარის და აბსოლუტური აჩქარების განსაზღვრაზე	508
14.7. სავარჯიშო ამოცანები წერტილის რთული მოძ- რაობისას მისი აბსოლუტური სინქარისა და აბსო- ლუტური აჩქარების განსაზღვრაზე	517
15. მყარი სხეულის მოძრაობა ერთი უძრავი წერტილის ბარშემო (სფერული მოძრაობა)	526
15.1. ეილერის კუთხეები. მოძრაობის განტოლებები	526
15.2. ეილერ-დალამბერის თეორემა	527
15.3. სხეულის მყისი კუთხური სინქარე და ნებისმიერი წერტილის სინქარე უძრავი წერტილის გარშემო ბრუნვისას	529
15.4. სხეულის ნებისმიერი წერტილის აჩქარება უძრავი წერტილის გარშემო ბრუნვისას	531
16. მყარი სხეულის თავისუფალი მოძრაობა	535
16.1. წერტილის სინქარე	535
16.2. წერტილის აჩქარება	536
17. მყარი სხეულის რთული მოძრაობა	536
17.1. შესავალი	536
17.2. მყარი სხეულის გადატანით მოძრაობათა შეკრება	536
17.3. პარალელური ღერძების გარშემო ბრუნვათა შეკრება	537
17.4. კბილთა გადაცემის კინემატიკური გადაცემა ვილისის მეთოდით	541
17.5. გადამკვეთი ღერძების გარშემო ბრუნვათა შეკრება	542

17.6. გადატანითი და ბრუნვითი მოძრაობების შეკრება	544
კითხვები თვითშემოწმებისათვის	548
ლიტერატურა	551

პედაგოგიკის მეცნიერებათა დოქტორი, ტექნიკის
მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი
ტარიელ კვიციანი

თეორიული მექანიკის კურსი.
სტატიკა და კინემატიკა

Доктор педагогических наук, доктор
технический наук, профессор
Тариел Атмузович Квициани

Курс теоретической механики.
Статика и кинематика

Doctor of Pedagogical Sciences, Doctor
of Technical, Prof. Tariel Kvitsiani

Couise in theoretical mechanics.
Statisc and kinematics

რედაქტორი მ. ღუდუშაური

კომპიუტერული უზრუნველყოფა ე. ზარიძის

გადაეცა წარმოებას 30.04.2015. ხელმოწერილია დასაბეჭდად
10.09.2015. ქაღალდის ზომა 60X84 1/16. პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 35.
ტირაჟი 100 ეგზ.

საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, თბილისი,
კოსტავას 77



Verba volant,
scripta manent