

საქართველოს მეცნიერებათა აკადემია
პ. გუგუშვილის სახელობის ეკონომიკის ინსტიტუტი

ბიორები წერეთელი

ეკონომიკის მათემატიკური მოდელირების
მეთოდოლოგიური საფუძვლები და მათი
რეალიზაციის პრაქტიკული მაგალითები

“მეცნიერება”
თბილისი
2000

ნაშრომი ეძღვნება ეკონომიკურ-მათემატიკური მეთოდების საფუძვლების სისტემატიზაციას, სრულყოფასა და მათი ეკონომიკაში გამოყენების ზოგიერთი პრაქტიკული ასპექტის შესწავლას.

ნაშრომი გათვალისწინებულია მკითხველთა ფართო წრისათვის. იგი, ჩვენი აზრით, დახმარებას გაუწევს არა მარტო სპეციალისტებს, ასპირანტებსა და სტუდენტებს, არამედ ამ საკითხებით დაინტერესებულ ნებისმიერ მკითხველს.

რედაქტორი: *ელ. პაპაეა, საქართველოს მეცნ. აკადემიის წ. /კ. ეკ. მეცნ. დოქტ., პროფესორი*

რეცენზენტები: *კ. აბელაშვილი, ეკ. მეცნ. დოქტ.*

ი. ანანიაშვილი, ეკ. მეცნ. დოქტ.

რ. სარჩიშელია, ეკ. მეცნ. დოქტ.

წ $\frac{0302020000}{M607(06)-00}$ 2000

© „მეცნიერება“
2000

ISBN 99928-51-93-7

ს ა ქ ა რ თ ვ ე ლ ო ს
პ ა რ ლ ა მ ე ნ ტ ი ს
ე რ ო ვ ნ უ ლ ი
გ ი ბ ლ ი ო თ ე პ ა

შესავალი

ეკონომიკური ურთიერთობები და სამეურნეო საქმიანობა წარმოადგენს კაცობრიობის არსებობისა და განვითარების ერთ-ერთ ძირითად განმსაზღვრელ ფაქტორს.

კაცობრიობის განვითარების თანამედროვე ეტაპზე დიდი მნიშვნელობა ენიჭება ეკონომიკური კვლევის პროცესთა შემდგომი სრულყოფის საკითხებს.

ეს საკითხები კიდევ უფრო დიდ მნიშვნელობას იძენს ჩვენი ქვეყნის ეკონომიკის განვითარების დღევანდელ პირობებში, როცა აუცილებელი ხდება მეცნიერების თანამედროვე მიღწევებზე დამყარებული გონივრული მიდგომა საზოგადოების ეკონომიკური ცხოვრების ხელმძღვანელობისა და სწორი გადაწყვეტილების მიღების საფუძველზე შეიძლება ეუზრუნველყოთ ჩვენი ეროვნული ეკონომიკის აღორძინება და განვითარება.

ეკონომიკურმა მეცნიერებამ, რომელიც ეყრდნობა მსოფლიოში უკვე არსებულ მდიდარ გამოცდილებას, მიაღწია მაღალ თეორიულ დონეს და დიდ დახმარებას უწევს პრაქტიკას. თუმცა, ისიც უნდა აღინიშნოს, რომ ეკონომიკური მეცნიერება ჯერ კიდევ ვერ პასუხობს ცხოვრების მიერ წამოყენებულ ყველა საკითხს. თანამედროვე პრაქტიკაში ნრაელად არის ისეთი ეკონომიკური საკითხები, რომელთა შესწავლა და გამოკვლევა, ხშირად, ვერ სცილდება ხარისხობრივი ანალიზის ფარგლებს. ამ გარემოების გამო, პრაქტიკა ვერ ღებულობს საჭირო კონკრეტულ რეკომენდაციებს რაოდენობრივ ასპექტში და იძუდება ეროვნული გეგმის შეუსაბამობა თეორიასა და პრაქტიკას შორის. აქედან გამომდინარე, ნათელია, რომ ეკონომიკური მეცნიერების შემდგომი განვითარების აუცილებელ პირობას წარმოადგენს რაოდენობრივი ანალიზის ზუსტი მეთოდების კარგად ათვისება და გამოყენება.

მაშასადამე, საჭიროა მათემატიკის თანამედროვე მიღწევათა ფართო გამოყენება ეკონომიკურ კვლევაში.

მეოცე საუკუნის მეორე ნახევარში, მათემატიკისა და გამოთვლითი ტექნიკის თანამედროვე მიღწევებმა სულ უფრო ფართო გამოყენება ჰპოვა ეკონომიკურ გამოყენებებში. ეს კი მიუთითებს ეკონომიკური მეცნიერების განვითარების მაღალ დონეზე. მართლაც, ესა თუ ის მეცნიერება ითვლება სრულყოფილად, თუ მასში გამოიყენება მათემატიკა და მისი სიმწიფის დონე დიდად არის დამოკიდებული მათემატიკის გამოყენების დონეზე ამ მეცნიერებაში.

ცნობილია, რომ უკანასკნელი 50 წლის განმავლობაში მათემატიკურ დისციპლინას ახასიათებს ინტენსიური დაახლოება მეცნიერების სხვადასხვა დარგთან (ბიოლოგია, ფსიქოლოგია, სოციოლოგია და სხვა) და მათ შორის ეკონომიკასთანაც.

ეკონომიკის, მათემატიკისა და კიბერნეტიკის ურთიერთდაახლოების საფუძველზე ჩამოყალიბდა მეცნიერული მიმართულება “ეკონომიკურ-მათემატიკური მეთოდების” სახელწოდებით. ამ მიმართულების ფუძემდებლად ყოფილ სსრკ-ში ითვლება სახელგანთქმული მეცნიერი, აკადემიკოსი ე. ნემსინოვი (აქვე ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებასაც, რომ მათემატიკისა და კიბერნეტიკის ეკონომიკაში გამოყენების თეორიული და გამოყენებითი სფეროსათვის საერთო, აღიარებული და ჩამოყალიბებული დასათაურება უცხოურ ლიტერატურაში დღემდე არ გეხედება).

ზემოთ აღნიშნული მეცნიერული მიმართულების ჩამოყალიბებასა და მის შემდგომ განვითარებას ხელი შეუწყო ეკონომიკის, გამოყენებითი მათემატიკისა და კიბერნეტიკის მიღწევებმა, რომლებიც დაკავშირებულია ლ. კანტოროვიჩის [39], ნ. ვინერის [29], ჯ. დანციგის [33], ე. ლეონტიევის [47,48], ა. ლურიეს [49], ე. ნოვოჟილოვისა [56] და სხვათა ფუნდამენტურ შრომებთან.

მიმართულება—“ეკონომიკურ-მათემატიკური მეთოდები” ძირითადადში აერთიანებს შემდეგ სამეცნიერო დისციპლინებს:

ა). ეკონომიკურ-სტატისტიკური მეთოდები. აქ ძირითადში იგულისხმება ის მეთოდები, რომლებსაც მოიცავს ეკონომიკური სტატისტიკა და მათემატიკური სტატისტიკა.

ბ). ეკონომეტრია – ანუ ეკონომიკური პროცესების ისეთი მოდელირება, რომელიც მოიცავს როგორც აბსტრაქტულ, ასევე სტატისტიკურ რიცხვით და კერძო ეკონომეტრიულ მოდელებს (მაგ. მაკროეკონომიკური მოდელები, საწარმოო ფუნქციები, დარგთაშორისი მოდელები და სხვა).

გ). ოპტიმიზაციური მეთოდები (ანუ უფრო ფართოდ ოპერაციათა გამოკვლევა) ეკონომიკაში.

ეს ის მეთოდებია, რომლებიც ძირითადად მუშავდება მათემატიკურ დაპროგრამებაში, თამაშთა თეორიაში და ა.შ.

დ). ეკონომიკური კიბერნეტიკა, რომლის შესწავლის საგანსაც წარმოადგენს ეკონომიკური სისტემების მართვის თეორიული და გამოყენებითი საკითხები (იგი მოიცავს ეკონომიკის სისტემურ ანალიზსაც).

ეკონომიკურ-მათემატიკური მეთოდების შემადგენელი ნაწილების განხილული კლასიფიკაციის თანმიმდევრობა ემთხვევა მისი შემადგენელი დისციპლინების ისტორიული წარმოშობის თანმიმდევრობას.

ზემოთ ჩამოთვლილი ნაწილების დისციპლინებს შორის საჭიროა დამყარდეს ურთიერთკავშირი. ეს პროცესი კი დღემდე საბოლოოდ არ არის მოგვარებული. იგი დღესაც გრძელდება.

ჩამოთვლილი ნაწილების საფუძველზე ჩამოყალიბდა ეკონომიკურ-მათემატიკური მეთოდების კომპლექსი. მაგრამ ეს იმას არ ნიშნავს, რომ იგი ერთხელ და სამუდამოდ შეიქმნა და მისი ჩამოყალიბება დამთავრდა. ეს კომპლექსი განიცდის სრულყოფას, მას თანდათან ემატება ახალი დისციპლინები. ამ კომპლექსის ჩარჩოებში მიმდინარეობს მეცნიერული დისციპლინების დიფერენციაციისა და ინტეგრაციის პროცესი. ასე მაგალითად, არც თუ ისე დიდი ხნის წინ, შეიქმნა ისეთი მიმართულებები, როგო-

რიცაა: სტოქასტური დაპროგრამება და ოპტიმალური სისტემების თეორია.

ეკონომიკურ-მათემატიკურმა მიმართულებამ თავისი წარმოშობის მომენტიდან დღემდე განიცადა სერიოზული განვითარება და სრულყოფა. აღსანიშნავია, რომ ეკონომიკურ-მათემატიკური საკითხების კვლევას მნიშვნელოვანი ყურადღება ექცეოდა ყოფილი საბჭოთა კავშირის რესპუბლიკებშიც. ამიტომ ამ რესპუბლიკებში დაგროვდა ასეთი საკითხების კვლევისადმი მიძღვნილი მრავალი ცნობილი სპეციალისტის პუბლიკაცია, რომელთა გაცნობაც იძლევა ღრმად კვალიფიციურ ცოდნასა და გამოცდილებას ეკონომიკურ-მათემატიკური კუთხით.

ამ პუბლიკაციებიდან უნდა გამოიყოს ისეთი ცნობილი უცხოელი სპეციალისტების ნაშრომები, როგორიცაა: ნ. ფედორენკო [64], ა. აგანბეგიანი [24], ს. შატალინი [67], ნ. პეტრაკოვი [61], ა. გრანბერგი [32], ე. ბარანოვი [53], ა. ანჩიშკინი [25], ვ. მაკაროვი [50], ვ. ვოლკონსკი [30], კ. ბაგრინოვსკი [26], ე. მაიმინასი [44], ნ. კობრინსკი [44], ა. სმირნოვი [44], ლ. ტერეხოვი [63] და 'ხვა.

ეკონომიკურ-მათემატიკური საკითხების კვლევის საქმეში მნიშვნელოვანი წვლილი ეკუთვნის ჩვენი ქვეყნის მეცნიერ-ეკონომისტებსაც. მათგან შეიძლება გამოიყოს: ვლ. პაპაეა [16, 57-59], გ. წერეთელი [22, 23, 66], ი. მესხია [14, 54], კ. აჩელაშვილი [3, 4], ი. ანანიაშვილი [1, 2], გ. ბედიანაშვილი [5, 27], მ. კეკელიძე [41], რ. სარჩიმელია [18, 19, 20], ჯ. იოსაეა [9, 10], გ. პაპაეა [60], ბ. გაბიძაშვილი [6], რ. მითაიშვილი [15], ზ. ელიზბარაშვილი [7], ს. სანაძე [17] და სხვა.

დიდია მათემატიკისა და ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირების როლი ეკონომიკური თეორიის განვითარებაში. თუმცა, ისიც უნდა აღინიშნოს, რომ იგი წარმოადგენს რთულ და დისკუსიურ საკითხს, რომელიც სპეციალურ ლიტერატურაში დღესაც არ არის საბოლოოდ გადაწყვეტილი.

ამ საკითხის შესახებ, ამჟამად, სპეციალურ ლიტერატურაში ცნობილია ორი სასაზღვრო პოზიცია:

პირველი პოზიცია ეკონომიკურ-მათემატიკურ მოდელირებას აყენებს განსაკუთრებულ ადგილზე. ამ პოზიციის მიხედვით ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირება არის მკაცრი ეკონომიკური თეორიის შექმნისა და გადრმავეების ერთადერთი შესაძლებელი საშუალება.

მეორე პოზიცია სრულიად უარყოფს ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირების როლს ეკონომიკის ახალ თეორიულ მიღწევებში.

ჩვენი აზრით კი, ამ პოზიციებიდან არც ერთი არ არის სწორი (მათგან არც ერთი არ შეესაბამება არც ისტორიულ ფაქტებს და არც ეკონომიკური მეცნიერების თანამედროვე მდგომარეობას).

მათემატიკისა და ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირების როლის გადაჭარბებულად შეფასებას (თეორიულ-ეკონომიკური გამოკვლევების საქმეში) ეხედებით ეკონომეტრიისა და მათემატიკური სკოლის ზოგიერთი წარმომადგენლის (მაგ. ლ. ვალრასის და უ. ჯეკონსის) ნაშრომებში. ისინი, მაგალითად, ამტკიცებენ, რომ პოლიტიკური ეკონომია არის მათემატიკური მეცნიერება. ამასთან, აღსანიშნავია ისიც, რომ ზოგიერთი თანამედროვე ეკონომისტ-მათემატიკოსი ეკონომიკურ თეორიას ახასიათებს, როგორც მათემატიკური მოდელის ანალიზისაგან უკეთესი დასკვნების სისტემას.

ეკონომიკური თეორიის განვითარების სფეროში მათემატიკისა და ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირების შესაძლებლობების ნიჰილისტური და სკეპტიკური შეფასება დაკავშირებულია არასწორ შეხედულებებთან მათემატიკისა და მათემატიკური მეთოდების არსისადმი, მათი შესაძლებლობების უცოდინრობასთან და ა.შ.

მაგალითად, სპეციალურ ლიტერატურაში მეტად გაერცელებულია აზრი იმის შესახებ, რომ თითქოს მათემატიკას არ შეუძლია შეისწავლოს ბუნებისა და საზოგადოების მოვლენების ხარისხობრივი მხარე.

სინამდვილეში კი მათემატიკის საგანს წარმოადგენს, როგორც ხარისხობრივი ურთიერთობების რაოდენობრივი ანალიზი, ასევე რაოდენობრივი ურთიერთობების ხარის-

ხობრიეი ანალიზი. დღეს კი, თანამედროვე მათემატიკის სწორედ ეს თვისებები პოულობენ ასახეას ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელების აგებასა და გამოყენებაში. ნებისმიერი სახის ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელი ახასიათებს ეკონომიკური პროცესების არა მარტო რაოდენობრივ, არამედ ხარისხობრივ მაჩვენებლებსაც.

ეკონომიკური პროცესების მათემატიკური მოდელირება წარმოადგენს კელევის კომპლექსურ მეთოდს, რომელიც არ შეიძლება შემოიფარგლოს მხოლოდ მათემატიკის გამოყენებით. მაგრამ, მიუხედავად ამისა, ისიც არ წარმოადგენს ეკონომიკური თეორიის განვითარების ერთადერთ მეცნიერულ მეთოდს, იმდენად, რამდენადაც, ჯერ-ერთი, ეკონომიკური ცხოვრების ყველა მხარე არ შეიძლება აისახოს ფორმალიზებულ მოდელში და მეორეც, ცოდნის თანამედროვე დონეზე, მათემატიკური მოდელირება ყოველთვის არ წარმოადგენს კელევის ყველაზე საუკეთესო მეთოდს.

როგორც ჩანს, შეუძლებელია ეკონომიკურ თეორიაში მათემატიკური მოდელირების ეფექტიანი გამოყენების რაიმე მკაცრი საზღვრების დადგენა, რადგან ისინი იცვლება ეკონომიკური ცოდნის გაფართოებისა და დაზუსტების ზომის პროპორციულად, აგრეთვე მათემატიკის, კიბერნეტიკისა და გამოთვლითი ტექნიკის სფეროებში არსებული პროგრესის დონესთან შეთანხმებით.

აღნიშნულიდან შეიძლება დავასკვნათ, რომ მათემატიკური მეთოდების გამოყენება წარმოადგენს ეკონომიკური თეორიის განვითარების აუცილებელ, მაგრამ არასაკმარის პირობას.

ეკონომიკურ მათემატიკური მეთოდები ეყრდნობა რა ეკონომიკური თეორიის, მათემატიკისა და გამოთვლითი ტექნიკის თანამედროვე მიღწევებს, ამდიდრებს ეკონომიკურ მეცნიერებათა სისტემას და ხელს უწყობს მის ახალ, განვითარების უფრო მაღალ საფეხურზე გადასვლას (ე. ი. ზუსტი რაოდენობრივი ანალიზის სტადიაზე გადასვლას).

მათემატიკური მეთოდების გამოყენება იძლევა დიდ უპირატესობებსა და შესაძლებლობებს ეკონომიკური პრობლემების გადაჭრის სფეროში.

მათემატიკური მეთოდები, ჯერ-ერთი, იძლევა ეკონომიკური ინფორმაციის სისტემის მოხერხებული მოწესრიგების საშუალებას. მათი გამოყენების შედეგად შეიძლება არსებული ინფორმაციის უკმარისობის ზომის დადგენა და ახალი ინფორმაციის მომზადებისა და კორექტირებისათვის საჭირო მეთოდების გამომუშავება.

მეორე, მათემატიკური მეთოდების გამოყენება, ეკონომიკური ამოცანების ფორმალიზაციისა და ეგზ-ის დახმარებით, მრავალჯერადად აჩქარებს ტიპურ და მასიურ გათვლებს, ზრდის ამ გათვლების სიზუსტეს, ამცირებს შრომატევადობას, იძლევა რთული ღონისძიებების მრავალ-ვარიანტული ეკონომიკური დასაბუთების საშუალებას.

მესამე, ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირების მეთოდის გამოყენების წყალობით მნიშვნელოვნად ძლიერდება კონკრეტული რაოდენობრივი ანალიზის შესაძლებლობები – ეკონომიკური პროცესების ანალიზზე მოქმედი მრავალი ფაქტორის ურთიერთქმედების შესწავლა, ეკონომიკური ობიექტების განვითარების პირობების ცვლილებათა შედეგების შეფასება და ა. შ.

მეოთხე, ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირების საშუალებით შესაძლებელი ხდება ისეთი ეკონომიკური ამოცანების ამოხსნა, რომელთა გადაჭრა სხვა საშუალებებით შეუძლებელია.

ამგვარად, მათემატიკური მეთოდების ეკონომიკურ კვლევაში გამოყენების დროს ძირითადში შეიძლება გამოყოფილი იქნეს ოთხი ასპექტი:

1. ეკონომიკური ინფორმაციის სისტემის სრულყოფა;
2. ეკონომიკური გათვლების ინტენსიფიკაცია;
3. ეკონომიკური პრობლემების რაოდენობრივი ანალიზის გაღრმავება;
4. ეკონომიკური კვლევის რაოდენობრივი სფეროს გაფართოება.

ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირების გამოყენების ეფექტიანობა მნიშვნელოვნად არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რამდენად ზუსტად ხდება ამ დროს შესასწავლი მოვლენების (ან პროცესების) ზოგად კანონზომიერებათა ასახვა მათ შესაბამის მოდელში.

თავი 1. ეკონომიკური მოვლენებისა და პროცესების მათემატიკური მოდელირება როგორც მათი შემცდნებისა და შესწავლის მნიშვნელოვანი მეთოდი

§1. მოდელისა და მოდელირების არსი. მოდელირების გამოყენების მნიშვნელობა ეკონომიკაში

ეკონომიკის მათემატიკური მოდელირების სფეროში მნიშვნელოვან ცნებებს წარმოადგენს – “*ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელი*” და “*ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირება*”.

მათი არსის განსაზღვრამდე განვიხილოთ მოდელისა და მოდელირების ზოგადი ცნებების განმარტებები და მათთან დაკავშირებული ზოგიერთი საკითხი.

მოდელი არის შესასწავლი ობიექტის ისეთი მატერიალური ან აზრობრივი გამოხატულება (ასახვა), რომელიც ობიექტ-ორიგინალის მოხერხებული შეცვლისა და მისი უშუალო შესწავლის საფუძველზე იძლევა ახალ ცოდნას ობიექტ-ორიგინალის შესახებ.

მოდელის აგების, შესწავლისა და გამოყენების პროცესს ეწოდება *მოდელირება*.

მოდელირება წარმოადგენს სწორი შემეცნების ერთერთ მნიშვნელოვან ინსტრუმენტს.

მოდელირების პროცესში მონაწილეობს სამი ძირითადი ელემენტი: სუბიექტი, კელევის ობიექტი და მრდელი.

სუბიექტი ეს არის მკელეუარი (აღამიანი), რომელიც სწავლობს კელევის ამა თუ იმ ობიექტს.

კელევის ობიექტის ქვეშ უნდა გვესმოდეს შესასწავლი ობიექტი.

მოდელი წარმოადგენს მოდელირების პროცესში მონაწილე პირელი ელემენტის (სუბიექტისა) და მეორე ელემენტის (კელევის ობიექტის) ურთიერთქმედების საშუალებას.

სუბიექტის ზემოქმედება კვლევის ობიექტზე წარმოებს შესასწავლი ობიექტის სწორად შემეცნების მიზნით.

მოდელი შეიძლება იყოს სხვადასხვა სახეობის.

მოდელები შესასწავლი ობიექტის ასახვის ფორმის მიხედვით იყოფა ორ ძირითად ნაწილად:

1. მატერიალურ-საგნობრივი მოდელები და

2. იდეალური (ანუ აზრობრივი მოდელები).

მატერიალურ-საგნობრივი მოდელები, ეს ისეთი მოდელებია, რომლებიც შესასწავლი ობიექტის (მოვლენის ან პროცესის) ზოგად კანონზომიერებებს ასახავს მატერიალური ფორმით.

იდეალური (ანუ აზრობრივი მოდელები) ეს ისეთი მოდელებია, რომლებიც შესასწავლი ობიექტის ზოგად კანონზომიერებებს ასახავს ადამიანის გონებაში (ისინი არსებობს ადამიანის შემეცნებაში).

იდეალური მოდელები ჩვენი შესწავლის საგანს არ წარმოადგენს და მათ შემდეგში მეტად არ შეეხებით.

მატერიალურ-საგნობრივი მოდელები იყოფა ორ ძირითად ნაწილად:

1. ფიზიკური მოდელები და

2. მათემატიკურ-საგნობრივი მოდელები.

ფიზიკური მოდელი არის იმავე თვისებების მატარებელი მატერიალური ობიექტი, რომელიც გააჩნია ობიექტ-ორიგინალს.

ფიზიკური მოდელები არ წარმოადგენს ჩვენი შესწავლის საგანს და მათ შემდეგში მეტად არ შეეხებით.

მათემატიკურ-საგნობრივი მოდელები წარმოადგენს ამა თუ იმ საგნობრივი დისციპლინის შესასწავლი ობიექტის უზგადი კანონზომიერებების გამოხატულებას მათემატიკური ფორმით (მათ ასახავს მათემატიკურ სიმბოლოებსა და ფორმულებში). მათემატიკურ-საგნობრივი მოდელების მაგალითებს წარმოადგენს: ბიო-მათემატიკური, ფიზიკურ-მათემატიკური, ფსიქო-მათემატიკური, ეკონომიკურ-მათემატიკური და ა.შ. მოდელები. ისინი წარმოადგენს მათემატიკურ-საგნობრივი მოდელების ნაირსახეობებს.

მათემატიკურ-საგნობრივი მოდელებიდან ჩვენი შესწავლის საგანს წარმოადგენს ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელები.

ეკონომიკური ბუნების შესასწავლი ობიექტის (მოვლენის ან პროცესის) ზოგადი კანონზომიერებების გამოხატვას მათემატიკური ფორმით ეწოდება *ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელი*.

სხვანაირად, ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელი წარმოადგენს ეკონომიკური მოვლენებისა და პროცესების ზოგადი კანონზომიერებების ასახვას მათემატიკურ სიმბოლოებსა და ფორმულებში.

ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელის აგების შესწავლისა და გამოყენების პროცესს ეწოდება *ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირება*.

მოდელირებას (კერძოდ, ეკონომიკურ-მათემატიკურ მოდელირებას) დიდი როლი ეკუთვნის არა მარტო ეკონომიკური მოვლენებისა და პროცესების შემეცნების, არამედ ეკონომიკური თეორიის შემდგომი განვითარების სფეროში. ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირება იძლევა ეკონომიკური მოვლენებისა და პროცესების არსში ღრმად ჩაწედომისა და ამ გზით სხვადასხვა ობიექტური ეკონომიკური კანონის მოქმედების მექანიზმის სრული შემეცნების საშუალებას.

§2. ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირების გამოყენების მოკლე ისტორიული ცნობები

დღეისათვის სპეციალურ ლიტერატურაში გაერცხლებულია აზრი იმის შესახებ, რომ ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირების უმარტივესი სახით, მაგრამ ისტორიულად პირველად გამოყენების ფაქტები შეინიშნება ფრანგ ფიზიოკრატ ფრანსუა კენეს მიერ მე-18-ე საუკუნეში გამოქვეყნებულ ნაშრომებში (ისტორიულად პირველი ეკონომიკურ-მათემატიკური სახის მოდელი ცნობილია ფრანსუა კენეს ეკონომიკური ცხრილების სახით) ფ. კენემ 1758

წელს გამოსცა თავისი პირველი ნაშრომი “ეკონომიკური ცხრილები”. მან 1766 წელს გამოაქვეყნა მისი მეორე ნაშრომი, სახელწოდებით – “არითმეტიკული ფორმულა”. ამ ნაშრომებში გვხვდება საზოგადოებრივი აღწარმოების პროცესთა ამსახველი მარტივი სქემა, ანუ მისი ამსახველი გრაფიკულ-რიცხვითი მოდელი.

ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირების გამოყენების მეორე ისტორიულ ფაქტს ვხვდებით კმარქსის საზოგადოებრივი პროდუქტის მარტივი და გაფართოებული აღწარმოების სქემებში.

ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირების გამოყენების მესამე ისტორიულ ფაქტს წარმოადგენს ვ. ლენინის მიერ საზოგადოებრივი პროდუქტის აღწარმოების სქემების შედგენის დროს გამოყენებული ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირების უმარტივესი სახე.

ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირების მეოთხე ისტორიულ ფაქტს წარმოადგენს დარგთაშორისი ბალანსის თეორიის შექმნის დროს გამოყენებული მოდელირების პროცესი, რომელიც დაკავშირებულია დიდი მეცნიერის ვ. ლეონტიევის სახელთან.

ამის შემდეგ, კი იწყება ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირების ეკონომიკურ თეორიასა და პრაქტიკაში ფართოდ გამოყენების ეტაპი. ასე, მაგალითად, დარგთაშორისი ბალანსის მეთოდოლოგიის შექმნამ ხელი შეუწყო ოპტიმიზაციური ტიპის ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირების ფართოდ გამოყენებას ეკონომიკაში. შემდეგ, კი დასაბამი მიეცა სხვა ტიპების ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირების პროცესთა განვითარებას ეკონომიკაში.

აქედან, ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირების სფეროში დაგროვილია დიდი ცოდნა და გამოცდილება.

§ 3. ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელების კლასიფიკაცია

სპეციალურ ლიტერატურაში ამჟამად ცნობილია მრავალი სახეობის ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელი. გამოყოფთ ძირითადი მათგანი. ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელები მიზნობრივი დანიშნულებით იყოფა ორ ნაწილად:

1. *თეორიულ-ანალიზური სახის მოდელები* და
2. *გამოყენებითი (პრაგმატული) სახის მოდელები.*

თეორიულ-ანალიზურია ისეთი მოდელები, რომლებიც გამოიყენება ეკონომიკური პროცესების ზოგადი თვისებებისა და კანონზომიერებების შესწავლისათვის.

გამოყენებითი ხასიათის მოდელები ეს ისეთი მოდელებია, რომლებიც გამოიყენება კონკრეტული სახის ეკონომიკური ამოცანების გადაწყვეტაში.

ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელები გამოყენების დონის მიხედვით იყოფა ორ ძირითად ნაწილად:

1. *გლობალური მოდელები* და
2. *ლოკალური მოდელები.*

ესა თუ ის მოდელი წარმოადგენს გლობალურ მოდელს, თუ ის გამოიყენება გლობალურ¹ დონეზე (მთელი ეროვნული მეურნეობის მასშტაბით).

ესა თუ ის მოდელი წარმოადგენს ლოკალურ მოდელს, თუ ის გამოიყენება ლოკალურ (ამა თუ იმ დარგის, საწარმოს, ფირმის და ა.შ.) დონეზე.

ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელები დროის ფაქტორის ასახვის მიხედვით იყოფა ორ ნაწილად:

1. *სტატიკური* და
2. *დინამიკური მოდელები.*

სტატიკურია მოდელი, რომელიც არ ითვალისწინებს დროის ფაქტორს და შესასწავლი ობიექტის ზოგად კანონზომიერებებს ასახავს სტატიკური სახით.

დინამიკურია მოდელი, თუ ის ითვალისწინებს დროის ფაქტორს და შესასწავლი ობიექტის ზოგად კანონზომიერებებს ასახავს დინამიკური სახით.

გარდა აღნიშნულისა, ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელები შეიძლება დაიყოს *დესკრიპტულ* და *ნორმატიულ* მოდელებად.

დესკრიპტულია მოდელი, თუ ის პასუხობს კითხვას – როგორ მიმდინარეობს მასში ასახული მოვლენა ან პროცესი?

ნორმატულია მოდელი, თუ ის პასუხობს კითხვას – როგორ ენდა განვითარდეს მასში ასახული მოვლენა ან პროცესი?

ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელები შეიძლება იყოს *დეტერმინირებული* და *სტოქასტური* (ალბათური) სახის.

დეტერმინირებულია ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელი, თუ მასში ასახულია მხოლოდ დეტერმინირებული სახის პარამეტრები.

სტოქასტურია ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელი, თუ მასში ასახულია სტოქასტური (ალბათური) სახის პარამეტრები.

ეკონომიკურ-მათემატიკურ მოდელებს შორის განასხევებენ *ჩაკეტილ* და *ღია* სახის მოდელებს.

ჩაკეტილი ეწოდება მოდელებს, რომლებიც არ შეიცავს არც ერთ ეგზოგენურ (გარეშე) ცვლადს. ისინი შეიცავენ მხოლოდ ენდოგენურ (შიდა) ცვლადებს.

ღია ეწოდება მოდელებს, რომლებიც შეიცავს ერთ ეგზოგენურ ცვლადს მაინც.

ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელები შეიძლება დაიყოს *აგრეგირებულ* და *დეზაგრეგირებულ* მოდელებად.

აგრეგირებულია მოდელი, თუ ის შეიცავს აგრეგირებული (გამსხვილებული) სახის ეკონომიკურ მაჩვენებელთა ამსახველ ერთ ან რამდენიმე პარამეტრს.

დეზაგრეგირებულია მოდელი, თუ ის შეიცავს დეზაგრეგირებული (დანაწევრებული) სახის ეკონომიკურ მაჩვენებელთა ამსახველ ერთ ან რამდენიმე პარამეტრს.

ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელები პირობითად შეიძლება დაიყოს *წრფივ* და *არაწრფივ* მოდელებად.

წრფივია მოდელი, თუ მასში შესასწავლი ობიექტის ზოგადი კანონზომიერებანი ასახულია წრფივი სახის მათემატიკური გამოსახულებით.

არაწრფივია მოდელი, თუ მასში შესასწავლი ობიექტის ზოგადი კანონზომიერებანი ასახულია არაწრფივი სახის მათემატიკური გამოსახულებით.

ეკონომიკურ-მათემატიკურ მოდელებს შორის განასხევევენ უწყვეტი და დისკრეტული სახის მოდელებს.

უწყვეტია მოდელები, თუ ისინი შეიცავენ უწყვეტი სახის პარამეტრებს.

დისკრეტულია მოდელები, თუ ისინი შეიცავენ დისკრეტული სახის პარამეტრებს.

გარდა აღნიშნულისა, შეიძლება განვასხვაოთ საშუალოვადიანი, გრძელვადიანი და მოკლევადიანი პროგნოზირების ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელები.

საშუალოვადიანი მოდელები ასახავს პროგნოზირების საშუალო, გრძელვადიანი – გრძელ და მოკლევადიანი – მოკლე დროით პერიოდებს.

§ 4. ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირების ეტაპები

ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირების განხორციელება სუბიექტ მკვლევარის მხრიდან მოითხოვს გარკვეული სახის სამუშაოების ჩატარებას. ეს სამუშაოები შეიძლება გაერთიანდეს ერთგვაროვან სამუშაოებად და მათ შევუსაბამოთ მოდელირების ესა თუ ის ეტაპი.

ნებისმიერი სახის ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირება მოითხოვს ექვსი ეტაპის სამუშაოთა განხორციელებას.

პირველ ეტაპზე საჭიროა ეკონომიკური პრობლემა მდგომარეობიდან შესასწავლი ობიექტის მკაფიოდ გამოკვეთა, მისი ხარისხობრივი ანალიზის ჩატარება. ამ ეტაპზე საჭიროა, აგრეთვე, შერჩეულ იქნეს ისეთი ეკონომიკური მახასიათებლები, რომლებიც რაოდენობრივი ხასიათის შესწავლის შემდეგ იძლევიან ახალ, საჭირო ცოდნას ობიექტის

ორიგინალის შესახებ. ამავე ეტაპზე უნდა დადგინდეს ამ მანუქნებლებს შორის არსებული კავშირებისა და ურთიეროდამოკიდებულებების სახეები, შერჩეულ იქნეს ამ მანუქნებლების შესაბამისი მათემატიკური პარამეტრები (მოხდეს მათი დაყოფა უცნობ და ცნობილ სიდიდეებად) და დადგინდეს მათ შორის არსებული მათემატიკური დამოკიდებულების ფორმები.

მეორე ეტაპზე საჭიროა აგებულ იქნეს შესასწავლი ობიექტის აღეკვატურად ამსახველი ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელი.

მესამე ეტაპზე უნდა განხორციელდეს ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელის მათემატიკური ანალიზი. ამ ღროს უნდა შემოწმდეს თუ რამდენად სწორად და კომპაქტურად არის აგებული მოდელი მათემატიკური თვალსაზრისით. ასეთი სახის შემოწმება აუცილებელია, რადგან მათემატიკურად არასწორად შედგენილმა მოდელმა შეიძლება გამოიწვიოს შემდეგი ეტაპების რომელიმე სამუშაოს შესრულების გართულება, ან მისი სრული შეფერხება.

მეოთხე ეტაპზე უნდა განხორციელდეს წინა ეტაპზე აგებული მოდელის ინფორმაციული უზრუნველყოფა. ამ ეტაპზე ხდება მოდელში შემავალი ცნობილი პარამეტრების რიცხვითი მნიშვნელობების დადგენა წინასწარ მოპოვებული და გადამუშავებული ინფორმაციის საფუძველზე. ამ ეტაპის სამუშაოების ჩატარების გარეშე შეუძლებელია აგებული მოდელის გათვლა და მის საფუძველზე კონკრეტული რიცხვითი შედეგების მიღება.

მეხუთე ეტაპზე საჭიროა მოხდეს აგებული ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელის რიცხვითი გათვლა. ამ ეტაპზე ხდება აგებული მოდელის ამოხსნისათვის საჭირო ალგორითმის შერჩევა (ან შექმნა), საჭიროების შემთხვევაში სპეციალური მანქანური პროგრამის დაწერა და მოდელის გათვლა.

მეექვსე ეტაპზე უნდა განხორციელდეს მიღებული შედეგების ეკონომიკური ანალიზი. ეს აუცილებელია იმისათვის, რომ ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირების

რთული პროცესის გაგლის შედეგად შესაძლოა, სრულიად შეუმჩნეელად, მივიღოთ ეკონომიკურად ყოველად გაუმართლებელი შედეგები. ასეთ შემთხვევაში, შემოწმებას ვიწყებთ პირველი ეტაპის სამუშაოებიდან და ვეძებთ დაშვებულ შეცდომას. შეცდომის გასწორების შემდეგ, კი ხელახლა ვასრულებთ ამ სამუშაოს მომდევნო სამუშაოებს. ასეთნაირად ვიქცევით მანამ, სანამ აგებული მოდელის გათვლის შემდეგ არ მივიღებთ ეკონომიკურად გამართლებულ შედეგებს.

ამ თავის ბოლოს მოდელირების მეთოდის ეკონომიკაში პრაქტიკული გამოყენების საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ ფირმის ფულადი შემოსავლების განსაზღვრის უმარტივესი ამოცანა.

I თავის ღამბაზება – ფირმის ფულადი შემოსავლების განსაზღვრის უმარტივესი ამოცანა

ეთქვას, მოცემულია სამრეწველო საქონლის დამამზადებელი ფირმა, რომელიც უშვებს ერთი სახეობის კონკურენტუნარიან პროდუქციას, საერთაშორისო სტანდარტების გათვალისწინებით. ვიგულისხმობთ, რომ ცნობილია ამ პროდუქციის დამზადების მოცულობა და გვაინტერესებს ფირმის ფულადი შემოსავლების რაოდენობა.

ამოხსნა. საქმე გვაქვს უმარტივესი სახის ეკონომიკურ ამოცანასთან, რომლის ამოხსნაც ითხოვს ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირების მეთოდის გამოყენებას.

ამ ამოცანის ამოხსნის პირველ ეტაპზე უნდა გამოვიყენოთ ამოცანის ის ნაწილი, რომლის მოდელირებაც შესაძლებელი იქნება და რომლის შესახებაც

მიღებული რაოდენობრივი ინფორმაცია პასუხს გასცემს დასმული ამოცანის გადაწყვეტას.

უპირველეს ყოვლისა, უნდა შევისწავლოთ ურთიერთ-დამოკიდებულების ხასიათი ისეთ ორ მაჩვენებელს შორის, როგორიცაა: პროდუქციის დამზადების მოცულობა და ფირმის ფულადი შემოსავლების რაოდენობა. ეთქვას, დადგენილია (ან ახალი ანალიზის შედეგად დადგინდა), რომ ამ ორ მაჩვენებელს შორის არსებობს პარაბოლური დამოკიდებულება. ამის შემდეგ, შემოვიღოთ აღნიშვნები: X იყოს პროდუქციის დამზადების მოცულობა, ხოლო Y კი ფირმის ფულადი შემოსავლების რაოდენობა.

ცხადია, რომ X -სა და Y -ს შორის არსებობს პარაბოლური დამოკიდებულება.

მეორე ეტაპზე უნდა მოხდეს სათანადო ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელის აგება. ჩვენს შემთხვევაში, ასაგებ ეკონომიკურ-მათემატიკურ მოდელს ექნება შემდეგი მარტივი სახე:

$$y=a+bx+cx^2, \quad (1.1)$$

სადაც

a, b და c ცნობილი სიდიდეებია.

მესამე ეტაპზე უნდა ჩატარდეს (1.1) მოდელის მათემატიკური ანალიზი, იმის დასადგენად, რომ აგებული მოდელი მათემატიკურად ნამდვილად სწორად და კომპაქტურად არის ჩაწერილი. თუ აღმოჩნდა, რომ ეს ასე არ არის, მაშინ აგებული მოდელის სახე უნდა შეიცვალოს. ჩვენს შემთხვევაში, მოდელი მათემატიკურად სწორად არის ჩაწერილი.

მეოთხე ეტაპზე უნდა განხორციელდეს აგებული მოდელის ინფორმაციული უზრუნველყოფა. ინფორმაციის მოპოვება, დამუშავება და სათანადო სახით მომზადება.

ჩვენ შემთხვევაში, საჭიროა ვიცოდეთ a, b, c მუდმივი და X ცვლადი პარამეტრების რიცხვითი მნიშვნელობები.

ეთქვას, დაეადგინეთ, რომ $a=1000$; $b=0,5$; $c=0,00007$ და $X=30000$ (ლარს).

მეხუთე ეტაპზე ხდება აგებული მოდელის ამოხსნისათვის საჭირო ალგორითმის შერჩევა (თუ ასეთი არსებობს), ან შემუშავება (თუ ასეთი არ არსებობს).

ჩვენ შემთხვევაში, ამოხსნის ალგორითმი უმარტივესია და იგი გარკვეულია.

ამის შემდეგ, ამავე ეტაპზე უნდა მოხდეს აგებული მოდელის რიცხვითი გათვლა და შედეგების მიღება რაოდენობრივი სახით.

ჩვენ შემთხვევაში:

$$Y = 1000 + 0,5 \cdot 30\,000 + 0,00007 \cdot 30\,000^2 =$$

$$= 1000 + 15\,000 + 63\,000 = 79\,000 \text{ (ლარი).}$$

მეექვსე ეტაპზე უნდა განხორციელდეს გათვლის შედეგად მიღებული რიცხვითი მნიშვნელობების ეკონომიკური ანალიზი.

ჩვენ შემთხვევაში, მიღებული შედეგი მარტივია და იგი სპეციალურ ეკონომიკურ ანალიზს არ საჭიროებს.

ამგვარად, დადგინდა, რომ შესასწავლი ფირმა, სამრეწველო პროდუქციის 30 000 ლარის მოცულობით დამზადების შემთხვევაში, მიიღებს ფულად შემოსავალს 79 000 ლარის ოდენობით.

თავი II. დარგთაშორისი ბალანსის მეთოდი როგორც ეკონომიკის მათემატიკური მოდელირების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი შედეგი

§ 1. დარგთაშორისი ბალანსის მეთოდი და სახეობები

ეკონომიკურ-მათემატიკურ მეთოდებს შორის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ადგილი უჭირავს დარგთაშორისი ბალანსის მეთოდს. ეს მეთოდი დღეისათვის საკმაოდ კარგად არის შესწავლილი არა მარტო თეორიული, არამედ პრაქტიკული კუთხითაც. მისი გამოყენება ითვალისწინებს შესასწავლი ეკონომიკური ობიექტის ზოგადი კანონზომიერებების ასახვას დარგთაშორისი ბალანსის სქემის, ან მისი შესაბამისი ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელის საშუალებით, მათ ანალიზს, საჭირო გათვლებს და ამ გზით მიღებული ახალი ცოდნის პრაქტიკულ რეალიზაციას.

დარგთაშორისი ბალანსის მეთოდის ფუძემდებლად ითვლება ამერიკელი მეცნიერ-ეკონომისტი ე. ლეონტიევი¹, რომელმაც XX საუკუნის 40-იან წლებში გამოაქვეყნა თავისი ცნობილი ნაშრომი “ამერიკული ეკონომიკის სტრუქტურის გამოკვლევა (1919-1939 წწ)”. სწორედ ამ ნაშრომში გვხვდება პირველად, ერთიანი ჩამოყალიბებული სახით, დარგთაშორისი ბალანსის მეთოდის თეორიული საფუძვლები.

დარგთაშორისი ბალანსის მეთოდის გამოყენება შესაძლებელია პროდუქციის წარმოებისა და განაწილების ანალიზის ან დაგეგმვის საქმეში, ეკონომიკის იერარქიული სისტემის ნებისმიერ დონეზე.

დარგთაშორისი ბალანსის მეთოდის გამოყენების ეფექტიანობა, ძირითადადში, მდგომარეობს იმაში, რომ იგი იძლევა მრავალფეროვანტული გაანგარიშებების საშუალებას. მისი დახმარებით შეიძლება, აგრეთვე, განსაზღვრულ იქნეს დარგებს (ან სხვა ეკონომიკურ ერთეულებს) შორის არსებული (ან საჭირო) კავშირები და პროპორციები. იგი

¹ იგი დაიბადა რუსეთში და იქვე მიიღო განათლება.

იძლევა დაბალანსებული გეგმის შედგენის საშუალებასაც და ბოლოს, მისი დახმარებით შესაძლებელია ეკონომიკურ-მათემატიკური მეთოდებისა და გამოთვლითი ტექნიკის ეფექტიანი გამოყენება.

დარგთაშორისი ბალანსი წარმოადგენს სქემას, ანუ ცხრილს, რომელიც აერთიანებს პროდუქციის წარმოების, განაწილებისა და გადანაწილების ქვეცხრილებს.

დარგთაშორისი ბალანსის კლასიკურ სქემას გააჩნია ასეთი სახე (იხ. ნახ. 2.1, 2.2 და 2.3).

დარგთაშორისი ბალანსის კლასიკური სქემა შედგება ოთხი ძირითადი ნაწილისაგან, რომელთაც კვადრანტებს უწოდებენ.

I კვადრანტში, რომელიც წარმოადგენს დარგთაშორისი ბალანსის მთავარ ნაწილს, ასახულია წარმოების საშუალებების დარგთაშორისი ნაკადები (შრომის საგნებისა და მატერიალური მომსახურების შიდასაწარმოო ბრუნვა). *I კვადრანტს* უწოდებენ ჭადრაკულს, რადგან ბალანსის ამ ნაწილის სტრიქონებისა და სვეტების რაოდენობა ერთმანეთის ტოლია, ე.ი. მასში ასახულია იმდენი მომხმარებელი დარგი, რამდენიც მწარმოებელი.

I კვადრანტში მოცემულ პარამეტრებს (მაჩვენებლებს) გააჩნიათ შემდეგი ეკონომიკური შინაარსი: X_i ($i=1,2,\dots,n$ $\wedge$ $j=1,2,\dots,n$) ასახავს i - ური დარგის პროდუქციის იმ რაოდენობას, რომელიც საჭიროა j - ური დარგის პროდუქციის საწარმოებლად.

II კვადრანტში მოცემულია საბოლოო პროდუქტის ნატურალური სტრუქტურა. ამ კვადრანტში მოცემული Y_i ($i=1, 2,\dots,n$) პარამეტრი (მაჩვენებელი) ასახავს i - ური დარგის საბოლოო პროდუქტს.

P_i - არის i - ურ დარგში შექმნილი საბოლოო პროდუქტის ის ნაწილი, რომელიც განკუთვნილია დაგროვებისათვის;

q_i - i -ურ დარგში შექმნილი საბოლოო პროდუქტის ის ნაწილი, რომელიც განკუთვნილია მოხმარებისათვის ($Y_i=P_i+q_i$, სადაც $i=1,2,\dots,n$).

III კეადრანტში ასახულია ეროვნული შემოსავლის (ახლად შექმნილი ღირებულების) ღირებულებითი სტრუქტურა.

Z_j - გამოხატავს j -ური დარგის მიერ ახლად შექმნილ ღირებულებას;

V_j - ასახავს j -ური დარგის შრომის ანაზღაურების მაჩვენებელს;

m_j - არის j -ური დარგის წმინდა შემოსავალი.

ცხადია, რომ $Z_j = m_j + V_j$, $j=1, 2, \dots, n$.

დარგთაშორისი ბალანსის IV კეადრანტში მოცემულია ახლად შექმნილი ღირებულების საბოლოო გადანაწილების მაჩვენებლები.

$V_{საბ}$ - ასახავს ახლად შექმნილი ღირებულების იმ ნაწილს, რომელიც უნდა მოხმარდეს შრომის ანაზღაურებას;

$m_{საბ}$ - არის ახლად შექმნილი ღირებულების ის ნაწილი, რომელიც გამოხატავს წმინდა შემოსავლის მაჩვენებელს;

$X_i(X_j)$ - არის $i(j)$ - ური დარგის საერთო პროდუქცია.

დარგთაშორისი ბალანსის სქემის, კლასიკური სახე (რუსული ვარიანტი), რომელიც მოცემულია ნახ 2.1-ზე,

დარგთაშორისი ბალანსის კლასიკური სქემა
(რუსული ვარიანტი)

მომხმარებელი დარგები მწარმოებელი დარგები	1.	2.	n.	საბოლოო პროდუქტის ნატურალურ-ნიუ- თობრივი სტრუქტურა Y		საერთო პროდუქტი
1.	X_{11}	$X_{12} \dots$	X_{1n}	p_1	q_1	X_1
2.	X_{21}	$X_{22} \dots$	X_{2n}	p_2	q_2	X_2
3.	X_{31}	$X_{32} \dots$	X_{3n}	p_3	q_3	X_3
		I			I	
n.	X_{n1}	$X_{n2} \dots$	X_{nn}	p_n	q_n	X_n
შრომის ანაზღაურება	V_1	V_2	V_n	V_{Σ}		—
წმინდა შემოსავალი		III	Z	IV		—
		m_1	$m_2 \dots m_n$	m_{Σ}		—
საერთო პროდუქტია	X_1	$X_2 \dots$	X_n	—		X

ნახ.2.1.

უფრო მეტად შედგენილია ადმინისტრაციულ-მმართველური (ანუ საგეგმო-დირექტიული) ეკონომიკური სისტემების ფუნქციონირების შესაბამის ენაზე.

ახლა განვიხილოთ დარგთაშორისი ბალანსის სქემის ისეთი კლასიკური სახე (იაპონური ვარიანტი), რომელიც უფრო მეტად შედგენილ იქნება საბაზრო-ეკონომიკური სისტემების ფუნქციონირების შესაბამის ენაზე.

დარგთაშორისი ბალანსის კლასიკური სქემა
(იაპონური ვარიანტი)

მყოფელი დარგები → მოთხოვნის სექტორი გამყოფელი დარგები ↓ მიწოდების სექტორი	წარმოების დარგები (სექტორები)		საბოლოო მოთხოვნა	გამოშვების მოცულობა	
	1.	2 .	j.	n.	
წარმოების დარგები (სექტორები)	1.	$x_{11} \ x_{12}$	$x_{1j} \dots x_{1n}$	y_1	x_1
	2.	$x_{21} \ x_{22}$	$x_{2j} \dots x_{2n}$	y_2	x_2
			გამოშვების განაწილების სტრუქტურა		
i.	$x_{i1} \ x_{i2}$	შუალედური პროდუქტების დანახარჯები	შუალედური მოთხოვნა	საბოლოო მოხმარება	x_i
	$x_{ij} \dots x_{in}$	$x_{ij} \dots x_{in}$	y_i		
n.	$x_{n1} \ x_{n2}$	$x_{nj} \dots x_{nn}$	y_n		x_n
დამოუკიდებელი დარგების მოცულობა	$V_1 \ V_2$	შაქტორული დანახარჯები	$V_j \dots V_n$		
გამოშვების მოცულობა	$x_1 \ x_2 \dots$	$x_j \dots x_n$			

ნახ 2.2.

ამ სქემას სტრიქონები გვიჩვენებს ყოველი სახეობის პრიორიტეტის გაჩაღების განაწილებას სქემის ყოველ სტრიქონში ასახულია შერჩევი სახის ბალანსური დამოკიდებულება:

მოცემული სახეობის პროდუქტის გამოშვება = შუალედური მოთხოვნა + საბოლოო მოთხოვნა.

ცხრილის სვეტები ასახავს დანახარჯების სტრუქტურას, ანუ თითოეული დარგის მიერ გამოყენებადი (ან საჭირო) რესურსების სტრუქტურას.

ამ სქემის სვეტები ასახავს შემდეგ ბალანსს:

დარგის ხარჯები = შუალედური დანახარჯები + დამატებული ღირებულება.

დარგთაშორისი ბალანსის კლასიკური სქემა, რომელიც მოცემულია 2.2 ნახაზზე, შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს შემდეგი თანამედროვე ვარიანტის სახით (იხ. ნახ. 2.3).

2.3 ნახაზზე წარმოდგენილ მოდელში იგულისხმება, რომ

$$V_j = W_j + L_j + P_j + T_j + A_j + Q_j$$

$$Y_j = H_j + V_j,$$

$$X_j = \sum_{i=1}^n X_{ij} + Y_j,$$

სადაც V_j – არის j -ურ დარგში შექმნილი წმინდა პროდუქცია;

W_j – არის j -ურ დარგში გაცემული ხელფასი;

L_j – დანარიცხები j -ურ დარგში გაცემულ ხელფასზე;

P_j – j -ური დარგის მოგება;

T_j – დამატებული ღირებულების გაქვასახადი და აქციზი, რომელიც მოდის j -ურ დარგზე;

A_j – გადასახადები სპეციალურ სახელმწიფო ფონდებში, რომლებიც მოდის j -ურ დარგზე;

Q_j – დამატებული ღირებულების სხვა ელემენტები, რომელიც მოდის j -ურ დარგზე;

H_j – ამორტიზაციის ანარიცხები, რომელიც მოდის j -ურ დარგზე;

Y_j – j -ურ დარგში შექმნილი მთლიანი შიდა პროდუქტი;

X_j – j -ურ დარგში შექმნილი მთლიანი პროდუქცია და მასში გაწეული მომსახურება;

X_{ij} – შუალედური პროდუქტი, რომელიც მოძრაობს i -ური დარგიდან j -ურში.

[illegible]

2.3 ნახაზის გაგრძელება

ამორტიზაცია ხელფასი დანარიცხები ხელფასებზე მოგება დამატებული ღირებულების გადასახადი და აქციზი გადასახადები სპეციალურ სახელმწიფო ფონდებში დამატებული ღირებულების სხვა ულემენტები წმინდა პროდუქცია	H ₁	H ₂	H ₃	H _n	$\sum_{i=1}^n H_i$	$W_{\text{ნაზ}}$		
	W ₁	W ₂	...	W _n	$\sum_{i=1}^n W_i$			
	L ₁	L ₂		L _n	$\sum_{i=1}^n L_i$			
	P ₁	P ₂		P _n	$\sum_{i=1}^n P_i$			
	T ₁	T ₂		T _n	$\sum_{i=1}^n T_i$			
	A ₁	A ₂		A _n	$\sum_{i=1}^n A_i$			
	O ₁	O ₂		O _n	$\sum_{i=1}^n O_i$			
მთლიანი შიდა პროდუქცია მთლიანი პროდუქცია და მომსახურება	V ₁	V ₂	V ₃	V _n	$\sum_{i=1}^n V_i$	$V_{\text{ნაზ}}$		
	Y ₁	Y ₂	...	Y _n	$\sum_{i=1}^n Y_i$			
	X ₁	X ₂	...	X _n	$\sum_{i=1}^n X_i$			

დარგთაშორისი ბალანსის კლასიკურ სქემას (ნახ. 2.1), რომელიც შედგენილია ვულად გამოხატულებაში, გააჩნია ორი ძირითადი თვისება:

1. დანახარჯების საერთო მოცულობა ტოლია პროდუქტის გამოშვების მთლიანი მოცულობისა, ე.ი. $X_i = X_j$ (როცა $i=j$), სადაც X_i და X_j - შესაბამისად წარმოადგენს საერთო გამოშვების ვექტორის შესაბამის კომპონენტებს. სხეანაირად

$$X^0 = X^0$$

2. დარგთაშორისი ბალანსის სქემის II კვადრანტის საბოლოო შედეგი ტოლი უნდა იყოს III კვადრანტის საბოლოო შედეგისა. მათემატიკურად ეს ნიშნავს, რომ

$$\sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{j=1}^n Z_j.$$

დარგთაშორისი ბალანსის კლასიკური სქემის ანალიზიდან გამომდინარეობს შემდეგი ჭეშმარიტი ტოლობა:

$$X_i = \sum_{j=1}^n X_{ij} + Y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1)$$

შემოვიტანოთ პირდაპირი დანახარჯების კოეფიციენტთა ცნება და ისინი ავლნიშნოთ a_{ij} -თი. a_{ij} - იყოს i -ური დარგის პროდუქციის ის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა j -ური დარგის პროდუქციის ერთეულის საწარმოებლად. თუ ამ კოეფიციენტებს გავითვალისწინებთ (2.1)-ში, მივიღებთ:

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + Y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

ამ ტოლობას უწოდებენ დარგთაშორისი ბალანსის სტატიკური სახის კლასიკურ მოდელს.

თუ (2.2) მოდელს ჩაეწერთ მატრიცული სახით, მივიღებთ:

$$X = AX + Y, \quad (2.3)$$

სადაც

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}.$$

(2.3) ტოლობიდან შეიძლება მივიღოთ:

$$Y = (E - A)X \quad \text{და} \quad X = (E - A)^{-1}Y, \quad (2.4)$$

სადაც E არის ერთეულოვანი მატრიცა.

დარგთაშორისი ბალანსის თეორიაში მნიშვნელოვანი ადგილი უჭირავს პროდუქტიულობის ცნებას. A მატრიცას (2.3) ტოლობაში ეწოდება პროდუქტიული, თუ მოიძებნება ისეთი არაუარყოფითი X ვექტორი, რომლისთვისაც $(E - A)X \geq 0$, ანუ $Y \geq 0$. თუ (2.3) ტოლობაში A მატრიცა არის პროდუქტიული, მაშინ ამბობენ, რომ ეს ტოლობა მთლიანად არის პროდუქტიული.

დარგთაშორისი ბალანსის მეთოდით ძირითადში შეიძლება შემდეგი სამი ტიპის ეკონომიკური ამოცანის ამოხსნა:

1. განსაზღვრული დარგებისათვის ცნობილია მათ მიერ გამოსაშვები საერთო პროდუქტების მაქვენებლები ($X_1, X_2, \dots, X_n$) და უცნობია მათი შესაბამისი საბოლოო პროდუქტების ($Y_1, Y_2, \dots, Y_n$) მაჩვენებლები. ასეთ პირობებში, საჭიროა მოინახოს ამ დარგების შესაბამის საბოლოო პროდუქტთა მაჩვენებლების უცნობი სიდიდეები ($Y_1, Y_2, \dots, Y_n$).

2. განსაზღვრული დარგებისათვის ცნობილია მათ მიერ გამოსაშვები საბოლოო პროდუქტების მაჩვენებლები ($Y_1, Y_2, \dots, Y_n$) და უცნობია მათი შესაბამისი საერთო პროდუქტების მაჩვენებლები ($X_1, X_2, \dots, X_n$). ასეთ პირობებში, საჭიროა მოინახოს ამ დარგების შესაბამის საერთო პროდუქტთა მაჩვენებლების უცნობი სიდიდეები ($X_1, X_2, \dots, X_n$).

3. განსახილველი დარგების ერთი ნაწილისათვის ცნობილია საერთო პროდუქტის მაჩვენებლები ($X_1, X_2, \dots, X_m$) და უცნობია საბოლოო პროდუქტის მაჩვენებლები ($Y_1, Y_2, \dots, Y_m$), ხოლო მეორე ნაწილისათვის კი პირიქით, ცნობილია საბოლოო პროდუქტის მაჩვენებლები ($Y_{m+1}, Y_{m+2}, \dots, Y_n$) და უცნობია საერთო პროდუქტის მაჩვენებლები ($X_{m+1}, X_{m+2}, \dots, X_n$). ასეთ პირობებში, საჭიროა ერთდროულად მოინახოს როგორც საერთო პროდუქტის, ასევე საბოლოო პროდუქტის უცნობი სიდიდეები ($Y_1, Y_2, \dots, Y_m, X_{m+1}, X_{m+2}, \dots, X_n$).

აღნიშნულის ჭეშმარიტება ცხადი გახდება, თუ განვიხილავთ და გავანალიზებთ დარგთაშორისი ბალანსის სტატიკური სახის კლასიკურ მოდელში ასახულ n განტოლებათა სისტემას $2n$ უცნობით (იხ. (2.2) ტოლობა).

დღეისათვის ცნობილია *დარგთაშორისი ბალანსის სხვადასხვა სახეობა*.

დარგთაშორისი ბალანსები, მათში ასახული *კელევის მთავარი მიზნისა და ობიექტის შინაარსის შესაბამისად*, შეიძლება კლასიფიცირებულ იქნეს შემდეგი ნიშნების მიხედვით:

1. *ზომის ერთეულების მიხედვით*.

ა). *ნატურალური*, ბ). *ნატურალურ-ღირებულებითი (ანუ კრებსითი)* და გ). *ღირებულებითი*.

ნატურალური დარგთაშორისი ბალანსი ეს ისეთი ბალანსია, რომელშიც ყველა ეკონომიკური მაჩვენებელი ასახულია ნატურალური ფორმით.

ნატურალურ-ღირებულებით დარგთაშორის ბალანსში ეკონომიკური მაჩვენებლები ასახულია როგორც ნატურალური, ასევე ღირებულებითი ფორმით.

ღირებულებით დარგთაშორის ბალანსში ეკონომიკური მაჩვენებლები ასახულია მხოლოდ ღირებულებითი ფორმით.

ნატურალური და ღირებულებითი დარგთაშორისი ბალანსების განსხვავება მდგომარეობს არა მარტო საზომი

ერთეულების ფორმასა და შინაარსში, არამედ პროდუქციის აღრიცხვის მეთოდოლოგიაშიც.

ნატურალური დარგთაშორისი ბალანსის აგება ხდება საერთო პროდუქციის ბრუნვის მიხედვით, ე. ი. დანახარჯების შემადგენლობაში ამ დროს გაოვალისწინებულ უნდა იქნეს ყველა სახის პროდუქცია (იმისაგან დამოუკიდებლად ეს პროდუქცია მიღებულია გარედან, თუ ნაწარმოებია უშუალოდ საწარმოში).

ღირებულებითი დარგთაშორისი ბალანსის აგება უმეცრეს შემთხვევაში ხდება უპირატესად საქარხნო მეთოდის მიხედვით. ამ დროს დანახარჯების რანგში გაითვალისწინება მხოლოდ ის პროდუქცია, რომელიც საწარმოში შემოდის გარედან, ხოლო წარმოების შედეგების ასახვა კი ხდება საწარმოთა საერთო პროდუქციების მიხედვით.

ნატურალურ-ღირებულებითი დარგთაშორისი ბალანსის აგება ეყრდნობა ბალანსის დაძოვუკიდებელ პოზიციაში პროდუქციის იმ უმნიშვნელოვანეს სახეობათა გამოყოფის პრინციპს, რომელთა ასახვაც ხდება სტრიქონების მიხედვით, ნატურალურ გამოხატულებაში. პროდუქციის დანარჩენი სახეობების ჩართვა ნატურალურ-ღირებულებით დარგთაშორის ბალანსში ხდება ღირებულებით ფორმაში, გაერთიანებული ჯგუფების სახით.

2. ანალიზის ობიექტის მიხედვით.

ა) *ეროვნული*, ბ) *რაიონთაშორისი*, გ) *რაიონული*, დ) *დარგობრივი* დარგთაშორისი ბალანსები და ე) *დარგთაშორისი ბალანსის პრინციპზე აგებული საწარმოს ტექნიკურ-სამრეწველო-საფინანსო გეგმის ამსახველი მატრიცა.*

ეროვნული დარგთაშორისი ბალანსი ეს ისეთი ბალანსია, რომელიც აგებულია მთელი ეროვნული მეურნეობისათვის, ე. ი. მოიცავს ამა თუ იმ ქვეყნის მთელ ეკონომიკას.

რაიონთაშორისი დარგთაშორისი ბალანსი იგება ორი ან მეტი ეკონომიკური რაიონისათვის.

რაიონული დარგთაშორისი ბალანსი იგება ამა თუ იმ ერთი კონკრეტული რაიონისათვის. დარგობრივი დარგთაშორისი ბალანსი არის ისეთი ბალანსი, რომელიც აგებულია ამა თუ იმ კონკრეტული დარგისათვის.

საწარმოს ტექნიკურ-სამრეწველო-საფინანსო გეგმის ამსახველი მატრიცის აგება ხდება ამა თუ იმ კონკრეტული საწარმოსათვის.

3. ანალიზის პერიოდის (ანუ დროის ფაქტორის)

გათვალისწინებით.

ა). დინამიკური და ბ). სტატიკური დარგთაშორისი ბალანსები.

დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსი ეს ისეთი ბალანსია, რომელიც შესასწავლი ობიექტის სხვადასხვა დროითი პერიოდების შესაბამის ზოგად კანონზომიერებებს ასახავს ერთდროულად, ურთიერთდაკავშირებულად. ასეთ ბალანსებში დაცულია პრინციპი – "პროდუქციის წარმოების მოცულობა ამა თუ იმ განსახილველი პერიოდისათვის (მაგ. წლისათვის) დამოკიდებულია პროდუქციის აღწარმოების პროცესზე მის უშუალოდ წინმსწრებ პერიოდში".

დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსისათვის დამახასიათებელია ისიც, რომ მისი აგების დროს საბოლოო პროდუქტიდან ცალკე გამოყოფენ კაპიტალდაბანდებების მანქანებებს.

დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსი, სხვებთან შედარებით, წარმოადგენს ყველაზე უფრო სრულყოფილ ბალანსს. იგი ყველაზე უფრო ადექვატურად ასახავს ეკონომიკური აღწარმოების პროცესს (თუმცა, ისიც უნდა აღინიშნოს, რომ ასეთი ბალანსების ამოხსნას, ზოგჯერ, ახლავს სიძნელეები, რადგან მათი ამოხსნისათვის საჭირო ალგორითმების შემუშავება ხშირად მთავრდება უარყოფითად).

სტატიკური დარგთაშორისი ბალანსი, ეს ისეთი ბალანსია, რომელიც შესასწავლი ობიექტის ზოგად კანონზომიერებებს ასახავს ერთი რომელიმე კონკრეტული დროითი პერიოდისათვის.

დარგთაშორისი ბალანსის, როგორც დინამიკური, ასევე სტატიკური მოდელები შეიძლება გამოყენებულ იქნეს არა მარტო როგორც წარსული ინფორმაციის ანალიზის საშუალება, არამედ როგორც მომავალი საგეგმო მაჩვენებლების განმსაზღვრელი საშუალებები. მაშასადამე, ეს მოდელები შეიძლება გამოყენებულ იქნეს როგორც საგეგმო, ასევე საანგარიშგებო მაჩვენებლების მნიშვნელობათა დასადგენად.

4. კელევის მიზნის მიხედვით.

ა). საანგარიშგებო და ბ). საგეგმო დარგთაშორისი ბალანსები.

საანგარიშგებო დარგთაშორისი ბალანსი ეს ისეთი ბალანსია, რომელიც აგებულია საანგარიშგებო პერიოდის ანალიზისათვის.

საგეგმო დარგთაშორისი ბალანსი ეს ისეთი ბალანსია, რომელიც აგებულია გეგმური მაჩვენებლების განსაზღვრის მიზნით, საგეგმო პერიოდისათვის.

5. დარგთაშორისი ბალანსის აგების დროს გამოყენებული პრინციპის (სქემის) მიხედვით:

ა). დარგთაშორისი ბალანსები, რომლებიც აგებულია პრინციპის – “დანახარჯები-გამოშვება” – გამოყენებით,

ბ) დარგთაშორისი ბალანსები, რომლებიც აგებულია პრინციპის – “მიწოდება-გამოშვება” – გამოყენებით.

§ 2. პირდაპირი, ირიბი, სრული დანახარჯების კოეფიციენტები და მათი გამოსათვლელი ფორმულები

დარგთაშორისი ბალანსის თეორიაში და მისი გამოყენების პრაქტიკაში დიდი მნიშვნელობა ენიჭება პირდაპირი, ირიბი და სრული დანახარჯების კოეფიციენტებს.

პირდაპირი დანახარჯები ეს ისეთი დანახარჯებია, რომლებიც პირდაპირ, უშუალოდ იხარჯება ამა თუ იმ განსახილველი პროდუქტის საწარმოებლად, ხოლო ირიბი

დანახარჯები კი არის ისეთი დანახარჯები, რომლებიც იხარჯება არაპირდაპირ, შუალობითად.

პირდაპირი და ირიბი დანახარჯების ჯამი კი წარმოადგენს სრულ დანახარჯებს.

პირდაპირი დანახარჯების წარმოქმნას ადგილი აქვს განსახილველი პროდუქციის წარმოების პროცესში, უშუალოდ ამ პროცესის მიმდინარეობის დროს. პირდაპირი დანახარჯების კოეფიციენტებს აღნიშნავენ a_{ij} ($i=1,2,\dots,m$ $\wedge$ $j=1,2,\dots,n$) მათემატიკური პარამეტრებით.

a_{ij} კოეფიციენტის ეკონომიკური არსი მდგომარეობს იმაში, რომ იგი გამოხატავს i -ური დარგის პროდუქციის იმ რაოდენობას, რომელიც უშუალოდ დანახარჯის სახით არის საჭირო j -ური დარგის პროდუქციის ერთეულის საწარმოებლად.

ირიბი დანახარჯები შეიძლება იყოს პირველი, მეორე და ა.შ. m -ური რიგის. m -ური რიგის ირიბ დანახარჯს აღნიშნავენ $a_{ij}^{(m)}$ -მათემატიკური პარამეტრით და მისი ეკონომიკური არსი მდგომარეობს შემდეგში:

$a_{ij}^{(m)}$ (ე.ი. i -ური დარგის პროდუქციის m -ური რიგის ირიბი დანახარჯი j -ური დარგის პროდუქციის ერთეულის საწარმოებლად) გამოხატავს i -ური დარგის პროდუქციის იმ შუალობით (ირიბ) დანახარჯს, რომელიც საჭიროა j -ური დარგის პროდუქციის ერთეულის საწარმოებლად და რომელიც განიუთებული სახით გადმოდის j -ური სახის პროდუქციაში, მისი წარმოების $m-1$ ეტაპით წინმსწრები პროცესის შედეგად.

სრული დანახარჯების კოეფიციენტებს აღნიშნავენ C_{ij} მათემატიკური პარამეტრებით და მათი ეკონომიკური არსი მდგომარეობს შემდეგში:

C_{ij} (i -ური დარგის პროდუქციის სრული დანახარჯი j -ური დარგის პროდუქციის ერთეულზე) გამოხატავს i -ური დარგის პროდუქციის იმ რაოდენობას, რომელიც საჭიროა დაიხარჯოს j -ური დარგის პროდუქციის ერთეულის საწარმოებლად, როგორც უშუალოდ (პირდაპირი დანახარ-

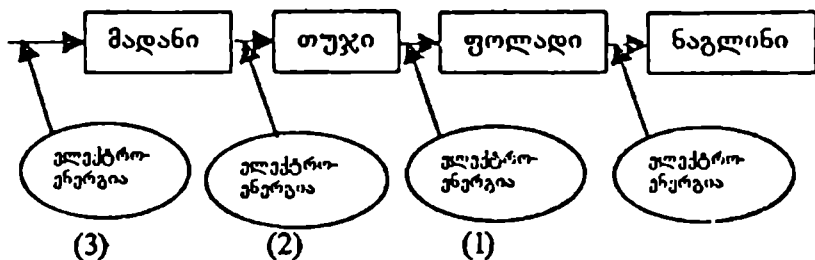
ჯების სახით), ასევე შუალობითად (ირიბი დანახარჯების სახით).

აღნიშნულიდან ცხადია, რომ სრული დანახარჯების ესა თუ ის მაჩვენებელი ტოლია მისი შესაბამისი პირდაპირი და ყველა რიგის ირიბი დანახარჯების ჯამისა. მაშასადამე, შეიძლება ჩაიწეროს:

$$C_{ij} = a_{ij} + a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \dots + a_{ij}^{(m)} + \dots \quad (2.5)$$

პირდაპირი, ირიბი და სრული დანახარჯების კოეფიციენტთა შინაარსის უფრო ღრმად გასაგებად მოვიყვანოთ ასეთი მაგალითი:

უთქვათ, მადნიდან უნდა მივიღოთ ნაგლინი. ამისათვის საჭიროა სხვადასხვა სახის რესურსის დანახარჯებით პირველად ეაწარმოოთ მადანი, შემდეგ მადნიდან – თუჯი, თუჯიდან – ფოლადი და ბოლოს ფოლადიდან – ნაგლინი (იხ. ნახ. 2.4).



ნახ. 2.4

განვიხილოთ ელექტროენერგიის პირდაპირი, ირიბი და სრული დანახარჯების ფორმირების პროცესი მოცემული მაგალითის შემთხვევაში.

ელექტროენერგიის ის დანახარჯი, რომელიც საჭიროა მადნიდან თუჯის ერთეულის წარმოებისათვის, არის პირდაპირი დანახარჯი თუჯის წარმოების პროცესისათვის, ხოლო ელექტროენერგიის ის რაოდენობა, რომელიც

საჭიროა მადნის ერთეულის მოსაპოვებლად, მისთვის არის პირველი რიგის ირიბი დანახარჯი.

ამავე პრინციპის მიხედვით, ფოლადიდან ნაგლინის ერთეულის მისაღებად საჭირო ელექტროენერგიის რაოდენობა წარმოადგენს პირდაპირ დანახარჯს ნაგლინის საწარმოებლად, ხოლო თუჯიდან ფოლადის ერთეულის მისაღებად საჭირო ელექტროენერგიის რაოდენობა კი მისთვის (1) რიგის ირიბი დანახარჯია, ასევე, მადნიდან თუჯის ერთეულის გამოსაღობად საჭირო ელექტროენერგიის რაოდენობა ნაგლინის მისაღებად (2)-ე რიგის ირიბ დანახარჯს წარმოადგენს, მაშინ როცა მადნის ერთეულის მოპოვებისათვის საჭირო ელექტროენერგიის რაოდენობა მისთვის არის (3)-ე რიგის ირიბი დანახარჯი. ამ პირდაპირი და სამივე რიგის ირიბი დანახარჯების ჯამი წარმოადგენს ნაგლინის ერთეულის საწარმოებლად საჭირო ელექტროენერგიის სრულ დანახარჯებს.

საინტერესოა ამ კოეფიციენტთა განსაზღვრის ხერხების განხილვა.

პირდაპირი დანახარჯების კოეფიციენტთა განსაზღვრის ერთ-ერთ გზას წარმოადგენს თითოეული საწარმოს მიერ გამოშვებულ (ან გამოსაშვებ) პროდუქტთა და საწარმოო ნორმების თანდათანობითი გამსხვილების ხერხი.

ამ კოეფიციენტთა განსაზღვრავათ არსებობს მეორე გზაც, რომელიც მდგომარეობს საანგარიშგებო პერიოდის დანახარჯთა შესწავლაში. ამ შემთხვევაში, პირდაპირი დანახარჯების კოეფიციენტი წარმოადგენს მოცემული პროდუქტის წარმოებისათვის საჭირო დანახარჯთა ნორმების საშუალო არითმეტიკულს, ე. ი. ამ კოეფიციენტები შეიძლება გამოითვალოს შემდეგი ფორმულით:

$$a_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^k a_{ij}^{\oplus} x_j^{\oplus}}{\sum_{i=1}^k x_j^{\oplus}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.6)$$

სადაც $X_j^{(k)}$ წარმოადგენს j -ური დარგის პროდუქციის საერთო რაოდენობას საანგარიშგებო პერიოდის k -ური დაკვირვების დროს;

$a_{ij}^{(k)}$ - წარმოადგენს i -ური დარგის პროდუქციის იმ რაოდენობას, რომელიც საჭირო იყო j -ური დარგის პროდუქციის ერთეულის საწარმოებლად საანგარიშგებო პერიოდის k -ური დაკვირვების დროს;

K -იყოს საანგარიშგებო პერიოდში ჩატარებულ დაკვირვებათა რაოდენობა.

(m) -ური რიგის ირიბი დანახარჯების გამოსათვლელად ძირითადში არსებობს შემდეგი ორი ფორმულა:

$$1) a_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}^{(m-1)}, \quad (2.7)$$

$$2) a_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(m-1)} a_{kj}, \quad (2.8)$$

სადაც $a_{ij}^{(m)}$ - არის i -ური დარგის პროდუქციის (m) ური რიგის ირიბი დანახარჯები j -ური დარგის პროდუქციის ერთეულის საწარმოებლად.

$a_{ik}^{(m-1)}$ - არის i - ური დარგის პროდუქციის ($m-1$) რიგის ირიბი დანახარჯები k -ურ დარგის პროდუქციის ერთეულის საწარმოებლად.

$a_{kj}^{(m-1)}$ - არის k - ური დარგის პროდუქციის ($m-1$) რიგის ირიბი დანახარჯები j -ური დარგის პროდუქციის ერთეულის საწარმოებლად.

$a_{ik}(a_{kj})$ - არის i - ური (k - ური) დარგის პირდაპირი დანახარჯების კოეფიციენტები k - ური (j -ური) დარგის პროდუქციის ერთეულის საწარმოებლად.

სრული დანახარჯების კოეფიციენტების გამოთვლა კი ხდება შემდეგი ორი ფორმულით:

$$1) C_j = a_j + \sum_{k=1}^n a_k C_k, \quad (2.9)$$

$$2) C_j = a_j + \sum_{k=1}^n C_k a_{kj}, \quad (2.10)$$

სადაც

C_j - არის i -ური დარგის პროდუქციის სრული დანახარჯების კოეფიციენტი j -ური დარგის პროდუქციის ერთეულის საწარმოებლად.

$C_k(C_{kj})$ - არის i -ური (k - ური) დარგის პროდუქციის სრული დანახარჯების კოეფიციენტები k -ური (j -ური) დარგის პროდუქციის ერთეულის საწარმოებლად.

a_{ij} , a_{ik} და a_{kj} კოეფიციენტები წარმოადგენენ პირდაპირი დანახარჯების კოეფიციენტებს.

(2.7) ფორმულის გამოყენა ხდება ლოგიკური მსჯელობისა და ინდუქციური განზოგადების გზით. თანმიმდევრობით ჩაეწეროთ ჭეშმარიტი ტოლობები

$a_{ij}^{(1)}$, $a_{ij}^{(2)}$, $a_{ij}^{(3)}$, ..., $a_{ij}^{(m)}$ სახეობის ირიბი დანახარჯებისათვის. ეკონომიკური ანალიზის შემდეგ, ცხადია შემდეგი ტოლობების ჭეშმარიტება:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{i1} \cdot a_{1j} + a_{i2} \cdot a_{2j} + \dots + a_{in} \cdot a_{nj} \quad (2.11)$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{i1} \cdot a_{1j}^{(1)} + a_{i2} \cdot a_{2j}^{(1)} + \dots + a_{in} \cdot a_{nj}^{(1)} \quad (2.12)$$

$$a_{ij}^{(3)} = a_{i1} \cdot a_{1j}^{(2)} + a_{i2} \cdot a_{2j}^{(2)} + \dots + a_{in} \cdot a_{nj}^{(2)} \quad (2.13)$$

$$a_{ij}^{(m)} = a_{i1} \cdot a_{1j}^{(m-1)} + a_{i2} \cdot a_{2j}^{(m-1)} + \dots + a_{in} \cdot a_{nj}^{(m-1)} \quad (2.14)$$

(2.14) ტოლობის ჭეშმარიტებიდან გამომდინარეობს

$$a_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot a_{kj}^{(m-1)} \quad \text{ტოლობის ჭეშმარიტებაც.}$$

მსგავსი მსჯელობით შეიძლება (2.8) ტოლობის ჭეშმარიტების დამტკიცებაც.

(2.9) ფორმულის მისაღებად (2.7) გავეთვალისწინოთ (2.5)-ში და გვექნება:

$$\begin{aligned}
C_{ij} &= a_{ij} + a_{i1} \cdot a_{1j} + a_{i2} \cdot a_{2j} + \dots + a_{in} \cdot a_{nj} + a_{i1} \cdot a_{1j}^{(1)} + a_{i2} \cdot a_{2j}^{(1)} + \\
&\quad + a_{in} \cdot a_{nj}^{(1)} + a_{i1} \cdot a_{1j}^{(2)} + a_{i2} \cdot a_{2j}^{(2)} + \dots + a_{in} \cdot a_{nj}^{(2)} + \\
&\quad + a_{i1} \cdot a_{1j}^{(m-1)} + a_{i2} \cdot a_{2j}^{(m-1)} + \dots + a_{in} \cdot a_{nj}^{(m-1)} + \dots = a_{ij} + \\
&\quad + a_{i1} (a_{1j} + a_{1j}^{(1)} + a_{1j}^{(2)} + \dots + a_{1j}^{(m-1)}) + a_{i2} (a_{2j}^{(1)} + \\
&\quad + a_{2j}^{(2)} + \dots + a_{2j}^{(m-1)}) + a_{ik} (a_{kj}^{(1)} + a_{kj}^{(2)} + \dots + \\
&\quad + a_{kj}^{(m-1)} + \dots) + \dots = \\
&= a_{ij} + a_{i1} \cdot C_{1j} + a_{i2} \cdot C_{2j} + \dots + a_{ik} \cdot C_{kj} + \dots = a_{ij} + \sum_{k=1}^n a_{ik} C_{kj} \quad (2.15)
\end{aligned}$$

მსგავსი გარდაქმნებით შეიძლება მივიღოთ (2.10) ფორმულაც (თუ (2.8)-ს გაუითვალისწინებთ (2.5)-ში).

§ 3. დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსი

დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსები, განსხვავებით სტატიკურისაგან, ასახავენ ეკონომიკის განვითარების არა ერთ, რომელიმე პროცესს, არამედ მდგომარეობას და ამყარებენ უშუალო ურთიერთკავშირს განვითარების წინა და მომდევნო ეტაპებს შორის.

დღეისათვის, სპეციალურ ლიტერატურაში ცნობილია დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსის სხვადასხვა სახეობა. მათ შორის შეიძლება გამოიყოს შემდეგი:

1. დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსები შებრუნებული რეკურსიით, რომლებიც წარმოადგენს ნახევრად დინამიკურ ბალანსებს;
2. რეკურენტული სახის დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსები, რომლებშიც გაანგარიშებები წარმოებს ეტაპობად, რეკურენტული წესით.

3. სრული, ანუ კლასიკური სახის დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსები. ისინი სრულყოფილი სახით ასახავენ დამოკიდებულებას ძირითადი ფონდების ზრდასა და მის ხარჯზე გამოწვეული საერთო პროდუქციის ზრდას შორის.

4. დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსები ლაგის გათვალისწინებით და მის გაუთვალისწინებლად.

ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელის მათემატიკური ჩაწერის ფორმის მიხედვით ცნობილია დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსის 3 სახეობა:

1). სასრულსხვაობიანი დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსის მოდელები;

2). დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსები წრფივი სახის განტოლებების გამოყენებით.

3). დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსები დიფერენციალურ განტოლებათა გამოყენებით.

განვიხილოთ დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსის კლასიკური სქემისა და მოდელის აგების ძირითადი პრინციპები.

ამ მიზნით, განვიხილოთ ისეთი დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსის სქემა და მოდელი, რომელიც აშკარად გვიჩვენებს, რომ ის არის სტატიკური დარგთაშორისი ბალანსის განვითარებული სახეობა.

დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსის უმარტივეს მოდელთა ასაგებად განვიხილოთ მისი ძირითადი სქემის ორი კვადრანტი, რომელსაც გააჩნია ასეთი სახე:

მწამომრეული დარგები	მიმდინარე დანახარჯთა დარგთაშორისი ნაკადები	საწარმოო კაპიტალდაბანდებათა დარგთაშორისი ნაკადები (ფონდების ნაზრდი)	საბოლოო პროდუქტი	საერთო პროდუქტი(ყიდა)
	1. 2. 3. ...n.	1. 2. 3. n.		
1.	$X_{11} X_{12} X_{13} \dots X_{1n}$	$\Delta\Phi_{11}\Delta\Phi_{12}\Delta\Phi_{13}\dots\Delta\Phi_{1n}$	Z_1	X_1
2.	$X_{21} X_{22} X_{23} \dots X_{2n}$	$\Delta\Phi_{21}\Delta\Phi_{22}\Delta\Phi_{23}\dots\Delta\Phi_{2n}$	Z_2	X_2
3.	$X_{31} X_{32} X_{33} \dots X_{3n}$	$\Delta\Phi_{31}\Delta\Phi_{32}\Delta\Phi_{33}\dots\Delta\Phi_{3n}$	Z_3	X_3
n.	$X_{n1} X_{n2} X_{n3} \dots X_{nn}$	$\Delta\Phi_{n1}\Delta\Phi_{n2}\Delta\Phi_{n3}\dots\Delta\Phi_{nn}$	Z_n	X_n

ნახ. 2.5

ნახ. 2.5-დან ჩანს, რომ დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსის სქემაში, განსხვავებით სტატიკურისაგან, მონაწილეობს დარგთაშორისი ნაკადების ორი სახეობის მატრიცა. ერთი არის მიმდინარე დანახარჯების მატრიცა, რომელიც ემთხვევა სტატიკური დარგთაშორისი ბალანსის შესაბამის მატრიცას, ხოლო მეორე კი წარმოადგენს $\Delta\Phi_{ij}$ პარამეტრებისაგან შემდგარ მატრიცას. $\Delta\Phi_{ij}$ – ასახავს i -ური დარგის პროდუქციის იმ რაოდენობას, რომელიც მიმდინარე პერიოდში განკუთვნილია j -ურ დარგში ძირითადი ფონდების აღწარმოებისათვის კაპიტალდაბანდებაების (ინვესტიციების) სახით. ეს მაჩვენებლები, შესაბამისად, გამოყოფილია საბოლოო პროდუქტთა მაჩვენებლებისაგან.

2.5 ნახაზზე მოცემული სქემის ანალიზიდან ცხადია, რომ შესაძლებელია შემდეგი ჭეშმარიტი ტოლობის ჩაწერა:

$$\sum_{j=1}^n \Delta\Phi_{ij} + Z_i = Y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.16)$$

თუ (2.16)-ს გავითვალისწინებთ (2.2)-ში, მივიღებთ:

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + \sum_{j=1}^n \Delta \Phi_{ij} + z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.17)$$

თუ ΔX_j -თი ავლნიშნავთ j -ური დარგის საერთო პროდუქტის ნაზრდს განსახილველი პერიოდისათვის, მაშინ

$$\Delta X_j = X_j^t - X_j^{t-1}. \quad (2.18)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ საერთო პროდუქტის ნაზრდი პირდაპირპროპორციულია ძირითადი ფონდების ნაზრდისა, შეიძლება დაიწეროს, რომ

$$\Delta \Phi_{ij} = b_{ij} \Delta X_j, \quad i=1, 2, \dots, n \wedge j=1, 2, \dots, n, \quad (2.19)$$

სადაც

b_{ij} - არის პროპორციულობის კოეფიციენტები და იგი განისაზღვრება ფორმულით:

$$b_{ij} = \frac{\Delta \Phi_{ij}}{\Delta X_j}, \quad i=1, 2, \dots, n \wedge j=1, 2, \dots, n. \quad (2.20)$$

ამ კოეფიციენტის ეკონომიკური არსი მდგომარეობს შემდეგში: ისინი გვიჩვენებენ i -ური დარგის პროდუქციის იმ რაოდენობას, რომელიც საჭიროა კაპიტალდაბანდებების სახით j -ური დარგისათვის, რომ ამ უკანასკნელში საწარმოო სიმძლავრე გაიზარდოს ერთეული წლიური პროდუქციის სიდიდით (აქ იგულისხმება, რომ საწარმოო სიმძლავრეების გამოყენება ხდება სრულად და, მაშასადამე, პროდუქციის ნაზრდი ტოლია სიმძლავრის ნაზრდისა).

b_{ij} - კოეფიციენტებს, სხვანაირად, უწოდებენ კაპიტალდაბანდებების კოეფიციენტებს (ან კიდევ ფონდტევადობის ნაზრდ კოეფიციენტებს).

თუ (2.19)-ს გავითვალისწინებთ (2.17)-ში მივიღებთ:

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + \sum_{j=1}^n b_{ij} \Delta X_j + z_i, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (2.21)$$

(2.21) განტოლებათა სისტემა წარმოადგენს დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსის მოდელს, რომელიც გამოხატულია სასრულსხეაობიან განტოლებათა სისტემით. (2.21) განტოლებათა სისტემა შეიძლება მივიყვანოთ ჩვეულებრივი სახის წრფივ განტოლებათა სისტემამდე, თუ გამოვალთ იმ მოსაზრებიდან, რომ წარმოების მთლიანი მოცულობები და საბოლოო პროდუქტი მიეკუთვნება განსაზღვრულ t -ურ პერიოდს, ხოლო პროდუქციის ნაზრდი განსაზღვრულია $t-1$ პერიოდთან შეფარდებით, ასეთ შემთხვევაში, შეიძლება დაიწეროს:

$$X_i^{(t)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j^{(t)} + \sum_{j=1}^n b_{ij} (X_j^{(t)} - X_j^{(t-1)}) + Z_i^{(t)},$$

$$i=1,2,\dots,n \wedge t=1,2,\dots,T. \quad (2.22)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$X_i^{(t)} = \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) X_j^{(t)} - \sum_{j=1}^n b_{ij} X_j^{(t-1)} + Z_i^{(t)},$$

$$i=1,2,\dots,n \wedge t=1,2,\dots,T. \quad (2.23)$$

(2.23) წარმოადგენს დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსის მოდელს, რომელიც გამოხატულია წრფივ განტოლებათა სისტემით.

თუ (2.17) ტოლობაში დისკრეტულიდან გადავალთ უწყვეტ ანალიზზე, მივიღებთ:

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + \sum_{j=1}^n \frac{d\Phi_{ij}}{dt} + Z_i, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (2.24)$$

(2.19) ტოლობა შეიძლება ზღვარში ასე ჩაიწეროს:

$$\frac{d\Phi_{ij}}{dt} = b_{ij} \frac{dx_j}{dt}, \quad i=1,2,\dots,n \wedge j=1,2,\dots,n. \quad (2.25)$$

(2.24) ტოლობა, (2.25)-ის გათვალისწინების შემდეგ, მიიღებს ასეთ სახეს:

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{dx_j}{dt} + Z_i, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (2.26)$$

(2.26) ტოლობა წარმოადგენს დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსის მოდელს, რომელიც გამოხატულია დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის საშუალებით.

ზემოთ განხილულ დინამიკურ დარგთაშორის ბალანსში იგულისხმება, რომ მიმდინარე პერიოდის პროდუქციის ნაზრდი განპირობებულია იმ კაპიტალდაბანდებებით, რომლებიც იმავე პერიოდშია ნაწარმოები პროდუქციის სახით.

ასეთი დაშვება, შედარებით მოკლე პერიოდებისათვის, შეიძლება აღმოჩნდეს არარეალური, რადგან ჩვეულებრივ არსებობს ჩამორჩენა დროში (*გერეთწოდებული ლაგი*) ძირითადი ფონდებისათვის განკუთვნილი კაპიტალდაბანდებების გაღების მომენტიდან პროდუქციის გამოშვების ზრდის მომენტამდე. მაშასადამე, შეიძლება ხაზი გაესვას იმ გარემოებას, რომ *ლაგი არის დროის პერიოდი კაპიტალდაბანდების (ინვესტიციის) გაღების მომენტიდან მის ხარჯზე მიღებული საერთო პროდუქტის ზრდის დაწყების მომენტამდე*.

§ 4. დარგთაშორისი ბალანსის სტატიკური მოდელი ეკოლოგიური ფაქტორების გათვალისწინებით

დარგთაშორისი ბალანსი ეკოლოგიური ფაქტორების გათვალისწინებით, ჩვეულებრივი დარგთაშორისი ბალანსისაგან განსხვავებით, ითვალისწინებს გარემო ბუნების დაცვის პროცესთა ამსახველ ფაქტორებს.

ვიდრე ავაგებდეთ დარგთაშორისი ბალანსის სტატიკურ მოდელს ეკოლოგიური ფაქტორების გათვალისწინებით, შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

i და j - იყოს დარგების აღმნიშვნელი ინდექსები;

m - იყოს განსახილველ დარგთა რაოდენობა (ე. ი. გამოდის, რომ $i=1,2,\dots,m \wedge j=1,2,\dots,n$);

q - გარემო ბუნების გამჭუჭყიანებულთა (მაენე ნიეთიერებათა) აღმნიშვნელი ინდექსი;

Q - იყოს გარემო ბუნების გამჭუჭყიანებულთა სახეობების რაოდენობა (მაშინ, ვლბულობთ, რომ $q=1,2,\dots,Q$);

a_{ij}^q - არის q სახეობის მაენე ნიეთიერების ის რაოდენობა, რომელიც წარმოიქმნება j -ური დარგის პროდუქტის ერთეულის წარმოებიდან; შედეგად;

$\bar{a}_{iq}$ - ასახავს i -ური დარგის პროდუქტის დანახარჯს q სახეობის მაენე ნიეთიერების ერთეულის გასაუენებლად;

Y_q - არის q სახეობის გამჭუჭყიანებლის ის რაოდენობა, რომლის გაუენებლებაც უნდა მოხდეს;

$\bar{b}_q$ - q სახეობის გამჭუჭყიანებლის ნორმატიულად (სანიტარულ-ჰიგიენური თვალსაზრისით) დასაშვები მაჩვენებელი გარემო ბუნებისათვის (ან მისი რომელიმე კომპონენტისათვის);

X_i , X_j , a_{ij}^q და Y_i - პარამეტრებს გააჩნიათ იგივე ეკონომიკური შინაარსი, რაც დარგთაშორისი ბალანსის სტატიკური მოდელის შესაბამის პარამეტრებს.

ამ აღნიშვნებში დარგთაშორისი ბალანსის სტატიკურ მოდელს, ეკოლოგიური ფაქტორების გათვალისწინებით, გააჩნია შემდეგი სახე:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}^q X_j + \sum_{q=1}^Q \bar{a}_{iq} \bar{Y}_q + Y_i, \quad i=1,2,\dots,m \quad (2.27) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^m a_{ij}^q X_j - \bar{Y}_q = \bar{b}_q, \quad q=1,2,\dots,Q \quad (2.28) \end{array} \right.$$

ამ მოდელში უცნობ სიდიდეებს წარმოადგენს X_i , X_j , Y_i და $\bar{Y}_q$ პარამეტრები, ხოლო ცნობილ სიდიდეებს კი — a_i , $\bar{a}_q$, a_q' , $\bar{b}_q$ პარამეტრები.

(2.27) და (2.28) მოდელი წარმოადგენს $m + Q$ წრფივ განტოლებათა სისტემას $2m + Q$ უცნობით. ამიტომ მას გააჩნია უამრავი ამონახსნი.

(2.27) და (2.28) მოდელი შეიძლება გავხადოთ ოპტიმიზაციური, თუ მას დაუმატებთ მიზნის ფუნქციას.

მოცემულ შემთხვევაში მიზნის ფუნქციად აღებულ უნდა იქნეს სხვადასხვა სახის დანახარჯთა და ზარალების ამსახველ მაჩვენებელთა საერთო სიდიდის მინიმიზაცია.

თუ მიზნის ფუნქციას ავლნიშნავთ f სიმბოლოთი, მაშინ შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$f = f_1 + f_2 + f_3 - f_4 \rightarrow \min, \quad (2.29)$$

სადაც

- f_1 — აღნიშნავს განსახილველ დარგთა ფუნქციონირებისათვის საჭირო დაყვანილ დანახარჯთა ჯამს;
- f_2 — მაენე ნივთიერებათა გასაუენებლად საჭირო დანახარჯთა ჯამს;
- f_3 — გატუტყუიანებული გარემო ბუნების მოსახლეობაზე ნეგატიური ზემოქმედების შედეგად გამოწვეულ ეკონომიკურ ზარალთა ჯამს;
- f_4 — საბოლოო მოთხოვნათა, ანუ ყველა დარგში შექმნილ საბოლოო პროდუქტთა მაჩვენებლების საერთო ჯამს.

შემოვიდლოთ შემდეგი დამატებითი აღნიშვნები:

- α_i — იყოს დაყვანილი დანახარჯების ის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა i -ური დარგის პროდუქციის ერთეულის საწარმოებლად;
- γ_q — იყოს დანახარჯთა ის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა q -ური სახეობის მაენე ნივთიერების ერთეულის გასაუენებლად;
- ξ_i — ეკონომიკური ზარალის ის რაოდენობა, რომელიც მიიღება q -ური სახეობის მაენე ნივთიერების

ადამიანზე ნეგატიური ზემოქმედების შედეგად და მოდის ამ ნივთიერების ერთეულზე.

დამატებითი აღნიშვნების შემოღების შემდეგ $f(X, \bar{Y}, Y)$ ფუნქცია შეიძლება ჩაიწეროს ასეთნაირად:

$$\begin{aligned} f(x, \bar{y}, y) &= \sum_{j=1}^m \bar{\alpha}_j x_j + \sum_{q=1}^Q \bar{\gamma}_q \bar{y}_q + \sum_{q=1}^Q \xi_q \left(\sum_{j=1}^m a'_{qj} x_j - \bar{y}_q \right) - \sum_{i=1}^n y_i = \\ &= \sum_{j=1}^m (\bar{\alpha}_j + \sum_{q=1}^Q \xi_q \cdot a'_{qj}) x_j + \sum_{q=1}^Q (\bar{\gamma}_q - \xi_q) \bar{y}_q - \sum_{i=1}^n y_i = \\ &= \sum_{j=1}^m \eta_j x_j + \sum_{q=1}^Q \bar{\theta}_q \bar{y}_q - \sum_{i=1}^n Y_i \rightarrow \min, \quad (2.30) \end{aligned}$$

$$\text{სადაც } \eta_j \equiv \bar{\alpha}_j + \sum_{q=1}^Q \xi_q \cdot a'_{qj} \quad j=1, 2, \dots, m,$$

$$\bar{\theta}_q \equiv \bar{\gamma}_q - \xi_q, \quad q=1, 2, \dots, Q.$$

საბოლოოდ საძიებელი ოპტიმიზაციური მოდელი მიიღებს ასეთ სახეს:

ვიპოვოთ არაუარყოფითი

$X_j, \bar{Y}_q$ და Y_i ($j=1, 2, \dots, m; i=1, 2, \dots, n \wedge q=1, 2, \dots, Q$)

უცნობები, რომლებიც აღმაყოფილებენ (2.27) და (2.28) პირობებს და რომელთათვისაც მიზნის ფუნქცია:

$$f(x, \bar{y}, y) = \sum_{j=1}^m \eta_j x_j + \sum_{q=1}^Q \bar{\theta}_q \bar{y}_q - \sum_{i=1}^n Y_i \rightarrow \min. \quad (2.31)$$

აგებულ ოპტიმიზაციურ მოდელს გააჩნია მათემატიკური დაპროგრამების წრფივი ამოცანის შესაბამისი სახე. ამიტომ მისი ამოხსნა არ წარმოადგენს დიდ სიძნელეს. იგი შეიძლება განხორციელდეს წრფივი დაპროგრამების სტანდარტული პროგრამის გამოყენებით.

ამ თავის ბოლოს დარგთაშორისი ბალანსის კლასიკური მოდელის ეკონომიკაში პრაქტიკული გამოყენების საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ მთლიანი პროდუქციის მოცულობის პოენის ამოცანა.

II თავის ღამატება – მთლიანი პროდუქციის მოცულობის პოენის ამოცანა

ეთქვათ, მოცემულია სამ სექტორიანი ეკონომიკური სისტემა. პირველი სექტორი იყოს სოფლის მეურნეობა, მეორე — მრეწველობა და მესამე — საოჯახო მეურნეობა. ბუნებრივია, რომ ამ სექტორებს შორის არსებობს საწარმოო კავშირები.

ვიგულისხმოთ, რომ ეს კავშირები გამოხატულია პირდაპირი დანახარჯების კოეფიციენტებით a_{ij} ($i=1,2,3 \wedge j=1,2,3$). ეთქვათ,

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,0 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

ვიგულისხმოთ, აგრეთვე, რომ ინდიკატური გეგმის წინასწარი დამუშავების დროს მიღებულია მოხმარებისა და დაგროვების ერთობლივად ამსახველი მაჩვენებლების ორი ვარიანტი, საბოლოო პროდუქტების სახით:

1. $Y_1^{(1)} = 200000$ (ლარს); $Y_2^{(1)} = 300000$ (ლარს); $Y_3^{(1)} = 100000$ (ლარს);
2. $Y_1^{(2)} = 100000$ (ლარს); $Y_2^{(2)} = 300000$ (ლარს); $Y_3^{(2)} = 200000$ (ლარს).

ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ განვსაზღვროთ შესაბამისი მთლიანი (ან საერთო) პროდუქციის მაჩვენებლები (ორივე ვარიანტისათვის), ე.ი. საჭიროა განისაზღვროს:

1. $X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, X_3^{(1)}$.
2. $X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, X_3^{(2)}$ მაჩვენებლები.

ამოხსნა. (2.4) ფორმულის მიხედვით $X=(E-A)^{-1} \cdot Y$.

მოცემული ამოცანის ამოსახსნელად, პირველ რიგში, საჭიროა A მატრიცის დახმარებით, ვიპოვოთ $(E-A)^{-1}$ მატრიცა. დიდ სირთულეს არ წარმოადგენს იმაში დარწმუნება, რომ

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,49643 & 0,21378 & 0,04751 \\ 0,47506 & 1,49643 & 0,33253 \\ 0,16627 & 0,02375 & 1,11639 \end{pmatrix}.$$

ამოსახსნელი ამოცანის პირველი ვარიანტისათვის შეიძლება დავწეროთ:

$$\begin{pmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \\ X_3^{(1)} \end{pmatrix} = (E - A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 200000 \\ 300000 \\ 100000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 368171 \\ 577194 \\ 152018 \end{pmatrix},$$

აქედან შეიძლება მივიღოთ, რომ

1. $X_1^{(1)} = 368171$ (ლარს); $X_2^{(1)} = 577194$ (ლარს); $X_3^{(1)} = 152018$ (ლარს).

ამოცანის მეორე ვარიანტისათვის შეიძლება დავწეროთ:

$$\begin{pmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \\ X_3^{(2)} \end{pmatrix} = (E - A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 100000 \\ 300000 \\ 200000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 223279 \\ 562941 \\ 247030 \end{pmatrix}.$$

აქედან შეიძლება მივიღოთ, რომ

2. $X_1^{(2)} = 223279$ (ლარს); $X_2^{(2)} = 562941$ (ლარს); $X_3^{(2)} = 247030$ (ლარს).

თავი III. ოპტიმალური (მათემატიკური) დაპროგრამების ზოგად-მეთოდოლოგიური საკითხები და მათი გამოყენების მიმართულებები

§ 1. ოპტიმალური (მათემატიკური) დაპროგრამების მე- თოდის არსი და მისი გამოყენების გზები

ეკონომიკაში შედარებით ფართოდ გამოიყენება ოპტი-
მალური (მათემატიკური) დაპროგრამების მეთოდი.

ოპტიმალური (მათემატიკური) დაპროგრამება არის ისე-
თი პროცესი, რომლის დროსაც ხდება ყველაზე საუკეთე-
სო გადაწყვეტილების ძებნა ამა თუ იმ კრიტერიუმის მი-
ხედვით..

ოპტიმალური დაპროგრამების მეთოდის გამოყენება
გულისხმობს ოპტიმალური დაპროგრამების ამოცანის
მათემატიკურ ფორმულირებას, მის ამოხსნასა და მიღე-
ბული შედეგების პრაქტიკულ რეალიზაციას.

ოპტიმალური დაპროგრამების ამოცანის მათემატიკური
ფორმულირება შეიძლება შემდეგი სახით:

ვაყოთ $X_1, X_2, \dots, X_n$ უცნობები, რომლებიც აკ-
მაყოფილებს შემდეგი სახის განტოლებებსა და უტოლო-
ბებს:

$$H_i(X_1, X_2, \dots, X_n) \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} b_i, \quad i=1, 2, \dots, m \quad (3.1)$$

და რომელთა იქნაც მიზნის ფუნქცია

$$F = f(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (3.2)$$

ლებულობს მაქსიმალურ ან მინიმალურ მნიშვნელო-
ბას,

სადაც $H_i (i=1, 2, \dots, m)$ და f არის მოცემული ფუნ-
ქციები;

b_i — არის ცნობილი მუდმივები.

(3.1)–(3.2) ამოცანას ზოგჯერ მათემატიკური დაპროგრამების ზოგად ამოცანასაც უწოდებენ.

მათემატიკური დაპროგრამების ზოგადი ამოცანა, იმის მიხედვით თუ რა სახეს მიიღებს H_i და f ფუნქციები, იქცევა სხვადასხვა ტიპის წრფივი, არაწრფივი, მთელრიცხვით, პარამეტრული და ა.შ. დინამიკური დაპროგრამების ამოცანებად.

მათემატიკური დაპროგრამების ამოცანების ჩაერთვლილი ტიპებიდან ყველაზე უფრო მეტად შესწავლილს და პრაქტიკაში დანერგილს წარმოადგენს წრფივი დაპროგრამების ამოცანა.

წრფივი დაპროგრამების ამოცანა მიიღება მათემატიკური დაპროგრამების ამოცანისაგან იმ შემთხვევაში, როცა H_i ($i=1, 2, \dots, m$) და f ფუნქციებს გააჩნიათ წრფივი სახე.

წრფივი დაპროგრამების ზოგადი ამოცანა ვექტორული სახით შეიძლება ჩამოყალიბდეს შემდეგნაირად:

მოვძებნოთ არაუარყოფითი $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ვექტორი, რომელიც აკმაყოფილებს

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, & i=1, 2, \dots, k \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, & i=k+1, \dots, k+p \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i, & i=k+p, \dots, m \end{cases} \quad (3.3)$$

სისტემას და რომლისთვისაც მიზნის ფუნქცია

$$F(X) = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n \quad (3.4)$$

ღებულობს მინიმალურ (ან მაქსიმალურ) მნიშვნელობას.

წრფივი დაპროგრამების ამოცანის შესაბამისი მათემატიკური მოდელის ამოხსნის უნივერსალურ მეთოდს წარმოადგენს სიმპლექს-მეთოდი, რომელიც შეიმუშავა ამერიკელმა მეცნიერმა ჯ. დანციგმა 1949 წელს.

სიმპლექს-მეთოდის შემუშავებას ჯ. დანციგმა საფუძვლად დაუდო რაიმე საყრდენი გეგმის ახალი, ოპტიმალურთან უფრო ახლოს მყოფი გეგმით შეცვლის იდეა.

1. საწყისი საყრდენი გეგმის შედგენას;
2. შედგენილი საყრდენი გეგმის გამოკვლევას ოპტიმალურ, ბაზე;
3. შედგენილი საყრდენი გეგმის (თუ ის ოპტიმალური არ არის) შეცვლას ახალი, ოპტიმალურთან უფრო ახლოს მყოფი გეგმით.

(3.3) - (3.4) ამოცანას უწოდებენ წრფივი დაპროგრამების კანონიკურ ამოცანას, თუ (3.3) სისტემის ყველა შეზღუდვა წარმოდგენილი იქნება მკაცრი ტოლობის სახით.

(3.3) – (3.4) სახის წრფივი დაპროგრამების ზოგადი ამოცანის ამოხსნა სიმპლექს-მეთოდით, პირველ რიგში, გულისხმობს მის დაყვანას წრფივი დაპროგრამების კანონიკურ ამოცანამდე და ამ უკანასკნელის ამოხსნას აღნიშნული მეთოდით. ამიტომ საინტერესოა განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების კანონიკური ამოცანის სიმპლექს-მეთოდით ამოხსნის ზოგადი მაგალითი.

ეთქვან, მოცემულია წრფივი დაპროგრამების ასეთი კანონიკური ამოცანა:

მოქცეზნოთ არაუარყოფითი $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ექტორი, რომელიც აკმაყოფილებს

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n = b_1, \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n = b_m \end{cases} \quad (3.5)$$

განტოლებათა სისტემას და რომლისთვისაც მიზნის
ფუნქცია

$$f(X) = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n \quad (3.6)$$

ღებულობს მინიმალურ მნიშვნელობას.

საწყისი იტერაცია

ცხრილი 3.1.

I	ბაზისი	C	B	C ₁	C ₂	...	C _k	...	C _n	N	...	N
				A ₁	A ₂	...	A _k	...	A _n	A _{n+1}	...	A _{n+2}
1	A _{n+1}	N	b ₁	B ₁₁	B ₁₂		B _{1k}		B _{1n}	1	0	0
2	A _{n+2}	N	b ₂	B ₂₁	B ₂₂		B _{2k}		B _{2n}	0	1	0
		...									...	
l	A _{n+l}	N	b _l	B _{l1}	B _{l2}		B _{lk}		B _{ln}	0	0	1
		...									...	
m	A _{n+m}	N	b _m	B _{m1}	B _{m2}		B _{mk}		B _{mn}	0	0	0
m+1				-C ₁	-C ₂		-C _k		-C _n	0	0	0
m+2			$\sum_i b_i$	$\sum_i B_{i1}$	$\sum_i B_{i2}$		$\sum_i B_{ik}$		$\sum_i B_{in}$	0	0	0

ჟ. ი. თუ Δ კოეფიციენტებიდან ყველა არადადებითია, მაშინ ლაპარაკია მისი შესაბამისი საყრდენი გეგმის ოპტიმალურობაზე, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში, უნდა შევადგინოთ ახალი იტერაციული ცხრილი, საწყისი ცხრილის მონაცემების სათანადო შეცვლის გზით.

კერძოდ, უპირველეს ყოვლისა, უნდა განისაზღვროს ბაზისში შესაყვანი k -ური ვექტორის ნომერი

$$(\text{შემდეგი ტოლობის მიხედვით } \Delta_k = \max_j \Delta_j)$$

და ბაზისიდან ამოსაგდები l -ური ვექტორის ნომერი

$$(\text{შემდეგი ტოლობის მიხედვით } \min_{x_k > 0} \frac{x_l}{x_k} = \frac{x_l}{x_k}).$$

გარდა ამისა, ახალი იტერაციული ცხრილის პარამეტრები ძველისაგან შესაბამისად მიიღება შემდეგი ფორმულების გამოყენებით:

$$\begin{cases} x'_i = x_i - \frac{x_l}{x_k} x_k, & \text{თუ } i \neq l \\ x'_l = \frac{x_l}{x_k}, & \text{თუ } i = l \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_j = x_j - \frac{x_l}{x_k} x_k, & \text{თუ } i \neq l \\ x'_j = \frac{x_j}{x_k}, & \text{თუ } i = l \end{cases}$$

სადაც შტრიხიანი პარამეტრები წარმოადგენენ ახალი იტერაციული ცხრილის კოეფიციენტებს, ხოლო უშტრიხო კი მის უშუალო წინა იტერაციული ცხრილის კოეფიციენტებს.

თუ ცხრილ 3.1-ს ჩაეთვლით საწყის ცხრილად, მაშინ მისგან მიღებულ ახალ იტერაციულ ცხრილს პირობითად ექნება ასეთი სახე:

Յիշույթ 32.

	$\xi_1 \xi_2 \xi_3$	C	B	C_1	C_2	...	C_n	N	...	N		N
1			B	A_1	A_2	...	A_n	A_{n+1}	...	A_{n+1}		A_{n+n}
1	A_{n+1}	N	x_1	x_{11}	x_{12}		x_{1n}	1		x_{1n+1}		0
2	A_{n+2}	N	x_2	x_{21}	x_{22}		x_{2n}	0		x_{2n+1}		0
1	A_k	C_k	x_k	x_{k1}	x_{k2}		x_{kn}	0		x_{kn+1}		
m	A_{n+m}	N	x_m	x_{m1}	x_{m2}		x_{mn}	0		x_{mn+1}		1
m+1			γ	γ_1	γ_2		γ_n	0		γ_{n+1}		0
m+2			β	β_1	β_2		β_n	0		β_{n+1}		0

ახლა ზემოთ ნახსენები წესის მიხედვით უნდა შემოწმდეს ოპტიმალურობაზე ცხრილი 32-ის მონაცემები და თუ აღმოჩნდა, რომ ისინი ოპტიმალურია, მაშინ ოპტიმიზაციის პროცესი წყდება და (35) - (36) ამოცანა ითვლება ამოხსნილად, ხოლო თუ ამ ცხრილის მონაცემები არ აღმოჩნდა ოპტიმალური, მაშინ 32 ცხრილიდან უკვე ცნობილი წესით უნდა გადავიდეთ ახალ იტერაციულ 33 ცხრილზე, 33-დან 34-ზე და ა. შ. ასე უნდა მოვიქცეთ მანამ, სანამ არ დაკმაყოფილდება ოპტიმალურობის განმსაზღვრელი მოთხოვნები და ახალ ცხრილში არ მივიღებთ ოპტიმალურ მონაცემებს.

წრფივი დაპროგრამების ამოცანების ამოხსნა სიმპლექს-მეთოდით წარმოადგენს საკმაოდ შრომატევად სამუშაოს. ამიტომ ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში, როცა წრფივი დაპროგრამების ამოცანებს გააჩნიათ მარტივი და სპეციფიკური სახე, იგი შეიძლება ამოიხსნას სხვა უფრო მარტივი მეთოდით. ასე მაგალითად, თუ წრფივი დაპროგრამების ამოცანა წარმოადგენს ტრანსპორტის ამოცანას, იგი გარდა სიმპლექს-მეთოდისა იხსნება პოტენციალთა მეთოდით, რომელიც ისე, როგორც სიმპლექს-მეთოდი, შემუშავებულ იქნა ჯ. დანციგის მიერ.

§ 2. ლაგრანჟის ამომხსნელ მამრავლთა მეთოდი და მათი ეკონომიკური არსი

ლაგრანჟის ამომხსნელ მამრავლთა მეთოდი წარმოადგენს მათემატიკური დაპროგრამების კლასიკურ ამოცანათა ამოხსნის ერთ-ერთ საინტერესო მეთოდს. ამ მეთოდის გამოყენება მეტად ეფექტურია ხსენებული სახის ამოცანათა თეორიული ანალიზის დროს. ამასთან, მისი გამოყენება იძლევა საშუალებას მიღებულ იქნეს ინფორმაცია იმის შესახებ, თუ რამდენად არის დამოკიდებული მიზნის ფუნქციის ოპტიმალური მნიშვნელობის ცვლილება შეზღუდვათა მუდმივების ცვლილებაზე აღნიშნული კი ცხადყოფს, რომ განსახილველი მეთოდის გამოყენება

ეფექტური უნდა იყოს ეკონომიკური საქმიანობის რაციონალიზაციის ამოცანათა თეორიული ანალიზისა და პრაქტიკული გადაწყვეტის დროსაც. ამდენად, ეთვლით, რომ ამ მეთოდის შინაარსის, მისი თეორიული და პრაქტიკული ფასეულობების შესწავლა იმსახურებს ჯეროვან ყურადღებას როგორც მათემატიკური, ასევე ეკონომიკური თვალსაზრისითაც.

განვიხილოთ ლაგრანჟის ამომხსნელ მამრავლთა მეთოდის შინაარსი.

ეთქვას, მოცემულია მათემატიკური დაპროგრამების ზოგადი ამოცანის ასეთი სახე:

ვიპოვოთ $X_1, X_2, \dots, X_n$ უცნობთა ისეთი მნიშვნელობები, რომლებიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$H_i(X_1, X_2, \dots, X_n) = b_i, \quad i=1,2,\dots,m \quad (3.9)$$

და რომელთათვისაც მიზნის ფუნქცია

$$F = f(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (3.10)$$

ღებულობს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

(3.9) სახის შეზღუდვების, (3.10) მიზნის ფუნქციისა და $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ დამატებითი პარამეტრების გამოყენებით ავაგოთ ახალი ფუნქცია:

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(X_1, X_2, \dots, X_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [b_i - H_i(X_1, X_2, \dots, X_n)]. \quad (3.11)$$

(3.11) ფუნქციას უწოდებენ ლაგრანჟის ფუნქციას, ხოლო $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ პარამეტრებს (ანუ მამრავლებს) კი - ლაგრანჟის ამომხსნელ მამრავლებს.

მათემატიკურად მტკიცდება, რომ (3.9) - (3.10) მოდელის ამონახსნი გარკვეული პირობების შესრულების შემდეგ, შეიძლება დაემთხვეს (3.11) ფუნქციის ექსტრემუმის (ჩვენ შემთხვევაში მაქსიმუმის) წერტილის შესაბამის ექტორს, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ კომპონენტების ჩამოშორების შემდეგ.

ამიტომ ბუნებრივია, რომ (3.9) - (3.10) მოდელის ამოხსნა, განსახილველი მეთოდით, უპირველეს ყოვლისა, მოითხოვს (3.11) ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილის პოვნას.

ამ მიზნით, ვიპოვოთ (3.11) ფუნქციის კერძო წარმოებულები $X_1, X_2, \dots, X_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ცელადებით და ისინი სათანადოდ გაუტოლოთ ნულს. ამგვარად, მივიღებთ შემდეგი სახის $n+m$ განტოლებათა სისტემას $n+m$ უცნობით:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_j} = \frac{\partial f(X_1, X_2, \dots, X_n)}{\partial X_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial H_i(X_1, X_2, \dots, X_n)}{\partial X_j} = \\ = 0, j = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = b_i - H_i(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0, i = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (3.13)$$

ეთქვათ, (3.12) – (3.13) განტოლებათა სისტემას გააჩნია ცალსახა ამონახსნი $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*$. მაშინ $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$ უნდა წარმოადგენდეს (3.9) – (3.10) მოდელის ამონახსნს.

მაშასადამე, ცხადია, რომ მათემატიკური დაპროგრამების ამოცანის ლაგრანჟის ამომხსნელ მამრაველთა მეთოდით ამოხსნის დროს საჭიროა განხორციელდეს შემდეგი პროცედურები:

1. აგებულ უნდა იქნეს ამოსახსნელი ამოცანის შესაბამისი ლაგრანჟის ფუნქცია (ამ ამოცანის შესაბამისი მოდელის მიზნის ფუნქციისა და შეზღუდვების ისეთი სპეციფიკური ჯამის სახით, როგორც ეს მოცემულია (3.11) გამოსახულებაში);
2. ვეძებთ აგებული ლაგრანჟის ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილს და თუ მისი პოვნა შესაძლებელი გახდა, მაშინ ამ წერტილის შესაბამისი ვექტორის კომპონენტებს ვაშორებთ ლაგრანჟის მამრავლებს დარჩენილი კომპონენტებისაგან შემდგარი ვექტორი იქნება საძიებელი მოდელის ამონახსნი.

აღსანიშნავია, რომ ლაგრანჟის ამომხსნელ მამრაველთა მეთოდის გამოყენება შეზღუდულია, რადგან ეს პროცესი მოითხოვს გარკვეული სახის დამატებითი პირობების წი-

ნასწარ შესრულებას (ასე, მაგალითად, ამ დროს მოითხოვება, რომ ლაგრანჟის ფუნქცია იყოს წარმოებადი და მისი გლობალური ექსტრემუმის წერტილი ემთხვეოდეს მისი ლოკალური ექსტრემუმის წერტილს).

ამ მეთოდის გამოყენების საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი მარტივი მაგალითი:

ვიპოვოთ ისეთი X_1 , X_2 , X_3 არაუარყოფითი კომპონენტები, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$X_1 + X_2 = 2 \quad (3.14)$$

$$X_2 + X_3 = 2 \quad (3.15)$$

და რომელთათვისაც მიზნის ფუნქცია

$$f(X) = X_1 X_2 + X_2 X_3 \rightarrow \max. \quad (3.16)$$

ამოეხსნათ (3.14)–(3.16) მოდელი ზემოთ აღწერილი მეთოდით. ამისათვის, პირველ რიგში, შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია. მას ექნება ასეთი სახე:

$$g(X_1, X_2, X_3, \lambda_1, \lambda_2) = X_1 X_2 + X_2 X_3 + \lambda_1 (X_1 + X_2 - 2) + \lambda_2 (X_2 + X_3 - 2). \quad (3.17)$$

ვიპოვოთ (3.17) ფუნქციის კერძო წარმოებულები X_1 , X_2 , X_3 , λ_1 და λ_2 პარამეტრებით და ისინი სათანადოდ გავუტოლოთ ნულს. მივიღებთ:

$$\begin{cases} X_2 + \lambda_1 = 0 & (3.18) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 + X_3 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (3.19) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 + \lambda_2 = 0 & (3.20) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - 2 = 0 & (3.21) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 + X_3 - 2 = 0. & (3.22) \end{cases}$$

(3.18) და (3.20) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $\lambda_1 = \lambda_2 = -X_2$. ამის გათვალისწინებით (3.18)–(3.22) განტოლებათა სისტემაში მივიღებთ:

$$\begin{cases} X_1 - 2X_2 + X_3 = 0 & (3.23) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 2 & (3.24) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 + X_3 = 2 & (3.25) \end{cases}$$

(3.23)–(3.25) სისტემის ამოხსნა იძლევა, რომ

$$X_1 = X_2 = X_3 = 1,$$

ე.ი. (3.14)–(3.15) მოდელის ამონახსნი იქნება $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 1$, ხოლო მიზნის ფუნქციის ოპტიმალური მნიშვნელობა

$$f_{\max}(X) = 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2.$$

ახლა შევეხოთ ლაგრანჟის ამომხსნელ მამრაველთა ეკონომიკური არსის დადგენის საკითხს.

მათემატიკურად მტკიცდება, რომ

$$\lambda^*_i = \frac{\partial f^*}{\partial b_i}, \quad (3.26)$$

სადაც λ^* – წარმოადგენს (3.9)–(3.10) მოდელის i –ური შეზღუდვის შესაბამისი ლაგრანჟის მამრავლის ოპტიმალურ მნიშვნელობას. f^* –არის ამ მოდელის მიზნის ფუნქციის ოპტიმალური მნიშვნელობა, ხოლო b_i – i –ტი არის მისი i –ური შეზღუდვის ლიმიტირებული მაჩვენებელი (ანუ მუდმივი სიდიდე).

(3.26) ფორმულის ანალიზიდან გამომდინარეობს ლაგრანჟის ამომხსნელ მამრაველთა ეკონომიკური შინაარსი.

ლაგრანჟის ამომხსნელი მამრაველთა ეკონომიკური შინაარსი მდგომარეობს იმაში, რომ ისინი ახასიათებენ მიზნის ფუნქციის ოპტიმალურ მნიშვნელობათა ცვლილებების ხარისხს შეზღუდვათა მუდმივების ცვლილებათა დროს.

უფრო ზუსტად, ლაგრანჟის ამ თუ იმ ამომხსნელი მამრავლის ეკონომიკური არსი მდგომარეობს იმაში, რომ ის გვიჩვენებს მიზნის ფუნქციის ოპტიმალური მნიშვნელობის ცვლილების ზომას ამ მამრავლის შესაბამისი შეზღუდვის მუდმივის ერთი ერთეულით ცვლილების დროს.

აღნიშნულიდან (უფრო ზუსტად კი (3.26) ფორმულიდან) გამომდინარეობს, რომ თუ, მაგალითად, ლაგრანჟის

რომელიმე მამრავლი ტოლია ნულისა, მაშინ შეზღუდვათა შესაბამისი მუდმივის მცირე ცვლილება არ გამოიწვევს მიზნის ფუნქციის ოპტიმალური მნიშვნელობის ცვლილებას, ხოლო თუ ეს მამრავლი ტოლია ერთის, მაშინ შეზღუდვათა შესაბამისი მუდმივის მცირე ცვლილება გამოიწვევს ხსენებული ფუნქციის ოპტიმალური მნიშვნელობის მცირე ცვლილებას.

ლაგრანჟის ამომხსნელ მამრავლთა ინტერპრეტაცია განსაკუთრებულ მნიშვნელობას იძენს ეკონომიკური საქმიანობის რაციონალიზაციის ამოცანებისათვის.

ასე, მაგალითად, რესურსთა განაწილების ეკონომიკური ამოცანების მიზნის ფუნქციები საზოგადოდ ატარებენ ღირებულების ამსახველ ეკონომიკურ შინაარსს. ისინი, ხშირად, გამოხატავენ პროდუქციის მოცულობისა და მისი შესაბამისი ფასის მაჩვენებელთა ნამრავლს, რომელიც მიზნის ფუნქციაში შეიძლება ასახულ იქნეს პირდაპირი, სახეშეცვლილი, მთლიანი, ან ნაწილობრივი ფორმით (ასეთია, მაგალითად, მოგების, ამონაგების, დანახარჯებისა და სხვა მაჩვენებლები).

შეზღუდვათა დახმარებით კი დგინდება ზოგიერთ მაჩვენებელთა (მაგ. რესურსების დანახარჯთა) ზღვრულად ლიმიტირებული მნიშვნელობები. ამიტომ, ასეთ ამოცანებში, ლაგრანჟის ამომხსნელი მამრავლები ატარებენ ფასების შინაარსს. მათ ხშირად უწოდებენ ოპტიმალურ, "ჩრდილოვან" ფასებს.

§ 3. ორადი შეფასებების არსი, მნიშვნელობა და თვისებები

ორადი შეფასებების არსის გასაცნობად მიზანშეწონილად მიგვაჩნია წარმოების ოპტიმალური დაგეგმვის მარტივი ამოცანის დასმა. ვიდრე ჩამოვაყალიბებდეთ ამ ამოცანის პირობებს, შემოვიღოთ შემდეგი დაშვებები და აღნიშვნები:

ვთქვათ, წარმოების ოპტიმალური დაგეგმვის ამოცანას ვიხილავთ საწარმოს (ან ფირმის) დონეზე. ამასთან, ვიგულისხმობთ, რომ ამ საწარმომ უნდა გამოუშვას $1, 2, \dots, n$

სხვადასხვა სახეობის პროდუქტი. ამ პროდუქტების აღმნიშვნელი ინდექსი იყოს j (მაშინ ცხადია, რომ $j = 1, 2, \dots, n$). ეთქვას, ამ საწარმოს გააჩნია $1, 2, \dots, m$ სხვადასხვა სახეობის რესურსი. რესურსების აღმნიშვნელი ინდექსი იყოს i (მაშინ $i = 1, 2, \dots, m$).

X_j — იყოს უცნობი სიდიდე, რომელიც გამოხატავს საწარმოს მიერ გამოსაშვები j -ური პროდუქტის მოცულობას;

a_{ij} — არის ცნობილი სიდიდე და იგი გამოხატავს, i -ური რესურსის იმ რაოდენობას, რომელიც საჭიროა j -ური პროდუქტის ერთეულის საწარმოებლად;

b_i — არის i -ური სახეობის რესურსის ლიმიტირებული მაჩვენებლის ამსახველი მუდმივი სიდიდე;

C_j — იყოს j -ური პროდუქტის ერთეულის ღირებულების მაჩვენებლის ამსახველი ცნობილი სიდიდე.

შესასწავლი ამოცანა, მოცემულ დაშვებათა და აღმნიშვნების პირობებში შეიძლება დასმულ იქნეს ასეთნაირად:

მოცემული საწარმოს ოპტიმალური ფუნქციონირების განსახორციელებლად საჭიროა ისეთი ოპტიმალური გეგმის შედგენა, რომელიც არსებული შეზღუდული რესურსების გამოყენებით მოიტანს მაქსიმალურ შემოსავალს, ე. ი. საჭიროა საწარმოს ხელმძღვანელობამ იცოდეს — რომელი სახეობის პროდუქტი რამდენი დაამზადოს, ისე, რომ არ გადაატარებოს არსებულ რესურსებს და ამ ედროს, ამ გზით მიიღოს მაქსიმალური შემოსავალი.

დასმული ამოცანის შესაბამისი ეკონომიკურმათემატიკური მოდელი მიიღებს ასეთ სახეს:

ეიპოვოთ ისეთი $X_1, X_2, \dots, X_n$ არაუარყოფითი უცნობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (3.27)$$

და რომელთათვისაც მიზნის ფუნქცია

$$f(X) = \sum_{j=1}^n C_j X_j \rightarrow \max. \quad (3.28)$$

(3.27)–(3.28) მოდელის შეუღლებულ მოდელს ექნება ასეთი სახე:

ვიპოვოთ $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ ისეთი უცნობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$\sum_{i=1}^m y_i \cdot a_{ij} \leq C_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.29)$$

და რომელთათვისაც მიზნის ფუნქცია

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^m y_i b_i \rightarrow \min. \quad (3.30)$$

$Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ პარამეტრებს უწოდებენ ორად შეფასებებს (ოპტიმალურ ფასებს, ობიექტურად განპირობებულ შეფასებებს, ამომხსნელ მამრავლებს, “ჩრდილოვან ფასებს” და ა.შ.). ეს პარამეტრები და ორადი შეფასებების ცნება პირველად შემოღებული იქნა ლ.ე. კანტოროვიჩის მიერ და ისინი წარმოადგენენ წრფივი დაპროგრამების მნიშვნელოვან ელემენტებს.

(3.27)–(3.28) მოდელში შემავალ ყველა პარამეტრს გააჩნია სრულიად გარკვეული ეკონომიკური შინაარსი, ხოლო მის შეუღლებულ (3.29)–(3.30) მოდელში შემავალი Y_i ($i=1, 2, \dots, m$) პარამეტრების ეკონომიკური შინაარსი კი გასარკვევია.

(3.29) უტოლობის ანალიზიდან შეიძლება ადვილად დავასკვნათ, რომ თუ Y_i სიდიდეებს მიეცემთ ღირებულების გამომხატველ მნიშვნელობებს – ფასებს, მაშინ ადვილად განხორციელდება (3.29) და (3.30) ფორმულების ეკონომიკური ინტერპრეტაცია. ეთქვათ, Y_i ($i=1, 2, \dots, m$) აღ-

ნიშნავს i -ური სახეობის რესურსის ერთეულის ფასს. მაშინ j -ური სახეობის პროდუქტის ერთეულის დასამზადებლად დახარჯული ყველა სახის რესურსების ფასი, ანუ პროდუქტის ერთეულის ფასი ტოლი იქნება:

$$\sum_{i=1}^m Y_i a_{ij}$$

ამასთან, ცნობილია, რომ პროდუქტის ერთეულის ფასი, ნორმალურ პირობებში, არ შეიძლება იყოს მისი ღირებულების ამსახველ მაჩვენებელზე უფრო ნაკლები. აქედან გამომდინარე, დასტურდება (329) უტოლობის ეკონომიკური შინაარსის ჭეშმარიტება.

$$\sum_{i=1}^m y_i b_i - \text{სიდიდე გამოხატავს ყველა სახის პროდუქტის}$$

მთლიანი მოცულობის წარმოებისათვის საჭირო რესურსთა დანახარჯების ღირებულებით მაჩვენებელს.

შეუღლებული (329) – (330) მოდელის შესაბამისი ეკონომიკური ამოცანა შეიძლება ჩამოყალიბდეს ასეთნაირად:

განესაზღვროთ 1, 2, ..., m სახეობათა რესურსებიდან თითოეულის ფასი— Y_i ($i=1,2,\dots,m$) ისე, რომ ნებისმიერი სახეობის პროდუქტის ერთეულის დასამზადებლად დახარჯული ყველა სახის რესურსი (ანუ ამ პროდუქტის ერთეულის ფასი) არ იყოს ნაკლები მის შესაბამის ღირებულებით მაჩვენებელზე (C_j) და ყველა სახის პროდუქტის მთლიანი მოცულობის წარმოებისათვის საჭირო რესურსთა დანახარჯები იყოს მინიმალური.

სპეციალურ ლიტერატურაში ორადი შეფასებებით ახასიათებენ არა მარტო რესურსების, არამედ გამოსაშვებ პროდუქტთა გამოყენების სხვადასხვა მხარეს.

ორადი შეფასებების ეკონომიკური არსი მდგომარეობს იმაში, რომ იგი გამოხატავს რესურსებისა და პროდუქტების ერთეულთა ოპტიმალურ ფასებს.

ორად შეფასებებს დიდი მნიშვნელობა გააჩნია სამეურნეო პროცესთა ეკონომიკურ-მათემატიკური ანალიზის საქ-

მეში. ამ შეფასებების შინაარსსა და თვისებებზე დაყრდნობით დამუშავებულია სამეურნეო პროცესთა ანალიზის ისეთი მეთოდები, რომლებიც იძლევა საშუალებას:

- ღრმად იქნეს შეცნობილი ამ პროცესთა არსი;
- შეფასებულ იქნეს განვითარების პერსპექტივები;
- დანახულ იქნეს დღეისათვის მიღებულ გადაწყვეტილებათა მომავალი შედეგები;

აღნიშნულიდან ცხადია, რომ *ორადი შეფასებების თეორია წარმოადგენს ეკონომიკური მეცნიერების მნიშვნელოვან ნაწილს, ხოლო თვით შეფასებები კი – მის მნიშვნელოვან ინსტრუმენტს.*

ორად შეფასებებს გააჩნია შემდეგი ძირითადი თვისებები:

1. *იგი წარმოადგენს რესურსებისა და პროდუქტების დეფიციტურობის საზომს.*

მათი დახმარებით შეიძლება გამოცნობილ იქნეს, თუ რომელი რესურსი, ან პროდუქტი არის (ან შეიძლება გახდეს) დეფიციტური.

2. *იგი გვიჩვენებს შეზღუდვათა გააღების ზომას მიზნის ფუნქციის ოპტიმალურ მნიშვნელობაზე.*

მათი გამოყენებით შეიძლება დადგინდეს, თუ რამდენად შეიცვლება მიზნის ფუნქციის (ეთქვით მოგების, დანახარჯების, ან სხვა მაჩვენებლების) ოპტიმალური მნიშვნელობა შეზღუდვათა (მაგალითად, რესურსების ამა თუ იმ სახეობის შესაბამის ლიმიტირებულ მაჩვენებელთა) ამა თუ იმ ზომით შეცვლის შედეგად.

3. *იგი წარმოადგენს სხვადასხვა ტექნოლოგიური ხერხებისა და სამეურნეო ვარიანტების ეფექტურობის განსაზღვრულ ინსტრუმენტს.*

მათი დახმარებით შეიძლება განსაზღვრულ იქნეს, თუ რომელი ტექნოლოგიური ხერხი, ან სამეურნეო ვარიანტი არის ყველაზე მისაღები და ყველაზე არახელსაყრელი ეფექტიანობის თვალსაზრისით.

4. *იგი გვიჩვენებს დანახარჯებისა და შედეგების ურთიერთდაბალანსებადობის ხარისხს.*

ორადი შეფასებების გამოყენებით შეიძლება განისაზღვროს, თუ როგორია სამეურნეო შედეგთა და მათი განხორციელებისათვის საჭირო დანახარჯთა ურთიერთდამოკიდებულება (ისინი ემთხვევა ერთმანეთს, შედეგები აჭარბებს დანახარჯებს, თუ პირიქით დანახარჯები აჭარბებს შედეგებს).

5. ორადი შეფასებები წარმოადგენს რესურსებისა და პროდუქტების ურთიერთშემცვლელობის საზომს.

მათი დახმარებით შეიძლება დადგენილ იქნეს, თუ რომელი რესურსით (ან პროდუქტით) და რა პროპორციით არის შესაძლებელი ამა თუ იმ რესურსის (ან პროდუქტის) შეცვლა.

აღნიშნულიდან ცხადია, რომ ორადი შეფასებების მეტოდოლოგიას გააჩნია არა მარტო თეორიული, არამედ პრაქტიკული მნიშვნელობაც. განსაკუთრებით დიდია მათი მნიშვნელობა თეორიულ-ეკონომიკური და პრაქტიკულ-სამეურნეო ანალიზის (როგორც რაოდენობრივ, ასევე ხარისხობრივ) სფეროში.

ამ თავის ბოლოს, ოპტიმალური (მათემატიკური) დაპროგრამების მეთოდის ეკონომიკაში პრაქტიკული გამოყენების საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ ფირმის საქმიანობის ოპტიმალური დაგეგმვის უმარტივესი ამოცანა.

III თავის დაგეგმვა – ფირმის საქმიანობის ოპტიმალური დაგეგმვის ამოცანა

ამოცანის ეკონომიკური შინაარსი. ეთქვათ, მოცემულია რომელიმე ფირმა, რომელსაც განსახილველ პერიოდში გააჩნია განსხვავებული სახეობის საწარმოო რესურსები სხვადასხვა რაოდენობით. ამ რესურსების აღმნიშვნელი ინდექსი იყოს i , მათი სახეობების რაოდენობა – m (მაშინ

(ცხადია, რომ $i=1,2,\dots,n$), ხოლო ამ ფირმაში არსებული i -ური რესურსის რაოდენობა – b_i .

ვივულისებოთ, რომ ამ ფირმას მოცემული რესურსებით შეუძლია n სახეობის სხვადასხვა პროდუქციის გამოშვება. პროდუქციის სახეობათა აღმნიშვნელი ინდექსი იყოს j (მაშინ გამოდის, რომ $j=1,2,\dots,n$). C_j – იყოს j -ური პროდუქციის ერთეულის საბაზრო ფასი. a_{ij} – იყოს i -ური რესურსის ის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა j -ური პროდუქტის ერთეულის დასამზადებლად.

ამასთან, ეთქვათ, ბაზრის წინასწარი შესწავლით ცნობილია, რომ ბაზარზე ადგილი აქვს მაქსიმალურ მოთხოვნას ყველა ზემოთ სსენებული სახეობის პროდუქციაზე.

მოცემულ პირობებში, ბუნებრივია, საკითხი უნდა დაისვას ფირმის საქმიანობის ისეთი ოპტიმიზაციის შესახებ, რომელიც ითვალისწინებს ფირმისათვის მაქსიმალური მოგების მიღებას არსებული რესურსების გამოყენებით.

ამ საკითხის გადაწყვეტა ფირმას შეუძლია n სხვადასხვა სახეობის პროდუქციის გამოშვების გეგმის ოპტიმიზაციის გზით.

X_j ($j=1,2,\dots,n$) - თი ავღნიშნოთ j -ური სახეობის პროდუქციის ის რაოდენობა, რომელიც უნდა აწარმოოს ფირმამ ოპტიმალური გეგმის მიხედვით.

ამ ამოცანის შინაარსის შესაბამის ეკონომიკურ-მათემატიკურ მოდელს ექნება ასეთი სახე:

ვიპოვოთ X_j ($j=1,2,\dots,n$) ცვლადების ისეთი არაუარყოფითი მნიშვნელობები, რომლებიც დააკმაყოფილებენ

$$a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 + \dots + a_{in} X_n \leq b_i, \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (3.31)$$

უტოლობებს და რომელთათვისაც მიზნის ფუნქცია

$$f(X) = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n \quad (3.32)$$

მაიღებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

(3.31)–(3.32) მოდელის შეზღუდვების ეკონომიკური შინაარსი მდგომარეობს იმაში, რომ პროდუქციის დამზადების დროს, ესა თუ ის რესურსი არ შეიძლება გამოყენებულ იქნეს იმაზე მეტი რაოდენობით, რაც გააჩნია ფირმას.

ამ მოდელის მიზნის ფუნქციის ეკონომიკური შინაარსი მდგომარეობს იმაში, რომ ფირმამ წარმოებული პროდუქციის რეალიზაციიდან მიიღოს მაქსიმალური შემოსავალი (მოგება).

ე.ი. მოცემულ ფირმას აინტერესებს ისეთი საწარმოო გეგმის შედგენა, რომელიც მას არსებული რესურსების გამოყენებით მისცემს მაქსიმალურ შემოსავალს (მოგებას).

(3.31)–(3.32) მოდელი წარმოადგენს წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამსახველ მოდელს და მისი ამოხსნა არ წარმოადგენს დიდ სირთულეს (იგი შესაძლებელია სიმპლექს-მეთოდით).

(3.31)–(3.32) მოდელის ამოხსნის შედეგად ეგებულობთ $X_1, X_2, \dots, X_n$ უცნობების ოპტიმალურ რიცხვით მანივენტებს, ანუ ფირმის საწარმოო გეგმის ოპტიმალურ ვარიანტს. ეს ვარიანტი გვიჩვენებს, თუ რომელი პროდუქცია რა რაოდენობით უნდა აწარმოოს ფირმამ, მოცემულ პირობებში, რომ მან მიიღოს მაქსიმალური შემოსავალი (მოგება).

ამ ამოცანის საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ შემდეგი უმარტივესი მაგალითი:

ვთქვათ, ვიხილათ ავეჯის დამამზადებელი რომელიმე კონკრეტული ფირმის საწარმოო საქმიანობის ოპტიმალური დაგეგმვის ამოცანას. დავეუშვათ, რომ ამ ფირმას განსახილველ პერიოდში აქვს სამი სახეობის რესურსი: 1200 გრძივი მეტრი ფიცარი, 1000 გრძივი მეტრი ლატანი და 640 კვ. მეტრი დიქტი. ამ მასალისაგან ვთქვათ, ფირმას შეუძლია დაამზადოს ორი სახეობის პროდუქცია: მაგიდები და კარადები. დავეუშვათ, თითოეული მაგიდის დამზადებას ესაჭიროება: ფიცარი 12 გრძივი მეტრი; ლატანი – 5 გრძივი მეტრი და დიქტი – 5 კვ.მეტრი, ხოლო

თითოეული კარადის დამზადებას ესაჭიროება: ფიცარი – 6 გრძივი მეტრი, ლატანი – 10 გრძივი მეტრი და ღიქტი – 6 კვ.მეტრი. ერთი კარადა ღირს 150 ლარი, ხოლო ერთი მაგიდა – 200 ლარი.

ამასთან, ბაზრის წინასწარი შესწავლით ცნობილია, რომ ბაზარზე მაქსიმალური მოთხოვნაა როგორც მაგიდაზე, ასევე კარადაზეც.

ამოცანა ისმის ასეთნაირად:

რამდენი მაგიდა და რამდენი კარადა უნდა დაამზადოს ფირმამ, რომ მან მათი რეალიზაციით მიიღოს მაქსიმალური შემოსავალი (მოგება).

ეთქვათ, ამ ფირმის საქმიანობის გეგმა არის $X = (x_1, x_2)$, ე.ი. ფირმამ უნდა დაამზადოს x_1 მაგიდა და x_2 კარადა. დასმული ამოცანის შესაბამის მოდელს ექნება ასეთი სახე:

ვიპოვოთ მთელი, არაუარყოფითი $X = (x_1, x_2)$ ვექტორი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობათა სისტემას:

$$\begin{cases} 12x_1 + 6x_2 \leq 1200 \\ 5x_1 + 10x_2 \leq 1000 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 640 \end{cases} \quad (3.33)$$

და რომელთათვისაც მიზნის ფუნქცია

$$f(X) = 200x_1 + 150x_2 \quad (3.34)$$

მიიღებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

(3.33)–(3.34) მოდელის ამოხსნის შედეგად ეღებულობთ, რომ $x_1 = 80$ და $x_2 = 40$.

ე.ი. ფირმამ მის განკარგულებაში არსებული რესურსებით უნდა დაამზადოს 80 მაგიდა და 40 კარადა, რომ მან მიიღოს მაქსიმალური შემოსავალი

$$f(X) = 200 \cdot 80 + 150 \cdot 40 = 16000 + 6000 = 22000 \text{ (ლარი).}$$

თავი IV. მარაგთა მართვის ამოცანის ზოგადი კანონზომიერებები და მისი შესაბამისი ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელები

ადამიანი თავის ცხოვრებასა და საქმიანობაში ხშირად აწყდება ისეთ ამოცანებს, რომელთა გადაწყვეტაც მოითხოვს მარაგთა მართვის მათემატიკური აპარატის გამოყენებას.

ასეთი ამოცანები ხშირად ისმის ეკონომიკის სფეროშიც. მაგალითად, ნებისმიერი საწარმოს, ან ფირმის ფუნქციონირების ეფექტიანობა დიდად არის დამოკიდებული პროდუქციის წარმოებისათვის საჭირო საქონელთა (ძირითადი, საბრუნავი კაპიტალი და ა.შ.) მარაგების მართვის პროცესთა ხარისხზე.

მარაგთა მართვა წარმოადგენს რთულ პროცესს და მისი შესწავლა მოითხოვს შემეცნების ისეთი მძლავრი აპარატის გამოყენებას, როგორიცაა ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელების მეთოდი.

მარაგთა მართვის პროცესების შესწავლის დროს ცალ-ცალკე გამოყოფენ *მიმდინარე* და *სადაზღვევო მარაგთა* მართვის პროცესებს.

მარაგთა მართვის თეორიაში ცენტრალური ადგილი უჭირავს მარაგთა ოპტიმალური ნორმების დადგენის ამოცანებს.

ამასთან დაკავშირებით, ჩვენს მიზანს წარმოადგენს სასაქონლო მარაგთა ოპტიმიზაციის ზოგადი ამოცანებისა და მათი შესაბამისი მოდელების განხილვა.

ამ მხრივ, ჩვენ განვიხილავთ *ორი ძირითადი ტიპის* ზოგად ამოცანას და მათ შესაბამის მოდელებს. ერთი არის *მიმდინარე სასაქონლო მარაგთა ოპტიმიზაციის* ამოცანა და მეორე – *სადაზღვევო მარაგთა მართვის* ამოცანა.

განვიხილოთ ისინი ცალ-ცალკე.

§ 1. მიმდინარე სასაქონლო მარაგთა ოპტიმიზაციის ამოცანა და მისი შესაბამისი მოდელი

მიმდინარე სასაქონლო მარაგი განისაზღვრება პირდაპირი საჭიროებისათვის და იგი არ მოიცავს წინასწარ გაუთვალისწინებელი შემთხვევებისათვის შექმნილ მარაგის დამატებით ნაწილს.

განვიხილოთ მიმდინარე სასაქონლო მარაგთა ოპტიმიზაციის ზოგადი ამოცანები და მათი შესაბამისი მოდელები.

დავიწყოთ უმარტივესი შემთხვევით.

შემოვიღოთ შემდეგი დაშვებები და აღნიშვნები:

1. ვთქვათ, ვიხილავთ ერთი რომელიმე სახეობის საქონლის, ან სასაქონლო ჯგუფის მარაგებს;
2. მარაგთა დონე კლებულობს თანაბარზომიერად, მათი თანაბარზომიერი გამოყენების შედეგად;
3. მოთხოვნის მაჩვენებელი საოპტიმიზაციო პერიოდისათვის წინასწარ, სრულად არის განსაზღვრული;
4. საქონლის შემოზიდვა წარმოებს მკაცრად განსაზღვრული გრაფიკით და მისი დარღვევა დაუშვებელია;
5. მარაგთა ოპტიმიზაციის ხარჯები შედგება მხოლოდ ორი ძირითადი ნაწილისაგან – მარაგთა შემოზიდვისა და მათი შენახვისათვის საჭირო ხარჯებისაგან.

ვიგულისხმობთ, რომ განსახილველი საქონლის შემოზიდვა მარაგის შესაქმნელად წარმოებს ნაწილ-ნაწილ პარტიებად. ყოველი შემოსაზიდი პარტიის ზონა ჩვენს ამოცანაში არის უცნობი სიდიდე. იგი ავლნიშნოთ X -ით.

M – იყოს საქონელბრუნვის მთლიანი მოცულობა, რომელიც ეკუთვნის მთელ საოპტიმიზაციო პერიოდს (ეს არის საოპტიმიზაციო პერიოდში შემოსაზიდი საქონლის მთლიანი მოცულობა);

S – არის განსახილველი საქონლის ერთეულის მთელ საოპტიმიზაციო პერიოდში შენახვისათვის საჭირო დანახარჯები;

C – საქონლის ერთი პარტიის შემოზიდვისათვის საჭირო დანახარჯები.

საშუალო მიმდინარე მარაგის შენახვისათვის საჭირო სრული დანახარჯები საოპტიმიზაციო პერიოდში შეადგენს

$$S \frac{X}{2},$$

იმდენად, რამდენადაც იგულისხმება, რომ მარაგთა დონე კლებულობს თანაბარზომიერად, მაქსიმალურიდან, რომელიც განისაზღვრება ერთი პარტიის ზომით X, ნულამდე (საშუალო მიმდინარე მარაგი საოპტიმიზაციო პერიოდში

$$\text{ტოლია: } \frac{X-0}{2} = \frac{X}{2}).$$

საქონლის შემოზიდვისათვის საჭირო დანახარჯები შეადგენს:

$$C \frac{M}{X}, \text{ სადაც } \frac{M}{X} \text{ სიდიდე არის საოპტიმიზაციო}$$

პერიოდში შემოსაზიდ პარტიათა რაოდენობა.

მიმდინარე მარაგთა ოპტიმიზაციის ამოცანის ეკონომიკური შინაარსი მოცემულ შემთხვევაში მდგომარეობს შემდეგში:

განესაზღვროთ თითოეული შემოსაზიდი პარტიის ისეთი სასაქონლო ზომა (მოცულობა), რომელიც მისი შემოზიდვისა და შენახვის თეალსაზრისით დაჯდება ყველაზე იაფი.

ამ ამოცანის შესაბამის მოდელს ექნება ასეთი სახე:

ვიპოვოთ ისეთი X უცნობი სიდიდე, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$X \leq M, \quad (4.1)$$

$$X \geq 0 \quad (4.2)$$

და რომლისთვისაც ფუნქცია

$$f(X) = S \cdot \frac{X}{2} + C \cdot \frac{M}{X} \rightarrow \min. \quad (4.3)$$

(4.1) – (4.3) მოდელის ამოხსნა ემთხვევა (4.3) ფუნქციის მინიმუმის წერტილის პოვნას.

(4.3) ფუნქციის მინიმუმის წერტილის საპოვნელად ვიპოვოთ მისი პირველი რიგის წარმოებული და იგი გავეტოლოთ ნულს

$$f'(X) = \frac{S}{2} - \frac{C \cdot M}{X^2} = 0, \text{ აქედან } X = \sqrt{\frac{2C \cdot M}{S}}. \text{ ეს არის } f(X)$$

ფუნქციის მინიმუმის წერტილი, რადგან

$$f''(X) = \frac{2CM}{X^3} > 0.$$

მაშასადამე ყოველი შემოსაზიდი სასაქონლო პარტიის ოპტიმალური ზომა

$$X_0 = \sqrt{\frac{2CM}{S}};$$

საშუალო მიმდინარე მარაგის

ოპტიმალური ზომა ტოლია $\frac{X_0}{2} = \sqrt{\frac{CM}{2S}};$

მიწოდებათა ოპტიმალური

რაოდენობა ტოლია $n_0 = \frac{M}{X_0} = \sqrt{\frac{SM}{2C}};$

მიწოდებათა შორის არსებული

ოპტიმალური ინტერვალი $t_0 = \frac{T}{n_0} = T \cdot \sqrt{\frac{2C}{S \cdot M}},$

სადაც

T-არის საოპტიმიზაციო პერიოდის ხანგრძლიობა (თვე, კვარტალი, წელი და ა.შ.).

ასეთივე წესით შეიძლება განისაზღვროს სასაქონლო პარტიის ოპტიმალური ზომა და განხორციელდეს მარაგის ოპტიმიზაცია სხვა რომელიმე საქონლისთვისაც. ე.ი. გამოდის, რომ ასეთი გზით შესაძლებელია სასაქონლო მარაგთა ოპტიმიზაცია, თუ ზემოთ განხილულ მათემატიკურ აპარატს ცალ-ცალკე გამოვიყენებთ განსხვავებული სახეობის საქონლის, ან სასაქონლო ჯგუფისათვის.

პრაქტიკაში კი ეს ამოცანა ხშირად ისმის კომპლექსურად.

ამ დროს მარაგთა ოპტიმიზაცია სხვადასხვა სახეობის საქონლის, ან სასაქონლო ჯგუფისათვის ხდება ერთდროულად, ერთი ამოცანის გადაწყვეტის შედეგად.

პრაქტიკაში, გარდა ზემოთ მოყვანილი პირობებისა, ხდება, აგრეთვე, სხვა შეზღუდვების გათვალისწინებაც, კერძოდ, სასაწყობო ნაგებობათა ზომების გათვალისწინება.

საძიებელი ამოცანის ზოგადი სახით დასმამდე შემოვიღოთ შემდეგი დაშვებები და აღნიშვნები:

ეთქვას, უნდა განვახორციელოთ მარაგთა ოპტიმიზაცია 1, 2, ..., m სხვადასხვა სახეობის საქონლისათვის (ან სასაქონლო ჯგუფისათვის) ერთდროულად. i -იყოს ასეთ სახეობათა აღმნიშვნელი ინდექსი.

$v_i(m^3)$ -იყოს სასაწყობო ნაგებობის ის ტევადობა (მოცულობა), რომელიც საჭიროა i -ური სახეობის საქონლის ერთეულის შესანახად;

X_i - უცნობი სიდიდე, რომელიც ასახავს i -ური სახეობის შემოსაზიდი საქონლის ერთი პარტიის ზომას;

M_i -იყოს i -ური სახეობის საქონლის საქონელბრუნვის მთლიანი მოცულობა, რომელიც ეკუთვნის მთელ საოპტიმიზაციო პერიოდს (ის არის საოპტიმიზაციო პერიოდში

შემოსაზიდი i -ური სახეობის საქონლის მთლიანი მოცულობა);

S_i - არის i -ური სახეობის საქონლის ერთეულის მთელ საოპტიმიზაციო პერიოდში შენახვისათვის საჭირო დანახარჯები;

C_i - იყოს i -ური სახეობის საქონლის ერთი პარტიის შემოზიდვისათვის საჭირო დანახარჯები.

საძიებელი ამოცანის ეკონომიკური შინაარსი მდგომარეობს შემდეგში:

განესაზღვროთ $1, 2, \dots, m$ სხვადასხვა სახეობის საქონელთა შემოსაზიდი პარტიების ისეთი ზომები (მოცულობები), რომლებიც მათი შემოზიდვისა და შენახვის თვალსაზრისით დაჯდება ყველაზე იაფი.

ამ ამოცანის შესაბამის მოდელს ექნება ასეთი სახე:

ეიპოვოთ $X_1, X_2, \dots, X_m$ ისეთი უცნობი სიდიდეები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$\sum_{i=1}^m \nu_i X_i \leq V, \quad (4.4)$$

$$X_i \leq M_i, \quad i=1, 2, \dots, m; \quad (4.5)$$

$$X_i \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, m \quad (4.6)$$

და რომელთათვისაც მიზნის ფუნქცია:

$$f(X_1, X_2, \dots, X_m) = \sum_{i=1}^m S_i \frac{X_i}{2} + \sum_{i=1}^m \frac{C_i M_i}{X_i} \rightarrow \min. \quad (4.7)$$

(4.4) - (4.7) მოდელის ამოაახსნელად გამოვიყენოთ ლაგრანჟის ამომხსნელ მამრაველთა მეთოდი. ამ მიზნით, უპირველეს ყოვლისა, ავაგოთ ლაგრანჟის ფუნქცია.

მოცემულ შემთხვევაში, ლაგრანჟის ფუნქციას ექნება ასეთი სახე:

$$L(X_1, X_2, \dots, X_m, \eta) = \sum_{i=1}^m S_i \frac{X_i}{2} + \sum_{i=1}^m C_i \frac{M_i}{X_i} + \eta(V - \sum_{i=1}^m v_i X_i) \quad (4.8)$$

(4.8) ფუნქცია ემთხვევა (4.7) მიზნის ფუნქციას, თუ (4.8)-ში სრულდება პირობა:

$$V - \sum_{i=1}^m v_i X_i = 0, \quad \eta < 0 \quad (4.9) \quad \Delta 6$$

$$V - \sum_{i=1}^m v_i X_i > 0, \quad \eta = 0. \quad (4.10)$$

ახლა ეაჩვენოთ, რომ ყოველთვის შეიძლება მიღწეულ იქნეს f და L ფუნქციების ტოლობა η მაშინველის შერჩევის გზით.

ვიპოვოთ (4.8) ფუნქციის კერძო წარმოებულები და ისინი გავუტოლოთ ნულს.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial X_1} = \frac{S_1}{2} - \frac{C_1 M_1}{X_1^2} - \eta v_1 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial X_2} = \frac{S_2}{2} - \frac{C_2 M_2}{X_2^2} - \eta v_2 = 0; \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial L}{\partial X_i} = \frac{S_i}{2} - \frac{C_i M_i}{X_i^2} - \eta v_i = 0; \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial L}{\partial X_m} = \frac{S_m}{2} - \frac{C_m M_m}{X_m^2} - \eta v_m = 0. \end{array} \right. \quad (4.11)$$

(4.11) სისტემის ყოველი განტოლება განსაზღვრავს უცნობის შემდეგი სახის მნიშვნელობას:

$$X_i = \sqrt{\frac{2C_i M_i}{S_i - 2\eta v_i}} \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (4.12)$$

η პარამეტრის განსაზღვრის მიზნით X_i -ის მნიშვნელობა (4.12)-დან ჩავსვათ (4.9)-ში და მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^m v_i \sqrt{\frac{2C_i M_i}{S_i - 2\eta v_i}} = V. \quad (4.13)$$

(4.13)-ში η სიდიდე არის უცნობი, ხოლო დანარჩენი კი ცნობილი სიდიდეები (ამასთან $\eta < 0$). ამიტომ (4.13)-დან ადვილია η -ს კონკრეტული მნიშვნელობის პოვნა. ეთქვათ, ეს მნიშვნელობა ვიპოვეთ და მივიღეთ, რომ $\eta = \eta_0$ -ს, მაშინ მისი გათვალისწინებით (4.12)-ში, შეგვიძლია ვიპოვოთ ნებისმიერი სახეობის შემოსაზიდი საქონლის პარტიათა ოპტიმალური ზომა:

$$\bar{X}_i = \sqrt{\frac{2C_i M_i}{S_i - 2\eta_0 v_i}} \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (4.14)$$

ამის შემდეგ კი ადვილად შეიძლება ვიპოვოთ სხვა პარამეტრებიც:

- საშუალო მიმდინარე მარაგის ოპტიმალური ზომები ნებისმიერი სახეობის საქონლისათვის

$$\frac{\bar{X}_i}{2} = \sqrt{\frac{C_i M_i}{2(S_i - 2\eta_0 v_i)}} \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (4.15)$$

- ნებისმიერი სახეობის საქონლის შემოზიდვის პარტიათა (ანუ მიწოდებათა) ოპტიმალური რაოდენობა

$$\bar{n}_i = \frac{M_i}{\bar{X}_i} = \sqrt{\frac{M_i(S_i - 2\eta_0 v_i)}{2C_i}} \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.16)$$

- ნებისმიერი სახეობის საქონლის პარტიებად შემოზიდვებს (მიწოდებებს) შორის დროითი ინტერვალები:

$$\bar{t}_i = \frac{T_i}{\bar{n}_i} = T_i \sqrt{\frac{2C_i}{M_i(S_i - 2\eta_0 V_i)}} , i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.17)$$

ამ გზით განსაზღვრული პარამეტრების გამოყენება იძლევა არა მარტო ზემოთ დასმული ეკონომიკური ამოცანის გადაწყვეტის, არამედ მარაგთა ოპტიმალური მართვის განხორციელების საშუალებასაც.

§ 2. სადაზღვევო მარაგთა მართვის ამოცანა და მისი შესაბამისი მოდელი

სადაზღვევო სასაქონლო მარაგი განისაზღვრება არა მარტო პირდაპირი საჭიროებისათვის, არამედ იგი მიმდინარე მარაგთან ერთად, დამატებით შეიცავს წინასწარ გაუთვალისწინებელი შემთხვევებისათვის შექმნილი მარაგის დამატებით ნაწილსაც.

შექმნილი მარაგის დანიშნულებისამებრ ხარჯვის მოცულობა დროში, როგორც წესი, არ წარმოადგენს მუდმივ სიდიდეს. ამასთან, პრაქტიკაში ზოგჯერ შესაძლებელია საქონელთა მიწოდების ვადების დარღვევაც. ამიტომ, ასეთ შემთხვევაში, სასაქონლო მარაგის გამომყენებელი ობიექტის ნორმალური ფუნქციონირების უზრუნველსაყოფად საჭიროა სადაზღვევო მარაგთა შექმნა.

ამ დროს, ერთი მხრივ, თუ შევქმნით საქონელთა აუცილებელ ზომას დიდ მარაგს, რომლითაც გამოირიცხება მისი გამომყენებელი ობიექტის ფუნქციონირების შეფერხება საჭირო საქონლის უქონლობის გამო, შეიძლება გაუმართლებლად გაიზარდოს დანახარჯები ასეთი მარაგის შესაქმნელად საჭირო საქონლის შეძენასა და შენახვაზე. მეორე მხრივ, თუ შევქმნით აუცილებელ ზომას მცირე მარაგს, მაშინ მართალია, შეძენისა და შენახვის ხარჯები შემცირდება, მაგრამ ასეთი მარაგი ვერ უზრუნველყოფს მისი გამომყენებელი ობიექტის შეუფერხებელ ფუნქციონირებას. ამიტომ, საჭიროა განვსაზღვროთ მარაგის მეცნიერულად დასაბუთებული ზომა, რომელიც

მოხსნის ორთავე უკიდურესობას და უზრუნველყოფს ხსენებული ობიექტის შეუფერხებელ ფუნქციონირებას მინიმალური დანახარჯებით.

ამ ამოცანის შესაბამისი მოდელის აგებამდე შემოვიღოთ შემდეგი დაშვებები და აღნიშვნები:

ეთქვას, γ არის ცნობილი სიდიდე, რომელიც გამოხატავს „მომსახურების ალბათობას“. მომსახურების ალბათობის ქვეშ იგულისხმება იმ დროთა აღმნიშვნელი სიდიდეების ფარდობა, რომელთაგან პირველი შეესაბამება საქონლის ფიზიკური არსებობის დროს (მისი გამოყენების პროცესში), ხოლო მეორე კი – მთელს განსახილველ დროით პერიოდს. ასე, მაგალითად, თუ საქონლის შექმნილი მარაგი ემსახურება ამა თუ იმ საფაქრო ობიექტს, მაშინ „მომსახურების ალბათობა“ (γ) განისაზღვრება საქონლის გაყიდვაში არსებობის შესაბამისი დროითი მაჩვენებლის ფარდობით მთელი განსახილველი დროითი პერიოდის შესაბამის მაჩვენებელთან. უფრო კონკრეტულად, თუ მაგალითად, საქონელი გაყიდვაში 100 დღიდან არ არის მხოლოდ 5 დღის განმავლობაში, მაშინ $\gamma=0,95$ (ეს მაჩვენებელი, აუცილებელი ასორტიმენტის საქონლისათვის, ახლოს უნდა იყოს ერთთან).

სადაზღვევო მარაგის განსაზღვრეად, გარდა γ პარამეტრისა, საჭიროა შემოვიღოთ შემდეგი პარამეტრები:

θ – იყოს მოთხოვნა მოცემულ საქონელზე;

a – იყოს მოთხოვნის სიდიდის (როგორც შემთხვევითი სიდიდის) მათემატიკური ლოდინი;

σ – მოთხოვნის საშუალო კვადრატული გადახრა.

ეთქვას, წარსული პერიოდის ანალიზის შედეგად სტატისტიკურად დადგენილია, რომ მოთხოვნა (θ) მოცემულ საქონელზე ექვემდებარება ნორმალური განაწილების კანონს, მაშინ შეგვიძლია ჩაეწეროს:

$$f(\Theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\Theta-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Y-ით ავლნიშნოთ საძიებელი სიდიდე, რომელიც შეიცავს სადაზღვევო მარაგის მაჩვენებელს; პირობის მიხედვით Y პარამეტრი "მომსახურების ალბათობასთან" (γ) დაკავშირებულია შემდეგი დამოკიდებულებით: $P(\theta < Y) = \gamma$. ჩვენი დაშვების თანახმად θ წარმოადგენს ნორმალური განაწილების კანონს დაქვემდებარებულ შემთხვევით სიდიდეს. ამიტომ, მოცემული ალბათობის განსაზღვრა შესაძლებელია ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მოცემულ (α , Y) ინტერვალში მოხვედრის ალბათობის საპოვნინ ფორმულის გამოყენების გზით. მაშასადამე,

$$P(\alpha < x < y) = \Phi\left(\frac{y-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

სადაც $\alpha \rightarrow -\infty$ და

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

ეს უკანასკნელი არის ლაპლასის ფუნქცია, რომელიც განისაზღვრება სპეციალური, ცნობილი ცხრილების მიხედვით.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ლაპლასის ფუნქცია არის კენტი ფუნქცია, მაშინ მივიღებთ:

$$\Phi\left(\frac{y-a}{\sigma}\right) = \gamma - 0,5. \quad (4.18)$$

(4.18) ფორმულა იძლევა Y პარამეტრის განსაზღვრის საშუალებას. ასე, მაგალითად, თუ (4.18)-ში გავითვალისწინებთ, რომ $\gamma = 0,95$ -ს, მივიღებთ:

$$\Phi\left(\frac{y-a}{\sigma}\right) = 0,45. \quad (4.19)$$

სპეციალური ცხრილიდან ვაღებთ, რომ ასეთ შემთხვევაში

$$\frac{y-a}{\sigma} = 1,65. \quad (4.20)$$

(4.20)-დან

$$Y = a + 1,65\sigma. \quad (4.21)$$

მაშასადამე, ამ გზით, შეიძლება სადაზღვევო მარაგთა პოვნა იმ შემთხვევაში, თუ მოთხოვნა (θ) ექვემდებარება ნორმალური განაწილების კანონს და იგი ტოლი იქნება სხვაობისა y და a სიდიდეებს შორის (ანუ იგი ტოლი იქნება $1,65\sigma$ სიდიდისა). მაგრამ, თუ მოთხოვნა (θ) არ ექვემდებარება აღნიშნულ კანონს და მისი განაწილების კანონი უცნობია, მაშინ სადაზღვევო მარაგის სიდიდის განსაზღვრავად შეიძლება გამოყენებულ იქნეს ჩებიშევის უტოლობა:

$$P(|\theta - a| > \delta) \leq \left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^2$$

თუ ამ ტოლობაში გავითვალისწინებთ $\delta = Y - a$ მივიღებთ:

$$P(\theta > y) \leq \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{(y-a)^2}.$$

თუ გამოვიყენებთ ასეთ ჭეშმარიტ ტოლობას:

$P(\theta < Y) + P(\theta > Y) = 1$, მაშინ შეგვიძლია ჩავწეროთ:
 $P(\theta > Y) = 1 - P(\theta < Y) = 1 - \gamma$.

აქედან ვღებულობთ შეფასებას:

$$1 - \gamma \leq \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{(y - a)^2}$$

და შესაბამისად,

$$y - a \leq \frac{\sigma}{\sqrt{2(1 - \gamma)}}. \quad (4.22)$$

(4.22) უტოლობიდან

$$y \leq a + \frac{\sigma}{\sqrt{2(1 - \gamma)}}. \quad (4.23)$$

(4.23) უტოლობა კი იძლევა საშუალებას შეფასდეს სადაზღვევო მარაგის სიდიდე (თუ რაზე მეტი არ შეიძლება იყოს იგი). მაგალითად, თუ ისევ დავუშვებთ, რომ $\gamma = 0,95$ -ს, მაშინ მივიღებთ: $y \leq a + 3,3\sigma$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ სადაზღვევო მარაგის სიდიდემ არ უნდა გადააჭარბოს $3,3\sigma$ -ს.

ამ თავის ბოლოს, მარაგთა მართვის ამოცანის ამოხსნის მეთოდის ეკონომიკაში პრაქტიკული გამოყენების საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ *საეაჭრო ფირმის საქონლით მომარაგების ოპტიმალური დაგეგმვის ამოცანა*, მიმდინარე და სადაზღვევო სასაქონლო მარაგთა ოპტიმიზაციის ამსახველ ფაქტორთა გათვალისწინებით.

IV თავის ღამათება - საეჭრო ფირმის საქონლით მომარაგების ოპტიმალური დაგეგმვის ამოცანა (მიმდინარე და სადაზღვევო სასაქონლო მარაგთა ოპტიმიზაციის ამსახველ ფაქტორთა გათვალისწინებით).

ვთქვათ, მოცემულია რომელიმე საეჭრო ფირმა. დაეუშვათ, რომ იგი მარაგდება და ეატრობს ორი სახეობის სამრეწველო და სასურსათო საქონლით. დაეუშვათ, ეს ფირმა წელიწადში ღებულობს 9000 ლარის სამრეწველო და 4000 ლარის სასურსათო საქონელს. ამასთან, ვიგულისხმობთ, რომ წლიური დანახარჯები საქონლს ერთეულის შესანახად შესაბამისად ტოლია 2 და 4 ($S_1=2$ და $S_2=4$) ლარისა, ხოლო თითო პარტიის შემოღიდვისათვის საჭირო ხარჯები შესაბამისად უდრის 10 და 20 ($C_1=10$ და $C_2=20$) ლარს.

მოცემულ პირობებში, საჭიროა მოენახოთ საეჭრო ფირმის ამ ორი სახეობის საქონლით მომარაგების ოპტიმალური ვარიანტი, სასაწყობო ტეკადობაზე შეზღუდვის გათვალისწინების გარეშე.

ამ ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ ზემოთ მიღებული ფორმულები და სამრეწველო და სასურსათო საქონლისათვის ცალ-ცალკე გავიანგარიშოთ საეჭრო ფირმის მომარაგების დაგეგმვისათვის საჭირო ძირითად პარამეტრთა (მაჩვენებელთა) ოპტიმალური სიდიდეები.

პირველ რიგში, გავიანგარიშოთ ერთი მიწოდების (პარტიის) ოპტიმალური ზომები სამრეწველო და სასურსათო საქონლისათვის ცალ-ცალკე. ამისათვის საჭიროა გამოვიყენოთ

$X_0 = \sqrt{\frac{2CM}{S}}$ ფორმულა და მივიღებთ, რომ

სამრეწველო საქონლისათვის

$$(X_0)_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 9000}{2}} = 300 \text{ (ლარს),}$$

ხოლო სასურსათო საქონლისათვის

$$(X_0)_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 4000}{4}} = 200 \text{ (ლარს).}$$

საქონლის პარტიებად შემოზიდვის ოპტიმალური მაჩვენებლების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ფორმულა:

$$n_0 = \frac{M}{X_0} \text{ და მივიღებთ:}$$

$$(n_0)_1 = \frac{9000}{300} = 30, \quad (n_0)_2 = \frac{4000}{200} = 20.$$

მარაგთა მართვის წლიური ხარჯების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ფორმულები:

$$Z = \sqrt{2 \cdot C \cdot S \cdot M} \text{ და } Z = Z_1 + Z_2.$$

მივიღებთ, რომ ფირმის მარაგთა მართვის წლიური ხარჯები, სამრეწველო საქონლისათვის ტოლია:

$$Z_1 = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 9000} = 600 \text{ (ლარს),}$$

ხოლო სასურსათო საქონლისათვის კი იგი უდრის

$$Z_2 = \sqrt{2 \cdot 20 \cdot 4 \cdot 4000} = 800 \quad (\text{ლარს}).$$

$$\text{სულ } Z = 600 + 800 = 1400 \text{ (ლარს).}$$

ახლ, შემოვიღოთ შეზღუდვები სასაწყობო ნაგებობების ტევადობებზე. ეთქვათ, *სამრეწველო საქონლის* ყოველი ერთეულის შესანახად საჭიროა $v=1$ მ³ სასაწყობო ნაგებობის მოცულობა, ხოლო *სასურსათო საქონლის* ერთეულის შესანახად კი — $v=2$ მ³ სასაწყობო ნაგებობის მოცულობა.

გარდა ამისა, ვიგულისხმობთ, რომ სავაჭრო ფირმას სასაწყობო ნაგებობად გააჩნია *სამრეწველო საქონლისათვის* $V=100$ მ³ ტევადობის და *სასურსათო საქონლისათვის* $V=200$ მ³ ტევადობის შენობები.

თუ გამოვიყენებთ ფორმულას:

$$\eta_0 = \frac{S}{2v} - \frac{C \cdot M \cdot v}{V^2}$$

მივიღებთ:

სამრეწველო საქონლისათვის —

$$(\eta_0)_1 = \frac{2}{2 \cdot 1} - \frac{10 \cdot 9000 \cdot 1}{100^2} = 1 - 9 = -8,$$

სასურსათო საქონლისათვის —

$$(\eta_0)_2 = \frac{4}{2 \cdot 2} - \frac{20 \cdot 4000 \cdot 2}{200^2} = 1 - 4 = -3.$$

თუ ამ მაჩვენებლებს სხვებთან ერთად ჩავსვამთ ფორმულაში

$$X_0 = \sqrt{\frac{2CM}{S - 2\eta_0 v}}, \quad \text{მივიღებთ:}$$

სამრეწველო საქონლისათვის —

$$(X_0)_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 9000}{2 + 2 \cdot 8 \cdot 1}} = \sqrt{\frac{90000}{9}} = 100 \quad (\text{ლარს}).$$

სასურსათო საქონლისათვის —

$$(X_0)_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 4000}{4 + 2 \cdot 3 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{40000}{4}} = 100 \quad (\text{ლარს}).$$

თუ ვისარგებლებთ ფორმულით:

$$Z_0 = (S - \eta_0 v) X_0, \quad \text{მივიღებთ:}$$

სამრეწველო საქონლისათვის —

$$(Z_0)_1 = (2 + 8 \cdot 1) \cdot 100 = 1000 \quad (\text{ლარს}),$$

სასურსათო საქონლისათვის —

$$(Z_0)_2 = (4 + 3 \cdot 2) \cdot 100 = 1000 \quad (\text{ლარს}).$$

მივიღეთ, რომ მიწოდების სიდიდე (ერთი პარტიის ზომა) არც სამრეწველო და არც სასურსათო საქონლისათვის არ აღემატება მათ შენახვასთან დაკავშირებულ დასაშვებ ნორმებს, მაგრამ გათვლები გვიჩვენებს, რომ ხარჯები, რომლებიც დაკავშირებულია სასაწყობო ნაგებობის მოცულობების შეზღუდულობასთან, შეს ბამისად გაიზარდა სამრეწველო საქონლისათვის 400 ლარისა და სასურსათო საქონლისათვის 200 ლარის ოდენობით.

ცნობილია, რომ ლაგრანჟის მამრავლის მოდულის $| \eta_0 |$ ეკონომიკური შინაარსი მდგომარეობს იმაში, რომ იგი გვიჩვენებს სასაწყობო ნაგებობის ტევადობის (მოცულობის) ერთეულის პირობით საარენდო ფასს (გადასახადს). სასაწყობო ნაგებობის ტევადობის გაზრდა ეკონომიკურად გამართლებულია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ახალი სათავსოს 1 მ³-ის საარენდო ფასი (გადასახადი) არ აღემატება სიდიდეს — $| \eta_0 |$ (ე.ი. ჩვენს მაგალითში, სამრეწველო საქონლისათვის — 8 ლარ/მ³-ს და სასურსათო საქონლისათვის — 3 ლარ/მ³-ს). წინააღმდეგ

შემთხვევაში, დამატებითი სასაწყობო ნაგებობების ტევადობის გადიდება არ შეაჯირებს მარაგთა მართვის ხარჯებს. ახლა ვაჩვენოთ, თუ როგორ უნდა შეფასდეს პრაქტიკაში სადაზღვევო მარაგთა სიდიდე. ეთქვათ, მოცემულია მონაცემები $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5$, ამა თუ იმ საქონლის გაყიდვის რაოდენობის შესახებ და n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 შესაბამისად მათი სიხშირის შესახებ (რომლებიც განსაზღვრულია 10 სამუშაო დღის მიხედვით):

ეთქვათ, $\theta_1=8; \theta_2=9; \theta_3=10; \theta_4=11$ და $\theta_5=12$.

გარდა ამისა, ვიგულისხმობთ, რომ $n_1=1; n_2=2; n_3=4; n_4=2$ და $n_5=1$.

ამ მონაცემების გათვალისწინებით შეიძლება გამოეთვალოთ:

$$E(\theta)=8 \cdot 0,1+9 \cdot 0,2+10 \cdot 0,4+11 \cdot 0,2+12 \cdot 0,1=10;$$

$$D(\theta)=8^2 \cdot 0,1+9^2 \cdot 0,2+\dots+12^2 \cdot 0,1-10^2=0,9;$$

$$\sigma(\theta) = \sqrt{D(\theta)} = \sqrt{0,9} \approx 0,95.$$

აქედან, $\gamma=0,95$ -სათვის ვღებულობთ $y \leq 10+3,3 \cdot 0,95 \approx 13$. მაშასადამე, მოცემულ შემთხვევაში, სადაზღვევო მარაგის სიდიდე უნდა შეადგენდეს არაუმეტეს 3 ერთეულისა.

თავი V. თამაშთა თეორიის ძირითადი დებულებები და მოდელები

§ 1. თამაშთა თეორიის შესწავლის ძირითადი საგანი

ადამიანთა ცხოვრებისა და საქმიანობის ნებისმიერ სფეროში მრავლად არის ისეთი სიტუაციები, როცა მიზნის მისაღწევად საჭიროა მიღებულ იქნეს გადაწყვეტილება მეცნიერულ საფუძველზე, რათა ამ გზით შერჩეულ იქნეს მიზნის მიღწევის ყველაზე საუკეთესო ვარიანტი.

გადაწყვეტილების მიღების სფეროში არსებობს სხვადასხვა ხასიათის სიტუაციები. მაგალითად, არაკონფლიქტური, კონფლიქტური და სხვა სიტუაციები.

თამაშთა თეორიის შესწავლის ობიექტს წარმოადგენს სწორედ *კონფლიქტური სიტუაციები*. მათი არსი ძირითადად მდგომარეობს იმაში, რომ ასეთი სიტუაციების დროს, საბოლოო შედეგის მახასიათებელი ერთი რომელიმე სახის მაჩვენებლის გაუმჯობესება ხდება სხვა სახის მაჩვენებელთა გაუარესების ხარჯზე. ამგვარად, გამოდის, რომ ეს მაჩვენებლები ურთიერთშორის ებმება ისეთ კონფლიქტში, როცა სიტუაციის გაუარესება (წაგება) ერთი სახის მაჩვენებელთათვის გარდაიქმნება სიტუაციით გაუმჯობესებად (მოგებად) სხვა სახის მაჩვენებლებისათვის.

ასე, მაგალითად, სასწავლო დაწესებულებების, ვთქვათ, სკოლების შენობა-ნაგებობების მოწყობის დროს უნდა გადაწყდეს საკითხი სხვადასხვა ობიექტების – კლასების, კაბინეტებისა და დამხმარე მოწყობილობების რაოდენობათა შერჩევის შესახებ. ნებისმიერი ზემოთ ჩამოთვლილი სახეობის ობიექტთა განლაგებისათვის საჭიროა განსაზღვრული რაოდენობის ფართობი. ამიტომ ერთი სახეობის ობიექტთა რაოდენობის გაზრდა, შედეგში, გამოიწვევს სხვა დანარჩენი (ან რომელიმე სხვა) სახეობის ობიექტთა რაოდენობის შემცირების აუცილებლობას. ცხადია, რომ ასეთ პირობებში მიღებული გადაწყვეტილება უნდა ით-

ვალისწინებდეს, საერთო მიზნიდან გამომდინარე, ურთიერთსაწინააღმდეგო სითხოვნებს.

პრაქტიკაში შეიძლება შეგვხვდეს კონფლიქტური სიტუაციების სხვადასხვა სახეობა. ისინი, ჩვეულებრივ, წარმოადგენს მეტად რთულ სიტუაციებს, რომელთა ანალიზი ხშირად რთულდება მრავალი უმნიშვნელო ფაქტორის არსებობით.

იმისათვის, რომ შესაძლებელი გახდეს კონფლიქტური სიტუაციების მათემატიკური ანალიზი (მისი შესაბამისი მოდელის აგების გზით), საჭიროა მხედველობაში იქნეს მიღებული ამ სიტუაციისათვის დამახასიათებელი ძირითადი და უგულებელყოფილ იქნეს მეორეხარისხოვანი ფაქტორები.

ნებისმიერი სახეობის კონფლიქტური სიტუაციის ზოგადი კანონზომიერებების ამსახველ მათემატიკურ მოდელს უწოდებენ თამაშს.

თამაშთა თეორია წარმოადგენს კონფლიქტურ სიტუაციათა შემსწავლელ მათემატიკურ თეორიას.

კონფლიქტურ სიტუაციებს უწოდებენ თამაშებს, ხოლო მათში მონაწილე მაჩვენებლებს კი – მოთამაშეებს.

ესა, თუ ის თამაშში ზოგიერთი მოთამაშისათვის მთავრდება მოგებით, ხოლო ზოგიერთისათვის კი – წაგებით.

თამაშთა თეორიის შესწავლის ძირითად საგანს წარმოადგენს მოთამაშეთათვის ისეთი რეკომენდაციების შემუშავება, რომ მათი განხორციელების შედეგად მომგებმა შეძლოს, რაც შეიძლება, მეტის მოგება და წამგებმა – რაც შეიძლება, ნაკლების წაგება.

ამა თუ იმ თამაშში შეიძლება ერთმანეთს დაუპირისპირდეს ორი ან მეტი მოთამაშის ინტერესები. თუ თამაშში მონაწილეობს ორი პირი, მაშინ მას უწოდებენ ორი პირის თამაშს, ხოლო თუ მოთამაშეთა რიცხვი მეტია ორზე, მაშინ მას უწოდებენ მრავალი პირის თამაშს. მრავალი პირის თამაშთა მონაწილეებს შეუძლიათ შექმნან კოალიციები.

ახლა განვიხილოთ თამაშთა თეორიის ძირითადი იდეები ელემენტარულ შემთხვევებში, ხოლო შემდეგ კი ისინი განვაერთოთ ზოგადი შემთხვევებისთვის.

ამ მიზნით, პირველ რიგში, განვიხილოთ ორი, ხოლო შემდეგ კი N პირის თამაშთა თეორიის ძირითადი პრინციპები.

§ 2. ორი პირის თამაშის თეორიის ძირითადი ცნებები.

საგადამხდელო მატრიცა. თამაშის ფასი. მაქსიმიზისა და მინიმაქსის პრინციპები

ეთქვათ, მოცემულია ორი პირის თამაში, რომელშიც მონაწილეობენ A და B მოთამაშეები განსაზღვრული ინტერესებით. ეს თამაში წარმოადგენს A და B მოთამაშეების მიერ, წინასწარ ცნობილი წესების მიხედვით განხორციელებული რიგი ქმედებებისა და “სელების” ერთობლიობას.

ასეთი ტიპის თამაშს ეწოდება თამაში ნულოვანი ჯამით (მატრიცული თამაში), თუ A მოთამაშის მიერ მიღებული მოგების მაჩვენებელი ტოლია B მოთამაშის მიერ განცდილი წაგების მაჩვენებლისა და პირიქით A – ს წაგების მაჩვენებელი ტოლია B – ს მოგების მაჩვენებლისა.

მსჯელობის სიმარტივისათვის ვიგულისხმობთ, რომ საქმე გვაქვს ორი პირის თამაშთან ნულოვანი ჯამით (ანუ მატრიცულ თამაშთან).

ამ თამაშში A და B მოთამაშეები აკეთებენ რიგ თანმიმდევრულ სელებს, ანუ ახორციელებენ თამაშის წესებით გათვალისწინებულ რიგ თანმიმდევრულ ქმედებებს.

ამა თუ იმ თამაშის დროს გაკეთებული სელები იყოფა ორ ნაწილად.

პირადი და შემთხვევითი სელები.

პირადი ეწოდება ისეთ სელას, რომელსაც ირჩევს და აკეთებს თვით მოთამაშე (სპეციალური წესებით განსაზღვრული სელებიდან), მისთვის ყველაზე ხელსაყრელი სელის შერჩევის საფუძველზე.

შემთხვევითი ეწოდება ისეთ სელას, რომლის არჩევაც ხდება არა მოთამაშის მიერ სელის ზემოთ ხსენებული წესით შერჩევის საფუძველზე, არამედ მისი შემთხვევითი შერჩევისათვის საჭირო რაღაც მექანიზმის (მონეტის აგდების, დოლიდან სპეციალური ნომრის ამოღების, კამათლის გაგორების და ა.შ.) გამოყენების გზით.

წესების ერთობლიობას, რომელიც მოწინააღმდეგის ნებისმიერი სელის შესაბამისად განსაზღვრავს მის საპასუხო ქმედებათა ოპტიმალური ვარიანტის შერჩევას თამაშის მსვლელობაში შექმნილი სიტუაციისაგან დამოკიდებულებით, მოთამაშის სტრატეგია ეწოდება.

მოთამაშებს თამაშთა თეორიის მოთხოვნათა ცოდნა აძლევს იმის საშუალებას, რომ მათ სვლების გაკეთების დროს შეარჩიონ საუკეთესო რეკომენდაციების ამსახველი სტრატეგია.

თამაში შეიძლება იყოს ორი სახეობის – სასრული და უსასრულო.

ამა თუ იმ თამაშს ეწოდება სასრული, თუ მასში მონაწილე მოთამაშეებს გააჩნიათ მხოლოდ სასრული რაოდენობის სტრატეგიები და ეწოდება უსასრულო, თუ მათგან თუნდაც ერთს მაინც გააჩნია უსასრულო რაოდენობის სტრატეგიები.

თამაშთა თეორიის მთავარ მიზანს, ორი პირის თამაშის შემთხვევაში, წარმოადგენს A და B მოთამაშეთა ისეთი ოპტიმალური სტრატეგიების შემუშავება, რომლებიც თამაშის მრავალჯერადი განმეორების შემთხვევაში მოთამაშეებისათვის უზრუნველყოფს მაქსიმალურად შესაძლო საშუალო მოგებას, ან მინიმალურად შესაძლო საშუალო წაგებას.

ორი პირის თამაშის დროს თუ ერთი A მოთამაშე ცდილობს მაქსიმალურად გაზარდოს თავისი მოგება, მაშინ მეორე B მოთამაშე ყველაფერს აკეთებს იმისათვის, რომ მან ხელი შეუშალოს A მოთამაშეს საკუთარი მისწრაფების განხორციელებაში.

ახლა განვიხილოთ თამაშთა თეორიის ძირითადი მათემატიკური აპარატი.

ვთქვათ, მოცემულია ორი A და B პირის სასრული თამაში, რომელშიც A მოთამაშეს გააჩნია m სტრატეგია ($A_1, A_2, \dots, A_m$), ხოლო B მოთამაშეს n სტრატეგია ($B_1, B_2, \dots, B_n$).

ასეთი თამაში იწოდება $m \times n$ განზომილებიან სასრულ თამაშად.

თუ თამაშის დროს A და B მოთამაშეები იყენებენ მხოლოდ საკუთარ სვლებს, მაშინ A და B სტრატეგიების არჩევის პროცესი ცალსახად განსაზღვრავს თამაშის a_{ij} ამოსავალ ელემენტს. ეს არის რიცხვითი მაჩვენებელი, რომელიც ახასიათებს A მოთამაშის მოგებას და B მოთამაშის წაგებას. a_{ij} შეიძლება იყოს როგორც დადებითი, ასევე უარყოფითი სიდიდე. თამაშთა თეორიაში პირობითი შეთანხმებით გულისხმობენ, რომ, როცა $a_{ij} > 0$, მაშინ A მოთამაშე იგებს და B მოთამაშე აგებს a_{ij} - სიდიდის ოდენობით. თუ $a_{ij} < 0$, მაშინ, პირიქით, იგებს B მოთამაშე და აგებს A მოთამაშე აღნიშნული სიდიდის ოდენობით. ამ შემთხვევაში, A მოთამაშის წაგების მაგიერ შეიძლება ეილაპარაკოთ A მოთამაშის უარყოფითი მოგების შესახებაც.

თუ თამაშის დროს გამოიყენება შემთხვევითი სვლები, მაშინ მოგებაც, A_i და B_j ორი სტრატეგიის შერჩევის შემთხვევაში, წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს. ამიტომ, ასეთ შემთხვევაში, მოსალოდნელი მოგების შესაფასებლად ხდება მისი შესაბამისი მათემატიკური ლოდინის განხილვა.

ვთქვათ, ცნობილია ყველა a_{ij} სიდიდე, $m \times n$ განზომილებიანი სასრული თამაშისათვის. ეს სიდიდეები მოხერხებულად შეიძლება ჩაიწეროს სპეციალური მატრიცის ამსახველი 5.1 ცხრილის სახით, სადაც სტრიქონები შეესაბამებიან A_i სტრატეგიებს და სვეტები - B_j სტრატეგიებს.

$A \backslash B$	B_1	B_2		B_j	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}		a_{1j}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}		a_{2j}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
A_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}
					...	
A_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mj}	...	a_{mn}

ასეთი სახის მატრიცას უწოდებენ *საგადამხდელო მატრიცას*.

განვიხილოთ საგადამხდელო მატრიცის პრაქტიკული აგების უმარტივესი მაგალითი. გავარჩიოთ თამაში “*ფულის პატარა მონეტის ძებნა*”. ეს იყოს ორი A და B მოთამაშეთა 2×2 განზომილებიანი სასრული თამაში, რომლის შინაარსიც მდგომარეობს შემდეგში: A მოთამაშე თავისი ხელებით აკეთებს სპეციალურ მუშტებს და ერთ-ერთ მუშტში მალავს მონეტას, ხოლო B მოთამაშემ უნდა გამოიცნოს, თუ რომელ მუშტშია მონეტა. ამ თამაშის დროს A მოთამაშის განკარგულებაშია მხოლოდ ორი მუშტი და მან მათგან ნებისმიერი შეიძლება გამოიყენოს მონეტის შესანახად. თუ A მოთამაშემ მონეტის შესანახად გამოიყენა მარჯვენა ხელის მუშტი, მაშინ ვიტყვი, რომ მან აირჩია A_1 სტრატეგია. როცა გამოიყენა მარცხენა ხელის მუშტი, მაშინ ვიტყვი, რომ მან აირჩია A_2 სტრატეგია.

ანალოგიურად B მოთამაშე მონეტას ეძებს მარჯვენა, ან მარცხენა ხელის მუშტში, თუ მან შესაბამისად აირჩია B_1 , ან B_2 სტრატეგია.

ამ თამაშის პირობებში, დაუშვათ, კიდევ შედის ასეთი პირობაც:

თუ B მოთამაშე სწორად გამოიყენებს მონეტის ადგილსამყოფელს, მაშინ A მოთამაშე მას უხდის 1 ლარს, ხოლო თუ B მოთამაშე ვერ გამოიყენებს მონეტის ადგილსამყოფელს, მაშინ B მოთამაშემ A მოთამაშეს უნდა გადაუხადოს 1 ლარი.

ამგვარად, A მოთამაშემ შეიძლება მოიგოს +1 ლარი, ან -1 ლარი (წააგოს 1 ლარი) და B მოთამაშემ შესაბამისად შეიძლება წააგოს 1 ლარი, ან -1 ლარი (მოიგოს 1 ლარი).

ახლა მოცემული თამაშისათვის ავაგოთ საგადამხდელო მატრიცა. მას ექნება შემდეგი სახე:

ცხრილი 5.2.

B A	B	B ₁	B ₂
	A	B ₁	B ₂
A ₁		-1	+1
A ₂		+1	-1

ახლა ისევ დაეუბრუნდეთ ზოგადი სახის საგადამხდელო მატრიცის (ცხრილი 5.1) განხილვას და ჩამოვაყალიბოთ თამაშის ოპტიმალური გადაწყვეტილების პოვნის წესი.

თავდაპირველად დაეუშვათ, რომ მოცემულია ისეთი თამაში, რომლის ოპტიმალური გადაწყვეტილებაც არსებობს “წმინდა” სტრატეგიებში.¹

¹ “წმინდა” სტრატეგია ეს ისეთი სტრატეგიაა, რომლის არჩევაც ხდება მოთამაშეთა მიერ არა შემთხვევითი გზით, არამედ გარკვეული ლოგიკისა და ანალიზის საფუძველზე.

თამაშის ოპტიმალური გადაწყვეტილების პოვნის მიზნით თავდაპირველად განესაზღვროთ საუკეთესო სტრატეგია A მოთამაშის სტრატეგიებს— $A_1, A_2, A_i, \dots, A_m$ შორის, B მოთამაშის საუკეთესო პასუხების გათვალისწინებით. ამასთან, გათვალისწინებულ უნდა იქნეს ისიც, რომ A მოთამაშის ნებისმიერ A_i სტრატეგიას B მოთამაშე უპასუხებს ისეთი B_j სტრატეგიით, რომელიც A მოთამაშეს მისცემს მხოლოდ მინიმალური მოგების მიღების საშუალებას. ამიტომ A მოთამაშის საუკეთესო სტრატეგიის შერჩევის დროს, უპირველეს ყოვლისა, უნდა ვიპოვოთ

$$\min_j a_{ij} \equiv \alpha_i,$$

ანუ მინიმუმი i -ურ სტრიქონში მოთავსებულ A_i -ური სტრატეგიის შესაბამის a_{ij} ელემენტებს შორის. მაგრამ A მოთამაშის სტრატეგიათა ცვლილების შედეგად α_i სიდიდეებიც შეიცვლებიან. A მოთამაშე დაინტერესებულია, რომ მისი შესაძლო მინიმალური α_i -ური მოგება გაზარდოს მაქსიმალურად. იგი ირჩევს ისეთ სტრატეგიას, რომ მინიმალურად შესაძლო მოგებებიდან მიიღოს მაქსიმალური მოგება.

მაშასადამე, A მოთამაშე საუკეთესო სტრატეგიის არჩევის მიზნით ეძებს

$$\max_i \min_j a_{ij} \equiv \alpha \text{ სიდიდეს.}$$

α სიდიდეს უწოდებენ თამაშის ქვედა ფასს, ან მაქსიმინურ მოგებას (შემოკლებით — მაქსიმინს). A მოთამაშის იმ სტრატეგიას, რომელსაც შეესაბამება α მაქსიმინური სიდიდე, უწოდებენ მაქსიმინურ სტრატეგიას.

თუ A მოთამაშე აირჩევს მაქსიმინურ სტრატეგიას, მაშინ მას B მოთამაშის ნებისმიერი პასუხის დროს გარანტირებული აქვს მოგება, რომელიც არ არის ნაკლები α სიდიდეზე. ამიტომ α სიდიდეს სხვანაირად უწოდებენ თამაშის ქვედა ფასს, იგი არის მოგების ის გარანტირებული

ბული მინიმუმი, რომლის მიღებაც შეუძლია A მოთამაშეს მოცემულ თამაშში.

B მოთამაშე, თავისი საუკეთესო სტრატეგიის არჩევის დროს, ცდილობს რა ღირსეული წინააღმდეგობა გაუწიოს A მოთამაშეს, პირველ რიგში, პოულობს

$$\max_j a_{ij} \equiv \beta_j$$

სიდიდეს, რომელიც არის მაქსიმალური შესაძლებლობა, ხელი შეუშალოს A მოთამაშეს მოგების მიღებაში. მაგრამ B მოთამაშე არ არის გარანტირებული, რომ A მოთამაშე მისცემს მას მისთვის არახელსაყრელი სტრატეგიის გამოყენების შესაძლებლობას. ამიტომ B მოთამაშემ უნდა იქონიოს მხოლოდ იმის იმედი, რომ იგი მიიღებს

$$\min_j \max_i a_{ij} \equiv \beta$$

სიდიდის ტოლ მოგებას.

β სიდიდეს უწოდებენ თამაშის ზედა ფასს, ან მინიმალურ მოგებას (მოკლედ მინიმალს).

B მოთამაშის სტრატეგიას, რომელიც შეესაბამება მინიმალს, ეწოდება მინიმალური სტრატეგია. ეს არის B მოთამაშის ისეთი "ფრთხილი" სტრატეგია, რომელიც მას უსრუნველყოფს იმით, რომ იგი არცერთ შემთხვევაში არ წააგებს *β* სიდიდეზე მეტს.

თამაშთა თეორიაში სიფრთხილის პრინციპს, რომელიც მოთამაშეებს აძლევს მაქსიმინური და მინიმალური სტრატეგიების გამოყენების რეკომენდაციას, სხვანაირად უწოდებენ მინიმალურ პრინციპს. ეს პრინციპი გამომდინარეობს იმ სასურველი მიზნიდან, რომ თამაშის დროს წარმოშობილი კონფლიქტური სიტუაცია გადაწყვეტილ იქნეს მასში მონაწილე მხარეებისათვის ერთდროულად მისაღები ყველაზე საუკეთესო გზით.

თუ აღმოჩნდა, რომ თამაშის ქვედა ფასი *α* და მისი ზედა ფასი – *β* ერთმანეთის ტოლია, მაშინ ვიტყვით, რომ

მინიმალური A_1 და B_1 სტრატეგიები ქმნიან ეგრეთწოდებულ "უნაგირა" წერტილს. ასეთ, შემთხვევაში, სხვანაირად, შეიძლება ითქვას, რომ მოცემულ თამაშს გააჩნია უნაგირა წერტილი, ანუ ამონახსნი.

მაშასადამე, გამოდის, რომ ამა თუ იმ თამაშის ამონახსნის პოვნა გულისხმობს მისი უნაგირა წერტილის პოვნა! (თუ, რა თქმა უნდა, თამაშს გააჩნია ასეთი წერტილი).

§ 3. თამაშის ამონახსნის პოვნა შერეული სტრატეგიების გამოყენებით

ყველ თამაშს არ გააჩნია უნაგირა წერტილი. თუ თამაშს არ გააჩნია ასეთი წერტილი, მაშინ მისი ამონახსნის პოვნა, უნაგირა წერტილის პოვნის გზით, შეუძლებელია. ამ დროს, შექმნილი სიტუაციიდან გამოსავალს პოულობენ შერეული სტრატეგიის გამოყენების შედეგად, როცა მოთამაშის შესაძლო სტრატეგიების არჩევა ხდება შემთხვევითი გზით, განსაზღვრული ალბათობების საფუძველზე.

შერეული სტრატეგიები წარმოადგენს მოთამაშის ისეთი ცვალებადი და მოქნილი ტაქტიკის ამსახველ მათემატიკურ მოდელს, რომლის დროსაც მის მოწინააღმდეგე მოთამაშეს არ შეუძლია წინასწარ გაიგოს, თუ რა მდგომარეობა შეხვდება მას თამაშში. ეს განპირობებულია იმით, რომ თამაშის ყოველი პარტიის წინ წმინდა სტრატეგიებს შორის წარმოებს ერთი რომელიმე სტრატეგიის შერჩევა, სპეციალური მექანიზმით და შემთხვევითი გზით, წინასწარ განსაზღვრული და მოცემული ალბათობების გამოყენების საფუძველზე.

ახლა ვაჩვენოთ, თუ როგორ შეიძლება განისაზღვროს აღნიშნული სახის ალბათობები, შერეული სახის ოპტიმალური სტრატეგიები და თამაშის ამონახსნი, ზოგად შემთხვევაში.

განვიხილოთ ისევ ორი პირის $m \times n$ განზომილებიანი სასრული თამაში, როცა A მოთამაშეს გააჩნია $A_1, A_2, \dots, A_m$ სტრატეგიები, ხოლო B მოთამაშეს – $B_1, B_2, \dots, B_n$ სტრატეგიები.

A და B მოთამაშეების შერეული სტრატეგიები შესაბამისად აღვნიშნოთ C_A და C_B სიმბოლოებით. მაშინ შეგვიძლია ჩავწეროთ, რომ

$$C_A = C_A(P_1, P_2, \dots, P_m) \quad \text{და}$$

$$C_B = C_B(q_1, q_2, \dots, q_n),$$

სადაც

$P_1, P_2, \dots, P_m$ – არის $A_1, A_2, \dots, A_m$ წმინდა სტრატეგიების გამოყენების ალბათობები;

$q_1, q_2, \dots, q_n$ – არის $B_1, B_2, \dots, B_n$ წმინდა სტრატეგიების გამოყენების ალბათობები.

A და B მოთამაშეთა სტრატეგიები ქმნიან ხდომილობათა სრულ სისტემას, რადგან განხილული სტრატეგიებიდან პირველი ($A_1, A_2, \dots, A_m$) და მეორე ($B_1, B_2, \dots, B_n$) თამაშის პირობის თანახმად სრულად ამოწურავენ ამ მოთამაშეთა შესაძლო სელათა განხილვის პროცესს. აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია ჩავწეროთ, რომ

$$\sum_{i=1}^m P_i = 1 \wedge \sum_{j=1}^n q_j = 1$$

(როგორც ხდომილობათა სრული სისტემების აღბათობების ჯამი).

ცხადია, რომ ყოველი წმინდა სტრატეგია წარმოადგენს ისეთი შერეული სტრატეგიების კერძო შემთხვევას, როცა ნებისმიერი სტრატეგიის (გარდა ამ წმინდა სტრატეგიისა) შესაბამისი ალბათობა ტოლია ნულისა, ხოლო ამ წმინდა სტრატეგიის შესაბამისი ალბათობა კი ტოლია ერთისა.

თამაშთა თეორიაში ცნობილია, რომ თუ ნებისმიერი სასრული თამაშისათვის დაუშვებთ შერეული სტრატე-

გიების გამოყენების შესაძლებლობებს, მაშინ ყოველთვის იარსებებს მისი ოპტიმალური ამონახსნის გზა, ე.ი. შესაძლებელი იქნება მოთამაშეთა ოპტიმალური სტრატეგიების წყვილის პოვნა.

თამაშთა თეორიაში მტკიცდება მატრიცულ თამაშთა შემდეგი ძირითადი თეორემა: *ნებისმიერ მატრიცულ თამაშს კაანია ამონახსნი შერეულ სტრატეგიათა სიმრავლეში.*

ამ თეორემის ძალით ნებისმიერ მატრიცულ თამაშს გააჩნია ისეთი ფასი (იგი ავლნიშნოთ μ სიმბოლოთი), რომელიც ყოველთვის მეტია თამაშის ქვედა და ნაკლებია ზედა ფასზე. ე.ი. გამოდის რომ

$$\alpha \leq \mu \leq \beta.$$

მართლაც, α სიდიდე გამოხატავს იმ მინიმალურ გარანტირებულ მოგებას, რომლის მიღებაც შეიძლება გარანტირებულად ჩათვალოს A მოთამაშემ, თუ იგი გამოიყენებს მხოლოდ თავის წმინდა სტრატეგიებს. თუ A მოთამაშე გამოიყენებს შერეულ სტრატეგიებს, მაშინ იგი ამით თავის მოგებას არ ამცირებს, ე.ი. შეიძლება დაიწეროს, რომ $\mu \geq \alpha$. B მოთამაშისათვის ანალოგიური მსჯელობებით მივალთ იმ დასკვნამდე, რომ $\mu \leq \beta$. ამიტომ ზოგად შემთხვევაში

$$\alpha \leq \mu \leq \beta.$$

თუ ზემოთ განხილულ $m \times n$ განზომილებიან ორი პირის თამაშში ნაპოვნია მისი ოპტიმალური ამონახსნი, რომელიც აერთიანებს $C_A^*(p_1, p_2, \dots, p_m)$ და $C_B^*(q_1, q_2, \dots, q_n)$ ორ ოპტიმალურ შერეულ სტრატეგიებს, მაშინ $A_1, A_2, \dots, A_m$ და $B_1, B_2, \dots, B_n$ სტრატეგიებს, რომელთათვისაც p_i და q_j ალბათობები განსხვავებულია ნულისაგან, ეწოდებათ A და B მოთამაშეთა აქტიური სტრატეგიები.

თამაშთა თეორიაში აქტიური სტრატეგიების შესახებ მტკიცდება შემდეგი თეორემა: *თუ ორი მოთამაშედან, ერთ-ერთი ეყრდნობა თავის ოპტიმალურ შერეულ სტრატეგიას, მაშინ მისი მოგების შესაბამისი მაჩვენებელი არ არის*

თამაშის ფასზე ნაკლები, მიუხედავად იმისა, როგორი ქმედებაც არ უნდა განახორციელოს მეორე მოთამაშე.

ამ თეორემის მთავარი არსი მდგომარეობს იმაში, რომ თუ ერთ-ერთი მოთამაშე იწყებს თანმიმდევრულად თავისი ოპტიმალური შერეული სტრატეგიის გამოყენებას, მაშინ მისი მოწინააღმდეგე მოთამაშე უკვე ვერ შეძლებს თამაშის მოსალოდნელი შედეგის შეცვლას.

ახლა განვიხილოთ თამაშის ამონახსნის შერეული სტრატეგიის გამოყენების გზით პოვნის მაგალითი.

შესასწავლი თამაშის როლში ვიგულისხმობთ ჩვენს მიერ ზემოთ უკვე განხილული თამაში – “*ფულის პატარა მონეტის ძებნა*”. ამ თამაშში ყოველ მოთამაშეს გააჩნია ორ-ორი წმინდა აქტიური სტრატეგიები:

A_1 , A_2 და B_1 , B_2 მათგან შეუადგინოთ შერეული სტრატეგიები:

$$C_A = C_A(p_1, p_2) \text{ და } C_B = C_B(q_1, q_2),$$

სადაც

p_1 , p_2 და q_1 , q_2 – არის წმინდა სტრატეგიათა გამოყენების ალბათობები.

ამ თამაშის საგადამხდელო მატრიცა შეიძლება ჩაიწეროს ასეთი სახით:

ცხრილი 5.3

A \ B	B_1	B_2
	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

აქტიური სტრატეგიის შესახებ ზემოთ განხილული თეორემის თანახმად გამომდინარეობს, რომ თუ A მოთამაშე იყენებს თავის A_1 და A_2 სტრატეგიებს, მაშინ მისი მოგება ყოველთვის (მიუხედავად იმისა, თუ რომელ სტრატეგიას იყენებს B მოთამაშე) თამაშის ფასის ტოლია. ამრიგად, შეგვიძლია ჩაეწეროს შემდეგი ორი ჭეშმარიტი ტოლობა:

$$a_{11} p_1 + a_{21} p_2 = \mu; \quad (5.1)$$

$$a_{12} p_1 + a_{22} p_2 = \mu. \quad (5.2)$$

პირველი ტოლობა მიღებულია იმ ვარაუდით, რომ B მოთამაშე ირჩევს B_1 სტრატეგიას, ხოლო მეორე ტოლობა კი – იმ ვარაუდით, რომ B მოთამაშე ირჩევს B_2 სტრატეგიას.

თუ (5.1) და (5.2) ტოლობებს განვიხილავთ როგორც განტოლებათა სისტემას და მათ დაუშვებლად პირობას $p_1 + p_2 = 1$, შეგვიძლია მივიღოთ:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \quad (5.3)$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \quad (5.4)$$

$$\mu = \frac{a_{22} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \quad (5.5)$$

მსგავსი მსჯელობით B მოთამაშისათვის შეიძლება მივიღოთ შემდეგი ტოლობები:

$$a_{11} q_1 + a_{12} q_2 = \mu;$$

$$a_{21} q_1 + a_{22} q_2 = \mu.$$

$$q_1 + q_2 = 1,$$

საიდანაც

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad q_2 = 1 - q_1. \quad (5.6)$$

როგორც განსახილველი თამაშის თავდაპირველი პირობებიდან ვიცით:

$$a_{11} = -1, a_{12} = 1, a_{21} = 1, a_{22} = -1.$$

თუ საგადამხდელო მატრიცის ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ p_1, p_2 და q_1, q_2 ალბათობების გამოსათვლელ ზემოთ განხილულ ფორმულებში, მივიღებთ: $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 0,5$.

A და B მოთამაშეების ოპტიმალური შერეული სტრატეგიები ტოლი იქნება: $C_A^*(0,5; 0,5)$ და $C_B^*(0,5; 0,5)$.

§4. თამაშის ამონახსნის პოვნა წრფივი დაპროგრამების მეთოდის გამოყენებით

თუ ორი პირის $m \times n$ განზომილებიან სასრულ თამაშში m და n დიდი რიცხვებია, მაშინ ასეთი თამაშის ამოხსნა წარმოადგენს რთულ ამოცანას. ამიტომ ასეთ დროს საჭიროა ვეძებოთ ისეთი მეთოდი, რომელიც ამოხსნის სირთულეს მოხსნის. ერთ-ერთ ასეთ გზას წარმოადგენს თამაშის გარდაქმნა და მისი გამოხატვა წრფივი დაპროგრამების ზოგადი მოდელის სახით.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი სასრული თამაშის ამოხსნა შეიძლება დაყვანილ იქნეს მისი შესაბამისი წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნაზე.

დავუშვათ, რომ ცნობილია თამაშის საგადამხდელო მატრიცის a_{ij} ელემენტები და ვეძებთ თამაშის ამონახსნს, ანუ A და B მოთამაშეთა ორ ოპტიმალურ, შერეულ სტრატეგიას:

$C_A^*(p_1, p_2, \dots, p_m)$ და $C_B^*(q_1, q_2, \dots, q_n)$.

თავდაპირველად ვიპოვოთ C_A^* ოპტიმალური სტრატეგია. ამ სტრატეგიამ A მოთამაშეს უნდა მისცეს არანაკლებ μ სიდიდის ტოლი მოგება, B მოთამაშის ნებისმიერი ქმედების დროს და μ სიდიდის ტოლი მოგება, B მოთამაშის ოპტიმალური ქმედების დროს.

ვიგულისხმოთ, რომ თამაშის ფასი $\mu > 0$. ეს ბუნებრივია, ნიშნავს, რომ საგადამხდელო მატრიცის a_{ij} ელემენტებიდან ყველა არის არაუარყოფითი (თუ ეს ასე არ არის, მაშინ ხელოვნური გარდაქმნით შეიძლება მივაღწიოთ, რომ ყველა $a_{ij} \geq 0$ და შესაბამისად $\mu > 0$. ამისათვის, საჭიროა, ყველა a_{ij} -ს დაემატოს ერთი და იგივე დადებითი საკმაოდ დიდი M რიცხვი, რაც a_{ij} რიცხვებს გაზ-

დის არაუარყოფითს, თამაშის ფასს — μ -ს დადებითს და თამაშის ამონახსნი (სტრატეგიათა არჩევანი) ამით არ შეიცვლება).

დაეუშვათ, რომ A მოთამაშე თამაშის დროს იყენებს თავის ოპტიმალურ შერეულ C_A^* სტრატეგიას (რომელიც არის უცნობი), ხოლო B მოთამაშე კი — მხოლოდ თავის წმინდა B_i სტრატეგიას. მაშინ A მოთამაშის საშუალო მოგება შეადგენს:

$$a_j = p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} + \dots + p_m a_{mj}.$$

მაგრამ თამაშთა თეორიის ძირითადი თეორემების თანახმად

$$a_j \geq \mu, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

აქედან შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{m1}p_m \geq \mu \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{m2}p_m \geq \mu \\ \dots \dots \dots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{mn}p_m \geq \mu \end{cases} \quad (5.7)$$

თუ (5.7) განტოლებათა სისტემაში გაითვალისწინებთ აღნიშვნებს

$$x_i = \frac{p_i}{\mu} \quad \text{ანუ} \quad x_1 = \frac{p_1}{\mu}, x_2 = \frac{p_2}{\mu}, \dots, x_m = \frac{p_m}{\mu}$$

და მასში შემავალ განტოლებებს სათანადოდ გარდაეცმით, მივიღებთ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq 1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq 1 \\ \dots \dots \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq 1, \end{cases} \quad (5.8)$$

სადაც პირობის მიხედვით $x_i \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, m$) და ისინი აკმაყოფილებენ ტოლობას:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = \frac{1}{\mu}. \quad (5.9)$$

A მოთამაშე ცდილობს, რომ მისი გარანტირებული მოგების მაჩვენებელი μ გახადოს მაქსიმალური. ეს კი ნიშნავს, რომ $1/\mu$ სიდიდე გახდეს მინიმალური. ამგვარად, თავდაპირველად მოცემული თამაშის ამოხსნა დაყვანილ იქნა წრფივი დაპროგრამების შემდეგი სახის ამოცანის ამოხსნაზე განესაზღვროთ $x_1, x_2, \dots, x_m$ არაუარყოფითი (კელადები, რომლებიც დააკმაყოფილებს (5.8) განტოლებათა სისტემას და რომელთათვისაც მიზნის ფუნქცია

$$f(x) = x_1 + x_2 + \dots + x_m = \min. \quad (5.10)$$

ანალოგიური მსჯელობით B მოთამაშისათვის ელემენტარულად წრფივი დაპროგრამების შემდეგი სახის ამოცანა:

ვიპოვოთ ისეთი არაუარყოფითი $y_1, y_2, \dots, y_n$ პარამეტრები, რომლებიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \leq 1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \leq 1 \\ \dots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \leq 1 \end{cases} \quad (5.11)$$

და რომელთათვისაც მიზნის ფუნქცია:

$$\varphi(y) = y_1 + y_2 + \dots + y_n = \max, \quad (5.12)$$

სადაც

$$y_j = \frac{q_j}{\mu}, \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad \text{და} \quad (5.13)$$

$$\varphi(y) = \frac{1}{\mu}. \quad (5.14)$$

ფუნქციის მინიმიზაციის ნაცვლად, ახლა მოთხოვნილია $\varphi(y) = 1/\mu$ ფუნქციის მაქსიმიზაცია, რადგან ამ შემთხვევაში B მოთამაშე, A -საგან განსხვავებით, ცდილობს μ სიდიდის მინიმიზაციას (ე. ი. წააგოს რაც შეიძლება ნაკლები).

ამდენად, თავდაპირველად მოცემული $m \times n$ განზომილებიანი თამაშის ამოხსნა დაყვანილ იქნა წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ზემოთ აღწერილი ორადი წყვილის ამოხსნამდე.

§5. თამაშები რისკის პირობებში

თამაშთა თეორიაში გადაწყვეტილების მიღების დროს ხშირად ადგილი აქვს მოთამაშეთა არა შეგნებულ ურთიერთსაწინააღმდეგო ქმედებებს, არამედ მათ არასაკმარის გათვითცნობიერებას ჩასატარებელ ოპერაციათა პირობების შესახებ. ასე, მაგალითად, შესაძლებელია, რომ არ იყოს ცნობილი მოთამაშეთა მიერ ამა თუ იმ სტრატეგიის არჩევისათვის მნიშვნელოვანი, ერთი ან რამდენიმე ფაქტორი.

ნებისმიერ, ასეთ შემთხვევაში, გადაწყვეტილების მიღების პირობა დამოკიდებულია ობიექტურ სინამდვილეზე და მას თამაშთა თეორიაში უწოდებენ “ბუნებას”, ხოლო ასეთ პირობებში მიმდინარე თამაშებს კი – “თამაშებს ბუნებით”.

ახლა განვიხილოთ ასეთი ზოგადი მაგალითი:

ვთქვათ, A მოთამაშეს გააჩნია m სხვადასხვა სტრატეგია $-A_1, A_2, \dots, A_m$ რაც შეეხება თამაშის “ბუნებას” (Π), დაუშვათ, ცნობილია, რომ მას გააჩნია n რაოდენობის განსხვავებული მდგომარეობები: $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$. ვთქვათ, აგრეთვე, ცნობილია a_{ij} ($i=1,2,\dots,m \wedge j=1,2,\dots,n$) სიდიდეები, რომლებიც გამოხატავს A მოთამაშის მოგებას (A_i, Π_j)

სტრატეგიისა და ბუნების წყვილის შერჩევის შემთხვევაში, ე. ი. ცნობილია შემდეგი საგადამხდელო მატრიცა:

ცხრილი 5.4

$\begin{array}{c} \diagdown \\ A \end{array} \quad \Pi$	Π_1	Π_2		Π_n
A_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}
A_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}

მოცემულ პირობებში, საჭიროა, რომ არჩეულ იქნეს A მოთამაშის ისეთი სტრატეგია, რომელიც უზრუნველყოფს ყველაზე საუკეთესო შედეგს.

სტრატეგიის შერჩევის დროს, განხილული სახის თამაშებისათვის შემოაქეთ რისკის ცნება.

A მოთამაშის რისკი, A_i სტრატეგიის გამოყენების დროს და თამაშის "ბუნების" Π_j მდგომარეობის გათვალისწინებით, ეწოდება განსხვავებას მოგების იმ მაჩვენებლებს შორის, რომელთაც ეს მოთამაშე მიიღებს Π_j მდგომარეობის გათვალისწინებისა და მისი გაუთვალისწინებლობის შემთხვევებში.

თუ A მოთამაშემ წინასწარ იცის თამაშის "ბუნების" მდგომარეობები, მაშინ ის აირჩევს ისეთ A_i სტრატეგიას, რომელსაც შეესაბამება მაქსიმალური მოგება Π_j სვეტში, ე. ი. ის ასეთ შემთხვევაში მიიღებდა

$$\beta_j = \max_i a_{ij}$$

სიდიდის ტოლ მოგებას.

თუ A მოთამაშის რისკის მაჩვენებელს, A_1 სტრატეგიისა და თამაშის "ბუნების" Π_j მდგომარეობის შემთხვევაში, ავლნიშნავთ τ_j -თი, მივიღებთ:

$$\tau_j = \beta_j - a_j \geq 0.$$

მაშასადამე, საგადამხდელო მატრიციდან, საჭიროების შემთხვევაში, შეიძლება გადავიდეთ რისკების მატრიცაზე, რომელიც უფრო თვალსაჩინოდ ასახავს განუზღერელი მდგომარეობის სიტუაციებს.

განვიხილოთ რისკების მატრიცის აგების მარტივი მაგალითი. ეთქვათ, მოცემულია შემდეგი სახის საგადამხდელო მატრიცა:

ცხრილი 5.5

$\begin{array}{c} \backslash \\ \Pi \end{array}$ A	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
A_1	2	6	2	9
A_2	3	8	4	3
A_3	4	6	6	2

რისკების მატრიცის ასაგებად, მოცემულ შემთხვევაში, ამ ცხრილის ყოველ სვეტში ვიპოვოთ მაქსიმალური ელემენტები β_j ($j=1,2,\dots,n$).

პირველი სვეტისათვის ასეთი ელემენტი β_1 ტოლი იქნება 4 ერთეულის, მეორესათვის – 8 ერთეულის, მესამესათვის – 6 ერთეულის და მეოთხესათვის – 9 ერთეულის. ამის შემდეგ, ამ β_j ელემენტებისაგან გამოვაკლოთ ყველა a_j ელემენტი და შესაბამისად მივიღებთ რისკების მატრიცას:

ცხრილი 5.6

$\begin{array}{c} \text{П} \\ \text{A} \end{array}$	П_1	П_2	П_3	П_4
A_1	2	2	4	0
A_2	1	0	2	6
A_3	0	2	0	7

ამ მატრიცის ანალიზი კარგად ასახავს განუზღერელი მდგომარეობის სიტუაციებს.

წმ. თამაშთა “ბუნების” მდგომარეობათა შეფასების (ვალდის, სევიჯისა და გურეცის) კრიტერიუმები

თამაშთა თეორიაში, სწორი გადაწყვეტილების მიღებისათვის, განუზღერელობის პირობებში, წარმოიქმნება თამაშთა “ბუნების” მდგომარეობათა შეფასების კრიტერიუმთა გამოყენების აუცილებლობა.

ცნობილია, რომ თამაშთა ბუნების მდგომარეობათა შესახებ არსებული ინფორმაციის სახის მიხედვით, მათი შეფასების კრიტერიუმები შეიძლება იყოს სხვადასხვა. ამიტომ, ბუნებრივია, რომ მათი გამოყენების მიხედვით მისაღები გადაწყვეტილებები შეიძლება აღმოჩნდეს განსხვავებული ერთმანეთისაგან.

გადაწყვეტილების მიღების ამოცანა, განუზღერელობის პირობებში, ყველაზე უფრო ადვილად იხსნება იმ შემთხვევაში, როცა ცნობილია თამაშის ბუნების მდგომარეობათა ($\text{П}_1, \text{П}_2, \dots, \text{П}_n$) ალბათობები ($p_1, p_2, \dots, p_n$).

ცხადია, რომ, ეს ალბათობები აკმაყოფილებს პირობას:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

ასეთ შემთხვევაში, ეფექტიანობის კრიტერიუმად, ხშირად იყენებენ მოგების საშუალო მნიშვნელობას (მათემატიკურ ლოდინს). თუ A მოთამაშის ყოველი სტრატეგიის საშუალო მნიშვნელობას აღვნიშნავთ $\bar{a}_i$ -ით, მაშინ მივიღებთ:

$$\bar{a}_i = a_{i1}P_1 + a_{i2}P_2 + \dots + a_{in}P_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}P_j.$$

A მოთამაშემ, ასეთ შემთხვევაში, თავისი $A_1, A_2, \dots, A_n$ სტრატეგიებიდან უნდა აირჩიოს ის სტრატეგია, რომლის შესაბამისი $\bar{a}_i$ სიდიდეც აღწევს მაქსიმუმს

$$a_i^* = \max_i \bar{a}_i.$$

სადაც

a_i^* - აღვნიშნავს A მოთამაშის *მაქსიმალურ საშუალო მოგებას* თამაშის მოცემულ პირობებში.

ამგვარად, გადაწყვეტილებები მიღების ამოცანა განუზღვრელობის პირობებში, ფაქტიურად გარდაიქმნა გადაწყვეტილების მიღების ამოცანად განსაზღვრულობის პირობებში (ცნობილია A_i ($i=1,2,\dots,m$) სტრატეგიათა შესაბამისი მოგებები - $\bar{a}_i$). ასეთი გზით მიღებული გადაწყვეტილება წარმოადგენს ოპტიმალურ გადაწყვეტილებას არა ყოველი ცალკეული შემთხვევისათვის, არამედ საშუალოდ, ე.ი. ერთი და იგივე თამაშის მრავალჯერადი განმეორების დროს.

ოპტიმალური სტრატეგიის არჩევის დროს, თამაშის ბუნების მდგომარეობათა უცნობი პირობებით და მათი შესაბამისი ცნობილი ალბათობებით, შეიძლება ვისარგებლოთ არა მარტო მოგების საშუალო მაჩვენებლებით $\bar{a}_i$ ($i=1,2,\dots,m$), არამედ რისკის საშუალო მნიშვნელობებით:

$$\bar{r}_i = \sum_{j=1}^n r_{ij}P_j, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

ოპტიმალური სტრატეგიის არჩევის დროს, რისკის საშუალო მნიშვნელობების გამოყენებით, საჭიროა შევარჩიოთ ისეთი A_i ($i=1,2,\dots,m$) სტრატეგია, რომელსაც შეე-

საბამება მინიმალური მნიშვნელობა რისკის საშუალო სიდიდეებიდან

$$(\min_i \bar{\tau}_i).$$

მტკიცდება, რომ სტრატეგია, რომელიც შეესაბამება საშუალო მოგების მაჩვენებელთა შორის მაქსიმუმს

$$\left(\max_i \bar{a}_i \right),$$

ემთხვევა მინიმალური სიდიდის შესაბამის სტრატეგიას, საშუალო რისკის მაჩვენებელთა შორის

$$(\min_i \bar{\tau}_i).$$

ოპტიმალური სტრატეგიის არჩევის პროცესი, თამაშის ბუნების მდგომარეობათა უცნობი პირობებითა და მათი შესაბამისი ცნობილი ალბათობებით, მოითხოვს ალბათობის ხსენებულ მაჩვენებელთა წინასწარ განსაზღვრას. მათი განსაზღვრა დამოკიდებულია თამაშის “ბუნების” მდგომარეობათა მრავალჯერადი აღწარმოების (დაკვირვების) დროს მიღებულ სტატისტიკურ მონაცემებზე.

იმ შემთხვევაში, როცა არაფერი არ არის ცნობილი თამაშის “ბუნების” მდგომარეობათა ალბათობების შესახებ. ისინი შეფასებულ უნდა იქნეს სუბიექტურად, “ბუნების” მდგომარეობათა ალბათობების შესახებ სპეციალური ჰიპოთეზის გამოთქმის გზით. ასე, მაგალითად, თუ “ბუნების” არცერთ მდგომარეობას არ შეიძლება მიენიჭოს პრიორიტეტი, მაშინ, ბუნებრივია დასმული უნდა იქნეს ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ ყველა მდგომარეობა არის თანაბარალბათური, ე.ი.

$$P_1 = P_2 = \dots = P_n = \frac{1}{n}.$$

ეს ჰიპოთეზა ატარებს “ლაპლასის არასაკმარისი საფუძვლიანობის პრინციპის” სახელს.

სხვა შემთხვევაში, როცა მოცემულია გარკვეული წარმოდგენა იმის შესახებ, თუ რომელი ხდომილობები წარმოადგენენ უფრო მეტად და რომელი უფრო ნაკლებად ალბათურ ხდომილობებს, მათი რანჟირებისათვის შეიძლება გამოყენებულ იქნეს საექსპერტო გამოკითხვის მეთოდი.

ოპტიმალური სტრატეგიის არჩევისათვის საჭირო კრიტერიუმების ფორმულირება, მდგომარეობათა ალბათობების ცნების გამოყენების გარდა, შესაძლებელია, აგრეთვე, ზემოთ განხილული მაქსიმინური და მინიმალური ცნებების გამოყენების საფუძველზე. ასეთ კრიტერიუმებს შორის, განვიხილოთ *ვალდის მაქსიმინური, სევიჯის მინიმალური და გურეიციის კრიტერიუმები*.

ვალდის მაქსიმინური კრიტერიუმი. გულისხმობს A მოთამაშის (თამაშში Π "ბუნებით") მიერ ისეთი სტრატეგიის შერჩევას, რომელიც ითვალისწინებს მინიმალური მოგების მაქსიმინიზაციას. ეს კრიტერიუმი (A მოთამაშის სტრატეგიის შერჩევის დროს) შეიძლება გამოიხატოს ფორმულით:

$$W = \max_i \min_j a_{ij},$$

სადაც

a_{ij} ($i=1,2,\dots,m \wedge j=1,2,\dots,n$) არის მოცემული თამაშის საგადამხდელო მატრიცის ელემენტები.

ვალდის მაქსიმინური კრიტერიუმით ხელმძღვანელობის დროს, საჭიროა ორიენტაცია ყოველთვის გაკეთდეს თამაშში მოსალოდნელ ყველაზე უარეს შემთხვევაზე და არჩეულ იქნეს ის სტრატეგია, რომელიც, ყველაზე ცუდ შემთხვევაში, იძლევა ყველაზე მაქსიმალურ მოგებას.

ახლა განვიხილოთ *ვალდის კრიტერიუმის გამოყენების მაგალითი*.

ვთქვათ, მოცემულია თამაში Π "ბუნებით", რომელშიც მონაწილეობს A მოთამაშე და რომლის საგადამხდელო მატრიცასაც აქვს ასეთი სახე:

$\begin{matrix} \text{II} \\ \text{A} \end{matrix}$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	α_i
A_1	1	4	5	9	1
A_2	3	8	4	3	3
A_3	4	6	6	2	2

დაეუშეათ, გეაინტერესებს, ვიპოვოთ A მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგია მოცემულ შემთხვევაში.

ამ ცხრილის ბოლო სვეტში მოთავსებულია

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}$$

მნიშვნელობები. ეს არის A მოთამაშის მოგების ის მინიმალური მნიშვნელობები, რომლებიც შეიძლება მიიღოს A მოთამაშემ A_i (A_1, A_2, A_3) წმინდა სტრატეგიების გამოყენების შემთხვევებში. ვაღდის კრიტერიუმის თანახმად, მოცემულ მაგალითში, A მოთამაშემ უნდა აირჩიოს A_2 სტრატეგია (რადგან ის მას ყველაზე ცუდ შემთხვევაშიც კი მისცემს მაქსიმალურ მოგებას, რომელიც ტოლია

$$W = \max_i \alpha_i = 3 - \text{ის}) \text{ და ის იქნება ოპტიმალური.}$$

სვეიჯის მინიმალური კრიტერიუმში, A მოთამაშისათვის, ითვალისწინებს ისეთი A_i ($i=1,2,\dots,m$) სტრატეგიის შერჩევას, რომელსაც შეესაბამება რისკის (τ_i $i=1,2,\dots,m$ $\wedge$ $j=1,2,\dots,n$) ყველაზე მინიმალური სიდიდე, თამაშის (ბუნებით) დროს, მისთვის ყველაზე არახელსაყრელ სიტუაციაშიც კი. ეს სიდიდე:

$$U = \min_i \max_j \tau_{ij}.$$

სევიჯის მინიმაქსური კრიტერიუმის მოთხოვნათა გათვალისწინება უზრუნველყოფს ისეთი გადაწყვეტილების მიღებას, რომლის დროსაც მოთამაშე ნებისმიერ შემთხვევაშიც კი დაზღვეულია დიდი რისკის გაწევისაგან.

ახლა, სევიჯის მინიმაქსური კრიტერიუმის პრაქტიკული გამოყენების ნათელსაყოფად მოვიყვანოთ მაგალითი.

ვთქვათ, მოცემულია თამაში Π "ბუნებით", რომელშიც მონაწილეობს A მოთამაშე და რომლის საგადამხდელო მატრიცასაც აქვს ასეთი სახე:

ცხრილი 5.8

Π A	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	τ_i
A_1	3	4	1	0	4
A_2	1	0	2	6	6
A_3	0	2	0	7	7

ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ მოცემულ პირობებში, საჭიროა ნაპოვნი იქნეს A მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგია სევიჯის მინიმაქსური კრიტერიუმის გამოყენებით.

5.8 ცხრილის ბოლო სვეტში მოცემულია A მოთამაშის მაქსიმალურ რისკთა ის მნიშვნელობები, რომლებიც შეესაბამებოდა მის A_1 , A_2 და A_3 სტრატეგიებს. მათემატიკურად ეს სიდიდე (τ_i , $i=1,2,\dots,m$) შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$\tau_i = \max_j \tau_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

თუ დასმული ამოცანის გადასაწყვეტად გამოვიყენებთ სევიჯის კრიტერიუმს, მაშინ მივიღებთ, რომ A მოთამაშემ უნდა აირჩიოს A სტრატეგია, რადგან მას შეესაბამება მინიმალური რისკის

$$U = \min_i \tau_i = 4$$

მაჩვენებელი, თამაშის (Π) “ბუნების” ნებისმიერ შესაძლო შემთხვევაში.

ვალდის და სევიჯის კრიტერიუმები წარმოადგენს ეგრეთწოდებულ “ზღერული პესიმიზმის” კრიტერიუმებს.

ახლა, განვიხილოთ გურვიცის კრიტერიუმი, რომელსაც უწოდებენ “პესიმიზმ – ოპტიმიზმის” კრიტერიუმს.

გურვიცის კრიტერიუმი, განსხვავებით ვალდისა და სევიჯის კრიტერიუმებისაგან, გადაწყვეტილების მიღების დროს, არ გულისხმობს არც ზღერული პესიმიზმისა და არც ზღერული ოპტიმიზმის პრინციპის გამოყენებას.

გურვიცის კრიტერიუმს, მათემატიკურად გააჩნია შემდეგი სახე:

$$V = \max_i [\theta \min_j a_{ij} + (1 - \theta) \max_j a_{ij}]$$

სადაც

θ – არის კოეფიციენტი, რომელიც გვიჩვენებს მოთამაშის მიერ ამა თუ იმ გადაწყვეტილების მიღების პრობორიტეტულ წონას $[0 \leq \theta \leq 1]$.

როცა $\theta=1$, გურვიცის კრიტერიუმი გარდაიქმნება ვალდის კრიტერიუმად

$$V = W = \max_i \min_j a_{ij}$$

ხოლო როცა $\theta=0$, იგი გარდაიქმნება “ზღერული ოპტიმიზმის” კრიტერიუმად

$$V = \max_i \max_j a_{ij}.$$

ესა თუ ის მოთამაშე, გურვიცის კრიტერიუმის გამოყენების დროს, სიტუაციის შეფასების მიხედვით მკოეფიციენტს ირჩევს 0-ის ან 1-ის მახლობლობაში.

გადაწყვეტილების მიღების დროს, ხშირად, უმჯობესია გამოვიყენოთ არა მხოლოდ ერთი რომელიმე კრიტერიუმით არჩეული სტრატეგია, არამედ ყველა განხილული კრიტერიუმის გამოყენებით არჩეული სტრატეგია. ეს გამოწვეულია იმით, რომ თამაშის (ბუნებით) მატრიცის ანალიზი სხვადასხვა კრიტერიუმების მოთხოვნათა გათვალისწინების დროს, ხშირ შემთხვევაში, იძლევა უკეთეს წარმოდგენას სიტუაციისა და ყოველი გადაწყვეტილების ნაკლოვანებათა და ღირსებების შესახებ, ვიდრე ერთი რომელიმე კრიტერიუმის მოთხოვნათა გათვალისწინების დროს. თუ აღმოჩნდა, რომ სხვადასხვა კრიტერიუმების ცალ-ცალკე გამოყენება იძლევა ერთსადაიმაცე შედეგს, ანუ გადაწყვეტილებას, მაშინ საჭირო გეგმება საუკეთესო შემთხვევასთან, როცა თამამად შეიძლება მიღებულ იქნეს რეკომენდებული გადაწყვეტილება.

§7. ორი პირის $m \times n$ განზომილებიანი თამაშის გამარტივებისა და ამოხსნის ზოგადი პრინციპები

უთქვათ, მოცემულია ორი პირის $m \times n$ განზომილებიანი თამაში და გეაინტერესებს მისი ამოხსნა.

თუ ამ თამაშს გააჩნია უნაგირა წერტილი, მაშინ ბუნებრივია, რომ ეს წერტილი განსაზღვრავს მის ამონახსნს. მაგრამ, თუ ამ თამაშს არ გააჩნია ასეთი წერტილი, მაშინ მისი ამოხსნის პროცესი, ზოგად შემთხვევაში, რთულდება. ეს განსაკუთრებით შეიმჩნევა მაშინ, როცა m და n წარმოადგენენ დიდ რიცხვებს.

მაშასადამე, ცხადია, რომ იმ შემთხვევაში, როცა ორი პირის $m \times n$ განზომილებიან თამაშს არ გააჩნია უნაგირა

წერტილი და m და n წარმოადგენენ დიდ რიცხვებს, მეტად ეფექტიანია თამაშის გამარტივების წესის გამოყენება. სპეციალურ ლიტერატურაში ცნობილია თამაშის გამარტივების სხვადასხვა მეთოდი. მათგან ერთ-ერთ მეტად გავრცელებულ მეთოდს წარმოადგენს *არახელსაყრელი* და *დუბლირებადი* სტრატეგიების წინასწარ გამორიცხვა განხილვის პროცესიდან.

გამორიცხვის ასეთი მეთოდის გამოყენების ეფექტიანობის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი:

ეთქვათ, მოცემულია A და B ორი პირის თამაში ასეთი საგადამხდელო მატრიცით:

ცხრილი 5.9

$\begin{array}{c} B \\ \backslash \\ A \end{array}$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	4	3
A_2	0	2	3	2
A_3	1	2	4	3
A_4	4	3	1	0

ამ მატრიციდან ჩანს, რომ A_3 სტრატეგია დუბლირებას უკეთებს A_1 სტრატეგიას. ამიტომ ამ ორი სტრატეგიიდან ერთ-ერთი შეიძლება გამოირიცხოს განხილვის პროცესიდან. ეთქვათ, გამოვრიცხოთ A_3 სტრატეგია. ამასთან, თუ A_1 და A_2 სტრატეგიებს შევადარებთ ერთმანეთს წევრების მიხედვით, დავინახავთ, რომ A_2 -ის ყოველი ელემენტი ნაკლებია ან ტოლი A_1 -ის შესაბამის ელემენტზე. ამიტომ ცხადია, რომ A_2 სტრატეგია A მოთამაშისათვის არ არის ხელსაყრელი და იგი წინასწარ შეიძლება გამორიცხულ იქნეს განხილვის პროცესიდან. გამოვრიცხოთ A_2 სტრატეგიაც. ამის შემდეგ, მოცემული თამაშის საგადამხდელო მატრიცა მიიღებს ასეთ გამარტივებულ სახეს:

B A	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	1	2	4	3
A ₄	4	3	1	0

ამის შემდეგ, გამარტივება უნდა განხორციელდეს B მოთამაშის თვალსაზრისის გათვალისწინებითაც. B მოთამაშისათვის B₁ და B₃ სტრატეგიები წარმოადგენენ უფრო ნაკლებად ხელსაყრელ სტრატეგიებს, ვიდრე B₂ და B₄ სტრატეგიები. ეს იმიტომ, რომ თუ B მოთამაშე გამოიყენებს B₁ ან B₃ სტრატეგიას, მაშინ A მოთამაშეს ეძლევა შესაძლებლობა მოუგოს B მოთამაშეს 4 ერთეული, მაშინ როცა B₂ და B₄ სტრატეგიების გამოყენების შემთხვევაში A მოთამაშის მოგების მაჩვენებელი არ გადააჭარბებს 3 ერთეულს. გამოვრიცხოთ B₁ და B₃ სტრატეგიები.

ამგვარად, საწყისი 4x4 განზომილებიანი თამაში, მისი გამარტივების შედეგად, დაყვანილ იქნა 2x2 განზომილებიან თამაშზე, რომლის საგადამხდელო მატრიცასაც გააჩნია შემდეგი სახე:

B A	B ₂	B ₄
A ₁	2	3
A ₄	3	0

ამ გზით, მიღებულ იქნა ისეთი თამაში, რომლის ანალიზი უფრო მარტივია, ვიდრე საწყისი თამაშის ანალიზი,

ე.ი. საწყისი თამაშის გამარტივება წარმოადგენს ეფექტიან პროცედურას.

ორი პირის $m \times n$ განზომილებიანი თამაშის ამოხსნის დროს, საჭიროა ვიხელმძღვანელოთ შემდეგი პრინციპებითა და პროცედურათა განხორციელების თანმიმდევრობით:

ა). ვიპოვოთ $\alpha_i (i=1, 2, \dots, m) \wedge \beta_j (j=1, 2, \dots, n)$ მნიშვნელობები და შევამოწმოთ, გააჩნია თუ არა მოცემულ თამაშს უნაგირა წერტილი (ე.ი. უნდა შემოწმდეს, უდრის თუ არა ერთმანეთს თამაშის ზედა და ქვედა ფასები). თუ აღმოჩნდა, რომ მოცემულ თამაშს გააჩნია უნაგირა წერტილი, მაშინ ცხადია, რომ თამაშის ამოაახსნი ნაპოვნად შეიძლება ჩაითვალოს.

ბ). თუ აღმოჩნდა, რომ მოცემულ თამაშს არ გააჩნია უნაგირა წერტილი, მაშინ საჭიროა, პირველ რიგში, გამარტივებულ იქნეს იგი, თუნდაც, სტრიქონებისა და სვეტების წყვერთა მიხედვით შედარებისა და არახელსაყრელი სტრატეგიების წინასწარ გამორიცხვის გზით.

გ). ყველა შესაძლო გამარტივების შესრულების შემდეგ თამაშის ამოაახსნელად გამოყენებულ უნდა იქნეს ორი პირის თამაშის ამოხსნის ზოგადი მეთოდები.

§8. N პირის თამაში

საზოგადოდ თამაშში შეიძლება მონაწილეობა მიიღოს ბევრმა მოთამაშემ: A, B, C, D, E, F და ა.შ. თუ თამაშში მონაწილეობს N რაოდენობის პოთამაშე, მაშინ ასეთ თამაშს უწოდებენ N პირის თამაშს. ასეთი თამაშის ამოხსნა გაცილებით უფრო რთულია, ვიდრე ორი პირის თამაშის ამოხსნა.

N პირის თამაშის ამოხსნის დროს, მისი სირთულიდან გამომდინარე, საჭიროა გამოყენებულ იქნეს თამაშის გამარტივების სხვადასხვა მეთოდები.

N პირის თამაშის გამარტივების ყველაზე უფრო უნივერსალურ მეთოდს წარმოადგენს კოალიციის შექმნა. ამ

დროს მოთამაშეთა გაერთიანება წარმოებს იმ მთავარი მოთხოვნით, რომ შედეგად წარმოიქმნას ორი კოალიცია – ანუ მიღებულ იქნეს ორი პირის თამაში.

ასე, მაგალითად, თუ თამაშში მონაწილეობს შვიდი ($N=7$) A, B, C, D, E, F, G მოთამაშე, მაშინ კოალიციათა შექმნის გზით (როცა პირველ კოალიციაში მაგალითად გაერთიანდებიან A და B მოთამაშეები და მეორეში – C, D, E, F და G მოთამაშეები) მივიღებთ ორი პირის თამაშს (რომლის ამოხსნის წესიც ჩვენთვის უკვე ცნობილია). ამ დროს, თითოეულ კოალიციაში მყოფი მოთამაშეები ერთიანდებიან ერთი მიზნით და თამაშში ისინი მონაწილეობენ საერთო ინტერესებიდან გამომდინარე. მიღებული ორი პირის თამაშის დამთავრების შემდეგ იწყება თამაში კოალიციათა შიგნით და იმავე პრინციპით ეღებულობთ ისევ ორი პირის თამაშებს. მაგალითად, ჩვენ შემთხვევაში, პირველი კოალიციის შიგნით მივიღებთ ორი A და B პირის თამაშს (მისი ამოხსნის წესი ცნობილია), ხოლო მეორე კოალიციის შიგნით, კი საჭიროა ისევ ორი კოალიციის გამოყოფა (გარკვეული პრინციპით), რათა მივიღოთ ორი პირის თამაში. ასეთნაირად ვიქცევით მანამ, სანამ საბოლოოდ არ დავალთ ორი პირის ბოლოს განსახილველ თამაშამდე და მისი ამოხსნის შემდეგ, ამოხსნილი იქნება შვიდი პირის თამაშიც.

მაშასადაე, შეიძლება დავასკვნათ, რომ N პირის თამაშის ამოხსნა, კოალიციის შექმნის გზით, დადის ორი პირის თამაშის ამოხსნამდე.

ამ თავის ბოლოს თამაშთა თეორიის ამოცანის ამოხსნის მეთოდის ეკონომიკაში პრაქტიკული გამოყენების საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ სასოფლო-სამეურნეო საწარმოს მიერ სახნა-სათესი მიწების ეფექტიანად გამოყენების ამოცანა.

**V თავის ღამათება — სასოფლო-სამეურნეო საწარმოს მიერ
სახნაუ-სათესი მიწების ეფექტიანად
გამოყენების ამოცანა**

ეთქვათ, მოცემულია სასოფლო-სამეურნეო საწარმო, რომელსაც შეუძლია სამი სახეობის (ხორბალი, სიმინდი, სოიო) კულტურებიდან ერთ-ერთის დათესვა. საჭიროა განისაზღვროს რომელი კულტურა უნდა იქნეს დათესილი, რომ ნათესის გეგმამ უზრუნველყოს მაქსიმალური შემოსავალი (იგულისხმება, რომ ერთნაირი პირობების დროს ამ კულტურების მოსავალი უმთავერესად დამოკიდებულია ამინდისაგან).

ამ ამოცანის ამოსახსნელად განვიხილოთ შემდეგი ლოგიკური მსჯელობა:

თუ სასოფლო-სამეურნეო საწარმოს გააჩნია სარწმუნო სტატისტიკური მონაცემები ამინდისა და მასთან დაკავშირებული პირობების შესახებ მოცემულ რაიონში (ან კიდევ გააჩნია ამინდის პროგნოზის საიმედო საშუალება), მაშინ თესვის ოპტიმალური გეგმის განსაზღვრა მეტად ადვილია. — ეს შეიძლება განხორციელდეს შემოკლების მათემატიკური ლოდინის მაჩვენებლის მაქსიმიზაციაზე დაყრდნობით.

წინააღმდეგ შემთხვევაში, თესვის პროცესთა დაგეგმვა შეიძლება განხორციელდეს ამინდის ყველაზე უფრო არახელსაყრელი მდგომარეობის გათვალისწინებით. ამ დროს, მოცემული სასოფლო-სამეურნეო სიტუაცია შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს ასეთნაირად: *ეროი მხრივ* — სასოფლო-სამეურნეო საწარმო (ეუწოდოთ მას A მოთამაშე) დაინტერესებულია იმაში, რომ დათესოს მაქსიმალური მოსავლის მომცემი კულტურა, *მეორე მხრივ* — ბუნება (ეუწოდოთ მას B მოთამაშე), რომლისგანაც არის დამოკიდებული ამინდთან დაკავშირებული პირობები და, რომელსაც ამ უკანასკნელით შეუძლია დააზიანოს (მავენებლობა მიაყენოს) სასოფლო-სამეურნეო საწარმო, არის საწინააღმდეგო ინტერესების მქონე. ბუნებისადმი ანგარიშის გაწევა და მისი ჩათვლა მოწინააღმდეგე ობიექტად არის იმის

ტოლძალოვანი, რომ თესვა დაიგეგმოს მისთვის ყველაზე არახელსაყრელი ბუნებრივი პირობების გათვალისწინებით. იმ შემთხვევაში, თუ ეს პირობები აღმოჩნდება ხელსაყრელი, მაშინ მიღებული გეგმა მოგეცემს შემოსავლის გაზრდის შესაძლებლობას.

ამგვარად, ჩვენი ამოცანის შემთხვევაში, საქმე გვაქვს ანტაგონისტურ კონფლიქტთან.

საინტერესოა განისაზღვროს, თუ როგორი სტრატეგია გააჩნია ბუნებას მოცემულ კონფლიქტში? მისი სტრატეგიების (ბუნების მდგომარეობების) რიცხოვნობა მიჩნეულ უნდა იქნეს უსასრულოდ. თუმცა, როგორც ამას ხშირად თვლიან, ჩვენ (პირველი მიახლოებით) ჩათვალოთ, რომ წელიწადი შეიძლება იყოს: *გვალეიანი*, *ნორმალური*, *ჭარბტენიანი* (წვიმიანი). მაშასადამე, ვიგულისხმოთ, რომ B მოთამაშეს (ბუნებას) გააჩნია მხოლოდ სამი სტრატეგია. საწარმოსაც (ანუ A მოთამაშესაც) გააჩნია სამი სტრატეგია: დათესოს ფართობზე *ხორბლის* კულტურა, დათესოს ფართობზე *სიმინდის* კულტურა, დათესოს ფართობზე *სორიოს* კულტურა. აღწერილი კონფლიქტის მატრიცული თამაშის სახით წარმოდგენისათვის საჭიროა A მოთამაშის სარგებლიანობის ფუნქციის მოცემა. სარგებლიანობის ფუნქციის რანგში ავიღოთ საწარმოს საკუთარი პროდუქციის რეალიზაციისაგან მიღებული შემოსავლების ფუნქცია.

ვთქვათ, გამოცდილებაზე დაყრდნობით ცნობილია, რომ *მშრალი ამინდის* დროს ერთი ჰექტარიდან ღებულობენ i ($i=1,2,3$)-ური კულტურის λ_i ცენტნერს, *ნორმალური ამინდის* დროს — λ_2 ცენტნერს, *ტენიანის დროს* — λ_3 ცენტნერს. მაშინ საწარმოს საკუთარი პროდუქციის რეალიზაციის გზით 1 ჰა-დან (ყველა შესაძლო სიტუაციის გათვალისწინებით) მიღებული შემოსავლების მატრიცას ექნება ასეთი სახე:

$$\begin{pmatrix} a_1 \lambda_{11} & a_1 \lambda_{12} & a_1 \lambda_{13} \\ a_2 \lambda_{21} & a_2 \lambda_{22} & a_2 \lambda_{23} \\ a_3 \lambda_{31} & a_3 \lambda_{32} & a_3 \lambda_{33} \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

სადაც

a_i — არის i -ური კულტურის 1 ცენტრერის ფასი.

ამგეარად, საბოლოოდ მიღებული ანტაგონისტური თამაში, რომელიც მოცემულია ზემოთ მოყვანილი მატრიცის სახით, წარმოადგენს აღწერილი კონფლიქტის თამაშის თეორიულ მოდელს.

(5.15) მატრიცა წარმოადგენს თამაშის საგადამხდელო მატრიცას.

ეთქვათ, ცნობილია a_i ($i=1,2,3$) და λ_{ij} ($i=1,2,3 \wedge j=1,2,3$) კოეფიციენტების რიცხვითი მნიშვნელობები და (5.15) მატრიცა გადაიქცა ასეთ საგადამხდელო მატრიცად:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

(5.16) მატრიცის ელემენტებისა და (5.8)–(5.9) და (5.11)–(5.12) მოდელების გამოყენებით, ჩვენს შემთხვევაში, დასმული ამოცანის ამოსახსნელად მივიღებთ წრფივი დაპროგრამების ამოცანათა შემდეგ შეუღლებულ წყვილს:

1. ვიპოვოთ X_1, X_2, X_3 არაუარყოფითი ცვლადები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$\begin{cases} 5X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 1 \\ X_1 + 3X_2 + 3X_3 \geq 1 \\ 5X_2 + 5X_3 \geq 1 \end{cases} \quad (5.17)$$

და რომელთათვისაც მიზნის ფუნქცია

$$f(X) = X_1 + X_2 + X_3 = \min. \quad (5.18)$$

2. ვიპოვოთ ისეთი Y_1, Y_2, Y_3 არაუარყოფითი ცვლადები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$\begin{cases} 5Y_1 + Y_2 \leq 1 \\ 2Y_1 + 3Y_2 + 5Y_3 \leq 1 \\ Y_1 + 3Y_2 + 5Y_3 \leq 1 \end{cases} \quad (5.19)$$

და რომელთათვისაც მიზნის ფუნქცია

$$\varphi(Y) = Y_1 + Y_2 + Y_3 = \max. \quad (5.20)$$

ამდენად, თავდაპირველად მოცემული 3×3 განზომილებიანი თამაშის ამოხსნა დაყვანილ იქნა წრფივი დაპროგრამების ამოცანის (5.17)–(5.18) და (5.19)–(5.20) ორადი წყვილის ამოხსნამდე, რაც არ წარმოადგენს დიდ სიძნელეს.

ვთქვათ, ამოვხსენით წრფივი დაპროგრამების ამოცანის (5.17) – (5.18) და (5.19) – (5.20) ორადი წყვილი და მივიღეთ, რომ

$$X_1^* = \frac{1}{13}, \quad X_2^* = \frac{4}{13}, \quad X_3^* = 0. \quad (5.21)$$

$$Y_1^* = \frac{2}{13}, \quad Y_2^* = \frac{3}{13}, \quad Y_3^* = 0. \quad (5.22)$$

თუ გავიხსენებთ ფორმულებს:

$$X_i = \frac{p_i}{\mu}, \quad (i = 1, 2, 3).$$

$$Y_j = \frac{q_j}{\mu}, \quad (j = 1, 2, 3) \text{ და}$$

მათში ჩაესვამთ (5.17) – (5.18) და (5.19) – (5.20) ორადი წყვილის (5.21) და (5.22) ოპტიმალურ ამონახსნებს, მივიღებთ:

$$\frac{P_1}{\mu} = \frac{1}{13}, \quad \frac{P_2}{\mu} = \frac{4}{13}, \quad \frac{P_3}{\mu} = 0. \quad (5.23)$$

$$\frac{q_1}{\mu} = \frac{2}{13}, \quad \frac{q_2}{\mu} = \frac{3}{13}, \quad \frac{q_3}{\mu} = 0. \quad (5.24)$$

(5.23) ტოლობებიდან შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3}{\mu} = \frac{1}{13} + \frac{4}{13} + 0 = \frac{5}{13}, \quad (5.25)$$

ხოლო (5.24) ტოლობებიდან კი შეიძლება მივიღოთ:

$$\frac{q_1 + q_2 + q_3}{\mu} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} + 0 = \frac{5}{13}, \quad (5.26).$$

თუ (5.25) და (5.26) ტოლობებში გავითვალისწინებთ, რომ $P_1 + P_2 + P_3 = 1$ და $q_1 + q_2 + q_3 = 1$, მივიღებთ, რომ $\mu = \frac{13}{5}$.

თუ ამ უკანასკნელს გავითვალისწინებთ (5.23) და (5.24) ტოლობებში, მივიღებთ:

$$P_1 = \frac{1}{13} \cdot \frac{13}{5} = \frac{1}{5}, \quad P_2 = \frac{4}{13} \cdot \frac{13}{5} = \frac{4}{5}, \quad P_3 = 0 \cdot \frac{13}{5} = 0 \quad \text{და}$$

$$q_1 = \frac{2}{13} \cdot \frac{13}{5} = \frac{2}{5}, \quad q_2 = \frac{3}{13} \cdot \frac{13}{5} = \frac{3}{5}, \quad q_3 = 0 \cdot \frac{13}{5} = 0.$$

ე.ი. გამოდის, რომ ამონახსნელი ამოცანისათვის ეპოვეთ ორი ოპტიმალური შერეული სტრატეგია:

$$C_A^* \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 0 \right) \text{ და } C_B^* \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0 \right).$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ სასოფლო-სამეურნეო საწარმოებში $\frac{1}{5}$ ალბათობით უნდა დათესოს ხორბალი, ხოლო $\frac{4}{5}$ ალბათობით კი – სიმინდი (ამასთან, მან სოიო არ უნდა დათესოს), რადგან $\frac{2}{5}$ ალბათობით მოსალოდნელია გვალ-
ვიანი, ხოლო $\frac{3}{5}$ ალბათობით ნორმალური ამინდი (ჭარბტენიანი ამინდი არ არის მოსალოდნელი).

თავი VI. ქსელური დაგეგმვისა და მართვის ზოგად-მეთოდოლოგიური პრინციპები

§1. ქსელური დაგეგმვისა და მართვის მეთოდის არსი

ეკონომიკის სფეროში, პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტის დროს, ხშირად, წარმოიქმნება ერთ მიზანს დაქვემდებარებულ სამუშაოთა რთული, ურთიერთდაკავშირებული და ურთიერთგანპირობებული კომპლექსების დაგეგმვის, ურთიერთშეთანხმებისა და ურთიერთდაკავშირების აუცილებლობა.

სამუშაოთა ასეთი კომპლექსების განხორციელების დროს აუცილებელია მათი დანაწევრება მცირე ზომისა და მარტივ სამუშაოებად. ეს ისეთი სამუშაოებია, რომლებიც უნდა შეასრულონ სხვადასხვა სპეციალისტებმა, ან სპეციალიზებულმა ორგანიზაციებმა, ერთიანი პროექტის გამოყენებისა და საერთო მიზნისაგან გამომდინარე მოთხოვნების გათვალისწინებით. ამასთან, გასათვალისწინებელია ისიც, რომ ესა თუ ის სამუშაო არ შეიძლება დაიწყოს სხვა რომელიღაც მისი წინმსწრები სამუშაოს დამთავრებამდე. ამგვარად, სამუშაოთა კომპლექსების დაგეგმვა არის საკმაოდ რთული ამოცანა. ასეთი ამოცანების ამოხსნის მეტად ეფექტურ საშუალებად გვევლინება ქსელური დაგეგმვისა და მართვის მეთოდი. ქსელური დაგეგმვისა და მართვის თეორიის შესწავლის საგანს წარმოადგენს ურთიერთდაკავშირებულ და ურთიერთგანპირობებულ სამუშაოთა რთული კომპლექსების ოპტიმალური დაგეგმვის მეთოდთა შემუშავება.

დაგეგმვისა და მართვის ქსელური მეთოდის საფუძველს წარმოადგენს ქსელური მოდელირების მეთოდი.

ამ მეთოდის გამოყენება ძირითადადში გულისხმობს შემდეგი სახის პროცედურების ჩატარებას:

- ა) შესასწავლი ობიექტის, ანუ ჩვენ შემთხვევაში შრომითი საქმიანობის (სამუშაოთა კომპლექსის) ზოგად კანონზომიერებათა დადგენა;

ბ) შრომითი საქმიანობის ზოგად კანონზომიერებათა გარდასახვა ქსელურ მოდელში (ანუ შესასწავლი ობიექტის ადექვატურად ამსახველი ქსელური მოდელის აგება);

გ) აგებული ქსელური მოდელის ინფორმაციული უზრუნველყოფა;

დ) აგებული ქსელური მოდელის ოპტიმიზაცია;

ე) ოპტიმიზაციური ქსელური მოდელის პრაქტიკული გამოყენება შრომითი საქმიანობის დაგეგმვისა და მართვის პროცესში.

დაგეგმვისა და მართვის ქსელური მეთოდის ერთ-ერთ ძირითად ცნებას წარმოადგენს *ქსელური მოდელი*. ვიდრე უშუალოდ ჩამოვაყალიბებდეთ ქსელური მოდელის განმარტებას, განვიხილოთ შრომითი საქმიანობის ის ძირითადი კანონზომიერებანი, რომლებიც საფუძვლად უდევს ქსელური მოდელირების მეთოდს.

ცნობილია, რომ ყოველი შრომითი საქმიანობა შედგება სხვადასხვა სახის ცალკეული სამუშაოებისაგან. ასეთ სამუშაოებს შეიძლება მივაკუთვნოთ თეორიული გაანგარიშებანი, საკონსტრუქტორო სამუშაოები, საცდელი ნიმუშების დამზადება, მზა ნაწარმის გამოცდა შემოწმება და ა.შ. ნებისმიერ შრომით საქმიანობაში შემავალი სამუშაოები ერთმანეთთან ურთიერთკავშირში იმყოფება. ამასთან, შრომით საქმიანობაში შესაძლოა გამოვეყოთ საქმიანობის საწყისი და საბოლოო სამუშაოები. თითოეულ დანარჩენ სამუშაოს შეიძლება გააჩნდეს არა მარტო უშუალო წინმავალი, არამედ უშუალო შემდგომი სამუშაოები. ნებისმიერი სამუშაოს შესრულება დამოკიდებულია მისი წინმავალი სამუშაოების შესრულებაზე, არ შეიძლება დაიწყოს ესა თუ ის სამუშაო, ვიდრე არ დამთავრდება ყველა მისი წინმავალი სამუშაო. ამასთან, აღსანიშნავია ისიც, რომ სამუშაოთა შესრულების თანმიმდევრობა მოწესრიგებულია დროის მიხედვით.

აღნიშნულიდან ცხადია, რომ ნებისმიერ შრომით საქმიანობას ახასიათებს ისეთი მნიშვნელოვანი კანონზომიერება, როგორიცაა: მის ცალკეულ სამუშაოთა

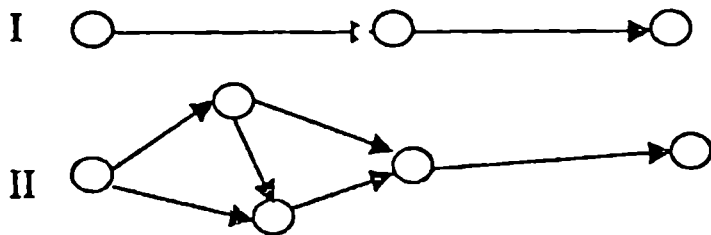
შორის არსებული ლოგიკური ურთიერთკავშირი და სამუშაოთა შესრულების დროის მიხედვით მოწესრიგებულობა.

სწორედ ასეთ კანონზომიერებებს ეყრდნობა ქსელური მოდელირების მეთოდი.

გრაფიკულ გამოსახულებას, რომელზეც გეომეტრიული ფიგურების (ისრიანი რკალებისა და წრეწირების) საშუალებით წარმოდგენილია შრომით საქმიანობაში შემავალი სამუშაოები და მოვლენები, ამ სამუშაოებს შორის არსებული ურთიერთკავშირისა და სამუშაოთა შესრულების თანმიმდევრობის ასახვით, შრომითი საქმიანობის ქსელური მოდელი ეწოდება.

ქსელურ მოდელში სამუშაოები გამოიხატება ისრიანი რკალებით (ჩვენ შემთხვევაში კი მიმართული მონაკვეთებით). სამუშაოთა გამომხატველი რკალის სიგრძეს განსაკუთრებული მნიშვნელობა არ გააჩნია. ამა თუ იმ სამუშაოს შესრულებისათვის საჭირო დრო, მუშახელი და ა.შ. საჭიროებისამებრ მიეწერება შესაბამის რკალს.

ქსელური მოდელის უმარტივესი სახეები შეიძლება გამოიხატოს შემდეგნაირად:



ნახ. 6.1

ამა თუ იმ სამუშაოს დაწყების ან დამთავრების ფაქტს ეწოდება მოვლენა.

ყოველ სამუშაოს გააჩნია მისი საწყისი და საბოლოო მოვლენა, რომლებიც შესაბამისად გამოხატავს ამ სამუშაოს დაწყებისა და დამთავრების ფაქტებს.

ქსელურ მოდელში შემავალი მოვლენებიდან აღსანიშნავია მისი საწყისი და საბოლოო (ანუ მიზნობრივი) მოვლენები.

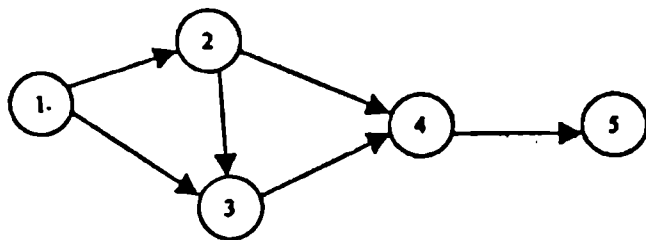
ქსელური მოდელის საწყისი მოვლენა ეწოდება იმ მოვლენას, რომლითაც იწყება ქსელური მოდელი, ხოლო მისი საბოლოო მოვლენა კი ეწოდება ისეთ მოვლენას, რომლითაც მთავრდება ქსელური მოდელი.

ქსელური მოდელის საწყისი მოვლენის დადგომა ნიშნავს მასში ასახული შრომითი საქმიანობის შესრულების დაწყებას, ხოლო ამ მოდელის საბოლოო მოვლენის დადგომა კი ნიშნავს შრომითი საქმიანობის მთლიან შესრულებას.

მოვლენებს ქსელურ მოდელებში, როგორც წესი, გამოხატავენ წრეწირებით.

ქსელურ მოდელში შემავალი მოვლენებისადმი ნომრების მინიჭების პროცესს *კოდირებას* უწოდებენ.

კოდირებული ქსელური მოდელის მაგალითი შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგნაირად:



ნახ. 62

ამ მოდელში ასახულია ხუთი მოვლენა და ექვსი (1-2, 1-3, 2-3, 2-4, 3-4 და 4-5) სამუშაო.

ორი სხვადასხვა მოვლენის დამაკავშირებელ სამუშაოთა ერთობლიობას გზა ეწოდება.

დაგეგმვისა და მართვის ქსელურ თეორიაში განსაკუთრებით საინტერესოა გზები, რომლებიც აკავშირებენ

ქსელის საწყისსა და მიზნობრივ მოვლენებს. ამ გზათაგან უგრძესს, იმის გამო, რომ იგი განსაზღვრავს მიზნობრივი მოვლენის დადგომის დროს, ეწოდება *კრიტიკული გზა* (ტერმინით “კრიტიკული” ხაზი ესმება იმ გარემოებას, რომ ამ გზაზე მდებარე სამუშაოები მოითხოვს შეუწელებელ ყურადღებასა და ზრუნვას. ასე, მაგალითად, თუ კრიტიკულ გზაში შემავალი რომელიმე სამუშაოს შესრულება დაყოვნდება, მაშინ იმავე სიდიდით დაგვიანდება საქმიანობის დამთავრებაც).

მოვლენის დადგომისა და სამუშაოს შესრულების დროითი მახასიათებლები

მოვლენათა დადგომა ხასიათდება დროის უადრესი და უგვიანესი მახასიათებლებით.

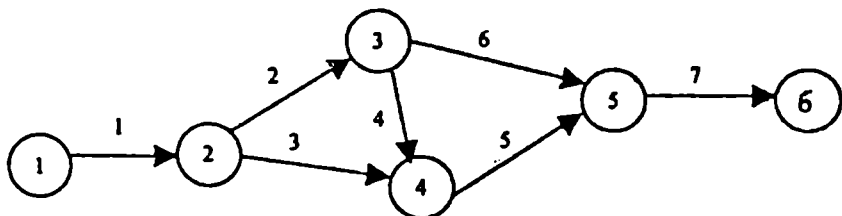
იმ მინიმალურ დროს, რომელზეც ადრეც არ შეიძლება დადგეს მოცემული მოვლენა, ეწოდება ამ მოვლენის დადგომის უადრესი დრო – ანუ მისი დადგომის ადრეული, ხოლო იმ მაქსიმალურ დროს, რომელზე გვიანაც არ შეიძლება მოცემული მოვლენის დადგომა ისე, რომ მან გავლენა არ მოახდინოს მიზნობრივი მოვლენის დადგომაზე, ეწოდება ამ მოვლენის დადგომის უგვიანესი დრო – ანუ მისი დადგომის გვიანი.

მოვლენათა დადგომის ადრეულ და გვიან მახასიათებლებს, სხვანაირად მის ადრეულ და გვიან პარამეტრებსაც უწოდებენ.

ქ-ური მოვლენის დადგომის ადრეულ პარამეტრს აღნიშნავენ – T_1^a სიმბოლოთი, ხოლო გვიან პარამეტრს კი – T_1^b – ით.

იმისათვის, რომ გავარკვიოთ, თუ როგორ შეიძლება მოვლენათა დადგომის ადრეული და გვიანი პარამეტრების გამოთვლა, მოვიყვანოთ მაგალითი.

ვთქვათ, მოცემულია უმარტივესი სახის ქსელური მოდელი (იხ. ნახ. 63).



ნახ. 6.3

და უნდა ვიპოვოთ ამ მოდელში შემავალი მოვლენების დადგომის ადრეული და გვიანი პარამეტრები. პირველ რიგში, ცოცხლობთ ადრეულ პარამეტრებს, ხოლო შემდეგ კი გვიან პარამეტრებს.

მოვლენათა დადგომის ადრეული პარამეტრების პოვნა ქსელურ მოდელში წარმოებს ამ პარამეტრების თანდათანობითი გამოთვლით მარცხნიდან მარჯვნივ, ე.ი. ქსელის საწყისი მოვლენიდან მისი მიზნობრივი მოვლენისაკენ.

ამისათვის ვიქცევით შემდეგნაირად: ვგულისხმობთ, რომ პირველი მოვლენა დგება რომელიმე ფიქსირებულ დროს (ე.ი. მაშინ, როცა იწყება განსახილველი პროცესი). ამასთან დაკავშირებით, საწყისი დრო უნდა მივიღოთ ნულის ტოლად და ქსელის საწყისი მოვლენის დადგომის ადრეულიც – $T_1^a = 0$ ჩავთვალოთ ნულის ტოლად.

$T_2^a = T_1^a + t_{12}$, სადაც t_{12} არის 1-2 სამუშაოს შესრულებისათვის საჭირო დრო და იგი უდრის 1-ს.

ჩვენ შემთხვევაში $T_2^a = 0 + 1 = 1$.

$$T_3^a = T_2^a + 2 = 1 + 2 = 3.$$

$$T_4^a = \max \left\{ \begin{array}{l} T_2^a + 3 = 1 + 3 = 4 \\ T_3^a + 4 = 3 + 4 = 7 \end{array} \right\} = 7$$

$$T_6^a = \max \left\{ \begin{array}{l} T_3^a + 6 = 3 + 6 = 9 \\ T_4^a + 5 = 7 + 5 = 12 \end{array} \right\} = 12.$$

$$T_6^b = T_6^a + 7 = 12 + 7 = 19.$$

ახლა, ვიპოვოთ მოვლენათა დადგომის გვიანი პარამეტრები. მოვლენათა დადგომის გვიანი პარამეტრების პოვნა ქსელურ მოდელში წარმოებს ამ პარამეტრების თანდათანობითი გამოთვლით. მარჯვნიდან მარცხნივ, ე.ი. ქსელის მიზნობრივი მოვლენიდან მისი საწყისი მოვლენისაკენ.

ჩვენ შემთხვევაში, უპირველეს ყოვლისა, უნდა ვიპოვოთ 6-ე, ანუ მიზნობრივი მოვლენის დადგომის გვიანი და მისი დახმარებით მარჯვნიდან მარცხნივ სვლით, თანდათანობით, გამოეთვალათ სხვა დანარჩენი მოვლენების დადგომის გვიანი პარამეტრები.

მიზნის მიღწევის უგვიანეს დასაშვებ დროდ თვლიან ან მოცემულ გეგმურ დროს, ან გამოთვლილ უადრეს დროს.

მოცემულ შემთხვევაში ვიგულისხმობთ, რომ

$$T_6^b = T_6^a = 19.$$

$$\text{მაშინ } T_5^b = T_6^b - t_{56} = 19 - 7 = 12.$$

$$T_4^b = T_5^b - 5 = 7.$$

$$T_3^b = \min \left\{ \begin{array}{l} T_5^b - t_{35} = 12 - 6 = 6 \\ T_4^b - t_{34} = 7 - 4 = 3 \end{array} \right\} = 3$$

$$T_2^b = \min \left\{ \begin{array}{l} T_3^b - 2 = 1 \\ T_4^b - 3 = 4 \end{array} \right\} = 1$$

$$T_1^b = T_2^b - t_{12} = 1 - 1 = 0.$$

მოვლენებს, მათი დადგომის ადრეული და გვიანი მახასიათებლების გარდა, კიდევ ახასიათებენ მათი დადგომის დროითი მარაგებით.

j-ური მოვლენის დადგომის დროითი მარაგი წარმოადგენს სხვაობას მისი დადგომის გვიან და ადრეულ პარამეტრებს შორის (ე.ი. $R_j = T_j^b - T_j^a$).

ყოველ სამუშაოს ახასიათებს მისი დაწყებისა და დამთავრების უადრესი და უგვიანესი დროითი მახასიათებლები.

იმ მინიმალურ დროს, რომელზე ადრეც არ შეიძლება განხორციელდეს მოცემული სამუშაოს დაწყება, ეწოდება ამ სამუშაოს დაწყების ადრეული (*i*-*j* სამუშაოს დაწყების ადრეული პარამეტრი ავლნიშნოთ T_{ij}^a სიმბოლოთი).

იმ მინიმალურ დროს, რომელზე ადრეც არ შეიძლება განხორციელდეს მოცემული სამუშაოს დამთავრება, ეწოდება ამ სამუშაოს დამთავრების ადრეული (*i*-*j* სამუშაოს დამთავრების ადრეული პარამეტრი ავლნიშნოთ T_{ij}^b სიმბოლოთი).

იმ მაქსიმალურ დროს, რომელზე გვიანაც არ შეიძლება განხორციელდეს მოცემული სამუშაოს დაწყება, ეწოდება ამ სამუშაოს დაწყების გვიანი (*i*-*j* სამუშაოს დაწყების გვიანი პარამეტრი ავლნიშნოთ T_{ij}^c სიმბოლოთი).

იმ მაქსიმალურ დროს, რომელზე გვიანაც არ შეიძლება განხორციელდეს მოცემული სამუშაოს დამთავრება, ეწოდება ამ სამუშაოს დამთავრების გვიანი (*i*-*j* სამუშაოს დამთავრების გვიანი პარამეტრი ავლნიშნოთ T_{ij}^d სიმბოლოთი).

ამა თუ იმ სამუშაოს დაწყების ადრეული პარამეტრი უდრის ამ სამუშაოს საწყისი მოვლენის დადგომის ადრეულს ($T_{ij}^a = T_i^a$).

ამა თუ იმ სამუშაოს დამთავრების ადრეული პარამეტრი უდრის ამ სამუშაოს საწყისი მოვლენის დადგომის ადრეულს დამატებული ამ სამუშაოს შესრულებისათვის საჭირო დრო ($T_{ij}^b = T_i^b + t_j$).

ამა თუ იმ სამუშაოს დაწყების გვიანი პარამეტრი უდრის ამ სამუშაოს საბოლოო მოვლენის დადგომის გვიანს გამოკლებული ამ სამუშაოს შესრულებისათვის საჭირო დრო ($T_j^b = T_j^a - t_j$).

ამა თუ იმ სამუშაოს დამთავრების გვიანი პარამეტრი უდრის ამ სამუშაოს საბოლოო მოვლენის დადგომის გვიანს ($\bar{T}_j^b = T_j^b$).

სამუშაოებს, გარდა აღნიშნული პარამეტრებისა, ახასიათებენ ისეთი მარკენებლებით, როგორიცაა: სამუშაოთა დროის სრული, თავისუფალი და დამოუკიდებელი მარაგი.

სამუშაოთა დროის სრული მარაგი ისეთი მაქსიმალური დროა, რომლითაც შეიძლება აახანგრძლივდეს სამუშაოს შესრულების დრო, ანდა გადიდებულ იქნეს სამუშაოს დაწყების დრო ისე, რომ ეს არ მოახდენს გავლენას მიზნობრივი მოვლენის დადგომაზე (i - j სამუშაოს დროის სრული მარაგი ავლნიშნოთ $R_{სრ}(ij)$ სიმბოლოთი).

სამუშაოთა დროის თავისუფალი მარაგი არის ისეთი მაქსიმალური დრო, რომლითაც შეიძლება გაახანგრძლივდეს სამუშაოს შესრულების დრო, ანდა გადატანილ იქნეს სამუშაოს დაწყების დრო, ისე რომ ეს არ ახდენს გავლენას ამ სამუშაოს საბოლოო მოვლენის დადგომის უადრეს დროზე (i - j სამუშაოს დროის თავისუფალი მარაგი ავლნიშნოთ $R_{თვ}(ij)$ სიმბოლოთი).

სამუშაოთა დროის დამოუკიდებელი მარაგი არის ის მაქსიმალური დროითი სიდიდე, რომლითაც შეიძლება გაიზარდოს სამუშაოს შესრულების დრო, ანდა გადატანილ იქნეს სამუშაოს დაწყების დრო ისე, რომ ეს არ იმოქმედებს არც იმ სამუშაოთა დაწყების უადრეს დროზე, რომლებიც j -ური მოვლენიდან გამოდის და არც იმ სამუშაოთა დამთავრების უგვიანეს დროზე, რომლებიც i -ურ მოვლენაში შედის (i - j სამუშაოს დროის დამოუკიდებელი მარაგი ავლნიშნოთ $R_{დუ}(ij)$ სიმბოლოთი).

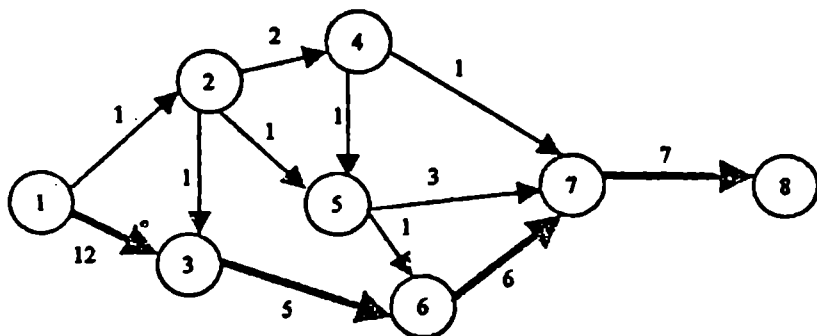
სამუშაოთა დროითი მარაგების ზემოთ ჩამოთვლილი პარამეტრების გამოთვლა ხდება შემდეგი ფორმულებით:

$$R_{სრ}(ij) = T_j^b - T_i^a - t_{ij}, \quad R_{თვ}(ij) = T_j^b - T_i^a - t_{ij}$$

$$R_{\text{გზა}}(ii) = \max(0, T_i^b - T_i^a - t_i).$$

კრიტიკული გზის განსაზღვრის წესი.

ვთქვათ, მოცემულია ასეთი ქსელური მოდელი



ნახ. 6.4

და გვაინტერესებს კრიტიკული გზის პოვნა. ეს შეიძლება განხორციელდეს სამი გზით.

პირველი. გამოვეყოფთ ყველა იმ გზას, რომლებიც ქსელის საწყის მოვლენას აკავშირებს მის საბოლოო, ანუ მიზნობრივ მოვლენასთან. გამოვთვლით ამ გზების სიგრძეებს მათში შემავალი სამუშაოების შესრულებისათვის საჭირო დროთა ჯამის მიხედვით. ამ გზათა შორის ყველაზე უგრძესი, იქნება კრიტიკული გზა (ჩვენ შემთხვევაში – 1-3, 3-6, 6-7 და 7-8).

მეორე. ვპოულობთ იმ მოვლენებს, რომელთა დადგომის ადრეული და გვიანი პარამეტრები ერთმანეთის ტოლია და მათზე გამავალი გზა იქნება კრიტიკული გზა.

მესამე. ვპოულობთ იმ მოვლენებს, რომელთა დადგომის დროითი მარაგები ტოლია ნულისა და მათზე გამავალი გზა იქნება კრიტიკული გზა.

§2. ამოცანები, რომელთა გადაწყვეტაც შეიძლება ქსელური მოდელის გამოყენებით

ნებისმიერ შრომით საქმიანობაში შემავალ ცალკეულ სამუშაოებს, ისევე როგორც მთელ შრომით საქმიანობას, ახასიათებს *სამი სიდიდე: მიზნის მახასიათებლები, რესურსული დანახარჯები და დრო.*

ყოველ სამუშაოს, რომელიც შედის შრომით საქმიანობაში და მონაწილეობს მის ამსაზველ ქსელურ მოდელში, თავისი წვლილი შეაქვს მიზნის მიღწევაში. თუმცა, ისიც უნდა აღინიშნოს, რომ ძალზე ძნელია პრაქტიკულად განისაზღვროს, თუ რა საოდენობრივ ან თვისებრივ გავლენას ახდენს თითოეული სამუშაოს შესრულება ან შეუსრულებლობა მიზნის ტექნიკურ მახასიათებლებზე.

იმ შემთხვევაში, თუ დადგენილია სამუშაოების შესრულების კალენდარული ვადები, დროის მიხედვით საქმიანობის შესრულებისათვის საჭირო პირდაპირი დანახარჯების განსაზღვრა ყოველთვის არის შესაძლებელი. მართლაც, შრომითი საქმიანობის შესრულებათვის საჭირო პირდაპირი დანახარჯები შედგება ცალკეულ სამუშაოთა განხორციელებისათვის საჭირო დანახარჯების ჯამისაგან.

იმ შემთხვევაში, თუ ცნობილია თითოეული სამუშაოს შესრულებისათვის საჭირო დრო, შესაძლებელია გამოითვალოს მთელი საქმიანობის განხორციელებისათვის საჭირო დრო, რადგან ეს უკანასკნელი დამოკიდებულია ცალკეული სამუშაოების შესრულების დროთაგან და უდრის მათ ჯამს.

აღნიშნულიდან ცხადია, რომ ყოველ სამუშაოს და სამუშაოთა გამაერთიანებელ შრომით საქმიანობას ახასიათებს ისეთი *სამი ძირითადი სიდიდე, როგორიცაა: მიზნის ტექნიკური მახასიათებლები, დანახარჯები და მიზნის მიღწევისათვის საჭირო დრო.* მათი უფრო დეტალური განხილვისა და ანალიზის შედეგად, სპეციალურ ლიტერატურაში გვხვდება ასეთი დასკვნა – *ჯერ-ჯერობით,*

რთულ და გადაუწყვერელ პრობლემად ითვლება ისეთი კრიტერიუმის მონახვა, რომელიც ცალკეულ სამუშაოთა დამახასიათებელ სიდიდეებზე დაყრდნობით, გააერთიანებს მთელი შრომითი საქმიანობისათვის დამახასიათებელ სამივე ფაქტორს: მიზნის ტექნიკურ მახასიათებლებს, დანახარჯებსა და დროს. ამასთან დაკავშირებით, აუცილებელია უფრო მარტივი ამოცანებით შემოსაზღვრა, სახელდობრ:

1. შრომის ორგანიზაციის მოცემულ პირობებში განისაზღვროს შრომითი საქმიანობის შესრულებისათვის საჭირო დრო და მოინახოს ამ დროის ოპტიმალური შემცირების შესაძლო გზები;

2. მოცემულია მიზნის ტექნიკური მახასიათებლები და საქმიანობის შესრულებისათვის გამოყოფილი დრო და უზრუნველყოფილ უნდა იქნეს საქმიანობის ამ დროისათვის მინიმალური დანახარჯებით განხორციელება;

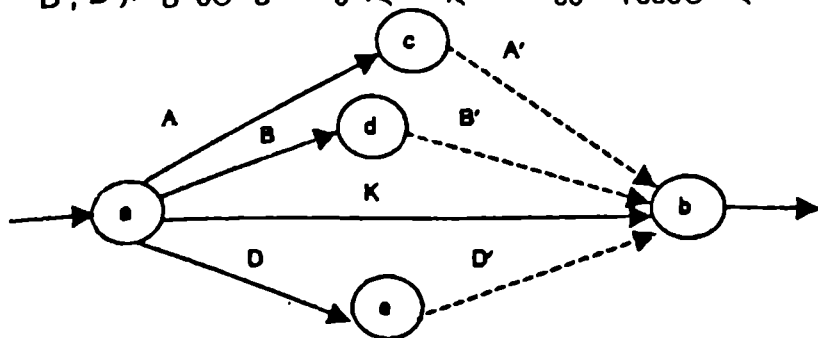
3. მოცემულია მიზნის ტექნიკური მახასიათებლები და ცნობილია საქმიანობის შესრულებისათვის გამოყოფილი რესურსების ოდენობა და უზრუნველყოფილ უნდა იქნეს ამ რესურსებით საქმიანობის მინიმალურ დროში განხორციელება.

§3. ქსელური მოდელის აგების ძირითადი წესები

ნებისმიერი ქსელური მოდელი უნდა შეესაბამებოდეს სამუშაოთა შორის არსებულ რეალურ დამოკიდებულებებს და მოდელით სარგებლობა არ უნდა იწვევდეს გაუგებრობას. ამიტომ მოდელის აგებისას სარგებლობენ გარკვეული წესებით. განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი:

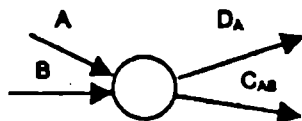
1. იმ შემთხვევაში, თუ რამდენიმე სრულიად სხვადასხვა (A, B, K, D) სამუშაოს გააჩნია ერთი და იგივე საწყისი (a) და საბოლოო (b) მოვლენები, მაშინ იმისათვის, რომ ამ სამუშაოებს ჰქონდეთ განსხვა-

გებული ნომრები, შემოჰყავთ ფიქტიური რკალები (A' , B' , D'). ფიქტიურ რკალს აღნიშნავენ წყვეტილი ხაზით.



ნახ. 6.5

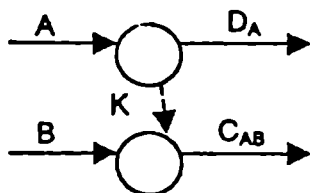
2. იმ შემთხვევაში, თუ მოცემულია ოთხი – A , B , D_A , C_{AB} – სამუშაო და ცნობილია, რომ D_A სამუშაო დამოკიდებულია მხოლოდ A სამუშაოზე, ხოლო C_{AB} სამუშაო კი დამოკიდებულია როგორც A , ასევე B სამუშაოებზე, მათი გამოხატვა ქსელურ მოდელში ასეთი სახით:



ნახ 6.6

არ იქნება სწორი.

ასეთი შემთხვევის სწორად გამოხატვა, ქსელურ მოდელში, შესაძლებელია ფიქტიური რკალის შემოტანის მეშვეობით. ამ დროს, მივიღებთ ქსელური გრაფიკის ასეთ ნაწილს:



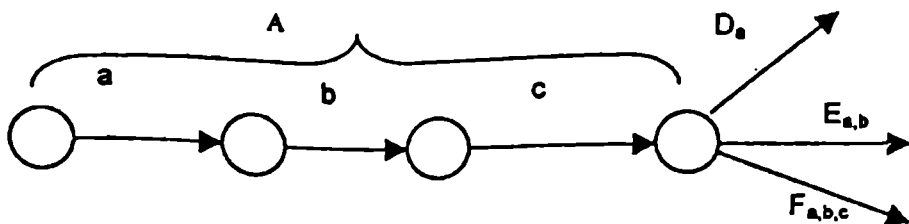
ნახ 6.7

ასეთი გამოხატვით, წინა შემთხვევის შეცდომა, რომელიც ძირითადად იმაში მდგომარეობდა, რომ D_A სამუშაო დამოკიდებული გამოდიოდა როგორც A , ისე B სამუშაოზე (როცა სინამდვილეში ეს ასე არ უნდა ყოფილიყო) გამოსწორებულ იქნა.

3. არსებობს ისეთი სამუშაოები, რომელთა შესრულებაც შედგება რამდენიმე ეტაპისაგან. შესაძლოა, რომ ამ სამუშაოს პირველი ეტაპი დამოკიდებული იყოს სხვა სამუშაოზე, მეორე და მესამე ეტაპი სულ სხვა სამუშაოზე და ა.შ. ასეთ შემთხვევაში, საჭიროა განისაზღვროს ურთიერთდამოკიდებული სამუშაოების ქსელურ მოდელში გამოხატვის სწორი ვარიანტი.

განვიხილოთ მაგალითი.

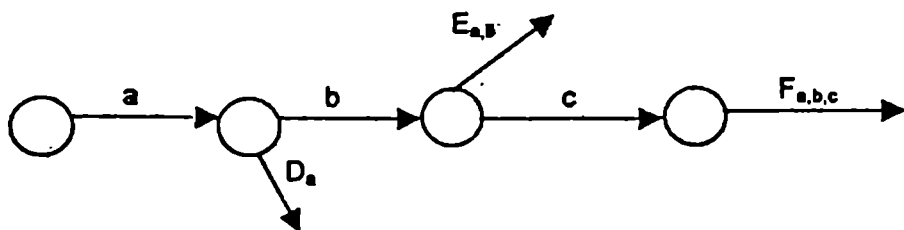
ვთქვათ, მოცემულია A სამ ეტაპიანი სამუშაო, ეტაპებით (a, b, c) და მასთან დაკავშირებული $D_A, E_{a,b}$ და $F_{a,b,c}$ სამუშაოები. ვთქვათ, აგრეთვე, ცნობილია, რომ D_A სამუშაო დამოკიდებულია A სამუშაოს მხოლოდ a ეტაპისაგან, $E_{a,b} - a$ და b ეტაპებისაგან, ხოლო $F_{a,b,c} - a, b$ და c ეტაპებისაგან. მოცემულ პირობებში არასწორი იქნება ქსელურ მოდელში ამ სამუშაოების ურთიერთ-დაკავშირების ასეთნაირად გამოხატვა,



ნახ. 6.8

რადგან D_A უნდა დაწყებულიყო a ეტაპის დამთავრებისთანავე, ხოლო $E_{a,b}$ კი - a და b ეტაპების დამთავრებისთანავე.

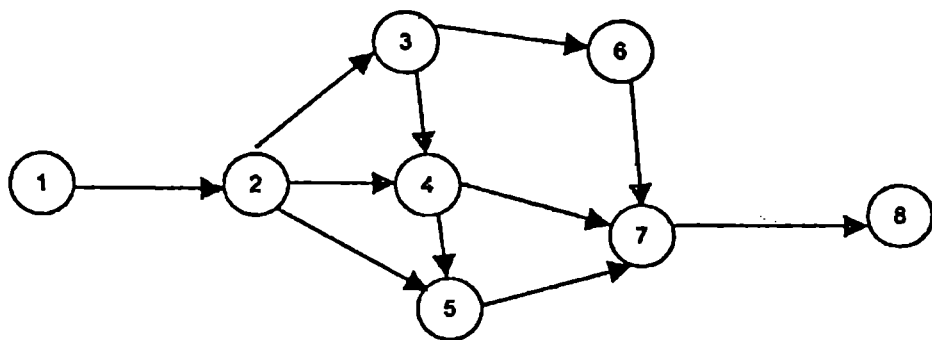
მოცემულ პირობებში სწორი იქნება ქსელურ მოდელში ამ სამუშაოების ასეთნაირად გამოხატვა



ნახ. 6.9

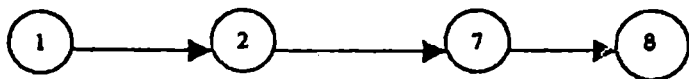
4. იმ შემთხვევაში, თუ საქმიანობაში შემაჯალ სამუშაოთა გარკვეულ კომპლექსს ერთი საწყისი და ერთი საბოლოო მოვლენა აქვს, მაშინ ასეთი კომპლექსი საჭიროებისამებრ ერთი სამუშაოთა შეიძლება შეიცვალოს.

ასე, მაგალითად, თუ მოცემულია ასეთი ქსელური მოდელი:



ნახ. 6.10

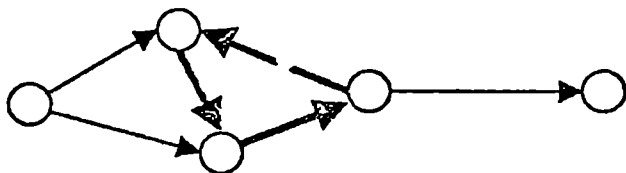
მაშინ იგი საჭიროების შემთხვევაში, შეიძლება შეიცვალოს ასეთი მოდელი:



ნახ. 6.11

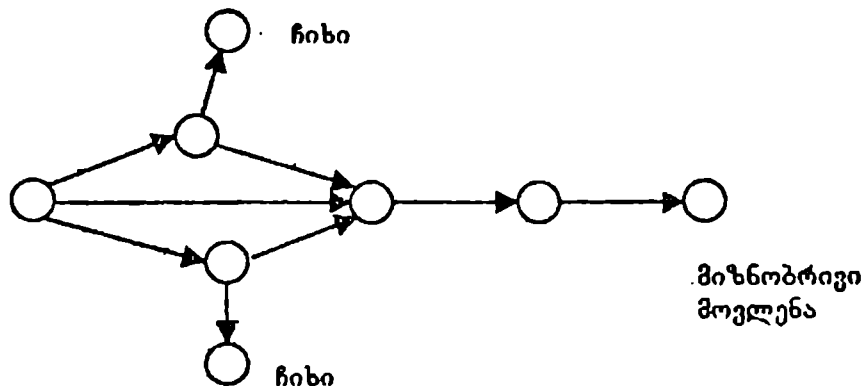
სადაც 2-7 სამუშაო აგრეგირებული სახით გამოხატავს ცხრა(2-3, 2-4, 2-5, 3-4, 4-5, 3-6, 4-7, 5-7 და 6-7) სამუშაოს.

5. ქსელურ მოდელში არ შეიძლება იყოს ჩაკეტილი კონტურები, რადგან ამ შემთხვევაში ციკლის შემქმნელი სამუშაოები არ ემსახურებიან მიზნობრივი პოვლენის დადგომას (იხ. ქვემოთ მოყვანილი ნახაზი).



ნახ. 6.12

6. ქსელურ მოდელში შემავალი ყველა სამუშაო უნდა ემსახუროდეს მიზნის მიღწევას. ამიტომ, ქსელში დაუშვებელია მიზნობრივ სამუშაოებთან დაუკავშირებელი განშტოებების (ეგრეთწოდებული ჩიხების) არსებობა (იხ. ქვემოთ მოყვანილი ნახაზი).



ნახ. 6.13

ქსელური მოდელის აგების დროს აუცილებელია არა მარტო ამ წესების ცოდნა, არამედ მათი სწორად გამოყენებაც.

§4. ქსელური გრაფიკების ოპტიმიზაცია

კრიტიკული გზისა და დროითი მარაგების პოვნის შემდეგ უნდა განხორციელდეს ქსელური მოდელის ყოველმხრივი ანალიზი და დასახულ იქნეს მისი ოპტიმიზაციისათვის საჭირო გზები. ქსელური მოდელის ოპტიმიზაციის ძირითად ამოცანას წარმოადგენს ქსელის პარამეტრების რიცხვითი მაჩვენებლების, წინასწარ გეგმურად მოცემულ ვადებთან ურთიერთშესაბამისობაში მოყვანა.

უნდა აღინიშნოს, რომ მოცემულ შემთხვევაში, სიტყვა "ოპტიმიზაცია" არ იხმარება ზუსტად მისი დანიშნულების მიხედვით. უფრო ზუსტი იქნებოდა, ეს პროცესი წოდებული ყოფილიყო ან ხელახალ დაგეგმვად, და ან კიდევ

- *ქსელური გრაფიკის პარამეტრების მოცემულ შეზღუდვებთან შესაბამისობაში მოყვანად.* საზოგადოდ, არსებობს ბევრი სხვადასხვა მიზეზი, რის გამოც ქსელური მოდელის პარამეტრები არ შეესაბამებიან წინასწარ მოცემულ შეზღუდვებს ხან დროისა და ხანაც რესურსების მიხედვით.

ასე, მაგალითად, შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ კრიტიკული გზის ხანგრძლივობა მეტი იყოს მის ღირებულებად მოცემულ ხანგრძლივობაზე. ამ შემთხვევაში, რა თქმა უნდა, აუცილებელია, რომ განხორციელდეს ქსელური გრაფიკის ოპტიმიზაცია. ზოგჯერ, ისეც ხდება, რომ კრიტიკული გზის ხანგრძლივობა უფრო ნაკლებია, ვიდრე მისი ღირებულები ვადა. მაგრამ, მიუხედავად ამისა, ჩვენ მაინც უნდა განვახორციელოთ კრიტიკული გზის ნაშდვილი სიგრძის მის ღირებულებულ სიგრძესთან შესაბამისობაში მოყვანა, ე. ი. უნდა გაეზარდოს ქსელური მოდელით გათვალისწინებული სამუშაოს ან მთელი შრომითი საქმიანობის ხანგრძლივობა. ერთი მხრივ, ეს პარადოქსად ჩანს. მართლაც, ჩვენ თითქოს შეგვიძლია სამუშაოს, ან მთელი შრომითი საქმიანობის შესრულება ღირებულებზე უფრო ადრე, მაგრამ არ გესურს. საქმე იმაშია, რომ ამ დროს პირველ ადგილზე დგას ქსელური გრაფიკით გათვალისწინებული ყველა სამუშაოს დამთავრების ეკონომიკური მიზანშეწონილობა და, პირველ რიგში, სწორედ მას უნდა გაეწიოს ანგარიში.

მაგალითად, იმ შემთხვევაში, თუ ცნობილია, რომ ჩვენ შეგვიძლია ნედლეულის გადამამუშავებელი საამქრო მოვაზადოთ ექსპლუატაციისათვის სამი თვით უფრო ადრე, ვიდრე ამას ითვალისწინებს ღირებულებად მოცემული ვადა. ამასთან, თუ ისიც ცნობილია, რომ სანედლეულო ბაზა მზადყოფნაში იქნება მხოლოდ სამი თვის შემდეგ, რამის ასეთი სახის კითხვა - აქვს კი აზრი გადამამუშავებელი საამქროს ექსპლუატაციაში შეყვანას სამი თვით ადრე, ანუ მანამ, სანამ სანედლეულო ბაზა არ იქნება მზადყოფნაში? ცხადია, რომ ამის არავითარი ეკონომიკური მიზანშეწონილობა არ არსებობს. ამიტომ,

მოცემულ შემთხვევაში ჩვენ, როგორც, კრიტიკული ხანგრძლივობა უნდა გავადიდოთ და ის მოვიყვანოთ შესაბამისობაში ეკონომიკურად გამართლებულ (დირექტიულ) ვადასთან.

ქსელური მოდელის ოპტიმიზაციის შემთხვევებიდან შეიძლება ასეთი მაგალითის მოყვანაც: ეთქვას, მოცემულია ისეთი შემთხვევა, როცა ესა თუ ის რესურსი (მაგალითად, შრომითი რესურსი) გაგვაჩნია შეზღუდული რაოდენობით და საჭიროა ასეთ პირობებში მოდელით გათვალისწინებული შრომითი საქმიანობის განხორციელება გეგმიურ დროში.

ან კიდევ, არსებობს ქსელური მოდელის ოპტიმიზაციის ისეთი საინტერესო ვარიანტი, რომელიც ითვალისწინებს ოპტიმიზაციის პროცესის განხორციელებას ორმაგი პარამეტრის (დრო - თვითღირებულება) მიხედვით.

ეთქვას, აგებულია ქსელური მოდელი (ან კიდევ, მის საფუძველზე აგებულია ქსელური გეგმა) და უველა სამუშაო მიმდინარეობს ნორმალურ რეჟიმში. ამ სამუშაოთა ღირებულება ნორმალურ რეჟიმში ყოველთვის ერთი და იგივეა და ის განისაზღვრება ნორმის მიხედვით. ზოგჯერ, პრაქტიკაში, წარმოიშობა სამუშაოთა სწრაფი დაჩქარების უკიდურესი აუცილებლობა, ანუ მათი შესრულების ნორმალურიდან დაჩქარებულ (ექსტრემულ) რეჟიმში გადაყვანის მოთხოვნა.

ამა თუ იმ სამუშაოს შესრულების ფორსირებისა, ის საჭიროა მნიშვნელოვნად დაჩქარდეს სამუშაოს ტემპი, ანუ ნორმალურიდან დაჩქარებულ (ექსტრემულ) რეჟიმზე გადასვლა იწვევს ამ სამუშაოს ღირებულების გადიდებას (მის გაძვირებას), რაც წარმოადგენს ბუნებრივ და გასაგებ ფაქტს.

განხილული სახის ოპტიმიზაციის დროს, წყდება შემდეგი ტიპის საკითხი:

როგორ უნდა განხორციელდეს სამუშაოთა მოცემული კომპლექსის დაჩქარებულ (ექსტრემულ) რეჟიმში შესრულება ისე, რომ ნებისმიერი ცალკეული სამუშაოს

ღირებულება არ იყოს ექსტრემული, ანუ მათი ღირებულება განისაზღვროს ნორმალური მაჩვენებლებით. ეს წარმოადგენს ოპტიმიზაციის ძალზედ საინტერესო შემთხვევას. იგი მეტად ხანგრძლივი, მაგრამ, ამავე დროს, შესრულებადი პროცესია.

ახლა განვიხილოთ ქსელური მოდელის ოპტიმიზაციის უმარც უესი შემთხვევები.

ქსელური მოდელის ოპტიმიზაცია დროითი პარამეტრის მიხედვით

სპეციალურ ლიტერატურაში ცნობილია ქსელური გრაფიკის დროის მიხედვით ოპტიმიზაციის რამდენიმე მეთოდი. მათგან ერთ-ერთ ძირითად მეთოდს წარმოადგენს სამუშაო რა კომპლექსის შესრულება მინიმალურად შესაძლო დროში. ამ დროს, ქსელური მოდელის ოპტიმიზაცია უნდა განხორციელდეს რესურსების არაკრიტიკულიდან კრიტიკულ სამუშაოებზე გადანაწილების ხარჯზე, რომელიც იწვევს კრიტიკული გზის ხანგრძლივობის შემცირებას (კრიტიკული გზის სიგრძის შემცირება შეიძლება განხორციელებულ იქნეს, აგრეთვე, რესურსების გადანაწილების გზით, ამა თუ იმ კომპლექსში შემავალ სამუშაოებს შორის).

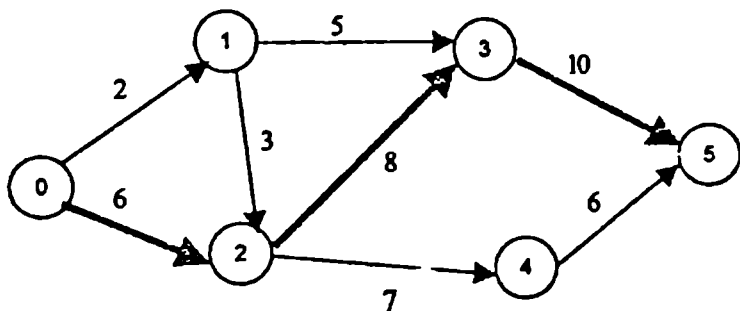
განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, გადასანაწილებელი რესურსების რანგში მოცემულია სამუშაოს შემსრულებელ მუშათა რაოდენობა და მათი გადანაწილებით უნდა შემცირდეს კრიტიკული გზის სიგრძე.

ცნობილია, რომ ერთი და იგივე სამუშაო შეიძლება შესრულებულ იქნეს მუშათა სხვადასხვა რაოდენობის გამოყენებით. ცხადია, რომ სამუშაოს შესრულების დროსა და მის შემსრულებელ მუშათა რაოდენობას შორის არსებობს სრულიად განსაზღვრული დამოკიდებულება: რაც მეტია ამ სამუშაოს შესასრულებლად დასაქმებულ მუშათა რაოდენობა, მით ნაკლები დრო დასჭირდება მის შესრულებას და პირიქით. აქედან გასაგებია, თუ როგორი პრინციპით უნდა იქნეს გადანაწილებული სამუშაო ძალა სამუშაოთა შესასრულებლად ისე, რომ შედეგად მივიღოთ

კრიტიკული გზის სიგრძის შემცირების სასურველი ვარიანტი.

განვიხილოთ ასეთი კონკრეტული მაგალითი.

ეთქვას, მოცემულია სამუშაოთა ისეთი ერთობლიობა, ანუ შრომითი საქმიანობა, რომლის ძირითადი კანონზომიერებებიც ასახულია ქვემოთ მოცემულ ქსელურ მოდელში (იხ. ნახ. 6.14).



ნახ. 6.14

დავუშვათ, რომ წინასწარ, როცა წარმოებს სამუშაოებისა და მოვლენების ნუსხათა განსაზღვრა და მათ საფუძველზე ქსელური მოდელის აგება, არ არის ცნობილი, თუ რომელი სამუშაოებია კრიტიკული და რომელი არაკრიტიკული. ამის დადგენა, ეთქვას, ხდება ქსელური მოდელის გათვლის შემდეგ.

ეთქვას, 1-3 სამუშაოს გააჩნია 300 კაც/დღის ტოლი შრომატევადობა და დავუშვათ, აგრეთვე, რომ ამ სამუშაოს შესასრულებლად, ჩვენ გამოვიყენეთ 60 კაცი, რის შედეგადაც მისი ხანგრძლივობა გახდა 5 დღის (300:60) ტოლი. ეთქვას, აგრეთვე, რომ 2-3 სამუშაოს გააჩნია 80 კაც/დღის ტოლი შრომატევადობა და ამ სამუშაოს შესასრულებლად დავასაქმეთ 10 კაცი, რის შედეგადაც მისი ხანგრძლივობა გახდა 8 დღე. მოცემული ქსელური გრაფიკის გათვლის შემდეგ, კრიტიკული გზის არსებული

სიგრძე განისაზღვრა 24 დღით. მისი ღირეპტიული ვადა კი, ვთქვათ, შეადგენს 20 დღეს. მაშასადამე, ცხადია, რომ იქმნება ამ დროის ოპტიმიზაციის აუცილებლობა, ე.ი. საჭიროა ქსელის პარამეტრების არსებული მნიშვნელობები მოყვანილ იქნეს შესაბამისობაში მათ ღირეპტიულ მნიშვნელობებთან.

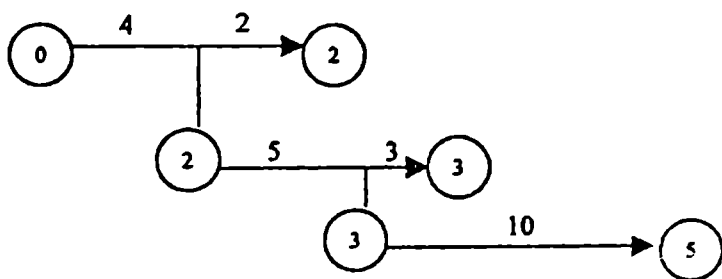
ამ მიზნით, შევამცირეთ 2-3 სამუშაოს ხანგრძლიეობა 4 დღით. ეს არ გამოიწვეეს მისი შრომატეეადობის ცვლილებას. იგი რჩება მუდმიეი. ამიტომ საჭირო ხდება, რომ ამ სამუშაოს შემსრულებელ მუშახელს დაემატოს 10 კაცი, ე.ი. ამ სამუშაოს შესრულებაზე მთლიანად დასაქმებულ უნდა იქნეს 20 კაცი.

დაეუქვათ, რომ 1-3 და 2-3 სამუშაოეის შესასრულებლად, საჭიროა ერთი და იგიეე კეალიფიკაციის სპეციალისტები. იმის გათეალისწინებით, რომ ეს სამუშაოები სრულდება ერთ და იმაეე სტრუქტურულ ქეეგანეოფილებაში, ჩეენ შეგეიძლია 10 კაცი მოეხსნათ 1-3 სამუშაოდან და მის შესასრულებლად დაეტოეოთ 50 კაცი. ამით 1-3 სამუშაოს შესრულების ხანგრძლიეობა გაიზრდება (300-50) 6 დღემდე. თუ თაეიდან ეაწარმოებთ განსახილეელი ქსელური გრაფიკის გათელას, მიეიღებთ, რომ კრიტიკული გზა განისაზღვრება შემდეგი სამი სამუშაოთი 0-2 (6 დღე), 2-3 (4 დღე) და 3-5 (10 დღე). სულ მისი სიგრძე ტოლია 20 დღისა. ამგეარად, მთელი შრომითი საქმიანობის შესრულების ხანგრძლიეობა ჩეენ შევამცირეთ 4 დღით და ამით ქსელის განსახილეელი პარამეტრის არსებული და ღირეპტიული მნიშვნელობები მოყვანილ იქნა ურთიერთშესაბამისობაში.

ახლა, განეიხილოთ ქსელური მოდელის დროითი პარამეტრით ოპტიმიზაციის მეორე მეთოდი. მისი პირითადი შინაარსი მდგომარეობს კრიტიკული სამუშაოების განცალკეეებასა და დაპარალელებაში.

ასე, მაგალითად, იმის შემდეგ, როცა მოხდება ქსელურ მოდელში კრიტიკული სამუშაოების განსაზღვრა, აუცილებელია გულდასმით იქნეს გაანალიზებული კრიტიკული გზის ეეელა სამუშაო, მათი განცალკეეებისა

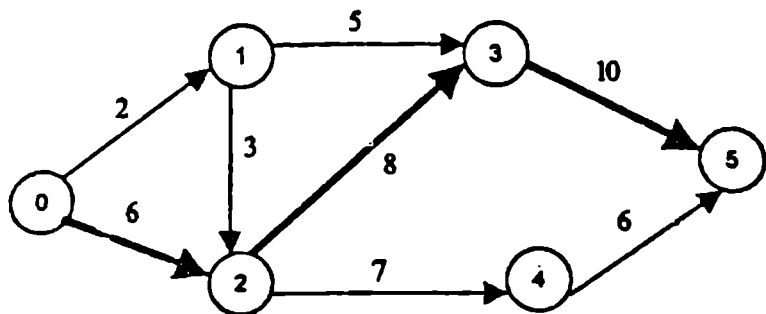
და დაპარალელების შესაძლებლობის თვალსაზრისით. მაგალითად, თუ განვიხილავთ 6.14 ნახაზზე მოცემული ქსელური მოდელის კრიტიკულ გზას, იგი შედგება 0-2, 2-3 და 3-5 სამუშაოების ერთობლიობისაგან. მოცემულ შემთხვევაში, ამ კრიტიკული გზის ანალიზის დროს, ისმის ერთი ძირითადი საკითხი: გაირკვეს – ხომ არ არის შესაძლებელი, რომ ყოველი შემდგომი კრიტიკული სამუშაო დაიწყოს იმაზე უფრო ადრე, ვიდრე დასრულდება მისი წინმავალი სამუშაოს შესრულება? ამიტომ ცხადია, რომ კრიტიკულ გზას უნდა გააჩნდეს ისეთი სახე, როგორც ეს არის გამოხატული 6.15 ნახაზზე.



ნახ. 6.15

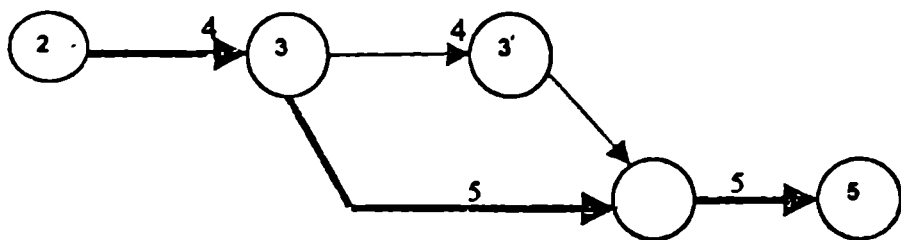
ამ ნახაზიდან ჩანს, რომ კრიტიკულ გზაში შემავალი სამუშაოების დანაწევრებისა და დაპარალელების ხარჯზე მნიშვნელოვნად მცირდება მთელი შრომითი საქმიანობის ხანგრძლივობა.

ამ მეთოდის გამოყენებას გაეუკეთოთ ილუსტრაცია შემდეგ მაგალითზე (იხ. ნახ. 6.16).'



ნახ. 6.16

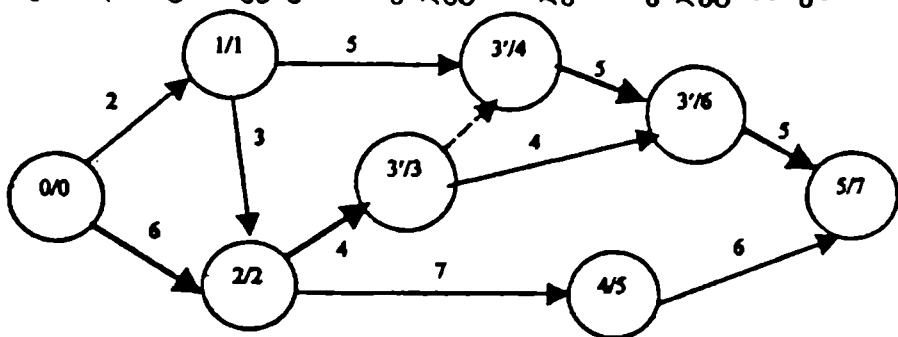
თუ განვახორციელებთ ამ ქსელური მოდელის გულდასკით ანალიზს, დადგინდება, რომ 3-5 სამუშაო შეიძლება დაწყებულ და გაგრძელებულ იქნეს 2-3 სამუშაოს ნახევრის დამთავრებიდან 5 დღის შემდეგ (ე.ი. 4 დღის შემდეგ). მაგრამ 3-5 სამუშაოს მეორე ნახევრის დასრულება შესაძლებელია მხოლოდ 2-3 სამუშაოს სრული დამთავრების შემდეგ. გრაფიკულად ეს შეიძლება გამოიხატოს ისეთნაირად, როგორც ეს მოცემულია 6.17 ნახაზზე.



ნახ. 6.17.

ამ ნახაზიდან ჩანს, რომ განხილული ორი სამუშაოს განცალკევებისა და დაპარალელების შედეგად, მათი შესრულების საერთო ხანგრძლივობა 18 დღიდან შემცირდა 14 დღემდე.

6.16-ე ნახაზზე გამოსახული ქსელური მოდელი ამ მეთოდის გამოყენების შემდეგ მიიღებს შემდეგ სახეს:



ნახ. 6.18

ამ ნახაზის მოვლენების -- ნომრები წარმოდგენილია წილადის სახით, რომლის მრიცხველშიც მოცემულია ქსელის ძველი ნომერი, ხოლო მნიშვნელში კი -- ახალი ნომერი.

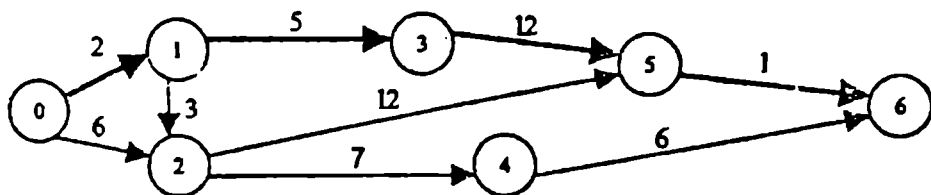
როგორც ჩანს, კრიტიკული გზის სიგრძე და მთელი შრომითი საქმიანობის შესრულების ხანგრძლივობა 24 დღიდან შემცირდა 20 დღემდე.

ახლა, განვიხილოთ ქსელური მოდელის დროითი პარამეტრით ოპტიმიზაციის მესამე მეთოდი. ამ მეთოდის გამოყენების ძირითადი პრინციპი იმაში მდგომარეობს, რომ იგი იძლევა საშუალებას შრომითი საქმიანობის ხანგრძლივობა შემცირდეს სამუშაოთა პირველსაწყისი ტექნოლოგიისა და შესაბამისად ქსელური გრაფიკის ტოპოლოგიის ცვლილების (ე.ი. სამუშაოთა შორის ურთიერთდამოკიდებულებების შეცვლის) ხარჯზე.

მაგალითისათვის განვიხილოთ 6.16-ე ნახაზზე წარმოდგენილი ქსელური მოდელი. 3-5 სამუშაოს ხელმძღვანელის წინაშე, ამ დროს, ისმის საკითხი:

რა მოხდება, თუ 2-3 სამუშაო დაუკავშირდება 3-5 სამუშაოს არა დასაწყისს, არამედ მის ბოლოს? ე.ი. ის შეუერთდება არა 3-ე, არამედ 5-ე მოვლენას? 3-5 სამუშაოს

ხელმძღვანელმა უნდა დაინახოს, რომ იმისათვის, რათა მან შეძლოს 2-3 სამუშაოს საქმის კურსში ყოფნა, მას დასჭირდება ყურადღების გადატანა თავისიდან სხვა სამუშაოზე. ამასთან დაკავშირებით, მას დასჭირდება 3-5 სამუშაოს ხანგრძლივობის გადიდება 10-დან 12 დღემდე. გარდა ამისა, 2-3 და 3-5 სამუშაოების დამთავრების შემდეგ აუცილებელია მას მიეცეს კიდევ ერთი დღე, ამ ორი სამუშაოს შედეგთა შესადარებლად. აღნიშნულთან დაკავშირებით, 2-3 სამუშაოს ხელმძღვანელმა უნდა განაცხადოს, რომ იმდენად რამდენადაც, ის იქნება მოცდენილი, მუშაობის პროცესში, მისთვის აუცილებელია, აგრეთვე, რომ დამატებულ იქნეს დრო 8-დან 12 დღემდე. ამგვარად, "ორ კრიტიკულ სამუშაოში, საერთო ჯამში, მოხდა 7 დღის დამატება. განსჯის შემდეგ, ცხადი გახდება, რომ ასეთ შემთხვევაში, მიღებულ უნდა იქნეს გადაწყვეტილება სამუშაოთა ტექნოლოგიის ცვლილების შესახებ. ეს ცვლილება უნდა განხორციელდეს დროის დამატების შედეგად ათითებულ სამუშაოთა შესრულებისათვის. ამდენად, 6.16-ე ნახაზზე გამოსახული ქსელური მოდელი მიიღებს შემდეგ სახეს:



ნახ. 6.19

როგორც ამ ნახაზიდან ჩანს, კრიტიკული გზის სიგრძე მოცემულ შემთხვევაში 24-დან 20 დღემდე შემცირდა.

გარდა ოპტიმიზაციის განხილული მეთოდებისა, კიდევ არსებობს სხვა მეთოდებიც, რომელთა აქ განხილვა არ მიგვაჩნია მიზანშეწონილად.

უნდა აღინიშნოს, რომ თუ ზემოთ ხსენებული მეთოდებიდან არცერთი არ იძლევა საშუალებას ქსელური გრაფიკის პარამეტრები მოყვანილ იქნეს შესაბამისობაში მოცემულ შეზღუდვებთან, მაშინ აუცილებელია ამ შეზღუდვების შეცვლა ახალი შეზღუდვებით, რადგან დასაგეგმი პროცესი მაინც არ განხორციელდება მოცემულ შეზღუდვებში.

ქსელური მოდელის ოპტიმიზაცია რესურსების მიხედვით

პრაქტიკა ცხადყოფს, რომ ნებისმიერი პროცესის ორგანიზაციის მნიშვნელოვან ფაქტორს წარმოადგენს ე.წ. მატერიალური, ფინანსური და შრომითი რესურსების სწორი განაწილება, რომლებიც გააჩნიათ სამუშაოთა შემსრულებლებს. ამიტომ, რთული შრომითი საქმიანობების განხორციელების დაგეგმვისა და მართვის დროს, უდიდესი მნიშვნელობა გააჩნია ყველა სახეობის არსებული რესურსის რაციონალური განაწილების პროცესს.

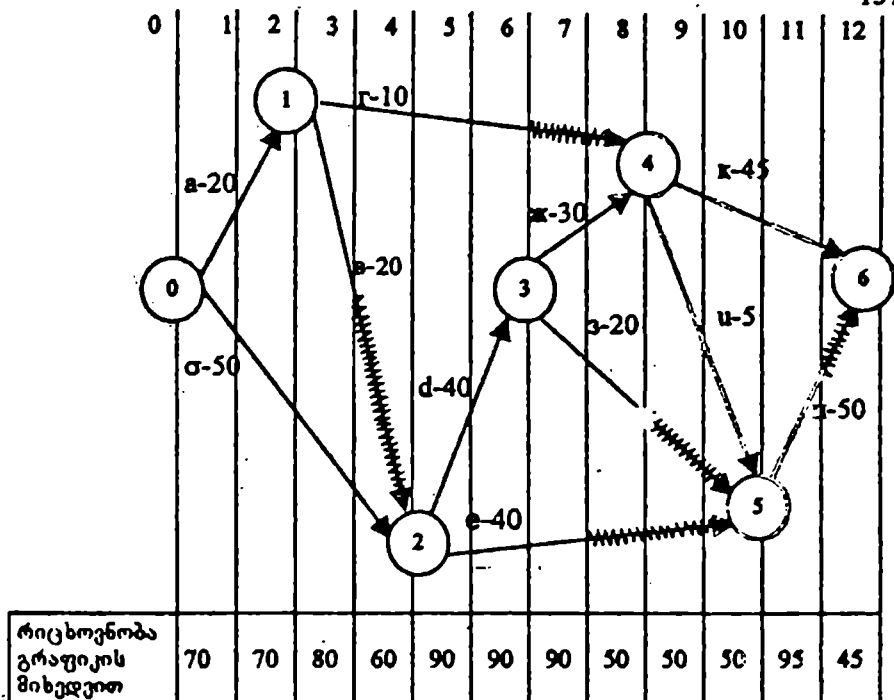
ქსელური მოდელის ოპტიმიზაცია რესურსების მიხედვით, ძირითადად, ხორციელდება ცალ-ცალკე რესურსთა ცალკეული სახეობისათვის. ქსელის ოპტიმიზაციის თანმიმდევრობა, რესურსთა ცალკეული სახეობების მიხედვით, დგინდება ყოველ მოცემულ, კონკრეტულ შემთხვევაში, ამ რესურსებზე არსებულ შეზღუდვათა ზღვრულ მაჩვენებლებთან დამოკიდებულების მიხედვით. პრაქტიკა ცხადყოფს, რომ ხშირად მაღლიმიტირებელ მაჩვენებლად, ქსელური მოდელის ოპტიმიზაციის დროს, გეხედება შრომითი რესურსები. ამიტომ ქვემოთ, ჩვენ,

პირველ რიგში, შევეხებით ქსელის ოპტიმიზაციას, შრომითი რესურსების მიხედვით.

ქსელური გრაფიკის ოპტიმიზაცია შრომითი რესურსების მიხედვით

ხშირად შრომითი რესურსების შეზღუდულობის პირობებში დიდი მნიშვნელობა გააჩნია მათი უწყვეტი და თანაბარზომიერი გამოყენების ამოცანის სწორად გადაწყვეტას. ეს უკანასკნელი კი შესაძლებელია განხორციელდეს ქსელის შრომითი რესურსების მიხედვით ოპტიმიზაციის გზით. ქსელური მოდელის ოპტიმიზაცია შრომითი რესურსების მიხედვით ხორციელდება თანდათანობითი მიახლოების მეთოდის გამოყენებით (ამ დროს ხდება დროითი მარაგების გამოყენებაც).

მოვახდინოთ ასეთი ოპტიმიზაციის ილუსტრაცია შემდეგი მაგალითის განხილვის საფუძველზე (იხ. ნახ. 6.20):



ნახ 6.20.

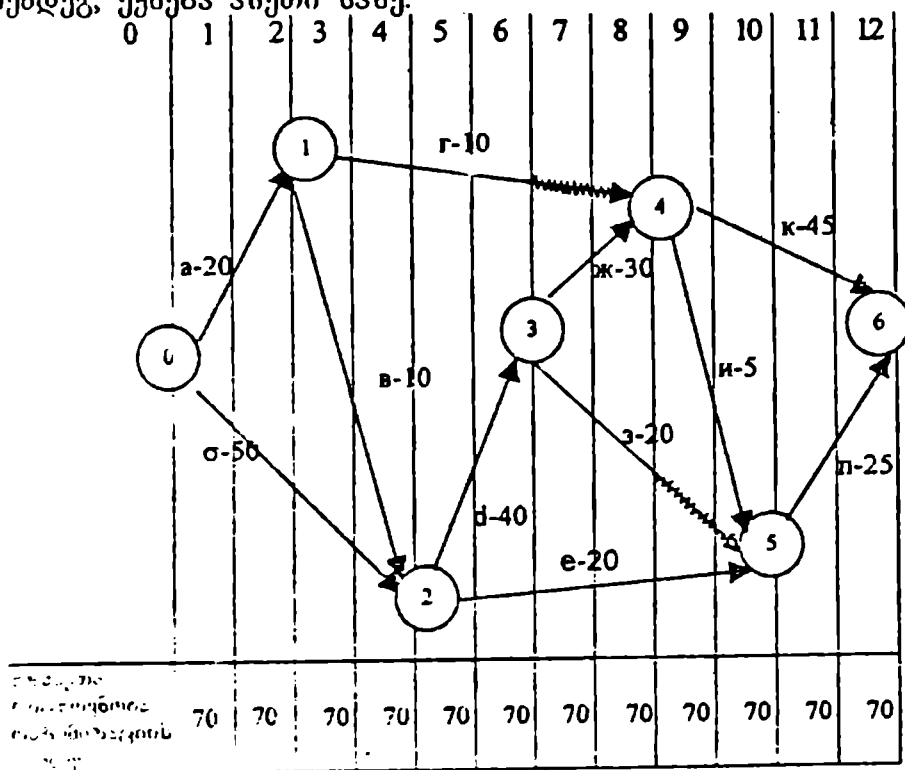
ეთქვათ, მოცემულია საწარმო, რომელმაც უნდა განახორციელოს 0-1, 0-2, 1-2, 1-4, 2-3, 3-4, 2-5, 3-5, 4-5, 4-6 და 5-6 სამუშაოებისაგან შემდგარი შრომითი საქმიანობა (იხ. ნახ. 6.20). დაეუშვათ, აგრეთვე, რომ ამ სამუშაოების შესასრულებლად საჭირო დროითი და შრომითი რესურსების ნორმატიული მაჩვენებლები, აგრეთვე, მათ შორის არსებული კავშირები, განისაზღვრება ისეთნაირად, როგორც ეს მოცემულია 6.20 ნახაზზე გამოსახულ ქსელში.

ეთქვათ, აგრეთვე, რომ ამ საწარმოს შეუძლია ყოველდღიურად სამუშაოდ გამოიყენოს მხოლოდ 70 კაცი (რადგან მას გააჩნია მხოლოდ 70 თანამშრომელი). ოპტიმიზაციის ძირითადი მიზანი მდგომარეობს იმაში, რომ საწარმოში ყოველდღე გამოყენებულ იქნეს 70 კაცი, რათა

ადგილი არ ჰქონდეს არც მუშახელის ნაკლებობას და არც სიჭარბეს.

6.20 ნახაზის ანალიზი გვიჩვენებს, რომ საწარმოში შრომითი რესურსების სრულად გამოყენებას ადგილი აქვს მხოლოდ პირველ ორ დღეს (70 კაცი), ხოლო დანარჩენ დღეებში კი ადგილი აქვს ან მოცდენებს და ან შრომითი რესურსების ნაკლებობებს. საჭიროა, შრომითი რესურსების გამოყენების მაჩვენებელთა გათანაბრება და გატოლება 70-ისადმი. ეს შესაძლებელია ქსელურ მოდელში შეჭავალ იმ სამუშაოთა შესრულების დროთა ცვლილებით, რომელთაც გააჩნიათ დროითი მარაგები (რომლებიც შეიცავენ ზამბარისებურ წირებს).

განსახილველ ქსელურ მოდელს, მისი ოპტიმიზაციის შემდეგ, ექნება ასეთი სახე:



ნახ. 6.21.

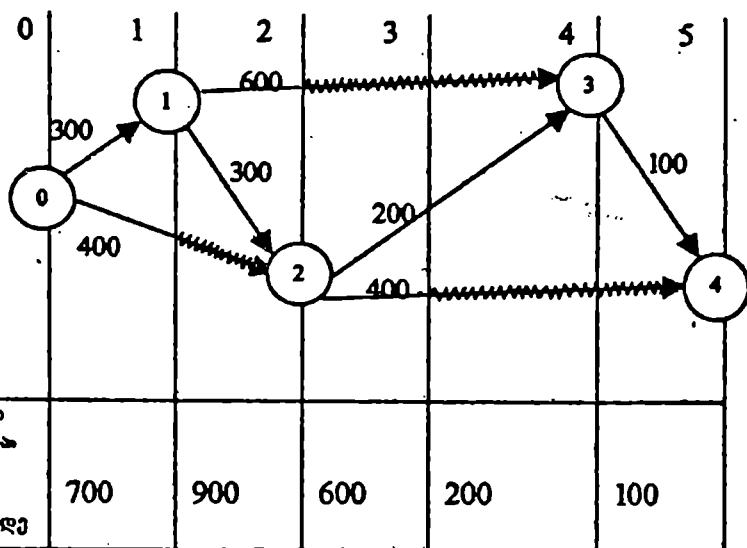
ამგვარად, ოპტიმიზაციის შედეგად ყოველდღიურად დასაქმებულ მუშაკთა რიცხოვნობა შეადგენს 70 კაცს.

იმ შემთხვევაში, თუ აღმოჩნდა, რომ ოპტიმიზაციის შემდეგ არ იქნა მიღებული დადებითი შედეგი, აუცილდება, შეიცვალოს ცალკეულ სამუშაოთა ხანგრძლივობა. დროითი მარაგების საზღვრებს გარეთ გასვლის გზით (ეს აუცილებელია, რადგან სამუშაოები, მათი ძველი ხანგრძლივობების შენარჩუნებით მაინც ეერ შესრულდება მოცემულ გეგმიურ დროში).

ქსელური გრაფიკის ოპტიმიზაცია მატერიალური რესურსების მიხედვით

ქსელური მოდელის ოპტიმიზაცია, მატერიალური რესურსების მიხედვით, ხორციელდება თანდათანობით ყოველი ცალკეული სახეობის რესურსისათვის ცალკე (არსებული დროითი მარაგების საზღვრებში). ოპტიმიზაცია, პირველ რიგში, უნდა განხორციელდეს იმ სახეობის რესურსის მიხედვით, რომელიც წარმოადგენს განმსაზღვრელ რესურსს, მოცემული კონკრეტული პროგრამის შესრულების პროცესში.

ეთქვათ, მოცემულია სამშენებლო ორგანიზაცია, რომელმაც უნდა განახორციელოს 0-1, 0-2, 1-2, 1-3, 2-3, 2-4 და 3-4 სამუშაოებისაგან შემდგარი შრომითი საქმიანობა (იხ. ნახ. 6.22). დაეუშვათ, აგრეთვე, რომ ამ სამუშაოების შესასრულებლად საჭირო დროითი და შრომითი რესურსების ნორმატიული მაჩვენებლები, აგრეთვე, მათ შორის არსებული კაეშირები განისაზღვრება ისეთნაირად, როგორც ეს მოცემულია 6.22 ნახაზზე გამოსახულ ქსელში.



ნახ. 6.22.

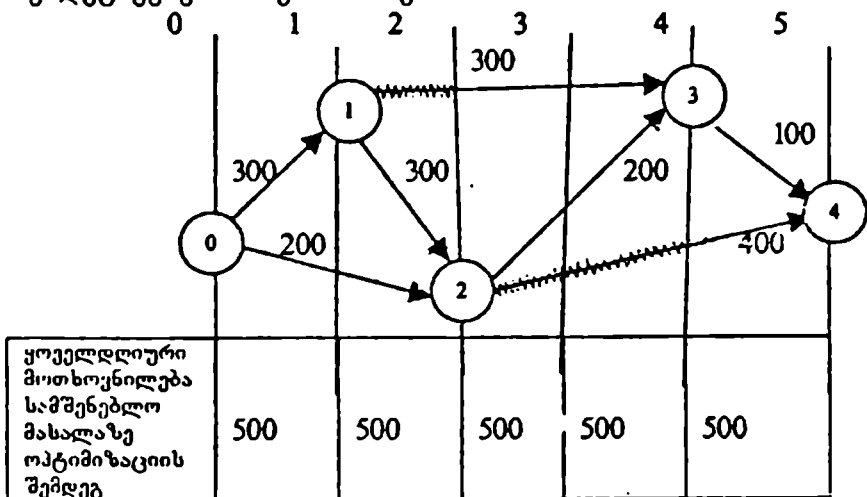
ვიგულისხმობთ, აგრეთვე, რომ ამ ორგანიზაციას შეუძლია ყოველდღიურად სამუშაოდ გამოიყენოს 500 მ³ სამშენებლო მასალა (რადგან მას ყოველდღიურად არ მიეწოდება 500 მ³ სამშენებლო მასალაზე მეტი). ოპტიმიზაციის ძირითადი მიზანი მდგომარეობს მაშინ, რომ მოცემულ ორგანიზაციაში ყოველდღიურად გამოყენებულ იქნეს 500 მ³ სამშენებლო მასალა (არც მეტი და არც ნაკლები), რათა ადგილი არ ჰქონდეს სამშენებლო მასალების არც სიჭარბეს და არც ნაკლებობას.

6.22 ნახაზის ანალიზი გვიჩვენებს, რომ მოთხოვნილებები სამშენებლო მასალებზე არცერთ დღეს არ ემთხვევა მიწოდების ნორმატიულ მაჩვენებელს (500 მ³).

საჭიროა, განვახორციელოთ 6.22 ნახაზზე მოცემული ქსელური მოდელის ისეთი ოპტიმიზაცია, რომ ყოველდღიური მოთხოვნილებისა და მიწოდების მაჩვენებლები, სამშენებლო მასალებზე, დაემთხვეს ერთმანეთს და გაუტოლდეს 500 მ³-ს. ეს, შესაძლებელია ქსელურ მოდელში შემავალ იმ სამუშაოთა შესრულების დროთა

ცელილებით, რომელთაც გააჩნიათ დროითი მარაგები (რომლებიც შეიცავენ ზამბარისებურ წირებს).

განსახილველ ქსელურ მოდელს მისი ოპტიმიზაციის შემდეგ ექნება ასეთი სახე:



ნახ. 6.23.

ამგეარად, ოპტიმიზაციის შემდეგ ყოველდღიური მოთხოვნილებისა და მიწოდების მაჩვენებლები ერთმანეთს გაუტოლდნენ და უდრის 500 მ³-ს.

ქსელური მოდელის ოპტიმიზაცია ფულადი რესურსების მიხედვით

პრაქტიკაში, ხშირად ისმის ქსელური მოდელის ოპტიმიზაციის ამოცანა, ფულადი რესურსების მიხედვით, რომელიც ძირითადად ითვალისწინებს ქსელში შემავალი სამუშაოების ფულადი მახასიათებლებისა და სამუშაოთა მოცულობების ამსახველი პარამეტრების ურთიერთდაკავშირებას.

ქსელური მოდელის ოპტიმიზაციის ეს სახე ხორციელდება ქსელის მატერიალური რესურსების მიხედვით ოპტიმიზაციის პროცესის ანალოგიურად. მოცემული ამოცანის შინაარსი, რომელიც ითვალისწინებს ქსელური მოდელის ოპტიმიზაციას ფულადი რესურსების მიხედვით,

ცხადი გახდება, თუ გავიხსენებთ წინა საკითხში დასმულ ქსელის ოპტიმიზაციის ამოცანას, სამშენებლო მასალების მიხედვით და სათანადოდ შეეცვლით მონაცემებს. კერძოდ, თუ სამშენებლო მასალების შესახებ არსებულ მონაცემებს შეეცვლით მონაცემებით ფულადი სახსრების (ლარების) შესახებ, ე.ი. თუ ვიგულისხმებთ, რომ სამუშაოთა ფიზიკური მოცულობების საფუძველზე, ესაზღვრეთ სამუშაოთა ყოველდღიურ მოცულობებს, გამოხატულს ლარებში. შეზღუდვის რანგში ვღებულობთ იმავე ციფრს – 500, მხოლოდ ვგულისხმობთ, რომ ეს არის სამუშაოთა ყოველდღიური მოცულობა, გამოხატული ლარებში. ოპტიმიზაციის დანარჩენი პროცესი იქნება ზუსტად იმდგვარი, როგორიც ეს იყო წინა საკითხის დასრულებას, როცა ვახდენდით ქსელის ოპტიმიზაციას მატერიალური რესურსის მიხედვით.

§5. შრომითი საქმიანობის ღირებულების ოპტიმიზაცია

სპეციალურ ლიტერატურაში, გარდა ზემოთ განხილული შემთხვევებისა, კიდევ გვხვდება ქსელური მეთოდებით რესურსების გამოყენების ოპტიმიზაციის სხვა შემთხვევებიც, რომელთა განხილვაც შორს წაგვიყვანს და ამიტომ ჩვენ მას შევგნებულად ეუვლით გვერდს.

ქვემოთ შევეხებით მხოლოდ ერთ შემთხვევას, როცა საქმე ესება შრომითი საქმიანობის ღირებულების ოპტიმიზაციას.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

ეთქვათ, საჭიროა, რომ მოცემული შრომითი საქმიანობა შესრულდეს მინიმალური ფულადი დანახარჯებით $T_{გაგ}$ დროში. ვიგულისხმობთ, რომ მოცემული შრომითი საქმიანობა დანაწევრებულია ცალკეულ სამუშაოებად და მთელი შრომითი საქმიანობისათვის აგებულია მისი შესაბამისი ქსელური მოდელი. ჩვენს მიზანს წარმოადგენს, ვიპოვოთ შრომით საქმიანობაში შემავალი სამუშაოების შესრულების ისეთი დროითი ხანგრძლივობები, რომლებიც უზრუნველყოფს მთელი

შრომითი საქმიანობის განხორციელებას გეგმურ დროში, მინიმალური საერთო ფულადი დანახარჯებით.

ამ ამოცანის ეფექტური გადაწყვეტა შესაძლებელია მათემატიკური მოდელირების გამოყენების საფუძველზე. ვიდრე უშუალოდ ჩამოვაყალიბებდეთ ამ ამოცანის შესაბამის მათემატიკურ მოდელს, განვიხილოთ ზოგიერთი აუცილებელი საკითხი.

საინტერესოა განისაზღვროს ამა თუ იმ სამუშაოს შესრულებისათვის საჭირო ფულადი დანახარჯებისა და მისი შესრულებისათვის საჭირო დროის მაჩვენებელთა ურთიერთდამოკიდებულება და მისი მახასიათებელი.

ეთქვან, მოცემულია i - j სამუშაო, მისი შესრულებისათვის საჭირო t_{ij} დროით და C_{ij} ღირებულებით. ცხადია, რომ t_{ij} პარამეტრის ზრდა იწვევს C_{ij} -ს კლებას და პირიქით t_{ij} -ს კლება იწვევს C_{ij} -ს ზრდას. ე.ი. გამოდის, რომ t_{ij} -სა და C_{ij} -ს შორის ყოფილა უკუპროპორციული დამოკიდებულება.

არსებობს i - j სამუშაოს ისეთი ხანგრძლივობა, რომლისთვისაც ამ სამუშაოს ღირებულება არის მინიმალური. ამ ხანგრძლივობის შესაბამისი დრო ავლნიშნოთ T_{ij} . ამ დროს ხშირად i - j სამუშაოს შესრულების ნორმალურ ხანგრძლივობას უწოდებენ. იგულისხმება, რომ ამ სამუშაოს ხანგრძლივობის შემდგომი გადიდება სამუშაოს ღირებულებას კი არ ამცირებს, არამედ ზრდის. მეორე მხრივ, სამუშაოს ხანგრძლივობა არ შეიძლება შემცირდეს უსასრულოდ. ყოველთვის არსებობს რაღაც მინიმალური დრო, რომელზე ნაკლებ დროშიც სამუშაოს შესრულება შეუძლებელია (ამ დროს ხშირად სამუშაოს შესრულების კრიტიკულ (ან ავარიულ) ხანგრძლივობასაც უწოდებენ). ეს მინიმალური დრო ავლნიშნოთ T_{ij}^0 -ით.

მაშასადამე, მივიღეთ, რომ i - j სამუშაოს ფაქტიური ხანგრძლივობა t_{ij} შემოფარგლულია შემდეგი უტოლობით:

$$T_{ij}^0 \leq t_{ij} \leq T_{ij}.$$

ეთქვათ, $\bar{T}_i$ და T_i^0 დროისათვის ჩვენ შეეძლებოდა სათანადო ღირებულებების განსაზღვრა. მაშინ C_{ij} და t_{ij} პარამეტრებს შორის დამოკიდებულება შეიძლება გამოისახოს ფუნქციით $C_{ij} = F(t_{ij})$. პრაქტიკაში, გათვლების გასაადვილებლად გულისხმობენ, რომ ამა თუ იმ სამუშაოს შესრულებისათვის საჭირო დროსა და მის ღირებულებას შორის არის წრფივი სახის უკუპროპორციული დამოკიდებულება. ამის გათვალისწინებით, i - j სამუშაოსათვის შეიძლება ჩაეწეროს:

$$C_{ij} = K_{ij} t_{ij} + d_{ij},$$

სადაც K_{ij} არის ცნობილი კოეფიციენტი, რომელიც გვიჩვენებს, თუ როგორ იზრდება სამუშაოს ღირებულება მისი ხანგრძლივობის დროის ერთი ერთეულით შემცირებისას.

d_{ij} -ი არის გარკვეული დადებითი მუდმივი სიდიდე.

ახლა დავუბრუნდეთ ჩვენს ძირითად ამოცანას.

მთელი შრომითი საქმიანობის ღირებულება ტოლია საქმიანობაში შემაველი ყველა სამუშაოს ღირებულებათა ჯამისა

$$C = \sum_{i,j} C_{ij} \quad \text{ანუ}$$

$$C = \sum_{i,j} (K_{ij} t_{ij} + d_{ij}).$$

ამასთან, სამუშაოთა მოცემული ხანგრძლივობების ერთობლიობა $\{t_{ij}\}$ განსაზღვრავს მთელი საქმიანობის ხანგრძლივობის T -დროს. ცხადია, რომ ერთი და იგივე ხანგრძლივობა T შეიძლება უზრუნველყოფილ იქნეს $\{t_{ij}\}$ სხვადასხვა ერთობლიობით.

აღნიშნულიდან ცხადია, რომ გადასაწყვეტი ამოცანა მიიღებს შემდეგ სახეს:

ვიპოვოთ ყველა i - j სამუშაოთა t_{ij} ხანგრძლივობების ისეთი ერთობლიობა (შედეგს ისეთი გეგმა), რომელიც უზრუნველყოფს მთელი შრომითი საქმიანობის $T_{გგ}$

დროში განხორციელებას ისე, რომ საერთო ფულადი დანახარჯები იყოს მინიმალური (ე.ი. საჭიროა მოინახოს ფუნქციის —

$$C = \sum_{\text{ყველა } ij} (K_{ij} t_{ij} + d_{ij}) \quad \text{მინიმუმი).}$$

ამ ამოცანის შესაბამისი მოდელი მათემატიკურად შეიძლება ჩამოყალიბდეს შემდეგნაირად:

ვიპოვოთ t_{ij} არაუარყოფითი პარამეტრები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$T_{ij}^0 \leq t_{ij} \leq \bar{T}_{ij}, \quad \text{ყველა } ij - \text{სათვის;}$$

$$T_1 = 0; \quad T_n = T_{\text{გზ}}$$

და რომლისთვისაც მიზნის ფუნქცია

$$C = \sum_{\text{ყველა } ij} (K_{ij} t_{ij} + d_{ij}) = \min,$$

სადაც T_1 და T_n — შესაბამისად გამოსახავენ ქსელური მოდელის საწყისი და საბოლოო (ანუ მიზნობრივი) მოვლენების დადგომის დროით მაჩვენებლებს.

ამ პარაგრაფის დასაწყისში დასმული შესასწავლი საკითხის სანაცვლოდ, მიღებული ამოცანა და მისი შესაბამისი მოდელი წარმოადგენს წრფივი დაპროგრამების პარამეტრულ ამოცანას $T_{\text{გზ}}$ პარამეტრით. ამ მოდელის ამოხსნა შესაძლებელია პარამეტრული დაპროგრამების ამოცანათა ამოხსნის მეთოდით.

ამ თავის ბოლოს ქსელური დაგეგმვისა და მართვის მეთოდის ეკონომიკაში პრაქტიკული გამოყენების საილუსტრაციოდ განვიხილოთ სამშენებლო ფირმის მიერ, სამშენებლო ობიექტის გეგმურ ვადაში ასაშენებლად, შრომითი რესურსების გამოყენების ოპტიმიზაციის ამოცანა.

VI თავის ღამატიბა - სამშენებლო ფირმის მიერ
სამშენებლო ობიექტის გეგმურ
ვადაში ასაშენებლად, შრომითი
რესურსების გამოყენების ოპტიმი-
ზაციის ამოცანა.

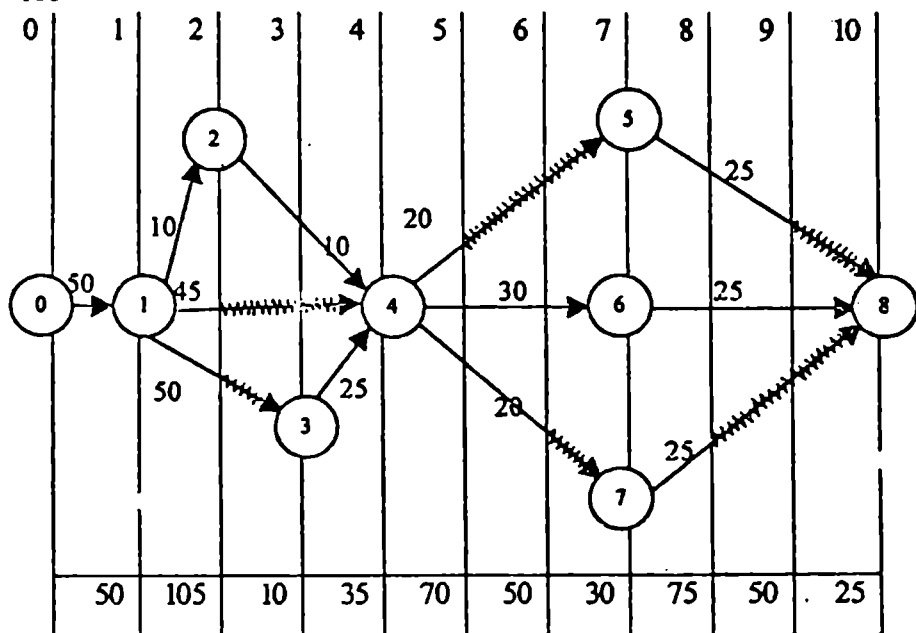
ვთქვათ, მოცემულია სამშენებლო ფირმა, რომელიც აშენებს საცხოვრებელ სახლებს. დაეუშვათ, რომ მოცემულ შემთხვევაში ფირმა აშენებს ორსართულიან სახლს, რომელიც აგებულ და ექსპლუატაციაში გადაცემულ უნდა იქნეს ცხრა კვირაში. ვიგულისხმობთ, რომ ფირმას, შრომითი რესურსების შეზღუდულობიდან გამომდინარე, შეუძლია ყოველ კვირაში სამუშაოდ გამოიყვანოს 50 კაცი. ბუნებრივია, რომ ამ სახლის ასაშენებლად შესრულებულ უნდა იქნეს სხვადასხვა სამუშაოები. ეს სამუშაოები, აგრეგირებული სახით, პირობითად, წარმოვიდგინოთ შემდეგნაირად: 1. მშენებლობის ნახაზების მომზადება, ნებართვის აღება და ფუნდამენტის მომზადება; 2. პირველი სართულის კედლების აგება; 3. პირველი სართულის იატაკის დაგება; 4. პირველი სართულის ჭერის დაგება; 5. პირველი სართულის კარ-ფანჯრების დაყენება; 6. პირველი სართულის საჭირო ელექტრო და სანტექნიკური კომუნიკაციებით მომზადება და გაჯით გაღესვა; 7. მეორე სართულის კედლების აგება; 8. მეორე სართულის ჭერის აგება; 9. მეორე სართულის კარ-ფანჯრების დაყენება; 10. მეორე სართულის ელექტრო და სანტექნიკური კომუნიკაციებით უზრუნველყოფა და გაჯით გაღესვა; 11. სახლის გადახურვა; 12. სახლის შეღებვა და მისი ბინების კეთილმოწყობა. სახლის საბოლოო მომზადება და მისი გადაცემა ექსპლუატაციაში. ვთქვათ, მოცემულია ამ სამუშაოების შესრულებისათვის საჭირო დროითი და რესურსული მახასიათებლებიც, რომლებიც ასახულია ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში (იხ. ცხრილი 6.1).

ცხრილი 6.1.

სამუშაოს ნომერი	სამუშაოს შრომატულობის მანუალური აღმართი/კვირაში	მომუშავეთა რაოდენობა (კვირაში)	სამუშაოს ხანგრძლივობა (კვირები)	სამუშაოს კოდი	
				i	j
1	50	50	1	0	1
2	10	10	1	1	2
3	45	45	1	1	4
4	50	50	1	1	3
5	20	10	2	2	4
6	25	25	1	3	4
7	20	20	1	4	5
8	90	30	3	4	6
9	40	20	2	4	7
10	50	25	2	5	8
11	75	25	3	6	8
12	25	25	1	7	8

ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ საჭიროა მოეახდინოთ ორსართულიანი სახლის ცხრა დღეში აგება და ექსპლუატაციაში გადაცემა შრომითი რესურსების არსებული მანუალური (50 კაცი/კვირაში) ოპტიმალური გამოყენების გზით (ისე, რომ ადგილი არ ჰქონდეს დასაქმებულ შრომით რესურსთა სიჭარბეს, ან მოცდენა¹⁾).

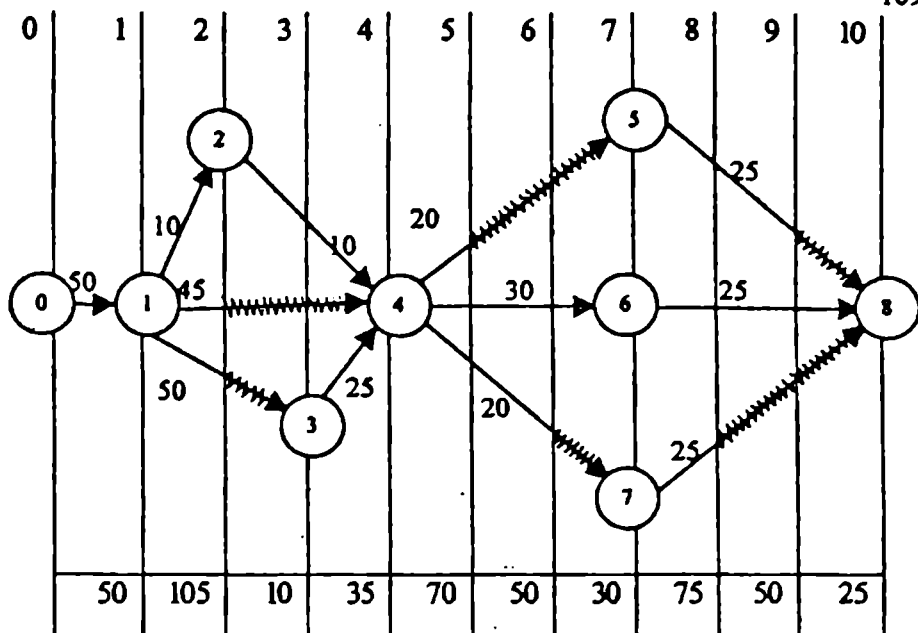
ამოცანა. ამ ამოცანის ამოსახსნელად საჭიროა გამოვიყენოთ დაგეგმვისა და მართვის ქსელური მოდელირების მეთოდი, კერძოდ, მასშტაბური ქსელური მოდელირების მეთოდი. 6.1 ცხრილის მონაცემების საფუძველზე ავაგოთ გადასაწყვეტი ამოცანის შესაბამისი მასშტაბური ქსელური მოდელი. მას ექნება ასეთი სახე:



ნახ 6.24

6.24 ნახაზზე მოცემული ქსელური მოდელის ანალიზი ცხადყოფს, რომ შრომითი რესურსები არ არის ოპტიმალურად გამოყენებული. ამაში დაერწმუნდებით, თუ 6.24 ნახაზზე მოცემულ შრომითი რესურსების გამოყენების მაჩვენებლებს დაეაჯამებთ, ყოველი კვირის მიხედვით და გამოვიყენოთ შრომითი რესურსების გამოყენების ყოველკვირეულ ჯამობრივ მაჩვენებლებს.

6.24 ნახაზზე მოცემული მოდელი გამოვხატოთ შემდეგნაირად, შრომითი რესურსების გამოყენების ყოველკვირეული ჯამობრივი მაჩვენებლებით (იხ. ნახ. 6.25).



ნახ 6.25

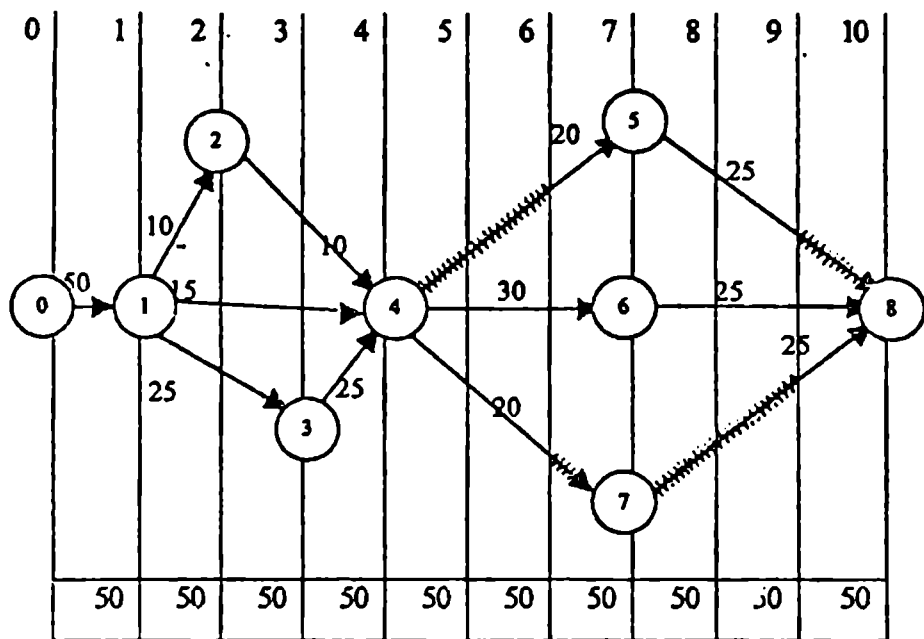
6.25 ნახაზზე მოცემული ქსელური მოდელი არ არის ოპტიმალური, რადგან იგი ვერ ახდენს შრომითი რესურსების გამოყენების ოპტიმიზაციას.

თუ ამ მოდელის მიხედვით განხორციელდა სახლის მშენებლობა, მაშინ წაეწყდებით რიგ სირთულეებს. კერძოდ, მეორე კვირაში სამუშაოების დროულად შესასრულებლად დაგეგმვბა 45 კაცი (რაც ბუნებრივია გამოიწვევს მათ შეუსრულებლობას), მესამე და მეოთხე კვირაში ადგილი ექნება მუშახელის მოცდენებს, შესაბამისად 40 და 15 კაცით; მეხუთე კვირაში ადგილი ექნება 20 კაცის ნაკლებობას. მეშვიდე კვირაში ადგილი ექნება მუშახელის მოცდენას 20 კაცით; მერვე კვირაში დაგეგმვბა 25 კაცი და მეთექვსმეტე კვირაში ადგილი ექნება 25 კაცის მოცდენას.

აქედან, ცხადია, რომ საჭიროა 6.25 ნახაზზე მოცემული ქსელური მოდელის ოპტიმიზაცია. იგი უნდა განხორციელდეს შრომითი რესურსების, ისეთი შესაძლო გადანაწილების (კვირების მიხედვით) გზით, რომელიც არ

შეცვლის არცერთი სამუშაოს შესრულებისათვის საჭირო დროის მაჩვენებელს და არც მათ შრომატევადობის მაჩვენებლებს.

6.25 ნახაზზე აგებული ქსელური მოდელი თავისი ოპტიმიზაციის შემდეგ მიიღებს ასეთ სახეს (იხ. ნახ. 6.26).



ნახ 6.26

ამგვარად, მივიღეთ ოპტიმალური ქსელური მოდელი (იხ. ნახ.6.26), რომელიც ითვალისწინებს სახლის გეგმიურ ვადაში აშენებას, შრომითი რესურსების ოპტიმალური გამოყენების გზით.

მაშასადამე, სამშენებლო ფირმამ, ორსართულიანი სახლის აშენების დროს, საჭირო სამუშაოების დროულად შესრულებისა და მთელი სახლის გეგმიურ დროში დამთავრების პროცესთა ეფექტიანი დაგეგმვისა და მართვის უნდა გამოიყენოს 6.26 ნახაზზე მოცემული ქსელური მოდელი. ეს განპირობებულია იმით, რომ ის არის ერთადერთი მოდელი, რომელიც, მოცემულ პი-

რობებში, იძლევა ასაგები ობიექტის გეგმიურ დროში აშენების საშუალებას, შრომითი რესურსების ოპტიმალური გამოყენების გზით.

თავი VII. მასობრივი მომსახურების თეორიულ- -მეთოდოლოგიური საფუძვლები

§1. მასობრივი მომსახურების თეორიის ძირითადი საგანი და ცნებები

ეკონომიკა წარმოადგენს სტოქასტურ სისტემას იგი, თავის ნებისმიერ რგოლში, მრავლად შეიცავს შემთხვევით პროცესებს ამას განსაკუთრებით აქვს ადგილი საბაზრო ურთიერთობების შემთხვევაში.

ეკონომიკის სფეროში, თეორიულ და განსაკუთრებით კი პრაქტიკულ დონეზე, ხშირად ისმის ისეთი ამოცანები, რომელთა გადაწყვეტაც ითხოვს მასობრივი მომსახურების თეორიის გამოყენებას. ასეთ ამოცანებში, საქმე ეხება დიდი რაოდენობის მომხმარებელთა მომსახურების პროცესთა მართვას. უფრო ზუსტად, ამ დროს უნდა განხორციელდეს მასობრივი მომსახურების სისტემის მართვის პროცესთა შესწავლა, სათანადო კანონზომიერებების დადგენა და მიღებული შედეგების გამოყენება აღნიშნულ პროცესთა სრულყოფის საქმეში.

მასობრივი მომსახურების სისტემა (მმს) შედგება ორი სახეობის ელემენტისაგან:

ა) მომხმარებელი ობიექტები, რომლებიც საჭიროებენ სათანადო მომსახურებას. მათ სხვანაირად განაცხადებს, ან კლიენტებსაც უწოდებენ;

ბ) მომსახურე ობიექტები, რომლებიც განკუთვნილია მომხმარებლებისადმი მომსახურების გასაწევად. მათ სხვანაირად მომსახურე არხებსაც უწოდებენ.

მომხმარებელი ობიექტების ერთობლიობა ქმნის კლიენტთა ნაკადს.

ყოველი კლიენტი მომსახურების სისტემას უყენებს გარკვეულ მოთხოვნებს, ანუ სხვანაირად, აკეთებს განაცხადს მომსახურების სისტემაში. ასეთი განაცხადის უმარტივეს მაგალითს წარმოადგენს სატრანსპორტო ბილეთის საღარიოსთან მისული კლიენტის მიმართუა მოლარისადმი, თხოვნით, რომ მან მიყიდოს საჭირო ბილეთი. ან კიდევ,

საპარიკმახეროში შესული მომხმარებლის მიმართვა პარიკმახერისადმი, რომ მან კლიენტს გაუწიოს სათანადო მომსახურება. განაცხადის მაგალითს წარმოადგენს აგრეთვე პაციენტის მიმართვა ექიმისადმი, რათა მან განკურნოს ავადმყოფი, ასევე კლიენტის მიმართვა გამყიდველისადმი, რათა ის მოემსახუროს მომხმარებელს სათანადო დონეზე და ა. შ.

ამგეარად, შეიძლება ითქვას, რომ მომსახურების ნებისმიერი სისტემის ფუნქციონირება, გარკვეული მოსაზრებით, შეიძლება გაიგივებულ იქნეს, შემოსული განაცხადების დაკმაყოფილებასთან (ანუ განაცხადების მომსახურებასთან).

თუ ადგილი ექნებოდა განაცხადების შემოსვლას სისტემაში, დროის მკაცრად, განსაზღვრულ მომენტებში, მაშინ საქმე გვექნებოდა, ტრივიალურ შემთხვევასთან, როცა კლიენტთა მომსახურების სისტემის მოწყობა სათანადო დონეზე, არ წარმოადგენს დიდ სიძნელეს. ამ დროს, საკმარისია მომსახურების სისტემა აგებულ იქნეს წინასწარ ცნობილი, ისეთი მწარმოებლურობით, რომელიც ზუსტ შესაბამისობაში იქნება განაცხადთა ნაკადის მახასიათებელი მაჩვენებლების რიცხვით მნიშვნელობებთან. ამ დროს, იტყვიან, რომ საქმე გვაქვს წინასწარ განსაზღვრულ, ანუ დეტერმინირებულ შემთხვევასთან.

მასობრივი მომსახურების თეორია ზემოთ ხსენებულ ტრივიალურ შემთხვევებს არ სწავლობს. მას აინტერესებს ისეთი შემთხვევები, როცა სისტემაში შემოსულ კლიენტთა დროითი მომენტები და მათი მომსახურება წარმოადგენენ შემთხვევით პროცესებს. ამ დროს, იტყვიან, რომ საქმე გვაქვს *ალბათურ*, ანუ *სტოქასტიურ* შემთხვევასთან.

ნებისმიერ მომსახურე სისტემაში შეიძლება არსებობდეს გარკვეული რაოდენობის მომსახურე ობიექტები. ისინი შეიძლება იყვნენ: გამყიდველები მაღაზიაში, პარიკმახერები საპარიკმახეროში, მოლარეები საღაროში, ექიმები პოლიკლინიკაში და სხვა.

იმისდა მიხედვით, თუ რამდენი მომსახურე ობიექტია სისტემაში, იგი შეიძლება იყოს: *ერთარხიანი, ორარხიანი და ა. შ. n არხიანი* და ა. შ. მომსახურების სისტემა.

სისტემაში შემოსული განაცხადის მომსახურება, მომსახურე არხის მიერ, ხდება გარკვეული დროის განმავლობაში (მაგალითად, გამყიდველის მიერ საქონლის გაცემისათვის საჭირო დრო, ლიფტიორის მიერ კლიენტის მომსახურებისათვის საჭირო დრო, პარიკმახერის მიერ კლიენტის მომსახურებისათვის საჭირო დრო, ექიმის მიერ პაციენტის მომსახურებისათვის საჭირო დრო და ა. შ.). ამ დროის გასვლის შემდეგ, არხი თავისუფლდება და მზად არის შემდეგი განაცხადის მომსახურებისათვის.

მომსახურების სისტემაში კლიენტთა (განაცხადთა) ნაკადის შემოსულის შემთხვევითი ხასიათი იწვევს იმას, რომ დროის რაღაც შუალედებში შემოსული განაცხადები ზოგჯერ ვერ ასწრებენ მომსახურების მიღებას და ისინი ან ტოვებენ სისტემას მომსახურების გარეშე, ან ქმნიან რიგს მომსახურებაზე. დროის სხვა პერიოდებში კი, სისტემაში შეიძლება იმუშაოს დაუტვირთადად, ე. ი. სისტემის ყველა, ან ზოგიერთმა არხმა შეიძლება განიცადოს მოცდენა.

მომსახურების სისტემის მუშაობის განხილული ორი რეჟიმიდან (შემთხვევიდან) არცერთი არ წარმოადგენს სასურველ (ეფექტიან) ვარიანტს.

აღნიშნულთან დაკავშირებით, მომსახურების არხთა მწარმოებლურობის შეთანხმება შემოსულ განაცხადთა ნაკადის მახასიათებლებთან წარმოადგენს მასობრივი მომსახურების სისტემის მართვის აქტუალურ ამოცანას.

მასობრივი მომსახურების თეორიის შესწავლის ძირითად საგანს წარმოადგენს დამოკიდებულების დადგენა განაცხადთა ნაკადის ხასიათს, მომსახურების არხთა რაოდენობასა და მომსახურების ეფექტიანობას შორის.

მასობრივი მომსახურების თეორიაში, მომსახურების ეფექტიანობის შესაფასებლად შეიძლება გამოყენებულ იქნეს შემდეგი მაჩვენებლები:

– მმს-ის წარმადობა (ეს არის განაცხადების ის საშუალო რაოდენობა, რომელსაც შეიძლება მოემსახუროს მასობრივი მომსახურების სისტემა დროის ერთეულში);

– მმს-დან უარით წასულ განაცხადთა საშუალო პროცენტი;

– კლიენტის რიგში ყოფნის საშუალო დრო და ამ დროის განაწილების კანონი;

– რიგის საშუალო სიგრძე;

– დროის ნებისმიერ მომენტში დაკავებულ არხთა საშუალო რაოდენობა და სხვა.

მასობრივი მომსახურების სისტემაში შემოსულ განაცხადთა ნაკადისა და მისი მომსახურების დროის შემთხვევითი ხასიათი იწვევს იმას, რომ სისტემაში მიმდინარეობს შემთხვევითი პროცესები. ეს პროცესები, თავისი ხასიათის მიხედვით, ითხოვს წინასწარ შესწავლას, მათემატიკურ აღწერას, საჭირო კანონზომიერებების დადგენას და მმს-ის მიმართ სპეციალური მოთხოვნების წაყენებას. იგულისხმება ისეთი მოთხოვნები, რომლებიც უზრუნველყოფს სისტემის ფუნქციონირების ეფექტიანობის წინასწარ განსაზღვრულ დონეს. ასე, მაგალითად, თუ საქმე ეხება მყიდველების მომსახურებას ამა თუ იმ საეაჭრო ობიექტზე, მაშინ მასობრივი მომსახურების თეორიისა და მისი შესაბამისი მეთოდების გამოყენება იძლევა, მოცემული ობიექტის მუშაობის ნებისმიერ მომენტში და მოცემული სიგრძის რიგის შემთხვევაში, საჭირო მოღარეებისა და ზედამხედველების რაოდენობის დადგენის საშუალებას. ამასთან, იგი იძლევა რიგში დგომის საშუალო დროის, მმს-ის გამტარუნარიანობის და სხვა მაჩვენებელთა სწორად განსაზღვრის საშუალებასაც.

§2. მასობრივი მომსახურების სისტემებში მიმდინარე შემთხვევითი პროცესების კანონზომიერებები.

განაცხადთა ნაკადი და მათი მომსახურების დრო

მასობრივი მომსახურების სისტემებში მიმდინარეობს შემთხვევითი პროცესები. ამგვარი შემთხვევითი პროცესის

შინაარსი მდგომარეობს იმაში, რომ დროის შემთხვევით მომენტებში აღნიშნულ, სისტემა თავისი ერთი მდგომარეობიდან გადადის მეორეში. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ამ დროს ხდება სისტემის დაკავებულ არხთა და რიგში მყოფ კლიენტთა რიცხოვნობის ცვლილება.

ცნობილია, რომ მასობრივი მომსახურების სისტემა წარმოადგენს დისკრეტული ტიპის ისეთ ფიზიკურ სისტემას, მდგომარეობათა სასრული (ან თვლადი) სიმრავლით, რომლის გადასვლა მისი ერთი მდგომარეობიდან მეორეში ხდება ნახტომისებურად.

უთქვამთ, მოცემულია ფიზიკური X სისტემა $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n, \dots$ მდგომარეობათა თვლადი სიმრავლით.

ვიგულისხმობთ, რომ X სისტემას დროის ნებისმიერ t მომენტში შეუძლია იყოს $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n, \dots$ მდგომარეობებიდან ერთ-ერთში. $p_j(t)$ — თი ($j=1, 2, \dots, n, \dots$) აღვნიშნოთ ალბათობა იმისა, რომ მოცემული სისტემა დროის ნებისმიერ t მომენტში იმყოფება x_j მდგომარეობაში. მაშინ ცხადია, რომ დროის ნებისმიერი t მომენტისათვის ჭეშმარიტი იქნება შემდეგი ტოლობა:

$$\sum_j p_j(t) = 1. \quad (7.1)$$

$p_1(t), p_2(t), \dots, p_j(t), \dots, p_n(t), \dots$ ალბათობათა ერთობლიობა დროის ყოველი t მომენტისათვის ახასიათებს შემთხვევითი პროცესის ისეთ გარკვეულ ნაწილს, რომელიც მიმდინარეობს შესასწავლ სისტემაში.

შემთხვევითი პროცესები მდგომარეობათა სასრული სიმრავლით შეიძლება იყოს ორი ტიპის: 1. პროცესები დისკრეტული დროით და 2. პროცესები უწყვეტი დროით.

პირველი ტიპის პროცესები განსხვავდებიან იმით, რომ გადასვლები მათი ერთი მდგომარეობიდან მეორეში შეიძლება მოხდეს მხოლოდ დროის ზუსტად განსაზღვრულ, სასრული ინტერვალებით განცალკევებულ $t_1, t_2, \dots$ მომენტებში.

მეორე ტიპის პროცესები განსხვავდებიან იმით, რომ სისტემის გადასვლა მისი ერთი მდგომარეობიდან მეორეში შესაძლებელია დროის ნებისმიერ t მომენტში.

ეთქვან, გვანტერესებს მასობრივი მომსახურების X სისტემის (მდგომარეობათა თელადი სიმრავლით) შესაძლო მდგომარეობათა და მისი ერთი მდგომარეობიდან მეორეში გადასვლის ეარიანტა სქემატური გამოხატეა. მას პირობითად ექნება ასეთი სახე (იხ. ნახ. 7.1):



ნახ. 7. 1

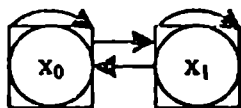
7.1 ნახაზზე ისრებით ნაჩვენებია განსახილველი სისტემის ერთი მდგომარეობიდან მეორეში შესაძლო გადასვლები. ისრიანი რკალები, რომელიც ისრები მიმართულია x_j მდგომარეობიდან მისკენეე, გამოხატავს იმ ფაქტს, რომ X სისტემას შეუძლია არა მარტო გადასვლა მისი ერთი x_j -დან მის მეზობელ x_{j+1} მდგომარეობაში, არამედ დარჩენა წინანდელ მდგომარეობაში. ეს სისტემა ხასიათდება *შეუქცევადი გადასვლებით*. ამასთან, ისიც აღსანიშნავია, რომ X სისტემის x_n -დან სხვა მდგომარეობაში გადასვლები არ არის შესაძლებელი. აქვე ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებასაც, რომ ნახ. 7.1-ზე ასახულია ერთი მდგომარეობიდან მეორეზე გადასვლები და არ არის ასახული “გადახტომები” ამა თუ იმ მდგომარეობაზე. მოცემულ შემთხვევაში აქტი შესაძლო გადახტომები უგულვლყოფილია, როგორც პრაქტიკულად გამორიცხული რამ.

მასობრივი მომსახურების სისტემებში მიმდინარე შემთხვევითი პროცესები, როგორც წესი, არის პროცესები უწყვეტი დროით, რაც დაკავშირებულია კლიენტთა ნაკადის შემთხვევითობასთან.

მასობრივი მომსახურების სისტემისათვის (შეუქცევადი სისტემების საპირისპიროდ) დამახასიათებელია შექცევადი გადასვლები (მომსახურების დაკავებული არხი შეიძლება განთავისუფლდეს, რიგი შეიძლება “გაწოილ” იქნეს).

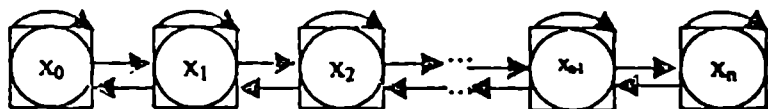
საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მასობრივი მომსახურების ერთარხიანი სისტემა (მაგალითად საყოფაცხოვრებო მომსახურების ერთი ობიექტი). ვთქვათ, განაცხადს ამ სისტემაში შესვლისას არხი დაკავებული დახვდა. იგი არ დგება რიგში და ტოვებს სისტემას (ღებულობს “უარს”). მასობრივი მომსახურების ასეთი სისტემა წარმოადგენს დისკრეტულ სისტემას უწყვეტი დროით და ორი შესაძლო მდგომარეობით: 1. x_0 – მომსახურების არხი თავისუფალია, 2. x_1 – მომსახურების არხი დაკავებულია.

მოცემულ შემთხვევაში X სისტემის გადასვლები ერთი მდგომარეობიდან მეორეში შექცევად პროცესს წარმოადგენს. ამ შემთხვევაში, სისტემის ერთი მდგომარეობიდან მეორეში გადასვლის სქემა შეიძლება გამოხატულ იქნეს შემდეგნაირად:



ნახ. 7. 2

განხილული ტიპის მასობრივი მომსახურების n არხიანი სისტემისათვის მისი ერთი მდგომარეობიდან მეორეში გადასვლების სქემა შეიძლება გამოხატულ იქნეს ასეთნაირად:



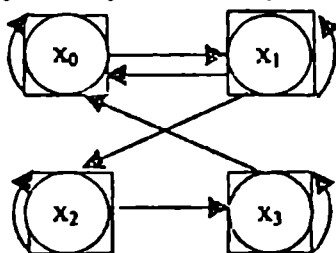
ნახ. 7. 3

ახლა განვიხილოთ მასობრივი მომსახურების დისკრეტული სისტემის (უწყვეტი დროით) კიდევ ერთი მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია მასობრივი მომსახურების ისეთი ერთარხიანი სისტემა, რომელიც შეიძლება იმყოფებოდეს შემდეგ ოთხ მდგომარეობაში:

0. x_0 – მომსახურების არხი წესრიგშია და თავისუფალია;
1. x_1 – მომსახურების არხი წესრიგშია და დაკავებულია;

2. x_2 – მომსახურების არხი არ არის წესრიგში და უცდის შეკეთებას;
3. x_3 – მომსახურების არხი არ არის წესრიგში და იმყოფება შეკეთების პროცესში.

მოცემულ შემთხვევაში, მასობრივი მომსახურების სისტემის ერთი მდგომარეობიდან მეორეში გადასვლის შესაძლებლობები სქემატურად შეიძლება ასეთნაირად გამოიხატოს:



ნახ. 7. 4

ამ შემთხვევაში, მასობრივი მომსახურების სისტემის გადასვლა უშუალოდ x_3 მდგომარეობიდან x_1 -ში, x_0 -ის გამოტოვებით, პრაქტიკულად შეუძლებელია, რადგან ეს შეიძლება მოხდეს მხოლოდ მაშინ, როცა რემონტის დამთავრება და მომდევნო კლიენტის მოსვლა განხორციელდება დროის ერთსადაიმავე მომენტში. ამის ალბათობა კი ნულის ტოლია. მასობრივი მომსახურების დისკრეტულ სისტემაში (უწყვეტი დროით) მიმდინარე შემთხვევითი პროცესების აღწერის დროს, პირველ რიგში, უნდა მოხდეს იმ მიზეზების გაანალიზება, რომლებმაც გამოიწვიეს სისტემის გადასვლა მისი ერთი მდგომარეობიდან მეორეში.

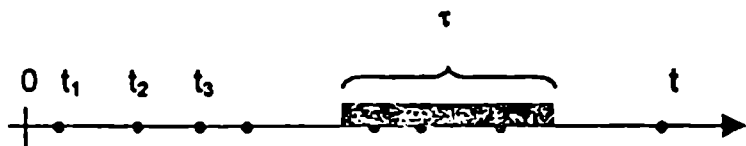
ნებისმიერი სახეობის მასობრივი მომსახურების სისტემის ერთ-ერთ ძირითად მახასიათებელ ფაქტორს (რომელიც განაპირობებს მასში მიმდინარე პროცესებს) წარმოადგენს კლიენტთა ნაკადი. ამიტომ, ბუნებრივია, რომ მასობრივი მომსახურების ნებისმიერი სისტემის პროცესთა მათემატიკური აღწერა იწყება კლიენტთა ნაკადის აღწერის პროცედურით.

ახლა შევეხეთ კლიენტთა ნაკადის განმარტებას. კლიენტთა (ან ხდომილობების) ნაკადის ქვეშ უნდა გვეს-

მოდეს ისეთი კლიენტების მიმდევრობა, რომლებიც, მომსახურების მიზნით, დროის რომელიღაც მომენტებში, შედიან მასობრივი მომსახურების ამა თუ იმ სისტემაში. კლიენტთა ნაკადის მაგალითებად შეიძლება მოვიყვანოთ სავაჭრო ფირმაში შესულ კლიენტთა ნაკადი, ბანკში შესულ კლიენტთა ნაკადი, ბანკში შესული ფულის ნაკადი, ბაზარზე შემოსული ამა თუ იმ სახეობის პროდუქციის ნაკადი და სხვა.

ნაკადის შემქმნელი კლიენტები, ზოგად შემთხვევაში, შეიძლება იყოს სხვადასხვა, მაგრამ ჩვენ, პირველ რიგში, განვიხილოთ ისეთი კლიენტების ნაკადი, რომლებიც ასახვენ გამოჩენის მომენტებით განსხვავებულ ერთგვაროვან ხდომილობებს.

აღსანიშნავი სახეობის ნაკადი გეომეტრიულად, რიცხვით ღერძზე, შეიძლება გამოისახოს, როგორც $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$ წერტილების ერთობლიობა (მიმდევრობა). ეს ნათლად ჩანს ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე (იხ. ნახ. 7.5).



ნახ. 7. 5

$t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$ წერტილები შეესაბამებიან კლიენტთა სისტემაში შემოსულის მომენტებს.

კლიენტთა ნაკადს ეწოდება *რეგულარული*, თუ კლიენტები სისტემაში შემოდის ერთიმეორის მიყოლებით, დროის ზუსტად განსაზღვრული შუალედების დაცვით. რეგულარული ნაკადები მასობრივი მომსახურების რეალურ სისტემებში შედარებით იშვიათად გვხვდება. მაგრამ, მიუხედავად ამისა, იგი როგორც ზღერული შემთხვევა, თეორიულად საინტერესო ხდება.

აღსანიშნავია, რომ მასობრივი მომსახურების სისტემისათვის ტიპიურს წარმოადგენს კლიენტთა შემთხვევითი ნაკადი.

განვიხილოთ იმ კლიენტთა ნაკადები, რომელთა შესაბამის ხდომილობებსაც გააჩნიათ განსაკუთრებით მარტივი თვისებები. პირველ რიგში შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრებები:

1. კლიენტთა ნაკადს ეწოდება *სტაციონარული*, თუ კლიენტთა ამა თუ იმ რიცხვის მასობრივი მომსახურების სისტემაში შემოსვლის ალბათობა დროის t ხანგრძლივობის უბანზე (იხ. ნახ. 7.5) დამოკიდებულია მხოლოდ მონაკვეთის სიგრძეზე და არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ სახელდობრ სად, ot დერძის რომელ ადგილზეა მოთავსებული ეს მონაკვეთი.

სხეანაირად, ვიტყვით, რომ კლიენტთა ნაკადი აქმაყოფილებს სტაციონარობის პირობას, თუ მათი ალბათობითი მახასიათებლები არ არის დამოკიდებული დროზე. უფრო ზუსტად, სტაციონარულ ნაკადებს ახასიათებს მუდმივი სიმკვრივე (ანუ დროის ერთეულში სისტემაში შემოსულ კლიენტთა საშუალო რიცხვი).

2. კლიენტთა ნაკადს ეწოდება ნაკადი *შემდეგკმედების გარეშე*, თუ დროის ნებისმიერი განსხვავებული უბნებისათვის: სისტემაში შემოსულ კლიენტთა რიცხვი, რომელიც შეესაბამება ერთ-ერთ მათგანს არ არის დამოკიდებული განაცხადთა რიცხვისაგან, რომელიც შეესაბამება დროის სხვა განსხვავებულ უბანს.

შემდეგკმედების არარსებობის პირობა ნიშნავს, რომ ამ დროს კლიენტები მასობრივი მომსახურების სისტემაში შემოდიან ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად (ეს პირობა ყველაზე არსებითია უმარტივესი ნაკადისათვის).

3. კლიენტთა ნაკადს ეწოდება *ორდინარული*, თუ დროი t მცირე მონაკვეთზე, მეს-ში ორი და მეტი კლიენტის შემოსვლის ალბათობა გაცილებით მცირეა, ვიდრე ერთი კლიენტის შემოსვლის ალბათობა.

ორდინარობის პირობა აღნიშნავს, რომ კლიენტები მასობრივი მომსახურების სისტემაში შემოდიან თითო-თითოდ.

თუ კლიენტთა მოცემულ ნაკადს ახასიათებს ზემოთ განხილული სამივე თვისება, მაშინ ვიტყვით, რომ საქმე გვაქვს უმარტივეს ანუ პუასონის სტაციონარულ ნაკადთან.

უმარტივეს (ანუ პუასონის) ნაკადს ხდომილობათა ნაკადებს შორის (ისე, როგორც ნორმალური განაწილების კანონს განაწილების სხვა კანონებს შორის) უჭირავს განსაკუთრებული ადგილი. ცნობილია, რომ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა დიდი რიცხვის შეკრებისას, მიიღება ისეთი სიდიდე, რომლის განაწილებაც მიახლოებული იქნება ნორმალური განაწილების კანონთან. ამის ანალოგ ურად მტკიცდება, რომ ორდინარული სტაციონარული ნაკადების დიდი რიცხვის შეკრებისას მიიღება უმარტივესთან ძალიან ახლოს მყოფი ნაკადი. უმარტივესი (ანუ პუასონის) ნაკადი მასობრივი მომსახურების თეორიაში ასრულებს მნიშვნელოვან როლს. ეს, პირველ რიგში, გამოწვეულია იმით, რომ უმარტივესი (ანუ პუასონის) ნაკადი და მასთან ახლოს მყოფ განაცხადთა ნაკადები ხშირად გვხვდება პრაქტიკაში. გარდა ამისა, უმარტივესი ნაკადით ერთსადაიმათე სიმკვრივის შემთხვევაში, შეიძლება შეიცვალოს ნებისმიერი სახის ნაკადი ისე, რომ კელევის დროს მივიღოთ სიზუსტის მხრივ დამაკმაყოფილებელი შედეგები.

მასობრივი მომსახურების თეორიაში, გარდა უმარტივესი, ანუ პუასონის სტაციონარული ნაკადებისა გვხვდება პუასონის არასტაციონარული ნაკადებიც.

პუასონის არასტაციონარული ნაკადის ქვეშ უნდა გვესმოდეს ერთგვაროვან კლიენტთა ორდინარული ნაკადი, შემდეგქმედების გარეშე და არასტაციონარული ცვლადი სიმკვრივით.

მასობრივი მომსახურების თეორიაში, გარდა განხილულისა, შეიძლება კიდევ შეგვხვდეს კლიენტთა ისეთი ნაკადები, როგორიცაა: ნაკადი შეზღუდული შემდეგქმე-

დებით, ანუ პალმის ნაკადი, ერლანგის პირველი, მეორე და ა. შ. II-ური რიგის ნაკადები და სხვა.

მასობრივი მომსახურების სისტემაში მიმდევრობით შემოსულ კლიენტთა ორდინარულ ნაკადს ეწოდება ნაკადი შეზღუდული შემდეგქმედებით, ანუ პალმის ნაკადი, თუ ამ განაცხადთა სისტემაში შემოსვლის ოროს მომენტებს შორის არსებული შუალედები წარმოადგენენ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეებს.

შეზღუდული ტიპის შემდეგქმედებიათა ნაკადების საინტერესო მაგალითს წარმოადგენს ე. წ. ერლანგის ნაკადები, რომლებიც მიიღება უმარტივესი ნაკადების "გამეხსერებით" ("გაცრით").

ერლანგის II-ური რიგის ნაკადი ეწოდება მასობრივი მომსახურების სისტემაში შემოსულ ისეთ კლიენტთა ნაკადს, რომელშიც მიიღება უმარტივესი, ანუ პუასონისებურისაგან, თუ მისი ყოველი $(n+1)$ კლიენტი შენარჩუნებული იქნება, ხოლო დანარჩენი კი უგულველყოფილი.

განმარტებიდან ცხადია, რომ უმარტივესი, ანუ პუასონის ნაკადი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ერლანგის ნაკადის კერძო შემთხვევა. უფრო ზუსტად, იგი არის ნულოვანი რიგის ერლანგის ნაკადი.

მასობრივი მომსახურების სისტემის მეშაობის რეჟიმი, გარდა მასში შემავალ კლიენტთა ნაკადის მახასიათებლებისა, კიდევ დამოკიდებულია თვით ამ სისტემის მწარმოებლურობის მახასიათებლებზე (მომსახურე არხების რაოდენობაზე და ყოველი არხის მოქმედების სისწრაფესზე). მასობრივი მომსახურების სისტემის ნორმალური ფუნქციონირების ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს, მახასიათებელ სიდიდეს წარმოადგენს ერთი კლიენტის მომსახურების დრო $T_{\text{მოხ.}}$. ეს სიდიდე, როგორც თეორიულად, ასევე პრაქტიკულად შეიძლება იყოს არაშემთხვევითი და შემთხვევითიც.

ბუნებრივია, რომ მომსახურების დროის ამ ორი შემთხვევიდან უფრო ზოგადს წარმოადგენს მომსახურების შემთხვევითი დრო.

კლიენტის მომსახურების დროის აღმნიშვნელი პარამეტრი $T_{\text{მოხ.}}$ განვიხილოთ როგორც შემთხვევითი სიდიდე და მისი განაწილების ფუნქცია ავლნიშნოთ $F(t)$ -თი, ხოლო სიმკვრივე კი $f(t)$ -თი. მაშინ შეიძლება ჩაიწეროს, რომ

$$F(t) = P(T_{\text{მოხ.}} \leq t) \quad \text{და} \quad (7.2)$$

$$f(t) = F'(t). \quad (7.3)$$

მასობრივი მომსახურების პრაქტიკაში განსაკუთრებით საინტერესოა ისეთი შემთხვევა, როცა $T_{\text{მოხ.}}$ შემთხვევით სიდიდეს გააჩნია მაჩვენებლიანი განაწილების კანონი და მისი სიმკვრივე

$$f(t) = \eta e^{-\eta t}, \quad (t > 0) \quad (7.4)$$

სადაც

η – არის ერთი განაცხადის მომსახურების საშუალო დროის შებრუნებული სიდიდე და იგი გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$\eta = \frac{1}{M_{\text{მოხ.}}}, \quad (7.5)$$

სადაც

$$M_{\text{მოხ.}} = E[T_{\text{მოხ.}}]. \quad (7.6)$$

§3. მასობრივი მომსახურების სისტემებში მიმდინარე პროცესების მათემატიკური მოდელირების მეთოდოლოგიური პრინციპები

მასობრივი მომსახურების სისტემებში მიმდინარე პროცესების მათემატიკური მოდელირება ზოგად შემთხვევაში, წარმოადგენს საკმაოდ რთულ პროცესს. იგი მარტივდება ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში. ეს, მაგალითად, ხდება მაშინ, როცა მშ-ში მიმდინარე შემთხვევითი პროცესი წარმოადგენს ეგრეთწოდებულ მარკოვის შემთხვევით პროცესს. ამ დროს, შესაძლებელი ხდება, რომ შედარებით უფრო მარტივად იქნეს აღწერილი მშ-ის მუშაობა და განსაზღვრულ იქნეს სათანადო მაჩვენებლები.

ამა თუ იმ სისტემაში მიმდინარე შემთხვევითი პროცესი წარმოადგენს მარკოვის შემთხვევით პროცესს,

თუ მას გააჩნია შემდეგი თვისება: როგორიც არ უნდა იყოს დროის t_0 მომენტი, სისტემის ნებისმიერი მდგომარეობის ალბათობა მომავალში ($t > t_0$), დამოკიდებულია მხოლოდ მისი ახლანდელი მდგომარეობისაგან ($t = t_0$ დროს) და არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ როდის და როგორ მოვიდა სისტემა ამ მდგომარეობაში (ე. ი. იმაზე, თუ როგორ ვითარდებოდა პროცესი წარსულში).

მარკოვის შემთხვევითი პროცესები იყოფა ორ კლასად – პროცესები დისკრეტული და უწყვეტი მდგომარეობებით. პროცესი უწყვეტი მდგომარეობით წარმოიშობა იმ სისტემაში, რომელიც ფლობს მხოლოდ წინასწარ უცნობ, დროით მომენტებში ურთიერთში ნახტომისებურად გარდამავალ, ზოგიერთ, ფიქსირებულ მდგომარეობას.

მარკოვის შემთხვევითი პროცესის მაგალითად, დისკრეტული მდგომარეობით, შეიძლება დასახელებულ იქნეს მაღაზიაში ორი საღაროს მუშაობის ამსახველი პროცესი. ამ დროს, მასობრივი მომსახურების მოცემულ S სისტემას, რომელიც შედგება ორი საღაროსაგან შეიძლება ეკავოს შემდეგი მდგომარეობები:

- S_1 – ორთავე საღარო თავისუფალია (მათთან კლიენტები არ არის);
- S_2 – პირველი საღარო დაკავებულია და მეორე თავისუფალი;
- S_3 – მეორე საღარო დაკავებულია და პირველი თავისუფალი;
- S_4 – ორივე საღარო დაკავებულია.

ასეთ სისტემებში მიმდინარე პროცესები, ხასიათდება იმით, რომ ამ დროს ხდება სისტემის ერთი დისკრეტული მდგომარეობიდან მეორეში გადასვლა, შემთხვევითი სახით და ნახტომისებურად.

მარკოვის პროცესები, უწყვეტი მდგომარეობებით, ხასიათდება იმით, რომ ამ დროს ხდება სისტემის ერთი მდგომარეობიდან მეორეში ნარნარისებური გადასვლა. ასეთი პროცესები, უფრო მეტად, დამახასიათებელია ტექნიკური სისტემებისათვის, ვიდრე ეკონომიკურისათვის. ამას-

თან, შეიძლება ხაზი გაესვას იმ გარემოებასაც, რომ ეკონომიკურ სისტემებში იაითქმის ყოველთვის მიმდინარეობს მარკოვის შემთხვევითი პროცესი *დისკრეტული მდგომარეობებით*. ამდენად, ქვემოთ ჩვენ ყოველთვის განვიხილავთ მარკოვის შემთხვევით პროცესებს *დისკრეტული მდგომარეობებით*. ასეთი პროცესები, თავის მხრივ, იყოფა ორ ნაწილად: *პროცესები დისკრეტული დროით და პროცესები უწყვეტი დროით*. პირველ შემთხვევაში, სისტემა გადადის ერთი მდგომარეობიდან მეორეში მხოლოდ და მხოლოდ დროის განსაზღვრულ, წინასწარ ფიქსირებულ მომენტებში, ხოლო ამ მომენტებს შორის არსებულ შუალედებში, სისტემა ინარჩუნებს თავის მდგომარეობას. *მეორე შემთხვევაში*, სისტემის გადასვლა ერთი მდგომარეობიდან მეორეში შეიძლება მოხდეს დროის ნებისმიერ შემთხვევით მომენტში.

პრაქტიკაში, გაცილებით უფრო ხშირად, გვხვდება *მეორე შემთხვევა*, ვიდრე *პირველი*. ეს გამოწვეულია იმით, რომ ამ დროს სისტემის გადასვლა ერთი მდგომარეობიდან მეორეში, ჩვეულებრივ, ხდება დროის არა წინასწარ ფიქსირებულ მომენტში, არამედ ნებისმიერ შემთხვევით მომენტებში.

აღნიშნულთან დაკავშირებით, დიდ ინტერესს იწვევს *დისკრეტული მდგომარეობებისა და უწყვეტი დროის შესაბამისი მარკოვის შემთხვევითი პროცესების აღწერა*.

ასეთ პროცესთა აღსაწერად, იყენებენ მოდელს, რომელსაც გააჩნია ეგრეთწოდებული *მარკოვის ჯაჭვის სახე, დისკრეტული მდგომარეობებით და მიმდინარე უწყვეტი დროით* (ამ დროს აჩბობენ, რომ საქმე გვაქვს მარკოვის უწყვეტ ჯაჭვთან).

პოულობენ ასეთი პროცესის შესაბამისი სისტემის მდგომარეობათა ალბათობებს, როგორც დროის ფუნქციას — $p_i(t)$, ისეთნაირად, რომ ნებისმიერი t დროისათვის შესრულდეს შემდეგი პირობა:

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1,$$

სადაც n - არის განსახილველი სისტემის შესაძლო მდგომარეობათა რაოდენობა.

შემოაქვთ სისტემის ერთი მდგომარეობიდან მეორეში გადასვლის ალბათობათა სიმკვრივის ცნება. ის იყოს S სისტემის, Δt დროში, S_i -დან S_j -ურ მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობის, Δt დროითი შუალედის სიგრძესთან ფარდობის ზღვარი.

ოუ სიმკვრივის ხსენებულ მაჩვენებელს ავლნიშნავთ λ_{ij} -თი, მაშინ განმარტების თანახმად

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}. \quad (7.7)$$

სადაც $p_{ij}(\Delta t)$ - არის S სისტემის S_i -დან S_j -ურ მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობა Δt დროის განმავლობაში.

Δt პარამეტრის ნებისმიერი სასრული მნიშვნელობისათვის (7.7)-დან შეიძლება დაიწეროს შემდეგი ჭეშმარიტი ტოლობა:

$$p_{ij}(\Delta t) = \lambda_{ij}(\Delta t). \quad (7.8)$$

მარკოვის ჯაჭვს უწოდებენ ერთგვაროვანს, თუ λ_{ij} პარამეტრები არ არიან დამოკიდებული დროის აღმნიშვნელ პარამეტრზე (t -ზე). წინააღმდეგ შემთხვევაში (ე.ი. როცა $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(t)$), მარკოვის ჯაჭვს უწოდებენ არაერთგვაროვანს.

ამ და სხვა სახის დაშვებების გათვალისწინებით, პოულობენ შესასწავლი სისტემის მდგომარეობათა განმსაზღვრელ ალბათობებს - $p_1(t)$, $p_2(t)$, ..., $p_n(t)$, დროის ნებისმიერი t მომენტისათვის. ეს საკითხები უფრო დაწერილებით გაშუქებულია ამ თავის მეოთხე პარაგრაფში.

მასობრივი მომსახურების სისტემა უარებით. ერლანგის განტოლებები და ფორმულები

ეთქვათ, საქმე გვაქვს მასობრივი მომსახურების n არხიან სისტემასთან უარებით და იგი მოცემულია მდგომარეობათა სასრული სიმრავლის მქონე X ფიზიკური სისტემის სახით.

ვიგულისხმობთ, რომ X სისტემას გააჩნია შემდეგი მდგომარეობები:

0. x_0 – მასობრივი მომსახურების სისტემის ყველა არხი თავისუფალია;

1. x_1 – დაკავებულია მასობრივი მომსახურების სისტემის მხოლოდ ერთი არხი;

$\vdots$
j. x_j – დაკავებულია $\vdots \vdots \vdots$ მასობრივი მომსახურების სისტემის მხოლოდ j არხი;

$\vdots$
n. x_n – დაკავებულია $\vdots \vdots \vdots$ მასობრივი მომსახურების სისტემის n (ყველა) არხი;

X სისტემა მისი ერთი მდგომარეობიდან შეიძლება გადავიდეს მეორეში, მეორედან მესამეში და ა. შ., ან პირიქით.

X სისტემის მდგომარეობათა შესაძლო ცვლილებების (ერთი მდგომარეობიდან მეორეში შესაძლო გადასვლათა) სქემა გამოსახულია ქვემოთ მოცემულ ნახაზზე (იხ. ნახ. 7.6).



ნახ. 7. 6

ეთქვათ, ჩვენს წინაშე დგას ასეთი ამოცანა: განესაზღვროთ X სისტემის მდგომარეობათა $p_j(t)$ ($j=0,1,2,\dots,n$) ალბათობანი t დროის ნებისმიერი მომენტისათვის.

ამ ამოცანის ამოსახსნელად საჭიროა შემოვიღოთ შემდეგი დაშვებები:

ა) კლიენტთა ნაკადი წარმოადგენს უმარტივესი სახის ნაკადს, ξ სიმკერით;

ბ) მომსახურების დროის განაწილების სიმკერით არის მაჩვენებლიანი ფუნქცია (η პარამეტრით)

$$\varphi(t) = \eta e^{-\eta t}, \quad (t > 0) \quad (7.9)$$

$$\text{სადაც } \eta = \frac{1}{M_{\text{მომს.}}},$$

η სიდიდის არსი შეიძლება განისაზღვროს შემდეგნაირად. იგი არის დაკავებული არხის "განთავისუფლებათა ნაკადის სიმკერით".

თუ დაეუშვებთ, რომ მომსახურების არხი (რომელიც შეუფერხებლად მარაგდება კლიენტებით) განუწყვეტლივ დაკავებულია, მაშინ ცხადია, სისტემაში საქმე გექნება განთავისუფლებათა უმარტივეს ნაკადთან η სიმკერით.

შესასწავლ X სისტემაში მიმდინარეობს მარკოვის პროცესი, რადგან განაცხადებისა და განთავისუფლებების ორივე ნაკადი წარმოადგენს უმარტივეს ნაკადებს.

ახლა განვიხილოთ X სისტემის შესაძლო მდგომარეობანი და მათი ალბათობანი: $p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t)$.

ცხადია, რომ ამ ალბათობებისა და დროის ნებისმიერი მომენტისათვის ადგილი აქვს შემდეგ ჭეშმარიტ ტოლობას:

$$\sum_{j=0}^n p_j(t) = 1. \quad (7.10)$$

$p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t)$ ალბათობებისათვის შევადგინოთ დიფერენციალური განტოლებები, დავაფიქსიროთ დროის t მომენტი და მოვნახოთ ალბათობა $p_0(t + \Delta t)$ იმისა, რომ დროის $(t + \Delta t)$ მომენტში სისტემა იმყოფება x_0 მდგომარეობაში (ყველა არხი თავისუფალია). ეს შეიძლება მოხდეს ორი ხერხით: 1) t მომენტში სისტემა იმყოფებოდა x_0 მდგომარეობაში, ხოლო Δt დროის განმავლობაში იგი დარჩა იმავე მდგომარეობაში; 2) t მომენტში სისტემა იმყოფებოდა x_1 მდგომარეობაში, ხოლო Δt დროის განმავ-

ლობაში არხი განთავისუფლდა და სისტემა გადავიდა X_0 მდგომარეობაში (რადგან სხვა ხერხით X სისტემის "გადახტომის" შესაძლებლობა შუალედურ მდგომარეობაზე (მაგალითად, X სისტემის X_2 მდგომარეობიდან X_0 -ში გადასვლა X_1 -ზე გადახტომით) დროის მცირე შუალედში შეიძლება უზუღველყოფილ იქნეს, როგორც უმაღლესი რიგის მცირე სიდიდე).

გამოეთვალათ $p_0(t+\Delta t)$ სიდიდე.

$$p_0(t+\Delta t) \approx p(A) + p(B), \quad (7.11)$$

სადაც A არის ხდომილობა და იგი გულისხმობს, რომ დროის t მომენტში X სისტემა იმყოფებოდა X_0 მდგომარეობაში, ხოლო Δt დროის განმავლობაში იგი დარჩა იმავე მდგომარეობაში;

B არის ხდომილობა და იგი გულისხმობს, რომ დროის t მომენტში X სისტემა იმყოფებოდა X_1 მდგომარეობაში, ხოლო Δt დროის განმავლობაში არხი განთავისუფლდა და სისტემა გადავიდა X_0 მდგომარეობაში;

აღბათობა იმისა, რომ დროის t მომენტში X სისტემა იქნება X_0 მდგომარეობაში, ტოლია $p_0(t)$ -სი, ხოლო აღბათობა იმისა, რომ სისტემაში Δt დროის განმავლობაში არ მოვა არც ერთი კლიენტი, ტოლია $e^{-\xi \Delta t}$ -სი.

$$e^{-\xi \Delta t} \approx 1 - \xi \Delta t.$$

მაშასადამე,

$$p(A) \approx p_0(t)(1 - \xi \Delta t). \quad (7.12)$$

ახლა მოვნახოთ $p(B)$. აღბათობა იმისა, რომ დროის t მომენტში X სისტემა იყოს X_1 მდგომარეობაში, ტოლია $p_1(t)$ -სი. აღბათობა იმისა, რომ Δt დროის განმავლობაში მომსახურების არხი განთავისუფლდება, ტოლია $1 - e^{-\eta \Delta t}$ -სი.

$$1 - e^{-\eta \Delta t} \approx \eta \Delta t$$

მაშასადამე,

$$p(B) \approx p_1(t) \eta \Delta t. \quad (7.13)$$

თუ (7.12)-სა და (7.13)-ს გავითვალისწინებთ (7.11)-ში, მივიღებთ:

$$p_0(t+\Delta t) \approx p_0(t)(1 - \xi \Delta t) + \eta p_1(t) \Delta t. \quad (7.14)$$

თუ (7.14) განტოლებაში $p_0(t)$ -ს გადავიტანთ მარცხენა ნაწილში, ორივე მხარეს გაეყოფთ Δt -ზე და გადავალთ ზღვარზე, $\Delta t \rightarrow 0$ -სათვის, მივიღებთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას, $p_0(t)$ -ს მიმართ:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\xi p_0(t) + \eta p_1(t). \quad (7.15)$$

ანალოგიური მსჯელობით, დიფერენციალური განტოლებები შეიძლება შევადგინოთ მოცემული X სისტემის სხვა მდგომარეობათა ალბათობებისთვისაც. ავიღოთ ნებისმიერი j ($0 < j < n$) და ვიპოვოთ ალბათობა $p_j(t + \Delta t)$ იმისა, რომ $t + \Delta t$ მომენტში X სისტემა იქნება X_j მდგომარეობაში. ეს ალბათობა გამოითვლება როგორც სამი ხდომილობის ჯამის ალბათობა:

$$p_j(t + \Delta t) \approx p(A) + p(B) + p(C), \quad (7.16)$$

სადაც A არის ხდომილობა და იგი გულისხმობს, რომ დროის Δt მომენტში სისტემა იყო X_j მდგომარეობაში (დაკავებული იყო j არხი) და Δt დროის განმავლობაში იგი არ გადასულა არც X_{j+1} და არც X_{j-1} მდგომარეობაში (არცერთი განაცხადი არ შემოსულა, არცერთი არხი არ გათავისუფლებულა);

B არის ხდომილობა და იგი გულისხმობს, რომ დროის t მომენტში სისტემა იყო X_{j-1} მდგომარეობაში (დაკავებული იყო $j-1$ არხი) და Δt დროში გადავიდა X_j მდგომარეობაში (სისტემაში მოვიდა ერთი განაცხადი).

C არის ხდომილობა და იგი გულისხმობს, რომ დროის t მომენტში სისტემა იყო X_{j+1} მდგომარეობაში (დაკავებული იყო $j+1$ არხი) და Δt დროში ერთ-ერთი არხი გათავისუფლდა.

ალბათობა იმისა, რომ Δt დროში არ მოუვა არცერთი განაცხადი და არ გათავისუფლდება არცერთი არხი, გამოითვლება ასეთნაირად:

$$e^{-\xi \Delta t} (e^{-\eta \Delta t})^n = e^{-(\xi + j\eta) \Delta t} \approx 1 - (\xi + j\eta) \Delta t. \quad (7.17)$$

ე.ი. გამოდის, რომ

$$p(A) \approx p_j(t) [1 - (\xi + j\eta) \Delta t]. \quad (7.18)$$

ანალოგიურად

$$p(B) = p_{j-1}(t) \xi \Delta t \quad \text{და} \quad (7.19)$$

$$p(C) = p_{j+1}(t)(j+1)\eta \Delta t. \quad (7.20)$$

მაშასადამე მივიღეთ, რომ

$$p_j(t+\Delta t) \approx p_j(t)[1 - (\xi + j\eta)\Delta t] + p_{j-1}(t)\xi \Delta t + p_{j+1}(t)(j+1)\eta \Delta t. \quad (7.21)$$

(7.21) ტოლობის სათანადო გარდაქმნით, მიიღება შემდეგი განტოლებათა სისტემა ($p_j(t)$, $(0 < j < n)$) ალბათობებისათვის):

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = \xi p_{j-1}(t) - (\xi + j\eta)p_j(t) + (j+1)\eta p_{j+1}(t). \quad (7.22)$$

ახლა შევადგინოთ განტოლება უკანასკნელი $p_n(t)$ ალბათობისათვის. მივიღებთ, რომ

$$p_n(t+\Delta t) \approx p_n(t)(1 - n\eta\Delta t) + p_{n-1}(t)\xi \Delta t, \quad (7.23)$$

სადაც $(1 - n\eta\Delta t)$ არის ალბათობა იმისა, რომ Δt დროში არცერთი არხი არ განთავისუფლდება, ხოლო $\xi \Delta t$ სიდიდე კი ალბათობა იმისა, რომ Δt დროში მოვა ერთი განაცხადი.

(7.23) ტოლობის სათანადო გარდაქმნით, $p_n(t)$ -სათვის შეიძლება მიღებულ იქნეს შემდეგი დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \xi p_{n-1}(t) - n\eta p_n(t). \quad (7.24)$$

აღნიშნულიდან ცხადია, რომ მიღებულია დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა $p_0(t), p_1(t), \dots, p_j(t), \dots, p_n(t)$ ალბათობებისათვის:

$$\begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt} = -\xi p_0(t) + \eta p_1(t), \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dp_j(t)}{dt} = \xi p_{j-1}(t) - (\xi + j\eta)p_j(t) + (j+1)\eta p_{j+1}(t), \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dp_n(t)}{dt} = \xi p_{n-1}(t) - n\eta p_n(t) \end{cases} \quad (0 < j < n) \quad (7.25)$$

(725)-ის შემადგენელ ტოლობებს უწოდებენ *ერლანგის განტოლებებს*, ხოლო მთელ სისტემას კი *ერლანგის განტოლებათა სისტემას*.

მიღებული (725) განტოლებათა სისტემის ინტეგრირება საწყისი პირობებით: $p_0(0)=1$; $p_1(0)=\dots=p_n(0)=0$ (რადგან საწყის მომენტში მშს-ის ყველა არხი თავისუფალია) იძლევა $p_i(t)$ -ს დამოკიდებულებას ნებისმიერი i -სთვის. ალბათობის აღმნიშვნელი $p_i(t)$ სიდიდე ახასიათებს X სისტემის საშუალო დატვირთვას და მის ცვალებადობას დროის განმავლობაში. კერძოდ, $p_n(t)$ არის ალბათობა იმისა, რომ კლიენტს მოსულს დროის t მომენტში, სისტემის ყველა არხი დახედება დაკავებული (მიიღებს უარს). ასეთ პირობებში შეიძლება დაიწეროს შემდეგი ჭეშმარიტი ტოლობა:

$$p_{\text{უარ}} = p_n(t).$$

$q(t)=1-p_n(t)$ სიდიდეს უწოდებენ სისტემის ფარდობით გამტარუნარიანობას. მოცემული t მომენტისათვის ეს არის ფარდობა, რომელიც გამოითვლება დროის ერთეულში მომსახურებულ განაცხადთა საშუალო რიცხვის შეფარდებით განაცხადთა საშუალო რიცხვთან.

(725) წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა შედარებით ადვილად შეიძლება ინტეგრირებულ იქნეს მოქსახურების არხთა ნებისმიერ n კონკრეტული რიცხვის შემთხვევაში.

აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ (725) განტოლებათა გამოყვანისას, არცერთ შემთხვევაში არ გვისარგებლია იმ დაშვებით, რომ ξ და η სიდიდეები (განაცხადთა და განთავისუფლებათა ნაკადების სიმკვრივეები) მუდმივია. ამიტომ, ბუნებრივია, რომ (725) განტოლებები დარჩება ჭეშმარიტი (მართებული) დროისაგან დამოკიდებულ $\xi(t)$ და $\eta(t)$ შემთხვევაშიც კი (თუ, რა თქმა უნდა, ხდომილობათა ნაკადი, რომელსაც გადაჰყავს სისტემა ერთი მდგომარეობიდან მეორეში დარჩება პუასონის ნაკადის თვისებების მატარებელი. ამის გარეშე კი სისტემაში მიმდინარე პროცესი არ იქნება მარკოვის).

ახლა გამოვიყვანოთ ერლანგის ფორმულები.

ვთქვათ, მოცემულია n არხიანი მასობრივი მომსახურების სისტემა უარებით. ამ სისტემაში შემავალ კლიენტთა ნაკადი იყოს უმარტივესი ξ სიმკვრივით. მომსახურების დროის, როგორც შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია იყოს მაჩვენებლიანი η პარამეტრით.

ცნობილია (მტკიცდება), რომ მასობრივი მომსახურების ნებისმიერი უარებიანი სისტემისათვის არსებობს მომსახურების ზღერულად დამყარებული რეჟიმი. სხვანაირად, არსებობს ისეთი რეჟიმი, რომლის დროსაც, ყველა ალბათობა — $p_0(t), p_1(t), p_2(t), \dots, p_j(t), \dots, p_n(t)$ მიისწრაფის მუდმივი ზღერებისაკენ — $p_0, p_1, p_2, \dots, p_j, \dots, p_n$ და ყველა მათი წარმოებულები — ნულისაკენ, თუ რა თქმა უნდა $t \rightarrow \infty$ -საკენ.

$p_0(t), p_1(t), p_2(t), \dots, p_j(t), \dots, p_n(t)$ ალბათობების განსაზღვრის მიზნით, ვიგულისხმობთ, რომ მოცემულ n არხიან მასობრივი მომსახურების სისტემაში დამყარებულია მომსახურების ზემოთ ხსენებული ზღერული რეჟიმი და (7.25) განტოლებებში ყველა ალბათობა $p_j(t)$ $[0 \leq j \leq n]$ შეეცვალოთ მათი p_j ზღერებით. ამასთან, ამ ალბათობების წარმოებულები, ყველა ავიღოთ ნულის ტოლი. შედეგად მივიღებთ უკვე არა დიფერენციალური, არამედ ალგებრული განტოლებების სისტემას.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\xi p_0 + \eta p_1 = 0, \\ \xi p_0 - (\xi + \eta) p_1 + 2\eta p_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \xi p_{j-1} - (\xi + j\eta) p_j + (j+1)\eta p_{j+1} = 0, \quad (0 < j < n) \\ \dots\dots\dots \\ \xi p_{n-2} - [\xi + (n-1)\eta] p_{n-1} + n\eta p_n = 0, \\ \xi p_{n-1} - n\eta p_n = 0. \end{array} \right. \quad (7.26)$$

(7.26) განტოლებებს აუცილებლად უნდა დაემატოს

$$\text{პირობა } \sum_{j=0}^n p_j = 1. \quad (7.27)$$

ახლა (7.26) განტოლებათა სისტემა ამოვხსნათ $p_0, p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n$ უცნობების მიმართ. ამ სისტემის პირველი განტოლებიდან მივიღებთ:

$$p_1 = \frac{\xi}{\eta} p_0. \quad (7.28)$$

მეორე განტოლებიდან (7.28)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$p_2 = \frac{1}{2\eta} [-\xi p_0 + (\xi + \eta) p_1] = \frac{1}{2\eta} [-\xi p_0 + \frac{\xi^2}{\eta} p_0 + \xi p_0] = \frac{\xi^2}{2\eta^2} p_0. \quad (7.29)$$

სისტემის მესამე განტოლებიდან (7.28)-ის და (7.29)-ის გათვალისწინებით, შეიძლება მივიღოთ:

$$p_3 = \frac{1}{3\eta} \left(-\frac{\xi^2}{\eta} p_0 + \frac{\xi^3}{2\eta^2} p_0 + \frac{\xi^2}{2\eta^2} 2\eta p_0 \right) = \frac{\xi^3}{3!\eta^3} p_0$$

და საერთოდ ნებისმიერი $j \leq n$ -სათვის

$$p_j = \frac{\xi^j}{j!\eta^j} p_0. \quad (7.30)$$

ახლა შემოვიტანოთ ასეთი აღნიშვნა

$$\frac{\xi}{\eta} \equiv \alpha \quad (7.31)$$

ამ (α) სიდიდეს ეუწოდოთ კლიენტთა ნაკადის დაყვანილი სიმკვრივე. იგი ტოლია კლიენტთა ისეთი საშუალო რიცხვისა, რომელიც მოდის ერთი კლიენტის მომსახურების საშუალო დროზე. ეს კარგად ჩანს შეკლები ჭეშმარიტი ფორმულიდან:

$$\alpha = \frac{\xi}{\eta} = \xi M_{\text{მომს}}, \quad (7.32)$$

სადაც $M_{\text{მომს}} = E[T_{\text{მომს}}]$ და იგი არის კლიენტის მომსახურების საშუალო დრო.

თუ (7.31)-ს გავითვალისწინებთ (7.30)-ში, მივიღებთ:

$$p_j = \frac{\alpha^j}{j!} p_0. \quad (7.33)$$

(7.33) წარმოადგენს ფორმულას, რომელიც ყველა p_j ალბათობას გამოსახავს p_0 ალბათობის საშუალებით.

ახლა p_j ($j=0,1,\dots,n$) ალბათობები უშუალოდ გამოვსახოთ c -სა და n -ის საშუალებით.

(7.27) ტოლობაში გავითვალისწინოთ (7.33) და მივიღებთ:

$$\sum_{j=0}^n p_j = p_0 \sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!} = 1. \quad (7.34)$$

საიდანაც

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!}}. \quad (7.35)$$

თუ (7.35)-ს ჩავსვამთ (7.33)-ში მივიღებთ:

$$p_j = \frac{\frac{\alpha^j}{j!}}{\sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!}}, \quad [0 \leq j \leq n]. \quad (7.36)$$

(7.36) სახის ფორმულები ცნობილია *ერლანგის ფორმულების* სახელწოდებით. მათი საშუალებით შეიძლება მიღებულ იქნეს დაკავებული არხების რიცხვის განაწილების ზღვრული კანონი კლიენტთა ნაკადის მახასიათებლებისაგან და მომსახურების სისტემის მწარმოებელურობისაგან დამოკიდებულებით. თუ (7.36) ფორმულაში დაუშვებთ, რომ $n \rightarrow \infty$, მივიღებთ (მტყუნების) უარის ალბათობას (ანუ ალბათობას იმისა, რომ მასობრივი მომსახურების მოცემულ სისტემაში შემოსულ კლიენტს ყველა არხი დახვდება დაკავებული), რომელიც გამოითვლება ფორმულით:

$$p_{\text{უარ}} = p_n = \frac{\frac{\alpha^n}{n!}}{\sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!}}. \quad (7.37)$$

ერთარხიანი სისტემისათვის (როცა $n=1$) მივიღებთ, რომ

$$p_{\text{ჯამ}} = p_1 = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \quad (7.38)$$

და ფარდობითი გამტარუნარიანობა:

$$q = 1 - p_{\text{ჯამ}} = \frac{1}{1 + \alpha}. \quad (7.39)$$

აღსანიშნავია, რომ ერლანგის ზემოთ განხილული ფორმულები და მათი შედეგები გამოყვანილ იქნა მომსახურების დროის, როგორც შემთხვევითი სიგ. დის, მაჩვენებლიანი განაწილებისათვის. მაგრამ აქვე ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას, რომ ეს ფორმულები მართებულია მომსახურების დროის ნებისმიერი კანონით განაწილების შემთხვევაში, ოღონდ მასობრივი მომსახურების სისტემაში შემსვლელი ნაკადი აუცილებლად უნდა იყოს უმარტივესი. თუმცა, ისიც აღსანიშნავია, რომ ერლანგის განხილული ფორმულებით შეიძლება გარკვეული მიახლოებით ეისარგებლოთ იმ შემთხვევაშიც, როცა მასობრივი მომსახურების სისტემაში შემავალ კლიენტთა ნაკადი განსხვავებულია უმარტივესისაგან.

ერლანგის განხილული ფორმულებით შეიძლება აგრეთვე მიახლოებით ეისარგებლოთ ისეთ პირობებშიც, როცა მასობრივი მომსახურების სისტემა, თავისი ბუნებით, ითვალისწინებს კლიენტის ლოდინს, რიგში დგომით, თუმცა, ლოდინის დრო, ასეთ შემთხვევაში, უნდა იყოს მცირე, ვიდრე ერთი კლიენტის მომსახურების საშუალო დრო.

მასობრივი მომსახურების სისტემა ლოდინით

მასობრივი მომსახურების თეორიაში, გარდა განხილული სისტემებისა, კიდევ არსებობს მასობრივი მომსახურების სისტემები ლოდინით.

მასობრივი მომსახურების სისტემას ეწოდება სისტემა ლოდინით, თუ მასში შემავალი კლიენტი, რომელსაც

ყველა არხი დაკავებული ხედება, დგება რიგში და იცდის მანამ, სანამ რომელიმე არხი არ განთავისუფლდება.

იმ შემთხვევაში, თუ კლიენტის რიგში ლოდინის დრო არაფრით არ არის შეზღუდული, მაშინ შესაბამის სისტემას ეწოდება მასობრივი მომსახურების სისტემა წმინდა ლოდინით. მაგრამ, თუ იგი შეზღუდულია რომელიმე პირობებით, მაშინ სისტემას ეწოდება შერეული ტიპის მასობრივი მომსახურების სისტემა. ეს უკანასკნელი წარმოადგენს შუალედურ შემთხვევას უარებიან და ლოდინიან წმინდა სისტემებს შორის. პრაქტიკული თვალსაზრისით, უფრო მეტად საინტერესოა სწორედ შერეული ტიპის სისტემები.

მშა-ში ლოდინის მიმართ არსებული შეზღუდვები შეიძლება იყოს სხვადასხვა ტიპის (სახის). ზოგჯერ აღემატება, რომ კლიენტი შეზღუდვას ღებულობს რიგში მისი ლოდინის დროს. თელიან, რომ კლიენტი შეზღუდულია ზემოდან რაღაც ტოლ-იანი ვადით. ეს ვადა შეიძლება იყოს, როგორც ზუსტად განსაზღვრული, ისე შემთხვევითიც. ასეთ პირობებში იზღუდება მხოლოდ რიგში ლოდინის დრო. რაც შეეხება დაწყებულ მომსახურებას, იგი მიიყვანება ბოლომდე მიუხედავად იმისა, თუ რა დროს გრძელდებოდა ლოდინი.

ზოგჯერ კი შეზღუდვები წესდება კლიენტის არა რიგში დგომის დროის, არამედ სისტემაში მისი ყოფნის საერთო დროის მიხედვით.

პრაქტიკაში არსებობს ისეთი შერეული სისტემებიც, რომელთათვისაც დამახასიათებელია შემდეგი პირობა — კლიენტი დგება რიგში მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა რიგის სიგრძე არც ისე დიდია (ამ დროს შეზღუდვა ედება რიგში მყოფ კლიენტთა რიცხვს).

მასობრივი მომსახურების ლოდინიან სისტემებს შორის არსებით როლს თამაშობს ეგრეთწოდებული “რიგის დისციპლინა” რიგში მყოფი კლიენტები მომსახურებისათვის შეიძლება გამოიძახონ, როგორც რიგითობის მიხედვით, ასევე შემთხვევით, არაორგანიზებული წესით. გარდა აღნიშნულისა, არსებობს მშს-ები “პრივილეგიებით”.

ეს ისეთი სისტემებია, რომლებშიც ზოგიერთი კლიენტის მომსახურება, სხვებთან შედარებით, ხდება უპირატესობის მიცემის (პრივილეგიების) გზით.

ცნობილია, რომ მასობრივი მომსახურების ლოდინიანი სისტემის ყოველ ტიპს (სახეობას) აქვს თავისი თავისებურება და შესაბამისი მათემატიკური თეორია.

ამ თეორიებიდან ჩვენ ქვემოთ განვიხილავთ მხოლოდ ისეთს, რომელიც შეესაბამება მასობრივი მომსახურების შერეული სისტემის უმარტივეს შემთხვევას. კერძოდ, ჩვენ განვიხილავთ ერლანგის ამოცანის ბუნებრივ განზოგადებას, მასობრივი მომსახურების უარებიანი სისტემებისათვის.

ახლა გამოვიყენოთ ამ შემთხვევების შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებები და დამყარებული რეჟიმის მდგომარეობათა ალბათობების გამოსათვლელი ფორმულები (რომლებიც შესაბამისად წარმოადგენენ ერლანგის განტოლებებისა და ფორმულების ანალოგიურ გამოსახულებებს).

ეთქვათ, მოცემულია მასობრივი მომსახურების x შერეული n არხიანი სისტემა, რომელშიც შედის კლიენტთა უმარტივესი ნაკადი ξ სიმკვრივით. ერთი კლიენტის მომსახურების დრო ($T_{\text{დრო}}$), როგორც შემთხვევითი სიდიდე, დაეუშვათ ხასიათდება მანჩენებლიანი ფუნქციით, რომლის

პარამეტრია $\eta = \frac{1}{M_{\text{ტოპს}}}$. გარდა ამისა, ვიგულისხმობთ, რომ

მასობრივი მომსახურების მოცემულ სისტემაში შემოსული კლიენტი, რომელსაც ყველა არხი ხედება დაკავებული, დადგება რიგში და უცდის მომსახურებას. ეთქვათ, აგრეთვე, რომ კლიენტის რიგში დგომის, ანუ ლოდინის დრო შეზღუდულია რომელიღაც $T_{\text{ლოდ-იანი}}$ ვადით, რაც იმას ნიშნავს, რომ თუ ამ ვადის გასვლამდე არ დაიწყება სისტემაში შემოსული კლიენტის მომსახურება, მაშინ იგი სტოვებს რიგს და რჩება მოუმსახურებელი. კლიენტის რიგში დგომის ანუ ლოდინის ვადა ($T_{\text{ლოდ}}$) ჩავთვალოთ შემთხვევით სიდიდედ, რომელიც განაწილებულია მანვე-

ნებლიანი კანონის მიხედვით. მისი სიმკვრივე შეიძლება ჩაიწეროს ასეთნაირად:

$$\varphi(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad (t > 0), \quad (7.40)$$

სადაც

λ - არის ლოდინის საშუალო დროის შებრუნებული სიდიდე. λ გამოითვლება ფორმულით:

$$\lambda = \frac{1}{M_{\text{ლოდ}}}$$

λ პარამეტრი წარმოადგენს კლიენტთა ნაკადის (ξ) და განთავისუფლებათა ნაკადის (η) ანალოგიურ მაჩვენებელს. იგი შეიძლება ინტერპრეტირებული იყოს, როგორც რიგში მდგომ კლიენტთა "გასვლათა ნაკადის" სიმკვრივე. ამის ნათელსაყოფად წარმოვიდგინოთ ისეთი კლიენტი, რომელიც აკეთებს მხოლოდ იმას, რომ ჯერ დგება რიგში და შემდეგ უცდის მომსახურების დაწყებას მანამ, სანამ მას არ დაუმთავრდება ლოდინის ვადა (T_{ლოდ}). ამის შემდეგ იგი მიდის და ჰელახლა დგება რიგში. ასეთ პირობებში კლიენტის რიგიდან "გასვლათა ნაკადს" ექნება λ სიდიდის ტოლი სიმკვრივე.

ადვილი შესამჩნევია, რომ, როცა $\lambda \rightarrow \infty$, შერეული ტიპის სისტემა გარდაიქმნება წმინდა სისტემად, უარებით. მაგრამ, როცა $\lambda \rightarrow 0$, იგი გარდაიქმნება წმინდა ლოდინიან სისტემად.

აქვე ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას, რომ კლიენტის ლოდინის ვადის განაწილების მაჩვენებლიანი კანონის შემთხვევაში, მისი გამტარუნარიანობა არ არის დამოკიდებული იმისაგან, კლიენტთა მომსახურება სისტემაში ხდება რიგითობის დაცვის მიხედვით, თუ შემთხვევითი სახით. სხეანაირად, კლიენტის ლოდინის დარჩენილი დროის განაწილების კანონი (ნებისმიერი კლიენტისათვის) არ არის დამოკიდებული იმისაგან, თუ რამდენ ხანს იდგა კლიენტი რიგში.

ვთქვათ, მასობრივი მომსახურების განსახილველ X სისტემაში შემავალ ხდომილობათა ყველა ნაკადი, რომელიც იწვევს სისტემის მდგომარეობათა ცვლილებებს,

არის პუასონური ხასიათის. ასეთ შემთხვევაში, სისტემაში მიმდინარე პროცესები იქნება მარკოვისა.

საჭიროა შევადგინოთ მასობრივი მომსახურების შესასწავლი სისტემის მდგომარეობათა აღბათობების აბსახველ განტოლებათა სისტემა.

თავდაპირველად დავადგინოთ მასობრივი მომსახურების შესასწავლი X სისტემის მდგომარეობანი და დავნომროთ ისინი არა დაკავებული არხების რიცხვის მიხედვით, არამედ სისტემასთან დაკავშირებულ კლიენტთა რიცხვის მიხედვით. კლიენტს დავარქვათ სისტემასთან დაკავშირებული იმ შემთხვევაში, თუ იგი განიცდის მომსახურებას (იმყოფება მომსახურების მდგომარეობა), ან იმყოფება რიგში.

მასობრივი მომსახურების შესასწავლი X სისტემის შესაძლო მდგომარეობები შეიძლება აისახოს შემდეგნაირად:

0. x_0 – მშს-ის არცერთი არხი არ არის დაკავებული და მასში არ არის რიგი;

1. x_1 – დაკავებულია მშს-ის ზუსტად ერთი არხი და მასში არ არის რიგი;

j . x_j – დაკავებულია მშს-ის ზუსტად j არხი და მასში არ არის რიგი;

n . x_n – დაკავებულია მშს-ის ყველა n არხი და მასში არ არის რიგი;

$n+1$. x_{n+1} – დაკავებულია მშს-ის ყველა n არხი და მასში ერთი კლიენტი (განაცხადი) დგას რიგში;

$n+s$. x_{n+s} – დაკავებულია მშს-ის ყველა n არხი და მასში s კლიენტი (განაცხადი) დგას რიგში.

ახლა დაეწეროთ X სისტემის მდგომარეობათა ამსახველი დიფერენციალური განტოლებები. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში პირველი n დიფერენციალური განტოლება

არაფრით არ იქნება განსხვავებული ერლანგის შესაბამისი განტოლებებიდან. მათ ექნებათ ასეთი სახე:

$$\begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt} = -\xi p_0(t) + \eta p_1(t), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dp_j(t)}{dt} = \xi p_{j-1}(t) - (\xi + j\eta)p_j(t) + (j+1)\eta p_{j+1}(t), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dp_{n-1}(t)}{dt} = \xi p_{n-2}(t) - [\xi + (n-1)\eta]p_{n-1}(t) + n\eta p_n(t). \end{cases} \quad (7.41)$$

(7.41) განტოლებების განსხვავება ერლანგის განტოლებებისაგან, იწყება იმ მომენტიდან, როცა $j=n$. მართლაც მის უარით, მის x_n მდგომარეობაში შეიძლება გადავიდეს მხოლოდ x_{n-1} მდგომარეობიდან. ეს მაშინ, როცა მის ლოდინით x_n მდგომარეობაში შეიძლება გადავიდეს როგორც x_{n-1} , ასევე x_{n+1} მდგომარეობიდან.

ახლა შევადგინოთ დიფერენციალური განტოლება $p_n(t)$ ალბათობებისათვის. დავაფიქსიროთ დროის t მომენტი და მოენახოთ $p_n(t+\Delta t)$, ე. ი. ალბათობა იმისა, რომ სისტემა $t+\Delta t$ მომენტში იქნება x_n მდგომარეობაში. ეს შეიძლება განხორციელდეს შემდეგი სამი გზით:

- დროის t მომენტში მის იყო თავის x_n მდგომარეობაში და Δt დროის განმავლობაში იგი არ გადასულა სხვა მდგომარეობაში (სისტემაში არ მოსულა არცერთი კლიენტი და მასში არ განთავისუფლებულა არცერთი არხი);
- დროის t მომენტში მის იყო თავის x_{n-1} მდგომარეობაში და Δt დროის განმავლობაში იგი გადავიდა x_n მდგომარეობაში (სისტემაში მოვიდა ერთი კლიენტი);
- დროის t მომენტში მის იყო თავის x_{n+1} მდგომარეობაში (სისტემის ყველა არხი დაკავებულია და ერთი კლიენტი დგას რიგში) და Δt დროის განმავლობაში იგი გადავიდა x_n მდგომარეობაში (ან გათავისუფლდა ერთი არხი და რიგში მყოფმა კლიენტმა დაიკავა იგი, ან კიდევ რიგში მყოფმა კლიენტმა დატოვა

სისტემა რიგში დგომის ვადის გასვლასთან დაკავშირებით).

მაშასადამე, შეიძლება დავწეროთ, რომ

$$p_n(t + \Delta t) \approx p_n(t)(1 - \xi \Delta t - \eta \Delta t) + p_{n-1}(t)\xi \Delta t + p_{n+1}(t)(\eta + \lambda)\Delta t \quad (7.42)$$

სადაც

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -(\xi + \eta)p_n(t) + \xi p_{n-1}(t) + (\eta + \lambda)p_{n+1}(t). \quad (7.43)$$

ახლა ნებისმიერი დადებითი S -ისათვის ვიპოვოთ $p_{n+s}(t + \Delta t)$ სიდიდე (ე. ი. ალბათობა იმისა, რომ დროის $t + \Delta t$ მომენტში X სისტემის ყველა n არხი იქნება დაკავებული და მასში ზუსტად s კლიენტი იდგება რიგში). მასობრივი მომსახურების შესასწავლი X სისტემა დროის $t + \Delta t$ მომენტში თავის $n + s$ (ანუ x_{n+s}) მდგომარეობაში შეიძლება მოხვდეს შემდეგი სამი გზით:

- ა. დროის t მომენტში მის იყო თავის x_{n+s} მდგომარეობაში და Δt დროის გავლის შემდეგ იგი დარჩა იმავე მდგომარეობაში (ე. ი. სისტემაში არცერთი კლიენტი არ შემოსულა, მასში არცერთი არხი არ გათავისუფლებულა და რიგში მყოფი s კლიენტიდან რიგი არცერთს არ დაუტოვებია);
 - ბ. დროის t მომენტში მის იყო x_{n+s-1} მდგომარეობაში და Δt დროში იგი გადავიდა x_{n+s} მდგომარეობაში (ე. ი. სისტემაში მოვიდა ერთი კლიენტი);
 - გ. დროის t მომენტში მის იყო თავის x_{n+s+1} მდგომარეობაში და Δt დროში იგი გადავიდა x_{n+s} მდგომარეობაში (ეს მოხდება მაშინ, თუ სისტემის ერთი არხი გათავისუფლდება და რიგში მყოფი $s+1$ კლიენტიდან ერთი დაიკავებს მას, ან კიდევ, რიგში მყოფი კლიენტებიდან ერთი სტოვებს სისტემას მომსახურების გარეშე, რიგში დგომის ვადის დამთავრებასთან დაკავშირებით).
- აღნიშნულიდან შეძლება დავწეროთ, რომ

$$p_{n+s}(t + \Delta t) \approx p_{n+s}(t)(1 - \xi \Delta t - \eta \Delta t - s \lambda \Delta t) + p_{n+s-1}(t) \xi \Delta t + p_{n+s+1}(t) [\eta + (s+1)\lambda] \Delta t \quad (7.44)$$

(7.44)-დან ცხადია, რომ

$$\frac{dp_{n+s}(t)}{dt} = -(\xi + \eta + s\lambda)p_{n+s}(t) + \xi p_{n+s-1}(t) + [\eta + (s+1)\lambda]p_{n+s+1}(t). \quad (7.45)$$

მაშასადამე ჩვენ შესასწავლი X სისტემის მდგომარეობათა აღბათობებისათვის ვღებულობთ დიფერენციალურ განტოლებათა უსასრულო რაოდენობის შემდეგი სახის სისტემას:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\xi p_0(t) + \eta p_1(t), \\ \frac{dp_1(t)}{dt} &= \xi p_0(t) - (\xi + \eta)p_1(t) + 2\eta p_2(t), \\ &\dots \\ \frac{dp_j(t)}{dt} &= \xi p_{j-1}(t) - (\xi + j\eta)p_j(t) + (j+1)\eta p_{j+1}(t), \\ &\dots \\ \frac{dp_n(t)}{dt} &= \xi p_{n-1}(t) - (\xi + n\eta)p_n(t) + (n\eta + \lambda)p_{n+1}(t), \\ &\dots \\ \frac{dp_{n+s}(t)}{dt} &= \xi p_{n+s-1}(t) - (\xi + n\eta + s\lambda)p_{n+s}(t) + [\eta + (s+1)\lambda]p_{n+s+1}(t), \\ &\dots \end{aligned} \right. \quad (7.46) \quad [1 \leq j \leq n-1]$$

(7.46) განტოლებებს სპეციალურ ლიტერატურაში უწოდებენ *ერლანგის განტოლებათა ბუნებრივ განზოგადებას*, შერეული ტიპის მის-სათვის, ლოდინის შემოსაზღვრული დროით.

(7.45) განტოლებებში მოცემული ξ , η და λ სიმბოლოები შეიძლება გამოხატავდეს როგორც მუდმივ, ასევე ცვლად პარამეტრებს.

(7.46) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ინტეგრირების დროს გასათვალისწინებელია, რომ მართალია შესასწავლი X სისტემის შესაძლო მდგომარეობათა რიცხვი თეორიულად უსასრულოა, მაგრამ პრაქტიკულად $p_{n+s}(t)$

ალბათობები, როცა ξ იზრდება, ხდება იმდენად მცირე, რომ ისინი და მათი შესაბამისი განტოლებები შეიძლება უგულებელყოფილ იქნეს.

ახლა ვიგულისხმობთ, რომ მასობრივი მომსახურების შესასწავლ X სისტემაში მათი მდგომარეობების ალბათობებისათვის (როცა $t \rightarrow \infty$) დამყარებულია ზღვრული რეჟიმი. საჭიროა, ერლანგის ფორმულების ანალოგიურად, გამოვიყენოთ ასეთი რეჟიმის შესაბამისი X სისტემის მდგომარეობების ალბათობების ამსახველი ფორმულები.

თუ (7.46) განტოლებათა სისტემაში დავუშვებთ, რომ ყველა $p_j(t)$ ($j=0,1,\dots,n$) მუდმივია (მათ შესაბამისად ავღნიშნავთ $p_j(t)$ -თი) და ყველა წარმოებული ნულის ტოლია, მივიღებთ ახალ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას. მას ექნება ასეთი სახე:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\xi p_0 + \eta p_1 = 0 \\ \xi p_0 - (\xi + \eta) p_1 + 2\eta p_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \xi p_{j-1} - (\xi + j\eta) p_j + (j+1)\eta p_{j+1} = 0, \quad [1 \leq j \leq n-1]. \\ \dots\dots\dots \\ \xi p_{n-1} - (\xi + n\eta) p_n + (n\eta + \lambda) p_{n+1} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \xi p_{n+s-1} - (\xi + n\eta + s\lambda) p_{n+s} + [n\eta + (s+1)\lambda] p_{n+s+1} = 0, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \quad (7.47)$$

ამ განტოლებებს უნდა დაემატოს შემდეგი პირობა:

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1. \quad (7.48)$$

ახლა ვიპოვოთ (7.47) სისტემის ამონახსნი.

ამ მიზნით საჭიროა გამოყენებულ იქნეს იგივე ხერხი, რომლითაც ვისარგებლეთ მასობრივი მომსახურების უარებიანი სისტემის შემთხვევაში. კერძოდ, ამოვხსნათ პირველი განტოლება p_1 -ის მიმართ და გაეთვალიწინოთ მეორეში, მეორე ამოვხსნათ p_2 -ის მიმართ, ჩავსვათ მესამეში და ა. შ ნებისმიერი j -ი განტოლებისათვის მივიღებთ ფორმულას:

$$p_j = \frac{\xi^j}{j! \eta^j} p_0. \quad (7.49)$$

თუ განვიხილავთ განტოლებებს $j > n$ ($j = n + s, s \geq 1$) შემთხვევებისათვის, იმავე ხერხით მივიღებთ:

$$p_{n+1} = \frac{\xi^{n+1} p_0}{n! \eta^n (n\eta + \lambda)}, \quad (7.50)$$

$$p_{n+2} = \frac{\xi^{n+2} p_0}{n! \eta^n (n\eta + \lambda)(n\eta + 2\lambda)}, \quad (7.51)$$

$$p_{n+s} = \frac{\xi^{n+s} p_0}{n! \eta^n \prod_{k=1}^s (n\eta + k\lambda)}, \quad s \geq 1 \quad (7.52)$$

თუ (7.49)-ს და (7.52)-ს გავითვალისწინებთ (7.48)-ში და ფრჩხილებს გარეთ გავიტანთ p_0 -ს, მივიღებთ:

$$p_0 \left\{ \sum_{j=0}^n \frac{\xi^j}{j! \eta^j} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\xi^{n+s}}{n! \eta^n \prod_{k=1}^s (n\eta + k\lambda)} \right\} = 1. \quad (7.53)$$

(7.53)-დან

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^n \frac{\xi^j}{j! \eta^j} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\xi^{n+s}}{n! \eta^n \prod_{k=1}^s (n\eta + k\lambda)}} \quad (7.54)$$

შემოვიღოთ ასეთი აღნიშვნები:

$$\begin{cases} \frac{\xi}{\eta} = \xi M_{\text{შპმ}} \equiv \alpha, \\ \frac{\lambda}{\eta} = \lambda M_{\text{შპმ}} \equiv \beta. \end{cases} \quad (7.55)$$

თუ (7.55)-ს გავითვალისწინებთ (7.49), (7.52) და (7.54) ფორმულებში, მივიღებთ:

$$p_j = \frac{\alpha^j}{j!} p_0, \quad (0 < j \leq n]; \quad (7.56)$$

$$p_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^{n+s}}{n!} p_0}{\prod_{k=1}^s (n+k\beta)}, \quad (s \geq 1); \quad (7.57)$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\prod_{k=1}^s (n+k\beta)}}. \quad (7.58)$$

თუ (7.58) - ს ჩავსევამთ (7.56) - ში და (7.57) ში, მივიღებთ:

$$p_j = \frac{\frac{\alpha^j}{j!}}{\sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\prod_{k=1}^s (n+k\beta)}}, \quad [0 \leq j \leq n] \quad (7.59)$$

$$p_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^n}{n!} \cdot \frac{\alpha^s}{\prod_{k=1}^s (n+k\beta)}}{\sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\prod_{k=1}^s (n+k\beta)}}, \quad (s \geq 1). \quad (7.60)$$

ამგეარად, შეგვიძლია განვსაზღვროთ მასობრივი მომსახურების X შესასწავლი სისტემის ყველა მდგომარეობის ალბათობები. მათი გამოყენებით კი ადვილად შეიძლება განვსაზღვროთ სისტემის სხვა საინტერესო მახასიათებლები. კერძოდ, შეიძლება განისაზღვროს ისეთი სიდიდე, როგორიცაა ალბათობა იმისა, რომ კლიენტი მოუმსახურებლად დატოვებს სისტემას (ρ_{გოუმ}). ეს სიდიდე გამოითვლება როგორც კლიენტთა საშუალო რიცხვის შეფარდება დროის ერთეულში რიგიდან წამსვლელ კლიენტთა

საშუალო რიცხვთან. განესაზღვროთ რიგიდან დროის ერთეულში წამსვლელ კლიენტთა საშუალო რიცხვი. ამ მიზნით, პირველ რიგში გამოეთვალათ რიგში მყოფ კლიენტთა მათემატიკური ლოდინის სიდიდე:

$$M_s = L_s = \sum_{s=1}^{\infty} s p_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} s \frac{\alpha^s}{\prod_{k=1}^s (n+k\beta)}}{\sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\prod_{k=1}^s (n+k\beta)}} \quad (7.61)$$

პოპუ პარამეტრის გამოსათვლელად საჭიროა M_s სიდიდე გაეამრავლოთ ერთი კლიენტის საშუალო “წასვლათა სიმკვრივეზე” და გავყოთ საშუალებდო სიმკვრივის ξ

$$\text{სიდიდეზე (ე. ი. } M_s \text{ უნდა გაეამრავლოთ } \frac{\lambda}{\xi} = \frac{\frac{\lambda}{\eta}}{\xi} = \frac{\beta}{\alpha}$$

კოეფიციენტზე).

მაშასადამე, შეიძლება დავწეროთ, რომ

$$P_{\text{პოპ}} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} s \frac{\alpha^s}{\prod_{k=1}^s (n+k\beta)}}{\sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\prod_{k=1}^s (n+k\beta)}}. \quad (7.62)$$

მასობრივი მომსახურების შესასწავლი X სისტემის ფარდობითი გამტარუნარიანობა (q) ხასიათდება იმის ალბათობით, რომ კლიენტი, რომელიც მოხვდა სისტემაში აუცილებლად იქნება მომსახურებული ამიტომ შეიძლება დაიწეროს, რომ

$$q=1-p_{\text{მოუშ.}}$$

(7.63)

აღსანიშნავია, რომ მასობრივი მომსახურების ლოდინიანი სისტემის გამტარუნარიანობა ერთიდაიგივე ξ და η პარამეტრების შემთხვევაში, ყოველთვის იქნება უფრო მაღალი, ვიდრე უარებიანი სისტემის გამტარუნარიანობა (რადგან სისტემაში რიგის არსებობის დროს, მოუშმსახურებელი ტოვებს სისტემას არა ყველა კლიენტი, არამედ მხოლოდ ზოგიერთები. სისტემის გამტარუნარიანობა კი იზრდება ლოდინის საერთო დროის გაზრდის შესაბამისად. კერძოდ, $M_{\text{ლოდ}} = \frac{1}{\lambda}$).

ახლა მოვახდინოთ (7.59) და (7.60) ფორმულების ანალიზი. ცხადია, რომ, როცა $\beta \rightarrow \infty$ მასობრივი მომსახურების ლოდინიანი სისტემა უნდა გადაიქცეს უარებიან სისტემად (რადგან იგულისხმება, რომ ამ შემთხვევაში კლიენტი მყისვე გადის რიგიდან).

მართლაც, (7.60) ფორმულების ანალიზი გვიჩვენებს, რომ, როცა $\beta \rightarrow \infty$ ისინი ხდება ნულის ტოლი, ხოლო რაც შეეხება (7.59) ფორმულებს, ისინი გადაიქცევიან ერლანგის ფორმულებად, მასობრივი მომსახურების უარებიანი სისტემისათვის.

თუ ანალიზის დროს განვიხილავთ მეორე უკიდურეს შემთხვევას (წმინდა ლოჯანიან სისტემას), როცა $\beta \rightarrow 0$, დავრწმუნდებით, რომ ასეთი სისტემების შემთხვევებში კლიენტები საერთოდ არ მიდიან რიგიდან და ამიტომ $p_{\text{მოუშ.}}=0$ (რაც იმას ნიშნავს, რომ ყოველ კლიენტს ატარებენ თუ გვიან მოუწევს მომსახურება).

ახლა დაეუშვათ, რომ $\alpha < 1$ და განვსაზღვროთ ზღვრული ალბათობები $p_j [0 \leq j \leq n]$ მასობრივი მომსახურების წმინდა ლოდინიანი სისტემისათვის. ამ მიზნით (7.58), (7.59) და (7.60) ფორმულებში დავუშვათ, რომ $\beta \rightarrow 0$. ამგვარად,

მივიღებთ:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^s}{n^s}} = \frac{1}{\sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}. \quad (7.64)$$

თუ (7.64)-ს გავითვალისწინებთ (7.56)-ში, მივიღებთ:

$$p_j = \frac{\frac{\alpha^j}{j!}}{\sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}, \quad [0 \leq j \leq n] \quad (7.65)$$

თუ (7.65)-ში გავითვალისწინებთ, რომ

$$j=n+s \quad (7.66)$$

მივიღებთ:

$$p_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^{n+s}}{n!n^s}}{\sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}, \quad (s \geq 0). \quad (7.67)$$

თუ გვაინტერესებს რიგში მყოფ კლიენტთა საშუალო რიცხვი M_s , იგი უნდა ვიპოვოთ (7.61) ფორმულაში $\beta \rightarrow 0$ პირობის გათვალისწინებით და მივიღებთ:

$$M_s = \frac{\frac{\alpha^{n+1}}{n!n(1-\frac{\alpha}{n})^2}}{\sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}. \quad (7.68)$$

ახლა განვიხილოთ შერეული ტიპის მასობრივი მომსახურების სისტემა, რიგის სიგრძეზე შეზღუდვით.

ამჯერად, ზემოთ განხილული სისტემისაგან (რიგში ყოფნის შეზღუდული დროის) განსხვავებით, განვიხილოთ შერეული ტიპის სისტემა შეზღუდვის სხვა სახეობით (შეზღუდვით რიგში მყოფ კლიენტთა რიცხოვნობაზე).

ვთქვათ, მოცემულია მასობრივი მომსახურების X სისტემა რიგში მყოფ კლიენტთა რიცხოვნობის შეზღუდვით. ვიგულისხმობთ, აგრეთვე, რომ კლიენტი, რომელსაც სისტემაში ყველა არხი დახვდა დაკავებული, დგება რიგში, მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ მასში იმყოფება k კლიენტზე ნაკლები. თუ რიგში მყოფ კლიენტთა რიცხვი ტოლია k -ს (k -ზე მეტი კი იგი არ შეიძლება იყოს), მაშინ სისტემაში ყველაზე ბოლოს შემოსული კლიენტი რიგში არ დგება და მოემსახურებელი ტოვებს სისტემას. ვთქვათ, აგრეთვე, რომ დანარჩენი დაშვებები კლიენტთა უმარტივეს ნაკადზე და მომსახურების დროის მანევრებიან განაწილებაზე იგივეა, რაც წინათ განხილულ შემთხვევებში, მაშინ, ბუნებრივია, მივაღებთ მასობრივი მომსახურების n არხიან სისტემას ლოღინით, რომელშიც რიგში მყოფ კლიენტთა რიცხოვნობა შემოსაზღვრულია k რიცხვით.

საჭიროა შევადგინოთ მასობრივი მომსახურების ასეთი სისტემის მდგომარეობათა აღბათობების შემცველი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა.

აქვე ხაზი უნდა გაესყას იმ გარემოებას, რომ მოცემულ შემთხვევაში სისტემის მდგომარეობათა რიცხვი იქნება სასრული (ეს იმიტომ, რომ ამ სისტემასთან დაკავშირებულ კლიენტთა საერთო რიცხვი არ შეიძლება აღემატებოდეს $n+k$ -ს, სადაც n და k შესაბამისად აღნიშნავენ მომსახურებაში და რიგში მყოფ კლიენტთა რაოდენობებს).

მასობრივი მომსახურების შესასწავლ X სისტემას, მოცემულ პირობებში, გააჩნია შეჩდები შესაჯლო მდგომარეობები:

0. x_0 — მმს-ის ყველა არხი თავისუფალია და მასში არ არის რიგი;
1. x_1 — მმს-ში დაკავებულია მხოლოდ ერთი არხი და მასში არ არის რიგი;
- ...
- j . x_j — მმს-ში დაკავებულია j არხი და მასში არ არის რიგი;

$n-1$. x_{n-1} - მმს-ში დაკავებულია $n-1$ არხი და მასში არ არის რიგი;

n . x_n - მმს-ში დაკავებულია ყველა n არხი და მასში არ არის რიგი;

$n+1$. x_{n+1} - მმს-ში დაკავებულია ყველა n არხი და მასში ერთი კლიენტი დგას რიგში;

$n+k$. x_{n+k} - მმს-ში დაკავებულია ყველა n არხი და სასში k კლიენტი დგას რიგში.

ადვილი წარმოსადგენია, რომ პირველი n განტოლება $p_n(t), p_{n-1}(t), \dots, p_{n-k+1}(t)$ ალბათობებისათვის ემთხვევა ერლანგის (7.25) განტოლებებს, ხოლო რაც შეეხება დანარჩენს, შეიძლება დავწეროთ:

$$p_n(t+\Delta t) = p_{n-1}(t)\xi\Delta t + p_n(t)(1-\xi\Delta t - \eta\Delta t) + \eta p_{n+1}(t)\Delta t. \quad (7.69)$$

(7.69)-დან შეიძლება დავწეროთ:

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \xi p_{n-1}(t) - (\xi + \eta)p_n(t) + \eta p_{n+1}(t). \quad (7.70)$$

ასევე შეგვიძლია გამოვიყვანოთ განტოლებები $p_{n+s}(t)$ ($1 \leq s < k$) ალბათობებისათვის:

$$p_{n+s}(t + \Delta t) = p_{n+s-1}(t)\xi\Delta t + p_{n+s}(t)(1 - \xi\Delta t - \eta\Delta t) + p_{n+s+1}(t)\eta\Delta t. \quad (7.71)$$

(7.71)-დან შეიძლება მივიღოთ:

$$\frac{dp_{n+s}(t)}{dt} = \xi p_{n+s-1}(t) - (\xi + \eta)p_{n+s}(t) + \eta p_{n+s+1}(t). \quad (7.72)$$

მსგავსი მსჯელობითა და გარდაქმნებით შეიძლება მივიღოთ შესასწავლი სისტემის უკანასკნელი განტოლება. მას ექნება ასეთი სახე:

$$\frac{dp_{n+k}(t)}{dt} = \xi p_{n+k-1}(t) - \eta p_{n+k}(t). \quad (7.73)$$

ამგვარად მივიღეთ შემდეგი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\xi p_0(t) + \eta p_1(t), \\
 \dots\dots\dots \\
 \frac{dp_j(t)}{dt} &= \xi p_{j-1}(t) - (\xi + j\eta)p_j(t) + \\
 &+ (j+1)\eta p_{j+1}(t), \quad [0 \leq j \leq n-1] \\
 \dots\dots\dots \\
 \frac{dp_n(t)}{dt} &= \xi p_{n-1}(t) - (\xi + n\eta)p_n(t) + n\eta p_{n+1}(t), \\
 \dots\dots\dots \\
 \frac{dp_{n+s}(t)}{dt} &= \xi p_{n+s-1}(t) - (\xi + n\eta)p_{n+s}(t) + \\
 &+ n\eta p_{n+s+1}(t), \quad [1 \leq s < k] \\
 \dots\dots\dots \\
 \frac{dp_{n+k}(t)}{dt} &= \xi p_{n+k-1}(t) - n\eta p_{n+k}(t).
 \end{aligned} \right. \quad (7.74)$$

თუ შესასწავლ სისტემაში განვიხილავთ ზღვრულ შემთხვევას, როცა $t \rightarrow \infty$ და (7.74)-ში წარმოებულებს ყველას გაუტოლებთ ნულს, მივიღებთ:

$$\left\{ \begin{aligned}
 -\xi p_0 + \eta p_1 &= 0, \\
 \dots\dots\dots \\
 \xi p_{j-1} - (\xi + j\eta)p_j + (j+1)\eta p_{j+1} &= 0, \quad (0 < j \leq n-1) \\
 \dots\dots\dots \\
 \xi p_{n-1} - (\xi + n\eta)p_n + n\eta p_{n+1} &= \zeta, \\
 \dots\dots\dots \\
 \xi p_{n+s-1} - (\xi + n\eta)p_{n+s} + n\eta p_{n+s+1} &= 0, \quad [1 \leq s < k] \\
 \dots\dots\dots \\
 \xi p_{n+k-1} - n\eta p_{n+k} &= 0.
 \end{aligned} \right. \quad (7.75)$$

(7.75)-ს უნდა დაემატოს შემდეგი პირობა:

$$\sum_{j=0}^{n+k} p_j = 1. \quad (7.76)$$

(7.75) განტოლებების ამოხსნის (მსგავსად წინა შემთხვევებისა) შედეგად მივიღებთ:

$$p_j = \frac{\frac{\alpha^j}{j!}}{\sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^k \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}, \quad [0 \leq j \leq n] \quad (7.77)$$

$$p_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^n}{n!} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}{\sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^k \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}, \quad [1 \leq s \leq k] \quad (7.78)$$

ადვილად წარმოსადგენია, რომ მოცემულ შემთხვევაში ალბათობა იმისა, რომ კლიენტი მოუმსახურებლად დატოვებს სისტემას (p_{n+k}), ტოლია p_{n+k} ალბათობისა (სისტემაში რიგში უკვე დგას k განაცხადი).

ასევე ადვილად წარმოსადგენია, რომ (7.77) და (7.78) ფორმულები მიიღება (7.59) და (7.60) ფორმულებიდან, თუ მათში დაეუშვებთ, რომ β სიდიდე ტოლია ნულის და s სიმბოლოს აჯამებას შევზღუდავთ k ზედა საზღვრით.

§4. კოლმოგოროვის განტოლებათა სისტემა, როგორც მასობრივი მომსახურების სფეროში მიმდინარე პროცესების მოდელირების შედეგი

მასობრივი მომსახურების სფეროში მიმდინარე პროცესების მოდელირების ერთ-ერთ მნიშვნელოვან შედეგს წარმოადგენს კოლმოგოროვის განტოლებათა სისტემა. ეს უკანასკნელი, ფართოდ გამოიყენება მასობრივი მომსახურების სისტემებისა და მათში მიმდინარე პროცესების ანალიზის, მართვისა და სრულყოფის საქმეში, როგორც თეორიულ, ასევე პრაქტიკულ ასპექტში.

კოლმოგოროვის განტოლებათა სისტემის მიღებამდე, პირველ რიგში, შემოვიდეთ ზოგიერთი დაშვებები.

სიმარტივისათვის ვიგულისხმობთ, რომ მოცემული გვაქვს მარკოვის არაერთგვაროვანი ჯაჭვი. ვაჩვენოთ, თუ როგორ შეიძლება განისაზღვროს სისტემის მდგომარეობა-

თა ალბათობები - $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$, დროის ნებისმიერი t მომენტისათვის ($p_i(t)$ -აღნიშნავს ალბათობას იმისა, რომ დროის t მომენტში S სისტემა იმყოფება S_i მდგომარეობაში).

დავუშვათ, რომ განსახილველი S სისტემა დროის რაღაც t მომენტში არის რაღაც S_m მდგომარეობაში $p_m(t)$ ალბათობით.

t -ს მივცეთ Δt ნაზრდი და ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ $t + \Delta t$ დროის მომენტში, S სისტემა არის იმავე S_m მდგომარეობაში. ეს, მათემატიკურად, შეიძლება გამოისახოს ასეთნაირად:

$$p_m(t + \Delta t) = p_1(t) \lambda_{1m} \Delta t + \dots + p_m(t) \lambda_{mm} \Delta t + \dots + p_n(t) \lambda_{nm} \Delta t, \quad (7.79)$$

სადაც

λ_{mm} - არის ისეთი ხდომილობის მოხდენის ალბათობის სიმკვრივე, რომელიც გვინტერესებს, რომ S სისტემა დროის მოცემულ t მომენტში იყო S_m მდგომარეობაში და Δt დროის გაელის შემდეგ (ანუ $t + \Delta t$ დროით მომენტში) იგი აღმოჩნდა ისევ იმავე S_m მდგომარეობაში.

λ_{im} - არის ისეთი ხდომილობის მოხდენის ალბათობის სიმკვრივე, რომელიც გვინტერესებს, რომ S სისტემა დროის მოცემულ t მომენტში იყო $S_i (i \neq m)$ მდგომარეობაში და Δt დროის გაელის შემდეგ (ანუ $t + \Delta t$ დროით მომენტში) იგი აღმოჩნდა S_m მდგომარეობაში. სხვანაირად, იგი ასახავს ისეთი ხდომილობის მოხდენის ალბათობის სიმკვრივეს, რომელიც გვინტერესებს, რომ S სისტემა Δt დროის გაელის შემდეგ, მისი ნებისმიერი მდგომარეობიდან (გარდა S_m მდგომარეობისა) გადადის S_m მდგომარეობაში.

$\lambda_{mm} \Delta t$ ალბათობა შეიძლება ჩაწერილ იქნეს S სისტემის S_m მდგომარეობიდან, ყველა სხვა მდგომარეობაში (გარდა S_m მდგომარეობისა) გადასვლის ალბათობის ($\lambda_{mj} \Delta t$) საშუალებით, შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \lambda_{mm} \Delta t &= 1 - \lambda_{m1} \Delta t - \lambda_{m2} \Delta t - \dots \\ \lambda_{m0} \Delta t &= \lambda_{m0+1} \Delta t - \dots - \lambda_{m0n} \Delta t, \end{aligned} \quad (7.80)$$

რადგან $\lambda_{ij} \Delta t$ ($j=1, 2, \dots, n$) ყველა ალბათობის შესაბამისი ხდომილობების ერთობლიობა ქმნის ხდომილობათა სრულ სისტემას.

თუ (7.80)-ს გაეითვალისწინებთ (7.79)-ში და მას შესაბამისად გარდაექმნით, მივიღებთ:

$$\frac{p_m(t + \Delta t) - p_m(t)}{\Delta t} = p_1(t)\lambda_{1m} + \dots - p_m(t)\lambda_{m1} - \dots - p_m(t)\lambda_{mn} + \dots + p_n(t)\lambda_{nm} \quad (7.81)$$

თუ (7.81) ტოლობის ორივე მხარეში ერთდროულად გადავალთ ზღვარზე $\Delta t \rightarrow 0$ - სათვის, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \frac{dp_m(t)}{dt} &= p_1(t)\lambda_{1m} + \dots - p_m(t)\lambda_{m1} - \dots \\ &\dots - p_m(t)\lambda_{mn} + \dots + p_n(t)\lambda_{nm} \end{aligned} \quad (7.82)$$

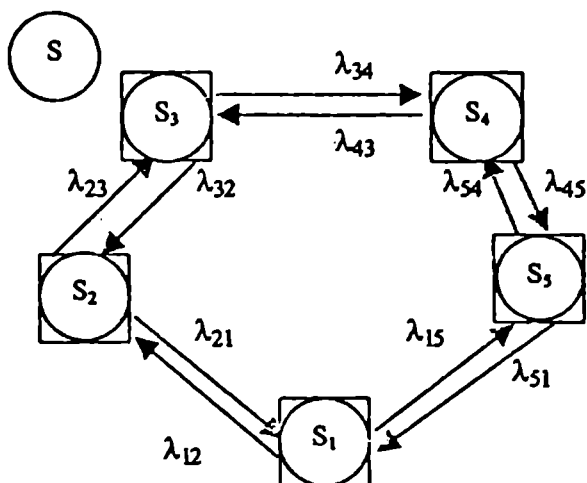
(7.82) წარმოადგენს დიფერენციალურ განტოლებას.

ანალოგიური განტოლებები შეიძლება ჩაწერილ იქნეს S სისტემის ყველა მდგომარეობის ალბათობებისათვის: $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_n(t)$. ამ გზით, მივიღებთ დიფერენციალურ n განტოლებათა სისტემას, n უცნობით.

(7.82) ტიპის განტოლებას უწოდებენ კოლმოგოროვის განტოლებას, ხოლო ზემოთ ხსენებულ დიფერენციალურ n განტოლებათა სისტემას, n უცნობით, უწოდებენ კოლმოგოროვის განტოლებათა სისტემას.

კოლმოგოროვის განტოლებათა სისტემას, ინტეგრირების დროს, ემატება პირობა $p_1(t) + p_2(t) + \dots + p_n(t) = 1$ და ამ გზით, შეიძლება განისაზღვროს S სისტემის ყველა მდგომარეობის შესაბამისი ალბათობები - $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_n(t)$.

ახლა, განვიხილოთ კოლმოგოროვის განტოლებების ზოგადი სახით შედგენის მაგალითი, რომელიც ასახავს ქვემოთ მოყვანილ 7.7 ნახაზზე გამოხატული S სისტემის ფუნქციონირების პროცესს.



ნახ. 7. 7

ეთქვათ, მოცემულია S სისტემა, რომელიც დროის ნებისმიერ t მომენტში შეიძლება იყოს S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 მდგომარეობებიდან ერთ-ერთში. λ_{ij} ($i=1,2,3,4,5 \wedge j=1,2,3,4,5$) – აღნიშნავს ალბათობათა სიმკვრივეებს.

თუ, მოცემულ შემთხვევაში, კოლმოგოროვის განტოლებათა სისტემის შესადგენად, ეიხელმძღვანელებთ ზემოთ განხილული წესებით და გარდაქმნებით, მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dP_1(t)}{dt} &= \lambda_{21}P_2(t) + \lambda_{51}P_5(t) - (\lambda_{12} + \lambda_{15})P_1(t); \\ \frac{dP_2(t)}{dt} &= \lambda_{12}P_1(t) + \lambda_{32}P_3(t) - (\lambda_{21} + \lambda_{23})P_2(t); \\ \frac{dP_3(t)}{dt} &= \lambda_{23}P_2(t) + \lambda_{43}P_4(t) - (\lambda_{32} + \lambda_{34})P_3(t); \\ \frac{dP_4(t)}{dt} &= \lambda_{34}P_3(t) + \lambda_{54}P_5(t) - (\lambda_{43} + \lambda_{45})P_4(t); \\ \frac{dP_5(t)}{dt} &= \lambda_{15}P_1(t) + \lambda_{45}P_4(t) - (\lambda_{51} + \lambda_{54})P_5(t); \\ P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) + P_4(t) + P_5(t) &= 1. \end{aligned} \right. \quad (7.83)$$

ამ განტოლებებს კიდევ უნდა დაემატოს საწყისი პირობები. ასე, მაგალითად, თუ S სისტემა, დროის $t=0$ მომენტში, იმყოფება S_1 მდგომარეობაში, მაშინ საწყის პირობებს გააჩნიათ შემდეგი სახე:

$$p_1(0) = 1; p_2(0)=p_3(0)=p_4(0)=p_5(0) = 0. \quad (7.84)$$

როგორ ამოვხსნათ მსგავსი ტოლობები? საზოგადოდ წრფივი დიფერენციალური განტოლებები მუდმივი კოეფიციენტებით შეიძლება ამოვხსნილ იქნეს ანალიზურად, მაგრამ ეს მოსახერხებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა განტოლებების რიცხვი არ აღემატება ორს (ან ზოგჯერ — სამს). თუ განტოლებათა რიცხვი მეტია ორზე, მაშინ მათ, ჩვეულებრივ ხსნიან რიცხობრივად — ხელით, ან კომპიუტერის დახმარებით.

ამგვარად, კოლმოგოროვის განტოლებათა (7.83) სისტემა იძლევა შესაძლებლობას ვიპოვოთ ყველა ალბათობა, როგორც დროის ფუნქციები.

ახლა განვიხილოთ საკითხი იმის შესახებ, თუ რა მოუვა ალბათობებს, როცა $t \rightarrow \infty$. საინტერესოა $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$, $p_4(t)$ და $p_5(t)$ იქნება თუ არა კრებადი, რომელიმე ზღერის მიმართ? თუ ასეთი ზღერები არსებობენ და ისინი არ არიან დამოკიდებული სისტემის საწყისი მდგომარეობისაგან, მაშინ მათ უწოდებენ სისტემის *მდგომარეობის ფინალურ ალბათობებს*.

ვთქვათ, *ფინალური ალბათობები არსებობს, მაშინ*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_i(t) \equiv P_i - \text{ით } (i = 1, 2, 3, 4, 5). \quad (7.85)$$

p_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) უკვე არის რიცხვები. ბუნებრივია, რომ

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1.$$

ფინალური ალბათობების შემოტანა უნდა გვესმოდეს ასეთნაირად: S სისტემაში, იმ დროს, როცა $t \rightarrow \infty$, მყარდება სასაზღვრო სტაციონარული რეჟიმი, რომლის დროსაც სისტემა შემთხვევითად იცვლის თავის მდგომარეობას და მათი ალბათობები უკვე არ არის დროზე დამოკიდებული. S სისტემის S_1 -ური მდგომარეობის ფინალურ ალბათობას შეიძლება მივცეთ ასეთი განმარტება: იგი არის S სისტემის S_1 -ურ მდგომარეობაში ყოფნის საშუალო პირობითი დრო. ფინალური ალბათობების გამოსათვლელად იყენებენ იმ გარემოებას, რომ ისინი მუდმივი სიდიდეებია და მათი წარმოებულები შესაბამისად ტოლი უნდა იყოს ნულისა.

თუ აღნიშნულს გავითვალისწინებთ (7.83) განტოლებათა სისტემაში, მივიღებთ:

$$\begin{cases} (\lambda_{12} + \lambda_{15}) \cdot p_1 = \lambda_{21} \cdot p_2 + \lambda_{51} \cdot p_5 \\ (\lambda_{21} + \lambda_{23}) \cdot p_2 = \lambda_{12} \cdot p_1 + \lambda_{32} \cdot p_3 \\ (\lambda_{32} + \lambda_{34}) \cdot p_3 = \lambda_{23} \cdot p_2 + \lambda_{43} \cdot p_4 \\ (\lambda_{43} + \lambda_{45}) \cdot p_4 = \lambda_{34} \cdot p_3 + \lambda_{54} \cdot p_5 \\ (\lambda_{51} + \lambda_{54}) \cdot p_5 = \lambda_{15} \cdot p_1 + \lambda_{45} \cdot p_4 \end{cases} \quad (7.86)$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \quad (7.87)$$

(7.86) განტოლებათა სისტემა წარმოადგენს ხუთ განტოლებას ხუთი უცნობით. მაგრამ ამ სისტემის განტოლებებიდან არცერთს არ გააჩნია თავისუფალი წევრი (ისინი ერთგვაროვან განტოლებებს წარმოადგენს). ამიტომ მის ამოსახსნელად უნდა გამოვიყენოთ (7.87) ტოლობა (ამასთან, (7.86) სისტემიდან ერთი რომელიმე განტოლება შეგვიძლია არ გამოვიყენოთ).

ამ სისტემის ამოხსნის შიშველი მივიღებთ რა p_1, p_2, p_3, p_4 და p_5 ფინალური აღბათობების მნიშვნელობებს, მათი დახმარებით შეიძლება შეფასებულ იქნეს S სისტემის მუშაობის საშუალო ეფექტიანობა, სარემონტო ორგანოების დატვირთვის ხანგრძლივობა და სხვა.

ამ თავის ბოლოს მასობრივი მომსახურების თეორიის ძირითადი დებულებების ეკონომიკაში პრაქტიკული გამოყენების საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ ბანკში ვალუტის გადამცვლელი საღაროების რაოდენობისა და მათი მუშაობის რეჟიმის ოპტიმიზაციის ამოცანა

VII თავის დამატება – ბანკში ვალუტის გადამცვლელი საღაროების რაოდენობისა და მათი მუშაობის რეჟიმის ოპტიმიზაციის ამოცანა

ვთქვათ, მოცემულია ბანკი, რომელშიც არსებობს ვალუტების ერთმანეთზე გადამცვლელი ორი საღარო. ვი-

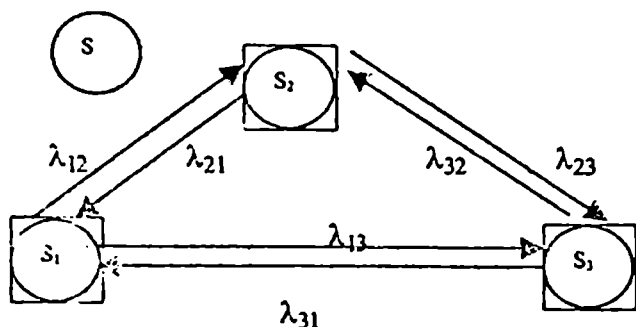
გულისხმობს, რომ ბანკში სხვადასხვა დროს თავისუფლად შედიან ვალუტის გადაცემის მსურველი ადამიანები, მიდიან სალაროებთან და ახორციელებენ ვალუტის გადაცემის მათთვის სასურველ პროცესს. ამ დროს ბანკში შესულ და გადამცემელ სალაროებთან ვალუტის გადაცემის სურვილით მისულ ადამიანთა (ანუ კლიენტთა) ერთობლიობა ქმნის *კლიენტთა ნაკადს*. ბანკში არსებული გადამცემელი სალაროები კი ქმნის *მომსახურების არხებს* (ჩვენს შემთხვევაში, ადგილი გვაქვს ორარხიან მასობრივი მომსახურების სისტემასთან).

ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ საჭიროა მასობრივი მომსახურების მოცემული სისტემის მუშაობის ისეთი რეგულირება, რომელიც ხელს შეუწყობს კლიენტთა ეფექტიან მომსახურებას.

განსახილველი ამოცანა წარმოადგენს ამ თავის თეორიულ ნაწილში მოცემული კოლმოგოროვის განტოლების მაგალითის კერძო შემთხვევას.

თუ განსახილველ ამოცანაში მმს-ს ავლნიშნავთ S -ით, მას შეიძლება გააჩნდეს შემდეგი სამი მდგომარეობა: S_1 , S_2 და S_3 . S_1 – *ორივე სალარო დაკავებულია კლიენტების მომსახურებით*; S_2 – *ერთი სალარო დაკავებულია კლიენტის მომსახურებით, ხოლო მეორე სალარო კი თავისუფალია*; S_3 – *ორივე სალარო არის თავისუფალი*;

S სისტემის ფუნქციონირების პროცესი სქემატურად ასე შეიძლება გამოისახოს:



ნახ. 7. 8

სადაც λ_{ij} ($i=1,2,3; j=1,2,3$) – წარმოადგენს S სისტემის S_i -ური მდგომარეობიდან S_j მდგომარეობაში, რაც შეიძლება დროის მცირე მონაკვეთში, გადასვლის ალბათობას.

ამ ამოცანის შესაბამისი კოლმოგოროვის განტოლებათა სისტემა შეიძლება შედგენილ იქნეს (7.83)–(7.84) განტოლებათა სისტემის შესაბამისად. კერძოდ,

$$\begin{cases} \frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda_{21}P_2(t) + \lambda_{31}P_3(t) - (\lambda_{12} + \lambda_{13}) \cdot P_1(t) \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_{12}P_1(t) + \lambda_{32}P_3(t) - (\lambda_{21} + \lambda_{23}) \cdot P_2(t) \\ \frac{dP_3(t)}{dt} = \lambda_{13}P_1(t) + \lambda_{23}P_2(t) - (\lambda_{31} + \lambda_{32}) \cdot P_3(t) \end{cases} \quad (7.86)$$

მივიღეთ განტოლებათა სისტემა, რომელსაც შეიძლება დავეუმატოთ შემდეგ პირობები:

$$p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1, \quad (7.89)$$

$$p_1(0) = 1; p_2(0) = p_3(0) = 0. \quad (7.90)$$

თუ (7.88) განტოლებათა სისტემაში გავითვალისწინებთ იმ დაშვებებს, რაც გამოვიყენეთ (7.83) სისტემისათ-

ვის და შემოვიღებთ p_i ($i=1,2,3$) ფინალურ აღბათობებს (სადაც $P_i \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} P_i(t)$), მაშინ (7.88) სისტემა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\begin{cases} (\lambda_{12} + \lambda_{13}) \cdot p_1 = \lambda_{21} \cdot p_2 + \lambda_{31} \cdot p_3 \\ (\lambda_{21} + \lambda_{23}) \cdot p_2 = \lambda_{12} \cdot p_1 + \lambda_{32} \cdot p_3 \\ (\lambda_{31} + \lambda_{32}) \cdot p_3 = \lambda_{13} \cdot p_1 + \lambda_{23} \cdot p_2 \end{cases} \quad (7.91)$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \quad (7.92)$$

ეთქვათ, მოცემულია λ_{ij} ($i=1,2,3, j=1,2,3$) - მაჩვენებლების რიცხვითი მნიშვნელობები:

$$\lambda_{12} = \lambda_{23} = \lambda_{31} = \frac{1}{3} \quad \text{და}$$

$$\lambda_{13} = \lambda_{32} = \frac{1}{4}, \quad \lambda_{21} = \frac{1}{2}.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს გაეითვალისწინებთ (7.91) განტოლებათა სისტემაში, მივიღებთ:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \cdot p_1 = \frac{1}{2} \cdot p_2 + \frac{1}{3} \cdot p_3 \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \cdot p_2 = \frac{1}{3} \cdot p_1 + \frac{1}{4} \cdot p_3 \\ \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \cdot p_3 = \frac{1}{4} \cdot p_1 + \frac{1}{3} \cdot p_2 \end{cases} \quad (7.93)$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1. \quad (7.94)$$

(7.93)-დან მისი გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ:

$$\begin{cases} 7 \cdot p_1 = 6 \cdot p_2 + 4 \cdot p_3 \\ 10 \cdot p_2 = 4 \cdot p_1 + 3 \cdot p_3 \\ 7 \cdot p_3 = 3 \cdot p_1 + 4 \cdot p_2 \end{cases} \quad (7.95)$$

თუ (7.94)-დან განვსაზღვრავთ $p_3 = 1 - (p_1 + p_2)$ და ჩავსვავთ (7.95)-ში, მივიღებთ:

$$\begin{cases} 7 \cdot p_1 = 6 \cdot p_2 + 4 \cdot (1 - p_1 - p_2) \Rightarrow 11 \cdot p_1 = 2 \cdot p_2 + 4 \\ 10 \cdot p_2 = 4 \cdot p_1 + 3 \cdot (1 - p_1 - p_2) \Rightarrow p_1 = 13 \cdot p_2 - 3 \end{cases} \quad (7.96)$$

$$(7.96)\text{-დან } \frac{2 \cdot p_2 + 4}{11} = 13 \cdot p_2 - 3$$

$$2 \cdot p_2 + 4 = 143 \cdot p_2 - 33$$

$$141 \cdot p_2 = 37$$

აქედან ვღებულობთ, რომ

$$\boxed{p_2 = \frac{37}{141}} \quad p_1 = 13 \frac{37}{141} - 3 = \frac{481 - 423}{141} = \frac{58}{141} \Rightarrow \boxed{p_1 = \frac{58}{141}}$$

$$p_3 = 1 - \left(\frac{37}{141} + \frac{58}{141} \right) = 1 - \frac{95}{141} = \frac{46}{141} \Rightarrow \boxed{p_3 = \frac{46}{141}}$$

მიღებულიდან შეიძლება დავწეროთ, რომ

$$\boxed{p_1 \approx 0,41} ; \quad \boxed{p_2 \approx 0,26} ; \quad \boxed{p_3 \approx 0,33} .$$

მაშასადამე, გამოდის, რომ ზღერული სტაციონარული რეჟიმის პირობებში, S სისტემა ამ რეჟიმში ყოფნის დროის 41%-ს გაატარებს S₁ მდგომარეობაში (როცა ორივე საღარო დაკავებულია კლიენტების მომსახურებით), 26%-ს – S₂ მდგომარეობაში (როცა ერთი საღარო დაკავებულია კლიენტის მომსახურებით, ხოლო მეორე კი თავისუფალია) და 33%-ს – S₃ მდგომარეობაში (როცა ორივე საღარო თავისუფალია).

ამ ფინალური აღბათობების მნიშვნელობების დახმარებით შესაძლებელია განისაზღვროს სისტემის მუშაობის საშუალო ეფექტიანობა.

ეთქვათ, S სისტემას S₁ მდგომარეობაში (როცა ორივე საღარო დაკავებულია კლიენტების მომსახურებით) დროის ერთეულში (დაეუშვათ 1 საათში) მოაქვს 10 ლარის ტოლი შემოსავალი, S₂ მდგომარეობაში (როცა ერთი საღარო დაკავებულია, ხოლო მეორე კი თავისუფალი) – 5 ლარის ტოლი შემოსავალი და S₃ მდგომარეობაში (როცა ორივე საღარო თავისუფალია) – არ მოაქვს შემოსავალი (იგი ტოლია 0-ის). მაშინ, ზღერულ სტაციონარულ რეჟიმში, S სისტემის საშუალო შემოსავალი, დროის ერთეულში, ტოლი იქნება:

$$Z = 0,41 \cdot 10 + 0,26 \cdot 5 + 0,33 \cdot 0 = 4,1 + 1,3 = 5,4 \text{ (ლარი/სთ-ში).}$$

თავი VIII. კორელაციური ანალიზის მეთოდის
ეკონომიკაში გამოყენების ზოგადი
პრინციპები

§1. კორელაციის თეორიის ელემენტები

ორი სიდიდე (ან მაჩვენებელი) შეიძლება საზოგადოდ იყოს ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი ან დამოკიდებული. თუ ორი სიდიდე არის ერთმანეთზე დამოკიდებული, მაშინ დამოკიდებულება მათ შორის შეიძლება იყოს ფუნქციონალური, როდესაც ერთი სიდიდის რაიმე მნიშვნელობას შეესაბამება მეორე სიდიდის გარკვეული მნიშვნელობა (ან მნიშვნელობები) და სტატისტიკური (ალბათური) ნუ კორელაციური, როდესაც ერთი სიდიდის რაიმე მნიშვნელობას შეესაბამება მეორე სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლე, შესაბამისი ალბათობებით. მაშასადამე, გამოდის, რომ კორელაციური დამოკიდებულების დროს ერთი სიდიდის ცვლილება იწვევს მეორე სიდიდის კანაწილების კანონის ცვლილებას.

მოვიყვანოთ ფუნქციონალური და კორელაციური დამოკიდებულების მაგალითები.

ცნობილია, რომ განვლილი გზა დროის ფუნქციას წარმოადგენს და ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ t დროსა და S მანძილს შორის არსებობს გარკვეული ფუნქციონალური დამოკიდებულება

$$S = a \frac{t^2}{2}.$$

ამ ფუნქციაში t -ს ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება S - ის რაღაც სათანადო მნიშვნელობა.

ახლა, ეთქვათ, მოცემულია X სიდიდე, რომელიც გამოხატავს შემთხვევით აღებული ადამიანის სხეულის სიგრძეს და Y სიდიდე, რომელიც გამოხატავს იმავე ადამიანის სხეულის წონას. ცხადია, რომ X და Y სიდიდეები ერთმანეთის მიმართ იმყოფება გარკვეულ

კორელაციურ დამოკიდებულებაში. ეს დამოკიდებულება იმით გამოიხატება, რომ ადამიანის სხეული რაც უფრო გრძელია, იგი საზოგადოდ, მით უფრო მეტს იწონის.

ეთქვათ, მოცემულია ორი X და Y სიდიდე. თუ $X=x$ მნიშვნელობას შევესაბამებთ Y -ის საშუალო მნიშვნელობას $\bar{Y}_x$, მაშინ ცხადია, რომ ის იქნება ფუნქცია X -ისა და შეიძლება ჩაიწეროს ასეთნაირად $\bar{Y}_x = f(X)$, რომელსაც უწოდებენ რეგრესიის განტოლებას Y -ისა X -ის მიმართ. ანალოგიურად თუ $Y=y$ მნიშვნელობას შევესაბამებთ X -ის საშუალო მნიშვნელობას $\bar{X}_y$ -ს, მივიღებთ $\bar{X}_y = \varphi(Y)$ დამოკიდებულებას, რომელსაც უწოდებენ რეგრესიის განტოლებას, X -ისა Y -ის მიმართ.

კორელაციური დამოკიდებულების ანალიზის დროს, პირველი რიგის ამოცანას წარმოადგენს: დადგინდეს კორელაციური დამოკიდებულების ფორმა, ანუ რეგრესიის ფუნქციების სახეები. თუ რეგრესიის ფუნქციები $f(X) = AX + B$ და $\varphi(Y) = CY + D$ წრფივი ფუნქციებია, მაშინ შესაბამის გრაფიკებს ეწოდება. რეგრესიის წრფეები და საქმე გვექნება წრფივ კორელაციურ დამოკიდებულებასთან.

ამ ფორმულებში, A საკუთხო კოეფიციენტს ეწოდება რეგრესიის კოეფიციენტი Y -ისა X -ის მიმართ და აღინიშნება ρ_{yx} ით, ხოლო C -ს კი ეწოდება რეგრესიის კოეფიციენტი X -ისა Y -ის მიმართ და აღინიშნება ρ_{xy} ით.

კორელაციური დამოკიდებულების ანალიზის დროს, მეორე რიგის ამოცანას წარმოადგენს: შეფასდეს ამ სიდიდეებს შორის კორელაციური დამოკიდებულების სიძლიერე. Y სიდიდის კორელაციური დამოკიდებულების სიძლიერე X სიდიდის მიმართ, ხასიათდება Y სიდიდის გაფანტულობით $\bar{Y}_x$ საშუალოს მიმართ. რაც უფრო დიდია გაფანტულობა, მით უფრო სუსტია დამოკიდებულება Y -ისა X -ის მიმართ. ანალოგიურად განიმარტება დამოკიდებულების სიძლიერე X -ისა Y -ის მიმართ.

ახლა, განვიხილოთ წრფივი კორელაციური დამოკიდებულება და გამოვიყენოთ რეგრესიის წრფის განტოლებები.

საზოგადოდ, რეგრესიის წრფის განტოლებები, როგორც უკვე აღინიშნა ზემოთ, შეიძლება ჩაიწეროს ასეთი სახით: $Y = Ax + B$ და $X = Cy + D$. საჭიროა ვიპოვოთ A , B , C და D კოეფიციენტების მნიშვნელობები. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $E(x)=a$, $E(y)=b$, $D(x)=\sigma_x^2$ და $D(y)=\sigma_y^2$.

პირველ რიგში, მივიღოთ რეგრესიის წრფის განტოლება Y -ისა X -ის მიმართ, ე.ი. განვსაზღვროთ A და B კოეფიციენტების მნიშვნელობები $y = Ax + B$ დამოკიდებულებისათვის.

თუ ვიპოვიოთ $E(y) = E(Ax + B)$ და $E(xy) = E(Ax^2 + Bx)$ და მათგან შევადგენთ განტოლებათა სისტემას, მივიღებთ:

$$\begin{cases} b = A \cdot a + B \\ E(xy) = A \cdot E(x^2) + B \cdot a \end{cases}$$

პირველი განტოლებიდან $B = b - A \cdot a$. თუ მას შევიტანთ მეორე განტოლებაში, მივიღებთ:

$$E(xy) = A E(x^2) + (b - A \cdot a) \cdot a, \text{ აქედან}$$

$$A = \frac{E(XY) - ab}{E(X^2) - a^2}.$$

მიღებულ კოეფიციენტს უწოდებენ რეგრესიის კოეფიციენტს y -ისა x -ის მიმართ და აღინიშნება $\rho(y/x)$ -ით.

თუ გავიხსენებთ დისპერსიის განმარტებას $E(x^2) - a^2 = D(x) = \sigma_x^2$, გვექნება

$$\rho(y/x) = \frac{E(XY) - a \cdot b}{\sigma_x^2} \quad \text{და} \quad B = b - \rho(y/x) \cdot a$$

თუ მათ გავითვალისწინებთ რეგრესიის წრფის თავ-
დაპირველ გამოსახულებაში, მივიღებთ:

$$y = \rho(Y/X) (x - a) + b.$$

ანალოგიურად შეიძლება მიღებულ იქნეს რეგრესიის
წრფის განტოლება, x -ისა y -ის მიმართ.

$$x = \rho(X/Y) (y - b) + a, \text{ სადაც}$$

$$\rho(X/Y) = \frac{E(XY) - a \cdot b}{\sigma_y^2}.$$

თუ რეგრესიის წრფეების სიმეტრიული ჩაწერის
მიზნით შემოვიღებთ კოეფიციენტს:

$$\tau = \frac{E(XY) - a \cdot b}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad (\text{სადაც } \tau \text{ არის}$$

კორელაციის კოეფიციენტი და

$$\rho(Y/X) = \tau \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \quad \text{მაშინ}$$

რეგრესიის წრფის განტოლებებს ექნება შემდეგი
სახე:

$$\begin{cases} \frac{y-b}{\sigma_y} = \tau \frac{x-a}{\sigma_x} \\ \frac{y-b}{\sigma_y} = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{x-a}{\sigma_x} \end{cases} \quad (8.1)$$

კორელაციის კოეფიციენტი (τ) წარმოადგენს რა x
და y სიდიდეებს შორის დამოკიდებულების სიმკლავრის
საზომს, იგი მოთავსებულია $[-1, 1]$ შუალედში,

ე.ი. $-1 \leq \tau \leq 1.$

როცა τ უდრის -1 ან $+1$ -ს, მაშინ x და y ერთმანეთთან დაკავშირებულია ზუსტი წრფივი კავშირით და პირიქით, თუ x და y სიდიდეები ერთმანეთთან დაკავშირებულია წრფივი კავშირით, მაშინ მათთვის კორელაციის კოეფიციენტი იქნება -1 ან $+1$.

როცა $\tau=0$ -ს, მაშინ x და y სიდიდეთა შორის წრფივი კორელაციური კავშირი არ არსებობს, მაგრამ მათ შორის შესაძლებელია მრუდწირული კორელაციური კავშირის არსებობა.

როცა $|\tau|=1$, შესაბამის ორ სიდიდეს შორის არსებული კორელაციური დამოკიდებულება გადადის ფუნქციონალურ დამოკიდებულებაში.

შემთხვევითი სიდიდეების წრფივი გარდაქმნით კორელაციის კოეფიციენტის მნიშვნელობა არ იცვლება.

ამ დებულების დასამტკიცებლად ვიგულისხმობთ, რომ მოცემულია ორი შემთხვევითი X და Y სიდიდეები. ვთქვათ, მათ შორის არსებობს კორელაციური კავშირი. მათი კორელაციის კოეფიციენტი იყოს τ_{xy} . მაშინ ცხადია, რომ

$$\tau_{xy} = \frac{E(xy) - E(x) \cdot E(y)}{\sqrt{D(x)} \cdot \sqrt{D(y)}}.$$

გარდა ამისა, ვიგულისხმობთ, რომ $U=aX + b$ და $V=cY + d$ სიდიდეებს შორის კორელაციის კოეფიციენტი იქნება τ_{uv} ,

$$\text{გ.ი.} \quad \tau_{uv} = \frac{E(uv) - E(u) \cdot E(v)}{\sqrt{D(u)} \cdot \sqrt{D(v)}}.$$

უნდა დამტკიცდეს, რომ

$$\tau_{xy} = \tau_{uv}.$$

ამის დასამტკიცებლად, ავიღოთ τ_{uv} კოეფიციენტის მნიშვნელობა და გარდაექმნათ იგი:

$$\begin{aligned}
 r_{uv} &= \frac{E[(ax+b)(cy+d)] - E(ax+b) \cdot E(cy+d)}{\sqrt{D(ax+b)} \cdot \sqrt{D(cy+d)}} = \\
 &= \frac{E(acxy + adx + bcy + bd) - [aE(x) + b][cE(y) + d]}{\sqrt{a^2 D(x) + D(b)} \cdot \sqrt{c^2 D(y) + D(d)}} = \\
 &= \frac{acE(xy) + adE(x) + bcE(y) + bd - acE(x)E(y) - adE(x) - bcE(y) - bd}{ac\sqrt{D(x)} \cdot \sqrt{D(y)}} = \\
 &= \frac{ac[E(xy) - E(x) \cdot E(y)]}{ac\sqrt{D(x)} \cdot \sqrt{D(y)}} = \frac{a\sqrt{D(x)} \cdot c\sqrt{D(y)} [E(xy) - E(x) \cdot E(y)]}{\sqrt{D(x)} \cdot \sqrt{D(y)}} = r_{xy} \text{ რ.დ.გ.}
 \end{aligned}$$

ორ სიდიდეს შორის, წრფივი კორელაციური კავშირის გარდა, არსებობს, აგრეთვე, არაწრფივი კორელაციური კავშირი.

არაწრფივი კორელაციური კავშირის ამსახველ უმარტივეს მრუდებს წარმოადგენს მეორე რიგის პარაბოლა:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

და მესამე რიგის პარაბოლა:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

საზოგადოდ, ნებისმიერი სახის დამოკიდებულება ორ ცვლადს შორის შეიძლება აღწერილ იქნეს *n*-ური რიგის პარაბოლის საშუალებით, რომელსაც შეესაბამება ასეთი განტოლება:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n.$$

კორელაციურ ანალიზში პარაბოლების ანალიზი ურად გამოიყენება შემდეგი სახის ჰიპერბოლური განტოლება:

$$Y = a_0 + a_1 \frac{1}{x} + a_2 \frac{1}{x^2} + a_3 \frac{1}{x^3} + \dots + a_n \frac{1}{x^n}.$$

კორელაციური ანალიზის დროს, ეკონომიკურ კვლევაში, ხშირად, გამოიყენება, აგრეთვე, ეგრეთწოდებული *მაჩვენებლიანი ფუნქცია*:

$$y = a \cdot b^x.$$

სიდიდეებს შორის არსებული კავშირის სიმჭიდროვე, არაწრფივი (ანუ მრუდწირული) კორელაციური დამოკიდებულების დროს, შეიძლება გაზომილი იყოს *კორელაციის ინდექსის (i) საშუალებით*, რომელიც გამოითვლება კორელაციის კოეფიციენტის (რომელიც ითვლება წრფივი კორელაციური კავშირის დროს) ანალოგიურად

$$i = \sqrt{\frac{S_y^2 - S_{yx}^2}{S_y^2}},$$

სადაც

S_{yx}^2 - არის y -ის ფაქტიურ და მის (მრუდწირული განტოლების საშუალებით) გათვლილ მნიშვნელობებს შორის გადახრის საშუალო კვადრატული სიდიდე;

S_y^2 - არის y -ის ფაქტიურ მნიშვნელობებსა და მათ საშუალო არითმეტიკულს შორის გადახრის საშუალო კვადრატული სიდიდე.

კორელაციის ინდექსი (i) თავისი სიდიდის მიხედვით იცვლება 0-დან 1-მდე. ამ ინდექსს ცალსახად განსაზღვრული ნიშანი არ გააჩნია, რადგან ის მრუდწირული ნაწილების (ნაკვეთების) მიხედვით იცვლება. *ერთ ნაწილში* ის შეიძლება იყოს *დადებითი*, ხოლო *მეორეში* კი *-უარყოფითი*.

კორელაციური კავშირი შეიძლება არსებობდეს არა მარტო ორ, არამედ *ორზე მეტ* სიდიდეთა შორის ასეთ კავშირს *მრავლობით კორელაციურ კავშირს* უწოდებენ. მაგალითად, ქვემეხიდან მიზანში სროლისას, მოხვედრა დამოკიდებულია: ყუმბარის სიდიდეზე, ატმოსფერულ წნევაზე, დამიზნების სიზუსტეზე და სხვ., აგრეთვე სატელეფონო მანეთულის გამძლეობა დამოკიდებულია: ტემ-

პერატურაზე, ნალექთა რაოდენობაზე, უაბრიკა-ქარხნების ტერიტორიულ სიახლოვეზე და სხვ.

მრავლობითი კორელაციური კავშირის დროს წარმოებს ერთ სიდიდეზე სხვა სიდიდეების ერთდროული გაელუნის ხარისხის გაზომვა.

ამ მიზნით, ხდება მრავლობითი კორელაციის მოდელების აგება.

მრავლობითი კორელაციის ამსახველ მოდელებში, დამოკიდებული y სიდიდე განიხილება როგორც ფუნქცია, არა ერთი, არამედ რამდენიმე (ეთქვათ n) დამოუკიდებელი x სიდიდეების. ეს დამოკიდებულება, კერძოდ, შეიძლება ასე გამოისახოს:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n).$$

მრავლობითი კორელაციის დროს, ისე როგორც წყვილი კორელაციის შემთხვევაში, კორელაციის მოდელირების ერთ-ერთ მნიშვნელოვან საკითხს წარმოადგენს სიდიდეებს შორის კავშირების ფორმის დადგენა.

მრავლობითი კორელაციის შესაბამის მრავალფაქტორიან მოდელებში, სიდიდეებს შორის კავშირი განტოლების სახის შერჩევა წარმოადგენს საკმაოდ რთულ ამოცანას, რადგან ამ დროს ადგილი აქვს სხვადასხვა ფაქტორების მოქმედების ურთიერთში გადაკეანძვას და შეუძლებელი ხდება გრაფიკული კონტრიოლის გამოყენება. მოცემულ შემთხვევაში, კიდევ უფრო დიდი მნიშვნელობა გააჩნია დამოკიდებული სიდიდისა და მასზე მოქმედი ცალკეული სიდიდის (ან ფაქტორის) კავშირის ხასიათის ხარისხობრივ ანალიზს. თუ ეს კავშირი არის წრფივი (ან მასთან მახლობელი), მაშინ გამოიყენება მრავლობითი კორელაციის წრფივი განტოლება, რომელსაც n ფაქტორისათვის გააჩნია ასეთი სახე:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n.$$

იმ შემთხვევაში, როცა ხსენებული კავშირი არ არის წრფივი (ან მასთან მახლობელი) სახისა, შეიძლება

სათანადო შემოწმების შემდეგ გამოყენებულ იქნეს ასეთი ტიპის განტოლებები:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_2^2$$

აბ

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1 x_2.$$

მრავლობითი კორელაციური ანალიზის ამსახველ განტოლებებს შორის შედარებით უფრო მარტივად ითვლება წრფივი-ლოგარითმული ფუნქცია:

$$\log y = a_0 + a_1 \log x_1 + a_2 \log x_2 + \dots + a_n \log x_n.$$

რომელსაც არალოგარითმული ფორმით შეესაბამება ასეთი განტოლება:

$$Y = a'_0 x_1^{a'_1} x_2^{a'_2} x_3^{a'_3} \dots x_n^{a'_n}.$$

მრავლობითი კორელაციის დროს, სიდიდეებს შორის არსებული კავშირის გასაზომად იყენებენ მრავლობითი კორელაციის კოეფიციენტს ($R_{y, 123 \dots n}$).

იგი ახასიათებს y დამოკიდებულ სიდიდეზე რიგი ფაქტორების ერთობლივი კომბინირებული ზემოქმედების ხარისხს (ძალას) და გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$R_{y, 123 \dots n} = \sqrt{1 - \frac{S_{y, 123 \dots n}^2}{S_y^2}},$$

სადაც

$S_{y, 123 \dots n}^2$ - არის y სიდიდის ფაქტიურ და განტოლებით გათვლილ მნიშვნელობებს შორის გადახრის საშუალო კვადრატის ამსახველი სიდიდე.

S_y^2 - არის y სიდიდის ფაქტიურ მნიშვნელობებსა და მათ საშუალო არითმეტიკულს შორის გადახრის საშუალო კვადრატული სიდიდე.

კორელაციური ანალიზის მეთოდი ფართოდ გამოიყენება ეკონომიკაში, როგორც თეორიული, ასევე პრაქტიკული ხასიათის ამოცანების გადაწყვეტის დროს.

კორელაციური ანალიზის მეთოდის ეკონომიკაში გამოყენების საკითხები, უმთავრესად, დაკავშირებულია ეგრეთწოდებული საწარმოო ფუნქციების შესწავლასთან.

§2. საწარმოო ფუნქციები

წინა პარაგრაფში აღინიშნა, რომ კორელაციური ანალიზის მეთოდი ფართოდ გამოიყენება ეკონომიკაში. ასეთი გამოყენების მნიშვნელოვან მიმართულებას წარმოადგენს წარმოების სფეროში არსებული დამოკიდებულებების გამოკვლევა, რომლებიც წარმოებს ეგრეთწოდებული საწარმოო ფუნქციების მეშვეობით.

საწარმოო ფუნქციის ცნება შეიძლება განმარტებულ იქნეს როგორც ფართო, ასევე ვიწრო გაგებით.

საწარმოო ფუნქცია, ფართო გაგებით, ასახავს საწარმოო საქმიანობის ისეთ მაჩვენებლებს შორის არსებულ ურთიერთდამოკიდებულებას, როგორიცაა: გამოსაშვები პროდუქციის მოცულობა, კაპიტალური დანახარჯები, ფონდუკუგება, შრომის ნაყოფიერება და ა.შ.

საწარმოო ფუნქცია, ვიწრო გაგებით, ასახავს დამოკიდებულებას პროდუქციის გამოშვებასა და სხვადასხვა საწარმოო რესურსების დანახარჯებს შორის.

საწარმოო ფუნქციის ერთ-ერთ კერძო შემთხვევას წარმოადგენს ეგრეთწოდებული პროდუქციის გამოშვების ფუნქცია, რომელიც შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$P = F(f_1, f_2, \dots, f_n), \quad (8.2)$$

სადაც

P — აღნიშნავს წარმოებული პროდუქციის მოცულობას;

$f_1, f_2, \dots, f_n$ — სათანადოდ აღნიშნავენ ფაქტორებს, რომლებიც ასახავს 1, 2, ..., n რესურსების

(მაგალითად: შრომითი რესურსების, ძირითადი საშუალებების, ნედლეულის, სხვა მასალებისა და ა.შ.) დანახარჯებს.

მოცემულ შემთხვევაში, ბუნებრივია, რომ დამოკიდებულება სხვადასხვა სახის რესურსების დანახარჯებსა (როგორც დამოუკიდებელ ცვლადებს) და პროდუქციის გამოშვების მოცულობას (დამოკიდებულ ცვლადს) შორის უნდა იყოს გამოხატული მრავლობითი კორელაციის განტოლების გამოყენებით.

F – ფუნქცია შეიძლება იყოს წრფივი, არაწრფივი და ა.შ. სახის.

იმ შემთხვევაში, როცა F – არის წრფივი ფუნქცია, დამოკიდებულება რესურსების დანახარჯებსა და წარმოებული პროდუქციის მოცულობას შორის არის მარტივი სახის (ასეთი მარტივი დამოკიდებულების მაგალითს წარმოადგენს პირდაპირი დანახარჯების კოეფიციენტები დარგთაშორის ბალანსში).

F – ფუნქციას პრაქტიკაში ხშირად გააჩნია მრუდწირული ფუნქციის სახე. პროდუქციის გამოშვების მრუდწირული ფუნქციის რანგში ხშირად იყენებენ შემდეგი სახის განტოლებას:

$$P = a_0 f_1^{a_1} \cdot f_2^{a_2} \cdot f_3^{a_3} \cdot \dots \cdot f_n^{a_n}, \quad (8.3)$$

რომელსაც შეესაბამება ასეთი წრფივი-ლოგარითმული ფუნქცია:

$$\log P = \log a_0 + a_1 \log f_1 + a_2 \log f_2 + \\ + a_3 \log f_3 + \dots + a_n \log f_n$$

ამა თუ იმ ფაქტორის (ან ცალკეული სახის რესურსის ცვლილების) გავლენის გამოსახატავად პროდუქციის მოცულობაზე იყენებენ აბსოლუტური სიჩქარის ცნებას. ეს არის ისეთი სიჩქარე, რომლითაც ხდება პროდუქციის

გამოშვების ზღერული ზრდა, მოცემული ფაქტორის დანა-
ხარჯის ზრდასთან ერთად.

აღნიშნული სახის აბსოლუტური სიჩქარე განი-
საზღვრება როგორც პროდუქციის გამოშვების კერძო
წარმოებულ, მოცემული სახის რესურსის დანახარჯების
მიხედვით.

(8.3) განტოლებიდან პირველი ფაქტორისათვის
(პირველი სახის რესურსისათვის) მივიღებთ:

$$\frac{\partial P}{\partial f_1} = a_0 a_1 f_1^{a_1-1} \cdot f_2^{a_2} \cdot f_3^{a_3} \cdot \dots \cdot f_n^{a_n}. \quad (8.4)$$

აბსოლუტური სიჩქარის გარდა, ეკონომიკურ
თეორიასა და პრაქტიკაში, გამოიყენება შეფარდებითი
სიჩქარის ცნებაც. შეფარდებითი სიჩქარე გვიჩვენებს თუ
რამდენი პროცენტით გაიზრდება პროდუქციის გამოშვება
მოცემული სახის რესურსის ხარჯის 1%-ით გაზრდის
შემთხვევაში.

შეფარდებითი სიჩქარის მაჩვენებლის მისაღებად
საჭიროა, აბსოლუტური სიჩქარის მაჩვენებელი გამრავლე-
ბულ იქნეს შესაბამისი რესურსის ხარჯისა და პრო-
დუქციის გამოშვების შეფარდებაზე.

ასე, მაგალითად, ჩვენ შემთხვევაში, პირველი
ფაქტორისათვის (რესურსის პირველი სახისათვის) შეფარ-
დებითი სიჩქარე განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial f_1} \cdot \frac{f_1}{P} &= \frac{(a_0 \cdot a_1 f_1^{a_1-1} \cdot f_2^{a_2} \cdot f_3^{a_3} \cdot \dots \cdot f_n^{a_n}) f_1}{P} = \\ &= \frac{a_0 \cdot a_1 f_1^{a_1} \cdot f_2^{a_2} \cdot f_3^{a_3} \cdot \dots \cdot f_n^{a_n}}{a_0 f_1^{a_1} \cdot f_2^{a_2} \cdot f_3^{a_3} \cdot \dots \cdot f_n^{a_n}} = a_1 \end{aligned} \quad (8.5)$$

დანახარჯების 1%-ით ცვლილების შედეგად გამოწვე-
ული პროდუქციის გამოშვების მოცულობის ცვლილების
შეფარდებით სიჩქარეს ეწოდება პროდუქციის გამოშვების

ელასტიკურობა, რესურსების დანახარჯების მიხედვით და აღინიშნება E სიბოლო, n .

იგი ყოველი i -ური ფაქტორისათვის (i -ური სახის რესურსისათვის) გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$E_i = \frac{\partial P}{\partial f_i} \cdot \frac{f_i}{P} = a_i. \quad (8.6)$$

თუ ელასტიკურობის კოეფიციენტს გავთვლით წრფივ-ლოგარითმული სახის ფუნქციისათვის, მივიღებთ იგივე შედეგს.

ამგვარად, მივიღეთ, რომ, მოცემულ შემთხვევაში, პროდუქციის გამოშვების ელასტიკურობა ნებისმიერი ფაქტორისათვის წარმოადგენს მუდმივ სიდიდეს და უდრის რეგრესიის შესაბამის კოეფიციენტს.

საწარმოო ფუნქციის თვისებების დასახასიათებლად არსებითი მნიშვნელობა გააჩნია ჯამობრივი ელასტიკურობის სიდიდის განსაზღვრას იგი ავლნიშნოთ A ასოთი.

ჩვენი მაგალითის შემთხვევაში

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

თუ დავუშვებთ, რომ ყველა სახის რესურსთა დანახარჯები იზრდება k -ჯერ, მაშინ პროდუქციის გამოშვების სიდიდე შეადგენს:

$$\begin{aligned} P' &= a_0 (Kf_1)^{a_1} \cdot (Kf_2)^{a_2} \cdot (Kf_3)^{a_3} \cdot \dots \cdot (Kf_n)^{a_n} = \\ &= K^{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n} \cdot a_0 f_1^{a_1} \cdot f_2^{a_2} \cdot f_3^{a_3} \cdot \dots \cdot f_n^{a_n} = K^A \cdot P. \end{aligned}$$

საწარმოო ფუნქციებიდან ერთ-ერთ ცნობილ სახეს წარმოადგენს კობა-დუგლასის ფუნქცია, რომელსაც გააჩნია ასეთი სახე:

$$P = a_c L^A \cdot K^B, \quad (8.7)$$

სადაც

P — არის წარმოების მოცულობის აღმნიშვნელი სიდიდე;

L — არის სამუშაო ძალის რიცხოვნობის აღმნიშვნელი სიდიდე;

K — არის ძირითადი კაპიტალის აღმნიშვნელი სიდიდე.

საწარმოო ფუნქციების სახეებიდან, აღსანიშნავია *დანახარჯების (თეითლირებულების) ფუნქციები*.

დანახარჯების ფუნქცია ასახავს კავშირს ამა თუ იმ პროდუქციის გამოშვებისათვის საჭირო ყელა რესურსის ხარჯებსა და ამ პროდუქციის გამოშვების მოცულობას შორის.

ეს, მათემატიკურად ასე შეიძლება გამოისახოს:

$$C = F(P), \quad (8.8)$$

სადაც

P — აღნიშნავს ამა თუ იმ სახეობის გამოსაშვები პროდუქციის მოცულობას, ხოლო C კი - მისი გამოშვებისათვის საჭირო რესურსების დანახარჯებს.

(8.8) ტოლობიდან ადვილად შეიძლება ბიეიდოთ ისეთი ფუნქცია, რომელიც დაახასიათებს ამა თუ იმ პროდუქციის ერთეულის *თეითლირებულების* დანაკიდებულებას ამავე პროდუქციის წარმოების მოცულობისაგან:

$$\frac{C}{P} = \frac{F(P)}{P} = \Psi(P). \quad (8.9)$$

საწარმოო ფუნქციებს მიეკუთვნება აგრეთვე *კაპიტალური დანახარჯების ფუნქციები*.

ამგვარი ფუნქცია პირობითად შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$K = F(M),$$

სადაც

K - ის კაპიტალდაბანდების მოცულობის ამ სახველი სიდიდე;

M - არის საწარმოო სიმძლავრის ამსახველი სიდიდე.

თუ საჭიროება მოითხოვს სიმძლავრის ერთეულზე მოსული ხვედრი კაპიტალდაბანდებების

$$\left(\frac{K}{M} \right) \text{ და}$$

საწარმოო სიმძლავრის (M) მაჩვენებელთა დამოკიდებულების ასახავად, შეიძლება გამოვიყენოთ ასეთი ტოლობა: .

$$\frac{K}{M} = \frac{f(M)}{M} = \Psi(M). \quad (8.10)$$

პრაქტიკაში, კაპიტალურ, დანახარჯების მოდელირების დროს, ხშირად, გამოიყენება წრფივი-ლოგარითმული სახის განტოლება:

$$\log K = \log a_0 + a_1 \log M. \quad (8.11)$$

აღსანიშნავია, რომ *კაპიტალური დანახარჯების მოდელები, ზოგჯერ შეიძლება იყოს მრავალფაქტორული*. ამ შემთხვევაში, ხსენებული სახის მოდელები ასახავენ კაპიტალდაბანდებების დამოკიდებულებას, ისეთი ფაქტორების ერთობლივი მოქმედებისაგან, როგორიცაა: ტექნიკურ-ეკონომიკური და ბუნებრივი ხასიათის ფაქტორები.

კარდა აღნიშნულისა, აქვე ხაზი უნდა გავესვას იმ გარემოებასაც, რომ ზოგჯერ საჭირო ხდება აგებულ იქნეს ისეთი მოდელები, რომლებშიც დამოკიდებული ცვლადის რანგში ფიგურირებს დაყვანილი დანახარჯები ($S = C + EK$). მათ შეიძლება დაემატოს სატრანსპორტო დანახარჯებიც T , რადგან ისიც, დაკავშირებულია საწარმოს საწარმოო სიმძლავრესთან (საკითხის ასეთნაირად

დასმა გამართლებულია იმ გარემოებით, რომ საწარმოო სიმძლავრის სიდიდე და მისი ცვლილება, როგორც ცნობილია, დამოკიდებულია არა მარტო მიმდინარე, არამედ კაპიტალურ დანახარჯებზეც). ასეთ შემთხვევებში, საკულე ობიექტად გვევლინება შემდეგი სახის კორელაციური დამოკიდებულება:

$$S = C + EK + T = \Psi(M). \quad (8.12)$$

ასეთი სახის მოდელებს, გააჩნიათ არა მარტო დამოუკიდებელი ეკონომიკური მნიშვნელობა (კერძოდ, როცა ისინი გამოიყენება საწარმოს ოპტიმალური ზომის ემპირიული განსაზღვრისათვის), არამედ თეორიულიც, როცა ის გამოიყენება საწარმოს ოპტიმალური ზომის დაგეგმვის უფრო რთული სახის მოდელების აგებისა და ანალიზის მიზნით.

საწარმოო ფუნქციებს, ამ ტერმინის ფართო გაგებით, მიეკუთვნება აგრეთვე შრომის ნაყოფიერების დონის მოდელები. ასეთ მოდელებში, განსხვავება შრომის ნაყოფიერების დონეების მიხედვით, ერთი ტიპის პროდუქციის გამომშვევ საწარმოებს შორის, კორელაციურ კავშირში შეყავთ ისეთ ფაქტორებთან, როგორიცაა: წარმოების მოცულობა, საწარმოო ფონდების სიდიდე და სტრუქტურა, სპეციალიზაციის დონე, შრომის ენერგოაღჭურვილობა, საწარმოო ციკლის ხანგრძლივობა და სხვა.

ამ თავის ბოლოს კორელაციური ანალიზის მეთოდების ეკონომიკაში პრაქტიკული გამოყენების საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ სასოფლო-სამეურნეო საწარმოში ნიადაგის სასუქით განაყოფიერების მაჩვენებელსა და სასოფლო-სამეურნეო კულტურის მოსავლიანობის მაჩვენებელს შორის არსებული კავშირის კორელაციური ანალიზის ამოცანა.

VIII თავის დამატება — სასოფლო-სამეურნეო
 საწარმოში ნიადაგის სასუქით გა-
 ნაყოფიერების მაჩვენებელსა და
 სასოფლო-სამეურნეო კულტურის
 მოსავლიანობის მაჩვენებელს შო-
 რის არსებული კავშირის კორელა-
 ციური ანალიზის ამოცანა

ვთქვათ, მოცემულია სასოფლო-სამეურნეო საწარმო, რომელსაც სასოფლო-სამეურნეო კულტურებიდან მოჰყავს მხოლოდ *სიმინდი*. ვიგულისხმობთ, რომ სიმინდის დროულ და ნორმალური მოსავლის მოსაყვანად მისი სათესი ფართობები ითხოვს ნიადაგის განაყოფიერებას *სასუქით*. ნიადაგში მისი განაყოფიერების მიზნით შესატანი სასუქის რაოდენობის აღმნიშვნელი მაჩვენებელი იყოს X ც/ჰა-ზე, ხოლო სიმინდის შესაბამისი მოსავლიანობის აღმნიშვნელი ინდექსი იყოს Y ც/ჰა-ზე.

ვთქვათ, წინა წლების პრაქტიკული გამოცდილებითა და დაკვირვებით, ყოველ 100 ჰა სახნავე-სათეს ფართობზე მიღებულია სტატისტიკური მონაცემები, რომლებიც ასახულია 8.1 ცხრილში.

ცხრილი 8.1

Y_j ც/პა-ზე							
X_i ც/პა-ზე	10	12	14	16	18	20	სულ
10	9	4	1	—	—	—	14
30	1	10	9	3	—	—	23
50	—	2	6	14	6	—	28
70	—	—	1	10	18	6	35
სულ	10	16	17	27	24	6	100

ამოცანა მდგომარეობს შესატანი სასუქის რაოდენობის ამსახველ მაჩვენებელსა (X) და მოსავლიანობის მაჩვენებელს (Y) შორის არსებული კავშირის ანალიზში, რეგრესიის განტოლების შედგენისა და ანალიზის გზით.

8.1 ცხრილში რიცხვი 4, რომელიც დგას პირველი სტრიქონისა და მეორე სვეტის თანაკვეთაში, უჩვენებს, რომ 100 პა-დან 4-ზე შეტანილ იქნა 10-10 ც სასუქი პა-ზე და შესაბამისად 1-პა-დან მიღებულ იქნა 12 ც მოსავალი.

8.1 ცხრილიდან ჩანს, რომ X ცვლადი ღებულობს ოთხ სხვადასხვა მნიშვნელობას, რომლებითაც მთელი ერთობლიობა იყოფა ოთხ ჯგუფად. პირველი ჯგუფი შედგება 14 პა-გან, მეორე — 23 პა-გან, მესამე — 28 პა-გან, ხოლო მეოთხე კი — 35 პა-გან. მათგან ყოველი ჯგუფის ფართობებისათვის საერთო დამახასიათებელ ნიშანს წარმოადგენს ის, რომ მათ თითოეულ პა-ზე სასუქი შეტანილია ერთი და იგივე რაოდენობით: პირველი ჯგუ-

ფის ყოველ პა-ზე — 10-10ც, მეორე ჯგუფის — 30-30ც, მესამე ჯგუფის — 50-50 ც, მეოთხე ჯგუფის — 70-70 ც. მიუხედავად იმისა, რომ პირველი ჯგუფის ყოველ პა-ზე შეტანილია სასუქის ერთნაირი რაოდენობა (10 ც), მოსავლიანობა მათზე 8.1 ცხრილის მიხედვით არის განსხვავებული, კერძოდ 10-10 ც 9 პა-ზე, 12-12 ც 4 პა-ზე და 14 ც ერთ პა-ზე. ანალოგიური სურათია მეორე, მესამე და მეოთხე ჯგუფებისათვის. ამგვარად, აღსანიშნავია, რომ შეტანილი სასუქის ყოველ X რაოდენობას შეესაბამება არა რომელიმე განსაზღვრული Y რაოდენობის მოსავლიანობა, არამედ განაწილება იმ ფართობის მოსავლიანობის მიხედვით, რომლის თითოეულ პა-ზე შეტანილი იყო X ც სასუქი.

8.1 ცხრილი, გარდა აღნიშნულისა, იძლევა საფუძველს ხაზი გაუსვით იმ გარემოებას, რომ X მაჩვენებლის გაზრდასთან ერთად, Y მაჩვენებელი ხასიათდება ზრდის ტენდენციით. ასეთი კანონზომიერება ნათლად ჩანს ზემოთ მითითებულ ჯგუფებში მოსავლიანობების საშუალო მაჩვენებლებზე (ამ მაჩვენებლებს შეიძლება ვუწოდოთ მოსავლიანობის ჯგუფური საშუალოები). მოსავლიანობის ჯგუფური საშუალო, Y სიდიდისათვის, რომელიც მიეკუთვნება პირველ ჯგუფს, ავლნიშნოთ $\bar{Y}_1$ -ით. ეს უკანასკნელი გამოხატავს საშუალო მოსავლიანობის მაჩვენებელს იმ ფართობებისათვის, რომელთა ყოველ პა-ზე შეტანილ იქნა 10-10 ც სასუქი. ანალოგიურად $\bar{Y}_2$, $\bar{Y}_3$ და $\bar{Y}_4$ -ით ავლნიშნოთ საშუალო მოსავლიანობის მაჩვენებლები მეორე, მესამე და მეოთხე ჯგუფებისათვის.

$\bar{Y}_1$, $\bar{Y}_2$, $\bar{Y}_3$ და $\bar{Y}_4$ მაჩვენებლები შეიძლება გამოითვალოს შემდეგნაირად:

$$\bar{Y}_1 = \frac{10 \cdot 9 + 12 \cdot 4 + 14 \cdot 1}{14} \approx 10,86 \text{ ც};$$

$$\bar{Y}_2 = \frac{10 \cdot 1 + 12 \cdot 10 + 14 \cdot 9 + 16 \cdot 3}{23} \approx 13,22 \text{ ც};$$

$$\bar{Y}_3 = \frac{12 \cdot 2 + 14 \cdot 6 + 16 \cdot 14 + 18 \cdot 6}{28} \approx 15,71 \text{ ც};$$

$$\bar{Y}_4 = \frac{14 \cdot 1 + 16 \cdot 10 + 18 \cdot 18 + 20 \cdot 6}{35} \approx 17,66 \text{ ც}.$$

ამ და 8.1 ცხრილის პირველი სვეტის მონაცემების მიხედვით, შევადგინოთ ახალი ცხრილი 8.2, რომელიც გამოხატავს X მაჩვენებლის ცვლილების დამოკიდებულებას $\bar{Y}_i$ ($i=1,2,3,4$) მაჩვენებლების ცვლილებაზე.

ცხრილი 8.2

X_i ც/პა-ზე	$\bar{Y}_i$ ც/პა-დან	$\bar{Y}_i$ -ის ცვლილება
10	10,86	
30	13,22	+2,36
50	15,71	+2,49
70	17,66	+1,95

8.2 ცხრილიდან ჩანს, რომ სასუქის რაოდენობის ამსახველი X მაჩვენებლის ზრდასთან ერთად, საშუალო მოსავლიანობის ჯგუფური მაჩვენებლები იზრდებიან. ამასთან, ისინი იზრდებიან თითქმის თანაბარზომიერად.

შენიშნული კანონზომიერების საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ, რომ შესატანი სასუქის ამსახველ X მაჩვე-

ნებელსა და სიმიინდის მოსაველიანობის გამომხატველ Y მაჩვენებელს შორის არსებობს წრფივი კორელაციური კავშირი.

ახლა თუ გვინდა დავადგინოთ პირიქით, თუ როგორი დამოკიდებულება არსებობს Y -სა და X მაჩვენებლებს შორის, 8.1 ცხრილში განხილულ მონაცემთა მთელი ერთობლიობა დაეყოთ არა ოთხ, არამედ ექვს ჯგუფად, ისე, რომ თითოეულ ჯგუფში გაერთიანდეს სიმიინდის ერთნაირი მოსაველიანობის მქონე მიწის ნაკვეთები (მიუხედავად იმისა, რომ მათზე სასუქი შეტანილ იქნა სხვადასხვა რაოდენობით). ამგვარად, მივიღებთ, რომ სიმიინდის მოსაველიანობის ყოველ Y_j ($j=1,2,3,4,5,6$) მაჩვენებელს შეესაბამება იმ ნაკვეთების განაწილება, შეტანილი სასუქის რაოდენობის მიხედვით, რომლებზეც მიღებულია ეს მოსაველიანობა. მაგალითად $Y_1=10$, $Y_2=12$, $Y_3=14$, $Y_4=16$, $Y_5=18$ და $Y_6=20$ მნიშვნელობებს შეესაბამება ნაკვეთების მათში შეტანილი სასუქის რაოდენობის მიხედვით განხორციელებული განაწილებები:

ცხრილი 8.3

X_i ც/ჰა-ზე	ფართობთა რაოდენობა (ჰა)
10	9
30	1
სულ	10

ცხრილი 8.4

X_i ც/ჰა-ზე	ფართობთა რაოდენობა (ჰა)
10	4
30	10
50	2
სულ	16

ცხრილი 8.5

X_i , ც/პა-ზე	ფართობთა რაოდენობა (პა)
10	1
30	9
50	6
70	1
სულ	17

ცხრილი 8.6

X_i , ც/პა-ზე	ფართობთა რაოდენობა (პა)
30	3
50	14
70	10
სულ	27

ცხრილი 8.7

X_i (ც/პა-ზე)	ფართობთა რაოდენობა (პა)
50	6
70	8
სულ	14

ცხრილი 8.8

X_i , ც/პა-ზე	ფართობთა რაოდენობა (პა)
70	6
სულ	6

X მაჩვენებლის ჯგუფური საშუალო, რომელიც მიეკუთვნება j -ურ ჯგუფს ადენიშნით $\bar{X}_j$ ($j=1,2,3,4,5,6$)-ით გამოვთვალოთ $\bar{X}_j$ ($j=1,2,3,4,5,6$) მაჩვენებლები:

$$\bar{X}_1 = \frac{10 \cdot 9 + 30 \cdot 1}{10} = 12(ც); \quad \bar{X}_2 = \frac{10 \cdot 4 + 30 \cdot 10 + 50 \cdot 2}{16} = 27,5(ც);$$

$$\bar{X}_3 = \frac{10 \cdot 1 + 30 \cdot 9 + 50 \cdot 6 + 70 \cdot 1}{17} = 38,2(3);$$

$$\bar{X}_4 = \frac{30 \cdot 3 + 50 \cdot 14 + 70 \cdot 10}{27} = 55,2(3);$$

$$\bar{X}_5 = \frac{50 \cdot 6 + 70 \cdot 8}{14} = 65(3);$$

$$\bar{X}_6 = \frac{70 \cdot 6}{6} = 70(3).$$

აევაგოთ 8.2 ცხრილის შესაბამისი ცხრილი (იხ. ცხრილი 8.9).

ცხრილი 8.9

Y_i , ც/პა-ზე	X_i , ც/პა-ზე	$\bar{X}_i$ -ის ცვლილება
10	12	
12	27,5	+15,5
14	38,2	+10,7
16	55,2	+17,0
18	65	+9,8
20	70	+5,0

8.9 ცხრილის მონაცემებიდან ჩანს, რომ სიმინდის მოსავლიანობის ამსახველი Y მაჩვენებლის მნიშვნელობათა ზრდასთან ერთად სასუქის რაოდენობის გაზომვითი X ცვლადის ჯგუფური საშუალო მნიშვნელობები იზრდება დაახლოებით თანაბარზომიერად. აქედან შეიძლება დავასკვნათ, რომ სიმინდის მოსავლიანობასა (Y) და

ნიადაგში შესატანი სასუქის რაოდენობას (X) შორის არსებობს წრფივი კორელაციური კავშირი.

ახლა შევაესოთ შემდეგი ცხრილი

ცხრილი 8.10

X_i	n_{X_i}	$X_i - C$	$\frac{X_i - C}{k}$	$\frac{X_i - C}{k} \cdot n_{X_i}$	$\left(\frac{X_i - C}{k}\right)^2 \cdot n_{X_i}$
10	14	-40	-2	-28	56
30	23	-20	-1	-23	23
50	28	0	0	0	0
70	35	20	1	35	35
სულ	100	-40	-2	-16	114

ამ ცხრილში იგულისხმება, რომ $C=50$ და $K=20$.

ახლა გამოეთვალეთ $\bar{X}$ და σ_X^2 მაჩვენებლები.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^j \frac{X_i - C}{K} \cdot n_{X_i}}{n} \cdot K + C = \frac{-16}{100} \cdot 20 + 50 = 468(\text{ც});$$

$$\sigma_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^j \left(\frac{X_i - C}{K}\right)^2 \cdot n_{X_i}}{n} \cdot K^2 - (\bar{X} - C)^2 = \frac{114}{100} \cdot 20^2 - (468 - 50)^2 = 44576$$

ახლა 8.10 ცხრილის შესაბამისად შევადგინოთ 8.11 ცხრილი.

ცხრილი 8.11

Y_j	n_{Y_j}	$Y_j - C'$	$\frac{Y_j - C'}{k'}$	$\frac{Y_j - C'}{k'} \cdot n_{Y_j}$	$\left(\frac{Y_j - C'}{k'}\right)^2 \cdot n_{Y_j}$
10	10	-4	-2	-20	40
12	16	-2	-1	-16	16
14	17	0	0	0	0
16	27	2	1	27	27
18	24	4	2	48	96
20	6	6	3	18	54
სულ	100	6	3	57	233

8.11 ცხრილში იგულისხმება, რომ $C'=14$ და $K'=2$. ამგვარად, შეიძლება გამოვთვალოთ:

$$\bar{Y} = \frac{57}{100} \cdot 2 + 14 = 15,14 (\text{ც});$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{233}{100} \cdot 2^2 - (15,14 - 14)^2 = 8,0204 \approx 8,02.$$

თუ $\overline{XY} - \bar{X} \cdot \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m X_i Y_j n_{ij}}{n} - \bar{X} \cdot \bar{Y}$ - სიდიდეს აღვნიშნავთ μ პარამეტრით, მაშინ შეიძლება ჩავწეროთ:

$$\rho_{Y/X} = \frac{\mu}{\sigma_X^2} \quad (8.12)$$

და

$$\rho_{X/Y} = \frac{\mu}{\sigma_Y^2}. \quad (8.13)$$

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\sum_{i=1}^j \sum_{j=1}^i \frac{X_i - C}{k} \cdot \frac{Y_j - C'}{k'} \cdot n_{ij}}{n} \cdot k \cdot k' - (\bar{X} - C)(\bar{Y} - C') = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^j \sum_{j=1}^i (X_i - C)(Y_j - C') \cdot n_{ij}}{n} - (\bar{X} - C)(\bar{Y} - C') = \frac{56 - 3 + 64}{100} \cdot 20 \cdot 2 - \\ &- (46,8 - 50)(15,14 - 14) = 50,448. \end{aligned}$$

ახლა, (8.12) და (8.13) ტოლობების დახმარებით, გამოვთვალოთ რეგრესიის კოეფიციენტები:

$$\rho_{Y/X} = \frac{50,448}{445,76} \approx 0,113 \text{ და}$$

$$\rho_{X/Y} = \frac{50,448}{8,0204} \approx 6,290.$$

თუ სათანადო მონაცემებს გავითვალისწინებთ (8.1) განტოლებათა სისტემის შესაბამის განტოლებებში: $Y - \bar{Y} = \rho_{Y/X} (X - \bar{X})$,

$X - \bar{X} = \rho_{X/Y} (Y - \bar{Y})$, მივიღებთ:

$$1) \quad Y - 15,14 = 0,113 \cdot (X - 46,8) \Rightarrow Y = 0,113X + 9,852$$

$$2) \quad X - 46,8 = 6,290 \cdot (Y - 15,14) \Rightarrow X = 6,290Y - 48,431$$

მიღებული განტოლებები წარმოადგენენ რეგრესიის საძიებელ განტოლებებს.

§1. უმცირეს კვადრატთა მეთოდის შინაარსი

ეკონომიკურ თეორიასა და პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება ისეთი საკითხები, რომელთა შესწავლაც ითხოვს უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გამოყენებას. ამასთან დაკავშირებით, ბუნებრივია, რომ ეკონომიკის მათემატიკური მოდელირების საფუძვლების შესწავლის დროს ჩნდება გარკვეული ინტერესი ამ მეთოდის განხილვის მიმართ.

ვიდრე ჭეშუალოდ განვიხილავდეთ უმცირეს კვადრატთა მეთოდის შინაარსს, შემოვიღოთ შემდეგი დაშვებები:

ეთქვას, მოცემულია ორი X და Y შემთხვევითი სიდიდე.

ვიგულისხმოთ აგრეთვე, რომ Y სიდიდის გაზომვის შედეგად მიღებულია მისი $y_1, y_2, \dots, y_n$ მნიშვნელობები და ისინი შეესაბამებიან X სიდიდის $x_1, x_2, \dots, x_n$ მნიშვნელობებს.

ახლა, დავსვათ ასეთი ამოცანა:

ვიპოვოთ $y=F(x)$ ისეთი ფუნქცია, რომელიც $X=x_1; X=x_2; \dots; X=x_n$ მნიშვნელობებისათვის შესაბამისად მიიღებს $Y=y_1; Y=y_2; \dots; Y=y_n$ მნიშვნელობებისაგან რაც შეიძლება მცირედ განსხვავებულ მნიშვნელობებს.

აღნიშნულის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია ემთხვევა $y=F(x)$ ისეთი წირის გატარებას, რომელიც რაც შეიძლება ახლოს გაივლის $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$ წერტილებთან.

ასეთი მოთხოვნა, რა თქმა უნდა ლოგიკურია, რადგან ყოველი გაზომვა შეიცავს გარკვეულ ცდომილებას და ამ მიზეზით, არ შეიძლება $y=F(x)$ მრუდის გატარება ყველა ზემოხსენებულ წერტილზე ერთდროულად.

$y=F(x)$ ფუნქციის სახე, აღწერილ შემთხვევაში, საზოგადოდ უცნობია და მისი განსაზღვრაც ჩვენზეა დამოკიდებული. თუ რა თქმა უნდა, ის რაიმე მოსაზრებით წინასწარ არ არის დადგენილი.

$F(x)$ ფუნქციას, როგორც წესი, აძლევენ მარტივ სახეს. მას შეიძლება მიეცეს მრავალწევრის, წილად-წრფივი ფუნქციის ან სხვა რომელიმე მარტივი ფუნქციის სახე.

დასმული ამოცანის გადაწყვეტის პროცესში იკვეთება უმცირეს კვადრატთა მეთოდის არსი. იგი მდგომარეობს იმაში, რომ $y=F(x)$ ფუნქციის სათანადო შერჩევით ჯამი

$$F = \sum_{i=1}^n [\lambda_i - F_i(x)]^2 \quad (9.1)$$

უნდა იყოს რაც შეიძლება მცირე, რადგან გამოთვლილი $F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_n)$ სიდიდეებიდან ემპირიული $y_1, y_2, \dots, y_n$ მონაცემების გადახრათა კვადრატები¹ ჯამი უნდა გაეხადოთ მინიმალური.

ადვილი წარმოსადგენია, რომ $y_i = F_i(x)$ ($i=1, 2, \dots, n$) სიდიდე, ფაქტიურად არის სხვაობა i -ური წერტილის შესაბამისი $F(x)$ ფუნქციისა და (x_i, y_i) წერტილის ორდინატებს შორის.

აქვე ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებასაც, რომ $y=F(x)$ ფუნქციის პარამეტრების განსაზღვრა, თუ რა თქმა უნდა, ცნობილია თვით ფუნქციის სახე, არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს.

ახლა, დაეუშვათ, რომ $F(x)$ ფუნქცია წრფივად არის დამოკიდებული $a_1, a_2, \dots, a_m$ პარამეტრებზე, ე.ი. გამოდის, რომ $F(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_m f_m(x)$. (9.2)

იგულისხმება, რომ $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ ფუნქციები ცნობილია, $n > m$.

ზემოთ დასმული შესასწავლი ამოცანა, ბოლოს გაკეთებული დაშვებების პირობებში, მიიღებს შემდეგ სახეს: ევიპოვოთ უმცირესი მნიშვნელობა ჯამისა:

$$F = \sum_{i=1}^n [y_i - a_1 f_1(x_i) - a_2 f_2(x_i) - \dots - a_m f_m(x_i)]^2 \quad (9.3)$$

ამ მიზნით F სიდიდის კერძო წარმოებულები $a_1, a_2, \dots, a_m$ პარამეტრების მიმართ გაუტოლოთ ნულს და მივიღებთ:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - a_1 f_1(x_i) - a_2 f_2(x_i) - \dots - a_m f_m(x_i)] f_1(x_i) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial a_2} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - a_1 f_1(x_i) - a_2 f_2(x_i) - \dots - a_m f_m(x_i)] f_2(x_i) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial F}{\partial a_m} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - a_1 f_1(x_i) - a_2 f_2(x_i) - \dots - a_m f_m(x_i)] f_m(x_i) = 0 \end{cases} \quad (9.4)$$

ამგვარად, მივიღეთ m უცნობიან m წრფივ განტოლებათა სისტემა, რომლის ამოხსნა $a_1, a_2, \dots, a_m$ პარამეტრების მიმართ თავისუფლად შეიძლება. ამ სისტემის ამოხსნის შედეგად მიღებული $a_1, a_2, \dots, a_m$ პარამეტრების მნიშვნელობებს თუ შევიტანთ (9.2) ტოლობაში, ე. ი. $F(x)$ ფუნქციის გამოსახულებაში და ამასთან ერთად, გამოეთვლით (9.3) ჯამს, აღმოჩნდება, რომ F ჯამს მართლაც ექნება უმცირესი მნიშვნელობა.

ახლა განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითები.

მაგალითი 1. ეთქვათ მოცემულია ჩვენს მიერ განხილული ზოგადი ამოცანის ისეთი კერძო შემთხვევა, როცა X და Y სიდიდეებს შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება. გარდა ამისა, ვიგულისხმობთ, რომ Y სიდიდე X -ისაგან დამოკიდებულია წრფივად ორ a_1 და a_2 პარამეტრზე. საჭიროა ვიპოვოთ $y=F(x)$ ისეთი წრფივი ფუნქცია, რომელიც $X=x_1, X=x_2, X=x_3, X=x_4$ და $X=x_5$ მნიშვნელობებისათვის შესაბამისად ღებულობს ემპირიულ $Y=y_1, Y=y_2, \dots, Y=y_5$ მნიშვნელობებისაგან, რაც შეიძლება, მცირედ განსხვავებულ მნიშვნელობებს.

მოცემულ პირობებში, შეიძლება დაიწეროს, რომ $y=a_1x+a_2$, სადაც a_1 და a_2 წარმოადგენენ საძიებელ მუდმივ კოეფიციენტებს.

ამ კოეფიციენტების განსაზღვრავად განვიხილოთ ჯამი:

$$F = \sum_{i=1}^n [y_i - a_1 x_i - a_2]^2 \quad (9.5)$$

გაეაწარმოთ (9.5) გამოსახულება a_1 -ით და a_2 -ით და გავუტოლოთ ნულს.

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_1 x_i - a_2) x_i = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial a_2} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_1 x_i - a_2) = 0. \end{cases} \quad (9.6)$$

(9.6) სისტემის განტოლებათა სათანადო გარდაქმნით შეგვიძლია მივიღოთ:

$$\begin{cases} a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a_1 \sum_{i=1}^n x_i + n a_2 = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (9.7)$$

(9.7) სისტემის განტოლებებს ეწოდება უმცირეს კვადრატთა მეთოდის ნორმალური განტოლებები.

ამ სისტემის ამოხსნით მივიღებთ a_1 და a_2 კოეფიციენტების საძიებელ მნიშვნელობებს.

შემოვიტანოთ დამატებითი დაშვება.

ეთქვას, X -ის $(x_1, x_2, \dots, x_5)$ და Y -ის $(y_1, y_2, \dots, y_5)$ მნიშვნელობები მოცემულია შემდეგი ცხრილით:

ცხრ. 9.1

x_i	0	1	2	3	4
y_i	-2	0	1	2	4

თუ 9.1 ცხრილის მონაცემებს გავითვალისწინებთ (9.7) სისტემაში, მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10;$$

$$\sum_{i=1}^5 y_i = -2 + 0 + 1 + 2 + 4 = 5;$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 0 + 1 + 4 + 9 + 16 = 30;$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 0 + 0 + 2 + 6 + 16 = 24.$$

(9.7) სისტემიდან, ამ მონაცემების გათვალისწინების შემდეგ ვღებულობთ:

$$\begin{cases} 30a_1 + 10a_2 = 24 \\ 10a_1 + 5a_2 = 5 \end{cases} \quad (9.8)$$

(9.8) სისტემის ამოხსნით მივიღებთ, რომ $a_1 = \frac{7}{5}$ და $a_2 = -\frac{9}{5}$, ხოლო რაც შეეხება წრფის განტოლებას, მას ექნება ასეთი სახე: $y = \frac{7}{5}x - \frac{9}{5}$.

მაგალითი 2 ვთქვათ, მოცემულია ჩვენს მიერ განხილული ზოგადი ამოცანის ისეთი კერძო შემთხვევა, როცა X და Y სიდიდეების შესაბამისი მნიშვნელობები წარმოდგენილია შემდეგი ცხრილით:

(ცხრ. 9.2)

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	25,0	24,2	23,5	22,9	22,4	21,4	20,8	20,3	20,0

X და Y სიდიდეების მნიშვნელობებს შორის დამოკიდებულება შეიძლება გამოიხატოს მესამე რიგის პარაბოლით:

$$y = F(x) = a + bx + cx^2 + dx^3. \quad (9.9)$$

დამოკიდებულება X და Y შორის, გამოთვლების გამარტივების მიზნით, შევცვალოთ მისი უხეში მიახლოებით გამომხატველი წრფით:

$$y = F(x) = a + bx. \quad (9.10)$$

ამოცანის გადასაწყვეტად, პირველ რიგში, უნდა გამოვთვალოთ (9.10) ტოლობაში შემავალი a და b პარამეტრები. ამისათვის გამოვიყენოთ უმცირეს კვადრატთა მეთოდი.

განვიხილოთ შემდეგი ჯამი:

$$F = \sum_{i=0}^8 (y_i - a - bx_i)^2. \quad (9.11)$$

F ჯამის მინიმალური მნიშვნელობის საპოვნელად საჭიროა მისი კერძო წარმოებულები a და b პარამეტრებით გაუტოლოთ ნულს

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a} = -2 \sum_{i=0}^8 (y_i - a - bx_i) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b} = -2 \sum_{i=0}^8 (y_i - a - bx_i)x_i = 0. \end{cases} \quad (9.12)$$

(9.12) სისტემის გარდაქმნით მივიღებთ:

$$\begin{cases} 9a + b \sum_{i=0}^8 x_i = \sum_{i=0}^8 y_i \\ a \sum_{i=0}^8 x_i + b \sum_{i=0}^8 x_i^2 = \sum_{i=0}^8 x_i y_i. \end{cases} \quad (9.13)$$

ამგვარად, მიღებულია ორუცნობიან ორ განტოლებათა სისტემა. მისი ამოხსნის შედეგად მიღებული a და b პარამეტრების მნიშვნელობები ჩასმული (9.11) ტოლობაში F ფუნქციას მიაღწევენ მინიმალურ მნიშვნელობას.

a და b პარამეტრების გამოსათვლელად შევადგინოთ ასეთი ცხრილი:

ცხრ. 9.3

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
0	25,0	0	0,0
1	24,2	1	24,2
2	23,5	4	47,0
3	22,9	9	68,7
4	22,2	16	88,8
5	21,4	25	107,0
6	20,8	36	124,8
7	20,3	49	142,1
8	20,0	64	160,0
36	200,3	204	762,6

თუ ამ ცხრილის მონაცემებს გაეითვალისწინებთ (9.13) ტოლობაში, მივიღებთ სისტემას:

$$\begin{cases} 9a + 36b = 200,3 \\ 36a + 204b = 762,6 \end{cases} \quad (9.14)$$

ამ სისტემიდან $a=24,82$; $b=-0,64$.

თუ a და b პარამეტრების ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (9.10) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$F(x) = 24,82 - 0,64x. \quad (9.15)$$

ახლა, თუ ამ უკანასკნელში x -ს მიენიჭებთ სათანადო მნიშვნელობებს, მივიღებთ y -ის შესაბამის მნიშვნელობებს, რომლებიც ემპირიულად მიღებული y_i მნიშვნელობებისაგან განსხვავებით ავღნიშნოთ y_i^0 -ით. თუ ემპირიულად მიღებული y_i -ების და (9.15) ტოლობით გამოთვლილი y_i^0 მახვევებლების სხვაობათა კვადრატების ჯამს ვიანგარიშებთ, მივიღებთ სწორედ F -ის მნიშვნელობას. F -ის გამოსაანგარიშებლად შევადგინოთ ასეთი ცხრილი (იხ. ცხრ. 9.4):

ცხრ. 9.4

x_i	y_i	$-0,64x_i$	y_i^0	$y_i - y_i^0$	$(y_i - y_i^0)^2$
0	25,00	0	24,82	0,18	0,0324
1	24,20	-0,64	24,18	0,02	0,0004
2	23,50	-1,28	23,54	0,04	0,0016
3	22,90	-1,92	22,90	0	0
4	22,20	-2,56	22,26	0,06	0,0036
5	21,40	-3,20	21,62	0,22	0,0484
6	20,80	-3,84	20,98	0,18	0,0324
7	20,30	-4,48	20,34	0,04	0,0016
8	20,00	-5,12	19,70	0,30	0,0900

0,2104

ამ ცხრილიდან ჩანს, რომ $F = 0,2104$.

ამ მაგალითში მესამე რიგის პარაბოლის ნაცვლად გამოყენებულ იქნა წრფე, რომელიც ძალიან უხეშად ასახავდა სინამდვილეს. ცხადია, რომ თუ ასე არ მოვიქცევოდით და ვისარგებლებდით უფრო ზუსტი ფორმულით, მაშინ პარამეტრთა რიცხვი გაიზრდებოდა, რაც ბუნებრივია უფრო გაართულებდა გამოთვლას. თუმცა, ისიც უნდა აღინიშნოს, რომ საბოლოოდ მიღებული მრუდი უფრო მიუახლოვდებოდა ემპირიულ მრუდს.

ამგვარად, შეიძლება დავასკვნათ, რომ გამოთვლები უმცირეს კვადრატთა მეთოდით სარგებლობის დროს, მით უფრო რთულდება, რაც უფრო მეტია როგორც დაკვირვებათა რიცხვი, ისე აღებულ განტოლებაში შემავალი პარამეტრების რაოდენობა.

§2. შემთხვევითი სიდიდის გაზომვით მიღებული მნიშვნელობების საშუალო არითმეტიკული, როგორც მათთან ყველაზე ახლოს მყოფი სიდიდე

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს რაიმე შემთხვევითი X სიდიდე და მისი გაზომვის შედეგად მივიღეთ შემდეგი მნიშვნელობები: $x_1, x_2, \dots, x_n$.

დაეუშვათ, მოითხოვება ისეთი ზომის მონახვა, რომელიც რაც შეიძლება ახლოს იქნება გაზომვის შედეგად მიღებულ ყველა სიდიდესთან, ან სხვანაირად რომ ვთქვათ, აღებული ზომა რაც შეიძლება მცირედ უნდა იყოს გადახრილი მათგან.

წინა პარაგრაფში უკვე ვაჩვენეთ, რომ უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გამოყენების შემთხვევაში სიდიდეთა „სიახლოვე“ და „დაშორება“ ერთმანეთისაგან მათი სხვაობის კვადრატით გაიზომება. მაგრამ ვითვალისწინებთ რა იმას, რომ მხედველობაში გვაქვს ისეთი რიცხვის მონახვა, რომელიც, რაც შეიძლება, ახლოს იქნება რიცხვთა მიმდევრობასთან, უნდა ვიგულისხმოთ, რომ საძებნ რიცხვსა და მიმდევრობის ყველა წევრს შორის სხვაობის კვადრატების ჯამი იყოს, რაც შეიძლება, მცირე.

აღნიშნულიდან გამომდინარე, განსაზღვრული ამოცანა უნდა ჩამოყალიბდეს შემდეგნაირად: მოვნახოთ ისეთი რიცხვი, რომ აღებულ რიცხვებთან მისი სხვაობათა კვადრატების ჯამი იყოს მინიმალური.

ვიგულისხმოთ, რომ ასეთი რიცხვია a , მაშინ ამ რიცხვიდან გადახრათა კვადრატების ჯამი იქნება:

$$F = \sum_{i=1}^n (a - x_i)^2.$$

თუ F -ის წარმოებულს a პარამეტრით გაუტოლებთ ნულს, გვექნება:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (a - x_i) = 0. \quad (9.16)$$

$$\text{აქედან } \sum_{i=1}^n (a - x_i) = 0 \quad (9.17)$$

$$\text{ანუ } \sum_{i=1}^n a = \sum_{i=1}^n x_i. \quad (9.18)$$

(9.18) ტოლობიდან ვღებულობთ:

$$na = \sum_{i=1}^n x_i \quad (9.19)$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (9.20)$$

ეს კი ნიშნავს, რომ საძებნი რიცხვი ყოფილა გაზომვის შედეგად მიღებულ მნიშვნელობათა საშუალო არითმეტიკული.

ახლა განვიხილოთ მაგალითი.

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე X შემთხვევითი სიდიდე და მისი გაზომვის შედეგად მიღებულია შემდეგი მნიშვნელობები:

125, 136, 129, 132, 128.

საჭიროა მოინახოს ისეთი ზომა, რომელიც, რაც შეიძლება, ახლოს იქნება გაზომვის შედეგად მიღებულ ხუთივე სიდიდესთან, ან სხვანაირად რომ ვთქვათ, აღებული ზომა, რაც შეიძლება, მცირედ იქნება მათგან გადახრილი.

ამეარად, განსახილველი ამოცანა შეიძლება ჩამოყალიბდეს ასეთნაირად:

მოვნახოთ ისეთი a რიცხვი, რომლის განსხვავებათა კვადრატების ჯამი X სიდიდის გაზომვის შედეგად მიღებული მნიშვნელობებისაგან იქნება მინიმალური.

ვიპოვოთ a რიცხვიდან გადახრების კვადრატების ჯამი. იგი ტოლი იქნება

$$F(a) = (a-125)^2 + (a-136)^2 + (a-129)^2 + (a-132)^2 + (a-128)^2$$

ახლა, ვიპოვოთ $F(a)$ ფუნქციის წარმოებული a -თი. მიღებული გამოსახულება გაუტოლოთ ნულს და მივიღებთ:

$$2(a-125) + 2(a-136) + 2(a-129) + 2(a-132) + 2(a-128) = 0$$

$$\underbrace{a+a+a+a+a}_5 = 125+136+129+132+128$$

საიდანაც

$$a = \frac{125+136+129+132+128}{5} = 130.$$

მივიღეთ, რომ საძებნი a -ს მნიშვნელობა ტოლი ყოფილა გაზომვის შედეგად მიღებულ მნიშვნელობათა საშუალო არითმეტიკულისა.

ამ თავის ბოლოს უმცირეს კვადრატთა მეთოდის ეკონომიკაში პრაქტიკული გამოყენების საილუსტრაციოდ, მოვიყვანოთ მოსახლეობის პირველადი მოხმარების საგნებზე მოთხოვნის (ასაკისა და სქესის ჯგუფების მიხედვით) დიფერენცირებული განსაზღვრის ამოცანა.

IX თავის ღამბაძება – მოსახლეობის პირველადი მოხმარების საგნებზე მოთხოვნის (ასაკისა და სქესის ჯგუფების მიხედვით) დიფერენცირებული განსაზღვრის ამოცანა.

ეთქვათ, მოცემულია ისეთი ამოცანა, რომლის დროსაც უნდა განისაზღვროს მოსახლეობის მოთხოვნა პირველადი მოხმარების საგნებზე დიფერენცირებულად – ასაკისა და სქესის ჯგუფების მიხედვით.

ეს ამოცანა დაიყვანება ორ ქვეამოცანაზე: პირველი – მოსახლეობის პირველადი მოხმარების საგნებზე მოთხოვნილების (ასაკისა და სქესის ჯგუფების მიხედვით) დიფერენცირებული განსაზღვრის ქვეამოცანა და მეორე – მოსახლეობის მსყიდველობითი უნარიანობის განსაზღვრის ქვეამოცანა.

ჩვენ ამჯერად შევჩერდებით პირველი ქვეამოცანის შინაარსზე და მისი გადაწყვეტის მეთოდზე, გვერდს ავუქელოთ მეორე ქვეამოცანის ამოხსნას, რადგან იგი არ მოითხოვს უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გამოყენებას (ვგულისხმობთ, რომ მეორე ქვეამოცანა უკვე გადაწყვეტილია სხვა მეთოდის გამოყენებით).

მაშასადამე, ცხადია, რომ თავდაპირველად დასმული ამოცანის გადაწყვეტა დაიყვანება მოსახლეობის პირველადი მოხმარების საგნებზე მოთხოვნილების (ასაკისა და სქესის ჯგუფების მიხედვით) დიფერენცირებული განსაზღვრის ამოცანის გადაწყვეტაზე. ეს უკანასკნელი კი, პირველადი მოხმარების თითოეულ საგანზე უნდა გადაწყვიტეს ცალ-ცალკე.

ამ ტიპის ამოცანების ეფექტიანი გადაწყვეტა შესაძლებელია უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გამოყენებით.

მსჯელობის და გათვლების სიმარტივისათვის შესასწავლი ამოცანა წარმოვიდგინოთ მარტივი სახით და ეიგულისხმობთ, რომ პირველადი მოხმარების საგნებიდან უიხილავეთ მხოლოდ ორს. ცნობილია, რომ მოსახლეობის მოთხოვნილება ორზე მისი ასაკობრივი შემადგენლობის მიხედვით საგრძნობლად ცვალებადია.

ზოგჯერ შეუძლებელია ამის უშუალოდ დადგენა, თუ განსახილველ ოჯახში რა რაოდენობის ორს ხარჯავენ ბავშვები და რა რაოდენობისას – მოზრდილები. ასეთ შემთხვევაში დახარჯული ორის რაოდენობა დგინდება სხვა გზით, კერძოდ, ამ ოჯახის შესახებ არსებული მთლიანი მონაცემების მიხედვით.

გამოცდილება ცხადყოფს, რომ, სხვა თანაბარ პირობებში, ორი ოჯახიდან იმაში იხარჯება უფრო მეტი რაოდენობის ორს, რომელშიც უფრო მეტი ბავშვია.

ახლა შემოვიღოთ ასეთი აღნიშვნა:

y_i — i -ური ოჯახის რძეზე მოთხოვნილების მაჩვენებელი (ლიტრებში), ამ ოჯახის წევრთა ერთ სულზე გადაანგარიშებით;

z_i — i -ური ოჯახის მოზრდილთა რაოდენობა;

w_i — i -ური ოჯახის მოზარდების რაოდენობა;

$y_i^{(w)}$ — i -ური ოჯახის მოზარდთა საშუალო მოთხოვნილება რძეზე;

$y_i^{(z)}$ — i -ური ოჯახის მოზრდილთა საშუალო მოთხოვნილება რძეზე;

ამ აღნიშვნებში y_i (i -ური ოჯახის მოთხოვნილება რძეზე ამ ოჯახის წევრთა ერთ სულზე გადაანგარიშებით) ტოლი იქნება:

$$y_i = \frac{y_i^{(z)}z_i + y_i^{(w)}w_i}{z_i + w_i}. \quad (9.21)$$

(9.21) გამოსახულების მარჯვენა მხარის მრიცხველს დაევუმატოთ და გამოვაკლოთ $y_i^{(z)}w_i$ სიდიდე და მივიღებთ:

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{y_i^{(z)}z_i + y_i^{(z)}w_i + y_i^{(w)}w_i - y_i^{(z)}w_i}{z_i + w_i} = \\ &= y_i^{(z)} + (y_i^{(w)} - y_i^{(z)}) \frac{w_i}{z_i + w_i}. \end{aligned} \quad (9.22)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\frac{w_i}{z_i + w_i} \equiv x_i, \quad (9.23)$$

მაშინ (9.22) ტოლობაში (9.23)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$y_i = y_i^{(z)} + (y_i^{(w)} - y_i^{(z)})x_i, \quad (9.24)$$

სადაც x_i არის — i -ური ოჯახის მოზარდთა რაოდენობის ამსახველი მაჩვენებლის ფარდობა ამ ოჯახის წევრთა საერთო რაოდენობის ამსახველ მაჩვენებელთან.

(9.24) ტოლობიდან ჩანს, რომ მოცემული $y_i^{(z)}$ და $y_i^{(w)}$ სათვის, y_i სიდიდე წარმოადგენს წრფივ ფუნქციას მოზარდთა (ბავშვთა) ფარდობითი x_i რიცხვის მიმართ.

$y_i^{(2)} - y_i^{(w)}$ სხვაობა წარმოადგენს ამ წრფივი დამოკიდებულების საკუთხო კოეფიციენტს.

წარმოადგენა რომ ეიკონიოთ y -ის ცვლილებაზე x -ის ცვლილებასთან დაკავშირებით, საჭიროა ოჯახთა საერთო სიმრავლისაგან გამოეყოთ ისეთი ჯგუფები, რომელთაც მოზარდთა (ბავშვთა) ფარდობითი რიცხვი x განსხვავებული აქვთ და ამ ჯგუფების მიხედვით გამოეთვალათ მათი შესაბამისი საშუალო y სიდიდეები.

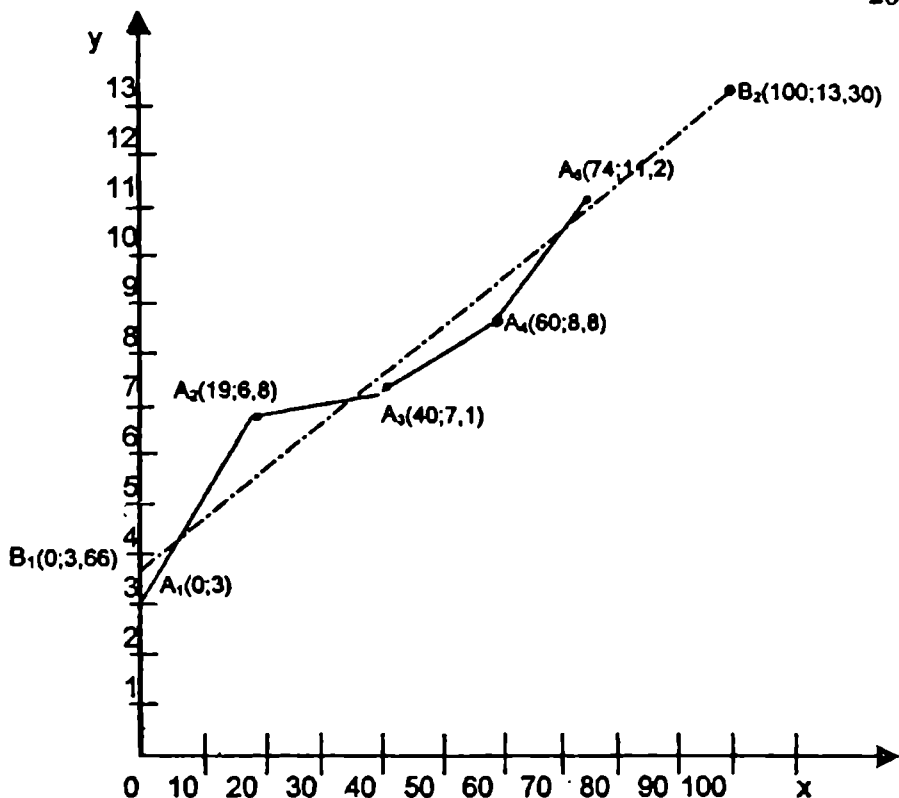
ეთქვით, ჩავატარეთ ოჯახთა ასეთი დაჯგუფება: პირველ ჯგუფში მოთავსებულია უბავშვო ოჯახები, მეორეში – ისეთი ოჯახები, სადაც ბავშვები არიან, მაგრამ მათი რაოდენობა არ აღემატება 23%-ს, მესამეში – ისეთი ოჯახები, სადაც ბავშვთა რაოდენობა შეადგენს მთელი რაოდენობის 23%-დან 46%-მდე და ა. შ.

ეიგულისხმობს აგრეთვე, რომ განსახილველ შემთხვევას შეესაბამება ასეთი შედეგები (იხ. ცხრ. 9.5).

ცხრ. 9.5

ჯგუფების ნომერი	ჯგუფების შესაბამისი ბავშვთა %-ების მაჩვენებლები	ბავშვთა რაოდენობა (პროცენტებში) x	რძის რაოდენობა (ლიტრებში) y
I	0	0	3,0
II	0-23	19	6,8
III	23-46	40	7,1
IV	46-69	60	8,8
V	62-92	74	11,2

ამ მონაცემების შესაბამის გრაფიკს ექნება ასეთი სახე:



ნახ. 9.1

ნახ. 9.1-ზე გამოსახული გრაფიკის ანალიზი ცხადყოფს, რომ გადახრა წრფივი დამოკიდებულებიდან ყოველთვის არ გამოხატავს რძეზე არსებული მოთხოვნილების კანონზომიერ ცვლილებას (ბავშვთა რაოდენობასთან დაკავშირებით). ასე მაგალითად, მესამე ჯგუფში მართალია $y=7,1$ და იგი მცირეთი განსხვავდება მეორე ჯგუფის შესაბამისი მაჩვენებლისაგან – $y=6,8$ -ს, მაგრამ ეს განსხვავება შეიძლება არ იყოს გამოწვეული არსებითი ფაქტორით (მაგ. ბავშვების რაოდენობით). იგი შეიძლება გამოწვეული იყოს არა არსებითი ფაქტორით. მაგალითად, შესაძლებელია, რომ მესამე ჯგუფში შემთხვევით ისეთი ოჯახები მოხვდნენ, რომლებიც ერთ ქუჩაზე ცხოვრობენ

და იქ რძის მაღაზია დროებით დაკეტილი აღმოჩნდეს, რემონტის გამო. ბუნებრივია, ამ დროს რძეზე მოთხოვნილების მაჩვენებელი გარკვეულად მცირდება.

განსახილველი ამოცანის შესწავლის დროს, ასეთი შემთხვევითი ფაქტორები უნდა გამოირიცხოს და შესაბამისად მივიღებთ წრფივ დამოკიდებულებას x და y სიდიდეებს შორის.

ახლა, შესასწავლი ამოცანის გადასაწყვეტად ვეპიოთ ისეთი წრფივი ფუნქცია, რომელიც რაც შეიძლება კარგად ასახავს რეალურ მონაცემებს.

ამ ამოცანის გადასაწყვეტად ვიყენებთ რა უმცირეს კვადრატთა მეთოდს, მოვითხოვთ, რომ განსახილველი ჯგუფების რძეზე მოთხოვნილების ერთ სულზე გადანაგარიშებით გამოთვლილ მაჩვენებელთა მნიშვნელობების გადახრათა კვადრატების ჯამი თითოეული ჯგუფის ფაქტიური მნიშვნელობებისაგან იყოს მინიმალური.

ეთქვათ, საძიებელი წრფივი ფუნქციის შესაბამის განტოლებას აქვს ასეთი სახე:

$$y_i = a_0 + a_1 x_i, \quad (9.25)$$

მაშინ ის ჯამი, რომლის მინიმუმსაც ვეძებთ, იქნება:

$$F = \sum_{i=1}^5 (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2, \quad (9.26)$$

სადაც y_i - არის რძეზე მოთხოვნილების ფაქტიური მნიშვნელობა i -ური ჯგუფისათვის.

x_i - ბავშვთა პროცენტული შემადგენლობა i -ურ ჯგუფში.

განსახილველი მაგალითისათვის, ცხრ. 95-ის მონაცემების გათვალისწინებით, F ჯამი იქნება:

$$F = (a_0 - 3,0)^2 + (a_0 + 19a_1 - 6,8)^2 + (a_0 + 40a_1 + 7,1)^2 + (a_0 + 60a_1 - 8,8)^2 + (a_0 + 74a_1 - 11,2)^2. \quad (9.27)$$

ახლა, ვიპოვოთ a_0 -ის და a_1 -ის ისეთი მნიშვნელობები, რომლებიც (9.26) ფუნქციას მინიმუმს მინიმალურ მნიშვნელობას. ამისათვის, (9.26) ფუნქციის გაწარმოებისა და გარდაქმნის გზით, შევადგინოთ განტოლებათა ასეთი სისტემა:

$$\begin{cases} 5a_0 + a_1 \sum_{i=1}^5 x_i = \sum_{i=1}^5 y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^5 x_i + a_1 \sum_{i=1}^5 x_i^2 = \sum_{i=1}^5 x_i y_i \end{cases} \quad (9.28)$$

თუ ამ განტოლებათა სისტემაში გავითვალისწინებთ 9.5 ცხრილის საჭირო მონაცემებს, მივიღებთ:

$$\begin{cases} 5a_0 + 193a_1 = 36,9 \\ 193a_0 + 11037a_1 = 1770,0. \end{cases} \quad (9.29)$$

ამ სისტემის ამოხსნა კი გეაძლეეს:

$$a_0 = 3,66; \quad a_1 = 0,0964.$$

ამგვარად, წრფივ ფუნქციას ექნება ასეთი სახე:

$$y = 3,66 + 0,0964x. \quad (9.30)$$

(9.30) განტოლებით გამოხატულ წრფივ ფუნქციას (9.1) ნახაზზე შეესაბამება პუნქტირით გაელებული წრფე.

მაშასადამე გამოდის, რომ თუ $x=0$, ანუ ბავშვთა რაოდენობა ტოლია ნულის, მაშინ ეღებულობთ მოთხოვნილების მაჩვენებელს მხოლოდ მოზრდილთათვის და იგი ტოლი იქნება 3,66-ის. თუ $x=100$, ანუ მოზრდილების რაოდენობა ტოლია 0-ის, მაშინ ეღებულობთ მოთხოვნილების მაჩვენებელს მხოლოდ ბავშვებისათვის და იგი ტოლი იქნება 13,3-ის.

თავი X. გადაწყვეტილების მიღების მათემატიკური
თეორიისა და მისი პრაქტიკული გამოყენების
საკითხები

§1 გადაწყვეტილების მიღების ამოცანის დასმის
წინაპირობები, მისი შინაარსი და გადაწყვეტის
უზოგადესი პრინციპები

ადამიანთა საქმიანობის სხეადასხვა სფეროში მნიშვნელოვანი ადგილი უჭირავს გადაწყვეტილების მიღების ამოცანებს. ეს განპირობებულია ასეთი ამოცანების შინაარსითა და მნიშვნელობით. მართლაც, აღნიშნული სახის ამოცანის - შინაარსი გულისხმობს ერთი ან რამდენიმე მიზნის მიღწევისათვის საჭირო ქმედებების ყველაზე უფრო საუკეთესო ან მისაღებ საშუალებათა განსაზღვრას. აქედან კი ცხადია, რომ ადამიანის სოციალურ და ფიზიკურ გარემოში, მის მიერ განსახორციელებელ მიზანმიმართულ საქმიანობასა და გადაწყვეტილების მიღების ამოცანებს შორის არსებობს მჭიდრო კავშირი.

ცნობილია, რომ ადამიანი თავისი ყოველდღიური ცხოვრების პროცესში მუდამ აწყდება გადაწყვეტილების მიღების აუცილებლობას. მაგალითად, მის წინაშე შეიძლება დაისვას გადაწყვეტილების მიღების ასეთი ამოცანები: რა ნივთები უნდა შეიძინოს კვირის განმავლობაში?, როგორ გაატაროს 'შაბათ-კვირის დასვენების დღეები?', სად წავიდეს დასასვენებლად შვებულების დროს?, რომელი მარშრუტით წავიდეს სახლში? და ა.შ.

ადამიანი გადაწყვეტილების მიღებას, ასეთი ცხოვრებისეული შედარებით მარტივი ამოცანების დროს, ახორციელებს მისი ცოდნის, გამოცდილებისა და ინტუიციურ-ლოგიკური აზროვნების გამოყენებით. აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ ასეთი მარტივი ცხოვრებისეული ამოცანების პირობებში მიღებული გადაწყვეტილებების შესაძლო შეცდომების შედეგები, როგორც წესი, იპყრობს ერთი ან რამდენიმე პირის ინტერესებს და ისინი არ იწვევენ რესურსების დიდ დანაკარგებს.

ადამიანის ცხოვრებისა და საქმიანობის პროცესში, გარდა აღნიშნული სახის გადაწყვეტილების მიღების უმარტივესი ამოცანებისა, მნიშვნელოვნად არის წარმოდგენილი რთული ამოცანების ფართო კლასი. ეს ისეთი ამოცანებია, რომლებიც დაკავშირებულია ადამიანის საქმიანობის განსხვავებულ სფეროებში – პოლიტიკურ, იდეოლოგიურ, სამხედრო და ა.შ. ეკონომიკურში მიმდინარე მართვის პროცესებთან. ამასთან, აღსანიშნავია ისიც, რომ გადაწყვეტილების მიღების პროცესი, ასეთი რთული ამოცანების მონაცემთა პირობებში, უფრო მეტად, ეხება ადამიანთა ფართო წრის, ან მთელი საზოგადოების ინტერესებს და იძენს განსაკუთრებულ მნიშვნელობას. გარდა ამისა, ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებასაც, რომ რთული სოციალ-ეკონომიკური სისტემების მართვის დროს დაშვებული შეცდომები იწვევს დიდ მატერიალურ და მორალურ ზარალს. ასეთი შეცდომები ბუნებრივია, ობიექტურად წარმოიშობა იმ შემთხვევაში, როცა ადგილი აქვს მხოლოდ და მხოლოდ ადამიანის ინტუიციურ-ლოგიკურ აზოვნებაზე დაყრდნობას. აღნიშნული სახის შეცდომები დაკავშირებულია ადამიანის ფიზიოლოგიური შესაძლებლობების, მისი აღქმისა და მის მიერ დიდი მოცულობის ინფორმაციის გადამუშავების უნარის შეზღუდულობასთან.

ამასთან დაკავშირებით, იქმნება გადაწყვეტილების მიღების პროცესებისადმი მეცნიერული მიდგომის აუცილებლობა. ასეთი მიდგომა, ფართო გაგებით, ითვალისწინებს გადაწყვეტილების მიღების თეორიისა და მისი პრაქტიკული რეალიზაციისათვის საჭირო რეკომენდაციების, აგრეთვე ტექნიკური საშუალებების (მ. შ. კომპიუტერების) არსებობას, ხალხის, გადაწყვეტილების მიღების თეორიულ და პრაქტიკულ სფეროებში მომზადების სპეციალური სისტემების შექმნას, ლოგიკური აზროვნების, ინტუიციისა და მათემატიკური მეთოდების კომპლექსურ გამოყენებას ოპტიმალური გადაწყვეტილების ფორმირებისა და შერჩევის პროცესში.

გადაწყვეტილების მიღების პროცესი აისახება ერთ კომპლექსურ ამოცანაში. მას გადაწყვეტილების მიღების ამოცანას უწოდებენ.

ახლა შევხვთ ამ ამოცანის შინაარსისა და მისი გადაწყვეტის უზოგადესი დებულებების ამსახველ საკითხებს.

გადაწყვეტილების მიღების ამოცანის შინაარსი გულისხმობს ერთი ან რამდენიმე მიზნის მიღწევისათვის საჭირო ქმედებების ყველაზე საუკეთესო (ოპტიმალური) ან მისაღები გზის (ხერხის) განსაზღვრას.

მიზნის ცნების ქვეშ, ფართო გაგებით, იგულისხმება საქმიანობის სასურველი მდგომარეობის ან შედეგის იდეალური წარმოდგენა.

იმ შემთხვევაში, თუკი საქმიანობის ფაქტიური მდგომარეობა არ შეესაბამება სასურველს, მაშინ ამბობენ, რომ ადგილი აქვს *პრობლემურ სიტუაციას* ან მოკლედ *პრობლემას*.

სწორედ ამ უკანასკნელის აღმოფხვრისათვის საჭირო გეგმის შემუშავება წარმოადგენს გადაწყვეტილების მიღების ამოცანის მთავარ მოთხოვნას.

აღნიშნული სახის პრობლემური სიტუაცია წარმოიშობა შემდეგი სამი ძირითადი სახის პირობებში:

ა) სისტემის ფუნქციონირება მოცემულ მომენტში ვერ უზრუნველყოფს დასმული მიზნების მიღწევას;

ბ) სისტემის ფუნქციონირება მომავალში ვერ უზრუნველყოფს დასმული მიზნების მიღწევას;

გ) აუცილებელია დასმული მიზნების შეცვლა.

პრობლემური სიტუაციის გამოვლენას გააჩნია განსაკუთრებული მნიშვნელობა გადაწყვეტილების მიღების ამოცანის დასმისათვის. იგი ამ უკანასკნელისათვის იძლევა აუცილებელ საწყის ინფორმაციას.

გადაწყვეტილების მიღების ამოცანის საბოლოო შედეგს წარმოადგენს *გადაწყვეტილება*.

გადაწყვეტილება არის მითითება მოქმედებისათვის. იგი თავისი შინაარსის და დანიშნულების მიხედვით შეიძლება იყოს ქმედების კურსი, ქმედების ხერხი, სამუშაოს გეგმა, პროექტის ვარიანტი და ა.შ.

გადაწყვეტილება წარმოადგენს ადამიანის გონიერული ქმედების და ნება-სურვილის ერთ-ერთ სახეს. მას გააჩნია ისეთი სპეციფიკური ნიშნები, როგორიცაა:

– საუკეთესოს არჩევის შესაძლებლობა დასაშვები სიმრავლიდან;

– საუკეთესოს არჩევის პროცესი უნდა ეყრდნობოდეს მიზნების შეგნებულ მიღწევას;

– საუკეთესოს არჩევის პროცესი უნდა ეყრდნობოდეს მოქმედების ჩამოყალიბებულ დადგენილებას.

გადაწყვეტილების განზოგადებულ მახასიათებელს წარმოადგენს *გადაწყვეტილების ეფექტიანობა*. ეს მახასიათებელი შეიცავს *გადაწყვეტილების ეპექტს*, რომელიც განსაზღვრავს მიზნების მიღწევის ხარისხს და *გადაწყვეტილების ღირებულებას* (ფასს), რომელიც გამოხატავს გადაწყვეტილების მიღებისა და რეალიზაციისათვის საჭირო რესურსების დანახარჯების ერთობლიობას. აღნიშნულიდან გამომდინარეობს, რომ *გადაწყვეტილების ეფექტიანობა* წარმოადგენს მიზნების მიღწევის ხარისხობრივი მაჩვენებლისა და მათი მიღწევისათვის საჭირო დანახარჯების ურთიერთდამოკიდებულებას. მით უფრო ეფექტიანია გადაწყვეტილება, რაც უფრო მეტია მიზნების მიღწევის ხარისხი და ნაკლებია ამ მიზნების მიღწევისათვის საჭირო დანახარჯები.

ამა თუ იმ გადაწყვეტილებას ღებულობს სუბიექტი, ანუ პირი, რომელსაც უწოდებენ *გადაწყვეტილების მიმღებ პირს* (გმპ). გმპ წარმოადგენს კრებისით ცნებას. იგი შეიძლება გულისხმობდეს ერთ პირს (გადაწყვეტილების მიმღებ ინდივიდუალურ პირს) ან მეტს – რამოდენიმე პირისაგან შემდგარ ჯგუფს, რომელიც ახდენს კოლექტიური გადაწყვეტილების შემუშავებას.

გადაწყვეტილების მიღების პროცესში, გმპ-ისათვის დახმარების გაწევის მიზნით, ხდება სპეციალისტ-ექსპერტების „მოზიდვა“ და აღნიშნულ პროცესში ჩართვა. სპეციალისტ-ექსპერტები გმპ-ს ეხმარებიან ინფორმაციის შეკრებასა და ანალიზში, აგრეთვე გადაწყვეტილებების ფორმირების პროცესში.

გადაწყვეტილების მიღება მიმდინარეობს დროში. ამიტომ გადაწყვეტილების მიღების თეორიაში შემოტანილია გადაწყვეტილების მიღების პროცესის ცნება. ეს პროცესი შედგება ეტაპებისა და პროცედურების მიმდევრობებისაგან და მიმართულია პრობლემური სიტუაციის აღმოფხვრისაკენ. გადაწყვეტილების მიღების ძირითად ეტაპებს წარმოადგენს:

- ამოცანის დასმა;
- გადაწყვეტილების ფორმირება;
- გადაწყვეტილების შერჩევა.

ეს ეტაპები ქმნიან ურთიერთდაკავშირებულ ჯაჭვს, რაც უსრუნველყოფს გადაწყვეტილების მიღების პროცესის იტერაციულ და ციკლურ ბუნებას. ეს კი თავის მხრივ ხელს უწყობს გადაწყვეტილების მიღების ამოცანის კორექტირების შესაძლებლობას მისი საჭიროების შემთხვევაში. გადაწყვეტილების ალტერნატიული ვარიანტები, გმპ-ს მიერ ფასდება უპირატესობის მინიჭების წესის გამოყენებით. უპირატესობა წარმოადგენს გადაწყვეტილების ხარისხის ისეთ ინტეგრალურ შეფასებას, რომელიც ეყრდნობა ფასეულობის ობიექტურ ანალიზს (ცოდნას, გამოცდილებას, გათვლების და ექსპერიმენტების ჩატარებას) და სუბიექტურ გაგებას, აგრეთვე გადაწყვეტილების ეფექტიანობას.

გადაწყვეტილების მიღების სისტემა წარმოადგენს ადამიანთა, მეთოდების, ტექნიკური საშუალებების, ინფორმაციისა და გადაწყვეტილების მიღების ტექნოლოგიის ორგანიზებულ ერთობლიობას.

გადაწყვეტილების მიღების (ინდივიდუალური პირის მიერ) ამოცანის დასმა კომპაქტური სახით შეიძლება შემდეგი სიმბოლური ფორმით:

$L_0, T, R/L, M, O, X, F, K,$

(10.1)

სადაც

L_0 - არის საწყისი პრობლემური სიტუაცია, რომელიც აღწერილია შინაარსობრივად და რაოდენობრივი მახასიათებლების ერთობლიობის გამოყენებით;

T - არის იმ დროის ამსახველი პარამეტრი, რომელსაც გადაწყვეტილების მიღებისათვის ფლობს გმპ;

R- არის გადაწყვეტილების მიღებისათვის საჭირო რესურსები.

პრობლემური სიტუაცია, დრო და რესურსები. როგორც წესი ცნობილია. ამიტომ მათი აღმნიშვნელი სიმბოლოები განლაგებულია ვერტიკალური ხაზის მარცხნივ და იგულისხმება, რომ ისინი ცნობილია. იმ შემთხვევაში თუ დროის აღმნიშვნელი სიმბოლო (T) და რესურსების გამოხატველი პარამეტრი (R) წარმოადგენენ უცნობი სიდიდეების გამომხატველ პარამეტრებს და საჭიროა მათი განსაზღვრა, T და R სიმბოლოები (10.1) გამოსახულებაში გადტანილ უნდა იქნეს ვერტიკალური ხაზის მარჯვნივ.

(10.1) გამოსახულებაში ვერტიკალური ხაზის მარჯვნივ მოცემულია უცნობი სიდიდეების ამსახველი პარამეტრები, რომლებიც ექვემდებარებიან განსაზღვრას.

მართვის რეალურ ამოცანებში, საწყისი პრობლემური სიტუაცია (L_0), ხშირად, სრულად არ არის ცნობილი. მისი სრულად განსაზღვრისათვის ხდება $L_j (j=1,2,\dots,n)$ პიპოტუხური სიტუაციების წამოყენება. ნებისმიერი სიტუაცია ($L_j (j=1,2,\dots,n)$) აღიწერება შინაარსობრივად და რაოდენობრივი მახასიათებლების ერთობლიობით. მათ შორის მნიშვნელოვანი ადგილი უჭირავს სიტუაციის წარმოშობის შესაძლებლობის მახასიათებლებს, რომლებსაც უწოდებენ სიტუაციის ალბათობას. j-ური სიტუაციის ალბათობას აღნიშნავენ p_j სიმბოლოთი.

განხილული სახის სიტუაციების (ვერსიების, პიპოტუხების) ერთობლიობა უნდა ქმნიდეს ხდომილობათა სრულ სისტემას, ე. ი. ისინი უნდა მოიცავდნენ პრობლემური სიტუაციების (S_0) სრულად განმსაზღვრელ, ყველა შესაძლო ხდომილობას.

თუ ყველა შესაძლო სიტუაციების ფორმულირება გართულებულია, მაშინ ხდომილობათა სრული სისტემის ასაგებად შემოყავთ სიტუაცია სახელწოდებით: „დანარჩენი ჯერ-ჯერობით უცნობი სიტუაციებია“ და ამ სიტუაციებს მიუწერენ მათი წარმოქმნის შესაბამის ალბათობებს.

ხდომილობათა სრული სისტემის შემქმნელი ალტერნატიული სიტუაციების შესაბამისი ალბათობების ჯამი

$$\sum_{j=1}^n p_j = 1,$$

სადაც n -არის ხდომილობათა სრული სისტემის შემქმნელი ალტერნატიული სიტუაციების რაოდენობის აღმნიშვნელი სიმბოლო.

პრობლემური სიტუაციის (L_0) სრულად განსაზღვრის პროცესი შესაძლო ალტერნატიული სიტუაციების ფორმირების გზით, ამცირებს საწყის განუზღვრელობას. ეს განპირობებულია იმით, რომ ამ დროს ხდება შინაარსობრივი ხდომილობების ჩამონათვალის ფორმულირება ჯა ამ გზით. განუზღვრელობა დაყვანილია მათი წარმოშობის ალბათობების განსაზღვრის პროცესზე.

პრობლემური სიტუაციის სრულად განსაზღვრა იძლევა იმ მიზანთა $\{M=(M_1, M_2, M_3, \dots, M_k)\}$ სიმრავლის უფრო მკაფიოდ ფორმულირების საშუალებას, რომლებითაც ხელმძღვანელობენ გადაწყვეტილების მიღების დროს. ეს მიზნები, როგორც ცნობილია, გამოხატავენ გვპ საქმიანობის სასურველ შედეგს, პრობლემური სიტუაციის აღმოფხვრის მიხედვით.

აღნიშნული სახის მიზანთა სიმრავლის აღწერა ხორციელდება ხარისხობრივად და რაოდენობრივად. ამ მიზნებს შეიძლება მათი მნიშვნელობების მიხედვით მიენიჭოთ პრიორიტეტები და წარმოდგენილი იქნენ რანჟირებული სახით.

გადაწყვეტილებების მიღება, კონკრეტულ პრობლემურ სიტუაციაში ყოველთვის ხორციელდება შეზღუდულობის პირობებში. შეზღუდულობა შეიძლება იყოს ფინანსური, მატერიალური, სამართლებრივი და სხვა სახის. გადაწყვეტილების მიღების ამოცანის დასმის დროს აუცილებელია იმ $O=(O_1, O_2, \dots, O_i)$ შეზღუდვების სიმრავლის ფორმულირება, რომლებიც ცხადად ასახავენ რეალურად მოქმედ შემზღუდავ პირობებს.

მიზნების მისაღწევად ხდება $X=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ გადაწყვეტილებათა სიმრავლის ფორმირება. ამ სიმრავლიდან კი

ამორჩეულ უნდა იქნეს ერთადერთი ოპტიმალური ან მისაღები $\bar{x}$ გადაწყვეტილება. გადაწყვეტილების სიმრავლე მოიცავს, აგრეთვე ისეთ გადაწყვეტილებას უმოქმედობის შესახებ, რომლის მიღებაც უზრუნველყოფს პრობლემური სიტუაციის შენარჩუნებას. $x_1, x_2, \dots, x_m$ გადაწყვეტილებების აღწერა ხდება შინაარსობრივად და მახასიათებლების ნაკრების სახით.

გადაწყვეტილების ხარისხის შედარებითი შეფასება ხდება უპირატესობის მინიჭების საფუძველზე. ამ მიზნით გმპ-ს მიერ წარმოებს უპირატესობის ფუნქციის შემოტანა. ცალკეული L_j ($j=1, 2, \dots, n$) სიტუაციების, M_h ($h=1, 2, \dots, H$) მიზნების და x_i ($i=1, 2, \dots, m$) გადაწყვეტილებებისათვის, უპირატესობის $F(L_j, M_h, X_i)$ ფუნქცია, მოცემულ სიტუაციაში, აფასებს გადაწყვეტილების სარგებლიანობას, ფასეულობას მოცემული მიზნის მიღწევისათვის.

ასეთ შეფასებას შეიძლება გააჩნდეს ხარისხობრივი ან რაოდენობრივი ხასიათი. შეფასების ხარისხობრივი ხასიათის შემთხვევაში ხდება ყველა X_i ($i=1, 2, \dots, m$) გადაწყვეტილების მოწესრიგება თავიანთი უპირატესობების მიხედვით, ხოლო მისი რაოდენობრივი ხასიათის შემთხვევაში, კი შეიძლება შედარდეს ერთი გადაწყვეტილება მეორესთან და განსაზღვრულ იქნეს, თუ რამდენით, ან რამდენჯერ უკეთესია ერთი გადაწყვეტილება მეორეზე.

გმპ-ის ერთ-ერთ ფუნქციას წარმოადგენს ოპტიმალური ან მისაღები გადაწყვეტილების ($\bar{x}$) პოვნისათვის საჭირო, შესარჩევი კრიტერიუმის (K) ჩამოყალიბება. სწორედ ასეთი კრიტერიუმის გამოყენებით ხდება ყველაზე საუკეთესო გადაწყვეტილების ცნების განსაზღვრა.

აღნიშნულიდან, გადაწყვეტილების მიღების ამოცანა, ინდივიდუალური პირის შემთხვევაში, მოკლედ შეიძლება ჩამოყალიბდეს ასეთნაირად:

საწყისი პრობლემური L_0 სიტუაციის პირობებში, რომელსაც შეესაბამება T დროითი და R რესურსული მანქნებლები, აუცილებელია სიტუაციების L სიმრავლით სრუ-

ლად განისაზღვროს L_0 სიტუაცია, ჩამოყალიბებულ იქნეს ზისნების M , შესლუდებების O , გადაწყვეტილებების X სიმრავლეები, განხორციელებულ იქნეს გადაწყვეტილებების უპირატესობების შეფასება და გადაწყვეტილებების X სიმრავლიდან K კრიტერიუმის გამოყენებით ნაპოვნი იქნეს ოპტიმალური, ან მისაღები $\bar{x}$ მნიშვნელობა.

გადაწყვეტილების მიღების (კოლექტიური (ჯგუფური) პირის მიერ) ამოცანის დასმა კომპაქტურად, სიმბოლოების გამოყენებით შეიძლება აღიწეროს ასეთნაირად:

$$L_0, T, R/L, M, O, X, F, \Psi(F), \Pi, \quad (10.2)$$

სადაც

L_0, T, R, L, M, O, X, F – წარმოადგენენ იმავე შინაარსის მქონე სიმბოლოებს, რომელიც მათ გააჩნდათ (10.1) გამოსახელებაში. კოლექტივის ან ჯგუფის ყოველ წევრს გააჩნია უპირატესობის საკუთარი $F_L (L=1, 2, \dots, d)$ ფუნქცია, სადაც d – არის ჯგუფში არსებული წევრების რაოდენობის აღმნიშვნელი სიმბოლო. მაშასადამე, ცხადია, რომ $F=(F_1, F_2, \dots, F_d)$ წარმოადგენს ინდივიდუალური უპირატესობების აღმნიშვნელ სიმბოლოთა სიმრავლეს. ამასთან დაკავშირებით, წარმოიქმნება ინდივიდუალური უპირატესობების შეთანხმების აუცილებლობა. ასეთი შეთანხმების განხორციელება ხდება *ჯგუფური უპირატესობის ფუნქციის* აგების გზით. ამ ფუნქციის აგება ხორციელდება *ჯგუფური არჩევანის პრინციპის* (II) განსაზღვრის საფუძველზე, ანუ ჯგუფური შეთანხმების გამოყენებით. შეთანხმების ასეთი პრინციპი განსაზღვრავს ინდივიდუალური უპირატესობების ჯგუფურ უპირატესობებთან შეთანხმების ყველაზე საუკეთესო ან მისაღები ვარიანტის შინაარსს.

აღნიშნულიდან გამომდინარე გადაწყვეტილების მიღების ამოცანის დასმა, გადაწყვეტილების ჯგუფური გზით მიღების შესაბამისად, შეიძლება შემდეგნაირად:

საწყისი პრობლემური L_0 სიტუაციის პირობებში, რომელსაც შეესაბამება T დროითი და R რესურსული მაჩვენებლები, აუცილებელია სიტუაციების L სიმრავლით სრუ-

ლად განისაზღვროს L_0 სიმრავლე, ჩამოყალიბდეს მიზნების M , შეზღუდვების O , გადაწყვეტილებების X სიმრავლეები, განხორციელებულ იქნეს გადაწყვეტილებების უპირატესობების ინდივიდუალური შეფასება, აგებულ იქნეს უპირატესობის ჯგუფური შეფასება $\Psi(F)$, ჯგუფური შეთანხმების ჩამოყალიბებული Π პრინციპის გამოყენების გზით და ნაპოვნი იქნეს ისეთი ოპტიმალური ან მისაღები გადაწყვეტილება, რომელიც ყველაზე უფრო უკეთესად დააკმაყოფილებს ჯგუფურ უპირატესობას.

§2. გადაწყვეტილების მიღების ამოცანების კლასიფიკაცია

გადაწყვეტილების მიღების ამოცანის კლასიფიკაცია შესაძლებელია სხვადასხვა ნიშნის მიხედვით. მათ შორის ყველაზე არსებითს წარმოადგენს: 1. ინფორმაციის განსაზღვრულობის ხარისხი; 2. ექსპერიმენტის გამოყენება ინფორმაციის მისაღებად; 3. გადაწყვეტილების მიმღები პირის რაოდენობა; 4. გადაწყვეტილების შინაარსი; 5. გადაწყვეტილების მიმართულება.

ინფორმაციის განსაზღვრულობის ხარისხის ქვეშ იგულისხმება გადაწყვეტილების მიღებისათვის აუცილებელი მონაცემების უტყუარობისა და მისი სისრულის ხარისხი. გადაწყვეტილების მიღების ამოცანებს ინფორმაციის განსაზღვრულობის ხარისხის მიხედვით ყოფენ სამ ჯგუფად:

- ამოცანები განსაზღვრულობის პირობებში, ანუ ლეტერმინირებული ამოცანები;

- ამოცანები ალბათური განსაზღვრულობის პირობებში, ანუ სტოქასტური ამოცანები;

- ამოცანები განუზღვრელობის პირობებში.

გადაწყვეტილების მიღება განსაზღვრულობის პირობებში წარმოებს პრობლემური სიტუაციის შესახებ სრული და უტყუარი ინფორმაციის არსებობის დროს.

გადაწყვეტილების მიღების ასეთი ამოცანებისათვის არ არის აუცილებელი პრობლემური სიტუაციის სრულად განსაზღვრა ჰიპოთეზური სიტუაციებით. ასეთ ამოცანებში

მიზნები და შეზღუდვები ფორმალურად განისაზღვრება მიზნის ფუნქციების და შეზღუდვების სახით. უპირატესობის ფუნქცია ერთი მიზნის შემთხვევაში ემთხვევა მიზნის ფუნქციას, ხოლო მიზნების სიმრავლის შემთხვევაში, კი – მიზნის ფუნქციების განსაზღვრულ ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას. საზომი კრიტერიუმების შერჩევა ხდება მიზნის ფუნქციის მინიმუმის ან მაქსიმუმის სახით.

აღნიშნული სახის ინფორმაციის არსებობა იძლევა გადაწყვეტილების მიღების ამოცანის შესაბამისი მათემატიკური მოდელის აგების და ოპტიმალური გადაწყვეტილების პოვნის საშუალებას.

ამ კლასის ამოცანების გადასაწყვეტად იყენებენ ოპტიმიზაციის სხვადასხვა მეთოდებს, მაგალითად, მათემატიკური – წრფივი, არაწრფივი, დინამიკური დაპროგრამების მეთოდებს.

აღამიანის როლი ამ კლასის ამოცანების გადაწყვეტაში განისაზღვრება იმით, რომ მან რეალური სიტუაცია უნდა ასახოს მათემატიკური დაპროგრამების ამოცანაში და დაამკვიცოს ოპტიმალური გადაწყვეტილება. რაც შეეხება ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღების პროცესს, იგი მიიღება ფორმალურად აღამიანის ჩარევის გარეშე.

გადაწყვეტილების მიღება სტოქასტურ შემთხვევაში, ანუ ალბათური განსაზღვრულობის პირობებში, ეყრდნობა სტატისტიკური გადაწყვეტილების თეორიას. ამ თეორიაში გადაწყვეტილების მიღების ზოგად კრიტერიუმს წარმოადგენს *საშუალო რისკი*. ამიტომ, ხშირად, სპეციალურ ლიტერატურაში მოცემული კლასის ამოცანებს უწოდებენ გადაწყვეტილების მიღების ამოცანებს რისკის პირობებში.

აღამიანის როლი, სტატისტიკური გადაწყვეტილებების თეორიის მეთოდებით შესასწავლი სახეობის ამოცანების გადაწყვეტაში განისაზღვრება ამოცანის დასმით (ე.ი. რეალური ამოცანის ტიპიურ მათემატიკურ ამოცანამდე მიყვანით), მიღებული ოპტიმალური გადაწყვეტილების დამტკიცებით, აგრეთვე სუბიექტური ალბათობების განსაზღვრით, სტატისტიკური მონაცემების არ არსებობის დროს. სუბიექტური ალბათობები წარმოადგენს აღამიანის შეხედუ-

ლებებს შემთხვევითი ხდომილობების უტყუარობის შესახებ. ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღება მოცემული კლასის ამოცანებში ხორციელდება ფორმალურად ადამიანის მონაწილეობის გარეშე.

გადაწყვეტილების მიღების ამოცანები განუზღვრელობის პირობებში უშუალოდ არის დაკავშირებული მართვის გადაწყვეტილებებთან. ამ ამოცანებისათვის დამახასიათებელია ინფორმაციის უკმარისობისა და არასაიმედოობის მაღალი ხარისხი, სხვადასხვა სახეობის – სოციალური, პოლიტიკური, ტექნიკური, ეკონომიკური და სხვა შინაარსის ფაქტორების გაელენის მრავალსახეობა და სირთულე. ეს გარემოებები არ იძლევა ოპტიმალური გადაწყვეტილების მისაღებად საჭირო ადეკვატური მათემატიკური მოდელის აგების საშუალებას.

აქედან გამომდინარე, ოპტიმალური ან დასაშვები გადაწყვეტილების ძებნის პროცესში აქტიურ როლს ასრულებს ადამიანი, რომელიც გადაწყვეტილების ფორმირების დროს, დამხმარე ინსტრუმენტების რანგში, იყენებს ფორმალურ მეთოდებსა და ტექნიკურ საშუალებებს. ამ დროს ძირითად ფუნქციას ასრულებს ადამიანის ლოგიკური აზროვნება და ინტუიცია.

აღნიშნული კლასის ამოცანების გადაწყვეტა მოითხოვს კომპლექსურ მიდგომას, რომელიც შეიცავს სისტემური ანალიზის მიღწევას, ფსიქოლოგიის, სოციოლოგიის, მათემატიკის და სხვა დისციპლინების გამოყენებას. ეს, უმთავრესად, განპირობებულია იმით, რომ გადაწყვეტილების მიღების ამოცანებში განუზღვრელობის პირობებით, რომლებშიც ადამიანს ეკუთვნის არსებითი როლი, წარმოიქმნება ადამიანის ყოფაქცევის ფსიქოლოგიური ასპექტების გათვალისწინების აუცილებლობა.

ყოველივე ზემოთ აღნიშნულიდან ცხადია, რომ გადაწყვეტილების მიღების ამოცანა განუზღვრელობის პირობებში წარმოადგენს უფრო ზოგადს და როგორც კერძო შემთხვევები შეიცავს გადაწყვეტილების მიღების ამოცანებს განსაზღვრელობისა და ალბათური განსაზღვრელობის პირობებში.

გადაწყვეტილების მიღების ამოცანები, საჭირო ინფორმაციის მიღების მიზნით გამოყენებული ექსპერიმენტის ნიშნის მიხედვით იყოფა ორ ჯგუფად: ა). გადაწყვეტილების მიღების ამოცანები აპრიორული (ცდისაგან დამოუკიდებელი) მონაცემებით და ბ). გადაწყვეტილების მიღების ამოცანები აპოსტერიორული (ცდაზე დამყარებული) მონაცემებით.

გადაწყვეტილების მიღება აპრიორული მონაცემების მიხედვით დამახასიათებელია განსაზღვრულობის პირობებისათვის და ნაწილობრივ ალბათური განსაზღვრულობისათვის. ეს დაკავშირებულია იმასთან, რომ აპრიორული მონაცემების ცნება თავისთავად ნიშნავს მხოლოდ უკვე ცნობილი ინფორმაციის გამოყენებას.

განუზღუდვადობის პირობებში, აპრიორული ინფორმაციის გამოყენება ხდება ძალიან მცირე რაოდენობით. ამიტომ, ამ დროს ახალი ინფორმაციის მიღების მიზნით იქმნება ღონისძიებათა ერთობლიობის, ანუ ექსპერიმენტის ჩატარების აუცილებლობა.

ამოცანები, გადაწყვეტილების მიმოები პირების რაოდენობრივი ნიშნის მიხედვით იყოფა ორ ნაწილად: ა). ინდივიდუალურ და ბ). ჯგუფურ (კოლექტიურ) ამოცანებად.

ინდივიდუალური ამოცანების დროს გადაწყვეტილება მიიღება ერთი პირის მიერ, ხოლო ჯგუფური ამოცანების დროს, კი – კოლექტივის ან ჯგუფის მიერ.

გადაწყვეტილების მიღების ამოცანები, მიზნების რაოდენობრივი ნიშნის მიხედვით იყოფა *ერთმიზნიან* და *მრავალმიზნიან* ამოცანებად.

გადაწყვეტილების მიღების ამოცანები, მასში ასახული საქმიანობის სფეროს მიხედვით იყოფა *პოლიტიკურ*, *იდეოლოგიურ*, *ტექნიკურ*, *სამხედრო*, *ეკონომიკურ* და სხვა სახეობის ამოცანებად.

გადაწყვეტილების მიღების ამოცანებს, გადაწყვეტილების მიმართულების მიხედვით ყოფენ სამ ნაწილად: ა). სტრატეგიული; ბ). ოპერატიული და გ). ტაქტიკური გადაწყვეტილების შემცველი ამოცანები.

სტრატეგიული შინაარსის გადაწყვეტილებები ემსახურება ხანგრძლივადიანი გენერალური მიზნების მიღწევას. ასეთ გადაწყვეტილებებს, მაგალითად, მიეკუთვნება პოლიტიკური დოქტრინების მიღება, ხანგრძლივადიანი ეროვნული პროგრამების შემუშავება სამეცნიერო-ტექნიკურ, სოციალურ, ეკონომიკურ და საქმიანობის სხვა სფეროებში.

ოპერატიული გადაწყვეტილებები ემსახურება ისეთი საშუალოვადიანი მიზნების მიღწევას, რომლებიც უზრუნველყოფენ სტრატეგიული გადაწყვეტილებების რეალიზაციას. ასეთ გადაწყვეტილებებს მიეკუთვნება, მაგალითად, ქვეყნის სოციალურ-ეკონომიკური განვითარების ხუთწლიანი ინდიკატური გეგმები, მას-ის შე-უშავება ქვეყნის მასშტაბით და სხვა.

ტაქტიკური გადაწყვეტილებების მიღება ემსახურება მოკლევადიანი მიზნების მიღწევას და ამ უკანასკნელისათვის საჭირო მეთოდებისა და საშუალებების შერჩევას. ტაქტიკური გადაწყვეტილება განსაზღვრავს მისი გატარების კონკრეტულ ხაზს.

გადაწყვეტილების მიღების ამოცანების გარდა ზემოთ ჩამოთვლილი სახეობებისა, პრაქტიკაში შეიძლება შეგუხედეს, აგრეთვე მათი კომბინირებული ნაირსახეობებიც. ასე მაგალითად, ზოგიერთი კონკრეტული ამოცანა შეიძლება კლასიფიცირებულ იქნეს, როგორც გადაწყვეტილების მიღების ამოცანა განუზღვრელობის პირობებში, აპოსტერიორული მონაცემებით, ჯგუფური, მრავალმიზნიანი და ტაქტიკური სახეობისა.

§3. გადაწყვეტილების მიღების მათემატიკური თეორიის ადგილი გადაწყვეტილების მიღების მთლიან სისტემაში

გადაწყვეტილების მიღების თეორიაში მნიშვნელოვანი ადგილი უჭირავს გადაწყვეტილების მიღების კონცეპტუალურ საკითხებს, რომლებსაც აერთიანებს სპეციალური კონცეფცია.

გადაწყვეტილების მიღების კონცეფცია წარმოადგენს ისეთი შეხედულებებისა და პრინციპების ერთობლიობას.

რომლებიც საზღვრავენ ამოცანის გადაწყვეტის ზოგად იდეოლოგიასა და მიმარ თულებას. გადაწყვეტილების მიღების კონცეფციის განხილვისას განსაკუთრებულ ყურადღებას იპყრობს გმპ-ის და ექსპერტების როლი, გადაწყვეტილების ვარიანტების შეფასებების პრინციპები, ერთადერთი მისაღები გადაწყვეტილების არსებობა და განუზღვრელობის შემცირების ეტაპები.

სპეციალურ ლიტერატურაში ამჟამად ცნობილია გადაწყვეტილების მიღების კონცეფციის შემდეგი ძირითადი დებულებები:

– გადაწყვეტილების მიღების ამოცანაში გმპ ასრულებს ძირითად როლს. ის, თავისი უპირატესობების საფუძველზე, დებულებას გადაწყვეტილებებს და კისრულობს მათზე პასუხისმგებლობებს;

– ექსპერტები ასრულებენ დამხმარე როლს, რადგან ისინი ახორციელებენ ინფორმაციულ-ანალიტიკურ სამუშაოს და ამცირებენ განუზღვრელობას. ამასთან, ისიც აღსანიშნავია, რომ ისინი პასუხისმგებელი არიან თავიანთ რეკომენდაციებზე;

– გადაწყვეტილების ხარისხის გაზომვა ხორციელდება ალტერნატიული ვარიანტებისა და მათი შედარებითი შეფასების ფორმირების საფუძველზე;

– განუზღვრელობის პირობებში შესაძლოა არ არსებობდეს ერთადერთი ოპტიმალური გადაწყვეტილება. გმპებისათვის, რომლებსაც გააჩნიათ სხვადასხვა უპირატესობები, გადაწყვეტილებები იქნება ერთმანეთისაგან განსხვავებული;

– განუზღვრელობის შემცირება გადაწყვეტილების მიღების ამოცანაში ხორციელდება შემდეგი თანმიმდევრული ეტაპებით: სტრუქტურისაყიით, დახასიათებით და ოპტიმიზაციით.

ახლა ამ დებულებებს შევეხოთ ცოტა უფრო კონკრეტულად. კონცეფციის პირველი დებულების თანახმად გმპ გადაწყვეტილების მიღების პროცესში ასრულებს სააზროვნო საქმიანობას, რომელიც მდგომარეობს გადაწყვეტილებათა ვარიანტების გენერაციასა და ანალიზში. ასეთი საქმიანო-

ბის შედეგს წარმოადგენს ინტელექტუალური გადაწყვეტილება, რომელიც სხვა არაფერია, თუ არა რაციონალური გადაწყვეტილება და მისი დასაბუთება. ინტელექტუალური გადაწყვეტილების მიღება შესაძლებელია შეგნებული ლოგიკური აზროვნების შედეგად, რომელიც ითვალისწინებს გათვლებსა და ექსპერიმენტებს.

გმპ ინტელექტუალური გადაწყვეტილების ფორმირების შემდეგ ასრულებს მოტივაციის სტადიას, რომლის შინაარსიც დაკავშირებულია გადაწყვეტილებათა ვარიანტების შეფასებასთან. მოტივაციის სტადიაზე ყოველი გადაწყვეტილება მოწმდება მოტივების ყველა შესაძლო ვარიანტის პოზიციიდან.

კონცეფციის მეორე დებულების შესაბამისად, ექსპერტები გადაწყვეტილების მიღების პროცესში ახდენენ სიტუაციების, მიზნების, გადაწყვეტილებების გენერირებას, აყალიბებენ შეზღუდვებს, აანალიზებენ გადაწყვეტილებებს და იძლევიან რეკომენდაციებს მისაღები და ოპტიმალური გადაწყვეტილებების შესახებ.

კონცეფციის მესამე დებულების თანახმად, გადაწყვეტილების ხარისხის გაზომვის საფუძველს, დასახული მიზნების მიღწევის ხარისხიდან გამომდინარე, წარმოადგენს გადაწყვეტილებათა უპირატესობის შედარებითი შეფასება. ასეთი შეფასებების განსახორციელებლად აუცილებელია ჩამოყალიბდეს გადაწყვეტილებათა ალტერნატიული ვარიანტები.

გადაწყვეტილებათა უპირატესობების გაზომვა განუზღვრელობის პირობებში, წარმოებს საექსპერტო შეფასებების გზით. ასეთი გაზომვა ხორციელდება არა მარტო ექსპერტების, არამედ გმპ-ის მიერ. საექსპერტო შეფასებების დროს ადამიანთა ხარისხობრივი მსჯელობები უნდა აისახოს რიცხვებში, ხარისხობრივი და რაოდენობრივი სკალების გამოყენების გზით. ექსპერტიზის შედეგების წარმოდგენა რიცხვითი ფორმით იძლევა კომპიუტერული ტექნიკის ფორმალური გამოყენების საშუალებას, ისეთი ახალი ინფორმაციის მოპოვების მიზნით, რომლის მიღებაც არ შეიძლება ექსპერტების მსჯელობების შედეგად. გადაწყვე-

ტილებათა შეფასებისათვის აუცილებელია ისეთ მაჩვენებელთა სისტემის აგება, რომლებიც ახასიათებენ ამ გადაწყვეტილებათა ხარისხს და მკაფიოდ განსაზღვრავენ ჩამოყალიბებული მიზნებისა და რესურსთა დანახარჯების მიღწევის ხარისხს.

კონცეფციის მეოთხე დებულება ითვალისწინებს, რომ განუზღვრელობის პირობებში შეიძლება ერთადერთი ოპტიმალური გადაწყვეტილება არც კი არსებობდეს. ინფორმაციის უტყუარობის არ არსებობა აძლიერებს სუბიექტური ფაქტორების გავლენას გადაწყვეტილების მიღებაზე. ამიტომ განსხვავებული უპირატესობების მქონე გმისათვის ოპტიმალური გადაწყვეტილებები იქნება სხვადასხვა.

კონცეფციის მეხუთე დებულება ასაბუთებს გადაწყვეტილების მიღების პროცედურის დამახასიათებელ სპეციფიკასა და განსხვავებას, განუზღვრელობის პირობებში. სხვანაირად, იგი ასაბუთებს ასეთი განუზღვრელობის შემცირებისათვის საჭირო პროცედურის თანამიმდევრულ პროცესს. გადაწყვეტილების მიღება განსაზღვრულობისა და ალბათური განსაზღვრულობის პირობებში, ხორციელდება ერთ ფაზაზე, რადგან ამ დროს შესასწავლი ამოცანა დაიყვანება სტანდარტულ მათემატიკურ მოდელზე. განუზღვრელობის პირობებში, პირველ ფაზაზე განხორციელებულ უნდა იქნეს სტრუქტურიზაცია, ანუ სხვანაირად რომ ვთქვათ, ძირითადი ელემენტების გამოყოფის და მათ შორის ურთიერთკავშირის დამყარების პროცესი.

სტრუქტურიზაციის პროცედურას გააჩნია დიდი მნიშვნელობა, რადგან ის იძლევა ამოცანის სტრუქტურის ცხადი სახით წარმოდგენის და ლოგიკურად მოწესრიგებული სისტემის აგების საშუალებას. ამოცანის სტრუქტურა იძლევა აუცილებელი ინფორმაციის მიღებისათვის საჭირო დასაბუთებას. სტრუქტურიზაციის შედეგები აისახება ფორმალური სიმბოლური ჩანაწერის, სქემების, ცხრილების სახით.

განუზღერელობის შემცირების მეორე ფაზას წარმოადგენს დახასიათების ისეთი პროცესი, რომელიც განსაზღვრავს მახასიათებლების (პარამეტრების, მაჩვენებლების, ფუნქციების) სისტემას. ეს ისეთი სისტემაა, რომელიც რაოდენობრივად აღწერს ამოცანის სტრუქტურას.

განუზღერელობის შემცირების მესამე ფაზას წარმოადგენს ოპტიმიზაციის ფაზა. ამ დროს მთელი არსებული ინფორმაცია გარდაიქმნება საბოლოო ფორმაში – გადაწყვეტილებაში. ოპტიმიზაციის განხორციელებას მიუყავართ ამოცანის გადაწყვეტის სრულ განსაზღვრულობამდე. ზოგჯერ გვხვდება ოპტიმიზაციას ახორციელებს არაცხადი სახით. ზოგიერთი სახის ზოგად პრინციპზე და თავის უპირატესობებზე დაყრდნობით, რადგან განუზღერელობის პირობებში ყოველთვის არ არის შესაძლებელი ოპტიმიზაციის ფაზის მკაცრად ფორმალური სახით შესრულება.

გადაწყვეტილების მიღების კონცეპტუალურ საკითხებს შორის მნიშვნელოვანი ადგილი უჭირავს გადაწყვეტილების მიღების მათემატიკურ თეორიას. ეს უკანასკნელი წარმოადგენს გადაწყვეტილების მიღების ზოგადი თეორიის ნაწილს.

გადაწყვეტილების მიღების მათემატიკური თეორია არის დამატებითი საშუალება და იგი ეხმარება ადამიანს გადაწყვეტილების სწორ მიღებაში. ამ თეორიის სარგებლიანობა იმითაც კი განისაზღვრება, რომ იგი ადამიანს აძლევს სწორი ორიენტაციის არჩევის საშუალებას, რომელიც მიღებულია ზუსტი რაოდენობრივი ანალიზისა და გაანგარიშებების საფუძველზე. აღნიშნული თეორიის ძირითადი ღირსება მდგომარეობს იმაში, რომ ის, მას შემდეგ, რაც შერჩეულ იქნება სარგებლიანობის ფუნქცია და განსაზღვრულ იქნება ექსპერიმენტების ღირებულება, იძლევა გადაწყვეტილების მიღების პროცესის ფორმალიზების საშუალებას. ეს უკანასკნელი კი, თავის მხრივ, ქმნის ეგზისტენციურ კომპიუტერების) გამოყენების დიდ შესაძლებლობებს.

გადაწყვეტილების მიღების მათემატიკური თეორია, ერთი მხრივ, შეიძლება განხილულ იქნეს, როგორც მათე-

მატიკური სტატისტიკის ნაწილი, რადგან სტატისტიკის ნაწილი „პიპოთეზების სტატისტიკური შემოწმებების თეორია“ არსებითად (ტერმინოლოგიის ჩათვლით) მიეკუთვნება გადაწყვეტილების მიღების თეორიას. მეორე მხრივ, გადაწყვეტილების მიღების მათემატიკური თეორია, შეიძლება განხილულ იქნეს, ისე, როგორც ოპერაციათა გამოკვლევის თეორიის ნაწილი, რადგან ორივე ამ თეორიაში, საბოლოოდ, ვარიანტების სიმრავლიდან, ზოგიერთი კრიტერიუმის თანახმად, ხდება ერთი საუკეთესოს არჩევა.

გარდა ამისა, უნდა აღინიშნოს, რომ გადაწყვეტილების მიღების მათემატიკური თეორია ისე, როგორც მისი მონათესავე თამაშთა თეორია, წარმოადგენს გამოყენებითი მათემატიკის ნაწილს, რომელშიც ხდება ძალიან ფართო კლასის ოპტიმიზაციური ამოცანების გამოკვლევა.

გადაწყვეტილების მიღების მათემატიკურ თეორიაში ცენტრალური ადგილი უჭირავს ბაიესის სტრატეგიებს, რომლებიც იძლევიან გადაწყვეტილების მიღების პროცესის თავისებურ სასწავლო პროცესად განხილვის საშუალებას.

§4. გადაწყვეტილების მიღების მათემატიკური ამოცანა განუზღვრელობის ფაქტორის გათვალისწინებით

უთქვამთ ცნობილია, რომ პრობლემურ სიტუაციას აქვს სახე, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი მატრიცული ცხრილით:

ცხრ.10.1

	λ_1	λ_2	λ_3	...	λ_n
a_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}
a_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...
a_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}

Π, Π - შესაბამისად არის სექტების და სტრიქონების აღმნიშვნელი სიმბოლოები (იგულისხმება, რომ $\Pi, \Pi \geq 2$);

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ - არის ისეთი ქმედებების (ან ოპერაციების) ერთობლიობა, რომელთაგან მხოლოდ ერთ-ერთს ირჩევს სამოქმედოდ გადაწყვეტილების მიმღები ადამიანი;

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ - არის ობიექტური პირობების (ანუ, სხვანაირად ბუნების მდგომარეობების) ერთობლიობა, რომელთაგან სინამდვილეში მხოლოდ და მხოლოდ ერთს აქვს (ან ექნება მომავალში) ადგილი;

$a_{ij} (i=1, 2, 3, \dots, m \wedge j=1, 2, 3, \dots, n)$ - არის ისეთი სარგებელი (მაგ. შემოსავალი), გამოხატული ზოგიერთ პირობით ერთეულებში, რომელსაც მიიღებს ადამიანი, თუ ის განახორციელებს a_i ოპერაციას და ბუნების მდგომარეობა ფაქტიურად გაუტოლდება λ_j -ს.

$\lambda_{ij} (i=1, 2, 3, \dots, m \wedge j=1, 2, 3, \dots, n)$ სიდიდეები თამაშთა თეორიაში, როგორც ცნობილია, ასრულებენ გადასახადების როლს.

გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიაში, ისე როგორც თამაშთა თეორიაში, ამ სიდიდეების განსაზღვრა (მოცემა) ხდება ევრისტიკული, სუბიექტური მოსაზრებებიდან გამომდინარე. ამასთან, აღსანიშნავია ისიც, რომ მათი (მაგალითად, სიამოვნების, აუადმყოფობის, პრესტიჟის, რეპუტაციის, დაკარგვის და ა.შ.) რიცხვითი შეფასების დროს წარმოიქმნება ერთი და იგივე სპეციფიკური სიძნელებები. ამ მხრივ, ცოტა შემამსუბუქებელ მდგომარეობას ქმნის ის გარემოება, რომ a_{ij} სიდიდეები შეიძლება მოცემულ იქნეს პირობითად (შეფარდებით). ამიტომ a_{ij} სიდიდეებს, ხანდახან, უწოდებენ უპირატესობის მიმნიჭებელ მაჩვენებლებს.

თავდაპირველად ეიგულისხმოთ, რომ გადაწყვეტილების მიმღებ პირს (ადამიანს) არ გააჩნია არაეითარი ინფორმაცია ბუნების მდგომარეობების $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ შესახებ. ამ შემთხვევაში, საქმე გვექნება გადაწყვეტილების მიღებასთან განუზღერელობის პირობებში, რომლის დროსაც ყვე-

ლაზე უფრო მეტად არის ცნობილი შემდეგი სამი მიდგომა:

1. *მაქსიმინური კრიტერიუმი*. ყოველი $a_i (i=1, 2, 3, \dots, m)$ ოპერაციისათვის ეპოულობთ ყველაზე უარეს დასასრულს, რომელიც ტოლი იქნება $\min_i a_i$ -ს.

ამის შემდეგ ესაზღვრათ ისეთ $i=i_0$ შემთხვევას, რომლისთვისაც $\min_i a_i$ სიდიდე იქნება მაქსიმალური, ე. ი.

$$\min_j a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij}. \quad (10.3)$$

a_{i_0} ოპერაციას უწოდებენ მაქსიმინურ ოპერაციას. ის შესაბამება ყველაზე საუკეთესო შემთხვევას ყველაზე უარესი დასასრულებიდან.

თუ თამაშთა თეორიაში მაქსიმინური კრიტერიუმი ხშირად წარმოადგენს გარანტირებულ დანაკარგებს საშუალებას, გადაწყვეტილების მიღების თეორიაში, იგი მით უფრო წარმოადგენს ასეთ საშუალებას, რადგან ბუნებას არ შეუძლია შეგნებული მოწინააღმდეგის როლში გამოსვლა.

გადაწყვეტილების მიღების თეორიაში, მაქსიმალურ ოპერაციას სისტემატურად იყენებს მხოლოდ უკიდურესი პესიმისტი, რომელსაც არ სურს არავითარი რისკის გაწევა. ასეთი ხალხი, როგორც წესი, კმაყოფილდებიან ცოტათი და ამჯობინებენ მშვიდ ცხოვრებას.

2. *სინანულის მინიმალური კრიტერიუმი*. სინანულის ცნების ქვეშ გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიაში გულისხმობენ დაუდებარი შესაძლებლობების შედეგებთან დაკავშირებულ დანაკარგებს.

ეოგულისხმობს, რომ ბუნება იმყოფება λ_1 მდგომარეობაში და ეთქვას, რომ $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}$ მიმდევრობაში მაქსიმალური ელემენტი არის a_{i_1} , ე. ი. $a_{i_1} = \max_i a_{i1}$. აქედან ცხადია, რომ ყველაზე საუკეთესო ოპერაციას წარმოადგენს a_{i_1} . მისთვის სინანულის სიდიდე ტოლია 0-ის, ხოლო დანარჩენი $a_i (i \neq i_1)$ ოპერაციებისათვის, სინანულის ზომა განისაზღვრება როგორც სხვაობა $a_{i_1} - a_i$. ანალოგიურად შეიძლება განი-

საზღვროს სინანულის სიდიდეები ბუნების სხვა მდგომარეობებისათვის.

ამ გზით მიიღება სინანულის ამსახველ სიდიდეთა მატრიცა. ამ მატრიცასთან იყენებენ მინიმალურ კრიტერიუმს, რომელიც მაქსიმინური კრიტერიუმისაგან განსხვავებით $\max$ -ის ნაცვლად იყენებს $\min$ -ს და პირიქით.

3. მდგომარეობების თანაბარი შესაძლებლობების კრიტერიუმი. ამ შემთხვევაში ირჩევენ იმ $a_i (i=1,2,3,\dots,m)$ ოპერაციას, რომელთათვისაც $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ სარგებელთა ჯამი იქნება მაქსიმალური.

ზოგად შემთხვევაში ეს სამი კრიტერიუმი, სამწუხაროდ, შეიძლება დაყვანილ იქნეს $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ ოპერაციებიდან ერთ-ერთის განსხვავებულად არჩევის პროცესს. მაგრამ, მიუხედავად ამისა, ყოველ მათგანს გააჩნია რაციონალური მარცვალი და ისინი, განსაზღვრულ სიტუაციებში, შეიძლება აღმოჩნდნენ ოპტიმალურ ვარიანტებად.

ახლა მოვიყვანოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. ვთქვათ მოცემულია სარგებლიანობის მატრიცა, რომლის ელემენტებსაც გააჩნია პირობითი ხასიათი.

(ცხრ. 10.2)

	λ_1	λ_2
a_1	1	11
a_2	10	6
a_3	0	14

სადაც,

a_i - არის ზოგიერთი ნაკეთობის დამზადებისათვის საჭირო ტექნოლოგიური პროცესის i -ური ვარიანტი;

λ_1 და λ_2 - შესაბამისად არის დეფიციტის წარმოქმნა და უქონლობა მოცემული ნაკეთობის დამზადებისათვის საჭირო ნედლეულზე, უახლოესი სამი წლის განმავლობაში.

ამგვარად, მაქსიმინური კრიტერიუმის გამოყენებით შევნიშნავთ:

$$\max\{\min\{1;11\};\min\{10;6\};\min\{0;14\}\}=\max\{1;6;0\}=6.$$

აქედან შეიძლება დავასკვნათ, რომ მაქსიმინურ ოპერაციას წარმოადგენს a_2 ოპერაცია. ტექნოლოგიური პრო-

ცვისის მეორე ვარიანტის გამოყენება იძლევა სარგებლის არანაკლებ 6 პირობითი ერთეულისა.

მოცემულ შემთხვევაში, სინანულის მატრიცას გააჩნია ასეთი სახე:

ცხრ. 10.3

	λ_1	λ_2
a_1	9	3
a_2	0	8
a_3	10	0

ამ მატრიცის მონაცემებზე მინიმალური კრიტერიუმის გამოყენების შედეგად მივიღებთ:

$$\min\{\max\{9;3\};\max\{0;8\};\max\{10;0\}\}=\min\{9;8;10\}=8.$$

აქედან შეიძლება დავასკენათ, რომ სინანულის მინიმალური სიმუშის შესაბამის ოპერაციას წარმოადგენს a_2 .

ახლა, გამოვიყენოთ მდგომარეობების თანაბარი შესაძლებლობების კრიტერიუმი და მივიღებთ:

$$\max\{1+11;10+6;0+14\}=\max\{12;16;14\}=16.$$

აქედან შეიძლება დავასკენათ, რომ მდგომარეობების თანაბარი შესაძლებლობების კრიტერიუმის შესაბამის ოპერაციასაც წარმოადგენს a_2 .

მაშასადამე, განხილულ მაგალითში, სამივე კრიტერიუმის ცალ-ცალკე გამოყენებამ მიგვიყვანა ერთსადაიმთხვე შედეგამდე – a_2 ოპერაციამდე.

იმ შემთხვევაში, თუ გამოყენებულ იქნება a_1 ოპერაცია, შეიძლება (გამართლების შემთხვევაში) მიღებულ იქნეს სარგებლის 11 პირობითი ერთეული, რაც აჭარბებს a_2 ოპერაციის გამოყენების შემთხვევაში მოსალოდნელ მაქსიმალურ შედეგს. მაგრამ, იმ შემთხვევაში, თუ ადგილი არ ექნა გამართლებას, a_1 ოპერაცია იძლევა სარგებლის მხოლოდ ერთ ერთეულს, რაც გაცილებით ნაკლებია, ვიდრე a_2 ოპერაციის გამოყენებით მოსალოდნელი მინიმალური შედეგი. მსგავსი მსჯელობები შეიძლება ჩატარდეს a_3 ოპერაციისათვისაც.

მაგალითი 2. ეთქვანთ მოცემულია სარგებლიანობის ასეთი მატრიცა:

	λ_1	λ_2	λ_3
a_1	5,0	4,5	4,0
a_2	3,5	5,5	4,5
a_3	3,1	4,5	6,0

ამ მატრიცის მონაცემების ანალიზიდან აღვილია იმის დანახვა, რომ a_1 ოპერაცია შეესაბამება მაქსიმუმურ, a_2 — მინიმუმურ სინანულის და a_3 — მდგომარეობის თანაბარ-შესაძლებლობის კრიტერიუმებს.

ეს ხელოვნური მაგალითი, პირველი მაგალითისაგან განსხვავდება იმით, რომ ამ შემთხვევაში, სხვადასხვა კრიტერიუმების გამოყენებას მიეყვართ სხვადასხვა ოპერაციებამდე. ეს მაშინ, როცა წინა მაგალითში სამივე კრიტერიუმის გამოყენება შედეგად იძლეოდა ერთსადა-იმევე ოპერაციას.

წ5. გადაწყვეტილების მიღების მათემატიკური ამოცანა რისკის ფაქტორის გათვალისწინებით

გადაწყვეტილების მიღების დროს რისკის პირობებში, იგულისხმება, რომ ცნობილია ბუნების მდგომარეობათა ალბათობები $p(\lambda_1), p(\lambda_2), p(\lambda_3), \dots, p(\lambda_n)$, რომლებიც აკმაყოფი-

$$\text{ლებენ პირობებს: } \sum_{j=1}^n p(\lambda_j) = 1. \quad (10.4)$$

ამ დროს გადაწყვეტილების მიღების სიტუაცია შეიძლება აღიწეროს შემდეგი მატრიცული ცხრილის საშუალებით:

	λ_1	λ_2	λ_3	...	λ_n
	$p(\lambda_1)$	$p(\lambda_2)$	$p(\lambda_3)$	...	$p(\lambda_n)$
a_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}
a_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}
a_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	...	a_{3n}
...	...	...	...	...	...
a_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}

ცხადია, რომ ამ დროს, გადაწყვეტილების მიმღებმა ადამიანმა უნდა ისარგებლოს ბუნების მდგომარეობების შესახებ არსებული ინფორმაციით. ამ მიზნით ყოველი $a_i (i=1,2,3,\dots,m)$ რაჭრაცხისათვის ახდენენ $a_{ij} (i=1,2,3,\dots,m; j=1,2,3,\dots,n)$ სარგებლის ამსახველ მაჩვენებელთა გასაშუალოებას, ბუნების მდგომარეობათა მიხედვით. მაშასადამე, პოულობენ სარგებლის ამსახველ მაჩვენებელთა შეწონილ ჯამებს:

$$\sum_{j=1}^n p(\lambda_j) a_{ij}, \quad i=1,2,3,\dots,m \quad (10.5)$$

და გადაწყვეტილების რანგში ირჩევენ იმ a_i ოპერაციას, რომლისთვისაც (10.5) ჯამი ღებულობს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

ახლა განვიხილოთ გადაწყვეტილების მიღების მაგალითი რისკის პირობებში. ეთქვას, ცნობილია სიტუაცია, რომელიც შეიძლება აისახოს შემდეგი სახის მატრიცული ცხრილით:

(ცხრ.10.6

	λ_1	λ_2
	$p(\lambda_1)$	$p(\lambda_2)$
a_1	1	11
a_2	10	6
a_3	0	14

ვიგულისხმობთ აგრეთვე, რომ $p(\lambda_1)=0,25$ და $p(\lambda_2)=0,75$.

ახლა ვიპოვოთ სარგებლის ამსახველ მაჩვენებელთა შეწონილი ჯამები და მათგან ავიღოთ მაქსიმალური მნიშვნელობა:

$$\begin{aligned} & \max\{0,25 \cdot 1 + 0,75 \cdot 11; 0,25 \cdot 10 + 0,75 \cdot 6; 0,25 \cdot 0 + 0,75 \cdot 14\} = \\ & = \max\{8,5; 7; 10,5\} = 10,5. \end{aligned}$$

აქედან შეიძლება დავასკვნათ, რომ ყველას აჯობებს a_3 ოპერაციის გამოყენება.

$p(\lambda_1) \equiv p$ -თი. მაშინ, როგორც ეს უშუალოდ გამომდინარეობს ნახ.10.1-დან, $0 < p < \frac{4}{9}$ ინტერვალისათვის ყველაზე საუკეთესოს წარმოადგენს a_3 ოპერაცია, ხოლო

§6. გადაწყვეტილების მიღების მათემატიკური
ამოცანა განუზღერულობის პირობებში და
ექსპერიმენტის შედეგთა მოთხოვნით

უთქვათ, მოცემულია გადაწყვეტილების მიღების ისეთი შემთხვევა, როცა გადაწყვეტილების მიმღები პირი (აღამიანი), გადაწყვეტილების მიღებამდე, ცდილობს მოიპოვოს რაღაც ინფორმაცია ბუნების მდგომარეობის შესახებ, ექსპერიმენტის ჩატარების გზით. ამასთან, ვიგულისხმობთ, რომ ამ ექსპერიმენტის ჩატარებისათვის არ არის საჭირო არანაირი დანახარჯები.

აღწერილი წარმოადგენს მეტად საინტერესო შემთხვევას.

ამ შემთხვევის ზოგადობის უფრო დასაკონკრეტებლად ვიგულისხმობთ, რომ გადაწყვეტილების მიმღების რანგში ვიხილათ ვიღაც პირს, რომელიც ემზადება ყოველდღიური ტურისტული ლაშქრობის მოსაწყობად და მან უნდა აირჩიოს ერთ-ერთი შემდეგი ორი ალტერნატივიდან:

a_1 – მან უნდა ჩაიცვას თბილი ამინდის შესაბამისად;

a_2 – მან უნდა ჩაიცვას ცივი ამინდის შესაბამისად.

უთქვათ, აგრეთვე, რომ მოცემულ სიტუაციას შეესაბამება სარგებლიანობის შემდეგი მატრიცა

(ცხრ.10.7

	λ_1	λ_2
a_1	10	0
a_2	4	7

სადაც

λ_1 – შეესაბამება თბილ ამინდს;

λ_2 – შეესაბამება ცივ ამინდს.

ამ შემთხვევაში, მაქსიმინური კრიტერიუმის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\max\{\min\{10;0\};\min\{4;7\}\}=\max\{0;4\}=4.$$

აქედან ცხადია, რომ მოცემულ შემთხვევაში მაქსიმინურ ოპერაციას წარმოადგენს a_2 ოპერაცია.

მოცემულ მაგალითში სინანულის მატრიცას გააჩნია ასეთი სახე:

ცხრ. 10.8

	λ_1	λ_2
a_1	0	7
a_2	6	0

ამ მატრიცის მონაცემებზე მინიმალური კრიტერიუმის გამოყენების შედეგად მივიღებთ:

$$\min\{\max\{0;7\};\max\{6;0\}\}=\min\{7;6\}=6.$$

აქედან ცხადია, რომ სინანულის მინიმალისიუმის შესაბამის ოპერაციას წარმოადგენს a_2 .

ახლა გამოვიყენოთ მდგომარეობების თანაბარი შესაძლებლობების კრიტერიუმი და მივიღებთ:

$$\max\{10+0;4+7\}=11.$$

აქედან შეიძლება დავასკვნათ, რომ მდგომარეობების თანაბარი შესაძლებლობების კრიტერიუმის შესაბამის ოპერაციასაც წარმოადგენს a_2 .

მაშასადამე, განხილულ მაგალითში სამივე კრიტერიუმის ცალ-ცალკე გამოყენებამ მიგვიყვანა ერთსადაიმაც შედეგამდე a_2 ოპერაციამდე. სწორედ მისი გამოყენება იძლევა 4 პირობითი ერთეულის ტოლი სარგებლიანობის მიღების გარანტიას.

ახლა ვიგულისხმობთ, რომ ჩვენს მაგალითში განხილული გადაწყვეტილების მიმღები პირი, წარმოადგენს რა თანამედროვე ადამიანს, ხშირად დადის ტურისტულ ლაშქრობაში. ამასთან დაკავშირებით, აზრი აქვს დაისვას საკითხი ისეთი საშუალო სარგებლიანობის შესახებ, რომელიც მოდის ერთ ტურისტულ ლაშქრობაზე.

ეთქვათ, ასეთ პირობებში, გადაწყვეტილების მიმღებ პირს გაუჩნდა სურვილი, რომ მან ერთი ტურისტული ლაშქრობიდან გარანტირებულად მიიღოს 4 პირობით ერთეულზე მეტი საშუალო სარგებელი. ამ მიზნით, გადაწყვეტილების მიმღები პირი, ექსპერიმენტის ჩატარების გზით, ცდილობს მიიღოს დამატებითი ინფორმაცია. კერძოდ, იგი ყოველი ტურისტული ლაშქრობის დაწყების

წინ რეკავს ამინდის ბიუროში და გებულობს დამატებით ინფორმაციას.

ეთქვათ, გადაწყვეტილების მიმღები პირი ამინდის ბიუროდან გებულობს ერთ-ერთს შემდეგი სამი პასუხიდან:

V_1 – ნ.სალოდნელია თბილი ამინდი;

V_2 – ნ.სალოდნელია ცივი ამინდი;

V_3 – პროგნოზი არ არის ცნობილი.

ამასთან, ვიგულისხმობთ, რომ ძველი გამოცდილებიდან, ბუნების ორი მდგომარეობიდან თითოეულისათვის ცნობილია ამ სამი პასუხის შესაბამისი ალბათობები ($P_1(V_1)$, $P_2(V_2)$, $P_3(V_3)$). ეთქვათ, ეს ალბათობები მოცემულია შემდეგი მატრიცული ცხრილის სახით:

ცხრ.10.9

	$P_1(V_1)$	$P_2(V_2)$	$P_3(V_3)$
λ_1	0,6	0,2	0,2
λ_2	0,3	0,5	0,2

ამოცანა, რომელიც დგას გადაწყვეტილების მიმღები პირის წინაშე, ახლა შეიძლება ჩამოყალიბებულ იქნეს ასეთნაირად:

საჭიროა ორი a_1 და a_2 ოპერაციიდან ნაპოვნი იქნეს, თუ რომელი უნდა აირჩიოს გადაწყვეტილების მიმღებმა პირმა, ექსპერიმენტის სამი $P_1(V_1)$, $P_2(V_2)$ და $P_3(V_3)$ შედეგიდან ერთ-ერთის შესაბამისად.

აქ მოხერხებულია გამოყენებულ იქნეს სტრატეგიის ცნება, რომლის ქვეშაც უნდა გვესმოდეს ასეთი შესაბამისობა

$$P_1(V_1), P_2(V_2), P_3(V_3) \rightarrow (a_i, a_j, a_k),$$

სადაც i, j, k ინდექსებიდან თითოეული ტოლია 1-ის ან 2-ის.

იმ შემთხვევაში, თუ ექსპერიმენტის შედეგი არის $P_1(V_1)$, მაშინ თანახმად ზემომოყვანილი შესაბამისობისა, საჭიროა გამოყენებულ იქნეს a_i ოპერაცია. თუ ექსპერიმენტის შედეგი არის $P_2(V_2)$, მაშინ – a_j ოპერაცია და თუ ექსპერიმენტის შედეგი არის $P_3(V_3)$, მაშინ – a_k ოპერაცია.

მოცემულ შემთხვევაში, სულ შესაძლებელია $2^3=8$ სტრატეგიის არსებობა, რომლებიც ასახულია შემდეგ მატრიცულ ცხრილში:

ცხრ.10.10

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
$P_1(V_1)$	a_1	a_1	a_1	a_1	a_2	a_2	a_2	a_2
$P_2(V_2)$	a_1	a_1	a_2	a_2	a_1	a_1	a_2	a_2
$P_3(V_3)$	a_1	a_2	a_1	a_2	a_1	a_2	a_1	a_2

სადაც

C_j ($j=1,2,\dots,8$) – აღნიშნავს j -ურ სტრატეგიას.

(10.10) მატრიცული ცხრილის ანალიზიდან ცხადია, რომ C_1 – წარმოადგენს მეტად მოუფიქრებელ სტრატეგიას, რადგან ის გულისხმობს, რომ გმპ, ექსპერიმენტის შედეგისაგან დამოუკიდებლად, ჩაცმულობით ემზადება თბილი ამინდისათვის.

C_8 – კი წარმოადგენს მეტად პესიმისტურ სტრატეგიას, რადგან ის გულისხმობს, რომ გმპ, ექსპერიმენტის შედეგისაგან დამოუკიდებლად, ჩაცმულობით ემზადება ცივი ამინდისათვის.

C_3 და C_4 სტრატეგიები შეესაბამება პროგნოზს.

ახლა განვიხილოთ 8 სტრატეგიიდან და ბუნების 2 მდგომარეობიდან, თითოეულისათვის განესაზღვროთ (10.7) მატრიცით მოცემული სარგებლიანობის მაჩვენებელთა შეწონილი ჯამები $\varphi(\lambda_1, C_i)$ და $\varphi(\lambda_2, C_i)$, სადაც $i=1,2,\dots,8$. ამასთან, წონების რანგში გამოვიყენოთ (10.9)-ე ცხრილში მოცემული ალბათობის მაჩვენებლები. შედეგად მივიღებთ:

$$\varphi(\lambda_1, C_1) = 0,6 \cdot 10 + 0,2 \cdot 10 + 0,2 \cdot 10 = 10;$$

$$\varphi(\lambda_1, C_2) = 0,6 \cdot 10 + 0,2 \cdot 10 + 0,2 \cdot 4 = 8,8;$$

$$\varphi(\lambda_1, C_3) = 0,6 \cdot 10 + 0,2 \cdot 4 + 0,2 \cdot 10 = 8,8;$$

$$\varphi(\lambda_1, C_4) = 0,6 \cdot 10 + 0,2 \cdot 4 + 0,2 \cdot 4 = 7,6;$$

.....

$$\varphi(\lambda_1, C_8) = 0,6 \cdot 4 + 0,2 \cdot 4 + 0,2 \cdot 4 = 4;$$

$$\varphi(\lambda_2, C_1) = 0,3 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0 + 0,2 \cdot 0 = 0;$$

$$\varphi(\lambda_2, c_5) = 0,3 \cdot 7 + 0,5 \cdot 0 + 0,2 \cdot 0 = 2,1;$$

$$\varphi(\lambda_2, c_8) = 0,3 \cdot 7 + 0,5 \cdot 7 + 0,2 \cdot 7 = 7.$$

ამგვარად, მივიღებთ სარგებლიანობის საშუალო მაჩვენებელთა შემდეგ მატრიცულ ცხრილს:

(ცხრ.10.11

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8
λ_1	10	8,8	8,8	7,6	6,4	5,2	5,2	4
λ_2	0	1,4	3,5	4,9	2,1	3,5	5,6	7

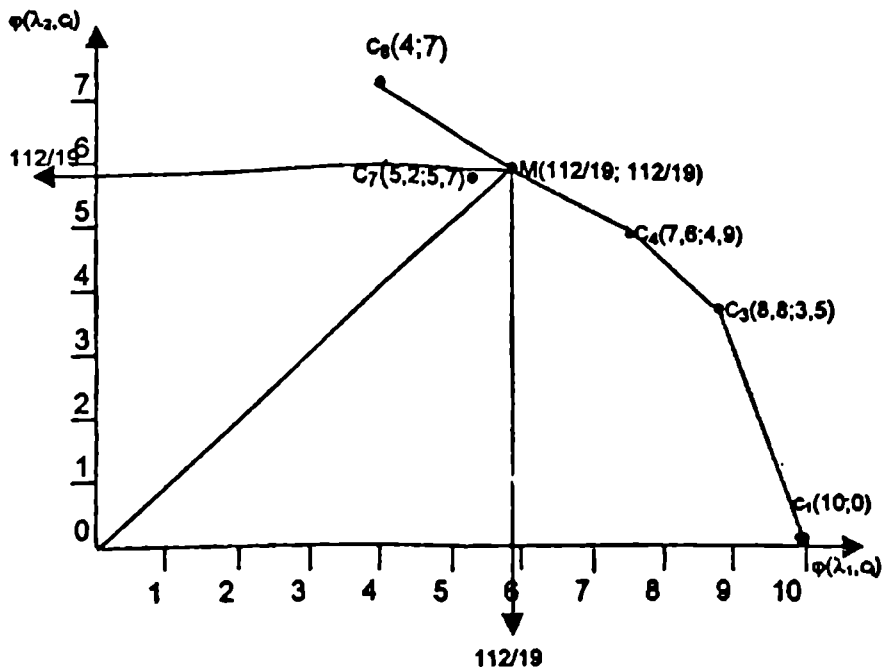
ამ მატრიცული ცხრილიდან გამოვრიცხოთ აშკარად ცუდი c_2 , c_5 , და c_6 სტრატეგიები, ე. ი. ისეთი სტრატეგიები, რომელთათვისაც სარგებლიანობის ამსახველი ორთავე საშუალო მაჩვენებელი (უფრო ზუსტად, სარგებლიანობის ერთ-ერთი საშუალო მაჩვენებელი ნაკლები უნდა იყოს) არ აღემატება სხვა რომელიმე, სტრატეგიის შესაბამის სარგებლიანობის საშუალო მაჩვენებელს.

შედგად მივიღებთ ასეთ ცხრილს:

(ცხრ. 10.12

	c_1	c_3	c_4	c_7	c_8
λ_1	10	8,8	7,6	5,2	4
λ_2	0	3,5	4,9	5,6	7

ამ ცხრილში დარჩენილ c_1 , c_3 , c_4 , c_7 , c_8 -ს უწოდებენ დასაშვებ სტრატეგიებს. ისინი გეომეტრიულად შეიძლება გამოიხატოს შემდეგნაირად (იხ. ნახ. 10.2):



ნახ. 10.2

ამ ნახაზზე C_1 , C_3 , C_4 , C_7 და C_8 სტრატეგიები გამოხატულია შესაბამისი წერტილებით.

აღეილი მისახვედრია, რომ $C_7 = (a_2, a_2, a_1)$ სტრატეგია წარმოადგენს მაქსიმიზირს, რადგან ეს სტრატეგია ითვალისწინებს თბილად ჩაცმას, თუ არსებობს ცნობა თბილი ან ცივი ამინდის პროგნოზის შესახებ და მსუბუქად ჩაცმას, თუ არ არსებობს ამინდის პროგნოზი.

C_7 სტრატეგიის გამოყენება იძლევა ერთ ტურისტულ ლაშქრობაზე 5.2 პირობითი ერთეულის ტოლი სარგებლიანობის საშუალო მაჩვენებლის მიღების გარანტიას. შედარებისათვის გავიხსენოთ, რომ მაქსიმიზირი a_2 ოპერაცია ყოველ ტურისტულ ლაშქრობაზე იძლევა 4 პირობითი ერთეულის ტოლი სარგებლიანობის მიღების გარანტიას.

რადგან 5.2.4-ზე, ამიტომ ცხადია, რომ ამინდის ბიუროში დარეკვა საზოგადო ჯ წარმოადგენს ხელსაყრელ საჩქმეს.

აღნიშნულიდან გამომდინარე, ხაზი გაეუსვიათ იმ გარემოებას, რომ მაქსიმინურმა 5-მა სტრატეგიამ, ცალკეული ტურისტული ლაშქრობებისათვის, არახელსაყრელი მდგომარეობების დროს, შეიძლება გამოიწვიოს უფრო მეტად სასურველი შედეგი, ვიდრე მაქსიმინურმა 2-მა ოპერაციამ.

ახლა განვიხილოთ ასეთი მაგალითი.

ვთქვათ, მაგალითად პრაქტიკულად დადგება ცივი ამინდი (ა₂ მდგომარეობა). მაშინ გმპ, მაქსიმინური 2 ოპერაციის თანახმად, იცვამს რა თბილად, ღებულობს სარგებლის 7 პირობით ერთეულს. მეორე მხრივ, თუ ტურისტი, რომელმაც დარეკა ამინდის ბიუროში, გაიგებს პასუხს „პროგნოზი უცნობია“ (V₃) და 5 მაქსიმინური სტრატეგიის თანახმად, ჩაიცვამს მსუბუქად (ოპერაცია ა₁), მაშინ ის მიიღებს სარგებლის მხოლოდ 0 ერთეულს. ასეთი რამ წარმოადგენს ტიპურ შემთხვევას არა მარტო თამაშთა თეორიაში, არამედ გადაწყვეტილების მიღების თეორიაში.

ამგვარად, 5 სტრატეგია იძლევა 5.2 პირობითი ერთეულის ტოლი საშუალო სარგებლის მიღების გარანტიას.

ახლა ეაჩვენოთ, რომ თუ განსაზღვრული პროპორციით გამოვიყენებთ 4 და 8 სტრატეგიებს (ე. ი. გამოვიყენებთ, როგორც თამაშთა თეორიაში ამბობენ, შერეულ სტრატეგიას), მაშინ შესაძლებელი გახდება კიდევ უფრო გაიზარდოს გარანტირებული საშუალო სარგებლის მაჩვენებელი.

აღვილი მისახვედრია, რომ 10.2-ე ნახაზზე გამოხატული M წერტილი, რომელიც დევს პირველი საკოორდინატო კუთხის ბისექტრისისა და 4, 8 წერტილების შემაერთებული მონაკვეთის საერთო ნაწილში, ამ მონაკვეთს ყოფს თანაფარდობით: 9:10. ამიტომ 4 სტრატეგიის 10/19 ალბათობით და 8 სტრატეგიის 9/19 ალბათობით გამოყენების დროს, ბუნების ა₁ მდგომარეობის შემთხვევაში გმპ მიიღებს საშუალო სარგებელს შემდეგი ოდენობით:

$$\frac{10}{19} \cdot 7,6 + \frac{9}{19} \cdot 4 = \frac{112}{19},$$

რაც იგივე იქნება ბუნების λ_2 მდგომარეობის შემთხვევაშიც.

$$\frac{10}{19} \cdot 4,9 + \frac{9}{19} \cdot 7 = \frac{112}{19}.$$

ეს ნიშნავს, რომ განსახილველი შერეული სტრატეგია $\frac{10}{19} \cdot c_4 + \frac{9}{19} \cdot c_5$ წარმოადგენს მაქსიმიზურს, რომლის გამოყენებაც იძლევა $\frac{112}{19} \approx 5,89$ -ის ტოლი საშუალო სარგებლის მიღების გარანტიას.

ადვილი მისახვედრია, რომ გმპ-სთვის უფრო ხელსაყრელია შერეული მაქსიმიზური სტრატეგიის გამოყენება, ვიდრე წმინდა c_7 მაქსიმიზური სტრატეგიისა. ეს ნათლად ჩანს იქიდან, რომ შერეული სტრატეგიის შესაბამისი საშუალო სარგებლიანობის მაჩვენებელი – 5,89 მეტია, ვიდრე წმინდა c_7 სტრატეგიის შესაბამისი მაჩვენებელი – 5,2.

განხილული შერეული სახის მაქსიმიზური სტრატეგია პრაქტიკულად შეიძლება რეალიზებული იქნეს მაგალითად ასეთნაირად. იმ შემთხვევაში, თუ ექსპერიმენტის (ტელეფონის ზარი ამინდის ბიუროში) შედეგი არის v_2 და v_3 , მაშინ გმპ-მა უნდა გამოიყენოს a_2 ოპერაცია. თუ ექსპერიმენტის შედეგი არის v_1 , მაშინ გმპ-მა (შესაბამისი შემთხვევითი მექანიზმის გამოყენებით) $\frac{10}{19}$ -ის ტოლი ალ-

ბათობით უნდა გამოიყენოს a_1 ოპერაცია და $\frac{9}{19}$ -ის ტოლი

ალბათობით – a_2 ოპერაცია. ამასთან, შეიძლება აღინიშნოს, რომ მოცემულ მაგალითში, შემთხვევითი მექანიზმის საფუძველად შეიძლება გამოყენებულ იქნეს 19 ერთნაირი გულდასმით არეული კარტების ერთობლიობა, რომელთაგან 10-ს აწერია სიმბოლო a_1 , ხოლო დანარჩენ 9-ს კი a_2 სიმბოლო.

ახლა გამოვიყენოთ სინანულის მინიმაქსური V კრიტერიუმი:

პირველ რიგში ზემოთ განხილული 8 სტრატეგიიდან და ბუნების 2 მდგომარეობიდან თითოეულისათვის განვსაზღვროთ სინანულის იმ მაჩვენებლების შეწონილი ჯამები $R(\lambda_i, c_j)$ და $R(\lambda_2, c_j)$ $i=1,2,\dots,8$, რომლებიც მოცემულია (10.8) მატრიცით. ამ დროს, ისე, როგორც სარგებლიანობის შეწონილი, $\phi(\lambda_i, c_j)$ და $\phi(\lambda_2, c_j)$ საშუალო ჯამების შემთხვევაში, წონითი მაჩვენებლების რანგში გამოვიყენოთ (10.9) ცხრილში მოცემული ალბათობები. ასე, მაგალითად,

$$R(\lambda_1, c_4) = 0,6 \cdot 0 + 0,2 \cdot 6 + 0,2 \cdot 6 = 2,4.$$

ასეთი გზით, შედეგად მივიღებთ საშუალო სინანულის ამსახველ მაჩვენებელთა შემდეგ ცხრილს:

(ცხრ.10.13

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8
λ_1	0	1,2	1,2	2,4	3,6	4,8	4,8	6
λ_2	7	5,6	3,5	2,1	4,9	3,5	1,4	0

თუ ამ ცხრილიდან გამოვრიცხავთ აშკარად ცუდ c_2 , c_5 და c_6 სტრატეგიებს, მივიღებთ ასეთ ცხრილს:

(ცხრ. 10.14

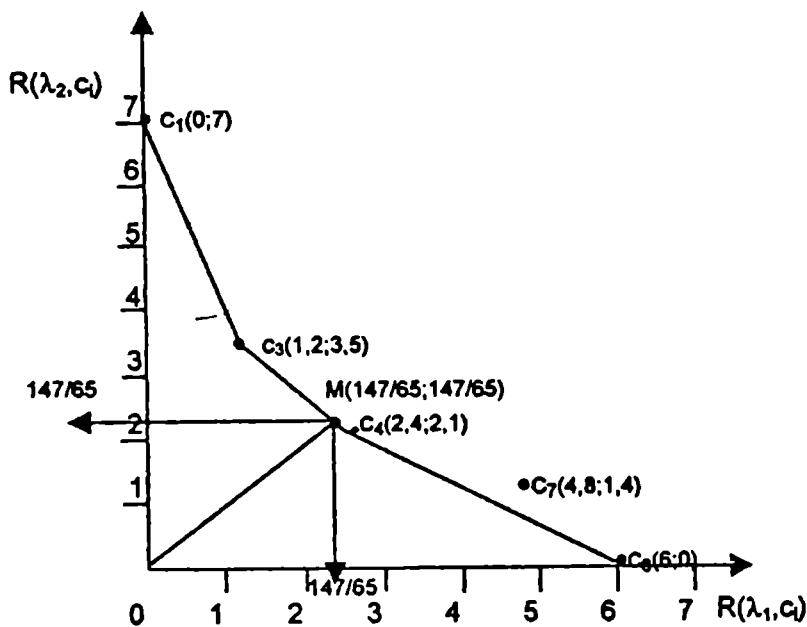
	c_1	c_3	c_4	c_7	c_8
λ_1	0	1,2	2,4	4,8	6
λ_2	7	3,5	2,1	1,4	0

ცხადია, რომ ამ სტრატეგიებს შორის მინიმაქსურს წარმოადგენს c_4 სტრატეგია. ამ სტრატეგიის გამოყენება იძლევა საშუალო სინანულის არაუმეტეს 2,4 პირობითი ერთეულით მიღების გარანტიას. იმ შემთხვევაში, თუ c_4 სტრატეგიას შეურევთ c_3 სტრატეგიასთან 23:3 პროპორციით, მაშინ გარანტირებული საშუალო სინანული შემცირდება $\frac{147}{65} \approx 2,26$ ერთეულამდე, რაც მიიღება შემდეგი ტოლობებიდან:

$$\frac{23}{26} \cdot 2,4 + \frac{3}{26} \cdot 1,2 = \frac{147}{65} \quad (\lambda_1\text{-ის შემთხვევაში}) \text{ და}$$

$$\frac{23}{26} \cdot 2,1 + \frac{3}{26} \cdot 3,5 = \frac{147}{65} \quad (\lambda_2\text{-ის შემთხვევაში}).$$

ამ პროცესის გეომეტრიული გამოხატვა მოცემულია ნახ. 10.3-ზე.



ნახ. 10.3

წინამდებარე მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ განხილულ შემთხვევაში სინანულის მინიმაქსური კრიტერიუმით მოუთხოვს შერეული სტრატეგიის $(\frac{23}{26}c_4 + \frac{3}{26}c_3)$ გამოყენების აუცილებლობაზე.

ეს სტრატეგია პრაქტიკულად შეიძლება რეალიზებულ იქნეს შემდეგნაირად.

იმ შემთხვევაში, თუ ექსპერიმენტის შედეგი არის v_1 , გმპ-მა უნდა აირჩიოს a_1 ოპერაცია, თუ არის v_2 , მაშინ – a_2 ოპერაცია, ხოლო თუ არის v_3 , მაშინ, შემთხვევითი

მექანიზმის გამოყენებზე n , მან $\frac{3}{26}$ -ის ტოლი ალბათობით

უნდა აირჩიოს a_1 ოპერაცია და $\frac{23}{26}$ -ის ტოლი ალბათობით

კი a_2 ოპერაცია.

ახლა, საჭიროა ხაზი გაესვას იმ გარემოებას, რომ ზემოთ განხილულმა მეთოდიკურმა მაგალითმა საშუალება მოგვცა, გამოგვევლინა ექსპერიმენტის ჩატარების გზით გადაწყვეტილების მიღების თეორიისათვის დამახასიათებელი სპეციფიკური ნიშნები, განუზღვრელობის პირობებში (ე.ი. ბუნების მდგომარეობათა უცნობი ალბათობების პირობებში).

ასევე უნდა აღინიშნოს ის გარემოებაც, რომ ანალოგიური სიტუაციის ზოგად შემთხვევაში, როცა საქმე გვაქვს $a_1, a_2, \dots, a_m$ ოპერაციებთან, ბუნების $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ მდგომარეობებთან და ექსპერიმენტის $v_1, v_2, \dots, v_l$ შედეგებთან, პრინციპულად ახალი ნიშნების წარსოქმნას არ ექნება ადგილი. ამ დროს, შეიძლება წავაწყდეთ მხოლოდ ალგებრული გარდაქმნების გართულებას (ამ დროს ხომ მარტო წმინდა $\mathbb{C}$ სტრატეგიების რიცხვი იზრდება $n!$ -მდე). ამასთან ერთად, ცხადია, რომ განსახილველი სიტუაციის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია $n=3$ (სამგანზომილებიანი) შემთხვევისათვის, გაძნელებულია, ხოლო $n > 3$ შემთხვევისათვის, კი იგი სრულიად შეუძლებელია.

გადაწყვეტილების მიღების თეორიაში, როგორც ცნობილია, იგულისხმება, რომ ექსპერიმენტი ბუნების მდგომარეობის შესახებ იძლევა მხოლოდ ნაწილობრივ ინფორმაციას. იმ შემთხვევაში, თუ ექსპერიმენტი ბუნების მდგომარეობათა შესახებ მოგვცემდა სრულ ინფორმაციას, მივიღებდით გადაწყვეტილების მიღების სიტუაციას უტყუარობის პირობებში. ასე, მაგალითად, თუ (10.3) ცხრილის მაგივრად გვაქვს შემდეგი ცხრილი (იხ. ცხრ. 10.15)

	$p_1(v_1)$	$p_2(v_2)$	$p_3(v_3)$
λ_1	1	0	0
λ_2	0	1	0

მაშინ ცხადია, რომ $p_1(v_1)$ ალბათობის შემთხვევაში საჭიროა არჩეულ იქნეს a_1 ოპერაცია, ხოლო $p_2(v_2)$ ალბათობის დროს კი – a_2 ოპერაცია.

საჭიროა აღინიშნოს, რომ რაც უფრო არსებითია დამოკიდებულება ექსპერიმენტის შედეგად მიღებულ ალბათობებსა $p_1(v_1)$, $p_2(v_2)$, ..., $p_i(v_i)$ და ბუნების $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$ მდგომარეობებს შორის, მით უფრო მეტია ექსპერიმენტის გამოყენების მნიშვნელობა, რადგან იგი ასეთ შემთხვევაში გმპ-სათვის იძლევა მით უფრო მეტი ინფორმაციის მიღების საშუალებას.

§7. გადაწყვეტილების მიღების მათემატიკური ამოცანა რისკის პირობებში და ექსპერიმენტის მონაცემთა მოთხოვნით

გადაწყვეტილების მიღების პროცესს, რისკის პირობებში (ექსპერიმენტის ჩატარების გზით) უწოდებენ ბაიესის მიდგომას.

ამ პროცესის ძირითადი კანონზომიერების ასახსნელად გამოვიყენოთ იგივე მაგალითი, რომელიც მოცემული იყო წინა პარაგრაფში და დაეუშვათ, რომ მასში გარდა აღწერილისა ცნობილია ბუნების მდგომარეობათა $p(\lambda_1)$ და $p(\lambda_2)$ ალბათობები. ეთქვას, მაგალითად, $p(\lambda_1)=0,6$; $p(\lambda_2)=0,4$. ეს იმას ნიშნავს, რომ ტურისტულ სეზონზე 10 დღიდან 6 თბილია და 4 ცივი. ამ ალბათობებს უწოდებენ *აპრიორულ* ალბათობებს, რადგან ისინი (მათი მნიშვნელობები) ცნობილია ექსპერიმენტის ჩატარებამდე.

ახლა, თუ ყოველი c_i დასაშვები სტრატეგიისათვის გამოვიყენებთ ფორმულას

$$p(c_i) = p(\lambda_1) \cdot p(\lambda_1, c_i) + p(\lambda_2) \cdot p(\lambda_2, c_i), \quad (10.6)$$

შეიძლება ბუნების ორივე მდგომარეობისათვის ვიპოვოთ სარგებლის საშუალო $\varphi(c_i)$ მაჩვენებელი. ამ მიზნით გამოვიყენოთ წინა პარაგრაფის (10.11)-ე ცხრილის მონაცემები და მივიღებთ:

$$\varphi(c_1)=0,6 \cdot 10 + 0,4 \cdot 0 = 6; \quad \varphi(c_3)=0,6 \cdot 8,8 + 0,4 \cdot 3,5 = 6,68;$$

$$\varphi(c_4)=6,52; \quad \varphi(c_7)=5,36; \quad \varphi(c_8)=5,2;$$

აქედან კი ცხადია, რომ გადაწყვეტილების ოპტიმალურ სტრატეგიას (რომელიც საშუალო სარგებლიანობების საშუალებულ მაჩვენებელს ანიჭებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას), აპრიორული $p(\lambda_1)=0,6$ და $p(\lambda_2)=0,4$ ალბათობებისათვის, წარმოადგენს $c_3=(a_1, a_2, a_1)$.

თუ განვიხილავთ ბუნების მდგომარეობათა აპრიორული ალბათობების სხვა მაჩვენებლებს, მაგალითად, $p(\lambda_1)=0,5$ და $p(\lambda_2)=0,5$ -ს, მაშინ (10.6) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\varphi(c_1)=0,5 \cdot 10 + 0,5 \cdot 0 = 5; \quad \varphi(c_3)=6,15;$$

$$\varphi(c_4)=6,25; \quad \varphi(c_7)=5,4; \quad \varphi(c_8)=5,5.$$

აქედან ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში ოპტიმალურს წარმოადგენს $c_4=(a_1, a_2, a_2)$ სტრატეგია.

სტრატეგიას უწოდებენ *ბაიესის*, თუ ის $\varphi(c_i)$ ფუნქციას, რომელიც განისაზღვრება (10.6) ფორმულით, ანიჭებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

მაშასადამე, გამოდის, რომ c_3 წარმოადგენს ბაიესის სტრატეგიას, $p(\lambda_1)=0,6$ და $p(\lambda_2)=0,4$ აპრიორული ალბათობებისათვის, ხოლო c_4 კი — $p(\lambda_1)=0,5$ და $p(\lambda_2)=0,5$ აპრიორული ალბათობებისათვის.

აღნიშნულიდან გამომდინარეობს, რომ თუ გადაწყვეტილების მიღების განხილულ შემთხვევაში, არ ხდება ექსპერიმენტის ჩატარება, მაშინ $p(\lambda_1)=0,6$ და $p(\lambda_2)=0,4$ მნიშვნელობებისათვის, ოპტიმალურს წარმოადგენს a_1 ოპერაცია და მისი შესაბამისი სარგებლის საშუალო მაჩვენებელი ტოლია 6-ის, მაშინ როცა ეს მაჩვენებელი ექსპერიმენტის ჩატარების შემთხვევაში უდრის 6,68. მაშასა-

დამე, ცხადია, რომ შესასწავლ შემთხვევაში ექსპერიმენტის ჩატარება ხელსაყრელია.

ცნობილია, რომ საზოგადოდ C დასაშვებ სტრატეგიათა რაოდენობა არის დიდი და ამიტომ (10.6) ფორმულის გამოყენება ბაიესისებური სტრატეგიის საპონენლად პრაქტიკულად ძალიან რთულდება.

ამ სირთულის მოსახსნელად იყენებენ ბაიესის ცნობილ ფორმულას. ამ ფორმულის საფუძველზე, ექსპერიმენტის ჩატარებასთან ერთად, ხდება ბუნების მდგომარეობების აპრიორულ ალბათობათა ხელახალი შეფასება. ამ გზით მიღებულ ბუნების მდგომარეობათა ახალ, უკვე პირობით ალბათობებს უწოდებენ აპოსტერიორულს. ამის შემდეგ, კი ჩვეულებრივი ხერხებისა და ბუნების მდგომარეობათა დაზუსტებული ალბათობების გამოყენების გზით, შეიძლება ნაპოვნი იქნეს გადაწყვეტილების მიღების ოპტიმალური ოპერაცია.

ახლა ვიგულისხმით, რომ ექსპერიმენტის შედეგად მიღებულია V_a მნიშვნელობა, მაშინ ბაიესის ფორმულის თანახმად, λ_j აპოსტერიორული ალბათობებისათვის შეგვიძლია დავწეროთ:

$$p(\lambda_j / V_a) = \frac{p(V_a / \lambda_j)}{p(V_a)} p(\lambda_j), \quad (10.7)$$

სადაც

$p(\lambda_j)$ – არის λ_j მდგომარეობის აპრიორული ალბათობის ამსახველი სიდიდე;

$p(V_a / \lambda_j)$ – არის V_a დაკვირვების პირობითი ალბათობა, იმ შემთხვევისათვის, როცა ბუნების მდგომარეობა არის λ_j .

$p(V_a)$ – არის V_a დაკვირვების უპირობო ალბათობა. ის გამოითვლება სრული ალბათობის ფორმულით:

$$p(V_a) = \sum_{j=1}^n p(V_a / \lambda_j) p(\lambda_j), \quad (10.8)$$

სადაც

ნარის ბუნების განსხვავებულ მდგომარეობათა რაოდენობის ამსახველი სიმბოლო.

ამის შემდეგ, თუ გამოვიყენებთ (10.7) ფორმულით ნაპოვნ დაზუსტებული ალბათობების $p(\lambda_j/V_\alpha)$, $j=1,2,\dots,n$ მაჩვენებლებს, შეიძლება ყოველი a_i ოპერაციისათვის განესაზღვროთ საშუალო სარგებლიანობის $\varphi_\alpha(a_i)$ მაჩვენებელი შემდეგნაირად:

$$\varphi_\alpha(a_i) = \sum_{j=1}^n p(\lambda_j/V_\alpha) a_{ij}, \quad i=1,2,\dots,m. \quad (10.9)$$

ამ შემთხვევაში, ოპტიმალურად შეიძლება ჩაითვალოს ისეთი a_i ოპერაცია, რომელიც $\varphi_\alpha(a_i)$ ფუნქციას (ექსპერიმენტის მოცემული V_α შედეგისათვის) ანიჭებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ასეთი გზით შეიძლება მიღებულ იქნეს ბაიესის სტრატეგია.

ვთქვათ, $v_1, v_2, \dots, v_l$ პარამეტრები წარმოადგენენ ექსპერიმენტის ყველა შესაძლო შედეგს. (10.6) ფორმულა ზოგად შემთხვევაში შეიძლება დაიწეროს ასეთნაირად:

$$\varphi(c_i) = \sum_{j=1}^n p(\lambda_j) \varphi(\lambda_j, c_i), \quad (10.10)$$

სადაც

$$\varphi(\lambda_j, c_i) = \sum_{\alpha=1}^l p(v_\alpha/\lambda_j) a_{i\alpha j}, \quad (10.11)$$

ამიტომ

$$c_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{il}, \dots, a_{in}),$$

ასე რომ, თუ ექსპერიმენტის შედეგი არის v_α , მაშინ c_i სტრატეგიის თანახმად სრულდება $a_{i\alpha}$ ოპერაცია. აქ ყოველი $i_1, i_2, \dots, i_m$ ინდექსთაგანი წარმოადგენს ერთ-ერთს $1, 2, \dots, m$ რიცხვთაგან.

(10.10) და (10.11) ფორმულებიდან ვღებულობთ:

$$\varphi(c_i) = \sum_{j=1}^n p(\lambda_j) \sum_{\alpha=1}^l p(v_\alpha/\lambda_j) a_{i\alpha j} = \sum_{\alpha=1}^l \left[\sum_{j=1}^n p(\lambda_j) p(v_\alpha/\lambda_j) a_{i\alpha j} \right], \quad (10.12)$$

მეორე მხრივ, (10.7) და (10.8) ფორმულებიდან შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\varphi_{\alpha}(a_i) = \frac{1}{p(v_{\alpha})} [\sum_{j=1}^n p(\lambda_j) p(v_{\alpha} / \lambda_j) a_{ij}], \quad (10.13)$$

(10.12) და (10.13) ფორმულებში საჭიროა ყოველი V_{α} -სათვის ნაპოვნი იქნეს ისეთი a_i ოპერაცია, რომელიც კვადრატულ ფრჩხილებში მოქცეულ გამოსახულებას ანიჭებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

მაშასადამე, გამოდის, რომ (10.7), (10.9) და (10.10), (10.11) მაქსიმუმის მიმნიჭებელი ოპერაციები ემთხვევა ერთმანეთს. ამიტომ შეიძლება გაკეთდეს შემდეგი დასკვნა, რომ ეს ორი მეთოდი იძლევა ერთსადაიმანე შედეგს. ამასთან, ისიც უნდა აღინიშნოს, რომ (10.7), (10.9) მეთოდი გამოთვლების თვალსაზრისით უფრო მარტივია, ვიდრე (10.10) და (10.11) მეთოდი. ამასთან დაკავშირებით შემდეგში გამოყენებული იქნება მხოლოდ (10.7), (10.9) მეთოდი. აქვე ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას, რომ ექსპერიმენტის ყველა მნიშვნელობის მიხედვით გასაშუალებული საშუალო სარგებლიანობის მაქსიმალური მაჩვენებელი (10.7), (10.9) მეთოდის გამოყენების დროს ტოლია:

$$\sum_{\alpha=1}^l p(V_{\alpha}) \max_i \varphi_{\alpha}(a_i), \quad (10.14)$$

სადაც

$\varphi_{\alpha}(a_i)$ – განისაზღვრება (10.9) ფორმულის მიხედვით.

ახლა, ისევ დავუბრუნდეთ წინა პარაგრაფის მაგალითს და ვიგულისხმობთ, რომ მასში ბუნების მდგომარეობათა აპრიორული ალბათობები კვლავ ტოლია $p(\lambda_1)=0,6$; $p(\lambda_2)=0,4$. მაშინ, (10.3) და (10.2) ფორმულების გამოყენებით, ეპოულობთ:

$$p(V_1)=0,6 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,48;$$

$$p(V_2)=0,32; \quad p(V_3)=0,20;$$

$$p(\lambda_1/V_1)=0,6/0,48=0,6=0,75;$$

$$p(\lambda_2/V_1)=1 - p(\lambda_1/V_1)=0,25;$$

$$p(\lambda_1/V_2)=0,375; \quad p(\lambda_2/V_2)=0,625;$$

$$p(\lambda_1/V_3)=0,6; p(\lambda_2/V_3)=0,4.$$

აქედან (10.9) ფორმულის თანახმად ვღებულობთ:

$$\varphi_1(a_1)=0,75 \cdot 10 + 0,25 \cdot 0 = 7,5;$$

$$\varphi_1(a_2)=0,75 \cdot 4 + 0,25 \cdot 7 = 4,75;$$

$$\varphi_2(a_1)=0,375 \cdot 10 + 0,625 \cdot 0 = 3,75;$$

$$\varphi_2(a_2)=0,375 \cdot 4 + 0,625 \cdot 7 = 5,875;$$

$$\varphi_3(a_1)=0,6 \cdot 10 + 0,4 \cdot 0 = 6;$$

$$\varphi_3(a_2)=0,6 \cdot 4 + 0,4 \cdot 7 = 5,2$$

და მაშასადამე

$$\max \varphi_1(a_i) = \varphi_1(a_1) = 7,5;$$

$$\max \varphi_2(a_i) = \varphi_2(a_2) = 5,875;$$

$$\max \varphi_3(a_i) = \varphi_3(a_1) = 6.$$

ამგეარად, ჩვენ მივიღეთ ოპტიმალური (a_1, a_2, a_3) სტრატეგია, რომელიც (როგორც ეს მოსალოდნელი იყო) ემთხვევა ამ პარაგრაფის დასაწყისში ნაპოვნ ბაიესის C_3 სტრატეგიას. ამასთან ერთად საშუალო სარგებლიანობის მაქსიმალური მნიშვნელობისათვის (10.14) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$0,48 \cdot 7,5 + 0,32 \cdot 5,875 + 0,20 \cdot 6 = 6,68,$$

რაც აგრეთვე ემთხვევა ამ პარაგრაფის დასაწყისში მიღებულ შედეგს.

ახლა ვიგულისხმობთ, რომ გმპ-ს ეძლევა ისეთი მეორე ექსპერიმენტის ჩატარების შესაძლებლობა, რომელიც არ იქნება დამოკიდებული პირველზე. ამგეარად შეიძლება ბუნების მდგომარეობათა აპოსტერიორული ალბათობები ნაპოვნი იქნეს უფრო ზუსტად. ამისათვის ბაიესის ფორმულის მიხედვით პირველი ექსპერიმენტის საფუძველზე განსაზღვრული აპოსტერიორული ალბათობები მიღებულ უნდა იქნეს აპრიორულ ალბათობებად და შემდეგში იმავე ბაიესის ფორმულით და ჩვეულებრივი გზით, მაგრამ უკვე მეორე ექსპერიმენტის შედეგების გამოყენების საფუძველზე შეიძლება ნაპოვნი იქნეს ბუნების მდგომარეობათა ახალი, დაზუსტებული აპოსტერიორული ალბათობები.

საინტერესოა ვაჩვენოთ, რომ ეს აპოსტერიორული ალბათობები არ იცვლება, თუ მათ ვიპოვიოთ ერთდროულად, ორთავე ექსპერიმენტის შედეგების მიხედვით.

ეს ორი ექსპერიმენტი ჩავთვალოთ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად და მივიღებთ:

$$p(x, y/\lambda_j) = p(x/\lambda_j) p(y/\lambda_j), \quad (10.15)$$

სადაც

$p(x, y/\lambda_j)$ – არის იმის ალბათობა, რომ პირველი ექსპერიმენტის შედეგი აღმოჩნდება x , ხოლო მეორესი კი y . ამასთან, ბუნების მდგომარეობა ტოლია λ_j -სი. ანალოგიურ აზრს ატარებს $p(x/\lambda_j)$ და $p(y/\lambda_j)$ პირობითი ალბათობები შესაბამისად პირველი და მეორე ექსპერიმენტებისათვის.

ადვილი მისახვედრია, რომ λ_j მდგომარეობის შესაბამისი აპოსტერიორული ალბათობა შეიძლება ნაპოვნი იყოს ბაიესის ფორმულის მიხედვით.

$$p(\lambda_j/x, y) = \frac{p(x, y/\lambda_j)}{p(x, y)} p(\lambda_j), \quad (10.16)$$

სადაც

$$p(x, y) = \sum_{j=1}^n p(x, y/\lambda_j) p(\lambda_j).$$

მეორე მხრივ, აპოსტერიორული ალბათობა $p(\lambda_j/x)$, რომელიც იყენებს ინფორმაციას მხოლოდ პირველი ექსპერიმენტის შესახებ, განისაზღვრება ბაიესის ფორმულის მიხედვით

$$p(\lambda_j/x) = \frac{p(x/\lambda_j)}{p(x)} p(\lambda_j), \quad (10.17)$$

სადაც

$$p(x) = \sum_{j=1}^n p(x/\lambda_j) p(\lambda_j).$$

თუ ახლა $p(\lambda_j/x)$ აპოსტერიორულ ალბათობებს მეორე ექსპერიმენტისათვის გამოვიყენებთ, როგორც აპრიორულს,

მაშინ ახალი აპოსტერიორული $p'(\lambda_j/x, y)$ ალბათობისათვის ბაიესის ფორმულის თანახმად მივიღებთ:

$$p'(\lambda_j/x, y) = \frac{p(y/\lambda_j)p(\lambda_j/x)}{\sum_{j=1}^n p(y/\lambda_j)p(\lambda_j/x)}. \quad (10.18)$$

აქედან (10.15), (10.16) და (10.17) ფორმულების ძალით გვექნება:

$$\begin{aligned} p'(\lambda_j/x, y) &= \frac{p(y/\lambda_j)p(x/\lambda_j)p(\lambda_j)/p(x)}{\sum_{j=1}^n p(y/\lambda_j)p(x/\lambda_j)p(\lambda_j)/p(x)} = \\ &= \frac{p(x, y/\lambda_j)p(\lambda_j)}{\sum_{j=1}^n p(x, y/\lambda_j)p(\lambda_j)} = p(\lambda_j/x, y), \end{aligned}$$

რ. დ. გ.

ეს ფაქტი ახლა დავასაბუთოთ რიცხვობრივად. ამ მიზნით ისევ გავიხსენოთ წინა პარაგრაფში განხილული მაგალითი და ვიგულისხმოთ, რომ ამ მაგალითში დამატებით არის ცნობილი შემდეგი ინფორმაცია: თბილ ამინდში (იგულისხმება λ_1 მდგომარეობა) წინააღმდეგობით მაგალითად, 80% შემთხვევაში არსებობდა ასევე სითბო (y_1) და მხოლოდ 20% შემთხვევაში არსებობდა სიცივე (y_2). ცივ ამინდში (λ_2 მდგომარეობა) წინააღმდეგობით მაგალითად, 30% შემთხვევაში არსებობდა სითბო და 70% შემთხვევაში არსებობდა სიცივე (y_2).

ამასთან დაკავშირებით, ბუნების უცნობ λ_1 და λ_2 მდგომარეობებს და გუშინდელ ცნობილ y_1 და y_2 ამინდს შორის არსებული დამოკიდებულების განსასაზღვრავად დგება მეორე ექსპერიმენტი. ჩავწერთ იგი შემდეგი ცხრილის სახით:

ცხრ.10.16

	y_1	y_2
λ_1	0,8	0,2
λ_2	0,3	0,7

პირველი ექსპერიმენტი წარმოადგინოთ წინა პარაგრაფის ძველი (10.9) ცხრილის სახით (სადაც მხოლოდ $p_i(V_i)$ იქნება შეცვლილი x_i სიდიდეებით) და მივიღებთ:

(ცხრ.10.17)

	x_1	x_2	x_3
λ_1	0,6	0,2	0,2
λ_2	0,3	0,5	0,2

ბუნების მდგომარეობათა აპოსტერიორული ალბათობები (როგორც უკვე იყო ნაჩვენები), პირველი ექსპერიმენტის შედეგად არსებული ინფორმაციის გამოყენების შემდეგ იქნება:

$$p(\lambda_1 / x_1) = 0,75; \quad p(\lambda_2 / x_1) = 0,25;$$

$$p(\lambda_1 / x_2) = 0,375; \quad p(\lambda_2 / x_2) = 0,625;$$

$$p(\lambda_1 / x_3) = 0,6; \quad p(\lambda_2 / x_3) = 0,4.$$

ახლა, თუ მეორე ექსპერიმენტისათვის, აპრიორული ალბათობების რანგში გამოვიყენებთ 10.16 ცხრილში ასახულ მონაცემებს, მაშინ (10.18) ფორმულით მივიღებთ:

$$p'(\lambda_1 / x_1, y_1) = \frac{p(y_1 / \lambda_1) p(\lambda_1 / x_1)}{p(y_1 / \lambda_1) p(\lambda_1 / x_1) + p(y_1 / \lambda_2) p(\lambda_2 / x_1)} =$$

$$= \frac{0,8 \cdot 0,75}{0,8 \cdot 0,75 + 0,3 \cdot 0,25} = \frac{8}{9};$$

$$p'(\lambda_2 / x_1, y_1) = \frac{1}{9};$$

$$p'(\lambda_1 / x_1, y_2) = \frac{0,2 \cdot 0,75}{0,2 \cdot 0,75 + 0,7 \cdot 0,25} = \frac{6}{13};$$

$$p'(\lambda_2 / x_1, y_2) = \frac{7}{13};$$

$$p'(\lambda_1 / x_2, y_1) = \frac{0,8 \cdot 0,375}{0,8 \cdot 0,375 + 0,3 \cdot 0,625} = \frac{8}{13};$$

$$p'(\lambda_2 / x_2, y_1) = \frac{5}{13};$$

$$p'(\lambda_1 / x_2, y_2) = \frac{0,2 \cdot 0,375}{0,2 \cdot 0,375 + 0,7 \cdot 0,625} = \frac{6}{41};$$

$$p'(\lambda_2 / x_2, y_2) = \frac{35}{41};$$

$$p'(\lambda_1 / x_3, y_1) = \frac{0,8 \cdot 0,6}{0,8 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,4} = \frac{4}{5};$$

$$p'(\lambda_2 / x_3, y_1) = \frac{1}{5};$$

$$p'(\lambda_1 / x_3, y_2) = \frac{0,2 \cdot 0,6}{0,2 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,4} = \frac{3}{10};$$

$$p'(\lambda_2 / x_3, y_2) = \frac{7}{10}.$$

მეორე მხრივ, თუ ორთავე ექსპერიმენტს ჩაეთვლით ერთმანეთზე დამოუკიდებლად, 10.16 და 10.17 ცხრილებიდან აღვიღად ეპოულობთ შემდეგ ცხრილს:

ცხრ.10.18

	x_1, y_1	x_1, y_2	x_2, y_1	x_2, y_2	x_3, y_1	x_3, y_2
λ_1	0,48	0,12	0,16	0,04	0,16	0,04
λ_2	0,09	0,21	0,15	0,35	0,06	0,14

ეს ცხრილი შეესაბამება ერთ, მაგრამ რთულ ექსპერიმენტს, რომელიც აერთიანებს და შეიცავს ორ განხილულ მარტივ ექსპერიმენტს.

აპრიორული $p(\lambda_1)=0,6$ და $p(\lambda_2)=0,4$ ალბათობებიდან, 10.18-ე ცხრილიდან და ბაიესის (10.16)-ე ფორმულიდან გამომდინარე, ვღებულობთ:

$$p(\lambda_1 / x_1, y_1) = \frac{p(x_1, y_1 / \lambda_1) p(\lambda_1)}{p(x_1, y_1 / \lambda_1) p(\lambda_1) + p(x_1, y_1 / \lambda_2) p(\lambda_2)} =$$

$$= \frac{0,48 \cdot 0,6}{0,48 \cdot 0,6 + 0,09 \cdot 0,4} = \frac{0,288}{0,324} = \frac{8}{9};$$

$$p(x_1, y_1) = 0,324;$$

$$p(\lambda_2 / x_1, y_1) = 1 - p(\lambda_1 / x_1, y_1) = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9};$$

$$p(\lambda_1 / x_1, y_1) = \frac{0,12 \cdot 0,6}{0,12 \cdot 0,6 + 0,21 \cdot 0,4} = \frac{0,072}{0,156} = \frac{6}{13};$$

$$p(\lambda_2 / x_1, y_2) = \frac{7}{13}; \quad p(x_1, y_2) = 0,156;$$

$$p(\lambda_1 / x_2, y_1) = \frac{0,16 \cdot 0,6}{0,16 \cdot 0,6 + 0,15 \cdot 0,4} = \frac{0,096}{0,156} = \frac{8}{13};$$

$$p(\lambda_2 / x_2, y_1) = \frac{5}{13}; \quad p(x_2, y_1) = 0,156;$$

$$p(\lambda_1 / x_2, y_2) = \frac{0,04 \cdot 0,6}{0,04 \cdot 0,6 + 0,35 \cdot 0,4} = \frac{0,024}{0,164} = \frac{6}{41};$$

$$p(\lambda_2 / x_2, y_2) = \frac{35}{41}; \quad p(x_2, y_2) = 0,164;$$

$$p(\lambda_1 / x_3, y_1) = \frac{0,16 \cdot 0,6}{0,16 \cdot 0,6 + 0,06 \cdot 0,4} = \frac{0,096}{0,120} = \frac{4}{5};$$

$$p(\lambda_2 / x_3, y_1) = \frac{1}{5}; \quad p(x_3, y_1) = 0,120;$$

$$p(\lambda_1 / x_3, y_2) = \frac{0,04 \cdot 0,6}{0,04 \cdot 0,6 + 0,14 \cdot 0,4} = \frac{0,024}{0,080} = \frac{3}{10};$$

$$p(\lambda_2 / x_3, y_2) = \frac{7}{10}; \quad p(x_3, y_2) = 0,080;$$

ამ ტოლობებიდან გამოვძინარეობს, რომ $p'(\lambda_i/x,y)=p(\lambda_i/x,y)$, რაც იმას ნიშნავს, რომ საბოლოო აპოსტერიორული ალბათობა არ არის დამოკიდებული იმაზე, განიხილება თუ არა ორივე ექსპერიმენტისაგან მიღებული ინფორმაცია თანმიმდევრულად ან კიდევ ერთდროულად.

ცხადია, რომ დამატებითი ექსპერიმენტის ჩატარება იძლევა ისეთი გადაწყვეტილების არჩევის საშუალებას,

რომელსაც შეესაბამება დიდი ზომის საშუალო სარგებლიანობის მაჩვენებელი.

განხილულ მაგალითში გაერთიანებული ექსპერიმენტის ყოველი x_i, y_j შედეგისათვის (10.9)-ე ფორმულის გამოყენებით განესაზღვროთ საშუალო სარგებლიანობის მაჩვენებლები:

$$\varphi_j(a_1) = p(\lambda_1 / x_i, y_j) a_{11} + p(\lambda_2 / x_i, y_j) a_{12};$$

$$\varphi_j(a_2) = p(\lambda_1 / x_i, y_j) a_{21} + p(\lambda_2 / x_i, y_j) a_{22}.$$

თუ ამ ფორმულებს მივიყვანთ კონკრეტულ რიცხვით მაჩვენებლებამდე მივიღებთ:

$$\varphi_{11}(a_1) = \frac{8}{9} \cdot 10 + \frac{1}{9} \cdot 0 = \frac{80}{9};$$

$$\varphi_{11}(a_2) = \frac{8}{9} \cdot 4 + \frac{1}{9} \cdot 7 = \frac{39}{9};$$

$$\varphi_{12}(a_1) = \frac{6}{13} \cdot 10 + \frac{7}{13} \cdot 0 = \frac{60}{13};$$

$$\varphi_{12}(a_2) = \frac{6}{13} \cdot 4 + \frac{7}{13} \cdot 7 = \frac{73}{13};$$

$$\varphi_{21}(a_1) = \frac{8}{13} \cdot 10 + \frac{5}{13} \cdot 0 = \frac{80}{13};$$

$$\varphi_{21}(a_2) = \frac{8}{13} \cdot 4 + \frac{5}{13} \cdot 7 = \frac{67}{13};$$

$$\varphi_{22}(a_1) = \frac{6}{41} \cdot 10 + \frac{35}{41} \cdot 0 = \frac{60}{41};$$

$$\varphi_{22}(a_2) = \frac{6}{41} \cdot 4 + \frac{35}{41} \cdot 7 = \frac{269}{41};$$

$$\varphi_{31}(a_1) = \frac{4}{5} \cdot 10 + \frac{1}{5} \cdot 0 = \frac{40}{5};$$

$$\varphi_{31}(a_2) = \frac{4}{5} \cdot 4 + \frac{1}{5} \cdot 7 = \frac{23}{5};$$

$$\varphi_{32}(a_1) = \frac{3}{10} \cdot 10 + \frac{7}{10} \cdot 0 = \frac{30}{10};$$

$$\varphi_{32}(a_2) = \frac{3}{10} \cdot 4 + \frac{7}{10} \cdot 7 = \frac{61}{10}.$$

ამ ტოლობებიდან ცხადია, რომ ოპტიმალური სტრატეგია, განსახილველ შემთხვევაში, შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$x_1, y_1 \rightarrow a_1; x_1, y_2 \rightarrow a_2; x_2, y_1 \rightarrow a_1; x_2, y_2 \rightarrow a_2; x_3, y_1 \rightarrow a_1; x_3, y_2 \rightarrow a_2;$

სადაც

$x_i, y_j (i=1, 2, 3; j=1, 2) \rightarrow a_i (i=1, 2)$

დამოკიდებულება აღნიშნავს, რომ იმ შემთხვევაში, როცა პირველი ექსპერიმენტის შედეგი აღმოჩნდება x_i -ის ტოლი და მეორე ექსპერიმენტის შედეგი y_j -ის ტოლი, გამოყენებულ უნდა იქნეს a_i ოპერაცია. ამ დროს აღნიშნული ოპერაციის შესაბამისი საშუალო სარგებლის მაჩვენებლისათვის გვაქვს:

$$\sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \max[\varphi_i(a_1); \varphi_i(a_2)] = 0,324 \cdot \frac{80}{9} + 0,156 \cdot \frac{73}{13} + 0,156 \cdot \frac{80}{13} + 0,164 \cdot \frac{269}{41} + 0,120 \cdot \frac{40}{5} + 0,080 \cdot \frac{61}{10} = 7,24.$$

განხილულ შემთხვევაში, დამატებითი ექსპერიმენტის გამოყენების დროს საშუალო სარგებლიანობის მაჩვენებელი 6,68-დან (როგორც ეს მოსალოდნელი იყო) გაიზარდა 7,24-მდე.

თუ ახლა ჩავატარებთ მესამე ექსპერიმენტს და, მაშასადამე, ბუნების მდგომარეობის შესახებ კიდევ მივიღებთ დამატებით ინფორმაციას, მაშინ ბაიესის ფორმულები მოგვცემენ ბუნების მდგომარეობათა ალბათობების კიდევ უფრო მეტად დაზუსტების და ამით მისაღები გადაწყვეტილების საშუალო სარგებლის კიდევ უფრო ამაღლების საშუალებას.

აღნიშნულიდან ცხადია, რომ სხვადასხვა ექსპერიმენტის საკმარისად დიდი რაოდენობით ჩატარების შემთხვევაში, 1-თან ძალიან ახლოს მყოფი ალბათობით არის შესაძლებელი ბუნების ნამდვილი მდგომარეობის გაგება.

აქედან გამომდინარე, ბუნებრივია, რომ გადაწყვეტილების მიღების პროცესი, ექსპერიმენტების სერიის ჩატარების დროს, შეიძლება განხილულ იქნეს, როგორც სწავლების პროცესი. ამ დროს ყოველი დამატებითი ექსპერიმენტი როგორღაც ამცირებს გარემოს განუზღვრელობის ხარისხს და შესაბამისად იძლევა უფრო სწორი გადაწყვეტილების მიღების საშუალებას.

იმ შემთხვევაში, როცა ბუნების რომელიმე მდგომარეობის აპრიორული ალბათობა ტოლია 1-ისა, არავითარი შესწავლის პროცესი არ ხდება, რადგან ამ დროს აპოსტერიორული ალბათობები ემთხვევა აპრიორულს.

ახლა განვიხილოთ მაგალითი, რომელშიც $p(\lambda_1)=1$, $p(\lambda_j)=0$, სადაც $j=2,3,4,\dots,n$.

თუ ამ მონაცემებს გამოვიყენებთ ბაიესის ფორმულაში, მივიღებთ:

$$p(\lambda_j / V_a) = \frac{p(v_a / \lambda_j)}{p(p_a / \lambda_j)} p(\lambda_j) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } j=1; \\ 0, & \text{თუ } j=2,3, \dots, n. \end{cases}$$

აქედან კი ცხადია, რომ განსილულ შემთხვევაში ვლუბულობთ აპოსტერიორული და აპრიორული ალბათობების თანმთხვევას.

აღნიშნულიდან კი შეიძლება დავასკენათ, რომ იმ შემთხვევაში, თუ არ არის სრული დამაჯერებლობით განსაზღვრული ბუნების ჭეშმარიტი მდგომარეობა და სიტუაციის გასარკვევად ნაგარაუდევია ექსპერიმენტების ჩატარება, არ შეიძლება აპრიორული ალბათობებიდან ერთ-ერთის მიჩნევა 1-ის ტოლად.

§8. გადაწყვეტილების მიღების მათემატიკური ამოცანა, რისკისა და ექსპერიმენტების ღირებულებების გათვალისწინებით (ბაიესის მიდგომა)

წინა პარაგრაფში ნაჩვენები იყო, რომ ექსპერიმენტის ჩატარება იძლევა ბუნების მდგომარეობათა აპრიორული ალბათობის დაზუსტებისა და მაშასადამე, ყველაზე დიდი საშუალო სარგებლიანობის შესაბამისი გადაწყვეტილების მიღების საშუალებას. თუმცა, ამასთან ერთად უნდა აღინიშნოს, რომ ექსპერიმენტის ჩატარება ითხოვს განსაზღვრულ დანახარჯებს. ექსპერიმენტის ჩატარება მიზანშეწონილია იმ შემთხვევაში, თუ ეს დანახარჯები გადააჭარ-

ბებენ ექსპერიმენტით გამოწვეულ საშუალო სარგებლის ნაზრდს.

გადაწყვეტილების მიღების თეორიაში მნიშვნელოვანი ადგილი უჭირავს ბაიესის მიდგომას, ექსპერიმენტების ღირებულების გათვალისწინების შემთხვევაში.

ვიდრე უშუალოდ გადავიდოდეთ ამ მიდგომის აღწერაზე შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$A=\{a\}$ – იყოს ყველა შესაძლო ოპერაციათა სიმრავლე;

$\Lambda=\{\lambda\}$ – ბუნების ყველა შესაძლო მდგომარეობათა სიმრავლე;

$E=\{e\}$ – ყველა შესაძლო ექსპერიმენტთა სიმრავლე;

$V=\{v\}$ – e ექსპერიმენტის ყველა შესაძლო შედეგთა სიმრავლე;

$\varphi(a, \lambda, e, v)$ – სარგებლიანობის ისეთი ფუნქცია, რომელიც დამოკიდებულია ოთხი (ოპერაცია a , ბუნების მდგომარეობა λ , ექსპერიმენტი e და ამ ექსპერიმენტის მნიშვნელობა v) არგუმენტისაგან;

$p(\lambda)$ – ბუნების λ მდგომარეობის აპრიორული ალბათობა;

$p(v/\lambda, e)$ – e ექსპერიმენტის ჩატარებით მოსალოდნელი v შედეგის მიღების ალბათობა იმ შემთხვევაში, როცა ბუნების მდგომარეობა არის λ .

ერთიანობისათვის ვიგულისხმობთ, რომ $E=\{e\}$ სიმრავლის ერთი ელემენტი შეესაბამება ექსპერიმენტის ჩატარებლობის ფაქტს. ამ ელემენტს ეუწოდოთ ნულოვანი ექსპერიმენტი და ავლნიშნოთ იგი e_0 -ით. ნულოვანი ექსპერიმენტის განუსაზღვრელი შედეგი ავლნიშნოთ v_0 -ით.

ახლა, შევეცადოთ და მოცემული მონაცემებით განესაზღვროთ ოპტიმალური გადაწყვეტილება. ამისათვის მოვიქცეთ შემდეგნაირად:

პირველ ეტაპზე გავითვალისწინოთ, რომ ბაიესის ფორმულის მიხედვით

$$p(\lambda/e, v) = \frac{p(v/\lambda, e)}{p(v/e)} p(\lambda), \quad (10.19)$$

სადაც

$$p(v/\varepsilon) = \sum_{\lambda} p(v/\lambda, \varepsilon) p(\lambda) \quad (10.20)$$

და $(\lambda, \varepsilon, v)$ სამეულის ყოველი კომბინაციისათვის გამოეთვალეთ აპოსტერიორული $p(\lambda/\varepsilon, v)$ ალბათობა.

მეორე ეტაპზე გამოვიყენოთ ფორმულა:

$$\varphi(a, \varepsilon, v) = \sum_{\lambda} p(\lambda/\varepsilon, v) \varphi(a, \lambda, \varepsilon, v) \quad (10.21)$$

და (a, ε, v) სამეულის ყოველი კომბინაციისათვის ვიპოვოთ საშუალო (მათემატიკური ღლოდინი) სარგებელი.

მესამე ეტაპზე, გამოვიყენოთ პირობა

$$\varphi(\varepsilon, v) = \varphi(a^*, \varepsilon, v) = \max_a \varphi(a, \varepsilon, v) \quad (10.22)$$

და (ε, v) ორეულის ყოველი კომბინაციისათვის განესაზღვროთ ოპტიმალური a^* ოპერაცია.

მეოთხე ეტაპზე გამოვიყენოთ ფორმულა:

$$\varphi(\varepsilon) = \sum_v p(v/\varepsilon) \varphi(\varepsilon, v) \quad (10.23)$$

და ყოველი ε ექსპერიმენტისათვის განესაზღვროთ $\varphi(\varepsilon)$ საშუალო სარგებელი.

ბოლო მეხუთე ეტაპზე კი გამოვიყენოთ პირობა:

$$\varphi(\varepsilon^*) = \max_{\varepsilon} \varphi(\varepsilon) \quad (10.24)$$

და ვიპოვოთ ოპტიმალური ε^* ექსპერიმენტი. კერძო შემთხვევაში შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ $\varepsilon^* = \varepsilon_0$. ეს ნიშნავს, რომ ექსპერიმენტის ჩატარებასთან დაკავშირებულ ხარჯებს არ შეუძლიათ საშუალო სარგებელის ნაზრდის „ამოგება“.

ამგვარად, საჭიროა დავასკენათ – იმისათვის, რათა მოცემულ შემთხვევაში მიღებულ იქნეს ოპტიმალური გადაწყვეტილება, საჭიროა ჩატარდეს ε^* ექსპერიმენტი, დაფიქსირდეს მისი v^* შედეგი და მათი შესაბამისი ოპტიმალური ოპერაცია ნაპოვნი იქნეს $\varphi(\varepsilon^*, v^*) = \max_a \varphi(a, \varepsilon^*, v^*)$ პირობიდან.

სწორედ, ამაში მდგომარეობს გადაწყვეტილების, ექსპერიმენტის ღირებულების გათვალისწინების შემთხვევაში მიღებისადმი ბაიესის მიდგომის არსი.

ახლა განვიხილოთ ასეთი მაგალითი.

ვთქვათ, მოცემულია ორი კამათელი. დაეუშვათ, რომ მათგან ერთ-ერთის (რომელსაც ეუწოდოთ წითელი) ხუთი წახნაგი შეღებილია წითელი ფერით და ერთი წახნაგი – თეთრი ფერით, ხოლო მეორეს (რომელსაც ეუწოდოთ თეთრი) ოთხი წახნაგი შეღებილია თეთრი ფერით და ორი წითლით.

ვთქვათ, აგრეთვე, რომ ამ ორი კამათლის გაგორება ხდება მაგიდაზე ერთჯერ და შემდეგ ერთ-ერთ მათგანს მაგიდიდან იღებენ. დაეუშვათ, რომ ამის შემდეგ ერთ-ერთ პირს, მაგალითად, ცნობილადეს (რომელსაც არ დაუნახავს არც კამათლების გაგორების და არც ერთ-ერთი მათგანის მაგიდიდან აღების პროცედურა) გამოსაცნობად შესთავაზეს და უნდა თქვას თუ რომელი კამათელი დარჩა მაგიდაზე. მას, სურვილის შემთხვევაში შეუძლია მეორე პირის – გამცემლიძისაგან გარკვეული თანხის საფასურად გაიგოს იმ წახნაგის ფერი, რომელიც გაგორდა მაგიდაზე დარჩენილ კამათელზე.

ვიგულისხმობთ, აგრეთვე, რომ ამ მაგალითის შესაბამის სარგებლიანობების მატრიცას გააჩნია ასეთი სახე:

(ცხრ. 10.19)

	λ_1	λ_2
a_1	10	0
a_2	0	10

სადაც a_1 და a_2 – პარამეტრები შესაბამისად გამოსატყვენ წითელი და თეთრი კამათლების შერჩევას. λ_1 და λ_2 – პარამეტრები შესაბამისად გამოხატავენ წითელი და თეთრი კამათლის დატოვებას.

იმ შემთხვევაში, თუ ცნობილადე არ გამოიყენებს გამცემლიძის მომსახურების შესაძლებლობას, მან უნდა დაუშვას, რომ

$$p(\lambda_1) = p(\lambda_2) = \frac{1}{2}.$$

ასეთ შემთხვევაში, ნებისმიერს ორი a_1 და a_2 ოპერაცი-
იდან შეუძლია 5-ის ტოლი საშუალო სარგებლის მოცემა.

ახლა, ვიგულისხმობთ, რომ ცნობილადემ გადაწყვეტა
ისარგებლოს გამცემლიძის შესაძლებლობით და მისგან
მიიღოს სათანადო სამსახური.

ვთქვათ, ცნობილადემ მოინდომა გამცემლიძისათვის ფუ-
ლის გადახდამდე განსაზღვროს თუ რა ფასეულობისა
არის გამცემლიძის ინფორმაცია.

ცხადია, რომ ცნობილადეს აწყობს ისარგებლოს გამ-
ცემლიძის სამსახურით იმ შემთხვევაში, როცა მის მიერ ამ
სამსახურში, ანუ საჭირო ინფორმაციაში გადახდილი
თანხის ღირებულება ნაკლებია, ვიდრე ამ ინფორმაციის
ფასეულობა.

ახლა თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

v_1 — წითელი ფერი; v_2 — თეთრი ფერი, მივიღებთ:

$$p(v_1/\lambda_1) = \frac{5}{6}; \quad p(v_2/\lambda_1) = \frac{1}{6};$$

$$p(v_1/\lambda_2) = \frac{2}{6}; \quad p(v_2/\lambda_2) = \frac{4}{6};$$

და მაშასადამე

$$p(v_1) = p(v_1/\lambda_1)p(\lambda_1) + p(v_1/\lambda_2)p(\lambda_2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12};$$

$$p(v_2) = 1 - p(v_1) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}.$$

აქედან აპოსტერიორული ალბათობებისათვის გვაქვს:

$$p(\lambda_1/v_1) = \frac{p(v_1/\lambda_1)}{p(v_1)} p(\lambda_1) = \frac{5/6}{7/12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{7};$$

$$p(\lambda_2/v_1) = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7};$$

$$p(\lambda_1/v_2) = \frac{p(v_2/\lambda_1)}{p(v_2)} p(\lambda_1) = \frac{1/6}{5/12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5};$$

$$p(\lambda_2/v_2) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

თუ გამცემლიძე ცნობილადეს გააგებინებს „წითელი ფერის“ (v_1) შესახებ, მაშინ საშუალო სარგებელი, რომელსაც მიიღებს ცნობილადე, ცხადია, ტოლი იქნება $50/7$ პირობითი ერთეულის, a_1 ოპერაციის შემთხვევაში და $20/7$ პირობითი ერთეულის, a_2 ოპერაციის შემთხვევაში. ამგვარად, ცხადია, რომ ამ შეტყობინების შემთხვევაში, ოპტიმალურს წარმოადგენს a_1 ოპერაცია.

ანალოგიურად, თუ გამცემლიძე ცნობილადეს გააგებინებს „თეთრ ფერს“ (v_2), მაშინ ოპტიმალური იქნება a_2 ოპერაცია, ამასთან, შესაბამისი საშუალო სარგებელი ტოლი იქნება $40/5$ პირობითი ერთეულისა.

გამცემლიძის მიერ ცნობილადისათვის ინფორმაციის „წითელი“ და „თეთრი ფერის“ მიწოდების ალბათობები შესაბამისად ტოლია $7/12$ -ის და $5/12$ -ის. ამიტომ, ორჯერ გასაშუალებული სარგებელი, განსახილველ შემთხვევაში ტოლი იქნება:

$$\frac{50}{7} \cdot \frac{7}{12} + \frac{40}{5} \cdot \frac{5}{12} = 7,5.$$

ამგვარად, ცნობილადისათვის არ არის ხელსაყრელი გამცემლიძეს გადაუხადოს უფრო მეტი, ვიდრე $7,5 \cdot 5 = 2,5$. სხვაგვარად, გამცემლიძის ინფორმაციის ფასი ტოლია $2,5$ პირობითი ერთეულისა.

უნდა აღინიშნოს, რომ ამ რაოდენობრივი ანალიზის შედეგად გაკეთებულ დასკვნას გვქვია ყოველთვის არ ითვალისწინებს. გამოცდილება ცხადყოფს, რომ თუ მსგავს შემთხვევებში, გვქვია არ აწარმოებს გათვლებს და მოქმედებს მხოლოდ ინტუიციის მიხედვით, მაშინ მას გააჩნია მიდრეკილება ექსპერიმენტით მიღებული ინფორმაციის ფასის გადიდებისაკენ. სხვანაირად, ადამიანს გააჩნია მსგავს შემთხვევებში ექსპერიმენტისათვის ზედმეტის გადახდის ტენდენცია.

ახლა, ხაზი გავუსვით შემდეგ ფაქტს:

თუ გვქვია ბუნების მდგომარეობათა ალბათობების ბაიესის ფორმულით ხელახალი შეფასებების დროს, ყოველთვის გააჩნია ექსპერიმენტთა სიმრავლიდან ერთი რომელი-

მე ვარიანტის შერჩევის შესაძლებლობა, მაშინ მან უნდა გაითვალისწინოს არა მარტო ექსპერიმენტის ჩატარების ღირებულება, არამედ მისი შესაძლო შედეგები. აქედან გამომდინარე ცხადია, რომ ექსპერიმენტთა სიმრავლიდან ერთი ისეთი ვარიანტის შერჩევა, რომელიც შეიცავს ნულოვან ექსპერიმენტს, გმპ-ს უქმნის ყველაზე უფრო მეტ საზრუნავს. რაც შეეხება იმ ოპერაციის არჩევას, რომელიც უნდა იქნეს შესრულებული, იგი შეიძლება განხორციელდეს ელემენტარულად, რადგან ასეთი არჩევის პროცესი განსაზღვრულია გადაწყვეტილების მიღების სარგებლიანობით.

ამ თავის ბოლოს გადაწყვეტილების მიღების მეთოდის (კერძოდ: მისი მათემატიკური აპარატის) ეკონომიკაში პრაქტიკული გამოყენების საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ ტანსაცმლის სამკერვალო ფირმის ეფექტიანი სპეციალიზაციის განსაზღვრის ამოცანა.

X თავის ღამბაზა - ტანსაცმლის სამკერვალო ფირმის ეფექტიანი სპეციალიზაციის განსაზღვრის ამოცანა

ვთქვათ, მოცემულია ტანსაცმლის სამკერვალო ფირმა, რომელიც ღვას თავისი საქმიანობის - ეფექტიანი სპეციალიზაციის განსაზღვრის ამოცანის წინაშე. კერძოდ, ვთქვათ, ამ ფირმის წინაშე ღვას ალტერნატივა:

a_1 - მოაწყოს მოკლე (მინი) მოდელების ტანსაცმლის წარმოება, ან - a_2 - მოაწყოს გრძელი (მაქსი) მოდელების ტანსაცმლის წარმოება.

ამასთან, დაეუშვათ, რომ მოდის „სიკაპრიზის“ გამოზუსტად არ არის ცნობილი ამ ორი მოდელიდან რომელზე იქნება მეტი მოთხოვნა.

λ_1 -ით ავღნიშნოთ მოთხოვნის სიჭარბე მოკლე (მინი) ტანსაცმელზე, ხოლო λ_2 -ით კი - გრძელ (მაქსი) ტანსაცმელზე.

ეთქვათ, აგრეთვე, რომ მინი და მაქსი ტანსაცმელზე მოთხოვნის შესახებ არსებული ზოგიერთი ინფორმაცია შეიძლება მიღებულ იქნეს შერჩევითი გამოკითხვის საშუალებით.

ე1-ით აღნიშნოთ შერჩევითი გამოკითხვის ჩატარება, ხოლო მისი შედეგები კი – V_1 -ით და V_2 -ით, სადაც V_1 – აღნიშნავს პროგნოზს მინი ტანსაცმელზე, ხოლო V_2 – პროგნოზს მაქსი ტანსაცმელზე.

ვიგულისხმობთ, რომ ფირმის ხელმძღვანელობა არც თუ ისე ძალიან ენდობა შერჩევითი გამოკითხვის შედეგს, რადგან იგი მიიჩნევს, რომ გამოკითხულები მართალია არაუმეტეს 80%-იან შემთხვევაში. ამასთან ერთად, იგი, ითვალისწინებს რა მოდის ტენდენციას, საორიენტაციოდ ვარაუდობს, რომ 100 შემთხვევიდან საშუალოდ 30-ში იქნება მოთხოვნის სიჭარბე მინი ტანსაცმელზე.

გარდა ამისა, ფირმის ხელმძღვანელობა თვლის, რომ თუ არ იქნება ჩატარებული შერჩევითი გამოკითხვა, მაშინ სარგებლის $\varphi(a, \lambda, \varepsilon, v)$ ფუნქცია (პირობით ერთეულებში) შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს შემდეგი ცხრილის სახით:

ცხრ.10.20

	მინი (λ_1)	მაქსი (λ_2)
მინი (a_1)	10	5
მაქსი (a_2)	6	9

ამ ცხრილიდან ჩანს, რომ

$$\varphi(a_1, \lambda_1, \varepsilon_0, v_0) = 10; \quad \varphi(a_2, \lambda_1, \varepsilon_0, v_0) = 6;$$

$$\varphi(a_1, \lambda_2, \varepsilon_0, v_0) = 5; \quad \varphi(a_2, \lambda_2, \varepsilon_0, v_0) = 9.$$

ამასთან, ფირმის ხელმძღვანელობა შერჩევითი გამოკითხვის ჩატარების ღირებულებას აძლევს (სარგებლიანობის ფუნქციის ერთეულებში) 0,5 ერთეულის ტოლ შეფასებას. ამიტომ

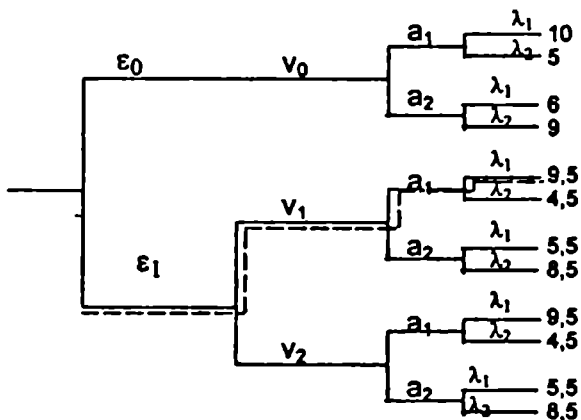
$$\varphi(a_1, \lambda_1, \varepsilon_1, v_1) = \varphi(a_1, \lambda_1, \varepsilon_1, v_2) = 9,5;$$

$$\varphi(a_2, \lambda_1, \varepsilon_1, v_1) = \varphi(a_2, \lambda_1, \varepsilon_1, v_2) = 5,5;$$

$$\varphi(a_1, \lambda_1, \varepsilon_1, v_1) = \varphi(a_1, \lambda_2, \varepsilon_1, v_2) = 4,5;$$

$$\varphi(a_2, \lambda_2, \varepsilon_1, v_1) = \varphi(a_2, \lambda_2, \varepsilon_1, v_2) = 8,5.$$

ახლა გათვლებზე გადასვლამდე შევადგინოთ შემდეგი ხე:



ნახ. 10.4

ამ ხეზე $(\epsilon, v, a, \lambda)$ სახის ნებისმიერი კომბინაცია შეესაბამება თავის მარშრუტს, რომელიც იწყება ხის ძირში. ყოველი მარშრუტის ბოლოში დასმულია სარგებელი, რომელიც მიიღება მოცემული მარშრუტის რეალიზაციის შედეგად.

გადაწყვეტილებას, რომელიც მიიღება ამ ხის შესაბამისად, უპირველეს ყოვლისა, არჩევს ექსპერიმენტი (ϵ).

ამის შემდეგ, ამ ექსპერიმენტის აპოსტერიორული (v) შედეგისაგან დამოკიდებულებით ხელმძღვანელობა ირჩევს (a) ოპერაციას. ამასთან, სარგებელი (v) განისაზღვრება ბუნების ფაქტიური მდგომარეობის (λ) მიხედვით.

ახლა ჩავატაროთ გამოთვლები.

განხილული მაგალითის პირობებიდან გვაქვს:

$$p(\lambda_1)=0,3; \quad p(\lambda_2)=0,7;$$

$$p(v_1/\lambda_1, \epsilon_1)=0,8; \quad p(v_2/\lambda_1, \epsilon_1)=0,2;$$

$$p(v_1/\lambda_2, \epsilon_1)=0,2; \quad p(v_2/\lambda_2, \epsilon_1)=0,8.$$

გარდა ამისა,

$$p(v_0/\lambda_1, \epsilon_0)=1; \quad p(v_0/\lambda_2, \epsilon_0)=1.$$

აქედან გამომდინარე, (10.7) და (10.6) ფორმულების შესაბამისად ვპოულობთ:

$$p(v_1/\varepsilon_1) = p(v_1/\lambda_1, \varepsilon_1) p(\lambda_1) + p(v_1/\lambda_2, \varepsilon_1) p(\lambda_2) = 0,8 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,7 = 0,38;$$

$$p(v_2/\varepsilon_1) = p(v_2/\lambda_1, \varepsilon_1) p(\lambda_1) + p(v_2/\lambda_2, \varepsilon_1) p(\lambda_2) = 0,2 \cdot 0,3 + 0,8 \cdot 0,7 = 0,62;$$

$$p(v_0/\varepsilon_0) = p(v_0/\lambda_1, \varepsilon_0) p(\lambda_1) + p(v_0/\lambda_2, \varepsilon_0) p(\lambda_2) = 1 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,7 = 1;$$

$$p(\lambda_1/\varepsilon_1, v_1) = \frac{p(v_1/\lambda_1, \varepsilon_1)}{p(v_1/\varepsilon_1)} p(\lambda_1) = \frac{0,8}{0,38} \cdot 0,3 = 0,74;$$

$$p(\lambda_2/\varepsilon_1, v_1) = 1 - p(\lambda_1/\varepsilon_1, v_1) = 1 - 0,74 = 0,26;$$

$$p(\lambda_1/\varepsilon_1, v_2) = \frac{p(v_2/\lambda_1, \varepsilon_1)}{p(v_2/\varepsilon_1)} p(\lambda_1) = \frac{0,2}{0,62} \cdot 0,3 = 0,097;$$

$$p(\lambda_2/\varepsilon_1, v_2) = 1 - 0,097 = 0,903;$$

$$p(\lambda_1/\varepsilon_0, v_0) = \frac{p(v_0/\lambda_1, \varepsilon_0)}{p(v_0/\varepsilon_0)} p(\lambda_1) = \frac{1}{1} \cdot 0,3 = 0,3;$$

$$p(\lambda_2/\varepsilon_0, v_0) = 1 - 0,3 = 0,7.$$

ახლა (a, ε, v) სამეულის ყოველი კომბინაციისათვის, (10.8)-ე ფორმულის გამოყენებით გავასაშუალოთ სარგებლიანობის $\varphi(a, \lambda, \varepsilon, v)$ ფუნქცია. წონითი მამრავლების რანგში გამოვიყენოთ ზემოთ მოყვანილი აპოსტერიორული ალბათობები.

ამგვარად მივიღებთ:

$$\varphi(a_1, \varepsilon_1, v_1) = p(\lambda_1/\varepsilon_1, v_1) \varphi(a_1, \lambda_1, \varepsilon_1, v_1) + p(\lambda_2/\varepsilon_1, v_1) \varphi(a_1, \lambda_2, \varepsilon_1, v_1) = 0,74 \cdot 9,5 + 0,26 \cdot 4,5 = 8,20;$$

$$\varphi(a_2, \varepsilon_1, v_1) = p(\lambda_1/\varepsilon_1, v_1) \varphi(a_2, \lambda_1, \varepsilon_1, v_1) + p(\lambda_2/\varepsilon_1, v_1) \varphi(a_2, \lambda_2, \varepsilon_1, v_1) = 0,74 \cdot 5,5 + 0,26 \cdot 8,5 = 6,28;$$

$$\varphi(a_1, \varepsilon_1, v_2) = p(\lambda_1/\varepsilon_1, v_2) \varphi(a_1, \lambda_1, \varepsilon_1, v_2) + p(\lambda_2/\varepsilon_1, v_2) \varphi(a_1, \lambda_2, \varepsilon_1, v_2) = 0,097 \cdot 9,5 + 0,903 \cdot 4,5 = 4,98;$$

$$\varphi(a_2, \varepsilon_1, v_2) = p(\lambda_1/\varepsilon_1, v_2) \varphi(a_2, \lambda_1, \varepsilon_1, v_2) + p(\lambda_2/\varepsilon_1, v_2) \varphi(a_2, \lambda_2, \varepsilon_1, v_2) = 0,097 \cdot 5,5 + 0,903 \cdot 8,5 = 8,21;$$

$$\varphi(a_1, \varepsilon_0, v_0) = p(\lambda_1/\varepsilon_0, v_0) \varphi(a_1, \lambda_1, \varepsilon_0, v_0) + p(\lambda_2/\varepsilon_0, v_0) \varphi(a_1, \lambda_2, \varepsilon_0, v_0) = 0,3 \cdot 10 + 0,7 \cdot 5 = 6,50;$$

$$\varphi(a_2, \varepsilon_0, v_0) = p(\lambda_1/\varepsilon_0, v_0) \varphi(a_2, \lambda_1, \varepsilon_0, v_0) + p(\lambda_2/\varepsilon_0, v_0) \varphi(a_2, \lambda_2, \varepsilon_0, v_0) = 0,3 \cdot 6 + 0,7 \cdot 9 = 8,10.$$

ამის შემდეგ, (ε, v) ორეულის ყველა კომბინაციისათვის, (10.22)-ე პირობიდან ვპოულობთ ოპტიმალურ ოპერაციას

და მის შესაბამის საშუალო სარგებლიანობის მაქსიმალურ მნიშვნელობას:

$$\begin{aligned}\varphi(\varepsilon_1, v_1) &= \max\{\varphi(a_1, \varepsilon_1, v_1); \varphi(a_2, \varepsilon_1, v_1)\} = \\ &= \max\{8, 20; 6, 28\} = 8, 20; \\ a^* &= a_1;\end{aligned}\quad (10.26)$$

$$\begin{aligned}\varphi(\varepsilon_1, v_2) &= \max\{\varphi(a_1, \varepsilon_1, v_2); \varphi(a_2, \varepsilon_1, v_2)\} = \\ &= \max\{4, 98; 8, 21\} = 8, 21; \\ a^* &= a_2;\end{aligned}\quad (10.27)$$

$$\begin{aligned}\varphi(\varepsilon_0, v_0) &= \max\{\varphi(a_1, \varepsilon_0, v_0); \varphi(a_2, \varepsilon_0, v_0)\} = \\ &= \max\{6, 50; 8, 10\} = 8, 10; \\ a^* &= a_2.\end{aligned}\quad (10.28)$$

ნაპოვნი $\varphi(\varepsilon, v)$ სარგებელი ε_1 და ε_0 -სათვის გავასაშუალოთ v -ის მიხედვით (10.23)-ე ფორმულის შესაბამისად

$$\begin{aligned}\varphi(\varepsilon_1) &= p(v_1/\varepsilon_1)\varphi(\varepsilon_1, v_1) + p(v_2/\varepsilon_1)\varphi(\varepsilon_1, v_2) = \\ &= 0,38 \cdot 8,20 + 0,62 \cdot 8,21 = 8,21;\end{aligned}$$

$$\varphi(\varepsilon_0) = p(v_0/\varepsilon_0)\varphi(\varepsilon_0, v_0) = 1 \cdot 8,10 = 8,10.$$

საბოლოოდ, (10.24) პირობის თანახმად, ეპოულობთ:

$$\max\{\varphi(\varepsilon_1), \varphi(\varepsilon_0)\} = \max\{8,21; 8,10\} = 8,21.$$

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ შერჩევითი გამოკითხვა (მიუხედავად იმისა, რომ იგი არ არის დიდად საიმედო) უფრო ხელსაყრელია ჩატარდეს, ვიდრე არ ჩატარდეს.

იმ შემთხვევაში, თუ შერჩევითი გამოკითხვა იძლევა პროგნოზს მინი (v_1), ფირმამ, (10.26)-ე ფორმულის თანახმად, უნდა გამართოს ტანსაცმლის შემოკლებული მოდელის (a_1) წარმოება. ამასთან, (10.25) ფორმულის შესაბამისად, საშუალო სარგებლიანობა ტოლია 8,20. თუ ფაქტიურად მინი ტანსაცმელზე (λ_1) იქნება ჭარბი მოთხოვნა, მაშინ სარგებელი (ახლა უკვე გასაშუალებების გარეშე) იქნება 9,5 პირობითი ერთეულის ტოლი (ეს მარშრუტი გადაწყვეტილების ხეზე აღნიშნულია პუნქტირით).

თუ შერჩევითი გამოკითხვა იძლევა პროგნოზს მაქსი (v_2), მაშინ, როგორც ეს გამომდინარეობს (10.27)-ე ფორმულიდან, ფირმამ უნდა განახორციელოს დაგრძელებული

მოდელის (a_2) ტანსაცმლის წარმოება. ამ დროს საშუალო სარგებლიანობის მაჩვენებელი იქნება 8,21 პირობითი ერთეულის ტოლი.

ახლა, დაეუშვათ, რომ ε_1 ექსპერიმენტის ღირებულება (შერჩევითი გამოკითხვის ჩატარება) ნაცვლად 0,5 ერთეულისა, ტოლია 1-ის.

ანალოგიურად ეპოულობთ, რომ

$$\varphi(\varepsilon_1) = 7,71 \text{ და } \varphi(\varepsilon_0) = 8,10.$$

ამ შემთხვევაში, ε_1 ექსპერიმენტის ჩატარება არ ღირს და საჭიროა განხორციელდეს დაგრძელებული მოდელის (a_2) ტანსაცმლის წარმოება. ამასთან, საშუალო სარგებელი ტოლია 8,10 პირობითი ერთეულისა.

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОНОМИКИ И ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ

(Резюме)

На современном этапе развития общества, большое значение придается вопросам совершенствования процессов экономического исследования. В сегодняшних условиях развития экономики нашей страны, когда разумный подход к руководству и регулированию экономической деятельности общества, основывающийся на использовании современных достижений науки, становится настоящей необходимостью, эти вопросы приобретают еще большую актуальность. Именно на основании такого подхода, возможно обеспечить воссоздание и развитие нашей национальной экономики.

Экономическая наука базирующаяся на накопленном в мире богатом опыте экономической деятельности, к настоящему времени, достигла высокого теоретического уровня и, в силу этого, оказывает большую помощь практике. Однако, следует отметить, что она пока еще не отвечает всем требованиям, предъявляемым к ней практикой, жизнью. В современной практике, нередко встречаются такие экономические вопросы, изучение и исследование которых ограничиваются рамками качественного анализа. Поэтому, экономическая практика не получает от экономической теории необходимых конкретных рекомендаций в количественных аспектах, и возникает ситуация несоответствия положений теории требованиям практики. Исходя из этого, нам представляется, что необходимым условием дальнейшего развития экономической науки, является надлежащее освоение и применение точных методов количественного анализа.

Следовательно, необходимо широкое применение современных достижений математики в экономических исследованиях. В связи с этим, возникают вопросы освоения, систематизации, совершенствования и разработки экономико-математических методов и выбора путей для их применения.

Именно изучению, решению и изложению такого рода вопросов, посвящается данная книга. Она, предназначенная для широкого круга читателей, на наш взгляд, окажет помощь не только специалистам, аспирантам и студентам, но и всем лицам, интересующимся теорией экономико-математических исследований и приемами их применения на практике.

THE METODOLOGICAL BASES OF MATHEMATICAL MODELING OF ECONOMICS AND THE PRACTICAL EXAMPLES OF THEIR REALIZATION

(Summary)

On current stage of the society development the problems of the improvement of the economic research processes are of great significance, under existing condition of the economic development of our country, when reasonable approach to the management and regulation of economic activity of the society, based on the application of up-to-date scientific achievements, become imperative need. Just on the basis of such approach it allows to provide the reconstruction and growth of our national economy.

The economic science, relying on the world's rich experience of economic activity, has achieved a high theoretical level and greatly assists the practice. But it should be noted that it does not meet the requirements of practice and life. In modern practice often are met such economic problems the study and research of which are restricted by qualitative analysis. Hence, the economic practice does not get necessary concrete recommendations from economic theory; and the situation of discrepancy between the regulations of theory and requirements of practice occurs. We believe that mastering and adoption of precise methods of qualitative analysis are necessary conditions for further development of economic science.

Consequently wide application of modern achievements of mathematics in economic researches is very important. In this connection some problems of mastering, systematization, improvement and working out economical-mathematical methods and choosing the ways of their application occur.

The book is dedicated namely to the problems of studying, solving and stating such problems.

Intended for the wide section of readers, the book will assist not only specialists, post-graduates and students, but all persons interested in economic-mathematical research theory and the ways of their application in practice.

ლიტერატურა

1. ანანიაშვილი ი. აგრეგირებული დარგთაშორისი კავშირების ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირება. თბ., „მეცნიერება“, 1998 (აეტორეფერატი დის. ეკ. მეც. დოქტ.-ის ხარისხის მოსაპოვებლად).
2. ანანიაშვილი ი. საშუალოწლიური ზრდის ტემპებისა და დარგთაშორისი პროპორციების პროგნოზირების უკურეკურსიანი მოდელის ორი ვარიანტი. – საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის „მაცნე“. ეკონომიკის სერია, 1999, №1-2, ტ.7.
3. აჩელაშვილი კ. საბალანსო რეგიონული და რეგიონთაშორისი დარგთაშორისი მოდელების თავისებურებები. – საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის „მაცნე“. ეკონომიკის სერია, 1997, №3-4, ტ.5 (რუსულ ენაზე).
4. აჩელაშვილი კ. რეგიონთაშორისი და დარგთაშორისი მატერიალურ-ნივთობრივი კავშირების ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირება. თბ., „მეცნიერება“, 1997 (აეტორეფ. დის. ეკ. მეც. დოქტ.-ის ხარისხის მოსაპოვებლად).
5. ბედიანაშვილი გ. სახელმწიფოს გრძელვადიანი სოციალურ-ეკონომიკური განვითარების მიზნებისა და რესურსების შეთანაწყობის მეთოდოლოგია და მოდელები (მაკროსისტემური ასპექტი). თბ., „მეცნიერება“, 1993 (აეტორეფ. დის. ეკ. მეც. დოქტ.-ის ხარისხის მოსაპოვებლად).
6. გაბიძაშვილი ბ. სტატისტიკური მოდელირება და პროგნოზირება. თბ., „თსუ“, 1981.
7. ელიზბარაშვილი კ. მათემატიკური დაპროგრამება და სოფლის მეურნეობაში საწარმოო სისტემების ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირება. თბილისი, „განათლება“, 1991.
8. ვენცელი ე. აღბათობათა თეორია. თბილისი, „განათლება“, 1980.
9. იოსაძე ჯ., დავითაია ა. ეკონომიკურ-მათემატიკური მეთოდების გამოყენება ეაჭრობის მართვასა და დაგეგმვაში. თბ., „თსუ“, 1985.

10. იოსავა ჯ., მესხია ი. ეკონომიკურ-მათემატიკური მეთოდების გამოყენება მართვაში. თბ., 1976.
11. ლაზრიევა ნ., მანია მ., მირზაშვილი გ., ტორონჯაძე თ., ღლონტი ო., ჯამბურია ლ. ფინანსური ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდები. თბ., 1999.
12. ლურსმანაშვილი ა. მათემატიკური დაპროგრამების ზოგიერთი საკითხი. თბილისი, „თსუ“, 1977.
13. მანია გ. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა. თბილისი, „თსუ“, 1976.
14. მესხია ი. ეკონომიკური ზრდის პროგნოზირების საკითხები. თბ., „მეცნიერება“, 1978.
15. მითაიშვილი რ. ფასების პროგნოზირებისა და სტაბილიზაციის შესახებ. – საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის “მაცნე”. ეკონომიკის სერია, 1995, № 1-2, ტ. 3.
16. პაპავა ელ. საგეგმო გაანგარიშებათა მათემატიკა (დარგთაშორისი ბალანსის მოდელები). თბ., „მეცნიერება“, 1985.
17. სანაძე ს. ეკონომიკური წონასწორობის პროგნოზულ-ანალიტიკური გაანგარიშებების სქემა და მოდელთა კომპლექსი. – საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის “მაცნე”. ეკონომიკის სერია, 1998, № 1-2, ტ. 6.
18. სარჩიმელია რ. ოპტიმიზაციის ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელების გამოყენების საკითხები. თბ., „მეცნიერება“ 1986.
19. სარჩიმელია რ. ეკონომიკური პროცესების მათემატიკური მოდელები შეზღუდვათა ცვლილებების პირობებში. თბ., „მეცნიერება“, 1989.
20. სარჩიმელია რ. დეფიციტური ეკონომიკის მოდელირების მექანიზმი საბაზრო ეკონომიკაზე გადასვლის პროცესში. თბ., „მეცნიერება“, 1998 (ავტორეფ. დის. ეკ. მეც. დოქტ.-ის ხარისხის მოსაპოვებლად).
21. ძნელაძე დ., მუნჯიშვილი ზ. კიბერნეტიკული მეთოდების კომპლექსური გამოყენების საკითხები მართვის ავტომატიზებული სისტემების დაპროექტებისას. თბ., 1980.

22. წერეთელი გ., კილაძე გ. საზოგადოების, ბუნებისა და წარმოების სისტემური ურთიერთკავშირის ასპექტები და გარემო ბუნების დაცვაზე ორიენტირებული საბაზრო-ეკონომიკური ურთიერთობები. თბილისი, „მერიდიანი“, 1995.
23. წერეთელი გ. ეკონომიკურ-მათემატიკური მეთოდების საფუძვლები და მათი ეკონომიკაში გამოყენების ზოგიერთი პრაქტიკული ასპექტი. თბ., „მეცნიერება“, 1999.
24. Аганбегян А.Г., Багриновский К.А., Гранберг А.Г. Система моделей народнохозяйственного планирования. М., “Мысль”, 1972.
25. Анчишкин А.И. Прогнозирование роста социалистической экономики. М., “Экономика”, 1973.
26. Багриновский К.А. Основы согласования плановых решений. М., “Наука”, 1977.
27. Бедианашвили Г.В. Целевой подход к моделированию согласования целей и ресурсов социально-экономического развития региона. В кн: “Социально-экономическое развитие региона: долгосрочный аспект”. Тб., “Мещниереба”, 1989.
28. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М., “Наука”, 1988.
29. Винер Н. Кибернетика (Перевод с англ.). М., 1968.
30. Волконский В.А. Модель оптимального планирования и взаимосвязи экономических показателей. М., “Наука”, 1967.
31. Голенко Д.И. Статистические методы сетевого планирования и управления. М., “Наука”, 1968.
32. Гранберг А.Г. Динамические модели народного хозяйства. М., “Экономика”, 1985.
33. Данцинг Дж. Линейное программирование, его обобщения и применения. М., “Прогресс”, 1966.
34. Доугерти К. Введение в эконометрику (Пер. с англ.). М., “ИНФРА-М”, 1997.
35. Замково О., Толстомятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. М., “ДИС”, 1997.
36. Заславский Ю.Л. Сборник задач по линейному программированию. М., “Наука”, 1969.

37. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М., "Прогресс", 1975 (Пер. с англ.).
38. Кант В.И. Математические методы и моделирование в здравоохранении. М., "Медицина", 1987.
39. Канторович Л.В. Экономический расчёт наилучшего использования ресурсов. М., 1959.
40. Карасев А.И. Теория вероятностей и математическая статистика. М., "Статистика", 1977.
41. Кекелидзе М.В. Анализ межотраслевых связей республики. М., "Наука", 1968.
42. Кёвеш П. Теория индексов и практика экономического анализа. М., "Финансы и статистика", 1990.
43. Клейнер Г.Б. Производственные функции. М., "Финансы и статистика", 1986.
44. Кобринский Н.Е., Маиминас Е.З., Смирнов А.Д., Экономическая кибернетика. М., "Экономика", 1982.
45. Количественные методы финансового анализа. Под редакцией Стивена Дж. Браун и Марка П. Крицмена. М., "ИНФРА-М", 1996.
46. Кривцов А.М., Шеховцев В.В. Сетевое планирование и управление. М., "Экономика", 1978.
47. Леонтьев В. Межотраслевая экономика. М., "Экономика", 1997.
48. Леонтьев В. и др. Исследования структуры американской экономики. М., "Госстатиздат", 1958.
49. Лурье А.Л. О математических методах решения задач на оптимум при планировании хозяйства. М., "Наука", 1964.
50. Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. М., "Наука", 1973.
51. Математика и кибернетика в экономике. Словарь-справочник. М., "Экономика", 1975.
52. Математическая экономика на персональном компьютере. М., "Финансы и статистика", 1991.
53. Межотраслевой баланс экономического района. Под редакцией Минца Л.Е., Косова В.В., Баранова Э.Ф. М., "Наука", 1967.

54. Месхия Я.Е. Теория и практика макроэкономического прогнозирования. Тб., "Сабчота Сакартвело", 1991.
55. Немчинов В.С. Экономико-математические методы и модели. М., "Мысль", 1965.
56. Новожилов В.В. Проблемы измерения затрат и результатов при оптимальном планировании. М., "Наука", 1972.
57. Папава В.Г. Теория продуктивности капитала и модели Межотраслевого баланса. Тб., "Мецниереба", 1987.
58. Папава В.Г. Эффективность общественного производства и межотраслевые модели. Тб., "Мецниереба", 1988.
59. Папава В.Г. Продуктивность общественного производства и основы её Межотраслевого анализа. Тб., "Мецниереба", 1988 (Автореф. дисс. на соиск. уч. ст. док. эк. наук).
60. Папава Г. Периодантный метод экономического анализа. В кн: "Методология экономического анализа и маркетингового управления конечными результатами производства". Тб., "Мецниереба", 1992.
61. Петраков Н.Я. Кибернетические проблемы управления экономикой. М., "Наука", 1974.
62. Справочник по математике для экономистов. М., "Высшая школа", 1987.
63. Терехов Л.Л. Экономико-математические методы. М., "Статистика", 1972.
64. Федоренко Н.П. Оптимизация Экономики. М., "Наука", 1978.
65. Черкасов В.Е. Валютные расчеты: задачи и решения. М., "Финансы и статистика", 1998.
66. Церетели Г.Ш. Многоцелевая оптимизация экономических процессов регионального природопользования в республике (на примере Грузии). Киев, 1990 (Автореферат диссертации на соиск. уч. степ. докт. эк. наук).
67. Шаталин С.С. Функционирование Экономики развитого социализма. М., "МГУ", 1982.
68. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. Теория, методы и приложения. М., "Наука", 1969.

შ ი ნ ა ა რ ს ი

შესავალი

3

თავი I.	ეკონომიკური მოვლენებისა და პროცესების მათემატიკური მოდელირება როგორც მათი შეგეცნებისა და შესწავლის მნიშვნელოვანი მეთოდი.	11
§1.	მოდელისა და მოდელირების არსი. მოდელირების გამოყენების მნიშვნელობა ეკონომიკაში	11
§2.	ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირების გამოყენების მოკლე ისტორიული ცნობები.	13
§3.	ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელის კლასიფიკაცია	15
§4.	ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირების ეტაპები.	17
	I თავის დაგება— ფირმის ფულადი შემოსავლების განსაზღვრის უმარტივესი ამოცანა	19
თავი II.	დარგთაშორისი ბალანსის მეთოდი როგორც ეკონომიკის მათემატიკური მოდელირების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი შედეგი.	22
§1.	დარგთაშორისი ბალანსის მეთოდი და სახეობები.	22
§2.	პირდაპირი, ირიბი, სრული დანახარჯების კოეფიციენტები და მათი გამოსათვლელი ფორმულები.	35
§3.	დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსი	41
§4.	დარგთაშორისი ბალანსის სტატიკური	

მოდელი ეკოლოგიური ფაქტორების
გათვალისწინებით. 46

II თავის ღამაბაბა— მთლიანი პროდუქცი-
ის მოცულობის პოენის
ამოცანა 50

თავი III. ოპტიმალური (მათემატიკური) დაპროგრამების
ზოგად-მეთოდოლოგიური საკითხები და მათი გამოყენების
მიმართულებები 52

§1. ოპტიმალური (მათემატიკური) დაპროგრამების
მეთოდის არსი და მისი გამოყენების
გზები. 52

§2. ლაგრანჟის ამომხსნელ მამრავლთა მეთო-
დი და მათი ეკონომიკური არსი. 59

§3. ორადი შეფასებების არსი, მნიშვნელობა
და თვისებები. 64

III თავის ღამაბაბა — ფირმის საქმიანობის
ოპტიმალური დაგეგმვის
ამოცანა. 69

თავი IV. მარაგთა მართვის ამოცანის ზოგადი
კანონზომიერებები და მისი შესაბამისი
ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელები. 73

§1. მიმდინარე სასაქონლო მარაგთა ოპტიმიზა-
ციის ამოცანა და მისი შესაბამისი მოდელი 74

§2. სადაზღვევო მარაგთა მართვის ამოცანა და
მისი შესაბამისი მოდელი. 81

IV თავის ღამაბაბა—სავაჭრო ფირმის საქონ-
ლით მომარაგების ოპტიმა-
ლური დაგეგმვის ამოცანა
(მიმდინარე და სადაზღვევო
სასაქონლო მარაგთა ოპტიმი-
ზაციის ამსახველ ფაქტორთა

თავი V.	თამაშთა თეორიის ძირითადი დებულებები და მოდელები.	91
§1.	თამაშთა თეორიის შესწავლის ძირითადი საგანი.	91
§2.	ორი პირის თამაშის თეორიის ძირითადი ცნებები. საგადამხდელო მატრიცა. თამა- შის უასი. მაქსიმიზისა და მინიმაქსის პრინციპები	93
§3.	თამაშის ამონახსნის პოვნა შერეული სტრატეგიების გამოყენებით. .	100
§4.	თამაშის ამონახსნის პოვნა წრფივი დაპროგრამების მეთოდის გამოყენებით.	105
§5.	თამაშები რისკის პირობებში. .	108
§6.	თამაშთა “ბუნების” მდგომარეობათა შეფასების (ვალდის, სევიჯისა და გურიციის) კრიტერიუმები.	111
§7.	ორი პირის $n \times n$ განზომილებიანი თამაშის გამარტივებისა და ამოხსნის ზოგადი პრინციპები. .	118
§8.	N – პირის თამაში.	121
V	თავის დამატება – სასოფლო-სამეურნეო საწარმოს მიერ სახნავე-სა- თესი მიწების ეფექტიანად გამოყენების ამოცანა.	123
თავი VI	ქსელური დაგეგმვისა და მართვის ზოგად- მეთოდოლოგიური პრინციპები.	129
§1.	ქსელური დაგეგმვისა და მართვის მეთოდის არსი.	129

§2.	ამოცანები, რომელთა გადაწყვეტაც შეიძლება ქსელური მოდელის გამოყენებით.	139
§3.	ქსელური მოდელის აგების ძირითადი წესები.	140
§4.	ქსელური გრაფიკების ოპტიმიზაცია.	145
§5.	შრომითი საქმიანობის ღირებულების ოპტიმიზაცია.	162
	VI თავის ღამათება-სამშენებლო ფორმის მიერ სამშენებლო ობიექ- ტის გეგმურ ვადაში ასაშე- ნებლად შრომითი რესურ- სების გამოყენების ოპტი- მიზაციის ამოცანა.	166
თავი VII	მასობრივი მომსახურების თეორიულ- -მეთოდოლოგიური საფუძვლები.	172
§1.	მასობრივი მომსახურების თეორიის ძირითადი საგანი და ცნებები.	172
§2.	მასობრივი მომსახურების სისტემებში მიმდინარე შემთხვევითი პროცესების კანონზომიერებები. განაცხადთა ნაკადი და მათი მომსახურების დრო.	175
§3.	მასობრივი მომსახურების სისტემებში მიმდინარე პროცესების მათემატიკური მოდელირების მეთოდოლოგიური პრინციპები	184
§4.	კოლმოგოროვის განტოლებათა სისტემა, როგორც მასობრივი მომსახურების სფე- როში მიმდინარე პროცესების მოდელირების შედეგი	214

	VII თავის ღამატება—ბანკში ვალუტის გადამცველი საღარო- ების რაოდენობისა და მათი მუშაობის რეჟიმის ოპტიმიზაციის ამოცანა	220
თავი VIII	კორელაციური ანალიზის მეთოდის ეკონომიკაში გამოყენების ზოგადი პრინციპები.	226
§1.	კორელაციის თეორიის ელემენტები.	226
§2.	საწარმოო ფუნქციები.	235
	VIII თავის ღამატება—სასოფლო-სამეურნეო საწარმოში ნიადაგის სასუ- ქით განაყოფიერების მაჩვენებელსა და სასოფ- ლო-სამეურნეო კულტურის მოსავლიანობის მაჩვენე- ბელს შორის არსებული კავშირის კორელაციური ანალიზის ამოცანა	242
თავი IX	უმცირეს კვადრატთა მეთოდი	252
§1.	უმცირეს კვადრატთა მეთოდის შინაარსი	252
§2.	შემთხვევითი სიდიდის გაზომვით მიღებუ- ლი მნიშვნელობების საშუალო არითმეტი- კული, როგორც მათთან ყველაზე ახლოს მყოფი სიდიდე	259
	IX თავის ღამატება — მოსახლეობის პირვე- ლადი მოხმარების საგნებზე მოთხოვნის (ასაკისა და სქესის ჯგუფების მიხედვით) დიფერენცირებული განსა- ზღვრის ამოცანა	261
თავი X	ბადაყუპებითლების მიღების მათემატიკური თეორიისა და მისი პრაქტიკული გამოყენების საკითხები	268

§1.	გადაწყვეტილების მიღების ამოცანის დასმის წინაპირობები, მისი შინაარსი და გადაწყვეტის უზოგადესი პრინციპები .	268
§2.	გადაწყვეტილების მიღების ამოცანების კლასიფიკაცია	277
§3.	გადაწყვეტილების მიღების მათემატიკური თეორიის ადგილი გადაწყვეტილების მიღების მთლიან სისტემაში	281
§4.	გადაწყვეტილების მიღების მათემატიკური ამოცანა განუზღვრელობის ფაქტორის გათვალისწინებით	286
§5.	გადაწყვეტილების მიღების მათემატიკური ამოცანა რისკის ფაქტორის გათვალისწინებით	291
§6.	გადაწყვეტილების მიღების მათემატიკური ამოცანა განუზღვრელობის პირობებში და ექსპერიმენტის შედეგთა მოთხოვნით	294
§7.	გადაწყვეტილების მიღების მათემატიკური ამოცანა რისკის პირობებში და ექსპერიმენტის მონაცემთა მოთხოვნით	305
§8.	გადაწყვეტილების მიღების მათემატიკური ამოცანა, რისკისა და ექსპერიმენტების ღირებულებების გათვალისწინებით (ბაიესის მიდგომა)	318
	X თავის დამატება – ტანსაცმლის სამკერვალო ფირმის ეფექტიანი სპეციალიზაციის განსაზღვრის ამოცანა	324
	Методологические основы математического моделирования экономики и практические примеры их реализации (резюме)	330
	The Methodological Bases of Mathematical Modeling of Economics and the Practical Examples of their Realization (Summary)	332
	ლიტერატურა.	333

დაიბეჭდა საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის
სამეცნიერო-საგამომცემლო საბჭოს დადგენილებით

რედაქტორი ი. გ ა ჩ ე ჩ ი ლ ა ძ ე

გადაეცა წარმოებას 01.03.2000 ხელმოწერილია
დასაბეჭდად 04.04.2000 ქაღალდის ზომა 60×84/16;
ქაღალდი ოფსეტური; ბეჭდვა ოფსეტური; პირობითი
ნაბეჭდი თაბახი 23,3; სააღრიცხვო საგამომცემლო
თაბახი 22,8

ტირაჟი 1000

შეკვეთა №18

ფასი სახელშეკრულებო

საწარმოო-საგამომცემლო გაერთიანება "მეცნიერება"
თბილისი, 380060, გამრეკელის ქ. 19

შ.პ.ს. გამომცემლობა „მერიდიანი“
თბილისი, წერეთლის 112

წერეთელი
გიორგი შაქროს ძე
ეკონომიკურ მეცნიერებათა დოქტორი

თბილისი
“მეცნიერება”
2000

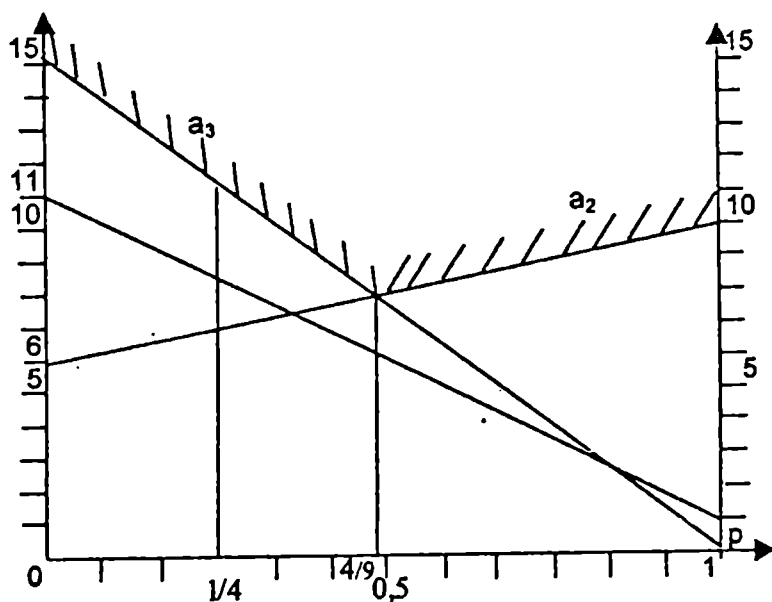
$\frac{4}{9} < p < 1$ ინტერვალისათვის - a_2 ოპერაცია. რაც შეეხება

$p = \frac{4}{9}$ -ს, ამ წერტილზე a_2 ან a_3 ოპერაციის გამოყენება ერთმანეთისგან არ განსხვავდება. a_1 ოპერაციის გამოყენება არ არის ხელსაყრელი p -ს არც ერთი მნიშვნელობისათვის.

მოცემულ შემთხვევაში, მაქსიმალური კრიტერიუმის გამოყენება თანაბარმნიშვნელოვანია იმის დასაბუთებისა, რომ $p > \frac{4}{9}$. აქ გადაწყვეტილების მიმღები თელის, რომ λ_1

მდგომარეობა უფრო ალბათურია, ვიდრე λ_2 მდგომარეობა.

თუ p ტოლია 0-ის ან 1-ის ვლელულობთ გადაწყვეტილების მიღების სიტუაციას უტყუარობის პირობებში. ასეთ პირობებში კი გადაწყვეტილების მიღების წესი ცნობილია.



ნახ. 10.1