

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ბ. ჯაიანი

**უწყვეტ ბარემოთა
მექანიკის მათემატიკური
მოდელები**

მეორე გადაშუშეებული და შეესებული გამოცემა

თბილისი
2018

ავტორის მიერ 2006-2017 წლებში ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის წაკითხული ძირითადი და არჩევითი კურსების საფუძველზე დაწერილ წინამდებარე სახელმძღვანელო გადმოცემულია უწყვეტ გარემოთა მექანიკის მათემატიკური მოდელები. სახელდობრ: დრეკადი და პლასტიკური დეფორმადი სხეულების გეომეტრიულად და ფიზიკურად წრფივი და არაწრფივი მოდელების, დრეკადობის მომენტური თეორიის, ჰიდროდინამიკის, მყარ და თხევად გარემოთა ურთიერთქმედების ძირითადი დამოკიდებულებები. მოყვანილია აგრეთვე ფირფიტების ღუნვის კირხჰოფ-ლიავის და მინდლინ-რაისნერის ტიპის მოდელები, ცვლადი სისქის ფირფიტების ი. ვეკუას იერარქიული მოდელები, ღეროების ეილერ-ბერნულის და იერარქიული მოდელები. განხილულია აგრეთვე მოდელები ტემპერატურული ძაბვების გათვალისწინებით და ფირფიტის დრეკად ფუძეზე ღუნვის ვინკლერის მოდელი. წიგნთან მუშაობის გამარტივების მიზნით მას დართული აქვს საკითხის ღრმა გააზრებისათვის აუცილებელი დამხმარე მასალა, კერძოდ, თეორიული მექანიკის ელემენტები.

სახელმძღვანელო განკუთვნილია მათემატიკური, საბუნებისმეტყველო და ტექნიკური პროფილის ფაკულტეტების სტუდენტებისათვის; ის შეიძლება გამოყენებულ იქნას აგრეთვე როგორც ცნობარი აღნიშნული მოდელებით დაინტერესებულ პირთა მიერ.

რედაქტორი: პროფ. დ. ნატროშვილი

რეცენზენტები: ასოც. პროფ. გ. გიორგაძე
ასოც. პროფ. ნ. ჩინჩალაძე

© ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2018

კუძღვნი

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის დაარსებიდან 100 და ილია ვეკუას სახელობის
გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის დაარსებიდან 50 წლისთავს

მ ე ო რ ე გ ა მ ო ც ე მ ი ს წ ი ნ ა ს ი ტ ყ ვ ა ო ბ ა

წინამდებარე გამოცემა წარმოადგენს „უწყვეტ გარემოთა მექანიკის მათემატიკური მოდელების“ 2004 წლის გამოცემის გადამუშავებულ და შევსებულ ვარიანტს. მასში, 2004–2017 წლებში ლექციების კურსების „უწყვეტ გარემოთა მექანიკა“ (მაგისტრატურაში), „დრეკადობის თეორიის საფუძვლები“ (ბაკალავრიატში) და სხვა არჩევითი კურსების წაკითხვისას მიღებული გამოცდილების გათვალისწინებით, გადამუშავებულია წიგნის გარკვეული მონაკვეთები; სახელმძღვანელო შეივსო ექვსი დამატებით: დამატება 3 მოძრავ მოცულობაზე განხილული ინტეგრალის დროის მიმართ გაწარმოების ფორმულა; დამატება 4 ორი სასარგებლო ფორმულა სიბრტყეზე; დამატება 5 პრიზმული გარსები; დამატება 6 კოლოსოვ-მუსხელიშვილის ფორმულები; დამატება 7 უწყვეტ გარემოთა მომენტური თეორია; დამატება 8 ზოგიერთი ცნება და ფაქტი თეორიული მექანიკიდან. სქოლიოებში მითითებულია დამატებითი ლიტერატურა. გასწორებულია შემჩნეული ბეჭდვითი შეცდომები.

დასასრულს, მადლობას ეუხდი რედაქტორს პროფესორ დ. ნატროშვილს სასარგებლო დისკუსიებისა და რჩევებისათვის, ხოლო რეცენზენტებს ასოცირებულ პროფესორებს გ. გიორგაძეს და ნ. ჩინჩალაძეს საკმაინი შენიშვნებისათვის. ასევე მადლობას ეუხდი მეორე გამოცემის მომზადებაში გაწეული ტექნიკური დახმარებისათვის დოქტორანტ მირანდა გაბელაიას.

გორგი ჯაიანი
მაისი, 2018

პ ი რ ვ ე ლ ი გ ა მ ო ც ე მ ი ს წ ი ნ ა ს ი ტ ყ ვ ა ო ბ ა

წინამდებარე ლექციების კურსი დაწერილია ავტორის მიერ წლების განმავლობაში ი.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის და გამოყენებითი მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტებისა და სოხუმის ფილიალის ფიზიკა-მათემატიკური ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის წაკითხული არჩევითი კურსების საფუძველზე. ლექციების კურსში გადმოცემულია უწყვეტ გარემოთა მექანიკის მათემატიკური მოდელები, სახელობრ: დრეკადი და პლასტიკური დეფორმადი სხეულების გეომეტრიულად და ფიზიკურად წრფივი და არაწრფივი მოდელები; ჰიდროდინამიკის, მყარ და თხევად გარემოთა ურთიერთქმედების ძირითადი დამოკიდებულებები. მოყვანილია ძირითადი ორგანოზომილებიანი (ბრტყელი დეფორმაცია, ბრტყელი განზოგადებული დაძაბული მდგომარეობა, ფირფიტების ღუნვის კირხჰოფ-ლიაის და მინდლინ-რაისნერის ტიპის კლასიკური თეორიები, ცვლადი სისქის ფირფიტების იერარქიული თეორია) და ერთგანზომილებიანი (ცვლადი განივკვეთის მქონე ღეროების ეილერ-ბერნულის თეორია, ცვლადი მართკუთხა განივი კვეთის მქონე ღეროების იერარქიული თეორია) მოდელები. განხილულია აგრეთვე მოდელი ტემპერატურული ძაბვების გათვალისწინებით და ფირფიტის დრეკად ფუძეზე ღუნვის ვინკლერის მოდელი. ამოცანების განზოგადებულ და ვარიაციულ ფორმულირებებთან და შესაბამისი არსებობის ზოგიერთ თეორემასთან დაკავშირებით, ლექციების კურსს ახლავს დამატება დამხმარე მასალით ფუნქციონალური ანალიზიდან. მითითებულია ლიტერატურა ამონახსნების არსებობის და ერთადერთობის დამტკიცებასა და კონკრეტული ამოცანების ამოხსნასთან დაკავშირებით. სტუდენტთა მომზადების დონიდან გამომდინარე ლექციების კურსის წაკითხვა შეიძლება მთლიანად, როგორც ორსემესტრიანი კურსი (8 კრედიტი¹⁾), ან ნაწილობრივ, როგორც სემესტრული კურსები (2-4 კრედიტი), ამასთან მისი ნაწილების გამოყენება შეიძლება როგორც შესავალი

¹⁾ იგულისხმება ი.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში მიღებული საკრედიტო სისტემით განსაზღვრული კრედიტი.

კურსისა, რომელიც გადრმავებული იქნება ციტირებული სპეციალური ლიტერატურის გამოყენებით. ის შეიძლება აგრეთვე გამოყენებულ იქნას როგორც ცნობარი დეფორმადი მყარი სხეულების, სითხეებისა და გაზების და მათი ურთიერთქმედების ამოცანებით დაინტერესებულ პირთა მიერ. ლექციების კურსში შეტანილია ზოგიერთი უახლესი შედეგი და დასმულია ჯერ კიდევ გამოუკვლევი აქტუალური პრობლემები, რომლებიც შეიძლება იქცნენ როგორც საკურსო და სამაგისტრო, ასევე საკვალიფიკაციო ნაშრომების თემაბად.

წინასიტყვაობის ბოლოს მადლობას ვუხდი რედაქტორებს დ. ნატროშვილსა და ჯ. შარიქაძეს და რეცენზენტებს ნ. სხირტლაძესა და ნ. ჩინჩალაძეს სასარგებლო დისკუსიებისა და რჩევებისათვის. ასევე მადლობას ვუხდი მ. ბიწაძეს ლექციების კურსის კომპიუტერზე აწყობისათვის, ხოლო ა. სლობოდინას და ნ. ცინაძეს ნახაზების აგებისათვის.

გიორგი ჯაიანი
მარტი, 2004

მეთოდური მითითებები

წინამდებარე სახელმძღვანელო აგებულია ისე, რომ მის საფუძველზე შეიძლება წაკითხული იქნას შემდეგი კურსები:

საბაკალავრო პროგრამით "მათემატიკა":

1. დრეკალობის თეორიის საფუძვლები (5 კრედიტი);
2. პრიზმული გარსებისა და ღეროების მათემატიკური თეორიის საფუძვლები (5 კრედიტი);
3. ჰიდროაერომექანიკის საფუძვლები (5 კრედიტი);
4. თეორიული მექანიკა (5 კრედიტი).

სამაგისტრო პროგრამებით "მათემატიკა", "გამოყენებითი მათემატიკა":

5. უწყვეტ გარემოთა მექანიკა (5+5 კრედიტი).

სამაგისტრო პროგრამით "გამოყენებითი მათემატიკა":

6. წამახვილებული პრიზმული გარსების მათემატიკური თეორია (3 კრედიტი);
7. წამახვილებული ღეროების მათემატიკური თეორია (2 კრედიტი);
8. დრეკადი მყარ და თხევად გარემოთა ურთიერთქმედების ამოცანები (5 კრედიტი).

გარდა ამისა:

9. პრიზმული გარსების იერარქიული მოდელები (5 კრედიტი);
10. პრიზმული ღეროების იერარქიული მოდელები (5 კრედიტი);
11. ფირფიტების ღუნვის კირხჰოფ-ლიავის მოდელი (2 კრედიტი);
12. ფირფიტების ღუნვის რაისნერ-მინდლინის მოდელი (2 კრედიტი);
13. ღეროების ეილერ-ბერნულის მოდელი (2 კრედიტი);
14. დრეკად-პლასტიკური სხეულების მოდელები (2 კრედიტი).

ლექციების პირველი კურსი გულისხმობს ნაწილი I-ის (გარდა §1.13-ის და თავი V და VI-სა) და ნაწილი II-ის თავი I-ის წაკითხვას.

ლექციების მეორე კურსი ითვალისწინებს §2.14-ის, §2.5-ის, §2.6-ის, §3.1-ის, §3.2-ის და დამატება 5-ის წაკითხვას.

ლექციების მესამე კურსი ითვალისწინებს ნაწილი I-ის პირველი ორი და მეხუთე თავების და §1.13-ის წაკითხვას.

ლექციების მეოთხე კურსში უნდა წაეკითხოს დამატება 8 გაღრმავებული იქვე მითითებული ლიტერატურით.

ლექციების მეხუთე კურსის წაკითხვისას, თუ მხოლოდ მათემატიკური მოდელების აგებით შემოვისაზღვრებით, შეიძლება გამოტოვებული იქნას §1.21 და დამატებები.

ლექციების მეექვსე და მეშვიდე კურსების წაკითხვისას უნდა ვისარგებლოთ მეთერთმეტე და მეცამეტე კურსების მეთოდური მითითებებით, იმ აუცილებელი დამატებით, რომ კურსი უნდა გაღრმავდეს შესაბამისად §2.4 და §2.6, და §3.1 და §3.2-ში მითითებული ლიტერატურით.

ლექციების მერვე კურსის წაკითხვა მიზანშეწონილია მხოლოდ იმ სტუდენტებისათვის, რომლებსაც მოსმენილი აქვთ დრეკადობის თეორიისა და ჰიდროაერომექანიკის საფუძვლები, ამასთან გამოყენებული უნდა იქნას ნაწილ IV-ში მითითებული ლიტერატურა.

ლექციების მეცხრე კურსის წაკითხვისას, თუ სტუდენტები არ იცნობენ დრეკადობის თეორიას, გამოტოვებული უნდა იქნას §1.13, §1.22-1.30, §2.1-2.5 და ნაწილები III და IV, ხოლო თუ დრეკადობის თეორიის კურსი მოსმენილი აქვთ, მაშინ უნდა წაეკითხოს §2.6 გაღრმავებული იქვე მითითებული ლიტერატურით.

ლექციების მათე-მეცამეტე კურსების წაკითხვისას უნდა ვისარგებლოთ ლექციების მეცხრე კურსის წაკითხვის მეთოდური მითითებებით იმ განსხვავებით, რომ §2.6 შესაბამისად შეიცვლება §3.2-ით, §2.4-ით, §2.5-ით და §3.1-ით.

ლექციების მეთოთხმეტე კურსი გულისხმობს ნაწილი I-ის I-IV და VI თავების წაკითხვას, გარდა §1.13-სა, ხოლო თუ სტუდენტებს მოსმენილი აქვთ დრეკადობის თეორიის კურსი, მაშინ – მხოლოდ VI თავს გაღრმავებულს იქვე მითითებული ლიტერატურით.

ყველა ლექცია უნდა შეივსოს შესაბამისი მასალებით დამატებებიდან (იხ. ნაწილი V).

ლექციების ყველა ამ კურსის წაკითხვისას სასურველია, ლექტორმა, თავისი შეხედულებების მიხედვით, სტუდენტებს დამოუკიდებლად მოამზადებინოს მასალის გარკვეული ნაწილი სასემინარო მუშაობისათვის.

ყველა ეს კურსი გათვალისწინებულია ბაკალავრიატის მაღალი კურსებისა და მაგისტრატურის სტუდენტებისათვის.

ყველა ამ კურსისათვის აუცილებელი მინიმუმია დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის (კალკულუსის) ცოდნა. სასურველია აგრეთვე ანალიზური გეომეტრიისა და თეორიული მექანიკის საფუძვლების ცოდნა.

შესავალი. ძირითადი ჰიპოთეზები

ჩვენ განვიხილავთ *მატერიალურ ობიექტებს*, რომელთა ქვეშ გვესმის ყოველგვარი სხეული, რომელსაც შესწავლის პროცესში შეუძლია ნებისმიერად იცვალოს ფორმა და მდებარეობა სივრცეში. ასეთებს განეკუთვნებიან გაზები, სითხეები ან მყარი სხეულები, რომელთაც სივრცეში გარკვეული მოცულობა უკავიათ. დაკვირვებებიდან ცნობილია, რომ მატერიალურ ობიექტებს მოლეკულური აგებულება აქვთ. მეორე მხრივ, რაგინდ მცირე არ უნდა ავიღოთ სხეულის მოცულობის ელემენტი, ის უამრავ მოლეკულას შეიცავს. მაგალითად, ჰაერის კუბი, რომლის წიბო 0,001 მმ-ია, შეიცავს $2,7 \cdot 10^7$ მოლეკულას. თუ ვიგულისხმებთ, რომ სხეული დაყოფილია ამგვარ ელემენტებად, ისინი შეიძლება პრაქტიკულად უსასრულო მცირეებად ჩავთვალოთ და დავახასიათოთ სიჩქარის, აჩქარების და მოლეკულებზე მოქმედი ძალების საშუალო მნიშვნელობებით. ამგვარად შეიძლება მივიღოთ წარმოდგენა *უწყვეტ გარემოზე*, როგორადაც ჩვენ ქვემოთ განვიხილავთ სხეულებს. მატერიალური ობიექტების უწყვეტ გარემოდ მიღება გვაძლევს საშუალებას, გამოვიყენოთ მათემატიკური ანალიზის მეთოდები.

მექანიკა არის მეცნიერება, რომელიც შეისწავლის მატერიალური ობიექტების მოძრაობასა და წონასწორობას სივრცესა და დროში. მექანიკის ის ნაწილი, რომელიც ცნობილია *თეორიული მექანიკის* სახელით, მოიცავს მატერიალური ობიექტების მექანიკური მოძრაობის მათემატიკური აღწერის მეთოდებს. *მექანიკური მოძრაობა* კი ეწოდება სხეულების ფარდობით გადაადგილებას.

მატერიალური ობიექტების მექანიკური მოძრაობის ძირითადი კანონებია *ნიუტონის^{*)} კანონები*.

^{*)}ი. ნიუტონი (1643-1727).

1. ინერციის კანონი. სხეული იმყოფება მოსვენებულ (უძრავ) მდგომარეობაში ან მოძრაობს თანაბრად და წრფივად რაიმე ათვლის სისტემის მიმართ, რომელსაც ინერციული სისტემა ეწოდება, თუ გარე ძალების მოქმედების შედეგად იგი არ იცვლის თავის მდგომარეობას, ე.ი. მისი სიჩქარე (ერთეული $m/s = \text{მ/წმ}^*)$ მუდმივია

$$\vec{v} = \text{const.}$$

(კანონი გულისხმობს ათვლის ინერციული სისტემის არსებობას. სხეულის მოძრაობის სიჩქარის სიდიდის და მიმართულების შენახვას (მუდმივობას) ინერცია ეწოდება).

2. ძალისა და აჩქარების პროპორციულობის კანონი. ათვლის ინერციულ სისტემაში მოძრავ სხეულზე მოქმედი $\vec{F}$ ძალა (ერთეული $N = \text{ნიუტონი}^{**})$ მისი m მასისა (ერთეული $\text{კგ} = \text{კგ}^{***})$ და $\vec{a}$ აჩქარების (ერთეული $m/s^2 = \text{მ/წმ}^2$) ნამრავლის ტოლია:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

^{*}მეტრი არის სინათლის მიერ ვაკუუმში $1/299\,792\,458$ წამში გავლილი მანძილი. წამი არის ცეზიუმის (^{133}Cs) ატომის ძირითადი მდგომარეობის ორ ზენაზ დონეს შორის გადასვლის შესაბამისი გამოსხივების $9\,192\,631\,770$ პერიოდის ტოლი დრო. აქ და შემდგომში მითითებულია ერთეულები საერთაშორისო ერთეულთა SI სისტემაში. ამ სისტემაში ძირითად სიდიდეებად (ერთეულებად) მიღებულია სიგრძე (L), დრო (T), მასა, თერმოდინამიკური ტემპერატურა, ნივთიერების რაოდენობა, ელექტრული დენის ძალა და სინათლის ძალა. წარმოებული ერთეული (მაგალითად, სიჩქარის ერთეული) გამოისახება ძირითადი ერთეულების საშუალებით შესაბამისი მათემატიკური ფორმულით. ფიზიკური სიდიდეების ძირითად სიდიდეებად მიღებულ სიდიდეებზე დამოკიდებულების ფორმას განზომილება ეწოდება (მაგალითად, $\dim \vec{v} := LT^{-1}$).

^{**}) 1 ნიუტონი არის ის ძალა, რომელიც 1 კგ მასის მქონე სხეულს ანიჭებს 1 მ/წმ^2 აჩქარებას.

^{***}) 1 კგ მასა კილოგრამის საერთაშორისო პროტოტიპის მასის ტოლია.

(ძალა ეწოდება ფიზიკურ სიდიდეს, რომელიც ახასიათებს სხეულთა ურთიერთქმედებას. ის განსაზღვრავს სხეულის მოძრაობის ან ფორმის ცვლილებას. ძალა ვექტორული სიდიდეა. ძალები სხვადასხვა ხასიათისაა მათი ტიპიდან გამომდინარე).

3. *ქმედებისა და უკუქმედების კანონი*. ორი სხეულის ერთმანეთზე ზემოქმედების ძალები სიდიდით ტოლია და ურთიერთსაწინააღმდეგოდ არიან მიმართული.

რადიე წერტილის მიმართ ძალის მომენტი ეწოდება ვექტორს, რომელიც ამ წერტილის ძალის მოდების წერტილთან შემაერთებული ვექტორის (მის საწყის წერტილად მიღებულია წერტილი, რომლის მიმართაც ითვლება მომენტი) და ძალის ვექტორის ვექტორული ნამრავლის ტოლია, რომელიც მოდებულია ამ წერტილში.

სხეულზე მოქმედი ძალების, როგორც ვექტორების, გეომეტრიულ^{*)} ჯამს ეწოდება სხეულზე მოქმედ ძალთა *ნაკრები (მთავარი) ვექტორი*, ხოლო მათი მომენტების, როგორც ვექტორების, გეომეტრიულ ჯამს - *ნაკრები (მთავარი) მომენტი*. ნაკრები მომენტი, ზოგადად, დამოკიდებულია იმ წერტილზე, რომლის მიმართაც ვიღებთ მომენტებს, ხოლო ნაკრები ვექტორი არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რომელ წერტილს ავიღებთ მის საწყის წერტილად. ის თავისუფალი ვექტორია (იხ. §1.1).

ამბობენ, რომ აბსოლუტურად მყარი^{**)} სხეული *წონასწორობის მდგომარეობაშია*, თუ მასზე მოქმედი ძალებია წონასწორობაში, ხოლო *ძალთა სისტემა წონასწორობაშია*, თუ მისი ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი ნულის ტოლია.

^{*)} გეომეტრიაში განიხილება თავისუფალი ვექტორები, ე.ი. ვექტორები, რომლებიც ხასიათდება სიგრძით და მიმართულებით, ამასთან დასაშვებია მათი პარალელური გადატანა. თეორიულ მექანიკაში განიხილება სრიალა ვექტორები.

^{**)} ე.ი. ისეთი მყარი სხეულები, რომელთა ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი უცვლელია, მიუხედავად იმისა, თუ როგორი ძალები მოქმედებენ მათზე.

ამდენად, წონასწორობაში მყოფ სხეულზე მოქმედი ყველა გარე ძალის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი ნულის ტოლია.

დალამბერის^{*)} პრინციპის თანახმად მოძრავ სხეულზე მოქმედი გარე ძალები წონასწორდება ინერციის ძალით.

ინერციის ძალა ფიქტიური ძალაა, რომელიც ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად $(-m\vec{a})$ -ს ტოლია.

თეორიული მექანიკის განტოლებები სრულად აღწერენ მატერიალურ წერტილთა სისტემებისა და აბსოლუტურად მყარი სხეულების მოძრაობას. თუ მყარი სხეულის განხილვის პროცესში მასზე მოდებული გარე ძალების მოქმედების შედეგად მის წერტილებს შორის მანძილი დროებით ან მუდმივად იცვლება, მაშინ მათ დეფორმად მყარ სხეულებს, ხოლო სხეულის წერტილთა მდებარეობის (სხეულის მდგომარეობის) ასეთ ცვლილებას დეფორმაციას ვუწოდებთ. დეფორმადი მყარი სხეულების ან გაზების და სითხეების მოძრაობის დასახასიათებლად თეორიული მექანიკის განტოლებები უკვე აღარ გამოდგება. მექანიკის იმ დარგს, რომელიც დეფორმად მყარ სხეულებს, გაზებს და სითხეებს შეისწავლის, ეწოდება უწყვეტ გარემოთა (სხეულთა) მექანიკა.

უწყვეტ გარემოთა მექანიკაში მიღებულია ე.წ. გამყარების პრინციპი, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს:

დეფორმადი სხეულის წონასწორობისათვის მასზე და მისგან აზრობრივად გამოყოფილ ნებისმიერ ნაწილზე მოქმედმა გარე ძალებმა უნდა დააკმაყოფილონ იმავე ფორმის აბსოლუტურად მყარი სხეულის წონასწორობის პირობები. სხვა სიტყვებით, გამყარების პრინციპის თანახმად, დეფორმადი სხეულის წონასწორობის ქვეშ ჩვენ გვესმის ის მდგომარეობა, როცა მისი და მისგან აზრობრივად გამოყოფილი ნებისმიერი ნაწილის ფორმის მქონე აბსოლუტურად მყარი სხეული წონასწორობაშია დეფორმად

^{*)} ე.ლ. დალამბერი (1717-1783).

სხეულზე და შესაბამისად მის ნებისმიერ ნაწილზე მოდებული გარე ძალების მოქმედების პირობებში.

უწყვეტ გარემოთა მექანიკა იყოფა *ჰიდროაერომექანიკად* ან, რაც იგივეა, გაზების და სითხეების მექანიკად და *დეფორმადი მყარი სხეულების* მექანიკად.

სხეულის თვისებას, მასზე მოდებული გარე ძალების მოხსნის შემდეგ დაიბრუნოს თავისი პირვანდელი მდგომარეობა, *დრეკადობა* ეწოდება.

სხეულის თვისებას, გარე ძალების მოქმედების შედეგად განიცადოს დიდი *პლასტიკური დეფორმაცია*, ე.ი. დეფორმაცია, რომელიც გარე ძალების მოხსნის შემდეგ რჩება, *პლასტიკურობა* ეწოდება.

ზემოთ ჩამოთვლილი თვისებების შესაბამისად დეფორმადი მყარი სხეულების მექანიკა იყოფა *დრეკადობის* და *პლასტიკურობის თეორიებად*. ჩვენ ძირითადად შევისწავლით დრეკადობის თეორიის ელემენტებს (ფირფიტებისა და ღეროების თეორიების ჩათვლით), თუმცა განვიხილავთ აგრეთვე პლასტიკურობის თეორიის, სითხის მოძრაობისა და დრეკადი სხეულისა და სითხის ურთიერთქმედების მოდელებსაც.

ზემოთქმულიდან გამომდინარე, *დრეკადობის თეორია მექანიკის ის დარგია, რომელიც შეისწავლის მოძრავ ან წონასწორობის მდგომარეობაში მყოფ დეფორმად მყარ სხეულში დეფორმაციებს და ამასთან დაკავშირებით წარმოქმნილ შინაგან ძალებს, რომლებიც გარეშე ფიზიკური ზემოქმედების შედეგად წარმოიშებიან და რომლებიც ცდილობენ, დააბრუნონ სხეული პირვანდელ მდგომარეობაში*.

ასეთივე ამოცანები შეისწავლება მექანიკის სხვა დარგშიც — *მასალათა გამძლეობაშიც*, მაგრამ მისი უხეში მეთოდები, რომლებიც მისაღებია ცალკეული ღეროებისაგან შედგენილი სხვადასხვა კონსტრუქციების შესასწავლად, გამოუსადეგარია ფირფიტე-

ბისა და გარსების შესწავლის დროს, საერთოდ რომ არაფერი ვთქვათ ზოგად სამგანზომილებიან ამოცანებზე.

დრეკადობის თეორია მჭიდროდ არის დაკავშირებული *სამშენებლო მექანიკასთან*, ის წარმოადგენს მექანიკის იმ დარგს, რომელიც შეისწავლის ღეროებისაგან შემდგარი სისტემების — ბრტყელი და სივრცული ფერმების, თაღების, საყრდენი კედლებისა და სხვათა სიმტკიცის, სიხისტიისა და მდგრადობის გათვლის თეორიას.

პირველი ცდა იმ ტიპის ამოცანების ამოხსნისა, რომელთაც დრეკადობის თეორია შეისწავლის, ეკუთვნის იტალიელ მეცნიერს *გალილეო გალილეის* (1564-1642), რომელიც შეეცადა, ამოეხსნა ამოცანა ღეროს ღუნვისა და გაჭიმვის შესახებ.

ინგლისელმა მეცნიერმა *რობერტ ჰუკმა* (1635-1702) 1678 წელს გამოქვეყნებული ნაშრომით, რომელიც ეხებოდა მის მიერ ექსპერიმენტულად აღმოჩენილ კანონს გაჭიმვის დროს გარკვეულ საზღვრებში დატვირთვისა და დეფორმაციას შორის წრფივი დამოკიდებულების შესახებ, ფაქტობრივად საფუძველი დაუდო დრეკადი სხეულების მექანიკას (იხ. §1.12).

ინგლისელმა *თომას იუნგმა* (1773-1829) XIX საუკუნის დასაწყისში შემოიღო დრეკადობის მოდულის ცნება. მან დაადგინა აგრეთვე განსხვავება გაჭიმვა-კუმშვისა და ძვრის დეფორმაციებს შორის. ამ დროისათვის *ჟ. ლავრანჟის* (1736-1813), *სოფი ჟერმენის* (1776-1831), *ს. პუასონის* (1781-1840) და *ლ.მ. ნავიეს* (1785-1836) შრომებით ფაქტობრივად შეიქმნა ფირფიტების თეორიის საფუძვლები.

ამდენად, XVIII-XIX საუკუნეების მიჯნაზე საფუძველი ჩაეყარა დრეკადობის თეორიას, რომელმაც შემდგომი არსებითი განვითარება პპოვა ფრანგი მეცნიერის *ო. კოშის* (1789-1857) შრომებში. მან შემოიღო დეფორმაციისა და ძაბვის ცნებები და საგრძნობლად გაამარტივა ძირითადი განტოლებების გამოყვანა.

1828 წელს *გ. ლაშქვაძე* (1795-1870) და *ბ. კლაპირონის* (1799-1864) შრომებით ფაქტობრივად დასრულდა დრეკადობის მათემატიკური თეორიის ძირითადი აპარატის შექმნა.

დრეკადობის თეორიის განვითარებაში თვისობრივად ახალი ნაბიჯი იქნა გადადგმული *ბ. სენ-ვენანის* (1797-1886) მიერ მისივე სახელით ცნობილ პრინციპის ჩამოყალიბებით (იხ. § 1.20).

დრეკადობის თანამედროვე თეორიის შექმნაში უცხოელ მეცნიერებთან ერთად აღსანიშნავია ქართველი მეცნიერების *ნ. მუსხელიშვილის* (1891-1976), *ი. ვეკუას* (1907-1977), *ვ. კუპრაძის* (1903-1985) და მათი მოწაფეების ღვაწლიც.

ჰიდროაერომექანიკაში ჰუკის ექსპერიმენტული კანონის როლს თამაშობს ნიუტონის ექსპერიმენტული კანონი (იხ. §1.13). განიხილავენ სითხის ორ მოდელს: იდეალურსა და ბლანტს. იდეალური სითხის განტოლებები გამოიყვანა *ლ. ეილერმა* (1707-1783), ხოლო ბლანტი სითხის – *ლ.მ. ნავიემ* და *ჟ.ვ. სტოკსმა* (1819-1903) (იხ. §1.23). ჰიდრომექანიკის ამოცანების შესწავლაში დიდი როლი ითამაშეს *ნ.ე. ჟუკოვსკისა* (1847-1921) და *ს.ა. ჩაპლიგინის* (1869-1942) შრომებმა. აღსანიშნავია *ლ. პრანდტლის* (1875-1953), *თ. კარმანის* (1881-1963) და *ო. რეინოლდსის* (1842-1912) დამსახურება ბლანტი სითხის მოძრაობის შესწავლის საქმეში. გასული საუკუნის 30-იან წლებში გიოტინგენის ჰიდრომექანიკის ინსტიტუტის *ლ. პრანდტლის* ლაბორატორიაში უნიკალური ექსპერიმენტები ჩატარა *ი. ნიკურაძემ* (1894-1979). თბილისში მოღვაწე ქართველმა მეცნიერებმა (*დ. დოლიძე* (1908-1960) და მისი მოწაფეები) გარკვეული წვლილი შეიტანეს ჰიდროაერომექანიკის განვითარებაში.

ნაწილი I. სამგანზომილებიანი მოდულები

თავი I. ძაბვების თეორია

§1.1. მოცულობითი და ზედაპირული ძალები

მექანიკაში არჩევენ ორი სახის ძალას: *მოცულობითს* და *ზედაპირულს*, იმისდა მიხედვით, თუ რაზე მოქმედებენ ისინი: მოცულობით თუ ზედაპირულ ელემენტზე (იხ. მაგ., [2], [36], [53]). მოცულობითი ძალის ტიპური მაგალითია სიმძიმის და ინერციის ძალები, ხოლო ზედაპირული ძალისა კი წნევა.

მოცულობითი ძალები მოქმედებენ გარემოს სხვადასხვა ელემენტის მოცულობაზე, უფრო სწორად, მასში მოთავსებულ მასაზე. მიღებულია, რომ მოცულობის dV უსასრულოდ მცირე ელემენტზე (იხ. ნახ. 1.1.1) მოქმედ მოცულობით ძალას აქვს $\vec{\Phi} dV$ სახე, სადაც $\vec{\Phi}$ რაიმე სასრული ვექტორია^{*)}, რომლის მოდების წერტილად შეიძლება მიღებულ იქნას dV ელემენტის ნებისმიერი შიგა $x = (x_1, x_2, x_3)$ ^{**)} წერტილი. $\vec{\Phi}$ -ს ეწოდება მოცულობის ერთეულზე გათვლილი *მოცულობითი ძალა*. ე.ი. მისი ერთეულებია

$$\begin{aligned} N / m^3 &= \text{ნიუტონი} / \text{მ}^3 = ((\text{კგ} \cdot \text{მ}) / \text{წმ}^2) / \text{მ}^3 \\ &= ((\text{კგ} \cdot \text{მ}) / \text{წ}^2) / \text{მ}^3 = \text{კგ} / \text{მ}^2 \text{წ}^2. \end{aligned}$$

^{*)}ძალა, როგორც ვექტორი, ხასიათდება შემდეგი სამი ელემენტით: მოდების წერტილით, სიგრძითა და გეზით. ასეთ ვექტორს ბმული ვექტორი ეწოდება. აბსოლუტურად მყარ სხეულზე მოქმედი ძალა *სრულად ვექტორია*, რომელიც ხასიათდება შემდეგი სამი ელემენტით: სიგრძით, გეზით და ფუძით (*ვექტორის ფუძე* ეწოდება წრფეს, რომელზედაც ვექტორია მოთავსებული).

^{**)} ქვემოთ, თუ საწინააღმდეგო არ იქნება თქმული, ჩვენ განვიხილავთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა მარჯვენა $x_1 x_2 x_3$ სისტემას, რომლის ბაზისია

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \vec{e}_3 = (0, 0, 1).$$

თუ ρ აღნიშნავს გარემოს სიმკვრივეს, ე.ი. მოცულობის ერთეულში მოთავსებულ მასას, მაშინ მასის ერთეულზე გათვლილი მოცულობითი ძალა, რომელსაც *მასობრივ ძალას* უწოდებენ, $\vec{\Phi}/\rho$ -ს ტოლია. $\vec{\Phi}$ დამოკიდებულია ელემენტის მდებარეობაზე გარემოში ე.ი. x წერტილის კოორდინატებზე, ხოლო დინამიკურ შემთხვევაში — დროზეც. მთელ V მოცულობაზე მოქმედი მოცულობითი ძალების მთავარი (ნაკრები) ვექტორი გამოისახება შემდეგი სამჯერადი ინტეგრალით (მისი ერთეულია N ნიუტონი)

$$\vec{\Psi} = \iiint_V \vec{\Phi} dV,$$

ხოლო ამავე მოცულობითი ძალების მთავარი (ნაკრები) მომენტი — ინტეგრალით (მისი ერთეულია $N \cdot m =$ ნიუტონი $\cdot$ მ)

$$\vec{M} = \iiint_V [\vec{x}, \vec{\Phi}] dV, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3).$$

($\vec{x}$, $\vec{\Phi}$ და $[\vec{x}, \vec{\Phi}]^*$) ვექტორები ქმნიან მარჯვენა სამეულს). მთავარი მომენტის გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე მოგვცემენ მთავარ მომენტებს ამ ღერძების მიმართ.

^{*)} $\vec{x}$ და $\vec{\Phi}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი ვექტორია და აღინიშნება $[\vec{x}, \vec{\Phi}]$ სიმბოლოთი. ვექტორული ნამრავლის მოდული (სიგრძე) გამოითვლება

$$|[\vec{x}, \vec{\Phi}]| = |\vec{x}| |\vec{\Phi}| \sin(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{\Phi}})$$

ფორმულით, სადაც $(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{\Phi}})$ უმცირესი კუთხეა $\vec{x}$ და $\vec{\Phi}$ ვექტორებს შორის, ამასთან, $\vec{x}$, $\vec{\Phi}$ და $[\vec{x}, \vec{\Phi}]$ ვექტორები ქმნიან მარჯვენა სამეულს და $[\vec{x}, \vec{\Phi}]$ ორთოგონალურია, როგორც $\vec{x}$, ასევე $\vec{\Phi}$ ვექტორის. ფორმალურად,

მიღებულია, რომ $\bar{n}$ ნორმალის მქონე ზედაპირის dS უსასრულოდ მცირე ელემენტზე (იხ. ნახ. 1.1.3) მოქმედ ზედაპირულ ძალას აქვს $\bar{X}_n dS$ სახე, სადაც $\bar{X}_n$ რაიმე სასრული ვექტორია, რომლის მოძებნის წერტილად შეიძლება მიღებულ იქნას dS ელემენტის ნებისმიერი x შიგა წერტილი. $\bar{X}_n$ -ს ეწოდება ფართის ერთეულზე გათვლილი ზედაპირული ძალა (მისი ერთეულია $Pa = N/m^2$ პასკალი). მთელ S ზედაპირზე მოქმედი ზედაპირული ძალა (მისი ერთეულია $Pa \cdot m^2 = N$ ნიუტონი) გამოისახება შემდეგი ზედაპირული ინტეგრალით

$$\bar{F} = \iint_S \bar{X}_n dS,$$

ზოლო მთავარი მომენტი (მისი ერთეულია $m \cdot Pa \cdot m^2 = N \cdot m$) – ინტეგრალით

თუ $\bar{x} := (x_1, x_2, x_3)$ და $\bar{\Phi} := (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ ვექტორები მოცემულია დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებით, მაშინ ვექტორული ნამრავლი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი “დეტერმინანტის” სახით:

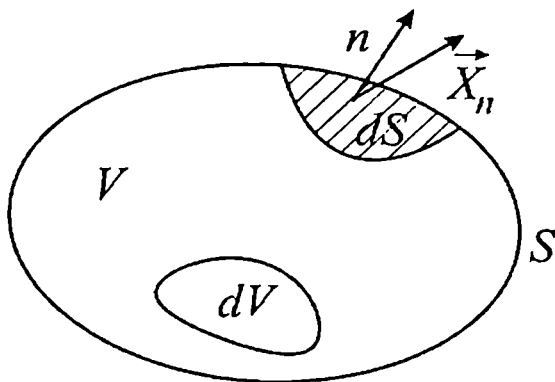
$$[\bar{x}, \bar{\Phi}] = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} \bar{e}_i x_j \Phi_k,$$

სადაც $\epsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$ ლევი-ჩივიტას (1873-1941) სიმბოლოა.

$\bar{x}$ და $\bar{\Phi}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი განიმარტება შემდეგი ტოლობით

$$(\bar{x}, \bar{\Phi}) := |\bar{x}| |\bar{\Phi}| \cos(\bar{x}, \bar{\Phi}) = \sum_{i=1}^3 x_i \Phi_i.$$

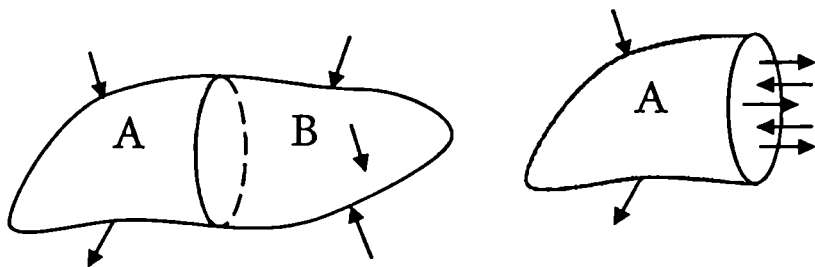
$$\vec{X} = \iint_S [\vec{x}, \vec{X}_n] dS.$$



ნახ. 1.1.3

არადეფორმირებულ სხეულში ნაწილაკების განლაგება შეესაბამება სხეულის სითბურ წონასწორობას. თუ სხეულიდან აზრობრივად გამოვყოფთ რაიმე მოცულობას, მაშინ ყველა ძალა, რომელიც მასზე მოქმედებს სხეულის სხვა ნაწილების მხრიდან, გაწონასწორებული იქნება; გარე ძალების მოქმედების შედეგად კი ნაწილაკების განლაგება სხეულში იცვლება, ე.ი. სხეული განიცდის დეფორმაციას, რის შედეგადაც წარმოიშობა შინაგანი ძალები, რომლებიც ცდილობენ დაუბრუნონ სხეული პირვანდელ მდგომარეობას. მათი განსაზღვრისათვის გამოიყენება ე.წ. კვეთის მეთოდი. ვთქვათ, გარე ძალების მოქმედებით დეფორმირებული სხეული წონასწორობაშია. აზრობრივად გავკვეთოთ ის რაიმე ზედაპირით (იხ. ნახ. 1.1.4) ორ \$A\$ და \$B\$ ნაწილებად. აზრობრივად ჩამოვაშოროთ \$B\$ ნაწილი და მისი მოქმედება \$A\$ ნაწილზე შევცვალოთ კვეთის გასწვრივ მოდებული ისეთი ძალების მოქ-

მეღებით, რომლებიც არ გამოიწვევენ A ნაწილის დეფორმირებული მდგომარეობის შეცვლას. ეს უკანასკნელი ძალები ახლა შეიძლება გავიგოთ, როგორც A ნაწილზე მოდებული გარე ზედაპირული ძალები.



ნახ. 1.1.4

თუ ვიგულისხმებთ, რომ ნახ. 1.1.3-ზე გამოსახული სხეული რაიმე სხვა სხეულებიდან აზრობრივად გამოყოფილი ნაწილია, მაშინ $\vec{X}_n dS$ -ს უწოდებენ დამაბულობის ძალას ან ძაბვას, ხოლო $\vec{X}_n$ -ს – ფართის ერთეულზე გაანგარიშებულ ძაბვას ან ძაბვის ვექტორს. ე.ი. მისი ერთეულია $Pa = N / m^2$.

ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $\vec{X}_n dS$ გამოხატავს იმ ზედაპირულ ძალას, რომლითაც dS -ის საშუალებით S ზედაპირის გარეთ მდებარე გარემოს ნაწილი მოქმედებს მის შიგნით მდებარე ნაწილზე. მაშინ, ნიუტონის მესამე კანონის თანახმად, შიგა ნაწილი dS -ის საშუალებით გარე ნაწილზე იმოქმედებს $\vec{X}_{-n} dS = -\vec{X}_n dS$ ზედაპირული ძალით. ინდექსი n აღნიშნავს, რომ $\vec{X}_n = (X_{n1}, X_{n2}, X_{n3})$ ძაბვის ვექტორი მოქმედებს

$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ ნორმალის მქონე ზედაპირის უსასრულოდ მცირე ელემენტზე. მის გეგმილს $\vec{n}$ ნორმალის მიმართულებაზე ეწოდება ძაბვის ვექტორის σ_n ნორმალური მდგენელი, ხოლო მოძვლების წერტილში გამავალ მხებ სიბრტყეზე გეგმილს — τ_n მხები მდგენელი.

ძაბვის ტენზორის კომპონენტების აღსანიშნავად გამოიყენება სხვადასხვა აღნიშვნა, რომლებზეც ნათელ წარმოდგენას გვაძლევნ შემდეგი მატრიცული ტოლობები:

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

§1.2. ძაბვის ვექტორის დამოკიდებულება ზედაპირის უსასრულოდ მცირე ელემენტის ორიენტაციაზე. კოშის ფორმულები

X_{ij} -თი, $i, j = 1, 2, 3$, აღვნიშნოთ განსახილველ წერტილში x_i ღერძის მიმართულების ნორმალის მქონე ზედაპირის უსასრულოდ მცირე ელემენტზე მოქმედი ძაბვის ვექტორის გეგმილი X_j ღერძზე.

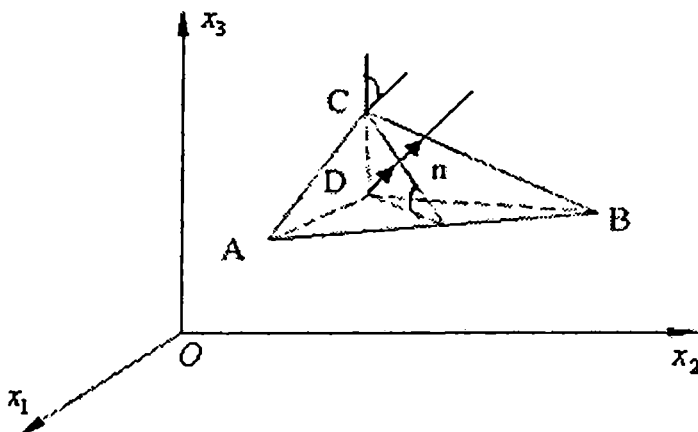
ვაჩვენოთ, რომ ადგილი აქვს კოშის შემდეგ ფორმულებს (იხ., მაგალითად, [2], [36], [53])

$$X_{ni} = X_{ji} n_j^* \quad (1.2.1)$$

^{*)} თუ რაიმე ინდექსი ერთწევრში მხოლოდ ორჯერ გვხვდება, ჩვენ ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ ხდება აჯამება მის მიმართ ინდექსის ცვლილების სიმრავლეზე (შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ ლათინური არამთავრული ინდექსები

ეს ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ, თუ ცნობილია მოცემულ წერტილზე გამავალ სამ ურთიერთმართობ ზედაპირის უსასრულოდ მცირე ელემენტზე მოქმედი ძაბვები აღნიშნულ წერტილში, მაშინ შეიძლება გამოვთვალოთ ამ წერტილზე გამავალ ნებისმიერად ორიენტირებულ ზედაპირის უსასრულოდ მცირე ელემენტზე მოქმედი ძაბვის ვექტორი ამავე წერტილში:

$$\vec{X}_n = X_{ni} \vec{e}_i = X_{ji} n_j \vec{e}_i. \quad (1.2.2)$$



ნახ. 1.2.1

იღებს მნიშვნელობებს 1,2,3, ხოლო ბერძნული კი - 1,2). იმ შემთხვევაში, როცა ასეთ ფაქტს აღვილი აქვს, მაგრამ აჯამავა არ უნდა მოხდეს, ერთ-ერთ

ინდექსს ქვემოდან ან ზემოდან გავუსვამთ ხაზს. მაგალითად, $a_{ij} := \sum_{i=1}^3 a_{ij}$,

$a_i^j := \sum_{i=1}^3 a_i^j$, მაგრამ $a_{ij} = a_{ji}$ აღნიშნავს სამ ელემენტს: a_{11}, a_{22}, a_{33} -ს

იმიტომ მიხედვით, თუ რა მნიშვნელობას იღებს i .

მატრიცს, რომლის ელემენტებია X_{ji} , $i, j = 1, 2, 3$, უწოდებენ *ძაბვის ტენზორს* (იხ. §1.4).

გაეავლოთ სხეულის რაიმე D წერტილში საკოორდინატო სიბრტყეების პარალელური სიბრტყეები და მისგან h უსასრულოდ მცირე მანძილით დაშორებული $\bar{n}$ ნორმალის მქონე სიბრტყე. მათი თანაკვეთით მივიღებთ $ABCD$ ტეტრაედრს (იხ. ნახ. 1.2.1). *ვიგულისხმობთ, რომ მოცულობითი და ზედაპირული ძალები გარემოს წერტილის მიმართ უწყვეტი ფუნქციებია*. თუ დავუშვებთ, რომ სხეული წონასწორობაშია, მაშინ, გამყარების პრინციპის თანახმად, ტეტრაედრზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი ნულის ტოლი უნდა იყოს.

თუ ტეტრაედრის მოცულობას აღვნიშნავთ ΔV -თი, მასზე მოქმედი მოცულობითი ძალის x_i ღერძზე გვემილი იქნება

$$(\Phi_i + \varepsilon_i)\Delta V,$$

რადგან Φ_i -ის მნიშვნელობას ვიღებთ D წერტილში, ხოლო $\Phi_i(P) = \Phi_i(D) + \varepsilon_i$, სადაც P ტეტრაედრის რაიმე შიგა წერტილია და $\bar{\Phi}$ -ის უწყვეტობის გამო ε_i უსასრულოდ მცირე სიდიდეა, როცა $h \rightarrow 0$.

ანალოგიურად, ABC ზედაპირზე მოქმედი ზედაპირული ძალის x_i ღერძზე გვემილი იქნება

$$(X_m + \varepsilon'_i)\sigma,$$

სადაც σ არის ABC სამკუთხედის ფართობი, ხოლო ε'_i უსასრულოდ მცირე სიდიდეა, როცა $h \rightarrow 0$.

ცხადია, ACD , BCD და ABD ზედაპირებზე, რომელთა გარე ნორმალების მოგეზულობა, შესაბამისად, $-x_2$, $-x_1$ და $-x_3$ ღერძების მიმართულებას ემთხვევა, მოქმედი ზედაპირული ძალების x_i ღერძზე გვემილების ჯამი იქნება

$$(-X_{ji} + \varepsilon_{ji})\sigma_j,$$

სადაც $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ შესაბამისად BCD, ACD და ABD სამკუთხედების ფართობებს აღნიშნავს, $\varepsilon_{ji}, j, i = 1, 2, 3$, უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია, როცა $h \rightarrow 0$. მაგრამ

$$\Delta V = \frac{1}{3} h \sigma, \quad \sigma_j = \sigma n_j.$$

ამ ორიდან უკანასკნელი ცხადია, სამი პერპენდიკულარის თეორემის თანახმად (იხ. ნახ. 1.2.1).

ამრიგად,

$$(\Phi_i + \varepsilon_i) \frac{h \sigma}{3} + (X_{iii} + \varepsilon'_i) \sigma + (-X_{jii} + \varepsilon_{ji}) \sigma n_j = 0.$$

ამ უკანასკნელის σ -ზე გაყოფისა და h -ის ნულისაკენ მისწრაფების შემდეგ მივიღებთ (1.2.1)-ს.

§1.3. წონასწორობის განტოლებები

დავუშვათ, რომ ძაბვის ვექტორს, რომლის უწყვეტობაც ჩვენ წინა პარაგრაფში მოვითხოვეთ, სხეულის ნებისმიერ წერტილში აქვს უწყვეტი წარმოებულები.

ვივულისებოთ, რომ განსაზღვრული სხეული წონასწორობის მდგომარეობაშია და, გამყარების პრინციპის თანახმად, დავწეროთ სხეულიდან აზრობრივად გამოყოფილი ნებისმიერი V მოცულობის, რომლის S საზღვარი არ ეხება სხეულის საზღვარს, წონასწორობის

$$\iiint_V \vec{\Phi} dV + \iint_S \vec{X}_n dS = 0, \quad (1.3.1)$$

$$\iiint_V [\vec{x}, \vec{\Phi}] dV + \iint_S [\vec{x}, \vec{X}_n] dS = 0 \quad (1.3.2)$$

პირობები.

ოქტკათ, $\vec{n}$ არის S ზედაპირის გარე ნორმალი. თუ (1.2.2)-ს

ჩავსვამთ (1.3.1)-ის მეორე შესაკრებში, გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულის*) თანახმად, მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} \iint_S \bar{X}_{,,} dS &= \iint_S X_{,,} \bar{e}_i n_j dS \\ &= \iiint_V (X_{,,} \bar{e}_i)_{,j} dV = \iiint_V X_{,,j} \bar{e}_i dV. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

(1.3.1) და (1.3.3)-დან ცხადია, რომ

$$\iiint_V (\Phi_{,i} + X_{,,j}) \bar{e}_i dV = 0.$$

ინტეგრალქვეშა გამოსახულების უწყვეტობისა და V არის ნებისმიერობის გამო

$$(\Phi_{,i} + X_{,,j}) \bar{e}_i = 0. \quad (1.3.4)$$

რადგან $\bar{e}_i$, $i=1,2,3$, წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემაა, ამიტომ

$$\Phi_{,i} + X_{,,j} = 0, \quad i=1,2,3. \quad (1.3.5)$$

ამ განტოლებათა სისტემას წონასწორობის განტოლებებს უწოდებენ.

ანალოგიურად გარდაექმნათ (1.3.2)-ის მეორე შესაკრები

*) გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულა სამართლიანია, თუ S ზედაპირი ლიპშიცისაა (იხ. დამატება 1). განსახილველი სხეულის საზღვარი კი შეიძლება იყოს არალიპშიცურიც, რადგან წონასწორობის განტოლებები გამოგვეყვას არეში და არა არის ჩაკეტვაზე, რომელიც სხეულს უკავია, და ამდენად, ყოველთვის მოიძებნება სხეულის ნებისმიერი შიგა წერტილის შემცველი ზემოხსენებული V არე ლიპშიცის საზღვრით.

**) i -თი აღვნიშნავთ წარმოებულს X_i ცვლადის მიმართ, ხოლო ij -თი — მეორე რიგის წარმოებულს X_i და X_j ცვლადების მიმართ. მაგალითად,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \equiv u_{,i}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \equiv u_{,ij}.$$

$$\begin{aligned}
\iint_S [\bar{x}, \bar{X}_n] dS &= \iint_S [\bar{x}, X_{ji} \bar{e}_i] n_j dS = \iiint_V [\bar{x}, X_{ji} \bar{e}_i]_j dV \\
&= \iiint_V [\bar{x}_j, X_{ji} \bar{e}_i] dV + \iiint_V [\bar{x}, (X_{ji} \bar{e}_i)_j] dV \\
&= \iiint_V [\bar{e}_j, X_{ji} \bar{e}_i] dV + \iiint_V [\bar{x}, X_{ji,j} \bar{e}_i] dV.
\end{aligned}$$

ჩავსვათ ეს უკანასკნელი (1.3.2)-ში

$$\iiint_V [\bar{x}, (\Phi_i + X_{ji,j}) \bar{e}_i] dV + \iiint_V [\bar{e}_j, X_{ji} \bar{e}_i] dV = 0.$$

პირველი შესაკრები (1.3.4)-ის ძალით ნულის ტოლია, ხოლო მეორე შესაკრებიდან ინტეგრალქვეშა გამოსახულების უწყვეტობისა და V -ს ნებისმიერობის გამო ვიღებთ, რომ

$$[\bar{e}_j, X_{ji} \bar{e}_i] = X_{ji} [\bar{e}_j, \bar{e}_i] = 0.$$

ჩავწეროთ ეს უკანასკნელი ცხადი ჯამის სახით და გავითვალისწინოთ, რომ $[\bar{e}_i, \bar{e}_j] = 0$, თუ $i = j$, და $[\bar{e}_i, \bar{e}_j] = -[\bar{e}_j, \bar{e}_i]$, თუ $i \neq j$, მაშინ

$$\begin{aligned}
&X_{12}[\bar{e}_1, \bar{e}_2] + X_{13}[\bar{e}_1, \bar{e}_3] + X_{21}[\bar{e}_2, \bar{e}_1] \\
&+ X_{23}[\bar{e}_2, \bar{e}_3] + X_{31}[\bar{e}_3, \bar{e}_1] + X_{32}[\bar{e}_3, \bar{e}_2] \\
&= (X_{12} - X_{21})[\bar{e}_1, \bar{e}_2] + (X_{23} - X_{32})[\bar{e}_2, \bar{e}_3] + (X_{31} - X_{13})[\bar{e}_3, \bar{e}_1] \\
&= (X_{12} - X_{21})\bar{e}_3 + (X_{23} - X_{32})\bar{e}_1 + (X_{31} - X_{13})\bar{e}_2 = 0,
\end{aligned}$$

გ.ი.

$$X_{ij} = X_{ji}, \quad i \neq j.^*) \quad (1.3.6)$$

*) (1.3.6) ადვილად მტკიცდება შემდეგი მსჯელობითაც: თუ $(\bar{e}_i)_j := \delta_{ij}$, $\bar{e}_i$

და

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k; \\ 1, & j = k, \end{cases}$$

ამრიგად, ძაბვის ტენზორი სიმეტრიულია.

თუ გარემოს რაიმე წერტილში ავიღებთ მასზე გამავალ ორი ზედაპირის უსასრულოდ მცირე ელემენტს შესაბამისად $\vec{n}' = (n'_1, n'_2, n'_3)$ და $\vec{n}'' = (n''_1, n''_2, n''_3)$ ნორმალებით, მაშინ ერთ ელემენტზე მოქმედი $\vec{X}_n$ ძაბვის ვექტორის გეგმილი მეორის ნორმალზე უდრის მეორეზე მოქმედი $\vec{X}_n$ ძაბვის ვექტორის გეგმილს პირველის ნორმალზე:

$$\text{გეგ } n \cdot \vec{X}_n = \text{გეგ } n' \cdot \vec{X}_{n'}. \quad (1.3.7)$$

მართლაც, (1.2.1)-ის თანახმად,

$$\text{გეგ } n \cdot \vec{X}_n = (\vec{X}_n, n) = X_{n_i} n_i = X_{ij} n_j n_i. \quad (1.3.8)$$

ანალოგიურად,

$$\text{გეგ } n' \cdot \vec{X}_{n'} = X_{ij} n_j n'_i.$$

ამ გამოსახულების მარჯვენა მხარეში თუ აჯამების ინდექსებს ადგილებს შევუცვლით და გავითვალისწინებთ (1.3.6)-ს, მივიღებთ, რომ

$$\text{გეგ } n' \cdot \vec{X}_{n'} = X_{ij} n_i n'_j. \quad (1.3.9)$$

კრონეკერის სიმბოლოა, მაშინ

$$\begin{aligned} X_{lm} [\vec{e}_l, \vec{e}_m] &= X_{lm} \in_{ijk} \vec{e}_i (\vec{e}_l)_j (\vec{e}_m)_k \\ &= \in_{ijk} X_{lm} \delta_{lj} \delta_{mk} \vec{e}_i = \in_{ijk} X_{jk} \vec{e}_i = 0, \end{aligned}$$

საიდანაც

$$\in_{ijk} X_{jk} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

ამდენად,

$$\in_{1jk} X_{jk} = \in_{123} X_{23} + \in_{132} X_{32} = X_{23} - X_{32} = 0,$$

ე.ი. $X_{23} = X_{32}$. ანალოგიურად, $i = 2$ და $i = 3$ -ისთვის მივიღებთ $X_{13} = X_{31}$ და $X_{12} = X_{21}$, შესაბამისად.

(1.3.8) და (1.3.9) ტოლობების შედარებით, რადგან მათი მარჯვენა მხარეები ტოლია, ვრწმუნდებით (1.3.7)-ის სამართლიანობაში.

§1.4. კოორდინატთა სისტემის შეცვლა. ინვარიანტული კვადრატული ფორმა

ვთქვათ, ახალი $O'x^1x^2x^3$ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის ღერძების ორტეხია $\bar{e}^i$, $i=1,2,3$, ხოლო ძველი $Ox_1x_2x_3$ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის ორტეხია $\bar{e}_j$, $j=1,2,3$. მაშინ ახალი სისტემის ღერძების მიმმართებული კოსინუსები ძველი სისტემის მიმართ (და პირიქით), მოცემულია შემდეგი ტოლობებით

$$\alpha_{ij} \equiv \alpha_j^i := (\bar{e}^i, \bar{e}_j) = \cos(x^i, x_j)^*.$$

ახალ კოორდინატთა სისტემაში ძაბვები აღვნიშნოთ $\tilde{X}_{k^*}$ -ით, მაშინ, (1.3.8)-ის თანახმად,

$$X^k \equiv \tilde{X}_k := \text{გვ } x^i \tilde{X}_{x^i} \equiv \text{გვ } \bar{e}^i \tilde{X}_{\bar{e}^i} = X_j \alpha_j^k \alpha_i^j. \quad (1.4.1)$$

ეს ტოლობები გვაძლევენ კავშირს ძაბვებს შორის ძველ და ახალ კოორდინატთა სისტემაში.

თუ მოცემულია რაიმე წესი, რომლის მიხედვითაც ყოველ კოორდინატთა სისტემას (ზოგადად მრუდწირულს) ეთანადება, ზოგადად, წერტილზე დამოკიდებული

$$A_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p}$$

$$^i \bar{e}^i = \cos(\bar{e}^i, \bar{e}_j) \bar{e}_j = \alpha_j^i \bar{e}_j,$$

$$\bar{e}_i = \cos(\bar{e}_i, \bar{e}^j) \bar{e}^j = \cos(\bar{e}^j, \bar{e}_i) \bar{e}^j = \alpha_i^j \bar{e}^j.$$

სიდიდე, მაშინ ამ სიდიდეს ეწოდება $p+q$ რანგის (p,q) ტიპის ტენზორი^{*)} (იხ., მაგ., [1]), თუ ძველი სისტემიდან ახალ სისტემაზე გადასვლის დროს ის გარდაიქმნება შემდეგი ფორმულებით:

$$\tilde{A}_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} = A_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial x_{j_1}} \dots \frac{\partial x^{k_p}}{\partial x_{j_p}} \cdot \frac{\partial x_{j_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x_{j_q}}{\partial x^{i_q}}.$$

$(0,q)$ ^{**) ტიპის ტენზორს ეწოდება კოვარიანტული, ხოლო $(p,0)$ ტიპის ტენზორს – კონტრავარიანტული. რადგანაც}

$$\tilde{A}^{k_1} := dx^{k_1} = \frac{\partial x^{k_1}}{\partial x_{j_1}} dx_{j_1} = A^{i_1} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial x_{j_1}}, \quad A^{i_1} := dx_{j_1};$$

და

$$\tilde{A}_{i_1} := \frac{\partial f}{\partial x^{i_1}} = \frac{\partial f}{\partial x_{j_1}} \frac{\partial x_{j_1}}{\partial x^{i_1}} = A_{j_1} \frac{\partial x_{j_1}}{\partial x^{i_1}}, \quad A_{j_1} := \frac{\partial f}{\partial x_{j_1}},$$

სადაც, f სკალარული სიდიდეა, ცხადია, რომ ყოველი კონტრავარიანტული ინდექსის მიმართ გარდაქმნა ხდება კოორდინატების დიფერენციალების გარდაქმნის ფორმულების შესაბამისად, ხოლო ყოველი კოვარიანტული ინდექსის მიმართ – სკალარის წარმოებულების გარდაქმნის შესაბამისად.

შევნიშნოთ, რომ დეკარტის მართკუთხა სისტემის კოორდინა-

^{*)}ორი $A := A_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m}$ და $B := B_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p}$ ტენზორის პირდაპირი ნამრავლი ეწოდება

$$C := C_{j_1 \dots j_n, l_1 \dots l_q}^{i_1 \dots i_m, k_1 \dots k_p} := A_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} \cdot B_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p}$$

ტენზორს. მოკლედ ის შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$C = A \otimes B.$$

^{**) $p=0$ და $q=0$ ნიშნავს, რომ შესაბამისი ინდექსები არ გვაქვს.}

ტების შემთხვევაში

$$x_l = \alpha_l^k x^k + \beta_l, \quad l = 1, 2, 3; \quad x^k = \alpha_l^k x_l - \alpha_l^k \beta_l, \quad k = 1, 2, 3, \quad (1.4.2)$$

სადაც $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \overline{OO'}$. ამიტომ, თუ გავაწარმოებთ (1.4.2)-ს, მივიღებთ

$$\frac{\partial x^k}{\partial x_l} = \alpha_l^k \frac{\partial x_j}{\partial x_l} = \alpha_l^k \delta_{jl} = \alpha_l^k,$$

$$\frac{\partial x_l}{\partial x^k} = \alpha_l^j \frac{\partial x^j}{\partial x^k} := \alpha_l^j \delta_{jk} = \alpha_l^k.$$

აქ

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k; \\ 1, & j = k, \end{cases}$$

კრონეკერის*) სიმბოლოა. ამდენად,

$$\alpha_l^k = \frac{\partial x^k}{\partial x_l} = \frac{\partial x_l}{\partial x^k}. \quad (1.4.3)$$

ამიტომ ამ შემთხვევაში კოვარიანტული და კონტრავარიანტული ტენზორები ერთმანეთს ემთხვევა.

(1.4.3)-ის თანახმად, ცხადია, (1.4.1) შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$$X^k \equiv \tilde{X}_{kl} = X_j \frac{\partial x^k}{\partial x_j} \frac{\partial x^l}{\partial x_i} = X_j \frac{\partial x_j}{\partial x^k} \frac{\partial x_l}{\partial x^l}.$$

ეს კი ტენზორის განმარტების თანახმად იმას ნიშნავს, რომ X_j მერე რანგის ტენზორია.

ზოგადად, დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში,

$$\frac{\partial x^{k_1}}{\partial x_{i_1}} = \alpha_{i_1}^{k_1}, \dots, \frac{\partial x^{k_p}}{\partial x_{i_p}} = \alpha_{i_p}^{k_p}; \quad \frac{\partial x_{j_1}}{\partial x^{l_1}} = \alpha_{j_1}^{l_1}, \dots, \frac{\partial x_{j_q}}{\partial x^{l_q}} = \alpha_{j_q}^{l_q}.$$

*) ლ. კრონეკერი (1823-1891).

კერძოდ,

$$A' \equiv \tilde{A}_i = \alpha'_i A_j, \quad A'' \equiv \tilde{A}_{ij} = \alpha'_k \alpha'_l A_{kl},$$

$$A''' \equiv \tilde{A}_{ijk} = \alpha'_l \alpha'_m \alpha'_n A_{lmn},$$

შესაბამისად, პირველი, მეორე და მესამე რანგის ტენზორის შემთხვევაში.

ზედაპირის n ნორმალის მქონე უსასრულოდ მცირე ელემენტის ფართის ერთეულზე მოქმედი ძაბვის $\vec{X}_n$ ვექტორის ნორმალური σ_n მდგენელი, (1.3.8)-ის თანახმად,

$$\sigma_n := X_{nn} = X_{ij} n_j n_i. \quad (1.4.4)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$2\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3) := X_{ij} \xi_i \xi_j. \quad (1.4.5)$$

$\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ მეორე რიგის მთელი რაციონალური ფუნქციაა ξ_i , $i=1,2,3$, ცვლადების მიმართ, ე.ი. ξ_i , $i=1,2,3$, ცვლადების კვადრატულ ფორმას წარმოადგენს.

ვთქვათ,

$$\vec{P} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

ზედაპირის განსახილველი უსასრულოდ მცირე ელემენტის ნორმალის დადებითი მიმართულების მქონე ვექტორია. მაშინ

$$n = \frac{\vec{P}}{P}, \quad \text{ე.ი.,} \quad n_i = \frac{\xi_i}{P}, \quad i=1,2,3, \quad (1.4.6)$$

სადაც P არის $\vec{P}$ ვექტორის სიგრძე.

(1.4.4)-(1.4.6)-ის თანახმად, ცხადია,

$$\sigma_n \cdot P^2 = 2\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (1.4.7)$$

σ_n სიდიდე, მისი განმარტებიდან გამომდინარე, ფიზიკური სიდიდეა და ამიტომ არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე. ასევე ვექტორის სიგრძის კვადრატი P^2

არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე. ამდენად, $\sigma_n \cdot P^2$ ნამრავლი არ იქნება დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე და აქედან გამომდინარე $2\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ კვადრატული ფორმა ინვარიანტულია კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნის მიმართ. საერთოდ, გამოსახულებას (ფორმას, ინტეგრალს და სხვ.), რომელიც შედგება ისეთი სიდიდეებისგან, რომლებიც დამოკიდებულია კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე, მაგრამ არ იცვლის თავის მნიშვნელობას და სტრუქტურას კოორდინატთა ერთი სისტემის მეორეთი შეცვლის დროს, ეწოდება ინვარიანტული (ინვარიანტული ფორმა, ინვარიანტული ინტეგრალი და სხვ.).

მართლაც, თუ $\tilde{\xi}_i$ $i=1,2,3$, $\tilde{P}$ ვექტორის კომპონენტებია ახალ კოორდინატთა სისტემაში და $\tilde{\Omega}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3)$ -ით აღვნიშნავთ ახალ კოორდინატთა სისტემაში (1.4.5) წესით აგებულ კვადრატულ ფორმას, მაშინ

$$\tilde{\Omega}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3) = \Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (1.4.8)$$

რადგან ერთი მხრივ ადგილი აქვს (1.4.7) ტოლობას, ხოლო მეორე მხრივ

$$\sigma_n \cdot P^2 = 2\tilde{\Omega}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3).$$

თუ (1.4.8)-ს გადმოვწერთ ცხადი სახით:

$$\tilde{X}_k \tilde{\xi}_k \tilde{\xi}_l = X_{ij} \xi_i \xi_j \quad (1.4.9)$$

და ამ უკანასკნელში ჩავსვათ ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილ ლეკარტის მართკუთხა ახალ და ძველ კოორდინატთა სისტემებში ვექტორის კომპონენტებს შორის კავშირის

$$\xi_i = x_i - x_i^0 = \alpha_i^k (\tilde{x}_k - \tilde{x}_k^0) + \beta_i - \beta_i = \alpha_i^k \tilde{\xi}_k,$$

ე.ი.,

$$\xi_i = \alpha_i^k \tilde{\xi}_k, \quad \xi_j = \alpha_j^k \tilde{\xi}_k \quad (1.4.10)$$

ფორმულებს, რომლებიც, ცხადია, გამომდინარეობს (1.4.2)-დან, კვლავ მივიღებთ (1.4.1)-ს.

§1.5. მთავარი ძაბვები. ძაბვის მთავარი მიმართულებები. ძაბვის ზედაპირი

მიმართულებას, რომლის პერპენდიკულარული ზედაპირის უსასრულოდ მცირე ელემენტზე მხოლოდ ნორმალური ძაბვის ვექტორი მოქმედებს, განსახილველ წერტილში ძაბვის მთავარი მიმართულება ეწოდება, ხოლო შესაბამის ნორმალურ ძაბვას – მთავარი ძაბვა. ე.ი. მთავარი ძაბვის ვექტორი ზედაპირის უსასრულოდ მცირე ელემენტის ნორმალის პარალელურია. ამდენად

$$\vec{X}_n = \sigma \vec{n} \quad \text{ე.ი.,} \quad X_{nj} = X_{jk} n_k = \sigma n_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.5.1)$$

სადაც σ სკალარული სიდიდეა.

(1.5.1) გადმოვწეროთ შემდეგი სახით

$$(X_{jk} - \sigma \delta_{jk}) n_k = 0. \quad (1.5.2)$$

იმისათვის, რომ n_k -ს, $k = 1, 2, 3$, მიმართ ერთგვაროვან ალგებრულ განტოლებათა (1.5.2) სისტემას ჰქონდეს არატრივიალური ამონახსნი, აუცილებელი და საკმარისია

$$\det \|X_{jk} - \sigma \delta_{jk}\| = 0. \quad (1.5.3)$$

ვაჩვენოთ, რომ ამ უკანასკნელს მხოლოდ ნამდვილი σ' ფესვები აქვს. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ,

$$\sigma' = \alpha' + i\beta', \quad \beta' \neq 0, \quad (1.5.4)$$

და შესაბამისად ამისა

$$n'_k = p'_k + iq'_k. \quad (1.5.5)$$

თუ (1.5.4)-ს და (1.5.5)-ს ჩავსვამთ (1.5.2)-ში:

$$[X_{jk} - (\alpha' + i\beta')\delta_{jk}](p'_k + iq'_k) = 0$$

და გამოვყოფთ ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს, მივიღებთ, რომ

$$(X_{jk} - \alpha^l \delta_{jk}) p'_k + \beta^l \delta_{jk} q'_k = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$(X_{jk} - \alpha^l \delta_{jk}) q'_k - \beta^l \delta_{jk} p'_k = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

პირველი ტოლობა გავამრავლოთ q'_j -ზე, მეორე - p'_j -ზე და ორივე ავჯამოთ 1-დან 3-მდე j -ის მიმართ; პირველი ტოლობის პირველ ჯამში გადავსვათ j და k ინდექსები, გამოვიყენოთ X_{jk} -ს და δ_{jk} -ს სიმეტრიულობა*) და მიღებულ ტოლობას გამოვაკლოთ მეორე ტოლობა, მივიღებთ

$$\beta^l (\delta_{jk} p'_j p'_k + \delta_{jk} q'_j q'_k) = 0,$$

ე.ი.

$$\beta^l (p'_k p'_k + q'_k q'_k) = 0, \quad l = 1, 2, 3. \quad (1.5.6)$$

რადგანაც ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება არაუარყოფითია და ამასთან p'_k , q'_k ყველა ერთდროულად არ ხდება ნული (რამდენადაც ჩვენ დავუშვით, რომ (1.5.2)-ს აქვს არატრивиალური ამონახსნი), ამიტომ

$$\beta^l = 0.$$

ე.ი. მივიღეთ წინააღმდეგობა და, ამდენად, σ^l ნამდვილია. ამიტომ n'_k , როგორც ნამდვილკოეფიციენტებიან წრფივ განტო-

$$^*) (X_{jk} - \alpha^l \delta_{jk}) p'_k q'_j + \beta^l \delta_{jk} q'_k q'_j = 0,$$

$$(X_{jk} - \alpha^l \delta_{jk}) q'_k p'_j - \beta^l \delta_{jk} p'_k p'_j = 0;$$

$$(X_{kj} - \alpha^l \delta_{kj}) p'_j q'_k + \beta^l \delta_{jk} q'_k q'_j = 0,$$

$$(X_{jk} - \alpha^l \delta_{jk}) p'_j q'_k + \beta^l \delta_{jk} q'_k q'_j = 0.$$

ლებათა სისტემის ამონახსნი, ასევე ნამდვილი იქნება^{*)}. σ' -ებს ეწოდებათ ძაბვის ტენზორის მთავარი კომპონენტები, ხოლო n'_k -ები მათი მიმმართველი კოსინუსებია.

ვთქვათ, σ' და σ'' (1.5.3) განტოლების ორი ერთმანეთის არატოლი ფესვია, ხოლო n'_k და n''_k კი n_k -ს შესაბამისი მნიშვნელობებია. მაშინ, (1.5.2)-ის თანახმად,

$$(X_{jk} - \sigma' \delta_{jk}) n'_k = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$(X_{jk} - \sigma'' \delta_{jk}) n''_k = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

პირველი გაუმრავლოთ n''_j -ზე, ხოლო მეორე – n'_j -ზე, პირველში გადავსვათ j და k , გამოვიყენოთ X_{jk} -ს და δ_{jk} -ს სიმეტრიულობა და მიღებულს გამოვაკლოთ მეორე:

$$(\sigma'' - \sigma') \delta_{jk} n'_j n''_k = 0.$$

აქედან, რადგან $\sigma'' \neq \sigma'$, გამომდინარეობს, რომ

$$n'_j n''_j = (n', n'') = 0,$$

ე.ი. ძაბვის მთავარი მიმართულებები ორთოგონალურია. თუ სამივე ფესვი ერთმანეთისგან განსხვავებულია, მაშინ გვექნება სამი ცალსახად განსაზღვრული ურთიერთმართობი მთავარი მიმართულება. თუ ორი ფესვი ერთმანეთის ტოლია $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$, მაშინ σ_3 -ის შესაბამისი $\bar{n}^3$ მთავარი მიმართულება $\bar{n}^1$ და $\bar{n}^2$ ვექტორებზე გამავალი სიბრტყის ორთოგონალური იქნება. ამდენად, ამ სიბრტყეში აღებული ნებისმიერი

^{*)} თუ სისტემის რანგი 2-ის ტოლია, მაშინ ნორმალის $n'_k n''_k = 1$ თვისებიდან გამომდინარე ის ცალსახად განისაზღვრება (იხ. Gould Ph. L., Introduction to Linear Elasticity, Springer, 2013, გვ. 32, 33).

ორი ურთიერთმართობი მიმართულება შესაბამის მთავარ მიმართულებად შეიძლება იქნას მიღებული. თუ $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, მაშინ ნებისმიერი სამი ურთიერთმართობი მიმართულება შეიძლება მიღებულ იქნას მთავარ მიმართულებად.

(1.5.3) კუბური განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0, \quad (1.5.7)$$

სადაც

$$\begin{aligned} I_1 &= X_{11} + X_{22} + X_{33}, \\ I_2 &= \begin{vmatrix} X_{22} & X_{23} \\ X_{32} & X_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_{11} & X_{13} \\ X_{31} & X_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{vmatrix}, \\ I_3 &= \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

როგორც ცნობილია, (1.5.7) კუბური განტოლების ფესვებსა და კოეფიციენტებს შორის კავშირს აქვს შემდეგი სახე^{*)}:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix} = \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2, \end{aligned} \quad (1.5.8)$$

^{*)} $(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0$, საიდანაც

$$\sigma^3 - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\sigma^2 + (\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2)\sigma - \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0.$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.$$

კუბური განტოლების ფესვები, როგორც ნორმალური ძაბვები, დამოკიდებული არ არიან კოორდინატთა სისტემის შეცვლაზე, ამიტომ (1.5.8) ტოლობების თანახმად, მათი საშუალებით გამო-სახული I_1 , I_2 და I_3 სიდიდეები არაა დამოკიდებული კოორ-დინატთა სისტემის შეცვლაზე. მათ *ძაბვის ტენზორის ინვარიან-ტები ეწოდებათ*.

§4-ში შემოღებული $\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ კვადრატული ფორმა სა-შუალებას გვაძლევს, მივიღოთ სხეულის რაიმე გარკვეულ წერ-ტილში გატარებული ზედაპირის უსასრულოდ მცირე ელემენტის ორიენტაციაზე ძაბვის ვექტორის დამოკიდებულების მეტად მარ-ტივი და თვალსაჩინო გეომეტრიული სურათი.

ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ სხეულის წერტილი მდებარეობს კოორდინატთა სისტემის სათა-ვეში.

შემდგომში ჩვენ გამოვირიცხავთ, რომ

$$\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \equiv 0,$$

რადგან ამ უკანასკნელ შემთხვევაში (1.4.5)-ის გამო

$$X_{,j}(0,0,0) = 0,$$

და, ამდენად, განსახილველ $(0,0,0)$ წერტილში ძაბვები საერთოდ არ გვექნება.

რამდენადაც (1.4.7) ტოლობაში $\vec{P}$ ვექტორის სიგრძე ნების-მიერია, ჩვენ შეგვიძლია, იგი ისე შევარჩიოთ, რომ ნებისმიერი $\vec{n}$ ნორმალის შემთხვევაში

$$\sigma_n \cdot P^2 = \pm c^2, \quad (1.5.9)$$

სადაც c ნულისგან განსხვავებული ნებისმიერი ფიქსირებული მუდმივია. იმ შემთხვევაში, როცა $\sigma_n = 0$, ვიგულისხმებთ, რომ $P = +\infty$. მაშასადამე,

$$P = \sqrt{\frac{\pm c^2}{\sigma_n}}, \quad \sigma_n = \frac{\pm c^2}{P^2},$$

ამასთან c^2 -ის წინ ნიშანი ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ $\pm c^2$ და σ_n ან ორივე დადებითი უნდა იყოს, ან ორივე უარყოფითი.

თუ განვიხილავთ კოორდინატთა სისტემის სათავეში საწყისი წერტილის მქონე $\vec{P}$ ვექტორების ბოლო წერტილების წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, (1.5.9), (1.4.7) და (1.4.5)-ის თანახმად, მივიღებთ *მეორე რიგის ცენტრიან ზედაპირს ცენტრით კოორდინატთა სისტემის სათავეში*, რომლის განტოლებაა

$$X_{ij}\xi_i\xi_j = \pm c^2. \quad (1.5.10)$$

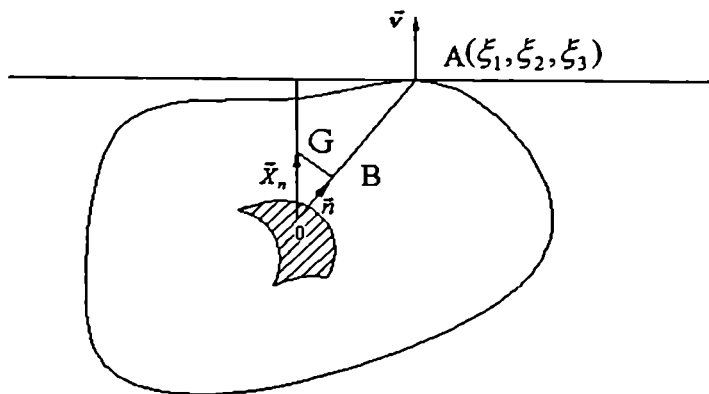
მიღებულ ზედაპირს ეწოდება მოცემული წერტილის (ჩვენს შემთხვევაში სათავის) *ძაბვის ზედაპირი*.

თუ მოცემულია ძაბვის ზედაპირი, ძაბვის ვექტორის აგება დიდ სიძნელეს არ წარმოადგენს. მართლაც, კოშის (1.2.1) ფორმულის და (1.4.6), (1.4.5)-ის თანახმად

$$X_{nk} = X_{jk} n_j = \frac{1}{P} X_{jk} \xi_j = \frac{1}{P} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_k}, \quad (1.5.11)$$

რადგან

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_k} &= \frac{\partial X_{ij} \xi_i \xi_j}{\partial \xi_k} = X_{ij} \delta_{ik} \xi_j + X_{ij} \xi_i \delta_{jk} \\ &= X_{kj} \xi_j + X_{ik} \xi_i = X_{jk} \xi_j + X_{jk} \xi_j = 2 X_{jk} \xi_j. \end{aligned}$$



ნახ. 1.5.1

(1.5.11) იმას ნიშნავს, რომ $\bar{X}_n$ პარალელურია $grad \Omega$ -სი, ე.ი. (1.5.10) ზედაპირის $\bar{v}$ ნორმალის^{*)} (იხ. ნახ. 1.5.1), რომელიც გავლებულია $\bar{P}$ ვექტორისა და ძაბვის ზედაპირის

^{*)}როგორც ანალიზის კურსიდანაა ცნობილი, თუ $\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ ზედაპირის განტოლებაა, მაშინ მის (ξ_1, ξ_2, ξ_3) წერტილში გავლებული $\bar{v}$ ნორმალის v_i კომპონენტები გამოითვლება შემდეგი ფორმულების შესაბამისად

$$v_i = \frac{\pm \Omega_{,i}}{\sqrt{(\Omega_{,1})^2 + (\Omega_{,2})^2 + (\Omega_{,3})^2}}, \quad i = 1, 2, 3,$$

აქედან

$$\bar{v} = \frac{\pm grad \Omega}{\sqrt{(\Omega_{,1})^2 + (\Omega_{,2})^2 + (\Omega_{,3})^2}},$$

სადაც $(\pm)$ შეესაბამება განსაზღვრულ წერტილში $\bar{v}$ ნორმალის ორ ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულებას.

თანაკვეთის A წერტილში. რამდენადაც ძაბვის ვექტორის ნორმალური მდგენელი

$$\sigma_n = OB = \frac{\pm c^2}{OA^2}, \quad (1.5.12)$$

ამიტომ $\vec{n}$ და $\vec{v}$ ნორმალებზე გამავალ სიბრტყეში B წერტილიდან $\vec{n}$ -ის პერპენდიკულარულად და O წერტილიდან $\vec{v}$ -ის პარალელურად გავლებული წრფეების თანაკვეთა მოგვცემს

$\vec{X}_n = \vec{OG}$ ძაბვის ვექტორის ბოლო წერტილს.

$\vec{X}_n$ ვექტორი ზედაპირის უსასრულოდ მცირე ელემენტის ნორმალის გასწვრივ მიმართული იქნება მხოლოდ იმ

შემთხვევაში, როცა $\vec{OA}$ ვექტორი A წერტილში გავლებული მხები სიბრტყის პერპენდიკულარულია. მაგრამ ასეთ მიმართულებას, როგორც ანალიზური გეომეტრიიდანაა ცნობილი, ეწოდება *ზედაპირის მთავარი ღერძი*. ამ შემთხვევაში $\vec{n}$ ნორმალის მქონე ფართზე, ცხადია, მოქმედებს მხოლოდ ნორმალური ძაბვის ვექტორი და მის შესაბამის მიმართულებას, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, მეორე მხრივ ეწოდება ძაბვის მთავარი მიმართულება. ასეთი მიმართულება ზოგად შემთხვევაში, როგორც ზემოთ ვნახეთ, აღმოჩნდა სამი ურთიერთმართობი მიმართულება.

თუ კოორდინატთა ღერძებს დავამთხვევთ ძაბვის მთავარ მიმართულებებს, ე. ი. ზედაპირის მთავარ ღერძებს, მაშინ ცხადია, $X_{ij} = 0$, $i \neq j$, და დაგვრჩება მხოლოდ ნორმალური ძაბვები.

$$\sigma_i = X_{ii}$$

და ძაბვის ზედაპირის (1.5.10) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\sigma_i \xi_i^2 = \pm c^2. \quad (1.5.13)$$

იმისდა მიხედვით, თუ რა ნიშნები აქვს σ_i მთავარ ძაბვებს, გვექნება სხვადასხვა შემთხვევა.

ვთქვათ,

$$\sigma_i > 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

მაშინ, ცხადია, (1.5.13) მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\sigma_i \xi_i^2 = c^2,$$

რაც ელიფსოიდის განტოლებაა.

(1.5.12)-დან გვეჩვენება, რომ

$$\sigma_n = \frac{c^2}{OA^2},$$

ე.ი. (0,0,0) წერტილზე გამავალ ნებისმიერად ორიენტირებულ ფართზე მოქმედი ძაბვის ვექტორის ნორმალური მდგენელი გამჭიმავია.

თუ

$$\sigma_i < 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

მაშინ

$$\sigma_i \xi_i^2 = -c^2, \quad \text{ე. ი. } |\sigma_i| \xi_i^2 = c^2$$

და ძაბვის ზედაპირი კვლავ ელიფსოიდია, ხოლო ძაბვის ვექტორის ნორმალური მდგენელი გამოითვლება

$$\sigma_n = -\frac{c^2}{OA^2}$$

ფორმულით და იგი მკუმშავი იქნება.

თუ

$$\sigma_\alpha > 0, \quad \alpha = 1, 2; \quad \sigma_3 < 0,$$

მაშინ (1.5.13)-ს ექნება

$$\sigma_\alpha \xi_\alpha^2 - |\sigma_3| \xi_3^2 = +c^2 \quad (1.5.14)$$

ან

$$\sigma_\alpha \xi_\alpha^2 - |\sigma_3| \xi_3^2 = -c^2 \quad (1.5.15)$$

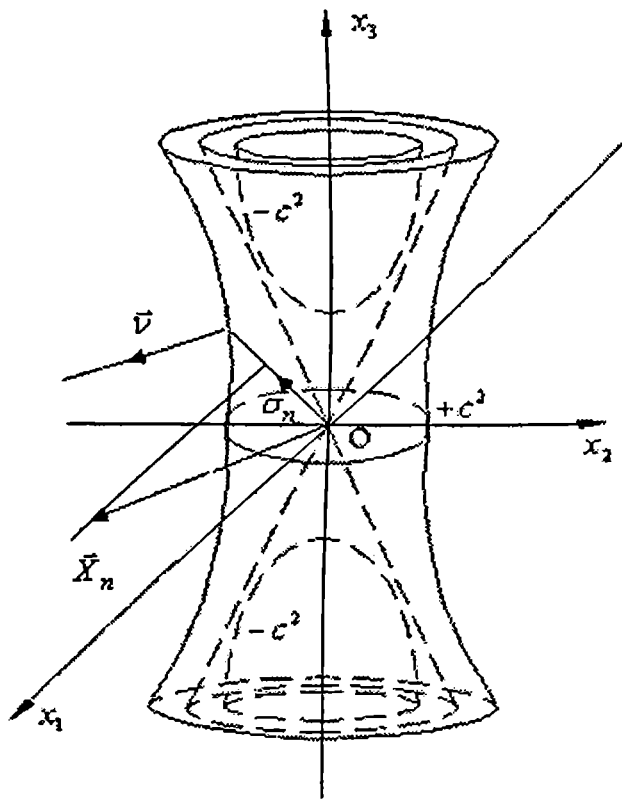
სახე.

(1.5.14) განტოლებით მოცემული ზედაპირი ცალკალთა ჰი-

პერბოლოიდია (იხ. ნახ. 1.5.2), ხოლო (1.5.15) განტოლებით მოცემული ზედაპირი ორკალთა ჰიპერბოლოიდია. აღნიშნული ზედაპირები ერთმანეთისგან გამოყოფილია ასიმპტოტური კონუსით:

$$\sigma_a \xi_a^2 - |\sigma_3| \xi_3^2 = 0,$$

რომელიც ნახაზზე წყვეტილი ხაზით არის მოცემული.



ნახ. 1.5.2

თუ ზედაპირის უსასრულოდ მცირე ელემენტის ნორმალ ასიმ-

პტოტური კონუსის გარეთაა მიმართული, მაშინ ის კვეთს ცალ-
კალთა ჰიპერბოლოიდს და ნორმალური დაბეა გამჭიმავია:

$$\sigma_n = \frac{c^2}{OA^2},$$

ხოლო თუ ნორმალი ასიმპტოტური კონუსის შიგნითაა მიმართუ-
ლი, მაშინ ის კვეთს ორკალთა ჰიპერბოლოიდს და დაბეა მკუმშ-
ვია:

$$\sigma_n = -\frac{c^2}{OA^2}.$$

თუ ფართის ნორმალი ასიმპტოტურ კონუსზე მდებარეობს,
მაშინ იგი დაბვის ზედაპირს არ ჰკვეთს, $OA = +\infty$ და $\sigma_n = 0$,
ე.ი. შესაბამისად ორიენტირებულ ფართზე მხოლოდ მხები დაბვე-
ბი მოქმედებენ.

შემთხვევა

$$\sigma_\alpha < 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad \sigma_3 > 0$$

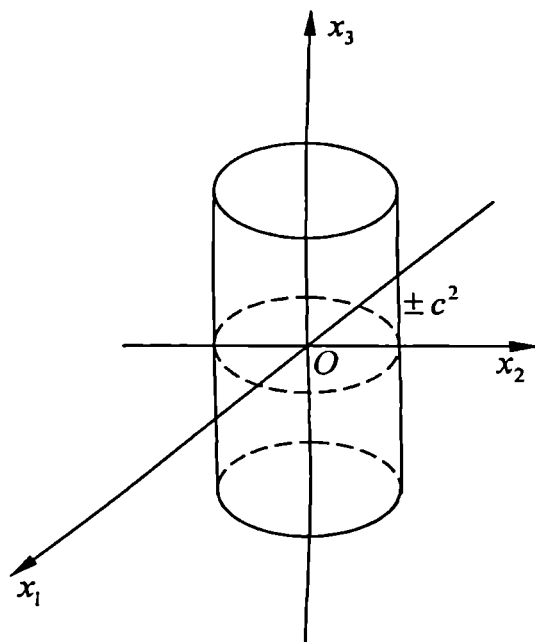
წინა შემთხვევისგან მხოლოდ იმით განსხვავდება, რომ ადგი-
ლებს იცვლიან გაჭიმვისა და კუმშვის ზონები.

ნიშნების განაწილების სხვა შემთხვევებში განხილული წინა
ორი შემთხვევისგან განსხვავებით მხოლოდ საკოორდინატო ღერ-
ძები იცვლიან როლებს.

თუ ერთ-ერთი მთავარი დაბეა ნულის ტოლია, ხოლო დანარ-
ჩენი ორი – ნულისგან განსხვავებული, მაგალითად, $\sigma_3 = 0$ და
 $\sigma_\alpha \neq 0$, $\alpha = 1, 2$, მაშინ დაბვის ზედაპირები იქნებიან x_3 ღერ-
ძის პარალელური მსახველების მქონე ცილინდრული ზედაპირე-
ბი. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ გვაქვს *ბრტყელი დაბებული*
მდგომარეობა (იხ. §2.2) მოცემულ წერტილში (იხ. ნახ. 1.5.3 და
ნახ. 1.5.4). x_3 ღერძის პერპენდიკულარული სიბრტყით კვეთაში
ვიღებთ ან ელიფსს, ან ორ ჰიპერბოლას.

თუ ერთი მთავარი დაბეა ნულისგან განსხვავებულია, ხოლო

დანარჩენი ორი – ნულის ტოლი, მაგალითად, $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$, $\sigma_2 \neq 0$, მაშინ გვაქვს ორი პარალელური სიბრტყე (იხ. ნახ. 1.5.5). ასეთ დამაბულ მდგომარეობას შეიძლება ვუწოდოთ x_2 ღერძის პარალელური წრფივი დამაბული მდგომარეობა მოცემულ წერტილში.

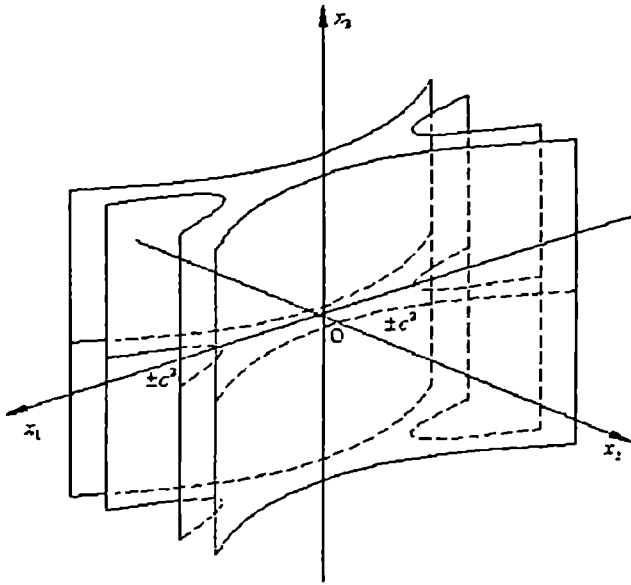


$$\sigma_\alpha > 0, \alpha = 1, 2; \quad \sigma_1 \xi_1^2 + \sigma_2 \xi_2^2 = c^2$$

ან

$$\sigma_\alpha < 0, \alpha = 1, 2; \quad -|\sigma_1| \xi_1^2 - |\sigma_2| \xi_2^2 = -c^2$$

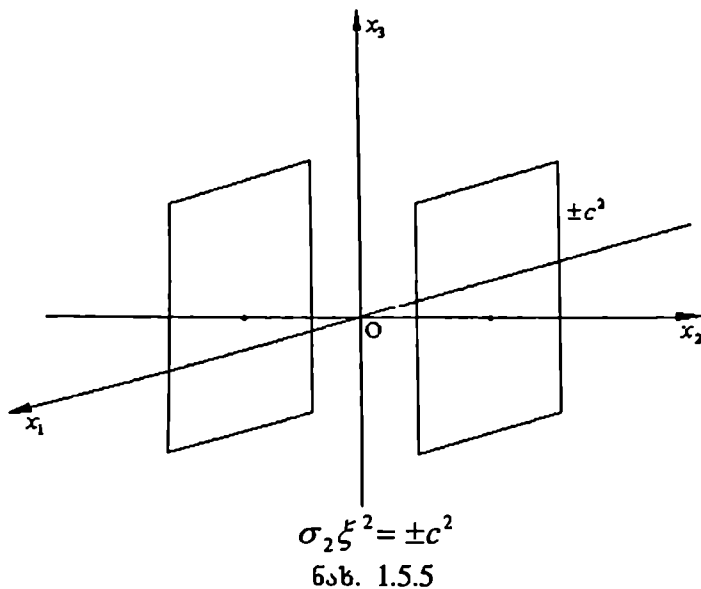
ნახ. 1.5.3



$$\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0; \quad \sigma_1 \xi_1^2 - |\sigma_2| \xi_2^2 = \pm c^2$$

$$\sigma_1 < 0, \sigma_2 > 0; \quad -|\sigma_1| \xi_1^2 + \sigma_2 \xi_2^2 = \pm c^2$$

б.б. 1.5.4



§1.5.1 ბორის წრეები

დავსვათ ამოცანა გარემოს მოცემულ წერტილში ზედაპირის იმ უსასრულოდ მცირე ელემენტის n ნორმალის მოძებნის თაობაზე, რომელ უსასრულოდ მცირე ელემენტზეც მოქმედი ძაბვის ვექტორის σ_n ნორმალური და τ_n მხები მდგენელები^{*)} იღებენ წინასწარ დასახელებულ მნიშვნელობებს (იხ. [50]). თუ საკოორდინატო ღერძებად ავიღებთ ძაბვის მთავარ ღერძებს, მაშინ

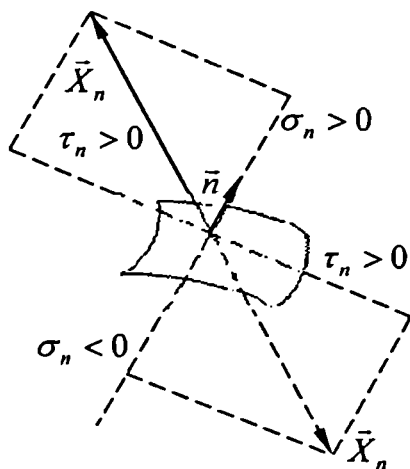
$$X_{ij} = 0, \text{ როცა } i \neq j, \text{ და } X_{ii} = \sigma_i. \text{ **)}$$

ამდენად, ერთის მხრივ, (1.2.1)-დან გამომდინარეობს, რომ

^{*)}ცხადია $\sigma_n \in]-\infty, +\infty[$, $\tau_n \in [0, +\infty[$ (იხ. ნახ. 1.5.6)

^{**) ევლთი, რომ σ_i , $i = 1, 2, 3$, მთავარი ძაბვები ვიცით და ისინი ერთმანეთისგან განსხვავებულია.}

$$X_{ni} = X_{ji}n_j = \sigma_i n_i, \quad i=1,2,3; \quad (1.5.16)$$



ნახ. 1.5.6

ხოლო მეორეს მხრივ, (1.4.4)-ის ძალით,

$$\sigma_n = X_{nn} = X_{ij}n_i n_j = X_{11}n_1^2 + X_{22}n_2^2 + X_{33}n_3^2 = \sigma_i n_i^2. \quad (1.5.17)$$

რადგან

$$\bar{X}_n = \sigma_n \bar{n} + \tau_n \bar{t},$$

სადაც $\bar{t}$ არის $\bar{X}_n$ და $\bar{n}$ ვექტორებზე გამავალ სიბრტყეში მდებარე მხების ორტი. ამიტომ, (1.5.16)-ის თანახმად,

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 = X_n^2 = X_{nn}X_{nn} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i n_i \sigma_i n_i = \sigma_i^2 n_i^2. \quad (1.5.18)$$

ცხადია, დასმული ამოცანა დადის საში n_i^2 , $i=1,2,3$, უცნობის განსაზღვრაზე (1.5.17) და (1.5.18) განტოლებებიდან, იმის გათვალისწინებით, რომ, რადგანაც $\bar{n}$ ერთეულოვანი ვექტორია, ამიტომ

$$\sum_{i=1}^3 n_i^2 = 1. \quad (1.5.19)$$

(1.5.19), (1.5.17), (1.5.18) განტოლებათა სისტემა n_1^2, n_2^2, n_3^2 -ის მიმართ წარმოადგენს წრფივ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{vmatrix} = (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) \neq 0, \text{ თუ}$$

$$\sigma_i \neq \sigma_j, \text{ როცა } i \neq j,$$

სისტემის დეტერმინანტით, რომელიც *ვანდერმონდის*^{*)} დეტერმინანტია, და

$$(1, \sigma_n, \sigma_n^2 + \tau_n^2)^T$$

მარჯვენა მხარით (T ნიშნაკი აღნიშნავს ტრანსპონირებულს). ამასთან

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_n & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_n^2 + \tau_n^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_n & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_n^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{vmatrix} \\ & + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \tau_n^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{vmatrix} \\ & = (\sigma_2 - \sigma_n)(\sigma_3 - \sigma_n)(\sigma_3 - \sigma_2) + \tau_n^2 (\sigma_3 - \sigma_2) \\ & = (\sigma_3 - \sigma_2) [\tau_n^2 + \sigma_2 \sigma_3 - (\sigma_2 + \sigma_3) \sigma_n + \sigma_n^2] \end{aligned}$$

^{*)}შ.ო. ვანდერმონდი (1735-1796).

$$\begin{aligned}
&= (\sigma_3 - \sigma_2) \left[\tau_n^2 + \sigma_n^2 - (\sigma_2 + \sigma_3) \sigma_n \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \sigma_2 \sigma_3 - \frac{(\sigma_2 + \sigma_3)^2}{4} \right] \\
&= (\sigma_3 - \sigma_2) \left[\tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

ანალოგიურად,

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_n & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_n^2 + \tau_n^2 & \sigma_3^2 \end{vmatrix} = (\sigma_1 - \sigma_3) \\
&\quad \times \left[\tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2 \right], \\
&\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_n \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_n^2 + \tau_n^2 \end{vmatrix} = (\sigma_2 - \sigma_1) \\
&\quad \times \left[\tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \right]. *)
\end{aligned}$$

ამიტომ საძიებელ ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$n_1^2 = \frac{f_1(\sigma_n, \tau_n)}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)}, \quad n_2^2 = -\frac{f_2(\sigma_n, \tau_n)}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)},$$

*) ამ ორი ფორმულის მარჯვენა მხარეს მიმდევრობით მივიღებთ დამტკიცებული ფორმულის მარჯვენა მხრიდან, თუ მოვახდენთ ინდექსების წრიულ შეცვლას $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$.

$$n_3^2 = \frac{f_3(\sigma_n, \tau_n)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}, \quad (1.5.20)$$

სადაც

$$\begin{aligned} f_1(\sigma_n, \tau_n) &:= \tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2, \\ f_2(\sigma_n, \tau_n) &:= \tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2, \\ f_3(\sigma_n, \tau_n) &:= \tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.5.21)$$

გარკვეულობისათვის დავუშვათ, რომ $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. ცხადია, განხორციელებადია, ე.ი. დასაშვებია, მხოლოდ ისეთი σ_n , τ_n , რომელთათვისაც $n_i^2 > 0$, $i = 1, 2, 3$. წინააღმდეგ შემთხვევაში (1.5.20), (1.5.21)-დან ნათელია, რომ შეუძლებელია მათი (σ_n — ის და τ_n — ის) წინასწარ ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად დასახელება (როცა $n_i = 0$ -ს, i -ს მხოლოდ ერთი მნიშვნელობისათვის)^{*)} ან, საერთოდ, დასახელება (როცა $n_i = 0$ -ს, i -ს ორი მნიშვნელობისათვის^{**) (სამივეს ნულთან ტოლობა გამოირიცხულია, რადგან $|\vec{n}| = 1$)). ამიტომ (1.5.20)-დან გამომდინარეობს, რომ}

$$f_1 > 0, \quad f_2 < 0, \quad f_3 > 0. \quad (1.5.22)$$

^{*)}რადგან მივიღებთ, რომ $f_i(\sigma_n, \tau_n) = 0$ განტოლება მოგვცემს ერთ-ერთის მეორით განსაზღვრის საშუალებას.

^{**) რადგან გვუძნება ორი განტოლება $f_i(\sigma_n, \tau_n) = 0$ და $f_j(\sigma_n, \tau_n) = 0$, $i \neq j$, ორი უცნობის განსასაზღვრავად.}

C_k , $k = 1, 2, 3$, წირები, რომლებზეც $f_k = 0$, $k = 1, 2, 3$, $\tau_n > 0$ სიბრტყეში წარმოადგენენ შემდეგ ნახევარწრეწირებს (იხ. ნახ. 1.5.7):

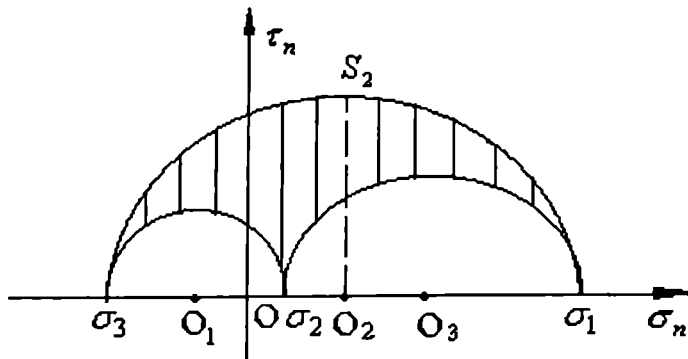
C_1 არის ნახევარწრეწირი ცენტრით $O_1\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0\right)$ წერტილში და $\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$ -ის ტოლი რადიუსით;

C_2 არის ნახევარწრეწირი ცენტრით $O_2\left(\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}, 0\right)$ წერტილში და $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ -ის ტოლი რადიუსით^{*)};

C_3 არის ნახევარწრეწირი ცენტრით $O_3\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0\right)$ წერტილში და $\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}$ -ის ტოლი რადიუსით^{*)};

^{*)}ნახევარწრეწირების $\tau_n = 0$ ღერძთან თანაკვეთის წერტილების აბსცისების მისაღებად (1.5.21), როცა $\tau_n = 0$, უნდა გაუტოლოთ 0-ს და ამოვხსნათ σ_n -ის მიმართ. ამდენად C_2 ნახევარწრეწირის σ_n ღერძთან თანაკვეთის წერტილების აბსცისებს მივიღებთ, თუ მისი ცენტრის $\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}$ აბსცისას დავმატებთ და გამოვაკლებთ C_2 -ის $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ რადიუსს. შესაბამისად, მივიღებთ $\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sigma_1$ და $\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sigma_3$. ანალოგიურად, ვაჩვენებთ, რომ C_1 -ის თანაკვეთის წერტილებია σ_2 და σ_3 , ხოლო C_3 -ის - σ_1 და σ_2 .

ტილში და $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ -ის ტოლი რადიუსით.



ნახ. 1.5.7

შევნიშნოთ, რომ რადგან $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, ამიტომ C_2 -ის რადიუსი $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} > \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$ და $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} > \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$, ე.ი. მეტია C_1 და C_3 ნახევარწრეწირების რადიუსებზე.

ნახევარწრეწირების ცენტრებში $f_k < 0$, $k=1,2,3$, რადგან იქ (1.5.21)-ის მარჯვენა მხარეებში დაგვრჩება მხოლოდ ბოლო უარყოფითი წევრები. ამიტომ $f_k > 0$, $k=1,2,3$, ნახევარსიბრტყის იმ ნაწილში, რომელიც C_k -ს, $k=1,2,3$, გარეთ მდებარეობენ. (1.5.22)-დან ნათელია, რომ (σ_n, τ_n) -ის განხორციელებადი მნიშვნელობების შესაბამისი აფიქსები მდებარეობენ ნახ. 1.5.7-ზე

მითითებულ დაშტრიხულ არეში. C_k , $k=1,2,3$, წრეწირების შესაბამის წრეებს მორის^{*)} წრეები ეწოდება.

C_2 ნახევარწრის S_2 წვერო შეესაბამება მაქსიმალურ მზებ ძაბვას, რომელიც ტოლია შემდეგი გამოსახულების

$$(\tau_n)_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (1.5.23)$$

მისი რეალიზება ხდება

$$n_1 = \pm \left[\frac{f_1\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \right]^{1/2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$n_2 = 0, \quad n_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

კომპონენტებიან ნორმალის მქონე ზედაპირის უსასრულოდ მცირე ელემენტზე. მართლაც, ეს გამოძღინარეობს (1.5.20), (1.5.21)-დან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\begin{aligned} f_1\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right) &= \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \\ &= \frac{\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2}{4} + \frac{\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}{4} \\ &+ \frac{-\sigma_2^2 + 2\sigma_2\sigma_3 - \sigma_3^2}{4} = \frac{2\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3}{4} \end{aligned}$$

^{*)}ქო. მორი (1835-1918).

$$= \frac{\sigma_1(\sigma_1 - \sigma_2) - \sigma_3(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_2)}{2}.$$

ანალოგიურად,

$$\begin{aligned} f_2\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right) &= \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 = 0, \\ f_3\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right) &= \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \\ &= \frac{\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2}{4} + \frac{\sigma_3^2 - 2\sigma_3\sigma_2 + \sigma_2^2}{4} \\ &+ \frac{-\sigma_1^2 + 2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2}{4} = \frac{2\sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_3\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_2}{4} \\ &= \frac{\sigma_3(\sigma_3 - \sigma_1) - \sigma_2(\sigma_3 - \sigma_1)}{2} = \frac{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}{2}. \end{aligned}$$

თავი II. დეფორმაციათა თეორია

§1.6. დეფორმაციის ცნება

როგორც შესავალში აღვნიშნეთ, თუ უწყვეტი გარემოს განხილვის პროცესში მასზე გარე ძალების მოქმედების შედეგად მის წერტილებს შორის მანძილები იცვლება, სხეულის წერტილთა მდებარეობის ასეთ ცვლილებას დეფორმაცია ეწოდება.

აღვნიშნოთ (x_1, x_2, x_3) -ით სხეულის რაიმე წერტილის კოორდინატები დეფორმაციამდე, ხოლო (x_1^*, x_2^*, x_3^*) -ით - მისივე კოორდინატები დეფორმაციის შემდეგ.

ეთქვას, V აღნიშნავს იმ არეს, რომელიც სხეულს უკავია დეფორმაციამდე. სხეულის ყოველი წერტილი, რომელსაც დეფორმაციამდე ეკავა სივრცის წერტილი კოორდინატებით $(x_1, x_2, x_3) \in V$ იკავებს სივრცის გარკვეულ წერტილს კოორდინატებით (x_1^*, x_2^*, x_3^*) , ე.ი. x_i^* -ები უნდა იყვნენ x_i -ების გარკვეული ფუნქციები:

$$x_i^* = \varphi_i(x_1, x_2, x_3). \quad (1.6.1)$$

ჩვენ ვუშვებთ, რომ φ_i ფუნქციები უწყვეტია V არეში (ე. ი. დეფორმაციას თან არ სდევს სხეულის რღვევა). (x_1^*, x_2^*, x_3^*) წერტილები, რომლებიც შეესაბამებიან $(x_1, x_2, x_3) \in V$ წერტილებს, შეავსებენ გარკვეულ V^* არეს. ეს იქნება ის არე, რომელსაც სხეული დაიკავებს დეფორმაციის შემდეგ. ჩვენ ასევე ვუშვებთ, რომ (1.6.1) სისტემა იხსნება x_i -ს მიმართ და რომ ისინი x_i^* ცვლადების უწყვეტი ფუნქციებია. შემოვიღოთ აღნიშვნა $x_i^\circ := x_i^*$, $i = 1, 2, 3$ (იხ., მაგ., [12]).

(1.6.1) გეომეტრიული თვალსაზრისით წარმოადგენს V არის ასახვას $V^\circ = V^*$ არეზე, მაგრამ უნდა შევნიშნოთ, რომ (1.6.1)

სახის ყოველგვარი ასახვა არ გვაძლევს დეფორმაციას. მართლაც, თუ სხეულს გადავიტანთ სივრცეში, მისი წერტილების კოორდინატები შეიცვლება, მაგრამ მის არც ერთ ორ წერტილს შორის მანძილი არ შეიცვლება. *სხეულის წერტილების კოორდინატების ისეთ ცვლილებას, როცა არ ხდება დეფორმაცია, ეწოდება ხისტი გადაადგილება.*

როგორც ეს ნახ. 1.6.1-დან გამომდინარეობს,

$$x_i^{\varphi} = \varphi_i(x_1, x_2, x_3) = x_i + u_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.6.2)$$

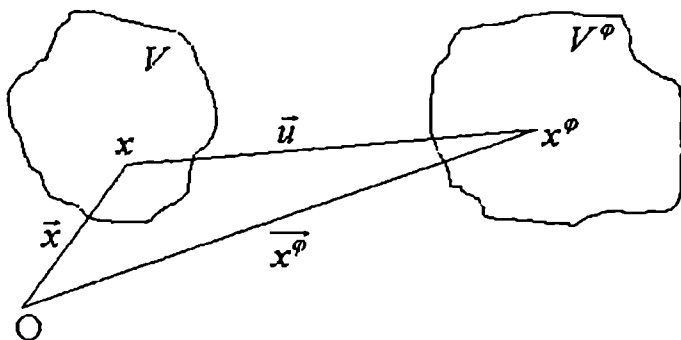
$\vec{u} := (u_1, u_2, u_3)$ ვექტორს გადაადგილების ვექტორი, ხოლო u_i , $i = 1, 2, 3$, კომპონენტებს გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები, ან უბრალოდ გადაადგილებები ეწოდება x_i , $i = 1, 2, 3$, ღერძების გასწვრივ. ვთქვათ, $u \in C^1(V)$. V არეში უსასრულოდ მცირე წრფივი ელემენტის სიგრძე აღვნიშნოთ dl -ით, ხოლო V^{φ} არეში მისი შესაბამისი უსასრულოდ მცირე წრფივი ელემენტის სიგრძე აღვნიშნოთ dl^{φ} -თი. სხვა სიტყვებით, dl -ით აღნიშნულია დეფორმაციამდე უსასრულოდ მცირე მანძილით ერთმანეთისაგან დაშორებულ ორ წერტილს შორის მანძილი, ხოლო dl^{φ} -ით აღნიშნულია ამავე წერტილებს შორის მანძილი დეფორმაციის შემდეგ.

ცხადია (იხ. ნახ. 1.6.2),

$$dl^2 = dx_i dx_i$$

და, (1.6.2)-ის გათვალისწინებით,

$$\begin{aligned} (dl^{\varphi})^2 &= dx_i^{\varphi} dx_i^{\varphi} = \frac{\partial x_i^{\varphi}}{\partial x_j} dx_j \frac{\partial x_i^{\varphi}}{\partial x_k} dx_k \\ &= \varphi_{i,j} dx_j \varphi_{i,k} dx_k = (\delta_{ij} + u_{i,j})(\delta_{ik} + u_{i,k}) dx_j dx_k \\ &= (\delta_{ij} \delta_{ik} + \delta_{ij} u_{i,k} + \delta_{ik} u_{i,j} + u_{i,j} u_{i,k}) dx_j dx_k \\ &= (\delta_{jk} + u_{j,k} + u_{k,j} + u_{i,j} u_{i,k}) dx_j dx_k. \end{aligned}$$



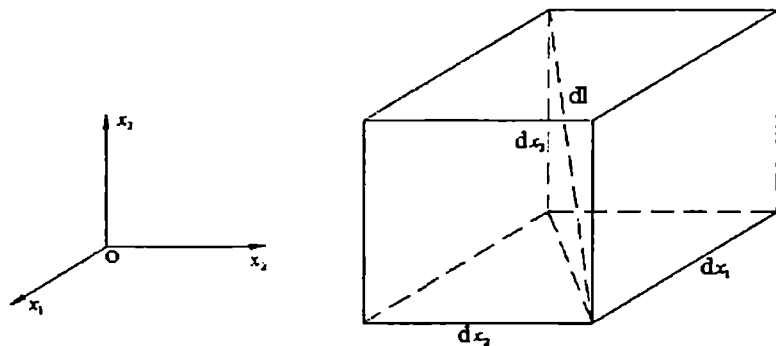
ნახ. 1.6.1

სივრცის კვადრატის ცვლილების გასაგებად მეორე ტოლობას წერ-წერად გამოვაკლოთ პირველი ტოლობა

$$(dl^\phi)^2 - dl^2 = 2e_{jk} dx_j dx_k,$$

სადაც

$$e_{jk} := \frac{1}{2}(u_{j,k} + u_{k,j} + u_{i,j}u_{i,k}), \quad j, k = 1, 2, 3.$$



ნახ. 1.6.2

თუ ერთი მაინც $e_{jk} \neq 0$, მაშინ სიგრძის კვადრატები და ამდენად თვით სიგრძე იცვლება, ე.ი. ადგილი აქვს დეფორმაციას და ამიტომ e_{jk} -ს ეწოდება დეფორმაციის ტენზორი, რომელიც, ცხადია, სიმეტრიულია. დეფორმაციის ტენზორის ეს გამოსახულება შეესაბამება გეომეტრიულად არაწრფივ თეორიას. თუ კვადრატებს და ნამრავლებს უგულებელვყოფთ თვით ამ სიდიდეებთან შედარებით (ე.ი., თუ გადაადგილებების წარმოებულების მნიშვნელობები იმდენად მცირეა, რომ ეს დასაშვებია), მაშინ მივიღებთ გეომეტრიულად წრფივი თეორიის შესაბამის შემდეგ გამოსახულებას:

$$e_{jk} = \frac{1}{2}(u_{j,k} + u_{k,j}), \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (1.6.3)$$

ორივე (წრფივ და არაწრფივ) შემთხვევაში $e_{jk} = 0$, $j, k = 1, 2, 3$, ტოლობები შეესაბამება ხისტ გადაადგილებას.

ადვილი სანახავია, რომ წრფივ შემთხვევაში, თუ $u_i \in C^2(V)$, მაშინ

$$\begin{aligned} e_{ij,k} + e_{k,j,i} - e_{jk,i} &= \frac{1}{2}(u_{i,j,k} + u_{j,i,k} + u_{k,i,j} + u_{i,k,j} - u_{j,k,i} - u_{k,j,i}) \\ &= u_{i,jk}, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

ვთქვათ, ახლა

$$e_{ij} = 0, \quad (1.6.5)$$

მაშინ (1.6.4)-დან, ერთი მხრივ,

$$u_{i,jk} = 0,$$

ე.ი.

$$u_i(x) = a_i + b_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad a_i = \text{const}, \quad b_{ij} = \text{const}.$$

მეორე მხრივ, (1.6.5)-დან

$$u_{i,j} = -u_{j,i}. \quad (1.6.6)$$

ამდენად, რადგანაც

$$u_{i,j} = (a_i + b_{ik} x_k)_{,j} = b_{ik} \delta_{kj} = b_{ij},$$

$$u_{j,i} = (a_j + b_{jk} x_k)_{,i} = b_{jk} \delta_{ki} = b_{ji},$$

(1.6.6)-დან მივიღებთ

$$b_{ij} = -b_{ji}^*,$$

საიდანაც

$$b_{ii} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad b_1 := b_{32} = -b_{23},$$

$$b_2 := b_{13} = -b_{31}, \quad b_3 := b_{21} = -b_{12}.$$

ამრიგად, სისტემა გადაადგილების შემთხვევაში გვექნება, რომ

$$u_1(x) = a_1 - b_3 x_2 + b_2 x_3,$$

$$u_2(x) = a_2 - b_1 x_3 + b_3 x_1, \quad (1.6.7)$$

$$u_3(x) = a_3 - b_2 x_1 + b_1 x_2,$$

ან ვექტორული ფორმით

$$u = \vec{a} + [\vec{b}, \vec{x}],$$

სადაც

$$\vec{a} := (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} := (b_1, b_2, b_3), \quad \vec{x} := (x_1, x_2, x_3).$$

დეფორმაციის ზოგად (არაწრფივ) შემთხვევაში სისტემა გადაადგილებას, ე.ი. „გამყარებული“ სხეულის გადატანასა და ბრუნვას შეესაბამება

$$\overline{\varphi(x)} = \vec{a} + Q\vec{x} \quad \forall x \in V \quad (1.6.8)$$

ასახვა, სადაც, $\vec{\varphi} := (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, $\vec{a}$ მუდმივი ვექტორია, რომელიც კოორდინატთა სისტემის, კერძოდ, V არის გადატანას გამოხატავს, ხოლო Q მესამე რიგის ორთოგონალური მატრიცაა +1-ის ტოლი დეტერმინანტით, რომელიც კოორდინატთა სისტე-

ამდენად, $\|b_{ij}\|$ მატრიცა ანტისიმეტრიულია და მხოლოდ მისი სამი ელემენტია დამოუკიდებელი.

მის სათავეს გარშემო შემობრუნებას გამოხატავს (იხ. [12], გვ. 43).

როგორც ცნობილია, (იხ. [36], გვ. 49), ნებისმიერი მესამე რიგის ორთოგონალური Q მატრიცა (ე.ი. $Q^T Q = I$, სადაც I ერთეულოვანი მატრიცაა) შეიძლება წარმოდგენილი იქნას, როგორც შემდეგი ნამრავლი

$$Q = \begin{vmatrix} \cos b_3 & -\sin b_3 & 0 \\ \sin b_3 & \cos b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos b_2 & 0 & \sin b_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin b_2 & 0 & \cos b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos b_1 & -\sin b_1 \\ 0 & \sin b_1 & \cos b_1 \end{vmatrix},$$

სადაც მატრიცები შესაბამებიან „გამყარებულ“ სხეულთან უძრავად დაკავშირებულ x_3 , x_2 და x_1 ღერძების გარშემო შესაბამისად b_3 , b_2 და b_1 კუთხით მობრუნებას. მარჯვენა სისტემაში ბრუნვის დადებით მიმართულებებად მიღებულია შესაბამისად x_1 -დან x_2 -სკენ, x_3 -დან x_1 -სკენ და x_2 -დან x_3 -სკენ მობრუნება მცირე კუთხის მიმართულებით. მოძრაობის ფარდობითობიდან გამომდინარე, თუ სხეულს ჩავთვლით უძრავად, ხოლო კოორდინატთა სისტემას მოძრავად, მაშინ კოორდინატთა სისტემა მობრუნდება საწინააღმდეგო მიმართულებით x_1 , x_2 და x_3 ღერძების გარშემო შესაბამისად $\varphi = -b_1$, $\psi = -b_2$ და $\chi = -b_3$ კუთხით. φ , ψ და χ კუთხეებს ეილერის კუთხეები ეწოდება (იხ. [14], გვ. 556, იხ. აგრეთვე, დამატება 8, § 16). ცხადია,

$$Q = (1.6.9)$$

$$\begin{vmatrix} \cos b_3 \cos b_2 & \cos b_3 \sin b_2 \sin b_1 - \sin b_3 \cos b_1 & \cos b_3 \sin b_2 \cos b_1 + \sin b_3 \sin b_1 \\ \sin b_3 \cos b_2 & \sin b_3 \sin b_2 \sin b_1 + \cos b_3 \cos b_1 & \sin b_3 \sin b_2 \cos b_1 - \cos b_3 \sin b_1 \\ -\sin b_2 & \cos b_2 \sin b_1 & \cos b_2 \cos b_1 \end{vmatrix}.$$

გეომეტრიულად წრფივ თეორიაში ბრუნვის $\vec{b} := (b_1, b_2, b_3)$ ვექტორი უსასრულოდ მცირეა. ამიტომ, თუ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეებს უგულებელვყოფთ და გავითვალის-

წინებთ იმას, რომ $\sin b_i \approx b_i$ და $\cos b_i \approx 1$, $i = 1, 2, 3$, (1.6.9)-დან მივიღებთ, რომ გეომეტრიულად წრფივ შემთხვევაში

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 1 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (1.6.10)$$

(1.6.2)-ისა და (1.6.8)-ის თანახმად გვექნება

$$\bar{\varphi}(x) = \bar{x} + \bar{u} = \bar{a} + Q \bar{x}.$$

საიდანაც, ვინაიდან (1.6.10)-ის გამო

$$(Q - I)\bar{x} = \begin{vmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{vmatrix} \bar{x} = [\bar{b}, \bar{x}],$$

მივიღებთ, რომ

$$\bar{u} = \bar{a} + (Q - I)\bar{x} = \bar{a} + [\bar{b}, \bar{x}].$$

ეს კი, როგორც მოსალოდნელი იყო, (1.6.7)-ს ემთხვევა.

§1.7. აფინური ასახვა

თუ (1.6.1) ასახვაში φ_i ფუნქციები წრფივია, მაშინ მას ევკლიდის სივრცეში აფინური ასახვა ეწოდება, ე.ი. აფინური ასახვის დროს

$$x_i^* = (\delta_{ij} + a_{ij})x_j + a_i^*, \quad (1.7.1)$$

^{*)}ცხადია, $x_i^* = \delta_{ij}x_j + a_{ij}x_j + a_i = x_i + u_i$, სადაც

$u_i = a_{ij}x_j + a_i$, $i = 1, 2, 3$, (1.6.2)-ის თანახმად, გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები, ე.ი. გადაადგილებები.

სადაც a_{ij}, a_i მუდმივებია. რამდენადაც ჩვენ მოვითხოვეთ, რომ (1.7.1) ამოხსნადი უნდა იყოს x_i -ს მიმართ, ამიტომ

$$\det \|\delta_{ij} + a_{ij}\| \neq 0.$$

აფინურ ასახვას ახასიათებს შემდეგი თვისებები:

1) (1.7.1)-ის შებრუნებული ასახვა აფინურია. მართლაც, თუ ამოვხსნით (1.7.1)-ს, მივიღებთ

$$x_i = (\delta_{ij} + b_{ij})x_j^* + a_i^1, \quad (1.7.2)$$

სადაც b_{ij}, a_i^1 გარკვეული მუდმივებია.

2) რაიმე Π სიბრტყეზე მდებარე წერტილები აფინური ასახვის შემდეგ გარკვეულ Π^* სიბრტყეზე განლაგდებიან. მართლაც, თუ $A_i x_i + B = 0$ არის Π სიბრტყის განტოლება, მაშინ მასში (1.7.2) გამოსახულებების ჩასმით მივიღებთ $A_i^* x_i^* + B^* = 0$ განტოლებას, სადაც A_i^* და B^* გარკვეული მუდმივებია, ე.ი. რაიმე Π^* სიბრტყეს.

3) რაიმე Δ წრფეზე მდებარე წერტილები აფინური ასახვის შემდეგ გარკვეულ Δ^* წრფეზე განლაგდებიან. მართლაც, Δ წრფეს თუ წარმოვიდგენთ, როგორც რაიმე ორი Π_1 და Π_2 სიბრტყეების თანაკვეთას, მაშინ წინა თვისების თანახმად Δ -ს წერტილები, რომლებიც ერთდროულად მიეკუთვნებიან Π_1 და Π_2 სიბრტყეებს, გადავლენ წერტილებში, რომლებიც ერთდროულად მიეკუთვნებიან გარკვეულ Π_1^* და Π_2^* სიბრტყეებს, რომელთა თანაკვეთა განსაზღვრავს Δ^* წრფეს.

4) ორი აფინური ასახვის კომპოზიცია კვლავ აფინური ასახვაა. მართლაც, თუ (1.7.1) აფინური ასახვით მიღებულ x_i^* წერტილებს ავსახავთ

$$x_i^{**} = (\delta_{ij} + a_{ij}^*) x_j^* + a_i^* \quad (1.7.3)$$

აფინური ასახვით, ე.ი. (1.7.1)-ს ჩაესვამთ (1.7.3)-ში, მივიღებთ

$$x_i^{**} = (\delta_{ij} + a_{ij}^{**}) x_j^* + a_i^{**} \quad (1.7.4)$$

აფინური ასახვას, სადაც a_{ij}^{**} და a_i^{**} გარკვეული მუდმივებია.

აფინური ასახვის უწყვეტობიდან და მისი მესამე თვისებიდან ცხადია, რომ წრფივი მონაკვეთი წრფივ მონაკვეთში აისახება, ხოლო ვექტორი – ვექტორში.

ვთქვათ,

$$\vec{P} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

ვექტორი აისახა

$$\vec{P}^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*)$$

ვექტორში. აღვნიშნოთ $\vec{P}$ ვექტორის საწყისი და ბოლო წერტილების კოორდინატები შესაბამისად x_i -თ და x_i^0 -თ, მაშინ

$$\xi_i = x_i - x_i^0,$$

ხოლო $\vec{P}^*$ -ის კომპონენტები

$$\xi_i^* = x_i^* - x_i^{*0},$$

სადაც

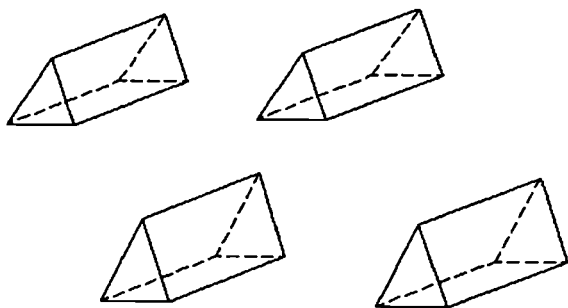
$$x_i^* = (\delta_{ij} + a_{ij}) x_j + a_i, \quad x_i^{*0} = (\delta_{ij} + a_{ij}^0) x_j^0 + a_i^0.$$

თუ განვიხილავთ უკანასკნელი ორი სიდიდის სხვაობას, მივიღებთ

$$\xi_i^* = x_i^* - x_i^{*0} = (\delta_{ij} + a_{ij})(x_j - x_j^0) = (\delta_{ij} + a_{ij}) \xi_j. \quad (1.7.5)$$

(1.7.5)-დან ცხადია, რომ ორი ტოლი ვექტორი (ე.ი. მათი შესაბამისი კომპონენტები ტოლია) აისახება ორ ტოლ ვექტორში,

ხოლო ორი პარალელური ვექტორი – ორ პარალელურ ვექტორში^{*)}, ამასთან მათი სიგრძეების შეფარდება არ იცვლება. ამიტომ ადვილი მისახვედრია, რომ ორი ერთნაირი და ერთნაირად ორიენტირებული ფიგურა (განლაგებული სივრცის სხვადასხვა ნაწილში) შედგენილი წრფივი მონაკვეთებისაგან აისახება ორ ერთნაირ და ერთნაირად ორიენტირებულ ფიგურაში (იხ. ნახ. 1.7.1). მაგრამ რამდენადაც ყოველი გეომეტრიული ფიგურა შეიძლება განვიხილოთ როგორც წრფივი მონაკვეთებისაგან შედგენილი ფიგურების ზღვარი, ამიტომ აღნიშნული თვისება ვრცელდება ნებისმიერ ფიგურაზე. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ სხეულის სხვადასხვა ნაწილი მიუხედავად მისი გეომეტრიული მდებარეობისა ერთნაირ დეფორმაციას განიცდის. ამიტომ აფინური ასახვის შესაბამის დეფორმაციას ეწოდება *ერთგვაროვანი დეფორმაცია*.



ნახ. 1.7.1

^{*)}თუ $\eta^* = (\delta_{ij} + a_{ij})\eta_j$, მაშინ $\xi_i = \eta_j$ -დან გამომდინარეობს

$$\xi_i^* = \eta_i^*, \quad i = 1, 2, 3, \text{ ხოლო } \text{თუ } \frac{\xi_i}{\eta_i} = k = \text{const}, \quad i = 1, 2, 3, \text{ მაშინ}$$

$$\frac{\xi_i^*}{\eta_i^*} = \frac{(\delta_{ij} + a_{ij})\eta_j k}{(\delta_{ij} + a_{ij})\eta_j} = k, \quad i = 1, 2, 3.$$

ცხადია, (1.7.1)-ის და (1.7.5)-ის აფინურობა არ დაირღვევა, თუ კოორდინატთა ერთი წრფივი სისტემიდან გადავალთ მეორეზე. ეს გამომდინარეობს კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულების წრფივობიდან (იხ. (1.4.2)).

თუ (1.7.1) ასახვაში a_{ij} , a_i , სიდიდეები იმდენად მცირეა, რომ შეიძლება მათი კვადრატებისა და ნამრავლების უგულებელყოფა თვით ამ სიდიდეებთან შედარებით, მაშინ მას *უსასრულოდ მცირე ასახვა ეწოდება*. (1.7.1) გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$x_i^* - x_i = a_{ij} x_j + a_i,$$

საიდანაც, a_{ij} -ის და a_i -ს სიმცირის გამო ნათელია, რომ უსასრულოდ მცირე აფინური ასახვის დროს წერტილის კოორდინატების ცვლილება უსასრულოდ მცირეა.

ორი უსასრულოდ მცირე აფინური ასახვის მიმდევრობით მოხდენის დროს (იხ. მეოთხე თვისება)

$$a_{ij}^{**} = a_{ij}^* + a_{ij}, \quad a_i^{**} = a_i^* + a_i,$$

ამასთან შედეგი არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რა მიმდევრობით მოვახდენთ ასახვებს. ასეთ შემთხვევაში ჩვენ ვამბობთ, რომ გვაქვს ორი მოცემული ასახვის ზედედა. ცხადია, აღნიშნული შეიძლება განზოგადდეს ზედედათა ნებისმიერი რიცხვისათვის.

§1.8. უსასრულოდ მცირე აფინური ასახვის დაშლა საკუთრივ დეფორმაციად და ზისტ გადაადგილებად

რამდენადაც ჩვენ გვაინტერესებს სხეულის დეფორმაცია, შემდეგში განვიხილავთ ვექტორის გარდაქმნის (1.7.5) ფორმულებს. მართალია, ამ შემთხვევაში წერტილის კოორდინატებს a_i მუდმივი შესაკრებების სიზუსტით განვსაზღვრავთ, მაგრამ ეს არსებითი არ არის, რადგანაც ისინი მხოლოდ სხეულის ზისტ გადა-

ტანას ახასიათებენ. (1.7.5) გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\delta \xi_i = a_{ij} \xi_j, \quad (1.8.1)$$

სადაც

$$\delta \xi_i := \xi_i^* - \xi_i,$$

აღნიშნავს $\vec{\delta P} := \vec{P}^* - \vec{P}$ ვექტორული სხვაობის კომპონენტებს.

დავსვათ შემდეგი საკითხი: რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს a_{ij} მუდმივები, რომ (1.8.1) ასახვას თან არ სდევდეს რაიმე დეფორმაცია, ე.ი. გვაძლევდეს მხოლოდ ხისტ გადაადგილებას?

ხისტი გადაადგილების განსაზღვრის თანახმად ეს მოხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სხეულის ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებული ვექტორის სიგრძე არ იცვლება, ე.ი. არ იცვლება მისი კვადრატი

$$P^2 = \xi_i \xi_i. \quad (1.8.2)$$

აღვნიშნოთ P -ს ნაზრდი δP -თი. თუ უგულვებელყოფთ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეებს, ღიფერენციალის განმარტების თანახმად,

$$dP = \delta P \text{ და } d\xi_i = \delta \xi_i.$$

(1.8.2)-დან ცხადია, რომ

$$2PdP = 2\xi_i d\xi_i.$$

ე.ი.

$$P\delta P = \xi_i \delta \xi_i$$

და (1.8.1)-ის თანახმად

$$\begin{aligned} P\delta P &= a_{ij} \xi_i \xi_j = \frac{1}{2} a_{ij} \xi_i \xi_j + \frac{1}{2} a_{ij} \xi_i \xi_j \\ &= \frac{1}{2} a_{ij} \xi_i \xi_j + \frac{1}{2} a_{ji} \xi_j \xi_i = \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji}) \xi_i \xi_j. \end{aligned} \quad (1.8.3)$$

იმისათვის, რომ შესრულდეს $\delta P = 0$ ტოლობა ნებისმიერი ξ_i -სათ-

ვის, აუცილებელი და საკმარისია

$$a_{ij} + a_{ji} = 0. \quad (1.8.4)$$

მაშასადამე, ამ უკანასკნელ შემთხვევაში, (1.8.1) მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\delta \xi_i = p_{ij} \xi_j, \quad (1.8.5)$$

სადაც

$$p_{ij} := a_{ij} = -a_{ji}^*). \quad (1.8.6)$$

(1.8.4)-ის გამო, ცხადია, p_{ij} ცხრა სიდიდე ხასიათდება სამი დამოუკიდებელი p_i სიდიდით

$$p_{ii} = 0, \quad p_1 = p_{32} = -p_{23}, \quad (1.8.7)$$

$$p_2 = p_{13} = -p_{31}, \quad p_3 = p_{21} = -p_{12}.$$

ამდენად, (1.8.5) გაშლილი სახით ასე ჩაიწერება:

$$d\xi_1 = -p_3 \xi_2 + p_2 \xi_3,$$

$$d\xi_2 = -p_1 \xi_3 + p_3 \xi_1,$$

$$d\xi_3 = -p_2 \xi_1 + p_1 \xi_2,$$

ხოლო ვექტორულად კი ასე

$$\overline{d\xi} = [\bar{p}, \bar{\xi}],$$

რაც, როგორც ეს თეორიული მექანიკიდანაა ცნობილი, ახასიათებს უსასრულოდ მცირე ხისტ ბრუნვას. კერძოდ, p_i აღნიშნავს x_i ღერძის გარშემო შემობრუნების უსასრულოდ მცირე კუთხეს.

(1.8.6) ფორმულებით მოცემული p_{ij} სიმრავლე წარმოადგენს ე.წ. ანტისიმეტრიულ ტენზორს.

*) ზაზი უნდა გაეცვას იმას, რომ (1.8.6) აღნიშვნა შემოღებულია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა სრულდება (1.8.4). (1.8.6)-დან ცხადია, რომ $a_{ij} = p_{ij}$ ანტისიმეტრიული მატრიცის ელემენტებია.

რომ მივიღოთ სხეულის იმ წერტილის კოორდინატების ასახვის ფორმულა, რომელსაც გადაადგილებამდე ეკავა $M(x_1, x_2, x_3)$ მდგომარეობა, საკმარისია ფორმულა (1.8.5) გამოვიყენოთ $\overline{M_0 M} = (x_1 - \overset{0}{x}_1, x_2 - \overset{0}{x}_2, x_3 - \overset{0}{x}_3)$ ვექტორის მიმართ, სადაც $M_0(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \overset{0}{x}_3)$ რაიმე ფიქსირებული წერტილია და გავითვალისწინოთ

$$\delta x_i = \delta (x_i - \overset{0}{x}_i) = d(x_i - \overset{0}{x}_i) = \delta x_i - \delta \overset{0}{x}_i,$$

მაშინ, (1.8.5)-ის გამო,

$$\delta x_i = p_{ij} (x_i - \overset{0}{x}_i) + a_i,$$

სადაც

$$a_i = \delta \overset{0}{x}_i.$$

ზემოთქმულიდან გამომდინარე საკუთრივ დეფორმაციას ახასიათებს

$$a_{ij}, \quad a_{32} + a_{23}, \quad a_{13} + a_{31}, \quad a_{21} + a_{12}$$

სიდიდეები. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$e_{ji} \equiv e_{ij} := \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}). \quad (1.8.8)$$

მათ დეფორმაციის კომპონენტები ეწოდება და წარმოადგენენ ეწ. დეფორმაციის სიმეტრიულ ტენზორს.

შემოვიღოთ კიდევ შემდეგი აღნიშვნები:

$$p_{ij} := \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}), \quad p_1 := p_{32}, \quad p_2 := p_{13}, \quad p_3 := p_{21}. \quad (1.8.9)$$

ამ აღნიშვნებში (1.8.8)-ის და (1.8.9)-ის შეკრებით მივიღებთ, რომ

$$a_{ij} = e_{ij} + p_{ij}. \quad (1.8.10)$$

ამრიგად, (1.8.1) მიიღებს შემდეგ სახეს

^{*)}ეს აღნიშვნა ემთხვევა (1.8.6)-ს, თუ სრულდება (1.8.4).

$$\delta \xi_i = e_{ij} \xi_j + p_{ij} \xi_j^* \quad (1.8.11)$$

ეს უკანასკნელი ფორმულები მიგვითითებენ იმაზე, რომ აფინური ასახვა შეიძლება დაიშალოს საკუთრივ დეფორმაციის შესაბამის

$$\delta \xi_i = e_{ij} \xi_j \quad (1.8.12)$$

ასახვად და ზისტ გადაადგილებად, რომელიც მოიცემა (1.8.5) ასახვით, სადაც p_{ij} განსაზღვრულია (1.8.9)-ით.

დეფორმაციის e_{ij} კომპონენტებს მარტივი გეომეტრიული შინაარსი აქვთ.

ვჩვენოთ, რომ e_{ii} წარმოადგენს x_i ღერძის პარალელური ვექტორის ფარდობით წაგრძელებას. გარკვეულობისათვის განვიხილოთ e_{11} .

მართლაც, (1.8.8)-ის თანახმად, (1.8.3) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$P \delta P = e_{ij} \xi_i \xi_j \quad (1.8.13)$$

თუ განვიხილავთ $\vec{P} = (\xi_1, 0, 0)$ ვექტორს, მაშინ

$$P \delta P = e_{11} \xi_1^2.$$

მაგრამ $\xi_1^2 = P^2$, ე.ი.

$$e_{11} = \frac{\delta P}{P}.$$

^{*)} ფაქტიურად a_{ij} მატრიცი დაშვებით სიმეტრიულ და ანტისიმეტრიულ მატრიცების ჯამად, რაც ყოველთვის შეიძლება:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{1}{2} a_{ij} + \frac{1}{2} a_{ij} = \frac{1}{2} a_{ij} + \frac{1}{2} a_{ji} + \frac{1}{2} a_{ij} - \frac{1}{2} a_{ji} \\ &= \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} + \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2}. \end{aligned}$$

ეს სიდიდე უგანზომილებოა, როგორც $L \cdot L^{-1}$ განზომილების მქონე.

თუ დეფორმაციის ყველა კომპონენტი, გარდა e_{11} -ისა, ნულის ტოლია და ვიზილავთ საკუთრივ დეფორმაციას, ე.ი. $p_{ij} = 0$, მაშინ (1.8.12)-დან ვღებულობთ, რომ

$$\delta \xi_1 = e_{11} \xi_1, \quad \delta \xi_2 = 0, \quad \delta \xi_3 = 0.$$

ამრიგად, x_1 ღერძის პარალელური ვექტორი ყველა ერთნაირად წაგრძელებად ($e_{11} > 0$) ან შეიკუმშება ($e_{11} < 0$), ხოლო მისი პერპენდიკულარული ვექტორები არ იცვლიან არც მიმართულებას და არც სიდიდეს. ე.ი. ჩვენ გვაქვს x_1 ღერძის გასწვრივ მარტივი გაჭიმვა ($e_{11} > 0$) ან კუმშვა ($e_{11} < 0$).

e_{23} -ის გეომეტრიული შინაარსის გასარკვევად გამოვთვალოთ $\vec{P}_2 = (0, \eta_2, 0)$, $\eta_2 > 0$, და $\vec{P}_3 = (0, 0, \zeta_3)$, $\zeta_3 > 0$, ვექტორებს შორის დეფორმაციამდე არსებული მართი კუთხის ცვლილება. დეფორმაციის შემდეგ ისინი აისახებიან შესაბამისად

$$\vec{P}_2^* = (\delta \eta_1, \eta_2 + \delta \eta_2, \delta \eta_3)$$

და

$$\vec{P}_3^* = (\delta \zeta_1, \delta \zeta_2, \zeta_3 + \delta \zeta_3)$$

ვექტორებში. აღვნიშნოთ მათ შორის კუთხე $\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_{23}\right)$ -ით (თუ

$\varepsilon_{23} > 0$, მაშინ კუთხე დეფორმაციის შემდეგ მცირდება, ხოლო თუ $\varepsilon_{23} < 0$, მაშინ კუთხე იზრდება). ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის ცნობილი ფორმულიდან ცხადია, რომ

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_{23}\right) = \frac{\delta\eta_1 \delta\zeta_1 + (\eta_2 + \delta\eta_2) \delta\zeta_2 + \delta\eta_3 (\zeta_3 + \delta\zeta_3)}{\sqrt{(\delta\eta_1)^2 + (\eta_2 + \delta\eta_2)^2 + (\delta\eta_3)^2} \sqrt{(\delta\zeta_1)^2 + (\delta\zeta_2)^2 + (\zeta_3 + \delta\zeta_3)^2}}.$$

საიდანაც, მაღალი რიგის უსასრულო მცირეთა სიზუსტით, გვაქვს შემდეგი მიახლოებითი ტოლობა

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_{23}\right) = \sin \varepsilon_{23} \cong \varepsilon_{23} \cong \frac{\eta_2 \delta\zeta_2 + \zeta_3 \delta\eta_3}{\eta_2 \zeta_3} \quad (1.8.14)$$

$$= \frac{\delta\zeta_2}{\zeta_3} + \frac{\delta\eta_3}{\eta_2},$$

რადგან η_2^2 -თან და ζ_3^2 -თან შედარებით შეიძლება შესაბამისად $\eta_2 \delta\eta_2$ -ისა და $\zeta_3 \delta\zeta_3$ -ის უგულებელყოფა (ან რაც იგივეა η_2 -თან და ζ_3 -თან შედარებით შეიძლება $\delta\eta_2$ -ისა და $\delta\zeta_3$ -ის უგულებელყოფა). (1.8.11)-ის გამო, (1.8.9)-ის თანახმად,

$$\delta\eta_3 = e_{32}\eta_2 + p_1\eta_2,$$

$$\delta\zeta_2 = e_{23}\zeta_3 - p_1\zeta_3. \quad (1.8.15)$$

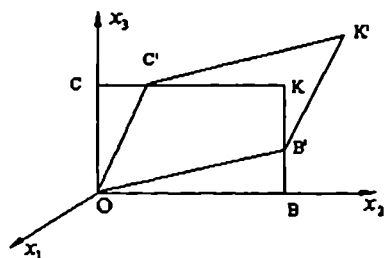
თუ (1.8.15)-ს ჩავსვამთ (1.8.14)-ში, მივიღებთ

$$\varepsilon_{23} = e_{32} + e_{23} = 2e_{23}.$$

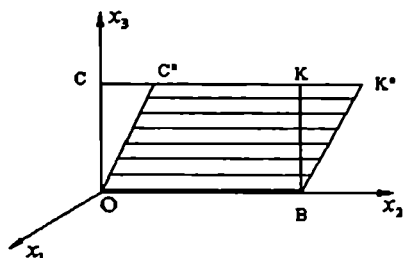
ამრიგად, $2e_{23}$ არის x_2 და x_3 ღერძების პარალელურ ვექტორებს შორის დეფორმაციამდე არსებული მართი კუთხის ცვლილება.

ახლა განვიხილოთ წმინდა დეფორმაცია. ამ შემთხვევაში ნულისაგან განსხვავებულია მხოლოდ e_{23} , ხოლო დეფორმაციის დანარჩენი კომპონენტები და ბრუნვის კომპონენტები ნულის ტოლია. ვთქვათ, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ ვექტორები გაულებულია კოორდინატ-

თა სისტემის სათაიდან (სიმარტივისათვის) შესაბამისად x_2 და x_3 ღერძების პარალელურად*), ზოლო $OBKC$ მათზე აგებული მართკუთხედია (იხ. ნახ. 1.8.1). დეფორმაციის შემდეგ აღნიშნული მართკუთხედი $OB'K'C'$ პარალელოგრამად იქცევა. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ O წერტილი არ გადაადგილებულა, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში ხისტი გადატანით ის შეიძლება კვლავ პირვანდელ მდგომარეობას



ნახ.1.8.1



ნახ.1.8.2

დავუბრუნოთ. (1.8.12)-ის თანახმად, B წერტილში მდებარე მატერიალური წერტილი გადავა BK წრფეზე მდებარე B' წერტილში, ზოლო C წერტილში მდებარე მატერიალური წერტილი კი CK წრფეზე მდებარე C' წერტილში**), ამასთან

$$BB' = \delta\eta_3 = e_{32} \cdot OB, CC' = \delta\zeta_2 = e_{23} \cdot OC. \quad (1.8.16)$$

*) ამდენად,

$$\overline{OB} = (0, OB, 0) \equiv (0, \eta_2, 0), \quad \delta\overline{OB} = (\delta\eta_1, \eta_2 + \delta\eta_2, \delta\eta_3),$$

$$\overline{OC} = (0, 0, OC) \equiv (0, 0, \zeta_3), \quad \delta\overline{OC} = (\delta\zeta_1, \delta\zeta_2, \zeta_3 + \delta\zeta_3).$$

**) მართლაც, $\delta\eta_1 = e_{11}\eta_1 + e_{12}\eta_2 + e_{13}\eta_3 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot \eta_2 + 0 \cdot 0 = 0$.

ანალოგიურად, $\delta\eta_2 = 0$, $\delta\zeta_1 = 0$, $\delta\zeta_3 = 0$.

რადგანაც მაღალი რიგის უსასრულო მცირეთა სიზუსტით

$$\frac{BB'}{OB} = \operatorname{tg} \angle BOB' = \angle BOB',$$

$$\frac{CC'}{OC} = \operatorname{tg} \angle COC' = \angle COC',$$

ამიტომ, (1.8.16)-ის თანახმად,

$$\angle BOB' = \angle COC' = e_{23}$$

და კიდევ ერთხელ ვიღებთ, რომ

$$\varepsilon_{23} = \angle BOB' + \angle COC' = 2e_{23}.$$

თუ $OB'K'C'$ პარალელოგრამს საათის ისრის მიმართულებით e_{23} -ის ტოლი კუთხით ხისტად შემოვაბრუნებთ O წერტილის გარშემო, მაშინ, მაღალი რიგის უსასრულო მცირე სიდიდეების სიზუსტით, OB' დაემათხევა OB -ს, რადგან

$$OB' = \frac{OB}{\cos e_{23}} = \frac{OB}{1 - \frac{e_{23}^2}{2!} + \frac{e_{23}^4}{4!} - \dots} = OB.$$

ამავე მიზეზით, მაღალი რიგის უსასრულო მცირე სიდიდეების სიზუსტით, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $OC = OC' = OC''$ *) და C'' მდებარეობს CK წრფეზე. ამდენად, $OB'K'C'$ დაიკავებს $OBK''C''$ მდებარეობას (იხ. ნახ. 1.8.2).

ამრიგად, განხილული დეფორმაცია წარმოადგენს Ox_1x_2

$$*) OC' = \frac{OC}{\cos e_{23}} = \frac{OC}{1 - \frac{e_{23}^2}{2!} + \frac{e_{23}^4}{4!} - \dots} = OC,$$

$$OC'' = \frac{OC}{\cos \varepsilon_{23}} = \frac{OC}{1 - \frac{\varepsilon_{23}^2}{2!} + \frac{\varepsilon_{23}^4}{4!} - \dots} = OC.$$

სიბრტყის პარალელური სიბრტყეების ძერას Ox_2 მიმართულებით. ამასთან, სიბრტყის CC'' გადაადგილება Ox_1x_2 სიბრტყეებზე მანძილის პროპორციულია (იხ. აქვე (1.8.17)). CC'' სიდიდეს ეწოდება „აბსოლუტური ძერა“, ხოლო

$$\frac{CC''}{OC} = \lg \angle COC'' = \lg \varepsilon_{23} = \varepsilon_{23} = 2e_{23} \quad (1.8.17)$$

სიდიდეს – „ფარდობითი ძერა“ ან ძერის კუთხე. განხილულ დეფორმაციას ეწოდება მარტივი, ერთგვაროვანი ძერა.

§1.9. დეფორმაციის ინვარიანტული კვადრატული ფორმა, კოორდინატთა სისტემის შეცვლა. დეფორმაციის მთავარი მიმართულებები. დეფორმაციის ზედაპირი

(1.8.13) შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$P\delta P = 2F(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (1.9.1)$$

სადაც

$$2F(\xi_1, \xi_2, \xi_3) := e_{ij} \xi_i \xi_j \quad (1.9.2)$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 ცვლადების კვადრატული ფორმაა. რადგანაც (1.9.1)-ის მარცხენა მხარეში მდგომ $P\delta P$ გამოსახულებას აქვს კოორდინატთა სისტემის ღერძების შერჩევისაგან დამოუკიდებელი აზრი, ამიტომ (1.9.1)-ის მარჯვენა მხარე, ე.ი., (1.9.2) კვადრატული ფორმა ინვარიანტული უნდა იყოს კოორდინატთა სისტემის შეცვლის მიმართ. ე.ი., თუ e'_{ij} და ξ'_i -ით აღვნიშნავთ ახალ კოორდინატთა სისტემაში დეფორმაციის ტენზორის და $\bar{P}$ ვექტორის კომპონენტებს, მაშინ

$$\begin{aligned} P\delta P = 2F(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= e_{ij} \xi_i \xi_j \\ &= e'_{ij} \xi'_i \xi'_j = 2F(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3). \end{aligned} \quad (1.9.3)$$

აქედან, ისევე როგორც ძაბვების თეორიაში, ვიღებთ დეფორმაციის ტენზორის ძველ და ახალ კომპონენტებს შორის იმავე კავშირს, რაც ძაბვების შემთხვევაში გვქონდა:

$$e'_{ij} = e_{ij} \alpha_i^k \alpha_j^l.$$

$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ *) ერთეულოვანი ვექტორის მიმართულების მქონე მიმართულებას ეწოდება დეფორმაციის მთავარი მიმართულება, თუ (შეადარე (1.5.1)-ს)

$$e_{ij} n_j = e n_i, \quad (1.9.4)$$

სადაც e სკალარული სიდიდეა.

კრონეკერის სიმბოლოს გამოყენებით (1.9.4) შეიძლება შემდეგი სახით გადავწეროთ

$$(e_{ij} - e \delta_{ij}) n_j = 0. \quad (1.9.5)$$

რადგან ყველა n_j ერთდროულად ნული არ ხდება, ამიტომ:

$$\det \| e_{ij} - e \delta_{ij} \| = 0. \quad (1.9.6)$$

დეფორმაციის ტენზორის მთავარი მნიშვნელობები ეწოდება (1.9.6) განტოლების ფესვებს. მათ აგრეთვე მთავარ ფარდობით წაგრძელებებს უწოდებენ. (1.9.6) განტოლება ჩვენს მიერ განხილული იყო 1.5 პარაგრაფში. ძაბვის თეორიის ანალოგიურად შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნები: განსხვავებული მთავარი ფარდობითი წაგრძელებების შესაბამისი მიმართულებები ურთიერთმართობია; თუ (1.9.6) განტოლების ფესვები მარტივია, მაშინ გვაქვს ურთიერთმართობი მიმართულებების ერთი სამეული; თუ (1.9.6) განტოლების ორი ფესვი ერთმანეთის ტოლია, მაშინ მათი შესაბამისი მიმართულებები ძევს სიბრტყეში, რომელიც მესამე მარტივი ფესვის შესაბამისი მთავარი მიმართულების

*) $\vec{n}$ არ არის ნორმალი, რადგან აქ მოცემულ წერტილში $\vec{n}$ ნორმალთან ფართით ელემენტს კი არ განვიხილავთ, არამედ ვექტორებს (მიმართულებებს) და მათ შორის კუთხეებს.

პერპენდიკულარულია; ამ შემთხვევაში ნებისმიერი ორი ურთიერთმართობი მიმართულება ამ სიბრტყიდან შეიძლება მიღებულ იქნას მთავარი მიმართულებად; თუ სამივე ფესვი ტოლია, მაშინ ნებისმიერი სამი ურთიერთმართობი მიმართულება შეიძლება მიღებულ იქნას მთავარ მიმართულებად.

გადავწეროთ (1.9.6) კუბური განტოლება შემდეგი სახით:

$$e^3 - \theta_1 e^2 + \theta_2 e - \theta_3 = 0,$$

სადაც

$$\begin{aligned}\theta_1 &:= e_{11}, \\ \theta_2 &:= \begin{vmatrix} e_{22} & e_{23} \\ e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{11} & e_{13} \\ e_{31} & e_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix}, \\ \theta_3 &:= \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix}.\end{aligned}\quad (1.9.7)$$

კუბური განტოლების ფესვებსა და კოეფიციენტებს შორის დამოკიდებულებების თანახმად:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= e_1 + e_2 + e_3, \\ \theta_2 &= e_2 e_3 + e_1 e_3 + e_2 e_1, \\ \theta_3 &= e_1 e_2 e_3.\end{aligned}\quad (1.9.8)$$

როგორც მთავარი ფარდობითი წაგრძელებები, e_i -ები არ არიან დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის ღერძების შერჩევაზე. ამიტომ θ_i -ები ინვარიანტებია კოორდინატთა სისტემის ღერძების შეცვლის მიმართ.

ისევე როგორც 1.5 პარაგრაფში, ძაბვის ზედაპირის მსგავსად შეიძლება შემოვიღოთ დეფორმაციის ზედაპირის ცნებაც.

მართლაც, (1.9.1) გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$P^2 \frac{\delta P}{P} = P^2 e = 2F(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

სადაც $e = \frac{\delta P}{P}$ გამოხატავს $\vec{P} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ვექტორის ფარდობით წაგრძელებას. იგი არ არის დამოკიდებული ვექტორის სიგრძეზე, დამოკიდებულია მხოლოდ ვექტორის მიმართულებაზე. ამიტომ ყოველი მიმართულებისათვის ისე შეიძლება შევარჩიოთ ვექტორის სიგრძე, რომ

$$P^2 e = \pm c^2,$$

სადაც c ნებისმიერი, ნულისაგან განსხვავებული ფიქსირებული მუდმივია. მას სიგრძის განზომილება აქვს.

თუ $\vec{P}$ -ს საწყის წერტილს ავიღებთ კოორდინატთა სისტემის სათავეში, მაშინ მისი ბოლო A წერტილი აღმოჩნდება

$$2F(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \pm c^2$$

ან, რაც იგივეა,

$$e_i, \xi_i = \pm c^2 \quad (1.9.9)$$

ზედაპირზე, რომელსაც *დეფორმაციის ზედაპირი* ეწოდება.

თუ დეფორმაციის ზედაპირი აგებულია, მაშინ გარემოს მოცემულ წერტილში ადვილად შეიძლება გამოვთვალოთ ნებისმიერი ვექტორის მიმართულებით e ფარდობითი წაგრძელება. ამისათვის საკმარისია, სათავიდან გავავლოთ მისი პარალელური $\vec{OA}$ ვექტორი ზედაპირის A წერტილში გადაკვეთამდე. ამასთან იმისათვის, რომ ყოველთვის არსებობდეს გადაკვეთის A წერტილი, საჭიროა, გარკვეულწიერად შევარჩიოთ c^2 -ის წინ ნიშანი. განსაზღვრული ვექტორის e ფარდობითი წაგრძელება შემდეგნაირად გამოისახება

$$e = \pm \frac{c^2}{OA^2}.$$

თუ საკოორდინატო ღერძებად მივიღებთ დეფორმაციის მთავარ

მიმართულებებს, ე.ი. (1.9.9) განტოლებით მოცემულ ზედაპირის მთავარ ღერძებს, მაშინ დეფორმაციის ზედაპირის (1.9.9) განტოლება დაიყვანება

$$e_i \xi_i^2 = \pm c^2$$

კანონიკურ სახეზე. ამდენად ახალ კოორდინატთა სისტემაში $e'_{ij} = 0$, როცა $i \neq j$, $e'_{ii} = e_i$.

ამრიგად, თუ საკოორდინატო ღერძებად მივიღებთ მთავარ მიმართულებებს, მაშინ მათ შორის მართი კუთხეები დეფორმაციის შემდეგაც მართი დარჩება. დეფორმაციის ზედაპირებს ისეთივე სახე აქვთ, როგორც ძაბვის ზედაპირებს და ამიტომ მათზე არ შევჩერდებით.

$$\theta := e_{ii} = e_1 + e_2 + e_3 \quad (1.9.10)$$

სიდიდეს მარტივი გეომეტრიული შინაარსი აქვს. თუ განვიხილავთ მართკუთხა პარალელეპიპედს, რომლის წიბოები დეფორმაციის მთავარი მიმართულებების პარალელურ საკოორდინატო ღერძებზე მდებარეობენ და მათი სიგრძეები l_1 , l_2 და l_3 -ის ტოლია, მაშინ დეფორმაციის შემდეგ პარალელეპიპედის წიბოები კვლავ ღერძების პარალელური იქნებიან, ხოლო მათი სიგრძეები შესაბამისად

$$l_1(1 + e_1), l_2(1 + e_2), l_3(1 + e_3) - \text{ს}$$

გაუტოლდება. ამდენად, განსახილველი პარალელეპიპედის მოცულობა დეფორმაციამდე იყო

$$V = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3,$$

ხოლო დეფორმაციის შემდეგ, მაღალი რიგის უსასრულო მცირეთა სიზუსტით, არის

$$V^* = l_1 l_2 l_3 (1 + e_1)(1 + e_2)(1 + e_3)$$

$$\cong V(1 + e_1 + e_2 + e_3).$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ (1.9.10)-ს,

$$\frac{V^* - V}{V} = e_1 + e_2 + e_3 = \theta.$$

ამრიგად, θ წარმოადგენს მოცულობის ფარდობით გაფართოებას (*cubical dilatation*), ე.ი., დეფორმაციის დროს მოცულობის ერთეულის ცვლილების ტოლია. (წმინდა) მოცულობითი დეფორმაცია ((pure) dilatational strain) ეწოდება დეფორმაციას, როცა იცვლება სხეულის (ან მისი ელემენტების) მოცულობა ფორმის შეუცვლელად. მაგალითად, ზემოთ განხილულ შემთხვევაში, დეფორმაციის შედეგად იცვლება მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა, მაგრამ ის კვლავ მართკუთხა პარალელეპიპედად რჩება.

§1.10. ზოგადი სახის დეფორმაცია

ვთქვათ, დეფორმაციის შედეგად უწყვეტი ტანის M წერტილი (x_1, x_2, x_3) კოორდინატებით იკავებს სივრცის M^* წერტილს (x_1^*, x_2^*, x_3^*) კოორდინატებით.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$u_i := x_i^* - x_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

ცხადია, u_i არის $\overline{MM^*}$ ვექტორის კომპონენტები, რომლებიც გამოხატავენ დეფორმაციის შედეგად წერტილის გადაადგილებას. $\vec{u} := (u_1, u_2, u_3)$ ვექტორს ეწოდება გადაადგილების ვექტორი, ხოლო მის კომპონენტებს — გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები. რადგან გარემოს სხვადასხვა წერტილი სხვადასხვაგვარად გადაადგილდება, ამიტომ გადაადგილების ვექტორი ზოგადად წერტილის კოორდინატების ფუნქციაა:

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3.$$

შემდგომში, თუ სხვა რამ არ იქნება თქმული, ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ u_i , $i = 1, 2, 3$, ცალსახა, უწყვეტი ფუნქციებია, რომლებსაც აქვთ მესამე რიგამდე ჩათვლით უწყვეტი წარმოებულები.

წერტილის მიდამოში გარემოსგან გამოვეყოთ მისი უსასრულოდ მცირე ნაწილი და დავაკვირდეთ, თუ როგორ იცვლება იგი დეფორმაციის შედეგად. ამისათვის საკმარისია ვნახოთ, თუ როგორ იცვლება M წერტილში საწყისი წერტილის მქონე უსასრულოდ მცირე ვექტორები. ვთქვათ, $\overline{MN} = \overline{P} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ერთი ასეთი ვექტორია (იხ. ნახ. 1.10.1) და დეფორმაციის შემდეგ M წერტილი გადადის M^* -ში, N კი - N^* -ში, ხოლო $\overline{P}$ გარდაიქმნება $\overline{P}^* = \overline{M^*N^*}$ ვექტორად (რადგან ვიხილავთ უსასრულო მცირე ვექტორებს)*). გამოვთვალოთ

$$\overline{\delta P} = \overline{P^*} - \overline{P}$$

ვექტორული ნაზრდის კომპონენტები.

ცხადია, M^* წერტილის კოორდინატებია

$$x_i + u_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3,$$

ხოლო N^* -ის, რომლის დეფორმაციამდელი (ე.ი. N წერტილის) კოორდინატები იყო

$$x_i + \xi_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

კოორდინატებია

$$x_i + \xi_i + u_i(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, x_3 + \xi_3), \quad i = 1, 2, 3.$$

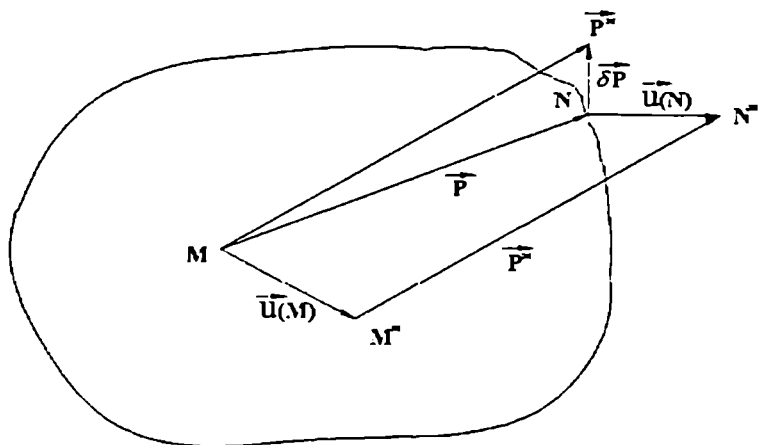
) შევნიშნოთ, რომ MN წრფის მონაკვეთი, ზოგადად, M^ და N^* წერტილების შემაერთებელ რაიმე წირად გარდაიქმნება, მაგრამ ჩვენ გვაინტერესებს (დეფორმაციის ცნებიდან გამომდინარე) M და N წერტილებს შორის მანძილის, რომელიც $\overline{P}$ ვექტორის სიგრძის ტოლია, შედარება M^* და N^* წერტილების შორის მანძილთან, ე.ი. $\overline{P}^*$ ვექტორის სიგრძესთან.

ამიტომ $\overline{P^*}$ ვექტორის კომპონენტებია

$$\xi_i + u_i(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, x_3 + \xi_3) - u_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3,$$

ხოლო $\overline{\delta P}$ ვექტორის კომპონენტებია

$$\delta \xi_i = u_i(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, x_3 + \xi_3) - u_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3.$$



ნახ.1.10.1

დიფერენციალური აღრიცხვიდან ცნობილი ტეილორის ფორმულის თანახმად,

$$\begin{aligned} u_i(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, x_3 + \xi_3) - u_i(x_1, x_2, x_3) \\ = u_{i,j} \xi_j + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

სადაც ε_i არის $\left(\sum_{j=1}^3 \xi_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ -ის მიმართ მაღალი რიგის უსასრუ-

ლოდ მცირე სიდიდე. თუ მათ უგულებელვყოფთ მივიღებთ, რომ

$$\delta \xi_i = u_{i,j} \xi_j. \quad (1.10.1)$$

აქ $u_{i,j}$ სიდიდეები დამოკიდებულია (x_1, x_2, x_3) წერტილზე და არაა დამოკიდებული ξ_i -ზე.

(1.10.1)-დან ნათელია, რომ განსახილველი ელემენტის წრფივ განზომილებებთან შედარებით მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეების სიზუსტით, ელემენტის დეფორმაცია ხასიათდება აფინური გარდაქმნით, რომლის კოეფიციენტებია

$$a_{ij} = u_{i,j}. \quad (1.10.2)$$

შემდგომში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები და მათი წარმოებულები ისეთი უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია, რომელთა ნამრავლებისა და კვადრატების უგულვებელყოფა დასაშვებია თვით ამ სიდიდეებთან შედარებით. ამ პირობებში (1.10.1) იქნება უსასრულოდ მცირე აფინური გარდაქმნა და მის მიმართ შეიძლება გამოვიყენოთ §1.8-სა და §1.9-ში მიღებული შედეგები.

(1.8.11)-ის, (1.8.8)-ის, (1.8.9)-ის და (1.10.2)-ის თანახმად,

$$\delta \xi_i = (e_{ij} + p_{ij}) \xi_j, *) \quad (1.10.3)$$

სადაც

*) (1.10.3) პირდაპირ მიიღება (1.10.1)-დან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$u_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) = e_{ij} + p_{ij},$$

$p_{ij} \equiv \epsilon_{jik} \theta_k$, სადაც θ ხისტი ბრუნვის ვექტორია, ხოლო

$$\epsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i) \quad \text{ლევ-ჩივიტას} \quad \text{სიმბოლოა.}$$

$$\theta_k \equiv p_k = \frac{1}{2} \epsilon_{jik} p_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{jik} u_{i,j} = \frac{1}{2} (\text{rot } u)_k \quad \text{არის} \quad x_k$$

ღერძის გარშემო შემობრუნების კუთხე, რადგან $\epsilon_{jik} \epsilon_{jil} = 2\delta_{kl}$ (იხ. გვ. 412).

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (1.10.4)$$

$$p_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}). \quad (1.10.5)$$

სხეულის გამოყოფილი უსასრულოდ მცირე ელემენტის მდგომარეობის შეცვლის სრული სურათის მისაღებად (1.10.3)-ით გამოხატულ საკუთრივ დეფორმაციასა და უსასრულოდ მცირე ხისტი მობრუნებას უნდა დაემატოს ელემენტის ხისტი (პარალელური) გადატანა, რომელიც თვით $M(x_1, x_2, x_3)$ წერტილის გადაადგილების ტოლია, ე.ი. ამ ხისტი გადატანის კომპონენტებია $u_i(x_1, x_2, x_3)$.

§1.7-ში განხილულ ერთგვაროვან დეფორმაციასა და ამ პარაგრაფში განხილულ დეფორმაციას შორის განსხვავება ისაა, რომ აქ დეფორმაციის კომპონენტები დამოკიდებულია განსაზღვრული ელემენტის მდებარეობაზე გარემოში, ე.ი. (x_1, x_2, x_3) კოორდინატებზე. კერძოდ, წერტილიდან წერტილზე გადასვლის დროს იცვლება დეფორმაციის მთავარი მიმართულებები. იგივე უნდა ითქვას ბრუნვის კომპონენტებზე და მოცულობის ფარდობით გაფართოებაზე.

§1.11. გადაადგილების განსაზღვრა დეფორმაციის კომპონენტების საშუალებით. ჩეზაროს ფორმულები. თავსებადობის სენ-ვენანის პირობები

ამ პარაგრაფის ამოცანაა (1.10.4) სისტემის ამოხსნა. ე.ი. საში უცნობი სიდიდის განსაზღვრავად გვაქვს ექვსი განტოლება, რაც იმაზე მიუთითებს, რომ საჭიროა გარკვეული დამატებითი პირობები დაედოს სისტემის თავისუფალ წევრებს (ე.წ. მარჯვენა მხარეებს) - დეფორმაციის კომპონენტებს.

უთქვამთ, V არე, რომელიც გარემოს ეკავა დეფორმაციამდე, ცა-

ლადბულია; $M_0 \left(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \overset{0}{x}_3 \right)$ რაიმე წერტილია V არეში, $\overset{0}{u}_i, i = 1, 2, 3$, M_0 წერტილის გადაადგილების ვექტორის კომპონენტებია, ხოლო $\overset{0}{p}_{ij}$ ბრუნვის კომპონენტებია აღნიშნულ წერტილში; $M_1 \left(\overset{1}{x}_1, \overset{1}{x}_2, \overset{1}{x}_3 \right)$ რაიმე სხვა წერტილია არეში. ამ უკანასკნელ წერტილში ვიპოვოთ გადაადგილების ვექტორის კომპონენტების გამოსახულება დეფორმაციის კომპონენტების საშუალებით. $M_0 M_1$ -ით აღვნიშნოთ M_0 და M_1 წერტილების შემაერთებელი ნებისმიერი წირი, რომელიც V არეში მდებარეობს.

(1.10.4) და (1.10.5)-დან ცხადია, რომ

$$u_{i,j} = e_{ij} + p_{ij}.$$

ე.ი.

$$du_k = u_{k,l} dx_l = (e_{kl} + p_{kl}) dx_l.$$

აქედან $M_0 M_1$ წირის გასწვრივ ინტეგრებით გვექნება, რომ

$$\overset{1}{u}_k = \overset{0}{u}_k + \int_{M_0 M_1} e_{kl} dx_l + \int_{M_0 M_1} p_{kl} dx_l. \quad (1.11.1)$$

გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა მეორე გვარის წირითი ინტეგრალისათვის და გამოვთვალოთ მეორე ინტეგრალი:

$$\begin{aligned} \int_{M_0 M_1} p_{kl} dx_l &= \int_{M_0 M_1} p_{kl} d \left(\overset{1}{x}_l - \overset{0}{x}_l \right) \\ \overset{0}{p}_{kl} \left(\overset{1}{x}_l - \overset{0}{x}_l \right) + \int_{M_0 M_1} \left(\overset{1}{x}_l - \overset{0}{x}_l \right) dp_{kl}, \quad \overset{0}{p}_{kl} &:= p_{kl} \left(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \overset{0}{x}_3 \right). \end{aligned} \quad (1.11.2)$$

თუ (1.10.5)-ს, მასში i და j -ის, შესაბამისად, k და l -ით შეცვლის შემდეგ, გავაწარმოებთ x_i -თი, მიღებულის მარჯვენა მხარეს დავამატებთ და გამოვაკლებთ $\frac{1}{2} u_{i,k}$ -ს გვექნება, რომ

$$p_{kl,i} = \frac{1}{2}(u_{k,i} - u_{l,k}),$$

$$= \frac{1}{2}(u_{i,k} + u_{k,i})_{,i} - \frac{1}{2}(u_{i,l} + u_{l,i})_{,k} = e_{ik,i} - e_{li,k}.$$

ე.ი.

$$dp_{kl} = p_{kl,i} dx_i = (e_{ik,i} - e_{li,k}) dx_i.$$

ჩავსვათ ეს უკანასკნელი (1.11.2)-ში, ხოლო მიღებული გამოსახულება - (1.11.1)-ში:

$$u_k = u_k^0 + p_{kl} \left(x_l^1 - x_l^0 \right) + \int_{M_0 M_1} \left[e_{kl} - \left(x_l^1 - x_l \right) (e_{li,k} - e_{ik,l}) \right] dx_i. \quad (1.11.3)$$

რამდენადაც u_k^1 დამოკიდებული უნდა იყოს x_i^1 -ზე, $i = 1, 2, 3$, მაგრამ არ უნდა იყოს დამოკიდებული წირის შერჩევაზე, მეორე გვარის წირითი ინტეგრალის ინტეგრების წირისაგან დამოუკიდებლობის აუცილებელი და საკმარისი პირობების თანახმად, უნდა შესრულდეს შემდეგი ტოლობები:*)

$$e_{k1,2} + e_{21,k} - e_{1k,2} - \left(x_l^1 - x_l \right) (e_{l1,k2} - e_{1k,l2})$$

$$= e_{k2,1} + e_{12,k} - e_{2k,1} - \left(x_l^1 - x_l \right) (e_{l2,k1} - e_{2k,l1}),$$

$$e_{k1,3} + e_{31,k} - e_{1k,3} - \left(x_l^1 - x_l \right) (e_{l1,k3} - e_{1k,l3})$$

$$= e_{k3,1} + e_{13,k} - e_{3k,1} - \left(x_l^1 - x_l \right) (e_{l3,k1} - e_{3k,l1}),$$

$$e_{k2,3} + e_{32,k} - e_{2k,3} - \left(x_l^1 - x_l \right) (e_{l2,k3} - e_{2k,l3})$$

$$= e_{k3,2} + e_{23,k} - e_{3k,2} - \left(x_l^1 - x_l \right) (e_{l3,k2} - e_{3k,l2}).$$

*) რადგან $\left(x_l^1 - x_l \right)_{,j} = -\delta_{lj}$, $j = 1, 2, 3$.

საიდანაც, დეფორმაციის ტენზორის სიმეტრიულობის გათვალისწინებით,

$$\left(\overset{1}{x}_l - x_l\right)(e_{l1,k2} - e_{1k,l2}) = \left(\overset{1}{x}_l - x_l\right)(e_{l2,k1} - e_{2k,l1}), \quad (1.11.4)$$

$$\left(\overset{1}{x}_l - x_l\right)(e_{l1,k3} - e_{1k,l3}) = \left(\overset{1}{x}_l - x_l\right)(e_{l3,k1} - e_{3k,l1}),$$

$$\left(\overset{1}{x}_l - x_l\right)(e_{l2,k3} - e_{2k,l3}) = \left(\overset{1}{x}_l - x_l\right)(e_{l3,k2} - e_{3k,l2}).$$

აქედან, რადგანაც უკანასკნელი ტოლობები V -დან ნებისმიერი (x_1, x_2, x_3) და $(\overset{1}{x}_1, \overset{1}{x}_2, \overset{1}{x}_3)$ წერტილებისათვის ე.ი. ნებისმიერი x_l -ისა და $\overset{1}{x}_l$ -სთვის უნდა შესრულდეს, ვიღებთ ტოლობებს, რომლებიც შემდეგ 6 დამოუკიდებელ პირობაზე დადის:

$$e_{l1,kj} - e_{1k,lj} = e_{lj,k1} - e_{jk,l1}, \quad *) \quad (1.11.5)$$

ე.ი.

$$e_{li,kj} + e_{kj,li} - e_{lj,ik} - e_{ik,lj} = 0,$$

სადაც

$$likj = 1122, 2233, 1133, 1123, 2133, 2132.$$

ამ უკანასკნელ პირობებს ეწოდება *თავსებადობის სენ-ვენანის პირობები*. ჩავწეროთ (1.11.5) გამლილი სახით. პირველ შემთხვევაში (1.11.5) მიიღებს

$$e_{11,22} + e_{22,11} - 2e_{12,12} = 0$$

სახეს. აქედან წრიული გადასმით მიიღება მეორე და მესამე შემთხვევის შესაბამისი განტოლებები. მეოთხე შემთხვევაში მივიღებთ

$$e_{11,23} + (e_{23,1} - e_{31,2} - e_{12,3})_{,1} = 0$$

განტოლებას. აქედან წრიული გადასმით მიიღება მეხუთე და მეექვსე შემთხვევის შესაბამისი განტოლებები.

^{*)} დასამახსოვრებლად: (1.11.5)-ს მივიღებთ (1.11.4)-ში მამრავლების გატოლებით და 1-ის და 2-ის ნაცვლად შესაბამისად i და j -ის ჩასმით.

(1.11.5) ასეც შეიძლება ჩაიწეროს:

$$e_{ij,kl} + e_{kl,ij} = e_{ik,jl} + e_{jl,ik},$$

რომელიც $3^4 = 81$ განტოლებისაგან შედგება, რომელთაგან მხოლოდ ზემოხსენებული 6-ია დამოუკიდებელი.

ლევი-ჩივიტას სიმბოლოს გამოყენებით სენ-ვენანის თავსებადობის პირობები ასეც შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} e_{km,ln} = 0, \quad i, l = 1, 2, 3.$$

რადგან (1.11.3) გამოსახულებაში წირითი ინტეგრალი ფიგურირებს, თუ არე მრავლადბმულია, გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები ზოგადად მრავალსახა ფუნქციები იქნება. თუ გაატარებთ საჭირო რაოდენობის ჭრილებს ისე, რომ არე ცალადბმულად იქცეს, მათი ცალსახობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ფუნქციების მნიშვნელობები ჭრილების სხვადასხვა მხრიდან ტოლი იყოს. (1.11.3) ფორმულებს ჩეზაროს^{*)} ფორმულები ეწოდება.

^{*)} ე. ჩეზარო (1859-1906).

თავი III. კონსტიტუციური დამოკიდებულებები

§1.12. დრეკადობის თეორიის ძირითადი კანონი – ჰუკის განზოგადებული კანონი

1.1-1.11 პარაგრაფებში თქმული მართებულია, როგორც ეს უკვე აღნიშნული იყო, ნებისმიერი უწყვეტი გარემოსთვის. იმისათვის, რომ დრეკადი სხეულის დამახასიათებელი განტოლებები მივიღოთ, დამატებით საჭიროა ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორების კომპონენტების დამაკავშირებელი კანონი, რომელიც ექსპერიმენტულად დგინდება.

ვიდრე უშუალოდ ძირითად კანონს შევცხებოდეთ, შევნიშნოთ შემდეგი. რადგანაც, ზოგადად, ძაბვები და დეფორმაციები სხეულის სხვადასხვა წერტილში სხვადასხვაა, ამიტომ მათ ვიხილავთ მოცემულ წერტილში. აქამდეც ჩვენ ეს ასე გვესმოდა, მაგრამ როცა ვიხილავდით გადაადგილების ვექტორის და დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტებს „მოცემული წერტილის“ ქვეშ, ჩვენ გვესმოდა წერტილი დეფორმაციამდე (ე.ი. წერტილი ლაგრანჟის ცვლადებში (იხ. ქვემოთ § 1.22)), ხოლო ძაბვების განხილვის დროს კი წერტილი დეფორმაციის შემდეგ (ე.ი. წერტილი ეილერის ცვლადებში (იხ. ქვემოთ § 1.22)).

მაგრამ მცირე დეფორმაციების განხილვის დროს (დრეკადობის წრფივი თეორია ემყარება მცირე შემოფოთებათა ჰიპოთეზას, რაც დეფორმაციების სიმცირეს და ამდენად, ხისტი გადაადგილების სიზუსტით, გადაადგილების სიმცირეს გულისხმობს)^{*)} ეს

^{*)}არსებობს განსაკუთრებული შემთხვევები, როცა დეფორმაციები მცირეა, მაგრამ გადაადგილებები დიდია ხისტი გადაადგილების სიზუსტითაც კი. მაგალითად, თხელი ღეროს მძლავრად ჩაღუნვისას მისი ბოლოები შეიძლება მნიშვნელოვნად გადაადგილდნენ, ღეროს შიგნით კი გაჭიმვა და კუმშვა მცირე იქნება. ასეთივე შემთხვევასთან გვექნება საქმე თხელი ფირფიტის ცილინდრული ღუნვის დროსაც. მაგრამ ასეთ შემთხვევაში მოქნილი ღეროების და ფირფიტების

სხვაობა არაარსებითია. მაგალითად, X_{ij} -ის მნიშვნელობა $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ და (x_1, x_2, x_3) წერტილებში, სადაც $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ წერტილი არის სხეულის დეფორმაციამდე (x_1, x_2, x_3) წერტილში მდებარე „სხეულის წერტილის“ მდებარეობა დეფორმაციის შემდეგ, ერთმანეთისგან განსხვავდება X_{ij} -სთან შედარებით მცირე სიდიდით, რამდენადაც X_{ij} სივრცითი წერტილის უწყვეტი ფუნქციებია. ამდენად, დასაშვებია X_{ij} -ის მნიშვნელობა $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ წერტილში ამ სიზუსტით შევცვალოთ მისი მნიშვნელობით (x_1, x_2, x_3) წერტილში^{*)}. ეს მსჯელობა მისაღებია იმ პირობით, თუ $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ და (x_1, x_2, x_3) წერტილები ეკუთვნიან არეს, რომლის ჩაკეტვაც უკავია სხეულს დეფორმაციის შემდეგ.

ამის შესაბამისად, შემდეგში, გვექნება რა ლაპარაკი არეზე, რომელიც სხეულს უკავია, ყოველთვის მხედველობაში გვექნება არე, რომელიც სხეულს უკავია დეფორმაციამდე, ე.ი. ყველა სიდიდეს განვიხილავთ ლაგრანჟის ცვლადებში.

მოდელი უნდა გამოვიყენოთ და არა მცირე ჩაღუნვების თეორია. ე.ი. წინააღმდეგობა არ გვაქვს.

^{*)} სხვა სიტყვებით, (x_1, x_2, x_3) წერტილში დეფორმაციის შემდეგ მოსულ მატერიალური (სხეულის) წერტილის შესაბამის X_{ij} -ის მნიშვნელობით. ამდენად,

$$X_{ij}(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = F_{ij}[e_{11}(x_1, x_2, x_3), \dots, e_{33}(x_1, x_2, x_3)], \quad i, j = 1, 2, 3,$$

კონსტიტუციურ დამოკიდებულებებს ვცვლით

$$X_{ij}(x_1, x_2, x_3) = F_{ij}[e_{11}(x_1, x_2, x_3), \dots, e_{33}(x_1, x_2, x_3)], \quad i, j = 1, 2, 3,$$

დამოკიდებულებებით.

ჰუკის მიერ ჩატარებული, შესავალში ნახსენები ექსპერიმენტის ილუსტრირება მოვახდინოთ ე.წ. რბილი ფოლადის ღეროს (იხ. ქვემოთ § 3.1) გაჭიმვაზე ჩატარებული ექსპერიმენტის შედეგებით. P ძალის (ე.ი. ღეროს ბოლოზე მოქმედი დატვირთვის ტოლქმედის) ზრდის პარალელურად იზრდება ღეროს Δl წაგრძელება. $\Delta l = f(P)$ დამოკიდებულების ნახაზზე (იხ. ნახ. 1.12.1) მოცემულ გრაფიკს გაჭიმვის ან *ჰუკის დიაგრამა* ეწოდება (იხ. [3], გვ 35). დატვირთვის ინტენსივობის გაზრდისას მასალა ერთი მდგომარეობიდან მეორეში გადადის, რასაც დიაგრამაზე რამდენიმე უბანი შეესაბამება. წრფივი OA უბანი ჰუკის კანონს გამოსახავს. A წერტილის შესაბამის

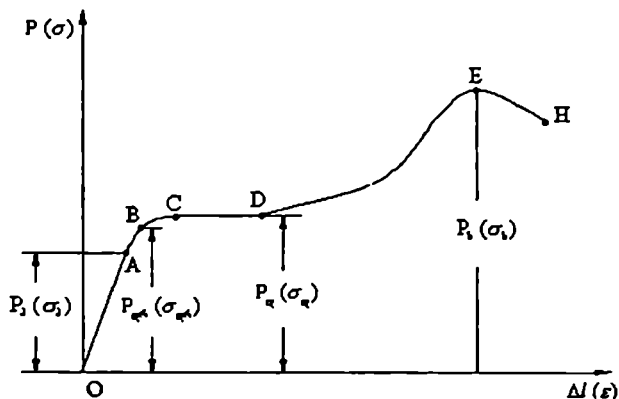
$$\sigma_y = \frac{P_y}{F}$$

ძაბვას, სადაც F ნიშნუშის კვეთის საწყისი ფართობია, მასალის პროპორციულობის ზღვარი ეწოდება. პროპორციულობის ზღვარი არის ის მაქსიმალური ძაბვა, რომლის ფარგლებში დეფორმაცია ძალის პროპორციულია. რბილი ფოლადისათვის

$$\sigma_y = 2000 \frac{\text{ნიუტონი}}{\text{სმ}^2} *).$$

B წერტილის ქვემოთ ხდება სუფთა დრეკადი წაგრძელება, ზემოთ კი ჩნდება ნარჩენი წაგრძელება.

$* 2000 \frac{\text{ნიუტონი}}{\text{სმ}^2} = 2 \cdot 10^7 \frac{\text{ნიუტონი}}{\text{მ}^2}$



ნახ. 1.12.1

$$\sigma_{\text{ფ}} = \frac{P_{\text{ფ}}}{F}$$

ძაბვას მასალის დრეკადობის ზღვარი ეწოდება. AC უბანში დიაგრამის დახრა მცირდება, CD უბანში კი ის თითქმის პორიზონტალური ხდება, რაც იმას ნიშნავს, რომ მასალის სიხისტე თანდათანობით კლებულობს და ბოლოს თითქმის ისპობა. დიაგრამის პორიზონტალური უბანი მასალის საერთო დენადობის მდგომარეობას გამოსახავს, როცა P ძალა არ იზრდება, მაგრამ დეფორმაცია გრძელდება. სათანადო

$$\sigma_{\text{დ}} = \frac{P_{\text{დ}}}{F}$$

ძაბვას მასალის დენადობის ზღვარი ეწოდება.

მასალის დენადობა აიხსნება ნარჩენი ძვრების მასიური განვითარებით. პირველად ნარჩენი ძვრები ჩნდება აქა-იქ, ცალკეულ კრისტალურ მარცვლებში, რომლებიც არახელსაყრელად არიან ორიენტირებულნი გამჭვირავი ძალის მიმართ. მათი რიცხვი და

განფენილობა P ძალის ზრდასთან ერთად იზრდება და ბოლოს მოვლენა მასობრივ ხასიათს იღებს. დიდი მოცულობის კრისტალური შრეები ერთიმეორეზე დაცოცებას განიცდიან, რის გარეშულ გამოვლინებასაც დიდი პლასტიკური (იხ. ნაწ. I, თავი VI) წაგრძელება წარმოადგენს. დიდი ნარჩენი წაგრძელების მიღების შემდეგ მასალა კვლავ იძენს წინააღმდეგობის უნარს, რაც იმას ნიშნავს, რომ წაგრძელების ზრდა P ძალის ზრდას მოითხოვს. მასალის *განმტკიცების* მდგომარეობას დიაგრამაზე აღმავალი DE უბანი ეთანადება. მაქსიმალურ P ძალამდე წაგრძელება ღეროს სიგრძეზე თანაბარია, შემდეგ კი ლოკალურ ხასიათს იღებს, ე.ი. გრძელდება ღეროს მხოლოდ პატარა ადგილი, სადაც ჩნდება ყელი და ზდება საბოლოო რღვევა. ყელის განივი კვეთი იმდენად სწრაფად ვიწროვდება, რომ, თუმცა იქ რეალური ძაბვა ზრდას ბოლომდე განაგრძობს, მთლიანად ძალვა (ძაბვის ინტეგრალი განივი კვეთის ფართზე) მცირდება. დიაგრამა მთავრდება დაღმავალი EH უბნით. ეს უბანი მასალის *ადგილობრივ დენადობას* ეთანადება. მაქსიმალური P ძალის შესაბამის

$$\sigma_{\text{ს}} = \frac{P_{\text{ს}}}{F}$$

ძაბვას მასალის *სიმტკიცის ზღვარი* ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ P ძალიდან ძაბვებზე გადასვლას საწყის F ფართობზე გაყოფით ვახდენთ, თუმცა სინამდვილეში ღეროს გაჭიმვისას განივი კვეთის ფართობი მცირდება. ამდენად ნაანგარიშები ძაბვები რეალურად შედარებით პირობით ხასიათს ატარებენ. რბილი ფოლადისათვის

$$\sigma_{\text{ს}} = 2400 \frac{\text{ნიუტონი}}{\text{სმ}^2}, \quad \sigma_{\text{ს}} = 4000 \frac{\text{ნიუტონი}}{\text{სმ}^2}.$$

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ $\sigma = \frac{P}{F}$ ძაბვასა და $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ (ღეროს სიგრძეა) ფართობით წაგრძელებას შორის დამოკიდებულებ-

ბის გრაფიკი ნახ. 1.12.1-ზე მოცემული დიაგრამის შესავსია, ამიტომ იქვე მივუთითეთ შესაბამისი სიდიდეები ფრჩხილებში.

აღსანიშნავია, რომ დიაგრამის წრფივ ნაწილში

$$\sigma = E\varepsilon, \text{ ე.ი. } P = E \frac{F}{l} \Delta l, *) \Delta l = \frac{P}{E} \cdot \frac{l}{F},$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ Δl აბსოლუტური წაგრძელება ღეროს სიგრძის პირდაპირპროპორციული და განიკვეთის ფართის უკუპროპორციულია.

ზემოთქმულიდან გამომდინარე, ექსპერიმენტულად დამტკიცებულად ვთვლით, რომ მცირე დეფორმაციების შემთხვევაში ადგილი აქვს ჰუკის შემდეგ განზოგადებულ კანონს: *სხეულის მოცემულ წერტილში ძაბვის ტენზორის კომპონენტები დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტების წრფივი და ერთგვაროვანი ფუნქციებია და პირიქით, ე.ი.*

$$X_{ij} = C_{ij}'' e_{kl}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.12.1)$$

და მეოთხე რიგის დეტერმინანტი

$$\det \|C_{ij}''\| \neq 0.$$

(1.12.1) ტოლობებს ეწოდებათ *კონსტიტუციური დამოკიდებულებები*.

(1.12.1)-ის თანახმად, დეფორმაციისა და ძაბვის ტენზორების სიმეტრიულობის გამო (შეადარე ქვემოთ ხაზგასმული წევრები)

$$X_{ij} = \underline{C_{ij}'' e_{kl}} = C_{ik}'' e_{lk} = \underline{C_{lk}'' e_{ij}}, \quad \text{ე.ი.} \quad (C_{ij}'' - C_{lk}'') e_{kl} = 0,$$

და

*) $\sigma F = P$, ე.ი. ნორმალური ძაბვის განიკვეთის ფართზე ნამრავლი გეპძლევს გამჭიმავ ძალას – ტოლქმელს. როგორც უკვე აღვნიშნეთ,

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ ფარდობითი წაგრძელება, Δl კი l სიგრძის ღეროს აბსოლუტური წაგრძელება.

$$\underline{C_{kl}^{ij} e_{kl}} = X_{ij} = X_{ji} = \underline{C_{kl}^{ji} e_{kl}}, \quad \text{ე.ი.} \quad (C_{kl}^{ij} - C_{kl}^{ji}) e_{kl} = 0.$$

რადგანაც ტოლობებს ადგილი უნდა ჰქონდეთ ნებისმიერი e_{kl} -ისთვის, ამიტომ

$$C_{lk}^{ij} = C_{kl}^{ij} = C_{kl}^{ji} = C_{lk}^{ji}.$$

ბოლო ტოლობა გამომდინარეობს პირველი ტოლობიდან, თუ პირველში i და j -ს ადგილებს შევუცვლით (სხვა სიტყვებით, i -ს დავარქმევთ j -ს და პირიქით).

ამ უკანასკნელი ტოლობების თანახმად, C_{kl}^{ij} -ების რაოდენობა შეადგენს 36-ს (მართლაც, $\text{card}\{a_{ij}\} = 3^2$; თუ $a_{ij} = a_{ji}$, მაშინ

$$\text{card}\{a_{ij}\} = 3^2 - 3 = 6.$$

$$\text{card}\{a_{ijkl}\} = 3^2 \cdot 3^2 = 3^4;$$

თუ $a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{ijlk}$, მაშინ

$$\text{card}\{a_{ijkl}\} = (3^2 - 3) \cdot (3^2 - 3) = 6 \cdot 6 = 36,$$

სადაც card აღნიშნავს განსხვავებულ ელემენტთა რიცხვს). C_{kl}^{ij} კოეფიციენტებს *დრეკადი მუდმივები* ეწოდება იმ თვალსაზრისით, რომ ისინი, ზოგადად, დამოკიდებულია წერტილის კოორდინატებზე, მაგრამ არაა დამოკიდებული მოცემულ წერტილში დეფორმაციის და ძაბვის ტენზორის კომპონენტებზე. ენერგიის შენახვის კანონზე დაყრდნობით მტკიცდება, რომ 36 დრეკადი მუდმივი წარმოადგენს სიმეტრიულ მატრიცს (ე.ი. $E_{kl}^{ij} = E_{ij}^{kl}$), ამდენად, დრეკადი მუდმივების რიცხვი ზოგად შემთხვევაში შეიძლება 21-ზე იქნას დაყვანილი (იხ. [2], [51])^{*)}.

სხეულს ეწოდება იზოტროპული რაიმე თვისების მიმართ,

^{*)} იხ. აგრეთვე Демидов С.П., Теория упругости, "Высшая школа", Москва, 1979, გვ. 58.

თუ აღნიშნული თვისება მოცემულ წერტილში ყველა მიმართულებით ერთნაირია. სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ იზოტროპული სხეულიდან რაიმე ადგილას ამოვჭრით რაიმე ფორმის მოცულობით ელემენტს, მაგალითად, კუბს, მაშინ ეს ელემენტი არ იქნება რაიმე თვისების თვალსაზრისით განსხვავებული სხეულის იმავე ადგილას ამოჭრილი იმავე ფორმის, მაგრამ სხვაგვარად ორიენტირებული ელემენტისგან. მაგალითად, ხე არ არის იზოტროპული, რადგან ის ე.წ. ბოჭკოებისგან შედგება, ხოლო ლითონი და საშვები სიზუსტით იზოტროპულია.

სხეულს ეწოდება ერთგვაროვანი რაიმე თვისების მიმართ, თუ აღნიშნული თვისება სხეულის სხვადასხვა წერტილში ერთნაირია. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ამ თვისების მიმართ ერთნაირია სხეულის სხვადასხვა ადგილას ამოჭრილი ერთნაირად ორიენტირებული ელემენტი.

ცხადია, სხეული შეიძლება იყოს ერთგვაროვანი იზოტროპული, არაერთგვაროვანი იზოტროპული, ერთგვაროვანი ანიზოტროპული (არა იზოტროპული) და არაერთგვაროვანი ანიზოტროპული.

მათემატიკურად, ერთგვაროვნება დრეკადობის თვალსაზრისით იმაში გამოიხატება, რომ დრეკადი მუდმივები არ არის დამოკიდებული სივრცით წერტილზე, ხოლო იზოტროპულობა — იმაში, რომ დრეკადი მუდმივები არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის ორიენტაციაზე სხეულის მიმართ, ე.ი. (1.12.1) ფორმულები არ უნდა შეიცვალოს კოორდინატთა სისტემის ნებისმიერი გარდაქმნის დროს.

ვაჩვენოთ, რომ იზოტროპული სხეულის ნებისმიერ წერტილში დეფორმაციის მთავარი მიმართულებები ემთხვევა ძაბვის მთავარ მიმართულებებს. მართლაც, თუ დეფორმაციის მთავარი მიმართულებებს საკოორდინატო ღერძებად მივიღებთ, მაშინ

$$e_{ij} = 0, \quad i \neq j,$$

ე.ი., ჰუკის კანონის თანახმად, კერძოდ,

$$X_{32} = A_1 e_{11} + A_2 e_{22} + A_3 e_{33}, \quad (1.12.2)$$

სადაც A_i დრეკადი მუდმივებია. გადავიდეთ ახალ $Ox'_1x'_2x'_3$ კოორდინატთა სისტემაზე, რომელიც x_3 ღერძის გარშემო ძველი სისტემის 180° -ით შემობრუნებით მიიღება. x'_3 ღერძი დაემთხვევა x_3 -ს, ხოლო x'_α , $\alpha = 1, 2$, ღერძებს x_α -ს, $\alpha = 1, 2$, საწინააღმდეგო მიმართულებები ექნებათ. ერთი მხრივ სხეულის იზოტროპულობის გამო

$$X'_{32} = A_1 e'_{11} + A_2 e'_{22} + A_3 e'_{33}. \quad (1.12.3)$$

მეორე მხრივ, ცხადია,

$$X'_{32} = X_{3(-2)} = -X_{32}, \quad e'_{ii} = e_{ii}. \quad (1.12.4)$$

(1.12.4)₂-ის გათვალისწინებით, (1.12.2) და (1.12.3)-დან ვაკცნით, რომ მათი მარჯვენა მხარეები ტოლია, რადგან

$$A_1 e'_{11} + A_2 e'_{22} + A_3 e'_{33} = A_1 e_{11} + A_2 e_{22} + A_3 e_{33};$$

ამიტომ ტოლი უნდა იყოს მათი მარცხენა მხარეებიც, ე.ი.

$$X_{32} = X'_{32} = -X_{32}. \quad (1.12.5)$$

(1.12.5)-დან ცხადია, რომ $X_{32} = 0$. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $X_{31} = X_{12} = 0$.

რამდენადაც იზოტროპული სხეულის შემთხვევაში ძაბვის და დეფორმაციის მთავარი მიმართულებები ერთმანეთს ემთხვევა, მათ უბრალოდ მთავარ ღერძებს ვუწოდებთ.

ჰუკის კანონის თანახმად

$$X_{11} = a_1 e_{11} + a_2 e_{22} + a_3 e_{33}, \quad (1.12.6)$$

სადაც a_i დრეკადი მუდმივებია.

ვთქვათ, $Ox'_1x'_2x'_3$ ახალი კოორდინატთა სისტემაა, რომელიც ძველისგან x_1 ღერძის გარშემო 90° -ით შემობრუნებით მიიღება. ახალ კოორდინატთა სისტემაში

$$X'_{11} = a_1 e'_{11} + a_2 e'_{22} + a_3 e'_{33}.$$

მაგრამ

$$X'_{11} = X_{11}, \quad e'_{11} = e_{11}, \quad e'_{22} = e_{33}, \quad e'_{33} = e_{22}.$$

ამიტომ

$$X_{11} = a_1 e_{11} + a_2 e_{33} + a_3 e_{22}. \quad (1.12.7)$$

(1.12.6) და (1.12.7)-დან ვასკენით, რომ $a_2 = a_3$.^{*)} ამდენად,

$$X_{11} = a_1 e_{11} + a_2 (e_{22} + e_{33}) = a_2 \theta + (a_1 - a_2) e_{11}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $a_2 = \lambda$, $a_1 - a_2 = 2\mu$, მაშინ

$$X_{11} = \lambda \theta + 2\mu e_{11}.$$

იზოტროპულობის გამო, ცხადია,

$$N_i := X_{ii} = \lambda \theta + 2\mu e_{ii} = \lambda \theta + 2\mu e_i. \quad (1.12.8)$$

თუ გადავალთ ახალ კოორდინატა $Ox_1'x_2'x_3'$ სისტემაზე, შესაბამისი ფორმების ინვარიანტობის გამო (იხ. (1.4.9) და (1.9.3)) მივიღებთ, რომ

$$N_i \xi_i^2 = X'_{ii} \xi_i' \xi_i', \quad e_i \xi_i^2 = e'_{ii} \xi_i' \xi_i',$$

მაგრამ

$$\xi_i \xi_i = \xi_i' \xi_i' = \xi_i' \xi_j' \delta_{ij}$$

და (1.12.8)-ის, ξ_i^2 -ზე გამრავლებისა და i -ს მიმართ აჯამების შემდეგ, გვექნება

$$N_i \xi_i^2 = \lambda \theta \sum_{i=1}^3 \xi_i^2 + 2\mu e_i \xi_i^2.$$

^{*)}(1.12.6)-ს გამოყენებით (1.12.7), მაშინ მივიღებთ, რომ

$$(a_2 - a_3) e_{22} + (a_3 - a_2) e_{33} = 0.$$

საიდანაც $(a_2 - a_3)(e_{22} - e_{33}) = 0$. აქედან, რადგანაც, ზოგადად $e_{22} \neq e_{33}$ (ამ უკანასკნელის მიღწევა შეიძლება გარე ძალების სათანადოდ შერჩევით), ამიტომ $a_2 = a_3$.

ეს ტოლობა ახალ კოორდინატთა სისტემაში, რადგან ინვარიანტობის გამო $e_{kk} = \theta = \theta' = e'_{kk}$ (იხ. (1.9.7), (1.9.8)), მიიღებს

$$X'_{ij} \xi'_i \xi'_j = \lambda \theta' \xi'_i \xi'_j \delta_{ij} + 2\mu e'_{ij} \xi'_i \xi'_j$$

სახეს. საიდანაც^{*)} ξ'_i -ების ნებისმიერობის გამო ნებისმიერ კოორდინატთა სისტემაში

$$X'_{ij} = \lambda \theta' \delta_{ij} + 2\mu e'_{ij}. \quad (1.12.9)$$

ამრიგად, იზოტროპული სხეულის შემთხვევაში ჰუკის განზოგადებული კანონი იღებს (1.12.9) სახეს და გვაქვს მხოლოდ 2 დრეკადი მუდმივი λ და μ . დრეკადი სიმეტრიის სხვა შემთხვევები მოყვანილია [2]-ში (იხ. გვ. 76-80).

(1.12.9)-ის გამო, იმის გათვალისწინებით, რომ $\delta_{ij} \delta_{ij} = \delta_{ii} = 3$,

$$\Theta := X_{ii} = X_{ij} \delta_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \delta_{ij} = 3\lambda \theta + 2\mu \theta$$

აქედან, თუ $3\lambda + 2\mu \neq 0$,

$$\theta = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \Theta. \quad (1.12.10)$$

ე.ი.

$$X_{ij} = \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \Theta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (1.12.11)$$

და თუ $\mu \neq 0$,

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} X_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \Theta \delta_{ij}. \quad (1.12.12)$$

განვიხილოთ ისეთი დრეკადი წონასწორობა, როცა

^{*)} $(X'_{ij} - \lambda \theta' \delta_{ij} - 2\mu e'_{ij}) \xi'_i \xi'_j = 0$.

$$X_{11} = \text{const} \neq 0, \quad X_{22} = X_{12} = X_{23} = X_{31} = X_{33} = 0^*),$$

მაშინ (1.12.9) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} \lambda\theta + 2\mu e_{11} &= X_{11}, & \lambda\theta + 2\mu e_{22} &= 0, \\ \lambda\theta + 2\mu e_{33} &= 0, & e_{13} = e_{21} = e_{23} &= 0, \end{aligned} \quad (1.12.14)$$

ხოლო (1.12.10) – შემდეგ სახეს:

$$\theta = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} X_{11}. \quad (1.12.15)$$

შევიტანოთ (1.12.15) (1.12.14)-ის პირველ ტოლობაში და განვსაზღვროთ X_{11} :

$$X_{11} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} e_{11}. \quad (1.12.16)$$

(1.12.15) და (1.12.16)-დან, ცხადია:

$$\theta = \frac{\mu}{\lambda + \mu} e_{11}.$$

ჩავსვათ ეს უკანასკნელი (1.12.14)-ის მეორე და მესამე ტოლობაში:

$$e_{22} = e_{33} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} e_{11}. \quad (1.12.17)$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$E := \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu := \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (1.12.18)$$

^{*)} თუ ეს პირობები სრულდება სხეულის ყოველ წერტილში (ან მოცემულ წერტილში), მაშინ ამბობენ, რომ სხეულში (ან მოცემულ წერტილში) გვაქვს X_1 ღერძის პარალელური წრფივი დაძაბული მდგომარეობა (იხ. ნახ. 1.5.5 და შესაბამისი ტექსტი).

E -ს ეწოდება დრეკადობის ან იუნგის მოდული, ხოლო ν -ს – პუასონის კოეფიციენტი. მაშინ (1.12.16) და (1.12.17) ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_{11} = E e_{11}, \quad (1.12.19)$$

$$e_{22} = e_{33} = -\nu e_{11}. \quad (1.12.20)$$

ეთქვან, განსახილველი სხეული x_1 ღერძის პარალელური მსახველის მქონე პრიზმა ან ცილინდრია. კოშის ფორმულების თანახმად, რადგან გვერდითი ზედაპირისთვის

$$n_1 = \cos(n, x_1) = \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

გვერდით ზედაპირზე

$$X_{n1} = X_{j1} n_j = X_{11} n_1 + 0 \cdot n_2 + 0 \cdot n_3 = 0,$$

$$X_{n2} = X_{j2} n_j = 0, \quad X_{n3} = X_{j3} n_j = 0,$$

ხოლო x_1 ღერძის დადებითი და უარყოფითი მიმართულებებით მდებარე ფუძეებზე, შესაბამისად,

$$X_{n2} = X_{12} = 0, \quad X_{n3} = X_{13} = 0, \quad X_{n1} = X_{11} = \text{const} \neq 0,$$

და

$$X_{n2} = X_{(-1)2} = -X_{12} = 0, \quad X_{n3} = X_{(-1)3} = -X_{13} = 0,$$

$$X_{n1} = X_{(-1)1} = -X_{11} = \text{const} \neq 0.$$

ამდენად, ცილინდრზე მოქმედი გარე ძალები წარმოადგენენ მის ფუძეებზე მოდებულ თანაბრადგანაწილებულ გამჭვიმავ ($X_{11} > 0$) ან მკუმშავ ($X_{11} < 0$) ძაბვის ვექტორებს. ჩვენ ჩავთვლით ექსპერიმენტულად დამტკიცებულად, რომ როცა $X_{11} > 0$, ცილინდრი გრძივი მიმართულებით წაგრძელებდა ($e_{11} > 0$), ხოლო განივი მიმართულებით შეიკუმშება ($e_{22}, e_{33} < 0$). ამ შენიშვნის საფუძველზე (1.12.19) და (1.12.20)-დან ნათელია, რომ

$$E > 0, \quad \nu > 0. \quad *) \quad (1.12.21)$$

ვთქვათ, ახლა

$$X_{23} = \text{const} \neq 0, \quad X_{11} = X_{22} = X_{33} = X_{13} = X_{21} = 0.$$

მაშინ (1.12.12)-ის თანახმად:

$$e_{23} = \frac{1}{2\mu} X_{23}, \quad e_{11} = e_{22} = e_{33} = e_{13} = e_{21} = 0.$$

ე.ი. ამ შემთხვევაში გვაქვს მარტივი ძერა, $X_{23} = \mu \varepsilon_{23}$. μ -ს ძერის მოდული ეწოდება.

დავუშვათ, რომ იზოტროპული სხეული ყოველმხრივ თანაბრად იკუმშება, მაშინ

$$X_{11} = X_{22} = X_{33} = -p, \quad X_{12} = X_{23} = X_{31} = 0.$$

(1.12.9)-ის თანახმად:

$$\lambda \theta + 2\mu e_{ii} = -p, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.12.22)$$

თუ (1.12.22) ტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, მივიღებთ, რომ

$$(3\lambda + 2\mu)\theta = -3p.$$

აქედან

$$p = -k\theta,$$

სადაც

$$k = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \quad (1.12.23)$$

სიდიდეს ეწოდება ყოველმხრივ შეკუმშვის მოდული (bulk modulus). ექსპერიმენტულად დამტკიცებულად ვთვლით, რომ

*) თერმოდინამიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან გამომდინარეობს (იხ. გვ. 26 წიგნში Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Теория упругости, "Наука", Москва, 1987), რომ $k > 0$, $\mu > 0$. მაშინ (1.12.24)-დან გამომდინარეობს რომ $-1 < \nu < 1/2$ (იხ. შემდეგი გვერდის სქოლიო). როცა $\nu < 0$, გაჭიმვის დროს განივი მიმართულებით, სხეული სქელდება. ასეთი მასალები მხოლოდ ბოლო პერიოდში იქნა აღმოჩენილი. ასეთია, მაგალითად, ანტირეზინი.

როცა $p > 0$, სხეული მართლა იკუმშება, ე.ი. მცირდება მისი მოცულობა, ამდენად $k > 0$.

(1.12.18)-ის და (1.12.23)-ის თანახმად,

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad k = \frac{E}{3(1-2\nu)} \text{.}^*) (1.12.24)$$

მართლაც, (1.12.18)-ის მეორე ფორმულიდან

$$\lambda + \mu = \frac{\lambda}{2\nu}.$$

ეს უკანასკნელი ჩავსვით (1.12.18)-ის პირველ ფორმულაში:

$$E = \frac{\mu[\lambda + 2(\lambda + \mu)]}{\lambda + \mu} = \frac{\mu\left(\lambda + \frac{\lambda}{\nu}\right)}{\frac{\lambda}{2\nu}} = 2\mu\nu + 2\mu.$$

აქედან მივიღებთ (1.12.24)-ის მეორე ფორმულას

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

ეს უკანასკნელი ჩავსვით (1.12.18)-ის მეორე ფორმულაში:

^{*)}თუ $\mu > 0$ და $k > 0$, მაშინ $\frac{\mu}{k} > 0$. მაშასადამე, (1.12.24)-ის

გათვალისწინებით $\frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} > 0$. საიდანაც ან $1-2\nu > 0$, $1+\nu > 0$, ე.ი.

$-1 < \nu < \frac{1}{2}$ ან $1-2\nu < 0$, $1+\nu < 0$, ე.ი. $\nu > \frac{1}{2}$ და $\nu < -1$. ეს

უკანასკნელი კი შეუძლებელია. ამდენად $-1 < \nu < \frac{1}{2}$. აქედან თუ მხედველო-

ბაში მივიღებთ (1.12.24)-ის მეორე ან მესამე ფორმულას, დავასკვნით, რომ $E > 0$, ხოლო, თუ გავითვალისწინებთ (1.12.24)-ის პირველ ფორმულას, ცხადია, $\lambda > 0$, როცა $\nu > 0$; $\lambda < 0$, როცა $\nu < 0$; $\lambda = 0$, როცა $\nu = 0$.

$$\nu = \frac{\lambda}{2 \left[\lambda + \frac{E}{2(1+\nu)} \right]} = \frac{2\lambda(1+\nu)}{2[2\lambda(1+\nu) + E]},$$

საიდანაც

$$2\nu(1+\nu)\lambda + E\nu = \lambda(1+\nu),$$

ე.ი.

$$E\nu = \lambda(1+\nu)(1-2\nu).$$

აქედან მივიღებთ (1.12.24)-ის პირველ ფორმულას

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

(1.12.24)-ის პირველი და მეორე ფორმულის (1.12.23)-ში ჩასმა კი მოგვცემს (1.12.24)-ის მესამე ფორმულას.

რადგანაც $k > 0$, (1.12.21) და (1.12.24) ვ-დან ცხადია, რომ

$$0 < \nu < \frac{1}{2}, \quad (1.12.25)$$

ე.ი. $\lambda > 0$, $\mu > 0$.

(1.12.12) ფორმულები, (1.12.24)-ის მეორე ფორმულისა და (1.12.18)-ის გამო, შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} X_{ij} - \frac{\nu}{E} \Theta \delta_{ij}. \quad (1.12.26)$$

შენიშვნა 1.12.1. უწყვეტ გარემოში ძაბვების წარმოქმნის ერთ-ერთ მიზეზს წარმოადგენს არათანაბარი გათბობა. ტემპერატურის ზრდასთან ერთად ფართოვდებიან გარემოს ელემენტებიც. ჩვეულებრივ ასეთი გაფართოება არ შეიძლება თავისუფლად მოხდეს, გარემო მას ეწინააღმდეგება და, ამდენად, გათბობის შედეგად წარმოიშვებიან ძაბვები, რომელთაც, მათი წარმოშობის ბუნებიდან გამომდინარე, ტემპერატურული ძაბვები ეწოდება (იხ. [35], გვ. 73 და [53], გვ. 92). ჩავთვალოთ, რომ ტემპერატურა ისეთ ფარგლებში იცვლება, რომ გავლენას არ ახდენს ე.წ. ღრეკად

მუდმივებზე. მაშინ, როგორც ეს დაკვირვებებიდანაა ცნობილი, წაგრძელებები ტემპერატურის T ცვლილების (იხ. შენიშვნა 1.18.1) პროპორციულია, და ერთნაირია ყველა მიმართულებით (ე.ი. ტემპერატურის ცვლილების მიზეზით ძვრის დეფორმაციას ადგილი არ აქვს). ამდენად, ჰუკის (1.12.26) კანონის ნაცვლად გვექნება

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} X_{ij} - \frac{\nu}{E} \Theta \delta_{ij} + \alpha T \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.12.27)$$

დამოკიდებულებები, სადაც α წრფივი ტემპერატურული (სითბური) გაფართოების კოეფიციენტია, რომელიც თითოეული მასალისათვის ექსპერიმენტულად დგინდება, ხოლო αT ფარდობითი ტემპერატურული გაფართოებაა. (1.12.27) დამოკიდებულებებს დიუჰამელ^{*)}-ნოიმანის^{**)} კანონი ეწოდება.

თუ ამოვხსნით (1.12.27) განტოლებებს X_{ij} -ს მიმართ და გავითვალისწინებთ (1.12.18)-ს, მივიღებთ

$$X_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \beta T \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.12.28)$$

სადაც

$$\beta := (3\lambda + 2\mu)\alpha = \frac{\alpha E}{1 - 2\nu}.$$

მართლაც, (1.12.27)-დან, როცა $i = j$, გვექნება

$$\theta = \frac{1+\nu}{E} \Theta - \frac{3\nu}{E} \Theta + 3\alpha T,$$

საიდანაც

$$\Theta = \frac{E}{1 - 2\nu} (\theta - 3\alpha T). \quad (1.12.29)$$

(1.12.27)-დან გამოვთვალოთ X_{ij} , მიღებულში ჩავსვათ (1.12.29)

^{*)} ე.მ.კ. დიუჰამელი (1797-1872).

^{**)} ფ.ე. ნოიმანი (1798-1895).

და გავითვალისწინოთ (1.12.24)₂, (1.12.24)₁, მაშინ

$$\begin{aligned} X_{ij} &= \frac{E}{1+\nu} \left(e_{ij} + \frac{\nu}{E} \cdot \frac{E}{1-2\nu} \theta \delta_{ij} - \frac{\nu}{E} \cdot \frac{E}{1-2\nu} 3\alpha T \delta_{ij} - \alpha T \delta_{ij} \right) = \\ &= \frac{E}{1+\nu} e_{ij} + \frac{\nu}{1+\nu} \cdot \frac{E}{1-2\nu} \theta \delta_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} \cdot \frac{E\alpha}{1-2\nu} T \delta_{ij} - \frac{E\alpha T}{1+\nu} \delta_{ij} = \\ &= 2\mu e_{ij} + \lambda \theta \delta_{ij} - \frac{E\alpha}{1-2\nu} \cdot \frac{3\nu+1-2\nu}{1+\nu} T \delta_{ij} = \\ &= \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \frac{E\alpha}{1-2\nu} T \delta_{ij}. \end{aligned}$$

(1.12.18)-ის თანახმად,

$$\frac{E}{1-2\nu} = 3\lambda + 2\mu.$$

თუ სხეული ძაბვებისგან თავისუფალია, მაშინ (1.12.27)-დან გამომდინარეობს

$$e_{ij} = \alpha T \delta_{ij}.$$

იუნგის მოდული E და პუასონის კოეფიციენტი ν
ზოგიერთი მასალისათვის

მასალა	$E(GPa = 10^{12} \text{ ნ/მ}^2)$	ν
ალუმინი	69-72	0,34
ბეტონი	48	0,20
მინა	70	0,23
პოლიეთილენი (HDPE)	0,7	0,42
ფოლადი	180-210	0,29

$$\text{ნ/მ}^2 = 10^{-4} \text{ ნ/სმ}^2$$

ცხრილი 1.12.4

§1.13. იდეალური და ბლანტი სითხეები. ჰიდრომექანიკის ძირითადი კანონი – ნიუტონის განზოგადებული კანონი

როგორც ეს უკვე შესავალში იყო აღნიშნული, ჰიდრომექანიკა ეწოდება მექანიკის იმ ნაწილს, რომელიც შეისწავლის ბუნებაში არსებული სითხეებისა და გაზების მოძრაობას (იხ., მაგალითად, [43]). შემდგომში საერთო ტერმინის ქვეშ „სითხეები“ ვიგულისხმებთ როგორც საკუთრივ სითხეებს, ასევე გაზებსაც. თუ სითხე ისეთია, რომ არ ეწინააღმდეგება თავისი ერთი ფენის მეორეზე სრიალს, მას *იდეალური სითხე* ეწოდება. ცხადია, იდეალური სითხის ცნება ისეთივე აბსტრაქტულია, როგორც აბსოლუტურად მყარი სხეულის ცნება. თუმცა გარკვეული აზრით წყალი და ჰაერი შეიძლება განხილულ იქნენ როგორც იდეალური სითხეები. იდეალური სითხის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ სითხის ნაწილები ერთმანეთზე მხოლოდ ნორმალური ძაბვით (წნევით) მოქმედებენ, ე.ი. მხები ძაბვები ნულის ტოლია:

$$\bar{X}_{nn} = \sigma_{nn} \bar{n}, \quad \sigma_{nn} \neq 0, \quad \tau_{nn} = 0. \quad (1.13.1)$$

კერძოდ,

$$X_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.13.2)$$

(1.13.2)-ის გათვალისწინებით კოშის (1.2.1) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ ერთი მხრივ,

$$X_{nn} = X_{ii} n_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.13.3)$$

მეორე მხრივ, (1.13.1)-ის x_i -ზე დაგეგმილებით მივიღებთ, რომ

$$X_{nn} = \sigma_{nn} n_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.13.4)$$

თუ შევადარებთ (1.13.3)-სა და (1.13.4)-ს^{*)}, დავასკვნით, რომ

^{*)}მათი სხვაობის განხილვით მივიღებთ, რომ

$$0 = (X_{nn} - \sigma_{nn}) n_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

საიდანაც გამომდინარეობს (1.13.5), რადგან ეს სამი განტოლება უნდა

$$X_{ii} = \sigma_n = -p, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.13.5)$$

p -ს იდეალურ სითხეში წნევა ეწოდება და, როგორც ვხედავთ, ის ფართის ორიენტაციასზე, ე.ი. ნორმალზე დამოკიდებული არ არის. p მხოლოდ წერტილზეა დამოკიდებული. ამრიგად, იდეალურ სითხეში

$$\vec{X}_n = -p\vec{n}.$$

$p\vec{n}$ ვექტორს ჰიდროდინამიკური წნევის ვექტორს უწოდებენ. მინუსი p -ს წინ განპირობებულია სურვილით წნევა შემოვიღოთ, როგორც დადებითი სიდიდე, რამდენადაც ისეთ სითხეებზე ჩატარებული ექსპერიმენტი, რომელთათვისაც მისაღებია იდეალური სითხის მოდელი, გვიჩვენებს რომ ტიპურ შემთხვევაში სითხე შეკუმშულ მდგომარეობაშია, ე.ი. $p > 0$ და $\vec{X}_n$ მიმართულია მოცულობის შიგნით, ე.ი. მოცულობის გარე ნორმალის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

რეალურ სითხეებში მისი ერთი ფენის მეორე ფენის მიმართ ფარდობითი მოძრაობისას ფენებს შორის წარმოიშობა ძალები, რომლებიც ამ მოძრაობას ეწინააღმდეგებიან. ასეთ ძალებს ზახუნის ძალებს უწოდებენ და ისინი მხებ ძალებს წარმოადგენენ. თუ ზახუნის ძალების სიდიდე უმნიშვნელოა, მაშინ ისინი შეიძლება უგულებელვყოთ და მივიღებთ იდეალური სითხის შემთხვევას. მაგრამ ხშირ შემთხვევაში ზახუნის ძალების უგულებელყოფა არ შეიძლება. თუ სითხის მოძრაობისას გათვალისწინებულია ზახუნის ძალები, მას ბლანტი სითხე ეწოდება.

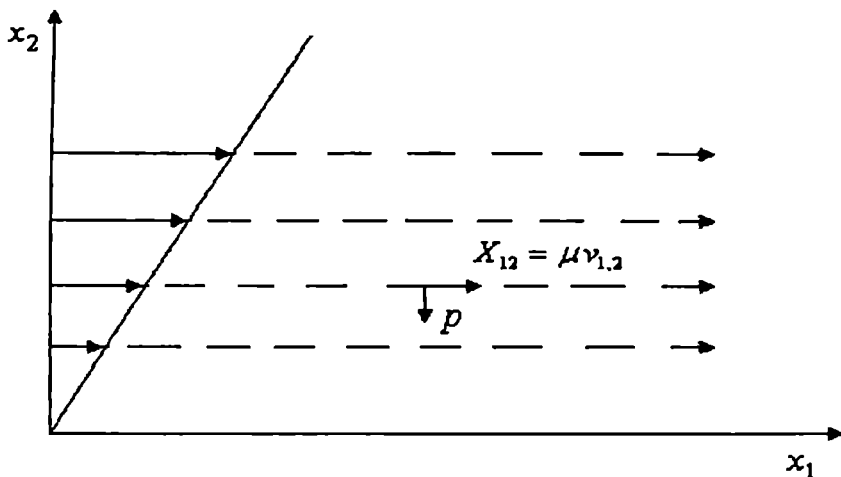
ნიუტონის ექსპერიმენტული კანონის თანახმად, ბლანტი სითხის x_1 ღერძის გასწვრივ $v_1(x_1, x_2, x_3, t)$ სიჩქარით (ე.ი. სიჩქარის $\vec{v}$ ვექტორის (იხ. აგრეთვე §1.22) დანარჩენი კომპონენ-

შესრულდეს მოცემულ წერტილში გაშვალ ნებისმიერ $\vec{n}$ ნორმალთან ზედაპირის უსასრულოდ მცირე ელემენტისათვის.

ტები: $v_j(x_1, x_2, x_3, t) \equiv 0$, $j = 2, 3$) მოძრაობის დროს x_1 მიმართულების ნორმალის მქონე ზედაპირის უსასრულოდ მცირე ელემენტზე მოქმედი X_{12} მხეები ძაბვა განისაზღვრება (იხ. ნახ. 1.13.1)

$$X_{12} = \mu v_{1,2} \quad (1.13.6)$$

ტოლობით, სადაც μ -ს ეწოდება *სიბლანტის კოეფიციენტი*, რომელიც ექსპერიმენტულად დგინდება. ის მუდმივი მნიშვნელობის მქონე გარკვეული სითხისთვის გარკვეული ტემპერატურის დროს.



ნახ.1.13.1

დავუშვათ, რომ სითხე იზოტროპულია და ზღვრულ შემთხვევაში, როცა სიბლანტე არ გვაქვს, სრულდება იდეალური სითხის დამახასიათებელი (1.13.5) და (1.13.2) პირობები. მაშინ, (1.13.6)-ის თანახმად, სამართლიანია ნიუტონის შემდეგი განზოგადებული კანონი:

$$X_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda e_{kk}(\bar{v})\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}(\bar{v}), \quad i, j = 1, 2, 3, *) \quad (1.13.7)$$

სადაც

$$e_{ij}(\bar{v}) := \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}),$$

$$\lambda = \lambda' - \frac{2}{3}\mu,$$

λ' -ს ეწოდება სიბლანტის მეორე კოეფიციენტი. (1.13.7) ტოლობებს ეწოდებათ ჰიდროდინამიკის კონსტიტუციური დამოკიდებულებები. ცხადია, თუ სითხე მდორედ მოძრაობს (გადაადგილებები მცირე სიდიდეებია), $e_{ij}(\bar{v})$ წარმოადგენს დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორს და მის არგუმენტებად შეიძლება მივიღოთ დეფორმაციამდე წერტილის კოორდინატები.

სითხეებს, რომელთათვისაც სამართლიანია (1.13.7), ეწოდება *ნიუტონისეული სითხეები* (ფლუიდები).

კონსტიტუციურ დამოკიდებულებებს არაკუმშვადი (იხ. §1.23) არაწრფივი ბლანტი სითხისთვის აქვს (იხ. აგრეთვე §1.22)

$$\sigma_{ij}(p, \bar{v}) := -p\delta_{ij} + 2\varphi(I(\bar{v})) e_{ij}(\bar{v}), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

სახე, სადაც φ არის *სიბლანტის ფუნქცია*,

$$I(\bar{v}) := e_{ij}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{v}).$$

ასეთ სითხეებს *არანიუტონისეული სითხეები* (ფლუიდები) ეწოდება.

*) ცხადია, $X_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda e_{kl}(\bar{v})\delta_{kl}\delta_{ij} + 2\mu e_{kl}(\bar{v})\delta_{ik}\delta_{jl}$
 $= -p\delta_{ij} + (\lambda\delta_{kl}\delta_{ij} + 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl})e_{kl}(\bar{v}).$

თავი IV. დრეკადობის თეორიის სტატიკისა და დინამიკის ამოცანები

§1.14. ბეტის^{*)} იგივეობა

ეთქვათ, რაიმე დრეკადი სხეულის ორ სხვადასხვა დაძაბულ მდგომარეობას ახასიათებენ X'_{ij} , e'_{ij} და X''_{ij} , e''_{ij} სიდიდეები. მაშინ ჰუკის განზოგადებული კანონის თანახმად:

$$X'_{ij} = C_{kl}^{ij} e'_{kl}, \quad (1.14.1)$$

$$X''_{ij} = C_{kl}^{ij} e''_{kl}. \quad (1.14.2)$$

ჩავსვათ $X'_{ij} e''_{ij}$ -ში (1.14.1), გავითვალისწინოთ $C_{kl}^{ij} = C_{kl}^{ji}$ და (1.14.2), მაშინ

$$X'_{ij} e''_{ij} = C_{kl}^{ij} e'_{kl} e''_{ij} = C_{kl}^{ij} e''_{ij} e'_{kl} = X''_{kl} e'_{kl}. \quad (1.14.3)$$

ამ უკანასკნელ ტოლობას ბეტის იგივეობა ეწოდება. იგი გამოხატავს იმას, რომ ერთი დაძაბული მდგომარეობის მუშაობა მეორე დაძაბული მდგომარეობის დეფორმაციაზე, მეორე დაძაბული მდგომარეობის პირველი დაძაბული მდგომარეობის დეფორმაციაზე მუშაობის ტოლია.

§1.15. დრეკადი სხეულის სტატიკის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები

ამრიგად, დრეკადი წონასწორობის განსასაზღვრავად ჩვენ მივიღეთ შემდეგი დამოკიდებულებანი:

$$X_{ij,j} + \Phi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.15.1)$$

^{*)}ე. ბეტი (1823–1892).

$$X_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.15.2)$$

(1.15.1)-სა და (1.15.2)-ში დამოუკიდებელ განტოლებათა რიცხვი შეადგენს 9-ს. ძაბვის ტენზორის სიმეტრიულობის გამო, ამდენივეა

$$u_i, X_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.15.3)$$

უცნობთა რიცხვიც.

(1.15.1), (1.15.2) განტოლებათა სისტემას ეწოდება დრეკადობის თეორიის ძირითადი განტოლებათა სისტემა, რამდენადაც ის იძლევა სხეულის დრეკადი წონასწორობის განსაზღვრის საშუალებას. დრეკადი წონასწორობის განსაზღვრა გულისხმობს სხეულის ყოველ წერტილში გადაადგილების ვექტორის, ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორების მნიშვნელობათა პოვნას.

შევნიშნოთ, რომ (1.15.1), (1.15.2) განტოლებები წრფივია X_{ij} და u_i უცნობების მიმართ.

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ

$$u'_i, X'_{ij} \text{ და } u''_i, X''_{ij}$$

ფუნქციები (1.15.1), (1.15.2) სისტემის ამონახსნებია შესაბამისად Φ'_i და Φ''_i მოცულობითი ძალების შემთხვევაში, მაშინ

$$u_i = u'_i + u''_i, \quad X_{ij} = X'_{ij} + X''_{ij} \quad (1.15.4)$$

იქნება აღნიშნული სისტემის ამონახსნი

$$\Phi_i = \Phi'_i + \Phi''_i$$

მოცულობითი ძალის შემთხვევაში.

(1.15.4)-ს ეწოდება ორი ამონახსნის ზედდების შედეგად მიღებული ამონახსნი.

ამ შემთხვევაში, (1.2.1) ფორმულების თანახმად, (1.15.4) ამონახსნის შესაბამისი ზედაპირული ძალები განისაზღვრება მოცემული ამონახსნების შესაბამისი ზედაპირული ძალების ჯამის სახით.

ვიგულისხმობთ, რომ მოცულობითი ძალები ცნობილია და განვიხილოთ შემდეგი სასაზღვრო ამოცანები:

I. *დრეკადობის თეორიის პირველი ძირითადი სასაზღვრო ამოცანა:* განვსაზღვროთ სხეულის დრეკადი წონასწორობა, თუ მოცემულია სხეულის ზედაპირზე მოქმედი გარე ძაბვები, ე.ი. უნდა ვიპოვოთ ისეთი u_i , X_{ij} ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.15.1), (1.15.2) განტოლებათა სისტემას V არეში, რომელიც სხეულს უკავია დეფორმაციამდე და

$$X_{ni}|_S = f_i, \quad i=1,2,3, \quad S = \partial V^*), \quad (1.15.5)$$

ან რაც იგივეა

$$X_{ni}(u)|_S = (\lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}))n_j|_S = f_i, \quad i=1,2,3,$$

სასაზღვრო პირობებს, სადაც n გარე ნორმალია, ხოლო f_i ზედაპირზე მოცემული ფუნქციებია.

II. *დრეკადობის თეორიის მეორე ძირითადი სასაზღვრო ამოცანა:* განვსაზღვროთ სხეულის დრეკადი წონასწორობა, თუ მოცემულია მისი საზღვრის წერტილების გადაადგილებები. ფიზიკურად ზემოთქმული აღნიშნავს იმას, რომ ზედაპირზე მოდებული გარკვეული ძალების მოქმედების შედეგად მისი წერტილები იღებენ მოცემულ გადაადგილებებს, რის შემდეგაც ხდება საზღვრის ჩამაგრება. ე.ი. უნდა ვიპოვოთ ისეთი u_i , X_{ij} ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.15.1), (1.15.2) განტოლებათა სისტემას V არეში, და

$$u_i|_S = g_i, \quad i=1,2,3, \quad (1.15.6)$$

სასაზღვრო პირობებს, სადაც g_i ზედაპირზე მოცემული ფუნქციებია.

III. *დრეკადობის თეორიის მესამე ძირითადი სასაზღვრო ამოცანა:* განვსაზღვროთ სხეულის დრეკადი წონასწორობა, თუ მისი საზღვრის წერტილებში მოცემულია ძაბვის ვექტორის ნორ-

^{*}ვიგულისხმობთ, რომ N გლუვი ზედაპირია.

მალური მდგენელი და გადაადგილების ვექტორის მხები მდგენელები.

IV. დრეკადობის თეორიის მეოთხე ძირითადი სასაზღვრო ამოცანა: განესაზღვროთ სხეულის დრეკადი წონასწორობა, თუ მისი საზღვრის წერტილებში მოცემულია გადაადგილების ვექტორის ნორმალური მდგენელი და ძაბვის ვექტორის მხები მდგენელები.

ძირითადი შერეული სასაზღვრო ამოცანა მდგომარეობს სხეულის დრეკადი წონასწორობის განესაზღვრაში, როცა მისი საზღვრის სხვადასხვა ნაწილში სხვადასხვა სასაზღვრო პირობებია მოცემული.

როგორც ადრე აღვნიშნეთ (იხ. §1.10), თუ საწინააღმდეგო არ იქნა თქმული, ვიგულისხმებთ, რომ u_i ცალსახა ფუნქციებია, რომლებსაც არის შიგნით აქვთ მესამე რიგამდე უწყვეტი წარმოებულები. ამ პირობებში ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტები იქნებიან ცალსახა ფუნქციები, რომელთა წარმოებულები მეორე რიგამდე ჩათვლით არის შიგნით უწყვეტი იქნება.

§1.16. ძირითადი განტოლებები გადაადგილებებში

ჩავსვათ (1.15.2) გამოსახულება (1.15.1)-ში, მივიღებთ:

$$\lambda \theta_{,j} \delta_{ij} + \mu u_{i,jj} + \mu u_{j,ij} + \Phi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

აქედან

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \theta_{,i} + \Phi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.16.1)$$

სადაც

$$\Delta(\cdot) := (\cdot)_{,jj}.$$

(1.16.1) სისტემას ეწოდება ლამეს განტოლებები. იმ შემთხვევაში, როცა $\lambda = \mu$, ის მიღებული იყო ნავიეს მიერ.

ვთქვათ, სხეულზე მოცულობითი ძალები არ მოქმედებენ. მაშინ (1.16.1)-ის x_i -ის მიმართ გაწარმოების და i -ს მიმართ აკავშირებს შემდეგ გვექნება

$$(\lambda + 2\mu)\Delta\theta = 0, \text{ ე.ი. } \Delta\theta = 0, \quad (1.16.2)$$

რადგან

$$\lambda + 2\mu > 0.^*)$$

თუ ახლა დავუშვებთ, რომ გადაადგილების ვექტორის კომპონენტებს მეოთხე რიგამდე ჩათვლით უწყვეტი წარმოებულები აქვთ და (1.16.1)-ზე ვიმოქმედებთ Δ ოპერატორით, (1.16.2)-ის გათვალისწინების შემდეგ მივიღებთ

$$\mu \Delta \Delta u_i + (\lambda + \mu)(\Delta \theta)_{,i} = \mu \Delta \Delta u_i = 0.$$

ამრიგად, თუ სხეულზე მხოლოდ ზედაპირული ძალები მოქმედებენ, მაშინ მოცულობითი გაფართოება θ პარამონიული ფუნქციაა, ხოლო გადაადგილების ვექტორის u_i კომპონენტები ბი-პარამონიული ფუნქციებია.

§1.17. ძირითადი განტოლებები ძაბვებში

ძაბვებში ძირითადი განტოლებების მისაღებად საჭიროა, წონასწორობის (1.15.1) განტოლებებს დავუმატოთ ძაბვებში ჩაწერილი სენ-ვენანის (1.11.5) პირობები. ამისათვის (1.12.26) უნდა ჩავსვათ (1.11.5)-ში. ვიგულისხმობთ, რომ სხეული იზოტროპული და ერთგვაროვანია. მაშინ $likj = 2233, 1123$ შემთხვევებში, მარტივი გარდაქმნების შემდეგ შესაბამისად მივიღებთ

^{*)} $\lambda + 2\mu = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E}{1+\nu} = \frac{E\nu + E - 2E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} > 0.$

$$X_{22,33} + X_{33,22} - \frac{\nu}{1+\nu} (\Theta_{,22} + \Theta_{,33}) = 2X_{23,23},^{*)} \quad (1.17.1)$$

$$X_{11,23} - \frac{\nu}{1+\nu} \Theta_{,23} = (-X_{32,1} + X_{13,2} + X_{21,3})_{,1}^{**}) \quad (1.17.2)$$

და კიდევ ოთხ მსგავს ტოლობას.

(1.17.1) და (1.17.2) ფორმულები რამდენადმე გამარტივდება, თუ გამოვიყენებთ (1.15.1)-ს. ამ უკანასკნელში მეორე განტოლება გავაწარმოოთ x_2 -ით, ხოლო მესამე – x_3 -ით და მიღებული შედეგები შევკრიბოთ:

$$2X_{32,23} + X_{22,22} + X_{33,33} + (X_{21,2} + X_{31,3})_{,1} = -(\Phi_{2,2} + \Phi_{3,3}). \quad (1.17.3)$$

მაგრამ (1.15.1)-ის პირველი განტოლების თანახმად, თუ მას x_1 -ით გავაწარმოებთ

$$(X_{21,2} + X_{31,3})_{,1} = -\Phi_{1,1} - X_{11,11}$$

და შევიტანთ (1.17.3)-ში, მივიღებთ:

$$^{*)} e_{22} = \frac{1+\nu}{E} X_{22} - \frac{\nu}{E} \Theta, \quad e_{23} = \frac{1+\nu}{E} X_{23}, \quad e_{33} = \frac{1+\nu}{E} X_{33} - \frac{\nu}{E} \Theta.$$

$$e_{22,33} - e_{23,23} = e_{23,23} - e_{33,22} \Leftrightarrow e_{22,33} + e_{33,22} = 2e_{23,23}.$$

ამდენად,

$$\frac{1+\nu}{E} X_{22,33} - \frac{\nu}{E} \Theta_{,33} + \frac{1+\nu}{E} X_{33,22} - \frac{\nu}{E} \Theta_{,22} = 2 \frac{1+\nu}{E} X_{23,23}.$$

$$^{**}) e_{11,23} - e_{12,13} = e_{13,21} - e_{32,11}.$$

$$\frac{1+\nu}{E} X_{11,23} - \frac{\nu}{E} \Theta_{,23} - \frac{1+\nu}{E} X_{12,13} = \frac{1+\nu}{E} X_{13,21} - \frac{1+\nu}{E} X_{32,11}.$$

$$X_{11,23} - \frac{\nu}{1+\nu} \Theta_{,23} = X_{12,13} + X_{13,21} - X_{32,11}.$$

$2X_{32,23} = X_{11,11} - X_{22,22} - X_{33,33} - (\Phi_{1,1} + \Phi_{2,2} + \Phi_{3,3}) + 2\Phi_{1,1}$.
 ამ უკანასკნელის (1.17.1)-ში შეტანა მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მოგვცემს:

$$-\frac{\nu}{1+\nu}(\Theta_{,22} + \Theta_{,33}) + (X_{22} + X_{33})_{,33} + (X_{22} + X_{33})_{,22} - X_{11,11} = -\Phi_{,i,i} + 2\Phi_{1,1}.$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ

$$X_{22} + X_{33} = \Theta - X_{11},$$

მარტივად დავასკვნით, რომ

$$\frac{1}{1+\nu}\Delta\Theta - \Delta X_{11} - \frac{1}{1+\nu}\Theta_{,11} = -\Phi_{,i,i} + 2\Phi_{1,1}. \quad (1.17.4)$$

თუ მას დავუმატებთ ორი მსგავსი (რომლებიც მიიღება (1.17.4)-ის ანალოგიურად, თუ განვიხილავთ სენ-ვენანის თავსებადობის პირობებს, როცა $likj = 1122$ და 1133 -ს)

$$\frac{1}{1+\nu}\Delta\Theta - \Delta X_{j\bar{j}} - \frac{1}{1+\nu}\Theta_{,j\bar{j}} = -\Phi_{,i,i} + 2\Phi_{j,j}, \quad j = 2, 3,$$

ტოლობის ჯამს, მივიღებთ

$$\Delta\Theta = -\Phi_{,i,i} \frac{1+\nu}{1-\nu}. \quad (1.17.5)$$

(1.17.5)-ის (1.17.4)-ში შეტანის შემდეგ კი გვექნება:

$$\Delta X_{11} + \frac{1}{1+\nu}\Theta_{,11} = -\frac{\nu}{1-\nu}\Phi_{,i,i} - 2\Phi_{1,1}. \quad (1.17.6)$$

ანალოგიურად მივიღებთ კიდევ ორ განტოლებას:

$$\Delta X_{22} + \frac{1}{1+\nu}\Theta_{,22} = -\frac{\nu}{1-\nu}\Phi_{,i,i} - 2\Phi_{2,2}, \quad (1.17.7)$$

$$\Delta X_{33} + \frac{1}{1+\nu}\Theta_{,33} = -\frac{\nu}{1-\nu}\Phi_{,i,i} - 2\Phi_{3,3}. \quad (1.17.8)$$

თუ (1.15.1)-ში მეორე განტოლებას გავაწარმოებთ x_3 -ით, მესამეს – x_2 -ით და შედეგებს შევკრებთ, მივიღებთ

$$X_{12,13} + X_{22,23} + X_{32,33} + X_{13,12} + X_{23,22} + X_{33,23} \\ = -(\Phi_{3,2} + \Phi_{2,3}).$$

ეს უკანასკნელი წევრ-წევრად დავუმატოთ (1.17.2)-ს, მაშინ

$$\Delta X_{32} + \frac{1}{1+\nu} \Theta_{,23} = -(\Phi_{3,2} + \Phi_{2,3}). \quad (1.17.9)$$

ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ

$$\Delta X_{13} + \frac{1}{1+\nu} \Theta_{,31} = -(\Phi_{1,3} + \Phi_{3,1}), \quad (1.17.10)$$

$$\Delta X_{21} + \frac{1}{1+\nu} \Theta_{,12} = -(\Phi_{2,1} + \Phi_{1,2}).$$

(1.17.6)–(1.17.10) განტოლებებს ეწოდებათ *ბელტრამი-მიჩელის^{*)} თავსებადობის პირობები*. მოკლედ ისინი შეიძლება შემდეგი სახით ჩავწეროთ

$$\Delta X_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \Theta_{,ij} \\ = -\frac{\nu}{1+\nu} \Phi_{k,k} \delta_{ij} - (\Phi_{i,j} + \Phi_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

§1.18. დინამიკის ამოცანები. დინამიკისა და სტატიკის ძირითადი ამოცანების ამონახსნის ერთადერთობა

დალამბერის პრინციპის თანახმად, დინამიკის ძირითადი განტოლებების მისაღებად საჭიროა, სტატიკის ძირითად განტოლებებში მოცულობით ძალებს დავამატოთ ინერციის ძალები. ამას-

^{*)}ე. ბელტრამი (1835–1900), ჯ.პ. მიჩელი (1863–1940).

თან გადაადგილების ვექტორის, ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორების კომპონენტები, გარდა სივრცითი წერტილის კოორდინატებისა, დამოკიდებული იქნება აგრეთვე დროზე.

დეფორმაციამდე (x_1, x_2, x_3) სივრცით წერტილში მყოფი მატერიალური წერტილის აჩქარების ვექტორის კომპონენტებია

$$a_i(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{\partial^2 u_i(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

dV მოცულობაში მოთავსებულ dm მასაზე მოქმედი ინერციის ძალის კომპონენტებია

$$-a_i dm = -\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dm.$$

მაგრამ, რადგანაც $dm = \rho(x_1, x_2, x_3)dV$, მოცულობის ერთეულზე მოქმედი ინერციის ძალის კომპონენტებია

$$-\rho a_i = -\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}.$$

თუ მას დავამატებთ მოცულობით ძალას (1.15.1)-ში, მივიღებთ

$$X_{ij} + \Phi_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.18.1)$$

ცხადია, (1.18.1) სამართლიანია ნებისმიერი უწყვეტი გარემოსათვის.

ამ განტოლებებს უნდა დავმატოს ჰუკის განზოგადოებული კანონი, რომელიც უცვლელი რჩება, რადგან იგი არ შეიცავს მოცულობით ძალებს.

ლამეს (1.16.1) განტოლებები შემდეგ სახეს მიიღებენ:

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \theta_{,i} + \Phi_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (1.18.2)$$

მყარი დეფორმადი გარემოსათვის, ისევე როგორც ნებისმიერი უწყვეტი გარემოსათვის, მასის შენახვის კანონიდან გამომდინარე, ადგილი აქვს უწყვეტობის შემდეგ განტოლებას (იხ. ქვემოთ §1.23, ფორმულა (1.23.10)):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{v}) = 0.$$

მისი გაწრფივების ($\rho \bar{v} = (\rho_0 + \tilde{\rho})\bar{v} = \rho_0 \bar{v}$, $\tilde{\rho} := \rho - \rho_0$, $\tilde{\rho} \ll \rho_0$) (იხ. [13], ტომი 1, გვ. 30), ρ_0 -ზე გაყოფისა და t_0 -დან t -მდე ინტეგრების შემდეგ, მივიღებთ

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = -\operatorname{div} \bar{u} \quad \forall x \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad (1.18.3)$$

სადაც ρ და ρ_0 შესაბამისად აღნიშნავენ სიმკვრივეს დეფორმირებულ და არადეფორმირებულ ($t = t_0$) მდგომარეობაში; ამასთან ვგულისხმობთ, რომ არადეფორმირებულ მდგომარეობაში გადაადგილებები ნულის ტოლია^{*)}. ρ_0 პრინციპში ცნობილია და უკანასკნელი ტოლობა გამოიყენება მხოლოდ დროის ნებისმიერ t მომენტში სიმკვრივის გამოსათვლელად, როცა გადაადგილების $\bar{u}$ ვექტორი განსაზღვრულია სხვა დამოკიდებულებებიდან. ფაქტობრივად, მცირე შეშფოთებათა ჰიპოთეზიდან გამომდინარე, $\operatorname{div} \bar{u}$ მცირეა ერთეულთან შედარებით, აქედან გამომდინარე შედეგით $\rho \equiv \rho_0$ ^{**)} . ამ მიზეზით მცირე შეშფოთებათა ჰიპოთეზის

$$*) \int_{t_0}^t \bar{v}(x_1, x_2, x_3, t) dt = \int_{t_0}^t \frac{\partial \bar{u}(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t} dt$$

$$= \bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) - \bar{u}(x_1, x_2, x_3, t_0) = \bar{u}(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$**) (1.18.3) \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \operatorname{div} \bar{u} \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} \approx 1.$$

პირობებში (1.18.3) დამოკიდებულება არ არის ჩართული დრეკადობის თეორიის განტოლებათა სრულ სისტემაში.

დინამიკის პირველი ძირითადი ამოცანა. ვიპოვოთ $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.18.2) განტოლებებს (ან u_i და X_{ij} ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.18.1) განტოლებებს და ჰუკის განზოგადებულ კანონს) V არეში, რომელიც სხეულს უკავია დეფორმაციამდე,

$$X_{ni}|_S = f_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad S = \partial V, *) \quad (1.18.4)$$

სასაზღვრო პირობებს დროის ყოველ $t \geq t_0$ მომენტში და

$$u_i = u_i^0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = u_i', \quad i = 1, 2, 3,$$

საწყის პირობებს V არეში, დროის $t = t_0$ მომენტში. აქ f_i ფუნქციები S ზედაპირზე მოცემული ფუნქციებია, რომლებიც ზოგადად t -ზე არის დამოკიდებული, ხოლო u_i^0, u_i' ფუნქციები (x_1, x_2, x_3) სივრცითი წერტილის (მოცემული) ფუნქციებია.

დინამიკის სხვა ამოცანები პირველი ამოცანისაგან იმით განსხვავდებიან, რომ (1.18.4) სასაზღვრო პირობები შეცვლილია სტატიკის სხვა შესაბამისი სასაზღვრო პირობებით (იხ. §1.15), სადაც მოცემული ფუნქციები ზოგადად დროზეა დამოკიდებული.

განვიხილოთ დრეკადი სხეულის რაიმე კონკრეტული მოძრაობა და საწყის t_0 მომენტად მივიღოთ ის მომენტი, როცა სხეული „ბუნებრივ“ წონასწორობის მდგომარეობაშია, ე.ი. მასზე არ მოქმედებენ არც მოცულობითი და არც ზედაპირული გარე ძალები და დეფორმაციასაც არ განიცდის. $R(t)$ -თი აღვნიშნოთ მუშაობა**), რომელსაც ასრულებს გარე ძალები დროის (t_0, t)

*) კვულისხმობთ, რომ S გლუვი ზედაპირია.

**) დროის ერთეულში მუშაობა დროის ერთეულში გადაადგილების და მისი გამომწვევი ძალის სკალარულ ნამრავლს ეწოდება.

შუალედში. გამოვთვალოთ აღნიშნული ძალების dR მუშაობა დროის $(t, t + dt)$ შუალედში, როცა dt უსასრულოდ მცირეა.

დეფორმაციამდე სივრცით (x_1, x_2, x_3) წერტილში მდებარე მატერიალური წერტილი t მომენტში იმყოფება სივრცის წერტილში $x_i + u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ კოორდინატებით. $(t, t + dt)$ შუალედში ამ წერტილის გადაადგილების ვექტორის კომპონენტებია $x_i + u_i(x_1, x_2, x_3, t + dt) - [x_i + u_i(x_1, x_2, x_3, t)]$

$$\equiv \frac{\partial u_i}{\partial t} dt =: \dot{u}_i dt.$$

dS ელემენტზე მოდებული გარე $X_m dS$ ზედაპირული ძალების მუშაობა $(t, t + dt)$ შუალედში

$$X_m \dot{u}_i dt \cdot dS - \text{ის}$$

ტოლია, ხოლო dV მოცულობაზე მოდებული $\Phi_i dV$ მოცულობითი ძალების მუშაობა კი

$$\Phi_i \dot{u}_i dt dV - \text{ს}$$

ტოლია.

ამრიგად, S ზედაპირზე მოქმედი გარე ზედაპირული და V მოცულობაზე მოქმედი მოცულობითი გარე ძალების მუშაობა $(t, t + dt)$ შუალედში

$$dR = \left(\iint_S X_m \dot{u}_i dS + \iiint_V \Phi_i \dot{u}_i dV \right) dt. \quad (1.18.5)$$

აქედან, (1.2.1)-ის და (1.18.1)-ის თანახმად,

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \iint_S X_m n_j \dot{u}_i dS + \iiint_V \Phi_i \dot{u}_i dV \\ &= \iiint_V (X_m \dot{u}_i)_{,j} dV + \iiint_V \Phi_i \dot{u}_i dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iiint_V (X_{y,i} + \Phi_i) \dot{u}_i dV + \iiint_V X_{y,j} \dot{u}_{i,j} dV \\
&= \iiint_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i dV + \iiint_V X_{y,j} \dot{e}_{ij} dV,
\end{aligned} \tag{1.18.6}$$

რადგანაც

$$\begin{aligned}
X_{y,j} \dot{u}_{i,j} &= \frac{1}{2} X_{y,j} \dot{u}_{i,j} + \frac{1}{2} X_{y,j} \dot{u}_{i,j} = \frac{1}{2} X_{y,j} \dot{u}_{i,j} + \frac{1}{2} X_{j,i} \dot{u}_{j,i} \\
&= X_{y,j} \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) = X_{y,j} \dot{e}_{ij},
\end{aligned}$$

რადგან $X_{ij} = X_{ji}$.

მაგრამ

$$\iiint_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i dV = \iiint_V \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \dot{u}_i \cdot \dot{u}_i}{\partial t} dV = \frac{dT}{dt},$$

სადაც

$$T := \frac{1}{2} \iiint_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV \geq 0 \tag{1.18.7}$$

განსახილველი სხეულის კინეტიკური ენერგიაა, ე.ი. მისი ცალკეული ელემენტების ცოცხალი ძალების (momentum), ან რაც იგივეა, იმპულსების ჯამია. მართლაც, dm მასის ცოცხალი ძალა განმარტების თანახმად

$$\frac{1}{2} dm \dot{u}_i \dot{u}_i = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV \text{ -ს}$$

ტოლია.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$2W := X_{y,j} e_{ij}.^*) \tag{1.18.8}$$

^{*)} ამ ტოლობას ბ.პ. კლაპეირონის (1799-1864) ფორმულა ეწოდება.

თუ სხეული იზოტროპულია ((1.18.6) ფორმულის მისაღებად იზოტროპულობის მოთხოვნა არ იყო საჭირო), მაშინ (1.18.8) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$2W = X_{ij} e_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} e_{ij} + 2\mu e_{ij} e_{ij} = \lambda \theta^2 + 2\mu e_{ij} e_{ij} \quad (1.18.9)$$

$$= \lambda (e_{ii})^2 + 2\mu e_{ij} e_{ij} \geq 0.$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\dot{e}_{ij} := e_{ij}; \quad \dot{e}_{ij} := 2e_{ij}, \text{ ე.ი. } \dot{e}_{ij} := (2 - \delta_{ij})e_{ij}^*), \quad i \neq j, \quad (1.18.10)$$

მაშინ, (1.18.9)-ის თანახმად, ცხადია,

$$X_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \dot{e}_{ij}}^{**})$$

და

*) $\dot{e}_{ij}$ -ის დეფორმაციის “ინჟინრული” კომპონენტები ეწოდება. ის არ წარმოადგენს ტენზორს, მაგრამ $\dot{e}_{ij} = e_{ij}$, როცა $i \neq j$, ე.ი. გამოხატავს მართი კუთხის ცვლილებას დეფორმაციის დროს (იხ. §1.8). გარდა ამისა, ლაგვეხმარა (1.18.11)-ის გამოყენებისას.

**) ამ ტოლობას *ჟ. გრინის* (1793-1841) *ფორმულა* ეწოდება და სამართლიანია ზოგად ანიზოტროპულ შემთხვევაშიც. მართლაც, რადგან

$$W = \frac{1}{2} X_{ij} e_{ij} = \frac{1}{2} e_{ij} E_{ij} e_{ij},$$

ამიტომ

$$\frac{\partial W}{\partial e_{11}} = \frac{1}{2} E_{111} e_{11} + \frac{1}{2} e_{ij} E_{ij11} = E_{111} e_{11} = X_{11},$$

$$\frac{\partial W}{\partial e_{ii}} = X_{ii}, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\frac{\partial W}{\partial e_{12}} = \frac{1}{2} (E_{121} + E_{211}) e_{11} + \frac{1}{2} e_{ij} (E_{ij12} + E_{ij21}) =$$

$$= E_{121} e_{11} + e_{ij} E_{ij12} = 2X_{12},$$

$$\frac{\partial W}{\partial (2e_{ij})} = \frac{\partial W}{\partial \dot{e}_{ij}} = X_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

$$\begin{aligned}
\iiint_V X_{ij} \dot{e}_{ij} dV &= \iiint_V \frac{\partial W}{\partial \dot{e}_{ij}} \dot{e}_{ij} dV \\
&= \iiint_V \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \dot{e}_{ii}} \dot{e}_{ii} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^3 2 \frac{\partial W}{\partial \dot{e}_{ij}} \dot{e}_{ij} \right] dV \\
&= \iiint_V \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \dot{e}_{ii}} \frac{\partial \dot{e}_{ii}}{\partial t} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^3 \frac{\partial W}{\partial \dot{e}_{ij}} \frac{\partial \dot{e}_{ij}}{\partial t} \right] dV \\
&= \iiint_V \frac{\partial W}{\partial t} dV = \frac{d}{dt} \iiint_V W dV, \tag{1.18.11}
\end{aligned}$$

რადგანაც, (1.18.10)-ის გამო,

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{e}_{ii}} \dot{e}_{ii} = \frac{\partial W}{\partial \dot{e}_{ii}} \frac{\partial \dot{e}_{ii}}{\partial t}, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{e}_{ij}} \dot{e}_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \dot{e}_{ji}} \dot{e}_{ji} = 2 \frac{\partial W}{\partial \dot{e}_{ij}} \dot{e}_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \dot{e}_{ij}} \frac{\partial \dot{e}_{ij}}{\partial t}, \quad i \neq j, \quad i = 1, 2, 3.$$

მაშასადამე, (1.18.7)-ისა და (1.18.11)-ის თანახმად, (1.18.6) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{d}{dt} \iiint_V W dV. \tag{1.18.12}$$

ვაინტეგრირებთ (1.18.12)-ის ორივე მხარე t_0 -დან t -მდე და გავითვალისწინოთ, რომ საწყის მომენტში $R = T = W = 0$; მაშინ მივიღებთ გარე ზედაპირული ძალებისა და მოცულობითი ძალების მუშაობას დროის (t_0, t) , შუალედში:

$$R = T + U, \tag{1.18.13}$$

სადაც

$$U = \iiint_V W dV \geq 0. \quad (1.18.14)$$

(1.18.9) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ W დამოკიდებულია მხოლოდ მოცემულ მომენტში, მოცემულ წერტილში დეფორმირებულ მდგომარეობაზე. ამდენად, U დამოკიდებულია სხეულის დეფორმირებულ მდგომარეობაზე დროის მოცემულ t მომენტში. U -ს ეწოდება სხეულის დეფორმაციის პოტენციალური ენერგია, იგი იმ მუშაობის ტოლია, რომელიც უნდა შეასრულონ მოცულობითმა ძალებმა და გარე ზედაპირულმა ძალებმა, რომ გამოიწვიონ დეფორმირებული (მოცემული) მდგომარეობა. მართლაც, თუ სხეული ამ ძალებით ზემოქმედების შედეგად „ბუნებრივი“ (არადეფორმირებული) უძრავი (მოსვენებული) მდგომარეობიდან გადავა ახალ დეფორმირებულ უძრავ (მოსვენებულ) მდგომარეობაში, მაშინ, (1.18.13) ფორმულის თანახმად,

$$R = U, \quad (1.18.15)$$

რადგანაც უძრავ (მოსვენებულ) მდგომარეობაში $T = 0$.

(1.18.13) ფორმულა გამოხატავს ენერგიის შენახვის კანონს. მოცულობითი ძალებისა და გარე ზედაპირული ძალების მუშაობა იხარჯება T კინეტიკური ენერგიისა და U დეფორმაციის პოტენციალური ენერგიის შექმნაზე.

(1.18.9) ფორმულით განსაზღვრული სიდიდე მოცულობის ერთეულზე გათვლილი დეფორმაციის პოტენციალური ენერგიაა. მართლაც, (1.18.14) ფორმულიდან ცხადია, რომ dV მოცულობაზე გაანგარიშებული პოტენციალური ენერგია WdV -ს ტოლია და აქედან ზემოთქმული ცხადია. (1.18.9)-დან ნათელია, რომ ის არაგადაგვარებული კვადრატული ფორმაა, რადგან $\lambda > 0$ და $\mu > 0$ (იხ. §1.12).

ახლა განვიხილოთ დინამიკის ძირითადი ამოცანების ამოხსნისა და ერთადერთობის საკითხი. ვთქვათ, რომელიმე მათგანი უშვებს ორ ამონახსნს ერთი და იმავე მოცულობითი ძალების, საწყის და სასაზღვრო პირობებში. მაშინ, თუ განვიხილავთ მათ

სხვაობას ძირითად განტოლებათა სიწრფივისა და ერთგვაროვნების გამო^{*)} u_i , X_{ij} ფუნქციების მიმართ, იგი დააკმაყოფილებს იმავე განტოლებებს მოცულობითი ძალების გარეშე და ერთგვაროვან საწყის და სასაზღვრო პირობებს, ე.ი.

$$u_i|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}|_{t=t_0} = 0 \quad (1.18.16)$$

და

$$X_{ni}\dot{u}_i|_S = 0, \quad \text{როცა } t \geq t_0, \quad (1.18.17)$$

რამდენადაც საზღვრის წერტილებში ან

$$u_i|_S = 0, \quad \text{როცა } t \geq t_0$$

ან

$$X_{ni}|_S = 0, \quad \text{როცა } t \geq t_0.$$

აქედან გამომდინარე პირველ შემთხვევაში

$$\dot{u}_i|_S = 0,$$

და ორივე შემთხვევაში სრულდება (1.18.17). რადგანაც ამონახსნთა სხვაობისათვის მოცულობითი ძალები და (1.18.17) ნამრავლები ნულის ტოლია, ამიტომ მოცულობითი ძალებისა და გარე ზედაპირული ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა

$$R = 0,$$

რადგან (1.18.5)-ის თანახმად, $\frac{dR}{dt} = 0$ და აქედან

$R = \text{const} = 0$, ვინაიდან $R|_{t=t_0} = 0$, რამდენადაც „ბუნებრივი“ წონასწორობის მდგომარეობაში სხეულზე არც მოცულობითი და არც ზედაპირული ძალები არ მოქმედებენ. ამიტომ, (1.18.13) ტოლობის თანახმად,

^{*)}რადგან სხვაობაში მოცულობითი ძალები არ გვექნება და განტოლებათა მარცხენა მხარეები იქნება u_i , X_{ij} -ს მიმართ ერთგვაროვანი ფუნქციები.

$$T + U = 0.$$

ეს უკანასკნელი კი, (1.18.7)-ისა და (1.18.14)-ის გამო, სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$T = 0, \quad U = 0.$$

რადგან (1.18.7)-სა და (1.18.14)-ში ინტეგრალქვეშ გამოსახულებები არაუარყოფითია, ე.ი. (1.18.7)-ის, (1.18.14)-ისა და (1.18.9)-ის ძალით, დროის ყოველ $t \geq t_0$ მომენტში

$$\dot{u}_i = 0, \quad e_{ij} = 0. \quad (1.18.18)$$

(1.18.18) ტოლობათა პირველი ჯგუფი გვიჩვენებს, რომ გადაადგილების ვექტორი დროზე არ არის დამოკიდებული, ე.ი. უნდა გვქონდეს სტატიკური შემთხვევა. (1.18.18) ტოლობათა მეორე ჯგუფი კი გვიჩვენებს, რომ სხეული შეიძლება მხოლოდ ხისტად გადაადგილდეს. რადგან მისი ზოგადი ამონახსნია (იხ. §1.6)

$$u_1 = a_1 + b_2 x_3 - b_3 x_2, \quad u_2 = a_2 + b_3 x_1 - b_1 x_3, \\ u_3 = a_3 + b_1 x_2 - b_2 x_1$$

ან, მოკლედ, ვექტორულად –

$$\vec{u} = \vec{a} + [\vec{b}, \vec{x}], \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3),$$

სადაც $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ხისტი გადატანის ვექტორია, ხოლო $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ კი უსასრულოდ მცირე ბრუნვის ვექტორია (b_i არის x_i ღერძის გარშემო შემობრუნების უსასრულოდ მცირე კუთხე). მაგრამ რადგანაც საწყის მომენტში გადაადგილება არ გვაქვს, ამიტომ არც ხისტ გადაადგილებას ექნება ადგილი.

ამრიგად, დინამიკის ძირითად ამოცანებს არ გააჩნიათ ერთზე მეტი ამონახსნი.

რადგანაც სტატიკის ამოცანების შემთხვევაში ადგილი აქვს (1.18.15) ტოლობას, გვექნება, რომ მხოლოდ $e_{ij} = 0$. ცხადია, თუ სასაზღვრო პირობებში მონაწილეობენ გადაადგილებები, ე.ი.

მეორე, მესამე, მეოთხე^{*)} და შერეულ ამოცანებს ექნება ერთადერთი ამონახსნი, ხოლო პირველი ძირითადი სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი განისაზღვრება ხისტი გადაადგილების სიზუსტით.

დრეკადობის თეორიის ძირითადი ამოცანების ამონახსნის არსებობის თეორემები დამტკიცებულია, მაგალითად, [12], [48], [59]-ში (იხ. აგრეთვე § 1.21).

შენიშვნა 1.18.1. აღვილი სანახავია, რომ ტემპერატურული ძაბვების გათვალისწინებით, შენიშვნა 1.12.1-ის თანახმად (იხ. (1.12.28)), ლამეს (1.18.2) განტოლებები შეიცვლება (იხ. [48], გვ. 47)

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \theta_{,i} - \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} T_{,i} + \Phi_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (1.18.19)$$

$$i = 1, 2, 3,$$

განტოლებებით, რომლებსაც დიუჰამელ-ნოიმანის თერმო-დრეკადობის განტოლებები ეწოდება.

(1.18.19) განტოლებებს უნდა დაემატოს სითბოგამტარობის (რომელიც მიიღება სითბოს ნაკადის განტოლებებიდან დეფორმაციის ტენზორის დროით წარმოებულის შესაბამისი წევრის უკუგდებით, რაც ხშირ შემთხვევაში დასაშვებია, როგორც ამას ექსპერიმენტი გვიჩვენებს (იხ. [53], გვ. 92; [35], გვ. 79))

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T + \frac{\tilde{W}}{c\rho} \quad (1.18.20)$$

^{*)} თუ N ბრუნვითი ზედაპირი არაა. თუ N ბრუნვითი ზედაპირია, მეოთხე ამოცანას გააჩნია არატრეივიალური ამონახსნები (იხ. [48], გვ. 88).

^{**)} გ. ავალიშვილი, მ. ავალიშვილი. მათემატიკური მოდელირების საფუძვლები, თბილისის უნივერსიტეტის გამოცემლობა, თბილისი 2017 (იხ. გვ. 48).

ზოგად შემთხვევაში განტოლებას შემდეგი სახე აქვს (იხ. [48], გვ. 38):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T - \frac{\alpha E T_0}{(1 - 2\nu)c\rho} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \bar{u} + \frac{\tilde{W}}{c\rho},$$

განტოლება, სადაც $\alpha = \frac{k}{c\rho}$ ტემპერატურული გამტარობის

კოეფიციენტი, k — მაქსელის სითბოგამტარობის კოეფიციენტი (ე.ი. სითბოს^{*)} ის რაოდენობა, რომელიც დროის ერთეულში გატარდება ერთეულის ტოლ სისქის ფენაში, როცა ზედაპირებზე ტემპერატურებს შორის სხვაობა 1° -ის, ხოლო ზედაპირის ფართობი ერთეულის ტოლია), c — ხვედრითი სითბოტევადობა (ე.ი. სითბოს ის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა მასის ერთეულის ტემპერატურის 1° -ით გაზრდისათვის), ρ — სიმკვრივე, $\tilde{W} = dV$ ელემენტარულ მოცულობაში მოთავსებული სითბური წყაროს მიერ დროის ერთეულში მოცულობის ერთეულში გამოყოფილი სითბოს რაოდენობა.

(1.18.20) განტოლება განიხილება სხეულის მიერ დაკავებულ Ω არეზე, არის $d\Omega$ საზღვარზე სხედასხვა დამატებით პირობებში. კერძოდ, სამეცნიერო ლიტერატურაში ძირითადად შემდეგი სახის სასაზღვრო პირობები გვხვდება სხეულის $d\Omega$ ზედაპირზე:

სადაც T_0 სხეულის აბსოლუტური ტემპერატურაა ბუნებრივ (მოსვენებულ) მდგომარეობაში. ტემპერატურის T ცვლილება აითვლება T_0 -დან. ლეფორმირებული სხეულის აბსოლუტური ტემპერატურა $(T_0 + T)$ -ს ტოლია.

^{*)} სითბო (სითბოს რაოდენობა) განისაზღვრება ენერგიის რაოდენობით, რომელსაც გასცემს (იღებს) სხეული სითბური გაცვლის პროცესში. სითბოს

ელემენტარული რაოდენობა $dQ = CdT$, სადაც C ($c = \frac{C}{m}$, m სხეუ-

ლის მასა) სხეულის სითბოტევადობაა განსაზღვრულ პროცესში, dT სხეულის ტემპერატურის მცირე ცვლილება. სითბური ნაკადი სითბოს ის რაოდენობაა, რომელიც დროის ერთეულში გაივლის ნებისმიერ იზოთერმულ ზედაპირს (ე.ი. ზედაპირის ტემპერატურა T_0 -ის ($T = 0$) ტოლია).

– დროის ყოველ მომენტში სხეულის $\partial\Omega$ ზედაპირზე მოცემულია

$$T|_{\partial\Omega} = T^0$$

ტემპერატურა;

– დროის ყოველ მომენტში მოცემულია სითბური ნაკადი,

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = q^0,$$

სადაც q^0 არის სითბოს რაოდენობა, რომელიც სხეულის ზედაპირის ფართის ერთეულზე გაივლის დროის ერთეულში;

– ზედაპირზე გამავალი სითბური ნაკადი (გარე) გარემოს T^* ტემპერატურისა და T^0 ტემპერატურის სხვაობის პროპორციულია, ე.ი.

$$k \frac{\partial T}{\partial n} + H(T^* - T^0) = 0,$$

სადაც H სითბოს გაცემის კოეფიციენტია (ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ხდება ზედაპირიდან გამოსხივება);

– თუ სხეულის ზედაპირი ორი სხვადასხვა სითბოგამტარობის (k_1 და k_2) და ტემპერატურის (T_1 და T_2) ფენის საერთო ზედაპირია, მაშინ

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}.$$

გარდა ამისა, თუ სხეულის საზღვარზე მოცემულია ძაბვები, მაშინ (1.18.19) სისტემისათვის, (1.12.28)-ის თანახმად, გვექნება შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$X_m(u) := \left[\lambda u_{,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{\alpha E}{1-2\nu} T \delta_{ij} \right] n_j = f_i, \\ i = 1, 2, 3,$$

სადაც f , სხეულის ზედაპირზე დროის ნებისმიერ მომენტში მოცემული ფუნქციაა.

სასაზღვრო პირობებს უნდა დაემატოს აგრეთვე

$$T(x_1, x_2, x_3, t_0) = \chi(x_1, x_2, x_3), \quad x \in \Omega,$$

და

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t_0) = \varphi_i(x_1, x_2, x_3),$$

$$\frac{\partial u_i(x_1, x_2, x_3, t_0)}{\partial t} = \psi_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3, \quad x \in \Omega,$$

საწყისი პირობები, სადაც χ , φ_i და ψ_i მოცემული ფუნქციებია.

როგორც ვხედავთ, იზოტროპული სხეულის შემთხვევაში საწყის-სასაზღვრო ამოცანები T ტემპერატურისა და u_i გადაადგილებისათვის იხლიჩება ორ დამოუკიდებელ ამოცანად იმ თვალსაზრისით, რომ ჯერ დამოუკიდებლად ვპოულობთ T -ს შესაბამისი საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნით, ხოლო შემდეგ ცნობილი T -ს საშუალებით ვპოულობთ u_i -ს იმ ტიპის საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნით, რომელსაც იმ შემთხვევაში ვიკვლევთ, როცა ტემპერატურულ ძაბვებს (ან რაც იგივეა, ტემპერატურას) არ ვითვალისწინებთ.

§1.19. კლაპეირონის თეორემა

ვთქვათ, დრეკადი სხეული მოცულობითი ძალებისა და გარე ზედაპირული ძალების მოქმედების შედეგად იმყოფება წონასწორობის მდგომარეობაში. მაშინ აღნიშნული ძალების A მუშაობა u_i გადაადგილებაზე გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$A = \iint_S X_{ni} u_i dS + \iiint_V \Phi_i u_i dV$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_S X_{ij} u_i n_j dS + \iiint_V \Phi_i u_i dV \\
&= \iiint_V (X_{ij,j} + \Phi_i) u_i dV + \iiint_V X_{ij} u_{i,j} dV \\
&= \iiint_V X_{ij} e_{ij} dV^*) = 2 \iiint_V W dV = 2U. \quad (1.19.1)
\end{aligned}$$

ეს უკანასკნელი ტოლობა გამოხატავს კლაპეირონის თეორემას: დეფორმირებული სხეულის პოტენციალური ენერგია სხეულზე სტატიკურად მოდებული მოცულობითი და გარე ზედაპირული ძალების გადაადგილებებზე მუშაობის ნახევრის ტოლია, იმ პირობით, რომ მათ თავიდანვე პქონოდათ ის მნიშვნელობები, რასაც ისინი ფაქტობრივად იღებენ დრეკადი წონასწორობის დამყარების მომენტიდან (სინამდვილეში მათი საწყისი მნიშვნელობები ნულის ტოლია).

§1.20. სენ-ვენანის პრინციპი

დრეკადობის თეორიის ამოცანების პრაქტიკულად ამოხსნას ამარტივებს სენ-ვენანის პრინციპი, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: თუ ზედაპირის მცირე უბანზე მოქმედი ძალები სტატიკურად ნულის ეკვივალენტურია (სტატიკურად ნულის ეკვივალენტურ სისტემის ქვეშ გვესმის აბსოლუტურად მყარი სხეულის სტატიკის თვალსაზრისით ნულის ეკვივალენტური სისტემა, ე.ი., სისტემა, რომლის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი ნულის ტოლია), მაშინ ეს სისტემა მნიშვნელოვან გავლენას არ

$$\begin{aligned}
^*) X_{ij} u_{i,j} &= \frac{1}{2} X_{ij} u_{i,j} + \frac{1}{2} X_{ij} u_{i,j} = \frac{1}{2} X_{ij} u_{i,j} + \frac{1}{2} X_{ji} u_{j,i} \\
&= X_{ij} \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = X_{ij} e_{ij}.
\end{aligned}$$

ახდენს სხეულის იმ ნაწილის დეფორმირებულ (დაძაბულ) მდგომარეობაზე, რომელიც აღნიშნულ უბანთან ახლოს არ მდებარეობს.

სენ-ვენანის პრინციპი შეიძლება სხვაგვარადაც ჩამოვაყალიბოთ: თუ სხეულის ზედაპირის მცირე უბანზე მოქმედი ზედაპირული ძალების სისტემას შევცვლით მისი ეკვივალენტური სხვა სისტემით^{*)}, ეს გარემოება გავლენას არ მოახდენს სხეულის იმ ნაწილის დეფორმირებულ (დაძაბულ) მდგომარეობაზე, რომელიც აღნიშნულ უბანთან ახლოს არ მდებარეობს.

ცხადია, ორივე ფორმულირება ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

§1.21. დრეკადობის თეორიის ამოცანების ამოხსნის მეთოდები. ამონახსნის არსებობის თეორემები

დრეკადობის თეორიის ამოცანების ამოხსნის სამ ძირითად მეთოდს განასხვავებენ:

1. პირდაპირი მეთოდი გულისხმობს სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნას უშუალო ინტეგრებით;

2. შებრუნებული მეთოდის შემთხვევაში წინასწარ მოცემულია გადაადგილებები და ძაბვები, რომლებიც აკმაყოფილებენ ძირითად განტოლებებს და მათი საშუალებით ხდება შესაბამისი გარე ძალების განსაზღვრა;

3. სენ-ვენანის ნახევრადშებრუნებული მეთოდით ამოცანების ამოხსნისას წინასწარ უშვებენ, რომ გადაადგილების ვექტორისა და ძაბვის ტენზორის ზოგიერთი კომპონენტის სახე ცნობილია,

^{*)}კერძოდ, ის შეიცვლება მათი ნაკრები ვექტორით – შეყურსული ძალით და ნაკრები მომენტით – შეყურსული მომენტით. ცხადია, შეყურსული ძალის და მომენტის მოდების წერტილში ძაბვა უსასრულოა. დატვირთვის მოდების მცირე ფართობს მასალათა გამძლეობა არ ითვალისწინებს. ადგილობრივ, ე.ი. მცირე მოცულობაში, ძაბვებისა და დეფორმაციების განაწილებას, გამოწვეულს მცირე ფართზე მოქმედი დატვირთვებით, შეისწავლის დრეკადობის თეორია.

რაც დანარჩენი კომპონენტების განსაზღვრისას ამარტივებს ძირითად განტოლებათა სისტემას.

სამგანზომილებიანი დრეკადობის თეორიის კონკრეტული ამოცანების ამონახსნები მოცემულია, მაგალითად, [50], [48]-ში. ვთქვათ, დრეკად სხეულს უკავია R^3 -ის რაიმე Ω არე, რომლის $\partial\Omega$ საზღვარი ლიპშიცურია [54] (იხ. აგრეთვე დამატება 1, განსაზღვრა 40). ამასთან დაუშვათ, რომ $\Gamma \subset \partial\Omega$ არის დადებითი ზომის და $S := \partial\Omega \setminus \Gamma$.

განვიხილოთ შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა (იხ. § 1.16):

$$A\bar{u} := \mu\Delta\bar{u} + (\lambda + \mu)\text{grad div } \bar{u} = \bar{\Phi} \quad \Omega\text{-ში}, \quad (1.21.1)$$

$$T\bar{u} = \bar{g} \quad S\text{-ზე}, \quad (1.21.2)$$

$$\bar{u} = 0 \quad \Gamma\text{-ზე}, \quad (1.21.3)$$

სადაც $\bar{\Phi} := (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$; $T\bar{u} := ((T\bar{u})_1, (T\bar{u})_2, (T\bar{u})_3)$,
 $(T\bar{u})_k := X_{k_j}(\bar{u})n_j$, $k = 1, 2, 3$.

ჩვენ ვეძებთ (1.21.1)-(1.21.3) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნს სობოლევის $[H^1(\Omega)]^3$ სივრცეში (იხ. დამატება 1, განსაზღვრებები 53-54 და შენიშვნა 13). დაუშვათ, რომ

$$\Phi_k \in \tilde{H}^{-1}(\Omega) \text{ და } g_k \in H^{\frac{1}{2}}(S), \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.21.4)$$

(1.21.1) განტოლება გვესმის განაწილების აზრით. (1.21.3) პირობა გვესმის კვალის აზრით. (1.21.2) პირობა გვესმის $H^{\frac{1}{2}}(S)$ აზრით, რადგან თუ $\bar{u} \in [H^1(\Omega)]^3$ და $A\bar{u} \in [\tilde{H}^{-1}(\Omega)]^3$, მაშინ $T\bar{u} \in H^{\frac{1}{2}}(S)$ ფუნქციონალური განიმარტება

$$\langle T\bar{u}, \bar{u}^* \rangle_{\partial\Omega} := \int_{\Omega} X_{ij}(\bar{u})e_{ij}(\bar{u}^*)dx + \langle \Phi, \bar{u}^* \rangle_{\Omega} \quad \forall \bar{u}^* \in H^1(\Omega)$$

გრინის იგივეობით, სადაც $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\Omega}$ აღნიშნავს L_2 -დუალობას $[H^{-1/2}(\partial\Omega)]^3$ -სა და $[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3$ -ს შორის, ხოლო $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega}$ კი — L_2 -დუალობას $[\tilde{H}^{-1}(\Omega)]^3$ -სა და $[H^1(\Omega)]^3$ -ს შორის (იხ. და-მატება 1, თეორემა 24).

შემოვიღოთ

$$H^1(\Omega, \Gamma) := \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi = 0 \text{ } \Gamma\text{-ზე}\}$$

აღნიშვნა.

თუ $\Phi_k \in H^s(\Omega)$, $s > -\frac{1}{2}$, მაშინ (1.21.1)-(1.21.3) სასაზ-ღვრო ამოცანა ეკვივალენტურია შემდეგი ვარიაციული ამოცანის: ვიპოვოთ $\bar{u} \in [H^1(\Omega, \Gamma)]^3$ ისეთი, რომ

$$B(\bar{u}, \bar{u}^*) = F(\bar{u}^*) \quad \forall \bar{u}^* \in [H^1(\Omega, \Gamma)]^3, \quad (1.21.5)$$

სადაც

$$B(\bar{u}, \bar{u}^*) := \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}) e_{ij}(\bar{u}^*) dx,$$

$$F(\bar{u}^*) := -\langle \bar{\Phi}, \bar{u}^* \rangle_{\Omega} + \langle \bar{g}, \bar{u}^* \rangle_s,$$

აქ $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ არის დუალობა $[H^r(M)]^3$ და $[\tilde{H}^{-r}(M)]^3$ სივ-რცეებს შორის, სადაც $r = 1$, თუ $M \equiv \Omega$ და $r = \frac{1}{2}$, თუ $M \equiv S$.

თუ $\Phi_k \in H^s(\Omega)$, $s < -\frac{1}{2}$, მაშინ Tu ცალსახად არ განისაზ-ღვრება (იხ [27]).

ორივე ზემოხსენებული ამოცანა ეკვივალენტურია მინიმიზაციის შემდეგი ამოცანის:

ვიპოვოთ $\bar{u} \in [H^1(\Omega, \Gamma)]^3$ ისეთი, რომ

$$E(\bar{u}^*) \geq E(\bar{u}) \quad \forall \bar{u}^* \in [H^1(\Omega, \Gamma)]^3, \quad (1.21.6)$$

სადაც

$$E(\bar{u}^*) := \frac{1}{2} B(\bar{u}, \bar{u}^*) - F(\bar{u}^*). \quad (1.21.7)$$

სამართლიანია არსებობისა და ერთადერთობის შემდეგი (იხ., მაგალითად, [59], [27])

თეორემა 1.21.1. თუ Ω არის არე ლიპშიცის საზღვრით, $\Gamma \neq \emptyset$ და სრულდება (1.21.4) პირობები, მაშინ (1.21.1)-(1.21.3) სასაზღვრო ამოცანას და ამდენად (1.21.5) ამოცანასა და (1.21.6), (1.21.7) მინიმიზაციის ამოცანას აქვს ერთადერთი $\bar{u} \in [H^1(\Omega, \Gamma)]^3$ ამონახსნი და

$$\|\bar{u}\|_{[H^1(\Omega, \Gamma)]^3} \leq C \left(\|\bar{\Phi}\|_{[\bar{H}^{-1}(\Omega, \Gamma)]^3} + \|\bar{g}\|_{[H^{-1/2}(\Sigma)]^3} \right),$$

სადაც C არის დადებითი მუდმივი, რომელიც არ არის დამოკიდებული $\bar{u}$, $\bar{\Phi}$ და $\bar{g}$ -ზე.

თეორემის დამტკიცება ემყარება ლაქსი^{*)}-მილგრამის^{**)} თეორემას (იხ. დამატება 1 თეორემა 25), რამდენადაც

– F წრფივი შემოსაზღვრული ფუნქციონალია;

– $B(., .)$ ორადწრფივი ფორმა, კორნის^{***)} უტოლობის თანახმად, კოერციტიულია

$$B(\bar{u}, \bar{u}) \geq \delta_2 \|\bar{u}\|_{[H^1(\Omega, \Gamma)]^3}^2 \quad \forall \bar{u} \in H^1(\Omega, \Gamma)$$

^{*)} პ. ლაქსი (1926).

^{**) ან. მილგრამი (1911-1961).}

^{***)} ა. კორნი (1870-1945).

და შემოსაზღვრული

$$B(\bar{u}, \bar{u}) \leq \delta_1 \|\bar{u}\|_{[H^1(\Omega, \Gamma)]}^2 \|\bar{u}^*\|_{[H^1(\Omega, \Gamma)]}^3,$$

სადაც δ_1 და δ_2 დადებითი მუდმივებია.

შენიშვნა 1.21.1. თუ $\bar{g} \in [H^{r+1/2}(S)]^3$, $\bar{\Phi} \in [H^r(\Omega)]^3$, $\Gamma, S \in C^{r+1,1}$, სადაც $r \geq 0$ მთელი რიცხვია, მაშინ

$$\bar{u} \in [H^{r+2}(\Omega^*)]^3,$$

სადაც Ω^* არის $\bar{\Omega}$ -ს ისეთი ნებისმიერი ქვესიმრავლე, რომ $\bar{\Omega}^* \cap (S \cup \Gamma) = \emptyset$. უფრო მეტიც, არსებობს ისეთი $C = C(\Omega^*) > 0$ მუდმივი, რომ

$$\|\bar{u}\|_{[H^{r+2}(\Omega^*)]} \leq C \left(\|\bar{\Phi}\|_{[H^r(\Omega)]}^3 + \|\bar{g}\|_{[H^{r+1/2}(S)]}^3 \right).$$

თუ დამატებით, $\bar{g} \in [C^{1,\alpha}(S)]^3$, $\bar{\Phi} \in [C^{0,\alpha}(S)]^3$, $S \in C^{2,\alpha}$ მაშინ $\bar{u} \in [C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}^*)]^3$, სადაც $0 < \alpha < 1$ არის ჰოლდერის^{*)} მაჩვენებელი.

^{*)} ო.ლ. ჰოლდერი (1859–1937).

თავი V. ჰიდროდინამიკის სტაციონარული და არასტაციონარული ამოცანები

§1.22. ლაგრანჟის და ეილერის ცვლადები

უწყვეტი გარემოს მოძრაობის შესწავლის დროს არსებობს ორი მიდგომა. თუ უწყვეტი გარემოს ნაწილაკს განვიხილავთ, როგორც მოძრავ მატერიალურ წერტილს, მაშინ მთელი სხეულის მოძრაობის დასახასიათებლად აუცილებელია შემოვიღოთ გარკვეული პარამეტრები, რომლებიც სხეულის ამა თუ იმ წერტილს დაახასიათებენ.

ვთქვათ, ასეთი პარამეტრები იყოს მატერიალური წერტილის ξ_i , $i=1,2,3$, კოორდინატები დროის რაღაც (ვთქვათ, საწყის) მომენტში. მაშინ სხეულის მოძრაობის განტოლებები შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$x_i = \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \quad i=1,2,3, \quad (1.22.1)$$

სადაც x_i , $i=1,2,3$, რომელიც დამოკიდებულია ξ_1, ξ_2, ξ_3, t -ზე, არის დროის t მომენტში იმ მატერიალური წერტილის კოორდინატები, რომლის კოორდინატებიც საწყის მომენტში იყო ξ_i , $i=1,2,3$; ვიგულისხმობთ, რომ არსებობს φ_i და ψ_i ასახვები R^3 -ში ისეთი, რომ

$$\xi_i = \psi_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad i=1,2,3. \quad (1.22.2)$$

(1.22.2) გვაძლევს იმ მატერიალური წერტილის კოორდინატებს საწყის მომენტში, რომელსაც t მომენტში უკავია სივრცის (x_1, x_2, x_3) წერტილი.

ცხადია, სიჩქარის და აჩქარების კომპონენტებს ექნება

$$\begin{aligned} v_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \dot{x}_i &:= \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial t}, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1.22.3)$$

და

$$\begin{aligned} a_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \dot{v}_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) &:= \frac{\partial v_i}{\partial t} = \ddot{x}_i := \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \\ &= \frac{\partial^2 \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1.22.4)$$

სახე, თუ გავითვალისწინებთ (1.6.2)-ს, სადაც x_i -ს და x_i'' -ს შევცვლით შესაბამისად ξ_i -თი და x_i -თი, ე.ი.

$$x_i = \xi_i + u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.22.5)$$

ტოლობებს. ასეთ მიდგომას ეწოდება ლაგრანჟის მეთოდი, ხოლო ξ_1, ξ_2, ξ_3 პარამეტრებს – ლაგრანჟის ცვლადები. ამრიგად, სხეულის მოძრაობის ლაგრანჟის ცვლადებში შესწავლა გულისხმობს მისი ცალკეული მატერიალური წერტილების მოძრაობის შესწავლას და აქედან გამომდინარე მთელი სხეულის (უწყვეტი გარემოს) მოძრაობის შესწავლას.

არსებობს მეორე მიდგომაც, როცა სხეულის მოძრაობის შესწავლა ხდება საკოორდინატო სისტემის სხვადასხვა წერტილში სხეულის ნაწილაკების მოძრაობის მახასიათებლების (სიჩქარე, აჩქარება, ძაბვები და სხვ.) დროის განმავლობაში ცვლილებების განხილვით. სხვა სიტყვებით, დამკვირვებელი სივრცის მოცემულ წერტილში შეისწავლის დროის სხვადასხვა მომენტში მყოფ, ზოგადად სხვადასხვა, ნაწილაკის მოძრაობის მახასიათებლებს და ამდენად, ახდენს რა დაკვირვებას უწყვეტი გარემოს მიერ დაკავებულ ყველა წერტილში, შეისწავლის მთელი უწყვეტი გარემოს მოძრაობას. ასეთ მიდგომას ეწოდება ეილერის მეთოდი.

ეილერის მეთოდის გამოყენებისას დრო, სიჩქარე, აჩქარება, ძაბვები და სხვა სიდიდეები განიხილება, როგორც x_1, x_2, x_3, t ცვლადების, რომელთაც ეილერის ცვლადები (კოორდინატები) ეწოდება, ფუნქციები. ცხადია, x_1, x_2 და x_3 არის დამოკიდებული t -ზე, ხოლო ξ_1, ξ_2 და ξ_3 არ არის დამოკიდებული t -ზე. შევნიშნოთ, რომ სხეულის ცალკეული ნაწილაკების გადაადგილება შეიძლება შესწავლილ იქნას მხოლოდ ლაგრანჟის ცვლადებში. ამ შემთხვევაში ეილერის ცვლადების გამოყენება შეუძლებელია და მათზე გადასვლა მხოლოდ ფორმალური ხასიათის მქონე ოპერაციაა, რომელიც არ ცვლის მიდგომის თვალსაზრისს. თუ სიჩქარე $\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t)$, $i = 1, 2, 3$, მოცემულია ეილერის ცვლადებში, მაშინ აჩქარების გამოსათვლელად იმავე წერტილში საჭიროა გადავიღეთ ლაგრანჟის ცვლადებზე

$$v_i(x_1, x_2, x_3, t) \\ = v_i[x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), t]$$

და გამოვიყენოთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი:

$$a_i(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t} \\ = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \quad i = 1, 2, 3. *) \quad (1.22.6)$$

აღსანიშნავია, რომ

*) ამ სახით განსაზღვრულ $\frac{dv_i}{dt}$ -ს ეილერის სუბსტანციური ან

“მატერიალური” წარმოებული ეწოდება. ის ეილერმა შემოიღო 1752 წელს. ამ ცნებასთან და უწყვეტობის განტოლებასთან დაკავშირებით საინტერესო მოსაზრებაა გამოთქმული შემდეგ სტატიაში: Smirnov-Rueda R., Is the classical theory of fields complete and consistent mathematically? In Chubykalo, Andrew (ed) et al., Has the last word been said on classical electrodynamics? – New horizons. Princeton, NJ: Rinton Press (2004), 448-457.

$$\frac{\partial v_i(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t}$$

სივრცის ფიქსირებულ (x_1, x_2, x_3) წერტილში სიჩქარის (ზოგადად, სხვადასხვა მატერიალური წერტილის) ცვლილება. კერძოდ,

$$\frac{\partial v_i(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t} = 0$$

ნიშნავს იმას, რომ ფიქსირებულ (x_1, x_2, x_3) წერტილში სითხის ღინების სიჩქარე არ იცვლება.

თუ გადაადგილებები მცირე სიდიდეებია და გამოვრიცხავთ ფლუქტუაციებს, მაშინ სხეულის ცალკეული წერტილების სიჩქარეებიც მცირე სიდიდეები იქნება. თუ დავუშვებთ, რომ მათი

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \text{ წარმოებულებიც იმავე რიგის მცირე სიდიდეებია (იხ.}$$

$$[13], \text{ ტ. 1, გვ. 168), მაშინ } v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \text{ სიდიდეები იქნება მეორე}$$

რიგის მცირე სიდიდეები. მათი უგულვებელყოფის შემდეგ (1.22.6)-დან მივიღებთ, რომ

$$a_i = \dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial t}.$$

ეს უკანასკნელი კი ემთხვევა (1.22.4)-ს. საერთოდ, ეს შემთხვევა მეტად მნიშვნელოვანია, რადგან მცირე გადაადგილებები დამახასიათებელია დრეკადი სხეულებისათვის. ვიპოვოთ კავშირი

$$\frac{\partial u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial \xi_k} \text{ და } \frac{\partial u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial x_k}, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

სიდიდეებს შორის. ცხადია,

$$\frac{\partial u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial x_1} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_1}, \quad i = 1, 2, 3.$$

მაგრამ

$$\xi_i = x_i - u_i, \quad (1.22.7)$$

ამიტომ

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = 1 - \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_1}$$

და

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_1} - \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_1}, \quad i = 1, 2, 3.$$

მეორე რიგის მცირე სიდიდეების უგულებელყოფით მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_1}.$$

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_2} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_2} \quad \text{და} \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_3}.$$

წირს, რომლის ყოველ წერტილში მხები ემთხვევა სიჩქარის ვექტორის მიმართულებას *დენის წირი* ეწოდება. სტაციონალური მოძრაობის (იხ. ქვემოთ § 1.23) დროს *დენის წირები* ემთხვევა მატერიალური წერტილების *მოძრაობის ტრაექტორიებს*.

§1.23. ნაეიე-სტოქსის განტოლებები. სტოქსის და ოზენის მოდელები. ეილერის განტოლებები

თუ საწინააღმდეგო არ იქნება თქმული, ჩავთვალოთ, რომ $\Omega(t)$ არე, რომელიც უკავია სითხეს დროის t მომენტში, არ არის დროზე დამოკიდებული (მაგალითად, წყალი მიედინება არხში ისე, რომ წყლის დონე არ იცვლება), ე.ი. $\Omega(t) = \Omega \in R^3$ (იხ. [32]).

როგორც ვიცით, (1.18.1) განტოლებები სამართლიანია ნებისმიერი (გაზი, სითხე, დეფორმადი მყარი სხეული) უწყვეტი გარემოსათვის. მას^{*)}, (1.22.6)-ის თანახმად, ეილერის ცვლადებში ექნება შემდეგი სახე:

$$X_{y,j} + \Phi_i = \rho \frac{dv_i}{dt} = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k v_{i,k} \right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.23.1)$$

ბლანტი სითხის მოძრაობის განტოლებების მისაღებად (1.23.1)-ში შევიტანოთ ნიუტონის განზოგადებული (1.13.7) კანონით განსაზღვრული $X_{y,j}$:

$$\rho(\dot{v}_i + v_k v_{i,k}) = \mu \Delta v_i + (\lambda + \mu) v_{k,k} - p_{,i} + \Phi_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.23.2)$$

თუ $\lambda = \mu = 0$, ე.ი. სითხე არ არის ბლანტი, (1.23.2)-დან მივიღებთ იდეალური სითხის მოძრაობის შემდეგ განტოლებებს:

$$\rho(\dot{v}_i + v_k v_{i,k}) + p_{,i} = \Phi_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.23.3)$$

^{*)}შეინიშნოთ, რომ წონასწორობის განტოლებები და ძაბვის ტენზორის სიმეტრიულობა დამტკიცებული გვექნა ეილერის ცვლადებში. ჰუკის განზოგადებული კანონის ჩამოყალიბებისას მცირე დეფორმაციების (ე.ი. მცირე გადაადგილებების, ხისტი გადაადგილებების სიზუსტით) დროს ძაბვების არგუმენტებად ეილერის ცვლადები შეეცვალათ ლაგრანჟის ცვლადებით (იხ. აგრეთვე §1.22-ის ბოლო ნაწილი).

რომლებიც ეილერის განტოლებების სახელს ატარებს.

ნაეი-სტოქსის (1.23.2) განტოლებები და, კერძოდ, ეილერის (1.23.3) განტოლებები, როგორც ვხედავთ, არაწრფივი განტოლებებია. უნდა შევნიშნოთ, რომ მათი არაწრფივობა გამომდინარეობს არა ფიზიკური მოდელირებიდან, არამედ მათემატიკური მოსაზრებებიდან (იხ. (1.22.6)-ის გამოყენება).

თუ, სიმცირის მოსაზრებიდან გამომდინარე, (1.23.2) განტოლებებში $v_k v_{i,k}$ სიდიდეებს უგულებელვყოფთ, მოხდება ნაეი-სტოქსის განტოლებების გაწრფივება და მივიღებთ სტოქსის სახელით ცნობილ შემდეგ განტოლებებს:

$$\rho \dot{v}_i - \mu \Delta v_i - (\lambda + \mu) v_{k,k} + p_i = \Phi_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.23.4)$$

ოზენის*) სახით გაწრფივების შემთხვევაში უშვებენ, რომ სითხის ღინება მცირედ განსხვავდება რაიმე მიმართულების მუდმივ v_i^0 სიჩქარიან ღინებისგან, ე.ი.

$$v_i(x, t) = v_i^0 + v_i^*(x, t), \quad i = 1, 2, 3,$$

და შემდეგ (1.23.2) განტოლებებში, სიმცირის მოსაზრებიდან გამომდინარე, უკუაგდებენ არაწრფივ წევრებს:

$$\rho(\dot{v}_i^* + v_k^0 v_{i,k}^*) = \mu \Delta v_i^* + (\lambda + \mu) v_{k,k}^* - p_i + \Phi_i, \quad (1.23.5)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

ჰიდრომექანიკაში მოძრაობას ეწოდება სტაციონარული (დამდგარი), თუ მოძრაობის დამახასიათებელი სიდიდეები (სიჩქარე, წნევა და სხვ.), დამოკიდებულია ეილერის ცვლადებზე (რომლებიც, ზოგადად, დროის ფუნქციებია), ხოლო უშუალოდ დროზე დამოკიდებული არაა. ეს იმას ნიშნავს, რომ მოძრაობის დამახასიათებელი სიდიდეები სხვადასხვა წერტილში, ზოგადად, სხვადასხვაა, მაგრამ ფიქსირებულ წერტილში არ იცვლება დროის

*) კვ. ოზენი (1879-1944).

ცვლილებასთან ერთად. ამის შესაბამისად (2.23.4) განტოლებები მიიღებენ

$$\mu \Delta v_i + (\lambda + \mu) v_{k,k} - p_{,i} + \Phi_{,i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.23.6)$$

სახეს.

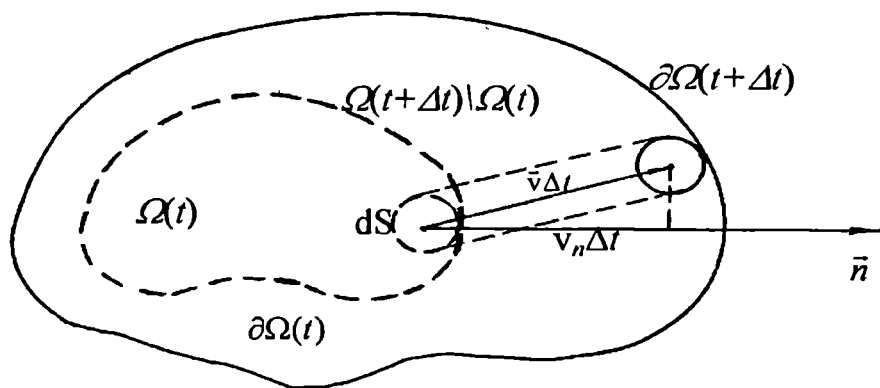
ნიუტონის მექანიკის ფუნდამენტურ კანონს წარმოადგენს მასის შენახვის კანონი. ის სამართლიანია ნებისმიერი უწყვეტი გარემოსათვის და მდგომარეობს იმაში, რომ სხეულიდან აზრობრივად გამოყოფილ ნებისმიერ ღროში ცვალებად $\Omega(t)$ მოცულობაში, რომელიც გარემოს ერთი და იმავე ნაწილაკებისაგან შედგება, მოთავსებული მასა არ იცვლება დროთა განმავლობაში. ეს კანონი ექსპერიმენტულად დადგენილად უნდა ჩაითვალოს (იხ., მაგალითად, [57], გვ. 120-123). მათემატიკურად ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x_1, x_2, x_3, t) d\Omega = 0. \quad (1.23.7)$$

წარმოებული განმარტების თანახმად,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x_1, x_2, x_3, t) d\Omega \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\Omega(t+\Delta t)} \rho(x_1, x_2, x_3, t+\Delta t) d\Omega - \int_{\Omega(t)} \rho(x_1, x_2, x_3, t) d\Omega}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\int_{\Omega(t+\Delta t) \setminus \Omega(t)} \rho(x_1, x_2, x_3, t+\Delta t) d\Omega}{\Delta t} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\int_{\Omega(t)} [\rho(x_1, x_2, x_3, t + \Delta t) - \rho(x_1, x_2, x_3, t)] d\Omega}{\Delta t} \Bigg\} \\
& = \int_{\partial\Omega(t)} \rho(x_1, x_2, x_3, t) v_n(x_1, x_2, x_3, t) dS \\
& \quad + \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \rho(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t} d\Omega, *) \quad (1.23.8)
\end{aligned}$$



ნახ. 1.23.1

*) რადგან Δt ნაზრდი t -ზე არ არის დამოკიდებული, ის შეიძლება შევიტანოთ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ.

რადგან $\Omega(t + \Delta t) \setminus \Omega(t)$ მოცულობა შედგება ელემენტარული $d\Omega = v_n dS \Delta t$ ცილინდრებისაგან (იხ. ნახ. 1.23.1 და დამატება 3, სადაც მოცემულია (1.23.8) ფორმულის მკაცრი დამტკიცება) და, როცა $\Delta t \rightarrow 0$, $\partial \Omega(t + \Delta t)$ ზედაპირი მიისწრაფის $\partial \Omega(t)$ ზედაპირისაკენ ($\Omega(t + \Delta t) \setminus \Omega(t)$ გვარდება $\partial \Omega(t)$ ზედაპირად), ხოლო $\rho(x_1, x_2, x_3, t + \Delta t)$ სიმკვრივე — $\rho(x_1, x_2, x_3, t)$ -სკენ. მაგრამ, გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულის თანახმად,

$$\int_{\partial \Omega(t)} \rho v_n dS = \int_{\partial \Omega(t)} \rho v_i n_i dS = \int_{\Omega(t)} (\rho v_i)_{,i} d\Omega. \quad (1.23.9)$$

(1.23.7)-(1.23.9)-დან, როგორც მთელი მოძრავი გარემოსათვის, ასევე მისგან აზრობრივად გამოყოფილი ნებისმიერი ნაწილისათვის, გამომდინარეობს

$$\int_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_{,i} \right] d\Omega = 0.$$

ამდენად, არეში რომელიც სხეულს უკავია,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0^*) \quad \forall x \in \Omega(t), \quad \text{როცა} \quad t \geq t_0, \quad (1.23.10)$$

სადაც $\operatorname{div} \vec{v} := v_{i,i}$. (1.23.10) განტოლებას ეწოდება *უწყვეტობის განტოლება* ეილერის ცვლადებში. ცხადია, რადგან

^{*)}თუ $\rho = 1$, მაშინ (1.23.7)-ის და (1.23.10)-ის გათვალისწინებით, შესაბამისად, გვექნება, რომ

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} d\Omega = 0 \quad \text{და} \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ, თუ მოცულობითი გაფართოების სიჩქარე ნულის ტოლია, მაშინ $\operatorname{div} \vec{v} = 0$.

$$\operatorname{div}(\rho \bar{v}) = (\rho v_i)_{,i} = \rho v_{i,i} + \rho_{,i} v_i = \rho v_{i,i} + \rho_{,i} \dot{x}_i,$$

ამიტომ (1.23.10) შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახითაც

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} = 0. \quad (1.23.11)$$

განტოლებათა სრული სისტემის მისაღებად (1.23.2)-ს უნდა დავმატოთ უწყვეტობის (1.23.10) და მდგომარეობის (ბაროტროპული სითხის შემთხვევაში)

$$\rho = f(p) \quad (1.23.12)$$

განტოლება, სადაც f გარკვეული ფუნქციაა.

(1.23.2), (1.23.10) და (1.23.12) განტოლებათა სისტემა შეიცავს ხუთ v_1, v_2, v_3, p და ρ უცნობს, რომლებსაც ვეძებთ

$$\bar{v}(x, t_0) = \bar{v}_0(x), \quad x \in \Omega(t_0), \quad (1.23.13)$$

საწყის*) და

$$\bar{v} = \bar{g}(x, t) \quad \partial\Omega(t)\text{-ზე}, \quad t \geq t_0, \quad (1.23.14)$$

სასაზღვრო პირობებში, სადაც $\bar{v}_0(x)$ და $\bar{g}(x, t)$ მოცემული ვექტორ-ფუნქციებია.

როცა $\bar{g} \equiv 0$, $\partial\Omega(t)$ საზღვარი უძრავი და მყარია და შეესაბამება იმ შემთხვევას, როცა საზღვარზე სითხე არ სრიალებს და ეკვრის მას; ხოლო როცა $\bar{g} \neq 0$, საზღვარი მოძრაობს დასახელებული $\bar{g}$ სიჩქარით.

*) სტაციონარული მოძრაობის შემთხვევაში (1.23.13) პირობები ზედმეტია, რადგან ერთი მხრივ განტოლებებში არ გვექნება დროით კერძო წარმოებულები, ხოლო მეორე მხრივ $\bar{v} = \bar{v}(x)$ უშუალოდ დროზე არ არის დამოკიდებული და მისი მოცემა საწყის მომენტში ამოცანის ამოხსნის ტოლფასი იქნებოდა. ამ შემთხვევაში (1.23.14) პირობა მიიღებს შემდეგ სახეს: $\bar{v} = \bar{g}(x) \quad \partial\Omega$ -ზე.

(2.23.14) სასაზღვრო პირობა შეიძლება შეიცვალოს

$$v_n := (\vec{v}, n) = v_i n_i = 0, \quad X_{nr} = 0 \quad \partial\Omega(t) \text{ -ზე} \quad (1.23.15)$$

სასაზღვრო პირობებით, სადაც X_{nr} არის $\vec{X}_n$ -ის მხები კომპონენტი. (1.23.15) შეესაბამება იმ შემთხვევას, როცა საზღვარზე სიჩქარის v_n ნორმალური მდგენელი და ძაბვის ვექტორის X_{nr} მხები მდგენელი ნულია (ე.ი. სითხეს საზღვრის გასწვრივ სრიალი შეუძლია). ცხადია, (1.23.15) პირობები შეიძლება არაერთგვაროვანიც იყოს.

სითხეს ეწოდება არაკუმშვადი, თუ მისი ნებისმიერი ნაწილის მოცულობა უცვლელი რჩება (მუდმივია) მოძრაობის დროს^{*)} (მოცულობითი გაფართოების სიჩქარე ნულის ტოლია)^{**) , ე.ი.,}

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (1.23.16)$$

რაც მეორე მხრივ მოცულობითი გაფართოების (იხ. (1.9.10)) დროით წარმოებულია

$$\frac{d}{dt} \operatorname{div} \vec{u}(x_1, x_2, x_3, t) = \operatorname{div} \left(\frac{d\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)}{dt} \right) = 0 \quad ***)$$

^{*)} იხ. Трусделл К., Первоначальный курс рациональной механики сплошной среды, Издательство „Мир“, Москва, 1975, გვ. 168.

^{**)} იხ. Жермен П., Механика сплошных сред, Издательство „Мир“, Москва, 1965, გვ. 63.

^{***)} შევნიშნოთ, რომ თუ გადაადგილების $\vec{u}$ ვექტორს განვიხილავთ ლაგრანჟის ξ_1, ξ_2, ξ_3, t ცვლადებში

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{\partial \vec{u}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial t},$$

მაშინ როდესაც ეილერის x_1, x_2, x_3, t ცვლადებში $\vec{u}$ -ს განხილვის დროს

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{d\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)}{dt}.$$

ამდენად, თუ სითხე არაკუმშვადია, მასის შენახვის (1.23.11) კანონიდან მივიღებთ, რომ

$$\frac{d\rho}{dt} = 0,$$

ე.ი., ρ მუდმივია სითხის მოძრაობის ტრაექტორიების გასწვრივ. აქედან გამომდინარე, როცა სითხე ერთგვაროვანია რაიმე მომენტში, რაც იმას ნიშნავს, რომ ρ არ არის სივრცის წერტილის ფუნქცია, დავასკვნით, რომ $\rho = \text{const}$ დროის ნებისმიერ მომენტში.

ამიტომ ლიტერატურაში ასეთი განმარტებაც გვხვდება: სითხე არაკუმშვადია, თუ ρ სიმკვრივე არც x -ზე და არც t -ზე არ არის დამოკიდებული (იხ. [13], ტ. I). ამდენად, როცა (1.23.12)-ში $f(p) \equiv \text{const}$ სითხე არაკუმშვადია. როცა $f(p) = Cp$ სითხეს ეწოდება იზოთერმული, ხოლო როცა $f(p) = Cp^n$ სითხეს ეწოდება პოლიტროპული, სადაც C და n მუდმივებია.

ვთქვათ, $\rho = \text{const}$, მაშინ (1.23.11)-ის თანახმად, სრულდება (1.23.16).

გავაწარმოთ ნავეი-სტოქსის (1.23.2) განტოლება x , -ის მიმართ, აეჯამოთ i -ს მიმართ 1-დან 3-მდე, გამოვიყენოთ შვარცის თეორემა და გავითვალისწინოთ (1.23.16); მაშინ გვექნება, რომ

$$\Delta p = \text{div } \vec{\Phi} - \rho v_{k,i} v_{i,k}. \quad (1.23.17)$$

$\vec{v}$ და p უცნობი სიდიდეები სხვადასხვა როლს თამაშობენ. დროის ყოველ t მომენტში, საწყისი მომენტის ჩათვლით, p წნევა შეიძლება განსაზღვრულ იქნას, როგორც (1.23.17) განტოლებისათვის ნოიმანის ამოცანის ამონახსნი. მართლაც, (1.23.16)-ის ძალით, (1.23.2) მიიღებს

$$\rho(\dot{v}_i + v_k v_{i,k}) = \mu \Delta v_i - p_{,i} + \Phi_{i,}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.23.18)$$

სახეს. თუ ახლა (1.23.18)-ს გაგამრავლებთ n_i -ზე, ავჯამავთ i -ს მიმართ და გავითვალისწინებთ ერთგვაროვან (1.23.14) პირობას (ე.ი.

$$\bar{v} = 0 \text{ } \partial \Omega \text{-ზე, როცა } t \geq t_0), \quad (1.23.19)$$

მივიღებთ

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \Phi_i n_i + \mu \Delta v_i \cdot n_i \text{ } \partial \Omega \text{-ზე}$$

ნოიმანის პირობას. ეს უკანასკნელი გამოსახულება იდეალური სითხის შემთხვევაში მიიღებს

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \Phi_i n_i$$

სახეს, ხოლო (1.23.17) განტოლების გაწვრივებით მივიღებთ

$$\Delta p = \operatorname{div} \bar{\Phi}$$

განტოლებას. ამდენად, ამ შემთხვევაში მივიღებთ ნოიმანის ამოცანას წნევისათვის ცნობილი მარჯვენა მხარითა და სასაზღვრო პირობით. რაც იმას ნიშნავს, რომ გვექნება დამოუკიდებელი ამოცანები p -სა და $\bar{v}$ -სთვის.

დასმული ამოცანები გამოკვლეულია, მაგალითად, [32]-ში (იხ. აგრეთვე [15]). ნავიე-სტოქსის განტოლებების *სუსტი (ვარიაციული) ფორმულირება* შემოღებული იყო *ჟ. ლერეს*^{*)} მიერ. (1.23.18) განტოლება ჩაეწეროთ ვექტორული ფორმით:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} - \frac{\mu}{\rho} \Delta \bar{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{1}{\rho} \bar{\Phi}, \quad (1.23.20)$$

სადაც

$$\operatorname{grad} \equiv \nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \quad \bar{v} \cdot \nabla := v_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

^{*)} ჟ. ლერე (1906-1998).

თუ გამოვიყენებთ

$$(\bar{v}, grad) \bar{v} = grad \frac{v^2}{2} - [\bar{v}, rot \bar{v}], \quad v^2 = (\bar{v}, \bar{v}),$$

იგივეობას, (1.23.20)-დან მივიღებთ ლამბ-გრძეობის^{*)}

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + grad \frac{v^2}{2} + [rot \bar{v}, \bar{v}] - \frac{\mu}{\rho} \Delta \bar{v} = \frac{1}{\rho} \Phi - \frac{1}{\rho} grad p$$

განტოლებას.

$H_0^1(\Omega)$ -თი აღენიშნოთ $C_0^\infty(\Omega)$ -ს ჩაკეტვა $H^1(\Omega)$ -ს ნორმით. (1.23.20) განტოლება გავამრავლოთ სატესტო

$$\bar{v}^* \in V := \left\{ \bar{v}^* \in [H_0^1(\Omega)]^3, \operatorname{div} \bar{v}^* = 0 \right\}, \quad (1.23.21)$$

ვექტორზე და მიღებული გამოსახულება Ω არეზე ვაინტეგრირებთ. ნაწილობითი ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$\frac{d}{dt} (\bar{v}(t), \bar{v}^*) + \frac{\mu}{\rho} (\bar{v}_{,j}(t), \bar{v}_{,j}^*) + (v_i v_{j,i}, v_j^*) = \frac{1}{\rho} (\Phi, \bar{v}^*), \quad (1.23.22)$$

რადგან $\bar{v}^*$ არ არის დამოკიდებული t -ზე, ხოლო $[L_2(\Omega)]^3$ -ში სკალარული

$$(\bar{v}(t), \bar{v}^*) := \int_{\Omega} v_i(x, t) v_i^*(x) d\Omega$$

ნამრავლი სივრცით ცვლადებზე არ არის დამოკიდებული^{**)} და, (1.23.21)-ის გამო,

^{*)} ჯ. ლამბი (ლემბი) (1849-1934).

^{**) ანტიკომ}

$$\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}, \bar{v}^* \right) = \frac{d}{dt} (\bar{v}, \bar{v}^*).$$

$$\int_{\Omega} (\nabla p \cdot \vec{v}^*) d\Omega = \int_{\partial\Omega} p v_i^* n_i dS - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{v}^* d\Omega = 0.$$

შემოვიღოთ ზოგიერთი ცნება. ვთქვათ, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ და X რაიმე ბანახის სივრცეა. მოცემული s -სთვის, $1 \leq s < +\infty$, $L_s([a, b[; X))$ აღნიშნავს $]a, b[$ -ზე განსაზღვრულ L_s ინტეგრებად ფუნქციათა სიმრავლეს მნიშვნელობებით X -ში, რომელიც ბანახის სივრცეა

$$\left[\int_a^b \|f(t)\|_X^s dt \right]^{\frac{1}{s}}$$

ნორმით. $L_\infty([a, b[; X))$ აღნიშნავს $]a, b[$ -ზე განსაზღვრულ არსებითად შემოსაზღვრულ ფუნქციებს

$$\operatorname{ess\,sup}_{]a, b[} \|f(t)\|_X$$

ნორმით, სადაც $\operatorname{ess\,sup}$ (არსებითი ზედა ზღვარი) აღნიშნავს ნული ზომის სიმრავლეებზე სიზუსტით $\sup$ -ს $]a, b[$ -ზე. სხვა სიტყვებით, $f(t)$ -ს ეწოდება არსებითად შემოსაზღვრული, თუ არსებობს ისეთი $c = \operatorname{const}$, რომ თითქმის ყველგან $]a, b[$ -ზე

$$\|f(t)\|_X < c.$$

ასეთი c რიცხვების ქვედა ზღვარს $\|f(t)\|_X$ -ის არსებითი ზედა ზღვარი ეწოდება.

ჩვენ ვეძებთ ისეთ $\vec{v}(t) \in V$ ვექტორ-ფუნქციას თითქმის ყველა $t > 0$ -სთვის, რომლისთვისაც (1.23.22), (1.23.13) სრულდება განაწილების აზრით. შევნიშნოთ, რომ (1.23.19) სასაზღვრო პირობა გათვალისწინებულია $\vec{v}(t) \in [H_0^1(\Omega)]^3$ მოთხოვნაში.

L_2 -თეორიაში (1.23.21), (1.23.13) ვარიაციული ამოცანის (იხ. [32], გვ. 343) სუსტ ამონახსნს ვუწოდებთ ამონახსნს, რომელიც

ეკუთვნის $L_2([0, T[; V))$ -ს და $L_\infty([0, T[; H))$ -ს $\forall T > 0$, ხოლო ძლიერ ამონახსნს კი ისეთს, რომელიც ეკუთვნის

$L_2([0, T[; V \cap [H^2(\Omega)]^3))$ და $L_\infty([0, T[; V))$ -ს $\forall T > 0$,
სადაც

$$H := \{ \vec{v} \in [L_2(\Omega)]^3, \operatorname{div} \vec{v} = 0, \vec{v} \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = 0 \}.$$

$\Omega \subset R^2$ -ისთვის ფორმულირებები ანალოგიურია.

დღევანდლამდე მიღებული შედეგების შეჯამებით შეიძლება დავასკვნათ შემდეგი (იხ. [32], გვ. 344): (i) ვთქვათ, $\Omega \subset R^2$, მაშინ ამოცანა კორექტულია ადამარის^{*)} აზრით: როგორც სუსტი, ასევე ძლიერი ამონახსნი არსებობს და ერთადერთია; თუ მონაცემები საკმარისად რეგულარულია, მაშინ ამონახსნები შესაბამის სივრცეებში უწყვეტადაა დამოკიდებული მონაცემებზე. (ii) ვთქვათ, $\Omega \subset R^3$, მაშინ ძლიერი ამონახსნი არსებობს და ერთადერთია რაიმე $]0, T^*[$ ინტერვალზე, სადაც T^* დამოკიდებულია მონაცემებზე (ფაქტობრივად შედეგი ლოკალურია); სუსტი ამონახსნი არსებობს $]0, +\infty[$ ინტერვალზე. სუსტი ამონახსნის ერთადერთობის საკითხი ღია პრობლემაა, ისევე, როგორც ძლიერი ამონახსნის არსებობის საკითხი ღრიის ნებისმიერი ინტერვალისთვის (ე.ი. გლობალური ამონახსნის). ცხადია, ისევე, როგორც R^2 -ში, როცა ძლიერი ამონახსნი არსებობს, ის იმდენად გლუვია, რამდენადაც ამის საშუალებას მონაცემები და არის გეომეტრია იძლევა, C^∞ რეგულარობისა და ანალიზურობის ჩათვლით.

აღსანიშნავია, რომ კლეის მათემატიკის ინსტიტუტის (Clay Mathematics Institute, USA) ათასწლეულის პრობლემათა ნუსხაში შეტანილია ნავიე-სტოქსის სისტემის ამონახსნის რეგულარობის პრობლემა ერთი მილიონი აშშ დოლარის ტოლი პრემიით.

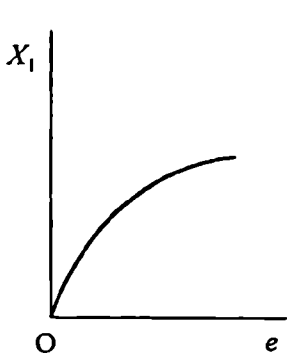
^{*)}ჟ. ადამარი (1865-1963).

თავი VI. პლასტიკურობის თეორია

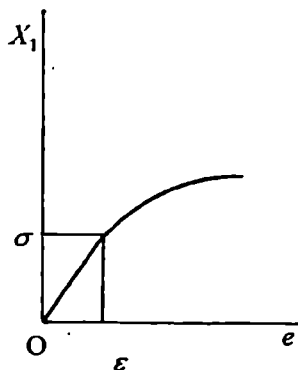
§1.24. დრეკად-პლასტიკური და პლასტიკური სხეულები

დრეკადობის თეორიისაგან განსხვავებით *პლასტიკურობის თეორია* შეისწავლის ისეთ სხეულებს, რომლებიც თავიანთი ბუნებით არ ექვემდებარებიან დრეკადობის კანონებს. სახელდობრ, თუ სხეულს მთლიანად მოვხსნით გარე დატვირთვას, ის არ დაიბრუნებს თავის საწყის ფორმას, ე.ი. ექნება *ნარჩენი დეფორმაცია* (იხ. §1.12 და აგრეთვე [55]).

თუ სხეულს თავიდანვე არ აქვს დრეკადი თვისებები (იხ. ნახ. 1.24.1), მაშინ მას *პლასტიკური სხეული* ეწოდება. თუ სხეულს დატვირთვის პირველ სტადიაზე აქვს დრეკადი თვისებები (იხ. ნახ. 1.24.2), ხოლო დატვირთვის შემდეგ სტადიაზე მას უჩნდება ნარჩენი დეფორმაციები, მაშინ სხეულს *დრეკად-პლასტიკური სხეული* ეწოდება.



ნახ. 1.24.1



ნახ. 1.24.2

პლასტიკურობის მათემატიკური თეორია შეისწავლის სხეულის დეფორმირების მთელ პროცესს, ხოლო *პლასტიკურობის გამოყენებითი თეორია* შეისწავლის სხეულის მხოლოდ ზღვრულ

მდგომარეობას დეფორმაციის საშუალო ეტაპების გამოკვლევის გარეშე.

§1.2.5. ძაბვებისა და დეფორმაციების ინტენსივობა

ისევე როგორც ღრეკადობის თეორიაში, პლასტიკურობის თეორიაშიც Φ_i , $i = 1, 2, 3$, მოცულობითი ძალებისა და X_{ij} , $i = 1, 2, 3$, ზედაპირული ძალების მოქმედების შედეგად გამოწვეული დაძაბული მდგომარეობა ხასიათდება ძაბვის X_{ij} სიმეტრიული ტენზორით. ისინი ერთმანეთთან არიან დაკავშირებული წონასწორობის (სტატიკის ამოცანების განხილვის დროს) (1.3.5) განტოლებებით, ხოლო სხეულის ზედაპირზე (1.2.1) დამოკიდებულებებით. დაძაბული მდგომარეობის დასახასიათებლად (1.5.7) ან (1.5.8) ინვარიანტებთან ერთად პლასტიკურობის თეორიაში გამოიყენება აგრეთვე შემდეგი ინვარიანტული სიდიდე

$$\tau_0 := \frac{1}{3} \left\{ (X_{11} - X_{22})^2 + (X_{22} - X_{33})^2 + (X_{33} - X_{11})^2 + 6(X_{12}^2 + X_{23}^2 + X_{31}^2) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (1.25.1)$$

რომელსაც *ძხები ძაბვების ინტენსივობა* ეწოდება.

(1.25.1)-ის ნაცვლად ხშირად იყენებენ მის ეკვივალენტურ

$$\sigma_0 = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_0 \quad (1.25.2)$$

სიდიდეს, რომელსაც *ძაბვების ინტენსივობა* ეწოდება. (1.25.1)-ში კოეფიციენტი ისეა შერჩეული, რომ მარტივი გაჭიმვის დროს (იხ. § 1.12) ძაბვების ინტენსივობა დაემთხვეს გამჭიმავ ძაბვას. მართლაც, x_1 მიმართულებით მარტივი გაჭიმვის დროს

$$X_{11} \geq 0, X_{11} \neq 0, X_{22} = X_{33} = 0; X_{ij} = 0, \text{ თუ } i \neq j.$$

თუ ამ სიდიდეებს ჩავსვამთ (1.25.1)-ში, ხოლო მიღებულს (1.25.2)-ში, მივიღებთ

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{X_{11}^2 + X_{11}^2} = X_{11}.$$

პლასტიკურობის თეორიაში ძალაშია აგრეთვე დრეკადობის თეორიის გეომეტრიული დამოკიდებულებები. დაძაბული სხეულის დეფორმირებულ მდგომარეობას ახასიათებს დეფორმაციის e_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, ტენზორი, რომელიც გეომეტრიულად წრფივ შემთხვევაში u_i , $i = 1, 2, 3$, გადაადგილებებთან დაკავშირებულია (1.6.3) ფორმულებით. e_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, უნდა აკმაყოფილებდნენ სენ-ვენანის თავსებადობის (1.11.5) პირობებს.

(1.9.7) ან (1.9.8) ინვარიანტებთან ერთად პლასტიკურობის თეორიაში გამოიყენება აგრეთვე შემდეგი ინვარიანტული სიდიდე:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 := \frac{\sqrt{2}}{3} \{ & (e_{11} - e_{22})^2 + (e_{22} - e_{33})^2 \\ & + (e_{33} - e_{11})^2 + 6(e_{12}^2 + e_{23}^2 + e_{31}^2) \}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (1.25.3)$$

რომელსაც დეფორმაციების ინტენსივობა ეწოდება. (1.25.3)-ში კოეფიციენტი ისეა შერჩეული, რომ მარტივი გაჭიმვის დროს დეფორმაციის ინტენსივობა დაემთხვეს ფარდობით წაგრძელებას გაჭიმვის მიმართულებით. მართლაც, თუ პუასონის კოეფიციენტი

$\nu = \frac{1}{2}$, მაშინ x_1 მიმართულებით მარტივი გაჭიმვის დროს

$$e_{11} \geq 0, \quad e_{11} \neq 0, \quad e_{22} = e_{33} = -\frac{1}{2}e_{11}; \quad e_{ij} = 0, \quad \text{თუ } i \neq j.$$

თუ ამ სიდიდეებს ჩავსვამთ (1.25.3)-ში, მივიღებთ, რომ

$$\varepsilon_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\left(e_{11} + \frac{1}{2}e_{11}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}e_{11} - e_{11}\right)^2} = e_{11}.$$

პლასტიკური დეფორმაციის კანონები იმაზეა დამოკიდებული, იზრდება თუ მცირდება დატვირთვა. ამის შესაბამისად არსებობს ორი სახის დეფორმაცია: აქტიური და პასიური.

მარტივი გაჭიმვის ან სუფთა ძვრის შემთხვევაში ეს ცნებები ადვილი განსასხვავებელია. *აქტიური* ეწოდება დეფორმაციას, როცა ძაბვის აბსოლუტური სიდიდე იზრდება, ხოლო *პასიური* – როცა ძაბვის აბსოლუტური სიდიდე მცირდება.

რთული დაძაბული მდგომარეობის დროს პლასტიკური დეფორმაცია შეიძლება მოხდეს ძაბვების სხვადასხვა თანაფარდობის დროს. ასეთ შემთხვევაში სხეულის ელემენტის დეფორმაციას დროის მოცემულ მომენტში ეწოდება *აქტიური*, თუ ძაბვების σ ი ინტენსივობის მნიშვნელობა მეტია ყველა მის წინა მნიშვნელობაზე, ხოლო *პასიური* – თუ ძაბვების σ ი ინტენსივობის მნიშვნელობა ნაკლებია ერთზე მაინც მის წინა მნიშვნელობებს შორის. აქტიური დეფორმაციის დროს პლასტიკური (ე.ი. ნარჩენი) დეფორმაცია იზრდება, ხოლო პასიური დეფორმაციის დროს – მცირდება. აქტიურ დეფორმაციას ეწოდება *დატვირთვის* პროცესი, ხოლო პასიურს – *განტვირთვის* პროცესი.

პლასტიკური დეფორმაციის კანონებზე არსებით გავლენას ახდენს სხეულის დატვირთვის ხასიათიც. ამის შესაბამისად ანსხვავებენ დატვირთვის ორ სახეს: მარტივს და რთულს. *მარტივი დატვირთვა* ეწოდება დატვირთვის ისეთ პროცესს, როცა გარე ძალები მათი მოდების საწყისი მომენტიდანვე ისე იზრდებიან, რომ ინარჩუნებენ მუდმივ თანაფარდობას ერთმანეთს შორის, ე.ი. იცვლებიან საერთო პარამეტრის პროპორციულად. დატვირთვის ასეთი ცვლილება უზრუნველყოფს ნებისმიერი ფორმის მქონე სხეულის ნებისმიერ წერტილში მთავარი ძაბვებისა და მთავარი დეფორმაციების ღერძების უცვლელობას ნებისმიერი სიდიდისა და მიმართულების დატვირთვების პირობებში. *რთული დატვირთვა* ეწოდება დატვირთვის ისეთ პროცესს, როცა თუნდაც ერთი გარე

ძალის ზრდის დროს დანარჩენი ძალები ამ ძალის პროპორციულად არ იზრდებიან.

§1.26. ჰუკის გარდაქმნილი კანონი

ჰუკის (1.12.9) კანონში X_{ii} -ს შემცველი

$$X_{ii} = \lambda \theta + 2\mu e_{ii} \quad (1.26.1)$$

ტოლობების ორივე მხარეს გამოვაკლოთ

$$\sigma_0 := \frac{X_{ii}}{3} \quad (1.26.2)$$

საშუალო მნიშვნელობა. მაშინ

$$X_{ii} - \sigma_0 = \lambda \theta + 2\mu e_{ii} - \sigma_0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.26.3)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\varepsilon_0 := \frac{e_{ii}}{3} = \frac{\theta}{3}. \quad (1.26.4)$$

(1.26.1) ავჯამოთ i -ს მიმართ 1-დან 3-მდე, მიღებული შედეგი გავყოთ 3-ზე და გავითვალისწინოთ (1.26.2), (1.12.23), (1.12.24) და (1.26.4):

$$\sigma_0 = k\theta = \frac{E}{3(1-2\nu)}\theta = \frac{E}{1-2\nu}\varepsilon_0 = \frac{2\mu(1+\nu)}{1-2\nu}\varepsilon_0. \quad (1.26.5)$$

(1.12.24)-ის თანახმად,

$$\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}. \quad (1.26.6)$$

ჩავსვათ (1.26.3)-ის მარჯვენა მხარეში (1.26.5) და (1.26.6) გამოსახულებები და გავითვალისწინოთ (1.26.4):

$$X_{ii} - \sigma_0 = \frac{6\mu\nu}{1-2\nu}\varepsilon_0 + 2\mu e_{ii} - \frac{2\mu(1+\nu)}{1-2\nu}\varepsilon_0$$

$$= 2\mu e_{ii} + \frac{4\mu\nu - 2\mu}{1 - 2\nu} \varepsilon_0,$$

საიდანაც

$$X_{ii} - \sigma_0 = 2\mu(e_{ii} - \varepsilon_0), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.26.7)$$

ამ სამ დამოკიდებულებას დავამატოთ დარჩენილი სამი დამოკიდებულება ჰუკის (1.12.9) კანონიდან:

$$X_{ij} = 2\mu e_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.26.8)$$

(1.26.7), (1.26.8) ფორმულები ერთმანეთთან აკავშირებენ ძაბვის

$$X'_{ii} := X_{ii} - \sigma_0, \quad X'_{ij} = X_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.26.9)$$

ტენზორსა და დეფორმაციის

$$e'_{ii} := e_{ii} - \varepsilon_0, \quad e'_{ij} = e_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.26.10)$$

ტენზორს, რომელიც შეესაბამება (1.26.9) ფორმულებით მოცემულ ძაბვის X'_{ij} ტენზორის მოქმედებით გამოწვეულ სხეულის ფორმის ცვლილებას. (1.26.10)-ისა და (1.26.4)-ის თანახმად,

$$\theta' := e'_{ii} = e_{ii} - 3\varepsilon_0 = 0.$$

ამდენად, (1.26.7), (1.26.8) დამოკიდებულებებით აღწერილი დეფორმაცია ხდება მოცულობის ცვლილების გარეშე.

თუ (1.26.7) ტოლობებს i -ს სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის წვეილ-წვეილად ერთმანეთს გამოვაკლებთ, მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} X_{11} - X_{22} &= 2\mu(e_{11} - e_{22}), \\ X_{22} - X_{33} &= 2\mu(e_{22} - e_{33}), \\ X_{33} - X_{11} &= 2\mu(e_{33} - e_{11}) \end{aligned} \quad (1.26.11)$$

(1.26.8) და (1.26.11)-დან ცხადია, რომ

$$\begin{aligned} \frac{X_{11} - X_{22}}{e_{11} - e_{22}} &= \frac{X_{22} - X_{33}}{e_{22} - e_{33}} = \frac{X_{33} - X_{11}}{e_{33} - e_{11}} \\ &= \frac{X_{12}}{e_{12}} = \frac{X_{23}}{e_{23}} = \frac{X_{31}}{e_{31}} = 2\mu. \end{aligned} \quad (1.26.12)$$

თუ საკოორდინატო ღერძებად მთავარ მიმართულებებს ავიღებთ, მაშინ (1.26.12) მიიღებს

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{e_1 - e_2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{e_2 - e_3} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{e_3 - e_1} = 2\mu \quad (1.26.13)$$

სახეს.

თუ (1.25.3)-ში ჩავსვამთ დეფორმაციების მნიშვნელობებს, განსაზღვრულს (1.26.12)-დან და გავითვალისწინებთ (1.25.1), (1.25.2)-ს, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{3\mu}, \text{ ე.ი., } \mu = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}. \quad (1.26.14)$$

(1.26.7), (1.26.8) და (1.26.13) დამოკიდებულებებში (1.26.14)-ის ჩასმის შემდეგ გვექნება, რომ

$$X_{ii} - \sigma_0 = \frac{2\sigma_0}{3\varepsilon_0}(e_{ii} - \varepsilon_0), \quad X_{ij} = \frac{2\sigma_0}{3\varepsilon_0}e_{ij}, \quad i \neq j, \quad (1.26.15)$$

$$i, j = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{e_1 - e_2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{e_2 - e_3} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{e_3 - e_1} = \frac{2\sigma_0}{3\varepsilon_0}. \quad (1.26.16)$$

§1.27. პლასტიკურობის პირობები

პლასტიკურობის თეორიის ამოცანების ამოხსნის დროს ზემოაღნიშნული აუცილებელია იმის ცოდნა, თუ რა პირობებში გადადის სხეული განსახილველ წერტილში დრეკადი მდგომარეობიდან პლასტიკურ მდგომარეობაში. ამ პირობებს *პლასტიკურობის პირობები* ეწოდებათ.

წრფივი დაძაბული მდგომარეობის დროს (იხ. § 1.12) პლასტიკურობის პირობა ექსპერიმენტის საშუალებით დგინდება. ამ შემთხვევაში, მაგალითად, σ_1 მთავარი ძაბვა განსხვავებულია

ნულისაგან, ხოლო დანარჩენი ორი $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ და პლასტიკური დეფორმაციები მაშინ წარმოიშეება, როცა (იხ. ნახ. 1.24.2)

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{ღ}}, \quad (1.27.1)$$

სადაც $\sigma_{\text{ღ}}$ არის დენადობის ზღვარი, რომელიც მასალაზეა დამოკიდებული და მუდმივი სიდიდეა თითოეული მასალისათვის.

სუფთა ძერის დროს (იხ. § 1.12) პლასტიკურობის პირობა კვლავ ექსპერიმენტის საშუალებით დგინდება და

$$X_{23} = \tau_{\text{ღ}},$$

სადაც $\tau_{\text{ღ}}$ დენადობის ზღვარია სუფთა ძერის დროს. ეს სიდიდეც მასალაზეა დამოკიდებული და მუდმივი სიდიდეა თითოეული მასალისათვის.

ბრტყელი (იხ. ქვემოთ §2.2) და მოცულობითი (ე.ი., როცა ძაბვის ტენზორის არცერთი კომპონენტი არ არის იგივეურად ნულის ტოლი) დაძაბული მდგომარეობის ზოგად შემთხვევაში პლასტიკურობის პირობების დადგენა ექსპერიმენტის საშუალებით შეუძლებელია. ამიტომ ეს პირობები დგინდება ჰიპოთეტურად, შემდგომი ექსპერიმენტული შემოწმებით.

სენ-ვენანის პლასტიკურობის პირობის თანახმად, სხეულში პლასტიკური დეფორმაცია წარმოიშობა მაშინ, როცა მაქსიმალური მხები ძაბვა მიაღწევს სუფთა ძერის დროს დენადობის ზღვარს, ე.ი. როცა (იხ. (1.5.23))

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_{\text{ღ}}. \quad (1.27.2)$$

თუ (1.27.1)-ს (აქ იმასაც ვითვალისწინებთ, რომ ამ შემთხვევაში $\sigma_3 = 0$) ჩავსვამთ (1.27.2)-ში, მაშინ

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\text{ღ}}}{2} = \tau_{\text{ღ}}. \quad (1.27.3)$$

(1.27.2) და (1.27.3)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{\text{ღ}}. \quad (1.27.4)$$

(1.27.4) გახლავთ სწორედ სენ-ვენანის პლასტიკურობის პირობა, რომელსაც მასალათა გამძლეობაში სიმტკიცის მესამე თეორიასაც უწოდებენ.

ჰუბერ^{*)}-მიზეს^{**)}-ჰენკის^{***}) პლასტიკურობის პირობის თანახმად სხეულში პლასტიკური დეფორმაცია აღიძვრება მაშინ, როცა მხები ძაბვების ინტენსივობა მიაღწევს რაღაც მნიშვნელობას, რომელიც სხეულის გეარობაზეა დამოკიდებული და მუდმივია თითოეული მასალისათვის:

$$\tau_0 = C. \quad (1.27.5)$$

განვსაზღვროთ ეს მუდმივი მარტივი გაჭიმვის ექსპერიმენტზე დაყრდნობით. (1.27.1)-ის თანახმად

$$\sigma_1 = \sigma_e, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (1.25.1)-ში, მივიღებთ მხები დაძაბულობების ინტენსივობის შემდეგ მნიშვნელობას გაჭიმვისას პლასტიკური დეფორმაციების აღძვრის მომენტში:

$$\tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{\sigma_e^2 + \sigma_e^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_e. \quad (1.27.6)$$

(1.27.5)-ისა და (1.27.6)-ის შედარებით ვასკენით, რომ

$$C = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_e. \quad (1.27.7)$$

(1.25.1)-ისა და (1.27.7)-ის (1.27.5)-ში ჩასმის შემდეგ მივიღებთ ჰუბერ-მიზეს-ჰენკის პლასტიკურობის პირობას შემდეგი სახით:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (X_{11} - X_{22})^2 + (X_{22} - X_{33})^2 + (X_{33} - X_{11})^2 + 6(X_{12}^2 + X_{23}^2 + X_{31}^2) \right\}^{\frac{1}{2}} = \sigma_e. \quad (1.27.8)$$

^{*)}მ. ტ. ჰუბერი (1872-1950).

^{**)} რ. მიზესი (1883-1953).

^{***})ჟ. ჰენკი (1885-1951).

(1.27.6), თუ გავითვალისწინებთ (1.25.2)-ს, შეიძლება ჩავწეროთ

$$\sigma_0 = \sigma_{\infty}.$$

სახითაც.

მასალათა გამძლეობაში (1.27.8) პლასტიკურობის პირობას *სიმტკიცის მეოთხე თეორიასაც* უწოდებენ.

პლასტიკურობის ორივე ეს პირობა დაახლოებით ერთნაირ შედეგს გვაძლევს.

§1.28. მცირე დრეკად-პლასტიკური დეფორმაციების თეორია

დღეისათვის არსებობს სხვადასხვა ავტორის მიერ სხვადასხვა დროს შემოთავაზებული პლასტიკურობის მრავალი თეორია. ეს თეორიები შეიძლება ორ ჯგუფად დაიყოს.

პირველ ჯგუფს განეკუთვნებიან დრეკად-პლასტიკური თეორიები, რომლებიც ეფუძნებიან ძაბვებისა და დეფორმაციების დამაკავშირებელ განტოლებებს.

მეორე ჯგუფს განეკუთვნებიან პლასტიკური დინების თეორიები, რომლებიც ეფუძნებიან ძაბვებისა და დეფორმაციის სიჩქარეების დამაკავშირებელ განტოლებებს.

მარტივი დატვირთვისა და მცირე დეფორმაციების პირობებში პლასტიკურობის ყველა ცნობილი თეორია წარმოადგენს პლასტიკურობის ერთი ზოგადი თეორიის — მცირე დრეკად-პლასტიკური დეფორმაციების თეორიის კერძო შემთხვევას. აღნიშნული ზოგადი თეორია ემყარება ექსპერიმენტების შედეგების განზოგადებით მიღებულ შემდეგ სამ კანონს.

პირველი კანონი — მოცულობის ცვლილების კანონი. მყარი სხეულის, როგორც აქტიური, ისე პასიური დრეკად-პლასტიკური დეფორმაციების დროს მოცულობითი დეფორმაცია ყოველთვის დრეკადია და ექვემდებარება ჰუკის (იხ. (1.26.5))

$$\sigma_0 = k\theta \quad (1.28.1)$$

კანონს.

პლასტიკურობის თეორიაში ამოცანების გამარტივების მიზნით უშვებენ, რომ მასალა არაკუმშვადია, ე.ი. $\theta = 0$ -ს. რადგან საშუალო ძაბვა σ_0 არ არის ნული, ამიტომ (1.28.1)-ში უნდა დავუშვათ, რომ

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \infty.$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ არაკუმშვადი მასალისათვის

$$\nu = \frac{1}{2}. \quad (1.28.2)$$

თუ (1.28.2)-ს ჩავსვამთ (1.12.24)-ის მეორეში, მაშინ

$$\mu = \frac{E}{3}.$$

მეორე კანონი – ფორმის ცვლილების კანონი. მარტივი დატვირთვის პირობებში აღბრული დრეკად-პლასტიკური დეფორმაციების დროს ძაბვისა და დეფორმაციის მთავარი ღერძები ერთმანეთს ემთხვევიან და სამართლიანია (1.26.16) თანაფარდობები. ასევე სამართლიანია (1.26.15) დამოკიდებულებები. მართალია, ეს ექვსი ფორმულა სრულად დამოუკიდებელი არ არიან. მართლაც, თუ მათგან პირველ სამს წევრ-წევრად შევკრებთ და გავითვალისწინებთ (1.26.2)-სა და (1.26.4)-ს, მივიღებთ, რომ $0 \equiv 0$ -ს. ამდენად, გვაქვს ხუთი განტოლებისგან შემდგარი სისტემა ექვსი უცნობით.

მესამე კანონი – აქტიური დეფორმაციის პირობებში ძაბვების σ_0 ინტენსივობა მოცემული მასალისათვის არის დეფორმაციის ε_0 ინტენსივობის საესებით გარკვეული

$$\sigma_0 = \Phi(\varepsilon_0) \quad (1.28.3)$$

ფუნქცია.

მარტივი დატვირთვის პირობებში ჩატარებული მრავალრიცხოვანი ექსპერიმენტის შედეგების დამუშავებამ გვიჩვენა, რომ

σ_i -სა და ε_i -ს შორის დამოკიდებულებების დიაგრამები მსგავსია. (1.28.3)-ის თანახმად ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$X_{11} = \Phi(e_{11}). \quad (1.28.4)$$

ამრიგად, (1.28.4) დამოკიდებულება ნებისმიერი (წრფივი, ბრტყელი ან მოცულობითი) დაძაბული მდგომარეობისათვის შეიძლება დადგინდეს მარტივი გაჭიმვისათვის ჩატარებული ცდებით.

§1.29. ილიუშინის თეორემა განტვირთვის შესახებ

ვთქვათ, რაიმე სხეულისათვის, რომელზეც მოცულობითი და გარე ზედაპირული ძალები მოქმედებენ, პლასტიკურობის ამოცანა ამოხსნილია. ეს იმას ნიშნავს, რომ სხეულის ყოველ წერტილში ნაპოვნია ძაბვები, დეფორმაციები და გადაადგილებები. დრეკადობის ზღვარს მიღმა სხეულის დეფორმაციის მნიშვნელოვან თავისებურებას წარმოადგენს განტვირთვის ხასიათი.

მთელი სხეულის განტვირთვა ეწოდება გარე ძალების ცვლილების ისეთ პროცესს, როცა სხეულის ყველა იმ ნაწილში, სადაც პლასტიკური დეფორმაცია მოხდა, ძაბვის σ_i ინტენსივობა ერთდროულად იწყებს შემცირებას. ეს იმას ნიშნავს, რომ სხეული აქტიური დეფორმაციის სტადიიდან გადადის პასიური დეფორმაციის სტადიაში.

ილიუშინის^{)} თეორემა განტვირთვის შესახებ.* სხეულის წერტილის გადაადგილებები განტვირთვის სტადიის რაიმე მომენტში განსხვავდებიან მათი მნიშვნელობებისაგან განტვირთვის დაწყების მომენტში იმ დრეკადი გადაადგილებების სიდიდით, რომლებიც აღიძვრებოდნენ სხეულში, თუ ბუნებრივ მდგომარეობაში მასზე მოდებული იქნებოდა აღნიშნულ მომენტებში სხეულზე მოქმედი გარე ძალების სხვაობის ტოლი გარე ძალები. იგივე სამართლიანია ძაბვებისა და დეფორმაციებისათვის.

^{*)} ა. ილიუშინი (1911-1998).

აქედან როგორც შედეგი გამომდინარეობს ნარჩენი ძაბვების, დეფორმაციების და გადაადგილებების შესახებ თეორემა: თუ სხეულისათვის ამოხსნილია პლასტიკურობის ამოცანა და გარე ძალების მოცემულ მნიშვნელობებს შეესაბამება ჭეშმარიტი წონასწორობის მდგომარეობა და, გარდა ამისა, ამოხსნილია დრეკადობის თეორიის ამოცანა, ე.ი. იმავე გარე ძალებს შეესაბამება დრეკადი წონასწორობის ფიქტიური მდგომარეობა, მაშინ სხეულის სრული განტვირთვის შემდეგ მასში დარჩებიან ძაბვები, დეფორმაციები და გადაადგილებები, რომლებიც ჭეშმარიტ და ფიქტიურ მდგომარეობებში მათი მნიშვნელობების სხვაობების ტოლია. ამასთან იგულისხმება, რომ განტვირთვის შემდეგ ნარჩენი ძაბვები არ გადიან დრეკადობის ფარგლებიდან.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს განტვირთვის დროს ძაბვების, დეფორმაციებისა და გადაადგილებების განსაზღვრის შემდეგი სქემა:

1. პლასტიკურობის თეორიის განტოლებებიდან ვსაზღვრავთ ძაბვებს, დეფორმაციებსა და გადაადგილებებს, რომლებიც განტვირთვის დაწყებამდე უდიდესი დატვირთვით აღიძვრებიან.

2. დრეკადობის თეორიის განტოლებების საშუალებით ვსაზღვრავთ ძაბვებს, დეფორმაციებსა და გადაადგილებებს, რომლებიც განტვირთვამდე უდიდეს დატვირთვასა და განტვირთვის შემდეგ დარჩენილ დატვირთვას შორის სხვაობის ტოლი დატვირთვით აღიძვრებიან.

3. უდიდესი დატვირთვის პირობებში მიღებულ ძაბვებს, დეფორმაციებსა და გადაადგილებებს ვაკლებთ განტვირთვის სიდიდის ტოლ (ე.ი. რა სიდიდითაც შემცირდა დატვირთვა) დატვირთვის შესაბამის ძაბვებს, დეფორმაციებსა და გადაადგილებებს. სწორედ ეს სხვაობები იქნებიან ძაბვების, დეფორმაციებისა და გადაადგილებების მნიშვნელობები განტვირთვის განსახილველ მომენტში.

§1.30. პლასტიკურობის თეორიის ამოცანების ღასმა

პლასტიკურობის თეორიაში ვეძებთ სამ x_1, x_2, x_3 ცვლადზე დამოკიდებულ შემდეგ 17 უცნობ სიდიდეს: $X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{12}, X_{23}, X_{31}$ ძაბვებს, $e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{23}, e_{31}$ დეფორმაციებს, u_1, u_2, u_3 გადაადგილებებს და ძაბვის σ_i და დეფორმაციის ε_i ინტენსივობებს. ისინი უნდა განისაზღვრონ 17 განტოლებიდან. ესენია წონასწორობის სამი (1.3.5) განტოლება; ძაბვებისა და დეფორმაციების დამაკავშირებელი ექვსი (1.26.15) ფიზიკური განტოლება, რომელთაგან ხუთია დამოუკიდებელი და ამიტომ მეექვსე განტოლებად ვიღებთ (1.28.1)-ს; კოშის ექვსი (1.6.3) გეომეტრიული ფორმულა; (1.28.3) დამოკიდებულება ძაბვისა და დეფორმაციის ინტენსივობებს შორის და დეფორმაციის ინტენსივობის (1.25.3) გამოსახულება.

გარდა ამისა, უნდა დაკმაყოფილდეს (1.2.1) პირობები სხეულის ზედაპირზე, სადაც X_{ni} , $i = 1, 2, 3$, სიდიდეებია მოცემული.

პლასტიკურობის თეორიის ამოცანების ამოხსნის დროს გამოიყენება იგივე ხერხები, რაც დრეკადობის თეორიაში: ამოხსნა ძაბვებში, გადაადგილებებში და შერეული ხერხი.

დრეკადობის თეორიის მსგავსად პლასტიკურობის თეორიის ამოცანების ამოსახსნელად გამოიყენება პირდაპირი, შებრუნებული და ნახევრადშებრუნებული მეთოდები.

ნაწილი II. ორგანოზომილებიანი მოდელები

თავი I. დრეკადობის ორგანოზომილებიანი თეორია

დრეკადობის სამგანზომილებიანი თეორიის ამოცანების ამოხსნა დიდ სირთულეებთან არის დაკავშირებული, ამიტომ არსებითი მნიშვნელობა ენიჭება სასაზღვრო ამოცანების კერძო კლასებისათვის ამოხსნის მეთოდების შემუშავებას.

§2.1. ბრტყელი დეფორმაცია

ვიტყვი, რომ სხეული განიცდის Ox_1x_2 სიბრტყის პარალელურ ბრტყელ დეფორმაციას (plane strain), თუ $u_3 = 0$, ხოლო u_1 და u_2 დამოკიდებულია მხოლოდ x_1 და x_2 -ზე,^{*}) ე.ი., (1.6.3), (1.9.7) და (1.12.9)-დან მივიღებთ

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}), \quad \alpha, \beta = 1, 2; \quad e_{23} = e_{31} = e_{33} = 0; \quad (2.1.1)$$

^{*} სხეული განიცდის ანტიბრტყელ დეფორმაციას (antiplane strain, antiplane shear), თუ $u_1 \equiv u_2 \equiv 0$, $u_3 = u_3(x_1, x_2) \neq 0$.

ამ შემთხვევაში დეფორმაციის და ძაბვის ტენზორებს აქვთ შესაბამისად

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & e_{13} \\ 0 & 0 & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & 0 \end{vmatrix} \text{ და } \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \mu u_{3,1} \\ 0 & 0 & \mu u_{3,2} \\ \mu u_{3,1} & \mu u_{3,2} & 0 \end{vmatrix}.$$

ხოლო ლამეს განტოლებებს (გერჩება მხოლოდ ერთი განტოლება, ამასთან $\Phi_\alpha \equiv 0$, $\alpha = 1, 2$)

$$\mu \Delta u_3(x_1, x_2) + \Phi_3(x_1, x_2) = 0$$

საზე.

$$\overset{2}{\theta} := e_{\alpha\alpha} = u_{\alpha,\alpha}; \quad (2.1.2)$$

$$X_{\alpha\beta} = \lambda \overset{2}{\theta} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu e_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2; \quad (2.1.3)$$

$$X_{\alpha 3} = 0, \quad \alpha = 1, 2; \quad X_{33} = \lambda \overset{2}{\theta};$$

აქედან, რამდენადაც $\delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\alpha} = 2$,

$$\begin{aligned} X_{\alpha\alpha} &= X_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = \lambda \overset{2}{\theta} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu e_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} \\ &= 2\lambda \overset{2}{\theta} + 2\mu e_{\alpha\alpha} = 2(\lambda + \mu) \overset{2}{\theta} \end{aligned}$$

და

$$\overset{2}{\theta} = \frac{1}{2(\lambda + \mu)} X_{\alpha\alpha} =: \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \Theta_2. \quad (2.1.4)$$

ამ უკანასკნელის (2.1.3) ტოლობებს შორის ბოლო ტოლობაში ჩასმის შემდეგ მივიღებთ

$$X_{33} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} X_{\alpha\alpha} = \nu X_{\alpha\alpha} = \nu \Theta_2. \quad (2.1.5)$$

(2.1.3)-ის გათვალისწინებით, წონასწორობის (1.15.1) განტოლებებიდან პირველი ორი მიიღებს შემდეგ სახეს

$$X_{\alpha\beta,\beta} + \Phi_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.1.6)$$

ხოლო მესამედან გამომდინარეობს, რომ

$$\Phi_3 = 0.$$

ე.ი., ბრტყელი დეფორმაციის შემთხვევაში სხეულზე მოქმედი მოცულობითი ძალის გეგმილი დეფორმაციის სიბრტყის პერპენდიკულარულ მიმართულებაზე ნულის ტოლია.

(2.1.1)-(2.1.6)-ის თანახმად, დეფორმაციის და ძაბვის ტენზორების კომპონენტები და მოცულობითი ძალის Φ_α კომპონენტე-

ბი დამოკიდებულია მხოლოდ x_1 და x_2 -ზე. ამრიგად, არც ერთი განსახილველი სიდიდე x_3 -ზე არ არის დამოკიდებული.

ლამეს (1.16.1) განტოლებები მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\mu \Delta_2 u_\alpha + (\lambda + \mu) \theta_{,\alpha}^2 + \Phi_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2,$$

სადაც

$$\Delta_2(\cdot) := (\cdot)_{,11} + (\cdot)_{,22}^*.$$

ეს უკანასკნელი, ცხადია, (2.1.3)-ის, (2.1.1)-ის გათვალისწინებით, (2.1.6)-ში ჩასმითაც მიიღება.

სენ-ვენანის (1.11.5) პირობებიდან ზუთი, (2.1.1)-ის თანახმად, იგივეურად კმაყოფილდება და გვრჩება მხოლოდ ერთი

$$e_{11,22} + e_{22,11} = 2e_{12,12}. \quad (2.1.7)$$

პირობა. იზოტროპული ერთგვაროვანი სხეულისათვის (2.1.7) შეიძლება შემდეგი სახითაც ჩაეწეროს

$$\Delta X_{\alpha\alpha} = -\frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \Phi_{\alpha,\alpha}. \quad (2.1.8)$$

მართლაც, (2.1.3)-ის პირველ ტოლობაში (2.1.4)-ის ჩასმისა და $e_{\alpha\beta}$ -ს მიმართ ამოხსნის შემდეგ მივიღებთ

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\mu} \left[X_{\alpha\beta} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} X_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right], \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (2.1.9)$$

ჩავსვათ ეს უკანასკნელი (2.1.7)-ში

$$X_{11,22} + X_{22,11} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \Delta X_{\gamma\gamma} - 2X_{12,12} = 0 \quad (2.1.10)$$

თუ (2.1.6)-დან პირველს გავაწარმოებთ x_1 -ით, ხოლო მეორეს — x_2 -ით და მიღებულ შედეგებს შევკრებთ, გვექნება

^{*} რადგან ამ ნაწილში (ნაწილი II) ჩვენ მხოლოდ ლაპლასის ორგანზომილებიან Δ_2 ოპერატორთან გვექნება საქმე, სიმარტივისათვის შემდეგში მას ინდექსად 2-ს არ მიუწერეთ.

$$-2X_{12,12} = X_{11,11} + X_{22,22} + \Phi_{\alpha,\alpha}.$$

თუ ამ უკანასკნელს შევიტანთ (2.1.10)-ში, საბოლოოდ მივიღებთ (2.1.8)-ს, რომელსაც ლევის განტოლება ეწოდება.

ბრტყელი დეფორმაციის განმარტებიდან ცხადია, რომ ის გვექნება უსასრულოდ გრძელი წრფივი ღერძის მქონე პრიზმული (ცილინდრული) სხეულის შემთხვევაში, როცა მასზე მოქმედი გარე ზედაპირული ძალები და მოცულობითი ძალები დეფორმაციის სიბრტყის (ე.ი., განივი კვეთის) პარალელურია^{*)}. თუ პრიზმული სხეული სასრულია, მაშინ მასში ბრტყელი დეფორმაცია აღიძვრება გარკვეული მიახლოებით. ამასთან, რაც უფრო გრძელია პრიზმა (ცილინდრი), მით უფრო ახლოა სხეულის დეფორმაცია ბრტყელ დეფორმაციასთან.

თუ u_α , $X_{\alpha\beta}$ აკმაყოფილებენ (2.1.1), (2.1.3), (2.1.6) განტოლებებს და

$$X_{\alpha\beta} n_\beta = X_{n\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.1.11)$$

სასაზღვრო პირობებს^{**)}, სადაც $X_{n\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, გარე ძაბვის ვექტორის მოცემული კომპონენტებია, მაშინ (2.1.5)-ის თანახმად პრიზმის (ცილინდრის) ბოლოებზე (ფუძეებზე) მოქმედებენ შესაბამისად $X_{33} = \nu \Theta_2$ და $-X_{33} = -\nu \Theta_2$ -ის ტოლი ძაბვები (იხ. ნახ. 2.1.1)^{***)}. ამ ძაბვების მოდება აუცილებელია იმისათვის, რომ გვექონდეს ბრტყელი დეფორმაცია.

^{*)} ე.ი. $0 = X_{n3} = X_{3j} n_j$, რაც, (2.1.3)-ის თანახმად, იგივერად სრულდება,

რადგან n გვერდითი ზედაპირის ნორმალა, ე.ი. $n_3 = 0$.

^{**) აქ გათვალისწინებულია ^{*)}.}

^{***)} ნახაზზე მითითებულია ძაბვების, ე.ი., ფუძეებზე მოდებული ძალების, რომლებიც ვექტორებითაა აღნიშნული, გვემილების, მნიშვნელობები:

$$X_{\bar{e}_3} = X_{j3} (\bar{e}_3)_j = X_{33} (\bar{e}_3)_3 = X_{33} \cos(\bar{e}_3, x_3) = X_{33},$$

$$X_{(-\bar{e}_3)3} = X_{j3} (-\bar{e}_3)_j = X_{33} (-\bar{e}_3)_3 = X_{33} \cos(-\bar{e}_3, x_3) = -X_{33},$$

§2.2. ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა

დაძაბულ მდგომარეობას ეწოდება Ox_1x_2 სიბრტყის პარალელური ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა, თუ სხეულის ყოველ წერტილში

$$X_{i,3} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.2.1)$$

ამ შემთხვევაში, ზოგადად, ნულისაგან განსხვავებულია ძაბვის ტენზორის შემდეგი სამი კომპონენტი

$$X_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

თუ (2.2.1) დამოკიდებულებას ადგილი აქვს მხოლოდ მოცემულ წერტილში, მაშინ ამბობენ, რომ მოცემულ წერტილში გვაქვს ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა.

ამ შემთხვევაში (1.2.1) ფორმულებიდან, (2.2.1)-ის გათვალისწინებით, გამოძღინარობს, რომ სხეულის ნებისმიერ წერტილში გავლებულ n ნორმალის მქონე ზედაპირის უსასრულოდ მცირე ელემენტისთვის

$$X_{n\alpha} = X_{j\alpha} n_j = X_{\alpha\beta} n_\beta, \quad \alpha = 1, 2; \quad X_{n3} = X_{j3} n_j = 0. \quad (2.2.2)$$

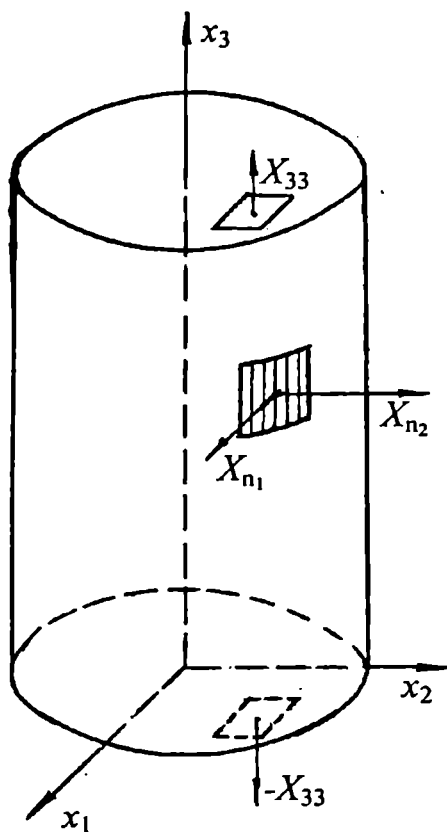
ეს უკანასკნელი იმაზე მიგვითითებს, რომ ნებისმიერად ორიენტირებულ ფართზე მოქმედი ძაბვის კვეთური Ox_1x_2 სიბრტყის პარალელურია.

(2.2.1)-ის თანახმად, წონასწორობის განტოლებებს (2.1.6) სახე ექნებათ, მხოლოდ განსახილველ შემთხვევაში ძაბვები, ზოგადად, x_3 -ზეცაა დამოკიდებული.

რადგან $X_{33} = 0$, იზოტროპული სხეულისათვის

$$X_{33} = \lambda u_{i,i} + 2\mu u_{3,3} = 0.$$

აქ $(\cdot)$, აღნიშნავს გეგმილს X_j ღერძზე.



ნახ. 2.1.1

აქედან განსაზღვრულ $u_{3,3}$ -ს

$$u_{3,3} = e_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} u_{\alpha,\alpha} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \theta^2 \quad (2.2.3)$$

თუ ჩავსვამთ ჰუკის (1.15.2) კანონში, მივიღებთ

$$X_{\alpha\beta} = \lambda^* \theta^2 \delta_{\alpha\beta} + \mu(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}), \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (2.2.4)$$

სადაც

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

ჰუკის კანონში $X_{\alpha 3} = 0$ -ის (იხ. 2.2.1) ჩასმა კი გვაძლევს

$$2e_{23} = u_{2,3} + u_{3,2} = 0, \quad 2e_{13} = u_{1,3} + u_{3,1} = 0, \quad (2.2.5)$$

როგორც ვხედავთ, (2.2.4) იმით განსხვავდება (2.1.3)-საგან, რომ λ შეცვლილია λ^* -ით.

თუ (2.2.4)-ს ჩავსვამთ წონასწორობის (2.1.6) განტოლებებში, რომლებიც, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, სამართლიანია ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობის შემთხვევაშიც, მივიღებთ

$$\mu \Delta u_\alpha + (\lambda^* + \mu) \theta^2_{,\alpha} + \Phi_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.2.6)$$

ხოლო წონასწორობის (1.15.1) განტოლებათა სისტემის მესამე განტოლებიდან, (2.2.1)-ის თანახმად გვეჩება

$$\Phi_3 = 0.$$

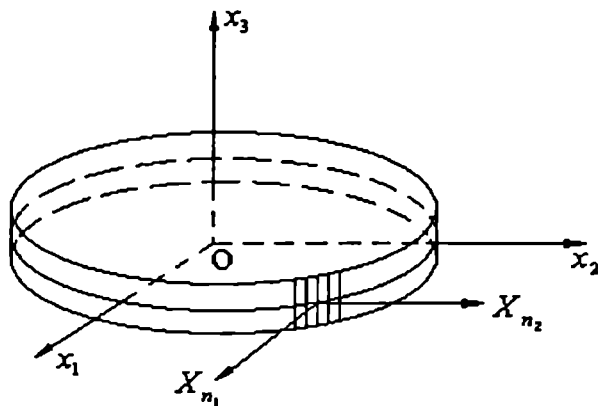
ე.ი., მოცულობითი ძალაც Ox_1x_2 სიბრტყის პარალელურია.*)

უნდა შევნიშნოთ, რომ ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა, მიუხედავად არსებითი გამარტივებისა და იმისა, რომ ჰუკის კანონსა და ლამეს განტოლებებს შესაბამისად (2.2.4) და (2.2.6) სახე აქვთ, რჩება სამგანზომილებიან ამოცანად, რამდენადაც, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, განსახილველი სიდიდეები, ზოგადად, x_3 -ზეა დამოკიდებული. მართალია, (2.2.4)-სა და (2.2.6)-ში x_3 მხოლოდ პარამეტრის როლს თამაშობს.

*) შევნიშნოთ, რომ u_1 და u_2 -ის განსაზღვრის შემდეგ, (2.2.3) და (2.2.5)-დან გვეცოდინება u_3 -ის ყველა პირველი რიგის კერძო წარმოებული, რაც მოგვცემს u_3 -ის განსაზღვრის საშუალებას.

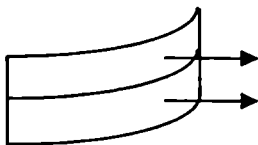
§2.3. განზოგადებული ბრტყელი დამბული მდგომარეობა

ფუძეების ზომებთან შედარებით მცირე სიმაღლის მქონე პრიზმას (ცილინდრს) ფირფიტა ეწოდება, ხოლო მის $2h$ სიმაღლეს (იხ. ნახ. 2.3.1) – ფირფიტის სისქე. ვიგულისხმობთ, რომ ფირფიტის შუა სიბრტყე (ე.ი. ფუძეების პარალელური და მათგან თანაბრად დაშორებული სიბრტყე) ემთხვევა Ox_1x_2 -ს.



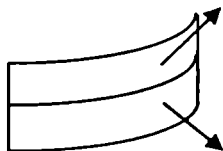
ნახ. 2.3.1

ვთქვათ, ფირფიტის ფუძეები თავისუფალია გარე ძაბვებისაგან, ხოლო გვერდით ზედაპირზე მოქმედებენ ფუძეების პარალელური და შუა სიბრტყისადმი სიმეტრიულად განაწილებული გარე ძაბვები (იხ. ნახ. 2.3.2). ასევე ვგულისხმობთ, რომ ფირფიტაზე მოქმედი მოცულობითი ძალები ფუძეების პარალელური და შუა სიბრტყისადმი სიმეტრიულად განაწილებულია, ე.ი.,



ფირფიტის გვერდით ზედაპირზე

ნახ. 2.3.2



ფირფიტის შიგნით

$$X_{i,3|x_3=\pm h} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.3.1)$$

$$X_{n3} = 0 \text{ გვერდით ზედაპირზე და } \Phi_3 = 0. \quad (2.3.2)$$

სენ-ვენანის პრინციპის თანახმად, ორ მსახველს შორის მოთავსებულ მცირე უბანზე მოქმედ ზედაპირულ ძალთა სისტემა შეიძლება შეიცვალოს სტატიკურად მისი ეკვივალენტური ძალით, რომელიც აღნიშნულ უბანზე მოქმედებს და ფირფიტის შუა სიბრტყეში მდებარეობს.

მოცულობითი და გარე ზედაპირული ძალების შუა სიბრტყისადმი სიმეტრიული განაწილების გამო, ცხადია, რომ შუა სიბრტყის წერტილები დეფორმაციის შემდეგაც შუა სიბრტყეზე დარჩებიან, ე.ი. გადაადგილების u_3 კომპონენტი შუა სიბრტყეზე ნულია და ფირფიტის სისქის სიმცირის გამო, როცა $x_3 \neq 0$, ის ძალზე მცირეა. ამდენად $u_3(x_1, x_2, x_3)$ საერთოდ ნულის ტოლად შეიძლება ჩაეთვალოთ (მაგრამ არა მისი წარმოებული $u_{3,3}$), ხოლო u_α -ს ცვლილება სისქის გასწვრივ უმნიშვნელოა. აქედან გამომდინარე, ცხადია, რომ ფირფიტის დრეკად წონასწორობაზე წარმოდგენა შეიძლება შევიქმნათ u_α სიდიდეების სისქის მიმართ გასაშუალებული $u_{\alpha 0}$ მნიშვნელობებით:

$$u_{\alpha 0}(x_1, x_2) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} u_\alpha(x_1, x_2, x_3) dx_3, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.3.3)$$

(2.3.2)-ის თანახმად, წონასწორობის (1.15.1) განტოლებათა სისტემის შესამე განტოლებიდან

$$X_{3j,j} = 0. \quad (2.3.4)$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ (2.3.1)-ს, ცხადია,

$$X_{33,3} |_{x_3=\pm h} = 0,$$

რადგან

$$X_{31,1} |_{x_3=\pm h} = 0, \quad X_{32,2} |_{x_3=\pm h} = 0.$$

ამრიგად, ფირფიტის ფუძეებზე X_{33} და მისი წარმოებული სისქის გასწვრივ ნულის ტოლია. სისქის სიმცირის გამო დიდი სიზუსტით შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ყველგან სხეულში

$$X_{33}(x_1, x_2, x_3) = 0. \quad (2.3.5)$$

დაძაბულ მდგომარეობას, როცა სრულდება (2.3.1), (2.3.2), (2.3.5) პირობები და გარე ძალები ფირფიტის შუა სიბრტყის პარალელური და სიმეტრიულია, ეწოდება განზოგადებული ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა.

წონასწორობის (1.15.1) განტოლებათა სისტემის პირველი ორი განტოლების x_3 -ის მიმართ $-h$ -დან $+h$ -მდე ინტეგრებისა და მისი $2h$ -ზე გაყოფის შემდეგ, რადგან, (2.3.1)-ის თანახმად,

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} X_{\alpha 3,3} dx_3 = \frac{1}{2h} X_{\alpha 3} \Big|_{x_3=-h}^{x_3=+h} = 0,$$

მივიღებთ, რომ

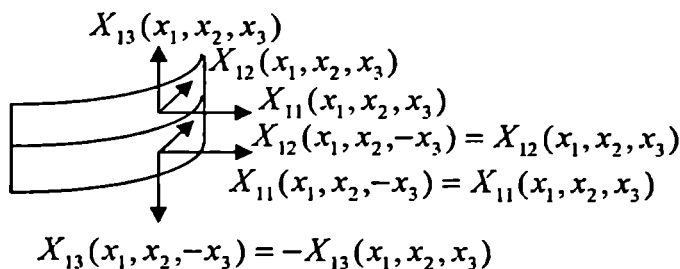
$$X_{\alpha\beta 0,\beta} + \Phi_{\alpha 0} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.3.6)$$

სადაც

$$X_{\alpha\beta 0}(x_1, x_2) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} X_{\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3) dx_3, \quad \alpha, \beta = 1, 2;$$

$$\Phi_{\alpha 0}(x_1, x_2) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} \Phi_{\alpha}(x_1, x_2, x_3) dx_3, \quad \alpha = 1, 2.$$

რაც შეეხება წონასწორობის (2.3.4) განტოლებას, იგი გასაშუალოების შემდეგ იგივეურად კმაცოფილდება, რადგან განზოგადებული დაძაბული მდგომარეობის ფიზიკური შინაარსიდან გამომდინარე, $X_{3\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, სიდიდეები კენტი ფუნქციებია x_3 ცვლადის მიმართ, ე.ი. ამ უკანასკნელთა საშუალო



ნახ. 2.3.3

მნიშვნელობები ნულის ტოლია. შევნიშნოთ, რომ u_{α} , $X_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2$, სიდიდეები ლუწი ფუნქციებია (იხ. ნახ. 2.3.3).

ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობის ანალოგიურად, (2.3.5)-ის თანახმად, ჩვენს შემთხვევაშიც ექნება ადგილი (2.2.4) ტოლობას, რომელიც გასაშუალოების შემდეგ გვაძლევს

$$X_{\alpha\beta 0} = \lambda^* \theta_0^2 \delta_{\alpha\beta} + \mu(u_{\alpha 0, \beta} + u_{\beta 0, \alpha}), \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (2.3.7)$$

თუ (2.3.7)-ს ჩავსვამთ (2.3.6)-ში, მივიღებთ

$$\mu \Delta u_{\alpha 0} + (\lambda^* + \mu) \theta_{0, \alpha}^2 + \Phi_{\alpha 0} = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

ეთქვათ, ds წირითი ელემენტია Ox_1x_2 სიბრტყეზე. განვიხილოთ შუა სიბრტყისადმი პერპენდიკულარული $2h$ სიმაღლის მქონე მართკუთხა ფართი, რომელიც ფირფიტას ეკუთვნის და რომლის კვეთა შუა სიბრტყესთან გვაძლევს ds ელემენტს. აღნიშნულ ფართზე მოქმედი ძაბვის ვექტორის გეგმილის საშუალო მნიშვნელობა

$$X_{n\alpha 0} = X_{\alpha\beta 0} n_\beta \text{ -ს, } \alpha = 1, 2, \quad (2.3.8)$$

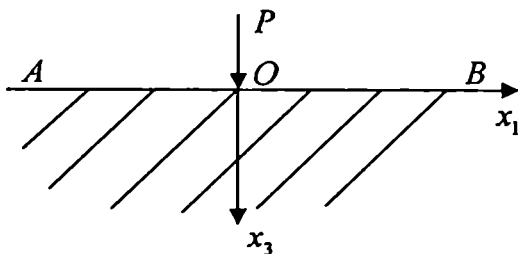
ტოლია, სადაც n ფართის დადებითი ნორმალია, რომელიც, ცხადია, შუა სიბრტყის პარალელურია (ე.ი. $n_3 = 0$). მთელ ფართზე მოქმედი ზედაპირული ძალაა

$$2hX_{n\alpha 0} ds, \quad \alpha = 1, 2,$$

ხოლო სისქის ერთეულზე გაანგარიშებული ds ელემენტზე n ნორმალის მხრიდან მოქმედი ძალა $X_{n\alpha 0} ds$ -ის, $\alpha = 1, 2$, ტოლია.

ბრტყელი დეფორმაციის, ბრტყელი დაძაბული და განზოგადებული ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობის ძირითად დამოკიდებულებათა (ლამეს განტოლებები, ჰუკის განზოგადებული კანონი, წონასწორობის განტოლებები) შედარება ადვილად დაგვარწმუნებს იმაში, რომ ყველა ფორმულა ერთნაირია იმ განსხვავებით, რომ იქ, სადაც ბრტყელი დეფორმაციის დროს გვაქვს λ , ბრტყელი დაძაბული და განზოგადებული დაძაბული მდგომარეობის დროს გვაქვს λ^* . ამრიგად, შეიძლება დავასკვნათ, რომ ბრტყელი დეფორმაციის, ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობისა და განზოგადებული ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობის შემთხვევაში დრეკადობის თეორიის ამოცანები მათემატიკურად იდენტურია.

დრეკადობის თეორიის ბრტყელი სასაზღვრო ამოცანები დაისმება სამგანზომილებიანის ანალოგიურად. კონკრეტული ამოცანების ამოხსნის მეთოდები შეიძლება ვნახოთ, მაგალითად, [52]-სა და [50]-ში.



ნახ. 2.3.4

ბუსინესკის^{*)} და ფლამანის^{**)} ამოცანები. განვიხილოთ დრეკადი გარემო (იხ. ნახ. 2.3.4), რომელიც შემოსაზღვრულია AB სიბრტყით და მის ქვემოთ უსასრულოდ ვრცელდება. ვთქვათ, O წერტილში მოდებულია AB სიბრტყისადმი პერპენდიკულარული P შეყურსული ძალა. ეს ამოცანა ორ შემთხვევაში იქნება ბრტყელი. თუ ნახაზის სიბრტყის პერპენდიკულარული მიმართულებით გარემოს ზომა ძალზე მცირეა, გვექნება განზოგადებული ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა. თუ აღნიშნული მიმართულებით გარემოს ზომა დიდია (კერძოდ, გარემო ავსებს ნახევარსივრცეს), მაშინ გვექნება ბრტყელი დეფორმირებული მდგომარეობა იმ პირობით, რომ P არის ნახაზის სიბრტყის პერპენდიკულარულ წრფეზე თანაბრად განაწილებული შეყურსული ძალა. ბრტყელი ამოცანის შემთხვევაში განსახილველ გარემოს უწოდებენ დრეკად ნახევარსიბრტყეს, ხოლო დასმულ ამოცანას – ფლამანის ამოცანას მისი 1892 წელს ამომხსნელი მეცნიერის საპატივსაცემოდ (იხ. [50] გვ. 516 და [55], გვ. 94). იმ შემთხვევაში, როცა ნახევარსივრცის საზღვარზე მოქმედებს წერტილში შეყურსული ძალა ამოცანას ბუსინესკის ამოცანას უწოდებენ (იხ. [50], გვ. 224).

^{*)} ჟ. ვ. ბუსინესკი (1842-1929).

^{**)} ა. ფლამანი (1839-1915).

თავი II. ფირფიტების და ბარსების თეორია

§2.4. თხელი ფირფიტების ლუნვის კლასიკური თეორია. კირხჰოფ-ლიავის მოდელი

ჩვენს მიერ ადრე განხილული განზოგადოებული ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა (იხ. §2.3) იქმნება ფირფიტების გაჭიმვა-კუმშვაზე მუშაობის დროს. მაშინ როგორც მოცულობითი, ასევე გარე ზედაპირული ძალების გეგმილები შუა სიბრტყის პერპენდიკულარულ მიმართულებაზე ჩვენს მიერ ნულის ტოლად იქნა მიღებული. ამდენად, იმ შემთხვევის განსახილველად, როცა ფირფიტაზე სწორედ მხოლოდ ზემო აღნიშნული მდგენელები მოქმედებენ, განზოგადოებული ბრტყელი დაძაბულობის მდგომარეობის მოდელი არ გამოდგება. ამ მოთხოვნას პასუხობს თხელი ფირფიტების ლუნვის კლასიკური თეორია, რომელიც ეყრდნობა კირხჰოფ^{*)}-ლიავის^{**)} შემდეგ სამ ძირითად ჰიპოთეზას:

1. წრფივი ნორმლების ჰიპოთეზა: დეფორმაციამდე ფირფიტის შუა სიბრტყისადმი ნორმალური წრფივი ელემენტი არ იცვლის სიგრძეს და წრფივი და შუა ზედაპირის მართობული რჩება დეფორმაციის შემდეგაც (იხ. ნახ. 2.4.1).

მათემატიკურად ეს იმას ნიშნავს, რომ $e_{33} = 0$ და $e_{\alpha 3} = 0$, $\alpha = 1, 2$.

2. შუა სიბრტყის გაუჭიმეადობის ჰიპოთეზა: შუა სიბრტყე არ მუშაობს გაჭიმვა-კუმშვაზე, იგი მხოლოდ ილუნება, ე.ი., შუა სიბრტყეში არ გვაქვს გაჭიმვის, კუმშვის და ძერის დეფორმაციები.

მათემატიკურად ეს ასე ჩაიწერება:

$$u_{\alpha}(x_1, x_2, 0) = 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

ამ თვისების გამო აღნიშნულ სიბრტყეს ნეიტრალურს უწოდებენ.

^{*)} გ.რ. კირხჰოფი (1824-1887).

^{**)} ო.ე.პ. ლიავი (1863-1940).

3. შუა სიბრტყისადმი პარალელურ ფენებს შორის წნევის არარსებობის პიპოთეზა: აღნიშნული წნევის სიმცირის გამო ფირფიტის ფენები ერთმანეთზე გავლენას არ ახდენენ.

მათემატიკურად ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$X_{33} \ll X_{11}, X_{12}, X_{22}, \quad X_{33} \approx 0.$$

ეს პიპოთეზები მისაღებია ე.წ. თხელი ფირფიტებისათვის. ფირფიტას ეწოდება *თხელი* (იხ. [55], გვ. 112), თუ მისი ჩაღუნვა

$$u_3(x_1, x_2, x_3) \leq \frac{2h}{4}$$

და დაახლოებით

$$\frac{1}{80} < \frac{2h}{b} < \frac{1}{5},$$

სადაც $2h$ ფირფიტის სისქეა, ხოლო b არის ფირფიტის Ox_1x_2 სიბრტყეზე გეგმილის უმცირესი მახასიათებელი ზომა. ბ. გ. გალიორკინმა აჩვენა, რომ თხელი ფირფიტების თეორიის გამოყენება შეიძლება მაშინაც, როცა $\frac{2h}{b} = \frac{1}{3}$.

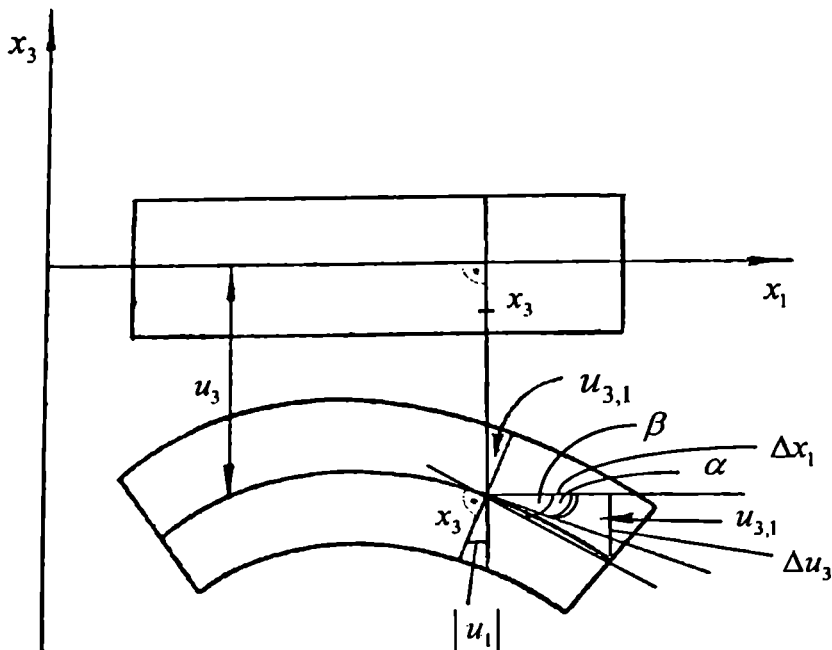
შევნიშნოთ, რომ თხელი ფირფიტების თეორია გამოდგება მაშინაც კი, როცა

$$\frac{1}{5} \leq \frac{2h}{b} \leq \frac{1}{3}.$$

თუ $\frac{2h}{b} > \frac{1}{3}$, მაშინ ფირფიტა გაითვლება *სქელი ფირფიტე-*

ბის თეორიის საფუძველზე. თუ ჩაღუნვა $u_3 > \frac{2h}{4}$, ფირფიტა

გაითვლება *მოქნილი ფირფიტების* თეორიის საფუძველზე. სქელი და მოქნილი (ან რაც იგივეა, დიდი ჩაღუნვების მქონე) ფირფიტების თეორიებს (იხ. მაგ., [58]) ჩვენ არ შევხებით.



ნახ. 2.4.1*)

*) $|u_1(x_1, x_2)| = x_3 \sin u_{3,1} \cong x_3 u_{3,1}$. $x_3 = u_3(x_1, x_2^0)$ -ის დახრა $\lg \alpha = u_{3,1} \cong \alpha$, რადგან მცირე დეფორმაციებს ვიხილავთ და

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \lg \beta = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta u_3}{\Delta x_1} = u_{3,1} = \lg \alpha. \text{ ამასთან დაკავშირებით იხ. აგრეთვე}$$

Донелл Л. Г., Балки, пластины и оболочки, М., Наука, 1982, გვ. 209-232.

2.4.1. გადაადგილებები და დეფორმაციები ფირფიტებში

კირხჰოფ-ლიავის პირველი ჰიპოთეზის თანახმად, (1.6.3)-ის გათვალისწინებით გვექნება, რომ $e_{33} = u_{3,3} = 0$. თუ ვაინტეგრებთ ამ ტოლობას, მივიღებთ, რომ $u_3 = u_3(x_1, x_2)$. გარდა ამისა, იმავე ჰიპოთეზის თანახმად:

$$e_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,3} + u_{3,\alpha}) = 0,$$

საიდანაც

$$u_{\alpha,3} = -u_{3,\alpha}. \quad (2.4.1)$$

თუ ვაინტეგრებთ მას x_3 -ის მიმართ, მივიღებთ

$$u_\alpha = -x_3 u_{3,\alpha} + f_\alpha(x_1, x_2), \quad \alpha = 1, 2.$$

მაგრამ მეორე ჰიპოთეზის თანახმად შუა სიბრტყეზე ამ ტოლობების მარცხენა მხარე ნულის ტოლია. მარჯვენა მხარეში კი პირველი შესაკრები, როცა $x_3 = 0$, ცხადია, ნულის ტოლია. ამდენად,

$$f_\alpha(x_1, x_2) = 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

ამრიგად,

$$u_\alpha(x_1, x_2, x_3) = -x_3 u_{3,\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.4.2)$$

ხოლო

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) = -\frac{x_3}{2}(u_{3,\alpha\beta} + u_{3,\beta\alpha}) = -x_3 u_{3,\alpha\beta}, \quad (2.4.3)$$

$$\alpha = 1, 2,$$

და ისინი განისაზღვრებიან u_3 -ის საშუალებით.

2.4.2. ძაბვები ფირფიტაში

კირხჰოფ-ლიავის მესამე პიპოთეზის თანახმად, ჰუკის (1.12.26) კანონიდან ვიღებთ

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E} X_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E} \Theta_2 \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (2.4.4)$$

სადაც

$$\Theta_2 := X_{11} + X_{22}.$$

აქედან

$$e_{\alpha\alpha} = e_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E} \Theta_2 - \frac{2\nu}{E} \Theta_2,$$

ე.ი., (2.4.3)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\Theta_2 = -\frac{E}{1-\nu} x_3 u_{3,\alpha\alpha}.$$

ამ უკანასკნელის (2.4.4)-ში ჩასმა გვაძლევს

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E} X_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} x_3 u_{3,\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta},$$

კერძოდ, თუ $\beta = \alpha$ -ს,

$$e_{\alpha\alpha} = \frac{1+\nu}{E} X_{\alpha\alpha} + \frac{\nu}{1-\nu} x_3 u_{3,\gamma\gamma}.$$

საიდანაც, რადგან $u_{3,\gamma\gamma} = u_{3,\alpha\alpha} + u_{3,\beta\beta}$ ($\alpha \neq \beta$), (2.4.3)-ის თანახმად,

$$\begin{aligned} X_{\alpha\alpha} &= -\frac{E}{1+\nu} x_3 u_{3,\alpha\alpha} - \frac{E\nu}{1-\nu^2} x_3 u_{3,\gamma\gamma} \\ &= -\frac{E}{1-\nu^2} x_3 \left[(1-\nu) u_{3,\alpha\alpha} + \nu u_{3,\alpha\alpha} + \nu u_{3,\beta\beta} \right], \end{aligned}$$

$$\alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

და

$$X_{\alpha\alpha} = -\frac{Ex_3}{1-v^2} \left(u_{3,\alpha\alpha} + v u_{3,\beta\beta} \right), \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (2.4.5)$$

(2.4.4) და (2.4.3)-დან ცხადია

$$X_{12} = -\frac{Ex_3}{1+v} u_{3,12}. \quad (2.4.6)$$

პირველი პიპოთეზის გამო, ჰუკის (1.12.26) კანონიდან გამომდინარეობს აგრეთვე

$$X_{\alpha 3} = \frac{E}{1+v} e_{\alpha 3} = 0. \quad (2.4.7)$$

მესამე პიპოთეზის თანახმად კი ჩვენ დაეუშვით, რომ

$$X_{33} = 0. \quad (2.4.8)$$

უგულებელყოთ მოცულობითი ძალები. მაშინ წონასწორობის (1.15.1) განტოლებები მიიღებენ

$$X_{ij,j} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

სახეს. (2.4.7) და (2.4.8), ერთის მხრივ, ეწინააღმდეგება წონასწორობის ამ განტოლებებს, რამდენადაც თუ თვით წონასწორობის განტოლებებს ამოვხსნით $X_{i,j}$ -ის, $i=1,2,3$ მიმართ, გავითვალისწინებთ (2.4.5)-ს, (2.4.6)-ს და იმას, რომ

$$X_{\alpha 3}|_{x_3=\pm h} = 0, \quad X_{33}|_{x_3=\pm h} = \pm q^{(\pm)},$$

მივიღებთ (იხ. [55], გვ. 116-118)

$$X_{\alpha 3} = -\frac{E}{2(1-v^2)} \left(h^2 - x_3^2 \right) (\Delta u_3)_{,\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.4.9)$$

ხოლო

$$X_{33} = \frac{q^{(+)} - q^{(-)}}{2} + \frac{E}{2(1-v^2)} \left(h^2 x_3 - \frac{x_3^3}{3} \right) \Delta^2 u_3, \quad (2.4.10)$$

სადაც $q^{(+)}$ და $q^{(-)}$ შესაბამისად ფირფიტის ზედა და ქვედა ზედაპირებზე მოდებულ ძალებს აღნიშნავს; თუმცა, მეორე მხრივ, (2.4.9) და (2.4.10)-დან გამომდინარეობს, რომ $X_{\alpha 3}$, $\alpha = 1, 2$, მეორე რიგის მცირე სიდიდეა h -ის მიმართ, ხოლო X_{33} კი განივი დატვირთვის ინტენსივობის რიგისაა და შეადგენს $X_{\alpha\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, ძაბვების უმნიშვნელო ნაწილს (იხ. 2.4.3 ქვეპარაგრაფი), თუ შესაბამისად u_3 -ის მესამე და მეოთხე რიგის წარმოებულები x_1 და x_2 -ის მიმართ შემოსაზღვრულია. მართლაც, წონასწორობის პირველი ორი განტოლებიდან

$$X_{\alpha 3,3} = -X_{\alpha\beta,\beta}, \quad \alpha = 1, 2.$$

ჩავსვთ აქ (2.4.5) და (2.4.6):

$$X_{\alpha 3,3} = \frac{Ex_3}{1-\nu^2}(u_{3,\alpha\alpha\alpha} + \nu u_{3,\alpha\beta\beta}) + \frac{Ex_3}{1+\nu}u_{3,\alpha\beta\beta}, \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

გამარტივების შემდეგ მივიღებთ

$$X_{\alpha 3,3} = \frac{Ex_3}{1-\nu^2}(\Delta u_3)_{,\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

x_3 -ით ინტეგრების შემდეგ გვექნება

$$X_{\alpha 3} = \frac{Ex_3^2}{2(1-\nu^2)}(\Delta u_3)_{,\alpha} + f_1(x_1, x_2), \quad \alpha = 1, 2.$$

თუ აქედან, გავითვალისწინებთ რა იმას, რომ

$$X_{\alpha 3}|_{x_3=\pm h} = 0,$$

განვსაზღვრავთ $f_1(x_1, x_2)$ -ს:

$$f_1(x_1, x_2) = -\frac{Eh^2}{2(1-\nu^2)}(\Delta u_3)_{,\alpha}, \quad \alpha = 1, 2,$$

საბოლოოდ, მივიღებთ (2.4.9)-ს.

წონასწორობის მესამე განტოლებიდან

$$X_{33,3} = -X_{\alpha 3, \alpha}.$$

აქ ჩავსვით (2.4.9), მაშინ

$$X_{33,3} = \frac{E}{2(1-\nu^2)}(h^2 - x_3^2)\Delta^2 u_3.$$

x_3 -ით ინტეგრების შემდეგ გვქვია

$$X_{33} = \frac{E}{2(1-\nu^2)}(h^2 x_3 - \frac{x_3^3}{3})\Delta^2 u_3 + f_2(x_1, x_2).$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ

$$X_{33}|_{x_1=\pm c} = \pm q^{(\pm)},$$

დავასკენით

$$q^{(+)} = \frac{Eh^3}{3(1-\nu^2)}\Delta^2 u_3 + f_2(x_1, x_2),$$

$$-q^{(-)} = -\frac{Eh^3}{3(1-\nu^2)}\Delta^2 u_3 + f_2(x_1, x_2).$$

საიდანაც, შეკრების შემდეგ მივიღებთ

$$q^{(+)} - q^{(-)} = 2f_2(x_1, x_2).$$

ამრიგად, დამტკიცდა (2.4.10) ფორმულა.

2.4.3. ძალები ფირფიტებში

განვიხილოთ გამჭიმავი ძალები

$$N_\alpha = \int_{-h}^{+h} X_{\alpha\alpha} dx_3, \quad \alpha = 1, 2.$$

რადგანაც (2.4.5) x_3 -ის მიმართ კენტი ფუნქციაა, ამიტომ

$$N_\alpha = 0.$$

იმავე (2.4.5)-ის თანახმად, *ძღუნავი მომენტი*

$$M_\alpha = M_{\underline{\alpha\alpha}} := \int_{-h}^{+h} X_{\underline{\alpha\alpha}} x_3 dx_3 = -D(u_{3,\underline{\alpha\alpha}} + \nu u_{3,\underline{\beta\beta}}), \quad (2.4.11)$$

$$\alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

სადაც

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$$

ე.წ. *ცილინდრული სიხისტეა*.

თუ გავითვალისწინებთ (2.4.9)-ს, მივიღებთ ე.წ. *გადამჭრელი* Q_α ძალების შემდეგ გამოსახულებას:

$$Q_\alpha := \int_{-h}^{+h} X_{\alpha 3} dx_3 = -D(\Delta u_3)_{,\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.4.12)$$

რადგანაც (2.4.6) x_3 -ის მიმართ კენტი ფუნქციაა, ამიტომ

$$S := \int_{-h}^{+h} X_{12} dx_3 = 0$$

და ე.წ. *შერეხავი მომენტი*:

$$H := M_{21} = M_{12} = \int_{-h}^{+h} x_3 X_{12} dx_3 = -D(1-\nu)u_{3,12}. \quad (2.4.13)$$

Q_α , M_α და H სიდიდეები გათვლილია შუა სიბრტყისა და მისი პერპენდიკულარული სიბრტყის თანაკვეთის სიგრძის ერთეულზე. ცხადია, მათი საშუალებით ადვილად მივიღებთ ძაბვის ტენზორის კომპონენტების გამოსახულებებს. მართლაც, (2.4.5)-ის და (2.4.11)-ის შედარებით დავასკვნით

$$X_{\alpha\alpha} = \frac{3M_\alpha x_3}{2h^3}, \quad \alpha = 1, 2,$$

ხოლო (2.4.6)-ის (2.4.13)-თან, (2.4.9)-ისა და (2.4.10)-ის (2.4.12)-თან შედარებით კი შესაბამისად დავასკვნით

$$X_{12} = \frac{3Hx_3}{2h^3}, \quad X_{\alpha 3} = \frac{3Q_\alpha}{4h^3}(h^2 - x_3^2),$$

$$X_{33} = \frac{q^{(+)} - q^{(-)}}{2} - \frac{3Q_{\alpha,\alpha}}{4h^3} \left(h^2 x_3 - \frac{x_3^3}{3} \right).$$

თუ ფირფიტის შუა სიბრტყეში მდებარე წირის გარე ნორმალის $\vec{n}$ -ია, ხოლო $\vec{l}$ მხეზი, მაშინ, ანალოგიურად, (1.4.4), (1.2.1), (2.4.11)-(2.4.13)-ის თანახმად,

$$\begin{aligned} M_n &:= \int_{-h}^{+h} X_{nn} x_3 dx_3 = \int_{-h}^{+h} X_{ij} n_i n_j x_3 dx_3 = \int_{-h}^{+h} X_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta x_3 dx_3 \\ &= M_1 n_1^2 + 2H n_1 n_2 + M_2 n_2^2, \end{aligned}$$

^{*)} თუ M_α , H და $Q_{\alpha,\alpha}$ სიდიდეები შემოსაზღვრულია, მაშინ როცა $h \rightarrow 0+$ გვექნება, რომ $X_{\alpha\beta} = O(h^{-2})$ და

$$X_{33} = \frac{q^{(+)} - q^{(-)}}{2} + O(h^{-1}) = O(h^{-1}), \quad \text{საიდანაც ცხადია, რომ } X_{\alpha\beta} \text{ ერთი}$$

რიგით უფრო უსასრულოდ დიდი სიდიდეა ვიდრე X_{33} :

$$\frac{X_{\alpha\beta}}{X_{33}} = O(h^{-1}), \quad h \rightarrow 0+.$$

$$\begin{aligned}
M_{ni} &:= \int_{-h}^{+h} X_{ni} x_3 dx_3 = \int_{-h}^{+h} X_{ij} n_i t_j x_3 dx_3 = \int_{-h}^{+h} X_{\alpha\beta} n_\alpha t_\beta x_3 dx_3 \\
&= M_1 n_1 t_1 + H(n_1 t_2 + n_2 t_1) + M_2 n_2 t_2, \\
Q_n &:= \int_{-h}^{+h} X_{n3} dx_3 = \int_{-h}^{+h} X_{i3} n_i dx_3 = \int_{-h}^{+h} X_{\alpha 3} n_\alpha dx_3 = Q_\alpha n_\alpha,
\end{aligned}$$

სადაც

$$n_i = \cos(n, x_i), \quad t_i = \cos(t, x_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

და, ცხადია, $n_3 = 0$, $t_3 = 0$.

2.4.4. გაღუნული შუა ზედაპირის განტოლება

აზრობრივად ამოვჭრათ შუა სიბრტყიდან უსასრულოდ მცირე ელემენტი dx_1 და dx_2 (იხ. ნახ 2.4.2) გვერდებით. მასზე მოქმედი ძალები მოცემულია ნახაზზე. ამასთან იმ წირით ელემენტთან, რომელთა ნორმალების მიმართულება ემთხვევა საკოორდინატო ღერძების მიმართულებებს, მითითებულია ძალების (საკუთრივ გადამჭრელი ძალებისა და მომენტების მოქმედებით გამოწვეული მობრუნების კუთხეების) დადებითი მიმართულებები, ე.ი. ის მიმართულებები, რა მიმართულებებითაც შესაბამისი სიდიდეები დადებით მნიშვნელობებს იღებენ. მომენტებისა და მათ მიერ გამოწვეული ბრუნვის დადებითი მიმართულებების გასარკვევად გავიხსენოთ მომენტის განმარტება. მარჯვენა სისტემაში რაიმე O_1 წერტილის მიმართ O_2 წერტილში მოდებული $\bar{P}$ ძალის მომენტი განიმარტება, როგორც $\overline{O_1 O_2}$ და $\bar{P}$ ვექტორების ისეთი ვექტორული ნამრავლი, რომ $\overline{O_1 O_2}$, $\bar{P}$ და $[\overline{O_1 O_2}, \bar{P}]$ ვექტორებმა შექმნან მარჯვენა სისტემა. ამასთან მო-

მენტის დადებითი მიმართულების გარშემო მის მიერ გამოწვეული ბრუნვის დადებით მიმართულებად (ე.ი. მობრუნების კუთხის დადებით მიმართულებად) მიღებულია საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულება. ამრიგად, (x_3, X_{11}, M_1) სამეულის დადებითი მნიშვნელობების შესაბამისმა მიმართულებებმა უნდა შექმნან მარჯვენა სისტემა. აქედან გამომდინარე M_1 მომენტის დადებითი მიმართულების გარშემო მის მიერ გამოწვეული ბრუნვის დადებითი მიმართულება (ე.ი. მობრუნების კუთხის დადებითი მიმართულება) ემთხვევა ნახ. 2.4.2-ზე მითითებულს. ანალოგიურად, (x_3, X_{22}, M_2) სამეულიდან ვასკენით, რომ M_2 -ის დადებითი მიმართულება ემთხვევა x_1 ღერძის უარყოფით მიმართულებას; (x_3, X_{12}, H) სამეულიდან ვასკენით, რომ H -ის დადებითი მიმართულება ემთხვევა x_1 ღერძის უარყოფით მიმართულებას; (x_3, X_{21}, H) სამეულიდან ვასკენით, რომ H -ის დადებითი მიმართულება ემთხვევა x_2 ღერძის დადებით მიმართულებას; ხოლო მათ დადებით მიმართულებათა გარშემო მათ მიერვე გამოწვეულ ბრუნვათა დადებითი მიმართულებები ემთხვევა ნახაზზე მითითებულს. ელემენტი წონასწორობაშია, ამიტომ მასზე მოქმედი ძალების x_3 ღერძზე გეგმილების ალგებრული ჯამის ნულთან ტოლობის პირობიდან მივიღებთ

$$\begin{aligned}
 & -Q_1 dx_2 - Q_2 dx_1 + \left(Q_2 + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 \\
 & + \left(Q_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 + q dx_1 dx_2 = 0,
 \end{aligned}$$

(+) (-)

სადაც $q := q + q$ (იხ. 2.4.2 ქვეპარაგრაფი) შუა სიბრტყეზე ნორმალურად მოქმედი ზედაპირული დატვირთვის ინტენსივობაა.

აქედან მსგავსი წევრების შეერთებისა და $dx_1 dx_2$ -ზე გაყოფის შემდეგ მივიღებთ

$$Q_{\alpha,\alpha} = -q. \quad (2.4.14)$$

თუ ახლა x_β , $\beta = 1, 2$, ღერძების მიმართ მომენტებს ნულს გავუტოლებთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \left(M_\alpha + \frac{\partial M_\alpha}{\partial x_\alpha} dx_\alpha \right) dx_\beta - M_\alpha dx_\beta + \left(H + \frac{\partial H}{\partial x_\beta} dx_\beta \right) dx_\alpha \\ & - H dx_\alpha - \left(Q_\alpha + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\alpha} dx_\alpha \right) dx_\beta dx_\alpha + Q_\beta dx_\alpha \frac{dx_\alpha}{2} \\ & - \left(Q_\beta + \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_\beta} dx_\beta \right) dx_\alpha \frac{dx_\alpha}{2} - q dx_\alpha dx_\beta \cdot \frac{dx_\alpha}{2} = 0, \\ & \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \end{aligned}$$

საიდანაც მესამე რიგის უსასრულო მცირეების (ისინი ზაზგას-ბულია) უგულებელყოფით ანალოგიურად გამომდინარეობს

$$M_{\alpha,\alpha} + H_{,\beta} = Q_\alpha, \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (2.4.15)$$

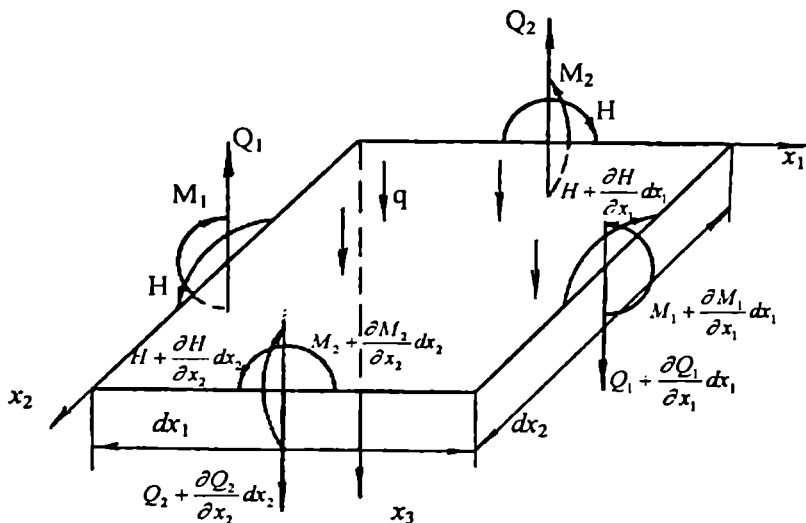
თუ (2.4.15)-ს ჩავსვამთ (2.4.14)-ში, მივიღებთ

$$(M_{1,1} + H_{,2})_{,1} + (M_{2,2} + H_{,1})_{,2} = -q. \quad (2.4.16)$$

ზოლო ამ უკანასკნელში M_α -სა და H -ის (2.4.11) და (2.4.13) მნიშვნელობების ჩასმა გვაძლევს

$$\Delta \Delta u_3 = \frac{q}{D} \quad (2.4.17)$$

განტოლებას, რომელსაც *სოფი ჟერმენ-ლაგრანჟის* განტოლება ეწოდება.



ნახ. 2.4.2

შეგნიშნოთ, რომ (2.4.14) და (2.4.15) ფორმულები შეიძლება მივიღოთ წონასწორობის (1.15.1) განტოლებების ინტეგრებითაც (იხ. ქვემოთ (2.5.3) და (2.5.4)).

(2.4.16) განტოლება გამოიყენება *ცვლადი სისქის ფირფიტის*, რომელიც სიმეტრიულ პრიზმულ გარსს წარმოადგენს (იხ. ქვემოთ §2.6.), შემთხვევაშიც, თუ სისქე $2h$ მკვეთრად არ იცვლება (იხ. [58], გვ. 199).

თუ (2.4.11)-სა და (2.4.13)-ს, რომლებიც ასევე სამართლიანია არამკვეთრად ცვლადი სისქის ფირფიტებისათვის (ე.ი. $D(x_1, x_2)$ ფუნქციაა) ჩავსვამთ (2.4.16)-ში, მივიღებთ ცვლადი სიხისტის, რომელიც შეიძლება ღრეკადი მუდმივების ცვალებადობითაც იყოს გამოწვეული, შემთხვევაში ღუნვის შემდეგ განტოლებას:

$$\begin{aligned} & (Du_{3,11})_{,11} + (Du_{3,22})_{,22} + \nu(Du_{3,22})_{,11} \\ & + \nu(Du_{3,11})_{,22} + 2[(1-\nu)Du_{3,12}]_{,12} = q. \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

ღუნვის დინამიკის განტოლების მისაღებად, დალაშქრის პრინციპის თანახმად, q დატვირთვას უნდა დაემატოს ინერციის ძალის გეგმილი x_3 ღერძზე. ეს იმით აიხსნება, რომ ერთი მხრივ, მოცულობითი ძალის x_3 ღერძზე გეგმილი რომ არ უგულვებელგვეყო, ის სწორედ q -ს დაემატებოდა, ხოლო მეორე მხრივ, ინერციის ძალა მოცულობით ძალებს განეკუთვნება (იხ. აგრეთვე ქვემოთ (2.6.4)). წამახელებული ფირფიტები, ე.ი., როცა $D(x_1, x_2)$ საზღვარზე ნული ხდება, განხილულია [23]-ში.

2.4.5. ძირითადი ამოცანები ფირფიტისათვის

ფირფიტების თეორიაში ჩვენ ვეძებთ (2.4.18) (კერძოდ, 2.4.17) განტოლების ამონახსნს (ე.ი. $u_3 \in C^4$), რომელიც შემდეგი სამი ძირითადი სასაზღვრო პირობიდან ერთ-ერთს აკმაყოფილებს:

1. საზღვარზე მოცემულია u_3 ჩაღუნვა და შუა სიბრტყის შემობრუნების კუთხე (დირიხლეს ამოცანა). ეს არის გეომეტრიული სასაზღვრო პირობა. როცა სასაზღვრო პირობები ერთგვაროვანია (ნულოვანია), საზღვარს ჩამაგრებულს უწოდებენ.

2. საზღვარზე მოცემულია ჩაღუნვა და მღუნავი მომენტი.*) ეს არის ფიზიკური სასაზღვრო პირობა. როცა სასაზღვრო პირობები ერთგვაროვანია, ამბობენ, რომ საზღვარი სახსრულადაა დაყრდნობილი.

3. საზღვარზე მოცემულია გადამჭრელი ძალა, მღუნავი და მგრეზავი მომენტები (ნოიმანის ამოცანა). ეს სასაზღვრო პირო-

*) ამ ამოცანას შეიძლება რიკიეს (შ. რიკიე, 1853-1929) ამოცანა ეწოდოს.

ბაც ფიზიკურია. როცა სასაზღვრო პირობები ერთგვაროვანია, ამბობენ, რომ საზღვარი თავისუფალია.

თუ სიცხადისათვის ვიგულისხმებთ, რომ საზღვრის ნორმალის მიმართულება x_2 ღერძს ემთხვევა, ზემოთ ჩამოთვლილი ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები მათემატიკურად შესაბამისად ასე ჩაიწერება:

$$1. \quad u_3 = 0, \quad u_{3,2} = 0 \quad (\text{ამ შემთხვევაში, (2.4.13)-ის ძალით } H = 0);$$

$$2. \quad u_3 = 0, \quad M_2 = 0;$$

$$3. \quad Q_2 = 0, \quad M_2 = 0, \quad H = 0.$$

სამგანზომილებიან მოდელში მათ (ერთგვაროვანი პირობების შემთხვევაში) შესაბამისად ეთანადება შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$1. \quad u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$2. \quad u_1 = 0, \quad u_3 = 0, \quad X_{22} = 0;$$

$$3. \quad X_{23} = 0, \quad X_{22} = 0, \quad X_{21} = 0.$$

მესამე ამოცანის შემთხვევაში მეოთხე რიგის (2.4.18) (კერძოდ, 2.4.17) ელიფსური განტოლებისათვის გვაქვს სამი სასაზღვრო პირობა, რაც სასაზღვრო ამოცანას არაკორექტულს ხდის. ამიტომ გარკვეულ მოსაზრებებზე დაყრდნობით (იხ. ნახ. 2.4.3), Q_2 -სა და H -ის ნაცვლად საზღვარზე სახელდება ე.წ. განზოგადებული გადამჭრელი ძალა

$$\tilde{Q}_2 := Q_2 + \frac{\partial H}{\partial x_1}$$

და ამ უკანასკნელ შემთხვევაში გვექნება ორი სასაზღვრო პირობა.

დასასრულს შევნიშნავთ, რომ ფირფიტების ღუნვის კლასიკურ თეორიაში არ სრულდება ჰუკის კანონი x_3 ღერძის გასწვრივ და სასაზღვრო პირობები კმაყოფილდება ინტეგრალურად.

მართლაც, ჩვენს შემთხვევაში პირველი პიპოთეზის თანახმად $e_{33} = 0$ და ამდენად x_3 ღერძის გასწვრივ ჰუკის კანონი იღებს $u_{1,1} + u_{2,2} = 0$ სახეს. საიდანაც, (2.4.2)-ის თანახმად გამომდინარეობს, რომ $\Delta u_3 = 0$, რაც, ზოგადად, არ სრულდება, რადგან u_3 აკმაყოფილებს (2.4.17) განტოლებას და ამდენად, ზოგადად, ის ჰარმონიული ფუნქცია არაა.

უფრო დეტალურად ფირფიტების ღუნვის კლასიკურ თეორიას შეიძლება გავეცნოთ [55]-სა და [58]-ში.

ზოგად შემთხვევაში, როცა საზღვრის ნორმალი $\vec{n}$ -ია, კირხჰოფ-ლიავის მოდელის ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$1. \quad u_3 = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial n} = 0;$$

$$2. \quad u_3 = 0, \quad M_n = 0;$$

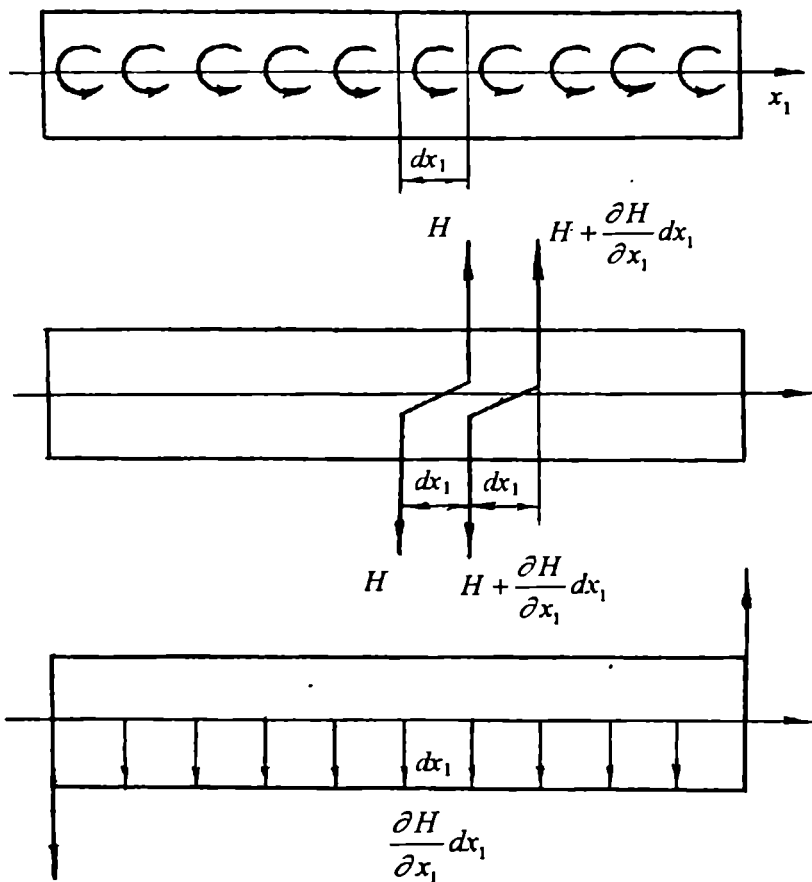
$$3. \quad M_n = 0, \quad \tilde{Q}_n := Q_n + \frac{\partial M_{nn}}{\partial t},$$

რომელთაც სამგანზომილებიანი მოდელის შემდეგი სასაზღვრო პირობები შეესაბამება:

$$1. \quad u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$2. \quad X_{nn} = 0, \quad u_i = 0, \quad u_3 = 0;$$

$$3. \quad X_{nn} = 0, \quad X_{nn} = 0, \quad X_{n3} = 0.$$



ნახ. 2.4.3

კირხჰოფ-ლიავის მოდელში განიხილავენ აგრეთვე ე.წ. სრიალ ჩამაგრების

$$4. \frac{\partial u_3}{\partial n} = 0, \quad \tilde{Q}_n = 0,$$

სასაზღვრო პირობებს, რომლებსაც სამგანზომილებიან მოდელში შეესაბამება

$$4. u_n = 0, \quad X_n = 0, \quad X_{n3} = 0$$

სასაზღვრო პირობები.

განვიხილოთ პირველი სასაზღვრო პირობები. ვთქვათ, $u_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, $(x_1, x_2) \in \partial\omega$, $|x_3| < h$, მაშინ თუ გავიხსენებთ იმას, რომ u_n -ით და u_l -ით აღნიშნულია გადაადგილების ვექტორის მდგენელები (კომპონენტები) $\partial\omega$ -ზე გამავალი ცილინდრული ზედაპირისადმი (საზღვრისადმი) $\vec{n}$ ნორმალისა და Ox_1x_2 სიბრტყის პარალელური $\vec{l}$ მხების მიმართულებებით, ღავასკენით, რომ ერთი მხრივ, (2.4.2)-ის და $n_3 = 0$, $l_3 = 0$ -ის თანახმად,

$$u_n = u_\alpha n_\alpha = -x_3 u_{3,\alpha} n_\alpha = -x_3 \frac{\partial u_3}{\partial n},$$

$$u_l = u_\alpha l_\alpha = -x_3 u_{3,\alpha} l_\alpha = -x_3 \frac{\partial u_3}{\partial l},$$

და, ამდენად,

$$u_n = 0, \quad u_l = 0 \quad \text{და} \quad x_3 \frac{\partial u_3}{\partial n} = 0, \quad x_3 \frac{\partial u_3}{\partial l} = 0, \quad \text{როცა}$$

$$(x_1, x_2) \in \partial\omega, \quad |x_3| \leq h.$$

საიდანაც იმის გათვალისწინებით, რომ კირხჰოფ-ლიავის მოდელში u_3 არ არის დამოკიდებული x_3 -ზე^{*)}, მივიღებთ

^{*)} რადგან $\frac{\partial u_3}{\partial n} = 0$, როცა $x_3 \neq 0$, გამომდინარეობს გვერდით ზედაპირზე

$$x_3 \frac{\partial u_3}{\partial n} = 0 \quad \text{ტოლობიდან.}$$

$$\left. \frac{\partial u_3}{\partial n} \right|_{\partial \omega} = 0.$$

მეორე მხრივ კი

$$u_3|_{\partial \omega} = 0.$$

ორივე მოდულში, ცხადია,

$$\left. \frac{\partial u_3}{\partial t} \right|_{\partial \omega} = 0.$$

მეორე, მესამე და მეოთხე სასაზღვრო პირობების შემთხვევა ნათელია, რადგან იქიდან, რომ

$$X_{nn} = 0, \quad X_{nn} = 0 \quad \text{და} \quad X_{n3} = 0, \quad \text{როცა} \quad (x_1, x_2) \in \partial \omega, \\ |x_3| < h,$$

შესაბამისად გამომდინარეობს

$$M_n = 0, \quad M_{nn} = 0 \quad \text{და} \quad Q_n = 0, \quad \text{როცა} \quad (x_1, x_2) \in \partial \omega,$$

ხოლო, როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ,

$$u_n = 0, \quad \text{როცა} \quad (x_1, x_2) \in \partial \omega, \quad |x_3| < h,$$

ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\frac{\partial u_3}{\partial n} = 0, \quad \text{როცა} \quad (x_1, x_2) \in \partial \omega.$$

დინამიკის ამოცანების განხილვისას, სასაზღვრო პირობებს საწყისი პირობებიც უნდა დაემატოს.

2.4.6. ფირფიტის ღუნვა ღრეკად ფუძეზე

ღრეკადი ფუძე ეწოდება ღრეკად დეფორმირებად სხეულს, რომელსაც მთელი თავისი ქვედა პირითი ზედაპირით ეყრდნობა ფირფიტა ან ღერო (იხ. ქვემოთ ნაწ. III).

ვინკლერის^{*)} ექსპერიმენტული ჰიპოთეზის თანახმად დრეკად ფუძეზე ფირფიტის ან ღეროს დაწოლით გამოწვეული დრეკადი ფუძის რეაქციის R ინტენსივობა ქვედა ფუძის ჩალუნვის (ე.ი. კირხჰოფ-ლიავის მოდელის შემთხვევაში შუა სიბრტყის u_3 ჩალუნვის, რადგან ის x_3 -ზე არ არის დამოკიდებული) პროპორციულია

$$R = ku_3,$$

სადაც k დრეკადი ფუძის მოდულია, გათვლილი ფართის ერთეულზე, როცა ჩალუნვა სიგრძის ერთეულის ტოლია. k , რომლის ერთეულია $\frac{\text{ნიუტონი}}{\text{სმ}^3}$, დრეკადი ფუძის მასალაზეა დამო-

კიდებული და დგინდება ექსპერიმენტით (იხ. [58], გვ. 290).

თუ q ფირფიტის დატვირთვის ინტენსივობაა, მაშინ, ცხადია, დრეკადი ფუძის რეაქციის გათვალისწინებით ფირფიტაზე მოქმედი მთლიანი დატვირთვის ინტენსივობა

$$(q - ku_3) \text{ - ის } \quad (2.4.19)$$

ტოლია. ამდენად დრეკად ფუძეზე მდებარე ფირფიტის ღუნვის განტოლების მისაღებად (2.4.17) და (2.4.18) განტოლებებში q უნდა შევცვალოთ (2.4.19)-ით:

$$\Delta \Delta u_3 = \frac{q - ku_3}{D}$$

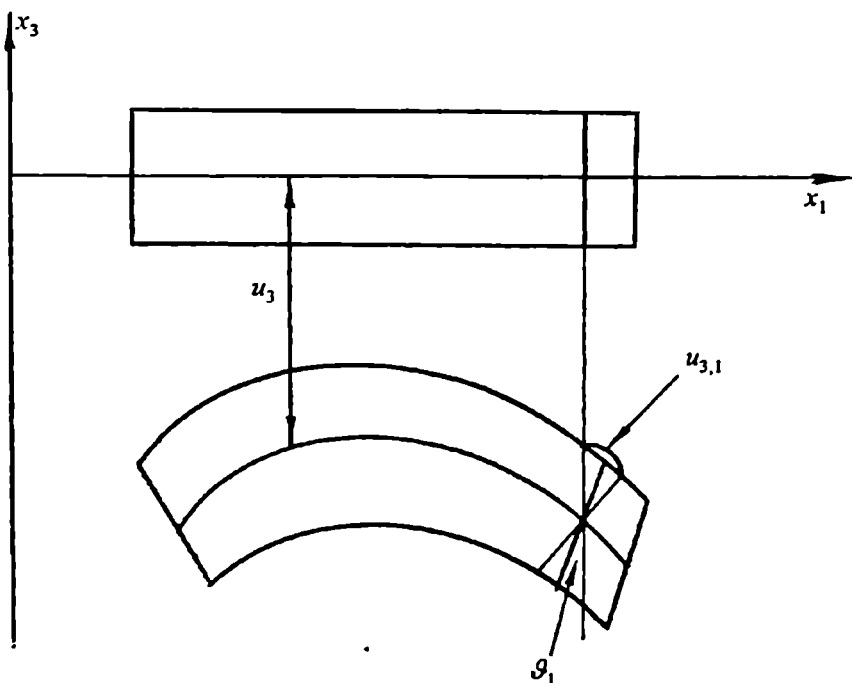
და

$$\begin{aligned} (Du_{3,11})_{,11} + (Du_{3,22})_{,22} + \nu(Du_{3,11})_{,22} + \nu(Du_{3,22})_{,11} \\ + 2[(1 - \nu)Du_{3,12}]_{,12} = q - ku_3. \end{aligned}$$

^{*)} ე. ვინკლერი (1835-1888).

§2.5. რაისნერ-მინდლინის ტიპის მოდელი

მოკლედ შევხვით რაისნერ^{*)}-მინდლინის^{**) მოდელს [11], [29], [31]. კირხჰოფ-ლიავის მოდელისგან განსხვავებით ეს მოდელი საშუალებას იძლევა, ფირფიტის საზღვარზე დასახელებს სამივე}



ნახ. 2.5.1

^{*)} ე. რაისნერი (1913-1996).

^{**)} რ. დ. მინდლინი (1906-1987).

ფიზიკური სიდიდე: Q_n გადამჭრელი ძალა, M_n მღუნავი მომენტი და M_{nn} მგრეხავი მომენტი. რაისნერ-მინდლინის მოდელი ემყარება შემდეგ სამ ძირითად პიპოთეზას:

1. წრფივი ნორმალეების პიპოთეზა: დეფორმაციამდე ფირფიტის შუა სიბრტყისადმი ნორმალური წრფივი ელემენტი არ იცვლის სიგრძეს და წრფივი რჩება (იხ. ნახ. 2.5.1).

მათემატიკურად ეს იმას ნიშნავს, რომ $e_{33} = 0$.

2. შუა სიბრტყის გაუჭიმეადობის პიპოთეზა: შუა სიბრტყე არ მუშაობს გაჭიმვა-კუმშვაზე, იგი მხოლოდ იღუნება, ე.ი. შუა სიბრტყეში არ გვაქვს გაჭიმვის, კუმშვის და ძვრის დეფორმაციები.

მათემატიკურად ეს ასე ჩაიწერება:

$$u_\alpha(x_1, x_2, 0) = 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

3. შუა სიბრტყისადმი პარალელურ ფენებს შორის წნევის არარსებობის პიპოთეზა: აღნიშნული წნევის სიმცირის გამო ფირფიტის ფენებს შორის წნევა უგულებელყოფილია.

მათემატიკურად ეს იმას ნიშნავს, რომ $X_{33} \equiv 0$.

როგორც ვხედავთ, განსხვავება რაისნერ-მინდლინის ტიპის განსახილველი მოდელისა და კირხჰოფ-ლიავის პიპოთეზებს შორის მხოლოდ პირველ პიპოთეზებშია და იმაში გამოიხატება, რომ თუ კირხჰოფ-ლიავის მოდელის შემთხვევაში დეფორმაციამდე შუა სიბრტყისადმი ნორმალური ელემენტი დეფორმაციის შემდეგ შუა ზედაპირისადმი ნორმალური რჩება, რაისნერ-მინდლინის ტიპის მოდელში ეს ზოგადად ასე არაა, ე.ი. ეს უკანასკნელი მოდელი უშვებს განივი ძვრის დეფორმაციას. ამიტომ ზოგჯერ რაისნერ-მინდლინის მოდელს უწოდებენ *ფირფიტას განივი ძვრის დეფორმაციით*.

ახლა ისე მოვიქცეთ, როგორც (2.4.2) ფორმულის გამოყენების დროს, იმის გათვალისწინებით, რომ ახლა

$$e_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(u_{\alpha, 3} + u_{3, \alpha}) = \frac{1}{2}\varphi_\alpha(x_1, x_2) \neq 0, \quad \alpha = 1, 2,$$

სადაც φ_α უცნობი ფუნქციებია, რომლებიც ძერის კუთხეების ტოლია (იხ. §1.8-ის ბოლო ნაწილი). მაშინ მივიღებთ

$$u_\alpha = -x_3 \theta_\alpha(x_1, x_2), \quad \alpha = 1, 2, *) \quad (2.5.1)$$

სადაც

$$\theta_\alpha(x_1, x_2) = u_{3,\alpha} - \varphi_\alpha(x_1, x_2), \quad \alpha = 1, 2,$$

წარმოადგენს $Ox_\alpha x_3$, $\alpha = 1, 2$, სიბრტყეში შემობრუნების კუთხეს (როტაციას), რომელიც ფირფიტის ღუნვითაა გამოწვეული (იხ. ნახ. 2.5.1). რაისნერ-მინდლინის ტიპის მოდელში

$\bar{\theta} := (\theta_1, \theta_2)^T$ როტაცია, ზოგადად, არ არის დამოკიდებული u_3 ჩაღუნვაზე. კირხჰოფ-ლიავის მოდელში კი (შეადარე (2.4.2)-ს) $\varphi_\alpha = 0$ და, ამდენად,

$$\theta_\alpha = u_{3,\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

(1.6.3) კინემატიკური ფორმულები, (2.5.1)-ის ძალით, მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$e_{\alpha\alpha} = -x_3 \theta_{\alpha,\alpha}, \quad e_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(-\theta_\alpha + u_{3,\alpha}), \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.5.2)$$

$$e_{12} = -\frac{x_3}{2}(\theta_{1,2} + \theta_{2,1}), \quad e_{33} = 0.$$

*) თუ ამას დავამატებთ $u_3(x_1, x_2, x_3) = u_3(x_1, x_2)$ (ე.ი., $e_{33} = 0$)

პირობას, მაშინ მივიღებთ განივი ძერის დეფორმაციის (transverse shear deformation) მოდელის დაშვებებს (იხ. [11], გვ. 2). თუ უარს ვიტყვით შუა სიბრტყის გაუჭიმეადობის ჰიპოთეზაზე, მაშინ ღუნვის მოდელის ნაცვლად მივიღებთ რაისნერ-მინდლინის ტიპის მოდელს, რომელიც ღუნვასთან ერთად დაახასიათებს გაჭიმვა-კუმშვასაც:

$$u_\alpha = f_\alpha(x_1, x_2) - x_3 \theta_\alpha(x_1, x_2), \quad \alpha = 1, 2;$$

$$u_3 = f_3(x_1, x_2).$$

(2.5.2) ფორმულებს რაისნერ-მინდლინის კინემატიკური ფორმულები ეწოდება.

(1.15.1) განტოლებებიდან პირველი ორი გავამრავლოთ x_3 -ზე, ვანტეგროთ სამივე განტოლება $-h$ -დან $+h$ -მდე x_3 -ის მიმართ, გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრება და გავითვალისწინოთ (2.4.11)-(2.4.13) აღნიშვნები, მაშინ მივიღებთ

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha + q_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.5.3)$$

$$Q_{\alpha,\alpha} + q_3 = 0, \quad (2.5.4)$$

სადაც

$$q_\alpha := \int_{-h}^{+h} x_3 \Phi_\alpha dx_3 + h[X_{\alpha 3}(x_1, x_2, h) - X_{\alpha 3}(x_1, x_2, -h)], \quad \alpha = 1, 2,$$

$$q_3 := \int_{-h}^{+h} \Phi_3 dx_3 + X_{33}(x_1, x_2, h) - X_{33}(x_1, x_2, -h).$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, აღვილი მისახვედრია, რომ ამავე გზით შეიძლებოდა მიგვეღო (2.4.15) და (2.4.14). მართლაც, თუ $\Phi_\alpha = 0$ და $q_\alpha = 0$, $\alpha = 1, 2$, ისინი გამომდინარეობენ შესაბამისად (2.5.3) და (2.5.4)-დან. პირიქით, ზემოაღნიშნულ პირობებში (2.5.3) და (2.5.4) შეიძლება მივიღოთ ისე როგორც (2.4.15) და (2.4.14) მივიღეთ §2.4-ში.

თუ (2.5.3)-დან განვსაზღვრავთ Q_α -ს და ჩავსვამთ (2.5.4)-ში, მივიღებთ

$$M_{\alpha\beta,\beta\alpha} + q_{\alpha,\alpha} + q_3 = 0.$$

თუ $2h$ სისქე მკვეთრად არ იცვლება,^{*)} უკანასკნელი განტოლება და (2.5.1)-(2.5.4) დამოკიდებულებები, როცა $\Phi_\alpha = 0$ და

^{*)} თუ მკვეთრი ცვლილებაც დასაშვებია, მაშინ (2.5.3), (2.5.4) დამოკიდებულებები უნდა შევცვალოთ იმ დამოკიდებულებებით, რომლებიც მიიღება (2.5.3), (2.5.4) ფორმულების მსგავსად, იმის გათვალისწინებით, რომ

$q_\alpha = 0$, გამოყვანილი §2.4-ში გამოყენებული მეთოდით, გამოღება ცვლადი სისქის ფირფიტებისთვისაც. შევნიშნოთ, რომ ცვლადი სისქის ფირფიტის შემთხვევაში (1.15.1) წონასწორობის განტოლებებიდან ინტეგრების მეთოდით (2.5.3), (2.5.4) არ მიიღება, რაც ცხადია ივეკუას მეთოდით ცვლადი სისქის ფირფიტებისთვის აგებული იერარქიული მოდელებიდან (იხ. ქვემოთ §2.6), რომლებიც სამართლიანია ნებისმიერად ცვლადი სისქის მქონე ფირფიტებისთვის.

რამდენადაც კირხპოფ-ლიავისა და რაისნერ-მინდლინის მესამე ჰიპოთეზები ერთმანეთს ემთხვევა, ამიტომ რაისნერ-მინდლინის ტიპის განსახილველი მოდელის შემთხვევაშიც სამართლიანია (2.4.4). თუ (2.4.4)-ში შევიტანთ (2.5.1)-ს, მივიღებთ

$$-x_3 \theta_{\alpha, \alpha} = e_{\alpha\alpha} = e_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = \frac{1-\nu}{E} \Theta_2,$$

ე.ი.

$$\Theta_2 = -\frac{E}{1-\nu} x_3 \theta_{\alpha, \alpha}$$

და

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E} X_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} x_3 \theta_{r,r} \delta_{\alpha\beta},$$

საიდანაც

$$e_{\alpha\alpha} = \frac{1+\nu}{E} X_{\alpha\alpha} + \frac{\nu}{1-\nu} x_3 \theta_{r,r}.$$

აქედან, რადგანაც $\theta_{r,r} = \theta_{\alpha,\alpha} + \theta_{\beta,\beta}$ ($\alpha \neq \beta$), (2.5.1)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

h დამოკიდებულია x_1, x_2 -ზე, ამასთან შეიძლება არასიმეტრიული შემთხვევის $x_3 \in \left[h^{(-)}(x_1, x_2), h^{(+)}(x_1, x_2) \right]$ განხილვაც.

$$\begin{aligned}
-X_{\alpha\alpha} &= \frac{E}{1+\nu} x_3 \theta_{\alpha,\alpha} + \frac{E\nu}{1-\nu^2} x_3 \theta_{\gamma,\gamma} \\
&= \frac{E}{1-\nu^2} x_3 \left[(1-\nu) \theta_{\alpha,\alpha} + \nu \theta_{\alpha,\alpha} + \nu \theta_{\beta,\beta} \right],
\end{aligned}$$

ე.ი.

$$X_{\alpha\alpha} = -\frac{E}{1-\nu^2} x_3 \left(\theta_{\alpha,\alpha} + \nu \theta_{\beta,\beta} \right), \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (2.5.5)$$

(2.4.4) და (2.5.2)-დან ცხადია, რომ

$$X_{12} = -\frac{E}{2(1+\nu)} x_3 (\theta_{1,2} + \theta_{2,1}). \quad (2.5.6)$$

ჰუკის (1.12.26) კანონიდან და (2.5.2)-დან კი გამოვღი-
ნარეობს

$$X_{\alpha 3} = \frac{E}{2(1+\nu)} (-\theta_{\alpha} + u_{3,\alpha}), \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.5.7)$$

თუ (2.4.11)-(2.4.13)-ის უკანასკნელის წინა ტოლობებში შე-
საბამისად ჩავსვამთ (2.5.5), (2.5.7), (2.5.6)-ს, მივიღებთ

$$M_{\alpha} = M_{\alpha\alpha} = -D \left(\theta_{\alpha,\alpha} + \nu \theta_{\beta,\beta} \right), \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.5.8)$$

$$Q_{\alpha} = \frac{Eh}{1+\nu} (-\theta_{\alpha} + u_{3,\alpha}), \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.5.9)$$

$$H = M_{12} = M_{21} = -\frac{1}{2} D (1-\nu) (\theta_{1,2} + \theta_{2,1}). \quad (2.5.10)$$

ზოგჯერ (2.5.9)-ის მარჯვენა მხარე გამრავლებულია ე.წ.
ძერის კორექტურის $\tilde{k}$ მაშრავლზე. $\tilde{k}$ -ს ძერის კოეფიციენტსაც

უწოდებენ.*) ამ შემთხვევაში ძირითადად თვლიან, რომ $\tilde{k} = \frac{5}{6}$

$$\text{ან } \tilde{k} = \frac{\pi^2}{12}.$$

ამოვხსნათ (2.5.9) θ_α -ს მიმართ

$$\theta_\alpha = u_{3,\alpha} - \frac{1+\nu}{Eh} Q_\alpha.$$

მიღებული სიდიდე ჩავსვათ (2.5.8)-ში და (2.5.10)-ში, მაშინ ω არეში

$$M_\alpha = -D(u_{3,\alpha\alpha} + \nu u_{3,\beta\beta}) + D \left[\left(\frac{1+\nu}{Eh} Q_\alpha \right)_{,\alpha} + \nu \left(\frac{1+\nu}{Eh} Q_\beta \right)_{,\beta} \right], \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.5.11)$$

$$H = -D(1-\nu)u_{3,12} + \frac{1}{2} D(1-\nu) \left[\left(\frac{1+\nu}{Eh} Q_1 \right)_{,2} + \left(\frac{1+\nu}{Eh} Q_2 \right)_{,1} \right]. \quad (2.5.12)$$

ვიგულისხმობთ, რომ D , E , ν და h მუდმივებია. (2.5.3)-ში ჩავსვათ (2.5.11), (2.5.12) და მიღებული გამოსახულებებიდან,

(2.5.4)-ისა და $\frac{1}{1-\nu} - 1 = \frac{\nu}{1-\nu}$ -ს გათვალისწინებით, განვსაზღვროთ Q_1 ω არეში:

$$Q_1 = - \left[D(u_{3,11} + \nu u_{3,22}) \right]_{,1} + \frac{2h^2}{3(1-\nu)} (Q_{1,1} + \nu Q_{2,2})_{,1}$$

*) A. Rössle. Asymptotische Entwicklungen für dünne Platen im Rahmen der linearen Elastostatik, Mathematisches Institut A. Universität Stuttgart, 1999 (დისერტაცია, გვ. 31)

$$\begin{aligned}
& -D(1-\nu)u_{3,122} + \frac{h^2}{3}(\mathcal{Q}_{1,2} + \mathcal{Q}_{2,1})_{,2} + q_1 = -D(\Delta u_3)_{,1} + \frac{h^2}{3}\Delta \mathcal{Q}_1 \\
& + \frac{h^2}{3(1-\nu)}\nu \mathcal{Q}_{1,11} + \frac{h^2}{3(1-\nu)}\mathcal{Q}_{1,11} + \frac{2h^2}{3(1-\nu)}\nu \mathcal{Q}_{2,21} + \frac{h^2}{3}\mathcal{Q}_{2,12} + q_1 \\
& = -D(\Delta u_3)_{,1} + \frac{h^2}{3}\Delta \mathcal{Q}_1 + \frac{h^2(1+\nu)}{3(1-\nu)}\mathcal{Q}_{1,11} + \frac{h^2(1+\nu)}{3(1-\nu)}\mathcal{Q}_{2,21} + q_1 \\
& = -D(\Delta u_3)_{,1} + \frac{h^2}{3}\Delta \mathcal{Q}_1 - \frac{h^2(1+\nu)}{3(1-\nu)}q_{3,1} + q_1. \quad (2.5.13)
\end{aligned}$$

ანალოგიურად,

$$\mathcal{Q}_2 = -D(\Delta u_3)_{,2} + \frac{h^2}{3}\Delta \mathcal{Q}_2 - \frac{h^2(1+\nu)}{3(1-\nu)}q_{3,2} + q_2. \quad (2.5.14)$$

(2.5.13)-ის და (2.5.14)-ის (2.5.4)-ში ჩასმის შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$q_3 - D\Delta\Delta u_3 - \frac{h^2}{3}\Delta q_3 - \frac{h^2(1+\nu)}{3(1-\nu)}\Delta q_3 + q_{\alpha,\alpha} = 0.$$

საიდანაც, (1.12.18)-ის თანახმად,

$$\begin{aligned}
D\Delta\Delta u_3 &= q_3 - \frac{2h^2}{3(1-\nu)}\Delta q_3 + q_{\alpha,\alpha} \\
&= q_3 - \frac{4h^2(\lambda+\mu)}{3(\lambda+2\mu)}\Delta q_3 + q_{\alpha,\alpha}.^{*)} \quad (2.5.15)
\end{aligned}$$

აქედან, თუ დავეუშვებთ, რომ ფირფიტაზე მოქმედებს მხოლოდ ნორმალური, ამასთან პარმონიული დატვირთვა, ე.ი. $q_\alpha = 0$,

^{*)} ეს განტოლება ემთხვევა რაისნერის განტოლებას, როცა $\nu = \frac{1}{3}$ და

$$q_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

$\alpha = 1, 2$, და $\Delta q_3 = 0$, მივიღებთ ს. ჟერმენ-ლაგრანჟის (2.4.17) განტოლებას.

(2.5.3), (2.5.4), (2.5.8)-(2.5.10) დამოკიდებულებები შეიცავენ შემდეგ რვა უცნობ სიდიდეს: u_3 , θ_α , Q_α , $\alpha = 1, 2$; $M_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2$. ჩავსვათ (2.5.8)-(2.5.10) გამოსახულებები (2.5.3), (2.5.4)-ში:

$$\begin{aligned} & [D(\theta_{1,1} + \nu\theta_{2,2})]_{,1} + \frac{1}{2}[D(1-\nu)(\theta_{1,2} + \theta_{2,1})]_{,2} \\ & - \frac{Eh}{1+\nu}(\theta_1 - u_{3,1}) - q_1 = 0, \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

$$\begin{aligned} & [D(\theta_{2,2} + \nu\theta_{1,1})]_{,2} + \frac{1}{2}[D(1-\nu)(\theta_{1,2} + \theta_{2,1})]_{,1} \\ & - \frac{Eh}{1+\nu}(\theta_2 - u_{3,2}) - q_2 = 0, \\ & \left[\frac{Eh}{1+\nu}(\theta_\alpha - u_{3,\alpha}) \right]_{,\alpha} - q_3 = 0. \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

(2.5.16), (2.5.17) წარმოადგენენ ω არეში მეექვსე რიგის^{*)} ელიფსურ სიტემას θ_1 , θ_2 და u_3 უცნობების მიმართ.

შევნიშნოთ, რომ (2.5.3), (2.5.4), (2.5.8)-(2.5.10) და (2.5.16), (2.5.17) დამოკიდებულებები გამოყვანილია, ზოგადად, ცვლადი, ე.ი. (x_1, x_2) -ზე დამოკიდებული D, E, ν და h -სთვის.

(1.12.9) ჰუკის განზოგადებული კანონის ორივე მხარე, როცა $i = \alpha$, $j = \beta$, გაეამრავლოთ x_3 -ზე, მიღებული ტოლობები და (1.12.9), როცა $i = \alpha$, $j = 3$, ვაინტეგრირებთ $-h$ -დან $+h$ -მდე x_3 -ის მიმართ და გავითვალისწინოთ (2.5.2), მივიღებთ შემდეგ კონსტიტუციურ დამოკიდებულებებს:

^{*)} ე.ი. მეორე რიგის სამი განტოლებისაგან შემდგარ ელიფსურ სისტემას.

$$M_{\alpha\beta} = -\frac{2}{3}h^3[\lambda\theta_{\gamma,r}\delta_{\alpha\beta} + \mu(\theta_{\beta,\alpha} + \theta_{\alpha,\beta})], \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (2.5.18)$$

$$Q_\alpha = 2\mu h(u_{3,\alpha} - \theta_\alpha), \quad \alpha = 1, 2.$$

(2.5.18)-ის (2.5.3)-სა და (2.5.4)-ში ჩასმის შემდეგ მივიღებთ

$$\frac{2}{3}\{h^3[\lambda\theta_{\gamma,r}\delta_{\alpha\beta} + \mu(\theta_{\beta,\alpha} + \theta_{\alpha,\beta})]\}_{,\beta} + 2\mu h(u_{3,\alpha} - \theta_\alpha) - q_\alpha = 0,$$

$$\alpha = 1, 2,$$

$$[2\mu h(u_{3,\alpha} - \theta_\alpha)]_{,\alpha} + q_3 = 0.$$

(1.12.18)-ის ძალით, ეს სისტემა ემთხვევა (2.5.16), (2.5.17) სისტემას. თუ λ , μ და h მუდმივებია, მაშინ ეს სისტემა შეიძლება შემდეგი სახით ჩაიწეროს (იხ. [11], გვ. 3):

$$(Av)(x_1, x_2) = q(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \omega, \quad (2.5.19)$$

სადაც ω ფირფიტის პროექციაა $x_3 = 0$ სიბრტყეზე, A მატრიცული დიფერენციალური ოპერატორია შემდეგი ელემენტებით

$$A_{\alpha\alpha} := -\frac{2}{3}h^3\mu\Delta - \frac{2}{3}h^3(\lambda + \mu)\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} - 2\mu h, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$A_{33} := -2\mu h\Delta, \quad \Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

$$A_{12} = A_{21} := -\frac{2}{3}h^3(\lambda + \mu)\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$A_{\alpha 3} = -A_{3\alpha} := 2\mu h\partial_\alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$v := (\theta_1, \theta_2, u_3)^T, \quad q := (q_1, q_2, q_3)^T.$$

კირხჰოფ-ლიაის მოდელისაგან განსხვავებით უკვე არ არის საჭირო განზოგადებული გადამჭრელი ძალის ხელოვნური ცნე-

ბის შემოღება და საზღვარზე შეიძლება სამი ბუნებრივი პირობის დასმა, რამდენადაც (2.5.19) ელიფსური სისტემა მე-ნ რიგისაა.

1. *ხისტად ჩამაგრებული ნაპირი* ანუ *ღირიხლეს ამოცანა*. ამ ნაპირს არც გადაადგილება და არც მობრუნება არ შეუძლია:

$$u_3 = 0, \quad \theta_n = 0, \quad \theta_l = 0. \quad (2.5.20)$$

სამგანზომილებიან მოდელში (2.5.20) შეესაბამება ერთგვაროვან (1.15.6) პირობებს.

2. *რბილად ჩამაგრებული ნაპირი*. ხისტად ჩამაგრებული ნაპირისაგან განსხვავებით ნაპირს შეუძლია ტანგენციალური (მხები) მიმართულებით (ე.ი. ნორმალის გარშემო) მობრუნება. ამდენად, მგრეხავი მომენტი უნდა იღებდეს ნულოვან მნიშვნელობებს:

$$u_3 = 0, \quad \theta_n = 0, \quad M_m = 0. \quad (2.5.21)$$

სამგანზომილებიან მოდელში (2.5.21) პირობები შეესაბამება

$$u_3 = 0, \quad u_n = 0, \quad X_m = 0,$$

სასაზღვრო პირობებს.

3. *ხისტად დაყრდნობილი ნაპირი*. ამ ნაპირს შეუძლია ნორმალური მიმართულებით (ე.ი. მხების გარშემო) მობრუნება. ამდენად, მღუნავი მომენტი უნდა იღებდეს ნულოვან მნიშვნელობებს:

$$u_3 = 0, \quad M_n = 0, \quad \theta_l = 0. \quad (2.5.22)$$

სამგანზომილებიან მოდელში (2.5.22) პირობები შეესაბამება

$$u_3 = 0, \quad X_m = 0, \quad u_l = 0,$$

სასაზღვრო პირობებს.

4. *რბილად დაყრდნობილი ნაპირი*. ამ ნაპირს შეუძლია ნებისმიერად მობრუნება, მაგრამ არ შეუძლია გადაადგილება (რადგან ამ მოდელში $u_\alpha = 0$, $\alpha = 1, 2$, ყოველთვის):

$$u_3 = 0, \quad M_n = 0, \quad M_m = 0. \quad (2.5.23)$$

სამგანზომილებიან მოდელში (2.5.23) პირობები შეესაბამება

$$u_3 = 0, \quad X_m = 0, \quad X_m = 0,$$

სასაზღვრო პირობებს.

5. *თავისუფალი ნაპირი* ანუ *ნოიშმანის ამოცანა*:

$$M_n = 0, \quad M_{nn} = 0, \quad Q_n = 0. \quad (2.5.24)$$

სამგანზომილებიან მოდელში (2.5.24) პირობები შეესაბამება

$$X_{nn} = 0, \quad X_{nn} = 0, \quad X_{nn} = 0,$$

სასაზღვრო პირობებს.

ისე, როგორც ეს ვაჩვენეთ ქვეპარაგრაფ 2.4.5-ში, ცხადია მე-4 და მე-5 სასაზღვრო პირობების შესაბამისობა მითითებულ სამგანზომილებიან სასაზღვრო პირობებთან.

იქიდან, რომ $u_1 = 0$ და $u_3 = 0$ ფირფიტის გვერდით ცილინდრულ ზედაპირზე, გამომდინარეობს, რომ ცილინდრული ზედაპირის მხებ სიბრტყეში შემობრუნებას ადგილი არ ექნება, რადგან ცილინდრულ ზედაპირზე არც ვერტიკალურად (x_3 -ის პარალელურად) და არც მხები მიმართულებით ცილინდრული ზედაპირის წერტილები არ გადაადგილდება, ე.ი. $\theta_1 = 0$. აქედან გამომდინარეობს მე-3 სასაზღვრო პირობების შესაბამისობა მითითებულ სამგანზომილებიან სასაზღვრო პირობებთან. ანალოგიურად, მე-2 სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში $u_n = 0$ და $u_3 = 0$ პირობების ფირფიტის გვერდით ცილინდრულ ზედაპირზე შესრულებიდან გამომდინარეობს, რომ $\bar{n}$ ნორმალზე და x_3 ღერძზე გამავალი სიბრტყით ცილინდრული ზედაპირის კვეთაზე მდებარე წერტილები არ გადაადგილდებიან აღნიშნულ სიბრტყეში. ამიტომ ამ სიბრტყეში საზღვარი ვერ მობრუნდება, ე.ი. $\theta_n = 0$.

ერთგვაროვანი პირველი სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში (1.15.6) სასაზღვრო პირობებიდან გამომდინარეობს (იხ. ქვეპარაგრაფი 2.4.5), რომ $u_{nn} = 0$ და $u_1 = 0$ სრულდება ფირფიტის ცილინდრულ საზღვარზე. ეს კი, იმის გათვალისწინებით, რომ $u_3 = 0$ ცილინდრულ საზღვარზე, გვაძლევს იმის საშუალებას, რომ მე-2 და მე-3 სასაზღვრო პირობების შემთხვევის მსგავსად დავასკვნათ, რომ $\theta_n = 0$ და $\theta_1 = 0$.

ცხადია, შეიძლება განხილულ იქნას არაერთგვაროვანი (2.5.20)-(2.5.24) სასაზღვრო პირობებიც (ე.ი. სასაზღვრო პირობებში შემავალი სიდიდეები წინასწარ დასახელებულ, ზოგადად, არაიგივურად ნულოვანი ფუნქციების მნიშვნელობებს ემთხვევიან).

დინამიკის განტოლებების მისაღებად, სტატიკის განტოლებებში q_i -ის, $i = 1, 2, 3$, უნდა დაემატოს ინერციის ძალის შესაბამისი კომპონენტები, ხოლო დინამიკის ამოცანების განხილვისას სასაზღვრო პირობებს საწყისი პირობებიც უნდა დაემატოს.

შენიშვნა 2.5.1. რაისნერ-მინდლინის ტიპის მოდელისათვის განვიხილოთ ამოცანა ხისტად ჩამაგრებული საზღვრით:

$$u_3 = 0, \theta_n = 0, \theta_t = 0. \quad (2.5.25)$$

აქედან, საზღვარზე

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = 0,$$

$$\theta_n = \theta_\alpha n_\alpha = u_{3,\alpha} n_\alpha - \varphi_\alpha n_\alpha = \frac{\partial u_3}{\partial n} - \varphi_\alpha n_\alpha = 0,$$

$$\theta_t = \theta_\alpha t_\alpha = u_{3,\alpha} t_\alpha - \varphi_\alpha t_\alpha = \frac{\partial u_3}{\partial t} - \varphi_\alpha t_\alpha = 0.$$

ამდენად, $\varphi_\alpha t_\alpha = 0$, t_α -ს ($\alpha = 1, 2$) წრფივად დამოუკიდებლობის გამო, $\varphi_\alpha = 0$, $\alpha = 1, 2$, და

$$\frac{\partial u_3}{\partial n} = 0. \quad (2.5.26)$$

თუ $q_\alpha \equiv 0$, $\alpha = 1, 2$, და $q_3 - \frac{2h^2}{3(1-\nu)} \Delta q_3 = 0$, მაშინ (2.5.15)

ფორმულიდან მივიღებთ

$$D \Delta \Delta u_3 = 0.$$

ამ განტოლებას (2.5.25)-ის პირველ და (2.5.26) პირობებში მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი აქვს, ამიტომ

$$u_3(x_1, x_2) \equiv 0.$$

ამრიგად, ჩაღუნვა არ გვაქვს, მიუხედავად იმისა, რომ $q_3 \neq 0$. მაგრამ წინააღმდეგობა არ გვაქვს, რადგან ამ შემთხვევაში, (2.5.18)-ის გამო,

$$\theta_\alpha = -\frac{1+\nu}{Eh} Q_\alpha \neq 0, \quad \alpha = 1, 2,$$

რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში (2.5.4)-დან მივიღებთ

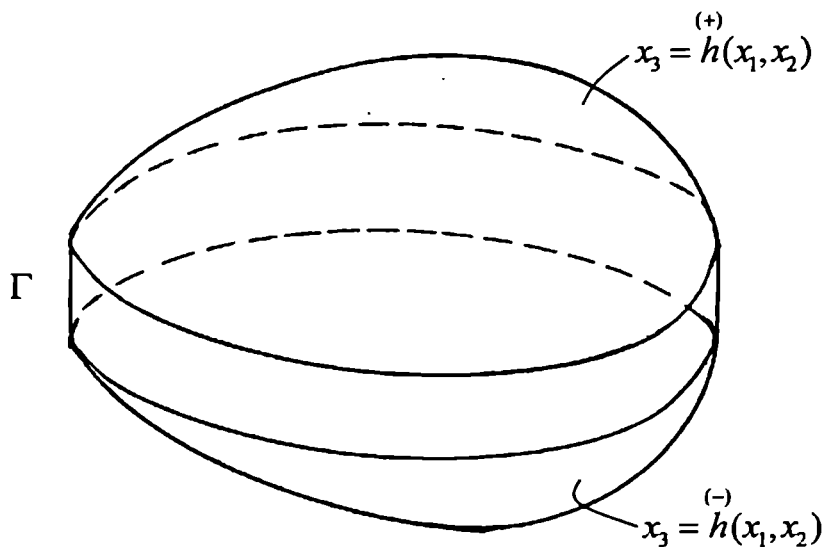
$$q_3 = -Q_{\alpha, \alpha} \equiv 0.$$

§2.6. პრიზმული გარსების იკეკუას იერარქიული მოდელები

კირხჰოფ-ლიავის ჰიპოთეზებზე დაფუძნებულ ფირფიტების თეორიას, როგორც ეს §2.4-ში ვნახეთ, აქვს ის შინაგანი წინააღმდეგობა, რომ ძირითად განტოლებათა სისტემა არ არის თავსებადი ფიზიკურ სასაზღვრო პირობებთან. ამ წინააღმდეგობის თავიდან აცილების ერთი ვარიანტი წინა პარაგრაფში განვიხილეთ. ახლა გავეცნობით კიდევ ერთ ვარიანტს, რომელიც შემოგვთავაზა იკეკუამ [34], [38-40]. ამასთან განვიხილავთ პრიზმულ გარსებს, რომლებიც ცვლადი სისქის ფირფიტებს, როგორც კერძო შემთხვევას, მოიცავენ.

სხეულს, რომელიც ზემოდან და ქვემოდან შემოსაზღვრულია $z = h^{(+)}(x_1, x_2)$ და $z = h^{(-)}(x_1, x_2)$ ზედაპირებით, ხოლო გვერდიდან — Γ ცილინდრული ზედაპირით (იხ. ნახ. 2.6.1), რომლის მსახველი ვერტიკალური Ox_3 ღერძის პარალელურია, ეწოდება *პრიზმული გარსი*. სიმეტრიულ შემთხვევაში, ე.ი. როცა

$\overset{(-)}{h}(x_1, x_2) = -\overset{(+)}{h}(x_1, x_2)$ პრიზმული გარსი წარმოადგენს ცვლადი სისტემის ფირფიტას. $2h(x_1, x_2) = \overset{(+)}{h}(x_1, x_2) - \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) \geq 0$ სიდიდეს ეწოდება პრიზმული გარსის სისქე.



ნახ. 2.6.1

პრიზმული გარსის გეგმილი Ox_1x_2 სიბრტყეზე აღვნიშნოთ ω -თი, მის საზღვარს გარსის საზღვარი ეწოდება.

ჯერ კიდევ კოშიმ^{*)} და პუასონმა^{**)} გამოიყენეს ფირფიტების შესწავლის დროს გადაადგილების, დეფორმაციების და ძაბვების ხარისხოვან მწკრივად გაშლის მეთოდი. ეს მიდგომა აქვთ სხვა ავტორებსაც. ერთ-ერთი ვარიანტი, რომელიც ლეჟანდრის პოლინომების მიმართ მწკრივად გაშლას ეყრდნობა და რომელზეც ჩვენ შევჩერდებით, ი. ვეკუას ეკუთვნის.

ცნობილია, რომ ნებისმიერი $f(x) \in C^2([-1, +1])$ ფუნქცია შეიძლება გაიშალოს მწკრივად ლეჟანდრის პოლინომების მიმართ (იხ. დამატება 2, § 7):

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(r + \frac{1}{2}\right) f_r P_r(x), \text{***}$$

სადაც

$$P_r(x) := \frac{1}{2^r r!} \frac{d^r (x^2 - 1)^r}{dx^r}$$

ლეჟანდრის პოლინომია, ხოლო

$$f_r := \int_{-1}^{+1} f(x) P_r(x) dx$$

^{*)} Cauchy O.L., Sur L'equilibre et le mouvement d'une plaque solide, Exercices de mathematiques, 3, 1828, 328-355.

^{**)} Poisson S.D., Memoire sur l'equilibre et du mouvement des corps elastique, Memoires de l'Academie des sciences de Paris, 8, 1829, 357-570.

^{***)} $\left(r + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} P_r(x)$ ორთონორმირებული სისტემა (იხ. დამატება 2, §5),

ხოლო $\left(r + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} f_r$ ფურიე-ლეჟანდრის კოეფიციენტებია (იხ. დამატება 1,

განსაზღვრა 23).

და მას ეწოდება f -ის r რიგის მომენტი ლეჟანდრის პოლინომების მიმართ.

როცა $[-1, +1]$ -ის ნაცვლად გვაქვს $\left[\begin{smallmatrix} (-) & (+) \\ h & h \end{smallmatrix} \right]$ და $f(x_1, x_2, x_3)$ -ს ფიქსირებული (x_1, x_2) -სთვის x_3 -ის მიმართ აქვს მეორე რიგამდე უწყვეტი წარმოებულები, ე.ი. $f \in C_{x_3}^2 \left(\left[\begin{smallmatrix} (-) & (+) \\ h & h \end{smallmatrix} \right] \right)$, ცხადია

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{r=0}^{\infty} a \left(r + \frac{1}{2} \right) f_r(x_1, x_2) P_r(ax_3 - b),^{*)}$$

სადაც მწკრივი თანაბრად კრებადია $\left[\begin{smallmatrix} (-) & (+) \\ h & h \end{smallmatrix} \right]^{**})$ სეგმენტზე და

$^{*)} \left(r + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} P_r(ax_3 - b)$ ორთონორმირებული სისტემაა (იხ. აგრეთვე

(3.2.3)), ხოლო $\left(r + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} f_r(x_1, x_2)$ ფურიე-ლეჟანდრის კოეფიციენტებია.

$$^{**}) t = ax_3 - b = \frac{2x_3 - \left(\begin{smallmatrix} (+) & (-) \\ h & h \end{smallmatrix} \right)}{2h}. \text{ თუ } x_3 = \begin{smallmatrix} (-) \\ h \end{smallmatrix}, \text{ მაშინ}$$

$$t = \frac{2 \begin{smallmatrix} (-) & (+) & (-) \\ h & h & h \end{smallmatrix} - \left(\begin{smallmatrix} (+) & (-) \\ h & h \end{smallmatrix} \right)}{2h} = \frac{- \left(\begin{smallmatrix} (+) & (-) \\ h & h \end{smallmatrix} \right)}{2h} = -1; \text{ თუ } x_3 = \begin{smallmatrix} (+) \\ h \end{smallmatrix}, \text{ მაშინ}$$

$$t = \frac{2 \begin{smallmatrix} (+) & (-) & (+) \\ h & h & h \end{smallmatrix} - \left(\begin{smallmatrix} (+) & (-) \\ h & h \end{smallmatrix} \right)}{2h} = \frac{h - h}{2h} = 1.$$

$$a := \frac{1}{h}, \quad b := \frac{h^{(-)} + h^{(+)}}{2h}, \quad (2.6.1)$$

$$f_r(x_1, x_2) := \int_{h^{(-)}}^{h^{(+)}} f(x_1, x_2, x_3) P_r(ax_3 - b) dx_3;$$

$$\int_{h^{(-)}}^{h^{(+)}} P_k(ax_3 - b) P_l(ax_3 - b) dx_3 = \begin{cases} 0, & k = l; \\ \frac{2}{2k+1} \frac{1}{a}, & k \neq l. \end{cases}$$

თუ ვექტორი $(u_i, X_{ij}, e_{ij}) \in C_x^2 \left(\left[h^{(-)}, h^{(+)} \right] \right)$, მაშინ ის შეიძლება $\left[h^{(-)}, h^{(+)} \right]$ სეგმენტზე თანაბრად კრებად შემდეგ მწკრივად გავშალოთ

$$(u_i, X_{ij}, e_{ij}) = \sum_{r=0}^{\infty} a \left(r + \frac{1}{2} \right) (u_{ir}, X_{ijr}, e_{ijr}) P_r(ax_3 - b). \quad (2.6.2)$$

ვაიერშტრასის^{*)} თეორემის თანახმად x_3 -ის ნებისმიერ უწყვეტ ფუნქციას შეიძლება ნებისმიერი სიზუსტით მივუახლოვდეთ x_3 -ის მიმართ პოლინომებით. ამიტომ N -ის შერჩევით (u_i, X_{ij}, e_{ij}) -ს შეიძლება ნებისმიერი სიზუსტით მივუახლოვდეთ x_3 -ის მიმართ ლეჟანდრის პოლინომების შემდეგი ჯამით:

$$(u_i, X_{ij}, e_{ij}) \cong \sum_{r=0}^N a \left(r + \frac{1}{2} \right) (u_{ir}, X_{ijr}, e_{ijr}) P_r(ax_3 - b).$$

^{*)} კ.ვ. ვაიერშტრასი (1815-1897).

თუ (1.12.9) დამოკიდებულებების ორივე მხარეს გავამრავ-
 ლებთ $P_r(ax_3 - b)$ -ზე და ვაინტეგრებთ $\overset{(-)}{h}$ -დან $\overset{(+)}{h}$ -მდე x_3 -ის
 მიმართ, მივიღებთ, რომ

$$X_{ijr}(x_1, x_2) = \lambda \theta_r(x_1, x_2) \delta_{ij} + 2\mu e_{ijr}(x_1, x_2), \quad r = 0, 1, \dots, \quad (2.6.3)$$

რაც წარმოადგენს ჰუკის კანონს, გადაწერილს მომენტებისათვის.

ანალოგიურად შეიძლება მივიღოთ წონასწორობის შემდეგი
 განტოლებები მომენტებისათვის (იხ. [38])^{*}

$$X_{qjr, \alpha} + \sum_{s=0}^r a'_{is} X_{ijs} + X'_j = \rho \frac{\partial^2 u_{jr}}{\partial t^2}, \quad (2.6.4)$$

$$r = 0, 1, \dots, j = 1, 2, 3,$$

სადაც

$$a'_{as} := (2s+1) \frac{\overset{(+)}{h}_{, \alpha} - (-1)^{r+s} \overset{(-)}{h}_{, \alpha}}{2h}, \quad s \neq r;$$

^{*}) აქ ვიყენებთ, ლეჟანდრის პოლინომების გარკვეულ რეკურენტულ ფორმულებს
 (იხ. დამატება 2, პარაგრაფი 2, შენიშვნა) და შემდეგ ფორმულებს:

$$\begin{aligned} & \overset{(+)}{h}(x_1, x_2) \int f_{,3}(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 \\ & \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) \\ & = f(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}(x_1, x_2), t) - f(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}(x_1, x_2), t) =: f^{(+)} - f^{(-)}. \\ & \overset{(+)}{h}(x_1, x_2) \int f_{, \alpha}(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 = f_{, \alpha}(x_1, x_2, t) - f^{(+)} \cdot \overset{(+)}{h}_{, \alpha} + f^{(-)} \cdot \overset{(-)}{h}_{, \alpha}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{\sigma}^r &:= r \frac{h_{,\sigma}^{(+)} - h_{,\sigma}^{(-)}}{2h}, & a_{3s}^r &:= -(2s+1) \frac{1 - (-1)^{r+s}}{2h}, \\ X_j^r &= X_{3j}^{(+)} - X_{\sigma}^{(+)} h_{,\sigma}^{(+)} + (-1)^r \left[-X_{3j}^{(-)} + X_{\sigma}^{(-)} h_{,\sigma}^{(-)} \right] + \Phi_{jr} \end{aligned}$$

აქ თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ

$$n_3^{(\pm)} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(\pm)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(\pm)}\right)^2}}, \quad n_{\sigma}^{(\pm)} = \frac{\mp h_{,\sigma}^{(\pm)}}{\sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(\pm)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(\pm)}\right)^2}},$$

მაშინ

$$\begin{aligned} X_j^r &= Q_{n_j}^{(+)} \sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(+)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(+)}\right)^2} \\ &+ (-1)^r Q_{n_j}^{(-)} \sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(-)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(-)}\right)^2} + \Phi_{jr}, \end{aligned}$$

$Q_{n_j}^{(+)}$, $Q_{n_j}^{(-)}$ შესაბამისად ზედა და ქვედა პირით ზედაპირებზე

მოქმედი ზედაპირული ძალებია. $n^{(+)}$ და $n^{(-)}$ შესაბამისად ზედა და ქვედა პირითი ზედაპირების გარე (გარსის მიმართ) ნორმალურებია. Φ_{jr} მოცულობითი ძალის კომპონენტების r რიგის მომენტებია.

დეფორმაციის ტენზორის r რიგის მომენტები ასე ჩაიწერება:

$$e_{ijr} = \frac{1}{2} \sum_{s=r}^{\infty} b_{is}^r u_{js} + \frac{1}{2} \sum_{s=r}^{\infty} b_{js}^r u_{is} + E_{ij}^r, \quad (2.6.5)$$

$$r = 0, 1, 2, \dots, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

სადაც

$$\overset{r}{E}_{ij} = \frac{1}{2} (u_{ir,j} + u_{jr,i}), \quad \overset{r}{b}_{a\bar{r}} = -(r+1) \frac{\overset{(+)}{h}_{,a} - \overset{(-)}{h}_{,a}}{2h},$$

$$\overset{r}{b}_{3\bar{r}} = 0, \quad \overset{r}{b}_{js} = \begin{cases} 0, & s < r, \\ r & s = r, \\ -a_{js}, & s > r. \end{cases}$$

(2.6.5) ჩავსვათ (2.6.3)-ში, ხოლო მიღებული – (2.6.4)-ში. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\mu \Delta u_{jr} + (\lambda + \mu) \frac{\partial \overset{r}{E}}{\partial x_j} + \overset{r}{M}_j (u_{ir}) + \overset{r}{X}_j = \rho \frac{\partial^2 u_{jr}}{\partial t^2}, \quad \text{სადაც}$$

$$r = 0, 1, \dots, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.6.6)$$

$$\overset{r}{E} = \overset{r}{E}_{ii}.$$

$\overset{r}{M}_j$ წრფივი ოპერატორები დამოკიდებულია ფირფიტის სისქეზე და შეიცავენ u_{jr} -ის მხოლოდ პირველი რიგის წარმოებულებს.

(2.6.6) ფაქტობრივად წარმოადგენს ლამეს განტოლებებს, ჩაწერილს მომენტებისათვის.

ვიგულისხმობთ, რომ

$$u_{jr} = 0, \quad \text{როცა } r > N \quad (2.6.7)$$

და (2.6.6) სისტემაში ყოველი j -სთვის ($j = 1, 2, 3$) დავტოვოთ მხოლოდ პირველი $N+1$ განტოლება. მიღებულ განტოლებათა სისტემაში u_{jr} , ზოგადად, უკვე არ წარმოადგენს u_j -ს r -ურ მომენტს, განსაზღვრულს (2.6.1) ტოლობით. მიღებული სისტემა შეესაბამება N -ურ მიახლოებას.

თუ გარსის გვერდით ზედაპირზე მოცემულია ან $X_{ni} = f_i$, ძაბვები ან $u_{ni} = f_i$, გადაადგილებები, ცხადია, მათი

$P_r(ax_3 - b)$ -ზე გამრავლებითა და $h^{(-)}$ -დან $h^{(+)}$ -მდე ინტეგრებით ადვილად ვიპოვით შესაბამის მომენტებს:

$$X_{mir} = f_{ir}, \quad i = 1, 2, 3, \quad r = \overline{0, N}, \quad (2.6.8)$$

$$u_{ir} = f_{ir}, \quad i = 1, 2, 3, \quad r = \overline{0, N}, \quad (2.6.9)$$

სადაც n გვერდითი ზედაპირის გარე ნორმალია, ხოლო

$$X_{mr} = X_{ijr} n_j = \left\{ \lambda \delta_{ij} \left(\sum_{s=r}^N b_{ks}^r u_{ks} + u_{kr,k} \right) + \mu \left[\sum_{s=r}^N \left(b_{is}^r u_{js} + b_{js}^r u_{is} \right) + u_{ir,j} + u_{jr,j} \right] \right\} n_j.$$

დინამიკის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები შემდეგნაირად ის-
მება: ვიპოვოთ $u_{jr} \in C^2(\omega)$, $r = 0, \dots, N$, $j = 1, 2, 3$, რომ-
ლებიც აკმაყოფილებენ (2.6.6) განტოლებას ω -ში, დროის ნე-
ბისმიერ $t \geq t_0$ მომენტში (2.6.8) ან (2.6.9) პირობებს გარსის
საზღვარზე და

$$u_{rj} \Big|_{t=t_0} = \varphi_{rj}(x_1, x_2), \quad \frac{\partial u_{rj}}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = \psi_{rj}(x_1, x_2),$$

$$(x_1, x_2) \in \omega, \quad r = \overline{0, N}, \quad j = 1, 2, 3,$$

საწყის პირობებს.

ამ გზით მიღებული სისტემის ღირსშესანიშნავი თვისება იმა-
ში მდგომარეობს, რომ იგი განტოლებათა ორ ჯგუფად იყოფა.
ერთი ჯგუფის მთავარი წევრები ემთხვევა ბრტყელი დრეკადობის
თეორიის ძირითად განტოლებათა სისტემის ოპერატორს, ხოლო
მეორე ჯგუფის მთავარი წევრები — ლაპლასის ოპერატორს. ეს
იმის საშუალებას იძლევა, რომ პრიზმული გარსების გათვლი-
სათვის გამოვიყენოთ დრეკადობის ბრტყელი თეორიისათვის და
ლაპლასის ოპერატორისათვის არსებული მათემატიკური აპა-

რატი. ცხადია, ამონახსნის სიზუსტე იზრდება N -ის ზრდასთან ერთად. თუმცა ამასთან ერთად იზრდება სისტემაში შემავალ განტოლებათა რიცხვიც, რაც ართულებს მის ამოხსნას, მაგრამ პრაქტიკული მოსაზრებიდან გამომდინარე შეიძლება დაკმაყოფილდეთ ნულოვანი ($N=0$) და პირველი ($N=1$) მიახლოებით.

დამტკიცებულია ძირითადი ამოცანების ამონახსნის ერთადერთობა და გარკვეულ პირობებში არსებობაც [34], [38-40], [16], [17], [33], [28], [5], [6], როცა $2h>0$. შემთხვევა, როცა $2h$ გარსის საზღვარზე ან მის ნაწილზე შეიძლება ნული გახდეს, ასეთ გარსებს წამახვილებული გარსები^{*)} ეწოდება, განხილულია [44], [19-25]-ში. ეს და ამ მიმართულებით შემდეგში მიღებული შედეგები მიმოხილულია მონოგრაფიაში [24]. ი. ვეკუას ზემოაღწერილი რედუქციის მეთოდი განზოგადებულია ანიზოტროპული ფირფიტებისა [33] და გეომეტრიულად და ფიზიკურად არაწრფივი არადამრეცი გარსებისათვის [28].

შენიშვნა 2.6.1. N -ური მიახლოების სასაზღვრო პირობებში მოცემული გვაქვს ძაბვის ვექტორის ან გადაადგილების ვექტორის მომენტები. საძიებელი სიდიდეების აღსანიშნავად ვიყენებთ გადაადგილების ვექტორის მომენტების აღნიშვნებს, თუმცა ეს საძიებელი სიდიდეები, ზოგადად, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, არ არიან გადაადგილების ვექტორის მომენტები, მაგრამ მათკენ მიისწრაფვიან, როცა $N \rightarrow +\infty$. ამას იმასაც თუ დავუმატებთ, რომ რეგულარულ (არაწამახვილებულ) შემთხვევაში N -ურ მიახლოებაში დასმული ამოცანების ამონახსნები მიისწრაფვიან შესაბამისი სამგანზომილებიანი ამოცანების ზუსტი ამონახსნები-

^{*)} ამ შემთხვევაში (2.6.8) პირობა საზღვრის წამახვილებულ ნაწილზე უნდა შეიცვალოს

$$\lim_{\omega(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0) \in \partial \omega} h' X_{nir} = \tilde{f}_r, \quad i=1,2,3, \quad r=\overline{0, N},$$

პირობით, სადაც $\tilde{f}_r, \quad r=\overline{0, N}$, საზღვარზე მოცემული შეყურსული მომენტებია.

საკენ [16], [17], [5], [6], ნათელი გახდება, რომ N -ურ მიახლოებაში ასეთი დასმა სავსებით მისაღებია. წამახვილებული გარსების შემთხვევაში საძიებელი ფუნქციების ვიწრო კლასებისათვის იგივე ფაქტს აქვს ადგილი [25], ხოლო ამოცანების ბუნებრივ წონიან სივრცეებში განხილვისას $N \rightarrow +\infty$ დროს შესაბამისი სამგანზომილებიანი ამოცანების დასმა სცილდება კლასიკურის ფარგლებს, რადგან ან არე არ არის ლიპშიცის, ან წერტილებში და ან წირების გასწვრივ შეყურსული ძალები იჩენს თავს [22], [24].

ნულოვან მიახლოებაში (2.6.6) სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს [38]

$$\mu \Delta(h^{-1}u_{\beta 0}) + (\lambda + \mu)(h^{-1}u_{\gamma 0})_{,\gamma\beta} + \lambda(\ln h)_{,\beta}(h^{-1}u_{\alpha 0})_{,\alpha} + \mu(\ln h)_{,\alpha}(h^{-1}u_{\alpha 0})_{,\beta} + \mu(\ln h)_{,\alpha}(h^{-1}u_{\beta 0})_{,\alpha} + \frac{X_{\beta}^0}{h}$$

$$= \rho \frac{\partial h^{-1}u_{\beta 0}}{\partial t^2}, \quad \beta = 1, 2,$$

$$\Delta(h^{-1}u_{30}) + (\ln h)_{,\alpha}(h^{-1}u_{30})_{,\alpha} + \frac{X_3^0}{\mu h} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial h^{-1}u_{30}}{\partial t^2} *),$$

*) თუ განვიხილავთ სტატიკის შემთხვევას და ჩავთვლით, რომ $X_3^0 \equiv 0$, $u_{30} \equiv 0$, მაშინ ამ სისტემაში მესამე იგივეურად დაკმაყოფილდება, ხოლო ორი განტოლებისაგან შემდგარი დარჩენილი სისტემა დაემთხვევა ბრტყელი დეფორმაციის განტოლებებს, თუ $2h = \text{const}$ (იხ. § 2.1). მაგრამ საძიებელი $\frac{u_{\beta 0}}{2h}$, $\beta = 1, 2$, ფუნქციები, ზოგადად (გარდა იმ შემთხვევისა, როცა

$\vec{u}(x_1, x_2, x_3) \equiv \vec{u}(x_1, x_2)$), გასაშუალოებულია მსგავსად განზოგადებული

სადაც

$$X_j^0 = Q_{n,j}^{(+)} \sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(+)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(+)}\right)^2} + Q_{n,j}^{(-)} \sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(-)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(-)}\right)^2} + \Phi_{j0},$$

$$Q_{n,j}^{(+)} = X_{ij} \left(x_1, x_2, h^{(+)}, t \right) \cos \left(n, x_i \right),$$

$$Q_{n,j}^{(-)} = X_{ij} \left(x_1, x_2, h^{(-)}, t \right) \cos \left(n, x_i \right).$$

შეენიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში გადაადგილების ვექტორი (იხ. [39])

$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) \cong \frac{1}{2h} \bar{u}_0(x_1, x_2, t).$$

ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობისა (იხ. (2.3.3), სადაც u_{a0} -ითაა

აღნიშნული ვეკუას მოდელში $\frac{u_{a0}}{2h}$ -ით აღნიშნული სიდიდე). ამ უკანასკნელ

შემთხვევაში კი როგორც ვიცით (იხ. § 2.3) λ -ს როლს λ^* თამაშობს, თუ $X_{33} \equiv 0$. მოკლედ, Ox_1x_2 სიბრტყეში გადაადგილებების მიმართ სისტემას მუდმივი სისქის შემთხვევაში ბრტყელი დეფორმაციის განტოლებების სახე აქვს, რადგან საძიებელი ფუნქციები X_3 -ზე არ არის დამოკიდებული, განსხვავება ბრტყელი დეფორმაციისაგან და მსგავსება განზოგადებულ ბრტყელ დაძაბულ დეფორმაციას შორის მდგომარეობს იმაში, რომ უცნობად, მეორე შემთხვევის მსგავსად, საძიებელი ფუნქციები გასაშუალოებულია (ინტეგრალურად) X_3 -ის მიმართ. ნულოვანი მიახლოება საესებით მისაღება იმ შემთხვევაში, როცა პრიზმული გარსის განივ კვეთებში ფიზიკური მომენტები ნულთან ახლოსაა.

პირველ მიახლოებაში, თუ $h^{(+)} = -h^{(-)} = h$, გადაადგილების
ვექტორი [39]

$$\bar{U}(x_1, x_2, x_3, t) \equiv \frac{1}{2} \bar{u}(x_1, x_2, t) + \frac{3}{2} x_3 \bar{v}(x_1, x_2, t),$$

სადაც

$$u_\alpha(x_1, x_2, t) = h^{-1} u_{\alpha 0}(x_1, x_2, t), \quad v_\alpha(x_1, x_2, t) = h^{-2} u_{\alpha 1}(x_1, x_2, t),$$

$$u_3 = h^{-1} u_{30}(x_1, x_2, t) =: u, \quad v_3 = h^{-2} u_{31}(x_1, x_2, t) =: v.$$

ამ მიახლოებაში (2.6.6) სისტემა სტატიკის შემთხვევაში
მიიღებს შემდეგ სახეს [39]

$$4\mu \frac{\partial}{\partial z} \left(h \frac{\partial u_+}{\partial \bar{z}} \right) + 2(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (h\theta)$$

$$+ 6\lambda \frac{\partial h v}{\partial \bar{z}} + X_+ = 0, \quad (2.6.10)$$

$$2\mu \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(h \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]$$

$$+ 3\mu \left(\frac{\partial h v_+}{\partial z} + \frac{\partial h \bar{v}_+}{\partial \bar{z}} \right) + X = 0, \quad (2.6.11)$$

$$4\mu \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial v_+}{\partial \bar{z}} \right) + 2(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (h^3 \rho)$$

$$- 2\mu h \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - 3\mu h v_+ + Y_+ = 0, \quad (2.6.12)$$

$$2\mu \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h^3 \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right]$$

$$- \lambda h \theta - 3(\lambda + 2\mu) h v + Y = 0, \quad (2.6.13)$$

სადაც

$$u_+ = u_1 + iu_2, \quad v_+ = v_1 + iv_2,$$

$$\theta = \frac{\partial u_+}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial \bar{z}},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

X_+ და X დამოკიდებულია მოცულობითი ძალების ნულოვან მომენტებზე და პირით ზედაპირზე მოქმედ გარე ზედაპირულ ძალებზე, ხოლო Y_+ და Y — მოცულობითი ძალების პირველ მომენტებზე და პირით ზედაპირზე მოქმედ გარე ზედაპირული ძალებზე.

(2.6.10)-(2.6.13) განტოლებათა სისტემა ორ ჯგუფად იყოფა: (2.6.10) და (2.6.13) დამოკიდებულია მხოლოდ u_+ -ზე და v -ზე და ამდენად ახასიათებს გარსის გაჭიმვა-კუმშვას, ხოლო (2.6.11) და (2.6.12) დამოკიდებულია მხოლოდ u -ზე და v_+ -ზე და ამდენად ახასიათებს გარსის ღუნვას.

შენიშვნა 2.6.2. სიმეტრიული $\left(h^{(+)}(x_1, x_2) = -h^{(-)}(x_1, x_2) \geq 0 \right)$

პრიზმული გარსის ფორმის მქონე სამგანზომილებიანი სხეულის

$$u_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3,$$

გადაადგილებები შეიძლება დავშალოთ ორ-ორ შესაკრებად

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = u_i^c(x_1, x_2, x_3, t) + u_i^b(x_1, x_2, x_3, t), \quad i = 1, 2, 3,$$

რომელთაგან

$$u_\alpha^c(x_1, x_2, x_3, t) := \frac{1}{2} [u_\alpha(x_1, x_2, x_3, t) + u_\alpha(x_1, x_2, -x_3, t)],$$

$$\alpha = 1, 2,$$

რომელიც x_3 -ის მიმართ ლუწი ფუნქციაა და

$$u_3^c(x_1, x_2, x_3, t) := \frac{1}{2} [u_3(x_1, x_2, x_3, t) - u_3(x_1, x_2, -x_3, t)],$$

$$(x_1, x_2, x_3) \in \Omega,$$

რომელიც x_3 -ის მიმართ კენტი ფუნქციაა, შეესაბამება გაჭიმვა-იკუმშვას (მართლაც, შუა სიბრტყე იჭიმება ან იკუმშება, რადგან

$$u_\alpha^c(x_1, x_2, 0, t) = u_\alpha(x_1, x_2, 0, t) \neq 0, \quad (x_1, x_2) \in \omega,$$

და არ იღუნება, რადგან

$$u_3(x_1, x_2, 0, t) \equiv 0, \quad (x_1, x_2) \in \omega),$$

ხოლო

$$u_\alpha^b(x_1, x_2, x_3, t) := \frac{1}{2} [u_\alpha(x_1, x_2, x_3, t) - u_\alpha(x_1, x_2, -x_3, t)],$$

$$\alpha = 1, 2,$$

რომელიც x_3 -ის მიმართ კენტი ფუნქციაა და

$$u_3^b(x_1, x_2, x_3, t) := \frac{1}{2} [u_3(x_1, x_2, x_3, t) + u_3(x_1, x_2, -x_3, t)],$$

$$(x_1, x_2, x_3) \in \Omega,$$

რომელიც x_3 -ის მიმართ ლუწი ფუნქციაა, შეესაბამება ღუნვას (მართლაც, შუა სიბრტყე არც იჭიმება და არც იკუმშება, რადგან

$$u_\alpha^b(x_1, x_2, 0, t) \equiv 0, \quad (x_1, x_2) \in \omega),$$

მაგრამ იღუნება, რადგან

$$u_3^b(x_1, x_2, 0, t) = u_3(x_1, x_2, 0, t) \neq 0, \quad (x_1, x_2) \in \omega).$$

(2.6.2)-ის შესაბამისად,

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{r=0}^{\infty} a \left(r + \frac{1}{2} \right) u_{i,r}(x_1, x_2, t) P_r \left(\frac{x_3}{h} \right), \quad i = 1, 2, 3,$$

მაშინ, იმის გათვალისწინებით, რომ x_3 -ის მიმართ P_r კენტი ფუნქციაა კენტი r -სათვის და ლუწი ფუნქციაა ლუწი $r \geq 0$ -სათვის, დავასკვნით, რომ

$$u_{ar}, r \text{ ლუწია; } u_{3r}, r \text{ კენტია,} \quad (2.6.14)$$

შეესაბამება გაჭიმვა-კუმშვას. მართლაც,

$$u_{\alpha}^c(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{r=0}^{\infty} a\left(r + \frac{1}{2}\right) u_{ar}(x_1, x_2, t) P_r\left(\frac{x_3}{h}\right), \quad \alpha = 1, 2,$$

(r ლუწია)

ლუწია x_3 -ის მიმართ,

$$u_3^c(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{r=1}^{\infty} a\left(r + \frac{1}{2}\right) u_{3r}(x_1, x_2, t) P_r\left(\frac{x_3}{h}\right)$$

(r კენტია)

კი კენტია. ხოლო

$$u_{ar}, r \text{ კენტია; } u_{3r}, r \text{ ლუწია,} \quad (2.6.15)$$

შეესაბამება ღუნვას. მართლაც,

$$u_{\alpha}^b = \sum_{r=1}^{\infty} a\left(r + \frac{1}{2}\right) u_{ar}(x_1, x_2, t) P_r\left(\frac{x_3}{h}\right), \quad \alpha = 1, 2,$$

(r კენტია)

კენტია x_3 -ის მიმართ,

$$u_3^b(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{r=0}^{\infty} a\left(r + \frac{1}{2}\right) u_{3r}(x_1, x_2, t) P_r\left(\frac{x_3}{h}\right)$$

(r ლუწია)

კი ლუწია.

(2.6.6) სისტემა შეიძლება გადაწეროთ დივერგენტული ფორმით ცხადი სახით ამოწერილი უმცროსი კოეფიციენტებით [20]. N -ურ მიახლოებაში მას შემდეგი სახე აქვს:

$$\begin{aligned}
& \mu \left[\left(h^{2r+1} v_{ar,j}^N \right)_{,\alpha} + \left(h^{2r+1} v_{jr,\alpha}^N \right)_{,\alpha} \right] \\
& + \lambda \delta_{\alpha j} \left(h^{2r+1} v_{\gamma r,\gamma}^N \right)_{,\alpha} + \sum_{s=r+1}^N \left(\bar{B}_{\alpha jks} h^{r+s+1} v_{ks}^N \right)_{,\alpha} \\
& + \sum_{s=0}^{r-1} \bar{a}_{is} \left[\lambda \delta_{ij} h^{r+s+1} v_{\gamma s,\gamma}^N + \mu h^{r+s+1} \left(v_{is,j}^N + v_{js,i}^N \right) + \sum_{l=s+1}^N \bar{B}_{ijkl} h^{r+l+1} v_{kl}^N \right] \\
& + h^r X_j^r = \rho h^r \frac{\partial^2 h^{r+1} v_{jr}^N}{\partial t^2}, \quad j=1,2,3, \quad r=\overline{0,N}, \quad (2.6.16)
\end{aligned}$$

სადაც

$$v_{ir}^N := \frac{u_{ir}^N}{h^{r+1}},$$

N ნიშნაკი აღნიშნავს N -ურ მიახლოებას. v_{ir}^N -ს ეწოდება წონითი მომენტი N -ურ მიახლოებაში. შევნიშნოთ, რომ (2.6.6) სისტემის შესაბამის უსასრულო სისტემას იგივე (2.6.16) სახე აქვს, მხოლოდ ჯამებში N უსასრულობით უნდა შევცვალოთ და უცნობ სიდიდეებს N ნიშნაკი მოვაშოროთ; ე.ი. მივიღებთ სისტემას v_{ir} -ების, ან, რაც იგივეა, u_{ir} -ების, $i=1,2,3$, $r=0,1,\dots$, მი-

მართ. შევნიშნოთ, რომ $\left(r + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} u_{ir}$ არის u_i -ს ფურიე-ლეჟანდრის კოეფიციენტები.

რადგან სიმეტრიულ პრიზმულ გარსს ვიხილავთ, ამიტომ

$$h^{(+)}(x_1, x_2) + h^{(-)}(x_1, x_2) \equiv 0, \quad (x_1, x_2) \in \omega. \quad (2.6.17)$$

(2.6.17)-ის თანახმად, ადვილი სანახავია, რომ

$$\overset{r}{b}_{ks} = \quad (2.6.18)$$

$$\begin{cases} 0, & \text{თუ } \underline{s} < r; \quad \underline{s} \quad k = \alpha, \quad r+s \text{ კენტი, } s > r; \\ \underline{s} \quad k = 3, \quad r+s \text{ ლუწია, } s > r; \quad \underline{s} \quad k = 3, \quad r = s; \\ -(2s+1)h_{\alpha}h^{-1}, & \text{თუ } k = \alpha, \quad r+s \text{ ლუწია, } s > r; \\ (2s+1)h^{-1}, & \text{თუ } k = 3, \quad r+s \text{ კენტი, } s > r; \\ -(r+1)h_{\alpha}h^{-1}, & \text{თუ } k = \alpha, \quad r = s; \end{cases}$$

$$\overset{r}{a}_{is} = \quad (2.6.19)$$

$$\begin{cases} 0, & \text{თუ } \underline{s} \quad i = \alpha, \quad r+s \text{ კენტი, } s \neq r; \quad \underline{s} \quad i = 3, \\ & r+s \text{ ლუწია;} \\ (2s+1)h_{\alpha}h^{-1}, & \text{თუ } i = \alpha, \quad r+s \text{ ლუწია, } s \neq r; \\ -(2s+1)h^{-1}, & \text{თუ } i = 3, \quad r+s \text{ კენტი;} \\ rh_{\alpha}h^{-1}, & \text{თუ } i = \alpha, \quad r = s; \end{cases}$$

$$\overset{r}{B}_{\alpha\beta\gamma} = \lambda\delta_{\alpha\beta}\overset{r}{b}_{\gamma} + \mu\delta_{\gamma\beta}\overset{r}{b}_{\alpha} + \mu\delta_{\alpha\gamma}\overset{r}{b}_{\beta} \quad (2.6.20)$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{თუ } \underline{s} < r; \quad \underline{s} \quad r+s \text{ კენტი, } s > r; \\ -(r+1)h^{-1}[\lambda\delta_{\alpha\beta}h_{\gamma} + \mu\delta_{\gamma\beta}h_{\alpha} + \mu\delta_{\alpha\gamma}h_{\beta}], & \text{თუ } r = s; \\ -(2s+1)h^{-1}[\lambda\delta_{\alpha\beta}h_{\gamma} + \mu\delta_{\gamma\beta}h_{\alpha} + \mu\delta_{\alpha\gamma}h_{\beta}], & \text{თუ } r+s \\ & \text{ლუწია, } s > r; \end{cases}$$

$$\overset{r}{B}_{\alpha\beta 3s} = \lambda \delta_{\alpha\beta} \overset{r}{b}_{3s} = \begin{cases} 0, & \text{თუ } \underline{s} < r; \\ \underline{s} & r+s \text{ ლუწია, } s \geq r; \\ \lambda(2s+1)h^{-1}\delta_{\alpha\beta}, & \text{თუ } r+s \\ & \text{კენტიია, } s > r; \end{cases} \quad (2.6.21)$$

$$\overset{r}{B}_{\alpha 3\gamma s} = \mu \delta_{\alpha\gamma} \overset{r}{b}_{3s} = \begin{cases} 0, & \text{თუ } \underline{s} < r; \\ \underline{s} & r+s \text{ ლუწია, } s \geq r; \\ (2s+1)\mu h^{-1}\delta_{\alpha\gamma}, & \text{თუ } r+s \\ & \text{კენტიია, } s > r; \end{cases} \quad (2.6.22)$$

$$\overset{r}{B}_{\alpha 33s} = \mu \overset{r}{b}_{\alpha s} = \begin{cases} 0, & \text{თუ } \underline{s} < r; \\ \underline{s} & r+s \text{ კენტიია, } s > r; \\ -(r+1)\mu h^{-1}h_{,\alpha}, & \text{თუ } r=s; \\ -(2s+1)\mu h^{-1}h_{,\alpha}, & \text{თუ } r+s \\ & \text{ლუწია, } s > r; \end{cases} \quad (2.6.23)$$

$$\overset{r}{B}_{3\beta\gamma s} = \mu \delta_{\beta\gamma} \overset{r}{b}_{3s} = \begin{cases} 0, & \text{თუ } \underline{s} < r; \\ \underline{s} & r+s \text{ ლუწია, } s \geq r; \\ (2s+1)\mu h^{-1}\delta_{\beta\gamma}, & \text{თუ } r+s \\ & \text{კენტიია, } s > r; \end{cases} \quad (2.6.24)$$

$$\overset{r}{B}_{3\beta 3s} = \overset{r}{\mu} \overset{r}{b}_{\beta s} = \begin{cases} 0, & \text{თუ } \underline{s} < r; \\ \underline{s} & r+s \text{ კენტი, } s > r; \\ -(r+1)\mu h^{-1}h_{\beta}, & \text{თუ } r=s; \\ -(2s+1)\mu h^{-1}h_{\beta}, & \text{თუ } r+s \\ & \text{ლუწია, } s > r; \end{cases} \quad (2.6.25)$$

$$\overset{r}{B}_{33\gamma} = \overset{r}{\lambda} \overset{r}{b}_{\gamma s} = \begin{cases} 0, & \text{თუ } \underline{s} < r; \\ \underline{s} & r+s \text{ კენტი, } s > r; \\ -(r+1)\lambda h^{-1}h_{\gamma}, & \text{თუ } r=s; \\ -(2s+1)\lambda h^{-1}h_{\gamma}, & \text{თუ } r+s \\ & \text{ლუწია, } s > r; \end{cases} \quad (2.6.26)$$

$$\begin{aligned} \overset{r}{B}_{333s} &= \overset{r}{\lambda} \overset{r}{b}_{3s} + \overset{r}{\mu} \overset{r}{b}_{3s} + \overset{r}{\mu} \overset{r}{b}_{3s} = (\lambda + 2\mu) \overset{r}{b}_{3s} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{თუ } \underline{s} < r; \quad \underline{s} & r+s \text{ ლუწია, } s \geq r; \\ (2s+1)(\lambda + 2\mu)h^{-1}, & \text{თუ } r+s \text{ კენტი, } s > r. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.6.27)$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.6.18)-(2.6.27)-ს, ადვილი მისახვედრია, რომ (2.6.16) სისტემა დაიშლება ორ დამოუკიდებელ სისტემად (2.6.14) და (2.6.15) უცნობი ფუნქციების მიმართ. მართლაც, თუ $r = 0, 2, 4, \dots, r \leq N, j = \beta, \beta = 1, 2$, მაშინ

$$\begin{aligned}
& \mu \left[\left(h^{2r+1} v_{\alpha r, \beta}^N \right)_{,\alpha} + \left(h^{2r+1} v_{\beta r, \alpha}^N \right)_{,\alpha} \right] + \lambda \delta_{\alpha \beta} \left(h^{2r+1} v_{\gamma r, \gamma}^N \right)_{,\alpha} \\
& + \sum_{s=r+2}^N \left(B_{\alpha \beta \gamma s}^r h^{r+s+1} v_{\gamma s}^N \right)_{,\alpha} + \sum_{s=r+1}^N \left(B_{\alpha \beta 3s}^r h^{r+s+1} v_{3s}^N \right)_{,\alpha} \\
& \quad (s \text{ ლუწია}) \quad (s \text{ კენტია}) \\
& + \sum_{s=0}^{r-1} a_{\alpha s}^r \left[\lambda \delta_{\alpha \beta} h^{r+s+1} v_{\gamma s, \gamma}^N + \mu h^{r+s+1} \left(v_{\alpha s, \beta}^N + v_{\beta s, \alpha}^N \right) \right. \\
& \quad (s \text{ ლუწია}) \\
& + \sum_{l=s+2}^N B_{\alpha \beta \gamma l}^s h^{r+l+1} v_{\gamma l}^N + \sum_{l=s+1}^{\infty} B_{\alpha \beta 3l}^s h^{r+l+1} v_{3l}^N \left. \right] + \sum_{s=1}^{r-1} a_{3s}^r \left[\mu h^{r+s+1} v_{3s, \beta}^N \right. \\
& \quad (l \text{ ლუწია}) \quad (l \text{ კენტია}) \quad (s \text{ კენტია}) \\
& + \sum_{l=s+1}^N B_{3\beta \gamma l}^s h^{r+l+1} v_{\gamma l}^N + \sum_{l=s+2}^{\infty} B_{3\beta 3l}^s h^{r+l+1} v_{3l}^N \left. \right] + h^r X_{\beta} \\
& \quad (l \text{ ლუწია}) \quad (l \text{ კენტია}) \\
& = \rho h^r \frac{\partial^2 h^{r+1} v_{\beta r}^N}{\partial t^2}, \tag{2.6.28}
\end{aligned}$$

თუ $r = 0, 2, 4, \dots, r \leq N$, $j = 3$, მაშინ

$$\begin{aligned}
& \mu \left(h^{2r+1} v_{3r, \alpha}^N \right)_{,\alpha} + \sum_{s=r+1}^N \left(B_{\alpha 3 \gamma s}^r h^{r+s+1} v_{\gamma s}^N \right)_{,\alpha} + \sum_{s=r+2}^N \left(B_{\alpha 3 3s}^r h^{r+s+1} v_{3s}^N \right)_{,\alpha} \\
& \quad (s \text{ კენტია}) \quad (s \text{ ლუწია})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s=0}^{r-1} a_{\alpha s}^r \left[\mu h^{r+s+1} v_{3s,\alpha}^N + \sum_{l=s+1}^N B_{\alpha 3\gamma l}^s h^{r+l+1} v_{\gamma l}^N + \sum_{l=s+2}^N B_{\alpha 3\beta l}^s h^{r+l+1} v_{\beta l}^N \right] \\
& \quad (s \text{ ლუწია}) \quad (l \text{ კენტია}) \quad (l \text{ ლუწია}) \\
& + \sum_{s=1}^{r-1} a_{3s}^r \left[\lambda h^{r+s+1} v_{\gamma s,\gamma}^N + \sum_{l=s+2}^N B_{3\beta \gamma l}^s h^{r+l+1} v_{\gamma l}^N + \sum_{l=s+1}^N B_{3\beta \beta l}^s h^{r+l+1} v_{\beta l}^N \right] \\
& \quad (s \text{ კენტია}) \quad (l \text{ კენტია}) \quad (l \text{ ლუწია}) \\
& + h^r \dot{X}_3 = \rho h^r \frac{\partial^2 h^{r+1} v_{3r}^N}{\partial t^2}, \quad (2.6.29)
\end{aligned}$$

თუ $r = 1, 3, \dots$, $r \leq N$, $j = \beta$, $\beta = 1, 2$, მაშინ

$$\begin{aligned}
& \mu \left[\left(h^{2r+1} v_{\alpha r, \beta}^N \right)_{,\alpha} + \left(h^{2r+1} v_{\beta r, \alpha}^N \right)_{,\alpha} \right] + \lambda \delta_{\alpha \beta} \left(h^{2r+1} v_{\gamma r, \gamma}^N \right)_{,\alpha} \\
& + \sum_{s=r+2}^N \left(B_{\alpha \beta \gamma s}^r h^{r+s+1} v_{\gamma s}^N \right)_{,\alpha} + \sum_{s=r+1}^N \left(B_{\alpha \beta 3s}^r h^{r+s+1} v_{3s}^N \right)_{,\alpha} \\
& \quad (s \text{ კენტია}) \quad (s \text{ ლუწია}) \\
& + \sum_{s=1}^{r-1} a_{\alpha s}^r \left[\lambda \delta_{\alpha \beta} h^{r+s+1} v_{\gamma s, \gamma}^N + \mu h^{r+s+1} \left(v_{\alpha s, \beta}^N + v_{\beta s, \alpha}^N \right) \right] \\
& \quad (s \text{ კენტია}) \\
& + \sum_{l=s+2}^N B_{\alpha \beta \gamma l}^s h^{r+l+1} v_{\gamma l}^N + \sum_{l=s+1}^N B_{\alpha \beta 3l}^s h^{r+l+1} v_{3l}^N \left] + \sum_{s=0}^{r-1} a_{3s}^r \left[\mu h^{r+s+1} v_{3s, \beta}^N \right. \right. \\
& \quad (l \text{ კენტია}) \quad (l \text{ ლუწია}) \quad (s \text{ ლუწია}) \\
& \left. + \sum_{l=s+1}^N B_{3\beta \gamma l}^s h^{r+l+1} v_{\gamma l}^N + \sum_{l=s+2}^N B_{3\beta \beta l}^s h^{r+l+1} v_{\beta l}^N \right] + h^r \dot{X}_\beta \\
& \quad (l \text{ კენტია}) \quad (l \text{ ლუწია})
\end{aligned}$$

$$= \rho h^r \frac{\partial^2 h^{r+1} v_{\beta r}^N}{\partial t^2}, \quad (2.6.30)$$

თუ $r = 1, 3, \dots, r \leq N, j = 3$, მაშინ

$$\begin{aligned} & \mu \left(h^{2r+1} v_{3r,\alpha}^N \right)_{,\alpha} + \sum_{s=r+1}^N \left(B_{\alpha\beta\gamma s} h^{r+s+1} v_{\gamma s}^N \right)_{,\alpha} + \sum_{s=r+2}^N \left(B_{\alpha\beta\gamma s} h^{r+s+1} v_{\gamma s}^N \right)_{,\alpha} \\ & \quad (s \text{ ლუწია}) \quad (s \text{ კენტია}) \\ & + \sum_{s=1}^{r-1} a_{\alpha}^r \left[\mu h^{r+s+1} v_{3s,\alpha}^N + \sum_{l=s+1}^N B_{\alpha\beta\gamma l} h^{r+l+1} v_{\gamma l}^N + \sum_{l=s+2}^N B_{\alpha\beta\gamma l} h^{r+l+1} v_{\gamma l}^N \right] \\ & \quad (s \text{ კენტია}) \quad (l \text{ ლუწია}) \quad (l \text{ კენტია}) \\ & + \sum_{s=0}^{r-1} a_{3s}^r \left[\lambda h^{r+s+1} v_{\gamma s,\gamma}^N + \sum_{l=s+2}^N B_{\beta\gamma\gamma l} h^{r+l+1} v_{\gamma l}^N + \sum_{l=s+1}^N B_{\beta\gamma\gamma l} h^{r+l+1} v_{\gamma l}^N \right] \\ & \quad (s \text{ ლუწია}) \quad (l \text{ ლუწია}) \quad (l \text{ კენტია}) \\ & + h^r X_3 = \rho h^r \frac{\partial^2 h^{r+1} v_{3r}^N}{\partial t^2}, \quad (2.6.31) \end{aligned}$$

ამრიგად, (2.6.28), (2.6.31) სისტემა, რომელიც მხოლოდ (2.6.14) უცნობებს შეიცავს, გაჭიმვა-კუმშვას შეესაბამება, ხოლო (2.6.30), (2.6.29) სისტემა, რომელიც მხოლოდ (2.6.15) უცნობებს შეიცავს, ღუნვას შეესაბამება.

ძირითადი სისტემის ასეთ გახლეჩას ადგილი არ აქვს არასიმეტრიული პრიზმული გარსების შემთხვევაში, ისევე როგორც ზოგადი გარსების შემთხვევაში, თუნდაც ეს უკანასკნელნი სიმეტრიულები იყვნენ.

(2.6.19)-(2.6.21), (2.6.24), (2.6.25)-ის გათვალისწინებით, (2.6.28) და (2.6.30) შეიძლება ჩავწეროთ შესაბამისად

$$\left[\mu \left(h^{2r+1} v_{\alpha r, \beta}^N \right)_{,\alpha} + \left(h^{2r+1} v_{\beta r, \alpha}^N \right)_{,\alpha} \right] + \lambda \left(h^{2r-1} v_{\gamma r, \gamma}^N \right)_{,\beta} \\ + \sum_{s=r+2}^N \left\{ \left[- (2s+1) h^{r+s} \left(\lambda \delta_{\alpha\beta} h_{,\gamma} + \mu \delta_{\gamma\beta} h_{,\alpha} + \mu \delta_{\alpha\gamma} h_{,\beta} \right) \right] v_{\gamma s}^N \right\}_{,\alpha}$$

(*s* ლუწია)

$$+ \sum_{s=r+1}^N \lambda (2s+1) \left(h^{r+s} v_{3s}^N \right)_{,\beta}$$

(*s* კენტია)

$$+ \sum_{s=0}^{r-1} (2s+1) h_{,\alpha} \left\{ h^{r+s} \left[\lambda \delta_{\alpha\beta} v_{\gamma s, \gamma}^N + \mu \left(v_{\alpha s, \beta}^N + v_{\beta s, \alpha}^N \right) \right] \right\}$$

(*s* ლუწია)

$$+ \sum_{l=s+2}^N \left[- (2l+1) h^{r+l-1} \left(\lambda \delta_{\alpha\beta} h_{,\gamma} + \mu \delta_{\gamma\beta} h_{,\alpha} + \mu \delta_{\alpha\gamma} h_{,\beta} \right) \right] v_{\gamma l}^N$$

(*l* ლუწია)

$$+ \sum_{l=s+1}^N \lambda (2l+1) h^{r+l-1} \delta_{\alpha\beta} v_{3l}^N \left\{ \right.$$

(*l* კენტია)

$$+ \sum_{s=1}^{r-1} \left\{ - (2s+1) \left[\mu h^{r+s} v_{3s, \beta}^N \right. \right.$$

(*s* კენტია)

$$+ \sum_{l=s+1}^N (2l+1) \mu h^{r+l-1} v_{\beta l}^N - \sum_{l=s+1}^N (2l+1) \mu h_{,\beta} h^{r+l-1} v_{3l}^N \left. \right\}$$

(*l* ლუწია)

(*l* კენტია)

$$+ h^r \dot{X}_\beta = \rho h^r \frac{\partial^2 h^{r+1} v_{\beta r}^N}{\partial t^2}, \quad (2.6.32)$$

$$r = 0, 2 \dots, \quad r \leq N, \quad \beta = 1, 2,$$

ღა

$$\left[\mu \left(h^{2r+1} v_{\alpha r, \beta}^N \right)_{,\alpha} + \left(h^{2r+1} v_{\beta r, \alpha}^N \right)_{,\alpha} \right] + \lambda \left(h^{2r+1} v_{rr, \gamma}^N \right)_{,\beta} \\ + \sum_{s=r+2}^N \left\{ [-(2s+1) h^{r+s} (\lambda \delta_{\alpha\beta} h_{,\gamma} + \mu \delta_{\gamma\beta} h_{,\alpha} + \mu \delta_{\alpha\gamma} h_{,\beta})] v_{\gamma s}^N \right\}_{,\alpha}$$

(s კენტი)

$$+ \sum_{s=r+1}^N \lambda (2s+1) \left(h^{r+s} v_{3s}^N \right)_{,\beta}$$

(s ლუწი)

$$+ \sum_{s=1}^{r-1} (2s+1) h_{,\alpha} \left\{ h^{r+s} \left[\lambda \delta_{\alpha\beta} v_{\gamma s, \gamma}^N + \mu \left(v_{\alpha s, \beta}^N + v_{\beta s, \alpha}^N \right) \right] \right\}$$

(s კენტი)

$$+ \sum_{l=s+2}^N [-(2l+1) h^{r+l-1} (\lambda \delta_{\alpha\beta} h_{,\gamma} + \mu \delta_{\gamma\beta} h_{,\alpha} + \mu \delta_{\alpha\gamma} h_{,\beta})] v_{\gamma l}^N$$

(l კენტი)

$$+ \sum_{l=s+1}^N \lambda (2l+1) h^{r+l-1} \delta_{\alpha\beta} v_{3l}^N \left. \right\}$$

(l ლუწი)

$$+ \sum_{s=0}^{r-1} \left\{ -(2s+1) \left[\mu h^{r+s} v_{3s,\beta}^N \right. \right.$$

(s ლუწია)

$$+ \sum_{l=s+1}^N (2l+1) \mu h^{r+l-1} v_{\beta,l}^N - \sum_{l=s+2}^N (2l+1) \mu h_{\beta} h^{r+l-1} v_{3l}^N \left. \right\}$$

(l კენტია)

(l ლუწია)

$$+ h^r X_{\beta} = \rho h^r \frac{\partial^2 h^{r+1} v_{\beta,r}^N}{\partial t^2}, \quad (2.6.33)$$

$$r = 1, 3, \dots, \quad r \leq N, \quad \beta = 1, 2,$$

სახით.

(2.6.19), (2.6.22), (2.6.23), (2.6.26), (2.6.27)-ის გათვალისწინებით, (2.6.29) და (2.6.31) შეიძლება ჩაწეროთ შესაბამისად

$$\mu \left(h^{2r+1} v_{3r,\alpha}^N \right)_{,\alpha} + \sum_{s=r+1}^N (2s+1) \mu \left(h^{r+s} v_{\alpha s}^N \right)_{,\alpha} - \sum_{s=r+2}^N (2s+1) \mu \left(h_{,\alpha} h^{r+s} v_{3s}^N \right)_{,\alpha}$$

(s კენტია)

(s ლუწია)

$$+ \sum_{s=0}^{r-1} (2s+1) h_{,\alpha} \left[\mu h^{r+s} v_{3s,\alpha}^N \right.$$

(s კენტია)

$$+ \sum_{l=s+1}^N (2l+1) \mu h^{r+l-1} v_{\alpha l}^N - \sum_{l=s+2}^N (2l+1) \mu h_{,\alpha} h^{r+l-1} v_{3l}^N \left. \right]$$

(l კენტია)

(l ლუწია)

$$-\sum_{s=1}^{r-1} (2s+1) \left[\lambda h^{r+s} v_{r,s,r}^N \right]$$

(*s* კენტი)

$$-\sum_{l=s+2}^N (2l+1) \lambda h_{,r} h^{r+l-1} v_{r,l}^N + \sum_{l=s+1}^N (2l+1) (\lambda + 2\mu) h^{r+l-1} v_{3l}^N \Big]$$

(*l* კენტი)

(*l* ლუწი)

$$+ h^r X_3 = \rho h^r \frac{\partial^2 h^{r+1} v_{3r}^N}{\partial l^2}, \quad r = 0, 2, 4, \dots, \quad r \leq N, \quad (2.6.34)$$

ღა

$$\mu \left(h^{2r+1} v_{3r,\alpha}^N \right)_{,\alpha}$$

$$+ \sum_{s=r+1}^N (2s+1) \mu \left(h^{r+s} v_{\alpha s}^N \right)_{,\alpha} - \sum_{s=r+2}^N (2s+1) \mu \left(h_{,\alpha} h^{r+s} v_{3s}^N \right)_{,\alpha}$$

(*s* ლუწი)

(*s* კენტი)

$$+ \sum_{s=1}^{r-1} (2s+1) h_{,\alpha} \left[\mu h^{r+s} v_{3s,\alpha}^N \right]$$

(*s* კენტი)

$$+ \sum_{l=s+1}^N (2l+1) \mu h^{r+l-1} v_{\alpha l}^N - \sum_{l=s+2}^N (2l+1) \mu h_{,\alpha} h^{r+l-1} v_{3l}^N \Big]$$

(*l* ლუწი)

(*l* კენტი)

$$-\sum_{s=0}^{r-1} (2s+1) \left[\lambda h^{r+s} v_{rs,r} \right]$$

(s ლუწია)

$$-\sum_{l=s+2}^N (2l+1) \lambda h_{,r} h^{r+l-1} v_{rl}^N + \sum_{l=s+1}^N (2l+1) (\lambda + 2\mu) h^{r+l-1} v_{3l}^N \Big]$$

(l ლუწია)

(l კენჭია)

$$+ h^r \dot{X}_3 = \rho h^r \frac{\partial^2 h^{r+1} v_{3r}^N}{\partial t^2}, \quad r = 1, 3, \dots, r \leq N, \quad (2.6.35)$$

სახით.

ვთქვათ, $N = 1$.

თუ $r = 0$, მაშინ (2.6.32) და (2.6.34)-დან ცხადია, რომ შესაბამისად

$$\begin{aligned} & \mu \left[\left(h^1 v_{\alpha 0, \beta} \right)_{,\alpha} + \left(h^1 v_{\beta 0, \alpha} \right)_{,\alpha} \right] + \lambda \left(h^1 v_{r 0, r} \right)_{,\beta} \\ & + 3\lambda \left(h^1 v_{31} \right)_{,\beta} + \dot{X}_\beta = \rho \frac{\partial^2 h^1 v_{\beta 0}}{\partial t^2}, \quad \beta = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.6.36)$$

და

$$\mu \left(h^1 v_{30, \alpha} \right)_{,\alpha} + 3\mu \left(h^1 v_{\alpha 1} \right)_{,\alpha} + \dot{X}_3 = \rho \frac{\partial^2 h^1 v_{30}}{\partial t^2}. \quad (2.6.37)$$

თუ $r = 1$, მაშინ (2.6.33) და (2.6.35)-დან გამოვღინარეობს, რომ შესაბამისად

$$\mu \left[\left(h^3 \overset{1}{v}_{\alpha 1, \beta} \right)_{, \alpha} + \left(h^3 \overset{1}{v}_{\beta 1, \alpha} \right)_{, \alpha} \right] + \lambda \left(h^3 \overset{1}{v}_{\gamma 1, \gamma} \right)_{, \beta} \quad (2.6.38)$$

$$- \left(\mu h \overset{1}{v}_{30, \beta} + 3 \mu h \overset{1}{v}_{\beta 1} \right) + h \overset{1}{X}_{\beta} = \rho h \frac{\partial^2 h^2 \overset{1}{v}_{\beta 1}}{\partial t^2}, \quad \beta = 1, 2,$$

და

$$\begin{aligned} \mu \left(h^3 \overset{1}{v}_{31, \alpha} \right)_{, \alpha} - \lambda h \overset{1}{v}_{\gamma 0, \gamma} - 3(\lambda + 2\mu) h \overset{1}{v}_{31} \\ + h \overset{1}{X}_3 = \rho h \frac{\partial^2 h^2 \overset{1}{v}_{31}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.6.39)$$

მარტივი გარდაქმნებით დავრწმუნდებით, რომ (2.6.10)-(2.6.13) ემთხვევა შესაბამისად (2.6.36)-(2.6.39)-ს სტატიკურ შემთხვევაში, თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ (2.6.10)-(2.6.13)-ში

$$u_{\alpha} \equiv \overset{1}{v}_{\alpha 0}, \quad v_{\alpha} \equiv \overset{1}{v}_{\alpha 1}, \quad \alpha = 1, 2; \quad u \equiv \overset{1}{v}_{30}, \quad v \equiv \overset{1}{v}_{31}.$$

კიდევ ერთხელ ზაზი გავუსვათ იმას, რომ (2.6.36), (2.6.39) სისტემა შეესაბამება გაჭიმვა-კუმშვას, ხოლო (2.6.37), (2.6.38) სისტემა — ღუნვას.

ვთქვათ, ახლა ფირფიტა მუდმივი სისქისაა, ე.ი.

$$h^{(+)}(x_1, x_2) = -h^{(-)}(x_1, x_2) = h(x_1, x_2) = \text{const}.$$

მაშინ (2.6.37), (2.6.38) სისტემა, რომელიც ღუნვას ახასიათებს, სტატიკის შემთხვევაში შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\mu \Delta \overset{1}{v}_{30} + 3 \mu \left(\overset{1}{v}_{11,1} + \overset{1}{v}_{21,2} \right) + h^{-1} \overset{0}{X}_3 = 0, \quad (2.6.40)$$

$$\mu \Delta \overset{1}{v}_{11} + (\lambda + \mu) \left(\overset{1}{v}_{11,1} + \overset{1}{v}_{21,2} \right)_{,1} \quad (2.6.41)$$

$$- \mu h^{-2} \overset{1}{v}_{30,1} - 3\mu h^{-2} \overset{1}{v}_{11} + h^{-2} \overset{1}{X}_1 = 0.$$

$$\mu \Delta \overset{1}{v}_{21} + (\lambda + \mu) \left(\overset{1}{v}_{11,1} + \overset{1}{v}_{21,2} \right)_{,2} \quad (2.6.42)$$

$$- \mu h^{-2} \overset{1}{v}_{30,2} - 3\mu h^{-2} \overset{1}{v}_{21} + h^{-2} \overset{1}{X}_2 = 0.$$

(2.6.41) და (2.6.42) გავაწარმოთ შესაბამისად x_1 -ით და x_2 -ით და შევკრიბოთ:

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \Delta \left(\overset{1}{v}_{11,1} + \overset{1}{v}_{21,2} \right) - \mu h^{-2} \Delta \overset{1}{v}_{30} \\ & - 3\mu h^{-2} \left(\overset{1}{v}_{11,1} + \overset{1}{v}_{21,2} \right) + h^{-2} \left(\overset{1}{X}_{1,1} + \overset{1}{X}_{2,2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.6.43)$$

(2.6.40)-დან განვსაზღვროთ

$$\overset{1}{v}_{11,1} + \overset{1}{v}_{21,2} = -\frac{1}{3} \Delta \overset{1}{v}_{30} - \frac{1}{3\mu} h^{-1} \overset{0}{X}_3$$

და ჩავსვათ (2.6.43)-ში, სადაც ჩათვალოთ, რომ $\Phi_j \equiv 0$, $j = 1, 2, 3$; $Q_{n\alpha} \equiv 0$, $\alpha = 1, 2$; და, ამდენად (იხ. 2.6.4),

$$\overset{1}{X}_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad \overset{0}{X}_3 = Q_{n3}^{(+)} + Q_{n3}^{(-)} = q^{(+)} + q^{(-)} = q,$$

მაშინ

$$-\frac{\lambda + 2\mu}{3} \Delta \Delta \overset{1}{v}_{30} - \frac{\lambda + 2\mu}{3\mu} h^{-1} \Delta q + h^{-3} q = 0.$$

აქედან, თუ q დატვირთვა პარმონიულია, ე.ი. $\Delta q = 0$, მივიღებთ

$$\Delta\Delta u_3 = \frac{q}{D'}, \quad (2.6.44)$$

სადაც

$$u_3 := \frac{1}{2} v_{30}$$

ჩალუნვაა, ხოლო

$$D' = \frac{2}{3} (\lambda + 2\mu) h^3 = \frac{(1-\sigma)^2}{1-2\sigma} D. \quad (2.6.45)$$

როგორც ვხედავთ, (2.6.44) დაემთხვევა ს. ჟერმენ-ლაგრანჟის (2.6.17) განტოლებას, თუ D' -ს შევცვლით D ცილინდრული სიხისტით. D' და D , (2.6.45)-ის თანახმად ერთმანეთისგან

$$\frac{(1-\sigma)^2}{1-2\sigma}$$

მამრავლით განსხვავდება. ამრიგად, მუდმივი სისქის ფირფიტის შემთხვევაში $N=1$ მიახლოებაში ლუნვის (2.6.44) განტოლება და მისი შესაბამისი მათემატიკური მოდელი თვისობრივად არ განსხვავდება ს. ჟერმენ-ლაგრანჟის (2.6.17) განტოლებისა და შესაბამისად ლუნვის კლასიკური თეორიისაგან. მათ შორის განსხვავება მხოლოდ რაოდენობრივია, ამასთან, გარკვეული აზრით, ეს სხვაობა მცირეა. მართლაც, თუ $\sigma = 0,3$, მაშინ $D' \cong 1,2D$, რაც მეორეს მხრივ იმას ნიშნავს, რომ $N=1$ მოდელით გათვლილი ფირფიტები უფრო ხისტია, ვიდრე კირხჰოფ-ლიავის მოდელით, ე.ი. კლასიკური ლუნვის თეორიით გათვლილი ფირფიტები. ცხადია, იგივე მიმართებაშია $N=1$ მიახლოების ლუნვის მოდელი რაისნერ-მინდლინის მოდელთან, რადგან ეს უკანასკნელი კერძო შემთხვევაში ზუსტად ემთხვევა კირხჰოფ-ლიავის მოდელს (იხ. §2.5).

ნაწილი III. პრეზენტაციის მოდელები

§3.1. ღეროს ელერ-ბერნულის მოდელი

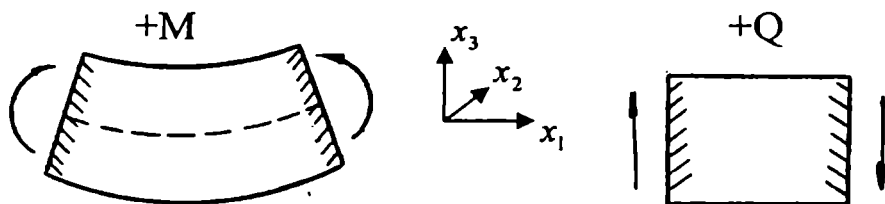
ძელი ეწოდება სხეულს, რომლის ერთი ზომა, სიგრძე, ორ დანარჩენთან შედარებით ძალიან დიდია, დაახლოებით ხუთჯერ მაინც აღემატება მათ. შედარებით გრძელ ძელს ღერო (bar, rod) ეწოდება. ძელი შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც ბრტყელი ფიგურის წრფის ან წირის გასწვრივ მოძრაობით მიღებული სხეული ისე, რომ ფიგურის ცენტრი (გეომეტრიული ან სიმძიმის) ყოველთვის ამ წრფეზე ან შესაბამისად წირზე რჩებოდეს, ხოლო ფიგურის სიბრტყე მისი პერპენდიკულარული იყოს. ამ ფიგურას ძელის განივი კვეთი ეწოდება, ხოლო წირს, რომლის გასწვრივაც მოძრაობა ხდება – ძელის ღერძი. ღერძის ფორმის მიხედვით ძელი შეიძლება იყოს სწორი, მრუდი, ბრტყელი, სივრცითი და სხვა. განივი კვეთის მიხედვით კი ძელი არის მუდმივი ან ცვლადკვეთიანი. ძელის ღერძის პარალელური წირის ნაწილს, მოკვეთილს ორი განივი კვეთით, ბოჭკო ეწოდება (იხ. [3], გვ. 16).

ძელის ღუნვას იწვევენ განივი ძალები და წვეილძალები, რომლებიც ძელის ღერძზე გამავალ სიბრტყეში არიან მოთავსებული. ძელებს, რომლებიც ღუნვას განიცდიან, კოჭები (beam) ეწოდებათ (იხ. [3], გვ. 160).

თუ კოჭს აზრობრივად გაგვეთო მისი ღერძის რაიმე წერტილში გამავალი განივკვეთით, მაშინ კვეთაში მოქმედებენ M მღუნავი მომენტი და Q განივი (გადამჭრელი) ძალა. ამასთან მღუნავი მომენტი რიცხობრივად უდრის კვეთის ცალ მხარეს მოდებულ რეაქციის, შეყურსული და უწყვეტად განაწილებული ძალების კვეთის ცენტრის მიმართ აღებული მომენტების ალგებრულ ჯამს, ხოლო განივი ძალა – კვეთის ცალ მხარეს მოდე-

ბული ძალების კვეთის სიბრტყეზე გეგმილების ალგებრულ ჯამს.

იმისათვის, რომ კვეთის მიმართ მარცხენა და მარჯვენა ძალებით შედგენილი მღუნავი მომენტი ერთი და იგივე აღმოჩნდეს არა მარტო სიდიდით, არამედ ნიშნითაც, შემოვიღოთ ასეთი წესი: მარცხენა ძალის მომენტი მივიჩნიოთ დადებითად, თუ იგი კვეთს უკლის საათის ისრის მიმართულებით, მარჯვენა ძალისა კი — საწინააღმდეგოდ. ანალოგიური წესი გვექნება განივი ძალისათვის: მარცხენა განივი ძალა მივიჩნიოთ დადებითად, თუ იგი მიმართულია ზემოთ, მარჯვენა კი — თუ იგი მიმართულია ქვემოთ (იხ. ნახ. 3.1.1, სადაც დადებითი მიმართულებებია ნაჩვენები).

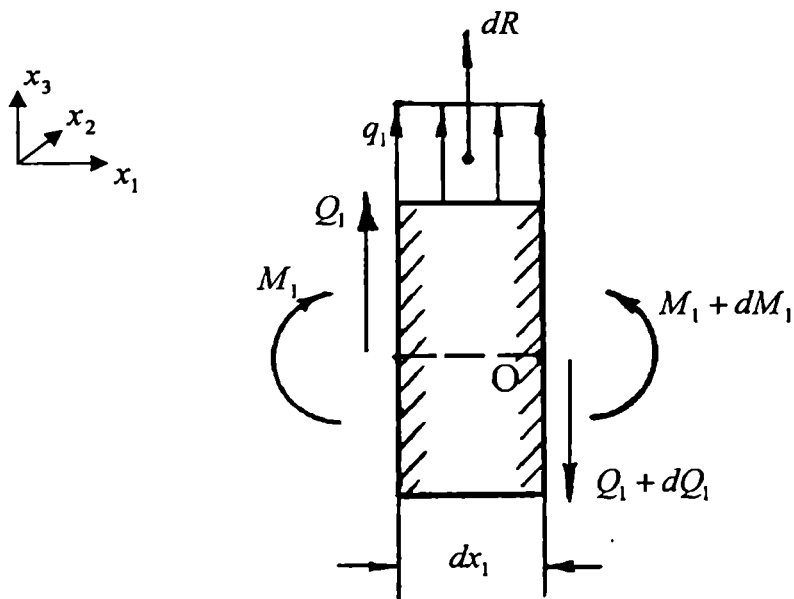


ნახ. 3.1.1

ღუნვის ზოგად შემთხვევას, როცა ძელში არსებობენ მღუნავი მომენტი და განივი ძალა, განივი ღუნვა ეწოდება, ხოლო კერძო შემთხვევას, როცა განივი ძალა ნულია, — სუფთა ღუნვა.

განვიხილოთ კოჭი, რომლის ღერძი x_1 ღერძზე მდებარეობს, დატვირთული უწყვეტად განაწილებული და შეეყურსული ძალებით. დატვირთვის ინტენსურობა q_1 მივიჩნიოთ დადებითად, როცა ის ზემოთაა მიმართული (x_3 ღერძის დადებითი მიმართულებით). შეეყურსულ ძალებს შორის დატვირთვის უწყვეტი ცვლილების გამო $M_1(x_1)$ და $Q_1(x_1)$ აგრეთვე უწყვეტი ფუნქციებია. ერთ-ერთ ასეთ უბანში გამოვეყოთ კოჭის უსასრულოდ მც-

რე dx_1 ელემენტი (იხ. ნახ 3.1.2) და შევადგინოთ მისი წონასწორობის განტოლებები.



ნახ. 3.1.2

ელემენტზე მოქმედებს განაწილებული ტვირთი და კოჭის უკუგდებული ნაწილების რეაქციები, ე.ი. შიგა ძალები, რომლებიც მლუნავი მომენტითა და განივი ძალით წარმოადგება. რადგანაც dx_1 უსასრულოდ მცირეა, მასზე მოსული დატვირთვა შეიძლება თანაბრად განაწილებულად ჩავთვალოთ: $dR = q_1 dx_1$. თუ x_1 წერტილში გამავალ განივ კვეთში მლუნავი მომენტი და განივი ძალა M_1 და Q_1 -ია, მაშინ $x_1 + dx_1$ წერტილში გამავალ განივ კვეთში მათი მნიშვნელობები იქნებიან $M_1 + dM_1$ და

$Q_1 + dQ_1$. ძალების ვერტიკალური გეგმილების ჯამი (იხ. [3], გვ. 166)^{*)}

$$Q_1 - (Q_1 + dQ_1) + q_1 dx_1 = 0,$$

საიდანაც

$$\frac{dQ_1}{dx_1} = q_1. \quad (3.1.1)$$

ამდენად, განივი ძალის წარმოებული x_1 -ით სიდიდით და ნიშნით უდრის დატვირთვის ინტენსივობას.

O წერტილის მიმართ (იხ. ნახ. 3.1.2) მომენტების ჯამი

$$M_1 - (M_1 + dM_1) + q_1 dx_1 \frac{dx_1}{2} + Q_1 dx_1 = 0,$$

საიდანაც მეორე რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეების უკუგდების შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$M_{1,1} = Q_1. \quad (3.1.2)$$

ამდენად, მღუნავი მომენტის წარმოებული x_1 -ით სიდიდით და ნიშნით უდრის განივ ძალას.

ჩავსვათ (3.1.2)-ით განსაზღვრული Q_1 -ის გამოსახულება (3.1.1)-ში, მაშინ

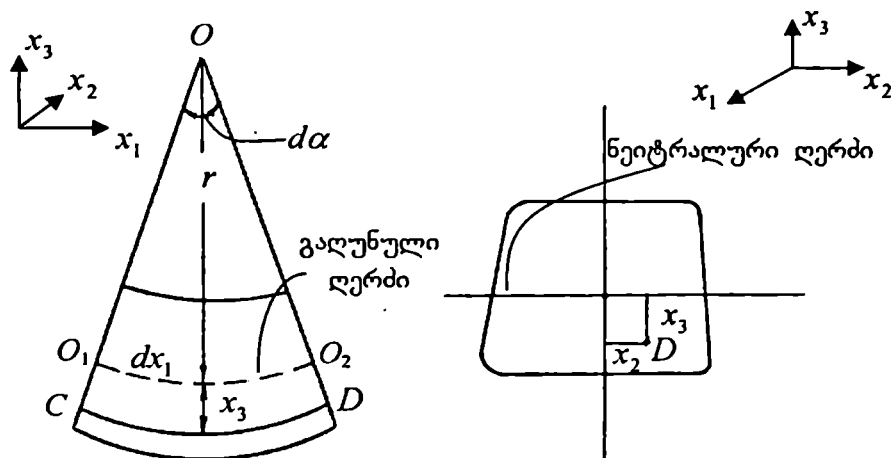
$$M_{1,11} = q_1. \quad (3.1.3)$$

შევნიშნოთ, რომ შეყურსული ძალების და მომენტების მოდების წერტილებში $M_1(x_1)$ და $Q_1(x_1)$ ფუნქციების წყვეტის გამო მათი წარმოებულები აზრს კარგავენ და ამ წერტილებში მიღებული დიფერენციალური დამოკიდებულებების გამოყენება არ შეიძლება.

ღუნვის კლასიკურ თეორიას საფუძვლად უდევს (იაკობ)

^{*)} იხ. აგრეთვე გვ. 54-59 წიგნში: Доннелл Л. Г., Балки, пластины и оболочки, "Наука", Москва, 1982.

ბერნულის^{*)} (ანუ ბრტყელი კვეთის) ჰიპოთეზა, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: ლუნვის დროს ძელში ჩნდება ორი ზონა: გაჭიმული და შეკუმშული, რომელთა საზღვარზე მოთავსებულია ნეიტრალური შრე, შემდგარი ისეთი ბოჭკოებისგან, რომლებიც სიგრძეს არ იცვლიან; განივი კვეთები ლუნვის პროცესში ბრტყელი და ძელის გაღუნული ღერძის პერპენდიკულარულნი რჩებიან; ისინი, როგორც ზისტი ფირფიტები, შემობრუნდებიან ნეიტრალური ღერძის (იხ. ნახ. 3.1.3) გარშემო, რომელიც ნეიტრალური შრისა და განივი კვეთის სიბრტყის გადაკვეთას წარმოადგენს (იხ. [3], გვ. 172).



ნახ. 3.1.3

ორი განივი კვეთით გამოვყოთ უსასრულოდ მცირე dx_1 სიგრძის ელემენტი (იხ. ნახ. 3.1.3). O არის ბოჭკოების სიბრტყის ცენ-

^{*)} ი. ბერნული (1654-1705).

ტრი, O_1O_2 ნეიტრალური შრეა, r მისი სიმრუდის რადიუსია. გაჭიმულ ზონაში აღებული ნებისმიერი CD ბოჭკოს სრული წაგრძელება

$$\Delta = |CD| - dx_1 = (r + x_3)d\alpha - r d\alpha = x_3 d\alpha,$$

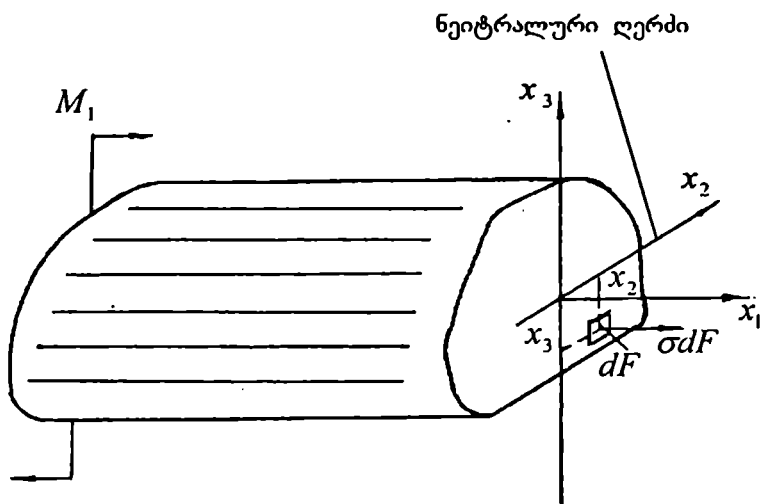
სადაც $d\alpha$ არის ელემენტის ბოლოების ურეერთმობრუნების კუთხე. ცხადია, CD ბოჭკოს ფარდობით დეფორმაციას აქვს

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{dx_1} = x_3 \frac{d\alpha}{dx_1} = \frac{x_3}{r} \quad (3.1.4)$$

სახე, სადაც

$$\frac{1}{r} = \frac{d\alpha}{dx_1} = \frac{w_{,11}}{\left[1 + (w_{,1})^2\right]^{3/2}} \quad (3.1.5)$$

ნეიტრალური შრის სიმრუდეა, ხოლო w მისი ჩალუნეაა.



ნახ. 3.1.4

ჰუკის

$$\sigma = E\varepsilon$$

კანონში ჩავსვათ (3.1.4), მაშინ

$$\sigma = E \frac{x_3}{r}. \quad (3.1.6)$$

წონასწორობის მოთხოვნიდან გამომდინარე, თუ ნულს გავუტოლობთ ყველა ძალის მომენტს ნეიტრალური ღერძის მიმართ (იხ. ნახ. 3.1.4), მივიღებთ

$$M_1 - \int_F x_3 \sigma dF = 0. \quad (3.1.7)$$

თუ (3.1.6)-ს ჩავსვამთ (3.1.7)-ში, მაშინ

$$\frac{1}{r} = \frac{M_1}{EI_2}, \quad (3.1.8)$$

სადაც

$$I_2 = \int_F x_3^2 dF$$

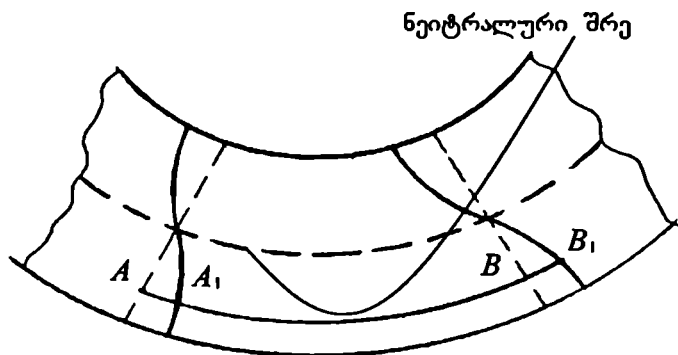
წარმოადგენს ე.წ. ინერციის მომენტს x_2 ღერძის მიმართ.

(3.1.7) ტოლობის დაწერისას ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ ღუნვა გამოწვეულია მხოლოდ წყვილძალით. თუ განივი ძალაც არსებობს, მაშინ კვეთში აღიძვრება მხები ძაბვები, რომლებიც კოჭის გრძივ სიბრტყეში ძერას იწვევენ. მაქსიმალურ ძერას ადგილი აქვს ნეიტრალურ შრესთან, შემდეგ მცირდება და განაპირა ბოჭკოებთან ისპობა. ძერის შედეგად კოჭის ღერძი განივი კვეთის მართობი არ რჩება, თვითონ განივი კვეთი კი ცილინდრული ზედაპირის ფორმას მიიღებს, რომლის მსახველი ნეიტრალური ღერძის პარალელური იქნება (იხ. ნახ. 3.1.5). როცა აღებულ უბანში $Q_1 = \text{const}$, ყველა კვეთის გამრუდება ერთნაირია, რის გამოც AB ბოჭკო მხოლოდ “ზისტ გადაადგილებას” მიიღებს და

დაიკავებს A_1B_1 მდგომარეობას, ამასთან ძვრის შედეგად ის არ დაგრძელდება. ცვლადი განივი ძალის შემთხვევაში თუმცა დამატებითი წაგრძელება ჩნდება, მაგრამ მეტად უმნიშვნელო, რაც იმის უფლებას გვაძლევს, რომ ის უგულებელვყოთ და ნორმალური ძაბვების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ

$$\sigma = \frac{M_1 x_1}{I_2}$$

ფორმულა, რომელიც (3.1.8)-ის (3.1.6)-ში ჩასმით მიიღება.



ნახ. 3.1.5

თუ ვიგულისხმებთ, რომ w ჩაღუნვა და მისი w_1 წარმოებული, რომელიც დეფორმაციის შედეგად გაღუნული ღეროს ღერძის მიერ x_1 ღერძთან შედგენილი კუთხის ტანგენსია, მცირე სიდიდეებია, მაშინ w_1 აღნიშნული კუთხის ტოლად, ხოლო $1 + (w_1)^2$ ერთის ტოლად შეიძლება ჩავთვალოთ. ამის გათვალისწინებით, (3.1.5)-ის (3.1.8)-ში ჩასმის შემდეგ დავასკვნით

$$EI_2 w_{,11} = M_1. \quad (3.1.9)$$

(3.1.9)-ის (3.1.3)-ში ჩასმა გვაძლევს ცვლადი განივი კვეთის მქონე ღეროს (ძელის, კოჭის) ღუნვის შემდეგ განტოლებას:

$$(EI_2 w_{,11})_{,11} = q_1. \quad (3.1.10)$$

თუ ღეროს განივი კვეთა ერთეულის ტოლი სიგანისა და $2h(x_1)$ სიმაღლის (ე.ი. ღეროს სისქის) მქონე მართკუთხედია, მაშინ

$$I_2 = \int_{-h}^{+h} x_3^2 dx_3 = \frac{2h^3}{3}.$$

(3.1.10) განტოლებას უნდა დაემატოს სასაზღვრო პირობები ღეროს ბოლოებში. ასეთია შემდეგი სამი ძირითადი სასაზღვრო პირობა:

1) *ხისტად ჩამაგრებული ბოლო*: ამ შემთხვევაში ღეროს ბოლოს არ შეუძლია ვერტიკალურად მოძრაობა და მობრუნება, რაც მათემატიკურად ასე ჩაიწერება:

$$w = 0, \quad w_{,1} = 0; \quad (3.1.11)$$

2) *სახსრულად დაყრდნობილი ბოლო*: ამ შემთხვევაში ღეროს ბოლოს არ შეუძლია ვერტიკალური მოძრაობა, მაგრამ შეუძლია მობრუნება, რაც მათემატიკურად ასე ჩაიწერება:

$$w = 0, \quad M_1 = 0; \quad (3.1.12)$$

3) *თავისუფალი ბოლო*: ამ შემთხვევაში ღეროს ბოლოს შეუძლია როგორც ვერტიკალური მოძრაობა, ასევე შემობრუნება, რაც მათემატიკურად ასე ჩაიწერება:

$$Q_1 = 0, \quad M_1 = 0. \quad (3.1.13)$$

დინამიკის ამოცანების განხილვისას, დაღამბერის პრინციპის თანახმად, დატვირთვას უნდა დაემატოს x_3 ღერძის პარალელური ინერციის

$$-\rho(x_1)S(x_1)\frac{\partial^2 w(x_1, t)}{\partial t^2}$$

ძალა, სადაც $\rho(x_1)$ ღეროს სიმკვრივეა, ხოლო $S(x_1)$ ღეროს განივი კვეთის ფართობი. ამდენად, ღეროს დინამიკის განტოლებას, (3.1.10)-ის ძალით, აქვს

$$\left[E(x_1) I_2(x_1) w_{,11} \right]_{11} = q_1(x_1, t) - \rho(x_1) S(x_1) \frac{\partial^2 w(x_1, t)}{\partial t^2} \quad (3.1.14)$$

სახე.

ღეროს დინამიკის ამოცანების განხილვისას (3.1.11)-(3.1.13) ტიპის სასაზღვრო პირობებს უნდა დავმატოვო

$$w(x_1, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial w(x_1, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (3.1.15)$$

საწყისი პირობები.

(3.1.11)-(3.1.15) პირობები შეიძლება არაერთგვაროვანიც იყოს.

თუ $S(x_1) = 0$ ღეროს რაიმე წერტილებში, კერძოდ, ბოლოებში, მაშინ მას წამახვილებული ღერო ეწოდება.

წამახვილებული ღეროს სტატიკისა და დინამიკის ძირითადი ამოცანების დასმის თავისებურებები და თვით სასაზღვრო და საწყის-სასაზღვრო ამოცანები, კერძოდ, არაწამახვილებული ღეროების შემთხვევაშიც, გამოკვლეულია [23]-ში.

§3.2. ღეროების იერარქიული მოდელები

ვთქვათ, ღეროს უკავია R^3 სივრცის $\bar{V}$ ნაწილი,

$$V := \left\{ (x_1, x_2, x_3) : 0 < x_1 < L, \quad h_i^{(-)}(x_1) < x_i < h_i^{(+)}(x_1), \right. \\ \left. i = 2, 3, L = \text{const} \right\},$$

$$2h_i(x_1) := h_i^{(+)} - h_i^{(-)} \geq 0, \quad h_i \in C([0, L]) \cap C^1(]0, L[), \quad i = 2, 3,$$

სადაც $2h_3$ და $2h_2$ მართკუთხა განივი კვეთის მქონე ღეროს, შესაბამისად, სისქე და სიგანეა, რომელთა მაქსიმუმები არსებობს ნაკლებია ღეროს L სიგრძეზე.

ღვეუშვით, რომ

$$f(x_1, x_2, x_3) \in C^1(V),$$

და x_1 წერტილში, სადაც არც სისქე და არც სიგანე ნული არ ხდება, შემდეგნაირად განვსაზღვროთ ფუნქციისა და მისი $f_{,j}$ წარმოებულის ორმაგი მომენტი:

$$f_{n_1 n_2}(x_1) := \int_{h_2^{(-)} h_2^{(+)}} \int_{h_3^{(-)} h_3^{(+)}} f(x_1, x_2, x_3) P_{n_2}(a_2 x_2 - b_2) P_{n_1}(a_3 x_3 - b_3) dx_2 dx_3, \quad (3.2.1)$$

$$f_{n_1 n_2}(x_1) := \int_{h_2^{(-)} h_2^{(+)}} \int_{h_3^{(-)} h_3^{(+)}} f_{,j}(x_1, x_2, x_3) P_{n_2}(a_2 x_2 - b_2) P_{n_1}(a_3 x_3 - b_3) dx_2 dx_3, \quad (3.2.2)$$

$$n_i = 0, 1, \dots, \quad i = 2, 3, \quad j = 1, 2, 3,$$

სადაც

$$a_i := \frac{1}{h_i}, \quad b_i := \frac{\tilde{h}_i}{h_i}, \quad 2\tilde{h}_i := h_i^{(+)} + h_i^{(-)}, \quad i = 2, 3,$$

P_{n_i} , $i = 2, 3$, ლეჟანდრის პოლინომებია. ცნობილია, რომ (იხ. დამატება 2 ან, მაგალითად, [4]):

$$\int_{-1}^{+1} P_k(t) P_l(t) dt = \frac{2}{2k+1} \delta_{kl},$$

ე.ი. თუ $t = a_i x_i - b_i$,^{*)} $i = 2, 3$,

$$\left(k + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(l + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{h_i^{(-)}}^{h_i^{(+)}} P_k(a_i x_i - b_i) P_l(a_i x_i - b_i) a_i dx_i = \delta_{kl}, \quad (3.2.3)$$

$$i = 2, 3.$$

თუ ერთი მაინც, ღეროს ან სისქე, ან სიგანე ნული ზდება რაიმე $x_i \in [0, L]$ წერტილში, მაშინ ამ წერტილში ორმაგი მომენტი განისაზღვრება, როგორც ზღვარი იმ წერტილებიდან, სადაც $h_i > 0$, $i = 2, 3$.

ამ პარაგრაფის მიზანია აგებული იქნას ი. ვეკუას მიერ პრიზმული გარსების შემთხვევაში აგებული იერარქიული მოდელების ანალოგიური იერარქიული მოდელები მართკუთხა კვეთის მქონე ღეროებისათვის (ეს საკითხი დაწვრილებითაა განხილული [21]-ში).

ამისათვის (1.6.3). (1.12.9) და (1.18.1) დამოკიდებულებების ორივე მხარე გავამრავლოთ $P_{n_2}(a_2 x_2 - b_2) P_{n_3}(a_3 x_3 - b_3)$ -ზე და შემდეგ ვაინტეგრირებთ x_i -ის მიმართ $h_i^{(-)}$, $h_i^{(+)}$ $i = 2, 3$, საზღვრებში. (1.12.9)-დან უშუალოდ მივიღებთ

$$X_{ij n_2 n_3} = \lambda \delta_{ij} \theta_{n_2 n_3} + 2 \mu e_{ij n_2 n_3}, \quad \theta_{n_2 n_3} := e_{kln_2 n_3}, \quad (3.2.4)$$

$$i, j = 1, 2, 3, \quad n_2, n_3 = 0, 1, \dots,$$

კერძოდ,

$$X_{ij 00} = \lambda \delta_{ij} e_{k00} + 2 \mu e_{ij 00}$$

$$*) \text{ ცხადია, } x_i = \frac{t + b_i}{a_i} = \frac{t \left[h_i^{(+)} - h_i^{(-)} \right] + h_i^{(+)} + h_i^{(-)}}{2}, \quad i = 2, 3.$$

ზოლო (3.2.2)-ისა და (3.2.3)-ის გამოყენებით, გარკვეული გამოთვლების შემდეგ, თუ $u \in C^2(V)$, ლეფორმაციის ტენზორის კომპონენტების ორმაგი მომენტებისათვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებებს:

$$e_{11n_1n_2} = u_{1n_1n_2,1} + \sum_{i=2}^3 \left(a_{n_i}^i u_{1n_1n_2} - \sum_{s=n_i}^{n_i} b_{n_i}^i a_i u_{1 \delta_{i2}n_1+\delta_{i3}s \delta_{i2s+\delta_{i3}n_2}} \right), \quad (3.2.5)$$

$$e_{i1n_1n_2} = - \sum_{s=n_i+1}^{n_i} b_{is}^i a_i u_{1 \delta_{i2}n_1+\delta_{i3}s \delta_{i2s+\delta_{i3}n_2}}, \quad i = 2, 3, \quad (3.2.6)$$

$$2e_{23n_1n_2} = - \sum_{i=2}^3 \sum_{s=n_i+1}^{n_i} b_{is}^i a_i u_{5-i \delta_{i2}n_1+\delta_{i3}s \delta_{i2s+\delta_{i3}n_2}}, \quad (3.2.7)$$

$$2e_{1in_1n_2} = u_{in_1n_2,1} + \sum_{k=2}^3 \left(a_{n_k}^k u_{in_1n_2} - \sum_{s=n_k}^{n_k} b_s^k a_k u_{1 \delta_{k2}n_1+\delta_{k3}s \delta_{k2s+\delta_{k3}n_2}} \right) \quad (3.2.8)$$

$$- \sum_{s=n_i+1}^{n_i} b_{is}^i a_i u_{1 \delta_{i2}n_1+\delta_{i3}s \delta_{i2s+\delta_{i3}n_2}},$$

$$i = 2, 3, \quad n_2, n_3 = 0, 1, \dots,$$

სადაც

$$b_s^i := \left(s + \frac{1}{2} \right) \left[h_{i,l}^{(+)} - (-1)^{s+n_i} h_{i,l}^{(-)} \right], \quad (3.2.9)$$

$$b_{is}^i := - \left(s + \frac{1}{2} \right) \left[1 - (-1)^{n_i+s} \right],$$

$$a_s^i = \begin{cases} n_i h_{i,1} \frac{1}{h_i}, & s = n_i, \\ b_s^i a_i, & s \neq n_i, \end{cases} \quad a_{i,s}^{n_i} = \begin{cases} 0 = b_{m_i}^{n_i}, & s = n_i, \\ b_{i,s}^{n_i} a_i, & s \neq n_i, \end{cases}$$

ამასთან

$$u_j(x_1, x_2, x_3) =$$

$$\sum_{m_2, m_1=0}^{\infty} a_2 a_3 \left(m_2 + \frac{1}{2} \right) \left(m_3 + \frac{1}{2} \right) u_{jm_3 m_2}(x_1) P_{m_1}(a_3 x_3 - b_3) \quad (3.2.10) \\ \times P_{m_2}(a_2 x_2 - b_2), \quad j=1,2,3,$$

და მწკრივები (3.2.5)–(3.2.8), (3.2.10)–ში თანაბრად კრებადია $\begin{bmatrix} (-) & (+) \\ h_2, & h_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (-) & (+) \\ h_3, & h_3 \end{bmatrix}$ –ზე.

მოძრაობის (1.18.1) განტოლებები კი ორმაგ მომენტებში შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$X_{1jn_3n_2,1} + \sum_{s=0}^{n_2} \left(a_s^2 X_{1jn_3s} + a_{2s}^{n_2} X_{2jn_3s} \right) \\ + \sum_{s=0}^{n_1} \left(a_s^3 X_{1jsn_2} + a_{3s}^{n_3} X_{3jsn_2} \right) \quad (3.2.11)$$

$$+ X_j^{n_3, n_2, 0} = \rho \frac{\partial^2 u_{jn_3n_2}}{\partial t^2}, \quad j=1,2,3, \quad n_3, n_2 = 0,1,\dots,$$

კერძოდ,

$$X_{1j00,1} + X_j^{0,0} = \rho \frac{\partial^2 u_{300}}{\partial t^2},$$

სადაც

$$X_j^{n_1, n_2} :=$$

$$\sum_{i=2}^3 \int_{\substack{h_i^{(+)} \\ h_i^{(-)}}} \left[\sqrt{1 + \left(h_{5-i,1}^{(+)} \right)^2} X_{\nu_{5-i,j}}^{(+)} \left(x_1, \delta_{i2} x_2 + \delta_{i3} h_2^{(+)} \delta_{i2} h_3^{(+)} + \delta_{i3} x_3 \right) \right. \\ \left. + (-1)^{n_{5-i}} \sqrt{1 + \left(h_{5-i,1}^{(-)} \right)^2} \right. \\ \left. \times X_{\nu_{5-i,j}}^{(-)} \left(x_1, \delta_{i2} x_2 + \delta_{i3} h_2^{(-)} \delta_{i2} h_3^{(-)} + \delta_{i3} x_3 \right) \right] \\ \times P_{n_i}(a_i x_i - b_i) dx_i + X_{j, n_1, n_2}, \quad j = 1, 2, 3, \quad n_3, n_2 = 0, 1, \dots, \quad (3.2.12) \\ X_{\nu_{i,j}}^{(\pm)} \left(x_1, \delta_{i2} h_2^{(\pm)} + \delta_{i3} x_2, \delta_{i2} x_3 + \delta_{i3} h_3^{(\pm)} \right) = X_{kj}^{(\pm)} \nu_{ik}, \\ i = 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \\ X_{\nu_{i,j}}^{(\pm)} \left(x_1, \delta_{i2} h_2^{(\pm)} + \delta_{i3} x_2, \delta_{i2} x_3 + \delta_{i3} h_3^{(\pm)} \right), \\ i = 2, 3, \quad j = 1, 2, 3,$$

წარმოადგენენ $x_i = h_i^{(\pm)}(x_1)$, $i = 2, 3$, ზედაპირებზე ღეროს გარედან მოქმედ ზედაპირულ ძალთა კომპონენტებს. ν_i , $i = 2, 3$, შესაბამისი გარე ნორმალეებია.

(3.2.11) შეიძლება გადმოეწეროს შემდეგი სახითაც:

$$\left(h_2^{n_2} h_3^{n_3} X_{1, n_1, n_2} \right)_1 + \sum_{i=2}^3 h_2^{n_2} h_3^{n_3} h_i^{-1} \sum_{s=0}^{n_i-1} \left(b_s^i X_{1, \delta_{i2} n_3 + \delta_{i3} s, \delta_{i2} s + \delta_{i3} n_2} \right)$$

$$+ b_{is}^{n_i} X_{ij \delta_{i2} n_3 + \delta_{i3} s \delta_{i2} s + \delta_{i3} n_2} \Big) + h_2^{n_2} h_3^{n_3} X_j^{n_3, n_2, 0}$$

$$= \rho h_2^{n_2} h_3^{n_3} \frac{\partial^2 u_{jn_3 n_2}}{\partial t^2}, \quad j = 1, 2, 3, \quad n_3 n_2 = 0, 1, \dots \quad (3.2.13)$$

ახლა დავუშვათ, რომ

$$u_{jn_3 n_2} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.2.14)$$

თუ სრულდება ერთი მაინც შემდეგი ორი პირობიდან
 $n_i > N_i, \quad i = 2, 3.$

ამ შემთხვევას ვუწოდებთ (N_3, N_2) მიახლოებას.

(N_3, N_2) მიახლოებაში (3.2.9)-დან მივიღებთ

$$u_j(x_1, x_2, x_3)$$

$$\cong \sum_{n_2=0}^{N_2} \sum_{n_3=0}^{N_3} a_2 a_3 \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) \left(n_3 + \frac{1}{2} \right) u_{jn_3 n_2} P_{n_2}(a_2 x_2 - b_2)$$

$$\times P_{n_3}(a_3 x_3 - b_3) = \sum_{n_2=0}^{N_2} \sum_{n_3=0}^{N_3} \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) \left(n_3 + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2^{n_2+n_3} n_2! n_3!}$$

$$\times \frac{d^{n_2} \left[(x_2 - \tilde{h}_2)^2 - h_2^2 \right]^{n_2}}{dx_2^{n_2}}$$

$$\times \frac{d^{n_3} \left[(x_3 - \tilde{h}_3)^2 - h_3^2 \right]^{n_3}}{dx_3^{n_3}} v_{jn_3 n_2}(x_1), \quad (3.2.15)$$

სადაც

$$v_{jn_3 n_2}(x_1) := \frac{u_{jn_3 n_2}(x_1)}{h_2^{n_2+1}(x_1) h_3^{n_3+1}(x_1)}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\begin{aligned}
 P_{n_i}(a_i x_i - b_i) &= P_{n_i}\left(\frac{x_i - \tilde{h}_i}{h_i}\right) = \frac{1}{2^{n_i} n_i!} \frac{d^{n_i} \left[\left(\frac{x_i - \tilde{h}_i}{h_i} \right)^2 - 1 \right]^{n_i}}{d \left(\frac{x_i - \tilde{h}_i}{h_i} \right)^n} \\
 &= \frac{1}{2^{n_i} n_i!} h_i^{n_i} \frac{d^{n_i} \left\{ \frac{\left[(x_i - \tilde{h}_i)^2 - h_i^2 \right]^{n_i}}{h_i^{2n_i}} \right\}}{dx_i^{n_i}} \\
 &= \frac{1}{2^{n_i} n_i!} \frac{1}{h_i^{n_i}} \frac{d^{n_i} \left[(x_i - \tilde{h}_i)^2 - h_i^2 \right]^{n_i}}{dx_i^{n_i}}, \quad i = 2, 3.
 \end{aligned}$$

(3.2.14), (3.2.15), (3.2.9)-ის გათვალისწინებით (3.2.5)-(3.2.8) და (3.2.4)-დან გამომდინარეობს

$$e_{11n_1n_2} = h_2^{n_2+1} h_3^{n_3+1} v_{1n_1n_2,1}$$

$$- \sum_{i=2}^3 \sum_{s=n_i+1}^{N_i} \frac{h_2^{\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2+1} h_3^{\delta_{i2}n_1+\delta_{i3}s+1}}{h_i} b'_s v_{1 \delta_{i2}n_1+\delta_{i3}s \delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2},$$

$$\sum_{s=N_i+1}^{N_i} (...) = 0,$$

კერძოდ, თუ $N_i = 0$, მაშინ

$$e_{1100} = h_2 h_3 v_{100,1};$$

$$e_{i1n_3n_2} = - \sum_{s=n_i+1}^{N_i} \frac{h_2^{\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_3+1} h_3^{\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s+1}}{h_i} b_{is}^{n_i} v_{i \delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s \delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2},$$

$$i = 2, 3,$$

კერძოდ, თუ $N_i = 0$, მაშინ

$$e_{i100} = 0, \quad i = 2, 3;$$

$$2e_{23n_3n_2} = - \sum_{i=2}^3 \sum_{s=n_i+1}^{N_i} \frac{h_2^{\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_3+1} h_3^{\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s+1}}{h_i} b_{is}^{n_i} v_{5-i \delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s \delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2},$$

კერძოდ, თუ $N_i = 0$, მაშინ

$$e_{2300} = 0;$$

$$2e_{1in_3n_2} = h_2^{n_2+1} h_3^{n_3+1} v_{in_3n_2,1}$$

$$- \sum_{k=2}^3 \sum_{s=n_k+1}^{N_k} \frac{h_2^{\delta_{k2}s+\delta_{k3}n_3+1} h_3^{\delta_{k2}n_3+\delta_{k3}s+1}}{h_k} b_s^k v_{i \delta_{k2}n_3+\delta_{k3}s \delta_{k2}s+\delta_{k3}n_2}$$

$$- \sum_{s=n_i+1}^{N_i} \frac{h_2^{\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_3+1} h_3^{\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s+1}}{h_i} b_{is}^{n_i} v_{i \delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s \delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2}, \quad i = 2, 3,$$

კერძოდ, თუ $N_i = 0$, მაშინ

$$2e_{1i00} = h_2 h_3 v_{i00,1}, \quad i = 2, 3;$$

$$X_{11n_3n_2} = (\lambda + 2\mu) e_{11n_3n_2} + \lambda \sum_{i=2}^3 e_{iin_3n_2}$$

$$= (\lambda + 2\mu) (h_2^{n_2+1} h_3^{n_3+1} v_{1n_3n_2,1}$$

$$- \sum_{i=2}^3 \sum_{s=n_i+1}^{N_i} h_2^{\delta_{i,2}s+\delta_{i,1}n_1+1} h_3^{\delta_{i,2}n_1+\delta_{i,3}s+1} h_i^{-1} b_{is}^{n_i} v_{i, \delta_{i,2}n_1+\delta_{i,3}s, \delta_{i,3}s+\delta_{i,1}n_1} \Bigg) \quad (3.2.16)$$

$$- \lambda \sum_{i=2}^3 \sum_{s=n_i+1}^{N_i} h_2^{\delta_{i,2}s+\delta_{i,3}n_1+1} h_3^{\delta_{i,2}n_1+\delta_{i,3}s+1} h_i^{-1} b_{is}^{n_i} v_{i, \delta_{i,2}n_1+\delta_{i,3}s, \delta_{i,2}s+\delta_{i,1}n_1},$$

კერძოდ, თუ $N_i = 0$, მაშინ

$$X_{1100} = (\lambda + 2\mu) h_2 h_3 v_{100,1};$$

$$X_{ii n_1 n_2} = \lambda (e_{11 n_1 n_2} + e_{5-i 5-i n_1 n_2}) + (\lambda + 2\mu) e_{ii n_1 n_2}$$

$$= \lambda (h_2^{n_2+1} h_3^{n_1+1} v_{1 n_1 n_2, 1}$$

$$- \sum_{k=2}^3 \sum_{s=n_k+1}^{N_k} h_2^{\delta_{k,2}s+\delta_{k,3}n_2+1} h_3^{\delta_{k,2}n_1+\delta_{k,3}s+1} h_k^{-1} b_s^{n_k} v_{1, \delta_{k,2}n_1+\delta_{k,3}s, \delta_{k,2}s+\delta_{k,1}n_2}$$

$$- \sum_{s=n_{5-i}+1}^{N_{5-i}} h_2^{\delta_{5-i,2}s+\delta_{5-i,3}n_2+1} h_3^{\delta_{5-i,2}n_1+\delta_{5-i,3}s+1} h_{5-i}^{-1} b_{5-i s}^{n_{5-i}}$$

$$\times v_{5-i, \delta_{5-i,2}n_1+\delta_{5-i,3}s, \delta_{5-i,2}s+\delta_{5-i,1}n_2} \Bigg)$$

$$- (\lambda + 2\mu) \sum_{s=n_i+1}^{N_i} h_2^{\delta_{i,2}s+\delta_{i,3}n_2+1} h_3^{\delta_{i,2}n_1+\delta_{i,3}s+1} h_i^{-1} b_{is}^{n_i} v_{i, \delta_{i,2}n_1+\delta_{i,3}s, \delta_{i,2}s+\delta_{i,1}n_2},$$

$$i = 2, 3, \quad (3.2.17)$$

კერძოდ, თუ $N_i = 0$, მაშინ

$$X_{ii00} = \lambda h_2 h_3 v_{100,1}; \quad i = 2, 3;$$

$$X_{23 n_1 n_2} = 2\mu e_{23 n_1 n_2} \quad (3.2.18)$$

$$= -\mu \sum_{i=2}^3 \sum_{s=n_i+1}^{N_i} h_2^{\delta_{i,2}s+\delta_{i,3}n_2+1} h_3^{\delta_{i,2}n_1+\delta_{i,3}s+1} h_i^{-1} b_{is}^{n_i} v_{5-i, \delta_{i,2}n_1+\delta_{i,3}s, \delta_{i,2}s+\delta_{i,1}n_2},$$

კერძოდ, თუ $N_i = 0$, მაშინ

$$X_{2300} = 0;$$

$$\begin{aligned}
X_{1in_3n_2} &= 2\mu e_{1in_3n_2} = \mu \left(h_2^{n_2+1} h_3^{n_3+1} v_{in_3n_2,1} \right. \\
&- \sum_{k=2}^3 \sum_{s=n_k+1}^{N_k} h_2^{\delta_{k2}s+\delta_{k3}n_2+1} h_3^{\delta_{k2}n_3+\delta_{k3}s+1} h_k^{-1} b_s^k v_{i \delta_{k2}n_3+\delta_{k3}s \delta_{k2}s+\delta_{k3}n_2} \\
&- \left. \sum_{s=n_i+1}^{N_i} h_2^{\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_3+1} h_3^{\delta_{i1}n_3+\delta_{i3}s+1} h_i^{-1} b_s^i v_{1 \delta_{i1}n_3+\delta_{i3}s \delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2} \right), \quad (3.2.19) \\
&i = 2, 3,
\end{aligned}$$

$$n_i = \overline{0, N_i}, \quad i = 2, 3,$$

კერძოდ, თუ $N_i = 0$, მაშინ

$$X_{1,00} = \mu h_2 h_3 v_{1,00,1}; \quad i = 2, 3.$$

(3.2.16)-(3.2.19)-ის ჩასმა (3.2.13) სისტემის პირველ $3(N_3 + 1)(N_2 + 1)$ განტოლებაში ფიქსირებული $j = 1, 2, 3$ -სათვის გვაძლევს შემდეგ $3(N_3 + 1)(N_2 + 1)$ განტოლებისაგან შემდგარ სისტემას $3(N_3 + 1)(N_2 + 1)$

$$v_{jrs}(x, t), \quad r = \overline{0, N_3}, \quad s = \overline{0, N_2}, \quad j = 1, 2, 3,$$

უცნობის მიმართ:

$$\begin{aligned}
\Lambda_j \left(h_2^{2n_2+1} h_3^{2n_3+1} v_{jn_3n_2,1} \right)_{,1} &+ \sum_{i=1}^3 \sum_{r=0}^{N_i} \sum_{s=0}^{N_2} (R_{rs}^{ij} v_{irs,1} + S_{rs}^{ij} v_{irs}) + h_2^{n_2} h_3^{n_3} X_j^{n_2, n_3} \\
&= \rho h_2^{n_2} h_3^{n_3} \frac{\partial^2 h_2^{n_2+1} h_3^{n_3+1} v_{jn_3n_2}}{\partial t^2}, \quad j = 1, 2, 3; \quad (3.2.20)
\end{aligned}$$

$$n_i = \overline{0, N_i}, \quad i = 2, 3,$$

კერძოდ, თუ $N_i = 0$, მაშინ

$$\Lambda_j (h_2 h_3 v_{j,00,1})_{,1} + X_j^{0,0} = \rho \frac{\partial^2 h_2 h_3 v_{j,00}}{\partial t^2}$$

სადაც

$$\Lambda_j := \begin{cases} \lambda + 2\mu, & j = 1, \\ \mu, & j = 2, 3, \end{cases}$$

$R_{rs}^{ij}(x_1)$, $S_{rs}^{ij}(x_1)$, გამოსახულია λ , μ , $h_i(x_1)$, $\tilde{h}_i(x_1)$, $i = 2, 3$ სიდიდეებით, ამასთან ზოგიერთი მათგანი ნულია, ზოგიერთი კი, ზოგადად, შემოუსაზღვრავია $]0, L[-$ ზე. მართლაც, თუ $j = 1$:

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \left(h_2^{2n_1+1} h_3^{2n_1+1} v_{1n_1n_2,1} \right)_1 \\ & - \left(\sum_{i=2}^3 \sum_{s=n_i+1}^{N_i} h_2^{\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2+n_2+1} h_3^{\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s+n_3+1} h_i^{-1} \right. \\ & \times \left[(\lambda + 2\mu) b_s^{n_i} v_{1\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2} + \lambda b_{1s}^{n_i} v_{1\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2} \right] \Bigg)_1 \\ & + \sum_{i=2}^3 h_2^{n_2} h_3^{n_3} h_i^{-1} \sum_{s=0}^{n_i-1} \left\{ h_2^{\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2+1} h_3^{\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s+1} \right. \\ & \times \left[(\lambda + 2\mu) b_s^{n_i} v_{1\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2,1} + \mu b_{1s}^{n_i} v_{1\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2,1} \right] \\ & - \sum_{k=2}^3 \sum_{r=\delta_{k2}(\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2)+\delta_{k3}(\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s)+1}^{N_k} h_2^{\delta_{k2}r+\delta_{k3}(\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2)+1} h_3^{\delta_{k2}(\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s)+\delta_{k3}r+1} h_k^{-1} \\ & \times \left[(\lambda + 2\mu) b_s^{n_i} b_r^{n_k} v_{1\delta_{k2}(\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s)+\delta_{k3}(\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s)} \right. \\ & \times v_{1\delta_{k2}(\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s)+\delta_{k3}r\delta_{k2}r+\delta_{k3}(\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\lambda b'_s \frac{n_i}{b_{kr}} \frac{\delta_{k2}(\delta_{i2}s + \delta_{i1}n_2) + \delta_{k3}(\delta_{i2}n_3 + \delta_{i3}s)}{b_{kr}} + \mu b_{is} \frac{n_i}{b_r} \frac{\delta_{k2}(\delta_{i2}s + \delta_{i1}n_2) + \delta_{k3}(\delta_{i2}n_3 + \delta_{i3}s)}{b_r} \right) \\
& \times v_{i\delta_{k2}(\delta_{i2}n_1 + \delta_{i1}s) + \delta_{k1}r\delta_{k2}r + \delta_{k3}(\delta_{i2}s + \delta_{i1}n_2)} \\
& - \mu \sum_{r=s+1}^{N_i} h_2^{\delta_{i2}r + \delta_{i3}n_2 + 1} h_3^{\delta_{i2}n_3 + \delta_{i3}r + 1} h_i^{-1} b_{ir}^s b_{is}^{n_i} v_{i\delta_{i2}n_1 + \delta_{i3}r\delta_{i2}r + \delta_{i3}n_2} \Big\} \\
& + h_2^{n_2} h_3^{n_3} X_1^0 = \rho h_2^{2n_2+1} h_3^{2n_3+1} \frac{\partial v_{ln_3n_2}}{\partial l^2}; \tag{3.2.21}
\end{aligned}$$

$$n_i = \overline{0, N_i}, \quad i = 2, 3.$$

ማ $j = 2, 3$:

$$\begin{aligned}
& \mu \left(h_2^{2n_2+1} h_3^{2n_3+1} v_{jn_3n_2,1} \right)_{,1} \\
& - \mu \left(\sum_{k=2}^3 \sum_{s=n_k+1}^{N_k} h_2^{\delta_{k2}s + \delta_{k1}n_2 + n_2 + 1} h_3^{\delta_{k2}n_3 + \delta_{k3}s + n_3 + 1} h_k^{-1} b_{ks}^{n_k} v_{j\delta_{k2}n_1 + \delta_{k3}s\delta_{k2}s + \delta_{k1}n_2} \right. \\
& + \left. \sum_{s=n_j+1}^{N_k} h_2^{\delta_{j2}s + \delta_{j3}n_2 + n_2 + 1} h_3^{\delta_{j2}n_3 + \delta_{j3}s + n_3 + 1} h_j^{-1} b_{js}^{n_j} v_{1\delta_{j2}n_3 + \delta_{j3}s\delta_{j2}s + \delta_{j1}n_2} \right)_{,1} \\
& + \sum_{i=2}^3 h_2^{n_2 - \delta_{i2}} h_3^{n_3 - \delta_{i3}} \\
& \times \sum_{s=0}^{n_i-1} \mu b'_s \left[h_2^{\delta_{i2}s + \delta_{i1}n_2 + 1} h_3^{\delta_{i2}n_3 + \delta_{i3}s + 1} v_{j\delta_{i2}n_3 + \delta_{i3}s\delta_{i2}s + \delta_{i1}n_2,1} \right. \\
& - \sum_{k=2}^3 \sum_{r=\delta_{k2}(\delta_{i2}s + \delta_{i1}n_2) + \delta_{k3}(\delta_{i2}n_3 + \delta_{i3}s) + 1}^{N_k} h_2^{\delta_{k2}r + \delta_{k3}(\delta_{i2}s + \delta_{i1}n_2) + 1} h_3^{\delta_{k2}(\delta_{i2}n_3 + \delta_{i3}s) + \delta_{k3}r + 1} h_k^{-1} \\
& \times \left. b_r^k v_{j\delta_{k2}(\delta_{i2}n_3 + \delta_{i3}s) + \delta_{k3}r\delta_{k2}r + \delta_{k3}(\delta_{i2}s + \delta_{i1}n_2)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{r=\delta_{j,2}(\delta_{1,2}s+\delta_{1,2}n_3)+\delta_{j,3}(\delta_{1,2}n_3+\delta_{1,3}s)+1 \\ \delta_{j,2}(\delta_{1,2}s+\delta_{1,2}n_3)+\delta_{j,3}(\delta_{1,2}n_3+\delta_{1,3}s)}}^{N_j} h_2^{\delta_{j,2}r+\delta_{j,3}(\delta_{1,2}s+\delta_{1,2}n_3)+1} h_3^{\delta_{j,2}(\delta_{1,2}n_3+\delta_{1,3}s)+\delta_{j,3}r+1} h_j^{-1} \\
& \times b_{j,r} \\
& \times v_{1 \delta_{j,2}(\delta_{1,2}n_3+\delta_{1,3}s)+\delta_{j,3} \delta_{j,2}r+\delta_{j,3}(\delta_{1,2}s+\delta_{1,2}n_3)}] + H_j \\
& + h_2^{n_2} h_3^{n_3} X_j^{n_1, n_3} = \rho h_2^{2n_2+1} h_3^{2n_3+1} \frac{\partial v_{j n_3 n_2}}{\partial t^2}; \quad (3.2.22)
\end{aligned}$$

$$n_i = \overline{0, N_i}, \quad i = 2, 3,$$

სადაც

$$H_j := \sum_{i=2}^3 h_2^{n_2-\delta_{i,2}} h_3^{n_3-\delta_{i,3}} \sum_{s=0}^{n_i-1} b_{is} X_{ij \delta_{i,2} n_3 + \delta_{i,3} s \delta_{i,2} s + \delta_{i,3} n_2}, \quad j = 2, 3,$$

გ.ა.

$$\begin{aligned}
H_2 &= h_2^{n_2-1} h_3^{n_3} \sum_{s=0}^{n_2-1} b_{2s} X_{22 n_3, s} + h_2^{n_2} h_3^{n_3-1} \sum_{s=0}^{n_1-1} b_{3s} X_{32 s n_2} \\
&= h_2^{n_2-1} h_3^{n_3} \sum_{s=0}^{n_2-1} b_{2s} \left[\lambda (h_2^{s+1} h_3^{n_3+1} v_{1 n_1, s, 1} \right. \\
&- \sum_{k=2}^3 \sum_{r=\delta_{k,2}s+\delta_{k,3}n_3+1}^{N_k} h_2^{\delta_{k,2}r+\delta_{k,3}s+1} h_3^{\delta_{k,2}n_3+\delta_{k,3}r+1} h_k^{-1} b_r^k v_{1 \delta_{k,2}n_3+\delta_{k,3}r \delta_{k,2}r+\delta_{k,3}s} \\
&- \left. \sum_{r=n_3+1}^{N_3} h_2^{s+1} h_3^{r+1} h_3^{-1} b_{3r} v_{3rs} \right] - (\lambda + 2\mu) \sum_{r=s+1}^{N_2} h_2^{r-1} h_3^{n_3+1} h_2^{-1} b_{2r}^s v_{2n_3r} \\
&- \mu h_2^{n_2} h_3^{n_3-1} \sum_{s=0}^{n_3-1} b_{3s} \sum_{i=2}^3 \sum_{r=\delta_{i,2}n_2+\delta_{i,3}s+1}^{N_i} h_2^{\delta_{i,2}r+\delta_{i,3}n_2+1} h_3^{\delta_{i,2}s+\delta_{i,3}r+1} h_i^{-1} \\
&\times b_{i,r} v_{5-i \delta_{i,2}s+\delta_{i,3}r \delta_{i,2}r+\delta_{i,3}n_2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_3 &= h_2^{n_2-1} h_3^{n_3} \sum_{s=0}^{n_2-1} b_{2s} X_{23n_3s} + h_2^{n_2} h_3^{n_3-1} \sum_{s=0}^{n_3-1} b_{3s} X_{33sn_2} \\
&= -\mu h_2^{n_2-1} h_3^{n_3} \sum_{s=0}^{n_2-1} b_{2s} \sum_{i=2}^3 \sum_{r=\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_3+1}^{N_i} h_2^{\delta_{i2}r+\delta_{i3}s+1} h_3^{\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}r+1} h_i^{-1} \\
&\quad \times b_{ir} v_{s-i} \delta_{i2}n_3+\delta_{i3}r \delta_{i2}r+\delta_{i3}s \\
&\quad + h_2^{n_2} h_3^{n_3-1} \sum_{s=0}^{n_3-1} b_{3s} \left[\lambda (h_2^{n_2+1} h_3^{s+1} v_{1sn_2,1} \right. \\
&\quad - \sum_{k=2}^3 \sum_{r=\delta_{k2}n_2+\delta_{k3}s+1}^{N_k} h_2^{\delta_{k2}r+\delta_{k3}n_2+1} h_3^{\delta_{k2}s+\delta_{k3}r+1} h_k^{-1} b_r^k v_{1\delta_{k2}s+\delta_{k3}r \delta_{k2}r+\delta_{k3}n_2} \\
&\quad \left. - \sum_{r=n_2+1}^{N_1} h_2^{r+1} h_3^{s+1} h_2^{-1} b_{2r} v_{2sr} \right] - (\lambda + 2\mu) \sum_{r=s+1}^{N_1} h_2^{n_2+1} h_3^{r+1} h_3^{-1} b_{3r} v_{3sr} \Big].
\end{aligned}$$

ადგილი მისახედრია, რომ იქ, სადაც ღეროს სისქესა და სიგანიდან ერთი მაინც ნულის ტოლია, სისტემას აქვს რიგის გადაგარება x_1 -ის შესაბამისი მნიშვნელობებისათვის.

3.2.1. საწყის-სასაზღვრო ამოცანები

განვიხილოთ (N_3, N_2) მიახლოება. დავუშვათ, რომ ღეროს $x_i = h_i^{(\pm)}(x_1)$, $i = 2, 3$, ზედაპირებზე მოქმედებენ ზედაპირული ძალები (იხ. (3.2.12)), ხოლო ბოლოებზე, რომლებიც $x_1 = 0$ და $x_1 = L$ სიბრტყეების მართკუთხა ნაწილებს წარმოადგენენ, მოცემულია გადაადგილების ან ზედაპირული ძალების კომპონენტები. თუ $2h_i(0) > 0$ და $2h_i(L) > 0$, $i = 2, 3$, მაშინ ღეროს ბო-

ლოებზე ორმაგი მომენტებისათვის სასაზღვრო პირობები შეიძლება შემდეგნაირად დაისვას.

1. სასაზღვრო პირობები გადაადგილებებში:

$$v_{jrs} = f_{jrs}, \quad j = 1, 2, 3, \quad r = 0, \dots, N_3, \quad s = 0, \dots, N_2, \quad (3.2.23)$$

აქ f_{jrs} ბოლოებში დასახელებული მუდმივებია. დინამიკურ შემთხვევაში მათ ემატება

$$v_{jrs}|_{l=0} = \varphi_{jrs}(x_1), \quad \partial v_{jrs} / \partial l|_{l=0} = \psi_{jrs}(x_1), \quad (3.2.24)$$

$$x_1 \in]0, L[, \quad j = 1, 2, 3, \quad r = \overline{0, N_3}, \quad s = \overline{0, N_2},$$

საწყისი პირობები, სადაც φ_{jrs} , ψ_{jrs} მოცემული ფუნქციებია, ხოლო f_{jrs} , ზოგადად, l -ზე დამოკიდებული ფუნქციებია.

2. სასაზღვრო პირობები ძაბვებში:

$$X_{lrs} = g_{jrs}, \quad j = 1, 2, 3, \quad r = \overline{0, N_3}, \quad s = \overline{0, N_2} \quad (3.2.25)$$

აქ g_{jrs} ბოლოებში დასახელებული მუდმივებია.

3. შერეული სასაზღვრო პირობები: ამ შემთხვევაში ღეროს ერთ-ერთ ბოლოში (3.2.23) პირობებია მოცემული, ხოლო მეორე ბოლოში – (3.2.25); ან j -ს რაიმე მნიშვნელობებისათვის მოცემულია (3.2.23) პირობები, ხოლო დანარჩენისათვის – (3.2.25).

თუ ღეროს ბოლოში $2h_i$, $i = 2, 3$, სიდიდეებიდან ერთი მაინც ხდება ნული, მაშინ მარცხენა მხარეები (3.2.23)-სა და (3.2.25)-ში უნდა გავიგოთ, როგორც ზღვრები $]0, L[$ ინტერვალთან. ზოგ შემთხვევაში (3.2.23) პირობები იცვლება შესაბამისი v_{jrs} -ების შემოსაზღვრულობით.

დასმული ამოცანების გამოსაკვლევად შეიძლება წარმატებით იქნას გამოყენებული ცნობილი სამეცნიერო ლიტერატურა ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა (იხ., მაგალითად, [46]) და ჰიპერბოლურ განტოლებათა (იხ. მაგალითად, [49]) თეორიაში. თუმცა მათი გამოყენება მოითხოვს გარკვეულ დამატებით გა-

მოკლევებს, განსაკუთრებით წამახვილებულ, ე.ი., როცა $2h_i(x_1) \geq 0$, $i = 2, 3$, $x_1 \in [0, L]$, ღეროს შემთხვევაში.

როცა $2h_i(x_1) > 0$, $i = 2, 3$, $x_1 \in [0, L]$, იმის გათვალისწინებით, რომ (3.2.21), (3.2.22) სისტემა სტატიკურ შემთხვევაში შეიძლება დაყვანილ იქნას პირველი რიგის წრფივ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაზე, დასმული ამოცანების ამოხსნადობა რეგულარულ (C^2) ფუნქციათა კლასში, ცნობილი თეორემის (იხ. [46], გვ. 146) თანახმად, გამომდინარეობს მათი ამონახსნების ერთადერთობიდან. ამონახსნის ერთადერთობის საკითხი შესწავლილია [21]-ში.

როცა $2h_i(x_1) \geq 0$, $i = 2, 3$, $x_1 \in [0, L]$, შეიძლება დაისვას შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$v_{jn_3n_2}(0) = \varphi_{jn_3n_2}^0, \text{ თუ}$$

$$I_0^{n_1, n_2} < +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad n_i = \overline{0, N_i}, \quad i = 2, 3; \quad (3.2.26)$$

$$v_{jn_3n_2}(L) = \varphi_{jn_3n_2}^L \text{ თუ}$$

$$I_L^{n_1, n_2} < +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad n_i = \overline{0, N_i}, \quad i = 2, 3; \quad (3.2.27)$$

$$v_{jn_3n_2}(x_1) = O(1) \text{ თუ}$$

$$x_1 \rightarrow 0+, \quad I_0^{n_1, n_2} = +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad n_i = \overline{0, N_i}, \quad i = 2, 3; \quad (3.2.28)$$

$$v_{jn_3n_2}(x_1) = O(1) \text{ თუ}$$

$$x_1 \rightarrow L-, \quad I_L^{n_1, n_2} = +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad n_i = \overline{0, N_i}, \quad i = 2, 3; \quad (3.2.29)$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0+} h_2^{n_2} h_3^{n_3} X_{1jn_3n_2}(x_1) = \lim_{x_1 \rightarrow 0+} \{ \Lambda_j h_2^{2n_2+1} h_3^{2n_3+1} v_{jn_3n_2,1}$$

$$\begin{aligned}
& -\Lambda_j \sum_{k=2}^3 \sum_{s=n_k+1}^{N_k} h_2^{\delta_{k2}s+(\delta_{k3}+1)n_2+1} h_3^{\delta_{k3}s+(\delta_{k2}+1)n_3+1} h_k^{-1} b_r^k v_{j \delta_{k2}n_3-\delta_{k3}s \delta_{k2}s+\delta_{k3}n_2} \\
& - \left[\delta_{j1} \lambda \sum_{i=2}^3 + \delta_{ij} (\delta_{j2} + \delta_{j3}) \mu \right] \sum_{s=n_i+1}^{N_i} h_2^{\delta_{i2}s+(\delta_{i3}+1)n_2+1} h_3^{(\delta_{i1}+1)n_3+\delta_{i3}s+1} h_i^{-1} \\
& \times b_{is}^{n_i} v_{\delta_{ji}+\delta_{j2}+\delta_{j3} \delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s \delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2} \Big\} = \psi_{jn_3n_2}^0,
\end{aligned}$$

$$\text{თუ } I_0^{n_1, n_2} \leq +\infty, \quad j=1,2,3, \quad n_i = \overline{0, N_i}, \quad i=2,3; \quad (3.2.30)$$

$$\lim_{x_i \rightarrow l, -} h_2^{n_2} h_3^{n_3} X_{1jn_3n_2}(x_1) = \psi_{jn_3n_2}^L,$$

$$\text{თუ } I_L^{n_1, n_2} \leq +\infty, \quad j=1,2,3, \quad n_i = \overline{0, N_i}, \quad i=2,3. \quad (3.2.31)$$

აქ $\varphi_{jn_3n_2}^0$, $\varphi_{jn_3n_2}^L$, $\psi_{jn_3n_2}^0$, $\psi_{jn_3n_2}^L$ მოცემული მუდმივებია,

$$I_0^{n_3, n_2} := \int_0^\varepsilon h_2^{-2n_2-1}(\tau) h_3^{-2n_3-1}(\tau) d\tau, \quad \varepsilon = \text{const} > 0,$$

$$I_L^{n_3, n_2} := \int_{L-\varepsilon}^L h_2^{-2n_2-1}(\tau) h_3^{-2n_3-1}(\tau) d\tau, \quad \varepsilon = \text{const} > 0.$$

(3.2.21), (3.2.22), (3.2.26), (3.2.27); (3.2.21), (3.2.22), (3.2.26), (3.2.31); (3.2.21), (3.2.22), (3.2.27), (3.2.30); (3.2.21), (3.2.22), (3.2.26), (3.2.29); (3.2.21), (3.2.22), (3.2.27), (3.2.28) სასაზღვრო ამოცანები ცალსახად ამოხსნადია, ხოლო (3.2.21), (3.2.22), (3.2.28), (3.2.29) სასაზღვრო ამოცანა ამოხსნადია ზისტი გადაადგილების სიზუსტით (იხ. [21]). ანალოგიური დასკვნების გამოტანა შეიძლება უცნობი სიდიდეების ინტეგრლების მიმართ შერეული სასაზღვრო ამოცანების მიმართაც.

დინამიკურ შემთხვევაში ზემოხსენებულ სასაზღვრო პირობებს ემატება (3.2.24) საწყისი პირობები. საწყისი პირობების დასმა, სასაზღვრო პირობებისაგან განსხვავებით, ღეროს წამახვილებაზე არ არის დამოკიდებული, რადგან (3.2.21), (3.2.22) სისტემა არ არის გადაგვარებული t -ს მიმართ საერთოდ და, კერძოდ, როცა $t = 0$.

N_3, N_2 -ის თითოეული კონკრეტული მნიშვნელობის შემთხვევაში ვიღებთ კონკრეტულ იერარქიულ მოდელს – მიახლოებას. თითოეული მათგანი წარმოადგენს დამოუკიდებელ მათემატიკურ მოდელს, რომელსაც დამოუკიდებელი პრაქტიკული მნიშვნელობა გააჩნია. მაგალითად, $(0,0)$ მიახლოება შეესაბამება ღეროს გაჭიმვა-კუმშვის კლასიკურ მოდელს, ხოლო $(1,0)$ მიახლოება – ღეროს კლასიკური ღუნვის მოდელს კოეფიციენტების სიზუსტით.

წამახვილებული ღეროებისა და ფირფიტების კორექტულად დასმული სასაზღვრო ამოცანების მიმართების საკითხი სამგანზომილებიანი მოდელის სასაზღვრო ამოცანებთან განხილულია [22]-სა და [24]-ში.

3.2.2. $(0,0)$ მიახლოება

განსახილველ შემთხვევაში (3.2.15)-(3.2.19)-დან გამომდინარეობს:

$$u_j(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4} v_{j00}(x_1, t), \quad j = 1, 2, 3;$$

$$e_{1100} = h_2 h_3 v_{100,1}; \quad e_{i100} = 0, \quad i = 2, 3; \quad e_{2300} = 0;$$

$$2e_{1i00} = h_2 h_3 v_{100,1}, \quad i = 2, 3;$$

$$X_{1100} = (\lambda + 2\mu) h_2 h_3 v_{100,1}; \quad X_{i100} = \lambda h_2 h_3 v_{100,1}, \quad i = 2, 3;$$

$$X_{2300} = 0; \quad X_{1i00} = \mu h_2 h_3 v_{100,1}, \quad i = 2, 3.$$

(0,0) მიახლოებაში (3.2.21), (3.2.22) სისტემა იღებს შემდეგ სახეს:

$$\left(h_2 h_3 v_{j,1}(x_1, t)\right)_{,1} + \overset{0,0}{Y}_j = \Lambda_j^{-1} \rho h_2 h_3 \frac{\partial^2 v_j(x_1, t)}{\partial t^2}, \quad (3.2.32)$$

$$j = 1, 2, 3,$$

$$v_j(x_1, t) := \frac{u_{j \ 00}(x_1, t)}{h_2(x_1)h_3(x_1)}, \quad \overset{0,0}{Y}_1 := \frac{X_1^0}{\lambda + 2\mu}, \quad \overset{0,0}{Y}_i := \frac{X_i^0}{\mu}, \quad i = 2, 3.$$

როგორც ვხედავთ, სისტემა დაიშალა სამ დამოუკიდებელ ერთი და იმავე ტიპის განტოლებად. ადვილი სანახავია, რომ სტატიკურ შემთხვევაში (ე.ი., (3.2.32)-ის მარჯვენა მხარეში ნულია)

$$\left(h_2 h_3 v_{j,1}(x_1, t)\right)_{,1} + \overset{0,0}{Y}_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.2.33)$$

და მათ ზოგად ამონახსნს $C^2([0, L])$ კლასში აქვს

$$v_j(x_1) = - \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{d\tau}{h_2(\tau)h_3(\tau)} \int_{x_1^0}^{\tau} \overset{0,0}{Y}_j(t) dt + c'_j \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{d\tau}{h_2(\tau)h_3(\tau)} + c'_2, \quad (3.2.34)$$

$$x_1^0 = \text{const} \in]0, l[, \quad c'_\alpha = \text{const}, \quad \alpha = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3,$$

სახე.

(3.2.26)-(3.2.31) სასაზღვრო პირობები იღებენ

$$v_j(0) = \varphi_j^0 \text{ (დირიხლეს პირობა),} \quad (3.2.35)$$

$$\text{თუ } I_0^{0,0} < +\infty, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$v_j(L) = \varphi_j^L \text{ (დირიხლეს პირობა),} \quad (3.2.36)$$

$$\text{თუ } I_L^{0,0} < +\infty, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$v_j(x_1) = O(1), \quad x \rightarrow 0+, \quad \text{თუ } I_0^{0,0} = +\infty, \quad j = 1, 2, 3; \quad (3.2.37)$$

$$v_j(x_1) = O(1), \quad x \rightarrow L-, \quad \text{თუ } I_L^{0,0} = +\infty, \quad j = 1, 2, 3; \quad (3.2.38)$$

$$X_{1,00}(0) = \Lambda_j h_2 h_3 v_{j,1}|_{x_1=0} = \psi_j^0 \quad (\text{ნოიმანის წონიანი პირობა}),$$

$$\text{თუ } I_0^{0,0} \leq +\infty, j = 1, 2, 3; \quad (3.2.39)$$

$$X_{1,00}(L) = \Lambda_j h_2 h_3 v_{j,1}|_{x_1=L} = \psi_j^L \quad (\text{ნოიმანის წონიანი პირობა}),$$

$$\text{თუ } I_L^{0,0} \leq +\infty, j = 1, 2, 3, \quad (3.2.40)$$

სახეს, სადაც $\varphi_j^0, \psi_j^0, \varphi_j^L, \psi_j^L$ მოცემული მუდმივებია.

ვთქვათ, $Y_{j,00} \in L([0, L])$, ე.ი. ინტეგრებადია (ჯამებადია) და
 თუ $I_0^{0,0} = +\infty \left(I_L^{0,0} = +\infty \right)$, მაშინ ის ისეთია, რომ (3.2.34)-ში
 იტერირებული ინტეგრალი იყოს შემოსაზღვრული, როცა
 $x_1 \rightarrow 0+ (L-)$.

თუ $h_2^{-1} h_3^{-1}$ ლოკალურად ჯამებადია $]0, L[$ -ში, მაშინ
 (3.2.34)-დან გამომდინარეობს, რომ რეგულარული ამონახსნისათ-
 ვის (ე.ი. $v_j \in C^2([0, L])$) მხოლოდ შემდეგი ამოცანებია კო-
 რექტული (3.2.33), (3.2.35), (3.2.36) ($v_j \in C([0, L])$);
 (3.2.33), (3.2.37), (3.2.36) ($v_j \in C([0, L])$); (3.2.33), (3.2.35),
 (3.2.38) ($v_j \in C([0, L])$); (3.2.33), (3.2.37), (3.2.38); (3.2.33),
 (3.2.35), (3.2.40) ($v_j \in C([0, L])$, $h_2 h_3 v_{j,1} \in C([0, L])$);
 (3.2.33), (3.2.39), (3.2.36) ($v_j \in C([0, L])$, $h_2 h_3 v_{j,1}$
 $\in C([0, L])$); შერეული ამოცანები, როცა ერთ ბოლოში j -ის

ზოგიერთი მნიშვნელობისათვის მოცემულია ღირებულება პირობა, ხოლო j -ის დანარჩენი მნიშვნელობისათვის მოცემულია ან ნოიმანის, ან (3.2.37), (3.2.38) ტიპის პირობა, ხოლო მეორე ბოლოში j -ის პირველი მნიშვნელობისათვის მოცემულია ან ღირებულება, ან ნოიმანის, ან (3.2.37), (3.2.38) ტიპის პირობა, ხოლო j -ის დანარჩენი მნიშვნელობისათვის მოცემულია ღირებულება (ნოიმანის და (3.2.37), (3.2.38) ტიპის პირობა დასაშვები არ არის) პირობა, როცა მეორე ბოლოში ნოიმანის პირობაა მოცემული და ღირებულება ან (3.2.37), (3.2.38) ტიპის პირობა (ნოიმანის პირობა დასაშვები არაა), როცა მეორე ბოლოში (3.2.38), (3.2.37) ტიპის პირობაა მოცემული.

(3.2.33), (3.2.37), (3.2.38) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი განსაზღვრულია ხისტი გადატანის ($c'_1 = 0$; c'_j , $j = 1, 2, 3$, ნებისმიერი მუდმივებია) სიზუსტით. ეს ასეც უნდა იყოს, რადგან ამ შემთხვევაში ღეროზე, როგორც სამგანზომილებიან სხეულზე, მოქმედებენ მხოლოდ ზედაპირული ძალები, რომლებიც შეტანილია Y_{j00} , $j = 1, 2, 3$, გამოსახულებებში. შევნიშნოთ, რომ ფიზიკური (მექანიკური) მოსაზრებებიდან გამომდინარე, ბუნებრივია, რომ ჩვენ იმ სასაზღვრო ამოცანებს, რომელთა ამონახსნები ხისტი გადაადგილების სიზუსტით განისაზღვრება, კორექტულად – “კარგად” დასმული ვუწოდოთ.

ადვილი სანახავია, რომ ორივე ბოლოში ნოიმანის პირობის დასახელება დასაშვები (შესაძლებელი) არ არის. ის შეიძლება მხოლოდ ერთ ბოლოში დასახელდეს და ამასთან ამონახსნი ხისტი გადატანის სიზუსტით იქნება განსაზღვრული, რაც ბუნებრივია, რადგან ღეროზე მოქმედებენ მხოლოდ ზედაპირული ძალები ერთი ბოლოს ჩათვლით, ხოლო მეორე ბოლო საერთოდ განთავისუფლებულია სასაზღვრო პირობებისაგან. ხაზგასასმელია, რომ ეს თავისებურება ღეროს წამახვილებით არ არის გამოწვეული. ეს (0,0) მოდელის სიუხეშიდან გამომდინარეობს, ასევე არ არიან ამოხსნადი (3.2.33), (3.2.37), (3.2.40) და (3.2.33),

(3.2.38), (3.2.39) სასაზღვრო ამოცანები (რომლებიც მხოლოდ წამახვილებული ღეროსათვის წარმოიშვებიან), რადგან ამ შემთხვევებში $c_1' = 0$ და შეუძლებელია c_2' მუდმივით (3.2.40) და (3.2.39) პირობების დაკმაყოფილება.

(0,0) მიახლოებაში დინამიკის ამოცანა დირიხლეს პირობების (იმ შემთხვევის ჩათვლით, როცა წამახვილებული ბოლო თავისუფლდება სასაზღვრო პირობისაგან) შემთხვევაში, როცა ღეროს მხოლოდ ერთ ბოლოში აქვს ხარისხოვანი წამახვილება, გამოკველეულია [26]-ში. დინამიკის ამოცანები დანარჩენი ზემოთ მითითებული სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში შემდგომი კვლევის საგანს წარმოადგენს.

3.2.3. (1,0) მიახლოება

სიმეტრიული ღეროების შემთხვევაში, ე.ი. როცა $\tilde{h}_i \equiv 0$, $i = 2, 3$, (1,0) მიახლოებაში (3.2.21), (3.2.22) სისტემა იღებს შემდეგ სახეს:

$$(\lambda + 2\mu)(h_2 h_3 v_{100,1})_{,1} + 3\lambda(h_2 h_3 v_{310})_{,1} + X_1^{0,0} = 0, \quad (3.2.41)$$

$$\mu(h_2 h_3^3 v_{310,1})_{,1} - 3(\lambda + 2\mu)h_2 h_3 v_{310} \quad (3.2.42)$$

$$- \lambda h_2 h_3 v_{100,1} + h_3 X_3^{1,0} = 0,$$

$$\mu(h_2 h_3 v_{200,1})_{,1} + X_2^{0,0} = 0, \quad (3.2.43)$$

$$\mu(h_2 h_3^3 v_{210,1})_{,1} - 3\mu h_2 h_3 v_{210} + h_3 X_2^{1,0} = 0, \quad (3.2.44)$$

$$\mu(h_2 h_3 v_{300,1})_{,1} + 3\mu(h_2 h_3 v_{110})_{,1} + X_3^{0,0} = 0, \quad (3.2.45)$$

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + 2\mu)(h_2 h_3^3 v_{110,1})_{,1} - \mu h_2 h_3 v_{300,1} \\
 & - 3\mu h_2 h_3 v_{110} + h_3 X_1^{1,0} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.2.46}$$

სასაზღვრო ამოცანები (3.2.43) განტოლებისათვის გამოკვლეული იყო 3.2.2 ქვეპარაგრაფში. აქედან გამომდინარე, მაგალითად, ღირიზლეს პირობები v_{200} -სათვის შეიძლება დასმული იქნას მხოლოდ მაშინ, როცა $I_0^{0,0} < +\infty$, $I_L^{0,0} < +\infty$. ანალოგიურად შეიძლება გამოკვლეულ იქნას (3.2.44) განტოლებაც, რაც იმ დასკვნამდე მიგვიყვანს, რომ ამ განტოლებისათვის და ე.ი. v_{210} -სათვის ღირიზლეს პირობები შეიძლება დასმულ იქნას მხოლოდ მაშინ, როცა $I_0^{1,0} < \infty$, $I_L^{1,0} < \infty$. ამ შემთხვევაში

$$u_2(x_1, x_2, x_3) \approx \frac{1}{4} v_{200}(x_1) + \frac{3x_3}{4} v_{210}(x_1),$$

საიდანაც

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0+(L-)} u(x_1, x_2, x_3) \approx \frac{1}{4} v_{200} \Big|_{x_1=0(L)}, ^*)$$

როცა $I_0^{1,0} < +\infty$ $\left(I_L^{1,0} < +\infty \right)$, ან როცა $I_0^{0,0} < +\infty$ $\left(I_L^{0,0} < +\infty \right)$,

მაგრამ v_{210} შემოსაზღვრულია, თუ $I_0^{1,0} = +\infty$ $\left(I_L^{1,0} = +\infty \right)$.

^{*)} იქ, სადაც წამახვილება გვაქვს, სიმეტრიულ შემთხვევაში x_3 -იც ნული ხდება. თუ წამახვილება არ გვაქვს, მაშინ

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0+(L-)} u(x_1, x_2, x_3) \approx \frac{1}{4} v_{200} \Big|_{x_1=0(L)} + \frac{3x_3}{4} v_{210} \Big|_{x_1=0(L)}.$$

(3.2.45), (3.2.46) და (3.2.41), (3.2.42) სისტემები შეიძლება შემდეგი სახით გადავწეროთ:

$$3\mu v_{110} = -\mu v_{300,1} - h_2^{-1}(x_1) h_3^{-1}(x_1) \left(\int_{x_1^0}^{x_1} X_3^0(x_1) dx_1 - C_1 \right),$$

$$C_1 = const, \quad x_1^0 \in]0, L[,$$

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) (h_2 h_3^3 v_{300,11})_{,11} &= 3 X_3^{0,0} + 3 \left(h_3 X_1^{0,1} \right)_{,1} \\ &- \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \left[h_2 h_3^3 \left(h_2^{-1} h_3^{-1} \int_{x_1^0}^{x_1} X_3^0(x_1) dx_1 - h_2^{-1} h_3^{-1} C_1 \right)_{,1} \right]_{,11} \end{aligned}$$

და

$$3\lambda v_{310} = -(\lambda + 2\mu) v_{100,1} - h_2^{-1}(x_1) h_3^{-1}(x_1) \left(\int_{x_1^0}^{x_1} X_3^0(x_1) dx_1 - C_2 \right),$$

$$C_2 = const,$$

$$\begin{aligned} &(\lambda + 2\mu) \mu (h_2 h_3^3 v_{100,11})_{,11} - 12(\lambda + \mu) \mu (h_2 h_3 v_{100,1})_{,1} \\ &= -\mu \left\{ h_2 h_3^3 \left[\left(h_2^{-1} h_3^{-1} \int_{x_1^0}^{x_1} X_1^0(x_1) dx_1 \right)_{,1} - C_2 (h_2^{-1} h_3^{-1})_{,1} \right]_{,11} \right\} \\ &+ 12 \frac{(\lambda + \mu) \mu}{\lambda + 2\mu} X_1^{0,0} + \frac{3\lambda^2}{\lambda + 2\mu} X_1^{0,0} + 3\lambda \left(h_3 X_3^{0,1} \right)_{,1}. \end{aligned}$$

ამ სისტემების უპირატესობა ისაა, რომ მათ შორის მეორე განტოლებები მხოლოდ ერთ უცნობს შეიცავენ და მათი ამოხ-

სნის შემდეგ პირველი განტოლებებიდან ადვილად გამოითვლება V_{110} და V_{310} .

ერთი ბოლოთი ხარისხობრივად წამახვილებული ღეროს შემთხვევაში დინამიკის ამოცანები, როცა სასაზღვრო პირობები დირიხლეს ტიპისაა, გამოკვლეულია [26]-ში. სხვა ტიპის სასაზღვრო ამოცანებისა და შესაბამისი დინამიკის ამოცანების შესწავლა შემდგომი კვლევის საგანია.

ნაწილი IV. ღრეკად და თხევად გარემოთა ურთიერთქმედების ამოცანები

§4.1. ტრანსმიისის (საკონტაქტო) პირობები

სითხისა და ღრეკადი სხეულის ურთიერთქმედების ამოცანები თანამედროვე აქტუალურ სამეცნიერო თემატიკას განეკუთვნებიან. მათი მნიშვნელობა განპირობებულია, მაგალითად, ნავთობის ნავთობსადენებში, სისხლის სისხლძარღვებში მოძრაობის, სანაპირო გამაგრების ამოცანების აქტუალობით. დღეისათვის მიმდინარეობს ამოცანების ინტენსიური კვლევა *ინტერფეისზე* (სხეულის თხევადი და მყარი ნაწილების გამყოფ საკონტაქტო ზედაპირზე) სხვადასხვა ტრანსმიისის ანუ საკონტაქტო პირობების შემთხვევაში. ამასთან კვლავ გრძელდება ფიზიკური თვალსაზრისით გამართლებული საკონტაქტო პირობების დადგენის პროცესი [42], [56], [18], [7-10].

სამგანზომილებიან მოდელეებში ჩვეულებრივ იყენებენ

$$[u]_I := u^f - u^s = 0, \quad (4.1.1)$$

$$[\sigma_{ij} n_j^s]_I := \sigma_{ij}^s n_j^s - \sigma_{ij}^f n_j^s = \sigma_{ij}^s n_j^s + \sigma_{ij}^f n_j^f = 0,$$

საკონტაქტო პირობებს, სადაც u^s , σ_{ij}^s და u^f , σ_{ij}^f , $i, j = 1, 2, 3$, არის გადაადგილების ვექტორის და ძაბვის ტენზორის კომპონენტები შესაბამისად სხეულის მყარ და თხევად ნაწილებში; n^s და n^f შესაბამისად $\partial \Omega^s$ -ის და $\partial \Omega^f$ -ის გარე ნორმალებია, ხოლო I არის ინტერფეისი მყარ და თხევად ნაწილებს შორის.

გამოკვლეულია აგრეთვე ზოგიერთი ამოცანა შემდეგი უნილათერალური (ცალმხრივი) საკონტაქტო პირობებით [7]:

$$[u, N,]_I \geq 0, \quad (4.1.2)$$

$$\sigma_{ij}^s n_j^s = \sigma_{NN}^s N_i, \quad \sigma_{ij}^f n_j^f = -\sigma_{NN}^f N_i, \quad (4.1.3)$$

$$\sigma_{NN}^s \leq 0, \quad (4.1.4)$$

$$\text{და } \sigma_{NN}^f = 0, \text{ თუ } [u_i N_i]_i > 0. \quad (4.1.5)$$

(4.1.3) იმას ნიშნავს, რომ I ინტერფეისზე მხოლოდ ნორმალური ძაბვები მოქმედებენ (მხები კომპონენტები ნულის ტოლია, σ_{NN} ნორმალური კომპონენტი, N ინტერფეისის გარე ნორმალია Ω^s -ის მიმართ), რომლებიც ერთმანეთს აწონასწორებენ; (4.1.4) ნიშნავს იმას, რომ გვაქვს კუმშვა; (4.1.5) კი იმას ნიშნავს, რომ თუ მყარი და თხევადი ნაწილები ინტერფეისის რაიმე წერტილში ერთმანეთს არ ებჯინება, მაშინ ამ წერტილში ნორმალური ძალები ნულის ტოლია.

განიხილავენ აგრეთვე საკონტაქტო პირობებს სამგანზომილებიან სითხესა და ღრეკად გარსს ან ფირფიტას შორის. ვთქვათ, სითხე იწვევს ფირფიტის ღუნვას. თუ განვიხილავთ ღუნვას კირხპოფ-ლიავის მოდელის საფუძველზე, მაშინ, რამდენადაც ყველა გეომეტრიული და ფიზიკური სიდიდე გამოისახება ჩაღუნვით, საკონტაქტო პირობებად შეიძლება გამოვიყენოთ (4.1.1) ან (4.1.2)-(4.1.5) პირობები. საკონტაქტო პირობების მოდელირება შემდეგნაირადაც შეიძლება. ვთქვათ, ფირფიტის შუა სიბრტყე მდებარეობს Ox_1x_2 სიბრტყეზე და სითხის ნაკადი იწვევს ფირფიტის ღუნვას. მაშინ ფირფიტის დატვირთვის ინტენსივობისათვის გვექნება

$$q \equiv q_3(x_1, x_2, t) = \sigma_{N3}^f \left(x_1, x_2, h^{(+)}(x_1, x_2), t \right) + \sigma_{N3}^f \left(x_1, x_2, h^{(-)}(x_1, x_2), t \right), \quad (4.1.6)$$

$$q_\beta(x_1, x_2, t) = \sigma_{N\beta}^f \left(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}(x_1, x_2), t \right) \\ = \sigma_{N\beta}^f \left(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}(x_1, x_2), t \right) = 0, \quad \beta = 1, 2,$$

გამოსახულებები, ხოლო სითხის (v_1, v_2, v_3) სიჩქარის მნიშვნელობა ფირფიტის პირით ზედაპირებზე და ფირფიტის w ჩაღუნვა შემდეგი ტოლობებით იქნებიან დაკავშირებული:

$$\frac{\partial w(x_1, x_2, t)}{\partial t} = v_3 \left(x_1 - \overset{(+)}{h}(x_1, x_2) w_{,1}(x_1, x_2, t), x_2 \right. \\ \left. - \overset{(+)}{h}(x_1, x_2) w_{,2}(x_1, x_2, t), \overset{(+)}{h}(x_1, x_2) + w(x_1, x_2, t), t \right) \\ = v_3 \left(x_1 - \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) w_{,1}(x_1, x_2, t), x_2 \right. \\ \left. - \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) w_{,2}(x_1, x_2, t), \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) + w(x_1, x_2, t), t \right), \quad (4.1.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_\alpha(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}(x_1, x_2), t) = - \overset{(+)}{h}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_\alpha \partial t} \\ = v_\alpha \left(x_1 - \overset{(+)}{h}(x_1, x_2) w_{,1}(x_1, x_2, t), x_2 \right. \\ \left. - \overset{(+)}{h}(x_1, x_2) w_{,2}(x_1, x_2, t), \overset{(+)}{h}(x_1, x_2) + w(x_1, x_2, t), t \right), \quad (4.1.8) \\ \frac{\partial}{\partial t} u_\alpha(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}(x_1, x_2), t) = - \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_\alpha \partial t} \\ = v_\alpha \left(x_1 - \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) w_{,1}(x_1, x_2, t), x_2 \right.$$

$$- \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) w_{,2}(x_1, x_2, t), \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) + w(x_1, x_2, t), t \Big), \quad (4.1.9)$$

$$\alpha = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in \omega,$$

((4.1.7)-ში მეორე ტოლობა სამართლიანია იმის გამო, რომ $w \equiv u_3$ ჩაღუნვა არ არის დამოკიდებული x_3 -ზე), სადაც w

არის ფირფიტის გეგმილი Ox_1x_2 სიბრტყეზე, $x_3 = \overset{(z)}{h}(x_1, x_2)$ არის ფირფიტის ზედა და ქვედა პირითი ზედაპირები. როგორც ვხედავთ (4.1.6)-(4.1.9) საკონტაქტო პირობებში ყველა ფუნქცია დროის ყველა მომენტში დამოკიდებულია $(x_1, x_2) \in \omega$ წერტილებზე და ამდენად საკონტაქტო პირობები ფაქტობრივად ჩაწერილი გვაქვს ω არეში.

თუ ფირფიტა საკმარისად თხელია, (4.1.6)-(4.1.9) საკონტაქტო პირობები შეიძლება კიდევ უფრო გავამარტივოთ შემდეგ დაშვებებზე დაყრდნობით:

1) ჩავთვალოთ, რომ სითხეს უკავია $\overline{(\Omega' \cup \Omega'')} \setminus \omega$ არე;

2) ჩავთვალოთ, რომ დრეკად ნაწილს უკავია ω არე (მისი გეომეტრია სისქის გასწვრივ გათვალისწინებულია ღუნვის განტოლების კოეფიციენტებში);

3) მცირე სიდიდეების უკუგდების შემდეგ (4.1.7)-(4.1.9) საკონტაქტო პირობები შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\frac{\partial w(x_1, x_2, t)}{\partial t} = v_3(x_1, x_2, 0, t), \quad v_\alpha(x_1, x_2, 0, t) = 0, \quad (4.1.10)$$

$$\alpha = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in \omega;$$

4) $\overset{(z)}{h}(x_1, x_2)$ -ის უგულებელყოფისა და იმის გათვალისწინებით, რომ სიბრტყის ω ნაწილის ნორმალები მიმართულია x_3 და $-x_3$ ღერძების პარალელურად, (4.1.6) მიიღება

$$q(x_1, x_2, 0, t) = \sigma'_{33}(x_1, x_2, 0+, t) - \sigma'_{33}(x_1, x_2, 0-, t) \quad (4.1.11)$$

სახეს.

იდეალური სითხის შემთხვევაში

$$\sigma'_N = -p(x_1, x_2, x_3, t) \bar{N},$$

სადაც $p(x_1, x_2, x_3, t)$ წნევაა. ამიტომ

$$\sigma'_{N3} = -p \cos(\bar{N}, x_3)$$

და (4.1.6) საკონტაქტო პირობა მიიღებს

$$q(x_1, x_2, t) =$$

$$\begin{aligned} & -p \left(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}(x_1, x_2), t \right) \cos \left(\bar{N} \left(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}(x_1, x_2) \right), x_3 \right) \\ & - p \left(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}(x_1, x_2), t \right) \cos \left(\bar{N} \left(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) \right), x_3 \right), \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

$$(x_1, x_2) \in \omega,$$

სახეს.

თუ კუთხე $\bar{N}$ -სა და x_3 ღერძს შორის მცირეა, მაშინ (4.1.11) შეიძლება შემდეგი სახით ჩავწეროთ

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, t) = & -p \left(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}(x_1, x_2), t \right) \\ & + p \left(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}(x_1, x_2), t \right), \quad (x_1, x_2) \in \omega, \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

ზოგიერთი საკონტაქტო ამოცანა (4.1.10), (4.1.11) და (4.1.10), (4.1.12) საკონტაქტო პირობებში გამოკვლეულია [8-10]-ში.

თუ სითხეში ჩადებულია დრეკადი ფირფიტა ან ღერო, მაშინ შესაბამისად N -ური (იხ. §2.6) და (N_3, N_2) (იხ. §3.2) იერარ-

ქიული მოდელის გამოყენების დროს (4.1.1)-(4.1.5) საკონტაქტო პირობებში u^s და σ_{ij}^s სიდიდეების ნაცვლად უნდა ჩავსვათ მათი N -ური და (N_3, N_2) მიახლოებითი მნიშვნელობები.

$N = 0$ და $(0,0)$ მიახლოებაში (4.1.1) პირობებს შეიძლება სხვა სახეც მიეცეს.

მაგალითად, $N = 0$ მიახლოებაში (4.1.1) პირობები შეიძლება შემდეგი სახით ჩაიწეროს:

$$(2h)^{-1} u_{i0}^s = u_i^f(x_1, x_2, 0+, t) = u_i^f(x_1, x_2, 0-, t) = u_i^f(x_1, x_2, 0, t),$$

$$i = 1, 2, 3,$$

და, მუდმივი სისქის შემთხვევაში,

$$q_\beta := \sigma_{3\beta}^f\left(x_1, x_2, h, t\right)^{(+)} - \sigma_{3\beta}^f\left(x_1, x_2, h, t\right)^{(-)}$$

$$= 2\rho h \frac{\partial^2 u_\beta^f(x_1, x_2, 0, t)}{\partial t^2}$$

$$- \left\{ \Phi_{\beta 0}^s + 2h \left[\mu \Delta u_\beta^f(x_1, x_2, 0, t) + (\lambda + \mu) u_{\gamma, \gamma \beta}^f(x_1, x_2, 0, t) \right] \right\},$$

$$\beta = 1, 2;$$

$$q_3 := \sigma_{33}^f\left(x_1, x_2, h, t\right)^{(+)} - \sigma_{33}^f\left(x_1, x_2, h, t\right)^{(-)}$$

$$= 2\rho h \frac{\partial^2 u_3^f(x_1, x_2, 0, t)}{\partial t^2}$$

$$- \left[\Phi_{30}^s + 2\mu h \Delta u_3^f(x_1, x_2, 0, t) \right], \quad (x_1, x_2) \in \omega,$$

ხოლო ცვლადი სისქის შემთხვევაში

$$\begin{aligned}
& \sigma_{i\beta}^f(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}, t) \cos(\overset{(+)}{n}, x_i) \sqrt{1 + \left(\overset{(+)}{h}_{.1}\right)^2 + \left(\overset{(+)}{h}_{.2}\right)^2} \\
& + \sigma_{i\beta}^f(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}, t) \cos(\overset{(-)}{n}, x_i) \sqrt{1 + \left(\overset{(-)}{h}_{.1}\right)^2 + \left(\overset{(-)}{h}_{.2}\right)^2} \\
& = 2\rho h \frac{\partial^2 u_\beta^f(x_1, x_2, 0, t)}{\partial t^2} \\
& - \left\{ \Phi_{\beta 0}^s + 2h \left[\mu \Delta u_\beta^f(x_1, x_2, 0, t) + (\lambda + \mu) (u_\gamma^f(x_1, x_2, 0, t))_{,\gamma\beta} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \lambda (\ln h)_{,\beta} (u_\alpha^f)_{,\alpha} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \mu (\ln h)_{,\alpha} (u_\alpha^f(x_1, x_2, 0, t))_{,\beta} + \mu (\ln h)_{,\alpha} (u_\beta^f(x_1, x_2, 0, t))_{,\alpha} \right] \right\}, \\
& \sigma_{i3}^f(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}, t) \cos(\overset{(+)}{n}, x_i) \sqrt{1 + \left(\overset{(+)}{h}_{.1}\right)^2 + \left(\overset{(+)}{h}_{.2}\right)^2} \\
& + \sigma_{i3}^f(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}, t) \cos(\overset{(-)}{n}, x_i) \sqrt{1 + \left(\overset{(-)}{h}_{.1}\right)^2 + \left(\overset{(-)}{h}_{.2}\right)^2} \\
& = 2\rho h \frac{\partial^2 u_3^f(x_1, x_2, 0, t)}{\partial t^2} \\
& - \left\{ \Phi_{30}^s + 2\mu h \left[\Delta u_3^f(x_1, x_2, 0, t) + (\ln h)_{,\alpha} (u_3^f(x_1, x_2, 0, t))_{,\alpha} \right] \right\}, \\
& \quad (x_1, x_2) \in \omega, \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

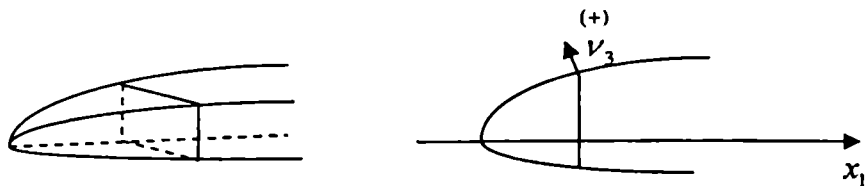
(0,0) მიახლოებაში (4.1.1) პირობები შემდეგი სახით ჩაიწერება (იხ. (3.2.12)):

$$(4h_2 h_3)^{-1} u_{i00}^s(x_1, t) = u_i^f(x_1, 0, 0, t), \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=2}^3 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 \left[\sqrt{1 + \left(h_{s-i,1}^{(+)} \right)^2} \right. \\
& \times \int_{h_i^{(-)}(x_1)}^{h_i^{(+)}(x_1)} \sigma_{kj}^f(x_1, \delta_{s-i,2} h_2^{(+)} + \delta_{s-i,3} x_2, \delta_{s-i,2} x_3 + \delta_{s-i,3} h_3^{(+)}) \\
& \times \cos(\nu_{s-i}, x_k) dx_i - (-1)^{n_{s-i}} \sqrt{1 + \left(h_{s-i,1}^{(-)} \right)^2} \\
& \times \int_{h_i^{(-)}(x_1)}^{h_i^{(+)}(x_1)} \sigma_{kj}^f(x_1, \delta_{s-i,2} h_2^{(-)} + \delta_{s-i,3} x_2, \delta_{s-i,2} x_3 + \delta_{s-i,3} h_3^{(-)}) \\
& \times \cos(\nu_{s-i}, x_k) dx_i \left. \right] = 4 \rho h_2 h_3 \frac{\partial^2 u_j^f(x_1, 0, 0, t)}{\partial t^2} - \{ \Phi_{j,00}^s \\
& + 4 \Lambda_j [h_2 h_3 u_{j,1}^f(x_1, 0, 0, t)]_{,1} \}, \quad j = 1, 2, 3, \quad x_1 \in]0, L[, \quad (4.1.14)
\end{aligned}$$

რადგან $\nu_2^{(\pm)} \nu_3^{(\pm)}$ პერპენდიკულარულია x_3 -ის (x_2 -ის) (იხ. ნახ. 4.1.1), ე.ი., $\cos \left(\nu_2^{(\pm)}, x_3 \right) = 0$ ($\cos \left(\nu_3^{(\pm)}, x_2 \right) = 0$), მაგრამ ზოგადად $\angle \left(\nu_2^{(\pm)}, x_2 \right) \neq 0$ ($\angle \left(\nu_3^{(\pm)}, x_3 \right) \neq 0$), $\angle \left(\nu_2^{(\pm)}, x_1 \right) \neq \frac{\pi}{2}$ ($\angle \left(\nu_3^{(\pm)}, x_1 \right) \neq \frac{\pi}{2}$).

თუ სისქე მუდმივია, მაშინ $\nu_3^{(\pm)}$



ნახ. 4.1.1

პარალელურია x_3 ღერძის და $\angle \left(\begin{smallmatrix} (\pm) \\ v_3, x_1 \end{smallmatrix} \right) = \frac{\pi}{2}$, ხოლო თუ

სიგანეა მუდმივი, მაშინ v_2 პარალელურია x_2 ღერძის და $\angle \left(\begin{smallmatrix} (\pm) \\ v_2, x_1 \end{smallmatrix} \right) = \frac{\pi}{2}$.

სტაციონალურ შემთხვევაში

$$\frac{\partial^2 u'_j(x_1, 0, 0, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial v^f(x_1, 0, 0, t)}{\partial t} = 0$$

და (4.1.14) სამი დიფერენციალური ტოლობის x_1 -ის მიმართ ინტეგრებით თითოეულისათვის ორი უცნობი მუდმივის შემცველ ინტეგრალურ დამოკიდებულებას მივიღებთ $]0, L[$ -ზე.

ამოცანები ასეთი საკონტაქტო პირობებით ჯერ-ჯერობით სრულად გამოკვლეული არ არის. ამ მიმართულებით მიღებული შედეგები მიმოხილულია მონოგრაფიის [24] მე-7 პარაგრაფში.

(4.1.1)-(4.1.5) საკონტაქტო პირობები გამოიყენება აგრეთვე ღრეკადი სხეულების ურთიერთქმედების ინტერფეისზე (იხ. [56], თავი 6).

§4.2. დრეკადი და თხევადი ნაწილებისაგან შემდგარი სხეულის რხევა

განვიხილოთ მყარი დრეკადი ნაწილისა და თხევადი ნაწილისაგან შემდგარი სხეულის (კომპოზიციური გარემოს) წერტილების მცირე გადაადგილებები დრეკადობის წრფივი და სითხეების მოსვენებული მდგომარეობის მიმართ გაწრფივებული თეორიის საფუძველზე. ვთვლით, რომ მყარი და თხევადი ნაწილები სივრცეში პერიოდულადაა განაწილებული (მცირე პერიოდით). მყარი ნაწილი (ფაზა) შეიძლება იყოს ბმული, რომელიც შედგება ერთი მყარი სხეულისაგან არხებით, სადაც სითხე მოძრაობს, ან არაბმული, ე.ი. სითხეში ჩადებულია მყარი ნაწილაკები. დავუშვათ, რომ სითხე ბაროტროპულია [56].

მყარ ნაწილში გვექნება დრეკადობის წრფივი თეორიის შემდეგი დამოკიდებულებები (იხ. ნაწილი I, თავი IV):

$$\rho^s \frac{\partial^2 u_i^s}{\partial t^2} = \sigma_{ij,j}^s + \Phi_i^s, \quad (4.2.1)$$

$$\sigma_{ij}^s = a_{ijkl}^s e_{kl}(\vec{u}^s), \quad e_{kl}(\vec{u}^s) = \frac{1}{2} (u_{k,l}^s + u_{l,k}^s), \quad (4.2.2)$$

სადაც ნიშნაკი s მიუთითებს მყარ ნაწილზე, a_{ijkl}^s კოეფიციენტებს სიმარტივისათვის ჩავთვლით მუდმივებად, რომლებიც აკმაყოფილებენ სიმეტრიის

$$a_{ijkl}^s = a_{jikl}^s = a_{silk}^s = a_{sjlk}^s \quad (4.2.3)$$

(ცხადია, პირველი ორი ტოლობიდან გამომდინარეობს მესამე) და დადებითად განსაზღვრულობის

$$a_{ijkl}^s e_{ij} e_{kl} \geq \delta e_{ij} e_{ij}, \quad \delta = \text{const} > 0, \quad e_{ij} = e_{ji} \quad (4.2.4)$$

პირობებს, $\vec{u}^s := (u_1^s, u_2^s, u_3^s)$.

თხევად ნაწილში გვექნება სითხეების გაწრფივებული თეორიის შემდეგი დამოკიდებულებები (იხ. (1.13.7) და ნაწილი I, თავი V)

$$\rho^f \frac{\partial^2 u_i^f}{\partial t^2} = \sigma_{ij,j}^f + \Phi_i^f, \quad (4.2.5)$$

$$\sigma_{ij}^f = -\delta_{ij} p + (\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl}) e_{kl} \left(\frac{\partial \bar{u}^f}{\partial t} \right), \quad (4.2.6)$$

სადაც ნიშნაკი f მიუთითებს თხევად ნაწილზე, λ და μ სიბლანტის კოეფიციენტებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ

$$\mu > 0, \quad \frac{\lambda}{\mu} > -\frac{2}{3}\alpha; \quad 0 < \alpha < 1, \quad (4.2.7)$$

პირობებს, $\bar{u}^f := (u_1^f, u_2^f, u_3^f)$.

შევნიშნოთ, რომ სითხის მოძრაობის განტოლებები ჩვეულებრივ ჩაწერილია სიჩქარის

$$\bar{v}^f = \frac{\partial \bar{u}^f}{\partial t} \quad (4.2.8)$$

ვექტორის მიმართ, მაგრამ აქ ჩვენ, (4.2.1) განტოლებებთან შეთანხმების მიზნით, ისინი ჩავწერეთ $\bar{u}^f$ -ის მიმართ.

სითხისა და მყარი სხეულის ρ^f და ρ^s სიმკვრივეები წონასწორობის მდგომარეობაში სიმარტივისათვის ჩავთვალოთ მუდმივებად.

სითხის ბაროტროპულობის კანონს განვიხილავთ

$$p = c^2 \tilde{\rho}^f \quad (4.2.9)$$

სახით, სადაც $c > 0$ ბგერის გავრცელების სიჩქარეა, ხოლო $\tilde{\rho}^f$ სითხის სიმკვრივის შემყოფებაა. გარდა ამისა, რადგანაც

$$\frac{\partial \tilde{\rho}^f + \rho^f}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\rho}^f}{\partial t}$$

და $\tilde{\rho}^f \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}$ შეიძლება უგულებელვყოთ წრფივ მიახლოებაში, მასის შენახვის (ე.ი. უწყვეტობის) განტოლება მიიღებს

$$\frac{\partial \tilde{\rho}^f}{\partial t} + \rho^f \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0$$

სახეს, საიდანაც ინტეგრების შემდეგ, იმის გათვალისწინებით, რომ $\tilde{\rho}^f = 0$, თუ $\bar{\mathbf{u}} = 0$, მივიღებთ

$$\tilde{\rho}^f + \rho^f \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} = 0. \quad (4.2.10)$$

ამდენად (4.2.9) მიიღებს

$$p = -c^2 \rho^f \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} \quad (4.2.11)$$

სახეს.

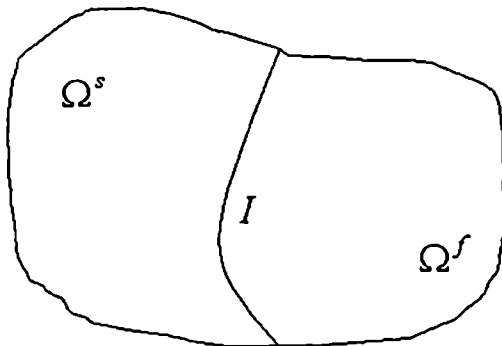
(4.2.11)-ის (4.2.6)-ში ჩასმის შემდეგ მივიღივართ იმ დასკვნამდე, რომ σ'_{ij} დამოკიდებულია როგორც გადაადგილების $\bar{\mathbf{u}}^f$

ვექტორზე, ასევე სიჩქარის $\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}^f}{\partial t}$ ვექტორზე.

I ინტერფეისზე (იხ. ნახ. 4.2.1) ვიხილავთ გადაადგილებებისა და ძაბვების უწყვეტობის

$$[\mathbf{u}_i] = 0, [\sigma_{ij} n_j] = 0 \quad (4.2.12)$$

პირობას, სადაც კვადრატული ფრჩხილები, ჩვეულებისამებრ, შესაბამისი სიდიდეების ნახტომს აღნიშნავს.



ნახ. 4.2.1

ჩვენ განვიხილავთ ერთგვაროვან (თუმცა არაერთგვაროვანი პირობების განხილვაც შეიძლებოდა)

$$\bar{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0 \quad (4.2.13)$$

სასაზღვრო და

$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3, 0) = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}(x_1, x_2, x_3, 0)}{\partial t} = 0, \quad (4.2.14)$$

$$x := (x_1, x_2, x_3) \in \Omega,$$

საწყის პირობებს, სადაც $\Omega := \Omega^s \cup \Omega^f \cup I$ არე შემოსაზღვრულია.

(4.2.1), (4.2.5), (4.2.12)-(4.2.14) ამოცანის ვარიაციულ ფორმულირებას აქვს შემდეგი სახე:

ვეძებთ $\bar{u}$ ვექტორს, როგორც t -ს ფუნქციას მნიშვნელობებით $[H_0^1(\Omega)]^3$ -ში, ისეთს, რომ

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} w_i dx + \int_{\Omega} \sigma_{ij} w_{i,j} dx = \int_{\Omega} \Phi_i w_i dx \quad \forall w_i \in H_0^1(\Omega), \quad (4.2.15)$$

$$\bar{u}(0) = \frac{d\bar{u}(0)}{dt} = 0, \quad (4.2.16)$$

სადაც

$$u_i := \begin{cases} u_i^s, & x \in \Omega^s; \\ u_i^f, & x \in \Omega^f, \end{cases} \quad \rho := \begin{cases} \rho^s, & x \in \Omega^s; \\ \rho^f, & x \in \Omega^f, \end{cases} \quad \sigma_{ij} := \begin{cases} \sigma_{ij}^s, & x \in \Omega^s; \\ \sigma_{ij}^f, & x \in \Omega^f, \end{cases}$$

$$\Phi_i := \begin{cases} \Phi_i^s, & x \in \Omega^s; \\ \Phi_i^f, & x \in \Omega^f. \end{cases} \quad (4.2.17)$$

სობოლევის^{*)} $[H_0^1(\Omega)]^3$ სივრცე არის ისეთი Ω -ზე განსაზღვრული ვექტორ-ფუნქციების სიმრავლე, რომელთა კომპონენტები $u_i \in H_0^1(\Omega)$, ე.ი. კვადრატში ჯამებადია, მათი განზოგადებული ან განაწილების აზრით წარმოებულებიც ასევე კვადრატში ჯამებადია და მათი კვანძები $\partial\Omega$ -ზე ნულის ტოლია (იხ. დამატება 1 და §1.21).

(4.2.15)-ის მისაღებად (4.2.1) და (4.2.5) უნდა ჩავწეროთ, (4.2.17)-ის გამოყენებით, ერთიანი სახით Ω -ზე; ამ უკანასკნელის ორივე მხარე გავამრავლოთ $w_i \in H_0^1(\Omega)$ -ზე; მიღებული ვაინტეგრით Ω -ზე და σ_{ij} -ის შემცველ წევრში მოვახდინოთ ნაწილობითი ინტეგრება, იმის გათვალისწინებით, რომ w_i ფუნქციების კვალი $\partial\Omega$ -ზე ნულის ტოლია. e_{ij} -ის სიმეტრიულობის გამო ცხადია, რომ

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\bar{u})e_{ij}(\bar{w}) &= \frac{1}{2}\sigma_{ij}(\bar{u})(w_{i,j} + w_{j,i}) \\ &= \frac{1}{2}\sigma_{ij}(\bar{u})w_{i,j} + \frac{1}{2}\sigma_{ji}(\bar{u})w_{i,j} = \sigma_{ij}(\bar{u})w_{i,j} \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

^{*)} ს.ლ. სობოლევ (1908-1988).

და, ამდენად, (4.2.15)-ში $w_{i,j}$ -ის ნაცვლად შეიძლება $e_{ij}(\bar{w})$ ჩავსვათ.

თუ (4.2.11)-ს ჩავსვამთ (4.2.6)-ში, მაშინ σ_{ij} ცალსახად განისაზღვრება $\bar{u}$ -სა და მისი წარმოებულების საშუალებით. თუ მხედველობაში მივიღებთ (4.2.18)-ს, ადვილი სანახავია, რომ

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} w_{i,j} dx \equiv a(\bar{u}, \bar{w}) + b\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \bar{w}\right), \quad (4.2.19)$$

სადაც $\bar{v} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$ სიჩქარეა და

$$a(\bar{u}, \bar{w}) := \int_{\Omega} a_{ijkl}(x) e_{kl}(\bar{u}) e_{ij}(\bar{w}) dx,$$

$$b(\bar{v}, \bar{w}) := \int_{\Omega} b_{ijkl}(x) e_{kl}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{w}) dx,$$

$$a_{ijkl}(x) := \begin{cases} a_{ijkl}^s, & \text{თუ } x \in \Omega^s; \\ a_{ijkl}^f = \rho^f c^2 \delta_{ij} \delta_{kl}, & \text{თუ } x \in \Omega^f, \end{cases}$$

$$b_{ijkl}(x) := \begin{cases} b_{ijkl}^s \equiv 0, & \text{თუ } x \in \Omega^s; \\ b_{ijkl}^f = 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl}, & \text{თუ } x \in \Omega^f, \end{cases}$$

რადგან

$$\begin{aligned} \delta_{ij} c^2 \rho^f \operatorname{div} \bar{u} &= \delta_{ij} c^2 \rho^f u_{k,k} \\ &= \delta_{ij} c^2 \rho^f e_{kk}(\bar{u}) = \delta_{ij} \delta_{kl} c^2 \rho^f e_{kl}(\bar{u}). \end{aligned}$$

შენიშვნა 4.2.1. ცხადია, a და b არ არიან $H_0^1(\Omega)$ -ზე კოერციტიულები. თუმცა მათი ჯამი კოერციტიულია, ე.ი. $\exists \gamma = \text{const} > 0$ ისეთი, რომ

$$a(\bar{u}, \bar{u}) + b(\bar{u}, \bar{u}) \geq \gamma \|\bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \quad (4.2.20)$$

მართლაც, (4.2.7) და (4.2.4)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$a(\bar{u}, \bar{u}) + b(\bar{u}, \bar{u}) \geq \delta \int_{\Omega} e_{ij}(\bar{u}) e_{ij}(\bar{u}) dx$$

და ამის შემდეგ (4.2.20) შეიძლება ისე დამტკიცდეს როგორც ლემა 1.2 [56]-ის VI თავში.

შენიშვნა 4.2.2. (4.2.3), (4.2.4) და (4.2.7) პირობებში (4.2.15) საწყის-სასაზღვრო ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, ისეთი, რომ

$$\bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \in L_2\left(0, T; [H_0^1(\Omega)]^3\right).$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ როგორც t -ს ფუნქციები

$$\bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \in [L_2(0, T)]^3$$

და ყოველი მათგანი ფიქსირებული $t \in [0, T]$ -სთვის იღებს მნიშვნელობებს, რომლებიც $[H_0^1(\Omega)]^3$ -ს ეკუთვნიან.

დამატება 1. დამხმარე მასალა ფუნქციონალური ანალიზიდან

განსაზღვრა 1. M სიმრავლეს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე *ლინეალი* (ან *წრფივი*, ან *ვექტორული სივრცე*, ან *წრფივი სისტემა*, ან *წრფივი გარსი*) ეწოდება, თუ

ა) $\forall u, v \in M$ -სთვის განსაზღვრულია $u + v \in M$ და $\forall a \in R$ -სთვის (R ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა) განსაზღვრულია $au \in M$;

ბ) სრულდება ვექტორული ალგებრის შემდეგი აქსიომები:

$$u + v = v + u; \quad u + (v + z) = (u + v) + z, \quad z \in M;$$

$$a(u + v) = au + av; \quad (a + b)u = au + bu, \quad b \in R;$$

$$a(bu) = (ab)u; \quad 1 \cdot u = u;$$

გ) $\exists \Theta \in M$ ისეთი, რომ $u + \Theta = u \quad \forall u \in M$ -სთვის, მას *ლინეალის ნულოვანი ელემენტი* ეწოდება;

დ) $\forall u \in M$ -სთვის, $\exists v \in M$ ისეთი, რომ $u + v = \Theta$. ასეთ v ელემენტს u -ს *შებრუნებული* ეწოდება. (ის აღინიშნება $(-u)$ -თი, ხოლო $u + (-v)$ აღინიშნება $(u - v)$ -თი).

ცხადია, $0 \cdot u = (1 - 1)u = u - u = \Theta$.

განსაზღვრა 2. M სიმრავლეს (არა აუცილებლად ლინეალს) *მეტრიკული სივრცე* ეწოდება, თუ $\forall u, v \in M$ -სთვის განსაზღვრულია $\rho(u, v)$ რიცხვი, რომელსაც ეწოდება *მანძილი* (მეტრიკა) u და v -ს შორის, ისე, რომ შესრულდეს მეტრიკის შემდეგი აქსიომები:

$$\rho(u, v) \geq 0,$$

$$\rho(u, v) = 0 \Leftrightarrow u(x) \equiv v(x),$$

$$\rho(u, v) = \rho(v, u),$$

$$\rho(u, z) \leq \rho(u, v) + \rho(v, z) \quad (\text{სამკუთხედის აქსიომა}), \\ z \in M.$$

განსაზღვრა 3. M ლინეალს ეწოდება ნორმირებული, თუ $\forall u \in M$ -სთვის განსაზღვრულია $\|u\|$ რიცხვი, რომელსაც u ელემენტის ნორმა ეწოდება, ისე, რომ შესრულდეს შემდეგი თვისებები:

$$\|u\| \geq 0,$$

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u(x) \equiv \Theta, ^*)$$

$$\|au\| = |a| \cdot \|u\|, \quad a \in R,$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (\text{სამკუთხედის უტოლობა}), \quad v \in M.$$

შენიშვნა 1. ყოველი ნორმირებული ლინეალი მეტრიკული სივრცეა მეტრიკით $\rho(u, v) = \|u - v\|$. მართლაც, $\|u - z\| = \|u - v + v - z\| \leq \|u - v\| + \|v - z\|$. მეტრიკის დანარჩენი თვისებები ცხადია.

შენიშვნა 2. მეტრიკული სივრცე შეიძლება გავხადოთ ნორმირებული, თუ ის ლინეალია და მეტრიკა ისეა შემოღებული, რომ

$$\rho(u + z, v + z) = \rho(u, v), \quad \rho(au, av) = |a| \rho(u, v).$$

ასეთ შემთხვევაში ნორმა შეიძლება განესაზღვროთ $\|u\| = \rho(u, \Theta)$ ტოლობით. მართლაც, პირველი თვისება ცხადია;

მეორე თვისების დამტკიცება: $0 = \|x\| = \rho(x, \Theta) \Leftrightarrow x = \Theta$;

მესამე თვისების დამტკიცება:

$$\|ax\| = \rho(ax, \Theta) = \rho(ax, a\Theta) = |a| \rho(x, \Theta) = |a| \cdot \|x\|;$$

^{*)} თუ ეს თვისება არ სრულდება $\|u\|$ -ს ნახევარნორმა ეწოდება.

მეოთხე თვისების დამტკიცება:

$$\begin{aligned}\|x + y\| &= \rho(x + y, \Theta) \leq \rho(x + y, y) + \rho(y, \Theta) \\ &= \rho(x + y, \Theta + y) + \rho(y, \Theta) = \rho(x, \Theta) + \rho(y, \Theta) = \|x\| + \|y\|.\end{aligned}$$

განსაზღვრა 4. M ლინეალზე განსაზღვრულია სკალარული ნამრავლი, თუ ნებისმიერ წყვილს $u, v \in M$ რაიმე წესით ეთანადება ნამდვილი რიცხვი

$$(u, v) \in R,$$

ისე, რომ მას ჰქონდეს შემდეგი თვისებები:

1. $(u, u) \geq 0$,
2. $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = \Theta$ M -ზე;
3. $(u, v) = (v, u)$;
4. $(a_1 u_1 + a_2 u_2, v) = a_1 (u_1, v) + a_2 (u_2, v)$, $a_1, a_2 \in R$;

შენიშვნა 3. ვთქვათ, M ლინეალზე განსაზღვრულია სკალარული ნამრავლი, მაშინ

$$\|u\| := \sqrt{(u, u)}$$

ტოლობით შეიძლება შემოვიღოთ $u \in M$ ელემენტის ნორმა, ხოლო

$$\rho(u, v) := \|u - v\|$$

ტოლობით შეიძლება განვსაზღვროთ $u, v \in M$ ელემენტებს შორის მანძილი (მეტრიკა).

$$\text{პოლდერის უტოლობა}^{\circ):} |(u, v)| \leq \|u\| \|v\|.$$

დამტკიცება. სკალარული ნამრავლის პირველი თვისების თანახმად, $\forall \lambda \in R$ -სათვის

$$(u + \lambda v, u + \lambda v) \geq 0.$$

^{o)} მას უწოდებენ აგრეთვე კოშის უტოლობას.

საიდანაც, სკალარული ნამრავლის მეოთხე და მესამე თვისებების თანახმად

$$\begin{aligned} & (u, u) + \lambda(u, v) + \lambda(v, u) + \lambda^2(v, v) \\ &= (u, u) + 2(u, v)\lambda + (v, v)\lambda^2 \geq 0. \end{aligned}$$

ეს უკანასკნელი სამართლიანია ნებისმიერი ნამდვილი λ -სათვის, რაც მხოლოდ მაშინ შეიძლება, როცა λ -ს მიმართ კვადრატული სამწევრის დისკრიმინანტი

$$(u, v)^2 - (u, u) \cdot (v, v) \leq 0.$$

ე.ი.

$$(u, v)^2 \leq (u, u) \cdot (v, v) = \|u\|^2 \|v\|^2.$$

შენიშვნა 4. ნორმირებულ ლინეალზე შეიძლება შემოვიღოთ სკალარული ნამრავლი. ამისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ნორმა ისე იყოს განმარტებული, რომ სრულდებოდეს ე.წ. პარალელოგრამის პირობა (თვისება)

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2). \quad (1)$$

ამ შემთხვევაში სკალარული ნამრავლი შეიძლება შემოვიღოთ

$$(u, v) := -\frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u + v\|^2) = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) \quad (2)$$

ტოლობით. მართლაც, (იხ. [47], გვ. 152), თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\Phi(u, v, w) := 4[(u + v, w) - (u, w) - (v, w)], \quad (3)$$

მაშინ (2) და (3) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned} \Phi(u, v, w) &= \|u + v + w\|^2 - \|u + v - w\|^2 \\ &\quad - \|u + w\|^2 + \|u - w\|^2 - \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2. \end{aligned} \quad (4)$$

(1)-დან ცხადია, რომ

$$\|u \pm w + v\|^2 = -\|u \pm w - v\|^2 + 2\|u \pm w\|^2 + 2\|v\|^2. \quad (5)$$

(5)-ის გათვალისწინებით, (4)-დან ვღებულობთ

$$\begin{aligned}\Phi(u, v, w) &= -\|u + w - v\|^2 + 2\|u + w\|^2 + 2\|v\|^2 + \|u - w - v\|^2 \\ &\quad - 2\|u - w\|^2 - 2\|v\|^2 - \|u + w\|^2 + \|u - w\|^2 - \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 \\ &= -\|u + w - v\|^2 + \|u - w - v\|^2 + \|u + w\|^2 \\ &\quad - \|u - w\|^2 - \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2.\end{aligned}\quad (6)$$

(4) და (6) ტოლობების წვერ-წვერა ნახევარჯამი გვაძლევს

$$\begin{aligned}\Phi(u, v, w) &= \frac{1}{2}(\|v + w + u\|^2 + \|v + w - u\|^2) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\|v - w + u\|^2 + \|v - w - u\|^2) \\ &\quad - \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2.\end{aligned}\quad (7)$$

(7) გამოსახულებიდან (1)-ის გათვალისწინებით გვექნება

$$\begin{aligned}\Phi(u, v, w) &= \|v + w\|^2 + \|u\|^2 - \|v - w\|^2 \\ &\quad - \|u\|^2 - \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 0.\end{aligned}\quad (8)$$

(3) და (8)-ის შედარების შემდეგ ვასკენით

$$(u + v, w) = (u, w) + (v, w).\quad (9)$$

ახლა განვიხილოთ

$$\varphi(c) := (cu, v) - c(u, v).\quad (10)$$

(9) და (2)-დან გამომდინარეობს

$$\varphi(0) = (0, v) = \frac{1}{4}(\|v\|^2 - \|v\|^2) = 0\quad (11)$$

და

$$\begin{aligned}\varphi(-1) &= (-u, v) + (u, v) = \frac{1}{4} (\| -u + v \|^2 - \| -u - v \|^2) \\ &+ \frac{1}{4} (\| u + v \|^2 - \| u - v \|^2) = 0,\end{aligned}$$

ე.ი.

$$(-u, v) = -(u, v). \quad (12)$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$, სადაც $\mathbb{Z}$ მთელ რიცხვთა სიმრავლეა, (12) და (9)-ის გათვალისწინებით ვასკენით

$$\begin{aligned}(nu, v) &= (\operatorname{sign} n |n| u, v) = \operatorname{sign} n (|n| u, v) = \operatorname{sign} n \underbrace{(u + \dots + u, v)}_{|n|-ჯერ} \\ &= \operatorname{sign} n \cdot \left[\underbrace{(u, v) + \dots + (u, v)}_{|n|-ჯერ} \right] = \operatorname{sign} n |n| (u, v) = n(u, v).\end{aligned}$$

ამდენად, ნებისმიერი რაციონალური $\frac{p}{q}$ რიცხვისათვის გვექნება

$$\left(\frac{p}{q} u, v \right) = p \left(\frac{1}{q} u, v \right) = p \frac{q}{q} \left(\frac{1}{q} u, v \right) = \frac{p}{q} \left(\frac{q}{q} u, v \right) = \frac{p}{q} (u, v).$$

ე.ი. $\varphi(c) = 0$ ნებისმიერი რაციონალური c რიცხვისთვის.

რამდენადაც φ ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ თუ $\frac{p_k}{q_k} \rightarrow c$,

მაშინ $\varphi(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi\left(\frac{p_k}{q_k}\right) = 0$ და $\varphi(c) = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$. ამრი-

გად, (10)-დან ვასკენით

$$(cu, v) = c(u, v). \quad (13)$$

(9), (13)-დან გამომდინარეობს, რომ სკალარული ნამრავლის მე-4 თვისება სრულდება. სხვა თვისებების სამართლიანობა ცხადია.

განსაზღვრა 5. ლინეალს (აღენიშნოთ ის S_2 -ით), რომელზეც განსაზღვრულია სკალარული ნამრავლი და ამდენად — შენიშვნა 3-ში მითითებული მეტრიკა და ნორმა, ეწოდება წინარე ჰილბერტის ან უნიტარული სივრცე, ან სივრცე სკალარული ნამრავლით, ან სივრცე კვადრატული მეტრიკით, ან ევკლიდეს^{*)} სივრცე.

განსაზღვრა 6. თუ $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n, u) = 0$, სადაც $u, u_n \in S_2$, მაშინ ამბობენ, რომ u_n კრებადია u -საკენ S_2 -ში

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \quad S_2\text{-ში} \quad (u_n \xrightarrow{S_2} u).$$

თეორემა 1. თუ $u, v, u_n, v_n \in S_2$ და $u_n \xrightarrow{S_2} u$, $v_n \xrightarrow{S_2} v$, მაშინ

$$(u_n, v_n) \rightarrow (u, v).$$

დამტკიცება გამომდინარეობს ჰილბერტის უტოლობის გათვალისწინებით მიღებული შემდეგი უტოლობიდან

$$\begin{aligned} |(u_n, v_n) - (u, v)| &= |(u_n - u, v_n - v) + (u, v_n - v) + (v, u_n - u)| \\ &\leq |(u_n - u, v_n - v)| + |(u, v_n - v)| + |(v, u_n - u)| \\ &\leq \|u_n - u\| \cdot \|v_n - v\| + \|u\| \cdot \|v_n - v\| + \|v\| \cdot \|u_n - u\|. \end{aligned}$$

შედეგი 1. თუ $u, v, u_n \in S_2$ და $u_n \xrightarrow{S_2} u$, მაშინ $(u_n, v) \rightarrow (u, v)$.

^{*)}ევკლიდე (დაახ. 340-დაახ. 287 წ. ალ.-მდე).

შედეგი 2. თუ $u, u_n \in S_2$ და $u_n \xrightarrow{S_2} u$, მაშინ $\|u_n\| \rightarrow \|u\|$, ე.ი. $\|u_n - u\| \rightarrow 0$.

განსაზღვრა 7. $u_n \in S_2$ -ს ეწოდება ფუნდამენტური მიმდევრობა S_2 -ში, თუ

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \rho(u_m, u_n) = 0.$$

განსაზღვრა 8. S_2 სივრცეს ეწოდება სრული, თუ მისი ყოველი ფუნდამენტური მიმდევრობა მასში კრებადი.

განსაზღვრა 9. სრულ წინარეპილბერტის სივრცეს ჰილბერტის^{*)} (H) სივრცე ეწოდება, ხოლო სრულ ნორმირებულ სივრცეს – ბანახის^{**)} სივრცე.

განსაზღვრა 10. M სიმრავლეს ეწოდება მკვრივი S_2 -ში, თუ $\forall u \in S_2$ -სათვის M -ში მოიძებნება მისკენ S_2 -ში კრებადი მიმდევრობა.

განსაზღვრა 11. $u, v \in H$ -ს ეწოდება ორთოგონალური, თუ $(u, v) = 0$.

თეორემა 2. თუ $u \in H$ ორთოგონალურია H -ში მკვრივი M -ის ყველა ელემენტისადმი, მაშინ ის H -ის ნულოვანი ელემენტია.

დამტკიცება ცხადია, რადგან $(u, u_n) = 0$ და $u_n \xrightarrow{H} u$ დამოკიდებულებებიდან, შედეგი 1-ის თანახმად, გამოძღინარეობს, რომ $(u, u) = 0$, ე.ი. $u = \Theta$.

განსაზღვრა 12. თუ მოცემულია X და Y რაიმე სიმრავლეები და წესი, რომელიც ყოველ $x \in X$ ელემენტს უთანადებს ცალ-

^{*)}დ. ჰილბერტი (1862-1943).

^{**)} ს. ბანახი (1892-1945).

სახად განსაზღვრულ გარკვეულ $y \in Y$ ელემენტს, მაშინ ვამბობთ, რომ მოცემულია A ოპერატორი ($y = Ax$) X განსაზღვრისა და Y -ში მნიშვნელობათა სიმრავლეებით.

იმ კერძო შემთხვევაში, როცა ოპერატორი იღებს რიცხვით მნიშვნელობებს, მას *ფუნქციონალი* ეწოდება.

განსაზღვრა 13. ოპერატორს ეწოდება *წრფივი*, თუ მისი განსაზღვრის D_A არე ლინეალა და

$$a) A(au) = aAu \quad \forall u \in D_A \text{ და } \forall a \in R;$$

$$b) A(u_1 + u_2) = Au_1 + Au_2 \quad \forall u_1, u_2 \in D_A.$$

განსაზღვრა 14. $Fu := (Au, u) - 2(f, u)$ ფუნქციონალს, სადაც A დადებითი ოპერატორია (იხ. განსაზღვრა 29) D_A ლინეალზე, რომელიც მკერძია H ჰილბერტის სივრცეში და $f \in H$, ეწოდება *კვადრატული ფუნქციონალი*, რამდენადაც $\forall a \in R$ ადგილი აქვს

$$(A(au), au) = a^2 (Au, u)$$

ტოლობას და ამდენად (Au, u) წარმოადგენს F ფუნქციონალის კვადრატულ წევრს.

თეორემა 3. თუ სივრცეში $\rho(u, v) := \|u - v\|$ მეტრიკით $u_n \rightarrow u_0$, ე.ი. $\|u_n - u_0\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, მაშინ $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = \|u_0\|$.

თეორემა 4. თუ $\{u_n\}$ ფუნდამენტური მიმდევრობაა სივრცეში $\rho(u, v) := \|u - v\|$ მეტრიკით, მაშინ ის შემოსაზღვრულია, ე.ი. $\exists k = \text{const} > 0$ ისეთი, რომ

$$\|u_n\| \leq k \quad \forall n.$$

განსაზღვრა 15. P მეტრიკულ სივრცეს ეწოდება *სეპარაბელური*, თუ არსებობს მის ელემენტთა ქვესიმრავლე არაუშუქტეს თვლადისა, რომელიც მკვერთია ამ სივრცეში.

თეორემა 5. თუ A დადებითი ოპერატორია (იხ. განსაზღვრა 29), H_A ენერგეტიკული სივრცის (იხ. [54], გვ. 117) სეპარაბელურობისთვის საკმარისია H სივრცის სეპარაბელურობა.

განსაზღვრა 16. H სივრცის $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ ელემენტთა მიმდევრობას ეწოდება *სრული*, თუ მისი წრფივი კომბინაციების სიმრავლე მკვერთია ამ სივრცეში, ე.ი. $\forall \varepsilon = \text{const} > 0$ და $u \in H$ -სთვის $\exists n$ და ისეთი $a_1^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}$ რიცხვები, რომ

$$\rho\left(u, \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} \varphi_k\right) < \varepsilon.$$

განსაზღვრა 17. $u_1, \dots, u_k \in S_2$ ელემენტებს ეწოდებათ *წრფივად დამოუკიდებელი*, თუ ერთი მათთაგანი მაინც არის დანარჩენების წრფივი კომბინაცია. წინააღმდეგ შემთხვევაში მათ *წრფივად დამოუკიდებელი* ეწოდებათ.

თეორემა 6. $u_1, \dots, u_k \in S_2$ ელემენტების სიმრავლე წრფივად დამოუკიდებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი *გრამის*^{*)} დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} (u_1, u_1), \dots, (u_1, u_k) \\ \dots\dots\dots \\ (u_k, u_1), \dots, (u_k, u_k) \end{vmatrix} \neq 0.$$

^{*)} ი.პ. გრამი (1850-1916).

განსაზღვრა 18. თუ $\varphi_i \in S_2$, $i = 1, 2, \dots$, სისტემის ნებისმიერი ორი ელემენტი ორთოგონალურია $((\varphi_i, \varphi_j) = 0, i \neq j)$, მაშინ მას S_2 -ში ორთოგონალური სისტემა ეწოდება, ხოლო თუ ამის გარდა ის ნორმირებულიცაა $(\|\varphi_i\| = 1, i = 1, 2, \dots)$, მაშინ — ორთონორმირებული.

განსაზღვრა 19. $\varphi_i \in S_2$, $i = 1, 2, \dots$ სისტემას ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი S_2 -ში, თუ მისი ელემენტების ნებისმიერი სასრული რაოდენობისგან შემდგარი სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

თეორემა 7. ყოველი ორთონორმირებული სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

განსაზღვრა 20. H სივრცეში სრულ და წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას მისი ბაზისი ეწოდება.

განსაზღვრა 21. $\varphi_k \in H$, $k = 1, 2, \dots$, მიმდევრობას ეწოდება H -ის ბაზისი შაუდერის^{*)} აზრით, თუ $\forall u \in H$ შეიძლება წარმოდგენილი იქნას ცალსახად

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k, \quad a_k \in R,$$

სახით.

შენიშვნა 5. თუ $\varphi_k \in H$, $k = 1, 2, \dots$, სისტემა ორთონორმირებულია, მაშინ ბაზისის განსაზღვრა 20 და განსაზღვრა 21 ერთმანეთს ემთხვევიან.

განსაზღვრა 22. ბაზისის ელემენტთა n რიცხვს ეწოდება H სივრცის განზომილება და აღინიშნება $n := \dim H$ სიმბოლოთი.

^{*)}ი.პ. შაუდერი (1896-1943).

განსაზღვრა 23. თუ $\varphi_k \in S_2$, $k = 1, 2, \dots$, ორთონორმირებული სისტემაა S_2 -ში, $u \in S_2$ და $\alpha_k := (u, \varphi_k)$, $k = 1, 2, \dots$, მაშინ $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k$ მწკრივს ეწოდება u -ს შესაბამისი ფურიეს მწკრივი, ხოლო α_k -ს – ფურიეს კოეფიციენტები.

თეორემა 8. თუ $\varphi_k \in H$, $k = 1, 2, \dots$, მასში ორთონორმირებული სისტემაა, მაშინ $u \in H$ ელემენტის შესაბამისი ფურიეს მწკრივი H -ში კრებადია და სამართლიანია ბესელის^{*)}

$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \leq \|u\|^2$ უტოლობა. ამასთან აუცილებელი და საკმარისი პირობა მისი u -სკენ კრებადობისათვის მდგომარეობს პარსევალის^{**)}

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = \|u\|^2$$

ტოლობის შესრულებაში.

განსაზღვრა 24. ორთონორმირებულ სისტემას ეწოდება H -ში ჩაკეტილი, თუ სისტემის ყველა ელემენტისადმი ორთოგონალური ელემენტი მხოლოდ ნულოვანი ელემენტი.

განსაზღვრა 25. ორთონორმირებულ სისტემას ეწოდება სრული H -ში, თუ ყოველი $u \in H$ -სთვის შესაბამისი ფურიეს მწკრივი H -ში კრებადია u -სკენ, ე.ი. თუ სრულდება პარსევალის ტოლობა.

შენიშვნა 6. ორთონორმირებული სისტემის შემთხვევაში სისრულის განსაზღვრა 16 და განსაზღვრა 25 ერთმანეთს ემთხვევა.

^{*)} ფ.ვ. ბესელი (1784-1846).

^{**) მ.ა. პარსევალი (1755-1836).}

თეორემა 9. ორთონორმირებული სისტემა სრულია H -ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის ჩაკეტილია მასში.

თეორემა 10. ყოველ სეპარაბელურ H სივრცეში არსებობს ორთონორმირებული ბაზისი, რომლის შესაბამისი ფურიეს მწკრივი $u \in H$ ელემენტისთვის u -სკენ კრებადია H -ში (ცხადია, თუ H სეპარაბელურია, მასში ბაზისი არსებობს და პირიქით, თუ ბაზისი არსებობს, ის სეპარაბელურია, რადგან ბაზისი H -ში მკვრივი სისტემაა, რომელიც თვლადზე მეტი არაა). თუ M მკვრივია სეპარაბელურ H -ში, მაშინ ბაზისი შეიძლება აიგოს M -ის ელემენტებისგან.

განსაზღვრა 26. B ბანახის სივრცეში განსაზღვრულ ფუნქციონალს ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ

$$|Lu| \leq C\|u\|, \quad C = \text{const} > 0, \quad \forall u \in B.$$

უმცირეს C მუდმივებს შორის ეწოდება L ფუნქციონალის ნორმა და აღინიშნება $\|L\|$ სიმბოლოთი.

თეორემა 11 (რისის*) თეორემა). H ჰილბერტის სივრცეში ყოველი შემოსაზღვრული წრფივი l ფუნქციონალი შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$lu = (u, v) \quad \forall u \in H,$$

სკალარული ნამრავლის სახით, სადაც $v \in H$ ფიქსირებული ელემენტი ცალსახადაა განსაზღვრული, ამასთან $\|l\| = \|v\|$.

თეორემა 12 (ჰან*)-ბანახის თეორემა). B ბანახის სივრცის რაიმე M წრფივ მრავალსახეობაზე (მაგალითად, ლინეალზე) განსაზღვრული ყოველი წრფივი შემოსაზღვრული l ფუნქციონალი შეიძლება ნორმის შენარჩუნებით განეავრცოთ მთელ B სივრცეზე, ე.ი. შეიძლება ავაგოთ ისეთი L ფუნქციონალი, რომ

*ფ. რისი (1880-1956).

**ჰ. ბანი (1879-1954).

$$1) L(x) = l(x) \quad \forall x \in M; \quad 2) \|L\|_B = \|l\|_M.$$

განსაზღვრა 27. წრფივ ნორმირებულ E სივრცეზე განსაზღვრული $f(x) = \langle f, x \rangle$ ფუნქციონალები ქმნიან ბანახის E^* სივრცეს, რომელსაც ეწოდება E სივრცის შეუღლებული (დუალური) სივრცე.

განსაზღვრა 28. ვთქვათ, $y = Ax$ ოპერატორი ასახავს E_x წრფივ ნორმირებულ სივრცეს E_y წრფივ ნორმირებულ სივრცეში, ხოლო $\varphi(y) = \langle \varphi, y \rangle$ არის E_y -ზე განსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალი, მაშინ $\varphi(y) = \varphi(Ax) = f(x)$, სადაც $f(x)$ წრფივი ფუნქციონალი E_x -ზეა განსაზღვრული. ამრიგად, ამ ტოლობით ავაგეთ რაღაც A^* ოპერატორი

$$f = A^* \varphi,$$

რომელიც განსაზღვრულია E_y -ის შეუღლებულ E_y^* სივრცეზე და ამ უკანასკნელი სივრცის φ ელემენტებს უთანადებს E_x -ის შეუღლებული E_x^* სივრცის ელემენტებს. A^* ოპერატორს A ოპერატორის შეუღლებული ოპერატორი ეწოდება.

თუ $E_x \equiv E_y \equiv H$ ჰილბერტის სივრცეა, მაშინ რისის თეორემის თანახმად მოიძებნება ისეთი $x^*, y^* \in H$ ელემენტები, რომ

$$f(x) = (x^*, x), \quad \varphi(y) = (y^*, y),$$

ე.ი.

$$(y^*, y) = (x^*, x) \text{ და } (y^*, Ax) = (x^*, x)$$

ტოლობა ყოველ y^* -ს უთანადებს ერთადერთ x^* ელემენტს, ე.ი.

$$x^* = A^* y^*.$$

ამდენად, H ჰილბერტის სივრცეში შეუღლებული ოპერატორი შეიძლება განიმარტოს უკანასკნელის წინა ტოლობით.

კერძოდ, თუ A ოპერატორი განსაზღვრულია H -ში მკვრივ D_A ლინეალზე და $\exists x^*, y^* \in H$ ისეთი, რომ

$$(y^*, Ax) = (x^*, x), \quad x \in D_A,$$

მაშინ ვამბობთ, რომ y^* -ის სიმრავლე ქმნის შეუღლებული A^* ოპერატორის D_{A^*} განსაზღვრის არეს და თვით ოპერატორი განისაზღვრება ტოლობით

$$A^* y^* = x^*.$$

D_{A^*} ლინეალია, ხოლო A^* – წრფივი ოპერატორი. $D_{A^*} \neq \emptyset$, რადგან მას ყოველთვის ეკუთვნის ნულოვანი ელემენტი.

განსაზღვრა 29. H სივრცეში მკვრივ D_A ლინეალზე განსაზღვრულ A ოპერატორს ეწოდება *სიმეტრიული* D_A -ზე, თუ ის წრფივია და $\forall u, v \in D_A$ სრულდება

$$(Au, v) = (u, Av)$$

ტოლობა. სიმეტრიულ ოპერატორს ეწოდება *დადებითი ოპერატორი*, თუ

$$(Au, u) \geq 0,$$

$$(Au, u) = 0 \Rightarrow u = \Theta \quad D_A - \text{ში},$$

ხოლო თუ $\exists C = \text{const} > 0$, რომ

$$(Au, u) \geq C \|u\|^2,$$

მაშინ მას D_A -ში *დადებითად განსაზღვრული ოპერატორი* ეწოდება.

განსაზღვრა 30. თუ A სიმეტრიული ოპერატორია, ცხადია, $D_A \subset D_{A^*}$. და ამდენად A^* ოპერატორი A ოპერატორის გაფართოებაა. თუ $D_A = D_{A^*}$, მაშინ $A^* = A$ და მას *თვითშეუღლებული ოპერატორი* ეწოდება.

შენიშვნა 7. შემოსაზღვრული ოპერატორებისთვის სიმეტრიულობისა და თვითშეუღლებულობის განმარტებები ერთმანეთს ემთხვევა.

თეორემა 13. ყოველი დადებითად განსაზღვრული ოპერატორი შეიძლება გავაფართოოთ თვითშეუღლებულ ოპერატორამდე (ე.წ. ფრიდრიხსის*) გაფართოება).

განსაზღვრა 31. ორ A და B დადებითად განსაზღვრულ ოპერატორს ეწოდება კონგრუენტული, თუ $D_A = D_B$.

განსაზღვრა 32. ორ კონგრუენტულ ოპერატორს ეწოდება მონათესავე, თუ $\exists c, k = \text{const} > 0$ ისეთები, რომ

$$|(Au, (B + kI)u)| \geq c \|Au\|^2 \quad \forall u \in D_A = D_B,$$

სადაც I ერთეულოვანი ოპერატორია.

განსაზღვრა 33. A ოპერატორს ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ

$$\|Ax\|_{E_y} \leq M \|x\|_{E_x} \quad \forall x \in E_x. \quad (14)$$

განსაზღვრა 34. A ოპერატორს ეწოდება უწყვეტი, თუ

$$\|x_n - x\|_{E_x} \rightarrow 0 \Rightarrow \|Ax_n - Ax\|_{E_y} \rightarrow 0.$$

თეორემა 14. იმისთვის, რომ წრფივი ოპერატორი იყოს უწყვეტი, აუცილებელი და საკმარისია, რომ იგი იყოს შემოსაზღვრული.

განსაზღვრა 35. უმცირეს M -ებს შორის (14)-ში ეწოდება A ოპერატორის ნორმა: $\|A\|$.

*კ.ო. ფრიდრიხსი (1901-1982).

განსაზღვრა 36. $W_2^k(\Omega)$ -თი აღინიშნება ისეთი პილბერტის სივრცე, რომლის ელემენტები ეკუთვნის $L_2(\Omega)$ -ს და აქვთ k რიგამდე ჩათვლით განზოგადებული წარმოებულები Ω არეში, რომლებიც აგრეთვე ეკუთვნის $L_2(\Omega)$ -ს, და სადაც სკალარული ნამრავლი მოცემულია

$$(u, v)_{W_2^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^{\alpha} u D^{\alpha} v dx$$

ტოლობით.

განსაზღვრა 37. $C_0^{\infty}(\Omega)$ -თი აღინიშნება ისეთ ფინიტურ ფუნქციათა (ე.ი. Ω -ში კომპაქტური საყრდენის მქონე) სიმრავლე, რომელთაც აქვთ Ω არეზე უწყვეტი ყველა რიგის წარმოებულები. ფუნქციის საყრდენი ეწოდება ფუნქციის განსაზღვრის წერტილთა იმ სიმრავლის ჩაკეტვას, სადაც ფუნქცია ნულის ტოლი არაა.

თეორემა 15. ვთქვათ, წრფივი ოპერატორი $A: D_A \rightarrow R_A$, სადაც R_A მისი მნიშვნელობათა არეა. მაშინ შებრუნებული ოპერატორი არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იქიდან, რომ $Au = \Theta$, სადაც $Au \in R_A$, $\Rightarrow u = \Theta$, სადაც $u \in D_A$.

თეორემა 16. წრფივი ოპერატორის შებრუნებული ოპერატორი წრფივია.

განსაზღვრა 38. ვთქვათ, $N \in H$ ლინეალურია. მასში შემოვიღოთ H -ის მეტრიკა, თუ N ამასთან სრულია, მაშინ მას ეწოდება H სივრცის წრფივი ქვესივრცე.

განსაზღვრა 39. ამბობენ, რომ $u \in H$ ელემენტი H პილბერტის სივრცის N ქვესივრცის ორთოგონალურია $u \perp N$, თუ $u \perp N$ -ის ყველა ელემენტის ორთოგონალურია.

თეორემა 17. ვთქვათ, N სივრცე H -ის წრფივი ქვესივრცეა. მაშინ ნებისმიერი $u \in H$ ცალსახად შეიძლება წარმოვადგინოთ $u = v + w$ სახით, სადაც $v \in N$ და $w \perp N$. v -ს ეწოდება u -ს ორთოგონალური პროექცია N -ზე.

შენიშვნა 8. ცხადია, თუ $N \neq H$, არსებობს ერთი მაინც $w \perp N$ ისეთი, რომ $w \neq \Theta$. წინააღმდეგ შემთხვევაში $u = v + \Theta = v \Rightarrow N \equiv H$.

განსაზღვრა 40. ამბობენ, რომ $\Omega \subset R^N$ არეს აქვს ლაბში-ცის*) საზღვარი, თუ:

1.) Ω შემოსაზღვრულია (დასაშვებია მრავლადბმულობა);

2.) $\exists \alpha, \beta = \text{const} > 0$, m ცალი $x_1^{(r)}, \dots, x_N^{(r)}$, $r = \overline{1, m}$, საკოორდინატო სისტემა და $(N-1)$ -განზომილებიან $K^{(r)}$ კუბებზე

$$|x_i^{(r)}| < \alpha, \quad i = \overline{1, N-1},$$

უწყვეტი $a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)})$, $r = \overline{1, m}$, ისეთი ფუნქციები, რომ

ა.) ყოველ $x \in \partial \Omega$ წერტილი შეიძლება წარმოდგენილი იქნას ერთ-ერთი ზემოხსენებულ კოორდინატთა სისტემაში მაინც

$$x = (x_1^{(r)}, \dots, x_N^{(r)}) = (x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)}, a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)}))$$

სახით;

ბ.) x წერტილები, რომელთათვისაც სრულდება

$$|x_i^{(r)}| < \alpha, \quad i = \overline{1, N-1},$$

და

$$a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)}) < x_N^{(r)} < a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)}) + \beta$$

ან

*) რ.ო.ს. ლაბშიცი (1832-1903).

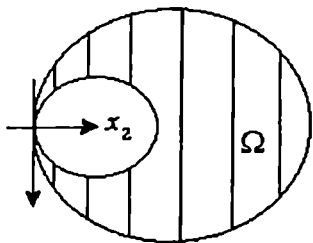
$$a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)}) - \beta < x_N^{(r)} < a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)})$$

პირობები, შესაბამისად მდებარეობენ Ω -ში ან $\bar{\Omega}$ -ს გარეთ;

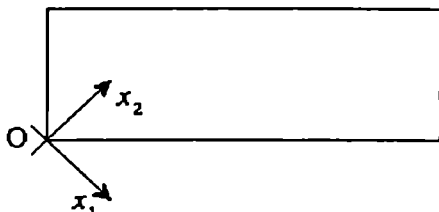
გ.) ყოველი $a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)})$, $r = \overline{1, m}$, ფუნქცია $K^{(r)}$ კუბზე აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას, ე.ი. $\exists k = \text{const} > 0$, რომ

$$\begin{aligned} & |a_r(y_1^{(r)}, \dots, y_{N-1}^{(r)}) - a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{N-1}^{(r)})| \\ & \leq k[(x_1^{(r)} - y_1^{(r)})^2 + \dots + (x_{N-1}^{(r)} - y_{N-1}^{(r)})^2]^{1/2}. \end{aligned}$$

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი. ნახ. 1-ზე მოცემულ შემთხვევაში



ნახ. 1



ნახ. 2

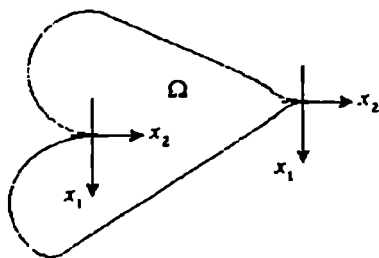
x_2 ღერძის ყველა შესაძლო მიმართულებისათვის დარღვეულია ბ.) პირობა, ე.ი. საზღვარი არ არის ლიპშიცის.

ნახ. 2-ზე მოცემულ შემთხვევაში, O-ს მიდამოში $x_2 = |x_1|$, ამიტომ $\|x_1^{**} - |x_1^{*}|\| \leq |x_1^{**} - x_1^{*}|$ და სრულდება ყველა პირობა, ე.ი. ლიპშიცის საზღვარია.

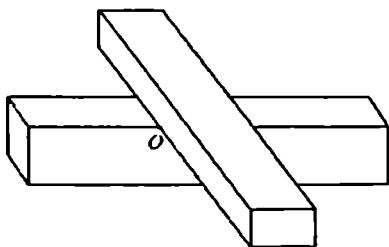
ნახ. 3-ზე მოცემულ კუთხოვანი წერტილის ორივე შემთხვევაში დასაშვებია მხოლოდ მითითებული კოორდინატთა სისტემა. წინააღმდეგ შემთხვევაში დაირღვევა ბ.). მაგრამ ასეთი სისტემის

შემთხვევაში აღნიშნულ წერტილებში $\frac{dx_2}{dx_1} \Big|_{x_1=0\pm} = \lg \frac{\pi}{2} = \infty$, ე.ი.

დაირღვევა გ.), რადგან არ იარსებებს $k \neq \infty$. ამრიგად საზღვარი ლიპშიცის არაა.



ნახ. 3



ნახ. 4

ნახ. 4-ზე მოცემულის სამგანზომილებიანი სხეულის ზედაპირი ლიპშიცური არაა, რადგან O წერტილის მიდამოში შესაბამისი საკოორდინატო სისტემის შერჩევა ვერ ხერხდება (O წერტილის არცერთ მიდამოში ზედაპირის წარმოდგენა, როგორც რაიმე ფუნქციის გრაფიკის, შეუძლებელია).

განსაზღვრა 41. $u(x) \in C(\overline{\Omega})$ (მით უფრო, თუ $u(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$) ფუნქციის $u(y)$, $y \in \partial\Omega$ მნიშვნელობები $\partial\Omega$ -ზე ცალსახადა განსაზღვრული. $u(y)$ ფუნქციას ეწოდება $u(x)$ ფუნქციის კვალი $\partial\Omega$ -ზე.

თეორემა 18. თუ Ω ლიპშიცის საზღვრის მქონე არეა, მაშინ არსებობს ერთადერთი შემოსაზღვრული წრფივი T ოპერატორი, რომელიც $W_2^1(\Omega)$ სივრცეს ასახავს $L_2(\partial\Omega)$ სივრცეზე:

$$\|Tu\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq \|T\| \|u\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

თუ $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, მაშინ $Tu(x) = u(y)$.

განსაზღვრა 42. წინა თეორემიდან Tu -ს ეწოდება $u(x)$ ფუნქციის კვალი $\partial\Omega$ -ზე, T -ს კი კვალის ოპერატორი.

შენიშვნა 9. რამდენადაც $C^\infty(\overline{\Omega})$ მკვრივია $W_2^1(\Omega)$ -ში, თუ u ეკუთვნის $W_2^1(\Omega)$ -ს, მაგრამ არ ეკუთვნის $C^\infty(\overline{\Omega})$ -ს, Tu კვალი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ისეთ $u_n(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ ფუნქციათა $u_n(y)$, $y \in \partial\Omega$, კვალების ზღვარი $L_2(\partial\Omega)$ -ში, რომელთათვისაც

$$\|u_n(x) - u\|_{W_2^1(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

შენიშვნა 10. თუ $u \in W_2^1(\Omega)$ ფუნქცია უწყვეტია $\overline{\Omega}$ -ში, მაშინ მისი კვალი $\partial\Omega$ -ზე ემთხვევა მის შეზღუდვას $\partial\Omega$ -ზე.

შენიშვნა 11. თუ $\|u_n(x) - u(x)\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, მაგრამ არ არის კრებადი $W_2^1(\Omega)$ -ში, მაშინ $\{u_n(S)\}$ მიმდევრობა შეიძლება არ იყოს კრებადი $L_2(\partial\Omega)$ -ში (აგებულია მაგალითები (იხ. [54], გვ. 341)).

ფრიდრიხსის უტოლობა. თუ $\Omega \subset R^m$ არეა ლიპშიცის საზღვრით, მაშინ არსებობს ისეთი $c_1, c_2 = \text{const} > 0$, დამოკიდებული მხოლოდ არეზე, რომ

$$\int_{\Omega} u^2(x) dx \leq c_1 \sum_{k=1}^m \int_{\Omega} (u_{,k})^2 dx + c_2 \int_S u^2 dS \quad \forall u \in C^1(\overline{\Omega}).$$

პუანკარეს^{*)} უტოლობა. თუ $\Omega \subset R^m$ არეა ლიპშიცის საზღვრით, მაშინ არსებობენ ისეთი $c_3, c_4 = \text{const} > 0$, დამოკიდებული მხოლოდ არეზე, რომ

$$\int_{\Omega} u^2(x) dx \leq c_3 \sum_{k=1}^m \int_{\Omega} (u_{,k})^2 dx + c_4 \left[\int_{\Omega} u(x) dx \right]^2 \quad \forall u \in C^1(\bar{\Omega}).$$

ფრიდრიხსის უტოლობა. თუ $\Omega \subset R^m$ არეა ლიპშიცის საზღვრით, მაშინ არსებობენ ისეთი $K_1, K_2 = \text{const} > 0$ დამოკიდებული მხოლოდ არეზე, რომ

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq K_1 \left[\sum_{j=1}^m \int_{\Omega} (u_{,j})^2 dx + \int_S u^2 dS \right] \quad \forall u \in W_2^1(\Omega),$$

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \leq K_2 \left[\sum_{|l|=2} \int_{\Omega} (D^l u)^2 dx + \int_S u^2 dS \right] \quad \forall u \in W_2^2(\Omega).$$

პირველი უტოლობა ძალაში რჩება, თუ S -ს შვეცელით S_1 -ით, რომელიც S -ის ღია ნაწილია *ლუბკის*^{**)} დადებითი ზომით (ამ შემთხვევაში K_1 მუდმივი S_1 -ზეცაა დამოკიდებული).

კერძოდ,

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq K_1 \sum_{j=1}^m \int_{\Omega} (u_{,j})^2 dx \quad \forall u \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega)$$

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq K_1 \sum_{j=1}^m \int_{\Omega} (u_{,j})^2 dx \quad \forall u \in \overset{o}{W}_2^1(\Omega)$$

და

^{*)} ჟ.ა. პუანკარე (1854-1912).

^{**)} ა.ლ. ლუბკი (1875-1941).

$$\|u\|_{W_2^0(\Omega)}^2 \leq K_2 \sum_{|i|=2} \int_{\Omega} (D^i u)^2 dx \quad \forall u \in W_2^0(\Omega),$$

$$\|u\|_{W_2^0(\Omega)}^2 \leq K_2 \sum_{|i|=2} \int_{\Omega} (D^i u)^2 dx \quad \forall u \in W_2^0(\Omega),$$

სადაც

$$\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad \alpha_j \in Z_+ := \{0, 1, 2, \dots\}, \quad j = \overline{1, m},$$

ბულტი ინდექსია,

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_m,$$

$$\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_m^{\alpha_m}, \quad x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m};$$

$\sum_{|\alpha| \leq k}$ და $\sum_{|\alpha|=k}$ სიმბოლოები აღნიშნავენ აჯამვას ყველა ისეთი α

-სათვის, რომლებიც შესაბამისად აკმაყოფილებენ $|\alpha| \leq k$ და $|\alpha| = k$ პირობებს.

პუნკარეს უტოლობა. თუ Ω არეა ლიპშიცის საზღვრით (ამ პირობის შესუსტება შესაძლებელია, იხ. [30]), მაშინ არსებობს ისეთი $K_3 = \text{const} > 0$ დამოკიდებული მხოლოდ არეზე, რომ

$$\|u\|_{W_2^k(\Omega)}^2 \leq K_3 \left[\sum_{|i|=k} \int_{\Omega} (D^i u)^2 dx + \sum_{|i| < k} \left(\int_{\Omega} D^i u dx \right)^2 \right] \\ \forall u \in W_2^k(\Omega).$$

განსაზღვრა 43. $\varphi \in C^\infty(R^m)$ კომპლექსური მნიშვნელობის მქონე ფუნქციათა სიმრავლეს ეწოდება შვარცის⁹⁾ $S(R^m)$ სივრცე, თუ ნებისმიერი მთელი არაუარყოფითი k რიცხვისათვის

$$\sup_{x \in R^m} \left[(1 + |x|)^k \sum_{|\alpha| \leq k} |\partial^\alpha \varphi(x)| \right] < +\infty,$$

სადაც

$$x := (x_1, \dots, x_m) \in R^m, \quad |x| := (x_1^2 + \dots + x_m^2)^{\frac{1}{2}},$$

$\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ მულტიინდექსია.

განსაზღვრა 44. f ფუნქციონალს (ფორმას) ეწოდება ანტიწრფივი (სემიწრფივი) რაიმე ლინეალზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი φ და ψ ელემენტებისათვის

$$f(\varphi + \psi) = f(\varphi) + f(\psi) \quad \text{და} \quad f(\lambda \varphi) = \bar{\lambda} f(\varphi),$$

სადაც λ ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვია.

განსაზღვრა 45. $B(\varphi, \psi)$ ფუნქციონალს (ფორმას) ეწოდება სესქვიწრფივი რაიმე ლინეალზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი φ , φ_1 , φ_2 , ψ , ψ_1 , ψ_2 ელემენტებისათვის და ნებისმიერი λ კომპლექსური რიცხვისათვის სრულდება შემდეგი ტოლობები:

$$B(\varphi_1 + \varphi_2, \psi) = B(\varphi_1, \psi) + B(\varphi_2, \psi),$$

$$B(\varphi, \psi_1 + \psi_2) = B(\varphi, \psi_1) + B(\varphi, \psi_2),$$

$$B(\lambda \varphi, \psi) = \lambda B(\varphi, \psi),$$

$$B(\varphi, \lambda \psi) = \bar{\lambda} B(\varphi, \psi).$$

⁹⁾ლ. შვარცი (1915-2002).

ამდენად, $\varphi \rightarrow B(\varphi, \psi)$ ასახვა ფიქსირებული ψ -სათვის არის წრფივი ფუნქციონალი (ფორმა), ხოლო $\psi \rightarrow B(\varphi, \psi)$ ასახვა ფიქსირებული φ -სათვის არის ანტიწრფივი. თუ $B(\varphi, \psi)$ სეს-ქვიწრფივი ფორმა ნამდვილმნიშველობიანი ფორმაა, მაშინ მას *ორადწრფივი ფორმა* ეწოდება.

განსაზღვრა 46. თუ $\Omega \subset R^m$ რაიმე არეა, მაშინ $S(\Omega)$ არის ყველა ისეთი $\varphi \in S(R^m)$ ელემენტების ქვესივრცე, რომელთათვისაც $\text{supp } \varphi \subset \overline{\Omega}$, $\text{supp } \varphi$ აღნიშნავს ელემენტის *საყრდენს*, ე.ი. R^m -ის იმ ქვესივრცის ჩაკეტვას, სადაც φ განსხვავებულია ნულისაგან (იხ. აგრეთვე განსაზღვრა 37).

თეორემა 19. $C_0^\infty(\Omega)$ სივრცე მკვერთია $S(\Omega)$ -ში.

განსაზღვრა 47. $S(\Omega)$ -ზე განსაზღვრულ შემოსაზღვრულ ანტიწრფივ f ფუნქციონალს ეწოდება *განაწილება* Ω -ზე. f განაწილების მნიშვნელობას $\varphi \in S(\Omega)$ ელემენტზე (f, φ) სიმბოლოთი აღვნიშნავთ, ხოლო განაწილებათა სიმრავლეს – $S'(\Omega)$ -თი. ვიტყვი, რომ $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ მიმდევრობა $S'(\Omega)$ -ში კრებადი $f \in S'(\Omega)$ ელემენტებისაა, თუ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in S(\Omega).$$

განსაზღვრა 48. ვთქვათ, $f \in S'(\Omega)$ და α რაიმე მულტიინდექსია. $\partial^\alpha f$ განისაზღვრება

$$(\partial^\alpha f, \varphi) := (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi) \quad \forall \varphi \in S(\Omega)$$

ტოლობით.

შენიშვნა 12. განსაზღვრა 48-ში $S(\Omega)$ შეიძლება შეიცვალოს $C_0^\infty(\Omega)$ -თი (რადგან ეს უკანასკნელი მკერდია პირველში).

განსაზღვრა 49. $\varphi \in S(R^m)$ -ის ფურიეს გარდაქმნა შემდეგი ტოლობით განისაზღვრება

$$\tilde{\varphi}(\xi) := (F\varphi)(\xi) := \int_{R^m} e^{i(x, \xi)} \varphi(x) dx,$$

სადაც

$$(x, \xi) := x_1 \xi_1 + \dots + x_m \xi_m.$$

განსაზღვრა 50. $\varphi \in S(R^m)$ -ისა და $\psi \in S(R^m)$ -ის ნახვევი განიმარტება

$$(\varphi * \psi)(x) := \int_{R^m} \varphi(x-y) \psi(y) dy$$

ტოლობით.

თეორემა 20. F პოპოგოროფიზმია $S(R^m)$ -დან $S(R^m)$ -ში; მისი შებრუნებული F^{-1} გარდაქმნა განისაზღვრება

$$(F^{-1}\psi)(x) := (2\pi)^{-m} \int_{R^m} e^{-i(x, \xi)} \psi(\xi) d\xi$$

ტოლობით.

თეორემა 21. ყოველი $\varphi, \psi \in S(R^m)$ აკმაყოფილებს

$$\int_{R^m} \tilde{\varphi}(\xi) \overline{\tilde{\psi}(\xi)} d\xi = (2\pi)^m \int_{R^m} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx$$

პარსევალის ტოლობას.

თეორემა 22. ყოველი $\varphi, \psi \in S(R^m)$ -სათვის

$$F(\varphi * \psi)(\xi) = \tilde{\varphi}(\xi) \tilde{\psi}(\xi).$$

თეორემა 23. ყოველი $\varphi \in S(R^m)$ -ის და α მულტი ინდექსისათვის

$$F(\partial^\alpha \varphi)(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \tilde{\varphi}(\xi),$$

$$F(x^\alpha \varphi)(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha \tilde{\varphi}(\xi).$$

განსაზღვრა 51. $f \in S'(R^m)$ განაწილებას ეწოდება რეგულარული, თუ არსებობს ისეთი ლოკალურად კამებადი (ე.ი. $L^1_{loc}(R^m)$ -დან) ფუნქცია, რომელსაც სიმარტივისათვის აღვნიშნავთ $f(x)$ -ით, რომ

$$(f, \varphi) = \int_{R^m} f(x) \overline{\varphi}(x) dx \quad \forall \varphi \in S(R^m).$$

რეგულარულ განაწილებათა სიმრავლეს აღვნიშნავთ $S'_{reg}(R^m)$ -ით. განაწილებას ეწოდება სინგულარული, თუ ის რეგულარული არ არის.

განსაზღვრა 52. $u \in S'(R^m)$ განაწილებათა სიმრავლეს, რომელთა ფურიეს გარდაქმნა $\tilde{u} \in S'_{reg}(R^m)$ და

$$\|u\|_{H^s(R^m)} := \int_{R^m} (1 + |\xi|^2)^s |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty,$$

სადაც $s \in R$ (R ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა), ეწოდება ბესელის პოტენციალთა სივრცე, როცა $s \in R$. თუ ამასთან $s > 0$ მას სობოლევ-სლობოდეცკის სივრცე, ხოლო თუ s ნატურალურია სობოლევის სივრცე ეწოდება და აღინიშნება $H^s(R^m)$ სიმბოლოთი.

განსაზღვრა 53. $\tilde{H}^s(\Omega)$ არის $H^s(R^m)$ -ის ქვესივრცე, რომელიც შედგება ყველა ისეთი $u \in H^s(R^m)$ -საგან, რომ $\text{supp } u \subset \bar{\Omega}$.

განსაზღვრა 54. $H^s(\Omega)$ არის ყველა ისეთ $u \in S'(\Omega)$ ელემენტთა სივრცე, რომლებიც შეიძლება Ω -დან გაფართოვდნენ $\hat{u} \in H^s(R^m)$ -მდე, ან პირიქით $H^s(R^m)$ -ის ელემენტების Ω -ზე შეზღუდვების სივრცე. $u \in H^s(\Omega)$ -ს ნორმა განისაზღვრება

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} := \inf_{\hat{u} \in H^s(R^m): \hat{u}|_{\Omega} = u} \|\hat{u}\|_{H^s(R^m)}$$

ტოლობით, სადაც $\hat{u}|_{\Omega}$ აღნიშნავს $\hat{u}$ -ს მნიშვნელობებს Ω -ზე. თუ $\hat{u}|_{\Omega} = u$, მაშინ u -ს ეწოდება $\hat{u}$ -ს შეზღუდვა Ω -ზე, ხოლო $\hat{u}$ -ს — u -ს გაფართოება Ω -დან R^m -ზე.

შენიშვნა 13. თუ $s = k$, სადაც k არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, მაშინ $H^k(\Omega) \equiv W_2^k(\Omega)$ (იხ. განსაზღვრა 36).

თეორემა 24. $H^s(R^m)$ და $H^{-s}(R^m)$ დუალური (შეუღლებული) სივრცეებია. თუ Ω შემოსაზღვრული არეა, მაშინ $H^s(\Omega)$ სივრცის შეუღლებული სივრცეა $\tilde{H}^{-s}(\bar{\Omega})$.

ლემა 1 (ჟ.-ლ. ლიონსი). ვთქვათ, Ω არის არე, რომელიც ეკუთვნის R^n -ს და v არის განაწილება Ω -ზე. მაშინ

$$\{v \in H^{-1}(\Omega) \text{ და } \partial_i v \in H^{-1}(\Omega), i = \overline{1, n}\} \Rightarrow v \in L^2(\Omega).$$

განსაზღვრა 55. ვთქვათ, Γ არის C^∞ კლასის ჩაკეტილი ზედაპირი, რომელიც R^m -ს ყოფს შიგა და გარე Ω^+ და Ω^-

არეზალდ; $n(x)$ ერთეულოვანი გარე ნორმალა Γ -ს მიმართ $x \in \Gamma$ წერტილში. მაშინ (იხ. [13], გვ. 143 და [11], გვ. 212):

1. არსებობს R^m -ის ისეთი ღია არეების $\{O_i\}_{i=1}^N$ სიმრავლე, რომ

$$- \{O_i\}_{i=1}^N \text{ ფარავს } \Gamma\text{-ს, ე.ი. } \Gamma \subset \bigcup_{i=1}^N O_i;$$

$$- n(x) \text{ ნორმალეები არ იკვეთებიან } \bigcup_{i=1}^N O_i \text{ გაერთიანებაში;}$$

$$- \text{ ყოველი } i \in \{1, \dots, N\} \text{ -სათვის არსებობს } \tilde{x} = \varphi_i(y') \in C^\infty$$

$$- \text{ დიფეომორფიზმი } B'_i = \{y' \in R^{m-1} : |y'| < 1\} \text{ -დან } O_i \cap \Gamma \text{ -ში; მის შებრუნებულს აღვნიშნავთ } y' = \psi_i(\tilde{x}) \text{ -ით;}$$

$$- \text{ თუ } O_i \cap O_j \cap \Gamma \neq \emptyset, \text{ მაშინ არსებობს}$$

$$\{\psi_i(\tilde{x}) : \tilde{x} \in O_i \cap O_j \cap \Gamma\} \subset B'_j$$

სიმრავლიდან

$$\{\psi_j(\tilde{x}) : \tilde{x} \in O_i \cap O_j \cap \Gamma\} \subset B'_i$$

სიმრავლეში $h_{ij} \in C^\infty$ - დიფეომორფიზმი დადებითი იაკობიანით, ამასთან ისეთი, რომ $\psi_i(\tilde{x}) = h_{ij} \psi_j(\tilde{x})$.

(დიფეომორფიზმი არის დიფერენცირებადი ჰომეომორფიზმი, ხოლო ჰომეომორფიზმი არის უწყვეტი ბიექციური, ე.ი. ურთიერთცალსახა ასახვა).

2. არსებობს ერთეულის ისეთი რეგულარული $\{e_i(x)\}_{i=1}^N$ დაშლა Γ -ზე, რომ

$$- e_i(x) \in C_0^\infty(O_i \cap \Gamma), \quad i = 1, \dots, N;$$

- $0 \leq e_i(x) \leq 1, \quad x \in R^m, \quad i = 1, \dots, N;$
- $\sum_{i=1}^N e_i(x) = 1, \quad x \in \Gamma.$

Γ -ზე განსაზღვრული ყოველი, მაგალითად, $u \in L_2(\Gamma)$ ფუნქციისათვის სამართლიანია

$$u(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^N e_i(\tilde{x}) u(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \Gamma,$$

გაშლა. ყოველი $i \in \{1, \dots, N\}$ -სათვის მოვახდინოთ ცვლადთა შემდეგი გარდაქმნა

$$u_i(y') := (e_i u)(\varphi_i(y')) = e_i(\varphi_i(y')) u(\varphi_i(y')) = e_i(\tilde{x}) u(\tilde{x})$$

და განვავრცოთ (გაგაფართოვოთ) $u_i(y')$ ნულით B'_i -ის გარეთ მთელ R_y^{m-1} სივრცეზე. ახლა განვსაზღვროთ $H^s(\Gamma)$, $s \in R$, $s \geq 0$, შემდეგნაირად

$$H^s(\Gamma) := \left\{ u \in L_2(\Gamma) : u_i \in H^s(R_y^{m-1}), \quad i = 1, \dots, N \right\}.$$

ამ სივრცეში ნორმა შეიძლება შემოვიღოთ

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} := \left[\sum_{i=1}^N \|u_i\|_{H^s(R_y^{m-1})}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

ტოლობით. ერთეულის სხვადასხვა დაყოფას შეესაბამება ეკვივალენტური ნორმები. $H^s(\Gamma)$ ჰილბერტის სივრცეა.

თუ $s \leq 0$, მაშინ $H^s(\Gamma)$ განისაზღვრება, როგორც $H^{-s}(\Gamma)$ სივრცის დუალური სივრცე შემდეგი სკალარული ნამრავლით

$$(g, u)_{L_2(\Gamma)} := \int_{\Gamma} g(x) u(x) d\Gamma.$$

თეორემა 25. თუ $L(v)$ არის შემოსაზღვრული ანტიწრფივი ფუნქციონალი, განსაზღვრული H ჰილბერტის სივრცეზე, ხოლო

$a(u, v)$ – სესქვიწრფივი ფორმა, რომელიც აკმაყოფილებს შემოსაზღვრულობის

$$|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in H$$

და კოერციტიულობის

$$\operatorname{Re} a(u, v) \geq \gamma \|u\|^2 \quad \forall u \in H$$

პირობებს, სადაც M და γ დადებითი მუდმივებია და $\|\cdot\|$ არის ნორმა H სივრცეში, მაშინ

$$a(v, v) = L(v) \quad \forall v \in H$$

ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $u \in H$ ისეთი, რომ

$$\|u\| \leq c \|L\|_*,$$

სადაც $\|\cdot\|_*$ არის ნორმა H -ის დუალურ H' სივრცეში, ხოლო c

დადებითი მუდმივია. კერძოდ, შეიძლება ავიღოთ $c = \frac{M}{\gamma}$.

თეორემა 26 (ჩალაგების):

ა) თუ შემოსაზღვრული არის განზომილება $n < lp$, მაშინ $W_p' \subset C$, ამასთან $\|\varphi\|_C \leq M \|\varphi\|_{W_p'}$;

ბ) თუ $\varphi \in W_p'$, $n \geq lp$, მაშინ $\varphi \in L_q$. ნებისმიერ s განზომილებიან ჰიპერსიბრტყეზე, სადაც $s > n - lp$ და

$$q^* < q = \frac{sp}{n - lp}, \quad \text{ამასთან } \|\varphi\|_{L_q} \leq M \|\varphi\|_{W_p'};$$

გ) $W_p' \subset W_q^{\tilde{l}}$, $\tilde{l} < l$;

დ) თუ $\varphi \in W_p^l$, $lp > n$, $0 \leq m < l - \frac{n}{p}$, მაშინ $\varphi \in C^m$,

$$\text{ამასთან } \left| \frac{\partial^m \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right| \leq M \|\varphi\|_{W_p^l};$$

ე) თუ $\varphi \in W_p^l$, $m \geq 0$, $m \geq l - \frac{n}{p}$, $s > n - (l - m)p$,

მაშინ ყოველ s განზომილებიან სიმრავლეზე $\varphi \in L_q$. და

$$\left| \frac{\partial^m \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right| \leq M \|\varphi\|_{W_p^l}.$$

შევნიშნოთ, რომ ამ დამატებაში გადმოცემული მასალის შედგენისას ძირითადად გამოყენებული იყო [54], [13] და [11].

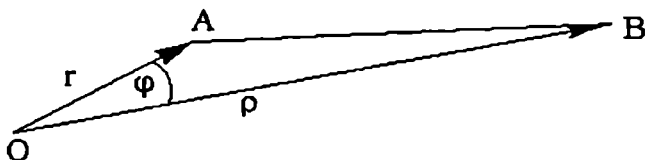
დამატება 2. ლეჟანდრის პოლინომები

1. ლეჟანდრის პოლინომების წარმომქმნელი ფუნქცია

კლასიკურ ორთოგონალურ პოლინომთა შორის ყველაზე ადრინდელია ლეჟანდრის პოლინომები, რომელთა წარმოშობა დაკავშირებულია მათემატიკური ფიზიკის ამოცანებთან, კერძოდ, პოტენციალის თეორიასთან. სივრცის ორი A და B წერტილის მიზიდულობის ველის პოტენციალი გამოისახება მათ შორის მანძილის შებრუნებული (იხ. ნახ. 1)

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho\cos\varphi + \rho^2}}$$

სიდიდით.



ნახ. 1

თუ აქ $\cos\varphi =: x$, მაშინ გვექნება, რომ

$$\frac{1}{r\sqrt{1 - 2tx + t^2}},$$

სადაც $t = \frac{\rho}{r}$. როგორც ქვემოთ დავინახავთ, თუ

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}}$$

წილადს გავშლით ხარისხოვან მწკრივად t -ს მიმართ სათავის მიდამოში, მაშინ მწკრივის კოეფიციენტები x -ის პოლინომებია, რომლებსაც *ლეჟანდრის პოლინომები* ეწოდება (იხ. ქვემოთ (1) და (2)).

გავიხსენოთ ბინომიალური მწკრივი (მაკლორენის მწკრივი

$$f(u) := (1-u)^{-\frac{1}{2}} \text{ ფუნქციისთვის}$$

$$(1-u)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{1 \cdot 3}{2!2^2}u^2 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{n!2^n}u^n + \dots, \quad (|u| < 1),$$

სადაც $(2n-1)!! := 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)$ და $(-1)!! := 1$.

თუ $u = 2tx - t^2$, მაშინ გვქვია, რომ

$$\begin{aligned} (1 - 2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}} &= [1 - (2tx - t^2)]^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{2}(2tx - t^2) + \frac{1 \cdot 3}{2!2^2}(2tx - t^2)^2 + \dots \end{aligned}$$

ეს მწკრივი აბსოლუტურად კრებადი იქნება, თუ $2|tx| + t^2 < 1$. ამ გარემოების გამო უფლება გვაქვს, ფრჩხილების გახსნის შემდეგ მწკრივი დავალაგოთ t -ს ხარისხებად:

$$1 + \left(\frac{1}{2}2x\right)t + \left(\frac{1 \cdot 3}{2!2^2}4x^2 - \frac{1}{2}\right)t^2 + \dots$$

როგორც ვხედავთ, პირველი სამი კოეფიციენტი წარმოადგენს შესაბამისად ნულოვანი, პირველი და მეორე ხარისხის პოლინომს. დანარჩენიც რომ პოლინომებია, ამაში დავრწმუნდებით, როდესაც დავადგენთ რეკურენტულ ფორმულას, რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს ყოველ ურთიერთმომდევნო სამ პოლინომს. აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ ლეჟანდრის პოლინომების წარმოდგენა ბევრნაირად შეიძლება, რაზედაც საუბარი ქვემოთ გვქვია. ახლა კი დავუბრუნდეთ

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = P_0(x) + P_1(x)t + P_2(x)t^2 + \dots + P_n(x)t^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (1)$$

ტოლობას, სადაც, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, $P_n(x)$ წარმოადგენს ლეჟანდრის n -ური რიგის პოლინომს. ტოლობის მარცხენა მხარეში მდგომ გამოსახულებას ეწოდება *ლეჟანდრის პოლინომთა წარმომქმნელი ფუნქცია*, რამდენადაც იგი წარმოშობს ზემოხსენებული ხარისხოვანი მწკრივის კოეფიციენტთა $\{P_n(x)\}$ მიმდევრობას. როგორც ვხედავთ,

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}. \quad (2)$$

(1) მწკრივიდან ადვილი დასადგენია

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n.$$

მართლაც, თუ ჩავსვათ $x = 1$, მაშინ, რადგანაც როცა $|t| < 1$, მარცხენა მხარეში გვექნება უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი და მივიღებთ, რომ

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots + t^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n.$$

აქედან უშუალოდ ჩანს, რომ $P_n(1) = 1$. ანალოგიურად, თუ $x = -1$, მაშინ

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)t^n,$$

რაც ნიშნავს, რომ $P_n(-1) = (-1)^n$. წარმომქმნელი ფუნქციის (1) წარმოდგენიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $x = 0$, მაშინ ენტი ხარისხის ლეჟანდრის პოლინომი ნულის ტოლია, ე.ი.,

$P_{2k+1}(0) = 0$. მართლაც, თუ $x = 0$, წარმომქმნელი ფუნქცია ბინომიალური მწკრივის სახით ასე წარმოიდგინება

$$\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} t^{2k},$$

საიდანაც (1) წარმოდგენასთან შედარების შემდეგ დავასკვნით, რომ $P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}$, $P_{2k+1}(0) = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

2. რეკურენტული ფორმულები

პირველ რიგში დავამტკიცოთ, რომ ლეჟანდრის პოლინომებისათვის სამართლიანია შემდეგი რეკურენტული ფორმულა

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \quad (3)$$

ამისათვის გავაწარმოოთ (1) ტოლობა t -ს მიმართ:

$$\frac{x-t}{(1-2tx+t^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_{n+1}(x) t^n.$$

თუ ორივე მხარეს გავამრავლებთ $(1-2tx+t^2)$ -ზე, მივიღებთ

$$\frac{x-t}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = (1-2tx+t^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_{n+1}(x) t^n, \quad (4)$$

ან, (1)-ის თანახმად,

$$(x-t) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = (1-2tx+t^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_{n+1}(x) t^n.$$

თუ ორივე მხარეში გამრავლებას შევასრულებთ და t^n ხარისხთან მდგომ კოეფიციენტებს, როცა $n \geq 1$, ერთმანეთს გაუუტოლებთ, მივიღებთ

$$xP_n(x) - P_{n-1}(x) = (n+1)P_{n+1}(x) - 2nxP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x),$$

$$n \geq 1,$$

საიდანაც გამოზღინარეობს საძიებელი (3) ტოლობა. მისი არსი ისაა, რომ შეგვიძლია თანმიმდევრობით ავაგოთ განსახილავი პოლინომები. რადგან უკვე დადგენილია, რომ $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, ამის შემდეგ (3) ტოლობის გამოყენებით ავაგებთ დანარჩენებსაც. ასე, მაგალითად,

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x,$$

$$P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8}.$$

(2)-ის გათვალისწინებით, (3) რეკურენტული ფორმულიდან, ცხადია, რომ ლუწი რიგის პოლინომი ლუწი ფუნქციაა, ხოლო კენტი რიგის კი კენტი ფუნქციაა. გარდა (3) ფორმულისა, არსებობს კიდევ რამდენიმე რეკურენტული თანაფარდობა, რომლებიც პოლინომების წარმოებულებსაც შეიცავენ. ადვილი გამოსაყვანია შემდეგი ფორმულა

$$P_n(x) = P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \quad (5)$$

მართლაც, გავაწარმოოთ (1) ტოლობა x -ით:

$$t(1 - 2tx + t^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)t^n, \quad (6)$$

საიდანაც

$$\frac{t}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = (1 - 2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)t^n.$$

თუ მარცხენა მხარეში ჩავსვამთ (1) მწკრივს, ხოლო მარჯვენა მხარეში შევასრულებთ გამრავლებას, მაშინ მივიღებთ

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2xP'_n(x)t^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} P'_{n-1}(x)t^{n+2}.$$

ამის შემდეგ თუ t^{n+1} , $n \geq 1$, ხარისხების წინ მდგომ კოეფიციენტებს, როცა $n \geq 1$, ერთმანეთს გაუტოლებთ, მივიღებთ (5)^{*)}-ს.

დავუბრუნდეთ ისევ (იხ. (4), სადაც $n+1 =: n'$, $n' \rightarrow n$)

$$(x-t)\left(1-2tx-t^2\right)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)nt^{n-1}$$

ტოლობას. გავამრავლოთ ორივე მხარე t -ზე და შევადაროთ (6)-ს, მივიღებთ

$$(x-t)\sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)nt^n,$$

ან სხვანაირად

$$x\sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^n.$$

გაუტოლოთ ორივე მხარეში t^n ხარისხების წინ მდგომ კოეფიციენტები, როცა $n \geq 1$, მივიღებთ

$$xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x), \quad n \geq 1. \quad (7)$$

ახლა ამ ტოლობიდან განვსაზღვროთ $xP'_n(x)$ და შევიტანოთ (5) ტოლობაში, ე.ი. (5) და (7) ტოლობიდან გამოვრიცხოთ $xP'_n(x)$. ეს მოგვცემს კიდევ ერთ რეკურენტულ ფორმულას

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \quad (8)$$

$$*) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)t^n - 2x\sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)t^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)t^{n+2}$$

თუ პირველში შემოვიღებთ $n' := n-1$ და მესამეში $n' := n+1$, მაშინ

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} = \sum_{n'=0}^{\infty} P'_{n'+1}(x)t^{n'+1} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)t^{n+1} + \sum_{n'=2}^{\infty} P'_{n'-1}(x)t^{n'+1}.$$

თუ (8) ტოლობას გამოვაკლებთ (7)-ს, მივიღებთ

$$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x). \quad (9)$$

მართალია (9) დავამტკიცეთ, როცა $n \geq 1$, მაგრამ ის სამართლიანია მაშინაც, როცა $n \geq 0$, რადგან თუ $n=0$ -ს, ცხადია, ის სრულდება, რაც უშუალოდ მოწმდება. და ბოლოს, დავამტკიცოთ

$$(x^2 - 1)P'_n(x) - nxP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad n \geq 1, \quad (10)$$

ფორმულა. ჩავსვათ (9)-ში n -ის ნაცვლად $n-1$, მაშინ

$$P'_n(x) - xP'_{n-1}(x) = nP_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \quad (11)$$

ამ უკანასკნელიდან და (7)-დან გამოვრიცხოთ $P'_{n-1}(x)$,*) რის შედეგად სწორედ (10)-ს მივიღებთ.

თუ (5)-ში n -ს შევცვლით $(n-1)$ -ით გვექნება

$$P_{n-1}(x) = P'_n(x) - 2xP'_{n-1}(x) + P'_{n-2}(x), \quad n \geq 2. \quad (12)$$

(12)-დან (7)-ის გამოყენებით გამოვრიცხოთ $2xP'_{n-1}(x)$ (ამისათვის (7)-ში n შევცვალოთ $(n-1)$ -ით, გავამრავლოთ 2-ზე და მიღებულ გამოსახულებას წევრ-წევრად დავამატოთ (12))

$$P'_n(x) = (2n-1)P_{n-1}(x) + P'_{n-2}(x), \quad n \geq 2. \quad (13)$$

თუ (13) ფორმულის მარჯვენა მხარეში ჩავსვამთ (13) ფორმულიდან n -ის $(n-2)$ -ით შეცვლით მიღებულ $P'_{n-2}(x)$ -ის გამოსახულებას და ასეთ ოპერაციებს გავაგრძელებთ ვიდრე მარჯვენა მხარეში გვექნება ლეჟანდრის პოლინომის წარმოებულის შემცველი წევრი, მივიღებთ

$$\begin{aligned} P'_n(x) &= (2n-1)P_{n-1}(x) + (2n-5)P_{n-3}(x) + P'_{n-4}(x) \\ &= (2n-1)P_{n-1}(x) + (2n-5)P_{n-3}(x) + (2n-9)P_{n-5}(x) \cdots \end{aligned} \quad (14)$$

*) ამისათვის (7) გავამრავლოთ x -ზე და მიღებულს გამოვაკლოთ (11).

$$= \sum_{q'=1}^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1} (2n-2q'+1)P_{n-q'}(x)$$

(q' კენტია)

$$= \sum_{q'=1}^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1} (2n-2q'+1) \frac{1-(-1)^{q'}}{2} P_{n-q'}(x), \quad n \geq 2.$$

ინდუქციით დავამტკიცოთ (14) ფორმულის სამართლიანობა. როცა $n = 2, 3$, (14) ფორმულა სამართლიანია. დავუშვათ, რომ იგი სამართლიანია $(n-2)$ -სთვის და დავამტკიცოთ n -სთვის. (13)-ისა და ჩვენი დაშვების თანახმად,

$$P'_n(x) = (2n-1)P_{n-1}(x) + \sum_{q'=1}^{2\left[\frac{n-3}{2}\right]+1} [2(n-2)-2q'+1]P_{n-2-q'}(x)$$

(q' კენტია)

$$= (2n-1)P_{n-1}(x) + \sum_{q=3}^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1} (2n-2q+1)P_{n-q}(x)$$

(q კენტია)

$$= \sum_{q=1}^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1} (2n-2q+1)P_{n-q}(x),$$

(q კენტი)

სადაც უკანასკნელის წინა ჯამში $q := q' + 2$.

(7)-ში შევიტანოთ (14), მივიღებთ

$$\begin{aligned}
xP'_n(x) &= nP_n(x) + P'_{n-1}(x) = nP_n(x) \\
&+ \sum_{q'=1}^{2\left[\frac{n-2}{2}\right]+1} [2n-2(q'+1)+1]P_{n-(q'+1)}(x) \\
&\quad (q' \text{ კენტია}) \\
&= nP_n(x) + \sum_{q=2}^{2\left[\frac{n-2}{2}\right]+2} (2n-2q+1)P_{n-q}(x), \\
&\quad (q \text{ ლუწია})
\end{aligned} \tag{15}$$

სადაც $q := q' + 1$.

თუ (14)-ში ჩავსვამთ $q := n - q'$ და გავითვალისწინებთ იმას, რომ

$$2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1 = \begin{cases} n, & \text{როცა } n \text{ კენტია,} \\ n-1, & \text{როცა } n \text{ ლუწია,} \end{cases}$$

მივიღებთ

$$\begin{aligned}
P'_n(x) &= \sum_{q=0}^{n-1} (2q+1) \frac{1-(-1)^{n+q}}{2} P_q(x) \\
&= \sum_{q=0}^n (2q+1) \frac{1-(-1)^{n+q}}{2} P_q(x),
\end{aligned} \tag{16}$$

რადგან $q = n$ -ის შესაბამისი წევრი ყოველთვის ნულია, ხოლო როცა $q = 0$ და n ლუწია, მაშინ $q = 0$ -ის შესაბამისი წევრიც ნულია.

(16)-ის გამოყენებით (15) ((16) ჩავსვათ (15)-ის პირველ ტოლობაში) შეიძლება შემდეგნაირად გადავწეროთ

$$\begin{aligned}
 xP'_n(x) &= nP_n(x) + \sum_{q=0}^{n-2} (2q+1) \frac{1+(-1)^{n+q}}{2} P_q(x) \\
 &= nP_n(x) + \sum_{q=0}^{n-1} (2q+1) \frac{1+(-1)^{n+q}}{2} P_q(x), \quad n \geq 1.
 \end{aligned} \tag{17}$$

შენიშვნა. ცხადია (იხ. §2.6 და §3.2),

$$\begin{aligned}
 &P'_n(ax_3 - b)(a_{,\alpha}x_3 - b_{,\alpha}) \\
 &= \frac{1}{a} a_{,\alpha} (ax_3 - b) P'_n(ax_3 - b) \\
 &+ \left(\frac{b}{a} a_{,\alpha} - b_{,\alpha} \right) P'_n(ax_3 - b_3) \text{ } ^{\circ} \\
 &= -h_{,\alpha} h^{-1} (ax_3 - b) P'_n(ax_3 - b) - \tilde{h}_{,\alpha} h^{-1} P'_n(ax_3 - b).
 \end{aligned} \tag{18}$$

შევცვალოთ x (17)-სა და (16)-ში $(ax_3 - b)$ -ით და მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ (18)-ში, მაშინ მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ

$$\begin{aligned}
 &P'_n(ax_3 - b)(a_{,\alpha}x_3 - b_{,\alpha}) = -nh_{,\alpha} h^{-1} P_n(ax_3 - b) \\
 &- \sum_{q=0}^{n-1} (2q+1) \frac{h_{,\alpha}^{(+)} - (-1)^{n+q} h_{,\alpha}^{(-)}}{2h} P_q(ax_3 - b) \\
 &= -nh_{,\alpha} h^{-1} P_n(ax_3 - b) \\
 &- \sum_{q'=1}^n (2n-2q'+1) \frac{h_{,\alpha}^{(+)} - (-1)^{q'} h_{,\alpha}^{(-)}}{2h} P_{n-q'}(ax_3 - b),
 \end{aligned}$$

სადაც $q' := n - q$.

$\text{ } ^{\circ} \frac{b}{a} a_{,\alpha} = \tilde{h} a_{,\alpha}; \quad b_{,\alpha} = (\tilde{h} a)_{,\alpha}.$

3. დიფერენციალური განტოლება, რომელსაც აკმაყოფილებს $P_n(x)$ პოლინომი

წინა პარაგრაფში მიღებული რეკურენტული ფორმულების გამოყენებით ადვილად დავადგენთ, რომ ლეჟანდრის პოლინომები აკმაყოფილებენ შემდეგ მეორე რიგის წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას, რომელიც *ლეჟანდრის განტოლების* სახელს ატარებს

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0. \quad (19)$$

ამისათვის გადავწეროთ (10) ფორმულა

$$(1-x^2)P_n'(x) + nxP_n'(x) - nP_{n-1}(x) = 0$$

სახით. ამ უკანასკნელის გაწარმოება მოგვცემს

$$\begin{aligned} (1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + nP_n(x) \\ + nxP_n'(x) - nP_{n-1}(x) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

(7) ტოლობის n -ზე გამრავლების შემდეგ ყველა წევრი ტოლობის მარცხენა მხარეში გადავიტანოთ

$$nxP_n'(x) - nP_{n-1}(x) - n^2P_n(x) = 0.$$

თუ (20) ტოლობას ამ უკანასკნელს გამოვაკლებთ, მივიღებთ

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

ეს კი სწორედ იმას ნიშნავს, რომ $P_n(x)$ პოლინომი აკმაყოფილებს (19) განტოლებას.

4. როდრიგის^{*)} ფორმულა

დავამტკიცოთ, რომ ლეჟანდრის $P_n(x)$ პოლინომი წარმოადგენს შემდეგი სახით

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad (21)$$

რომელსაც როდრიგის ფორმულა ეწოდება. სხვათა შორის, აქედან ჩანს, რომ თუ n ლუწია, $P_n(x)$ შეიცავს x -ის მხოლოდ ლუწ ხარისხებს, ხოლო თუ n კენტია, — კენტ ხარისხებს. (21) ტოლობის სამართლიანობა დავამტკიცოთ (19) განტოლების გათვალისწინებით. სახელდობრ, პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ

$$\kappa \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (22)$$

ფუნქცია, სადაც κ მუდმივია, აკმაყოფილებს (19) განტოლებას. მართლაც, თუ

$$u = (x^2 - 1)^n,^{**})$$

მაშინ გაწარმოების შემდეგ მივიღებთ

$$(x^2 - 1)u' = 2nxu.$$

ეს ტოლობა თავის მხრივ $(n+1)$ -ჯერ გაგაწარმოოთ. ლაიბნიცის ფორმულის გამოყენებით გვექნება

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^{(n+2-k)} (x^2 - 1)^{(k)} = 2n \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} u^{(n+1-k)} (x)^{(k)}.$$

როგორც ვხედავთ, მარცხენა მხარეში მხოლოდ სამი წევრის ჯამი დაგვრჩება, რადგან $x^2 - 1$ -ის 2-ზე მაღალი რიგის ყველა

^{*)}ბ.ო. როდრიგი (1794-1851).

^{**)} $u' = 2n(x^2 - 1)^{n-1}x \Rightarrow (x^2 - 1)u' = 2nx(x^2 - 1)^n.$

წარმოებული ნულის ტოლია, ხოლო მარჯვენა მხარეში ორი წევრის ჯამი გვექნება, ვინაიდან x -ის ერთზე მაღალი რიგის ყველა წარმოებული ნულია. ამდენად მივიღებთ

$$u^{(n+2)}(x^2 - 1) + (n+1)u^{(n+1)} \cdot 2x + \frac{n(n+1)}{2} \cdot 2 \cdot u^{(n)} \\ = 2n[u^{(n+1)} \cdot x + (n+1)u^{(n)}] .$$

თუ შემოვიღებთ

$$y := u^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$$

აღნიშვნას, მაშინ წინა ტოლობა მიიღებს

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

სახეს. რადგან ეს განტოლება ერთგვაროვანია, ამიტომ მასვე აკმაყოფილებს (22) გამოსახულება, როგორიც არ უნდა იყოს K მუდმივი. ვინაიდან (22) გამოსახულება წარმოადგენს n ხარისხის პოლინომს, რომელიც იმავე (19) განტოლებას აკმაყოფილებს, რომელსაც აკმაყოფილებს ლეჟანდრის $P_n(x)$ პოლინომი, ამიტომ (22) ფუნქცია $P_n(x)$ -სგან შეიძლება განსხვავდებოდეს მხოლოდ მუდმივი^{*)} მამრავლით. მაშასადამე, ჩვენ დაგვრჩა K -ისე შერჩევა, რომ (21) ტოლობა სამართლიანი იყოს. ამისათვის ჯერ გავარკვიოთ, როგორია $P_n(x)$ პოლინომის უფროსი კოეფიციენტი. როგორც ეს ძირითადი რეკურენტული (3) ფორმულიდან ჩანს, თუ A_n აღნიშნავს $P_n(x)$ პოლინომის უფროს კოეფიციენტს და მხედველობაში მივიღებთ, რომ (3) ტოლობაში

^{*)} რადგან ლეჟანდრის (19) განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს (იხ [45], გვ. 472)

$$C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x)$$

სახე, სადაც Q_n არის ლეჟანდრის მიკავშირებული ფუნქცია, რომელიც არ არის პოლინომი.

შემაჯალი მხოლოდ შემდეგი ორი წევრი $(n+1)P_{n+1}(x)$ და $(2n+1)xP_n(x)$ შეიცავს x^{n+1} -ს, მაშინ ამ წევრების უფროსი კოეფიციენტები ტოლი უნდა იყოს. ამგვარად, გვექნება

$$(n+1)A_{n+1} = (2n+1)A_n,$$

საიდანაც

$$A_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} A_n, \text{ ე.ი., } A_n = \frac{2n-1}{n} A_{n-1}. \quad (23)$$

(2)-დან, ცხადია, რომ $A_0 = 1$, $A_1 = 1$. მაშასადამე, (23) ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$A_n = 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{4} \cdots \frac{2n-1}{n} = \frac{(2n-1)!!}{n!}. \quad (24)$$

თუ დაეუბრუნდებით (22) გამოსახულებას, დავინახავთ, რომ x^n -ის კოეფიციენტი იქნება $\kappa \cdot 2n(2n-1) \cdots (n+1)$. ამგვარად, როდრიგის (21) ფორმულის დასადგენად საჭიროა, რომ

$$\frac{(2n-1)!!}{n!} = \kappa \cdot 2n \cdot (2n-1) \cdots (n+1),$$

საიდანაც

$$(2n-1)!! = \kappa \cdot (2n)!,$$

აქედან კი

$$\kappa = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (2n-1) \cdot 2n} = \frac{1}{2^n \cdot n!}.$$

ამით (21) ტოლობის სამართლიანობა დამტკიცებულია.

5. ლეჟანდრის პოლინომთა სისტემის ორთოგონალობა $[-1,1]$ სეგმენტზე

როგორც (19) დიფერენციალური განტოლებიდან ჩანს, მას შეიძლება შემდეგი სახე მიეცეს

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)y'] + n(n+1)y = 0. \quad (25)$$

ადვილი დასამტკიცებელია

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0, \quad m \neq n. \quad (26)$$

მართლაც, ერთის მხრივ, (25)-დან გვაქვს

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P'_n(x)] + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

თუ ამ უკანასკნელს გავამრავლებთ $P_m(x)$ -ზე, მივიღებთ

$$P_m(x) \frac{d}{dx}[(1-x^2)P'_n(x)] + n(n+1)P_n(x)P_m(x) = 0.$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 P_m(x) \frac{d}{dx}[(1-x^2)P'_n(x)] dx \\ & + \int_{-1}^1 n(n+1)P_n(x)P_m(x) dx = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

მეორეს მხრივ, თუ m -ისა და n -ის ურთიერთშენაცვლებას მოვახდენთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 P_n(x) \frac{d}{dx}[(1-x^2)P'_m(x)] dx \\ & + \int_{-1}^1 m(m+1)P_m(x)P_n(x) dx = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

ნაწილობითი ინტეგრება მოგვცემს

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 P_m(x) \frac{d}{dx} [(1-x^2) P'_n(x)] dx \\
&= [P_m(x)(1-x^2) P'_n(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (1-x^2) P'_n(x) P'_m(x) dx \\
&= - \int_{-1}^1 (1-x^2) P'_m(x) P'_n(x) dx.
\end{aligned}$$

ანალოგიურად (ან m -ისა და n -ის ურთიერთ შენაცვლებით) დავადგენთ

$$\int_{-1}^1 P_n(x) \frac{d}{dx} [(1-x^2) P'_m(x)] dx = - \int_{-1}^1 (1-x^2) P'_n(x) P'_m(x) dx.$$

თუ ამ ინტეგრალების მნიშვნელობებს შევიტანთ (27)-სა და (28)-ში, მივიღებთ

$$\begin{aligned}
& - \int_{-1}^1 (1-x^2) P'_m(x) P'_n(x) dx + n(n+1) \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0, \\
& - \int_{-1}^1 (1-x^2) P'_n(x) P'_m(x) dx + m(m+1) \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0.
\end{aligned}$$

მათი სხვაობა კი მოგვცემს

$$[n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0$$

და რადგან $n \neq m$, ამიტომ ინტეგრალი იქნება ნულის ტოლი, რითაც დამტკიცდა (26).

ახლა დავადგინოთ, რომ n ხარისხის $P_n(x)$ პოლინომი ორ-
 თოგონალურია ნებისმიერი პოლინომის, რომლის ხარისხი n -ზე
 ნაკლებია. ამისთვის გავითვალისწინოთ, რომ x^k წარმოიდგინება
 როგორც შემდეგი წრფივი კომბინაცია

$$x^k = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \dots + a_k P_k(x)$$

და, მაშასადამე, ყოველი n -ზე დაბალი ხარისხის $P(x)$ პოლინომი, ცხადია, წარმოადგენს $P_0, P_1, \dots, P_k, k \leq n-1$, პოლინომების წრფივ კომბინაციას მუდმივი კოეფიციენტებით. ამიტომ, (26)-ის თანახმად, ვასკვნით, რომ

$$\int_{-1}^1 P(x) P_n(x) dx = 0.$$

იმისათვის, რომ ლეჟანდრის პოლინომთა სისტემა ნორმირებული გავხადოთ, საჭიროა გამოვთვალოთ

$$h_n = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx.$$

ზემოთ A_n -ით გვქონდა აღნიშნული $P_n(x)$ პოლინომის უფროსი კოეფიციენტი. ამის შესაბამისად A_{n-1} აღნიშნავს $P_{n-1}(x)$ -ის სათანადო კოეფიციენტს. აღვილი შესამოწმებელია, რომ

$$q(x) := P_n(x) - \frac{A_n}{A_{n-1}} x P_{n-1}(x)$$

გამოსახულება წარმოადგენს n -ზე ნაკლები ხარისხის პოლინომს. მართლაც, იგი არ შეიცავს x^n ხარისხს, რადგან $\frac{x P_{n-1}(x)}{A_{n-1}}$

იწყება x^n წევრით და A_n -ზე მისი გამრავლება მოგვცემს სწორედ $P_n(x)$ პოლინომის უფროს წევრს $A_n x^n$ -ს. განსახილავ სხვაობაში $A_n x^n$ წევრი გაქრება და ამგვარად $q(x)$ იქნება არაუმეტეს $n-1$ ხარისხის პოლინომი.

როგორც უკვე ნაჩვენები იყო, $P_n(x)$ ორთოგონალურია $q(x)$ -ის და, ამგვარად,

$$\int_{-1}^1 q(x) P_n(x) dx = 0.$$

ამ უკანასკნელის და შემდეგი ტოლობის

$$P_n(x) = \frac{A_n}{A_{n-1}} x P_{n-1}(x) + q(x)$$

გათვალისწინებით, გვექნება

$$\begin{aligned} h_n &= \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \int_{-1}^1 P_n(x) \left[\frac{A_n}{A_{n-1}} x P_{n-1}(x) + q(x) \right] dx \\ &= \frac{A_n}{A_{n-1}} \int_{-1}^1 x P_{n-1}(x) P_n(x) dx. \end{aligned}$$

მაგრამ, რეკურენტული (3) ფორმულის თანახმად,

$$x P_n(x) = \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(x).$$

თუ ამ გამოსახულებას შევითავსებთ წინა ინტეგრალის ქვეშ და გაითვალისწინებთ იმას, რომ $P_{n+1}(x)$ არის $P_{n-1}(x)$ -ის ორთოგონალური, მივიღებთ

$$h_n = \frac{n}{2n+1} \frac{A_n}{A_{n-1}} \int_{-1}^1 P_{n-1}^2(x) dx = \frac{n}{2n+1} \frac{A_n}{A_{n-1}} h_{n-1}.$$

თუ აქ გამოვიყენებთ (23) ტოლობას, რომელიც A_n და A_{n-1} კოეფიციენტებს აკავშირებს, მივიღებთ

$$h_n = \frac{2n-1}{2n+1} h_{n-1}. \quad (29)$$

თუ ამ ტოლობაში ჩავსვამთ $n=1$, გამოვთვლით h_1 -ს, ამის შემდეგ გამოვთვლით h_2 -ს, h_3 -ს და, ზოგადად, h_n მანომრივბელ მამრავლს, თანმიმდევრობით გვექნება, რომ თუ $n=1$,

$$h_1 = \frac{1}{3} h_0 = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 P_0^2(x) dx = \frac{2}{3},$$

რადგან

$$P_0(x) = 1.$$

თუ $n = 2$,

$$h_2 = \frac{3}{5} h_1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5},$$

და ა.შ., ზოგად შემთხვევაში

$$h_n = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{2n-3}{2n-1} \cdots \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{2n+1}.$$

ამრიგად, $\sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, სისტემა წარმოადგენს
ორთონორმირებულ სისტემას.

6. შმიდტის ორთოგონალიზაციის მეთოდი

განვიხილოთ $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ წრფივად დამოუკიდებელ ფუნქციათა მიმდევრობა, $\psi_n \in L^2(\Omega)$, $n = 0, \infty$, სადაც Ω ნებისმიერი შემოსაზღვრული სივრცეა R^n -დან. ავაროთ შემდეგი სისტემა:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 := \psi_0, \\ \varphi_1 := \psi_1 + C_{10}\varphi_0, \\ \varphi_2 := \psi_2 + C_{21}\varphi_1 + C_{20}\varphi_0, \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_n := \psi_n + C_{nn-1}\varphi_{n-1} + \dots + C_{n0}\varphi_0, \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \quad (30)$$

შევარჩიოთ C_k მუდმივები ისე, რომ $\{\varphi_n\}_0^{\infty}$ სისტემა ორთოგონალური იყოს. ამისათვის (30)-ის მეორე ტოლობა სკალარულად გაავარაულოთ φ_0 -ზე და, ორთოგონალობის პირობის თანახმად, გავუტოლოთ 0-ს:

$$(\varphi_1, \varphi_0) = (\psi_1, \varphi_0) + C_{10}(\varphi_0, \varphi_0) = 0.$$

აქედან

$$C_{10} = -\frac{(\psi_1, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)}.$$

ანალოგიურად (30)-ის მესამე ტოლობა გავამრავლოთ φ_0 -ზე და, ორთოგონალობის პირობის თანახმად, გავუტოლოთ ნულს:

$$\begin{aligned}(\varphi_2, \varphi_0) &= (\psi_2, \varphi_0) + C_{21}(\varphi_1, \varphi_0) + C_{20}(\varphi_0, \varphi_0) \\ &= (\psi_2, \varphi_0) + C_{20}(\varphi_0, \varphi_0) = 0.\end{aligned}$$

აქედან $C_{20} = -\frac{(\psi_2, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)}$ და ა.შ. დავადგინეთ, რომ

$$C_{k0} = -\frac{(\psi_k, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)}.$$

ახლა (30)-ის მესამე ტოლობა გავამრავლოთ φ_1 -ზე, გამოვიყენოთ ორთოგონალობის პირობა და ა.შ. ჩავატაროთ ანალოგიური ოპერაციები, შემდეგ იგივე პროცესი ჩავატაროთ φ_2 -ზე გამრავლებით და ა.შ. φ_j -ზე გამრავლებით, მაშინ მივიღებთ

$$C_{kj} = -\frac{(\psi_k, \varphi_j)}{(\varphi_j, \varphi_j)}, \quad j \geq 0, \quad k \geq 1. \quad (31)$$

ე.ი. თუ (30)-ში C_{kj} კოეფიციენტები განსაზღვრულია (31) ტოლობით, მაშინ $\{\varphi_n\}_0^\infty$ სისტემა ორთოგონალურია.

ცხადია, ორთონორმირებისათვის საკმარისია, თითოეული მათგანი გავყოთ თავის ნორმაზე. მაშასადამე, მივიღებთ შემდეგ ორთონორმირებულ სისტემას:

$$\omega_n = \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (32)$$

თეორემა 1. პოლინომთა

$$\psi_i = x^i, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (33)$$

სისტემის შმიდტის მეთოდით ორთონორმირება გვაძლევს $\omega_n = \frac{P_n}{\|P_n\|}$, $n = 0, 1, \dots$ სისტემას, სადაც P_n ლეჟანდრის პოლინომებია.

დამტკიცება. საკმარისია, ვაჩვენოთ, რომ (33) სისტემისთვის (30) სისტემას აქვს

$$\varphi_n = \alpha_n P_n \quad n = \overline{0, \infty}, \quad (34)$$

სახე, სადაც $\alpha_n > 0 \quad \forall n = 0, 1, \dots$. მართლაც, მაშინ მივიღებდით, რომ

$$\omega_n = \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} = \frac{\alpha_n P_n}{\|\alpha_n P_n\|} = \frac{\alpha_n P_n}{\alpha_n \|P_n\|} = \frac{P_n}{\|P_n\|}.$$

ცხადია, $n = 0$ -სთვის (32) სამართლიანია $\alpha_0 = 1$ -სთვის, რადგან

$$\varphi_0 = \psi_0 = P_0 = 1.$$

დავუშვათ, რომ (34) სამართლიანია $\forall k = \overline{0, n}$ და ვაჩვენოთ, რომ იგი სამართლიანია $k = n+1$ -სთვის. ე.ი. ვუშვებთ, რომ $\varphi_k = \alpha_k P_k$, $\alpha_k > 0$, $\forall k = \overline{0, n}$ და უნდა დავამტკიცოთ, რომ $\varphi_{n+1} = \alpha_{n+1} P_{n+1}$, $\alpha_{n+1} > 0$.

განვიხილოთ (იხ. (30))

$$\varphi_{n+1} = x^{n+1} + \sum_{k=0}^n C_{n+1k} \varphi_k, \quad (35)$$

სადაც

$$\begin{aligned} C_{n+1k} &= -\frac{(\psi_{n+1}, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)} = -\frac{(x^{n+1}, \alpha_k P_k)}{(\alpha_k P_k, \alpha_k P_k)} \\ &= -\frac{\alpha_k (x^{n+1}, P_k)}{\alpha_k^2 (P_k, P_k)} = -\frac{(x^{n+1}, P_k)}{\alpha_k (P_k, P_k)}, \end{aligned}$$

ე.ი.

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= x^{n+1} - \sum_{k=0}^n \frac{(x^{n+1}, P_k)}{\alpha_k (P_k, P_k)} \alpha_k P_k \\ &= x^{n+1} - \sum_{k=0}^n \frac{(x^{n+1}, P_k)}{(P_k, P_k)} P_k.\end{aligned}\quad (36)$$

x^{n+1} წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k P_k, \quad (37)$$

სადაც a_k კოეფიციენტები შესაბამისადაა შერჩეული.

a_m , $m = \overline{0, n+1}$, კოეფიციენტების საპოვნელად (37) ტოლობის ორივე მხარე სკალარულად გავამრავლოთ P_m -ზე, მივიღებთ

$$(x^{n+1}, P_m) = a_m (P_m, P_m), \quad m = \overline{0, n+1}, \quad (38)$$

რადგან $\{P_m\}$ პოლინომთა სისტემა ორთოგონალურია.

(38)-დან გამომდინარეობს

$$a_m = \frac{(x^{n+1}, P_m)}{(P_m, P_m)}, \quad m = \overline{0, n+1}. \quad (39)$$

(37)-დან გამოვთვალოთ $a_{n+1} P_{n+1}$:

$$a_{n+1} P_{n+1} = x^{n+1} - \sum_{k=0}^n a_k P_k,$$

ანუ, (39)-ის გათვალისწინებით,

$$a_{n+1} P_{n+1} = x^{n+1} - \sum_{k=0}^n \frac{(x^{n+1}, P_k)}{(P_k, P_k)} P_k.$$

თუ ამ უკანასკნელს შევადარებთ (34)-ს, დავასკვნით, რომ

$$\varphi_{n+1} = a_{n+1} P_{n+1}. \quad (40)$$

დაგვრჩა იმის დამტკიცება, რომ $a_{n+1} > 0$. რადგან, როგორც უკვე ვაჩვენეთ, P_{n+1} არის x^k -ს, $k = \overline{0, n}$, ორთოგონალური, ამიტომ

$$(P_{n+1}, P_{n+1}) = (A_{n+1}x^{n+1} + A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0, P_{n+1}) = \\ = (A_{n+1}x^{n+1}, P_{n+1}).$$

ამ უკანასკნელის გათვალისწინებით, (39)-დან, ცხადია, რომ

$$a_{n+1} = \frac{(x^{n+1}, P_{n+1})}{(P_{n+1}, P_{n+1})} = \frac{1}{A_{n+1}} \frac{(A_{n+1}x^{n+1}, P_{n+1})}{(P_{n+1}, P_{n+1})} \\ = \frac{1}{A_{n+1}} \frac{(P_{n+1}, P_{n+1})}{(P_{n+1}, P_{n+1})} = \frac{1}{A_{n+1}},$$

სადაც A_{n+1} ლეჟანდრის P_{n+1} პოლინომის უფროსი კოეფიციენტი, რომელიც (24)-ის თანახმად დადებითია, ე.ი. $a_{n+1} > 0$. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

7. ფურიე-ლეჟანდრის მწკრივები

განსაზღვრა 1. $\left(k + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a_k$ რიცხვებს, სადაც

$$a_k = \int_{-1}^{+1} f(t) P_k(t) dt, \text{ ეწოდება } f(t) \text{ ფუნქციის ფურიე-ლეჟან-}$$

დრის კოეფიციენტები ორთონორმირებული $\left(k + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} P_k(t)$ სისტემის მიმართ, ხოლო

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(k + \frac{1}{2}\right) P_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a_k \left(k + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} P_k(t)$$

მწკრივს ეწოდება $f(t)$ ფუნქციის შესაბამისი ფურიე-ლეჟანდრის მწკრივი, რაც ასე ჩაიწერება

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(k + \frac{1}{2}\right) P_k(t).$$

თეორემა 2. თუ $[-1, +1]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ჰოლდერის პირობას $\alpha > \frac{1}{2}$ მაჩვენებლით (ე.ი.

$|f(t') - f(t'')| \leq \text{const} |t' - t''|^{\alpha}$), მაშინ ფურიე-ლეჟანდრის მწკრივი $f(t)$ -სკენ კრებადია თანაბრად მთელ $[-1, +1]$ სეგმენტზე (ეს კრებადობის ერთ-ერთი საკმარისი პირობაა).

თეორემა 3^{*)}. ვთქვათ, $f(x)$ უწყვეტია $[-1, +1]$ სეგმენტზე გარდა, შესაძლებელია, წყვეტის წერტილთა სასრული რაოდენობისა, სადაც ფუნქციას სასრული ნახტომი გააჩნია, და $f(x)$ ფუნქციას ყოველ წერტილში აქვს როგორც მარცხენა, ისე მარჯვენა წარმოებული (ცხადია, სადაც ისინი ტოლია, $f(x)$ წარმოებადია^{**)}. მაშინ შესაბამისი

^{*)} საშუალოდ კრებადობისათვის (ე.ი. L_2 -ში) წარმოებულზე პირობა საჭირო არ არის (იხ. თეორემა 4 და [37], გვ. 502). უფრო მეტიც, თუ $f \in L_2(-1, 1)$, შესაბამისი ფურიე-ლეჟანდრის მწკრივი კრებადია f -სკენ, $L_2(-1, 1)$ -ის ნორმით.

^{**)} შევნიშნოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციის მარცხენა (მარჯვენა) წარმოებული ξ წერტილში ეწოდება

$$f'_{(\mp)}(\xi) := \lim_{h \rightarrow 0-(+)} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$$

$$a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \dots + a_n P_n(x) + \dots$$

ფურიე-ლეჟანდრის მწკრივი კრებადია $f(x)$ -სკენ უწყვეტობის ყოველ შიგა წერტილზე, ხოლო წყვეტის ყოველ შიგა წერტილზე კრებადია $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ -სკენ.

ჯეკსონის თეორემა. ეთქვათ, F არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით $[-1, +1]$ სეგმენტზე, რომლის შესაბამის ფურიე-ლეჟანდრის მწკრივს აქვს

$$F(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

სახე, სადაც

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 F(x) P_n(x) dx.$$

რადგან სეგმენტზე სასრული ვარიაციით ფუნქცია ამ სეგმენტზე შემოსაზღვრულია, თუ $|F(x)| \leq M$ და V აღნიშნავს $F(x)$ -ის სრულ ვარიაციას, როცა $|x| \leq 1$, მაშინ

სიდიდეს. ცალმხრივი წარმოებული არ უნდა აეურიოთ წარმოებულის ცალმხრივ ზღვარში

$$f'(\xi \mp) := \lim_{x \rightarrow \xi \mp} f'(x).$$

ცამხრივი წარმოებული შეიძლება არ ემთხვეოდეს წარმოებულის ცალმხრივ ზღვარს. შეიძლება, მაგალითად, არსებობდეს მარცხენა წარმოებული, მაგრამ არ არსებობს წარმოებულის მარცხენა ზღვარი. შეიძლება რაიმე წერტილში ტოლი იყოს მარცხენა და მარჯვენა წარმოებულების ზღვრები, მაგრამ ფუნქცია წარმოებადი არ იყოს (მაგ., $\operatorname{sign} x$ ასეთია $x=0$ წერტილში, უფრო მეტიც, მას არ აქვს $x=0$ წერტილში მარცხენა და მარჯვენა წარმოებული).

$$|a_n P_n(x)| < \frac{4\sqrt{2}(M+V)}{\sqrt{1-\delta^2}n}, \text{ როცა } |x| < \delta < 1,$$

$$|a_n P_n(x)| < \frac{8(M+V)}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}, \text{ როცა } |x| \leq 1.$$

თეორემა 4. ლეჟანდრის $P_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$, პოლინომების სისტემა სრულია $L_2(-1, 1)$ -ში.

ლემა. ვთქვათ, $G \subset R^n$ და $D \subset R^m$ არეები შემოსაზღვრულია; $\psi_j(y)$, $j = 0, 1, 2, \dots$, ფუნქციების სისტემა ორთონორმირებული და სრულია $L_2(D)$ -ში და ყოველი j -სთვის, $j = 0, 1, 2, \dots$, $\varphi_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, სისტემა ორთონორმირებული და სრულია $L_2(G)$ -ში. მაშინ

$$\chi_{kj}(x, y) = \varphi_k(x) \psi_j(y), \quad k, j = 0, 1, 2, \dots,$$

ფუნქციათა სისტემა ორთონორმირებული და სრულია $G \times D$ -ში.

ამ ლემიდან და თეორემა 4-დან გამომდინარეობს

თეორემა 5. $P_k(x)P_j(y)$, $k, j = 0, 1, 2, \dots$, ფუნქციათა სისტემა ორთონორმირებული და სრულია $L_2([-1, 1] \times [-1, 1])$ -ში.

ამ დამატებასთან დაკავშირებით იხ. აგრეთვე [4] და [41].

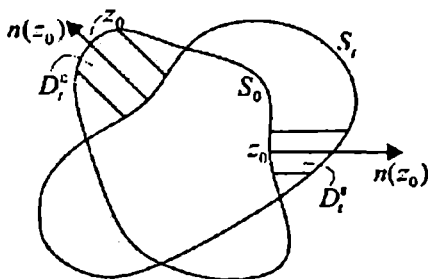
დამატება 3. მოძრავ მოცულობაზე განხილული ინტეგრალის დროის მიმართ გაწარმოების ფორმულა*)

ვთქვათ, D_t არის მოძრავი მოცულობა (ე. ი. დროზე დამოკიდებული) საკმარისად გლუვი (იხ. ქვემოთ დამტკიცება) S_t საზღვრით; $\vec{n} := (n_1, n_2, n_3)$ ზედაპირის გარე ნორმალა, $\vec{v} := (v_1, v_2, v_3)$ არის $x := (x_1, x_2, x_3) \in S_t$ წერტილის სიჩქარე; $v_n := (\vec{v}, \vec{n})$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი ფორმულა:

$$\int_{D_t} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_t} f(x, t) dx - \int_{S_t} v_n f(x, t) dS.$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$\tilde{F}(t) := \int_{D_t} f(x, t) dx.$$



ნახ. 1

ცხადია (იხ. ნახ. 1),

$$\tilde{F}(t) - \tilde{F}(0) = \int_{D_t} f(x, t) dx - \int_{D_0} f(x, 0) dx$$

*) დამტკიცება მოგვაწოდა დ. ნატროშვილმა.

$$= \int_{D_0} [f(x,t) - f(x,0)] dx + \int_{D_i} f(x,t) dx - \int_{D_0} f(x,t) dx \quad (1)$$

და

$$\frac{1}{t} [\tilde{F}(t) - \tilde{F}(0)] = \int_{D_0} \frac{f(x,t) - f(x,0)}{t} dx + \frac{1}{t} \Phi(t), \quad (2)$$

სადაც

$$\Phi(t) = \int_{D_i} f(x,t) dx - \int_{D_0} f(x,t) dx = \int_{D_i \setminus D_0} f(x,t) dx - \int_{D_0 \setminus D_i} f(x,t) dx,$$

განვიხილოთ D_i -სა და D_0 -ის სიმეტრიული $(D_i \setminus D_0) \cup (D_0 \setminus D_i)$ სხვაობის (იხ. გამუქებული არე, ნახ. 1) ერთი ელემენტარული D_i^ε ნაწილი, ამოჭრილი ცილინდრული ზედაპირით, რომლის ნორმალია $n(z_0)$, $z_0 \in S_0 := \partial D_0$ (იხ. ნახ. 2), და ავიღოთ ლოკალური ორთოგონალური საკოორდინატო სისტემა ისე, რომ ξ_3 ღერძი დაემთხვეს $n(z_0)$ -ს, ხოლო ξ_1 , ξ_2 ღერძები მოხედეს მხებ სიბრტყეში. ვთქვათ, $S_i := \partial D_i$ ზედაპირის განტოლებაა

$$F(x,t) = 0.$$

მაშინ S_0 ზედაპირის განტოლება იქნება

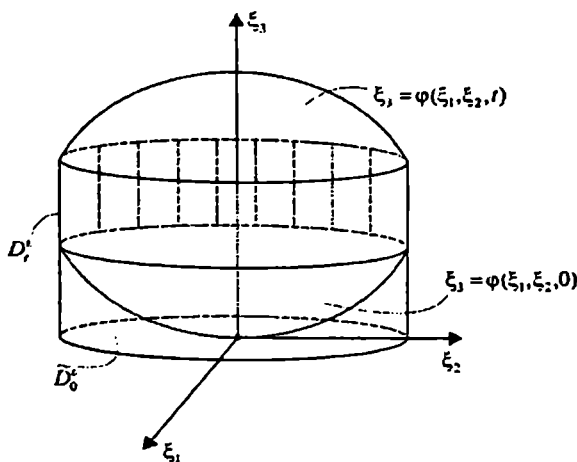
$$F(x,0) = 0.$$

ვგულისხმობთ, რომ F საკმაოდ გლუვი ფუნქციაა. იგი განსაზღვრულია $R \times [0, +\infty[$ -ზე (R -ის მაგიერ უნდა იყოს R კუბში). მაშინ, ცხადია, ლოკალურ სისტემაში S_0^ε -ისა და S_i^ε -ს განტოლებები იქნება

$$S_0^\varepsilon: \xi_3 = \varphi(\xi_1, \xi_2, 0), \quad S_i^\varepsilon: \xi_3 = \varphi(\xi_1, \xi_2, t).$$

$$\tilde{D}_0^\varepsilon := \text{გვ. } \Pi \cap D_t^\varepsilon = \text{გვ. } \Pi \cap S_t^\varepsilon = \text{გვ. } \Pi \cap S_0^\varepsilon,$$

$$\Pi := \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in R^3 : \xi_3 = 0\}$$



ნახ. 2

($F(x, t) = 0$, ცხადია, გარკვეულ პირობებში განსაზღვრავს x_3 არაცხად ფუნქციას, ანუ ლოკალურ სისტემაში ცალსახა $\xi_3 = \varphi(\xi_1, \xi_2, t)$ ფუნქციას (z_0, t) წერტილის მიდამოში). ჯერ ვიხილავთ იმ შემთხვევას, როცა $n(z_0)$ -ის მიმართულებით ჯერ გვხვდება S_0 და მერე S_t . სხვა შემთხვევაში შეიძლება პირიქითაც იყოს (იხ. ნახ. 1).

განვიხილოთ

$$\Phi_\varepsilon(t) = \int_{D_t^\varepsilon} f^*(\xi, t) d\xi$$

ინტეგრალი, სადაც

$$f^*(\xi, t) = f(z_0 + a(z_0)\xi, t) = f(x, t).$$

აქ a ორთოგონალური მატრიცაა, რომლის ბოლო სვეტი ემთხვევა $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ ნორმალს.

$x = a(z_0)\xi + z_0$ გარდაქმნას, გადავყავართ ლოკალურ სისტემაზე მოცულობითი ელემენტის შეუცვლელად, ე.ი., $dx = d\xi$. ცხადია,

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon(t) &= \int_{D_\varepsilon^*} f^*(\xi, t) d\xi = \int_{\tilde{D}_0^*} d\xi_1 d\xi_2 \int_{\varphi(\xi_1, \xi_2, 0)}^{\varphi(\xi_1, \xi_2, t)} f^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) d\xi_3 \\ &= \int_{\tilde{D}_0^*} d\xi_1 d\xi_2 \\ &\quad \times \left[\int_{\varphi(\xi_1, \xi_2, 0)}^{\varphi(\xi_1, \xi_2, t)} \{f^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) - f^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)\} d\xi_3 \right. \\ &\quad \left. + f^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0) d\xi_3 \right]\end{aligned}$$

ამასთან

$$\int_{\varphi(\xi_1, \xi_2, 0)}^{\varphi(\xi_1, \xi_2, t)} \{f^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) - f^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)\} d\xi_3 = O(t^2), \quad t \rightarrow 0,$$

რადგან საინტეგრო არეც და ინტეგრალქვეშა ფუნქციაც $O(t)$ რიგისაა, როცა $t \rightarrow 0$. ამიტომ t -ზე გაყოფისა და $t \rightarrow 0$ ზღვარზე გადასვლის შემდეგ იგი ნულად იქცევა. ამდენად,

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \Phi_\varepsilon(t) \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\tilde{D}_0^*} d\xi_1 d\xi_2 f^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0) [\varphi(\xi_1, \xi_2, t) - \varphi(\xi_1, \xi_2, 0)]\end{aligned}$$

$$= \int_{\tilde{D}_0^*} f^*(\xi_1, \xi_2, \varphi(\xi_1, \xi_2, 0)) \frac{\partial \varphi(\xi_1, \xi_2, 0)}{\partial t} d\xi_1 d\xi_2 \quad (4)$$

$$= \int_{S_0^*} f^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0) \frac{\partial \varphi(\xi_1, \xi_2, 0)}{\partial t} n_3 dS_0,$$

რადგან, საშუალო მნიშვნელობის თეორემის თანახმად,

$$\begin{aligned} & \int_{\varphi(\xi_1, \xi_2, t)} f^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0) d\xi_3 \\ & \varphi(\xi_1, \xi_2, 0) \\ &= f^*(\xi_1, \xi_2, \tilde{\xi}_3, 0) [\varphi(\xi_1, \xi_2, t) - \varphi(\xi_1, \xi_2, 0)], \end{aligned}$$

სადაც

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, 0) \leq \tilde{\xi}_3 \leq \varphi(\xi_1, \xi_2, t).$$

აქვე შევნიშნოთ, რომ თუ $n(z_0)$ ნორმალის გასწვრივ ჯერ იქნებოდა S_1 , ხოლო მერე S_0 (იხ. ნახ. 1), მაშინ (3)-ში გვექნებოდა

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{D}_0^*} d\xi_1 d\xi_2 \int_{\varphi(\xi_1, \xi_2, t)}^{\varphi(\xi_1, \xi_2, 0)} f^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) d\xi_3 \\ & \approx \int_{\tilde{D}_0^*} d\xi_1 d\xi_2 f^*(\xi_1, \xi_2, \tilde{\xi}_3, 0) [\varphi(\xi_1, \xi_2, 0) - \varphi(\xi_1, \xi_2, t)] \end{aligned}$$

და t -ზე გაყოფის შემდეგ მივიღებდით, რომ ეს გამოსახულება მიისწრაფის

$$- \int_S f^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0) \frac{\partial \varphi(\xi_1, \xi_2, 0)}{\partial t} n_3 dS_0$$

ზღვრისკენ, როცა $t \rightarrow 0$.

ასე, რომ (4) ტიპის ფორმულაში სიმეტრიული სხვაობის იმ წევრებში, რომელშიც ინტეგრალი D_1 -ს ნაწილზე აიღება, გვექნება ნიშანი “+”, ხოლო სიმეტრიული სხვაობის იმ წევრებ-

ში, სადაც ინტეგრება D_0 -ის ნაწილზე ხდება, გვექნება ნიშანი “-”, ამიტომ საბოლოოდ ყველა შესაკრებს ექნება ნიშანი “+” (იხ. (2)) და გვექნება

$$\left. \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} \right|_{t=0} = \int_{D_0} \left. \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} dx + \sum_{S_0^+} \int f^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0) \left. \frac{\partial \varphi(\xi_1, \xi_2, t)}{\partial t} \right|_{t=0} n_3 dS_0. \quad (5)$$

აჯამება ხდება ყველა ასეთი ტიპის ელემენტარული ნაწილების მიმართ.

გარდაეკმნათ (5)-ში ზედაპირული ინტეგრალი. რადგან t არის ღრო, ამიტომ $\xi := (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ წერტილის ღროითი წარმოებული იქნება ξ წერტილის სიჩქარე. $\xi_3 = \varphi(\xi_1, \xi_2, t)$ -ს t -თი გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

აქედან

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \xi_3}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial t}. \quad (6)$$

S , ზედაპირზე მდებარე ξ წერტილში S , ზედაპირის $n(\xi, t)$ ნორმალის კოორდინატებია

$$\begin{aligned} n &= \frac{\text{grad}(\xi_3 - \varphi(\xi_1, \xi_2, t))}{|\nabla(\xi_3 - \varphi(\xi_1, \xi_2, t))|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2}\right)^2}} \left(1, -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}, -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \right). \end{aligned}$$

კერძოდ,

$$n_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2}\right)^2}}.$$

მაშინ, (6)-ის გათვალისწინებით, ცხადია, რომ

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi(\xi_1, \xi_2, t)}{\partial t} \right|_{t=0} n_3 &= \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2}\right)^2}} \bigg|_{t=0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2}\right)^2}} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial t} + \frac{\partial \xi_3}{\partial t} \right) \bigg|_{t=0} \\ &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}, n \right) \bigg|_{t=0} = v(\xi, t) n(\xi, t) \big|_{t=0}, \end{aligned}$$

სადაც $v(\xi, t)$ ξ წერტილის სიჩქარეა. რადგან

$$(v(\xi, t), n(\xi, t)) = v_n(\xi, t)$$

სიჩქარის ნორმალური მდგენელი არ არის დამოკიდებული ორთოგონალურ გარდაქმნაზე (ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ინვარიანტია ორთოგონალური გარდაქმნის მიმართ), გვექნება

$$\int_{S_0^*} f^*(\xi, 0) \frac{\partial \varphi(\xi_1, \xi_2, 0)}{\partial t} n_3 dS_0 = \int_{S_0^*} f^*(\xi, 0) \nu_n(\xi, 0) dS_0$$

$$= \int_{S_0^*} f(x, 0) \nu_n(x, 0) dS_0$$

(ბოლო ტოლობაში გამოყენებულია უკუგარდაქმნა ლოკალური სისტემიდან). ამდენად, რადგან S_0^ε -ების გაერთიანება იძლევა S_0 -ს, (5)-დან მივიღებთ:

$$\left. \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} \right|_{t=0} = \int_{D_0} \left. \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} dx + \int_{S_0} f(x, 0) \nu_n(x, 0) dS_0.$$

რადგან $t = 0$ -ის ნაცვლად შეგვეძლო აგველო ნებისმიერი $t = t_0$, ამიტომ გვექნება:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{D_i} f(x, t) dx = \int_{D_i} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + \int_{S_i} f(x, t) \nu_n(x, t) dS_i,$$

ანუ

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{D_i} f(x, t) dx = \int_{D_i} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + \int_{S_i} \left(\frac{\partial x}{\partial t}, n \right) f(x, t) dS_i,$$

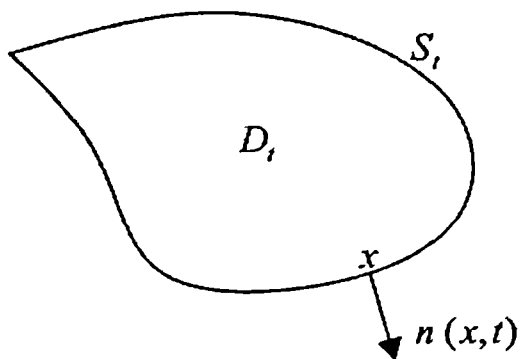
სადაც

$$\frac{\partial x}{\partial t} := \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}, \frac{\partial x_2}{\partial t}, \frac{\partial x_3}{\partial t} \right)$$

არის $x \in S_i$, წერტილის ვექტორული სიჩქარე, ხოლო

$$\nu_n(x, t) = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, n(x, t) \right)$$

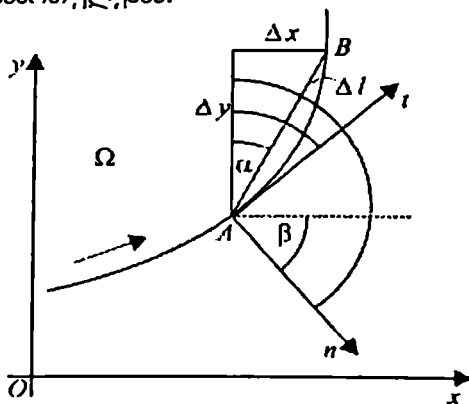
არის x წერტილის ნორმალური სიჩქარე, n გარე ნორმალია S_i -ს მიმართ (იხ. ნახ. 3).



63b. 3

დამატება 4. ორი სასარგებლო ფორმულა სიბრტყეზე

მოვიყვანოთ სიბრტყეზე ამოცანების გამოკვლევისას სასარგებლო ორი ფორმულა. განვიხილოთ Oxy სიბრტყეზე გლუვი წირით შემოსაზღვრული Ω არე. საზღვრის გასწვრივ მოძრაობისას დადებით მიმართულებად მივიღოთ ის მიმართულება, რომელიც არეს მარცხენა მხარეს ტოვებს. n გარე ნორმალია, t მხედის დადებითი მიმართულება.



ნახ. 1

თეორემა 1. სამართლიანია შემდეგი ფორმულები:

$$\cos(\hat{n}, x) = \cos(\hat{t}, y) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(\hat{n}, y) = -\cos(\hat{t}, x) = -\frac{dx}{ds}.$$

დამტკიცება. კუთხეები n -სა და x -ს, t -სა და y -ს შორის აღვნიშნოთ შესაბამისად $(\hat{n}, x)$ -ით და $(\hat{t}, y)$ -ით. როგორც ეს ნახაზიდან (იხ. ნახ. 1) ჩანს:

1. რადგან $\lim_{B \rightarrow A} \alpha = \beta$, ამიტომ

$$\cos(n, x) = \cos \beta = \lim_{B \rightarrow A} \cos \alpha = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \cos \alpha = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta l} = \frac{dy}{ds},$$

$$\begin{aligned} \cos(n, y) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\sin \beta = -\lim_{B \rightarrow A} \sin \alpha = -\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sin \alpha \\ &= -\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta l} = -\frac{dx}{ds}; \end{aligned}$$

2. რადგან $(\hat{n}, x) = (t, y)$, ამიტომ $\cos(\hat{n}, x) = \cos(t, y)$;

3. რადგან $(t, x) = \frac{\pi}{2} - (\hat{n}, x)$ და $\cos(\hat{n}, y) = -\sin \beta$,

ამიტომ

$$\cos\left(t, x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin \beta = -\cos\left(\hat{n}, y\right).$$

დამატება 5. პრიზმული გარსები

1. ი. ვეკუას იერარქული მოდელების ძირითადი იდეა

დრეკადობის წრფივი სამგანზომილებიანი თეორიის ძირითადი დამოკიდებულებები შედგება “მოძრაობის” განტოლებებისგან

$$X_{ij} + \Phi_i = \rho \ddot{u}_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad x \in \Omega \subset R^3, \quad t > t_0, \quad i = 1, 2, 3; \quad (1)$$

ჰუკის განზოგადებული კანონისგან (იზოტროპული შემთხვევა)

$$X_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (2)$$

კინემატიკური დამოკიდებულებებისგან

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3)$$

სადაც

$$\theta = e_{ii}. \quad (4)$$

შეენიშნოთ, რომ ნაკრები (მთავარი) ფიზიკური მომენტის ნულთან ტოლობის პირობიდან გამომდინარეობს ძაბვის ტენზორის სიმეტრიულობა:

$$X_{ij} = X_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (5)$$

ყველა სიდიდე, გარდა კოეფიციენტებისა, დამოკიდებულია ოთხ ცვლადზე (სამ სივრცითზე x_1, x_2, x_3 და t დროზე).

სხეულს, რომელიც ზემოდან და ქვემოდად შემოსაზღვრულია

$$x_3 = h^{(+)}(x_1, x_2) \quad \text{და} \quad x_3 = h^{(-)}(x_1, x_2)$$

ზედაპირებით, ხოლო გვერდიდან ცილინდრული ზედაპირით x_3 ღერძის პარალელური მსახველით, პრიზმული გარსი ეწოდება.

$$P_n(\tau) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (\tau^2 - 1)^n}{d\tau^n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (6)$$

პოლინომებს, კერძოდ,

$$P_0(\tau) = 1, \quad P_1(\tau) = \tau, \quad P_2(\tau) = \frac{3\tau^2 - 1}{2},$$

ლეჟანდრის პოლინომები ეწოდება. ლეჟანდრის პოლინომთა სისტემა ორთოგონალურია $[-1, 1]$ სეგმენტზე:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\tau) P_m(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases} \quad (7)$$

(7)-დან ცხადია, რომ პოლინომთა

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(\tau), \quad n = 0, 1, \dots,$$

სისტემა ორთონორმირებულია.

(7)-ში მოვახდინოთ ცვლადთა

$$\tau = ax_3 - b \quad (8)$$

გარდაქმნა, სადაც

$$a := \frac{1}{h}, \quad b := \frac{\tilde{h}}{h},$$

$2h := \overset{(+)}{h} - \overset{(-)}{h}$ პრიზმული გარსის სისქეა, $2\tilde{h} := \overset{(+)}{h} + \overset{(-)}{h}$. ცხადია,

$$\tau = \frac{2}{\overset{(+)}{h} - \overset{(-)}{h}} x_3 - \frac{\overset{(+)}{h} + \overset{(-)}{h}}{\overset{(+)}{h} - \overset{(-)}{h}}$$

და

$$\int_{h^{(-)}(x_1, x_2)}^{h^{(+)}(x_1, x_2)} P_n(ax_3 - b) P_m(ax_3 - b) dx_3 = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases} \quad (9)$$

ზოგადად,

$$\varphi_n(\tau), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \tau \in [c, d],$$

ორთონორმირებული სისტემის მიმართ ფურიეს მწკრივს აქვს

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(\tau)$$

საზე, სადაც

$$c_n = \int_c^d f(\tau) \varphi_n(\tau) d\tau, \quad n = 0, 1, \dots,$$

ფურიეს კოეფიციენტებია.

თუ დავუშვებთ, რომ x_3 ცვლადის მიმართ $X_{ij}, e_{ij},$

$u_i \in C^2$ კლასს $\left[h^{(-)}(x_1, x_2), h^{(+)}(x_1, x_2) \right]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$(X_{ij}, e_{ij}, u_i)(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) a(x_1, x_2) (X_{ijn}, e_{ijn}, u_{in})(x_1, x_2, t) P_n(ax_3 - b), \quad (10)$$

სადაც

$$(X_{ijn}, e_{ijn}, u_{in})(x_1, x_2, t)$$

$$= \int_{h^{(-)}(x_1, x_2)}^{h^{(+)}(x_1, x_2)} (X_{ij}, e_{ij}, u_i)(x_1, x_2, x_3, t) P_n(ax_3 - b) dx_3 \quad (11)$$

და (10)-ის მარჯვენა მხარე თანაბრად კრებადია $\left[h^{(-)}(x_1, x_2), h^{(+)}(x_1, x_2) \right]$ სეგმენტზე.

იერარქიული მოდულების აგების ი. ვეკუას მეთოდი მდგომარეობს (1)–(3) დამოკიდებულებების $P_r(ax_3 - b)$ -ზე გამრავლებით და $h^{(-)}$ -დან $h^{(+)}$ -მდე x_3 -ის მიმართ ინტეგრებით X_{jr}, e_{jr}, u_{jr} მათემატიკურ მომენტებზე გადასვლაში. (2)-დან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ

$$X_{jr}(x_1, x_2, t) = \lambda e_{kr} \delta_{ij} + 2\mu e_{jr},$$

ხოლო მომენტების მიმართ (1) და (3) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარე დამოკიდებულებების მისაღებად გამოიყენება

$$\tau P_n'(\tau) = nP_n(\tau) + P_{n-1}'(\tau),$$

$$P_n'(\tau) = (2n-1)P_{n-1}(\tau) + P_{n-2}'(\tau), \quad \tau \in [-1, +1],$$

დამოკიდებულებები, რომლებიც უნდა ჩაიწეროს $\left[h^{(-)}, h^{(+)} \right]$ სეგმენტისთვის (8) დამოკიდებულებების გათვალისწინებით. შემდგომ, თუ ვიმოქმედებთ ისე, როგორც დრეკალობის თეორიაში, მივიღებთ ლამეს სისტემის ეკვივალენტურ უსასრულო სისტემას

$$u_{jr}(x_1, x_2, t) := \int_{h^{(-)}(x_1, x_2)}^{h^{(+)}(x_1, x_2)} u_i(x_1, x_2, x_3, t) P_r(ax_3 - b) dx_3$$

მომენტების მიმართ. ამასთან

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{r=0}^{\infty} a\left(r + \frac{1}{2}\right) u_{ir}(x_1, x_2, t) P_r(ax_3 - b), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (12)$$

ამის შემდეგ, N -ური მიახლოების (იერარქიული მოდელის) მისაღებად N -ზე მეტი რიგის მომენტს უკუვაგდებთ (ჩავთვლით ნულის ტოლად) და განტოლებათა უსასრულო სისტემიდან განვიხილავთ მხოლოდ იმ განტოლებებს, რომელთა მთავარი (ე.ი. მეორე რიგის წარმოებულების შემცველი წევრებისგან შემდგარი) ნაწილები შეიცავენ N რიგამდე ჩათვლით მომენტებს.

2. $N = 0$ მიახლოება. ორი მოდელი

მოვახდინოთ მეთოდის ილუსტრირება $N = 0$ მიახლოებისთვის. (1)-დან ცხადია,

$$\begin{aligned} & \int_{h^{(-)}(x_1, x_2)}^{h^{(+)}(x_1, x_2)} X_{i, \beta, \beta}(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 + \int_{h^{(-)}(x_1, x_2)}^{h^{(+)}(x_1, x_2)} X_{i, 3, 3}(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 \\ & + \int_{h^{(-)}(x_1, x_2)}^{h^{(+)}(x_1, x_2)} \Phi_i(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{h^{(-)}(x_1, x_2)}^{h^{(+)}(x_1, x_2)} u_i(x_1, x_2, x_3, t) dx_3, \quad (13) \end{aligned}$$

$i = 1, 2, 3,$

მაგრამ, (11)-ის ძალით,

$$\begin{aligned} & \int_{h^{(-)}(x_1, x_2)}^{h^{(+)}(x_1, x_2)} u_i(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 = u_{i0}(x_1, x_2, t), \\ & \int_{h^{(-)}(x_1, x_2)}^{h^{(+)}(x_1, x_2)} X_{i, 3, 3}(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 = X_{i3} \left(x_1, x_2, h^{(+)}(x_1, x_2), t \right) \\ & - X_{i3} \left(x_1, x_2, h^{(-)}(x_1, x_2), t \right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\int_{h^{(-)}(x_1, x_2)}^{h^{(+)}(x_1, x_2)} X_{,\rho,\rho}(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_\rho} \int_{h^{(-)}(x_1, x_2)}^{h^{(+)}(x_1, x_2)} X_{,\rho}(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 \quad (15)$$

$$- X_{,\rho} \left(x_1, x_2, h^{(+)}(x_1, x_2), t \right) h^{(+)}_{,\rho} + X_{,\rho} \left(x_1, x_2, h^{(-)}(x_1, x_2), t \right) h^{(-)}_{,\rho} .$$

აქ გამოვიყენეთ პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალის პარამეტრით გაწარმოების წესი:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int_{c(\xi)}^{d(\xi)} f(\xi, \eta) d\eta = \int_{c(\xi)}^{d(\xi)} \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta$$

$$+ f(\xi, d(\xi)) \frac{\partial d}{\partial \xi} - f(\xi, c(\xi)) \frac{\partial c}{\partial \xi} .$$

თუ გლუვი ზედაპირის განტოლებას აქვს

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

სახე, მაშინ ნორმალის v_i კომპონენტებს, როგორც ეს კალკულუსის კურსიდანაა ცნობილი, აქვთ შემდეგი სახე:

$$v_i = \pm \frac{F_{,i}}{\sqrt{(F_{,1})^2 + (F_{,2})^2 + (F_{,3})^2}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

ჩვენს შემთხვევაში

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_3 - h^{(\pm)}(x_1, x_2),$$

ამიტომ

$$v_\beta = \frac{\mp h^{(\pm)}_{,\beta}}{\sqrt{\left(h^{(\pm)}_{,1}\right)^2 + \left(h^{(\pm)}_{,2}\right)^2 + 1}},$$

$$v_3^{(\pm)} = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(h_{,1}^{(\pm)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(\pm)}\right)^2 + 1}}.$$

ამის გათვალისწინებით

$$\begin{aligned} & \int_{h^{(-)}(x_1, x_2)}^{h^{(+)}(x_1, x_2)} X_{, \rho, \rho}(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 = X_{, \rho 0, \rho}(x_1, x_2, t) \\ & + X_{, \rho}\left(x_1, x_2, h^{(+)}(x_1, x_2), t\right) \sqrt{\left(h_{,1}^{(+)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(+)}\right)^2 + 1} \cdot v_{\rho}^{(+)} \\ & + X_{, \rho}\left(x_1, x_2, h^{(-)}(x_1, x_2), t\right) \sqrt{\left(h_{,1}^{(-)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(-)}\right)^2 + 1} \cdot v_{\rho}^{(-)}. \quad (16) \end{aligned}$$

რადგან

$$v_3^{(\pm)} \cdot \sqrt{\left(h_{,1}^{(+)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(+)}\right)^2 + 1} = \pm 1,$$

თუ ჩავსვამთ (14) – (16) გამოსახულებებს (13)-ში, მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} & X_{, \rho 0, \rho}(x_1, x_2, t) \\ & + \left[X_{, \rho}\left(x_1, x_2, h^{(+)}(x_1, x_2), t\right) v_{\rho}^{(+)} + X_{, \rho}\left(x_1, x_2, h^{(-)}(x_1, x_2), t\right) v_{\rho}^{(-)} \right] \\ & \times \sqrt{\left(h_{,1}^{(+)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(+)}\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

$$+ \left[X_{i\rho} \left(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}(x_1, x_2), t \right) \overset{(-)}{v}_\rho + X_{i3} \left(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}(x_1, x_2), t \right) \overset{(-)}{v}_3 \right] \\ \times \sqrt{\left(\overset{(-)}{h}_{,1} \right)^2 + \left(\overset{(-)}{h}_{,2} \right)^2 + 1}$$

$$+ \Phi_{i0}(x_1, x_2, t) = \rho \ddot{u}_{i0}(x_1, x_2, t), \quad i = 1, 2, 3$$

მაგრამ კოშის ფორმულების თანახმად

$$X_{i\rho} \left(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}(x_1, x_2), t \right) \overset{(+)}{v}_\rho + X_{i3} \left(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}(x_1, x_2), t \right) \overset{(+)}{v}_3$$

$$= Q_{\underset{v}{v}i}^{(+)}(x_1, x_2, t), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$X_{i\rho} \left(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}(x_1, x_2), t \right) \overset{(-)}{v}_\rho + X_{i3} \left(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}(x_1, x_2), t \right) \overset{(-)}{v}_3$$

$$= Q_{\underset{v}{v}i}^{(-)}(x_1, x_2, t), \quad i = 1, 2, 3$$

ამრიგად, $N = 0$ მიახლოებაში

$$X_{i\rho 0, \rho} + Q_{\underset{v}{v}i}^{(+)} \sqrt{\left(\overset{(+)}{h}_{,1} \right)^2 + \left(\overset{(+)}{h}_{,2} \right)^2 + 1} + Q_{\underset{v}{v}i}^{(-)} \sqrt{\left(\overset{(-)}{h}_{,1} \right)^2 + \left(\overset{(-)}{h}_{,2} \right)^2 + 1} \\ + \Phi_{i0} = \rho \ddot{u}_{i0}(x_1, x_2, t), \quad (17)$$

$$\Phi_{i0}(x_1, x_2, t) := \int_{\overset{(-)}{h}(x_1, x_2)}^{\overset{(-)}{h}(x_1, x_2)} \Phi_i(x_1, x_2, x_3, t) dx_3,$$

$$X_{ij0}(x_1, x_2, t) = \lambda e_{kk0} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij0}; \quad (18)$$

(12)-დან გვექნება

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) \equiv \frac{1}{2h} u_{i0}(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2} v_{i0}(x_1, x_2, t). \quad (19)$$

(19)-ის გამო, (3) მიიღებს შემდეგ სახეს

$$e_{ij0}(x_1, x_2, t) = \frac{h}{2} (v_{i0,j} + v_{j0,i}). \quad (20)$$

აქედან

$$e_{\alpha\beta 0}(x_1, x_2, t) = \frac{h}{2} (v_{\alpha 0,\beta} + v_{\beta 0,\alpha}),$$

$$e_{330} = 0^*), \quad e_{\alpha 30} = \frac{h}{2} v_{30,\alpha}, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

მართლაც,

$$e_{i\beta 0}(x_1, x_2, t) = \int_{h^{(-)}(x_1, x_2)}^{h^{(+)}(x_1, x_2)} e_{i\beta}(x_1, x_2, x_3, t) dx_3$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_{h^{(-)}(x_1, x_2)}^{h^{(+)}(x_1, x_2)} u_{i,\beta}(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 + \int_{h^{(-)}(x_1, x_2)}^{h^{(+)}(x_1, x_2)} u_{\beta,i}(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_\beta} \int_{h^{(-)}(x_1, x_2)}^{h^{(+)}(x_1, x_2)} u_i(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 \right]$$

* ამ უკანასკნელის გათვალისწინებით, (18)-დან, ცხადია,

$$X_{330}(x_1, x_2, t) = \lambda e_{\alpha\alpha 0}(x_1, x_2, t)$$

და

$$X_{330} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} X_{\alpha\alpha 0} = \nu X_{\alpha\alpha 0},$$

სადაც ν პუასონის კოეფიციენტი.

$$\begin{aligned}
& -u_i \left(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}(x_1, x_2), t \right) \overset{(+)}{h}_{,\beta}(x_1, x_2) \\
& + u_i \left(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}(x_1, x_2), t \right) \overset{(-)}{h}_{,\beta}(x_1, x_2) \Big] \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \overset{(-)}{h}_{,\alpha}(x_1, x_2) \int u_\beta(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 \\ & - u_\beta \left(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}(x_1, x_2), t \right) \overset{(+)}{h}_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ & + u_\beta \left(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}(x_1, x_2), t \right) \overset{(-)}{h}_{,\alpha}(x_1, x_2), \quad i = \alpha, \\ & u_\beta \left(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}(x_1, x_2), t \right) \\ & - u_\beta \left(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}(x_1, x_2), t \right), \quad i = 3. \end{aligned} \right. \quad (21)
\end{aligned}$$

აქედან, თუ მხედველობაში მივიღებთ (19)-ს,
 $e_{i,\rho 0}(x_1, x_2, t)$

$$= \frac{1}{2} \left[u_{i0,\beta}(x_1, x_2, t) - \frac{1}{2} \frac{\overset{(+)}{h}_{,\beta}}{h} u_{i0}(x_1, x_2, t) + \frac{1}{2} \frac{\overset{(-)}{h}_{,\beta}}{h} u_{i0}(x_1, x_2, t) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & u_{\beta 0, \alpha}(x_1, x_2, t) - \frac{1}{2} \frac{h_{, \alpha}^{(+)}}{h} u_{\beta 0}(x_1, x_2, t) + \frac{1}{2} \frac{h_{, \alpha}^{(-)}}{h} u_{\beta 0}(x_1, x_2, t), \quad i = \alpha, \\ & \frac{1}{2h} u_{\beta 0}(x_1, x_2, t) - \frac{1}{2h} u_{\beta 0}(x_1, x_2, t) = 0, \quad i = 3, \end{aligned} \right.$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} e_{\alpha \beta 0} &= \frac{1}{2} \left(u_{\alpha 0, \beta} + u_{\beta 0, \alpha} - \frac{h_{, \beta}}{h} u_{\alpha 0} - \frac{h_{, \alpha}}{h} u_{\beta 0} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[(h v_{\alpha 0})_{, \beta} + (h v_{\beta 0})_{, \alpha} - h_{, \beta} v_{\alpha 0} - h_{, \alpha} v_{\beta 0} \right] \\ &= \frac{h}{2} (v_{\alpha 0, \beta} + v_{\beta 0, \alpha}); \end{aligned}$$

ანალოგიურად,

$$e_{3 \beta 0} = \frac{h}{2} v_{30, \beta}.$$

ცხადია,

$$\begin{aligned} e_{330}(x_1, x_2, t) &= \int_{h(x_1, x_2)^{(-)}}^{h(x_1, x_2)^{(+)}} e_{33}(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 \\ &= \int_{h(x_1, x_2)^{(-)}}^{h(x_1, x_2)^{(+)}} u_{3,3}(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 = u_3 \left(x_1, x_2, h(x_1, x_2)^{(+)} t \right) \\ &\quad - u_3 \left(x_1, x_2, h(x_1, x_2)^{(-)} t \right). \end{aligned} \tag{22}$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ (19)-ს, გვექნება

$$e_{330}(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2h} u_{30}(x_1, x_2, t) - \frac{1}{2h} u_{30}(x_1, x_2, t) = 0.$$

თუ (20)-ს ჩავსვამთ (18)-ში და მიღებულს - (17)-ში, გვექნება

$$\begin{aligned} & \mu \left[(h\nu_{i0,\beta})_{,\beta} + (h\nu_{\beta 0,i})_{,\beta} \right] + \lambda \delta_{i\beta} (h\nu_{\gamma 0,\gamma})_{,\beta} \\ & + Q_{\nu i}^{(+)} \sqrt{\left(h_{,1}^{(+)} \right)^2 + \left(h_{,2}^{(+)} \right)^2} + 1 + Q_{\nu i}^{(-)} \sqrt{\left(h_{,1}^{(-)} \right)^2 + \left(h_{,2}^{(-)} \right)^2} + 1 \\ & + \Phi_{i0} = \rho h \ddot{\nu}_{i0}, \end{aligned} \quad i = 1, 2, 3.$$

კერძოდ, როცა $i = \alpha$,

$$\begin{aligned} & \mu \left[(h\nu_{\alpha 0,\beta})_{,\beta} + (h\nu_{\beta 0,\alpha})_{,\beta} \right] + \lambda \delta_{\alpha\beta} (h\nu_{\gamma 0,\gamma})_{,\beta} \\ & + Q_{\nu \alpha}^{(+)} \sqrt{\left(h_{,1}^{(+)} \right)^2 + \left(h_{,2}^{(+)} \right)^2} + 1 + Q_{\nu \alpha}^{(-)} \sqrt{\left(h_{,1}^{(-)} \right)^2 + \left(h_{,2}^{(-)} \right)^2} + 1, \\ & + \Phi_{\alpha 0} = \rho h \ddot{\nu}_{\alpha 0}, \end{aligned} \quad \alpha = 1, 2, \quad (23)$$

ხოლო, როცა $i = 3$,

$$\begin{aligned} & \mu (h\nu_{30,\beta})_{,\beta} + Q_{\nu 3}^{(+)} \sqrt{\left(h_{,1}^{(+)} \right)^2 + \left(h_{,2}^{(+)} \right)^2} + 1 \\ & + Q_{\nu 3}^{(-)} \sqrt{\left(h_{,1}^{(-)} \right)^2 + \left(h_{,2}^{(-)} \right)^2} + 1 + \Phi_{30} = \rho h \ddot{\nu}_{30,\alpha} \end{aligned} \quad (24)$$

მოდელში, როცა პირით ზედაპირებზე ძაბვის ვექტორის ნაცვლად გადაადგილების ვექტორია მოცემული, მაშინ (15) ფორმულაში პირით ზედაპირებზე ძაბვების მნიშვნელობებად მათი $N = 0$ მიახლოების შესაბამისი

$$X_{ij}(x_1, x_2, x_3, t) \equiv \frac{1}{2h} X_{j0}(x_1, x_2, t), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

მნიშვნელობები უნდა ჩავსვათ, ე. ი.,

$$\int_{h(x_1, x_2)}^{(+)} X_{i3,3}(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 = \frac{1}{2h} X_{i30}(x_1, x_2, t)$$

$$- \frac{1}{2h} X_{i30}(x_1, x_2, t) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$\int_{h(x_1, x_2)}^{(+)} X_{i\beta, \beta}(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 = X_{i\beta 0, \beta} - (\ln h)_{, \beta} X_{i\beta 0}(x_1, x_2, t),$$

$$i = 1, 2, 3.$$

ჩავსვათ ეს და (14) გამოსახულება (13)-ში, მივიღებთ

$$X_{i\beta 0, \beta} - (\ln h)_{, \beta} X_{i\beta 0} + \Phi_{i0} = \rho \ddot{u}_{i0} = \rho h \ddot{v}_{i0}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (25)$$

ახლა გამოვთვალოთ დეფორმაციის ტენზორის ნულოვანი მომენტი იმის გათვალისწინებით, რომ პირით ზედაპირებზე გადაადგილების ვექტორია მოცემული [იხ. (21), (22)]

$$e_{i\beta 0}(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2} u_{i0, \beta} + \left\{ \begin{array}{l} u_{\beta 0, \alpha} - u_{\beta} \left(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}, t \right) \overset{(+)}{h}_{, \alpha} \\ + u_{\beta} \left(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}, t \right) \overset{(-)}{h}_{, \alpha}, \quad i = \alpha, \\ u_{\beta} \left(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}, t \right) - u_{\beta} \left(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}, t \right), \quad i = 3, \\ + u_i \left(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}, t \right) \overset{(-)}{h}_{, \beta} - u_i \left(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}, t \right) \overset{(+)}{h}_{, \beta} \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{2}(u_{,0,\beta} + u_{\beta 0,i}) + \Psi_{i\beta} = \frac{1}{2}[(hv_{i0})_{,\beta} + (hv_{\beta 0})_{,i}] + \Psi_{i\beta}, \quad (26)$$

$$i = 1, 2, 3; \quad \beta = 1, 2,$$

$$e_{330}(x_1, x_2, t) = u_3 \left(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}, t \right) - u_3 \left(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}, t \right) \quad (27)$$

$$=: \Psi_{33}(x_1, x_2, t),$$

სადაც

$$2 \Psi_{i\beta}(x_1, x_2, t) = u_i \left(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}, t \right) \overset{(-)}{h}_{,\beta} - u_i \left(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}, t \right) \overset{(+)}{h}_{,\beta}$$

$$+ \begin{cases} -u_\beta \left(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}, t \right) \overset{(+)}{h}_{,\alpha} + u_\beta \left(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}, t \right) \overset{(-)}{h}_{,\alpha}, & \text{როცა } i = \alpha, \\ u_\beta \left(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}, t \right) - u_\beta \left(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}, t \right), & \text{როცა } i = 3. \end{cases}$$

თუ (26)-სა და (27)-ს ჩავსვამთ (18)-ში, მივიღებთ

$$X_{i\beta 0}(x_1, x_2, t) = \lambda \delta_{i\beta} [(hv_{\gamma 0})_{,\gamma} + \Psi_{kk}(x_1, x_2, t)]$$

$$+ \mu [(hv_{i0})_{,\beta} + (hv_{\beta 0})_{,i}] + 2\mu \Psi_{i\beta}(x_1, x_2, t), \quad (28)$$

$$i = 1, 2, 3; \quad \beta = 1, 2,$$

$$X_{330}(x_1, x_2, t) = \lambda e_{\gamma\gamma 0}(x_1, x_2, t) + (\lambda + 2\mu) \Psi_{33}(x_1, x_2, t)$$

$$= \lambda (hv_{\gamma 0})_{,\gamma} + \lambda \Psi_{\gamma\gamma}(x_1, x_2, t) + (\lambda + 2\mu) \Psi_{33}(x_1, x_2, t).$$

ახლა (28) ჩავსვათ (25)-ში, მივიღებთ შემდეგ საძიებელ სისტემას:

$$\begin{aligned}
& \mu[(h\nu_{i0})_{,\beta} + (h\nu_{\beta 0})_{,i}]_{,\beta} + \lambda\delta_{i\beta}[(h\nu_{\gamma 0})_{,\gamma}]_{,\beta} \\
& - (\ln h)_{,\beta} \left\{ \lambda\delta_{i\beta}(h\nu_{\gamma 0})_{,\gamma} + \mu[(h\nu_{i0})_{,\beta} + (h\nu_{\beta 0})_{,i}] \right\} \\
& + 2\mu\Psi_{i\beta,\beta}(x_1, x_2, t) + \lambda\delta_{i\beta}\Psi_{kk,\beta}(x_1, x_2, t) \\
& - (\ln h)_{,\beta} [\lambda\delta_{i\beta}\Psi_{kk}(x_1, x_2, t) + 2\mu\Psi_{i\beta}(x_1, x_2, t)] \\
& + \Phi_{i0}(x_1, x_2, t) = \rho h\ddot{\nu}_{i0}, \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{29}$$

კერძოდ, როცა $i = \alpha$,

$$\begin{aligned}
& \mu[(h\nu_{\alpha 0})_{,\beta} + (h\nu_{\beta 0})_{,\alpha}]_{,\beta} + \lambda[(h\nu_{\gamma 0})_{,\gamma}]_{,\alpha} \\
& - (\ln h)_{,\beta} \left\{ \lambda\delta_{\alpha\beta}(h\nu_{\gamma 0})_{,\gamma} + \mu[(h\nu_{\alpha 0})_{,\beta} + (h\nu_{\beta 0})_{,\alpha}] \right\} \\
& + 2\mu\Psi_{\alpha\beta,\beta}(x_1, x_2, t) + \lambda\Psi_{kk,\alpha}(x_1, x_2, t) \\
& - (\ln h)_{,\beta} [\lambda\delta_{\alpha\beta}\Psi_{kk}(x_1, x_2, t) + 2\mu\Psi_{\alpha\beta}(x_1, x_2, t)] \\
& + \Phi_{\alpha 0}(x_1, x_2, t) = \rho h\ddot{\nu}_{\alpha 0}, \quad \alpha = 1, 2.
\end{aligned}$$

ხოლო, როცა $i = 3$,

$$\begin{aligned}
& \mu(h\nu_{30})_{,\beta\beta} - \mu(\ln h)_{,\beta}(h\nu_{30})_{,\beta} + 2\mu\Psi_{3\beta,\beta}(x_1, x_2, t) \\
& - 2\mu(\ln h)_{,\beta}\Psi_{3\beta}(x_1, x_2, t) + \Phi_{30}(x_1, x_2, t) = \rho h\ddot{\nu}_{30}
\end{aligned} \tag{30}$$

3. პრიზმული გარსი ხარისხოვანი წამახვილებით

ახლა განვიხილოთ

$$2h = h_0 x_2^\kappa, \quad h_0, \kappa = \text{const} > 0, \tag{31}$$

სისქის მქონე წამახვილებული პრიზმული გარსი. სტატიკის შემთხვევაში, თუ მოცულობით ძალებს და ზედა და ქვედა ზედაპირებზე მოქმედ ზედაპირულ ძალებს ნულის ტოლად ჩავთვლით, (24)-დან მივიღებთ

$$(h\nu_{30,\alpha})_{,\alpha} = 0.$$

აქედან, თუ ჩავთვლით, რომ v_{30} მხოლოდ x_2 -ზეა დამოკიდებული (ე. ი., განვიხილავთ ცილინდრულ დეფორმაციას), მივიღებთ შემდეგ განტოლებას

$$x_2 v_{30,22} + \kappa v_{30,2} = 0. \quad (32)$$

მის ზოგად ამონახსნს აქვს

$$v_{30} = \begin{cases} c_1 x_2^{1-\kappa} + c_2, & \kappa \neq 1, \\ c_1 \ln x_2 + c_2, & \kappa = 1, \end{cases} \quad c_1, c_2 = \text{const}, \quad (33)$$

სახე. საიდანაც ადვილად დავასკვნით, რომ $x_2 = 0$ საზღვარზე, გადაადგილების შემოსაზღვრულობის პირობებში, გადაადგილების დასახელება შეიძლება მხოლოდ მაშინ, როცა $\kappa < 1$ (ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ გვაქვს ბლაგვი წამახვილება), ე. ი., როცა $\kappa \geq 1$ (ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ გვაქვს მახვილი წამახვილება), $x_2 = 0$ საზღვარი სასაზღვრო პირობისგან თავისუფლდება. წამახვილებული პრიზმული გარსების (23), (24) სისტემისა და N -ური მიახლოების ზოგადი სისტემისათვის სასაზღვრო და საწყის-სასაზღვრო ამოცანები საკმარისად კარგადაა შესწავლილი (იხ. [24], §4.4). წამახვილებული პრიზმული გარსებისათვის (29), (30) სისტემა ჯერ-ჯერობით არ არის შესწავლილი. თუ განვიხილავთ (31) შემთხვევას (30) განტოლების მაგალითზე ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (23), (24) და (29), (30) სისტემები თვისობრივად განსხვავდება ერთმანეთისაგან.

თუ $\Psi_{3\beta} \equiv 0$,*) $\beta = 1, 2$, და $\Phi_{30} \equiv 0$, მაშინ სტატიკურ შემთხვევაში (30)-დან, ცხადია,

*) ე. ი.,

$$\mu(h\nu_{30}),_{\rho\rho} - \mu(\ln h),_{\rho} (h\nu_{30}),_{\rho} = 0, \quad (34)$$

ე.ი.

$$h\nu_{30},_{\rho\rho} + 2h_{,\rho}v_{30},_{\rho} + h_{,\rho\rho}v_{30} - (\ln h)_{,\rho} (h\nu_{30},_{\rho} + h_{,\rho}v_{30}) = 0.$$

აქედან

$$h\nu_{30},_{\rho\rho} + h_{,\rho}v_{30},_{\rho} + [h_{,\rho\rho} - (\ln h)_{,\rho} h_{,\rho}] v_{30} = 0. \quad (35)$$

თუ ჩავთვლით, რომ v_{30} მხოლოდ x_2 -ზეა დამოკიდებული, გავითვალისწინებთ (31)-ს და გავყოფთ $x_2^{\kappa-2}$, (35)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} & u_3 \left(x_1, x_2, h \right)^{(-)}_{h,\rho} - u_3 \left(x_1, x_2, h \right)^{(+)}_{h,\rho} \\ & + u_\rho \left(x_1, x_2, h \right)^{(+)} - u_\rho \left(x_1, x_2, h \right)^{(-)} \equiv 0. \end{aligned}$$

კერძოდ, ეს უკანასკნელი სრულდება, თუ

$$u_i(x_1, x_2, h)^{(\pm)} \equiv 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{ან} \quad u_\rho(x_1, x_2, h)^{(\pm)} \equiv 0, \quad \rho = 1, 2, \quad \text{და,}$$

$$u_3(x_1, x_2, h)^{(-)} \kappa h_0 x_2^{\kappa-1} - u_3(x_1, x_2, h)^{(+)} \kappa h_0 x_2^{\kappa-1} \equiv 0, \quad \text{როცა} \quad x_2 > 0. \quad \text{ეს უკანასკნელი, კი შესრულდება, თუ}$$

$$u_3(x_1, x_2, h)^{(-)} = \frac{h_0^{(+)}}{h_0^{(-)}} u_3(x_1, x_2, h)^{(+)}, \quad \text{როცა} \quad x_2 > 0.$$

თუ x_2 -ს მივასწრაფებთ ნულისკენ (ე.ი. წამახვილებული ნაპირისკენ), მივიღებთ

$$u_3(x_1, 0, 0) = \frac{h_0^{(+)}}{h_0^{(-)}} u_3(x_1, 0, 0),$$

რაც მხოლოდ მაშინ შესრულდება, როცა $u_3(x_1, 0, 0) = 0$, რადგან $h_0^{(+)} \neq h_0^{(-)}$.

$$x_2^2 v_{30,22} + \kappa x_2 v_{30,2} - \kappa v_{30} = 0. \quad (36)$$

ეს უკანასკნელი ეილერის განტოლების, რომლის ამოხსნის შემთხვევაშიც, კერძო შემთხვევაა და მის ზოგად ამონახსნს აქვს

$$v_{30} = c_1 x_2 + c_2 x_2^{-\kappa} \quad (37)$$

სახე, სადაც c_1 და c_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

იგივე შედეგამდე მივალთ, თუ (34)-ს ჩავწერთ u_{30} -ის მიმართ და გავითვალისწინებთ (31)-ს, მივიღებთ

$$u_{30,22} - \frac{\kappa}{x_2} u_{30,2} = 0,$$

მის ზოგად ამონახსნს აქვს

$$u_{30} = d_1 x_2^{1+\kappa} + d_2, \quad d_1, d_2 = \text{const},$$

სახე. აქედან, ცხადია (იხ. (19)),

$$v_{30} = \frac{u_{30}}{\frac{h_0}{2} x_2^\kappa} = \frac{2d_1}{h_0} x_2 + \frac{2d_2}{h_0} x_2^{-\kappa}$$

და d_1 -სა და d_2 -ის ნებისმიერობის გამო მივიღეთ იგივე (37) გამოსახულება v_{30} -ისთვის.

v_{30} ამონახსნის ზოგადი წარმოდგენის გამოყენებით გავეანალიზოთ $[0, L]$ ინტერვალზე $\frac{1}{2} v_{30}$ ჩალუნვისათვის ამოცანების დასმის საკითხი. თუ ჩავთვლით, რომ პირით ზედაპირებზე გადაადგილებები ნულის ტოლია, ბუნებრივია $x_2 = 0$ ნაპირზე დაისვას

$$v_{30}(0) = 0 \quad (38)$$

სასაზღვრო პირობა.

(38) სასაზღვრო პირობის დაკმაყოფილებისათვის, როცა $\kappa > 0$ აუცილებელია $c_2 = 0$. $x_2 = L$ ნაპირზე შეიძლება

$$v_{30}(L) = v_L = \text{const} \quad (39)$$

სასაზღვრო პირობის დაკმაყოფილება. მართლაც,

$$v_{30}(L) = c_1 L = v_L.$$

საიდანაც

$$c_1 = \frac{v_L}{L}.$$

ამდენად, (36), (38), (39) სასაზღვრო ამოცანის ერთადერთი ამონახსნია

$$v_{30}(x_2) = \frac{v_L}{L} x_2.$$

ეს ამონახსნი მდგრადია (39) სასაზღვრო პირობის მიმართ, მაგრამ არამდგრადია (38) სასაზღვრო პირობის მიმართ, რამდენადაც სასაზღვრო ამოცანა არაერთგვაროვანი (38) სასაზღვრო პირობით არაა ამოხსნადი. თუ უარს ვიტყვით $x_2 = 0$ წამახვილებულ ნაპირზე სასაზღვრო პირობის დაკმაყოფილებაზე და სასაზღვრო პირობას ამონახსნის შემოსაზღვრულობით შეეცვლით, სასაზღვრო ამოცანა ერთი (39) სასაზღვრო პირობით კორექტული გახდება. ანალოგიურად ამოიხსნება ჩალუნვისათვის ამოცანა (38), (39) სასაზღვრო პირობებში, როცა პირით ზედაპირებზე

მოცემულია არანულოვანი u_3 გადაადგილებები, რომლებიც ნული ხდება წამახვილებულ ნაპირზე. სასაზღვრო ამოცანა არ იქნება ამოხსნადი, თუ წამახვილებულ ნაპირზე, პირით ზედაპირებზე მოცემული გადაადგილებები ნული არ ხდება, რადგან შემოსაზღვრულობის პირობით ზოგადი ამონახსნი ნული ხდება, როცა $x_2 = 0$. მაგრამ კვლავ კორექტული იქნება სასაზღვრო

ამოცანა ერთი (39) სასაზღვრო პირობით. ამრიგად, იმ მოდელი-სათვის, როცა პირით ზედაპირზე გადაადგილებებია მოცემული ნებისმიერი $\kappa > 0$ -სთვის კორექტულია ამოცანა, როცა წამახვი-ლებული ნაპირი განთავისუფლებულია სასაზღვრო პირობისაგან (ის იცვლება ამონახსნის შემოსაზღვრულობის პირობით), ზოლო არაწამახვილებულ ნაპირზე გადაადგილებებია მოცემული. ჩაღუნ-ვისათვის ანალოგიური ამოცანა (32) განტოლებისათვის (მოდელი, როცა პირით ზედაპირებზე ძაბვებია მოცემული), რო-გორც ეს მისი ზოგადი (33) ამონახსნიდან გამომდინარეობს, თუ $0 \leq \kappa < 1$ ცალსახად ამოხსნადია მაშინაც, როცა წამახ-ვილებულ ნაპირზე, არაერთგვაროვანი (38) სასაზღვრო პირობაა მოცემული, ამასთან ამონახსნი მდგრადია ორივე სასაზღვრო მონაცემის მიმართ (ე.ი., უწყვეტადაა დამოკიდებული მათზე), განსხვავებით წინა [იხ. (36)] მოდელისაგან. როცა $\kappa \geq 0$, შემო-საზღვრულობის პირობით ν_{30} -ს მხოლოდ ერთი სასაზღვრო პირობის დაკმაყოფილება შეუძლია.

ახლა ორივე მოდელისათვის გავაანალიზოთ საზღვარზე (პრიზმული გარსის ნაპირზე) ძაბვის ნულოვანი მომენტის, ე.ი. ძალვის დასახელების საკითხი.

(36) განტოლებისათვის (38) სასაზღვრო პირობასთან ერთად დავსკათ

$$X_{320}(L) = X_L = \text{const} \quad (40)$$

სასაზღვრო პირობა, ე.ი. $x_2 = L$ ნაპირზე დავასახელოთ ძალვა. მაშინ, (37)-ის და (28)-ის თანახმად, გვექნება

$$X_{320}(L) = \mu(h\nu_{30})_{,2} \Big|_{x_2=L} = X_L,$$

საიდანაც, (37)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$\frac{1}{2} \mu h_0 c_1 (x_2^{k+1})_{,2} \Big|_{x_2=L} = X_L,$$

ე.ი.

$$\frac{1}{2} \mu h_0 c_1 (\kappa + 1) L^\kappa = X_L$$

და

$$c_1 = \frac{2 X_L}{\mu h_0 (\kappa + 1) L^\kappa}.$$

ამდენად, (36), (38), (40) სასაზღვრო ამოცანის ერთადერთი ამონახსნია

$$v_{30}(x_2) = \frac{2 X_L}{\mu h_0 (\kappa + 1) L^\kappa} x_2.$$

შევნიშნოთ, რომ განხილული სასაზღვრო ამოცანა კვლავ არამდგრადია (38) სასაზღვრო პირობის მონაცემის მიმართ და ამოცანა კორექტული გახდება, თუ (38) სასაზღვრო პირობა v_{30} ამონახსნის შემოსაზღვრულობით შევცვლით. (37) ამონახსნით მხოლოდ ერთგვაროვანი წონიანი

$$X_{320} = \lim_{x_2 \rightarrow 0+} \frac{1}{2} \mu h_0 (x_2^\kappa v_{30}) = 0$$

სასაზღვრო პირობის დაკმაყოფილება შეიძლება წამახვილებულ ნაპირზე. ამრიგად, ამ მოდელში წამახვილებულ ნაპირზე არც გადაადგილების და არც ძალვის ნებისმიერად დასახელება არ შეიძლება. რაც, ფაქტიურად, იმას ნიშნავს, რომ წამახვილებული ნაპირი უნდა განთავისუფლდეს სასაზღვრო პირობისაგან. (33)-დან ადვილად დავასკვნით, რომ ანალოგიური სასაზღვრო ამოცანა ორივე ნაპირზე, ზოგადად არაერთგვაროვანი, (38) და (40) სასაზღვრო პირობებით კორექტულია (32) მოდელის შემთხვევაშიც, მხოლოდ კვლავ აუცილებელია $0 \leq \kappa < 1$ პირობის შესრულება. შემოუსაზღვრავ ფუნქციათა კლასში მუდმივი შესაკრების

სიზუსტით განისაზღვრება ν_{30} ერთი: ან (40) ან წამახვილებულ ნაპირზე წონიანი

$$X_{320}(0) = \lim_{x_2 \rightarrow 0+} \mu \hbar \nu_{30} = X_0$$

სასაზღვრო პირობით. ამ შემთხვევაში მხოლოდ ერთ ნაპირზე სასაზღვრო პირობის დაკმაყოფილების შესაძლებლობა გამოწვეულია ამ მოდელში ცილინდრული დეფორმაციის სპეციფიკით და არა წამახვილებით.

4. ძაბვის ფუნქცია. თავსებადობის განტოლება

განვიხილოთ სტატიკური მდგომარეობა. უგულებელვყოთ მოცულობითი ძალები და ვიგულისხმობთ, რომ პირით ზედაპირებზე მოქმედი ზედაპირული ძალები ნულის ტოლია. მაშინ წონასწორობის (17) განტოლებები გაშლილი სახით ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$X_{110,1} = -X_{120,2}, \quad (41)$$

$$-X_{210,1} = X_{220,2}. \quad (42)$$

(41) და (42) პირობებიდან შესაბამისად გამომდინარეობს, რომ არსებობენ ისეთი A და B ფუნქციები, რომ

$$dA = A_{,1} dx_1 + A_{,2} dx_2 = -X_{120} dx_1 + X_{110} dx_2 \quad (43)$$

და

$$dB = B_{,1} dx_1 + B_{,2} dx_2 = -X_{220} dx_1 - X_{120} dx_2, \quad (44)$$

რამდენადაც (41) და (42) იმის აუცილებელ და საკმარის პირობას წარმოადგენენ, რომ შესაბამისად (43) და (44) ტოლობების მარჯვენა მხარეები A და B ფუნქციების სრულ დიფერენციალებს წარმოადგენდნენ. ამდენად,

$$A_{,1} = -X_{120}, \quad A_{,2} = X_{110}, \quad B_{,1} = X_{220}, \quad B_{,2} = -X_{120}, \quad (45)$$

აქედან

$$A_{,1} = B_{,2}$$

ეს უკანასკნელი კი იმის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა, რომ არსებობდეს ისეთი φ ფუნქცია, რომ

$$d\varphi = \varphi_{,1}dx_1 + \varphi_{,2}dx_2 = Bdx_1 + Adx_2,$$

საიდანაც

$$\varphi_{,1} = B, \quad \varphi_{,2} = A. \quad (46)$$

(45) და (46)-დან პირდაპირ გამოდინარეობს, რომ

$$X_{110} = \varphi_{,22}, \quad X_{120} = -\varphi_{,12}, \quad X_{220} = \varphi_{,11}. \quad (47)$$

ჰუკის განზოგადებული

$$X_{\alpha\beta 0} = \lambda \delta_{\alpha\beta} \theta_0 + 2\mu e_{\alpha\beta 0} \quad (48)$$

კანონიდან, სადაც

$$e_{\alpha\beta 0} = h(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}), \quad \theta_0 = hu_{\alpha,\alpha}, \quad u_\alpha := \frac{u_{\alpha 0}}{2h}, \quad (49)$$

გვექნება

$$\theta_0 = \frac{X_{\alpha\alpha 0}}{2(\lambda + \mu)}.$$

მაშინ (48)-დან, (49)-ის გათვალისწინებით, გამოდინარეობს

$$X_{110} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} X_{\alpha\alpha 0} + 4\mu h u_{1,1}, \quad (50)$$

$$X_{220} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} X_{\alpha\alpha 0} + 4\mu h u_{2,2}, \quad (51)$$

$$X_{120} = 2\mu h(u_{1,2} + u_{2,1}). \quad (52)$$

(50) და (51)-დან ცხადია,

$$2\mu u_{1,1} = \frac{X_{110}}{2h} - \nu \frac{X_{\alpha\alpha 0}}{2h},$$

$$2\mu u_{2,2} = \frac{X_{220}}{2h} - \nu \frac{X_{aa0}}{2h},$$

საიდანაც ინტეგრებით

$$2\mu u_1 = \int_{x_1^0}^{x_1} \left(\frac{X_{110}}{2h} - \nu \frac{X_{aa0}}{2h} \right) dx_1 + g_1(x_2), \quad (53)$$

$$2\mu u_2 = \int_{x_2^0}^{x_2} \left(\frac{X_{220}}{2h} - \nu \frac{X_{aa0}}{2h} \right) dx_2 + g_2(x_1).$$

(53) ჩავსვათ (52)-ში,

$$\begin{aligned} & -\frac{X_{120}}{h} + \int_{x_1^0}^{x_1} \left(\frac{X_{110}}{2h} - \nu \frac{X_{aa0}}{2h} \right) dx_1 + \int_{x_2^0}^{x_2} \left(\frac{X_{220}}{2h} - \nu \frac{X_{aa0}}{2h} \right) dx_2 \\ & = -g_1'(x_2) - g_2'(x_1) \end{aligned}$$

აქედან x_1 -ითა და x_2 -ით გაწარმოების შემდეგ მივიღებთ თავსებადობის

$$\left(\frac{X_{110}}{h} \right)_{,22} + \left(\frac{X_{220}}{h} \right)_{,11} - 2 \left(\frac{X_{120}}{h} \right)_{,12} - \nu \Delta \left(\frac{1}{h} X_{aa0} \right) = 0 \quad (54)$$

განტოლებას.

(54)-დან, (47)-ის თანახმად გამომდინარეობს შემდეგი განტოლება ძაბვის ფუნქციისთვის

$$\left(h^{-1} \varphi_{,22} \right)_{,22} + \left(h^{-1} \varphi_{,11} \right)_{,11} + 2 \left(h^{-1} \varphi_{,12} \right)_{,12} - \nu \Delta (h^{-1} \Delta \varphi) = 0.$$

5. $N = 0$ მიახლოების შედარება ბრტყელ დეფორმაციასთან, ბრტყელ დაძაბულ და განზოგადებულ ბრტყელ დაძაბულ მდგომარეობასთან

ა) ბრტყელი დეფორმაცია.

პიპოთეზები:

$$u_3(x_1, x_2, x_3) \equiv 0, \quad u_\alpha(x_1, x_2, x_3) = u_\alpha(x_1, x_2), \quad \alpha = 1, 2.$$

ძირითადი დამოკიდებულებები:

$$e_{\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} [u_{\alpha,\beta}(x_1, x_2) + u_{\beta,\alpha}(x_1, x_2)], \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

$$e_{i3} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$X_{\alpha\beta} = \lambda u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu e_{\alpha\beta},$$

$$X_{\alpha 3} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad X_{33} = \nu X_{\alpha\alpha},$$

$$X_{\alpha\beta,\beta} + \Phi_\alpha(x_1, x_2) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad \Phi_3 = 0,$$

$$\mu \Delta u_\alpha + (\lambda + \mu) u_{\gamma,\gamma\alpha} + \Phi_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (55)$$

ბ) ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა.

პიპოთეზები:

$$X_{i3} \equiv 0.$$

ძირითადი დამოკიდებულებები:

$$X_{\alpha\beta,\beta}(x_1, x_2, x_3) + \Phi_\alpha(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad \Phi_3 = 0,$$

$$e_{\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} [u_{\alpha,\beta}(x_1, x_2, x_3) + u_{\beta,\alpha}(x_1, x_2, x_3)], \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

$$e_{\alpha 3} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad e_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} u_{\gamma,\gamma} \neq 0,$$

$$X_{\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3) = \lambda^* u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu e_{\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3), \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

$$\mu \Delta u_\alpha(x_1, x_2, x_3) + (\lambda^* + \mu) u_{\gamma, \gamma\alpha}(x_1, x_2, x_3) + \Phi_\alpha(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$$\alpha = 1, 2, \quad (56)$$

სადაც x_3 პარამეტრის როლს ასრულებს.

გ) განზოგადებული ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა.

პიპოთეზები:

$2h$ ძალზე მცირეა ფუძეების განზომილებებთან შედარებით. ფირფიტის ფუძეები თავისუფალია გარე ძაბვებისგან, ხოლო გვერდით ზედაპირებზე მოქმედებენ ფუძეების პარალელური და შუა სიბრტყისადმი სიმეტრიულად განაწილებული გარე ძაბვები:

$$X_{i3}|_{x_3=\pm h} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad X_{n3} = 0.$$

გარდა ამისა,

$$X_{33}(x_1, x_2, x_3) \equiv 0, \quad u_3(x_1, x_2, x_3) \equiv 0, \quad u_{3,3}(x_1, x_2, x_3) \neq 0.^*)$$

ყველა ფიზიკური და გეომეტრიული სიდიდე იცვლება მათი ინტეგრალური საშუალოთი x_3 -ის მიმართ:

$$(\tilde{X}_{ij0}, \tilde{e}_{ij0}, \tilde{u}_{i0}, \tilde{\Phi}_{i0}) := \frac{1}{2h} (X_{ij0}, e_{ij0}, u_{i0}, \Phi_{i0}), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$$(X_{ij0}, e_{ij0}, u_{i0}, \Phi_{i0})(x_1, x_2) := \int_{-h(x_1, x_2)}^{h(x_1, x_2)} (X_{ij}, e_{ij}, u_i, \Phi_i)(x_1, x_2, x_3) dx_3,$$

$$i, j = 1, 2, 3.$$

ძირითადი დამოკიდებულებები:

$$\tilde{X}_{\alpha\beta 0, \beta} + \tilde{\Phi}_{\alpha 0} = 0, \quad \alpha = 1, 2,$$

*) ამ მოდელში ითვლება, რომ მისი სიმეტრიის გამო $u_3 \equiv 0$ (თუმცა

ვთვლით, რომ $u_{3,3} \neq 0$), $\Phi_3 \equiv 0$, $X_{3\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, კენტი ფუნქციებია

(ამდენად, $X_{3\alpha 0} = 0$, $\alpha = 1, 2$).

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{\alpha\beta 0} &= \lambda^* \tilde{u}_{\gamma 0, \gamma} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \tilde{e}_{\alpha\beta 0}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \\ \Delta \tilde{u}_{\alpha 0}(x_1, x_2) + (\lambda^* + \mu) \tilde{u}_{\gamma 0, \gamma\alpha} + \tilde{\Phi}_{\alpha 0} &= 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (57)\end{aligned}$$

დ) $N = 0$. მუდმივი სისტემის შემთხვევა.

ძირითადი ჰიპოთეზები:

$$(X_{ij}, e_{ij}, u_i, \Phi_i)(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2h} (X_{ij0}, e_{ij0}, u_{i0}, \Phi_{i0})(x_1, x_2)$$

და სამგანზომილებიანი დრეკადობის თეორიის დამოკიდებულებების x_3 -ის მიმართ ინტეგრებით $-h$ -დან $+h$ -მდე გადავლივართ ნულოვანი მომენტის მიმართ შემდეგ დამოკიდებულებებზე:

$$\begin{aligned}X_{ij0}(x_1, x_2, t) &= \lambda e_{kk0} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij0} = \lambda u_{k0,k} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij0}, \\ i, j &= 1, 2, 3,\end{aligned}$$

$$e_{\alpha\beta 0} = \frac{1}{2}(u_{\alpha 0, \beta} + u_{\beta 0, \alpha}), \quad e_{\alpha 30} = \frac{1}{2}u_{30, \alpha}, \quad e_{330} = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

$$X_{330} = \nu X_{\alpha\alpha 0},$$

$$X_{i\beta 0, \beta} + \overset{0}{X}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

სადაც $\overset{0}{X}_i$ დამოკიდებულია პირით ზედაპირზე მოცემულ ძალებზე და მოცულობითი ძალის ნულოვან მომენტზე,

$$\mu \Delta v_{\alpha 0} + (\lambda + \mu) v_{\gamma 0, \gamma\alpha} + h^{-1} \overset{0}{X}_{\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad (58)$$

$$\mu v_{30, \beta\beta} + h^{-1} \overset{0}{X}_3 = 0,$$

$$v_{i0} = \frac{u_{i0}}{h}.$$

დასკვნა. თუ $v_{30} \equiv 0$, როგორც ვხედავთ (შეადარე (55)-(58)-ს), ერთი მხრივ, მათემატიკურად ყველა მოდელი ერთმა-

ნეთს ემთხვევა (λ და λ' -ის სიზუსტით), თუმცა ა) და ბ) შემთხვევაში განსახილველი სიდიდეები სამგანზომილებიანი მოდელის კერძო შემთხვევებია, ხოლო გ) და დ) შემთხვევებში სამგანზომილებიანი მოდელის სიდიდეები შეცვლილია შესაბამისად მათი ინტეგრალური საშუალოებით და მათი ინტეგრირებული მნიშვნელობებით x_3 -ის მიმართ. მეორე მხრივ, მასალის ფიზიკური თვისებებიდან გამომდინარე, ა) და დ) მოდელები ემთხვევა ერთმანეთს (ორივე შემთხვევაში ფიგურირებს λ) და ბ) და გ) მოდელები ემთხვევა ერთმანეთს (ორივე შემთხვევაში λ -ს ნაცვლად λ' ფიგურირებს). საერთოდ კი, მათემატიკურად და ფიზიკურადაც (რადგან, როგორც ვხედავთ, ახლოა სხვა მოდელებთან) უფრო გამართულად ი. კეკუას $N = 0$ მოდელი უნდა ჩაითვალოს.

დამატება 6. კოლოსოვ-მუსხელიშვილის ფორმულები

1. ძაბვის ფუნქცია

თუ უგულებელვყოფთ მოცულობით ძალებს, ბრტყელი დრეკადობის თეორიის წონასწორობის განტოლებები მიიღებენ (იხ. ნაწილი II, თავი I)

$$X_{11,1} + X_{12,2} = 0, \quad X_{12,1} + X_{22,2} = 0 \quad (1)$$

სახეს. (1)₁-დან გამომდინარეობს, რომ არსებობს ისეთი*) B , რომ

$$B_{,1} = -X_{12}, \quad B_{,2} = X_{11}, \quad (2)$$

ხოლო (1)₂-დან გამომდინარეობს, რომ არსებობს ისეთი**) A , რომ

$$A_{,1} = X_{22}, \quad A_{,2} = -X_{12}. \quad (3)$$

(2)₁ და (3)₂-დან მივიღებთ, რომ

$$A_{,2} = B_{,1}.$$

ამდენად, არსებობს ისეთი***) U , რომ

$$A = U_{,1}, \quad B = U_{,2}. \quad (4)$$

(4)-ის გამო, (2)₂, (3)₂, (3)₁-დან ადვილად დავასკვნით, რომ

$$X_{11} = U_{,22}, \quad X_{12} = -U_{,12}, \quad X_{22} = U_{,11}. \quad (5)$$

$$*) dB = B_{,1}dx_1 + B_{,2}dx_2 = -X_{12}dx_1 + X_{11}dx_2$$

B ფუნქციის აგება ხდება მეორე გვარიის წირითი ინტეგრალით, რომლის გზისგან დამოუკიდებლობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა, როგორც ეს ანალიზიდანაა ცნობილი, არის (1)₁.

$$**) dA = A_{,1}dx_1 + A_{,2}dx_2 = X_{22}dx_1 - X_{12}dx_2$$

$$***) dU = U_{,1}dx_1 + U_{,2}dx_2 = Adx_1 + Bdx_2$$

სენ-ვენანის პირობას მოცულობითი ძალების უგულებელყოფის შემთხვევაში აქვს შემდეგი სახე (იხ. (2.1.8)):

$$\Delta(X_{11} + X_{22}) = 0. \quad (6)$$

(5)₁ და (5)₃-დან გვექნება

$$X_{11} + X_{22} = \Delta U, \quad (7)$$

ხოლო (6) და (7)-დან

$$\Delta \Delta U = 0$$

ან გაშლილი სახით

$$U_{,1111} + 2U_{,1122} + U_{,2222} = 0. \quad (8)$$

U -ს ეწოდება *ძაბვის ფუნქცია*. ის საკმაყოფილებს (8)-ს.

2. ბიჰარმონიული ფუნქციის კომპლექსური წარმოდგენა

განვიხილოთ

$$\Delta \Delta U = 0 \quad (9)$$

ბიჰარმონიული განტოლება და შემდეგი კომპლექსური ოპერატორები

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (10)$$

$$(z := x + iy, \bar{z} := x - iy, \quad x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv y).$$

თუ x -სა და y -ს მივცემთ კომპლექსურ მნიშვნელობებსაც (ე.ი. მათზე დამოკიდებულ ფუნქციებს გავაგრძელებთ კომპლექსურ სიბრტყეზე), (10) ტოლობებით შემოღებული ოპერატორები შეიძლება გავიგოთ როგორც კომპლექსური ცვლადების მიმართ კერძო წარმოებულები. (10)-დან, ერთი მხრივ, ცხადია,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} = -i \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv y), \quad (11)$$

ხოლო მეორე მხრივ,

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - i \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + i \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{4} \Delta. \quad (12)$$

(9) და (12)-დან გამომდინარეობს

$$\frac{\partial^4 U(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}^2 \partial z^2} = 0, \quad (13)$$

ხოლო (13)-დან $\bar{z}$ -ის მიმართ ინტეგრებით მივიღებთ

$$\frac{\partial^3 U}{\partial \bar{z} \partial z^2} = \psi_1(z).$$

აქედან $\bar{z}$ -ით კიდევ ერთხელ ინტეგრებით გვექნება

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \psi_1(z) \bar{z} + \tilde{\phi}_1(z),$$

საიდანაც z -ით ინტეგრების შემდეგ ჯერ მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \tilde{\psi}_1(z) \bar{z} + \tilde{\phi}_1(z) + \chi_2(\bar{z}),$$

ხოლო შემდეგ –

$$U(z, \bar{z}) = \chi_1(z) \bar{z} + \phi_1(z) + \chi_2(\bar{z}) z + \phi_2(\bar{z}). \quad (14)$$

იმისთვის, რომ $U(z, \bar{z})$ ნამდვილი ფუნქცია იყოს, უნდა დავუშვათ, რომ

$$\phi_2(\bar{z}) = \overline{\phi_1(z)} =: \overline{\phi(z)}, \quad \chi_2(\bar{z}) = \overline{\chi_1(z)} =: \overline{\chi(z)} \quad (15)$$

(14)-დან, (15)-ის გათვალისწინებით, გამომდინარეობს

$$U(z, \bar{z}) = \bar{z} \chi(z) + z \overline{\chi(z)} + \phi(z) + \overline{\phi(z)}, \quad (16)$$

სადაც $\phi(z)$ და $\chi(z)$ ნებისმიერი ანალიზური ფუნქციებია.

3. კოლოსოვ-მუსხელიშვილის ფორმულები

ცხადია, თუ (16)-ს 2-ზე გავამრავლებთ და 2χ -ის ϕ -თი,

ხოლო 2φ -ის χ -თი აღვნიშნავთ, რაც მათი ნებისმიერობის გამო დასაშვებია, მივიღებთ:

$$2U = \bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}, \quad (17)$$

სადაც $\varphi(z)$ და $\chi(z)$ ნებისმიერი ანალიზური ფუნქციებია.

(11)-ის გათვალისწინებით, (17)-დან გვექნება

$$2\frac{\partial U}{\partial x} = \varphi(z) + \bar{z}\varphi'(z) + \overline{\varphi(z)} + z\overline{\varphi'(z)} + \chi'(z) + \overline{\chi'(z)}, \quad (18)$$

$$2\frac{\partial U}{\partial y} = i[-\varphi(z) + \bar{z}\varphi'(z) + \overline{\varphi(z)} - z\overline{\varphi'(z)} + \chi'(z) - \overline{\chi'(z)}]. \quad (19)$$

(18) და (19)-დან მივიღებთ

$$f(x, y) := \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \quad (20)$$

სადაც

$$\psi(z) := \chi'(z).$$

ჰუკის განზოგადებული კანონიდან გამომდინარეობს, რომ (იხ. [52], გვ. 107, ფორმულა (12))

$$\begin{aligned} 2\mu u &= -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \operatorname{Re} \varphi(z), \\ 2\mu v &= -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \operatorname{Im} \varphi(z). \end{aligned} \quad (21)$$

თუ (21)₁-ს მივემატებთ i -ზე გამრავლებულ (21)₂-ს და მხედველობაში მივიღებთ (20)-ს, გვექნება

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \quad \kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}. \quad (22)$$

კოშის (2.2.2) ფორმულებიდან, (5)-ის თანახმად, გამომდინარეობს, რომ $(x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv y)$

$$X_n := X_{n1} = X_{11} \cos(n, x) + X_{12} \cos(n, y) \\ = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \cos(n, x) - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos(n, y), \quad (23)$$

$$Y_n := X_{n2} = X_{21} \cos(n, x) + X_{22} \cos(n, y) \\ = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cos(n, y) - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos(n, x). \quad (24)$$

მაგრამ, თუ t მხების დადებითი მიმართულებაა (იხ. დამატება 4),

$$\cos(n, x) = \cos(t, y) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(n, y) = -\cos(t, x) = -\frac{dx}{ds}. \quad (25)$$

(23) და (24)-დან, (25)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$X_n = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right), \quad Y_n = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right). \quad (26)$$

(26)₁-ს მივემატოთ i -ზე გამრავლებული (26)₂:

$$X_n + iY_n = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - i \frac{\partial U}{\partial x} \right) = -i \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right). \quad (27)$$

(27)-დან

$$(X_n + iY_n)ds = -id \left(\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right). \quad (28)$$

(28)-დან, (20)-ის გამო, გამომდინარეობს

$$(X_n + iY_n)ds = -id[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}]. \quad (29)$$

თუ ds ელემენტს ორდინატთა ღერძის მიმართულება აქვს, მაშინ (იხ. ნახ. 1)

$$ds = dy, \quad dx = 0, \quad dz = idy, \quad d\bar{z} = -idy, \quad X_n = X_{11}, \quad Y_n = X_{12} \quad (30)$$

(29)-დან, მისი მარჯვენა მხარის დიფერენცირებით, (30)-ის მხედველობაში მიღებით და dy -ზე შეკვეცის შემდეგ გვექნება

$$X_{11} + iX_{12} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - z\overline{\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)}. \quad (31)$$

თუ ds ელემენტს აბსცისთა ღერძის მიმართულება აქვს, მაშინ (იხ. ნახ. 1)

$$ds = dx, \quad dy = 0, \quad dz = d\bar{z} = dx, \quad X_n = -X_{21}, \quad Y_n = -X_{22}; \quad (32)$$

გაეამრავლოთ (29) i -ზე, მის მარჯვენა მხარეში მოვახდინოთ დიფერენცირება, გავითვალისწინოთ (32) და შევკვეცოთ dx -ზე:

$$X_{22} - iX_{21} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}. \quad (33)$$

შევკრიბოთ (31) და (33):

$$X_{11} + X_{22} = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}]; \quad (34)$$

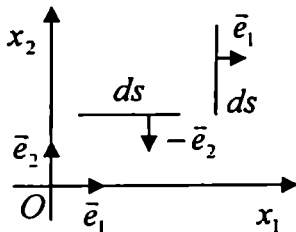
(33)-ს გამოვაკლოთ (31) და i შევცვალოთ $-i$ -თი (ე.ი. მიღებულ ტოლობაში გადავიდეთ შეუღლებულზე და გავითვალისწინოთ ის, რომ ძაბვის ტენზორი ნამდვილი ფუნქციებისგან შედგება):

$$X_{22} - X_{11} + 2iX_{12} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)], \quad (35)$$

სადაც

$$\Phi(z) := \varphi'(z), \quad \Psi(z) := \psi'(z).$$

(22)-ს, (34)-ს და (35)-ს ეწოდება კოლოსოვ-მუსხელიშვილის ფორმულები. მათი დახმარებით ბრტყელი დრეკადობის თეორიის სასაზღვრო ამოცანები დაიყვანება ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევაზე.



ნახ. 1

დამატება 7. უწყვეტ გარემოთა მომენტური თეორია

1. მოცულობითი (მასობრივი) მომენტი და მომენტური ძაბვა

განსხვავებით უწყვეტ გარემოთა კლასიკური თეორიისაგან (იხილეთ ნაწილი 1) მოცულობითი (მასობრივი) [volume (body) force] და ზედაპირულ ძალების (surface force) და გადაადგილების ვექტორის (displacement vector) ცნებებთან (იხილეთ §1.1) ერთად მომენტურ თეორიაში შემოღებულია მოცულობითი (მასობრივი) მომენტის [volume (body) couple], მომენტური ძაბვის ვექტორის (couple stress vector) და შინაგანი ბრუნვის (micro rotation) ცნება [48, 53].*) ამ თეორიაში იგულისხმება, რომ მოცულობის dV უსასრულოდ მცირე ელემენტზე (ნაწილაკზე) მოქმედი ძალები სტატიკურად ეკვივალენტურია ნაწილაკის მასის ცენტრში მოდებულ $\bar{\Phi}dV$ მოცულობითი ძალის და $\bar{\Psi}dV$ მოცულობითი მომენტის, რომელიც წყვილძალას წარმოადგენს. ამ სიდიდეების dV -ზე გაყოფითა და dV მოცულობის ნუ-

*)იხ. აგრეთვე

1. Cosserat E., Cosserat. F., Sur les équations de la théorie de l'élasticité, C.R. Acad. Sci. Paris 126 (1898), 1129-1132
2. Cosserat E., Cosserat. F., Théorie des corps déformable, Hermann, Paris, 1909
3. Voigt W., Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Kristalle, Abh. Der Königl. Ges. Wiss., Göttingen, 34, 1887
4. Eringen A. C., Microcontinuum Field Theories I. Foundation and Solids, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1999
5. Dyszlewicz J., Micropolar Theory of Elasticity, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, vol. 15, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg GmbH, 2004
6. Ieşan D., Classical and Generalized Models of Elastic Rods, CRC Press, A Chapman and Hall Book, 2009 (Chapters 5 and 6)

ლისკენ მისწრაფების შემდეგ მივიღებთ $\bar{\Phi}(x,t)$ და $\bar{\Psi}(x,t)$ ვექტორებს, რომლებიც შესაბამისად წარმოადგენენ მოცულობის ერთეულებზე გათვლილ მოცულობით ძალას და მოცულობით მომენტს, რომლებიც დამოკიდებულია $x := (x_1, x_2, x_3)$ წერტილზე და დინამიკურ შემთხვევაში, l დროზეც. ანალოგიურად, მიღებულია, რომ ზედაპირის უსასრულოდ მცირე dS ელემენტზე მოქმედი ძალები სტატიკურად ეკვივალენტურია $\bar{X}_n dS$ ზედაპირული ძალის და $\bar{\chi}_n dS$ ზედაპირული მომენტის (წყვილძალის). dS -ზე გაყოფისა და dS -ის ფართის ნულისკენ მისწრაფების შემდეგ მივიღებთ $\bar{X}_n(x,t)$ და $\bar{\chi}_n(x,t)$ ვექტორებს, რომლებიც, შესაბამისად, წარმოადგენენ ზედაპირის ფართის ერთეულზე განსაზღვრულ ძალურ დაბეის ვექტორს ან, უბრალოდ, დაბეის ვექტორს (traction, stress vector) და მომენტურ დაბეის ვექტორს, რომლებიც დამოკიდებულია x წერტილზე და დინამიკურ შემთხვევაში l დროზეც. ძალური და მომენტური დაბეის ვექტორის კომპონენტებს, შესაბამისად, ძალური და მომენტური დაბეის ეწოდება.

2. მომენტური დაბეის ვექტორის დამოკიდებულება ზედაპირის ორიენტაციაზე

თუ განვიხილავთ §1.2-ში განხილულ ტეტრაედრს (იხ. ნახ. 1.2.1) და ნულს გავუტოლოებთ, ერთი მხრივ, მასზე მოქმედი ზედაპირული ძალების (ე.ი. ძალური დაბეის) და მოცულობითი ძალების ნაკრები ვექტორების ჯამს, ზოლო მეორე მხრივ, მასზე მოქმედი მომენტების: მოცულობით და ზედაპირული ძალების ნაკრები მომენტების, მოცულობითი მომენტებისა და მომენტური

ძაბვების ნაკრები ვექტორების ჯამს, შესაბამისად, მივიღებთ (1.2.1) და (იხ. [48], გვ. 14)

$$\chi_{ni} = \chi_{ji} n_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

ფორმულებს (იხ. [48], გვ. 14), სადაც χ_{ni} არის განსახილველ წერტილში n ნორმალის მქონე ზედაპირის უსასრულოდ მცირე ელემენტზე (ამასთან მნიშვნელობა არა აქვს ზედაპირის ფორმას, მთავარია ყველა ამ ზედაპირს, რომელიც განსაზღვრულ წერტილზე გადის, ამ წერტილში ერთი და იგივე n ნორმალი ჰქონდეს) მოქმედი მომენტური ძაბვის ვექტორის კომპონენტი i -ურ ღერძზე, ხოლო χ_{ji} , $i, j = 1, 2, 3$, მომენტური ძაბვის ტენზორია. პირველი ფორმულის დამტკიცება სიტყვა-სიტყვით ემთხვევა (1.2.1)-ის გამოყენებას §1.2-ში, ხოლო მეორე ფორმულის დამტკიცება, პირველი ფორმულის ანალოგიურია, იმ განსხვავებით, რომ ამჯერად მხოლოდ მომენტებთან გვექნება საქმე. მართლაც, ΔV ტეტრაედრზე (მისი ზედაპირის ფართი აღვნიშნოთ ΔS -ით) მოქმედი გარე ძალების ნაკრები (მთავარი) მომენტის ე.ი., მოცულობითი ძალების და ძალური ძაბვების ვექტორების ნაკრები მომენტების და მოცულობითი მომენტებისა და მომენტური ძაბვების ვექტორების ნაკრები ვექტორის ჯამის ნულთან გატოლებით მივიღებთ:

$$[\vec{x}, \vec{\Phi} + \vec{\varepsilon}] \Delta V + [\vec{x}, \vec{X}_n + \vec{\varepsilon}'_n] \Delta S + (\vec{\Psi} + \vec{\varepsilon}'') \Delta V + (\vec{\chi}_n + \vec{\varepsilon}''') \Delta S = 0,$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} [\vec{x}, \vec{\Phi} + \vec{\varepsilon}] h \sigma + [\vec{x}, (\chi_{ni} + \varepsilon'_{ni}) \vec{e}_i] \sigma + [\vec{x}, (-\chi_{ji} + \varepsilon''_{ji}) \sigma_j \vec{e}_i] \\ & + \frac{1}{3} (\vec{\Psi} + \vec{\varepsilon}'') h \sigma + (\chi_{ni} + \varepsilon'''_{ni}) \sigma \vec{e}_i + (-\chi_{ji} + \varepsilon'''_{ji}) \sigma_j \vec{e}_i = 0. \end{aligned}$$

ამ უკანასკნელის σ -ზე გაყოფისა და h -ის ნულისკენ მისწრაფების შემდეგ, რადგან

$$\sigma_j = \sigma_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

(1.2.1)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ (1)-ს.

3. წონასწორობის განტოლებები

წონასწორობის განტოლებების გამოსაყვანად §1.3-ის ანალოგიურად ნულს უნდა გაეუტოლოთ, ერთი მხრივ, გარემოდან (სხეულიდან) აზრობრივად გამოყოფილ ნებისმიერ V მოცულობის სხეულის S საზღვარზე მოქმედი გარე ძალური ძაბვების ვექტორების და V -ზე მოქმედი მოცულობითი ძალების ნაკრები ვექტორების ჯამი, ხოლო მეორე მხრივ, S საზღვარზე მოქმედი ძალური ძაბვების ვექტორების ნაკრები მომენტის და მომენტური ძაბვების ვექტორების ნაკრები ვექტორის და V -ზე მოქმედი მოცულობითი ძალების ნაკრები მომენტის და მოცულობითი მომენტების ნაკრები ვექტორის ჯამი. პირველ შემთხვევაში §1.3-ის მსჯელობის სიტყვა-სიტყვით გამეორებით მივიღებთ (1.3.5) ფორმულებს, ხოლო მეორე შემთხვევაში, ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს (იხ. [48], გვ. 20):

$$\chi_{ji,j} + \epsilon_{ijk} X_{jk} + \Psi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

სადაც

$$\epsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$$

ლევ-ჩივატას^{*)} სიმბოლო $(+1)$ -ის $((-1)$ -ის) ტოლია, თუ ინდექსების i, j, k მიმდევრობა მიიღება 1, 2, 3 მიმდევრობებიდან ლუწი (კენტი) რაოდენობის ტრანსპოზიციით და ნულის ტოლია, თუ ორი მაინც ინდექსი ერთმანეთს ემთხვევა. თუ ჩავთვლით,

^{*)} ტულო ლევ-ჩივიტა (1873-1941)

რომ მომენტური ძაბვის χ_{ji} და მოცულობითი მომენტის Ψ_i კომპონენტები ნულის ტოლია, მაშინ გვექნება

$$\epsilon_{ijk} X_{jk} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

საიდანაც გამოდინარეობს, რომ

$$X_{ji} = X_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

და მივიღებთ ძალური ძაბვის ტენზორის სიმეტრიულობას, რაც (1.3.5) და (1.2.1) ფორმულებთან ერთად მიგვიყვანს კლასიკური ძაბვის თეორიის ძირითად დამოკიდებულებებთან. შევნიშნოთ, რომ ძაბვის მომენტურ თეორიაში, ძალური ძაბვის ტენზორი არ არის სიმეტრიული. დავამტკიცოთ (2). ცხადია,

$$\begin{aligned} & \iiint_V [\bar{x}, \Phi] dV + \iiint_V \bar{\Psi} dV + \iint_S [\bar{x}, \bar{X}_n] dS + \iint_S \bar{\chi}_n dS = 0, \\ & \iiint_V [\bar{x}, \Phi, \bar{e}_i] dV + \iiint_V \Psi_i \bar{e}_i dV + \iiint_V [\bar{e}_j, X_{ji} \bar{e}_i] dV \\ & + \iiint_V [\bar{x}, X_{ji,j} \bar{e}_i] dV + \iiint_V \chi_{ji,j} \bar{e}_i dV \\ & = \iiint_V [\bar{x}, (X_{ji,j} + \Phi_i) \bar{e}_i] dV + \iiint_V \{(\chi_{ji,j} + \Psi_i) \bar{e}_i + X_{ji} [\bar{e}_j, \bar{e}_i]\} dV \\ & = \iiint_V (\chi_{ji,j} + \epsilon_{ijk} X_{jk} + \Psi_i) \bar{e}_i dV = 0 \end{aligned}$$

ვინაიდან

$$X_{lm} [\bar{e}_l, \bar{e}_m] = \epsilon_{ijk} X_{lm} (\bar{e}_l)_j (\bar{e}_m)_k \bar{e}_i = \epsilon_{ijk} X_{lm} \delta_{lj} \delta_{mk} \bar{e}_i = \epsilon_{ijk} X_{jk} \bar{e}_i,$$

რადგან

$$[\bar{A}, \bar{B}] = \epsilon_{ijk} A_j B_k \bar{e}_i,$$

ხოლო $\bar{e}_l$ ორტის x_j ღერძზე გვეგმილი

$$(\bar{e}_l)_j = \delta_{lj};$$

(1)-ის და გაუს-ოსტოგრადსკის ფორმულის ძალით კი,

$$\left. \int_S \bar{\chi}_n dS = \int_S \chi_n \bar{e}_i dS = \int_S \chi_{,i} \bar{e}_i n_j dS = \int_V \chi_{,i,j} \bar{e}_i dV \right\}.$$

საიდანაც V -ს ნებისმიერობის, ინტეგრალქვეშა გამოსახულების უწყვეტობისა და $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ ვექტორთა სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობის გამო გამომდინარეობს (2).

4. გადაადგილების და შინაგანი ბრუნვის ვექტორები

უწყვეტ გარემოთა მექანიკის მომენტურ თეორიაში გადაადგილების ვექტორის ცნება შემოდის უწყვეტ გარემოთა მექანიკის კლასიკური თეორიის მსგავსად (იხ. §1.6), სადაც გარემო განხილულია, როგორც უწყვეტი გარემო შედგენილი მათემატიკური წერტილების სიმრავლისაგან (ერთობლიობისაგან). თუ მას წარმოვიდგენთ, როგორც მატერიალური ნაწილაკების ერთობლიობას, სურათი რამდენადმე შეიცვლება. განვიხილოთ გარემოს ნებისმიერი ნაწილაკი. ვთქვათ, მოსვენებულ მდგომარეობაში მისი სიმძიმის ცენტრი x წერტილში მდებარეობს. შემოვიღოთ ამ ნაწილაკზე ხისტად მიმაგრებული დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სათავით x წერტილში და თავიდან აღებული უძრავი დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის საკოორდინატო ღერძების პარალელური საკოორდინატო ღერძებით. ნაწილაკი ჩავთვალოთ აბსოლუტურად მყარ სხეულად. მაშინ მისი მოძრაობა დახასიათდება თავისუფლების ექვსი ხარისხით, ექვსი სკალარული სიდიდით: x წერტილის გადაადგილებით, რომელიც განისაზღვრება უძრავი სისტემის მიმართ გადაადგილების ვექტორის სამი კომპონენტით და ნაწილაკის ბრუნვით სიმძიმის ცენტრის გარშემო, რომელიც განისაზღვრება ასევე სამი სკალარული სიდიდით: მოძრავი სისტემის შემობრუნების კუთხეებით უძრავი სისტემის საკოორდინატო ღერძების მიმართ, მაგალითად,

ილერის კუთხეებით. ერთი წონასწორობის მდგომარეობიდან მეორე წონასწორობის მდგომარეობაში გადასვლისას მოძრავი სისტემა დაიკავებს ახალ მდგომარეობას უძრავი სისტემის მიმართ; სახელდობრ, შემობრუნდება. მობრუნების კუთხეები ავლნიშნოთ $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ -ით და შემოვიღოთ შინაგანი ბრუნვის

$$\omega(x) := (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

ვექტორი. ახლა თუ გარემოს კვლავ წარმოვადგენთ, როგორც უწყვეტს, შედგენილს მათემატიკური წერტილებისაგან, მისი მოძრაობა (გადასვლა ერთი წონასწორობის მდგომარეობიდან მეორე წონასწორობის მდგომარეობაში) დახასიათდება ექვსი სკალარული სიდიდით, სახელდობრ, გადაადგილების ვექტორის $u_i(x)$, $i=1,2,3$, და შინაგანი ბრუნვის ვექტორის $\omega_i(x)$, $i=1,2,3$, კომპონენტებით.

უწყვეტ გარემოთა კლასიკურ თეორიაში ნაწილაკის თავისუფლების ხარისხი სამია – x წერტილის გადაადგილებები, ხოლო ბრუნვის ვექტორი არ განიხილება, როგორც დამოუკიდებელი გადაადგილებებისგან, არამედ მათთან დაკავშირებულია (იხ. [48], გვ. 16)

$$\omega_i(x) \equiv \theta_i := \frac{1}{2}(\operatorname{rot} u)_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} u_{k,j}, \quad i=1,2,3, *)$$

ფორმულებით, სადაც $\theta := (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ ხისტი ბრუნვის ვექტორია, $(\operatorname{rot} u)_i$ არის $\operatorname{rot} u$ ვექტორის i -ური კომპონენტი. მართლაც, განვიხილოთ არადეფორმირებული გარემოს x წერტილის უსასრულოდ მცირე მიდამო და ამ მიდამოს ნებისმიერი $x + \xi$ წერტილი (იხ. §1.10). განვიხილოთ უსასრულოდ მცირე $\xi := (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ვექტორის ცვლილება დეფორმაციის დროს. ამ

*) რადგან $\operatorname{rot} u = \nabla \times u = \epsilon_{ijk} e_i \nabla_j u_k = \epsilon_{ijk} e_i u_{k,j}$.

ვექტორის საწყისი წერტილია x , ხოლო ბოლო წერტილია $x + \xi$, ξ ვექტორის $\delta\xi$ ცვლილება

$$\delta\xi(x, t) = u(x + \xi) - u(x)$$

გამოვთვალოთ ტეილორის ფორმულით $|\xi|$ უსასრულოდ მცირე სიდიდის მიმართ მაღალი რიგის სიდიდეების სიზუსტით, მივიღებთ:

$$\delta\xi_i = u_{i,j}\xi_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4)$$

სადაც $\delta\xi_i$, $i = 1, 2, 3$, $\delta\xi$ ვექტორის კომპონენტებია.

ცხადია (იხ. აგრეთვე (1.10.3)-(1.10.5)),

$$u_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) = e_{ij} + p_{ij}, \quad (5)$$

$$p_{ij} = \epsilon_{kji} \theta_k, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (6)$$

^{*)}ცხადია,

$$p_{ij} = \epsilon_{1ji} \theta_1 + \epsilon_{2ji} \theta_2 + \epsilon_{3ji} \theta_3,$$

აქედან

$$p_{32} = \epsilon_{123} \theta_1 + \epsilon_{223} \theta_2 + \epsilon_{323} \theta_3 = \theta_1, \quad p_{23} = -\theta_1,$$

ანალოგიურად,

$$p_{13} = \theta_2, \quad p_{31} = -\theta_2, \quad p_{21} = \theta_3, \quad p_{12} = -\theta_3.$$

ასევე ცხადია, $\theta_k = \frac{1}{2} \epsilon_{jrk} p_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{kji} p_{ij}$, რადგან, (6)-ის თანახმად,

$$\epsilon_{kji} p_{ij} = \epsilon_{kji} \epsilon_{lji} \theta_l = 2\delta_{kl} \theta_l = 2\theta_k,$$

ვინაიდან

$$\epsilon_{1ji} \epsilon_{1ji} = \epsilon_{123} \epsilon_{123} + \epsilon_{132} \epsilon_{132} = 1 + (-1)(-1) = 2;$$

$$\epsilon_{1ji} \epsilon_{2ji} = 0, \quad \epsilon_{1ji} \epsilon_{3ji} = 0, \quad \text{ე.ი.} \quad \epsilon_{1ji} \epsilon_{lji} = 2\delta_{1l};$$

ანალოგიურად,

და, (4) და (5)-ის ძალით,

$$\delta \xi_i = (e_{ij} + p_{ij}) \xi_j = e_{ij} \xi_j + \epsilon_{kji} \theta_k \xi_j.$$

თუ $e_{ij} = 0$, დეფორმაცია არ გვაქვს და რჩება მხოლოდ ხისტი ბრუნვა.

ამრიგად, ყოველი წერტილის მიდამოში დეფორმაცია შეიძლება განვიხილოთ, როგორც უსასრულოდ მცირე ვექტორის კომპონენტების წრფივი და ერთგვაროვანი ფუნქცია.

5. მოძრაობის განტოლებები, დეფორმაციის და გრება-ღუნვის კომპონენტები მომენტურ თეორიაში, დეფორმაციის ენერგია

ვთქვათ, საწყის $t = t_0$ მომენტში გარემო იმყოფება არადეფორმირებულ მდგომარეობაში. განვიხილოთ დეფორმირებული მდგომარეობა t მომენტში და გამოვთვალოთ მისი გამომწვევი გარე ზემოქმედებების მუშაობა. ასეთ ზემოქმედებებს წარმოადგენენ გარე ძალური და მომენტური ძაბვის ვექტორები და მოცულობითი ძალები და მოცულობითი მომენტები (იხ. [48], გვ. 29).

რამდენადაც მომენტური ძაბვების და მოცულობითი მომენტების შემოღება დაკავშირებულია შინაგან ბრუნვასთან, ამიტომ ბუნებრივია ჩავთვალოთ, რომ მომენტური ძაბვები და მოცულობითი მომენტები მუშაობენ მხოლოდ შინაგან ბრუნვაზე, ხოლო ძალური ძაბვები და მოცულობითი ძალები მხოლოდ გადაადგილებაზე.

$$\epsilon_{2ji} \in_{ji} = 2\delta_{2i}, \quad \epsilon_{3ji} \in_{ji} = 2 \in_{3i},$$

და, საბოლოოდ,

$$\epsilon_{kji} \in_{ji} = 2\delta_{ki}. \quad (6^*)$$

$\mathcal{R}(t)$ -თი აღენიშნოთ აღნიშნული ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა დროის (t_0, t) შუალედში, ხოლო $d\mathcal{R}(t)$ -თი $(t, t+dt)$ შუალედში.

ძალური ძაბვებისა და მოცულობითი ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა გამოვთვალოთ პარაგრაფში 1.18 (იხ. (1.18.6) და (1.18.13)). ახლა გამოვთვალოთ მომენტური ძაბვებისა და მოცულობითი მომენტების მიერ შესრულებული მუშაობა. განვიხილოთ გარემოს x წერტილი მოსვენებულ მდგომარეობაში (t_0 მომენტში). t მომენტში მისი მდგომარეობა ხასიათდება $u(x, t)$ გადაადგილების და $\omega(x, t)$ შინაგანი ბრუნვის ვექტორით. $(t, t+dt)$ დროის შუალედში $\omega(x, t)$ -ს ნაზრდი აღენიშნოთ $d\omega(x, t)$ -თი:

$$d\omega(x, t) = \omega(x, t+dt) - \omega(x, t) = \dot{\omega}(x, t)dt$$

dt -ს მიმართ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეების სიზუსტით.

გარე მომენტური ძაბვების, რომლებიც ზედაპირის dS -უსასრულოდ მცირე ელემენტზე მოქმედებენ, მუშაობა $(t, t+dt)$ შუალედში

$$\chi_n(y, t)dS \cdot \dot{\omega}(y, t)dt\text{-ს}$$

ტოლია, აქ n არის S ზედაპირის y წერტილში ერთეულოვანი ნორმალის (გარე V არის მიმართ, რომელიც გარემოს უკავია), ამასთან y წერტილი dS უსასრულოდ მცირე ელემენტის სიმძიმის ცენტრია.

ფორმულა (1)-ის თანახმად, $(t, t+dt)$ დროის შუალედში გარე მომენტური ძაბვების მიერ შესრულებული მუშაობა

$$\iint_S \chi_{ji} n_j \dot{\omega}_i dS \cdot dt = \iiint_V (\chi_{ji,j} \dot{\omega}_i + \chi_{ji} \dot{\omega}_{i,j}) dV \cdot dt. \quad (8)$$

V -ზე მოქმედი მოცულობითი მომენტების მიერ $(t, t+dt)$ შუალედში შესრულებული მუშაობა

$$\iiint_V \Psi_i \dot{\omega}_i dV \cdot dt \text{-ს} \quad (9)$$

ტოლია.

ამდენად, თუ გავითვალისწინებთ (1.18.6) ტოლობებში ბოლოს წინა გამოსახულებას, (8)-ს და (9)-ს, გვექნება

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{Q}}{dt} = & \iiint_V (X_{ji,j} + \Phi_i) \dot{u}_i dV + \iiint_V (\chi_{ji,j} + \Psi_i) \dot{\omega}_i dV \\ & + \iiint_V (X_{ji} \dot{u}_{i,j} + \chi_{ji} \dot{\omega}_{i,j}) dV. \end{aligned} \quad (10)$$

მოძრაობის განტოლებების მისაღებად, დალამბერის პრინციპის თანახმად, მოცულობით ძალას (1.3.5)-ში უნდა დაემატოს ინერციის ძალა

$$-\rho \ddot{u}_i,$$

ზოლო მოცულობით მომენტს (2)-ში - "სპინური" მომენტი^{*)}

$$-\mathcal{J} \ddot{\omega}_i,$$

რომელიც შეესაბამება შინაგან ბრუნვას. აქ $\mathcal{J}$ არის სპეციალური დინამიკური დადებითი მახასიათებელი (იხ. [48], გვ. 20) რომელიც მასის (ინერციის ზომის) ბრუნვითი ანალოგია ე.წ. "ბრუნვითი მასა" (წრიული მოძრაობის დროს $\mathcal{J} = \rho r^2$, სა-

^{*)} აქ სიმარტივისათვის ელემენტარულ მოცულობად აღებულია ბირთვი თანაბრად განაწილებული მასებით (სიმეტრიული ბზრიალა). ზოგად შემთხვევაში $-\mathcal{J} \ddot{\omega}$, იცვლება $-\rho_0 Y \ddot{\omega}$ ვექტორით, სადაც ρ_0 დეფორმაციამდელ მდგომარეობაში სიმკვრივეა, ზოლო $Y := \|Y_{ij}\|$ ინერციის მატრიცი. Y_{ij} -ის ეწოდება ინერციის კოეფიციენტები. ინერციის "სპინური" მომენტი $\mathcal{J}$ და $\rho_0 Y$ მატრიცი მასის ბრუნვითი ანალოგებია.

დაც r წრეწირის რადიუსია). ამდენად, (1.3.5)-დან გამომდინარეობს (1.18.1), ხოლო (2)-დან

$$\chi_{ji} + \epsilon_{jk} X_{jk} + \Psi_i = \mathcal{F} \dot{\omega}_i, \quad i=1,2,3. \quad (11)$$

ერთად ეს ორი სისტემა აღწერს მიკროპოლარული უწყვეტი გარემოს მოძრაობას.

თუ (10)-ის პირველ ორ ინტეგრალში, შესაბამისად, გავითვალისწინებთ (1.18.1)-ს და (11)-ს, (10) მიიღებს

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}(t)}{dt} &= \iiint_V [\rho \dot{u}_i \dot{u}_i + (\mathcal{F} \dot{\omega}_i - \epsilon_{jk} X_{jk}) \dot{\omega}_i + X_{ji} \dot{u}_{i,j} + \chi_{ji} \dot{\omega}_{i,j}] dV \\ &= \frac{d\mathcal{F}}{dt} + \iiint_V [X_{ji} (\dot{u}_{i,j} - \epsilon_{kj} \dot{\omega}_k) + \chi_{ji} \dot{\omega}_{i,j}] dV \quad (12) \end{aligned}$$

სახეს, სადაც

$$\mathcal{F}(t) := \frac{1}{2} \iiint_V (\rho \dot{u}_i \dot{u}_i + \mathcal{F} \dot{\omega}_i \dot{\omega}_i) dV. \quad (13)$$

კინეტიკური ენერგია. თუ $\omega_i \equiv 0$, $i=1,2,3$, (13)-დან მივიღებთ კლასიკური თეორიის $T(t)$ კინეტიკური ენერგიის (1.18.8) გამოსახულებას.

dt -ს მიმართ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეების სიზუსტით

$$\dot{u}_{i,j}(x,t)dt = u_{i,j}(x,t+dt) - u_{i,j}(x,t) \equiv du_{i,j}(x,t), \quad i,j=1,2,3,$$

$$\dot{\omega}_k(x,t)dt = \omega_k(x,t+dt) - \omega_k(x,t) \equiv d\omega_k(x,t), \quad k=1,2,3,$$

$$\dot{\omega}_{i,j}(x,t)dt = \omega_{i,j}(x,t+dt) - \omega_{i,j}(x,t) \equiv d\omega_{i,j}(x,t), \quad i,j=1,2,3,$$

სადაც $d(\cdot)$ ზემო აღნიშნული სიზუსტით ფიქსირებული x -სთვის $(\cdot)$ ფუნქციის t -ს მიმართ ნაზრდის ტოლია. ე.ი., ამავე სიზუსტით, ქვემოთ მოყვანილ ტოლობებში მარცხენა მხარეების dt -ზე გამრავლებით და გაყოფით, გვექნება:

$$X_{ji}\dot{u}_{i,j} = \frac{1}{dt} X_{ji}\dot{u}_{i,j} dt = \frac{1}{dt} X_{ji} du_{i,j},$$

$$-X_{ji} \in_{kji} \dot{\omega}_k = -\frac{1}{dt} X_{ji} \in_{kji} \dot{\omega}_k dt = -\frac{1}{dt} X_{ji} \in_{kji} d\omega_k,$$

$$\chi_{ji}\dot{\omega}_{i,j} = \frac{1}{dt} \chi_{ji}\dot{\omega}_{i,j} dt = \frac{1}{dt} \chi_{ji} d\omega_{i,j}.$$

ამ უკანასკნელი ტოლობების გათვალისწინებით, (12)-ში ინტეგრალქვეშა გამოსახულება მიიღებს

$$\frac{1}{dt} (X_{ji} du_{ji} + \chi_{ji} d\omega_{ji}) dV \quad (14)$$

სახეს, სადაც (5)-ის და (6)-ის თანახმად,

$$u_{ji} := u_{i,j} - \in_{kji}, \quad \omega_k = e_{ji} + \in_{kji} (\theta_k - \omega_k), \quad *) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (15)$$

(ამ სიდიდეებს ეწოდება *მომენტური თეორიის დეფორმაციის კომპონენტები*), ხოლო

$$\omega_{ji} := \omega_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

(ამ სიდიდეებს *გრეზა-ღუნვის კომპონენტები* ეწოდება).

(12) და (14)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{d\mathcal{R}(t)}{dt} = \frac{d\mathcal{T}}{dt} + \frac{d\mathcal{Z}}{dt}, \quad (16)$$

სადაც

$$d\mathcal{Z} = \iiint_V (X_{ji} du_{ji} + \chi_{ji} d\omega_{ji}) dV. \quad (17)$$

რამდენადაც გარემოს $\mathcal{T}(t)$ კინეტიკური ენერგია არ არის დამოკიდებული გარემოს დეფორმირებულ მდგომარეობაზე დროის t მომენტში, ამიტომ $d\mathcal{T}$ წარმოადგენს კინეტიკური ენერგიის ნაზრდს დროის $(t, t+dt)$ შუალედში. მაშინ როდესაც $d\mathcal{Z}$

*) ცხადია $e_{ji} = e_{ij}$, მაგრამ, ზოგადად, $u_{ji} \neq u_{ij}$.

დამოკიდებულია მხოლოდ დეფორმირებულ მდგომარეობაზე. მართლაც, თუ გარემო ბუნებრივი მოსვენებული მდგომარეობიდან გამოყვანილია ნებისმიერი დეფორმირებით (მომენტური თეორიის თვალსაზრისით) და შემდეგ (I მომენტში) გადავიდა ახალ მოსვენებულ მდგომარეობაში, მაშინ $\mathcal{F}(t) = 0$ და აქედან გამომდინარე $d\mathcal{F} = d\mathcal{U}$. ამდენად, $d\mathcal{U}$ წარმოადგენს დეფორმაციის შესაბამის მუშაობას დროის $(t, t+dt)$ შუალედში, ან რაც იგივეა,

$$d\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}(t+dt) - \mathcal{U}(t),$$

სადაც $\mathcal{U}(t)$ იმ მუშაობის ტოლია, რაც უნდა შეასრულოს გარე ზემოქმედებებმა (ძალურმა და მომენტურმა ძაბვებმა, მოცულობითმა ძალებმა და მოცულობითმა მომენტებმა), რომ გამოიწვიონ ის დეფორმირებული მდგომარეობა, რომელიც შეესაბამება დროის t მომენტს.

ამრიგად, (16) წარმოადგენს ენერგიის შენახვის კანონს: $\frac{d\mathcal{U}}{dt}$ სიმძლავრე კინეტიკური და პოტენციური ენერგიების ცვლილების სიჩქარეთა ჯამის ტოლია.

დეფორმაციის $\mathcal{W}$ ხვედრითი ენერგია ეწოდება დეფორმირების მუშაობას, ან რაც იგივეა, დეფორმაციის პოტენციურ ენერგიას, გათვლილს მოცულობის ერთეულზე x წერტილში, დროის t მომენტში.

ე.ი. მთელი V მოცულობის პოტენციური ენერგიაა

$$\mathcal{U} = \iiint_V \mathcal{W}(x, t) dV.$$

(17)-დან, ცხადია, რომ $\mathcal{W}(x, t)$ -ს ნაზრდი დროის $(t, t+dt)$ შუალედში

$$d\mathcal{W} = X_{,i} du_{,i} + \chi_{,i} d\omega_{,i}. \quad (18)$$

გაქმალთ $\mathcal{W}$ ხარისხთან მჭკრივად u_{ij} -ის და ω_{ij} -ის მიმართ მოსვენებული მდგომარეობის ($u_{ij} = 0, \omega_{ij} = 0$) მიდამოში და ვიხილავთ რა მცირე დეფორმაციებს, უგულებელვყოთ u_{ij} -ის და ω_{ij} -ის ხარისხები დაწყებული მესამე რიგიდან:

$$\begin{aligned}\mathcal{W} = & c_0 + c_{ij}u_{ij} + c'_{ij}\omega_{ij} + \frac{1}{2}c_{ijkl}u_{ij}u_{lk} \\ & + \frac{1}{2}c'_{ijkl}\omega_{ij}\omega_{lk} + \frac{1}{2}c''_{ijkl}u_{ij}\omega_{lk}.\end{aligned}\quad (19)$$

როცა $u_{ij} = 0$ და $\omega_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2, 3$, მაშინ $\mathcal{W} = 0$, ამიტომ $c_0 = 0$.

(18)-დან, ცხადია,

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial u_{ij}} = X_{ij}, \quad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \omega_{ij}} = \chi_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (20)$$

მაგრამ, (20)-ის მარცხენა მხარეში მითითებული კერძო წარმოებულები შეიძლება გამოვთვალოთ (19)-ის გაწარმოებით; მიღებული გაუტოლოთ (20)-ის მარჯვენა მხარეს:

$$X_{ij} = c_{ij} + \frac{1}{2}c_{ijkl}u_{lk} + \frac{1}{2}c_{lkij}u_{lk} + \frac{1}{2}c''_{ijkl}\omega_{lk}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (21)$$

$$\chi_{ij} = c'_{ij} + \frac{1}{2}c'_{ijkl}\omega_{lk} + \frac{1}{2}c'_{lkij}\omega_{lk} + \frac{1}{2}c''_{lkij}u_{lk}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (22)$$

როცა $u_{ij} = 0$ და $\omega_{ij} = 0$, მაშინ $X_{ij} = 0$ და $\chi_{ij} = 0$, ამიტომ (21) და (22)-დან მივიღებთ

$$c_{ij} = 0, \quad c'_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (23)$$

ამდენად, (19)-დან გამომდინარეობს

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2}(c_{ijkl}u_{ij}u_{lk} + c'_{ijkl}\omega_{ij}\omega_{lk} + c''_{ijkl}u_{ij}\omega_{lk}). \quad (24)$$

6. კონსტიტუციური დამოკიდებულებები. მმართველი განტოლებები გადაადგილებებში და შინაგან ბრუნვებში. მიკროპოლარული სითხეების ჰიდრომექანიკის ძირითადი დამოკიდებულებები

აქამდე მოყვანილი ყველა ფორმულა სამართლიანია ნებისმიერი უწყვეტი გარემოსთვის. განვიხილოთ *დრეკადი დეფორმაცი მყარი სხეული სიმეტრიის ცენტრით*. მას ახასიათებს დრეკადი მუდმივების ინვარიანტობა საკოორდინატო ღერძების მიმართულების მათი საწინააღმდეგოთი შეცვლის დროს. ამდროს u_{ij} -ები არ იცვლება, ხოლო ω_{ij} -ები ნიშანს იცვლიან^{*)} და (24)-დან მივიღებთ

$$c''_{ijkl} = 0 \quad (25)$$

და, ამდენად,

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} (c_{ijkl} u_{ij} u_{lk} + c'_{ijkl} \omega_{ij} \omega_{lk}). \quad (26)$$

რადგან $u_{ij} u_{lk}$ და $\omega_{ij} \omega_{lk}$ არ იცვლება (i, j) და (l, k) ინდექსების გადასმის დროს, ზოგადობის შეუზღუდავად^{**)} , შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ

^{*)} რადგან ღერძების მიმართულების საწინააღმდეგოთი შეცვლისას გადაადგილებები და წარმოებულები ნიშანს იცვლიან, ხოლო ბრუნვის კუთხე ნიშანს არ იცვლის, ვინაიდან სისტემის მარჯვენა ორიენტაცია მარცხენათი იცვლება და კუთხის ათვლის დადებითი მიმართულება საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებიდან იცვლება საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით. შევნიშნოთ, რომ სიბრტყეზე ღერძების მიმართულების შეცვლა სისტემის ორიენტაციის შეცვლას არ იწვევს.

^{**)} რადგან, მაგალითად, თუ $i \neq l, j \neq k$, მაშინ

$$c_{ijkl} u_{ij} u_{lk} + c_{lkij} u_{lk} u_{ij} = (c_{ijkl} + c_{lkij}) u_{ij} u_{lk}$$

$$c_{ijk} = c_{lkij} \quad \text{და} \quad c'_{ijk} = c'_{lkij}. \quad (27)$$

(23), (25) და (27)-ის თანახმად, (21) და (22)-დან, დრეკადობის მომენტური თეორიისათვის მივიღებთ ჰუკის შემდეგ განზოგადებულ კანონს

$$X_{ij} = c_{ijkl} u_{lk}, \quad \chi_{ij} = c'_{ijkl} \omega_{lk}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (28)$$

სადაც c_{ijkl} , c'_{ijkl} , $i, j, k, l = 1, 2, 3$, დრეკადი მუდმივებია, რომლებიც ექსპერიმენტულად დგინდება. დრეკადობის კლასიკურ თეორიაში ისინი დადგენილია, ხოლო მომენტურ თეორიაში ჯერ-ჯერობით არ არის დადგენილი.

ცხადია, ეს ფორმულები მხოლოდ მყარი დრეკადი სხეულებისთვისაა სამართლიანი. იზოტროპული (სიმეტრიის ცენტრით) სხეულისთვის ჰუკის განზოგადებულ კანონს აქვს (იხ. [48], გვ. 33):

$$X_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{kk} + (\mu + \tilde{\alpha}) u_{ij} + (\mu - \tilde{\alpha}) u_{ji}, \quad (29)$$

$$\chi_{ij} = \varepsilon \delta_{ij} \omega_{kk} + (\nu + \tilde{\beta}) \omega_{ij} + (\nu - \tilde{\beta}) \omega_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (30)$$

სახე, სადაც $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, ν , ε , λ , μ დრეკადი მუდმივებია. თუ ჩავთვლით, რომ შინაგანი ბრუნვის ვექტორი ნულის ტოლია, დრეკადობის მომენტური თეორიის ჰუკის განზოგადებული კანონიდან მივიღებთ კლასიკური დრეკადობის თეორიის ჰუკის განზოგადებულ კანონს.

განსახილველ შემთხვევაში დეფორმაციის ხვედრით ენერგიას აქვს (იხ. [48], გვ. 34)

$$= \tilde{c}_{ijkl} u_{i \underline{j}} u_{l \underline{k}} + \tilde{c}_{lkij} u_{l \underline{k}} u_{i \underline{j}},$$

სადაც

$$\tilde{c}_{ijkl} \equiv \tilde{c}_{lkij} := \frac{c_{ijkl} + c_{lkij}}{2}.$$

$$2\mathscr{W} = \lambda u_{,k} u_{,k} + (\mu + \tilde{\alpha}) u_{,j} u_{,j} + (\mu - \tilde{\alpha}) u_{,j} u_{,j} \\ + \varepsilon \omega_{,k} \omega_{,k} + (\nu + \tilde{\beta}) \omega_{,j} \omega_{,j} + (\nu - \tilde{\beta}) \omega_{,j} \omega_{,j}$$

სახე. ამ კვადრატული ფორმის დადებითად განსაზღვრულობისათვის აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს შემდეგი პირობები:

$$\mu > 0, 3\lambda + 2\mu > 0, \tilde{\alpha} > 0, \nu > 0, 3\varepsilon + 2\nu > 0, \tilde{\beta} > 0.$$

მის მისაღებად (29) და (30) უნდა ჩავსვათ (შეადარეთ (18)-ს)

$$2\mathscr{W} = X_{,j} u_{,j} + \chi_{,j} \omega_{,j}$$

ფორმულაში.

ცხადია, იქიდან, რომ (იხ. [48], გვ. 110)

$$\mathscr{W} = 0$$

გამომდინარეობს

$$u = a + [b, x], \quad \omega = b,$$

სადაც a და b ნებისმიერი მუდმივი ვექტორებია, რაც შეესაბამება ხისტ მოძრაობას (ხისტ გადაადგილებას), ე.ი. ხისტ მობრუნებას და ხისტ გადატანას ღერძების პარალელურად. როგორც მოსალოდნელი იყო დეფორმაციის (ხვედრითი) ენერგიის ნულთან ტოლობის შემთხვევაში გვრჩება მხოლოდ ხისტი გადაადგილება, ამასთან შინაგანი ბრუნვა მუდმივია და ემთხვევა ხისტ მობრუნებას.

თუ (15)-ს ჩავსვამთ (29)-ში და მიღებულს (30)-თან ერთად ჩავსვამთ (1.18.1)-სა და (11)-ში, მივიღებთ დრეკადობის მომენტური თეორიის მმართველ განტოლობებს გადაადგილებებში და შინაგან ბრუნვებში (იხ. [48], გვ. 44):

$$(\mu + \tilde{\alpha}) \Delta u + (\lambda + \mu - \tilde{\alpha}) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + 2\tilde{\alpha} \operatorname{rot} \omega + \bar{\Phi} = \rho \ddot{u}, \quad (31)$$

$$(\nu + \tilde{\beta}) \Delta \omega + (\varepsilon + \nu - \tilde{\beta}) \operatorname{grad} \operatorname{div} \omega \\ + 2\tilde{\alpha} \operatorname{rot} u - 4\tilde{\alpha} \omega + \bar{\Psi} = \mathscr{J} \ddot{\omega}. \quad (32)$$

მართლაც, (15)-ის ჩასმა (29)-ში გვაძლევს

$$X_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + (\mu + \tilde{\alpha})(u_{j,i} - \epsilon_{kij} \omega_k) \\ + (\mu - \tilde{\alpha})(u_{i,j} - \epsilon_{kji} \omega_k).$$

გადავსვით i და j :

$$X_{ji} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + (\mu + \tilde{\alpha})(u_{i,j} - \epsilon_{kji} \omega_k) \\ + (\mu - \tilde{\alpha})(u_{j,i} - \epsilon_{kij} \omega_k). \quad (33)$$

ეს უკანასკნელი ჩავსვით (1.18.1)-ში:

$$\lambda \delta_{ij} u_{k,kj} + (\mu + \tilde{\alpha})(u_{i,jj} - \epsilon_{kji} \omega_{k,j}) \\ + (\mu - \tilde{\alpha})(u_{j,ij} - \epsilon_{kij} \omega_{k,j}) + \Phi_i = \rho \ddot{u}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

აქედან

$$(\mu + \tilde{\alpha}) \Delta u_i + (\lambda + \mu - \tilde{\alpha}) u_{k,ki} \\ + 2\tilde{\alpha} \epsilon_{kij} \omega_{k,j} + \Phi_i = \rho \ddot{u}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

$\bar{e}_i$ -ზე გამრავლების და i -ს მიმართ აჯამვის შემდეგ მივიღებთ

$$(\mu + \tilde{\alpha}) \Delta(u_i \bar{e}_i) + (\lambda + \mu - \tilde{\alpha}) u_{k,ki} \bar{e}_i \\ + 2\tilde{\alpha} \epsilon_{kij} \omega_{k,j} \bar{e}_i + \Phi_i \bar{e}_i = \rho \ddot{u}_i \bar{e}_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

საიდანაც გამოვძიწარუბს (31).

(30)-ის და (33)-ის (11)-ში ჩასმა და (15)-ის გათვალისწინება გვაძლევს

$$\epsilon \delta_{ij} \omega_{kk,j} + (\nu + \tilde{\beta}) \omega_{ji,j} + (\nu - \tilde{\beta}) \omega_{ij,j} \\ + \epsilon_{ijk} \lambda \delta_{jk} u_{l,l} + \epsilon_{ijk} (\mu - \tilde{\alpha})(u_{j,k} - \epsilon_{lkj} \omega_l) \\ + \epsilon_{ijk} (\mu + \tilde{\alpha})(u_{k,j} - \epsilon_{ljk} \omega_l) + \Psi_i = \mathcal{J} \ddot{\omega}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

აქედან

$$\epsilon \omega_{k,ki} + (\nu + \tilde{\beta}) \omega_{i,jj} + (\nu - \tilde{\beta}) \omega_{j,ij} + \epsilon_{ikj} (\mu - \tilde{\alpha})(u_{k,j} - \epsilon_{ljk} \omega_l) \\ - \epsilon_{ikj} (\mu + \tilde{\alpha})(u_{k,j} - \epsilon_{ljk} \omega_l) + \Psi_i = \mathcal{J} \ddot{\omega}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

ე.ი.,

$$(\nu + \tilde{\beta})\Delta\omega_i + (\varepsilon + \nu - \tilde{\beta})\omega_{k,ki} - 2\epsilon_{ikj} \tilde{\alpha}u_{k,j} + 2\epsilon_{ikj}\epsilon_{ijk} \tilde{\alpha}\omega_i + \Psi_i = \mathcal{J}\ddot{\omega}_i, \quad i=1,2,3, \quad (34)$$

რადგან, თუ გავითვალისწინებთ (6*)-ს,

$$\epsilon_{ikj}\epsilon_{ijk} \omega_i = -\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} \omega_i = -2\delta_{ii}\omega_i = -2\omega_i, \quad i=1,2,3. \quad (35)$$

(34) იგივეა რაც

$$(\nu + \tilde{\beta})\Delta\omega_i + (\varepsilon + \nu - \tilde{\beta})\omega_{k,ki} + 2\epsilon_{ijk} \tilde{\alpha}u_{k,j} - 4\tilde{\alpha}\omega_i + \Psi_i = \mathcal{J}\ddot{\omega}_i, \quad i=1,2,3.$$

$\tilde{\epsilon}_i$ -ზე გამრავლების და i -ს მიმართ აჯამების შემდეგ მივიღებთ (32)-ს.

სამეცნიერო ლიტერატურაში დრეკადობის მომენტური თეორია გვხვდება სხვადასხვა სახელწოდებით: ასიმეტრიული დრეკადობის თეორია, კოსერას მოდელი, დრეკადობის თეორია ნაწილაკების ბრუნვითი ზემოქმედებით, *მიკროპოლარული დრეკადობის თეორია*, არალოკალური დრეკადობის თეორია, მეორე კლასის გარემოთა დრეკადობის თეორია.

დრეკადობის მომენტური თეორია არ წარმოადგენს კლასიკური დრეკადობის თეორიის მათემატიკურ განზოგადებას თეორიული ინტერესიდან გამომდინარე. მის შექმნას ბიძგი მისცა, მაგალითად, იმან, რომ მოკლე აკუსტიკური ტალღების გავრცელება მაღალი რიგის პოლიმერებში*) და სხვა მსხვილ მარცვლოვან სხეულებში არადამაკმაყოფილებლად აღიწერება კლასიკური დრეკადობის თეორიის ფარგლებში.

*) პოლიმერები წარმოადგენს მაღალი მოლეკულური მასის (რამდენიმე ათასიდან რამდენიმე მილიონამდე) ჭიმურ ნაერთებს, რომელთა მოლეკულები (მაკრომოლეკულები) შედგება განმეორებადი მრავალრიცხოვანი დაჯგუფებებისაგან (მონომერული რგოლებისაგან). განასხვავებენ ბუნებრივ (მაგალითად, ცილები) და სინთეზურ (მაგალითად, პოლიეთილენი, პოლიამიდი, ეპოქსიდური ფისები).

ასევე უძლურია ნავიე-სტოქსის კლასიკური თეორია ახსნას ის ეფექტი, რომ არსებობს მინარევის სახით პოლიმერული ნაწილაკების შემცველი ისეთი სითხე, რომლითაც მყარი სხეულის გარსდენისას წარმოშობილი ზედაპირული ხახუნი 30-35%-ით ნაკლებია, ვიდრე ისეთი სითხით გარსდენისას, რომელიც არ შეიცავს ასეთ პოლიმერულ მინარევს. ეს და სხვა მაგალითები გახდა სითხეების მომენტური თეორიის შექმნის საფუძველი. ამ თეორიას ეწოდება *მიკროპოლარული სითხეების ჰიდრომექანიკა*.

ბლანტი არაკუმშვადი მიკროპოლარული სითხის არასტაციონალური დინების ძირითად განტოლებათა სისტემა მიიღება (1.18.1), (11) სისტემიდან და მას აქვს

$$X_{ji,j}(x,t) + \Phi_i(x,t) = \rho \dot{v}_i(x,t) + \rho v_k v_{i,k}(x,t), \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & \chi_{ji,j}(x,t) + \epsilon_{ijk} X_{jk}(x,t) + \Psi_i(x,t) \\ & = \mathcal{J} \underline{v}_i(x,t) + \mathcal{J} v_k \underline{v}_{i,k}(x,t), \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (37)$$

სახე, სადაც $v := (v_1, v_2, v_3)$ და $\underline{v} := (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$, შესაბამისად, წარმოადგენენ მიკროპოლარული სითხის ყოველი წერტილის მოძრაობის დამახასიათებელ სიჩქარისა და მისგან დამოუკიდებელ შინაგანი მიკრობრუნვის $\underline{v}$ სიჩქარის ვექტორებს, $\mathcal{J}$ არის ინერციის მომენტი.

(36), (37) განტოლებებს უნდა დაემატოს უწყვეტობის განტოლებაც (იხ. 1.23.11), რომელსაც არაკუმშვადი სითხის ($\rho = \text{const}$) შემთხვევაში აქვს

$$\text{div } v(x,t) := v_{i,i}(x,t) = 0 \quad (38)$$

სახე.

ბლანტი, ერთგვაროვანი, იზოტროპული, არაკუმშვადი*) მიკროპოლარული სითხის შემთხვევაში კონსტიტუციურ დამოკიდებულებებს – ნიუტონის განზოგადებულ კანონს აქვს

*) რადგან ამ შემთხვევაში (იხ. (41)), (38)-ის და $\epsilon_{iik} = 0$ -ს გამო,

$$X_{ij} = -p\delta_{ij} + (\mu + \tilde{\alpha})v_{ij} + (\mu - \tilde{\alpha})v_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (39)$$

$$\chi_{ij} = \varepsilon\delta_{ij}\underline{\omega}_{kk} + (\nu + \tilde{\beta})\underline{\omega}_{ij} + (\nu - \tilde{\beta})\underline{\omega}_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (40)$$

სახე, სადაც p არის წნევა, $\mu, \tilde{\alpha}, \varepsilon, \nu$ და $\tilde{\beta}$ მუდმივები ახასიათებენ სითხის ფიზიკურ თვისებებს, ხოლო

$$v_{ji} := v_{i,j} - \epsilon_{jik} \underline{\omega}_k, \quad \underline{\omega}_{ji} := \underline{\omega}_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (41)$$

შევნიშნოთ, რომ თუ

$$\mu > 0, \quad \tilde{\alpha} > 0, \quad \nu > 0, \quad 3\varepsilon + 2\nu > 0, \quad \tilde{\beta} > 0,$$

მაშინ დადებითად განსაზღვრულია დეფორმაციის

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = & \frac{\mu + \tilde{\alpha}}{2} v_{ij} v_{ij} + \frac{\mu - \tilde{\alpha}}{2} v_{ij} v_{ji} + \frac{\varepsilon}{2} \underline{\omega}_{ii} \underline{\omega}_{jj} \\ & + \frac{\nu + \tilde{\beta}}{2} \underline{\omega}_{ij} \underline{\omega}_{ij} + \frac{\nu - \tilde{\beta}}{2} \underline{\omega}_{ij} \underline{\omega}_{ji} \end{aligned} \quad (42)$$

ხვედრითი ენერგია^{*)}.

თუ (41)-ს ჩავსვამთ (39)-სა და (40)-ში, ხოლო შემდეგ მიღებულ გამოსახულებებს, შესაბამისად, (36)-სა და (37)-ში მივიღებთ ბლანტი არაკუმშვადი, ერთგვაროვანი, იზოტროპული მიკროპოლარული სითხის არასტაციონალური დინების მმართველ

$$\begin{aligned} (\mu + \tilde{\alpha})\Delta v(x, t) + 2\tilde{\alpha} \operatorname{rot} \underline{\omega}(x, t) - \operatorname{grad} p(x, t) + \bar{\Phi}(x, t) \\ = \rho[\dot{v}(x, t) + v_k(x, t)v_{,k}(x, t)], \end{aligned} \quad (43)$$

$$(\nu + \tilde{\beta})\Delta \underline{\omega}(x, t) + (\varepsilon + \nu - \tilde{\beta}) \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{\omega}(x, t) + 2\tilde{\alpha} \operatorname{rot} v(x, t)$$

$$v_{ii} = v_{i,i} + \epsilon_{iik} \omega_k = 0,$$

ამიტომ (39)-ში $\lambda v_{kk} \delta_{ij}$ (შეადარე (1.13.7)-ს) შესაყრები არ გვექნება.

^{*)} (42)-ს მივიღებთ, თუ $2\mathcal{W} = X_{ij} v_{ij} + \chi_{ij} \underline{\omega}_{ij}$ ფორმულაში ჩავსვამთ (39) და (40) გამოსახულებებს

$$-4\tilde{\alpha}\underline{\omega}(x,t) + \bar{\Psi}(x,t) = \mathcal{J}[\dot{\underline{\omega}}(x,t) + v_k(x,t)\underline{\omega}_{,k}(x,t)], \quad (44)$$

$$\operatorname{div} v(x,t) = 0 \quad (45)$$

სისტემას.

მართლაც, თუ (41)-დან პირველს ჩავსვამთ (39)-ში, ხოლო მიღებულს – (36)-ში, გვექნება

$$-p_{,j}\delta_{ij} + (\mu + \tilde{\alpha})(v_{i,jj} - \epsilon_{jik}\underline{\omega}_{k,j}) + (\mu - \tilde{\alpha})(v_{j,ij} - \epsilon_{ijk}\underline{\omega}_{k,j}) + \Phi_i(x,t) = \rho\dot{v}_i(x,t) + \rho v_k v_{i,k}(x,t), \quad i=1,2,3.$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ (38)-ს, მივიღებთ

$$(\mu + \tilde{\alpha})v_{i,jj} + 2\tilde{\alpha}\epsilon_{ijk}\underline{\omega}_{k,j} - p_{,i} + \Phi_i(x,t) = \rho\dot{v}_i(x,t) + \rho v_k v_{i,k}(x,t), \quad i=1,2,3.$$

საიდანაც, $\bar{e}_i$ -ზე გამრავლებისა და i -ს მიმართ აჯამების შემდეგ, გამომდინარეობს (43).

თუ (41)-დან პირველს და მეორეს ჩავსვამთ, შესაბამისად, (39)-სა და (40)-ში, ხოლო მიღებულ გამოსახულებებს – (37)-ში, გვექნება

$$\begin{aligned} & \varepsilon\delta_{ij}\underline{\omega}_{k,kj} + (\nu + \tilde{\beta})\underline{\omega}_{i,jj} + (\nu - \tilde{\beta})\underline{\omega}_{j,ij} \\ & + \epsilon_{ijk}[-p\delta_{jk} + (\mu + \tilde{\alpha})(v_{k,j} - \epsilon_{jkl}\underline{\omega}_l) \\ & + (\mu - \tilde{\alpha})(v_{j,k} - \epsilon_{kjl}\underline{\omega}_l)] + \Psi_i(x,t) \\ & = \mathcal{J}\dot{\underline{\omega}}_i(x,t) + \mathcal{J}v_k\underline{\omega}_{i,k}(x,t), \quad i=1,2,3. \end{aligned}$$

აქედან

$$\begin{aligned} & (\nu + \tilde{\beta})\underline{\omega}_{i,jj} + (\varepsilon + \nu - \tilde{\beta})\underline{\omega}_{k,ki} + \epsilon_{ijk}(\mu + \tilde{\alpha})v_{k,j} \\ & - (\mu + \tilde{\alpha})\epsilon_{ijk}\epsilon_{jkl}\underline{\omega}_l + \epsilon_{ikj}(\mu - \tilde{\alpha})v_{k,j} \\ & + (\mu - \tilde{\alpha})\epsilon_{ijk}\epsilon_{jkl}\underline{\omega}_l + \Psi_i(x,t) \\ & = \mathcal{J}\dot{\underline{\omega}}_i(x,t) + \mathcal{J}v_k\underline{\omega}_{i,k}(x,t), \quad i=1,2,3, \end{aligned}$$

ე.ი., თუ მხედველობაში მივიღებთ (35)-ს,

$$(\nu + \tilde{\beta})\underline{\omega}_{i,jj} + (\varepsilon + \nu - \tilde{\beta})\underline{\omega}_{k,ki} + 2\tilde{\alpha} \in_{ijk} \nu_{k,j} - 4\tilde{\alpha}\underline{\omega}_i + \Psi_i(x, t) = \mathcal{J}\dot{\underline{\omega}}_i(x, t) + \mathcal{J}\nu_k \underline{\omega}_{i,k}(x, t), \quad i=1,2,3.$$

საიდანაც, $\tilde{e}_i$ -ზე გამრავლებისა და i -ს მიმართ აჯამვის შემდეგ, გამომდინარეობს (44).

7. დრეკადლობის მომენტური თეორიის ძირითადი ამოცანები

R^3 სივრცე გლუვი შეკრული S ზედაპირით დაფარული ორ შემოსაზღვრულ Ω^+ და შემოსაზღვრავ Ω^- არედ.

დინამიკის ამოცანები. $\Omega^\pm$ არეში განვსაზღვროთ მოცემული მოცულობითი ძალისა და მოცულობითი მომენტის შესაბამისი დრეკად-დინამიკური მდგომარეობა დროის $[t_0, t_1]$ შუალედში შემდეგი საწყისი პირობებისა

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, t_0)}{\partial t} = \psi(x),$$

$$\omega(x, t_0) = \xi(x), \quad \frac{\partial \omega(x, t_0)}{\partial t} = \eta(x), \quad \forall x \in \Omega^\pm,$$

და ერთ-ერთის საშუალებით შემდეგი სასაზღვრო პირობებიდან

$$u^\pm(x, t) = f(x, t), \quad \omega^\pm(x, t) = g(x, t),$$

(ამოცანა $(I)^\pm$) ან

$$X_n^\pm(x, t) = f(x, t), \quad \chi_n^\pm(x, t) = g(x, t),$$

(ამოცანა $(II)^\pm$) როცა $x \in S$, $t \in [t_0, t_1]$, სადაც “+” და “-”

შეესაბამება Ω^+ და Ω^- არეებიდან ზღვრულ მნიშვნელობებს, ხოლო $\varphi, \psi, \xi, \eta, f$ და g მოცემული ვექტორ-ფუნქციებია.

დრეკად-დინამიკური მდგომარეობის განსაზღვრა მათემატიკურად გულისხმობს (31), (32) სისტემის ამონახსნის პოვნას ვექტორ-ფუნქციათა გარკვეული კლასიდან, რომლებიც აკმაყოფილებენ ზემოთ მითითებულ საწყის და სასაზღვრო პირობებს (Ω -არის შემთხვევაში უსასრულობაში გარკვეულ დამატებით პირობებსაც).

სასაზღვრო პირობები შეიძლება შეიცვალოს შერეული სასაზღვრო პირობებითაც (იხ [48], გვ. 57).

სტატიკის შემთხვევაში განიხილება დრეკადი წონასწორობის განსაზღვრის ამოცანები მხოლოდ ზემოთ მითითებული სასაზღვრო პირობებით საწყისი პირობების გარეშე, რადგან ამონახსნი I დროზე არ არის დამოკიდებული, ამასთან (31), (32) სისტემის მარჯვენა მხარეში მითითებული სიდიდეები ნულებით იცვლება.

ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობის საკითხის გამოკვლევა კლასიკური დრეკადობის თეორიის შემთხვევის ანალოგიურია და შედეგიც ემთხვევა (იხ. [48], გვ. 110). დინამიკის ამოცანებს ერთადერთი ამონახსნი აქვს, ხოლო სტატიკის შემთხვევაში, ამოცანა $(I)^+$ -ს აქვს ერთადერთი ამონახსნი, ამოცანა $(II)^+$ -ის ამონახსნი კი განისაზღვრება ზისტი გადაადგილების სიზუსტით, თუ S საკმარისად გლუვია და $u, \omega \in C^2(\bar{\Omega}^+)$. ამოცანა $(I)^-$ -ს და ამოცანა $(II)^-$ -ს აქვს ერთადერთი ამონახსნი, თუ S საკმარისად გლუვია; $u, \omega \in C^2(\bar{\Omega}^-)$ და უსასრულობის მიდამოში სრულდება

$$u = O(|x|^{-1}); \quad \omega, u_i, \omega_i = o(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow +\infty,$$

$$i = 1, 2, 3; \quad |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

პირობები. ამონახსნების არსებობის თაობაზე იხ. [48], გვ. 351.

8. მიკროპოლარული სითხეების თეორიის ძირითადი ამოცანები

წინა პარაგრაფში განსაზღვრული Ω^+ და Ω^- არეებში ვეძებთ (43)-(45) სისტემის $v, \underline{w}, p$ ამონახსნებს გარკვეული კლასიდან, რომლებიც აკმაყოფილებენ

$$v(x, t_0) = \varphi(x), \quad \underline{w}(x, t_0) = \psi(x), \quad \forall x \in \Omega^\pm,$$

საწყის და S საზღვარზე ან

$$v^\pm(x, t) = f(x, t), \quad \underline{w}^\pm(x, t) = g(x, t), \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

ან

$$X_n^\pm(x, t) = (\mu + \tilde{\alpha}) \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)^\pm + (\mu - \tilde{\alpha})(\text{grad } v_n)^\pm$$

$$+ 2\alpha[\bar{n}, \underline{w}]^\pm - \bar{n}p^\pm(x, t) = f(x, t), \quad ^*)$$

$$\chi_n^\pm(x, t) = g(x, t), \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

სასაზღვრო პირობებს, სადაც φ, ψ, f, g მოცემული ვექტორ-ფუნქციებია (Ω^- არის შემთხვევაში მოითხოვება დამატებითი პირობები უსასრულობაშიც)^{**)} .

^{*)} რადგან, (1.2.1)-ის, (39)-ის და (41)-ის გათვალისწინებით,

$$X_n(x, t) = X_{ji} n_j \bar{e}_i = -\bar{n}p(x, t)$$

$$+ [(\mu + \tilde{\alpha})v_{i,j} + (\mu - \tilde{\alpha})v_{j,i} + 2\alpha \epsilon_{ijk} \underline{w}_k] n_j \bar{e}_i$$

$$= -\bar{n}p(x, t) + (\mu + \tilde{\alpha}) \frac{\partial v}{\partial n} + (\mu - \tilde{\alpha})(\bar{n}, v)_{,i} \bar{e}_i + 2\alpha[\bar{n}, \underline{w}],$$

ხოლო $(\bar{n}, v)_{,i} \bar{e}_i = v_{n,i} \bar{e}_i = \text{grad } v_n$, აქ v_n არის v -ს ნორმალური მდგენელი.

^{**)} თეორია და გამოყენებები იხ. წიგნში Lukaszewicz Gz., Micropolar Fluids - Theory and Application, Birkhäuser, 1999.

დამატება 8. ზოგიერთი ცნება და ფაქტი თეორიული მუშაუნიკიდან

1. სრიალა ვექტორის მომენტი წერტილისა და ღერძის მიმართ. ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი.

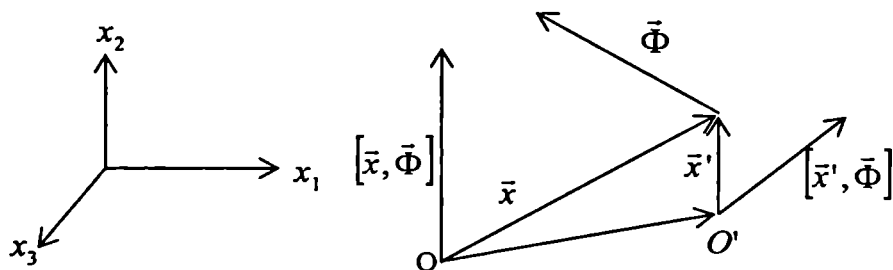
ვექტორების (ძალთა) გეომეტრიულ ჯამს ამ ვექტორთა სისტემის ნაკრები (მთავარი) ვექტორი ეწოდება. $[\vec{x}, \vec{\Phi}]$ მომენტი განსაზღვრულია კოორდინატთა სისტემის O სათავის მიმართ. თუ მომენტს ავიღებთ სივრცის რაიმე სხვა O' წერტილის მიმართ, მაშინ (იხ. ნახ. 1)

$$[\vec{x}', \vec{\Phi}] = [\vec{x}, \vec{\Phi}] - [\vec{OO'}, \vec{\Phi}], \quad (1)$$

რადგან

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{OO'}.$$

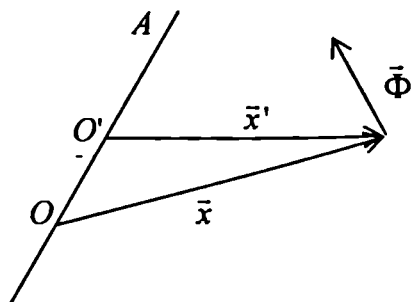
ამდენად, ახალი ცენტრის მიმართ ვექტორის მომენტი უდრის ძველი ცენტრის მიმართ მომენტს გამოკლებული ახალ ცენტრზე მოდებული ამავე ვექტორის მომენტი ძველი ცენტრის მიმართ.



ნახ. 1.

ვექტორის მომენტი რაიმე A ღერძის მიმართ ეწოდება ამ ღერძის ნებისმიერი წერტილის მიმართ ვექტორის მომენტის

გეგმილს ამავე ღერძზე. ადვილი მისახვედრია, რომ ღერძის მიმართ მომენტი არ არის დამოკიდებული ღერძზე ზემოაღნიშნული წერტილის შერჩევაზე. მართლაც (იხ. ნახ. 2), ვინაიდან, ვექტორული ნამრავლის განმარტების თანახმად, $[\overline{OO'}, \vec{\Phi}]$ მართობულია $\overline{OO'}$ -ის, რადგან ის $\overline{OO'}$ და O' წერტილში მოდებულ $\vec{\Phi}$ ვექტორებზე გამავალი სიბრტყის მართობულია, ამიტომ



ნახ. 2.

$$\text{გვგ}_A [\overline{OO'}, \vec{\Phi}] = 0.$$

აქედან გამომდინარე (1)-დან მივიღებთ, რომ

$$\text{გვგ}_A [\vec{x}', \vec{\Phi}] = \text{გვგ}_A [\vec{x}, \vec{\Phi}].$$

(1) ფორმულის ძალით ადვილად დავასკვნით, რომ ახალი O' ცენტრის მიმართ ნაკრები $\vec{L}'$ მომენტი უდრის ძველი O ცენტრის მიმართ ნაკრებ $\vec{L}$ მომენტს გამოკლებული ახალ ცენტრზე მოდებული ნაკრები $\vec{R}$ ვექტორის მომენტი ძველი ცენტრის მიმართ:

$$\vec{L}' = \vec{L} - [\overline{OO'}, \vec{R}]. \quad (2)$$

აქედან ცხადია, რომ ნაკრები მომენტი არ არის დამოკიდებული ცენტრის შერჩევაზე, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნაკრები

ვექტორი ნულის ტოლია. მართლაც, (1)-ის თანახმად, ძალთა (სრიალა ვექტორთა) A_i , $i = 1, 2, \dots, n$, სისტემის O ცენტრის მიმართ ნაკრები

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{A}_i]$$

($\vec{r}_i$ არის $\vec{A}_i$ ვექტორის სათავეს რადიუს-ვექტორი O ცენტრის მიმართ) მომენტი ახალი O' ცენტრის მიმართ ნაკრებ $\vec{L}'$ მომენტთან დაკავშირებულია შემდეგი ფორმულით

$$\begin{aligned} \vec{L}' &= \sum_{i=1}^n \vec{L}_i' = \sum_{i=1}^n (\vec{L}_i - [\vec{OO'}, \vec{A}_i]) = \vec{L} - [\vec{OO'}, \sum_{i=1}^n \vec{A}_i] \\ &= \vec{L} - [\vec{OO'}, \vec{R}], \end{aligned}$$

სადაც L_i და L_i' $\vec{A}_i$ ვექტორის მომენტებია შესაბამისად O და O' ცენტრების მიმართ, ხოლო

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{A}_i$$

ნაკრები ვექტორია.

თავმოყრილ ვექტორთა სისტემა ეწოდება ვექტორთა ისეთ სისტემას, რომელთა ფუძეები ერთ წერტილში იკვეთება. ამ წერტილს თავმოყრის წერტილი ეწოდება.

თავმოყრილ ვექტორების რაიმე წერტილის მიმართ მომენტების გეომეტრიულ ჯამს ეწოდება თავმოყრილ ვექტორთა ამ სისტემის ნაკრები (მთავარი) მომენტი.

ვარინიონის^{*)} დებულება. თავმოყრილ ვექტორთა სისტემის ნაკრები მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ უდრის ამ სისტემის ნაკრები ვექტორის მომენტს ამავე წერტილის მიმართ, თუ ვიგუ-

^{*)} პ. ვარინიონი (1654 – 1722)

ლისხმებთ, რომ ნაკრები ვექტორი თავმოყრის წერტილშია მოდებული.

მართლაც, თავმოყრილ $\bar{A}_i, i = \overline{1, k}$, ვექტორთა სისტემის შემთხვევაში

$$\bar{L}' = \sum_{i=1}^n [\bar{r}, \bar{A}_i] = [\bar{r}, \sum_{i=1}^n \bar{A}_i] = [\bar{r}, \bar{R}],$$

სადაც r აღნიშნავს თავმოყრის M წერტილის რადიუს-ვექტორს მომენტთა O ცენტრის მიმართ.

2. ელემენტარული მოქმედებები. ტოლფასი სისტემები.

ვექტორის გასრიალებას ფუძის გასწვრივ, თავმოყრილ ვექტორთა შეკრებას და ვექტორის დაშლას თავმოყრილ ვექტორებად ეწოდება *ელემენტარული მოქმედებები*. ჩვენ ვიტყვით, რომ სრიალ ვექტორთა *ორი სისტემა ტოლფასია*, თუ ისინი ერთმანეთზე დაიყვანება ელემენტარული მოქმედებებით. ორ ტოლფას სისტემას ერთნაირი ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი აქვს. თუ არსებობს ისეთი ვექტორი, რომელიც მოცემული სისტემის ტოლფასია, მაშინ მას ამ *სისტემის ტოლქმედი* ეწოდება. ამდენად, ზოგადად, სისტემის ნაკრები ვექტორი და ტოლქმედი ერთმანეთს არ ემთხვევა. თუ ნაკრები $\bar{R}$ ვექტორი ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ სრიალა ვექტორთა სისტემა დაიყვანებოდეს ტოლქმედამდე მდგომარეობს იმაში, რომ $(\bar{R}, \bar{L}) = 0$, რაც სრულდება ან თუ $\bar{L}$ მომენტი ნულის ტოლია ან $\bar{R} \perp \bar{L}$, $\bar{R} \neq 0$, $\bar{L} \neq 0$. ამ

უკანასკნელ შემთხვევაში, როგორც ცნობილია^{*)} არსებობს ისეთი ახალი დაყვანის O' წერტილი, რომ მის მიმართ ნაკრები $\bar{L}'$ მომენტი ნულის ტოლია. სხვა სიტყვებით, თუ ძალთა სისტემა შეიძლება ტოლფასად დაყვანილ იქნას მხოლოდ ნაკრებ ვექტორამდე ეს უკანასკნელი ტოლქმედია.

ტოლქმედის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თავმოყრილ ვექტორთა სისტემისათვის ყოველთვის არსებობს ტოლქმედი. ის უდრის აღებული სისტემის ნაკრებ ვექტორს და თავმოყრის წერტილშია მოდებული (რა თქმა უნდა, იგი, როგორც სრიალა ვექტორი, შეიძლება გადავიტანოთ თავისი ფუძის გასწვრივ).

ვთქვათ ახლა, სრიალა ვექტორთა სისტემა შედგება ორი პარალელური ერთ მხარეს მოგებული $\vec{A}$ და $\vec{B}$ ვექტორებისაგან. ვაჩვენოთ, რომ ასეთი სისტემის ტოლქმედი არსებობს. $\vec{A}$ და $\vec{B}$ ვექტორების მოდების წერტილები იყოს M და N (იხ. ნახ. 3). ჩვენ სისტემას დავუმატოთ M და N წერტილებზე მოდებული $\vec{C}$ და $-\vec{C}$ ვექტორები, რომლებიც MN მონაკვეთის პარალელურია და რომელთა სიგრძეც ნებისმიერად არის აღებული. შევკრიბოთ ახლა M წერტილზე მოდებული $\vec{A}$ და $\vec{C}$ ვექტორები, აგრეთვე N წერტილზე მოდებული $\vec{B}$ და $-\vec{C}$ ვექტორები მივიღებთ შესაბამისად $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორებს. გავასრიალოთ ეს ვექტორები ფუძის გასწვრივ და მოვდოთ ისინი ფუძეთა გადაკვეთის D წერტილზე. შევკრიბოთ ახლა D წერტილზე მოდებული $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორები, მივიღებთ ერთ $\vec{R}$

^{*)} იხ. ნ. ვეკუა, თეორიული მექანიკა, განათლება, 1964, გვ. 39 და წინამდებარე დამატების 36. შევნიშნოთ, რომ ეს სახელმძღვანელო არსებითადაა გამოყენებული წინამდებარე დამატების შედგენისას.

ვექტორს. გავასრიალოთ $\vec{R}$ ვექტორი და მოვდოთ ის იმ E წერტილზე, სადაც $\vec{R}$ ვექტორის ფუძე კვეთს MN მონაკვეთს. ცხადია, $\vec{R}$ ვექტორი ტოლფასია აღებული პარალელური ვექტორების და, მაშასადამე, მათ ტოლქმედს წარმოადგენს. ამის გარდა, ცხადია, რომ

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{C} + \vec{A} + (-\vec{C}) + \vec{B} = \vec{A} + \vec{B}.$$

I და II სამკუთხედების მსგავსებიდან

$$\frac{DE}{|\vec{A}|} = \frac{ME}{|\vec{C}|}.$$

III და IV სამკუთხედების მსგავსებიდან

$$\frac{|\vec{B}|}{DE} = \frac{|\vec{C}|}{NE}.$$

ორ უკანასკნელ ტოლობათა გადამრავლებით მივიღებთ:

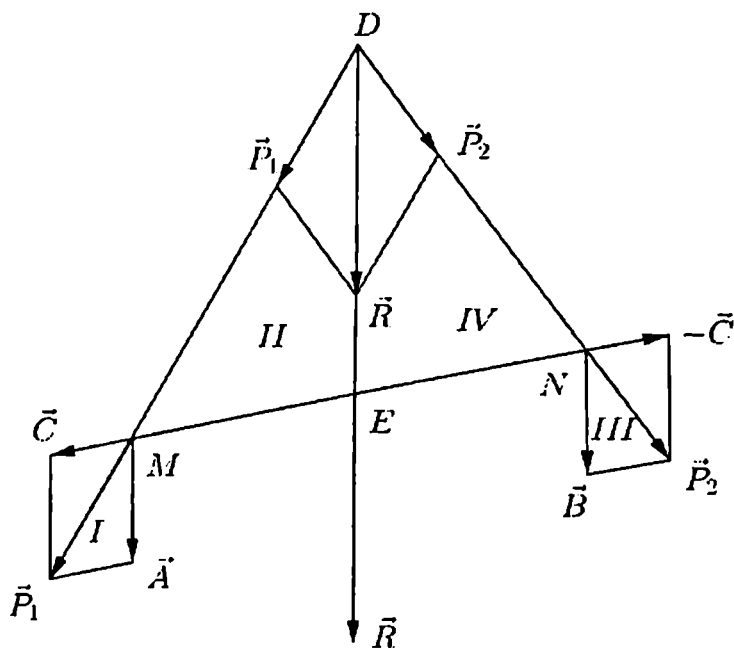
$$\frac{|\vec{B}|}{|\vec{A}|} = \frac{ME}{EN}. \quad (3)$$

ამრიგად, ერთმხრივ მოგეზული ორი პარალელური ვექტორი, ტოლფასია ერთი ვექტორის, რომელიც აღებული ვექტორების ჯამის ტოლია; მისი მოდების წერტილის დაშორება აღებული ვექტორების მოდების წერტილიდან, ვექტორთა სიდიდეების უკუპროპორციულია.

ცხადია, E წერტილის მდებარეობა არ შეიცვლება, თუ $\vec{A}$ და $\vec{B}$ ვექტორებს ნებისმიერად მოვაბრუნებთ მოდების M და N წერტილების გარშემო ისე, რომ ისინი მობრუნების შემდეგაც დარჩნენ პარალელური და ერთ მხარეს მოგეზული.

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან ცხადია, რომ ნებისმიერი სრიალა ვექტორი მისი ტოლფასი ორი ერთ მხარეს მოგეზული

პარალელური ვექტორით შეიძლება შეიცვალოს. ამასთან, თუ ხსენებული პარალელური ვექტორებიდან ერთ-ერთი წინასწარ მოცემულია, მეორე ცალსახად განისაზღვრება.



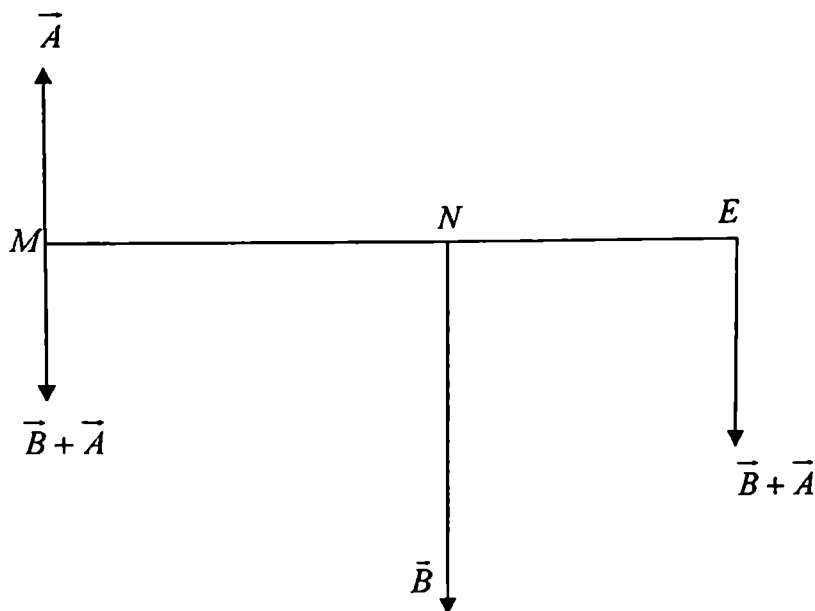
ნახ. 3

განვიხილოთ ახლა სხვადასხვა მხრივ მოგებული ორი პარალელური $\vec{A}$ და $\vec{B}$ ვექტორი (იხ. ნახ. 4). ვიგულისხმობთ, რომ მათი ნაკრები ვექტორი არ უდრის ნულს, დაეუშვათ $|\vec{A}| < |\vec{B}|$. ვისარგებლოთ ახლა ზემოთნათქვამით და დავშალოთ

$\vec{B}$ ვექტორი ერთ მხარეს მიმართულ ორ პარალელურ ვექტორად. ამასთან, ერთი შესაკრები იყოს M წერტილზე მოდებული $-\vec{A}$ ვექტორი, მაშინ, როგორც ავლენიშნეთ, მეორე შესაკრები

ცალსახად განისაზღვრება. ეს შესაკრები იქნება $\vec{A} + \vec{B}$ ვექტორი, რომლის მოდულის E წერტილი, ზემოთ ნათქვამის ძალით, შემდეგი ტოლობით განისაზღვრება:

$$\frac{MN}{NE} = \frac{|\vec{B}| - |\vec{A}|}{|\vec{A}|}, \quad (4)$$



ნახ. 4

საიდანაც, პროპორციის ცნობილი თვისების ძალით მივიღებთ:

$$\frac{MN + NE}{NE} = \frac{|\vec{B}| - |\vec{A}| + |\vec{A}|}{|\vec{A}|},$$

ან, რაც იგივეა

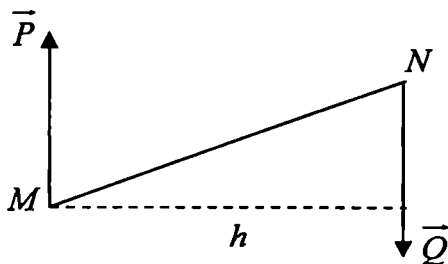
$$\frac{ME}{NE} = \frac{|\vec{B}|}{|\vec{A}|}, \quad (5)$$

მაგრამ M წერტილზე მოდებული ორი ტოლი ურთიერთ საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორი ნულის ტოლფასია და საბოლოოდ დაგვრჩება E წერტილზე მოდებული $\vec{A} + \vec{B}$ ვექტორი, ე.ი., განსახილველ შემთხვევაში არსებობს ტოლქმედი.

ამრიგად, სხვადასხვამხრივ მოგებული სხვადასხვა სიგრძის ორი პარალელური ვექტორი ტოლფასია ერთი ვექტორის, რომლის სიგრძე უდრის ადებული ვექტორების სიგრძეთა სხვაობას; მისი მიმართულება ემთხვევა უდიდესი სიგრძის ვექტორის მიმართულებას; ის მოდებულია MN -ის გაგრძელებაზე უდიდესი სიგრძის ვექტორის მხარეს ისე, რომ მისი მოდების წერტილის დაშორება ადებული ვექტორების მოდების წერტილებიდან უკუპროპორციულია ვექტორების სიგრძის.

(5) ტოლობიდან ცხადია, რომ E წერტილის მდებარეობა არ შეიცვლება, თუ განსახილველ ვექტორებს ნებისმიერი კუთხით მოვაბრუნებთ მათი მოდების M და N წერტილების გარშემო.

თუ ახლა მოცემულია რამდენიმე პარალელური ვექტორისაგან შემდგარი ისეთი სისტემა, რომლის ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლი არ არის, მაშინ ზემოთ მითითებული წესის მიმდევრობით გამოყენებით შეიძლება დავამტკიცოთ ტოლქმედის არსებობა და ის ვიპოვოთ კიდეც.



ნახ. 5

(5) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ როცა $|\vec{B}| \rightarrow |\vec{A}|$, მაშინ $E \rightarrow \infty$. ეს კი გვიჩვენებს, რომ სხვადასხვა მხარეს მოგეზულ ერთიდაიმავე სიგრძის პარალელურ ვექტორთა სისტემას არ აქვს ტოლქმედი. ასეთ პარალელურ ვექტორთა სისტემას ეწოდება წვეილვექტორი (იხ. ნახ. 5). წვეილვექტორის აღსანიშნავად შემდეგში გამოვიყენებთ $(\vec{P}, \vec{Q})$ სიმბოლოს. განმარტების ძალით $\vec{P} + \vec{Q} = 0$.

3. წვეილვექტორის თვისებები

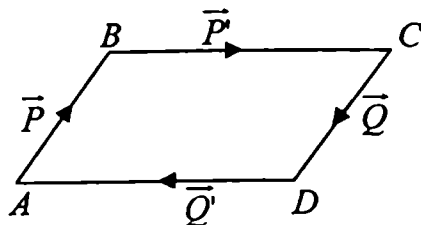
ვინაიდან წვეილვექტორის ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია, ამიტომ წვეილვექტორის ნაკრები მომენტი, რომელსაც უბრალოდ წვეილვექტორის მომენტს უწოდებენ, დამოკიდებული არაა მომენტის ცენტრის შერჩევაზე. მაშასადამე, წვეილვექტორის მომენტი თავისუფალი ვექტორია. წვეილვექტორის შემადგენელი ვექტორების ფუძეებს შორის მანძილს, რომელსაც h -ით აღვნიშნავთ (იხ. ნახ. 5), ეწოდება წვეილვექტორის მხარი, თუ წვეილვექტორის მომენტს $\vec{L}$ -ით აღვნიშნავთ, ხოლო ვექტორების მოდების წერტილებს – M და N -ით მივიღებთ:

$$\vec{L} = [\overline{NM} \cdot \vec{P}] = [\overline{MN} \cdot \vec{Q}], \quad (6)$$

საიდანაც, ცხადია, გვექნება

$$|\vec{L}| = |\vec{P}| h. \quad (7)$$

დებულება 1. ორი წვეილვექტორი, რომელთაც ერთნაირი მომენტი აქვთ, ტოლფასია.

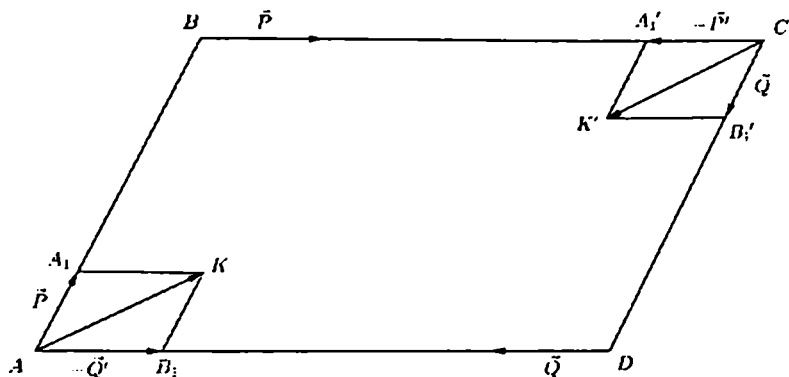


ნახ. 6

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია ორი წყვილვექტორი $(\vec{P}, \vec{Q})$ და $(\vec{P}', \vec{Q}')$, რომელთაც, პირობის ძალით, ერთნაირი მომენტები აქვთ. ვაჩვენოთ, რომ ეს წყვილვექტორები ელემენტარული მოქმედებებით ერთიმეორეზე დაიყვანება. ვინაიდან წყვილვექტორის მომენტი წყვილვექტორის სიბრტყის მართობია, ამიტომ, როგორც ადვილი მისახვედრია, $(\vec{P}', \vec{Q}')$ და $(\vec{P}, \vec{Q}')$ წყვილვექტორების სიბრტყეები პარალელურია.

განვიხილოთ პირველად ის შემთხვევა, როცა ორივე წყვილვექტორი ერთ სიბრტყეშია მოთავსებული და პირველი წყვილვექტორის პარალელური არ არის. მაშინ ცხადია, რომ წყვილვექტორთა შემადგენელი ვექტორების ფუძეების გადაკვეთის შედეგად მიიღება $ABCD$ პარალელოგრამი (ნახ. 6).

$\vec{P}, \vec{Q}, \vec{P}', \vec{Q}'$ ვექტორების გასრიალებით ყოველთვის შეგვიძლია მივაღწიოთ იმას, რომ ისინი აღნიშნული პარალელოგრამის წვეროებზე იყვნენ მოდებული. წყვილვექტორთა მომენტების ტოლობის ძალით, ადვილად დავასკვნით, რომ $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{P}', \vec{Q}'$ ვექტორები $ABCD$ პარალელოგრამის შიგა წერტილებს ერთი და იმავე გეზით უვლიან. ვაჩვენოთ ახლა, რომ $(\vec{P}, \vec{Q})$ წყვილვექტორისაგან ელემენტარული მოქმედებებით მიიღება $(\vec{P}', \vec{Q}')$ წყვილვექტორი. ამისათვის წარმოვიდგინოთ, რომ გვაქვს



ნახ. 7

მხოლოდ $(\vec{P}, \vec{Q})$ წვეთვექტორი, რომელიც $ABCD$ პარალელოგრამის მიმართ ისეა განლაგებული, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ. მოვდოთ $ABCD$ პარალელოგრამის B და C წვეროებზე $\vec{P}'$ და $-\vec{P}'$ ურთიერთ საწინააღმდეგოდ მიმართული ტოლი ვექტორები (ნახ. 7). მოვდოთ აგრეთვე ამავე პარალელოგრამის D და A წვეროებზე ურთიერთ საწინააღმდეგოდ მიმართული ტოლი $\vec{Q}'$ და $-\vec{Q}'$ ვექტორები. ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{P}', \vec{Q}' - \vec{P}', -\vec{Q}'$ ვექტორებისაგან შედგენილ სისტემას, რომელიც, ცხადია, $(\vec{P}, \vec{Q})$ წვეთვექტორის ტოლფასია. შევეკრიბოთ ახლა A წერტილზე მოდებული $\vec{P}$ და $-\vec{Q}'$ ვექტორები; შევეკრიბოთ აგრეთვე C წერტილზე მოდებული $\vec{Q}$ და $-\vec{P}'$ ვექტორები. მივიღეთ $\vec{AK}$ და $\vec{CK'}$ ვექტორებს, რომელთაც ერთნაირი სიგრძე აქვთ. დავამტკიცოთ, რომ ამ ვექტორების ფუძეები ემთხვევა $ABCD$ პარალელოგრამის დიაგონალს და, მაშასადამე, წარმოადგენენ ტოლ ურთიერთ საწინააღმდეგოდ მი-

მართულ ვექტორებს. უპირველეს ყოვლისა, შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან წვეტილვექტორთა მომენტები ტოლია, ამიტომ, (6)-ის თანახმად, ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$|\vec{P}|h = |\vec{P}'|h',$$

ანუ, რაც იგივეა

$$|AA_1|h = |AB_1|h', \quad (8)$$

სადაც h და h' აღნიშნავენ $(\vec{P}, \vec{Q})$ და $(\vec{P}', \vec{Q}')$ წვეტილვექტორთა მხრებს.

ცხადია, აგრეთვე, რომ ადგილი აქვს

$$|AB|h = |AD|h' \quad (9)$$

ტოლობას (ვინაიდან ტოლობის ორივე მხარე ერთი და იმავე პარალელოგრამის ფართობს გამოსახავს). (8) ტოლობის (9) ტოლობაზე გაყოფით მივიღებთ:

$$\frac{|AA_1|}{|AB|} = \frac{|AB_1|}{|AD|}.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ AA_1KB_1 პარალელოგრამი $ABCD$ პარალელოგრამის მსგავსია. ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $CA_1'K'B_1'$ პარალელოგრამი იმავე $ABCD$ პარალელოგრამის მსგავსია. ამდენად $\overline{AK}$ და $\overline{CK'}$ ვექტორები ძვეს $ABCD$ პარალელოგრამის AC დიაგონალზე, მაშასადამე, ისინი ტოლი ურთიერთ საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორებია. მაგრამ ასეთი ვექტორები ნულის ტოლფასია, ამიტომ ზემოაღნიშნული 6 ვექტორიდან გვრჩება $(\vec{P}', \vec{Q}')$ წვეტილვექტორი.

ვთქვათ, $(\vec{P}, \vec{Q})$ წვეტილვექტორის შემადგენელი ვექტორები $(\vec{P}', \vec{Q}')$ წვეტილვექტორის შემადგენელი ვექტორების პარალელურია. განვიხილოთ ახალი $(\vec{P}'', \vec{Q}'')$ წვეტილვექტორი, რომე-

ლიც $(\bar{P}, \bar{Q})$ წვეილვექტორის სიბრტყეშია მოთავსებული და რომლის შემადგენელი ვექტორებიც არ არის პარალელური $(\bar{P}, \bar{Q})$ წვეილვექტორის შემადგენელი ვექტორების; ამასთან დავუშვათ, რომ $(\bar{P}', \bar{Q}')$ წვეილვექტორის მომენტი ტოლია $(\bar{P}, \bar{Q})$ წვეილვექტორის მომენტის. ცხადია, ასეთი $(\bar{P}', \bar{Q}')$ წვეილვექტორი ყოველთვის არსებობს ზემოთ დამტკიცებულის ძალით, $(\bar{P}, \bar{Q})$ და $(\bar{P}', \bar{Q}')$ წვეილვექტორები ცალ-ცალკე $(\bar{P}', \bar{Q}')$ წვეილვექტორის ტოლფასია და, მაშასადამე, ისინი ერთმანეთის ტოლფასია.

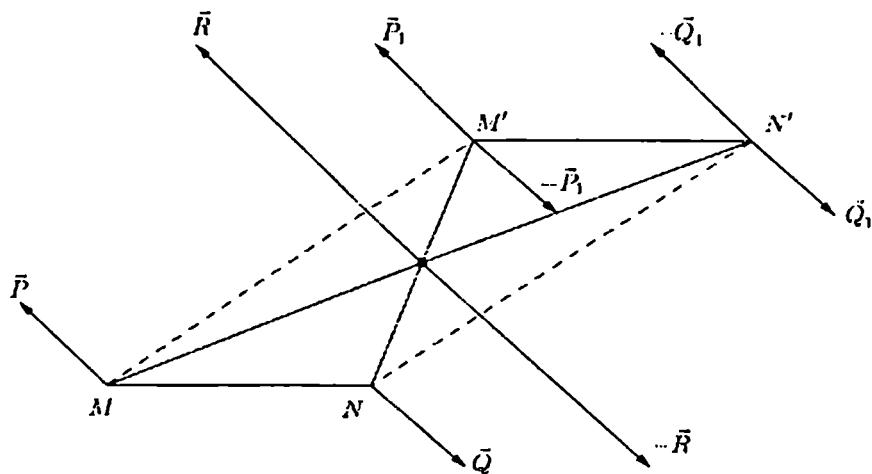
ამრიგად, დებულება დამტკიცებულია იმ შემთხვევაში, როცა ორივე წვეილვექტორი ერთსა და იმავე სიბრტყეშია მოთავსებული.

ახლა დავამტკიცოთ დებულება იმ შემთხვევაში, როცა $(\bar{P}, \bar{Q})$ და $(\bar{P}', \bar{Q}')$ წვეილვექტორთა სიბრტყეები პარალელურია. ცხადია, დებულება დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ ელემენტარული მოქმედებებით წვეილვექტორი შეიძლება მის პარალელურ სიბრტყეში გადავიტანოთ.

$\bar{P}$ და $\bar{Q}$ ვექტორების მოდების წერტილები იყოს, შესაბამისად, M და N . განვიხილოთ $(\bar{P}', \bar{Q}')$ წვეილვექტორის სიბრტყეში $M'N'$ მონაკვეთი, რომელიც MN მონაკვეთის პარალელურია და $|M'N'| = |MN|$ (იხ. ნახ. 8).

მოვდოთ ახლა M' და N' წერტილებზე, შესაბამისად, საწინააღმდეგოდ მიმართული $\bar{P}_1, -\bar{P}_1$ და $\bar{Q}_1, -\bar{Q}_1$ ვექტორები, ამასთან $\bar{P}_1 = \bar{P}$, $\bar{Q}_1 = \bar{Q}$. გვეჩება 6 ვექტორისგან შედგენილი სისტემა, რომელიც, ცხადია, $(\bar{P}, \bar{Q})$ წვეილვექტორის ტოლფასია. შევკრიბოთ ახლა M და N' წერტილებზე მოდებული

$\vec{P}$ და $-\vec{Q}_1$ ერთ მხარეს მოგებული პარალელური ვექტორები და აგრეთვე N და M' წერტილებზე მოდებული $\vec{Q}$ და $-\vec{P}_1$ ერთ მხარეს მოგებული პარალელური ვექტორები. როგორც ადვილი მისახვედრია, მივიღებთ $MNN'M'$ პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე მოდებულ ტოლ ურთიერთ საწინააღმდეგოდ მიმართულ $\vec{R}$ და $-\vec{R}$ ვექტორებს, რომელთაგან შედგენილი ვექტორთა სისტემა ნულის ტოლფასია, და დაგვრჩება ზემოაღნიშნული 6 ვექტორის ნაცვლად $(\vec{P}_1, \vec{Q}_1)$ წყვილ-ვექტორი, რომელიც ცხადია, $(\vec{P}, \vec{Q})$ წყვილვექტორის მის პარალელურ სიბრტყეში გადატანით არის მიღებული. ამით დებულება დამტკიცებულია მთლიანად.



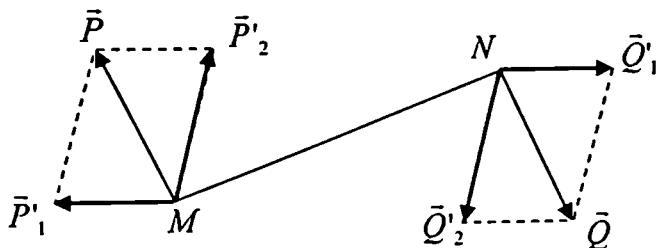
ნახ. 8

დამტკიცებული დებულებიდან გამომდინარეობს, რომ წყვილ-ვექტორები მთლიანად დახასიათებულია მისი მომენტების საშუალებით. ამიტომ, წყვილვექტორის მოცემა ნიშნავს მისი მომენტის მოცემას და პირიქით.

ამავე დებულებიდან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ ელემენტარული მოქმედებების საშუალებით წყვილვექტორი ნებისმიერად შეიძლება მოვაბრუნოთ თავის სიბრტყეში, გადავიტანოთ მის პარალელურ სიბრტყეში, შევცვალოთ წყვილვექტორის შემადგენელი ვექტორების სიგრძე, თუ შესაბამისად შევცვალოთ მხრის სიგრძეს.

დებულება 2. სასრული რაოდენობა წყვილვექტორისაგან შემდგარი სისტემა ტოლფასია ერთი წყვილვექტორის, რომლის მომენტი უდრის აღებული წყვილვექტორების მომენტების ჯამს.

დამტკიცება. ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა მოცემულია ორი $(\vec{P}_1, \vec{Q}_1)$ და $(\vec{P}_2, \vec{Q}_2)$ წყვილვექტორი, რომელთა სიბრტყეები არაა პარალელური (იხ. ნახ. 9). ამ სიბრტყეების გადაკვეთის წრფეზე ავიღოთ ნებისმიერი სიგრძის MN მონაკვეთი და გარდაკვმნათ წყვილვექტორები ისე, რომ მათი მხარი იყოს MN . გარდაკვმნის შემდეგ მიღებული წყვილვექტორები იყოს $(\vec{P}'_1, \vec{Q}'_1)$ და $(\vec{P}'_2, \vec{Q}'_2)$ გვეჩვენა $\vec{P}'_1, \vec{P}'_2, \vec{Q}'_1$ და $\vec{Q}'_2$ ვექტორები, რომელთა შეკრებით მივიღებთ $(\vec{P}, \vec{Q})$ წყვილვექტორს, რომელიც თავიდან მოცემული $(\vec{P}_1, \vec{Q}_1)$ და $(\vec{P}_2, \vec{Q}_2)$ წყვილვექტორების სისტემის ტოლფასია.



ნახ. 9

ტოლფასობის გამო $(\vec{P}, \vec{Q})$ წვეილვექტორის მომენტი მოცემული $(\vec{P}_1, \vec{Q}_1)$ და $(\vec{P}_2, \vec{Q}_2)$ წვეილვექტორების მომენტების ჯამის ტოლია.

თუ წვეილვექტორთა სიბრტყეები პარალელურია, მაშინ ელემენტარული მოქმედებებით ერთი წვეილვექტორი შეიძლება გადავიტანოთ მეორის სიბრტყეში, რის შემდეგაც ზემოთხსენებული წესით დებულება დამტკიცდება.

ანალოგიური დებულება დამტკიცდება ნებისმიერი რაოდენობის წვეილვექტორისთვის. ამდენად, თუ მოცემულია წვეილვექტორების $(\vec{P}_i, \vec{Q}_i)$, $i = \overline{1, n}$, სისტემა, რომელთა მომენტებია $\vec{L}_i$, $i = \overline{1, n}$, ის ტოლფასია ერთი $(\vec{P}, \vec{Q})$ წვეილვექტორის, რომლის $\vec{L}$ მომენტი გამოითვლება

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n$$

ფორმულით. $(\vec{P}, \vec{Q})$ წვეილვექტორს ეწოდება ტოლქმედი წვეილვექტორი, ხოლო $(\vec{P}_i, \vec{Q}_i)$, წვეილვექტორებს შესაკრები წვეილვექტორები.

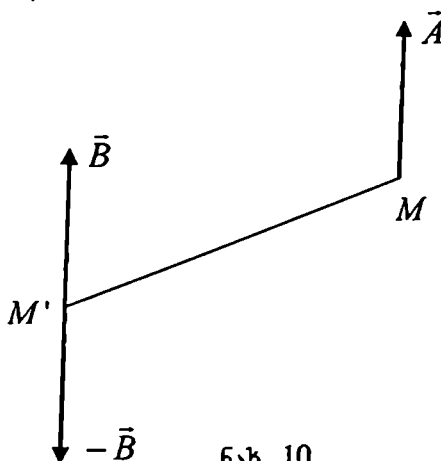
4. სრიალა ვექტორთა სისტემის დაყვანა ერთ ვექტორამდე და ერთ წვეილვექტორამდე

ვთქვათ, მოცემულია სრიალა $\vec{A}$ ვექტორი, რომელიც მოდებულია M წერტილზე. განვიხილოთ სივრცის ნებისმიერი M' წერტილი და მოვდოთ მასზე ორი ტოლი ურთიერთ საწინააღმდეგოდ მიმართული $\vec{B}$ და $-\vec{B}$ ვექტორი, ამასთან $\vec{B} = \vec{A}$. ჩვენ მივიღეთ სამი $\vec{A}$, $\vec{B}$, $-\vec{B}$ ვექტორისაგან შედგენილი სისტემა, რომელიც $\vec{A}$ ვექტორის ტოლფასია. მეორეს მხრივ,

$(\vec{A}, -\vec{B})$ წარმოადგენს წყვილვექტორს, რომლის მომენტიც $\vec{A}$ ვექტორის M' ცენტრის მიმართ მომენტის ტოლია.

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი დებულება.

დებულება 3. მოცემული $\vec{A}$ ვექტორის მოდების M წერტილი შეიძლება ნებისმიერ სხვა M' წერტილში გადავიტანოთ, თუ სამაგიეროდ მას დავუმატებთ წყვილვექტორს, რომლის მომენტიც მოცემული ვექტორის ახალი M' წერტილის მიმართ მომენტის ტოლია.



ნახ. 10

ვთქვათ, გვაქვს სრიალა $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n$ ვექტორთა სისტემა ავიღოთ სივრცის ნებისმიერი O წერტილი და აღვნიშნოთ $\vec{A}_i$ ($i = \overline{1, n}$) ვექტორის მომენტი O ცენტრის მიმართ $\vec{L}_i$ -ით ($i = \overline{1, n}$). გადავიტანოთ ყოველი $\vec{A}_i$ ($i = \overline{1, n}$) ვექტორის მოდების წერტილი O ცენტრში ზემოხსენებული წესით. მივიღებთ O წერტილზე მოდებულ $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \dots, \vec{B}_n$ ვექტორთა სისტემას და

$(\bar{A}_1, -\bar{B}_1), (\bar{A}_2, -\bar{B}_2), \dots, (\bar{A}_n, -\bar{B}_n)$ წვეილვექტორთა სისტემას, სადაც $\bar{B}_i = \bar{A}_i$ ($i = \overline{1, n}$), ამასთან $(\bar{A}_i, -\bar{B}_i)$ წვეილვექტორის მომენტი $\bar{L}_i$ -ის ($i = \overline{1, n}$) ტოლია. წინა პარაგრაფის მე-2 დებულების ძალით, წვეილვექტორთა ხსენებული სისტემა ტოლფასია ერთი $(\bar{P}, \bar{Q})$ წვეილვექტორის, რომლის მომენტიცა

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_n.$$

შეკრიბოთ O წერტილზე მოდებული $\bar{B}_i = \bar{A}_i$ ($i = \overline{1, n}$) ვექტორები; მივიღებთ O წერტილზე მოდებულ ერთ $\bar{R}$ ვექტორს, რომელიც, ცხადია, სისტემის ნაკრებ ვექტორს წარმოადგენს.

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი დებულება.

დებულება 4. სრიალა ვექტორთა ნებისმიერი სისტემა ტოლფასია სივრცის ნებისმიერ წერტილზე მოდებული ერთი $\bar{R}$ ვექტორის, რომელიც სისტემის ნაკრები ვექტორის ტოლია და ერთი $(\bar{P}, \bar{Q})$ წვეილვექტორის, რომლის მომენტიც უდრის სისტემის ნაკრებ მომენტს O ცენტრის მიმართ.

O წერტილს ეწოდება სისტემის დაყვანის ცენტრი, ხოლო სისტემის ზემოაღნიშნულ გარდაქმნას — სისტემის დაყვანა მოცემულ O ცენტრამდე. ამრიგად, ნებისმიერი სრიალა ვექტორთა სისტემა დაიყვანება მის ტოლფას სამ ვექტორამდე ($\bar{R}$ ვექტორამდე და $(\bar{P}, \bar{Q})$ წვეილვექტორამდე). თუ ახლა $(\bar{P}, \bar{Q})$ წვეილვექტორს ელემენტარული მოქმედებებით ისე გარდავქმნით, რომ მისი ერთ-ერთი ვექტორი დაყვანის O ცენტრზე იყოს მოდებული და შევკრებთ ამ წერტილზე მოდებულ ვექტორებს, დავრწმუნდებით, რომ ნებისმიერი სრიალა ვექტორთა სისტემა საბოლოოდ მის ტოლფას 2 ვექტორამდე დაიყვანება.

დებულება 5. აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ სრიალა ვექტორთა ორი სისტემა იყოს ტოლფასი, მდგომარეობს იმაში, რომ მათ ჰქონდეთ ერთნაირი ნაკრები ვექტორი და ერთნაირი ნაკრები მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ.

დამტკიცება. ვინაიდან ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი ინვარიანტულია ელემენტარული გარდაქმნების მიმართ, ამიტომ პირობის აუცილებლობა ცხადია.

დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა, ე.ი. ვაჩვენოთ, რომ თუ სრიალა ვექტორთა ორ სისტემას აქვს ერთნაირი ნაკრები ვექტორი და ერთნაირი ნაკრები მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ, მაშინ ისინი ტოლფასები იქნებიან.

განვიხილოთ სივრცის რაიმე O წერტილი და დავიყვანოთ ორივე სისტემა O ცენტრამდე ზემოხსენებული წესით. პირველი სისტემის დაყვანის შედეგად მივიღებთ O ცენტრზე მოდებულ ერთ $\vec{R}'$ ვექტორს და $(\vec{P}', \vec{Q}')$ წყვილვექტორს. მეორე სისტემის დაყვანის შედეგად მიიღება იმავე O ცენტრზე მოდებული $\vec{R}''$ ვექტორი და $(\vec{P}'', \vec{Q}'')$ წყვილვექტორი. პირობის ძალით $\vec{R}' = \vec{R}''$ და $(\vec{P}', \vec{Q}') = (\vec{P}'', \vec{Q}'')$ წყვილვექტორებს აქვთ ერთნაირი მომენტები. წინა პარაგრაფის დებულება 1-ის ძალით, ეს წყვილვექტორები ტოლფასია და ამით დებულება დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ, თუ სრიალა ვექტორთა ორ სისტემას აქვს ერთნაირი ნაკრები ვექტორი და ერთნაირი ნაკრები მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ, მაშინ მათ ექნებათ ერთნაირი ნაკრები ვექტორი და ერთნაირი ნაკრები მომენტი ნებისმიერი წერტილის მიმართაც.

5. ორმაგი ვექტორული ნამრავლის ერთი თვისების შესახებ

განვიხილოთ სამი $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ ვექტორისაგან შედგენილი ორმაგი ვექტორული ნამრავლი $[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]]$. დავამტკიცოთ, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}, \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}, \vec{B}). \quad (10)$$

ამის დასამტკიცებლად განვიხილოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატა სისტემა და შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z), \quad \vec{B} = (B_x, B_y, B_z), \quad \vec{C} = (C_x, C_y, C_z).$$

გამოვთვალოთ ცალ-ცალკე (10)-ის მარცხენა და მარჯვენა მხარის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე. x ღერძზე დაგეგმილება მოგვცემს:

$$[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]]_x = A_y[\vec{B}, \vec{C}]_z - A_z[\vec{B}, \vec{C}]_y = A_y(B_x C_y - B_y C_x) - A_z(B_z C_x - B_x C_z) = A_y B_x C_y + A_z B_x C_z - A_y B_y C_x - A_z B_z C_x.$$

(10)-ის მარჯვენა მხარის x ღერძზე დაგეგმილებით კი მივიღებთ:

$$B_x(\vec{A}, \vec{C}) - C_x(\vec{A}, \vec{B}) = B_x(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - C_x(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) = A_y B_x C_y + A_z B_x C_z - A_y B_y C_x - A_z B_z C_x.$$

ამრიგად, ეს გეგმილები ტოლია. ასევე დამტკიცდება, რომ y და z ღერძებზე გეგმილებიც ტოლია და ამით (10) ტოლობის სამართლიანობა დამტკიცებულია.

ვაჩვენოთ, რომ ამავე სახის ფორმულას ექნება ადგილი $[[\vec{A}, \vec{B}], \vec{C}]$ სახის ორმაგი ვექტორულ ნამრავლისათვისაც.

მართლაც, ვინაიდან $[[\vec{A}, \vec{B}], \vec{C}] = -[\vec{C}, [\vec{A}, \vec{B}]]$ ამიტომ (10) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$[[\bar{A}, \bar{B}], \bar{C}] = \bar{B}(\bar{A}, \bar{C}) - \bar{A}(\bar{B}, \bar{C}). ^*)$$

ადვილად დამტკიცდება აგრეთვე შემდეგი ტოლობა:

$$(\bar{A}, [\bar{B}, \bar{C}]) = (\bar{B}, [\bar{C}, \bar{A}]) = (\bar{C}, [\bar{A}, \bar{B}]). \quad (11)$$

6. სრიალა ვექტორთა სისტემის ინვარიანტები. ტოლქმელის არსებობის პირობა

რაიმე ოპერაციის მიმართ ინვარიანტი ისეთ სიდიდეს ეწოდება, რომელიც ამ ოპერაციის შედეგად არ იცვლის თავის მნიშვნელობას და სტრუქტურას. ჩვენ აქ გვაინტერესებს სრიალა ვექტორთა სისტემის ინვარიანტები დაყვანის ცენტრის მიმართ. ერთ ასეთ ინვარიანტს, როგორც უკვე იყო აღნიშნული, წარმოადგენს სისტემის ნაკრები ვექტორი $\bar{R}$.

დავამტკიცოთ ახლა, რომ ნაკრები ვექტორისა და ნაკრები მომენტის სკალარული ნამრავი წარმოადგენს ინვარიანტს დაყვანის ცენტრის მიმართ.

მართლაც, ვთქვათ, მოცემული სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი რაიმე O ცენტრის მიმართ არის $\bar{R}$ და $\bar{L}$, ახალი O' ცენტრის მიმართ კი - შესაბამისად $\bar{R}'$, $\bar{L}'$, სადაც $\bar{R}' = \bar{R}$ (ნაკრები ვექტორის ინვარიანტობის გამო). (2) ფორმულის ძალით,

$$\bar{L}' = \bar{L} - [\overline{OO'}, \bar{R}].$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ სკალარულად $R = R'$ ვექტორზე, მივიღებთ:

$$(\bar{R}, \bar{L}) - (\bar{R}, [\overline{OO'}, \bar{R}]) = (\bar{R}, \bar{L}') = (\bar{R}', \bar{L}'). \quad (12)$$

^{*)} $[\bar{C}, [\bar{A}, \bar{B}]] = \bar{A}(\bar{C}, \bar{B}) - \bar{B}(\bar{C}, \bar{A}).$

მაგრამ $[\overline{OO'}, \vec{R}]$ ვექტორული ნამრავლი მართობია $\vec{R}$ ვექტორის, ამიტომ

$$(\vec{R}, [\overline{OO'}, \vec{R}]) = 0$$

და (12) ტოლობა მოგვცემს:

$$(\vec{R}, \vec{L}) = (\vec{R}', \vec{L}'), \quad (13)$$

რაც ამტკიცებს ნათქვამის სამართლიანობას.

ცხადია,

$$(\vec{R}, \vec{L}) = |\vec{R}| |\vec{L}| \cos(\vec{R}, \vec{L}),$$

საიდანაც

$$\cos \angle \vec{R} \vec{L} = \frac{(\vec{R}, \vec{L})}{|\vec{R}| |\vec{L}|} = \frac{(\vec{R}, \vec{L})}{|\vec{R}|}. \quad (14)$$

(14) ტოლობის მარჯვენა მხარე, როგორც ორი ინვარიანტის შეფარდება, ინვარიანტია და, მაშასადამე, სისტემის ნაკრები მომენტის გეგმილი ნაკრებ ვექტორზე ინვარიანტია დაყვანის ცენტრის მიმართ.

ამრიგად, დაყვანის ცენტრის მიმართ ინვარიანტებია: სისტემის ნაკრები ვექტორი $\vec{R}$, სისტემის ნაკრები ვექტორისა და ნაკრები მომენტის სკალარული ნამრავლი $(\vec{R}, \vec{L})$ და სისტემის ნაკრები მომენტის გეგმილი ნაკრებ ვექტორზე.

ვთქვათ ახლა, სრიალ ვექტორთა მოცემული სისტემა დავიყვანეთ რაიმე O ცენტრამდე, რომლის მიმართ ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტია $\vec{R}$ და $\vec{L}$ და განვიხილოთ შემთხვევა, როცა სისტემის მეორე ინვარიანტი ნულია:

$$(\vec{R}, \vec{L}) = 0. \quad (15)$$

(15) შესრულდება, თუ დაცულია ერთ-ერთი შემდეგი ოთხი შემთხვევიდან:

$$1. \vec{L} = 0, \vec{R} \neq 0,$$

$$2. \bar{R} = 0, \bar{L} \neq 0,$$

$$3. \bar{R} = 0, \bar{L} = 0,$$

$$4. \bar{R} \perp \bar{L}, \bar{R} \neq 0, \bar{L} \neq 0.$$

პირველ შემთხვევაში, ცხადია, სისტემა ტოლფასია დაყვანის O ცენტრზე მოდებული $\bar{R}$ ვექტორის და, ამდენად, ეს უკანასკნელი წარმოადგენს სისტემის ტოლქმედს.

მეორე შემთხვევაში სისტემის ნაკრები მომენტი არ არის დამოკიდებული მომენტთა ცენტრზე, ამიტომ არ არსებობს ისეთი დაყვანის ცენტრი, რომლის მიმართ ნაკრები მომენტი ნულია. ამრიგად, განსახილველ შემთხვევაში სისტემა ტოლფასია ერთი წყვილვექტორისა და, მაშასადამე, არ დაიყვანება ტოლქმედამდე.

მესამე შემთხვევაში, ცხადია, სისტემა ნულის ტოლფასია.

განვიხილოთ მეოთხე შემთხვევა. ვაჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაში სისტემა დაიყვანება ტოლქმედამდე. ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ არსებობს დაყვანის ისეთი O' ცენტრი, რომლის მიმართ ნაკრები მომენტი $L' = 0$.

(2) ფორმულის ძალით

$$\bar{L}' = \bar{L} - [\bar{a}, \bar{R}] \quad (\bar{a} = \overline{OO'}). \quad (16)$$

შევარჩიოთ ახლა $\bar{a}$ ვექტორი (და, მაშასადამე, O' ცენტრი) ისე, რომ $\bar{L}'$ ტოლი იყოს ნულის, ე.ი. ადგილი ჰქონდეს

$$[\bar{a}, \bar{R}] = \bar{L} \quad (17)$$

ტოლობას. ეს უკანასკნელი წარმოადგენს არაერთგვაროვან ვექტორულ განტოლებას $\bar{a}$ ვექტორის მიმართ.

განვიხილოთ (17) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება:

$$[\bar{a}, \bar{R}] = 0. \quad (18)$$

ეს უკანასკნელი წარმოადგენს $\bar{a}$ და $\bar{R}$ ვექტორების პარალელობის პირობას, ამიტომ (18)-ის ზოგად ამონახსნს ექნება

$$\bar{a}_0 = c\bar{R}$$

სახე^{*)}, სადაც c ნებისმიერი სკალარული სიდიდეა. თუ ამ ამონახსნს დაუმატებთ (17) განტოლების რაიმე კერძო ამონახსნს, ცხადია, მივიღებთ მის ((17) განტოლების) ზოგად ამონახსნს.

(17) განტოლების რაიმე კერძო ამონახსნის მოსაძებნად მისი ორივე მხარე მარცხნიდან გაეამრავლოთ ვექტორულად $\bar{R}$ ვექტორზე, მივიღებთ:

$$[\bar{R}, [\bar{a}, \bar{R}]] = [\bar{R}, \bar{L}]. \quad (19)$$

ვაჩვენოთ, რომ (17) და (19) ტოლფასი განტოლებებია. ამისათვის (19) განტოლება შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$[\bar{R}, ([\bar{a}, \bar{R}] - \bar{L})] = 0.$$

ეს უკანასკნელი კი $\bar{R}$ და $[\bar{a}, \bar{R}] - \bar{L}$ ვექტორთა პარალელობის პირობას წარმოადგენს, ამიტომ

$$[\bar{a}, \bar{R}] - \bar{L} = k\bar{R}, \quad (20)$$

სადაც k სკალარი სიდიდეა. თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს მარცხნიდან გაეამრავლებთ სკალარულად $\bar{R}$ ვექტორზე, (15) ტოლობის ძალით, მივიღებთ, რომ

$$(\bar{R}, [\bar{a}, \bar{R}]) = kR^2. **)$$

მაგრამ, ვინაიდან $(\bar{R}, [\bar{a}, \bar{R}]) = 0$ და $R^2 \neq 0$, ამიტომ $k = 0$. ამრიგად, (20) განტოლება ემთხვევა (17) განტოლებას და, მაშასადამე, ისინი ტოლფასი განტოლებებია.

თუ ახლა გამოვიყენებთ (10) ფორმულას, (19) განტოლებიდან მივიღებთ

^{*)} გავიხსენოთ, რომ განსაზღვრულ შემთხვევაში $\bar{R} \neq 0$.

^{**) $R^2 := |\bar{R}|^2$.}

$$[\bar{R}, [\bar{a}, \bar{R}]] = \bar{a}R^2 - \bar{R}(\bar{a}, \bar{R}) = [\bar{R}, \bar{L}]. \quad (21)$$

ვეძებით ამ უკანასკნელის ისეთი ამონახსნი $\bar{a}$ -ს მიმართ, რომლისათვისაც $(\bar{a}, \bar{R}) = 0$. ასეთ ამონახსნს ეძებთ

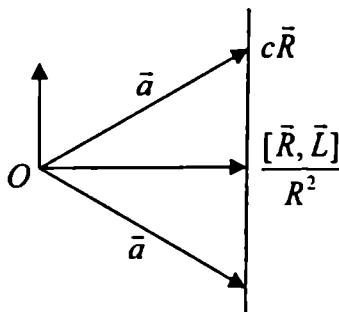
$$\bar{a}_1 = \frac{[\bar{R}, \bar{L}]}{R^2}$$

სახე. ამრიგად, ეს უკანასკნელი წარმოადგენს (17) განტოლების გარკვეულ კერძო ამონახსნს (რაც პირდაპირაც შეგვეძლო შეგვემოწმებინა).

მაშასადამე, (17) განტოლების ზოგად ამონახსნს ეძებთ $\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1$ სახე, ე.ი.,

$$\bar{a} = c\bar{R} + \frac{[\bar{R}, \bar{L}]}{R^2}. \quad (22)$$

ვინაიდან c ნებისმიერი პარამეტრია, ამიტომ, ცხადია, (22) წარმოადგენს წრფის ვექტორულ განტოლებას (იხ. ნახ. 11). ამრიგად, განსახილველ შემთხვევაში არსებობს მთელი წრფე, რომლის წერტილების მიმართ სისტემის ნაკრები მომენტი ნულის ტოლია. მაშასადამე, მეოთხე შემთხვევა დაიყვანება პირველ შემთხვევაზე.



ნახ. 11

მარტივად დამტკიცდება შემდეგი დებულების სამართლიანობა.

დებულება 6. თუ ნაკრები ვექტორი განსხვავებულია ნული-საგან, მაშინ იმის აუცილებელი და საკმარისი პირობა, რომ სრიალა ვექტორთა სისტემა დაიყვანებოდეს ტოლქმედამდე მდგომარეობს იმაში, რომ $(\vec{R}, \vec{L})$ ინვარიანტი ნულის ტოლი იყოს.

დამტკიცება. აუცილებლობა. ვთქვათ, სისტემა დაიყვანება ტოლქმედამდე. მაშინ, ცხადია, ნაკრები მომენტი ტოლქმედის ფუძის ნებისმიერი წერტილის მიმართ ნულის ტოლია ($\vec{L} = 0$) და, აქედან გამომდინარე, $(\vec{R}, \vec{L}) = 0$. $(\vec{R}, \vec{L})$ სკალარული ნამრავლის ინვარიანტობის გამო ის ნულის ტოლი იქნება სივრცის ნებისმიერი წერტილის მიმართ და ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

საკმარისობა. ვთქვათ, $(\vec{R}, \vec{L}) = 0$. თუ $\vec{L} = 0$, მაშინ სისტემა ტოლქმედამდეა დაყვანილი (იხილეთ ზემოთ მოყვანილი პირველი შემთხვევა); თუ $L \neq 0$, მაშინ ჩვენ გვექნება $\vec{R} \neq 0, \vec{L} \neq 0$ შემთხვევა. როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები (იხ. მეოთხე შემთხვევა), ამ შემთხვევაში სისტემა დაიყვანება ტოლქმედამდე და ამით საკმარისობაც დამტკიცებულია.

სრიალა ვექტორთა სისტემას ეწოდება ბრტყელი, თუ ისინი მდებარეობენ ერთსა და იმავე სიბრტყეში. ასეთი სისტემის ნაკრები ვექტორი, ცხადია, ამავე სიბრტყეშია მოთავსებული, ხოლო აღნიშნული სიბრტყის წერტილების მიმართ ნაკრები მომენტი ამ სიბრტყის მართობია. ამიტომ ბრტყელი სისტემისათვის მეორე ინვარიანტი ყოველთვის ნულის ტოლია. ზემოთ მოყვანილი დებულების ძალით, თუ ბრტყელი სისტემის ნაკრები ვექტორი განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ სისტემა დაიყვანება ტოლქმედამდე. თუ ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია, მაშინ აღნიშნული სისტემა ან ნულის (როცა $\vec{L} = 0$), ან წყვილვექტორის (როცა $\vec{L} \neq 0$) ტოლფასია.

7. სრიალა ვექტორთა სისტემის ცენტრალური ღერძი

ვთქვათ, მოცემულია სრიალა ვექტორთა სისტემა, ამ სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი რაიმე O ცენტრის მიმართ აღნიშნოთ $\vec{R}$ -ით და $\vec{L}$ -ით. ვიგულისხმობთ, რომ მეორე ინვარიანტი $(\vec{R}, \vec{L}) \neq 0$. ვიპოვოთ დაყვანის ისეთი O' ცენტრი, რომლის მიმართ ნაკრები $\vec{L}'$ მომენტი $\vec{R}$ -ის პარალელურია.

ვინაიდან ნაკრები მომენტის გეგმილი ნაკრებ ვექტორზე ინვარიანტია, ამიტომ ნაკრებ მომენტს მინიმალური სიგრძე ექნება მაშინ, როცა ის ნაკრები ვექტორის პარალელურია. მაშასადამე, ზემოაღნიშნული თვისების მქონე დაყვანის O' ცენტრის პოვნა ნიშნავს ისეთი წერტილის პოვნას, რომლის მიმართ ნაკრები მომენტის სიგრძეს ექნება მინიმალური მნიშვნელობა.

(2) ფორმულის ძალით გვაქვს:

$$\vec{L}' = \vec{L} - [\vec{a}, \vec{R}] \quad (\vec{a} = \overline{OO'}).$$

$\vec{R}$ და $\vec{L}'$ ვექტორთა პარალელობის პირობა მოგვცემს:

$$[\vec{R}, \vec{L}'] = 0. \quad (23)$$

თუ ახლა განვიხილავდ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატულ სისტემას სათავით O წერტილში, მაშინ $\vec{R}$ და $\vec{L}'$ ვექტორების პარალელობის პირობა შეიძლება შემდეგნაირად ჩავწეროთ:

$$\frac{yR_x - zR_y - L_x}{R_x} = \frac{zR_x - xR_z - L_y}{R_y} = \frac{xR_y - yR_x - L_z}{R_z}, \quad (24)$$

სადაც x, y, z -ით აღნიშნულია $\vec{a} = \overline{OO'}$ ვექტორის კოორდინატები. ცხადია, (24) წრფის განტოლებებს წარმოადგენს და, მაშასადამე, არსებობს მთელი წრფე, რომლის წერტილებსაც აქვს ზემოთ აღნიშნული თვისება.

ამ წრფეს ეწოდება სრიალა ვექტორთა განსახილველი სისტემის ცენტრალური ღერძი. თუ სისტემის დაყვანის ცენტრად ამ

ღერძის რაიმე წერტილს ავიღებთ, მაშინ მივიღებთ ერთ $\vec{R}$ ვექტორს და ერთ წვეტილვექტორს, რომლის მომენტიც $\vec{R}$ -ის პარალელურია. ასეთ შემთხვევაში ჩვენ ვიტყვით, რომ სისტემა დაყვანილია ზრახნამდე.

განვიხილოთ k პარამეტრი, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი ტოლობით:

$$k = \frac{1}{R^2} (\vec{R}, \vec{L}), \quad (25)$$

(25) ტოლობით განსაზღვრულ k სიდიდეს ეწოდება ზრახნის პარამეტრი, როცა $k > 0$, ზრახნს მარჯვენა ზრახნი ეწოდება, ხოლო, როცა $k < 0$ - მარცხენა ზრახნი. ცხადია, მარჯვენა ზრახნისათვის $(\vec{R}, \vec{L}) > 0$, ხოლო მარცხენა ზრახნისათვის კი გვექნება $(\vec{R}, \vec{L}) < 0$.

ვინაიდან ცენტრალური ღერძის წერტილების მიმართ ნაკრები მომენტისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$|\vec{L}'| = \text{გეგ}_{\vec{R}} \vec{L}' = \frac{|\vec{R}, \vec{L}|}{|\vec{R}|},$$

ამიტომ ზემომოყვანილი მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ ტოლქმედი არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მეორე ინვარიანტი ნულის ტოლია (იგულისხმება, რომ ნაკრები ვექტორი განსხვავებულია ნულისაგან), რაც უკვე გვექონდა დამტკიცებული (იხ. წინა პარაგრაფის დებულება 6).

8. პარალელურ ვექტორთა ცენტრი

ვთქვათ, მოცემულია ბმულ პარალელურ ვექტორთა სისტემა $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n$, რომლის ნაკრები ვექტორი $\vec{R}$ განსხვავებულია

ნულისაგან. თუ მოვიტყვეთ ისე, როგორც §2-ში, დავწმუნდებით, რომ ამ სისტემისათვის არსებობს ტოლქმედი.

ტოლქმედის ფუძის ისეთ C წერტილს, რომლის მდებარეობა არ შეიცვლება, თუ ყველა ვექტორს ერთდროულად მოვაბრუნებთ მათი მოდების წერტილების ირგვლივ ერთი და იმავე ნებისმიერი კუთხით, ეწოდება ადებულ პარალელურ ვექტორთა ცენტრი. ამრიგად, პარალელურ ვექტორთა ცენტრი ისეთი წერტილია, რომელზეც ყოველთვის გაივლის ტოლქმედის ფუძე, როცა ვექტორებს ერთდროულად შემობრუნებით ერთი და იმავე ნებისმიერი კუთხით მათი მოდების წერტილების ირგვლივ.

ვიპოვოთ C წერტილის რადიუს-ვექტორი რაიმე O წერტილის მიმართ. ვთქვათ, $\vec{e}^o$ ერთეულოვანი ვექტორია, რომელიც მოცემული ვექტორების პარალელურია. ცხადია, გვექნება:

$$\vec{A}_i = \vec{A}_i \vec{e}^o. \quad (26)$$

სადაც $\vec{A}_i = \pm |\vec{A}_i|$, ამასთან ზედა ნიშანი აიღება მაშინ, როცა $\vec{A}_i$ და $\vec{e}^o$ ვექტორების გეზი ერთნაირია, ხოლო ქვედა ნიშანი – წინააღმდეგ შემთხვევაში. ასევე გვექნება:

$$\vec{R} = R \vec{e}^o, \quad (27)$$

სადაც $R := |\vec{R}|$. თუ სისტემის ნაკრებ მომენტს რაიმე O წერტილის მიმართ აღვნიშნავთ $\vec{L}$ -ით, ხოლო C წერტილის მიმართ $\vec{L}_o$ -ით, (2) ფორმულის ძალით, მივიღებთ:

$$\vec{L}_c = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{A}_i] - [\vec{r}_c, \vec{R}], \quad (28)$$

სადაც $\vec{r}_i$ წარმოადგენს $\vec{A}_i$ ვექტორის მოდების წერტილის რადიუს-ვექტორს O ცენტრის მიმართ, $\vec{r}_c$ კი C წერტილის რადიუს-ვექტორია O წერტილის მიმართ. მაგრამ, ვინაიდან მოცე-

მული სისტემა C წერტილზე მოდებული $\vec{R}$ ვექტორის ტოლფასია, ამიტომ $\vec{L}_c = \text{მომც } \vec{R} = 0$. მაშასადამე, (28) ტოლობა მოგვცემს:

$$[\vec{r}_c, \vec{R}] - \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{A}_i] = 0.$$

(26) და (27) ტოლობების ძალით ეს უკანასკნელი ასე გადაიწერება:

$$\left[\left(\vec{r}_c \sum_{i=1}^n A_i - \sum_{i=1}^n A_i \vec{r}_i \right) \cdot \vec{e}^o \right] = 0. \quad (29)$$

მაგრამ, ვინაიდან C წერტილის მდებარეობა არ არის დამოკიდებული მოცემულ $\vec{A}_i$ ($i = \overline{1, n}$) ვექტორთა საერთო მიმართულებაზე, ამიტომ (29) ტოლობას ადგილი ექნება, როგორიც არ უნდა იყოს ერთეული $\vec{e}^o$ ვექტორის გეზი. ეს კი მხოლოდ მაშინ შეიძლება, როცა (29) ტოლობის მარცხენა მხარეში $\vec{e}^o$ ვექტორთან მდგომი მამრავლი ნულის ტოლია, საიდანაც გვექნება:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}. \quad (30)$$

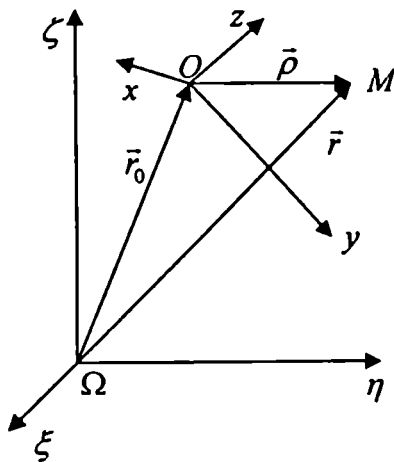
ამრიგად, პარალელურ ვექტორთა სისტემის ცენტრი ნაპოვნია.

თუ ავიღებთ კოორდინატთა სისტემას სათავეთ O წერტილში და (30) ტოლობას დავაგეგმილებთ კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n z_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}. \quad (31)$$

9. წერტილის ფარდობითი მოძრაობა. სიჩქარეთა შეკრების კანონი

განვიხილოთ კოორდინატთა $O\xi\eta\zeta$ და $Oxyz$ სისტემები. $O\xi\eta\zeta$ სისტემასთან უძრავად დაკავშირებული წერტილთა არაცვლადი სისტემა აღენიშნოთ (Σ)-თი, ხოლო $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემასთან უძრავად დაკავშირებული წერტილთა არაცვლადი სისტემა (S)-ით. ამრიგად, (Σ) და (S) საფარდი სისტემები წარმოდგენილი გვაქვს როგორც მყარი სხეულები. ცხადია, (S)



სისტემის მოძრაობა (Σ)-ს მიმართ სავსებით დახასიათდება $Oxyz$ სისტემის მოძრაობით $O\xi\eta\zeta$ სისტემის მიმართ (იხ. ნახ. 12). თუ (S) სისტემა უძრავია (Σ)-ს მიმართ, მაშინ ცხადია, რომ ორივე სისტემა ერთსა და იმავე საფარდ სისტემას წარმოადგენს, ხოლო თუ (S) სისტემა მოძრაობს (Σ)-ს მიმართ, მაშინ წერტილის მოძრაობა ამ სისტემების მიმართ სხვადასხვა იქნება.

ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ ერთი და იგივე M წერტილის მოძრაობა სხვადასხვა $O\xi\eta\zeta$ და $Oxyz$ სისტემების მიმართ.

ძირითად საფარდ სისტემად მივიღოთ (Σ) სისტემა და პირობით მას უძრავი სისტემა ვუწოდოთ, ხოლო (S) სისტემას – მოძრავი სისტემა. ცხადია, თუ ცნობილია M წერტილის მოძრაობა (S) სისტემის მიმართ და (S) სისტემის მოძრაობა (Σ)-ს მიმართ, მაშინ ცნობილი იქნება M წერტილის მოძრაობა (Σ) სისტემის მიმართაც.

(S) სისტემის მოძრაობას (Σ) სისტემის მიმართ ($Oxyz$ სისტემის მოძრაობას $O\xi\eta\zeta$ სისტემის მიმართ) ვუწოდოთ წარმტანი მოძრაობა. M წერტილის მოძრაობას (Σ) სისტემის მიმართ ($O\xi\eta\zeta$ სისტემის მიმართ) აბსოლუტური მოძრაობა ვუწოდოთ, ტრაექტორიას ამ სისტემაში – აბსოლუტური ტრაექტორია, სიჩქარეს და აჩქარებას – აბსოლუტური სიჩქარე და აბსოლუტური აჩქარება. M წერტილის მოძრაობას (S) სისტემის მიმართ ($Oxyz$ სისტემის მიმართ) ვუწოდოთ ფარდობითი მოძრაობა, სიჩქარეს და აჩქარებას ამ სისტემაში – ფარდობითი სიჩქარე და ფარდობითი აჩქარება.

განვსაზღვროთ ახლა ე.წ. წარმტანი სიჩქარე და აჩქარება. M წერტილის წარმტანი სიჩქარე (აჩქარება) ეწოდება მოძრავი (S) სისტემის იმ წერტილის სიჩქარეს (აჩქარებას), რომელშიც აღებულ მომენტში მოძრავი M წერტილი იმყოფება. ამ განმარ-

ტებიდან გამომდინარეობს, რომ M წერტილის წარმტანი სიჩქარე (აჩქარება) იქნებოდა ამ წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე (აჩქარება), ის რომ (S) სისტემაში უძრავი ყოფილიყო.

აღენიშნოთ $\vec{v}_a$ -თი M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე, $\vec{v}_r$ -ით – ფარდობითი სიჩქარე, $\vec{v}_e$ -თი წარმტანი სიჩქარე. დავამტკიცოთ, რომ

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \quad (32)$$

აღენიშნოთ M წერტილის რადიუს-ვექტორი Ω და O წერტილების მიმართ შესაბამისად $\vec{r}$ -ით და $\vec{\rho}$ -თი, ხოლო O წერტილის რადიუს-ვექტორი Ω -ს მიმართ $\vec{r}_0$ -ით. ცხადია, გვექნება

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho}. \quad (33)$$

უკანასკნელი ტოლობის დროით გაწარმოება მოგვცემს:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_0 + \frac{d\vec{\rho}}{dt}, \quad (34)$$

სადაც $\vec{v}_0$ წარმოადგენს O წერტილის აბსოლუტური სიჩქარეს. ცხადია,

$$\vec{\rho} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z, \quad (35)$$

სადაც, $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ წარმოადგენენ x , y და z ღერძების ორტებს, x , y , z წარმოადგენენ M წერტილის კოორდინატებს $Oxyz$ სისტემაში. ვინაიდან, განსახილველ შემთხვევაში, ზოგადად, იცვლება, როგორც x , y , z ისე $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, ამიტომ (35) ტოლობის დროით გაწარმოება მოგვცემს:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt} + \frac{d\vec{i}}{dt}x + \frac{d\vec{j}}{dt}y + \frac{d\vec{k}}{dt}z.$$

თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (34) ტოლობაში, მივიღებთ

$$\bar{v}_a = \bar{v}_0 + x \frac{d\bar{i}}{dt} + y \frac{d\bar{j}}{dt} + z \frac{d\bar{k}}{dt} + \bar{i} \frac{dx}{dt} + \bar{j} \frac{dy}{dt} + \bar{k} \frac{dz}{dt}. \quad (36)$$

როგორც ადგილი მისახვედრია,

$$\bar{v}_r = \bar{i} \frac{dx}{dt} + \bar{j} \frac{dy}{dt} + \bar{k} \frac{dz}{dt}. \quad (37)$$

თუ დავუშვებთ, რომ M წერტილი უძრავია (S) სისტემის მიმართ და გავითვალისწინებთ, რომ ამ შემთხვევისათვის $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt}$, მაშინ, წარმტანი სიჩქარის განმარტების ძალით, მივიღებთ:

$$\bar{v}_e = \bar{v}_0 + x \frac{d\bar{i}}{dt} + y \frac{d\bar{j}}{dt} + z \frac{d\bar{k}}{dt}. \quad (38)$$

თუ (37) და (38) მნიშვნელობებს შევიტანთ (36) ტოლობაში, დავრწმუნდებით (32) ტოლობის სამართლიანობაში. ამრიგად, აბსოლუტური სიჩქარე უდრის წარმტანი და ფარდობითი სიჩქარეების ჯამს. ამ კანონს, რომელსაც სიჩქარეთა შეკრების კანონი ეწოდება, ზოგადად ადგილი არა აქვს აჩქარებებისათვის, ე.ი. აბსოლუტური აჩქარება ზოგადად არ წარმოადგენს წარმტან და ფარდობით აჩქარებათა ჯამს.

ვთქვათ, (S) სისტემა ისე მოძრაობს, რომ x , y , z ღერძების ორტები უცვლელი რჩება. ასეთ შემთხვევაში ჩვენ ვიტყვით, რომ (S) სისტემა (Σ)-ს მიმართ გადატანით მოძრაობს (წარმტანი მოძრაობა გადატანითია). (32) ტოლობის გაწარმოება მოვცემს:

$$\frac{d\bar{v}_a}{dt} = \frac{d\bar{v}_e}{dt} + \frac{d\bar{v}_r}{dt},$$

ანუ

$$\bar{w}_a = \frac{d\bar{v}_e}{dt} + \bar{i} \frac{d^2x}{dt^2} + \bar{j} \frac{d^2y}{dt^2} + \bar{k} \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (39)$$

მაგრამ, კინაიდან განსახილველ შემთხვევაში წარმტანი მოძრაობა გადატანითია, ამიტომ როგორც ადვილი მისახვედრია, $\frac{d\bar{v}_e}{dt} = \bar{w}_e$ და (39) ტოლობა მოგვცემს:

$$\bar{w}_a = \bar{w}_e + \bar{w}_r. \quad (40)$$

ამრიგად, როცა წარმტანი მოძრაობა გადატანითია, მაშინ აბსოლუტური აჩქარება უდრის წარმტან და ფარდობით აჩქარებათა ჯამს.

10. მყარი სხეულის მოძრაობის განტოლებები

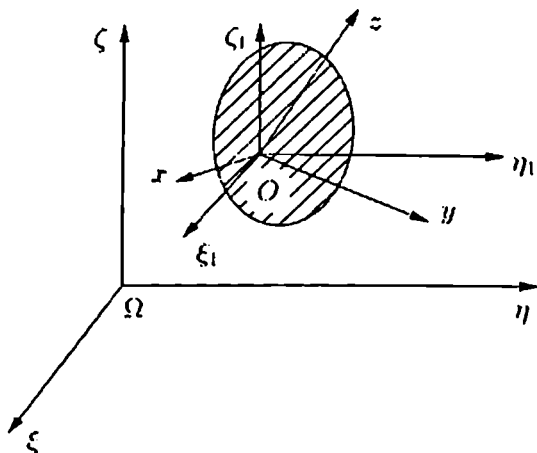
როგორც უკვე იყო აღნიშნული (იხ. თავი I §1), მყარი სხეული ეწოდება მატერიალურ წერტილთა ისეთ სისტემას, რომლის ორ ნებისმიერ წერტილს შორის მანძილი არ იცვლება. ცხადია, მყარი სხეულის მდებარეობას განსაზღვრავს მისი ისეთი სამი M_1, M_2, M_3 წერტილის მდებარეობა, რომლებიც ერთ წრფეზე არ მდებარეობენ. M_1, M_2, M_3 წერტილების მდებარეობა განსაზღვრება 9 კოორდინატით, რომლებიც დამოუკიდებელი ვერ იქნებიან, რადგან ხსენებული წერტილები მყარი სხეულის წერტილებია და ამიტომ მათ შორის მანძილი არ იცვლება:

$$|M_2 M_3| = const, \quad |M_3 M_1| = const, \quad |M_1 M_2| = const.$$

ამრიგად, ზემოხსენებული 9 კოორდინატი დაკავშირებული ერთმანეთთან სამი დამოკიდებულებით და, მაშასადამე, თუ სხეული არ ემორჩილება ბმას, ე.ი. მისი მოძრაობა არ არის შეზღუდული რაიმე გარეშე გეომეტრიული პირობით, მაშინ მათ შორის დამოუკიდებელი იქნება 6. იმ დამოუკიდებელ პარამეტრთა რიცხვს, რომელნიც განსაზღვრავენ სხეულის მდებარეობას დროის ყოველ მომენტში, ეწოდება ადებული სხეულის თავისუფლების ხარისხი. ზემოხსენებულგან განსხვავებით, რომ თუ სხეული არ ემორჩილება ბმას (თავისუფალია), მაშინ მისი თავი-

სუფლების ხარისხი n -ის ტოლია. თუ მატერიალური წერტილი ბმას არ ემორჩილება, მაშინ მისი თავისუფლების ხარისხი 3 -ის ტოლია. თუ მატერიალური წერტილის მოძრაობა შეზღუდულია ისე, რომ ის იძულებულია ყოველთვის მოთავსებული იყოს რაიმე ზედაპირზე ან წირზე, მაშინ მისი თავისუფლების ხარისხი შესაბამისად 2 -ის ან 1 -ის ტოლია.

ვნახოთ ახლა რა სახით შეიძლება იყოს მოცემული ზემოხსენებული n დამოუკიდებელი პარამეტრი. ამისათვის განვიხილოთ კოორდინატთა $\Omega\xi\eta\zeta$ უძრავი სისტემა და სხეულთან უძრავად დაკავშირებული $Ox_1y_1z_1$ სისტემა (იხ. ნახ. 13).



ნახ. 13

განვიხილოთ აგრეთვე კოორდინატთა $Ox_1y_1z_1$ სისტემა, რომლის სათავე $Oxyz$ სისტემის სათავეს ემთხვევა და ღერძები პარალელურია უძრავი საკოორდინატო ღერძების. ამ სისტემას დამხმარე სისტემა ვუწოდოთ. ცხადია, რომ სხეულის მდებარეობა დროის ყოველ მომენტში განსაზღვრული იქნება, თუ ცნობილია დროის ყოველ მომენტში O წერტილის მდებარეობა და

$Oxyz$ სისტემის მდებარეობა $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ დამხმარე სისტემის მიმართ. ცხადია აგრეთვე, რომ O წერტილის მდებარეობა უძრავი სისტემის მიმართ განისაზღვრება მისი ξ_0, η_0, ζ_0 კოორდინატებით, ხოლო $Oxyz$ სისტემის მდებარეობა დამხმარე $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ სისტემის მიმართ, როგორც ანალიზური გეომეტრიის კურსიდანაა ცნობილი, შეიძლება განისაზღვროს სამი დამოუკიდებელი პარამეტრით. ხსენებულ სამ დამოუკიდებელ პარამეტრად შეიძლება მივიღოთ ეილერის φ, ψ, ϑ კუთხეები. ამრიგად, სხეულის მდებარეობა ღროის ყოველ მომენტში ცნობილი იქნება, თუ ცნობილია $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \varphi, \psi, \vartheta$ სიდიდეები, როგორც ღროის ფუნქციები:

$$\begin{aligned}\xi_0 &= \xi_0(t), \quad \eta_0 = \eta_0(t), \quad \zeta_0 = \zeta_0(t), \\ \varphi &= \varphi(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \vartheta = \vartheta(t).\end{aligned}\tag{41}$$

ამ განტოლებებს მყარი სხეულის მოძრაობის განტოლებები ეწოდება.

მყარი სხეულის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ მისი ნებისმიერი ორი წერტილის სიჩქარეთა გვეგმილები ამ წერტილების შემაერთებელ წრფეზე ტოლია.

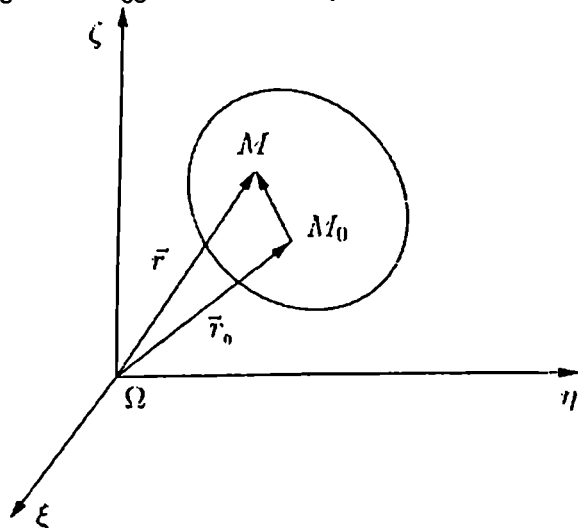
მართლაც, ავიღოთ მყარი სხეულის ნებისმიერი M_0 და M წერტილები და აღვნიშნოთ მათი რადიუს-ვექტორები Ω წერტილის მიმართ შესაბამისად $\vec{r}_0$ -ით და $\vec{r}$ -ით (იხ. ნახ. 14). ცხადია, გვექნება

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \overline{M_0M}.$$

ამ ტოლობის გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{d\overline{M_0M}}{dt}.\tag{42}$$

მაგრამ, ვინაიდან M_0 და M მყარი სხეულის წერტილებია, ამიტომ $\overline{M_0M}$ ვექტორის სიგრძე მუდმივია და, მაშასადამე, $\frac{d\overline{M_0M}}{dt}$ მართობია $\overline{M_0M}$ ვექტორის. თუ ამას გავითვალისწინებთ და (42) ტოლობას დავაგეგმილებთ M_0M ვექტორზე, დავრწმუნდებით ნათქვამის სამართლიანობაში.



ნახ. 14

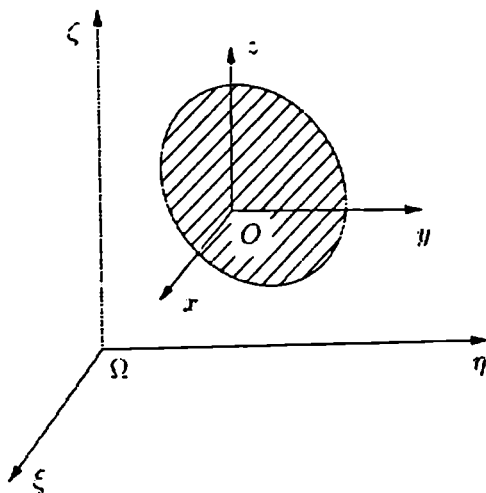
სანამ მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობის შესწავლას შევუდგებოდეთ, შევისწავლოთ მყარი სხეულის მოძრაობის რამდენიმე მარტივი შემთხვევა.

11. მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა

ამბობენ, რომ მყარი სხეული ასრულებს გადატანით მოძრაობას, თუ ამ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული ყოველი წრფე

სხეულის მოძრაობის დროს რჩება თავისი თავის პარალელური. განვიხილოთ კოორდინატთა $\Omega\xi\eta\zeta$ უძრავი სისტემა და მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული $Oxyz$ სისტემა, ამასთან ვიგულისხმობთ, რომ საწყის მომენტში Ox, Oy, Oz ღერძები პარალელურია შესაბამისად $\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta$ ღერძების. რადგან ვგულისხმობთ, რომ სხეული გადატანით მოძრაობს, ამიტომ Ox, Oy, Oz ღერძები ყოველთვის პარალელური იქნება უძრავი საკოორდინატო ღერძების (იხ. ნახ. 15). აქედან ცხადია, რომ განსახილველ შემთხვევაში მყარი სხეულის მდებარეობა სავსებით იქნება განსაზღვრული O წერტილის ξ_0, η_0, ζ_0 კოორდინატებით, ამიტომ სხეულის გადატანითი მოძრაობის განტოლებებს ექნება სახე (იხ. (41) განტოლებები):

$$\xi_0 = \xi_0(t), \eta_0 = \eta_0(t), \zeta_0 = \zeta_0(t).$$



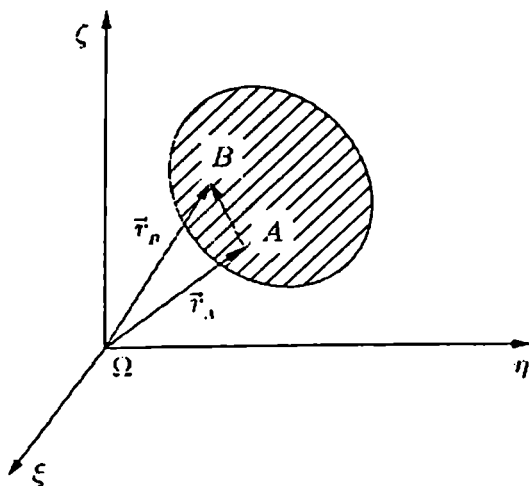
ნახ. 15

ზემოთქმულიდან ცხადია, რომ გადატანითი მოძრაობის შემთხვევაში მყარი სხეულის თავისუფლების ხარისხი სამის ტოლია.

თუ მოცემულია მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობის განტოლებები, მაშინ მყარი სხეულის ნებისმიერი $M(\xi, \eta, \zeta)$ წერტილის მოძრაობის განტოლებები მოიცემა კოორდინატთა გარდაქმნის შემდეგი ფორმულებით:

$$\xi = \xi_0 + x, \quad \eta = \eta_0 + y, \quad \zeta = \zeta_0 + z,$$

სადაც x, y, z არის M წერტილის კოორდინატები $Oxyz$ სისტემაში (x, y, z მუდმივებია).



ნახ. 16

დავამტკიცოთ ახლა, რომ გადატანითი მოძრაობის შემთხვევაში მყარი სხეულის ყველა წერტილს ერთნაირი სიჩქარე და აჩქარება აქვს.

მართლაც, განვიხილოთ მყარი სხეულის ორი ნებისმიერი A და B წერტილი. მათი რადიუს-ვექტორები Ω წერტილის მი-

მართ იყოს $\vec{r}_A$ და $\vec{r}_B$ (იხ. ნახ. 16). ცხადია, რომ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB}, \quad (43)$$

საიდანაც, გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\overline{AB}}{dt},$$

ან, რაც იგივეა,

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \frac{d\overline{AB}}{dt}. \quad (44)$$

მაგრამ, ვინაიდან A და B მყარი სხეულის წერტილებია, ამიტომ $|\overline{AB}| = \text{const.}$ ამის გარდა, გადატანითი მოძრაობის განმარტების ძალით, $\overline{AB}$ ვექტორის გეზიც არ იცვლება, მაშასადამე $\overline{AB} = \text{const}$ და $\frac{d\overline{AB}}{dt} = 0$. უკანასკნელი ტოლობის ძალით, (44) ტოლობა მოგვცემს:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B,$$

საიდანაც გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\vec{w}_A = \vec{w}_B.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ პირიქით, თუ მყარი სხეულის ორ ნებისმიერ წერტილს ერთნაირი სიჩქარე აქვს, მაშინ სხეული გადატანით მოძრაობს.

მართლაც, (43) ტოლობის გაწარმოება გვაძლევს (44)-ს.

მაგრამ, პირობის ძალით $\vec{v}_A = \vec{v}_B$, ამიტომ $\frac{d\overline{AB}}{dt} = 0$, ე.ი.

$\overline{AB} = \text{const.}$ ეს უკანასკნელი ამტკიცებს, რომ სხეული გადატანით მოძრაობს.

ყოველივე ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა სავსებით დახასიათდება მისი ერთ-ერთი წერტილის მოძრაობით.

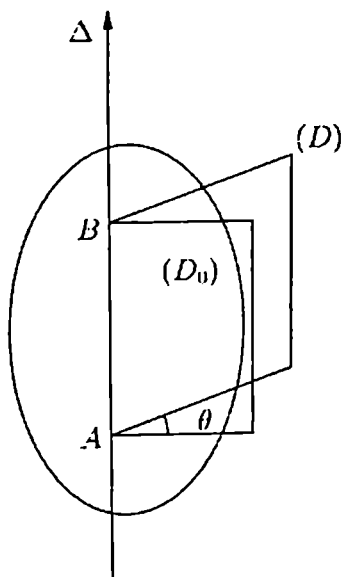
ვინაიდან გადატანითი მოძრაობის დროს მყარი სხეულის ყველა წერტილს ერთნაირი სიჩქარე და აჩქარება აქვს, ამიტომ ამ შემთხვევაში შეიძლება ვილაპარაკოთ სხეულის სიჩქარეზე და აჩქარებაზე. ზოგადად კი სხეულის სიჩქარეზე და აჩქარებაზე ლაპარაკი არ შეიძლება, ვინაიდან სხეულის სხვადასხვა წერტილს სხვადასხვა სიჩქარე და აჩქარება შეიძლება ჰქონდეს.

12. მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო

ვთქვათ, მყარი სხეული ისე მოძრაობს, რომ მისი ორი A და B წერტილი უძრავი რჩება. მაშინ უძრავი იქნება მყარი სხეულის ყველა წერტილი, რომელიც A და B წერტილების შემაერთებელ წეფეზე მდებარეობს, ვინაიდან, წეინააღმდეგ შემთხვევაში, აღნიშნულ წრეზე მდებარე მყარი სხეულის ორ წერტილს შორის მანძილი არ იქნებოდა მუდმივი. მყარი სხეულის ასეთ მოძრაობას ეწოდება ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო (A და B წერტილებზე გამავალი ღერძის გარშემო), რომელსაც Δ -თი აღვნიშნავთ, მივიანიჭოთ ამ ღერძს გარკვეული გეზი და წარმოვიდგინოთ დამკვირვებელი, რომელიც მოძრაობას უყურებს იმ მხრიდან, საითაც Δ ღერძია მოგებული. ჩვენ ვიტყვი, რომ მყარი სხეული ბრუნავს Δ ღერძის გარშემო დადებითი მიმართულებით, თუ ხსენებული დამკვირვებლისათვის ბრუნვა ხდება მარჯვნიდან მარცხნივ, ე.ი. საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით (მარჯვენა ხრახნის მიხედვით). განვიხილოთ Δ ღერძზე გამავალი რაიმე უძრავი (D_0) სიბრტყე და ამავე ღერძზე გამავალი, მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული (D) სიბრტყე, ამ ორ სიბრტყეს შორის კუთხე აღვნიშნოთ

ϑ -თი (იხ. ნახ. 17). ϑ იმ დადებით ან უარყოფით კუთხეს აღნიშნავს, რომლითაც უნდა მოვებრუნოთ (D_0) სიბრტყე ბრუნვის დადებითი ან უარყოფითი მიმართულებით, რომ ის შეუთავსდეს (D) სიბრტყეს. ცხადია, სხეულის მდებარეობა სავსებით განისაზღვრება ϑ კუთხით და, მაშასადამე, განსახილველ შემთხვევაში, სხეულის თავისუფლების ხარისხი ერთის ტოლია, ამასთან სხეულის მოძრაობის განტოლებას ექნება სახე:

$$\vartheta = \vartheta(t).$$



ნახ. 17

განვიხილოთ ახლა $\vec{\omega}$ ვექტორი, რომელიც შემდეგი პირობებით არის განსაზღვრული:

1. ამ ვექტორის სიგრძე სკალარული კუთხური სიჩქარის სიდიდის ტოლია,

2. ის ემთხვევა ბრუნვის Δ ღერძს,

3. მოგეზულია ისე, რომ დამკვირებლისათვის, რომელიც მოძრაობას ამ ვექტორის ბოლოდან უყურებს, სხეულის ბრუნვა ხდება დადებითი მიმართულებით (საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით).

ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ $\vec{\omega}$ სრიალ ვექტორია. ამ ვექტორს ბრუნვის კუთხური სიჩქარე ეწოდება.

განვიხილოთ მყარი სხეულის ნებისმიერი M წერტილი. მანძილი ამ წერტილიდან ბრუნვის ღერძამდე აღვნიშნოთ ρ -თი. ვინაიდან M წერტილი და Δ ღერძი მყარ სხეულთან უძრავად არის დაკავშირებული, ამიტომ, ცხადია, M წერტილის ტრაექტორია იქნება წრეწირი, რომლის რადიუსი არის ρ და რომლის ცენტრიც ბრუნვის ღერძზეა მოთავსებული. ამრიგად, სხეულის ყოველი წერტილის ტრაექტორია წრეწირს წარმოადგენს. ცხადია, რომ M წერტილის სკალარული სიჩქარე იქნება:

$$v = \rho \frac{d\vartheta}{dt} = \rho \omega,$$

ამიტომ, როგორც ადვილი მისახვედრია, M წერტილის ვექტორული სიჩქარე წარმოიდგინება

$$\vec{v} = \text{მოძ}_{M} \vec{\omega} \quad (45)$$

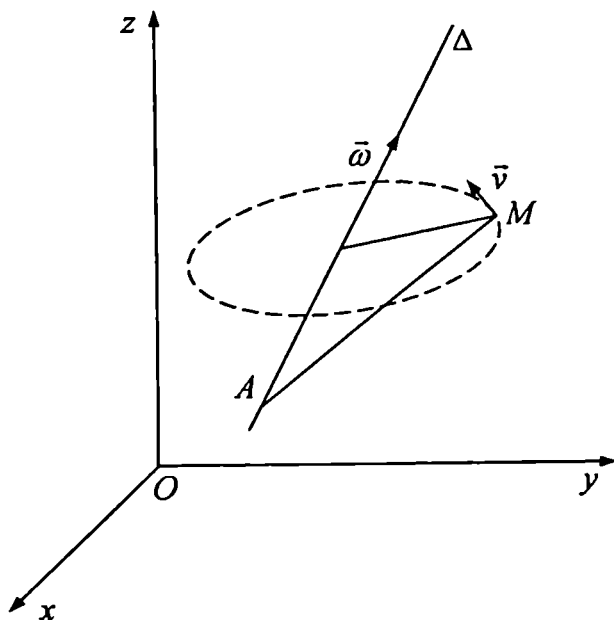
ფორმულით. თუ ვიგულისხმებთ, რომ ω ვექტორი მოდებულია A წერტილზე (იხ. ნახ. 18), მაშინ უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$\vec{v} = [\overline{AM}, \vec{\omega}] = [\vec{\omega}, \overline{MA}]. \quad (46)$$

თუ ახლა ავიღებთ კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემას და აღვნიშნავთ A წერტილის კოორდინატებს x_0, y_0, z_0 -ით, ხოლო M წერტილის კოორდინატებს x, y, z -ით და (46) ტოლობას დავაგვემიღებთ კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ:

$$\begin{aligned}v_x &= q(z - z_0) - r(y - y_0), \\v_y &= r(x - x_0) - p(z - z_0), \\v_z &= p(y - y_0) - q(x - x_0),\end{aligned}\tag{47}$$

საიდანაც p, q, r წარმოადგენენ ω ვექტორის კოორდინატებს.



ნახ. 18

თუ ახლა კოორდინატა $Oxyz$ სისტემას ისე ავიღებთ, რომ ბრუნვის Δ ღერძი გადიოდეს ამ სისტემის სათავეში (O წერტილში) და ვიგულისხმებთ, რომ ω სრიალა ვექტორი მოდებულია O წერტილში (რაც ყოველთვის განხორციელდება ω ვექტორის გასრიალებით ფუძის გასწვრივ), მაშინ (46) ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\bar{v} = [\bar{\omega}, \bar{r}], \quad (48)$$

სადაც r აღნიშნავს სხეულის M წერტილის რადიუს-ვექტორს O წერტილის მიმართ, კოორდინატთა ღერძებზე (48) ტოლობის დაგეგმილება მოგვცემს

$$\begin{aligned} v_x &= qz - ry, \\ v_y &= rx - pz, \\ v_z &= py - qx. \end{aligned} \quad (49)$$

თუ ბრუნვის ღერძი Oz ღერძის პარალელურია, მაშინ $p = q = 0$, $r = \omega$ და (47) ტოლობის ძალით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} v_x &= -\omega(y - y_0), \\ v_y &= \omega(x - x_0), \\ v_z &= 0. \end{aligned} \quad (50)$$

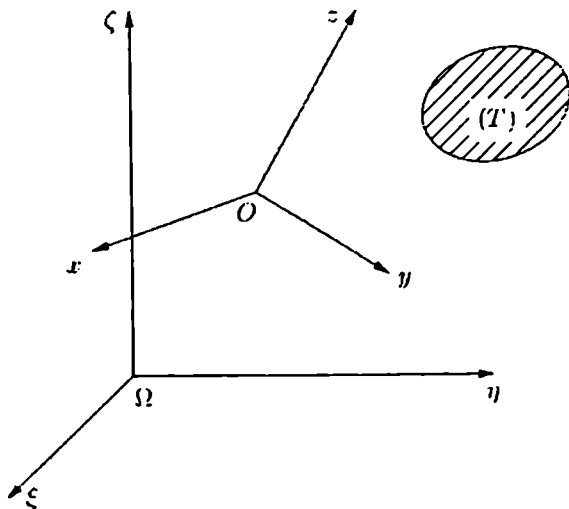
თუ ბრუნვის ღერძი Oz ღერძს ემთხვევა, მაშინ (49) ტოლობები მოგვცემს:

$$\begin{aligned} v_x &= -\omega y, \\ v_y &= \omega x, \\ v_z &= 0. \end{aligned} \quad (51)$$

13. შედგენილი მოძრაობა

ისე როგორც § 9-ში, $\Omega\xi\eta\zeta$ და $Oxyz$ -ით აღვნიშნოთ, შესაბამისად, კოორდინატთა უძრავი (Σ) და (S) მოძრავი სისტემები. განვიხილოთ სხეული (T), რომელიც მოძრაობს (S) სისტემის მიმართ. (S) სისტემის წარმტან მოძრაობას (ე.ი. (S) სისტემის მოძრაობას (Σ) სისტემის მიმართ) ვუწოდოთ პირველი მოძრაობა, ხოლო (T) სხეულის მოძრაობას (S) სის-

ტემის მიმართ – მეორე მოძრაობა (იხ. ნახ. 19). თუ ცნობილია პირველი და მეორე მოძრაობა, მაშინ საესებით განსაზღვრული იქნება (T) სხეულის აბსოლუტური მოძრაობა ((Σ) სისტემის მიმართ მოძრაობა), ამიტომ ჩვენ ვიტყვით, რომ სხეულის მოძრაობა შედგება ზემოხსენებული ორი მოძრაობისაგან.



ნახ. 19

განვიხილოთ სხეულის ნებისმიერი M წერტილი და მისი წარმტანი და ფარდობითი სიჩქარეები აღნიშნოთ შესაბამისად v_1 -ით და v_2 -ით. (32) ტოლობის ძალით, მივიღებთ

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad (52)$$

სადაც $\vec{v}$ წარმოადგენს აღნიშნული M წერტილის აბსოლუტურ სიჩქარეს. ვინაიდან $\vec{v}_1$ წარმოადგენს (S) სისტემის იმ წერტილის სიჩქარეს, რომელზედაც აღებულ მომენტში M წერტილი იმყოფება, ხოლო $\vec{v}_2$ წარმოადგენს M წერტილის

ფარდობით სიჩქარეს, ამიტომ მათ შეიძლება ვუწოდოთ პირველ და მეორე მოძრაობათა შესაბამისი სიჩქარეები.

თუ თავის მხრივ (S) სისტემის მიმართ მოძრაობს (S_1) სისტემა, რომლის მიმართაც (T) სხეული მოძრაობს, მაშინ (52)-ის ნაცვლად, როგორც აღვილი მისახვედრია, მივიღებთ:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3,$$

სადაც $\vec{v}_1$ ის სიჩქარეა, რომელიც (Σ) სისტემის მიმართ (S) სისტემის მოძრაობას შეესაბამება, ე.ი. $\vec{v}_1$ არის (S) სისტემის იმ წერტილის სიჩქარე, რომელშიც აღებულ მომენტში M წერტილი იმყოფება; $\vec{v}_2$ პირველი სიჩქარეა, რომელიც (S) სისტემის მიმართ (S_1) სისტემის მოძრაობას შეესაბამება, ე.ი. $\vec{v}_2$ არის (S_1) სისტემის იმ წერტილის სიჩქარე (S) სისტემის მიმართ, რომელშიც აღებულ მომენტში M წერტილი იმყოფება; დაბოლოს, $\vec{v}_3$ წარმოადგენს M წერტილის ფარდობით სიჩქარეს (S_1) სისტემის მიმართ.

თუ სხეულის მოძრაობა შედგება n მოძრაობისაგან, მაშინ ზემონაჩვენები წესით მივიღებთ

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n, \quad (53)$$

სადაც $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ შემადგენელ მოძრაობათა შესაბამისი სიჩქარეებია.

14. გადატანით მოძრაობათა ერთობლიობა

ვთქვათ, (S) სისტემა მოძრაობს (Σ)-ს მიმართ გადატანით და (T) სხეული მოძრაობს (S) სისტემის მიმართ აგრეთვე გადატანით. მაშინ, ცხადია, (T) სხეულის მოძრაობა (Σ)-ს მიმართ

იქნება აგრეთვე გადატანითი და, (52) ფორმულის ძალით, მივიღებთ:

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2,$$

სადაც $\bar{v}$ წარმოადგენს (Σ) -ს მიმართ (T) სხეულის გადატანითი მოძრაობის სიჩქარეს, $\bar{v}_1 - (S)$ სისტემის გადატანითი მოძრაობის სიჩქარეს (Σ) სისტემის მიმართ, ხოლო $\bar{v}_2$ არის (S) სისტემის მიმართ (T) სხეულის გადატანითი მოძრაობის სიჩქარე.

თუ მოძრაობა შედგენილია n გადატანითი მოძრაობისაგან, მაშინ სხეულის აბსოლუტური მოძრაობა (Σ) -ს მიმართ იქნება გადატანითი და ადგილი ექნება

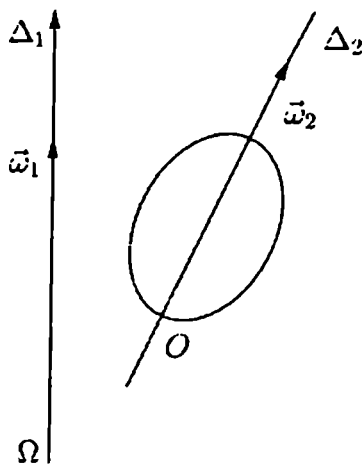
$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \dots + \bar{v}_n,$$

ტოლობას, სადაც $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ შემადგენელ გადატანით მოძრაობათა სიჩქარეებია.

15. ბრუნვათა ერთობლიობა

ვთქვათ, § 13-ში განხილული პირველი და მეორე მოძრაობები ბრუნვითი მოძრაობებია, რომელთა კუთხური სიჩქარეებიც არის $\bar{\omega}_1$ და $\bar{\omega}_2$; სხვანაირად რომ ვთქვათ, (T) სხეული ბრუნავს Δ_2 ღერძის გარშემო $\bar{\omega}_2$ კუთხური სიჩქარით, ხოლო Δ_2 ღერძი თავის მხრივ ბრუნავს უძრავი Δ_1 ღერძის გარშემო $\bar{\omega}_1$ კუთხური სიჩქარით (იხ. ნახ. 20). მყარი სხეულის ნებისმიერი M წერტილის სიჩქარე, ცხადია, გამოითვლება ფორმულით:

$$\bar{v} = \text{მოძ}_{M'} \bar{\omega}_1 + \text{მოძ}_{M'} \bar{\omega}_2. \quad (54)$$



ნახ. 20

ასევე დავრწმუნდებით, რომ თუ მყარი სხეულის მოძრაობა შედგება n ბრუნვითი მოძრაონისაგან, რომელთა კუთხური სიჩქარეებია $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n$, მაშინ გვექნება:

$$\vec{v} = \text{მომ}_M \vec{\omega}_1 + \text{მომ}_M \vec{\omega}_2 + \dots + \text{მომ}_M \vec{\omega}_n. \quad (55)$$

ამგრიგად, ჩვენ ვრწმუნდებით შემდეგი დებულების სამართლიანობაში:

დებულება 7. თუ მყარი სხეულის მოძრაობა შედგენილია n ბრუნვითი მოძრაობისაგან, რომელთა კუთხური სიჩქარეებია $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n$, მაშინ ამ სხეულის ნებისმიერი M წერტილის სიჩქარე უდრის სხენებულ კუთხურ სიჩქარეთა ნაკრებ მომენტს ამავე M წერტილის მიმართ.

განვიხილოთ რამდენიმე მნიშვნელოვანი შემთხვევა:

1. ვთქვათ, ზემოხსენებულ კუთხურ სიჩქარეთა $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n$, ვექტორები თავმოყრილია. მაშინ, ვარინიონის დებულების თანახმად, ვექტორთა ამ სისტემას აქვს ტოლქმედი, რომელიც ამ

ვექტორების ჯამის ტოლია და მათი თავმოყრის წერტილშია მოდებული, ამიტომ, განსახილველ შემთხვევაში, (55) ფორმულიდან გამომდინარეობს:

$$\bar{v} = \text{მომ}_M \bar{w}, \quad (56)$$

სადაც

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^n \bar{w}_i,$$

ამასთან ეს უკანასკნელი $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n$ ვექტორების თავმოყრის წერტილშია მოდებული.

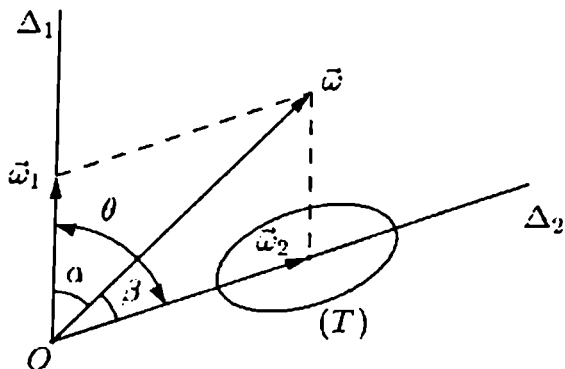
(56) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ, განსახილველ შემთხვევაში, მყარი სხეულის ყოველი წერტილის სიჩქარე ისეთია, თითქოს სხეული ბრუნავდეს თავმოყრის წერტილში გამავალი გარკვეული Δ ღერძის გარშემო $\bar{w}$ კუთხური სიჩქარით.

სხეულის მოძრაობა, როგორც ადვილი მისახვედრია, არ იქნება Δ ღერძის გარშემო ბრუნვა $\bar{w}$ კუთხური სიჩქარით (იხ. ნახ. 21), მაგრამ ღრუის ყოველ მომენტში სიჩქარეთა განაწილება მყარ სხეულში ისეთია, თითქოს ბრუნვას ჰქონდეს ადგილი გარკვეული Δ ღერძის გარშემო $\bar{w}$ კუთხური სიჩქარით. ამიტომ, Δ ღერძს ბრუნვის მყისი ღერძი ეწოდება, ხოლო $\bar{w}$ -ს – ბრუნვის მყისიერი კუთხური სიჩქარე.

ამრიგად, თანამკვეთი ღერძების გარშემო რამდენიმე ერთდროული ბრუნვითი მოძრაობის შედეგი არის მყისიერი ბრუნვა $\bar{w}$ კუთხური სიჩქარით, სადაც $\bar{w}$ აღებულ ბრუნვათა კუთხური სიჩქარეების ნაკრებ ვექტორს წარმოადგენს და მოდებულია ღერძების თანაკვეთის წერტილში.

2. ახლა ვთქვათ, $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n$ წარმოადგენს პარალელურ ვექტორთა სისტემას, რომლის ნაკრები ვექტორი ნული არ არის. როგორც ვიცით (იხ. § 8), ამ შემთხვევაშიც არსებობს ტოლქმედი, რომელიც აღებულ პარალელურ ვექტორთა ნაკრები ვექ-

ტორის ტოლია და რომლის ფუძეც მათ ცენტრში გადის, ამიტომ, განსახილველ შემთხვევაში, (55) ფორმულიდან გამომდინარეობს (56), სადაც $\vec{m}$ ზემოხსენებული ნაკრები ვექტორია, რომელიც $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n$ პარალელურ ვექტორთა სისტემის ცენტრშია მოდებული (იხ. (31) ფორმულა).



ნახ. 21

ამრიგად, თუ ჩვენ გვკინტერესებს მხოლოდ სიჩქარეთა განაწილება სხეულში, მაშინ პარალელური ღერძების გარშემო რამდენიმე ერთდროული ბრუნვითი მოძრაობის შედეგი არის ერთი მყისიერი ბრუნვა $\vec{m}$ კუთხური სიჩქარით, რომელიც ზემომოყვანილი წესით არის განსაზღვრული (იგულისხმება, რომ კუთხურ სიჩქარეთა ნაკრები ვექტორი განსხვავებულია ნულისაგან).

3. დაეუშვათ, რომ მყარი სხეულის მოძრაობა შედგება ორი ბრუნვისაგან, რომელთა კუთხური სიჩქარეები შეადგენენ $(\vec{m}_1, \vec{m}_2)$ წყვილვექტორს $(\vec{m}_1 = -\vec{m}_2)$. ვინაიდან წყვილვექტორის მომენტი არ არის დამოკიდებული მომენტის ცენტრზე, ამიტომ, როგორც ადვილი მისახვედრია, ალბულ მომენტში (როცა $\vec{m}_1 = -\vec{m}_2$) სხეულის ყველა წერტილს ერთნაირი სიჩქა-

რე ექნება და, მაშასადამე, სიჩქარეები სხეულში ისეა განაწილებული, თითქოს ის ასრულებდეს გადატანით მოძრაობას. თუ დროის ყოველ მომენტში $\vec{a}_1 = -\vec{a}_2$, მაშინ სხეულის მოძრაობა ნამდვილად იქნება გადატანითი. პირიქით, თუ სხეული ასრულებს გადატანით მოძრაობას v_0 სიჩქარით, მაშინ ყოველთვის შეიძლება ისეთი $(\vec{a}', -\vec{a}')$ წყვილვექტორი ავიღოთ, რომლის მომენტიც v_0 -ის ტოლია და, მაშასადამე, თუ გვავსებთ მხოლოდ სიჩქარეთა განაწილებას სხეულში, გადატანითი მოძრაობა შეიძლება ბრუნვათა წყვილით შეცვალოთ.

16. მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი წერტილის გარშემო

ვთქვათ, მყარი სხეული ისე მოძრაობს, რომ მისი ერთი რომელიმე O წერტილი უძრავია. ასეთ შემთხვევაში ვიტყვი, რომ მყარი სხეული ბრუნავს უძრავი O წერტილის გარშემო. განვიხილოთ კოორდინატთა $O\xi\eta\zeta$ სისტემა, რომელსაც პირობით უძრავ სისტემას (ძირითად სისტემას) ვუწოდებთ და მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული $Oxyz$ სისტემა. ცხადია, მყარი სხეულის მოძრაობას სავსებით დაახასიათებს $Oxyz$ სისტემის მოძრაობა უძრავი სისტემის მიმართ. მაგრამ, როგორც ანალიზური გეომეტრიის კურსიდანაა ცნობილი, მოძრავი კოორდინატთა ღერძების მდებარეობა უძრავი ღერძების მიმართ სავსებით ხასიათდება სამი დამოუკიდებელი პარამეტრით. ასეთ პარამეტრებად, კერძოდ *ეილერის* φ, ψ, θ კუთხეები შეიძლება მივიღოთ.

ვთქვათ, კოორდინატთა $O\xi\eta\zeta$ და $Oxyz$ სისტემები მარჯვენა სისტემებს წარმოადგენენ (იხ. ნახ. 22). Oxy სიბრტყეში ბრუნვის დადებით მიმართულებად, როგორც ყოველთვის, მივი-

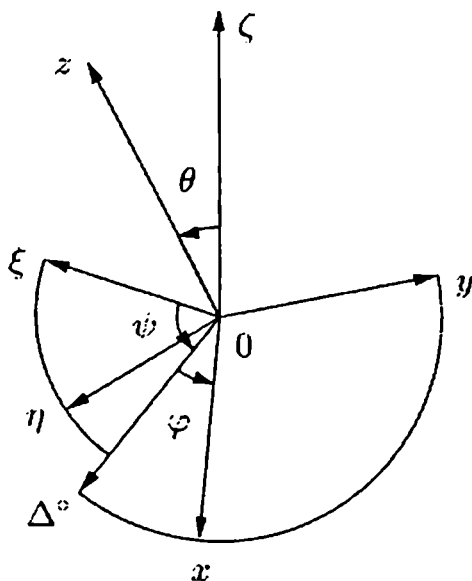
ღოთ ის მიმართულება, რა მიმართულებითაც უნდა მოვაბრუნოთ $\frac{\pi}{2}$ კუთხით Ox ღერძი, რათა ის შეუთავსდეს Oy ღერძს. ანალოგიურად განვსაზღვრავთ ბრუნვის დადებით მიმართულებას $O\xi\eta$ სიბრტყეში. აღვნიშნოთ Oxy და $O\xi\eta$ სიბრტყეთა თანაკვეთა Δ° -ით. გარკვეულობისათვის ის მოვგეზოთ ისე, რომ $O\xi, Oz, \Delta^\circ$ ღერძები მარჯვენა სისტემას ქმნიდნენ. φ არის კუთხე $O\xi$ და Δ° ღერძებს შორის. ეს კუთხე მოთავსებულია $]0, 2\pi[$ შუალედში და აითვლება $O\xi$ ღერძიდან $O\xi\eta$ სიბრტყეში ბრუნვის დადებითი მიმართულებით. φ არის კუთხე Δ° ღერძსა და Ox ღერძს შორის. ის მოთავსებულია აგრეთვე $]0, 2\pi[$ შუალედში და აითვლება Δ° ღერძიდან Oxy სიბრტყეში ბრუნვის დადებითი მიმართულებით. ბოლოს, ϑ არის კუთხე $O\xi$ და Oz ღერძებს შორის, რომელიც იცვლება $]0, \pi[$ შუალედში.

ამრიგად, სხეულის მდებარეობა ღროის ყოველ მომენტში ცნობილი იქნება, თუ ცნობილია ეილერის φ, ψ, ϑ კუთხეები, როგორც ღროის ფუნქციები და, მაშასადამე, განსაზღვრულ შემთხვევაში, სხეულის მოძრაობის განტოლებები იქნება (იხ. (41) განტოლებები)

$$\varphi = \varphi(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \vartheta = \vartheta(t).$$

ამ განტოლებებს უძრავი O წერტილის გარშემო ბრუნვის განტოლებები ეწოდება.

ზემოაღნიშნულიდან გამომდინარეობს, რომ უძრავი წერტილის გარშემო ბრუნვის შემთხვევაში მყარი სხეულის თავისუფლების ხარისხი სამის ტოლია.



ნახ. 22

ეთქვათ, მოცემულია უძრავი წერტილის გარშემო სხეულის ბრუნვის განტოლებები; ვიპოვოთ მყარი სხეულის ნებისმიერი $M(x, y, z)$ წერტილის მოძრაობის განტოლებები. ვინაიდან x, y, z აღებული M წერტილის კოორდინატებია მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული $Oxyz$ სისტემის მიმართ, ამიტომ სხეულის მოძრაობის დროს ეს კოორდინატები არ იცვლებიან. აღვნიშნოთ ხსენებული M წერტილის კოორდინატები $O\xi\eta\zeta$ სისტემის მიმართ ξ, η, ζ -თი. ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილი კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულების ძალით, გვექ-

$$\begin{aligned}\xi &= l_1 x + l_2 y + l_3 z, \\ \eta &= m_1 x + m_2 y + m_3 z, \\ \zeta &= n_1 x + n_2 y + n_3 z,\end{aligned}\tag{57}$$

სადაც l_1, m_1, n_1 წარმოადგენენ Ox ღერძის მიმართულ კოსინუსებს უძრავი სისტემის მიმართ, ე. ი.

$$l_1 = \cos(Ox, O\xi), \quad m_1 = \cos(Ox, O\eta), \quad n_1 = \cos(Ox, O\zeta).$$

ანალოგიურად l_2, m_2, n_2 და l_3, m_3, n_3 აღნიშნავს, შესაბამისად, Ox_2 და Ox ღერძების მიმართულ კოსინუსებს.

როგორც ანალიზური გეომეტრიის კურსიდანაა ცნობილი,

$$l_1 = \cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \sin\varphi \cos\vartheta,$$

$$m_1 = \sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \cos\vartheta \sin\varphi,$$

$$n_1 = \sin\varphi \sin\vartheta,$$

$$l_2 = -\cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\vartheta \cos\varphi,$$

$$m_2 = \cos\psi \cos\varphi \cos\vartheta - \sin\psi \sin\varphi,$$

$$n_2 = \sin\vartheta \cos\varphi,$$

$$l_3 = \sin\psi \sin\vartheta,$$

$$m_3 = -\cos\psi \sin\vartheta,$$

$$n_3 = \cos\vartheta.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (57) ტოლობებში და გავითვალისწინებთ, რომ φ, ψ, ϑ დროის ცნობილი ფუნქციებია, მივიღებთ M წერტილის მოძრაობის განტოლებებს.

გამოვთვალოთ ახლა მყარი სხეულის ნებისმიერი M წერტილის სიჩქარე. (57) ტოლობების ძალით, მივიღებთ

$$\begin{aligned}
 v_\xi &= \frac{d\xi}{dt} = l'_1 x + l'_2 y + l'_3 z, \\
 v_\eta &= \frac{d\eta}{dt} = m'_1 x + m'_2 y + m'_3 z, \\
 v_\zeta &= \frac{d\zeta}{dt} = n'_1 x + n'_2 y + n'_3 z,
 \end{aligned}
 \tag{58}$$

სადაც $l'_1, l'_2, l'_3, \dots$, აღნიშნავენ $l_1, l_2, l_3, \dots$, მიმართულების კოსინუსების წარმოებულებს. ეს ფორმულები იძლევიან სიჩქარის კოორდინატებს უძრავი ღერძების მიმართ.

ახლა გამოვთვალოთ სიჩქარის გეგმილები მოძრავ $Oxyz$ სისტემის ღერძებზე.

თუ M წერტილის რადიუს-ვექტორს O წერტილის მიმართ აღვნიშნავთ ρ -თი, გვექნება

$$\vec{\rho} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z,$$

სადაც $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, როგორც ყოველთვის, Ox, Oy, Oz ღერძების ორტეხია^{*)}. ვინაიდან x, y, z სხეულის მოძრაობის დროს არ იცვლება, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობის დროის მიხედვით გაწარმოება მოგვცემს

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt}. \tag{59}$$

^{*)} ცხადია, ზემოთ განხილული $l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2$ და l_3, m_3, n_3

წარმოადგენენ შესაბამისად $\vec{i}, \vec{j}$ და $\vec{k}$ ვექტორების კოორდინატებს უძრავი სისტემის მიმართ:

$\vec{i} = (l_1, m_1, n_1), \vec{j} = (l_2, m_2, n_2), \vec{k} = (l_3, m_3, n_3).$

აღენიშნოთ $\vec{v}$ სიჩქარის გეგმილები Ox, Oy, Oz ღერძებზე, შესაბამისად, v_x, v_y, v_z -ით. ვინაიდან

$$v_x = (\vec{i}, \vec{v}), \quad v_y = (\vec{j}, \vec{v}), \quad v_z = (\vec{k}, \vec{v}),$$

ამიტომ, (59) ტოლობების ძალით, მივიღებთ

$$\begin{aligned} v_x &= x \left(\vec{i}, \frac{d\vec{i}}{dt} \right) + y \left(\vec{i}, \frac{d\vec{j}}{dt} \right) + z \left(\vec{i}, \frac{d\vec{k}}{dt} \right), \\ v_y &= x \left(\vec{j}, \frac{d\vec{i}}{dt} \right) + y \left(\vec{j}, \frac{d\vec{j}}{dt} \right) + z \left(\vec{j}, \frac{d\vec{k}}{dt} \right), \\ v_z &= x \left(\vec{k}, \frac{d\vec{i}}{dt} \right) + y \left(\vec{k}, \frac{d\vec{j}}{dt} \right) + z \left(\vec{k}, \frac{d\vec{k}}{dt} \right). \end{aligned} \quad (60)$$

ცხადია, ადგილი აქვს

$$(\vec{i}, \vec{i}) = (\vec{j}, \vec{j}) = (\vec{k}, \vec{k}) = 1$$

ტოლობებს. ამ ტოლობების გაწარმოება მოგვცემს

$$\left(\vec{i}, \frac{d\vec{i}}{dt} \right) = \left(\vec{j}, \frac{d\vec{j}}{dt} \right) = \left(\vec{k}, \frac{d\vec{k}}{dt} \right) = 0.$$

უკანასკნელი ტოლობების ძალით, (60) ფორმულები შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$\begin{aligned} v_x &= y \left(\vec{i}, \frac{d\vec{j}}{dt} \right) + z \left(\vec{i}, \frac{d\vec{k}}{dt} \right), \\ v_y &= x \left(\vec{j}, \frac{d\vec{i}}{dt} \right) + z \left(\vec{j}, \frac{d\vec{k}}{dt} \right), \\ v_z &= x \left(\vec{k}, \frac{d\vec{i}}{dt} \right) + y \left(\vec{k}, \frac{d\vec{j}}{dt} \right). \end{aligned} \quad (61)$$

ვინაიდან

$$(\bar{k}, \bar{j}) = (\bar{i}, \bar{k}) = (\bar{j}, \bar{i}) = 0,$$

ამიტომ, ცხადია, ადგილი აქვს

$$\begin{aligned} \left(\bar{k}, \frac{d\bar{j}}{dt} \right) &= - \left(\bar{j}, \frac{d\bar{k}}{dt} \right), & \left(\bar{i}, \frac{d\bar{k}}{dt} \right) &= - \left(\bar{k}, \frac{d\bar{i}}{dt} \right), \\ \left(\bar{j}, \frac{d\bar{i}}{dt} \right) &= - \left(\bar{i}, \frac{d\bar{j}}{dt} \right). \end{aligned}$$

ტოლობებს. თუ შემოვიღებთ

$$\begin{aligned} p &:= \left(\bar{k}, \frac{d\bar{j}}{dt} \right) = - \left(\bar{j}, \frac{d\bar{k}}{dt} \right), \\ q &:= \left(\bar{i}, \frac{d\bar{k}}{dt} \right) = - \left(\bar{k}, \frac{d\bar{i}}{dt} \right), \\ r &:= \left(\bar{j}, \frac{d\bar{i}}{dt} \right) = - \left(\bar{i}, \frac{d\bar{j}}{dt} \right). \end{aligned} \tag{62}$$

აღნიშვნებს, მაშინ (61) ტოლობები შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$\begin{aligned} v_x &= qz - ry, \\ v_y &= rx - pz, \\ v_z &= py - qx, \end{aligned} \tag{63}$$

უკანასკნელი ტოლობები ვექტორულად, ცხადია, შემდეგნაირად შეიძლება ჩაეწეროს:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{\rho}]. \tag{64}$$

სადაც ω ვექტორია, რომლის გეგმილებიც მოძრავ კოორდინატთა ღერძებზე არის p, q, r : $\vec{\omega} = (p, q, r)$.

როგორც ვნახეთ მოძრავი კოორდინატთა ღერძების მიმმართეული კოსინუსები (i, j, k ვექტორების კოორდინატები $O\xi\eta\zeta$

სისტემაში) ელემენტარულად გამოისახება ეილერის კუთხეების საშუალებით. ამდენად, თუ სხეულის მოძრაობის განტოლებები ცნობილია, მაშინ $\vec{m}$ ვექტორი განისაზღვრება (62) ტოლობებით და სხეულის ნებისმიერი M წერტილის სიჩქარე გამოითვლება (64) ფორმულით.

თუ მყარი სხეულის უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვის შემთხვევაში მიღებულ (48) ფორმულას შევადარებთ (64) ფორმულას, დავრწმუნდებით შემდეგი დებულების სამართლიანობაში:

დებულება 8. როცა მყარი სხეული ბრუნავს უძრავი წერტილის გარშემო, მაშინ ღრძის ყოველ მომენტში სხეულში სიჩქარეები ისეა განაწილებული, თითქოს ადგილი ჰქონდეს O წერტილზე გამავალი გარკვეული Δ ღერძის გარშემო ბრუნვას $\vec{m}$ კუთხური სიჩქარით.

Δ ღერძს, რომელზეც აღებულ მომენტში $\vec{m}$ ვექტორი მდებარეობს, ეწოდება ბრუნვის მყისი ღერძი, ხოლო $\vec{m}$ -ს მყისი კუთხური სიჩქარე. ცხადია, სხეულის მოძრაობა, არ იქნება უბრალო ბრუნვა ღერძის გარშემო, რადგან ღრძთა ვითარებაში ზემოხსენებული Δ ღერძი იცვლის მდებარეობას როგორც მოძრავ, ასევე უძრავ სისტემაში.

ვინაიდან ბრუნვის მყისი ღერძის ყოველი წერტილის სიჩქარე აღებულ მომენტში ნულის ტოლია, ამიტომ ამ ღერძის წერტილებისათვის (64) ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\vec{v} = [\vec{m}, \vec{\rho}] = 0,$$

ან, რაც იგივეა,

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}. \quad (65)$$

ეს უკანასკნელი, ცხადია, წარმოადგენს ბრუნვის Δ მყისი ღერძის განტოლებას მოძრავ სისტემაში. ამავე ღერძის განტოლებას უძრავი სისტემის მიმართ შემდეგი სახე ექნება:

$$\frac{\xi}{P} = \frac{\eta}{Q} = \frac{\zeta}{R}, \quad (66)$$

სადაც P, Q, R წარმოადგენენ ω ვექტორის კოორდინატებს უძრავ სისტემაში.

ბრუნვის მყისი ღერძი, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, არ არის უძრავი. იმ ზედაპირს, რომელსაც ეს ღერძი უძრავ სისტემაში შემოწერს, ეწოდება *უძრავი აქსოიდი*, ხოლო იმ ზედაპირს, რომელსაც ის მოძრავ სისტემაში შემოწერს – *მოძრავი აქსოიდი*.

თუ (65) განტოლებებიდან დროს (t -ს) გამოვიცხავთ, მივიღებთ შემდეგი სახის განტოლებას:

$$\Phi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0. \quad (67)$$

რომელიც, როგორც ადვილი მისახვედრია, მოძრავი აქსოიდის განტოლებას წარმოადგენს. ასევე დავრწმუნდებით, რომ უძრავი აქსოიდის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

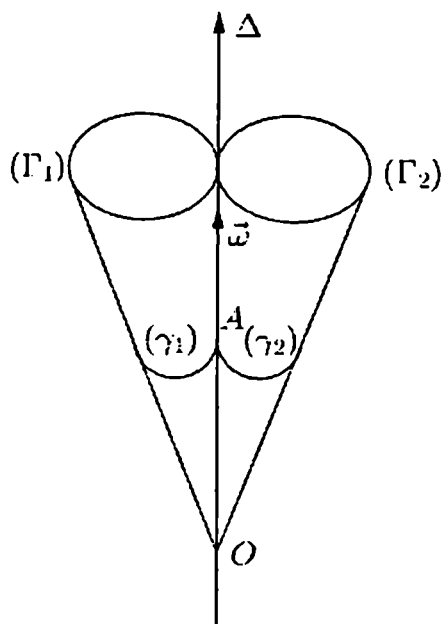
$$F\left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}\right) = 0. \quad (68)$$

ამ ორ კონუსურ ზედაპირს, რომელთა წვეროც არის O წერტილი, დროის ყოველ მომენტში საერთო Δ წრფე აქვს, რომლის გასწვრივაც ისინი ეხებიან ერთმანეთს (იხ. ნახ. 23). ეს Δ წრფე, როგორც ადვილი მისახვედრია, ბრუნვის მყის ღერძს წარმოადგენს, ამიტომ მისი წერტილების სიჩქარეები აღებულ მომენტში ნულის ტოლია.

შემოვიღოთ ერთი ზედაპირის მეორეზე სრიალის გარეშე გორვის ცნება.

ჩვენ ვიტყვი, რომ მოძრავი (Γ_2) ზედაპირი *სრიალის გარეშე გორავს* უძრავ (Γ_1) ზედაპირზე, თუ ეს ზედაპირები ყოველთვის თანახებაშია (აქვთ საერთო მხები სიბრტყე) და

(Γ_2) ზედაპირის იმ წერტილების სიჩქარე, რომლითაც ის (Γ_1) ზედაპირს ეხება, ნულის ტოლია. სრიალის გარეშე გორვის ცნება, ცხადია, გამოდგება მაშინაც, როცა (Γ_1) ზედაპირი მოძრაობს და განიხილება (Γ_2)-ის ფარდობითი მოძრაობა (Γ_1)-ის მიმართ.



ნახ. 23

დავამტკიცოთ პუანსოს^{*)} შემდეგი დებულება:

დებულება 9. როცა მყარი სხეული ბრუნავს უძრავი წერტილის გარშემო, მაშინ მოძრავი აქსოიდი სრიალის გარეშე გორავს უძრავ აქსოიდზე.

^{*)} ლ. პუანსო (1777-1859)

დამტკიცება. განვიხილოთ დროის ადებულ t მომენტში აღნიშნული ორი ზედაპირის საერთო წარმომქმნელის ნებისმიერი A წერტილი. ვთქვათ, (γ_1) და (γ_2) ის წირებია, რომლებიც A წერტილის მიერ არის შემოწერილი უძრავ (Γ_1) და მოძრავ (Γ_2) აქსოიდებზე. სავსებით ისევე, როგორც უძრავი და მოძრავი ცენტროიდების შემთხვევაში, შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ (γ_2) წირი სრიალის გარეშე გორავს (γ_1) წირზე და, მაშასადამე, ამ ორ წირს A წერტილში საერთო τ° მხები აქვს. ვინაიდან τ° უძრავი და მოძრავი აქსოიდების საერთო მხებსაც წარმოადგენს, ამიტომ ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ (Γ_1) და (Γ_2) ზედაპირებს საერთო შემქმნელი და ერთი საერთო მხები წრფე აქვთ. ამის შემდეგ ადვილად დავასკვნით, რომ აღნიშნულ შემქმნელზე და მხებზე გამავალი სიბრტყე იჭება მათი საერთო მხები სიბრტყე. რადგან საერთო წარმომქმნელის $(\Delta$ ღერძის) წერტილთა სიჩქარეები ადებულ მომენტში ნულის ტოლია, დავრწმუნდებით დებულების სამართლიანობაში.

განვიხილოთ ბრუნვის მყის ღერძზე ერთეულოვანი ვექტორი $(\Delta$ ღერძის მგეზავი) $\overline{OK}$. როცა მყარი სხეული მოძრაობს, მაშინ K წერტილი მოძრაობს, როგორც უძრავი $O\xi\eta\zeta$ სისტემის, ისე მოძრავი $Oxyz$ სისტემის მიმართ. აღვნიშნოთ K წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე $\vec{v}^a$ -თი, ხოლო ფარდობითი სიჩქარე $\vec{v}_r$ -ით. (32) ფორმულის ძალით, გვქვია

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r, \quad (69)$$

სადაც $\vec{v}_e$ არის K წერტილის წარმტანი სიჩქარე. ვინაიდან K წერტილი Δ ღერძზე მდებარეობს, ამიტომ, ცხადია, $v_e = 0$ და (69) ფორმულა მოგვცემს:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r. \quad (70)$$

ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ თუ K წერტილი უძრავია უძრავი სისტემის ($O\xi\eta\zeta$ სისტემის) ან მოძრავი სისტემის ($Oxyz$ სისტემის) მიმართ, მაშინ ის უძრავი იქნება ორივე სისტემის მიმართ. რადგან OK ვექტორი Δ ღერძზეა მოთავსებული, ამიტომ იგივე ითქმის ამ ღერძის მიმართაც. ამრიგად, ჩვენ ღავამტკიცეთ შემდეგი დებულება:

დებულება 10. თუ Δ ღერძი უძრავია უძრავი სისტემის მიმართ ან მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული სისტემის მიმართ, მაშინ ის უძრავი იქნება ორივე სისტემის მიმართ და მაშასადამე, მყარი სხეულის მოძრაობა იქნება ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო.

17. აჩქარებათა განაწილება უძრავი წერტილის გარშემო მყარი სხეულის მოძრაობის შემთხვევაში. რივალსის ფორმულა

(64) ტოლობის გაწარმოებით მივიღებთ

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{\rho} \right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right].$$

ვინაიდან $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{\rho}]$, ამიტომ, უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$\vec{w} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{\rho} \right] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]]. \quad (71)$$

(10) ფორმულის ძალით,

$$[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]] = \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{\rho}) - \vec{\rho}\omega^2 \quad (72)$$

თუ ამ მნიშვნელობას (71) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ, რომ

$$\vec{w} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{\rho} \right] + \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{\rho}) - \vec{\rho}\omega^2. \quad (73)$$

ამრიგად, აჩქარების გამოსათვლელად გვაქვს (71), ან რაც იგივეა, (73) ფორმულა.

აჩქარების გამოსახულებას შეიძლება კიდევ სხვა სახე მიეცეთ. აღვნიშნოთ ამ მიზნით $\vec{\omega}^\circ$ -ით $\vec{\omega}$ ვექტორის მგეზავი. მაშინ, თუ გავითვალისწინებთ, იმას რომ $\vec{\omega} = \omega \vec{\omega}^\circ$, (72) ტოლობის ძალით, მივიღებთ

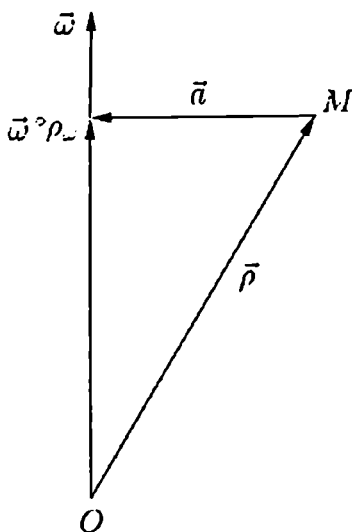
$$[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]] = \omega^2 [\vec{\omega}^\circ (\vec{\omega}^\circ, \vec{\rho}) - \vec{\rho}] = \omega^2 [\vec{\omega}^\circ \rho_\omega - \vec{\rho}] = \omega^2 \vec{a}, \quad (74)$$

სადაც

$$\vec{a} = \rho_\omega \vec{\omega}^\circ - \vec{\rho},$$

აქ (იხ. ნახ. 24)

$$\rho_\omega = \text{გეგ}_{\vec{\omega}} \vec{\rho}.$$



ნახ. 24

თუ (74) მნიშვნელობას (71) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ რივალსის^{*)} შემდეგ ფორმულას:

$$\vec{w} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{\rho} \right] + \omega^2 \vec{a}. \quad (75)$$

$\omega^2 a$ სიდიდეს ეწოდება ღერძისკენული აჩქარება.
ვინაიდან

$$\vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k},$$

ამიტომ

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{dp}{dt}\vec{i} + \frac{dq}{dt}\vec{j} + \frac{dr}{dt}\vec{k} + p\frac{d\vec{i}}{dt} + q\frac{d\vec{j}}{dt} + r\frac{d\vec{k}}{dt}. \quad (76)$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ ვექტორის გეგმილები Ox, Oy, Oz

ღერძებზე იჭება $\frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{dr}{dt}$, ამასთან (76) ტოლობის ორივე

მხარე გავამრავლოთ სკალარულად $\vec{i}$ -ზე, მივიღებთ

$$\text{ბმბო}_x \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{i} \right) = \frac{dp}{dt} + p \left(\vec{i}, \frac{d\vec{i}}{dt} \right) + q \left(\vec{i}, \frac{d\vec{j}}{dt} \right) + r \left(\vec{i}, \frac{d\vec{k}}{dt} \right).$$

როგორც წინა პარაგრაფებში იყო ნაჩვენები

$$\left(\vec{i}, \frac{d\vec{i}}{dt} \right) = 0, \quad \left(\vec{i}, \frac{d\vec{j}}{dt} \right) = -r, \quad \left(\vec{i}, \frac{d\vec{k}}{dt} \right) = q$$

თუ ამ მნიშვნელობებს უკანასკნელ ფორმულაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\text{ბმბო}_x \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{dp}{dt}.$$

ანალოგიურად მივიღებთ

^{*)} მ. ჯ. ე. რივალსი (1833-1889)

$$\text{გეზო}_y \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{dq}{dt}, \quad \text{გეზო}_z \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{dr}{dt}.$$

ამრიგად, მოძრავ კოორდინატთა სისტემაში ადგილი აქვს

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \left(\frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{dr}{dt} \right)$$

ტოლობას. თუ ამას გავითვალისწინებთ და (73) ტოლობას დაეგეგმილებთ მოძრავ კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{dq}{dt} z - \frac{dr}{dt} y + p(px + qy + rz) - \omega^2 x, \\ w_y &= \frac{dr}{dt} x - \frac{dp}{dt} z + q(px + qy + rz) - \omega^2 y, \\ w_z &= \frac{dp}{dt} y - \frac{dq}{dt} x + r(px + qy + rz) - \omega^2 z. \end{aligned} \quad (77)$$

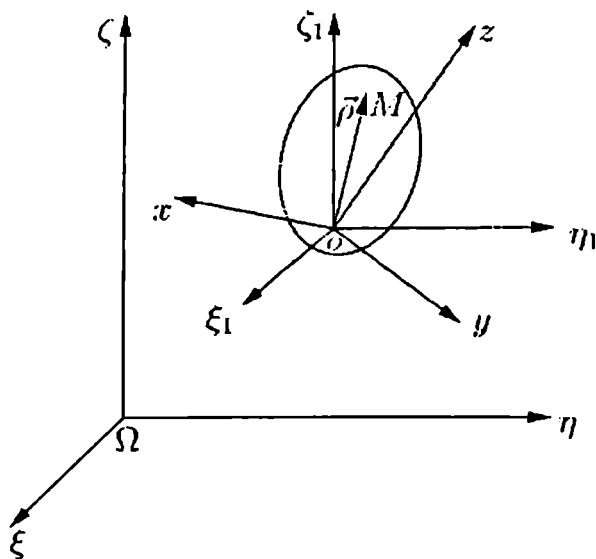
(73) ტოლობის უძრავ კოორდინატთა ღერძებზე დაგეგმილება მოგვცემს

$$\begin{aligned} w_\xi &= \frac{dQ}{dt} \zeta - \frac{dR}{dt} \eta + P(P\xi + Q\eta + R\zeta) - \xi(P^2 + Q^2 + R^2), \\ w_\eta &= \frac{dR}{dt} \xi - \frac{dP}{dt} \zeta + Q(P\xi + Q\eta + R\zeta) - \eta(P^2 + Q^2 + R^2), \\ w_\zeta &= \frac{dP}{dt} \eta - \frac{dQ}{dt} \xi + R(P\xi + Q\eta + R\zeta) - \zeta(P^2 + Q^2 + R^2), \end{aligned}$$

სადაც P, Q, R წარმოადგენენ ω ვექტორის კოორდინატებს უძრავ სისტემაში; ξ, η, ζ არის ρ ვექტორის კოორდინატები ამავე სისტემაში.

18. მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობა

განვიხილოთ $\Omega\xi\eta\zeta$ უძრავი სისტემა (Σ სისტემა) და მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებული $Oxyz$ სისტემა (S სისტემა). განვიხილოთ აგრეთვე $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ დამხმარე სისტემა, რომლის სათავე $Oxyz$ სისტემის სათავეს ემთხვევა და რომლის ღერძებიც პარალელურია უძრავი კოორდინატთა ღერძების (იხ. ნახ. 25).



ნახ. 25

მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობა $O\xi\eta\zeta$ სისტემის მიმართ შეიძლება განვიხილოთ, როგორც შედგენილი ორი მოძრაობისაგან: 1) დამხმარე სისტემის მოძრაობისაგან უძრავი სისტემის მიმართ, რომელიც გადატანით მოძრაობას წარმოადგენს და 2) დამხმარე სისტემის მიმართ მყარი სხეულის მოძ-

რაობისაგან (ანუ რაც იგივეა, მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებულ $Oxyz$ სისტემის დამხმარე სისტემის მიმართ მოძრაობისაგან), რომელიც წარმოადგენს ბრუნვას O წერტილის გარშემო. დამხმარე სისტემის გადატანით მოძრაობას განსაზღვრავს O წერტილის მოძრაობა, ხოლო $Oxyz$ სისტემის მოძრაობას დამხმარე სისტემის მიმართ ახასიათებს ეილერის φ, ψ, ϑ კუთხეები.

სხეულის მოძრაობის განტოლებებს აქვთ (იხ. (41) განტოლებები):

$\xi_0 = \xi_0(t), \eta_0 = \eta_0(t), \zeta_0 = \zeta_0(t), \varphi = \varphi(t), \psi = \psi(t), \vartheta = \vartheta(t)$, სახე. თუ მოცემულია სხეულის მოძრაობის განტოლებები, მაშინ შეიძლება დავწეროთ მისი ნებისმიერი M წერტილის მოძრაობის განტოლებები.

მართლაც, აღვნიშნოთ ξ, η, ζ -თი M წერტილის კოორდინატები $\Omega\xi\eta\zeta$ სისტემაში, ხოლო ამ წერტილის კოორდინატები $Oxyz$ სისტემაში იყოს x, y, z . ცხადია, გვექნება

$$\xi = \xi_0 + l_1x + l_2y + l_3z,$$

$$\eta = \eta_0 + m_1x + m_2y + m_3z,$$

$$\zeta = \zeta_0 + n_1x + n_2y + n_3z,$$

სადაც l_1, m_1, n_1 წარმოადგენენ Ox ღერძის მიმმართველ კოსინუსებს დამხმარე სისტემის მიმართ; ანალოგიურად მნიშვნელობა აქვს l_2, m_2, n_2 და l_3, m_3, n_3 სიდიდეებს. თუ გავითვალისწინებთ, რომ l_i, m_i, n_i ($i=1,2,3$) გამოისახებიან ეილერის კუთხეების საშუალებით (იხ. § 16), დავრწმუნდებით, რომ ზემოთ დაწერილი ფორმულები იძლევიან M წერტილის მოძრაობის განტოლებებს (x, y, z კოორდინატები სხეულის მოძრაობის

დროს არ იცვლებიან, რადგან $Oxyz$ სისტემა მყარ სხეულთან უძრავადაა დაკავშირებული).

გამოვთვალოთ მყარი სხეულის ნებისმიერი M წერტილის სიჩქარე. M წერტილის მოძრაობა უძრავ $\Omega\xi\eta\zeta$ სისტემის მიმართ განვიხილოთ, როგორც აბსოლუტური, ხოლო დამხმარე $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ სისტემის მიმართ – როგორც ფარდობითი, $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ სისტემის მოძრაობა უძრავი სისტემის მიმართ იქნება წარმტანი მოძრაობა. სიჩქარეთა შეკრების კანონის ძალით, მივიღებთ

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r, \quad (78)$$

სადაც $\vec{v}$ არის M წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე, $\vec{v}_r$ – ფარდობითი სიჩქარე, ხოლო $\vec{v}_e$ – წარმტანი სიჩქარე (ე.ი. დამხმარე სისტემის იმ წერტილის სიჩქარე, რომელშიც აღებულ მომენტში M წერტილი იმყოფება). ვინაიდან წარმტანი მოძრაობა გადატანითია, ხოლო გადატანითი მოძრაობის დროს სხეულის ყველა წერტილს ერთნაირი სიჩქარე აქვს, ამიტომ, ცხადია

$$\vec{v}_e = \vec{v}_0, \quad (79)$$

სადაც $\vec{v}_0$ წარმოადგენს მყარი სხეულის O წერტილის სიჩქარეს. ამის გარდა, ვინაიდან ფარდობითი მოძრაობა წარმოადგენს მყარი სხეულის ბრუნვას O წერტილის გარშემო, ამიტომ (იხ. (64) ფორმულა)

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}_r = [\vec{\omega}, \vec{\rho}], \quad (80)$$

სადაც P არის M წერტილის რადიუს-ვექტორი O წერტილის მიმართ (იხ. ნახ. 24), $\vec{\omega}$ – მყარი სხეულის O წერტილის გარშემო ბრუნვის შესაბამი მყისი კუთხური სიჩქარე.

თუ (79) და (80) მნიშვნელობებს (78) ტოლობაში შევიტანოთ, მივიღებთ:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + [\bar{\omega}, \bar{\rho}]. \quad (81)$$

თუ ამ ტოლობას დავაგვემიღებთ Ox , Oy , Oz ღერძებზე, მივიღებთ

$$v_x = v_{0x} + qz - ry,$$

$$v_y = v_{0y} + rx - pz,$$

$$v_z = v_{0z} + py - qx.$$

ანალოგიურად გამოითვლება სიჩქარის გვერდები უძრავ კოორდინატთა ღერძებზე.

$$v_\xi = v_{0\xi} + Q(\zeta - \zeta_0) - R(\eta - \eta_0),$$

$$v_\eta = v_{0\eta} + R(\xi - \xi_0) - P(\zeta - \zeta_0),$$

$$v_\zeta = v_{0\zeta} + P(\eta - \eta_0) - Q(\xi - \xi_0).$$

ზემოთ ვნახეთ, რომ მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობა შედგება გადატანითი და O წერტილის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობისაგან. O წერტილის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობა კი დაიყვანება O წერტილზე გამავალი გარკვეული ღერძის გარშემო მყისიერ ბრუნვამდე ω კუთხური სიჩქარით. გადატანით და ბრუნვით მოძრაობათა ერთობლიობა დაიყვანება მყისიერ ხრახნვამდე და მასმასადამე, მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობა შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც მყისიერი ხრახნვა. ამრიგად, გვაქვს შემდეგი დებულება:

დებულება 11. მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობის შემთხვევაში ღერძის ყოველ მომენტში მასში სიჩქარეები ისეა განაწილებული, თითქოს ადგილი ჰქონდეს მყის ხრახნვას.

ვთქვათ $\bar{\omega} \neq 0$, მაშინ მყისი ხრახნვის ცენტრალური ღერძის განტოლებებს აქვს

$$\frac{v_x^0 + qz - ry}{p} = \frac{v_y^0 + rx - pz}{q} = \frac{v_z^0 + py - qx}{r}$$

სახე. სადაც ν^o ვექტორი კუთხური სიჩქარეების ნაკრები მომენტია O წერტილის მიმართ (გადატანითი მოძრაობა შეიძლება შეეცვალოს ბრუნვათა წყვილით, იხ §15-ის ბოლო). აქ მყისი ხრახნვის ცენტრალური ღერძის განტოლებები დაწერილია (S) სისტემაში (მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებულ $Oxyz$ სისტემაში). ამავე ღერძის განტოლებებს (Σ) სისტემაში ექნება

$$\frac{\nu_\zeta^o + Q(\zeta - \zeta_0) - R(\eta - \eta_0)}{P} = \frac{\nu_\eta^o + R(\xi - \xi_0) - P(\zeta - \zeta_0)}{Q}$$

$$= \frac{\nu_\xi^o + P(\eta - \eta_0) - Q(\xi - \xi_0)}{R}$$

სახე. მყისიერი ხრახნვის პარამეტრი გამოითვლება

$$k = \frac{(\nu^o \cdot \omega)}{\omega^2} = \frac{\nu_x^o p + \nu_y^o q + \nu_z^o r}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

ფორმულით. მყისიერი ხრახნვის ცენტრალური ღერძი, რომელსაც Δ -თი აღვნიშნავთ, უძრავი არ არის. ის მოძრაობს, ზოგადად, როგორც (S) სისტემაში, ისე (Σ) სისტემაში. ზედაპირს, რომელსაც Δ ღერძი შემოწერს (Σ) სისტემაში, ეწოდება *ხრახნვის უძრავი აქსოიდი*, ხოლო ზედაპირს, რომელსაც ის (S) სისტემაში შემოწერს – *ხრახნვის მოძრავი აქსოიდი*.

აღვნიშნოთ (Γ_1) -ით და (Γ_2) -ით, შესაბამისად, ხრახნვის უძრავი და მოძრავი აქსოიდები. ეს ზედაპირები წრფოვანი ზედაპირებია, მაგრამ, ზოგადად, არაა კონუსური ზედაპირები. ამ ზედაპირებს ღროის ყოველ მომენტში აქვთ საერთო წარმომქმნელი – ხრახნვის ცენტრალური ღერძი Δ .

ვაჩვენოთ ახლა, რომ ეს ზედაპირები ღროის ყოველ მომენტში თანახებაშია Δ ღერძის გასწვრივ. მართლაც, გავავლოთ (Γ_2) ზედაპირზე რაიმე წირი (γ_2) და მისი გადაკვეთა Δ ღერძთან აღვნიშნოთ K -თი. ცხადია, K წერტილი მოძრაობს

(γ_2) -ზე და (Γ_1) ზედაპირზე მოხაზავს გარკვეულ (γ_1) წირს. ამრიგად, (γ_2) იქნება K წერტილის ფარდობითი ტრაექტორია (S) -სისტემაში, (γ_1) კი - აბსოლუტური ტრაექტორია (Σ) სისტემაში. (Σ) სისტემაში სიჩქარე იყოს $\vec{v}_a$, ხოლო (S) სისტემაში $\vec{v}_r$, სიჩქარეთა შეკრების კანონის თანახმად,

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r,$$

სადაც $\vec{v}_e$ წარმტანი სიჩქარეა, ე.ი. (S) სისტემის იმ წერტილის სიჩქარეა, რომელიც აღებულ მომენტში K წერტილს ემთხვევა. ვინაიდან K წერტილი Δ ღერძის წერტილია, ამიტომ $\vec{v}_e$ მდებარეობს Δ ღერძზე. ამის შემდეგ ცხადია, რომ $\vec{v}_a$, $\vec{v}_r$ და Δ ღერძი ერთ სიბრტყეშია მოთავსებული. ეს სიბრტყე ხრახნვის ორივე აქსოიდის მხებია და მამასადამე, (Γ_1) და (Γ_2) ზედაპირები თანახებაშია Δ ღერძის გასწვრივ.

ეთქვათ, რაიმე მოძრაეი წრფოვანი ზედაპირი მუდამ თანახებაშია მეორე უძრავ წრფოვოვან ზედაპირთან და, ეთქვათ, თანახების წარმომქმნელის წერტილების სიჩქარეები ამ წარმომქმნელის გასწვრივაა მიმართული, მაშინ ჩვენ ვიტყვით, რომ პირველი ზედაპირი გორსრიალებს მეორე ზედაპირზე.

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობა შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც ხრახნვის მოძრაეი აქსოიდის გორსრიალი ხრახნვის უძრავ აქსოიდზე.

გამოეთვალოთ ახლა მყარი სხეულის ნებისმიერი M წერტილის აჩქარება $\ddot{M}$. M წერტილის მოძრაობა (Σ) სისტემაში განვიხილოთ, როგორც აბსოლუტური, ხოლო დამხმარე სისტემაში $(O\xi_1\eta_1\zeta_1)$ სისტემაში, როგორც ფარდობითი. ვინაიდან წარმტანი მოძრაობა (დამხმარე სისტემის მოძრაობა) გადატანითია, ამიტომ, (40) ფორმულის ძალით, გვექნება

$$\bar{w} = \bar{w}_0 + \bar{w}_r,$$

სადაც $\bar{w}_r = \bar{w}_0$ წარმტანი აჩქარებაა, ხოლო $\bar{w}_r$ - ფარდობითი. ეინაიდან ფარდობითი მოძრაობა წარმოადგენს მყარი სხეულის ბრუნვას O წერტილის გარშემო, ამიტომ, (71) ფორმულის ძალით,

$$\bar{w}_r = \left[\frac{d\bar{\omega}}{dt}, \bar{\rho} \right] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \bar{\rho}]].$$

თუ ამ მნიშვნელობას (74) ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ:

$$\bar{w} = \bar{w}_0 + \left[\frac{d\bar{\omega}}{dt}, \bar{\rho} \right] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \bar{\rho}]].$$

როგორც აღვილი მისახვედრია, ამ ფორმულის მიღება შეიძლება (81) ტოლობის გაწარმოებითაც დროის მიმართ. (72) ტოლობის ძალით, ეს უკანასკნელი შემდეგნაირად შეიძლება გადაწეროთ:

$$\bar{w} = \bar{w}_0 + \left[\frac{d\bar{\omega}}{dt}, \bar{\rho} \right] + \bar{\omega}(\bar{\omega}, \bar{\rho}) - \bar{\rho}\omega^2.$$

თუ ამ ტოლობას დავაგეგმილებთ მოძრავ $Oxyz$ სისტემის ღერძებზე, მივიღებთ

$$w_x = w_{0x} + \frac{dq}{dt} z - \frac{dr}{dt} y + p(px + qy + rz) - \omega^2 x,$$

$$w_y = w_{0y} + \frac{dr}{dt} x - \frac{dp}{dt} z + q(px + qy + rz) - \omega^2 y,$$

$$w_z = w_{0z} + \frac{dp}{dt} y - \frac{dq}{dt} x + r(px + qy + rz) - \omega^2 z.$$

ანალოგიურად გამოითვლება აჩქარების გეგმილები უძრავ კოორდინატთა ღერძებზე.

19. წრფივი და წრიული მოძრაობების ანალოგია

წრფივი მოძრაობა

x - პოზიცია

$v = \dot{x}$ - სიჩქარე

$a = \dot{v} = \ddot{x}$ - აჩქარება

F - ძალა

m - მასა (ინერციის ზომა)

$F = ma = m\dot{v}$

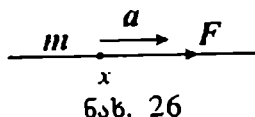
$p = mv$ - მოძრაობის

რაოდენობა, იმპულსი (linear momentum)

$F = \dot{p}$

$K = \frac{mv^2}{2}$ - კინეტიკური

ენერგია



წრიული მოძრაობა

θ - კუთხე

$\omega = \dot{\theta}$ - კუთხური სიჩქარე

$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$ - კუთხური აჩქარება

$T = rF$ - მგრესავი მომენტი (torque)

$I = mr^2$ - ინერციის მომენტი

$T = I\alpha = I\dot{\omega}$

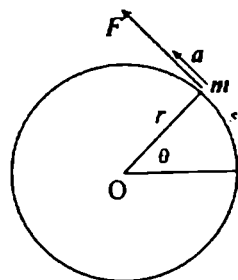
$M = I\omega$ - მოძრაობის

რაოდენობის მომენტი (angular momentum)

$T = \dot{M}$

$K = \frac{I\omega^2}{2}$ - კინეტიკური

ენერგია



ციტირებული ლიტერატურა

1. ვეკუა ი., ტენზორული ანალიზისა და კოვარიანტთა თეორიის საფუძვლები, გამომცემლობა „მეცნიერება“, თბილისი, 1982.
2. ობოლაშვილი ე., დრეკადობის მათემატიკური თეორიის საფუძვლები, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1993.
3. შანშიაშვილი ა., მასალათა გამძლეობა, „ცოდნა“, თბილისი, 1964.
4. ზარაძე ა., ორთოგონალურ პოლინომთა თეორიის ელემენტები (ზოგადი თეორია და კლასიკური პოლინომები), თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1996.
5. Avalishvili M., Gordeziani D., Investigation of a hierarchical model of prismatic shells, Bull. Georgian Acad. Sci., 165, 3 (2001), 485-488.
6. Avalishvili M., Gordeziani D., Investigation of two-dimensional models of elastic prismatic shells, Georgian Mathematical Journal, 10,1 (2003), 17-36.
7. Chichua G., A solid-fluid model with unilateral conditions, Bull. TICMI, 3 (1999), 22-26.
8. Chinchaladze N., Jaiani G., On a cusped elastic solid-fluid interaction problem, Appl. Math. Inform., 6, 2 (2001), 25-64.
9. Chinchaladze N., On a vibration of an isotropic cusped elastic plate under action of an incompressible fluid, Reports of Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, 28 (2002), 31-39.
10. Chinchaladze N., A cusped elastic plate-ideal incompressible fluid interaction problem, Reports of Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, 28 (2002), 52-60.

11. Chudinovich I., Constanda Ch., Variational and Potential Methods in the Theory of Bending of Plates with Transverse Shear Deformation, A Chapman & Hall/CRC, 2000.
12. Ciarlet Ph.G., Mathematical Elasticity, Vol.I: Three-Dimensional Elasticity, North-Holland, Amsterdam, New-York, Oxford, Tokyo, 1988.
13. Dautray R., Lions J.-L., Mathematical analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Vol. 1, Physical Origins and Classical Methods; Vol. 2, Functional and Variational Methods, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1988.
14. Enzyklopädie, Kleine, Mathematik, Leipzig, 1969.
15. Evans L.C., Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, AMS, Providence, Rhode Island, 1998.
16. Gordeziani D., To the accuracy of one variant of the theory of thin shells, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 215, 4 (1974), 751-754.
17. Gordeziani D., On the solvability of some boundary value problems for a variant of the theory of thin shells, Dokl. Akad. Nauk SSSR 215, 6 (1974), 1289-1292.
18. Jäger W., Mikelić A., On the boundary conditions at the contact interface between a porous medium and a free fluid, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe Fisiche e Matematiche-Serie IV, 23, Fasc. 3 (1996), 403-465.
19. Jaiani G., Elastic bodies with non-smooth boundaries – cusped plates and shells, ZAMM, 76, Suppl.2 (1996), 117-120.
20. Jaiani G., Application of Vekua's dimension reduction method to cusped plates and bars, Bull. TICMI, 5 (2001), 27-34.
21. Jaiani G., On a mathematical model of bars with variable rectangular cross-sections, ZAMM-Z. Angew. Math. Mech., 81, 3 (2001), 147-173.
22. Jaiani G., On the Relation of hierarchical models of cusped elastic plates and shells to the three-dimensional models, Reports of Seminar of I.Vekua Inst. of Appl. Math., 28 (2002), 40-51.

23. Jaiani G., Theory of Cusped Euler-Bernoulli beams and Kirchhoff-Love plates, Lecture Notes of TICMI, 3, 2002.
24. Jaiani G., Cusped Shell-like Structures, Springer, Heidelberg-Dordrecht-London-New York, 2011.
25. Jaiani G., Kharibegashvili S., Natroshvili D., Wendland W.L., Hierarchical Models for Elastic Cusped Plates and Beams, Lecture Notes of TICMI, 4, 2003.
26. Kharibegashvili S., Jaiani G., Dynamical problems in the (0,0) and (1,0) approximations of mathematical model of bars. In "Functional-Analytic and Complex Methods, Interactions, and Applications to PDEs". Proceedings of the International Graz Workshop, Graz, Austria, 12-16 February 2001, World Scientific, (2001) 188-248.
27. McLean W., Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations, Cambridge University press, 2000.
28. Meunargia T., On one method of construction of geometrically and physically nonlinear theory of non-shallow shells, Proceedings of A.Razmadze Mathematical Institute, Georgian Academy of Sciences, 119 (1999), 133-154.
29. Mindlin R.D., Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates, J. Appl. Mech., 18 (1951), 31-38.
30. Nečas I., Les méthodes directes en théorie équations elliptiques, Academia, Prague, 1967.
31. Reissner E., On bending of elastic plates, Quart. appl. Math., 5 (1947), 55-68.
32. Temam R., Navier-Stokes Equations, AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island, 2001.
33. Vashakmadze T., The Theory of Anisotropic Plates, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht--London--Boston, 1999.
34. Vekua I., Shell Theory: General Methods of Construction, Pitman Advanced Publishing Program, Boston--London--Melbourne, 1985.

35. Амен-заде Ю.А., Теория упругости, „Высшая школа“, Москва, 1971.
36. Беллман Р., Введение в теорию матриц, „Наука“, Москва, 1969.
37. Будак Б.М., Фомин С.В., Кратные интегралы и ряды, „Наука“, Москва, 1967.
38. Векуа И.Н., Об одном методе расчета призматических оболочек, Труды Тбилисского математического института им. А.Размадзе Академии наук Грузии, 21, (1955), 191-259.
39. Векуа И.Н., Теория тонких пологих оболочек переменной толщины, Труды Тбилисского математического института им. А.Размадзе Академии наук Грузии, 30 (1965), 5-103.
40. Векуа И.Н., Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек, „Наука“, Москва, 1982.
41. Владимиров В.С., Уравнения математической физики, „Наука“, Москва, 1981.
42. Вольмир А., Проблемы гидроупругости, Москва, 1981.
43. Голубева О.В., Курс механики сплошной среды, „Высшая школа“, Москва, 1972.
44. Джаиани Г.В., Решение некоторых задач для одного вырождающегося эллиптического уравнения и их применения к призматическим оболочкам, Изд-ство ТГУ, Тб., 1982.
45. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, „Наука“, Москва, 1965.
46. Кигурадзе И.Т., Начальные и краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, 1, Линейная теория, „Мецниереба“, Тбилиси, 1997.
47. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа, „Наука“, Москва, 1972.

48. Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В., Трехмерные задачи математической теории упругости, „Наука“, Москва, 1976.
49. Ладыженская О.А., Краевые задачи математической физики, „Наука“, Москва, 1973.
50. Лурье А.Н., Теория упругости, „Наука“, Москва, 1970.
51. Ляв А., Математическая теория упругости, М.-Л. 1935.
52. Мухелишвили Н.И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, „Наука“, Москва, 1966.
53. Новацкий В., Теория упругости, „Мир“, Москва, 1975.
54. Ректорис К., Вариационные методы в математической физике и технике, „Мир“, М., 1985.
55. Самуль В.И., Основы теории упругости и пластичности, „Высшая школа“, Москва, 1970.
56. Санчес-Паленсия Э., Неоднородные среды и теория колебаний, „Мир“, Москва, 1984.
57. Седов Л.И., Механика сплошной среды, т.1, „Наука“, Москва, 1973.
58. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С., Пластинки и оболочки, „Наука“, Москва, 1966.
59. Фикера Г., Теоремы существования в теории упругости, „Мир“, Москва, 1974.

- ადამარი ჟ.ს. (Jacques Hadamard) 154
- ბანახი ს. (Stefan Banach) 305
- ბელტრამი ე. (Eugenio Beltrami) 117
- ბერნული ი. (Jacob Bernoulli) 251
- ბესელი ფ.ვ. (Friedrich Wilhelm Bessel) 309
- ბეტი ე. (Enrico Betti) 110
- ბუსინესკი ჟ. (Joseph Valentin Boussinesq) 181
- გალილეი გ. (Galileo Galilei) 14
- გრამი ი.პ. (Jorgen Pedersen Gram) 307
- გრინი ჯ. (George Green) 123, 135
- დალამბერი ჟ.ლ. (Jean Le Rond d'Alembert) 12
- დიუჰამელი ჟ.მ.კ. (Jean Marie Constant Duhamel) 104
- დოლიძე დ. 15
- ევკლიდე (Εὐκλείδης) 304
- ეილერი ლ. (Leonhard Euler) 15
- ვაიერშტრასი კ.თ.ვ. (Karl Theodor Wilhelm Weierstraß) 220
- ვანდერმონდი შ.ო. (Charles Auguste Vandermonde) 48
- ვარინიონი პ. (Pierre Varignon) 430
- ვეკუა ი. 15
- ვინკლერი ე. (Emil Winkler) 202
- ილიუშინი ა.ა. (Алексей Антонович Ильюшин) 166
- იუნგი თ. (Thomas Young) 14
- კარმანი თ. (Theodore von Kármán) 15
- კირხჰოფი გ.რ. (Gustav Robert Kirchhoff) 182
- კლაპეირონი ბ. (Benoit Paul Emile Clapeyron) 15, 122, 131
- კორნი ა. (A. Korn) 136
- კოში ო. (Augustin Louis Cauchy) 14

კრონეკერი ლ. (Leopold Kronecker) 30
კუპრაძე ვ. 15

ლაგრანჟი ჟ. (Joseph Louis Lagrange) 14

ლაშბი (ლემბი) ჰ. (Horace Lamb) 152

ლამე გ. (Gabriel Lamé) 15

ლაქსი პ. (Peter Lax) 136

ლესგეი ა.ლ. (Henri Léon Lebesgue) 319

ლევინ-ჩივატა ტ. (Tullio Levi-Civita) 18, 405

ლერე ჟ. (Jean Leray) 151

ლიავი ო.ე.პ. (Augustus Edward Hugh Love) 182

ლიპშიცი რ.ო.ს. (Rudolf Otto Sigismund Lipschitz) 315

მიზესი რ. (Richard von Mises) 163

მილგრამი ა.ნ. (Arthur N. Milgram) 136

მინდლინი რ.დ. (Reimond D. Mindlin) 203

მიჩელი ჯ.ჰ. (John Henry Michell) 117

მორი ქ.ო. (Christian Otto Mohr) 53

მუსხელიშვილი ნ. 15

ნავიე ლ.მ. (Louis Marie Henri Navier) 14

ნოიმანი ფ.ე. (Franz Ernst Neumann) 104

ნიკურაძე ი. 15

ნიუტონი ი. (Isaac Newton) 9

ოზენი კ.ვ. (Carl Wilhelm Oseen) 144

პარსევალი მ.ა. (Marc Antoin Parseval) 309

პრანდტლი ლ. (Ludwig Prandtl) 15

პუანკარე ჟ.ა. (Jules Henri Poincaré) 319

პუანსო ლ. (Louis Poinso) 490

პუასონი ს. (Simeon Denis Poisson) 14

ჟერმენი ს. (Sophie Germain) 14

ჟუკოვსკი ნ.ე. (Николай Егорович Жуковский) 15

რაისნერი ე. (Reissner Eric) 203
 რეინოლდსი ო. (Osborne Reynolds) 15
 რივალსი მ.ჯ.ე. (Marc-Joseph-Émillien Rivals) 494
 რიკიე შ. (Charles Riquir) 196
 რისი ფ. (Frigyes Riesz) 310
 როდრიგი ბ.ო. (Benjamin Olinde Rodrigues) 341
 სენ-ვენანი ბ. (Barré de Saint-Venant) 15
 სობოლევსკი ს.ლ. (Сергей Львович Соболев) 295
 სტოქსი ჯ.გ. (George Gabriel Stokes) 15
 ფლამანი ა. (Alfred Flamant) 181
 ფრიდრიხსი კ.ო. (Kurt Otto Friedrichs) 313
 შაუდერი ი.პ. (Julius Pawel Schauder) 308
 შვარცი ლ. (Laurent Schwartz) 321
 ჩაპლიგინი ს.ა. (Сергей Алексеевич Чаплыгин) 15
 ჩეზარო ე. (Ernesto Cesaro) 89
 ჰანი ჰ. (Hans Hahn) 310
 ჰენკი ჰ. (H. Hencky) 163
 ჰილბერტი დ. (David Hilbert) 305
 ჰოლდერი ო.ლ. (Otto Ludwig Hölder) 137
 ჰუბერი მ.ტ. (M.T. Huber) 163
 ჰუკი რ. (Robert Hooke) 14

ა

აბსოლუტურად მყარი სხეული,
12

აბსოლუტური ძერა, 74

ადგილობრივი დენადობა, 92

ანიზოტროპული, 95

ანტიბრტყელი დეფორმაცია,
169

ანტიწრფივი (სემიწრფივი)
ფუნქციონალი, 321

არაერთგვაროვანი

ანიზოტროპული, 95

არაკუმშვადი სითხე, 149

არანიუტონისეული ფლუიდები
(სითხეები), 109

არსებითად შემოსაზღვრული,
153

არსებითი ზედა ზღვარი, 153

აფინური ასახვა, 61

აქტიური დეფორმაცია, 158

ბ

ბაზისი შაუდერის აზრით, 308

ბაზისი, 308

ბანახის სივრცე, 305

ბაროტროპული სითხე, 148

ბელტრამი-მიჩელის

თავისებულების პირობები, 117

ბერნულის (ანუ ბრტყელი
კვეთის) ჰიპოთეზა, 251

ბესელის პოტენციალთა
სივრცე, 324

ბესელის უტოლობა, 309

ბეტის იგივეობა, 110

ბლანტი სითხე, 107

ბმა, 463

ბრტყელი დაძაბული

მდგომარეობა, 43, 173

ბრტყელი დეფორმაცია, 169

ბრუნვის კუთხური სიჩქარე,
472

გ

გადაადგილების კეპტორი, 56,
79

გადაადგილების კეპტორის
კომპონენტები, 56, 79

გადაძვრელი ძალები, 190

გამყარების პრინციპი, 12

განაწილება, 322

განზოგადებული ბრტყელი
დაძაბული მდგომარეობა, 178

განზოგადებული გადაძვრელი
ძალა, 197

განივი (გადაძვრელი) ძალა,
247

განივი კვეთი, 247

განივი ღუნვა, 248

განმტკიცების მდგომარეობა,
92

განტვირთვის პროცესი, 158

გარსის საზღვარი, 217

გაფართოება ფუნქციის, 325

გორსრიალები, 501

გრამის დეტერმინანტი, 307
გრეხა-ლუნვის კომპონენტები,
414

გრიხის იგივეობა, 135
გრიხის ფორმულა, 123

დ

დადებითად განსაზღვრული
ოპერატორი, 312
დადებითი ოპერატორი, 312
დალაშქრის პრინციპი, 12
დამღვარი (სტაციონარული)
მოძრაობა (პროცესი), 144
დატვირთვის პროცესი, 158
დენალობის ზღვარი, 91, 162
დენის წირი, 142
დეფორმადი მყარი სხეულების
მექანიკა, 13
დეფორმადი მყარი სხეული, 12
დეფორმაცია, 12, 55
დეფორმაციის ზედაპირი, 77
დეფორმაციის ინტენსივობა,
157
დეფორმაციის კომპონენტები,
68
დეფორმაციის პოტენციალური
ენერგია, 125
დეფორმაციის ტენზორი, 68,
75
დეფორმირებული მდგომარეობა,
125
დინამიკის პირველი ძირითადი
ამოცანა, 120

დიუჰამელ-ნოიმანის
თერმოდინამიკები, 128
დიუჰამელ-ნოიმანის კანონი,
104

დიფუზიონური, 326
დრეკადი მუდმივები, 94
დრეკადი ფუძე, 201
დრეკადი ფუძის რეაქცია, 202
დრეკადობის ზღვარი, 91
დრეკადობის თეორია, 13
დრეკადობის თეორიის
ამოცანების ამოხსნის
მეთოდები, 133
დრეკადობის თეორიის
ძირითადი სასაზღვრო
ამოცანები, 112, 113
დრეკადობის მოდული, 100
დრეკადობის მომენტური
(მიკროპოლარული) თეორიის
კინეტიკური ენერგია, 413
დრეკადობის მომენტური
(მიკროპოლარული) თეორიის
კომის ფორმულები, 404
დრეკადობის მომენტური
(მიკროპოლარული) თეორიის
პოტენციური ენერგია, 415
დრეკადობის მომენტური
(მიკროპოლარული) თეორიის
წონასწორობის
განტოლებები, 405
დრეკადობის მომენტური
(მიკროპოლარული) თეორიის
ჰუკის განზოგადებული
კანონი, 418

დრეკად-პლასტიკური სხეული,
155

ი

გეგმიდეს სივრცე, 304
ეილერის განტოლებები, 143-
144

ეილერის კუთხეები, 60, 482

ეილერის მეთოდი, 139

ეილერის სუბსტანციური
წარმოებულნი, 140

ეილერის ცვლადები, 140

ელემენტარული მოქმედებები,
431

ელემენტის საყრდენი, 322

ენერგიის შენახვის კანონი, 125

ერთგვაროვანი დეფორმაცია,
64

ერთგვაროვანი ძერა, 74

ერთგვაროვანი სხეული, 95

კ

კაიერშტრასის თეორემა, 220

კანდორმონდის დეტერმინანტი,
48

კარინიონის დებულება, 430

კეპტორთა აღებული სისტემის
ცენტრალური ღერძი, 455

კეპტორის მომენტი, 428

კეპტორული ნამრავლი, 17

კეპტორული სივრცე, 298

კინკლერის ექსპერიმენტული
ჰიპოთეზა, 202

ზ

ზედაპირის მთავარი ღერძი, 40

ზედაპირული ძალა, 16, 18

თ

თავისუფალი ბოლო, 255

თავისუფალი ნაპირი, 213-214

თავისუფალია საზღვარი, 197

თავმოყრილ ვექტორთა
სისტემა, 430

თავსებადობის სენ-ვენანის
პირობები, 86

თეორიული მექანიკა, 9

თერმოდრეკადობის
განტოლებები, 128

თვითშეუღლებული
ოპერატორი, 312

ი

იდეალური სითხე, 106

იზოტროპული სხეული, 94

ილიუშინის თეორემა

განტვირთვის შესახებ, 166

ინერციის კანონი, 10

ინერციის მომენტი, 253

ინერციის ძალა, 12

ინვარიანტული ინტეგრალი, 32

ინვარიანტული ფორმა, 32

ინტერფეისი, 282

იუნგის მოდული, 100

კ

კეპტორული ფუნქციონალი,
306

კვალის ოპერატორი, 318
 კვითის მეთოდი, 19
 კინეტიკური ენერგია, 122
 კირხჰოფ-ლავის პიპოთეზები,
 182
 კლაპეირონის თეორემა, 132
 კოვარიანტული ტენზორი, 29
 კომპოზიციური გარემო, 291
 კონგრუენტული ოპერატორი,
 313
 კონსტიტუტიური
 დამოკიდებულებები, 93
 კონტრავარიანტული ტენზორი,
 29
 კოჭი, 247
 კრონეკერის სიმბოლო, 26, 30

ლ

ლაგრანჟის მეთოდი, 139
 ლაგრანჟის ცვლადები, 89, 139
 ლამეს განტოლებები, 113
 ლაქს - მილგრამის თეორემა,
 136
 ლებეგის დადებითი ზომა, 319
 ლევის განტოლება, 172
 ლეჟანდრის განტოლება, 340
 ლეჟანდრის პოლინომი, 218,
 331
 ლინეალი, 298
 ლამბიციის საზღვარი, 315
 ლოკალურად გაშვებული
 ფუნქცია, 324

მ

მანძილი, 298
 მარტივი დატვირთვა, 158
 მარტივი ძერა, 74
 მასალათა გამძლეობა, 13
 მასობრივი ძალა, 17
 მატერიალური ობიექტი, 9
 "მატერიალური" წარმოებული,
 140
 მატრიცა, ორთოგონალური, 60
 მაქსველის სითბოგამტარობის
 კოეფიციენტი, 129
 მერეზავი მომენტი, 190
 მეტრიკა, 298
 მეტრიკული სივრცე, 298
 მექანიკა, 9
 მექანიკური მოძრაობა, 9
 მთავარი მომენტი, 17, 19
 მთავარი ღერძები, 96
 მთავარი ძაბვა, 33
 მთელი სხეულის განტვირთვა,
 166
 მიკროპოლარული სითხეების
 პილრომექანიკა, 422
 მკერივი სიძრავლე, 305
 მომენტური თეორიის
 დეფორმაციის კომპონენტები,
 414
 მომენტური ძაბვის ექსტორი,
 403
 მონათესავე ოპერატორი, 313
 მორის წრეები, 46, 53
 მოქნილი ფირფიტების თეორია,
 183

მოცულობითი (მასობრივი)
 მომენტი, 402
 მოცულობითი ძალა, 16
 მოცულობის ფარდობითი
 გაფართოება, 79
 მოცულობის ცვლილების
 კანონი, 164
 მოძრავი აქსოიდი, 489
 მოძრაობის ტრაექტორია, 142
 მუდმივკვეთიანი ძელი, 247
 მულტი ინდექსი, 320
 მუშაობა, 120
 მზუნავი მომენტი, 190, 247
 მცირე ღრეკად-პლასტიკური
 დეფორმაციების თეორია,
 164
 მხები მღგენელი (ძაბვის
 ვექტორის), 21
 მხები ძაბვების ინტენსივობა,
 156

6

ნავიე-სტოქსის განტოლებები,
 143
 ნავიე-სტოქსის განტოლებების
 სუსტი (კარიაციული)
 ფორმულირება, 151
 ნაკრები (მთავარი) ვექტორი,
 428
 ნაკრები ვექტორი, 11
 ნაკრები მომენტი, 11, 430
 ნარჩენი დეფორმაცია, 155
 ნარჩენი ძაბვები, 167

ნარჩენი ძაბვების,
 დეფორმაციების და
 გადაადგილებების შესახებ
 თეორემა, 167
 ნახევარნორმა, 299
 ნახვევი, 323
 ნეიტრალური სიბრტყე, 182
 ნეიტრალური ღერძი, 251
 ნეიტრალური შრე, 251
 ნიუტონის კანონები, 9
 ნიუტონისეული ფლუიდეზი
 (სითხეები), 109
 ნორმა, 299
 ნორმალური მღგენელი (ძაბვის
 ვექტორის), 21
 ნორმირებული ლინეალი, 299
 ნულოვანი ელემენტი, 298, 312
 ნულოვანი მიახლოება
 (პრიზმული გარსების
 იერარქიული მოდელების),
 226, 372

ო

ოზენის განტოლებები, 144
 ოპერატორი, 306
 ოპერატორის გაფართოება, 313
 ორადწრფივი ფორმა, 322
 ორთოგონალური მატრიცა, 60
 ორთოგონალური პროექცია,
 315
 ორთოგონალური სისტემა, 308
 ორთონორმირებული სისტემა,
 308

მარალელურ პექტორთა
 ცენტრი, 457
 მარსეალის ტოლოძა, 309,
 323
 მასიური დეფორმაცია, 158
 მირველი მიახლოება
 (პრიზმული გარსების
 იერარქიული მოდელის),
 228
 პლასტიკური დეფორმაცია, 13
 პლასტიკური სხეული, 155
 პლასტიკურობა, 13
 პლასტიკურობის გამოყენებითი
 თეორია, 155
 პლასტიკურობის თეორია, 13,
 155
 პლასტიკურობის პირობები, 161
 პოტენციალური ენერგია, 125
 პრიზმული გარსების
 იერარქიული მოდელის, 216
 პრიზმული გარსი, 216, 368
 პრიზმული გარსის სისქე, 217
 პროპორციულობის ზღვარი,
 90
 პუანკარეს უტოლობა, 319
 პუასონის კოეფიციენტი, 100

რ

რაისნერ-მინდლინის
 კინემატიკური ფორმულები,
 206
 რაისნერ-მინდლინის ტიპის
 მოდელი, 203

რბილად დაყრდნობილი ნაპირი,
 213
 რბილად ჩამაგრებული ნაპირი,
 213
 რეგულარული განაწილება,
 324
 რთული დატვირთვა, 158
 რიეალის ფორმულა, 493-494
 რისის თეორემა, 310
 როდრიგის ფორმულა, 341

ს

საკონტაქტო პირობები, 282
 სამშენებლო მექანიკა, 14
 საყრდენი, 314, 322
 სახსროვნად დაყრდნობილი
 ძოლო, 255
 სახსრულად დაყრდნობილი
 საზღვარი, 196
 სენ-ვენანის პლასტიკურობის
 პირობა, 162
 სენ-ვენანის პრინციპი, 132
 სეპარაბელური სივრცე, 307
 სესტიწრფივი ფუნქციონალი,
 321
 სიბლანტის კოეფიციენტი, 108
 სიბლანტის ფუნქცია, 109
 სივრცე კვადრატული
 მეტრიკით, 304
 სივრცე სკალარული
 ნამრავლით, 304
 სითბო, 129
 სითბოგამტარობის განტოლება,
 128

სითბოგამტარობის მაქსიმუმის
 კოეფიციენტი, 129
 სითბური ნაკადი, 130
 სიმეტრიული ოპერატორი, 312
 სიმკვრივე, 17
 სიმტკიცის ზღვარი, 92
 სიმტკიცის მეოთხე თეორია,
 164
 სინგულარული განაწილება,
 324
 სისტემის ტოლქმედი, 431
 სკალარული ნამრავლი, 18,
 300
 სობოლევის სივრცე, 134, 295,
 324
 სობოლევ-სლობოდევკის
 სივრცე, 324
 სოფი ჟერმენ-ლაგრანჟის
 განტოლება, 194-195
 სპინური მომენტი, 412
 სრიალის გარეშე გორვა, 490
 სრული მიმდევრობა, 307
 სრული სივრცე, 305
 სრული სისტემა, 309
 სტატიკურად ნულის
 მაკვიფალენტური ძალები, 132
 სტაციონარული (დამდგარი)
 მოძრაობა (პროცესი), 144
 სტოქსის განტოლებები, 144
 სუბსტანციური წარმოებულის,
 140
 სუსტი ამონახსნი, 153
 სუფთა ღუნვა, 248
 სქელი ფირფიტების თეორია,
 183

სხეულის დეფორმაციის
 პოტენციალური ენერგია,
 125
 სხეულის დრეკადი
 წონასწორობა, 111
 სხეულის თავისუფლების
 ხარისხი, 463

ტ

ტემპერატურული გამტარობის
 კოეფიციენტი, 129
 ტემპერატურული ძაბვები, 103
 ტენზორი, 29
 ტენზორების პირდაპირი
 ნამრავლი, 29
 ტრანსმისიის, პირობები, 282

უ

უნიტარული სივრცე, 304
 უსასრულოდ მცირე ასახვა, 65
 უძრავი აქსოიდი, 489
 უწყვეტ გარემოთა (სხეულთა)
 მექანიკა, 12
 უწყვეტი გარემო, 9
 უწყვეტი ოპერატორი, 313
 უწყვეტობის განტოლება
 ეილერის ცვლადებში, 147

ფ

ფაზა, 291
 ფარდობითი ტემპერატურული
 გაფართოება, 104
 ფარდობითი ძერა, 74
 ფარდობითი წაგრძელება, 75

ფირფიტა თხელი, 183

ფირფიტა, 176

ფირფიტას განივი ძერის
ლეფორმაცია, 204

ფირფიტების ლუნვის

კლასიკური თეორია, 182

ფირფიტის სისქე, 176

ფლამანის ამოცანა, 181

ფორმის ცვლილების კანონი,
165

ფრიდრიხის გაფართოება, 313

ფრიდრიხის უტოლობა, 319

ფუნდამენტური მიმდევრობა,
305

ფუნქციის კვალი, 318

ფუნქციის საყრდენი, 314

ფუნქციის კვალი, 318

ფუნქციონალი, 306

ფუნქციონალის ნორმა, 310

ფურიეს კოეფიციენტები, 309

ფურიეს მწკრივი, 309

ქ

ქმელებისა და უკუქმელების
კანონი, 11

ლ

ლერო, 247

ლეროების იერარქიული
მოდელები, 256

ლერძისკენული აჩქარება, 494

ყ

ყოველმხრივ შეკუმშვის
მოდელი, 101

შ

შებრუნებული ელემენტი, 298

შეზღუდვა ფუნქციის, 325

შემოსაზღვრული ოპერატორი,
313

შემოსაზღვრული

ფუნქციონალი, 310

შეუღლებული (დუალური)
სივრცე, 311

შეუღლებული ოპერატორი, 311

შეყურსული მომენტი, 133

შეყურსული ძალა, 133

შვარცის სივრცე, 321

შინაგანი ბრუნვა, 402

შუა სიბრტყის გაუჭიმვადობის
პიპოთეზა, 182, 204

შუა სიბრტყისადმი

პარალელურ ფენებს შორის

წნევის არარსებობის

პიპოთეზა, 183, 204

ჩ

ჩაკეტილი სისტემა, 309

ჩალაგების თეორემა, 328

ჩამაგრებული საზღვარი, 196

ჩეზაროს ფორმულები, 87

ც

ცვლადი სისტის ფირფიტა, 195

ცვლადკვეთიანი ძელი, 247

ცილინდრული სიხისტე, 190

ძ

ძაბვის ზედაპირი, 38

ძაბვის მთავარი მიმართულება,
33

ძაბვის ტენზორი, 23, 27

ძაბვის ტენზორის

ინვარიანტები, 37

ძაბვის ტენზორის მთავარი

კომპონენტები, 35

ძალის მომენტი, 11

ძალისა და არჩაგრების

პროპორციულობის კანონი,

10

ძელის ღერძი, 247

ძელის ღუნვა, 247

ძერის კოეფიციენტი, 208

ძერის კუთხე, 74

ძერის მოდული, 101

ძირითადი შერეული

სასაზღვრო ამოცანა, 113

ძლიერი ამონახსნი, 154

წ

წამახვილებული გარსი, 225

წამახვილებული ფირფიტა,

196

წამახვილებული ღერო, 256

წარმომქმნელი ფუნქცია

(ლეჟანდრის პოლინომთა),

332

წერტილის გარშემო ბრუნვის

განტოლებები, 482

წერტილში ბრტყელი

დაძაბული მდგომარეობა, 173

წინარე პილბერტის სივრცე,

304

წნევა, 107

წონასწორობის განტოლებები,

25

წონასწორობის მდგომარეობა,

11

წრფივად დამოკიდებული, 307

წრფივად დამოუკიდებელი,

307, 308

წრფივი გარსი, 298

წრფივი გაფართოების

ტემპერატურული

კოეფიციენტი, 104

წრფივი დაძაბული

მდგომარეობა, 44

წრფივი ნორმალების

პიპოტეზა, 182, 204

წრფივი ოპერატორი, 306

წრფივი სივრცე, 298

წრფივი სისტემა, 298

წრფივი ქვესივრცე, 314

ხ

ხახუნის ძალა, 107

ხვედრითი სითბოტეკეალობა,

129

ხისტად დაყრდნობილი ნაპირი,

213

ხისტად ჩამაგრებული ბოლო,

255

ხისტად ჩამავრებული ნაპირი,
213

ხისტი გადაადგილება, 56
ხრაზნების მოძრავი აქსოიდი,
500

ხრაზნების უძრავი აქსოიდი,
500

ჯ

ჯეკსონის თეორემა, 355

ჰ

ჰან-ბანახის თეორემა, 310

ჰიდროაერომექანიკა, 13

ჰიდროდინამიკური წნევის

ექსტორი, 107

ჰილბერტის (H) სივრცე, 305

ჰიოლდერის მაჩვენებელი, 137

ჰომეომორფიზმი, 326

ჰუბერ-მიზეს-ჰენკის

კლასტიკურობის პირობა,

163

ჰუკის დიაგრამა, 90

სარჩევი

მეორე გამოცემის წინასიტყვაობა.....	3
პირველი გამოცემის წინასიტყვაობა.....	4
მეთოდური მითითებები.....	6
შესავალი. ძირითადი პიპოთეზები	9
ნაწილი I. სამგანზომილებიანი მოდელები	16
თავი I. ძაბვების თეორია	16
§1.1. მოცულობითი და ზედაპირული ძალები.....	16
§1.2. ძაბვის ექტორის დამოკიდებულება ზედაპირის უსასრულოდ მცირე ელემენტის ორიენტაციაზე. კოშის ფორმულები.....	21
§1.3. წონასწორობის განტოლებები	24
§1.4. კოორდინატთა სისტემის შეცვლა. ინვარიანტული კვადრატული ფორმა.....	28
§1.5. მთავარი ძაბვები. ძაბვის მთავარი მიმართულებები. ძაბვის ზედაპირი	33
§1.5.1. მორის წრეები.....	46
თავი II. დეფორმაციათა თეორია.....	55
§1.6. დეფორმაციის ცნება.....	55
§1.7. აფინური ასახვა	61
§1.8. უსასრულოდ მცირე აფინური ასახვის დაშლა საკუთრივ დეფორმაციად და ხისტ გადაადგილებად	65
§1.9. დეფორმაციის ინვარიანტული კვადრატული ფორმა, კოორდინატთა სისტემის შეცვლა. დეფორმაციის მთავარი მიმართულებები. დეფორმაციის ზედაპირი	74
§1.10. ზოგადი სახის დეფორმაცია	79
§1.11. გადაადგილების განსაზღვრა დეფორმაციის კომპონენტების საშუალებით. ჩეზაროს ფორმულები. თავსებადობის სენ-ვენანის პირობები.....	83
თავი III. კონსტიტუციური დამოკიდებულებები.....	88
§1.12. დრეკადობის თეორიის ძირითადი კანონი – ჰუკის განზოგადებული კანონი.....	88
§1.13. იდეალური და ბლანტი სითხეები. ჰიდრომექანიკის ძირითადი კანონი – ნიუტონის განზოგადებული კანონი.....	106
თავი IV. დრეკადობის თეორიის სტატიკისა და დინამიკის ამოცანები	110

§1.14. ბეტის იგივეობა	110
§1.15. დრეკადი სხეულის სტატიკის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები.....	110
§1.16. ძირითადი განტოლებები გადაადგილებებში.....	113
§1.17. ძირითადი განტოლებები ძაბვებში.....	114
§1.18. დინამიკის ამოცანები. დინამიკისა და სტატიკის ძირითადი ამოცანების ამონახსნის ერთადერთობა.....	117
§1.19. კლაპეირონის თეორემა.....	131
§1.20. სენ-ვენანის პრინციპი	132
§1.21. დრეკადობის თეორიის ამოცანების ამოხსნის მეთოდები. ამონახსნის არსებობის თეორემები.....	133
თავი V. ჰიდროდინამიკის სტაციონარული და არასტაციონარული ამოცანები	138
§1.22. ლაგრანჟის და ეილერის ცვლადები.....	138
§1.23. ნავიე-სტოქსის განტოლებები. სტოქსის და ოზენის მოდელები. ეილერის განტოლებები	143
თავი VI. პლასტიკურობის თეორია	155
§1.24. დრეკად-პლასტიკური და პლასტიკური სხეულები	155
§1.25. ძაბვებისა და დეფორმაციების ინტენსივობა	156
§1.26. ჰუკის გარდაქმნილი კანონი.....	159
§1.27. პლასტიკურობის პირობები.....	161
§1.28. მცირე დრეკად-პლასტიკური დეფორმაციების თეორია.....	164
§1.29. ილიუშინის თეორემა განტვირთვის შესახებ	166
§1.30. პლასტიკურობის თეორიის ამოცანების დასმა	168
ნაწილი II. ორგანოზომილებიანი მოდელები	169
თავი I. დრეკადობის ორგანოზომილებიანი თეორია	169
§2.1. ბრტყელი დეფორმაცია	169
§2.2. ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა	173
§2.3. განზოგადებული ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა	176
თავი II. ფირფიტების და გარსების თეორია.....	182
§2.4. თხელი ფირფიტების ლუნვის კლასიკური თეორია. კირხჰოფ- ლიავის მოდელი	182
2.4.1. გადაადგილებები და დეფორმაციები ფირფიტებში.....	185
2.4.2. ძაბვები ფირფიტაში.....	186
2.4.3. ძაღვები ფირფიტებში	189

2.4.4. გაღუნული შუა ზედაპირის განტოლება	192
2.4.5. ძირითადი ამოცანები ფირფიტისათვის.....	196
2.4.6. ფირფიტის ღუნვა ღრეკად ფუძეზე.....	201
§2.5. რაისნერ-მინდლინის ტიპის მოდელი	203
§2.6. პრიზმული გარსების ივეკუას იერარქიული მოდელები	216
ნაწილი III. ერთგანზომილებიანი მოდელები	247
§3.1. ღეროს ელერ-ბერნულის მოდელი.....	247
§3.2. ღეროების იერარქიული მოდელები.....	256
3.2.1. საწყის-სასაზღვრო ამოცანები.....	270
3.2.2. (0,0) მიახლოება.....	274
3.2.3. (1,0) მიახლოება.....	278
ნაწილი IV. ღრეკად და თხევად გარემოთა ურთიერთქმედების ამოცანები	282
§4.1. ტრანსმისიის (საკონტაქტო) პირობები.....	282
§4.2. ღრეკადი და თხევადი ნაწილებისაგან შემდგარი სხეულის რხევა.....	291
ნაწილი V. დამატებები	298
დამატება 1. დამხმარე მასალა ფუნქციონალური ანალიზიდან.....	298
დამატება 2. ლეჟანდრის პოლინომები	330
1. ლეჟანდრის პოლინომების წარმოშობილი ფუნქცია.....	330
2. რეკურენტული ფორმულები	333
3. დიფერენციალური განტოლება, რომელსაც აკმაყოფილებს $P_n(x)$ პოლინომი	340
4. როდრიგის ფორმულა.....	341
5. ლეჟანდრის პოლინომთა სისტემის ორთოგონალობა $[-1,1]$ სკემენტზე.....	343
6. შმიდტის ორთოგონალიზაციის მეთოდი	349
7. ფურიე-ლეჟანდრის მწკრივები	353
დამატება 3. მოძრავ მოცულობაზე განხილული ინტეგრალის დროის მიმართ გაწარმოების ფორმულა	357
დამატება 4. ორი სასარგებლო ფორმულა სიბრტყეზე.....	366
დამატება 5. პრიზმული გარსები.....	368
1. ი. ვეკუას იერარქიული მოდელების ძირითადი იდეა.....	368
2. $N = 0$ მიახლოება. ორი მოდელი.....	372

3. პრიზმული გარსი ხარისხოვანი წამახვილებით.....	382
4. ძაბვის ფუნქცია. თავსებადობის განტოლება.....	389
5. $N = 0$ მიახლოების შედარება ბრტყელ დეფორმაციასთან, ბრტყელ დაძაბულ და განზოგადებულ ბრტყელ დაძაბულ მდგომარეობასთან.....	392
დამატება 6. კოლოსოვ-მუსხელიშვილის ფორმულები.....	396
1. ძაბვის ფუნქცია.....	396
2. ბიპარმონიული ფუნქციის კომპლექსური წარმოდგენა.....	397
3. კოლოსოვ-მუსხელიშვილის ფორმულები.....	398
დამატება 7. უწყვეტ გარემოთა მომენტური თეორია.....	402
1. მოცულობითი (მასობრივი) მომენტი და მომენტური ძაბვა.....	402
2. მომენტური ძაბვის ვექტორის დამოკიდებულება ზედაპირის ორიენტაციაზე.....	403
3. წონასწორობის განტოლებები.....	405
4. გადაადგილების და შინაგანი ბრუნვის ვექტორები.....	407
5. მოძრაობის განტოლებები, დეფორმაციის და გრენხ-ლუნვის კომპონენტები მომენტურ თეორიაში, დეფორმაციის ენერგია.....	410
6. კონსტიტუციური დამოკიდებულებები. მმართველი განტოლებები გადაადგილებებში და შინაგან ბრუნვებში. მიკროპოლარული სითხეების ჰიდრომექანიკის ძირითადი დამოკიდებულებები.....	417
7. დრეკადობის მომენტური თეორიის ძირითადი ამოცანები.....	425
8. მიკროპოლარული სითხეების თეორიის ძირითადი ამოცანები.....	427
დამატება 8. ზოგიერთი ცნება და ფაქტი თეორიული მექანიკიდან.....	428
1. სრიალა ვექტორის მომენტი წერტილისა და ღერძის მიმართ. ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი.....	428
2. ელემენტარული მოქმედებები. ტოლფასი სისტემები.....	431
3. წყვილვექტორის თვისებები.....	437
4. სრიალა ვექტორთა სისტემის დაყვანა ერთ ვექტორამდე და ერთ წყვილვექტორამდე.....	444
5. ორმაგი ვექტორული ნამრავლის ერთი თვისების შესახებ.....	448
6. სრიალა ვექტორთა სისტემის ინვარიანტები. ტოლქმედის არსებობის პირობა.....	449
7. სრიალა ვექტორთა სისტემის ცენტრალური ღერძი.....	455
8. პარალელურ ვექტორთა ცენტრი.....	456

9. წერტილის ფარდობითი მოძრაობა. სიჩქარეთა შეკრების კანონი.....	459
10. მყარი სხეულის მოძრაობის განტოლებები.....	463
11. მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა	466
12. მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო.....	470
13. შედგენილი მოძრაობა	474
14. გადატანით მოძრაობათა ერთობლიობა.....	476
15. ბრუნვათა ერთობლიობა.....	477
16. მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი წერტილის გარშემო.....	481
17. აჩქარებათა განაწილება უძრავი წერტილის გარშემო მყარი სხეულის მოძრაობის შემთხვევაში. რივალსის ფორმულა.....	492
18. მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობა.....	496
19. წრფივი და წრიული მოძრაობების ანალოგია.....	503
ციტირებული ლიტერატურა.....	504
პირთა საძიებელი	509
საგნობრივი საძიებელი	512

დაიბეჭდა თსუ გამომცემლობის სტამბაში

0179 თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზირი 14
14, Ilia Chavchavadze Avenue, Tbilisi 0179
Tel: +995 (32) 25 14 32
www.press.tsu.ge