ბესარიონ დოჭვირი

ფინანსური მათემატიკა, ალბათობა, სტატისტიკა

საწყისები

გამომცემლობა "უნივერსალი"
თბილისი – 2012

UDC (უაკ) 519.21+519.22

წიგნი წარმოადგენს ლექციების მოკლე კურსს ფინანსური მათემატიკის საფუძვლებში. მოტანილია დეტერმინისტული და სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის საწყისები. მარტივი და რთული პროცენტის სქემებისთვის განხილულია ფინანსური ნაკადების დროითი სტრუქტურა. ორაქტივიანი ფინანსური ბაზრის ბინომური მოდელის შემთხვევაში შესწავლილია ოფციონის ფასდადების პრობლემატიკა. მოტანილია აგრეთვე ალბათობისა და სტატისტიკის საწყისები.

განკუთვნილია დამხმარე სახელმძღვანელოდ ბაკალავრიატისა და მაგისტრატურის სხვადასხვა სპეციალობის სტუდენტებისთვის.

რედაქტორები: საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის წევრ-კორესპონდენტი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი **ელიზბარ ნადარაია**

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი **ო. ღლონტი**

რეცენზენტები: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, პროფესორი **პ. ბაბილუა**

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი **გ. სონაძე**

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, პროფესორი **ო. ფურთუხია**

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, პროფესორი **ზ. ხურციძველი**

© ბ. დოჭვირი, 2012

გამომცემლობა "უნივერსალი", 2012
თბილისი 0179, ჭავჭავაძის გამზ. 19
ტელ.: 2 22 36 09, 5(99) 17 22 30
E-mail: universal@internet.ge

ISBN 978-9941-17-600-5

წიგნს ვუძღვნი ულამაზეს ქალბატონებს:
თინათინს,
თეონას,
ნინოს,
ლიზის,
ანას,

1

ბესარიონ მიხეილის-ძე დოჭვირი



ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი, აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემიისა და საქართველოს საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოსი

დაიბადა ქ. თბილისში 1938 წლის 28 სექტემბერს. მშობლები: ნინო არკადის ასული ჭანჭალეიშვილი, მიხეილ (შოთა) ბესარიონის ძე დოჭვირი. პყავს მეუღლე – თინათინ შოთას ასული ბიბილაშვილი, შვილები: თეონა და ნინო, შვილიშვილები: ლიზი თენგოს ასული დოლიძე და ანა თენგოს ასული დოლიძე.

დაამთავრა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი, მოსკოვის ვ. ა. სტეკლოვის სახელობის მათემატიკური ინსტიტუტის ასპირანტურა. დაცული აქვს საკანდიდატო და სადოქტორო დისერტაციები. გამოქვეყნებული აქვს 150 სამეცნიერო ნაშრომი და 11 სახელმძღვანელო.

კვლევის სფერო – ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა, კერძოდ, შემთხვევითი პროცესების ოპტიმალური გაჩერების თეორია, სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა.

მონაწილეობა აქვს მიღებული 40-ზე მეტ საერთაშორისო კონფერენციაში ქვეყნებში: გერმანია, ბულგარეთი, რუმინეთი, შვეცია, იაპონია, შვეიცარია, საფრანგეთი და სხვ. არის საქართველოსა და ამერიკის მათემატიკური საზოგადოებების წევრი, საქართველოს სტატისტიკური ასოციაციის წევრი, ბერნულის მსოფლიო საზოგადოების წევრი. აღზრდილი პყავს რამდენიმე მეცნიერებათა კანდიდატი და დოქტორი, მათ შორის სამი უცხოელია. 1968

წლიდან დღემდე მუშაობს ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში. მუშაობდა გერმანიის ქ. ბერლინის უმაღლეს ეკონომიკურ სკოლაში (1972–1973), ქ. იენის ფრიდრიხ შილერის უნივერსიტეტში (1992–1995), თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტზე – დეკანის მოადგილე, საქართველოს ბანკების ასოციაციაში – მთავარი კონსულტანტი, აგრეთვე რამდენიმე სასწავლო და სამეცნიერო-კვლევით დაწესებულებაში. დაჯილდოვებულია საშუალო სკოლის ოქროს მედლით და ივანე ჯავახიშვილის მედლით.

მისი ინიციატივით დაბა ბაკურიანში XX საუკუნის 80-იან წლებში რამდენჯერმე ჩატარდა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტისა და ლომონოსოვის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პროფესორ-მასწავლებელთა შეჯიბრება სამთო-სათხილამურო სპორტში. იგი იყო თხუს გუნდის კაპიტანი და ჩემპიონი. გარდა ამისა, მონაწილეობდა ვეტერან სამთო მოთხილამურეთა შეჯიბრებებში.

ჰობი: სამთო თხილამურები, ფეხბურთი, ცურვა, ჩოგბურთი, გიტარა.

დევიზი: ღვთისმსახურთა და მეცნიერთა თანამშრომლობა ადამიანისა და ბუნების საკეთილდღეოდ.

შ ი ნ ა ა რ ს ი

წინასიტყვაობა 7

შესავალი 8

ფინანსური მათემატიკის საწყისები 17

ლექცია 1. შესავალი ფინანსურ მათემატიკაში 17

ლექცია 2. ფინანსური ნაკადები 28

ლექცია 3. ფინანსური ოპერაციები და სქემები 40

ლექცია 4. მარტივი პროცენტი 50

ლექცია 5. ფინანსური ოპერაციები მარტივი პროცენტის სქემაში 61

ლექცია 6. ცვალებადი კაპიტალის მოდელი მარტივი პროცენტის სქემაში 69

ლექცია 7. რთული პროცენტი 79

ლექცია 8. ფინანსური ოპერაციები რთული პროცენტის სქემაში 89

ლექცია 9. ცვალებადი კაპიტალის მოდელი რთული პროცენტის სქემაში 102

ლექცია 10. ფინანსური ბაზრის ბინომური მოდელი და ევროპული ოფციონის ფასდადება 109

ლექცია 11. ბინომური ხეები 118

ლექცია 12. მოპასუხე პორტფელი 124

ლექცია 13. ყიდვის სტანდარტული ოფციონი 129

ლექცია 14. გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი 139

ლექცია 15. ამერიკული ოფციონის ფასდადება 148

ალბათობისა და სტატისტიკის საწყისები 162

§ 1. შესავალი 162

§ 2. კომბინატორული ანალიზის ელემენტები 170

§ 3. ცდის ალბათური მოდელი. შემთხვევითი ხდომილობის ალბათობა და პირობითი ალბათობა 177

§ 4. დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილება და რიცხვითი მახასიათებლები 193

§ 5. აღწერითი სტატისტიკის ელემენტები 209

§ 6. წერტილოვანი და ინტერვალური შეფასებები
ბერნულის სქემაში 233
§ 7. ჰიპოთეზების შემოწმება ბერნულის სქემაში 240
ცხრილები 245

ლიტერატურა 254

წინასიტყვაობა

ლექციების მოკლე კურსის მიზანია შეასწავლოს სტუდენტებს დეტერმინისტული და სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის, ალბათობისა და სტატისტიკის საწყისები. გამოცემას საფუძვლად დაედო ლექციების კურსების გამარტივებული და შემცირებული მასალა, რომელსაც ავტორი წლების განმავლობაში კითხულობს ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში და კითხულობდა ზოგიერთ სხვა უმაღლეს სასწავლებელში. ფაქტობრივად წიგნი წარმოადგენს [2] ნაშრომის შევსებულ და გადამუშავებულ გამოცემას.

დეტერმინისტულ ნაწილში (ლექცია 1 – ლექცია 9), მარტივი და რთული პროცენტის სქემებისთვის, განხილულია ფინანსური ნაკადების დროითი სტრუქტურა და ფინანსური ოპერაციები. სტოქასტურ ნაწილში (ლექცია 10 – ლექცია 15), ფინანსური ბაზრის ბინომური მოდელის შემთხვევაში, შესწავლილია პოპულარული ფასიანი ქაღალდის – ევროპული და ამერიკული ტიპის ოფციონების ფასდადების საკითხები. მოტანილია აგრეთვე ელემენტარული ალბათობის თეორიისა და აღწერითი სტატისტიკის საწყისები (§ 1 – § 7).

ვფიქრობ, წიგნი სასარგებლო იქნება ფინანსებისა და საბანკო საქმის სპეციალისტებისთვის და, საზოგადოდ, ფინანსური მათემატიკითა და ალბათურ-სტატისტიკური მეთოდებით დაინტერესებული მკითხველისთვის.

ხელნაწერის წაკითხვისა და განხილვაში მონაწილეობისთვის გულწრფელ მადლობას ვუხდი რედაქტორებს: ე. ნადარაიას, ო. დღონტს და, აგრეთვე, რეცენზენტებს: პ. ბაბილუას, გ. სოხაძეს, ო. ფურთუხიას, ზ. ხეჩინაშვილს.

ბესარიონ დოჭვირი

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის მიმართულება
E-mail: besarion.dochviri@tsu.ge

თბილისი, 2012

შესავალი

. **1.** ბუნებაში ყველაფერი იცვლება სივრცესა და დროში და ეს ცვლილებები, როგორც წესი, შემთხვევით ხასიათს ატარებს. მაგალითისთვის შეიძლება დავასახელოთ კარგად ცნობილი ბროუნის მოძრაობა, ფიზიკური, ქიმიური, ბიოლოგიური, სამედიცინო, ფსიქოლოგიური, სოციოლოგიური და სხვა სახის ცდების შედეგები, ნებისმიერი ეკონომიკური მაჩვენებელი, ფინანსური ნაკადების მახასიათებლები და უამრავი სხვა ცვლადი სიდიდე. საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ შემთხვევითი ხასიათის ცვლადი სიდიდის (შემთხვევითი სიდიდის) ცხადი ანალიზური წარმოდგენა ფუნქციის სახით ჩვენ არ შეგვიძლია, რადგან შეუძლებელია ცალსახად წინასწარ განვსაზღვროთ, თუ რა მნიშვნელობას მიიღებს ცდის შედეგად ასეთი ცვლადი სიდიდე. ამიტომ, ამ ცვლადების ყოფაქცევის, ანუ ბუნებაში მიმდინარე შემთხვევითი პროცესების შესწავლა და ანალიზი არსებითად ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდებით ხდება, რომლის საგანი სწორედ ამ პროცესების მათემატიკური ანალიზია. ასეთი მიდგომა გამოიყენება დღეს მეცნიერული კვლევისა და პრაქტიკული საქმიანობის თითქმის ყველა სფეროში.

კარგად არის ცნობილი, რომ თანამედროვე საბაზრო ეკონომიკაში ცენტრალური ადგილი ფულად-საკრედიტო პოლიტიკას უკავია. ამ პოლიტიკის მართვისა და კონტროლის ძირითადი ინსტრუმენტი ფინანსურ ბაზრებზე ფასიანი ქაღალდებით, მაგალითად, ობლიგაციებით, აქციებით ოპერაციებია. ეს ოპერაციები შეიცავს გარკვეულ რისკებს და საჭიროა ამ რისკების შესწავლა და ანალიზი. თავის მხრივ, ეს საკითხები მიეკუთვნება ფინანსების თეორიას, რომლის მათემატიკურ პრობლემატიკას იკვლევს ბოლო ათწლეულებში ინტენსიურად განვითარებადი სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა. შევნიშნავთ, რომ ასევე გარკვეულ რისკებთან არის დაკავშირებული სადაზღვევო საქმე, რომლის მათემატიკურ პრობლემატიკას შეისწავლის სადაზღვევო (აქტუარული) მათემატიკა. შევნიშნავთ აგრეთვე, რომ ფულად-საკრედიტო პოლიტიკის მართვაში არსებითი მნიშვნელობა აქვს საბანკო (საფინანსო) და სადაზღვევო ინსტიტუტების ერთობლივ საქმიანობას.

ფინანსური ბაზრების სტრუქტურა საკმაოდ რთული ბუნებისაა და მისი ანალიზი დაკავშირებულია საინტერესო და მეტად რთულ მათემატიკურ ამოცანებთან. ასეთი ამოცანებია მაგალითად: დროში დისკრეტულად და

უწყვეტად ფუნქციონირებადი ფინანსური ბაზრების მოდელების შერჩევა და მასში შემავალი პარამეტრების სტატისტიკური შეფასება, აქციებისა და სხვა აქტივების ყიდვა-გაყიდვის კონტრაქტების (მაგალითად, ოფციონის, ფორვარდის, ფიუჩერსის) სამართლიანი ფასის დადგენა, ინვესტორის ოპტიმალური სტრატეგიის აგება, საინვესტიციო პრობლემა, არბიტრაჟი და მრავალი სხვა. ამ ამოცანების გადაწყვეტა სწორედ ალბათურ-სტატისტიკური (სტოქასტური ანალიზის) მეთოდების გამოყენებით ხდება.

სიამოვნებით გვინდა აღვნიშნოთ, რომ ქართველ მეცნიერთა მიერ ბოლო ათწლეულებში საკმაოდ ნაყოფიერად მიმდინარეობს ფუნდამენტური გამოკვლევები ფინანსურ და სადაზღვევო მათემატიკაში. ამ მიმართულებით დაცულია საკანდიდატო და სადოქტორო დისერტაციები. ქართველ მეცნიერებს მონაწილეობა აქვთ მიღებული მრავალ საერთაშორისო სიმპოზიუმსა და კონფერენციაში. გამოქვეყნებულია სამეცნიერო ნაშრომები სამამულო და უცხოურ პრესტიჟულ ჟურნალებში, მოპოვებულია გამარჯვებები სხვადასხვა კონკურსებში და მიღებულია გრანტები. გვინდა შევნიშნოთ, რომ, სამწუხაროდ, საქართველოში არსებული ამ მძლავრი სამეცნიერო პოტენციალის გამოყენება რეალური ამოცანებისა და პრობლემების გადაწყვეტაში ჯერჯეობით სათანადოდ არ ხდება.

გვინდა აღვნიშნოთ, აგრეთვე, რომ 2000 წელს პროფესორების: ე. ნადარაიას, ო. ღლონტისა და ბ. დოჭვირის მიერ სათანადო სტრუქტურებისადმი შეთავაზებული იყო ერთობლივი პროექტი: " საქართველოს ეკონომეტრიკული მოდელი და ეკონომიკური მაჩვენებლების ვარიანტული პროგნოზი". პროექტში ასახული იყო ათეულობით ეკონომიკური მაჩვენებლის ანალიზი და ითვალისწინებდა ექსპერტ ეკონომისტთა და ეკონომიკურ მოდელირებასა და პროგნოზირებაში საკმაოდ გამოცდილ მათემატიკოსთა ერთობლივ მუშაობას. შევნიშნავთ, რომ სამწუხაროდ, ამ პროექტს ოფიციალური სამთავრობო (ეკონომიკური) სტრუქტურების მხრიდან დაინტერესება და ფინანსური უზრუნველყოფა არ მოჰყოლია. ეს მაშინ, როდესაც ცნობილია, რომ მაგალითად, საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის წევრ-კორესპონდენტის, პროფესორ ელიზბარ ნადარაიას მეცნიერული შედეგები წარმატებით გამოიყენება ამერიკის შეერთებული შტატების საბაზრო ეკონომიკაში და, საზოგადოდ, მეცნიერულ-ტექნიკური პროგრესის მრავალ მიმართულებაში. საინტერესოა აგრეთვე აღვნიშნოთ, რომ უცხოეთში ტარდება პროფესორ ე. ნადარაიას შედეგებისადმი მიძღვნილი საერთაშორისო კონფერენციები.

ვიმედოვნებთ, რომ აღნიშნული ხარვეზები უახლოეს მომავალში გამოსწორდება, რაც, ჩვენი აზრით, ხელს შეუწყობს საქართველოში საბაზრო ეკონომიკის წარმატებით განვითარებას და ქვეყნის აღმშენებლობას.

XX საუკუნის ბოლოს საქართველო დაადგა საბაზრო ეკონომიკის განვითარების გზას. ამან ბუნებრივად გამოიწვია უამრავი სოციალურ-პოლიტიკური, ეკონომიკური, მეცნიერული, პედაგოგიური და სხვა შეხედულებების ახლებურად გააზრებისა და ჩამოყალიბების აუცილებლობა. ჩვენი აზრით,

ერთ-ერთი უმთავრესია ქვეყანაში სწავლებისა და კადრების აღზრდის მეთოდების მუდმივი გაუმჯობესება და განვითარება ჩვენი რეალობის, ცოდნისა და გამოცდილების გათვალისწინებით. ამ საკითხების გადაჭრას ემსახურება ჩვენს მიერ სხვადასხვა სპეციალობის სტუდენტებისთვის, მაგისტრანტებისთვის და დოქტორანტებისთვის განახლებული სალექციო კურსებისა და პრაქტიკული სამუშაოების შექმნა, რომელიც სათანადოდ არის ასახული შესაბამის სილაბუსებში. წინამდებარე ლექციების კურსი კიდევ ერთი მცდელობაა ამ მიმართულებით.

როგორც აღვნიშნეთ, ფინანსური პროცესების (ნაკადების) დროში ევოლუცია შემთხვევითი ხასიათისაა, რის გამოც მათი მახასიათებლების შესწავლაში აუცილებელია ალბათურ-სტატისტიკური მეთოდების გამოყენება. სწორედ ამ მეთოდებს ეფუძნება სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა.

დეტერმინისტული ფინანსური მათემატიკა შეისწავლის ფინანსური ნაკადების (პროცესების) მახასიათებლებს იმ დაშვების გათვალისწინებით, რომ ამ პროცესების დროში ევოლუცია არაშემთხვევითი (დეტერმინისტული) ხასიათისაა. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ფინანსურ ანალიზში ხდება მხოლოდ დროის ფაქტორის გათვალისწინება შემთხვევითობის გარეშე. მიუხედავად ამისა, ეს ანალიზი სხვადასხვა სახის სირთულესთან არის დაკავშირებული, რაც, ჩვენი აზრით, ძირითადად გამოწვეულია ფინანსურ ინსტიტუტებთან (ბანკებთან) ურთიერთობის საკმაოდ დიდი რაოდენობის წესების და საპროცენტო განაკვეთის რთული ბუნების გამო.

იმის საილუსტრაციოდ, თუ რა ტექნიკური და გამოთვლითი ხასიათის სირთულეებთან არის დაკავშირებული დეტერმინისტულ ფინანსურ მათემატიკაში ფინანსური ნაკადების მახასიათებლების შესწავლა და ანალიზი, საჭიროდ და სასარგებლოდ მივიჩნიეთ შემდეგი:

ჩვენ მოვიტანთ ერთ-ერთი საბანკო ოპერაციის სრულ აღწერას (კლიენტთან ურთიერთობის წესებს) და, აგრეთვე, ზოგიერთი სხვა ოპერაციის ჩამონათვალს. შევნიშნავთ, რომ ეს ოპერაციები ურთიერთობის განსხვავებული წესებისგან (პირობებისგან) შედგება.

"ვადიანი+" ანაბრის პირობები

ფიზიკური პირები

იმ შემთხვევაში, თუ მომხმარებელს უჩნდება თავისუფალი სახსრები, რომელიც მას არ სჭირდება გარკვეული პერიოდის განმავლობაში (მაგალითად, უხდიან დივიდენდს, იჯარას და ა. შ.) და სურს, რომ ამ ფულს დაერიცხოს პროცენტი, მაშინ მისთვის ხელსაყრელია "ვადიანი+" ანაბარი.

1. მეანაბრე — ანაბრის გახსნა შეუძლია ნებისმიერ სრულწლოვან პირს, საქართველოს ან უცხო ქვეყნის მოქალაქეს იმ შემთხვევაში, თუ ის იმყოფება საქართველოში.

2. ანაბრის ვადა:

- მინიმალური ვადა: 3 თვე;
- მაქსიმალური ვადა: 2 წელი.

3. ანაბრის ვალუტა — ლარი/დოლარი/ევრო.

4. მინიმალური თანხა — 500 ლარი/დოლარი/ევრო.

5. მაქსიმალური შენატანი ანაბრის გასახსნელად — არ არის შეზღუდული.

6. მინიმალური დამატებითი შენატანის მოცულობა — 500 ლარი/დოლარი/ევრო.

7. მაქსიმალური დამატებითი შენატანის მოცულობა — არ არის შეზღუდული.

8. დამატებითი შენატანის სხვა პირობები:

- ანაბარზე დამატებითი შენატანების გაკეთება შესაძლებელია სხვადასხვა მოცულობებით;
- დანაზოგების გაკეთება შეიძლება როგორც ნაღდი, ისე უნაღდო ანგარიშსწორებით კლიენტის სხვა ანგარიშიდან, მათ შორის ინტერნეტ ბანკის საშუალებით;
- შესაძლებელია თანხის დამატება სხვა ბანკიდან სხვა კლიენტის მიერ თანხის გადმორიცხვით.

9. თანხის ცვლილება — მხოლოდ ანაბრის ზრდის მიმართულებით ანაბრის მოქმედების მთელი პერიოდის განმავლობაში, ამასთან შენატანების პერიოდულობა არ არის შეზღუდული.

10. საპროცენტო სარგებლის დარიცხვა:

- კლიენტის სურვილისამებრ, ვადის ბოლოს ან ყოველთვიურად თუ კლიენტი სარგებელს გამოიტანს ყოველი თვის ბოლოს, მას ერიცხება შესაბამისი ვადის ბოლოს გატანის საპროცენტო განაკვეთზე 0.5%-ით ნაკლები სარგებელი;
- წინასწარ საპროცენტო სარგებლის გატანა არ ხდება!

11. ვადიანი+ ანაბრის საპროცენტო განაკვეთები:

- (დოლარი)

ვადა (თვე)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12-17	18-23	24
%	7.75%	8.25%	8.75%	9.5%	9.5%	9.75%	10%	10.25%	10.5%	11%	11.25%	11.5%

- (ლარი)

ვადა (თვე)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12-17	18 23	24
%	0.75%	10%	10.5%	11.5%	11.5%	11.75%	12%	12.5%	13%	14%	14.25%	14.5%

- (ევრო)

ვადა (თვე)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12-17	18 23	24
%	7.75%	8.25%	8.75%	9.5%	9.5%	9.75%	10%	10.25%	10.5%	11%	11.25%	11.5%

12. ვადიანი+ ანაბარზე პროცენტის დარიცხვის სქემა. ანაბარი იხსნება კონკრეტული ვადით და ანაბრის საწყის თანხას ერიცხება პროცენტი ცხრილის შესაბამისად, შემდგომ ანაბარზე შესაძლებელია თანხის დამატება. თითოეულ დამატებულ თანხას ერიცხება იმ ვადის შესაბამისი პროცენტი, რა ვადაც არის დარჩენილი ტრანშის შემოტანიდან ანაბრის ვადის გასვლამდე.

მაგალითი. მენაბრემ შემოიტანა 10000 დოლარი ვადიანი+ ანაბარზე 1 წლის ვადით. ამ თანხას ცხრილის მიხედვით დაერიცხება წლიური 11%. შემდგომ, ანაბრის გახსნიდან 4 თვეში, მეანაბრემ დამატებით შემოიტანა 5000 დოლარი. ამ მომენტისათვის ანაბრის ვადის გასვლამდე რჩება 8 თვე. ამიტომ 5000 დოლარს 8 თვიანი ანაბრის პროცენტი, ანუ 9.75% ერიცხება.

13. დეპოზიტის უზრუნველყოფით სესხის აღება – ვადიანი ანაბრის მფლობელს შეუძლია თიბისი ბანკში აიღოს სესხი დეპოზიტის პროცენტს +4% წლიური საპროცენტო განაკვეთით.

14. ვადიანი ანაბრის დარღვევა – ვადაზე ადრე შეწყვეტის შემთხვევაში ანაბარს დაერიცხება მისი გაფორმებიდან დარღვევის თარიღამდე ანაბრის ფაქტიური განთავსების ვადის შესაბამის საპროცენტო განაკვეთზე 4%-ით ნაკლები, მინიმუმ 1%; თუ მეანაბრეს სარგებელი უკვე გატანილი აქვს, გასაცემი ანაბარის თანხიდან მოხდება ზედმეტად გაცემული სარგებლის თანხის დაკავება.

15. მეანაბრეს შესაძლებლობები: ანაბრის გახსნის მომენტში ან ანაბრის მოქმედების განმავლობაში ნებისმიერ დროს, კლიენტს შეუძლია აირჩიოს ანაბრის ვადის გასვლის შემდეგ ანაბრის შემნახველ/სპეციალურ "მოთხოვნამდე" ანგარიშზე გადატანა, რომელსაც დაერიცხება შემნახველი ანაბრის პროცენტი.

16. ანაბრის ავტომატური პროლონგაცია:

- ანაბრის 3 თვის ვადით ან მუდმივად ავტომატური პროლონგაცია;

- ანაბრის ერთჯერ, ან მუდმივად ავტომატური პროლონგაცია იმავე ვადით, რა ვადითაც ის არის შემოტანილი (მაგალითად, თუ კლიენტმა შემოიტანა თანხა 10 თვით, მას შეუძლია გამოიყენოს ავტომატური პროლონგაციის შესაძლებლობა და დატოვოს ანაბარი კიდევ 10 თვით ისე, რომ ბანკში არ მოვიდეს);
- ამასთან, კლიენტს ანაბრის ვადის გასვლიდან 2 კვირის განმავლობაში შეუძლია გაიტანოს თანხა.

17. ბონუსები ვადიანი ანაბრის მფლობელთათვის:

- ვადიანი+ ანაბრის მფლობელებს სურვილისამებრ შეუძლიათ ოვერდრაფტით სარგებლობა შემდეგი პირობებით:

თანხა დეპოზიტზე	ოვერდრაფტის ლიმიტი	ოვერდრაფტის პროცენტი
1000 – 2499	500 ლარი/დოლარი/ევრო	16%
2500 – 9999	2000 ლარი/დოლარი/ევრო	16%
10000 – 29999	3000 ლარი/დოლარი/ევრო	16%
30000 >	5000 ლარი/დოლარი/ევრო	16%

- ვადიანი ანაბრის მფლობელები (მხოლოდ თიბისი ბანკის თბილისის ფილიალების კლიენტები) ისარგებლებენ ინდივიდუალური სქიფებით 2 კვირით, ანაბრის გახსნიდან 1 წლის განმავლობაში.

ორიგინალი პირები

1. მინიმალური თანხა — 1000 ლარი/დოლარი/ევრო.

2. დამატებითი შენატანი — 500 ლარი/დოლარი/ევრო.

3. პერიოდი:

- მინიმალური ვადა – 1 თვე;
- მაქსიმალური ვადა – 2 წელი.

4. ვადიანი+ ანაბრის საპროცენტო განაკვეთები:

- (დოლარი)

ვადა (თვე)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12–17	18–23	24
%	4.5%	5.5%	6.5%	8%	8.25%	8.5%	9%	9.25%	9.5%	9.75%	10%	10.5%	11%	11.5%

- (ლარი)

ვადა (თვე)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12-17	18-23	24
%	6.5%	7.5%	8.5%	9.75%	10%	10.75%	11%	11.25%	11.5%	12%	12.5%	13.5%	14%	14.5%

- (ევრო)

ვადა (თვე)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12-17	18-23	24
%	4.5%	5.5%	6.5%	8%	8.25%	8.5%	9%	9.25%	9.5%	9.75%	10%	10.5%	11%	11.5%

5. თანხების მოძრაობა მხოლოდ კლიენტის მიმდინარე ანგარიშის გაუქმება

6. მეანაბრის შესაძლებლობები ვადის გასვლის შემდეგ

ანაბრის გახსნის მომენტში ან ანაბრის მოქმედების განმავლობაში ნებისმიერ დროს, კლიენტს შეუძლია აირჩიოს ანაბრის ვადის გასვლის შემდეგ:

- ანაბრის და მასზე დარიცხული საპროცენტო სარგებლის მიმდინარე ანგარიშზე გადატანა.

დანარჩენი პირობები ფიზიკური პირების "ვადიანი+" პირობების ანალოგიურია.

ახლა მოვიტანოთ ზოგიერთი ძირითადი საბანკო ოპერაციის ჩამონათვალი:

1. ვადიანი ნაბარი;
2. ოქროს ანაბარი;
3. საბავშვო ანაბარი;
4. ანაბარი "ჩემი სეიფი";
5. ზრდადი ანაბარი;
6. მოქნილი ანაბარი;
7. პრივილეგირებული ანაბარი;
8. კონვერტირებადი ანაბარი;
9. "მეგობარი" ანაბარი;
10. შემნახველი ანაბარი;
11. ზრდადი შემნახველი ანაბარი;
12. სამოშხმარებლო სესხი;
13. მიკრო სესხი;
14. სწრაფი სამოშხმარებლო სესხი;
15. დეპოზიტით უზრუნველყოფილი სესხი;

16. სტუდენტური სესხი;
17. იპოთეკური სესხი;
18. ავტომანქანის განვადება;
19. სწრაფი ფულადი გზავნილები;
20. სადებეტო ბარათი;
21. საკრედიტო ბარათი;
22. სატარიფო პაკეტი.

გარდა ამისა, ბანკები გვთავაზობენ უამრავი სახის მომსახურებას, მაგალითად, გადასახადებში და სხვა.

თუ ახლა შევნიშნავთ, რომ მოტანილი ყოველი ოპერაცია გარკვეული რაოდენობის პუნქტებისა და ქვეპუნქტებისგან შედგება, მაშინ ადვილი მისახვედრია თუ რა სახის სირთულეებია ფინანსურ ოპერაციებთან დაკავშირებით. კერძოდ, კონკრეტული ამოცანის გათვალისწინებით საჭიროა ისეთი ოპერაციის არჩევა, რომელიც გარკვეული აზრით უფრო მისაღები და სასარგებლო იქნება სხვა ოპერაციებთან შედარებით. ამისათვის, სასურველია, სათანადო დონეზე ვერკვეოდეთ საპროცენტო განაკვეთის დროით სტრუქტურაში, რომლის ცოდნა არსებითია საბანკო ოპერაციებთან დაკავშირებული გადაწყვეტილებების მიღების დროს.

ბოლოს გვინდა შევნიშნოთ შემდეგი: წიგნის დეტერმინისტულ ნაწილში გამოყენებულია [6] ნაშრომის რამდენიმე თავი, ხოლო სტოქასტურ ნაწილში – [1], [2] ნაშრომები. თანამედროვე ფინანსური ბაზრების მათემატიკური პრობლემატიკით (ფინანსური მათემატიკით) დაინტერესებულ, სპეციალური მათემატიკური განათლების მქონე მკითხველს ვთავაზობთ [3], [4], [5], [7] და განსაკუთრებით [8] ნაშრომების შესწავლას.

წიგნში განხილულ რიცხვით მაგალითებში ფულადი ერთეულისა და პროცენტის გამოთვლების შედეგები მოყვანილია მეასედების სიზუსტით.

ლექციების მოკლე კურსი გათვალისწინებულია ერთი სემესტრისთვის, ამიტომ მასში გასაგები მიზეზების გამო არ არის განხილული საპროცენტო განაკვეთის დროით სტრუქტურასთან და ფინანსური ბაზრის ბინომურ მოდელთან დაკავშირებული გარკვეული რაოდენობის საკითხები.

ორიოდე სიტყვით გვინდა შევეხოთ ტერმინებთან დაკავშირებულ ზოგიერთ საკითხს. მაგალითისთვის განვიხილოთ ტერმინი "პროცენტი". მასთან დაკავშირებულია უამრავი სხვადასხვა დატვირთვისა და შინაარსის სიტყვები, მაგალითად, "საპროცენტო განაკვეთი", "საპროცენტო სარგებელი", "მარტივი", "რთული", "უწყვეტად დარიცხული", "ეფექტური", "ფორვარდული" და სხვა. შევნიშნოთ, რომ საკმაოდ რთულია ამ ტერმინებს შორის ურთიერთკავშირის ანალიზი. ცხადია, ყოველი კონკრეტული ამოცანისთვის გამოყენებული ტერმინი მოითხოვს ზუსტ აღწერას.

ისე, როგორც ფულს აქვს დროითი ღირებულება (სტრუქტურა), ასევე საპროცენტო განაკვეთს აქვს საკმაოდ რთული ბუნების დროითი სტრუქტურა. მაგალითად, ობლიგაციების ფასების დროითი სტრუქტურის აღმწერ სტოქასტურ მოდელებში საპროცენტო განაკვეთისათვის გამოიყენება სხვადასხვა სახის სტოქასტური დიფერენციალური განტოლებები.

მიგვაჩნია, რომ ფინანსური მათემატიკის ტერმინების სრულყოფილი განმარტებითი ლექსიკონის შექმნა მომავლის საჭირო და მნიშვნელოვანი საქმეა.

ჩვენ შევეცადეთ, ზედმეტი დაზუსტებისა და აღწერის გარეშე, მოტანილი ყოველი ტერმინი გასაგები ყოფილიყო უშუალოდ ტექსტის შინაარსიდან.

ფინანსური მათემატიკის საწყისები

ლექცია 1. შესავალი ფინანსურ მათემატიკაში

1. ფინანსური მათემატიკა ფინანსების თეორიის მათემატიკურ პრობლემატიკას იკვლევს. შეიძლება ითქვას, რომ იგი ორი ძირითადი მიმართულებისგან შედგება: პირველი ეს არის დეტერმინისტული ანუ კლასიკური ფინანსური მათემატიკა, ხოლო მეორე – სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა. ფინანსური პროცესების აღმწერ დეტერმინისტულ მათემატიკურ მოდელებში იგულისხმება დროში ცვალებადი ფინანსური ნაკადების მახასიათებლების მომავალში მნიშვნელობების სრული განსაზღვრულობა. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ჩვენ გვაქვს ფინანსური ოპერაციების აღმწერი ფორმულები და დროის $n = 0$ მომენტში საწყისი მონაცემების საფუძველზე ჩვენ მომავალში დროის ნებისმიერი n მომენტისათვის შეგვიძლია გამოვთვალოთ საჭირო მახასიათებლები. მარტივი და რთული პროცენტების გამოყენებით ასეთი გამოთვლები დაკავშირებულია, მაგალითად, ვექსელებთან, ობლიგაციებთან, დეპოზიტურ სერტიფიკატებთან და სხვა საკმაო ფინანსურ ინსტრუმენტებთან, აგრეთვე ფინანსურ მენეჯმენტთან და სხვა.

რეალურ ფინანსურ ოპერაციებს, როგორც წესი, თან ახლავს გარკვეული რისკი და განუსაზღვრელობა, რომელიც ამ ოპერაციების მახასიათებლებზე უამრავი შემთხვევითი ფაქტორის (მაგალითად, ინფლაციის, ეკონომიკური კრიზისის, ბუნებრივი კატასტროფების) ზეგავლენით არის გამოწვეული. ამ შემთხვევაში მახასიათებლების დროში მომავალი მნიშვნელობების ცალსახად განსაზღვრა შეუძლებელია. სწორედ ამ შემთხვევითი ფაქტორების გათვალისწინებით ხდება ფინანსური ნაკადების მახასიათებლების შესწავლა და ანალიზი ფინანსური პროცესების აღმწერ სტოქასტურ მათემატიკურ მოდელებში.

სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის კვლევაში გადამწყვეტი როლი ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის, შემთხვევით პროცესთა თეორიისა და, განსაკუთრებით, თანამედროვე სტოქასტური ანალიზის მეთოდებს მიეკუთვნება. სწორედ ამ მეთოდების გამოყენებით გახდა შესაძლებელი ძირითადი (საბაზისო, პირველადი) ფასიანი ქაღალდების, მაგალითად, ობლიგაციების, აქციების ევოლუციის (ტრაექტორიის) ადეკვატური აღწერა, ფინანსური ბაზრების დროში დისკრეტული და უწყვეტი მათემატიკური მოდელების შექმნა და წარმოებული (მეორადი) ფასიანი ქაღალდების,

მაგალითად, ოფციონების, ფორვარდების, ფიუჩერსების გათვლის ამოცანების გადაწყვეტა. სახელწოდება "წარმოებული ფასიანი ქაღალდი" მიუთითებს იმაზე, რომ იგი წარმოადგენს გარკვეულ პირობებში რაიმე აქტივის ყიდვა-გაყიდვის ხელშეკრულებას (კონტრაქტს) ორ მხარეს – მყიდველსა და გამყიდველს შორის. მაგალითად, ოფციონის (ოფციონური კონტრაქტის) საფუძველი შეიძლება იყოს აქცია, ვალუტა, საქონელი, თვითონ ოფციონი და სხვა.

პირველი მეცნიერი მათემატიკოსი, რომელმაც დაიწყო აქციის ფასების ევოლუციის უწყვეტ დროში შესწავლა, იყო ფრანგი ლ. ბაშელიე. მან აქციის ფასების ცვლილების აღწერისთვის გამოიყენა შემთხვევითი პროცესი, ე. წ. ბროუნის მოძრაობა. მიღებული შედეგები ბაშელიემ 1900 წელს სადოქტორო დისერტაციის სახით წარუდგინა პარიზის მათემატიკურ საზოგადოებას. რამდენიმე წლის შემდეგ, 1905 წელს, ბროუნის მოძრაობის მათემატიკური საკითხების შესწავლა დაიწყო ა. აინშტაინმა, ხოლო ბროუნის მოძრაობის სრულყოფილი მათემატიკური თეორია ააგო ნ. ვინერმა 1923 წელს. სამეცნიერო ლიტერატურასა და ტერმინოლოგიაში ბროუნის მოძრაობა დამკვიდრდა ვინერის პროცესის სახელწოდებით.

ბაშელიეს გამოკვლევებმა საკმაოდ დიდი ხნის განმავლობაში ვერ მოიპოვა სათანადო აღიარება და გამოყენება. მხოლოდ 1965 წელს პ. სამუელსონი დაინტერესდა ბაშელიეს ნაშრომით და მოუწოდა ეკონომისტებსა და მათემატიკოსებს ყურადღება მიექციათ აღნიშნული ნაშრომისათვის. თვითონ სამუელსონმა შემოგვთავაზა აქციის ფასების უწყვეტ დროში ევოლუციის აღმწერი ბაშელიეს მოდელის გაუმჯობესებული და მოდიფიცირებული ე. წ. გეომეტრიული ბროუნის მოძრაობის მოდელი, რომელიც კიდევ "ეკონომიკური ბროუნის მოძრაობის" სახელწოდებით არის ცნობილი.

1973 წელს სტოქასტურ ფინანსურ მათემატიკაში გამოქვეყნდა ფ. ბლეკის, მ. შოულსის და რ. მერტონის ნაშრომები, რომელშიც უწვეტი დროის შემთხვევაში მიღებული იყო ოფციონის ფასის გათვლის და პეჯირების ფორმულები. შემდეგ 1979 წელს ფ. კოკსმა, რ. როსმა და მ. რუბინშტეინმა ანალოგიური შედეგები მიიღეს დისკრეტული დროის შემთხვევაში. კლასიკურად აღიარებულმა ამ ფუნდამენტურმა ნაშრომებმა რევოლუციური ძვრები გამოიწვია ფინანსურ სამყაროში და, კერძოდ, ფინანსურ ბაზრებზე: დაიწყო სპეციალიზებული ბირჟების გახსნა და გაიზარდა წარმოებული ფასიანი ქაღალდებით ვაჭრობა. აღსანიშნავია, რომ ფინანსურ მათემატიკაში მიღებული შედეგების ზოგიერთმა ავტორმა (მაგალითად, მ. შოულსმა, რ. მერტონმა) ნობელის პრემია დაიმსახურა ეკონომიკაში.

თანამედროვე ფინანსური ბაზარი წარმოადგენს ფულის, ვალუტის (როგორც უცხოური ქვეყნის ფულის), კეთილშობილი (ძვირფასი) ლითონებისა და სხვადასხვა ფინანსური ინსტრუმენტების, მათ შორის ფასიანი ქაღალდების ბაზრების ერთობლიობას. როგორც აღვნიშნეთ, განასხვავებენ ძირითად (პირველად, საბაზისო) და წარმოებულ (მეორად) ფასიან ქაღალდებს.

პირველს მიეკუთვნება, მაგალითად, ობლიგაციები, საბანკო ანგარიში, აქციები, მეორეს – ოფციონი, რომელიც შეიძლება იყოს აქციის ყიდვა-გაყიდვის სხვადასხვა ტიპის კონტრაქტი (ხელშეკრულება).

საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ საბანკო ტიპის ოპერაციები ბანკის მსგავსი ინსტიტუტების მიერ ტარდებოდა ჯერ კიდევ ძველ ეგვიპტეში, ხოლო ძველ ბაბილონსა და ასურეთში კი უკვე არსებობდა საპროცენტო განაკვეთის შედეგად მოგების მომტანი სასესხო კაპიტალი და გარკვეული სახის ვექსილი (ფასიანი ქაღალდი). თანამედროვე ტიპის ბანკი პირველად შეიქმნა იტალიის ქ. გენუაში 1407 წელს, ხოლო აქციებით ვაჭრობის დასაწყისად ითვლება ქ. ამსტერდამში საფონდო ბირჟაზე აქციონერთა კომპანიების მიერ აქციების გაყიდვა 1602 წელს.

რაც შეეხება მეორად ფინანსურ ინსტრუმენტებს, მათი ინტენსიური განვითარება დაიწყო XX საუკუნის სამოცდაათიანი წლებიდან (თუმცა, მაგალითად, ოფციონი ადრეც არსებობდა) და ძირითადად დაკავშირებული იყო შემდეგ გარემოებებთან:

1) 1973 წლიდან დაწყებული, ვალუტების ფიქსირებული გაცვლითი კურსების მაგივრად შემოღებული იყო ცვალებადი ("მცურავი") კურსები. ზოგიერთი მათგანისათვის კი დაწესებული იქნა ცვალებადობის გარკვეული შუალედი ("დრეფანი"). ამას დაემატა საპროცენტო განაკვეთების ცვალებადობა;

2) გასული საუკუნის სამოცდაათიანი წლებიდან დაიწყო დოლარის გაუფასურება ოქროსთან მიმართებაში. 1971 წლის შემდეგ, ოქროს სტაბილურმა ფასმა (ერთი უნცია – 28,25 გრამი ოქრო ღირდა 35 დოლარი) მკვეთრად იწყო მომატება და უკვე 1980 წელს ერთი უნცია ოქრო 570 დოლარი ღირდა;

3) წარმოიშვა ნავთობის მსოფლიო კრიზისი ნავთობის ფასების ცვალებადობასთან დაკავშირებით;

4) მსოფლიოს ფინანსურ ბაზრებზე მოხდა აქციების რეალიზაციის შემცირება;

5) ქვეყნები აღმოჩნდნენ განსხვავებულ ეკონომიკურ სიტუაციებში, განსაკუთრებით მეორე მსოფლიო ომის დამანგრეველი შედეგების შემდეგ.

ამ მოვლენებმა ბუნებრივად გაზარდა რისკი ფინანსურ ურთიერთობებში. აუცილებელი გახდა ფინანსური რისკისაგან თავის დაცვისა და მისი გარკვეულად განეიტრალების მიზნით ახალი ფინანსური პროდუქციისა და ტექნოლოგიის შექმნა. ასე დაიწყო ე. წ. ფინანსური ინჟინერიის ჩამოყალიბება და განვითარება, რომლის ძირითად ფინანსურ ინსტრუმენტებს სწორედ წარმოებული ფასიანი ქაღალდები წარმოადგენს.

ამასთან ერთად, სულ უფრო იზრდებოდა ქვეყნებს შორის ფინანსური ურთიერთობების მოცულობა და სისწრაფე. სხვადასხვა გარემოებებთან ერთად

ამას ხელი შეუწყო მეცნიერულ-ტექნიკურმა პროგრესმა და განსაკუთრებით კომპიუტერული მეცნიერებების განვითარებამ. გარდა ამისა, ფინანსურ ურთიერთობებში არსებულმა რეალურმა რისკმა, განუზღვრელობამ დააჩქარა ფინანსების თეორიისა და ფინანსური ინჟინერიის პრობლემატიკაში ალბათურ-სტატისტიკური მეთოდების გამოყენება და სათანადო მათემატიკური აპარატის შექმნა. ყოველივე ამის საფუძველზე შეიქმნა და განვითარდა თანამედროვე სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა.

ფინანსურმა ბაზრებმა საკმაოდ სწრაფი რეაგირება მოახდინა ზემოთ აღნიშნულ გარემოებებზე. 1973 წელს ამერიკის შეერთებული შტატების ქალაქ ჩიკაგოში გაიხსნა სტანდარტული ოფციონების ბირჟა. საინტერესოა მოვიყვანოთ ინვესტორების რეაგირების ზოგიერთი მაჩვენებელი ინვესტირების ახალ შესაძლებლობებთან დაკავშირებით. გახსნის დღეს, 26 აპრილს, 16 სახის აქციაზე დაიდო 911 კონტრაქტი ყიდვის ოფციონზე. ერთი წლის შემდეგ იდებოდა 20000-ზე მეტი, ხოლო სამი წლის შემდეგ 100000-ზე მეტი კონტრაქტი ყოველდღე. 1987 წელს ამ მაჩვენებელმა 700 ათასი კონტრაქტი შეადგინა 100 სახის აქციაზე, ე. ი. ყოველდღიურ ბრუნვაში იყო 70 მილიონი აქცია. საინტერესოა, აგრეთვე, შევნიშნოთ, რომ იმავე 1987 წელს ქალაქ ნიუ-იორკის ბირჟაზე ყოველდღიურ ბრუნვაში მონაწილეობდა 190 მილიონი აქცია.

ფინანსურ სამყაროში ასეთმა მნიშვნელოვანმა ძვრებმა ბუნებრივად გაზარდა მოსახლეობაში ფინანსურ ურთიერთობებში აქტიური მონაწილეობისა და ამის საშუალებით "ფულის კეთების" სურვილი. თითქმის ყოველი ამერიკული ოჯახი ასობით აქციის მფლობელია და თავიანთი დანაზოგებით ინვესტირებას ეწევა ამერიკის საბაზრო ეკონომიკაში.

ფინანსურ ბაზრებზე სხვადასხვა სახის ძირითად ფასიან ქაღალდებთან ერთად ვაჭრობენ უამრავი მეორადი ფასიანი ქაღალდებით. ყიდვა-გაყიდვის კონტრაქტების ნაწილის სახელწოდებების უბრალო ჩამონათვლითაც კი ადვილად დავინახავთ ფინანსურ ურთიერთობებში მეორადი ფასიანი ქაღალდების მნიშვნელობას და მრავალფეროვნებას: ფიუჩერსები, ფორვარდები, ფინანსური ფიუჩერსები, ფიუჩერსები ობლიგაციებზე და საბირჟო ინდექსებზე, ევროპული და ამერიკული ტიპის სტანდარტული ოფციონები, ეგზოტიკური ოფციონები: ბოსტონის ოფციონი, რუსული ოფციონი, აზიური ოფციონი, კალათის ოფციონი, სვოპები, კეპები, ფლორები, სვოპციონები. ეს არის მეორადი ფასიანი ქაღალდების სახეობის არასრული ჩამონათვალი.

შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ორი აქტივისაგან – ობლიგაციებისაგან (საბანკო ანგარიშისაგან) და აქციებისაგან შემდგარ ფინანსურ ბაზრებს. შევნიშნოთ, რომ საბანკო ანგარიში ობლიგაციის ტიპის ფასიანი ქაღალდია. ჩვენ მოკლედ შევეხებით საბანკო ანგარიშთან, ობლიგაციასთან და აქციასთან დაკავშირებულ ზოგიერთ საკითხს.

2. საბანკო ანგარიშის გახსნის შემდეგ ბანკი ვალდებულია შეტანილ საწყის თანხას გარკვეული წესით დაარიცხოს საპროცენტო შემოსავალი. თუ

ანაბარი (თანხა) შეტანილია ერთ წელზე ნაკლები ვადით, მაშინ საპროცენტო შემოსავლის დარიცხვისათვის გამოიყენება მარტივი პროცენტის ფორმულა

$$B_n = B_0(1 + r_0 \cdot n), \tag{1.1}$$

სადაც B_0 არის საბანკო ანგარიშზე შეტანილი საწყისი თანხა, r_0 – საპროცენტო განაკვეთი, n – ერთი წლის ნაწილი, ხოლო B_n – n დროის შემდეგ ანაბრის სიდიდე, $0 < n < 1$. შევნიშნოთ, რომ (1.1) ფორმულის გამოყენება ხშირად ხდება, აგრეთვე, $n > 1$ შემთხვევაშიც. მაგალითად, თუ საპროცენტო განაკვეთი რვა პროცენტია, მაშინ $r_0 = 0,08$ და თუ B_0 თანხა შეტანილი იყო ექვსი თვის ვადით, მაშინ $n = 0,5$. ამრიგად, გვექნება

$$B_{0,5} = B_0(1 + 0,08 \cdot 0,5).$$

r_0 სიდიდეს წელიწადში ერთჯერ მარტივად დარიცხული საპროცენტო განაკვეთი ეწოდება. ასევე თუ, მაგალითად, $B_0 = 1000$, $n = 0,5$ და $r = 0,06$ (წლიური საპროცენტო განაკვეთი 6%-ის ტოლია), მაშინ გვექნება

$$B_{0,5} = 1000(1 + 0,006 \cdot 0,5) = 1030.$$

თუ ანაბარი შეტანილია ერთ წელზე მეტი ვადით, მაშინ გამოიყენება რთული პროცენტის ფორმულები. თუ დარიცხვა ხდება წელიწადში ერთჯერ $\widehat{r}$ წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთით, მაშინ n წლის შემდეგ B_0 საწყისი თანხა გახდება B_n თანხის ტოლი, რომელიც დაითვლება შემდეგი ტოლობით

$$B_n = B_0 \cdot (1 + \widehat{r})^n, \tag{1.2}$$

თუ, მაგალითად, $B_0 = 1000$, $\widehat{r} = 0,06$ და $n = 3$, მაშინ გვექნება

$$B_3 = B_0(1 + \widehat{r})^3 = 1000(1 + 0,06)^3 = 1191,016.$$

თუ დარიცხვა ხდება წელიწადში m-ჯერ $r(m)$ წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთით, მაშინ საწყისი B_0 თანხა n წლის შემდეგ ტოლი გახდება შემდეგი სიდიდის:

$$B_n(m) = B_0\Big(1 + \frac{r(m)}{m}\Big)^{nm}. \tag{1.3}$$

ვთქვათ, მაგალითად, დარიცხვა ხდება ყოველი კვარტლის ხიხშირით (წელიწადში ოთხჯერ) ანუ $m = 4$, $B_0 = 1000$, $r(4) = 0,06$, მაშინ გვექნება

$$B_3(4) = 1000\Big(1 + \frac{0,06}{4}\Big)^{3 \cdot 4} = 1000(1,015)^{12} = 1195,618.$$

თუ ანაბრის ვადა წლებში წილადი რიცხვით გამოისახება, მაგალითად, $n + k/m$, $0 < k < m$, მაშინ შესაბამისი თანხა მოიცემა ტოლობით

$$B_{n+\frac{k}{m}}(m) = B_0\Big(1 + \frac{r(m)}{m}\Big)^{n+\frac{k}{m} \cdot m}. \tag{1.4}$$

წელიწადში სხვადასხვა სიხშირის ($m = 1$, $m = 4$) რთული პროცენტით დარიცხვის რიცხვითი მაგალითები გვაფიქრებინებს, რომ როცა დარიცხვათა რაოდენობა უსასრულოდ გაიზრდება, მაშინ საწყისი თანხის მომავალი ღირებულებაც უსასრულოდ დიდი იქნება. მაგრამ ეს ასე არ არის, რადგანაც ასეთ შემთხვევაში სამართლიანია ე. წ. უწყვეტი დარიცხვის ფორმულა, რომლის თანახმად საწყისი თანხის მომავალი ღირებულება (თუ წლების რაოდენობა სასრულია) ყოველთვის სასრული სიდიდეა. მართლაც, თუ დარიცხვა ხდება უწყვეტად $r = r(+\infty)$ წლიური საპროცენტო განაკვეთით, მაშინ n წლის შემდეგ შესაბამისი თანხა მოიცემა ტოლობით

$$B_n(\infty) = B_0 \cdot e^{r(\infty)\cdot n} = B_0 \cdot e^{r\cdot n}, \tag{1.5}$$

სადაც e კარგად ცნობილი ნეპერის რიცხვია და $e \approx 2,7182$.

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$B_n(m) \to B_n(\infty), \quad \text{როცა } r(m) \to r(\infty), \quad m \to \infty.$$

შევნიშნოთ, რომ პრაქტიკაში უწყვეტად დარიცხვაში ყოველდღიური დარიცხვა იგულისხმება.

უწყვეტად დარიცხული $r = r(+\infty)$ საპროცენტო განაკვეთის შესაბამისი m-ჯერ დარიცხული საპროცენტო განაკვეთი $r(m)$ განიმარტება ტოლობით

$$r(m) = m \cdot (e^{\frac{r}{m}} - 1), \tag{1.6}$$

საიდანაც მარტივად მივიღებთ $r = r(\infty)$-ის დამოკიდებულებას $r(m)$-ზე შემდეგი ტოლობით

$$r = m \ln\left(1 + \frac{r(m)}{m}\right), \tag{1.7}$$

სადაც $\ln x$ აღნიშნავს $x > 0$ რიცხვის ნატურალურ ლოგარითმს, ანუ ლოგარითმს ნეპერის e რიცხვის ფუძით.

იმ კერძო შემთხვევაში, როცა $m = 1$, მაშინ $\widehat{r} = r(1)$ და $r = r(\infty)$ საპროცენტო განაკვეთებისთვის გვექნება ურთიერთგადათვლის შემდეგი ფორმულები

$$\widehat{r} = e^r - 1, \tag{1.8}$$

$$r = \ln(1 + \widehat{r}). \tag{1.9}$$

შეიძლება დავინტერესდეთ, მაგალითად, შემდეგ კითხვაზე პასუხის გაცემით: უწყვეტად დარიცხული საპროცენტო განაკვეთის შემთხვევაში რამდენი წელია საჭირო იმისათვის, რომ საწყისი თანხა გაორმაგდეს? ვთქვათ, უწყვეტად დარიცხული საპროცენტო განაკვეთი $r = \alpha/100$. ამრიგად, ჩვენ უნდა ვიპოვოთ წლების რაოდენობა n ისეთი, რომ საწყისი B_0 თანხა n წლის შემდეგ გახდეს $2 \cdot B_0$ სიდიდის ტოლი. ადვილი მისახვედრია, რომ საძებნი n წლების რაოდენობისათვის უნდა სრულდებოდეს ტოლობა

$$B_0 = 2B_0 = B_0 \cdot e^{\frac{\alpha}{100}n},$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$2 = e^{\frac{\alpha}{100}n}.$$

ამ ტოლობის e ფუძით გალოგარითმების შემდეგ ადვილად მივიღებთ საძებნი n წლების მნიშვნელობას

$$n = \frac{\ln 2 \cdot 100}{\alpha} = \frac{70}{\alpha}. \tag{1.10}$$

ამ ტოლობიდან მივიღებთ, რომ თუ მაგალითად $\alpha = 5$ ან $\alpha = 7$, მაშინ თანხის გაორმაგება მოხდება, შესაბამისად, 14 და 10 წლის შემდეგ.

საინტერესოა თვალი გავადევნოთ, თუ როგორ იზრდება ბანკში შეტანილი საწყისი თანხა სხვადასხვა წესით დარიცხული საპროცენტო განაკვეთების დროს, მაგალითად, (1.3) ტოლობის შემთხვევაში. ვთქვათ,

$$B_0 = 10000, \quad r(m) = 0,1;$$
$$m = 1, 2, 3, 4, 6, 12, \infty, \quad n = 0, 1, \ldots, 10.$$

$B_n(m)$ სიდიდის მნიშვნელობები მოცემულია 1.1 ცხრილში.

ცხრილი 1.1.

$n \backslash m$	1	2	3	4	6	12	∞
0	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000
1	11000	11025	11034	11038	11043	11047	11052
2	12100	12155	12174	12184	12194	12204	12214
3	13310	13401	13433	13449	13465	13482	13499
4	14641	14775	14821	14845	14869	14894	14918
5	16105	16289	16353	16386	16419	16453	16487
6	17716	17959	18044	18087	18131	18176	18221
7	19487	19799	19909	19965	20022	20079	20138
8	21436	21829	21967	22038	22182	22182	22255
9	23579	25066	24238	24325	24414	22504	24596
10	25937	26533	26743	26851	26960	27070	27183

შევნიშნოთ, რომ მუდმივ საპროცენტო განაკვეთთან ერთად განიხილება და შეისწავლება დროში შემთხვევით ცვალებადი საპროცენტო განაკვეთები, რომელიც, ფაქტობრივად, შემთხვევით პროცესებს წარმოადგენს. ასეთი საპროცენტო განაკვეთების სტოქასტური მოდელების აღწერა შეიძლება, მაგალითად, ვინერის პროცესის (ბროუნის მოძრაობის) საშუალებით და მოითხოვს საკმაოდ რთული მათემატიკური მოდელების გამოყენებას. ჩვენ ამ საკითხებს არ განვიხილავთ.

პუნქტი 2-ის ბოლოს გვინდა შევნიშნოთ შემდეგი. მარტივი პროცენტის შემთხვევაში (1.1) ფორმულის თანახმად დროის ყოველ შემდეგ მომენტში ანგარიშზე არსებულ თანხას ერიცხება საწყისი თანხის გარკვეული პროცენტი, ხოლო რთული პროცენტის შემთხვევაში კი – დროის უშუალო წინა მომენტში თანხის გარკვეული პროცენტი. ვთქვათ, r არის საპროცენტო განაკვეთი, რაც იმას ნიშნავს, რომ, მაგალითად, თუ თანხას ერიცხება 10%, მაშინ $r = 0,1$. მარტივი და რთული პროცენტით დარიცხვის წესის თანახმად ადვილი საჩვენებელია, რომ პირველ შემთხვევაში დროში თანხების რაოდენობები ქმნის არითმეტიკულ პროგრესიას, ხოლო მეორე შემთხვევაში – გეომეტრიულ პროგრესიას. მართლაც, მაგალითად, დროის $n = 1$ და $n = 2$ მომენტებში მარტივი პროცენტის შემთხვევაში გვექნება:

$$B_1 = B_0 + B_0 \cdot r = B_0(1 + r),$$
$$B_2 = B_1 + B_0 \cdot r = B_0 + 2B_0 \cdot r = B_0(1 + 2r),$$

ხოლო რთული პროცენტის შემთხვევაში გვექნება:

$$B_1 = B_0 + B_0 \cdot r = B_0(1 + r),$$
$$B_2 = B_1 + B_1 \cdot r = B_1(1 + r) = B_0(1 + r)^2.$$

როგორც ვხედავთ, B_0, B_1 და B_2 თანხების მიმდევრობა მარტივი პროცენტის შემთხვევაში არითმეტიკული პროგრესიაა B_0 პირველი წევრითა და $B_0 \cdot r$ სხვაობით, ხოლო რთული პროცენტის შემთხვევაში – გეომეტრიული პროგრესიაა B_0 პირველი წევრითა და $1 + r$ მნიშვნელით.

საინტერესოა აგრეთვე აღვნიშნოთ, რომ ფულს, ისევე როგორც ფასიან ქაღალდებს დროითი ღირებულება აქვს. მაგალითად, B_0 თანხის მომავალი ღირებულება დროის $n = 1$ მომენტში არის $B_1 = B_0(1 + r)$. პირიქითაც, თუ გვინდა, რომ მომავალში დროის $n = 1$ მომენტში გვქონდეს B_1 თანხა, მაშინ დროის $n = 0$ მომენტში უნდა გაგვაჩნდეს $B_0 = B_1/(1 + r)$ თანხა, ანუ მომავალი B_1 თანხის დღევანდელი ღირებულება.

3. ობლიგაცია ანუ ბონი – ეს არის ვალდებულება ფასიანი ქაღალდის სახით, რომელსაც უშვებს სახელმწიფო, ბანკები, კორპორაციები, სააქციო საზოგადოებები და სხვა ფინანსური ინსტიტუტები კაპიტალის აკუმულაციის (მოზიდვის) მიზნით. ობლიგაციები განსაკუთრებული პოპულარობით სარგებლობს ინვესტორებში და მათში ინვესტირება სჭარბობს სხვა ფასიან ქაღალდებში ინვესტირებას. ობლიგაციებში ინვესტირების ძირითადი

მამზიდველობა მდგომარეობს იმაში, რომ მის მფლობელს რეგულარულად უხდიან თანხას გარკვეული წესით და ობლიგაციის დაფარვის მომენტში კი ხდება სრული თანხის გადახდა. ობლიგაციის მთლიანად ურისკო ფასიან ქაღალდად მიჩნევა არ შეიძლება, მაგალითად იმიტომ, რომ არსებობს კორპორაციის გაკოტრების რისკი. ამ თვალსაზრისით სახელმწიფო ობლიგაციები ნაკლებად რისკიანია, ვიდრე კორპორაციის ობლიგაციები, სამაგიეროდ, საკუპონო გადასახადები (დივიდენდები) კორპორაციების ობლიგაციებზე მეტია, ვიდრე სახელმწიფო ობლიგაციებზე.

ვთქვათ, ობლიგაცია გამოშვებულია დროის საწყის $n = 0$ მომენტში. გვინდა მოკლედ აღვნიშნოთ ობლიგაციის რამდენიმე ძირითადი რიცხვითი მახასიათებელი (პარამეტრი).

1. ობლიგაციის ნომინალური ღირებულება $B(N, N)$, ანუ ის თანხა, რომელსაც ობლიგაციის გამომშვები (ემიტენტი) გადაუხდის ობლიგაციის მფლობელს დროის ბოლო N მომენტში.

2. ობლიგაციის დაფარვის მომენტი N, ანუ ობლიგაციის სიცოცხლის ხანგრძლივობა. ამასთან, თუ ობლიგაციის დაფარვის ვადა ერთ წელზე ნაკლებია (ან ტოლია) $N \leq 1$, მაშინ ობლიგაციას მოკლევადიანი ეწოდება, საშუალოვადიანი ობლიგაციისათვის სიცოცხლის ხანგრძლივობა ერთიდან ათ წლამდეა $1 < N < 10$, ხოლო გრძელვადიანისათვის კი ათ წელზე მეტია (ტოლია) $N \geq 10$.

3. ობლიგაციის საკუპონო საპროცენტო განაკვეთი r_c, რომლის გათვალისწინებითაც ემიტენტი უხდის ობლიგაციის მფლობელს წლიურ საკუპონო გადასახადებს (დივიდენდებს) და ეს გადასახადი $r_c \cdot B(N, N)$ სიდიდის ტოლია.

4. ობლიგაციის საწყისი ფასი $B(0, N)$, რომელიც გამოშვებულია დროის $n = 0$ მომენტში სიცოცხლის ხანგრძლივობით N წელიწადი.

5. ობლიგაციის მიმდინარე საბაზრო ფასი $B(n, N)$, $n = 0, 1, \ldots, N$, რომელიც შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა (უწყვეტი დროის შემთხვევაში კი შემთხვევითი პროცესია) და, ისევე როგორც საპროცენტო განაკვეთი, რთული სტოქასტური მათემატიკური მოდელებით აღიწერება.

6. მიმდინარე საპროცენტო განაკვეთი $r_c(n, N)$, $n = 0, 1, \ldots, N$, რომელიც წლიური საკუპონო გადასახადისა და მიმდინარე საბაზრო ფასის შეფარდების ტოლია

$$r_c(n, N) = \frac{r_c \cdot B(N, N)}{B(n, N)}\,. \tag{1.11}$$

7. ობლიგაციის შემოსავალი დაფარვის მომენტამდე $\rho = \rho(N - n, N)$, სადაც $N - n$, არის ობლიგაციის დარჩენილი სიცოცხლის ხანგრძლივობა, რომელიც განიმარტება როგორც ρ-ს მიმართ შემდეგი განტოლების ფესვი

$$B(n, N) = \sum_{K=1}^{N-n} \frac{r_c \cdot B(N, N)}{(1 + \rho)^K} + \frac{B(N, N)}{(1 + \rho)^{N-n}}\,, \tag{1.12}$$

სადაც $n = 1, 2, \ldots, N$ და იზომება წლებში. იმ შემთხვევაში, როცა ობლიგაციის საბაზრო ფასი უდრის ობლიგაციის ნომინალურ ღირებულებას, ე. ი.

$$B(n, N) = B(N, N),$$

მაშინ ობლიგაციის საკუპონო საპროცენტო განაკვეთი დაფარვის მომენტამდე ობლიგაციის შემოსავლის ტოლია, ე. ი. $r_c = \rho$.

მართლაც, $B(n, N) = B(N, N)$ ტოლობის შემთხვევაში r_c და ρ სიდიდეებისათვის (1.12) ფორმულის გათვალისწინებით უნდა შესრულდეს ტოლობა

$$1 = \sum_{K=1}^{N-n} \frac{r_c}{(1+\rho)^K} + \frac{1}{(1+\rho)^{N-n}},$$

საიდანაც გეომეტრიული პროგრესის წევრთა ჯამის ფორმულის საშუალებით ადვილად მივიღებთ შემდეგ ტოლობას

$$\frac{r_c}{\rho}\left(\frac{1}{(1+\rho)^{N-n}} - 1\right) = \frac{1}{(1+\rho)^{N-n}} - 1,$$

რომლიდანაც ვღებულობთ საჩვენებელ $r_c = \rho$ ტოლობას.

4. აქცია – ეს არის საწილო ფასიანი ქაღალდი, რომელსაც უშვებენ კორპორაციები, კომპანიები, ფირმები კაპიტალის აკუმულაციისა და გაზრდის მიზნით (ისე როგორც ობლიგაციების შემთხვევაში). აქციები ძირითადად ორი სახისაა – ჩვეულებრივი და პრივილეგიური. ჩვეულებრივი აქციის მფლობელი კომპანიის მოგებიდან ღებულობს დივიდენდს, რომლის სიდიდე კომპანიის წარმატებულ საქმიანობაზეა დამოკიდებული. კომპანიის გაკოტრების შემთხვევაში ასეთი აქციონერი მთლიანად კარგავს თავის ინვესტიციას. პრივილეგიური აქციის მფლობელს კი გარანტირებული აქვს თავისი ინვესტიციის მთლიანად დაკარგვის ნაკლები რისკი. სამაგიეროდ, ასეთი ინვესტორი კომპანიისაგან ღებულობს დივიდენდს, რომლის სიდიდე არ იზრდება კომპანიის შემოსავლის ზრდასთან ერთად. შევნიშნოთ, რომ არსებობს აქციის სხვა სახეებიც, რომელიც განსაზღვრავს კომპანიის საქმიანობის მართვაში აქციონერის მონაწილეობის წესს, დივიდენდების გადახდის საკითხებს და მრავალი სხვა.

აქცია რისკიანი ფასიანი ქაღალდია, რადგან მისი მნიშვნელობები დროში შემთხვევით იცვლება და დამოკიდებულია უამრავ ფაქტორზე. აქციებში თანხის ინვესტირება ძირითადად მიმზიდველია არა დივიდენდების მიღებით, არამედ სწორედ აქციის ფასების შესაძლო მკვეთრი ცვლილებებით: ინვესტორს აქვს შანსი "გააკეთოს" ფული აქციის დაბალ ფასში ყიდვით და მისი მაღალ ფასში გაყიდვით.

ფინანსურ ბაზარზე (საფონდო ბირჟაზე) აქციების ყიდვა-გაყიდვა ხდება ბირჟის წევრი საბროკერო ფირმების საშუალებით. იმისათვის, რომ კომპანიამ შეძლოს აქციებით ვაჭრობა, მან უნდა გაითვალისწინოს კონკრეტულ ბირჟაზე ვაჭრობის გარკვეული წესები, მოთხოვნები და შეზღუდვები. მაგალითად, NYSE (New York Stock Exchange) ბირჟაზე აქციებით

ვაჭრობის მსურველი კომპანია უნდა იყოს არანაკლებ 1,1 მილიონი აქციის მფლობელი, რომლის საბაზრო ფასი 18 მილიონ ამერიკულ დოლარზე ნაკლები არ არის. ზოგიერთ საფონდო ბირჟაზე, მაგალითად, ფასიანი ქაღალდების ბაზარზე OTC (Over – the – counter), რომლის მონაწილეა დაახლოებით 40 ათასი დიდი, საშუალო და განვითარებადი კომპანია, აქციებით ვაჭრობა წარმოებს კომპიუტერულ-სატელეფონო ქსელით დილერების საშუალებით. OTC ფინანსური ბაზრის მთავარი მიმზიდველობა ინვესტორებისათვის იმაში მდგომარეობს, რომ მასში მონაწილეები არ არიან (ან ძალიან მცირედ არიან) შეზღუდულები სხვადასხვა მოთხოვნით, მაგალითად, მონაწილე კომპანიის კაპიტალის რაოდენობით და სხვა.

ბუნებრივია, ინვესტორებისათვის საინტერესოა ინფორმაციის რეგულარული მიღება ფინანსური ბაზრების მდგომარეობის შესახებ, სხვადასხვა კომპანიების აქციათა კურსების და ეკოლუციის შესახებ და, აგრეთვე, ზოგადად ეკონომიკური მდგომარეობის შესახებ.

თუ აქციის ფასებზე დაკვირვება ხდება დროის მომენტებში $n = 0, 1, \ldots, N$, მაშინ აქციის ფასების ევოლუცია შეიძლება ჩავწეროთ, გარკვეული ყოფაქცევის მქონე შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობის სახით

$$S = (S_n), \quad n = 0, 1, \ldots, N.$$

სხვადასხვა სახის ინფორმაცია ფინანსური ბაზრების მდგომარეობის შესახებ, მათ შორის აქციათა ფასების ცვლილების შესახებ რეგულარულად ქვეყნდება სპეციალურ ჟურნალ-გაზეთებში. ამასთან, კონკრეტული ქვეყნის გარდა, ქვეყნდება სხვა ქვეყნების ფინანსური ბაზრების შესახებ ინფორმაცია. მაგალითად, მსოფლიოს 16 უდიდესი ბირჟის შესახებ ყოველდღიური ინფორმაცია იბეჭდება გაზეთში "The Wall Street Journal".

ხშირად უშუალოდ S_n სიდიდეების ევოლუციის ამსახველი გრაფიკების მაგივრად ქვეყნდება გარკვეული აზრით უფრო "მოსახერხებელი"

$$h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$$

სიდიდეების ევოლუციის ამსახველი გრაფიკები. h_n სიდიდეების ინტერპრეტაციას "ლოგარითმული შემოსავლის" შინაარსი აქვს და მათი ყოფაქცევა უფრო "ერთგვაროვანია", ვიდრე თვითონ S_n სიდიდეების.

გარდა ამისა, ქვეყნდება, აგრეთვე, ინფორმაცია ეკონომიკის გლობალური მდგომარეობის მახასიათებლების შესახებ სხვადასხვა სახის საშუალოების და ინდექსების სახით. მაგალითად, დოუ ჯონსის ერთ-ერთი კარგად ცნობილი ინდექსია DJIA – Dow Jones Industrial Average, რომელიც შეიცავს ამერიკის 30 წამყვანი ინდუსტრიული კომპანიის მდგომარეობის შესახებ ინფორმაციას.

გვინდა აღვნიშნოთ, რომ ფინანსური სამყარო მთლიანობაში საკმაოდ რისკიანია, მისი მდგომარეობა სტაბილურობის თვალსაზრისით უამრავ ფაქტორზეა დამოკიდებული, რაც დროდადრო იწვევს კრიზისულ სიტუაციას

და კრახსაც კი. ასე მაგალითად, 1987 წლის ბოლოს დოუ ჯონსის ინდექსი DJIA მკვეთრად დაეცა, რის გამოც ინვესტორებმა "ყველაფრის დაკარგვის" შიშით თავიანთი აქციების ფინანსურ ბაზრებზე გამოტანა და მასიური გაყიდვა დაიწყეს. მაგალითისათვის საინტერესოა მოვიყვანოთ შემდეგი მონაცემები: NYSE ბირჟაზე 1987 წლის იანვარში ყოველდღიურ ბრუნვაში მონაწილეობდა დაახლოებით 300 მილიონი აქცია, კრახის დღეს კი – 1987 წლის 19 ოქტომბერს ბრუნვაში იყო უკვე 604 მილიონი აქცია, ხოლო 20 ოქტომბერს ამ რიცხვმა 608 მილიონი შეადგინა. ეს გამოიწვია იმან, რომ 1987 წლის 19 ოქტომბერს 1986 წლის 31 დეკემბერთან შედარებით DJIA ინდექსი 22, 6%-ით დაეცა, რამაც აბსოლუტურ ფინანსურ გამოსახულებაში 500 მილიარდი ამერიკული დოლარი შეადგინა.

ფინანსური კრიზისის ერთ-ერთი ძირითადი გამომწვევი მახასიათებელია ინფლაცია – ფასების საერთო დონის ზრდა, რომელიც არსებით გავლენას ახდენს მაკროეკონომიკაზე. ინფლაცია ფასების ინდექსით იზომება და ურთულესი მათემატიკური მოდელებით აღიწერება. ინფლაციის სათანადო მართვა სპეციალისტებისთვის მუდმივ თავსატეხს წარმოადგენს. საინტერესოა მოვიტანოთ ზოგიერთი ფაქტი. მაგალითად, გერმანიაში 1923 წელს ფასების დონე დაახლოებით 10^{12}-ჯერ გაიზარდა. ამასთან, ინფლაცია ისე სწრაფად იზრდებოდა, რომ რესტორანში სადილის შემდეგ ორჯერ მეტი თანხა იყო გადასახდელი, ვიდრე სადილის შეკვეთის დროს. ინფლაციის რეკორდული ტემპი კი დაფიქსირდა უნგრეთში 1946 წლის აგვისტოში, როდესაც ფასების დონე მიახლოებით 10^{25}-ჯერ გაიზარდა. შევნიშნავთ აგრეთვე, რომ საქართველოში 1990-იან წლებში ეროვნული ვალუტის – ლარის შემოღებამდე ბრუნვაში იყო სრულიად გაუფასურებული მილიარდობით კუპონი.

გვინდა შევნიშნოთ, რომ, სამწუხაროდ, სხვადასხვა ობიექტურმა და სუბიექტურმა მიზეზებმა 2008 წელს გამოიწვია მსოფლიო ფინანსური კრიზისი, რომელმაც უამრავი სახის უარყოფითი გაკვეთილი იქონია თითქმის ყველა ქვეყანაზე და, ცხადია, საქართველოზეც.

ლექცია 2. ფინანსური ნაკადები

1. ფინანსურ ოპერაციებში ყველაზე უფრო მნიშვნელოვანი ცვლადი სიდიდეებია ფული და დრო. სწორედ ეს ორი ცვლადი შეადგენს დეტერმინისტული ფინანსური მოდელების ძირითად ელემენტებს. ფულს დროითი ღირებულება აქვს: ფულის ერთი და იგივე რაოდენობას დროის სხვადასხვა მომენტში სხვადასხვა ღირებულება აქვს. დრო გადაიზომება აბცისთა T ღერძზე, ხოლო ფული – ორდინატთა M ღერძზე, რაც საშუალებას იძლევა დროსა და ფინანსური ოპერაციის შესაბამის თანხას შორის დამოკიდებულება გამოვსახოთ გრაფიკულად, ან სხვადასხვა სქემის სახით.

განასხვავებენ ფინანსური სიდიდეების ორ კლასს: პირველ კლასს შეადგენს ე. წ. მყისიერი სიდიდეები, რომლის მნიშვნელობები იცვლება დროის მომენტებში (მაგალითად, ფასი, კურსი), ხოლო მეორე კლასს – ე. წ. ინტერვალური სიდიდეები, რომლის მნიშვნელობები იცვლება დროით ინტერვალებში (მაგალითად, საპროცენტო განაკვეთი, მოგება, დივიდენდი).

აღვნიშნოთ დროის t მომენტში რაიმე აქტივის, მაგალითად, აქციის, ღირებულება ან ფინანსური ოპერაციის შესაბამისი თანხის რაოდენობა C_t სიმბოლოთო. (t, C_t) წყვილს მყისიერი ფინანსური ხდომილობა ან პირველი რიგის ხდომილობა ეწოდება. ვთქვათ, გვაქვს დროის მომენტები $t_0, t_1, \ldots, t_n$ და ამ მომენტებში შეტანილი (გატანილი) თანხის მნიშვნელობებია $C_{t_0}, C_{t_1}, \ldots, C_{t_n}$. ხშირად (t_k, C_{t_k}) ხდომილობებისთვის ჩვენ გამოვიყენებთ ჩაწერას (t_k, C_k), $k = 0, 1, \ldots, n$. პირველი რიგის ხდომილობების მიმდევრობას

$$\mathrm{CF} = \Big\{(t_0, C_0), (t_1, C_0), \ldots, (t_n, C_n)\Big\} \tag{2.1}$$

ეწოდება პირველი რიგის ფინანსური ან ფულადი ნაკადი. ამასთან, C_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, შეიძლება იყოს შეტანილი ან გაცემული თანხა. პირველ შემთხვევაში C_k ჩაიწერება დადებითი, ხოლო მეორე შემთხვევაში – უარყოფითი რიცხვებით. მაგალითად, თუ დროის ერთეულია თვე და $t_0 = 0$ მომენტში შეტანილი იყო საწყისი თანხა 10000, შემდეგ პირველი და მეორე თვის ბოლოს გატანილი იყო, შესაბამისად, 500 და 300, ხოლო მესამე თვის ბოლოს შეტანილი იყო 400, მაშინ გვექნება ფინანსური ნაკადი

$$\mathrm{CF} = \Big\{(0, 10000), (1, -500), (2, -300), (3, 400)\Big\}.$$

ინტერვალური ფინანსური ხდომილობა დაკავშირებულია ინტერვალურ ფინანსურ სიდიდესთან და განიმარტება შემდეგნაირად. ვთქვათ, J არის რაიმე დროითი ინტერვალი (შუალედი), მაგალითად, $[t_1, t_2]$ ან $(t_1, t_2]$, ხოლო C იყოს ამ დროითი ინტერვალის პერიოდში შეტანილი ან გაცემული თანხის რაოდენობა. (J, C) წყვილს ინტერვალური ხდომილობა ან მეორე რიგის ხდომილობა ეწოდება.

შევნიშნავთ, რომ პრაქტიკაში, ძირითადად, გამოიყენება პირველი რიგის ხდომილობები. ამ მიზნით ხდება (J, C) ინტერვალური ხდომილობის გარდაქმნა (τ, C) მყისიერ ხდომილობად. ამ ოპერაციას აქტუალიზაცია ეწოდება. თუ $J = [t_1, t_2]$ და ფინანსური ოპერაცია ხდება $\tau = t_1$ ან $\tau = t_2$ მომენტში, მაშინ ასეთი აქტუალიზაციის სქემას, შესაბამისად, ავანსირება და ფინალიზაცია ეწოდება.

ცხადია, შეიძლება პირველი რიგის ხდომილობების საშუალებით მეორე რიგის ხდომილობების განხილვა. მაგალითად, თუ გვაქვს პირველი რიგის ორი ხდომილობა (t_1, C_1), (t_2, C_2), მაშინ შეიძლება განვიხილოთ მეორე რიგის ხდომილობა (J, C), სადაც $J = [t_1, t_2)]$ და $C = C_{t_2} - C_{t_1}$.

შემოვიტანოთ ახლა პირველი რიგის ფინანსური ნაკადის რიცხვზე გამრავლების ოპერაცია. $\mathrm{CF} = \{(t_k, C_k)\}$, $k = 1, \ldots, n$, ნაკადის α რიცხვზე

ნამრავლი არის ნაკადი, რომელიც აღინიშნება და განიმარტება ტოლობით

$$\alpha\,\mathrm{CF} = \{(t_1, \alpha C_1), \ldots, (t_n, \alpha C_n)\}. \tag{2.2}$$

ვთქვათ, გვაქვს ორი ნაკადი

$$\mathrm{CF}_1 = \{(t_i^{(1)}, C_i^{(1)})\}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.3}$$

$$\mathrm{CF}_2 = \{(t_k^{(2)}, C_k^{(2)})\}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.4}$$

ამ ორი ნაკადის ჯამი აღინიშნება $\mathrm{CF}_1 + \mathrm{CF}_2$ სიმბოლოთი და განიმარტება შემდეგნაირად. ჯამი შედგება $(t_i^{(1)}, C_i^{(1)})$ და $(t_k^{(2)}, C_k^{(2)})$ ხდომილობებისგან, რომლისთვისაც $t_i^{(1)} \neq t_k^{(2)}$ და, აგრეთვე, $(t_j, C_j^{(1)} + C_k^{(2)})$ ხდომილობებისგან, რომლისთვისაც $t_i^{(1)} = t_k^{(2)} = t_i$. თუ $C_i^{(1)} + C_i^{(2)} = 0$, მაშინ ჯამში $(t_i, 0)$ ხდომილობის ჩაწერა არ ხდება.

მაგალითი 2.1. განვიხილოთ ორი ნაკადი

$$\mathrm{CF}_1 = \Big\{(0,100), (2,-200), (3,400), (5,100), (6,-300)\Big\},$$

$$\mathrm{CF}_2 = \Big\{(2,400), (4,700), (5,-150), (6,650), (7,800)\Big\}.$$

იპოვეთ $2\,\mathrm{CF}_1 + \mathrm{CF}_2$ ნაკადი.

ამოხსნა. გამოვთვალოთ $2\,\mathrm{CF}_1$ ნაკადი, გვაქვს

$$\mathrm{CF}_1 = \Big\{(0,200), (2,-400), (3,800), (5,200), (6,-600)\Big\}.$$

შემდეგ გვაქვს

$$2\,\mathrm{CF}_1 + \mathrm{CF}_2 = \Big\{(0,200), (3,800), (4,700), (5,50), (6,50), (7,800)\Big\}.$$

შევნიშნავთ, რომ რადგან $t = 2$ მომენტში $2C_2^{(1)} + C_2^{(2)} = 400 - 400 = 0$, ამიტომ ხდომილობა $(2,0)$ არ შედის $2\,\mathrm{CF}_1 + \mathrm{CF}_2$ ჯამში განმარტების თანახმად.

ფინანსური ნაკადი $\mathrm{CF} = \{(t_k, C_k)\}$, $k = 1, \ldots, n$, ხშირად ჩაიწერება არა როგორც მიმდევრობა, არამედ როგორც დროის გარკვეული ფუნქცია. CF ნაკადის ფულადი ანუ გადახდის ფუნქცია განიმარტება ტოლობით

$$C(t) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } t \neq t_k, \\ C_k, & \text{თუ } t = t_k. \end{cases} \tag{2.5}$$

ვთქვათ, $\mathrm{CF} = \{(t_k, C_k)\}$, $k = 1, \ldots, n$, ნაკადის გადახდის ფუნქციაა $C(t)$. აღვნიშნოთ $\widetilde{C}(t)$-ით λ რიცხვის CF ნაკადზე ნამრავლის ანუ $\lambda\,\mathrm{CF}$ ნაკადის გადახდის ფუნქცია. სამართლიანია ტოლობა

$$\widetilde{C}(t) = \lambda C(t) \tag{2.6}$$

ვთქვათ, ახლა $C_1(t)$ და $C_2(t)$ არის (2.3) და (2.4) ტოლობებით მოცემული CF_1 და CF_2 ნაკადების გადახდის ფუნქციები, შესაბამისად, ხოლო $C(t)$ არის $\mathrm{CF} = \mathrm{CF}_1 + \mathrm{CF}_2$ ჯამის გადახდის ფუნქცია. ადვილი შესამოწმებელია, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$C(t) = C_1(t) + C_2(t). \tag{2.7}$$

მეორე რიგის ან ინტერვალური ფინანსური ნაკადი ეწოდება მეორე რიგის ხდომილობების მიმდევრობას

$$\overline{\mathrm{CF}} = \big\{(J_1, C_1), \ldots, (J_n, C_n)\big\}, \tag{2.8}$$

სადაც $J_i = [t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, \ldots, n$, წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი დროითი ინტერვალებია, $J_i \cap J_k = \varnothing$, $i \neq k$, $i, k = 1, \ldots, n$. მეორე რიგის ხდომილობებისათვის აქტუალიზაციის ოპერაციის ანალოგიურად შეიძლება მეორე რიგის ნაკადის აქტუალიზაცია. მართლაც, მეორე რიგის (2.8) ნაკადის ყოველი ხდომილობის აქტუალიზაციით მივიღებთ შესაბამის პირველი რიგის ნაკადს. ამასთან, ავანსირებული და ფინალიზირებული პირველი რიგის ნაკადები აღინიშნება და ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$\mathrm{Adv}(\mathrm{CF}) = \mathrm{CF}^a = \big\{(t_0, C_1), \ldots, (t_{n-1}, C_n)\big\}, \tag{2.9}$$

$$\mathrm{Fin}(\mathrm{CF}) = \mathrm{CF}^f = \big\{(t_1, C_1), \ldots, (t_n, C_n)\big\}, \tag{2.10}$$

შესაბამისად.

მაგალითი 2.2. განვიხილოთ მეორე რიგის ნაკადი

$$\overline{\mathrm{CF}} = \big\{(J_1, C_1), (J_2, C_2), (J_3, C_3)\big\},$$

სადაც $J_1 = [0, 1)$, $J_2 = [1, 2)$, $J_3 = [2, 3)$, $C_1 = 100$, $C_2 = 200$, $C_3 = 300$. იპოვეთ ავანსირებული CF^a და ფინალიზირებული CF^f ნაკადები.

ამოხსნა. თუ გამოვიყენებთ ავანსირების და ფინალიზაციის ოპერაციების განმარტებებს, მაშინ გვექნება

$$\mathrm{CF}^a = \big\{(0, 100), (1, 200), (2, 300)\big\},$$
$$\mathrm{CF}^f = \big\{(1, 100), (2, 200), (3, 300)\big\}.$$

შეიძლება, აგრეთვე, განვიხილოთ პირველი რიგის ნაკადის მეორე რიგის ნაკადად გარდაქმნის ოპერაცია. თუ გვაქვს, მაგალითად, (2.2) ნაკადი, მაშინ ის შეიძლება ჩავწეროთ (2.8) ნაკადის სახით. მაგალითად, თუ გვაქვს ნაკადი

$$\mathrm{CF} = \Big\{(t_1, C_1), (t_2, C_2), (t_3, C_3), (t_4, C_4)\Big\},$$

მაშინ

$$\overline{\mathrm{CF}} = \big\{(J_1, B_1), (J_2, B_2)\big\},$$

სადაც $J_1 = [t_1, t_2]$, $J_2 = [t_3, t_4]$, $B_1 = C_2 - C_1$, $B_2 = C_4 - C_3$.

მაგალითი 2.3. განვიხილოთ პირველი რიგის ნაკადი

$$\mathrm{CF} = \Big\{(0,100),(2,200),(3,400),(5,700)\Big\}.$$

ჩაწერეთ ამ მონაცემებით მეორე რიგის ნაკადი.

ამოხსნა. განვიხილოთ არაგადამკვეთი ინტერვალები $J_1 = [0,2]$, $J_2 = [3,5]$ და სიდიდეები $B_1 = 200 - 100 = 100$, $B_2 = 700 - 400 = 300$. CF ნაკადის შესაბამისი მეორე რიგის ნაკადი ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$\overline{\mathrm{CF}} = \Big\{\big([0,2],100\big),\big([3,5],300\big)\Big\}.$$

2. ფინანსური ნაკადების გამოყენების საილუსტრაციოდ მოკლედ შევეხებით სპეციალურ ინტერვალურ ნაკადს, რომელსაც რენტა ეწოდება.

განვიხილოთ ე. წ. გადახდების რეგულარული ნაკადები, რომელიც ბუნებრივად წარმოიშობა უამრავ ფინანსურ ოპერაციასა და გარიგებაში. ასეთებია, მაგალითად, ობლიგაციაზე და ანაბარზე საპროცენტო სარგებლის დარიცხვა, დივიდენდების გადახდა, პენსიის გადახდა და სხვა. აქ საჭიროა დროითი და ფინანსური ასპექტის განხილვა. სწორედ დროითი ასპექტია დაკავშირებული რეგულარობასთან. მაგალითად, გადახდები წარმოებს რეგულარულად ყოველი თვის, კვარტლის ან წლის ბოლოს. ფინანსური ასპექტი დაკავშირებულია უშუალოდ გადახდების სტრუქტურასთან და რაოდენობასთან. მაგალითად, გადახდები ერთნაირია, იზრდება ან კლებულობს ერთი და იგივე სიდიდით. რენტა არის მეორე რიგის რეგულარული ფინანსური ნაკადი

$$\overline{\mathrm{CF}} = \Big\{(J_1,C_1),\dots,(J_n,C_n),\dots\Big\}, \tag{2.11}$$

სადაც იგულისხმება, რომ $J_1,\dots,J_n,\dots$ ინტერვალების (რენტის პერიოდების) სიგრძეები ერთმანეთის ტოლია

$$|J_1| = \cdots = |J_n| = \cdots = h. \tag{2.12}$$

h რიცხვს რენტის პერიოდი ეწოდება, ხოლო $J_k = (t_{k-1}, t_k)$ ინტერვალების ბოლოებს ანუ t_k, $k = 0,1,\dots$, დროის მომენტებს რენტის კრიტიკული მომენტები ეწოდება. ეს მომენტები ქმნის არითმეტიკულ პროგრესიას, რომლის პირველი წევრია t_0 რენტის დასაწყისი, ხოლო სხვაობა h-ის ტოლია. ამრიგად, გვაქვს $t_k = t_0 + kh$, $k = 0,1,\dots$; რენტას ეწოდება ვადიანი, თუ J_k ინტერვალების რაოდენობა სასრულია, $k = 0,1,\dots,n$, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი – უვადო. ბოლო $J_n = (t_{n-1}, t_n)$ ინტერვალის t_n მომენტს ვადიანი რენტის ბოლო ეწოდება, ხოლო $T = t_n - t_0$ რიცხვს რენტის პორიზონტი (სიგანე) ეწოდება.

რენტის ზოგიერთი გადასახადი შეიძლება ნულის ტოლი იყოს. J_k ინტერვალს ეწოდება გადამხდელი პერიოდი, თუ მას შეესაბამება არანულოვანი

C_k გადახდა, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი – ნულოვანი (ცარიელი). გადამხდელი პერიოდების რაოდენობას რენტის ვადა ეწოდება. პირველი გადამხდელი პერიოდის დასაწყისს რენტის ეფექტური დასაწყისი, ხოლო ბოლო გადამხდელი პერიოდის ბოლოს – რენტის ეფექტური დასასრული ეწოდება. თუ რენტის დასაწყისი და ეფექტური დასაწყისი ერთმანეთს ემთხვევა – რენტას მყისიერი, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი – გადავადებული ეწოდება. თუ რენტის ბოლო და ეფექტური დასასრული ერთმანეთს ემთხვევა რენტას დასრულებული, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი – არადასრულებული ეწოდება. თუ პერიოდი ერთი წლის ტოლია, რენტას ანუიტეტი ეწოდება. თუ რენტის ყველა გადასახადი ერთმანეთის ტოლია $C_1 = \cdots = C_n$, რენტას მუდმივი ეწოდება, ხოლო თუ გადასახადები მონოტონურად იზრდება ან კლებულობს, რენტას მონოტონური ეწოდება.

პრაქტიკაში ხდება რენტის აქტუალიზაცია პირველი რიგის ნაკადად. ასეთ შემთხვევაში ავასხირებული პირველი რიგის ნაკადს ავასხირებული, წინსწრები ანუ პრენუმერანდო რენტა ეწოდება, ხოლო ფინალიზებულ პირველი რიგის ნაკადს – ფინალური, ჩვეულებრივი ანუ პოსტნუმერანდო რენტა ეწოდება.

ხშირად რენტის თითოეული პერიოდი (ან რომელიმე პერიოდი) იყოფა p ნაწილად და ყოველ ნაწილში გაიცემა ერთმანეთის ტოლი გადახდები. ასეთი სახის რენტებს p-ჯერადი ეწოდება. ასეთია, მაგალითად, აქციაზე რენტა, რომელსაც წლიური დივიდენდის გადახდა წარმოებს კვარტალურად ($p = 4$), ან კიდევ კუპონური რენტა ობლიგაციაზე, რომელსაც წლიური კუპონური გადახდები გაიცემა ყოველი ნახევარი წლის პერიოდით და სხვა. თუ, მაგალითად, გვაქვს p-ჯერადი ერთწლიანი რენტა (p-ჯერადი ანუიტეტი) C-ს ტოლი წლიური გადახდით, მაშინ ხდება C/p სიდიდის p-ჯერ გადახდა. შევნიშნავთ, რომ ასეთი გადახდები (გადახდების ნაკადები) თვითონ წარმოადგენს რენტას, რომელსაც მიკრორენტა ეწოდება.

$\overline{CF}$ რენტის p-ჯერადი დანაწილების ოპერაცია $D^{(p)}$-თი აღინიშნება, ხოლო ამ ოპერაციით მიღებული შესაბამისი რენტა აღინიშნება $D^{(p)}(\overline{\mathrm{CF}})$ სიმბოლოთი.

მაგალითი 2.4. განვიხილოთ რენტა

$$\overline{\mathrm{CF}} = \Big\{((0,1),100),((1,2),200),((2,3),300)\Big\}.$$

1. იპოვეთ მესამე პერიოდის შესაბამისი 3-ჯერადი მიკრორენტა;
2. იპოვეთ მთლიანი რენტის შესაბამისი 2-ჯერადი მიკრორენტა.

ამოხსნა. ადვილი შესამოწმებელია, რომ საძებნ მიკრორენტებს, შესაბამისად, აქვს შემდეგი სახე

1. $D^{(3)} = ((2,3),300) =$

$$= \left\{\left(\left(2,\frac{7}{3}\right),100\right),\left(\left(\frac{7}{3},\frac{8}{3}\right),100\right),\left(\left(\frac{8}{3},3\right),100\right)\right\}.$$

2. $D^{(2)}(\overline{\mathrm{CF}}) = \left\{\left(\left(0,\frac{1}{2}\right),50\right),\left(\left(\frac{1}{2},1\right),50\right),\left(\left(1,\frac{3}{2}\right),100\right),\right.$
$\left.\left(\left(\frac{3}{2},2\right),100\right),\left(\left(2,\frac{5}{2}\right),150\right),\left(\left(\frac{5}{2},3\right),150\right)\right\}.$

თუ $\overline{\mathrm{CF}}$ რუნტის p-ჯკრადი მიკრორუნტისთვის გამოვიყენებთ აქტუალიზაციის ორ ოპერაციას – ავანსირებას და ფინალიზაციას, მაშინ მივიღებთ p-ჯკრად ავანსირებულ და ფინალიზირებულ მიკრორუნტებს (რუნტებს), რომელიც აღინიშნება $\mathrm{Adv}(D^{(p)}(\overline{\mathrm{CF}}))$ და $\mathrm{Fin}(D^{(p)}(\overline{\mathrm{CF}}))$ სიმბოლოებით, შესაბამისად. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ამ სიდიდეებს გააჩნიათ შემდეგი თვისება

$$\mathrm{Adv}(D^{(p)}(\overline{\mathrm{CF}})) = D^{(p)}(\mathrm{Adv}(\overline{\mathrm{CF}})), \tag{2.13}$$

$$\mathrm{Fin}(D^{(p)}(\overline{\mathrm{CF}})) = D^{(p)}(\mathrm{Fin}(\overline{\mathrm{CF}})). \tag{2.14}$$

მაგალითი 2.5. ვთქვათ, გვაქვს მაგალითი 2.4-ში განხილული რუნტა

$$\overline{\mathrm{CF}} = \{((0,1),100),((1,2),200),((2,3),300)\}.$$

1. შეამოწმეთ (2.13) თვისება 2-ჯკრადი მიკრორუნტისთვის.

2. შეამოწმეთ (2.14) თვისება 2-ჯკრადი მიკრორუნტისთვის.

ამოხსნა. გამოვთვალოთ (2.13) და (2.14) ტოლობების მარცხენა და მარჯვენა მხარეები და, შესაბამისად, შევადაროთ ისინი ერთმანეთს.

1. გამოვთვალოთ (2.13) ტოლობის მარცხენა მხარე. მაგალითი 2.4-ში გამოთვლილი გვაქვს მიკრორუნტა $D^{(2)}(\overline{\mathrm{CF}})$. შემდეგ გვაქვს

$$\mathrm{Adv}(D^{(2)}(\overline{\mathrm{CF}})) =$$
$$= \left\{(0,50),\left(\frac{1}{2},50\right),(1,100),\left(\frac{3}{2},100\right),(2,150),\left(\frac{5}{2},150\right)\right\}.$$

გამოვთვალოთ ახლა (2.13) ტოლობის მარჯვენა მხარე. გვაქვს

$$\mathrm{Adv}(\overline{\mathrm{CF}}) = \{(0,100),(1,200),(2,300)\}.$$

მივიღეთ პირველი რიგის ავანსირებული ნაკადი. მისი შესაბამისი 2-ჯკრადი რუნტის გამოსათვლელად საჭიროა დროის ყველა მომენტთან ერთად განვიხილოთ, აგრეთვე, მათგან მარჯვნივ $1/2$-ის ტოლი სიგრძით დაშორებული მომენტები და შესაბამისი გადახდები. რიცხვი $1/2$ გვაქვს იმიტომ, რომ ვიხილავთ 2-ჯკრად რუნტას და დასაყოფი ნაკადის მომენტებს შორის

მანძილები ერთის ტოლია. გვექნება

$$D^{(2)}(\mathrm{Adv}(\overline{\mathrm{CF}})) =$$
$$= \Big\{(0,50), \Big(\frac{1}{2},50\Big), (1,100), \Big(\frac{3}{2},100\Big), (2,150), \Big(\frac{5}{2},150\Big)\Big\}.$$

ამრიგად, მივიღეთ

$$\mathrm{Adv}(D^{(2)}(\overline{\mathrm{CF}})) = D^{(2)}(\mathrm{Adv}(\overline{\mathrm{CF}})).$$

2. გამოვთვალოთ (2.14) ტოლობის მარცხენა მხარე. $D^{(2)}(\overline{\mathrm{CF}})$ მიკრორენტა გამოთვლილია. შემდეგ გვაქვს

$$\mathrm{Fin}(D^{(2)}(\overline{\mathrm{CF}})) =$$
$$= \Big\{\Big(\frac{1}{2},50\Big), (1,50), \Big(\frac{3}{2},100\Big), (2,100), \Big(\frac{5}{2},150\Big), (3,150)\Big\}.$$

გამოვთვალოთ ახლა (2.14) ტოლობის მარჯვენა მხარე. გვაქვს

$$\mathrm{Fin}(\overline{\mathrm{CF}}) = \big\{(1,100), (2,200), (3,300)\big\}.$$

მივიღეთ ისევ პირველი რიგის, მხოლოდ უკვე ფინალიზირებული ნაკადი. მისი შესაბამისი 2-ჯერადი რენტის გამოსათვლელად ამ შემთხვევაში საჭიროა დროის ყოველ მომენტთან ერთად განვიხილოთ, აგრეთვე, მათგან მარცხნივ $1/2$-ის ტოლის სიგრძით დაშორებული მომენტები და შესაბამისი გადახდები. ამ პროცედურის ჩატარებით ადვილად დაგრწმუნდებით, რომ

$$\mathrm{Fin}(D^{(2)}(\overline{\mathrm{CF}})) = D^{(2)}(\mathrm{Fin}(\overline{\mathrm{CF}})).$$

3. პირველი რიგის ნაკადისათვის (2.5) გადახდის ფუნქციის ანალოგი დროითი J შუალედისათვის განიმარტება შემდეგნაირად. ნაკადის ნეტო სიდიდე ეწოდება გამოსახულებას

$$\mathrm{NV}(\mathrm{CF}; J) = \sum_{k:\, t_k \in J} C_k, \tag{2.15}$$

ანუ ნაკადის ნეტო სიდიდე არის ჯამი ნაკადის იმ C_k სიდიდებისა, რომლისთვისაც დროითი t_k მომენტები ეკუთვნის დროით J ინტერვალს. შევნიშნავთ, ამასთან, რომ (2.15) რიცხვითი მნიშვნელობები დამოკიდებულია J ინტერვალის ბოლო წერტილების ინტერვალისათვის მიკუთვნებაზე.

მაგალითი 2.6. განვიხილოთ ნაკადი

$$\mathrm{CF} = \Big\{(0,300), (1,100), (2,-200), (3,400)\Big\}.$$

იპოვეთ $\mathrm{NV}(\mathrm{CF}, [0,2))$ და $\mathrm{NV}(\mathrm{CF}, (0,3])$ ნეტო სიდიდეები.

ა მ ო ხ ს ნ ა . (2.11) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$\mathrm{NV}(\mathrm{CF},[0,2)) = 300 + 100 = 400,$$
$$\mathrm{NV}(\mathrm{CF},(0,3]) = 100 + (-200) + 400 = 300.$$

ნეტო სიდიდეს გააჩნია შემდეგი თვისება: ნებისმიერი $t_1 < t_2 < t_3$ დროის მომენტებისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$\mathrm{NV}(\mathrm{CF},[t_1,t_3]) = \mathrm{NV}(\mathrm{CF},[t_1,t_2]) + \mathrm{NV}(\mathrm{CF},(t_2,t_3]). \tag{2.16}$$

როდესაც ხდება ინვესტორის მიერ თანხის დაგროვება, ე. ი. გვაქვს დაგროვების ანგარიში ანუ ფონდი, მაშინ ფონდის სიდიდე დროის t მომენტში შეიძლება ჩავწეროთ ნეტო სიდიდის საშუალებით. მართლაც, ვთქვათ, დროის საწყის t_0 მომენტში ფონდის სიდიდეა V_0, ხოლო დროის $t > t_0$ მომენტში – V_t. ფონდთან დაკავშირებული CF ნაკადისათვის V_t სიდიდე დროის t მომენტის ჩათვლით მოიცემა შემდეგი სახით

$$V_t = V_0 + \mathrm{NV}(\mathrm{CF},(t_0,t]), \tag{2.17}$$

რომელსაც ბალანსის განტოლება ეწოდება. თუ გვაქვს დროის ნებისმიერი სამი მომენტი $t_0 < t_1 < t_2$, მაშინ (2.17) განტოლებიდან ადვილად მივიღებთ შემდეგ ტოლობას

$$V_{t_2} = V_{t_1} + \mathrm{NV}(\mathrm{CF},(t_1,t_2]), \tag{2.18}$$

რომელსაც, აგრეთვე, ბალანსის განტოლება ეწოდება. მართლაც, გვაქვს

$$\begin{aligned} V_{t_2} &= V_0 + \mathrm{NV}(\mathrm{CF},(t_0,t_2]) = \\ &= V_0 + \mathrm{NV}(\mathrm{CF},(t_0,t_1]) + \mathrm{NV}(\mathrm{CF},(t_1,t_2]) = \\ &= V_{t_1} + \mathrm{NV}(\mathrm{CF},(t_1,t_2]). \end{aligned}$$

ამრიგად, ნეტო სიდიდე გვაძლევს დროის $(t_1,t_2]$ შუალედში ფონდში შესული და ფონდიდან გასული თანხების საერთო ბალანსს, ანუ დროის მოცემულ შუალედში ფონდის სიდიდის ცვლილებას

$$V_{t_2} - V_{t_1} = \mathrm{NV}(\mathrm{CF},(t_1,t_2]). \tag{2.19}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.7. განვიხილოთ ნაკადი

$$\mathrm{CF} = \{(1,100),(2,-200),(3,400)\}$$

და ვთქვათ, დროის $t_0 = 0$ მომენტში ფონდის სიდიდეა $V_0 = 500$.

გამოთვალეთ V_1, V_2 და V_3 სიდიდეები.

ა მ ო ხ ს ნ ა . გვაქვს

$$V_1 = V_0 + \mathrm{NV}(\mathrm{CF},(0,1]) = 500 + 100 = 600,$$
$$V_2 = V_0 + \mathrm{NV}(\mathrm{CF},(0,2]) = 500 + 100 - 200 = 400,$$
$$V_3 = V_0 + \mathrm{NV}(\mathrm{CF},(0,3]) = 500 + 100 - 200 + 400 = 800.$$

ცხადია, V_2 და V_3 სიდიდეები შეიძლება ასეც დავთვალოთ

$$V_2 = V_1 + \mathrm{NV}(\mathrm{CF}, (1,2]) = 600 - 200 = 400,$$
$$V_3 = V_2 + \mathrm{NV}(\mathrm{CF}, (2,3]) = 400 + 400 = 800.$$

4. ფინანსური ნაკადები გამოიყენება სხვადასხვა სახის ფინანსური ოპერაციების ანალიზში, მაგალითად, ფინანსურ გარიგებაში, რომელიც მდგომარეობს რაიმე საქონლის ან ფინანსური აქტივის ყიდვა-გაყიდვაში.

ვთქვათ, დროის t_1 მომენტში ვიყიდეთ რაიმე აქტივი p_i ფასად, ხოლო დროის $t_2 > t_1$ მომენტში გავყიდეთ იგი p_2 ფასად. ამრიგად, გარიგების შესაბამისი პირველი რიგის ნაკადია

$$\mathrm{CF} = \{(t_1, -p_1), (t_2, p_2)\}, \tag{2.20}$$

რომელსაც წარმოქმნილი ნაკადი ეწოდება. გარიგების პერიოდში მყიდველმა შეიძლება მიიღო მიმდინარე შემოსავალი. ასე მაგალითად, აქციის მფლობელმა შეიძლება მიიღოს გარკვეული დივიდენდი, ხოლო ობლიგაციის მფლობელმა მიიღოს საპროცენტო (საკუპონო) შემოსავალი. შევნიშნავთ, რომ მიმდინარე შემოსავალი შეიძლება მიიღოს, აგრეთვე, რაიმე ქონების მყიდველმაც, მაგალითად, არენდის გადასახადის სახით.

ვთქვათ, $J = [t_1, t_2]$ პერიოდში მიმდინარე შემოსავალი არის D_J. მაშინ ფინანსური გარიგება შეიძლება აღვწეროთ ნაკადის წყვილით: პირველი რიგის ნაკადით

$$\mathrm{CF}_1 = \{(t_1, -p_1), (t_2, p_2)\} \tag{2.21}$$

და მეორე რიგის ნაკადით

$$\overline{\mathrm{CF}}_2 = \{(J, D_J)\}. \tag{2.22}$$

ჯამური ანუ სრული მიმდინარე შემოსავალი იქნება

$$I_J = D_J + P_J, \tag{2.23}$$

სადაც $P_J = P_2 - P_1$.

მაგალითი 2.8. ვთქვათ, $J = [t_1, t_2]$ პერიოდია ერთი წელი. წლის დასაწყისში (t_1 მომენტში) ვიყიდეთ აქცია $p_1 = 100$ ფასად, რომელიც გავყიდეთ წლის ბოლოს (t_2 მომენტში) $p_2 = 140$ ფასად. ამასთან ერთად, J პერიოდში მივიღეთ დივიდენდი $D_J = 10$. იპოვეთ სრული მიმდინარე შემოსავალი და ფინანსური გარიგების შესაბამისი პირველი და მეორე რიგის ნაკადები.

ამოხსნა. (2.22) ტოლობის თანახმად გვაქვს

$$I_J = 10 + (140 - 100) = 50.$$

(2.21) და (2.22) ტოლობების თანახმად გვაქვს

$$\mathrm{CF}_1 = \big\{(t_1, -100), (t_2, 140)\big\},$$
$$\overline{\mathrm{CF}}_2 = \big\{\big([t_1, t_2], 10\big)\big\}.$$

შევნიშნავთ, რომ მიმდინარე შემოსავლის გადახდა ხდება, როგორც წესი $J = [t_0, t_1]$ პერიოდის ბოლოს t_1 მომენტში ან სერიული გადახდები. მაგალითად, დივიდენდები აქციაზე შეიძლება გადაიხადოთ ერთჯერ წლის ბოლოს ან ყოველი კვარტლის ბოლოს. მიმდინარე შემოსავლის ერთჯერ გადახდა პერიოდის ბოლოს ფაქტობრივად წარმოადგენს $\overline{\mathrm{CF}}_2$ ნაკადის ფინალიზაციას და გვაქვს

$$\mathrm{CF}_2 = \mathrm{Fin}(\overline{\mathrm{CF}}_2) = \big\{(t_2, D_J)\big\}, \tag{2.24}$$

რომელიც მხოლოდ ერთი (t_2, D_J) ფინანსური ხდომილობისგან შედგება. ეს ხდომილობა წარმოადგენს დროის t_2 მომენტში D_J მიმდინარე შემოსავლის გადახდას. ამრიგად, ჩვენ საშუალება გვაქვს ფინანსური გარიგება განსხვავებული რიგის (2.21) და (2.22) ნაკადების მაგივრად აღვწეროთ ერთი პირველი რიგის ნაკადის საშუალებით.

$$\mathrm{CF} = \mathrm{CF}_1 + \mathrm{CF}_2\,. \tag{2.25}$$

მაგალითი 2.9. ვთქვათ, გვაქვს მაგალითი 2.8-ის მონაცემები. ჩაწერეთ (2.25) ტოლობა ფინანსური გარიგებისათვის.

ამოხსნა. პირველ რიგში ჩავწეროთ $\overline{\mathrm{CF}}_2$ ნაკადის შესაბამისი ფინალიზირებული ნაკადი. გვექნება

$$\mathrm{CF}_2 = \big\{(t_2, 10)\big\}.$$

ახლა, თუ გავიხსენებთ პირველი რიგის ორი ნაკადის ჯამის სტრუქტურას, მაშინ გვექნება

$$\mathrm{CF} = \mathrm{CF}_1 + \mathrm{CF}_2 =$$
$$= \big\{(t_1, -100), (t_2, 140)\big\} + \big\{(t_2, 10)\big\} = \big\{(t_1, -100), (t_2, -150)\big\}.$$

ზემოთ აღწერილი ფინანსური გარიგების ანალოგიურ სიტუაციასთან გვაქვს საქმე მარტივი საკრედიტო გარიგების შემთხვევაშიც. ვთქვათ, კრედიტორმა გასცა დროის t_0 მომენტში p რაოდენობის სესხი (ძირითადი ვალი), რომელიც დებიტორმა (სესხის ამღებმა უნდა დაფაროს დროის $t_1 > t_0$ მომენტში გარიგების პროცენტის გათვალისწინებით $[t_0, t_1]$ პერიოდში. კრედიტორის პოზიციიდან მისი მიმდინარე შემოსავალია I_J, სადაც $J = [t_0, t_1]$. ამ გარიგებისათვის გვაქვს

$$\mathrm{CF}_1 = \big\{(t_0, -p), (t_1, p)\big\},$$
$$\overline{\mathrm{CF}}_2 = \big\{(J, I_J)\big\}.$$

დებიტორის მიერ პროცენტის გადახდა ხდება ან გარიგების დასაწყისში (t_0 მომენტში) ან გარიგების ბოლოს (t_1 მომენტში). პირველ შემთხვევაში გვაქვს

$$\mathrm{CF}_2 = \mathrm{Fin}(\overline{\mathrm{CF}_2}) = \{(t_1, I_J)\},$$

და გარიგების შესაბამისი პირველი რიგის ნაკადია

$$\mathrm{CF} = \mathrm{CF}_1 + \mathrm{CF}_2 = \{(t_0, -p), (t_1, p + I_J)\}$$

მეორე შემთხვევაში გვაქვს .

$$\mathrm{CF}_2 = \mathrm{Adv}(\overline{\mathrm{CF}_2}) = \{(t_0, I_J)\}$$

და გარიგების შესაბამისი პირველი რიგის ნაკადია

$$\mathrm{CF} = \mathrm{CF}_1 + \mathrm{CF}_2 = \{(t_0, -p + I_J), (t_1, p)\}.$$

მაგალითი 2.10. ვთქვათ, კრედიტორმა $t_0 = 0$ მომენტში გასცა სესხი $p = 1000$ ერთი წლის ვადით, რომელიც დებიტორმა უნდა დააბრუნოს $t_1 = 1$ მომენტში წლის ბოლოს სესხის 10%-ის გათვალისწინებით. ჩაწერეთ გარიგების შესაბამისი პირველი რიგის ნაკადები ფინალიზაციისა და ავანსირების შემთხვევებში.

ამოხსნა. პირველ რიგში გამოვთვალოთ მიმდინარე შემოსავალი. გვაქვს $I_j = 100$, $J = [0, 1]$. შემდეგ გვაქვს

$$\mathrm{CF}_1 = \{(0, -1000), (1, 1000)\},$$
$$\overline{\mathrm{CF}_2} = \{([0, 1], 100)\}.$$

ფინალიზაციის შემთხვევაში გვექნება

$$\mathrm{CF}_2 = \mathrm{Fin}(\overline{\mathrm{CF}_2}) = \{(1, 100)\},$$
$$\mathrm{CF} = = \mathrm{CF}_1 + \mathrm{CF}_2 = \{(0, -1000), (1, 1000)\} + \{(1, 100)\} =$$
$$= \{(0, -1000), (1, 1100)\}.$$

ავანსირების შემთხვევაში გვექნება

$$\mathrm{CF}_2 = \mathrm{Adv}(\overline{\mathrm{CF}_2}) = \{(0, 100)\},$$
$$\mathrm{CF} = \mathrm{CF}_1 + \mathrm{CF}_2 = \{(0, -1000), (1, 1000)\} + \{(1, 100)\} =$$
$$= \{(0, -900), (1, 1000)\}.$$

ლექცია 3. ფინანსური ოპერაციები და სქემები

1. განვიხილოთ მარტივი საკრედიტო გარიგება P_0 საწყისი თანხით დროის t_0 მომენტში და P_1 თანხით დაფარვის t_1 მომენტში. ეს ოპერაცია წარმოადგენს დისკრეტულ ნაკადს

$$\mathrm{CF} = \big\{(t_0, B_0), (t_1, B_1)\big\}, \tag{3.1}$$

სადაც $B_0 = P_0$ და $B_1 = P_1$. აქ არაფერია ნათქვამი საკრედიტო გარიგების მდგომარეობის შესახებ დროის იმ მომენტებისათვის, რომელიც (t_0, t_1) შუალედში მდებარეობს. თუ, მაგალითად, ხდება პროცენტის დარიცხვა ამ შუალედის ნებისმიერ t მომენტში, $t_0 \le t \le t_1$, მაშინ გვაქვს ე. წ. დაგროვებული (დარიცხული) პროცენტის შესაბამისი თანხა I_t და დროის t მომენტისათვის გარიგების მდგომარეობა შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$$B_t = B(t) = B_0 + I_t. \tag{3.2}$$

ცხადია, თუ $t = t_0$, მაშინ $I_{t_0} = 0$ და $B(t_0) = B_0$. თუ $t = t_1$, მაშინ გვექნება

$$B_{t_1} = B(t) = B_0 + I_{t_1} = B_1. \tag{3.3}$$

(3.2), (3.3) ტოლობებში მთავარია შევნიშნოთ, რომ საკრედიტო გარიგების შესაბამისი ფინანსური პროცესი B_t დამოკიდებულია მხოლოდ დროზე და, აგრეთვე, ფიქსირებულ პარამეტრებზე t_0-ზე და B_0-ზე. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ფინანსურ პროცესზე შემთხვევითი ფაქტორების გავლენას გამოვრიცხავთ (არ ვითვალისწინებთ), ანუ ვიხილავთ დეტერმინისტულ ფინანსურ პროცესებს. ასეთი პროცესის დინამიკა (საწყისი B_0 თანხის ევოლუცია დროში) შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი განტოლების სახით

$$B_t = B(t; t_0, B_0). \tag{3.4}$$

შევნიშნოთ, რომ ხშირად (t, C) ფინანსურ ხდომილობას აღნიშნავენ C_t სიმბოლოთი, რომელსაც კიდევ (t მომენტში) "დათარიღებული" თანხა ეწოდება. თუ გვაქვს ხდომილობა (τ, C) და $t_0 = \tau$, $B_0 = C$, მაშინ გვექნება კონკრეტული (ინდივიდუალური) ფინანსური პროცესი

$$B_t = B(t; \tau, C).$$

ასეთ შემთხვევაში B_t-ს ეწოდება დროის t მომენტში (τ, C) ხდომილობის (C თანხის) მომავალი (დაყვანილი) მნიშვნელობა და აღინიშნება შემდეგნაირად

$$B_t = \mathrm{FV}_t(\tau, C), \quad t > \tau. \tag{3.5}$$

აქვე შევნიშნოთ, რომ დეტერმინისტულ ფინანსურ პროცესში მისი საწყისი მდგომარეობა მთლიანად და ცალსახად განსაზღვრავს (წარმოქმნის) მის ყველა შემდგომ მომავალ მდგომარეობას.

ვიტყვით, რომ (t_2, C_2) ხდომილობა უშუალოდ ცვლის (ენაცვლება) (t_1, C_1) ხდომილობას დეტერმინისტული პროცესის მიმართ, თუ

$$C_2 = B(t_2; t_1, C_1), \quad \text{როცა} \quad t_2 \geq t_1,$$
$$C_1 = B(t_1; t_2, C_2), \quad \text{როცა} \quad t_1 \geq t_2.$$

B_t პროცესს ეწოდება სრულად დეტერმინისტული (განსაზღვრული), თუ ნებისმიერი (τ, C) ხდომილობისათვის და დროის p მომენტისათვის არსებობს ერთადერთი ხდომილობა (p, V), რომელიც უშუალოდ ცვლის (τ, C) ხდომილობას. ამრიგად, სრულად დეტერმინისტული პროცესისათვის გვაქვს: თუ (p, V) ცვლის (τ, C)-ს, $p \geq \tau$, მაშინ

$$V = B(p; \tau, C) \quad \text{ანუ} \quad V = \mathrm{FV}_p(\tau, C),$$

ხოლო თუ (τ, C) ცვლის (p, V)-ს, $\tau \geq p$, მაშინ

$$C = B(\tau; p, V) \quad \text{ანუ} \quad C = \mathrm{FV}_\tau(p, V).$$

თუ ხდომილობა (p, V) წარმოქმნის მომავალში (τ, C) ხდომილობას, რაც $C = \mathrm{FV}_\tau(p, V)$ ტოლობით ჩაიწერება, ანალოგიურად შეიძლება ჩავწეროთ $p < \tau$ მომენტისათვის (τ, C) ხდომილობის (ანუ C თანხის) დღევანდელი ანუ მიმდინარე მნიშვნელობა ტოლობით

$$V = V_p = \mathrm{PV}_p(\tau, C), \quad p < \tau. \tag{3.6}$$

ამრიგად, (3.5) და (3.6) ტოლობების თანახმად გვაქვს: თუ $p \geq \tau$, მაშინ $B_p = \mathrm{FV}_p(\tau, C)$ არის C თანხის მნიშვნელობა მომავალში დროის p მომენტში და თუ $p < \tau$, მაშინ $V_p = \mathrm{PV}_p(\tau, C)$ არის მომავალში τ მომენტში C თანხის მნიშვნელობა დროის p მომენტში ანუ მიმდინარე (დღევანდელი p მომენტში) მნიშვნელობა.

ორ (t_1, C_1) და (t_2, C_2) ხდომილობას ეწოდება ეკვივალენტური დროის p მომენტის მიმართ, თუ ისინი ცვლიან ერთი და იგივე (p, V) ხდომილობას. ამ ფაქტს $C_1 \overset{p}{\sim} C_2$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ. ამასთან, p მომენტს პოლუსი ეწოდება.

2. ვთქვათ, გვაქვს (t, C) ხდომილობა და p პოლუსი. გამოსახულებას

$$V_p = \mathrm{FV}_p(t, C) = A(t, p; C), \quad p \geq t, \tag{3.7}$$

ეწოდება კაპიტალიზაციის ფინანსური კანონი, რომელიც განსაზღვრავს (t, C) ხდომილობის მომავალ მდგომარეობას. ანალოგიურად, გამოსახულებას

$$V_p = \mathrm{PV}_p(t, C) = D(t, p; C), \quad p \leq t, \tag{3.8}$$

ეწოდება დისკონტირების ფინანსური კანონი, რომელიც განსაზღვრავს (t, C) ხდომილობის მიმდინარე მდგომარეობას.

საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ფაქტები:

$$(t_1, C_1) \overset{p}{\sim} (t_2, C_2) \Longleftrightarrow \mathrm{PV}_p(t_1, C_1) = \mathrm{PV}_p(t_2, C_2),$$
$$A(p, p; C) = D(p, p; C) = C.$$

ბოლო ტოლობას კიდევ ნორმირების თვისება ეწოდება.

თუ $C = 1$, მაშინ (3.7), (3.8) ტოლობებიდან გვექნება

$$A(p, t; C) = C \cdot A(p, t; 1) = a(t, p), \quad p \geq t, \tag{3.9}$$
$$D(p, t; C) = C \cdot D(p, t; 1) = d(t, p), \quad p \leq t. \tag{3.10}$$

შევნიშნავთ, რომ $a(t, p)$ და $d(t, p)$ ფუნქციებს ზრდის და დისკონტირების კოეფიციენტები ეწოდება, შესაბამისად, ხოლო (3.9), (3.10) ტოლობებს – C თანხის მიმართ ერთგვაროვნების თვისება.

კაპიტალიზაციისა და დისკონტირების ფინანსური კანონები შეიძლება ერთი ზოგადი ფინანსური კანონის სახით ჩავწეროთ შემდეგნაირად

$$F(t, p; C) = \begin{cases} A(t, p; C), & \text{თუ } p \geq t, \\ D(t, p; C), & \text{თუ } p \leq t, \end{cases}$$

$$v(t, p) = F(t, p; 1) = \begin{cases} a(t, p), & \text{თუ } p \geq t, \\ d(t, p), & \text{თუ } p \leq t. \end{cases}$$

კაპიტალიზაციისა და დისკონტირების კანონები დროში ერთგვაროვანია, ანუ ნებისმიერი $T > 0$ სიდიდისათვის გვაქვს:

$$a(t + T, p + T) = a(t, p),$$
$$d(t + T, p + T) = d(t, p).$$

ვთქვათ, სამართლიანია აგრეთვე შემდეგი ტოლობები:

$$a(t, p) \cdot d(p, t) = 1, \quad t \geq p,$$
$$a(t, \tau) a(\tau, p) = a(t, p),$$
$$d(t, \tau) d(\tau, p) = d(t, p).$$

ასეთ შემთხვევაში პირველ ტოლობას შეუღლების თვისება ეწოდება, ხოლო ბოლო ორს – ტრანზიტულობის თვისება. ამასთან, თუ ტრანზიტულობის თვისება ერთდროულად სრულდება კაპიტალიზაციისა და დისკონტირების კანონებისთვის, მაშინ

$$v(t, p) = v(t, \tau) \cdot v(\tau, p),$$

ანუ რაც იგივეა

$$\mathrm{PV}_p(t, C) = \mathrm{PV}_p(\mathrm{PV}_\tau(t, C)).$$

კაპიტალიზაციის ორი კანონი $a_1(t, p)$ და $a_2(t, p)$ ეკვივალენტურია, თუ ნებისმიერი (t, C) ხდომილობისთვის დროის p მომენტში, $p > t$, ისინი ერთი და იგივე ხდომილობას ცვლის. ანალოგიურად, დისკონტირების ორი კანონი

$d_1(t,p)$ და $d_2(t,p)$ ეკვივალენტურია, თუ ნებისმიერი (t,C) ხდომილობისთვის ისინი ერთი და იგივე ხდომილობას ცვლის.

იმ შემთხვევაში, როცა ზოგადი ფინანსური კანონი $F(t,p;C)$ ერთგვაროვანია, მაშინ გვაქვს დაყვანის ოპერაციის ადიციურობის და ერთგვაროვნობის შესაბამისი თვისებები p და t ფიქსირებული მომენტებისათვის

$$\mathrm{PV}_p(t,C_1+C_2)=\mathrm{PV}_p(t,C_1)+\mathrm{PV}_p(t,C_2),$$
$$\mathrm{PV}_p(t,\lambda C)=\lambda\,\mathrm{PV}_p(t,C).$$

ერთგვაროვან შემთხვევაში დაყვანის PV_p ოპერაციისთვის გვექნება:

$$\mathrm{PV}_p(t,C)=\mathrm{PV}_p(t,C\cdot 1)=C\,\mathrm{PV}_p(t,1).$$

რიცხვს $\mathrm{PV}_p(t,1)=v(t,p)$ ეწოდება დაყვანის კოეფიციენტი, ანუ დისკონტირების განზოგადებული კოეფიციენტი.

განვიხილოთ რაიმე ხდომილობა (t,C_ι). მოცემული p და τ დროითი მომენტებისათვის დაყვანის ფარდობითი ოპერაცია განიმარტება ტოლობით

$$\mathrm{PV}_\tau^{(p)}(t,C_\iota)=C_\iota\cdot\frac{v(t,p)}{v(\tau,p)}\,. \tag{3.11}$$

შევნიშნოთ, რომ, როცა $p=\tau$, მაშინ $\mathrm{PV}_p^{(p)}=\mathrm{PV}_p$.

3. ფინანსურ გარიგებებში დროის ძირითად (საბაზისო) ერთეულად განიხილება წელი, თვე, თვის რიცხვი, წუთი, წამი და სხვა. ამიტომ ფინანსური ხდომილობის დათარიღებას (კალენდრის შემოღებას) არსებითი მნიშვნელობა აქვს. ჩვენ განვიხილავთ დათარიღების შემდეგ სამეულს:

$$\text{თარიღი}=\langle\text{დღე, თვე, წელი}\rangle.$$

ამასთან იგულისხმება, რომ თარიღის ყოველ კომპონენტს გააჩნია ცვლილების ბუნებრივი დიაპაზონი. ასე მაგალითად, დღის და თვის შესაძლო მნიშვნელობებია, შესაბამისად, სიმრავლეები $\{1,2,\ldots,31\}$, $\{1,2,\ldots,12\}$, ხოლო წელმა შეიძლება მიიღოს ნებისმიერი ნატურალური რიცხვითი მნიშვნელობა $\{1,2,\ldots\}$. ამრიგად, მაგალითად, სამეული $\langle 21,7,2005\rangle$ აღწერს თარიღს: "2005 წლის 21 ივლისი", ან შემოკლებით "21.07.05".

თარიღისა და მისი კომპონენტებისათვის შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$\partial=\langle d,m,y\rangle,$$

სადაც d, m და y სიმბოლოები აღნიშნავს დღეს, თვეს და წელს, შესაბამისად. წლის შუალედისათვის განიხილება ორი შემთხვევა: y წლის (წელი y ნომრით) $\big[\langle 1,1,y\rangle,\langle 31,12,y\rangle\big]$ შუალედი არის სტანდარტული კალენდარული წელი ანუ კიდევ $\big[\langle 1,1,y\rangle,\langle 1,1,y+1\rangle\big]$ შუალედი, ხოლო კალენდარული წლის შუალედის მაგალითია $\big[\langle 31.03.1998\rangle,\langle 31.03.1999\rangle\big]$ შუალედი. ამასთან, ნაკიანი წლის დროს გვაქვს 366 დღე, წინააღმდეგ შემთხვევაში

– 365 დღე. სტანდარტული წელი არის ნულოვანი, თუ მისი ნომერი y იყოფა ოთხზე და არ იყოფა ასზე, ან იყოფა ათასზე. ცხადია, რომ გაყოფაში იგულისხმება უნაშთო გაყოფა.

ორ თარიღს $\partial_1 = \langle d_1, m_1, y_1\rangle$ და $\partial_2 = \langle d_2, m_2, y_2\rangle$ ეწოდება ერთსახელა, თუ ისინი განსხვავდებიან მხოლოდ წლის ნომრით, ანუ $d_1 = d_2$, $m_1 = m_2$ და $y_1 \neq y_2$.

ვთქვათ, J რაიმე კალენდარული შუალედია წლებში. განვიხილოთ ორი ერთსახელა თარიღი $\partial_1 = \langle d, m, y_1\rangle$ და $\partial_2 = \langle d, m, y_2\rangle$, ე. ი. გვაქვს $|y_2 - y_1|$ სიგრძის J შუალედი. მაშინ ამ თარიღებს შორის დღეების ზუსტი რაოდენობა გამოითვლება ტოლობით

$$D(\partial_1, \partial_2) = 365 \cdot |y_2 - y_1| + k, \tag{3.12}$$

სადაც k არის J შუალედში ოთხის ჯერადი რიცხვი, ანუ ნაკიანი თარიღების რაოდენობა. მაგალითად, თუ $\partial_1 = \langle 12, 4, 1980\rangle$, $\partial_2 = \langle 12, 4, 2002\rangle$, მაშინ გვექნება

$$D(\partial_1, \partial_2) = 365 \cdot 22 + 5 = 8035.$$

კალენდარული დროითი შუალედის დღეების რაოდენობა გამოითვლება ე .წ. $N(\partial)$ სტანდარტული ფუნქციის საშუალებით, რომელიც წარმოადგენს ∂ თარიღის რიგით ნომერს სტანდარტულ კალენდარულ წელში. შევნიშნავთ, რომ ნაკიანი და არანაკიანი წლებისთვის შედგენილია ცხრილები, რომლის მიხედვით ყოველ ∂ თარიღს გააჩნია თავისი რიგითი ნომერი $N(\partial)$. ამრიგად, თუ გვაქვს ორი თარიღი ∂_1 და ∂_2, მაშინ მათ შორის დღეების რაოდენობა დაითვლება ტოლობით

$$D(\partial_1, \partial_2) = N(\partial_2) - N(\partial_1).$$

დროითი J შუალედის ხანგრძლივობა დღეებში გამოითვლება სხვადასხვა წესის გამოყენებით. ჩვენ მოკლედ შევეხებით ზოგიერთ ძირითად წესს. მაგალითად, ზოგიერთი სტანდარტული წესი, რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს დროითი შუალედის ხანგრძლივობას დღეებში და წლებში, მოიცემა ფორმულით

$$T = \frac{D(J)}{Y}, \tag{3.13}$$

სადაც T და D დროის ხანგრძლივობაა, შესაბამისად, წლებში და დღეებში, Y წლის გარკვეული წესით არჩეული რაოდენობაა, რომელსაც დივიზორი ეწოდება. წლიური დივიზორის ტიპური მნიშვნელობებია: $Y = 360$ და $Y = 365$. თუ $D(J)$ არის J შუალედში დღეების ზუსტი რაოდენობა, მაშინ $Y = 365$ და $Y = 360$ წლიური დივიზორებისთვის (3.13) ფორმულის თანახმად გვექნება ორი სხვადასხვა წესი.

წ ე ს ი ACT/365. ამ წესის თანახმად (3.13) ტოლობისთვის გვაქვს:

$$T = T(J) = \frac{D(J)}{365},$$

სადაც $D(J)$ არის J პერიოდში დღეების ზუსტი რაოდენობა. შევნიშნოთ, რომ ნაკიანი წლისთვის $D(J) = 366$, ე. ი. $T(J) > 1$, ხოლო არანაკიანი წლისთვის $D(J) = 365$ და $T(J) = 1$. თუ J_n არის n რაოდენობის წლების შუალედი, რომელშიც k რაოდენობის ნაკიანი წელია, მაშინ (3.13) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$T(J_n) = n + \frac{k}{365}.$$

თუ ჩავთვლით, რომ $k \approx n/4$, მაშინ ბოლო ტოლობაში აბსოლუტური ცდომილება იქნება

$$\delta = \frac{n}{4 \cdot 365} = \frac{n}{1460} \approx 0,7 \cdot 10^{-2} \cdot n.$$

განვიხილოთ T-ს გამოთვლის შემდეგი

მაგალითი 3.1. ვთქვათ, J არის პერიოდი: 14.02.1996–27.08.1996, მაშინ გვექნება

$$T = \frac{D(J)}{265} = \frac{195}{365} = 0,5243 \text{ (წელი)}.$$

წესი ACT/360. ამ წესს კიდევ ბანკის (საბანკო) წესი ეწოდება, რომლის თანახმად გვაქვს

$$T = T(J) = \frac{D(J)}{360},$$

სადაც $D(J)$ არის J პერიოდში დღეების ზუსტი რაოდენობა. ეს წესი ნაკიანი და არანაკიანი წლებისთვის, შესაბამისად, გვაძლევს

$$T = \frac{366}{360} = 1,0167 \text{ (წელი)},$$
$$T = \frac{365}{360} = 1,0139 \text{ (წელი)}.$$

შევნიშნავთ, რომ ზოგჯერ ხდება ნაკიანი თარიღის გამორიცხვა მუდმივი – 365 დღიანი დივიზორის დროს, ზოგჯერ კი ხდება დივიზორის მნიშვნელობად 366 დღის განხილვა. პირველი შემთხვევა მიღებულია ე. წ. იაპონურ წესში, რომლის თანახმად ხდება ყველა ნაკიანი თარიღის გამორიცხვა.

წესი ACT/365, იაპონია. თუ J არის პერიოდი k რაოდენობის ნაკიანი თარიღით, მაშინ

$$T = T(J) = \frac{D(J) - k}{365}.$$

ეს წესი გამოიყენება იაპონიის სახელმწიფო ობლიგაციების გათვლის დროს. თუ, მაგალითად, J არის პერიოდი: 14.02.1996–27.08.1996, მაშინ

$$T = T(J) = \frac{195-1}{365} = 0,5315 \text{ (წელი)}.$$

იმ შემთხვევაში, როცა ხდება დივიზორის ცვლილება, გამოიყენება ე. წ. ძირითადი წესი ნებისმიერი სიგრძის და მოკლე (ერთ წელზე ნაკლები) შუალედებისთვის.

წესი ACT/ACT, ძირითადი. ვთქვათ, J პერიოდი განსაზღვრულია $\partial_1 = \langle d_1, m_1, y_1\rangle$ და $\partial_2 = \langle d_2, m_2, y_2\rangle$ თარიღებით. დავყოთ ეს პერიოდი სამ ნაწილად

$$J = J_1 + J_2 + J_3,$$

სადაც

$$J = [\partial_1, \partial_1^*), \quad \partial_1^* = \langle 01, 01, (y_1+1)\rangle,$$

$J_2 = |y_2 - y_1|$ არის ∂_1 და ∂_2 თარიღებს შორის სრული კალენდარული წლების პერიოდი,

$$J_3 = [\partial_2^*, \partial_2), \quad \partial_2^* = \langle 01, 01, y_2\rangle.$$

მაშინ გვექნება

$$T = T(J) = \frac{D(J_1)}{Y_1} + \frac{D(J_3)}{Y_3} + n,$$

სადაც $D(J_k)$ არის დღეების რაოდენობა J_k, $k = 1, 3$, შუალედში,

$$Y_k = \begin{cases} 366, & \text{თუ } y_k \text{ ნაკიანია,} \\ 365, & \text{თუ } y_k \text{ არანაკიანია,} \end{cases}$$

ხოლო $n = y_2 - y_1$ არის ∂_1 და ∂_2 თარიღებს შორის სრული სტანდარტული კალენდარული წლების რაოდენობა.

მაგალითი 3.2. ვთქვათ, $\partial_1 = \langle 14.02.1996\rangle$ და $\partial_2 = \langle 27.08.1999\rangle$. დავყოთ ამ თარიღებს შორის J პერიოდი სამ პერიოდად.

ამოხსნა. პირველი J_1 პერიოდი არის 14.02.1996 და 31.12.1996 თარიღებს შორის დღეების რაოდენობა. თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ 1996 წელი არის ნაკიანი, მაშინ გვექნება

$$D(J_1) = 366 - 45 = 321 \text{ (დღე)}.$$

J_2 პერიოდი წარმოადგენს 01.01.1997 და 31.12.1998 თარიღებს შორის დღეების რაოდენობას,

$$J_2 = 365 + 365 = 730 \text{ (დღე)},$$

ე. ი.

$$n = 1999 - 1996 = 2 \text{ სრული კალენდარული წელი.}$$

J_3 პერიოდისთვის გვაქვს 01.01.1999 და 27.08.1999 თარიღებს შორის დღეების რაოდენობა, რომელიც 238 დღისგან შედგება. ამრიგად, ACT/ACT ძირითადი წესის მიხედვით გვექნება

$$T = T(Y) = \frac{321}{366} + \frac{238}{365} + 2 = 3,5291 \ \text{(წელი)}.$$

კერძო შემთხვევებში J_2 და J_3 პერიოდები შეიძლება ცარიელი იყოს. ასე, მაგალითად, თუ ∂_1 და ∂_2 თარიღები ერთ სტანდარტულ კალენდარულ წელშია, მაშინ $J_2 = \varnothing$ და $J_3 = \varnothing$, ხოლო თუ ეს თარიღები მომიჯნავე წლებშია, მაშინ $J_2 = \varnothing$.

იმ შემთხვევაში, როცა J პერიოდი ერთ წელზე ნაკლებია, მაშინ გამოიყენება ACT/ACT ძირითადი წესის ე. წ. მოკლე მოდიფიკაცია.

წესი ACT/ACT, მოდიფიკაცია. ეს წესი გამოიყენება, მაგალითად, ობლიგაციებზე დაგროვებული კუპონების დასათვლელად და აქვს შემდეგი სახე

$$T = T(J) = \frac{D(J)}{Y}$$

სადაც

$$Y = \begin{cases} 366 \text{ დღე, თუ } J \text{ ნაკიანია,} \\ 365 \text{ დღე, წინააღმდეგ შემთხვევაში.} \end{cases}$$

მაგალითი 3.3. ვთქვათ, J არის ნაკიანი 1996 წლის პერიოდი თარიღებით $\partial_1 = \langle 14.02.1996 \rangle$, $\partial_2 = \langle 27.08.1996 \rangle$. გამოთვალეთ T-ს ხანგრძლივობა.

ამოხსნა. რადგან 1996 წელი ნაკიანია, ამიტომ გვექნება

$$T = T(J) = \frac{195}{366} = 0,5328 \ \text{(წელი)}.$$

მაგალითი 3.4. ვთქვათ, J არის არანაკიანი 1998 წლის პერიოდი $\partial_1 = \langle 14.02.1998 \rangle$ და $\partial_2 = \langle 27.08.1998 \rangle$ თარიღებით. გამოთვალეთ T-ს ხანგრძლივობა.

ამოხსნა. რადგან 1998 წელი ნაკიანია, ამიტომ გვექნება

$$T = T(J) = \frac{194}{365} = 0,5315 \ \text{(წელი)}.$$

შევნიშნოთ, რომ მაგალითი 3.2–3.3-ში განხილული თარიღებისათვის იგივე შედეგებს მივიღებთ, თუ გამოვიყენებთ ACT/ACT ძირითად წესს, რადგანაც თარიღები ერთი სტანდარტული წლის თარიღებია. თუ თარიღები მომიჯნავე წლებს ეკუთვნის, მაშინ ძირითადმა და მოკლე წესებმა შეიძლება სხვადასხვა შედეგებამდე მიგვიყვანოს.

მაგალითი 3.5. ვთქვათ, J არის პერიოდი თარიღებს შორის: $\partial_1 = \langle 27.08.1996 \rangle$, $\partial_2 = \langle 14.02.1997 \rangle$.

1. გამოთვალეთ $T = T(J)$ ხანგრძლივობა ძირითადი წესის მიხედვით.
2. გამოთვალეთ $T = T(J)$ ხანგრძლივობა მოკლე წესის მიხედვით.

ამოხსნა. 1. ძირითადი წესის მიხედვით გვაქვს

$$J_1 = 125 \text{ დღე}, \quad J_2 = \varnothing, \quad J_3 = 144 \text{ დღე}.$$

ამრიგად, გვექნება

$$T = T(J) = \frac{125}{366} + \frac{44}{365} = 0,4621 \text{ (წელი)}.$$

2. რადგან J პერიოდი არ არის ნაკიანი, ამიტომ მოკლე წესის თანახმად გვექნება

$$T = T(J) = \frac{125 + 44}{365} = 0,4630 \text{ (წელი)}.$$

შევნიშნავთ, რომ ACT/ACT მოკლე წესი ემთხვევა ACT/365 ISDA წესს, რომელიც, გამოიყენება სვოპ დილერების საერთაშორისო ასოციაციის მიერ.

აქამდე განხილულ წესებში ხდებოდა პერიოდის ხანგრძლივობის ზუსტი დათვლა დღეებში (წლებში). ფინანსურ ბაზრებზე მიღებულია მიახლოებითი (გამარტივებული) დათვლა, რომელიც იმაში მდგომარეობს, რომ ყველა თვეში დღეების რაოდენობა 30-ის ტოლად ითვლება.

ასეთ შემთხვევაში წელი შედგება $12 \times 30 = 360$ დღისგან და (3.13) ფორმულა ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$T = \frac{\widetilde{D}(J)}{Y} = \frac{\widetilde{D}(J)}{360},$$

სადაც $Y = 360$ დივიზორია, ხოლო $\widetilde{D}(J)$ არის დღეების ხანგრძლივობა, რომელიც სხვადასხვა წესით შეირჩევა.

წესი 30/360, ძირითადი. ვთქვათ, J პერიოდისთვის გვაქვს ორი თარიღი: $\partial_1 = \langle d_1, m_1, y_1 \rangle$ და $\partial_2 = \langle d_2, m_2, y_2 \rangle$. დღეების მიახლოებითი რაოდენობა დაითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\widetilde{D}(\partial_1, \partial_2) = 360 \cdot (y_2 - y_1) + 30 \cdot (m_2 - m_1) + (d_2 - d_1),$$

ხოლო ხანგრძლივობა წლებში

$$T = T(J) = \frac{\widetilde{D}(J)}{360}.$$

მაგალითი 3.6. ვთქვათ, J არის $\partial_1 = \langle 14.02.1996 \rangle$ და $\partial_2 = \langle 27.08.1999 \rangle$ თარიღებს შორის პერიოდი. გამოთვალეთ $\widetilde{D}$ და T ხანგრძლივობები დღეებში და წლებში.

ა მ ო ხ ს ნ ა . დღეების მიახლოებითი რაოდენობაა

$$\widetilde{D} = 360 \cdot 3 + 30 \cdot 6 + (27 - 14) = 1273,$$

ხოლო წლების ხანგრძლივობა

$$T = T(J) = \frac{1273}{360} = 3,5361.$$

შევნიშნავთ, რომ მაგალითი 3.1-ში $y_2 - y_1$ სხვაობა ორის ტოლი იყო, ხოლო ზუსტი დღეების რაოდენობა კი – 1291 დღე.

მიახლოებით ძირითად წესს აქვს სხვადასხვა მოდიფიკაციები, რომლებიც შეეხება თვეების ხანგრძლივობების გარდაქმნებს. ჩვენ განვიხილავთ ოთხ ასეთ მოდიფიკაციას $\partial_1 = \langle d_1, m_1, y_1\rangle$ და $\partial_2 = \langle d_2, m_2, y_2\rangle$ ორი თარიღისათვის.

წ ე ს ი 30/360 ISDA. თუ $d_1 = 31$, მაშინ ვიღებთ $d_1^* = 30$, ე. ი. $d_1^* = d_1$. თუ $d_2 = 31$ და $d_1^* = 30$, მაშინ $d_2^* = 30$, ე. ი. $d_2^* = d_2$.

წ ე ს ი 30/360 PSA (Public Securities Associates). თუ $d_1 = 31$ ან d_1 თებერვლის ბოლო დღეა, მაშინ $d_1^* = 30$, ე. ი. $d_1^* = d_1$. თუ $d_2 = 31$ და $d_1^* = 30$, მაშინ $d_2^* = 30$, ე. ი. $d_2^* = d_2$.

წ ე ს ი 30E/360. თუ $d_1 = 31$, მაშინ $d_1^* = 30$, ე. ი. $d_1^* = d_1$. თუ $d_2 = 31$, მაშინ $d_2^* = 30$, ე. ი. $d_2^* = d_2$.

ეს წესი გამოიყენება ევროპაში და წარმოადგენს წინა ორი წესის კომბინაციას.

წ ე ს ი 30/360 SIA (Securities Industry Association). თუ $d_1 = 31$ ან d_1 ობლიგაციის კუპონის გადახდის დღეა და, ამავე დროს, თებერვლის ბოლო დღეა, მაშინ $d_1^* = 30$, ე. ი. $d_1^* = d_1$. თუ $d_2 = 31$ და $d_1 = 30$, მაშინ $d_2^* = 30$, ე. ი. $d_2^* = d_2$.

შევნიშნავთ, რომ არსებობს ცხრილები, რომლის საშუალებითაც ხდება ამ წესების მიხედვის დღეების მიახლოებითი რაოდენობის გამოთვლა. შევნიშნავთ აგრეთვე, რომ მოტანილი წესების წარმოშობა და გამოყენება დამოკიდებულია ქვეყანაზე, ვალუტაზე, ფინანსური ინსტრუმენტის სახეზე, ემიტენტის მიერ დადგენილ შეთანხმებებზე და სხვა.

წესი ACT/365 გამოიყენება ბაზრის ინსტრუმენტებისათვის დიდ ბრიტანეთში და იაპონიაში (იაპონური ვარიანტი).

წესი ACT/360 გამოიყენება საფრანგეთში ფულის ბაზარზე.

წესი 30/360 გამოიყენება ამერიკაში ობლიგაციების ბაზარზე.

წესი 30E/360 გამოიყენება ევროობლიგაციების ბაზრებზე, აგრეთვე, გერმანიასა და ჰოლანდიაში.

წ ე ს ი ACT/ACT გამოიყენება ამერიკის ხაზინის მიერ და, აგრეთვე, საფრანგეთისა და ავსტრალიის ფინანსურ ბაზრებზე.

ამრიგად, მოტანილი ქრონოლოგიის მიხედვით საკმაოდ შრომატევადია დროითი შეთანხმებების შესაბამისი ფინანსური გარიგებების ანალიზი. ამასთან ერთად, საჭიროა სხვადასხვა დროითი ერთეულების ერთმანეთთან დაკავშირება და გადათვლა. ასე, მაგალითად, დრო თვეებში შეიძლება გარდავქმნათ წლების მიხედვით დროით სკალაზე შემდეგი ფორმულით

$$T = \frac{M}{12},$$

სადაც M არის ვადა თვეებში, T – წლებში, ან კიდევ W – ვადა კვირეებში შეიძლება გამოვსახოთ წლებში ფორმულით

$$T = \frac{W}{52}.$$

ანალოგიურად, შეიძლება გარდავქმნათ წლებში ვადები, მოცემულ დღეებში, კვარტალებში და სხვა.

შევნიშნავთ, რომ წიგნის ბოლოს მოტანილია ნაკიანი და არანაკიანი წლების დღეების ნომრების და აგრეთვე თარიღებს შორის დღეების რაოდენობის გამოთვლის მაგალითების ცხრილები.

ლექცია 4. მარტივი პროცენტი

1. განვიხილოთ ფინანსური ოპერაციების ერთ-ერთი ძირითადი სახეობა – საკრედიტო გარიგება და მასთან დაკავშირებული მარტივი პროცენტის საკითხები. ზოგადად რომ ვთქვათ, მარტივი საკრედიტო გარიგება – ეს არის კრედიტორის მიერ კრედიტის (სესხის) გაცემა დებიტორზე, რომელიც ვალდებულია განსაზღვრულ ვადაში დააბრუნოს სესხი გარკვეული პროცენტის დარიცხვით. იგულისხმება, რომ ეს გარიგება გაფორმებულია სათანადო ხელშეკრულებით, რომელსაც გააჩნია იურიდიული უზრუნველყოფა.

საკრედიტო გარიგება შეიცავს შემდეგ ძირითად დროით და ფულად (ფინანსურ) პარამეტრებს: t_0 – სესხის გაცემის თარიღი, T – სესხის ვადა, $t_1 = t_0 + T$ – სესხის დაბრუნების თარიღი, P – სესხის რაოდენობა, I – სესხის გადასახადი (დარიცხული პროცენტის შესაბამისი თანხა), B – სესხის დასაფარი თანხა დროის t_1 მომენტში. ამრიგად, გვექნება,

$$B = P + I, \tag{4.1}$$

ანუ დროის მიხედვით

$$B_1 = B_{t_1} = B_{t_0} + I_T = B_0 + I_T. \tag{4.2}$$

ცხადია, მარტივი საკრედიტო გარიგება შეიძლება ჩავწეროთ ფინანსური ხდომილობის ნაკადის სახით

$$\mathrm{CF} = \{(t_0, B_0), (t_1, B_1)\},$$

ან კიდევ FV ოპერაციის საშუალებით

$$\mathrm{FV}_{t_1}(t_0, B_0) = (t_1, B_1), \tag{4.3}$$

შევნიშნოთ, რომ, კრედიტორის B_0 პოზიციით თანხა დანახარჯია, ხოლო დებიტორის პოზიციით – შემოსავალი. ამიტომ კრედიტორის პოზიციისათვის ნაკადი შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად: $\{(t_0, -B_0), (t_1, B_1)\}$. შევნიშნოთ, აგრეთვე, რომ ხშირად (4.3) ტოლობას ხშირად წერენ შემდეგი სახით

$$\mathrm{FV}_{t_1}(B_0) = B_1. \tag{4.4}$$

დროის $[t_0, t_0 + T]$ პერიოდში საკრედიტო გარიგების მარტივი პროცენტი (მარტივი საპროცენტო განაკვეთი, შემოსავალი) ეწოდება სიდიდეს

$$r = \frac{I}{P} = \frac{B - P}{P} = \frac{B}{P} - 1, \tag{4.5}$$

ანუ რაც იგივეა

$$r = \frac{I}{B_0} = \frac{B_1 - B_0}{B_0} = \frac{B_1}{B_0} - 1. \tag{4.6}$$

ამრიგად, გვაქვს შემდეგი ტოლობები

$$I = P \cdot r = B_0 \cdot r, \tag{4.7}$$

$$B_1 = B_0 + I = B_0 + B_0 \cdot r = B_0 \cdot (1 + r). \tag{4.8}$$

მაგალითი 4.1. ვთქვათ, დროის $t_0 = 0$ მომენტში გაიცა $B_0 = 5000$ კრედიტი ვადით $T = 2$ წელი. $t_1 = t_0 + T = 2$ დროის მომენტში დასაბრუნებელი თანხაა $B_1 = 10000$. იპოვეთ გარიგების საპროცენტო განაკვეთი.

ამოხსნა. (4.6) ტოლობის თანახმად გვაქვს

$$r = \frac{B_1 - B_0}{B_0} = \frac{10000 - 5000}{5000} = 1,$$

ანუ პროცენტებში $r = 100\%$.

მაგალითი 4.2. ვთქვათ, დროის $t_0 = 0$ მომენტში გაიცა $B_0 = 2000$ სესხი $T = 3$ წლის ვადით. იპოვეთ დროის $t_1 = t_0 + T = 3$ მომენტში სესხის დაფარვის თანხა B_1, თუ საპროცენტო განაკვეთია $r = 60\%$.

ამოხსნა. (4.8) ტოლობის თანახმად გვექნება

$$B_1 = (B_0 \cdot (1 + r) = 2000 \cdot (1 + 0,6) = 3200.$$

მარტივი საპროცენტო r განაკვეთის საშუალებით განიმარტება მარტივი ნორმირებული საპროცენტო განაკვეთი შემდეგი ტოლობით

$$i = \frac{r}{T} = \frac{r}{t_1 - t_0}. \tag{4.9}$$

მაგალითი 4.3. იპოვეთ მაგალითი 4.1–4.2-ის პირობებში ნორმირებული საპროცენტო განაკვეთები.

ამოხსნა. მაგალითი 4.1-ში $r = 1$ (ე. ი. $r = 100\%$), $T = 2$ და გვექნება

$$i = \frac{r}{T} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ ანუ } i = 50\% \text{ წელიწადში},$$

ხოლო მაგალითი 4.2-თვის $r = 0,6$ (ე. ი. $r = 60\%$), $T = 3$ და გვექნება

$$i = \frac{r}{T} = \frac{0,6}{3} = 0,2 \text{ ანუ } i = 20\% \text{ წელიწადში}.$$

შევნიშნავთ, რომ ნორმირებული საპროცენტო განაკვეთი საკრედიტო გარიგების განმსაზღვრელ საბაზრო ფაქტორს წარმოადგენს. ადვილი შესამოწმებელია შემდეგი ტოლობები

$$r = i \cdot T = i(t_1 - t_0), \tag{4.10}$$

$$I = B_0 \cdot i \cdot T, \tag{4.11}$$

$$B_1 = B_0(1 + iT). \tag{4.12}$$

მაგალითი 4.4. ვთქვათ, დროის $t_0 = 0$ მომენტში გაიცა $B_0 = 2000$ კრედიტი ვადით $T = 3$ წელი და წლიური $i = 10\%$-იანი ნორმირებული საპროცენტო განაკვეთით. იპოვეთ დარიცხული I პროცენტი და B_1 დაფარვის თანხა.

ამოხსნა. გვაქვს $t_0 = 0$, $t_1 = 3$, $T = 3$, $B_0 = 2000$, $i = 0,1$. მაშინ (4.11) და (4.12) ტოლობების თანახმად გვექნება

$$I = B_0 \cdot i \cdot T = 2000 \cdot 0,1 \cdot 3 = 600,$$

$$B_1 = B_0 \cdot (1 + i \cdot T) = 2000 \cdot (1 + 0,1 \cdot 3) = 2600,$$

შესაბამისად.

ცხადია, B_1 შეიძლება გამოვთვალოთ, აგრეთვე (4.2) ტოლობით

$$B_1 = B_0 + I = 2000 + 600 = 2600.$$

მაგალითი 4.5. ვთქვათ, ბანკმა $\partial_1 = \langle 14.02.1996 \rangle$ თარიღში გასცა (დროის t_0 მომენტში) $B_0 = 600000$ სესხი $i = 10\%$ წლიური ნორმირებული საპროცენტო განაკვეთით. დაფარვის თარიღია (დროის t_1 მომენტი) $\partial_2 = \langle 27.08.1997 \rangle$. იპოვეთ დარიცხული პროცენტი (დარიცხული თანხა) ანუ I სიდიდე და დაფარვის B_1 თანხა, თუ საკრედიტო გარიგებაში გამოიყენება ACT/365 წესი.

ამოხსნა. ACT/365 წესის თანახმად ვიპოვოთ გარიგების ვადა წლებში. ცხრილი П.1-ის მიხედვით გვაქვს $N(\partial_1) = 45$, $N(\partial_2) = 239$, ხოლო თარიღებს შორის დღეების რაოდენობაა

$$D(\partial_1, \partial_2) = (366 - 45) + 239 = 560,$$

საიდანაც გვექნება

$$T = \frac{560}{365} = 1,5342 \text{ წელი.}$$

(4.11) და (4.2) ტოლობების თანახმად გვაქვს

$$I = 600000 \cdot 0,1 \cdot \frac{560}{365} = 92054,79,$$
$$B_1 = 600000 + 92054,79 = 692054,79.$$

შევნიშნავთ, რომ თუ დღეების რაოდენობად თვეში აიღება 30 დღე ანუ წელიწადში 360 დღე, მაშინ მარტივ პროცენტს ეწოდება ჩვეულებრივი და კრედიტის ვადა დაითვლება ტოლობით

$$T_ჩ = \frac{D}{360},$$

ხოლო, თუ დღეების რაოდენობად წელში აიღება 365 დღე, მაშინ მარტივ პროცენტს ეწოდება ზუსტი და გვაქვს

$$T_ზ = \frac{D}{365}.$$

მაგალითი 4.6. განვიხილოთ არანაკიანი წლის შუალედი: 05.03–28.09. იპოვეთ დღეების რაოდენობა და კრედიტის ვადა წლის ხანგრძლივობით ჩვეულებრივი პროცენტის შემთხვევაში.

ამოხსნა. მოცემული პერიოდი შედგება 6 თვისა და 23 დღისგან (5 მარტიდან 5 სექტემბრამდე და 5 სექტემბრიდან 28 სექტემბრამდე). ამიტომ ამ შუალედში (ანუ მოცემულ თარიღებს შორის) დღეების რაოდენობაა $6 \cdot 30 + 23 = 203$, ხოლო

$$T_ჩ = \frac{203}{360} = 0,6389.$$

მაგალითი 4.7. განვიხილოთ მაგალითი 4.6-ში მოცემული პერიოდი. იპოვეთ დღეების რაოდენობა და წლის ხანგრძლივობით კრედიტის ვადა ზუსტი პროცენტის შემთხვევაში.

ამოხსნა. გვაქვს, რომ მოცემული $\partial_1 = \langle 05.03.y \rangle$ და $\partial_2 = \langle 28.09.y \rangle$ თარიღების რიგითი ნომრებია $N(\partial_2) = 271$ და $N(\partial_2) = 64$. ამიტომ ამ თარიღებს შორის დღეების რაოდენობაა $D(\partial_1, \partial_2) = 271 - 64 = 207$, ხოლო

$$T_ზ = \frac{207}{365} = 0,5671.$$

2. საკრედიტო გარიგების ძირითადი პარამეტრების მიხედვით გვაქვს

$$I = P \cdot r = B_0 \cdot r,$$
$$B_1 = B_0 \cdot (1 + r).$$

შევნიშნოთ, რომ კრედიტორისათვის I სიდიდე წარმოადგენს T პერიოდში შემოსავალს (სამატს). I სიდიდეს კიდევ გარიგების დისკონტი ეწოდება და აღინიშნება D სიმბოლოთი. ამრიგად, გვაქვს

$$D = I = B_1 - B_0.$$

საკრედიტო გარიგებაში r საპროცენტო განაკვეთთან ერთად საბოლოო B_1 თანხის გათვალისწინებით განიხილება, აგრეთვე, ე. წ. მარტივი საალრიცხვო განაკვეთი, რომელიც განიმარტება შემდეგი ტოლობით

$$w = \frac{B_1 - B_0}{B_1}. \tag{4.13}$$

შევნიშნოთ, რომ B_0 სიდიდეს ხშირად B_1 თანხის დღევანდელი ღირებულება (მიმდინარე მნიშვნელობა) ეწოდება. ეს ფაქტი შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$$B_0 = \mathrm{PV}_{t_0}(B_1), \tag{4.14}$$

ანუ რაც იგივეა

$$(t_0, B_0) = \mathrm{PV}_{t_0}(t_1, B_1). \tag{4.15}$$

(4.14) ტოლობით განმარტებულია ე. წ. დისკონტირების ოპერაცია, რომელსაც მომავალი (t_1, B_1) ხდომილობა გადაჰყავს დღევანდელი (t_0, B_0) ხდომილობაში. ამასთან, B_0 სიდიდეს B_1 თანხის დისკონტირებული მნიშვნელობა ეწოდება.

(4.13) ფორმულის თანახმად გვაქვს, აგრეთვე, შემდეგი დამოკიდებულებები

$$I = D = wB_1, \tag{4.16}$$

$$B_0 = B_1(1 - w), \tag{4.17}$$

$$r = \frac{I}{B_0} = \frac{w}{1 - w}. \tag{4.18}$$

$T = t_1 - t_0$ პერიოდისათვის ნორმირებული მარტივი საალრიცხვო განაკვეთი განიმარტება ტოლობით

$$d = \frac{w}{T}. \tag{4.19}$$

საკრედიტო გარიგების პარამეტრების, საპროცენტო და საალრიცხვო განაკვეთების განმარტებების თანახმად გვაქვს შემდეგი დამოკიდებულებები:

$$w = dT, \tag{4.20}$$

$$I = D = B_1 \cdot d \cdot T, \tag{4.21}$$

$$B_0 = B_1 \cdot (1 - d \cdot T), \tag{4.22}$$

$$B_1 = \frac{B_0}{1 - d \cdot T}, \tag{4.23}$$

$$r = \frac{d \cdot T}{1 - \cdot T}, \tag{4.24}$$

$$i = \frac{d}{1 - d \cdot T}, \tag{4.25}$$

$$w = \frac{r}{1 + r} = \frac{i \cdot T}{1 + i \cdot T}, \tag{4.26}$$

$$d = \frac{i}{1 + i \cdot T}. \tag{4.27}$$

იმ კერძო შემთხვევაში, როცა $T = 1$ (4.25) და (4.27) ტოლობები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$i = \frac{d}{1 - d}, \quad d = \frac{i}{1 + i},$$

შესაბამისად.

ადვილი მისახვედრია, რომ მოცემული (ფიქსირებული) სააღრიცხვო განაკვეთის დროს პერიოდის ცვლილება იწვევს საპროცენტო განაკვეთის ცვლილებას, ხოლო მოცემული საპროცენტო განაკვეთისათვის პერიოდის ცვლილება იწვევს სააღრიცხვო განაკვეთის ცვლილებას.

მაგალითი 4.8. ვთქვათ, კრედიტი გაცემულია 6 თვის ვადით წლიური 10%-იანი სარგებლით. იპოვეთ წლის და თვის შესაბამისი სააღრიცხვო განაკვეთები და ნორმირებული სააღრიცხვო განაკვეთები.

ამოხსნა. (4.26) ფორმულის თანახმად $i = 0,1$, $T = 0,5$ მნიშვნელობებისათვის გვაქვს

$$w = \frac{0,1 \cdot 0,5}{1 + 0,1 \cdot 0,5} = 0,0476, \quad \text{ანუ } 4,76\%.$$

(4.19) და (4.27) ფორმულების თანახმად, შესაბამისად, გვექნება

$$d = \frac{w}{T} = \frac{0,0476}{0,5} = 0,0952,$$

$$d = \frac{0,1}{1 + 0,1 \cdot 0,5} = 0,0952,$$

ანუ $d = 0,52\%$.

თვეების შემთხვევაში $T = 6$ სიდიდისათვის (4.19) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$d = \frac{0,0476}{6} = 0,0079, \quad \text{ანუ } 0,079\%.$$

(4.29) ფორმულის გამოყენებისათვის საჭიროა წლიური საპროცენტო განაკვეთი გავყოთ 12-ზე: $i = 0,1 : 12$ და გვექნება

$$d = \frac{\frac{0,1}{0,5}}{1 + \frac{0,1}{0,5} \cdot 6} = 0,0079.$$

3. საკრედიტო გარიგებაში ხშირად გამოიყენება სხვადასხვა სახის მოკლევადიანი ფინანსური ინსტრუმენტები. მაგალითად, ფინანსურ ბაზრებზე ვაჭრობენ უამრავი მოკლევადიანი ფასიანი ქაღალდები. ასეთი ტიპური და გავრცელებული ფასიანი ქაღალდებია: სადეპოზიტო სერტიფიკატები და ვექსელები. საკრედიტო გარიგების პარამეტრებთან ერთად ამ ფასიანი ქაღალდების პარამეტრებია (რეკვიზიტებია): F – ნომინალური მნიშვნელობა, ხოლო სადეპოზიტო სერტიფიკატს კიდევ გააჩნია საკუპონე (კუპონის) ნორმირებული საპროცენტო განაკვეთი, რომელიც c სიმბოლოთი აღინიშნება.

განვიხილოთ მარტივი საკრედიტო გარიგება, რომელშიც კრედიტორი ყიდულობს სერტიფიკატს დროის t_0 მომენტში ემიტენტისგან (სერტიფიკატის გამომშვებისგან) F-ის ტოლ ნომინალურ ფასად. დროის t_1 მომენტში კრედიტორი უბრუნებს სერტიფიკატს ემიტენტს და იღებს მისგან დაფარვის B_1 თანხას. ეს გარიგება ცხადია შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$B_1 = F(1 + c \cdot T), \tag{4.28}$$

სადაც

$$T = \frac{D}{Y} \tag{4.29}$$

არის წლებში სერტიფიკატის ბრუნვის პერიოდი – $T = T_{\text{ბრ.}}$, D არის გარიგების ხანგრძლივობა (სერტიფიკატის ბრუნვის პერიოდი) დღეებში – $D = D_{\text{ბრ.}}$, ხოლო Y წლიური დივიზორია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.9. ვთქვათ, ინვესტორმა ნომინალით 1000 იყიდა სადეპოზიტო სერტიფიკატი ბრუნვის პერიოდით – 270 დღე და წლიური 20%-იანი კუპონის განაკვეთით. იპოვეთ დაფარვის თანხა ACT/365 წესის გამოყენებით.

ა მ ო ხ ს ნ ა . გვაქვს $F = 1000$, $c = 0,2$ და

$$T_{\text{ბრ.}} = \frac{270}{365} = 0,7397 \text{ წელი.}$$

ამრიგად, (4.28) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$B_1 = 1000(1 + 0,2 \cdot 0,7397) = 1147,94.$$

თუ სერტიფიკატი გამოშვებულია დროის $t_0 = 0$ მომენტში ბრუნვის $T_{\text{ბრ.}}$ პერიოდით, მაშინ პერიოდამდე დროის რაიმე t მომენტისათვის სერტიფიკატის დაფარვამდე დროის $T = T_{\text{დაფ.}}$ პერიოდი ჩაიწერება ტოლობით

$$T_{\text{დაფ.}} = T_{\text{ბრ.}} - t. \tag{4.30}$$

თუ სერტიფიკატი გაყიდულია F ნომინალით, მაშინ კრედიტის (გარიგების) საბაზრო განაკვეთი $i_{\text{საბ.}}$ ჩაიწერება ტოლობით

$$i_{\text{საბ.}} = \frac{B_1 - F}{F \cdot T_{\text{ბრ.}}} = \frac{F(1 + c \cdot T_{\text{ბრ.}}) - F}{F \cdot T_{\text{ბრ.}}} = c. \tag{4.31}$$

მეორეს მხრივ, სერტიფიკატის დაფარვის მომენტამდე დროის ნებისმიერ t მომენტში გარიგების საბაზრო განაკვეთი სერტიფიკატის $P = P_{\text{საბ.}}$ საბაზრო ფასის სიდიდის საშუალებით ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$i_{\text{საბ.}} = \frac{B_1 - P_{\text{საბ.}}}{P_{\text{საბ.}} \cdot T_{\text{ბრ.}}}, \tag{4.32}$$

საიდანაც გვექნება

$$P_{\text{საბ.}} = \frac{B_1}{1 + i_{\text{საბ.}} \cdot T_{\text{ბრ.}}} = \mathrm{PV}_t(B_1). \tag{4.33}$$

მაგალითი 4.10. ვთქვათ, სადეპოზიტო სერტიფიკატის ნომინალური ფასია $F = 1000$, კუპონის განაკვეთი $c = 15\%$ და ბრუნვის პერიოდი $T_{\text{ბრ.}} = 180$ დღე. სერტიფიკატი გაიყიდა დაფარვამდე 70 დღით ადრე და გაყიდვის მომენტში საბაზრო საპროცენტო განაკვეთია $i_{\text{საბ.}} = 10\%$. იპოვეთ გაყიდვის მომენტში სერტიფიკატის საბაზრო ფასი ACT/360 წესის გამოყენებით.

ამოხსნა. გვაქვს

$$T_{\text{ბრ.}} = \frac{180}{360} = 0,5; \quad T_{\text{დაფ.}} = \frac{70}{360} = 0,1944.$$

(4.28) ფორმულის თანახმად დაფარვის თანხაა

$$B_1 = 1000(1 + 0,15 \cdot 0,5) = 1075,$$

ხოლო (4.33) ფორმულის თანახმად გაყიდვის მომენტში სერტიფიკატის მიმდინარე ფასია

$$P_{\text{საბ.}} = \frac{1075}{1 + 0,1 \cdot 0,1944} = 1054,49.$$

შევნიშნოთ, რომ დაფარვამდე 70 დღით ადრე გაყიდვით, სერტიფიკატის მფლობელისთვის საპროცენტო განაკვეთი იცვლება. მართლაც, $180 - 70 = 110$ დღის გათვალისწინებით გვექნება საბანკო წესის შემთხვევაში

$$r = \frac{1054,49}{1000} - 1 = 0,05449 \ \ (5,45\%),$$
$$i = \frac{0,05449}{\frac{110}{365}} = 0,1808 \ \ (18,08\%),$$

რაც მეტია დაფარვის მომენტში საბაზრო განაკვეთზე $i_{\text{საბ.}} = 10\%$. ამრიგად, გვაქვს ორი საკრედიტო გარიგება და საპროცენტო განაკვეთების საბაზრო მნიშვნელობები განისაზღვრება შუალედური გარიგებით დაფარვამდე დარჩენილი პერიოდის გათვალისწინებით. ასეთ შეთხვევაში შემოსავლიანობა (ნორმირებული განაკვეთი) მოიცემა ფორმულით

$$i_{\text{საბ.}} = \frac{1}{T_{\text{ბრ.}}} \left(\frac{B_1}{P_{\text{საბ.}}} - 1 \right), \tag{4.34}$$

რომელიც (4.32)-ის ზუსტი ანალოგია.

შევნიშნოთ, რომ $i_{ჯ.}$ განაკვეთის გაზრდა იწვევს (4.33)-ის თანახმად სერტიფიკატის ფასის შემცირებას, ხოლო $P_{ჯ.}$ ფასის გაზრდა იწვევს შემოსავლიანობის შემცირებას.

მაგალითი 4.11. ინვესტორმა აუქციონზე იყიდა $F = 1000$ ნომინალის მქონე ობლიგაცია $Q_0 = 75$ კურსით 3 თვის ვადით. ინვესტორის ვარაუდით 2 თვის შემდეგ ობლიგაციის კურსი იქნება $Q_1 = 92$. შემოსავლიანობის თვალსაზრისით, რომელი გარიგება ჯობს ინვესტორისათვის: 1. დაიფაროს ობლიგაცია 3 თვის შემდეგ. 2. გაიყიდოს ობლიგაცია 2 თვის შემდეგ. იპოვეთ ამ ორი შესაძლო გარიგების შესაბამისი წლის და თვის საპროცენტო და საალრიცხვო განაკვეთები.

ამოხსნა. განვიხილოთ პირველი გარიგება. გვაქვს $B_0 = Q_0 = F = 0,75 \cdot 1000 = 750$. ობლიგაცია იფარება ნომინალით და ამიტომ $B_1 = 1000$. დისკონტი, საპროცენტო და საალრიცხვო განაკვეთები შესაბამისად ტოლია

$$I = D = B_1 - B_0 = 1000 - 750 = 250,$$

$$r = \frac{I}{B_0} = \frac{250}{750} = 0,3333 \ \ (33,33\%),$$

$$w = \frac{D}{B_1} = \frac{250}{1000} = 0,25 \ \ (25\%).$$

წლის და თვის საპროცენტო განაკვეთებია:

$$i_{წელი} = \frac{r}{T_{წელი}} = \frac{0,3333}{0,25} = 1,3332 \ \ (133,32\%),$$

$$i_{თვე} = \frac{r}{T_{თვე}} = \frac{0,3333}{3} = 0,1111 \ \ (11,11\%),$$

ხოლო წლის და თვის საალრიცხვო განაკვეთებია:

$$d_{წელი} = \frac{w}{T_{წელი}} = \frac{0,25}{0,25} = 1 \ \ (100\%),$$

$$d_{თვე} = \frac{w}{T_{თვე}} = \frac{0,25}{3} = 0,0833 \ \ (0,33\%).$$

ახლა განვიხილოთ მეორე გარიგება. ამ შემთხვევაში $B_0 = 750$, $B_1 = Q_1 \cdot F = 0,92 \cdot 1000 = 920$. დისკონტი, საპროცენტო და საალრიცხვო განაკვეთებია:

$$I' = 920 - 750 = 170,$$

$$r' = \frac{170}{750} = 0,2267 \ \ (22,67\%),$$

$$w' = \frac{170}{920} = 0,1847 \ \ (18,47\%).$$

წლის და თვის საპროცენტო განაკვეთებია:

$$i'_{\text{წელი}} = \frac{r'}{T_{\text{წელი}}} = \frac{0,2267}{1/6} = 1,36 \ \ (136\%),$$

$$i'_{\text{თვე}} = \frac{r'}{T_{\text{თვე}}} = \frac{0,2267}{2} = 0,1134 \ \ (11,34\%),$$

ხოლო წლის და თვის საალრიცხვო განაკვეთებია:

$$d'_{\text{წელი}} = \frac{w'}{T_{\text{წელი}}} = \frac{0,1847}{1/6} = 1,1082 \ \ (110,82\%),$$

$$d'_{\text{თვე}} = \frac{w'}{T_{\text{თვე}}} = \frac{0,1847}{2} = 0,0924 \ \ (9,24\%).$$

ამრიგად, პირველი გარიგების შემოსავლიანობაა 133,32%, ხოლო მეორის – 136%. ამიტომ ინვესტორისათვის უმჯობესია ობლიგაციის გაყიდვა.

მაგალითი 4.12. ვთქვათ, დაფარვამდე 4 თვით ადრე ბანკის მიერ განსაზღვრული ვექსელის ფასია 1080. იპოვეთ ვექსელის ნომინალი, თუ ბანკის წლიური საალრიცხვო განაკვეთია 30%.

ამოხსნა. გვაქვს

$$P = F(1 - d \cdot T),$$

სადაც P და F ვექსელის საალრიცხვო და ნომინალური ფასებია, შესაბამისად. ამრიგად, გვექნება

$$1080 = F\Big(1 - 0,3 \cdot \frac{1}{3}\Big),$$

საიდანაც

$$F = \frac{1080}{1 - 0,3 \cdot \frac{1}{3}} = 1200.$$

მაგალითი 4.13. ბანკი ყიდის ორ ვექსელს: პირველის ნომინალური ფასია 900 და დაფარვის ვადაა 3 თვე, მეორის ნომინალური ფასია 1500, ხოლო დაფარვის ვადაა 6 თვე. ორივე ვექსელისათვის წლიური საალრიცხვო განაკვეთია 20%. იპოვეთ ვექსელების საალრიცხვო ფასები, ბანკის შემოსავალი და საპროცენტო განაკვეთები.

ამოხსნა. პირველი ვექსელის შემთხვევაში საალრიცხვო ფასია

$$P_1 = 900\Big(1 - 0,2 \cdot \frac{1}{4}\Big) = 855,$$

დაფარვის მომენტში ბანკის შემოსავალია

$$I_1 = 900 - 855 = 45,$$

ხოლო სამი თვის და წლიური საპროცენტო განაკვეთებია, შესაბამისად,

$$r_1 = \frac{45}{855} = 0,0526,$$
$$i_1 = \frac{r_1}{1/4} = 0,0526 \cdot 4 = 0,2104 \ \ (21,04\%).$$

მეორე ვექსელის შემთხვევაში გვექნება

$$P_2 = 1500\Big(1 - 0,2 \cdot \frac{1}{2}\Big) = 1350,$$
$$I_2 = 1500 - 1350 = 150,$$
$$r_2 = \frac{150}{1350} = 0,1111,$$
$$i_2 = \frac{r_2}{1/2} = 0,1111 \cdot 2 = 0,2222 \ \ (22,22\%).$$

ამრიგად, მიუხედავად იმისა, რომ ვექსელების წლიური სააღრიცხვო განაკვეთები ტოლია, მათი წლიური საპროცენტო განაკვეთები (შემოსავლები) ტოლი არ არის.

მაგალითი 4.14. ვექსელის ნომინალური ფასია 1000. დაფარვამდე 90 დღით ადრე ვექსელი გაიყიდა 850-ის ტოლ ფასად. იპოვეთ გარიგების სააღრიცხვო და საპროცენტო განაკვეთები.

ამოხსნა. ვიპოვოთ ჯერ დისკონტი

$$D = 1000 - 850 = 150.$$

გარიგების პერიოდისთვის სააღრიცხვო და საპროცენტო განაკვეთები, შესაბამისად, ტოლია

$$w = \frac{150}{1000} = 0,15 \ \ (15\%),$$
$$r = \frac{150}{850} = 0,1765 \ \ (17,65\%).$$

შევნიშნოთ, რომ, მაგალითად, ACT/360 წესის მიხედვით გარიგების პერიოდისთვის ნორმირებული სააღრიცხვო და საპროცენტო განაკვეთებია, შესაბამისად,

$$d = \frac{w}{T} = 0,15 \cdot \frac{360}{90} = 0,6 \ \ (60\%),$$
$$i = \frac{r}{T} = 0,1765 \cdot \frac{360}{90} = 0,7059 \ \ (70,59\%).$$

ლექცია 5. ფინანსური ოპერაციები მარტივი პროცენტის სქემაში

1. ჩვენ უკვე გავეცანით მარტივი პროცენტის სქემაში ზოგიერთი მარტივი საკრედიტო გარიგების საკითხებს. აღვნიშნოთ C-თი ასეთი გარიგებების კლასი (სიმრავლე) და ვიგულისხმოთ, რომ ამ კლასის ნებისმიერი $c \in C$ გარიგებისთვის მარტივი საპროცენტო განაკვეთი i არის საერთო და სამართლიანია შემდეგი ტოლობები

$$I_c = B_{t_0^c} \cdot i \cdot T_c, \tag{5.1}$$

$$B^c_{t_1} = B_{t_0^c} \cdot (1 + iT_c), \tag{5.2}$$

სადაც t_0^c და t_1^c გარიგების საწყისი და ბოლო მომენტებია, $B^c_{t_0}$ და $B^c_{t_1}$ საწყისი და საბოლოო თანხებია, $T_c = t_1 - t_0$ არის c გარიგების პერიოდი. შევნიშნავთ, რომ ხშირად c ინდექსი ფორმულებში არ იწერება.

მარტივი პროცენტის გამოყენების ერთ-ერთი გავრცელებული სახეობაა ე. წ. დაგროვების ანუ შემნახველი ანგარიშები, რომელიც უფრო ზოგადი სახის ანგარიშს – მოთხოვნამდე დეპოზიტს (შესატანს) მიეკუთვნება. ცხადია, შეტანილი თანხა დროის განმავლობაში იზრდება. თუ, მაგალითად, i არის წლიური საპროცენტო განაკვეთი და, აგრეთვე, წლებში იზომება, მაშინ თანხის დაგროვების დინამიკა აღიწერება განტოლებით

$$B_t = B_{t_0}\big(1 + i(t - t_0)\big) = B_{t_0}(1 + i \cdot T), \tag{5.3}$$

$$B_t = B_{t_0} \cdot a(t_0, t), \tag{5.4}$$

სადაც

$$a(t_0, t_1) = 1 + i(t - t_0) = 1 + i \cdot T. \tag{5.5}$$

(5.5) ტოლობით განსაზღვრულ $a(t_0, t_1)$ სიდიდეს ზრდის კოეფიციენტი ეწოდება.

საპროცენტო განაკვეთთან ერთად გამოიყენება, აგრეთვე, ე. წ. დარიცხვის განაკვეთი, რომელიც დაგროვების ანგარიშის ზრდის დინამიკას ახასიათებს. დარიცხვის განაკვეთია (h, i) წყვილი, სადაც h რაიმე კონკრეტული პერიოდია, ხოლო i არის ამ პერიოდში საპროცენტო განაკვეთი. ამ ფაქტს i_n სიმბოლოთი აღნიშნავენ. ამრიგად, დაგროვების დინამიკის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$B_t = B_{t_0}\left(1 + i_n \cdot \frac{t - t_0}{n}\right) = B_{t_0}(1 + i_n \cdot T_n), \tag{5.6}$$

სადაც $T_n = (t - t_0)/n$. იმ შემთხვევაში, როცა $h = 1$, მაშინ (5.6) მიიღებს (5.3) სახეს. ხშირად გამოიყენება, აგრეთვე, ნორმირებული დარიცხვის განაკვეთი, რომელიც განიმარტება ტოლობით

$$i = \frac{i_n}{h}. \tag{5.7}$$

მაგალითი 5.1. შეანაბრეს გახსნა დაგროვების ანგარიში $B_0 = 500$ საწყისი თანხით $t_0 = 0$ მომენტში. წლიური საპროცენტო განაკვეთია 12%. გამოთვალეთ დაგროვების ანგარიშის მნიშვნელობები: ერთი თვის შემდეგ, ერთი წლის შემდეგ, ორი წლის შემდეგ, ათი წლის შემდეგ.

ამოხსნა. (5.3) განტოლების თანახმად გვექნება

$$B_{\frac{1}{12}} = 500\Big(1 + 0,12 \cdot \frac{1}{12}\Big) = 505,$$
$$B_1 = 500(1 + 0,12 \cdot 1) = 560,$$
$$B_2 = 500(1 + 0,12 \cdot 2) = 620,$$
$$B_{10} = 500(1 + 0,12 \cdot 10) = 1100.$$

დარიცხვის ორ განაკვეთს (h_1, i_{n_1}) და (h_2, i_{n_2}) ეწოდება ეკვივალენტური, თუ სრულდება ტოლობა

$$B_{t_0}\Big(1 + i_1 \cdot \frac{t - t_0}{h_1}\Big) = B_t = B_{t_0}\Big(1 + i_2 \cdot \frac{t - t_0}{h_2}\Big),$$

სადაც $i_1 = i_{n_1}$ და $i_2 = i_{n_2}$. ამ ტოლობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი: (n_1, i_1) და (n_2, i_2) განაკვეთები ეკვივალენტურია, თუ

$$\frac{i_1}{h_1} = \frac{i_2}{h_2}.$$

მაგალითი 5.2. მარტივი საპროცენტო განაკვეთი წელიწადში არის 10%. იპოვეთ ეკვივალენტური საპროცენტო განაკვეთი თვეში.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ $i_{1/12}$-ით განაკვეთი თვეში, რომელიც შეესაბამება $1/12$ განაკვეთს წელიწადში. ვთქვათ, შევიტანეთ 1-ის ტოლი თანხა 1 წლით 10%-ის ტოლი განაკვეთით. მაშინ

$$B_1 = 1 \cdot (1 + 0,2 \cdot 1) = 1,1.$$

მეორეს მხრივ,

$$B_1 = 1 \cdot (1 + 12 \cdot i_{1/12})$$

და გვექნება

$$12i_{1/12} = 0,1; \quad i_{1/12} = \frac{0,1}{12} = 0,0083 \ \ (0,83\%).$$

დაგროვების ანგარიშის მოდელში გამოიყენება FV_t ოპერაცია $[t_0, t]$ შუალედისათვის, რომლის თანახმად გვაქვს

$$\mathrm{FV}_t(B_{t_0}) = B_t = B_{t_0} a(t_0, t), \tag{5.8}$$

სადაც $a(t_0, t)$ ზრდის კოეფიციენტია:

$$a(t_0, t) = 1 + i(t - t_0), \ \ t \geq t_0.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ h რაიმე დროითი პერიოდია, მაშინ

$$a(t_0 + h, t + h) = a(t_0, t).$$

სამართლიანია, აგრეთვე, შემდეგი ტოლობები

$$a(t_0, t) = a(t - t_0) = 1 + i(t - t_0) = 1 + i \cdot T = a_T, \tag{5.9}$$

$$B_t = B_{t_0} a(t_0, t) = B_{t_0} \cdot a_T. \tag{5.10}$$

იმ შემთხვევაში, როცა $t_0 = 0$ გვექნება

$$a(0, t) = 1 + i \cdot t = a_t, \tag{5.11}$$

$$B_t = B_0 \cdot a_t. \tag{5.12}$$

მაგალითი 5.3. $t_0 = 0$ მომენტში ანაბარზე შეტანილია $B_0 = 1000$-ის ტოლი თანხა წელიწადში 10% განაკვეთით: ა) 2 წლით, ბ) 1 წლით, რომლის გასვლის შემდეგ დაგროვილი თანხა შეიტანება (რეინვესტირდება) კიდევ ერთი წლით. იპოვეთ ა) და ბ) შემთხვევებში დაგროვილი B_2 თანხა 2 წლის ბოლოს.

ამოხსნა. ა) შემთხვევაში (5.3) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$B_2 = 1000(1 + 0,1 \cdot 2) = 1200.$$

ბ) შემთხვევაში გვექნება

$$B_1 = 1000(1 + 0,1 \cdot 1) = 1100,$$
$$B_2 = 1100(1 + 0,1 \cdot 1) = 1210.$$

მაგალითი 5.4. საწყისი თანხა $B'_0 = 100$ შეტანილია $t_0 = 0$ მომენტში წელიწადში 20%-იანი განაკვეთით. ერთი წლის შემდეგ შეიტანეს $B''_0 = 110$ თანხა ისევ წელიწადში 20%-იანი განაკვეთით. იპოვეთ დროის t მომენტი, რომელსაც ორივე ანგარიშის დაგროვილი თანხების რაოდენობები ერთმანეთს დაემთხვევა.

ამოხსნა. ანგარიშების დინამიკა დროში მოიცემა შემდეგი განტოლებებით

$$B'_t = 100(1 + 0,2 \cdot t) = 100 + 20t, \quad t \geq 0,$$
$$B''_t = 110\big(1 + 0,2(t - 1)\big) = 88 + 22t, \quad t \geq 0,$$

საიდანაც გვექნება

$$100 + 20t + 88 + 22t, \quad t = 6.$$

2. დროის საწყის t_0 მომენტში საწყისი B_0 თანხის მნიშვნელობა მომავალში დროის რაიმე $t \geq t_0$ მომენტში, როგორც ვიცით, შეიძლება ჩავწეროთ მომავალი ღირებულების FV_t ოპერაციის გამოყენებით

$$B_t = \mathrm{FV}_t(B_0) = B_0\big(1 + i(t - t_0)\big), \quad t \geq t_0. \tag{5.13}$$

დროის t მომენტს, რომლისთვისაც განისაზღვრება თანხის მომავალი მნიშვნელობა (B_t სიდიდემდე B_0 თანხის გარდაქმნა), ხშირად ეწოდება პოლუსი, ფოკალური თარიღი, ვალორიზაციის მომენტი. ამრიგად, ვალორიზაცია ნიშნავს მომავალში საწყისი თანხის მნიშვნელობის პოვნას დროის მოცემულ t მომენტში. ვალორიზაციის პროცესი ცალსახად განისაზღვრება ზრდის კოეფიციენტის საშუალებით.

(5.3) ფორმულის გამოყენებით შეიძლება ვიპოვოთ t_0 მომენტში რა რაოდენობის საწყისი B_0 თანხაა საჭირო, რომ მომავალში დროის t მომენტში გვქონდეს B_t თანხა. გვაქვს

$$B_0 = \frac{B_t}{1 + i(t - t_0)}, \tag{5.14}$$

რომელსაც კიდევ მიმდინარე (დღევანდელი, დისკონტირებული) ღირებულება (ფასი) ეწოდება. აღვნიშნოთ მიმდინარე ფასის პოვნის ოპერაცია (დისკონტირების ოპერაცია) DV_{t_0} სიმბოლოთი. გვექნება

$$B_0 = \mathrm{DV}_{t_0}(B_t)$$

და თუ $t_0 = 0$, მაშინ (5.14) მიიღებს შემდეგ სახეს

$$B_0 = \frac{B_t}{1 + i \cdot t} = \mathrm{DV}_0(B_t). \tag{5.15}$$

მარტივი პროცენტის სქემაში დისკონტირების კოეფიციენტი განიმარტება ტოლობით

$$d(t, t_0) = \frac{1}{1 + i(t - t_0)} = \frac{1}{1 + i \cdot T}, \tag{5.16}$$

ხოლო დისკონტირების ოპერაციისთვის გვაქვს

$$DV_{t_0}(B_t) = B_t \cdot d(t, t_0). \tag{5.17}$$

რადგანაც $T = t - t_0$, შეიძლება (5.16) ფორმულა ჩავწეროთ დისკონტირების ერთგანზომილებიანი (სტანდარტული) კოეფიციენტის სახით

$$d_T = d(t, t_0) = \frac{1}{1 + i \cdot T},$$

ხოლო

$$DV_{t_0}(B_t) = B_t \cdot d_T.$$

როდესაც $t_0 = 0$, გვექნება

$$d(t, 0) = d_t, \quad DV_{t_0}(B_t) = B_t \cdot d_t.$$

მაგალითი 5.5. საპროცენტო განაკვეთი წელიწადში არის 5%. იპოვეთ t_0 მომენტში შესატანი თანხის რაოდენობა, რომლის საშუალებითაც 2 წლის ბოლოს დაგროვებული თანხა იქნება 1000.

ამოხსნა. ვიგულისხმოთ, რომ $t_0 = 0$. გვაქვს $B_2 = 1000$ და $i = 0,05$. ამ პირობებში საძებნი საწყისი თანხაა

$$B_0 = \frac{1000}{1 + 0,05 \cdot 2} = 909,1.$$

ამრიგად, მოცემული საპროცენტო განაკვეთისათვის გვაქვს ფინანსური ხდომილობების გარდაქმნის ორი ოპერაცია:

1. თანხის მომავალ მომენტამდე მიყვანის ოპერაცია;
2. წარსულ მომენტამდე დაყვანის ოპერაცია.

ამასთან, პირველი ოპერაცია განიმარტება ტოლობით

$$V_\tau = \mathrm{FV}_\tau(C_t) = C_t \cdot a(t,\tau) = C_\tau\big(1 + i(\tau - t)\big), \quad \tau \geq t,$$

ხოლო მეორე ოპერაცია –

$$V_\tau = \mathrm{DV}_\tau(C_t) = C_t \cdot d(t,\tau) = \frac{C_t}{1 + i(t - \tau)}, \quad \tau < t.$$

ეს ორი ოპერაცია შეიძლება ჩავწეროთ PV_τ მიმდინარე თანხის ღირებულების (ფასის) ოპერაციის გამოყენებით ნებისმიერი (t, C) ხდომილობისათვის შემდეგი ტოლობით

$$V_\tau = \mathrm{PV}_\tau(C_t) = \begin{cases} \mathrm{FV}_\tau(C_t) = C_t \cdot a(t,\tau), & \tau \geq t, \\ \mathrm{DV}_\tau(C_t) = C_t \cdot d(t,\tau), & \tau < t. \end{cases}$$

მაგალითი 5.6. ვთქვათ, დროის $t_1 = 1$ მომენტში $B_1 = 200$, ხოლო დროის $t_2 = 3$ მომენტში – $B_2 = 600$. ნორმირებული საპროცენტო განაკვეთია $i = 20\%$. იპოვეთ B_1 და B_2 თანხების გარდაქმნილი მნიშვნელობები დროის $\tau = 2$ მომენტისათვის.

ამოხსნა. რადგანაც $t_1 < \tau$, ამიტომ $B_1 = 200$ თანხის მნიშვნელობა მომავალში დროის τ მომენტში იქნება

$$V_2' = \mathrm{FV}_2(B_1) = 200(1 + 0,2 \cdot 1) = 240,$$

ხოლო, რადგანაც $t_2 > \tau$, ამიტომ $B_2 = 600$ თანხის მიმდინარე (დისკონტირებული) მნიშვნელობა იქნება

$$V_2'' = \mathrm{DV}_2(B_2) = \frac{600}{1 + 0,2 \cdot 1} = 500.$$

ფინანსური ხდომილობის გარდაქმნის გაერთიანებულ PV_τ ოპერაციას შეესაბამება მიყვანისა და დისკონტირების (დაყვანის) განზოგადოებული კოეფიციენტები, რომელიც ერთიანი ტოლობით შემდეგი სახით ჩაიწერება

$$v(t,\tau) = \begin{cases} a(t,\tau), & \tau \geq t, \\ d(t,\tau), & \tau < t. \end{cases}$$

სამართლიანია შემდეგი ტოლობები

$$a(t,\tau)\cdot d(t,\tau)=1,$$
$$v(t,\tau)=\frac{1}{v(\tau,t)}\,. \tag{5.18}$$

რადგანაც $v(t,\tau)$, $a(t,\tau)$ და $d(t,\tau)$ კოეფიციენტები დამოკიდებულია $T=\tau-t$ სხვაობაზე, ამიტომ $v(t,\tau)$ შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$v_T=v(T)=\begin{cases}a(T)=1-i\cdot T, & T\geq 0,\\ d(-T)=\dfrac{1}{1-i\cdot T}\,, & T<0,\end{cases} \tag{5.19}$$

ხოლო (5.18) ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$v(T)=\frac{1}{v(-T)}\,.$$

სამართლიანია, აგრეთვე, ტოლობები

$$V_\tau=\mathrm{PV}_\tau(C_t)=C_t\cdot v(t,\tau)=C_t\cdot v(T).$$

3. როგორც ვიცით, მარტივი პროცენტის სქემაში გვაქვს ორი ძირითადი ფინანსური კანონი: კაპიტალიზაციისა

$$A(t,p,C)=C\big(1+i(p-t)\big),\quad p\geq t, \tag{5.20}$$

და დისკონტირების

$$D(t,p,C)=\frac{C}{1+i(t-p)}\,,\quad p\leq t. \tag{5.21}$$

კაპიტალიზაციის კანონით ((5.20) ტოლობით) ჩვენ ვპოულობთ დროის მომავალ მომენტებში თანხის (ხდომილობის) მნიშვნელობებს

$$V_p=\mathrm{FV}_p(t,C)=A(t,p,C), \tag{5.22}$$

ხოლო დისკონტირების კანონით ((5.21) ტოლობით) ვპოულობთ დროის წარსულ მომენტებში თანხის (ხდომილობის) დისკონტირებულ მნიშვნელობებს

$$V_p=\mathrm{DV}_p(t,C)=D(t,p,C). \tag{5.23}$$

შევნიშნავთ აგრეთვე, რომ კაპიტალიზაციისა და დისკონტირების ფინანსურ კანონებს გააჩნია ნორმირების, დროში ერთგვაროვნებისა და მონოტონურობის თვისებები, მაგრამ არ გააჩნია ტრანზიტულობის თვისება.

მაგალითი 5.7. განვიხილოთ ორი ვექსელი: პირველი – ნომინალით 2500 და ერთი წლის ვადით, ხოლო მეორე – ნომინალით 3000 და ორი წლის ვადით. იპოვეთ ვექსელების მიმდინარე ფასები. თუ საპროცენტო განაკვეთია 25%. იპოვეთ, აგრეთვე, ორწლიანი ვექსელის ფასი ერთი წლის შემდეგ.

ა მ ო ხ ს ნ ა . ერთწლიანი ვექსელის მიმდინარე ფასია

$$\mathrm{PV}_0(2500) = \frac{2500}{1 + 0,25 \cdot 1} = 2000,$$

ხოლო ორწლიანი ვექსელის მიმდინარე ფასია

$$\mathrm{PV}_0(3000) = \frac{3000}{1 + 0,25 \cdot 2} = 2000.$$

ამრიგად, ამ ვექსელების მიმდინარე ფასები დროის $t_0 = 0$ მომენტში ერთმანეთს ემთხვევა. მეორეს მხრივ, ორწლიანი ვექსელის ფასი ერთი წლის შემდეგ იქნება

$$\mathrm{PV}_1(3000) = \frac{3000}{1 + 0,25 \cdot 1} = 2400,$$

ხოლო ამ თანხის დისკონტირება (დაყვანა) დროის $t_0 = 0$ მომენტისათვის გვაძლევს

$$\mathrm{PV}_0(2400) = \frac{2400}{1 + 0,25 \cdot 1} = 1920.$$

შევნიშნოთ, რომ თუ ორი ფინანსური ხდომილობა (t, C_1) და (τ, C_2) ეკვივალენტურია p პოლუსის მიმართ, მაშინ

$$C_1 \cdot v(t,p) = C_2 \cdot v(\tau,p),$$

$$C_2 = C_1 \cdot \frac{v(t,p)}{v(\tau,p)}. \tag{5.24}$$

ნებისმიერი (t, C_t) ფინანსური ხდომილობისათვის, p პოლუსის მიმართ, ახალ (τ, V_τ) ხდომილობად გარდაქმნის ოპერაცია განიმარტება ტოლობით

$$V_\tau = \mathrm{PV}^p_\tau(C_t) = C_t \cdot \frac{v(t,p)}{v(\tau,p)}. \tag{5.25}$$

ფინანსური (t, C) ხდომილობისათვის განიმარტება, აგრეთვე, ე. წ. ფარდობითი გარდაქმნის ოპერაცია შემდეგი ტოლობით

$$\mathrm{PV}^{t_0}_\tau(C_t) = C_t \cdot \frac{1 + i(\tau - t_0)}{1 + i(t - t_0)}, \quad t \geq t_0, \quad \tau \geq t_0.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5.8. დროის $t_0 = 0$ მომენტში შეტანილია გარკვეული B_0 თანხა. წელიწადში საპროცენტო განაკვეთია $i = 20\%$. ცნობილია, რომ სამი წლის ბოლოს დაგროვებული თანხაა $B_3 = 1600$. იპოვეთ B_2 და B_5.

ა მ ო ხ ს ნ ა . ფარდობითი გარდაქმნის ოპერაციის ფორმულის გამოყენებით გვექნება

$$B_2 = \mathrm{PV}^0_2(B_3) = 1600 \cdot \frac{1 + 0,2 \cdot (2 - 0)}{1 + 0,2 \cdot (3 - 0)} = 1400,$$

$$B_5 = \mathrm{PV}_5^0(B_3) = 1600 \cdot \frac{1 + 0,2 \cdot (5-0)}{1 + 0,2 \cdot (3-0)} = 2000.$$

მაგალითი 5.9. ორი წლის ვადაში $i = 20\%$ განაკვეთით დაგროვებული თანხაა $B_2 = 210$. რამდენით გაიზრდება დაგროვებული თანხა შემდეგი სამი წლის განმავლობაში.

ამოხსნა. კიგულისხმოთ, რომ $t_0 = 0$. გვაქვს

$$B_0 = \mathrm{PV}_0(B_2) = \frac{210}{1 + 0,2 \cdot 2} = 150,$$
$$B_5 = 150 \cdot (1 + 0,2 \cdot 5) = 300.$$

ამრიგად, $B_5 - B_2 = 300 - 210 = 90$.

ადვილი მისახვედრია, რომ იგივე მნიშვნელობას მივიღებთ ბოლო სამ წელზე $B_0 = 150$ საწყის თანხაზე $i = 20\%$ განაკვეთით დარიცხვის შედეგად

$$I_3 = 150 \cdot 0,2 \cdot 3 = 90.$$

განვიხილოთ ახლა ფინანსური ნაკადი

$$\mathrm{CF} = \{(t_1, C_1), \ldots, (t_n, C_n)\}.$$

განვმარტოთ ნაკადის p პოლუსზე (დროის p მომენტზე) სტანდარტული მიყვანის (გარდაქმნის) ოპერაცია შემდეგი ტოლობით

$$\mathrm{PV}_p(\mathrm{CF}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{PV}_p(C_k).$$

მაგალითად, თუ გვაქვს

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_m \le p \le t_{m+1} \le \cdots \le t_n,$$

მაშინ გვექნება

$$\mathrm{PV}_p(\mathrm{CF}) = \sum_{k=1}^{m} C_k\big(1 + i(p - t_k)\big) + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{C_k}{1 + i(t_k - p)}. \qquad (5.26)$$

მაგალითი 5.10. განვიხილოთ ფინანსური ნაკადი

$$\mathrm{CF} = \{(1, 100), (2, -200), (3, 100), (4, -120), (5, 700)\}.$$

საპროცენტო განაკვეთით $i = 20\%$. იპოვეთ ნაკადის მიმდინარე ფასი $p = 3$ პოლუსის მიმართ.

ამოხსნა. (5.26) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$\mathrm{PV}_3(\mathrm{CF}) = 100 \cdot (1 + 0,2 \cdot 2) - 200 \cdot (1 + 0,2 \cdot 1) +$$
$$+ 100 - \frac{120}{1 + 0,2 \cdot 1} + \frac{700}{1 + 0,2 \cdot 2} = 400.$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le p$, მაშინ ნაკადის მომავალი ფასი p პოლუსის მიმართ ჩაიწერება ტოლობით

$$\mathrm{FV}_p(\mathrm{CF}) = \sum_{k=1}^{n} C_k\big(1 + i(p - t_k)\big),$$

ხოლო თუ $p \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, მაშინ ნაკადის დისკონტირებული ფასი p პოლუსის მიმართ ჩაიწერება ტოლობით

$$\mathrm{DV}_p(\mathrm{CF}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{1 + i(t_k - p)}\,.$$

ლექცია 6. ცვალებადი კაპიტალის მოდელი მარტივი პროცენტის სქემაში

1. ვიგულისხმოთ, რომ დაგროვების ანგარიში გახსნილია რამდენიმე ბანკში, ან რამდენიმე ანგარიშია გახსნილი ერთ ბანკში, თანაც დროის სხვადასხვა საწყის მომენტებში და სხვადასხვა საპროცენტო განაკვეთებით. გარდა ამისა, ვიგულისხმოთ, რომ ინვესტირების პროცესში ხდება პერიოდულად ანგარიშზე გარკვეული თანხის დამატებით შეტანა და გამოტანა. ამრიგად, გვექნება შემდეგი სახის ფინანსური ნაკადი

$$(t_0, B_0) = \Big\{(t_0^1, B_0^1), (t_0^2, B_0^2), \dots, (t_0^n, B_0^n)\Big\},$$

სადაც (t_0^k, B_0^k), $k = 1, \dots, n$, არის k-ური ანგარიშის საწყისი მდგომარეობა. $\mathrm{CF} = (t_0, B_0)$ ნაკადს დაგროვების ანგარიშის მულტიანგარიში (მულტიანგარიშის მოდელი) ეწოდება, ხოლო ამ ვექტორული ნაკადის (t_0^k, B_0^k), $k = 1, \dots, n$, კომპონენტებს საბანგარიშები ეწოდება. მულტიანგარიშების დინამიკა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$B_t^k = B^k(t) = B_0^k\big(1 + i_k(t - t_0^k)\big). \tag{6.1}$$

ამრიგად, გვაქვს ვექტორები

$$t_0 = (t_0^k), \quad B_0 = (B_0^k), \quad B_t = (B_t^k), \quad k = 1, \dots, n.$$

განვმარტოთ B_t^k მულტიანგარიშის ახალი ფორმა შემდეგნაირად

$$\widetilde{B}_t^k = \begin{cases} B_t^k, & t \ge t_0^k, \\ 0, & t < t_0^k, \end{cases} \quad k = 1, \dots, n, \tag{6.2}$$

ანუ რაც იგივეა

$$\widetilde{B}_t^k = \begin{cases} B_0^k\big(1 + i_k(t + t_0^k)\big), & t \ge t_0^k, \\ 0, & t < t_0^k, \end{cases} \quad k = 1, \dots, n. \tag{6.3}$$

მულტიანგარიშის სრული მნიშვნელობა დროის t მომენტში განიმარტება როგორც მისი სუბანგარიშების ჯამი

$$B_t = \sum_{k=1}^{n} B_t^k. \tag{6.4}$$

(6.3) და (6.4) ტოლობების თანახმად გვაქვს

$$B_t = \sum_{k:\, t_0^k \le t} B_0^k\big(1 + i_k(t - t_0^k)\big). \tag{6.5}$$

მაგალითი 6.1. ვთქვათ, პირველ ბანკში წლის დასაწყისში შეტანილია საწყისი თანხა – 1000, წელიწადში 10%-იანი განაკვეთით, ხოლო წლის ბოლოს მეორე ბანკში შეტანილია საწყისი თანხა – 2000, წელიწადში 15%-იანი განაკვეთით. იპოვეთ მულტიანგარიშის მნიშვნელობა ნახევარი წლის შემდეგ, ორი წლის შემდეგ.

ამოხსნა. ინვესტირების დასაწყისად ავირჩიოთ $t = 0$ მომენტი – პირველი წლის დასაწყისი. (6.3) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$\begin{cases} \widetilde{B}_t^1 = 1000(1 + 0,1 \cdot t), & t \ge 0, \\ \widetilde{B}_t^1 = 0, & t < 0, \\ \widetilde{B}_t^2 = 2000\big(1 + 0,15(t-1)\big), & t \ge 1, \\ 0, & t < 1. \end{cases}$$

მულტიანგარიშის სრული მნიშვნელობაა

$$B_t = 0, \quad t < 0,$$
$$B_t = 1000(1 + 0,1 \cdot t), \quad 0 \le t \le 1,$$
$$B_t = 1000(1 + 0,1 \cdot t) + 2000\big(1 + 0,15(t-1)\big), \quad t \ge 1.$$

ამრიგად, გვექნება

$$B_{0,5} = 1000(1 + 0,1 \cdot 0,5) = 1050,$$
$$B_2 = 1000(1 + 0,1 \cdot 2) + 2000(1 + 0,15 \cdot 1) = 1200 + 2300 = 3500.$$

განვიხილოთ ფინანსური ნაკადი

$$\mathrm{CF} = \big\{(t_1, C_1), \ldots, (t_n, C_n)\big\}$$

და საპროცენტო განაკვეთების ვექტორი – $i = (i_1, \ldots, i_n)$. თუ გვაქვს $\tau > t_1, \ldots, i_n$, მაშინ ნაკადით წარმოქმნილი მომავალი მულტიანგარიშის მნიშვნელობა τ მომენტში, (6.5) ფორმულის თანახმად, შეიძლება განვმარტოთ შემდეგი ტოლობით

$$\mathrm{FV}_\tau^m(\mathrm{CF}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{FV}_\tau(C_k).$$

ხშირად იგულისხმება, რომ $i_1 = \cdots = i_n = i$. ასეთ შემთხვევაში გვექნება

$$\mathrm{FV}^m_\tau(\mathrm{CF}) = \mathrm{FV}_\tau(\mathrm{CF}).$$

თუ $t_1 < \cdots < t_k < \tau < t_{k+1} < \cdots < t_n$, მაშინ CF ნაკადით წარმოქმნილი მულტიანგარიშის მიმდინარე მნიშვნელობა განისაზღვრება ტოლობით

$$\mathrm{PV}^m_\tau(\mathrm{CF}) = \sum_{j=1}^{k} C_j\bigl(1 + i_j(\tau - t_j)\bigr) + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{C_j}{1 + i_j(t_j - \tau)}. \qquad (6.6)$$

CF ნაკადის დისკონტირებული მნიშვნელობა, როცა $\tau \le t_1, \ldots, t_n$, განისაზღვრება ტოლობით

$$\mathrm{PV}^m_\tau(\mathrm{CF}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_k}{1 + i_k(t_k - \tau)}. \qquad (6.7)$$

იმ შემთხვევაში, როცა $i_1 = \cdots = i_n = i$, გვექნება

$$\mathrm{PV}^m_\tau(\mathrm{CF}) = \mathrm{PV}_\tau(\mathrm{CF}).$$

მაგალითი 6.2. ფინანსურ ბაზარზე იყიდება საერთო ნომინალით – 1000 ორი ტიპის: ერთწლიანი და ორწლიანი ობლიგაციები. ინვესტორის სურვილია ერთი წლის შემდეგ დაგროვილი თანხა იყოს 3000, ხოლო ორი წლის შემდეგ – 5000. წელიწადში საპროცენტო განაკვეთია 10%. იპოვეთ ინვესტორის სურვილის მისაღწევად ობლიგაციების პორტფელის შესაბამისი თანხის რაოდენობა.

ამოხსნა. საძებნი პორტფელი შედგება პირველი ტიპის – სამი და მეორე ტიპის – ხუთი ობლიგაციისგან. ასეთი პორტფელის შესაბამისი დისკონტირებული ფასი დროის $t_0 = 0$ მომენტში იქნება

$$\mathrm{PV}_0 = \frac{3000}{1 + 0,1 \cdot 1} + \frac{5000}{1 + 0,1 \cdot 2} = 2727,27 + 4166,67 = 6893,94.$$

შევნიშნავთ, რომ ხშირად გამოიყენება მულტიანგარიშის შემდეგი თვისებები:

$$\mathrm{PV}''_\tau(\mathrm{CF}_1 + \mathrm{CF}_2) = \mathrm{PV}^m_\tau(\mathrm{CF}_1) + \mathrm{PV}^m_\tau(\mathrm{CF}_2), \qquad (6.8)$$

$$\mathrm{PV}^m_\tau(\alpha\,\mathrm{CF}) = \alpha\,\mathrm{PV}^m_\tau(\mathrm{CF}), \qquad (6.9)$$

სადაც α რაიმე ნამდვილი რიცხვია.

2. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ინვესტირების პროცესში ხდება დამატებითი თანხის შეტანა. ვთქვათ, დროის საწყის $t_0 = 0$ მომენტში ინვესტორმა გახსნა ანგარიში საწყისი თანხით – 1000. წელიწადში საპროცენტო განაკვეთია – 10%. ვთქვათ, აგრეთვე, ინვესტორმა ორივე წლის ბოლოს

დამატებით იგივე ანგარიშზე შეიტანა – 1000. იპოვეთ ინვესტორის დაგროვებული თანხა ორი წლის ბოლოს. გვექნება

$$B_2 = 1000(1 + 0,1 \cdot 2) + 1000(1 + 0,1 \cdot 1) = 1200 + 1100 = 2300.$$

შევნიშნავთ, რომ იგივე შედეგს მივიღებთ, თუ დაგროვებულ თანხას დავთვლით შემდეგნაირად. გვაქვს

$$P_0 = 1000, \quad P_1 = 2000,$$
$$I([0,1]) = 1000 \cdot 0,1 \cdot 1 = 100,$$
$$I([1,2]) = 2000 \cdot 0,1 \cdot 1 = 200,$$
$$I_2([0,2]) = I([0,1]) + I([1,2]) = 100 + 200 = 300,$$
$$B_2 = P_1 + I_2 = 2000 + 300 = 2300.$$

განვიხილოთ დაგროვების ანგარიშის ე. წ. ბინარული მოდელი, რომელიც შემდეგი ტოლობით განიმარტება

$$B_t = P_t + I_t, \tag{6.10}$$

სადაც

$$I_t = I([t_0, t]), \tag{6.11}$$

$$P_t = \sum_{k:\, t_k \le t} C_k, \quad t > t_0. \tag{6.12}$$

თუ t_k არის t მომენტამდე ბოლო დამატებითი თანხის შეტანის მომენტი, მაშინ

$$I_t = \sum_{j=1}^{n} I\big([t_{j-1}, t_j]\big) + I([t_k, t]), \tag{6.13}$$

სადაც

$$I\big([t_{j-1}, t_j]\big) = P_{t_{j-1}} \cdot i \cdot (t_j - t_{j-1}), \quad j = 1, \ldots, k, \tag{6.14}$$

$$I([t_k, t]) = P_{t_k} \cdot i \cdot (t - t_k). \tag{6.15}$$

მაგალითი 6.3. წლის დასაწყისში ინვესტორის შეტანილი თანხაა – 1000. შემდეგ, 10 წლის განმავლობაში, მას ყოველი წლის ბოლოს დამატებით შეაქვს თანხა – 100. წელიწადში საპროცენტო განაკვეთია – 10%. იპოვეთ ინვესტორის დაგროვილი თანხა 10 წლის ბოლოს.

ამოხსნა. გვაქვს

$$B_{10} = 1000(1 + 0,1 \cdot 10) + 100 \cdot \sum_{k=1}^{10} \big(1 + 0,1 \cdot (10 - k)\big),$$

$$\sum_{k=1}^{10} \big(1 + 0,1 \cdot (10 - k)\big) = 10 + 0,1 \cdot \sum_{k=1}^{10} (10 - k),$$

$$\sum_{k=1}^{10}(10-k)=\sum_{j=1}^{9}j=45.$$

ამრიგად, მივიღებთ

$$B_{10}=2000+100(10+0,1\cdot 45)=3450.$$

გამოვთვალოთ, აგრეთვე, B_{10} შემდეგი გზით, გვაქვს

$$P_0=1000,\quad I([0,1])=1000\cdot 0,1\cdot 1=100,$$
$$P_1=1100,\quad I([1,2])=1100\cdot 0,1\cdot 1=110,$$
$$P_k=P_{k-1}+100=1000+100k,\quad k=1,\dots,10,$$
$$I([k,k+1])=P_k\cdot 0,1\cdot 1=0,1\cdot P_k,\quad k=0,1\dots,9,$$
$$P_{10}=1000+100\cdot 10=2000,$$
$$I_{10}=I([0,10])=\sum_{k=0}^{9}I([k,k+1])=0,1\sum_{k=0}^{9}P_k=$$
$$=0,1\sum_{k=0}^{9}(1000+100k)=1000+10\sum_{k=0}^{9}k=1450,$$
$$B_{10}=P_{10}+I_{10}=3450.$$

3. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ინვესტირების პროცესში ხდება დაგროვილი თანხიდან გარკვეული რაოდენობის თანხის გატანა.

ვთქვათ, $B_0=1000$, $i=10\%$, $t_0=0$. პირველი წლის ბოლოს ინვესტორმა ანგარიშიდან მოხსნა – 200. ვიპოვოთ 2 წლის ბოლოს დაგროვილი თანხა. პირველი წლის ბოლოს დაგროვილი თანხაა

$$1000(1+0,1\cdot 1)=1100,$$

ხოლო გატანის შემდეგ დარჩება –

$$1100-200=900.$$

ახლა ისმის კითხვა: მეორე წლის განმავლობაში რომელ თანხას უნდა დაერიცხოს პროცენტები. განვიხილოთ რამდენიმე შემთხვევა.

1) დარიცხვა მოხდა დარჩენილ თანხაზე. მაშინ მეორე წლის ბოლოს გვექნება

$$900(1+0,1\cdot 1)=990$$

თანხა.

2) 200 თანხის ანგარიშიდან მოხსნის მაგივრად, კლიენტმა პირველი წლის ბოლოს აიღო კრედიტში 200 მეორე ბანკიდან 10%-იანი განაკვეთით. მაშინ მეორე წლის ბოლოს მას დასაბრუნებელი ექნება

$$200(1+0,1\cdot 1)=220$$

თანხა.

რადგანაც, ანგარიშიდან გატანის გარეშე, მეორე წლის ბოლოს ინვესტორის თანხაა

$$1000(1 + 0,1 \cdot 2) = 1200,$$

ამიტომ, კრედიტის აღების შემთხვევაში, ინვესტორის რეალური თანხა მეორე წლის ბოლოს იქნება

$$B_2 = 1200 - 220 = 980.$$

3) შევხედოთ ახლა თანხის შეტანას და გატანას როგორც მულტიანგარიშს იმ პირობით, რომ ინვესტორის შეტანილ თანხას აქვს დადებითი, ხოლო გატანილ თანხას – უარყოფითი ნიშნები. მაშინ გვექნება

$$B_2 = 1000(1 + 0,1 \cdot 2) - 200(1 + 0,1 \cdot 1) = 1200 - 220 = 980.$$

გარდა ამისა, შევნიშნოთ, რომ გვაქვს

$$\begin{aligned} P_0 = 1000, \quad P_1 = 800, \\ I([0,1]) = 1000 \cdot 0,1 \cdot 1 = 100, \\ I([1,2]) = 800 \cdot 0,1 \cdot 1 = 80, \\ B_2 = 800 + 100 + 80 = 980. \end{aligned}$$

ამრიგად, კიდევ ერთხელ შევნიშნავთ, რომ მარტივი პროცენტის შემთხვევაში დარიცხვა ხდება მხოლოდ ძირითად თანხაზე. ჩვენს მაგალითში პირველი წლის პერიოდში – 1000-ზე, მეორე წლის პერიოდში – 800-ზე. ამ ოპერაციას მარტივი პროცენტის პრინციპი ეწოდება და ჩაიწერება ტოლობით

$$I\big([t, t+T]\big) = P_t \cdot i \cdot T. \tag{6.16}$$

4. როგორც ვხედავთ, ინვესტირების პროცესში დამატებითი თანხის შეტანა ან თანხის გამოტანა გარკვეულ სირთულეებთან არის დაკავშირებული ინვესტირების პერიოდის ბოლოს დაგროვილი თანხის გამოანგარიშების თვალსაზრისით. შევნიშნავთ, რომ მარტივი პროცენტის წესის გარდა, გამოიყენება აგრეთვე, ე. წ. კომერციული და აქტუარული წესები. ამ წესებით ხდება ძირითადი თანხის რაოდენობის (სალდოს) გამოანგარიშება.

კომერციული წესის დროს დამატებითი თანხის შეტანის ან თანხის გამოტანის ოპერაციები ეხება მხოლოდ ძირითად თანხას, ხოლო პროცენტი (პროცენტის დარიცხვა) არ იცვლება. ასეთ დროს დაგროვილი თანხის დინამიკა სრულად აღიწერება (6.10)–(6.15) ტოლობებით.

აქტუარული წესის დროს იგულისხმება, რომ ხდება მხოლოდ დამატებითი თანხის შეტანა რაიმე C_k ნაკადის სახით. ამ წესს კიდევ ამერიკული წესი ეწოდება.

კომერციული წესისთვის სამართლიანია შემდეგი. ვთქვათ, დაგროვების ანგარიში წარმოქმნება ფინანსური ნაკადით

$$\mathrm{CF} = \big\{(t_0, C_0), \dots, (t_n, C_n)\big\}$$

და i საპროცენტო განაკვეთით. ვთქვათ, გარდა ამისა, $P(t)$ და $I(t)$ არის, შესაბამისად, ძირითადი და პროცენტის სუბანგარიშების მდგომარეობები დროის t მომენტში. მაშინ ძირითადი ანგარიშის მდგომარეობა დროის t მომენტში არის

$$B(t) = P(t) + I(t)$$

და გვაქვს

$$B(t) = \mathrm{FV}_t(\mathrm{CF}\,|_t) = \sum_{k:\, t_k \le t} C_k\big(1 + i(t - t_k)\big),$$

სადაც $\mathrm{CF}\,|_t$ აღნიშნავს t მომენტამდე (t-ს ჩათვლით) დამატებით შენატანებს.

აღვნიშნოთ t მომენტისათვის, $t \ge t_1, \dots, t_n$, CF ნაკადის მომავალი მნიშვნელობა კომერციული წესის დროს შემდეგნაირად

$$\mathrm{FV}_t^{\mathrm{com}}(\mathrm{CF}) = B(t, \mathrm{CF}).$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ CF ნაკადისთვის მომავალი მნიშვნელობები, გამოთვლილი კომერციული და სტანდარტული ოპერაციებით, ერთმანეთს ემთხვევა

$$\mathrm{FV}_t^{\mathrm{com}}(\mathrm{CF}) = B(\mathrm{CF}).$$

5. განვიხილოთ აქტუარული წესის დროს დაგროვილი თანხის დინამიკის საკითხები. ამ შემთხვევაში კრიტიკულ შუალედებში (თანხის შეტანის ან გატანის მომენტებს შორის შუალედებში) დაგროვილი თანხის ანგარიში ჩვეულებრივი წესით ხდება. ასე მაგალითად, თუ P_k და I_k არის t_k მომენტის ბოლო კრიტიკული მდგომარეობები და (t_k, t) შუალედში თანხის შეტანა ან გატანა არ მოხდა, მაშინ

$$P_t = P_k, \quad J_k = P_k \cdot i(t - t_k), \quad I_t = I_k + J_t,$$

სადაც

$$\begin{aligned} J_k &= I\big([t_{k-1}, t_k]\big) = iP_{k-1} \cdot T_k, \\ T_k &= t_k - t_{k-1}. \end{aligned} \tag{6.17}$$

ასეთ შემთხვევაში გვაქვს

$$B(t) = P_k\big(1 + i(t - t_k)\big) + \sum_{m=1}^{k} J_m, \tag{6.18}$$

$$\mathrm{FV}_t(\mathrm{CF}\,|_t) = \Big(\sum_{j=0}^{k} C_j\Big)\big(1 + i(t - t_k)\big) + \sum_{j=0}^{k} iC_j(t_k - t_j). \tag{6.19}$$

ფორმალურად აქტუარული წესი მოკლედ შეიძლება შემდეგნაირად აღვწეროთ: $t_0 = 0$ მომენტისთვის გვაქვს

$$P_0 = B_0 = C_0, \quad T_0 = J_0 = 0.$$

t_{k-1} მომენტიდან t_k მომენზე გადასვლის დროს გვაქვს

$$J_k = P_{k-1} \cdot i \cdot T_k, \quad I'_k = I_{k-1} + J_k, \tag{6.20}$$

სადაც $T_k = t_k - t_{k+1}$.

განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

1) $I'_k \cdot C_k \geq 0$, მაშინ .

$$I_k = I'_k = I_{k-1} + J_k, \quad P_k = P_{k-1} + C_k; \tag{6.21}$$

2) $I'_k \cdot C_k < 0$, $(I'_k + C_k) \cdot I'_k > 0$, მაშინ

$$I_k = I'_k + C_k, \tag{6.22}$$

$$P_k = P_{k-1}; \tag{6.23}$$

3) $I'_k \cdot C_k < 0$, $(I'_k + C_k) \cdot I'_k < 0$, მაშინ

$$P_k = P_{k-1} + I'_k + C_k, \tag{6.24}$$

$$I_k = 0. \tag{6.25}$$

საბოლოოდ გვაქვს

$$B_k = P_k + I_k. \tag{6.26}$$

შევნიშნავთ, რომ ყველა შემთხვევაში გვაქვს

$$B_k = B_{k-1} + J_k + C_k = B_{k-1}(1 + i \cdot T_k) + C_k.$$

(6.20)–(6.26) ტოლობები იძლევა დაგროვილი თანხის მნიშვნელობებს კრიტიკულ მომენტებში. თუ t არის არაკრიტიკული მომენტი, $t_k < t < t_{k+1}$, მაშინ $t > t_n$ მომენტისათვის $t_{k+1} = \infty$ და გვაქვს

$$\begin{gathered} P(t) = P(t_k) = P_k, \\ I(t) = I_k + I(t_k, t) = I_k + iP_k(t - t_k), \\ B(t) = P(t) + I(t). \end{gathered} \tag{6.27}$$

აღვნიშნოთ, t მომენტისთვის, $t > t_1, \ldots, t_n$, CF ნაკადის მომავალი მნიშვნელობა აქტუარული წესის დროს შემდეგნაირად

$$\begin{gathered} \mathrm{FV}_t^{\mathrm{act}}(\mathrm{CF}) = B(t, \mathrm{CF}), \\ B(t) = \mathrm{FV}_t^{\mathrm{act}}(\mathrm{CF}\,|_t). \end{gathered}$$

შევნიშნოთ, რომ კომერციული წესისგან განსხვავებით, აქტუარული წესის დროს

$$\mathrm{FV}_t^{\mathrm{act}}(\mathrm{CF}) \neq \mathrm{FV}_t(\mathrm{CF}).$$

განვიხილოთ ბოლოს კომერციული და აქტუარული წესების საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითი.

მაგალითი 6.4. ვთქვათ, დროის $t_0 = 0$ მომენტში $B_0 = 1000$ და საპროცენტო განაკვეთია 20%. ამასთან, დასაშვებია ანგარიშის უარყოფითი სალდო. ინვესტირების პერიოდია 5 წელი და წლის სკალაში მეანაბრის ფინანსური ოპერაციები მოიცემა ფინანსური ნაკადით

$$\mathrm{CF} = \Big\{(1, 200), (2, -1500), (3, 900), (4, -200), (5, 100)\Big\}.$$

იპოვეთ კომერციული და აქტუარული წესების გამოყენებით ანგარიშის მდგომარეობები ყოველი წლის ბოლოს.

ამოხსნა. განვიხილოთ ჯერ კომერციული წესი. გვაქვს

$$P_k = \sum_{j=0}^{k} C_j = P_{k-1} + C_k, \quad k = 1, \ldots, 5.$$

ამრიგად, გვაქვს

$$\begin{aligned} P_1 &= 1000 + 200 = 1200, \\ P_2 &= 1200 - 1500 = -300, \\ P_3 &= -300 + 900 = 600, \\ P_4 &= 600 - 200 = 400, \\ P_5 &= 400 + 100 = 500. \end{aligned}$$

ყოველი k-ური წლის ბოლოსთვის –

$$I_k = \sum_{m=1}^{k} J_m = I_{k-1} + J_k, \quad k = 1, \ldots, 5,$$

სადაც $I_0 = 0$, J_k არის k-ური წლის დაგროვილი პროცენტი

$$J_k = i \cdot P_{k-1} \cdot 1 = i \cdot P_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, 5,$$

ამრიგად, გვაქვს

$$\begin{aligned} I_k &= I_{k-1} + i \cdot P_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, 5, \\ I_1 &= 0,2 \cdot 1000 = 200, \\ I_2 &= 200 + 0,2 \cdot 1200 = 440, \\ I_3 &= 440 - 0,2 \cdot 300 = 380, \\ I_4 &= 380 + 0,2 \cdot 600 = 500, \\ I_5 &= 500 + 0,2 \cdot 400 = 580. \end{aligned}$$

ყოველი k-ური წლის ბოლოსთვის დაგროვილი თანხაა

$$B_k = P_k + I_k, \quad k = 1, \ldots, 5.$$

გვექნება

$$B_1 = 1200 + 200 = 1400,$$
$$B_2 = -300 + 440 = 140,$$
$$B_3 = 600 + 380 = 980,$$
$$B_4 = 400 + 500 = 900,$$
$$B_5 = 500 + 580 = 1080.$$

ახლა გამოვთვალოთ 5 წლის ბოლოს დაგროვილი თანხა აქტუარული წესის გამოყენებით. ამ შემთხვევაში პროცესტი გამოითვლება ტოლობით

$$J_k = i \cdot P_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, 5,$$

ხოლო P_k და I_k, $k = 1, \ldots, 5$, სიდიდეები გამოითვლება (6.20)–(6.26) ტოლობების გამოყენებით, იმის გათვალისწინებით C_k თანხა შეტანილია თუ გამოტანილი. გვაქვს k წლების, $k = 1, \ldots, 5$, ბოლოების მიხედვით

I. $P_1 = P_0 + C_1 = 1000 + 200 = 1200,$
$I_1 = I_1' = J_1 = 0,2 \cdot 1000 = 200,$
$B_1 = 1200 + 200 = 1400,$

II. $P_2 = P_1 + (I_1 + J_2 + C_2) = 1200 + (200 + 0,2 \cdot 1200 - 1500) =$
$= 1200 - 1060 = 140,$
$I_2 = 0,$
$B_2 = 140,$

III. $P_3 = 140 + 900 = 1040,$
$I_3 = J_3 = 0,2 \cdot 140 = 28,$
$B_3 = 1040 + 28 = 1068,$

IV. $J_4 = 0,2 \cdot 1040 = 208,$
$I_4' + C_4 = I_3 + J_4 + C_4 = 28 + 208 - 200 = 36 > 0,$
$P_4 = 1040, \quad I_4 = 36,$
$B_4 = 1040 + 36 = 1076,$

V. $P_5 = 1040 + 100 = 1140,$
$I_5 = I_5' = 36 + 0,2 \cdot 1040 = 36 + 208 = 244,$
$B_5 = 1140 + 244 = 1384.$

ამრიგად, როგორც ვხედავთ, აქტუარული წესით 5 წლის ბოლოს გამოთვლილი თანხის რაოდენობა 304-ით აღემატება იმავე პერიოდის ბოლოს კომერციული წესით გამოთვლილი თანხის რაოდენობას.

ლექცია 7. რთული პროცენტი

1. რთული პროცენტით საკრედიტო გარიგება წარმოადგენს მარტივი პროცენტით საკრედიტო გარიგებების მიმდევრობას რეინვესტირებით, რომლისაც ყოველი მომდევნო გარიგების საწყისი თანხა ემთხვევა წინა გარიგებებით დაგროვებულ თანხას. თუ ყოველ ნაბიჯზე პროცენტი ერთი და იგივეა, მაშინ n ნაბიჯის შემდეგ აღნიშნული წესით დაგროვებული თანხა $t_0 = 0$ და B_0 საწყისი პარამეტრებით დაითვლება ტოლობით

$$B_n = B_0(1+i)^n, \quad n = 0, 1, \dots , \tag{7.1}$$

სადაც i საპროცენტო განაკვეთია. (7.1) ტოლობა არის ე. წ. რთული საპროცენტო განაკვეთით დათვლილი თანხის უმარტივესი შემთხვევა. ამასთან, იგულისხმება შემდეგი:

1) $t_0 = 0$ მომენტში საწყისი თანხაა B_0;

2) i საპროცენტო განაკვეთით დარიცხვა ხდება ყოველ n ნაბიჯზე (ყოველ პერიოდზე) n მომენტამდე დაგროვებულ თანხაზე, ანუ დარიცხული პროცენტები რეინვესტირდება.

ასეთი წესით ცხადია მივიღეთ დაგროვებული თანხის გამოთვლის იგივე (7.1) ფორმულას

$$B_n = B_0(1+i)^n, \tag{7.2}$$

სადაც n მთელი რიცხვია (წლების რაოდენობაა). მაგალითად, თუ $B_0 = 500$, წლიური საპროცენტო განაკვეთია – $i = 8\%$, მაშინ გვექნება

$$B_1 = 500(1 + 0,08) = 500 + 40 = 540,$$
$$B_2 = 540(1 + 0,08) = 540 + 43,2 = 583,2.$$

ცხადია, იგივე შედეგს მოგვცემს (7.2) ფორმულა. მართლაც, გვაქვს

$$B_2 = 500(1 + 0,08)^2 = 500 \cdot 1,1654 = 583,2.$$

ამრიგად, დარიცხული პროცენტია

$$J_n = B_{n-1} \cdot i \tag{7.3}$$

და გვექნება

$$B_n = B_{n-1} + J_n = B_{n-1}(1+i). \tag{7.4}$$

(7.4) ტოლობიდან ადვილად მიიღება (7.2) ფორმულა. მართლაც, გვაქვს

$$B_n = B_{n-1}(1+i) = B_{n-2}(1+i)^2 = \cdot = B_0(1+i)^n.$$

შევნიშნავთ, რომ

$$a = 1 + i$$

თანამამრავლს წელიწადში ზრდის კოეფიციენტი ეწოდება, ხოლო a^n-ს კი – n რაოდენობის წელიწადში ზრდის კოეფიციენტი. ამრიგად, ტოლობათა წყვილი

$$\begin{aligned} J_n &= B_{n-1} \cdot i, \\ B_n &= B_{n-1} + J_n \end{aligned} \tag{7.5}$$

წარმოადგენს რთული პროცენტის სქემაში დაგროვებული თანხის დინამიკის განტოლებებს.

საჭიროა ერთმანეთისგან განვასხვავოთ n წლის ბოლოსთვის J_n და $I[0,n]$ დარიცხული პროცენტები. გვაქვს

$$I_n = I([0,n]) = B_n - B_0 = B_0\big[(1+i)^n - 1\big], \tag{7.6}$$

ანუ ზოგადად $[k,n]$ პერიოდისთვის გვექნება

$$I([k,n]) = B_n - B_k = B_0\big[(1+i)^n - (1+i)^k\big]. \tag{7.7}$$

ამრიგად, I_n არის ნაზრდი ინვესტირების მთელ $[0,n]$ პერიოდში, ხოლო $I([k,n])$ – ნაზრდი $[k,n]$ შუალედში.

მაგალითი 7.1. ვთქვათ, $B_0 = 300$, წელიწადში $i = 5\%$. იპოვეთ

ა) დაგროვებული თანხა და პროცენტები 3 წლის ბოლოს;

ბ) მესამე წლის პროცენტები;

გ) 6 წლის ბოლოს დაგროვილი თანხა;

დ) ბოლო სამი წლის პროცენტები.

ამოხსნა.

ა) $B_3 = 300(1+0,00)^2 = 347,29,$

$I_3 = B_3 - B_0 = 347,29 - 300 = 47,29;$

ბ) $J_3 = B_3 - B_2 = 300\big[(1,05)^3 - (1,05)^3\big] = 16,54;$

გ) $B_6 = 300(1+0,05)^6 = 402,03;$

დ) $I([3,6]) = B_6 - B_3 = 402,03 - 347,29 = 54,74.$

აქამდე იგულისხმებოდა, რომ დარიცხვა ხდებოდა საწყისი (საბაზისო) მომენტიდან დაწყებული ყოველი გასული წლის ბოლოს. მაგრამ, დარიცხვის პერიოდი შეიძლება იყოს არა წელიწადი, არამედ რაიმე h რიცხვი, ხოლო დარიცხვის მომენტები კი – $t_n = t_0 + nh$ დროითი მომენტები. აღვნიშნოთ i_n-ით i_n პერიოდის საპროცენტო განაკვეთი. მაშინ თანხის მდგომარეობა t_n მომენტში დაითვლება ტოლობით

$$B_{t_n} = B_{t_0}(1+i_h)^n, \tag{7.8}$$

ხოლო, რადგანაც $n = (t_n - t_0)/h$, ამიტომ გვექნება

$$B_{t_n} = B_{t_0}(1 + i_h)^{\frac{t_n - t_0}{h}}. \tag{7.9}$$

ადვილი მისახვედრია, რომ $t_n = t_0 + ng$ წარმოადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას. როცა $h = 1$ საპროცენტო განაკვეთს ნორმირებული განაკვეთი ეწოდება. ამრიგად, გვაქვს პერიოდები

$$T_n = t_n - t_0 = nh,$$
$$T_{n-k} = t_n - t_k = (n-k)h,$$

ხოლო შესაბამისი თანხაა ·

$$B_{t_n} = B_{t_0+T_n} = B_{t_0}(1 + i_h)^{\frac{T_n}{h}}. \tag{7.10}$$

როდესაც $t_0 = 0$ და $T_n = t_n$, მაშინ გვექნება

$$B_{t_n} = B_0(1 + i_h)^n, \tag{7.8'}$$

$$B_{t_n} = B_0(1 + i_h)^{\frac{t_n}{h}}. \tag{7.9'}$$

დარიცხვის h პერიოდის შემთხვევაში ზრდის კოეფიციენტია

$$a_h = 1 + i_h \tag{7.11}$$

და გვექნება

$$B_{t_n} = B_{t_0} \cdot a_h^n, \tag{7.12}$$

$$B_{t_n} = B_{t_0} \cdot a_h^{\frac{t_n - t_0}{h}}. \tag{7.13}$$

დარიცხვის k-ური პერიოდისათვის, $k < n$, გვექნება

$$J_k = B_{t_k} - B_{t_{k-1}}, \tag{7.14}$$

$$J_k = B_{t_{k-1}} \cdot i_h, \tag{7.15}$$

$$I\big([t_k, t_n]\big) = B_{t_n} - B_{t_k}, \tag{7.16}$$

$$I\big([t_k, t_n]\big) = B_{t_k}\big[(1 + i_h)^{n-k} - 1\big] = B_{t_k}(a^{n-k} - 1), \tag{7.17}$$

$$I\big([t_k, t_n]\big) = \sum_{m=k+1}^{n} J_m. \tag{7.18}$$

მაგალითი 7.2. ვთქვათ, $B_0 = 200$ პროცენტის დარიცხვის პერიოდია ერთი თვე, თვეში საპროცენტო განაკვეთია – 3%. იპოვეთ 5 წლისა და 3 თვის ბოლოს დაგროვებული თანხა და პროცენტი.

ამოხსნა. გვაქვს

$$B_{63} = 200(1 + 0,03)^{63} = 1287,58,$$
$$I([0, 63]) = B_{63} - B_0 = 1287,58 - 200 = 1087,58.$$

2. ვიგულისხმოთ, რომ $t_0 = 0$ და $t = nh$. მაშინ გვექნება

$$B_t = B_0(1 + i_h)^{\frac{t}{h}}, \quad t = nh, \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{7.19}$$

განვიხილოთ შემდეგი სამი შემთხვევა

I. დაგროვების დისკრეტული მოდელი. თანხის მდგომარეობა იცვლება მხოლოდ დარიცხვის მომენტებში ანუ დარიცხვის მომენტებს შორის დაგროვება არ ხდება, რაც შეიძლება შემდეგნაირად ჩავწეროთ

$$B_t = B_{kh}, \quad kh \le t < (k+1)h.$$

ამრიგად, განხილულ შემთხვევაში დაგროვება ხდება დისკრეტულად (დაგროვების მოდელი დისკრეტულია). თუ გამოვიყენებთ რიცხვის მთელი ნაწილის განმარტებას (ნებისმიერი ნამდვილი x რიცხვი უდრის მისი მთელი ნაწილისა $[x]$ და წილადი ნაწილის $\{x\}$ ჯამს: $x = [x] + \{x\}$), მაშინ გვექნება

$$B_t = B_0(1 + i_h)^{\left[\frac{t}{h}\right]}, \quad t \ge 0. \tag{7.20}$$

II. დაგროვების უწყვეტი მოდელი ჩაიწერება ფორმულით

$$B_t = B_0(1 + i_h)^{\frac{t}{h}}, \quad t \ge 0. \tag{7.21}$$

III. დაგროვების შერეული მოდელი ჩაიწერება დისკრეტული და უწყვეტი მოდელების კომბინაციით შემდეგი ფორმულით

$$B_t = B_0(1 + i_h)^{\left[\frac{t}{h}\right]} \cdot \left(1 + i_h\left\{\frac{t}{h}\right\}\right), \quad t \ge 0. \tag{7.22}$$

აღვნიშნოთ I, II და III შემთხვევებში დაგროვებული თანხების მნიშვნელობები, შესაბამისად, B_t^{I}, B_t^{II} და B_t^{III} სიმბოლოებით. მაშინ ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$B_t^{\mathrm{I}} \le B_t^{\mathrm{II}} \le B_t^{\mathrm{III}}.$$

მაგალითი 7.3. ვთქვათ, $B_0 = 1000$ და წელიწადში საპროცენტო განაკვეთია – 8%. იპოვეთ დაგროვილი თანხა 2 წლისა და 3 თვის ბოლოს ა) დისკრეტული; ბ) უწყვეტი; გ) შერეული მოდელების შემთხვევაში.

ამოხსნა. ავირჩიოთ საბაზისო შუალედად წელიწადი. გვექნება

$$t = 2\frac{1}{4} = 2,25, \quad n = [t] = 2, \quad \{t\} = 0,25.$$

ა) $B_{2,25}^{\mathrm{I}} = 1000(1 + 0,08)^2 = 1166,4;$

ბ) $B_{2,25}^{\mathrm{II}} = 1000(1 + 0,08)^{2,25} = 1189,06;$

გ) $B_{2,25}^{\mathrm{III}} = 1000(1+0,08)^2(1+0,08\cdot 0,25) = 1166,4 \cdot 1,02 = 1189,73.$

3. ხშირად პროცენტის დარიცხვა ხდება არა მხოლოდ საბაზისო პერიოდის ბოლოს, არამედ პერიოდის განმავლობაში სხვადასხვა სიხშირით. მაგალითად, წელიწადში ორჯერ, ანუ ყოველი ნახევარი წლის ბოლოს. ასეთ შემთხვევაში მოცემული h პერიოდი იყოფა m ტოლ ქვეპერიოდად და h პერიოდში დასარიცხი თანხა ქვეპერიოდების მიხედვით შედგება შემდეგი სიდიდეების დარიცხვებისგან

$$J_{\frac{h}{m}} = \frac{J_h}{m}, \tag{7.23}$$

სადაც H_j არის h პერიოდში დასარიცხი თანხა. ასეთ შემთხვევაში h-ს ეწოდება ნომინალური პერიოდი, ხოლო ქვეპერიოდებში დარიცხვას – ნომინალური დარიცხვა (საპროცენტო განაკვეთი). ნომინალური პერიოდი აღინიშნება b სიმბოლოთი, ხოლო ფაქტობრივი პერიოდია – h. ამგვარად, გვაქვს

$$h = \frac{b}{m}, \tag{7.24}$$

სადაც m არის დარიცხვების სიხშირე. ამასთან, b პერიოდში განაკვეთია i_b, მაშინ

$$i_n = \frac{i_b}{m} = i_{\frac{b}{m}}. \tag{7.25}$$

ამრიგად, ნომინალური განაკვეთი წარმოადგენს სამეულს (b, h, j), სადაც b ნომინალური პერიოდია, h ნომინალური პერიოდების ქვეპერიოდების სიგრძეა, j ნომინალური განაკვეთია. შეიძლება, აგრეთვე, ნომინალური განაკვეთის შემდეგი სამეულით განსაზღვრა: (b, m, j), სადაც m დარიცხვის სიხშირეა, ანუ

$$m = \frac{b}{h}. \tag{7.26}$$

სამართლიანია, აგრეთვე, შემდეგი ტოლობები

$$i_n = \frac{h}{b} \cdot j = \frac{j}{m}.$$

მაგალითი 7.4. ვთქვათ, საბაზისო პერიოდია (დროითი სკალა) წელიწადი, ხოლო ნომინალური განაკვეთია

$$(b, h, j) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{12}, 12\%\right).$$

იპოვეთ ნომინალური დარიცხვის სიხშირე m და განაკვეთი.

ამოხსნა. გვაქვს

$$m = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{12}} = 6,$$

$$i_{\frac{1}{12}} = \frac{12}{6} = 2, \quad \text{ანუ } 2\% \text{ თვეში.}$$

შეიძლება განვსაზღვროთ ნორმირებული ნომინალური განაკვეთები $(1,h,j)$ და $(1,m,j)$:

$$h=\frac{12}{m},\quad m=\frac{1}{h}.$$

გვაქვს, აგრეთვე,

$$i_h=i_{(h)}\cdot h, \tag{7.27}$$

$$h=\frac{1}{m}, \tag{7.28}$$

$$i_h=\frac{i^{(m)}}{m}=h\cdot j=\frac{j}{m}. \tag{7.29}$$

ამასთან, თუ დარიცხვები ხდება დროის $t_n=t_0+nh$ მომენტებში, მაშინ (7.8) და (7.9) განტოლებებისთვის გვექნება

$$B_{t_n}=B_{t_0}(1+i_h)^n=B_{t_0}(1+h\cdot j)^n=B_{t_0}\Big(1+\frac{j}{m}\Big)^n. \tag{7.30}$$

რადგანაც

$$n=\frac{t_n-t_0}{h}=m(t_n-t_0), \tag{7.31}$$

ამიტომ გვექნება

$$B_{t_n}=B_{t_0}(1+h\cdot j)^{\frac{t_n-t_0}{h}}=B_{t_0}\Big(1+\frac{j}{m}\Big)^{m(t_n-t_0)}. \tag{7.32}$$

ადვილი მისახვედრია, რომ გამოსახულება

$$a_{(h)}=(1+h\cdot j)^{\frac{1}{h}}=a^{(m)}=\Big(1+\frac{j}{m}\Big)^m$$

არის ერთეულოვანი პერიოდისთვის m-ჯერადი დარიცხვის დროს ზრდის კოეფიციენტი, რომელსაც ნომინალური განაკვეთია j, რომელიც შეესაბამება i_h განაკვეთს. ამრიგად, გვექნება

$$B_{t_n}=B_{t_0}a_{(h)}^{t_n-t_0}=B_{t_0}(a^{(m)})^{t_n-t_0}. \tag{7.33}$$

(7.31) ტოლობაში ხშირად n სიმბოლოს არ წერენ

$$n=\frac{t-t_0}{h}=m(t-t_0),\quad t=t_0+nh,$$

და, მაგალითად, გვაქვს

$$B_t=B_{t_0}(a_{(h)})^{t-t_0}=B_{t_0}\Big(1+\frac{j}{m}\Big)^{m(t-t_0)}. \tag{7.34}$$

მაგალითი 7.5. ვთქვათ, ინვესტირების პერიოდია 4 წელი, $B_0=300$. იპოვეთ დაგროვებული თანხის მნიშვნელობა, თუ წელიწადში ნომინალური განაკვეთია:

ა) 10%, ხოლო დარიცხვის პერიოდია 6 თვე;

ბ) 8%, ხოლო დარიცხვის პერიოდია 2 წელი.

ამოხსნა. ა) გვაქვს $t_0 = 0$, $t = 4$, $h = 1/2$, $m = 2$, $i_{(\frac{1}{2})} = i^{(2)} = 10\%$ და 6 თვეში დარიცხვის განაკვეთია

$$i_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 10\% = 5\%.$$

რადგან 4 წლიწადში ნახევარწლების რაოდენობაა

$$n = tm = 4 \cdot 2 = 8,$$

ამიტომ გვექნება

$$B_4 = 300(1 + 0,05)^8 = 443,24.$$

ბ) გვაქვს $h = 2$, $m = 1/2$, $n = t/h = 4/2 = 2$,

$$i_2 = h \cdot i_{(2)} = 2 \cdot 8\% = 16\%$$

და გვექნება

$$B_4 = 300(1 + 0,16)^2 = 403,68.$$

ნომინალური განაკვეთების ტერმინებში ზემოთ განხილული დაგროვების დინამიკის სამი შემთხვევისთვის გვექნება

I. დისკრეტული მოდელი

$$B_t = B_0(1 + h \cdot i_{(h)})^{\left[\frac{t}{h}\right]} = B_0\Big(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\Big)^{[mt]}, \quad t \geq 0. \tag{7.35}$$

II. უწყვეტი მოდელი

$$B_t = B_0(1 + h \cdot i_{(h)})^{\frac{t}{h}} = B_0\Big(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\Big)^{mt}, \quad t \geq 0. \tag{7.36}$$

III. შერეული მოდელი

$$B_t = B_0(1 + h \cdot i_{(h)})^{\left[\frac{t}{h}\right]} \cdot \Big(1 + \frac{t}{h} \cdot h \cdot i_{(h)}\Big) =$$

$$= B_0\Big(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\Big)^{[mt]} \cdot \Big(1 + \{mt\} \cdot \frac{i^{(m)}}{m}\Big), \quad t \geq 0, \tag{7.37}$$

დავუშვათ ახლა, რომ გვაქვს n საბაზისო შუალედი, $t_0 = 0$, $t = n$ და $i^{(m)} = j$. მაშინ (7.34) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$B_n = B_0\Big(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\Big)^{mn} = B_0\Big[\Big(1 + \frac{j}{m}\Big)^m\Big]^n.$$

როდესაც ნომინალურ დარიცხვათა სიხშირე m უსასრულოდ იზრდება, გვაქვს ე. წ. უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევა, რომლის დროსაც ზრდის კოეფიციენტია

$$a^{(\infty)} = \lim_{m\to\infty} a^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m = e^j. \tag{7.38}$$

ამრიგად, უწყვეტად დარიცხული ნომინალური j განაკვეთის დროს n პერიოდში დაგროვებული თანხა გამოითვლება ფორმულით

$$B_n = B_0 e^{jn}, \tag{7.39}$$

ხოლო თუ გვაქვს T პერიოდი, მაშინ

$$B_T = B_0 \cdot e^{j\cdot T}, \tag{7.40}$$

$$a_T^{(\infty)} = e^{j\cdot T}. \tag{7.41}$$

(7.40) ფორმულის თანახმად გვაქვს შემდეგი: თუ ინვესტორის საწყისი თანხა $t_0 = 0$ მომენტში არის B_0, მაშინ მომავალში დროის ნებისმიერ $t > 0$ მომენტში მისი თანხაა

$$B_t = B_0 \cdot e^{jt}, \tag{7.42}$$

ამასთან ერთად, $[0, t]$ შუალედში დარიცხული პროცენტია

$$I([0,t]) = B_t - B_0 = B_0(e^{jt} - 1).$$

4. დარიცხვის დისკრეტული წესის დროს გვაქვს i_h განაკვეთი h პერიოდში ან ნორმირებული (ნომინალური) განაკვეთი $i^{(m)}$, სადაც $m = 1/h$ არის დარიცხვის სიხშირე. ამასთან,

$$i_h = \frac{i^{(m)}}{m}$$

და დაგროვებული თანხის დინამიკა $t_0 = 0$ შემთხვევაში უწყვეტი მოდელისთვის მოიცემა ტოლობით

$$B_t = B_0(1 + i_h)^{\frac{t}{h}} = B_0\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt}.$$

აქედან ერთეულოვანი პერიოდისთვის დაგროვების კოეფიციენტი გამოითვლება ფორმულით

$$a^{(m)} = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = (1 + i_h)^{\frac{1}{h}},$$

$$a^{(m)} = \frac{B_1}{B_0},$$

$$a^{(m)} - 1 = \frac{B_1 - B_0}{B_0}.$$

გამოსახულებას $a^{(m)} - 1$ ეწოდება ერთეულოვანი პერიოდის ნორმირებული ეფექტური განაკვეთი, რომელიც შეესაბამება დარიცხვას i_h და ნომინალურ $i^{(m)}$ განაკვეთებს. ამ განაკვეთების შესაბამისი ეფექტური განაკვეთები აღვნიშნოთ, შესაბამისად, $i_h^{(ეფ)}$ და $i_{(ეფ)}^{(m)}$ სიმბოლოებით. აღვნიშნოთ, აგრეთვე,

$$
\begin{gathered}
i_{(h)}^{(ეფ)} = (1 + i_h)^{\frac{1}{h}} - 1, \\
i_{(ეფ)}^{(m)} = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1, \\
i_1 = i^{(1)} = i_{ეფ} = i.
\end{gathered}
\tag{7.43}
$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7.6. წელიწადში ნომინალური განაკვეთია – 10%, ხოლო დრიცხვა ხდება ორჯერ. იპოვეთ წელიწადში შესაბამისი ეფექტური განაკვეთი.

ა მ ო ხ ს ნ ა . გვაქვს $m = 2$, $i^{(2)} = 10\%$. მაშინ

$$
i_{ეფ}^{(2)} = \left(1 + \frac{0,1}{2}\right)^2 - 1 = (1,05)^2 - 1 = 0,1025 \ \ (10,25\%).
$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც გვაქვს $i^{(m)}$ ნომინალური განაკვეთების სიმრავლე სხვადასხვა m-თვის, მაგრამ საერთო j მნიშვნელობით, ე. ი. $i^{(m)} = j$, მაშინ გვექნება

$$
i_{ეფ}^{(m)} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1, \tag{7.44}
$$

$$
\lim_{m \to \infty} i_{ეფ}^{(m)} = i_{ეფ}^{(\infty)} = e^j - 1. \tag{7.45}
$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7.7. ვთქვათ, წელიწადში უწყვეტი ნომინალური დარიცხვის განაკვეთია – 10%. იპოვეთ შესაბამისი ნორმირებული ეფექტური განაკვეთი წელიწადში.

ა მ ო ხ ს ნ ა . გვაქვს

$$
i_{ეფ}^{(\infty)} = e^{0,1} - 1 = 0,1052 \ \ (10,52\%).
$$

ნორმირებული ეფექტური განაკვეთის საშუალებით დაგროვებული თანხის დინამიკა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$
B_n = B_0(1 + i_{ეფ})^n. \tag{7.46}
$$

ნორმირებული ეფექტური განაკვეთის დროს ზრდის კოეფიციენტია

$$
(1 + i_h)^{\frac{1}{h}} = 1 + i_{ეფ}
$$

და უწყვეტი მოდელისათვის დაგროვებული თანხის დინამიკა ჩაიწერება ტოლობით

$$
B_t = B_0(1 + i_{ეფ})^t. \tag{7.47}
$$

ნორმირებული ნომინალური ეფექტური განაკვეთი განიმარტება

$$i_{(h)} = \frac{i_h}{h} \tag{7.48}$$

ტოლობვით, ხოლო ნორმირებული ეფექტური განაკვეთი –

$$i^{\text{ეფ}}_{(h)} = (1 + i_h)^{\frac{1}{h}} - 1 \tag{7.49}$$

ტოლობით.

ამ განაკვეთებს შორის არსებობს შემდეგი კავშირი

$$i^{\text{ეფ}}_{(h)} = (1 + i_{(h)} \cdot h)^{\frac{1}{h}} - 1. \tag{7.50}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7.8. ვთქვათ 2 წელიწადში განაკვეთი $i_2 = 20\%$ და $h = 2$ არის დარიცხვის პერიოდი. იპოვეთ წელიწადში ამ განაკვეთის შესაბამისი ნომინალური და ეფექტური განაკვეთები.

ა მ ო ხ ს ნ ა . გვაქვს $m = 0,5$ და ნომინალური განაკვეთია

$$i^{(0,5)} = i_{(2)} = \frac{i_2}{2} = \frac{20\%}{2} = 10\%,$$

ხოლო ეფექტური განაკვეთია

$$i^{\text{ეფ}}_{(2)} = (1 + i_2)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,0954 \ \ (9,54\%).$$

შევნიშნოთ, რომ h პერიოდში i_h განაკვეთისთვის

$$B_t = B_0(1 + i_h)^{\frac{t-t_0}{h}}, \ \ t \geq t_0, \tag{7.51}$$

დარიცხვის m სიხშირით $i^{(m)}$ ნორმირებული ნომინალური განაკვეთისთვის

$$B_t = B_{t_0}\Big(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\Big)^{m(t-t_0)}, \ \ t \geq t_0, \tag{7.52}$$

უწყვეტი $j = i^{(\infty)}$ ნომინალური განაკვეთისთვის

$$B_t = B_{t_0} \cdot e^{j(t-t_0)}, \tag{7.53}$$

ხოლო ნორმირებული ეფექტური i განაკვეთისთვის

$$B_t = B_{t_0}(1 + i)^{t-t_0}, \ \ t \geq t_0. \tag{7.54}$$

თუ a არის ზრდის ნორმირებული კოეფიციენტი, მაშინ (7.51)–(7.54) ტოლობები შეიძლება საერთო სახით ჩავწეროთ

$$B_t = B_{t_0} \cdot a^{t-t_0}, \ \ t \geq t_0, \tag{7.55}$$

სადაც

$$a = 1 + i_{\text{ეფ}}. \tag{7.56}$$

მაგალითი 7.9. ვთქვათ, $i_3 = 72,8\%$, $i^{(4)} = 40\%$ და $j = i^{(\infty)} = 20\%$. იპოვეთ ამ განაკვეთების შესაბამისი ზრდის ნორმირებული კოეფიციენტი დარიცხვის უწყვეტ მოდელში და B_t-ს დინამიკა $B_0 = 1$ საწყისი თანხის შემთხვევაში.

ამოხსნა. ა) გვაქვს $i_3 = 72,8\%$, $h = 3$ და

$$a = (1 + i_3)^{\frac{1}{3}} = (1 + 0,728)^{\frac{1}{3}} = (1,728)^{\frac{1}{3}} = 1,2;$$
$$B_t = a^t = (1,2)^t;$$

ბ) გვაქვს $i^{(4)} = 40\%$, $h = 1/4$, $m = 4$ და

$$a = \left(1 + \frac{i^{(4)}}{4}\right)^4 = \left(1 + \frac{0,4}{4}\right)^4 = 1,4641;$$
$$B_t = a^t = (1,4641)^t;$$

გ) გვაქვს $j = i^{(\infty)} = 20\%$ და

$$a = e^j = e^{0,2},$$
$$B_t = a^t = a^{0,2t}.$$

ლექცია 8. ფინანსური ოპერაციები რთული პროცენტის სქემაში

1. მარტივი პროცენტის შემთხვევაში დაგროვების მოდელები ჩვენ ჩავწერეთ საპროცენტო და საალრიცხვო განაკვეთების გამოყენებით. ანალოგიურად, რთული პროცენტის შემთხვევაში შეიძლება დაგროვების მოდელები საპროცენტო განაკვეთთან ერთად ჩავწეროთ საალრიცხვო განაკვეთების გამოყენებით.

განვიხილოთ $t_n = t_0 + nh$ დროის მომენტები, სადაც h რაიმე დროითი ინტერვალია, $n = 0, 1, 2, \ldots$; აღვნიშნოთ h პერიოდის შესაბამისი საალრიცხვო განაკვეთი d_h სიმბოლოთი. მაშინ ანგარიშის მდგომარეობა ყოველი k-ური საალრიცხვო პერიოდის ბოლოსთვის მოიცემა ტოლობით

$$B_{k-1} = B_k(1 - d_h), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{8.1}$$

საიდანაც გვექნება

$$B_k = B_n(1 - d_h)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{8.2}$$

სიდიდეს

$$\nu_n = d - d_n$$

ეწოდება დისკონტირების საალრიცხვო კოეფიციენტი, რომელიც შეესაბამება საალრიცხვო პერიოდებს. (8.1) და (8.2) ფორმულები შეიძლება შემდეგი

სახით ჩავწეროთ

$$B_{t_{k-1}} = B_{t_k} \cdot \nu_h = B_{t_k}(1 - d_h), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{8.3}$$

$$B_{t_k} = B_{t_n} \cdot (\nu_h)^{\frac{t_n - t_k}{h}} = B_{t_n}(1 - d_h)^{\frac{t_n - t_k}{h}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{8.4}$$

შევნიშნოთ ახლა, რომ ისე როგორც საპროცენტო მოდელის შემთხვევაში, სააღრიცხვო მოდელის შემთხვევაშიც შეიძლება განვიხილოთ შემდეგი სამი მოდელი:

I. დისკონტირების დისკრეტული მოდელი

$$B_\tau \doteq B_t(1 - d_h)^{\left[\frac{t-\tau}{h}\right]}, \quad t \geq \tau, \tag{8.5}$$

II. დისკონტირების უწყვეტი მოდელი

$$B_\tau = B_t(1 - d_h)^{\frac{t-\tau}{h}}, \quad t \geq \tau, \tag{8.6}$$

III. დისკონტირების შერეული მოდელი

$$B_\tau = B_t(1 - d_h)^{\left[\frac{t-\tau}{h}\right]} \cdot \left(1 - \left\{\frac{t-\tau}{h}\right\} d_h\right), \quad t \geq \tau. \tag{8.7}$$

მაგალითი 8.1. ვთქვათ, სააღრიცხვო პერიოდია $h = 1$ წელიწადი, წელიწადში სააღრიცხვო განაკვეთია $d_h = 20\%$ და $B_{10} = 5000$. იპოვეთ B_5, B_3 და B_{15} სიდიდეები.

ამოხსნა.

$$B_5 = 5000(1 - 0,2)^5 = 1638,4,$$

$$B_3 = 5000(1 - 0,2)^7 = 1048,57,$$

$$B_{10} = B_{15}(1 - d_h)^5,$$

საიდანაც გვაქვს

$$B_{15} = \frac{5000}{(0,8)^5} = 15258,79.$$

ზოგად შემთხვევაში, როდესაც $n \geq k$ გვექნება

$$B_n = \frac{B_k}{(1 - d_h)^{n-k}} = B_k \cdot (\nu_k)^{k-n}. \tag{8.8}$$

h პერიოდში ზრდის სააღრიცხვო კოეფიციენტია

$$\alpha)n = \frac{1}{\nu_n}, \tag{8.9}$$

და გვექნება

$$B_n = B_k \cdot (\alpha_n)^{n-k}, \tag{8.10}$$

$$B_n = B_0 \cdot (\alpha_n)^n. \tag{8.11}$$

ნორმირებული სომინალური საალრიცხვო განაკვეთია – $d = d_h/h$, ხოლო დარიცხვის სიხშირეა – $m = 1/h$. h პერიოდისა და m სიხშირის გათვალისწინებით შესაბამისი საალრიცხვო განაკვეთები აღინიშნება $d_{(h)}$ და $d^{(m)}$ სიმბოლოებით. მაგალითად, ზემოთ განხილული (8.6) უწყვეტი მოდელის შემთხვევაში გვექნება

$$B_\tau = B_t(1-d_h)^{\frac{t-\tau}{h}} = B_t\Big(1-\frac{d^{(m)}}{m}\Big)^{m(t-\tau)}, \quad t \geq \tau. \tag{8.12}$$

როდესაც $t_0 = 0$, მაშინ გვაქვს

$$B_t = \frac{B_0}{(1-d_h)^{\frac{t}{h}}} = B_0 \cdot (\nu_h)^{-\frac{t}{h}} = B_0 \cdot (\alpha_n)^{\frac{t}{h}}, \tag{8.13}$$

$$B_t = B_0\Big(1-\frac{d^{(m)}}{m}\Big)^{-mt}. \tag{8.14}$$

ცხადია, შეიძლება განვსაზღვროთ ეფექტური საარიცხვო განაკვეთი და, აგრეთვე, დისკონტირებისა და ზრდის ნორმირებული კოეფიციენტები შემდეგნაირად

$$\begin{gathered} 1-d_{\text{ეფ}} = (1-d_h)^{\frac{1}{h}} = \Big(1-\frac{d^{(m)}}{m}\Big)^m, \\ d_{\text{ეფ}} = d_1 = d^{(1)} = d, \quad \text{როცა} \quad h = 1, \end{gathered} \tag{8.15}$$

ხოლო

$$\nu_{\text{ეფ}} = 1 - d_{\text{ეფ}}, \tag{8.16}$$

$$\alpha_{\text{ეფ}} = \frac{1}{\nu_{\text{ეფ}}} = \frac{1}{1-d_{\text{ეფ}}}. \tag{8.17}$$

შევნიშნავთ, რომ ხშირად ინდექსების გარეშე d, ν და α სიმბოლოები გამოიყენება.

მაგალითი 8.2. განვიხილოთ წელიწადის სკალაში საალრიცხვო პერიოდი $h = 1/4$, $m = 4$, $d^{(4)} = 20\%$. ვიპოვოთ ნორმირებული ეფექტური: ა) საალრიცხვო განაკვეთი; ბ) დისკონტირების კოეფიციენტი; გ) ზრდის კოეფიციენტი.

ამოხსნა. ა) გვაქვს

$$d_{\frac{1}{4}} = \frac{d^{(4)}}{4} = \frac{20\%}{4} = 5\%,$$

ბ) $\nu_{\frac{1}{4}} = 1 - 0,05 = 0,95$, $\nu = (0,95)^4 = 0,8145$, $d = 1 - 8145 = 0,1855$;

გ) $\alpha = \dfrac{1}{0,8145} = 1,2277.$

სხვადასხვა m-თვის და ერთი და იგივე d-თვის აღვნიშნოთ $\delta = d^{(m)}$. ასეთ შემთხვევაში

$$\lim_{m\to\infty} \nu_{\text{ეფ}}^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{\delta}{m}\right)^m = e^{-\delta} = \nu_{\text{ეფ}}^{(\infty)} = \nu^{(\infty)}, \tag{8.18}$$

$$d^{(\infty)} = 1 - \nu^{(\infty)} = 1 - e^{-\delta},$$

$$\alpha^{(\infty)} = \frac{1}{\nu^{(\infty)}} = e^{\delta}, \quad B_t = B_0 e^{\delta t}. \tag{8.19}$$

მაგალითი 8.3. ვთქვათ, $\delta = 20\%$. იპოვეთ $B_0 = 500$ საწყისი თანხის მნიშვნელობა 3,5 წლის ბოლოს δ ნომინალური უწყვეტი დარიცხვით.

ამოხსნა. გვაქვს

$$\nu^{(\infty)} = e^{-0,2}, \quad \alpha^{(\infty)} = e^{0,2},$$

$$B_{3,5} = 500 \cdot e^{0,2\cdot 3,5} = 500 \cdot e^{0,7} = 1006,88.$$

ზოგადად, შეიძლება დავწეროთ საალრიცხვო და საპროცენტო სქემებისთვის

$$B_t = B_0 \cdot \nu^{-t} = B_0 \cdot \alpha^t, \quad B_t = B_0 \cdot v^{-t} = B_0 \cdot a^t,$$

$$\nu = 1 - d, \quad \alpha = \nu^{-1} = \frac{1}{1-d}, \tag{8.20}$$

$$a = 1 + i, \quad v = a^{-1} = \frac{1}{1+i}. \tag{8.21}$$

იმ შემთხვევაში, როცა

$$\alpha = a \text{ და } \nu = v, \tag{8.22}$$

მაშინ

$$B_t = B_0\alpha^t = B_0 a^t, \quad B_t = B_0\nu^{-t} = B_0 v^{-t}. \tag{8.23}$$

2. თუ გვაქვს დაგროვების რაიმე საწყისი მდგომარეობა $(t_0, B_{t_0}) = (t_0, B_0)$, მაშინ (საპროცენტო ან საალიცხვო) რაიმე განაკვეთით დაგროვების დინამიკა მოიცემა ტოლობით

$$B_t = B_0 \cdot a^{t-t_0} = B_0 \cdot v^{-(t-t_0)}, \tag{8.24}$$

სადაც a და v, შესაბამისად, ნორმირებული ეფექტური ზრდისა და დისკონტირების კოეფიციენტებია. ამასთან ერთად, ოთხი სახის საპროცენტო განაკვეთის შემთხვევაში გვაქვს ზრდის კოეფიციენტები:

1) თუ ნორმირებული ეფექტური განაკვეთია i, მაშინ

$$a = 1 + i, \tag{8.25}$$

2) თუ h პერიოდში ფაქტობრივი დარიცხვის განაკვეთია i_h, მაშინ

$$a = (1 + i_h)^{\frac{1}{h}}, \tag{8.26}$$

3) თუ ნომინალური ნორმირებული განაკვეთია $i^{(m)} = i_{(h)}$, დარიცხვის პერიოდია $1/h$ და სიხშირეა m, მაშინ

$$a = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m,$$

4) თუ ნომინალური ნორმირებული უწყვეტი დარიცხვის განაკვეთია $j = i^{(\infty)}$, მაშინ

$$a = e^j. \tag{8.27}$$

ოთხი სახის საალრიცხვო განაკვეთის შემთხვევაში გვაქვს შემდეგი დისკონტირების კოეფიციენტები:

1) თუ ნორმირებული ეფექტური საალიცხვო განაკვეთია d, მაშინ

$$v = 1 - d \tag{8.28}$$

2) თუ h პერიოდში საალრიცხვო განაკვეთია d_h, მაშინ

$$v = (1 - d_h)^{\frac{1}{h}}, \tag{8.29}$$

3) თუ ნომინალური ნორმირებული საალრიცხვო განაკვეთია $d^{(m)} = d_{(h)}$, დარიცხვის სიხშირეა m და პერიოდია $h = 1/m$, მაშინ

$$v = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m, \tag{8.30}$$

4) თუ ნომინალური ნორმირებული უწყვეტი დარიცხვის განაკვეთია $\delta = d^{(\infty)}$, მაშინ

$$v = e^{-\delta}. \tag{8.31}$$

ორ განაკვეთს (საპროცენტოს ან საალრიცხვოს) ეწოდება ფართო აზრით ეკვივალენტური, თუ შესაბამისი ზრდის კოეფიციენტები ტოლია და დისკონტირების კოეფიციენტები ტოლია. თუ, უბრალოდ, საპროცენტო განაკვეთები ტოლია და საალრიცხვო განაკვეთები ტოლია, მაშინ ორ განაკვეთს ეწოდება ვიწრო აზრით ეკვივალენტური. აღვნიშნოთ ეკვივალენტობა "$\sim$" სიმბოლოთი.

გვაქვს

$$i = a - 1, \quad d = \frac{a-1}{a}, \tag{8.32}$$

$$a = e^j, \quad a = e^\delta, \tag{8.33}$$

$$j = \ln a, \quad \delta = \ln a. \tag{8.34}$$

ფართო აზრით ეკვივალენტურობა ნიშნავს, რომ

$$1 + i = (1 - d)^{-1} = e^j = e^\delta. \tag{8.35}$$

შეიძლება ჩავწეროთ, აგრეთვე, ეკვივალენტურობები:

$$i_{h_1} \sim i_{h_2} \iff (1+i_{h_1})^{\frac{1}{h_1}} = (1+i_{h_2})^{\frac{1}{h_2}}, \tag{8.36}$$

$$d_{h_1} \sim d_{h_2} \iff (1+d_{h_1})^{\frac{1}{h_1}} = (1+d_{h_2})^{\frac{1}{h_2}}, \tag{8.37}$$

$$i^{(m_1)} \sim i^{(m_2)} \iff \left(1+\frac{i^{(m_1)}}{m_1}\right)^{m_1} = \left(1+\frac{i^{(m_2)}}{m_2}\right)^{m_2}, \tag{8.38}$$

$$d^{(m_1)} \sim d^{(m_2)} \iff \left(1+\frac{d^{(m_1)}}{m_1}\right)^{m_1} = \left(1+\frac{d^{(m_2)}}{m_2}\right)^{m_2}. \tag{8.39}$$

მაგალითად, $i \sim d$ ნიშნავს, რომ ტოლია ეფექტური საპროცენტო და საალიცხვო განაკვეთები

$$1+i = (1-d)^{-1}. \tag{8.40}$$

მაგალითი 8.4. ვთქვათ, თვეში საპროცენტო განაკვეთია $i_{=}10\%$ ($h_1 = 1/12$), ხოლო კვარტალში $i_2 = 33,1\%$ ($h_2 = 1/4$). ა) დაადგინეთ ეკვივალენტურია თუ არა i_1 და i_2 განაკვეთები; ბ) იპოვეთ i_1 და i_2 განაკვეთების შესაბამისი ფართო აზრით ეკვივალენტური საალიცხვო განაკვეთები.

ამოხსნა. ა) (8.37) ტოლობის თანახმად გვაქვს

$$(1+0,1)^{12} = (1+0,331)^4 = 3,138,$$

ე. ი. $i_1 \sim i_2$.

ბ)

$$d_{\frac{1}{12}} = \frac{i_{\frac{1}{12}}}{1+i_{\frac{1}{12}}} = \frac{0,1}{1+0,1} = 0,0909,$$

$$d_{\frac{1}{4}} = \frac{i_{\frac{1}{4}}}{1+i_{\frac{1}{4}}} = \frac{0,331}{1+0,331} = 0,2486.$$

მაგალითი 8.5. ვთქვათ, წელიწადში ნომინალური განაკვეთია $i_1^{(12)} = 120\%$ (ყოველ თვეში დარიცხვით $h_1 = 1/12$), ხოლო $i_2^{(4)} = 132,4\%$ (ყოველ კვარტალში დარიცხვით $h_2 = 1/4$). აჩვენეთ, რომ $i_1^{(12)} \sim i_1^{(4)}$.

ამოხსნა. გვაქვს

$$i_1 = \frac{i_1^{(12)}}{12} = 0,1, \quad i_2 = \frac{i_2^{(4)}}{4} = 0,331$$

და მაგალითი 8.4-ის თანახმად $i_1^{(12)} \sim i_2^{(4)}$.

მაგალითი 8.6. ვთქვათ, წლიურადში ნომინალური საპროცენტო განაკვეთია $i^{(12)} = 12\%$ ყოველ თვეში დარიცხვით. იპოვეთ ამ განაკვეთის-თვის: ა) ეკვივალენტური ეფექტური საპროცენტო განაკვეთი წლიურადში; ბ) ეკვივალენტური ეფექტური სააღრიცხვო განაკვეთი წლიურადში.

ამოხსნა. ა) გვაქვს

$$i^{\text{ეფ}}_{(12)} = \left(1 + \frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12} - 1 = 1,1268 - 1 = 0,1268 \ \ (12,68\%);$$

ბ) გვაქვს

$$d^{\text{ეფ}}_{(12)} = \frac{i^{\text{ეფ}}_{(12)}}{1 - i^{\text{ეფ}}_{(12)}} = \frac{0,1268}{1 - 0,1268} = 0,1452 \ \ (14,52\%).$$

3. განვიხილოთ ე. წ. ინდივიდუალური საკრედიტო გარიგებები რთული პროცენტის სქემაში. ვთქვათ, საკრედიტო პერიოდია – T, საწყისი თანხაა – B_0, ხოლო საბოლოო თანხაა – B_T. გარიგების განაკვეთი და უბრალო ნორმირებული განაკვეთი მოიცემა, შესაბამისად, შემდეგი ტოლობებით

$$r_T = \frac{B_T - B_0}{B_0}, \quad i^{\text{უბ}}_{(T)} = \frac{r_T}{T}, \tag{8.41}$$

ხოლო ეფექტური განაკვეთია

$$i^{\text{ეფ}}_{(T)} = (1 + i_T)^{\frac{1}{T}} - 1. \tag{8.42}$$

ორ i_{T_1} და i_{T_2} განაკვეთს ეწოდება (ეფექტურად) ეკვივალენტური, თუ

$$(1 + i_{T_1})^{\frac{1}{T_1}} = (1 + i_{T_2})^{\frac{1}{T_2}}.$$

მაგალითი 8.7. განვიხილოთ ორი მარტივი საკრედიტო გარიგება: $i^{\text{უბ}}_{T_1} = i^{\text{უბ}}_1 = 157\%$, $T_1 = 158$ დღე, $i^{\text{უბ}}_{T_2} = i^{\text{უბ}}_2 = 144\%$, $T_2 = 95$ დღე. იპოვეთ განაკვეთების შემოსავლიანობის მიხედვით უკეთესი გარიგება.

ამოხსნა. ერთი შეხედვით ცხადია, რომ წლიურადში პირველი გარიგების შემოსავალი მეტია მეორე გარიგების შემოსავალზე, რადგანაც $i^{\text{უბ}}_1 > i^{\text{უბ}}_2$. მაგრამ, მეორეს მხრივ, წლიურადში ეფექტური განაკვეთების შე-მოსავლიანობის მიხედვით გვაქვს:

$$i^{\text{ეფ}}_1 = \left(1 + 1,57 \cdot \frac{158}{365}\right)^{\frac{365}{158}} - 1 = 2,3133 \ \ (231,33\%),$$

$$i^{\text{ეფ}}_2 = \left(1 + 1,44 \cdot \frac{95}{365}\right)^{\frac{365}{95}} - 1 = 2,3972 \ \ (239,72\%).$$

ამრიგად, მიუხედავად იმისა, რომ $i^{\text{უბ}}_1 > i^{\text{უბ}}_2$, გვაქვს $i^{\text{ეფ}}_1 < i^{\text{ეფ}}_2$. ეს პარადო-ქსი წარმოიშვა გარიგების ხანგრძლივობის გამო და საჭიროა გარიგებების

შემოსავლიანობის მიხედვით დავაზუსტოთ გარიგებების შედარების კრიტერიუმი. ამ თვალსაზრისით ჩვენ შემოვიტანთ ე. წ. ზოგად განაკვეთებს და განვიხილავთ მათ თვისებებს.

I. საპროცენტო განაკვეთი ეწოდება (T, r) წყვილს, სადაც $T \neq 0$ გარიგების პერიოდია (პერიოდის სიგრძე), r განაკვეთის რიცხვითი მნიშვნელობაა. როცა $T = 1$, მაშინ $(1, r)$ განაკვეთს ნორმირებული ეწოდება. ხშირად გამოიყენება აღნიშვნები: $r = i_T$ და $i_1 = i$, როცა $T = 1$.

II. ორ (T_1, r_1) და (T_2, r_2) საპროცენტო განაკვეთს ეწოდება ეფექტურად ეკვივალენტური, თუ

$$(1 + r_1)^{\frac{1}{T_1}} = (1 + r_2)^{\frac{1}{T_2}}, \quad (1 + i_{T_1})^{\frac{1}{T_1}} = (1 + i_{T_2})^{\frac{1}{T_2}}.$$

ამასთან, ყოველ (T, i_T) განაკვეთს შეესაბამება ერთადერთი ნორმირებული ეკვივალენტური განაკვეთი

$$i = (1 + i_T)^{\frac{1}{T}} - 1,$$

რომელიც არის, აგრეთვე, ეფექტური განაკვეთი და აღინიშნება $i^{\text{ეფ}}_{(T)}$ ან $i_{\text{ეფ}}$ სიმბოლოთი. გამოსახულებას

$$j = \frac{i_T}{T}$$

ეწოდება i_T განაკვეთის შესაბამისი უბრალო ნორმირებული განაკვეთი და აღინიშნება $i^{\text{უბ}}_T$ ან $i_{\text{უბ}}$ სიმბოლოთი.

სამართლიანია შემდეგი დამოკიდებულებები:

$$i_{T_1} \sim i_{T_2} \Longleftrightarrow i^{\text{ეფ}}_{(T_1)} = i^{\text{ეფ}}_{(T_2)},$$
$$i_T \sim i^{\text{ეფ}}_{(T)}.$$

III. i_{T_1} და i_{T_2} განაკვეთებს ეწოდება უბრალოდ ეკვივალენტური, თუ შესაბამისი უბრალოდ ნორმირებული განაკვეთები ეკვივალენტურია:

$$\frac{i_{T_1}}{T_1} = \frac{i_{T_2}}{T_2}.$$

ახლა შემოვიტანოთ ზოგადი საალრიცხვო განაკვეთები.

IV. საალიცხვო განაკვეთი ეწოდება (T, w) წყვილს, სადაც T რაიმე პერიოდია, w განაკვეთის რიცხვითი მნიშვნელობაა. გამოიყენება $w = d_T$ და (q, w) აღნიშვნები, როცა $T = 1$.

V. ორ (T_1, w_1) და (T_2, w_2) საალიცხვო განაკვეთს ეწოდება ეფექტურად ეკვივალენტური, თუ

$$(1 - w_1)^{\frac{1}{T_1}} = (1 - w_2)^{\frac{1}{T_2}}, \quad (1 - d_{T_1})^{\frac{1}{T_1}} = (1 - d_{T_2})^{\frac{1}{T_2}}.$$

ამასთან, ყოველ (T, d_T) განაკვეთს შეესაბამება ერთადერთი ეფექტური ნორმირებული ეკვივალენტური განაკვეთი

$$d^{\text{ეფ}}_{(T)} = 1 - (1 - D_T)^{\frac{1}{T}}.$$

VI. d_{T_1} და d_{T_2} განაკვეთებს ეწოდება უბრალოდ ეკვივალენტური, თუ

$$\frac{d_{T_1}}{T_1} = \frac{d_{T_2}}{T_2}.$$

VII. ყოველ d_T სააღიცხვო განაკვეთს შეესაბამება ერთადერთი ნორმირებული ეკვივალენტური განაკვეთი

$$d^{\text{ან}}_{(T)} = \frac{d_T}{T}.$$

მაგალითი 8.8. ვთქვათ, კვარტალში განაკვეთია 12%. იპოვეთ ეკვივალენტური საპროცენტო და სააღრიცხვო განაკვეთები: ა) წელიწადში; ბ) თვეში; გ) ორ წელიწადში.

ამოხსნა. გვაქვს $T_1 = 1/4$ და

$$i_{\frac{1}{4}} = 0,12,$$
$$d_{\frac{1}{4}} = \frac{i_{\frac{1}{4}}}{1 + i_{\frac{1}{4}}} = \frac{0.12}{1 + 0,12} = 0,1071.$$

ა) გვაქვს $T_2 = 1$ და

$$i_1 = (1 + i_{\frac{1}{4}})^4 - 1 = (1 + 0,12)^4 - 1 = 0,5735,$$
$$d_1 = 1 - (1 - d_{\frac{1}{4}})^4 = 1 - (1 - 0,1071)^4 = 0,3645$$

ან, რაც იგივეა,

$$d_1 = \frac{i_1}{1 + i_1} = \frac{0,5735}{1 + 0,5735} = 0,3645;$$

ბ) გვაქვს $T_2 = 1/12$ და

$$i_{\frac{1}{12}} = (1 + i_{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} - 1 = (1 + 0,12)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0,0385,$$
$$d_{\frac{1}{12}} = 1 - (1 - d_{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} = 1 - (1 - 0,1071)^{\frac{1}{3}} = 0,0371;$$

გ) გვაქვს $T = 2$ და

$$i_2 = (1 + i_1)^2 - 1 = 1,48,$$
$$d_2 = 1 - (1 - d_1)^2 = 0,5961.$$

შევნიშნოთ, რომ თუ გვაქვს ორი თანხა B_{t_1} და B_{t_2}, $t_1 < t_2$, მაშინ $T = t_2 - t_1$ პერიოდში ფაქტობრივი და ნომინალური საპროცენტო განაკვეთებია, შესაბამისად,

$$i_T = \frac{B_{t_2} - B_{t_1}}{B_{t_1}} = \frac{B_{t_2}}{B_{t_1}} - 1, \tag{8.43}$$

$$i_{(T)} = \frac{i_T}{T}. \tag{8.44}$$

მაგალითი 8.9. ვთქვათ, წელიწადში ნომინალური განაკვეთია $i^{(m)} = 30000$ ხუთ წელიწადში ერთხელ დარიცხვით, ე. ი. $h =, m = 1/5$. იპოვეთ: ა) განაკვეთი 1 თვეში; ბ) მინიმალური წლების რაოდენობა, რომლისთვისაც წელიწადში 3% ეფექტური განაკვეთით მივიღოთ არანაკლებ 30000% განაკვეთი წელიწადში.

ამოხსნა. გვაქვს

$$1 + i_1 = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = \left(1 + \frac{300}{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{5}},$$

$$i_1 = (1501)^{\frac{1}{5}} - 1 \approx 3,32;$$

ა) გვაქვს

$$1 + i_1 = (1 + i_{\frac{1}{12}})^{12} = 1 + 3,32 = 4,32,$$

$$i_{\frac{1}{12}} = (4,32)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0,13 \ \ (13\%);$$

ბ) ვთქვათ, საპოვნი წლების რაოდენობაა n. ზრდის კოეფიციენტია – $1 + 0,03 = 1,03$. ერთის მხრივ, წელიწადში 300%-იანი ნომინალური განაკვეთისთვის n წლის პერიოდში განაკვეთი იქნება $i_n = 300 \cdot n$, ხოლო, მეორეს მხრივ, – $i_n = (1 + 0,03)^n$. ამრიგად, მივიღეთ განტოლება

$$(1,03)^n = 1 + 300 \cdot n,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$n \approx 395,5 \text{ წელი}.$$

4. რთული პროცენტის სქემაში დაგროვების უწყვეტი მოდელის შემთხვევაში გვაქვს

$$B_t = B_{t_0}(1 + i_n)^{\frac{t - t_0}{n}} = B_{t_0}(1 + i_{\text{ეფ}})^{t - t_0}, \tag{8.45}$$

$$B_t = B(t, t_0, B_{t_0}) = B_{t_0}(1 + i)^{t - t_0}, \tag{8.46}$$

გვაქვს, აგრეთვე, შემდეგი ოპერაციები

$$B_t = \mathrm{FV}_t(t_0, B_{t_0}) = B_{t_0}(1 + i)^{t - t_0}, \tag{8.47}$$

$$B_t = \mathrm{FV}_t(B_{t_0}) = B_{t_0} \cdot a^{t - t_0}, \ \ a = 1 + i, \tag{8.48}$$

$$B_{t_0} = \mathrm{PV}_{t_0}(t, B_t), \tag{8.49}$$

$$\mathrm{PV}_{t_0}(B_t) = \frac{B_t}{(1+i)^{t-t_0}}, \tag{8.50}$$

$$B_{t_0} = \frac{B_t}{(1+i)^{t-t_0}}, \tag{8.51}$$

შევშნიშნოთ ახლა, რომ ზრდისა და დისკონტირების ნორმირებული კოეფიციენტები შეიძლება გამოვსახოთ ნორმირებული საალრიცხვო d განაკვეთის საშუალებით

$$v = 1 - d, \quad a = \frac{1}{v} = \frac{1}{1-d}.$$

მაშინ გვექნება

$$\mathrm{FV}_t(B_{t_0}) = B_{t_0} a^{t-t_0} = \frac{B_{t_0}}{(1-d)^{t-t_0}}, \tag{8.52}$$

$$\mathrm{PV}_{t_0}(B_t) = B_t \cdot v^{t-t_0} = B_t(1-d)^{t-t_0}. \tag{8.53}$$

მაგალითი 8.10. ვთქვათ, წლიწადში ეფექტური განაკვეთია 12%. იპოვეთ საწყისი თანხა B_0, რომლისთვისაც: ა) $t_2 = 2$ წელი პერიოდში გვექნება $B_{t_2} = 1000$; ბ) $t_{2,5} = 2,5$ წელი პერიოდში $B_{t_{2,5}} = 1000$.

ამოხსნა. ა) გვაქვს

$$B_0 = \frac{B_{t_2}}{(1+i_{\text{წ}})^2} = \frac{1000}{(1+0,12)^2} = 797,19;$$

ბ) გვაქვს

$$B_0 = \frac{B_{t_{2,5}}}{(1+i_{\text{წ}})^{2,5}} = \frac{1000}{(1+0,12)^{2,5}} = 753,28.$$

მაგალითი 8.11. საალრიცხვო განაკვეთია 10%, ხოლო დარიცხვა ხდება 6 თვეში ერთხელ. 10 წლიწადში დაგროვილი თანხაა $B_{10} = 10000$. იპოვეთ საწყისი B_0 თანხა.

ამოხსნა. $t_0 = 0$ მომენტისთვის გვაქვს $m = 2$, $d^{(2)} = 10\%$. მაშინ გვექნება

$$B_0 = B_{10}\Big(1 - \frac{d^{(2)}}{2}\Big)^{2\cdot 10} = 10000(1-0,05)^{20} = 3584,86.$$

რთული პროცენტის სტანდარტული სქემის შემთხვევაში გვაქვს:

I. კაპიტალიზაციის კანონი

$$A(t, p, C) = C \cdot a(t, p), \quad p \geq t, \tag{8.54}$$

$$a(t, p) = a^{p-t}. \tag{8.55}$$

II. დისკონტირების კანონი

$$D(t,p,C) = C \cdot v(t,p), \quad p \le t, \tag{8.56}$$
$$v(t,p) = v^{t-p}.$$

ორი (t_1, C_1) და (t_2, C_2), $t_1 < t_2$, ხდომილობის p პოლუსის მიმართ ეკვივალენტურობა $(t_1, C_1) \overset{p}{\sim} (t_2, C_2)$ ნიშნავს შემდეგს

$$(t_1, C_1) \overset{p}{\sim} (t_2, C_2) \Longleftrightarrow \mathrm{PV}_p(C_1) = \mathrm{PV}_p(C_2),$$

ანუ

$$(t_1, C_1) \overset{p}{\sim} (t_2, C_2) \Longleftrightarrow C_1 \cdot v^{t_1-p} = C_2 \cdot v^{t_2-p}.$$

ამასთან, თუ $p = t_2$, მაშინ

$$\mathrm{PV}_{t_2}(C_1) = \mathrm{FV}_{t_2}(C_1) = C_1 \cdot a^{t_2-t_1} = C_2, \tag{8.57}$$

ხოლო, თუ $p = t_1$, მაშინ

$$\mathrm{PV}_{t_1}(C_2) = \frac{C_2}{v^{t_2-t_1}} = C_1. \tag{8.58}$$

მაგალითად, (1,100) ხდომილობა (3,121) ხდომილობის ეკვივალენტურია $i = 10\%$ განაკვეთის მიმართ, რადგანაც

$$100(1+0,1)^2 = 121 \ \text{ ანუ } \ \frac{121}{(1+0,1)^2} = 100.$$

მაგალითი 8.12. პირველ წელიწადში განაკვეთია 10%, მეორეში – 15%, მესამეში – 8%. ვთქვათ, $B_0 = 500$. იპოვეთ B_1, B_2 და B_3.

ამოხსნა. გვაქვს

$$B_1 = 500(1+0,1) = 550,$$
$$B_2 = 550(1+0,15) = 632,5,$$
$$B_3 = 632,5(1+0,08) = 683,1.$$

ვთქვათ, ახლა გვაქვს $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ დროის მომენტები. მაშინ $h_k = t_k - t_{k-1}$ შუალედების შესაბამისად ცვალებადი საპროცენტო განაკვეთებისთვის ზრდისა და დისკონტირების კოეფიციენტებია

$$a_k = 1 + i_k = \frac{1}{1-d_k}, \quad v_k = 1 - d_k = \frac{1}{1+i_k}.$$

ამ კოეფიციენტების საშუალებით ნებისმიერი t მომენტისათვის, $t_{k-1} \le t \le t_k$, გვეშლება

$$B_t = B_{t_{k-1}} \cdot a_k^{t-t_{k-1}}, \tag{8.59}$$
$$B_t = B_{t_k} \cdot v_k^{t_k-t}, \tag{8.60}$$

თვითონ კრიტიკული B_k მნიშვნელობები $t_k = k$ მომენტებში იქნება

$$B_k = B_{k-1} \cdot a_k^{h_k} = B_{k-1} \cdot (1+i_k)^{h_k},$$
$$B_{k-1} = B_k \cdot v^{h_k} = B_k \cdot (1-d_k)^{h_k}.$$

საზოგადოდ, გვექნება

$$B_k = B_0 \cdot (1+i_1)^{h_1} \cdots (1+i_k)^{h_k} = B_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} (1+i_j)^{h_j}, \tag{8.61}$$

$$B_0 = B_k \cdot (1-d_1)^{h_1} \cdots (1-d_k)^{h_k} = B_k \cdot \prod_{j=1}^{k} (1-d_j)^{h_j}. \tag{8.62}$$

შევნიშნოთ, რომ მაგალითი 8.12-ში განხილულ შემთხვევაში ერთის ტოლი შუალედები გვქონდა, რაც (8.61), (8.62) ფორმულებში ნიშნავს, რომ $h_1 = \cdots = h_k = 1$. შეიძლება ზოგადად ამ ფორმულების ჩაწერა ორი ნებისმიერი კრიტიკული მნიშვნელობისთვის B_k და B_l შემდეგი სახით

$$B_l = B_k \cdot (1+i_{k+1})^{h_{k+1}} \cdots (1+i_l)^{h_l} = B_k \cdot \prod_{j=k+1}^{l} (1+i_j)^{h_j}, \quad k < l. \tag{8.63}$$

მაგალითი 8.13. მაგალითი 8.12-ის პირობებში იპოვეთ დაგროვებული თანხის მნიშვნელობა: ა) 15 თვის ბოლოს; ბ) 34 თვის ბოლოს.

ამოხსნა. ა) $t = 15$ თვე წელიწადის სკალაში იქნება

$$1 < t < 2, \quad t - 1 = \frac{15}{12} - 1 = \frac{1}{4} \text{ წელი}$$

და გვექნება

$$B_1 = 500(1+0,1) = 550,$$
$$B_t = 550(1+0,15)^{\frac{1}{4}} = 569,56;$$

ბ) $s = 34$ თვე წელიწადის სკალაში იქნება

$$1 < s < 3, \quad s - 2 = \frac{34}{12} - 2 = \frac{5}{6} \text{ წელი}$$

და გვექნება

$$B_2 = 550(1+0,15) = 632,5,$$
$$B_s = 632,5(1+0,08)^{\frac{5}{6}} = 674,4.$$

ლექცია 9. ცვალებადი კაპიტალის მოდელი რთული პროცენტის სქემაში

1. რთული პროცენტის სქემაში აქამდე განხილული ოპერაციები ითვალისწინებდა მხოლოდ ერთი თანხის ევოლუციას, ანუ გარკვეული თანხის "თვითზრდადობის" დინამიკას. პრაქტიკაში საჭიროა საწყისი თანხის ევოლუციაში გავითვალისწინოთ ინვესტირების პერიოდში გარკვეული თანხების შემოდინება ან გადინება.

მაგალითი 9.1. ვთქვათ, წელიწადში საპროცენტო განაკვეთია 10% და წლების მიხედვით ფინანსური ნაკადია

$$\mathrm{CF} = \Big\{(0,400),(1,-100),(2,0),(3,200),(4,0)\Big\}.$$

იპოვეთ ანგარიშის მდგომარეობები დროის მომენტებში (წლების ბოლოებში) 1, 2, 3, 4 ანუ სიდიდეები B_1, B_2, B_3, B_4.

ამოხსნა. გვაქვს $400 \cdot 0,1 = 40$, $400 + 40 = 440$,

$$B_1 = 440 - 100 = 340,$$
$$B_2 = 340(1 + 0,1) = 374,$$
$$B_3 = 374(1 + 0,1) + 200 = 411,4 + 200 = 611,4,$$
$$B_4 = 611,4(1 + 0,1) = 672,54.$$

განვიხილოთ რაიმე ფინანსური ნაკადი

$$\mathrm{CF} = \big\{(t_1, C_1), \ldots, (t_n, C_n)\big\}. \tag{9.1}$$

ნაკადი შეიძლება ჩავწეროთ გარკვეული $C(t)$ ფუნქციის საშუალებით შემდეგნაირად

$$C(t) = \begin{cases} C_k, & t = t_k, \\ 0, & t \neq t_k. \end{cases}$$

დროის იმ t მომენტების ერთობლიობას, რომლისთვისაც $C(t) \neq 0$, ეწოდება CF ნაკადის მატარებელი და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\operatorname{supp}\mathrm{CF} = \big\{t:\ C(t) \neq 0\big\} = \big\{t \in T|\ C(t) \neq 0\big\}.$$

მაგალითი 9.1-ის შემთხვევაში გვაქვს $\operatorname{supp}\mathrm{CF} = \{0,1,3\}$.

ნორმირებული i საპროცენტო განაკვეთის შემთხვევაში, დაგროვების დინამიკა აღიწერება განტოლებით

$$B(t+h) = B(t)(1+i)^h, \quad t \geq t_0, \quad h \geq 0, \tag{9.2}$$

სადაც იგულისხმება, რომ $(t, t+h]$ შუალედში არ ხდება დამატებითი თანხის არც შემოდინება და არც გადინება. მაგრამ $(t+h)$ მომენტში ხდება $C(t+h)$

თანხის დარიცხვა, რაც ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$B(t+h) = B(t+h-0) + C(t+h), \tag{9.3}$$

სადაც

$$B(t+h-0) = \lim_{\tau \to 0+} B(t+h-\tau)$$

არის $B(t)$ თანხის მდგომარეობა $(t+h)$ მომენტში.

(9.2) და (9.3) ფორმულები შეიძლება ჩავწეროთ ერთიანი სახით

$$B(t+h) = B(t)(1+i)^h + C(t+h), \quad t \geq t_0, \quad h \geq 0. \tag{9.4}$$

დროის t_k კრიტიკული მომენტებისათვის გვაქვს

$$B(t_{k+1}) = B(t_k)(1+i)^{T_{k+1}} + C(t_k), \tag{9.5}$$

ანუ რაც იგივეა

$$B_{k+1} = B_k(1+i)^{T_{k+1}} + C_k,$$

სადაც $T_k = t_k - t_{k-1}$. ამრიგად, კრიტიკული მომენტებისთვის გვექნება

$$\begin{aligned}
&B_0 = B(t_0) = C_0,\\
&B_1 = B_0(1+i)^{T_1} + C_1 = C_0(1+i)^{t_1-t_0} + C_1,\\
&B_2 = B_1(1+i)^{T_2} + C_2 = C_0(1+i)^{t_2-t_0} + C_1(1+i)^{t_2-t_1} + C_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&B_n = B_{n-1}(1+i)^{T_n} + C_n =\\
&\qquad = C_0(1+i)^{t_n-t_0} + \cdots + C_{n-1}(1+i)^{t_n-t_{n-1}} + C_n.
\end{aligned}$$

იმ შემთხვევაში, როცა t არ არის კრიტიკული მომენტი და $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ გვექნება

$$B(t) = B(t_k)(1+i)^{t-t_k}. \tag{9.6}$$

მაგალითი 9.1-ში გამოთვლილი B_4 თანხა შეიძლება გამოვთვალოთ, აგრეთვე, შემდეგი სქემის მიხედვით. დროის $t=4$ მომენტისათვის მიმდევრობით გამოვთვალოთ ყველა მომავალი თანხები. გვექნება:

1. $t=0$ მომენტში $400(1+0,1)^4 = 584,64$;
2. $t=1$ მომენტში $-100(1+0,1)^3 = -133,1$;
3. $t=3$ მომენტში $200(1+0,1) = 220$;

$$B_4 = 585,64 - 133,1 + 220 = 672,54.$$

ამრიგად, თუ გვაქვს რაიმე ნაკადი

$$\mathrm{CF} = \{(t_1, C_1), \ldots, (t_n, C_n)\},$$

მაშინ დროის $t \geq t_1, \ldots, t_n$ მომენტისათვის მომავალი დაგროვილი თანხის მნიშვნელობა ნორმირებული i საპროცენტო განაკვეთით გამოითვლება ტოლობით

$$\mathrm{FV}_t(\mathrm{CF}, i) = \sum_{k=1}^{n} C_k(1+i)^{t-t_k} = \sum_{k=1}^{n} C_k a^{t-t_k},$$

სადაც $a = 1+i$ ზრდის ნორმირებული კოეფიციენტია. სხვანაირად გვექნება

$$\mathrm{FV}_t(\mathrm{CF}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{FV}_t(C_k). \tag{9.7}$$

საკუთარი ანალოგიურად, დროის $t \geq t_1, \ldots, t_n$ მომენტისთვის, გამოითვლება თანხის მიმდინარე მნიშვნელობა

$$\mathrm{PV}_t(\mathrm{CF}) = \sum_{k=1}^{n} C_k v^{t_k-t}, \quad v = a^{-1} = \frac{1}{1+i}, \tag{9.8}$$

$$\mathrm{PV}_t(\mathrm{CF}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{PV}_t(C_k). \tag{9.9}$$

მაგალითი 9.1-ის შემთხვევაში გვექნება

$$\mathrm{PV}_0(\mathrm{CF}) = 400 - 100(1+0,1)^{-1} + 200(1+0,1)^{-3} = 459,35.$$

როგორც ვხედავთ, $\mathrm{PV}_0(\mathrm{CF}) \neq B_0$. შეიძლება დროის ნებისმიერი $t \geq t_0$ მომენტისთვის (ე. ი. არ არის საჭიროებულო, რომ $t \geq t_1, \ldots, t_n$), ჩავწეროთ მიმდინარე თანხის მნიშვნელობა

$$\mathrm{PV}_t(\mathrm{CF}) = \sum_{k=1}^{n} C_k v^{t_k-t}, \tag{9.10}$$

ვთქვათ, დროის მომენტისათვის $t_1, \ldots, t_k \leq t \leq t_{k+1}, \ldots, t_n$. მაგალითად,

$$\mathrm{PV}_2(\mathrm{CF}) = 400(1+0,1)^2 - 100(1+0,1)^1 + 200(1+0,1)^{-1} = 555,82.$$

როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაში $\mathrm{PV}_2(\mathrm{CF}) \neq B_2$. საზოგადოდ, შეიძლება ჩავწეროთ

$$B(t) = \mathrm{FV}(\mathrm{CF}\,|_t) = \sum_{k:\ t_k \leq t} C_k(1+i)^{t-t_k}, \tag{9.11}$$

სადაც

$$CF|_t = \big\{(t_k, C_k) \in \mathrm{CF} \mid\ t_k \leq t\big\}.$$

2. დისკრეტული CF ნაკადისთვის დროის J ინტერვალზე ჩვენ განმარტებული გვაქვს ნაკადის ნეტო ღირებულება (სუფთა ღირებულება) ტოლობით

$$\mathrm{NV}(\mathrm{CF}, J) = \sum_{k:\, t_k \in J} C_k.$$

ამ ოპერაციის გამოყენებით $J = (t_1, t_2]$ ინტერვალისთვის შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი ტოლობები

$$B(t_2) - B(t_1) = \mathrm{NV}(\mathrm{CF}, t_1, t_2),$$
$$B(t_2) = B(t_1) + \mathrm{NV}(\mathrm{CF}, t_1, t_2),$$
$$B(t) = B(t_0) + \mathrm{NV}(\mathrm{CF}, t_0, t) = B(t_0) + \sum_{k:\, t_0 \le t \le t_k} C_k,$$
$$\mathrm{NV}(\mathrm{CF}, b, a) = -\,\mathrm{NV}(\mathrm{CF}, a, b), \quad a < b,$$
$$\mathrm{PV}_p(\mathrm{CF}) = \sum_{t \in T} C(t) v^{t-p} = \sum_{t \in \operatorname{supp} \mathrm{CF}} C(t) v^{t-p}.$$

ნებისმიერი p_1 და p_2 მომენტებისთვის გვაქვს

$$v^{t-p_2} = v^{t-p_1} \cdot v^{p_1-p_2}$$

და, ამიტომ,

$$\mathrm{PV}_{p_2}(\mathrm{CF}) = v^{p_1-p_2} \cdot \mathrm{PV}_{p_1}(\mathrm{CF}), \tag{9.12}$$

ხოლო ნებისმიერი $[a, b]$ შუალედებისთვის (9.12)-ის და

$$\mathrm{FV}_b(\mathrm{CF}) = \mathrm{PV}_b(\mathrm{CF})$$

ტოლობის თანახმად გვაქვს

$$\mathrm{PV}_a(\mathrm{CF}) = v^{b-a} \cdot \mathrm{FV}_b(\mathrm{CF}).$$

ასე, მაგალითად, განხილული მაგალითი 9.1-ის შემთხვევაში გვაქვს

$$\mathrm{PV}_0(\mathrm{CF}) = 459,35, \quad \mathrm{FV}_4(\mathrm{CF}) = 672,54,$$
$$459,35 = (1 + 0,1)^{-4} \cdot 672,54,$$
$$\mathrm{PV}_0(\mathrm{CF}) = v^4 \cdot \mathrm{FV}_4(\mathrm{CF}).$$

ახლა განვსაზღვროთ $\mathrm{CF} = \{C(t), t \in T\}$ ნაკადისთვის, $J = [a, b]$ შუალედისთვის და i საპროცენტო განაკვეთისთვის დაგროვებული დროითი ღირებულება ტოლობით

$$\mathrm{TV}(\mathrm{CF}; J, i) = \mathrm{TV}(\mathrm{CF}; a, b, i) = \sum_{a \le t \le b} C(t)(1 + i)^{b-t}. \tag{9.13}$$

მაგალითი 9.2. განვიხილოთ ნაკადი

$$\mathrm{CF} = \Big\{(-1, 100), (1, -80), (2, 200), (4, 150)\Big\}.$$

წელიწადში საპროცენტო განაკვეთია $i = 20\%$. იპოვეთ $(-2,0]$, $(-2,3]$, $(0,4]$, $(1,5]$ შუალედებისთვის დაყვანილი თანხების მნიშვნელობები.

ამოხსნა. (9.3) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$\begin{aligned}
\mathrm{TV}\left(\mathrm{CF},(-2,0]\right) &= 100(1+0,2) = 120,\\
\mathrm{TV}\left(\mathrm{CF},(-2,3]\right) &= 100(1+0,2)^4 - 80(1+0,2)^2 + 200(1+0,2) =\\
&= 332,16,\\
\mathrm{TV}\left(\mathrm{CF},(0,4]\right) &= -80(1+0,2)^3 + 200(1+0,2)^2 + 150 = 299,76,\\
\mathrm{TV}\left(\mathrm{CF},(1,5]\right) &= 200(1+0,2)^3 + 150(1+0,2) = 525,6.
\end{aligned}$$

განვიხილოთ რაიმე $\mathrm{CF} = \{C(t), t \in T\}$ ნაკადი. ამ ნაკადის

$$\mathrm{CF}' = \mathrm{CF}\big|_{(a,b]} = \{C'(t), t \in T\}$$

შევიწროვება $(a,b]$ შუალედზე განიმარტება ტოლობით

$$C'_t = \begin{cases} C(t), & t \in (a,b],\\ 0, & t \overline{\in} (a,b]. \end{cases}$$

შევნიშნოთ, რომ CF ნაკადის ღირებულება $(a,b]$ შუალედზე ემთხვევა $\mathrm{CF}\big|_{(a,b]}$ ნაკადის მომავალ დაგროვილ ღირებულებას, რომელიც წარმოადგენს CF ნაკადის შევიწროვებას $(a,b]$ შუალედზე. ამრიგად, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\mathrm{TV}(\mathrm{CF};a,b) = \mathrm{FV}_b\left(\mathrm{CF}\big|_{(a,b]}\right). \tag{9.14}$$

ამასთან, იგულისხმება, რომ შევიწროებულ CF' ნაკადში, თანხები, რომელიც არ შედის $(a,b]$ შუალედში, ითვლება ნულის ტოლად.

მაგალითი 9.3. მაგალითი 9.2-ში განხილული ნაკადისთვის იპოვეთ მისი შევიწროვება (1,5] შუალედზე და შუალედის ბოლოს დაგროვებული თანხის მნიშვნელობა.

ამოხსნა. (1,5] შუალედზე შევიწროვებული ნაკადია

$$\mathrm{CF}' = \mathrm{CF}\big|_{(1,5]} = \big\{(2,200),(4,150)\big\},$$

ხოლო ამ ნაკადის შესაბამისი დაგროვებული თანხა დროის $t = 5$ მომენტში, (9.4) ფორმულის თანახმად, –

$$\mathrm{FV}_5(\mathrm{CF}') = \mathrm{FV}_5\left(\mathrm{CF}\big|_{(1,5]}\right) = 200(1+0,2)^3 + 150(1+0,2) = 525,6.$$

ამრიგად, CF ნაკადის დროითი ღირებულება (1,5] შუალედზე დაემთხვა ამ შუალედის ბოლო მომენტში შევიწროვებული ნაკადის შესაბამისი თანხის ღირებულებას.

აღვნიშნოთ $\langle a,b\rangle$ სიმბოლოთი, $a<b$, ნებისმიერი სახის შუალედი a და b ბოლოებით და ვთქვათ, $\langle a,b\rangle^- = \langle b,a\rangle$ არის რაიმე ორიენტირებული შუალედი. ამ აღნიშვნებში დისკრეტული CF ნაკადის დროითი ღირებულება ნებისმიერი ორიენტირებული $J=\langle a,b\rangle$ შუალედისთვის ჩაიწერება ტოლობით

$$\mathrm{TV}(\mathrm{CF};\langle a,b\rangle,i) = \pm\sum_{t\in\langle a,b\rangle} C(t)(1+i)^{b-t}.$$

შევნიშნოთ, რომ უარყოფითად ორიენტირებული $J=(a,b]$, $a>b$, შუალედისთვის გვექნება

$$\mathrm{TV}(\mathrm{CF};a,b) = -\sum_{b\le t<a} C(t)v^{t-b} = -\,\mathrm{PV}\left(\mathrm{CF}\big|_{(b,a)}\right),$$

ხოლო ნებისმიერი $J=\langle a,b\rangle$ შუალედისთვის გვაქვს

$$\mathrm{TV}(\mathrm{CF},J) = -v^{b-a}\,\mathrm{TV}(\mathrm{CF},J^-),\quad J^-=\langle b,a\rangle.$$

მაგალითი 9.2-ში განხილული ნაკადისთვის გვექნება

$$\mathrm{TV}\left(\mathrm{CF},[5,1]\right) = -\Big[\frac{200}{1+0,2}+\frac{150}{(1+0,2)^3}\Big] = -253,47,$$

$$\mathrm{TV}\left(\mathrm{CF},[5,1]\right)\cdot(-v^{b-a}) = (-253,47)\cdot\frac{-1}{(1+0,2)^{1-5}} =$$

$$= (-253,47)\cdot(-2,0736) = 525,6.$$

ამრიგად, მივიღეთ

$$\mathrm{TV}\left(\mathrm{CF},[5,1]\right) = 525,6.$$

3. განვიხილოთ ახლა რაიმე ფონდი (ფინანსური სისტემა, დაგროვების ანგარიში), რომლის თანხის მდგომარეობა დროის t მომენტში არის $B(t)$. ვიგულისხმოთ, რომ ეს სისტემა ანუ $B(t)$ მდგომარეობა დაკავშირებულია (დამოკიდებულია) რაიმე $\mathrm{CF}=\{C(t),t\in T\}$ ნაკადთან. $B(t)$ მდგომარეობის ყოფაქცევა დამოკიდებულია შემავალ CF^+ და გამავალ CF^- ნაკადებზე. თუ ფონდში გარედან შემოდინება არ ხდება, ანუ CF^+ ნაკადი ნულის ტოლია, მაშინ $B(t)$ მდგომარეობის დინამიკა აღიწერება ავტონომიური საპროცენტო განაკვეთის შესაბამისად შემდეგი განტოლებით

$$B(t) = B(t_0)(1+i)^{t-t_0},$$

ხოლო ნებისმიერი ორი t_1 და t_2, $t_1<t_2$, მომენტისთვის

$$B(t_2) = B(t_1)(1+i)^{t_2-t_1}.$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც ფონდს გააჩნია გარედან შემავალი CF ნაკადი, მაშინ (9.5), (9.6) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$\begin{aligned} B(t) &= B(t_0)(1+i)^{t-t_0} + \mathrm{FV}\left(\mathrm{CF}\,\big|_{(t_0,t]}\right), \\ B(t) &= B(t_0)(1+i)^{t-t_0} + \sum_{k:\ t_k \le t} C_k (1+i)^{t-t_k}, \\ B(t) &= B(t_0)(1+i)^{t-t_0} + \mathrm{TV}(\mathrm{CF}; t_0, t), \quad t \ge t_0. \end{aligned} \tag{9.15}$$

(9.15) განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ ზოგადი სახით

$$B_{t+h} = B(t)(1+i)^h + \mathrm{TV}(\mathrm{CF}; t, t+h), \quad t \ge t_0, \quad h > 0. \tag{9.16}$$

(9.15) ფორმულას ფონდის დინამიკის განტოლება ეწოდება, (9.16) ფორმულა კი ერთმანეთთან აკავშირებს ფონდის ორ ნებისმიერ მდგომარეობას.

მაგალითი 9.4. განვიხილოთ ნაკადი

$$\mathrm{CF} = \Big\{(0, 100), (1, -200), (3, 150), (4, 130)\Big\}.$$

იპოვეთ $t_0 = 0$ მომენტიდან $t = 5$ მომენტამდე ($t = 5$ მომენტის ჩათვლით) $B(t)$ თანხის მდგომარეობები პირდაპირი და უკუ რიგით, თუ წელიწადში საპროცენტო განაკვეთია $i = 20\%$.

ამოხსნა. პირდაპირი რიგით გამოთვლის შემთხვევაში გვაქვს

$$\begin{aligned} B_0 &= 100, \\ B_1 &= B_0(1+0,2) - 200 = -80, \\ B_2 &= B_1(1+0,2) = -96, \\ B_3 &= B_2(1+0,2) + 150 = 34,8 \\ B_4 &= B_3(1+0,2) + 130 = 171,76, \\ B_5 &= B_4(1+0,2) = 206,11. \end{aligned}$$

უკუ (საწინააღმდეგო) რიგით გამოთვლის შემთხვევაში გვექნება

$$\begin{aligned} B_5 &= 206,11, \\ B_4 &= \frac{B_5}{1+0,2} = 171,76, \\ B_3 &= \frac{B_4}{1+0,2} - \frac{130}{1+0,2} = 34,8, \\ B_2 &= \frac{B_3}{1+0,2} - \frac{150}{1+0,2} = -96, \\ B_1 &= \frac{B_2}{1+0,2} = -80, \end{aligned}$$

$$B_0 = \frac{B_1}{1+0,2} + \frac{200}{1+0,2} = 100.$$

მაგალითი 9.5. ვთქვათ, $t_0 = 0$ მომენტში $B_0 = 1000$. ინვესტორს ყოველი კუნტი წელიწადის ბოლოს გამოაქვს 500-ის ტოლი თანხა, ხოლო ყოველი ლუწი წელიწადის ბოლოს შეაქვს 500-ის ტოლი თანხა. წელიწადში საპროცენტო განაკვეთია $i = 50\%$. იპოვეთ B_{10}.

ამოხსნა. (9.15) განტოლების თანახმად გვექნება

$$B_{10} = B_0(1+i)^{10} + \mathrm{TV}_{(0,10]}(\mathrm{CF}, i),$$

$$B_{10} = 1000(1+0,5)^0 + \sum_{t=1}^{10}(-1)^t \cdot 500(1+i)^{10-t} =$$

$$= 1000 \cdot (1,5)^{10} - 500 \cdot \frac{(1,5)^{10}-1}{2,5} = 46332,03.$$

ლექცია 10. ევროპული ოფციონის ფასდადება

1. განვიხილოთ უმარტივესი $(B,S) = (B_n, S_n)$ ფინანსური ბაზრის კარგად ცნობილი კოკსის, როსის და რუბინშტეინის დისკრეტული ბინომური მოდელი, რომელიც ფუნქციონირებს დროის მომენტებში $n = 0,1,\ldots,N$, $N < \infty$ და შედგება მხოლოდ ორი აქტივისგან: $B = (B_n)$ არის ობლიგაციები (საბანკო ანგარიში) და $S = (S_n)$ არის აქციები. აღნიშნული მოდელის თანახმად, B_n და S_n სიდიდეების მნიშვნელობები დროში მოიცემა შემდეგი რეკურენტული ტოლობების საშუალებით:

$$B_n = (1+r)B_{n-1}, \quad B_0 >, \tag{10.1}$$

$$S_n = (1+\rho_n)S_{n-1}, \quad S_0 > 0, \tag{10.2}$$

სადაც $r > 0$ არის საპროცენტო განაკვეთი, რომელიც არ იცვლება დროში, ხოლო

$$\rho = (\rho_n), \quad n = 0,1,\ldots,N,$$

არის დამოუკიდებელ და ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა. ამასთან, ყოველი ρ_n შემთხვევითი სიდიდე იღებს ან a-ს ან b-ს ტოლ შესაძლო რიცხვით მნიშვნელობებს, $a < b$, შემდეგი ალბათობებით:

$$P(\rho_n = b) = p > 0, \tag{10.3}$$

$$P(\rho_n = a) = 1 - p. \tag{10.4}$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, ყოველი ρ_n შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონს აქვს შემდეგი სახე:

ცხრილი 10.1.

ρ_n	b	a
P_{ρ_n}	p	$1-p$

, $n = 0, 1, \ldots, N.$ (10.5)

შევნიშნოთ, რომ ჩვენთვის საინტერესოა განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევა

$$a < r < b. \tag{10.6}$$

მართლაც, თუ $r \le a$, მაშინ ხელსაყრელია შევიძინოთ მხოლოდ აქციები, ხოლო თუ $r \ge b$, მაშინ ხელსაყრელია შევიძინოთ მხოლოდ ობლიგაციები ან თანხა დავდოთ საბანკო ანგარიშზე. ამ მოსაზრებების საილუსტრაციოდ განვიხილოთ რიცხვითი მაგალითები.

დავუშვათ, $B_0 = 20$, $S_0 = 100$ და დროის საწყისი $n = 0$ მომენტში ჩვენი თანხა 100-ის ტოლია. ვთქვათ,

$$r < a \text{ და } r = \frac{1}{5}, \quad a = \frac{2}{5}, \quad b = \frac{3}{5}.$$

ამრიგად, ჩვენ შეგვიძლია ვიყიდოთ ერთი აქცია ან ხუთი ობლიგაცია. ვნახოთ, რა შეიძლება მოხდეს დროის შემდეგ $n = 1$ მომენტში. ერთი ობლიგაციის ფასი იქნება

$$B_1 = (1+r)B_0 = \left(1 + \frac{1}{5}\right) \cdot 20 = 24,$$

ხოლო ხუთი ობლიგაციის კი – 120. თუ $\rho_1 = a = 2/5$, მაშინ

$$S_1 = (1+\rho_1)S_0 = \left(1 + \frac{2}{5}\right) \cdot 100 = 140$$

და გვექნება $5B_1 < S_1$. თუ $\rho_1 = b = 3/5$, მაშინ

$$S_1 = (1+\rho_1)S_0 = \left(1 + \frac{3}{5}\right) \cdot 100 = 160$$

და კვლავ გვექნება $5B_1 < S_1$.

ვთქვათ, ახლა

$$r > b \text{ და } a = \frac{1}{10}, \quad b = \frac{2}{10}, \quad r = \frac{3}{10}.$$

დროის $n = 1$ მომენტში ერთი ობლიგაციის ფასი იქნება

$$B_1 = (1+r)B_0 = \left(1 + \frac{3}{10}\right) \cdot 20 = 26,$$

ხოლო ხუთი ობლიგაციის კი – 130. $\rho_1 = a = 1/10$ და $\rho_1 = b = 2/10$ შემთხვევებში, შესაბამისად, გვექნება:

$$S_1 = (1+\rho_1)S_0 = \left(1 + \frac{1}{10}\right) \cdot 100 = 110,$$

$$S_1 = (1+\rho_1)S_0 = \left(1+\frac{2}{10}\right)\cdot 100 = 120$$

და ამრიგად, ორივე შემთხვევაში $5B_1 > S_1$. ანალოგიური სიტუაციები გვექნება დროის შემდეგ მომენტებშიც.

შევნიშნოთ, რომ (10.6) უტოლობა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$1+a < 1+r < 1+b. \tag{10.7}$$

რადგანაც აქციის ფასი დადებითი სიდიდეა, ამიტომ (10.7)-დან გვექნება

$$0 < 1+a < 1+r < 1+b,$$

საიდანაც ფინანსური (B,S)-ბაზრის (10.1), (10.2) მოდელის a, r და b პარამეტრებისათვის მივიღებთ პირობას

$$-1 < a < r < b. \tag{10.8}$$

(10.8) პირობასთან დაკავშირებულია, აგრეთვე, ე. წ. არბიტრაჟის (ურისკო მოგების) საკითხები, რომელსაც ჩვენ არ განვიხილავთ.

გარდა ამისა, შევნიშნოთ, რომ (10.1), (10.2) მოდელში B_n სიდიდე ითვლება ურისკო ფასიან ქაღალდად (საპროცენტო განაკვეთი $r>0$ მუდმივი სიდიდეა, არ ხდება ინფლაციის გათვალისწინება და სხვა), ხოლო S_n სიდიდე ითვლება რისკიან ფასიან ქაღალდად, რადგანაც აქციის ფასები დროში შემთხვევით იცვლება.

2. წარმოვიდგინოთ ახლა ინვესტორი, რომელსაც დროის საწყის $n=0$ მომენტში გააჩნია გარკვეული საწყისი კაპიტალი (თანხა) $X_0 = x > 0$ და მას სურს (10.1), (10.2) ფინანსური ბაზრის შესაძლებლობების გამოყენებით თავისი საწყისი კაპიტალი მომავალში, დროის N მომენტში გახადოს რაიმე $f_N > 0$ თანხის ტოლი. ინვესტორის ამ სურვილს საინვესტიციო პრობლემა ეწოდება.

ინვესტორს შეუძლია თავისი საწყისი თანხა მთლიანად განათავსოს მხოლოდ ობლიგაციებში (საბანკო ანგარიშზე) ან მხოლოდ აქციებში. ინვესტორთა უმრავლესობა, როგორც წესი, თავისი საწყისი თანხის ნაწილს ათავსებს ობლიგაციებში, ნაწილს კი – აქციებში. ჩვენ სწორედ ამ შემთხვევას განვიხილავთ.

ვიგულისხმოთ, რომ დროის $n=0$ მომენტში ერთი ობლიგაციის ფასია B_0, ხოლო ერთი აქციის ფასია S_0 და ინვესტორმა შეიძინა, შესაბამისად, β_0 და γ_0 რაოდენობების ობლიგაცია და აქცია. ამასთან ერთად, ჩვენ ვუშვებთ, რომ β_0 და γ_0 სიდიდეები შეიძლება იყოს წილადი და უარყოფითი რიცხვებიც. მაგალითად, $\beta_0 = \frac{3}{2}$ ნიშნავს, რომ ნაყიდია ერთნახევარი ობლიგაცია, ხოლო $\gamma_0 = -\frac{1}{2}$ ნიშნავს, რომ ნასესხებია ნახევარი აქცია.

ადვილი მისახვედრია, რომ ინვესტორის საწყისი თანხა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$X_0 = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0. \tag{10.9}$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, ინვესტორის პორტფელი (სტრატეგია) საწყის $n = 0$ მომენტში არის $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$, რომლის შესაბამისი თანხა მოიცემა (10.9) ტოლობით. დროის $n = 1$ მომენტის დადგომამდე ინვესტორს გარკვეული მოსაზრებების გამო შეუძლია $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$ შეცვალოს ახალი $\pi_1 = (\beta_1, \gamma_1)$ პორტფელით, სადაც $\beta_1 \neq \beta_0$ და $\gamma_1 \neq \gamma_0$. ასეთ შემთხვევაში X_0 თანხა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$X_0 = \beta_1 B_0 + \gamma_1 S_0. \tag{10.10}$$

დროის $n = 1$ მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ფასების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით, ინვესტორის თანხა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$X_1 = \beta_1 B_1 + \gamma_1 S_1. \tag{10.11}$$

საკმაოდ ანალოგიურად დროის $n-1$ და n მომენტებში

$$\pi_{n-1} = (\beta_{n-1}, \gamma_{n-1}) \quad \text{და} \quad \pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$$

პორტფელების შესაბამისი თანხები შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$X_{n-1} = \beta_{n-1} B_{n-1} + \gamma_{n-1} S_{n-1}, \tag{10.12}$$

$$X_{n-1} = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}, \tag{10.13}$$

$$X_n = \beta_n B_n + \gamma_n S_n. \tag{10.14}$$

ამრიგად, ინვესტორის რეალური X_n თანხა დროის n მომენტში მოიცემა (10.14) ტოლობით. X_n სიდიდეს, $n = 0, 1, \ldots, N$, ინვესტორის კაპიტალის პროცესი ეწოდება. მის ფორმირებაში (განსაზღვრაში) მონაწილეობს ე. წ. თვითდაფინანსების პირობა, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს. ინვესტორის X_n კაპიტალის პროცესის ფორმირების დროს არ ხდება დამატებითი კაპიტალის არც შემოდინება და არც გადინება, ე. ი. ამ პროცესში მონაწილეობს მხოლოდ საწყისი კაპიტალი. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ცვლილებები ობლიგაციების რაოდენობებში ხდება მხოლოდ აქციების რაოდენობებში ცვლილებების ხარჯზე და პირიქით.

ადვილი საჩვენებელია, რომ დროის $n-1$ მომენტიდან დროის n მომენტამდე ინვესტორის კაპიტალის ნაზრდი (ცვლილება) დროში ობლიგაციისა და აქციის ფასების დროში ნაზრდების საშუალებით (10.13) და (10.14) ტოლობების გამოყენებით შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$\begin{aligned}\Delta X_n = X_n - X_{n-1} = \beta_n B_n + \gamma_n S_n - \beta_n B_{n-1} - \gamma_n S_{n-1} = \\ = \beta_n (B_n - B_{n-1}) + \gamma_n (S_n - S_{n-1}) = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n.\end{aligned} \tag{10.15}$$

იგივე ΔX_n ნაზრდი (10.12) და (10.14) ტოლობების გამოყენებით შეიძლება ჩავწეროთ, აგრეთვე, შემდეგი სახით

$$\begin{aligned}\Delta X_n = X_n - X_{n-1} = \beta_n B_n + \gamma_n S_n - \beta_n B_{n-1} - \gamma_n S_{n-1} = \\ = \beta_n B_n + \gamma_n S_n - \beta_{n-1} B_{n-1} - \gamma_{n-1} S_{n-1} + \\ + \beta_n B_{n-1} - \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1} - \gamma_n S_{n-1} =\end{aligned}$$

$$= \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n + \Delta\beta_n B_{n-1} \Delta\gamma_n S_{n-1}, \qquad (10.16)$$

სადაც

$$\Delta\beta_n = \beta_n - \beta_{n-1} \quad \text{და} \quad \Delta\gamma_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$$

ობლიგაციების და აქციების რაოდენობების ნაზრდებია დროის $n-1$ მომენტიდან დროის n მომენტამდე, შესაბამისად.

(10.16) და (10.15) ტოლობების გამოყენებით გვექნება თვითდაფინანსების შემდეგი პირობა

$$\Delta\beta_n B_{n-1} + \Delta\gamma_n S_{n-1} = 0. \qquad (10.17)$$

ჩავწეროთ თვითდაფინანსების (10.17) პირობა დროის $n = 1$ და $n = 2$ მომენტების შემთხვევაში. გვექნება, შესაბამისად,

$$\Delta\beta_1 B_0 + \Delta\gamma_1 S_0 = 0, \qquad (10.18)$$

$$\Delta\beta_2 B_0 + \Delta\gamma_2 S_0 = 0. \qquad (10.19)$$

როგორც ზემოთ დავინახეთ, X_n კაპიტალის ფორმირება დაკავშირებულია ინვესტორის პორტფელების

$$\pi = (\pi_n), \quad \pi_n = (\beta_n, \gamma_n), \quad n = 0, 1, \ldots, N,$$

მიმდევრობასთან. ამის გათვალისწინებით X_n სიდიდეებსაც ჩავწერთ მიმდევრობის სახით შემდეგნაირად:

$$X^\pi = (X_n^\pi), \quad n = 0, 1, \ldots, N.$$

გარდა ამისა, შევნიშნოთ, რომ X_n^π კაპიტალი შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი ჯამის სახით

$$X_n^\pi = X_0 + \sum_{K=1}^{n} (\beta_K \Delta B_K + \gamma_K \Delta S_K).$$

ამასთან ერთად, (10.17) პირობის გათვალისწინებით ამბობენ, რომ $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ პორტფელები აგებულია თვითდაფინანსების პრინციპით და ამ შემთხვევაში $\pi_n = (\pi_n)$ პორტფელების მიმდევრობას თვითდაფინანსებადი უწოდება.

ადვილი მისახვედრია, რომ საინვესტიციო პრობლემის გადაწყვეტა ანუ ინვესტორის მიერ დროის N მომენტისათვის f_N თანხის დაგროვება გარკვეული რისკების გარდა დამოკიდებულია საწყის $X_0 = x$ თანხაზე და $\pi_n = (\pi_n)$ სტრატეგიაზე. ამასთან დაკავშირებით საჭიროა შემოვიღოთ სპეციალური სტრატეგია – ე. წ. ჰეჯი (hedge), რაც ინგლისურად ღობეს (მესერს) ნიშნავს. შევნიშნოთ, რომ სიტყვა "ღობე" რისკისგან თავდაცვის აზრით იხმარება. ხშირად იხმარება, აგრეთვე, გამოთქმა – ჰეჯური სტრატეგია ან ჰეჯირებული სტრატეგია.

მოცემული $X_0 = x > 0$ საწყისი თანხისათვის და არაუარყოფითი f_N ფუნქციისათვის თვითდაფინანსებად $\pi_n = (\pi_n)$ სტრატეგიას ეწოდება პეჯი ან კიდევ (x, f_N) – პეჯი, თუ

$$X_0^\pi = X_0 = x, \quad X_N^\pi \geq f_N. \tag{10.20}$$

იმ შემთხვევაში, როცა

$$X_0^\pi = X_0 = x, \quad X_N^\pi = f_N, \tag{10.21}$$

მაშინ $\pi_n = (\pi_n)$ სტრატეგიას ეწოდება მინიმალური პეჯი.

ამრიგად, პეჯი არის ისეთი სტრატეგია, რომლის საშუალებით $X_0 = x > 0$ საწყისი თანხის მქონე ინვესტორს ობლიგაციებისა და აქციების ყიდვა-გაყიდვით (სტრატეგიის სათანადოდ აგების შემთხვევაში) დროის ბოლო N მომენტში ექნება f_N-ზე არანაკლები თანხა.

აღვნიშნოთ $\Pi(x, f_n)$-ით ყველა (x, f_N) – პეჯის ერთობლიობა. სიდიდეს

$$C_N = \min\left\{x > 0 : \ \Pi(x, f_N) \neq \Phi\right\}, \tag{10.22}$$

სადაც Φ ცარიელი სიმრავლეა (ე. ი. ისეთი სიმრავლე, რომელიც არცერთ ელემენტს არ შეიცავს), ეწოდება საინვესტიციო თანხა (ფასი). ამრიგად, C_N არის ის უმცირესი (მინიმალური) საწყისი თანხა, რომელიც ინვესტორს აძლევს საინვესტიციო პრობლემის გადაწყვეტის საშუალებას, ანუ დროის ბოლო N მომენტში f_N თანხის მიღების გარანტიას.

შევნიშნოთ, რომ პეჯის (მინიმალური პეჯის) აგების პროცესს პეჯირებას უწოდებენ.

3. ფინანსურ ბაზრებზე ერთ-ერთი პოპულარული ფასიანი ქაღალდია ე. წ. ოფციონი ანუ ოფციონური კონტრაქტი. იგი წარმოადგენს ორ მხარეს (ოფციონის გამყიდველსა და მყიდველს) შორის შეთანხმებას წინასწარ განსაზღვრულ პირობებში რაიმე ფინანსური ინსტრუმენტის ან საქონლის ყიდვა-გაყიდვის შესახებ. ოფციონური კონტრაქტის საგანი შეიძლება იყოს ობლიგაცია, აქცია, ვალუტა, ოქრო და სხვ. ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ აქციის ყიდვა-გაყიდვის ოფციონურ კონტრაქტებს.

ოფციონის მფლობელს (მყიდველს) აქვს უფლება მომავალში წინასწარ განსაზღვრულ დროს, ანუ ოფციონის აღსრულების (განაღდების) დროს, იყიდოს ან გაყიდოს აქცია წინასწარ შეთანხმებულ ფასად, რომელსაც შეთანხმების ფასი ეწოდება.

ოფციონის გამყიდველი (ემიტენტი, ოფციონის გამომშვები) ვალდებულია საჭიროების შემთხვევაში შეასრულოს ოფციონური კონტრაქტით გათვალისწინებული პირობები.

შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ აქციების ყიდვა-გაყიდვის ე. წ. ევროპული ტიპის ოფციონურ კონტრაქტებს. შევნიშნოთ, რომ სიტყვა "ევროპული" მიუთითებს იმაზე, რომ ოფციონის განაღდება შეიძლება მხოლოდ კონტრაქტით წინასწარ განსაზღვრულ დროს. შევნიშნოთ, აგრეთვე, რომ რადგან

ჩვენ ვიხილავთ მხოლოდ აქციების ყიდვა-გაყიდვის ოფციონებს, ამიტომ ოფციონური კონტრაქტი წარმოადგენს აქციის ფასის გარკვეულ ფუნქციას, რომელსაც გადახდის ფუნქცია ეწოდება.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა: $\max(x,y)$-ით (იკითხება: მაქსიმუმ x და y რიცხვებს შორის) აღვნიშნოთ x და y რიცხვებს შორის უდიდესი. მაგალითად, $\max(3,4)=4$.

ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f_N = f(S_N) = \max(S_N - K, 0) \tag{10.23}$$

არის მეორადი ფასიანი ქაღალდი, რომელიც მის მფლობელს აძლევს უფლებას, იყიდოს ემიტენტისაგან აქცია მხოლოდ დროის ბოლო N მომენტში წინასწარ შეთანხმებულ $K>0$ ფასად. თუ $S_N > K$, მაშინ ოფციონის მფლობელი გაანაღდებს ოფციონს, ანუ იყიდის აქციას K ფასად, მყისვე გაყიდის მას S_N ფასად და მიიღებს მოგებას $f_N = S_N - K$. თუ $S_N \le K$, მაშინ ოფციონის მფლობელი არ გაანაღდებს ოფციონს, რადგან ამ შემთხვევაში მას მოგება არ ექნება და მისი დანაკარგი იქნება ოფციონში გადახდილი თანხა.

ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f_N = f(S_N) = \max(K - S_N, 0) \tag{10.24}$$

არის მეორადი ფასიანი ქაღალდი, რომელიც მის მფლობელს აძლევს უფლებას, გაყიდოს აქცია მხოლოდ დროის ბოლო N მომენტში წინასწარ შეთანხმებულ $K>0$ ფასად. თუ $S_N < K$, მაშინ ოფციონის მფლობელი იყიდის აქციას S_N ფასად, მყისვე გაყიდის მას K ფასად და მიიღებს მოგებას $f_N = K - S_N$. თუ $S_N \ge K$, მაშინ ოფციონის მფლობელი არ გაანაღდებს ოფციონს, რადგან ამ შემთხვევაში მას მოგება არ ექნება და მისი დანაკარგი იქნება ოფციონში გადახდილი თანხა.

შევნიშნოთ, რომ მაგალითად, ყიდვის სტანდარტული ოფციონის მფლობელის რეალური მოგება $S_N > K$ შემთხვევაში ტოლი იქნება $S_N - K$ სიდიდეს გამოკლებული ოფციონში გადახდილი თანხა, ანუ $S_N - K - C_N$ სიდიდე.

ემიტენტის წინაშე დგას შემდეგი ამოცანა. ოფციონის გაყიდვით მიღებული თანხა მან ისე უნდა გამოიყენოს ფინანსური ბაზრის შესაძლებლობების გათვალისწინებით, რომ დროის ბოლო N მომენტში მას გააჩნდეს ზუსტად f_N-ის ტოლი ან f_N-ზე არანაკლები თანხა. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ემიტენტმა უნდა ააგოს მინიმალური პეჯი ან ჰეჯი, რომ აუცილებლობის შემთხვევაში შეძლოს ოფციონური კონტრაქტის პირობების შესრულება.

ამრიგად, ოფციონის გაყიდვით მიღებული თანხით ემიტენტი ფინანსურ ბაზარზე გამოდის როგორც ინვესტორი.

ბუნებრივია, რომ ოფციონის ფასი არ შეიძლება იყოს ძალიან დიდი ან ძალიან პატარა. პირველ შემთხვევაში ემიტენტი უბრალოდ ვერ გაყიდის ოფციონს ან დარჩება ურისკო მოგება, ხოლო მეორე შემთხვევაში მან შეიძლება ვერ შეძლოს ოფციონური კონტრაქტის პირობების შესრულება. ამ

სიტუაციების გათვალისწინებით, ევროპული ტიპის ოფციონის ფასად მიღებულია სწორედ (10.22) ტოლობით განსაზღვრული C_N სიდიდე, რომელსაც ოფციონის სამართლიანი ფასი ეწოდება.

ჩამოვაყალიბოთ ახლა ევროპული ტიპის (ყიდვისა და გაყიდვის სტანდარტული) ოფციონების გათვლის ამოცანა. იგი მდგომარეობს შემდეგი სამი საკითხის გადაწყვეტაში:

1. ოფციონის C_N სამართლიანი ფასის დადგენა;
2. მინიმალური (x, f_N) – პეჯის აგება, ანუ ისეთი

$$\pi_n^* = (\beta_n^*, \gamma_n^*), \quad n = 1, \ldots, N,$$

სტრატეგიის აგება, რომლისთვისაც სრულდება (10.21) პირობა;

3. π_n^* სტრატეგიის შესაბამისი $X_n^{\pi^*}$ კაპიტალის პროცესის განსაზღვრა.

შევნიშნავთ, რომ ოფციონის ერთ-ერთი ძირითადი მიმზიდველობა მდგომარეობს იმაში, რომ იგი იაფი ღირს და მისი საშუალებით შეიძლება (გარკვეული რისკის ხარჯზე) დიდი მოგების მიღება.

ევროპული ტიპის ოფციონის შესაძლებლობების თვალსაჩინოდ წარმოდგენის მიზნით განვიხილოთ ზოგიერთი საილუსტრაციო მაგალითი.

ვიგულისხმოთ, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} &N = 1; \;\; n = 0, 1; \;\; X_0 = 10000; \;\; S_0 = 100; \\ &C_1 = 10; \;\; K = 100; \;\; S_1 = 150 \;\; \text{ან} \;\; S_1 = 80. \end{aligned}$$

მაგალითი 10.1. ვთქვათ, შესრულებულია (I) პირობები. ვიგულისხმოთ, რომ ინვესტორმა იყიდა 100 ცალი ყიდვის სტანდარტული ოფციონი და 90 ცალი აქცია. გამოვთვალოთ დროის $n = 1$ მომენტში ინვესტორის თანხის რაოდენობა და რეალური მოგება (წაგება).

ამოხსნა. თუ $S_1 = 150$, მაშინ ერთი ოფციონის განაღდებით ინვესტორი მიიღებს შემდეგ თანხას

$$f_1 = \max(S_1 - K_1, 0) = \max(150 - 100, 0) = 50,$$

ხოლო 100 ოფციონის განაღდებით კი – $100 \times 50 = 5000$-ის ტოლ თანხას. 90 აქციის გაყიდვით ინვესტორი მიიღებს $90 \times 150 = 13500$-ის ტოლ თანხას. ამრიგად, დროის $n = 1$ მომენტში ინვესტორის თანხაა $5000 + 13500 = 18500$ და მისი რეალური მოგება $18500 - 10000 = 8500$-ის ტოლია.

იმ შემთხვევაში, თუ $S_1 = 80$, მაშინ ინვესტორი დაკარგავს 100 ოფციონში გადახდილ თანხას, ხოლო 90 აქციის გაყიდვით იგი მიიღებს $90 \times 80 = 7200$-ის ტოლ თანხას და მისი წაგება (დანაკარგი) იქნება $10000 - 7200 = 2800$-ის ტოლი.

მაგალითი 10.2. ვთქვათ, შესრულებულია (I) პირობები და ინვესტორმა მთელი საწყისი თანხით იყიდა მხოლოდ ოფციონები, ე. ი. იყიდა 1000 ოფციონი. გამოვთვალოთ დროის $n = 1$ მომენტში ინვესტორის თანხის რაოდენობა და რეალური მოგება (წაგება).

ამოხსნა. თუ $S_1 = 150$, მაშინ 1000 ოფციონის განაღდებით ინვესტორი მიიღებს $1000 \times 50 = 50000$-ის ტოლ თანხას და მისი რეალური მოგება $50000 - 10000 = 40000$-ის ტოლი იქნება.

იმ შემთხვევაში, თუ $S_1 = 180$, მაშინ ინვესტორი, ცხადია, დაკარგავს ოფციონებში გადახდილ მთლიან თანხას ანუ მთელ საწყის თანხას.

მაგალითი 10.3. ვთქვათ, შესრულებულია (I) პირობები და ინვესტორმა მთელი საწყისი თანხით იყიდა მხოლოდ აქციები, ე. ი. იყიდა 100 აქცია. გამოვთვალოთ დროის $n = 1$ მომენტში ინვესტორის თანხა და რეალური მოგება (წაგება).

ამოხსნა. თუ $S_1 = 150$, მაშინ 100 აქციონის გაყიდვით ინვესტორი მიიღებს $100 \times 150 = 15000$-ის ტოლ თანხას და მისი რეალური მოგება $15000 - 10000 = 5000$-ის ტოლი იქნება.

იმ შემთხვევაში, თუ $S_1 = 80$, მაშინ 100 აქციის გაყიდვით ინვესტორი მიიღებს $100 \times 80 = 8000$-ის ტოლ თანხას და მისი წაგება (დანაკარგი) $10000 - 8000 = 2000$-ის ტოლი იქნება.

განხილული მაგალითები გვიჩვენებს, რომ ინვესტორის მოგება–წაგება ოფციონებში და აქციებში ჩადებულ თანხაზე, აქციის ბოლო მომენტში ფასზე და ზოგიერთ სხვა პარამეტრზეა დამოკიდებული.

ყიდვა–გაყიდვის უამრავ სტრატეგიებს შორის გვინდა აღვნიშნოთ კარგად ცნობილი "ხარის" და "დათვის" სტრატეგიები, რომელთა შინაარსი აქციებთან დაკავშირებით შემდეგში მდგომარეობს: "ხარის" სტრატეგია ითვალისწინებს აქციის ფასის მოსალოდნელ აწევას და ამიტომ ეს სტრატეგია მდგომარეობს აქციის ყიდვაში მისი შემდგომში მეტ ფასად გაყიდვის მიზნით, "დათვის" სტრატეგია კი პირიქით, ითვალისწინებს აქციის ფასის მოსალოდნელ დაწევას და ამიტომ ეს სტრატეგია მდგომარეობს აქციის გაყიდვაში.

5. ევროპული ტიპის ყიდვისა და გაყიდვის სტანდარტული ოფციონების (10.23) და (10.24) გადახდის ფუნქციები დამოკიდებულია დროის ბოლო N მომენტში აქციის S_N ფასის მნიშვნელობაზე. არსებობს უამრავი სხვადასხვა სახის ოფციონი, რომლის გადახდის ფუნქცია დამოკიდებულია აქციის ფასების მთელ წარსულზე ანუ $S_0, S_1, \ldots, S_N$ სიდიდეებზე. მაგალითისთვის მოვიყვანთ შემდეგ ოფციონებს:

1. ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული უკანმხედი ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f_N = f(S_0, S_1, \ldots, S_N) = \max(S_N - K_N, 0), \qquad (10.25)$$

სადაც

$$K_N = \min(S_0, S_1, \ldots, S_N). \tag{10.26}$$

2. ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული უკანმხედი ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f_N = f(S_0, S_1, \ldots, S_N) = \max(K_N - S_N, 0), \tag{10.27}$$

სადაც

$$K_N = \max(S_0, S_1, \ldots, S_N). \tag{10.28}$$

3. ევროპული ტიპის ყიდვის აზიური არითმეტიკული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f_N = f(S_0, S_1, \ldots, S_N) = \max(\overline{S}_N - K), \tag{10.29}$$

სადაც

$$\overline{S}_N = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} S_i. \tag{10.30}$$

4. ევროპული ტიპის გაყიდვის აზიური არითმეტიკული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f_N = f(S_0, S_1, \ldots, S_N) = \max(K - \overline{S}_N) \tag{10.31}$$

სადაც $\overline{S}_N$ მოიცემა (10.30) ტოლობით.

შევნიშნოთ, რომ შემდგომში ჩვენ ამ ოფციონებს არ განვიხილავთ.

ლექცია 11. ბინომური ხეები

1. ფინანსური ბაზრის (10.1), (10.2) ბინომური მოდელის შემთხვევაში აქციის შესაძლო ფასების, ოფციონის მიმდინარე ფასების (გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობების) აღწერისათვის და, აგრეთვე, ოფციონის სამართლიანი ფასის დადგენისათვის გამოიყენება ე. წ. ბინომური ხეები.

ჩვენ დაწვრილებით განვიხილავთ ერთნაბიჯიანი და ორნაბიჯიანი ბინომური ხეების აგების საკითხებს, რადგან სწორედ ამ შემთხვევებისათვის იქნება მოყვანილი სტანდარტული ოფციონების გათვლის რიცხვითი მაგალითები. მოკლედ შევეხებით, აგრეთვე, მრავალნაბიჯიანი (N – ნაბიჯიანი) ბინომური ხის აგების საკითხს.

გავიხსენოთ, რომ (10.8) დამოკიდებულების თანახმად (10.1), (10.2) მოდელის პარამეტრები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს: $-1 < a < r < b$. აქედან ჩანს, რომ a პარამეტრი შეიძლება იყოს როგორც უარყოფითი, ასევე ნულის ტოლი ან დადებითი. ამის გათვალისწინებით დროის ყოველ n მომენტში, $n = 1, \ldots, N$, გვექნება შემდეგი სამი შემთხვევიდან ერთ-ერთი:

1. თუ $a < 0$, მაშინ აქციის ერთი შესაძლო ფასი ნაკლები, ხოლო მეორე შესაძლო ფასი მეტი იქნება აქციის წინა ფასზე. მაგალითად,
$$S_0 > S_1 = (1+a)S_0, \quad S_0 < S_1 = (1+b)S_0.$$

2. თუ $a = 0$, მაშინ აქციის ერთი შესაძლო ფასი არ შეიცვლება, ხოლო მეორე შესაძლო ფასი მეტი იქნება აქციის წინა ფასზე. მაგალითად,
$$S_0 = S_1 = (1+a)S_0, \quad S_0 < S_1 = (1+b)S_0.$$

3. თუ $a > 0$, მაშინ აქციის ორივე შესაძლო ფასი მეტი იქნება აქციის წინა ფასზე. მაგალითად,
$$S_0 < S_1 = (1+a)S_0, \quad S_0 < S_1 = (1+b)S_0.$$

ამრიგად, პირველ შემთხვევაში აქციის ფასი დროის ყოველ მომენტში ან იკლებს ან იზრდება, მეორე შემთხვევაში ან არ იცვლება ან იზრდება, მესამე შემთხვევაში კი ყოველთვის იზრდება.

2. განვიხილოთ ერთნაბიჯიანი ბინომური ხის აგების საკითხი. ვიგულისხმოთ, რომ $N = 1$, ე. ი. $n = 0, 1$.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:
$$S_1 = S_{1,j} = S_0(1+b)^j(1+a)^{1-j}, \tag{11.1}$$
$$f_1 = f_{1,j} = f(S_{1,j}), \tag{11.2}$$
სადაც $j = 0, 1$, ხოლო $f = f_1$ რაიმე გადახდის ფუნქციაა.

დროის $n = 1$ მომენტში იმის მიხედვით $\rho_1 = a$ $(j = 0)$, თუ $\rho_1 = b$ $(j = 1)$, აქციის და ოფციონის ფასები დაითვლება, შესაბამისად, (11.1) და (11.2) ტოლობებით. გვექნება:
$$S_1 = S_{1,0} = S_0(1+a), \tag{11.3}$$
$$S_1 = S_{1,1} = S_0(1+b), \tag{11.4}$$
$$f_1 = f_{1,0} = f(S_{1,0}), \tag{11.5}$$
$$f_1 = f_{1,1} = f(S_{1,1}). \tag{11.6}$$

დროის $n = 0$ მომენტში ცნობილია S_0, a, r და b სიდიდეების მნიშვნელობები. ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია (11.3)–(11.6) ტოლობებით განსაზღვრული სიდიდეების გამოთვლა. ოფციონის სამართლიანი და მიმდინარე ფასების გამოთვლისათვის შემდგომში ჩვენ გამოვიყენებთ ე. წ. რისკ-ნეიტრალური ფასდადების პრინციპს, რომლის თანახმად საჭიროა $\rho - r$ სხვაობის მათემატიკური ლოდინი (საშუალო მნიშვნელობა) გავუტოლოთ ნულს. (10.5) განაწილების კანონის საშუალებით გვექნება
$$E(\rho_n - r) = E(\rho_n) - r =$$
$$= bp + a(1-p) - r = (b-a)p - (r-a) = 0,$$
სადაც E აღნიშნავს p ალბათობით მათემატიკური ლოდინის ოპერაციას.

აღვნიშნოთ p-ს მიმართ ამ განტოლების ამონახსნი p^*-ით. გვექნება

$$p^* = \frac{r-a}{b-a}, \quad 1-p^* = \frac{b-r}{b-a}. \tag{11.7}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $0 < p^* < 1$. ახალი p^* ალბათობის საშუალებით ρ_n სიდიდეების განაწილების კანონი მოიცემა შემდეგი სახით:

ρ_n	b	a
$P^*_{\rho_n}$	p^*	$1-p^*$

, $\quad n = 0, 1, \ldots, N.$ (11.8)

ამრიგად, ρ_n სიდიდეები იღებს b ან a მნიშვნელობებს შემდეგი ალბათობებით:

$$P^*(\rho_n = b) = p^*, \quad P^*(\rho_n = a) = 1 - p^*, \tag{11.9}$$

სადაც p^* განმარტებულია (11.7) ტოლობით.

ადვილი საჩვენებელია, რომ (11.8) განაწილების კანონის თანახმად ρ_n შემთხვევითი სიდიდეების მათემატიკური ლოდინი r საპროცენტო განაკვეთის ტოლია. მართლაც, გვაქვს

$$E^*(\rho_n) = bp^* + a(1-p^*) = b\,\frac{r-a}{b-a} + a\,\frac{b-r}{b-a} = r,$$

სადაც E^* აღნიშნავს p^* ალბათობით მათემატიკური ლოდინის ოპერაციას. შევნიშნოთ, რომ (11.9) ტოლობების გამოყენებით გვექნება:

$$P^*(S_1 = S_{1,1}) = P^*(f_1 = f_{1,1}) = p^*, \tag{11.10}$$

$$P^*(S_1 = S_{1,0}) = P^*(f_1 = f_{1,0}) = 1 - p^*. \tag{11.11}$$

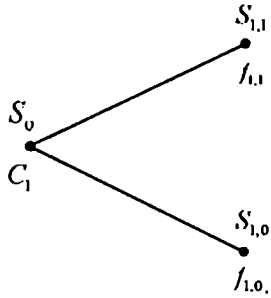
ამ ტოლობების საშუალებით შეიძლება გამოვთვალოთ f_1-ის მათემატიკური ლოდინი შემდეგნაირად

$$E^*(f_1) = p^* f_{1,1} + (1-p^*) f_{1,0},$$

ხოლო ოფციონის სამართლიანი ფასი C_1, რომელსაც კიდევ $C_{0,0}$-ით აღვნიშნავთ, r საპროცენტო განაკვეთის გათვალისწინებით გამოითვლება შემდეგი ტოლობით

$$C_1 = C_{0,0} = (1+r)^{-1}\big[p^* f_{1,1} + (1-p^*) f_{1,0}\big]. \tag{11.12}$$

ბინომური ხის კვანძებში ზედა მხარეზე წერენ აქციის ფასების, ხოლო ქვედა მხარეზე ოფციონის ფასების მნიშვნელობებს. დროის $n = 0$ მომენტს შეესაბამება ბინომური ხის საწყისი კვანძი (წვერო), რომელშიც წერენ აქციის საწყისი ფასის მნიშვნელობას და ოფციონის სამართლიან ფასს. დროის $n = 1$ მომენტს შეესაბამება წვეროდან გამომავალი ორი შტოს ბოლოს ორი ფინალური (ბოლო) კვანძი. (11.3)–(11.6) და (10.12) ტოლობების გათვალისწინებით სქემატურად ერთნაბიჯიანი ბინომური ხე შეიძლება დავხაზოთ შემდეგნაირად:



ნახ. 11.1.

3^0. გადავიდეთ ორნაბიჯიანი ბინომური ხის აგებაზე. ვიგულისხმოთ, რომ $N = 2$, ე. ი. $n = 0, 1, 2$. ადვილი მისახვედრია, რომ ორნაბიჯიან ბინომურ ხეს უნება სამი ფინალური კვანძი.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$S_2 = S_{2,j} = S_0(1+b)^j(1+a)^{2-j}, \tag{11.13}$$

$$f_2 = f_{2,j} = f(S_{2,j}), \tag{11.14}$$

სადაც $j = 0, 1, 2$, ხოლო $f = f_2$ რაიმე გადახდის ფუნქციაა.

დროის $n = 1$ მომენტში აქციის შესაძლო ფასები დაითვლება (11.3), (11.4) ტოლობებით.

დროის $n = 2$ მომენტში აქციის და ოფციონის ფასები დაითვლება, შესაბამისად, (11.13) და (11.14) ტოლობებით. ორნაბიჯიანი ბინომური ხის სამ ფინალურ კვანძში $j = 0$, $j = 1$ და $j = 2$ შემთხვევების შესაბამისად გვექნება:

$$S_2 = S_{2,0} = S_0(1+a)^2, \tag{11.15}$$

$$S_2 = S_{2,1} = S_0(1+b)(1+a), \tag{11.16}$$

$$S_2 = S_{2,2} = S_0(1+b)^2, \tag{11.17}$$

$$f_2 = f_{2,0} = f(S_{2,0}), \tag{11.18}$$

$$f_2 = f_{2,1} = f(S_{2,1}), \tag{11.19}$$

$$f_2 = f_{2,2} = f(S_{2,2}). \tag{11.20}$$

დროის $n = 1$ მომენტში ოფციონის მიმდინარე ფასებისათვის შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$C_{1,0} = f(S_{1,0}), \tag{11.21}$$

$$C_{1,1} = f(S_{1,1}). \tag{11.22}$$

ეს სიდიდეები (11.18), (11.19) და (11.20) ტოლობების გათვალისწინებით დაითვლება, შესაბამისად, შემდეგი ტოლობებით:

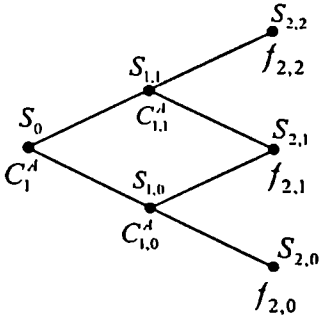
$$C_{1,0} = (1+r)^{-1}\big[p^* f_{2,1} + (1-p^*) f_{2,0}\big], \tag{11.23}$$

$$C_{1,1} = (1+r)^{-1}\big[p^* f_{2,2} + (1-p^*) f_{2,1}\big]. \tag{11.24}$$

რაც შეეხება ოფციონის სამართლიან ფასს, იგი დაითვლება (11.23) და (11.24) ტოლობების საშუალებით შემდეგი ტოლობით

$$C_2 = C_{0,0} = (1+r)^{-1}\big[p^* C_{1,1} + (1-p^*) C_{1,0}\big]. \tag{11.25}$$

ორნაბიჯიანი ბინომური ხე (11.15)–(11.20) და (11.23)–(11.25) ტოლობების გათვალისწინებით სქემატურად შეიძლება დავხაზოთ შემდეგნაირად:



ნახ. 11.2.

4. განვიხილოთ ახლა N-ნაბიჯიანი ბინომური ხის აგების საკითხი. ადვილი მისახვედრია, რომ ამ შემთხვევაში გვექნება $N+1$ ფინალური კვანძი.

დროის $n = 0, 1, \ldots, N$ მომენტებში აქციის შესაძლო ფასები დაითვლება შემდეგი ტოლობებით

$$S_N = S_{Nij} = S_0(1+b)^j(1+a)^{N-j}, \quad j = 0, 1 \ldots, N. \tag{11.26}$$

დროის ბოლო $n = N$ მომენტში $N+1$ ფინალურ კვანძში ოფციონის ფასები დაითვლება შემდეგი ტოლობით

$$f_N = f_{Nij} = f(S_{Nij}), \tag{11.27}$$

სადაც $j = 0, 1, \ldots, N$, ხოლო $f = f_N$ რაიმე გადახდის ფუნქციაა.

ამის შემდეგ N-ნაბიჯიანი ბინომური ხის ფინალურის წინა N კვანძში დროის $n = N-1$ მომენტში ოფციონის მიმდინარე ფასები დაითვლება შემდეგი ტოლობით

$$C_{N-1,j} = (1+r)^{-1}\big[p^* f_{N,j+1} + (1-p^*) f_{Nij}\big], \quad j = 0, 1, \ldots, N_1. \tag{11.28}$$

შემდეგ დროის $n = N-2$ მომენტში $N-1$ კვანძში გვექნება

$$C_{N-2,j} =$$

$$= (1+r)^{-1}\big[p^* C_{N-1,j+1} + (1-p^*)C_{N-1,j}\big], \quad j = 0, 1, \ldots, N-2. \quad (11.29)$$

ამ პროცედურის გაგრძელებით დროის $n = N-k$ მომენტში $N-k+1$ კვანძში გვექნება

$$C_{N-k,j} = (1+r)^{-1}\big[p^* C_{N-k+1,j+1} + (1-p^*)C_{N-k+1,j}\big], \quad (11.30)$$
$$j = 0, 1, \ldots, N_k.$$

პროცედურის კვლავ გაგრძელებით დროის $n = N - N = 0$ მომენტში მივალწევთ N-ნაბიჯიანი ბინომური ხის საწყის კვანძს ანუ წვეროს, რომელშიც ოფციონის სამართლიანი ფასი დაითვლება შემდეგი ტოლობით

$$C_N = C_{0,0} = (1+r)^{-1}\big[p^* C_{1,1} + (1-p^*)C_{1,0}\big]. \quad (11.31)$$

ამრიგად, N-ნაბიჯიანი ბინომური ხის კვანძებში აქციის შესაძლო ფასების დათვლა ხდება ხის წვეროდან ფინალური $N+1$ კვანძების მიმართულებით დროის $n = 1, \ldots, N$ მომენტებში (11.26) ტოლობების გამოყენებით. რაც შეეხება ოფციონის ფასების გამოთვლას, იგი იწყება N-ნაბიჯიანი ბინომური ხის $N+1$ ფინალური კვანძიდან და მთავრდება საწყის კვანძში ოფციონის სამართლიანი ფასის გამოთვლით (11.27)–(11.31) ტოლობების გამოყენებით.

ადვილი მისახვედრია, რომ რეალურ სიტუაციაში ჩვენ გვექნება N-ნაბიჯიანი ბინომური ხის შტოების მიხედვით აქციის შესაძლო ფასების ერთი კონკრეტული ტრაექტორია. შევნიშნოთ, აგრეთვე, რომ ყოველ კვანძში დროის $n = 0, 1, \ldots, N_1$ მომენტებში საჭირო იქნება დროის შემდეგი მომენტისათვის აქციის და ოფციონის მხოლოდ ორი შესაძლო ფასის გათვალისწინება.

5. მესამე პარაგრაფის ბოლოს გვინდა მოვიყვანოთ ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის სამართლიანი ფასის ფორმულა, რომელიც ფინანსური ბაზრის (10.1), (10.2) ბინომური მოდელის ავტორებს ეკუთვნით. ეს ფორმულა იმით არის საინტერესო, რომ მასში შედის მხოლოდ მოდელის საწყისი პარამეტრები ანუ S_0, a, r, b, K და N სიდიდეები.

აღვნიშნოთ k_0-ით ის უმცირესი მთელი რიცხვი, რომლისთვისაც სრულდება შემდეგი უტოლობა

$$S_0(1+a)^N \cdot \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{k_0} > K. \quad (11.32)$$

შევნიშნოთ, რომ k_0-ის გამოთვლა შეიძლება როგორც (11.32) უტოლობის გამოყენებით, ასევე შემდეგი დამოკიდებულებიდან, რომელიც უშუალოდ

(11.32) უტოლობიდან გამომდინარეობს:

$$k_0 = 1 + \left[\ln \frac{K}{S_0(1+a)N} \Big/ \ln \frac{1+b}{1+a} \right], \tag{11.33}$$

სადაც $[x]$ სიმბოლო აღნიშნავს x რიცხვის მთელ ნაწილს და განმარტებით არის ის უდიდესი მთელი რიცხვი, რომელიც არ აღემატება x რიცხვს. მაგალითად $[7,5] = 7$.

სამართლიანი ფასის ფორმულას აქვს შემდეგი სახე:

$$C_N = S_0 \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} \Big(\frac{1+a}{1+r}\Big)^N \Big(\frac{1+b}{1+a}\Big)^k -$$

$$- K(1+r)^{-N} \sum_{k=k_0}^{N} C_n^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k}, \tag{11.34}$$

სადაც p^* განსაზღვრულია (11.7) ტოლობით, ხოლო C_N^k არის N ელემენტიდან k ელემენტიანი ჯგუფდება და განიმარტება ტოლობით

$$C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}, \quad k \le N. \tag{11.35}$$

ნატურალური n რიცხვისათვის $n!$ (იკითხება n ფაქტორიალი) განმარტებით ტოლია $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$. მიღებულია, რომ $0! = 1$.

შევნიშნოთ, რომ თუ $k_0 > N$, მაშინ $C_N = 0$.

განვიხილოთ ახლა ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი (10.24) გადახდის ფუნქციით და აღვნიშნოთ P_N-ით მისი სამართლიანი ფასი. მტკიცდება, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას

$$P_N = C_N - S_0 + K(1+r)^{-N}. \tag{11.36}$$

ამ ტოლობას "ყიდვა-გაყიდვის პარიტეტის" ფორმულა ეწოდება. იგი ადგენს კავშირს ევროპული ტიპის ყიდვისა და გაყიდვის სტანდარტული ოფციონების სამართლიან ფასებს შორის.

ლექცია 12. მოპასუხე პორტფელი

1. განვიხილოთ ფინანსური (B,S) ბაზრის ბინომური მოდელი (10.1), (10.2). გარკვეულობისათვის კიგულისხმოთ, რომ გვაქვს აქციის ყიდვის ან გაყიდვის ევროპული ტიპის ოფციონი რაიმე გადახდის ფუნქციით $f = f_N$.

ვთქვათ, დროის n მომენტში ინვესტორს (ეიტენტს) აგებული აქვს პორტფელი $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$, რომლის შესაბამისი კაპიტალი მოიცემა ტოლობით

$$X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n. \tag{12.1}$$

დროის $n+1$ მომენტის დადგომამდე შეიძლება ავაგოთ ახალი პორტფელი $\pi_{n+1} = (\beta_{n+1}, \gamma_{n+1})$, რომლის საშუალებით (12.1) ტოლობით მოცემული X_n^π კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_n^\pi = \beta_{n+1}B_n + \gamma_{n+1}S_n. \tag{12.2}$$

დროის $n+1$ მომენტის დადგომის შემდეგ B_{n+1} და S_{n+1} სიდიდეების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით π_{n+1} პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი მოიცემა ტოლობით

$$X_{n+1}^\pi = \beta_{n+1}B_{n+1} + \gamma_{n+1}S_{n+1}. \tag{12.3}$$

ჩვენი ამოცანაა დროის ყოველ n მომენტში, $n = 0, 1, \ldots, N-1$ აგებული პორტფელი იყოს მინიმალური პეჯი, ანუ იყოს ისეთი, რომ დროის $n = N$ მომენტში შესრულდეს (10.21) პირობა. ამ ამოცანის გადასაწყვეტად ჩვენ გამოვიყენებთ მოპასუხე პორტფელის პრინციპს, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: დროის n მომენტში აგებული $\pi_{n+1} = (\beta_{n+1}, \gamma_{n+1})$ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალისათვის დროის $n+1$ მომენტში უნდა შესრულდეს ტოლობა

$$X_{n+1}^\pi = \beta_{n+1}B_{n+1} + \gamma_{n+1}S_{n+1} = f(S_{n+1}). \tag{12.4}$$

ფინანსური ბაზრის (10.1), (10.2) მოდელის გათვალისწინებით, (12.4) ტოლობა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი ორი ტოლობის სახით:

$$\beta_{n+1}(1+r)B_n + \gamma_{n+1}(1+b)S_n = f((1+b)S_n), \tag{12.5}$$

$$\beta_{n+1}(1+r)B_n + \gamma_{n+1}(1+a)S_n = f((1+a)S_n). \tag{12.6}$$

როგორც ვხედავთ, β_{n+1} და γ_{n+1} უცნობი სიდიდეების მიმართ მივიღეთ ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემა. აღვნიშნოთ β_{n+1}^* და γ_{n+1}^* სიდიდეებით ამ სისტემის ამონახსნი. ადვილად დავრწმუნდებით იმაში, რომ ეს ამონახსნი მოიცემა შემდეგი ტოლობებით:

$$\beta_{n+1}^* = \frac{(1+b)f((1+a)S_n) - (1+a)f((1+b)S_n)}{(1+r)(b-a)B_n}, \tag{12.7}$$

$$\gamma_{n+1}^* = \frac{f((1+b)S_n) - f((1+a)S_n)}{(b-a)S_n}. \tag{12.8}$$

ამრიგად, თუ დროის $n = 0, 1, \ldots, N-1$ მომენტებში პორტფელებს ავაგებთ (12.7), (12.8) ტოლობების გამოყენებით, მაშინ დროის ბოლო N მომენტში $\pi_N^* = (\beta_N^*, \gamma_N^*)$ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი, მოპასუხე პორტფელის პრინციპის თანახმად, დააკმაყოფილებს პირობას

$$X_N^{\pi^*} = \beta_N^* B_N + \gamma_N^* S_N = f(S_N). \tag{12.9}$$

სხვანაირად ეს იმას ნიშნავს, რომ $\pi^* = (\pi_N^*)$, $\pi_N^* = (\beta_N^*, \gamma_N^*)$, პორტფელი (პორტფელების მიმდევრობა) არის მინიმალური პეჯი, რომლის შესაბამისი კაპიტალი დროის ბოლო N მომენტში ზუსტად პასუხობს ოფციონის გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობას. ამასთან ერთად, მინიმალური პეჯის

აგების კონსტრუქციის გათვალისწინებით, ადვილად მივიღებთ, რომ იგი არის თვითდაფინანსებადი.

შევიტანოთ ახლა β^*_{n+1} და γ^*_{n+1} სიდიდეების (12.7) და (12.8) გამოსახულებები X^π_n კაპიტალის (12.2) წარმოდგენაში β_{n+1} და γ_{n+1} სიდიდეების მაგიერად. მაშინ მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}
X^{\pi^*}_N &= \beta^*_{n+1}B_n + \gamma^*_{n+1}S_n = \\
&= \frac{(1+b)f((1+a)S_n)-(1+a)f((1+b)S_n)}{(1+r)(b-a)B_n}\cdot B_n + \\
&\quad + \frac{f((1+b)S_n)-f((1+a)S_n)}{(b-a)S_n}\cdot S_n = \\
&= (1+r)^{-1}\left[\frac{r-a}{b-a}\,f\big((1+b)S_n\big)+\frac{b-r}{b-a}\,f\big((1+a)S_n\big)\right]. \qquad (12.10)
\end{aligned}$$

თუ გამოვიყენებთ (11.7) ტოლობებს, მაშინ π^*_{n+1} მინიმალური პეჯის შესაბამისი კაპიტალი (12.10) წარმოდგენის გათვალისწინებით ჩაიწერება შემდეგი ტოლობით:

$$X^{\pi^*}_N = (1+r)^{-1}\Big[p^*f\big((1+b)S_n\big)+(1-p^*)f\big((1+a)S_n\big)\Big]. \qquad (12.11)$$

შევნიშნოთ, რომ (12.7)–(12.11) ტოლობებში f გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობები დროის $n=0,1,\dots,N-1$ მომენტებში, ფაქტობრივად, წარმოადგენს (11.28)–(11.31) ტოლობებით მოცემულ ოფციონის ფასებს.

2. შემდგომში ჩვენ დაგვჭირდება მინიმალური პეჯისა და მისი შესაბამისი კაპიტალის ცხადი გამოსახულებები ერთნაბიჯიანი და ორნაბიჯიანი ბინომური ხეებისათვის.

ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა $N=1$, ე. ი. $n=0,1$. საჭიროა დროის $n=0$ მომენტში ავაგოთ $\pi^*_1=(\beta^*_1,\gamma^*_1)$ მინიმალური პეჯი. (12.7), (12.8) ტოლობების და (11.1), (11.2) აღნიშვნების თანახმად გვექნება:

$$\begin{aligned}
\beta^*_1 &= \frac{(1+b)f((1+a)S_0)-(1+a)f((1+b)S_0)}{(1+r)(b-a)B_0} = \\
&= \frac{(1+b)f(S_{1,0})-(1+a)f(S_{1,1})}{(1+r)(b-a)B_0} = \\
&= \frac{(1+b)f_{1,0}-(1+a)f_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0}, \qquad (12.12)\\
\gamma^*_1 &= \frac{f((1+b)S_0)-f((1+a)S_0)}{(b-a)S_0} = \\
&= \frac{f(S_{1,1})-f(S_{1,0})}{(b-a)S_0} = \frac{f_{1,1}-f_{1,0}}{(b-a)S_0}. \qquad (12.13)
\end{aligned}$$

დროის $n = 0$ მომენტში (12.12), (12.13) ტოლობებით აგებული $\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*)$ მინიმალური პეჯის შესაბამისი კაპიტალი (12.2), (12.11) ტოლობების თანახმად, ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_0^{\pi^*} = \beta_1^* B_0 + \gamma_1^* S_0, \tag{12.14}$$

$$\begin{aligned} X_0^{\pi^*} &= (1+r)^{-1}\Big[p^* f\big((1+b)S_0\big) + (1-p^*) f\big((1+a)S_0\big)\Big] = \\ &= (1+r)^{-1}\Big[p^* f(S_{1,1}) + (1-p^*) f(S_{1,0})\Big] = \\ &= (1+r)^{-1}\big[p^* f_{1,1} + (1-p^*) f_{1,0}\big]. \end{aligned} \tag{12.15}$$

შევნიშნოთ, რომ (11.12) ტოლობით მოცემული C_1 სამართლიანი ფასის და (12.14), (12.15) ტოლობებით მოცემული $X_0^{\pi^*}$ კაპიტალის მნიშვნელობები ერთმანეთის ტოლია.

დროის $n = 1$ მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ფასების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით π^* მინიმალური პეჯის შესაბამისი კაპიტალი $X_1^{\pi^*}$ ტოლი იქნება (ზუსტად უპასუხებს) გადახდის ფუნქციის $f(S_1)$-ის მნიშვნელობის ე. ი. შესრულდება ტოლობა

$$X_1^{\pi^*} = \beta_1^* B_1 + \gamma_1^* S_1 = f(S_1). \tag{12.16}$$

ამრიგად, $N = 1$ შემთხვევაში დროის $n = 0$ მომენტში აგებული $\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*)$ მინიმალური პეჯისათვის გვაქვს შემდეგი ფორმულები:

$$\beta_1^* = \frac{(1+b)f_{1,0} - (1+a)f_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0}, \tag{12.17}$$

$$\gamma_1^* = \frac{f_{1,1} - f_{1,0}}{(b-a)S_0}, \tag{12.18}$$

ხოლო π_1^* პორტფელის შესაბამისი $X_0^{\pi^*}$ კაპიტალისათვის (12.14) ტოლობასთან ერთად გვაქვს შემდეგი ფორმულა:

$$X_0^{\pi^*} = (1_r)^{-1}\big[p^* f_{1,1} + (1-p^*) f_{1,0}\big]. \tag{12.19}$$

3. განვიხილოთ ახლა შემთხვევა $N = 2$, ე. ი. $n = 0, 1, 2$. ამ შემთხვევაში დროის $n = 0$ მომენტში საჭიროა ავაგოთ $\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*)$ მინიმალური პეჯი, რომლის შესაბამისი $X_1^{\pi^*}$ კაპიტალით დროის $n = 1$ მომენტში უნდა ავაგოთ $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*)$ მინიმალური პეჯი. (11.21), (11.22) აღნიშვნებისა და (12.7), (12.8) ტოლობების თანახმად გვექნება:

$$\begin{aligned} \beta_1^* &= \frac{(1+b)f\big((1+a)S_0\big) - (1+a)f\big((1+b)S_0\big)}{(1+r)(b-a)B_0} = \\ &= \frac{(1+b)f(S_{1,0}) - (1+a)f(S_{1,1})}{(1+r)(b-a)B_0} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(1+b)C_{1,0} - (1+a)C_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0}, \tag{12.20}$$

$$\gamma_1^* = \frac{f((1+b)S_0) - f((1+a)S_0)}{(b-a)S_0} =$$

$$= \frac{f(S_{1,1}) - f(S_{1,0})}{(b-a)S_0} = \frac{C_{1,1} - C_{1,0}}{(b-a)S_0}. \tag{12.21}$$

ადვილი მისახვედრია, რომ (12.20), (12.21) ტოლობით დროის $n = 0$ მომენტში აგებული $\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*)$ მინიმალური პეჯის შესაბამისი კაპიტალი, (12.2), (12.11) ტოლობების თანახმად, ჩაიწერა შემდეგი სახით:

$$X_0^{\pi^*} = \beta_1^* B_0 + \gamma_1^* S_0, \tag{12.22}$$

$$X_0^{\pi^*} = (1+r)^{-1}\big[p^* C_{1,1} + (1-p^*)C_{1,0}\big]. \tag{12.23}$$

სადაც $C_{1,0}$ და $C_{1,1}$ სიდიდეები, ისე როგორც (12.20), (12.21) ტოლობებში, მოიცემა, შესაბამისად, (11.23), (11.24) ტოლობებით.

ცხადია, $X_0^{\pi^*}$ კაპიტალის (12.22), (12.23) ტოლობებით მოცემული მნიშვნელობა (11.25) ტოლობით მოცემული C_2 სამართლიანი ფასის ტოლია.

ამრიგად, დროის $n = 0$ მომენტში $\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*)$ მინიმალური პეჯისთვის გვაქვს შემდეგი ფორმულები:

$$\beta_1^* = \frac{(1+b)C_{1,0} - (1+a)C_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0}, \tag{12.24}$$

$$\gamma_1^* = \frac{C_{1,1} - C_{1,0}}{(b-a)S_0}. \tag{12.25}$$

ხოლო π_1^* პორტფელის შესაბამისი $X_0^{\pi^*}$ კაპიტალისათვის გვაქვს (12.22), (12.23) ფორმულები.

დროის $n = 1$ მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ფასების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით, π_1^* მინიმალური პეჯის შესაბამისი კაპიტალის მნიშვნელობა ოფციონის $f(S_1)$ ფასის მნიშვნელობის ტოლი იქნება და მოიცემა ტოლობით

$$X_1^{\pi^*} = \beta_1^* B_1 + \gamma_1^{\pi^*} S_1 = f(S_1). \tag{12.26}$$

ამ თანხით დროის $n = 1$ მომენტში ჩვენ უნდა ავაგოთ $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*)$ მინიმალური პეჯი. (12.7) და (12.8) ტოლობების თანახმად გვექნება:

$$\beta_2^* = \frac{(1+b)f((1+a)S_1) - (1+a)f((1+b)S_1)}{(1+r)(b-a)B_1}, \tag{12.27}$$

$$\gamma_2^* = \frac{f((1+b)S_1) - f((1+a)S_1)}{(b-a)S_1} = \tag{12.28}$$

დროის $n = 1$ მომენტში $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*)$ მინიმალური პეჯის შესაბამისი $X_1^{\pi^*}$ კაპიტალი (12.2), (12.11) ტოლობების თანახმად მოიცემა შემდეგი

ფორმულებით:

$$X_1^{\pi^*} = \beta_2^* B_1 + \gamma_2^* S_1, \tag{12.29}$$

$$X_1^{\pi^*} = (1+r)^{-1}\Big[p^* f\big((1+b)S_1\big) + (1-p^*) f\big((1+a)S_1\big)\Big]. \tag{12.30}$$

დროის $n=2$ მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ფასების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით, $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*)$ მინიმალური პეჯის შესაბამისი კაპიტალი $X_2^{\pi^*}$ ტოლი იქნება (ზუსტად უპასუხებს) ოფციონის $f(S_2)$ ფასის მნიშვნელობას, ე. ი. შესრულდება ტოლობა

$$X_2^{\pi^*} = \beta_2^* B_2 + \gamma_2^* S_2 = f(S_2). \tag{12.31}$$

ამრიგად, ბინომური ხეების აგებით და მოპასუხე პორტფელის პრინციპით აგებული მინიმალური პეჯის საშუალებით ჩვენ გადავწყვიტეთ ევროპული ტიპის ოფციონის გათვლის ამოცანა. კერძო შემთხვევებში ერთსაბიჯიანი $(N=1,\ n=0,1)$ და ორსაბიჯიანი $(N=2,\ n=0,1,2)$ ამოცანებისათვის მოვიყვანეთ ოფციონის სამართლიანი ფასის, მინიმალური პეჯისა და მისი შესაბამისი კაპიტალის ფორმულები, რომელსაც ჩვენ შემდგომში გამოვიყენებთ რიცხვითი მაგალითებისათვის.

ლექცია 13. ყიდვის სტანდარტული ოფციონი

ახლა განვიხილოთ (10.1), (10.2) ტოლობებით განსაზღვრული ფინანსური (B,S) ბაზრის კოქსის, როსისა და რუბინშტეინის დისკრეტული მოდელი

$$B_n = (1+r)B_{n-1},\quad B_0 > 0, \tag{13.1}$$

$$S_n = (1+\rho_n)S_{n-1},\quad S_0 > 0,\quad n = 0,1,\ldots,N. \tag{13.2}$$

ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$$\text{I. } B_0 = 20,\quad r = \frac{1}{5}, \tag{13.3}$$

$$\text{II. } S_0 = 100,\quad \rho_n = b = \frac{3}{5},\ \text{ან}\ \rho_n = a = \frac{2}{5},\quad n = 0,1,\ldots,N. \tag{13.4}$$

III. ევროპული ტიპის ყიდვის (გაყიდვის) სტანდარტული ოფციონის გადახდის ფუნქციაში შეთანხმების ფასი

$$K = 100. \tag{13.5}$$

ჩვენ შემდგომში ხშირად დაგვჭირდება შემდეგი სიდიდეები და მათი რიცხვითი მნიშვნელობები:

$$\begin{gathered} 1+a=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}, \quad 1+b=1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}, \\ b-a=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=1, \\ p^*=\frac{r-a}{b-a}=\frac{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}+\frac{2}{5}}=\frac{3}{5}, \quad 1-p^*=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}, \\ 1+r=1+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}, \quad (1+r)^{-1}=\left(\frac{6}{5}\right)^{-1}=\frac{5}{6}. \end{gathered} \tag{13.6}$$

მაგალითი 13.1. განვიხილოთ (13.1), (13.2) ფინანსური ბაზარი და ვთქვათ, $N=1$, ე. ი. $n=0,1$. გარდა ამისა ვიგულისხმოთ, რომ შესრულებულია (13.3)–(13.5) პირობები. დავუშვათ, ინვესტორმა იყიდა (ქმიტესტმა გაყიდა) ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f_1=f(S_1)=\max(S_1-K,0). \tag{13.7}$$

ჩვენი მიზანია გადავწყვიტოთ ოფციონის გათვლის ერთნაბიჯიანი ამოცანა. ამისათვის პირველ რიგში ავაგოთ ერთნაბიჯიანი ბინომური ხე.

დროის $n=1$ მომენტში აქციისა და ოფციონის შესაძლო ფასების მნიშვნელობები, (13.7) და (11.3)–(11.6) ტოლობების თანახმად, შესაბამისად, ტოლი იქნება:

$$S_{1,0}=S_0(1+a)=100\cdot\frac{3}{5}=60, \tag{13.8}$$

$$S_{1,1}=S_0(1+b)=100\cdot\frac{8}{5}=160, \tag{13.9}$$

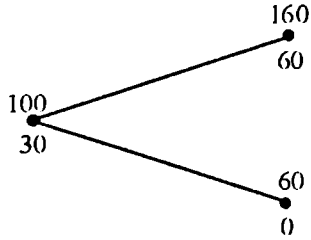
$$f_{1,0}=\max(S_{1,0}-K,0)=\max(60-100,0)=0, \tag{13.10}$$

$$f_{1,1}=\max(S_{1,1}-K,0)=\max(160-100,0)=60. \tag{13.11}$$

გამოვთვალოთ, აგრეთვე, დროის $n=0$ მომენტში ოფციონის საწყისი ფასი ანუ ოფციონის სამართლიანი ფასი. (13.6) ტოლობების გათვალისწინებით და (11.12) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$C_1=(1_r)^{-1}\left[p^*f_{1,1}+(1-p^*)f_{1,0}\right]=\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 60+\frac{2}{5}\cdot 0\right)=30. \tag{13.12}$$

ამრიგად, ერთნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე:



ნახ. 13.1.

საინტერესოა გამოვთვალოთ C_1 სიდიდის მნიშვნელობა, აგრეთვე, კოკსის, როსის და რუბინშტეინის (11.34) ფორმულის საშუალებით. ამისათვის გამოვიყენოთ (11.32) უტოლობა $N=1$ შემთხვევაში. გვექნება

$$S_0(1+a)\Big(\frac{1+b}{1+a}\Big)^{k_0} > K.$$

ვთქვათ, $k_0=0$, მაშინ გვექნება

$$100\cdot\frac{3}{5}\left(\frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}}\right)^0 > 100,$$

საიდანაც მივიღებთ არასწორ უტოლობას $\frac{3}{5}>1$. ამიტომ $k_0=0$ მნიშვნელობა k_0-ის განმარტების თანახმად არ გამოდგება.

ვთქვათ, $k_0=1$, მაშინ გვექნება

$$100\cdot\frac{3}{5}\left(\frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}}\right) > 100,$$

საიდანაც მივიღებთ სწორ უტოლობას $\frac{8}{5}$. აქრიგად, $k_0=1$. შევნიშნოთ, რომ k_0-ის მნიშვნელობა შეიძლება გამოვთვალოთ, აგრეთვე, (11.33) ფორმულის გამოყენებით. (11.34) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$C_1 = S_0C_1^1\cdot p^*(1-p^*)^0\cdot\frac{1+a}{1+r}\cdot\frac{1+b}{1+a} - K\cdot(1+r)^{-1}\cdot C_1^1p^*(1-p^*)^0 =$$
$$= 100\cdot1\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^0\cdot\frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}}\cdot\frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}} - 100\cdot\frac{5}{6}\cdot1\cdot\frac{3}{6}\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^0 = 30.$$

ემიტენტის წინაშე დგას შემდეგი ამოცანა: ოფციონის გაყიდვით მიღებული თანხით დროის $n=0$ მომენტში მან უნდა ააგოს $\pi_1^*=(\beta_1^*,\gamma_1^*)$ მინიმალური პეჯი. ეს იმას ნიშნავს, რომ C_1 თანხით (შესაძლოა კიდევ ნასესხები თანხით) მან უნდა შეიძინოს β_1^* რაოდენობის ობლიგაცია და γ_1^* რაოდენობის აქცია, ანუ ააგოს $\pi_1^*=(\beta_1^*,\gamma_1^*)$ პორტფელი, რომლის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n=1$ მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ფასების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით, ზუსტად $f(S_1)$ სიდიდის ტოლი იქნება.

(12.17), (12.18) ფორმულების თანახმად გვექნება:

$$\beta_1^* = \frac{(1+b)f_{1,0} - (1+a)f_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0} = \frac{\frac{8}{5}\cdot 0 - \frac{3}{5}\cdot 60}{\frac{6}{5}\cdot 1\cdot 20} = -\frac{3}{2}, \tag{13.13}$$

$$\gamma_1^* = \frac{f_{1,1} - f_{1,0}}{(b-a)S_0} = \frac{60-0}{1\cdot 100} = \frac{3}{5}. \tag{13.14}$$

ამრიგად, მივიღეთ $\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{5})$. ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n=0$ მომენტში (დროის $n=1$ მომენტის დადგომამდე) (12.14), (12.19) ფორმულების თანახმად შეიძლება ჩავწეროთ, შესაბამისად, შემდეგი სახით:

$$X_0^{\pi^*} = \beta_1^* B_0 + \gamma_1^* S_0 = -\frac{3}{2}\cdot 20 + \frac{3}{5}\cdot 100 = 30, \tag{13.15}$$

$$X_0^{\pi^*} = (1+r)^{-1}\left[p^* f_{1,1} + (1-p^*)f_{1,0}\right] =$$
$$= \frac{5}{6}\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot 60 + \frac{2}{5}\cdot 0\right) = 30. \tag{13.16}$$

ა მ ო ც ა ნ ა 13.1. დროის $n=0$ მომენტში ჩვენ ავაგეთ სტრატეგია $\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{5})$.

1. $C_1 = 30$-ის ტოლი თანხით ააგეთ რაიმე საწყისი სტრატეგია $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$.
2. შეამოწმეთ ტოლობა
$$X_0^{\pi} = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0,$$
3. შეამოწმეთ თვითდაფინანსების (10.18) პირობა
$$\Delta\beta_1^* B_0 + \Delta\gamma_1^* S_0 = 0,$$
სადაც $\Delta\beta_1^* = \beta_1^* - B_0$, $\Delta\gamma_1^* = \gamma_1^* - \gamma_0$.

ახლა გავაანალიზოთ, რა ოპერაციები ჩაატარა ემიტენტმა დროის $n=0$ მომენტში. ოფციონის გაყიდვით მან მიიღო 30-ის ტოლი თანხა, ისესხა $\frac{3}{2}$ ობლიგაცია ანუ $\frac{3}{2}\cdot 20 = 30$-ის ტოლი თანხა და იყიდა $\frac{3}{5}$ აქცია, რის საშუალება მას მართლაც აქვს, რადგან

$$\frac{3}{5}\cdot 100 = 60 = 30 + 30 = 60.$$

დროის $n=1$ მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ფასების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით, (12.16) ფორმულის თანახმად,

$$\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{5}\right)$$

პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$C_1^{\pi^*} = \beta_1^* B_1 + \gamma_1^* S_1 = -\frac{3}{2} B_1 + \frac{3}{5} S_1 = f(S_1). \qquad (13.17)$$

ნახაზ 13.1.-ზე მოცემული ბინომური ხის გამოყენებით ჩვენ უნდა განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა.

შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა I. ვთქვათ, $S_1 = S_{1,1} = 160$. ობლიგაციის ფასია

$$B_1 = (1+r)B_0 = \frac{6}{5} \cdot 20 = 24.$$

ასეთ შემთხვევაში (13.17)-ის თანახმად გვექნება

$$X_1^{\pi^*} = -\frac{3}{2} \cdot 24 + \frac{3}{5} \cdot 160 = 60,$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას:

$$f_{1,1} = f(S_{1,1}) = 60.$$

ამრიგად, დროის $n = 1$ მომენტში ემიტენტი გაყიდის $\frac{3}{5}$ აქციას და მიიღებს $\frac{3}{5} \cdot 160 = 96$-ის ტოლ თანხას. ამ თანხიდან იგი გაისტუმრებს $\frac{3}{2}$ ობლიგაციის ვალს ანუ $\frac{3}{2} \cdot 24 = 36$-ის ტოლ თანხას, ხოლო დარჩენილი $96 - 36 = 60$-ის ტოლი თანხით შეასრულებს ოფციონის ვალდებულებას.

შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა II. ვთქვათ, $S_1 = S_{1,0} = 60$. ასეთ შემთხვევაში (13.17)-ის თანახმად გვექნება

$$X_1^{\pi^*} = -\frac{3}{2} \cdot 24 + \frac{3}{5} \cdot 60 = 0,$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას

$$f_{1,0} = f(S_{1,0}) = 0.$$

დროის $n = 1$ მომენტში ემიტენტი გაყიდის $\frac{3}{5}$ აქციას და მიიღებს $\frac{3}{5} \cdot 60 = 36$-ის ტოლ თანხას, რითაც ზუსტად გაისტუმრებს $\frac{3}{2}$ ობლიგაციის ვალს ანუ $\frac{3}{2} \cdot 24 = 36$-ის ტოლ თანხას, ხოლო ოფციონის ვალდებულებით ის არაფერს იხდის, რადგან $f_{1,0} = f(S_{1,0}) = 0$.

ამრიგად, მაგალითი 13.1-ის პირობებში ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ერთნაბიჯიანი ამოცანა გადაწყვეტილია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 13.2. განვიხილოთ (13.1), (13.2) ფინანსური ბაზარი და ვთქვათ, $N = 2$, ე. ი. $n = 0, 1, 2$. ვიგულისხმოთ, რომ შესრულებულია (13.3)–(13.5) პირობები. დავუშვათ, ინვესტორმა იყიდა (ემიტენტმა გაყიდა) ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f = f(S_2) = \max(S_2 - K, 0). \qquad (13.18)$$

ჩვენი მიზანია, გადავწყვიტოთ ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიანი ამოცანა. ამისათვის პირველ რიგში ავაგოთ ორნაბიჯიანი ბინომური ხე. დროის $n = 2$ მომენტში ბინომური ხის სამ ფინალურ (ბოლო) კვანძში აქციის შესაძლო ფასების მნიშვნელობებისათვის (11.15)–(11.20) ტოლობების თანახმად გვექნება:

$$S_{2,0} = S_0(1+b)^0(1+a)^2 = 100 \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^0 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 36, \tag{13.19}$$

$$S_{2,1} = S_0(1+b)(1+a) = 100 \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{3}{5} = 936, \tag{13.20}$$

$$S_{2,2} = S_0(1+b)^2(1+a)^0 = 100 \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^0 = 256, \tag{13.21}$$

$$f_{2,0} = f(S_{2,0}) = \max(S_{2,0} - K, 0)\max(36 - 100, 0) = 0, \tag{13.22}$$

$$f_{2,1} = f(S_{2,1}) = \max(S_{2,1} - K, 0) = \max(96 - 100, 0) = 0, \tag{13.23}$$

$$f_{2,2} = f(S_{2,2}) = \max(S_{2,2} - K, 0) = \max(256 - 100, 0) = 156. \tag{13.24}$$

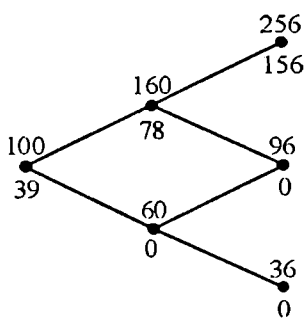
დროის $n = 1$ მომენტში შესაბამის ორ კვანძში ჩვენ გამოთვლილი გვაქვს აქციის შესაძლო ფასები (13.8), (13.9) ტოლობებით, რომლის თანახმად $S_{1,0} = 60$, $S_{1,1} = 160$. შემდეგ (11.23)–(11.25) ფორმულების თანახმად გვექნება:

$$C_{1,0} = (1+r)^{-1}\left[p^* f_{2,1} + (1-p^*) f_{2,2}\right] = \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot 0 + \frac{2}{5} \cdot 0\right) = 0, \tag{13.25}$$

$$C_{1,1} = (1+r)^{-1}\left[p^* f_{2,2} + (1-p^*) f_{2,1}\right] = \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot 156 + \frac{2}{5} \cdot 0\right) = 0, \tag{13.26}$$

$$C_2 = (1+r)^{-1}\left[p^* C_{1,1} + (1-p^*) C_{1,0}\right] = \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot 78 + \frac{2}{5} \cdot 0\right) = 39. \tag{13.27}$$

ამრიგად, ორნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე:



ნახ. 13.2.

გამოვთვალოთ C_2 სიდიდის მნიშვნელობა, აგრეთვე, (11.34) ფორმულით. $N=2$ შემთხვევაში (11.32) უტოლობა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$S_0(1+a)^2\Big(\frac{1+b}{1+a}\Big)^{k_0} > K.$$

ვთქვათ, $k_0=0$, მაშინ გვექნება

$$100\cdot\Big(\frac{3}{5}\Big)^2\Big(\frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}}\Big)^0 > 100,$$

საიდანაც მივიღებთ არასწორ უტოლობას $\frac{9}{25}>1$. ვთქვათ, $k_0=1$, მაშინ გვექნება

$$100\cdot\Big(\frac{3}{5}\Big)^2\cdot\frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}} > 100,$$

საიდანაც მივიღებთ კვლავ არასწორ უტოლობას $\frac{24}{25}$. ვთქვათ, $k_0=2$, მაშინ გვექნება

$$100\cdot\Big(\frac{3}{5}\Big)^2\Big(\frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}}\Big)^2 > 100,$$

საიდანაც მივიღებთ სწორ უტოლობას $\frac{64}{25}>1$. ამრიგად, $k_0=2$. კიდევ ერთხელ შევნიშნოთ, რომ k_0-ის მნიშვნელობა შეიძლება უშუალოდ გამოვთვალოთ (11.33) ფორმულით.

(11.34) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$C_2 =$$

$$= S_0C_2^2(p^*)^2(1-p^*)^2\Big(\frac{1+a}{1+r}\Big)^2\Big(\frac{1+b}{1+a}\Big)^2 - K(1+r)^{-2}C_2^2(p^*)^2(1-p^*)^2 =$$

$$= 100\cdot1\cdot\Big(\frac{3}{5}\Big)^2\Big(\frac{2}{5}\Big)^0\Big(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{6}{5}}\Big)^2\Big(\frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}}\Big)^2 - 100\cdot\Big(\frac{5}{6}\Big)^2\cdot1\cdot\Big(\frac{3}{5}\Big)^2\Big(\frac{2}{5}\Big)^0 = 39.$$

ემიტენტის წინაშე დგას შემდეგი ამოცანა: ოფციონის გაყიდვით მიღებული C_2 თანხით (შესაძლოა კიდევ ნასესხები თანხით) დროის $n=0$ მომენტში მან უნდა ააგოს $\pi_1^*=(\beta_1^*,\gamma_1^*)$ მინიმალური პუჭი. დროის $n=1$ მომენტში ამ პორტფელის შესაბამისი თანხით ემიტენტმა უნდა ააგოს $\pi_2^*=(\beta_2^*,\gamma_2^*)$ მინიმალური პუჭი, რომლის შესაბამისი კაპიტალი, დროის $n=2$ მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ფასების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით, ზუსტად $f(S_2)$ სიდიდის ტოლი იქნება.

(12.24), (12.25) ფორმულების თანახმად გვექნება:

$$\beta_1^* = \frac{(1+b)C_{1,0}-(1+a)C_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0} = \frac{\frac{8}{5}\cdot0-\frac{3}{5}\cdot78}{\frac{6}{5}\cdot1\cdot20} = -\frac{39}{20}, \qquad (13.28)$$

$$\gamma_1^* = \frac{C_{1,1}-C_{1,0}}{(b-a)S_0} = \frac{78-0}{1\cdot100} = \frac{39}{50}. \qquad (13.29)$$

ამრიგად, მივიღებთ $\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = (-\frac{39}{20}, \frac{39}{50})$. ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n = 0$ მომენტში (12.22), (12.23) ფორმულების თანხმად შეიძლება ჩავწეროთ, შესაბამისად, შემდეგი სახით:

$$X_0^{\pi^*} = \beta_1^* B_0 + \gamma_1^* S_0 = -\frac{39}{20} \cdot 20 + \frac{39}{50} \cdot 100 = 39, \tag{13.30}$$

$$X_0^{\pi^*} = (1+r)^{-1}\left[p^* C_{1,1} + (1-p^*) C_{1,0}\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5} \cdot 78 + \frac{2}{5} \cdot 0\right) = 39. \tag{13.31}$$

ა მ ო ც ა ნ ა 13.2. დროის $n = 0$ მომენტში ჩვენ ავაგეთ $\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = (-\frac{39}{20}, \frac{39}{50})$ სტრატეგია.

1. $C_2 = 39$-ის ტოლი თანხით ააგეთ რაიმე $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$ საწყისი სტრატეგია.
2. შეამოწმეთ ტოლობა
$$X_0^{\pi} = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0.$$
3. შეამოწმეთ თვითდაფინანსების (10.18) პირობა
$$\Delta\beta_1^* B_0 + \Delta\gamma_1^* S_0 = 0,$$
სადაც
$$\Delta\beta_1^* = \beta_1^* - B_0, \quad \Delta\gamma_1^* = \gamma_1^* - \gamma_0.$$

ახლა გავაანალიზოთ, რა ოპერაციები ჩაატარა ემიტენტმა დროის $n = 0$ მომენტში. ოფციონის გაყიდვით მან მიიღო 39-ის ტოლი თანხა, ისესხა $\frac{39}{20}$ ობლიგაცია, ანუ $\frac{39}{20} \cdot 20 = 39$-ის ტოლი თანხა და იყიდა $\frac{39}{50}$ აქცია, რის საშუალება მას მართლაც აქვს, რადგან

$$\frac{39}{50} \cdot 100 = 78 = 39 + 39 = 78.$$

დროის $n = 1$ მომენტში (12.26) ფორმულის თანახმად

$$\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(-\frac{39}{20}, \frac{39}{50}\right)$$

პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_1^{\pi^*} = \beta_1^* B_1 + \gamma_1^* S_1 = -\frac{39}{20} B_1 + \frac{39}{50} S_1 = f(S_1). \tag{13.32}$$

ნახაზ 13.2-ზე მოცემული ბინომური ხის გამოყენებით ჩვენ უნდა განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა.

შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა I. ვთქვათ, $S_1 = S_{1,1} = 160$. ობლიგაციის ფასი $B_1 = 24$. ასეთ შემთხვევაში (13.32)-ის თანახმად გვექნება

$$X_1^{\pi^*} = -\frac{39}{20} \cdot 24 + \frac{39}{50} \cdot 160 = 78. \tag{13.33}$$

შევნიშნოთ, რომ (13.33) ტოლობით გამოთვლილი $X_1^{\pi^*}$ კაპიტალის მნიშვნელობა დროის $n=1$ მომენტში ნახაზ 13.2-ზე მოცემული $S_{1,1}$ კვანძში ოფციონის $C_{1,1}$ ფასის მნიშვნელობის ტოლია.

დროის $n=1$ მომენტში $X_1^{\pi^*}=78$-ის ტოლი თანხით ემიტენტმა უნდა ააგოს $\pi_2^*=(\beta_2^*,\gamma_2^*)$ მინიმალური პეჯი. (12.27), (12.28) ფორმულების თანახმად გვექნება:

$$\beta_2^*=\frac{(1+b)f_{2,1}-(1+a)f_{2,2}}{(1+r)(b-a)B_1}=\frac{\frac{8}{5}\cdot 0-\frac{3}{5}\cdot 156}{\frac{6}{5}\cdot 1\cdot 24}=-\frac{13}{4}, \qquad (13.34)$$

$$\gamma_2^*=\frac{f_{2,2}-f_{2,1}}{(b-a)S_{1,1}}=\frac{156-0}{1\cdot 160}=\frac{39}{40}. \qquad (13.35)$$

ამრიგად, მივიღებთ $\pi_2^*=(\beta_2^*,\gamma_2^*)=(-\frac{13}{4},\frac{39}{40})$. ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n=1$ მომენტში (12.29), (12.30) ფორმულების თანახმად შეიძლება ჩავწეროთ, შესაბამისად, შემდეგი სახით:

$$X_1^{\pi^*}=\beta_2^*B_1+\gamma_2^*S_{1,1}=-\frac{13}{4}\cdot 24+\frac{39}{40}\cdot 160=78, \qquad (13.36)$$

$$X_1^{\pi^*}=(1+r)^{-1}\big[p^*f_{2,2}+(1-p^*)f_{2,1}\big]=\frac{5}{6}\Big(\frac{3}{5}\cdot 156+\frac{2}{5}\cdot 0\Big)=78. \qquad (13.37)$$

ა მ ო ც ა ნ ა 13.3. დროის $n=0$ და $n=1$ მომენტებში ავაგეთ შემდეგი სტრატეგიები

$$\pi_1^*=(\beta_1^*,\gamma_1^*)=\Big(-\frac{39}{20},\frac{39}{40}\Big),$$
$$\pi_2^*=(\beta_2^*,\gamma_2^*)=\Big(-\frac{13}{4},\frac{39}{40}\Big).$$

შეამოწმეთ თვითდაფინანსების (10.19) პირობა

$$\Delta\beta_2^*B_1+\Delta\gamma_2^*S_{1,1}=0,$$

სადაც

$$\Delta\beta_2^*=\beta_2^*-\beta_1^*,\quad \Delta\gamma_2^*=\gamma_2^*-\gamma_1.$$

ახლა გავაანალიზოთ, რა ოპერაციები ჩაატარა ემიტენტმა დროის $n=1$ მომენტში. მას აქვს 78-ის ტოლი თანხა, ისესხა $\frac{13}{4}$ ობლიგაცია ანუ $\frac{13}{4}\cdot 24=78$-ის ტოლი თანხა და იყიდა $\frac{39}{40}$ აქცია, რის საშუალება მას მართლაც აქვს, რადგან

$$\frac{39}{40}\cdot 160=156=78+78=156.$$

დროის $n=2$ მომენტში, (12.31) ფორმულის თანახმად, $\pi_2^*=(\beta_2^*,\gamma_2^*)=(-\frac{13}{4},\frac{39}{40})$. პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_2^{\pi^*}=\beta_2^*B_2+\gamma_2^*S_2=-\frac{13}{4}B_2+\frac{39}{40}S_2=f(S_2). \qquad (13.38)$$

ნახაზ 13.2-ზე მოცემული ბინომური ხის გამოყენებით ჩვენ უნდა განვიხილოთ შემთხვევა I-ის შემდეგი ორი ქვეშემთხვევა.

ქვეშემთხვევა I. ვთქვათ, $S_2 = S_{2,2} = 256$. ობლიგაციის ფასია

$$B_2 = (1+r)\cdot B_1 = \frac{6}{5}\cdot 24 = \frac{144}{5}\,.$$

ასეთ შემთხვევაში (13.38)-ის თანახმად გვექნება

$$X_2^{\pi^*} = -\frac{13}{4}\cdot\frac{144}{5} + \frac{39}{40}\cdot 256 = 156,$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას

$$f_{2,2} = f(S_{2,2}) = 156.$$

ემიტენტი გაყიდის $\frac{39}{40}$ აქციას და მიიღებს $\frac{39}{40}\cdot 256 = \frac{1248}{5}$-ის ტოლ თანხას. ამ თანხიდან იგი გაისტუმრებს $\frac{13}{4}$ ობლიგაციის ვალს ანუ $\frac{13}{4}\cdot\frac{144}{5} = \frac{468}{5}$-ის ტოლ თანხას, ხოლო დარჩენილი $\frac{1248}{5} - \frac{468}{5} = 156$-ის ტოლი თანხით შეასრულებს ოფციონის ვალდებულებას $f_{2,2} = 156$.

ქვეშემთხვევა II. ვთქვათ, $S_2 = S_{2,1} = 96$. ასეთ შემთხვევაში (13.38)-ის თანახმად გვექნება

$$X_2^{\pi^*} = -\frac{13}{4}\cdot\frac{144}{5} + \frac{39}{40}\cdot 96 = 0,$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას

$$f_{2,1} = f(S_{2,1}) = 0.$$

ემიტენტი გაყიდის $\frac{39}{40}$ აქციას და მიიღებს $\frac{39}{40}\cdot 96 = \frac{468}{5}$-ის ტოლ თანხას, რითაც ზუსტად გაისტუმრებს $\frac{13}{4}$ ობლიგაციის ვალს ანუ $\frac{13}{4}\cdot\frac{144}{5} = \frac{468}{5}$-ის ტოლ თანხას, ხოლო ოფციონის ვალდებულებით ის არაფერს იხდის, რადგან $f_{2,1} = 0$.

შემთხვევა II. ვთქვათ, $S_1 = S_{1,0} = 60$. ობლიგაციის ფასი $B_1 = 24$, ასეთ შემთხვევაში (13.32)-ის თანახმად გვექნება

$$X_1^{\pi^*} = \frac{39}{20}\cdot 24 + \frac{39}{50}\cdot 60 = 0 \tag{13.39}$$

რაც ზუსტად ემთხვევა $C_{1,0}$-ის მნიშვნელობას.

ავაგოთ ამ შემთხვევაში $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*)$ მინიმალური პეჯი. (12.27), (12.28) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$\beta_2^* = \frac{(1+b)f_{2,0} - (1+a)f_{2,1}}{(1+r)(b-a)B_1} = \frac{\frac{8}{5}\cdot 0 - \frac{3}{5}\cdot 0}{\frac{6}{5}\cdot 1\cdot 24} = 0, \tag{13.40}$$

$$\gamma_2^* = \frac{f_{2,1} - f_{2,0}}{(b-a)S_{1,0}} = \frac{0-0}{1\cdot 60} = 0. \tag{13.41}$$

ამრიგად, მივიღეთ $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*) = (0, 0)$. ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n = 1$ მომენტში, (12.29), (12.30) ფორმულების თანახმად, შეიძლება ჩავწეროთ, შესაბამისად, შემდეგი სახით:

$$X_1^{\pi^*} = \beta_2^* B_1 + \gamma_2^* S_{1,0} = 0 \cdot 24 + 0 \cdot 60 = 0, \tag{13.42}$$

$$X_1^{\pi^*} = (1+r)^{-1}\left[p^* f_{2,1} + (1-p^*) f_{2,0}\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5} \cdot 0 + \frac{2}{5} \cdot 0\right) = 0. \tag{13.43}$$

ა მ ო ც ა ნ ა 13.4. დროის $n = 0$ და $n = 1$ მომენტებში ჩვენ ავაგეთ შემდეგი სტრატეგიები

$$\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \Big(-\frac{39}{20}, \frac{39}{40}\Big),$$
$$\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*) = (0, 0).$$

შეამოწმეთ თვითდაფინანსების (10.19) პირობა

$$\Delta\beta_2^* B_1 + \Delta\gamma_2^* S_{1,0} = 0,$$

სადაც

$$\Delta\beta_2^* = \beta_2^* - \beta_1^*, \quad \Delta\gamma_2^* = \gamma_2^* - \gamma_1^*.$$

ახლა გავაანალიზოთ, რა ოპერაციები ჩაატარა ემიტენტმა დროის $n = 1$ მომენტში. იგი გაყიდის $\frac{39}{50}$ აქციას და მიიღებს $\frac{39}{50} \cdot 60 = \frac{234}{5}$-ის ტოლ თანხას, რითაც ზუსტად გაისტუმრებს $\frac{39}{20}$ ობლიგაციის ვალს ანუ $\frac{39}{20} \cdot 24 = \frac{234}{5}$-ის ტოლ თანხას. განხილული შემთხვევა II-ის ორივე ქვეშემთხვევაში დროის $n = 2$ მომენტში ემიტენტი არაფერს იხდის, რადგან $f_{2,1} = f(S_{2,1}) = 0$, $f_{2,0} = f(S_{2,0}) = 0$.

ამრიგად, მაგალითი 13.2-ის პირობებში ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიანი ამოცანა გადაწყვეტილია. ბოლოს კიდევ ერთხელ გვინდა შევნიშნოთ, რომ რეალურ სიტუაციებში ემიტენტს დროის $n = 0$ და $n = 1$ მომენტებში მხოლოდ თითოჯერ მოუწევს ერთნაბიჯიანი შემთხვევების განხილვა.

ლექცია 14. გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი

მ ა გ ა ლ ი თ ი 14.1. განვიხილოთ (10.1), (10.2) ფინანსური ბაზარი და ვთქვათ, $N = 1$, ე. ი. $n = 0, 1$. ვიგულისხმოთ, რომ შესრულებულია (13.3)–(13.5) პირობები. დავუშვათ, ინვესტორმა იყიდა (ემიტენტმა გაყიდა) ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f_1 = f(S_1) = \max(K - S_1, 0). \tag{14.1}$$

ჩვენი მიზანია, გადავწყვიტოთ ოფციონის გათვლის ერთსაბიჯიანი ამოცანა. ამისათვის პირველ რიგში ავაგოთ ერთსაბიჯიანი ბინომური ხე. გვაქვს

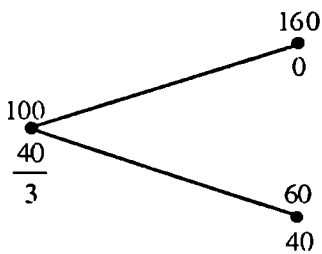
$$S_{1,0} = 60, \quad S_{1,1} = 160, \tag{14.2}$$

$$f_{1,0} = \max(K - S_{1,0}, 0) = \max(100 - 60, 0) = 40, \tag{14.3}$$

$$f_{1,1} = \max(K - S_{1,1}, 0) = \max(100 - 160, 0) = 0, \tag{14.4}$$

$$P_1 = (1+r)^{-1}\left[p^* f_{1,1} + (1-p^*) f_{1,0}\right] = \\ = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 0 + \frac{2}{5}\cdot 40\right) = \frac{40}{3}. \tag{14.5}$$

ამრიგად, ერთსაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე:



ნახ. 14.1.

საინტერესოა, გამოვთვალოთ P_1 სიდიდის მნიშვნელობა, აგრეთვე, "ყიდვა-გაყიდვის პარიტეტის" (11.36) ფორმულით. ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ერთსაბიჯიან ამოცანაში (13.12) ტოლობით მოცემული $C_1 = 30$ სამართლიანი ფასის მნიშვნელობის გათვალისწინებით გვექნება

$$P_1 = C_1 - S_0 + K(1+r)^{-1} = 30 - 100 + 100\cdot\frac{5}{6} = \frac{40}{3}.$$

ავაგოთ დროის $n = 0$ მომენტში $\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*)$ მინიმალური პეჯი (12.17), (12.18) ფორმულების თანახმად გვექნება:

$$\beta_1^* = \frac{(1+b)f_{1,0} - (1+a)f_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0} = \frac{\frac{8}{5}\cdot 40 - \frac{3}{5}\cdot 0}{\frac{6}{5}\cdot 1\cdot 20} = \frac{8}{3}, \tag{14.6}$$

$$\gamma_1^* = \frac{f_{1,1} - f_{1,0}}{(b-a)S_0} = \frac{0-40}{1\cdot 100} = -\frac{2}{5}. \tag{14.7}$$

ამრიგად, მივიღეთ $\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = (\frac{8}{3}, -\frac{2}{5})$. ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n = 0$ მომენტში (12.14), (12.19) ფორმულების თანახმად

შეიძლება ჩავწეროთ, შესაბამისად, შემდეგი სახით:

$$X_0^{\pi^*} = \beta_1^* B_0 + \gamma_1^* S_0 = \frac{8}{3} \cdot 20 - \frac{2}{5} \cdot 100 = \frac{40}{3}, \tag{14.8}$$

$$X_0^{\pi^*} = (1+r)^{-1}\left[p^* f_{1,1} + (1-p^*) f_{1,0}\right] = \\ = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5} \cdot 0 + \frac{2}{5} \cdot 40\right) = \frac{40}{3}. \tag{14.9}$$

ა მ ო ც ა ნ ა 14.1. დროის $n = 0$ მომენტში ჩვენ ავაგეთ

$$\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{5}\right)$$

სტრატეგია.

1. $P_1 = \frac{40}{3}$-ის ტოლი თანხით ააგეთ რაიმე $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$ საწყისი სტრატეგია.
2. შეამოწმეთ ტოლობა $X_0^{\pi} = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0$.
3. შეამოწმეთ თვითდაფინანსების პირობა

$$\Delta\beta_1^* B_0 + \Delta\gamma_1^* S_0 = 0,$$

სადაც

$$\Delta\beta_1^* = \beta_1^* - \beta_0, \quad \Delta\gamma_1^* = \gamma_1^* \gamma_0.$$

ახლა გავაანალიზოთ, რა ოპერაციები ჩაატარა უმიტენტმა დროის $n = 0$ მომენტში. ოფციონის გაყიდვით მან მიიღო $\frac{40}{3}$-ის ტოლი თანხა, ისესხა $\frac{2}{5}$ აქცია ანუ $\frac{2}{5} \cdot 100 = 40$-ის ტოლი თანხა და იყიდა $\frac{8}{3}$ ობლიგაცია, რის საშუალება მას მართლაც აქვს, რადგან

$$\frac{8}{3} \cdot 20 = \frac{160}{3} = \frac{40}{3} + 40 = \frac{160}{3}.$$

დროის $n = 1$ მომენტში (12.16) ფორმულის თანახმად $\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = (\frac{8}{3}, -\frac{2}{5})$. პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_0^{\pi^*} = \beta_1^* B_1 + \gamma_1^* S_1 = \frac{8}{3} B_1 - \frac{2}{5} S_1 = f(S_1). \tag{14.10}$$

ნახაზ 14.1-ზე მოცემული ბინომური ხის გამოყენებით უნდა განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა.

შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა I. ვთქვათ, $S_1 = S_{1,1} = 160$. ობლიგაციის ფასი $B_1 = 24$. ასეთ შემთხვევაში გვექნება

$$X_1^{\pi^*} = \frac{8}{3} \cdot 24 - \frac{2}{5} \cdot 160 = 0.$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას

$$f_{1,1} = f(S_{1,1}) = 0.$$

დროის $n=1$ მომენტში ემიტენტი გაყიდის $\frac{8}{3}$ ობლიგაციას და მიიღებს $\frac{8}{3}\cdot 24 = 64$-ის ტოლ თანხას, რითაც ზუსტად გაისტუმრებს $\frac{2}{5}$ აქციის ვალს ანუ $\frac{2}{5}\cdot 160 = 64$-ის ტოლ თანხას. ოფციონის ვალდებულებით კი იგი არაფერს იხდის, რადგან $f_{1,1}=0$.

შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა II. ვთქვათ, $S_1 = S_{1,0} = 60$. ასეთ შემთხვევაში გვექნება

$$X_1^{\pi^*} = \frac{8}{3}\cdot 24 - \frac{2}{5}\cdot 60 = 40,$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას

$$f_{1,0} = f(S_{1,0}) = 40.$$

დროის $n=1$ მომენტში ემიტენტი გაყიდის $\frac{8}{3}$ ობლიგაციას და მიიღებს $\frac{8}{3}\cdot 24 = 64$-ის ტოლ თანხას. ამ თანხიდან გაისტუმრებს $\frac{2}{5}$ აქციის ვალს ანუ $\frac{2}{5}\cdot 60 = 24$-ის ტოლ თანხას, ხოლო დარჩენილი $64-24=40$-ის ტოლი თანხით შეასრულებს ოფციონის ვალდებულებას.

ამრიგად, მაგალითი 14.1-ის პირობებში ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ერთნაბიჯიანი ამოცანა გადაწყვეტილია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 14.2. განვიხილოთ (10.1), (10.2) ფინანსური ბაზარი და ვთქვათ, $N=2$, ე. ი. $n=0,1,2$. ვიგულისხმოთ, რომ შესრულებულია (13.3)–(13.5) პირობები. დავუშვათ, ინვესტორმა იყიდა (ემიტენტმა გაყიდა) ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f_2 = f(S_2) = \max(K - S_2, 0). \tag{14.11}$$

ჩვენი მიზანია, გადავწყვიტოთ ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიანი ამოცანა. ამისათვის პირველ რიგში ავაგოთ ორნაბიჯიანი ბინომური ხე. დროის $n=2$ მომენტში გვაქვს

$$\begin{aligned} f_{2,0} &= f(S_{2,0}) = \\ &= \max(K - S_{2,0}, 0) = \max(100-36,0) = 64, \end{aligned} \tag{14.12}$$

$$\begin{aligned} f_{2,1} &= f(S_{2,1}) = \\ &= \max(K - S_{2,1}, 0) = \max(100-96,0) = 4, \end{aligned} \tag{14.13}$$

$$\begin{aligned} f_{2,2} &= f(S_{2,2}) = \\ &= \max(K - S_{2,2}, 0) = \max(100-256,0) = 0. \end{aligned} \tag{14.14}$$

დროის $n=1$ მომენტში გვექნება

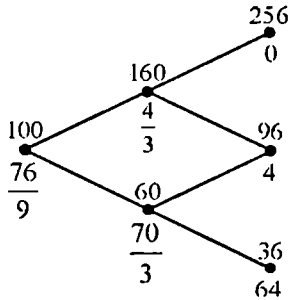
$$\begin{aligned} P_{1,0} &= (1+r)^{-1}\left[p^* f_{2,1} + (1-p^*) f_{2,0}\right] = \\ &= \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 4 + \frac{2}{5}\cdot 64\right) = \frac{70}{3}, \\ P_{1,1} &= (1+r)^{-1}\left[p^* f_{2,2} + (1-p^*) f_{2,1}\right] = \end{aligned} \tag{14.15}$$

$$= \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 0 + \frac{2}{5}\cdot 4\right) = \frac{4}{3}, \tag{14.16}$$

$$P_2 = (1+r)^{-1}\left[p^* f_{1,1} + (1-p^*)P_{1,0}\right] =$$

$$= \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{3} + \frac{2}{5}\cdot\frac{70}{3}\right) = \frac{76}{9}. \tag{14.17}$$

ამრიგად, ორნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე:



ნახ. 14.2.

გამოვთვალოთ P_2 სიდიდის მნიშვნელობა, აგრეთვე, "ყიდვა-გაყიდვის პარიტეტის" (11.36) ფორმულით. ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიან ამოცანაში, (13.27) ტოლობით მოცემული $C_2 = 39$ სამართლიანი ფასის მნიშვნელობის გათვალისწინებით, გვექნება

$$P_2 = C_2 - S_0 + K(1+r)^{-2} =$$

$$= 39 - 100 + 100\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^{-2} = \frac{76}{9}.$$

შემდეგ გვაქვს

$$\beta_1^* = \frac{(1+b)P_{1,0} - (1+a)P_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0} =$$

$$= \frac{\frac{8}{5}\cdot\frac{70}{3} - \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{3}}{\frac{6}{5}\cdot 1\cdot 20} = \frac{137}{90}, \tag{14.18}$$

$$\gamma_1^* = \frac{P_{1,1} - P_{1,0}}{(b-a)S_0} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{70}{3}}{1\cdot 100} = -\frac{11}{50}. \tag{14.19}$$

ამრიგად, მივიღეთ

$$\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(\frac{137}{90}, -\frac{11}{50}\right).$$

ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n = 0$ მომენტში შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$X_0^{\pi^*} = \beta_1^* B_0 + \gamma_1^* S_0 = \frac{137}{90} \cdot 20 - \frac{11}{50} \cdot 100 = \frac{76}{9}, \tag{14.20}$$

$$X_0^{\pi^*} = (1+r)^{-1}\left[p^* P_{1,1} + (1-p^*)P_{1,0}\right] =$$

$$= \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{70}{3}\right) = \frac{76}{9}. \tag{14.21}$$

ა მ ო ც ა ნ ა 14.2. დროის $n = 0$ მომენტში ჩვენ ავაგეთ

$$\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(\frac{137}{90}, -\frac{11}{50}\right)$$

სტრატეგია.

1. $P_2 = \frac{76}{9}$-ის ტოლი თანხით ააგეთ π_1^*-გან განსხვავებული რაიმე საწყისი სტრატეგია $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$.
2. შეამოწმეთ ტოლობა

$$X_0^{\pi} = \beta_0 X_0 + \gamma_0 S_0.$$

3. შეამოწმეთ თვითდაფინანსების პირობა

$$\Delta\beta_1^* B_0 + \Delta\gamma_1^* S_0 = 0,$$

სადაც

$$\Delta\beta_1^* = \beta_1^* - \beta_0, \quad \Delta\gamma_1^* = \gamma_1^* - \gamma_0.$$

დროის $n = 0$ მომენტში ოფციონის გაყიდვით ემიტენტმა მიიღო $\frac{76}{9}$-ის ტოლი თანხა, ისესხა $\frac{1}{50}$ აქცია ანუ $\frac{11}{50} \cdot 100 = 22$-ის ტოლი თანხა და იყიდა $\frac{137}{90}$ ობლიგაცია, რის საშუალება მას მართლაც აქვს, რადგან

$$\frac{137}{90} \cdot 20 = \frac{274}{9} = \frac{76}{9} + 22 = \frac{274}{9}.$$

დროის $n = 1$ მომენტში

$$\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(\frac{137}{90}, -\frac{11}{50}\right)$$

პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_1^{\pi^*} = \beta_1^* B_1 + \gamma_1^* S_1 = \frac{137}{90} B_1 - \frac{11}{50} S_1 = f(S_1). \tag{14.22}$$

ნახ. 14.2-ზე მოცემული ბინომური ხის გამოყენებით ჩვენ უნდა განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა.

შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა I. ვთქვათ, $S_1 = S_{1,1} = 160$. ობლიგაციის ფასი $B_1 = 24$. ასეთ შემთხვევაში გვექნება

$$X_1^{\pi^*} = \frac{137}{90} \cdot 24 - \frac{11}{50} \cdot 160 = \frac{4}{3}, \tag{14.23}$$

რაც ზუსტად ემთხვევა $P_{1,1}$-ის მნიშვნელობას.

დროის $n = 1$ მომენტში $X_1^{\pi^*} = \frac{4}{3}$-ის ტოლი თანხით ემიტენტმა უნდა ააგოს $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*)$ მინიმალური პეჯი, გვექნება

$$\beta_2^* = \frac{(1+b)f_{2,1} - (1+a)f_{2,2}}{(1+r)(b-a)B_0} = \frac{\frac{8}{5} \cdot 4 - \frac{3}{5} \cdot 0}{\frac{6}{5} \cdot 1 \cdot 24 \cdot} = \frac{2}{9}, \tag{14.24}$$

$$\gamma_2^* = \frac{f_{2,2} - f_{2,1}}{(b-a)S_{1,1}} = \frac{0-4}{1 \cdot 160} = -\frac{1}{40}. \tag{14.25}$$

ამრიგად, მივიღეთ

$$\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*) = \Big(\frac{2}{9}, -\frac{1}{40}\Big).$$

ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n = 1$ მომენტში შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$X_1^{\pi^*} = \beta_2^* B_1 + \gamma_2^* S_{1,1} = \frac{2}{9} \cdot 24 - \frac{1}{40} \cdot 160 = \frac{4}{3}, \tag{14.26}$$

$$X_1^{\pi^*} = (1+r)^{-1}\big[p^* f_{2,2} + (1-p^*)f_{2,1}\big] =$$
$$= \frac{5}{6}\Big(\frac{3}{5} \cdot 0 + \frac{2}{5} \cdot 4\Big) = \frac{4}{3}. \tag{14.27}$$

ა მ ო ც ა ნ ა 14.3. დროის $n = 0$ და $n = 1$ მომენტებში ჩვენ ავაგეთ შემდეგი სტრატეგიები:

$$\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \Big(\frac{137}{90}, -\frac{11}{50}\Big),$$
$$\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*) = \Big(\frac{2}{9}, -\frac{1}{40}\Big).$$

შეამოწმეთ თვითდაფინანსების პირობა

$$\Delta\beta_2^* B_1 + \Delta\gamma_2^* S_{1,1} = 0,$$

სადაც

$$\Delta\beta_2^* = \beta_2^* - \beta_1^*, \quad \Delta\gamma_2^* = \gamma_2^* - \gamma_1^*.$$

დროის $n = 1$ მომენტში ემიტენტს აქვს $\frac{4}{3}$-ის ტოლი თანხა, ისესხა $\frac{1}{40}$ აქცია ანუ $\frac{1}{40} \cdot 160 = 4$-ის ტოლი თანხა და იყიდა $\frac{2}{9}$ ობლიგაცია, რის საშუალება მას მართლაც აქვს, რადგან

$$\frac{2}{9} \cdot 24 = \frac{16}{3} = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3}.$$

დროის $n = 2$ მომენტში

$$\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*) = \left(\frac{2}{9}, -\frac{1}{40}\right)$$

პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_2^{\pi^*} = \beta_2^* B_2 + \gamma_2^* S_2 = \frac{2}{9} B_2 - \frac{1}{40} S_2 = f(S_2). \tag{14.28}$$

ნახ. 14.2-ზე მოცემული ბინომური ხის გამოყენებით ჩვენ უნდა განვიხილოთ შემთხვევა I-ის შემდეგი ორი ქვეშემთხვევა.

ქვეშემთხვევა I. ვთქვათ, $S_2 = S_{2,2} = 256$. ობლიგაციის ფასი $B_2 = \frac{144}{5}$. ასეთ შემთხვევაში გვექნება

$$X_2^{\pi^*} = \frac{2}{9} \cdot \frac{144}{5} - \frac{1}{40} \cdot 256 = 0, \tag{14.29}$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას

$$f_{2,2} = f(S_{2,2}) = 0.$$

ემიტენტი გაყიდის $\frac{2}{9}$ ობლიგაციას და მიიღებს $\frac{2}{9} \cdot \frac{144}{5} = \frac{32}{5}$-ის ტოლ თანხას, რითაც ზუსტად გაისტუმრებს $\frac{1}{40}$ აქციის ვალს ანუ $\frac{1}{40} \cdot 256 = \frac{32}{5}$-ის ტოლ თანხას. ოფციონის ვალდებულებით კი ის არაფერს იხდის, რადგან $f_{2,2} = 0$.

ქვეშემთხვევა II. ვთქვათ, $S_2 = S_{2,1} = 96$. ასეთ შემთხვევაში გვექნება

$$X_2^{\pi^*} = \frac{2}{9} \cdot \frac{144}{5} - \frac{1}{40} \cdot 96 = 4,$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას

$$f_{2,1} = f(S_{2,1}) = 4.$$

ემიტენტი გაყიდის $\frac{2}{9}$ ობლიგაციას და მიიღებს $\frac{2}{9} \cdot \frac{144}{5} = \frac{32}{5}$-ის თანხას. ამ თანხიდან გაისტუმრებს $\frac{1}{40}$ ობლიგაციის ვალს ანუ $\frac{1}{40} \cdot 96 = \frac{12}{5}$-ის ტოლ თანხას, ხოლო დარჩენილი $\frac{32}{5} - \frac{12}{5} =$-ის ტოლი თანხით შეასრულებს ოფციონის ვალდებულებას $f_{2,1} = 4$.

შემთხვევა II. ვთქვათ, $S_1 = S_{1,0} = 60$. ობლიგაციის ფასი $B_1 = 24$. ასეთ შემთხვევაში გვექნება

$$X_1^{\pi^*} = \frac{137}{90} \cdot 24 - \frac{11}{50} \cdot 60 = \frac{70}{3}, \tag{14.30}$$

რაც ზუსტად ემთხვევა $P_{1,0}$-ის მნიშვნელობას.

დროის $n = 1$ მომენტში $X_1^{\pi^*} = \frac{70}{3}$-ის ტოლი თანხით ავაგოთ $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*)$ მინიმალური პეჯი, გვექნება:

$$\beta_2^* = \frac{(1+b)f_{2,0} - (1+a)f_{2,1}}{(1+r)(b-a)B_1} = \\ = \frac{\frac{8}{5} \cdot 64 - \frac{3}{5} \cdot 4}{\frac{6}{5} \cdot 1 \cdot 24} = \frac{125}{36}, \tag{14.31}$$

$$\gamma_2^* = \frac{f_{2,1} - f_{2,0}}{(b-a)S_{1,0}} = \frac{4 - 64}{1 \cdot 60} = -1. \tag{14.32}$$

ამრიგად, მივიღეთ

$$\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*) = \Big(\frac{125}{36}, -1\Big).$$

ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n = 1$ მომენტში შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$X_1^{\pi^*} = \beta_2^* B_1 + \gamma_2^* S_{1,0} = \frac{125}{36} \cdot 24 - 1 \cdot 60 = \frac{70}{3}, \tag{14.33}$$

$$X_1^{\pi^*} = (1+r)^{-1}\big[p^* f_{2,1} + (1-p^*) f_{2,0}\big] = \\ = \frac{5}{6}\Big(\frac{3}{5} \cdot 4 + \frac{2}{5} \cdot 64\Big) = \frac{70}{3}. \tag{14.34}$$

ა მ ო ც ა ნ ა 14.4. დროის $n = 0$ და $n = 1$ მომენტებში ჩვენ ავაგეთ შემდეგი სტრატეგიები:

$$\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \Big(\frac{137}{90}, -\frac{11}{50}\Big),$$

$$\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*) = \Big(\frac{125}{36}, -1\Big).$$

შეამოწმეთ თვითდაფინანსების პირობა

$$\Delta\beta_2^* B_1 + \Delta\gamma_2^* S_{1,0} = 0,$$

სადაც

$$\Delta\beta_2^* = \beta_2^* - \beta_1, \quad \Delta\gamma_2^* = \gamma_2^* - \gamma_1^*.$$

დროის $n = 1$ მომენტში ემიტენტს აქვს $\frac{70}{3}$-ის ტოლი თანხა, ისესხა ერთი აქცია ანუ 60-ის ტოლი თანხა და იყიდა $\frac{125}{36}$ ობლიგაცია, რის საშუალება მას მართლაც აქვს, რადგან,

$$\frac{125}{36} \cdot 24 = \frac{250}{3} = \frac{70}{3} + 60 = \frac{250}{3}.$$

დროის $n = 2$ მომენტში $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*) = (\frac{125}{36}, -1)$ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_2^{\pi^*} = \beta_2^* B_s + \gamma_2^* S_2 = \frac{125}{36} B_2 - S_2 = f(S_2). \tag{14.35}$$

ნახაზ 14.2-ზე მოცემული ბინომური ხის გამოყენებით ჩვენ უნდა განვიხილოთ შემთხვევა II-ის შემდეგი ორი ქვეშემთხვევა.

ქვეშემთხვევა I. ვთქვათ, $S_2 = S_{2,1} = 96$. ობლიგაციის ფასი $B_2 = \frac{144}{5}$. ასეთ შემთხვევაში გვექნება

$$X_2^{\pi^*} = \frac{125}{36} \cdot \frac{144}{55} - 96 = 4, \tag{14.36}$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას

$$f_{2,1} = f(S_{2,1}) = 4.$$

ემიტენტი გაყიდის $\frac{125}{36}$ ობლიგაციას და მიიღებს $\frac{125}{36} \cdot \frac{144}{5} = 100$-ის ტოლ თანხას. ამ თანხიდან გაისტუმრებს ერთი აქციის ვალს ანუ 96-ის ტოლ თანხას, ხოლო დარჩენილი $100 - 96 = 4$-ის ტოლი თანხით შეასრულებს ოფციონის ვალდებულებას $f_{2,1} = 4$.

ქვეშემთხვევა II. ვთქვათ, $S_2 = S_{2,0} = 36$. გვაქვს $B_2 = \frac{144}{5}$. ასეთ შემთხვევაში გვექნება

$$X_2^{\pi^*} = \frac{125}{36} \cdot \frac{44}{5} - 36 = 64, \tag{14.37}$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას

$$f_{2,0} = f(S_{2,0}) = 64.$$

ემიტენტი გაყიდის $\frac{125}{36}$ ობლიგაციას და მიიღებს $\frac{125}{36} \cdot \frac{144}{5} = 100$-ის ტოლ თანხას. ამ თანხიდან გაისტუმრებს ერთი აქციის ვალს ანუ 36-ის ტოლ თანხას, ხოლო დარჩენილი $100 - 36 = 64$-ის ტოლი თანხით შეასრულებს ოფციონის ვალდებულებას $f_{2,0} = f(S_{2,0}) = 64$.

ამრიგად, მაგალითი 14.2-ის პირობებში ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიანი ამოცანა გადაწყვეტილია.

ლექცია 15. ამერიკული ოფციონის ფასდადება

1. ამერიკული ოფციონი ევროპული ოფციონის მსგავსად წარმოადგენს წარმოებულ ფასიან ქაღალდს, რომლის მფლობელს აქვს რაიმე საბაზისო აქტივის ყიდვის ან გაყიდვის უფლება. როგორც ვიცით, ევროპული ოფციონის

მფლობელს შეუძლია მისი განაღდება ოფციონის სიცოცხლის პერიოდის მხოლოდ ბოლო მომენტში. ამისგან განსხვავებით, ამერიკული ოფციონის მფლობელს შეუძლია მისი განაღდება ოფციონის სიცოცხლის პერიოდის დროის ნებისმიერ შემთხვევით მომენტში.

ბუნებრივია, ამერიკული ოფციონი ევროპულ ოფციონზე უფრო მიმზიდველია, ვინაიდან მის მფლობელს ფინანსურ ბაზარზე მიმდინარე პროცესში აქტიური მონაწილეობის საშუალება ეძლევა. მართლაც, მაქსიმალური სარგებლის (გასამრჯელოს) მიღების მიზნით, ბაზრის მიმდინარე ინფორმაციის გამოყენებით, სასურველია ოფციონის განაღდების გადაწყვეტილების მიღება დროის, გარკვეული აზრით, ოპტიმალურ შემთხვევით მომენტში. შევნიშნოთ, რომ ასეთი გადაწყვეტილების მიღება წარმოადგენს შემთხვევით პროცესთა ოპტიმალური გაჩერების თეორიის საინტერესო და რთულ მათემატიკურ ამოცანას. კერძოდ, ჩვენთვის საინტერესო აქტივის ყოფაქცევაზე დაკვირვების საშუალებით, საჭიროა ვიპოვოთ ოფციონის განაღდების ისეთი შემთხვევითი მომენტი (ოპტიმალური გაჩერების მომენტი), რომ მივიღოთ მაქსიმალური საშუალო მოგება ანუ ფასი. ჩვენ მოკლედ შევეხებით ამერიკული ოფციონის გათვლის ზოგიერთ მარტივ საკითხს ფინანსური (B,S)-ბაზრის ბინომური მოდელის შემთხვევაში.

2. ვიგულისხმოთ, რომ ჩვენ ვიხილავთ ფინანსური (B,S)-ბაზრის ბინომურ მოდელს (იხ. (10.1), (10.2))

$$B_n = (1+r)B_{n-1}, \quad B_0 > 0, \tag{15.1}$$

$$S_n = (1+\rho_n)S_{n-1}, \quad S_0 > 0, , \tag{15.2}$$

სადაც $n = 0, 1, \ldots, N$. ამერიკული ოფციონის მფლობელს შეუძლია მისი წარდგენა განსაზღვრულ დროის ამ მომენტებიდან ნებისმიერ (შემთხვევით არჩეულ) მომენტში. ვიგულისხმოთ აგრეთვე, რომ გვაქვს გადახდის ფუნქცია, რომელიც n მომენტისთვის ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$f = f_n = f_n(S_0, S_1, \ldots, S_n), \quad n = 0, 1, \ldots, N, \tag{15.3}$$

ანუ გვაქვს შემდეგი სიდიდეების მიმდევრობა

$$\begin{aligned}
&f_0 = f_0(S_0),\\
&f_1 = f_1(S_0, S_1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f_n = f_n(S_0, S_1, \ldots, S_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f_N = f_N(S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots, S_N).
\end{aligned}$$

ცხადია, თუ ოფციონის მფლობელი წარადგენს ოფციონს დროის რაიმე τ შემთხვევით მომენტში, იგი მიიღებს თანხას (გასამრჯელოს), რომელიც ტოლია $f_\tau(S_0, S_1, \ldots, S_\tau)$, $\tau = 0, 1, \ldots, N$, სიდიდის.

მაგალითი 15.1. ვთქვათ, $N = 7$ და $f_n = \max(S_0, S_1, \ldots, S_n)$. დავუშვათ აგრეთვე, რომ აქციის ფასების მნიშვნელობები დროში ტოლია შემდეგი სიდიდეების

$$S_0 = 80, \quad S_1 = 60, \quad S_2 = 90, \quad S_3 = 100,$$
$$S_4 = 90, \quad S_5 = 85, \quad S_6 = 110, \quad S_7 = 105.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ აქციის ამ შესაძლო ფასების შესაბამისი გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობები იქნება

$$f_0 = 80, \quad f_1 = 80, \quad f_2 = 90, \quad f_3 = 100,$$
$$f_4 = 100, \quad f_5 = 100, \quad f_6 = 110, \quad f_7 = 110.$$

თუ ოფციონის განაღდება მოხდება, მაგალითად, დროის $n = 4$ მომენტში, მაშინ მისი მფლობელი მიიღებს $f_4 = 100$ გასამრჯელოს. ცხადია, უკეთესია ოფციონის განაღდება დროის $n = 6$ ან $n = 7$ მომენტებში, რადგანაც ოფციონის გასამრჯელო ამ შემთხვევაში 110-ის ტოლი იქნება. მაგრამ მთელი სირთულე იმაში მდგომარეობს, რომ დროის $n = 4$ მომენტში ოფციონის მფლობელმა არ იცის დროის შემდეგ მომენტებში არც აქციის და, მაშასადამე, არც გადახდის ფუნქციის შესაძლო მნიშვნელობები. აქვე შევნიშნოთ, რომ ისევე როგორც აქციის ფასებს, ასევე გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობებს შემთხვევითი ხასიათი აქვს, რადგანაც იგი დამოკიდებულია აქციის შესაძლო ფასების მნიშვნელობებზე.

მაგალითი 15.2. განვიხილოთ ამერიკული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი, რომლის გადახდის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$f_n = (S_n - K)^+ = \max(S_n - K, 0), \tag{15.4}$$

სადაც $K > 0$ შეთანხმების ფასია. ვიგულისხმოთ, რომ $K = 85$, $N = 7$, ხოლო აქციის ფასების შესაძლო მნიშვნელობები იგივეა, რაც 15.1 მაგალითში. თუ ოფციონის განაღდება მოხდება დროის $n = 4$ მომენტში, მაშინ ადვილი მისახვედრია, რომ ამ შემთხვევაში

$$f_4 = \max(90 - 85, 0) = 5.$$

ცხადია, უკეთესი იქნებოდა ოფციონის განაღდება დროის $n = 6$ მომენტში. მართლაც, გვაქვს

$$f_6 = \max(110 - 85, 0) = 25.$$

მაგალითი 15.3. განვიხილოთ ამერიკული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი, რომლის გადახდის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$f_n = (K - S_n)^+ = \max(K - S_n, 0), \tag{15.5}$$

სადაც $K > 0$ შეთანხმების ფასია. ისევ ვიგულისხმოთ, რომ $K = 85$, $N = 7$, ხოლო აქციის ფასების შესაძლო მნიშვნელობები იგივეა, რაც 15.1 მაგალითში. ადვილი დასანახია, რომ ამ შემთხვევაში

$$f_4 = \max(85 - 90, 0) = 0.$$

ასევე ადვილი დასანახია, რომ საუკეთესო იქნებოდა ოფციონის განაღდება დროის $n = 1$ მომენტში. მართლაც, გვაქვს

$$f_1 = \max(85 - 60, 0) = 25,$$

რომელიც ყველა შესაძლო გასამრჯელოებს შორის უდიდესია.

როგორც განხილული მაგალითები გვიჩვენებს, ოფციონის განაღდების მომენტი, საზოგადოდ, შემთხვევითი სიდიდეა. ეს შემთხვევითი სიდიდე შეირჩევა ე. წ. გაჩერების (მარკოვის) მომენტთა სიმრავლიდან. გაჩერების მომენტი ისეთი შემთხვევითი სიდიდეა, რომელიც დროის ყოველ n მომენტში განისაზღვრება მხოლოდ დროის ამ მომენტისთვის აქციის ფასების შესახებ ინფორმაციის საშუალებით. ამრიგად, თუ დროის τ მომენტი არის გაჩერების მომენტი, მაშინ იგი განისაზღვრება მხოლოდ $(S_0, S_1, \ldots, S_\tau)$ მნიშვნელობების საშუალებით. ცხადია, τ მომენტის შესაძლო მნიშვნელობებია $\{0, 1, \ldots, N\}$.

როგორც ვიცით ევროპული ოფციონის გათვლის დროს ემიტენტის ამოცანებია: ოფციონის სამართლიანი ფასის პოვნა, მინიმალური პეჯის აგება და ამ პეჯის შესაბამისი კაპიტალის პროცესის განსაზღვრა. ამერიკული ოფციონის გათვლის დროს ამ ამოცანებს ემატება, აგრეთვე, ოფციონის განაღდების ე. წ. რაციონალური (ოპტიმალური) მომენტების პოვნა, რომელიც საკმაოდ ართულებს ამერიკული ოფციონის გათვლას. ამრიგად, ამ შემთხვევაში დამატებით საჭიროა ისეთი გაჩერების მომენტის (განაღდების მომენტის) პოვნა, რომ მივიღოთ მაქსიმალური საშუალო გასამრჯელო.

3. განვიხილოთ ახლა ფინანსური (B, S)-ბაზრის მონაწილე ემიტენტის ამოცანა, რომელმაც ოფციონის გაყიდვით მიიღო გარკვეული საწყისი თანხა $X_0 = x > 0$. ვთქვათ, გადახდის ფუნქცია მოცემულია (15.3) ტოლობით. ვიტყვით, რომ ემიტენტის სტრატეგია (პორტფელი) $\pi = \pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ არის (x, f, N) პეჯი (ამერიკული ტიპის პეჯი), თუ ემიტენტის საწყისი კაპიტალი

$$X_0^\pi = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0 = x \tag{15.6}$$

და ნებისმიერი n, $0 \le n \le N$, მომენტისათვის გვაქვს

$$X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n \ge f_n(S_0, S_1, \ldots, S_n). \tag{15.7}$$

ამასთან ერთად, თუ რომელიმე გაჩერების τ მომენტი ისეთია, რომ

$$X_\tau^\pi = \beta_\tau B_\tau + \gamma_\tau S_\tau = f_\tau(S_0, S_1, \ldots, S_\tau). \tag{15.8}$$

მაშინ $\pi = \pi_\tau(\beta_\tau, \gamma_\tau)$ სტრატეგიას მინიმალური (x, f, N) პეჯი ეწოდება.

აღვნიშნოთ ამერიკული ტიპის პეჯების ერთობლიობა $\Pi^A(x, f, N)$ სიმბოლოთი.

შევნიშნოთ, რომ თუ π სტრატეგია აკმაყოფილებს (15.8) ტოლობას, მაშინ ნებისმიერი $\tau \leq N$ გაჩერების მომენტისათვის სრულდება (15.7) უტოლობა.

საინვესტიციო თანხა (ოფციონის სამართლიანი ფასი) ეწოდება სიდიდეს

$$C_N^A = \inf\{x > 0 : \Pi^A(x, f, N) \neq \varnothing\}. \tag{15.9}$$

გაჩერების მომენტს $\tau^* \leq N$ ეწოდება რაციონალური (ამერიკული ოფციონის განაღდების რაციონალური მომენტი), თუ C_N^A საწყისი თანხისათვის (კაპიტალისათვის) და თვითდაფინანსებადი π სტარტეგიისათვის სამართლიანია უტოლობა

$$X_{\tau^*}^{\pi} \geq f_{\tau^*}(S_0, S_1, \ldots, S_{\tau^*}) \tag{15.10}$$

და სინამდვილეში გვაქვს ტოლობა

$$X_{\tau^*}^{\pi} = f_{\tau^*}(S_0, S_1, \ldots, S_{\tau^*}). \tag{15.11}$$

გავიხსენოთ, რომ $\pi = \pi_n(\beta_n, \gamma_n)$ სტრატეგიას ეწოდება თვითდაფინანსებადი, თუ დროის n მომენტში სრულდება

$$B_{n-1}\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n = 0$$

ტოლობა, სადაც $\Delta\beta_n = \beta_n - \beta_{n-1}$, $\Delta\gamma_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$. ასეთ შემთხვევაში გვაქვს

$$X_n^{\pi} = \beta_n B_n + \gamma_n S_n = X_0^{\pi} + \sum_{k=1}^{n}(\beta_k \Delta B_k) + \gamma_k \Delta S_k),$$

სადაც $\Delta B_k = B_k - B_{k-1}$, $\Delta S_k = S_k - S_{k-1}$.

განვიხილოთ ახლა ე. წ. დისკონტირებული კაპიტალი

$$M_n^{\pi} = \frac{X_n^{\pi}}{B_n}. \tag{15.12}$$

M_n^{π} შემთხვევით მიმდევრობას გააჩნია შემდეგი მნიშვნელოვანი თვისება: ნებისმიერი $\tau \leq N$ გაჩერების მომენტისათვის

$$E^*(M_\tau^{\pi}) = M_0^{\pi}, \tag{15.13}$$

სადაც E^* აღნიშნავს

$$p^* = \frac{r - a}{b - a} \tag{15.14}$$

აღბათობით გასაშუალოებას (მათემატიკური ლოდინის ოპერაცია). (15.13) ტოლობის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$X_0^{\pi} = E^*(1 + r)^{-\tau} \cdot X_\tau^{\pi}. \tag{15.15}$$

ცხადია, რომ თუ π სტრატეგია არის (x, f, N) პეჯი, მაშინ

$$x \geq \sup_{\tau} E^*(1 + r)^{-\tau} \cdot f_\tau, \tag{15.16}$$

სადაც სუპრემუმი აიღება ყველა გაჩერების მომენტით $\tau \le N$. იმ შემთხვევაში, როცა π არის მინიმალური პეჯი, ანუ არსებობს ისეთი გაჩერების მომენტი $\tau^* \le N$, რომ $X^\pi_{\tau^*} = f_{\tau^*}$, მაშინ

$$x = X^\pi_0 = E^*(1+r)^{-\tau^*} \cdot f^\pi_{\tau^*} = E^*(1+r)^{-\tau^*} \cdot f_{\tau^*}, \qquad (15.17)$$

და

$$x = \sup_\tau E^*(1+r)^{-\tau} \cdot f_\tau, \qquad (15.18)$$

სადაც სუპრემუმი აიღება ყველა გაჩერების მომენტით $\tau \le N$. ამრიგად, (15.18) ტოლობა წარმოადგენს π პეჯის მინიმალურობის აუცილებელ პირობას.

შეიძლება ჩვენება, რომ (15.18) ტოლობა ემიტენტის საწყის x თანხასა და f_n გადახდის ფუნქციებს შორის დამოკიდებულება წარმოადგენს, აგრეთვე, π პეჯის მინიმალურობის საკმარის პირობას. აქედან გამომდინარე, ამერიკული ოფციონის სამართლიანი ფასი შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$C^A_N = \sup_\tau E^*(1+r)^{-\tau} \cdot f_\tau, \qquad (15.19)$$

სადაც ისე როგორც ზემოთ, სუპრემუმი აიღება ყველა გაჩერების მომენტით $\tau \le N$.

გაჩერების მომენტს $\tau^* \le N$, რომლისთვისაც მიიღწევა (15.19) სუპრემუმი, ეწოდება ამერიკული ოფციონის განაღდების (დაფარვის) რაციონალური მომენტი. ამრიგად, გვაქვს τ^*-თვის

$$C^A_N = \sup_\tau E^*(1+r)^{-\tau} \cdot f_\tau = E^*(1+r)^{-\tau^*} \cdot f_{\tau^*}, \qquad (15.20)$$

შევნიშნოთ, რომ სწორედ (15.19) სახის სუპრემუმებისა და τ^* სახის გაჩერების (რაციონალური, ოპტიმალური) მომენტების სტრუქტურის გარკვევა და მათი მონახვა წარმოადგენს ოპტიმალური გაჩერების თეორიის ძირითად ამოცანებს.

ამერიკული ოფციონის გათვლის დროს (ისევე, როგორც ევროპული ოფციონის გათვლის დროს) ჩვენ შეიძლება გამოვიყენოთ ბინომური ხეები და მოპასუხე პორტფელის პრინციპი. N-საბიჯიანი ბინომური ხის კვანძებში აქციის შესაძლო ფასები დაითვლება შემდეგი ტოლობებით

$$S_N = S_{N,j} = S_0(1+b)^j(1+a)^{N-j}, \quad j = 0, 1, \dots, N, \qquad (15.21)$$

ხოლო ბოლო $n = N$ მომენტში $N+1$ ფინალურ კვანძში ოფციონის ფასები (გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობებით) დაითვლება შემდეგი ტოლობებით

$$f = f_{N,j} = f(S_{N,j}), \quad j = 0, 1, \dots, N, \qquad (15.22)$$

სადაც f არის რაიმე გადახდის ფუნქცია.

ოფციონის მიმდინარე (შიგა) ფასები და სამართლიანი ფასი დაითვლება შემდეგი სქემის მიხედვით.

დროის $n = N-1$ მომენტში (ფინალურის წინა N კვანძებში) გვექნება

$$C^A_{N-1,j} = \max\left\{f_{N-1,j}; (1+r)^{-1}\left[p^* f_{N,j+1} + (1-p^*) f_{N,j}\right]\right\},$$
$$j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

დროის $n = N-2$ მომენტში გვექნება

$$C^A_{N-2,j} = \max\left\{f_{N-2,j}; (1+r)^{-1}\left[p^* C^A_{N-1,j+1} + (1-p^*) C^A_{N-1,j}\right]\right\},$$
$$j = 0, 1, \ldots, N-2,$$

და ა. შ. დროის $n = N-k$ მომენტში გვექნება

$$C^*_{N-k,j} = \max\left\{f_{N-k,j}; (1+r)^{-1}\left[p^* C^A_{N-k+1,j+1} + (1-p^*) C^A_{N-k+1,j}\right]\right\},$$
$$j = 0, 1, \ldots, N-k,$$

და ა. შ. დროის $n = N-N = 0$ მომენტში გვექნება

$$C^A_N = C^A_{0,0} = \max\left\{f(S_0); (1+r)^{-1}\left[p^* C^A_{1,1} + (1-p^*) C^A_{1,0}\right]\right\},$$

სადაც $f(S_0) = f(S_{0,0}) = f_{0,0}$.

ამ დამოკიდებულებებში p^* სიდიდე განიმარტება (15.14) ტოლობით.

ამრიგად, ბინომური ხეები გამოიყენება ევროპული და ამერიკული ოფციონების გათვლის (ფასდადების) ამოცანების გადაწყვეტაში. კერძოდ, შესაძლებელია აქციის და ოფციონის ფასების ევოლუციის აღწერა და ბინომური ხის კვანძებში მათი ყველა შესაძლო მნიშვნელობის გამოთვლა ოფციონის სამართლიანი ფასის ჩათვლით.

შევნიშნოთ, რომ ამერიკული ოფციონის გათვლის დროს მინიმალური პეჯის და მისი შესაბამისი კაპიტალის პროცესის აგება ისევ მოპასუხე პორტფელის პრინციპის გამოყენებით ხდება. გავიხსენოთ, რომ (იხ. (12.7), (12.8))

$$\beta^*_{n+1} = \frac{(1+b)f((1+a)S_n) - (1-a)f((1+b)S_n)}{(1+r)(b-a)B_n}, \tag{15.23}$$

$$\gamma^*_{n+1} = \frac{f((1+b)S_n) - f((1+a)S_n)}{(b-a)S_n}, \tag{15.24}$$

$$X^{\pi^*}_n = \beta^*_{n+1} B_n + \gamma^*_{n+1} S_n =$$
$$= (1+r)^{-1}\Big[p^* f\big((1+b)S_n\big) + (1-p^*) f\big((1+a)S_n\big)\Big]. \tag{15.25}$$

რაც შეეხება ოფციონის განაღდების რაციონალური მომენტის პოვნას, როგორც აღვნიშნეთ, იგი, საზოგადოდ, რთულ ამოცანას წარმოადგენს, ჩვენ მოვიტანთ ამერიკული ოფციონის განაღდების რაციონალური მომენტის არჩევის ერთ მარტივ წესს ბინომური ხის გამოყენების შემთხვევაში. წესი შემდეგში მდგომარეობს: ამერიკული ოფციონის აღსრულების რაციონალური მომენტი არის დროის ის პირველი მომენტი, როდესაც ოფციონის

ფასი (გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობა) გაუტოლდება ან აღემატება მის შინაგან ფასს. ამრიგად, რაციონალური მომენტისათვის გვაქვს

$$\tau^* = \min\{n : \ f(S_n) \geq C_n^A\}. \tag{15.26}$$

ავაგოთ ახლა ამერიკული ოფციონისთვის ორნაბიჯიანი ბინომური ხე. ქვემოთ ჩვენ სწორედ ამ შემთხვევისთვის განვიხილავთ ევროპული და ამერიკული ოფციონების სამართლიანი ფასების შედარების და ამერიკული ოფციონის გათვლის რიცხვით მაგალითებს.

(15.21)–(15.26) ტოლობების მიხედვით $N = 2$, $j = 0, 1, 2$, შემთხვევაში

$$S_2 = S_{2,j} = S_0(1+b)^j \cdot (a+a)^{2-j}, \ \ j = 0, 1, 2, \tag{15.27}$$

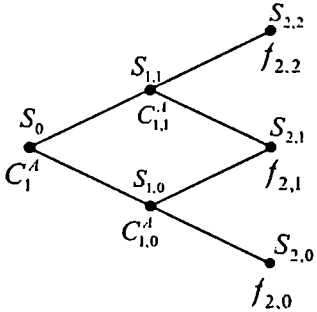
$$f = f_2 = f_{2,j} = f(S_{2,j}), \ \ j = 0, 1, 2, \tag{15.28}$$

$$C_{1,j}^A = \max\left\{ f_{1,j}; (1+r)^{-1}\left[p^* f_{2,j+1} + (1-p^*) f_{2,j}\right]\right\}, \ \ j = 0, 1, \tag{15.29}$$

$$C_{0,j}^A = C_2^A =$$

$$= \max\left\{ f_{0,j}; (1+r)^{-1}\left[p^* C_{1,j+1}^A + (1-p^*) C_{1,j}^A\right]\right\}, \ \ j = 0, 1. \tag{15.30}$$

ამრიგად, ორნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე



ნახ. 15.1.

4. განვიხილოთ ახლა ამერიკული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიანი ამოცანა. ვიგულისხმოთ, რომ გვაქვს შემდეგი მონაცემები (იხ. (13.3)–(13.6))

$$B_0 = 20, \ \ r = \frac{1}{5}, \ \ S_0 = 100, \ \ a = -\frac{2}{5}, \ \ b = \frac{3}{5}, \ \ K = 100. \tag{15.31}$$

გამოთვლებში, როგორც ადრე, ჩვენ გვჭირდება შემდეგი სიდიდეები

$$1+a=\frac{3}{5},\quad 1+b=\frac{8}{5},\quad b-a=1,$$
$$p^*=\frac{3}{5},\quad 1-p^*=\frac{2}{5},\quad (1+r)^{-1}=\frac{5}{6}. \tag{15.32}$$

მაგალითი 15.4. განვიხილოთ (15.1), (15.2) ფინანსური ბაზარი. ვთქვათ, $N=2$, ე. ი. $n=0,1,2$ და შესრულებულია (15.31) პირობები. დავუშვათ, ინვესტორმა იყიდა (ემიტენტმა გაყიდა) ამერიკული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f=f_2=f_2(S_2)=\max(S_2-K,0). \tag{15.33}$$

ჩვენი მიზანია გადავწყვიტოთ ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიანი ამოცანა. ჩვენ მოვიტანთ ამ ამოცანის ამოხსნას აქციის შესაძლო ფასების შხოლოდ ერთი კონკრეტული შემთხვევისათვის.

პირველ რიგში ავაგოთ ორნაბიჯიანი ბინომური ხე. (15.27)–(15.30) ტოლობების გამოყენებით გვექნება

$$S_{2,0}=36,\quad S_{2,1}=96,\quad S_{2,2}=256,$$
$$f_{2,0}=0,\quad f_{2,1}=0,\quad f_{2,2}=156. \tag{15.34}$$

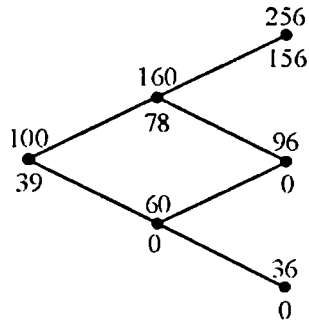
შემდეგ გვაქვს (15.21), (15.22) ტოლობების თანახმად

$$f_{1,0}=f(S_{1,0})=\max(60-100,0)=0,$$
$$f_{1,1}=f(S_{1,1})=\max(160-100,0)=60, \tag{15.35}$$
$$f_{0,0}=f(S_{0,0})=f(S_0)=\max(100-100,0)=0.$$

მოყვანილი ტოლობების გამოყენებით გვექნება

$$C^A_{1,0}=\max\left\{f_{1,0};(1+r)^{-1}\left[p^*f_{2,1}+(1-p^*)f_{2,0}\right]\right\}=$$
$$=\max\left\{0;\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 0+\frac{2}{5}\cdot 0\right)\right\}=\max\{0;0\}=0, \tag{15.36}$$
$$C^A_{1,1}=\max\left\{f_{1,1};(1+r)^{-1}\left[p^*f_{2,2}+(1-p^*)f_{2,1}\right]\right\}=$$
$$=\max\left\{60;\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 156+\frac{2}{5}\cdot 0\right)\right\}=\max\{60;78\}=78, \tag{15.37}$$
$$C^A_2=\max\left\{f(S_0);(1+r)^{-1}\left[p^*C^A_{1,1}+(1-p^*)C^A_{1,0}\right]\right\}=$$
$$=\max\left\{0;\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 78+\frac{2}{5}\cdot 0\right)\right\}=\max\{0;39\}=39. \tag{15.38}$$

ამრიგად, ორნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე



ნახ. 15.2.

საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ ამ ბინომური ხის კვანძებში რიცხვითი მონაცემები ზუსტად ემთხვევა იგივე (15.31) პირობებში ევრპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის შესაბამისი ორნაბიჯიანი ბინომური ხის მონაცემებს (იხ. ნახ. 13.2). კერძოდ, ერთმანეთის ტოლია სამართლიანი ფასები: $C_2 = C_2^A = 39$.

მოპასუხე პორტფელის პრინციპით აგებული მინიმალური პეჯი გამოიყენება ევროპული და ამერიკული ოფციონების გათვლაში. ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია ვისარგებლოთ ევროპული ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიან ამოცანაში აგებული მინიმალური პეჯით (იხ. მაგალითი 13.2), რომლის თანახმად გვაქვს:

I. თუ $S_0 \to S_{1,1} = 160$, მაშინ

$$\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \Big(-\frac{39}{20}, \frac{39}{50}\Big),$$
$$\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*) = \Big(-\frac{13}{4}, \frac{39}{40}\Big);$$

II. თუ $S_0 \to S_{1,0} = 60$, მაშინ

$$\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \Big(-\frac{39}{20}, \frac{39}{50}\Big),$$
$$\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*) = (0, 0).$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ აქციის შესაძლო ფასების ნებისმიერი ევოლუციისთვის და ოფციონის განაღდების ნებისმიერი შემთხვევითი მომენტისთვის აგებული მინიმალური პეჯის საშუალებით ემიტენტი შეასრულებს ოფციონური კონტრაქტით გათვალისწინებულ ვალდებულებას.

განვიხილოთ ახლა ოფციონის განაღდების τ^* რაციონალური მომენტის არჩევის საკითხი. (15.26) ტოლობის გამოყენებით ადვილი საჩვენებელია:

1. თუ $S_0 \to S_{1,1} = 160$, მაშინ $\tau^* = 2$;
2. $S_0 \to S_{1,0} = 60$, მაშინ $\tau^* = 1$.

მართლაც, თუ ვიმყოფებით $S_{1,1}$ კვანძში, მაშინ გვაქვს, რომ გადახდის ფუნქციის ჩვენი გასამრჯელო დროის $n = 1$ მომენტში ტოლია $f_1(S_{1,1}) = f(160) = 60$ სიდიდის, ხოლო მოსალოდნელი საშუალო გასამრჯელო დროის $n = 2$ მომენტში ტოლია $C^A_{1,1} = 78$ სიდიდის. ამიტომ ოფციონის განაღდების რაციონალური მომენტი $\tau^* = 2$.

ვთქვათ, ახლა ვიმყოფებით $S_{1,0}$ კვანძში, მაშინ გვაქვს

$$f_1(S_{1,0}) = f_1(60) = 40, \quad C^A_{1,0} = 0.$$

ამიტომ, ცხადია, $\tau^* = 1$.

მაგალითი 15.5. განვიხილოთ (15.1), (15.2) ფინანსური ბაზარი და ვთქვათ, $N = 2$, ე. ი. $n = 0, 1, 2$ და შესრულებულია (15.31) პირობები. დავუშვათ, ინვესტორმა იყიდა (ემიტენტმა გაყიდა) ამერიკული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f = f_2 = f_2(S_2) = \max(K - S_2, 0). \tag{15.39}$$

გადავწყვიტოთ ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიანი ამოცანა. პირველ რიგში ავაგოთ ორნაბიჯიანი ბინომური ხე. გვაქვს

$$\begin{aligned} f_{1,0} &= f(S_{1,0}) = \max(100 - 60, 0) = 40, \\ f_{1,1} &= f(S_{1,1}) = \max(100 - 160, 0) = 0, \\ f_{0,0} &= f(S_{0,0}) = f(S_0) = \max(100 - 100, 0) = 0. \end{aligned} \tag{15.40}$$

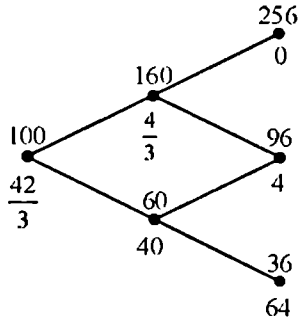
შემდეგ გვაქვს

$$\begin{aligned} P^A_{1,0} &= \max\left\{f_{1,0}; (1+r)^{-1}\left[p^* f_{2,1} + (1-p^*) f_{2,0}\right]\right\} = \\ &= \max\left\{40; \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 4 + \frac{2}{5}\cdot 64\right)\right\} = \max\left\{40; \frac{70}{3}\right\} = 40, \end{aligned} \tag{15.41}$$

$$\begin{aligned} P^A_{1,1} &= \max\left\{f_{1,1}; (1+r)^{-1}\left[p^* f_{2,2} + (1-p^*) f_{2,1}\right]\right\} = \\ &= \max\left\{0; \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 0 + \frac{2}{5}\cdot 4\right)\right\} = \max\left\{60; \frac{4}{3}\right\} = \frac{4}{3}, \end{aligned} \tag{15.42}$$

$$\begin{aligned} P^A_2 &= \max\left\{f(S_0); (1+r)^{-1}\left[p^* P^A_{1,1} + (1-p^*) P^A_{1,0}\right]\right\} = \\ &= \max\left\{0; \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\cdot 40\right)\right\} = \max\left\{0; \frac{42}{3}\right\} = \frac{42}{3}. \end{aligned} \tag{15.43}$$

ამრიგად, ორნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე



ნახ. 15.3.

ავაგოთ მინიმალური პეჯი დროის $n = 0$ მომენტში (15.23), (15.24) ფორმულებს თანახმად გვექნება

$$\beta_1^* = \frac{(1+b)P_{1,0}^A - (1+a)P_{1,1}^A}{(1+r)(b-a)B_0} = \frac{\frac{8}{5}\cdot 40 - \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{3}}{\frac{6}{5}\cdot 1\cdot 20} = \frac{79}{30},$$

$$\gamma_1^* = \frac{P_{1,1}^A - P_{1,0}^A}{(b-a)\cdot 100} = \frac{\frac{4}{3} - 40}{1\cdot 100} = -\frac{29}{75}.$$

ამრიგად, $\pi_1^*(\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(\frac{79}{30}, -\frac{29}{75}\right)$ და გვაქვს

$$X_0^{\pi^*} = \beta_1^* B_0 + \gamma_1^* S_0 = \frac{79}{30}\cdot 20 - \frac{29}{75}\cdot 100 = \frac{42}{3},$$

$$X_0^{\pi^*} = (1+r)^{-1}\left[p^* P_{1,1}^A + (1-p^*)P_{1,0}^A\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{3} + \frac{2}{5}\cdot 40\right) = \frac{42}{3}.$$

შემდეგ გვაქვს მაგალითი 14.2-ის თანახმად

I. თუ $S_0 \to S_{1,1} = 160$, მაშინ

$$\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*) = \left(\frac{2}{9}, -\frac{1}{40}\right);$$

II. თუ $S_0 \to S_{1,0} = 60$, მაშინ

$$\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*) = \left(\frac{125}{36}, -1\right).$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ აქციის შესაძლო ფასების ნებისმიერი ევოლუციისათვის და ოფციონის განაღდების ნებისმიერი შემთხვევითი მომენტისათვის აგებული მინიმალური პეჯის საშუალებით ემიტენტი შეასრულებს ოფციონური კონტრაქტით გათვალისწინებული ვალდებულებას.

განვიხილოთ ახლა ოფციონის განაღდების τ^* რაციონალური მომენტის არჩევის საკითხი. (15.26) ტოლობის ანალოგიური

$$\tau^* = \min\left\{n:\ f(S_n) \geq P_n^A\right\} \tag{15.44}$$

ტოლობის გამოყენებით ადვილი საჩვენებელია:

1. თუ $S_0 \to S_{1,1} = 160$, მაშინ $\tau^* = 2$;

2. $S_0 \to S_{1,0} = 60$, მაშინ $\tau^* = 1$.

მართლაც, ვთქვათ, ვიმყოფებით $S_{1,1}$ კვანძში. მაშინ დროის $n = 1$ მომენტში ოფციონის განაღდებით ჩვენ მივიღებთ გასამრჯელოს $f_1(S_{1,1}) = f_1(160) = 0$, ხოლო მოსალოდნელი საშუალო გასამრჯელო დროის $n = 2$ მომენტში ტოლია $P^A_{1,1} = \frac{4}{3}$ სიდიდის, ამიტომ $\tau^* = 2$.

ვთქვათ, ახლა ვიმყოფებით $S_{1,0}$ კვანძში. მაშინ გვაქვს $f_1(S_{1,0}) = f_1(60) = 40$, $P^A_{1,0} = 40$ და ამიტომ $\tau^*. = 1$.

საინტერესოა (15.1), (15.2) მოდელის შემთხვევაში $r \geq 0$ პარამეტრის გათვალისწინებით შევადაროთ ერთმანეთს ევროპული და ამერიკული ტიპის ყიდვისა და გაყიდვის სტანდარტული ოფციონების სამართლიანი ფასები ანუ C_N და C^A_N, P_N და P^A_N სიდიდეები.

სამართლიანია შემდეგი ფაქტები:

$$\text{შემთხვევა I. თუ } r = 0, \text{ მაშინ } C_N = C^A_N \text{ და } P_N = P^A_N; \tag{15.45}$$

$$\text{შემთხვევა II. თუ } r > 0 = 0, \text{ მაშინ } C_N = C^A_N. \tag{15.46}$$

შევნიშნოთ, რომ შემთხვევა II-ის საილუსტრაციოდ გამოდგება მაგალითი 15.4. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ ეს ფაქტები გარკვეულ პირობებში სამართლიანია სხვა სახის გადახდის ფუნქციების შემთხვევაშიც.

ახლა მოვიტანთ ზოგიერთ ამოცანას შემთხვევა I-ის საილუსტრაციოდ, რომლის ამოხსნას ვთავაზობთ მკითხველს. ამ ამოცანებში ყველგან იგულისხმება, რომ (15.31), (15.32) მონაცემებში $r = 0$.

ამოცანა 15.1. განვიხილოთ (15.1), (15.2) მოდელი და ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით $f_2 = f(S_2) = \max(S_2 - K, 0)$. გამოთვალეთ C_2 სამართლიანი ფასი ორნაბიჯიანი ბინომური ხის გამოყენებით.

ამოცანა 15.2. განვიხილოთ (15.1), (15.2) მოდელი და ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით $f_2 = f(S_2) = \max(K - S_2, 0)$. გამოთვალეთ P_2 სამართლიანი ფასი ორნაბიჯიანი ბინომური ხის გამოყენებით.

ამოცანა 15.3. განვიხილოთ (15.1), (15.2) მოდელი და ამერიკული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით $f_2 = f(S_2) = \max(S_2 - K, 0)$.

1) ორნაბიჯიანი ბინომური ხის გამოყენებით გამოთვალეთ C^A_2 სამართლიანი ფასი.

2) ააგეთ მინიმალური პეჯი $\pi^* = (\beta^*_n, \gamma^*_n)$, $n = 1, 2$.

3) იპოვეთ ოფციონის განაღდების რაციონალური მომენტი τ^*.

ა მ ო ც ა ნ ა 15.4. განვიხილოთ (15.1), (15.2) მოდელი და ამერიკული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით $f_2 = f(S_2) = \max(K - S_2, 0)$.

1) ორნაბიჯიანი ბინომური ხის გამოყენებით გამოთვალეთ P_2^A სამართლიანი ფასი.

2) ააგეთ მინიმალური პეშკი $\pi^* = (\beta_n^*, \gamma_n^*)$, $n = 1, 2$.

3) იპოვეთ ოფციონის განაღდების რაციონალური მომენტი τ^*.

ალბათობისა და სტატისტიკის საწყისები

§ 1. შესავალი

1. ალბათობის თეორია შეისწავლის ბუნებაში მიმდინარე შემთხვევით პროცესებს (მოვლენებს) და მისი საგანი სწორედ ამ პროცესების მათემატიკური ანალიზია. შემთხვევითი მოვლენა დაკავშირებულია რაიმე ცდასთან (ექსპერიმენტთან) და წარმოადგენს გარკვეულ ემპირიულ ფენომენს, რომელიც მოცემულ "პირობათა ერთობლიობის" დროს შეიძლება შემდეგნაირად დავახასიათოთ: შემთხვევით მოვლენას არ გააჩნია დეტერმინისტული რეგულარობა (ფენომენზე დაკვირვებები განსხვავებულ შედეგებს იძლევა), მაგრამ გააჩნია სტატისტიკური რეგულარობა, რომელიც გამოიხატება სიხშირეთა (ფარდობით სიხშირეთა) მდგრადობაში.

ნათქვამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ წესიერი მონეტის აგდება. თუ ამ ცდას რამდენჯერმე გავიმეორებთ, მაშინ ადვილად დავინახავთ შედეგების არარეგულარობას – ხან გერბი მოდის, ხან საფასური და შეუძლებელია წინასწარ ცალსახად ვთქვათ კონკრეტული ცდის შედეგად გერბი მოვა თუ საფასური. მიუხედავად ამისა, თუ ცდათა რიცხვი დიდია, მაშინ ასევე ადვილად დავინახავთ ცდის შედეგების სტატისტიკურ რეგულარობას, რაც იმაში გამოიხატება, რომ, მაგალითად, გერბის მოსვლის ფარდობითი სიხშირე "ახლოს" იქნება 0,5-თან.

ალბათობის თეორიაში იგულისხმება, რომ ცდის ჩატარებამდე ცნობილია ცდის ალბათური მოდელი, რომელიც საშუალებას იძლევა განაწილების ტერმინებში ცდის ჩაუტარებლად დავახასიათოთ ცდის შედეგების ყოფაქცევა, გამოვთვალოთ ცდასთან დაკავშირებული შემთხვევითი სიდიდეების რიცხვითი მახასიათებლები, გავაკეთოთ პროგნოზი და სხვა.

იმ შემთხვევაში, როდესაც ცდის ალბათური მოდელი უცნობია, მაშინ იძულებული ვართ ჩვენთვის საინტერესო მახასიათებელზე ჩავატაროთ გარკვეული რაოდენობის ცდები (თუ ეს შესაძლებელია) და მიღებული მონაცემების საფუძველზე გავაკეთოთ საჭირო სტატისტიკური დასკვნა, მაგალითად, შევაფასოთ თეორიული სიდიდეები, შევამოწმოთ ჰიპოთეზები და სხვა. რაიმე ნიშნის მქონე მახასიათებლის ყველა შესაძლო მნიშვნელობათა ერთობლიობას სტატისტიკური პოპულაცია (პოპულაცია, გენერალური ერთობლიობა)

ეწოდება. როგორც წესი, პოპულაციის მთლიანი (სრული) აღწერა და შესწავლა ან შეუძლებელია ან მიზანშეწონილი არ არის. მაგალითად, პრაქტიკულად შეუძლებელია მსოფლიოში ყველა მწეველი ადამიანის ჯანმრთელობაზე თამბაქოს გავლენის შესწავლა, მიზანშეწონილი არ არის ნათურების ან ტყვია-წამლის პროდუქციის ვარგისიანობაზე მათი მთლიანი შემოწმება და სხვა. ამიტომ ხდება პოპულაციის ნაწილზე დაკვირვება, რომლის მონაცემებს შერჩევითი ერთობლიობა ანუ შერჩევა ეწოდება. მკვლევარის განკარგულებაში სწორედ მხოლოდ შერჩევაა. მათემატიკური სტატისტიკის (სტატისტიკური კვლევის) ძირითადი მიზანი შერჩევის საშუალებით პოპულაციის შესწავლაა.

გვინდა შევნიშნოთ შემდეგი. ალბათობის თეორიის საწყისი ცნებებისა და განმარტებების საილუსტრაციოდ ხშირად გამოიყენება ერთი შეხედვით ისეთი მარტივი ცდები, როგორიცაა მონეტის აგდება, კამათლის გაგორება, ყუთიდან შემთხვევით საგნების ამოღება და სხვა. თუმცა აქვე უნდა აღვნიშნოთ, რომ ასეთი სახის ცდების დროსაც კი ზოგიერთ შეკითხვაზე პასუხი რთული მათემატიკური ამოცანების ამოხსნებთან არის დაკავშირებული. მაგალითად, როგორ გამოვთვალოთ იმის ალბათობა, რომ მონეტის 10000-ჯერ აგდების დროს: 1. გერბის მოსვლათა რიცხვი ზუსტად 7000 იქნება. 2. გერბის მოსვლათა რიცხვი (8000,9000) შუალედში იქნება მოთავსებული. 3. გერბის მოსვლათა რიცხვი 6000-ზე მეტი იქნება. გარდა იმისა, რომ აღნიშნული ცდების შედეგებს ნათელი საილუსტრაციო ხასიათი აქვს, მასთან დაკავშირებულია, მაგალითად, ბერნულის (ბინომური) განაწილება. სწორედ ასეთი განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეებისათვის იყო თავდაპირველად დამტკიცებული ალბათობის თეორიის ფუნდამენტური თეორემები დიდ რიცხვთა კანონისა და ზღვარითი თეორემების სახით. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ ბინომური განაწილებით აღიწერება სხვადასხვა დარგებში შესასწავლი შემთხვევითი სიდიდეების ყოფაქცევა, რის გამოც ანალოგიურ შეკითხვებზეა პასუხი გასაცემი უამრავი რეალური პრაქტიკული ამოცანის ამოხსნის დროს.

1928 წელს ინგლისელმა ბოტანიკოსმა რ. ბროუნმა შეამჩნია, რომ სითხეში მოთავსებული ნაწილაკები ერთმანეთს ქაოსურად ეჯახება და შემთხვევით იცვლის მიმართულებებს. სწორედ ეს მოძრაობა დაედო საფუძვლად ბროუნის მოძრაობის აღმწერ შემთხვევით პროცესს, რომლის მათემატიკური აღწერა დაიწყო ლ. ბაშელიემ (1900 წ.), შემდეგ გააგრძელა ა. აინშტაინმა (1906 წ.), ხოლო სრულყოფილი მათემატიკური თეორია ააგო ნ. ვინერმა (1923 წ.). სამეცნიერო ლიტერატურასა და ტერმინოლოგიაში ბროუნის მოძრაობა დისკრეტული და უწყვეტი დროით ვინერის პროცესის სახელწოდებით დამკვიდრდა. ვინერის პროცესი აღიწერება გაუსის, ანუ ნორმალური განაწილებით, რომელსაც უდიდესი მნიშვნელობა აქვს, მაგალითად, დიფუზიური პროცესების შესწავლაში, თანამედროვე ფინანსური ბაზრების დისკრეტული და უწყვეტი მათემატიკური მოდელების აგებაში და სხვა. ცნობილია, აგრეთვე, რომ ეკონომიკაში მოთხოვნისა და მიწოდების

მრუდების გადაკვეთის წერტილის ყოფაქცევა პარეტოს განაწილებით აღწერება და მნიშვნელოვანი ეკონომიკური დასკვნების საშუალებას იძლევა. ბროუნის მოძრაობა თანამედროვე სტოქასტური ანალიზის (ალბათურ-სტატისტიკური მეთოდების), ანუ სტოქასტური დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის საფუძველს წარმოადგენს.

2. ცნობილი ფრანგი მათემატიკოსი, ფიზიკოსი და ფილოსოფოსი ბლეზ პასკალი (1623–1662) მეორე ფრანგ მათემატიკოსსა და იურისტს პიერ ფერმას (1601–1665) 1654 წლის 28 ოქტომბრით დათარიღებულ წერილში სწერდა: "ადამიანების უმრავლესობას მიაჩნია, რომ თუ მათ რაიმეს შესახებ სრული ცოდნა არ აქვთ (ჩვენ კი არასდროს გვაქვს სრული ცოდნა), მაშინ მათ ამის შესახებ არაფერი იციან. მე დარწმუნებული ვარ, რომ ასეთი აზრი არის ღრმად მცდარი. ნაწილობრივი ცოდნა აგრეთვე ცოდნაა და არასრულ დარწმუნებულობას გარკვეული მნიშვნელობა გააჩნია, განსაკუთრებით, მაშინ, როდესაც ჩემთვის ცნობილია ამ დარწმუნებულობის ხარისხი. აქ ბუნებრივად დაისმის კითხვა: შეიძლება კი დარწმუნებულობის ხარისხის გაზომვა რიცხვით? რა თქმა უნდა – ვუპასუხებ მე. სწორედ ამას ეფუძნება აზარტული თამაშების მოთამაშეთა დარწმუნებულობა. როდესაც მოთამაშე აგორებს კამათელს, მან წინასწარ არ იცის, რომელი კონკრეტული რიცხვი მოვა. მაგრამ მან ზოგიერთი რამ მაინც იცის. მაგალითად, ის, რომ 1, 2, 3, 4, 5, 6 რიცხვებს მოსვლის ერთნაირი შანსი აქვს".

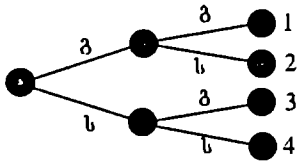
მოთამაშეთა ეს ვარაუდი ეფუძნება წინასწარ იმის ცოდნას, რომ კამათელი არის სიმეტრიული სხეული (კუბი) და მისი ექვსივე წახნაგი ერთმანეთის ტოლია. ამიტომ, კამათელზე კონკრეტული რიცხვის მოსვლის ერთნაირ შანსში დარწმუნებულობის ხარისხი, ბუნებრივია გავზომოთ 1/6-ის ტოლი რიცხვით. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, მაგალითად, ხუთიანის, ასევე კამათელის ყოველი დანარჩენი რიცხვის მოსვლის შანსი რიცხვობრივად 1/6-ის ტოლია. ანალოგიური მსჯელობით შეიძლება დავასკვნათ, რომ მონეტის აგდების დროს გერბის, ასევე საფასურის გამოჩენის რიცხვითი შანსი 1/2-ის ტოლია.

კამათლის გაგორების დროს ზედა წახნაგზე მოსული შესაძლო რიცხვების (ციფრების) ალბათობების დათვლის ანალოგიური მიდგომა შეიძლება გამოვიყენოთ, მაგალითად, ყუთში მოთავსებული საგნების შემთხვევით ამოღების ცდებში, რომელსაც კიდევ ურნის (ყუთის) სქემა ეწოდება. სიტყვა "შემთხვევითი", მაგალითად, ურნის სქემის შემთხვევაში ნიშნავს იმას, რომ ყუთიდან საგნების ამოღების ან ყუთში საგნების მოთავსების შესაძლო შედეგებს ტოლი რიცხვითი შანსები (ალბათობები) გააჩნია. როცა საგნების რაოდენობა მცირეა, მაშინ ამ ალბათობების დათვლა მათემატიკური ფორმულების გამოყენების გარეშეც შეიძლება, მაგალითად, ცხრილების და დიაგრამების საშუალებით. განვიხილოთ რამდენიმე საილუსტრაციო მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.1. ვთქვათ, ვაგდებთ მონეტას ორჯერ. ყოველ ცდაში ზედა მხარეს შეიძლება გამოჩნდეს ან გერბი (გ) ან საფასური (ს).

ავაგოთ ამ ცდის ალმწერი დიაგრამა და გამოვთვალოთ მისი საშუალებით იმის ალბათობა, რომ ორივე ცდის შედეგი იქნება გერბი.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ ე. წ. ხისებრი (ხის მსგავსი) დიაგრამა, რომელსაც კიდევ დენდროგრამა ეწოდება. იგი მოტანილია შემდეგი სახით

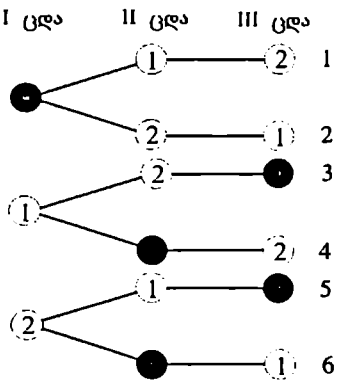


ნახ. 1.1. მონეტის ორჯერ აგდების დიაგრამა.

როგორც ნახაზი 1.1 გვიჩვენებს სულ გვაქვს ოთხი შესაძლო შედეგი, ხოლო ორივე ცდაში გერბის გამოჩენას ხელს უწყობს მხოლოდ ერთი შესაძლო შედეგი. ამიტომ საძებნი ალბათობა $1/4$-ის ტოლია.

მაგალითი 1.2. ვთქვათ, ყუთში მოთავსებულია ორი თეთრი და ერთი შავი ბირთვი. ყუთიდან შემთხვევით რიგ-რიგობით ვიღებთ სამივე ბირთვს. ვატარებთ სამ ცდას შემდეგი ორი წესით: 1. ყოველი ამოღებული ბირთვი უკან ყუთში ბრუნდება; 2. ამოღებული ბირთვები უკან არ ბრუნდება. ვიპოვოთ სამივე ცდაში თეთრი ბირთვის ამოღების ალბათობა.

ამოხსნა. 1. ადვილი მისახვედრია, რომ ამ შემთხვევაში სამივე ცდაში თეთრი ბირთვის ამოღების ალბათობა $2/3$-ის ტოლია. 2. ვიგულისხმოთ, რომ თეთრი ბირთვები გადანომრილია ციფრებით 1 და 2. სამი ცდის ყველა შესაძლო შედეგი სქემატურად შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგი დიაგრამის საშუალებით

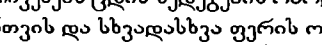


ნახ. 1.2. ბირთვების ამოღების დიაგრამა.

როგორც ნახაზი 1.2 გვიჩვენებს მეორე წესით ბირთვების ამოღების სამივე ცდაში თეთრი ბირთვის ამოღების ალბათობა ისევ 2/3-ის ტოლია.

მაგალითი 1.3. ვთქვათ, ყუთში მოთავსებულია სამი თეთრი და ერთი შავი ბირთვი. ყუთიდან ერთდროულად ვიღებთ ორ ბირთვს. გამოვთვალოთ: 1. იმის ალბათობა, რომ ორივე ბირთვი თეთრია; 2. იმის ალბათობა, რომ ერთი ბირთვი თეთრია, მეორე – შავი.

ამოხსნა. ადვილი მისახვედრია, რომ ცდის შესაძლო შედეგები სქემატურად შეიძლება შემდეგნაირად გამოვსახოთ



როგორც ეს სქემა გვიჩვენებს ცდის შედეგების რაოდენობა ექვსის ტოლია, ხოლო ორი თეთრი ბირთვის და სხვადასხვა ფერის ორი ბირთვის ამოღების ალბათობები ერთმანეთის ტოლია და უდრის 1/2-ს.

მაგალითი 1.4. ვთქვათ, გვაქვს სამი გადანომრილი ბირთვი: 1, 2, 3 და სამი ყუთი: I, II, III. ბირთვები შემთხვევით ნაწილდება (თავსდება) ყუთებში. 1. შევადგინოთ ყუთებში ბირთვების შესაძლო განაწილების რაოდენობის ცხრილი; 2. ვიპოვოთ იმის ალბათობა, რომ ყუთში მოთავსდება არანაკლებ ორი ბირთვისა.

ამოხსნა. ადვილი დასათვლელია, რომ ჩვენ გვექნება ბირთვების 27 სხვადასხვა განაწილება ყუთებში. განლაგებათა რაოდენობა სქემატურად ცხრილი 1.1-ის სახით შეიძლება ჩავწეროთ, რომელიც დამატებით ახსნას არ საჭიროებს.

2. როგორც ცხრილი 1.1 გვიჩვენებს, იმის ალბათობა, რომ ყუთში მოთავსდება არანაკლებ ორი ბირთვისა $\frac{21}{27} = \frac{7}{9}$-ის ტოლია.

შევნიშნოთ, რომ თუ განვიხილავთ ზოგად შემთხვევას, როცა n ყუთში უნდა გავანაწილოთ m ბირთვი, მაშინ დიდი n და m რიცხვებისთვის პრაქტიკულად შეუძლებელია დიაგრამების გამოყენება და მათი საშუალებით ჩვენთვის საინტერესო ალბათობების გამოთვლა. ასე, მაგალითად, თუ $n = m = 10$, მაშინ ყველა შესაძლო განაწილებათა რაოდენობა 10^{10}-ის ტოლია.

გვინდა აღვნიშნოთ, რომ ურნის სქემა არსებითად გამოიყენება უამრავი პრაქტიკული ამოცანის გადაწყვეტაში. ასე, მაგალითად, 1. თუ ვაგდებთ m მონეტას ან ვაგორებთ m კამათელს, მაშინ, შესაბამისად, გვაქვს m ბირთვის $n = 2$ და $n = 6$ ყუთში განაწილების ამოცანა; 2. გეიგერის ცდაში მრიცხველები ყუთების, ხოლო ნაწილაკები ბირთვების როლს ასრულებს; 3. ქიმიურ რეაქციაში, მაგალითად, პოლიმერის ჯაჭვების მოლეკულები ყუთების როლს, ხოლო ჟანგბადის მოლეკულები ბირთვების როლს ასრულებს. ანალოგიური მაგალითები შეიძლება განვიხილოთ აგრეთვე სტატისტიკურ ფიზიკაში, ბიოლოგიაში, გენეტიკაში, კვანტურ მექანიკაში და სხვა.

ცხრილი 1.1.

N	I ყუთი	II ყუთი	III ყუთი
1	123	–	–
2	–	123	–
3	–	–	123
4	12	3	–
5	13	2	–
6	23	1	–
7	12	–	3
8	13	–	2
9	23	–	1
10	1	23	–
11	2	13	–
12	3	12	–
13	1	–	23
14	2	–	13
15	3	–	12
16	–	12	3
17	–	13	2
18	–	23	1
19	–	1	23
20	–	2	13
21	–	3	12
22	1	2	3
23	1	3	2
24	2	1	3
25	2	3	1
26	3	1	2
27	3	2	1

3. ახლა მოკლედ გვინდა შევეხოთ ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის განვითარების ზოგიერთ პერიოდს.

1). წინასტორიული პერიოდი. არქეოლოგიური მონაცემების თანახმად, სათამაშო "შემთხვევითი ინსტრუმენტები", მაგალითად გარკვეული სახის სათამაშო კამათელი, გამოიყენებოდა ჯერ კიდევ ძველ ეგვიპტეში (მიახლოებით 3500 წ. ჩვენს წელთაღრიცხვამდე), ძველ საბერძნეთსა და რომში (ცნობილია, მაგალითად, იმპერატორების გატაცება აზარტული თამაშებით). ადრეულ პერიოდში გროვდებოდა სტატისტიკური მონაცემებიც. მაგალითად, ცნობილია გარკვეული სახის კონტრაქტები დაზღვევასა და

კომერციაში 4-3 ათასი წლის პერიოდში ბაბილონის ძველ ჩანაწერებში, ხოლო 220 წ. ჩვენს წელთაღრიცხვამდე ბიზანტიის იმპერიის კანონებსა და კოდექსებში არსებობდა სიცოცხლის დაზღვევის სტატისტიკური ცხრილები. გროვდებოდა აგრეთვე მონაცემები მოსახლეობისა და მოსავლის აღწერის შესახებ.

2). XVII–XVIII საუკუნეების პერიოდი. ამ პერიოდს მიეკუთვნება ალბათობის თეორიის, როგორც მათემატიკური მეცნიერების საწყისების ჩამოყალიბება და დაკავშირებულია მაგალითად, ბ. პასკალის, პ. ფერმას, ქ. ჰიუგენსის და ი. ბერნულის სახელებთან. აზარტულ თამაშებში კომბინატორიკის გამოყენებით ხდებოდა ხდომილობათა ალბათობების გამოთვლა, აგრეთვე ჯამისა და ნამრავლის ალბათობების გამოთვლის წესების შემოღება, მათემატიკური ლოდინის (საშუალო მნიშვნელობის) შესახებ დისკუსიები და სხვა. ი. ბერნულის სახელთან არის დაკავშირებული ე. წ. დიდ რიცხვთა კანონი, რომელიც შემდგომში საფუძვლად დაედო ალბათობის თეორიის შედეგების გამოყენებას.

3). XX საუკუნის პერიოდი. ოცდაათიან წლებში ა. კოლმოგოროვმა (1936 წ.) ააგო ალბათობის თეორიის აქსიომატიკა, რომლის საფუძველზე ალბათობის თეორია სრულყოფილ აბსტრაქტულ მათემატიკურ მეცნიერებად ჩამოყალიბდა.

შევნიშნავთ, რომ კვლევა ალბათობის თეორიასა და მათემატიკურ სტატისტიკაში დღესაც ინტენსიურად მიმდინარეობს მსოფლიოს წამყვან სამეცნიერო ცენტრებსა და უნივერსიტეტებში. გარდა წმინდა მათემატიკური ინტერესისა, ამას განაპირობებს მეცნიერების სხვადასხვა დარგების თეორიული და პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტაში ალბათურ-სტატისტიკური მეთოდების გამოყენების სულ უფრო მზარდი მოთხოვნები.

საქართველოში ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის, როგორც მათემატიკური მეცნიერების განვითარებას საფუძველი ჩაუყარა პროფ. გ. მანიამ. სწორედ მისი მოღვაწეობის შედეგად შეიქმნა ამ მეცნიერების ცნობილი ქართული სკოლა. გვინდა აღვნიშნოთ ამ სკოლის განვითარებაში რუსული ალბათური სკოლის წარმომადგენლების, აკადემიკოსების, – ანდრეი კოლმოგოროვის, იური პროხოროვის და, განსაკუთრებით, ალბერტ შირიაევის ღვაწლი. საჭიროდ მიგვაჩნია აგრეთვე აღვნიშნოთ, რომ წლების განმავლობაში (60–80-იანი წლები) საქართველოს დაბა ბაკურიანში რეგულარულად ტარდებოდა კონფერენციები ალბათობის თეორიასა და მათემატიკურ სტატისტიკაში, რომელშიც მონაწილეობდნენ მეცნიერები რუსეთიდან, უკრაინიდან, ლიტვიდან, უზბეკეთიდან, გერმანიიდან, ბულგარეთიდან და სხვა ქვეყნებიდან. დიდი სიამოვნებით და მადლიერების გრძნობით აღვნიშნავ, რომ პროფ. გ. მანია და პროფ. ა. შირიაევი – ეს ცნობილი მეცნიერები და საზოგადო მოღვაწეები იყვნენ ჩემი ხელმძღვანელები

ასპირანტურაში სწავლის დროს, რომლებთანაც ხანგრძლივი ურთიერთობით მივიღე ფუნდამენტური ცოდნა და კარგი ცხოვრებისეული გამოცდილება. შევნიშნავ, რომ პროფ. ა. შირიაევთან ამჟამადაც მაქვს კოლეგიალური და მეგობრული ურთიერთობები.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა შეისწავლის ბუნებაში მიმდინარე შემთხვევითი პროცესების რიცხვით კანონზომიერებებს. ადამიანს ბუნებრივად უჩნდება კითხვა: სამყარო სასრულია თუ უსასრულო. აინშტაინის ფარდობითობის თეორიის თანახმად, უნდა მივიღოთ პიპოთეზა სამყაროს სასრულობის შესახებ და, მაგალითად, წრფე, რომელსაც ჩვენ სინათლის სხივის უსასრულო ტრაექტორიასთან ვაიგივებთ, სინამდვილეში თურმე ძალიან დიდი რადიუსის წრეხაზს წარმოადგენს. მეორე მხრივ, კარნო–კლაუზიუსის ევოლუციის პრინციპი, რომელიც არსებითად ეფუძნება ალბათობის ცნებას, არ გამორიცხავს საწინააღმდეგო პიპოთეზას სამყაროს უსასრულობის შესახებ.

ევოლუციის პრინციპის თანახმად თუ სისტემა ჩაკეტილია (არ იღებს ენერგიას გარედან), მაშინ მისი ენტროპია მუდმივად მცირდება. საზოგადოდ, როცა ალბათობა იზრდება ნულიდან ერთამდე, ენტროპია მცირდება უსასრულობიდან ნულამდე. სამყაროს ენტროპია რომ ნულის ტოლი იყოს ეს იმას ნიშნავს, რომ მიღწეულია საბოლოო მდგომარეობა და შეუძლებელია რაიმე სახის ევოლუცია. მაგრამ არსებობა და მოძრაობა უამრავი გალაქტიკებისა (ვარსკვლავების ერთობლიობისა) და მათ შორის ცვალებადი დიდი მანძილებისა გვაფიქრებინებს, რომ სამყარო ძალიან შორს არის ნულის ტოლი ენტროპიის მდგომარეობიდან. გალაქტიკების განზომილებები მილიონობით, ხოლო მათ შორის მანძილები მილიარდობით სინათლის წელიწადის რიგისაა. შევნიშნოთ, რომ სინათლის წელიწადი არის მანძილი, რომელსაც 300000 კმ/წმ სიჩქარით გაიელის სინათლის სხივი ერთი წლის განმავლობაში.

თუ ახლა შევნიშნავთ, რომ მიკროსამყაროში გვიხდება, მაგალითად, 10^{-30} რიგის განზომილებებთან შეხება და ყველაფერი დროსა და სივრცეში სხვადასხვა პერიოდულობით შემთხვევით იცვლება, მაშინ ადვილი წარმოსადგენია თუ რა სირთულეები გვხვდება სამყაროს ყოფაქცევის შესწავლის დროს. შესწავლის პროცესში უმნიშვნელოვანესი როლი მათემატიკას მიეკუთვნება. ადამიანს ბუნებრივად შეიძლება გაუჩნდეს შემდეგი კითხვა: შეუძლია კი სამყაროს შესწავლას ადამიანისთვის რაიმე სიკეთის (სასარგებლოს) მოტანა და ხომ არ ჯობს დავკმაყოფილდეთ უკვე მიღწეულით. მაგრამ ადამიანი ისეთი ბუნებისაა, რომ გამუდმებით ცდილობს სამყაროს სულ უფრო მეტი საიდუმლოებების შესწავლას და ძნელი სათქმელია რის გაკეთებას შეძლებს იგი მომავალში მეცნიერულ-ტექნიკური პროგრესის თუ სხვა მიმართულებით. უმთავრესი მაინც სიცოცხლის პრობლემაა. სწორედ ამ მიმართულებით უნდა იზრუნოს ადამიანმა ინტენსიურად. ამ გზაზე რაიმე წარმატების მიღწევა ჩვენი ღრმა რწმენით ღმერთის ნებითა და წყალობით

ღვთისმსახურთა და მეცნიერთა ერთობლივი ძალისხმევით არის შესაძლებელი.

მათემატიკამ, მაგალითად, ფუნქციის ცნების (ცვლად სიდიდეებს შორის დამოკიდებულების წესის) შემოღებით უდიდესი როლი ითამაშა ცვლადების რაოდენობრივი და თვისებრივი მახასიათებლების შესწავლაში. ფიზიკის, ქიმიის, ბიოლოგიის, ეკონომიკისა და სხვა მოთხოვნებიდან გამომდინარე, საჭირო გახდა რიცხვითი (სივრცითი) არგუმენტის გარდა ფუნქციის არგუმენტად დროის შემოტანა და შესწავლა. თუმცა მრავალი ცვლადის ფუნქციაში ერთ-ერთი არგუმენტისთვის დროის ინტერპრეტაციის მიცემას პრინციპული სირთულე მათემატიკურ ანალიზში არ გამოუწვევია. ალბათობის თეორიამ სივრცით და დროით არგუმენტებს დაუმატა კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი არგუმენტი – ელემენტარული ხდომილობა (შემთხვევითობა), რითაც ცვლადი სიდიდეების ყოფაქცევის შესწავლას შემთხვევითი პროცესები დაედო საფუძვლად.

ბუნებრივია გაგვიჩნდეს შემდეგი კითხვა: კიდევ რა არგუმენტების ფუნქციების შესწავლაა შესაძლებელი? ხომ არ შეიძლება, ფუნქციის არგუმენტებად განვიხილოთ, მაგალითად, რწმენა, სიკეთე, სიყვარული, სულიერება. რაც ჩვენი აზრით, თავისთავად საინტერესო და დამაფიქრებელია. ჩვენ არ გამოვრიცხავთ მომავალში ამ და სხვა მიმართულებით ნაბიჯების გადადგმის მცდელობას.

იმედი გვაქვს მკითხველს გაუჩნდება ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის საფუძვლების უფრო ღრმად გაცნობისა და ათვისების ინტერესი. მიგვაჩნია, რომ მოტანილ მასალას უნდა ფლობდეს სხვადასხვა დარგის პრობლემატიკაში მომუშავე თეორიტიკოსი და ექსპერიმენტატორი.

§ 2. კომბინატორული ანალიზის ელემენტები

1. გამრავლების პრინციპი. ვთქვათ, გვაქვს რაიმე საგანთა k რაოდენობის ჯგუფი და არსებობს პირველი ჯგუფიდან საგნის არჩევის n_1 ვარიანტი (პირველ ჯგუფში n_1 საგანია) და ა. შ. ბოლო ჯგუფიდან – საგნის არჩევის n_k ვარიანტი. ყოველი ჯგუფიდან ვირჩევთ ერთ საგანს, ე. ი. სულ ასარჩევია k საგანი. ამოცანა მდგომარეობს k საგნის არჩევის სხვადასხვა შესაძლო ვარიანტების რაოდენობის დათვლაში. აღვნიშნოთ ეს რაოდენობა $k(n_1, \dots, n_k)$ სიმბოლოთი. მაშინ ე. წ. გამრავლების პრინციპის თანახმად გვექნება

$$k(n_1, \dots, n_k) = n_1 \cdots n_k. \tag{2.1}$$

ამრიგად, საძებნი რაოდენობა ჯგუფებში საგანთა რაოდენობების ნამრავლის ტოლია.

მაგალითი 2.1. ვთქვათ, $k = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$. მაშინ (2.1) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$k(n_1, n_2) = n_1 \cdot n_2 = 2 \cdot 3 = 6.$$

სქემატურად ეს შემდეგნაირად შეიძლება გამოვსახოთ

ცხრილი 2.1.

ჯგუფი	საგანი	ვარიანტი		
I	①②	①③	①④	①⑤
II	③④⑤	②③	②④	②⑤

2. მოწესრიგებული არჩევა დაბრუნების გარეშე. ვთქვათ, გვაქვს რაიმე საგანთა n რაოდენობა. ვიღებთ m საგანს და ვალაგებთ ერთმანეთის გვერდით. თუ დალაგებები განსხვავდება ერთი საგნით მაინც ან საგანთა დალაგების რიგით, მაშინ ასეთ დალაგებას წყობა ეწოდება და აღინიშნება A_n^m სიმბოლოთი (იკითხება ასე: წყობა n-დან m-ად). ამოცანა მდგომარეობს წყობათა რაოდენობის დათვლაში. იგი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1). \tag{2.2}$$

შევნიშნოთ, რომ (2.2) წყობაში თანამამრავლთა რაოდენობა ყოველთვის m-ის ტოლია.

მაგალითი 2.2. ვთქვათ, $n = 3$, $m = 2$. მაშინ (2.2) ფორმულის თანახმად გვექნება $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$, სქემატურად გვექნება

ცხრილი 2.2.

საგანი	წყობა	
①	①②	①③
②	②①	②③
③	③①	③②

იმ შემთხვევაში, როცა $m = n$ გვექნება ე. წ. გადანაცვლება, რომელიც P_n სიმბოლოთი აღინიშნება. ამრიგად,

$$P_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1. \tag{2.3}$$

შევნიშნოთ, რომ (2.3) ფორმულის მარჯვენა მხარე კიდევ $n!$ სიმბოლოთი აღინიშნება (იკითხება ასე: n ფაქტორიალი). მიღებულია, რომ $0! = 1$. ამრიგად, $n!$ არის ნატურალური რიცხვების ნამრავლი ერთიდან n-ის ჩათვლით

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n. \tag{2.4}$$

მაგალითი 2.3. ვთქვათ, $n = 3$. მაშინ (2.3), (2.4) ფორმულების თანახმად გვექნება $P_3 = A_3^3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, სქემატურად გვექნება

ცხრილი 2.3.

საგანი	გადანაცვლება	
①	①②③	①③②
②	②①③	②③①
③	③①②	③②①

შევნიშნოთ, რომ $n!$ ძალიან სწრაფად იზრდება. მაგალითად, თუ კლასში 5, 10, 15, 20 მოსწავლეა და თუ მათ შორის ერთიდაიგივე გვარის მოსწავლეები არ არიან, მაშინ მათი გვარების სიების შედგენის რაოდენობები, შესაბამისად, ტოლია

$$\begin{aligned} 5! &= 120, \\ 10! &= 3628800, \\ 15! &= 1307674368000, \\ 20! &= 2432902008176640000. \end{aligned}$$

ვთქვათ, გვესტუმრა ხუთი ადამიანი და ერთ-ერთი ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ ისინი დავაყენოთ მაგიდასთან ერთმანეთის გვერდით შემდეგი წესით: ვაყენებთ ერთ-ერთ სტუმარს, შემდეგ მეორეს და ა. შ. ხუთივე სტუმარს. ვიგულისხმოთ, რომ ერთი სტუმრის დაყენებაზე გვეხარჯება ერთი წამი. საინტერესოა გამოვთვალოთ რა დრო დაგვეხარჯება ამ პირობებში ხუთი სტუმრის ყველა ვარიანტით დაყენებისათვის. გვაქვს სულ 5!-ის ტოლი ვარიანტი. რადგან ერთ სტუმარზე ერთი წამი გვეხარჯება, ამიტომ ერთ ვარიანტზე გვეხარჯება 5 წმ. ამრიგად, ხუთი სტუმრის შემთხვევაში სულ დაგვეხარჯება

$$120 \times 5\,\text{წმ} = 600\,\text{წმ} \text{ ანუ } 10\,\text{წთ}.$$

მკითხველს ვთავაზობთ ეს დრო ჩაწეროს საათის, დღეღამის, წლის და საუკუნის განზომილებებში.

ერთი შეხედვით შეიძლება ვიფიქროთ, რომ ათი სტუმრის შემთხვევაში დაგვეხარჯება რამდენიმე ათეული წუთი ან საათი. სინამდვილეში გვაქვს

$$3628800 \times 10\,\text{წმ} = 36288000\,\text{წმ ანუ } 420 \text{ დღე-ღამე.}$$

მკითხველს ვთავაზობთ გამოთვალოს იგივე პირობებში დახარჯული დრო 15 და 20 სტუმრის შემთხვევაში და დარწმუნდეს, თუ რა კოლოსალური რაოდენობის საუკუნეებია საჭირო ოცი სტუმრის შემთხვევაში.

3. მოუწესრიგებელი არჩევა დაბრუნების გარეშე. ვთქვათ, გვაქვს რაიმე საგანთა n რაოდენობა. ვიღებთ m საგანს და ვალაგებთ ერთმანეთის გვერდით. თუ დალაგებები განსხვავდება მხოლოდ საგნებით, მაშინ ასეთ დალაგებას ჯგუფდება ეწოდება. ამოცანა მდგომარეობს ჯგუფდებათა რაოდენობის დათვლაში. ჯგუფდება აღინიშნება C_n^m სიმბოლოთი (იკითხება ასე: ჯგუფდება n-დან m-ად) და გამოითვლება ფორმულით

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{2.5}$$

მაგალითი 2.4. ვთქვათ, $n = 3$, $m = 2$. მაშინ (2.5) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3,$$

სქემატურად გვექნება

ცხრილი 2.4.

საგანი	ჯგუფდება
①	①②
②	①③
③	②③

საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ A_3^2 წყობაში მაგალითად, ①② და ②① ვარიანტები სხვადასხვა წყობებია, მაშინ როცა C_3^2 ჯგუფდებაში იგივე ვარიანტები ერთი და იგივე ჯგუფდებებია.

(2.5) ფორმულა გამოიყენება ე. წ. ნიუტონის ბინომის ფორმულაში, რომელიც ორი წევრის ჯამის ნატურალური ხარისხის დათვლაში მდგომარეობს. გავიხსენოთ კარგად ცნობილი ფორმულები:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

ეს ფორმულები შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2,$$
$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3.$$

აღმოჩნდა, რომ სამართლიანია ნიუტონის ბინომის შემდეგი ფორმულა:

$$(a+b)^n =$$
$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^m a^{n-m} b^m + \cdots + C_n^n \cdot b^n,$$

სადაც n არის ნატურალური რიცხვი. ეს ფორმულა მოკლედ შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m.$$

$C_n^0, \ldots, C_n^n$ რიცხვებს ბინომური კოეფიციენტები ეწოდება. ამ კოეფიციენტების გამოსათვლელად ხშირად გამოიყენება საინტერესო ე. წ. პასკალის სამკუთხედი, რომლის სტრუქტურას მკითხველი ადვილად მიხვდება და აქვს შემდეგი სახე

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & n=0 \\ & & 1 & & 1 & & n=1 \\ & 1 & & 2 & & 1 & n=2 \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \quad n=3 \end{array}$$

4. მოწესრიგებული არჩევა დაბრუნებით. ვთქვათ, გვაქვს n რაოდენობის რაიმე საგანი. ვიღებთ m საგანს დაბრუნებით, ანუ ყოველი არჩეული საგანი უკან ბრუნდება n საგანთა სიმრავლეში მისი რაიმე ნიშნით დაფიქსირების შემდეგ. ასეთი წესით არჩეულ საგანთა დალაგებას განმეორებითი წყობა ეწოდება. ამოცანა მდგომარეობს განმეორებით წყობათა რაოდენობის დათვლაში. შევნიშნოთ, რომ წყობისაგან განსხვავებით, განმეორებითი წყობა შეიძლება ერთიდაიგივე საგნებისაგან შედგებოდეს. განმეორებითი წყობა აღინიშნება G_n^m სიმბოლოთი (იკითხება ასე: განმეორებითი წყობა n-დან m-ად) და გამოითვლება ფორმულით

$$G_n^m = n^m. \tag{2.6}$$

ამრიგად, n-დან m-ად განმეორებითი წყობების რაოდენობა n-ის m ხარისხის ტოლია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.5. ვთქვათ, $n = 3$, $m = 2$. მაშინ (2.6) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$G_2^3 = 3^2 = 9,$$

სქემატურად გვექნება

ცხრილი 2.5.

საგანი	განმეორებითი წყობა		
①	①①	①②	①③
②	②①	②②	②③
③	③①	③②	③③

მაგალითი 2.6. ვთქვათ, $n = 2$, $m = 3$. მაშინ (2.6) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$G_2^3 = 2^3 = 8,$$

სქემატურად გვექნება

ცხრილი 2.6.

საგანი	განმეორებითი წყობა			
①	①①①	①①②	①②①	①②②
②	②①①	②①②	②②①	②②②

ადვილად მისახვედრია, რომ განმეორებითი, წყობის სიტუაცია გვაქვს აგრეთვე მაშინ, როცა საგნებს ვირჩევთ საგანთა ჯგუფებიდან. მაგალითად, თუ გვაქვს საგანთა ორი ჯგუფი

①①①① და ②②②②②

და ვირჩევთ სამ საგანს ყველა შესაძლო ვარიანტით, მაშინ ვარიანტების რაოდენობა რვის ტოლი იქნება და ცხრილი 2.6-ის სიტუაცია გვექნება. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ ზუსტად ანალოგიური სიტუაცია გვექნება აგრეთვე მონეტის სამჯერ აგდების ან სამი მონეტის ერთჯერ აგდების დროს.

5. მოუწესრიგებელი არჩევა დაბრუნებით. ვთქვათ, გვაქვს n საგანი და ვირჩევთ m საგანს დაბრუნებით. თუ დალაგებები განსხვავდება მხოლოდ საგნებით, მაშინ ასეთ დალაგებას ეწოდება მოუწესრიგებელი დალაგება დაბრუნებით. იგი აღინიშნება M_n^m სიმბოლოთი და გამოითვლება ფორმულით

$$M_n^m = C_{n+m-1}^m. \tag{2.7}$$

მაგალითი 2.7. ვთქვათ, $n = 3$, $m = 2$. მაშინ (2.7) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$M_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6,$$

სქემატურად გვექნება:

ცხრილი 2.7.

საგანი	მოუწესრიგებელი არჩევა დაბრუნებით	
①	①①	①②
②	②②	①③
③	③③	②③

მაგალითი 2.8. ვთქვათ, $n = 2$, $m = 3$. მაშინ (2.7) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$M_2^3 = C_{2+3-1}^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} = 4,$$

სქემატურად გვექნება:

ცხრილი 2.8.

საგანი	მოუწესრიგებელი არჩევა დაბრუნებით	
①	①②②	②①①
②	①①①	②②②

ბოლოს მკითხველს ვთავაზობთ დაასაბუთოს და რიცხვობრივად შეამოწმოს შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა

$$\begin{aligned}
&1.\ A_n^m = C_n^m \cdot P_m,\\
&2.\ C_n^m = \frac{n-m+1}{m} \cdot C_n^{m-1},\\
&3.\ C_n^m = C_n^{n-m},\\
&4.\ C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1},\\
&5.\ C_n^{m-1} + C_n^m = C_{n+1}^m.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ კომბინატორიკის ფორმულები არსებითად გამოიყენება სტატისტიკურ ფიზიკაში. ასე მაგალითად, ნაწილაკების სხვადასხვა ენერგეტიკულ დონეებზე (მდგომარეობებზე) განაწილება (უჯრედებში განაწილება) შეისწავლება პაულის აკრძალვის პრინციპის (ყოველ უჯრედში არაუმეტეს ერთი ნაწილაკისა) გათვალისწინებით. ნაწილაკების განაწილებაზე კი დამოკიდებულია შესასწავლი სიდიდეების ყოფაქცევა და თვისებები. ცნობილია შემდეგი:

1. ე. წ. განურჩეველი ნაწილაკები პაულის აკრძალვის პრინციპით განაწილებულია (2.5) ფორმულის თანახმად და ამ განაწილებას ფერმი–დირაკის სტატისტიკა ეწოდება;
2. გარჩევადი ნაწილაკები პაულის აკრძალვის პრინციპის გარეშე განაწილებულია (2.6) ფორმულის თანახმად და ამ განაწილებას მაქსველ–ბოლცმანის სტატისტიკა ეწოდება;
3. განურჩეველი ნაწილაკები პაულის აკრძალვის პრინციპის გარეშე განაწილებულია (2.7) ფორმულის თანახმად და ამ განაწილებას ბოზე–აინშტაინის სტატისტიკა ეწოდება.

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ მაგალითად, ელექტრონები, პროტონები და ნეიტრონები ემორჩილება ფერმი–დირაკის სტატისტიკას, ხოლო ფოტონები – ბოზე–აინშტაინის სტატისტიკას.

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ სტატისტიკური ფიზიკის პრობლემატიკას თერმოდინამიკაში, ხსნარებში, ქიმიურ რეაქციებში, კრისტალებში და სხვა, მაშინ კიდევ უფრო ნათელი ხდება ალბათობის თეორიის ერთ-ერთი ძირითადი ობიექტის – განაწილების მნიშვნელოვანი როლი აღნიშნული პრობლემატიკის კვლევაში.

§ 3. ცდის ალბათური მოდელი. შემთხვევითი ხდომილობის ალბათობა და პირობითი ალბათობა

1. შემთხვევითი ცდა ეწოდება რაიმე გარკვეული პირობების ერთობლიობათა განხორციელებას. ამასთან ერთად იგულისხმება შემდეგი:

1) ცდის ჩატარებამდე შესაძლებელია ცდის ყველა მოსალოდნელი ურთიერთგამომრიცხავი შედეგის მითითება.

2) ცდის ჩატარებამდე შეუძლებელია ცდის რომელიმე კონკრეტული შესაძლო შედეგის წინასწარ ცალსახად განსაზღვრა.

3) შესაძლებელია ცდის საკმაო რაოდენობით ჩატარება.

შემდგომში განვიხილავთ მხოლოდ ისეთ ცდებს, რომელსაც გააჩნია სასრული რაოდენობის ურთიერთგამომრიცხავი და ერთნაირად მოსალოდნელი შემთხვევითი შედეგები. ამასთან, სიტყვა "შემთხვევითი" ხშირად იქნება

გამოტოვებული ტექსტში. რაც შეეხება სიტყვების – "ურთიერთგამომრიცხავი" და "ერთნაირად მოსალოდნელი"– შინაარსს, ამას ქვემოთ დავაზუსტებთ.

ცდა აღიწერება შესაძლო შედეგების ჩამონათვალით. ვთქვათ, ეს შედეგებია $\omega_1, \ldots, \omega_n$ სიდიდეები, რომელსაც ელემენტარული ხდომილობები ეწოდება, ხოლო მათ ერთობლიობას $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ ეწოდება ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე, ანუ აუცილებელი ხდომილობა. იგულისხმება, რომ ცდის შედეგად ერთ-ერთი ელემენტარული ხდომილობა აუცილებლად მოხდება, ანუ ცდის შედეგად Ω ხდომილობა აუცილებლად მოხდება.

მაგალითი 3.1. სიმეტრიული (წესიერი) მონეტის აგდების შედეგად მონეტის ზედა მხარეზე გამოჩნდება ან გერბი (გ), ან საფასური (ს). ასეთ შემთხვევაში

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{\text{გ}, \text{ს}\},$$

ხოლო ერთი წესიერი მონეტის ორჯერ ან ორი წესიერი მონეტის ერთჯერ აგდების შემთხვევაში გვექნება

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} = \{\text{გგ}, \text{გს}, \text{სგ}, \text{სს}\}.$$

მაგალითი 3.2. სიმეტრიული (წესიერი) კამათლის გაგორების შედეგად კამათლის ზედა წახნაგზე მოსული რიცხვის დაკვირვების დროს გვექნება

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

ხოლო ერთი წესიერი კამათლის ორჯერ ან ორი წესიერი კამათლის ერთჯერ აგდების შემთხვევაში გვექნება $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{36}\}$ და ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე შეიძლება შემდეგი სახით ჩავწეროთ

$$\begin{aligned}\Omega = \Big\{&(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,), (1,6),\\ &(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),\\ &(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),\\ &(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),\\ &(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),\\ &(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\Big\}.\end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ მონეტის ან კამათლის n-ჯერ აგდების შემთხვევაში განმეორებითი წყობის (2.6) ფორმულის თანახმად შესაბამისი ელემენტარული ხდომილობების რაოდენობა 2^n-ის და 6^n-ის ტოლია.

Ω სიმრავლის ნებისმიერ A ქვესიმრავლეს ($A \subset \Omega$) შემთხვევითი ხდომილობა ეწოდება. ამრიგად, ცდის შედეგად შემთხვევითი ხდომილობა შეიძლება მოხდეს ან არ მოხდეს. ვიტყვით, რომ მოხდა A ხდომილობა, თუ მოხდა A-ში შემავალი რომელიმე ელემენტარული ხდომილობა.

მაგალითი 3.3. ვთქვათ, A არის კამათელზე ლუწი რიცხვის გამოჩენა. მაშინ გვექნება $A = \{2, 4, 6\}$.

ცარიელ სიმრავლეს, რომელსაც Φ ასოთი აღვნიშნავთ ეწოდება შეუძლებელი ხდომილობა. ცდის შედეგად შეუძლებელი ხდომილობა არ მოხდება. ამრიგად, შეუძლებელ ხდომილობას არცერთი ელემენტარული ხდომილობა არ უწყობს ხელს.

მაგალითი 3.4. კამათლის გაგორების ცდაში 6-ზე მეტი რიცხვის გამოჩენა შეუძლებელი ხდომილობაა.

შემოვიტანოთ ახლა შემთხვევით ხდომილობებზე მათემატიკური ოპერაციები.

1. თუ A ხდომილობის მოხდენის დროს ხდება აგრეთვე B ხდომილობა, მაშინ ამბობენ, რომ A იწვევს B-ს და წერენ $A \subset B$.

მაგალითი 3.5. ვთქვათ, კამათლის გაგორების ცდაში $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$. მაშინ ცხადია $A \subset B$.

2. თუ ერთდროულად $A \subset B$ და $B \subset A$, მაშინ ხდომილობებს ტოლი ეწოდება და წერენ $A = B$.

მაგალითი 3.6. ვთქვათ, კამათლის გაგორების ცდაში $A = \{$გამოჩნდა ლუწი რიცხვი$\}$, $B = \{$არ გამოჩნდა კენტი რიცხვი$\}$. მაშინ, ცხადია, $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ და $A = B$.

3. ორი A და B ხდომილობის ჯამი $A + B$ არის ხდომილობა, რომელიც ნიშნავს ან A-ს, ან B-ს ან A-ს და B-ს მოხდენას, ანუ ერთ-ერთის მოხდენას მაინც.

მაგალითი 3.7. ვთქვათ, კამათლის გაგორების ცდაში $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 5, 6\}$. მაშინ $A + B = \{1, 2, 5, 6\}$.

4. ორი A და B ხდომილობის ნამრავლი AB არის ხდომილობა, რომელიც ნიშნავს ორივეს – A-ს და B-ს მოხდენას.

მაგალითი 3.8. ვთქვათ, კამათლის გაგორების ცდაში $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ მაშინ $AB = \{3, 4\}$.

5. ორი A და B ხდომილობის სხვაობა $A-B$ არის ხდომილობა, რომელიც ნიშნავს A-ს მოხდენას და B-ს არმოხდენას.

მაგალითი 3.9. ვთქვათ, კამათლის გაგორების ცდაში $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 6\}$ მაშინ $A - B = \{2, 4\}$.

6. A ხდომილობის საწინააღმდეგო $\overline{A}$ ხდომილობა ნიშნავს A-ს არ მოხდენას.

მაგალითი 3.10. ვთქვათ, კამათლის გაგორების ცდაში $A = \{2,4,5\}$. მაშინ $\overline{A} = \{1,3,6\}$.

7. ორ, A და B ხდომილობას ეწოდება უთავსებადი თუ მათი ერთდროულად მოხდენა შეუძლებელია, ანუ $AB = \Phi$.

მაგალითი 3.11. ვთქვათ, კამათლის გაგორების ცდაში $A = \{1,4\}$, $B = \{2,5,6\}$. მაშინ $AB = \Phi$.

ახლა დავაზუსტოთ სიტყვის "ურთიერთგამომრიცხავი" შინაარსი. ამ სიტყვაში იგულისხმება, რომ ნებისმიერი ორი ელემენტარული ხდომილობა არის უთავსებადი – ისინი ერთმანეთს გამორიცხავს, ანუ ერთდროულად არ შეიძლება მათი მოხდენა.

8. ვიტყვით, რომ $A_1, \ldots, A_n$ ხდომილობები ქმნის ხდომილობათა სრულ სისტემას, თუ

1) $A_iA_j = \Phi$, $i \neq j$, $i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n$.

2) $A_1 + \cdots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

ამრიგად, ხდომილობათა სრული სისტემის ხდომილობები წყვილ-წყვილად უთავსებადია და ცდის შედეგად ერთ-ერთი აუცილებლად მოხდება.

მკითხველს ვთავაზობთ, კამათლის გაგორების ცდაში მოიტანოს ხდომილობათა სრული სისტემის მაგალითი.

ხდომილობებზე შემოტანილი ოპერაციების საილუსტრაციოდ ხშირად მიმართავენ მათ ინტერპრეტაციას, მაგალითად, სიბრტყეზე, რომლის გაკეთებას ჩვენ მკითხველს ვთავაზობთ. ამავე ოპერაციების განმარტებების საშუალებით შეიძლება დავადგინოთ შემდეგი დამოკიდებულებებისა და ტოლობების სამართლიანობა, რომელსაც აგრეთვე ვთავაზობთ მკითხველს.

1. $A \subset A$, $A + B \subset A$, $A + B \subset B$, $AB \subset A$, $AB \subset B$.
2. $A + A = A$, $A + \Phi = A$, $A + \Omega = \Omega$, $A + \overline{A} = \Omega$.
3. $A \cdot A = A$, $A \cdot \Phi = \Phi$, $A \cdot \Omega = A$, $A \cdot \overline{A} = \Phi$.
4. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$.
5. $A(B + C) = AB + AC$.
6. თუ $A_1 = A_2$ და $B_1 = B_2$, მაშინ
$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2, \quad A_1 \cdot B_1 = A_2 \cdot B_2.$$
7. $A = AB + A\overline{B}$, $B = AB + \overline{A}B$, $A + B = AB + A\overline{B} + \overline{A}B$.

განვიხილოთ სამი ხდომილობა A, B, და C. მკითხველს ვთავაზობთ გაამარტივოს ხდომილობათა შემდეგი გამოსახულებები

$$(A - \Omega) + A\Omega + B\Phi + (\overline{A} - A) + (A + ABC),$$
$$(\Omega - A) + \overline{A}\Omega + C\Phi + (A - \overline{A}) + (\overline{A} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$$

და A, B, C ხდომილობების საშუალებით ჩაწეროს შემდეგი ხდომილობები:

1. მოხდა მხოლოდ B,
2. მოხდა მხოლოდ A და C,
3. მოხდა სამივე A, B და C,
4. არცერთი არ მოხდა,
5. მოხდა ერთ-ერთი მაინც,
6. მოხდა ორი მაინც,
7. მოხდა მხოლოდ ერთ-ერთი,
8. მოხდა მხოლოდ ორი,
9. მოხდა არაუმეტეს ერთისა,
10. მოხდა არაუმეტეს ორისა.

2. განვიხილოთ სიმეტრიული მონეტის N-ჯერ აგდება. აღვნიშნოთ $N(გ)$ სიმბოლოთი გერბის მოსვლის რაოდენობა N რაოდენობის ცდაში, რომელსაც გერბის მოსვლის სიხშირე ეწოდება. გერბის მოსვლის ფარდობითი სიხშირე ეწოდება შეფარდებას $\frac{N(გ)}{N}$. ჩატარებული ცდების საფუძველზე მოვიტანოთ გერბის მოსვლის სიხშირისა და ფარდობითი სიხშირის ზოგიერთი შედეგი:

ა) $N = 4040$, $N(გ) = 2048$, $\frac{N(გ)}{N} = 0,507$;

ბ) $N = 1000$ ცდისაგან შემდგარ ათ სერიაში (ე. ი. თითოეულ სერიაში განხორციელდა 1000 ცდა) გერბის ფარდობითი სიხშირე აღმოჩნდა, შესაბამისად, შემდეგი რიცხვების ტოლი: 0,502; 0,497; 0,529; 0,504; 0,476; 0,507; 0,527; 0,528; 0,504; 0,529.

გერბის ფარდობითი სიხშირის ასეთი მდგრადობა (მისი მნიშვნელობები ჯგუფდება გარკვეული მუდმივი რიცხვის მახლობლობაში, კერძოდ, 0,5-ის გარშემო) გვაფიქრებინებს, რომ $\frac{N(გ)}{N}$ შეფარდება ცდების დიდ რიცხვჯერ გამეორების დროს საკმაოდ უახლოვდება გარკვეულ $P(გ)$ რიცხვს – გერბის მოსვლის ალბათობას, რომელიც ერთ ცდაში გერბის მოსვლის განხორციელების რიცხვით საზომს წარმოადგენს. ამრიგად, შეიძლება დავწეროთ, რომ

$$P(გ) = 0,5 \approx \frac{N(გ)}{N}.$$

თუ გავითვალისწინებთ ზემოთ მოტანილ მაგალითს, შეიძლება დავასკვნათ, რომ რაიმე A ხდომილობის ალბათობა მიახლოებით ფარდობითი სიხშირის ტოლია, ე. ი.

$$P(A) \approx \frac{N(A)}{N}, \tag{3.1}$$

სადაც $N(A)$ არის იმ ცდების რაოდენობა, როლის დროსაც მოხდა ხდომილობა, ხოლო N არის ცდათა საერთო რაოდენობა. (3.1) ტოლობა წარმოადგენს შემთხვევითი ხდომილობის ალბათობის ე. წ. სტატისტიკურ განმარტებას.

ვთქვათ, ახლა გვაქვს ისეთი რიცხვითი ფუნქცია $p = p(\omega)$, $\omega \in \Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) $p(\omega_i) \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$,

2) $p(\omega_1) + \cdots + p(\omega_n) = \sum_{i=1}^{n} p(\omega_i) = 1$.

$p(\omega_i)$, $i = 1, \ldots, n$ რიცხვებს ელემენტარული ხდომილობების ალბათობები ეწოდება. თუ დამატებით სრულდება შემდეგი პირობა:

3) $p(\omega_i) = \cdots = p(\omega_n) = 1/n$.

მაშინ ცდას კლასიკური სქემის ცდა ეწოდება. შევნიშნოთ ახლა, რომ სიტყვები "ერთნაირად მოსალოდნელი" ნიშნავს 3) პირობას, ანუ იმას, რომ ყველა ელემენტარული ხდომილობის ალბათობა ერთმანეთის ტოლია.

ელემენტარულ ხდომილობებს და მათ ალბათობებს ჩაწერენ შემდეგი ცხრილის სახით, რომელსაც ალბათური მოდელი ეწოდება.

ცხრილი 3.1.

Ω	ω_1	$\ldots$	ω_n
p	$p(\omega_1)$	$\ldots$	$p(\omega_n)$

კლასიკური სქემის ცდის შემთხვევაში გვექნება

ცხრილი 3.2.

Ω	ω_1	$\ldots$	ω_n
p	$\frac{1}{n}$	$\ldots$	$\frac{1}{n}$

მაგალითი 3.12. სიმეტრიული მონეტის აგდების ცდის ალბათური მოდელი ჩაიწერება შემდეგი ცხრილის სახით

ცხრილი 3.3.

Ω	გ	ს
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

მაგალითი 3.13. სიმეტრიული კამათლის გაგორების ცდის ალბათური მოდელი ჩაიწერება შემდეგი ცხრილის სახით

ცხრილი 3.4.

Ω	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

შევნიშნოთ, რომ თუ მონეტის აგდების და კამათლის გაგორების ცდების ალბათურ მოდელებს აქვს, შესაბამისად, ცხრილი 3.3-ის და ცხრილი 3.4-ის სახე, მაშინ მონეტას და კამათელს წესიერი ეწოდება.

განვსაზღვროთ ახლა ხდომილობის ალბათობა კლასიკური სქემის ცდის შემთხვევაში. იგი განიმარტება ტოლობით (წილადით)

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A \text{ ხდომილობის ელემენტთა რაოდენობა}}{\Omega \text{ ხდომილობის ელემენტთა რაოდენობა}}. \qquad (3.2)$$

ხშირად m რიცხვს A ხდომილობის ხელშემწყობ შემთხვევათა რიცხვი ეწოდება, ხოლო n რიცხვს ყველა შესაძლებელ შემთხვევათა (Ω ხდომილობის ხელშემწყობ შემთხვევათა) რიცხვი.

(3.2) ტოლობა წარმოადგენს შემთხვევითი ხდომილობის ალბათობის ე. წ. კლასიკურ განმარტებას და გამოდგება მხოლოდ კლასიკური სქემის ცდების შემთხვევაში.

შევნიშნოთ, რომ ალბათობის სტატისტიკური და კლასიკური განმარტებების გარდა არსებობს ალბათობის ზოგადი და ე. წ. გეომეტრიული განმარტებები, რომელსაც ჩვენ არ განვიხილავთ.

მოვიყვანოთ ახლა ხდომილობის ალბათობის თვისებები

1) $0 \le P(A) \le 1$.

2) $P(\Phi) = 0$.

3) $P(\Omega) = 1$.

4) თუ $AB = \Phi$, მაშინ

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

შევნიშნოთ, რომ ამ თვისებას ჯამის აქსიომა ეწოდება.

5) თუ $A_1, \dots, A_n$ ხდომილობები წყვილ-წყვილად უთავსებადია, მაშინ

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

6) თუ $A \subset B$, მაშინ $P(A) \le P(B)$.

7) თუ $A = B$, მაშინ $P(A) = P(B)$.

8) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

9) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

იმ შემთხვევაში, როცა $AB = \Phi$ ანუ $P(AB) = 0$, მაშინ 9)-დან მიიღება მე-4) თვისება.

10) თუ $A_1, \ldots, A_n$ არის ხდომილობათა სრული სისტემა, მაშინ

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

მკითხველს ვთავაზობთ (3.2) ტოლობის გამოყენებით დაასაბუთოს 1)–10) თვისებები.

ამრიგად,სასრული ცდის შედეგების აღწერისა და ანალიზის მიზნით, ჩვენ გადავედით შემდეგი მნიშვნელოვანი ნაბიჯები:

1. შემოვიტანეთ ელემენტარულ ხდომილობათა სასრული Ω სივრცე, რომლის ნებისმიერ $A \subset \Omega$ ქვესიმრავლეს შემთხვევითი ხდომილობა ვუწოდეთ. განვიხილოთ ახლა Ω-ს ქვესიმრავლეთა რაიმე სისტემა და დავუმატოთ მას ამ სისტემის ელემენტებზე ჯამის, ნამრავლისა და სხვაობის შედეგად მიღებული ხდომილობები. აგრეთვე, აუცილებელი და შეუძლებელი ხდომილობები. ასეთნაირად მიღებულ სისტემას შემთხვევით ხდომილობათა ალგებრა (ალგებრა) ეწოდება და აღინიშნება $\mathcal{A}$ სიმბოლოთი. ალგებრის მაგალითებია:

1) $\{\Omega, \Phi\}$ – ე. წ. ტრივიალური (ყველაზე "ღარიბი") ალგებრა;
2) $\{A, \overline{A}, \Omega, \Phi\}$ – A ხდომილობით წარმოქმნილი ალგებრა;
3) $\{A : \ A \in \Omega\}$ – Ω-ს ყველა ქვესიმრავლეთა სისტემა Φ-ს ჩათვლით (ყველაზე "მდიდარი" ალგებრა).

2. შემოვიტანეთ ელემენტარული ხდომილობების ალბათობები, ცდის ალბათური მოდელი და კლასიკური სქემის ცდის შემთხვევაში განვმარტეთ ხდომილობის ალბათობა (რიცხვითი ზომა). ვიტყვით, რომ სამეული

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}),$$

სადაც $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ ელემენტარულ ხდომილობათა სასრული სივრცეა, $\mathcal{A}$ ხდომილობათა რაიმე ალგებრაა, $\mathrm{P} = \mathrm{P}(A)$, $A \in \mathcal{A}$, A ხდომილობის ალბათობაა, არის სასრული რაოდენობის შედეგების ცდის ალმწერი ალბათური სივრცე ანუ ალბათური მოდელი გაფართოებული აზრით. შევნიშნოთ, რომ $\mathcal{A}$-ს როლში, როგორც წესი, Ω-ს ყველა ქვესიმრავლეთა (Φ-ის ჩათვლით) სისტემა განიხილება. ადვილი მისახვედრია, რომ ცდის აღწერაში ერთ-ერთი მთავარი სირთულე ალბათური სივრცის აგებაა.

მაგალითი 3.14. კამათლის გაგორების ცდაში განვიხილოთ A ხდომილობა – მოვა ლუწი რიცხვი. ვიპოვოთ $P(A)$ ალბათობა. გვაქვს $A = \{2, 4, 6\}$, მაშინ (3.2) ფორმულაში $m = 3$, $n = 6$ და გვექნება

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

მაგალითი 3.15. ორი კამათლის გაგორების ცდაში განვიხილოთ A ხდომილობა – ორივე კამათელზე ერთნაირი რიცხვი მოვა. გვაქვს $A = \{(1,1),\ldots,(6,6)\}$ და (3.2) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

ამრიგად, წყვილის მოსვლის ალბათობა $1/6$-ის ტოლია.

მაგალითი 3.16. კამათლის გაგორების ცდაში განვიხილოთ ორი ხდომილობა: A – მოვა სამზე ნაკლები რიცხვი, B – მოვა სამზე მეტი რიცხვი. გამოვთვალოთ $P(A+B)$ ალბათობა. გვაქვს $A = \{1,2\}$, $B = \{4,5,6\}$. რადგან $AB = \Phi$, ამიტომ ალბათობის მე-4) თვისების თანახმად

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}.$$

მაგალითი 3.17. კამათლის გაგორების ცდაში განვიხილოთ ორი ხდომილობა: A – მოვა ლუწი რიცხვი, B – მოვა ოთხზე მეტი რიცხვი. გვაქვს: $A = \{2,4,6\}$, $B = \{5,6\}$. რადგან $AB = \{6\} \neq \Phi$, ამიტომ ალბათობის მე-9) თვისების თანახმად გვექნება

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

მაგალითი 3.18. კამათლის გაგორების ცდაში განვიხილოთ A ხდომილობა – მოვა სამზე ნაკლები რიცხვი. გამოვთვალოთ $P(\overline{A})$ ალბათობა. გვაქვს $A = \{1,2\}$ და ალბათობის მე-8) თვისების თანახმად გვექნება

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}.$$

მაგალითი 3.19. ყუთში N ერთნაირი ბირთვია, რომელთა შორის M არის თეთრი. ყუთიდან შემთხვევით ვიღებთ n ბირთვს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ m ბირთვი აღმოჩნდება თეთრი. აღვნიშნოთ ეს ალბათობა $P_{N,M}(n,m)$-ით. საძებნი ალბათობა ჯუფდების (2.5) ფორმულის გამოყენებით დაითვლება ფორმულით

$$P_{N,M}(n,m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \tag{3.3}$$

მაგალითი 3.20. ვთქვათ, ყუთში ერთი შავი და სამი თეთრი ერთნაირი ბირთვია. ყუთიდან შემთხვევით ვიღებთ ორ ბირთვს. განვიხილოთ ორი ხდომილობა: A – ორივე ბირთვი თეთრია, B – ბირთვები სხვადასხვა ფერისაა (ერთი თეთრია, ერთი შავი). ვიპოვოთ $P(A)$ და $P(B)$.

ერთი შეხედვით შეიძლება ვიფიქროთ, რომ $P(A) > P(B)$. მაგრამ ადვილად დავინახავთ, რომ ეს ასე არ არის. მართლაც გვაქვს: $N = 4$, $M = 3$, $n = 2$. A ხდომილობის შემთხვევაში $m = 2$ და (3.3) ტოლობის თანახმად გვექნება:

$$P_{4,3}(2,2) = \frac{C_3^2 \cdot C_1^0}{C_4^2} = \frac{\frac{3!}{2!(3-2)!} \cdot \frac{1!}{0!(1-0)!}}{\frac{4!}{2!(4-2)!}} = \frac{3}{3 \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

B ხდომილობის შემთხვევაში $m = 1$ და გვექნება

$$P_{4,3}(2,1) = \frac{C_3^1 \cdot C_1^1}{C_4^2} = \frac{\frac{3!}{1!(3-1)!} \cdot \frac{1!}{1!(1-1)!}}{3 \cdot 2} = \frac{3}{3 \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

ამრიგად, $P(A) > P(B)$ ვარაუდის საწინააღმდეგოდ მივიღეთ $P(A) = P(B) = 1/2$.

მაგალითი 3.21. გვაქვს n რაოდენობის გადანომრილი უჯრედი (უჯრა), რომელშიც შემთხვევით უნდა განლაგდეს m რაოდენობის ნაწილაკი. განვიხილოთ A ხდომილობა – ერთ-ერთ უჯრედში (ვთქვათ, k ნომრით, $k = 1, \ldots, n$) განლაგდება ზუსტად m_1 ნაწილაკი. ვიპოვოთ $P(A)$. საძებნი ალბათობა გამოითვლება ფორმულით

$$P(A) = C_m^{m-m_1} \cdot \frac{(n-1)^{m-m_1}}{n^m} = \\ = C_m^{m-m_1} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{m_1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m-m_1}. \qquad (3.4)$$

მაგალითი 3.22. ვთქვათ, მაგალითი 3.21-ის პირობებში $n = 4$, $m = 2$, $m_1 = 1$. მაშინ (2.4) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$P(A) = C_2^1 \cdot \frac{3}{4^2} = \frac{2!}{1!(2-1)!} \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{8}.$$

მაგალითი 3.23. მაგალითი 3.21-ის პირობებში განვიხილოთ A ხდომილობა – ერთი უჯრედი მაინც აღმოჩნდება ცარიელი. საძებნი ალბათობა გამოითვლება ფორმულით

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \cdot C_n^i \left(1 - \frac{i}{n}\right)^m. \qquad (3.5)$$

მაგალითი 3.24. გვაქვს n სხვადასხვა მოლეკულა, რომელიც გარკვეული თანამიმდევრობით არის ერთმანეთის გვერდით განლაგებული. ხდება მათი შემთხვევით გადანაცვლება (სულ გვაქვს $n!$ გადანაცვლება).

განვიხილოთ A_k ხდომილობა – k-ურ ადგილზე მყოფი მოლეკულა თავის ადგილზე დარჩება. გამოვთვალოთ $P(A_k)$. იგი გამოითვლება ფორმულით

$$P(A_k) = \frac{(n-1)!}{n!}. \tag{3.6}$$

განვიხილოთ $A_k \cdot A_i$ ხდომილობა: k-ურ და i-ურ ადგილზე განლაგებული მოლეკულები თავის ადგილზე დარჩება და ა. შ. $A_1 \cdots A_n$ ყველა მოლეკულა თავის ადგილზე დარჩება. ამ ხდომილობების ალბათობები გამოითვლება, შესაბამისად, შემდეგი ფორმულებით:

$$P(A_k \cdot A_i) = \frac{(n-2)!}{n!} \tag{3.7}$$

და ა. შ.

$$P(A_1 \cdots A_n) = \frac{(n-(n-1))!}{n!} = \frac{1}{n!}. \tag{3.8}$$

მკითხველს ვთავაზობთ მოიტანოს (3.5)–(3.8) ფორმულების საილუსტრაციო მარტივი რიცხვითი მაგალითები.

შევნიშნოთ, რომ (3.3)–(3.8) ფორმულები არსებითად გამოიყენება ფიზიკის, ბიოლოგიის, ქიმიისა და სხვა დარგების ამოცანების გადაწყვეტაში.

3. ხშირად საჭიროა A ხდომილობის ალბათობა გამოვთვალოთ იმ პირობის გათვალისწინებით, რომ მეორე B ხდომილობა უკვე მოხდა. ამ ალბათობას ეწოდება A ხდომილობის პირობითი ალბათობა B პირობით, აღინიშნება $P(A \mid B)$ სიმბოლოთი და გამოითვლება ტოლობით:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) > 0. \tag{3.9}$$

ამრიგად, A ხდომილობის პირობითი ალბათობა B პირობით არის AB ნამრავლის ალბათობა შეფარდებული B პირობის ალბათობასთან. შევნიშნოთ, რომ პირობით ალბათობას გააჩნია ალბათობის ყველა თვისება. (3.9)-ის ანალოგიურად გვექნება:

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad P(A) > 0. \tag{3.10}$$

(3.9) და (3.10) ტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ ორი A და B ხდომილობის ნამრავლის ალბათობის ფორმულას:

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B). \tag{3.11}$$

ორი A და B ხდომილობას დამოუკიდებელი ეწოდება, თუ

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{3.12}$$

საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ თუ A და B წყვილი დამოუკიდებულია, მაშინ თურმე დამოუკიდებულია აგრეთვე შემდეგი წყვილებიც: A და $\overline{B}$, $\overline{A}$ და B, $\overline{A}$ და $\overline{B}$, რაც ინტუიციურად სრულებითაც არ არის ცხადი.

მაგალითი 3.25. კამათლის გაგორების ცდაში განვიხილოთ ორი ხდომილობა: A – მოვიდა ოთხზე ნაკლები რიცხვი, B – მოვიდა კენტი რიცხვი. გამოვთვალოთ $P(A \mid B)$ პირობითი ალბათობა. გვაქვს $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,3,5\}$, $AB = \{1,3\}$ და (3.9) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}. \tag{3.13}$$

მაგალითი 3.26. კამათლის გაგორების ცდაში განვიხილოთ ორი ხდომილობა: A – მოვა ლუწი რიცხვი, B – მოვა ოთხზე მეტი რიცხვი. ვაჩვენოთ, რომ A და B დამოუკიდებული ხდომილობებია. გვაქვს $A = \{2,4,6\}$, $B = \{5,6\}$, $AB = \{6\}$. მაშინ გვექნება

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(AB) = \frac{1}{6}.$$

ე. ი. $P(AB) = P(A)P(B)$, რაც A-ს და B-ს დამოუკიდებლობას ნიშნავს.

ვთქვათ, ახლა გვაქვს ხდომილობათა ერთობლიობა $A_1, \ldots, A_n$. ამ ხდომილობებს ეწოდება სტატისტიკურად დამოუკიდებული ანუ ერთობლივად დამოუკიდებული, თუ ნებისმიერი $k = 1, \ldots, n$ და $1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le n$ რიცხვებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$P(A_{i_1} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k}). \tag{3.14}$$

თუ (3.14) ტოლობა სრულდება $k = 2$ შემთხვევაში, მაშინ გვაქვს წყვილ-წყვილად დამოუკიდებლობა. მაგალითად, ვთქვათ, გვაქვს სამი ხდომილობა A_1, A_2, A_3. მათი ერთობლივად დამოუკიდებლობა ნიშნავს, რომ სრულდება შემდეგი ტოლობები:

$$\begin{aligned} P(A_1A_2) &= P(A_1)P(A_2), \\ P(A_1A_3) &= P(A_1)P(A_3), \\ P(A_2A_3) &= P(A_2)P(A_3), \\ P(A_1A_2A_3) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3). \end{aligned} \tag{3.15}$$

შევნიშნოთ, რომ ერთობლივად დამოუკიდებლობიდან გამომდინარეობს წყვილ-წყვილად დამოუკიდებლობა, მაგრამ პირიქით, საზოგადოდ, არა. შემდგომში ორზე მეტი ხდომილობის დამოუკიდებლობაში ვიგულისხმებთ მათ ერთობლივ დამოუკიდებლობას.

ვთქვათ, გვაქვს კლასიკური სქემის ცდა და $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. მაშინ შემთხვევითი ხდომილობები $A_1 = \{\omega_1, \omega_2\}$, $A_2 = \{\omega_1, \omega_3\}$ და $A_3 = \{\omega_1, \omega_4\}$ წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელია, მაგრამ არ არის ერთობლივად დამოუკიდებული და მკითხველს ვთავაზობთ შეამოწმოს რიცხობრივად, რომ სრულდება (3.15)-ის პირველი სამი ტოლობა და არ სრულდება მეოთხე ტოლობა.

შევნიშნოთ, აგრეთვე, რომ, მაგალითად, სამი ხდომილობისათვის (3.15) ტოლობებიდან მხოლოდ მეოთხე ტოლობის შესრულება კიდევ არ ნიშნავს მათ ერთობლივად დამოუკიდებლობას. ვთქვათ, გვაქვს კლასიკური სქემის ცდა და Ω სივრცე შედგება 36 წყვილი ელემენტარული ხდომილობისგან (i,j), სადაც $i,j=1,\dots,6$. ასეთი Ω გვექნება, მაგალითად, ორი წესიერი კამათლის გაგორების დროს. განვიხილოთ სამი ხდომილობა:

$$A_1=\big\{(i,j):\ j=1,2\ \text{ან}\ 5\big\},$$
$$A_2=\big\{(i,j):\ j=4,5\ \text{ან}\ 6\big\},$$
$$A_3=\big\{(i,j):\ i+j=9\big\}.$$

მკითხველს ვთავაზობთ გამოთვლებით შეამოწმოს, რომ სრულდება (3.15)-ის მეოთხე ტოლობა და არ სრულდება პირველი სამი ტოლობიდან არცერთი.

მაგალითი 3.27. ვიგულისხმოთ, რომ გამოსაცდელია 25 მოსწავლე და გვაქვს 25 ბილეთი. ერთ-ერთმა მოსწავლემ იცის მხოლოდ 15 ბილეთი. თუ ყოველი აღებული ბილეთი უკან ბრუნდება შემდეგი ბილეთის აღებამდე, მაშინ ამ მოსწავლის წარმატება (მოსწავლემ აიღო ის ბილეთი, რომელიც იცის) ყოველ ამოღებაზე ერთნაირად არის მოსალოდნელი და წარმატების ალბათობაა $\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$. ცხადია, რომ მარცხის ალბათობა $\frac{2}{5}$-ის ტოლია. ვთქვათ, ბილეთები უკან არ ბრუნდება და მოსწავლემ, რომელმაც იცის მხოლოდ 15 ბილეთი, რიგით მეორემ აიღო ბილეთი ისე, რომ მისთვის უცნობია პირველი აღებული ბილეთი მან იცის თუ არა. ვაჩვენოთ, რომ მისი წარმატების ალბათობა მაინც $\frac{3}{5}$-ის ტოლია.

აღვნიშნოთ, წარმატება პირველ ამოღებაზე A_1-ით და მარცხი $\overline{A}-1$-ით. წარმატება მეორე ამოღებაზე – A_2-ით. გამოვიყენოთ $A_1+\overline{A}_1=\Omega$ და $A_2=_2\Omega$ ტოლობები. მაშინ გვექნება

$$\begin{aligned}P(A_2)&=P(A_2\Omega)=P\big[A_2(A_1+\overline{A})\big]=\\&=P(A_2A_1+A_2\overline{A}_1)=P(A_2A_1)+P(A_2\overline{A}_1)=\\&=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2\mid\overline{A}_1)=\\&=\frac{15}{25}\cdot\frac{14}{24}+\frac{10}{25}\cdot\frac{15}{24}=\frac{15}{25}\Big(\frac{14}{24}+\frac{10}{24}\Big)=\frac{3}{5}.\end{aligned}$$

მაგალითი 3.28. ინგლისში და უელსში 1891 წელს მოსახლეობის აღწერით დადგენილი იყო: მუქთვალებიანი მამები და მუქთვალებიანი ვაჟიშვილები (ხდომილობა AB) შეადგენენ 5%-ს, მუქთვალებიანი მამები და არამუქთვალებიანი ვაჟიშვილები (ხდომილობა $A\overline{B}$) – 7,9%, არამუქთვალებიანი მამები და მუქთვალებიანი ვაჟები (ხდომილობა $\overline{A}B$) – 8,9%-ს, არამუქთვალებიანი მამები და არამუქთვალებიანი ვაჟიშვილები (ხდომილობა $\overline{A}\,\overline{B}$) –

78, 2%-ს. პირობითი ალბათობის გამოყენებით დავადგინოთ ვაჟიშვილების თვალების ფერის კავშირი (დამოკიდებულება) მამების თვალების ფერთან.

$$1.\ P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(A\Omega)} = \frac{P(AB)}{P[A(B+\overline{B})]} = \\ = \frac{P(AB)}{P(AB+A\overline{B})} = \frac{P(AB)}{P(AB)+P(A\overline{B})} = \\ = \frac{0,05}{0,05+0,079} = 0,39;$$

$$2.\ P(\overline{B} \mid A) = 1 - P(B \mid A) = 1 - 0,39 = 0,61;$$

$$3.\ P(B \mid \overline{A}) = \frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})} = \frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A}B)+P(\overline{A}\,\overline{B})} = \\ = \frac{0,089}{0,089+0,782} = 0,102;$$

$$4.\ P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 1 - P(B \mid \overline{A}) = 1 - 0,102 = 0,898.$$

საინტერესოა გავარკვიოთ, მაგალითად, თუ რა დასკვნის საშუალებას იძლევა $P(B \mid A) = 0,39$ ტოლობა. მაგალითი 3.28-ის პირობებში ეს იმას ნიშნავს, რომ ალბათობა იმისა, რომ მუქთვალებიან მამას (ხდომილობა A) ყოლება მუქთვალებიანი ვაჟიშვილი (ხდომილობა B) შეადგენს 0,39-ს.

ანალოგიური ინტერპრეტაცია შეიძლება მივცეთ დანარჩენ ტოლობებსაც.

მაგალითი 3.29. ვთქვათ, პაციენტი დაავადებულია რაიმე კონკრეტული დაავადებით (ხდომილობა A) ან არ არის დაავადებული ამ ავადმყოფობით (ხდომილობა $\overline{A}$). პაციენტის მიმართ გამოიყენეს დიაგნოსტიკური ტესტი. ეს ტესტი იძლევა დადებით რეაქციას ამ ავადმყოფობაზე (ხდომილობა B). ცნობილია, რომ $P(B \mid A) = 0,95$, $P(B \mid \overline{A}) = 0,05$ (ე. ი. ალბათობა იმისა, რომ ავადმყოფ პაციენტზე ტესტი მოგვცემს დადებით რეაქციას, შეადგენს 0,95-ს, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ ჯანმრთელ პაციენტზე ტესტი მოგვცემს დადებით რეაქციას, შეადგენს 0,05-ს). ცნობილია აგრეთვე, რომ პაციენტთა გარკვეული ჯგუფისთვის $P(A) = 0,005$, $P(\overline{A}) = 0,995$. გამოვთვალოთ პაციენტთა ამ ჯგუფისათვის პირობითი ალბათობა $P(A \mid B)$.

ნამრავლის ალბათობის (3.11) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(AB)+P(\overline{A}B)} = \\ = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(A)P(B \mid A)+P(\overline{A})P(B \mid \overline{A})} =$$

$$= \frac{0,005 \cdot 0,95}{0,005 \cdot 0,95 + 0,995 \cdot 0,05} = 0,0872.$$

ეს ნიშნავს, რომ აღნიშნული ჯგუფის გამოკვლეული პაციენტებიდან, რომელთა დიაგნოსტიკურმა ტესტმა დადებითი რეაქცია მოგვცა, სინამდვილეში მხოლოდ $8,72\%$ არის დაავადებული. ეს მაგალითი გვიჩვენებს, თუ რა დიდი სიფრთხილით უნდა მოვეკიდოთ დიაგნოსტიკური ტესტების საფუძველზე გაკეთებულ დასკვნებს.

მაგალითი 3.30. ერთი მბრძანებელი ისე განრისხდა თავისი კარის ასტრონომის (ვარსკვლავთაღმრიცხველის) შეცდომების გამო, რომ ბრძანა ასტრონომისათვის თავი მოეკვეთათ. თუმცა ბოლო მომენტში მბრძანებელმა შეარბილა თავისი გადაწყვეტილება და ასტრონომს მისცა თავის გადარჩენის გარკვეული შანსი, რომელიც შემდეგში მდგომარეობდა: ასტრონომს მისცეს ორი თეთრი და ორი შავი ერთი და იმავე ზომის ბირთვი. ეს ოთხი ბირთვი მან უნდა მოათავსოს ორ ყუთში ისე, რომ ყუთში ერთი ბირთვი მაინც უნდა იდოს. ჯალათი მიდის ყუთებთან. $\frac{1}{2}$-ის ტოლი ალბათობით შემთხვევით ირჩევს ყუთს, შემდეგ არჩეული ყუთიდან შემთხვევით იღებს ერთ ბირთვს. თუ ბირთვი თეთრი აღმოჩნდება, მაშინ ასტრონომი შეწყალებული იქნება. თუ ბირთვი შავი აღმოჩნდება, მაშინ ასტრონომს თავს მოკვეთენ. როგორ უნდა განალაგოს ეს ოთხი ბირთვი ორ ყუთში ასტრონომმა, რომ მას ჰქონდეს გადარჩენის ყველაზე მეტი შანსი.

გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ ყუთები გადანომრილია რიცხვებით I და II. ასტრონომის ყველა შესაძლო მოქმედება სქემატურად შეიძლება ასე გამოვსახოთ:

1. I ყუთი – ○ ●, II ყუთი – ○ ●;
2. I ყუთი – ○ ○, II ყუთი – ● ●;
3. I ყუთი – ○ ○ ●, III ყუთი – ●;
4. I ყუთი – ○, IV ყუთი – ○ ● ●.

განვიხილოთ შემდეგი ხდომილობები: A – ასტრონომი გადარჩება, B – ჯალათი აირჩევს პირველ ყუთს ($\overline{B}$ – ჯალათი აირჩევს მეორე ყუთს). მაშინ ასტრონომის გადარჩენის $P(A)$ ალბათობა შეიძლება გამოვთვალოთ შემდეგი ტოლობის საშუალებით:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A\Omega) = P\big[A(B+\overline{B})\big] = \\ &= P(AB) + P(A\overline{B}) = P(AB) + P(A\overline{B}) = \\ &= P(B)P(A \mid B) + P(\overline{B})P(A \mid \overline{B}). \end{aligned}$$

გამოვთვალოთ ახლა $P(A)$ სქემატურად მოცემული ოთხი კომბინაციის შემთხვევაში. მივიღებთ:

1. $P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;
2. $P(A) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$;
3. $P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{3}$;
4. $P(A) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

ამრიგად, გადარჩენის მაქსიმალური შანსი ასტრონომს აქვს მეოთხე კომბინაციის შემთხვევაში, მაგრამ, ცხადია, რომ იგი მაინც არ იძლევა ასტრონომის გადარჩენის ასპროცენტიან გარანტიას.

მკითხველს ვთავაზობთ რიცხვობრივად შეაფასოს, რომ თუ ასტრონომი ერთ-ერთ ყუთს ცარიელს დატოვებს და ყველა ბირთვს მეორე ყუთში მოათავსებს მისი გადარჩენის მაქსიმალური ალბათობა $\frac{2}{3}$-ის ტოლია.

მაგალითი 3.31. ვთქვათ, გვაქვს ორი ყუთი. პირველ ყუთში 4 თეთრი და 6 შავი ბირთვია. მეორეში – 3 თეთრი და 5 შავი ბირთვი. $\frac{1}{2}$-ის ტოლი ალბათობით შემთხვევით ვირჩევთ ერთ-ერთ ყუთს და ამ ყუთიდან შემთხვევით ვიღებთ ერთ ბირთვს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ეს ბირთვი თეთრი აღმოჩნდება.

განვიხილოთ ორი ხდომილობა: A– ამოღებული ბირთვი თეთრია, B – არჩეულია პირველი ყუთი, $\overline{B}$ – არჩეულია მეორე ყუთი. მაშინ, თუ ვისარგებლებთ წინა მაგალითში მიღებული ფორმულით, გვექნება:

$$P(A) = P(B)P(A \mid B) + P(\overline{B})P(A \mid \overline{B}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{31}{80}.$$

მაგალითი 3.32. ვთქვათ, შესრულებულია მაგალითი 2.31-ის პირობები და ჩვენ ვიცით, რომ ამოღებული ბირთვი არის თეთრი, მაგრამ არ ვიცით, თუ რომელი ყუთიდან არის ეს ბირთვი ამოღებული. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ეს თეთრი ბირთვი ამოღებულია მეორე ყუთიდან.

განვიხილოთ ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულა A და $\overline{B}$ ხდომილობებისათვის:

$$P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B} \mid A) = P(\overline{B})P(A \mid \overline{B}),$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$P(\overline{B} \mid A) = \frac{P(\overline{B}P(A \mid \overline{B})}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{31}{80}} = \frac{15}{31}.$$

მაგალითი 3.33. ორი ჭურჭელი ერთმანეთთან დაკავშირებულია ისე, რომ მათში მოთავსებული მოლეკულები შეიძლება ერთი ჭურჭლიდან მოხვდეს მეორეში და პირიქით. ვთქვათ, პირველ ჭურჭელში სამი "თეთრი" და ექვსი "შავი", ხოლო მეორეში – ხუთი "თეთრი" და რვა "შავი" მოლეკულაა. პირველიდან მეორე ჭურჭელში შემთხვევით აღმოჩნდა ერთი მოლეკულა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მეორე ჭურჭლიდან შემთხვევით არჩეული მოლეკულა "თეთრი" აღმოჩნდება.

განვიხილოთ შემთხვევითი ხდომილობები: A – მეორედან არჩეული მოლეკულა "თეთრია", B – პირველიდან მეორეში მოხვედრილი მოლეკულა "თეთრია" ($\overline{B}$ – "შავია"). მაშინ გვექნება:

$$P(A) = P(B)P(A \mid B) + P(\overline{B})P(A \mid \overline{B}) =$$
$$= \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{14} + \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{14} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{8}{21}.$$

მკითხველს ვთავაზობთ გამოთვალოს იგივე ალბათობა იმ პირობით, რომ პირველიდან მეორე ჭურჭელში შემთხვევით აღმოჩნდა ორი მოლეკულა.

საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ აღნიშნულ ცდებში $P(A)$ ალბათობის გამოთვლით ჩვენ ფაქტობრივად ვითვლით მეორე ჭურჭელში "თეთრი" მოლეკულების ხვედრით წილს.

§ 4. დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილება და რიცხვითი მახასიათებლები

1. განვიხილოთ რაიმე კლასიკური სქემის ცდის შემთხვევაში ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. ვთქვათ, გვაქვს Ω სიმრავლეზე განსაზღვრული რიცხვითი ფუნქცია $X = X(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

რადგან Ω სიმრავლე სასრულია, ამიტომ X-ის მნიშვნელობათა სიმრავლეც სასრულია. სიმარტივისთვის ვიგულისხმოთ, რომ X-ის მნიშვნელობები ერთმანეთისგან განსხვავებულია. აღვნიშნოთ ეს მნიშვნელობები $x_1, \ldots, x_n$ სიდიდეებით, რომელსაც X-ის შესაძლო რიცხვითი მნიშვნელობები ეწოდება. თვითონ X ცვლად სიდიდეს დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე ეწოდება. შემთხვევითი სიდიდის მაგალითებია: დედამიწაზე წლის განმავლობაში დაცემული მეტეორიტების რაოდენობა, ბროუნის ნაწილაკის მდგომარეობა, ქიმიურ რეაქციაში ნივთიერების კონცენტრაცია, მზა პროდუქციაში წუნდებული პროდუქტის რაოდენობა, წელიწადში მზიანი დღეების რაოდენობა, რაიმე ფიზიკურ სიდიდეზე დაკვირვების (სიდიდის გაზომვის) შედეგები, რაიმე საქონლის მიწოდების ან მოთხოვნის რაოდენობა, ფინანსურ ბაზარზე აქციის ფასი, ინფლაციის დონე და სხვა.

შემთხვევითი სიდიდის განსხვავება ჩვეულებრივი ცვლადი სიდიდისაგან იმაში მდგომარეობს, რომ იგი შემთხვევით იღებს შესაძლო მნიშვნელობას,

რადგანაც უცნობია ცდის შედეგად რომელი ელემენტარული ხდომილობა განხორციელდება. ამის გამო შემთხვევითი სიდიდის, როგორც ფუნქციის, ცხადი ანალიზური სახით ჩაწერა ჩვენ არ შეგვიძლია.

შემთხვევითი სიდიდის ყოფაქცევის შესასწავლად განიხილება მისი განაწილების კანონი (განაწილება). შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$p_X(x_i) = P\{\omega :\ X(\omega) = x_i\},\quad i = 1, \dots, n. \tag{4.1}$$

ეს აღნიშვნა იკითხება ასე: $p_X(x_i)$ არის ალბათობა იმ $\omega \in \Omega$ ელემენტარული ხდომილობების სიმრავლისა, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა $X(\omega) = x_i$, $i = 1, \dots, n$. ხშირად (4.1) აღნიშვნას ასე ჩაწერენ ხოლმე:

$$p_X(x_i) = P(X = x_i),$$

რომელსაც $x_1, \dots, x_n$ შესაძლო რიცხვითი მნიშვნელობების შესაბამისი ალბათობები ეწოდება. ამ მონაცემებს შემდეგი ცხრილის სახით წერენ:

ცხრილი 4.1.

X	x_1	$\dots$	x_n
p_X	$p_X(x_1)$	$\dots$	$p_X(x_n)$

ცხრილი 4.1-ს ეწოდება დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

ადვილი მისახვედრია, რომ რადგანაც შემთხვევითი ხდომილობები $(X = x_1), \dots, (X = x_n)$ ქმნის ხდომილობათა სრულ სისტემას, ამიტომ განაწილების კანონში შესაბამისი ალბათობების ჯამი ყოველთვის ერთის ტოლია:

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1.$$

აქვე შევნიშნოთ, რომ X-ის განაწილების კანონის საშუალებით შეიძლება ჩავწეროთ მისი ფუნქციის განაწილების კანონი, მაგალითად $aX + b$ (a და b რაიმე რიცხვებია), X^2, $|X|$ და სხვა ახალი შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონები.

მაგალითი 4.1. განვიხილოთ ორი წესიერი მონეტის ერთჯერ აგდების (ერთი წესიერი მონეტის ორჯერ აგდების) ცდა. ასეთ შემთხვევაში გვაქვს:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} = \{(გგ), (გს), (სგ), (სს)\},$$

ხოლო ცდის ალბათურ მოდელს აქვს შემდეგი სახე:

ცხრილი 4.2.

Ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

აღვნიშნოთ X-ით გერბის მოსვლათა რაოდენობა და შევადგინოთ მისი განაწილების კანონი. ადვილი მისახვედრია, რომ X-ის შესაძლო რიცხვითი მნიშვნელობებია: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. შემდეგ გვაქვს

$$P(X=0) = p(\omega_4) = \frac{1}{4},$$
$$P(X=1) = p(\omega_2) + p(\omega_3) = \frac{1}{2},$$
$$P(X=2) = p(\omega_1) = \frac{1}{4}.$$

ამრიგად, გვექნება:

ცხრილი 4.3.

X	0	1	2
p_X	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

ამრიგად, დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდის ყოფაქცევის ალბათური სტრუქტურა სრულად აღიწერება (4.1) ალბათობების განაწილებით $P_X(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$. ეს სტრუქტურა ეკვივალენტური, მაგრამ უფრო ზოგადი სახით აღიწერება ე. წ. განაწილების ფუნქციის საშუალებით, რომელიც გამოიყენება, აგრეთვე, სხვა ტიპის (უწყვეტი) შემთხვევითი სიდიდეების ყოფაქცევის შესწავლაში.

X-ის განაწილების ფუნქცია განიმარტება ტოლობით

$$F_X(x) = P\{\omega : X(\omega) \le x\}. \tag{4.2}$$

ცხრილი 4.1-ით მოცემული დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდისთვის თუ ჩავთვლით, რომ $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, მაშინ გვექნება

$$F_X(x) = \sum_{\{i:\, x_i \le x\}} p_X(x_i),$$
$$P_X(x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}).$$

მაგალითად ცხრილი 4.3-ის შემთხვევაში განაწილების ფუნქცია ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$F_X(x) = 0, \quad \text{როცა } x \le 0,$$
$$F_X(x) = \frac{1}{4}, \quad \text{როცა } 0 < x \le 1,$$
$$F_X(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}, \quad \text{როცა } 1 < x \le 2,$$
$$F_X(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1, \quad \text{როცა } x > 2.$$

მკითხველს ვთავაზობთ, ააგოს ამ განაწილების ფუნქციის გრაფიკი.

შემოვიტანოთ ახლა ორი მნიშვნელოვანი განაწილების კანონი. ვთქვათ, ვატარებთ ცდას, რომლის შედეგი შეიძლება იყოს რაიმე ხდომილობის ("წარმატების") ან მისი საწინააღმდეგო ხდომილობის ("მარცხის") მოხდენა. ასეთი ცდები ალბათობის თეორიაში აღიწერება შემთხვევითი სიდიდით, რომელიც "მარცხის" შემთხვევაში ნულია, "წარმატების" შემთხვევაში – ერთი. მისი განაწილების კანონი მოიცემა შემდეგნაირად:

ცხრილი 4.4

X	0	1
p_X	$1-p$	p

, $0 < p < 1$.

ცხრილი 4.4-ით მოცემულ განაწილების კანონს ეწოდება ბერნულის განაწილება p პარამეტრით, ხოლო X-ს ეწოდება ბერნულის შემთხვევითი სიდიდე. ამრიგად, "წარმატების" ალბათობა $P(X = 1) = p$, ხოლო "მარცხის" ალბათობა $P(X = 0) = 1 - p$.

ვთქვათ, ახლა ვატარებთ ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად n რაოდენობის ცდას, სადაც ყოველი ცდის შედეგი აღიწერება ცხრილი 4.4-ით მოცემული ბერნულის შემთხვევითი სიდიდით. იგულისხმება, რომ ყოველ ცდაში "წარმატების" ალბათობა უცვლელია და p-ს ტოლია. ასეთ ცდებს დამოუკიდებელ ცდათა ბერნულის სქემა ეწოდება. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$X = S_n = X_1 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{4.3}$$

სადაც ყოველი X_i, $i = 1, \ldots, n$, სიდიდე არის ბერნულის შემთხვევითი სიდიდე. ადვილი მისახვედრია, რომ რადგან ყოველი $X_i = 0$ ან $X_i = 1$, ამიტომ X წარმოადგენს ბერნულის სქემის n ცდაში "წარმატების" რაოდენობას. X-ის განაწილების კანონი მოიცემა შემდეგი სახით

ცხრილი 4.5.

X	0	...	m	...	n
p_X	$P_n(0)$	...	$P_n(m)$	...	$P_n(n)$

სადაც შესაბამისი ალბათობები განიმარტება ტოლობით:

$$P_n(m) = P(X = m) = \\ = \frac{n!}{m!(n-m)!}\, p^m \cdot (1-p)^{n-m}, \quad m = 0, 1, \ldots, n. \tag{4.4}$$

ცხრილი 4.5-ით მოცემულ განაწილების კანონს ბინომური განაწილება ეწოდება p პარამეტრით, ხოლო X-ს ეწოდება ბინომური შემთხვევითი სიდიდე. (4.4) ფორმულას ეწოდება ბერნულის ფორმულა. მისი საშუალებით დაითვლება ბერნულის სქემის n ცდაში "წარმატების" ზუსტად m-ჯერ მოხდენის ალბათობა.

შევნიშნოთ, რომ ბერნულის ფორმულას მნიშვნელოვანი გამოყენება აქვს. მაგალითად, გენეტიკაში სხვადასხვა გენების მატარებელი ქრომოსომების შემთხვევაში გენოტიპების კომბინაციების ალბათობის დათვლაში, რომელიც გენეტიკური მექანიზმის ანალიზში ხარდი-ვაინბერგის კანონთან არის დაკავშირებული.

მაგალითი 4.2. განვიხილოთ წესიერი მონეტის ერთჯერ აგდება. გერბის გამოჩენას ("წარმატებას") შევუსაბამოთ ერთი, ხოლო საფასურის გამოჩენას ("მარცხს") – ნული. აღვნიშნოთ X-ით "წარმატების" რაოდენობა, მაშინ ადვილი მისახვედრია, რომ X წარმოადგენს ბერნულის შემთხვევით სიდიდეს შემდეგი განაწილების კანონით:

ცხრილი 4.6.

X	0	1
P_X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

მაგალითი 4.3. განვიხილოთ წესიერი მონეტის n დამოუკიდებელი აგდება. გერბის გამოჩენას ("წარმატებას") შევუსაბამოთ ერთი, ხოლო საფასურის გამოჩენას ("მარცხს") – ნული. აღვნიშნოთ X-ით "წარმატების" რაოდენობა n ცდაში. ადვილი მისახვედრია, რომ X არის ბინომური შემთხვევითი სიდიდე და მისი განაწილების კანონი მოიცემა შემდეგი სახით

ცხრილი 4.7.

X	0	...	n
P_X	$P_n(0)$	...	$P_n(n)$

სადაც

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!}\left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}, \quad m = 0, 1, \ldots, n.$$

მკითხველს ვთავაზობთ, მაგალითი 4.3-ის პირობებში, ჩაწეროს X-ის განაწილების კანონი $n = 5$ შემთხვევაში და გამოთვალოს $P(X = 3)$ ალბათობა.

ბერნულის (4.4) ფორმულით შეიძლება გამოვთვალოთ მაგალითად შემდეგი ალბათობები:

$$P(S_m \leq k) = \sum_{m=0}^{k} P_n(m),$$

$$P(k_1 \leq S_m \leq k_2) = \sum_{m=k_1}^{k_2} P_n(m), \quad k_1 < k_2.$$

იმ შემთხვევაში, როცა ცდათა რიცხვი n დიდია ბერნულის ფორმულის გამოყენება რთულდება ფაქტორიალების გამო. ასეთ დროს გამოიყენება გარკვეული მიახლოებითი ფორმულები, რომელიც დაკავშირებულია უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის ე. წ. ნორმალურ ანუ გაუსის განაწილებასთან. X შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება უწყვეტი, თუ მისი განაწილების ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\, du,$$

სადაც $f_X(x)$ არის არაუარყოფითი ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია და უწყვეტია ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე გარდა შესაძლოა სასრული რაოდენობის წერტილებისა. ასეთ შემთხვევაში $f_X(x)$ ფუნქციას უწყვეტი X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე ეწოდება და ამბობენ, რომ X-ს აქვს აბსოლუტურად უწყვეტი განაწილება. ამ პირობებში განაწილების ფუნქციის წარმოებული განაწილების სიმკვრივის ტოლია და სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\, dx = F_X(x_2) - F_X(x_1),$$

სადაც x_1 და x_2 რაიმე სასრული რიცხვებია. ჩვენ არ მოვიტანთ განაწილების ფუნქციისა და განაწილების სიმკვრივის ზოგად დახასიათებასა და თვისებებს, თუმცა მოკლედ შევეხებით ნორმალურ განაწილებას, რომელიც არსებითად გამოიყენება ალბათობის თეორიაში და სტატისტიკური დასკვნების თეორიაში.

უწყვეტ X შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება ნორმალურად განაწილებული, თუ მისი განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$f_X(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

სადაც განაწილების პარამეტრები μ და σ^2 რაიმე რიცხვებია, $-\infty < \mu < +\infty$, $\sigma^2 > 0$, ხოლო π და e კარგად ცნობილი მუდმივებია: $\pi \approx 3,14$, $e \approx 2,7182$. ნორმალური განაწილების ფუნქცია ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dy.$$

ნორმალურ განაწილებას აღნიშნავენ $N(\mu, \sigma^2)$ სიმბოლოთი და წერენ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, რაც იმას ნიშნავს, რომ X განაწილებულია ნორმალური კანონით პარამეტრებით μ და σ^2. იმ შემთხვევაში, როცა $\mu = 0$ და $\sigma^2 = 1$, მაშინ გვაქვს სტანდარტული ნორმალური განაწილება $N(0, 1)$, რომლის შესაბამისი განაწილების სიმკვრივე და ფუნქცია აღინიშნება, შესაბამისად, $\varphi(x)$ და $\Phi(x)$ ფუნქციებით. ამ ფუნქციების გამოყენებით შეიძლება დავწეროთ შემდეგი მიახლოებითი ტოლობები:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\, \varphi(x),$$

სადაც

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}},$$

ხოლო

$$P(k_1 \le S_m \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

სადაც

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

შევნიშნოთ, რომ არსებობს $\varphi(x)$ და $\Phi(x)$ ფუნქციების ცხრილები, რომელიც ტაბულირებულია მხოლოდ x არგუმენტის დადებითი მნიშვნელობებისთვის, რადგანაც $\varphi(x)$ არის ლუწი ფუნქცია ($\varphi(-x) = \varphi(x)$) და რის გამოც გვაქვს

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \quad \Phi(0) = 0,5.$$

მაგალითი 4.4. ვთქვათ, ბერნულის სქემაში $n = 400$, $m = 80$, $p = 0,2$, $q = 0,8$. გამოვთვალოთ $P_{400}(8)$ ალბათობა. გვაქვს

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = \frac{80 - 80}{8} = 0.$$

$\varphi(x)$-ის ცხრილის მიხედვით $\varphi(0) = 0,3989$ და გვექნება

$$P_{400}(8) = \frac{1}{8} \cdot 0,3989 \approx 0,04986.$$

საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ ბერნულის ფორმულის უშუალო გამოყენება გვაძლევს მიახლოებით იგივე შედეგს: $P_{400}(8) \approx 0,0498$.

მაგალითი 4.5. ვთქვათ, ბერნულის სქემაში $n = 100$, $p = 0,9$, $q = 0,2$. გამოვთვალოთ $P(75 \leq S_m \leq 90)$ ალბათობა. გვაქვს $k_1 = 75$, $k_2 = 90$,

$$x_1 = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25,$$
$$x_2 = \frac{90 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 2,5.$$

$\Phi(x)$-ის ცხრილის თანახმად გვაქვს

$$P(75 \leq S_m \leq 90) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = 0,993 - 0,106 = 0,887.$$

2. ახლა გვინდა შემოვიტანოთ განუზღვრელობის ერთი მნიშვნელოვანი რიცხვითი მახასიათებელი, ე. წ. ენტროპია, რომელიც თავდაპირველად თერმოდინამიკაში იყო შემოღებული.

ალბათობის თეორიაში ენტროპიის განმარტება დაკავშირებულია შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონთან (განაწილებასთან). ვთქვათ, X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია.

ცხრილი 4.8.

X	x_1	...	x_n
P_X	p_1	...	p_n

სადაც X განმარტებულია რაიმე ცდის სასრულ ალბათურ Ω სივრცეზე. X შემთხვევითი სიდიდის ანუ ცდის ენტროპია განიმარტება ტოლობით:

$$H = H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i, \tag{4.5}$$

სადაც ln ნატურალური ლოგარითმია და იგულისხმება, რომ $0 \cdot \ln 0 = 0$. შევნიშნოთ, რომ (4.5) ფორმულაში ნატურალური ლოგარითმის განხილვა არსებითი არ არის, რადგან ყოველთვის შეიძლება ლოგარითმის ერთი ფუძიდან სხვა ფუძეზე გადასვლა. ავიღოთ, მაგალითად, ლოგარითმი ორის ფუძით. განუზღვრელობის რიცხვით ერთეულად ამ შემთხვევაში მიღებულია ცდის ენტროპია, რომელსაც ორი შესაძლო შედეგი აქვს თითოეული 0,5-ის ტოლი ალბათობით. ამ ერთეულს BIT ეწოდება და გამოიყენება კავშირის თეორიაში, მაგალითად, კოდირებაში. $H(X)$ სიდიდეს კიდევ ცნობილი მათემატიკოსისა და ინჟინრის შენონის ენტროპია ეწოდება, რომელმაც დააშუშავა კავშირის (ინფორმაციის) მათემატიკური თეორია. ამრიგად, BIT-სთვის (4.5) ფორმულაში გვაქვს: $n = 2$, $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ და ვღებულობთ:

$$H = -\left(\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}\right) = -\left(\log_2\frac{1}{2}\right) =$$
$$= -(\log_2 2^{-1}) = -(-\log_2 2) = -1(-1) = 1.$$

განვიხილოთ ენტროპიის ზოგიერთი თვისება:

1. $H \geq 0$ და $H = 0$ მხოლოდ მაშინ, როცა განაწილების კანონში ყველა შესაბამისი ალბათობა, გარდა რომელიმე ერთისა, ნულის ტოლია.
2. $H \leq \ln n$.
3. H ენტროპია მაქსიმალურია იმ შემთხვევაში, როცა

$$p_1 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}.$$

მესამე თვისება იმას ნიშნავს, რომ ცდას მაქსიმალური განუზღვრელობა მაშინ აქვს, როცა ცდის შედეგებიდან ანუ

$$(X = x_1), \ldots, (X = x_n)$$

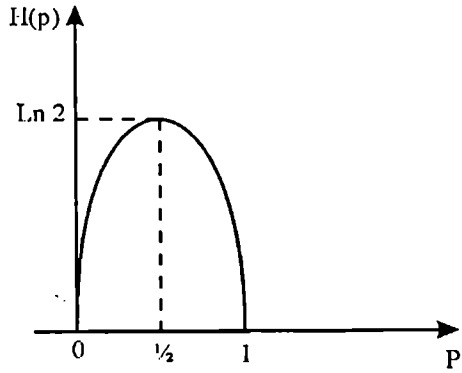
ხდომილობებიდან არცერთისთვის მოხდენის უპირატესობის მინიჭება არ შეიძლება.

განვიხილოთ, მაგალითად, H ენტროპიის გრაფიკი, $n = 2$ შემთხვევაში, როგორც შესაბამისი ალბათობის ფუნქციის, ანუ

$$H(p) = -p\ln p - (1-p)\ln(1-p).$$

ფუნქციის გრაფიკი.

ეს გრაფიკი მოცემულია შემდეგ ნახაზზე



ნახ. 4.1.

როგორც ვხედავთ, მართლაც, მაქსიმალური ენტროპია, ანუ $H(p)$ ფუნქციის მაქსიმუმი, მიიღწევა $p = \frac{1}{2}$ წერტილში.

შემდგომში ჩვენ დაგვჭირდება ორი შემთხვევითი სიდიდის ერთობლივი განაწილების (განაწილების კანონის) განხილვა. ვთქვათ, X და Y, ორი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეა შესაძლო რიცხვითი მნიშვნელობებით, შესაბამისად, $x_i, i = 1, \ldots, n$ და $y_j, j = 1, \ldots, m$. განვიხილოთ ნამრავლის ალბათობა

$$p_{ij} = P\{(X = x_i) \cdot (Y = y_j)\}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m.$$

ამ მონაცემებს შემდეგი ცხრილის სახით ჩაწერენ, რომელსაც (X, Y) წყვილის ერთობლივი განაწილების კანონი ეწოდება.

ცხრილი 4.9.

$Y \backslash X$	x_1	$\ldots$	x_n
y_1	p_{11}	$\ldots$	p_{n1}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
y_m	p_{1m}	$\ldots$	p_{nm}

ადვილი საჩვენებელია, რომ ერთობლივი განაწილების კანონში ყველა შესაბამისი ალბათობის ჯამი ერთის ტოლია

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1.$$

ამრიგად, (X,Y) წყვილის ერთობლივი ყოფაქცევა ცხრილი 4.9-ის საშუალებით აღიწერება. საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ თუ (X,Y) წყვილის ერთობლივი ყოფაქცევა ცნობილია, მაშინ შეიძლება ცალკე X-ის და ცალკე Y-ის ყოფაქცევის შესაბამისი განაწილების კანონების ჩაწერა, ცხრილი 4.9-ის გამოყენებით, შემდეგი ფორმულების საშუალებით:

$$p_X(x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.6}$$

$$p_Y(y_j) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{4.7}$$

შევნიშნოთ, რომ X-ის და Y-ის განაწილების კანონების საშუალებით შეიძლება ჩავწეროთ, მაგალითად, $X+Y$, XY, $\max(X,Y)$ და სხვა ახალი შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონები.

მკითხველს ვთავაზობთ მოიტანოს ცხრილი 4.9-ის მარტივი რიცხვითი მაგალითი, შეადგინოს (4.6) და (4.7) ფორმულების გამოყენებით X და Y შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონები, გამოთვალოს (ლოგარითმების ცხრილების გამოყენებით) და შეადაროს ერთმანეთს X-ის და Y-ის ენტროპიები.

ორ X და Y შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ სრულდება შემდეგი ტოლობა:

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P\{(X = x_i)(Y = y_j)\} = \\ &= P(X = x_i)P(Y = y_j) = p_X(x_i) \cdot p_Y(y_j), \end{aligned} \tag{4.8}$$

სადაც $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. საინტერესოა ახლა შევნიშნოთ, რომ თუ ვიცით X-ის და Y-ის განაწილების კანონები, მაშინ (X,Y) წყვილის ერთობლივი განაწილების კანონის ჩაწერა შეიძლება ((4.8) ტოლობების გამოყენებით), თუ X და Y დამოუკიდებელია ან ვიცით ე. წ. პირობითი განაწილება. ამ საკითხებს ჩვენ არ შევეხებით. შევნიშნოთ, აგრეთვე, რომ (3.14) ტოლობის საშუალებით შეიძლება ორზე მეტი შემთხვევითი სიდიდის დამოუკიდებლობის (ერთობლივად დამოუკიდებლობის) განსაზღვრა. ასეთი შემთხვევითი სიდიდეები ჩვენ გამოყენებული გვაქვს III თავში ფინანსური ბაზრის დისკრეტულ მოდელში.

ახლა (4.5)-ის ანალოგიურად განვსაზღვროთ (X,Y)-ის ენტროპია ფორმულით

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} \ln p_{ij}. \tag{4.9}$$

შემოვიტანოთ აგრეთვე Y-ის პირობითი ენტროპია $(X = x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, ხდომილობის მიმართ შემდეგი ტოლობით:

$$H_{x_i}(Y) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{i} P\{(Y=y_j) \mid (X=x_i)\} \ln P\{(Y=y_j) \mid (X=x_i)\}, \qquad (4.10)$$

სადაც $i = 1, \ldots, n$. მაშინ Y-ის საშუალო ენტროპია X-ის მიმართ განიმარტება შემდეგი ტოლობით

$$H_X(Y) = -\sum_{j=1}^{n} P(X = x_i) H_{x_i}(Y). \qquad (4.11)$$

ახლა მოვიყვანოთ ენტროპიის და პირობითი ენტროპიის კიდევ რამდენიმე თვისება:

4. $H(X,Y) = H(X) + H_X(Y)$.
5. თუ X და Y დამოუკიდებელია, მაშინ
$$H(X,Y) = H(X) + H(Y).$$
6. $0 \leq H_X(Y) \leq H(Y)$.
7. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა
$$I_X(Y) = H(Y) - H_X(Y), \qquad (4.12)$$
რომელსაც ეწოდება Y-ის მიმართ ინფორმაციის რაოდენობა მოთავსებული X-ში. გვაქვს
$$I_X(Y) = I_Y(X) \geq 0.$$

3. ახლა შემოვიტანოთ შემთხვევითი სიდიდის ორი მნიშვნელოვანი რიცხვითი მახასიათებელი: მათემატიკური ლოდინი ანუ საშუალო მნიშვნელობა, რომელიც აღწერს შემთხვევითი სიდიდის საშუალო ყოფაქცევას და დისპერსია, რომელიც აღწერს საშუალოდან გაფანტულობის ყოფაქცევას და წარმოადგენს ამ გაფანტულობის რიცხვით საზომს.

ვთქვათ, მოცემულია X-ის განაწილების კანონი – ცხრილი 4.1. X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი განიმარტება ტოლობით:

$$E(X) = x_1 p_X(x_1) + \cdots + x_n p_X(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_X(x_i). \qquad (4.13)$$

შევნიშნოთ, რომ თუ განაწილების კანონში ყველა შესაბამისი ალბათობა ერთმანეთის ტოლია, მაშინ $E(X)$ წარმოადგენს $x_1, \ldots, x_n$ შესაძლო რიცხვითი მნიშვნელობების საშუალო არითმეტიკულს.

მოვიტანოთ $E(X)$-ის თვისებები:

1. თუ $X \geq 0$, მაშინ
$$E(X) \geq 0.$$

2. თუ $X = c = \text{const}$ არის მუდმივი სიდიდე, მაშინ
$$E(X) = E(c) = c.$$

3. $E(cX) = cE(X)$, $c = \text{const}$.

4. თუ X და Y ორი შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

5. თუ $X_1, \dots, X_n$ შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ
$$E\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i).$$

6. თუ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია, მაშინ
$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y).$$

7. თუ $X_1, \dots, X_n$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ
$$E\Big(\prod_{i=1}^{n} X_i\Big) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i).$$

8. $X^0 = X - E(X)$ გამოსახულებას საშუალოდან გადახრა ან უბრალოდ გადახრა ეწოდება. გვაქვს
$$E(X^0) = E\big[X - E(X)\big] = 0.$$

მაგალითი 4.4. განვიხილოთ წესიერი კამათლის ერთჯერ აგდება. ვთქვათ, X არის კამათლის ზედა წახნაგზე მოსული რიცხვი (ციფრი). X-ის განაწილების კანონს აქვს შემდეგი სახე

ცხრილი 4.10.

X	1	2	3	4	5	6
P_X	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

გამოვთვალოთ $E(X)$. (4.13) ტოლობის თანახმად გვაქვს
$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} =$$
$$= \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{1}{6} \cdot 21 = \frac{7}{2}.$$

აქვე შევნიშნოთ, რომ $E(X)$ შეიძლება არცერთ შესაძლო რიცხვით მნიშვნელობას არ ემთხვეოდეს.

მკითხველს ვთავაზობთ გამოთვალოს ცხრილი 4.4-ით და ცხრილი 4.5-ით მოცემული შემთხვევითი სიდიდეების მათემატიკური ლოდინები და დარწმუნდეს, რომ, შესაბამისად, $E(X) = p$, $E(X) = np$. შევნიშნავთ, რომ თუ X განაწილებულია $N(\mu, \sigma^2)$ ნორმალური კანონით, მაშინ μ პარამეტრის ალბათური შინაარსი მდგომარეობს იმაში, რომ $E(X) = \mu$.

ახლა შემოვიტანოთ დისპერსიის განმარტება. X შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია არის გადახრის კვადრატის მათემატიკური ლოდინი. აღინიშნება $D(X)$-ით. გვაქვს

$$D(X) = E\Big\{\big[X - E(X)\big]^2\Big\}. \tag{4.14}$$

დისპერსიის თვისებებია:

1. $D(X) \geq 0$.
2. თუ $X = c = \text{const}$ მუდმივი სიდიდეა, მაშინ
$$D(X) = D(c) = 0.$$
3. $D(cX) = c^2 D(X)$, $c = \text{const}$.
4. თუ X და Y დამოუკიდებელია, მაშინ
$$D(X + Y) = D(X) + D(Y),$$
$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$
5. თუ $X_1, \ldots, X_n$ შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია, მაშინ
$$D\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i).$$
6. ხშირად მოსახერხებელია დისპერსია გამოვთვალოთ შემდეგი ტოლობით
$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

გაფანტულობის რიცხვით საზომად გამოიყენება აგრეთვე საშუალო კვადრატული გადახრა, რომელიც დისპერსიიდან კვადრატული ფესვის დადებითი მნიშვნელობის ტოლია და აქვს შემთხვევითი სიდიდის განზომილება. იგი აღინიშნება $\sigma(X)$-ით. გვაქვს

$$\sigma(X) = +\sqrt{D(X)}\,. \tag{4.15}$$

მაგალითი 4.7. გამოვთვალოთ დისპერსია მაგალითი 3.6-ის პირობებში. $D(X)$-ის (4.14) განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{6} \big[x_i - E(X)\big]^2 \cdot P_X(x_i) =$$

$$= \left(1-\frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(2-\frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(3-\frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} +$$
$$+ \left(4-\frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(5-\frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(6-\frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} =$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{25}{4} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \frac{25}{4}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{70}{4} = \frac{35}{12}.$$

ამრიგად, $D(X) = \frac{35}{12}$. გამოვთვალოთ ახლა იგივე დისპერსია მე-6 თვისების გამოყენებით. ამისათვის შევადგინოთ X^2-ის განაწილების კანონი და გამოვთვალოთ $E(X^2)$. გვაქვს:

ცხრილი 4.11.

X^2	1	4	9	16	25	36
p_X	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

შემდეგ გვაქვს:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{6} X_i^2 p_X(x_i) =$$
$$= 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 16 \cdot \frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{1}{6} + 36 \cdot \frac{1}{6} =$$
$$= \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6},$$
$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182-147}{12} = \frac{35}{12}.$$

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ დისპერსიის განმარტების გამოყენებით გამოთვლის დროს, ჩვენ ფაქტობრივად გამოვიყენეთ $X - E(X)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

მკითხველს ვთავაზობთ გამოთვალოს ცხრილი 4.4-ით და ცხრილი 4.5-ით მოცემული შემთხვევითი სიდიდეების დისპერსიები და დარწმუნდეს, რომ, შესაბამისად, $D(X) = pq$, $D(X) = npq$. შევნიშნავთ, რომ თუ $X \sim N(\mu, \sigma)$ კანონით, მაშინ $D(X) = \sigma^2$.

4. ორი შემთხვევითი სიდიდის ურთიერთყოფაქცევის (ურთიერთდამოკიდებულების) შესასწავლად გამოიყენება კ. წ. კოვარიაციისა და კორელაციის კოეფიციენტები. ვთქვათ, გვაქვს ორი X და Y შემთხვევითი სიდიდე. კოვარიაციის კოეფიციენტი ეწოდება სიდიდეს

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\Big\{\big[X - E(X)\big]\,\big[Y - E(Y)\big]\Big\}, \qquad (4.16)$$

ხოლო კორელაციის კოეფიციენტი განიმარტება ტოლობით

$$r(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}. \tag{4.17}$$

მოვიტანოთ ამ სიდიდეების ზოგიერთი თვისება.

1. $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$.
2. $\operatorname{cov}(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X)E(Y)$.
3. თუ X და Y დამოუკიდებელია, მაშინ
$$\operatorname{cov}(X,Y) = 0, \quad r(X,Y) = 0.$$
4. თუ c_i, $i = 1,2,3,4$, რაიმე მუდმივებია, მაშინ
$$r = (c_1X + c_2, c_3Y + c_4) = r(X,Y).$$
5. $|r(X,Y)| \le 1$.
6. თუ a და b რაიმე მუდმივებია და $Y = aX + b$, მაშინ $|r(X,Y)| = 1$.

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$E(X\cdot Y) = E(X)E(Y) + \operatorname{cov}(X,Y),$$
$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\operatorname{cov}(X,Y).$$

ხშირად გარკვეული ვარაუდის (ჰიპოთეზის) საფუძველზე საჭიროა ჩავწეროთ Y შემთხვევითი სიდიდე როგორც X შემთხვევითი სიდიდის ფუნქცია. პრობლემა მდგომარეობს იმაში, რომ, როგორც წესი, ჩვენთვის უცნობია ამ ფუნქციონალური დამოკიდებულების სახე. ცხადია, შეიძლება $Y = f(X)$ ფუნქცია სხვადასხვა სახის იყოს, მაგალითად, წრფივი, კვადრატული. X-სა და Y-ს შორის უცნობი დამოკიდებულების ერთ-ერთ გარკვეული აზრით კარგ მიახლოებად გამოიყენება უმცირეს კვადრატთა მეთოდით აგებული ე. წ. რეგრესიის წრფე, რომელსაც შემდეგი თვისება გააჩნია: ამ წრფემდე Y-ის მნიშვნელობებიდან მანძილების კვადრატების ჯამი უმცირესია ნებისმიერ სხვა წრფემდე იგივე სიდიდეებთან შედარებით. საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ რეგრესიის წრფის განტოლებაში ჩვენ მიერ ზემოთ განხილული რიცხვითი მახასიათებლები მონაწილეობს. რეგრესიის წრფეს აქვს შემდეგი სახე:

$$Y = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D(X)}\,X + E(Y) - \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D(X)}\,E(X), \tag{4.18}$$

ანუ რაც იგივეა

$$Y = r(X,Y)\,\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}\,X + E(Y) - r(X,Y)\,\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}\,E(X). \tag{4.19}$$

ამრიგად, (4.18), (4.19) დამოკიდებულება არის Y-ის, როგორც X-ის წრფივი ფუნქცია და ფაქტობრივად წარმოადგენს Y-ის მნიშვნელობების საპროგნოზო განტოლებას.

§ 5. აღწერითი სტატისტიკის ელემენტები

1. აღწერითი სტატისტიკის მიზანია სტატისტიკური მონაცემების პირველადი დამუშავება. სტატისტიკური მონაცემები არის ჩატარებული ცდების (დაკვირვებების, გაზომვების) შედეგთა ერთობლიობა. მოკლედ შევეხებით იმ შემთხვევას, როცა ჩვენთვის საინტერესო მახასიათებელს გააჩნია სხვადასხვა დონის რაიმე თვისებრივი (არარაოდენობრივი) ნიშანი. განვიხილავთ, აგრეთვე, რაოდენობრივი (რიცხვობრივი) მონაცემების პირველადი დამუშავების და მათი შერჩევითი რიცხვითი მახასიათებლების გამოთვლის საკითხებს.

განვიხილოთ რაიმე მახასიათებელი, რომელსაც აქვს ერთი თვისებრივი ნიშანი A ორი შესაძლო დონით A_1 და A_2. ვიგულისხმოთ, რომ მახასიათებელზე (A ნიშანზე) ჩავატარეთ n რაოდენობის ცდა, რის შედეგადაც მივიღეთ შემდეგი ნედლი მონაცემები, ანუ n მოცულობის შერჩევა:

$$A_1, A_1, A_2, \ldots, A_1, A_2 \tag{5.1}$$

ჩავწეროთ ეს მონაცემები შემდეგი ცხრილის სახით:

ცხრილი 5.1.

ცდა	1	2	3	...	$n-1$	n
დონე	A_1	A_1	A_2	...	A_1	A_2

აღვნიშნოთ

$$n_1 = n(A_1) \quad \text{და} \quad n_2 = n(A_2)$$

სიმბოლოებით (5.1) ერთობლიობაში, შესაბამისად, A_1 და A_2 დონის დაფიქსირებული რაოდენობები, ანუ სიხშირეები. დონეთა სიხშირეების განაწილების ცხრილი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

ცხრილი 5.2.

დონე	A_1	A_2	ჯამი
სიხშირე	n_1	n_2	n

ადვილი მისახვედრია და ცხრილი 5.2-დან ჩანს, რომ

$$n(A_1) + n(A_2) = n. \tag{5.2}$$

გავყოთ ახლა n_1 და n_2 რიცხვები n-ზე და A_1 და A_2 დონის შესაბამისი ფარდობითი სიხშირეები აღვნიშნოთ:

$$h_1 = h(A_1) = \frac{n(A_1)}{n} = \frac{n_1}{n},$$
$$h_2 = h(A_2) = \frac{n(A_2)}{n} = \frac{n_2}{n}$$

სიმბოლოებით. დონეთა ფარდობითი სიხშირეების განაწილების ცხრილი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

ცხრილი 5.3.

დონე	A_1	A_2	ჯამი
ფარდობითი სიხშირე	h_1	h_2	1

ამ შემთხვევაში გვაქვს:

$$h(A_1) + h(A_2) = 1. \tag{5.3}$$

მაგალითი 5.1. ვთქვათ, გამოვიკვლიეთ ათი ადამიანის სისხლი დადებითი (A_1 დონე) და უარყოფითი (A_2 დონე) რეზუს ფაქტორის (მახასიათებელი A ნიშნით) შესახებ. ათი ცდის შედეგები მოცემულია შემდეგი ნედლი მონაცემების სახით

$$A_1, A_1, A_2, A_1, A_2, A_2, A_1, A_2, A_2, A_2,$$

ამრიგად,

$$n = 10, \quad n_1 = n(A_1) = 4, \quad n_2 = n(A_2) = 6.$$

მკითხველს ვთავაზობთ ჩაწეროს A_1 და A_2 დონეთა სიხშირეების და ფარდობითი სიხშირეების განაწილების ცხრილები.

ვთქვათ, ახლა მახასიათებელს აქვს ერთი თვისებრივი ნიშანი A ორზე მეტი შესაძლო დონით: $A_1, \ldots, A_k$, $k > 2$. მკითხველს ვთავაზობთ მოიფიქროს და ჩაწეროს სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა განაწილების ცხრილების რიცხვითი მაგალითები.

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ მახასიათებელს აქვს ორი ნიშანი A და B, თითოეული ორი შესაძლო დონით, შესაბამისად: A_1, A_2 და B_1, B_2. ვთქვათ, მახასიათებელზე ჩავატარეთ n რაოდენობის ცდა. ასეთ შემთხვევაში ნედლი მონაცემების ერთობლიობას ექნება შემდეგი წყვილების სახე

$$(A_1, B_1), \ldots, (A_1, B_2), \ldots, (A_2, B_1), \ldots, (A_2, B_2). \tag{5.4}$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\begin{aligned} n_{11} &= n(A_1, B_1) \text{ – ცდების რაოდენობა, რომელშიც} \\ &\qquad\qquad \text{დაფიქსირდა } A_1 \text{ და } B_1, \\ n_{21} &= n(A_2, B_1) \text{ – დაფიქსირდა } A_2 \text{ და } B_1, \\ n_{12} &= n(A_1, B_2) \text{ – დაფიქსირდა } A_1 \text{ და } B_2, \\ n_{22} &= n(A_2, B_2) \text{ – დაფიქსირდა } A_2 \text{ და } B_2. \end{aligned} \tag{5.5}$$

ამრიგად, ყოველი დონის სიხშირე დაიყო ორ ნაწილად. მაგალითად, A_1 დონის სიხშირე $n_1 = n(A_1)$ დაიყო $n_{11} = n(A_1, B_1)$ და $n_{12} = n(A_1, B_2)$ ნაწილებად. ასეთ შემთხვევაში დონეთა წყვილების სიხშირეთა ცხრილი (ე. წ. დონეთა შეულღების ცხრილი) შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

ცხრილი 5.4.

$B \backslash A$	A_1	A_2	ჯამი
B_1	n_{11}	n_{21}	$n(B_1)$
B_2	n_{12}	n_{22}	$n(B_2)$
ჯამი	$n(A_1)$	$n(A_2)$	n

ცხრილი 5.4-სთვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\begin{aligned} n(A_1) &= n(A_1, B_1) + n(A_1, B_2), \\ n(A_2) &= n(A_2, B_1) + n(A_2, B_2), \\ n(B_1) &= n(A_1, B_1) + n(A_2, B_1), \\ n(B_2) &= n(A_1, B_2) + n(A_2, B_2), \\ n &= n(A_1) + n(A_2), \\ n &= n(B_1) + n(B_2). \end{aligned} \tag{5.6}$$

შემოვიღოთ ახლა შემდეგი აღნიშვნები:

$$h_{ij} = h(A_i, B_j) = \frac{n(A_i, B_j)}{n} = \frac{n_{ij}}{n}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2. \tag{5.7}$$

მკითხველს ვთავაზობთ (5.7) აღნიშვნების გამოყენებით ჩაწეროს დონეთა წყვილების ფარდობითი სიხშირეების შეულღების ცხრილი და (5.6) ტოლობების ანალოგიური ტოლობები.

მაგალითი 5.2. ვთქვათ, ადამიანის მახასიათებელი დაყოფილია ორი ნიშნის მიხედვით: A – სისხლის რეზუსი, B – თვალების ფერი. ვიგულისხმოთ, რომ A ნიშანს აქვს ორი დონე: A_1 – დადებითი რეზუსი, A_2 –

უარყოფითი რეზუსი, ხოლო B ნიშანს აქვს ორი დონე: B_1 – ღია ფერი, B_2 – მუქი ფერი. ვთქვათ, ათი ადამიანის შემოწმების შედეგად მივიღეთ წყვილების შემდეგი სედლი მონაცემები:

$$(A_1, B_2), (A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_1, B_2), (A_1, B_1),$$
$$(A_2, B_2), (A_2, B_2), (A_2, B_1), (A_2, B_1), (A_2, B_1).$$

ამრიგად,

$$n = 10, \quad n_{11} = n(A_1, B_1) = 1, \quad n_{21} = n(A_2, B_1) = 4,$$
$$n_{12} = n(A_1, B_2) = 2, \quad n_{22} = n(A_2, B_2) = 3.$$

მკითხველს ვთავაზობთ ჩაწეროს დონეთა წყვილების სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა შეუღლების ცხრილები.

მაგალითი 5.3. ჩატარდა 818 ადამიანის შემოწმება ქოლერის საწინააღმდეგო აცრებსა და ქოლერით დაავადებას შორის კავშირის ანალიზის მიზნით. შესაბამისი მონაცემები მოტანილია ცხრილ 5.5-ში, სადაც შეუღლების შემდეგი მონაცემებია შეტანილი. ნიშანი A – დაავადება ორი დონით: A_1 – არ დაავადებულა, A_2 – დაავადდა, ნიშანი B – აცრა ორი დონით: B_1 – აიცრა, B_2 – არ აცრილა. გვაქვს

$$n = 818, \quad n_{11} = n(A_1, B_1) = 276, \quad n_{21} = n(A_2, B_1) = 3,$$
$$n_{12} = n(A_1, B_2) = 473, \quad n_{22} = n(A_2, B_2) = 66.$$

ცხრილი 5.5.

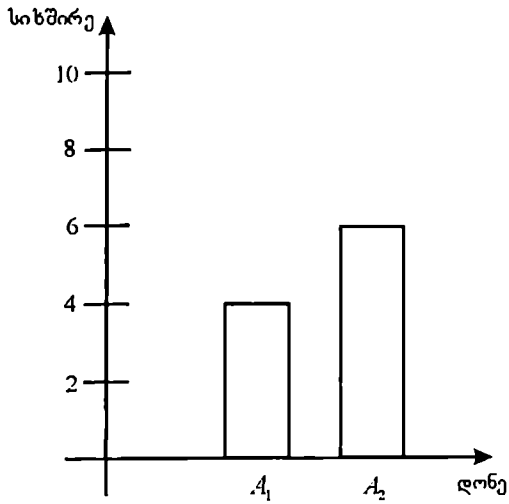
აცრა \ დაავადება	არ დაავადდა	დაავადდა	ჯამი
აიცრა	276	3	279
არ აიცრა	473	66	539
ჯამი	749	69	818

შევნიშნოთ, რომ ეს ცხრილი ნათლად მეტყველებს აცრების სასარგებლოდ.

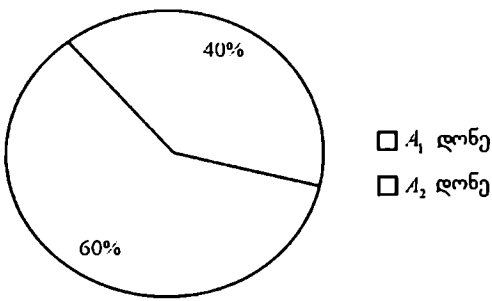
შევნიშნოთ, რომ ცხადია თვისებრივი მახასიათებლის აღწერა მხოლოდ ერთი ან ორი ნიშნით არ ამოიწურება, მაგრამ ჩვენ სხვა შემთხვევებს არ შევეხებით. დაკვირვებული მკითხველი ადვილად მიხვდება ამ შემთხვევაში

კლასიფიცირებისა და ჩაწერის სირთულეებს. შევნიშნავთ აგრეთვე, რომ მონაცემთა პირველადი დამუშავება გულისხმობს მონაცემთა მოპოვების (ორგანიზაციის) და სპეციფიკაციის საკითხებსაც, რაც თავისთავად გარკვეულ დასახარჯებთან და სირთულეებთან არის დაკავშირებული.

დონეთა განაწილების თვალსაჩინო წარმოდგენისათვის ხშირად გამოიყენება სხვადასხვა სახის დიაგრამები, მაგალითად, სიბრტყეზე. ჩვენ მოკლედ შევეხებით ე. წ. მართკუთხედებიან და წრიულ დიაგრამებს.



ნახ. 5.1. დონეთა სიხშირეების განაწილების მართკუთხედებიანი დიაგრამა



ნახ. 5.2. დონეთა სიხშირეების განაწილების წრიული დიაგრამა

მაგალითი 5.1-ის ნედლი მონაცემების შემთხვევაში ჩვენ ავაგეთ დონეთა სიხშირეების მართკუთხედებიანი და წრიული დიაგრამები, რომელიც დამატებით ახსნას არ საჭიროებს (ნახ. 5.1 და ნახ. 5.2).

მკითხველს ვთავაზობთ მაგალითი 5.1-თვის ააგოს დონეთა ფარდობითი სიხშირეების განაწილების მართკუთხედებიანი და წრიული დიაგრამები.

2. განვიხილოთ ახლა ის შემთხვევა, როდესაც ჩვენთვის საინტერესო შესასწავლი პოპულაცია რაიმე რაოდენობრივი (რიცხვითი) მახასიათებლის N ობიექტისაგან შედგება, ე. ი. პოპულაციის მოცულობა N-ის ტოლია. შემთხვევითი სიდიდის ცნება საშუალებას იძლევა პოპულაცია აღვწეროთ რაიმე X შემთხვევითი სიდიდით, რომელსაც გარკვეული განაწილება (განაწილების კანონი) აქვს. პრობლემა იმაში მდგომარეობს, რომ X-ის განაწილება ან ამ განაწილების პარამეტრები (მაგალითად, საშუალო, დისპერსია) ჩვენთვის, როგორც წესი, უცნობია. ამრიგად, საჭიროა პოპულაციის აღმწერ X შემთხვევით სიდიდეზე გარკვეული რაოდენობის დაკვირვების (მაგალითად, n მოცულობის შერჩევის $x_1, \ldots, x_n$) მოპოვება პოპულაციის განაწილების შესახებ დასკვნების გასაკეთებლად.

შემდგომში პოპულაციას და მის აღმწერ X შემთხვევით სიდიდეს ერთმანეთში გავაიგივებთ. ამასთან ერთად $x_1, \ldots, x_n$ შერჩევას შევხედავთ როგორც $X_1, \ldots, X_n$ შემთხვევით სიდიდეებს ცდის ჩატარებამდე და $(X_1, \ldots, X_n)$ შემთხვევითი ვექტორის ერთ-ერთ კონკრეტულ რეალიზაციას ცდის ჩატარების შემდეგ.

ვთქვათ, ახლა გვაქვს n მოცულობის შერჩევა

$$x_1, \ldots, x_n, \tag{5.8}$$

რომელიც დალაგებულია ზრდადობის (არაკლებადობის) მიხედვით. ასეთ შერჩევას ვარიაციული მწკრივი ეწოდება. სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ, რომ შერჩევა ვარიაციული მწკრივია. ვთქვათ, (5.8) ვარიაციულ მწკრივში x_1 ვარიანტის სიხშირეა n_1 და ა. შ. x_k ვარიანტის სიხშირეა n_k, $n_1 + \cdots + n_k = n$. მაშინ ვარიანტების სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა განაწილების ცხრილები შეიძლება შემდეგი სახით ჩავწეროთ

ცხრილი 5.6.

x_i	x_1	$\ldots$	x_k
n_i	n_1	$\ldots$	n_k

ცხრილი 5.7.

x_i	x_1	$\ldots$	x_k
h_i	h_1	$\ldots$	h_k

სადაც

$$h_i = \frac{n_i}{n}, \quad i = 1, \dots, k, \quad h_1 + \dots + h_k = 1.$$

ვარიაციული მწკრივის ყოფაქცევის თვალსაჩინოებისათვის აიგება სხვადასხვა სახის დიაგრამები, მაგალითად, სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა წერტილოვანი, მესერული, ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი და სხვა დიაგრამები, აგრეთვე სხვადასხვა სახის გრაფიკები, მაგალითად, დაგროვილ სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა კუმულატა (ოგივა) და სხვა. ჩვენ ამ საკითხებიდან ზოგიერთს მოკლედ შევეხებით და მოვიტანთ ორი მნიშვნელოვანი გრაფიკის – სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა პოლიგონისა და პისტოგრამის აგების წესს.

ვთქვათ, გვაქვს ცხრილი 5.6-ის და ცხრილი 5.7-ის მონაცემები.

სიხშირეთა პოლიგონი ეწოდება $(x_1, n_1), \dots, (x_k, n_k)$ წერტილების შემაერთებელ ტეხილს, ხოლო ფარდობით სიხშირეთა პოლიგონი ეწოდება $(x_1, h_1), \dots, (x_k, h_k)$ წერტილების შემაერთებელ ტეხილს.

სიხშირეთა პისტოგრამა აიგება შემდეგნაირად. შერჩევის ვარიანტების მნიშვნელობები აილება აბსცისათა ღერძზე, შეირჩევა გარკვეული h სიგრძის შუალედი და შერჩევა დაიყოფა h სიგრძის შუალედებად. შემდეგ ყოველ h-ზე, როგორც ფუძეზე, აიგება $\frac{n_i}{h}$, $i = 1, \dots, k$, სიმაღლის მქონე მართკუთხედები. ამრიგად, სიხშირეთა პისტოგრამა წარმოადგენს მართკუთხედების ერთობლიობას. თითოეული h ფუძით და $\frac{n_i}{h}$, $i = 1, \dots, k$, სიმაღლებით. სიხშირეთა პისტოგრამის მართკუთხედების ფართობების ჯამი დაითვლება ასე:

$$S = \sum_{i=1}^{n_k} \frac{n_i}{h} \cdot h = \sum_{i=1}^{n_k} n_i = n. \tag{5.9}$$

ამრიგად, სიხშირეთა პისტოგრამის მართკუთხედების ფართობთა ჯამი შერჩევის მოცულობის ტოლია.

საკუთხით ანალოგიურად აიგება ფარდობით სიხშირეთა პისტოგრამა, მხოლოდ ამ შემთხვევაში h ფუძიანი მართკუთხედების სიმაღლეებია $\frac{n_i}{nh}$ სიდიდეები. ფარდობით სიხშირეთა პისტოგრამის მართკუთხედების ფართობების ჯამი ერთის ტოლია.

$$S = \sum_{i=1}^{n_k} \frac{n_i}{nh} \cdot h = \sum_{i=1}^{n_k} \frac{n_i}{n} = 1. \tag{5.10}$$

მაგალითი 5.4. ვთქვათ, გამოვიკითხეთ (ან შევამოწმეთ) ათი ადამიანი მათი წონების მნიშვნელობების შესახებ, რის შედეგადაც მივიღეთ შემდეგი ნედლი მონაცემები კილოგრამებში:

$$62;\ 68;\ 62;\ 66;\ 72;\ 62;\ 84;\ 76;\ 72;\ 84. \tag{5.11}$$

დავალაგოთ ეს მონაცემები ვარიაციული მწკრივის სახით, გვექნება

$$62;\ 62;\ 62;\ 66;\ 68;\ 72;\ 72;\ 76;\ 84;\ 84. \tag{5.12}$$

შევნიშნოთ, რომ შემდგომში უკვე განხილული და განსახილველი თეორიული საკითხების საილუსტრაციოდ სწორედ (5.12) ვარიაციულ მწკრივს გამოვიყენებთ. ამ შემთხვევაში გვაქვს:

$$n = 10, \quad k = 6, \quad n_1 = 3, \quad n_2 = 1, \quad n_3 = 1,$$
$$n_4 = 2, \quad n_5 = 1, \quad n_6 = 2.$$

(5.12) ვარიაციული მწკრივისათვის გვაქვს სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა განაწილების შემდეგი ცხრილები:

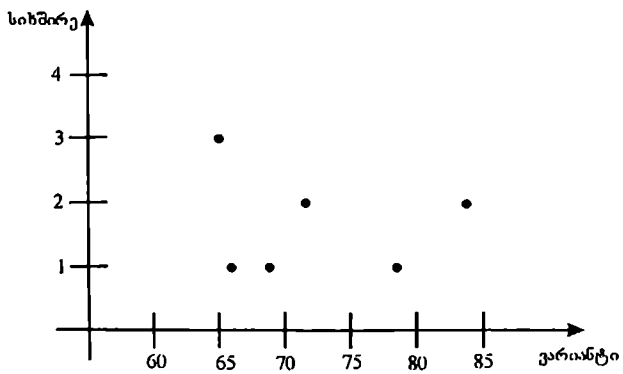
ცხრილი 5.8.

ვარიანტი	62	66	68	72	76	84	ჯამი
სიხშირე	3	1	1	2	1	2	10

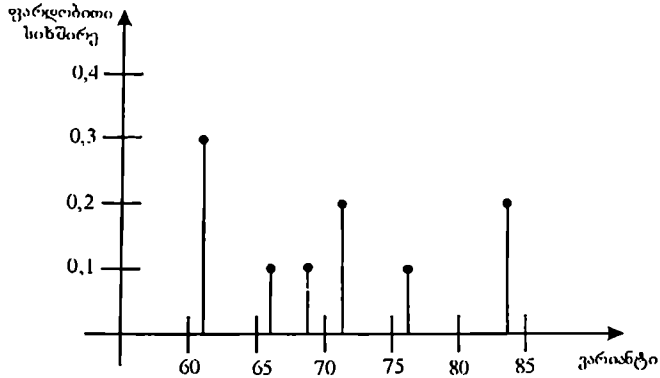
ცხრილი 5.9.

ვარიანტი	62	66	68	72	76	84	ჯამი
ფარდობითი სიხშირე	0,3	0,1	0,1	0,2	0,1	0,2	1

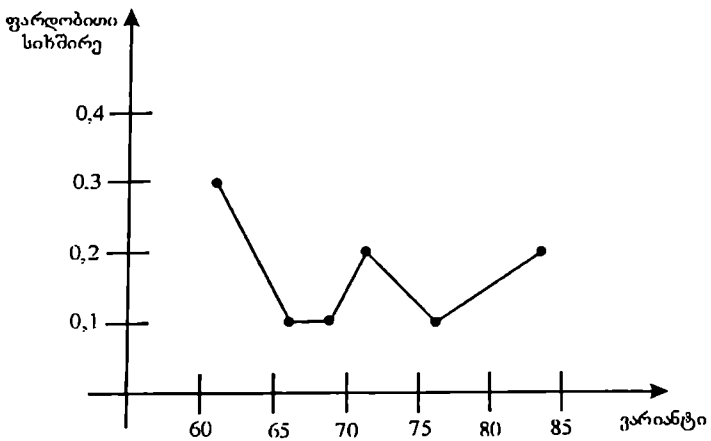
აუგოთ, მაგალითად, სიხშირეთა განაწილების წერტილოვანი დიაგრამა, ფარდობით სიხშირეთა განაწილების მესერული დიაგრამა და ფარდობით სიხშირეთა პოლიგონი. ქვემოთ მოტანილი ნახაზები დამატებით ახსნას არ საჭიროებს.



ნახ. 5.3. სიხშირეთა განაწილების წერტილოვანი დიაგრამა

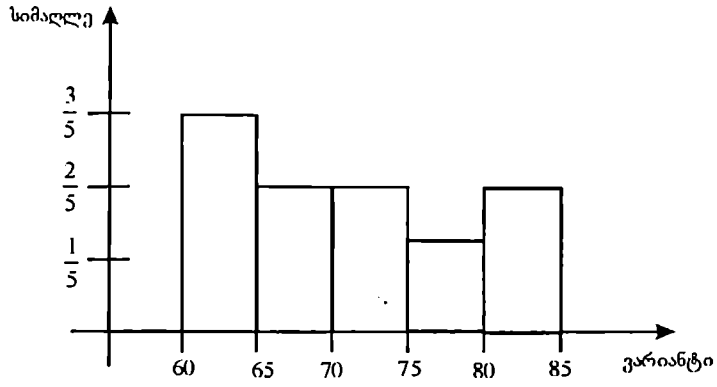


ნახ. 5.4. ფარდობით სიხშირეთა განაწილების მესერული დიაგრამა



ნახ. 5.5. ფარდობით სიხშირეთა პოლიგონი

ავაგოთ ახლა სიხშირეთა ჰისტოგრამა $h = 5$ შუალედის შემთხვევაში



ნახ. 5.6. სიხშირეთა პისტოგრამა

ადვილი მისახვედრია, რომ პისტოგრამის სახე დამოკიდებულია h შუალედის სიგრძის არჩევაზე. ამ საკითხს ჩვენ არ შევეხებით. შევნიშნოთ, რომ მონაცემთა დიდი რაოდენობის შემთხვევაში გამოიყენება მონაცემთა დაჯგუფების ხერხი მათი აღწერისა და ანალიზისათვის, რომელსაც აგრეთვე არ განვიხილავთ.

შეიძლება გაგვიჩნდეს კითხვა. რა საჭიროა შემოტანილი შერჩევითი სიდიდეების განხილვა. ამასთან დაკავშირებით აღვნიშნავთ შემდეგს. როგორც ვიცით, მათემატიკური სტატისტიკის ძირითადი მიზანია შერჩევის ყოფაქცევის საშუალებით პოპულაციის ყოფაქცევის შესწავლა. ვიგულისხმოთ ახლა, რომ (5.8) შერჩევა აღებულია რაიმე X პოპულაციიდან, რომლის განაწილება ჩვენთვის უცნობია. შევნიშნოთ, რომ, მაგალითად, ფარდობით სიხშირეთა განაწილების ცხრილი 5.7-ის საშუალებით აიგება ე. წ. ემპირიული განაწილების ფუნქცია, რომელიც X-ის განაწილების ფუნქციის (თეორიული განაწილების ფუნქციის) შეფასებაა. ვარიაციული მწკრივის ფარდობით სიხშირეთა პისტოგრამის საშუალებით კი შეიძლება შევაფასოთ X-ის განაწილების სიმკვრივე. ამრიგად, შერჩევის საშუალებით შევაფასებთ X-ის უცნობ განაწილებას.

ამ შეფასების სიზუსტისა და თვისებების შესწავლას ალბათობის და სტატისტიკის შედარებით "მძიმე" საკითხების ცოდნა ესაჭიროება და გასაგები მიზეზების გამო მას არ განვიხილავთ. თუმცა ქვემოთ შერჩევითი რიცხვითი მახასიათებლების სახით მოკლედ მაინც შევეხებით X-ის ზოგიერთი რიცხვითი მახასიათებლის შეფასებას.

3. განვიხილოთ რაიმე X პოპულაცია, რომლის უცნობ საშუალოს და დისპერსიას აღვნიშნავთ ასე:

$$E(X) = \mu, \quad D(X) = \sigma^2.$$

ვთქვათ, გვაქვს X-დან ამღებული n მოცულობის ვარიაციული მწკრივი

$$x = x_1, \ldots, x_n \tag{5.13}$$

ანუ გვაქვს X პოპულაციაზე n რაოდენობის დაკვირვების (ცდის) შედეგი.

ქვემოთ განვიხილავთ (5.13) შერჩევის ე. წ. შერჩევით რიცხვით მახასიათებლებს.

შერჩევის ყოფაქცევის ცენტრალური ტენდენციის (საშუალოს) ერთ-ერთი ყველაზე უფრო ცნობილი რიცხვითი საზომია შერჩევითი საშუალო, რომელიც შემდეგი ტოლობით განიმარტება

$$\overline{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{5.14}$$

ამრიგად, შერჩევითი საშუალო – ვარიაციული მწკრივის ვარიანტების საშუალო არითმეტიკულის ტოლია. შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ (5.13) შერჩევაში ყველა ვარიანტი ერთმანეთისაგან განსხვავებულია. იმ შემთხვევაში, როცა შერჩევაში k რაოდენობის ტოლი ვარიანტებიც გვაქვს, რომელსაც x'_i-ით აღვნიშნავთ, $i = 1, \ldots, k$ და ვთქვათ, x'_i-ის სიხშირეა n_1 და ა. შ. x'_k-ის სიხშირეა n_k, $n_1 + \cdots, n_k = n$, მაშინ $\overline{x}$ შეიძლება შემდეგი სახით ჩავწეროთ:

$$\overline{x} = \frac{x'_1 n_1 + \cdots + x'_k n_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x'_i n_i. \tag{5.15}$$

მაგალითი 5.4. განვიხილოთ (5.11) მონაცემები და ვიგულისხმოთ, რომ იგი ამღებულია რაიმე X პოპულაციიდან (ვთქვათ, რომელიმე უმაღლესი სასწავლებლის ვაჟი სტუდენტების წონა). გვექნება:

$$\overline{x} = \frac{62+68+62+66+62+72+84+72+76+84}{10} = 70,8. \tag{5.16}$$

ახლა თუ $\overline{x}$-ს გამოვითვლით (5.15) ტოლობით, იმის გათვალისწინებით, რომ

$$k=6,\ \ x'_1=62,\ \ n_1=3,\ \ x'_2=66,\ \ n_2=1,\ \ x'_3=68,\ \ n_3=1,$$
$$x'_4=72,\ \ n_4=2,\ \ x'_5=76,\ \ n_5=1,\ \ x'_6=84,\ \ n_6=2,$$

გვექნება:

$$\overline{x} = \frac{62\cdot 3 + 66\cdot 1 + 68\cdot 1 + 72\cdot 2 + 76\cdot 1 + 84\cdot 2}{10} = 70,8.$$

შერჩევით საშუალოს გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. თუ $x_1 = \cdots = x_n = c$, $c = \text{const}$, მაშინ $\overline{x} = c$.
2. თუ $cx = cx_1, \ldots, cx_n$, $c = \text{const}$, მაშინ $\overline{cx} = c\overline{x}$.
3. თუ $c+x=(c+x_1), \ldots, (c+x_n)$, $c = \text{const}$, მაშინ $\overline{c+x}=c+\overline{x}$.

4. შერჩევითი საშუალოდან გადახრების ჯამი ნულის ტოლია

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = (x_1 - \overline{x}) + \cdots + (x_n - \overline{x}) = 0.$$

5. ნებისმიერი a რიცხვისთვის

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2.$$

ეს თვისება გვეუბნება, რომ შერჩევითი საშუალოდან შერჩევის ვარიანტების გადახრების კვადრატების ჯამი მინიმალურია.

6. თუ $y = y_1, \ldots, y_n$, სადაც $y_i = ax_i + b$, $i = 1, \ldots, n$, a და b რაიმე რიცხვებია, მაშინ

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = a\overline{x} + b.$$

7. ვთქვათ, გვაქვს ტოლი მოცულობის ორი შერჩევა: $x = x_1, \ldots, x_n$ და $y = y_1, \ldots, y_n$. შევქმნათ ახალი შერჩევა $z = z_1, \ldots, z_n$, სადაც $z_i = x_i \pm y_i$, $i = 1, \ldots, n$. მაშინ გვექნება: $\overline{z} = \overline{x} \pm \overline{y}$.

8. ვთქვათ, გვაქვს სხვადასხვა მოცულობის ორი შერჩევა $x=x_1, \ldots, x_n$ და $y = y_1, \ldots, y_m$. მაშინ $z = x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ გაერთიანებული შერჩევისთვის გვაქვს

$$\overline{z} = \frac{n}{n+m}\,\overline{x} + \frac{m}{n+m}\,\overline{y}.$$

9. შერჩევითი საშუალოს და პოპულაციის მათემატიკური ლოდინები ერთმანეთის ტოლია

$$E(\overline{x}) = E(X) = \mu.$$

ცენტრალური ტენდენციის ერთ-ერთ რიცხვით საზომად განიხილება ვარიაციული მწკრივის მედიანა, რომელიც $\widetilde{x}$-ით აღინიშნება და განიმარტება ტოლობით:

$$\widetilde{x} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, & \text{თუ } n \text{ კენტია} \\ \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}, & \text{თუ } n \text{ ლუწია} \end{cases}. \tag{5.17}$$

მაგალითი 5.5. გამოვთვალოთ მედიანა (5.12) ვარიაციული მწკრივისათვის. რადგანაც $n = 10$ ლუწი რიცხვია, ამიტომ (5.17) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$\widetilde{x} = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{68 + 72}{2} = 70.$$

ცენტრალური ტენდენციის კიდევ ერთი რიცხვითი საზომია მოდა, რომელიც $\widehat{x}$-ით აღინიშნება და განმარტებით ვარიაციული მწკრივის ის ვარიანტია, რომელსაც უდიდესი სიხშირე აქვს. თუ ასეთი ვარიანტი შერჩევაში ერთადერთია, მაშინ ამბობენ, რომ გვაქვს შერჩევის უნიმოდალური განაწილება. შეიძლება შერჩევაში ასეთი ვარიანტი ან არ აღმოჩნდეს, ან რამდენიმე იყოს. ასეთ შემთხვევაში მოდის განმარტება სხვადასხვა წესით ხდება და ამ შემთხვევას არ განვიხილავთ. ამრიგად, თუ შერჩევაში $x_1, \ldots, x_k$ ვარიანტების სიხშირეებია $n_1, \ldots, n_k$ და $n_i = \max(n_1, \ldots, n_k)$, მაშინ $\widehat{x} = x_i$, $i = 1, \ldots, k$.

მაგალითი 5.6. ვიპოვოთ მოდა (5.12) ვარიაციული მწკრივის შემთხვევაში. რადგან 62-ის ტოლი ვარიანტის სიხშირე 3-ის ტოლია და ეს სიხშირე ყველა სხვა ვარიანტის სიხშირეზე მეტია, ამიტომ გვექნება $\widehat{x} = 62$.

შევნიშნოთ, რომ ვარიაციული მწკრივის ვარიანტების მნიშვნელობების ცვლილებაზე შერჩევითი საშუალო, მედიანა და მოდა განსხვავებულად რეაგირებს.

მკითხველს ვთავაზობთ მარტივ რიცხვით მაგალითზე გამოითვალოს $\overline{x}$, $\widetilde{x}$ და $\widehat{x}$ სიდიდეები და შეამოწმოს $\overline{x}$-ის თვისებები.

4. განვიხილოთ ახლა შერჩევის გაფანტულობის (გაბნევის) ზოგიერთი რიცხვითი საზომი. ვთქვათ, გვაქვს (5.13) შერჩევა.

გაფანტულობის ერთ-ერთი მარტივი რიცხვითი საზომია გაბნევის დიაპაზონი, რომელიც $\dot{x}$-ით აღინიშნება და განიმარტება შემდეგნაირად: გაბნევის დიაპაზონი არის შერჩევის უდიდეს და უმცირეს ვარიანტებს შორის სხვაობა. ამრიგად,

$$\dot{x} = \max(x_1, \ldots, x_n) - \min(x_1, \ldots, n_n). \tag{5.18}$$

იმ შემთხვევაში, როცა შერჩევა წარმოადგენს ვარიაციულ მწკრივს გვექნება

$$\dot{x} = x_n - x_1. \tag{5.19}$$

მაგალითი 5.7. (5.12) შერჩევის გაბნევის დიაპაზონი

$$\dot{x} = x_{10} - x_1 = 84 - 62 = 22.$$

შერჩევის მონაცემების შერჩევითი საშუალოდან გაფანტულობის მნიშვნელოვან რიცხვით საზომს შერჩევითი დისპერსია წარმოადგენს და განიმარტება ტოლობით:

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\left[(x_1 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2. \tag{5.20}$$

ამრიგად, შერჩევითი დისპერსია შერჩევითი საშუალოდან გადახრების კვადრატების საშუალო არითმეტიკულის ტოლია.

მაგალითი 5.8. განვიხილოთ (5.12) ვარიაციული მწკრივი. მაშინ გვექნება:

$$
\begin{aligned}
S_x^2 &= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2 = \\
&= \frac{1}{10}\Big[(62-70,8)^2+(62-70,8)^2+(62-70,8)^2+ \\
&\quad +(66-70,8)^2+(68-70,8)^2+(72-70,8)^2+ \\
&\quad +(72-70,8)^2+(76-70,8)^2+ \\
&\quad +(84-70,8)^2+(84-70,8)^2\Big] = \\
&= \frac{1}{10}\Big[(-8,8)^2+(-8,8)^2+(-8,8)^2+(-4,8)^2+ \\
&\quad +(-2,8)^2+(1,2)^2+(1,2)^2+(5,2)^2+(13,2)^2+(13,2)^2\Big] = \\
&= \frac{1}{10}\Big[77,44+77,44+77,44+23,04+7,84+ \\
&\quad +1,44+1,44+27,04+174,24+174,24\Big] = \\
&= \frac{641,6}{10} = 64,16.
\end{aligned}
$$

ხშირად გაფანტულობის საზომად გამოიყენება აგრეთვე შერჩევითი სტანდარტული გადახრა

$$S_x = +\sqrt{S_x^2}, \tag{5.21}$$

რომელიც მაგალითი 5.8-ის პირობებში ტოლია:

$$S_x = +\sqrt{S_x^2} = +\sqrt{64,16} \approx 8,01. \tag{5.22}$$

შერჩევით დისპერსიას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. თუ $x_1 = \cdots = x_n = c$, $c = \text{const}$, მაშინ $S_x^2 = 0$.
2. თუ $cx = cx_1, \ldots, cx_n$, $c = \text{const}$, მაშინ $S_{cx}^2 = c^2 S_x^2$.
3. თუ $y = y_1, \ldots, y_n$, სადაც $y_i = x_i + c$, $i = 1, \ldots, n$, $c = \text{const}$, მაშინ
$$S_y^2 = S_x^2.$$
4. თუ $y = y_1, \ldots, y_n$, სადაც $y_i = ax_i + b$, $i = 1, \ldots, n$, a და b რაიმე რიცხვებია, მაშინ
$$S_y^2 = a^2 S_x^2.$$

5. თუ $x = x_1, \ldots, x_n$ და $x^2 = x_1^2, \ldots, x_n^2$, მაშინ S_x^2, შეიძლება გამოვთვალოთ შემდეგი ტოლობით:

$$S_x^2 = \overline{(x^2)} - (\overline{x})^2. \tag{5.23}$$

6. ვთქვათ, გვაქვს სხვადასხვა მოცულობის ორი შერჩევა $x = x_1, \ldots, x_n$ და $y = y_1, \ldots, y_m$. განვიხილოთ გაერთიანებული შერჩევა $z = x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$. მაშინ გვექნება:

$$S_z^2 = \frac{n}{n+m} S_x^2 + \frac{m}{n+m} S_y^2 + \frac{mn}{(n+m)^2} (\overline{x} - \overline{y})^2.$$

7. შერჩევითი დისპერსიის საშუალო არ ემთხვევა პოპულაციის დისპერსიას

$$E(S_x^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \neq \sigma^2, \tag{5.24}$$

ამიტომ ხშირად გამოიყენება ე. წ. შესწორებული შერჩევითი დისპერსია, რომელიც შემდეგი ტოლობით განიმარტება

$$\overline{S}_x^2 = \frac{n}{n-1} S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2, \tag{5.25}$$

საიდანაც ადვილად ვღებულობთ, რომ $E(\overline{S}_x^2) = \sigma^2$.

იმ შემთხვევაში, როცა შერჩევაში k რაოდენობის ტოლი ვარიანტები გვაქვს, რომელიც x_i'-ით აღინიშნება, $i = 1, \ldots, k$ და ვთქვათ, x_1'-ის სიხშირეა n_1 და ა. შ. x_k'-ის სიხშირეა n_k, $n_1 + \cdots + n_k = n$, მაშინ შერჩევითი დისპერსია შეიძლება შემდეგი სახით ჩავწეროთ:

$$S_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (x_i' - \overline{x})^2 \cdot n_i. \tag{5.26}$$

ხშირად გამოიყენება, აგრეთვე, $\overline{S}_x^2$ სიდიდის გამოსათვლელად შემდეგი ფორმულა

$$\overline{S}_x^2 = \frac{n-1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\overline{X})^2 \right). \tag{5.27}$$

ორი შერჩევის შესაბამის საშუალოებიდან გაფანტულობის შესადარებლად გამოიყენება უგანზომილებო სიდიდე, ე. წ. შერჩევითი ვარიაციის კოეფიციენტი, რომელიც შემდეგი ტოლობით განიმარტება:

$$CV_x = \frac{S_x}{\overline{x}}, \quad \overline{x} \neq 0, \tag{5.28}$$

რომელიც მაგალითი 5.8-ის პირობებში ტოლია:

$$CV_x = \frac{S_x}{\overline{x}} = \frac{8}{70,8} = 0,1. \tag{5.29}$$

მკითხველს ვთავაზობთ გამოითვალოს მაგალითი 5.8-ის პირობებში S_x^2 სიდიდე (5.23), (5.26) ტოლობებით და $\overline{S}_x^2$ სიდიდე (5.25), (5.27) ტოლობებით.

შევნიშნოთ, რომ აღწერით სტატისტიკაში კიდევ შესწავლება და გამოიყენება ცენტრალური ტენდენციისა და გაფანტულობის სხვა რიცხვით საზომებიც, მაგალითად, მოჭრილი საშუალო, აბსოლუტური გადახრა, პროცენტილები, კვარტილები, დეცილები, რანგები, ასიმეტრია, ექსცესი. ჩვენ ამ სიდიდეებს არ განვიხილავთ.

5. ახლა გვინდა მოვიტანოთ კარგად ცნობილი ჩებიშევის უტოლობის ერთი ფორმა, რომელიც შერჩევასთან დაკავშირებული საინტერესო დასკვნების გაკეთების საშუალებას იძლევა.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს შერჩევა $x = x_1, \ldots, x_n$. სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$\frac{\#\{x_i : \ |x_i - \overline{x}| \leq kS_x\}}{n} \geq 1 - \frac{1}{k^2}\,, \tag{5.30}$$

სადაც k რაიმე რიცხვია. უტოლობის მარცხენა მხარის მრიცხველი იკითხება ასე: "რაოდენობა იმ x_i ვარიანტებისა, რომლისთვისაც სრულდება უტოლობა $|x_i - \overline{x}| \leq kS_x$". სხვანაირად (5.30) უტოლობა გამოითქმის ასე: $[\overline{x} - kS_x, \overline{x} + kS_x]$ ინტერვალში მოხვედრილი ვარიანტების p^* ფარდობითი სიხშირე, ანუ ინტერვალში მოხვედრილი ვარიანტების რაოდენობის ფარდობა შერჩევის n მოცულობასთან არანაკლებია $1 - \frac{1}{k^2}$ სიდიდეზე. (5.30) უტოლობა იძლევა p^*-ის ქვედა საზღვარს.

ახლა მოვიტანოთ p^*-ისა და შესაბამისი პროცენტული რაოდენობების ქვედა საზღვრებს, როცა $k = 1; 2, 5; 3; 4$ ცხრილი 5.10-ის სახით.

შევნიშნოთ, რომ თუ ვარიაციული მწკრივის ფარდობით სიხშირეთა პისტოგრამას აქვს ე. წ. ზარისებური ფორმა, ანუ აქვს მიახლოებით

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, S_x} \cdot e^{-\frac{(x-\overline{x})^2}{2S_x^2}} \tag{5.31}$$

ფუნქციის გრაფიკის ფორმა, მაშინ გამოიყენება შემდეგი ემპირიული წესი:

$$[\overline{x} - S_x, \overline{x} + S_x],$$
$$[\overline{x} - 2S_x, \overline{x} + 2S_x],$$
$$[\overline{x} - 3S_x, \overline{x} + 3S_x]$$

ინტერვალები შეიცავს, შესაბამისად, მიახლოებით შერჩევის ვარიანტების 68%-ს, 95%, 99%-ს, ხოლო

$$[\overline{x} - 4S_x, \overline{x} + 4S_x]$$

ინტერვალი შეიცავს პრაქტიკულად ყველა ვარიანტს.

ცხრილი 5.10.

ინტერვალი	ფარდობითი სიხშირე	პროცენტული რაოდენობა
$[\overline{x}-S_x, \overline{x}+S_x]$	$p^* \geq 0$	$p^* \cdot 100\% \geq 0\%$
$[\overline{x}-2S_x, \overline{x}+2S_x]$	$p^* \geq \frac{3}{4}$	$p^* \cdot 100\% \geq 75\%$
$[\overline{x}-2{,}5S_x, \overline{x}+2{,}5S_x]$	$p^* \geq \frac{21}{25}$	$p^* \cdot 100\% \geq 84\%$
$[\overline{x}-3S_x, \overline{x}+3S_x]$	$p^* \geq \frac{8}{9}$	$p^* \cdot 100\% \geq 89{,}9\%$
$[\overline{x}-4S_x, \overline{x}+4S_x]$	$p^* \geq \frac{15}{16}$	$p^* \cdot 100\% \geq 93{,}7\%$

6. განვიხილოთ რაიმე X და Y ორი პოპულაციიდან აღებული n მოცულობის შერჩევა

$$(x, y) = (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n). \tag{5.32}$$

ჩვენი ამოცანაა y ცვლადის ყოფაქცევის (დამოკიდებულების) შესწავლა X ცვლადის მიმართ, რომელიც, როგორც წესი, ექსპერიმენტატორისათვის უცნობია. ზოგადად ამ პრობლემატიკას მათემატიკურ სტატისტიკაში შეისწავლის კორელაციური და რეგრესიული ანალიზი. ჩვენ მოვიტანთ რეგრესიული ანალიზის მხოლოდ წრფივ მოდელს და მოკლედ განვიხილავთ წრფივი რეგრესიული ანალიზის ზოგიერთ საკითხს.

წრფივი რეგრესიის ამოცანა შემდეგნაირად აღიწერება. გვაქვს, n მოცულობის (5.32) შერჩევა და იგულისხმება, რომ

$$y_i = Ax_i + B, \quad i = 1, \ldots, n.$$

საჭიროა უმცირეს კვადრატთა მეთოდით მოვძებნოთ უცნობი A და B კოეფიციენტების შეფასება, ანუ ისეთი a და b სიდიდეები, რომელიც ანიჭებს მინიმუმს შემდეგ გამოსახულებას

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2.$$

სწორედ, ამ პირობის გათვალისწინებით აიგება ე. წ. შერჩევითი რეგრესიის წრფის განტოლება. შევნიშნოთ, რომ სრულყოფილი რეგრესიული

ანალიზის დროს ხდება მოდელის ვარგისიანობის შემოწმება რეგრესიის კოეფიციენტების შესახებ სტატისტიკური დასკვნებისა და ჰიპოთეზათა შემოწმების სახით, პროგნოზირება, ნაშთთა ანალიზი და სხვა, რომელსაც ჩვენ არ განვიხილავთ.

განვმარტოთ ახლა (5.32) შერჩევისათვის შერჩევითი კოვარიაციისა და შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტები. შერჩევითი კოვარიაციის კოეფიციენტი განიმარტება ტოლობით

$$\operatorname{cov}(x,y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})\cdot(y_i-\overline{y}), \tag{5.33}$$

სადაც

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i, \tag{5.34}$$

$$\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i, \tag{5.35}$$

შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი განიმარტება ტოლობით

$$r(x,y)=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{S_x\cdot S_y}, \tag{5.36}$$

სადაც

$$S_x=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}, \tag{5.37}$$

$$S_y=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}. \tag{5.38}$$

ამრიგად, (5.32) შერჩევისთვის $r(x,y)$ გამოითვლება ტოლობით:

$$r(x,y)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}. \tag{5.39}$$

შევნიშნოთ, რომ ხშირად გამოიყენება აგრეთვე შემდეგი ფორმულები:

$$\operatorname{cov}(x,y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\overline{x}\cdot\overline{y}, \tag{5.40}$$

$$r(x,y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\overline{x}}{S_x}\cdot\frac{y_i-\overline{y}}{S_y}. \tag{5.41}$$

ახლა მოვიყვანოთ $\operatorname{cov}(x,y)$-ის და $r(x,y)$-ის ზოგიერთი თვისება:

1. $\operatorname{cov}(x,y) = \operatorname{cov}(y,x)$.
2. $|\operatorname{cov}(x,y)| \le S_x \cdot S_y$.
3. $|r(x,y)| \le 1$, ანუ $-1 \le r(x,y) \le 1$.

   ამასთან, $|r(x,y)| = 1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $y_i = ax_i + b$, $i = 1, \dots, n$, სადაც a და b რაიმე რიცხვებია და $r(x,y) = 1$ თუ $a > 0$, $r(x,y) = -1$, თუ $a < 0$.
4. $r(x,y)$ ზომავს x და y ცვლად სიდიდეებს შორის წრფივი დამოკიდებულების სიძლიერეს.

ამბობენ, რომ რაც უფრო ახლოს არის $r(x,y)$-ის მნიშვნელობა 1-თან, x და y ცვლადებს შორის არსებობს მით უფრო ძლიერი დადებითი კორელაცია (ძლიერი წრფივი კავშირი, დამოკიდებულება) და რომ x და y ცვლადებს შორის მით უფრო ძლიერია უარყოფითი კორელაცია, რაც უფრო ახლოს არის $r(x,y)$-ის მნიშვნელობა (-1)-თან.

მოვიყვანოთ ორ მახასიათებელს შორის კავშირის სიძლიერის სიტყვიერი დახასიათება შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტის საშუალებით.

1. თუ $r(x,y) = -1$, მაშინ გვაქვს სრულყოფილი უარყოფითი კორელაცია.
2. თუ $-1 < r(x,y) < -0,5$, მაშინ გვაქვს ძლიერი უარყოფითი კორელაცია.
3. თუ $r(x,y) = -0,5$, მაშინ გვაქვს საშუალო უარყოფითი კორელაცია.
4. თუ $-0,5 < r(x,y) < 0$, მაშინ გვაქვს სუსტი უარყოფითი კორელაცია.
5. თუ $r(x,y) = 0$, მაშინ კორელაცია არ არის.
6. თუ $0 < r(x,y) < 0,5$, მაშინ გვაქვს სუსტი დადებითი კორელაცია.
7. თუ $r(x,y) = 0,5$, მაშინ გვაქვს ძლიერი დადებითი კორელაცია.
8. თუ $0,5 < r(x,y) < 1$, მაშინ გვაქვს ძლიერი დადებითი კორელაცია.
9. თუ $r(x,y) = 1$, მაშინ გვაქვს სრულყოფილი დადებითი კორელაცია.

ექსპერიმენტატორები წრფივი კორელაციური დამოკიდებულების სიძლიერის მოყვანილი დახასიათების გარდა აგებენ, აგრეთვე, ე. წ. გაბნევის დიაგრამას, რომლის სხვადასხვა ფორმას შეესაბამება კორელაციის კოეფიციენტების სხვადასხვა მნიშვნელობა. ჩვენ ამ საკითხს არ შევეხებით და შევნიშნოთ მხოლოდ, რომ გაბნევის დიაგრამა წარმოადგენს სიბრტყეზე მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში წერტილთა ერთობლიობას კოორდინატებით: (x_i, y_i), $i = 1, \dots, n$.

ახლა მოვიყვანთ შერჩევითი რეგრესიის წრფის განტოლებას, რომლის საშუალებითაც ხდება x ცვლადის მიმართ y ცვლადის ყოფაქცევის შესწავლა. შერჩევითი რეგრესიის წრფის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{S_x^2}\, x + \overline{y} - \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{S_x^2}\, \overline{x}, \tag{5.42}$$

ანუ რაც იგივეა

$$y = r(x,y)\, \frac{S_y}{S_x}\, x + \overline{y} - r(x,y)\, \frac{S_y}{S_x}\, \overline{x}. \tag{5.43}$$

განვმარტოთ ახლა ე. წ. შერჩევითი დეტერმინაციის კოეფიციენტი შემდეგი ტოლობით:

$$R^2(x,y) = r^2(x,y). \tag{5.44}$$

$R^2(x,y)$ საშუალებას გვაძლევს გავაკეთოთ დასკვნა იმის შესახებ, თუ y ცვლადის ყოფაქცევის რამდენი პროცენტის ახსნას იძლევა x ცვლადი.

ბუნებრივია, პრაქტიკაში საჭიროა განვიხილოთ ის შემთხვევაც, როდესაც Y ცვლადი დამოკიდებულია რამდენიმე, ვთქვათ, $X_1, \ldots, X_k$ ცვლადზე. ამ შემთხვევას შეისწავლის მრავლობითი რეგრესია. თუ ისევ წრფივ მოდელს გამოვიყენებთ, მაშინ მრავლობითი წრფივი რეგრესიის ამოცანა შეიძლება შემდეგნაირად აღვწეროთ. გვაქვს n მოცულობის შერჩევა

$$(y_i, x_{1i}, \ldots, x_{ki}), \quad i = 1, \ldots, n, \quad n > k,$$

ანუ შემდეგი შერჩევის ერთობლიობა

$$(y_1, x_{1i}, \ldots, x_{ki}), \ldots, (y_n, x_{1n}, \ldots, x_{kn})$$

და უცნობი წრფივი დამოკიდებულება

$$y_i = B_0 + B_1 \cdot x_{1i} + \cdots + B_k \cdot x_{ki}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

საჭიროა შევარჩიოთ ისეთი $b_0, b_1, \ldots, b_k$ სიდიდეები, რომელიც ანიჭებს მინიმუმს შემდეგ გამოსახულებას

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - b_1 \cdot x_{1i} - \cdots - b_k \cdot x_{ki} - b_0)^2, \quad i = 1, \ldots, n.$$

ასეთ შემთხვევაში სრულ მრავლობით წრფივ რეგრესიულ ანალიზთან ერთად გამოიყენება, აგრეთვე, ე. წ. ყველა შესაძლო რეგრესიათა მეთოდი, რომელსაც აგრეთვე არ განვიხილავთ.

მაგალითი 5.9. ვთქვათ, გვაქვს ათი ადამიანის რიცხვითი მონაცემები მათი x სიმაღლეებისა (სანტიმეტრებში) და y წონების (კილოგრამებში) შესახებ. შემდეგი შერჩევის სახით

$$\begin{aligned}(x,y) = {} & (162;62),\ (166;68),\ (172;62),\ (178;66),\ (164;62),\\ & (174;72),\ (178;84),\ (176;72),\ (168;76),\ (184;84).\end{aligned} \tag{5.45}$$

საჭიროა შევისწავლოთ წონის ცვლილების ყოფაქცევა სიმაღლის ცვლილების ყოფაქცევის საშუალებით (5.45) ინფორმაციის საფუძველზე. ამისათვის უნდა ჩავწეროთ y-ის რეგრესიის წრფივი განტოლება. გამოვიყენოთ, მაგალითად, (5.42) განტოლება.

შევნიშნოთ, რომ წონების მნიშვნელობები აღებული გვაქვს (5.11) მონაცემების მიხედვით და (5.16) ტოლობით გამოთვლილი გვაქვს: $\overline{y} = 70,8$. გამოვთვალოთ ახლა შერჩევითი საშუალო $\overline{x}$, შერჩევითი დისპერსია S_x^2 და შერჩევითი კოვარიაციის კოეფიციენტი $\operatorname{cov}(x,y)$. გვექნება:

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{10}\big(162+166+172+178+164+\\ &\quad +174+178+176+168+182\big) = 172, \qquad (5.46)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_x^2 &= \frac{1}{10}\Big\{(162-172)^2+(166-172)^2+\\ &\quad +(172-172)^2+(178-172)^2+(164-172)^2+\\ &\quad +(174-172)^2+(178-172)^2+(176-172)^2+\\ &\quad +(168-172)^2+(182-172)^2\Big\} =\\ &= \frac{1}{10}\Big\{(-10)^2+(-6)^2+0^2+6^2+(-8)^2+\\ &\quad +2^2+6^2+4^2+(-4)^2+10^2\Big\} =\\ &= \frac{1}{10}\big(100+36+36+64+4+36+16+16+100\big) =\\ &= 40,8, \qquad (5.47)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(x,y) &= \frac{1}{10}\Big\{(162-172)(62-70,8)+(166-172)(68-70,8)+\\ &\quad +(172-172)(62-70,8)+(178-172)(66-70,8)+\\ &\quad +(164-172)(62-70,8)+(174-172)(72-70,8)+\\ &\quad +(178-172)(84-70,8)+(176-172)(72-70,8)+\\ &\quad +(168-172)(76-70,8)+(182-172)(84-70,8)\Big\} =\\ &= \frac{1}{10}\Big\{(-10)(-8,8)+(-6)(-2,8)+0(-8,8)+\\ &\quad +6(-4,8)+(-8)(-8,8)+2\cdot 1,2+6\cdot 13,2+\\ &\quad +4\cdot 1,2+(-4)\cdot 5,2+10\cdot 13,2\Big\} =\\ &= \frac{1}{10}\big(88+16,8-28,8+70,4+2,4+\\ &\quad +79,2+4,8-20,8+132\big) = 34,4. \qquad (5.48)\end{aligned}$$

ამრიგად, გვაქვს:

$$\overline{x} = 172; \quad S_x^2 = 40,8; \quad \overline{y} = 70,8; \quad \operatorname{cov}(x,y) = 34,4.$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები რეგრესიის წრფის (5.42) განტოლებაში. გვექნება:

$$y = \frac{34,4}{40,8}\,x + 70,8 - \frac{34,4}{40,8} \cdot 172 = 0,84x - 73,68. \tag{5.49}$$

ამრიგად, მივიღეთ:

$$y = 0,84x - 73,68. \tag{5.50}$$

გამოვთვალოთ, აგრეთვე, კორელაციის კოეფიციენტი $r(x,y)$ და დეტერმინაციის კოეფიციენტი $R^2(x,y) = r^2(x,y)$. წინასწარ გამოვთვალოთ S_x და S_y სიდიდეები. (5.47)-ის და მაგალითი 5.8-ის თანახმად გვაქვს:

$$S_x \approx 6,5; \quad S_y = 8.$$

მაშინ ვღებულობთ

$$r(x,y) = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{S_x \cdot S_y} = \frac{34,4}{6,5 \cdot 8} \approx 0,66,$$
$$R^2(x,y) \approx 0,44.$$

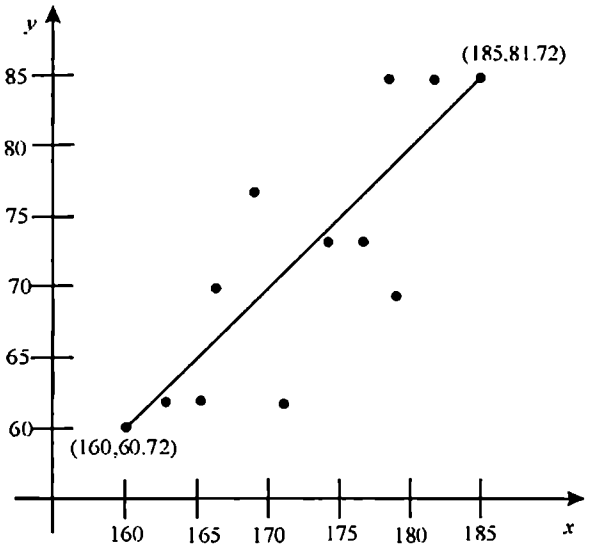
მკითხველს ვთავაზობთ იგივე (5.50) წრფის განტოლება ჩაწეროს (5.43) განტოლების გამოყენებით. ავაგოთ ახლა გაბნევის დიაგრამასთან ერთად, რეგრესიის წრფის მონაკვეთი. ამ მიზნით გამოვთვალოთ y ცვლადის მნიშვნელობები, მაგალითად, x ცვლადის შემდეგი მნიშვნელობებისათვის $x = 160$ და $x = 185$.

$$y(160) = 0,84 \cdot 160 - 73,68 = 134,4 - 73,68 = 60,72,$$
$$y(185) = 0,84 \cdot 185 - 73,68 = 155,4 - 73,68 = 81,72.$$

შევაერთოთ ახლა გაბნევის დიაგრამის სიბრტყეზე მონაკვეთით ორი წერტილი, რომელთა კოორდინატებია

$$(160; 60,72) \text{ და } (185; 81,72).$$

მივიღებთ:



ნახ. 5.7 გაბნევის დიაგრამა და რეგრესიის წრფის მონაკვეთი

შევნიშნოთ, რომ (5.49) წრფის განტოლების საშუალებით შეგვიძლია მიახლოებით გამოვთვალოთ (დამატებითი ცდების ჩაუტარებლად) სხვადასხვა სიმაღლეების შესაბამისი შესაძლო წონები.

მაგალითად, გვაქვს:

$$y = y(170) = 0,84 \cdot 170 - 73,68 = 142,8 - 73,68 = 69,12.$$

მაგალითი 5.10. განვიხილოთ ფერმენტულ რეაქციაში S კონცენტრაციისა და v რეაქციის შებრუნებულ სიდიდეებს შორის კავშირის აღმწერი წრფივი განტოლება:

$$\frac{1}{v} = \frac{K}{V}\frac{1}{S} + \frac{1}{V},$$

სადაც V და K განტოლების უცნობი პარამეტრებია. ვიგულისხმოთ, რომ გვაქვს სამი ცდის (რეაქციის) შემდეგი მონაცემები:

$$\left(\frac{1}{S}, \frac{1}{v}\right) = (5, 20), \left(2, \frac{25}{2}\right), (1, 10).$$

შერჩევითი რეგრესიის წრფის გამოყენებით განვსაზღვროთ V და K. გვაქვს

$$\frac{K}{V} = \frac{\operatorname{cov}\left(\frac{1}{S}, \frac{1}{v}\right)}{S^2_{1/S}}, \quad \frac{1}{V} = \overline{\left(\frac{1}{v}\right)} - \frac{K}{V}\overline{\left(\frac{1}{S}\right)},$$

$$\overline{\left(\frac{1}{S}\right)} = \frac{1}{3}(5+2+1) = \frac{8}{3}, \quad \overline{\left(\frac{1}{v}\right)} = \frac{1}{3}\left(20+\frac{25}{2}+10\right) = \frac{85}{6},$$

$$\operatorname{cov}\left(\frac{1}{S}, \frac{1}{v}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\left(5-\frac{8}{3}\right)\left(20-\frac{85}{6}\right)+\left(2-\frac{8}{3}\right)\left(\frac{25}{2}-\frac{85}{6}\right)+\left(1-\frac{8}{3}\right)\left(10-\frac{85}{6}\right)\right\} =$$

$$= \frac{65}{9},$$

$$S^2_{1/S} = \frac{1}{S}\left\{\left(5-\frac{8}{3}\right)^2+\left(2-\frac{8}{3}\right)^2+\left(1-\frac{8}{3}\right)^2\right\} = \frac{26}{9},$$

$$\frac{K}{V} = \frac{26}{9}\cdot\frac{9}{26} = \frac{5}{2}, \quad \frac{1}{V} = \frac{85}{2}-\frac{5}{2}\cdot\frac{8}{3} = \frac{15}{2},$$

$$V = \frac{2}{15}, \quad K = \frac{5}{2}\cdot\frac{2}{15} = \frac{1}{3},$$

ხოლო შერჩევითი რეგრესიის წრფის განტოლებაა:

$$\frac{1}{v} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{S}+\frac{15}{2}.$$

ბოლოს გვინდა შევნიშნოთ შემდეგი: რეგრესიული და კორელაციური ანალიზის საშუალებით ხდება ორ ცვლად (შემთხვევით) სიდიდეს შორის სტოქასტური კავშირის შესწავლა. ხშირად დამოუკიდებელ x ცვლადს ამხსნელ ცვლადს (პრედიქტორს, რეგრესორს) უწოდებენ, ხოლო დამოკიდებულ y ცვლადს ეწოდება ასახსნელი ცვლადი (ფუნქცია). ჩვენ მოკლედ განვიხილეთ ორ ცვლადს შორის დამოკიდებულების წრფივი რეგრესიული მოდელი (მარტივი წყვილობრივი წრფივი რეგრესია). შევნიშნოთ, აგრეთვე, რომ შეთანხმებული შერჩევითი სიდიდეები, მაგალითად, შერჩევითი საშუალო, დისპერსია, რეგრესიის წრფე, შეიძლება განვიხილოთ (გამოვიყენოთ) როგორც პოპულაციაში მათი შესაბამისი უცნობი თეორიული სიდიდეების შეფასებები.

რა თქმა უნდა, ასახსნელი ცვლადი პრედიქტორზე წრფივად შეიძლება არ იყოს დამოკიდებული ან დამოკიდებული იყოს რამდენიმე პრედიქტორზე როგორც წრფივად, ასევე არაწრფივად. ამ საკითხებს მრავალობითი რეგრესია და კორელაცია შეისწავლის. შევნიშნოთ, რომ ანალოგიურ საკითხებს შეისწავლის, აგრეთვე, ე. წ. დისპერსიული ანალიზი, რომელიც დამუშავებული იყო სპეციალური სახის ბიოლოგიური ექსპერიმენტებისათვის. მას გამოყენება აქვს ეკონომიკაში და სხვა დარგებშიც.

იმ შემთხვევაში, როდესაც პრედიქტორის როლში განიხილება დრო, მაშინ დაკვირვებებით წარმოქმნილ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობას დროითი მწკრივი ეწოდება და საჭიროა მისი ყოფაქცევის შესწავლა. დროითი მწკრივები მნიშვნელოვანია სხვადასხვა დარგების პრაქტიკაში გამოყენებისათვის.

მოვიყვანოთ ახლა მარტივი წყვილობრივი წრფივი მოდელისგან განსხვავებული რამდენიმე საინტერესო რეგრესიული მოდელი:

1. პოლინომური მოდელი $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k$.
2. ექსპონენციალური მოდელი $y = ae^{bx}$.
3. ლოგარითმული მოდელი $y = a + b \lg x$.
4. შექცეული მოდელი $y = a + b\frac{1}{x}$.

ეს მოდელები, გარდა იმისა, რომ თავისთავად საინტერესოა, გარკვეული გარდაქმნების შემდეგ შეიძლება წრფივ მოდელებზე დავიყვანოთ, რის გამოც. მათ ხშირად არსებითად წრფივი მოდელები ეწოდება. მართლაც, შემოვიღოთ შემდეგი გარდაქმნები და ჩავწეროთ 1–4 მოდელების შესაბამისი წრფივი მოდელები. გვაქვს

	გარდაქმნა	წრფივი ფორმა
1.	$x'_i = x^i, \quad i = 1, \ldots, l.$	$y = a_0 + a_1 x'_1 + a_2 x'_2 + \cdots + a_k x'_k.$
2.	$y' = \ln y.$	$y' = \ln a + bx.$
3.	$x' = \lg x.$	$y = a + bx'.$
4.	$x' = \dfrac{1}{x}.$	$y = a + bx.$

ცხადია, შეისწავლება ორი ან მეტი პრედიქტორის შემცველი არსებითად წრფივი მოდელები, რომელსაც ჩვენ არ განვიხილავთ.

§ 6. წერტილოვანი და ინტერვალური შეფასებები ბერნულის სქემაში

1. როგორც ადრე § 4-ში აღვნიშნეთ, პოპულაციას ჩვენ ვაიგივებთ მის ალმწერ X შემთხვევით სიდიდესთან. აქედან გამომდინარე, პოპულაციის განაწილების როლში იგულისხმება X-ის განაწილება, მაგალითად, განაწილების კანონი. გავიხსენოთ აგრეთვე, რომ როცა ცდის ალბათური მოდელი უცნობია, მაშინ შესასწავლი ცდის ალბათური მოდელის შესახებ სტატისტიკური დასკვნებისთვის საჭიროა გარკვეული რაოდენობის ცდების ჩატარება. პრაქტიკაში როგორც წესი, პოპულაციის განაწილება (X -ის განაწილება) შეიცავს უცნობ პარამეტრს, მაგალითად, $E(X)$ მათემატიკურ ლოდინს. ახეთ შემთხვევაში ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ შერჩევის საშუალებით ვიპოვოთ უცნობი $E(X)$-ის მიახლოებითი მნიშვნელობა, რომელსაც $E(X)$-ის წერტილოვანი შეფასება ეწოდება. ამრიგად, განაწილების უცნობი პარამეტრის წერტილოვანი შეფასება არის გარკვეული რიცხვი.

ცხადია, შეფასება გარკვეულ სასურველ პირობებს (მოთხოვნებს) უნდა აკმაყოფილებდეს. ერთ-ერთი ასეთი პირობა, მაგალითად, ის არის, რომ შეფასების საშუალო მნიშვნელობა ტოლი უნდა იყოს შესაფასებელი უცნობი პარამეტრის მნიშვნელობის. ასეთ შეფასებას ჩაუნაცვლებელი შეფასება ეწოდება.

პოპულაციის განაწილების უცნობი პარამეტრის წერტილოვანი შეფასების საკითხებს ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ ბერნულის სქემის შემთხვევაში. ჩამოვაყალიბოთ კიდევ ერთხელ, ზოგადად, შეფასების ამოცანა: შერჩევით მიღებული ინფორმაციის საშუალებით საჭიროა სტატისტიკური დასკვნის გაკეთება პოპულაციის განაწილების უცნობი პარამეტრის რიცხვითი მნიშვნელობის შესახებ. შეფასების როლში განიხილება სხვადასხვა სახის სტატისტიკა, რომელიც წარმოადგენს n მოცულობის მქონე $x = x_1, \ldots, x_n$ შერჩევის ფუნქციას: $T = T(x) = T(x_1, \ldots, x_n)$.

ვთქვათ, $x = x_1, \ldots, x_n$ არის შერჩევა, რომელიც მიღებულია ბერნულის კანონით განაწილებული X შემთხვევით სიდიდეზე n-ჯერ დამოუკიდებელი დაკვირვების შედეგად. იგულისხმება, რომ განაწილების პარამეტრი (წარმატების ალბათობა) p, $0 < p < 1$, უცნობია. ხშირად p-ს პოპულაციის პროპორციას უწოდებენ. საჭიროა ავაგოთ p პარამეტრის წერტილოვანი შეფასება. როგორც ვიცით X-ის განაწილების კანონს აქვს შემდეგი სახე

ცხრილი 6.1.

X	1	0
P_X	p	q

, $p + q = 1$.

განვიხილოთ სტატისტიკა – ერთიანების ფარდობითი სიხშირე n დამოუკიდებელ ცდაში (ანუ წარმატების ფარდობითი სიხშირე):

$$T = T(x) = T(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x} \tag{6.1}$$

და უცნობი p პარამეტრის წერტილოვანი შეფასების როლში ავიღოთ სწორედ $\overline{x}$ შერჩევითი საშუალო. აღვნიშნოთ ეს შეფასება $\widehat{p}_n$ სიმბოლოთი და დავადგინოთ $\widehat{p}_n = \overline{x}$ შეფასების განაწილების კანონი. აღვნიშნოთ

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{6.2}$$

სადაც ყოველი x_i, $i = 1, \ldots, n$, სიდიდე იღებს მხოლოდ ან ერთის ტოლ მნიშვნელობას (წარმატების შემთხვევაში), ან ნულის ტოლ მნიშვნელობას (მარცხის შემთხვევაში).

ადვილი მისახვედრია, რომ S_n შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ბინომური კანონით და სამართლიანია ტოლობები:

$$P(S_n = m) = P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!}\, p^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, \ldots, n. \tag{6.3}$$

ამრიგად, S_n-ის განაწილების კანონს აქვს შემდეგი სახე

ცხრილი 6.2.

S_n	0	...	m	...	n
P_{S_n}	$P_n(0)$	...	$P_n(m)$	...	$P_n(n)$

, (6.4)

ანუ რაც იგივეა

ცხრილი 6.3.

S_n	0	...	m	...	n
P_{S_n}	q^n	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	p^n

.

ამიტომ, $\widehat{p}_n$ შეფასებისთვის, როგორც შემთხვევითი სიდიდისათვის სამართლიანია ტოლობები:

$$P\Big(\widehat{p}_n = \frac{m}{n}\Big) = P_n(m) \tag{6.5}$$

და, ამრიგად, $\widehat{p}_n$-ის განაწილების კანონს აქვს შემდეგი სახე

ცხრილი 6.4.

$\widehat{p}_n$	0	...	$\dfrac{m}{n}$	...	1
$P_{\widehat{p}_n}$	q^n	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	p^n

.

შევნიშნოთ, რომ $\widehat{p}_n$ შეფასება არის უცნობი p პარამეტრის ჩაუნაცვლებელი შეფასება. მართლაც, თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ ყოველი x_i სიდიდე, $i = 1, \ldots, n$, განაწილებულია ცხრილი 6.1-ით მოცემული განაწილების კანონით, მაშინ მათემატიკური ლოდინის განმარტებისა და თვისებების გამოყენებით გვექნება:

$$E(X) = E(x_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$E(\widehat{p}_n) = E\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot p = p. \tag{6.6}$$

ამრიგად, $\widehat{p}_n$ შეფასება (შერჩევითი საშუალო) არის როგორც წარმატების უცნობი p ალბათობის, ასევე ბერნულის კანონით განაწილებული X შემთხვევითი სიდიდის თეორიული მათემატიკური ლოდინის $E(X)$-ის ჩაუნაცვლებელი შეფასება.

გამოვთვალოთ ახლა ბერნულის განაწილების შემთხვევაში X-ის დისპერსია შემდეგი ფორმულით

$$D(X) = E(x^2) - [E(X)]^2.$$

X^2-ის განაწილების კანონია

ცხრილი 6.5.

X^2	1	0
P_{X^2}	p	q

.

ამიტომ გვექნება

$$E(X^2) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p,$$
$$D(X) = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

ცხადია, უცნობი $D(X)$ დისპერსიის წერტილოვან შეფასებად შეიძლება გამოვიყენოთ შერჩევითი დისპერსია

$$S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.$$

მაგრამ ამ შეფასებას (5.24) თვისების თანახმად არ აქვს ჩაუნაცვლებლობის თვისება, რადგანაც

$$E(S_X^2) = \frac{n-1}{n}\,pq \neq pq.$$

დისპერსიის ჩაუნაცვლებელ შეფასებად (5.25)-ის თანახმად გამოდგება შესწორებული შერჩევითი დისპერსია

$$\overline{S}_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = \frac{n}{n-1}\,S_X^2.$$

მართლაც გვაქვს

$$E(\overline{S}_X^2) = E\Big(\frac{n}{n-1}\,S_X^2\Big) =$$
$$= \frac{n}{n-1}\,E(S_X^2) = \frac{n}{n-1}\,\frac{n-1}{n} = D(X) = pq. \qquad (6.7)$$

მაგალითი 6.1. ვთქვათ, ვატარებთ ათ დამოუკიდებელ ცდას (დაკვირვებას) X პოპულაციაზე, რომელიც განაწილებულია ბერნულის კანონით

უცნობი p პარამეტრით. ვიგულისხმოთ, რომ მივიღეთ შემდეგი შერჩევა: $x = 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1$. ვიპოვოთ $E(X)$ და $D(X)$ სიდიდეების ჩაუნაცვლებელი წერტილოვანი შეფასებები.

ა მ ო ხ ს ნ ა . როგორც ვიცით $E(X)$-ის და $D(X)$-ის თეორიული მნიშვნელობებია, შესაბამისად, p და pq. უცნობი p პარამეტრის ჩაუნაცვლებელი წერტილოვანი შეფასება კი არის შერჩევითი საშუალო ანუ რაც იგივეა შერჩევაში წარმატებათა რიცხვის ფარდობითი სიხშირე. ამიტომ გვექნება

$$\overline{x} = \widehat{p} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{1}{10}\,(1+1+0+1+0+0+0+1+1+1) = \frac{3}{5}\,.$$

ამრიგად, $E(X)$-ის (უცნობი p პარამეტრი) ჩაუნაცვლებელი წერტილოვანი შეფასება $\frac{3}{5}$-ის ტოლია. $D(X)$-ის შეფასებისათვის გამოვიყენოთ შესწორებული შერჩევითი დისპერსია, რომელსაც აქვს ჩაუნაცვლებლობის თვისება. გვაქვს

$$\begin{aligned}
\overline{S}_X^2 &= \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2 = \\
&= \frac{1}{9}\left\{\left(1-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(1-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(0-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(1-\frac{3}{5}\right)^2 + \right. \\
&\quad + \left(0-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(0-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(0-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(1-\frac{3}{5}\right)^2 + \\
&\quad \left. + \left(1-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(1-\frac{3}{5}\right)^2\right\} = \\
&= \frac{1}{9}\left(6\cdot\frac{4}{25} + 4\cdot\frac{9}{25}\right) = \frac{1}{9}\cdot\frac{60}{25} = \frac{4}{75}\,.
\end{aligned}$$

ამრიგად, $D(X)$-ის ჩაუნაცვლებელი წერტილოვანი შეფასება $\frac{4}{75}$-ის ტოლია. მკითხველს ვთავაზობთ იგივე სიდიდე გამოთვალოს შემდეგნაირად: გამოთვალოს შერჩევითი დისპერსია $S_X^2 = \overline{(x^2)} - (\overline{x})^2$ ფორმულის გამოყენებით და შემდეგ ისარგებლოს ტოლობით

$$\overline{S}_X^2 = \frac{10}{9}\,S_X^2.$$

2. განვიხილოთ ახლა ბერნულის განაწილების უცნობი p პარამეტრის ინტერვალური შეფასების საკითხი. ინტერვალური შეფასების ცნება შეიძლება შემდეგნაირად ჩამოვაყალიბოთ. ვთქვათ, გვაქვს ცხრილი 6.1-ით მოცემული განაწილებიდან აღებული n მოცულობის შერჩევა $x = (x_1, \ldots, x_n)$. საჭიროა ავაგოთ ისეთი ორი სტატისტიკა $T_1(x)$ და $T_2(x)$, $T_1(x) < T_2(x)$,

რომლისთვისაც მოცემული γ რიცხვისთვის, $0 < \gamma < 1$, სრულდება შემდეგი პირობა

$$P\{T_1(x) < p < T_2(x)\} = \gamma, \tag{6.8}$$

სადაც p არის განაწილების უცნობი პარამეტრი. ასეთ შემთხვევაში $(T_1(x), T_2(x))$ ინტერვალს γ-ნდობის ინტერვალი ეწოდება. ხოლო γ რიცხვს ნდობის ალბათობა (ნდობის დონე) ეწოდება. საჭიროა აღვნიშნოთ, რომ ნდობის ინტერვალის საზღვრები $T_1(x)$ და $T_2(x)$ შემთხვევით სიდიდეებს წარმოადგენს. ამრიგად, განაწილების უცნობი p პარამეტრის ინტერვალური შეფასების აგება მოცემული γ დონისთვის ნიშნავს ორი ისეთი სტატისტიკის აგებას, რომ შესრულდეს (6.8) პირობა ანუ p დაიფაროს შემთხვევითი $(T_1(x), T_2(x))$ ინტერვალით γ-ს ტოლი ალბათობით. ხშირად γ-ს აღნიშნავენ $1-\alpha$, $0 < \alpha < 2$, სიდიდით.

ინტერვალური შეფასების ასაგებად ჩვენ დაგვჭირდება განაწილების კვანტილის განამრტება. უწყვეტი X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების p კვანტილი ეწოდება ისეთ x_p რიცხვს, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა

$$F_X(x_p) = p, \tag{6.9}$$

სადაც $F_X(x)$ არის X-ის განაწილების ფუნქცია. განაწილების $(1-\alpha)$-კვანტილს ზედა α-კრიტიკული წერტილი ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ თუ $X \sim N(0,1)$, მაშინ

$$P(|X| \le x) = 2\Phi(x) - 1, \tag{6.10}$$

სადაც $\Phi(x)$ სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქციაა. მართლაც, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ ტოლობის გამოყენებით გვექნება

$$P(|X| \le x) = P(-x \le X \le x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1.$$

შერნულის განაწილების უცნობი p პარამეტრის ინტერვალური შეფასების ასაგებად გამოიყენება სტატისტიკა

$$T = \frac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}, \tag{6.11}$$

სადაც p განაწილების უცნობი პარამეტრია, $\widehat{p}$ არის p-ს წერტილოვანი შეფასება, n შერჩევის მოცულობაა, ხოლო $q = 1 - p$. ცნობილია, რომ თუ ცდათა რიცხვი n საკმარისად დიდია, მაშინ T სტატისტიკა მიახლოებით $N(0,1)$ კანონით არის განაწილებული. ამიტომ (6.10)-ის თანახმად p პარამეტრისათვის გვექნება შემდეგი სახის ინტერვალური შეფასება

$$P\left(\frac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \le x\right) = P\left(\widehat{p} - x\sqrt{\frac{pq}{n}} \le p \le \widehat{p} + x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = 2\Phi(x) - 1. \tag{6.12}$$

დავაფიქსიროთ ახლა მიახლებით ერთის ტოლი γ რიცხვი. შევნიშნავთ, რომ გამოიყენება, მაგალითად, γ-ს შემდეგი რიცხვითი მნიშვნელობები: $\gamma =$

$0,95$, $\gamma = 0,99$. ამრიგად, γ-ნდობის ინტერვალისთვის გვაქვს შემდეგი ტოლობა $2\Phi(x) - 1 = \gamma$. საჭიროა ვიპოვოთ სტანდარტული ნორმალური განაწილების $\frac{1+\gamma}{2}$-კვანტილი ანუ ისეთი $x_{\frac{1+\gamma}{2}}$ რიცხვი, რომელიც არის შემდეგი განტოლების ამონახსნი:

$$\Phi(x_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}. \tag{6.13}$$

ამ განტოლების ფესვის ანუ $x_{\frac{1+\gamma}{2}}$ რიცხვის პოვნა ხდება $\Phi(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობების ცხრილის გამოყენებით.

შევნიშნოთ, რომ $\gamma = 1 - \alpha$ ტოლობის გათვალისწინებით $\frac{1+\gamma}{2}$-კვანტილი იგივეა, რაც $(1 - \frac{\alpha}{2})$-კვანტილი ანუ ზედა $\frac{\alpha}{2}$-კრიტიკული წერტილი. შევნიშნავთ აგრეთვე, რომ სტანდარტული ნორმალური განაწილებისთვის ზედა α-კრიტიკულ წერტილებს z_α სიმბოლოთი აღნიშნავენ, რომლის მნიშვნელობები სხვადასხვა α-თვის მოცემულია სათანადო ცხრილში.

შევცვალოთ ახლა (6.12) ტოლობაში ინტერვალის საზღვრებში კვადრატული ფესვის ქვეშ p და q სიდიდეები შესაბამისი წერტილოვანი შეფასებებით: $\widehat{p}$ და $\widehat{q} = 1 - \widehat{p}$. მაშინ ბერნულის განაწილების უცნობი p პარამეტრისათვის $(1 - \alpha)$-ნდობის ინტერვალური შეფასება ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$P\Big(\widehat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{p}\widehat{q}}{n}} \le p \le \widehat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{p}\widehat{q}}{n}}\Big) = 1 - \alpha, \tag{6.14}$$

სადაც $z_{\frac{\alpha}{2}}$ არის $N(0,1)$ განაწილების ზედა $\frac{\alpha}{2}$-კრიტიკული წერტილი. შევნიშნავთ, რომ პრაქტიკაში (6.14) ტოლობა გამოიყენება იმ შემთხვევაში, როცა $n\widehat{p} \ge 5$ და $n\widehat{q} \ge 5$. ამრიგად, p პარამეტრისთვის $(1 - \alpha)$-ნდობის ინტერვალია.

$$(T_1, T_2) = \Big(\widehat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{p}\widehat{q}}{n}}, \widehat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{p}\widehat{q}}{n}}\Big), \tag{6.15}$$

რომელსაც კიდევ შემდეგი სახით წერენ

$$\widehat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{p}\widehat{q}}{n}} = \widehat{p} \pm \varepsilon \tag{6.16}$$

და ამბობენ, რომ ინტერვალური შეფასების სიზუსტეა $\varepsilon = z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{p}\widehat{q}}{n}}$.

მაგალითი 6.2. მზა პროდუქციის პოპულაციიდან შერჩეულ 100 ნაკეთობაში 10 ნაკეთობა აღმოჩნდა უხარისხო. იპოვეთ $\gamma = 0,9$ მნიშვნელობის დონის ნდობის ინტერვალი პოპულაციაში უხარისხო ნაკეთობათა p პროპორციისთვის.

ამოხსნა. გვაქვს $n = 100$, $\widehat{p} = 0,1$, $\widehat{q} = 0,9$, $\alpha = 1 - \gamma = 0,1$, $z_{\alpha/2} = z_{0,05} = 1,64$. ამიტომ (6.15)-ის თანახმად გვექნება შემდეგი

ინტერვალი

$$\left(0,1-1,64\cdot\sqrt{\frac{0,1\cdot 0,9}{100}},0,1+1,64\cdot\sqrt{\frac{0,1\cdot 0,9}{100}}\right)=(0,05,0,15).$$

ამრიგად, გვექნება

$$P(0,05\le p\le 0,15)=0,9,$$

ხოლო შეფასების სიზუსტე $\varepsilon=0,05$.

§ 7. ჰიპოთეზების შემოწმება ბერნულის სქემაში

1. ვთქვათ, X შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ბერნულის კანონით

ცხრილი 7.1.

X	1	0
P_X	p	q

,

სადაც $p+q=1$. ამრიგად, X-ის განაწილების სახე ცნობილია, მაგრამ იგულისხმება რომ უცნობია განაწილების p პარამეტრი. უცნობი p პარამეტრის შესახებ რაიმე ვარაუდს (მოსაზრებას) სტატისტიკური ჰიპოთეზა ან უბრალოდ ჰიპოთეზა ეწოდება. ჰიპოთეზის შემოწმების ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში. X შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვებების შედეგად მიღებული შერჩევის საფუძველზე უნდა ჩამოვაყალიბოთ ისეთი წესი ანუ სტატისტიკური კრიტერიუმი, რომლის საშუალებითაც ჩვენ შევამოწმებთ p პარამეტრის შესახებ ჰიპოთეზის სამართლიანობას. ჰიპოთეზებს H სიმბოლოთი (ასოთი) აღნიშნავენ. განიხილება ნულოვანი (ძირითადი) ჰიპოთეზა $H:\ p=p_0$ და რაიმე ალტერნატიული (საწინააღმდეგო) ჰიპოთეზა, მაგალითად, $H_1:\ p<p_0$, სადაც p_0 რაიმე ცნობილი რიცხვია, $0<p_0<1$.

ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობის შემოწმების წესი ყალიბდება შემდეგნაირად. შეიჩევა α რიცხვი, $0<\alpha<1$, რომელიც წარმოადგენს იმის ალბათობას, რომ ჩვენ უარვყოფთ (უკუვაგდებთ) სამართლიან H_0 ჰიპოთეზას. ამ ალბათობას ჰიპოთეზის შემოწმების ამოცანაში კრიტერიუმის მნიშვნელოვნობის დონე ეწოდება. ხშირად მნიშვნელოვნობის დონედ აიღება, მაგალითად, $\alpha=0,01$ ან $\alpha=0,05$ სიდიდეები. შევნიშნოთ, რომ, მაგალითად, $\alpha=0,05$ ნიშნავს იმას, რომ საშუალოდ ასიდან ხუთ შემთხვევაში ხდება სამართლიანი H_0 ჰიპოთეზის უარყოფა.

X პოპულაციიდან აღებული $x = x_1, \ldots, x_n$ შერჩევის საშუალებით უნდა ავაგოთ გარკვეული სტატისტიკა $T = T(x)$, რომლის შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლე U სიმბოლოთი აღინიშნება. შემდეგ U სიმრავლიდან მოცემული α მნიშვნელოვნობის დონის გათვალისწინებით გამოიყოფა ე. წ. კრიტიკული არე $U_1 = U_{1,\alpha}$, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$P(T(x) \in U_{1,\alpha}/H_0) \leq \alpha, \tag{7.1}$$

რაც ნიშნავს შემდეგს: $(T(x) \in U_{1,\alpha})$ შემთხვევითი ხდომილობის პირობითი ალბათობა იმ პირობით, რომ H_0 ჰიპოთეზა არის სამართლიანი, არ აღემატება მოცემულ α მნიშვნელობის დონეს.

ახლა ჩვენ შეგვიძლია შემოწმების ამოცანის გადაწყვეტის ეტაპები შემდეგნაირად განვსაზღვროთ:

I. უცნობი p პარამეტრის შესახებ H_0 ნულოვანი და H_1 ალტერნატიული ჰიპოთეზების ჩამოყალიბება;

II. ჰიპოთეზის შემოწმების კრიტერიუმისთვის სათანადო სტატისტიკის შერჩევა;

III. კრიტერიუმის მნიშვნელოვნობის α დონის განსაზღვრა და U_1 კრიტიკული არის დადგენა;

IV. $x = x_1, \ldots, x_n$ შერჩევის გამოყენებით კრიტერიუმის სტატისტიკის $T = T(x)$-ის რიცხვითი მნიშვნელობის გამოთვლა;

V. ნულოვანი H_0 ჰიპოთეზის სამართლიანობის ან არასამართლიანობის შესახებ გადაწყვეტილების მიღება.

ჰიპოთეზის შემოწმების დროს ჩვენ შეიძლება დავუშვათ შემდეგი ორი სახის შეცდომა: 1. უარვყოთ სამართლიანი H_0 ჰიპოთეზა, რომელსაც პირველი გვარის შეცდომა ეწოდება და 2. მივიღოთ არასამართლიანი H_0 ჰიპოთეზა, რომელსაც მეორე გვარის შეცდომა ეწოდება. ცხადია, პირველი გვარის შეცდომის ალბათობა α მნიშვნელოვნობის დონის ტოლია. მეორე გვარის შეცდომის ალბათობა β ასოთი აღინიშნება. ამრიგად, გვაქვს შემდეგი ტოლობები:

$$\alpha = P(H_1/H_0) = P\big(T(x) \in U_1/H_0\big), \tag{7.2}$$

$$\beta = P(H_0/H_1) = P\big(T(x) \overline{\in} U_1/H_1\big). \tag{7.3}$$

შევნიშნავთ, რომ $1 - \beta$ სიდიდეს კრიტერიუმის სიმძლავრე ეწოდება.

2. ვიგულისხმოთ ახლა, რომ $x = x_1, \ldots, x_n$ არის n მოცულობის შერჩევა, რომელიც აღებულია ბერნულის კანონით განაწილებული X გენერალური ერთობლიობიდან (პოპულაციიდან) წარმატების უცნობი p პარამეტრით. განვიხილოთ ნულოვანი და შემდეგი ალტერნატიული ჰიპოთეზები:

1) $H_0 : p = p_0$, $H_1 : p > p_0$;

2) $H_0 : p = p_0$, $H_1 : p < p_0$;

3) $H_0 : p = p_0$, $H_1 : p \neq p_0$.

შევნიშნოთ, რომ 1), 2) და 3) შემთხვევებში H_1 ჰიპოთეზებს, შესაბამისად, მარჯვენა ცალმხრივი და ორმხრივი ალტერნატივები უწოდება. კრიტერიუმის სტატისტიკად გამოიყენება შემდეგი გამოსახულება

$$T(x) = z = \frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}, \tag{7.4}$$

სადაც

$$\widehat{p} = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{7.5}$$

არის წარმატების ფარდობითი სიხშირე ანუ წარმოადგენს უცნობი p პარამეტრის ჩაუნაცვლებელ წერტილოვან შეფასებას. ცხადია, იგულისხმება, რომ (7.4) ტოლობაში p_0 რიცხვი ცნობილია.

ზემოთ განხილულ სამ შემთხვევაში კრიტიკული არეები მოცემულ α მნიშვნელოვნობის დონისთვის განისაზღვრება შემდეგნაირად: 1) $U_1 = z > z_\alpha$, 2) $z < -z_\alpha$, 2) $z < -z_{\alpha/2}$ ან $z > z_{\alpha/2}$, სადაც z_α და $z_{\alpha/2}$ არის, შესაბამისად, $N(0,1)$ განაწილების ზედა α-კრიტიკული და ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილები. იგულისხმება, რომ შერჩევის მოცულობა საკმარისად დიდია.

ამრიგად, ბერნულის სქემაში წარმატების უცნობი p ალბათობის (განაწილების უცნობი პარამეტრის) შესახებ განხილული ჰიპოთეზების შემოწმების ამოცანის გადაწყვეტის ალგორითმი შეიძლება შემდეგი სახით ჩავწეროთ:

მნიშვნელოვნობის დონე – α,

კრიტერიუმის სტატისტიკა – $z = \frac{\widehat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$,

ჰიპოთეზები:		კრიტიკული (H_0-ის უარყოფის) არეები:
1)	$H_0 : p = p_0,\ H_1 : p > p_0,$	$U_1 = (z > z_\alpha),$
2)	$H_0 : p = p_0,\ H_1 : p < p_0,$	$U_1 = (z < -z_\alpha),$
3)	$H_0 : p = p_0,\ H_1 : p \neq p_0,$	$U_1 = (z < -z_{\alpha/2})$ ან $U_1 = (z > z_{\alpha/2}).$

მაგალითი 7.1. მზა პროდუქციის პოპულაციიდან შერჩეულ 400 ნაკეთობაში 40 ნაკეთობა აღმოჩნდა უხარისხო. $\gamma = 0,95$ მნიშვნელოვნობის დონით პოპულაციაში უხარისხო ნაკეთობათა p პროპორციისთვის გადაწყვიტეთ ნულოვანი $H_0 : p \leq p_0 = 0,05$ ჰიპოთეზის შემოწმების ამოცანა $H_1 : p > p_0 = 0,05$ ალტერნატივის შემთხვევაში.

ამოხსნა. გვაქვს შემდეგი მონაცემები: $n = 400$, $\alpha = 0,05$, $p_0 = 0,05$, $\widehat{p} = 0,1$, $z_\alpha = z_{0,05} = 1,64$, ხოლო კრიტიკული არეა $U_1 = (z > z_\alpha)$. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის z სტატისტიკის რიცხვითი მნიშვნელობა.

(7.4) თანახმად გვექნება

$$z = \frac{\frac{1}{10} - \frac{1}{20}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}}{400}}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{10\cdot 20}} = 3,33.$$

ამრიგად, გვაქვს: $z = 3,33$, $z_\alpha = 1,64$, კრიტიკული არეა $U_1 = [1,64, +\infty)$, $z > z_\alpha$ ანუ $z \in U_1$ და ამიტომ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ.

3. ჰიპოთეზების შემოწმების ამოცანის გადაწყვეტაში გამოიყენება აგრეთვე ე. წ. მიმდევრობითი მეთოდი, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს. სტატისტიკური დასკვნის (გადაწყვეტილების) მისაღებად ვგულისხმობდით, რომ ჩვენ წინასწარ გვაქვს n მოცულობის შერჩევა. მიმდევრობითი მეთოდის გამოყენების დროს იგულისხმება, რომ ჩვენ ყოველი დაკვირვების შემდეგ ვაკეთებთ გარკვეულ შეალედურ სტატისტიკურ დასკვნას მანამდე, ვიდრე არ მივიღებთ საბოლოო გადაწყვეტილებას. შევნიშნავთ, რომ სტატისტიკური დასკვნის მისაღებად ასეთი მიდგომის შემთხვევაში შერჩევის მოცულობა n წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს. სწორედ ეს ფაქტი განასხვავებს მიმდევრობით სტატისტიკურ მეთოდებს სხვა სტატისტიკური მეთოდებისგან. შევნიშნავთ აგრეთვე, რომ მიმდევრობით მეთოდებს მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია სტატისტიკურ კვლევებში.

მიმდევრობითი მეთოდის გამოყენებას ჩვენ განვიხილავთ ბერნულის სქემაში ჰიპოთეზის შემოწმების ერთი კონკრეტულ ამოცანის შემთხვევაში. განვიხილოთ მზა პროდუქციის მიღების ან დაწუნების (არმიღების) კარგად ცნობილი ამოცანა, რომელსაც პროდუქციის ყოველი ნაკეთობა მიეკუთვნება ან ხარისხიან ან უხარისხო კატეგორიას. ვთქვათ, X არის ბერნულის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე უცნობი p პარამეტრით. ყოველი i-ურ ცდას (i-ური ნაკეთობის შემოწმებას) შევუსაბამოთ $x_0 = 1$ შედეგი, თუ ნაკეთობა აღმოჩნდა უხარისხო და $x_0 = 0$, თუ ნაკეთობა აღმოჩნდა ხარისხიანი.

ამრიგად, p პარამეტრი განიხილება როგორც მზა პროდუქციაში უხარისხო ნაკეთობების ფარდობითი წილი, რომელიც უცნობია.

ყოველ კონკრეტულ ამოცანაში ხდება p_0 და p_1 ორი სიდიდის შერჩევა, $p_0 < p_1$, $0 < p_0 < 1$, $0 < p_1 < 1$ და გადაწყვეტილება მზა პროდუქციის მოღების ან დაწუნების შესახებ ხდება შემდეგნაირად. თუ $p \le p_0$, მაშინ პროდუქცია მიიღება, თუ $p \ge p_1$, მაშინ პროდუქცია დაიწუნება, თუ $p_0 < p < p_1$, მაშინ ორივე გადაწყვეტილებას (მიღებას ან დაწუნებას) ერთნაირი მნიშვნელობა ენიჭება. იმის შემდეგ, რაც p_0 და p_1 რიცხვები შეირჩევა, ჩვენ უნდა გადავწყვიტოთ $H_0 : p_0$ ჰიპოთეზის შემოწმების ამოცანა $H_1 : p = p_1$ ალტერნატივის დროს. აღვნიშნოთ $x = x_1, \dots, x_m$ შერჩევის შემთხვევაში ანუ პირველ m შემოწმებულ ნაკეთობათა რაოდენობაში

უხარისხო ნაკეთობათა რიცხვი d_m სიმბოლოთი. შემოვიღოთ აგრეთვე შემდეგი აღნიშვნები:

$$a_m = \frac{\ln \frac{\beta}{1-\alpha} + m \ln \frac{1-p_0}{1-p_1}}{\ln \frac{p_1}{p_0} + \ln \frac{1-p_1}{1-p_0}}, \tag{7.6}$$

$$r_m = \frac{\ln \frac{1-\beta}{\alpha} + m \ln \frac{1-p_0}{1-p_1}}{\ln \frac{p_1}{p_0} + \ln \frac{1-p_1}{1-p_0}}, \tag{7.7}$$

სადაც p_0 და p_1 ცნობილი რიცხვებია, ხოლო α და β, შესაბამისად, პირველი და მეორე გვარის შეცდომის ალბათობებია.

მზა პროდუქციის შემოწმების ანუ $H_0 : p = p_0$ და $H_1 : p = p_1$ პიპოთეზების შემოწმების ამოცანის გადაწყვეტა ხდება შემდეგი მიმდევრობითი წესის გამოყენებით: 1. ყოველი $m = 1, 2, \ldots$ დაკვირვების რიცხვისთვის დაკვირვებები გრძელდება მანამდე, ვიდრე სრულდება უტოლობები $a_m < d_m < r_m$, 2. როგორც კი შესრულდება უტოლობა $d_m \leq a_m$, მაშინვე წყდება დაკვირვება და მიიღება H_0 პიპოთეზა ანუ ხდება პროდუქციის მიღება, 3. როგორც კი შესრულდება $d_m \geq r_m$ უტოლობა, მაშინვე წყდება დაკვირვება და მიიღება H_1 პიპოთეზა ანუ ხდება პროდუქციის დაწუნება.

მაგალითი 7.2. მზა პროდუქციის შემოწმების ამოცანაში ვთქვათ, $p_0 = 0,1$, $p_1 = 0,3$, $\alpha = 0,02$ და $\beta = 0,03$. გადაწყვიტეთ $H_0 : p = p_0$ და $H_1 : p = p_1$ პიპოთეზების შემოწმების ამოცანა მიმდევრობითი მეთოდის გამოყენებით.

ა მ ო ხ ს ნ ა . საჭიროა ჩავატაროთ მზა პროდუქციის ნაკეთობების მიმდევრობითი შემოწმება ანუ უნდა შემოწმდეს ერთი შერჩეული ნაკეთობა, შემდეგ მეორე და ა. შ. შემოწმების გარკვეულ რაოდენობამდე, რომელიც წინასწარ ჩვენთვის უცნობია. შემოწმების ყოველ ნაბიჯზე (ცდაზე) ხდება a_m, r_m და d_m, $m = 1, 2, \ldots$, სიდიდეების გამოთვლა და მიმდევრობითი წესის მიხედვით სათანადო გადაწყვეტილების მიღება. აღმოჩნდა, რომ $a_m < d_m < r_m$, $m = 1, \ldots, 21$, ხოლო რიგით ოცდამეორე ცდაში $a_{22} = 1$ $r_{22} = 7$, და $d_{22} = 7$. ამრიგად, გვაქვს ტოლობა $d_{22} = r_{22}$ და მიმდევრობითი შემოწმების წესის თანახმად მიიღება H_1 პიპოთეზა ანუ ხდება პროდუქციის დაწუნება.

ბოლოს გვინდა შევნიშნოთ შემდეგი. (7.6) და (7.7) ფორმულებში შემავალი p_0, p_1, α, β სიდიდეები ჩვენთვის წინასწარ არის ცნობილი ცდების ჩატარებამდე, ხოლო a_m და r_m ცვლადები m-ის მიმართ წრფეებს წარმოადგენს. ამიტომ პიპოთეზათა მიმდევრობითი შემოწმების წესისთვის ხშირად გამოიყენება აგრეთვე გრაფიკულ მეთოდი.

ცხრილები

ნაკლები წლის დღეების ნომრები

დღე	იან.	თებ.	მარტი	აპრ.	მაისი	ივნ.	ივლ.	აგვ.	სექ.	ოქტ.	ნოემ.	დეკ.
1	1	32	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
2	2	33	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
3	3	34	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
4	4	35	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
5	5	36	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
6	6	37	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
7	7	38	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
8	8	39	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
9	9	40	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
10	10	41	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
11	11	42	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
12	12	43	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
13	13	44	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
14	14	45	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
15	15	46	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
16	16	47	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
17	17	48	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
18	18	49	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
19	19	50	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
20	20	51	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
21	21	52	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
22	22	53	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
23	23	54	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
24	24	55	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
25	25	56	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
26	26	57	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
27	27	58	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
28	28	59	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
29	29	60	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
30	30	--	90	121	151	182	212	243	274	304	335	365
31	31	–	91	--	152	–	213	244	–	305	--	366

არანაკლები წლის დღეების ნომრები

დღე	იან.	თებ.	მარტი	აპრ.	მაისი	ივნ.	ივლ.	აგვ.	სექ.	ოქტ.	ნოემ.	დეკ.
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29	..	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30	..	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31	–	90	–	151	–	212	243	–	304	.	365

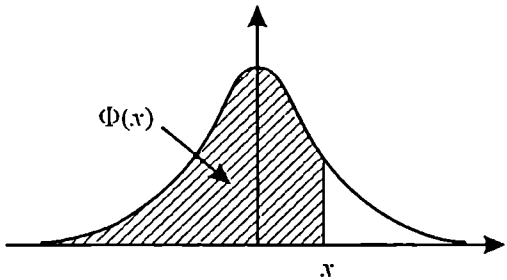
30/360 სქემის მიხედვით თარიღებს შორის დღეების რაოდენობის გამოთვლის მაგალითები

საწყისი თარიღი	ბოლო თარიღი	დღეების ზუსტი რაოდ.	30/360 ISDA	30/360 PSA	30E/360
1 იანვარი, 1986	1 თებერვალი, 1986	31	30	30	30
1 იანვარი, 1986	1 თებერვალი, 1987	365	360	360	360
15 იანვარი, 1986	1 თებერვალი, 1986	17	16	16	16
1 თებერვალი, 1986	1 მარტი, 1986	28	30	30	30
15 თებერვალი, 1986	1 აპრილი, 1986	45	46	46	46
15 მარტი, 1986	15 ივნისი, 1986	92	90	90	90
31 მარტი, 1986	1 აპრილი, 1986	1	1	1	1
31 მარტი, 1986	30 აპრილი, 1986	30	30	30	30
15 ივლისი, 1986	15 სექტემბერი, 1986	62	60	60	60
21 აგვისტო, 1986	11 აპრილი, 1987	233	230	230	230
1 ნოემბერი, 1986	1 მარტი, 1987	120	120	120	120
15 დეკემბერი, 1986	30 დეკემბერი, 1986	15	15	15	15
15 დეკემბერი, 1986	31 დეკემბერი, 1986	16	16	16	16
31 დეკემბერი, 1986	1 თებერვალი, 1987	32	31	31	31
1 თებერვალი, 1988	1 მარტი, 1988	29	30	30	30
30 აგვისტო, 1991	31 აგვისტო, 1991	1	0	0	0
30 აგვისტო, 1991	1 სექტემბერი, 1991	2	1	1	1
30 აგვისტო, 1991	27 თებერვალი, 1992	181	177	177	177
30 აგვისტო, 1991	28 თებერვალი, 1992	182	178	178	178
30 აგვისტო, 1991	29 თებერვალი, 1992	183	179	179	179
30 აგვისტო, 1991	1 მარტი, 1992	184	181	181	181
30 აგვისტო, 1991	29 აგვისტო, 1992	365	359	359	359
30 აგვისტო, 1991	30 აგვისტო, 1992	366	360	360	360
30 აგვისტო, 1991	31 აგვისტო, 1992	367	360	360	360
30 აგვისტო, 1991	1 სექტემბერი, 1992	368	361	361	361
31 აგვისტო, 1991	1 სექტემბერი, 1991	1	1	1	1
31 აგვისტო, 1991	2 სექტემბერი, 1991	2	2	2	2
31 აგვისტო, 1991	27 თებერვალი, 1992	180	177	177	177
31 აგვისტო, 1991	28 თებერვალი, 1992	181	178	178	178
31 აგვისტო, 1991	29 თებერვალი, 1992	182	179	179	179
31 აგვისტო, 1991	1 მარტი, 1992	183	181	181	181
31 აგვისტო, 1991	29 აგვისტო, 1992	364	359	359	359
31 აგვისტო, 1991	30 აგვისტო, 1992	365	360	360	360
31 აგვისტო, 1991	31 აგვისტო, 1992	366	360	360	360
31 აგვისტო, 1991	1 სექტემბერი, 1992	367	361	361	361
15 იანვარი, 1992	28 თებერვალი, 1992	44	43	43	43
15 იანვარი, 1992	29 თებერვალი, 1992	45	44	44	44
15 იანვარი, 1992	1 მარტი, 1992	46	46	46	46
15 იანვარი, 1993	27 თებერვალი, 1993	43	42	42	42

გაგრძელება

საწყისი თარიღი	ბოლო თარიღი	დღეების ზუსტი რაოდ.	30/360 ISDA	30/360 PSA	30E/360
15 იანვარი, 1993	27 თებერვალი, 1993	43	42	42	42
15 იანვარი, 1993	28 თებერვალი, 1993	44	43	43	43
15 იანვარი, 1993	1 მარტი, 1993	45	46	46	46
28 თებერვალი, 1992	27 თებერვალი, 1992	−1	−1	−1	−1
28 თებერვალი, 1992	28 თებერვალი, 1992	0	0	0	0
28 თებერვალი, 1992	29 თებერვალი, 1992	1	1	1	1
28 თებერვალი, 1992	1 მარტი, 1992	2	3	3	3
28 თებერვალი, 1992	2 მარტი, 1992	3	4	4	4
28 თებერვალი, 1992	27 აგვისტო, 1992	181	179	179	179
28 თებერვალი, 1992	29 აგვისტო, 1992	183	181	181	181
28 თებერვალი, 1992	30 აგვისტო, 1992	184	172	172	172
28 თებერვალი, 1992	31 აგვისტო, 1992	185	183	183	183
28 თებერვალი, 1992	1 სექტემბერი, 1992	186	183	183	183
28 თებერვალი, 1992	2 სექტემბერი, 1992	187	184	184	184
28 თებერვალი, 1992	27 თებერვალი, 1993	365	359	359	359
28 თებერვალი, 1992	28 თებერვალი, 1993	366	360	360	360
28 თებერვალი, 1992	1 მარტი, 1993	367	363	363	363
28 თებერვალი, 1992	2 მარტი, 1993	368	364	364	364
28 თებერვალი, 1992	3 მარტი, 1993	369	365	365	365
29 თებერვალი, 1992	29 თებერვალი, 1992	0	0	−1	0
29 თებერვალი, 1992	1 მარტი, 1992	1	2	1	2
29 თებერვალი, 1992	2 მარტი, 1992	2	3	2	3
29 თებერვალი, 1992	27 აგვისტო, 1992	180	178	177	178
29 თებერვალი, 1992	28 აგვისტო, 1992	181	179	178	179
29 თებერვალი, 1992	29 აგვისტო, 1992	182	180	179	180
29 თებერვალი, 1992	30 აგვისტო, 1992	183	181	180	181
29 თებერვალი, 1992	31 აგვისტო, 1992	184	182	180	181
29 თებერვალი, 1992	1 სექტემბერი, 1992	185	182	181	182
29 თებერვალი, 1992	2 სექტემბერი, 1992	186	183	182	183
29 თებერვალი, 1992	27 თებერვალი, 1993	364	358	357	358
29 თებერვალი, 1992	28 თებერვალი, 1993	365	359	358	359
29 თებერვალი, 1992	1 მარტი, 1993	366	362	361	362
29 თებერვალი, 1992	2 მარტი, 1993	367	363	362	363
29 თებერვალი, 1992	3 მარტი, 1993	368	364	363	364
28 თებერვალი, 1993	27 თებერვალი, 1993	−1	−1	−3	−1
28 თებერვალი, 1993	28 თებერვალი, 1993	0	0	−2	0
28 თებერვალი, 1993	1 მარტი, 1993	1	3	1	3
28 თებერვალი, 1993	2 მარტი, 1993	2	4	2	4
28 თებერვალი, 1993	27 აგვისტო, 1993	180	179	177	179
28 თებერვალი, 1993	28 აგვისტო, 1993	181	180	178	180
28 თებერვალი, 1993	29 აგვისტო, 1993	182	181	179	181
28 თებერვალი, 1993	30 აგვისტო, 1993	183	182	180	182
28 თებერვალი, 1993	31 აგვისტო, 1993	184	183	180	182
28 თებერვალი, 1993	1 სექტემბერი, 1993	185	183	181	183
28 თებერვალი, 1993	2 სექტემბერი, 1993	186	184	182	184
28 თებერვალი, 1993	27 თებერვალი, 1994	364	359	357	359
28 თებერვალი, 1993	28 თებერვალი, 1994	365	360	358	360

სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქციის $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ მნიშვნელობები

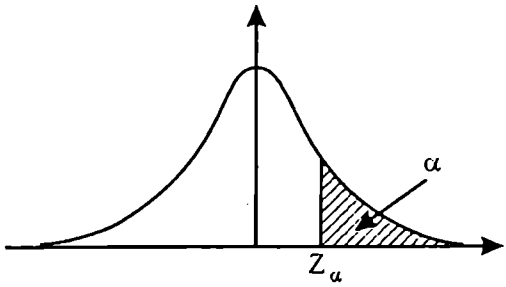


x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.500	**0.33**	0.629	**0.66**	0.745	**0.99**	0.838	**1.32**	0.906	**1.65**	0.950
0.01	0.503	**0.34**	0.633	**0.67**	0.748	**1.00**	0.841	**1.33**	0.908	**1.66**	0.951
0.02	0.507	**0.35**	0.636	**0.68**	0.751	**1.01**	0.843	**1.34**	0.909	**1.67**	0.952
0.03	0.511	**0.36**	0.640	**0.69**	0.75	**1.02**	0.846	**1.35**	0.911	**1.68**	0.953
0.04	0.515	**0.37**	0.644	**0.70**	0.758	**1.03**	0.848	**1.36**	0.913	**1.69**	0.954
0.05	0.519	**0.38**	0.648	**0.71**	0.761	**1.04**	0.850	**1.37**	0.914	**1.70**	0.955
0.06	0.523	**0.39**	0.651	**0.72**	0.764	**1.05**	0.853	**1.38**	0.916	**1.71**	0.956
0.07	0.527	**0.40**	0.655	**0.73**	0.767	**1.06**	0.855	**1.39**	0.917	**1.72**	0.957
0.08	0.531	**0.41**	0.659	**0.74**	0.770	**1.07**	0.857	**1.40**	0.919	**1.73**	0.958
0.09	0.535	**0.42**	0.662	**0.75**	0.773	**1.08**	0.859	**1.41**	0.920	**1.74**	0.959
0.10	0.539	**0.43**	0.666	**0.76**	0.776	**1.09**	0.862	**1.42**	0.922	**1.75**	0.959
0.11	0.543	**0.44**	0.670	**0.77**	0.779	**1.10**	0.864	**1.43**	0.923	**1.76**	0.960
0.12	0.547	**0.45**	0.673	**0.78**	0.782	**1.11**	0.866	**1.44**	0.925	**1.77**	0.961
0.13	0.551	**0.46**	0.677	**0.79**	0.785	**1.12**	0.868	**1.45**	0.926	**1.78**	0.962
0.14	0.555	**0.47**	0.680	**0.80**	0.788	**1.13**	0.870	**1.46**	0.927	**1.79**	0.963
0.15	0.559	**0.48**	0.684	**0.81**	0.791	**1.14**	0.872	**1.47**	0.929	**1.80**	0.964
0.16	0.563	**0.49**	0.687	**0.82**	0.793	**1.15**	0.874	**1.48**	0.930	**1.81**	0.964
0.17	0.567	**0.50**	0.691	**0.83**	0.796	**1.16**	0.876	**1.49**	0.931	**1.82**	0.965
0.18	0.571	**0.51**	0.694	**0.84**	0.799	**1.17**	0.879	**1.50**	0.933	**1.83**	0.966
0.19	0.575	**0.52**	0.698	**0.85**	0.802	**1.18**	0.881	**1.51**	0.934	**1.84**	0.967
0.20	0.579	**0.53**	0.701	**0.86**	0.805	**1.19**	0.882	**1.52**	0.935	**1.85**	0.967
0.21	0.583	**0.54**	0.705	**0.87**	0.807	**1.20**	0.884	**1.53**	0.936	**1.86**	0.968
0.22	0.587	**0.55**	0.708	**0.88**	0.810	**1.21**	0.886	**1.54**	0.938	**1.87**	0.969
0.23	0.590	**0.56**	0.712	**0.89**	0.813	**1.22**	0.888	**1.55**	0.939	**1.88**	0.969
0.24	0.594	**0.57**	0.715	**0.90**	0.815	**1.23**	0.890	**1.56**	0.940	**1.89**	0.970
0.25	0.598	**0.58**	0.719	**0.91**	0.818	**1.24**	0.892	**1.57**	0.941	**1.90**	0.971
0.26	0.602	**0.59**	0.722	**0.92**	0.821	**1.25**	0.894	**1.58**	0.942	**1.91**	0.971
0.27	0.606	**0.60**	0.725	**0.93**	0.823	**1.26**	0.896	**1.59**	0.944	**1.92**	0.972
0.28	0.610	**0.61**	0.729	**0.94**	0.826	**1.27**	0.897	**1.60**	0.945	**1.93**	0.973
0.29	0.614	**0.62**	0.732	**0.95**	0.828	**1.28**	0.899	**1.61**	0.946	**1.94**	0.973
0.30	0.617	**0.63**	0.735	**0.96**	0.831	**1.29**	0.901	**1.62**	0.947	**1.95**	0.974
0.31	0.621	**0.64**	0.738	**0.97**	0.833	**1.30**	0.903	**1.63**	0.948	**1.96**	0.975
0.32	0.625	**0.65**	0.742	**0.98**	0.836	**1.31**	0.904	**1.64**	0.949	**1.97**	0.975

$\Phi(x)$-ის მნიშვნელობები (გაგრძელება)

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.98	0.976	**2.26**	0.988	**2.54**	0.994	**2.82**	0.997	**3.10**	0.999
0.99	0.976	**2.27**	0.988	**2.55**	0.994	**2.83**	0.997	**3.11**	0.999
2.00	0.977	**2.28**	0.988	**2.56**	0.994	**2.84**	0.997	**3.12**	0.999
2.01	0.977	**2.29**	0.988	**2.57**	0.994	**2.85**	0.997	**3.13**	0.999
2.02	0.978	**2.30**	0.989	**2.58**	0.995	**2.86**	0.997	**3.14**	0.999
2.03	0.978	**2.31**	0.989	**2.59**	0.995	**2.87**	0.997	**3.15**	0.999
2.04	0.979	**2.32**	0.989	**2.60**	0.995	**2.88**	0.998	**3.16**	0.999
2.05	0.979	**2.33**	0.990	**2.61**	0.995	**2.89**	0.998	**3.17**	0.999
2.06	0.980	**2.34**	0.990	**2.62**	0.995	**2.90**	0.998	**3.18**	0.999
2.07	0.980	**2.35**	0.990	**2.63**	0.995	**2.91**	0.998	**3.19**	0.999
2.08	0.981	**2.36**	0.990	**2.64**	0.995	**2.92**	0.998	**3.20**	0.999
2.09	0.981	**2.37**	0.991	**2.65**	0.995	**2.93**	0.998	**3.21**	0.999
2.10	0.982	**2.38**	0.991	**2.66**	0.996	**2.94**	0.998	**3.22**	0.999
2.11	0.982	**2.39**	0.991	**2.67**	0.996	**2.95**	0.998	**3.23**	0.999
2.12	0.983	**2.40**	0.991	**2.68**	0.996	**2.96**	0.998	**3.24**	0.999
2.13	0.983	**2.41**	0.992	**2.69**	0.996	**2.97**	0.998	**3.25**	0.999
2.14	0.983	**2.42**	0.992	**2.70**	0.996	**2.98**	0.998	**3.26**	0.999
2.15	0.984	**2.43**	0.992	**2.71**	0.996	**2.99**	0.998	**3.27**	0.999
2.16	0.984	**2.44**	0.992	**2.72**	0.996	**3.00**	0.998	**3.28**	0.999
2.17	0.985	**2.45**	0.992	**2.73**	0.996	**3.01**	0.998	**3.29**	0.999
2.18	0.985	**2.46**	0.993	**2.74**	0.996	**3.02**	0.998	**3.30**	0.999
2.19	0.985	**2.47**	0.993	**2.75**	0.997	**3.03**	0.998	**3.31**	0.999
2.20	0.986	**2.48**	0.993	**2.76**	0.997	**3.04**	0.998	**3.32**	0.999
2.21	0.986	**2.49**	0.993	**2.77**	0.997	**3.05**	0.998	**3.33**	0.999
2.22	0.986	**2.50**	0.993	**2.78**	0.997	**3.06**	0.998	**3.34**	0.999
2.23	0.987	**2.51**	0.993	**2.79**	0.997	**3.07**	0.998	**3.35**	0.999
2.24	0.987	**2.52**	0.994	**2.80**	0.997	**3.08**	0.998	**3.36**	0.999
2.25	0.987	**2.53**	0.994	**2.81**	0.997	**3.09**	0.999	**3.37**	0.999

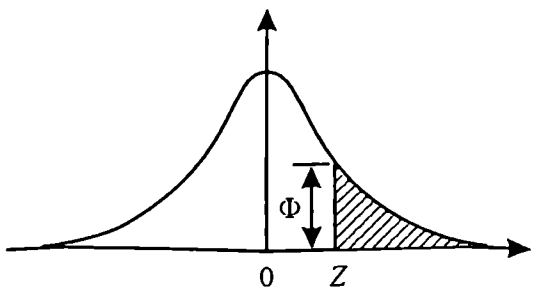
სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილები (z_α)



α	0.1	0.05	0.025	0.125	0.01	0.005	0.0025	0.001
z_α	1.28	1.64	1.96	2.24	2.33	2.57	2.81	3.08

შეუნიშნავთ, რომ ქვემოთ მოტანილ ცხრილში, მაგალითად, ჩანაწერი $3z74829$ აღნიშნავს რიცხვს: $0,0074829$, რომელიც ასე უნდა ეწეროს $.0074829$. ანალოგიური შინაარსი აქვს kz, $k = 3, 4, 5, 6, 7$ სიმბოლოებს.

სტანდარტული ნორმალური განაწილების სიმკვრივის $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$ მნიშვნელობები



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.398042	.398922	.398862	.398763	.398623	.398444	.398225	.397966	.397668	.397330
0.1	.396953	.396536	.396080	.395585	.395052	.394479	.393868	.393219	.392531	.391806
0.2	.391043	.390242	.389404	.388529	.387617	.386668	.385683	.384663	.383606	.382515
0.3	.381388	.380226	.379031	.377801	.376537	.375240	.373911	.372548	.371154	.369728
0.4	.368270	.366782	.365263	.363714	.362135	.360527	.358890	.357225	.355533	.353812
0.5	.352065	.350292	.348493	.346668	.344818	.342944	.341046	.339124	.337180	.335213
0.6	.333225	.331215	.329184	.327133	.325062	.322972	.320864	.318737	.316593	.314432
0.7	.312254	.310060	.307851	.305627	.303389	.301137	.298872	.296595	.294305	.292004
0.8	.289692	.287369	.285036	.282694	.280344	.277985	.275618	.273244	.270864	.268477
0.9	.266085	.263688	.261286	.258881	.256471	.254059	.251644	.249228	.246809	.244390
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.241971	.239551	.237132	.234714	.232297	.229882	.227470	.225060	.222653	.220251
1.1	.217852	.215458	.213069	.210668	.208308	.205936	.203571	.201214	.198863	.196520
1.2	.194186	.191860	.189543	.187235	.184937	.182649	.180371	.178104	.175847	.173602
1.3	.171369	.169147	.166937	.164740	.162555	.160383	.158225	.156080	.153948	.151831
1.4	.149727	.147639	.145564	.143505	.141460	.139431	.137417	.135418	.133435	.131468
1.5	.129518	.127583	.125665	.123763	.121878	.120009	.118157	.116323	.114505	.112704
1.6	.110921	.109155	.107406	.105675	.103961	.102265	.100586	.098925	.097282	.095657
1.7	.094049	.092459	.090887	.089333	.087796	.096277	.084776	.083293	.081828	.080380
1.8	.078950	.077538	.076143	.074766	.073407	.072065	.070740	.069433	.068144	.066871
1.9	.065616	.064378	.063157	.061952	.060765	.059595	.058441	.057304	.056183	.055079
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.0	.053991	.052919	.051864	.050824	.049800	.048792	.047800	.046823	.045861	.044915
2.1	.043984	.043067	.042166	.041280	.040408	.039550	.038707	.037878	.037063	.036262
2.2	.035475	.034701	.033941	.033194	.032460	.031740	.031032	.030337	.029655	.028985
2.3	.028327	.027682	.027048	.026426	.025817	.025218	.024631	.024056	.023491	.022937
2.4	.022395	.021862	.021341	.020829	.020328	.019837	.019356	.018885	.018423	.017971
2.5	.017528	.017095	.016670	.016254	.015848	.015449	.015060	.014678	.014305	.013940
2.6	.013583	.013234	.012892	.012558	.012232	.011912	.011600	.011295	.010997	.010706
2.7	.010421	.010143	$3_{\mathrm{z}}98712$	$3_{\mathrm{z}}96058$	$3_{\mathrm{z}}93466$	$3_{\mathrm{z}}90936$	$3_{\mathrm{z}}88465$	$3_{\mathrm{z}}86052$	$3_{\mathrm{z}}83697$	$3_{\mathrm{z}}81398$
2.8	$3_{\mathrm{z}}79155$	$3_{\mathrm{z}}76965$	$3_{\mathrm{z}}74829$	$3_{\mathrm{z}}72744$	$3_{\mathrm{z}}70711$	$3_{\mathrm{z}}68728$	$3_{\mathrm{z}}66793$	$3_{\mathrm{z}}64907$	$3_{\mathrm{z}}63067$	$3_{\mathrm{z}}61274$
2.9	$3_{\mathrm{z}}59525$	$3_{\mathrm{z}}57821$	$3_{\mathrm{z}}56160$	$3_{\mathrm{z}}54541$	$3_{\mathrm{z}}52963$	$3_{\mathrm{z}}51426$	$3_{\mathrm{z}}49929$	$3_{\mathrm{z}}48470$	$3_{\mathrm{z}}47050$	$3_{\mathrm{z}}45666$

$\varphi(x)$-ის მნიშვნელობები (გაგრძელება)

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3.0	3z44318	3z43007	3z41729	3z40486	3z39276	3z38098	3z36951	3z35836	3z34751	3z33695
3.1	3z32668	3z31669	3z30698	3z29754	3z28835	3z27943	3z27075	3z26231	3z25412	3z24615
3.2	3z23841	3z23089	3z22358	3z21649	3z20960	3z20290	3z19641	3z19010	3z18397	3z17803
3.3	3z17226	3z16666	3z16122	3z15595	3z15084	3z14587	3z14106	3z13639	3z13187	3z12748
3.4	3z12322	3z11910	3z11510	3z11122	3z10747	3z10383	3z10030	3z96886	3z93577	3z90372
3.5	4z87268	4z84263	4z81352	4z78534	4z75807	4z73166	4z70611	4z68138	4z65745	4z63430
3.6	4z61190	4z59024	4z56928	4z54901	4z52941	4z51046	4z49214	4z47443	4z45731	4z44077
3.7	4z42478	4z40933	4z39440	4z37998	4z36605	4z35260	4z33960	4z32705	4z31494	4z30324
3.8	4z29195	4z29105	4z27053	4z26037	4z25058	4z24113	4z23201	4z33321	4z21473	4z20655
3.9	4z19866	4z19105	4z18371	4z17664	4z16983	4z16326	4z15693	4z15083	4z14495	4z13928
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.0	4z13383	4z12858	4z12352	4z11864	4z11395	4z10943	4z10509	4z10090	5z96870	5z92993
4.1	5z89262	5z85672	5z82218	5z78895	5z75700	5z72626	5z69670	5z66828	5z64095	5z61468
4.2	5z58943	5z56516	5z54183	5z51942	5z49788	5z47719	5z45731	5z43821	5z41988	5z40226
4.3	5z38535	5z36911	5z35353	5z33856	5z32420	5z31041	5z29719	5z28449	5z27231	5z26063
4.4	5z24942	5z23868	5z22837	5z21848	5z20900	5z19992	5z19121	5z18286	5z17486	5z16719
4.5	5z15984	5z15280	5z14605	5z13959	5z13340	5z12747	5z12180	5z11636	5z11116	5z10618
4.6	5z10141	6z96845	6z92477	6z88297	6z84298	6z80472	6z76812	6z73311	6z69962	6z66760
4.7	6z63698	6z60771	6z57972	6z55296	6z52739	6z50295	6z47960	6z45728	6z43596	6z41559
4.8	6z39613	6z37755	6z35980	6z34285	6z32667	6z31122	6z29647	6z28239	6z26895	6z25613
4.9	6z24390	6z23222	6z22108	6z21046	6z20033	6z19066	6z18144	6z17265	6z16428	6z15629
5.0	6z14867	6z14141	6z13450	6z12791	6z12162	6z11564	6z10994	6z10451	7z99330	7z94414

ლიტერატურა

1. ბაბილუა პ., დოჭვირი ბ., მელაძე პ., ფინანსური მათემატიკის საწყისები. უნივერსალი, თბილისი, 2008.

2. დოჭვირი ბ., ალბათობა, სტატისტიკა, ფინანსები. უნივერსალი, თბილისი, 2009.

3. თავაძე ა., ფინანსური მათემატიკა. ESM, თბილისი, 2007.

4. ლაზრიევა ნ., მანია მ., მირზაშვილი გ., ტორონჯაძე თ., ლლონტი ო., ჯამბურია ლ., ფინანსური ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდები, ფინანსური და სადაზღვევო მათემატიკა, ფინანსური ინჟინერია. ფონდი "ევრაზია", თბილისი, 1999.

5. ლლონტი ო., სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა. თსუ, თბილისი, 2002.

6. Бочаров П., Касимов Ю., Финансовая математика. Физматгиз, Москва, 2007.

7. Уотшен Т., Паррамоу К., Количественные методы в финансах. Юнити, Москва, 1998.

8. Ширяев А., Основы стохастической финансовой математики, т. 1, т. 2. Фазис, Москва, 1998.

დაიბეჭდა გამომცემლობა „უნივერსალში"
თბილისი, 0179, ი. ჭავჭავაძის გამზ. 19, ☎: 2 22 36 09, 5(99) 17 22 30
E-mail: universal@internet.ge