

მერაბ სვანაძე

ელემენტარული მათემატიკა

საბანკო საქმეში

ლექციების კურსი



ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტი
თბილისი
2010

ანოტაცია

წინამდებარე ლექციების კურსის მიზანია მათემატიკის სასკოლო პროგრამით გათვალისწინებული მასალის საფუძველზე გააცნოს მკითხველს ფინანსური მათემატიკის ისეთი თემები, რომლებიც ეხება ანაბრებსა და კრედიტებს სარგებლის მარტივი და რთული განაკვეთებით, სესხებს ერთჯერადი და მრავალჯერადი დარიცხვებით, დისკონტირებასა და დისკონტს, ორ თარიღს შორის დღეების რაოდენობის დათვლის მეთოდებს (მისი ცოდნა აუცილებელია სარგებლის გამოსათვლელად ყოველდღიური დარიცხვის შემთხვევაში), სარგებლის უწყვეტ დარიცხვას, თანხის ნაკადის მათემატიკურ მოდელს, გრძელვადიანი კრედიტის დაფარვას, ანუიტეტს, სარგებლის წლიურ ეფექტურ საპროცენტო განაკვეთს, ორი ანაბრის პირობების შედარებასა და მათგან ხელსაყრელის შერჩევას. ამასთანავე, მკითხველი შეისწავლის საბანკო საქმის ძირითად ტერმინოლოგიასაც.

ამ კურსში წარმოდგენილი თემები ძირითადად ეფუძნება მათემატიკის სასკოლო კურსს. მასალა გადმოცემულია მარტივი ენით, საკმარისად დეტალურად. მისი შესწავლა შეუძლია როგორც სტუდენტებს, ასევე სკოლის უფროსი კლასის მოსწავლეებსა და საბანკო საქმით დაინტერესებულ მკითხველთა ფართო წრეს.

რედაქტორი:

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი ივანე ცაგარელი

რეცენზენტი:

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფ. ოთარ ჯოხაძე

978-9941-9126-7-2

ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა

ქაქუცა ჩოლოყაშვილის 3/5, თბილისი, 0162, საქართველო

Ilia State University Publishing. 3/5 Cholokashvili Ave, Tbilisi, 0162, Georgia

შინაარსი

შესავალი	7
წინასიტყვაობა.....	9

ლექცია 1. რიცხვითი სიმრავლეები. რიცხვის პროცენტი

1.1. . რიცხვითი სიმრავლეები, ნამდვილი რიცხვები, მოქმედებები ნამდვილ რიცხვებზე	13
1.2. ათწილადის დამრგვალება. ათწილადის გადაქცევა წილადად	16
1.3. რიცხვითი უტოლობის თვისებები.....	18
1.4. რიცხვის პროცენტი	19
1.5. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.....	21

ლექცია 2. წრფივი ფუნქცია. წრფივი განტოლება. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა

2.1. წრფივი ფუნქცია.....	25
2.1.1. წრფის ზოგადი სახის განტოლება.....	25
2.1.2. წრფის განტოლება საკუთხო კოეფიციენტით.....	25
2.1.3. x და y ღერძების პარალელური წრფეების განტოლებები	26
2.2. წრფივი განტოლება	27
2.3. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა	28
2.4. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის	30

ლექცია 3. სარგებლის ერთჯერადი და მრავალჯერადი დარიცხვა. არითმეტიკული პროგრესია. სარგებელი მარტივი განაკვეთით

3.1. სარგებლის ერთჯერადი და მრავალჯერადი დარიცხვა.....	35
3.2. არითმეტიკული პროგრესია	37
3.3. ძირითადი აღნიშვნები.....	38
3.4. სარგებელი მარტივი განაკვეთით	39
3.5. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.....	43

ლექცია 4. რიცხვის ხარისხი და ლოგარითმი. ხარისხოვანი, მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები

4.1. რიცხვის ხარისხი	49
4.2. რიცხვის ლოგარითმი.....	50

4.3. ზარისხოვანი და მაჩვენებლიანი ფუნქციები.....	54
4.4. ლოგარითმული ფუნქცია	55
4.5. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.....	56

ლექცია 5. გეომეტრიული პროგრესია. სარგებელი რთული განაკვეთით

5.1. გეომეტრიული პროგრესია.....	59
5.2. სარგებელი რთული განაკვეთით.....	59
5.3. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.....	64

ლექცია 6. დისკონტირება, დისკონტი

6.1. დისკონტირება სარგებლის მარტივი განაკვეთისას.....	69
6.2. დისკონტირება სარგებლის რთული განაკვეთისას.....	70
6.3. დისკონტი სარგებლის მარტივი განაკვეთისას.....	71
6.4. დისკონტი სარგებლის რთული განაკვეთისას.....	72
6.5. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.....	73

ლექცია 7. ორ თარიღს შორის დღეების რაოდენობის გამოთვლა. სარგებლის გამოთვლა ყოველდღიური დარიცხვის შემთხვევაში

7.1. ორ თარიღს შორის დღეების რაოდენობის გამოთვლა	79
7.2. სარგებლის გამოთვლა ყოველდღიური დარიცხვის შემთხვევაში..	83
7.3. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.....	84

ლექცია 8. მიმდევრობის ზღვარი. ნეპერის რიცხვი. სარგებლის უწყვეტი დარიცხვა

8.1. მიმდევრობის ზღვარი.....	91
8.2. ნეპერის რიცხვი	93
8.3. სარგებლის უწყვეტი დარიცხვა	93
8.4. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.....	95

ლექცია 9. საწყისი თანხის გაორმაგების ამოცანა

9.1. საწყისი თანხის გაორმაგების ამოცანა სარგებლის მარტივი განაკვეთისას	99
9.2. საწყისი თანხის გაორმაგების ამოცანა სარგებლის რთული განაკვეთისას (72 -ის კანონი).....	100

9.3. საწყისი თანხის გაორმაგების ამოცანა სარგებლის უწყვეტი დარიცხვისას (69,3 –ის კანონი).....	102
9.4. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.....	103

ლექცია 10. დროის დიაგრამა და თანხის ნაკადი

10.1. დროის დიაგრამა.....	107
10.2. თანხის ნაკადი.....	109
10.3. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.....	113

ლექცია 11. ანაბარზე თანხის დაგროვება

11.1. ანაბარზე თანხის დაგროვება სარგებლის მარტივი განაკვეთისას.....	117
11.2. ანაბარზე თანხის დაგროვება სარგებლის რთული განაკვეთისას.....	120
11.3. ანაბარზე თანხის დაგროვება სარგებლის უწყვეტი დარიცხვისას.....	121
11.4. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.....	123

ლექცია 12. გრძელვადიანი კრედიტის დაფარვა. ანაბრიდან ფიქსირებული თანხის მოხსნა (ანუიტეტი)

12.1. გრძელვადიანი სესხის დაფარვის გეგმის შედგენა.....	127
12.2. გრძელვადიანი სესხის დაფარვა სარგებლის მარტივი განაკვეთით.....	128
12.3. გრძელვადიანი სესხის დაფარვა სარგებლის რთული განაკვეთით.....	131
12.4. ანუიტეტი სარგებლის რთული განაკვეთით.....	134
12.5. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.....	136

ლექცია 13. სარგებლის წლიური ეფექტური საპროცენტო განაკვეთი

13.1. სარგებლის წლიური ეფექტური საპროცენტო განაკვეთი.....	141
13.2. ორი ანაბრის პირობების შედარება.....	144
13.3. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.....	147

დანართი. სწავლის შედეგის შეფასების სისტემა და ტესტების ნიმუშები

1. სწავლის შედეგის შეფასების სისტემა.....	149
---	-----

2. I კოლოქვიუმის ტესტის ნიმუში	150
3. II კოლოქვიუმის ტესტის ნიმუში	152
4. დასკვნითი გამოცდის ტესტის ნიმუში	153
 ლიტერატურა	 156

შესავალი

წინამდებარე ლექციების კურსი საგნის “ელემენტარული მათემატიკა საბანკო საქმეში” სილაბუსის მიხედვით არის აგებული. იგი შედგება 13 ლექციისა და დანართისაგან. ყოველი ლექციის დასაწყისში მოყვანილია მისი გეგმა, ხოლო შემდეგ ამ გეგმის მიხედვით საკმარისად დეტალურად გაშუქებულია თითოეული საკითხი. ლექციის ბოლოს მოცემულია ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.

დანართში მოყვანილია აუცილებელი ინფორმაცია ამ საგანში სწავლის შედეგის შეფასების სისტემის შესახებ, კოლოქვიუმებისა და დასკვნითი გამოცდის ტესტების ნიმუშები.

ლექციებში განხილულ თითოეულ საკითხზე ამოხსნილია სანიმუშო ამოცანები (სულ 52 ამოცანა), რომლებიც სტუდენტს გაუადვილებს ლექციის ბოლოს დამოუკიდებელი მუშაობისათვის განკუთვნილი ანალოგიური ამოცანების ამოხსნას (სულ 142 ამოცანა).

ამასთანავე, ლექციაში მუქი ფერით აღნიშნულია ახალი ცნებები და ის სიტყვები, რომლებიც სტუდენტმა კარგად უნდა დაიმახსოვროს. ასევე, აუცილებელია, სტუდენტმა იცოდეს ის ძირითადი ფორმულები, რომლებიც ჩასმულია მართკუთხა ჩარჩოში. ამ ფორმულების გამოყენებით შესაძლებელია ლექციები კურსში მოყვანილი ამოცანების ამოხსნა.

ლექციების კურსი შედგენილია შემდეგნაირად: თითოეული თემის წინ გავიხსენებთ შესაბამის აუცილებელ მასალას მათემატიკის სასკოლო პროგრამიდან (იხ. ლექციები 1, 2, 4 და 5), ხოლო შემდეგ შევისწავლით საბანკო საქმის გარკვეულ საკითხს. ცხადია, ახალი მასალის ასეთი მეთოდით შესწავლა სტუდენტს საშუალებას მისცემს (მიუხედავად იმისა, მას ეს მასალა ახსოვდა თუ არა) ადვილად და მოკლე დროში გაერკვეს თითოეული თემის არსში.

უკვე შეგვიძლია დავიწყოთ ლექციების კურსის შესწავლა.

წინასიტყვაობა

მსოფლიოს მრავალ წამყვან უნივერსიტეტში ისწავლება საგნები მეცნიერების სხვადასხვა დარგში მათემატიკური მეთოდების გამოყენების შესახებ. გადაწყვეტიტე შემექმნა ლექციების კურსი საგანში “ელემენტარული მათემატიკა საბანკო საქმეში”. ამ გადაწყვეტილებას წინ უძღოდა შემდეგი ფაქტორები:

1. საქართველოში სწრაფი ტემპით ვითარდება საბანკო სისტემა, რომელშიც ფართოდ ინერგება მათემატიკურ მეთოდებზე დაფუძნებული ახალი ტექნოლოგიები.
2. თითოეულ ადამიანს ყოველდღიურ ცხოვრებაში, ნებით თუ უნებლიედ, შეხება აქვს საბანკო სისტემასთან (ხელფასის მიღება ბანკიდან, ანაბარზე თანხის შეტანა, სტუდენტური სესხები და სხვა). ასეთი საბანკო ოპერაციები კი სრულდება მათემატიკის ელემენტარული მეთოდების გამოყენებით. მათი ცოდნა თითოეული ადამიანისათვის უდავოდ სასარგებლოა.
3. 2006-2010 წლებში ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტის მაგისტრატურის გამოყენებითი მათემატიკის სპეციალობის სტუდენტებისათვის კვათხულობდი ლექციების კურსს საგანში “მათემატიკური მეთოდები საბანკო საქმესა და ეკონომიკაში”. რის შედეგადაც გამოიკვეთა გარკვეული საკითხები, რომლებშიც შეიძლება განხილულ იქნეს საბანკო საქმის მარტივი ამოცანები მათემატიკის სასკოლო პროგრამის საფუძველზე (ლექციების ეს კურსიც ამ საკითხებს ეძღვნება).
4. 2009-2010 სასწავლო წლიდან აღნიშნული უნივერსიტეტის ბაკალავრიატის სტუდენტებისათვის გათვალისწინებულია საგანი “ელემენტარული მათემატიკა საბანკო საქმეში” (არჩევითი კურსი). საშუალება მქონდა ამ საგანში წამეკითხა ლექციები სტუდენტთა ერთი ჯგუფისათვის, რის გამოც აუცილებელი გახდა მისი სილაბუსის მიხედვით მომზადებული ლექციების კურსის შექმნა. სტუდენტებმა საბაკო საქმის საფუძველების შესწავლის მიმართ დიდი ინტერესი გამოხატეს.

ლექციების ამ კურსის მიხედვით მკითხველს საშუალება ეძლევა მათემატიკის სასკოლო პროგრამის საფუძველზე დეტალურად შეისწავლოს ფინანსური მათემატიკის ისეთი თემები, რომლებიც ეხება ანაბრებს და კრედიტებს სარგებლის მარტივი და რთული განაკვეთებით, სესხებს ერთჯერადი

და მრავალჯერადი დარიცხვით, დისკონტირებასა და დისკონტს, ორ თარიღს შორის დღეების რაოდენობის დათვლის მეთოდებს (რომლის ცოდნა აუცილებელია სარგებელის გამოსათვლელად ყოველდღიური დარიცხვის შემთხვევაში), სარგებლის უწყვეტ დარიცხვას, თანხის ნაკადის მათემატიკურ მოდელს, გრძელვადიანი კრედიტის დაფარვას, ანუიტეტს, სარგებლის წლიურ ეფექტურ საპროცენტო განაკვეთს, ორი ანაბრის პირობების შედარებას და მათგან ხელსაყრელის შერჩევას. ამასთანავე, მკითხველი შეისწავლის საბანკო საქმის ძირითად ტერმინოლოგიას.

ეს არის ის აუცილებელი თემები, რომელთა ცოდნა ნებისმიერი პროფესიის ადამიანს მნიშვნელოვან დახმარებას გაუწევს საბანკო საქმეში. იმედი მაქვს, ამ თემების საფუძვლიანად შესწავლის შემდეგ, მკითხველს გაუჩნდება სურვილი უფრო ფართოდ გაეცნოს საბანკო საქმეში მათემატიკური მეთოდების გამოყენებას (მათემატიკის ამ დარგს ფინანსურ მათემატიკას უწოდებენ).

ლექციების ამ კურსში, მისი მიზნების გამო, ვერ ხერხდება ფინანსური მათემატიკის იმ თემების, თეორიებისა და მეთოდების (ინვესტიციები, რისკების თეორია, ინფორმაციის დაცვის მათემატიკური მეთოდები და სხვა) განხილვა, რომლებშიც გამოიყენება უმაღლესი მათემატიკის საკითხები.

რადგან წარმოდგენილი თემები ეფუძნება მათემატიკის სასკოლო კურსს, ამიტომ მისი შესწავლა შეუძლია როგორც სტუდენტებს, ასევე სკოლის უფროსი კლასის მოსწავლეებსა და საბანკო საქმით დაინტერესებულ მკითხველთა ფართო წრეს.

აქვე მსურს გაგახსენოთ მეტად გავრცელებული გამოთქმა: “საბანკო საქმე არ არის მათემატიკის გარეშე” (No Banking without Mathematics).

გისურვებთ წარმატებებს!

მერაბ სვანაძე

15 აპრილი, 2010

ლექცია 1

რიცხვითი სიმრავლეები

რიცხვის პროცენტი

რიცხვითი სიმრავლეები. რიცხვის პროცენტი

გეგმა

- 1.1. რიცხვითი სიმრავლეები, ნამდვილი რიცხვები, მოქმედებები ნამდვილ რიცხვებზე
- 1.2. ათწილადის დამრგვალება. ათწილადის გადაქცევა წილადად
- 1.3. რიცხვითი უტოლობის თვისებები
- 1.4. რიცხვის პროცენტი
- 1.5. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1.1. რიცხვითი სიმრავლეები, ნამდვილი რიცხვები, მოქმედებები ნამდვილ რიცხვებზე

ბიზნესის სფეროში საფინანსო ოპერაციების შესრულების დროს ხშირად გამოიყენება ელემენტარული მათემატიკის საკითხები და მეთოდები. ამ ოპერაციებში ძირითადად გამოყენებულია რიცხვის პროცენტის გამოთვლა, არითმეტიკული და გეომეტრიული პროგრესიები, წრფივი განტოლებები და უტოლობები, ძირითადი ელემენტარული ფუნქციების (წრფივი, კვადრატული, მაჩვენებლიანი, ლოგარითმული და სხვა) თვისებები, რომელთა შესწავლა გათვალისწინებულია სასკოლო პროგრამით.

თავდაპირველად, გავიხსენებთ მათემატიკის სასკოლო პროგრამის იმ საკითხებს, რომლებსაც ხშირად გამოიყენებთ მომავალში. კერძოდ, გავიხსენებთ რიცხვით სიმრავლეებს, რიცხვითი უტოლობის თვისებებს, რიცხვის პროცენტს, წრფივ ფუნქციას, წრფივ განტოლებას და წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნას.

მათემატიკის ერთ-ერთი პირველადი ცნებაა სიმრავლის ცნება (პირველადი ცნებები სხვა ცნებების საშუალებით არ განისაზღვრებიან და მათზე დაყრდნობით განისაზღვრება ყველა სხვა ცნება). სიმრავლე წარმოადგენს რაიმე ნიშნის მიხედვით გაერთიანებულ ობიექტთა ერთობლიობას. მაგალითად, ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტის სტუდენტთა სიმრავლე, ბიბლიოთეკაში წიგნების სიმრავლე, აუდიტორიაში მაგიდების სიმრავლე, რომელიმე ბანკის თანამშრომელთა სიმრავლე და სხვა.

ობიექტებს, რომლებისგანაც სიმრავლე შედგება, სიმრავლის ელემენტები ეწოდება.

სიმრავლეების აღნიშვნისათვის გამოიყენება ლათინური ანბანის დიდი ასოები: $A, B, C, \dots$, ხოლო მისი ელემენტების აღნიშვნისათვის – პატარა ასოები: $a, b, c, \dots$.

თუ a არის A სიმრავლის ელემენტი, მაშინ ამ ფაქტს ასე ჩაწერენ: $a \in A$, ხოლო თუ a არ არის A სიმრავლის ელემენტი, მაშინ გამოიყენება ჩანაწერი: $a \notin A$.

A სიმრავლეს, რომლის ელემენტებია $a, b, c, \dots$, ასე წერენ: $A = \{a; b; c; \dots\}$.

თუ A სიმრავლის ელემენტებია ისეთი x ობიექტები, რომლებიც აკმაყოფილებენ რაიმე P თვისებას, მაშინ წერენ: $A = \{x: P\}$. მაგალითად, $x^2 - 1 = 0$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე შეგვიძლია ჩავწეროთ ასე: $A = \{1; -1\}$ ან $A = \{x: x^2 - 1 = 0\}$.

სიმრავლეს, რომელიც არც ერთ ელემენტს არ შეიცავს, ცარიელი სიმრავლე ეწოდება და $\emptyset$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ. მაგალითად, $x^2 = -5$ განტოლების ნამდვილ ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელია. თუ A ცარიელი სიმრავლეა, მაშინ წერენ $A = \emptyset$.

ვთქვათ, A და B რაიმე სიმრავლეებია. A -ს ეწოდება B -ს ქვესიმრავლე, თუ A -ს ყოველი ელემენტი ეკუთვნის B -ს და წერენ: $A \subset B$ (იკითხება: “ A შედის B -ში”).

ამ განმარტებიდან ჩანს, რომ ყოველი სიმრავლე თავისი თავის ქვესიმრავლეა $A \subset A$. თვლიან, რომ ცარიელი სიმრავლე ყოველი სიმრავლის ქვესიმრავლეა $\emptyset \subset A$.

ამოცანა 1.1. დავადგინოთ n ელემენტიანი A სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაოდენობა, თუ $n = 0, 1, 2$.

ამოხსნა. ა) ვთქვათ, $n = 0$. მაშინ $A = \emptyset$. ცარიელ სიმრავლეს აქვს მხოლოდ ერთი ქვესიმრავლე (თავისი თავი).

ბ) ვთქვათ, $n = 1$. მაშინ A სიმრავლის ქვესიმრავლეები იქნება: $\emptyset$ და A , ე.ი. ერთელემენტიან სიმრავლეს აქვს 2 ქვესიმრავლე.

გ) ვთქვათ, $n = 2$. მაშინ ორელემენტიანი $A = \{a, b\}$ სიმრავლის ქვესიმრავლეები იქნება: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$ და A , ე.ი. ორელემენტიან სიმრავლეს აქვს 4 ქვესიმრავლე.

საზოგადოდ, მტკიცდება, რომ n ელემენტიანი სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაოდენობა არის 2^n , სადაც $n = 0, 1, 2, \dots$.

ცხადია, თუ $A \subset B$ და $B \subset C$, მაშინ $A \subset C$.

A და B სიმრავლეებს ეწოდება ტოლი, თუ $A \subset B$ და $B \subset A$ (ანუ A და B სიმრავლეებს ერთი და იგივე ელემენტები აქვს) და წერენ $A = B$.

ახლა გავიხსენოთ მოქმედებები სიმრავლეებზე.

A და B სიმრავლეების გაერთიანება (ჯამი) ეწოდება სიმრავლეს, რომლის ელემენტები A და B სიმრავლეებიდან ერთს მაინც ეკუთვნის და აღინიშნება ასე: $A \cup B$. მაგალითად, თუ $A = \{1; 2; 3\}$ და $B = \{2; 4\}$, მაშინ $A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$.

A და B სიმრავლეების თანაკვეთა (ნამრავლი) ეწოდება სიმრავლეს, რომლის ელემენტები ერთდროულად ეკუთვნის როგორც A , ისე B სიმრავლეს და აღინიშნება ასე: $A \cap B$. მაგალითად, თუ $A = \{1; 2; 3\}$ და $B = \{2; 4\}$, მაშინ $A \cap B = \{2\}$.

A და B სიმრავლეებს ურთიერთარათანამკვეთი ეწოდება, თუ $A \cap B = \emptyset$.

A და B სიმრავლეების სხვაობა ეწოდება A -ს ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც B -ს არ ეკუთვნის და აღინიშნება ასე: $A \setminus B$. მაგალითად, თუ $A = \{1; 2; 3\}$ და $B = \{2; 4\}$, მაშინ $A \setminus B = \{1; 3\}$, ხოლო $B \setminus A = \{4\}$.

სიმრავლეს ეწოდება სასრული, თუ მისი ელემენტების რაოდენობა არის სასრული. წინააღმდეგ შემთხვევაში სიმრავლეს ეწოდება უსასრულო.

სიმრავლეს ეწოდება რიცხვითი, თუ მისი ელემენტები რიცხვებია. შემდგომში, ჩვენ ძირითადად რიცხვით სიმრავლეებს განვიხილავთ.

მათემატიკის სასკოლო პროგრამით გათვალისწინებულია ნატურალურ, მთელ, რაციონალურ, ირაციონალურ და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეების შესწავლა. გავიხსენოთ ეს სიმრავლეები.

1. რიცხვები $1, 2, 3, \dots$ ნატურალური რიცხვებია, ხოლო მათი სიმრავლე ქმნის ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს. იგი აღინიშნება N ასოთი, ე.ი. $N = \{1; 2; 3; \dots\}$.

2. ნატურალური რიცხვები, მათი მოპირდაპირე რიცხვები და ნული არის მთელი რიცხვები, ხოლო მათი სიმრავლე – მთელ რიცხვთა სიმრავლე. იგი აღინიშნება Z ასოთი, ე.ი. $Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots\}$.

3. $\frac{m}{n}$ სახის წილადი რიცხვები, სადაც $m \in Z$ და $n \in N$, არის რაციონალური რიცხვები, ხოლო მათი სიმრავლე – რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე. იგი აღინიშნება Q ასოთი, ე.ი. $Q = \left\{ \frac{m}{n} : m \in Z, n \in N \right\}$.

4. ათწილადები არის ნამდვილი რიცხვები, ზოლო მათი სიმრავლე – ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. იგი აღინიშნება R ასოთი.

არსებობს სასრული, უსასრულო პერიოდული და უსასრულო არაპერიოდული ათწილადები. სასრული და უსასრულო პერიოდული ათწილადები შეიძლება გადავაქციოთ წილადებად, ანუ ასეთი ათწილადები არის რაციონალური რიცხვები.

5. უსასრულო არაპერიოდული ათწილადები არის ირაციონალური რიცხვები, ზოლო მათი სიმრავლე – ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე და აღინიშნება I ასოთი. მაგალითად, $\sqrt{2} = 1,414213 \dots$ ირაციონალური რიცხვია. ირაციონალური რიცხვი არ გადაიქცევა წილადად.

ამრიგად, რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეების გაერთიანება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა, ე.ი. $R = Q \cup I$.

1.2. ათწილადის დამრგვალება. ათწილადის გადაქცევა წილადად

ბანკებსა და ფინანსურ ორგანიზაციებში მიღებულია თანხების ჩაწერა ათწილადების სახით. მაგალითად, 2376 ლარი და 15 თეთრი (2376 დოლარი და 15 ცენტი) ათწილადის სახით ჩაიწერება ასე: 2376,15 ლარი (დოლარი). ამ ორგანიზაციებში ფინანსური ოპერაციების შესრულების შემდეგ ხდება მიღებული თანხის (რომელიც ჩაწერილია ათწილადის სახით) დამრგვალება მეასედამდე (ანუ თეთრამდე ან ცენტრამდე) სიზუსტით.

ჯერ გავიხსენოთ ათწილადის (მეასედამდე სიზუსტით) დამრგვალების წესი, ზოლო შემდეგ წილადის ათწილადად და პირიქით გადაქცევის წესები.

ათწილადის მეასედამდე სიზუსტით დამრგვალება ხდება შემდეგი წესით:

ა) თუ ათწილადის მათასედის ციფრი არის 0, 1, 2, 3 ან 4, მაშინ ათწილადში რჩება ყველა ციფრი მარცხნიდან მეასედის ჩათვლით, ზოლო დანარჩენი ციფრები წაიშლება. მაგალითად, 2376,1543 ათწილადის მეასედამდე სიზუსტით დამრგვალებისას მიიღება 2376,15 (რადგან მათასედი არის 4).

ბ) თუ ათწილადის მათასედის ციფრი არის 5, 6, 7, 8 ან 9, მაშინ ათწილადში რჩება ყველა ციფრი მარცხნიდან მეასედის ჩათვლით, ზოლო დანარჩენი ციფრები წაიშლება და მეასედის ციფრი გაიზრდება ერთით. მაგალითად, 2376,1573 ათწილადის მეასედამდე სიზუსტით დამრგვალებისას მიიღება 2376,16 (რადგან მათასედი არის 7, ამიტომ მეასედის ციფრი გაიზარდა ერთით და გახდა 6). ამავე წესით 2376,1973 ათწილადის

მეასედიამდე სიზუსტით დამრგვალებისას მიიღება 2376,2 (რადგან მეათასედი არის 7, ამიტომ მეასედის ციფრი გაიზარდა ერთით და გახდა 10. ამ შემთხვევაში ასეულის რაოდენობაში იწერება ციფრი 0, ხოლო ათეულის ციფრი გაიზარდება 1-ით და გახდება 2, ე.ი. მიიღება ათწილადი 2376,20 ანუ 2376,2).

ახლა გავიხსენოთ წილადის ათწილადად და პირიქით (სასრული და უსასრულო პერიოდული ათწილადების წილადად) გადაქცევის წესები.

1. წილადი ათწილადად გადაიქცევა შემდეგი წესით: წილადის მრიცხველს ეყოფთ მნიშვნელზე. მიღებული განაყოფი იქნება სასრული ან უსასრულო პერიოდული ათწილადი. მაგალითად, $\frac{1}{4} = 0,25$, $\frac{3}{11} = 0,2727 \dots$, $\frac{7}{55} = 0,12727 \dots$.

2. ათწილადს, რომელშიც მძიმის შემდეგ სასრული რაოდენობა ციფრია, სასრული ათწილადი ეწოდება. ასეთი ათწილადი წილადად გადაიქცევა შემდეგი წესით: წილადის მრიცხველში ეწერთ რიცხვს, რომელიც ათწილადის მძიმის შემდეგაა, ხოლო მნიშვნელში – 1 -ს და მარჯვნივ მიწერილ იმდენ 0-ს, რამდენი ციფრიცაა ათწილადში მძიმის შემდეგ. მაგალითად, $0,27 = \frac{27}{100}$.

3. უსასრულო ათწილადს, რომელშიც მძიმის შემდეგ ერთი ან რამდენიმე ციფრისაგან შედგენილი რიცხვი უსასრულოდ მეორდება, უსასრულო პერიოდული ათწილადი ეწოდება. მაგალითად, $0,333 \dots = 0,(3)$ (იკითხება: “ნული მთელი 3 პერიოდში”, 3-ს უწოდებენ პერიოდს და იგი (საზოგადოდ კი პერიოდი) იწერება ფრჩხილებში), $0,272727 \dots = 0,(27)$, $0,1272727 \dots = 0,1(27)$.

უსასრულო პერიოდული ათწილადი არის ორი ტიპის: წმინდა პერიოდული ათწილადი და შერეული პერიოდული ათწილადი.

უსასრულო პერიოდულ ათწილადს, რომელშიც პერიოდი იწყება უშუალოდ მძიმის შემდეგ, წმინდა პერიოდული ათწილადი ეწოდება, ხოლო საწინააღმდეგო შემთხვევაში – შერეული პერიოდული ათწილადი. მაგალითად, $0,(3)$ და $0,(27)$ წმინდა პერიოდული ათწილადებია, ხოლო $0,1(27)$ შერეული პერიოდული ათწილადია.

წმინდა პერიოდული ათწილადი წილადად გადაიქცევა შემდეგი წესით: წილადის მრიცხველში ეწერთ პერიოდს, ხოლო მნიშვნელში – იმდენ 9-იანს, რამდენი ციფრიცაა პერიოდში. მაგალითად, $0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $0,(27) = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$.

შერეული პერიოდული ათწილადი წილადად გადაიქცევა შემდეგი წესით: წილადის მრიცხველში ვწერთ რიცხვს მძიმედან პერიოდის ბოლომდე შემცირებულს რიცხვით მძიმედან პერიოდის დასაწყისამდე. მნიშვნელში ვწერთ იმდენ 9-იანს, რამდენი ციფრიცაა პერიოდში და მარჯვნივ ვუწერთ იმდენ 0-ს, რამდენი ციფრიცაა მძიმედან პერიოდის დასაწყისამდე. მაგალითად,

$$0.1(27) = \frac{127 - 1}{990} = \frac{126}{990} = \frac{7}{55}.$$

1.3. რიცხვითი უტოლობის თვისებები

გავიხსენოთ რიცხვითი უტოლობის განმარტება და მისი ძირითადი თვისებები.

ორ გამოსახულებას, შეერთებულს “>” (მეტია) ან “<” (ნაკლებია) ნიშნით, უტოლობა ეწოდება.

$a > b$ ნიშნავს, რომ $a - b$ დადებითია, ხოლო $a < b$ ნიშნავს, რომ $a - b$ უარყოფითია.

რიცხვით უტოლობას გააჩნიათ შემდეგი თვისებები:

1. თუ $a > b$ და $b > c$, მაშინ $a > c$.
2. თუ $a > b$ და c ნებისმიერი რიცხვია, მაშინ $a + c > b + c$ (უტოლობის ორივე ნაწილს შეიძლება დაეუმატოთ (ან გამოვაკლოთ) ერთი და იგივე რიცხვი).
3. თუ $a > b$ და $c > d$, მაშინ $a + c > b + d$.
4. თუ $a > b$ და $c < d$, მაშინ $a - c > b - d$.
5. თუ $a > b$ და c ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, მაშინ $ac > bc$ (უტოლობის ორივე ნაწილის ერთი და იგივე დადებით რიცხვზე გამრავლებისას უტოლობის ნიშანი იგივე რჩება).
6. თუ $a > b$ და c ნებისმიერი უარყოფითი რიცხვია, მაშინ $ac < bc$ (უტოლობის ორივე ნაწილის ერთი და იგივე უარყოფით რიცხვზე გამრავლებისას უტოლობის ნიშანი იცვლება).
7. თუ $a > b > 0$ და $c > d > 0$, მაშინ $ac > bd$.
8. თუ $a > b > 0$ და $0 < c < d$, მაშინ $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

1.4. რიცხვის პროცენტი

რიცხვის მეასედ ნაწილს პროცენტი ეწოდება და % სიმბოლოთი აღინიშნება.

თუ a რიცხვის p პროცენტი არის b , მაშინ ეწერთ ტოლობას

$$\boxed{b = \frac{a \cdot p}{100}} . \quad (1.1)$$

განვიხილოთ სამი ტიპის ამოცანა.

ა) ვიპოვოთ a რიცხვის p პროცენტი.

ცხადია, (1.1) ფორმულის საფუძველზე b იქნება ამ ამოცანის ამონახსნი.

ბ) ვიპოვოთ a რიცხვი, თუ მისი p პროცენტი არის b .

(1.1) ფორმულიდან ვიპოვოთ a . მივიღებთ

$$\boxed{a = \frac{100 \cdot b}{p}} . \quad (1.2)$$

გ) a რიცხვის რამდენი პროცენტია b რიცხვი?

ამჯერად, (1.1) ფორმულიდან ვიპოვოთ p . მივიღებთ

$$\boxed{p = \frac{100 \cdot b}{a}} . \quad (1.3)$$

განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანა პროცენტებზე.

ამოცანა 1.2. ბანკის ადმინისტრაციის გადაწყვეტილებით წლის ბოლოს თანამშრომელთა 15% მიიღებს პრემიას. რამდენ ადამიანს მოუწევს პრემია, თუ ბანკს ჰყავს 120 თანამშრომელი?

ამოხსნა. ეს ამოცანა ა) ტიპისაა. გამოვთვალოთ 120-ის 15%, ანუ (1.1) ფორმულიდან $b = \frac{120 \cdot 15}{100} = 18$, ე.ი. პრემიას მიიღებს ბანკის 18 თანამშრომელი.

ამოცანა 1.3. უნივერსიტეტში სტუდენტთა 30% პირველკურსელია. იპოვეთ უნივერსიტეტში სტუდენტთა რაოდენობა, თუ პირველ კურსზე 1500 სტუდენტი სწავლობს.

ამოხსნა. ეს ამოცანა ბ) ტიპისაა. ვიცით $p = 30\%$, $b = 1500$ და ვიპოვოთ a . თუ გამოვიყენებთ (1.2) ფორმულას, მივიღებთ $a = \frac{100 \cdot 1500}{30} = 5000$, ანუ უნივერსიტეტში სწავლობს 5000 სტუდენტი.

ამოცანა 1.4. 1 მილიონიან ქალაქში 20000 პედაგოგია. ამ ქალაქის მოსახლეობის რამდენ პროცენტს შეადგენენ პედაგოგები?

ამოხსნა. ეს ამოცანა გ) ტიპისაა. ვიცით $a = 1000\ 000$, $b = 20\ 000$ და ვიპოვოთ p . ამ შემთხვევაში (1.3) ფორმულიდან მივიღებთ: $p = \frac{100 \cdot 20\ 000}{1\ 000\ 000} = 2$, ანუ ქალაქის მოსახლეობის 2% არის პედაგოგი.

ხშირად გვხვდება ამოცანები, როცა რაიმე სიდიდე ჯერ იცვლება p_1 პროცენტით, შემდეგ კი p_2 პროცენტით და გვაინტერესებს, თუ რამდენი პროცენტით შეიცვალა საწყისი სიდიდე.

ასეთი ტიპის ამოცანები მარტივად იხსნება შემდეგი ფორმულის გამოყენებით:

$$p = p_1 + p_2 + \frac{p_1 p_2}{100}, \quad (1.4)$$

სადაც p არის საწყისი სიდიდის ცვლილება (ორჯერ ცვლილების შემდეგ) პროცენტებში. ამასთანავე, (1.4) ფორმულაში იგულისხმება, რომ სიდიდის გაზრდის (ან შემცირების) დროს შესაბამისი პროცენტული რაოდენობა დადებითია (ან უარყოფითია).

ამოცანა 1.5. ბენზინის ფასი იანვარში წინა თვესთან შედარებით გაიზარდა 20% -ით, ხოლო თებერვალში – შემცირდა 10% -ით. რამდენი პროცენტით შეიცვალა ბენზინის თავდაპირველი ფასი?

ამოხსნა. ვიცით $p_1 = 20\%$, $p_2 = -10\%$ და უნდა ვიპოვოთ p . (1.4) ფორმულის გამოყენებით გვაქვს

$$p = 20 + (-10) + \frac{20 \cdot (-10)}{100} = 10 - 2 = 8.$$

მაშასადამე, ბენზინის თავდაპირველი ფასი, მისი ორჯერ ცვლილების შედეგად, გაიზარდა 8% -ით.

(1.4) ფორმულიდან ადვილად შეგვიძლია დავინახოთ, რომ ამოცანა 1.5 -ის პასუხი არ შეიცვლება, თუ ბენზინის ფასი ჯერ შემცირდებოდა 10% -ით, ხოლო შემდეგ გაიზრდებოდა 20% -ით ((1.4) ფორმულის მარჯვენა ნაწილში p_1 და p_2 -ის გადანაცვლებით ტოლობის მარცხენა ნაწილი არ შეიცვლება).

1.5. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. გადააქციეთ შემდეგი წილადები ათწილადებად:

$$ა) \frac{3}{4}, \quad ბ) \frac{5}{8}, \quad გ) \frac{2}{3}, \quad დ) \frac{4}{9}, \quad ე) \frac{5}{6}, \quad ვ) \frac{2}{15}.$$

პასუხი: ა) 0,75, ბ) 0,625, გ) 0,(6), დ) 0,(4), ე) 0,8(3), ვ) 0,1(3).

2. გადააქციეთ შემდეგი ათწილადები წილადებად:

$$ა) 0,(5), \quad ბ) 0,(36), \quad გ) 2,(15), \quad დ) 0,1(15), \quad ე) 3,12(6), \quad ვ) 1,3(8).$$

$$პასუხი: ა) \frac{5}{9}, \quad ბ) \frac{4}{11}, \quad გ) 2\frac{5}{33}, \quad დ) \frac{19}{165}, \quad ე) 3\frac{19}{150}, \quad ვ) 1\frac{7}{18}.$$

3. დაამრგვალეთ შემდეგი ათწილადები მესამე სიზუსტით:

$$ა) 2349,3456, \quad ბ) 589,45389, \quad გ) 1272,3971,$$

$$დ) 1272,3941.$$

პასუხი: ა) 2349,35, ბ) 589,45, გ) 1272,4, დ) 1272,39.

4. შეასრულეთ მოქმედებები:

$$ა) \frac{2}{3} + 0,(3), \quad ბ) 1,(4) - 2\frac{2}{9}, \quad გ) 0,(12) + 1,(2), \quad დ) \frac{10000 \cdot (1 + 5 \cdot 0,22)}{12 \cdot 5},$$

$$ე) \frac{3000}{225 \cdot 4 - 3000 \cdot 0,1}.$$

პასუხი: ა) 1, ბ) -0,(7), გ) 1,(34), დ) 350, ე) 5.

5. ბანკის ოფისის 30 თანამშრომლიდან 6 მამაკაცია. თანამშრომელთა რამდენი პროცენტია ქალი?

პასუხი: 80%.

6. ფირმას გეგმით თვეში უნდა გაეყიდა 60 კომპიუტერი. გეგმა შეასრულა 120%-ით. რამდენი კომპიუტერი გაყიდა ფირმა?

პასუხი: 72.

7. ბანკი სახლის აშენებისათვის მომხმარებელს სთავაზობს სახლის ღირებულების 80%-ის ტოლ სესხს. რა ოდენობის სესხს მიიღებს მომხმარებელი ამ ბანკიდან, თუ მას სურს აიშენოს 75 000 დოლარის ღირებულების სახლი?

პასუხი: 60000 დოლარი.

8. 2008 წელს ბანკის კლიენტთა რაოდენობა იყო 5000, ხოლო 2009 წელს მათი რაოდენობა წინა წელთან შედარებით გაიზარდა 30% -ით. რამდენი კლიენტი ჰყავდა ბანკს 2009 წელს?

პასუხი: 6500.

9. ფოტოაპარატის ფასი ჯერ გაიზარდა 15% -ით, ხოლო შემდეგ – 10% -ით. რამდენი პროცენტით გაიზარდა ფოტოაპარატის თავდაპირველი ფასი?

პასუხი: 26,5%.

10. ტელევიზორის ფასი ჯერ გაიზარდა 10% -ით, ხოლო შემდეგ შემცირდა 10% -ით. რამდენი პროცენტით შეიცვალა ტელევიზორის თავდაპირველი ფასი?

პასუხი: შემცირდა 1% -ით.

ლექცია 2

წრფივი ფუნქცია

წრფივი განტოლება

წრფივ განტოლებათა

სისტემის ამოხსნა

ლექცია 2

წრფივი ფუნქცია. წრფივი განტოლება. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა

გეგმა

2.1. წრფივი ფუნქცია

2.1.1. წრფის ზოგადი სახის განტოლება

2.1.2. წრფის განტოლება საკუთხო კოეფიციენტით

2.1.3. x და y ღერძების პარალელური წრფეების განტოლებები

2.2. წრფივი განტოლება

2.3. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა

2.4. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

2.1. წრფივი ფუნქცია

2.1.1. წრფის ზოგადი სახის განტოლება

ვთქვათ, a , b და c ფიქსირებული ნამდვილი რიცხვებია და ამასთანავე, a და b ერთდროულად ნული არ არის, x და y ცვლადებია, რომლებიც ერთმანეთთან დაკავშირებულია ტოლობით

$$\boxed{ax + by = c}. \quad (2.1)$$

ამ ტოლობაში x და y პირველ ხარისხშია. x და y ცვლადების (2.1) დამოკიდებულებას წრფივ ფუნქციას უწოდებენ (რადგან ამ ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს წრფეს). (2.1) არის წრფის ზოგადი სახის განტოლება სიბრტყეზე.

2.1.2. წრფის განტოლება საკუთხო კოეფიციენტით

თუ (2.1) ტოლობაში $b \neq 0$, მაშინ (2.1) -დან მარტივად მივიღებთ განტოლებას

$$\boxed{y = kx + d}, \quad (2.2)$$

სადაც $k = -\frac{a}{b}$, $d = \frac{c}{b}$. შევნიშნოთ, რომ (2.2) -ით არ მოიცემა y ღერძის

პარალელურ წრფეთა განტოლებები.

თუ (2.2) -ით მოცემული წრფე x ღერძთან ადგენს α კუთხეს, მაშინ $k = \operatorname{tg} \alpha$. k რიცხვს უწოდებენ წრფის საკუთხო კოეფიციენტს, ხოლო (2.2) არის წრფის განტოლება საკუთხო კოეფიციენტით სიბრტყეზე.

თუ $k > 0$, მაშინ α მახვილი კუთხეა, ხოლო თუ $k < 0$, მაშინ α ბლაგვია. (2.2) -ში d არის წრფის y ღერძთან გადაკვეთის წერტილის ორდინატი. კერძოდ, ეს წერტილი იქნება $(0; d)$. ცხადია, თუ $d = 0$, მაშინ წრფე გაივლის კოორდინატთა სათავეზე.

2.1.3. x და y ღერძების პარალელური წრფეების განტოლებები

x ღერძის პარალელური წრფის განტოლებაა

$$y = a, \quad (2.3)$$

რომელიც y ღერძს გადაკვეთს წერტილში $(0; a)$, ხოლო y ღერძის პარალელური წრფის განტოლებაა

$$x = b, \quad (2.4)$$

რომელიც x ღერძს გადაკვეთს წერტილში $(b; 0)$.

ახლა განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანა წრფის განტოლების შედგენაზე.

ამოცანა 2.1. შევადგინოთ სიბრტყის $(1; 2)$ წერტილზე $k = 3$ საკუთხო კოეფიციენტით გამავალი წრფის განტოლება. ვიპოვოთ ამ წრფის y ღერძთან გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები.

ამოხსნა. რადგან $k = 3$, ამიტომ (2.2) ფორმულის ძალით წრფის განტოლება იქნება $y = 3x + d$. მეორე მხრივ, ეს წრფე გადის $(1; 2)$ წერტილზე ნიშნავს, რომ ამ წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ წრფის განტოლებას, ე.ი. წრფის განტოლებაში შეგვიძლია ჩავწეროთ $x = 1$ და $y = 2$. მივიღებთ, $2 = 3 \cdot 1 + d$. აქედან, $d = -1$.

მაშასადამე, წრფის განტოლებაა $y = 3x - 1$. ეს წრფე y ღერძს გადაკვეთს წერტილში, რომლის აბსცისა (ანუ x) ნულია, ე.ი. $y = 3 \cdot 0 - 1 = -1$. მივიღებთ, $y = 3x - 1$ წრფე y ღერძს გადაკვეთს წერტილში $(0; -1)$.

ამოცანა 2.2. შევადგინოთ (1; 2) და (3; 8) წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება.

ამოხსნა. წრფის (2.2) განტოლებაში ჩავწეროთ მოცემული წერტილების კოორდინატები. გვაქვს,

$$\begin{aligned} 2 &= k \cdot 1 + d, \\ 8 &= k \cdot 3 + d. \end{aligned} \quad (2.5)$$

მივიღეთ ორი განტოლებისაგან შედგენილი სისტემა ორი უცნობით (k და d). იგი ჯერ გადავწეროთ მარტივი სახით

$$k + d = 2,$$

$$3k + d = 8$$

და შემდეგ, მეორე განტოლებას წევრ-წევრად გამოვაკლოთ პირველი განტოლება. მივიღებთ, $2k = 6$. აქედან კი გვაქვს $k = 3$. ეს მნიშვნელობა შევიტანოთ (2.5) -ის პირველ განტოლებაში. მარტივად მივიღებთ $d = -1$, ე.ი. საძებნი წრფის განტოლება იქნება $y = 3x - 1$.

ამოცანა 2.3. შევადგინოთ (1; 2) წერტილზე გამავალი x და y ღერძების პარალელური წრფეების განტოლებები.

ამოხსნა. ცხადია, (2.3) ფორმულის ძალით, (1; 2) წერტილზე გამავალი x ღერძის პარალელური წრფის განტოლებაა $y = 2$, ხოლო (2.4) ფორმულის ძალით, ამავე წერტილზე გამავალი y ღერძის პარალელური წრფის განტოლებაა $x = 1$.

2.2. წრფივი განტოლება

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ ერთუცნობიან წრფივ განტოლებას.

ერთუცნობიან განტოლებას, რომელშიც უცნობი პირველ ხარისხშია, წრფივი განტოლება ეწოდება. უმარტივეს წრფივ განტოლებას აქვს სახე

$$[ax = b], \quad (2.6)$$

სადაც a და b მოცემული ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო x უცნობია. (2.6) განტოლების ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნის საპოვნელად საჭიროა გავითვალისწინოთ შემდეგი სამი შემთხვევა:

1. თუ $a \neq 0$, მაშინ (2.6) განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და იგი მოიცემა ტოლობით $x = \frac{b}{a}$.

2. თუ $a=0$ და $b \neq 0$, მაშინ (2.6) განტოლებას არ აქვს ამონახსნი, ანუ $x \in \emptyset$.
3. თუ $a=b=0$, მაშინ (2.6) განტოლებას აქვს უამრავი ამონახსნი, ანუ $x \in R$ (ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი აკმაყოფილებს (2.6) განტოლებას).

მოცემული წრფივი განტოლების უმარტივეს (2.6) სახეზე დაყვანისათვის საჭიროა მოვიქცეთ შემდეგნაირად:

1. მოცემული წრფივი განტოლება გავათავისუფლოთ ფრჩხილებისაგან (თუ ასეთი არის განტოლებაში).
2. უცნობის შემცველი წევრები დავალაგოთ ტოლობის ერთ ნაწილში (მაგალითად, მარცხენა ნაწილში), ხოლო დანარჩენი წევრები – მეორე ნაწილში (ტოლობის ერთი ნაწილიდან მეორე ნაწილში გადატანისას წევრის ნიშანი უნდა შეცვალოთ).
3. შევკრიბოთ მსგავსი წევრები.

მივიღებთ (2.6) სახის განტოლებას.

საილუსტრაციოდ ამოვხსნათ განტოლება: $2(3x-4)+5=6-3(1-x)$. ზემოთ მოცემული სქემის მიხედვით მივიღებთ:

1. $6x-8+5=6-3+3x$.
2. $6x-3x=6-3+8-5$.
3. $3x=6$.
4. $x=\frac{6}{3}=2$.

2.3. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა

ვთქვათ, მოცემულია ორუცნობიან ორ წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} \quad (2.7)$$

ამ სისტემის ამოხსნა შესაძლებელია შემდეგი ხერხებით:

1. ჩასმის ხერხით,
2. ალგებრული შეკრების ხერხით,
3. კრამერის ფორმულების გამოყენებით.

განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი. ვიპოვოთ შემდეგი სისტემის

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases} \quad (2.8)$$

ამონახსნი.

- 1) ჯერ (2.8) სისტემა ამოვხსნათ ჩასმის ხერხით. მისი პირველი განტოლებიდან განვსაზღვროთ ერთ-ერთი უცნობი, მაგალითად, x . ცხადია,

$$x = \frac{7-3y}{2}. \quad (2.9)$$

ეს მნიშვნელობა შევიტანოთ (2.8) -ის მეორე განტოლებაში. მივიღებთ,
 $3 \cdot \frac{7-3y}{2} - 4y = 2$. აქედან ვღებულობთ ერთუცნობიან განტოლებას
 $3 \cdot (7-3y) - 8y = 4 \Rightarrow 21 - 9y - 8y = 4 \Rightarrow y = 1$. ეს მნიშვნელობა შევიტანოთ (2.9) განტოლებაში, მივიღებთ, $x = 2$.

პასუხი: (2; 1).

- 2) ახლა (2.8) სისტემა ამოვხსნათ ალგებრული შეკრების ხერხით. მისი პირველი განტოლება გავამრავლოთ 4 -ზე, ხოლო მეორე - 3-ზე. მივიღებთ,

$$\begin{cases} 8x + 12y = 28 \\ 9x - 12y = 6 \end{cases}$$

ეს განტოლებები შევკრიბოთ წევრ-წევრად. ცხადია, გვაქვს $17x = 34$. აქედან $x = 2$. ამ მნიშვნელობის (2.8) -ის პირველი განტოლებაში გათვალისწინებით მარტივად მივიღებთ $y = 1$.

პასუხი: (2; 1).

- 3) კრამერის ფორმულების გამოყენებით ორუცნობიან ორ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად ჯერ განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა, ხოლო შემდეგ ამ ფორმულების გამოყენებით ამოვხსნათ (2.8) სისტემა.

მეორე რიგის დეტერმინანტი, რომელიც შედგენილია (2.7) სისტემის კოეფიციენტებით, აღინიშნება $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ სიმბოლოთი და გამოითვლება შემდეგი

ფორმულით: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$. მაგალითად, $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 1 \cdot 4 = 11$.

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ დეტერმინანტს ეწოდება (2.7) სისტემის დეტერმინანტი.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

მტკიცდება შემდეგი თვისებები:

1. თუ $\Delta \neq 0$, მაშინ (2.7) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც მოიცემა ტოლობებით

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \quad (2.9)$$

ამ ფორმულებს კრამერის ფორმულები ეწოდება.

2. თუ $\Delta = 0$, Δ_1 და Δ_2 დეტერმინანტებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ (2.7) სისტემას ნამდვილ რიცხვთა წყვილების სიმრავლეში არ აქვს ამონახსნი (სისტემა არათავსებადია).
3. თუ $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, მაშინ (2.7) სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი.

ახლა ამოვხსნათ (2.8) სისტემა კრამერის ფორმულების გამოყენებით. გამოვთვალოთ Δ , Δ_1 და Δ_2 დეტერმინანტები:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 9 = -17, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -28 - 6 = -34,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 21 = -17.$$

კრამერის (2.9) ფორმულების დახმარებით მივიღებთ

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-34}{-17} = 2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-17}{-17} = 1.$$

პასუხი: (2; 1).

2.4. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. იპოვეთ მოცემულ წერტილთა წყვილზე გამავალი წრფის საკუთხო კოეფიციენტი:

ა) (2; 4), (4; 8); ბ) (-1; -8), (2; 4).

პასუხი: ა) 2, ბ) 4.

2. შეადგინეთ (2; 3) წერტილზე $k=4$ საკუთხო კოეფიციენტით გამავალი წრფის განტოლება.

პასუხი: $y=4x-5$.

3. შეადგინეთ (2; 3) წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება, რომელიც

ა) პარალელურია x ღერძის,

ბ) პარალელურია y ღერძის.

პასუხი: ა) $y=3$, ბ) $x=2$.

4. დაადგინეთ, რამდენი ამონახსნი აქვს მოცემულ წრფივ განტოლებათა სისტემას:

ა) $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+4y=0 \end{cases}$,

ბ) $\begin{cases} 3x+2y=9 \\ 6x+4y=10 \end{cases}$,

გ) $\begin{cases} 7x-8y=4 \\ 14x-16y=8 \end{cases}$

პასუხი: ა) ერთადერთი, ბ) არ აქვს ამონახსნი. გ) უამრავი,

5. გამოთვალეთ მეორე რიგის დეტერმინანტები:

ა) $\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$,

ბ) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 14 & 8 \end{vmatrix}$,

გ) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}$,

დ) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$.

პასუხი: ა) 20, ბ) -32, გ) 29, დ) -5.

6. ამოხსენით წრფივ განტოლებათა სისტემები ჩასმის ხერხით, ალგებრული შეკრების ხერხით და კრამერის ფორმულების გამოყენებით:

ა) $\begin{cases} 4x-y=5 \\ 3x+2y=1 \end{cases}$,

ბ) $\begin{cases} 5x+2y=4 \\ 7x+4y=8 \end{cases}$,

გ) $\begin{cases} 2x-3y=4 \\ 4x-6y=11 \end{cases}$.

პასუხი: ა) (1;-1), ბ) (0;2), გ) $\emptyset$.

ლექცია 3

სარგებლის ერთჯერადი

და მრავალჯერადი დარიცხვა

არითმეტიკული პროგრესია

სარგებელი მარტივი განაკვეთით

ლექცია 3

სარგებლის ერთჯერადი და მრავალჯერადი ღარიცხვა.
არითმეტიკული პროგრესია. სარგებელი მარტივი განაკვეთით

გეგმა

- 3.1. სარგებლის ერთჯერადი და მრავალჯერადი ღარიცხვა
- 3.2. არითმეტიკული პროგრესია
- 3.3. ძირითადი აღნიშვნები
- 3.4. სარგებელი მარტივი განაკვეთით
- 3.5. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

3.1. სარგებლის ერთჯერადი და მრავალჯერადი ღარიცხვა

თავდაპირველად, გავეცნოთ საბანკო ტერმინოლოგიას, რომელსაც შემდგომში ხშირად გამოვიყენებთ.

ბანკი არის ეკონომიკური ინსტიტუტი (ორგანიზაცია), რომლის ძირითადი ფუნქციებია: ფულადი ანგარიშსწორება, კრედიტების გაცემა, ფულადი სახსრების თავმოყრა და სხვა. საბანკო საქმის ჩანასახი არსებობდა მონათმფლობელურ და ფეოდალურ საზოგადოებებში. შუა საუკუნეებში საბანკო საქმის აღორძინება დაიწყო ჩრდილოეთ იტალიაში. იტალიურ ენაში Banko მერხს, ღაზლს, სავაჭროს ნიშნავს. მერხზე ატარებდნენ თავიანთ ოპერაციებს ზარაფები და მევახშეები.

საფინანსო ოპერაციების დროს, ხშირად, ერთი მხარე (ბანკი, პიროვნება, ორგანიზაცია, სახელმწიფო და ა.შ.) მოგების ანუ სარგებლის მიზნით მეორე მხარეს აძლევს სესხს (კრედიტს).

იმ მხარეს, ვინც ფული გაასესხა (კრედიტი გასცა) კრედიტორი ანუ მევალე ეწოდება, ხოლო იმ მხარეს, ვინც ფული ისესხა (კრედიტი აიღო) – დებიტორი ანუ მოვალე.

მევალესა (კრედიტორსა) და მოვალეს (დებიტორს) შორის, როგორც წესი, ფორმდება ხელშეკრულება, რომელშიც მოცემულია სესხის (კრედიტის) ოდენობა, მისი დაბრუნების ვადა, სარგებლის ოდენობა, მისი ღარიცხვის პერიოდი, ღარიცხვის ფორმები და სხვა.

ბანკში შესანახად შეტანილ ფულად სახსრებს, რომელსაც ჩვეულებისამებრ სარგებელი ერიცხება, ანაბარი (დეპოზიტი) ეწოდება. ლათინურად, depositum ნიშნავს შესანახად მიცემულ რამეს.

არსებობს მრავალი სახის ანაბარი. ერთი და იგივე ტიპის ანაბარზე ბანკები შეთანხმებულ სთავაზობენ სხვადასხვა პირობებსა და სარგებელს. ამ საკითხით დაინტერესებულ პირს უახლესი ინფორმაცია ანაბრების შესახებ შეუძლია მოიპოვოს ინტერნეტიდან (www.google.ge გვერდზე აკრიფეთ სიტყვა “ანაბარი”).

არსებობს სესხებზე (კრედიტებზე) სარგებლის დარიცხვის სხვადასხვა ფორმა. მაგალითად, სესხები ერთჯერადი და მრავალჯერადი დარიცხვით.

დარიცხული თანხის ოდენობას, გამოსახულს პროცენტებში, სარგებლის განაკვეთს უწოდებენ. სარგებლის განაკვეთის მეასედ ნაწილს საპროცენტო განაკვეთი ეწოდება.

ჯერ გავეცნოთ სესხებს ერთჯერადი დარიცხვით, ხოლო შემდეგ განვიხილოთ სესხები მრავალჯერადი დარიცხვით.

სესხი ერთჯერადი დარიცხვით სარგებლის $p\%$ -ანი განაკვეთით ნიშნავს, რომ მოვალემ დადგენილი ვადის გასვლის შემდეგ მევალეს უნდა დაუბრუნოს $p\%$ -ით გაზრდილი თანხა, ე.ი. თუ მოვალემ სესხად აიღო S ოდენობის თანხა, მაშინ მან მევალეს უნდა დაუბრუნოს S' ოდენობის თანხა, სადაც

$$S' = S + \frac{Sp}{100}. \quad (3.1)$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ სესხი გაცემულია ერთჯერადი დარიცხვით სარგებლის $p\%$ -იანი განაკვეთით.

ამოცანა 3.1. ბანკმა გასცა 5000 ლარის ოდენობის სესხი სარგებლის 2% -ანი განაკვეთით ერთჯერადი დარიცხვის პირობით. რა ოდენობის თანხა უნდა დააბრუნოს მოვალემ ბანკში დადგენილი ვადის გასვლის შემდეგ?

ამოხსნა. პირობის თანახმად $S = 5000$, ხოლო $p = 2\%$ და უნდა ვიპოვოთ S' . ჯერ ვიპოვოთ სარგებელი, ანუ 5000 -ის 2%, ხოლო შემდეგ – დასაბრუნებელი თანხა. რადგან 5000 -ის 2% არის 100, ამიტომ (3.1) ფორმულის ძალით $S' = 5000 + 100 = 5100$.

პასუხი: 5100 ლარი.

სესხი მრავალჯერადი დარიცხვით ნიშნავს, რომ სესხის ვადის განმავლობაში სარგებლის დარიცხვები ხდება დროის გარკვეული ინტერვალების გასვლის შემდეგ. როგორც წესი, ეს ინტერვალები კონკრეტული სესხისთვის ერთი და იგივეა.

დროის იმ პერიოდს, რომლის ბოლოს (ან დასაწყისში) ხდება სარგებლის ღარიცხვა, ღარიცხვის პერიოდი ეწოდება. ღარიცხვის პერიოდი შეიძლება იყოს წელი, ნახევარი წელი, კვარტალი, თვე, დღე და სხვა.

ამასთანავე, არსებობს სარგებლის ღარიცხვის რამდენიმე წესი. ძირითადი განსხვავება ამ წესებს შორის არის ის, თუ რომელი თანხიდან იანგარიშება სარგებლის განაკვეთი. კერძოდ, თუ სესხის მთელი ვადის განმავლობაში დასარიცხი სარგებელი $p\%$ -იანი განაკვეთით იანგარიშება კრედიტის საწყისი თანხიდან, მაშინ საქმე გვაქვს სარგებლის მარტივ განაკვეთთან. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ კრედიტი გაცემულია სარგებლის $p\%$ -იანი მარტივი განაკვეთით.

თუ სესხის მთელი ვადის განმავლობაში დასარიცხი სარგებელი $p\%$ -იანი განაკვეთით იანგარიშება კრედიტის მიმდინარე თანხიდან, მაშინ საქმე გვაქვს სარგებლის რთულ განაკვეთთან. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ კრედიტი გაცემულია სარგებლის $p\%$ -იანი რთული განაკვეთით.

შემდგომში ჩვენ დეტალურად შევისწავლით სარგებლის მრავალჯერად ღარიცხვებს მარტივი და რთული განაკვეთებით. ჯერ გავიხსენოთ არითმეტიკულ პროგრესიის რამდენიმე ფორმულა, ზოლო შემდეგ გამოვიყვანოთ საბოლოო თანხის გამოსათვლელი ფორმულა სარგებლის მარტივი განაკვეთის შემთხვევაში.

3.2. არითმეტიკული პროგრესია

რიცხვთა $a_1, a_2, \dots, a_n$ მიმდევრობას, რომლის ყოველი წევრი, დაწყებული მეორედან, მიიღება წინა წევრზე ერთი და იმავე d რიცხვის დამატებით, არითმეტიკული პროგრესია ეწოდება.

$a_1, a_2, \dots, a_n$ რიცხვებს შესაბამისად ეწოდება არითმეტიკული პროგრესიის პირველი, მეორე და ა. შ., n -ური წევრი. d რიცხვს ეწოდება პროგრესიის სხვაობა. ცხადია, $d = a_{k+1} - a_k$, სადაც $k = 1, 2, \dots, n-1$.

არითმეტიკული პროგრესიის k -ური წევრის გამოსათვლელად გვაქვს ფორმულა

$$a_k = a_1 + d(k-1), \quad (3.2)$$

სადაც $k = 1, 2, \dots, n$. პირველი n წევრის ჯამი $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ გამოითვლება ფორმულებით:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n} \quad \text{და} \quad \boxed{S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n}. \quad (3.3)$$

განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანა პროგრესიებზე.

ამოცანა 3.2. ბანკმა პირველ წელს გახსნა 5 ფილიალი, ხოლო ყოველ მომდევნო წელს გეგმის შესაბამისად უნდა გახსნას 2 ფილიალით მეტი, ვიდრე წინა წელს. რამდენ ფილიალს გახსნის ბანკი მე-10 წელს და სულ რამდენი ფილიალი ექნება მას 10 წლის ბოლოს?

ამოხსნა. ცხადია, ბანკის მიერ ყოველწლიურად გახსნილი ფილიალების რაოდენობა კმნის არითმეტიკულ პროგრესიას, რომლის პირველი წევრი $a_1 = 5$, სხვაობა $d = 2$, წევრთა რაოდენობა $k = 10$. გამოვიყენოთ (3.2) ფორმულა. ცხადია, მეათე წელს ბანკი გახსნის $a_{10} = a_1 + d(k-1) = 5 + 2(10-1) = 23$ ფილიალს, ხოლო (3.3) ფორმულის ძალით ათ წელიწადში მას ექნება $S_{10} = \frac{5+23}{2} \cdot 10 = 14 \cdot 10 = 140$ ფილიალი.

3.3. ძირითადი აღნიშვნები

შემდგომში ჩვენ გამოვიყენებთ შემდეგ აღნიშვნებს (სარგებლის როგორც მარტივი, ასევე რთული განაკვეთისას):

1. l - წლების რაოდენობა, ანაბრის ვადა (ხანგრძლივობა), საკრედიტო ვადა,
2. m - დარიცხვების რაოდენობა წელიწადში,
3. n - სულ დარიცხვების რაოდენობა l წლის განმავლობაში, ე. ი.

$$\boxed{n = ml}, \quad (3.4)$$

4. p - სარგებლის წლიური (ნომინალური) განაკვეთი (პროცენტული რაოდენობა),
5. r - სარგებლის განაკვეთი (პროცენტული რაოდენობა) თითოეული დარიცხვის პერიოდისათვის, ე.ი.

$$\boxed{r = \frac{p}{m}}, \quad (3.5)$$

6. j - წლიური (ნომინალური) საპროცენტო განაკვეთი, ე.ი.

$$j = \frac{p}{100}, \quad (3.6)$$

7. i - საპროცენტო განაკვეთი ღარიცხვის თითოეული პერიოდისათვის, ე.ი.

$$i = \frac{r}{100} = \frac{j}{m}, \quad (3.7)$$

8. K_0 - საწყისი თანხის ოდენობა ანაბარზე, გაცემული კრედიტი ან სესხი,

9. K_n - თანხის ოდენობა სარგებლის n -ჯერ ღარიცხვის შემდეგ,

10. D - მოგება, სარგებელი, დისკონტი, ე.ი.

$$D = K_n - K_0. \quad (3.8)$$

3.4. სარგებელი მარტივი განაკვეთით

გამოვიყვანოთ ფორმულა, რომლითაც გამოითვლება სარგებლის მარტივი განაკვეთით დაბანდებული თანხის ოდენობა საკრედიტო ვადის ბოლოს.

განვიხილოთ სარგებლის მარტივი განაკვეთის მრავალჯერადი ღარიცხვის ორი შემთხვევა: ა) სარგებლის ღარიცხვა წელიწადში ერთხელ და ბ) სარგებლის ღარიცხვა წელიწადში რამდენჯერმე.

ა) ვთქვათ, K_0 ოდენობის თანხა დაბანდებული გვაქვს სარგებლის წლიური $p\%$ -ანი მარტივი განაკვეთით წელიწადში ერთხელ ღარიცხვის პირობით. რა ოდენობის თანხა გვექნება l წლის შემდეგ?

რადგან სარგებლის ღარიცხვა ხდება წელიწადში ერთხელ, ამიტომ $m=1$. (3.4) და (3.7) ფორმულებიდან მივიღებთ $n=l$, $i=j$. ცხადია, პირველი წლის

შემდეგ K_0 ოდენობის თანხა მოიმატებს $\frac{K_0 p}{100} = K_0 i$ -ით და გახდება

$K_1 = K_0 + K_0 i = K_0 (1+i)$, მეორე წლის ბოლოს მოიმატებს ისევ $K_0 i$ -ით და გახდება $K_2 = K_1 + K_0 i = K_0 (1+2i)$ და ა.შ., ხოლო n წლის ბოლოს გვექნება $K_n = K_{n-1} + K_0 i = K_0 (1+ni)$.

მაშასადამე, სარგებლის წლიური $p\%$ -ანი მარტივი განაკვეთით, ანუ სარგებლის წლიური i მარტივი საპროცენტო განაკვეთით წელიწადში ერთხელ ღარიცხვის პირობით დაბანდებული K_0 ოდენობის თანხა საკრედიტო ვადის (n წლის) ბოლოს იქნება

$$K_n = K_0(1 + ni) \quad (3.9)$$

მეორე მხრივ, ადვილად შევამჩნევთ, რომ $K_0, K_1, \dots, K_n$ რიცხვები ქმნიან არითმეტიკულ პროგრესიას, რომლის პირველი წევრია K_0 , პროგრესიის სხვაობაა $K_0 i$, ხოლო პროგრესიის $(n+1)$ -ე წევრია K_n . (3.2) ფორმულის გამოყენებით ადვილად მივიღებთ (3.9) ტოლობის სამართლიანობას.

ამოცანა 3.3. 1000 ლარი გაცემულია სესხად 5 წლით სარგებლის წლიური 3% -ანი მარტივი განაკვეთით. დარიცხვის პერიოდია 1 წელი. ვიპოვოთ დაგროვილი (საბოლოო) თანხა.

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად საწყისი თანხაა $K_0 = 1000$ ლარი, $m = 1$, წლების რაოდენობაა $l = n = 5$, ხოლო სარგებლის წლიური მარტივი განაკვეთია $p = 3\%$, ანუ წლიური საპროცენტო განაკვეთია $j = i = 0,03$. თუ გამოვიყენებთ (3.9) ფორმულას, მივიღებთ

$$K_5 = 1000(1 + 5 \cdot 0,03) = 1000 \cdot 1,15 = 1150.$$

მაშასადამე, დაგროვილი თანხაა 1150 ლარი.

ამოცანა 3.4. 1000 ლარი გაცემულია სესხად რამდენიმე წლით სარგებლის წლიური 5% -ანი მარტივი განაკვეთით. დარიცხვის პერიოდია 1 წელი. საბოლოო თანხაა 1300 ლარი. განსაზღვროთ სესხის ხანგრძლივობა.

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად, საწყისი თანხაა $K_0 = 1000$ ლარი, საპროცენტო განაკვეთია $j = 0,05$, ხოლო საბოლოო თანხაა $K_n = 1300$ ლარი. (3.9) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ: $1300 = 1000(1 + 0,05n)$. აქედან გვაქვს $1300 = 1000 + 50n$, $50n = 300$, ანუ $n = 6$. მაშასადამე, სესხის ხანგრძლივობაა 6 წელი.

ბ) ვთქვათ, K_0 ოდენობის თანხა დაბანდებული გვაქვს სარგებლის წლიური $p\%$ -ანი მარტივი განაკვეთით წელიწადში m -ჯერ დარიცხვის პირობით. რა ოდენობის თანხა გვექნება l წლის შემდეგ?

ცხადია, თუ წელიწადში ხდება სარგებლის ორჯერ დარიცხვა, მაშინ $m = 2$. ყოველკვარტალური დარიცხვისას $m = 4$, ყოველთვიური დარიცხვისას $m = 12$, ხოლო ყოველდღიური დარიცხვისას $m = 365$ ან $m = 366$.

რადგან სარგებლის დარიცხვა ხდება წელიწადში m -ჯერ, ამიტომ (3.4) ფორმულის ძალით l წლის შემდეგ დარიცხვების რაოდენობა იქნება $n = ml$, სარგებლის განაკვეთი (პროცენტული რაოდენობა) დარიცხვის თითოეული

პერიოდისათვის იქნება $r = \frac{p}{m}$. ამიტომ პირველი დარიცხვის პერიოდის ბოლოს K_0 ოდენობის თანხა მოიმატებს $\frac{K_0 r}{100} = K_0 i$ -ით და გახდება $K_1 = K_0 + K_0 i = K_0 (1 + i)$, სადაც $i = \frac{r}{100}$. მეორე პერიოდის ბოლოს K_1 ოდენობის თანხა მოიმატებს ისევ $K_0 i$ -ით და გახდება $K_2 = K_1 + K_0 i = K_0 (1 + 2i)$ და ა.შ. ხოლო n წლის ბოლოს გვექნება $K_n = K_{n-1} + K_0 i = K_0 (1 + ni)$. აქედან მარტივად შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნა:

სარგებლის წლიური $p\%$ -ანი მარტივი განაკვეთით, ანუ წლიური j მარტივი საპროცენტო განაკვეთით წელიწადში m -ჯერ დარიცხვის პირობით დაბანდებული K_0 ოდენობის თანხა საკრედიტო ვადის (l წლის) ბოლოს გამოითვლება ისევ (3.9) ფორმულით, სადაც m და i შესაბამისად მოიცემა (3.4) და (3.7) ფორმულებით.

მეორე მხრივ, (3.4) და (3.7) ფორმულებიდან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\boxed{ni = lj} \quad (3.10)$$

თუ გავითვალისწინებთ (3.10) ტოლობას (3.9) -ში, მივიღებთ

$$\boxed{K_n = K_0 (1 + lj)} \quad (3.11)$$

მაშასადამე, (3.11) ფორმულაში არ მონაწილეობს m . ეს ნიშნავს, რომ სარგებლის წლიური მარტივი განაკვეთისას წელიწადში მრავალჯერადი დარიცხვის პირობით საბოლოო თანხა არ არის დამოკიდებული წელიწადში სარგებლის დარიცხვების რაოდენობაზე (m -ზე).

(3.11) ფორმულის მიხედვით, K_n პირდაპირპროპორციულია K_0 -ის, ხოლო l -ის (და j -ის) მიმართ წრფივი ფუნქციაა.

ამოცანა 3.5. გიორგიმ ანაბარზე შეიტანა 2000 ლარი 4 წლის ვადით სარგებლის წლიური 10% -ანი განაკვეთით. ამასთანავე, გიორგის ამ ანაბარიდან ყოველი წლის ბოლოს გამოაქვს დარიცხული სარგებელი. იპოვეთ ანაბარზე დაგროვილი თანხა.

ამოხსნა. ყურადღება მივაქციოთ შემდეგ ფაქტს: რადგან ყოველი წლის ბოლოს გიორგის ანაბარიდან გამოაქვს დარიცხული სარგებელი, ამიტომ ანაბარზე ყოველი წლის დასაწყისში იქნება ერთი და იგივე თანხა (2000 ლარი). რის გამოც, თითოეული წლის ბოლოს ანაბარზე დაირიცხება ერთი და

იგივე ოდენობის თანხა 200 ლარი (2000 -ის 10% არის 200). მაშასადამე, ეს ანაბარი გახსნილია სარგებლის მარტივი განაკვეთით.

(3.11) ფორმულის გამოყენებით მარტივად მივიღებთ:

$$K_4 = 2000 (1 + 4 \cdot 0,1) = 2000 \cdot 1,4 = 2800.$$

შევნიშნოთ, რომ ეს ამოცანა ასევე შეიძლება ამოიხსნას სხვა ხერხითაც: რადგან თითოეული წლის ბოლოს ანაბარზე დარიცხება 200 ლარის ოდენობის სარგებელი, ამიტომ 4 წლის განმავლობაში ანაბარზე დარიცხული სარგებელი იქნება 800 ლარი. მაშასადამე, ანაბარზე დაგროვილი თანხა იქნება 2800 ლარი (დაგროვილი თანხა არის მეანაბრის მიერ სულ მიღებული თანხა).

პასუხი: 2800 ლარი.

ამოცანა 3.6. თამარმა 3 წლით ვადით ანაბარზე შეიტანა 1000 ლარი სარგებლის მარტივი განაკვეთით ყოველი წლის ბოლოს დარიცხვის პირობით, ხოლო გიორგიმ 4 წლის ვადით ანაბარზე შეიტანა ორჯერ მეტი თანხა სარგებლის იგივე განაკვეთით ყოველი წლის ბოლოს დარიცხვის პირობით. ანაბრის ვადის ამოწურვის შემდეგ გიორგიმ მიიღო ორჯერ მეტი თანხა და კიდევ 200 ლარი, ვიდრე თამარმა. სარგებლის რა განაკვეთით იყო ანაბრები გახსნილი? იპოვეთ გიორგის მიერ მიღებული თანხა.

ამოხსნა. ვთქვათ, ანაბრები გახსნილი იყო სარგებლის $p\%$ -ანი განაკვეთით და თამარმა 3 წლის ბოლოს მიიღო x ოდენობის თანხა. (3.11) ფორმულის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ $x = 1000 (1 + 3j)$, სადაც $j = \frac{p}{100}$.

მეორე მხრივ, ამოცანის პირობის თანახმად, გიორგიმ ანაბარზე შეიტანა 2000 ლარი. (3.11) ფორმულის თანახმად 4 წლის ბოლოს მის ანგარიშზე იქნება $2000 \cdot (1 + 4j)$ ლარი. როგორც ამოცანის პირობიდან ცნობილია, გიორგიმ თამართან შედარებით მიიღო ორჯერ მეტი თანხა და კიდევ 200 ლარი, ანუ $2x + 200$ ლარი. (3.11) ფორმულის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი განტოლება $2x + 200 = 2000 \cdot (1 + 4j)$. მაშასადამე, x და j უცნობების მიმართ მივიღოთ ორუცნობიანი წრფივ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} x = 1000 (1 + 3j) \\ 2x + 200 = 2000 (1 + 4j) \end{cases}$$

გავამარტივოთ მიღებული სისტემის თითოეული განტოლება. გვაქვს

$$\begin{cases} x = 1000 + 30p \\ 2x + 200 = 2000 + 80p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1000 + 30p \\ 2x - 80p = 1800 \end{cases}$$

ეს სისტემა ამოვხსნათ ჩასმის ხერხით (ცხადია, იგი შეიძლება ამოვხსნათ ალგებრული შეკრების ხერხით ან კრამერის ფორმულების გამოყენებით (იხ. ლექცია 2)). ბოლო სისტემის პირველი განტოლებიდან x -ის მნიშვნელობა

ჩავსვით იმავე სისტემის მეორე განტოლებაში. მარტივად მივიღებთ ერთუცნობიან განტოლებას $2(1000 + 30p) - 80p = 1800$. აქედან გვაქვს $2000 + 60p - 80p = 1800$, ანუ $20p = 200$ და $p = 10$.

ცხადია, $x = 1000 + 30 \cdot 10 = 1300$. რადგან გიორგის მიერ მიღებული თანხაა $2x + 200$, ამიტომ გვაქვს $2x + 200 = 2 \cdot 1300 + 200 = 2800$.

მაშასადამე, ანაბრები გახსნილი იყო სარგებლის 10% -ანი მარტივი განაკვეთით, ხოლო გიორგიმ 4 წლის ბოლოს მიიღო 2800 ლარი.

3.5. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. გიორგიმ ბანკიდან გარკვეული ვადით აიღო 1000 ლარის ოდენობის სესხი სარგებლის 5% -ანი განაკვეთით ერთხელ დარიცხვის პირობით. რა ოდენობის თანხა უნდა დაუბრუნოს გიორგიმ ბანკს, სესხის ვადის ამოწურვისას.

პასუხი: 1050 ლარი.

2. სამშენებლო კომპანიამ პირველ წელს ააშენა 4 საცხოვრებელი კორპუსი, ხოლო ყოველ მომდევნო წელს აშენებდა 3 კორპუსით მეტს. რამდენ კორპუსს ააშენებს კომპანია მე-10 წელს და სულ რამდენი კორპუსი ექნება აშენებული 10 წელიწადში?

პასუხი: 31 და 175.

3. ბანკში 5 წლის ვადით შეტანილია 3000 დოლარი სარგებლის წლიური 3% -ანი მარტივი განაკვეთით. რა თანხას გადაუხდის ბანკი მეანაბრეს 5 წლის შემდეგ?

პასუხი: 3450 დოლარი.

4. ფირმამ ბანკიდან 5 წლის ვადით აიღო სესხი 2000 დოლარის ოდენობით სარგებლის წლიური 10% -ანი მარტივი განაკვეთით ყოველკვარტალური დარიცხვის პირობით. რა თანხას დაუბრუნებს ფირმა ბანკს 5 წლის შემდეგ?

პასუხი: 3000 დოლარი.

5. 5000 ლარი გაცემულია სესხად სარგებლის წლიური 4% -ანი მარტივი განაკვეთით. გამოიანგარიშეთ 3 წლის განმავლობაში დაგროვილი თანხა. რამდენი პროცენტით გაიზარდა საწყისი კაპიტალი?

პასუხი: 5600 ლარი, 12%.

6. რამდენი ლარი მოგვეცემს ორ წელიწადში 4800 ლარს, თუ იგი გაცემულია სარგებლის წლიური 10% -ანი მარტივი განაკვეთით.
პასუხი: 4000 ლარი.
7. 2000 ლარი გაცემულია სესხად სარგებლის ნომინალური 5% -ანი მარტივი განაკვეთით. საბოლოო თანხაა 3000 ლარი. განსაზღვრეთ სესხის ხანგრძლივობა.
პასუხი: 10 წელი.
8. ბანკი ყოველ წლის ბოლოს ანაბარზე ამატებს საწყისი თანხის 20%-ის ოდენობის სარგებელს. რა თანხა იქნება ანაბარზე 3 წლის შემდეგ, თუ ანაბარზე საწყისი თანხა 500 ლარია?
პასუხი: 800 ლარი.
9. 10000 ლარი გაცემულია სესხად სარგებლის წლიური 5% -ანი მარტივი განაკვეთით. რა თანხა იქნება ანაბარზე მეოთხე წლის ბოლოს.
პასუხი: 12000 ლარი.
10. თამარმა საბანკო ანგარიშზე შეიტანა 1000 ლარი 5 წლის ვადით სარგებლის წლიური 10% -ანი განაკვეთით. ამასთანავე, ყოველი წლის ბოლოს თამარს ანაბრიდან გამოაქვს სარგებელი. იპოვეთ 5 წლის ბოლოსათვის დაგროვილი თანხა.
პასუხი: 1500 ლარი.
11. საწყისი კაპიტალი 5000 დოლარი 4 წლის შემდეგ გახდა 5600 დოლარი. იპოვეთ სარგებლის წლიური მარტივი განაკვეთი.
პასუხი: 3%.
12. 2000 დოლარი ბანკიდან აღებულია სესხად 3 წლის ვადით, სარგებლის წლიური 5% -ანი მარტივი განაკვეთით. გამოთვალეთ ბანკის მოგება სესხის ვადის ბოლოსათვის.
პასუხი: 300 ლარი.
13. 3000 დოლარი გაცემულია სესხად 6 თვით სარგებელი ყოველთვიური 2% -ანი მარტივი განაკვეთით. იპოვეთ დაგროვილი თანხა
პასუხი: 3360 დოლარი.

14. გიორგიმ ბანკში შეიტანა 1000 დოლარი სარგებლის ნომინალური p -ანი განაკვეთით და სარგებლის ყოველი წლის ბოლოს გამოტანის პირობით. 4 წლის შემდეგ მისი სარგებელი შეადგენდა 300 დოლარს. რა ნომინალური განაკვეთით შეიტანა გიორგიმ ბანკში თანხა?

პასუხი: 7,5%.

15. თამარმა ბანკში შეიტანა 1000 დოლარი სარგებლის ნომინალური p -ანი განაკვეთით და ღარიცხვის n -თვიანი პერიოდით. ყოველი n თვის შემდეგ მას გამოჰქონდა ბანკიდან სარგებელი. 4 წლის შემდეგ მისი სარგებელი აღმოჩნდა 300 დოლარი. სარგებლის რა ნომინალური განაკვეთით შეიტანა თამარმა ბანკში თანხა? შეადარეთ ერთმანეთს 14 და 15 ამოცანების სარგებლის ნომინალური განაკვეთების სიდიდეები. ახსენით ფაქტი.

პასუხი: 7,5%.

16. თამარმა 5 წლით ვადით ანაბარზე შეიტანა 2000 ლარი სარგებლის მარტივი განაკვეთით ყოველი წლის ბოლოს ღარიცხვის პირობით, ხოლო გიორგიმ 4 წლის ვადით ანაბარზე შეიტანა სამჯერ მეტი თანხა სარგებლის იგივე განაკვეთით ყოველი წლის ბოლოს ღარიცხვის პირობით. ანაბრის ვადის ამოწურვის შემდეგ გიორგიმ მიიღო ორჯერ მეტი თანხა და კიდევ 2600 ლარი, ვიდრე თამარმა. სარგებლის რა განაკვეთით იყო ანაბრები გახსნილი? იპოვეთ გიორგის მიერ მიღებული თანხა.

პასუხი: 15%, 9600 ლარი.

ლექცია 4

რიცხვის ხარისხი და ლოგარითმი

ხარისხოვანი, მაჩვენებლიანი და
ლოგარითმული ფუნქციები

ლექცია 4

რიცხვის ხარისხი და ლოგარითმი. ხარისხოვანი, მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები

გეგმა

- 4.1. რიცხვის ხარისხი
- 4.2. რიცხვის ლოგარითმი
- 4.3. ხარისხოვანი და მაჩვენებლიანი ფუნქციები
- 4.4. ლოგარითმული ფუნქცია
- 4.5. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

4.1. რიცხვის ხარისხი

მეხუთე ლექციაში ჩვენ შევისწავლით სარგებელს რთული განაკვეთით, რომელშიც გამოვიყენებთ რიცხვის ხარისხისა და ლოგარითმის თვისებებს. ასევე, დაგვჭირდება ხარისხოვანი, მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების ზოგიერთი ძირითადი თვისება. რის გამოც, აუცილებელია გავიხსენოთ აღნიშნული საკითხები სასკოლო პროგრამიდან.

ამასთანავე, მომდევნო ლექციებში ძირითადად განვიხილავთ რთული განაკვეთის მქონე სარგებელთან დაკავშირებულ სხვადასხვა საკითხს. ანუ, ამ ლექციაში განხილული საკითხების კარგად ცოდნა გამოგვადგება მომდევნო ლექციებში შესასწავლი მასალის უკეთ გაგებაში.

ახლა მოვიყვანოთ რიცხვის ხარისხის განმარტება და მისი ძირითადი თვისებები.

უბრალოდ, a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია ($a \in \mathbb{R}$), ხოლო n ნატურალურია ($n \in \mathbb{N}$), მაშინ a^n ნიშნავს a რიცხვის ნამრავლს თავისთავზე n -ჯერ, ე.ი.

$$a^n = a \cdot a \cdots a \quad (n \text{ -ჯერ}).$$

a^n -ს ეწოდება ხარისხი, a -ს - ხარისხის ფუძე, ხოლო n -ს - ხარისხის მაჩვენებელი.

რიცხვის ხარისხს გააჩნია შემდეგი თვისებები:

თუ $a, b \in \mathbb{R}$ და $n, m \in \mathbb{N}$, მაშინ

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$,
2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, როცა $a \neq 0$,
3. $(ab)^n = a^n b^n$,
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, როცა $b \neq 0$, (4.1)
5. $(a^n)^m = a^{nm}$,
6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, როცა $a \neq 0$.

შევნიშნოთ, რომ (4.1) ფორმულები მართებულია აგრეთვე, როცა a და b დადებითია ($a > 0$, $b > 0$), ხოლო n და m ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია ($n, m \in R$). ამ შემთხვევაში, a^n იქნება დადებითი რიცხვი, ანუ დადებითი რიცხვი ნებისმიერ ხარისხში დადებითია.

გარდა ზემოთ ჩამოთვლილისა, რიცხვის ხარისხს აქვს, აგრეთვე, შემდეგი თვისებები:

6. $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$, როცა $a > 0$, $n \in N$, $m \in N$,
7. $a^0 = 1$, როცა $a \neq 0$,
8. $0^n = 0$, როცა $n > 0$,
9. 0^0 აზრი არ აქვს.

ამ თვისებების გამოყენებით ამოვხსნათ შემდეგი ამოცანები.

ამოცანა 4.1. ამოვხსნათ მაჩვენებლიანი განტოლება $3^{-x} = 27$.

ამოხსნა. მოცემული განტოლების მარჯვენა ნაწილში რიცხვი 27 ჩავწეროთ 3-ის ხარისხის სახით. მივიღებთ $3^{-x} = 3^3 \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow x = -3$.

ამოცანა 4.2. ამოვხსნათ განტოლება $100 \cdot 0,1^{-3x} = 10^x$.

ამოხსნა. რადგან $100 = 10^2$, $0,1 = 10^{-1}$ და $0,1^{-3x} = (10^{-1})^{-3x} = 10^{3x}$, ამიტომ მოცემული განტოლება ასე ჩაიწერება $10^2 \cdot 10^{3x} = 10^x \Rightarrow 10^{2+3x} = 10^x \Rightarrow 2+3x = x \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$.

4.2. რიცხვის ლოგარითმი

ეთქვას, a -ს n ხარისხი არის რაიმე b რიცხვი. ეს წინადადება მათემატიკურად ასე ჩაიწერება

$$\boxed{a'' = b} . \quad (4.2)$$

ამ ტოლობაში მონაწილეობს სამი რიცხვი. თუ ცნობილია ორი მათგანი, შეგვიძლია ვიპოვოთ მესამე რიცხვიც. მართლაც,

1. თუ (4.2) ტოლობაში ვიცით a და n , მაშინ ხარისხის განმარტების საფუძველზე ვიპოვოთ b რიცხვს (a -ს ავახარისხებთ n ხარისხში და მივიღებთ b -ს). მაგალითად, ვიპოვოთ b , თუ $5^3 = b$. ცხადია, $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$, ანუ $b = 125$, ე.ი. ამ შემთხვევაში ვიყენებთ ახარისხების ოპერაციას.

2. თუ (4.2) ტოლობაში ვიცით b და n , მაშინ a -ს საპოვნელად საჭიროა გამოვთვალოთ n -ური ხარისხის ფესვი b -დან (ანუ ვიპოვოთ ის რიცხვი, რომლის n ხარისხი არის b). ეს მათემატიკურად ასე ჩაიწერება:

$$\boxed{a = \sqrt[n]{b}} .$$

მაგალითად, თუ $a^3 = 125$, მაშინ $a = \sqrt[3]{125} = 5$, ე.ი. ამ შემთხვევაში ვიყენებთ ფესვის ამოღების ოპერაციას.

3. თუ (4.2) ტოლობაში ვიცით a და b , მაშინ საინტერესოა, როგორ ვიპოვოთ n . მაგალითად, თუ $5^n = 125$, მაშინ ეს ტოლობა ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ: $5^n = 5^3$ (ანუ ტოლობის ორივე ნაწილი დავიყვანოთ ტოლ ფუძეზე). აქედან ვწეროთ: $n = 3$ (ხარისხის მაჩვენებლები ტოლია).

ახლა განვიხილოთ მეორე მაგალითი. ვთქვათ, $5^n = 124$. ვიპოვოთ n . საჭიროა 124 ჩავწეროთ 5-ის ხარისხის სახით (ანუ 124 ჩავწეროთ ისეთი ხარისხის სახით, რომლის ფუძე იქნება 5) და შემდეგ გავუტოლოთ ერთმანეთს ხარისხის მაჩვენებლები (ისე, როგორც წინა მაგალითში მოვიქცეთ), ე.ი. ბუნებრივად მივიღეთ შემდეგი ამოცანა: 124 ჩავწეროთ 5-ის ხარისხის სახით, ზოგადად კი, b ჩავწეროთ a -ს ხარისხის სახით.

ამ ამოცანის ამოხსნაში გვეხმარება ლოგარითმის ოპერაცია, რომელიც შემდეგნაირად განიმარტება:

b რიცხვის ლოგარითმი a -ს ფუძით, სადაც

$$\boxed{a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0}, \quad (4.3)$$

ეწოდება ისეთ რიცხვს, რომელშიც უნდა ავახარისხოთ a , რომ მივიღოთ b .

b რიცხვის ლოგარითმი a -ს ფუძით ჩაიწერება ასე: $\log_a b$ და იკითხება: ლოგარითმი a -ს ფუძით b -სი. a -ს ეწოდება ლოგარითმის ფუძე. შევნიშნოთ, რომ $\log_a b$ განსაზღვრულია (არსებობს), როცა დაცულია (4.3) პირობა.

ზშირად გამოიყენება ისეთი ლოგარითმები, რომლის ფუძეა 10. ასეთ ლოგარითმს ფუძეში 10 -ს არ უწერენ და ჩაწერენ ასე $\lg b$.

მაშასადამე, განმარტების თანახმად, $\log_a b$ არის ხარისხის მაჩვენებელი, რომელშიც a რიცხვის ახარისხებით მივიღებთ b -ს. ანუ გვაქვს ტოლობა $b = a^{\log_a b}$. თუ ამ ტოლობას წავიკითხავთ მარჯვნიდან მარცხნივ, მივიღებთ

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}. \quad (4.4)$$

ამრიგად, ნებისმიერი b დადებითი რიცხვი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ისეთი ხარისხის სახით, რომლის ფუძეა დადებითი და ერთისაგან განსხვავებული ნებისმიერი a რიცხვი.

ამით, ზემოთ ბუნებრივად მიღებული ამოცანა გადავწყვიტეთ ლოგარითმის ოპერაციის გამოყენებით.

ახლა დაეუბრუნდეთ ჩვენს ამოცანას: ვიპოვოთ n , თუ $5^n = 124$. უკვე მარტივად შევძლებთ 124 -ის ჩაწერას 5-ის ხარისხის საშუალებით. მართლაც, (4.4) ტოლობის ძალით გვაქვს: $124 = 5^{\log_5 124}$, ანუ მოცემული განტოლება ჩაიწერება ასე: $5^n = 5^{\log_5 124}$. აქედან კი მივიღებთ $n = \log_5 124$. ცხადია, $\log_5 124$ არ არის მთელი რიცხვი (არ არსებობს მთელი რიცხვი, რომელშიც შეიძლება ავახარისხოთ 5, რომ მივიღოთ 124). მტკიცდება, რომ $\log_5 124$ ირაციონალური რიცხვია.

გავიხსენოთ ლოგარითმის თვისებები:

1. $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ (ნამრავლის ლოგარითმი ლოგარითმების ჯამის ტოლია),
2. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ (განაყოფის ლოგარითმი ლოგარითმების სხვაობის ტოლია),
3. $\log_a b^n = n \log_a b$,

$$4. \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (\text{ახალ ფუძეზე გადასვლის ფორმულა}),$$

$$5. \log_a b = \frac{1}{\log_b a},$$

$$6. \log_a a = 1,$$

$$7. \log_a 1 = 0 \quad (\text{ერთის ლოგარითმი ნული}).$$

ამ თვისებების გამოყენებით უკვე მარტივად შეგვიძლია ამოვხსნათ მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებები. განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანა.

ამოცანა 4.3. ამოვხსნათ განტოლება: $5^{2x-3} = 27$.

ამოხსნა. ლოგარითმის განმარტების თანახმად ვწერთ

$$2x - 3 = \log_5 27 \Rightarrow 2x = 3 + \log_5 27 \Rightarrow x = \frac{3 + \log_5 27}{2}.$$

ამოცანა 4.4. ამოვხსნათ განტოლება: $3^{x+2} = 2^x$.

ამოხსნა. გავითვალისწინოთ, რომ როცა განტოლებაში შედის სხვადასხვა ფუძიანი ხარისხები, სასურველია გავალოგარიტმოთ ტოლობის ორივე ნაწილი 10-ის ფუძით. მივიღებთ

$$\lg 3^{x+2} = \lg 2^x \Rightarrow (x+2) \lg 3 = x \lg 2 \Rightarrow x \lg 3 + 2 \lg 3 = x \lg 2.$$

x -ის შემცველი წევრები დავალაგოთ ტოლობის მარცხენა ნაწილში, $2 \lg 3$ გადავიტანოთ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში, ხოლო შემდეგ x გავიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ. მივიღებთ

$$x \lg 3 - x \lg 2 = -2 \lg 3 \Rightarrow x (\lg 3 - \lg 2) = -2 \lg 3 \Rightarrow x = -\frac{2 \lg 3}{\lg 3 - \lg 2}.$$

ამოცანა 4.5. ამოვხსნათ განტოლება: $\lg(x-3) + 3 \lg 2 = 2$.

ამოხსნა. რადგან $3 \lg 2 = \lg 2^3 = \lg 8$ და ლოგარითმების ჯამი უდრის ნამრავლის ლოგარითმს, ამიტომ მოცემული განტოლება ასე ჩაიწერება $\lg(x-3) + \lg 8 = 2 \Rightarrow \lg[8(x-3)] = 2$. ლოგარითმის განმარტების საფუძველზე აქედან მივიღებთ $8(x-3) = 100 \Rightarrow x-3 = \frac{25}{2} \Rightarrow x = 3 + 12,5 \Rightarrow x = 15,5$.

4.3. ხარისხოვანი და მაჩვენებლიანი ფუნქციები

$y = x^n$ სახის ფუნქციას, სადაც $n \in \mathbb{R}$, ხარისხოვანი ფუნქცია ეწოდება. ჩვენ განვიხილოთ შემთხვევა, როცა n ნატურალური რიცხვია $n \in \mathbb{N}$.

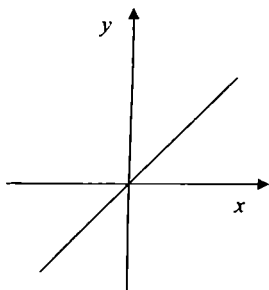
როცა $n=1$, მაშინ მივიღებთ წრფივ ფუნქციას $y=x$ და მისი გრაფიკი წარმოადგენს კოორდინატთა სათავეზე გამავალ წრფეს (იხ. ნახ. 4.1).

როცა $n=2$, მაშინ მივიღებთ კვადრატულ ფუნქციას $y=x^2$. მისი გრაფიკი წარმოადგენს პარაბოლას, რომლის შტოები მიმართულია ზევით, ხოლო პარაბოლის წვერო მდებარეობს კოორდინატთა სათავეში (იხ. ნახ. 4.2).

როცა $n=3$, მაშინ მივიღებთ კუბურ ფუნქციას $y=x^3$. მისი გრაფიკი წარმოადგენს წირს, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე (იხ. ნახ. 4.3).

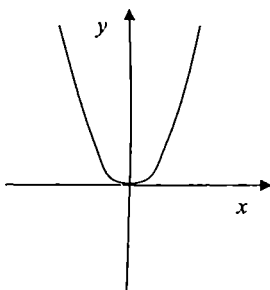
როცა n არის ლუწი რიცხვი $4, 6, 8, \dots$, მაშინ ამ ფუნქციის გრაფიკი ისეთივე ფორმისაა, როგორიც კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი, მაგრამ შტოები უფრო ახლოს აქვს y ღერძთან, ვიდრე $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკს.

როცა n არის კენტი რიცხვი $5, 7, 9, \dots$, მაშინ ამ ფუნქციის გრაფიკი ისეთივე ფორმისაა, როგორც კუბური ფუნქციის გრაფიკი, მაგრამ შტოები უფრო ახლოს აქვს y ღერძთან, ვიდრე $y=x^3$ ფუნქციის გრაფიკს.



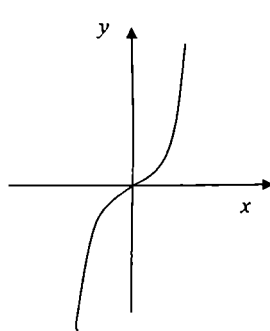
ნახ. 4.1

$y = x$ ფუნქციის გრაფიკი



ნახ. 4.2

$y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკი



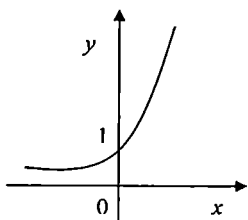
ნახ. 4.3

$y = x^3$ ფუნქციის გრაფიკი

$y = a^x$ სახის ფუნქციას, სადაც $a > 0$ და $a \neq 1$, მაჩვენებლიანი ფუნქცია ეწოდება.

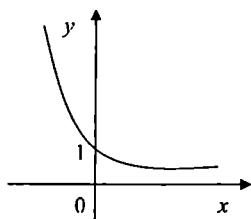
რადგან $a > 0$, ამიტომ $y > 0$. ეს ნიშნავს, რომ $y = a^x$ ფუნქციის გრაფიკი ყოველთვის x ღერძის ზევით მდებარეობს.

თუ $a > 1$, მაშინ $y = a^x$ ფუნქცია ზრდადია, ხოლო თუ $0 < a < 1$, მაშინ იგი კლებადია (იხ. ნახ. 4.4 და 4.5).



ნახ. 4.4

$y = a^x$ ფუნქციის გრაფიკი ($a > 1$)



ნახ. 4.5

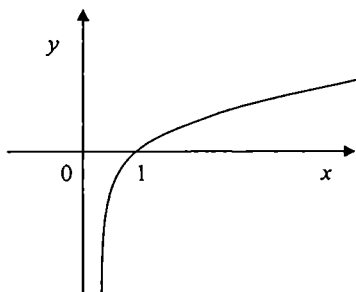
$y = a^x$ ფუნქციის გრაფიკი ($0 < a < 1$)

4.4. ლოგარითმული ფუნქცია

$y = \log_a x$ სახის ფუნქციას, სადაც $a > 0$ და $a \neq 1$, ლოგარითმული ფუნქცია ეწოდება.

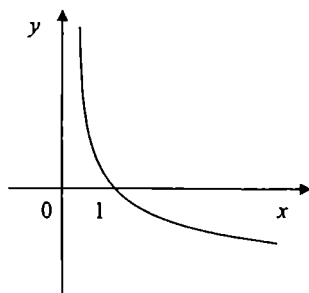
რადგან $\log_a x$ არსებობს როცა $x > 0$, ამიტომ ლოგარითმული ფუნქციის გრაფიკი ყოველთვის მდებარეობს y ღერძის მარჯვნივ.

თუ $a > 1$, მაშინ $y = \log_a x$ ფუნქცია ზრდადია, ხოლო თუ $0 < a < 1$, მაშინ იგი კლებადია (იხ. ნახ. 4.6 და 4.7).



ნახ. 4.6

$y = \log_a x$ ფუნქციის გრაფიკი ($a > 1$)



ნახ. 4.7

$y = \log_a x$ ფუნქციის გრაფიკი ($0 < a < 1$)

4.5. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. გამოთვალეთ:

$$ა) 3^{-5} \cdot 3^7 + 2 \cdot 3^{-1} \cdot 81, \quad ბ) 10^2 \cdot (2 \cdot 3^{10})^0 - 3^4, \quad გ) \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(1\frac{1}{2}\right)^2.$$

პასუხი: ა) 63, ბ) 19, გ) 6,25.

2. შეასრულეთ მოქმედებები:

$$ა) \frac{m^5}{m^3} - \frac{3(m^3)^2}{m^4}, \quad ბ) (-3x^2y^3)^4, \quad გ) (-1,2a^8b^3) \cdot (-0,3a^5b).$$

პასუხი: ა) $-2m^2$, ბ) $81x^8y^{12}$, გ) $4a^3b^2$.

3. ამოხსენით მაჩვენებლიანი განტოლებები:

$$ა) 32 \cdot 2^{x+1} = 1024, \quad ბ) 7^x - 7^{x-1} = 6, \quad გ) 3^{x-1} \cdot 2^{3x-7} = 12^{9-x},$$

$$დ) 7^{x+1} = 12.$$

პასუხი: ა) 2, ბ) 1, გ) 5, დ) $-1 + \log_7 12$.

4. ამოხსენით ლოგარითმული განტოლებები:

$$ა) \lg(\lg x) = 0, \quad ბ) \log_5(5^x - 20) = 1, \quad გ) \log_5 x + 6 \log_5 x = 7.$$

პასუხი: ა) 10, ბ) 2, გ) 5.

ლექცია 5

გეომეტრიული პროგრესია

სარგებელი რთული განაკვეთით

ლექცია 5

გეომეტრიული პროგრესია. სარგებელი რთული განაკვეთით

გეგმა

- 5.1. გეომეტრიული პროგრესია
- 5.2. სარგებელი რთული განაკვეთით
- 5.3. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

5.1. გეომეტრიული პროგრესია

რიცხვთა $b_1, b_2, \dots, b_n$ მიმდევრობას, რომლის პირველი წევრი განსხვავებულია ნულისაგან ($b_1 \neq 0$), ხოლო დანარჩენი წევრი მიიღება წინა წევრის ერთი და იმავე ნულისაგან განსხვავებულ q რიცხვზე გამრავლებით ($q \neq 0$), გეომეტრიული პროგრესია ეწოდება.

$b_1, b_2, \dots, b_n$ რიცხვებს შესაბამისად ეწოდებათ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი, მეორე და ა.შ., n -ური წევრი. q რიცხვს ეწოდება პროგრესიის მნიშვნელი.

გეომეტრიული პროგრესიის k -ური წევრის გამოსათვლელად გვაქვს ფორმულა

$$b_k = b_1 q^{k-1}, \quad (5.1)$$

სადაც $k = 1, 2, \dots, n$, ხოლო პირველი n წევრის ჯამი $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ გამოითვლება ფორმულით

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \quad (5.2)$$

სადაც $q \neq 1$.

5.2. სარგებელი რთული განაკვეთით

მესამე ლექციაში გავეცანით სარგებელს მარტივი განაკვეთით. ვიცით, რომ ამ შემთხვევაში სესხის მთელი ვადის განმავლობაში დასარიცხი სარგებელი $p\%$ -ანი განაკვეთით იანგარიშება კრედიტის საწყისი თანხიდან.

საბანკო საქმეში უმეტესად გვხვდება ისეთი სესხები (კრედიტები, ანაბრები), როცა სესხის მთელი ვადის განმავლობაში დასარიცხი სარგებელი $p\%$ -ანი განაკვეთით იანგარიშება მიმდინარე თანხიდან (წინა პერიოდის გაზრდილ თანხას ემატება მისივე $p\%$). ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ სესხი (კრედიტი) გაცეპულია სარგებლის $p\%$ -ანი რთული განაკვეთით, ანუ გვაქვს სარგებელი რთული განაკვეთით.

გამოვიყვანოთ ფორმულა, რომლითაც გამოითვლება სარგებლის რთული განაკვეთით დაბანდებული თანხის საბოლოო ოდენობა საკრედიტო ვადის ბოლოსათვის. ცალ-ცალკე განვიხილოთ შემთხვევები: ა) სარგებლის დარიცხვა ხდება წელიწადში ერთხელ, და ბ) სარგებლის დარიცხვა ხდება წელიწადში m -ჯერ, სადაც m ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია.

ა) ეთქვათ, K_0 ოდენობის თანხა დაბანდებული გვაქვს სარგებლის წლიური $p\%$ -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. რა ოდენობის თანხა გვექნება l წლის შემდეგ?

რადგან სარგებლის დარიცხვა ხდება წელიწადში ერთხელ ($m=1$), ამიტომ წლების რაოდენობა l სარგებლის დარიცხვების მთლიანი რაოდენობის n -ის ტოლია, ანუ $l=n$. ამასთანავე, $j=i$, სადაც j წლიური საპროცენტო განაკვეთია, $j = \frac{p}{100}$, ხოლო i არის საპროცენტო განაკვეთი თითოეული დარიცხვის პერიოდისათვის (ამ შემთხვევაში სარგებლის დარიცხვის პერიოდია წელიწადი).

პირველი წლის შემდეგ K_0 ოდენობის თანხა მოიმატებს $\frac{K_0 p}{100}$ -ით ანუ $K_0 j$ -ით და გახდება

$$K_1 = K_0 + K_0 j = K_0 (1 + j).$$

მეორე წლის ბოლოს K_1 ოდენობის თანხა ისევ მოიმატებს მისი $p\%$ -ით ანუ $K_1 j$ -ით და გახდება

$$K_2 = K_1 + K_1 j = K_1 (1 + j) = K_0 (1 + j)^2.$$

ამ პროცესის გაგრძელებით მარტივად ვაჩვენებთ, რომ n წლის ბოლოს გვექნება

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-1} j = K_0 (1 + j)^n.$$

მაშასადამე, სარგებლის წლიური $p\%$ -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით (ანუ j საპროცენტო განაკვეთით) დაბანდებული K_0 ოდენობის თანხა საკრედიტო ვადის (n წლის) ბოლოს გახდება

$K_n = K_0(1+j)^n$. რადგან $j=i$ (ვიზილათ შემთხვევას, როცა სარგებლის დარიცხვა ხდება წელიწადში ერთხელ), ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$K_n = K_0(1+i)^n. \quad (5.3)$$

მეორე მხრივ, ცხადია, $K_0, K_1, \dots, K_n$ რიცხვები ქმნიან გეომეტრიულ პროგრესიას, რომლის პირველი წევრია K_0 , პროგრესიის მნიშვნელია $1+j$, ხოლო პროგრესიის $(n+1)$ -ე წევრია K_n . (5.1) ფორმულის გამოყენებით ადვილად მივიღებთ (5.3) ფორმულის სამართლიანობას.

ამოცანა 5.1. ბანკმა 3 წლის ვადით გასცა სესხი 10000 დოლარი სარგებლის წლიური 5% -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. რა ოდენობის თანხა უნდა დააბრუნოს მოვალემ ბანკში დადგენილი ვადის გასვლის შემდეგ?

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად, საწყისი თანხაა $K_0 = 10\,000$ დოლარი, სარგებლის დარიცხვის რაოდენობაა $n=3$, ხოლო სარგებლის რთული განაკვეთია 5%, ანუ საპროცენტო განაკვეთია $i=0,05$. თუ გამოვიყენებთ (5.3) ფორმულას, მივიღებთ

$$K_3 = 10000(1+0,05)^3 = 10000 \cdot 1,05^3 = 11576,25.$$

მაშასადამე, მოვალემ უნდა დააბრუნოს 11576,25 დოლარი.

ბ) ვთქვათ, K_0 ოდენობის თანხა დაბანდებული გვაქვს l წლის ვადით სარგებლის წლიური $p\%$ -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში m -ჯერ დარიცხვის პირობით. რა ოდენობის თანხა გვექნება l წლის შემდეგ?

რადგან სარგებლის დარიცხვა ხდება წელიწადში m -ჯერ, ამიტომ l წლის განმავლობაში დარიცხვების მთლიანი რაოდენობა n ტოლი იქნება ml -ის, ანუ $n=ml$. ამასთანავე, j წლიური საპროცენტო განაკვეთისათვის გვაქვს ფორმულა $j = \frac{p}{100}$, ხოლო თითოეული დარიცხვის პერიოდისათვის სარგებლის

განაკვეთი იქნება $r = \frac{p}{m}$ და საპროცენტო განაკვეთი გამოითვლება ფორმულით

$$i = \frac{j}{m} = \frac{r}{100}.$$

პირველი პერიოდის შემდეგ K_0 ოდენობის თანხა მოიმატებს $r\%$ -ით ანუ $\frac{K_0 r}{100}$ -ით (ე.ი. $K_0 i$ -ით) და გახდება

$$K_1 = K_0 + K_0 i = K_0 q,$$

სადაც $q = 1 + i$. მეორე პერიოდის ბოლოს K_1 ოდენობის თანხა ისევ მოიმატებს მისი $r\%$ -ით ანუ $K_1 i$ -ით და გახდება

$$K_2 = K_1 + K_1 i = K_1 q = K_0 q^2.$$

სრულიად ანალოგიურად მივიღებთ $K_3 = K_2 + K_2 i = K_2 q = K_0 q^3$.

ცხადია, $K_0, K_1, K_2, \dots, K_n$ რიცხვები ქმნიან გეომეტრიულ პროგრესიას, რომლის პირველი წევრია K_0 , პროგრესიის მნიშვნელია q , ხოლო პროგრესიის $(n+1)$ -ე წევრია K_n . (5.1) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ $K_n = K_0 q^n$, ანუ მართებულია (5.3) ფორმულა.

მიღებული შედეგი ჩამოვყალიბოთ თეორემის სახით.

თეორემა 5.1. *სარგებლის წლიური $p\%$ -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში m -ჯერ დარიცხვის პირობით დაბანდებული K_0 ოდენობის თანხა საკრედიტო ვადის (l წლის) ბოლოს გახდება K_n ოდენობის, რომელიც გამოითვლება ფორმულით*

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{j}{m} \right)^n, \quad (5.4)$$

სადაც $n = ml$ (n - დარიცხვების მთლიანი რაოდენობა), ხოლო $j = \frac{p}{100}$ (j - წლიური საპროცენტო განაკვეთია).

(5.4) ფორმულაში 5 სიდიდეა: K_0, K_n, j, m და n . ამ ფორმულის თანახმად აღნიშნულ სიდიდეებს შორის არის შემდეგი დამოკიდებულება:

1. თუ j, m და n მუდმივია, მაშინ საბოლოო თანხა K_n არის საწყისი თანხის K_0 -ის პირდაპირპროპორციული, ანუ K_0 -ის რამდენჯერმე გადიდება (ან შემცირება) იწვევს K_n -ის იმდენჯერმე გადიდებას (ან შემცირებას). ამასთანავე, K_n წრფივი ფუნქციაა K_0 -ის მიმართ (იხ. ლექცია 2, (5.4) ფორმულაში K_0 არის პირველ ხარისხში).
2. თუ K_0, m და n მუდმივია, მაშინ საბოლოო თანხა K_n არის j -ს მიმართ ხარისხოვანი ფუნქცია n მაჩვენებლით (იხ. ლექცია 4).

3. თუ K_0, m და j მუდმივია, მაშინ საბოლოო თანხა K_n არის n -ის მიმართ მაჩვენებლიანი ფუნქცია (იხ. ლექცია 4). რადგან $1 + \frac{j}{m} > 1$, ამიტომ ეს ფუნქცია ზრდადია. ე.ი. სარგებლის რთული განაკვეთისას საბოლოო თანხა იზრდება დარიცხვების რაოდენობის გაზრდასთან ერთად ისე, როგორც მაჩვენებლიანი ფუნქცია.

4. მარტივი საპროცენტო განაკვეთის დროს მნიშვნელობა არა აქვს, წელიწადში ერთხელ ხდება დარიცხვა, თუ რამდენჯერმე (იხ. ლექცია 3). რთული განაკვეთის დროს კი საბოლოო თანხა არსებითად არის დამოკიდებული დარიცხვების რაოდენობაზე, რაც ნათლად ჩანს (5.4) ფორმულიდან.

5. როგორც მესამე ლექციაში გავეცანით, სარგებლის მარტივი განაკვეთისას საბოლოო თანხა იზრდება დარიცხვების რაოდენობის ზრდასთან ერთად (როგორც წრფივი ფუნქცია) შემდეგი ფორმულის მიხედვით $K_n = K_0(1 + ni)$ (იხ. ფორმულა (3.9)). შევადაროთ ერთმანეთს საბოლოო თანხის ოდენობა სარგებლის მარტივი და რთული განაკვეთებისას (გამოვიყენოთ (3.9) და (5.4) ფორმულები).

როცა $n=1$ (ერთჯერადი დარიცხვა), მაშინ (3.9) და (5.4) ფორმულებით გამოთვლილი K_1 ერთი და იგივეა. ანუ ერთჯერადი დარიცხვისას მნიშვნელობა არ აქვს, სარგებელი მარტივი განაკვეთით დაირიცხება, თუ რთულით. ორივე შემთხვევაში საბოლოო თანხის ოდენობა ტოლია.

როცა $n>1$ (მრავალჯერადი დარიცხვა), მაშინ სარგებლის რთული განაკვეთისას (5.4) ფორმულით გამოთვლილი K_n უფრო მეტია, ვიდრე სარგებლის მარტივი განაკვეთისას (3.9) ფორმულით გამოთვლილი K_n (რადგან მაჩვენებლიანი ფუნქცია უფრო სწრაფად იზრდება, ვიდრე წრფივი ფუნქცია).

მაშასადამე, ერთი და იმავე საპროცენტო განაკვეთისა და დარიცხვების ერთი და იმავე რაოდენობის დროს: ა) მუანაბრისათვის უფრო მომგებიანია რთული საპროცენტო განაკვეთით თანხის დაბანდება, ვიდრე მარტივი საპროცენტო განაკვეთით, და ბ) მოვალესათვის უფრო ხელსაყრელია მარტივი საპროცენტო განაკვეთით სესხის აღება, ვიდრე რთული საპროცენტო განაკვეთით. ეს დასკვნა კარგად დავიმახსოვროთ, რადგან იგი ძალიან მნიშვნელოვანია საფინანსო გადაწყვეტილებების მიღებისას.

ამოცანა 5.2. თამარმა 1000 დოლარი შეიტანა ანაბარზე წლიური 10 % - ანი რთული განაკვეთით 5 წლის ვადით ყოველწლიური დარიცხვის პირობით. ვიპოვოთ დაგროვილი თანხა.

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად $K_0 = 1000$, $m = 1$ ანუ $i = j = 0,1$, $n = 5$. თუ გამოვიყენებთ (5.3) ფორმულას, მივიღებთ

$$K_5 = 1000 \cdot (1 + 0,1)^5 = 1000 \cdot 1,1^5 = 1610,51.$$

მაშასადამე, დაგროვილი თანხა იქნება 1610,51 დოლარი.

ამოცანა 5.3. გიორგიმ 6 წლის ვადით ბანკიდან აიღო სესხი 1000 ლარის ოდენობით სარგებლის წლიური 10 % -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. რა ოდენობის თანხა უნდა დაუბრუნოს გიორგიმ ბანკს 6 წლის შემდეგ?

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად $K_0 = 1000$, $m = 1$ ანუ $i = j = 0,1$, $n = 6$. თუ გამოვიყენებთ (5.3) ფორმულას, მივიღებთ (აქ და შემდგომში ათწილადები დავამრგვალოთ მეასედამდე სიზუსტით ისევე, როგორც ეს საბანკო ოპერაციების შესრულებისას ხდება)

$$K_6 = 1000 \cdot (1 + 0,1)^6 = 1000 \cdot 1,1^6 = 1771,56. \quad (5.5)$$

მაშასადამე, გიორგიმ ბანკს უნდა დაუბრუნოს 1771,56 ლარი. შევნიშნოთ, რომ (5.5)-ში ბოლო ტოლობა დაწერილია მეასედამდე სიზუსტით.

5.3. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. ამოცანა 5.2 -ის პირობებში ვიპოვოთ საბოლოო თანხა, თუ სარგებელი გაიცემა მარტივი განაკვეთით. შევადაროთ ერთმანეთს ორივე ამოცანის საბოლოო თანხები და გავაკეთოთ შესაბამისი დასკვნა.

პასუხი: 1500 დოლარი.

2. ამოცანა 5.2 -ის პირობებში ვიპოვოთ საბოლოო თანხა, თუ დარიცხვა ხდება:

ა) წელიწადში ორჯერ ($m = 2$), ბ) კვარტალურად ($m = 4$).

პასუხი: ა) 1628,89 დოლარი, ბ) 1638,62 დოლარი.

3. 2000 დოლარი გაცემულია სესხად სამი წლის ვადით სარგებლის წლიური 5%-ანი რთული განაკვეთით ყოველწლიური დარიცხვის პირობით. რა ოდენობის თანხა უნდა დააბრუნოს მოვალემ 3 წლის შემდეგ?

პასუხი: 2315,25 დოლარი.

4. ბანკში 5 წლის ვადით შეტანილია 3000 ლარი სარგებლის წლიური 3% - ანი რთული განაკვეთით ყოველწლიური დარიცხვის პირობით. რა თანხას გადაუხდის ბანკი მენაბრეს 5 წლის შემდეგ?

პასუხი: 3477,82 ლარი.

5. ბანკში დაბანდებულია 5000 ლარი 4 წლის ვადით სარგებლის წლიური 7% -ანი რთული განაკვეთით ყოველწლიური დარიცხვის პირობით. გამოთვალეთ დაგროვილი თანხა.

პასუხი: 6553,98 ლარი.

6. ფირმამ ბანკიდან 5 წლის ვადით სარგებლის ყოველწლიური 10% -ანი რთული განაკვეთით ყოველწლიური დარიცხვის პირობით აიღო სესხი 2000 დოლარის ოდენობით. რა თანხას დაუბრუნებს ფირმა ბანკს ხუთი წლის შემდეგ?

პასუხი: 3221,02 დოლარი.

7. საწყისი კაპიტალი 2000 დოლარი ორი წლის შემდეგ გახდა 2420 დოლარი. იპოვეთ სარგებლის წლიური რთული განაკვეთი, თუ სარგებლის დარიცხვა ხდებოდა წელიწადში ერთხელ.

პასუხი: 10%.

8. რამდენი წლით უნდა შეიტანოთ ბანკში 10000 ლარი სარგებლის ნომინალური 10% -ანი რთული განაკვეთით ყოველწლიური დარიცხვის პირობით, რომ დაგროვდეს 13310 დოლარი?

პასუხი: 3 წელი.

ლექცია 6

დისკონტირება, დისკონტი

დისკონტირება, დისკონტი

გეგმა

- 6.1. დისკონტირება სარგებლის მარტივი განაკვეთისას
- 6.2. დისკონტირება სარგებლის რთული განაკვეთისას
- 6.3. დისკონტი სარგებლის მარტივი განაკვეთისას
- 6.4. დისკონტი სარგებლის რთული განაკვეთისას
- 6.5. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

6.1. დისკონტირება სარგებლის მარტივი განაკვეთისას

საბანკო საქმეში ხშირად გვხვდება ისეთი ამოცანები, როცა ცნობილია ანაბარზე თანხის საბოლოო ოდენობა (დაგროვილი თანხა) და საჭიროა ვიპოვოთ მისი საწყისი ოდენობა.

საბოლოო (დაგროვილი) თანხის საშუალებით საწყისი თანხის პოვნას დისკონტირება ეწოდება.

განვიხილოთ შემდეგი ორი ამოცანა ანაბრის (კრედიტის) საწყისი თანხის პოვნის შესახებ.

ამოცანა 6.1. მშობელს სურს შეიღისათვის გახსნას საბავშვო ანაბარი 15 წლის ვადით სარგებლის წლიური 20 % -ანი მარტივი განაკვეთით ყოველწლიური დარიცხვის პირობით ისე, რომ ამ ვადის ამოწურვის შემდეგ ანაბარზე იყოს 20000 ლარი. რა ოდენობის თანხა უნდა შეიტანოს მშობელმა ანაბარზე?

ამოცანა 6.2. გიორგის სურს ბინის მშენებლობისათვის ბანკიდან აიღოს გრძელვადიანი კრედიტი 15 წლის ვადით სარგებლის წლიური 20 % -ანი მარტივი განაკვეთით ყოველწლიური დარიცხვის პირობით ისე, რომ ამ ვადის ამოწურვის შემდეგ მან ბანკს დაუბრუნოს 20000 ლარი. რა ოდენობის კრედიტი უნდა აიღოს გიორგიმ?

ადვილი მისახვედრია, რომ 6.1 და 6.2 ამოცანები მათემატიკური თვალსაზრისით ერთი და იგივეა. ორივე ამოცანაში მოცემულია საბოლოო

თანხის ოდენობა, სარგებლის წლიური განაკვეთი, სარგებლის დარიცხვის პერიოდი, ანაბრის (კრედიტის) ხანგრძლივობა და საჭიროა საწყისი თანხის პოვნა.

ამ ამოცანების ამოხსნა მარტივად შეიძლება საწყისი თანხის გამოსათვლელი ფორმულის გამოყენებით. გამოვიყენოთ ეს ფორმულა.

ჯერ განვიხილოთ სარგებლის მარტივი განაკვეთის შემთხვევა. როგორც ვიცით (იხ. (3.9) ფორმულა), სარგებლის მარტივი განაკვეთისას საბოლოო თანხა გამოითვლება ფორმულით $K_n = K_0(1 + ni)$, სადაც K_0 და K_n შესაბამისად არის საწყისი და საბოლოო თანხა, n დარიცხვების მთლიანი რაოდენობა, ხოლო i სარგებლის საპროცენტო განაკვეთია თითოეული დარიცხვის პერიოდისათვის. ამ ფორმულიდან ვიპოვოთ K_0 . მივიღებთ

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + ni} \quad (6.1)$$

ეს ფორმულა წარმოადგენს საწყისი თანხის გამოსათვლელ ფორმულას სარგებლის მარტივი განაკვეთის შემთხვევაში. (6.1) ფორმულის გამოყენებით უკვე შეგვიძლია 6.1 და 6.2 ამოცანების ამოხსნა.

ამოხსნა. რადგან ორივე ამოცანაში სარგებლის დარიცხვა ხდება წელიწადში ერთხელ, ამიტომ $n = 15$, $i = \frac{20}{100} = 0,2$, $K_{15} = 20000$. თუ გამოვიყენებთ (6.1) ფორმულას, მივიღებთ

$$K_0 = \frac{20000}{1 + 15 \cdot 0,2} = \frac{20000}{1 + 3} = 5000.$$

მაშასადამე, ამოცანა 6.1 -ის მიხედვით მშობელმა ანაბარზე უნდა შეიტანოს 5000 ლარი, რომ 15 წლის შემდეგ მიიღოს 20000 ლარი. ამასთანავე, ამოცანა 6.2 -ის მიხედვით გიორგის შეუძლია აიღოს 5000 ლარის ოდენობის კრედიტი, მაგრამ 15 წლის შემდეგ მან ბანკს უნდა დაუბრუნოს 20000 ლარი.

6.2. დისკონტირება სარგებლის რთული განაკვეთისას

ახლა განვიხილოთ სარგებლის რთული განაკვეთის შემთხვევა. როგორც ვიცით (იხ. (5.4) ფორმულა), სარგებლის რთული განაკვეთისას საბოლოო თანხა გამოითვლება ფორმულით $K_n = K_0 \left(1 + \frac{j}{m}\right)^n$, სადაც K_0 და K_n

შესაბამისად არის საწყისი და საბოლოო თანხა, n დარიცხვების მთლიანი რაოდენობა, m წელიწადში სარგებლის დარიცხვების რაოდენობა, ხოლო j

სარგებლის წლიური (ნომინალური) საპროცენტო განაკვეთია. ამ ფორმულიდან ვიპოვოთ K_0 . მივიღებთ

$$K_0 = \frac{K_n}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^n} . \quad (6.2)$$

(6.2) წარმოადგენს საწყისი თანხის გამოსათვლელ ფორმულას სარგებლის რთული განაკვეთის შემთხვევაში.

ამოცანა 6.3. თამარმა ბანკს დაუბრუნა 10000 დოლარი სამი წლის წინ ბანკიდან აღებული სესხის პირობის მიხედვით. რამდენი დოლარი აიღო თამარმა სესხად, თუ იგი ბანკმა გასცა სარგებლის ნომინალური 7% -ანი რთული განაკვეთით ყოველწლიური დარიცხვის პირობით?

ამოხსნა. მოცემულია: $m = 1$, $l = n = 3$, $p = 7\%$ (რთული განაკვეთი), $j = \frac{7}{100} = 0,07$, $K_3 = 10000$ და ვიპოვოთ K_0 . (6.2) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$K_0 = \frac{10000}{(1 + 0,07)^3} = \frac{10000}{1,07^3} = \frac{10000}{1,225043} = 8162,98 .$$

მაშასადამე, თამარმა სამი წლის წინ სესხად აიღო 8162,98 დოლარი. ყურადღება მივაქციოთ ბოლო ტოლობას, რომელშიც გამოყენებულია ათწილადის დამრგვალება მეასედამდე სიზუსტით.

6.3. დისკონტი სარგებლის მარტივი განაკვეთისას

როგორც ვიცით, საფინანსო ორგანიზაციები გასცემენ თანხებს, ხოლო ფიზიკური პირები ბანკებში ხსნიან ანაბრებს გარკვეული მოგების (სარგებლის) მიღების მიზნით. ცხადია, ამ შემთხვევაში მოგება არის დაგროვილი (საბოლოო) თანხისა და საწყისი თანხის სხვაობა. ამ სხვაობას საფინანსო ტერმინოლოგიით დისკონტი ეწოდება და აღინიშნება D ასოთი. მაშასადამე,

$$D = K_n - K_0 . \quad (6.3)$$

ამასთანავე, ჩვენ უკვე კარგად ვიცით K_n -ის გამოსათვლელი ფორმულები (3.9) სარგებლის მარტივი განაკვეთისა და (5.4) სარგებლის რთული განაკვეთის შემთხვევებში. აღნიშნული ფორმულების გამოყენებით შეგვიძლია მივიღოთ უფრო მოსახერხებელი ფორმულა დისკონტის გამოსათვლელად.

ჯერ განვიხილოთ სარგებლის მარტივი განაკვეთის შემთხვევა. (3.9) ფორმულის გამოყენებით (6.3) –დან მივიღებთ

$$D = K_0(1 + ni) - K_0 = K_0(1 + ni - 1) = K_0 ni,$$

ე.ი. სარგებლის მარტივი განაკვეთისას დისკონტი გამოითვლება ფორმულით

$$D = K_0 ni. \quad (6.4)$$

თუ ამ ფორმულის მარჯვენა ნაწილში K_0 , n და i სიდიდეებიდან ორი მუდმივაა, მაშინ D მესამე სიდიდის პირდაპირპროპორციულია. მაშასადამე, დისკონტს აქვს შემდეგი თვისება:

სარგებლის მარტივი განაკვეთისას დისკონტი პირდაპირპროპორციულია საწყისი თანხის, დარიცხვების რაოდენობისა და საპროცენტო განაკვეთის.

კერძოდ, რამდენჯერაც გადიდება (ან შემცირდება) საწყისი თანხა, იმდენჯერვე გადიდება (ან შემცირდება) მოგება.

შევნიშნოთ, რომ სარგებლის მარტივი განაკვეთისას დისკონტის გამოსათვლელად (6.3) ფორმულის გამოყენება შეგვიძლია იმ შემთხვევაში, როცა ვიცით თანხის საწყისი და საბოლოო ოდენობა. (6.4) ფორმულის გამოყენებით კი შესაძლებელია დისკონტის გამოთვლა საბოლოო თანხის ცოდნის გარეშე.

ამოცანა 6.4. 1000 ლარი გაცემულია სესხად 5 წლით სარგებლის წლიური 3% -ანი მარტივი განაკვეთით. დარიცხვის პერიოდია 1 წელი. ვიპოვოთ დისკონტი.

ამოხსნა: ამოცანის პირობის თანახმად საწყისი თანხაა $K_0 = 1000$ ლარი, წლების რაოდენობაა $l = n = 5$, ხოლო სარგებლის წლიური მარტივი განაკვეთია $p = 3\%$ ანუ წლიური საპროცენტო განაკვეთია $j = i = 0,03$. თუ გამოვიყენებთ (6.4) ფორმულას, მივიღებთ

$$D = 1000 \cdot 5 \cdot 0,03 = 1000 \cdot 0,15 = 150.$$

მაშასადამე, დისკონტი 150 ლარია.

6.4. დისკონტი სარგებლის რთული განაკვეთისას

ახლა გამოვიყვანოთ დისკონტის გამოსათვლელი ფორმულა, როცა სარგებელი არის რთული განაკვეთით. (5.4) ფორმულის გამოყენებით (6.3) – დან მივიღებთ

$$D = K_0 (1+i)^n - K_0 = K_0 [(1+i)^n - 1],$$

ე.ი. სარგებლის რთული განაკვეთისას დისკონტი გამოითვლება ფორმულით

$$D = K_0 [(1+i)^n - 1] \quad (6.5)$$

(6.5) –დან ცხადია, რომ სარგებლის რთული განაკვეთისას დისკონტს აქვს შემდეგი თვისება:

სარგებლის რთული განაკვეთისას დისკონტი პირდაპირპროპორციულია საწყისი თანხის, ანუ რამდენჯერაც გადიდება (ან შემცირდება) საწყისი თანხა, იმდენჯერვე გადიდება (ან შემცირდება) მოგება.

შევნიშნოთ, რომ სარგებლის რთული განაკვეთისას დისკონტის გამოსათვლელად (6.3) ფორმულის გამოყენება შეევიძლია იმ შემთხვევაში, როცა ვიცით თანხის საწყისი და საბოლოო ოდენობა, ხოლო (6.5) ფორმულის გამოყენებით დისკონტს გამოეთვლით საბოლოო თანხის ცოდნის გარეშე.

ამოცანა 6.5. ბანკმა 3 წლის ვადით გასცა 10000 დოლარის ოდენობის კრედიტი სარგებლის წლიური 5% -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. ვიპოვოთ ბანკის მოგება საკრედიტო ვადის დასრულებისას.

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად, საწყისი თანხაა $K_0 = 10000$ დოლარი, სარგებლის დარიცხვის რაოდენობაა $n=3$, ხოლო სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 5%, ანუ საპროცენტო განაკვეთია $i=0,05$. თუ გამოვიყენებთ (6.5) ფორმულას, მივიღებთ

$$D = 10000 \cdot [(1 + 0,05)^3 - 1] = 10000 \cdot [1,05^3 - 1] = 10000 \cdot (1,157625 - 1) = 10000 \cdot 0,157625 = 1576,25.$$

მაშასადამე, ბანკის მოგება იქნება 1576,25 დოლარი.

6.5. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. რა თანხა უნდა შეიტანოს გიორგიმ ბანკში სარგებლის წლიური 6% -ანი მარტივი განაკვეთით, რომ 5 წლის შემდეგ მიიღოს 3900 დოლარი?

პასუხი: 3000 დოლარი.

2. რამდენი ლარი მოგვეცემს ორ წელიწადში 4560 ლარს, თუ იგი გაცემულია სარგებლის ყოველწლიური 7% -ანი მარტივი განაკვეთით.
პასუხი: 4000 ლარი.
3. 1000 ლარი გაცემულია სესხად 6 წლით სარგებლის წლიური 5% -ანი მარტივი განაკვეთით. დარიცხვის პერიოდია 1 წელი. იპოვეთ დისკონტი.
პასუხი: 300 ლარი.
4. მოქალაქის მიერ ბანკისთვის დაბრუნებული სესხი, რომელიც აღებული იყო სამი წლის წინ სარგებლის წლიური 7% -ანი რთული განაკვეთით ყოველწლიური დარიცხვის პირობით, 10000 დოლარის ტოლია. რამდენი დოლარი აიღო სესხად მოქალაქემ?
პასუხი: 8162,98 დოლარი.
5. თამარმა 1000 დოლარი შეიტანა ანაბარზე წლიური 10% -ანი რთული განაკვეთით 5 წლის ვადით ყოველწლიური დარიცხვის პირობით. იპოვეთ დისკონტი.
პასუხი: 610,51 დოლარი.
6. გიორგიმ ბანკიდან გარკვეული ვადით აიღო 1000 ლარი 15% -ანი სესხი ერთჯერადი დარიცხვით. რა ოდენობის თანხა უნდა დაუბრუნოს გიორგიმ ბანკს სესხის ვადის ამოწურვის ბოლოს? იპოვეთ დისკონტი.
პასუხი: 1150 ლარი, 150 ლარი.
7. 2000 დოლარი ბანკიდან აღებულია სესხად 3 წლის ვადით, სარგებლის წლიური 5% -ანი მარტივი განაკვეთით. გამოთვალეთ ბანკის მოგება 3 წლის შემდეგ.
პასუხი: 300 დოლარი.
8. ბანკში 5 წლის ვადით შეტანილია 3000 ლარი სარგებლის წლიური 3% -ანი მარტივი განაკვეთით. იპოვეთ ბანკის მოგება.
პასუხი: 450 ლარი.
9. ფირმამ ბანკიდან 5 წლის ვადით აიღო სესხი 2000 დოლარის ოდენობით სარგებლის წლიური 10% -ანი მარტივი განაკვეთით ყოველკვარტალური დარიცხვის პირობით. იპოვეთ დისკონტი.
პასუხი: 1000 დოლარი.

10. 5000 ლარი გაცემულია სესხად სარგებლის წლიური 4% -ანი პარტივი განაკვეთით. გამოიანგარიშეთ დისკონტი 3 წლის ბოლოსათვის.
პასუხი: 600 ლარი.
11. ბანკში 3 წლის ვადით შეტანილია 3000 დოლარი სარგებლის წლიური 10% -ანი რთული განაკვეთით ყოველწლიური დარიცხვის პირობით. იპოვეთ შეანაბრის მოგება 3 წლის ბოლოსათვის?
პასუხი: 993 დოლარი.
12. გიორგიმ ბანკში შეიტანა 1000 დოლარი ნომინალური j განაკვეთით და სარგებლის ყოველი წლის ბოლოს გამოტანის პირობით. 4 წლის შემდეგ მისი სარგებელი შეადგენდა 300 დოლარს. სარგებლის რა ნომინალური განაკვეთით შეიტანა გიორგიმ ბანკში თანხა?
პასუხი: 7,5%.

ლექცია 7

ორ თარიღს შორის დღეების
რაოდენობის გამოთვლა

სარგებლის გამოთვლა
ყოველდღიური დარიცხვის
შემთხვევაში

ლექცია 7

ორ თარიღს შორის დღეების რაოდენობის გამოთვლა.
სარგებლის გამოთვლა ყოველდღიური დარიცხვის შემთხვევაში

გეგმა

- 7.1. ორ თარიღს შორის დღეების რაოდენობის გამოთვლა
- 7.2. სარგებლის გამოთვლა ყოველდღიური დარიცხვის შემთხვევაში
- 7.3. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

7.1. ორ თარიღს შორის დღეების რაოდენობის დათვლა

საფინანსო ოპერაციების შესრულების დროს ანაბრებზე და კრედიტებზე სარგებლის დარიცხვა ძირითადად ხდება ყოველდღიურად. ამიტომ აუცილებელია ვისწავლოთ ორ თარიღს შორის დღეების რაოდენობის გამოთვლა.

აუცილებელია აღვნიშნოთ შემდეგი: თუ ანაბარი გახსნილია სარგებლის ყოველდღიური დარიცხვის პირობით (არა აქვს მნიშვნელობა სარგებელი მარტივი განაკვეთითა თუ რთულით), მაშინ ანაბარზე სარგებლის დარიცხვა ხდება ყოველდღე, გარდა ბოლო დღისა (ანუ ანაბარზე სარგებლის დარიცხვა ხდება იმ დღეების ბოლოს, როცა ანაბარზე არის თანხა, ხოლო ბოლო დღეს ანაბარი იხურება და ცხადია, ამ დღის ბოლოს მასზე თანხა არ არის).

მაგალითად, თუ ანაბარი გაიხსნა 2009 წლის 1 თებერვალს სარგებლის ყოველდღიური დარიცხვის პირობით და დაიხურა იმავე წლის 10 თებერვალს, მაშინ ამ ანაბარზე სარგებლის ყოველდღიური დარიცხვა მოხდება 9-ჯერ (და არა 10 -ჯერ), ე.ი. ანაბარზე სარგებლის დარიცხვა მოხდება ყოველდღე 1 თებერვლიდან 9 თებერვლის ჩათვლით (ანაბრის დახურვის დღეს, 10 თებერვალს, მასზე სარგებელი არ დაირიცხება).

შვეისწავლოთ ორ თარიღს შორის დღეების რაოდენობის (რაც იგივეა, ანაბარზე სარგებლის დარიცხვების რაოდენობის) დათვლის მეთოდები.

საბანკო საქმეში გამოიყენება ორ თარიღს შორის დღეების რაოდენობის (იგი აღინიშნება d ასოთი) გამოთვლის ორი მეთოდი: ა) ზუსტი და ბ) 30 დღე თვეში. გავეცნოთ თითოეულს ცალ-ცალკე.

ა) ორ თარიღს შორის დღეების რაოდენობის გამოთვლა მეთოდით “ზუსტი”. ჯერ ვისწავლოთ ერთი წლის ორ თარიღს შორის დღეების რაოდენობის დათვლა.

წელიწადის დღეები 1 იანვრიდან 31 დეკემბრამდე გადავთვალოთ ერთიდან 365 –მდე (იხ. ცხრილი 7.1 გვ. 86 -ზე), ხოლო ნაკიანი წლის შემთხვევაში - ერთიდან 366 –მდე (იხ. ცხრილი 7.2 გვ. 87 -ზე). წელიწადის ორ თარიღს შორის დღეების რაოდენობის დასადგენად საჭიროა:

1. ჯერ დავადგინოთ წელიწადი ნაკიანია თუ არა და ავირჩიოთ შესაბამისი ცხრილი.
2. ხოლო შემდეგ, ბოლო თარიღის შესაბამის რიცხვს გამოვკლოთ საწყისი თარიღის შესაბამისი რიცხვი. მიღებული სხვაობა იქნება ამ წელიწადის ორ თარიღს შორის დღეების რაოდენობა.

გავიხსენოთ ნაკიანი წლის განმარტება: წელი არის ნაკიანი, როცა იგი არ ბოლოვდება ორი ნულით და ბოლო ორი ციფრით შედგენილი რიცხვი იყოფა 4 –ზე, ან ბოლოვდება ორი ნულით და ასეულების რაოდენობა იყოფა 4 –ზე.

ცხადია, ამ განმარტების საფუძველზე, 1996, 2000 და 2400 წლები ნაკიანია, ხოლო 1997, 2009, 2100 და 2200 წლები არაა ნაკიანი.

ამოცანა 7.1. ვიპოვოთ “ზუსტი” მეთოდით დღეების რაოდენობა 2009 წლის 1 თებერვლიდან 27 აგვისტომდე.

ამოხსნა. რადგან 2009 წელი არ არის ნაკიანი, ამიტომ ვიყენებთ ცხრილს 7.1 –ს. ამ ცხრილში 1 თებერვალი არის ნომრით 32, ხოლო 27 აგვისტო – 239. მაშინ ამ ორ თარიღს შორის დღეების რაოდენობა იქნება $d = 239 - 32 = 207$.

მამასადამე, 2009 წლის 1 თებერვლიდან 27 აგვისტომდე ანაბარზე, რომელიც გახსნილია სარგებლის “ზუსტი” მეთოდის გამოყენებით ყოველდღიური დარიცხვის პირობით, სარგებლის დარიცხვა მოხდება 207 –ჯერ.

ახლა ვისწავლოთ სხვადასხვა წლის ორ თარიღს შორის დღეების რაოდენობის დათვლა. როგორც ვიცით, წელიწადში არის 365 ან 366 (ნაკიან წელს) დღე. ამიტომ სხვადასხვა წლის ორ თარიღს შორის დღეების რაოდენობის დასადგენად საჭიროა:

1. დავადგინოთ, თითოეული წელი ნაკიანია თუ არა და ავირჩიოთ შესაბამისი ცხრილები (ან ცხრილი),

2. გამოვთვალოთ დღეების რაოდენობა პირველი თარიღიდან იმავე წლის 31 დეკემბრის ჩათვლით (გავითვალისწინოთ, რომ 31 დეკემბერს ანაბარზე სარგებელი დაირიცხება),
3. გამოვთვალოთ დღეების რაოდენობა ბოლო წლის 1 იანვრიდან მეორე თარიღამდე,
4. გამოვთვალოთ პირველ და ბოლო წლებს შორის წლების (თუ ასეთი არსებობს) დღეების რაოდენობა,
5. და შევკრიბოთ მიღებული რიცხვები. ეს ჯამი იქნება სხვადასხვა წლის ორ თარიღს შორის დღეების რაოდენობა.

საბანკო საკმეში სხვადასხვა წლის ორ თარიღს შორის დღეების რაოდენობის დათვლის ამ მეთოდს უწოდებენ “ზუსტი/ზუსტი”. პირველი “ზუსტი” ნიშნავს, რომ თითოეულ თვეში დღეების რაოდენობა ითვლება ზუსტად, ხოლო მეორე “ზუსტი” – თითოეულ წელს დღეების რაოდენობა ითვლება ზუსტად (365 ან 366).

ამოცანა 7.2. ვიპოვოთ “ზუსტი/ზუსტი” მეთოდით დღეების რაოდენობა 2004 წლის 1 თებერვლიდან 2007 წლის 27 აგვისტომდე.

ამოხსნა. დღეების რაოდენობის დათვლა განვახორციელოთ ზემოთ მოყვანილი სქემის მიხედვით:

1. ცხადია, 2004 წელი ნაკიანია, ხოლო 2005, 2006 და 2007 წლები არაა ნაკიანი. ამიტომ 2004 წლისთვის გამოვიყენოთ ცხრილი 7.2, ხოლო 2005, 2006 და 2007 წლებისათვის – ცხრილი 7.1.
2. გამოვთვალოთ დღეების რაოდენობა 2004 წლის 1 თებერვლიდან 31 დეკემბრის ჩათვლით: ცხრილი 7.2 –ის მიხედვით 1 თებერვალი არის ნომრით 32, ხოლო 31 დეკემბერი – 366. მაშინ ამ ორ თარიღს შორის დღეების რაოდენობა იქნება (ვიცით, ამ დათვლაში ბოლო დღე არ არის გათვალისწინებული) $366 - 32 = 334$ დღე (366 – 32 = 334). ცხადია, 2004 წლის 1 თებერვლიდან 31 დეკემბრის ჩათვლით იქნება 335 დღე.
3. გამოვთვალოთ დღეების რაოდენობა 2007 წლის 1 იანვრიდან 27 აგვისტომდე. რადგან ცხრილი 7.1 –ის მიხედვით 1 იანვარი არის ნომრით 1, ხოლო 27 აგვისტო – 239, ამიტომ 2007 წლის ამ ორ თარიღს შორის იქნება 238 დღე ($239 - 1 = 238$).
4. ცხრილი 7.1 –ის მიხედვით 2005 და 2006 თითოეულ წელს 365 დღეა,

5. მაშასადამე, 2004 წლის 1 თებერვლიდან 2007 წლის 27 აგვისტომდე დღეების რაოდენობა იქნება

$$d = 335 + 2 \cdot 365 + 238 = 1303 .$$

ბ) .ორ თარიღს შორის დღეების რაოდენობის გამოთვლა მეთოდით: 30 დღე თვეში. ამ შემთხვევაში გულისხმობენ, რომ თითოეულ თვეში 30 დღეა, რის გამოც წელიწადში ვლტბულობტ 360 დღეს ($30 \cdot 12 = 360$). ზმირად, ამ მეთოდს მოკლედ ასე აღნიშნავენ: $30/360$ (აქ 30 და 360 შესაბამისად ნიშნავს დღეების რაოდენობას თითოეულ თვეში და წელიწადში). გამოვიყვანოთ ფორმულა ამ მეთოდით ორ თარიღს შორის დღეების რაოდენობის დასათვლელად.

პირველი თარიღი აღვნიშნოთ შემდეგნაირად: $d_1/m_1/y_1$, სადაც d_1 დღეა გამოსახული რიცხვებში, m_1 თვეა გამოსახული რიცხვებში, ზოლო y_1 - წელიწადია. მეორე თარიღი შესაბამისად აღვნიშნოთ $d_2/m_2/y_2$. ამასთანავე, თუ რომელიმე დღე (d_1 ან d_2) არის 31, მაშინ მის ნაცვლად იგულისხმება 30. მაშასადამე, d_1 და d_2 ნატურალური რიცხვია 1 -დან 30 -მდე.

$30/360$ მეთოდით ორ თარიღს $d_1/m_1/y_1$ და $d_2/m_2/y_2$ შორის დღეების რაოდენობა გამოითვლება ფორმულიტ:

$$d = 360(y_2 - y_1) + 30(m_2 - m_1) + (d_2 - d_1) . \quad (7.1)$$

ამოცანა 7.3. ვიპოვოთ $30/360$ მეთოდით დღეების რაოდენობა 2009 წლის 1 თებერვლიდან 27 აგვისტომდე.

ამოხსნა. ცხადია, 2009 წლის 1 თებერვალი ჩაიწერება ასე 01/02/2009, ზოლო 2009 წლის 27 აგვისტო - 27/08/2009. მაშინ (7.1) ფორმულის ძალიტ გვაქვს

$$d = 360 \cdot (2009 - 2009) + 30 \cdot (8 - 2) + (27 - 1) = 180 + 26 = 206 .$$

მაშასადამე, $30/360$ მეთოდით დათვლილი დღეების რაოდენობა 2009 წლის 1 თებერვლიდან 27 აგვისტომდე არის 206 (და არა 207, როგორც ეს მივიღოთ ამოცანა 7.1 -ში “ზუსტი” მეთოდის გამოყენებისას).

ამოცანა 7.4. ვიპოვოთ $30/360$ მეთოდით დღეების რაოდენობა 2004 წლის 1 თებერვლიდან 2007 წლის 27 აგვისტომდე.

ამოხსნა. ცხადია, 2004 წლის 1 თებერვალი ჩაიწერება ასე 01/02/2004, ზოლო 2007 წლის 27 აგვისტო - 27/08/2007. მაშინ (7.1) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$d = 360 \cdot (2007 - 2004) + 30 \cdot (8 - 2) + (27 - 1) = 360 \cdot 3 + 30 \cdot 6 + 26 = 1286 .$$

მაშასადამე, 30/360 მეთოდით დათვლილი დღეების რაოდენობა 2004 წლის 1 თებერვლიდან 2007 წლის 27 აგვისტომდე არის 1286 (და არა 1303, როგორც ეს მივიღეთ ამოცანა 7.2 -ში “ზუსტი/ზუსტი” მეთოდის გამოყენებისას).

როგორც ვხედავთ, 30/360 მეთოდით დათვლილი ორ თარიღს შორის დღეების რაოდენობა არ გვაძლევს ამ თარიღებს შორის დღეების ზუსტ რაოდენობას, მაგრამ ეს მეთოდი საბანკო საკმეში მანაც გამოიყენება (განსაკუთრებით გრძელვადიანი ანაბრებისა და კრედიტებისათვის) მისი სიმარტივის გამო (დღეების რაოდენობის დათვლა ხდება ფორმულის საშუალებით და არ სჭირდება ცხრილების გამოყენება).

შევნიშნოთ, რომ საქართველოს ბანკებში ძირითადად გამოიყენება ორ თარიღს შორის დღეების რაოდენობის დათვლის “ზუსტი/ზუსტი” მეთოდი. ამ შემთხვევაში ბანკის კომპიუტერულ პროგრამაში შეტანილია 7.1 და 7.2 ცხრილები და ორ თარიღს შორის დღეების რაოდენობის დათვლა ხდება ავტომატურად.

7.2. სარგებლის გამოთვლა ყოველდღიური ღარიცხვის შემთხვევაში

რადგან უკვე ვიცით ორ თარიღს შორის დღეების რაოდენობის გამოთვლა, ამიტომ შეგვიძლია განვიხილოთ ამოცანა სარგებლის ყოველდღიურ ღარიცხვაზე.

ამოცანა 7.5. თამარმა 1 აპრილს 2 თვის ვადით ანაბარზე შეიტანა 1000 ლარი სარგებლის წლიური 5% -ანი მარტივი განაკვეთით ყოველდღიური ღარიცხვის პირობით. რა თანხას მიიღებს თამარი 31 მაისს, თუ სარგებლის ღარიცხვა ხდება “ზუსტი” მეთოდით და წელიწადში იგულისხმება 365 დღე?

ამოხსნა. ცხადია, 1 აპრილსა და 31 მაისს შორის 28 თებერვალი არ არის. ამიტომ მნიშვნელობა არ აქვს, რომელ ცხრილს გამოვიყენებთ 7.1 -სა, თუ 7.2 -ს. მაგალითად, ავიღოთ ცხრილი 7.1. ამ ცხრილში 1 აპრილის ნომერია 91, ხოლო 31 მაისის – 151. ამ თარიღებს შორის არის 60 ($151 - 91 = 60$) დღე, ე.ი. ანაბარზე სარგებლის ღარიცხვა მოხდება 60 -ჯერ ($n = 60$).

ამასთანავე, ამოცანის პირობის თანახმად, წელიწადში იგულისხმება 365 დღე ($m = 365$), საწყისი თანხა 1000 ლარია ($K_0 = 1000$), სარგებლის წლიური საპროცენტო განაკვეთია $j = \frac{5}{100} = 0,05$, ხოლო ყოველდღიური საპროცენტო

განაკვეთი იქნება $i = \frac{j}{m} = \frac{0,05}{365}$. საბოლოო თანხა გამოითვლება (3.9) ფორმულით ($K_n = K_0(1 + ni)$). მივიღებთ

$$K_{365} = 1000 \cdot \left(1 + 60 \cdot \frac{0,05}{365}\right) = 1000 \cdot \left(1 + \frac{3}{365}\right) = 1000 \cdot \frac{368}{365} = 1008,22.$$

მაშასადამე, 31 მაისს თამარი მიიღებს 1008,22 ლარს.

7.3. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. იპოვეთ “ზუსტი” მეთოდით დღეების რაოდენობა 2008 წლის 1 თებერვლიდან 21 ნოემბრამდე.
პასუხი: 294.
2. იპოვეთ 30/360 მეთოდით დღეების რაოდენობა 2008 წლის 1 თებერვლიდან 21 ნოემბრამდე.
პასუხი: 290.
3. იპოვეთ 30/360 მეთოდით დღეების რაოდენობა 2003 წლის 18 თებერვლიდან 9 აგვისტომდე.
პასუხი: 171.
4. იპოვეთ “ზუსტი/ზუსტი” მეთოდით დღეების რაოდენობა 2005 წლის 1 სექტემბრიდან 2007 წლის 27 აგვისტომდე.
პასუხი: 725.
5. იპოვეთ 30/360 მეთოდით დღეების რაოდენობა 2004 წლის 12 მაისიდან 2006 წლის 10 მარტამდე.
პასუხი: 658.
6. გიორგიმ 6 მარტს ანაბარზე შეიტანა 2000 ლარი სარგებლის წლიური 10%-ანი მარტივი განაკვეთით ყოველდღიური დარიცხვის პირობით. რა თანხას მიიღებს გიორგი იმავე წლის 30 ივლისს, თუ სარგებლის დარიცხვა ხდება “ზუსტი” მეთოდით და წელიწადში იგულისხმება 365 დღე?
პასუხი: $K_{365} = 2080$ ლარი.

7. თამარმა 6 მარტს ანაბარზე შეიტანა 2000 დოლარი სარგებლის წლიური 10%-ანი მარტივი განაკვეთით ყოველდღიური დარიცხვის პირობით. რა თანხას მიიღებს თამარი იმავე წლის 30 ივლისს, თუ სარგებლის დარიცხვა ხდება 30/360 მეთოდით?

პასუხი: $K_{\text{მ}} = 2078,9$ დოლარი.

8. თამარმა 1 აპრილს ანაბარზე შეიტანა 3000 ლარი სარგებლის წლიური 5%-ანი მარტივი განაკვეთით ყოველდღიური დარიცხვის პირობით. რა თანხას მიიღებს თამარი იმავე წლის 1 ივნისს, თუ სარგებლის დარიცხვა ხდება 30/360 მეთოდით?

პასუხი: $K_{\text{ლ}} = 3025$ ლარი.

წელიწადის დღეების ნუმერაცია (არა ნაკიანი წელი)

დღე	იანვარი	თებერვალი	მარტი	აპრილი	მაისი	ივნისი	ივლისი	აგვისტო	სექტემბერი	ოქტომბერი	ნოემბერი	დეკემბერი
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

ცხრილი 7.1

წელიწადის ღლეების ნუმერაცია (ნაკიანი წელი)

ღლე	იანვარი	თებერვალი	მარტი	აპრილი	მაისი	ივნისი	ივლისი	აგოსტო	სექტემბერი	ოქტომბერი	ნოემბერი	დეკემბერი
1	1	32	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
2	2	33	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
3	3	34	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
4	4	35	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
5	5	36	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
6	6	37	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
7	7	38	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
8	8	39	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
9	9	40	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
10	10	41	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
11	11	42	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
12	12	43	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
13	13	44	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
14	14	45	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
15	15	46	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
16	16	47	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
17	17	48	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
18	18	49	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
19	19	50	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
20	20	51	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
21	21	52	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
22	22	53	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
23	23	54	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
24	24	55	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
25	25	56	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
26	26	57	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
27	27	58	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
28	28	59	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
29	29	60	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
30	30		90	121	151	182	212	243	274	304	335	365
31	31		91		152		213	244		305		366

ცხრილი 7.2.

ლექცია 8

მიმდევრობის ზღვარი

ნეპერის რიცხვი

სარგებლის უწყვეტი დარიცხვა

ლექცია 8

მიმდევრობის ზღვარი. ნეპერის რიცხვი. სარგებლის უწყვეტი დარიცხვა

გეგმა

8.1. მიმდევრობის ზღვარი

8.2. ნეპერის რიცხვი

8.3. სარგებლის უწყვეტი დარიცხვა

8.4. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

8.1. მიმდევრობის ზღვარი

აქამდე ჩვენ განვიხილეთ ისეთი ანაბრები და კრედიტები, რომლებშიც სარგებლის დარიცხვა ხდებოდა წელიწადში ერთხელ, წელიწადში ორჯერ, ყოველკვარტალურად, ყოველთვიურად და ყოველდღიურად. უფრო მეტიც, გამოვიყვანეთ ფორმულები სარგებლის მარტივი და რთული განაკვეთების შემთხვევებში (იხ. (3.9) და (5.4) ფორმულები), როცა სარგებლის დარიცხვა ხდება წელიწადში m -ჯერ, სადაც m ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია ($m \in N$).

მაგრამ საბანკო საქმეში ხშირად გვხვდება ისეთი ანაბრები და კრედიტები, რომლებშიც სარგებლის დარიცხვა ხდება დროის ყოველ მომენტში. ასეთ შემთხვევაში საბოლოო თანხის გამოსათვლელი ფორმულის მისაღებად საჭიროა წინასწარ გავეცნოთ რიცხვთა მიმდევრობის გარკვეულ თვისებებს.

მესამე და მეხუთე ლექციებში სასკოლო პროგრამიდან გავიხსენეთ ორი ტიპის რიცხვთა მიმდევრობა, კერძოდ, არითმეტიკული და გეომეტრიული პროგრესიები. ვიცით, რომ როგორც არითმეტიკული, ისე გეომეტრიული პროგრესიის შემთხვევაში, მოცემულია სასრული რაოდენობის რიცხვების ჩამონათვალი (მიმდევრობა), სადაც ეს რიცხვები (მიმდევრობის წევრები) ერთმანეთთან გარკვეული წესით არიან დაკავშირებული.

ახლა, განვიხილოთ უსასრულო რაოდენობის რიცხვების ჩამონათვალი (მომავალში, ასეთი ჩამონათვალისათვის გამოვიყენოთ ტერმინი “რიცხვთა მიმდევრობა”), ანუ მოცემულია უსასრულო რაოდენობის რიცხვების მიმდევრობა:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (8.1)$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ რიცხვებს შესაბამისად უწოდებენ მიმდევრობის პირველ, მეორე და ა. შ., n -ურ წევრს. ამასთანავე, a_n -ს უწოდებენ მომდევრობის ზოგად წევრს. მოვიყვანოთ მიმდევრობის რამდენიმე მაგალითი:

$$ა) 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots, \quad \text{ზოგადი წევრია } a_n = \frac{1}{n}, \quad (8.2)$$

$$ბ) \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots, \quad \text{ზოგადი წევრია } a_n = \frac{n}{n+1}, \quad (8.3)$$

$$გ) 0, 1, 0, 1, \dots, \frac{(-1)^n + 1}{2}, \dots, \quad \text{ზოგადი წევრია } a_n = \frac{(-1)^n + 1}{2}. \quad (8.4)$$

შენიშნოთ, რომ თუ ცნობილია რიცხვთა მიმდევრობის ზოგადი წევრი, მარტივად შეგვიძლია დავწეროთ ამ მიმდევრობის ნებისმიერი წევრი. მართლაც, თუ მიმდევრობის a_n ზოგად წევრში n -ის ნაცვლად ჩავსვამთ 1 -ს, 2 -ს და ა.შ., მივიღებთ შესაბამისად ამ მიმდევრობის პირველ, მეორე და ა.შ. წევრებს.

ახლა რიცხვთა მიმდევრობისათვის გაეარკვიოთ შემდეგი საკითხი: როცა n საკმარისად დიდია, მაშინ მიმდევრობის წევრები ზომ არ არის ახლოს რომელიმე (ერთ) ნამდვილ რიცხვთან?

თუ კარგად დაუკვირდებით (8.2), (8.3) და (8.4) მიმდევრობებს, მარტივად შევამჩნევთ შემდეგს:

1. (8.2) მიმდევრობის წევრები დადებითი რიცხვებია, რომლებიც თანდათან კლებულობს და უახლოვდება 0 -ს, ანუ საკმარისად დიდი n -სათვის (8.2) მიმდევრობის წევრები ახლოსაა 0 -თან.
2. (8.3) მიმდევრობის წევრები დადებითი და ერთზე ნაკლები რიცხვებია, რომლებიც თანდათან იზრდება და უახლოვდება 1 -ს, ანუ საკმარისად დიდი n -სათვის (8.3) მიმდევრობის წევრები ახლოსაა 1 -თან.
3. (8.4) მიმდევრობის წევრებია 0 და 1. ამიტომ არ არსებობს ერთი რომელიმე ნამდვილი რიცხვი, რომელთანაც ახლოს იქნება ამ მიმდევრობის ყველა წევრი საკმარისად დიდი n -სათვის.

მაშასადამე, (8.2) მიმდევრობისათვის არსებობს რიცხვი 0, ზოლო (8.3) მიმდევრობისათვის – რიცხვი 1, რომელთანაც ახლოსაა ამ მიმდევრობის ყველა წევრი საკმარისად დიდი n -სათვის. ამასთანავე, (8.4) მიმდევრობისათვის ასეთი თვისების მქონე რიცხვი არ მოიძებნება.

მოვიყვანოთ შემდეგი განმარტებები:

თუ საკმარისად დიდი n -სათვის (8.1) მიმდევრობის ყველა წევრი ახლოსაა რაიმე a ნამდვილ რიცხვთან, მაშინ (8.1) მიმდევრობას ეწოდება კრებადი, ხოლო a -ს – ამ მიმდევრობის ზღვარი.

თუ მიმდევრობა კრებადი არაა, მაშინ მას განშლადი ეწოდება.

მაშასადამე, (8.2) და (8.3) მიმდევრობები კრებადია და მათი ზღვარი შესაბამისად არის 0 და 1, ხოლო (8.4) მიმდევრობა განშლადია.

8.2. ნეპერის რიცხვი

განვიხილოთ რიცხვთა მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

ცხადია, ეს მიმდევრობა შეიძლება ასე ჩაწეროთ:

$$2, \quad 2\frac{1}{4}, \quad 2\frac{10}{27}, \quad \dots, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad (8.6)$$

მტკიცდება, რომ ამ მიმდევრობის წევრები თანდათან იზრდება და საკმარისად დიდი n -სათვის ახლოსაა ირაციონალურ რიცხვთან (უსასრულო არაპერიოდულ ათწილადთან), რომელსაც e რიცხვს უწოდებენ. e რიცხვი ათწილადის სახით ასე ჩაიწერება $e = 2,71828 \dots$, ხოლო მეთუდამდე სიზუსტით $e \approx 2,7$.

e რიცხვს ხშირად ნეპერის რიცხვს უწოდებენ. ზოგჯერ ლიტერატურაში იგი ეილერის რიცხვის სახელითაც მოიხსენება.

მაშასადამე, (8.6) მიმდევრობა კრებადია და მისი ზღვარია e რიცხვი.

8.3. სარგებლის უწყვეტი ღარიცხვა

ბანკები ხშირად სარგებლის გამოსათვლელად იყენებენ ისეთ ღარიცხვებს, რომლებიც დროის ყოველ მომენტში ზდება. ასეთი ტიპის ღარიცხვებს უწყვეტი ღარიცხვები ეწოდება.

როგორც მეხუთე ლექციაში ვისწავლეთ, სარგებლის წლიური j რთული საპროცენტო განაკვეთით წელიწადში m -ჯერ ღარიცხვის პირობით დაბანდებული K_0 ოდენობის თანხა საკრედიტო ვადის (l წლის) ბოლოს გახდება K_n ოდენობის. იგი გამოითვლება ფორმულით (იხ. (5.4) ფორმულა)

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{ml}, \quad (8.7)$$

სადაც $n = ml$.

ცხადია, (8.7) ფორმულით მოცემული რიცხვები

$$K_1, K_2, K_3, \dots, K_n, \dots \quad (8.8)$$

ქმნიან რიცხვთა მიმდევრობას. ამასთანავე, ცხადია, უწყვეტი დარიცხვის დროს m საკმარისად დიდია, რის გამოც n -იც საკმარისად დიდია.

მტკიცდება, რომ საკმარისად დიდი n -სათვის (8.8) მიმდევრობის წევრები ახლოსაა K^* რიცხვთან (ანუ (8.8) მიმდევრობის ზღვარია K^*), რომელიც გამოითვლება ფორმულით

$$K^* = K_0 e^{jl}, \quad (8.9)$$

სადაც K^* არის საბოლოო თანხა უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში.

ამასადამე, (8.9) წარმოადგენს უწყვეტი დარიცხვის დროს საბოლოო თანხის გამოსათვლელ ფორმულას.

(8.9) ფორმულიდან მარტივად ჩანს, რომ უწყვეტი დარიცხვისას:

1. საბოლოო თანხა K^* საწყისი თანხის K_0 -ის პირდაპირპროპორციულია.
2. K^* არის j და l -ის მიმართ მაჩვენებლიანი ფუნქცია. კერძოდ, K^* იზრდება j და l -ის მიმართ ისე, როგორც მაჩვენებლიანი ფუნქცია.
3. დისკონტი D ($D = K^* - K_0$) გამოითვლება ფორმულით:

$$D = K_0 (e^{jl} - 1).$$

ამოცანა 8.1. გიორგიმ 5 წლის ვადით ანაბარზე შეიტანა 1000 ლარი სარგებლის წლიური 10 % -ანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის პირობით. რა თანხას დაუბრუნებს ბანკი გიორგის ამ ვადის ამოწურვის შემდეგ, თუ $\sqrt{e} = 1,64872$? ვიპოვოთ დისკონტი.

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად: $K_0 = 1000$, $l = 5$ და $j = \frac{10}{100} = 0,1$.

გამოვიყენოთ (8.9) ფორმულა. მივიღებთ

$$K^* = 1000 \cdot e^{0,5} = 1000 \cdot 1,64872 = 1648,72,$$

$$D = 1648,72 - 1000 = 648,72.$$

მაშასადამე, 5 წლის შემდეგ ბანკი გიორგის დაუბრუნებს 1648,72 ლარს, ხოლო დისკონტი (გიორგის მოგება) იქნება 648,72 ლარი.

8.4. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. თამარმა 5 წლის ვადით ანაბარზე შეიტანა 3000 ლარი სარგებლის ნომინალური 5% -ანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის პირობით. იპოვეთ დაგროვილი თანხა, თუ $\sqrt[5]{e} = 1,284025$.

პასუხი: 3852,08 ლარი.

2. ბანკმა 6 წლის ვადით გასცა სესხი 20000 ლარი სარგებლის წლიური 12,5% -ანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვით პირობით. რა ოდენობის თანხა უნდა დაუბრუნოს მოვალემ ბანკს დადგენილი ვადის გასვლის შემდეგ, თუ $\sqrt[6]{e} = 2,116998$?

პასუხი: 42339,96 ლარი.

3. გიორგიმ ბანკიდან აიღო 2000 დოლარი სესხი 5 წლის ვადით სარგებლის ნომინალური 10 % -ანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის პირობით. რა ოდენობის თანხას დაუბრუნებს გიორგი ბანკს ამ ვადის ამოწურვისას?

პასუხი: 3297,44 დოლარი.

4. ფირმამ 5 წლის ვადით ბანკიდან აიღო კრედიტი 30000 დოლარის ოდენობით სარგებლის ნომინალური 15% -ანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის პირობით. რა ოდენობის თანხას დაუბრუნებს ფირმა ბანკს ამ ვადის ამოწურვისას? იპოვეთ დისკონტი.

პასუხი: $K' = 63509,94$ დოლარი, $D = 33509,94$ დოლარი.

5. თამარს 5 წლის ვადით ბანკში ანაბარზე შეტანილი ჰქონდა თანხა სარგებლის ნომინალური 15% -ანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის პირობით. ანაბრის ვადის ამოწურვის შემდეგ მან ბანკიდან მიიღო 7409,49 ლარი. რა ოდენობის თანხით გახსნა ანაბარი თამარმა?

პასუხი: 3500 ლარი.

6. რა ოდენობის თანხა უნდა დაუბრუნოს მოვალემ ბანკს, თუ მან 5 წლის ვადით აიღო 5000 დოლარი კრედიტი სარგებლის წლიური 15% -ანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის პირობით.

პასუხი: 10584,99 დოლარი.

7. ბანკმა 2000 დოლარი გასცა სესხად 5 წლის ვადით სარგებლის წლიური 5% -ანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის პირობით. გამოთვალეთ ბანკის მოგება 5 წლის შემდეგ.

პასუხი: 568,05 დოლარი.

8. ბანკის მიერ 3000 ლარი გაცემულია სესხად 6 წლით ვადით სარგებლის ნომინალური 12,5% -ანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის პირობით. იპოვეთ დაგროვილი თანხა.

პასუხი: 6350,99 ლარი.

ლექცია 9

საწყისი თანხის გაორმაგების
ამოცანა

ლექცია 9

საწყისი თანხის გაორმაგების ამოცანა

გეგმა

- 9.1. საწყისი თანხის გაორმაგების ამოცანა სარგებლის მარტივი განაკვეთისას
- 9.2. საწყისი თანხის გაორმაგების ამოცანა სარგებლის რთული განაკვეთისას (72 -ის კანონი)
- 9.3. საწყისი თანხის გაორმაგების ამოცანა სარგებლის უწყვეტი ღარიცხვისას (69,3 -ის კანონი)
- 9.4. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

9.1. საწყისი თანხის გაორმაგების ამოცანა სარგებლის მარტივი განაკვეთისას

ყველა მენაბრეს ან კრედიტორს აინტერესებს პასუხი ბუნებრივ შეკითხვაზე: რა დროის შემდეგ მოხდება მისი საწყისი თანხის გაორმაგება?

ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად ჯერ განვიხილოთ სარგებელი მარტივი განაკვეთით, ხოლო შემდეგ – რთული განაკვეთისა და უწყვეტი ღარიცხვის შემთხვევები.

ეთქვათ, ბანკში ანაბარზე შეტანილია K_0 ოდენობის თანხა სარგებლის $p\%$ -ანი მარტივი განაკვეთით წელიწადში მრავალჯერადი (ან ერთხელ) ღარიცხვის პირობით. რამდენი წლის შემდეგ გაორმაგდება საწყისი თანხა?

რადგან საწყისი თანხა გაორმაგდა, ამიტომ საბოლოო თანხა $K_n = 2K_0$. სარგებლის მარტივი განაკვეთისას საბოლოო თანხის გამოსათვლელი (3.11) ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$2K_0 = K_0(1 + ij).$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილის K_0 -ზე შეკვეცით მივიღებთ

$$2 = 1 + ij.$$

აქედან, ცხადია, $ij = 1$. რადგან $j = \frac{p}{100}$, ამიტომ გვაქვს

$$\boxed{ip = 100} . \quad (9.1)$$

მაშასადამე, სარგებლის მარტივი განაკვეთისას ანაბარზე თანხა გაორმაგდება, როცა l წლების რაოდენობისა (ანაბარზე თანხის ხანგრძლივობა) და p სარგებლის წლიური მარტივი განაკვეთის ნამრავლი 100 -ის ტოლია.

(9.1) -დან განვსაზღვროთ l . მივიღებთ სარგებლის მარტივი განაკვეთისას საწყისი თანხის გაორმაგებისათვის საჭირო წლების რაოდენობის გამოსათვლელ შემდეგ ფორმულას

$$l = \frac{100}{p}. \quad (9.2)$$

როგორც (9.2) ფორმულიდან ჩანს, სარგებლის მარტივი განაკვეთისას თანხის გაორმაგებისათვის საჭირო წლების რაოდენობა არ არის დამოკიდებული საწყის თანხასა და წელიწადში სარგებლის ღარიცხვების რაოდენობაზე. იგი დამოკიდებულია მხოლოდ სარგებლის წლიურ განაკვეთზე.

ამოცანა 9.1. გიორგიმ ანაბარზე შეიტანა თანხა სარგებლის წლიური (ნომინალური) 20 % -ანი მარტივი განაკვეთით. რამდენი წლის შემდეგ გაორმაგდება ეს თანხა?

ამოხსნა. (9.2) ფორმულის გამოყენებით მარტივად მივიღებთ $l = \frac{100}{20} = 5$.

მაშასადამე, ანაბარზე შეტანილი თანხა გაორმაგდება 5 წლის შემდეგ.

9.2. საწყისი თანხის გაორმაგების ამოცანა სარგებლის რთული განაკვეთისას (72 -ის კანონი)

უტკეათ, ბანკში ანაბარზე შეტანილია K_0 ოდენობის თანხა სარგებლის $p\%$ -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ ღარიცხვის პირობით. რამდენი წლის შემდეგ გაორმაგდება საწყისი თანხა?

რადგან საწყისი თანხა გაორმაგდა, ამიტომ საბოლოო თანხა $K_n = 2K_0$. სარგებლის რთული განაკვეთისას საბოლოო თანხის გამოსათვლელი (5.4) ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$2K_0 = K_0(1 + j)^l.$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილის K_0 -ზე შეკვეცით მივიღებთ

$$(1 + j)^l = 2.$$

თუ ამ ტოლობის ორივე ნაწილს გავალოგარიტმებთ e -ს ფუძით და გამოვიყენებთ ლოგარიტმის თვისებებს (იხ. ლექცია 4), მივიღებთ

$$l \log_e(1+j) = \log_e 2.$$

აქედან შეგვიძლია დავწეროთ

$$l = \frac{\log_e 2}{\log_e(1+j)}. \quad (9.3)$$

მტკიცდება, რომ $\frac{\log_e 2}{\log_e(1+j)} \approx \frac{0,72}{j}$. რადგან $j = \frac{p}{100}$, ამიტომ (9.3) –დან გვაქვს

$$l \approx \frac{72}{p}. \quad (9.4)$$

(9.4) წარმოადგენს სარგებლის რთული განაკვეთისას საწყისი თანხის გაორმაგებისათვის საჭირო წლების რაოდენობის გამოსათვლელ ფორმულას. (9.4) –დან ადვილად მივიღებთ

$$lp \approx 72. \quad (9.5)$$

(9.5) ფორმულის საფუძველზე საბანკო საკმეში მიღებულია შემდეგი ტოლობის მართებულობა

$$lp = 72, \quad (9.6)$$

რომელსაც 72 –ის კანონი ეწოდება (ზოგჯერ ლიტერატურაში მას 72 –ის წესსაც უწოდებენ). (9.6) ფორმულა 1494 წელს მიიღო იტალიელმა მათემატიკოსმა ლ. პაჩიოლმ (Luca Pacioli (1445–1514)).

ამასთანავე, (9.5) ფორმულის მართებულობა კარგად ჩანს ცხრილი 9.1 –დან.

p %	l (72 –ის კანონით დათვლილი წლების რაოდენობა)	l ((9.3) ფორმულით დათვლილი წლების რაოდენობა)	განსხვავება
2	36	35	1,0
3	24	23,45	0,6
4	18	17,67	0,3
5	14,4	14,21	0,2
6	12	11,9	0,1
7	10,3	10,24	0,1
8	9	9,01	0,0
9	8	8,04	0,0
10	7,2	7,27	0,1

ცხრილი 9.1

მაშასადამე, სარგებლის რთული განაკვეთისას ანაბარზე თანხა გაორმაგდება, როცა l წლების რაოდენობისა (ანაბარზე თანხის ხანგრძლივობა) და p სარგებლის წლიური რთული განაკვეთის ნამრავლი 72 -ის ტოლია.

როგორც (9.6) ფორმულიდან ჩანს, სარგებლის რთული განაკვეთისას თანხის გაორმაგებისათვის საჭირო წლების რაოდენობა არ არის დამოკიდებული საწყის თანხაზე. იგი დამოკიდებულია მხოლოდ სარგებლის წლიურ განაკვეთზე.

ამოცანა 9.2. თამარმა ბანკიდან აიღო სესხი სარგებლის წლიური 12% -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. რამდენი წლის შემდეგ უნდა დაუბრუნოს მან ბანკს გაორმაგებული თანხა?

ამოხსნა. (9.6) ფორმულის გამოყენებით მარტივად მივიღებთ $l = \frac{72}{12} = 6$.

მაშასადამე, 6 წლის შემდეგ თამარმა ბანკს უნდა დაუბრუნოს გაორმაგებული თანხა.

9.3. საწყისი თანხის გაორმაგების ამოცანა სარგებლის უწყვეტი დარიცხვისას (69,3 -ის კანონი)

ეთქვათ, ბანკში ანაბარზე შეტანილია K_0 ოდენობის თანხა სარგებლის უწყვეტი დარიცხვის პირობით. რამდენი წლის შემდეგ გაორმაგდება საწყისი თანხა?

რადგან საწყისი თანხა გაორმაგდა, ამიტომ საბოლოო თანხა $K^* = 2K_0$. სარგებლის უწყვეტი დარიცხვისას საბოლოო თანხის გამოსათვლელი (8.9) ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$2K_0 = K_0 e^{l'}$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილის K_0 -ზე შეკვეცით მივიღებთ $e^{l'} = 2$. აქედან გვაქვს

$$l' j = \log_e 2 \approx 0,693. \quad (9.7)$$

რადგან $j = \frac{p}{100}$, ამიტომ (9.7) -დან მივიღებთ $lp \approx 69,3$. საბანკო საქმეში მიღებულია შემდეგი ტოლობის მართებულობა

$$\boxed{lp = 69,3}. \quad (9.8)$$

რომელსაც 69,3 -ის კანონი ეწოდება (ზოგჯერ ლიტერატურაში მას 69,3 -ის წესსაც უწოდებენ).

მაშასადამე, სარგებლის უწყვეტი დარიცხვისას ანაბარზე თანხა გაორმაგდება, როცა l წლების რაოდენობისა (ანაბარზე თანხის ხანგრძლივობა) და p სარგებლის წლიური განაკვეთის ნამრავლი 69,3 -ის ტოლია.

როგორც (9.8) ფორმულიდან ჩანს, სარგებლის უწყვეტი დარიცხვის დროს თანხის გაორმაგებისათვის საჭირო წლების რაოდენობა არ არის დამოკიდებული საწყის თანხაზე. იგი დამოკიდებულია მხოლოდ სარგებლის წლიურ განაკვეთზე.

ამოცანა 9.3. ფირმამ ბანკიდან აიღო კრედიტი სარგებლის 23,1% -ანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის პირობით. რამდენი წლის შემდეგ უნდა დაუბრუნოს მან ბანკს გაორმაგებული თანხა?

ამოხსნა. (9.8) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ $l = \frac{69,3}{23,1} = 3$.

მაშასადამე, 3 წლის შემდეგ ფირმამ ბანკს უნდა დაუბრუნოს გაორმაგებული თანხა.

9.4. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. თამარმა ანაბარზე შეიტანა თანხა სარგებლის ნომინალური 25 % -ანი მარტივი განაკვეთით. რამდენი წლის შემდეგ გაორმაგდება ეს თანხა?

პასუხი: 4 წელი.

2. ფირმამ ბანკიდან აიღო სესხი სარგებლის წლიური 18 % -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. რამდენი წლის შემდეგ უნდა დაუბრუნოს მან ბანკს გაორმაგებული თანხა?

პასუხი: 4 წელი.

3. გიორგიმ ბანკიდან აიღო კრედიტი სარგებლის წლიური 11,55% -ანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის პირობით. რამდენი წლის შემდეგ უნდა დაუბრუნოს მან ბანკს გაორმაგებული თანხა?

პასუხი: 6 წელი.

4. თამარმა ანაბარზე შეიტანა თანხა სარგებლის მარტივი განაკვეთით. 5 წლის შემდეგ ეს თანხა გაორმაგდა. იპოვეთ სარგებლის ნომინალური განაკვეთი.

პასუხი: 20%.

5. ფირმამ ბანკიდან აიღო სესხი სარგებლის წლიური რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. 3 წლის შემდეგ ეს თანხა გაორმაგდა. რა ნომინალური განაკვეთით იყო სესხი აღებული?

პასუხი: 24%.

6. გორგიმ ბანკიდან აიღო კრედიტი სარგებლის უწყვეტი დარიცხვის პირობით. 3 წლის შემდეგ ეს თანხა გაორმაგდა. რა ნომინალური განაკვეთით იყო სესხი აღებული?

პასუხი: 23,1%.

ლექცია 10

დროის დიაგრამა

და თანხის ნაკადი

ლექცია 10

დროის დიაგრამა და თანხის ნაკადი

გეგმა

10.1. დროის დიაგრამა

10.2. თანხის ნაკადი

10.3. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

10.1. დროის დიაგრამა

საბანკო და საფინანსო ორგანიზაციებში ხდება თანხის მოძრაობა: მიღება ან გაცემა. თანხის მოძრაობის ნათლად წარმოდგენისათვის გამოიყენება ცხრილი ან დიაგრამა, რომელიც ასახავს დროის მიხედვით თანხის ცვლილებას.

მაგალითად, თუ ბანკის მიერ 2 წლის ვადით გაცემულია 1000 ლარი სარეგების წლიური 10% -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით, მაშინ (5.9) ფორმულის ძალით, ამ ვადის ბოლოს ბანკი მიიღებს 1210 ლარს. დროის მიხედვით თანხის ასეთ ცვლილებას წერენ შემდეგი ცხრილის სახით:

წელიწადი	0	1	2
თანხა	-1000	-	1210

ცხრილი 10.1

ყურადღება მივაქციოთ შემდეგ ფაქტს: ამ ცხრილის მეორე სტრიქონში გაცემული თანხა ჩაიწერება უარყოფითი ნიშნით, ხოლო მიღებული თანხა – დადებითი ნიშნით.

სრულიად ანალოგიურად, თუ ფირმამ აიღო 10000 ლარის კრედიტი 2 წლის ვადით სარეგების 10% -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით, მაშინ ამ ვადის ამოწურვის შემდეგ ფირმამ ბანკს უნდა დაუბრუნოს 12100 ლარი. ცხადია, თანხის ეს ცვლილება დროის მიხედვით მოიცემა ცხრილი 10.2 -ის სახით.

წელიწადი	0	1	2
თანხა	10000	-	-12100

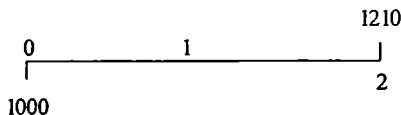
ცხრილი 10.2

თანხის ცვლილებას დროის მიხედვით გამოსახავენ აგრეთვე დიაგრამის სახით, რომელიც აიგება შემდეგი წესით:

1. გაავლოთ მონაკვეთი ჰორიზონტალურად. დავყოთ იგი n ტოლ ნაწილად პატარა ვერტიკალური ხაზებით, სადაც n სარგებლის დარიცხვების მთლიანი რაოდენობაა.
2. გაცემული თანხა მივუწეროთ შესაბამის ვერტიკალურ ხაზს ქვევით დადებითი ნიშნით (და არა უარყოფითი ნიშნით, როგორც ცხრილის შედგენისას მოვიქცეთ), ხოლო მიღებული თანხა – ხაზის ზევით.
3. ამ ვერტიკალურ ხაზებზე მიწერილი თანხების მოპირდაპირე მხარეს დავაწეროთ $0, 1, 2, \dots, n$ რიცხვები მარცხნიდან მარჯვნივ.

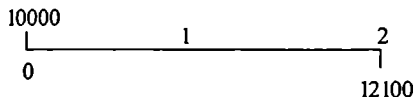
მიღებულ ნახაზს დროის დიაგრამა ეწოდება.

მოყვანილი წესის მიხედვით, ცხრილი 10.1 –ის შესაბამის დროის დიაგრამას ექნება შემდეგი სახე:



ნახ. 10.1

ხოლო ცხრილი 10.2 –ის შესაბამისი დიაგრამა იქნება შემდეგი სახის:

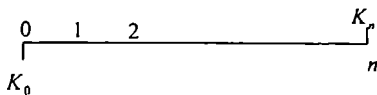


ნახ. 10.2

ამასთანავე, დიაგრამაზე ვერტიკალური ხაზები გავლებულია გაცემული ან მიღებული თანხის მხარეს.

ახლა განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა. ვთქვათ, ანაბარზე l წლის ვადით შეტანილია K_0 ოდენობის თანხა სარგებლის j მარტივი საპროცენტო განაკვეთით ყოველწლიური დარიცხვის პირობით (ე.ი. $l = n$). ვიპოვოთ საბოლოო თანხა და ავაგოთ თანხის ცვლილების შესაბამისი დროის დიაგრამა.

ზემოთ მოყვანილი წესის მიხედვით მარტივად ავაგებთ დროის დიაგრამას:



ნახ. 10.3

სადაც $K_n = K_0(1 + nj)$ ((3.9) ფორმულის თანახმად). ცხადია, იგივე დიაგრამა გვექნება, როცა სარგებელი არის რთული განაკვეთით ყოველწლიური ღარიცხვის პირობით და $K_n = K_0(1 + j)^n$.

10.2. თანხის ნაკადი

განვიხილოთ ანაბარზე თანხის ცვლილების შემდეგი შემთხვევები:

- ა) ანაბრის ვადის დასრულებამდე ხდება ანაბრიდან თანხის ნაწილის მოხსნა,
- ბ) ანაბრის ვადის დასრულებამდე ხდება ანაბარზე თანხის დამატება,
- გ) ანაბრის ვადის დასრულებამდე ხდება როგორც ანაბრიდან თანხის ნაწილის მოხსნა, ასევე ამ ანაბარზე თანხის დამატება (ან პირიქით).

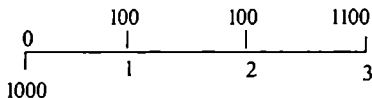
ანაბარზე თანხის ასეთ ცვლილებას თანხის ნაკადი ეწოდება.

- ა) ეთქვას, ანაბრის ვადის დასრულებამდე ხდება ანაბრიდან თანხის ნაწილის მოხსნა. ვიპოვოთ ანაბარზე დაგროვილი თანხის ოდენობა. განვიხილოთ შემდეგი ამოცანები.

ამოცანა 10.1. გიორგიმ ანაბარზე 3 წლის ვადით შეიტანა 1000 ლარი სარგებლის ნომინალური 10% -ანი განაკვეთით ყოველწლიური ღარიცხვისა და წლის ბოლოს სარგებლის გამოტანის პირობით. ვიპოვოთ დაგროვილი თანხა და ავაგოთ თანხის ნაკადის დიაგრამა.

ამოხსნა. რადგან გიორგის შეუძლია პირველი და მეორე წლის ბოლოს გამოიტანოს სარგებელი 100 ლარი (1000 -ის 10% არის 100), ამიტომ ყოველი წლის დასაწყისში ანაბარზე რჩება ერთი და იგივე ოდენობის თანხა (1000 ლარი) და იმავე წლის ბოლოს ამ თანხას ემატება სარგებელი 100 ლარი. ეს კი თავის მხრივ ნიშნავს, რომ ანაბარზე თანხა შეტანილია სარგებლის მარტივი განაკვეთით. მესამე წლის ბოლოს გიორგი მიიღებს 1100 ლარს (საწყის თანხას დაემატება მესამე წლის სარგებელი). ცხადია, გიორგის მიერ სამი წლის განმავლობაში მიღებული (დაგროვილი) თანხა იქნება 1300 ლარი ($2 \cdot 100 + 1100 = 1300$), ხოლო თანხის ნაკადის დიაგრამას ექნება შემდეგი

სახე (დაგროვილი თანხა არის დიაგრამის პორიზონტალური ხაზის ზემოთ დაწერილი თანხების ჯამი)

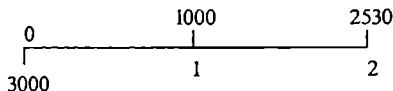


ნახ. 10.4

ამოცანა 10.2. თამარმა 2 წლის ვადით ანაბარზე შეიტანა 3000 ლარი სარგებლის წლიური 10% -ანი რთული განაკვეთით ყოველი წლის ბოლოს სარგებლის დარიცხვის პირობით. პირველი წლის ბოლოს მან ანაბრიდან გამოიტანა 1000 ლარი. ვიპოვოთ ამ ვადის ბოლოსათვის ანაბარზე დაგროვილი თანხა და ავავოთ თანხის ნაკადის დიაგრამა.

ამოხსნა. პირველი წლის ბოლოს საწყის 3000 ლარს დაერიცხება (დაემატება) მისი 10% და გახდება 3300 ლარი. რადგან თამარმა პირველი წლის ბოლოს ამ ანაბრიდან გამოიტანა 1000 ლარი, ამიტომ მეორე წლის დასაწყისში ანაბარზე იქნება 2300 ლარი. რადგან ანაბარი გახსნილია სარგებლის რთული განაკვეთით, ამიტომ მეორე წლის ბოლოს ამ თანხას (2300 ლარს) დაემატება მისი 10%, ანუ 230 ლარი და გახდება 2530 ლარი. მაშასადამე, ანაბარზე დაგროვილი თანხა იქნება 3530 ლარი (პირველი წლის ბოლოს გამოტანილი 1000 ლარისა და მეორე წლის ბოლოს ანაბარზე დარჩენილი 2530 ლარის ჯამი).

ცხადია, თანხის ნაკადის დიაგრამას ექნება შემდეგი სახე



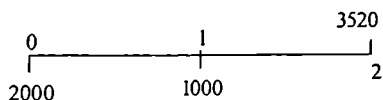
ნახ. 10.5

ბ) ვთქვათ, ანაბრის ვადის დასრულებამდე ხდება ანაბარზე თანხის დამატება. განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა.

ამოცანა 10.3. 2000 ლარი შეტანილია ანაბარზე სარგებლის 10% -ანი რთული განაკვეთით. ერთი წლის შემდეგ მესამე ანაბარზე შეიტანა 1000 ლარი. ანაბარზე სარგებლის დარიცხვა ხდება წლის ბოლოს. ვიპოვოთ 2 წლის შემდეგ ანაბარზე დაგროვილი თანხა და ავავოთ თანხის ნაკადის დიაგრამა.

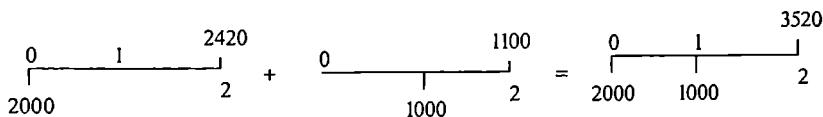
ამოხსნა. ცალ-ცალკე დავითვალოთ საბოლოო თანხა, რომელსაც მოგვცემს 2000 ლარი 2 წლის ბოლოს და 1000 ლარი 1 წლის ბოლოს (1000 ლარი ანაბარზე იყო მხოლოდ 1 წელი), ხოლო შესაბამისი საბოლოო თანხების ჯამი იქნება დაგროვილი თანხა.

რადგან 2000 ლარი ანაბარზე შეტანილი იყო სარგებლის რთული განაკვეთით, ამიტომ (5.9) ფორმულის გამოყენებით ეს თანხა 2 წლის შემდეგ გახდება 2420 ლარი ($K_2 = 2000 \cdot (1 + 0,1)^2 = 2000 \cdot 1,21 = 2420$), ხოლო მეორე წლის დასაწყისში ანაბარზე შეტანილი 1000 ლარი იმავე წლის ბოლოს გახდება 1100 ლარი ($K_1 = 1000 \cdot (1 + 0,1) = 1100$), ე.ი. 2 წლის ბოლოს ანაბარზე დაგროვილი თანხა იქნება 3520 ლარი ($2420 + 1100 = 3520$). ცხადია, თანხის ნაკადის შესაბამის დიაგრამას ექნება შემდეგი სახე



ნახ. 10.6

ანაბარზე თანხის ასეთი ნაკადი შეიძლება ჩაეწეროს ორი დიაგრამის “ჯამის” სახით:



ნახ. 10.7

ყურადღება მივაქციოთ შემდეგ ფაქტებს:

1. როცა ყოველი წლის ბოლოს შეიძლება ანაბრიდან მხოლოდ წლიური სარგებლის გამოტანა, მაშინ ეს ნიშნავს, რომ ანაბარზე თანხა შეტანილია სარგებლის მარტივი განაკვეთით. ამ შემთხვევაში, ყოველი წლის დასაწყისში ანაბარზე ერთი და იგივე ოდენობის თანხაა და მაშასადამე, იმავე წლის ბოლოს ანაბარზე ერთი და იგივე ოდენობის სარგებელი დაირიცხება (იხ. ამოცანა 12.1).
2. როცა შესაძლებელია ანაბარზე თანხის დამატება ან ანაბრიდან სარგებლის ყოველწლიური ოდენობისგან განსხვავებული თანხის მოხსნა, მაშინ ანაბარი გახსნილია სარგებლის რთული განაკვეთით (იხ. ამოცანები 12.2 და 12.3).

გ) ეთქვათ, ანაბრის ვადის დასრულებამდე ზდება როგორც ანაბრიდან თანხის ნაწილის მოხსნა, ასევე ამ ანაბარზე თანხის დამატება. განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა.

ამოცანა 10.4. გიორგიმ 3 წლის ვადით ანაბარზე შეიტანა 3000 ლარი სარგებლის წლიური 10% -ანი რთული განაკვეთით. პირველი წლის ბოლოს მან ანაბრიდან გამოიტანა 2000 ლარი, ხოლო მეორე წლის ბოლოს ამავე ანაბარზე შეიტანა 1000 ლარი. ვიპოვოთ ამ ვადის ბოლოსათვის ანაბარზე დაგროვილი თანხა და ავავოთ თანხის ნაკადის დიაგრამა.

ამოხსნა. ეს ამოცანა შეიძლება ამოიხსნას ორი ხერხით.

I ხერხი. პირველი წლის ბოლოს საწყის 3000 ლარს დამატება მისი 10% და გახდება 3300 ლარი. რადგან გიორგიმ პირველი წლის ბოლოს ამ ანაბრიდან გამოიტანა 2000 ლარი, ამიტომ მეორე წლის დასაწყისში ანაბარზე იქნება 1300 ლარი. რადგან ეს თანხა ანაბარზე იყო ორი წელი სარგებლის რთული განაკვეთით, ამიტომ იგი ანაბრის ვადის დასრულებისას გახდება 1573 ლარი ($K_2 = 1300 \cdot (1 + 0,1)^2 = 1300 \cdot 1,21 = 1573$).

ამასთანავე, რადგან გიორგიმ მეორე წლის ბოლოს ანაბარზე შეიტანა 1000 ლარი, ამიტომ ერთი წლის შემდეგ ამ თანხაზე სარგებლის დამატებით მიიღება 1100 ლარი. ცხადია, მესამე წლის ბოლოს ანაბარზე იქნება 2673 ლარი ($1573 + 1100 = 2673$).

მაშასადამე, 3 წლის ბოლოს ანაბარზე დაგროვილი თანხა იქნება 4673 ლარი (პირველი წლის ბოლოს ანაბრიდან გამოტანილ 2000 ლარს ემატება 2673 ლარი).

თანხის ნაკადის შესაბამის დიაგრამას ექნება შემდეგი სახე



ნახ. 10.8

II ხერხი. როგორც უკვე დავადგინეთ, მეორე წლის დასაწყისში ანაბარზე იქნება 1300 ლარი. იმავე წლის ბოლოს მას დამატება სარგებელი 130 ლარი (1300 -ის 10% არის 130) და გახდება 1430 ლარი. რადგან მეორე წლის ბოლოს გიორგიმ ამავე ანაბარზე შეიტანა 1000 ლარი, ამიტომ მესამე წლის დასაწყისში ანაბარზე იქნება 2430 ლარი. მესამე წლის ბოლოს ამ თანხას

დაემატება მისი 10% (2430 -ის 10% არის 243) და გახდება 2673 ლარი. მაშასადამე, 3 წლის ბოლოს ანაბარზე დაგროვილი თანხა იქნება 4673 ლარი.

10.3. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. გიორგიმ ანაბარზე 4 წლის ვადით შეიტანა 2000 ლარი სარგებლის ნომინალური 8% -ანი განაკვეთით ყოველწლიური დარიცხვისა და წლის ბოლოს სარგებლის გამოტანის პირობით. იპოვეთ დაგროვილი თანხა და ააგეთ თანხის ნაკადის დიაგრამა.
პასუხი: 2640 ლარი.
2. ბანკში ანაბარი გაიხსნა 3000 ლარი საწყისი თანხით სარგებლის 10% -ანი რთული განაკვეთით. ერთი წლის შემდეგ ამავე ანაბარზე შეტანილია 2000 ლარი. ანაბარზე სარგებლის დარიცხვა ხდება წლის ბოლოს. იპოვეთ 3 წლის შემდეგ დაგროვილი თანხა და ააგეთ თანხის ნაკადის დიაგრამა.
პასუხი: 6413 ლარი.
3. თამარმა ანაბარზე შეიტანა 4000 ლარი სარგებლის წლიური 10% -ანი რთული განაკვეთით. პირველი წლის ბოლოს მან ანაბრიდან გამოიტანა 1000 ლარი. იპოვეთ ორი წლის ბოლოს ანაბარზე დაგროვილი თანხა და ააგეთ თანხის ნაკადის დიაგრამა.
პასუხი: 4740 ლარი.
4. გიორგიმ 3 წლის ვადით ანაბარზე შეიტანა 2000 ლარი სარგებლის ნომინალური 10% -ანი რთული განაკვეთით. მან პირველი წლის ბოლოს ანაბრიდან გამოიტანა 1000 ლარი, ხოლო მეორე წლის ბოლოს ამავე ანაბარზე შეიტანა 500 ლარი. იპოვეთ 3 წლის ბოლოსათვის ანაბარზე დაგროვილი თანხა და ააგეთ თანხის ნაკადის დიაგრამა.
პასუხი: 3002 ლარი.
5. ბანკში ანაბარი გაიხსნა 10000 ლარი საწყისი თანხით სარგებლის 12% -ანი რთული განაკვეთით. ანაბარზე სარგებლის დარიცხვა ხდება წლის ბოლოს. ერთი წლის შემდეგ ამ ანაბარზე შეტანილია 2000 ლარი, ხოლო მეორე წლის ბოლოს ამავე ანაბრიდან მოიხსნა 5000 ლარი. იპოვეთ 3 წლის შემდეგ ანაბარზე დაგროვილი თანხა და ააგეთ თანხის ნაკადის დიაგრამა.
პასუხი: 15958,08 ლარი.

6. თამარმა 3 წლის ვადით ანაბარზე შეიტანა 6000 დოლარი სარგებლის წლიური 15% -ანი რთული განაკვეთით. პირველი წლის ბოლოს მან ანაბრიდან გამოიტანა 3000 ლარი, ხოლო მეორე წლის ბოლოს ამავე ანაბარზე შეიტანა 2000 ლარი. იპოვეთ 3 წლის ბოლოსათვის ანაბარზე დაგროვილი თანხა და ააგეთ თანხის ნაკადის დიაგრამა.

პასუხი: 10457,75 დოლარი.

ლექცია 11

ანაბარზე თანხის დაგროვება

ანაბარზე თანხის დაგროვება

გეგმა

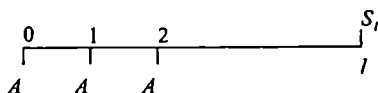
- 11.1. ანაბარზე თანხის დაგროვება სარგებლის მარტივი განაკვეთისას
- 11.2. ანაბარზე თანხის დაგროვება სარგებლის რთული განაკვეთისას
- 11.3. ანაბარზე თანხის დაგროვება სარგებლის უწყვეტი დარიცხვისას
- 11.4. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

11.1. ანაბარზე თანხის დაგროვება სარგებლის მარტივი განაკვეთისას

საბანკო საკმეში გვხვდება ისეთი ანაბრები, როცა ყოველი წლის დასაწყისში მასზე ხდება ერთი და იგივე ოდენობის თანხის დამატება. თანხის ასეთ ნაკადს ანაბარზე თანხის დაგროვება ეწოდება. გამოვიყვანოთ ამ ტიპის ანაბრებზე დაგროვილი თანხისა და დისკონტის გამოსათვლელი ფორმულები.

ჯერ განვიხილოთ სარგებლის მარტივი განაკვეთის შემთხვევა. ვთქვათ, შეანაბრეს ყოველი წლის დასაწყისში ანაბარზე შეაქვს ერთი და იგივე A ოდენობის თანხა სარგებლის წლიური j მარტივი საპროცენტო განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. გამოვიყვანოთ l წლის ბოლოს დაგროვილი თანხის გამოსათვლელი ფორმულა (ცხადია, ამ შემთხვევაში წლების რაოდენობა სარგებლის დარიცხვების რაოდენობის ტოლია).

ვთქვათ, S_l დაგროვილი თანხაა. მაშინ თანხის ნაკადის დიაგრამას ექნება შემდეგი სახე



ნახ. 11.1

რადგან პირველი წლის დასაწყისში ანაბარზე შეტანილია A ოდენობის თანხა, ამიტომ იგი ბანკში იქნება l წლის განმავლობაში და სარგებელი დაერიცხება l -ჯერ (3.9) ფორმულის მიხედვით. ეს თანხა l წლის ბოლოს გახდება $K_l = A(1 + l j)$.

მეორე წლის დასაწყისში ანაბარზე შეტანილი A ოდენობის თანხა ბანკში იქნება $l-1$ წლის განმავლობაში და სარგებელი დაერიცხება $(l-1)$ -ჯერ (3.9) ფორმულის მიხედვით. ეს თანხა $l-1$ წლის ბოლოს გახდება $K_{l-1} = A[1 + (l-1)j]$.

ამ პროცესის გაგრძელებით, $l-1$ წლის დასაწყისში ანაბარზე შეტანილი A ოდენობის თანხა ბანკში იქნება 2 წლის განმავლობაში და სარგებელი დაერიცხება ორჯერ (3.9) ფორმულის მიხედვით. ეს თანხა 2 წლის ბოლოს გახდება $K_2 = A(1+2j)$.

ბოლო l წლის დასაწყისში ანაბარზე შეტანილი A ოდენობის თანხა ბანკში იქნება ერთი წლის განმავლობაში და სარგებელი დაერიცხება ერთხელ ისევ (3.9) ფორმულის მიხედვით. ეს თანხა ამავე წლის ბოლოს (ანუ ანაბრის დახურვისას) გახდება $K_l = A(1+j)$, ე.ი. ანაბარზე დაგროვილი თანხა S_l იქნება

$$S_l = K_1 + K_2 + \dots + K_{l-1} + K_l.$$

აღვილი შესამჩნევია, რომ $K_1, K_2, \dots, K_l$ რიცხვები კმნიან არითმეტიკულ პროგრესიას, რომლის პირველი წევრია K_1 , წევრთა რაოდენობაა l , პროგრესიის სხვაობაა Aj და პირველი l წევრის ჯამია S_l . არითმეტიკული პროგრესიის წევრთა ჯამის (3.3) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$S_l = \frac{K_1 + K_l}{2} l = \frac{A(1+j) + A(1+l j)}{2} l = A l \frac{1+j+1+l j}{2} = A l \left(1 + \frac{l+1}{2} j\right).$$

ამრიგად, მივიღეთ ანაბარზე დაგროვილი თანხის გამოსათვლელი ფორმულა სარგებლის მარტივი განაკვეთის შემთხვევაში და მისი წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით

$$\boxed{S_l = A l \left(1 + \frac{l+1}{2} j\right)}. \quad (11.1)$$

როგორც (11.1) ფორმულიდან ჩანს, ანაბარზე დაგროვილი თანხა ყოველწლიურად შეტანილი თანხის (A -ს) პირდაპირპროპორციულია, საპროცენტო განაკვეთის (j -ს) მიმართ წრფივი ფუნქციაა და წლების რაოდენობის (რომელიც დარიცხვების რაოდენობის ტოლია) მიმართ კვადრატული ფუნქციაა (ელემენტარული ფუნქციების შესახებ ინფორმაცია იხ. ლექცია 4-ში).

გამოვიყვანოთ D დისკონტის გამოსათვლელი ფორმულა. რადგან ანაბარზე l წლის განმავლობაში შეტანილია $A l$ ოდენობის თანხა, ამიტომ დისკონტი იქნება

$$D = S_l - Al = Al \left(1 + \frac{l+1}{2} j \right) - Al = Al \left(1 + \frac{l+1}{2} j - 1 \right) = \frac{1}{2} Al (l+1) j.$$

ე.ი. დისკონტის გამოსათვლელად გვაქვს შემდეგი ფორმულა

$$D = \frac{1}{2} Al (l+1) j. \quad (11.2)$$

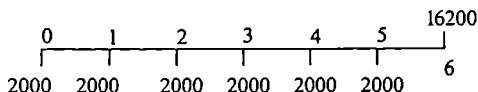
როგორც (11.2) ფორმულიდან ჩანს, დისკონტი ყოველწლიურად შეტანილი თანხისა და საპროცენტო განაკვეთის პირდაპირპროპორციულია, ხოლო წლების რაოდენობის (სარგებლის დარიცხვების რაოდენობის) მიმართ კვადრატული ფუნქციაა.

ამოცანა 11.1. ყოველი წლის დასაწყისში თამარს ანაბარზე შეაქვს 2000 ლარი სარგებლის წლიური 10% -ანი მარტივი განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. რა თანხა იქნება ანაბარზე 6 წლის ბოლოს? ავაგოთ თანხის ნაკადის დიაგრამა.

ამოხსნა. ამოცანის პირობის ძალით $A = 2000$, $j = \frac{10}{100} = 0,1$, $l = n = 6$. თუ გამოვიყენებთ (11.1) ფორმულას, მივიღებთ

$$S_6 = 2000 \cdot 6 \left(1 + \frac{6+1}{2} \cdot 0,1 \right) = 12000 (1 + 0,35) = 12000 \cdot 1,35 = 16200.$$

მაშასადამე, 6 წლის ბოლოს ანაბარზე იქნება 16200 ლარი. ცხადია, თანხის ნაკადის დიაგრამას ექნება შემდეგი სახე



ნახ. 11.2

ამოცანა 11.2. ყოველი წლის დასაწყისში გიორგის ანაბარზე შეაქვს 1000 ლარი სარგებლის წლიური 8% -ანი მარტივი განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. ვიპოვოთ დისკონტი 4 წლის ბოლოსათვის?

ამოხსნა. ამოცანის პირობის ძალით $A = 1000$, $j = \frac{8}{100} = 0,08$, $l = n = 4$. თუ გამოვიყენებთ (11.2) ფორმულას, მივიღებთ

$$D = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 0,08 = 800.$$

მაშასადამე, 6 წლის ბოლოსათვის დისკონტი იქნება 800 ლარი.

11.2. ანაბარზე თანხის დაგროვება სარგებლის რთული განაკვეთისას

ვთქვათ, მენაბარეს ყოველი წლის დასაწყისში ანაბარზე შეაქვს ერთი და იგივე A ოდენობის თანხა სარგებლის წლიური j რთული საპროცენტო განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. გამოვიყენოთ l წლის ბოლოს დაგროვილი თანხის გამოსათვლელი ფორმულა (ცხადია, ამ შემთხვევაში წლების რაოდენობა სარგებლის დარიცხვების რაოდენობის ტოლია).

ვთქვათ, S_l დაგროვილი თანხაა. მაშინ თანხის ნაკადის დიაგრამა იქნება ნახ. 11.1 -ის სახის. რადგან პირველი წლის დასაწყისში ანაბარზე შეტანილია A ოდენობის თანხა, ამიტომ იგი ბანკში იქნება l წლის განმავლობაში და სარგებელი დაერიცხება l -ჯერ (5.3) ფორმულის მიხედვით. ეს თანხა l წლის ბოლოს გახდება $K_l = Aq^l$, სადაც $q = 1 + j$.

მეორე წლის დასაწყისში ანაბარზე შეტანილი A ოდენობის თანხა ბანკში იქნება $l-1$ წლის განმავლობაში და სარგებელი დაერიცხება $l-1$ -ჯერ (5.3) ფორმულის მიხედვით. ეს თანხა $l-1$ წლის ბოლოს გახდება $K_{l-1} = Aq^{l-1}$.

ამ პროცესის გაგრძელებით, $l-1$ წლის დასაწყისში ანაბარზე შეტანილი A ოდენობის თანხა ბანკში იქნება 2 წლის განმავლობაში და სარგებელი დაერიცხება ორჯერ (5.3) ფორმულის მიხედვით. ეს თანხა 2 წლის ბოლოს გახდება $K_2 = Aq^2$.

ბოლო n წლის დასაწყისში ანაბარზე შეტანილი A ოდენობის თანხა ბანკში იქნება ერთი წლის განმავლობაში და სარგებელი დაერიცხება ერთხელ ისევ (5.3) ფორმულის მიხედვით. ეს თანხა ამავე წლის ბოლოს (ანუ ანაბრის დახურვისას) გახდება $K_1 = Aq$, ე.ი. ანაბარზე დაგროვილი თანხა S_l იქნება

$$S_l = K_1 + K_2 + \dots + K_{l-1} + K_l = Aq + Aq^2 + \dots + Aq^{l-1} + Aq^l.$$

აღვილი შესამჩნევია, რომ $K_1, K_2, \dots, K_l$ რიცხვები ქმნიან გეომეტრიულ პროგრესიას, რომლის პირველი წევრია K_1 , l -ური წევრია K_l , პროგრესიის მნიშვნელია q და პირველი l წევრის ჯამია S_l . გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის (5.2) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$S_l = \frac{K_l(q^l - 1)}{q - 1} = \frac{Aq(q^l - 1)}{j}.$$

ამრიგად, მივიღეთ ანაბარზე დაგროვილი თანხის გამოსათვლელი ფორმულა სარგებლის რთული განაკვეთის შემთხვევაში და სარგებლის წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით

$$S_t = \frac{Aq(q' - 1)}{j} \quad (11.3)$$

როგორც (11.3) ფორმულიდან ჩანს, ანაბარზე დაგროვილი თანხა ყოველწლიურად შეტანილი თანხის (A -ს) პირდაპირპროპორციულია, ხოლო წლების რაოდენობის (რომელიც დარიცხვების რაოდენობის ტოლია) მიმართ მაჩვენებლიანი ფუნქციაა.

რადგან დისკონტი $D = S_t - At$, ამიტომ (11.3) ფორმულიდან მარტივად მივიღებთ დისკონტის გამოსათვლელ შემდეგ ფორმულას სარგებლის რთული განაკვეთის შემთხვევაში

$$D = A \cdot \left[\frac{q(q' - 1)}{j} - t \right] \quad (11.4)$$

ამოცანა 11.3. ყოველი წლის დასაწყისში გიორგის ანაბარზე შეაქვს 2000 ლარი სარგებლის წლიური 10% -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. რა თანხა იქნება ამ ანაბარზე 4 წლის ბოლოს? ვიპოვოთ დისკონტი.

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად $A = 2000$, $j = \frac{10}{100} = 0,1$, $t = n = 4$. თუ გამოვიყენებთ (11.3) ფორმულას, მივიღებთ

$$S_4 = \frac{2000 \cdot 1,1 \cdot (1,1^4 - 1)}{0,1} = 2000 \cdot 11 \cdot (1,4641 - 1) = 22000 \cdot 0,4641 = 10210,2.$$

მაშასადამე, 4 წლის ბოლოს ანაბარზე იქნება 10210,2 ლარი, ხოლო დისკონტი იქნება

$$D = S_4 - 4A = 10210,2 - 8000 = 2210,2 \text{ ლარი.}$$

შეენიშნოთ, რომ დისკონტის გამოთვლა აგრეთვე შესაძლებელია (11.4) ფორმულის გამოყენებით.

11.3. ანაბარზე თანხის დაგროვება სარგებლის უწყვეტი დარიცხვისას

ვთქვათ, მენაბრეს ყოველი წლის დასაწყისში ანაბარზე შეაქვს ერთი და იგივე A ოდენობის თანხა სარგებლის წლიური j საპროცენტო განაკვეთით

უწყვეტი დარიცხვის პირობით. გამოვიყენოთ / წლის ბოლოს დაგროვილი თანხის გამოსათვლელი ფორმულა.

ვთქვათ, S_1 დაგროვილი თანხაა. მაშინ თანხის ნაკადის დიაგრამა იქნება ნახ. 11.1 -ის სახის. რადგან პირველი წლის დასაწყისში ანაბარზე შეტანილია A ოდენობის თანხა, ამიტომ იგი ბანკში იქნება / წლის განმავლობაში და სარგებელი დაერიცხება / -ჯერ (8.9) ფორმულის მიხედვით. ეს თანხა / წლის ბოლოს გახდება $K_1 = Ae^{i'}$.

მორე წლის დასაწყისში ანაბარზე შეტანილი A ოდენობის თანხა ბანკში იქნება $1-1$ წლის განმავლობაში და სარგებელი დაერიცხება $1-1$ -ჯერ (8.9) ფორმულის მიხედვით. ეს თანხა $1-1$ წლის ბოლოს გახდება $K_{1-1} = Ae^{(1-1)i'}$.

ამ პროცესის გაგრძელებით, $1-1$ წლის დასაწყისში ანაბარზე შეტანილი A ოდენობის თანხა ბანკში იქნება 2 წლის განმავლობაში და სარგებელი დაერიცხება ორჯერ (5.3) ფორმულის მიხედვით. ეს თანხა 2 წლის ბოლოს გახდება $K_2 = Ae^{2i'}$.

ბოლო / წლის დასაწყისში ანაბარზე შეტანილი A ოდენობის თანხა ბანკში იქნება ერთი წლის განმავლობაში და სარგებელი დაერიცხება ერთხელ ისე (8.9) ფორმულის მიხედვით. ეს თანხა ამავე წლის ბოლოს (ანუ ანაბრის დახურვისას) გახდება $K_1 = Ae^{i'}$, ე.ი. ანაბარზე დაგროვილი თანხა S_1 იქნება

$$S_1 = K_1 + K_2 + \dots + K_{1-1} + K_1 = Ae^{i'} + Ae^{2i'} + \dots + Ae^{(1-1)i'} + Ae^{i'}.$$

აღვილი შესაძინევა, რომ $K_1, K_2, \dots, K_1$ რიცხვები ქმნიან გეომეტრიულ პროგრესიას, რომლის პირველი წევრია K_1 , 1 -ური წევრია K_1 , პროგრესიის მნიშვნელია $q = e^{i'}$ და პირველი 1 წევრის ჯამია S_1 . გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის (5.2) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$S_1 = \frac{K_1(q^1 - 1)}{q - 1} = \frac{Ae^{i'}(e^{i'} - 1)}{e^{i'} - 1}.$$

ამრიგად, მივიღეთ ანაბარზე დაგროვილი თანხის გამოსათვლელი ფორმულა სარგებლის უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში

$$S_1 = \frac{Ae^{i'}(e^{i'} - 1)}{e^{i'} - 1}. \quad (11.5)$$

როგორც (11.5) ფორმულიდან ჩანს, ანაბარზე დაგროვილი თანხა ყოველწლიურად შეტანილი თანხის (A -ს) პირდაპირპროპორციულია, ხოლო წლების რაოდენობის მიმართ მაჩვენებლიანი ფუნქციაა.

ცხადია, (11.5) ფორმულიდან მარტივად მივიღებთ დისკონტის გამოსათვლელ შემდეგ ფორმულას სარგებლის უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში

$$D = A \cdot \left[\frac{e' (e'^j - 1)}{e^j - 1} - l \right] . \quad (11.6)$$

ამოცანა 11.4. ყოველი წლის დასაწყისში თამარს ანაბარზე შეაქვს 1000 ლარი სარგებლის წლიური 10% -ანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის პირობით. რა თანხა იქნება ამ ანაბარზე 3 წლის ბოლოს, თუ $e^{0.1} \approx 1,104$? ვიპოვოთ დისკონტი.

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად $A = 1000$, $j = \frac{10}{100} = 0,1$, $l = 3$. თუ გამოვიყენებთ (11.5) ფორმულას, მივიღებთ

$$S_3 = \frac{1000 \cdot e^{0.1} \cdot (e^{0.3} - 1)}{e^{0.1} - 1} = \frac{1104 \cdot (1,104^3 - 1)}{0,104} = \frac{1104 \cdot 0,346}{0,104} = \frac{381,984}{0,104} = 3672,92 .$$

მაშასადამე, 3 წლის ბოლოს ანაბარზე იქნება 3672,92 ლარი, ხოლო დისკონტი იქნება $D = S_3 - 3A = 3672,92 - 3000 = 672,92$ ლარი.

შევნიშნოთ, რომ დისკონტის გამოთვლა აგრეთვე შესაძლებელია (11.6) ფორმულის გამოყენებით.

11.4 ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. ყოველი წლის დასაწყისში თამარს ანაბარზე შეაქვს 5000 ლარი სარგებლის ნომინალური 12% -ანი მარტივი განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. რა თანხა იქნება ამ ანაბარზე 4 წლის ბოლოს? ააგეთ თანხის ნაკადის დიაგრამა.

პასუხი: 26000 ლარი.

2. ყოველი წლის დასაწყისში გიორგის ანაბარზე შეაქვს 2000 დოლარი სარგებლის ნომინალური 9% -ანი მარტივი განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. იპოვეთ დისკონტი 5 წლის ბოლოსათვის? ააგეთ თანხის ნაკადის დიაგრამა.

პასუხი: 2700 დოლარი.

3. ყოველი წლის დასაწყისში გიორგის ანაბარზე შეაქვს 3000 ლარი სარგებლის ნომინალური 10% -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. რა თანხა იქნება ამ ანაბარზე 5 წლის ბოლოს? ააგეთ თანხის ნაკადის დიაგრამა.

პასუხი: 20146,83 ლარი.

4. ყოველი წლის დასაწყისში ფიზიკურ პირს ანაბარზე შეაქვს 4000 ლარი სარგებლის ნომინალური 13% -ანი რთული განაკვეთით სარგებლის წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. იპოვეთ დისკონტი 4 წლის ბოლოსათვის. ააგეთ თანხის ნაკადის დიაგრამა.

პასუხი: 5921,08 ლარი.

5. ყოველი წლის დასაწყისში თამარს ანაბარზე შეაქვს 2000 ლარი სარგებლის ნომინალური 10% -ანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის პირობით. რა თანხა იქნება ამ ანაბარზე 4 წლის ბოლოს, თუ $e^{0.1} \approx 1,104$?

პასუხი: 10307,8 ლარი.

6. ყოველი წლის დასაწყისში ფიზიკურ პირს ანაბარზე შეაქვს 3000 დოლარი სარგებლის ნომინალური 10% -ანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის პირობით. იპოვეთ დისკონტი 5 წლის ბოლოსათვის, თუ $e^{0.1} \approx 1,104$?

პასუხი: 5381,71 დოლარი.

7. ყოველი წლის დასაწყისში ფიზიკურ პირს ანაბარზე შეაქვს 3000 ლარი სარგებლის ნომინალური 12% -ანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის პირობით. რა თანხა იქნება ამ ანაბარზე 4 წლის ბოლოს, თუ $e^{0.12} \approx 1,127$?

პასუხი: 16325,37 ლარი.

8. ყოველი წლის დასაწყისში გიორგის ანაბარზე შეაქვს 7000 ლარი სარგებლის ნომინალური 12% -ანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის პირობით. იპოვეთ დისკონტი 5 წლის ბოლოსათვის, თუ $e^{0.12} \approx 1,127$?

პასუხი: 15819,28 ლარი.

ლექცია 12

გრძელვადიანი კრედიტის
დაფარვა

ანაბრიდან ფიქსირებული
თანხის მოხსნა (ანუიტეტი)

ლექცია 12

გრძელვადიანი კრედიტის დაფარვა. ანაბრიდან ფიქსირებული თანხის მოხსნა (ანუიტეტი)

გეგმა

- 12.1. გრძელვადიანი სესხის დაფარვის გეგმის შედგენა
- 12.2. გრძელვადიანი სესხის დაფარვა სარგებლის მარტივი განაკვეთით
- 12.3. გრძელვადიანი სესხის დაფარვა სარგებლის რთული განაკვეთით
- 12.4. ანუიტეტი სარგებლის რთული განაკვეთით
- 12.5. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

12.1. გრძელვადიანი სესხის დაფარვის გეგმის შედგენა

ერთ წელზე მეტი ვადით (ანუ გრძელვადიანი) სესხის ან კრედიტის გაცემის წინ ბანკები და საფინანსო ორგანიზაციები მომავალ მოვალესთან ერთად ადგენენ ამ სესხის დაბრუნების (დაფარვის) პირობებს, ანუ ორივე მხარე ქმნის გრძელვადიანი სესხის (კრედიტის) დაფარვის გეგმას. ამ გეგმით განსაზღვრულია სესხის დაფარვის წესი, რომელიც მრავალნაირია.

მოვალის (დებიტორის) მიერ სესხის (კრედიტის) დაფარვა ნიშნავს:

- ა) დროის გარკვეული პერიოდის ბოლოს მოვალე იხდის ერთი და იგივე ოდენობის თანხას.
- ბ) საკრედიტო ვადის ამოწურვისას მოვალეს გადახდილი უნდა ჰქონდეს როგორც აღებული კრედიტი, ასევე გარკვეული სარგებელი, რომელიც სესხის დაფარვის გეგმის მიხედვით იანგარიშება.

გრძელვადიანი სესხის (კრედიტის) დაფარვის გეგმაში ყოველთვის აღნიშნულია:

- ა) სესხის (კრედიტის) ოდენობა,
- ბ) სესხის ხანგრძლივობა (საკრედიტო ვადა), რომლის დასრულებისას სესხი სრულად უნდა იყოს დაფარული,
- გ) სარგებლის განაკვეთი, სარგებლის განაკვეთის ფორმები (მარტივი ან რთული),
- დ) სარგებლის ღარიცხვის ფორმები (ერთჯერადი, მრავალჯერადი ან უწყვეტი),
- ე) სარგებლის ღარიცხვის პერიოდი,

- ვ) სესხის დაფარვის პერიოდი, ანუ დროის ის შუალედი, რომლის ბოლოს მოვალე იხდის სესხის გარკვეულ ნაწილს,
- ზ) ფიქსირებული გადასახადი თითოეული გადახდის პერიოდისათვის, ანუ ის თანხა, რომელიც მოვალემ უნდა გადაიხადოს პერიოდულად სესხის დაფარვის პერიოდის ბოლოს საკრედიტო ვადის ამოწურვამდე (სესხის დაფარვის თითოეული პერიოდის ბოლოს მოვალე იხდის ერთი და იგივე ოდენობის თანხას).

ყურადღება მივაქციოთ შემდეგ ფაქტს: სარგებლის დარიცხვისა და სესხის დაფარვის პერიოდები საზოგადოდ სხვადასხვაა.

გავეცნოთ სესხის დაფარვის წესებს.

12.2. გრძელვადიანი სესხის დაფარვა სარგებლის მარტივი განაკვეთით

ჯერ განვიხილოთ სესხები (კრედიტები), რომლებიც გაიცემა სარგებლის მარტივი განაკვეთის პირობით. ეს თავის მხრივ გულისხმობს, რომ სარგებლის დარიცხვის ყოველი პერიოდის ბოლოს სესხს ერიცხება ერთი და იგივე ოდენობის სარგებელი – საწყისი თანხის გარკვეული პროცენტი.

ვთქვათ, გაცემულია K ოდენობის კრედიტი l წლის ვადით სარგებლის წლიური j მარტივი საპროცენტო განაკვეთით წელიწადში m -ჯერ დარიცხვისა და ფიქსირებული გადასახადის წელიწადში k -ჯერ გადახდის პირობით. საინტერესოა პასუხი კითხვაზე: რა ოდენობის ფიქსირებული თანხა უნდა გადაუხადოს მოვალემ კრედიტორს სესხის დაფარვის ყოველი პერიოდის ბოლოს? გამოვიყენოთ ამ თანხის გამოსათვლელი ფორმულა.

ვთქვათ, სესხის დაფარვის ყოველი პერიოდის ბოლოს მოვალე კრედიტორს უხდის A ოდენობის თანხას. რადგან მოვალე ამ თანხას წელიწადში იხდის k -ჯერ და ვადის დაფარვა ხდება l წლის განმავლობაში, ამიტომ მოვალეს სულ მოუწევს A ოდენობის თანხის გადახდა kl -ჯერ, ე.ი. მოვალე სულ გადაიხდის Akl ოდენობის თანხას.

მეორე მხრივ, K ოდენობის კრედიტი l წლის ბოლოს სარგებლის მარტივი განაკვეთის პირობით გახდება K_n , სადაც $K_n = K(1+l/j)$ და $n = ml$ (იხ. ფორმულა (3.11)), ე.ი. მოვალემ კრედიტორს სულ უნდა დაუბრუნოს K_n ოდენობის თანხა.

რადგან საკრედიტო ვადის დასრულებისათვის მოვალე სრულად დაფარავს სესხს, ამიტომ ვწერთ

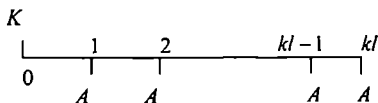
$$Akl = K(1 + l/j). \quad (12.1)$$

აქედან გვაქვს

$$A = \frac{K(1 + l/j)}{kl}. \quad (12.2)$$

(12.2) წარმოადგენს იმ ფიქსირებული თანხის გამოსათვლელ ფორმულას, რომელიც მოვალემ უნდა გადაუხადოს კრედიტორს სესხის დაფარვის ყოველი პერიოდის ბოლოს (წელიწადში k -ჯერ) სარგებლის მარტივი განაკვეთისას.

ამ შემთხვევაში თანხის ნაკადის დიაგრამას ექნება შემდეგი სახე



ნახ. 12.1

სადაც A განსაზღვრულია (12.2) ფორმულით.

(12.2) ფორმულიდან ნათლად ჩანს, რომ სესხის დაფარვის ფიქსირებული თანხა არაა დამოკიდებული წელიწადში სარგებლის დარიცხვების რაოდენობაზე (m -ზე), იგი პირდაპირპროპორციულია გაცემული სესხის K ოდენობისა და უკუპროპორციულია ფიქსირებული თანხის წელიწადში გადახდის k რაოდენობის.

ცხადია, რადგან სარგებლის დარიცხვისა და სესხის დაფარვის პერიოდები საზოგადოდ სხვადასხვაა, ამიტომ სარგებლის დარიცხვების რაოდენობა m და ფიქსირებული თანხის გადახდის რაოდენობა kl საზოგადოდ სხვადასხვა რიცხვებია.

ადვილად შევამჩნევთ, რომ სესხის დაფარვის ფიქსირებული თანხის გამოთვლა შესაძლებელია შემდეგი ხერხითაც: ჯერ (3.11) ფორმულით გამოვთვალოთ საბოლოო თანხა (K_n) სარგებლის მარტივი საპროცენტო განაკვეთით, ხოლო შემდეგ მიღებული თანხა გავყოთ ფიქსირებული თანხის გადახდის რაოდენობაზე (kl -ზე).

(12.1) -დან მარტივად მიიღება გაცემული სესხის გამოსათვლელი შემდეგი ფორმულა

$$K = \frac{Akl}{1 + l/j}. \quad (12.3)$$

ასევე, თუ (12.1) ტოლობიდან ვიპოვიოთ l -ს, მივიღებოთ სესხის ზანგრძლივობის (საკრედიტო ვადის) გამოსათვლელ შემდეგ ფორმულას

$$l = \frac{K}{Ak - Kj} \quad (12.4)$$

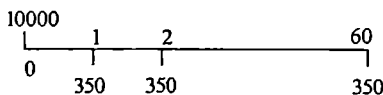
ამოცანა 12.1. გიორგიმ ბინის შესაძენად 5 წლის ვადით ბანკიდან აილო სესხი 10000 ლარი სარგებლის წლიური 22% -ანი მარტივი განაკვეთით ყოველკვარტალური დარიცხვის პირობით. რა ოდენობის თანხა უნდა დაუბრუნოს გიორგიმ ბანკს ყოველთვიურად სესხის დაფარვის მიზნით? შევადგინოთ თანხის ნაკადის დიაგრამა.

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად $K=10000$, $l=5$, $m=4$,
 $j = \frac{22}{100} = 0,22$, $k=12$. ცხადია, (12.2) ფორმულიდან გვაქვს

$$A = \frac{10000 \cdot (1 + 5 \cdot 0,22)}{12 \cdot 5} = \frac{10000 \cdot 2,1}{60} = 350.$$

მაშასადამე, 5 წლის განმავლობაში ყოველთვიურად გიორგიმ ბანკს უნდა გადაუხადოს 350 ლარი. აღვილი შესამჩნევია, რომ ეს თანხა არ შეიცვლება, თუ წელიწადში სარგებლის დარიცხვების რაოდენობა m იქნებოდა სხვა ნატურალური რიცხვი (რატომ?).

ამოცანის პირობის შესაბამისად თანხის ნაკადის დიაგრამას ექნება შემდეგი სახე



ნახ. 12.2

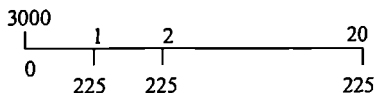
ამოცანა 12.2. თამარმა ბანკიდან აილო 3000 ლარის ოდენობის სესხი სარგებლის წლიური 10% -ანი მარტივი განაკვეთით და ყოველკვარტალურად ბანკს უხდის 225 ლარს. რა ვადით აილო თამარმა სესხი? შევადგინოთ თანხის ნაკადის დიაგრამა.

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად $K=3000$, $A=225$, $j = \frac{10}{100} = 0,1$, $k=4$.

(12.4) ფორმულიდან მივიღებოთ

$$l = \frac{3000}{225 \cdot 4 - 3000 \cdot 0,1} = \frac{3000}{900 - 300} = 5.$$

მაშასადამე, თამარმა აიღო სესხი 5 წლის ვადით. ცხადია, თანხის ნაკადის დიაგრამას ექნება შემდეგი სახე



ნახ. 12.3

12.3. გრძელვადიანი სესხის დაფარვა სარგებლის რთული განაკვეთით

საბანკო და საფინანსო ორგანიზაციებში ყველაზე უფრო გავრცელებულია სარგებლის რთული განაკვეთის მქონე სესხები (კრედიტები). გავვცნოთ ასეთი სესხების დაფარვის ამოცანებს.

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: ვთქვათ, გაცემულია K ოდენობის კრედიტი l წლის ვადით სარგებლის წლიური j რთული საპროცენტო განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. რა ოდენობის ფიქსირებული თანხა უნდა გადაუხადოს მოვალემ კრედიტორს ყოველი წლის ბოლოს? გამოვიყენოთ ამ თანხის გამოსათვლელი ფორმულა. ცხადია, ვიხილავთ შემთხვევას, როცა $m = k = 1$.

ვთქვათ, ყოველი წლის ბოლოს მოვალე კრედიტორს უხდის A ოდენობის თანხას. პირველი წლის ბოლოს K ოდენობის თანხას (გაცემულ კრედიტს) დაერიცხება სარგებელი Kj და გახდება Kq ($K + Kj = K(1 + j) = Kq$), სადაც $q = 1 + j$. ამავე დროს მოვალემ გადაიხადა A ოდენობის თანხა, ე.ი. პირველი წლის ბოლოს სესხის დარჩენილი ნაწილი (ნაშთი) იქნება

$$L_1 = Kq - A. \quad (12.5)$$

რადგან მეორე წლის დასაწყისში სესხის დარჩენილი ნაწილია L_1 , ამიტომ ამ წლის ბოლოს მას დაერიცხება სარგებელი L_1j და გახდება L_1q ($L_1 + L_1j = L_1q$). ამავე დროს მოვალე კვლავ იხდის A ოდენობის თანხას, ე.ი. მეორე წლის ბოლოს სესხის დარჩენილი ნაწილი (ნაშთი) იქნება $L_2 = L_1q - A$. (12.5) ფორმულის გათვალისწინებით გვაქვს

$$L_2 = (Kq - A) \cdot q - A = Kq^2 - A(1+q). \quad (12.6)$$

რადგან მესამე წლის დასაწყისში სესხის დარჩენილი ნაწილია L_2 , ამიტომ ამ წლის ბოლოს მას დაერიცხება სარგებელი $L_2 j$ და გახდება $L_2 q$. მოვალის მიერ გადახდილი A ოდენობის თანხის შემდეგ მესამე წლის ბოლოს სესხის დარჩენილი ნაწილი (ნაშთი) იქნება $L_3 = L_2 q - A$. (12.6) ფორმულის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$L_3 = [Kq^2 - A(1+q)]q - A = Kq^3 - A(1+q+q^2).$$

სრულიად ანალოგიური მსჯელობით, l წლის ბოლოს სესხის დარჩენილი ნაწილი (ნაშთი) იქნება

$$L_l = Kq^l - A(1+q+q^2+\dots+q^{l-1}). \quad (12.7)$$

მეორე მხრივ, რადგან l წლის ბოლოს მოვალემ მთლიანად დაფარა სესხი, ამიტომ $L_l = 0$. ცხადია, (12.7) ფორმულიდან შეგვიძლია დაეწეროთ

$$A(1+q+q^2+\dots+q^{l-1}) = Kq^l. \quad (12.8)$$

ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილში ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება არის გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი (ამ პროგრესიის პირველი წევრია 1, მნიშვნელია q , ხოლო წევრთა რაოდენობაა l). (5.2) ფორმულის გამოყენებით (12.8) ტოლობა გადაიწერება შემდეგი სახით

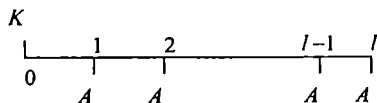
$$A \cdot \frac{q^l - 1}{q - 1} = K \cdot q^l.$$

აქედან გვაქვს

$$\boxed{A = \frac{K q^l j}{q^l - 1}}. \quad (12.9)$$

(12.9) წარმოადგენს იმ ფიქსირებული თანხის გამოსათვლელ ფორმულას, რომელიც მოვალემ უნდა გადაუხადოს კრედიტორს ყოველი წლის ბოლოს სარგებლის რთული განაკვეთისას წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით.

ამ შემთხვევაში თანხის ნაკადის დიაგრამას ექნება შემდეგი სახე



ნახ. 12.4

სადაც A განსაზღვრულია (12.9) ფორმულით.

(12.9) ფორმულიდან ჩანს, რომ სესხის დაფარვის ფიქსირებული თანხა პირდაპირპროპორციულია გაცემული სესხის (კრედიტის) ოდენობის.

(12.9) –დან მარტივად მიიღება გაცემული სესხის გამოსათვლელი შემდეგი ფორმულა

$$K = \frac{A (q' - 1)}{q' j} \quad (12.10)$$

ამოცანა 12.3. ფირმამ წარმოების გაფართოების მიზნით ბანკიდან აიღო სესხი 10000 ლარი 5 წლის ვადით სარგებლის წლიური 20% -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. რა ოდენობის თანხა უნდა დაუბრუნოს ფირმამ ბანკს ყოველი წლის ბოლოს? შევადგინოთ თანხის ნაკადის დიაგრამა.

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად $K=10000$ $l=n=5$, $j=\frac{20}{100}=0,2$, $q=1,2$.

(12.9) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$A = \frac{10000 \cdot 1,2^5 \cdot 0,2}{1,2^5 - 1} = \frac{2000 \cdot 2,48832}{1,48832} = \frac{4976,64}{1,48832} = 3343,80.$$

მაშასადამე, ფირმამ ყოველი წლის ბოლოს ბანკს უნდა დაუბრუნოს 3343,8 ლარი.

ყურადღება მივაქციოთ შემდეგ ფაქტს: რადგან ფირმამ ყოველი წლის ბოლოს ბანკს უნდა დაუბრუნოს 3343,8 ლარი, ამიტომ იგი სესხის დაფარვის მიზნით სულ გადაიხდის 16719 ლარს ($3343,8 \cdot 5 = 16719$). მეორე მხრივ, თუ სესხის პირობით გათვალისწინებული იქნებოდა სესხის ერთიანად დაფარვა მეხუთე წლის ბოლოსათვის (როგორც ლექცია 5 –ში განვიხილეთ), მაშინ მოვალეს ექნებოდა ბანკისთვის გადასახდელი 24883,2 ლარი ((5.4) ფორმულის ძალით $K_5 = 10000 \cdot 1,2^5 = 24883,2$). ცხადია, განსხვავება სოლიდურია და იგი შეადგენს 8164,2 ლარს (ახსენით ამ განსხვავების მიზეზი).

მაშასადამე, უმჯობესია სესხის გადახდა მისი დაფარვის გეგმის მიხედვით (თუ ამის შესაძლებლობა არის), ვიდრე მისი ერთიანად დაფარვა სესხის ვადის ბოლოსათვის.

12.4. ანუიტეტი სარგებლის რთული განაკვეთით

თანხის ისეთ ნაკადს, როცა შესაძლებელია ანაბრიდან ფიქსირებული თანხის მოხსნა დროის ყოველი ფიქსირებული პერიოდის შემდეგ, ანუიტეტი ეწოდება (Annuität (გერმ.) და Annuité (ფრანგ.) ნიშნავს ყოველწლიურ შესატანს). ანაბრის იმ თანხას, რომელიც უზრუნველყოფს ანუიტეტს, ეწოდება ანუიტეტის საწყისი თანხა.

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: ანაბარზე შეტანილია K ოდენობის თანხა I წლის ვადით სარგებლის წლიური j რთული საპროცენტო განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. შეანაბრებს შეუძლია ყოველი წლის ბოლოს ანაბრიდან გამოიტანოს ერთი და იგივე ოდენობის თანხა (ანუ შეუძლია ანაბრიდან მოხსნას ფიქსირებული თანხა) ისე, რომ I წლის ბოლოს ანაბარზე თანხა ამოიწუროს (მაშასადამე, ვიხილავთ ანუიტეტს K საწყისი თანხით). რა ოდენობის ფიქსირებული თანხის გამოტანა შეუძლია შეანაბრებს ყოველი წლის ბოლოს? გამოვიყვანოთ ამ თანხის გამოსათვლელი ფორმულა.

ვთქვათ, ყოველი წლის ბოლოს შეანაბრებს შეუძლია ანაბრიდან მოხსნას B ოდენობის თანხა. პირველი წლის ბოლოს ამ თანხის ანაბრიდან მოხსნის საშუალებას მოგვცემს K ოდენობის თანხის ის ნაწილი, რომელიც არის B -ს დისკონტირებული თანხა (ანუ ის თანხა, რომელიც სარგებლის ერთხელ დარიცხვის შემდეგ გახდა B). (6.2) ფორმულის ძალით B -ს დისკონტირებული თანხა იქნება $b_1 = \frac{B}{q}$, სადაც $q = 1 + j$.

მეორე წლის ბოლოს B ოდენობის თანხის გამოტანის საშუალებას მოგვცემს B -ს დისკონტირებული თანხა (ანუ ის თანხა, რომელიც სარგებლის ორჯერ დარიცხვის შემდეგ გახდა B). (6.2) ფორმულის თანახმად B -ს დისკონტირებული თანხა იქნება $b_2 = \frac{B}{q^2}$.

სრულიად ანალოგიურად, I წლის ბოლოს B ოდენობის თანხის გამოტანის საშუალებას მოგვცემს B -ს დისკონტირებული თანხა (ანუ ის თანხა, რომელიც სარგებლის I -ჯერ დარიცხვის შემდეგ გახდა B). ცხადია, B -ს დისკონტირებული თანხა იქნება $b_I = \frac{B}{q^I}$. რადგან I წლის ბოლოს ანაბარზე თანხა ამოიწურა, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{I-1} + b_I = K.$$

აქედან გვაქვს

$$\frac{B}{q} + \frac{B}{q^2} + \dots + \frac{B}{q^{I-1}} + \frac{B}{q^I} = K.$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილის q' -ზე გამრავლებით მარტივად მივიღებთ

$$B(1 + q + q^2 + \dots + q'^{-2} + q'^{-1}) = K q'. \quad (12.11)$$

(12.11) -ის მარცხენა ნაწილში ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება არის გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი (ამ პროგრესიის პირველი წევრია 1, მნიშვნელია q , ხოლო წვერთა რაოდენობაა 1). (5.2) ფორმულის გამოყენებით (12.11) ტოლობა გადაიწერება ასე

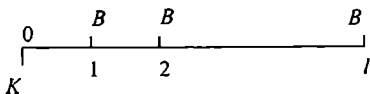
$$B \cdot \frac{q' - 1}{q - 1} = K q'.$$

აქედან გვაქვს

$$B = \frac{K q' j}{q' - 1}. \quad (12.12)$$

(12.12) წარმოადგენს ანუიტეტის იმ ფიქსირებული თანხის გამოსათვლელ ფორმულას, რომელიც მენაბრემ შეიძლება მოხსნას ანაბრიდან ყოველი წლის ბოლოს, თუ ამ ანაბარზე თანხა შეტანილია სარგებლის რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით.

ამ შემთხვევაში თანხის ნაკადის დიაგრამას ექნება შემდეგი სახე



ნახ. 12.5

სადაც B განსაზღვრულია (12.12) ფორმულით.

(12.12) ფორმულიდან ჩანს, რომ ანუიტეტის ფიქსირებული თანხა პირდაპირპროპორციულია ანუიტეტის საწყისი თანხის.

შევნიშნოთ, რომ (12.9) და (12.12) ფორმულები მათემატიკური თვალსაზრისით ერთნაირია, რადგან ორივე ფორმულა აღწერს ერთი და იმავე ტიპის თანხის ნაკადს, რომელიც ერთ შემთხვევაში აღწერილია მოვალის მხრიდან, ხოლო მეორე შემთხვევაში – კრედიტორის მხრიდან.

(12.12) –დან მარტივად მიიღება ანუიტეტის საწყისი თანხის გამოსათვლელი შემდეგი ფორმულა

$$K = \frac{B(q' - 1)}{q' j} \quad (2.13)$$

ამოცანა 12.4. გიორგის ანაბარზე შეტანილი აქვს 20000 ლარი 5 წლის ვადით სარგებლის წლიური 20% -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. მას შეუძლია ყოველი წლის ბოლოს ანაბრიდან მოხსნას ფიქსირებული თანხა ისე, რომ მეხუთე წლის ბოლოს ანაბარზე თანხა ამოიწუროს. რა ოდენობის ფიქსირებული თანხის გამოტანა შეუძლია გიორგის ამ ანაბრიდან ყოველი წლის ბოლოს?

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად $K = 20000$, $l = n = 5$, $j = \frac{20}{100} = 0,2$, $q = 1,2$. (12.12) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$B = \frac{20000 \cdot 1,2^5 \cdot 0,2}{1,2^5 - 1} = \frac{4000 \cdot 2,48832}{1,48832} = \frac{9953,28}{1,48832} = 6687,59.$$

მაშასადამე, გიორგის შეუძლია ყოველი წლის ბოლოს ანაბრიდან მოხსნას 6687,59 ლარი.

ამოცანა 12.5. იპოვეთ იმ ანუიტეტის საწყისი თანხა, რომელიც ითვალისწინებს 4 წლის ვადით სარგებლის წლიურ 10% -ან რთულ განაკვეთს წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით და ყოველი წლის ბოლოს ანაბრიდან 1000 ლარის მოხსნას.

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად $B = 1000$, $l = 4$, $j = \frac{10}{100} = 0,1$, $q = 1,1$. თუ გამოვიყენებთ (12.13) ფორმულას, მივიღებთ

$$K = \frac{1000 \cdot (1,1^4 - 1)}{1,1^4 \cdot 0,1} = \frac{10000 \cdot (1,4641 - 1)}{1,4641} = \frac{4641}{1,4641} = 3169,86.$$

მაშასადამე, ანუიტეტის საწყისი თანხაა 3169,86 ლარი.

12.5. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. თამარმა ავეჯის შესაძენად 4 წლის ვადით ბანკიდან აიღო 3000 ლარის ოდენობის სესხი სარგებლის წლიური 15% -ანი მარტივი განაკვეთით. რა ოდენობის თანხა უნდა დაუბრუნოს თამარმა ბანკს ყოველთვიურად სესხის დაფარვის მიზნით?

პასუხი: 100 ლარი.

2. ბანკმა გასცა 6000 ლარის ოდენობის კრედიტი სარგებლის წლიური 10% - ანი მარტივი განაკვეთით. დებიტორი ყოველკვარტალურად ბანკს უხდის 400 ლარს. რა ვადით არის გაცემული კრედიტი?

პასუხი: 6 წლით.

3. ფირმამ ბანკიდან 5 წლის ვადით აიღო 20000 ლარის ოდენობის კრედიტი სარგებლის წლიური 20% -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. რა ოდენობის თანხა უნდა დაუბრუნოს ფირმამ ბანკს ყოველი წლის ბოლოს სესხის დაფარვის მიზნით?

პასუხი: 6687,59 ლარი.

4. თამარმა 3 წლის ვადით ბანკიდან აიღო 5000 ლარის ოდენობის სესხი სარგებლის წლიური 10% -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. რა ოდენობის თანხა უნდა დაუბრუნოს თამარმა ბანკს ყოველი წლის ბოლოს სესხის დაფარვის მიზნით?

პასუხი: 2010,57 ლარი.

5. ბანკმა 4 წლით ვადით გასცა კრედიტი სარგებლის წლიური 10% -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. დებიტორი ყოველი წლის ბოლოს ბანკს უხდის 10000 ლარს. რა ოდენობის კრედიტი გასცა ბანკმა?

პასუხი: 31698,65 ლარი.

6. გიორგის ანაბარზე შეტანილი აქვს 4000 ლარი 5 წლის ვადით სარგებლის წლიური 20% -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. მას შეუძლია ყოველი წლის ბოლოს ანაბრიდან მოხსნას ფიქსირებული თანხა ისე, რომ მეხუთე წლის ბოლოს ანაბარზე თანხა ამოიწუროს. რა ოდენობის ფიქსირებული თანხის გამოიტანა შეუძლია გიორგის ამ ანაბრიდან ყოველი წლის ბოლოს?

პასუხი: 1337,52 ლარი.

7. იპოვეთ იმ ანუიტეტის საწყისი თანხა, რომელიც ითვალისწინებს 4 წლის ვადით სარგებლის წლიურ 10% -ან რთულ განაკვეთს წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით და ყოველი წლის ბოლოს ანაბრიდან 500 ლარის მოხსნას.

პასუხი: 1584,93 ლარი.

ლექცია 13

სარგებლის წლიური ეფექტური
საპროცენტო განაკვეთი

ლექცია 13

სარგებლის წლიური ეფექტური საპროცენტო განაკვეთი

გეგმა

13.1. სარგებლის წლიური ეფექტური საპროცენტო განაკვეთი

13.2. ორი ანაბრის პირობების შედარება

13.3. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

13.1. სარგებლის წლიური ეფექტური საპროცენტო განაკვეთი

როგორც ვიცით, საბანკო სისტემაში არსებობს სხვადასხვა ტიპის ანაბრები და კრედიტები, რომლებზეც სარგებლის დარიცხვა ხდება სხვადასხვა წესით, რის გამოც აუცილებელია ვიცოდეთ ორი ანაბრის ან კრედიტის პირობების შედარება და მათგან ჩვენთვის ხელსაყრელის არჩევა.

ეთქვას, ანაბარზე შეტანილი K_0 ოდენობის თანხა, სარგებლის წლიური j საპროცენტო განაკვეთით m -ჯერ დარიცხვის პირობით, ერთი წლის შემდეგ გახდა K_m . საინტერესოა გავარკვეოთ შემდეგი: საწყისი K_0 ოდენობის თანხის K_m -მდე გაზრდას წლიური რა საპროცენტო განაკვეთი შეესაბამება, თუ სარგებლის დარიცხვა მოხდება წელიწადში ერთხელ?

ამ საკითხის გასარკვევად შემოვიღოთ შემდეგი განმარტება:

სარგებლის წლიური ეფექტური საპროცენტო განაკვეთი ეწოდება სარგებლის ისეთ წლიურ საპროცენტო განაკვეთს, რომლის დროსაც რაიმე თანხაზე სარგებლის წელიწადში ერთხელ დარიცხვისას მიიღება იგივე საბოლოო თანხა, რაც იგივე საწყის თანხაზე სარგებლის მრავალჯერადი (ან უწყვეტი) დარიცხვისას. იგი აღინიშნება j_{eff} -ით, ხოლო შესაბამისი სარგებლის განაკვეთი - p_{eff} -ით.

გამოვიყვანოთ j_{eff} -ის გამოსათვლელი ფორმულები სარგებლის მრავალჯერადი და უწყვეტი დარიცხვების შემთხვევებში. ამასთანავე, ცალ-ცალკე განვიხილოთ სარგებლის მარტივი და რთული განაკვეთების შემთხვევები.

მესამე, მეხუთე და მერვე ლექციებში შევისწავლეთ ამ ტიპის სარგებლების დროს საბოლოო თანხის გამოსათვლელი ფორმულები. უფრო ახლოს გავცნოთ ამ ფორმულებს.

1. მესამე ლექციაში გავეცანით სარგებელს მარტივი განაკვეთით და დავადგინეთ შემდეგი ფაქტი: თუ K_0 ოდენობის თანხა შეტანილია ანაბარზე ერთი წლის ვადით სარგებლის წლიური j მარტივი საპროცენტო განაკვეთით წელიწადში m -ჯერ დარიცხვის პირობით (ყოველი დარიცხვის პერიოდის ბოლოს ანაბარს სარგებელი დაერიცხება i მარტივი საპროცენტო განაკვეთით, სადაც $i = \frac{j}{m}$), მაშინ საბოლოო თანხა იქნება $K_m = K_0(1 + mi)$ (იხ. (3.9) ფორმულა). რადგან $mi = j$, ამიტომ $K_m = K_0(1 + j)$.

მეორე მხრივ, წლიური ეფექტური საპროცენტო განაკვეთის განმარტების თანახმად (სარგებლის წელიწადში ერთხელ დარიცხვისას) გვაქვს (იხ. (3.11) ფორმულა)

$$K_m = K_0(1 + j_{eff}). \quad (13.1)$$

ე.ი. $j_{eff} = j$.

მაშასადამე, სარგებლის მარტივი განაკვეთისას

$$\boxed{j_{eff} = j}. \quad (13.2)$$

2. მეხუთე ლექციაში გავეცანით სარგებელს რთული განაკვეთით და დავადგინეთ შემდეგი ფაქტი: თუ K_0 ოდენობის თანხა შეტანილია ანაბარზე ერთი წლის ვადით სარგებლის წლიური j რთული საპროცენტო განაკვეთით წელიწადში m -ჯერ დარიცხვის პირობით (ამ შემთხვევაშიც, ყოველი დარიცხვის პერიოდის ბოლოს ანაბარს სარგებელი დაერიცხება i რთული საპროცენტო განაკვეთით, სადაც $i = \frac{j}{m}$), მაშინ საბოლოო თანხა იქნება $K_m = K_0 \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$ (იხ. (5.4) ფორმულა).

მეორე მხრივ, წლიური ეფექტური საპროცენტო განაკვეთის განმარტების თანახმად (სარგებლის წელიწადში ერთხელ დარიცხვისას) საბოლოო თანხა მოიცემა (13.1) ფორმულით, ე.ი.

$$K_m(1 + j_{eff}) = K_0 \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m.$$

აქედან, ტოლობის ორივე ნაწილის K_0 -ზე გაყოფით, მარტივად მივიღებთ

$$\boxed{j_{eff} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1}. \quad (13.3)$$

მაშასადამე, სარგებლის რთული განაკვეთისას წელიწადში m -ჯერ დარიცხვის პირობით, წლიური ეფექტური განაკვეთი გამოითვლება (13.3) ფორმულით.

შეგნიშნოთ, რომ როცა $m=1$, მაშინ (13.3) -დან მივიღებთ $j_{eff} = j$.

3. მერვე ლექციაში გავეცანით სარგებელს უწყვეტი დარიცხვით და დაეადგინეთ შემდეგი ფაქტი: თუ K_0 ოდენობის თანხა შეტანილია ანაბარზე ერთი წლის ვადით სარგებლის წლიური j საპროცენტო განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის პირობით, მაშინ საბოლოო თანხა იქნება $K' = K_0 e^j$ (იხ. (8.9) ფორმულა).

მეორე მხრივ, წლიური ეფექტური საპროცენტო განაკვეთის განმარტების თანახმად (სარგებლის წელიწადში ერთხელ დარიცხვისას) საბოლოო თანხა მოიცემა (13.1) ფორმულით, ეი.

$$K_0(1 + j_{eff}) = K_0 e^j.$$

აქედან მარტივად მივიღებთ

$$j_{eff} = e^j - 1. \quad (13.4)$$

მაშასადამე, სარგებლის უწყვეტი დარიცხვისას, წლიური ეფექტური საპროცენტო განაკვეთი გამოითვლება (13.4) ფორმულით.

აქვე აღვნიშნოთ შემდეგი ფაქტი: რადგან (13.2), (13.3) და (13.4) ფორმულებში მონაწილეობს მხოლოდ j_{eff} და j სიდიდეები, ამიტომ j_{eff} არაა დამოკიდებული საწყის და საბოლოო თანხებზე.

უკვე შეგვიძლია განვიხილოთ ამოცანები წლიური ეფექტური საპროცენტო განაკვეთის შესახებ.

ამოცანა 13.1. ანაბარზე შეტანილია თანხა ერთი წლის ვადით სარგებლის წლიური 10% რთული განაკვეთით ყოველკვარტალური დარიცხვით. სარგებლის რა წლიური განაკვეთით შეიძლება დაბანდებულ იქნას იგივე თანხა წლის ბოლოს სარგებლის დარიცხვის პირობით, ისე რომ საბოლოო თანხა იგივე აყოს?

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად წელიწადში სარგებლის დარიცხვების რაოდენობაა $m=4$, სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია $p=10\%$ (ანუ $j=0,1$) და საჭიროა ვიპოვოთ წლიური ეფექტური განაკვეთი p_{eff} . რადგან ანაბარზე შეტანილია თანხა სარგებლის რთული განაკვეთით, ამიტომ (13.3) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$j_{eff} = \left(1 + \frac{0.1}{4}\right)^4 - 1 = (1 + 0.025)^4 - 1 = 1.025^4 - 1 \approx 1.104 - 1 = 0.104.$$

აქედან გვაქვს $p_{eff} = 100 j_{eff} = 10,4 \%$.

მაშასადამე, თუ რაიმე თანხა დაბანდებულია ერთი წლის ვადით სარგებლის წლიური 10% -ანი რთული განაკვეთით ყოველკვარტალური დარიცხვით, მაშინ ეს თანხა იგივე საბოლოო თანხას მოგვცემს, რასაც სარგებლის წლიური 10,4% -ანი განაკვეთით დაბანდებისას წლის ბოლოს დარიცხვის პირობით.

ამოცანა 13.2. გიორგიმ ბანკში შეიტანა თანხა ერთი წლის ვადით, სარგებლის ნომინალური 10% -ანი რთული განაკვეთით კვარტალური დარიცხვის პირობით, ხოლო თამარმა სხვა ბანკში შეიტანა იგივე ოდენობის თანხა 1 წლის ვადით სარგებლის წლის ბოლოს დარიცხვით. აღმოჩნდა, რომ ორივემ ბანკიდან ერთი და იგივე ოდენობის თანხა აიღო. რა საპროცენტო განაკვეთით ჰქონდა თამარს თანხა შეტანილი ბანკში?

ამოხსნა. ცხადია, ამოცანა 13.2 და 13.1 მათემატიკური თვალსაზრისით ერთი და იგივეა (რატომ?). თამარს ბანკში თანხა შეტანილი ჰქონდა j_{eff} საპროცენტო განაკვეთით. ამოცანა 13.1 -ში კი გაგადგინეთ $j_{eff} = 0,104$.

13.2. ორი ანაბრის პირობების შედარება

ახლა განვიხილოთ ისეთი ანაბრები, რომლებზეც თანხა შეტანილია რამდენიმე წლით. ჯერ განვიხილოთ სარგებლის რთული განაკვეთის შემთხვევა, ხოლო შემდეგ - უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევა.

ა) ვთქვათ, ერთ ანაბარზე შეტანილია K_0 ოდენობის თანხა l წლის ვადით სარგებლის წლიური j რთული საპროცენტო განაკვეთით წელიწადში m -ჯერ დარიცხვის პირობით. როგორც ვიცით (იხ. ფორმულა (5.4)), l წლის ბოლოს ამ ანაბარზე საბოლოო თანხა იქნება $K_n = K_0 \left(1 + \frac{j}{m}\right)^n$, სადაც $n = ml$.

მეორე მხრივ, თუ მეორე ანაბარზე შეტანილია იგივე K_0 ოდენობის თანხა l წლის ვადით სარგებლის j_{eff} რთული საპროცენტო განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით, სადაც j_{eff} განსაზღვრულია (13.3) ფორმულით, მაშინ l წლის ბოლოს ამ ანაბარზე საბოლოო თანხა იქნება

$$K_i' = K_0(1 + j_{eff})'. \quad (13.5)$$

აქედან (13.3) ფორმულის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$K_i' = K_0 \left[1 + \left(1 + \frac{j}{m} \right)^m - 1 \right]' = K_0 \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{m'} = K_0 \left(1 + \frac{j}{m} \right)^n = K_n.$$

მაშასადამე, ორივე ანაბარზე i წლის ბოლოს (და ასევე, ყოველი წლის ბოლოს) ერთი და იმავე ოდენობის თანხა იქნება.

ბ) ეტყვათ, ერთ ანაბარზე შეტანილია K_0 ოდენობის თანხა i წლის ვადით სარგებლის წლიური j საპროცენტო განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის პირობით. როგორც ვიცით (იხ. ფორმულა (8.9)), i წლის ბოლოს ანაბარზე საბოლოო თანხა იქნება $K^* = K_0 e^{j'}$.

მეორე მხრივ, თუ მეორე ანაბარზე შეტანილია იგივე K_0 ოდენობის თანხა i წლის ვადით სარგებლის წლიური j_{eff} რთული საპროცენტო განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით, სადაც j_{eff} განსაზღვრულია (13.4) ფორმულით, მაშინ ამ ანაბარზე i წლის ბოლოს იქნება K_i' ოდენობის საბოლოო თანხა, სადაც K_i' მოცემულია (13.5) ფორმულით. თუ (13.5) –ში გაითვალისწინებთ (13.4) –ს, მივიღებთ

$$K_i' = K_0(1 + e^j - 1)' = K_0 e^{j'} = K^*.$$

მაშასადამე, ორივე ანაბარზე i წლის ბოლოს (და ასევე, ყოველი წლის ბოლოს) ერთი და იმავე ოდენობის თანხა იქნება.

ცხადია, განხილული ორი შემთხვევის საფუძველზე მივიღეთ:

1. ერთნაირი საწყისი თანხის მქონე ორ ანაბარზე, რომელთაგან ერთზე სარგებელი ირიცხება წლიური j რთული საპროცენტო განაკვეთით წელიწადში m –ჯერ დარიცხვის პირობით, ხოლო მეორეზე – წლიური j_{eff} რთული საპროცენტო განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით, ყოველი წლის ბოლოს ერთი და იმავე ოდენობის საბოლოო თანხა იქნება, სადაც j_{eff} განსაზღვრულია (13.3) ფორმულით.
2. ერთნაირი საწყისი თანხის მქონე ორ ანაბარზე, რომელთაგან ერთზე სარგებელი ირიცხება წლიური j საპროცენტო განაკვეთით უწყვეტი

დარიცხვის პირობით, ხოლო მეორეზე - წლიური j_{eff} რთული საპროცენტო განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით, ყოველი წლის ბოლოს ერთი და იმავე ოდენობის საბოლოო თანხა იქნება, სადაც j_{eff} განსაზღვრულია (13.4) ფორმულით.

3. ერთნაირი საწყისი თანხის მქონე ორი ანაბარიდან, რომლებზეც სარგებელი ირიცხება წლიური რთული განაკვეთით წელიწადში მრავალჯერ დარიცხვის ან უწყვეტი დარიცხვის პირობებით, ყოველი წლის ბოლოს იმ ანაბარზე იქნება მეტი თანხა, რომლის j_{eff} მეტია.

მაშასადამე, ერთნაირი საწყისი თანხის მქონე ორი ანაბრის პირობების შედარებისათვის საჭიროა, ვიპოვოთ თითოეულის j_{eff} და ცხადია, მეტი j_{eff} -ის მქონე ანაბარს მეტი სარგებელი დაერიცხება (და მისი დისკონტიც მეტი იქნება).

ცხადია, ანაბრების პირობების შედარების ეს მეთოდი შეიძლება გამოვიყენოთ მხოლოდ ერთნაირი საწყისი თანხის მქონე ანაბრებისათვის.

სხვადასხვა საწყისი თანხის მქონე ანაბრების პირობების შედარებისათვის კი საჭიროა გამოვთვალოთ თითოეული ანაბრის დისკონტი და შევადაროთ ისინი ერთმანეთს (დავადგინოთ, რომელია მეტი).

ამოცანა 13.3. თამარს სურს თანხა შეიტანოს ბანკში ანაბარზე. ერთი ბანკი მას სთავაზობს სარგებელს წლიური 10% -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ორჯერ დარიცხვის პირობით, ხოლო მეორე ბანკი - წლიური 9,8% -ანი რთული განაკვეთით ყოველთვიური დარიცხვის პირობით. რომელი ბანკის მიერ შემოთავაზებული პირობაა უკეთესი თამარისათვის?

ამოხსნა. გამოვთვალოთ თითოეული ბანკის მიერ შემოთავაზებული სარგებლის წლიური ეფექტური საპროცენტო განაკვეთი.

რადგან პირველი ბანკის პირობებია: $p = 10\%$, $j = 0,1$, $m = 2$, ამიტომ

$$(13.3) \text{ ფორმულის ძალით გვაქვს } j_{eff} = \left(1 + \frac{0,1}{2}\right)^2 - 1 = 1,05^2 - 1 \approx 0,1025.$$

ხოლო რადგან მეორე ბანკის პირობებია: $p = 9,8\%$, $j = 0,098$, $m = 12$, ამიტომ (13.3) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$j_{eff} = \left(1 + \frac{0,098}{12}\right)^{12} - 1 = 1,008^{12} - 1 \approx 0,1091.$$

მაშასადამე, მიუხედავად იმისა, რომ თამარს პირველმა ბანკმა მეორე ბანკთან შედარებით უფრო მეტი სარგებლის განაკვეთი შესთავაზა, მისთვის მაინც უკეთესია მეორე ბანკის მიერ შემოთავაზებული პირობა (რატომ?).

13.3. ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. იპოვეთ სარგებლის წლიური ეფექტური განაკვეთი იმ კრედიტისა, რომელიც გაცემულია სარგებლის წლიური 10% -ანი რთული განაკვეთით
 - ა) წელიწადში ორჯერ დარიცხვის პირობით,
 - ბ) ყოველკვარტალური დარიცხვის პირობით,
 - გ) ყოველთვიური დარიცხვის პირობით.პასუხი: ა) 10,25%, ბ) 10,38%, გ) 10,47%.
2. იპოვეთ სარგებლის წლიური ეფექტური განაკვეთი იმ ანაბრისა, რომელიც გახსნილია სარგებლის წლიური 10% -ანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის პირობით, თუ $\sqrt[10]{e} \approx 1,044$.

პასუხი: 10,44%.
3. იპოვეთ სარგებლის წლიური ეფექტური განაკვეთი იმ ანაბრისა, რომელიც გახსნილია სარგებლის წლიური 14% -ანი მარტივი განაკვეთით ყოველკვარტალური დარიცხვის პირობით.

პასუხი: 14%.
4. ანაბარზე თანხა შეტანილია ერთი წლის ვადით სარგებლის წლიური 12% -ანი რთული განაკვეთით კვარტალური დარიცხვის პირობით. სარგებლის რა წლიური განაკვეთით შეიძლება დაბანდებულ იქნას იგივე თანხა წლის ბოლოს სარგებლის დარიცხვის პირობით, ისე რომ საბოლოო თანხა იგივე იყოს?

პასუხი: 12,55%.
5. გიორგიმ ბანკში შეიტანა თანხა ერთი წლის ვადით სარგებლის ნომინალური 15% -ანი რთული განაკვეთით კვარტალური დარიცხვის პირობით, ხოლო თამარმა სხვა ბანკში შეიტანა იგივე ოდენობის თანხა 1 წლის ვადით სარგებლის წლის ბოლოს დარიცხვის პირობით. აღმოჩნდა, რომ ორივემ ბანკიდან ერთი და იგივე ოდენობის თანხა აიღო. სარგებლის რა განაკვეთით ჰქონდა თამარს თანხა ბანკში შეტანილი?

პასუხი: 15,865%.
6. გიორგის აქვს ორი ანაბარი. პირველი ანაბარი გახსნილია სარგებლის წლიური 8% -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ორჯერ დარიცხვის პირობით, ხოლო მეორე ანაბარი - 7,9% -ანი რთული განაკვეთით

ყოველთვიური დარიცხვის პირობით. რომელი ანაბრის პირობებია უკეთესი გიორგისათვის?

პასუხი: რადგან პირველი ანაბრის წლიური ეფექტური განაკვეთია 8,16 %, ხოლო მეორე ანაბრის – 8,19 %, ამიტომ გიორგისათვის მეორე ანაბრის პირობები უკეთესია.

7. თამარს სურს დააბანდოს თანხა ბანკში. ერთი ბანკი მას სთავაზობს სარგებელს წლიური 10,5% -ანი რთული განაკვეთით კვარტალური დარიცხვის პირობით, ხოლო მეორე ბანკი – წლიური 10% -ანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის პირობით. რომელი ბანკის მიერ შემოთავაზებული პირობაა უკეთესი თამარისათვის?

პასუხი: რადგან პირველი ბანკის პირობით სარგებლის წლიური ეფექტური განაკვეთია 10,92%, ხოლო მეორე ბანკის პირობით – 10,44%, ამიტომ თამარისათვის პირველი ბანკის პირობა უკეთესია.

8. გიორგის სურს დააბანდოს თანხა ბანკში. ერთი ბანკი მას სთავაზობს სარგებელს წლიური 10,5% -ანი მარტივი განაკვეთით წელიწადში ორჯერ დარიცხვის პირობით, ხოლო მეორე ბანკი – 10% -ანი რთული განაკვეთით ყოველთვიური დარიცხვის პირობით. რომელი ბანკის მიერ შემოთავაზებული პირობაა უკეთესი გიორგისათვის?

პასუხი: პირველი ბანკის პირობა უკეთესია (გამოიყენეთ ამ ლექციის ამოცანა 1 -ის გ) პასუხი).

სწავლის შედეგის შეფასების წესი და ტესტების ნიმუშები

გეგმა

1. სწავლის შედეგის შეფასების წესი
2. I კოლოქვიუმის ტესტის ნიმუში
3. II კოლოქვიუმის ტესტის ნიმუში
4. დასკვნითი გამოცდის ტესტის ნიმუში

1. სწავლის შედეგის შეფასების წესი

სასწავლო კურსში “ელემენტარული მათემატიკა საბანკო საქმეში” სტუდენტის მიერ მიღწეული სწავლის შედეგის შეფასების ქვემოთ მოყვანილი წესი სრულად შეესაბამება საქართველოს უმაღლესი საგანმანათლებლო პროგრამების კრედიტებით გაანგარიშების ამჟამად მოქმედ წესს.

სილაბუსის მიხედვით ეს კურსი ერთსემესტრიანია (15 კვირა). სტუდენტის მიერ მიღწეული სწავლის შედეგის მაქსიმალური შეფასება 100 ქულაა. სტუდენტის მიერ გაწეული შრომის შეფასება გამოითვლება შემდეგ სამ კომპონენტში მიღებული ქულათა ჯამით:

1. ორი კოლოქვიუმი (სემესტრის განმავლობაში კოლოქვიუმები ტარდება ტესტების საშუალებით, თითოეული კოლოქვიუმის ტესტი შეფასდება მაქსიმუმ 25 ქულით).
2. ლექციებზე და პრაქტიკულ მეცადინეობებზე დასწრება და აქტიურობა (შეფასდება მაქსიმუმ 10 ქულით).
3. დასკვნითი გამოცდა (ტარდება სემესტრის ბოლოს ტესტის საშუალებით, რომელიც შეფასდება მაქსიმუმ 40 ქულით).

დასკვნით გამოცდაზე გასვლის უფლება ეძლევა სტუდენტს, რომელმაც შუალედურ შეფასებებში (ორი კოლოქვიუმი, მეცადინეობებზე დასწრება და აქტიურობა) მოაგროვა არანაკლებ 11 ქულა.

თუ სტუდენტის მიერ სამივე კომპონენტში დაგროვილი ქულების ჯამი მეტია 50-ზე, მაშინ სასწავლო კურსში “ელემენტარული მათემატიკა საბანკო საქმეში” მას მიენიჭება 5 კრედიტი და დაეწერება შემდეგი ხუთი სახის დადებითი შეფასებიდან ერთ-ერთი:

- (A) ფრიადი, თუ ქულების ჯამია 91-100;
- (B) ძალიან კარგი, თუ ქულების ჯამია 81-90;
- (G) კარგი, თუ ქულების ჯამია 71-80;
- (D) დამაკმაყოფილებელი, თუ ქულების ჯამია 61-70;
- (E) საკმარისი, თუ ქულების ჯამია 51-60.

თუ სტუდენტის მიერ სამივე კომპონენტში დაგროვილი ქულების ჯამი არ აღემატება 50 -ს, მაშინ მას დაეწერება შემდეგი ორი სახის უარყოფითი შეფასებიდან ერთ-ერთი:

- (FX) ვერ ჩააბარა, თუ ქულების ჯამია 41-50, რაც ნიშნავს, რომ სტუდენტს საგნის ჩასაბარებლად მეტი მუშაობა სჭირდება და ეძლევა დამოუკიდებელი მუშაობით დამატებით გამოცდაზე ერთხელ გასვლის უფლება. თუ დამატებით გამოცდაზე მიღებული ქულის გათვალისწინებით (დასკვნითი გამოცდის შეფასება არ გაითვალისწინება) სტუდენტის დაგროვილი ქულების ჯამი მეტია 50-ზე, მაშინ მას საგანში მიენიჭება 5 კრედიტი და დაეწერება ზემოთ მოყვანილი დადებითი შეფასებებიდან ერთ-ერთი (დაგროვილი ქულების შესაბამისად);
- (F) ჩაიჭრა, თუ ქულების ჯამია 0-40, რაც ნიშნავს, რომ სტუდენტის მიერ ჩატარებული სამუშაო არ არის საკმარისი და მას საგანი ხელახლა აქვს შესასწავლი.

2. I კოლოქვიუმის ტესტის ნიმუში

ორივე კოლოქვიუმის ტესტი შედგება 10 საკითხისაგან, რომელთაგან 5 სამქულიანია, ხოლო დანარჩენი – ორქულიანი, ანუ ტესტის დავალების მაქსიმალური შეფასება 25 ქულაა. ტესტში 2 საკითხი თეორიული ხასიათისაა (თითოეული სამქულიანია), ხოლო დანარჩენი 8 – ამოცანებია. დავალების შესასრულებლად სტუდენტს ეძლევა 90 წუთი.

ამასთანავე, I კოლოქვიუმის ტესტში შეტანილია 1-6 ლექციების შესაბამისი საკითხები.

გავეცნოთ I კოლოქვიუმის ტესტის ნიმუშს.

- 1. ჩამოაყალიბეთ არითმეტიკული და გეომეტრიული პროგრესიების განმარტება და დაწერეთ მათი ზოგადი წევრის გამოსათვლელი ფორმულები. (3 ქულა)

2. გამოიყვანეთ საბოლოო თანხის გამოსათვლელი ფორმულა სარგებლის მარტივი განაკვეთის შემთხვევაში. (3 ქულა)
3. ამოხსენით განტოლება: $3(2x - 4) + 7 = 4(2 - 3x) - 12$. (2 ქულა)
4. ბანკში 3 წლის ვადით შეტანილია 3000 დოლარი სარგებლის წლიური 10% -ანი მარტივი განაკვეთით ყოველწლიური დარიცხვის პირობით. რა ოდენობის თანხას გადაუხდის ბანკი მენაბრეს 3 წლის შემდეგ. (2 ქულა)
5. 1000 ლარი გაცემულია სესხად რამდენიმე წლით სარგებლის წლიური 5% -ანი მარტივი განაკვეთით. დარიცხვის პერიოდია 1 წელი. საბოლოო თანხაა 1300 ლარი. განსაზღვრეთ სესხის ხანგრძლივობა. (2 ქულა)
6. ბანკმა 3 წლის ვადით გასცა სესხი 10000 დოლარი სარგებლის წლიური 5% -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. რა ოდენობის თანხა უნდა დააბრუნოს მოვალემ ბანკში დადგენილი ვადის გასვლის შემდეგ? (3 ქულა)
7. მშობელს სურს შვილისათვის გახსნას საბავშვო ანაბარი 10 წლის ვადით სარგებლის 15 % -ანი მარტივი განაკვეთით ყოველწლიური დარიცხვის პირობით ისე, რომ ამ ვადის ამოწურვის შემდეგ ანაბარზე იყოს 15000 ლარი. რა თანხა უნდა შეიტანოს მშობელმა ანაბარზე? (2 ქულა)
8. თამარმა ბანკს დაუბრუნა 10000 დოლარი სამი წლის წინ ბანკიდან აღებული სესხის პირობის მიხედვით. რამდენი დოლარი აიღო თამარმა სესხად, თუ ეს სესხი ბანკმა გასცა სარგებლის 7% -ანი რთული განაკვეთით ყოველწლიური დარიცხვის პირობით? (3 ქულა)
9. 1000 ლარი გაცემულია სესხად 5 წლით სარგებლის წლიური 3% -ანი მარტივი განაკვეთით. დარიცხვის პერიოდია 1 წელი. ვიპოვოთ დისკონტი. (2 ქულა)
10. ბანკმა 3 წლის ვადით გასცა 10000 დოლარის ოდენობის კრედიტი სარგებლის წლიური 5% -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. იპოვეთ დისკონტი. (3 ქულა)

3. II კოლოქიუმის ტესტის ნიმუში

II კოლოქიუმის ტესტში შეტანილია 7-12 ლექციების შესაბამისი საკითხები და აქვს შემდეგი სახე:

1. გამოიყვანეთ ანაბარზე თანხის გაორმაგებისას წლების რაოდენობასა და სარგებლის მარტივ განაკვეთს შორის დამოკიდებულების ფორმულა $1/p = 100$, სადაც 1 წლების რაოდენობაა, ხოლო p სარგებლის მარტივი განაკვეთია. (3 ქულა)
2. გამოიყვანეთ ანაბარზე დაგროვილი თანხის გამოსათვლელი ფორმულა $S_t = A \left(1 + \frac{1+p}{2} j \right)$ სარგებლის მარტივი განაკვეთის შემთხვევაში და სარგებლის წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით, სადაც S_t დაგროვილი თანხაა, A ყოველწლიური შენატანია, 1 წლების რაოდენობაა, ხოლო j სარგებლის წლიური საპროცენტო განაკვეთია. (3 ქულა)
3. იპოვეთ “ზუსტი/ზუსტი” მეთოდით დღეების რაოდენობა 2009 წლის 10 მარტიდან (69) იმავე წლის 29 სექტემბრამდე (272). (2 ქულა)
4. იპოვეთ 30/360 მეთოდით დღეების რაოდენობა 2006 წლის 15 აპრილიდან 2008 წლის 12 აგვისტომდე. (2 ქულა)
5. გიორგიმ 3 წლის ვადით ანაბარზე შეიტანა 2000 ლარი სარგებლის წლიური 12% -ანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის პირობით. რა თანხას დაუბრუნებს ბანკი გიორგის ამ ვადის ამოწურვის შემდეგ? ვიპოვოთ დისკონტი. (3 ქულა)
6. თამარმა ბანკიდან აიღო სესხი სარგებლის წლიური 14,4% -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. რამდენი წლის შემდეგ უნდა დაუბრუნოს მან ბანკს გაორმაგებული თანხა? (2 ქულა)
7. ფირმამ ბანკიდან აიღო კრედიტი სარგებლის წლიური 11,55% -ანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის პირობით. რამდენი წლის შემდეგ უნდა დაუბრუნოს ფირმამ ბანკს გაორმაგებული თანხა? (2 ქულა)
8. თამარმა 2 წლის ვადით ანაბარზე შეიტანა 2000 ლარი სარგებლის წლიური 10% -ანი რთული განაკვეთით და ყოველი წლის ბოლოს სარგებლის

დარიცხვის პირობით. პირველი წლის ბოლოს მან ანაბრიდან გამოიტანა 1000 ლარი. იპოვეთ ამ ვადის ბოლოსათვის ანაბარზე დაგროვილი თანხა და ააგეთ თანხის ნაკადის დიაგრამა. (3 ქულა)

9. გიორგიმ 3 წლის ვადით ანაბარზე შეიტანა 1000 ლარი სარგებლის წლიური 10% -ანი რთული განაკვეთით. პირველი წლის ბოლოს მან ანაბრიდან გამოიტანა 600 ლარი, ხოლო მეორე წლის ბოლოს ამავე ანაბარზე შეიტანა 800 ლარი. იპოვეთ ამ ვადის ბოლოსათვის ანაბარზე დაგროვილი თანხა და ააგეთ თანხის ნაკადის დიაგრამა. (3 ქულა)

10. ყოველი წლის დასაწყისში გიორგის ანაბარზე შეაქვს 3000 ლარი სარგებლის წლიური 10% -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. რა თანხა იქნება ამ ანაბარზე 4 წლის ბოლოს? (2 ქულა)

4. დასკვნითი გამოცდის ტესტის ნიმუში

დასკვნითი გამოცდის ტესტში შეტანილია 1-13 ლექციების შესაბამისი 16 საკითხი, რომელთაგან 8 სამქულიანია, ხოლო დანარჩენი – ორქულიანი, ანუ ტესტის დავალებების მაქსიმალური შეფასება 40 ქულაა. ტესტში 3 საკითხი თეორიული ხასიათისაა (თითოეული სამქულიანია), ხოლო დანარჩენი ამოცანებია. დავალების შესასრულებლად სტუდენტს ეძლევა 2 საათი.

გავეცნოთ დასკვნითი გამოცდის ტესტის ნიმუშს (განმეორებითი გამოცდის ტესტი იგივე სტრუქტურისაა)

1. გამოიყვანეთ ფორმულა . . . (3 ქულა)

2. გამოიყვანეთ ფორმულა . . . (3 ქულა)

3. გამოიყვანეთ ფორმულა . . . (3 ქულა)

4. ამოხსენით განტოლება $2(3x - 4) + 5 = 6 - 3(1 - x)$. (2 ქულა)

5. ბანკის ადმინისტრაციის გადაწყვეტილებით წლის ბოლოს თანამშრომელთა 15% მიიღებს პრემიას. რამდენ ადამიანს მოუწევს პრემია, თუ ბანკს ჰყავს 120 თანამშრომელი? (2 ქულა)

6. ბანკში 3 წლის ვადით შეტანილია 3000 დოლარი სარგებლის წლიური 10% -ანი მარტივი განაკვეთით ყოველწლიური დარიცხვის პირობით.
 - ა) რა თანხას გადაუხდის ბანკი მეანაბრეს 3 წლის შემდეგ? (2 ქულა)
 - ბ) იპოვეთ დისკონტი. (1 ქულა)
7. 1000 ლარი გაცემულია სესხად რამდენიმე წლით სარგებლის წლიური 5% -ანი მარტივი განაკვეთით. დარიცხვის პერიოდია 1 წელი. საბოლოო თანხაა 1300 ლარი. განსაზღვრეთ სესხის ხანგრძლივობა. (2 ქულა)
8. ბანკმა 3 წლის ვადით გასცა სესხი 10000 დოლარი სარგებლის წლიური 5% -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვით პირობით.
 - ა) რა ოდენობის თანხა უნდა დააბრუნოს მოვალემ ბანკში 3 წლის შემდეგ? (2 ქულა)
 - ბ) იპოვეთ სესხის საპროცენტო განაკვეთი. (1 ქულა)
9. მშობელს სურს შეიღისათვის გახსნას საბავშვო ანაბარი 10 წლის ვადით სარგებლის წლიური 15 % -ანი მარტივი განაკვეთით ყოველწლიური დარიცხვით ისე, რომ ამ ვადის ამოწურვის შემდეგ ანაბარზე იყოს 15000 ლარი.
 - ა) რა თანხა უნდა შეიტანოს მშობელმა ანაბარზე? (2 ქულა)
 - ბ) იპოვეთ დისკონტი. (1 ქულა)
10. იპოვეთ 30/360 მეთოდით დღეების რაოდენობა 2007 წლის 1 თებერვლიდან 2009 წლის 15 აგვისტომდე. (2 ქულა)
11. გიორგიმ 5 წლის ვადით ანაბარზე შეიტანა 1000 ლარი სარგებლის წლიური 10 % -ანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის პირობით. რა თანხას დაუბრუნებს ბანკი გიორგის ამ ვადის ამოწურვის შემდეგ? (2 ქულა)
12. თამარმა ბანკიდან აიღო სესხი სარგებლის წლიური 12 % -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. რამდენი წლის შემდეგ უნდა დაუბრუნოს მან ბანკს გაორმაგებული თანხა? (2 ქულა)
13. თამარმა 2 წლის ვადით ანაბარზე შეიტანა 3000 ლარი სარგებლის წლიური 10% -ანი რთული განაკვეთით და ყოველი წლის ბოლოს სარგებლის დარიცხვის პირობით. პირველი წლის ბოლოს მან ანაბრიდან გამოიტანა 1000 ლარი.
 - ა) იპოვეთ ამ ვადის ბოლოსათვის ანაბარზე დაგროვილი თანხა. (2 ქულა)

ბ) ააგეთ თანხის ნაკადის დიაგრამა. (1 ქულა)

14. ყოველი წლის დასაწყისში გიორგის ანაბარზე შეაქვს 2000 ლარი სარგებლის 10% -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ერთხელ დარიცხვის პირობით. რა თანხა იქნება ამ ანაბარზე 4 წლის ბოლოს? (2 ქულა)

15. თამარმა 3 წლის ვადით ბანკიდან აიღო 5000 ლარის ოდენობის სესხი სარგებლის წლიური 10% -ანი რთული განაკვეთით.

ა) რა ოდენობის თანხა უნდა დაუბრუნოს თამარმა ბანკს ყოველი წლის ბოლოს სესხის დაფარვის მიზნით? (2 ქულა)

ბ) ააგეთ თანხის ნაკადის დიაგრამა. (1 ქულა)

16. იპოვეთ სარგებლის წლიური ეფექტური განაკვეთი იმ კრედიტისა, რომელიც გაცემულია სარგებლის წლიური 10% -ანი რთული განაკვეთით წელიწადში ორჯერ დარიცხვის პირობით. (2 ქულა)

ლიტერატურა

საფინანსო საქმესა და ეკონომიკაში მათემატიკური მეთოდების გამოყენებით დაინტერესებულ მკითხველს შეუძლია გაეცნოს შემდეგ ლიტერატურას, რომელშიც განხილული თემები ძირითადად გაშუქებულია უმაღლესი მათემატიკის პროგრამის საფუძველზე.

1. დ. ნატროშვილი, ლ. გიორგაშვილი, გ. ჯაშიაშვილი, მათემატიკა ეკონომისტებისათვის, თბილისი, 2008.
2. J. W. Daniel, L. J. F. Vaaler, *Mathematical Interest Theory*, Second Edition, Math. Assoc. America, 2009.
3. J. R. Buchanan, *An Undergraduate Introduction to Financial Mathematics*, Second Edition, World Sci. Pub. Co. Pte. Ltd, 2009.
4. J. Soper, *Mathematics for Economics and Business: an interactive introduction*, Second Edition, Blackwell Pub., 2004.
5. V. C. Mavron and T. N. Phillips, *Elements of Mathematics for Economics and Finance*, Springer, London, 2007.