

ჩა. შავგულიძე, ნ. ნიკვაშვილი, ი. ხატიასკაცი

პროექციული გეომეტრიის საფუძვლები



რეკომენდებულია სტუ-ის
სარედაქციო-საგამომცემლო საბჭოს
მიერ. 05.06.2012, ოქმი №2

განიხილება ფიგურათა პროექციული თვისებები ანუ ისეთი თვისებები, რომლებიც არ იცვლება სიბრტყის პროექციული გარდაქმნების დროს.

განკუთვნილია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სატრანსპორტო და მანქანათმშენებლობის ფაკულტეტის მაგისტრანტებისა და დოქტორანტებისათვის. ასევე დაეხმარება გრაფიკულ გეომეტრიაში მომუშავე პედაგოგებს კვალიფიკაციის ამაღლებაში.

რეცენზენტები: სრული პროფესორი ნ. დარაჩხელიძე,
ასოცირებული პროფესორი გ. წულეისკირი

© საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, 2012

ISBN 978-9941-20-133-2

<http://www.gtu.ge/publishinghouse/>



ყველა უფლება დაცულია. ამ წიგნის ნებისმიერი ნაწილის (ტექსტი, ფოტო, ილუსტრაცია თუ სხვა) გამოყენება არც ერთი ფორმითა და საშუალებით (ელექტრონული თუ მექანიკური) არ შეიძლება გამომცემლის წერილობითი ნებართვის გარეშე.

საავტორო უფლებების დარღვევა ისჯება კანონით.

წინასიტყვაობა

პროექციული გეომეტრია მათემატიკის უძლიერესი შტოს – გეომეტრიის უღამაზესი შემადგენელია. მისი სამუშაო აპარატი სინთეზურია ანუ მტკიცებულებებისა და ნებისმიერი დასახული მიზნის (ამოცანის) გადაწყვეტისათვის მათემატიკური ლოგიკის ბაზაზე გრაფიკული მოქმედებები გამოიყენება.

კურსი გათვლილია ამ აპარატით მომუშავე გრაფიკული დისციპლინების სპეციალისტებისათვის, რომლებიც მოწოდებულები არიან აწარმოონ კვლევითი სამუშაო როგორც სწავლების მეთოდის დახვეწასა და ახლის ძიების პრობლემატიკაში, ასევე სამეცნიერო თემატიკაში. შესაბამისად, სახელმძღვანელოში გაშუქებულია ყველა ის საკითხი, რომელიც ამ მიმართულებისათვის ფუძემდებურია. ვთვლით, რომ კურსი დიდ სამსახურს გაუწევს დოქტორანტებს, რომლებიც ნებისმიერი დარგის პრობლემატიკის კვლევითი სამუშაოს წარმოების პროცესში გამოიყენებენ სინთეზურ აპარატს.

კურსისადმი ინტერესის სფერო პირობითად შეიძლება ორ ჯგუფად დაიყოს: 1. ორგანზომილებიან ფიგურათა პროექციული ჯარდაქმნებით კონკრეტული დასახული ფორმისა და შინაარსის გეომეტრიული სახის მიღება. ამ ჯგუფში იგულისხმება როგორც ტექნიკური, სუფთა საინჟინრო საკითხები, ასევე მხატვრული სახის ძიება-ღიზინი. დღევანდელი დღე, ნებისმიერი ტექნიკის ქმნილების საინჟინრო-ტექნოლოგიური მოთხოვნის პარალელურად, მათთან ფორმის ესთეტიკურობას. ცნობილია, ნებისმიერი შემოქმედებითი ძიების პროდუქტი, რეალიზებული ფიზიკური სახით, რომელიც გეომეტრიული კანონზომიერების შინაგანი უზადო სიღამაზის შედეგია – მხატვრულია. ხოლო ბრტყელი ფიგურები, მათ შორის წირები, სივრცითი ფორმების სამგანზომილებიან ფოგურათა წარმოქმნის ძირითადი შემადგენელია. შესაბამისად,

პროექციული გეომეტრია იძლევა სივრცითი მხატვრული ფორმების ძიების საშუალებას.

მეორე ჯგუფს მიეკუთვნება ის საკითხები, რომლებიც ნებისმიერი საინჟინრო, არქიტექტურული და სივრცითი დიზაინის შემოქმედებითი პროცესის განუყოფელი, გეომეტრიული ნაწილია. დომინანტი ამ საკითხში სამგანზომილებიანი სივრცის ბრტყელი ანუ გეომეტრიული გრაფიკული მოდელებია. მესამე საუკუნეა, რაც კაცობრიობა სარგებლობს სივრცითი ობიექტების ბრტყელი გამოსახულებით (გ. მონეტის ეპიური, 1799 წ.), რომელიც პროექტის “წაკითხვის” საერთაშორისო საშუალებაა.

“წაკითხვა” ანუ შექცევადობა განპირობებულია დაგეგმილებით მიღებული წყვილი ანასახებით, წერტილოვანი ველებით, რომლებიც წინასახესთან ანუ სივრცესთან პროექციულ კავშირშია. პროექტირების სახე კი ამყარებს გარკვეულ კანონზომიერებას სივრცის წერტილოვან სიმრავლეებსა და მათ ანასახებს შორის. ამ კანონზომიერებით დამყარებული თვისებების, კერძოდ, პერსპექტივის კანონზომიერებათა შესწავლამ წარმოქმნა პროექციული გეომეტრიის კურსი.

გამოსახულებათა აგების კანონზომიერებას ადამიანმა ჩვენს წელთაღრიცხვამდე მიაგნო. აღორძინების ზანამ ამ მიმართულებით დაგვიტოვა კვლევები, მაგრამ პერსპექტივის პირმშო პროექციული გეომეტრია, როგორც გამართული გეომეტრიული სისტემა მხოლოდ მეცხრამეტე საუკუნეში ჩამოაყალიბა ნაპოლეონის ოფიცერმა ჟ. პონსელემ, რუსეთში ტყვეობისას. მას არ ჰქონდა გაცნობიერებული, რომ უსასრულო, არასაკუთრივი ელემენტებით მანიპულირება არაეკლიდური სივრცის და, შესაბამისად, არაეკლიდური გეომეტრიის საწყისი იყო (ნაშრომი გამოიცა 1813 წ.).

პროექციულმა გეომეტრიამ ზოგადად გეომეტრიაში მოახდინა კვლევითი მიმართულებების სისტემატიზაცია (ფ. კლაინი, “ერლანგენის პროგრამით” ცნობილი ნაშრომი, 1872 წ.). გეომეტრია დაიყო გარდაქმნათა ჯგუფების მიხედვით.

მეორე საუკუნეში გაამდიდრა გეომეტრია აქსიომატიკის ცნების გაფართოებით (დ. გილბერტი, 1901 წ.). ამ ზოგად ფონზე გეომეტრიული მოდელირების ახალი ტენდენციები გამოიკვეთა. ამ მიმართულებით დიდი წვლილი შეიტანა ქართულმა სკოლამ. საქართველოს პოლიტექნიკურ ინსტიტუტში ჩამოყალიბებული იყო ძლიერი გრაფიკული გეომეტრიის სკოლა, რომელსაც სათავეში ედგნენ გამორჩეული მეცნიერებები. პროფესორები გ. კანნაძე და ი. ჯაფარიძე. 1979 წ. გამოვიდა გ. კანნაძის სახელმძღვანელო "მსახველობითი გეომეტრიის კურსი". სადაც პროექციული გეომეტრიის ზოგიერთი საკითხია გაშუქებული, მაგრამ სასწავლო პროგრამებში სათანადო ადგილი ვერ ღია. დღეს ელექტრონული გრაფიკის გამოყენება წინაპირობაა უმაღლესი სასწავლებლის გრაფიკულ დისციპლინათა სახელმძღვანელოების რევიზიისა, რაც გულისხმობს ამოცანებში პროექციული გეომეტრიის თემატიკის გამოყენებას. 1983 წ. გამოიცა ჯაფარიძის ფუნდამენტური შრომა "მსახველობითი გეომეტრია გეომეტრიული მოდელირების ასპექტში". სადაც გაშუქებულია უმაღლეს ლიხტენბერგის პროექციების გარეშე ბრტყელი გეომეტრიული მოდელების აგებას. რომელიც მან განახორციელა პროექციული გეომეტრიის ბაზაზე შტეტინის და აქსიომატიკის პრინციპების დაცვით, მოახდინა მოდელთა სისტემატიზაცია შინაგანი გეომეტრიული საფუძვლების გამოკვეთით, მასვე ეკუთვნის ტერმინები: კონსტრუქციული და აქსიომატიკური დაგეგმილების გარეშე აგებული მოდელები.

საუკუნეების მანძილზე, გეომეტრიის ანალიზურ აპარატს სიზუსტის ხარისხის მისეღვით უპირატესობა ეძლეოდა სინთეზურთან შედარებით. გრაფიკულ გამოსახულებას ერთი პრივილეგია ჰქონდა თვალსაჩინოება. დღეს სიზუსტის ხარისხი, ელექტრონული ტექნიკის პირობებში, პრობლემა არ არის, რადგან ნებისმიერი გრაფიკული ბოქსების ციფრული ანაზახის საშუალებით ყოველთა გრაფიკულ გამოსახულებას ეკრანზე.

ღამხმარე სახელმძღვანელოში გაშუქებული გრაფიკული გეომეტრიული მოქმედებები უზრუნველყოფილია მათემატიკური პროგრამებით. იმედია, ეს საშუალება შრომატევადი ხელითი გრაფიკის სანაცვლება, მონიტორზე მანიპულირებით, სტიქული იქნება შესაბამისი ინტერესის მქონე პიროვნებებისათვის მათემატიკის ამ უზადო სიღამაზის შემადგენლის ათვისებისათვის და, შესაბამისად, კვალიფიკაციის ამაღლებისათვის.

ნუნუ დარახველიძე

პირველი თავი. შესავალი

1.1. ეკლიდეს გეომეტრიის აქსიომატიკური საფუძვლები

გეომეტრიული წარმოდგენების წარმოშობა შორეულ წარსულს მიეკუთვნება. ჩვეულებრივ, მათ ჩამოყალიბებას აკავშირებენ ეგვიპტის და ბაბილონის უძველეს კულტურებთან. ჩვენს წელთაღრიცხვამდე III საუკუნეში ბერძნები ფლობდნენ ღრმა გეომეტრიულ ცოდნას, თანაც ჰქონდათ არა მხოლოდ დაგროვილი ფაქტების მარაგი, არამედ გეომეტრიული მტკიცებულებების მეთოდებიც. სწორედ ამ პერიოდს ეკუთვნის ეკლიდეს ცნობილი "საწყისების" გამოჩენა, სადაც გეომეტრიის დასაბუთების ამოცანა დასმულია და გადაწყვეტილი სიზუსტის იმ ხარისხით, რომელიც მისაწვდომი იყო ანტიკურ ხანაში.

საუკუნეების მანძილზე ეკლიდეს მტკიცებულებების სიმკაცრე აღიარებული იყო, როგორც მიბაძვის ნიმუში. უნდა აღინიშნოს, რომ ეკლიდეს ლოგიკის დამაჯერებლობა ბევრ შემთხვევაში გამაგრებულია ჩვენი სივრცითი წარმოდგენების ჩვევებით. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ "საწყისები" არ შეიცავს გეომეტრიის მკაცრ ლოგიკურ დასაბუთებას. მხოლოდ XIX საუკუნის მიწურულს საბოლოოდ იქნა გაცნობიერებული გეომეტრიის ზუსტი ლოგიკური აგების აუცილებლობის იდეა და მითითებული აქსიომათა სრული სისტემა, რომელთა დახმარებით ყველა თეორემა მტკიცდებოდა ყოველგვარი აპელაციის გარეშე ჩვენი სივრცითი წარმოდგენების თვალსაჩინოებასთან.

აქსიომათა თანამედროვე ნუსხაში არ არსებობს გეომეტრიული ობიექტების აღწერილობა. იგულისხმება მხოლოდ, რომ არსებობს ობიექტების სამი ჯგუფი, რომლებსაც ეწოდება "წერტილები", "წრფეები" და "სიბრტყეები", ხოლო ძირითადი ცნებებია წერტილი, წრფე, სიბრტყე, მანძილი, სიმრავლე. მითითებულია, მხოლოდ რომ წერტილებად, წრფეებად და სიბრტყეებად წოდებულ ობიექ-

ტებს შორის უნდა არსებობდეს გარკვეული ურთიერთობები, რომლებიც აღინიშნება სიტყვებით "ეკუთვნის", "შორის", "კონგრუენტული". გარდა ამისა, მითითებული ურთიერთობები უნდა აკმაყოფილებდეს მოთხოვნებს, რომლებიც ჩამოთვლილია აქსიომებში. დანარჩენში კი ობიექტების და მათი ურთიერთობების ბუნება შეიძლება ნებისმიერი იყოს.

აქსიომები დაყოფილია ზუთ ჯგუფად:

I ჯგუფი – კუთვნილების აქსიომები

კუთვნილების აქსიომებში ძირითადი ობიექტების – წერტილების, წრფეების და სიბრტყეების ის დამოკიდებულებაა გასაზღვრული, რომელსაც გამოვთქვამთ სიტყვით "ეკუთვნის".

I.1. არსებობს ერთი მაინც წრფე და ერთი მაინც სიბრტყე. ყოველი წრფე და ყოველი სიბრტყე არის წერტილთა არაცარიელი სიმრავლე, რომელიც სივრცეს არ ემთხვევა.

I.2. ნებისმიერ ორ განსხვავებულ A და B წერტილზე გადის ერთი და მხოლოდ ერთი წრფე.

I.3. A, B, C სამ წერტილზე, რომლებიც ერთსა და იმავე წრფეს არ ეკუთვნის, გადის ერთი და მხოლოდ ერთი სიბრტყე.

I.3 და I.1 აქსიომების თანახმად, სივრცე შეიცავს ოთხ წერტილს მაინც. მართლაც, სამი წერტილის არსებობა I.3 აქსიომაშია შემოტანილი: ეს წერტილები განსაზღვრავს სიბრტყეს. რადგან სიბრტყე არ ემთხვევა სივრცეს (აქს. I.1), არსებობს მეოთხე წერტილიც.

I.4. წრფე, რომელიც სიბრტყის ორ წერტილზე გადის, ამ სიბრტყეს ეკუთვნის.

I.5. თუ α და β ორ სხვადასხვა სიბრტყეს აქვს საერთო A წერტილი, მაშინ კიდევ ერთი B საერთო წერტილი აქვს.

II ჯგუფი – მანძილის აქსიომები

ამ აქსიომებში ჩამოყალიბებულია ძირითადი ცნების – მანძილის თვისებები.

II.1. ყოველი A და B ორი წერტილისათვის არსებობს არაუარყოფითი $|AB|$ სიდიდე, რომელსაც A -დან B -მდე მანძილი ეწოდება. მანძილი ნულის ტოლია იმ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ A და B წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა.

II.2. A წერტილიდან B წერტილამდე მანძილი უდრის B წერტილიდან A წერტილამდე მანძილს: $|AB|=|BA|$.

II.3. ყოველი A, B, C სამი წერტილისათვის მანძილი A -დან C -მდე არ აღემატება A -დან B -მდე და B -დან C -მდე მანძილთა ჯამს: $|AC| \leq |AB| + |BC|$.

პირველი და მეორე ჯგუფის აქსიომათა საფუძველზე განისაზღვრება ცნება "შორის": ნებისმიერი A, B და C სამი წერტილისათვის B წერტილი ძვეს A და C წერტილებს შორის, თუ ისინი ერთმანეთს არ ემთხვევა და

$$|AC| = |AB| + |BC|.$$

III ჯგუფი – დალაგების აქსიომები

დალაგების აქსიომებში წერტილების და წრფეების ის ურთიერთობაა ჩამოყალიბებული, რომელიც სიტყვით "შორის" გამოიხატება.

III.1. თუ B წერტილი ძვეს A და C წერტილებს შორის, მაშინ A, B, C ერთი წრფის კუთვნილი წერტილებია და B ძვეს აგრეთვე C და A წერტილებს შორის.

III.2. როგორიც არ უნდა იყოს A და C ორი წერტილი, AC წრფეზე არსებობს ისეთი B წერტილი, რომ C წერტილი მდებარეობს A და B წერტილებს შორის.

III.3. წრფის ნებისმიერი სამი წერტილიდან არსებობს არაუმეტეს ერთი წერტილისა, რომელიც დანარჩენ ორს შორის მდებარეობს.

III.4. წრფის ნებისმიერი O წერტილი ამ წერტილისაგან განსხვავებულ წერტილთა სიმრავლეს ყოფს ორ არაცარიელ სიმრავლეად ისე, რომ:

- O წერტილი ძვეს ნებისმიერ ორ წერტილს შორის, რომლებიც განსხვავებულ ქვესიმრავლეებს ეკუთვნის;
- ორი წერტილი ერთ ქვესიმრავლეს ეკუთვნის, თუ ერთი მათგანი O წერტილსა და მეორეს შორის მდებარეობს.

III.5. O სათავის მქონე სხივზე ნებისმიერი არაუარყოფითი რიცხვისათვის არსებობს ერთი A წერტილი, რომელიც O წერტილიდან a მანძილზე მდებარეობს:

$$|OA|=a.$$

III ჯგუფის აქსიომები მოიცავს აქსიომას, რომელიც განსაზღვრავს გეომეტრიული ელემენტების სიბრტყეზე განლაგებას.

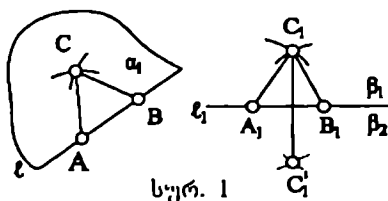
III.6. ნებისმიერი p წრე α სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლეა, რომელიც ამ წრეს არ ეკუთვნის, α_1 და α_2 ორ არაკარიელ სიმრავლედ ყოფს შემდეგი წესით:

- p წრეზე არამდებარე A და B წერტილები ეკუთვნის ერთ-ერთ სიმრავლეს, თუ $[AB]$ არ კვეთს p წრეს;
- p წრეზე არამდებარე A და B წერტილები ეკუთვნის სხვადასხვა სიმრავლეს, თუ $[AB]$ კვეთს p წრეს.

IV ჯგუფი – სიბრტყის გადაადგილების აქსიომა

ეთქვათ, არსებობს ისეთი გადაადგილება, რომელსაც α სიბრტყის A და B წერტილები გადაჰყავს მოცემულ A_1 და B_1 წერტილებში (ცხადია, $|AB|=|A_1B_1|$). მაშინ A და B წერტილებისგან განსხვავებული C წერტილის C_1 სახე უნდა მდებარეობდეს α სიბრტყეში A_1 წერტილიდან $|AC|$ მანძილზე და B_1 წერტილიდან $|BC|$ მანძილზე. ცხადია, არსებობს ამ პირობის დამაკმაყოფილებელი ორი წერტილი.

თუ A, B, A_1, B_1 წერტილები ეკუთვნის α სიბრტყეს და $|AB|=|A_1B_1|$, მაშინ არსებობს მხოლოდ ℓ_1 და ℓ_2 ორი გადაადგილება, რომელთაგან თითოეული A წერტილს A_1 -



სურ. 1

ზე, ხოლო B წერტილს B_1 -ზე ასახავს. თუ α_1 არის AB წრფით შემოსაზღვრული ნახევარსიბრტყე, მაშინ ეს გადაადგილებები მას (A_1B_1) საზღვრის მქონე განსხვავებულ β_1 და β_2 ნახევარსიბრტყეებზე ასახავს (სურ. 1).

მაშასადამე, ერთი გადაადგილებისას $\beta_1=f_1(\alpha_1)$, მეორე გადაადგილებისას $\beta_2=f_2(\alpha_1)$.

V ჯგუფი – პარალელურ წრფეთა აქსიომა

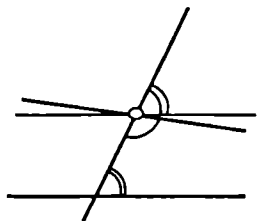
სიბრტყის ნებისმიერ A წერტილზე გადის მოცემული a წრფის პარალელური არაუმეტეს ერთი წრფე.

1.2. მეხუთე პოსტულატი

თხზულებათა უმრავლესობაში, რომლებიც გეომეტრიის საფუძვლებს ეძღვნებოდა, იყო მცდელობა ძირითადი წინადადებების სიიდან ამოეღოთ ევკლიდეს V პოსტულატი პარალელურ წრფეებზე, რადგან პოსტულატისათვის ის მეტად რთული ჩანდა. ამ პოსტულატში ნათქვამია:

მოითხოვება, რომ ყოველთვის, როდესაც წრფე ორ სხვა წრფესთან გადაკვეთისას წარმოქმნის შიგა ცალმხრივ კუთხეებს, რომელთა ჯამი ორ მართ კუთხეზე ნაკლებია, ეს წრფეები იკვეთებოდეს იმ მხარეს, საითაც შიგა ცალმხრივი კუთხეების ჯამი ორ მართ კუთხეზე ნაკლებია (სურ. 2).

XIX საუკუნის დასაწყისამდე V პოსტულატის დამტკიცების არც ერთ მცდელობას სასურველი შედეგი არ მოჰყოლია. თუმცა



სურ. 2

დანარჩენი პოსტულატების საფუძველზე V პოსტულატის დამტკიცების მრავალრიცხოვანმა მცდელობამ, მათი წარუმატებლობის მიუხედავად, დადებითი შედეგები გამოიღო. სწორედ ამ მცდელობების შედეგად იქნა აღმოჩენილი ევკლიდეს V პოსტულატის რამდენიმე ეკვივალენტი ანუ ისეთი წინადა-

დებები, რომლებიც, სხვა ძირითად დებულებებთან ერთად, ევკლიდეს V პოსტულატის დამტკიცების საშუალებას იძლევა. შევნიშნოთ, რომ ზემოჩამოთვლილ თანამედროვე აქსიომათა სისტემაში პარალელურობის V აქსიომა სწორედ ევკლიდეს V პოსტულატის ერთ-ერთი ეკვივალენტია.

V პოსტულატისადმი მიძღვნილი კვლევები დასრულდა მხოლოდ XIX ს. დასაწყისში და კვლევების შედეგი მოულოდნელი და მნიშვნელოვანი აღმოჩნდა. პრობლემის გადაჭრა ეკუთვნის რუს გეომეტრს ლობაჩევსკის, რომელმაც ახლებურად გააშუქა ეს საკითხი და ძირეულად შეცვალა ჩვენი წარმოდგენები გეომეტრიაზე. ლობაჩევსკი და ბოლიაი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად მივიღწენ იმ დასკვნამდე, რომ შესაძლებელია არსებობდეს გეომეტრია, რომელშიც სრულდება ევკლიდეს გეომეტრიის პირველი ოთხი პოსტულატი, ხოლო V პოსტულატის ადგილი ეჭიროს საწინააღმდეგო მტკიცებულებას.

ლობაჩევსკის კვლევის შედეგები, რომლებიც დაკავშირებულია V პოსტულატთან, მოკლედ შეიძლება შემდეგნაირად ჩამოვაყალიბოთ:

1. V პოსტულატი არ წარმოადგენს ევკლიდეს გეომეტრიის სხვა პოსტულატების აუცილებელ შედეგს.

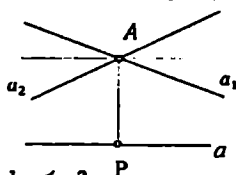
2. V პოსტულატი სწორედ იმიტომ არ გამომდინარეობს სხვა პოსტულატებიდან, რომ, ევკლიდეს გეომეტრიასთან ერთად, სადაც ეს პოსტულატი სრულდება, შესაძლებელია არსებობდეს სხვა გეომეტრია, სადაც V პოსტულატს ადგილი არა აქვს.

1.3. არაევკლიდური გეომეტრიები

ლობაჩევსკის კვლევების მნიშვნელობა განსაკუთრებულია. მის მიერ მიღებულ შედეგებამდე ევკლიდური გეომეტრია წარმოგვედგინა ერთადერთ მეცნიერებად სივრცის შესახებ. არაევკლიდური გეომეტრიის აღმოჩენამ შეცვალა ეს წარმოდგენა, რითაც საფუძ-

ველი დაუდო გეომეტრიასა და მის საგანზე შეხედულებების შორს მიმავალ განზოგადებებს, რომლებმაც მიგვიყვანეს აბსტრაქტული სივრცის ცნებამდე, მისი მრავალრიცხოვანი გამოყენებით მათემატიკასა და მასთან მომიჯნავე დარგებში.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ (1.2), ლობაჩევსკის გეომეტრია განსხვავდება ევკლიდეს გეომეტრიისგან ერთ, მაგრამ მეტად მნიშვნელოვან პუნქტში. ლობაჩევსკის გეომეტრია მოიცავს აბსოლუტური გეომეტრიის¹ აქსიომათა ოთხივე (I-დან IV-მდე) ჯგუფს, ხოლო პარალელურობის აქსიომა შეცვლილია მისი უარყოფით, სახელდობრ, შემდეგი წინადადებით:



სურ. 3

მოცემულ A წერტილზე, რომელიც არ ძეკვს a წრფეზე, გადის ორი წრფე მაინც, რომლებიც a წრფით და A წერტილით განსაზღვრულ სიბრტყეში მდებარეობს და არ კვეთს a წრფეს (სურ. 3).

გარდა ამისა, თუ ლობაჩევსკის გეომეტრიაში a_1 და a_2 წრფეები გადის ერთ A წერტილზე და არ კვეთს a წრფეს, მაშინ ყველა წრფე (მაგალითად, c), რომელიც A წერტილზე გადის a_1 და a_2 წრფეებით შედგენილი ევრტიკალური კუთხეების წყვილში, რომელიც P წერტილს არ შეიცავს, არ კვეთს a წრფეს. a_1 და a_2 სასაზღვრო წრფეებს ეწოდება a წრფის პარალელური წრფეები ამ წრფის ორი მიმართულებით.

როგორც აღვნიშნეთ, ევკლიდეს და ლობაჩევსკის გეომეტრიების აქსიომათა პირველი ოთხი ჯგუფი იდენტურია და მათში არ არის მოცემული გეომეტრიული ობიექტების – წერტილების, წრფეებისა და სიბრტყეების აღწერილობა. იგულისხმება მხოლოდ ობიექტების არსებობა, რომლებსაც ასეთი სიტყვები ჰქვია. არ არსებობს არც ამ ობიექტების ურთიერთდამოკიდებულებების აღ-

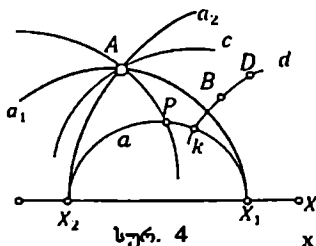
¹ გეომეტრიას, რომელშიც სრულდება ევკლიდური გეომეტრიის აქსიომათა პირველი ოთხი ჯგუფი, აბსოლუტური გეომეტრია ეწოდება.

წერა. ნათქვამია, რომ ამ ობიექტებს შორის არსებობს დამოკიდებულება, რომელიც გამოიხატება სიტყვებით "შორის", "ეკუთვნის", "კონგრუენტულები" და მათი თვისებები აქსიომებშია ჩამოთვლილი. ამიტომ, შეგვიძლია სიტყვები "წერტილი" და "წრფე" დავარქვათ რომელიმე კონკრეტულ ობიექტებს და სიტყვებით "ეკუთვნის", "შორის", "კონგრუენტულები" აღვნიშნოთ მათი ურთიერთდამოკიდებულება. იმ პირობით, რომ ისინი შესაბამის აქსიომებში მოცემულ მოთხოვნებს აკმაყოფილებს. ამიტომ, შევარჩევთ რა გარკვეულ ობიექტებს, რომელთა დამოკიდებულებები აკმაყოფილებს მოცემულ აქსიომათა სისტემის მოთხოვნებს, მივიღებთ იმ აბსტრაქტული სქემის მოდელს, რომელიც ამ აქსიომებით განისაზღვრება.

ამრიგად, ობიექტების ყოველი სისტემა, რომელიც დააკმაყოფილებს ლობაჩევსკის გეომეტრიის აქსიომათა მოთხოვნებს, მოგვცემს ლობაჩევსკის გეომეტრიის კონკრეტულ მოდელს.

განვიხილოთ ევკლიდეს სიბრტყეში ლობაჩევსკის აბსტრაქტული გეომეტრიის პლანიმეტრიული მოდელი ან, როგორც ამბობენ, ლობაჩევსკის გეომეტრიის ინტერპრეტაცია ევკლიდეს სიბრტყეში, რომელიც ა. პუანკარეს ეკუთვნის.

ევკლიდეს სიბრტყეში გავავლოთ x წრფე, რომელსაც მივცეთ ჰორიზონტალური მდებარეობა (სურ. 4). x წრფე განსაზღვრავს ორ ნახევარსიბრტყეს. ერთ მათგანს პირობითად ვუწოდოთ "ზედა". არაევკლიდური წერტილები დავარქვათ ზედა ნახევარსიბრტყის კუთვნილ წერტილებს (x წრფის წერტილების გარდა) და არაევკლიდური წრფეები ევკლიდეს ნახევარწრეწირებს, რომლებიც ზედა ნახევარსიბრტყეს ეკუთვნის და x წრფის ორთოგონალურებია (ანუ მათი ცენტრები x წრფეზე მდებარეობს). ჩავთვალოთ, რომ არაევკლიდური B წერტილი და არაევკლიდური d წრფე

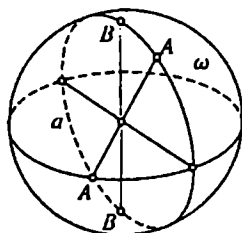


ინციდენტურებია, თუ ჩვეულებრივი B წერტილი d ნახევარწრეწირის ინციდენტურია.

ამ მოდელში სრულდება ევკლიდეს გეომეტრიის კუთვნილების ყველა პლანიმეტრიული აქსიომა.

ეთქვათ, მოცემულია ზედა ნახევარსიბრტყის a ნახევარწრეწირი, რომელიც X წრფის ორთოგონალურია. ეთქვათ, A ზედა ნახევარსიბრტყის კუთვნილი წერტილია, რომელიც a ნახევარწრეწირს არ ეკუთვნის (სურ. 4). ადვილად დავრწმუნდებით, რომ A წერტილზე შეიძლება გავავლოთ X წრფის ორთოგონალურ ნახევარწრეწირთა უსასრულო სიმრავლე, რომლებსაც მოცემულ a ნახევარწრეწირთან საერთო წერტილები არ ექნება. იმ ტერმინებში, რომელთა გამოყენებაზე შევთანხმდით, ეს ფაქტი შეიძლება შემდეგნაირად გამოვთქვათ: ნებისმიერ არაევკლიდურ წერტილზე, რომელიც არ ეკუთვნის მოცემულ არაევკლიდურ წრფეს, შეიძლება გავავლოთ არაევკლიდური წრფეების უსასრულო სიმრავლე, რომლებიც არ კვეთს მოცემულ არაევკლიდურ წრფეს. ეს იმას ნიშნავს, რომ განზილული ობიექტების სისტემაში სრულდება ლობაჩევსკის პოსტულატი. მაშასადამე, ეს სისტემა ლობაჩევსკის გეომეტრიის მოდელია. A წერტილზე გამავალ არაევკლიდურ წრფეებს შორის უნდა არსებობდეს ორი სასაზღვრო არაევკლიდური წრფე; სწორედ მათ ეწოდება მოცემული არაევკლიდური a წრფის პარალელური წრფეები ამ წრფის ორი მიმართულებით. a არაევკლიდური წრფის პარალელური წრფეები გამოსახულია მე-4 სურათზე a_1 და a_2 ორი ნახევარწრეწირით, რომლებიც ეხება a ნახევარწრეწირს X წრფეზე მდებარე X_1 და X_2 წერტილებში. რადგან X წრფის ევკლიდეს წერტილები არ არის არაევკლიდური ობიექტები, ამიტომ არაევკლიდური წრფეები, გამოსახული a_1 და a_2 ნახევარწრეწირებით უნდა განვიხილოთ, როგორც ისეთი წრფეები, რომლებსაც a "წრფესთან" საერთო წერტილები არა აქვს. ნახაზიდან ჩანს, რომ ისინი სასაზღვროა.

იმ დროს, როდესაც ევკლიდეს გეომეტრიაში ადგილი აქვს პოსტულატს ერთადერთ წრეზე, რომელიც მოცემულ წერტილზე გადის და არ კვეთს მოცემულ წრეს, ხოლო ლობაჩევსკის გეომეტრიაში მიღებულია ამ პოსტულატის ერთი უარყოფა დაშვებულია, რომ ასეთი წრეების უსასრულო სიმრავლე არსებობს, რიმანის გეომეტრიაში ხორციელდება ამ პოსტულატის სხვა უარყოფა - ამ გეომეტრიაში ნებისმიერი წრე იკვეთება მეორესთან. უნდა აღვნიშნოთ, რომ რიმანის გეომეტრიაშიც სრულდება აბსოლუტური გეომეტრიის ყველა აქსიომა. როგორც კი კონკრეტულ ობიექტებს დაერქვა "წერტილები" და "წრეები" და სიტყვებით "ეკუთვნის", "შორის", "კონგრუენტულები" აღვნიშნავთ მათ გარკვეულ ურთიერთდამოკიდებულებას, რომლებიც რიმანის გეომეტრიის აქსიომათა მოთხოვნებს აკმაყოფილებს, მივიღებთ რიმანის აბსტრაქტული გეომეტრიის კონკრეტულ მოდელს. ობიექტების ყოველ სისტემას, რომელიც აკმაყოფილებს რიმანის გეომეტრიის აქსიომათა მოთხოვნებს, შეიძლება ეუწოდოთ რიმანის სიბრტყე. მაგალითად, ევკლიდეს სივრცეში განვიხილოთ ნებისმიერი ω სფერო. შევთანხმდეთ, რომ ამ სფეროს დიამეტრულად საწინააღმდეგო წერტილებს "გავაიგიებთ" ანუ დიამეტრულად საწინააღმდეგო წერტილთა წყვილს განვიხილავთ, როგორც ერთიან ობიექტს. ამ ობიექტს ეუწოდოთ რიმანის გეომეტრიის წერტილი, ხოლო სფეროს ყოველ დიდ წრეწირს რიმანის წრე. ვიტყვი, რომ A "წერტილი" ეკუთვნის a "წრეს", თუ ω სფეროს ჩეულებრივი წერტილები, რომლებიც შეადგენს A "წერტილს" მდებარეობს სფეროს დიდ წრეწირზე - რიმანის a "წრეზე" (სურ. 5). რიმანის გეომეტრიაში ყოველ ორ წრეს საერთო (გადაკვეთის) წერტილი აქვს, რაც თვალნათელია, რადგან სფეროს ყოველ ორ დიდ წრეწირს აქვს ორი დიამეტრულად საწინააღმდეგო გადაკვე-



სურ. 5

თის წერტილი ანუ რიმანის სიბრტყეზე არ არსებობს პარალელური წრფეები.

1.4. ფიგურათა გეომეტრიული თვისებები

1. ფიგურათა მეტრული თვისებები. ჩვენ მიერ პასუხგასაცემია შემდეგი კითხვა: ფიგურათა რომელი თვისებები უნდა ჩავთვალოთ მათ გეომეტრიულ თვისებებად? ცხადია, რომ ფიგურის ფერი, წონა, მასალა, რომლისგანაც ის არის დამზადებული, არ არის ფიგურის გეომეტრიული თვისებები ანუ არ განიხილება გეომეტრიაში. ამით იმის თქმა გვინდა, რომ ჩამოთვლილი და მათი მსგავსი თვისებები არ განიხილება გეომეტრიაში. საქმე ისაა, რომ თუ ავიღებთ ორ სამკუთხედს, რომლებიც ერთმანეთისგან მხოლოდ იმით განსხვავდება, რომ ერთი გამოჭრილია ხისგან, მეორე კი დამზადებულია პლასტმასისგან და შეღებილია ყვითლად, გეომეტრიის თვალსაზრისით, მათ შორის არ არსებობს არანაირი განსხვავება: ყველაფერი, რასაც გეომეტრი იტყვის ერთის შესახებ, მართებული იქნება მეორე სამკუთხედისთვისაც, ე.ი. გეომეტრიაში განიხილება მხოლოდ ის თვისებები, რომლებიც გააჩნია ყველა ერთმანეთისგან განურჩეველ ფიგურას. ამიტომ ჩვენ მიერ დასმულ კითხვას, თუ ფიგურათა რომელ თვისებებს განიხილავს გეომეტრია, მივყავართ შემდეგ კითხვამდე: რა შემთხვევაში არ არსებობს განსხვავება ორ ფიგურას შორის გეომეტრიაში, რა შემთხვევაში ითვლება ისინი განურჩევლებად, ერთნაირებად? ამ კითხვაზე პასუხებს მივყავართ, როგორც ვნახავთ, სხვადასხვა გეომეტრიებამდე და ფიგურათა სხვადასხვა გეომეტრიულ თვისებებამდე, რადგან სხვადასხვა გეომეტრიებში სწორედ განურჩეველი ფიგურების საერთო თვისებებს ეწოდება ფიგურათა გეომეტრიული თვისებები.

ერთ-ერთი დებულება, რომელიც ჩამოყალიბებულია ელემენტარული გეომეტრიის დასაწყისში, შემდეგია: გეომეტრიულ ფიგურ-

რათა თვისებები არ არის დამოკიდებული მათ მდებარეობაზე სივრცეში. ამის გამო, ფიგურათა თვისებების განხილვისას არა აქვს მნიშვნელობა სივრცის რომელ ნაწილში მდებარეობს ფიგურა, რადგან სივრცეში მოძრაობისას ფიგურის ყველა გეომეტრიული თვისება უცვლელი რჩება.

სწორედ მოძრავ ფიგურაზე დაკვირვების შედეგად ჩამოყალიბდა გეომეტრიაში გარდაქმნის ცნება. მოძრავი ფიგურის თვისება კი, რომელიც მნიშვნელოვანია გეომეტრიაში, არის ფიგურის ზომის და ფორმის შენარჩუნება. მოძრავი ფიგურა ინარჩუნებს ფორმას და ზომას. ის მოძრაობის ბოლოს ისეთივეა, როგორიც მოძრაობის დასაწყისში. ამრიგად, თუ დავაფიქსირებთ ფიგურის მოძრაობის მხოლოდ საწყის და ბოლო მომენტებს, შევძლებთ საწყის და ბოლო მდებარეობაში მყოფი ფიგურის წერტილებს შორის გარკვეული ურთიერთცალსახა შესაბამისობის დამყარებას.

ამრიგად, თუ F ფიგურა მოძრაობით გადადის F' ფიგურაში, მაშინ ამ მოძრაობის შედეგად F და F' ორი ფიგურის წერტილებს შორის მყარდება ურთიერთცალსახა შესაბამისობა: $A \in F$ წერტილს შეესაბამება ერთადერთი $A' \in F'$, რომელსაც ეწოდება A წერტილის სახე და, პირიქით, ყოველი $A' \in F'$ წერტილი ერთი A წერტილის სახეა, რომელსაც A' წერტილის წინასახე ეწოდება. A და A' წერტილებს შორის ასეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობას ეწოდება ერთი მათგანის ასახვა მეორეზე. ამავე წესით, ფიგურის B წერტილი აისახება B' წერტილზე. ფიგურის წერტილების ასეთი ასახვის შედეგად საწყის მდებარეობაში მყოფი F ფიგურა აისახება მოძრაობის ბოლოში გასულ F' ფიგურაზე. ცხადია, F და F' ფიგურები ერთმანეთისაგან არაფრით არ განსხვავდება და თუ F ფიგურის ნებისმიერ A და B ორ წერტილს შეესაბამებთ A', B' წერტილებს, მაშინ, ცხადია, AB და $A'B'$ მონაკვეთების სიგრძეები ტოლი იქნება: $|AB| = |A'B'|$.

თუ ჩავთვლით, რომ F ფიგურასთან ერთად გადაადგილება სიბრტყის ყველა წერტილი, მივიღებთ სიბრტყის წერტილების ასახ-

ვას ამავე სიბრტყის წერტილებზე. რადგან ფიგურის თავის თავზე ასახვას ამ ფიგურის გარდაქმნა ეწოდება, წერტილების ასეთი გადაადგილებით მივიღებთ სიბრტყის ასახვას თავის თავზე ანუ სიბრტყის გარდაქმნას.

ამრიგად, გეომეტრიაში მოძრაობა განიხილება არა როგორც ფიგურის გადაადგილების პროცესი, არამედ როგორც ზემოთ განხილული შესაბამისობა საწყის და ბოლო მდებარეობებში მყოფ F და F' ფიგურათა წერტილებს შორის. ასეთი მიდგომა შესაძლებლობას გვაძლევს განვიხილოთ მოძრაობა, როგორც ასახვა (გარდაქმნა), რომელიც მონაკვეთების სიგრძეებს ინარჩუნებს*, ე.ი. მონაკვეთის სიგრძე მოძრაობის ინვარიანტია (შეუცვლელი სიდიდეა). ეს ნიშნავს, რომ მოძრაობათა გარდაქმნის შედეგად მიღებული ფიგურების ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი უცვლელი რჩება. ასეთ ფიგურებს კონგრუენტული ეწოდება.

ორ ფიგურას კონგრუენტული ეწოდება, თუ ერთი ფიგურა მეორეზე ისე შეიძლება ავსახოთ, რომ მონაკვეთების სიგრძეები არ შეიცვალოს.

ასახვას (გარდაქმნას), რომელიც ინარჩუნებს მონაკვეთების სიგრძეებს და კონგრუენტულ ფიგურებს ერთმანეთზე ასახავს, მოძრაობა ეწოდება.

ელემენტარულ გეომეტრიაში კონგრუენტული ფიგურები ანუ ფიგურები, რომლებიც მოძრაობის გარდაქმნის შედეგადაა მიღებული, განურჩევლები, ერთნაირებია და სწორედ მათი საერთო თვისებები, რომლებიც მოძრაობის გარდაქმნის დროს ინვარიანტულია, არის ამ ფიგურების გეომეტრიული თვისებები.

ამრიგად, კონგრუენტულ ფიგურათა გეომეტრიული თვისებები ეწოდება თვისებებს, რომლებიც ინვარიანტულია მოძრაობათა გარდაქმნების მიმართ ანუ ისეთი გარდაქმნების მიმართ, რომელთა ინვარიანტია მონაკვეთის სიგრძე.

* გარდაქმნებს, რომლებიც მონაკვეთის სიგრძეებს ინარჩუნებს, ორთოგონალურ გარდაქმნებსაც უწოდებენ.

კონგრუენტულ ფიგურათა შესაბამისი მონაკვეთების სიგრძეთა ტოლობა განაპირობებს ამ ფიგურების შესაბამისი კუთხეების სიდიდეთა ტოლობასაც. ანუ კონგრუენტული ფიგურები ინარჩუნებს როგორც ზომას, ასევე ფორმას.

ელემენტარულ გეომეტრიაში განიხილება მსგავსი ფიგურებიც.

ორ ფიგურას მსგავსი ეწოდება, თუ ერთი ფიგურა მეორეზე ისე შეიძლება აესაზოთ, რომ შესაბამისი მონაკვეთების სიგრძეთა ფარდობა არ შეიცვალოს.

ასახვას, რომელიც ინარჩუნებს შესაბამისი მონაკვეთების სიგრძეთა ფარდობას და მსგავს ფიგურებს ერთმანეთზე ასახავს, მსგავსების ასახვა (გარდაქმნა) ეწოდება.

ე.ი. თუ მსგავსებით A აისახება A' -ზე, B აისახება B' -ზე, მაშინ AB მონაკვეთი აისახება $A'B'$ მონაკვეთზე და ამ მონაკვეთების სიგრძეთა ფარდობა უცვლელი რჩება მოცემული ფიგურის

ყველა მსგავს ფიგურათა წყვილებისათვის $\frac{|AB|}{|A'B'|} = k$; k დადებით

რიცხვს მსგავსების კოეფიციენტი ეწოდება. მსგავსი ფიგურებისათვის ნებისმიერი შესაბამისი მონაკვეთების ფარდობა მუდმივი სიდიდეა.

ამრიგად, შესაბამისი მონაკვეთების სიგრძეთა ფარდობა მსგავსების გარდაქმნის და მსგავსი ფიგურების ინვარიანტია.

როგორც ვხედავთ, ყოველ გეომეტრიულ გარდაქმნას თავისი ინვარიანტი გააჩნია და ამ გარდაქმნების შედეგად მიღებულ ფიგურებს იგივე ინვარიანტი ექნება.

მსგავს ფიგურათა გეომეტრიული თვისებები ეწოდება თვისებებს, რომლებიც ინვარიანტულია მსგავსების გარდაქმნის დროს. ცხადია, რომ მსგავსი ფიგურების საერთო თვისებები ამ ფიგურების გეომეტრიული თვისებებია.

მსგავსი ფიგურების განსაზღვრებაში მოთხოვნილი შესაბამისი მონაკვეთების სიგრძეთა ფარდობების ტოლობა განაპირობებს მსგავსი ფიგურების შესაბამის კუთხეთა სიდიდეების ტოლობას.

ამის გამო, მსგავსი ფიგურები არ ინარჩუნებს ზომას, მაგრამ ინარჩუნებს ფორმას.

კონგრუენტული ფიგურებიც შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც მსგავსი ფიგურები მსგავსების კოეფიციენტით $k=1$. რადგან ელემენტარულ გეომეტრიაში ფიგურათა გეომეტრიული თვისებები დაკავშირებულია მონაკვეთების სიგრძეების გაზომვასთან, ამიტომ ამ გეომეტრიაში ფიგურის გეომეტრიულ თვისებებს მეტრული თვისებები ეწოდება, ხოლო ეკლიდეს გეომეტრიას, რომელიც ფიგურის მეტრულ თვისებებს შეისწავლის, მეტრული გეომეტრია. ამრიგად, მეტრული გეომეტრია განიხილავს ფიგურათა იმ გეომეტრიულ თვისებებს, რომლებიც ინვარიანტულია მოძრაობის და მსგავსების გარდაქმნათა ერთობლიობის მიმართ.

სწორედ ეს არის პასუხი ჩვენ მიერ დასმულ კითხვებზე, გეომეტრიაში რომელი ფიგურებია ერთნაირი (განურჩეველი) და მათ რომელ თვისებებს ეწოდება გეომეტრიული თვისებები. გეომეტრიაში განურჩეველ, ეკვივალენტურ ფიგურებად ითვლება ის ფიგურები, რომლებიც ერთმანეთზე აისახება ამა თუ იმ გარდაქმნით, რის გამოც მათ ერთნაირი თვისებები აქვს, რომლებიც ამ გარდაქმნის მიმართ ინვარიანტულია. სწორედ ეს თვისებები წარმოადგენს ფიგურათა გეომეტრიულ თვისებებს. ამიტომ, შეგვიძლია შემდეგნაირად განვაზოგადოთ ფიგურათა გეომეტრიული თვისებების ცნება.

ფიგურათა გეომეტრიული თვისებები არის მათი ისეთი თვისებები და ფიგურებთან დაკავშირებული ისეთი სიდიდეები, რომლებიც ინვარიანტულია (უცვლელია) რაიმე გარდაქმნათა ერთობლიობის მიმართ.

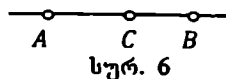
როგორც ფელიქს კლაინმა აჩვენა თავის ცნობილ "ერლანგენის პროგრამაში", ფიგურათა გეომეტრიული თვისებების ინვარიანტულობა ამა თუ იმ გარდაქმნათა ერთობლიობის მიმართ არის ამ თვისებების კლასიფიკაციის მეტად მოხერხებული საშუალება. კერძოდ, ფელიქს კლაინმა გამოთქვა მოსაზრება, რომ გეომეტრია

არის მეცნიერება, რომელიც შეისწავლის ფიგურათა იმ გეომეტრიულ თვისებებს, რომლებიც ინვარიანტულია გარკვეულ გარდაქმნათა ერთობლიობის მიმართ. მაგალითად, მეტრული გეომეტრია შეისწავლის კონგრუენტულ და მსგავს ფიგურათა მეტრულ თვისებებს, რომლებიც ინვარიანტულია მოძრაობისა და მსგავს გარდაქმნათა ერთობლიობის მიმართ. იგივე ფელიქს კლაინის მიხედვით, თუ მოძრაობის და მსგავს გარდაქმნათა ერთობლიობის მაგივრად, განვიხილავთ რაიმე სხვა გარდაქმნათა ერთობლიობას და ერთნაირი თვისებების ფიგურებად მივიჩნევთ იმ ფიგურებს, რომლებიც ერთმანეთზე აისახება ამ ერთობლიობაში შემავალი გარდაქმნებით ანუ განსახილველად გამოვყოფთ ფიგურათა მხოლოდ იმ თვისებებს, რომლებიც უცვლელი (ინვარიანტულები) რჩება ამ გარდაქმნების დროს, მივიღებთ სხვადასხვა ახალ გეომეტრიებს და ფიგურათა ახალ გეომეტრიულ თვისებებს.

2. ფიგურათა აფინური თვისებები. თითქმის ოცი საუკუნის მანძილზე ევკლიდეს გეომეტრიის ერთადერთობაში ეჭვი არავის ეპარებოდა. მაგრამ, XIX საუკუნეში სხვა ახალ მეცნიერულ ტენდენციებთან ერთად, გაჩნდა მოსაზრება მეტრული გეომეტრიიდან გამოეყოთ ზოგიერთი დებულებები, რომლებიც არ შეიცავდა მეტრიკას ანუ მანძილების და კუთხეების გაზომვის ცნებებს და, ამ დებულებების საფუძველზე, შეექმნათ უფრო ზოგადი გეომეტრიული სისტემები. ერთ-ერთი ასეთი სისტემა აფინური გეომეტრია იყო, რომელიც განიხილავდა აფინურ ფიგურებს და მათ თვისებებს.

ორ ფიგურას აფინური ეწოდება, თუ ერთი ფიგურა მეორეზე ისე შეიძლება ავსახოთ, რომ სამი წერტილის მარტივი (ABC) ფარდობა არ შეიცვალოს.

თვითონ ასახვას, რომელიც სამი წერტილის მარტივ ფარდობას ინარჩუნებს, აფინური შესაბამისობა (გარდაქმნა) ეწოდება.



სამი წერტილის მარტივი (ABC) ფარდობა არის კოლინეარული A, B, C სამი წერტილით შედგენილი AC და BC ორი მონაკვეთის ფარდობა:

$$(ABC) = \frac{AC}{BC} = \lambda.$$

მარტივ ფარდობაში A და B წერტილებს საბაზო წერტილები ჰქვია, ხოლო C წერტილს – გამყოფი (სურ. 6). ამბობენ, რომ C წერტილი λ ფარდობით ყოფს AB მონაკვეთს. აფინური ფიგურების (და გარდაქმნების) განსაზღვრაში მოთხოვნილი სამი წერტილის მარტივი ფარდობის შენარჩუნება (ინვარიანტულობა) ნიშნავს მონაკვეთის გარკვეული ფარდობით გაყოფის შენარჩუნებას აფინური ფიგურებისათვის; ე.ი. მოცემული ფიგურის ნებისმიერი A, B, C სამი კოლინეარული წერტილის მარტივ (ABC) ფარდობას უნდა უდრიდეს მისი აფინური ფიგურის A', B', C' სამი კოლინეარული წერტილის მარტივი (A'B'C') ფარდობა ანუ აფინური ფიგურებისათვის უნდა იყოს შესრულებული ტოლობა:

$$(ABC) = (A'B'C'), \text{ ე.ი. } \frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}.$$

ეს ტოლობა ასე ჩაეწეროთ: $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$, რაც ნიშნავს, რომ

აფინური ფიგურებისათვის ერთ წრფეზე მდებარე მონაკვეთების სიგრძეები ერთი და იგივე ფარდობით იცვლება (ე.ი. აფინური ფიგურების ასეთი მონაკვეთები მსგავსია).

რადგან მარტივი (ABC) ფარდობის ინვარიანტულობის მოთხოვნა შედის აფინური ფიგურების და აფინური გარდაქმნების განსაზღვრაში, ცხადია, რომ სამი წერტილის მარტივი (ABC) ფარდობა აფინური ფიგურების და აფინური გარდაქმნების ინვარიანტია.

სამი წერტილის მარტივი ფარდობა აფინურ გეომეტრიაში იგივე როლს ასრულებს, რაც მონაკვეთი მეტრულ გეომეტრიაში. მართლაც, თუ წრფეზე დავაფიქსირებთ A და B ორ წერტილს,

ხოლო C წერტილს გადავაადგილებთ AB წრფეზე, მაშინ ლრიცხვი, რომელიც C წერტილის გარკვეული მდებარეობისათვის შედგენილი მარტივი (ABC) ფარდობის ტოლი იქნება, შეიძლება გამოვიყენოთ C წერტილის კოორდინატად: C წერტილის ყოველ მდებარეობას AB წრფეზე გარკვეული რიცხვი შეესაბამება და ყოველი რიცხვი განსაზღვრავს C წერტილის მდებარეობას AB წრფეზე.

აფინური ფიგურებისათვის მარტივი (ABC) ფარდობის ინვარიანტულობის მოთხოვნიდან უშუალოდ გამომდინარეობს წრფეების პარალელურობის შენარჩუნების მოთხოვნაც, რაც ნიშნავს, რომ აფინურ ფიგურებში ურთიერთპარალელურ წრფეებს შეესაბამება ურთიერთპარალელური წრფეები* ანუ წრფეების პარალელურობა აფინური ფიგურების და გარდაქმნების ინვარიანტია.

ამასთან, არა მხოლოდ ერთ წრფეზე, არამედ პარალელურ წრფეებზე მდებარე მონაკვეთების სიგრძეთა ფარდობა აფინური ფიგურების ინვარიანტია.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ პარალელურ წრფეებზე მდებარე მონაკვეთების კონგრუენტულობა აფინური ფიგურების ინვარიანტია.

ამრიგად, აფინური ფიგურების განსაზღვრებაში მოთხოვნილი მარტივი ფარდობის ინვარიანტულობიდან გამომდინარე, ამ ფიგურების ინვარიანტია (აფინური გარდაქმნის უცვლელი თვისებებია) სწორხაზოვნება, წერტილების და წრფეების ინციდენტურობა, წრფეების პარალელურობა, ერთ წრფეზე მდებარე მონაკვეთების სიგრძეთა ერთი და იგივე ფარდობით შეცვლა (მსგავსება). ცხადია, ეს თვისებები ინვარიანტულია აფინური გარდაქმნებისთვისაც, რომლებიც აფინურ ფიგურებს ერთმანეთზე ასახავს. აფინური ფიგურები, რომლებიც აფინური გარდაქმნის შედეგადაა მიღებული,

* დამტკიცება იხილეთ Н.А.Глаголев // В.Ш., Москва: 1963, ст. 9-10.

განურჩეველი, აფინურად ეკვივალენტურია და მათ საერთო თვისებები აქვს. სწორედ ეს თვისებები, რომლებიც არ იცვლება აფინური გარდაქმნების დროს ანუ აფინური გარდაქმნების მიმართ ინვარიანტულია, არის აფინური ფიგურების გეომეტრიული თვისებები.

შეგვიძლია ვთქვათ, რომ აფინური ფიგურების გეომეტრიული თვისებები არის აფინურად ეკვივალენტურ ფიგურათა საერთო თვისებები.

ადვილი შესამჩნევია, რომ აფინური ფიგურების და გარდაქმნების განსაზღვრებაში აფინური გარდაქმნებისადმი წაყენებულ პირობებს აკმაყოფილებს პარალელური დაგვემსილებით დამყარებული გარდაქმნა. პარალელური დაგვემსილება არის სივრცის (ან სიბრტყის) გარდაქმნა, რომელიც, როგორც აფინური გარდაქმნა, ამყარებს ურთიერთცალსახა შესაბამისობას ორ გადაკვეთილ ან ერთ სიბრტყეში მდებარე ფიგურებს შორის და ინარჩუნებს სამი წერტილის მარტივ ფარდობას.

ამიტომ, აფინური ფიგურების მარტაყი მაგალითია პარალელურ დაგვემსილებით მიღებული ფიგურები. მაგალითად, თუ განვიხილავთ სივრცეში წვეილ-წვეილად გადაკვეთილ α , α' , α'' სიბრტყეებს და პარალელური დაგვემსილების ჯაჭვით α სიბრტყის F ფიგურას ჯერ α' სიბრტყის კუთხილ F' ფიგურაზე ავსახავთ, ხოლო მიღებულ F' ფიგურას F'' α'' ფიგურაზე და ა.შ., მივიღებთ ფიგურებს, რომლებიც ერთმანეთის და F ფიგურის აფინურები (აფინურად ეკვივალენტურები) იქნება. ცხადია, F ფიგურის თვისებას, რომელიც ასევე ეკუთვნის მის ეკვივალენტურ ყველა F' , F'' , F''' ფიგურას, ეწოდება F ფიგურის გეომეტრიული თვისება. მაგალითად, თუ F ფიგურა კვადრატია, მისი კუთხეების და ოთხივე გვერდის კონგრუენტულობა არ იქნება F კვადრატის გეომეტრიული თვისება, რადგან ეს თვისება ეკუთვნის მხოლოდ კვადრატს და არა მის აფინურად ეკვივალენტურ F' , F'' ფიგურებს. მართლაც, აფინური შესაბამისობა (მოცემულ შემთხვევაში პარა-

ლელოური დაგეგმილება) არ ინარჩუნებს კუთხეების და მონაკვეთების სიდიდეთა ტოლობას, მართკუთხედი ისევ მართკუთხედზე არ აისახება. მაგრამ კვადრატის მოპირდაპირე გვერდების პარალელურობა და კონგრუენტულობა კვადრატის აფინური თვისებაა და, ამიტომ, კვადრატის ყველა ეკვივალენტური F' , F'' , ... ფიგურის თვისება იქნება. აფინური გეომეტრიის თვალსაზრისით, კვადრატი არაის ფიგურა, რომელსაც კონგრუენტული და ურთიერთპარალელური მოპირდაპირე გვერდების ორი წყვილი აქვს. ამიტომ, აფინურ გეომეტრიაში კვადრატი არაფრით განსხვავდება ნებისმიერი სხვა პარალელოგრამისაგან, რაც ნიშნავს, რომ აფინურ გეომეტრიაში არ არსებობს კვადრატის ცნება: კვადრატი და პარალელოგრამი განურჩეველი, აფინურად ეკვივალენტური ფიგურებია.

აფინურად შესაბამისი ფიგურებია აგრეთვე წრეწირი და ელიფსი. რადგან წრეწირი ელიფსზე გვეგმილება ანუ ელიფსი და წრეწირი განურჩეველი, აფინურად ეკვივალენტური ფიგურებია. აფინურ გეომეტრიაში არ არსებობს წრეწირის ცნება. ამავე დროს პარაბოლის პარალელური გვეგმილი პარაბოლაა, ჰიპერბოლის პარალელური გვეგმილი ჰიპერბოლაა, ე.ი. პარაბოლის ეკვივალენტური ფიგურა პარაბოლაა, ჰიპერბოლის ეკვივალენტური ფიგურა ჰიპერბოლა. აფინურ გეომეტრიაში არსებობს სამი სახის მეორე რიგის წირი ელიფსი, პარაბოლა, ჰიპერბოლა.

ამრიგად, განვიხილოთ აფინური გარდაქმნის შედეგად მიღებული აფინური ფიგურები, რომლებიც ერთმანეთზე აფინური გარდაქმნებით აისახება და, ამიტომ, აფინურად ეკვივალენტურია და გამოცყავით მათი საერთო თვისებები, რომლებიც ინვარიანტულია აფინური გარდაქმნების მიმართ ანუ განსაზღვრულად გამოცყავით ამ ფიგურების გეომეტრიული თვისებები. ფიქლიქს კლასინის მიხედ-

რომილმაც ფიგურათა გეომეტრიული თვისებების კლასიფიკაციას საფუძვლად დაუდო გარკვეული გარდაქმნების მიმართ ფიგურათა თვისებების ინვარიანტულობა. აფინური გარდაქმნების მიმართ ინვარიანტულ თვისებებს ანუ აფინური ფიგურების გეო-

მეტრიულ თვისებებს უწოდა აფინური თვისებები. იგივე ფელიქს კლაინის მიხედვით, გეომეტრიას, რომელიც ფიგურათა აფინურ თვისებებს შეისწავლის აფინური გეომეტრია ეწოდება.

როგორც ვნახეთ, აფინურ გეომეტრიაში განსახილველ ფიგურათა კლასი შემცირებულია: არ არსებობს სხვადასხვა სახის სამკუთხედები, არ არსებობს კვადრატი, წრეწირი, მაგრამ განსაკუთრებულად აღსანიშნავია ის ფაქტი, რომ ფიგურათა აფინური თვისებები აქვს არა მხოლოდ აფინურ ფიგურებს, არამედ კონგრუენტულ და მსგავს ფიგურებსაც. მაგალითად, კონგრუენტულ და მსგავს ფიგურებში შენარჩუნებულია წრფეების პარალელურობა, ერთ წრფესა და პარალელურ წრფეებზე მდებარე მონაკვეთების მსგავსება, სამი წერტილის მარტივი ფარდობა და სხვა. ცხადია, რომ მეტრიული თვისებები არ გააჩნია აფინურ ფიგურებს.

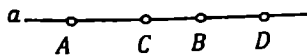
3. ფიგურათა პროექციული თვისებები გეომეტრიაში კონგრუენტულ, მსგავს და აფინურ ფიგურებთან ერთად პროექციული ფიგურები განიხილება.

ორ ფიგურას პროექციული ეწოდება, თუ ერთი ფიგურა მეორეზე ისე შეიძლება აესახოთ, რომ ოთხი წერტილის რთული (AB, CD) ფარდობა არ შეიცვალოს.

ასახვას, რომელიც ოთხი წერტილის რთულ (AB, CD) ფარდობას ინარჩუნებს და პროექციულ ფიგურებს ერთმანეთზე ასახავს, პროექციული ასახვა (გარდაქმნა) ეწოდება.

A, B, C, D ოთხი კოლინეარული წერტილის რთული ფარდობა ეწოდება $(AB, CD) = \omega$ რიცხვს, რომელიც ამ წერტილებით შედგენილი ორი მარტივი (ABC) და (ABD) ფარდობის შეფარდებაა. ამ ოთხი წერტილიდან A და B საბაზო წერტილები ეწოდება, ხოლო C და D – AB მონაკვეთის გამყოფი წერტილები (სურ. 7).

$$(AB, CD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \omega$$



სურ. 7

ანუ ოთხი წერტილის რთული ფარ-

დობა არის გარკვეული ფარდობით გაყოფილი ორი მონაკვეთის შეფარდება.

პროექციული ფიგურების განსაზღვრაში მოთხოვნილია პროექციულ ფიგურათა შესაბამისი წერტილების რთული ფარდობების ტოლობა $(AB, CD) = (A'B', C'D')$ ანუ

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'}.$$

ოთხი წერტილის რთული ფარდობა პროექციული ფიგურების და პროექციული გარდაქმნების ინვარიანტია.

განსაზღვრის თანახმად, ფიგურებს, რომელთა ოთხი წერტილის რთული ფარდობები ერთმანეთის ტოლია, პროექციული ფიგურები ეწოდება. ცხადია, ასეთი ფიგურები პროექციული გარდაქმნებით ერთმანეთზე აისახება, ამიტომ ისინი პროექციულად განურჩეული, პროექციულად ეკვივალენტურია. სწორედ ფიგურების ის თვისებები, რომლებიც პროექციული გარდაქმნების დროს ინვარიანტულია, პროექციული ფიგურების საერთო გეომეტრიული თვისებებია.

შევვიძლია ვთქვათ, რომ პროექციული ფიგურების გეომეტრიული თვისებები არის პროექციულად ეკვივალენტური ფიგურების საერთო თვისებები.

ფიგურათა თვისებების კლასინის კლასიფიკაციის მიხედვით, ფიგურების გეომეტრიულ თვისებებს, რომლებიც ინვარიანტულია პროექციული გარდაქმნების მიმართ ეწოდება ფიგურათა პროექციული თვისებები, ხოლო გეომეტრიას, რომელიც ფიგურათა პროექციულ თვისებებს შეისწავლის პროექციული ეწოდება.

პროექციულ გეომეტრიაში ოთხი წერტილის რთული ფარდობა იგივე როლს ასრულებს, რაც მონაკვეთი მეტრულ გეომეტრიაში და სამი წერტილის მარტივი ფარდობა აფინურ გეომეტრიაში. მართლაც, თუ ერთ წრფეზე მდებარე რთულ (AB, CD) ფარდობაში მონაწილე ოთხი წერტილიდან A, B, C სამ წერტილს დავაფიქსირებთ, ხოლო მეოთხე D წერტილს AB წრფეზე გადავაად-

გილებთ, მაშინ D წერტილის ყოველი მდებარეობისათვის შედგენილი რთული ფარდობის სიდიდე $\omega=(AB,CD)$ შეიძლება გამოვიყენოთ D წერტილის კოორდინატად, რადგან D წერტილის ყოველ მდებარეობას შეესაბამება გარკვეული $\omega=(AB,CD)$ რიცხვი და, პირიქით, ყოველ ω რიცხვს შეესაბამება D წერტილის გარკვეული მდებარეობა AB წრფეზე.

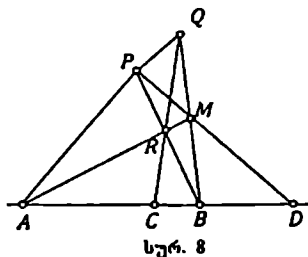
კერძო შემთხვევაში, როცა რთულ ფარდობაში შემავალ მარტივ (ABC) და (ABD) ფარდობებს განსხვავებული ნიშნები და ერთნაირი აბსოლუტური სიდიდეები აქვს ანუ $\frac{AC}{BC} = -\lambda$, ხოლო

$$\frac{AD}{BD} = \lambda, \text{ ამიტომ } (AB,CD) = -\frac{\lambda}{\lambda} = -1, \text{ ამბობენ, რომ } A, B, C, D$$

წერტილები შეადგენს ჰარმონიულ ჯგუფს (ჰარმონიულ ოთხეულს) ან C, D წერტილები ჰარმონიულად ყოფს A, B წერტილებს (სურ. 7). ე.ი. A, B, C, D წერტილთა ოთხეულს ჰარმონიული ეწოდება, თუ რთული ფარდობა $(AB, CD) = -1$.

ჰარმონიულ წერტილთა ოთხეულის ცნებას პროექციულ გეომეტრიაში მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია. საქმე ისაა, რომ რთული ფარდობის სიდიდე, რომელიც პროექციულ ფიგურათა განსაზღვრებაშია ჩადებული, დაკავშირებულია მონაკვეთის სიგრძეების გაზომვასთან ანუ მეტრულ ცნებასთან. მეტრული ცნებები კი პროექციულ გეომეტრიაში არ განიხილება, რადგან ისინი არაინვარიანტულია პროექციული გარდაქმნების მიმართ. მეტრული ცნებისგან გათავისუფლება პროექციული გეომეტრიის მნიშვნელოვანი ამოცანაა. მართალია, ჩვენ განვსაზღვრეთ ჰარმონიულ წერტილთა ოთხეული რთული ფარდობის რიცხვითი (-1) მნიშვნელობით, მაგრამ ჰარმონიულ წერტილთა ოთხეული შეიძლება განისაზღვროს ოთხი წერტილის რთული ფარდობისაგან დამოუკიდებლად, მხოლოდ გეომეტრიული აგებებით, ყოველგვარი მეტრიკის გარეშე, ოთხკუთხედის თვისებებზე დაყრდნობით.

PQRM ოთხკუთხედს შესანიშნავი თვისება აქვს: მისი მოპირდაპირე PQ და RM, PR და QM გვერდების წყვილების გადაკვეთის A და B წერტილების შემართებული AB წრფე იკვეთება QR და PM დიაგონალებთან C და D წერტილებში (სურ. 8), რომლებიც A და B წერტილებთან



ერთად ქმნის A, B, C, D წერტილთა ჰარმონიულ ოთხეულს (დამტკიცება, 3.2). მნიშვნელოვანია ის ფაქტიც, რომ ჰარმონიულ წერტილთა ოთხეულის მიღება არ არის დამოკიდებული ერთ რომელიმე PQRM ოთხკუთხედზე ანუ შეიძლება ავაგოთ სხვა ოთხკუთხედები და ჩავატაროთ ზემოთ შესრულებული აგებები. შედეგად მივიღებთ ისევ ჰარმონიულ წერტილთა ოთხეულს.

განსაკუთრებულად აღსანიშნავია პროექციულ გეომეტრიაში ჰარმონიზმის ინვარიანტულობა ცენტრალური დაგვემძილების დროს ანუ ცენტრალური დაგვემძილება ორი ფიგურის წერტილებს შორის ამყარებს ისეთ შესაბამისობას, რომ ჰარმონიულ წერტილთა ოთხეულს შეესაბამება ისევ ჰარმონიულ წერტილთა ოთხეული. ცხადია, რომ ნებისმიერი მნიშვნელობის რთული (ABCD) ფარდობაც ცენტრალური დაგვემძილების ინვარიანტია ანუ ცენტრალური დაგვემძილებისას ორი ფიგურის წერტილებისათვის სრულდება პირობა: $(ABCD) = (A'B'C'D')$ (2.2). იგივე თვისება აქვს პროექციულ გარდაქმნასაც ანუ ცენტრალურ დაგვემძილებას და პროექციულ გარდაქმნას ერთნაირი თვისებები, ერთნაირი ინვარიანტები აქვს.

ამიტომ, პროექციული ფიგურების მარტივი მაგალითია ცენტრალური დაგვემძილებით მიღებული ფიგურები. ვთქვათ, მოცემულია α სიბრტყეში მდებარე F ფიგურა, წვეილ-წვეილად გადაკვეთილი α' , α'' , α''' ,... სიბრტყეები და S, S', S'', S''',... წერტილები, რომლებიც ამ სიბრტყეებს არ ეკუთვნის. თუ F ფიგურას

S ცენტრიდან დაგეგმილებით ავსახავთ α' სიბრტყეში F' ფიგურაზე, შემდეგ $F' \subset \alpha'$ ფიგურას S' ცენტრიდან დაგეგმილებით ავსახავთ α'' სიბრტყეში F'' ფიგურაზე, ამ პროცესის გაგრძელებით მივიღებთ $F', F'', F''', \dots$ ფიგურებს, რომლებიც იქნება F ფიგურის და აგრეთვე ერთმანეთის პროექციულად ეკვივალენტური ფიგურები. ამრიგად, $F, F', F'', F''' \dots$ ფიგურათა საერთო თვისებები F ფიგურის პროექციული თვისებებია და ისინი უშუალოდ გამომდინარეობს ცენტრალური დაგეგმილების ინვარიანტული თვისებებიდან. მაგალითად, თუ F ფიგურა კვადრატია, მაშინ დაგეგმილებით მიღებული მისი ანასახები არ შეინარჩუნებს გვერდების სიგრძეების ტოლობას და არც მოპირდაპირე გვერდების პარალელურობას ანუ კვადრატის პროექციულად შესაბამისი, პროექციულად ეკვივალენტური ფიგურა ოთხკუთხედი იქნება.

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ წრფეების პარალელურობა, მანძილების და კუთხეების ტოლობა პროექციული გეომეტრიის ცნებები არ არის, რადგან ეს თვისებები პროექციული გარდაქმნის შედეგად არ ნარჩუნდება. პარალელური წრფეები აისახება გადაკვეთილ წრფეებზე, კონგრუენტული მონაკვეთები – არაკონგრუენტულ მონაკვეთებზე, მართი კუთხეები მახვილ ან ბლაგვ კუთხეებზე და ა.შ. მეორე მხრივ, წერტილები და წრფეები ყოველთვის აისახება წერტილებსა და წრფეებზე. ამასთან, თუ F ფიგურის A წერტილი ეკუთვნის s წრფეს, პროექციული გარდაქმნის შედეგად მიღებული A წერტილის A' ანასახი ეკუთვნის s წრფის ანასახს – s' წრფეს. ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ პროექციული თვისებაა წრფის ასახვა წრფეზე და წერტილების და წრფეების ინციდენტურობა. გარდა ამისა, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, პროექციულ გეომეტრიაში წერტილი აისახება წერტილზე. ამის გამო, სამკუთხედის წვეროები აისახება სამ წერტილზე და სამკუთხედი არის პროექციული გეომეტრიის განხილვის ობიექტი, მაგრამ ტოლგვერდა, ტოლფერდა თუ მართკუთხა სამკუთხედები ასეთი არაა, რადგან ამ სამკუთხედების თვისებები

პროექციული გარდაქმნების (ეთქვით, ცენტრალური დაგეგმილების) დროს არ იქნება შენარჩუნებული. ოთხკუთხედიც პროექციული გეომეტრიის ობიექტია, მაგრამ კვადრატის, მართკუთხედის, რომბის და ა.შ. ცნებები პროექციულ გეომეტრიაში არ არსებობს. პროექციულ გეომეტრიაში ისინი ზოგადად ოთხკუთხედებია. ანუ ყველა ოთხკუთხედი პროექციულად ეკვივალენტური ფიგურებია და პროექციულ გეომეტრიაში განიხილება მათი მხოლოდ ისეთი თვისებები, რომლებიც ყველა ოთხკუთხედს აქვს. გარდა ამისა, ზოგადად კონუსური კვეთები (კონიკები) პროექციული გეომეტრიის ობიექტებია, მაგრამ მათი დაყოფა ელიფსებად, პარაბოლებად და ჰიპერბოლებად პროექციულ გეომეტრიაში არ ხდება, რადგან კონიკები პროექციული გარდაქმნით (მაგალითად, ცენტრალური დაგეგმილებით) ერთმანეთზე აისახება, რაც იმას ნიშნავს, რომ ისინი პროექციულად ეკვივალენტური ანუ პროექციულად განურჩეველია და ერთნაირი პროექციული თვისებები აქვს.

შეიძლება მოგეჩვენოთ, რომ ფიგურათა მხოლოდ პროექციული თვისებების განხილვით იზღუდება პროექციული გეომეტრიის კვლევის არე, რომ პროექციული გეომეტრიის შინაარსი ერთობ "გაღარიბებული" რჩება. ეს ასე ნამდვილად არ არის. იმის გამო, რომ პროექციული გეომეტრია შემოიფარგლა მხოლოდ ფიგურათა პროექციული თვისებების შესწავლით, მივიღეთ მნიშვნელოვნად უფრო მარტივი და ამავე დროს უფრო ზოგადი სტრუქტურის გეომეტრია. ეს გეომეტრია შესაძლებლობას იძლევა ფიგურათა უფრო მდგრადი თვისებები დავაფიქსიროთ, რომლებიც დამახასიათებელია არა მარტო პროექციული ფიგურებისათვის, არამედ აფინური და მეტრული ფიგურებისთვისაც.

მართლაც, თუ მეტრული გეომეტრია შეისწავლის ყველა კვადრატის საერთო თვისებებს, ხოლო აფინური გეომეტრია შეისწავლის კვადრატის აფინური ფიგურის პარალელოგრამის (მათ შორის კვადრატების) საერთო თვისებებს, პროექციული გეომეტრია შეისწავლის პარალელოგრამის პროექციული ფიგურის —

ყველა ოთხკუთხედის (მათ შორის კვადრატების და პარალელოგრამების) საერთო თვისებებს.

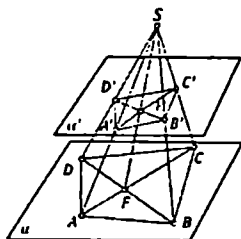
ამრიგად, პროექციული გეომეტრიის სილამაზე და სინატიფე იმაში მდგომარეობს, რომ პროექციული გეომეტრია, მისი წინადადებების სათანადო განხილვის შემთხვევაში, მოიცავს როგორც აფინური, ისე მეტრული გეომეტრიების შინაარსს (და ზოგიერთი არაევკლიდური გეომეტრიების შინაარსსაც).

ამიტომ, სავსებით გასაგებია ინგლისელი მეცნიერის კელის გამონათქვამი: პროექციული გეომეტრია არის მთელი გეომეტრია.

გეორა თაჰი. პროექციული გეომეტრიის ძირითადი იდეები

2.1. დაგეგმილებისა და კვეთის ოპერაციები

როგორც აღვნიშნეთ, პროექციული გეომეტრია შესწავლის ფიგურათა მხოლოდ იმ თვისებებს, რომლებიც არ იცვლება ცენტრალური დაგეგმილებისას. ამიტომ, პროექციული გეომეტრიის შესწავლის საფუძველში უნდა ჩაიდოს ცენტრალური დაგეგმილების მეთოდი. ეს მეთოდი დაგეგმილებისა და კვეთის ოპერაციებისაგან შედგება.



სურ. 9

დაგეგმილების ოპერაცია იმაში მდგომარეობს, რომ თუ რომელიმე α სიბრტყეში მოცემულია F ფიგურა, ვირჩევთ S წერტილს (დაგეგმილების ცენტრს) α სიბრტყის გარეთ და F ფიგურის ყოველ წერტილს ვაერთებთ S წერტილთან (სურ. 9). ამ პროცესს ჰქვია F ფიგურის დაგეგმილება S ცენტრიდან, თანაც F ფიგურის ყოველი წერტილი (მაგ., A) განსაზღვრავს ერთ წრფეს (AS); ყოველი წრფე (მაგალითად, AB) – ერთ სიბრტყეს (SAB). S წერტილზე გამავალი წრფეებისა და სიბრტყეების ერთობლიობა წარმოქმნის ცენტრალურ სივრცით S ფიგურას, რომელიც შედგება წრფეებისა და სიბრტყეებისაგან და რომელსაც ჰქვია წრფეთა და სიბრტყეთა შეკერა ცენტრით S წერტილში. ასეთ შემთხვევაში F ფიგურას და S შეკერას პერსპექტიულად განლაგებული ან ერთმანეთის პერსპექტიული ფიგურები ეწოდება.

კვეთის ოპერაცია იმაში მდგომარეობს, რომ უნდა ავაგოთ წრფეთა და სიბრტყეთა შეკერის გადაკვეთა α' სიბრტყესთან, რომელიც შეკერის S ცენტრზე არ გადის. თუ შეკერის ყველა წრფე და სიბრტყე გადაიკვეთება α' სიბრტყესთან, მაშინ α' სიბრტყეში

მიღებული წერტილების და წრფეების ერთობლიობას ჰქვია S შეკვრის კვეთი α' სიბრტყესთან.

ცხადია, რომ S შეკვრის ყოველი წრფე იკვეთება α' სიბრტყესთან ერთადერთ წერტილზე. მაგალითად, F ფიგურის A წერტილზე გამავალი SA წრფე იკვეთება α' სიბრტყესთან A' წერტილზე, SB წრფე – B' წერტილზე და ა. შ. შეკვრის ყოველი სიბრტყე იკვეთება α' სიბრტყესთან ერთადერთ წრფეზე. მაგალითად, SAB სიბრტყე იკვეთება α' სიბრტყესთან ერთადერთ A'B' წრფეზე და ა.შ. შედეგად S შეკვრის კვეთაში მიღებული წერტილების და წრფეების ერთობლიობა წარმოქმნის F' ბრტყელ ფიგურას, რომელიც F ფიგურის გამოსახულებაა.

ამრიგად, თანამიმდევრულად შესრულებული ერთი დაგეგმილების და ერთი კვეთის ოპერაციების შედეგად α' მკვეთ სიბრტყეში მივიღეთ F ფიგურის F' გამოსახულება. ამ გამოსახულებას ჰქვია F ფიგურის ცენტრალური გეგმილი, ხოლო α' სიბრტყეში (გეგმილთა სიბრტყეში) ცენტრალური F' გეგმილის მიღების მეთოდს ეწოდება F ფიგურის ცენტრალური დაგეგმილება S ცენტრიდან (დაგეგმილების ცენტრიდან). S შეკვრის წრფეებს და სიბრტყეებს მაგეგმილებელი წრფეები და სიბრტყეები ეწოდება. შევნიშნოთ, რომ F ფიგურა და მისი F' ცენტრალური გეგმილი პერსპექტიულადაა განლაგებული ან უბრალოდ პერსპექტიულია.

F' გეგმილის აგებისას F ფიგურის ყოველ წერტილს შეუსაბამეთ წრფეთა და სიბრტყეთა S შეკვრის ერთადერთი წრფე (დაგეგმილების ოპერაცია), ხოლო ამავე წრფეს – ერთადერთი წერტილი – მისი გადაკვეთის წერტილი α' სიბრტყესთან (კვეთის ოპერაცია), რომელიც განვიხილეთ, როგორც F ფიგურის F' გეგმილის კუთვნილი წერტილი. ამრიგად, F ფიგურის ყოველ წერტილს გარკვეული წესით შეუსაბამეთ F' ფიგურის ერთადერთი წერტილი – მისი გეგმილი α' სიბრტყეში. ჩვენ მიერ შემოტანილ ცნებას ფიგურის ელემენტებს შორის შესაბამისობის შესახებ აქვს ფუნ-

დამენტური მნიშვნელობა. ამიტომ, ამ ცნებას უფრო ზუსტი განმარტება მიეცეთ.

ამბობენ, რომ ორ ფიგურას შორის დამყარებულია ურთიერთ-ცალსახა შესაბამისობა, თუ განსაზღვრულია წესი (მაგალითად, აღწერილი დაგეგმილების და კვეთის ოპერაციები), რომლის მიხედვით ერთი ფიგურის ყოველ წერტილს შეესაბამება მეორე ფიგურის ერთადერთი წერტილი და, პირიქით, მეორე ფიგურის ყოველ წერტილს შეესაბამება პირველი ფიგურის ერთადერთი წერტილი. ასეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობაშია პერსპექტიულად განლაგებული F და F' ფიგურები. ეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა დამყარებულია S შეკერის მაგეგმილებელი წრფეების მეშვეობით: შესაბამისი წერტილები მაგეგმილებელი წრფეების გადაკვეთის წერტილებია α და α' სიბრტყეებთან. მაგალითად, შესაბამისი წერტილების წყვილებია A და A' , B და B' და ა.შ. (სურ. 9). ასეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობაში მყოფ ფიგურებს ერთმანეთზე ასახული ეწოდება. ამრიგად, ასახვა არის ისეთი ურთიერთცალსახა შესაბამისობა F და F' ფიგურებს შორის, როდესაც F ფიგურის ყოველ წერტილს შეესაბამება F' ფიგურის ერთადერთი წერტილი და პირიქით.

ურთიერთცალსახა ასახვის მაგალითი მოცემულია მე-9 სურათზე: ცენტრალური დაგეგმილებით F ფიგურის ასახვა თავის F' გეგმილზე ურთიერთცალსახაა. ურთიერთცალსახა f ასახვაში ყოველ AEF წერტილს შეესაბამება მისი ერთადერთი გეგმილი — $A'E'F'$ წერტილი (A წერტილის სახე) და, პირიქით, ყოველ $A'E'F'$ წერტილს შეესაბამება ერთადერთი AEF წერტილი (A' -ის წინასახე). ასახვას, რომელიც $A'E'F'$ წერტილს თავის AEF წინასახეს შეუსაბამებს, f ასახვის შექცეული ეწოდება და f^{-1} აღინიშნება. ე.ი. თუ f ასახვის დროს $A \rightarrow A'$, f^{-1} ასახვის დროს $A' \rightarrow A$.

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი ურთიერთცალსახა ასახვა შექცევადია, რადგან მას შექცეული ასახვა აქვს.

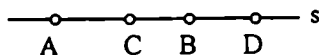
ბოლოს, შევნიშნოთ, რომ ფიგურის თავის თავზე ასახვას ფიგურის გარდაქმნა ეწოდება. მაგალითად, ცენტრალური დაგეგმილება სივრცის გარდაქმნაა, რადგან სივრცის (გეომეტრიული ფიგურის) წერტილებს ასახავს ამავე სივრცის წერტილებზე (სურ. 9).

2.2. წერტილთა მწკრივი წრფეზე. ოთხი წერტილის რთული ფარდობა

წრფის ინციდენტურ წერტილებს ეწოდება წერტილთა მწკრივი წრფეზე. პროექციულ გეომეტრიაში წრფე არ განიხილება, როგორც წერტილთა სიმრავლე. ის განიხილება, როგორც წრფის ინციდენტურ წერტილთა სიმრავლე ანუ, როგორც წერტილთა მწკრივი წრფეზე. ცენტრალური დაგეგმილებისას კოლინეარული (ერთ წრფეზე მდებარე) $A, B, C, D, \dots$ წერტილები აისახება ისევ კოლინეარულ $A', B', C', D', \dots$ წერტილებზე. აქედან გამომდინარე, წერტილების კოლინეარულობა არის პროექციული თვისება, ე.ი. თუ A, B, C, D , წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობს, მაშინ მათი $A', B', C', D', \dots$ გეგმილებიც ერთ წრფეზე განლაგდება.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, (1.4) პროექციული გეომეტრია შეისწავლის გეომეტრიული ფიგურების და ფიგურებთან დაკავშირებული სიდიდეების თვისებებს, რომლებიც ინვარიანტულია ცენტრალური დაგეგმილების დროს. პროექციულ გეომეტრიაში ასეთი სიდიდეა ოთხი წერტილის რთული ფარდობა. ამ ფარდობის ცნებამ ფუნდამენტური როლი შეასრულა პროექციული გეომეტრიის განვითარებაში და მის ჩამოყალიბებაში დამოუკიდებელ გეომეტრიულ მეცნიერებად.

ვთქვათ, s წრფეზე გარკვეული თანამიმდევრობით განლაგებულია A , B , C , D ოთხი წერტილი (სურ. 10).



სურ. 10

ჩავთვალოთ A და B წერტილები AB მონაკვეთის ბოლოებად, C –

ამ მონაკვეთის პირველ (შიგა) გამყოფ წერტილად, ხოლო D – მეორე (გარე) გამყოფ წერტილად, მაშინ იმ ორი მარტივი (ABC) და (ABD) ფარდობების შეფარდებას, რომელშიდაც C და D წერტილები ყოფენ AB მონაკვეთს ანუ $\frac{(ABC)}{(ABD)}$ ფარდობას, ეწოდება ABCD ოთხი წერტილის რთული ფარდობა, რომელიც (AB,CD) სიმბოლოთი აღინიშნება.

$$(AB,CD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}. \quad (1)$$

როგორც ამ განსაზღვრიდან ჩანს, A და B წერტილები ორივე მარტივი ფარდობისათვის საბაზო წერტილებია, ხოლო C და D – გამყოფები, შესაბამისად, პირველი და მეორე მარტივ ფარდობებში. ამიტომ, წერტილთა A,B წყვილს რთული ფარდობის საბაზო წყვილი ეწოდება, ხოლო C,D წყვილს გამყოფი წერტილების წყვილი (სურ. 10).

$$\text{ამრიგად, } (AB,CD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}. \quad (2)$$

ჩამოვყალიბოთ ოთხი წერტილის რთული ფარდობის ზოგიერთი თვისება, რომელიც მისი განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს:

1°. რთული ფარდობა არ იცვლება მისი შემადგენელი წერტილთა წყვილების გადადგილებით ანუ $(AB,CD) = (CD,AB)$.

(2) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$(CD,AB) = \frac{(CDA)}{(CDB)} = \frac{CA}{DA} : \frac{CB}{DB} = \frac{CA \cdot DB}{DA \cdot CB} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = (AB,CD);$$

2°. რთული ფარდობა არ იცვლება ასოების ერთდროული გადადგილებით ყოველი წყვილის შიგნით ანუ $(AB,CD) = (BA,DC)$.

მართლაც,

$$(BA,DC) = \frac{(BAD)}{(BAC)} = \frac{BD}{AD} : \frac{BC}{AC} = \frac{BD \cdot AC}{AD \cdot BC} = (AB,CD);$$

3°. ასოების გადაადგილება ერთ-ერთ წყვილში ცვლის რთული ფარდობის მნიშვნელობას შებრუნებულზე.

ეტყვათ, გადავაადგილეთ ასოები მეორე წყვილში,

$$\text{მაშინ } (AB, DC) = \frac{(ABD)}{(ABC)} = \frac{1}{\frac{(ABC)}{(ABD)}} = \frac{1}{(AB, CD)};$$

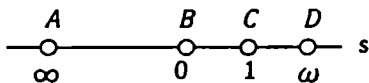
4°. როგორიც არ უნდა იყოს ოთხი განსხვავებული A, B, C, D წერტილი, ყოველთვის არსებობს და ცალსახად განისაზღვრება რთული ფარდობა:

$$\omega = (AB, CD);$$

5°. თუ $(AB, CD) = (AB, CD')$, მაშინ D და D' წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა.

6°. თუ A, B, C წრფის განსხვავებული წერტილებია, ხოლო ω – ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი, მაშინ ყოველთვის არსებობს და ცალსახად განისაზღვრება D წერტილი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$$\omega = (AB, CD).$$



ეტყვათ, s წრფეზე მოცემულია A, B, C, D ოთხი წერტილი (სურ.

სურ. 11

11), რომელთაგან A, B, C სამი წერტილი დაფიქსირებულია, ხოლო D გადაადგილდება s წრფეზე. D წერტილის ყოველ მდებარეობას წრფეზე შეესაბამება რთული (AB, CD) ფარდობის გარკვეული ω მნიშვნელობა და პირიქით. ეს უფლებას გვაძლევს შემოვიტანოთ წრფის კოორდინატები ოთხი წერტილის რთული ფარდობის საფუძველზე. კოორდინატად, რომელიც განსაზღვრავს D წერტილის მდებარეობას s წრფეზე, მივიღოთ რიცხვი $\omega = (AB, CD)$. შევნიშნოთ, რომ რთულმა ფარდობამ შეიძლება მიიღოს სხვადასხვა მნიშვნელობა. ის ყოველთვის იქნება დადებითი, როდესაც AB და CD წყვილები არ ყოფს ერთმანეთს; თუ AB და CD წყვილები ყოფს ერთმანეთს, ოთხი წერტილის რთული ფარდობა უარყოფითი რიცხვი იქნება.

ენახოთ, რა მნიშვნელობას მიიღებს ეს რიცხვი დაფიქსირებული A,B,C წერტილების შემთხვევაში (სურ. 11):

თუ D წერტილი შეთავსებულია C წერტილთან, მაშინ გვექნება:

$$\omega_C = (ABCC) = \frac{(ABC)}{(ABC)} = 1.$$

თუ D წერტილი შეთავსებულია B წერტილთან, მაშინ

$$\omega_B = (ABCB) = \frac{(ABC)}{(ABB)} = \frac{(ABC) \cdot BB}{AB} = 0.$$

თუ D წერტილი შეთავსებულია A წერტილთან, მაშინ

$$\omega_A = (ABCA) = \frac{(ABC)}{(ABA)} = \frac{(ABC) \cdot BA}{AA} = \frac{(ABC) \cdot BA}{0} = \infty.$$

ამრიგად, A,B,C წერტილებს შეესაბამება ∞ , 0, 1 მნიშვნელობები. ენახოთ, რა მნიშვნელობას მიიღებს რთული ფარდობა, როდესაც D წერტილი შეუთავსდება s წრფის უსასრულოდ შორს მდებარე წერტილს

$$\omega_\infty = (ABCD\infty) = \frac{(ABC)}{(ABD\infty)} = \frac{(ABC) \cdot BD\infty}{AD\infty} = (ABC).$$

ამრიგად, თუ რთულ ფარდობაში მეოთხე წერტილი არასაკუთრია, მაშინ რთული ფარდობა უდრის სამი წერტილის მარტივ (ABC) ფარდობას. ეს უფლებას გვაძლევს წარმოვადგინოთ მარტივი ფარდობა რთული ფარდობის ფორმით:

$$(ABC) = (AB, CD\infty).$$

კერძო შემთხვევაში, ოთხი წერტილის რთულმა ფარდობამ (1.4) შეიძლება მიიღოს მნიშვნელობა:

$$\omega = (AB, CD) = -1.$$

ასეთ შემთხვევაში ABCD ოთხ წერტილს ეწოდება ჰარმონიულად განლაგებული წერტილები ან ჰარმონიულ წერტილთა ოთხეული. რთული (AB, CD) ფარდობის მეოთხე D წერტილს ასეთ შემთხვევაში ეწოდება ჰარმონიულად შეუღლებული C წერტილთან AB წერტილთა წყვილის მიმართ.

ჰარმონიულ წერტილთა ოთხეულის მისაღებად საჭიროა, რომ რთული ფარდობის შემადგენელი მარტივი ფარდობების აბსოლუტური სიდიდეები ერთმანეთის ტოლი, მაგრამ საწინააღმდეგო ნიშნის იყოს:

$$\text{ე.ი. თუ } \omega = (AB, CD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = -1,$$

მაშინ ჰარმონიულ წერტილთა ოთხეულისათვის

$$(ABC) = -(ABD).$$

7°. ოთხი წერტილის რთული ფარდობა ცენტრალური დაგეგმილების ინვარიანტია ანუ უცვლელი სიდიდეა.

დავუშვათ, $A', B', C', D' - s'$ წრფის კუთვნილი წერტილებია, A, B, C, D მათი გეგმილები s წრფეზე S წერტილიდან. უნდა დავამტკიცოთ, რომ $(AB, CD) = (A'B', C'D')$. აღვნიშნოთ h და h' ასოებით მანძილები S ცენტრიდან, შესაბამისად, s და s' წრფეებამდე (სურ. 12). სამკუთხედის ფართობი შეიძლება ორნაირად გამოისახოს

მაგალითად, SAC სამკუთხედის ფართობია:

$$\frac{1}{2} h \cdot AC = \frac{1}{2} \sin(a, c) \cdot SA \cdot SC,$$

ამიტომ, SAC და $SA'C'$ სამკუთხედების ფართობების ფარდობა იქნება:

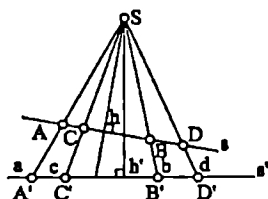
$$\frac{h \cdot AC}{h' \cdot A'C'} = \frac{SA \cdot SC}{SA' \cdot SC'},$$

საიდანაც

$$AC = A'C' \cdot \frac{SA \cdot SC}{SA' \cdot SC'} \cdot \frac{h'}{h}.$$

თუ ვიპოვოთ ანალოგიურ გამოსახულებებს BC , AD , DB , მონაკვეთებისათვის, მივიღებთ:

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} \quad \text{ანუ} \quad (AB, CD) = (A'B', C'D').$$



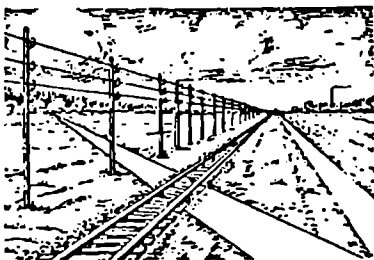
სურ. 12

ამრიგად, ოთხი წერტილის რთული (AB,CD) ფარდობა არის პროექციული გარდაქმნის (მაგალითად, ცენტრალური დაგეგმილების) ინვარიანტი.

დამტკიცებულიდან გამომდინარე ნათელია, რომ ჰარმონიული წერტილების ოთხეული ყოველთვის დაგეგმილდება ჰარმონიულ წერტილთა ოთხეულზე (რადგან ჰარმონიული ოთხეულის რთული ფარდობის მნიშვნელობა არ შეიცვლება).

2.3. არასაკუთრივი ელემენტები

როგორც უკვე აღვნიშნეთ (2.1), ცენტრალური დაგეგმილების დროს სიბრტყის კუთვნილ F ფიგურის ყოველ წერტილს, საზოგადოდ, მისი გამოსახულების სახით შეესაბამება F' ფიგურის ერთი წერტილი (სურ. 9). მაგრამ ამ წესიდან გამონაკლისი არსებობს. მე-13 სურათზე გამოსახულია ველის (სიბრტყის) სურათი (გეგმილი), რომელზედაც გადის რკინიგზა. მიაქციეთ ყურადღება იმას, რომ ლიანდაგის რელსები ერთ წერტილში იყრის თავს. ცხადია, სინამდვილეში რელსები ურთიერთპარალელურია. მაშასადამე, წერტილი, რომელშიც მათი გამოსახულებები იყრის თავს, არ არის ნამდვილი რკინიგზის ლიანდაგის რომელიმე წერტილის გამოსახულება (გეგმილი). სურ. 13



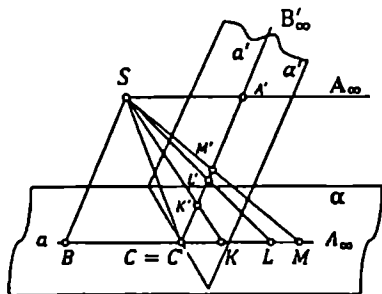
ადვილი მისახვედრია, საიდან გაჩნდა ეს ზედმეტი წერტილი სურათზე, თუ a სიბრტყეს S ცენტრიდან დაგეგმილებით ავსახავთ a' სიბრტყეზე. ცხადია, $a \subset \alpha$ წრფის წერტილები აისახება $a' \subset \alpha'$ წრფის წერტილებზე (სურ. 14). a წრფის $K, L, M, \dots$ წერტილებზე გამავალი დაგეგმილებელი წრფეები გადაიკვეთება a' წრფესთან $K', L', M', \dots$ წერტილებში. შესაბამისი წერტილები იქ-

ნება a წრფის $K, L, M, \dots$ წერტილები და მათი $K', L', M', \dots$ გეგმილები a' წრფეზე: K და K' , L და L' , M და M' წერტილები. $C = C'$ წერტილი თავის თავს შეესაბამება ანუ მიეიღებთ a წრფის წერტილების გამოსახულებებს a' წრფეზე.

მაგრამ a' წრფეზე აღმოჩნდება ერთი წერტილი, რომელიც არ არის a წრფის რომელიმე წერტილის გამოსახულება (გეგმილი): ეს არის A' წერტილი, რომელიც მდებარეობს a წრფის პარალელურ მაგეგმილებელ SA' წრფეზე. ე.ი. a წრფეზე არ არის წერტილი, რომლის გამოსახულებას წარმოადგენს A' წერტილი; ასეთი ხარვეზის შესავსებად, ჩათვალოთ, რომ A' არის a წრფის უსასრულოდ შორს მდებარე წერტილის გამოსახულება. a წრფის უსასრულოდ შორს მდებარე წერტილს ვუწოდოთ არასაკუთრივი წერტილი, ხოლო a წრფის დანარჩენ წერტილებს – საკუთრივი.

ახალი ცნების შემოტანით გამონაკლისის აცილების გზა მათემატიკაში სავსებით ჩვეულებრივია. მაგალითად, იმისათვის, რომ $x+a=b$ განტოლებას ყოველთვის ჰქონდეს ამონახსნი (იმ შემთხვევაშიც, როდესაც $b < a$), შექმნილია უარყოფითი რიცხვები. ანალოგიური მნიშვნელობა აქვს უსასრულოდ დაშორებული წერტილების ცნების შემოტანას.

დაეუშვათ, რომ A_∞ არის a წრფის არასაკუთრივი წერტილი. მაშინ ეს წერტილი უნდა ეკუთვნოდეს მაგეგმილებელ SA' წრფესაც (სურ. 14). მაშასადამე, ეს წერტილი უნდა განეიხილოთ, როგორც SA' და a



სურ. 14

ორი პარალელური წრფის გადაკვეთის (საერთო) წერტილი.

მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ a წრფეზეც არსებობს წერტილი (B), რომელიც არ არის a' წრფის რომელიმე წერტილის გამოსახულება. აქაც, უნდა ჩათვალოთ, რომ a' წრფეზე არსე-

ბობს უსასრულოდ შორს მდებარე B' -მ წერტილი, რომელზედაც a' წრფის პარალელური მაგვემილებელი SB წრფე იკვეთება a' წრფესთან.

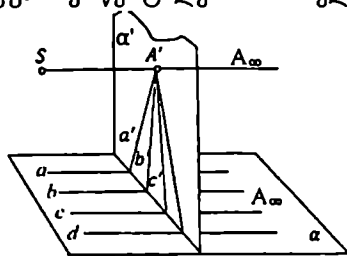
ამრიგად, ეკლიდეს სივრცის ყოველი წრფე უნდა შეეკვეთოს ერთი არასაკუთრივი წერტილით, რომელიც ამავე ღროს ეკუთვნის მოცემული წრფის ყველა პარალელურ წრფეს. წრფის არასაკუთრივი წერტილის ერთადერთობა იმით აიხსნება, რომ S ცენტრის მქონე მაგვემილებელ კონაში არსებობს ერთადერთი წრფე, რომელიც მოცემული a (ან a') წრფის პარალელურია; ხოლო ის, რომ წრფის არასაკუთრივი წერტილი ეკუთვნის მოცემული წრფის პარალელურ ყველა წრფეს განპირობებულია იმით, რომ მათგან ყოველი ორი შეიძლება მიღებულ იქნეს a და SA' (ან a' და SB) წრფეთა წყვილებად. ამრიგად, ყველა წრფე, რომელიც ერთ a სიბრტყეს ეკუთვნის და A -მ არასაკუთრივ წერტილზე გადის, ქმნის პარალელურ წრფეთა კონას. ამიტომ, წრფეთა ასეთ ერთობლიობას შეიძლება ვუწოდოთ წრფეთა კონა არასაკუთრივი ცენტრით (A).

ყოველი წრფის შევსებამ ერთი არასაკუთრივი წერტილით, a და a' წრფეებს შორის ყოველგვარი გამონაკლისის გარეშე, ურთიერთცალსახა შესაბამისობა დაამყარა: ახლა a' წრფის ყოველი წერტილი არის a წრფის გარკვეული – საკუთრივი ან არასაკუთრივი – წერტილის გეგმილი. პირიქით, a წრფის ყოველი წერტილი გეგმილდება a' წრფის გარკვეულ (საკუთრივ ან არასაკუთრივ) წერტილზე ($B \in a$ დაგვემილდება a' წრფის არასაკუთრივ B' -მ წერტილზე). ორი წრფის წერტილებს შორის ასეთ შესაბამისობას პერსპექტიული ეწოდება.

განვიხილოთ სიბრტყის კუთვნილ პარალელურ წრფეთა ერთობლიობა, რომელსაც საერთო A -მ წერტილი აქვს ანუ განვიხილოთ ($a, b, c, d, \dots$) წრფეთა კონა არასაკუთრივი ცენტრით (სურ. 15). S ცენტრიდან დაგვემილებით ავსახოთ a, b, c, d წრფეები a' სიბრტყეში. მაშინ ამ წრფეების პარალელურ მაგვემილებელ SA'

წრფეს a, b, c, d წრფეებთან ექნება საერთო A_{∞} წერტილი. მაგვე-
მილებელი SA' წრფის და α' სიბრტყის გადაკვეთის A' წერტილი
იქნება არასაკუთრივი A_{∞} წერტილის გამოსახულება (გვეგმილი) α'
სიბრტყეში. ამიტომ, α სიბრტყის კუთვნილი და არასაკუთრივი
 A_{∞} ცენტრის მქონე პარალელურ წრფეთა კონა აისახება (დაგვე-
გმილდება) α' სიბრტყეში წრფეთა კონაზე, რომელსაც საკუთრივი
 A' ცენტრი ექნება. პარალელური წრფეების, როგორც
„გადაკვეთილი“ წრფეების გააზრება არ ეწინააღმდეგა პარალე-
ლური წრფეების ევკლიდესულ განმარტებას. ევკლიდეს სივრცე-
ში პარალელურ წრფეებს აქვს საერთო მიმართულება, ახალი
ტერმინოლოგიით „პარალელურ წრფეებს აქვს საერთო არასაკუ-
თრივი წერტილი“. ამრიგად, ახალი ტერმინოლოგიით, ერთი
სიბრტყის წრფეები ყოველთვის იკვეთება (საკუთრივ ან არასაკუ-
თრივ) წერტილებზე. როგორც ვნახეთ (სურ. 15), არასაკუთრივი
წერტილი შეიძლება დაგვეგმილდეს საკუთრივ წერტილზე და პი-
რიქით. ე.ი. წერტილი, რომელზეც (სურ. 13) რელსების გამოსახ-
ულებები იკვეთება, არის ნამდვილი რელსების საერთო არასაკუ-
თრივი წერტილის გამოსახულება (გვეგმილი).

მის შემდეგ, რაც ყოველი წრფე შევავსეთ ერთი არასაკუთრივი
წერტილით, ბუნებრივად ჩნდება კითხვა, რას წარმოადგენს სიბრ-
ტყის კუთვნილი წრფეების არასაკუთრივ წერტილებთან სიმრავლე.
რადგან ამ არასაკუთრივ წერ-
ტილთან სიმრავლესთან სიბრ-
ტყის ყოველ წრფეს შეიძლება
ჰქონდეს მხოლოდ ერთი საერთო
წერტილი, ამიტომ, სიბრტყის
არასაკუთრივ წერტილთან სი-
მრავლე არის წრფე, რომელსაც
უწოდებენ სიბრტყის არასაკუ-
თრივ წრფეს.

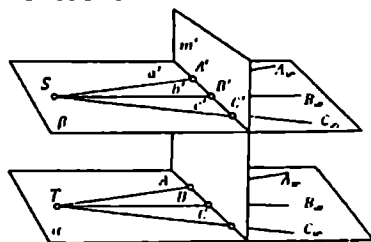


სურ. 15

მივაქციოთ ყურადღება, რომ მე-13 სურათზე ნაჩვენები ველის ყველა არასაკუთრივი წერტილის გამოსახულება მოთავსებულია ერთ წრფეზე, ე.წ. პორიზონტზე. ცხადია, პორიზონტი ნამდვილი ველის (სიბრტყის) არასაკუთრივი წრფის გამოსახულებაა. მართლაც, α სიბრტყის კუთვნილი $a, b, c, \dots$ წრფეების არასაკუთრივ $A_{\infty}, B_{\infty}, C_{\infty}, \dots$ წერტილთა გეგმილების (გამოსახულების) ასაგებად α' სიბრტყეში უნდა გავავლოთ ამ წრფეების პარალელური მაგეგმილებელი $SA_{\infty}, SB_{\infty}, SC_{\infty}, \dots$ წრფეები, რომლებიც α სიბრტყის პარალელურიც იქნება და ამიტომ, ეკუთვნის ერთ მაგეგმილებელ $\beta \parallel \alpha$ სიბრტყეს (სურ. 16). α სიბრტყის არასაკუთრივი წერტილების $A', B', C', \dots$ გეგმილები α' სიბრტყეში მოთავსდება α' და β მაგეგმილებელი სიბრტყის გადაკვეთის m' წრფეზე, რომელიც უნდა განვიხილოთ α სიბრტყის არასაკუთრივ წერტილთა გამოსახულებად α' სიბრტყეში. თვითონ α სიბრტყის არასაკუთრივი წრფე უნდა იყოს α სიბრტყის და მისი პარალელური მაგეგმილებელი β სიბრტყის გადაკვეთის წრფე. მაგრამ ევკლიდეს სივრცეში ასეთი წრფე არ არსებობს. ამიტომ, ევკლიდეს სიბრტყე უნდა შევავსოთ ერთი არასაკუთრივი წრფით, რომელიც ეკუთვნის პარალელურ α და β სიბრტყეებს, როგორც მათი გადაკვეთის წრფე. შეგვიძლია ვთქვათ, რომ პარალელური სიბრტყეები იკვეთება ერთ არასაკუთრივ წრფეზე.

ყოველი სიბრტყის შევსებამ ერთი არასაკუთრივი წრფით, საკუთრივი ღერძების მქონე სიბრტყეთა კონებთან ერთად, ევკლიდეს სივრცეს შემატა პარალელურ სიბრტყეთა კონები არასაკუთრივ ღერძით.

ამრიგად, ურთიერთპარალელური სიბრტყეები უნდა ჩავთვალოთ არასაკუთრივ წრფეზე გადაკვეთილ სიბრტყეებად და პირიქით,



სურ. 16

არასაკუთრივ წრეზე გადაკვეთილი სიბრტყეები ურთიერთპარალელურია.

ე.ი. არაპარალელურ სიბრტყეებს განსხვავებული არასაკუთრივი წრეები აქვს. აქედან გამომდინარე, სივრცეში არსებობს არასაკუთრივ წრეათა უსასრულო სიმრავლე. სივრცის არასაკუთრივ წრეათა სიმრავლე (რომელიც ამავედროულად არის სივრცის არასაკუთრივ წერტილთა სიმრავლეც) ყოველ საკუთრივ წრესთან ერთ წერტილში იკვეთება, ხოლო ყოველ საკუთრივ სიბრტყესთან იკვეთება ერთ წრეზე და ამიტომ, მას არასაკუთრივი სიბრტყე უნდა ეწოდოს. ამრიგად, ეკლიდეს სივრცე შევსებულია ერთადერთი არასაკუთრივი სიბრტყით.

2.4. პროექციული სივრცე

არასაკუთრივი ელემენტებით შევსებულ ეკლიდეს სივრცეს ეწოდება ეკლიდეს გაფართოებული სივრცე. ამასთან, ეკლიდეს სივრცის ყოველი წრე შეეავსეთ ერთი არასაკუთრივი წერტილით, ყოველი სიბრტყე – ერთი არასაკუთრივი წრით, ხოლო სივრცე – ერთი არასაკუთრივი სიბრტყით, რომელიც არასაკუთრივ წერტილთა და წრეათა სიმრავლეა.

ეკლიდეს სივრცის შევსება არასაკუთრივი ელემენტებით შესრულებული იყო ეკლიდეს სივრცის წერტილების, წრეებისა და სიბრტყეების ინციდენტურობის დაცვით ანუ ეკლიდეს გეომეტრიის აქსიომებში ჩამოყალიბებული მოთხოვნების დაცვით. ეკლიდეს სივრცეში არასაკუთრივი ელემენტების გამოყენება შემოიფარგლება მხოლოდ გეომეტრიული ფაქტების განსხვავებული სიტყვიერი ფორმულირებით: პარალელურ წრეებს ეუწოდეთ არასაკუთრივ წერტილზე გადაკვეთილი, ცილინდრი განვიხილეთ, როგორც არასაკუთრივი წვეროს მქონე კონუსი. ცხადია, რომ პარალელურობის ცნება ეკლიდეს სივრცეში უცვლელი დარჩა. ეკლიდეს სივრცეში არასაკუთრივი ელემენტები არსებითად

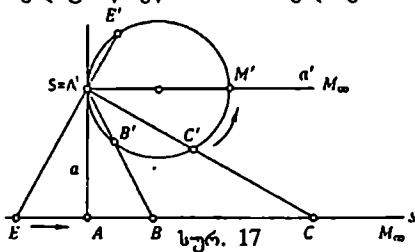
განსხვავდება საკუთრივისაგან. ეს გასაგები გახდება, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ელემენტარული გეომეტრია გარკვეულწილად ფიგურების მეტრულ თვისებებს შეისწავლის, ე.ი. ისეთ თვისებებს, რომლებიც დაკავშირებულია გეომეტრიული სიდიდეების (სიგრძეების, კუთხეების, ფართობების) გაზომვასთან. ნებისმიერი საკუთრივი ბოლოების მქონე მონაკვეთის სიგრძის გაზომვა ყოველთვის შესაძლებელია, ხოლო იმ შემთხვევაში, თუ მონაკვეთის ერთი ბოლო მაინც არასაკუთრივია, გაზომვის პროცესი აზრს კარგავს. ამიტომ, არასაკუთრივი ელემენტები ევკლიდეს გეომეტრიაში მნიშვნელოვნად განსხვავდება საკუთრივი ელემენტებისგან და განსაკუთრებულ როლს ასრულებს.

არსებითად ახალი მომენტი, რომელიც პროექციულ გეომეტრიას ახასიათებს, არის საკუთრივი და არასაკუთრივი ელემენტების სრული თანასწორუფლებიანობის აღიარება. მართლაც, პროექციულ გეომეტრიაში, რომლის კვლევის საგანი მხოლოდ ცენტრალური დაგეგმილების მიმართ ინვარიანტული თვისებებია, ფიგურის მეტრული თვისებები მისი კვლევის საგანი არ არის. გარდა ამისა, რადგან ცენტრალური დაგეგმილებისას არასაკუთრივი ელემენტები საკუთრივ ელემენტებზე გეგმილდება, მათ არ გააჩნია საკუთრივი ელემენტებისაგან გამასხვავებელი პროექციული თვისებები. ამიტომ, პროექციულ გეომეტრიაში არასაკუთრივი ელემენტები არაფრით არ განსხვავდება საკუთრივებისაგან და პროექციული გეომეტრიის ორგანული ნაწილია. უფრო მეტიც, პროექციული გეომეტრიის ბევრი დამახასიათებელი თვისება სწორედ არასაკუთრივი ელემენტებითაა განპირობებული. მაგალითისათვის ისიც კმარა, რომ პროექციულ სივრცეში არ არსებობს პარალელურობის ცნება: ორი წრფე, ორი სიბრტყე, სიბრტყე და წრფე, რომელიც სიბრტყეს არ ეკუთვნის ყოველთვის იკვეთება (საკუთრივ ან არასაკუთრივ ელემენტებზე). ამიტომ, შესაძლებელი ხდება ცენტრალური დაგეგმილების გზით ორი ფიგურის ურ-

თიერთცალსახა შესაბამისობის დამყარება და მათი პროექციული თვისებების კვლევა.

ამრიგად, პროექციულ სივრცეში არსებობს სამი სახის ობიექტი: პროექციული წრფეები (თითო არასაკუთრივი წერტილის მქონე), პროექციული სიბრტყეები (თითო არასაკუთრივი წრფის მქონე), პროექციული სივრცე (ერთი არასაკუთრივი სიბრტყის მქონე) და მათი ურთიერთდამოკიდებულების ორი ფორმა: კუთვნილება (ინციდენტურობა) და დალაგება.

ევკლიდეს წრფის არასაკუთრივი წერტილით შეესების კიდევ ერთი შედეგი ისაა, რომ პროექციული წრფე უნდა განვიხილოთ, როგორც შეკრული წირი. მართლაც, ვთქვათ, გვაქვს s წრფე და პერსპექტივის S ცენტრი, რომელიც წრეწირის რომელიმე A' წერტილში მდებარეობს. მაშინ S კონის ყოველი წრფე გადაიკვეთება წრეწირთან კიდევ ერთ წერტილში (SA წრფე გადაიკვეთება წრეწირთან ისევ A' წერტილში) (სურ. 17). ასე დამყარდება



ურთიერთცალსახა შესაბამისობა წრფის და წრეწირის წერტილებს შორის, რომელშიც A, B, C, M, E წრფის წერტილებს შეესაბამება A', B', C', M', E' წრეწირის წერტილები.

რადგან წრეწირის და პროექციული s წრფის წერტილები ურთიერთცალსახა (პერსპექტიულ) შესაბამისობაშია, მათი დალაგება წრეწირსა და წრფეზე ერთნაირი უნდა იყოს.

ენახოთ, როგორ გადაადგილდება s წრფის A წერტილი, როდესაც A წერტილის მაგვამილებელი a წრფე შემოწერს წრეწირის ყველა წერტილს. ვთქვათ, a მკვეთი ბრუნავს საათის ისრის მოძრაობის საპირისპირო მიმართულებით, მაშინ A წერტილი გადაადგილდება მარცხნიდან მარჯვნივ და გაივლის $A, B, C, \dots$ წერტილებს. როდესაც a მკვეთი a' მდებარეობას მიიღებს, s წრფის

A წერტილი მივა წრეწირის M' წერტილის შესაბამის M_{∞} მდებარეობაში. a მკვეთი გაივლის a' მდებარეობას და აგრძელებს ბრუნვას. მაშინ A წერტილი მივა წრეწირის E' წერტილის შესაბამის E წერტილის მდებარეობაში ანუ გამოჩნდება თავისი მოძრაობის საწყისი მიმართულების საწინააღმდეგო მხრიდან და აგრძელებს რა საწყისი მიმართულებით მოძრაობას, უახლოვდება თავის საწყის A მდებარეობას. როდესაც a მკვეთი მობრუნდება 180° -ით, s წრფის A წერტილი ერთი და იგივე მიმართულებით მოძრაობისას, დაბრუნდება საწყის მდებარეობაში ანუ A წერტილმა იმოგზაურა შეკრულ გზაზე. ე.ი. წრეწირზე მდებარე წერტილების ციკლური (წრიული) განლაგება დამახასიათებელია პროექციულ წრფეზე მდებარე წერტილებისთვისაც. ამიტომ, პროექციული წრფე განიხილება, როგორც შეკრული წირი. აქედან გამომდინარე, პროექციულ წრფეს შემდეგი თვისებები ახასიათებს: A-დან B წერტილამდე გადაადგილება შესაძლებელია ორი საწინააღმდეგო მიმართულებით: ერთი მიმართულებით არასაკუთრივი წერტილის გავლით, მეორე – მხოლოდ საკუთრივი წერტილების გავლით. სწორედ ამ ვითარებითაა გამოწვეული პროექციული წრფის შემდეგი თვისებები, სახელდობრ: ევკლიდეს წრფისაგან განსხვავებით, პროექციული წრფე, როგორც ნებისმიერი შეკრული წირი, ერთი წერტილით ორ ნაწილად არ იყოფა (სურ. 18); ევკლიდეს წრფისაგან განსხვავებით, სადაც ორი წერტილით განისაზღვრება ერთი მონაკვეთი, პროექციულ წრფეზე ორი წერტილით განისაზღვრება ორი მონაკვეთი. მაგალითად, A და B ბოლოებით განისაზღვრება AB მონაკვეთი, რომელიც არ შეიცავს არასაკუთრივ წერტილს და მეორე A·B მონაკვეთი, რომელიც შეიცავს მას. ასეთ ორ მონაკვეთს ურთიერთშემავსებელი მონაკვეთები ჰქვია. ორი წერტილით არ განისაზღვრება მიმართულება პროექციულ წრფეზე: A წერტილიდან C წერტილამდე მისვლა შესაძლებელია ორი საწინააღმდეგო მიმართულებით. მაგრამ მიმართულება ცალსახად შეიძლება განისაზღვროს სამი A,C,B

წერტილით, თუ მათ ჩაწერის თანამიმდევრობით განვიხილავთ: გადასვლას A-დან C წერტილზე და შემდეგ B-ზე აქვს სრულიად განსაზღვრული მიმართულება, რომელიც ასე აღინიშნება: მიმართ (ACB). იგივე გადასვლა A-დან C-ზე შეიძლება განხორციელდეს ABC მიმართულებითაც.

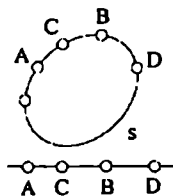
განვიხილოთ წერტილების დალაგება პროექციულ წრფეზე.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ (1.1), ელემენტარულ გეომეტრიაში წერტილების დალაგება წრფეზე განისაზღვრება ცნება „შორის“ საფუძველზე ანუ წერტილის განლაგებით ორ წერტილს შორის. პროექციულ გეომეტრიაში, სადაც წრფე განიხილება, როგორც შეკრული წირი, ამ ცნებას აზრი არა აქვს. მართლაც, თუ განვიხილავთ პროექციულ წრფეზე მდებარე სამ A, C, B წერტილს (სურ. 18), ვერ გამოვარჩევთ რომელიმე მათგანს ცნება „შორის“ თვალსაზრისით. ამრიგად, ცნება „შორის“ პროექციულ გეომეტრიაში კარგავს მნიშვნელობას და უნდა შეიცვალოს რაიმე სხვა ცნებით, რომელსაც პროექციული ხასიათი ექნება.

პროექციულ გეომეტრიაში წერტილების დალაგება წრფეზე განისაზღვრება წერტილების ორი წყვილის განხილვით, რომელთა ურთიერთმდებარეობა შეიძლება აღინიშნოს სიტყვით: „გაყოფილია“. ე.ი. წრფის წერტილთა წყვილების გაყოფის ცნება მიღებულია წერტილების დალაგების ძირითად საფუძველად. თუ C და D წერტილები ეკუთვნის A, B ბოლოების მქონე ორ განსხვავებულ ურთიერთშემავსებელ მონაკვეთს, ამბობენ, რომ C, D წერტილთა წყვილი ყოფს AB წერტილთა წყვილს (სურ. 18). გაყოფილ წერტილთა წყვილი ასე აღინიშნება:

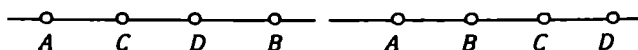
$AB \div CD$. თუ C და D წერტილები ეკუთვნის A, B ბოლოების მქონე ერთი და იგივე მონაკვეთს,

ამბობენ, რომ C, D წერტილთა წყვილი არ ყოფს A, B წერტილთა წყვილს (სურ. 19), რაც ასე აღინიშნება: $AB \nmid CD$. აღვნიშნოთ, რომ, თუ A, B წერტილების წყვილი ყოფს C, D წერ-



სურ. 18

ტილთა წვეილს, მაშინ ABC მიმართულება საწინააღმდეგოა ABD მიმართულების (სურ. 18) და პირიქით, თუ მიმართ. $ABC =$ მიმართ. ABD , მაშინ $AB \parallel CD$ (სურ. 19).



სურ. 19

წერტილთა ორი წვეილის გაყოფის ცნებას პროექციული ხასიათი აქვს, რადგან ცენტრალური დაგეგმილება გაყოფილ წერტილთა წვეილებს ასახავს ისევე გაყოფილ წერტილთა წვეილებზე. ამის საფუძველზე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ წრფეთა კონის წრფეების გაყოფის ცნებაც. სახელდობრ, თუ a, b და c, d ერთი S კონის წრფეების ორი წვეილია და s – ნებისმიერი წრფე, რომელიც კვეთს a, b და c, d წრფეებს, შესაბამისად, A, B და C, D წერტილებში, მაშინ A, B და C, D წვეილები, s წრფის მდებარეობის მიუხედავად, ყოველთვის გაყოფილი ან ყოველთვის გაუყოფელი იქნება. პირველ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ a, b და c, d წრფეთა წვეილები ყოფს ერთმანეთს, მეორე შემთხვევაში არ ყოფს. ამრიგად, კონის წრფეთა წვეილების გაყოფის ცნება დაიყვანება წერტილთა წვეილების გაყოფის ცნებაზე; ეს უკანასკნელი კი არის ძირითადი ცნება, რომელიც არ დაიყვანება უფრო მარტივ ცნებაზე.

ევკლიდის სივრცის შევსება არასაკუთრივი ელემენტებით შესრულებული იყო ევკლიდეს სივრცის წერტილების, წრფეებისა და სიბრტყეების ინციდენტურობის დაცვის პირობებში ანუ ევკლიდეს გეომეტრიის აქსიომებში ჩამოყალიბებული მოთხოვნების დაცვით. ამასთან, ახალი არასაკუთრივი ელემენტების შემოტანამ ევკლიდეს ძირითად წინადადებებს (აქსიომებს) შესძინა მეტი განზოგადება, რაშიც დავრწმუნდებით, თუ განვიხილავთ პროექციული სიბრტყის ინციდენტურობის აქსიომებს.

ამრიგად, პროექციული სივრცის კუთვნილების (ინციდენტურობის) აქსიომებში მოცემულია პროექციული სივრცის ობიექტების

ურთიერთკუთვნილების მოთხოვნები. ჩამოვაყალიბოთ ეს მოთხოვნები წინადადებათა წყვილების სახით, რათა ხაზი გავესვათ მათთვის დამახასიათებელ ორადობას:

აქსიომა 1. ორი განსხვავებული წერტილი განსაზღვრავს ერთ და მხოლოდ ერთ წრფეს, რომელსაც ეს წერტილები ეკუთვნის.

შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ანალოგიური წინადადება სიბრტყეებისათვის.

აქსიომა 1¹. ორი განსხვავებული სიბრტყე განსაზღვრავს ერთ და მხოლოდ ერთ წრფეს, რომელსაც ეს სიბრტყეები ეკუთვნის.

ეს ბოლო წინადადება ეკლიდეს სივრცეში არ სრულდება. რადგან ეკლიდეს სივრცეში არ არსებობს წრფე, რომელიც ორ პარალელურ სიბრტყეს ეკუთვნის. პროექციულ სივრცეში კი ეს არის პარალელური სიბრტყეების საერთო არასაკუთრივი წრფე.

აქსიომა 2. წერტილი და წრფე, რომლებიც არაინციდენტურია, განსაზღვრავს ერთ და მხოლოდ ერთ სიბრტყეს, რომელსაც ისინი განეკუთვნება.

აქსიომა 2¹ სიბრტყე და წრფე, რომლებიც არაინციდენტურია, განსაზღვრავს ერთ და მხოლოდ ერთ წერტილს, რომელსაც ისინი ეკუთვნის.

ბოლო წინადადება ეკლიდეს სივრცეში შეიძლება არ შესრულდეს, რადგან წრფე შეიძლება იყოს სიბრტყის პარალელური. პროექციულ სივრცეში კი ეს წინადადება ეოკლიდეს სრულდება, რადგან წრფისა და სიბრტყის პარალელურობის შემთხვევაში მათ საერთო არასაკუთრივი წერტილი ექნება.

ამ აქსიომათა რიცხვი შეიძლება შეივსოს ეკუთვნილების სხვა აქსიომებით, რომლებიც აგრეთვე შეიცავს პროექციული სივრცის თვისებებს და რომლებიც მტკიცდება ზემოთ ჩამოთვლილ აქსიომათა საფუძველზე.

აქსიომა 3. თუ ორი A და B წერტილი ეკუთვნის სიბრტყეს, მაშინ AB წრფე სიბრტყეს ეკუთვნის.

აქსიომა 3' თუ ორი სიბრტყე (α და β) ეკუთვნის A წერტილს. მაშინ ამ სიბრტყეების გადაკვეთის წრფე A წერტილს ეკუთვნის.

აქსიომა 4 სამი წერტილი, რომლებიც ერთ წრფეს არ ეკუთვნის, განსაზღვრავს ერთ და მხოლოდ ერთ სიბრტყეს, რომელსაც ისინი განეკუთვნება.

აქსიომა 4¹ სამი სიბრტყე, რომლებიც ერთ წრფეს არ ეკუთვნის, განსაზღვრავს ერთ და მხოლოდ ერთ წერტილს, რომელსაც ისინი განეკუთვნება.

აქსიომა 5 ორი განსხვავებული წრფე, რომლებიც ერთ სიბრტყეს ეკუთვნის, განსაზღვრავს ერთ და მხოლოდ ერთ წერტილს, რომელსაც ისინი განეკუთვნება.

აქსიომა 5¹. ორი განსხვავებული წრფე, რომლებიც ერთ წერტილს ეკუთვნის, განსაზღვრავს ერთ და მხოლოდ ერთ სიბრტყეს, რომელსაც ისინი განეკუთვნება.

თუ ჩამოთვლილ აქსიომებს გავანალიზებთ, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ პროექციულ სივრცეში, ისევე, როგორც პროექციულ სიბრტყეზე არ არსებობს პარალელურობის ცნება: ერთი სიბრტყის კუთვნილი ორი წრფე ყოველთვის იკვეთება (აქსიომა 5). პროექციულ სივრცეში არ არსებობს პარალელური სიბრტყეები: ორი ნებისმიერი სიბრტყე ყოველთვის იკვეთება (აქსიომა 1') ბოლოს, ნებისმიერი წრფე, რომელიც არ ეკუთვნის სიბრტყეს, ყოველთვის კვეთს ამ უკანასკნელს (აქსიომა 2') როგორც კვეთს ადენიშნით, ჩამოთვლილი აქსიომები მართებულია პროექციული სივრცის როგორც საკუთრივი, ისე არასაკუთრივი წერტილის და წრფისათვის. ცხადია, ამ აქსიომებზე დაყრდნობით დამტკიცებული თეორემებიც აგრეთვე მართებული იქნება პროექციული სიბრტყის ყველა წერტილისათვის. ამრიგად, არასაკუთრივი წერტილების არსებობა სცილდება ფორმულირების სტილისტურ გამარტივებას: ვიგებთ არა მარტო ფორმულირებაში, არამედ დამტკიცებაშიც, როგორც მალე დავრწმუნდებით, მოგება

ბევრად მეტია, ვიდრე ეელოდებით – ორჯერ მაინც მეტი, ვიდრე ევარუდობდით.

გავარკვიოთ, როგორ უნდა გავიაზროთ ორი ელემენტის ინცი-
დენტურობა, როდესაც ერთი ან ორივე არასაკუთრივია. თუ A_{∞}
ეკუთვნის a წრფეს ($A_{\infty} \in a$), ეს ნიშნავს, რომ A_{∞} არის a წრფის
არასაკუთრივი წერტილი. არასაკუთრივი წერტილი განისაზღვრება
იმ წრფით, რომელსაც ის ეკუთვნის. ამიტომ, შეიძლება ვთქვათ,
რომ a არის A_{∞} არასაკუთრივი წერტილის საკუთრივი
წარმომადგენელი.

თუ არასაკუთრივი წერტილი ეკუთვნის α სიბრტყეს, ეს
ნიშნავს, რომ ამ A_{∞} წერტილზე გამავალი წრფეები (ე.ი.
პარალელური წრფეები) α სიბრტყის პარალელურია. შევნიშნოთ,
რომ წრფისა და სიბრტყის პარალელურობის განსაზღვრის
თანახმად, α სიბრტყის კუთვნილი წრფეებიც მის პარალელურ
წრფეებად ითვლება. ბოლოს, $A_{\infty} \in a_{\infty}$ ნიშნავს, რომ A_{∞} -ზე
გამავალი ყველა წრფე a_{∞} -ზე გამავალი სიბრტყეების
პარალელურია.

i_{∞} არასაკუთრივი წრფე შეიძლება იყოს მოცემული საკუთრივი
სიბრტყით, რომელსაც ის ეკუთვნის.

გარდა ამისა, არასაკუთრივი i_{∞} წრფე შეიძლება იყოს მო-
ცემული a და b საკუთრივი წრფეებით, რომლებიც განსაზღვრავს
 i_{∞} წრფის ორ არასაკუთრივ A_{∞} და B_{∞} წერტილს. იმისთვის, რომ
დაერწმუნდეთ ჩამოთვლილი აქსიომების მართებულობაში პრო-
ექციული სივრცის როგორც საკუთრივი, ისე არასაკუთრივი ელ-
ემენტებისათვის, მაგალითისთვის, განვიხილოთ აქსიომები I და I'.

აქსიომა 1. თუ მოცემული წერტილები საკუთრივია, მივიღებთ
ეეკლიდეს გეომეტრიის ცნობილ აქსიომას. იგი მართებულია იმ
შემთხვევშიც, თუ ერთი ან ორივე წერტილი არასაკუთრივია.
მართლაც, ვთქვათ, A საკუთრივი წერტილია, B_{∞} – არასაკუთრივი,
რომელიც მოცემულია თავისი საკუთრივი წარმომადგენელით –
 b წრფით (სურ. 20). B_{∞} წერტილზე გამავალი წრფეები b წრფის

პარალელურია, მათ შორის მოიძებნება ერთადერთი a წრფე, რომელიც A წერტილზე გაივლის. ე.ი AB_{∞} წრფე არის A წერტილზე გამავალი და არასაკუთრივი B_{∞} წერტილის მქონე b წრფის პარალელური a წრფე. ორი არასაკუთრივი A_{∞} და B_{∞} წერტილითაც განისაზღვრება ერთადერთი $A_{\infty}B_{\infty}$ წრფე. მართლაც, თუ არასაკუთრივი წერტილები მოცემულია თავისი საკუთრივი წარმომადგენლებით – ორი a და b წრფით (რომლებიც არ იკვეთება ანუ აცდენილია), მაშინ საძიებელი $A_{\infty}B_{\infty}$ წრფე იქნება a წრფით და მასთან გადაკვეთილი B_{∞} არასაკუთრივი წერტილის მქონე $b \parallel b$ წრფით განსაზღვრული a სიბრტყის ერთადერთი $A_{\infty}B_{\infty}$ არასაკუთრივი წრფე (სურ. 21).

სურ 20

აქსიომა 1¹ არც ღვას და არც სრულდება ევკლიდეს გეომეტრიაში, რადგან, თუ $\alpha \parallel \beta$, მაშინ ევკლიდეს სივრცეში არ არსებობს ამ სიბრტყეების კუთვნილი საერთო წრფე. პროექციულ სივრცეში კი, თუ α და β ორივე სიბრტყე საკუთრივია, ისინი ყოველთვის იკვეთება. (იმ შემთხვევაშიც, თუ $\alpha \parallel \beta$), თუ ერთი სიბრტყე, მაგალითად, α არასაკუთრივია, მაშინ α_{∞} და β სიბრტყეები β სიბრტყის b_{∞} არასაკუთრივი წრფის კუთვნილი იქნება. ამით ამოიწურა ყველა შესაძლებელი შემთხვევა, რადგან α და β სიბრტყეები ერთდროულად არ შეიძლება არასაკუთრივი იყოს (პროექციულ სივრცეში ერთადერთი არასაკუთრივი სიბრტყე არსებობს).

მაგალითს. ორ წინადადებას წერტილებზე, წრფეებსა და სიბრტყეებზე პქვია ორადი, თუ ერთი მეორისგან მიიღება სიტყვა „წერტილის“ შეცვლით სიტყვით „სიბრტყე“ და პირიქით, სიტყვა „სიბრტყის“ შეცვლით სიტყვით „წერტილი“, ზოლო სიტყვა „წრფეს“ შევინარჩუნებთ.

ამრიგად, ორადობის პრინციპი გამომდინარეობს პროექციული გეომეტრიის კუთვნილების აქსიომათა ორადობიდან, სახელდობრ ამ ჯგუფის ყოველი აქსიომის ორადი წინადადება არის იგივე ჯგუფის აქსიომა ან თეორემა, რომელიც მტკიცდება ამ ჯგუფის აქსიომათა საფუძველზე. მართლაც, თუ აქსიომაში 1 შევცვლით სიტყვა „წერტილს“ სიტყვით „სიბრტყე“, მივიღებთ აქსიომას 1'. სიტყვების ასეთი გადაადგილებით აქსიომა 2-ის ნაცვლად მივიღებთ 2' აქსიომას. სიტყვების ასეთი შეცვლა 1 და 1', 2 და 2', 3 და 3', 4 და 4', აქსიომებს წყვილ-წყვილად ერთმანეთზე ცვლის.

აქსიომების სისტემას, რომელშიც დასაშვებია სიტყვების ასეთი შეცვლა, ეწოდება ორადობა. აქსიომათა ორადობამ უნდა გამოიწვიოს დამტკიცებული თეორემების ორადობაც. მართლაც, ყოველი თეორემა, რომელიც დამტკიცებულია 1, 2, 3, აქსიომათა საფუძველზე, სიტყვების „სიბრტყე“ და „წერტილი“ გადაადგილებით გადავა თეორემაში, რომელიც გამომდინარეობს 1', 2', 3', აქსიომებიდან, ე.ი აქსიომების იგივე სისტემიდან. ამრიგად, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ პროექციული გეომეტრიის ნებისმიერი თეორემისათვის არსებობს მისი ორადი თეორემა.

მაშასადამე, პროექციულ გეომეტრიაში არსებობს ორადობის პრინციპი: პროექციული გეომეტრიის ნებისმიერ თეორემაში სიტყვების „სიბრტყე“ და „წერტილი“ გადაადგილებით, მივიღებთ ახალ თეორემას, რომელიც აგრეთვე მართებული იქნება. ამასთან, ერთი თეორემის დამტკიცება მეორე თეორემის დამტკიცების ორადი იქნება. ასეთი სასიამოვნო შესაძლებლობა გავაკეთოთ დამტკიცებული თეორემის დუბლირება ევკლიდეს გეომეტრიაში არ

არსებობს. ევკლიდეს გეომეტრიაში სიტყვების „წერტილი“ და „სიბრტყე“ შეცვლით, „პარალელური სიბრტყეების“ მაგივრად მივიღებთ „პარალელურ წერტილებს“. მაგრამ პარალელური წერტილები არ არსებობს, ამიტომ, სიტყვების ასეთი შეცვლა დაუშვებელია.

პროექციულ გეომეტრიაშიც არ არსებობს „პარალელური წერტილები“, მაგრამ არ არსებობს არც პარალელური სიბრტყეები, რაც დაკავშირებულია პროექციულ სივრცეში არასაკუთრივი ელემენტების არსებობასთან. ე.ი ორადობის პრინციპი მჭიდრო კავშირშია არასაკუთრივი ელემენტების არსებობასთან. ეს ვითარება გვქონდა მხედველობაში, როდესაც ზემოთ ვახსენეთ, რომ სარგებელი, რომელსაც არასაკუთრივი ელემენტების შემოტანით მივიღეთ „ორჯერ მაინც მეტია, ვიდრე ვვარაუდობთ“.

ორადობის პრინციპი არის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი და საინტერესო დებულება მთელ თანამედროვე გეომეტრიაში. მისი მნიშვნელობა იმაშია, რომ ნებისმიერი დამტკიცებული წინადადების ორადი წინადადების მართებულობა შეგვიძლია მივიღოთ ყოველგვარი დამტკიცების გარეშე. ეს პრინციპი გამოსახავს პროექციული გეომეტრიის სტრუქტურის სიმეტრიულობას, რომელიც მისი ერთ-ერთი ყველაზე შესანიშნავი თავისებურებაა. ორადობის პრინციპის გამო, არ არსებობს პროექციული გეომეტრიის დაყოფა სტერეომეტრიასა და პლანიმეტრიაზე, რაც დამახასიათებელია გეომეტრიის სხვა დარგებისთვის (ელემენტარული, ანალიზური, დიფერენციალური). მართლაც, თუ რომელიმე წინადადებას დავამტკიცებთ ბრტყელი ფიგურისათვის, რომელიც შედგება წერტილებისა და წრფეებისაგან, ორადობის პრინციპით მივიღებთ მის ორად წინადადებას შესაბამისი ფიგურისათვის სივრცეში, რომელიც შედგენილი იქნება სიბრტყეებით და წრფეებით და არ არსებობს რაიმე საფუძველი მივაკუთვნოთ ეს წინადადებები გეომეტრიის სხვადასხვა ნაწილს. ორადობის

პრინციპის ნაყოფიერმა შორს მიმავალმა შედეგებმა არ შეიძლება შთაბეჭდილება არ მოახდინოს მკითხველზე.

პროექციული სივრცის ორადობის პრინციპს, რომელიც განვიხილეთ, ეწოდება „დიდი ორადობის პრინციპი“, ხოლო ორადობის პრინციპს, რომელიც პროექციულ სიბრტყეზე ხორციელდება და რომელიც ორადობის დიდი პრინციპის შედეგია, ეწოდება „ორადობის მცირე პრინციპი“ პროექციული სიბრტყე მის კუთვნილ წერტილთა და წრფეთა სიმრავლეა. ადვილი შესამჩნევია, რომ სიბრტყის ელემენტების ურთიერთდამოკიდებულება სიმეტრიულია წერტილთა და წრფეთა მიმართ. ასე, მაგალითად, წინადადებას I ორი განსხვავებული წერტილი ყოველთვის განსაზღვრავს ერთ წრფეს, რომელსაც ისინი განეკუთვნება, შეესაბამება სიმეტრიული წინადადება I¹ სიბრტყის ორი განსხვავებული წრფე განსაზღვრავს ერთ და მხოლოდ ერთ წერტილს, რომელიც ორივე წრფეს ეკუთვნის. ორადობის მცირე პრინციპი შეიძლება შემდეგნაირად ჩამოვყალიბოთ:

ყოველ პროექციულ წინადადებას სიბრტყის წერტილებისა და წრფეების შესახებ შეესაბამება მეორე, ორადი წინადადება, რომელიც მიიღება პირველი წინადადებიდან, თუ სიტყვა „წერტილის“ შეცვლით სიტყვა „წრფით“ და სიტყვა „წრფის“ შეცვლით სიტყვა „წერტილით“ ორადი წინადადებები მართებულია, თუ დამტკიცებულია ერთი მათგანი.

2.6. სხვადასხვა საფეხურის ძირითადი სახეები

როგორც უკვე აღვნიშნეთ (2.5), პროექციულ გეომეტრიაში ორადობის პრინციპის გამო, არ არსებობს გაყოფა პლანიმეტრიასა და სტერეომეტრიაზე. ამიტომ, პროექციულ გეომეტრიაში მიღებულია დაყოფის სხვა პრინციპი, სახელდობრ, გეომეტრიული სახეები დაყოფილია სხვადასხვა საფეხურის სახეებად, მათი განზო-

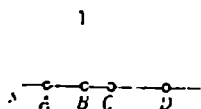
მიღების მიხედვით და წარმოადგენს განსხვავებული სტრუქტურის მქონე წერტილების, წრფეებისა და სიბრტყეების ერთობლიობებს. პროექციულ გეომეტრიაში თანამიმდევრულად შეისწავლება ასეთი ნიშნით დაყოფილი საფეხურების სახეები და განისაზღვრება ყოველი სახეობის პროექციული თვისებები.

ამრიგად, პირველი საფეხურის ძირითადი სახეებია შემდეგი ერთგანზომილებიანი (ერთპარამეტრიანი) ფიგურები (ანუ ფიგურები, რომელთა ყოველი ელემენტი შეიძლება გამოიყოს ელემენტების უსასრულო სიმრავლიდან ერთი რომელიმე პარამეტრით):

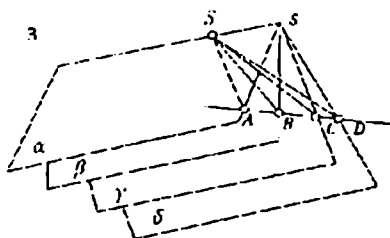
1. წერტილთა მწკრივი წრფეზე ან წრფის ინციდენტურ A, B, C . წერტილთა სიმრავლე (სურ. 22.1). s წრფეს ეწოდა წერტილთა მწკრივის მზიდავი, ხოლო $A, B, C, \dots$ წერტილებს მწკრივის ელემენტები. წერტილთა მწკრივი სიმბოლურად ასე აღინიშნება: $s(A, B, C, \dots)$ ან $s(A)$.

2. წრფეთა კონა ერთ სიბრტყეში S წერტილის ინციდენტურ წრფეთა სიმრავლე (სურ. 22.2). S წერტილი კონის მზიდავია და მას კონის ცენტრი ეწოდება, a, b, c, d წრფეები კონის ელემენტებია, რომლებსაც კონის სხივები (წრფეები) ჰქვია. კონის სიმბოლური ჩანაწერია: $S(a, b, c, \dots)$ ან $S(a)$.

3. სიბრტყეთა კონა ერთ s წრფეზე გაშვალ სიბრტყეთა სიმრავლე (სურ. 22.3). s წრფე, რომელსაც კონის ღერძი ჰქვია, არის კონის მზიდავი, ხოლო $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ სიბრტყეები კონის ელემენტები. კონის სიმბოლური ჩანაწერია: $s(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots)$ ან $s(\alpha)$.



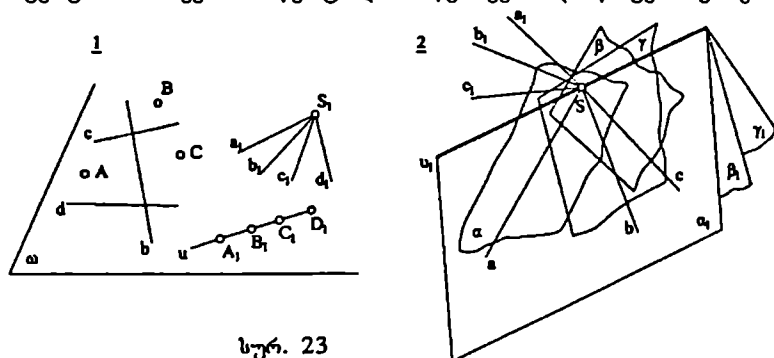
სურ. 22



ადვილი შესაძენეია, რომ $S(\alpha)$ წრფეთა კონა $s(A)$ წერტილთა მწკრივის ორადი ფიგურაა ორადობის მცირე პრინციპით, ხოლო $s(\alpha)$ სიბრტყეთა კონა იგივე $s(A)$ მწკრივის ორადი ფიგურაა დიდი ორადობის პრინციპით.

მეორე საფეხურის ძირითადი სახეებია შემდეგი ორი ორგანო-ზომილებიანი ფიგურა:

1. ბრტყელი ველი – α სიბრტყის კუთვნილ წერტილთა და წრფეთა სიმრავლე (სურ. 23,1). α სიბრტყეს ბრტყელი ველის მზიდავი ეწოდება. სიმბოლურად ბრტყელი ველი ასე ჩაიწერება: $\omega(A, B, C, D, \dots, a, b, c, d, \dots)$. ბრტყელი ველის ელემენტებია წერტილები და წრფეები. ამ ელემენტების ურთიერთკუთვნილებით წარმოიქმნება წერტილთა მწკრივები და წრფეთა კონები. ამიტომ, ბრტყელი ველი მოიცავს წერტილთა მწკრივებს, მაგალითად, $u(A_1)$ და წრფეთა კონებს, მაგალითად $S_1(a_1)$ ანუ მეორე საფეხურის სახე – ბრტყელი ველი – მოიცავს პირველი საფეხურის სახეებს – წერტილთა მწკრივებს და წრფეთა კონებს.



სურ. 23

2. წრფეთა და სიბრტყეთა შეკვრა – S წერტილის ინციდენტურ სიბრტყეთა და წრფეთა სიმრავლე. S ცენტრი შეკვრის მზიდავია და მას შეკვრის ცენტრი ეწოდება. სიმბოლურად ასე ჩაიწერება: $S(a, b, c, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots)$. შეკვრაში შემავალი ელემენტების ურთიერთინციდენტურობის შედეგად შეკვრა შეიცავს წრფეთა კონებს,

მაგალითად, $S(a,b,c...)$ და სიბრტყეთა კონებს, მაგალითად, $\pi_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ (სურ. 23,2).

ადვილი შესაძრწეწია, რომ წრფეთა და სიბრტყეთა შეკვრა ბრტყელი ველის ორადი ფიგურაა ორადლობის დიდი პრინციპით. ასე, ბრტყელი ველის ა სიბრტყეს შესაბამება S შეკვრის ცენტრი, ბრტყელი ველის ყველა წერტილს – შეკვრის ყველა სიბრტყე, $\pi(A_1, B_1, C_1, D_1...)$ წერტილთა მწკრივს – $\pi_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1...)$ სიბრტყეთა კონა, ბრტყელი ველის ყველა წრფეს – შეკვრის წრფეები, ზოლო წრფეთა კონებს – ისევ წრფეთა კონები.

გარდა ამისა, ა ბრტყელი ველის წერტილები და წრფეები გეგმილდება S შეკვრის წრფეებით და სიბრტყეებით ანუ ბრტყელ ველსა და შეკვრას შორის არსებობს ურთიერთცალსახა პერსპექტიული შესაბამისობა, რომელშიც შესაბამისი ელემენტები ინციდენტურია.

მესამე საფეხურის ძირითადი სახეებია შემდეგი სამგან-ზომილებიანი ფიგურები:

1. წერტილთა სამგანზომილებიანი სივრცე პროექციული სივრცის წერტილთა სიმრავლე. პროექციული სივრცე ამ შემთხვევაში წერტილთა სიმრავლის მზიდავის როლს ასრულებს.

2. სიბრტყეთა სამგანზომილებიანი სივრცე – პროექციული სივრცის სიბრტყეთა სიმრავლე. პროექციული სივრცე სიბრტყეთა სიმრავლის მზიდავის როლს ასრულებს.

მესამე საფეხურის ეს ორი სახე ორადია ორადლობის დიდი პრინციპით. ამიტომ, თითოეული მათგანი მეორის ყველა ორადი თვისების მატარებელია. მესამე საფეხურის სახეები პირველი და მეორე საფეხურის ყველა სახეს შეიცავს: წერტილთა მწკრივებს, წრფეთა კონებს, სიბრტყეთა კონებს, ბრტყელ ველებს და შეკვრებს.

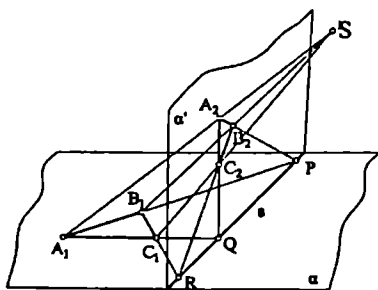
ზოგ შემთხვევაში, მესამე საფეხურის სახედ განიზილება პროექციული სივრცის წერტილთა და სიბრტყეთა სიმრავლე. ყოველ შემთხვევაში, მკითხველს მხედველობაში უნდა ჰქონდეს პროექციული სივრცის საერთო სურათი, როგორც პირველი და მეორე საფეხურების ძირითადი სახეების ყველა შესაძლო გადახლართვა.

3.1. ღეზარგის თეორემა

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, პროექციული გეომეტრიის ერთ-ერთი ინვარიანტი ოთხი წერტილის რთული ფარდობა, განუსაზღვრეთ მეტრული ცნებების გამოყენებით. მაგრამ პროექციულ გეომეტრიაში მეტრული ცნებები არ განიხილება, რადგან ისინი არ არიან ინვარიანტულები პროექციული გარდაქმნების (მაგალითად, ცენტრალური დაგეგმილების) მიმართ. მეტრული ცნებებისაგან გათავისუფლება პროექციული გეომეტრიის მნიშვნელოვანი ამოცანაა. კერძოდ, ასეთ შესაძლებლობას იძლევა ღეზარგის თეორემა, რომელსაც ამიტომ (და არა მხოლოდ ამიტომ) უწოდებენ პროექციული გეომეტრიის ძირითად წინადადებას.

განვიხილოთ სივრცეში ორი სამკუთხედი - $A_1B_1C_1$ და $A_2B_2C_2$ (სურ. 24). დავუშვათ, რომ სამკუთხედების წვეროებზე გამავალი A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 წრფეები იკვეთება ერთ წერტილში. ერთნაირი ასობით აღნიშნულ წვეროებს დავარქვათ შესაბამისი. ასევე დავარქვათ გვერდების წყვილებს, რომლებიც ამ წვეროებზე გადის (A_1B_1 და A_2B_2 , B_1C_1 და B_2C_2 , A_1C_1 და A_2C_2). ჩამოვყალიბოთ ღეზარგის თეორემა — ერთ-ერთი ყველაზე საინტერესო თეორემა პროექციულ გეომეტრიაში.

თუ ორი სამკუთხედი $A_1B_1C_1$ და $A_2B_2C_2$ განლაგებულია ისე, რომ შესაბამისი წვეროების შემაერთებელი A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 წრფეები ერთი S წერტილის ინციდენტურია, მაშინ შესაბამისი A_1A_2 და B_1B_2 , A_1C_1 და A_2C_2 , B_1C_1 და B_2C_2 გვერდების გადაკვეთის P, Q, R წერტილები



სურ. 24

ერთი s წრფის ინციდენტურია.

იმ შემთხვევაში, როდესაც $A_1B_1C_1$ და $A_2B_2C_2$ სამკუთხედები სხვადასხვა სიბრტყეში მდებარეობს, დეზარგის თეორემის მართებულობა თითქმის თვალნათელია. პირობის თანახმად, A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 წრფეები იკვეთება S წერტილში. ამიტომ, შესაბამისი გვერდები (მაგალითად, A_1B_1 და A_2B_2), როგორც ერთ A_2SB_2 სიბრტყეში მდებარე, გადაიკვეთება რომელიმე P წერტილში. ანალოგიურად, შესაბამისი გვერდების დანარჩენი ორი წვეტილიც (A_1C_1 და A_2C_2, B_1C_1 და B_2C_2) აუცილებლად გადაიკვეთება რომელიმე Q და R წერტილებში. მეორე მხრივ, P, Q, R წერტილები, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნის ორივე $A_1B_1C_1$ და $A_2B_2C_2$ სამკუთხედის სიბრტყეებს, მოთავსდება ამ სიბრტყეების გადაკვეთის s წრფეზე. დეზარგის თეორემა დამტკიცებულია.

მართებულია დეზარგის შებრუნებული თეორემაც.

თუ ორი სამკუთხედი $A_1B_1C_1$ და $A_2B_2C_2$ განლაგებულია ისე, რომ მათი შესაბამისი გვერდების გადაკვეთის P, Q, R წერტილები ერთი s წრფის ინციდენტურია, მაშინ შესაბამისი წვეროების შემერთებული წრფეები ერთი S წერტილის ინციდენტურია.

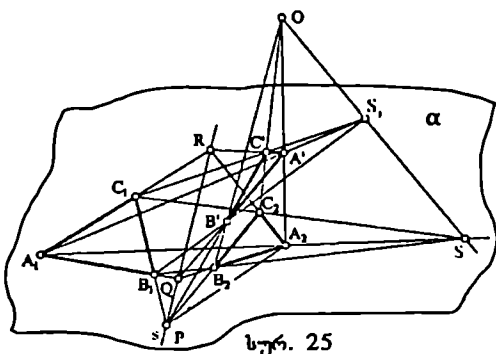
ვთქვათ, სხვადასხვა სიბრტყეში მდებარე $A_1B_1C_1$ და $A_2B_2C_2$ სამკუთხედების შესაბამისი A_1B_1 და A_2B_2, A_1C_1 და A_2C_2, C_1B_1 და C_2B_2 გვერდები იკვეთება ერთი s წრფის ინციდენტურ P, Q, R წერტილებში. მაშინ, ცხადია, შესაბამისი გვერდების წვეტილებით განისაზღვრება $A_1B_1 \cap A_2B_2, A_1C_1 \cap A_2C_2, B_1C_1 \cap B_2C_2$ სამი სიბრტყე, რომლებიც გადაიკვეთება რომელიმე S წერტილში. მაშინ ამ სიბრტყეების წვეილ-წვეილად გადაკვეთის A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 წრფეები, რომლებიც შესაბამისი სამკუთხედების წვეროების შემერთებულ წრფეებს წარმოადგენს, გადაიკვეთება ამ ერთ S წერტილზე.

თუ ორივე სამკუთხედი ($A_1B_1C_1$ და $A_2B_2C_2$) ერთ სიბრტყეს ეკუთვნის ანუ კომპლანარულია, დეზარგის თეორემები (პირდაპირი და შებრუნებული) ამ შემთხვევაშიც მართებული იქნება. რადგან

კომპლანარულ $A_1B_1C_1$ და $A_2B_2C_2$ სამკუთხედებს, რომელთათვის შესრულებულია დეზარგის თეორემის პირობები, პერსპექტიული განლაგება აქვს, ამიტომ, S წერტილს ეწოდოთ პერსპექტივის ცენტრი, ხოლო s წრფეს - პერსპექტივის ღერძი (სურ. 25). მაშინ დეზარგის ორივე თეორემა მოკლედ შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ:

თუ ორ სამკუთხედს აქვს პერსპექტივის ცენტრი, მათ აქვს ასევე პერსპექტივის ღერძი და პირიქით.

მართლაც, ვთქვათ, ორი $A_1B_1C_1$ და $A_2B_2C_2$ სამკუთხედისათვის დეზარგის თეორემის პირობა შესრულებულია ანუ A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 წრფეები ერთ S წერტილზე პერსპექტივის ცენტრზე გადის. დავამტკიცოთ, რომ შესაბამისი გვერდების გადაკვე-



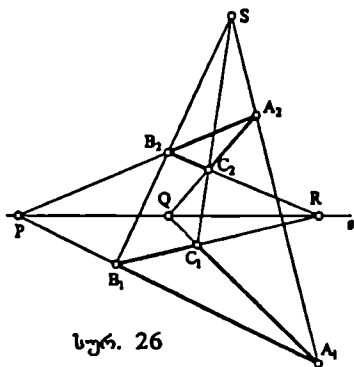
თის წერტილები $P=A_1B_1 \cap A_2B_2$, $Q=A_1C_1 \cap A_2C_2$, $R=B_1C_1 \cap B_2C_2$ ეკუთვნის ერთ წრფეს - პერსპექტივის s ღერძს (სურ. 25). დავაფიქსიროთ O წერტილი, რომელიც α სიბრტყეს არ ეკუთვნის. OS წრფეზე შევარჩიოთ რომელიმე S_1 წერტილი. რადგან O, S_1, A_1, A_2 წერტილები ეკუთვნის ერთ სიბრტყეს (რომელიც განსაზღვრულია $OS \cap A_1S_1$ წრფეებით), ამიტომ, A_2O და A_1S_1 წრფეები იკვეთება რომელიმე A' წერტილზე. ანალოგიურად, B_2O და B_1S_1 წრფეების გადაკვეთაში (რომლებიც OSB_1 სიბრტყეს ეკუთვნის) მივიღებთ B' წერტილს. C' წერტილს მივიღებთ OSC_1 სიბრტყის კუთვნილ C_2O და C_1S_1 წრფეების გადაკვეთაში. ამრიგად, ავაგეთ სამკუთხედი $A'B'C'$, რომელიც α სიბრტყეს არ ეკუთვნის. ამიტომ, $A'B'C'$ და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედებისათვის დეზარგის თეორემა მართებული იქნება.

მართლაც, ამ სამკუთხედების შესაბამისი წვეროების შემავრთებელი წრფეები, სახელდობრ, A_1A' , B_1B' , C_1C' ერთ S_1 წერტილზე გადის (აგების თანახმად). ღეზარგის თეორემის თანახმად, $A_1B_1C_1$ და $A'B'C'$ სამკუთხედების შესაბამისი გვერდები იკვეთება ერთ (s) წრფეზე მდებარე P, Q, R სამ წერტილში. მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ S წერტილი შეგვიძლია ჩავთვალოთ S_1 წერტილის ცენტრალურ გეგმილად O ცენტრიდან α სიბრტყეში. მაშინ $SA_1B_1C_1$ ფიგურა $S_1A_1B_1C_1$ ფიგურის (პირამიდის) გეგმილია იგივე O ცენტრიდან α სიბრტყეში. $A_2B_2C_2$ სამკუთხედის A_2, B_2, C_2 წვეროები, როგორც SA_1 , SB_1 , SC_1 წრფეებზე მდებარე, იქნება S_1A_1 , S_1B_1 , S_1C_1 წრფეებზე მდებარე $A'B'C'$ სამკუთხედის A' , B' , C' წვეროების ცენტრალური გეგმილები α სიბრტყეში. ამრიგად, α სიბრტყის კუთვნილი $A_1B_1C_1$ და $A_2B_2C_2$ სამკუთხედების წყვილი $A_1B_1C_1$ და $A'B'C'$ სამკუთხედების წყვილის ცენტრალური გეგმილება. თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ ცენტრალური დაგეგმილების დროს წერტილების და წრფეების ინციდენტურობა არ ირღვევა და იმ ვითარებას, რომ $A_1B_1C_1$ და $A'B'C'$ სამკუთხედებისათვის ღეზარგის თეორემა სრულდება, მაშინ ღეზარგის თეორემა მართებული იქნება ამ სამკუთხედების გეგმილებისათვის - $A_1B_1C_1$ და $A_2B_2C_2$ სამკუთხედებისათვის. მართლაც, თუ $A_1B_1C_1$ და $A'B'C'$ სამკუთხედის შესაბამისი A_1B_1 და $A'B'$, A_1C_1 და $A'C'$, B_1C_1 და $B'C'$ გვერდების გადაკვეთის P, Q, R წერტილები s წრფის ინციდენტურია, მაშინ ამ წრფეების A_1B_1 და A_2B_2 , A_1C_1 და A_2C_2 , B_1C_1 და B_2C_2 გეგმილები გადაიკვეთება იგივე s წრფის კუთვნილ P, Q, R წერტილებზე. მაგრამ, ბოლოს ჩამოთვლილი წრფეთა წყვილები α სიბრტყის კუთვნილი $A_1B_1C_1$ და $A_2B_2C_2$ ორი სამკუთხედის შესაბამისი გვერდების წყვილებია, ე.ი. ღეზარგის თეორემა სრულდება ორი კომპლანარული სამკუთხედისთვისაც. ღეზარგის თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, ღეზარგის თეორემა სრულდება ერთ სიბრტყეში მდებარე $A_1B_1C_1$ და $A_2B_2C_2$ სამკუთხედებისათვის (სურ. 26). ამ

სამკუთხედებს ღეზარგის სამკუთხედები ეწოდება, სამკუთხედების შესაბამისი წვეროების შემაერთებული წრფეების ინციდენტურ S წერტილს ეწოდება ღეზარგის წერტილი, შესაბამისი გვერდების გადაკეთის წერტილების ინციდენტურ s წრფეს – ღეზარგის წრფე.

ღეზარგის თეორემაში განხილული წრფეები და წერტილები ქმნის ე.წ. ღეზარგის კონფიგურაციას, რომელიც შედგება ათი წრფისა და ათი წერტილისაგან (სურ. 26). ღეზარგის კონფიგურაცია სიმეტრიულია წერტილებისა და წრფეების მიმართ. ყოველი წერტილი ინციდენტურია სამი წრფისა და ყოველი წრფე ინცი-



სურ. 26

დენტურია სამი წერტილის. კონფიგურაციის წერტილები და წრფეები თანასწორუფლებიანია ანუ მათგან ნებისმიერი შეიძლება მივიღოთ ღეზარგის წერტილად ან წრფედ. თუ მაგალითად, R წერტილს მივიღებთ ღეზარგის წერტილად, მაშინ C_1QC_2 და B_1PB_2 შესაბამისი სამკუთხედები იქნება, ხოლო ღეზარგის წრფე SA_1 , რომლის ინციდენტური იქნება შესაბამისი B_1B_2 და C_1C_2 , PB_1 და QC_1 , PB_2 და QC_2 გვერდების გადაკეთის S, A_1 და A_2 წერტილები.

როგორც ვნახეთ, კომპლანარული ორი სამკუთხედისათვის ღეზარგის თეორემა მტკიცდება სივრცითი აგების გამოყენებით, ფაქტიურად, მესამე სამკუთხედის შემოტანით, რომელიც მოცემული სამკუთხედების სიბრტყეს არ ეკუთვნის. იმ შემთხვევაში, როდესაც მოცემული სამკუთხედები კომპლანარულია, ღეზარგის თეორემა წარმოადგენს სუფთა პლანიმეტრიულ წინადადებას და ბუნებრივია მისი პლანიმეტრიული დამტკიცების ძებნა. ასეთი დამტკიცებები ცნობილია, მაგრამ ყველა მათგანს მეტრული ხა-

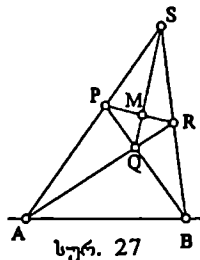
სიათი აქვს და ამიტომ, არ არის მისაღები პროექციულ გეომეტრიაში. ამ საკითხის ანალიზმა, რომელიც გილბერტის მიერ იყო ჩატარებული, აჩვენა, რომ ღეზარგის თეორემის დამტკიცება სივრცითი აგებების გარეშე, შეუძლებელია. უფრო ზუსტად, კუთვნილების აქსიომების სიიდან რომ ამოვიღოთ ყველა წინადადება, რომელიც სივრცის თვისებებს ეხება, მაშინ დარჩენილი აქსიომებიდან ღეზარგის თეორემა არ გამოძღინარეობს. ამიტომ, ღეზარგის თეორემა შეიძლება განხილულ იქნეს, როგორც პროექციული სიბრტყის აქსიომა.

სივრცითი აგებების გამოყენება ღეზარგის თეორემის დასამტკიცებლად არ იყო შემთხვევითი ფაქტი. ღეზარგის თეორემა მხოლოდ მაშინ სრულდება პროექციულ სიბრტყეზე, როდესაც ეს სიბრტყე მოქცეულია სამგანზომილებიან პროექციულ სივრცეში. ანუ ღეზარგის თეორემა, მისი პლანიმეტრიული შინაარსის მიუხედავად, აყალიბებს არა პროექციული სიბრტყის თვისებებს, არამედ პროექციული სივრცის თვისებებს.

3.2. ჰარმონიზმი

ჰარმონიულ წერტილთა ოთხეულის განმარტებას, რომელიც ადრე ჩამოვაყალიბეთ (2.2), ჰქონდა მეტრული ხასიათი, სახელდობრ, ჰარმონიული ეუწოდეთ წერტილთა ოთხეულს, რომელთა რთული ფარდობა უდრის -1 . თავის მხრივ, ოთხი წერტილის რთული ფარდობა დაკავშირებულია მონაკვეთების გაზომვასთან ანუ მეტრულ ცნებებთან. მაგრამ წერტილთა ჰარმონიული განლაგება არის პროექციული გარდაქმნების (მაგალითად, ცენტრალური დაგეგმილების) ინვარიანტი და მისი განსაზღვრა მეტრული ცნებების გამოყენებით, რომლებიც პროექციული გარდაქმნების ინვარიანტული არ არის, პროექციულ გეომეტრიაში მიუღებელია. ჰარმონიზმის ცნების პროექციული განსაზღვრის შესაძლებლობას გვაძლევს ღეზარგის თეორემა. ამ ფაქტს უდიდესი პრინციპული

მნიშვნელობა აქვს, რადგან ჰარმონიზმს მიეყვართ პროექციული გარდაქმნების სუფთა პროექციულ განსაზღვრებამდე. ვაჩვენოთ, რომ ჰარმონიზმის პროექციული განსაზღვრა შეიძლება მივიღოთ მხოლოდ წერტილებისა და წრფეების ინციდენტურობის ცნებაზე დაყრდნობით, რაც ხორციელდება სრული ოთხკუთხედის ჰარმონიული თვისებების გამოყენებით. სრული ოთხკუთხედი ეწოდება PQRS ბრტყელ ფიგურას, რომელიც მიიღება ოთხი წერტილით (წვეროებით), რომელთაგან არც ერთი სამეული ერთ წრფეზე არ მდებარეობს და ამ წერტილების წყვილ-წყვილად შემაერთებელი ექვსი წრფით (გვერდით) (სურ. 27). სრული ოთხკუთხედის ყოველ წვეროზე გადის სამი გვერდი, რომლებიც ამ წვეროს დანარჩენ სამ წვეროსთან აერთებს. ყოველ გვერდზე ორი წვერო მდებარეობს. ორ გვერდს, რომლებიც ერთ წვეროზე არ გადის მოპირდაპირე ეწოდება. ამრიგად, სრული ოთხკუთხედის ექვსი გვერდით შედგენილია მოპირდაპირე გვერდების სამი წყვილი, რომელთა გადაკვეთის წერტილებს A, B, M დიაგონალური წერტილები ეწოდება:



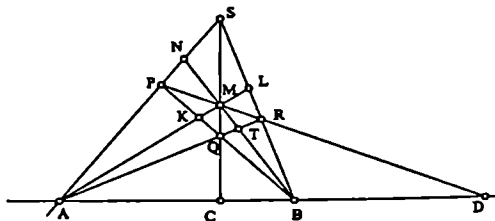
$$A=PS \cap QR, \quad B=PQ \cap SR, \quad M=PR \cap SQ.$$

ბოლოს, სამ წრფეს, რომლებიც წყვილ-წყვილად აერთებს დიაგონალურ წერტილებს, სრული ოთხკუთხედის AB, AM, BM დიაგონალები ეწოდება. დიაგონალები ქმნის ე.წ. ABM დიაგონალურ სამკუთხედს.

განვიხილოთ სრული ოთხკუთხედი PQRS (სურ. 28). აღვნიშნოთ AB დიაგონალის გადაკვეთის წერტილები SQ და PR მოპირდაპირე გვერდების წყვილთან C და D ასოებით. A, B, C, D წერტილთა ოთხეული S წერტილიდან PR გვერდზე დაგვემძილებით ავსახოთ. მივიღებთ P, R, M, D ოთხეულს. ეს ოთხეული ავსახოთ Q წერტილიდან ისევ AB წრფეზე. მივიღებთ B, A, C, D ოთხეულს:

$$A, B, C, D \stackrel{S}{\underset{\wedge}{=}} P, R, M, D \stackrel{Q}{\underset{\wedge}{=}} B, A, C, D$$

ამრიგად, A, B, C, D
 ოთხეული აისახა
 B, A, C, D ოთხეულზე.
 რადგან ოთხი წერტილის
 რთული ფარდობა დაგვე-
 მიღების ინვარიანტია,
 ამიტომ



სურ. 28

$$(AB, CD) = (BA, CD).$$

(1)

აღვნიშნოთ $(AB, CD) = \lambda$,

$$(AB, CD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \lambda, \text{ ხოლო } (BA, CD) = \frac{BC}{AC} : \frac{BD}{AD} = \frac{1}{\lambda}.$$

მაშინ (1) ტოლობა ასე შეიძლება ჩავწეროთ:

$$\lambda = \frac{1}{\lambda} \text{ ანუ } \lambda^2 = 1, \quad \lambda = \pm 1.$$

რადგან λ -ს მნიშვნელობა დადებითია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც C ემთხვევა D წერტილს, რაც მოცემულ შემთხვევაში შეუძლებელია, ამიტომ,

$$\lambda = -1 \text{ ანუ } (AB, CD) = -1.$$

ამრიგად, შეგვიძლია გავაკეთოთ დასკვნა, რომ A, B, C, D წერტილები შეადგენს ჰარმონიულ წერტილთა ოთხეულს. აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია ჩამოვყალიბოთ ჰარმონიულ წერტილთა ოთხეულის პროექციული განმარტება.

სრული ოთხკუთხედის დიაგონალზე (AB) მდებარე წერტილთა A, B, C, D ოთხეულს, რომელიც შედგენილია სრული ოთხკუთხედის A, B ორი დიაგონალური წერტილით და ამ დიაგონალის გადაკვეთის C და D წერტილებით M მესამე დიაგონალურ წერტილზე გამავალ გვერდების წვევითან, ეწოდება ჰარმონიულ წერტილთა ოთხეული.

ამბობენ, რომ C, D წერტილთა წყვილი პარამონიულადაა შეუღლებული A, B წერტილთა წყვილთან ან D არის სამი მოცემული A, B, C წერტილის მეოთხე პარამონიული წერტილი, ან C და D წერტილები პარამონიულადაა შეუღლებული ერთმანეთთან AB წერტილთა წყვილის მიმართ. თუ A, B, C, D წერტილებს M წერტილიდან დაგვეგმილებით ავსახავთ ოთხკუთხედის გვერდზე (მაგალითად, PS -ზე), მივიღებთ $(AB, CD) = (AN, SP) = -1$. ანალოგიურად შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ სრული ოთხკუთხედის ყოველ დიაგონალსა და ყოველ გვერდზე, ყველა გვერდის და დიაგონალის აგების შემდეგ, წარმოიქმნება პარამონიულ წერტილთა ოთხეულები (სურ. 28). გარდა ამისა, თუ პარამონიულ A, B, C, D წერტილთა ოთხეულს დავაგვეგმილებთ M წერტილიდან, მივიღებთ პარამონიულ MA, MB, MC, MD წრფეთა ოთხეულს. მათგან პირველი ორი დიაგონალებია, ბოლო ორი – სრული ოთხკუთხედის გვერდები. ამიტომ, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ დიაგონალური სამკუთხედის გვერდები პარამონიულადაა გაყოფილი ოთხკუთხედის გვერდებით.

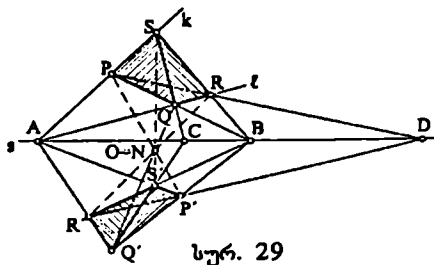
ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას:

A, B, C სამი მოცემული წერტილის მეოთხე პარამონიული D წერტილი ცალსახად განისაზღვრება.

სწორედ ეს მნიშვნელოვანი თეორემა მტკიცდება დეზარგის თეორემის დახმარებით.

ვთქვათ, მოცემულია A, B, C სამი კოლინეარული წერტილი. უნდა ავაგოთ ამ წერტილების მეოთხე პარამონიული D წერტილი და დავრწმუნდეთ D წერტილის აგების ცალსახაობაში. აქ შეგვეძლო ოთხი წერტილის რთული ფარდობის ერთადერთობის თვისების გამოყენება, რომელიც უზრუნველყოფდა მოცემული სამი წერტილისათვის მეოთხე პარამონიული D წერტილის აგების ცალსახაობას. მაგრამ, ასეთ დამტკიცებას მეტრული ხასიათი ექნებოდა. ამიტომ, დავამტკიცოთ D წერტილის მდებარეობის ერთადერთობა სუფთა პროექციული მეთოდით. დავიწყეთ A, B, C სამი მოცემული

წერტილისათვის მეოთხე პარმონიული D წერტილის აგებით. ვთქვათ, s წრფეზე მოცემულია A, B, C სამი წერტილი (სურ. 29). მეოთხე პარმონიული წერტილის ასაგებად A წერტილზე გავავლოთ ორი ნებისმიერი k და ℓ წრფე. C წერტილზე გავავლოთ მათი მკვეთი წრფე და დაენიშნოთ გადაკვეთის S და Q წერტილები. მესამე მოცემული B წერტილი შევაერთოთ Q და S წერტილებთან. მივიღებთ BQ და BS წრფეებს, რომლებიც k და ℓ წრფეებთან გადაიკვეთება, შესაბამისად, P და R წერტილებში. ამრიგად, ავაგეთ სრული $PQRS$ ოთხკუთხედის ოთხი წვერო და ხუთი გვერდი. მეექვსე PR გვერდის გადაკვეთაში მოცემულ s წრფესთან მივიღებთ საძიებელ D წერტილს: $D=PR \cap s$. როგორც ხედავთ, აგება ძალიან მარტივია და სრულდება მხოლოდ ერთი სახაზავის გამოყენებით.



ახლა დავამტკიცოთ, რომ მეოთხე პარმონიული D წერტილის მდებარეობა არ არის დამოკიდებული სრული ოთხკუთხედის შერჩევაზე, რომლის დახმარებითაც ის იყო აგებული. ამას დავამტკიცებთ, თუ დეზარგის თეორემას რამდენჯერმე დავიხმართ. ე.ი. დეზარგის თეორემის საფუძველზე მტკიცდება მოცემული სამი წერტილისათვის მეოთხე პარმონიული წერტილის ერთადერთობის თვისება, რომელზედაც აგებულია პროექციული გეომეტრიის უმნიშვნელოვანესი ცნების – პროექციული გარდაქმნის განსაზღვრა.

დავამტკიცოთ, რომ მეოთხე პარმონიული D წერტილის მდებარეობა არ არის დამოკიდებული რომელიმე გარკვეულ სრულ ოთხკუთხედზე, რომ პარმონიულ წერტილთა A, B, C, D ოთხეული შეიძლება ავაგოთ სხვა ნებისმიერი ოთხკუთხედის დახმარებით.

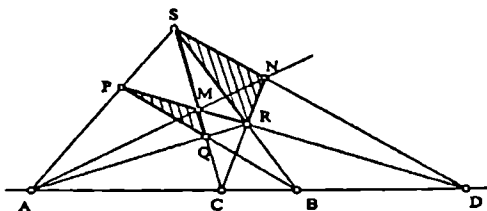
ზემოთ მოცემული წესით ავაგოთ სხვა სრული ოთხკუთხედი $P'Q'R'S'$ და დავამტკიცოთ, რომ ამ ოთხკუთხედის დახმარებით იგივე მოცემული A, B, C წერტილებისათვის აგებული მეოთხე პარამონიული წერტილი დაემთხვევა D წერტილს. აგების თანახმად, ახალი ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების $Q'R'$ და $P'S'$, $R'S'$ და $Q'P'$ წყვილები იკვეთება A და B წერტილებში, ხოლო $Q'S'$ გვერდი გადის C წერტილზე. თეორემის დასამტკიცებლად უნდა ვაჩვენოთ, რომ $R'P'$ გვერდი, რომელიც $Q'S'$ გვერდის მოპირდაპირეა, გაივლის D წერტილზე.

სამკუთხედების ორი წყვილი – PQS და $P'Q'S'$, SQR და $S'Q'R'$ აკმაყოფილებს დეზარგის შებრუნებული თეორემის პირობებს. ამიტომ, არსებობს ისეთი წერტილები O და N , რომ $O=PP' \cap QQ' \cap SS'$ და $N=QQ' \cap SS' \cap RR'$. მაგრამ O და N შეთავსებულია, რადგან ორივე წერტილი მიღებულია QQ' და SS' წრფეების გადაკვეთაში. ამის გამო, სამკუთხედები SPR და $S'P'R'$ აკმაყოფილებს დეზარგის პირდაპირი თეორემის მოთხოვნებს ანუ SS' , PP' და RR' ერთ წერტილში იკვეთება. ამიტომ, $A=SP \cap S'P'$, $B=SR \cap S'R'$ და $D=PR \cap P'R'$ ერთ s წრფეზე მდებარეობს. ამრიგად, მოცემული A, B, C წერტილებისათვის მეოთხე პარამონიული D წერტილი, რომელიც ავაგეთ $P'Q'R'S'$ სრული ოთხკუთხედის დახმარებით, როგორც $D=P'R' \cap s$, შეუთავსდა $PQRS$ სრული ოთხკუთხედის დახმარებით აგებულ $D=PR \cap s$ წერტილს, რადგან PR და $P'R'$ წრფეები ერთი და იგივე D წერტილში კვეთს s წრფეს. ე.ი. D წერტილის მდებარეობა არ არის დამოკიდებული სრული ოთხკუთხედის არჩევანზე, რომლის დახმარებითაც იქნება აგებული D წერტილი. ამით მოცემული სამი წერტილისათვის დამტკიცდა მეოთხე პარამონიული წერტილის ერთადერთობა.

აქამდე პარამონიულ ოთხეულში შემაჯალი წერტილთა წყვილები განსხვავებულ როლს ასრულებდა: ვამბობდით, რომ წყვილი C, D პარამონიულად არის შეუდლებელი A, B წყვილთან. პარამონიული ვუწოდეთ A, B, C, D წერტილთა ოთხეულს, რომელიც შედ-

გენილია PQRS სრული ოთხკუთხედის ორი დიაგონალური A,B წერტილით და მოპირდაპირე გვერდების მესამე წვეილის გადაკეთის C და D წერტილებით AB წრფესთან (სურ. 28).

ვაჩვენოთ, რომ
პარმონიულ A,B,C,D
წერტილთა ოთხეული
სიმეტრიულია ანუ თუ
A,B წვეილი პარმონიულად არის შეუღლებული C,D წვეილ-



სურ. 30

თან, მაშინ C,D წვეილიც პარმონიულად იქნება შეუღლებული A,B წვეილთან. ამაში დავრწმუნდებით, თუ ავაგებთ მეორე ოთხკუთხედს, რომლისათვის C და D დიაგონალური წერტილები იქნება, ხოლო A და B – მოპირდაპირე გვერდების მესამე წვეილის გადაკეთის წერტილები CD წრფესთან. ასეთი ოთხკუთხედის ასაგებად გავავლოთ SD და CR წრფეები, რომლებიც გადაიკვეთება N წერტილში. მივიღეთ SMRN სრული ოთხკუთხედი, რომლის მოპირდაპირე გვერდები SM და NR იკვეთება C წერტილში, ხოლო MR და SN – D წერტილში ანუ C და D წერტილები SMRN სრული ოთხკუთხედის დიაგონალური წერტილებია. მესამე მოპირდაპირე გვერდებიდან ერთი – SR გადის B წერტილზე. დაგვრჩა დასამტკიცებელი, რომ MN გვერდი, რომელიც SR გვერდის მოპირდაპირეა, გაივლის A წერტილზე. მართლაც, PMQ და SNR სამკუთხედებისათვის სრულდება ღებარგის შებრუნებული თეორემის პირობა: SN და PM, NR და MQ, SR და PQ გვერდები წვეილ-წვეილად იკვეთება D,C,B წერტილებში, რომლებიც ერთ წრფეზე მდებარეობს, ამიტომ შესაბამისი წვეროების შემაერთებელი SP,RQ,MN წრფეები ერთ წერტილზე გაივლის. მაგრამ SP და QR წრფეები, აგების თანახმად, იკვეთება A წერტილზე, ამიტომ, MN წრფეც A წერტილზე გაივლის. ანუ ავაგეთ სრული ოთხკუთხედი (SMRN), რომლისათვის C და D დი-

აგონალური წერტილებია, ხოლო A და B – მოპირდაპირე MN და SR გვერდების გადაკვეთის წერტილები AB წრფესთან. აქედან გამომდინარეობს, რომ:

თუ C, D წერტილების წვეილი პარმონიულად შეუღლებულია A, B წერტილთა წვეილთან, მაშინ A, B წვეილიც პარმონიულად შეუღლებულია C, D წვეილთან.

ჩვენ მიერ განხილული თეორემა ამტკიცებს, რომ პარმონიულ წერტილთა A, B და C, D ორი წვეილი ურთიერთშეუღლებულია.

სხვაგვარად რომ ვთქვათ, თუ A, B და C, D პარმონიულად შეუღლებული წვეილებია, მაშინ აქედან გამომდინარეობს შემდეგი წვეილების პარმონიულობა: A, B და DC , BA და CD , BA და DC , CD და AB , CD და BA , DC და AB , DC და BA . ის, რომ ყოველი წვეილის წერტილებმა შეიძლება შეცვალოს ერთმანეთი, უშუალოდ გამომდინარეობს ორი წვეილის პარმონიული შეუღლების განსაზღვრიდან.

დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა:

პარმონიულად შეუღლებული წვეილები ყოფს ერთმანეთს.

ეს თეორემა ადვილად მტკიცდება, თუ გავითვალისწინებთ პარმონიულ წერტილთა ოთხეულის რთული ფარდობის მნიშვნელობას, რომელიც -1 უდრის, რაც გულისხმობს გაყოფილი პარმონიულად შეუღლებული წერტილთა წვეილების არსებობას. საჭიროა ამ თეორემის პროექციულად დასაბუთებული დამტკიცება.

ვთქვათ, AB და CD პარმონიულად შეუღლებული წვეილებია. დავამტკიცოთ, რომ $AB \div CD$.

დავუშვათ, რომ $AB \nparallel CD$. ასეთ შემთხვევაში უნდა არსებობდეს შემდეგი ორი გაყოფიდან ერთ-ერთი: $AC \div BD$ ან $AD \div BC$. ვაჩვენოთ, რომ ამ ორი გაყოფიდან არც ერთი არ შესრულდება. განვიხილოთ პირველი გაყოფა $AC \div BD$. A, B, C, D შეიძლება პერსპექტივათა ჯაჭვით აესაზოთ B, A, C, D ოთხეულზე. მაგრამ წერტილთა წვეილების გაყოფა დაგეგმილების დროს უცვლელი რჩება (დაგეგმილების ინვარიანტია) და გაყოფილი წვეილები დაგეგმი-

ლებით ისევ გაყოფილ წყვილებზე აისახება. ამიტომ, $ABCD$ ოთხეულის $AC \div BD$ გაყოფიდან გამოდის B, A, C, D ოთხეულის $BC \div AD$ გაყოფა. ე.ი. A, B, C, D ოთხეული უშვებს ორ განსხვავებულ წყვილბად გაყოფას, რაც შეუძლებელია. ანალოგიურად დაერწმუნებით, რომ მეორე გაყოფაც შეუძლებელია.

ამრიგად, ჩვენი დაშვება მცდარია და ჰარმონიულად შეუღლებული წერტილთა წყვილები ყოფს ერთმანეთს: $AB \div CD$.

ჩამოვყალიბოთ კონის სხივების ჰარმონიული ჯგუფის შემდეგი განსაზღვრა:

კონის ოთხი სხივი შეადგენს ჰარმონიულ ჯგუფს, თუ ისინი აგეგმილებს ჰარმონიულ წერტილთა ჯგუფს.

ამ განსაზღვრის ორადი წინადადება მცირე ორადობის პრინციპით შემდეგია:

ჰარმონიულ წრფეთა ოთხეულის კვეთაში წრფით წარმოიქმნება ჰარმონიულ წერტილთა ოთხეული.

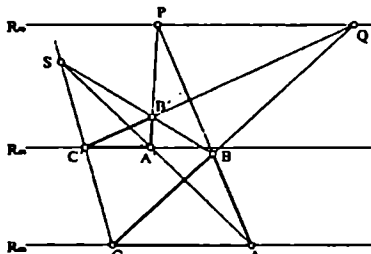
აქედან უშუალოდ გამოდინარეობს, რომ ერთ სიბრტყეში ჰარმონიული ოთხეულების დაგეგმილების და კვეთის ოპერაციები მათ ისევ ჰარმონიულ ოთხეულებზე ასახავს, რაც ნიშნავს, რომ წერტილებისა და წრფეების ჰარმონიზმი არის დაგეგმილების ინვარიანტი.

ჰარმონიულ წერტილთა ან წრფეთა ოთხეულების მნიშვნელობა იმაში მდგომარეობს, რომ ასეთი ოთხეული ნებისმიერი პროექციული გარდაქმნისას აისახება ისევ ჰარმონიულ ოთხეულზე. ადრე აღვნიშნეთ (1.4), რომ პროექციული გეომეტრია განიხილავს ფიგურათა ისეთ თვისებებს, რომლებიც უცვლელი რჩება (ინვარიანტულია) პროექციული გარდაქმნების (მაგალითად, დაგეგმილების) დროს. აქამდე ასეთი თვისებებიდან (რომლებიც განიხილება პროექციულ გეომეტრიაში) შევხვდით მხოლოდ წერტილებისა და წრფეების ინციდენტურობას (კუთვნილებას). ახლა ამ თვისებას შეგვიძლია მიუმატოთ წერტილთა და წრფეთა ჰარმონიზმის თვისება.

3.3. ღებარგის თეორემის კერძო შემთხვევები

ღებარგის თეორემა პროექციული გეომეტრიის თეორემაა, რადგან არ მოიცავს მეტრულ ცნებებს. ის მოიცავს წინადადებებს, რომლებიც ეხება მხოლოდ წერტილებისა და წრფეების ინციდენტურობას. მაგრამ სხვადასხვა მეტრული ხასიათის წინადადებებს, რომლებიც შეტანილია ღებარგის თეორემის პირობაში, მიეყვართ ღებარგის თეორემის კერძო შემთხვევებამდე, რომელიც მეტრული გეომეტრიის თეორემებია. მაგალითისათვის განვიხილოთ შემდეგი ორი წინადადება:

1. თუ ორი სამკუთხედის შესაბამისი გვერდების რომელიმე წყვილი პარალელურია წრფისა, რომლებიც დარჩენილი შესაბამისი გვერდების ორი წყვილის გადაკვეთის წერტილებზე გადის, მაშინ შესაბამისი წვეროების შემართებული წრფეები იკვეთება ერთ წერტილში ან პარალელურია (სურ. 31).



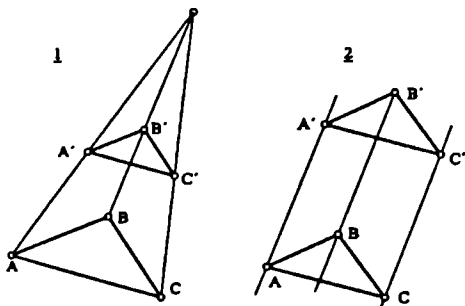
სურ. 31

2. თუ ერთი სამკუთხედის ყოველი გვერდი მეორე სამკუთხედის შესაბამისი გვერდების პარალელურია, მაშინ შესაბამისი წვეროების შემართებული წრფეები იკვეთება ერთ წერტილში ან პარალელურია (სურ. 32,1,2).

31-ე სურათზე გამოსახულია ABC და $A'B'C'$ ორი სამკუთხედი, რომელთა შესაბამისი AB და $A'B'$ გვერდები იკვეთება P წერტილში, BC და $B'C'$ გვერდები Q წერტილში. ხოლო AC და $A'C'$ გვერდები PQ წრფის პარალელურია, რაც პროექციული გეომეტრიის თვალსაზრისით, ნიშნავს, რომ ისინი იკვეთება AC , $A'C'$ და PQ წრფეების საერთო არასაკუთრივ წერტილში (R_∞). ანუ პროექციულ სიბრტყეებზე შესრულებულია ღებარგის შებრუნებული თეორემის პირობა: შესაბამისი წრფეები AB და $A'B'$, BC

და $B'C'$, AC და $A'C'$ იკვეთება P, Q და R წერტილებში, რომლებიც ერთ PQ წრფეზე (პერსპექტივის ღერძზე) მდებარეობს. ამიტომ, შესაბამისი წვეროების შემართებული AA', BB', CC' წრფეები იკვეთება ერთ S წერტილში (პერსპექტივის ცენტრში). მეტრულ სიბრტყეში, სადაც არ არსებობს არასაკუთრივი R წერტილი ეს შემთხვევა სპეციალური ფორმულირებით არის ჩამოყალიბებული. იმ შემთხვევაში, თუ AA' და BB' წრფეები პარალელურია, მაშინ CC' წრფეც მათი პარალელური იქნება ანუ შესაბამისი წვეროების შემართებული წრფეები არასაკუთრივ S წერტილზე გადაიკვეთება.

მეორე წინადადების თანახმად (სურ. 32), სამკუთხედების გვერდები ურთიერთპარალელურია: $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, $CB \parallel C'B'$ ანუ იკვეთება არასაკუთრივ წრფეზე მდებარე წერტილებზე. მაშინ ღეზარგის თეორემის თანახმად, შესაბამისი წვეროების შემართებული წრფეები გადაიკვეთება ერთ S წერტილში (სურ. 32,1) ან პარალელურია (სურ. 32,2).



სურ. 32

პირველ წინადადებაში ცვლილება გამოწვეულია ვარაუდით, რომ შესაბამისი გვერდების ერთი წყვილის გადაკვეთის წერტილი არასაკუთრია, მეორე წინადადებაში შესაბამისი გვერდების ორი წყვილი (და მაშასადამე, მესამე წყვილიც) იკვეთება არასაკუთრივ წერტილებში.

ეს მაგალითები კიდევ ერთხელ გვიჩვენებს პროექციული გეომეტრიის თეორემების სიმარტივეს და ერთობას: ერთი და იგივე პროექციული თეორემა წარმოქმნის სხვადასხვა მეტრულ თეორემას, რაც დაკავშირებულია მეტრულ სიბრტყეზე არასაკუთრივი ელემენტების არარსებობასთან.

მეოთხე ტაში. პროექციული შესაბამისობა პირველი საფეხური სახეებს შორის

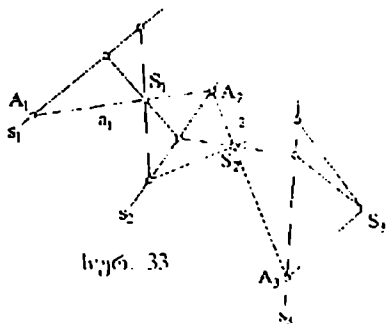
4.1. ძირითადი თეორემა. პროექციული შესაბამისობის განსაზღვრა

პროექციული გეომეტრიის ფუნდამენტური ცნება პროექციული შესაბამისობის ცნებაა. როგორც უკვე აღვნიშნეთ (1.4), ერთი ფიგურის მხარე ფიგურაზე პროექციული ასახვის მნიშვნელოვანი კერძო სახე ცენტრალური დაგეგმილებაა, რომელიც ერთი სიბრტყის კუთვნილ ფიგურას აგეგმილებს მხარე სიბრტყეში პროექციულად შესაბამის ფიგურაზე. ამიტომ, დაგეგმილება შეიძლება გასაზიადო, როგორც პროექციულად შესაბამისი ფიგურების კონსტრუქციული აგების ხერხი.

განვიხილოთ დაგეგმილებებისა და კუთვების ჯაჭვი. დაუშვათ, $S_1(A_1)$ არის A_1, B_1, C_1 წერტილთა მწკრივი S_1 წრფეზე. დაგეგმილი იგი S_1 ცენტრიდან და S_1 მწკრივის ნებისმიერ A_1 წერტილს შევუსაბამოთ მისი მაგეგმილებელი a_1 სხივი (ხურ. 33). შედგება მივიღებთ $S_1(a_1)$ წრფეთა კონას, რომელიც S_1 მწკრივის პროექციულად შესაბამისი იქნება, თანაც მწკრივის ყოველი წერტილი და მისი შესაბამისი სხივი ინციდენტური იქნება. პროექციული ფიგურების შესაბამისი ელემენტების ასეთ განლაგებას პერსპექტიული ეწოდება, ხოლო შესაბამის ფიგურებს პერსპექტიულად შესაბამისი, ე.ი. წერტილთა $S_1(A_1)$ მწკრივი $S_1(A_1)$ წრფეთა კონის პერსპექტიულია. ეს ასე ჩაიწერება:

$$S_1(A_1) \bar{\wedge} S_1(a_1).$$

$S_1(a_1)$ წრფეთა კონა რომელიც S_2 წრფით გადაკვეთით და კონის ნებისმიერ a_1 სხივს შევუსაბამოთ მისი გადაკვეთის



Λ_2 წერტილი წრფესთან. ამ შემთხვევაშიც შესაბამისი ელემენტები ერთმანეთის ინციდენტურია (კუთვნილია) და პროექციულად შესაბამისი $S_1(a_1)$ კონას და $S_2(a_1)$ წრფეს პერსპექტიული განლაგება აქვს ანუ პერსპექტიულობა

$$S_1(a_1) \bar{\wedge} S_2(\Lambda_1).$$

ასე განისაზღვრება პერსპექტიულობის ცნება პირველი საფეხურიის სხვადასხვა სახეობას შორის. შეიძლება ვთქვათ, რომ დაგვიძლება წერტილთა მწკრივის შეუსაბამებს მის პერსპექტიულ კონას, ხოლო კვითა შეუსაბამებს კონას მის პერსპექტიულ მწკრივს.

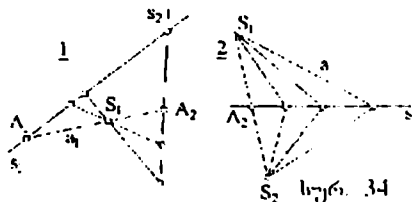
დავგვიძლებისა და კვეთის მეტ-ნაკლებად გრძელი ჯაჭვით წერტილთა s_1 მწკრივის შეუსაბამოთ წერტილთა ახალი მწკრივები და წრფეთა კონები.

თუ ჯაჭვი ერთი დაგვიძლებისა და ერთი კვეთისაგან შედგება (სურ. 34.1), მივიღებთ პროექციულად შესაბამისი $s_1(\Lambda_1)$ და $s_2(\Lambda_2)$ წერტილთა მწკრივებს, რომელთა შესაბამისი წერტილების წყვილები (მაგალითად, Λ_1 და Λ_2) ერთ წერტილზე (პერსპექტივის S ცენტრზე) გამავალ წრფეებზე მდებარეობს. ამბობენ, რომ ასეთი ორი მწკრივი პერსპექტიულად განლაგებულია ან ცენტრულად პერსპექტიულია ანუ ცენტრულად პერსპექტიული s_1 და s_2 წრფეები ერთი $S_1(a_1)$ კონის კვეთებია. შეიძლება ითქვას, რომ პერსპექტიული წრფეები მიიღება ერთი წრფის დაგვიძლებით მეორე წრფეზე, რაც ასე ჩაიწერება:

$$s_1(\Lambda_1) \stackrel{S_1}{\bar{\wedge}} s_2(\Lambda_2).$$

ანალოგიურად, ერთი კვეთით და ერთი დაგვიძლებით (სურ. 34.2) ორ პერსპექტიულ $S_1(a_1)$ და $S_2(a_2)$

კონას მივიღებთ, რომელთა შესაბამისი სხივების წყვილები (მაგალითად, a_1 და a_2) აგვიძლებს ერთ წერტილთა მწკრივს ანუ



სურ. 34

ერთ წრეზე, პერსპექტივის ღერძზე მდებარე წერტილებში იკვეთება. მივიღებთ ღერძულ პერსპექტივას

$$S_1(a_1) \bar{\wedge} S_2(a_2).$$

ასე განისაზღვრება პერსპექტიულობის ცნება პირველი საფეხურის ერთი და იგივე სახეობათა შორის.

ვთქვათ, დაგეგმვალების და კვეთების ჯაჭვით მივიღეთ $S_1(A_1)$ მწკრივის პროექციულად შესაბამისი მწკრივები და კონები, რომლებიც დაკავშირებულია ერთმანეთთან პერსპექტიულ შესაბამისობათა ჯაჭვით (სურ. 33):

$$S_1(A_1) \bar{\wedge} S_1(a_1) \bar{\wedge} S_2(A_2) \bar{\wedge} S_2(a_2) \wedge S_3(A_3) \bar{\wedge} S_3(a_3) \text{ და ა.შ.}$$

პირველი საფეხურის ორ სახეს პროექციული ეწოდება, თუ ისინი დაკავშირებულია პერსპექტიულ შესაბამისობათა ჯაჭვით.

პროექციული ფიგურების ეს განსაზღვრა პინსელეს ეკუთვნის.

ამ ჯაჭვში $S_1(A_1)$ მწკრივი $S_1(a_1)$ კონის და $S_2(A_2)$ მწკრივის პერსპექტიულია, მაგრამ $S_2(a_2)$ კონის მხოლოდ პროექციული, რადგან მათი შესაბამისი ელემენტების პერსპექტიული განლაგების პირობები დარღვეულია და ისინი მხოლოდ პროექციულად შესაბამისია.

პროექციული შესაბამისობა $\bar{\wedge}$ სიმბოლოთი აღინიშნება:

$$S_1(A_1) \bar{\wedge} S_2(a_2), \quad S_1(A_1) \quad S_3(A_3) \text{ და ა.შ.}$$

აქედან გამომდინარე, პროექციული წრეების მიღება შესაძლებელია ორი პერსპექტიული შესაბამისობის ჯაჭვით.

მართლაც, რადგან $S_1(A_1) \stackrel{S_1}{\wedge} A_1(A_1) \wedge A_1(A_1)$, ამიტომ,

$$S_1(A_1) \bar{\wedge} S_1(A_1).$$

შეგახსენებთ, რომ S_1 , S_2 , S_3 წრეები პროექციულად ეკვივალენტურია (განურსველია), რადგან ისინი პროექციული შესაბამისობით (მაგალითად, ცენტრალური დაკავშირებით) ერთმანეთზე აისახება.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ოთხი წერტილის რთული ფარ-
დობა დაგვემძღვებინ ინვარიანტია. ანუ თუ s_1 და s_2 წრფეების
პროექციული შესაბამისობა დამყარებულია დაგვემძღვებინათა ჯაჭვით
და A_1, B_1, C_1, D_1 არის s_1 წრფის ნებისმიერ წერტილთა ოთხეული,
ხოლო A_2, B_2, C_2, D_2 მათი სახეები s_2 წრფეზე, მაშინ
 $(A_1, B_1, C_1, D_1) = (A_2, B_2, C_2, D_2)$. ანალოგიური თვისება აქვს პერსპექ-
ტივითა ჯაჭვით დაკავშირებულ ორ კონას (მაგალითად, S_1 და
 S_2) ან მწკრივს და კონას (მაგალითად, $s_1(A_1)$ მწკრივს და $S_2(m_2)$
კონას).

ამრიგად, პირველი საფეხურის ორი სახის ელემენტების
რთული ფარდობების ტოლობა არის მათი პროექციულობის მახ-
ასიათებელი თვისება.

პირველი საფეხურის ერთი სახის ასახვას მეორეზე, რომელიც
პერსპექტივითა ჯაჭვით მიიღება, პონსელეს პროექციული უწოდა.
ამ განსაზღვრას ზოგადი ჩასიათი აქვს და დაკავშირებულია გარკ-
ვეულ კონსტრუქციულ სქემასთან, რაც მის გამოყენებას ზღუდავს.
გერმანელმა მეცნიერმა იაკობ შტაინერმა ფიგურების პროექციული
შესაბამისობა განსაზღვრა მათი შინაგანი თვისებით, რომელიც
ინვარიანტულია დაგვემძღვებინ მიმართ:

პირველი საფეხურის ერთი სახის ასახვას მეორეზე პროექცი-
ული ეწოდება, თუ ის ინარჩუნებს ოთხი ნებისმიერი ელემენტის
რთულ ფარდობას.

ორი წრფისათვის ეს განსაზღვრა ასე ელერს:

ერთი წრფის ასახვას მეორეზე პროექციული ეწოდება, თუ ის
ინარჩუნებს ოთხი ნებისმიერი წერტილის რთულ ფარდობას.

ეს ასე ჩაიწერა: $s_1(A_1, B_1, C_1, D_1) \wedge s_2(A_2, B_2, C_2, D_2)$ და ნიშნავს იმ-
ას, რომ შესაბამისი წერტილთა წყვილებია $A_1 \rightarrow A_2, B_1 \rightarrow B_2$,
თანაც $(A_1, B_1, C_1, D_1) = (A_2, B_2, C_2, D_2)$.

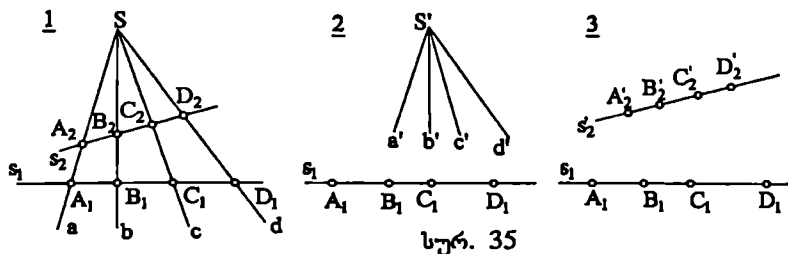
პონსელეს განსაზღვრა უფრო მარტივია და ვიწრო: ის პირდა-
პირ მოუთითებს, როგორ ავაგოთ პროექციული სახეები. ამ თვალ-
საზრისით, მას შეიძლება კონსტრუქციული ეწოდოს. შტაინერის

განსაზღვრა კონსტრუქციული არ არის: ის არ იძლევა არავითარ მითითებებს პროექციული სახეების აგების შესახებ.

პროექციულად შესაბამისი პირველი საფეხურის სახეების მიღება პერსპექტივათა ჯაჭვის გამოყენების გარეშეც ადვილად შეიძლება წარმოვიდგინოთ.

ვთქვათ, $s_1(A_1, B_1, \dots)$ წერტილთა მწკრივის და $S(a, b, \dots)$ წრფეთა კონის შესაბამის ელემენტებს პერსპექტიული განლაგება აქვს (სურ. 35,1) ანუ $A_1 \in a, B_1 \in b$, დავარღვიოთ მათი პერსპექტიულობა ანუ დავარღვიოთ მათი შესაბამისი ელემენტების ინციდენტურობა, ვთქვათ, S კონის რაიმე კონგრუენტული გადაადგილებით (მაგალითად, პარალელური გადატანით) (სურ. 35,2). ასეთ შემთხვევაში s_1 მწკრივის $A_1, B_1, \dots$ წერტილებისა და S' კონის $a', b', c', \dots$ სხივების ურთიერთცალსახა შესაბამისობა არ დაირღვევა: s_1 მწკრივის ყოველ წერტილს S კონის ერთადერთი შესაბამისი სხივი ექნება, თანაც შესაბამისი ელემენტების რთული ფარდობა არ დაირღვევა, ე.ი. $s_1(A_1, B_1, \dots) \bar{\wedge} S'(a', b', \dots)$. ანალოგიურად, თუ დავარღვევთ s_1 და s_2 მწკრივების პერსპექტიულობას (სურ. 35,3), მაშინ შესაბამის წერტილთა წყვილებზე გამავალი წრფეები ერთ წერტილში აღარ გადაიკვეთება და მივიღებთ პროექციულად შესაბამის s_1 და s'_2 წერტილთა მწკრივებს ანუ

$$s_1(A_1, B_1, \dots) \bar{\wedge} s'_2(A'_2, B'_2, \dots) \quad (\text{სურ. 35,3}).$$



სურ. 35

გარდა ამისა, პროექციულად შესაბამის წრფეებს ადვილად წარმოვიდგენთ, თუ განვიხილავთ კონსტრუქციას (სურ. 36,1),

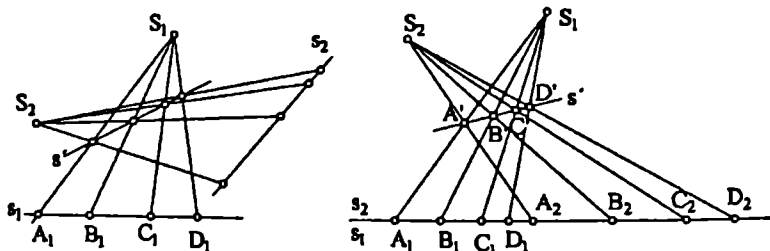
სადაც s_1 და s_2 წრფეების პროექციული შესაბამისობა დამყარებულია s' წრფის ბიცენტრალური დაგეგმილებით ამ წრფეებზე S_1 და S_2 ცენტრებიდან. მართლაც, რადგან $s_1 \bar{\wedge} s' \bar{\wedge} s_2$, ამიტომ $s_1 \bar{\wedge} s_2$. წერტილთა ორი მწკრივის პროექციული შესაბამისობა ასეთივე წესით შეიძლება დამყარდეს ერთ წრფეზე მდებარე ორ წერტილთა მწკრივის წერტილებს შორის (სურ. 36,2) ანუ $s_1(A_1, B_1, \dots) \bar{\wedge} s_2(A_2, B_2, \dots)$.

განვიხილოთ პროექციული შესაბამისობის თვისებები.

პირველ რიგში გავარკვიოთ ერთი მნიშვნელოვანი საკითხი: რა უნდა იყოს მოცემული იმისათვის, რომ დამყარდეს ორი ფიგურის პროექციული შესაბამისობა დაგეგმილებათა ჯაჭვის გამოყენების გარეშე?

პასუხს ამ კითხვაზე იძლევა შტაუდტის თეორემა, რომელსაც, მისი მნიშვნელობის გამო, პროექციული გეომეტრიის ძირითადი თეორემა ეწოდა.

ორი წრფის პროექციული შესაბამისობა დამყარებულია, თუ მოცემულია ნებისმიერად შერჩეული შესაბამის წერტილთა სამი წყვილი.



სურ. 36

ვთქვათ, s_1 და s_2 ორი წრფის პროექციული შესაბამისობა დამყარებულია შესაბამის წერტილთა სამი წყვილით: $A_1 \rightarrow A_2$, $B_1 \rightarrow B_2$, $C_1 \rightarrow C_2$:

$$S_1(A_1 B_1 C_1) \bar{\wedge} s_2(A_2 B_2 C_2).$$

ორი წრფის პროექციული შესაბამისობა დამყარებულად ითვლება, თუ ერთი წრფის ნებისმიერი წერტილისათვის შესაძლებელია ავაგოთ მისი შესაბამისი ერთადერთი წერტილი მეორე ან იგივე წრფეზე.

პროექციული შესაბამისობის შტაინერისეული განსაზღვრით, ორი პროექციული წრფის შესაბამის წერტილთა ნებისმიერი ხეულისათვის უნდა ხრეულდებოდეს ტოლობა:

$$(A_1 B_1 C_1 D_1) \wedge (A_2 B_2 C_2 D_2) \quad (1)$$

აღვილად დავრწმუნდებით, რომ ძირითად თეორემაში მოთხოვნილი მონაცემებით ეს ტოლობა შესრულდება.

მართლაც, რადგან თეორემის პირობის თანახმად, $A_1 B_1 C_1$ და $A_2 B_2 C_2$ წერტილები მოცემულია, ამიტომ (1) ტოლობიდან ნებისმიერი $D_1 \in s_1$ მეოთხე წერტილისათვის ცალსახად განისაზღვრება მისი შესაბამისი $D_2 \in s_2$ ერთადერთი წერტილი (სურ. 37). ამრიგად, ასეთი პროექციული შესაბამისობის ერთადერთობა დადგენილია ძირითადი თეორემით.

ახლა დავედგინოთ ასეთი შესაბამისობის არსებობა.

როგორც აღვნიშნეთ, პერსპექტივათა ჯაჭვი არ ცვლის ოთხი წერტილის რთულ ფარდობას. თურმე პირიქითაც, თუ ერთი წრფის რომელიმე ასახვა მეორე წრფეზე ინარჩუნებს ნებისმიერი ოთხი წერტილის რთულ ფარდობას, ამ ასახვის რეალიზება შესაძლებელია პერსპექტივათა ჯაჭვის მეშვეობით. მართლაც, რა-

$$s_1: \begin{array}{c} A_1 \quad B_1 \quad C_1 \quad D_1 \\ \hline \end{array}$$

$$A_2 \quad B_2 \quad C_2 \quad D_2$$

გორც უკვე დავრწმუნდით, s_1 წრფის პროექციული ასახვა s_2 წრფეზე შესაძლებელია განვახორციელოთ ორი პერსპექტივის მეშვეობით (სურ. 36). დავამტკიცოთ, საბო-

სურ. 37

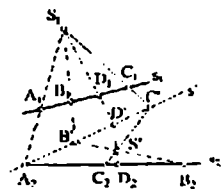
რისპიროც: $s_1(A_1 B_1 C_1)$ და $s_2(A_2 B_2 C_2)$ ორი

პროექციული წრფით განისაზღვრება მათი დამაკავშირებელი ორი პერსპექტიული შესაბამისობა, თანაც ერთი წრფის სამი წერტილი აისახება მეორე წრფის ნებისმიერ წინასწარ მოცემულ სამ წერტილზე. მართლაც, ვთქვათ, s_1 და s_2 ორი პროექციული წრფის

შესაბამისობა მოცემულია შესაბამის წერტილთა სამი წყვილით (ხურ. 38):

$$A_1 \rightarrow A_2, B_1 \rightarrow B_2, C_1 \rightarrow C_2$$

$$s_1(A_1 B_1 C_1) \bar{\wedge} s_2(A_2 B_2 C_2)$$



სურ. 38

ცენტრიდან დაგვემოსილება s წრეის A_2, B_2, C_2 წერტილებზე. მოვნიშნოთ $B_2 B_2$ და $C_2 C_2$ წრეების გადაკვეთის S' წერტილი.

$$s_1(A_1 B_1 C_1) \stackrel{S_1}{\wedge} (A_2 B_2 C_2) \stackrel{S'}{\wedge} (A_2 B_2 C_2).$$

$$\text{საიდანაც } s_1(A_1 B_1 C_1) \wedge s_2(A_2 B_2 C_2)$$

ე.ი. s_1 წრეის პროექციული ასახვა s_2 წრეეზე, რომელიც მოცემული იყო შესაბამის წერტილთა სამი წყვილით, მოვახდინეთ ორი პერსპექტიული ასახვით: ჯერ s_1 წრეე ავსახეთ s' წრეეზე S_1 ცენტრიდან, შემდეგ s' წრეე s_2 წრეეზე S_2 ცენტრიდან.

ორი პროექციულად შესაბამისი წრეით განისაზღვრება მათი დამაკავშირებელი ორი პერსპექტიული შესაბამისობა.

და პირიქით.

ორი წრეის პროექციული ასახვა განისაზღვრება ორი პერსპექტიული ასახვით.

ამით პროექციული შესაბამისობის კონსტრუქცია გარკვეულია. ის ბევრად უფრო მარტივია, ვიდრე ვეარაუდოდით. ეს კონსტრუქცია იძლევა პროექციულად შესაბამის წერტილთა ნებისმიერი წყვილის აგების ხერხს ორი წრეის პროექციულ შესაბამისობაში. მაგალითად, 38-ე სურათზე აგებულია $D_1 \in s_1$ ნებისმიერი წერტილის შესაბამისი $D_2 \in s_2$ წერტილი.

უნდა აღვნიშნოთ, რომ შტაუდტის თეორემა იმსახურებს პროექციული გეომეტრიის ძირითადი თეორემის შეფასებას, რად-

გან ხსნის პროექციული გეომეტრიის განვითარების ყველაზე ბუნებრივ გზას და შესაძლებლობას იძლევა შესაბამის წერტილთა სამი წყვილით მოცემული პროექციული შესაბამისობა მივიღოთ კონსტრუქციულად, როგორც პროექციულ (პერსპექტიულ) შესაბამისობათა კომპოზიცია და დავაკავშიროთ პროექციული შესაბამისობის პონსელეს და შტაინერის განსხვავებული განსაზღვრებები: შტაინერის მიხედვით პროექციული სახეები ყოველთვის პროექციულებია პონსელეს მიხედვითაც.

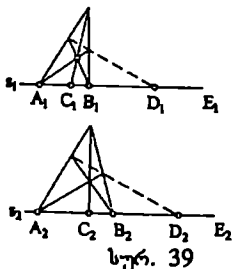
დავუბრუნდეთ შტაინერის მიერ პროექციული შესაბამისობის განსაზღვრას. განსაზღვრას საფუძვლად უდევს ოთხი ელემენტის რთული ფარდობა, რომელიც შეიცავს პროექციული გეომეტრიისათვის მიუღებელ მეტრულ ცნებას – მონაკვეთების სიგრძეების გაზომვას. მონაკვეთის სიგრძე პროექციულ გეომეტრიაში არ განიხილება, რადგან ის არ არის ინვარიანტული პროექციული გარდაქმნების (მაგალითად, ცენტრალური დაგეგმილების) მიმართ. გერმანელმა გეომეტრმა შტაულტმა ჩამოაყალიბა პროექციული შესაბამისობის ახალი განსაზღვრა, რომელიც შტაინერის განსაზღვრის ეკვივალენტური იყო, მაგრამ არ ეყრდნობოდა მეტრულ ცნებებს და ახასიათებდა პროექციულ შესაბამისობას მისი შინაგანი პროექციული თვისებებით. ორი სხვადასხვა განსაზღვრის ეკვივალენტურობა ნიშნავს, რომ თუ S_1 წრფე პროექციულად შეესაბამება S_2 წრფეს და ნებისმიერი $A_1 \in S_1$ წერტილი აისახება $A_2 \in S_2$ წერტილზე შტაინერის მიხედვით, იგივეს ექნება ადგილი შტაულტის მიხედვითაც და პირიქით. შტაულტი ერთი წრფის მეორე წრფეზე პროექციული ასახვის განსაზღვრაში ითხოვდა არა ნებისმიერ წერტილთა ოთხეულის, არამედ მხოლოდ კარმონიულ წერტილთა ოთხეულის რთული ფართობის შენარჩუნებას, რომელიც არ შეიცავს მეტრულ ცნებებს (3.2).

შტაულტმა პროექციული ასახვა ასე განსაზღვრა:

ერთი წრფის ასახვას მეორე წრფეზე პროექციული ეწოდება, თუ ერთი წრფის ყოველ პარმონიულ წერტილთა ოთხეულს შეესაბამება მეორე წრფის პარმონიულ წერტილთა ოთხეული.

ცხადია, შტაუდტის მიერ ჩამოყალიბებული ორი წრფის პროექციული შესაბამისობაც შეიძლება იყოს დამყარებული პროექციული გეომეტრიის ძირითადი თეორემის თანახმად, შესაბამის წერტილთა სამი წყვილით: $A_1 \rightarrow A_2, B_1 \rightarrow B_2, C_1 \rightarrow C_2$. წრფეებს შორის ასეთნაირად დამყარებული პროექციული შესაბამისობის არსებობაში უკვე დავრწმუნდით. შესაბამის წერტილთა მეოთხე და ყოველი მომდევნო წყვილების აგება სრულდება დაგეგმილებათა ჯაჭვის გარეშე და წრფის ნებისმიერი ოთხი წერტილის რთული ფარდობის მეტრული გამოთვლების გარეშე, მხოლოდ პროექციული ხასიათის ცნების – ოთხი პარმონიული წერტილის დახმარებით.

ვთქვათ, s_1 და s_2 წრფის პროექციული შესაბამისობა მოცემულია შესაბამის წერტილთა სამი წყვილით: $A_1 \rightarrow A_2, B_1 \rightarrow B_2, C_1 \rightarrow C_2$ (სურ. 39). შესაბამის წერტილთა ყოველი მეოთხე წყვილი ასე მიიღება: s_1 წრფეზე ვაგებთ A_1, B_1, C_1 წერტილების D_1 მეოთხე პარმონიულ წერტილს. მას s_2 წრფეზე შეესაბამება A_2, B_2, C_2 წერტილთა სამეულისათვის აგებული მეოთხე პარმონი-



სურ. 39

ული D_2 წერტილი. შემდეგ ვაგებთ E_1 მეოთხე პარმონიულ წერტილს უკვე A_1, B_1, D_1 წერტილთა სამეულისათვის. E_1 წერტილს შეესაბამება მისი ანასახი – E_2 მეოთხე პარმონიული წერტილი A_2, B_2, D_2 წერტილებისათვის და ა.შ. ასე განისაზღვრება s_1 წრფეზე წერტილთა თვლადი

სიმრავლე, ხოლო s_2 წრფეზე – მათი ანასახების თვლადი სიმრავლე. მაგრამ პროექციული გეომეტრიის III ჯგუფის უწყვეტობის აქსიომით გარანტირებულია s_2 წრფეზე ანასახის არსებობა s_1 წრფის ნებისმიერი წერტილისათვის. მართლაც, ამ აქსიომის მიხ-

ედვით, თუ AB მონაკვეთის X და Y ორი წერტილისათვის სრულდება პირობა $AY \div BX$, მაშინ AB მონაკვეთზე არსებობს ისეთი M წერტილი, რომ $AM \div XY$, $BM \div XY$ (სურ. 40). ამრიგად, ყოველი მონაკვეთისათვის, უწყვეტობის აქსიომის თანახმად, M წერტილის არსებობა უზრუნველყოფს პროექციულ წრფეზე წერტილთა სიმრავლის არათელადობას ანუ უწყვეტობას. ე.ი. პროექციული წრფის წერტილებს შორის არ არსებობს სიცარიელე და ისინი მჭიდროდ ფარავს მთელ წრფეს. ამიტომ შევიძლია ვთქვათ, რომ ერთი პროექციული წრფის ასახვა მეორე (ან იგივე) წრფეზე უწყვეტია.



სურ. 40

პროექციულ შესაბამისობას კიდევ ერთი თვისება აქვს – ის ეკუთვნის დალაგებულ შესაბამისობებს.

ერთი წრფის წერტილების ასახვას მეორე (ან იგივე) წრფის წერტილებზე ეწოდება დალაგებული, თუ ის არ ცვლის (ინარჩუნებს) მიმართულებებს.

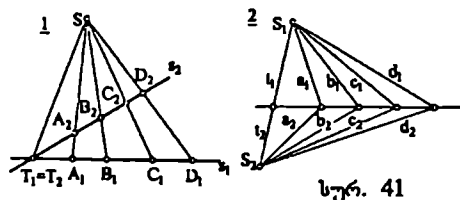
ვთქვათ, ორი წრფის წერტილებს შორის დამყარებულია ურთიერთცალსახა შესაბამისობა ისე, რომ ერთი წრფის ყოველ M წერტილს შეესაბამება მეორე (ან იგივე) წრფის გარკვეული M' წერტილი. ერთ წრფეზე M წერტილის გადაადგილებისას M' წერტილიც გადაადგილდება მეორე (ან იგივე) წრფეზე. ამასთან, შესაბამისობას დალაგებული ეწოდება, თუ აღმოჩნდება, რომ იმ შემთხვევაში, როდესაც M წერტილი ერთი მიმართულებით მოძრაობისას შემოწერს მთელ წრფეს, M' წერტილიც ერთი რომელიმე გარკვეული მიმართულებით გადაადგილდება და შემოწერს მთელ წრფეს. თუ M და M' წერტილები მოძრაობს ერთი და იგივე მიმართულებით, შესაბამისობას ეწოდება პირდაპირი ტიპის, ხოლო თუ შესაბამისი წერტილების მოძრაობა საწინააღმდეგო მიმართულებისაა – შებრუნებული ტიპის.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ცენტრალური დაგეგმილება ინარჩუნებს წერტილთა წყვილების გაყოფას, ხოლო წყვილების გაყოფის

შენარჩუნება ნიშნავს მიმართულების შენარჩუნებას. რადგან პროექციული გარდაქმნა განვიხილეთ, როგორც დაგეგმილებათა ჯაჭვის შედეგი, ამიტომ, პროექციული გარდაქმნაც ინარჩუნებს წრფეზე წერტილების ციკლურ დალაგებას და მიმართულებას ანუ პროექციული გარდაქმნა ეკუთვნის დალაგებულ გარდაქმნებს. ამრიგად, პროექციული გარდაქმნები განისაზღვრება შესაბამისი ელემენტების სამი წყვილით და ეკუთვნის უწყვეტ და დალაგებულ გარდაქმნებს.

4.2. პერსპექტიული განლაგება. შესაბამისი ელემენტების აგება

უკვე განვიხილეთ ორი S_1 და S_2 წრფის პროექციული შესაბამისობის კერძო შემთხვევა, როდესაც შესაბამის წერტილთა წყვილები მდებარეობს ერთ წერტილში (პერსპექტივის ცენტრში) გამავალ წრფეებზე ანუ, როდესაც S_1 და S_2 წრფეები პერსპექტიულია (სურ. 41,1). შეგვიძლია ვთქვათ, რომ პერსპექტიული წრფეები ერთი კონის კვეთებია. ისიც აღვნიშნეთ, რომ ყოველი



სურ. 41

პერსპექტიული შესაბამისობა პროექციულია, მაგრამ ყოველი პროექციული შესაბამისობა არ არის პერსპექტიული.

შეიძლება თუ არა, ორ პროექციულ წრფეს პერსპექტიული განლაგება მივცეთ? ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა შემდეგი თეორემა:

ორი პროექციული წრფის პერსპექტიულობის (პერსპექტიული განლაგების) აუცილებელი და საკმარისი პირობაა, რომ მათი საერთო წერტილი ორმაგი იყოს (თავის თავს უნდა შეესაბამებოდეს).

ორი პროექციული კონის პერსპექტიულობის (პერსპექტიული განლაგების) აუცილებელი და საკმარისი პირობაა, რომ მათი საერთო წრფე ორმაგი იყოს (თავის თავს უნდა შეესაბამებოდეს).

ამ ორი თეორემიდან საკმარისია დავამტკიცოთ მხოლოდ ერთი, რადგან მეორე თეორემის მართებულობა უზრუნველყოფილი იქნება მცირე ორადლობის პრინციპით.

დავამტკიცოთ პირველი თეორემა.

თეორემაში მოთხოვნილი პირობის აუცილებლობა მარტივად მტკიცდება.

ვთქვათ, $s_1(A_1, B_1, C_1) \bar{\wedge} s_2(A_2, B_2, C_2)$. s_1 და s_2 წრფეების ნებისმიერი ორი შესაბამისი წერტილი მდებარეობს S კონის ერთ წრფეზე. T_2 წერტილი, რომელიც $T_1 = s_1 \cap s_2$ წერტილს შეესაბამება, უნდა მდებარეობდეს როგორც s_2 წრფეზე, ასევე ST_1 წრფეზე. მაგრამ ST_1 წრფე კვეთს s_2 წრფეს T_2 წერტილში. მაშასადამე, $T_2 = T_1$ (სურ. 41,1). ამრიგად, s_1 და s_2 წრფეების გადაკვეთის წერტილი თავის თავს შეესაბამება ანუ ამ შესაბამისობის ორმაგი წერტილია. ამრიგად, ორი წრფის პერსპექტიულ შესაბამისობაში ყოველთვის არსებობს ერთი ორმაგი წერტილი.

დავამტკიცოთ თეორემაში მოთხოვნილი პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, s_1 და s_2 წრფეების პროექციული შესაბამისობა დამყარებულია შემდეგნაირად:

$s_1(A_1, B_1, T_1) \bar{\wedge} s_2(A_2, B_2, T_2)$ ანუ $A_1 \rightarrow A_2, B_1 \rightarrow B_2, T_1 \rightarrow T_2$, თანაც $T_2 = T_1$ ანუ T_1 და T_2 შესაბამის წერტილთა წყვილი შეთავსებულია.

აღვნიშნოთ S წერტილით s_1 და s_2 წრფეების შესაბამისი A_1 და A_2 , B_1 და B_2 წერტილების შემაერთებული წრფეების გადაკვეთის წერტილი. მაშინ S ცენტრის მქონე s_1 და s_2 წრფეების პერსპექტივაში $A_1 \rightarrow A_2, B_1 \rightarrow B_2, T_1 \rightarrow T_2$. მაგრამ იგივე შესაბამის წერტილთა წყვილების სამეულით ცალსახად განისაზღვრება s_1 და s_2 წრფეთა პროექციული შესაბამისობა. პროექციული გეომე-

ტრიის ძირითადი თეორემის თანახმად, ეს შესაბამისობები არ შეიძლება განსხვავდებოდეს. აქედან გამომდინარეობს, რომ მოცემული შესაბამისობა, სადაც $T_2 = T_1$, არის s_1 წრფის პერსპექტიული ასახვა s_2 წრფეზე. ამრიგად, ორ პროექციულ წრფეს ყოველთვის შეიძლება მივცეთ პერსპექტიული განლაგება შესაბამის წერტილთა ნებისმიერი წყვილის შეთავსებით.

ორადი წინადადება შემდეგია:

ორ პროექციულ კონას ყოველთვის შეიძლება მივცეთ პერსპექტიული განლაგება რომელიმე შესაბამის წრფეთა წყვილის შეთავსებით.

ვაჩვენოთ, რომ ორი პერსპექტივის გამოყენებით ადვილად შევძლებთ შესაბამის წერტილთა სამი წყვილით განსაზღვრულ პროექციულ შესაბამისობაში მეოთხე და ყველა მომდევნო შესაბამის წერტილთა წყვილების აგებას.

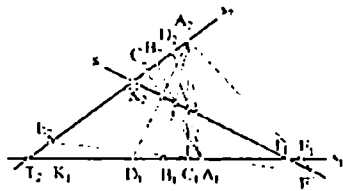
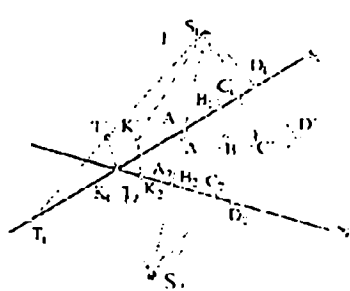
ვთქვათ, მოცემულია ორი პროექციული წრფე:

$$s_1(A_1, B_1, C_1) \bar{\wedge} s_2(A_2, B_2, C_2).$$

ნებისმიერი $D_1 \in s_1$ წერტილისათვის ავაგოთ შესაბამისი $D_2 \in s_2$ წერტილი პერსპექტიული შესაბამისობის გამოყენებით. ამ მიზნით შევაერთოთ რომელიმე შესაბამის წერტილთა წყვილი. მაგალითად, A_1 და A_2 . A_1A_2 წრფეზე მოვნიშნოთ S_1 და S_2 წერტილები (სურ. 42,1). $S_1(A_1, B_1, C_1) \bar{\wedge} S_2(A_2, B_2, C_2)$ პროექციული კონები პერსპექტიულია, რადგან ამ კონების S_1A_1 და S_2A_2 სხივები შევათავსეთ ერთმანეთთან ანუ S_1S_2 წრფე ორმაგია. ამის გამო, S_1 და S_2 კონების ყველა შესაბამისი სხივი გადაიკვეთება პერსპექტივის s' ღერძზე, რომელიც განისაზღვრა S_1B_1 და S_2B_2 , S_1C_1 და S_2C_2 შესაბამის სხივთა წყვილების გადაკვეთის B' და C' წერტილებით. ამ პერსპექტივაში S_1D' წრფეს შეესაბამება S_2D' წრფე. მაშინ ნებისმიერი $D_1 \in s_1$ წერტილის შესაბამისი $D_2 \in s_2$ წერტილის აგება ნახაზიდან გასაგებია: s_1 და s' წრფეების პერსპექტივის გამოყენებით ავაგოთ D_1 წერტილის შესაბამისი D' წერტილი, ხოლო s_2 და s' წრფეების პერსპექტივის გამოყენებით – D' წერ-

ტილის შესაბამისი D_2 წერტილი. ე.ი. $D_1 \bar{\wedge} D' \bar{\wedge} D_2$, ასიტომ $D_1 \bar{\wedge} D_2$.

ნახაზზე აგებულია S_1 და S_2 წრეების საერთო $K_1 \equiv T_2$ წერტილის შესაბამისი K_2 და T_1 წერტილები. განვიხილოთ ორი პროექციული წრფის შესაბამის წერტილთა წყვილების აგების კიდევ ერთი მაგალითი.



ხურ. 42

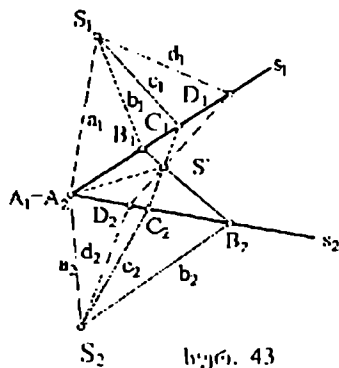
გთქვამთ, $s_1(A_1, B_1, C_1) \wedge s_2(A_2, B_2, C_2)$ ანუ $A_1 \rightarrow A_2, B_1 \rightarrow B_2, C_1 \rightarrow C_2$ (ხურ. 42.2). დავაგვიკმდილოთ ეს წერტილები, შესაბამისად, A_2 და A_1 ცენტრებიდან. მივიღებთ $A_1(A_2, B_2, C_2) \wedge A_2(A_1, B_1, C_1)$, თანაც A_1A_2 სხივი ამ ასახვაში ორმაგია, ასიტომ, A_1 და A_2 კონები პერსპექტიულია. ასიტომ, შესაბამის წრეფთა წყვილები A_1B_1 და A_2B_2 , A_1C_1 და A_2C_2 გადაიკვეთება პერსპექტივის s' ღერძზე მდებარე წერტილებში. მივაკეთოთ S_1 და S_2 წრეების გადაკვეთის წერტილი S_1 წრეის და აღვნიშნოთ K_1 ასომთი. S_2 წრეზე მას შეესაბამება K_2 წერტილი, რომელიც, შესაბამისი წერტილების აგების წესის თანახმად, პერსპექტივის ღერძზე მდებარეობს. თუ S_1 და S_2 წრეების გადაკვეთის წერტილის განვიხილავთ, როგორც S_2 წრეის კუთხილს და აღვნიშნავთ T_2 ასომთი, მას S_1 წრეზე შეესაბამება პერსპექტივის s' ღერძზე მდებარე T_1 წერტილი. ე.ი. პერსპექტივის s' ღერძი გადის K_1 და T_1 წერტილებზე ანუ პერსპექტივის s' ღერძი არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ შესაბამის წერტილთა რომელ წყვილს შევარჩევთ პერს-

პექტიულ კონათა ცენტრებად. $D_2 \in S_2$ წერტილების აგება, რომელიც შეესაბამება ნებისმიერ $D_1 \in S_1$ წერტილს, ნახაზიდან გასაგებია და დამატებით ახსნას არ საჭიროებს. შესაბამის წერტილთა წვილების აგების ეს მაგალითი შეიძლება შევასრულოთ 42,1 სურათზეც.

42,1 სურათზე განხილული აგების ორადი აგება მოგვცემს ორი პროექციული კონის ნებისმიერი სხივისათვის შესაბამისი სხივის აგების საშუალებას (სურ. 43).

მაგალითად, მოცემულია ორი პროექციული კონა $S_1(a_1, b_1, c_1) \bar{\wedge} S_2(a_2, b_2, c_2)$ ამ კონების რომელიმე, მაგალითად,

a_1 და a_2 შესაბამისი წრფეების გადაკვეთის $A_1 = A_2$ ორმაგ წერტილზე გავუვლოთ ნებისმიერი s_1 და s_2 ორი წრფე. ამ წრფეების გადაკვეთაში, S_1 და S_2 კონის წრფეებთან, მივიღებთ წერტილთა ორ პროექციულ მწკრივს: $s_1(A_1, B_1, C_1) \wedge s_2(A_2, B_2, C_2)$.



რომლებსაც ერთი ორმაგი $A_1 = A_2$ წერტილი აქვს. ამიტომ, s_1 და

წრფეები პერსპექტიულია. ავაგოთ ამ წრფეების პერსპექტივის S' ცენტრი, როგორც შესაბამის B_1 და B_2 , C_1 და C_2 წერტილთა წვილების შემაერთებელ წრფეთა გადაკვეთის წერტილი. მაშინ ნებისმიერი $d_1 \in S_1$ წრფის შესაბამისი $d_2 \in S_2$ წრფის აგება შეხრულდება პერსპექტიულ წრფეთა კონების დახმარებით:

$$S_1(a_1, b_1, c_1, d_1) \bar{\wedge} S'(a', b', c', d') \bar{\wedge} S_2(a_2, b_2, c_2, d_2),$$

საიდანაც $d_1 \wedge d_2$.

4.3. ჰარმონიული შესაბამისობანი. პროექციული გარდაქმნების კლასიფიკაცია

განსაკუთრებულ ინტერესს იწვევს ერთი წრფის წერტილების ასახვა ამავე წრფის წერტილებზე ანუ წრფის ასახვა თავის თავზე, რომელსაც წრფის გარდაქმნა ეწოდება. წრფის გარდაქმნა, როგორც სხვა ნებისმიერი პროექციული ასახვა, შეიძლება დამყარდეს ძირითადი თეორემის თანახმად – შესაბამის წერტილთა სამი წყვილით.

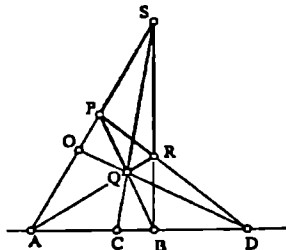
განვიხილოთ წრფის გარდაქმნის მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევა, რომელსაც ჰარმონიული გარდაქმნა ეწოდება. თუ ჰარმონიულ A, B, C, D წერტილთა ოთხეულში C, D წყვილი ჰარმონიულად არის შეუღლებული A, B წყვილის მიმართ, მაშინ C, D წერტილები ეკუთვნის A და B წერტილებით განსაზღვრულ სხვადასხვა ურთიერთშემავსებელ მონაკვეთებს და, ამიტომ, C, D და A, B წყვილები ყოფს ერთმანეთს ($AB \div CD$). თუ A და B წერტილები უძრავია, მაშინ C ცვლადი წერტილის ყოველ მდებარეობას შეესაბამება D წერტილის ერთადერთი მდებარეობა, რომელიც ყოველთვის აკმაყოფილებს A, B, C, D წერტილთა ოთხეულის ჰარმონიულობის პირობას. ამრიგად, თუ ჰარმონიულობის პირობა დაცული იქნება, მაშინ ყოველ C წერტილს შეესაბამება D წერტილი. გარდა ამისა, რადგან ორივე ოთხეული A, B, C, D და A, B, D, C ჰარმონიულია (3.2), ამიტომ, ყოველ D წერტილსაც შეესაბამება ერთადერთი C წერტილი. ასე ყალიბდება პროექციული s წრფის წერტილთა ურთიერთცალსახა $A, B, C \bar{\wedge} A, B, D$ შესაბამისობა ანუ s წრფის გარდაქმნა, რომელშიც ყოველი C წერტილი აისახება D წერტილზე ($C \rightarrow D$) და პირიქით ($D \rightarrow C$).

ჰარმონიულ წერტილთა A, B, C, D ოთხეულში A და B ორი უძრავი წერტილის მიმართ ერთმანეთთან ჰარმონიულად შეუღლებულ C და D წერტილებს შორის შესაბამისობას ჰარმონიული ეწოდება.

ამ შესაბამისობაში A და B წერტილებით განსაზღვრული ორი ურთიერთშემავსებელი AB და $A \cdot B$ მონაკვეთებიდან ერთი აისახება მეორეზე, რადგან AB მონაკვეთის C წერტილის ყოველ მდებარეობას შეესაბამება $A \cdot B$ მონაკვეთის ერთი D წერტილი.

განვიხილოთ ამ გარდაქმნის თვისებები. დავამტკიცოთ, რომ ჰარმონიული შესაბამისობა ეკუთვნის შებრუნებული ტიპის გარდაქმნებს და აქვს ორი ორმაგი წერტილი.

იმ შემთხვევაში, როდესაც C წერტილი გაირბენს AB მონაკვეთს A წერტილიდან B წერტილამდე, მასთან ჰარმონიულად შეუღლებული D წერტილი გაირბენს $A \cdot B$ მონაკვეთს საწინააღმდეგო მიმართულებით, ე.ი. ისევ A წერტილიდან B წერტილამდე (სურ. 44). ამიტომ, ჰარმონიული გარდაქმნის (როგორც სხვა პროექციული გარდაქმნის) უწყვეტობის გათვალისწინებით უნდა ჩავთვალოთ, რომ იმ მომენტში, როდესაც C შეუთავსდება B წერტილს, D წერტილიც მივა B წერტილში ანუ როდესაც $C=B$, მაშინ $D=B$. ე.ი. B წერტილში შესაბამის წერტილთა ერთი წყვილი შეუთავსდება ერთმანეთს და B ამ გარდაქმნის ორმაგი წერტილი იქნება. ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ AB მონაკვეთის მეორე A საზღვარიც ორმაგია. ამრიგად, ჰარმონიულ გარდაქმნაში არსებობს ზუსტად A და B ორი ორმაგი წერტილი. ეს გარდაქმნა შეიძლება იყოს მოცემული (დამყარებული) თავისი ორი ორმაგი წერტილით.



სურ. 44

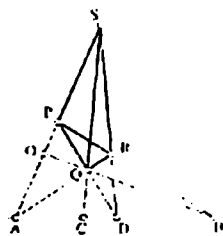
რადგან პერსპექტიული შესაბამისობა ინარჩუნებს წყვილების გაყოფას და, მასასადამე, წერტილთა ციკლურ დალაგებას წრფეზე და მიმართულებას, ამიტომ, პერსპექტივათა კომპოზიციის ანუ პერსპექტივათა ჯაჭვის გამოყენების შედეგად მიღებული შესაბამისობა შეინარჩუნებს წერტილების დალაგებას, ე.ი. წყვილების გაყოფას და მიმართულებას. იმის დასამტკიცებლად, რომ A

და B წერტილების მისათვის პარამონიულად შეუდგებულს წერტილთა წვეილების შესაბამისობა არის დაღაგებული, წარმოვადგინოთ ეს შესაბამისობა ორი პერსპექტივის კომპოზიციის სახით (სურ. 44):

$$ABD \overset{Q}{\underset{\Lambda}{\sim}} P B Q \overset{S}{\underset{\Lambda}{\sim}} I B C$$

ამრიგად, შესაბამისობა, რომელიც D წერტილს აისახავს (წერტილზე) (D→C) არის დაღაგებული და აქვს A და B ორი ორმაგი წერტილი. რადგან ABD მიმართულება არ ეისხვევა ABC მიმართულებას, ეს დაღაგებული შესაბამისობა მქონეობის ტიპისაა. ამ შესაბამისობაში A, B ბოლოების მქონე ორი მონაკვეთიდან ერთი აისახება მქონეზე.

B და D წერტილების აღვილები გავცვალოთ (სურ. 45) მივიღებთ ახალ პარამონიულ შესაბამისობას, რომელშიც D წერტილი აისახება C წერტილზე (D→C), და A და B წერტილები ისევ უძრავი იქნება, პარამონიულ წერტილთა ოთხეულში შემაჯავლი წერტილები იგივე იქნება, მაგრამ პარამონიულად შეუდგებულს AB CD წვეილების მაგივრად გვექნება ახალი პარამონიულად შეუდგებულს AD და BC წვეილები, ე.ი. (AD→BC)



სურ. 45

დავამტკიცოთ, თუ AD და BC პარამონიულად შეუდგებულს წვეილებია (ე.ი. AD→BC) და A და B უძრავი წერტილებია, მაშინ შესაბამისობა D→C იქნება პარდაპირი ტიპის A და B ორი ორმაგი წერტილი.

მართლაც

$$ABD \overset{P}{\underset{\Lambda}{\sim}} O B Q \overset{S}{\underset{\Lambda}{\sim}} I B C$$

ე.ი. ABD ~ ABC ანუ A და B წერტილები აისახა ისევ A და B წერტილებზე, D აისახა C-ზე, მიმართულება (ABD) ეისხვევა მიმართულებას (ABC); მკორე მხრივ, AB წვეილი არ ეისხვევა CD წვეილს, რადგან ამ შესაბამისობის პირობის თანახმად (AD→BC).

მაშასადამე, მივიღეთ პირდაპირი ტიპის პარძონიული შესაბამისობა A და B ორი ორმაგი წერტილით.

ამ შესაბამისობაში A, B ბოლოების მქონე ორი მონაკვეთიდან ერთი (ან მეორე) აისახება თავის თავზე.

ორივე განხილული პარძონიული შესაბამისობა შეიძლება იყოს მოცემული (დამყარებული) თავისი ორი ორმაგი წერტილით.

იქნებ არსებობს წრფეთა პროექციული გარდაქმნა, რომელსაც ორზე მეტი ორმაგი წერტილი აქვს? პროექციული გეომეტრიის ძირითადი თეორემიდან გამომდინარეობს მნიშვნელოვანი შედეგი, რომელიც პროექციულ გარდაქმნაში არეგულირებს ორმაგი წერტილების რაოდენობას¹.

წრფის პროექციულ გარდაქმნაში არ შეიძლება არსებობდეს ორი ორმაგი წერტილზე მეტი. თუ ეს გარდაქმნა იგივეური არ არის.

დაეუშვათ ხაზინააღმდეგო. კოქლო, S წრფის რომელიმე პროექციულ გარდაქმნაში A_1, B_1, C_1 წერტილები შეთავსებულია თავის შესაბამის A_2, B_2, C_2 წერტილებთან, მაშინ შესაბამის წერტილთა ნებისმიერი წყვილისათვის უნდა სრულდებოდეს ტოლობა:

$$(A_1 B_1, C_1 D_1) (A_2 B_2, C_2 D_2) \text{ ანუ } (A_1 B_1, C_1 D_1) = (A_1 B_1, C_1 D_2), \text{ საიდანაც } D_1 = D_2.$$

ცხადია, ანალოგიური მსჯელობით დავრწმუნდებით, რომ შესაბამის წერტილთა ნებისმიერი წყვილი ორმაგი იქნება და მივიღებთ იგივეურ გარდაქმნას. იგივეური გარდაქმნა პირდაპირი ტიპისაა, წრფის არც ერთ სხვა პროექციულ გარდაქმნას არ შეიძლება აქონდეს ორი ორმაგი წერტილზე მეტი.

ორმაგი წერტილების რაოდენობის მიხედვით წრფის პროექციული გარდაქმნები დაყოფილია სამ ჯგუფად. პროექციულ გარდაქმნას, რომელსაც არ გააჩნია ორმაგი წერტილები, ეწოდება ელიფსური. ერთი ორმაგი წერტილის მქონე პროექციულ გარ-

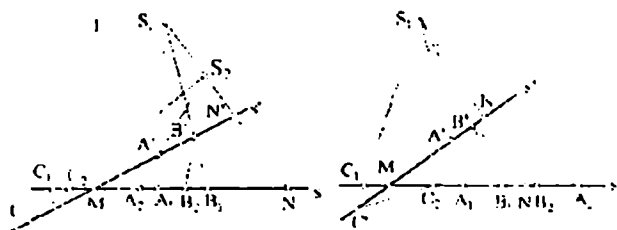
¹ ზოგიერთი ავტორი სწორედ ამ შედეგს მოიხსენებს პროექციული გეომეტრიის ძირითად თეორემად.

დაქმნას ეწოდება პარაბოლური, ხოლო ორი ორმაგი წერტილის მქონე გარდაქმნას - ჰიპერბოლური.

ამ სახელწოდებების შერწყვა დაკავშირებულია ადინური გეომეტრიისთან, სადაც სხვადასხვა კონიკებია აქვს 0, 1 ან 2 არასაკუთრივე წერტილი.

კანკინით, რომ ასეთი გარდაქმნები არსებობს. განვიხილოთ ამ პროექციული გარდაქმნების მძღების კონსტრუქციული ვარიანტები.

როგორც უკვე არაერთხელ აღვნიშნეთ, წრფის პროექციული გარდაქმნა შეიძლება მივიღოთ ორი პერსპექტიული ასახვის კომპოზიციით. S წრფის ბიკენტრალური დაგვიმსდება S წრფეზე ხსოვრულ ორი პერსპექტიული ასახვა:



სურ. 46

$(B', C') \in \pi(A', B_1, C_1)$ ერთი პერსპექტივიით, $S'(A', B', C')$

(B', C') მეორე პერსპექტივიით, რის შედეგად S წრფეზე მივიღებთ $(A_1, B_1, C_1) \wedge (A_2, B_2, C_2)$ ორ პროექციულ მწკრივს (სურ. 46). ამ მწკრივებს ერთნაირი მომართულებები აქვს მაშრო, (A_1, B_1, C_1) - მაშრო, (A_2, B_2, C_2) . ამიტომ, S წრფეზე მდებარეული გარდაქმნა პარაბოლი ტიპის იქნება. ამ გარდაქმნას ორი ორმაგი წერტილი აქვს: $M = S \cap S'$ და $N = S \cap S_1 S_2$, რაშიც აღვიღად დავრწმუნდებით. თუ გამოვიყენებთ შეხებადის წერტილთა აგების წესს M და N წერტილებისათვის. ამრიგად, მივიღეთ S წრფის პარაბოლი ტიპის ჰიპერბოლური პროექციული გარდაქმნა. ცხა-

ლია, ამ გარდაქმნაში შესაბამის წერტილთა წყვილები s' წრფის წერტილთა გვერდებია S_1 და S_2 ცენტრებიდან.

შეკასრულოთ შებრუნებული ამოცანა: ავაგოთ მოცემული პროექციული გარდაქმნით განსაზღვრული ორი პერსპექტიული ასახვა. განვიხილოთ ეს აგება s' წრფის პიპერბოლური გარდაქმნისათვის, რომელიც მოცემულია შესაბამის წერტილთა სამი წყვილით: მისი M და N ორი ორმაგი წერტილითა და შესაბამის წერტილთა კიდევ ერთი (A_1 და A_2) წყვილით (ხურ. 46,2).

ასეთი პროექციული გარდაქმნა არსებობს კოლინეარული წერტილების ნებისმიერი ოთხეულისათვის. მის ასაგებად ავირჩიოთ N წერტილიდან კოლინეარული ორი S_1 და S_2 წერტილი. ავაგოთ $A' = A_1 S_1 \cap A_2 S_2$ და ვისარგებლოთ, როგორც წინა ნახაზზე, $s' = M A'$ წრფით (ხურ. 46,2). სასურველი პერსპექტივები აგებულია s' წრფის ნებისმიერი B_1 წერტილისათვის ადვილად ავაგებთ მის შესაბამის B_2 წერტილს, ამ პერსპექტივათა კომპოზიციის დახმარებით:

$$B_1 \xrightarrow{S_1} B' \xrightarrow{S_2} B_2.$$

შესაბამის წერტილთა $A_1 A_2$ წყვილი შეიძლება აქოლედეს ან არ აქოლედეს MN წყვილს.

პიპერბოლური პროექციული გარდაქმნა $MNA_1 \wedge MNA_2$ იქნება შებრუნებული ტიპის, თუ $MN \nmid A_1 A_2$ და პირდაპირი ტიპის, თუ $MN \mid A_1 A_2$.

46.1 ხურათზე s' წრფის პიპერბოლური გარდაქმნა არის პირდაპირი ტიპის პიპერბოლური გარდაქმნა, ხოლო 46.2 ხურათზე s' წრფის გარდაქმნა შებრუნებული ტიპის პიპერბოლური გარდაქმნაა.

დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა.

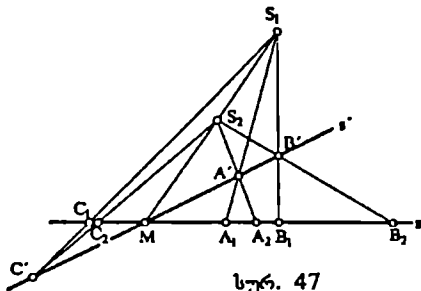
თუ პიპერბოლურ პროექციულ გარდაქმნაში M და N ორი ორმაგი წერტილით გვაქვს $MNA_1 B_1 \bar{\wedge} MNA_2 B_2$, მაშინ აგრეთვე გვაქნება $MNA_1 A_2 \wedge MNB_1 B_2$.

თუ ჰიპერბოლურ პროექციულ გარდაქმნაში M და N ორი ორმაგი წერტილით გვაქვს $MNA_1B_1 \bar{\wedge} MNA_2B_2$, მაშინ აგრეთვე გვექნება $MNA_1A_2 \bar{\wedge} MNB_1B_2$.

მართლაც $MNA_1A_2 \stackrel{A'}{\bar{\wedge}} N'NS_1S_2 \stackrel{B'}{\bar{\wedge}} MNB_1B_2$ (სურ. 46), რაც ნიშნავს, რომ ჰიპერბოლურ პროექციულ გარდაქმნაში შესაბამის წერტილთა ყოველი წყვილის და ორი ორმაგი წერტილის რთული ფარდობა მუდმივი სიდიდეა.

მართლაც, რადგან $MNA_1A_2 \bar{\wedge} MNB_1B_2$, ამიტომ, $(MN, A_1A_2) = (MN, B_1B_2)$.

პროექციული გარდაქმნა M ორმაგი წერტილით იქნება პარაბოლური ანუ ექნება ერთადერთი M ორმაგი წერტილი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ S_1S_2 წრფე გაივლის M წერტილზე ანუ, თუ N წერტილი შეუთავსდება M წერტილს (სურ. 47).



სურ. 47

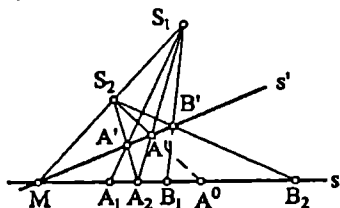
ასეთ შემთხვევაში S_1 და S_2 ცენტრებიდან ორი პერსპექტივის კომპოზიციით s წრფეზე მივიღებთ შესაბამის წერტილთა $(A_1, B_1, C_1, \dots)$ და $(A_2, B_2, C_2, \dots)$ მწკრივებს, რომელთაც ექნება ერთნაირი მიმართულებები: მიმართ. $(A_1B_1C_1) =$ მიმართ. $(A_2B_2C_2)$. მივიღეთ წრფის პარაბოლური გარდაქმნა, რომელიც პირდაპირი ტიპის დალაგებულ გარდაქმნებს ეკუთვნის. პარაბოლური გარდაქმნა განსაზღვრულია, თუ მოცემულია ერთი ორმაგი წერტილი და შესაბამის წერტილთა ერთი წყვილი.

დავამტკიცოთ კიდევ ერთი თეორემა, რომელიც პარაბოლურ გარდაქმნებს ეხება.

თუ პარაბოლური პროექციული გარდაქმნა M ორმაგი წერტილით ასახავს A_1 წერტილს A_2 წერტილზე, ხოლო A_2 წერტილს

A^0 წერტილზე, მაშინ M , A_2 და A_1 , A^0 წერტილთა წყვილები პარმონიულად ყოფს ერთმანეთს.

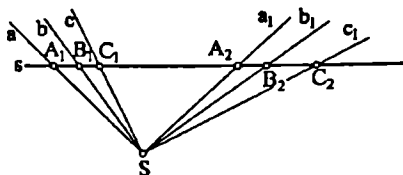
მართლაც, თუ M ერთი ორმაგი წერტილის მქონე პარაბოლური პროექციული გარდაქმნა ასახავს A_1 წერტილს A_2 წერტილზე, ხოლო A_2 წერტილს A^0 წერტილზე, მაშინ ნახაზიდან (სურ. 48) უშუალოდ ჩანს, რომ A^0 წერტილი პარმონიულად არის შეუღლებული A_1 წერტილთან M , A_2 წერტილთა წყვილის მიმართ.



სურ. 48

ჩატარებული აგებები ამტკიცებს წრფის ჰიპერბოლური და პარაბოლური პროექციული გარდაქმნების არსებობას და გვაძლევს ჰიპერბოლური და პარაბოლური გარდაქმნების აგების ხერხს, თუ მოცემულია ორმაგი წერტილები (ორმაგი წერტილი) და შესაბამის წერტილთა კიდევ ერთი წყვილი და გვიჩვენებს, როგორ ავაგოთ მეორე ორმაგი წერტილი, თუ მოცემულია ერთი ორმაგი წერტილი და კიდევ შესაბამის წერტილთა ორი წყვილი.

ს წრფეზე (სურ. 49) აგებულია წერტილთა ორი პროექციული $(A_1, B_1, C_1, \dots)$ და $(A_2, B_2, C_2, \dots)$ მწკრივი, რომელთაც ორმაგი წერტილები არა აქვს. ასეთ გარდაქმნას ელიფსური ეწოდება. აგება შესრულებულია s საერთო წვეროს მქონე ორი შეთავსებული პროექციული კონის დახმარებით.



სურ. 49

კონების შესაბამისი $(a_1, b_1, c_1, \dots)$ და $(a_2, b_2, c_2, \dots)$ სხივები ურთიერთპერპენდიკულარულია: $a \perp a_1$, $b \perp b_1$, $c \perp c_1, \dots$ ამრიგად,
 $(a_1, b_1, c_1, \dots) \overline{\wedge} (a_2, b_2, c_2, \dots)$,

რადგან ამ კონების შესაბამის სხივთა წყვილები ურთიერთპერპენდიკულარულია, ამ კონებს არ შეიძლება პქონდეს ორმაგი სხივები. იგივე შეიძლება ითქვას s წრფესთან კვეთაში მიღებულ ამ კონების პერსპექტიულ წერტილთა მწკრივებზე:

$$(A_1, B_1, C_1, \dots) \perp (A_2, B_2, C_2, \dots).$$

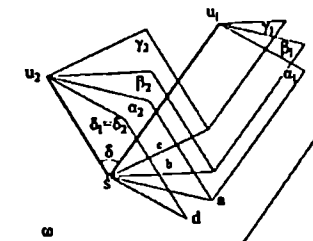
ამრიგად, შევაჯამოთ ზემოთ მიღებული შედეგი და ჩამოვაყალიბოთ წრფის პროექციული გარდაქმნების კლასიფიკაცია: წრფის იგივერი გარდაქმნის გარდა შესაძლებელია არსებობდეს წრფის პროექციული გარდაქმნების კიდევ ოთხი ტიპი: ელიფსური, პარაბოლური, პირდაპირი ტიპის ჰიპერბოლური და შებრუნებული ტიპის ჰიპერბოლური.

4.7. ორადი დებულებები წრფეთა და სიბრტყეთა შეკვრებისათვის

რადგან წრფეთა და სიბრტყეთა შეკვრა არის წრფეთა და წერტილთა ბრტყელი ველის ორადი სახე, ამიტომ, წინა პარაგრაფებში მიღებული დასკვნები და აგებები, რომლებიც ეხებოდა ერთი სიბრტყის (ბრტყელი ველის) კუთვნილ წერტილთა მწკრივებს და წრფეთა კონებს, ორადობის პრინციპით, ყოველგვარი დამტკიცების გარეშე, შეგვიძლია გადავიტანოთ ერთ წერტილზე (შეკვრის ცენტრზე) გამავალ სიბრტყეთა და წრფეთა შეკვრის კუთვნილ სიბრტყეთა და წრფეთა კონებზე.

მივიღებთ შემდეგ წინადადებებს შეკვრებისათვის:

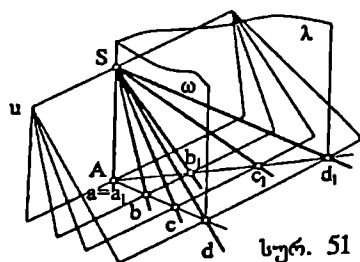
იმისათვის, რომ ერთი შეკვრის კუთვნილი ორი პროექციული სიბრტყეთა კონა პერსპექტიული იყოს ანუ აგეგმილებდეს ერთი და იგივე ბრტყელ კონას, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ამ კონების საერთო



სურ. 50

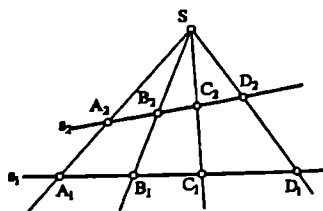
სიბრტყე თავის თავზე აისახებოდეს (სურ. 50).

იმისათვის, რომ ერთი შეკვრის კუთვნილი ორი პროექციული წრფეთა კონა პერსპექტიული იყოს ანუ იყოს ერთი და იგივე სიბრტყეთა კონის კვეთები, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მათი სიბრტყეების გადაკვეთის წრფე აისახებოდეს თავის თავზე (სურ. 51).



სურ. 51

წერტილთა მწკრივების პროექციულობა განსაზღვრეთ, როგორც ისეთი ურთიერთცალსაზა შესაბამისობა, რომელიც ინარჩუნებს ჰარმონიზმს. ახლა განვიხილოთ შეკვრის კუთვნილ წრფეთა და სიბრტყეთა კონების პროექციული შესაბამისობის ცნება. მაგრამ, ჯერ ჩამოვაყალიბოთ კონის ოთხი ჰარმონიული წრფის და ოთხი ჰარმონიული სიბრტყის განსაზღვრა. ეს ცნებები ორადობის პრინციპის გამოყენებით დავადგინოთ. ჰარმონიულ წერტილთა ოთხეულის ორად სახეს სიბრტყეზე ჰარმონიულ წრფეთა ოთხეული ეწოდება. ის შედგება ერთ წერტილზე გამავალი კომპლანარული წრფეების ორი წყვილისაგან (სურ. 52). ადრე (3.2) ჩამოვაყალიბეთ კონის სხივების ჰარმონიული ჯგუფის შემდეგი განსაზღვრა:



სურ. 52

კონის ოთხი სხივი შეადგენს ჰარმონიულ ჯგუფს, თუ ისინი აგებმილებს ჰარმონიულ წერტილთა ჯგუფს.

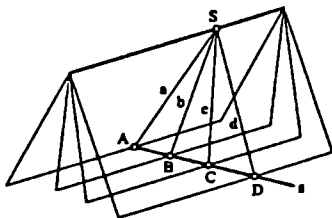
ამ განსაზღვრის ორადი წინადადება მცირე ორადობის პრინციპით შემდეგია:

ჰარმონიულ წრფეთა ოთხეულის წრფით კვეთისას წარმოიქმნება ჰარმონიულ წერტილთა ოთხეული.

ჩამოვაყალიბოთ ეხლა პარმონიულ სიბრტყეთა ოთხეულის ცნება:

პარმონიულ სიბრტყეთა ოთხეულის ნებისმიერ წრფესთან კვეთისას წარმოიქმნება პარმონიულ წერტილთა ოთხეული, ზოლო ნებისმიერ სიბრტყესთან კვეთისას წრფეთა პარმონიული ოთხეული (სურ. 53).

ახლა, წერტილთა მწკრივების პროექციული შესაბამისობის განსაზღვრის ანალოგიურად ჩამოვაყალიბოთ ერთი შეკერის კუთვნილ წრფეთა კონების და სიბრტყეთა კონების პროექციულ შესაბამისობის განსაზღვრა.



სურ. 53

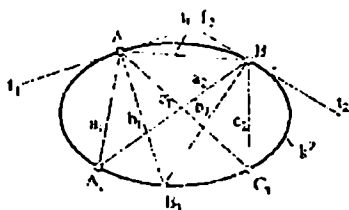
ორ წრფეთა კონას ან ორ სიბრტყეთა კონას შორის პროექციული შესაბამისობა ეწოდება ისეთ ურთიერთცალსაზა შესაბამისობას, რომელიც პირველი კონის ნებისმიერ პარმონიულ ოთხეულს შეუსაბამებს მეორე კონის პარმონიულ ოთხეულს.

პროექციული გეომეტრიის ძირითადი თეორემის თანახმად, წრფეთა და სიბრტყეთა კონების წყვილებს შორის პროექციული შესაბამისობა დამყარებულია, თუ მოცემულია შესაბამისი ელემენტების სამი ნებისმიერი წყვილი.

**მესამე თავი. პროექციულ შესაბამისობათა
გამოყენება გამოშვებული სახეობათა
წარმოქმნისათვის**

5.1. პირველი საფეხურის მეორე რიგის სახეები

პირველი რიგის სახეობების პროექციული შესაბამისობის გამოყენებით შეიძლება მივიღოთ ახალი გეომეტრიული სახეები. მართლაც, ვიპოვებთ სიბრტყის კუთვნილი ორი განსხვავებული ცენტრის მქონე პროექციული კონების შესაბამისი წრფეების გადაკვეთის წერტილებით წარმოქმნება წერტილთა სიმრავლე, რომელსაც ვწოდებთ მეორე რიგის წერტილთა მწკრივი ან მეორე რიგის წირი (k^2) (ხერ. 54).



ხერ. 54

მოცემით, მათი ამ წრფეთა წვეტილების $A_1=a_1 \cap b_1$, $B_1=b_1 \cap a_2$, $C_1=c_1 \cap a_3$ გადაკვეთის წერტილები, განსაზღვრის თანახმად, მეორე რიგის წირის კუთვნილი წერტილები იქნება და, პირიქით, თუ მოცემულია წარმომქმნელი კონების A და B ცენტრები და კიდევ სამი არაკოლინეარული წერტილი, ამით ცალსახად განისაზღვრება მეორე რიგის წირი.

დავუშვათ, მოცემულია k^2 კონიკა წარმომქმნელი კონების A და B ცენტრებით და A_1, B_1, C ნებისმიერი სამი არაკოლინეარული წერტილით (ხერ. 55). მეორე რიგის წირის ახალი წერტილების აგება დაიწყება წარმომქმნელი A და B პროექციული კონების შესაბამისი წრფეების აგებაზე, რაც შეიძლება შევასრულოთ

ესევეთ, მოცემულია A და B ორი პროექციული კონა:

$$A(a_1 \ b_1 \ c_1) \bar{A} B(a_2 \ b_2 \ c_2).$$

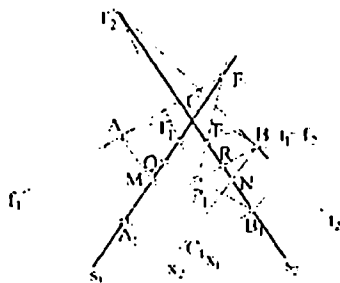
ძირითადი თეორემის თანახმად, ორი პროექციული კონა ცალსახად განისაზღვრება შესაბამისი წრფეთა ნებისმიერი სამი წვეტილის

ცნობილი ხერხით (4.2). ამრიგად, k^2 კონიკის წარმომქმნელი კონებაა $A(AC, AB_1, AA_1) \bar{\cap} B(BC, BB_1, BA_1)$ ან მოკლედ $A(C, B_1, A_1) \bar{\cap} B(C, B_1, A_1)$.

k წირის მოცემულ C წერტილზე გავევლოთ ორი წრე: $s_1(C, A_1)$ და $s_2(C, B_1)$. წერტილთა მწკრივი, რომელზედაც A კონის წრეები კვეთს s_1 წრეებს, იქნება იმ წერტილთა მწკრივის პერსპექტიული, რომელზედაც B კონის წრეები კვეთს s_2 წრეებს. რადგან ამ მწკრივების C წერტილი ორმაგია (თავის თავს შეესაბამება), ე.ი. $s_1(C, Q, A_1) \bar{\cap} s_2(C, B_1, R)$. ამ მწკრივების შესაბამისი Q და B_1, A_1 და R წერტილების შემადგენელი წრეების გადაკვეთაში მივიღებთ s_1 და s_2 მწკრივების პერსპექტივის P ცენტრს: $P = QB_1 \cap A_1R$. ეს პერსპექტივა საშუალებას მოგვცემს ავაგოთ A და B პროექციული კონების შესაბამის წრეებსა წერტილები და მათ გადაკვეთაში მიღებული k' წირის კუთვნილი წერტილები. მაგალითად, ავაგოთ A კონის რომელიმე x_1 წრეის შესაბამისი x_2 წრე, რომელიც B კონას ეკუთვნის. x_1 წრე კვეთს s_1 წრეებს M წერტილში, რომელსაც s_1 და მწკრივების პერსპექტივაში P ცენტრით შეესაბამება N -ს წერტილი. ამ წერტილზე გამავალი B კონის კუთვნილი x_2 წრე, x_1 წრეის შესაბამისია და k^2 წირის კუთვნილი ახალი წერტილი $C_1 = x_1 \cap x_2$ იქნება.

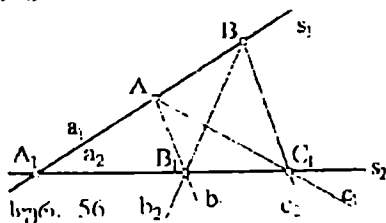
აღვნიშნოთ, რომ მქორე რიგის წირი გაივლის მისი წარმომქმნელი კონების A და B ცენტრებზე. მართლაც, თუ AB წრეებს განვიხილავთ, როგორც A კონის კუთვნილ l_1 წრეებს, შესაბამისი წერტილების აგების წესის თანახმად, მას უნდა შეესაბამებოდეს B კონის l_2 წრე და ეს შესაბამისი წრეები B წერტილში გადაიკვეთება: $l_1 \cap l_2 = B$, რაც ნიშნავს, რომ B წერტილი ეკუთვნის კონიკას (სურ. 55). ზუსტად ასევე, თუ AB წრეებს განვიხილავთ, როგორც B კონის კუთვნილ l_2 წრეებს, მას შეესაბამება A კონის l_1 წრე და ეს ორი შესაბამისი წრე

გადაიკვეთება Δ წერტილში. ე.ი. $l_1 \cap l_2 = A$ და Δ ეკუთვნის k^2 წირს. თანაც l_1 წრფეს, A და B კონების სხვა წრფეებისაგან განსხვავებით, Δ წერტილის გარდა, k^2 წირთან არ ექნება საერთო წერტილი, ხოლო l_2 წრფეს k^2 წირთან მხოლოდ B წერტილი ექნება საერთო. აქედან გამომდინარე, l_1 და l_2 წრფეები არის კონიკის მხეხები A და B წერტილებში. 55-ე სურათზე ეს მხეხები აგებულია, როგორც წარმომქმნელი კონების საერთო $l_1 = l_2$ წრფის შესაბამისი წრფეები და მკითხველს უთავაზობთ დამოუკიდებლად გაერკვიოს ჩატარებულ აგებაში, რომელიც x_1 წრფის შესაბამისი x_2 წრფის აგების ახალგაურთა (სურ. 55).



სურ. 55

მეორე რიგის წირი შეიძლება ორ წრფედ დაიშალოს, თუ მისი წარმომქმნელი კონები პერსპექტიული ექნება. რადგან პერსპექტიული კონები აგეგმილებს ერთი იგივე პროექციულ მწკრივს, მაგალითად, 56-ე სურათზე $A(a_1 b_1 c_1) \bar{\bar{A}} B(a_2 b_2 c_2)$, ამიტომ მეორე რიგის წირი დაიშალა s_1 და s_2 ორ წრფედ.

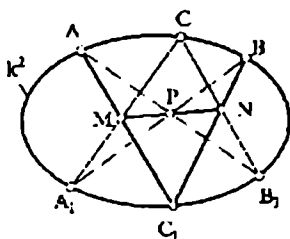


სურ. 56

55 ე სურათზე კონიკის კუთვნილი ახალი ელემენტების აგებისას აღმოჩნდა, რომ წრფეები $A_1 R = A_1 B$, MN და $Q B_1 = A B_1$ ერთ წერტილზე გადის. რადგან $A_1 R = A_1 B$ და $Q B_1 = A B_1$ იკვეთება P წერტილში, ამიტომ MN წრფეც ამ წერტილზე გაივლის ანუ $M = A C_1 \cap C A_1$, $N = B C_1 \cap B_1 C$ და $P = A B_1 \cap A_1 B$ წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობს. ეს შედეგი შესაძლებლობას გვაძლევს აღვიღად დავამტკიცოთ, რომ k^1 მეორე რიგის წირის წარმომქმნელი კონების A და B ცენტრებს არა აქვს რაიმე

განსაკუთრებული მღებარეობა k^2 წირზე და ეს წირი შეიძლება მიღებულ იქნეს ორი პროექციული კონით, რომელთა ცენტრები k^2 წირის ნებისმიერი სხვა ორი წერტილია. მართლაც, ვთქვათ, k^2 წირი მიღებულია A და B პროექციული კონებით და A_1, B_1 კი k^2 წირის ორი ნებისმიერი წერტილია. მოვიღებთ k^2 წირზე კიდევ C, C_1 ორი წერტილი (სურ. 57). იგივე აღნიშვნები გამოვიყენოთ, რაც 55-ე სურათზე გვქონდა:

$$\text{ამრიგად, } M = AC_1 \cap A_1C, N = BC_1 \cap B_1C, P = AB_1 \cap A_1B. \quad (1)$$



სურ. 57

ზემოდაშტკიცებულის თანახმად, M, N, P წერტილები ერთ წრეზე განლაგდება. წარმოვიდგინოთ, რომ A, B, A₁, C₁, B₁ წერტილები უძრავია, ხოლო C წერტილი k^2 წირზე გადაადგილდება. მაშინ M წერტილი გადაადგილდება უძრავ AC_1 წრეზე, N წერტილი უძრავ

C_1B წრეზე, ხოლო MN წრე იბრუნებს. უძრავი P წერტილის ორგვლივ ეს ნიშნავს, რომ k^2 წირზე C წერტილის გადაადგილებისას M და N წერტილები AC_1 და C_1B წრეებზე წარმოქმნის ორ პერსპექტიულ წერტილთა მწკრივს: (M) $\bar{\bar{N}}$. ამიტომ $A_1M = A_1C$ და $B_1N = B_1C$ წრეები, რომლებიც A_1 და B_1 წერტილებიდან აგვმოდებ (M) და (N) პერსპექტიულ წერტილთა მწკრივს. წარმოქმნის ორი პროექციულ კონის ცენტრებით A_1 და B_1 წერტილებში. ამრიგად, A და B ცენტრებიანი ორი პროექციული წრეებია კონით წარმოქმნილი k^2 წირი შეიძლება წარმოქმნას აგრეთვე ორი პროექციული წრეებია კონით, რომელთა ცენტრები კონიკის ნებისმიერი A_1 და B_1 ორი წერტილია. ანუ კონიკის აგება არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ მის რომელ ორ წერტილს მივიჩნიეთ წარმოქმნილი კონების ცენტრებად აქედან გამოდინარე, ჩამოყალიბდით შეძლები

თორემა, რომელსაც კონუსური კვეთების თეორიაში ძირითადი ეწოდება.

ნებისმიერი კონიკა სავსებით განსაზღვრულია თავისი ხუთი წერტილით.

ძირითადი თეორემა შეიძლება სხვანაირადაც ჩამოვაყალიბოთ:

კონიკა მისი ნებისმიერი ორი წერტილიდან გეგმილდება პროექციული კონებით.

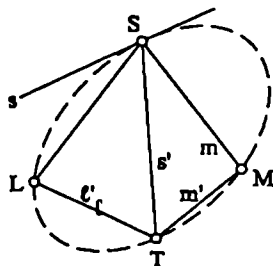
ამ თეორემას შტაინერის თეორემა ეწოდება.

ელემენტარული გეომეტრიიდან ჩვენთვის ცნობილია წრეწირის ანალოგიური თვისება: წრეწირი მისი ნებისმიერი ორი წერტილიდან გეგმილდება კონგრუენტული კონებით. კონიკის კუთვნილი ყველა წერტილი, როგორც წრეწირის კუთვნილი წერტილები, „თანასწორუფლებიანია“. წერტილთა არც ერთ წყვილს არ უკავია განსაკუთრებული მდებარეობა, მათ შორის კონიკის წარმომქმნელი კონების წვეროებიც მისი „რიგითი“ წერტილებია. ამაშია ზემოთ მოყვანილი თეორემის არსი.

კონიკის წერტილების თანასწორუფლებიანობიდან გამომდინარეობს კონიკის რამდენიმე მნიშვნელოვანი და საინტერესო თვისება.

მაგალითად, იმ წრფეებს შორის, რომლებიც კონიკის წარმომქმნელი კონის წვეროზე გადის, ერთი არის მხები, დანარჩენი – მკვეთები. აქედან შეგვიძლია გავაკეთოთ დასკვნა, რომ კონიკას აქვს თავის ნებისმიერ წერტილში ერთი და მხოლოდ ერთი მხები.

გარდა ამისა, არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს კონიკის ნებისმიერ წერტილში მხების აგება. ამისათვის საკმარისია მივიჩნიოთ ეს წერტილი კონიკის წარმომქმნელი ერთი კონის წვეროდ, ხოლო მეორე კონის წვეროდ ავირჩიოთ კონიკის ნებისმიერი წერტილი, მაშინ საძიებელი მხები იქნება პირველი კონის



სურ. 58

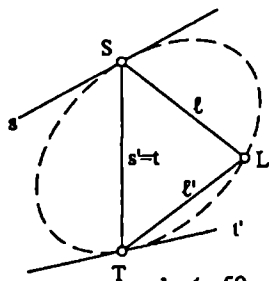
ის წრფე, რომელიც შეესაბამება ორივე შერჩეული კონის საერთო წრფეს (სურ. 55).

ადვილი შესასრულებელია შემდეგი ამოცანა: ავაგოთ კონიკა, რომელიც გადის S, T, L, M ოთხ წერტილზე, რომელთაგან არც ერთი სამეული კოლინეარული არ არის და ეხება ერთ-ერთ მათგანზე (მაგალითად, S -ზე) გამავალ მოცემულ s წრფეს (სურ. 58). შეხების S წერტილი ავირჩიოთ წარმომქმნელი კონის წვეროდ. მეორე კონის წვერო შეიძლება იყოს დარჩენილი სამი წერტილიდან ნებისმიერი (მაგალითად, T). ჩვენ განკარგულებაში კიდევ L და M ორი წერტილი რჩება. ამ წერტილებში შესაბამისი წრფეების ორი წყვილი იკვეთება: SL და TL , SM და TM . შესაბამის წრფეთა მესამე წყვილი იქნება მხები s წრფე და ორივე კონის საერთო TS სხივი. არსებობს ერთადერთი პროექციული შესაბამისობა, რომელიც ასახავს $s \rightarrow s', l \rightarrow l', m \rightarrow m'$. მაშასადამე, არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი კონიკა, რომელიც მოცემულ პირობებს აკმაყოფილებს. კონიკა შეიძლება განისაზღვროს S, T, L სამი წერტილით და მხებებით, რომლებიც ორ მათგანში ეხება კონიკას (სურ. 59). ამ შემთხვევაში კონიკის წარმომქმნელი კონებია: $S(s, l) \wedge T(s', l')$.

ახლა შეგვიძლია შემდეგი დასკვნა გავაკეთოთ:

კონიკა სავსებით განსაზღვრულია თავისი ნებისმიერი ხუთი ელემენტით.

მაგალითად, ხუთი წერტილით, ოთხი წერტილით და ერთ მათგანზე გამავალ მხებით, სამი წერტილით და ორ მათგანზე გამავალი მხებებით.



სურ. 59

5.2. პასკალის თეორემა და მისი შედეგები

ძირითადი თეორემის დამტკიცებისას (5.1) მივიღეთ მეორე რიგის წირის თვისება, რომელიც ცალკე განხილვას საჭიროებს.

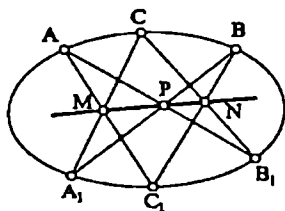
დავუბრუნდეთ 57-ე სურათს. მასზე მოცემული მეორე რიგის წირის წერტილები შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც მოცემულ წირში ჩახაზული ექვსკუთხედის წვეროები. ამრიგად, გვაქვს $AC_1BA_1CB_1$ ექვსკუთხედი (სურ. 55 და 57). ექვსკუთხედის წვეროების თანამიმდევრული შეერთებით მივიღებთ AC_1 , C_1B , BA_1 , A_1C , CB_1 , B_1A გვერდებს. მოპირდაპირე ეუწოდოთ ექვსკუთხედის ისეთ ორ გვერდს, რომელთა შორის ექვსკუთხედის ორი გვერდია მოთავსებული. ასეთი გვერდებია: AC_1 და A_1C , BC_1 და B_1C , BA_1 და B_1A .

ძირითადი თეორემის დამტკიცებისას (5.1) აღმოჩნდა, რომ მეორე რიგის წირში ჩახაზული ექვსკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების წვეტილები იკვეთება ერთ წრფეზე მდებარე სამ წერტილში. მეორე რიგის წირში ჩახაზული ექვსკუთხედის ამ თვისებას პასკალის თეორემა ეწოდება.

კონიკაში ჩახაზული ექვსკუთხედის მოპირდაპირე გვერდები იკვეთება ერთ წრფეზე მდებარე სამ წერტილში.

ე.ი. $AC_1BA_1CB_1$ (სურ. 55, 57) ექვსკუთხედისათვის მოპირდაპირე $AC_1 \cap A_1C$, $BC_1 \cap B_1C$, და $AB_1 \cap A_1B$ გვერდების გადაკვეთის M , N , P წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობს (5.1. ფორმულა 1).

ეს თეორემა დამტკიცებული იყო პასკალის მიერ ჯერ წრეწირისათვის, ხოლო შემდეგ ცენტრალური დაგეგმვით გაერცობილი იყო კონუსურ კვეთებზე. პასკალს მხედველობაში ჰქონდა წრეწირში ჩახაზული ჩვეულებრივი ამოზნექილი ექვსკუთხედი.



სურ. 60

პასკალის თეორემისთვის არსებითი დამატება გააკეთა შტაინერმა, რომელმაც დამტკიცა, რომ k^2 წირის ექვსი წერტილით განისაზღვრება სამოცი ექვსკუთხედი, თანაც ყოველი მათგანისათვის სრულდება პასკალის თეორემა.

ამ დამატებით პასკალის თეორემა მან ასე ჩამოაყალიბა:

თუ კონიკის ექვს მოცემულ წერტილს ნებისმიერ ორ შესაბამის A, B, C და A_1, B_1, C_1 სამეულად დავანაწილებთ, მაშინ $AB_1 \cap BA_1$, $AC_1 \cap CA_1$, $BC_1 \cap C_1B$ სამი წერტილი ერთ წრფეზე მოთავსდება.

ზემოთ ეს თეორემა დამტკიცებული იყო იმ შემთხვევისათვის, როცა k^2 წირი განვიხილეთ, როგორც A და B ორი პროექციული კონით წარმოქმნილი, თანაც დანარჩენი C, A_1, B_1, C_1 ოთხი წერტილი k^2 წირზე ნებისმიერად იყო შერჩეული. მაგრამ ახლა, ძირითადი თეორემის დამტკიცების შემდეგ, პროექციული კონების ცენტრებად შეიძლება მივიღოთ k^2 წირის ნებისმიერი ორი წერტილი, რაც ამტკიცებს პასკალის თეორემას შტაინერის ფორმულირებაში.

შეიძლება შევადგინოთ მარტივი სქემა, რომელიც მოსახერხებელია პასკალის თეორემის შინაარსის ჩასაწერად:

თუ 1,2,3,4,5,6 ციფრების დახმარებით დადგენილია ექვსკუთხედის წვეროების თანამიმდევრობა, რითაც ზორციელდება მისი წვეროების დაყოფა შესაბამის წერტილთა 1,2,3 და 4,5,6 ორ სამეულად (სურ. 61). ჩამოვწეროთ თანამიმდევრულად განლაგებული პირველი სამი გვერდი: 12,23,34. მათი მოპირდაპირე გვერდებია თანამიმდევრულად განლაგებული გვერდების მეორე სამეული: 45,56,61. პასკალის თეორემა ასეთი სქემით ჩავწეროთ:

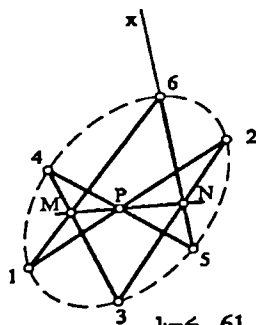
თუ $12 \cap 45 = P$,

$23 \cap 56 = N$,

$34 \cap 61 = M$,

მაშინ M, N, P წერტილები ეკუთვნის ერთ p წრფეს. p წრფეს პასკალის წრფე ეწოდება.

პასკალის თეორემა მოსახერხებელია ხუთი წერტილით განსაზღვრული k^2 წირის სხვა ელემენტების ასაგებად. ძირითადი თეორემის თანახმად, მეორე რიგის წირი საკვებით განისაზღვრება ნებისმიერი ხუთი წერტილით. ამ წირის ნებისმიერი მეექვსე წერტილის აგება ანუ მასში ჩახაზული ექვსკუთხედის მეექვსე წვეროს აგება უნდა აკმაყოფილებდეს გარკვეული შეზღუდვებს, რომელიც



პროექციული ფორმით გამოსახულია პასკალის თეორემაში. მაგალითად, ავაგოთ 1, 2, 3, 4, 5 ხუთი წერტილით განსაზღვრული k^2 წირის გადაკეთა 5 წერტილზე გამავალ x წრფესთან (სურ. 61) ან, რაც იგივეა, ავაგოთ k^2 კონიკის მეექვსე წერტილი. აღვნიშნოთ საძიებელი წერტილი ციფრით 6 და შევადგინოთ პასკალის თეორემის სქემა. ამ ამოცანისათვის შედგენილ პასკალის თეორემის სქემაში წერტილი 6 უცნობია, მაგრამ 5 წრფე განსაზღვრულია: ეს არის x . ამიტომ, სქემის მეორე სტრიქონი ასე შეგვიძლია ჩაწეროთ $23 \parallel x = N$. ამით განისაზღვრა N წერტილი. პირველი სტრიქონი შესაძლებლობას გვაძლევს ავაგოთ P წერტილი. ე.ი. პასკალის წრფე აგებულია: $p = PN$. ამიტომ, პასკალის თეორემის თანახმად, თუ PN კვეთს 34 წრფეს M წერტილში, მაშინ 61 წრფეც უნდა გადიოდეს ამ წერტილზე. ამით განისაზღვრება 61 წრფე, რომლის გადაკეთაში მოცემულ x წრფესთან, მივიღებთ საძიებელ 6 წერტილს.

პასკალის თეორემა k^2 მეორე რიგის წირში ჩახაზულ ექვსკუთხედზე შეიძლება იქნეს გამოყენებული ნაკლები წვეროების მქონე მრავალკუთხედების ასაგებადაც. განვიხილოთ პასკალის თეორემის კერძო შემთხვევა, როდესაც მეორე რიგის წირში ჩახაზული ექვსკუთხედის ორი წვერო შეთავსებულია.

დავუშვათ, რომ შეთავსებულია 1 და 2 წვეროები (სურ. 62). მაშინ 12 გვერდი უნდა განვიხილოთ, როგორც k^2 წირის მხები $l=2$ წერტილში. პასკალის თეორემის თანახმად, 12 მხების და 45 გვერდის გადაკეთის წერტილი მდებარეობს წრფეზე, რომელიც გადის 23 და 56, 34 და 61 გვერდების გადაკეთის წერტილებზე.

შევადგინოთ პასკალის თეორემის სქემა:

$$12 \cap 45 = P$$

$$23 \cap 56 = N$$

$$34 \cap 61 = M \text{ და ავაგოთ } P, N, M \text{ წერტილები.}$$

მივიღებთ თეორემას: მეორე რიგის წირში ჩახაზული ხუთკუთხედის ერთ წვეროში გავლებული მხები იკვეთება მოპირდაპირე გვერდთან წერტილში, რომელიც ორი სხვა მოპირდაპირე გვერდის გადაკეთის წერტილების კოლინეარულია.

თუ განვიხილავთ 12 და 45 ორ მოპირდაპირე გვერდს, როგორც მხებებს (ისე, რომ 1 და 2, 4 და 5 წერტილები შეუთავსდეს ერთმანეთს), მივიღებთ k^2 წირში ჩახაზულ ოთხკუთხედს (სურ. 63).

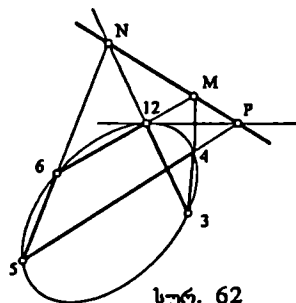
შევადგინოთ პასკალის თეორემის სქემა 123456 ექვსკუთხედისათვის, სადაც 12 და 45 გვერდები 1 და 4 წერტილებში გავლებული მხებებია.

$$12 \cap 45 = P,$$

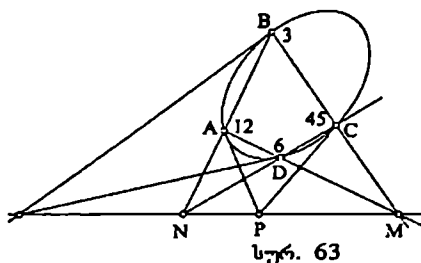
$$23 \cap 56 = N,$$

$$34 \cap 61 = M.$$

ავაგოთ P, N და M წერტილები, მივიღებთ შემდეგ თეორემას: მეორე რიგის წირში ჩახაზული ოთხკუთხედის მოპირდაპირე წვეროებში გავლებული მხებების ორი წვეილი და მოპირდაპირე



სურ. 62

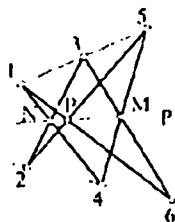


სურ. 63

გვერდების ორი წვეილი იკვეთება ერთ წრფეზე მდებარე ოთხ წერტილში.

პასკალის თეორემა იმ შემთხვევაშიც მართებულია, როცა მეორე რიგის წირი გადაგვარებულია ორ წრფედ (ანუ როდესაც წირის წარმომქმნელი პროექციული კონები პერსპექტიულია) (ხურ. 64).

თუ ექვსკუთხედის წვეროები განლაგებულია ისე, რომ მეზობელი წვეროები სხვადასხვა წრფეზე მდებარეობს, მაშინ ექვსკუთხედის მოპირდაპირე გვერდები იკვეთება ერთ წრფესე მდებარე სამ წერტილში.



ხურ. 64

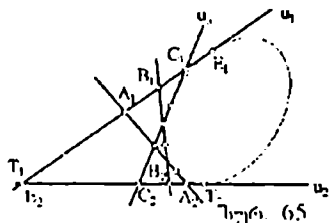
მეორე რიგის წირის ეს კერძო შემთხვევა და მასში ჩახაზული ექვსკუთხედი ქმნის კონფიგურაციას, რომელსაც პასკალი-პაპის კონფიგურაცია ეწოდება. კონფიგურაცია შედგება ცხრა წრფისა და ცხრა წერტილისაგან. ყოველ წრფეზე სამი წერტილი ძეკს და ყოველ წერტილზე სამი წრფე გადის. ნებისმიერი წრფე შეიძლება მივიღოთ პასკალის წრფედ მაშინ განისაზღვრება ექვსკუთხედი, რომლისათვის შერჩეულ წრფეზე მდებარე სამი წერტილი მოპირდაპირე გვერდების გადაკვეთის წერტილებია (ხურ. 64). მაგალითად, თუ პასკალის წრფედ მიღებულია S_1 წრფე, მაშინ ექვსკუთხედი $N_4M_6P_2$ იქნება.

5.3. ორადი თეორემა

გამოვიყენოთ ორადობის პრინციპი კონიუსური კვეთების თეორიაში.

მცირე ორადობის პრინციპით მეორე რიგის წირის ორად სახეს ვუწოდოთ მეორე რიგის წრფეთა კონა. მართლაც, ორი პროექცი-

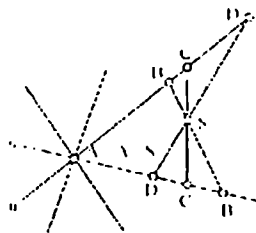
ული კონის შესაბამისი წრფეების გადაკვეთის წერტილების ორადი სახე არის ორ პროექციულ წერტილთა მწკრივის შესაბამისი წერტილების შემადგენელი წრფეების სიმრავლე. ე.ი. თუ $u_1(A_1, B_1, C_1) \bar{\wedge} u_2(A_2, B_2, C_2)$. მაშინ A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 წრფეება სიმრავლე არის მეორე რიგის წრფეთა კონა (სურ. 65). ცხადია, u_1 და u_2 წრფეებიც მეორე რიგის კონის კუთვნილი წრფეებია.



სურ. 65

საერთოდ, მეორე რიგის წრფეთა კონის ევლთა თვისება არის მეორე რიგის წირის ორადი. ასე, მეორე რიგის წრფეთა კონა განისაზღვრება ხუთი წრფით, რომელთაგან არც ერთი სამეული ერთ წრფეზე არ გადის.

თუ u_1 და u_2 წერტილთა ორი მწკრივი პერსპექტიულია, მაშინ მეორე რიგის წრფეთა კონა გადაგვარდება პირველი რიგის წრფეთა ორ კონად, რომელთა ცენტრებია u_1 და u_2 წერტილთა მწკრივების საერთო $A=A_1=S_1$ წერტილი და მათი პერსპექტივის S ცენტრი (სურ. 66).



სურ. 66

მეორე რიგის წირის იმ თვისებას, რომ მას ყოველ წრფესთან ორი საერთო წერტილი აქვს, შეესაბამება მეორე რიგის წრფეთა კონის ორადი თვისება:

ყოველ წერტილზე გადის მეორე რიგის კონის კუთვნილი არაუმეტეს ორი წრფისა.

შტაინერის თეორემის ორადი თეორემა ამტკიცებს, რომ მეორე რიგის კონის წრფეები ამ კონის ორ ნებისმიერ წრფეზე მოკვეთის პროექციულად შესაბამისი პირველი რიგის წერტილთა მწკრივებს (სურ. 65).

მეორე რიგის წირის თვისებას მის ყოველ წერტილზე გამავალი მხების შესახებ შეესაბამება ორადი წინადადება მეორე რიგის კონისათვის.

მეორე რიგის კონის ყოველ წრფეზე ძვეს შეხების ერთი წერტილი.

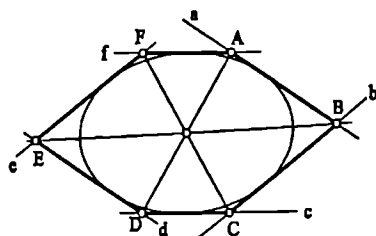
მეორე რიგის წრფეებზე მდებარე შეხების წერტილები წარმოქმნის წირს, რომელსაც ეწოდება მეორე კლასის წირი და რომელიც მეორე რიგის წირის იდენტურია¹.

ამრიგად, მეორე რიგის წირის ყველა მხების ერთობლიობა მეორე რიგის წრფეთა კონას შეადგენს.

მეორე რიგის კონის წრფეების შეხების წერტილთა ერთობლიობა მეორე რიგის წირს წარმოქმნის.

ე.ი. კონიკის მხებები არის მეორე რიგის კონის წრფეები, ხოლო კონიკა - მეორე რიგის კონის წრფეების მომკლები.

გამოვიყენოთ ორადობის პრინციპი პასკალის თეორემისათვის. ექვსკუთხედის მაგივრად, რომელიც A, B, C, D, E, F ექვსი წვეროსაგან და AB, BC, CD, DE, EF, FA გვერდებისაგან შედგება, მივიღებთ ექვსგვერდას, რომელიც შედგება ექვსი გვერდისაგან - a, b, c, d, e, f და ექვსი წვეროსაგან - $a \cap b, b \cap c, c \cap d, d \cap e, e \cap f, f \cap a$ (სურ.



სურ. 67

67). რადგან კონიკის ყოველი წერტილის ორადი სახეა მეორე რიგის წრფეთა კონის ერთი წრფე, რომელიც კონიკას ამ წერტილში ეხება, ამიტომ კონიკაში ჩახაზული ექვსკუთხედი

¹დამტკიცება იხილე Н.А. Глаголев „Проективная геометрия“ Изд-во „Высшая школа“. 1963 г.

ექვსგვერდა აღმოჩნდება, რომელიც შემოხაზულია ამ კონიკის ირგვლივ. პასკალის თეორემა კი გარდაიქმნება თეორემად, რომელიც ცნობილია, როგორც ბრიანშონის თეორემა:

სამი წრფე, რომელიც წვეილ-წვეილად აერთებს კონიკის ირგვლივ შემოხაზული ექვსგვერდას მოპირდაპირე წვეროებს, ერთ წერტილში იკვეთება (სურ. 67).

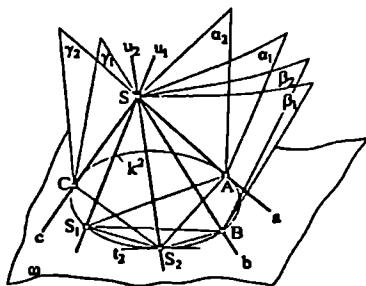
AD, BE, CF წრფეებს ბრიანშონის წრფეები ეწოდება, ხოლო მათ გადაკვეთის წერტილს – ბრიანშონის წერტილი.

5.4. მეორე რიგის წრფოვანი ზედაპირები

დიდი ორადობის პრინციპით განესაზღვროთ ერთი სიბრტყის კუთვნილი მეორე რიგის წრფეთა კონის ორადი სახე. მეორე რიგის წრფეთა კონა არის ორი პროექციულ წერტილთა მწყრივის შესაბამისი წერტილების კუთვნილი (შემაერთებელი) წრფეთა სიმრავლე. მისი ორადი სახე იქნება გადაკვეთილი ღერძების მქონე ორი პროექციული სიბრტყეთა კონის შესაბამისი სიბრტყეების კუთვნილი (გადაკვეთის) წრფეთა სიმრავლე. შესაბამის სიბრტყეთა ყოველი წვეილი განსაზღვრავს წრფეს, რომელიც სიბრტყეთა კონების საერთო წერტილზე გაივლის. ასეთნაირად მივიღებთ წრფეთა სიმრავლეს, რომელიც მეორე რიგის წრფეთა კონის ორადი იქნება. ამ სიმრავლის წრფეებიდან თითოეული შესაბამისი სიბრტყეების გადაკვეთაა და გადის ორი სიბრტყეთა კონის ერთ საერთო წერტილზე. ასეთი წრფეები წარმოქმნის კონუსურ ზედაპირს, რომელიც მეორე რიგის იქნება, რადგან ნებისმიერ სიბრტყესთან გადაიკვეთება მეორე რიგის წირზე.

მართლაც, ვთქვათ, S წერტილის კუთვნილი $\alpha_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \bar{\wedge} \alpha_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ ორი პროექციული სიბრტყეთა კონით მოცემულია კონუსური ზედაპირი, რომლის წვეროა S წერტილი, ხოლო შესაბამისი სიბრტყეთა გადაკვეთის $a=(\alpha_1 \cap \alpha_2)$, $b=(\beta_1 \cap \beta_2)$ და ა.შ. წრფეები – მსახველებია. გადაკვეთით კონუსური ზედაპირი ა

სიბრტყით. ყოველი მსახველი გადაიკვეთება ა სიბრტყესთან წერტილზე. ასე მივიღებთ ა სიბრტყის და კონუსური ზედაპირის კვეთის $A, B, C, \dots$ წერტილებს (სურ. 68). ეტქვათ, α_1 და α_2 კონების ღერძები იკვეთება ა სიბრტყესთან S_1 და S_2 წერტილებში. კონუსური ზედაპირის



სურ. 68

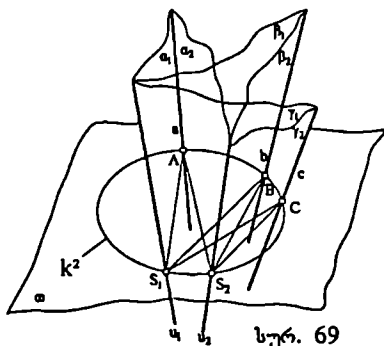
კვეთის წირის ნებისმიერი A წერტილი შევაერთოთ S_1 და S_2 წერტილებთან. S_1A და S_2A არის $\alpha_1 \cap \alpha_2$ სიბრტყეების გადაკვეთა ა სიბრტყესთან. ანალოგიური აგებები შევასრულოთ $B, C, \dots$ წერტილებისათვის. მივიღებთ წრფეთა $S_1(A, B, C, \dots)$ და $S_2(A, B, C, \dots)$ ორ კონას, რომლებიც აგებმილებს კვეთის წირის წერტილებს და არის $\alpha_1(\alpha_1, \beta_1, \dots)$ და $\alpha_2(\alpha_2, \beta_2, \dots)$ სიბრტყეთა კონების კვეთა ა სიბრტყესთან. მაგრამ, პირობის თანახმად, $\alpha_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots) \cap \alpha_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots)$, ამიტომ $S_1(S_1A, S_1B, S_1C, \dots) \cap S_2(S_2A, S_2B, S_2C, \dots)$. ამრიგად, კონუსის კვეთა ა სიბრტყესთან ორი პროექციული წრფეთა კონის შესაბამისი წრფეების გადაკვეთის წერტილებია, ანუ კვეთის წირი – მეორე რიგის k^2 წირია.

ამრიგად, ერთი სიბრტყის კუთვნილი მეორე რიგის წრფეთა კონის ორადი სახეა მეორე რიგის კონუსი.

როგორც უკვე ვიცით, k^2 წირის წარმომქმნელი პროექციული S_1 და S_2 კონების საერთო წრფეს შეესაბამება კონების ცენტრებზე გამავალი მხებები. მაგალითად, S_1 კონის კუთვნილ S_1S_2 წრფეს შეესაბამება S_2 წერტილზე გამავალი t_2 მხები. კონუსის S წვეროდან დაგეგმილებით მივიღებთ კონუსის S, t_2 მხებ სიბრტყეს. SS_2 მსახველი არის ამ სიბრტყისა და კონუსის შეხების წრფე. რადგან მეორე რიგის ნებისმიერ წერტილში გადის ერთი მხები, ამიტომ კონუსის ნებისმიერ მსახველზე გადის ერთი მხები სიბრტყე. მეორე რიგის წირის მხებები ქმნის მეორე რიგის წრფეთა

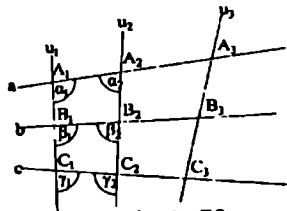
კონას, რომლის S ცენტრიდან დაგეგმილებით მივიღებთ მეორე რიგის სიბრტყეთა კონას. მეორე რიგის კონუსის მხები სიბრტყეები წარმოქმნის მეორე რიგის სიბრტყეთა კონას, რომელიც მეორე რიგის წერტილთა მწკრივის ორადი სახეა.

მეორე რიგის კონუსური ზედაპირის წარმოქმნა განვაზოგადოთ მეორე რიგის ზოგადი სახის წრფოვანი ზედაპირების პროექციულ წარმოქმნაზე. კონუსის წარმოქმნის შემთხვევაში, პროექციულ სიბრტყეთა კონების ღერძები იკვეთებოდა. მაგრამ ორი პროექ-



ციული სიბრტყეთა კონა აცდენილი ღერძებით აგრეთვე წარმოქმნის რაღაც ზედაპირს, რადგან პროექციული კონების შესაბამისი სიბრტყეების ყოველი წყვილი ამ შემთხვევაშიც იკვეთება წრფეზე, რომელიც ზედაპირის მსახველი იქნება. ვაჩვენოთ, რომ ასეთი წესით მივიღებთ მეორე რიგის წრფოვანი ზედაპირს. ვთქვათ, $\alpha_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots) \cap \alpha_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots)$ სიბრტყეთა კონები პროექციულია (სურ. 69) და მათი α_1 და α_2 ღერძები აცდენილი წრფეებია. შესაბამისი სიბრტყეების წყვილების გადაკვეთის $a, b, c, \dots$ წრფეები ზედაპირის მსახველებია. ვთქვათ, ω ნებისმიერი მკვეთი სიბრტყეა. პროექციული სიბრტყეთა კონები $\alpha_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots) \cap \alpha_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots)$ იკვეთება ω სიბრტყესთან პროექციულ წრფეთა კონებზე $S_1(A, B, C, \dots) \cap S_2(A, B, C, \dots)$. ამ კონების შესაბამისი წრფეების გადაკვეთის $A, B, C, \dots$ წერტილები წარმოქმნილი ზედაპირის $a, b, c, \dots$ მსახველების გადაკვეთაა ω სიბრტყესთან. კვეთაში მიღებული k^2 წირი გვემჩვენება პროექციულ $S_1 \cap S_2$ წრფეთა კონებით, რის გამოც ეს წირი მეორე რიგისაა. ამიტომ, წარმოქმნილი ზედაპირიც მეორე რიგის იქნება.

განვიხილოთ წრფოვანი ზედაპირის $a, b, c, \dots$ მსახველების თვისებები. მაგალითად, ყველა მსახველი იკვეთება პროექციულ სიბრტყეთა კონების α_1 და α_2 ღერძებთან. ამაში აღვიღად დავრწმუნდებით. მართლაც, ნებისმიერი მსახველი, მაგალითად a , არის რა α_1 და α_2 შესაბამისი სიბრტყეების გადაკვეთის წრფე $a = \alpha_1 \cap \alpha_2$, ეკუთვნის ორივე მათგანს და ამიტომ, იკვეთება α_1 და α_2 წრფეებთან ორ წერტილზე. ამრიგად, ზედაპირის $a, b, c, \dots$ მსახველები იკვეთება სიბრტყეთა კონების α_1 და α_2 ღერძებთან და



სურ. 70

წარმოქმნის ორ წერტილთა მწკრივს: $(A_1, B_1, C_1, \dots)$ და $(A_2, B_2, C_2, \dots)$. ვაჩვენოთ, რომ ეს მწკრივები პროექციულია ანუ $\alpha_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \bar{\cap} \alpha_2(A_2, B_2, C_2, \dots)$. 70-ე სურათზე მოცემულია მეორე რიგის ზედაპირის სქემა. ზედაპირი წარმოქმნილია პროექციულ სიბრტყეთა $\alpha_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots) \bar{\cap} \alpha_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots)$ კონებით. a, b, c მსახველები იკვეთება α_1 და α_2 ღერძებთან $A_1, B_1, C_1, \dots$ და $A_2, B_2, C_2, \dots$ წერტილებში. რადგან $a, b, c, \dots$ არის $(\alpha_1 \cap \alpha_2)$, $(\beta_1 \cap \beta_2)$, $(\gamma_1 \cap \gamma_2)$ სიბრტყეების გადაკვეთა, ამიტომ სიბრტყეთა კონა $\alpha_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots)$ აგებმილებს $(A_2, B_2, C_2, \dots)$ წერტილთა მწკრივს α_2 ღერძზე, ხოლო კონა $\alpha_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots) - (A_1, B_1, C_1, \dots)$ წერტილთა მწკრივს α_1 ღერძზე.

ანუ $\alpha_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots) \bar{\cap} \alpha_2(A_2, B_2, C_2, \dots)$ და $\alpha_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots) \bar{\cap} \alpha_1(A_1, B_1, C_1, \dots)$, მაგრამ პირობის თანახმად, $\alpha_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots) \bar{\cap} \alpha_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots)$, ამიტომ, $\alpha_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \bar{\cap} \alpha_2(A_2, B_2, C_2, \dots)$.

მეორე რიგის წრფოვანი ზედაპირის $a, b, c, \dots$ მსახველები კვეთს პროექციული კონების α_1 და α_2 ღერძებს $\alpha_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \bar{\cap} \alpha_2(A_2, B_2, C_2, \dots)$ ორ პროექციულ წერტილთა მწკრივზე.

მართებული იქნება შებრუნებული წინადადებაც:

თუ α_1 და α_2 აცდენილ წრფეებზე მოცემულია ორი პროექციული მწკრივი $(A_1, B_1, C_1, \dots)$ და $(A_2, B_2, C_2, \dots)$, მაშინ ამ

მწკრივების შესაბამისი წერტილების შემაერთებული წრფეები მეორე რიგის წრფოვანი ზედაპირის მსახველებია.

მართლაც, თუ დავაგეგმილებთ $(A_1, B_1, C_1, \dots)$ და $(A_2, B_2, C_2, \dots)$ პროექციულ მწკრივებს α_1 და α_2 ღერძის მქონე სიბრტყეთა კონე-ბით, მივიღებთ ორ პროექციულ სიბრტყეთა კონას: $\alpha_1(A_1, B_1, C_1, \dots)$ $\bar{\alpha}_2(A_2, B_2, C_2, \dots)$ და ამ კონების შესაბამისი სიბრტყეები გადაიკვეთება $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, \dots$ მსახველებზე.

რადგან პროექციულ სიბრტყეთა კონების და პროექციულ წერტილთა მწკრივების წყვილები ორადი სახეებია, ამიტომ ზემოთ აღწერილი მეორე რიგის ზედაპირის მსახველების აგების ორი მეთოდი წარმოადგენს წრფოვანი ზედაპირების წარმოქმნის ორ ურთიერთორად მეთოდს – პროექციულ სიბრტყეთა კონების და პროექციულ წერტილთა მწკრივების დახმარებით.

აქედან გამომდინარეობს წრფოვანი ზედაპირის აგება, როგორც წრფეთა a, b, c , სიმრავლის, რომლებიც გადის ორი აცდენილი ღერძის მქონე პროექციულ წერტილთა მწკრივების შესაბამის წერტილებზე.

ცხადია, რომ ზედაპირის $a, b, c, \dots$ მსახველები წყვილ-წყვილად აცდენილებია, რადგან გადაკვეთილი მსახველების თუნდაც ერთი წყვილის არსებობის დაშვება გამოიწვევს α_1 და α_2 ღერძების გადაკვეთას, რაც ეწინააღმდეგება მოცემულ პირობას, რომ ეს ღერძები აცდენილებია.

a მსახველის ნებისმიერ A_3 წერტილზე გავავლოთ α_3 წრფე, რომელიც გადაიკვეთება b და c მსახველებთან რომელიმე B_3 და C_3 წერტილებზე. განვიხილოთ α_3 , როგორც ზედაპირის მკვეთი წრფე (სურ. 70). α_3 მკვეთს წრფოვან ზედაპირთან ექნება საერთო A_3, B_3, C_3 სამი წერტილი. მაშინ α_3 -ზე გამავალი სიბრტყე გადაიკვეთება ზედაპირთან მეორე რიგის წირზე, რომელსაც ექნება ერთ α_3 წრფეზე მდებარე სამი წერტილი (A_3, B_3, C_3) ანუ მეორე რიგის წირი გადაგვარდა α_3 წრფედ, რომელიც მთლიანად უნდა ეკუთვნოდეს მეორე რიგის წრფოვან ზედაპირს. რადგან A_3 წერ-

ტილი ნებისმიერად შევარჩიეთ a მსახველზე, ამიტომ, არსებობს u_3, u_4, u_5 წრფეთა სიმრავლე, რომელიც u_1 და u_2 ღერძებთან ერთად მეორე რიგის ზედაპირს ეკუთვნის.

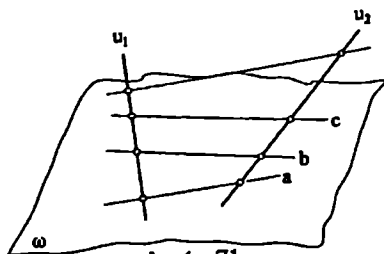
ამრიგად, მეორე რიგის წრფოვან ზედაპირზე არსებობს მსახველების ორი სერია — $a, b, c, \dots$ და $u_1, u_2, u_3, \dots$ რომელთა თვისებებია:

ერთი სერიის ყოველი მსახველი აცდენილია ამ სერიის ყველა მსახველთან, ხოლო მეორე სერიის ყველა მსახველთან იკვეთება.

ზედაპირის ყოველ წერტილზე გადის სხვადასხვა სერიის ორი მსახველი.

ასეთი მსახველების წყვილით განისაზღვრება სიბრტყე, რომელსაც ჰქვია შეხების სიბრტყე ზედაპირის ერთ რომელიმე წერტილში.

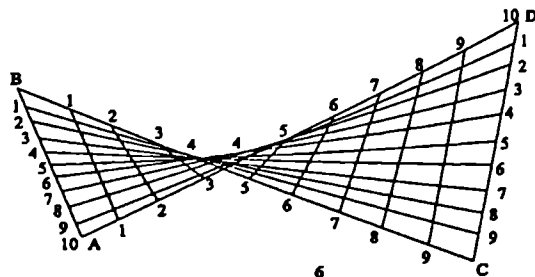
ზემონათქვამიდან გამომდინარე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ წრფოვანი ზედაპირი შეიძლება იყოს მიღებული წრფის მოძრაობით მასთან გადაკვეთილ სამ აცდენილ წრფეზე. ასეთ შემთხვევაში მოძრავ წრფეს ეწოდება მსახველი, ხოლო სამ აცდენილ წრფეს — მიმართველები.



სურ. 71

მეორე რიგის წრფოვანი ზედაპირების აფინური თვისებების გათვალისწინებით

ისინი შეიძლება ორ კლასად დავყოთ. ზედაპირებს, რომელთათვის არასაკუთრივი სიბრტყე მკვეთია, ეწოდება ცალკალთა ჰიპერ-



სურ. 72

ბოლოიდები. ხოლო ზედაპირებს, რომლებიც ეხება არასაკუთრივ სიბრტყეს, ჰიპერბოლური პარაბოლოიდები (სურ. 71, 72). ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის შემთხვევაში არასაკუთრივი სიბრტყე, როგორც მხები სიბრტყე, კვეთს პარაბოლოიდს სხედასხვა სერიის ორ მსახველზე. აღვნიშნოთ ეს მსახველები Π და Π' .

ერთი სერიის ყველა მსახველი კვეთს Π წრფეს იმ დროს, როცა მეორე სერიის მსახველები კვეთს Π' წრფეს. ეს ნიშნავს, რომ პირველი სერიის ყველა მსახველი Π -ზე გამავალი ერთი და იგივე α სიბრტყის პარალელურია. ზუსტად ასევე მეორე სერიის ყველა მსახველი Π' წრფეზე გამავალ ერთი და იგივე α' სიბრტყის პარალელურია. ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის ამ თვისებით ხშირად სარგებლობენ მისი მოდელის ასაგებად.

თუ α_1 და α_2 აცდენილი წრფეებია, რომლებიც α სიბრტყის პარალელური არ არის (სურ. 71), შეგვიძლია მივიჩნიოთ ისინი ერთი სერიის α_1 და α_2 მსახველებად. მეორე სერიის მსახველებად შეიძლება განვიხილოთ $a, b, c, \dots$ წრფეები, რომლებიც კვეთს α_1 და α_2 ორივე წრფეს და α სიბრტყის პარალელურია. ადვილი მისახვედრია, რომ $a, b, c, \dots$ მეორე სერიის მსახველები, კვეთს სამ უძრავ წრფეს: α_1 , α_2 და α სიბრტყის არასაკუთრივ Π წრფეს.

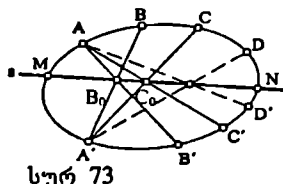
ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის ასაგებად შეგვიძლია ვისარგებლოთ ABCD ტეტრაედრით (სურ. 72). მართლაც, თუ მოპირდაპირე AB და CD წიბოებს გავყოფთ ერთნაირი რაოდენობის მონაკვეთებად და წრფეებით ერთმანეთთან შევაერთებთ დაყოფის წერტილებს, მივიღებთ 11, 22, 33, 44, 55, ... წრფეებს, რომლებიც ერთი სერიის მსახველები იქნება, რადგან ეს წრფეები AD და BC წრფეების პარალელური α სიბრტყის პარალელურია. ზუსტად ასევე, თუ გამოვიყენებთ ტეტრაედრის მოპირდაპირე AD და BC წიბოებს, შეიძლება ავაგოთ მეორე სერიის მსახველები, რომლებიც AB და CD წრფეების პარალელური α' სიბრტყის პარალელური იქნება.

5.5. მეორე რიგის სახეების პროექციული შესაბამისობა

ისევე, როგორც პროექციული გეომეტრიის ძირითადი თეორემის თანახმად, ორ წრფეზე (ან ერთი და იგივე წრფეზე) მდებარე წერტილთა მწკრივებს შორის შეიძლება დავამყაროთ პროექციული შესაბამისობა, სამი შესაბამის წერტილთა წყვილის მოცემით, პროექციული შესაბამისობა შეიძლება დამყარდეს ორ (ან ერთი და იგივე) მეორე რიგის წერტილთა მწკრივებს შორის ისევ სამი შესაბამისი წერტილთა წყვილის მოცემით.

განვიხილოთ ერთი და იგივე მეორე რიგის k^2 წირზე განლაგებულ წერტილთა მწკრივების პროექციული შესაბამისობა. ეს შესაბამისობა მოცემულია შესაბამის წერტილთა სამი წყვილით:

$A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$, $C \rightarrow C'$. შევარჩიოთ k წირის A და A' წერტილები მაგეგმილებელი კონების ცენტრებად. დავაგვიშლით რიგი $(A, B, C, \dots)$ A' ცენტრიდან, ხოლო რიგი $(A', B', C', \dots)$ — A



სურ. 73

ცენტრიდან. მივიღებთ ორ პროექციულ კონას $A'(A, B, C, \dots)$ $A(A', B', C', \dots)$. ეს კონები არა მხოლოდ პროექციული, არამედ პერსპექტიულიც იქნება, რადგან მათი საერთო AA' წრფე თავის თავს შეესაბამება. პერსპექტიული კონების პერსპექტივის s ღერძის ასაგებად გვაქვს ამ კონების შესაბამის წრფეთა ორი წყვილი: $AB' \cap A'B = B_0$, $AC' \cap A'C = C_0$. C_0B_0 წრფე არის A და A' კონების პერსპექტივის s ღერძი. პერსპექტივის s ღერძის დახმარებით k წირის პროექციულ შესაბამისობაში, რომელიც მოცემულია შესაბამის წერტილთა სამი წყვილით (A და A' , C და C' , B და B'), ადვილად ავაგებთ შესაბამის წერტილთა წყვილებს, მაგალითად, სურათზე აგებული ნებისმიერი D წერტილის შესაბამისი D' წერტილი (სურ. 73).

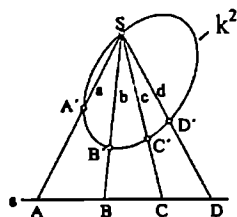
რამდენი ორმაგი წერტილი შეიძლება არსებობდეს მეორე რიგის წირის პროექციულ შესაბამისობაში? ცხადია, რომ M და N

წერტილები, რომლებიც s პერსპექტივის ღერძის და მეორე რიგის წირის გადაკვეთით მიიღება, ორმაგი წერტილები იქნება. თუ M წერტილი ორმაგია, მაშინ A კონის AM წრფეს შესაბამება A' კონის $A'M$ წრფე. ამრიგად, M არის პერსპექტიული A და A' კონების შესაბამისი წრფეების გადაკვეთის წერტილი და უნდა მდებარეობდეს s პერსპექტივის ღერძზე. ე.ი. მეორე რიგის წირის პროექციული გარდაქმნის ორმაგი წერტილების რაოდენობა დაიყვანება s პერსპექტივის ღერძის და k^2 წირის გადაკვეთის წერტილების რაოდენობაზე. შესაძლებელია სამი ვარიანტი. თუ s პერსპექტივის ღერძი იკვეთება k წირთან ორ წერტილში (სურ. 73), მეორე რიგის წირის პროექციულ გარდაქმნაში არსებობს ორი ორმაგი M და N წერტილი. ასეთ გარდაქმნას ჰიპერბოლური ეწოდება. თუ s პერსპექტივის ღერძი ეხება k^2 წირს, მივიღებთ მეორე რიგის წირის გარდაქმნას ერთი ორმაგი წერტილით, რომელსაც პარაბოლური ეწოდება. თუ s პერსპექტივის ღერძს k^2 წირთან საერთო წერტილი არა აქვს, მივიღებთ k^2 წირის გარდაქმნას, რომელსაც ორმაგი წერტილები არ ექნება. ასეთ გარდაქმნას k^2 წირის ელიფსური გარდაქმნა ეწოდება.

მეორე რიგის წირზე პროექციული შესაბამისობის გამოყენებით შეიძლება გადავწყვიტოთ ამოცანები, რომლებიც ეხება წრფეების პროექციულ გარდაქმნას. ადვილად დავადგენთ კავშირს წრფის პროექციულ გარდაქმნასა და მეორე რიგის წირის პროექციულ გარდაქმნებს შორის.

ეთქვათ, მოცემულია A, B, C, D , წერტილთა მწკრივი წრფეზე და მეორე რიგის k^2 წირი (სურ. 74). k^2 წირზე ავარჩიოთ ნებისმიერი S წერტილი და შევაერთოთ იგი s მწკრივის წერტილებთან. მივიღებთ s მწკრივის პერსპექტიულ S კონას:

$$S(a, b, c, d, \dots) \bar{\wedge} s(A, B, C, D, \dots).$$



სურ 74

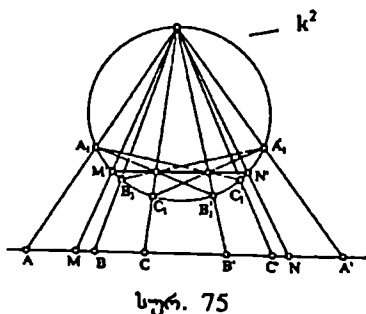
S კონის ყოველი წრფე გადაკვეთს k^2 წირს კიდევ ერთ წერტილში (S წერტილის გარდა). S კონის წრფეების და k წირის გადაკვეთის $A', B', C', D', \dots$ წერტილთა ერთობლიობა წარმოქმნის მეორე რიგის წერტილთა მწკრივს, რომელიც S კონის პერსპექტიული იქნება.

გვექნება $S(a, b, c, d, \dots) \bar{\wedge} k^2(A', B', C', D', \dots)$. ამრიგად, წერტილთა მწკრივი s წრფესა და k მეორე რიგის მწკრივი ერთი და იგივე S კონის კვეთებია. ამიტომ, ასეთ ორ მწკრივს, რომელთაგან ერთი (s) პირველი რიგისაა, მეორე (k^2) – მეორე რიგის, ვუწოდოთ $s(ABCD) \bar{\wedge} k^2(A'B'C'D')$ პერსპექტიული მწკრივები.

s წრფესა და k^2 წირზე წერტილთა მწკრივების პერსპექტიული განლაგებით შეგვიძლია ვისარგებლოთ და ერთი მწკრივი მეორეთი შევცვალოთ.

როგორც ვნახეთ, k^2 წირის გარდაქმნაში შესაბამისი წერტილების აგება მარტივად სრულდება პერსპექტივის ღერძის გამოყენებით, იმ დროს როცა წრფის გარდაქმნაში შესაბამის წერტილთა წყვილების აგება მოითხოვს შედარებით რთულ აგებებს. ამიტომ, წერტილთა მწკრივი წრფეზე შევცვალოთ მისი პერსპექტიული მწკრივით რომელიმე მეორე რიგის წირზე. ავაგოთ შესაბამის წერტილთა წყვილები k^2 წირის გარდაქმნაში და დავებრუნოთ ისინი s წრფეზე, რითაც განისაზღვრება შესაბამის წერტილთა წყვილები s წრფის გარდაქმნაში. S'

გადავწყვიტოთ შემდეგი ამოცანა. ეთქვას, s წრფის გარდაქმნა მოცემულია შესაბამის წერტილთა სამი წყვილით: A და A_1 , B და B_1 , C და C_1 . ავაგოთ ამ გარდაქმნის ორმაგი წერტილები (სურ. 75). ავიღოთ s წრფესთან ერთ სიბრტყეში მდებარე k^2 მეორე



სურ. 75

რიგის წირი და მისი S წერტილიდან ავსახოთ A, A_1, B, B_1, C, C_1 წერტილები k^2 წირზე. მივიღებთ k წირის გარდაქმნას, სადაც $k^2(A', B', C', \dots) \bar{\cap} k^2(A'_1, B'_1, C'_1, \dots)$.

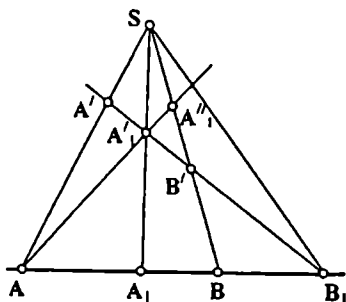
ამ გარდაქმნის ორმაგი წერტილების ასაგებად საკმარისია ავაგოთ k^2 წირის პროექციული შესაბამისობის პერსპექტივის ღერძი და ვიპოვოთ ამ ღერძის გადაკვეთის M' და N' წერტილები k^2 წირთან, რომლებიც k^2 წირის პროექციულ გარდაქმნაში ორი ორმაგი წერტილი იქნება. თუ ამ წერტილებს შებრუნებული დაგეგმილებით დავაბრუნებთ s წრფეზე, მივიღებთ s წრფის პროექციული გარდაქმნის ორმაგ M და N წერტილებს.

მეექვსე თავი. ინვოლუცია

6.1. განსაზღვრებები

49-ე სურათზე მოცემული S კონის შესაბამის წრფეთა წყვილები ურთიერთპერპენდიკულარულია: $a \perp a_1$, $b \perp b_1$, $c \perp c_1$. ამრიგად, გვაქვს $(a, b, c, \dots) \perp (a_1, b_1, c_1, \dots)$. ამ კონის მეკეთ s წრფეზე მივიღებთ პროექციულ წერტილთა $(A, B, C, \dots) \perp (A_1, B_1, C_1, \dots)$ მწკრივებს, რომელშიც $A = a \cap s$ წერტილს შეესაბამება $A_1 = a_1 \cap s$ წერტილი და, პირიქით, A_1 წერტილი შეესაბამება A წერტილს ანუ $A \rightarrow A_1$, $A_1 \rightarrow A$. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ A და A_1 წერტილები ორმაგ შესაბამისობაშია. დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა:

თუ წრფის გარდაქმნაში შესაბამის წერტილთა ერთი წყვილი ორმაგ შესაბამისობაშია, მაშინ შესაბამის წერტილთა ყველა წყვილი ორმაგ შესაბამისობაში იქნება.



სურ. 76

ვთქვათ, წრფის პროექციული გარდაქმნა მოცემულია შესაბამის წერტილთა (A, A_1, B) (A_1, A, B_1) სამი წყვილით. მოცემულ პროექციულ გარდაქმნაში s წრფის A და A_1 წერტილები ორმაგ შესაბამისობაშია ანუ

$$A \rightarrow A_1, A_1 \rightarrow A.$$

ვთქვათ, B და B_1 შესაბამის წერტილთა ნებისმიერი წყვილია.

დავამტკიცოთ, რომ B და B_1 წყვილიც ორმაგ შესაბამისობაში იქნება. განვიხილოთ პერსპექტივათა ჯაჭვი (სურ. 76):

$$A, A_1, B, B_1 \xrightarrow{S} A', A'_1, B', B'_1 \xrightarrow{A} S, A''_1, B'', B''_1 \xrightarrow{A'_1} A_1, A, B_1, B \text{ ანუ } (A, A_1, B, B_1) \xrightarrow{A'_1} (A_1, A, B_1, B).$$

ეს ნიშნავს, რომ (A, A_1, B) პროექციულ გარ-

დაქმნაში B_1 წერტილს შეესაბამება B წერტილი ანუ B და B_1 წერტილთა წყვილიც ორმაგ შესაბამისობაშია.

პროექციულ გარდაქმნას, რომელშიც შესაბამისი ელემენტების ყოველი წყვილი ორმაგ შესაბამისობაშია, ეწოდება ინვოლუციური გარდაქმნა ან უბრალოდ ინვოლუცია. ამიტომ, ზემოთ დამტკიცებული თეორემა შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ:

თუ პროექციულ გარდაქმნაში შესაბამის წერტილთა ერთი წყვილი ორმაგ შესაბამისობაშია, მაშინ ეს გარდაქმნა ინვოლუციურია. ინვოლუცია თავის თავის შესაბამისი გარდაქმნაა. თუ ამ გარდაქმნას ორჯერ შევასრულებთ, მივიღებთ იგივე გარდაქმნას: $A \rightarrow A_1$, $A_1 \rightarrow A$. ინვოლუცია ახორციელებს წრფის ყველა წერტილის სრულ დანაწილებას წყვილებად, რომელთაგან ყოველი წყვილი ორმაგ შესაბამისობაშია. წერტილთა ყოველ ასეთ წყვილს ეწოდება მოცემულ ინვოლუციაში შეუღლებულ წერტილთა წყვილი.

ინვოლუცია განისაზღვრება შესაბამის წერტილთა ორი წყვილით.

ეთქვათ, s წრფეზე მოცემულია რაიმე ინვოლუცია შესაბამის A და A_1 , B და B_1 წერტილთა ორი წყვილი. ამ წყვილებით s წრფეზე შეიძლება განისაზღვროს შესაბამის წერტილთა სამი წყვილი (A, A_1, B) , (A_1, A, B_1) . შესაბამის წერტილთა ამ სამი წყვილით მყარდება ერთადერთი პროექციული გარდაქმნა, რომელშიც A და A_1 შესაბამის წერტილთა წყვილი ორმაგ შესაბამისობაშია; მაშასადამე, ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად, შესაბამის წერტილთა ყველა წყვილი ორმაგ შესაბამისობაში იქნება ანუ შეუღლებულ წერტილთა ორი წყვილით დამყარებული გარდაქმნა ინვოლუციურია.

ინვოლუციას ეწოდება ჰიპერბოლური, თუ აქვს ორი ორმაგი წერტილი და ელიფსური, თუ ორმაგი წერტილები არ გააჩნია.

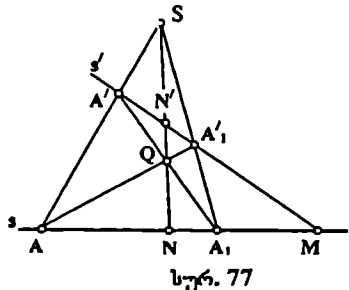
6.2. ინვოლუცია წრფესა და მეორე რიგის წირზე

წრფის ინვოლუციურ გარდაქმნას ძალიან საინტერესო თვისებები აქვს.

მაგალითად, ყოველი ჰიპერბოლური ინვოლუცია ჰარმონიულია, ე.ი. ჰიპერბოლურ ინვოლუციაში ორმაგი წერტილები ჰარმონიულად ყოფს შესაბამის წერტილთა ნებისმიერ წყვილს.

ეთქვათ, M და N მოცემული ინვოლუციის ორმაგი წერტილებია, A და A_1 – ამ ინვოლუციის ნებისმიერ შესაბამის წერტილთა წყვილი. დავამტკიცოთ, რომ MN და AA_1 ჰარმონიულად შეუღლებული წერტილთა წყვილია.

დავაგეგმილოთ მოცემული წერტილები ნებისმიერი S ცენტრიდან ორმაგ M წერტილზე გამავალ ნებისმიერ s' წრფეზე (სურ.



სურ. 77

77). მივიღებთ $MNA A_1 \bar{A}' A_1'$. რადგან ინვოლუციაში ყოველი შესაბამის წერტილთა წყვილი ორმაგ შესაბამისობაშია, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ $MNA A_1 \bar{A}' A_1'$ $MNA_1 A$, საიდანაც გვექნება $MNA_1 A \bar{A}' A_1'$. რადგან s და s' მწკრივების საერთო M

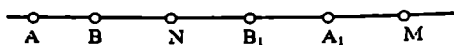
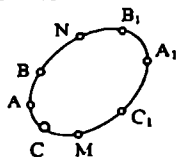
წერტილი ორმაგია, ამიტომ $MNA_1 A \bar{A}' A_1'$ და, მაშასადამე, $NN', A_1 A', AA_1$ წრფეები ერთ Q წერტილზე გაივლის. ეს ნიშნავს, რომ A და A_1 არის $A'QA_1'S$ სრული ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების გადაკვეთის წერტილები, ხოლო M და N

მესამე მოპირდაპირე გვერდების წყვილის გადაკვეთის წერტილები AA_1 დიაგონალთან. მაშასადამე, A, A_1, M, N ჰარმონიულ წერტილთა ოთხეულია და A, A_1 წერტილთა წყვილი ჰარმონიულად ყოფს ორმაგი M, N წერტილების წყვილს.

ე.ი. დავამტკიცეთ, რომ თუ $MNA A_1 \bar{M} N A_1 A$, მაშინ A_1, A წვეილი პარმონიულადა შეუღლებული M, N წვეილთან.

გარდა ამისა, ჰიპერბოლური ინვოლუცია, როგორც პარმონიული გარდაქმნა (4.3) არის შებრუნებული ტიპის დალაგებული გარდაქმნა.

აქედან გამომდინარეობს, თუ ინვოლუციას აქვს ერთი ორმაგი წერტილი, მას უნდა ჰქონდეს მეორე ორმაგი წერტილი, რომელიც პირველისგან განსხვავებულია. ამიტომ, ინვოლუცია შეიძლება იყოს ჰიპერბოლური ან ელიფსური. ადვილად დაერწმუნდებით, რომ ჰიპერბოლური ინვოლუციის ორი შეუღლებული წვეილი არასოდეს არ ყოფს ერთმანეთს. მართლაც, თუ N და M ჰიპერბოლური ინვოლუციის ორმაგი წერტილებია, ხოლო A და A_1 ამ ინვოლუციის შეუღლებულ წერტილთა წვეილი (სურ. 78), მაშინ ეს ინვოლუცია ასახავს ANA_1 მონაკვეთს A_1NA მონაკვეთზე ანუ იგივე მონაკვეთზე. ამიტომ, ამ მონაკვეთის რომელიმე B წერტილთან შეუღლებული B_1 წერტილი უნდა ეკუთვნოდეს ისევე ANA_1 მონაკვეთს. იგივეს აქვს ადგილი AMA_1 მონაკვეთისთვის, რომელიც ANA_1 მონაკვეთის შემავსებელია. ეს ნიშნავს, რომ ჰიპერბოლური ინვოლუციის ორი შეუღლებული წვეილი, მაგალითად, A, A_1 და B, B_1 , ვერ ყოფს ერთმანეთს. აქედან გამომდინარეობს, რომ ინვოლუცია, რომელშიც შეუღლებულ წერტილთა წვეილები ერთმანეთს ყოფს, ელიფსურია. ამით მტკიცდება ელიფსური ინვოლუციების არსებობა, რადგან ინვოლუცია შეიძლება იყოს მოცემული წერტილების ნებისმიერი ორი წვეილით.



სურ. 78

უფრო მეტიც, თუ A და A_1, B და B_1 , წვეილები არ ყოფს ერთმანეთს და წერტილი B გაიბენს ABA_1 მონაკვეთს, მაშინ მასთან შეუღლებული B_1 წერტილი გაიბენს იგივე

A_1BA მონაკვეთს საწინააღმდეგო მიმართულებით (სურ. 78). ამიტომ, ამ მონაკვეთზე უნდა არსებობდეს ორმაგი წერტილი, რომელშიც B და B_1 წერტილები ერთმანეთს შეხვდება. ე.ი. ინვოლუცია არის ელიფსური, თუ შეუღლებულ წერტილთა წყვილები ყოფს ერთმანეთს და ჰიპერბოლური, თუ შეუღლებული წერტილთა წყვილები არ ყოფს ერთმანეთს.

ამრიგად, პარაბოლური ინვოლუციები არ არსებობს, ჰიპერბოლურები არსებობს და შებრუნებული ტიპისაა, ელიფსური ინვოლუციები არსებობს, თანაც ყოველი პირდაპირი ტიპის ინვოლუცია ელიფსურია. მართლაც, ვთქვათ, M, N და A, A_1 წყვილები ყოფს ერთმანეთს; მაშინ ინვოლუცია, რომელიც ასახავს $\begin{pmatrix} M, N, A, A_1 \\ N, M, A_1, A \end{pmatrix}$

პირდაპირი ტიპისაა და არა აქვს ორმაგი წერტილები, რადგან არ არსებობს წერტილების წყვილი, რომელიც პარამონიულად იქნება შეუღლებული M, N და A, A_1 გაყოფილ წყვილებთან (სურ. 78).

ამრიგად, შებრუნებული ტიპის ინვოლუცია ჰიპერბოლურია, პირდაპირი ტიპის ინვოლუცია – ელიფსური და, პირიქით, ყოველი ჰიპერბოლური ინვოლუცია ეკუთვნის შებრუნებულ ტიპს, ხოლო ელიფსური – პირდაპირს.

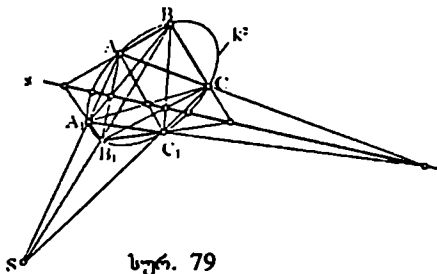
თუ მეორე რიგის წირზე ავაგებთ s წერტილთა მწკრივის პერსპექტიულ მრუდწირულ წერტილთა მწკრივს, შევძლებთ წრფის ინვოლუციის გადატანას მეორე რიგის წირზე და ამ წირზე ინვოლუციური შესაბამისობის მიღებას. როგორც ნებისმიერი ინვოლუციური გარდაქმნა, ინვოლუცია მეორე რიგის წირზე განისაზღვრება შესაბამის წერტილთა ორი წყვილით. თუ ეს წყვილები გაყოფილია, მაშინ ინვოლუცია მეორე რიგის წირზე ელიფსური იქნება; თუ გაყოფილი არ არის, მაშინ ინვოლუცია ჰიპერბოლურია. მეორე რიგის წირზე ინვოლუციური გარდაქმნისათვის ძალაშია ყველა ის დებულება, რომელიც იყო დამტკიცებული მეორე რიგის წირის ნებისმიერი (არაინვოლუციური) გარდაქმნისთვის. კერძოდ, შესაბამისი ელემენტების აგების ხერხი,

პერსპექტივის ღერძის მეშვეობით, ძალაში რჩება, მაგრამ პროექციული გარდაქმნა და მისი განხორციელების წესი იძენს განსაკუთრებით მარტივ ფორმას და შესაძლებლობას იძლევა დავადგინოთ ახალი საინტერესო გეომეტრიული ფაქტები.

დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა:

მეორე რიგის წირის ინვოლუციაში შეუღლებული წერტილების შემაერთებელი წრფეები ერთ წერტილზე გადის, ხოლო შესაბამის წრფეთა წყვილები იკვეთება ინვოლუციის პერსპექტივის ღერძზე მდებარე წერტილებში.

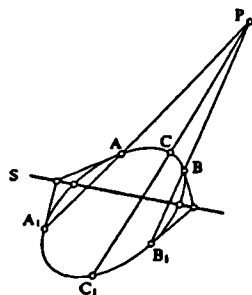
დავუშვათ, მეორე რიგის k^2 წირზე მოცემულია ინვოლუცია; A და A_1 , B და B_1 , C და C_1 ინვოლუციის სამი ნებისმიერი წყვილია (სურ. 79). შესაბამის წერტილთა ახალი წყვილები ჩვეულებრივი



ხერხით – პერსპექტივის ღერძის გამოყენებით ავაგოთ. s პერსპექტივის ღერძი განისაზღვრება AB_1 და A_1B , AC_1 და A_1C წრფეთა გადაკვეთის ორი წერტილით. მაშინ, k^2 წირის ინვოლუციაში შესაბამის წერტილთა ახალ წყვილებს მივიღებთ A და A_1 წერტილებიდან s პერსპექტივის ღერძის წერტილების დაგვემიღებთ k^2 წირზე. რადგან ჩვენ განვიხილავთ ინვოლუციურ გარდაქმნას, ამიტომ C და C_1 წერტილები ორმაგ შესაბამისობაში უნდა იყოს და მაგვემიღებელი AC და A_1C_1 წრფეებიც უნდა იკვეთებოდეს პერსპექტივის ღერძზე ანუ s წრფეზე. იგივე მართებული იქნება AB და A_1B_1 წრფეებისთვისაც. ანალოგიურად, თუ დაგვემიღების ცენტრებად A და A_1 წერტილების მაგივრად ავირჩევთ B და B_1 წერტილებს, დავრწმუნდებით, რომ BC და B_1C_1 წრფეებიც s წრფეზე გადაიკვეთება. რადგან A და A_1 , B და B_1 , C და C_1 წყვილები ინვოლუციის ნებისმიერი შეუღლებული წყვილე-

ბია, თეორემის მეორე ნაწილი დამტკიცებულია: ინვოლუციაში შესაბამის წრფეთა წყვილები s ღერძზე იკვეთება. მაგრამ ამ შემთხვევაში ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები აკმაყოფილებს დეზარგის შებრუნებული თეორემის პირობებს და ამიტომ, AA_1, BB_1, CC_1 წრფეები ერთ S წერტილზე გაივლის. ამით მტკიცდება თეორემის პირველი მოთხოვნა. S წერტილს ინვოლუციის ცენტრი, ხოლო s წრფეს — ინვოლუციის ღერძი ეწოდება. დამტკიცებული თეორემა ამარტივებს მეორე რიგის წირის ინვოლუციაში შესაბამისი წერტილების აგებას: თუ მოცემულია ინვოლუციის შესაბამისი წერტილთა ორი წყვილი A და A_1 , B და B_1 , ორი შეუღლებული წერტილთა წყვილის შემართებული წრფეების გადაკვეთაში მივიღებთ ინვოლუციის S ცენტრს (სურ. 80). ამ ცენტრზე გამავალი წრფეების გადაკვეთაში მეორე რიგის წირთან მივიღებთ ინვოლუციის შეუღლებულ წერტილთა წყვილებს. იმ შემთხვევაში, თუ დავუშვებთ, რომ A და C წერტილები შეთავსდნ, მაშინ AC წრფე k^2 წირის მხები გახდება და მივიღებთ შემდეგ წინადადებას:

ინვოლუციის შესაბამის წერტილებში გამავალი მხებები იკვეთება ინვოლუციის ღერძზე (სურ. 80).



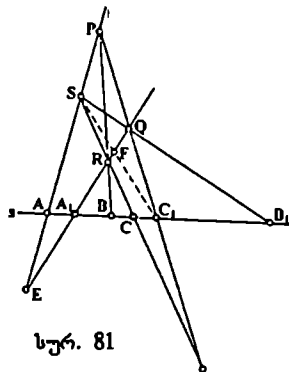
სურ. 80

6.3. დეზარგის მეორე თეორემა

ვთქვათ, მოცემულია PQRS სრული ოთხკუთხედი; A და A_1 , B და B_1 , C და C_1 წერტილთა სამი წყვილია, რომლებიც მიიღება სრული ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების სამი წყვილის s წრფესთან გადაკვეთისას (სურ. 81). დეზარგის მეორე თეორემა აყალიბებს სრული ოთხკუთხედის ინვოლუციურ თვისებას.

სრული ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების სამი წვეილი კვეთს ნებისმიერ s წრფეს ერთი და იგივე ინვოლუციის კუთვნილ წერტილთა სამ წვეილზე.

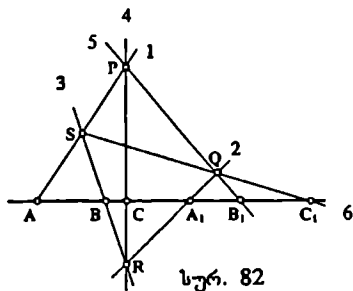
დაეუშვათ, რომ PQRS სრული ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების წვეილები კვეთს s წრფეს A და A_1 , B და B_1 , C და C_1 წერტილთა წვეილებში. შესაბამის წერტილთა A და A_1 , B და B_1 , C და C_1 წვეილებით s წრფეზე მყარდება პროექციული შესაბამისობა. ვაჩვენოთ, რომ ეს შესაბამისობა ინვოლუციურია.



სურ. 81

განვიხილოთ პერსპექტივათა ჯაჭვი: $A, A_1, B, C, A^R, E, P, S, A_1, E, Q, F, A_1, A, B, C_1$. ეს ნიშნავს, რომ A, A_1, B, A_1, A, B_1 პროექციული შესაბამისობით განსაზღვრულ ინვოლუციაში B წერტილს შეესაბამება B_1 წერტილი, ხოლო C წერტილს - C_1 ანუ A და A_1 ორმაგ შესაბამისობაში მყოფ წერტილებთან ერთად B და B_1 , C და C_1 წვეილებიც ამავე ინვოლუციაში შეუღლებულ წერტილთა წვეილებია.

დებარგის მეორე თეორემა გვაძლევს A, A_1 და B, B_1 ორი წვეილით განსაზღვრულ ინვოლუციაში, C წერტილთან შეუღლებული C_1 წერტილის აგების შესაძლებლობას. ამისათვის, საკმარისია ავაგოთ სრული ოთხკუთხედი ისე, რომ მისი მოპირ-



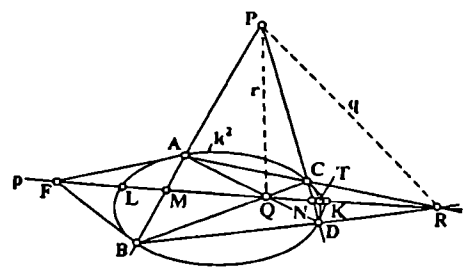
სურ. 82

დაპირე (1,2 და 3,5) გვერდების ორი წყვილი გადიოდეს A, A_1 და B, B_1 წერტილებზე და დარჩენილი ერთი გვერდი - C წერტილზე, მაშინ მეექვსე გვერდი C_1 წერტილზე გაივლის.

აღრე განვიხილეთ ჰიპერბოლური და პარაბოლური გარდაქმნების მიღების ხერხი (4.3). ახლა ვხედავთ, რომ ელიფსური გარდაქმნა შეიძლება ავაგოთ ისევე მარტივად, როგორც წინა გარდაქმნები.

6.4. პოლუსები და პოლარები

ეთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია k^2 კონიკა და ნებისმიერი P წერტილი (სურ. 83). P წერტილის ინციდენტური AB და CD ორი მკვეთი წრფე გავაელოთ. აღვნიშნოთ AD და BC წრფეების გადაკვეთის წერტილი Q ასოთი, ხოლო AC და BD წრფეების R . მაშინ ოთხკუთხედი $ABCD$ შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც k^2 კონიკაში ჩახაზული სრული ოთხკუთხედი და ამიტომ პასკალის თეორემიდან გამომდინარე ცხადია, რომ პასკალის p წრფეზე უნდა მდებარეობდეს ოთხი წერტილი: კონიკის A, B და C, D წერტილებში გავლებული მხეხების გადაკვეთის F და K წერტილები და მოპირდაპირე გვერდების გადაკვეთის Q და R წერტილები (5.2).



სურ. 83

როგორც ნახაზიდან ჩანს, QR კვეთს AB წრფეს M წერტილში, რომელიც პარმონიულად შეუღლებულია P წერტილთან A და B წერტილთან წყვილის მიმართ. მართლაც, A და B არის $QRCD$ სრული ოთხკუთხედის დიაგონალური წერტილები, ხოლო ოთხკუთხედის მოპირდაპირე CD და QR გვერდები P და M წერტილებში კვეთს AB წრფეს. ანალოგიურად, QR და CD წრფეების

გადაკვეთის N წერტილი პარამონიულად არის შეუღლებული P წერტილთან C, D წერტილთა წვეთის მიმართ. ამრიგად, p წრფე F, K, M და N წერტილების ინციდენტურია.

ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ P წერტილის შესაბამისი p წრფე შეიძლება განისაზღვროს P წერტილის ინციდენტური ერთი მკვეთი წრფის საშუალებით. გამოვიყენოთ AB მკვეთი, მაშინ p წრფე განისაზღვრება: F წერტილით, რომელშიც იკვეთება k წირის მხეხები A და B წერტილებში; M წერტილით, რომელიც მეოთხე პარამონიულია P, A, B წერტილებისათვის. ამრიგად, გვაქვს $p = FM$. შევნიშნოთ, რომ CD მკვეთი, რომელიც ნებისმიერად არის გავლებული, K და N წერტილებით განსაზღვრავს იგივე p წრფეს.

ამრიგად, p წრფის განსაზღვრა არ არის დამოკიდებული P წერტილის ინციდენტური მკვეთი წრფის შერჩევაზე. იგივე მიზეზით, თუ კონიკაში ჩახაზული ნებისმიერ სრულ ოთხკუთხედში P ერთი დიაგონალური წერტილია, მაშინ p წრფე არის დანარჩენი ორი დიაგონალური წერტილის ინციდენტური დიაგონალი. ამრიგად, P წერტილი, რომელიც კონიკის სიბრტყეში ძვეს, ცალსახად განსაზღვრავს p წრფეს. p წრფეს ეწოდება P წერტილის პოლარა k^2 კონიკის მიმართ, ხოლო P წერტილს — p წრფის პოლუსი.

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის საფუძველზე k^2 კონიკის მიმართ P წერტილის p პოლარას შეიძლება მივცეთ შემდეგი განსაზღვრებებიდან ერთ-ერთი:

1°. პოლარა ეწოდება P პოლუსის და P -ს ინციდენტური ნებისმიერი მკვეთის კონიკასთან გადაკვეთის წერტილების მეოთხე პარამონიულ წერტილთა სიმრავლეს.

2°. პოლარა ეწოდება P პოლუსის ინციდენტური ნებისმიერი მკვეთის კონიკასთან გადაკვეთის წერტილებში გავლებული მხეხების გადაკვეთის წერტილთა სიმრავლეს.

3°. პოლარა ეწოდება კონიკაში ჩახაზული სრული ოთხკუთხედის ორი დიაგონალური წერტილის ინციდენტურ დიაგონალს; ოთხკუთხედის მესამე დიაგონალური წერტილი P პოლუსია.

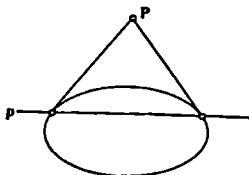
ამ წინადადებებიდან ორადი წინადადებების ჩამოყალიბებით მივიღებთ პოლუსის განსაზღვრებებს. მაგალითად, 3° განსაზღვრის ორადი წინადადებაა: პოლუსი ეწოდება k კონიკაში ჩახაზული ოთხკუთხედის ორი დიაგონალის ინციდენტურ დიაგონალურ წერტილს; ოთხკუთხედის მესამე დიაგონალი p პოლარაა.

ამრიგად, კონიკის სიბრტყეზე მდებარე ყოველ წერტილს შეესაბამება ერთადერთი წრფე – მისი პოლარა და, პირიქით, ყოველ წრფეს შეესაბამება ერთადერთი წერტილი მისი პოლუსი. აღვნიშნოთ, რომ პოლუსი და პოლარა ურთიერთშესაბამისია ანუ თუ p წრფე არის P წერტილის პოლარა, მაშინ P წერტილი არის p წრფის პოლუსი.

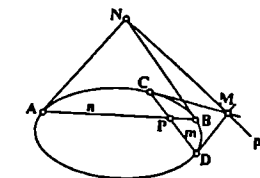
ცხადია, რომ პოლარას განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს მისი აგების ხერხები. მაგალითად, გავავლოთ P პოლუსის ინციდენტური AB და CD ორი მკვეთი წრფე და ავაგოთ მეოთხე ჰარმონიული M და N წერტილები A, B, P და C, B, P სამეულებისათვის. MN წრფე იქნება საძიებელი p პოლარა (სურ. 83).

მეორე ხერხი: თუ P წერტილის ინციდენტურ კონიკის მხეებზე განვიხილავთ, როგორც მკვეთების ზღვრულ მდებარეობებს, მაშინ 2° განსაზღვრის თანახმად, P წერტილის პოლარა k კონიკის მიმართ გაივლის P პოლუსის ინციდენტური მხეების კონიკასთან შეხების წერტილებზე, თუ ეს მხეები არსებობს (სურ. 84).

მესამე ხერხი: P პოლუსი კონიკის შიგა წერტილია და არ არსებობს ამ წერტილზე გამავალი კონიკის მხეები. გავავლოთ P წერტილის ინციდენტური AB და CD ორი მკვეთი წრფე. პოლარას 2° განსაზღვრის თანახმად, ამ წრფეების კონიკასთან გადაკვეთის წერტილების წყვილებზე (A, B და C, D) გავავლოთ მხეები, რომელთა N



სურ. 84



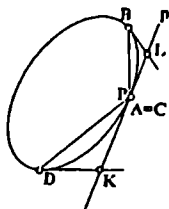
85

სურ. 85

და M გადაკვეთის წერტილებით განისაზღვრება P პოლუსის p პოლარა (სურ. 85). მოცემული p წრფის P პოლუსი ავაგოთ, როგორც წერტილი, რომლის პოლარა p წრფეა, რადგან პოლარა და პოლუსი ურთიერთდამოკიდებულია.

თუ P პოლუსი ძვეს კონიკაზე, მაშინ მისი პოლარა კონიკის მიმართ განისაზღვრება, როგორც ამ კონიკის მხები P წერტილში (სურ. 86), რაც გამოდინარეობს მისი 2° განსაზღვრიდან. ამრიგად, სიბრტყის ნებისმიერი P წერტილისათვის ავაგეთ მისი შესაბამისი p წრფე და პირიქით.

განვიხილოთ PQR სამკუთხედი (ნახ. 83). ნებისმიერი მოცემული სამკუთხედის გვერდების პოლუსები და წვეროების პოლარები წარმოქმნის ახალ სამკუთხედს, რომელსაც მოცემული სამკუთხედის პოლარული ეწოდება. სამკუთხედს ეწოდება ავტოპოლარული, თუ მისი ყოველი წვერო არის მოპირდაპირე გვერდის პოლუსი. პოლარის 3° განსაზღვრის თანახმად, PQR სამკუთხედის ყოველი გვერდი არის მოპირდაპირე წვეროს პოლარა. $QR=p$ გვერდი არის P წერტილის პოლარა, $RP=q$ გვერდი – Q წერტილის პოლარა, ხოლო $PQ=r$ გვერდი – R წერტილის პოლარა. თავის მხრივ, PQR სამკუთხედის წვეროები მოპირდაპირე გვერდების პოლუსებია. ამრიგად, PQR სამკუთხედის ყოველი წვერო არის მოპირდაპირე გვერდის პოლუსი ანუ PQR სამკუთხედი ავტოპოლარულია.



სურ. 86

6.5. ინვოლუციის მეტრული თვისებები

განვიხილოთ ზოგიერთი მეტრული თანაფარდობა წრფის წერტილთა ინვოლუციაში. მოცემული ინვოლუციის წრფის არასაკუთრივ წერტილთან შეუდლებულ წერტილს ეწოდება ამ ინვოლუციის ცენტრი. თუ ინვოლუციას აქვს ორმაგი წერტილები, მაშინ

ინვოლუციაში შეუღლებულ წერტილთა ყოველი წყვილი მათთან ქმნის პარამონიულ ოთხეულს (6.2). აქედან გამომდინარეობს, რომ ინვოლუციის ცენტრი შუაზე ჰყოფს მონაკვეთს, რომელიც ორმაგ წერტილებს აერთებს (თუ ასეთები არსებობს).

ვთქვათ ახლა, რომ A და A' , B და B' წრფეზე რომელიმე ინვოლუციის განმსაზღვრელი შეუღლებულ წერტილთა წყვილებია. გავარკვიოთ შეუღლებულ წერტილთა წყვილების თვისება ინვოლუციის ცენტრის მიმართ. რადგან ინვოლუცია პროექციული გარდაქმნის კერძო სახეა, ამიტომ, მართებული იქნება შემდეგი ტოლობა $(AB, OO_{\infty}) = (A'B', O_{\infty}O)$ ანუ $\frac{(ABO)}{(ABO_{\infty})} = \frac{(A'B'O_{\infty})}{(A'B'O)}$.

რადგან $(ABO_{\infty}) = (A'B'O_{\infty}) = 1$, მივიღებთ ტოლობას $(ABO) = \frac{1}{(A'B'O)}$

ან $\frac{AO}{BO} = \frac{B'O}{A'O}$, საიდანაც მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$AO \cdot A'O = BO \cdot B'O = k(\text{const}). \quad (1)$$

ეს ძირითადი ფარდობა, რომელიც პროექციული გეომეტრიის ზოგიერთ სახელმძღვანელოში მიღებულია ინვოლუციის განსაზღვრებად, შეიძლება ასე ჩამოვყალიბოთ:

ინვოლუციის ცენტრიდან ორ შესაბამის წერტილამდე მანძილების ნამრავლი მუდმივი სიდიდეა.

დაუშვათ, რომ M ინვოლუციის ორმაგი წერტილია, მაშინ (1) ფორმულიდან გამომდინარეობს:

$$MO \cdot MO = k \text{ ანუ } (MO)^2 = k(\text{const}), \text{ ანუ } (MO)^2 = AO \cdot A'O. \quad (1')$$

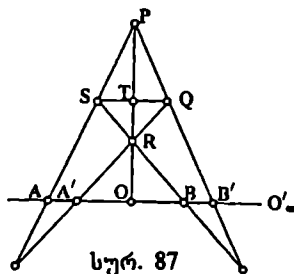
$$MO = \pm \sqrt{k}. \quad (2)$$

ასე გამოისახება მანძილი ორმაგი წერტილიდან ინვოლუციის ცენტრამდე. იმის მიხედვით, როგორია k -ს მნიშვნელობა ($k > 0$, $k < 0$, $k = 0$), ეს მანძილი იქნება ნამდვილი, წარმოსახვითი ან ნულის ტოლი.

1) თუ $k > 0$, მაშინ ინვოლუციას ექნება M და N ორი ორმაგი წერტილი, რომლებიც ცენტრის სხვადასხვა მხარეს მოთავსდება და მისგან შემდეგი მანძილებით იქნება დაშორებული:

$$MO = +\sqrt{k}, \quad NO = -\sqrt{k}.$$

ამრიგად, ამ შემთხვევაში მივიღებთ ჰიპერბოლურ ინვოლუციას ორი ორმაგი წერტილით. რადგან შესაბამის წერტილთა წყვილებით განსაზღვრული OA და OA' მონაკვეთების ნამრავლი დადებითია (1), ამიტომ შესაბამის წერტილთა A და A' წყვილები ყოველთვის განლაგდება ცენტრიდან ერთ მხარეს (სურ. 87) ანუ A, A' არ ყოფს O, O' წერტილთა წყვილს.



სურ. 87

მართლაც, თუ O' არის წრფის არასაკუთრივი წერტილი, მაშინ მოცემული ინვოლუციის ყოველი წყვილი ყოფს ან არ ყოფს O, O' წყვილს, იმის მიხედვით ინვოლუცია ელიფსურია თუ ჰიპერბოლური. თუ M არის ინვოლუციის ორმაგი წერტილი, მაშინ მივიღებთ ტოლობას (1'): $OM^2 = OA \cdot OA'$, რომელსაც აქვს ამონახსნი (ნამდვილი) იმ შემთხვევაში, თუ ნამრავლი $OA \cdot OA'$ დადებითია ანუ თუ შეუღლებულ წერტილთა წყვილები არ ყოფს ერთმანეთს.

2) $k < 0$, მაშინ (2) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ ამ შემთხვევაში მანძილი MO წარმოსახვითია ანუ მოცემულ ინვოლუციაში არ არსებობს ორმაგი წერტილები (ან არსებობს წარმოსახვითი ორმაგი წერტილები) ანუ ასეთ შემთხვევაში ინვოლუცია ელიფსურია. შესაბამის წერტილთა წყვილები ცენტრის სხვადასხვა მხარეს მდებარეობს ანუ A, A' წერტილთა წყვილი ყოფს O, O' წერტილთა წყვილს.

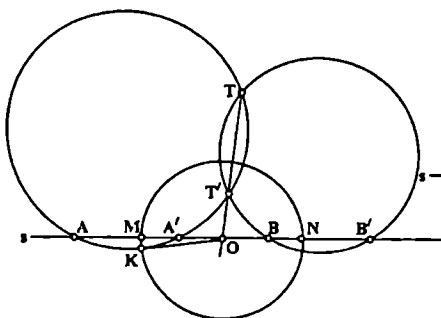
3) $k = 0$, მაშინ (2) ფორმულიდან მივიღებთ:

$MO \cdot MO = 0$ ანუ ამ ორი მონაკვეთიდან ერთი მაინც უდრის ნულს. (1) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ შესაბამის წერტილთა წყვილებიდან ერთი წერტილი შეთავსებულია ცენტრთან. ორმაგი წერტილიც შეთავსებულია ცენტრთან. რადგან ინვოლუციას ამ შემთხვევაში აქვს ერთი (ან ორი შეთავსებული) ორმაგი წერტილი, მას ეწოდება პარაბოლური. პარაბოლურ ინვოლუციაში ცენტრი შეესაბამება წრფის ნებისმიერ წერტილს. ამიტომ, პარაბოლური ინვოლუცია არ განიხილება.

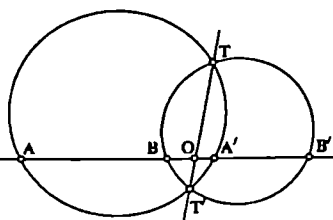
ფორმულა (1) გვაძლევს ორი A და A' , B და B' წერტილთა წყვილით განსაზღვრულ ინვოლუციაში შესაბამის წერტილთა აგების კიდევ ერთ ხერხს.

A, A' და კიდევ რომელიმე T წერტილზე გავავლოთ ერთი წრეწირი; B, B' და T წერტილზე გავავლოთ მეორე წრეწირი. T წერტილზე და ამ წრეწირების გადაკვეთის მეორე T' წერტილზე გავავლოთ TT' წრფე. თუ O წერტილი არის TT' მკვეთის და ინვოლუციის წრფის გადაკვეთის წერტილი, მაშინ პლანიმეტრიის ცნობილი წინადადებიდან გვექნება (სურ. 88):

$$OA \cdot OA' = OT \cdot OT' = OB \cdot OB'.$$



სურ. 88



სურ. 89

ეს ფარდობა ნიშნავს, რომ O წერტილი არის ინვოლუციის ცენტრი და ნებისმიერი სხვა წრეწირი, რომელიც T და T' წერტილებზე გაივლის, ინვოლუციის წრფესთან გადაიკვეთება ამ ინვოლუციის შეუღლებულ წერტილთა წყვილზე.

ინვოლუციის ორმაგი წერტილების ასაგებად საჭიროა ინვოლუციის O ცენტრიდან გავავლოთ ამ წრეწირებიდან ერთ-ერთის მხები წრფე. თუ K არის შეხების წერტილი, მაშინ (1) ფორმულის თანახმად $OK^2 = OT \cdot OT'$. ე.ი. M და N ორი წერტილი, რომლებიც განლაგდება O წერტილიდან სხვადასხვა მხარეს OK მანძილზე, იქნება ამ ინვოლუციის ორმაგი წერტილები. შევნიშნოთ, რომ თუ A, A' და B, B' წყვილები ყოფს ერთმანეთს, მაშინ O ცენტრი აუცილებლად მოთავსდება T და T' წერტილებზე გაშვებული ნებისმიერი წრეწირის შიგნით (სურ. 89) და, მაშასადამე, O წერტილიდან რომელიმე წრეწირისადმი მხების გავლება შეუძლებელი იქნება. ეს საკვებით ბუნებრივია, რადგან ამ შემთხვევაში ინვოლუცია ელიფსური იქნება და მას არ ექნება ორმაგი წერტილები.

მეშვიდე თავი. პროექციული შესაბამისობა მეორე საფეხურის სახეობათა შორის

7.1. შესაბამისობა ორ ბრტყელ ველს შორის. შესაბამისობის განსაზღვრის საერთო ხერხი

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, მეორე საფეხურის სახეობები ორი ტიპისაა: ერთი სიბრტყის კუთვნილი (ინციდენტური) წერტილთა და წრფეთა სიმრავლე – წერტილთა და წრფეთა ბრტყელი ველი, რომლის ელემენტებია წერტილები და წრფეები და ერთი წერტილის ინციდენტური სიბრტყეთა და წრფეთა სიმრავლე – სიბრტყეთა და წრფეთა შეკერა, რომლის ელემენტებია სიბრტყეები და წრფეები. ეს სახეობები ერთმანეთის ორადია ორადობის დიდი პრინციპით.

განვიხილოთ ორ ბრტყელ ველს შორის პროექციული შესაბამისობა.

ჩამოვყალიბოთ ბრტყელი ველების პროექციული შესაბამისობის ცნება.

α და α' ორი ბრტყელი ველის პროექციული შესაბამისობა ეწოდება მათი ელემენტების ისეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობას, რომელშიც α ველის ყოველ პირველი საფეხურის სახეს შეესაბამება α' ველის პროექციული პირველი საფეხურის სახე. აქედან გამომდინარე, არსებობს ამ ველებს შორის მხოლოდ ორი სახის პროექციული შესაბამისობა.

1. კოლინეარული შესაბამისობა ან, მოკლედ, კოლინეაცია ეწოდება შესაბამისობას, რომელშიც ერთი ველის ყოველ წერტილს შეესაბამება მეორე ველის ერთადერთი წერტილი, ყოველ წრფეს – წრფე. ერთი ველის ინციდენტური ელემენტების წყვილს – მეორე ველის ინციდენტური ელემენტების წყვილი.

2. კორელაციური შესაბამისობა ან კორელაცია ეწოდება შესაბამისობას, რომელშიც ერთი ველის ყოველ წერტილს შეესაბამება

მეორე ველის ერთადერთი წრფე, ყოველ წრფეს – წერტილი, ინციდენტურ ელემენტებს – ინციდენტური ელემენტები.

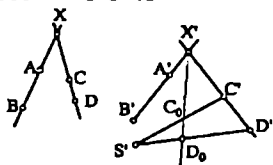
პროექციული შესაბამისობა ორ ბრტყელ ველს შორის განსაზღვრულია, თუ მოცემულია შესაბამისი ელემენტების ოთხი დამოუკიდებელი წყვილი.

ბრტყელი ველის ოთხი დამოუკიდებელი ელემენტია ოთხი წერტილი, რომელთაგან არც ერთი სამეული ერთი წრფის კუთვნილი არ არის ან ოთხი წრფე, რომელთაგან არც ერთი სამეული ერთი წერტილის კუთვნილი არ არის. ამრიგად, α და α' ველების კოლინეაცია განსაზღვრულია, თუ მოცემულია ერთი ველის ოთხი დამოუკიდებელი წერტილი (ან წრფე) და მათი შესაბამისი ოთხი დამოუკიდებელი წერტილი (ან წრფე) მეორე ველში.

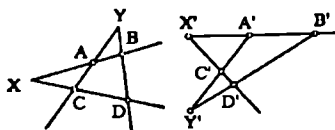
დავამტკიცოთ, რომ კოლინეაცია ერთი სიბრტყის ნებისმიერ ოთხ დამოუკიდებელ წერტილს ასახავს მეორე (ან იგივე) სიბრტყის წინასწარ მოცემულ ოთხ დამოუკიდებელ წერტილზე, სამი პერსპექტივის კომპოზიციით. უკვე დავამტკიცეთ, რომ სამი კოლინეალური წერტილი, მაგალითად, A, B, C , შეიძლება ავსახოთ ორი პერსპექტივის კომპოზიციით A', B', C' სამ წინასწარ შერჩეულ კოლინეარულ წერტილზე (4.1).

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი დამოუკიდებელი A, B, C, D ოთხი წერტილი შეიძლება სამი პერსპექტივიით ავსახოთ წინასწარ შერჩეულ დამოუკიდებელ A', B', C', D' ოთხ წერტილზე. ჯერ ორი პერსპექტივიით დავამყაროთ პროექციული შესაბამისობა, რომელიც ასახავს $A \rightarrow A', B \rightarrow B'$ და AB, CD წრფეების გადაკვეთის X წერტილს X' წერტილზე ანუ $X \rightarrow X'$. ე.ი. ასეთი კოლინეაცია A და B წერტილებს ასახავს A' და B' წერტილებზე, ხოლო C და D წერტილებს X' წერტილის კოლინეარულ რომელიმე C_0 და D_0 წერტილზე (სურ. 90). მესამე პერსპექტივიით ავსახოთ C_0 და D_0 წერტილები წინასწარ მოცემულ C' და D' წერტილებზე. პერსპექტივის ცენტრია $S' = C_0C' \cap D_0D'$. ამრიგად, სამი პერსპექტივის მეშვეობით A, B, C, D წერტილები ავსახეთ A', B', C', D' წერ-

ტილებზე. ეს კოლინეაცია ასახავს AB და CD დამოუკიდებელ წრფეებს $A'B'$ და $C'D'$ დამოუკიდებელ წრფეებზე. ამრიგად, პირველი წყვილის გადაკვეთის X წერტილი აისახება მეორე წყვილის გადაკვეთის X' წერტილზე. ზუსტად ასევე AC და DB წრფეების გადაკვეთის Y წერტილი აისახება A', B' და C', D' წერტილების გადაკვეთის Y' წერტილზე. ხაზს ვუსვამთ იმას, რომ X და Y აუცილებლად აისახება ისეთ წერტილებზე, რომლებიც ავაგეთ A', B', C', D' წერტილების გამოყენებით ზუსტად ისე, როგორც X და Y ავაგეთ $ABCD$ წერტილების გამოყენებით (სურ. 91). ცხადია, ეს შედეგი შეგვიძლია გავავრცელოთ იმ წერტილთა სიმრავლეზე, რომლებიც X და Y წერტილების მსგავსად შეიძლება ავაგოთ A, B, C, D წერტილებით განსაზღვრული წრფეების გავლებით.



სურ. 90



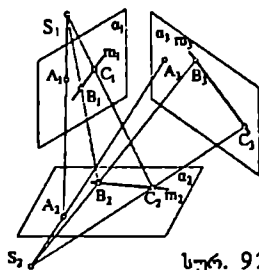
სურ. 91

α და α' ველების კორელაცია განსაზღვრულია, თუ მოცემულია ერთი ველის ოთხი დამოუკიდებელი წერტილი (ან წრფე) და მათი შესაბამისი ოთხი დამოუკიდებელი წრფე (ან წერტილი) მეორე ველში.

ქვემოთ ვაჩვენებთ, რომ ამ მონაცემებით ყოველთვის შეიძლება ერთი ველის ნებისმიერი ელემენტის შესაბამისი ელემენტის აგება მეორე ველში, რაც ნიშნავს, რომ ზემოთ აღნიშნული ელემენტების ოთხეულებით α და α' ველების პროექციული შესაბამისობა (კოლინეაცია ან კორელაცია) დამყარებულია.

ჯერ განვიხილოთ ორი ბრტყელი ველის კოლინეაცია. ვაჩვენოთ, რომ კოლინეარული შესაბამისობა ორ ბრტყელ ველს შორის შეიძლება მივიღოთ დაგეგმილებათა ჯაჭვის მეშვეობით (სურ.

92): ველი $\alpha_1(A_1, B_1, C_1, m_1)$ S_1 ცენტრიდან α_2 სიბრტყეზე დავაგვამილოთ. ამ დაგვამილების შედეგად მივიღებთ მეორე ველს $\alpha_2(A_2, B_2, C_2, m_2, \dots)$. შემდეგ α_2 ველი S_2 ცენტრიდან დავაგვამილოთ α_3 სიბრტყეზე, მივიღებთ მესამე ველს $\alpha_3(A_3, B_3, C_3, m_3, \dots)$, რადგან $\alpha_1 \bar{\wedge} \alpha_2 \bar{\wedge} \alpha_3$, ამიტომ $\alpha_1 \bar{\wedge} \alpha_3$.

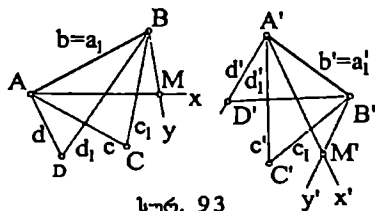


სურ. 92

მაგრამ ბრტყელი ველების კოლინეარული შესაბამისობა შეიძლება პერსპექტიული შესაბამისობისგან სრულიად დამოუკიდებლად განისაზღვროს.

ვაჩვენოთ, რომ განსაზღვრის თანახმად, ორი ველის კოლინეაცია დამყარებულია, თუ მოცემულია დამოუკიდებელი ოთხი შესაბამისი წერტილის წყვილი.

დაუშვათ, რომ α ველის A, B, C, D დამოუკიდებელ წერტილებს შეესაბამება α' ველის A', B', C', D' წერტილები (სურ. 93). თანაც, არა აქვს მნიშვნელობა, α და α' ველები მდებარეობს ორ განსხვავებულ სიბრტყეზე, თუ ერთი და იგივე სიბრტყეზე. ამრიგად, A, B, C, D და A', B', C', D' შესაბამისი წერტილთა ოთხეულებია. ადვილად შევამჩნევთ, რომ ამ წერტილებით განისაზღვრება შესაბამისი კონების ორი წყვილი. მართლაც, α ველში კონების ცენტრებად შევარჩიოთ A და B წერტილები, ხოლო α' ველში – მათი შესაბამისი A' და B' წერტილები. α ველში გვექნება ორი კონა $A(b, c, d)$ და $B(a_1, c_1, d_1)$. α' ველშიც გვექნება ორი კონა $A'(b', c', d')$ და $B'(a'_1, c'_1, d'_1)$. ამ კონების წყვილებს შორის დამყარდება პროექციული შესაბამისობა:



სურ. 93

$$A(b, c, d) \bar{\wedge} A'(b', c', d'); \quad (1)$$

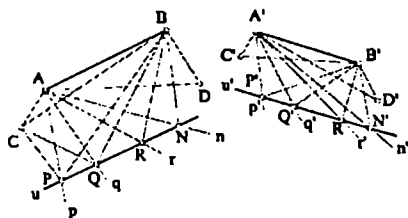
$$B(a_1, c_1, d_1) \bar{\wedge} B'(a'_1, c'_1, d'_1).$$

მნიშვნელოვანია, რომ A და B - ცენტრებიანი კონების (ისევე, როგორც A' და B' - ცენტრებიანი კონების) საერთო წრფე თავის თავს შეესაბამება ანუ A კონის $b(AB)$ სხივი შეესაბამება B კონის იგივე $a_1(BA)$ სხივს.

ამ პროექციული კონების ორი წველით დამყარებულ α და α' ველების პროექციულ (კოლინეარულ) შესაბამისობაში ადვილად ავაგებთ შესაბამისი ელემენტების წყვილებს.

მართლაც, ვთქვათ, მოცემულია α ველის M წერტილი. ავაგოთ მისი შესაბამისი M' წერტილი α' ველში. M წერტილზე A და B კონების ორი x და y სხივი გადის. (1) პროექციული შესაბამისობების თანახმად, α ველის x და y სხივების წვეილს შეესაბამება α' ველის x' და y' სხივების წვეილი. მათი გადაკვეთის $M' = x' \cap y'$ წერტილი M წერტილის შესაბამისი ერთადერთი წერტილი იქნება. ასე შეგვიძლია ავაგოთ α ველის ნებისმიერი წერტილის შესაბამისი წერტილი α' ველში.

ახლა ავაგოთ α ველის u წრფის შესაბამისი u' წრფე α' ველში (სურ. 94). u წრფის წერტილები დავაგეგმილოთ A და B კონების სხივებით. ეს კონები პერსპექტიულია: $A \bar{\wedge} B$. ამ პერსპექტიული კონების შესაბამისი A' და B' კონებიც (1) პროექციული შესაბამისობის თანახმად, პერსპექტიული იქნება. ანუ $A' \bar{\wedge}$



სურ. 94

B' , ამიტომ მათი შესაბამისი სხივების გადაკვეთის წერტილები წარმოქმნის u' წერტილთა მწკრივს, რომელიც α ველის u წერტილთა მწკრივის შესაბამისი იქნება.

ასე მივიღებთ u წრფის ერთადერთ შესაბამის u' წრფეს α' ველში. აქედან გამომდინარეობს ისიც, რომ შესაბამისი ელემენტების აგების ეს ხერხი ინარჩუნებს მათ ინციდენტურობას. მართლაც, თუ $N \in u$, მაშინ მისი შესაბამისი N' წერტილი ეკუთვნის u წრფის შესაბამის u' წრფეს, რადგან A' და B' პერსპექტიული კონების შესაბამისი წრფეები იკვეთება u' წრფეზე, მათ შორის n' და m' წრფეებიც, რომლებიც N წერტილის მაგეგმილებელი n და m წრფეების შესაბამისი წრფეებია. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ამ შემთხვევაში შენარჩუნებულია ჰარმონიზმიც. ვთქვათ, P, Q, R, N ჰარმონიულ წერტილთა ოთხეულია და მოცემულ კოლინეაციაში მათ შესაბამება P', Q', R', N' წერტილები. შესაბამისი წერტილების ზემოაღწერილი აგების მიხედვით, ჰარმონიულ p, q, r, n წრფეებს, რომლებიც აგეგმილებს P, Q, R, N წერტილებს, შესაბამება ჰარმონიული p', q', r', n' წრფეები, რომლებიც აგეგმილებს P', Q', R', N' წერტილებს და რომლებიც აგრეთვე ჰარმონიულ წერტილთა ოთხეული იქნება.

ამრიგად, α და α' ველების შესაბამისობა, რომელიც დამყარებულია შესაბამის წერტილთა A, B, C, D და A', B', C', D' ორი ოთხეულით არის კოლინეაცია.

კოლინეაცია შეიძლება დამყარდეს დამოუკიდებელ შესაბამის წრფეთა ოთხი წყვილით.

ეს წინადადება კოლინეაციის ოთხი შესაბამისი წერტილით დამყარების ორადია, ამიტომ დამტკიცების გარეშე შეგვიძლია მივიღოთ. ამრიგად, დავრწმუნდით, რომ შესაბამისი ელემენტების ოთხი წყვილი განსაზღვრავს ორი ველის კოლინეარულ შესაბამისობას, საიდანაც გამომდინარეობს ველების კოლინეარული შესაბამისობის დამყარების კიდევ ორი შესაძლებლობა.

ორი ბრტყელი ველის კოლინეაცია განსაზღვრულია, თუ მოცემულია პროექციულ წრფეთა კონების ორი წყვილი, რომელთა საერთო წრფეები ერთმანეთს შეესაბამება.

მართებულია ამ წინადადების ორადი წინადადებაც.

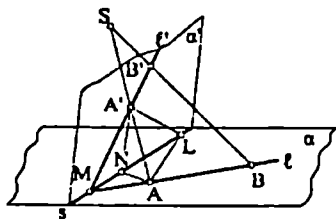
ორი ბრტყელი ველის კოლინეაცია განსაზღვრულია, თუ მოცემულია პროექციულ წერტილთა ორი მწკრივი, რომელთა საერთო წერტილები ერთმანეთს შეესაბამება.

7.2. კოლინეარული ველების პერსპექტიული განლაგება

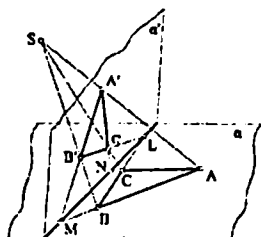
განვიხილოთ α და α' ველების განლაგების მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევა. ველებს შორის შესაბამისობა დავამყაროთ დაგვემიღებინათ S ცენტრიდან (სურ. 95). ცხადია, ასეთ შემთხვევაში წერტილს წერტილი შეესაბამება, წრფეს – წრფე, წერტილების და წრფეების ინციდენტურობა შენარჩუნდება, რაც ნიშნავს, რომ α და α' ველების შესაბამისობა, რომელიც დაგვემიღებინათ დამყარდა, არის კოლინეაცია. ცხადია ისიც, რომ შესაბამისი წერტილების წყვილები S ცენტრზე გამავალ წრფეებზე მდებარეობს, ამიტომ ამ კოლინეაციას პერსპექტიული ეწოდება. ადვილად შევამჩნევთ, რომ პერსპექტიულ კოლინეაციაში α და α' ველების პირველი საფეხურის სახეები პერსპექტიულია, მაგალითად, ℓ და ℓ' წერტილთა მწკრივები, A და A' წრფეთა კონები. მართლაც, ℓ და ℓ' პერსპექტიული წრფეები α და α' ველების საერთო s წრფეზე იკვეთება, ხოლო A და A' პერსპექტიული კონები აგვემიღებს ველების საერთო s წრფეს. ამ წრფის ყველა წერტილი ორმაგია, რადგან S ცენტრიდან ისინი თავის თავზე გვემხდობა. s წრფეს პერსპექტივის ღერძი, ხოლო S წერტილს – პერსპექტივის ცენტრი ეწოდება.

დავადგინოთ ბრტყელი ველების პერსპექტიული განლაგების ნიშანი.

იმისათვის, რომ ორი კოლინეარული ველი პერსპექტიული იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მათი საერთო s წრფის ყოველი წერტილი ორმაგი იყოს.



სურ. 95



სურ. 96

ამ პირობის აუცილებლობა გამომდინარეობს პერსპექტიული ველების მიღების წესიდან: S ცენტრიდან დაგეგმილებით მოცემული ველების საერთო წრფის ყოველი წერტილი თავის თავზე დაგეგმილება ანუ ორმაგი იქნება (სურ. 95, 96). ამ პირობის საკმარისობა გამომდინარეობს ღეზარგის თეორემადან: რადგან შესაბამისი წრფეების წყვილები იკვეთება მოცემული ველების საერთო წრფეზე, ამიტომ შესაბამისი წერტილების შემაერთებელი წრფეები გადაიკვეთება ერთ S წერტილში – დაგეგმილების ცენტრში, რაც α და α' ველების პერსპექტიულობას ნიშნავს.

7.3. კოლინეაციის მეტრული თვისებები. მებიუსის თეორემა

ვნახეთ, რომ α და α' ველების პერსპექტიული განლაგებისას ერთი ველის წერტილები გეგმილდება მეორე ველის შესაბამის წერტილებზე. ასეთ შემთხვევაში შესაბამისი ფიგურების აგება მეტად მარტივია და დაიყვანება ერთი სიბრტყიდან მეორე სიბრტყეზე დაგეგმილებამდე. შესაძლებელია თუ არა ორ პროექციულად შესაბამის კოლინეარულ ველებს მივცეთ პერსპექტიული განლაგება? წინა პარაგრაფში დავრწმუნდით, რომ ორი ბრტყელი ველის პერსპექტიული განლაგების ნიშანია მათი საერთო წრფის ყველა წერტილის ორმაგობა. ამიტომ, ორი ბრტყელი პროექციული ველის პერსპექტიულ მდებარეობაში მოსაყვანად საჭიროა ამ ველებში არსებობდეს ორი შესაბამისი და პროექციულად ტოლი წერტილთა მწკრივი. ორ წერტილთა მწკრივს ეწოდება პროექცი-

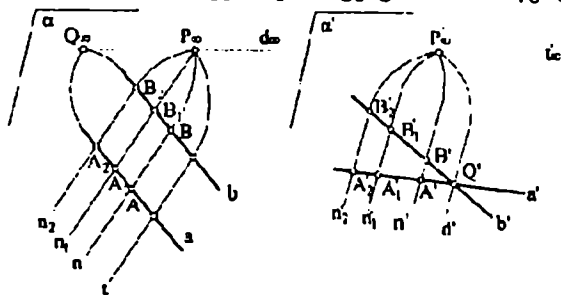
ულად ტოლი, თუ პირველი მწკრივის ორ წერტილს შორის მანძილი უდრის მანძილს მათ შესაბამის წერტილებს შორის მეორე მწკრივზე. თუ ასეთი ორი მწკრივი მოიძებნება α და α' პროექციულ ველებში, მაშინ შესაძლებელი იქნება ამ მწკრივების შეთავსება, რაც ნიშნავს, რომ ორი პროექციული ველიც პერსპექტიული გახდება. ვაჩვენოთ, რომ მოცემული ორი ბრტყელი ველი, რომელთა არასაკუთრივი წრფეები ორმაგი არ არის (ანუ ერთმანეთს არ შეესაბამება), შესაძლებელია მოვიყვანოთ პერსპექტიულ განლაგებაში. განვიხილოთ მებიუსის თეორემა:

ნებისმიერი ორ კოლინეარულ ველში, რომელთა არასაკუთრივი წრფეები არ შეესაბამება ერთმანეთს, არსებობს პროექციულად ტოლი მწკრივების ორი წყვილი.

დავუშვათ, რომ α და α' ველებს შორის მყარდება რაიმე კოლინეაცია $\alpha \bar{\wedge} \alpha'$, რომელშიც α ველის არასაკუთრივ d_∞ წრფეს შეესაბამება α' ველის d' წრფე, ხოლო α' ველის არასაკუთრივ l'_∞ წრფეს შეესაბამება α ველის l წრფე (სურ. 97). ამრიგად, ამ კოლინეაციაში d_∞ , l წრფეთა წყვილს შეესაბამება d'_∞ , l' წრფეთა წყვილი, ამიტომ მათი გადაკვეთის წერტილები $P_\infty = d_\infty l$ და $P'_\infty = d'_\infty l'$ შესაბამისები იქნება. მაგრამ, ამ წრფეების პირველ წყვილში d_∞ არასაკუთრივია, ხოლო წრფეების მეორე წყვილში არასაკუთრივია l'_∞ წრფე, ამიტომ შესაბამისი P_∞ და P'_∞ წერტილები არასაკუთრივებია. ამრიგად, მივიღეთ საინტერესო შედეგი: $\alpha \bar{\wedge} \alpha'$ პროექციულ კოლინეაციაში არსებობს P_∞ და P'_∞ არასაკუთრივი წერტილები, რომლებიც ერთმანეთს შეესაბამება.

გაველოთ ახლა P_∞ წერტილის ინციდენტური n წრფე; მას α' მეორე ველში შეესაბამება P'_∞ წერტილის ინციდენტური n' წრფე, ცხადია, რომ n წრფე l წრფის პარალელურია, ისევე, როგორც n' წრფე პარალელურია d' წრფისა. n_1 მეორე წრფეს, რომელიც გადის P_∞ წერტილზე ანუ n წრფის პარალელურია, შეესაბამება n'_1 , რომელიც n' წრფის პარალელურია. მაშასადამე, $n, n_1, \dots$ პა-

რალელურ წრფეთა კონას ცენტრით P_∞ წერტილში შეესაბამება პარალელურ $n', n'_1, \dots$ წრფეთა კონა ცენტრით P'_∞ წერტილში.



სურ. 97

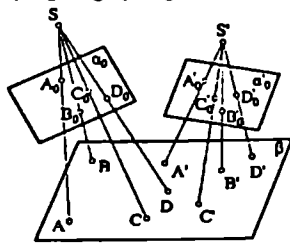
შემდეგ α სიბრტყეში გავავლოთ a და b ორი პარალელური წრფე, რომლებიც გადის Q_∞ წერტილზე. α სიბრტყის a და b წრფეებს α' სიბრტყეში შეესაბამება a' და b' წრფეები, რომლებიც გადაიკეთება Q' წერტილში. ცხადია, $Q_\infty \bar{A} Q'$. a და b წრფეები გადაიკეთება პარალელურ $n, n_1, \dots$ წრფეთა კონასთან ერთნაირი სიგრძის $AB, A_1B_1, \dots$ მონაკვეთებზე, რომელთაც α' სიბრტყეში შეესაბამება განსხვავებული სიგრძის $A'B', A'_1B'_1$ მონაკვეთები. ცხადია, რომ $n, n_1, \dots$ და $n', n'_1, \dots$ წრფეთა კონებში აღმოჩნდება შესაბამის წრფეთა ისეთი n_2 და n'_2 წყვილი, რომლებზეც a, b და a', b' წრფეები მოკვეთს ერთი და იგივე სიგრძის $A_2B_2 \bar{A}'_2B'_2$ მონაკვეთებს: $A_2B_2 = A'_2B'_2$.

განვიხილოთ n_2 და n'_2 წერტილთა მწკრივების შესაბამისობა. გვაქვს $n_2(A_2, B_2, P_\infty) \bar{n}'_2(A'_2, B'_2, P'_\infty)$, მაგრამ $A_2B_2 = A'_2B'_2$. ამიტომ n_2 მწკრივი შეიძლება შევათავსოთ n'_2 , მწკრივთან ისე, რომ A_2, B_2, P_∞ წერტილები შეუთავსდეს თავის შესაბამის A'_2, B'_2, P'_∞ წერტილებს. მაშინ ამ ორი შეთავსებული პროექციული მწკრივის შესაბამისობაში სამი ორმაგი წერტილი იქნება. მაშასადამე, ყველა დანარჩენი წერტილიც ორმაგი იქნება და $n_2 \bar{n}'_2$ ორი მწკრივი აღმოჩნდება პროექციულად ტოლი. ადვილად

შევამჩნევთ, რომ არსებობს პროექციულად ტოლი მწკრივების კიდევ ერთი n_3 და n'_3 წყვილი, ისეთი, რომ n'_2 და n'_3 მდებარეობს d' წრფის სხვადასხვა მხარეს.

7.4. კოლინეარული შესაბამისობა შეთავსებულ ველებში. ორმაგი წერტილები

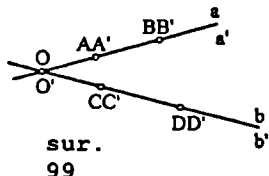
აქამდე ვიხილავდით ორი ველის კოლინეარულ შესაბამისობას, რომლებიც სხვადასხვა სიბრტყეზე მდებარეობდა. ახლა განვიხილოთ ორი შეთავსებული ბრტყელი ველის კოლინეარული შესაბამისობა. ასეთი შეთავსებული ველები შესაძლებელია მივიღოთ ორი პროექციული ველის დაგვეგმილებით რომელიმე ერთ სიბრტყეზე (სურ. 98).



სურ. 98

პროექციულად შესაბამისი $\alpha_0(A_0, B_0, C_0, D_0) \bar{\wedge} \alpha'_0(A'_0, B'_0, C'_0, D'_0)$ ველები დაგვეგმილოთ რომელიმე β სიბრტყეზე S და S' ცენტრებიდან. შედეგად β სიბრტყეზე მივიღებთ $\alpha(A, B, C, D)$ და $\alpha'(A', B', C', D')$ ორ პროექციულ ბრტყელ ველს, რომლებიც კოლინეარული იქნება, რადგან $\alpha_0 \bar{\wedge} \alpha'_0$ ორი პროექციული ველის პერსპექტივებია. ამრიგად, ნებისმიერი ბრტყელი ველი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც α და α' ორი ბრტყელი ველის შეთავსება. ე.ი. მივიღეთ ერთი სიბრტყის წერტილების კოლინეარული ასახვა ამავე სიბრტყის წერტილებზე ანუ სიბრტყის ასახვა თავის თავზე, რომელსაც სიბრტყის კოლინეარული გარდაქმნა ეწოდება. რადგან β სიბრტყეზე მოთავსებულია ორი ბრტყელი ველი, ამიტომ ამ სიბრტყის ყოველი წერტილი შეგვიძლია მივაკუთვნოთ როგორც ერთ ველს, ისე მეორეს და ვეძებოთ მისი შესაბამისი წერტილი მეორე ველში. წერტილს, რომელიც შეთავსებულია თავის შესაბამის წერტილთან ეწოდება α და α' შეთავსებული ველების კოლინეაციის

ორმაგი წერტილი. განვიხილოთ ორმაგი წერტილების რაოდენობის საკითხი. ორმაგი წერტილების რაოდენობა არ შეიძლება სამს აღემატებოდეს, რადგან კოლინეაციაში, რომელიც მოცემულია შესაბამის წერტილთა ოთხი წყვილით, ოთხი ორმაგი წერტილის არსებობა მიგვიყვანს იგივე გარდაქმნამდე, რადგან ასეთ შემთხვევაში კოლინეაციის ყველა წერტილი ორმაგი იქნება. მართლაც, დაეუშვათ, რომ $\alpha \bar{\alpha}'$ კოლინეაციას აქვს ოთხი ორმაგი წერტილი. მაშინ კოლინეაცია დამყარებული იქნება წერტილების ამ ორი ოთხეულით: $\alpha(A, B, C, D) \bar{\alpha}'(A', B', C', D')$, რომლებიც განსაზღვრავს შესაბამის წერტილთა ორ მწკრივს: $a(O, A, B) \bar{a}'(O', A', B')$ და $b(O, C, D) \bar{b}'(O', C', D')$ (სურ. 99). ამ მწკრივების ყოველ წყვილს აქვს ორმაგი წერტილების სამეულები, ამიტომ მათი ყველა შესაბამისი წერტილი ორმაგია. მაშასადამე, $\alpha \bar{\alpha}'$ ველების შესაბამის წერტილთა წყვილები, რომლებიც ამ ორმაგი მწკრივების დახმარებით აიგება, ორმაგი აღმოჩნდება. ამრიგად, შეთავსებული ველების კოლინეაციას არ შეიძლება ჰქონდეს სამზე მეტი ორმაგი დამოუკიდებელი წერტილი ანუ ისეთები, რომლებიც ერთ წრფეზე არ მდებარეობს.



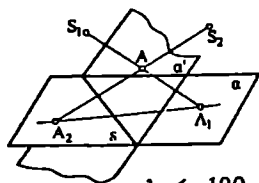
მაგრამ თუ კოლინეაციას აქვს PQR სამი ორმაგი წერტილი, ორადობის პრინციპის თანახმად, მას უნდა ჰქონდეს სამი ორმაგი წრფე - PQR სამკუთხედის გვერდები.

PQR სამკუთხედს კოლინეაციის უძრავი სამკუთხედი ეწოდება.

7.5. ჰომოლოგია და მისი კერძო შემთხვევები

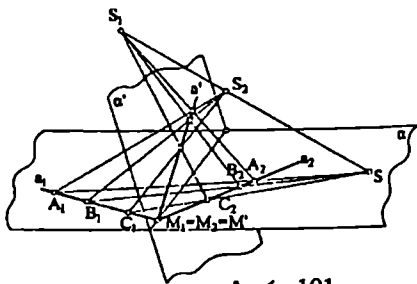
წინა პარაგრაფში განვიხილეთ შეთავსებული ველების კოლინეაციები. ახლა განვიხილოთ შეთავსებული ველების პერსპექტიული კოლინეაციები. α და α' ველების პერსპექტიული კოლინეა-

ცია დავაშარეთ α' სიბრტყის დაგეგმილებით α სიბრტყეზე S_1 ცენტრიდან (სურ. 95, 96). დაგეგმილების პროცესი შეიძლება გავაგრძელოთ, კერძოდ, შეიძლება დავაგეგმილოთ α' სიბრტყე ისევ α სიბრტყეზე რომელიმე სხვა ცენტრიდან (სურ. 100). მაშინ α სიბრტყის ყოველი ფიგურა აისახება ისევ α სიბრტყის ფიგურაზე, ყოველი წერტილი წერტილზე, ყოველი წრფე წრფეზე, ინციდენტური ელემენტები — ინციდენტურ ელემენტებზე. ამრიგად, α' სიბრტყის ბიცენტრალური დაგეგმილების



სურ. 100

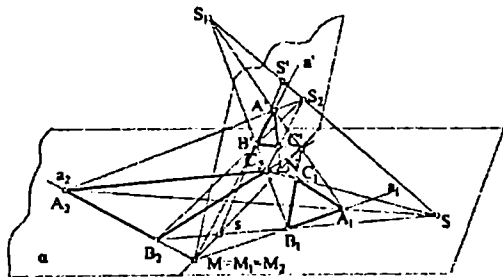
შედეგად α სიბრტყეზე გვექნება ორი ბრტყელი ველი: $\alpha_1(A_1, B_1, C_1, \dots)$ და $\alpha_2(A_2, B_2, C_2, \dots)$, რომელთაგან ერთი მიღებულია α' სიბრტყის დაგეგმილებით S_1 ცენტრიდან და მეორე იგივე სიბრტყის დაგეგმილებით S_2 ცენტრიდან (სურ. 101). ცხადია, რომ $\alpha_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \cap \alpha_2(A_2, B_2, C_2, \dots)$ და შესაბამის წერტილთა წყვილებია $A_1 \rightarrow A_2, B_1 \rightarrow B_2, \dots$ მივიღეთ ორი ბრტყელი ველის შეთავსება α სიბრტყეზე. ე.ი. მივიღეთ α სიბრტყის წერტილების ასახვა ამავე სიბრტყის წერტილებზე ანუ α სიბრტყის გარდაქმნა. ყურადღება მივაქციოთ α და α' სიბრტყეების საერთო s წრფეს. ცხადია, რომ α' სიბრტყის დაგეგმილებით S_1 ცენტრიდან α სიბრტყეზე ამ წრფის ყოველი წერტილი თავის თავზე აისახება ანუ ორმაგი იქნება. α' სიბრტყის S_2 ცენტრიდან დაგეგმილებით α სიბრტყეზე s წრფე ისევ თავის თავზე აისახება, თანაც მისი ყოველი წერტილიც აისახება თავის თავზე. ე.ი. s არის ორმაგი წერტილების წრფე ანუ α' სიბრტყის ბიცენტრალური დაგეგმილებით S_1 და S_2 ცენ-



სურ. 101

ტრებიდან მივიღეთ α სიბრტყის გარდაქმნა, რომელსაც ორმაგი წერტილების ერთი ორმაგი s წრფე აქვს.

ცხადია, s წრფეზე იკვეთება α სიბრტყის შესაბამის წრფეთა ნებისმიერი წყვილი. მაგალითად, a_1 და a_2 წერტილთა მწკრივებს a წრფესთან საერთო ორმაგი $M_1=M_2$ წერტილი აქვს. ამიტომ, a_1 და a_2 ამის გამო, a_1 და a_2 მწკრივების შესაბამისი წერტილები (A_1 და A_2 , B_1 და B_2 და ა.შ.) მდებარეობს ერთ S წერტილში გადაკვეთილ წრფეებზე. ცხადია, რომ α' სიბრტყეში მდებარე რომელიმე A', B', C' სამკუთხედის ბიცენტრალური დაგვეგილებით α სიბრტყეში მიღებული A_1, B_1, C_1 და A_2, B_2, C_2 სამკუთხედების შესაბამისი გვერდებიც გადაიკვეთება s წრფეზე მდებარე წერტილებში (სურ. 102) ანუ α სიბრტყეში მდებარე სამკუთხედებისათვის მართებული იქნება ღეზარგის თეორემა და მათი შესაბამისი წვეროების შემაერთებული წრფეები ერთ S წერტილზე გაივლის. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მიღებულ გარდაქმნაში ნებისმიერ შესაბამის წერტილთა წყვილების შემაერთებული წრფეები იგივე S წერტილზე გაივლის. ეს ნიშნავს, რომ ერთი სიბრტყის მეორე სიბრტყეზე ბიცენტრალური დაგვეგილებით მივიღებთ პერსპექტიულ კოლინეაციას, რომელსაც S პერსპექტივის ცენტრი და s პერსპექტივის ღერძი აქვს.



სურ. 102

სიბრტყის პერსპექტიულ კოლინეაციას ჰომოლოგია ეწოდება. პერსპექტიული კოლინეაციის ორმაგ s წრფეს, რომლის ყველა წერტილი ორმაგია ჰომოლოგიის ღერძი ეწოდება. ჰომოლოგიაში s ღერძს გარეთ არსებობს ერთადერთი ორმაგი წერტილი $S=\alpha \cap S_1 S_2$ - ჰომოლოგიის ცენტრი, რომელიც α' ველის S' წერ-

ტილის შეთავსებული გეგმილია S_1 და S_2 ცენტრებიდან α' სიბრტყეში (სურ. 102).

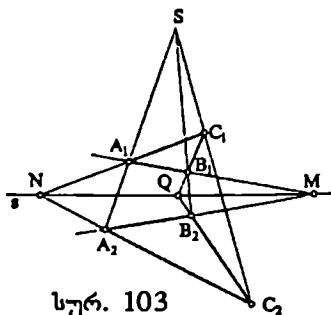
როგორც აღვნიშნეთ, პერსპექტიული კოლინეაციის შესაბამის წერტილთა წყვილები მდებარეობს S ცენტრის მქონე წრფეთა კონის წრფეებზე, ამიტომ ეს წრფეები თავის თავზე აისახება და მათ ორმაგი წრფეები ეწოდება, თუმცა ყოველ მათგანზე მხოლოდ ორი ორმაგი წერტილი მდებარეობს: S და ამ წრფის გადაკეთის წერტილი s ღერძთან.

ამრიგად, კოლინეაციის კერძო შემთხვევას, სახელდობრ პერსპექტიულ კოლინეაციას ანუ ჰომოლოგიას გააჩნია ორმაგ წერტილთა სიმრავლე – ჰომოლოგიის ღერძი და, გარდა ამისა, ორმაგი წრფეების მთელი კონა, რომლის ცენტრი – ჰომოლოგიის ცენტრი, ორმაგი წერტილია. როგორც უკვე აღვნიშნეთ (7.3), თუ კოლინეაცია პერსპექტიული არ არის, მას შეიძლება ჰქონდეს არაუმეტეს სამი ორმაგი წერტილისა და სამი ორმაგი წრფისა.

გავაკეთოთ ზოგიერთი დასკვნა:

1⁰ ჰომოლოგიის ყველა ორმაგი წრფე ერთი უძრავი (ორმაგი) წერტილის – S ჰომოლოგიის ცენტრის ინციდენტურია. ცენტრზე გამავალი ყველა წრფე ორმაგია, მაგრამ მათზე მდებარე ყველა წერტილი ორმაგი არ არის.

2⁰ ჰომოლოგიის ყველა ორმაგი წერტილი (S ცენტრის გარდა) ერთი ორმაგი წრფის – s ჰომოლოგიის ღერძის ინციდენტურია. ღერძზე მდებარე ყველა წერტილი ორმაგია, მაგრამ მათზე გამავალი ყველა წრფე ორმაგი არ არის. მაგალითად, ჰომოლოგიურ წრფეთა წყვილები, რომლებიც ღერძზე იკვეთება.



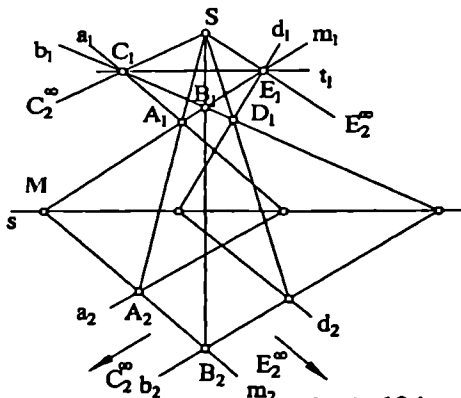
სურ. 103

განვიხილოთ α სიბრტყეზე მიღებული ჰომოლოგიის თვისებები (სურ. 103).

ამრიგად, α სიბრტყეზე დამყარდა პერსპექტიული გარდაქმნა – ჰომოლოგია, რომელშიც შესაბამისი (ჰომოლოგიური) წერტილების წყვილები ერთ S ცენტრზე გადაკვეთილ წრფეებზე მდებარეობს. როგორც ვნახეთ, ჰომოლოგიური სამკუთხედები აკმაყოფილებს ღებარგის თეორემას: აქვს პერსპექტივის ცენტრი და პერსპექტივის ღერძი ანუ შესაბამის წერტილთა წყვილები მდებარეობს ცენტრზე გამავალ წრფეებზე და შესაბამისი წრფეები იკვეთება ღერძზე მდებარე წერტილებში. ამიტომ ამბობენ, რომ ღებარგის თეორემა არის თეორემა ჰომოლოგიურ სამკუთხედებზე.

ჰომოლოგია განისაზღვრება შესაბამის წერტილთა სამი წყვილით, რომლებიც ცენტრზე გამავალ ორმაგ წრფეებზე მდებარეობს; ან შესაბამის წერტილთა სამი ორმაგი წერტილით და შესაბამის წერტილთა ერთი წყვილით: ორი ორმაგი წერტილით განისაზღვრება ღერძი, კიდევ ერთი ორმაგი წერტილით – ცენტრი, რაც ნიშნავს იმას, რომ ჰომოლოგია განისაზღვრება ღერძით, ცენტრით და შესაბამის წერტილთა ერთი წყვილით. შევნიშნოთ, რომ თუ ჰომოლოგიის S ცენტრი s ღერძის ინციდენტურია არ არის ($S \notin s$), ჰომოლოგიას ჰიპერბოლური ეწოდება, ხოლო თუ S ეკუთვნის s ღერძს ($S \in s$) – პარაბოლური. ეთქვათ, ჰომოლოგია s ღერძით და S ცენტრით ასახავს A_1 წერტილს A_2 წერტილზე (სურ. 103). ავავოთ B_2 წერტილი, რომელიც ამ ჰომოლოგიაში შეესაბამება მოცემულ B_1 წერტილს. გავავლოთ SB_1 , რომელიც ამ ჰომოლოგიის ორმაგი წრფეა და A_1B_1 , რომელიც კვეთს ჰომოლოგიის ღერძს M წერტილში. მოცემული ჰომოლოგია ასახავს A_1M წრფეს A_2M წრფეზე. მაშასადამე, B_1 წერტილის ჰომოლოგიური B_2 წერტილი მდებარეობს A_1M -ზე და SB_1 წრფეზეც ანუ მათ გადაკვეთაში. ამრიგად, შესაბამისობა ორმაგი წრფის B_1 და B_2 წერტილებს შორის ზორციელდება შემდეგი აგებით:

$$B_1 \xrightarrow{A_1} M \xrightarrow{A_2} B_2.$$



სურ. 104

შესრულებული აგების ანალოგიურად, შეიძლება ავადგოთ არასაკუთრივი წერტილების შესაბამისი წერტილები. ვთქვათ, ჰომოლოგია მოცემულია შემდეგი ელემენტებით: $S, s, (A_1 \bar{A}_2)$ (სურ. 104). ავადგოთ წერტილი, რომელიც a_2 წრფის არასაკუთრივი C_2^{∞} წერტილის შესაბამისი იქნება. საძიებელი C_1 წერტილი უნდა მდებარეობდეს როგორც SC_2^{∞} ორმაგ წრფეზე, ასევე a_2 წრფის შესაბამის a_1 წრფეზე. ავადგოთ a_2 წრფის შესაბამისი a_1 წრფე; გავავლოთ C_2^{∞} არასაკუთრივ წერტილზე SC_2^{∞} ორმაგი წრფე. ცხადია, $SC_2^{\infty} \parallel a_2$ წრფის a_1 წრფესთან გადაკვეთისას მივიღებთ C_1 წერტილს, რომელიც C_2^{∞} არასაკუთრივი წერტილის ჰომოლოგიური იქნება. C_1 წერტილზე გაივლის a_2 ველის l_2^{∞} არასაკუთრივი წრფის შესაბამისი t_1 წრფე, რომელიც s ღერძის პარალელური იქნება, რადგან t_1 წრფე s ღერძთან არასაკუთრივ წერტილზე იკვეთება (4.4, სურ. 16).

განვიხილოთ ჰომოლოგიის კერძო შემთხვევები.

ვთქვათ, ჰომოლოგიის ცენტრი ღერძის ინციდენტურია ანუ ჰომოლოგია პარაბოლურია. ჰომოლოგიის ასეთ კერძო სახეს ელაცია ეწოდება. ელაცია განსაზღვრულია, თუ მოცემულია ღერძი და შესაბამის წერტილთა ერთი წყვილი. შესაბამის წერტილთა წყვილების აგება ჩვეულებრივი წესით სრულდება (სურ. 105).

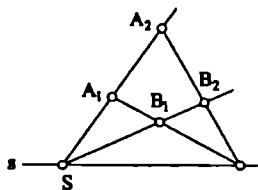
ჰომოლოგიის კერძო შემთხვევაა ინვოლუციური ჰომოლოგია ანუ ისეთი ჰომოლოგია, რომელიც თავის თავის შუქცეულია. თუ

ასეთი კომოლოგია A წერტილს ასახავს A' წერტილზე, მაშინ იგივე კომოლოგია A' წერტილს ასახავს ისევ A წერტილზე.

ვაჩვენოთ, რომ ასეთი კომოლოგიები არსებობს.

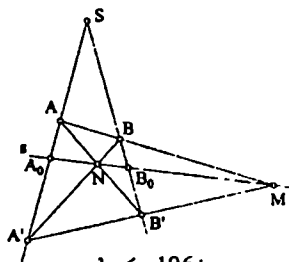
ვთქვათ, კომოლოგია განსაზღვრულია შესაბამის წერტილთა

A და A' , A' და A , B და B' სამი წყვილში ანუ A, A' წყვილი ორმაგ შესაბამისობაშია. ეს ასე ჩაწეროთ: $\begin{pmatrix} A, A', B \\ A', A, B' \end{pmatrix}$. ყოველი



სურ. 105

წერტილის ქვემოთ წერია მისი შესაბამისი წერტილი. ასეთი ჩანაწერები ძალიან მოსახერხებელია, რადგან ნათლად ჩანს შესაბამისი წერტილების და წრფეების წყვილები. მაგალითად, ამ კომოლოგიაში AB და $A'B'$, $A'B$ და AB' , AA' და $A'A$ შესაბამის წრფეთა წყვილებია. ვაჩვენოთ, რომ ეს



სურ. 106

კომოლოგია თავის თავის შექცეულია (სურ. 106). ამ კომოლოგიაში AB და $A'B'$ შესაბამის წრფეთა წყვილები იკვეთება ღერძზე მდებარე M წერტილში. ხოლო $A'B$ და AB' შესაბამისი წრფეები – s ღერძზე მდებარე N წერტილში. ამრიგად, $s=MN$ ღერძი განსაზღვრულია. კომოლოგიის S ცენტრსაც ადვილად ავაგებთ, რადგან მოცემული შესაბამის წერტილთა A, A' და B, B' წყვილებით განისაზღვრება კომოლოგიის AA' და BB' ორი ორმაგი წრფე, რომელთა გადაკვეთაში მივიღებთ კომოლოგიის S ცენტრს. კომოლოგია დამყარებულია. დავამტკიცოთ, რომ ამ კომოლოგიაში მოცემულ წერტილთა B, B' წყვილიც ინვოლუციური იქნება და, საერთოდ, თუ ეს კომოლოგია C წერტილს ასახავს C'

წერტილზე, მაშინ იგივე ჰომოლოგია C^* წერტილს ასახავს C^* -ზე.

ზემოთ ნათქვამი შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ: ჰომოლოგია, რომელიც ინვოლუციურად ასახავს ერთ რომელიმე წერტილს, არის ინვოლუციური ჰომოლოგია ანუ ინვოლუციურად ასახავს ყველა წერტილს. ანალოგიური თეორემა ჩამოვაყალიბეთ წრფეზე დამყარებული ინვოლუციისათვის. დავამტკიცოთ ეს წინადადება სიბრტყეზე დამყარებული ინვოლუციური ჰომოლოგიის წერტილთა წყვილებისათვის. კიეკათ, S ჰომოლოგიის ცენტრია, s მისი ღერძი, AA' ინვოლუციურ წერტილთა წყვილი, ანუ A და A' წერტილები ორმაგ შესაბამისობაშია, A_0-A_0S ორმაგი წრფის და s ღერძის გადაკვეთის წერტილი. ამ ჰომოლოგიაში $AA'A_0S$ წერტილებს, პირობის თანახმად, შეესაბამება $A'A'A_0S$, ე.ი.

$$A A' A_0 S \wedge A' A A_0 S$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ A, A' წერტილთა წყვილი პარმონულად ეოვს A_0, S წერტილთა წყვილს (4.3) და ეს იქნება ამ ჰომოლოგიაში ყოველი a ორმაგი წრფის შესაბამის წერტილთა ნებისმიერი წყვილისათვის. მაგალითად, $AA'A_0S$ და $BB'B_0S$ წერტილთა ოთხეულია პერსპექტიულია M პერსპექტივის ცენტრით:

$$A A' A_0 S \wedge B B' B_0 S.$$

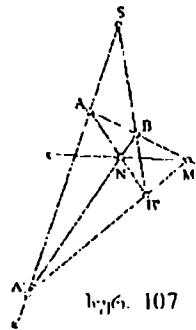
ე.ი. თუ $AA'A_0S$ პარმონულ წერტილთა ოთხეულია, მაშინ $BB'B_0S$ ოთხეულიც პარმონულია. აქედან

$$BB'B_0S \wedge B'BB_0S.$$

საიდანაც ჩანს, რომ B და B' წერტილები ინვოლუციურ წერტილთა წყვილია. აძრივად, დავამტკიცოთ, რომ განხილული ჰომოლოგია ინვოლუციურია.

ზემოთქმულიდან ჩანს, რომ არსებობს ერთადერთი ინვოლუციური ჰომოლოგია, რომელიც განისაზღვრება ღერძით და შესაბამის წერტილთა ერთი ინვოლუციური წყვილით.

მართლაც, რადგან ღერძი და შესაბამისი წერტილთა A, A' ერთი წვეილი მოცემულია ანუ მოცემულია $\begin{pmatrix} A, A' \\ A', A \end{pmatrix}$. შევიძლია ავაგოთ AM და $A'M$. AN და $A'N$ შესაბამის წრეკთა წვეილები (ხურ. 107). შემდეგ მარტივად ავაგებთ B, B' ინვოლუციურად შესაბამისი წერტილთა ახალ წვეილს $B = AM \cap A'N$, $B = A'M \cap AN$.



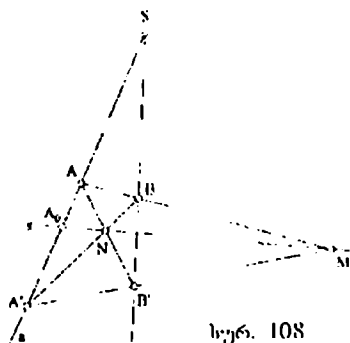
ხურ. 107

შემდეგ ავაგოთ S ინვოლუციის ცენტრი: $S = AA' \cap BB'$ ინვოლუციური პოპოლუგია დამყარებულია, რაც იმას ნიშნავს, რომ სიბრტყის ნებისმიერა C წერტილი სიბრტყის ცალსახად განისაზღვრება მისი შესაბამისი ინვოლუციური C' წერტილი.

ინვოლუციური პოპოლუგია შეიძლება

სხვანაირადაც დამყარდეს დაკავშირებით თეორემა:

ინვოლუციური პოპოლუგია განისაზღვრება შესაბამისი წერტილთა ორი წვეილით ეს თეორემა ადრე დაკავშირებით წრეკის ინვოლუციური გარდაქმნისათვის. ახლა დაკავშირებით ეს თეორემა სიბრტყის გარდაქმნისათვის ვთქვათ, მოცემულია შესაბამისი A, A' , B, B' და B' წერტილთა ორი წვეილი, თანაც, პირობის თანახმად, ყოველი წვეილი ინვოლუციურია (ხურ. 108) ე.ი. A, A' წვეილი შესაბამისა A, A' წვეილს, ხოლო B, B' წვეილი B, B' წვეილს ანუ მოვიღეთ შესაბამისი წერტილთა ოთხი წვეილი $\begin{pmatrix} A, A', B, B' \\ A', A, B', B \end{pmatrix}$. ამ შესაბამისი წერტილთა ოთხი წვეილით განისაზღვრება ერთადერთი კლინიკარული შესაბამისობა, თუ არსებობს ინვოლუციური



ხურ. 108

ჰომოლოგია, რომელიც განისაზღვრება შესაბამის წერტილთა ამ წყვილებით, მისი ღერძი უნდა გადიოდეს წერტილებზე:

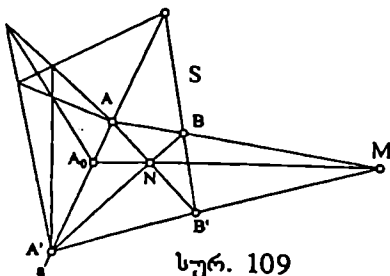
$$M=AB \cap A'B' \text{ და } N=AB' \cap A'B$$

შეენიშნოთ, რომ $ABA'B'$ სრული ოთხკუთხედით განისაზღვრება სამი ინვოლუციური ჰომოლოგია. თითოეულის ცენტრი ოთხკუთხედის ერთი დიაგონალური წერტილია, ხოლო ღერძი – დანარჩენ ორ დიაგონალურ წერტილზე გამავალი დიაგონალი. ყველა ასეთი ინვოლუციური ჰომოლოგია $ABA'B'$ ოთხკუთხედს თავის თავზე ასახავს.

ზემოთ აღვნიშნეთ, რომ ინვოლუციური ჰომოლოგია ყოველი a ორმაგი წრფის წერტილებს ამავე წრფის წერტილებზე ინვოლუციურად ასახავს. ყოველ ასეთ a წრფეზე მყარდება ჰიპერბოლური ინვოლუცია, რომლის ორმაგი წერტილებია S ჰომოლოგიის ცენტრი და a ორმაგი წრფის s ღერძთან გადაკვეთის წერტილი (A_0). დავამტკიცეთ, რომ ყოველი ჰიპერბოლური ინვოლუცია ჰარმონიულია (6.2). ე.ი. ინვოლუციური ჰომოლოგიის ყოველ ორმაგ a წრფეზე მდებარე შესაბამის წერტილთა AA' წყვილი ჰარმონიულად ყოფს ამ წრფის ორ ორმაგ წერტილს – S ინვოლუციის ცენტრს და a ორმაგი წრფის s ღერძთან გადაკვეთის A_0 წერტილს. ე.ი. ინვოლუციურ ჰომოლოგიაში ყოველ ორმაგ წრფეზე მყარდება ჰარმონიული ინვოლუცია, რომელშიც შესაბამის წერტილთა წყვილი შეუღლებულია ორმაგი წრფის ორ ორმაგ წერტილთა წყვილის მიმართ. ასეთ ჰომოლოგიას ჰარმონიული ეწოდება.

ჰარმონიული ჰომოლოგია საესებით განსაზღვრულია, თუ მოცემულია მისი ღერძი და ცენტრი.

ამ შემთხვევაში ყოველ A' წერტილს განესაზღვრავთ, როგორც A წერტილთან ჰარმო-



სურ. 109

ნიულად შეუღლებულს S, A_0 წერტილთა წყვილის მიმართ (სურ. 109).

აღვნიშნოთ, რომ ყოველი ინვოლუციური კოლინეაცია არის პარმონიული ჰომოლოგია.

ეთქვათ, მოცემულ ინვოლუციურ კოლინეაციაში A, A' და B, B' შესაბამის წერტილთა ორი წყვილია: $\begin{pmatrix} A, B \\ A', B' \end{pmatrix}$. ე.ი. ინვოლუციური კოლინეაცია განსაზღვრულია შესაბამის წერტილთა ოთხი წყვილით: $\begin{pmatrix} A, A', B, B' \\ A', A, B', B \end{pmatrix}$. ორმაგი AA' და BB' წრფეები იკვეთება S ორმაგ წერტილში (სურ. 109). რადგან მოცემულ კოლინეაციაში AB წრფეს შეესაბამება $A'B'$ წრფე, ხოლო AB' წრფეს $A'B$, ამიტომ $M = AB \cap A'B'$ და $N = AB' \cap A'B$ ორი წერტილი ორმაგი იქნება. გარდა ამისა, AA' და MN ორი ორმაგი წრფე იკვეთება MN წრფის A_0 ორმაგ წერტილში. ამრიგად, MN წრფე, რომელზეც სამი ორმაგი წერტილი ძეგს, ორმაგია ანუ ინვოლუციური კოლინეაცია არის ჰომოლოგია MN ღერძით, რადგან როგორც ადრე დავამტკიცეთ, A, A' და S, A_0 წყვილები პარმონიულად ყოფს ერთმანეთს, მივიღებთ პარმონიულ ჰომოლოგიას.

ინვოლუციური ჰომოლოგიების მაგალითია საყოველთაოდ ცნობილი ღერძული სიმეტრია ან ანარეკლი. ღერძული სიმეტრია ყოველ წერტილს ასახავს წერტილზე, წრფეს – წრფეზე, ინარჩუნებს წერტილების და წრფეების ინციდენტურობას, თანაც სიმეტრიის ღერძის ყოველი წერტილი თავის თავზე აისახება. ამიტომ, ღერძული სიმეტრია არის ჰომოლოგია, რომლის ცენტრი მისი ღერძის პერპენდიკულარული წრფეების არასაკუთრივი წერტილია. თუ რომელიმე ანარეკლი ასახავს F ფიგურას F' ფიგურაზე იგივე ანარეკლი F' ფიგურას ასახავს ისევ F ფიგურაზე ანუ საქმე გაქვს ინვოლუციურ ასახვასთან, რომელიც თავის თავის შუქცეულია.

7.6. აფინური შესაბამისობა და მისი კერძო შემთხვევები

ორი ბრტყელი ველის აფინური შესაბამისობის შემთხვევა მიიღება, თუ ბრტყელი ველის არასაკუთრივი წრფეები შესაბამისი იქნება. ე.ი. აფინურ ველებში შესაბამის არასაკუთრივ წრფეთა ერთი წყვილი უკვე გვაქვს, ამიტომ აფინური შესაბამისობის დასამყარებლად საკმარისია შესაბამისი ელემენტების მხოლოდ სამი წყვილის მოცემა. ამრიგად, ორი ბრტყელი ველის აფინური შესაბამისობა განსაზღვრულია, თუ მოცემულია შესაბამის წერტილთა (ან წრფეთა) სამი წყვილი.

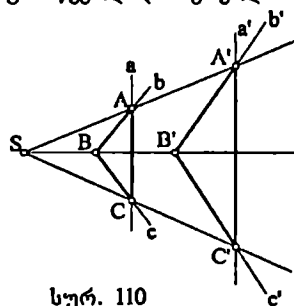
ე.ი. ერთი (ან ორი) სიბრტყის კუთვნილი ბრტყელი ველების აფინური შესაბამისობა განისაზღვრება ორი ნებისმიერი სამკუთხედის მოცემით. აფინური შესაბამისობის თვისებები განხილული იყო პირველი თავში (1.4).

ახლა განვიხილოთ შეთავსებული აფინური ველების პერსპექტიული განლაგება ანუ განვიხილოთ აფინური ჰომოლოგიები. ცხადია, აფინური ჰომოლოგიები, როგორც ნებისმიერი სხვა აფინური შესაბამისობები, პარალელურობას ინარჩუნებს, რაც პროექციული გეომეტრიის ენაზე იმას ნიშნავს, რომ ეს ჰომოლოგიები არასაკუთრივ წერტილებს ასახავს ისევ არასაკუთრივ წერტილებზე. მაგრამ შეთავსებული აფინური ველების არასაკუთრივი ყველა წერტილი მდებარეობს ერთ არასაკუთრივ წრფეზე, ე.ი. ამ ჰომოლოგიებში არასაკუთრივი წრფე ორმაგი უნდა იყოს. აფინური ჰომოლოგიებისათვის ეს პირობა აუცილებელია და საკმარისი. მისი შესრულების ორი გზა არსებობს:

1⁰. არასაკუთრივი წრფე არის ჰომოლოგიის ღერძი;

2⁰. არასაკუთრივი წრფე არის ჰომოლოგიის ორმაგი წრფე (ცენტრზე გამავალი წრფე). ე.ი. არასაკუთრივი წერტილი არის ჰომოლოგიის ორმაგი წრფის ორმაგი წერტილი – ჰომოლოგიის S ცენტრი.

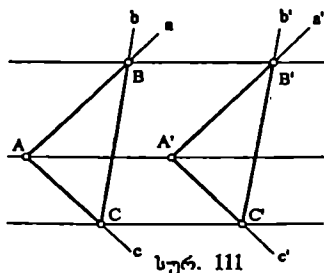
განვიხილოთ არასაკუთრივი ღერძის მქონე ჰომოლოგიები. ჰომოლოგიური წრფეები ღერძზე იკვეთება, მოცემულ შემთხვევაში, არასაკუთრივ ღერძზე. ეს ნიშნავს, რომ ჰომოლოგიურ წრფეთა წყვილები ურთიერთპარალელურია. სწორედ ამაშია ასეთი ჰომოლოგიების დამახასიათებელი თავისებურება. მაშასადამე, ჰომოლოგია არასაკუთრივი ღერძით ნებისმიერ წრფეს ასახავს მის პარალელურ წრფეზე. თუ ჰომოლოგიის ცენტრი საკუთრივია, ე.ი. არ მდებარეობს ღერძზე, პარალელურ წრფეთა ნებისმიერი წყვილი, მაგალითად, aa' შეგვიძლია ჰომოლოგიურ წყვილად ჩავთვალოთ (სურ. 110). ასეთი ჰომოლოგიური გარდაქმნა ABC სამკუთხედს მის მსგავს და მსგავსად განლაგებულ (ჰომოთეტიურ) $A'B'C'$ სამკუთხედზე ასახავს. მაშასადამე, ჰიპერბოლური ჰომოლოგია ($S \notin s$) არასაკუთრივი ღერძით აღმოჩნდა ჩვენთვის კარგად ცნობილი ევკლიდეს გეომეტრიის მსგავსების გარდაქმნა (ჰომოთეტია).



სურ. 110

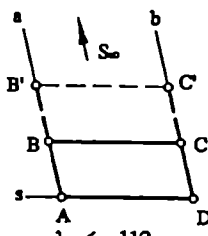
კონსტრუქციულად α სიბრტყის ეს გარდაქმნა შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც α' სიბრტყის ბიცენტრალური დაგეგმილება α სიბრტყეზე S_1 და S_2 ცენტრებიდან, თუ 102-ე სურათზე α' სიბრტყე α სიბრტყის პარალელური იქნება ($\alpha' \parallel \alpha$) და ამ სიბრტყეების გადაკვეთის არასაკუთრივი წრფე იქნება α სიბრტყის ჰომოლოგიის S არასაკუთრივი ღერძი.

თუ არასაკუთრივი S ღერძის მქონე ჰომოლოგიის S ცენტრიც არასაკუთრივია ანუ ეკუთვნის s ღერძს, ამ შემთხვევაშიც ყოველი წრფე აისახება თავის პარალელურ წრფეზე. მაგრამ გარდა ამისა, ორმაგი წრფეებიც იკვეთე-



სურ. 111

ბა არასაკუთრივ წერტილში (ჰომოლოგიის ცენტრში), ე.ი. ურთიერთპარალელურია. ყოველი ფიგურა აისახება თავის კონგრუენტულ ფიგურაზე (სურ. 111). ამრიგად, პარაბოლური ჰომოლოგია არასაკუთრივი ღერძით არის პარალელური გადატანა. კონსტრუქციულად α სიბრტყის ეს გარდაქმნა შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც α' სიბრტყის ბიცენტრალური დაგეგმილება α სიბრტყეზე S_1 და S_2 ცენტრებიდან. თუ 102-ე სურათზე α' სიბრტყე და S_1S_2 წრფე α სიბრტყის პარალელური იქნება: $\alpha' \parallel S_1S_2 \parallel \alpha$. ამიტომ S_1S_2 წრფე α სიბრტყესთან არასაკუთრივ S_∞



სურ. 112

წერტილში გადაიკვეთება, რომელიც α სიბრტყის ჰომოლოგიის არასაკუთრივი ცენტრი იქნება. ხოლო $\alpha' \parallel \alpha$ სიბრტყეების გადაკვეთის არასაკუთრივი წრფე ამ გარდაქმნის ღერძი იქნება. ორივე განხილული ჰომოლოგია პარალელურ წრფეების წყვილს ასახავს პარალელურ წრფეთა წყვილებზე. ამრიგად, განვიხილოთ არასაკუ-

თრივი ღერძის მქონე აფინური ჰომოლოგიების ორი შემთხვევა: ჰიპერბოლური, როდესაც ცენტრი საკუთრივია და პარაბოლური, როდესაც ცენტრი არასაკუთრივია. პირველ შემთხვევაში მივიღეთ ჰომოთეტიური ფიგურები, მეორე შემთხვევაში კონგრუენტული.

განვიხილოთ მეორე ტიპის ჰომოლოგიები – ჰომოლოგიები არასაკუთრივი ცენტრით. ცნობილია, რომ ჰომოლოგიის ორმაგი წრფეები ცენტრზე გადის. თუ ცენტრი არასაკუთრივია, მაშინ ორმაგი წრფეების სიმრავლე პარალელური წრფეებია. ეს არის ამ ჰომოლოგიების დამახასიათებელი თავისებურება.

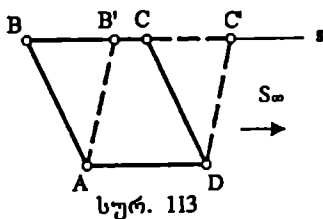
ვთქვათ, s ჰომოლოგიის ღერძია, a და b პარალელური წრფეები – ჰომოლოგიის ორმაგი წრფეები (სურ. 112). ორმაგი წრფეებით განისაზღვრება ცენტრი, მოცემულ შემთხვევაში ის არის მათი საერთო არასაკუთრივი S_∞ წერტილი. C და C' შესაბამის წერტილთა წყვილებია. მივიღებთ სიბრტყის გარდაქმნას,

რომელსაც პერსპექტიულ-აფინური ან ნათესაური გარდაქმნა ეწოდება. ჰომოლოგიურ წერტილთა წყვილი განგებ შევარჩიეთ ღერძის ერთ მხარეს. ცხადია, რომ ეს ჰომოლოგია (ნათესაობა) $ABCD$ პარალელოგრამს ასახავს $AB'C'D$ პარალელოგრამზე. $ABCD$ პარალელოგრამი თითქოს გაწელილია ორმაგი წრფეების მიმართულებით ისე, რომ ორმაგი წრფეების პარალელური ყოველი მონაკვეთი დაგრძელებულია ერთი და იგივე რიცხვჯერ (მოცემულ შემთხვევაში ორჯერ), ხოლო ღერძის პარალელური მონაკვეთების სიგრძე უცვლელია. ამიტომ, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ნათესაობა არის სიბრტყის გაწელვა (კუმშვა) ორმაგი წრფეების მიმართულებით. კონსტრუქციულად, ნათესაურ გარდაქმნას მივიღებთ, თუ 102 -ე სურათზე S_1 და S_2 დაგეგმილების ცენტრებზე გამავალი S_1S_2 წრფეს α სიბრტყის პარალელურად წარმოვიდგენთ. ე.ი. $S_1S_2 \parallel \alpha$ და ამიტომ α სიბრტყესთან იგი S_∞ არასაკუთრივ წერტილში გადაიკვეთება, რომელიც α სიბრტყის ნათესაური გარდაქმნის (გაწელვის) არასაკუთრივი ცენტრი იქნება.

თუ არასაკუთრივი ცენტრის მქონე ჰომოლოგიაში შესაბამისი ფიგურები ღერძის სხვადასხვა მხარეს მდებარეობს და მისგან ტოლი მანძილებითაა დაშორებული, ხოლო ჰომოლოგიების ორმაგი წრფეები ღერძის პერპენდიკულარულია, მივიღებთ აფინური ჰომოლოგიების კერძო სახეს, რომელსაც ღერძული სიმეტრია ან ანარეკლი ეწოდება. ამ ჰომოლოგიაში შესაბამისი ფიგურები კონგრუენტულებია.

განვიხილოთ იმ ჰომოლოგიების ბოლო სახე, რომლებიც პარალელურობას ინარჩუნებს — პარაბოლური ჰომოლოგიები (SEs) არასაკუთრივი ცენტრით. ამ შემთხვევაში ჰომოლოგიის S_∞ ცენტრი არის ჰომოლოგიის s ღერძის არასაკუთრივი წერტილი. ამიტომ ორმაგი წრფეები ურთიერთპარალელურებია და s ღერძიც მათი პარალელურია (მას აქვს ორმაგ წრფეებთან საერთო არასაკუთრივი წერტილი). ვთქვათ, ასეთი ჰომოლოგია B წერტილს B' წერტილზე ასახავს (სურ. 113). მაშინ $ABCD$ პარალელოგრამი

აისახება $AB'C'D$ პარალელოგრამზე ისე, რომ თით-ქოს s წრფე თავის თავის გასწვრივ არის დაძრული. ასეთ გარდაქმნას ძვრა ეწოდება. ე.ი. პარაბოლური ჰომოლოგია არა-საკუთრივი ცენტრით არის ძვრა.



სურ. 113

კონსტრუქციულად ძვრას მივიღებთ, თუ 102-ე სურათზე S_1 და S_2 დაგეგმილების ცენტრებზე გამავალი (S_1S_2) წრფე α და α' სიბრტყეების პერსპექტივის s ღერძის პარალელური იქნება და ამიტომ α სიბრტყესთან s ღერძის S_{∞} არასაკუთრივ წერტილში გადაიკვეთება, რომელიც α სიბრტყის ძვრის არასაკუთრივი ცენტრი იქნება.

ამრიგად, სულ ოთხი სახე აღმოჩნდა ისეთი ჰომოლოგიების, რომლებიც პარალელურობას ინარჩუნებს: პარალელური გადატანა, მსგავსების გარდაქმნა (ჰომოთეტია), გაწელება (ნათესაობა) და ძვრა.

მერვე თავი. კორელაციური შესაბამისობა შემთავსებულ ველეში

8.1. კორელაციური შესაბამისობის ზოგადი შემთხვევა

წინა პარაგრაფებში აღვნიშნეთ, რომ α და α' ველების კორელაცია ეწოდება შესაბამისობას, რომელშიც α ველის წერტილებსა და წრფეებს შეესაბამება α' ველის წრფეები და წერტილები. დაეუშვათ ახლა, რომ α და α' ველების სიბრტყეები ერთ სიბრტყესთან შევათავსეთ. მაშინ ამ შეთავსებული სიბრტყის წერტილებსა და წრფეებს შეესაბამება ამავე სიბრტყის წრფეები და წერტილები ანუ მივიღებთ სიბრტყის კორელაციურ გარდაქმნას.

ცხადია, კორელაცია არის გარდაქმნა, რომელიც საგრძნობლად განსხვავდება კოლინეაციისაგან. კოლინეაცია ნებისმიერ პირველი საფეხურის სახეს ასახავს ერთსახელა პირველი საფეხურის სახეზე (მწკრივს მწკრივზე, კონას კონაზე), ხოლო კორელაცია – არაერთსახელაზე (მწკრივს კონაზე, კონას – მწკრივზე). მაგრამ მათ ერთი მნიშვნელოვანი მსგავსება აქვთ: ორივე ინარჩუნებს ჰარმონიზმს, ე.ი. პირველი საფეხურის ნებისმიერ სახეს ასახავს მის პროექციულ სახეზე. ამ თვალსაზრისით, ორივე გარდაქმნას პროექციული ეწოდება.

ცხადია, ორი კორელაციის (ან კოლინეაციის) კომპოზიცია არის კოლინეაცია, ხოლო კორელაციისა და კოლინეაციის კომპოზიცია – კორელაცია.

უკვე დავამტკიცეთ, რომ კოლინეაცია განსაზღვრულია, თუ მოცემულია ოთხი დამოუკიდებელი წერტილი (წრფე) და მათი შესაბამისი ოთხი დამოუკიდებელი ნებისმიერად შერჩეული წერტილი (წრფე) (7.1).

დავამტკიცოთ, რომ ანალოგიურად განისაზღვრება კორელაცია:

კორელაცია განსაზღვრულია, თუ მოცემულია ოთხი დამოუკიდებელი წერტილი (წრფე) და მათი შესაბამისი ოთხი ნებისმიერად შერჩეული დამოუკიდებელი წრფე (წერტილი).

მართლაც, ვთქვათ A, B, C, D ოთხი დამოუკიდებელი წერტილია, ხოლო a, b, c, d დამოუკიდებელი წრფეები. ვთქვათ, რომელიმე σ კორელაცია ასახავს A, B, C, D წერტილებს a', b', c', d' წრფეებზე, რომელიც ასე ჩაიწერება:

σ ასახავს $\begin{pmatrix} A, B, C, D \\ a', b', c', d' \end{pmatrix}$, ანალოგიურად ჩაიწერება ρ კოლი-

ნეაცია, რომელიც ასახავს $\begin{pmatrix} a', b', c', d' \\ a, b, c, d \end{pmatrix}$. ცხადია, $\sigma\rho$ კომპოზიცია

არის კორელაცია, რომელიც ასახავს $\begin{pmatrix} A, B, C, D \\ a, b, c, d \end{pmatrix}$. ვაჩვენოთ, რომ

არსებობს ერთადერთი ასეთი კორელაცია. დავუშვათ, რომ არსებობს α და β ორი კორელაცია, რომლებიც ასახავენ $\begin{pmatrix} A, B, C, D \\ a, b, c, d \end{pmatrix}$.

მაშინ კომპოზიცია $\alpha\beta^{-1}$ იქნება კოლინეაცია, რომელიც ასახავს $\begin{pmatrix} A, B, C, D \\ A, B, C, D \end{pmatrix}$. მაშასადამე, $\alpha\beta^{-1}=1$ ანუ $\alpha=\beta$.

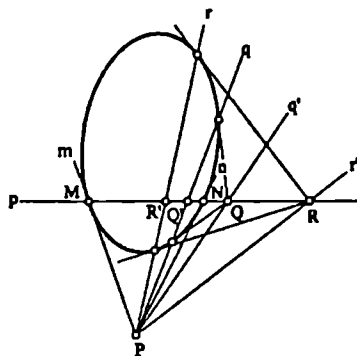
8.2. პოლარული შესაბამისობა და მისი თვისებები

ზემოთ განვიხილეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა, რომელსაც ამყარებს კონიკა სიბრტყის წერტილებსა და წრფეებს შორის ისე, რომ ყოველ წერტილს შეესაბამება მისი პოლარა და ყოველ წრფეს — მისი პოლუსი. ასეთ შესაბამისობას პოლარული ეწოდება (6.4). განვიხილოთ ამ შესაბამისობის თვისებები.

წინასწარ გავეცნოთ რამდენიმე განსაზღვრას. ორ წერტილს ეწოდება კონიკის მიმართ შეუღლებული, თუ ყოველი მათგანის პოლარა გადის მეორე წერტილზე. მაგალითად, Q და Q' შეუღლე-

ბულ წერტილთა წყვილია. ორ წრფეს შეუღლებული ეწოდება, თუ ყოველი მათგანის პოლუსი ძვეს მეორე წრფეზე. მაგალითად, q და q' შეუღლებულ წრფეთა წყვილია (სურ. 114).

კონუსური კვეთის სიბრტყეში მდებარე ყოველ წერტილს შეესაბამება მასთან შეუღლებულ წერტილთა უსასრულო სიმრავლე, სახელდობრ, მისი პოლარას ყველა წერტილი; ორადობის პრინციპით კონიკის სიბრტყეში მდებარე ყოველ წრფეს შეესაბამება მასთან შეუღლებულ წრფეთა უსასრულო სიმრავლე, სახელ-



სურ. 114

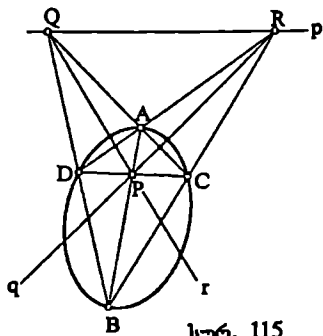
დობრ, მის პოლუსზე გამავალი ყველა წრფე. თავის თავთან შეუღლებული ანუ თვითშეუღლებულია მხოლოდ კონიკის კუთვნილი წერტილები, მაგალითად, M და N (რადგან ყოველი მათგანი თავის პოლარაზე ძვეს). თავის თავთან შეუღლებული ანუ თვითშეუღლებულია მხოლოდ კონიკის მხებები, მაგალითად, m და n (რადგან ყოველი მათგანი თავის პოლუსზე გადის).

ზემო ნათქვამიდან ცხადია, რომ პოლარული შესაბამისობა ინარჩუნებს ელემენტების ინციდენტურობას ანუ p წრფეზე მდებარე Q წერტილს შეესაბამება P წერტილზე გამავალი q წრფე (სურ. 114). ე.ი. თუ $Q \rightarrow p$, მაშინ $q \rightarrow P$. თუ P წერტილის პოლარაა p წრფე, ხოლო Q წერტილის q წრფე, მაშინ $Q' = q \cap p$ წერტილის პოლარა იქნება $q' = (PQ)$ წრფე.

განვიხილოთ პოლარული შესაბამისობის ერთი თვისება.

ვთქვათ, P წერტილი არის p წრფის პოლუსი, ხოლო $A - k^2$ კონიკის კუთვნილი წერტილი (სურ. 115).

დავუშვათ, რომ AP და AQ კვეთს კონიკას კიდევ B და C ორ წერტილში, ხოლო PC წრფე იკვეთება კონიკასთან კიდევ D წერტილში (სურ. 115). P წერტილი არის ABCD სრული ოთხკუთხედის დიაგონალური წერტილი. პოლარის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს (6.4), რომ ოთხკუთხედის დანარჩენი ორი დიაგონალური წერტილი ძვეს p წრფეზე. ეს ნიშნავს, რომ BD წრფე გაივლის Q წერტილზე, ხოლო AD და BC წრფეები გადაიკვეთება p წრფის R წერტილში. მაშასადამე, $q=PR$ არის Q წერტილის პოლარა. დავუშვათ, რომ A წერტილი და p წრფე უძრავია, მაშინ უძრავი იქნება P და B წერტილებიც. თუ Q გადაადგილდება p წრფეზე, მაშინ C და D წერტილები და q წრფეც იმოძრავენ. თანაც q წრფე ყოველთვის გაივლის P უძრავ წერტილზე. რადგან $A(C)$ და $B(C)$ კონები პროექციულია (როგორც k^2 კონიკის წერტილების მაგვემილებელი), გვექნება:



სურ. 115

$$p(Q) \bar{\wedge} A(C) \bar{\wedge} B(C) \bar{\wedge} P(q) \text{ ანუ } p(Q) \bar{\wedge} P(q).$$

ამრიგად, მივიღეთ თეორემა:

თუ Q წერტილი გადაადგილდება p წრფეზე, მაშინ მისი პოლარა ბრუნავს ამ წრფის P პოლუსის ირგვლივ, თანაც წერტილთა (Q) მწკრივი წრფეთა (q) კონის პროექციული იქნება და პირიქით.

ამრიგად დავამტკიცეთ, რომ პოლარულ გარდაქმნაში, რომელსაც კონიკა ამყარებს სიბრტყის წერტილებსა და წრფეებს შორის, წერტილთა მწკრივი პროექციულია წრფეთა კონის და პირიქით. განხილული თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ პოლარული შესაბამისობა არის კორელაცია, რადგან ინარჩუნებს შესაბამისი ელემენტების ინციდენტურობას და წერტილთა მწკრივს ასახავს

წრფეთა კონაზე და პირიქით. მაგრამ კორელაციისაგან განსხვავებით, პოლარულ გარდაქმნას აქვს ინვოლუციური თვისება, რომელიც უშუალოდ გამოდინარეობს პოლუსისა და პოლარას განსაზღვრიდან: თუ $P \rightarrow p$, მაშინ $p \rightarrow P$. მაშასადამე, სიბრტყის პოლარული გარდაქმნა ემთხვევა თავის შექცეულ გარდაქმნას. აღვნიშნოთ პოლარული გარდაქმნა π ასოთი. მაშინ P წერტილი π გარდაქმნით აისახება p წრფეზე; თუ იგივე გარდაქმნას კიდევ ერთხელ შევასრულებთ, p წრფე აისახება P წერტილზე. ე.ი. $\pi^2=1$ ანუ პოლარული გარდაქმნის კვადრატი არის იგივეური გარდაქმნა.

ამრიგად, პოლარული გარდაქმნა არის კორელაცია, რომელსაც ინვოლუციური თვისება აქვს. ამიტომ მას ეწოდება ინვოლუციური კორელაცია.

განვიხილოთ ინვოლუცია, რომელსაც კონიკა ამყარებს წრფეზე და კონაში.

მაგალითად, განვიხილოთ ინვოლუცია, რომელსაც k კონიკით დამყარებული პოლარული გარდაქმნა განსაზღვრავს რომელიმე p წრფეზე (სურ. 114). ავაგოთ $Q \in p$ წერტილის q პოლარა. ცხადია, Q წერტილთან შეუღლებული ყველა წერტილი q წრფეზე მდებარეობს, მაგრამ მათ შორის არსებობს ერთადერთი Q' წერტილი, რომელიც p წრფესაც ეკუთვნის: ეს არის q და p წრფეების გადაკვეთის წერტილი, ე.ი. $Q' = q \cap p$. ამრიგად, p წრფის ყოველ Q წერტილს შეესაბამება მასთან შეუღლებული ერთადერთი Q' წერტილი და, პირიქით, ყოველ Q' წერტილს შეესაბამება მასთან შეუღლებული Q წერტილი. რადგან Q და Q' წერტილები ურთიერთშესაბამისია, ამიტომ ვასკვნით, რომ Q და Q' შეუღლებულ წერტილთა წყვილი ინვოლუციურია.

მივიღეთ თეორემა:

კონიკა ამყარებს ყოველ წრფეზე, რომელიც მას არ ეხება, შეუღლებულ წერტილთა ინვოლუციას.

მცირე ორადობის პრინციპით მივიღებთ შემდეგ თეორემას:

კონიკა ამყარებს ყოველ კონაში, რომლის ცენტრი კონიკას არ ეკუთვნის, შეუღლებულ წრფეთა ინვოლუციას.

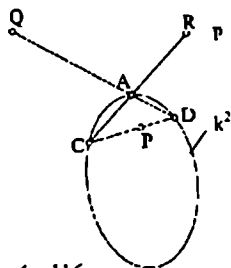
ადილი შესამჩნევია, რომ p წრფეზე შეუღლებულ წერტილთა ინვოლუციის ორმაგი წერტილები p წრფის კონიკასთან გადაკეთის N და M წერტილებია. მართლაც, N წერტილის n პოლარა, რომელიც k კონიკის მხებია, იკვეთება p წრფესთან იგივე N წერტილში. მაშასადამე, N წერტილი (როგორც M) თავის თავს შეესაბამება (სურ. 114), ე.ი. ყოველ p წრფეზე k კონიკით დამყარებული შეუღლებულ წერტილთა ინვოლუცია ჰიპერბოლურია, თუ p კვეთს კონიკას. თუ p წრფე კონიკას არ კვეთს, მიღებულ ინვოლუციას ელიფსური ეწოდება. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ p წრფეს და კონიკას აქვს წარმოსახვითი გადაკეთის წერტილები. ეს ელიფსური ინვოლუციის წარმოსახვითი ორი ორმაგი წერტილია. ანალოგიურად, კონაში შეუღლებულ წრფეთა ინვოლუცია არის ჰიპერბოლური ან ელიფსური იმის მიხედვით, არსებობს თუ არა კონის ცენტრზე გამავალი კონიკის მხებები.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, Q და R წერტილები p წრფის ინვოლუციაში შეუღლებულია (რადგან თითოეული მათგანი მეორის პოლარიზე ძევს) (სურ. 115). ეს წერტილები კონიკის A წერტილის გეგმილებია P წერტილზე გამავალი ანუ p წრფესთან შეუღლებული CD ქორდის ბოლოებიდან p წრფეზე. აქედან გამომდინარეობს შემდეგი დებულება:

თუ p არის P წერტილის პოლარა, მაშინ კონიკის ყოველი წერტილის ორი გეგმილი P -ზე გამავალი ნებისმიერი ქორდის ბოლოებიდან p წრფეზე არის p წრფის ინვოლუციაში შეუღლებულ წერტილთა წყვილი.

ეს დებულება გვაძლევს წრფეზე პოლარული გარდაქმნით დამყარებულ ინვოლუციაში შესაბამის წერტილთა წყვილების აგების მარტივ ხერხებს. ვთქვათ, P არის p წრფის პოლუსი k კონიკის მიმართ (სურ. 116). გავავლოთ P წერტილზე კონიკის ნებისმიერი მკვეთი ქორდა CD , ე.ი. გავავლოთ p წრფესთან შეუღლებული

ნებისმიერი ქორდა. ეთქვათ, A არის კონიკის ნებისმიერი წერტილი. $Q = DA \cap p$ და $R = CA \cap p$ წერტილები k კონიკით p წრფეზე დამყარებულ ინვოლუციაში შეუღლებულ წერტილთა წყვილია.

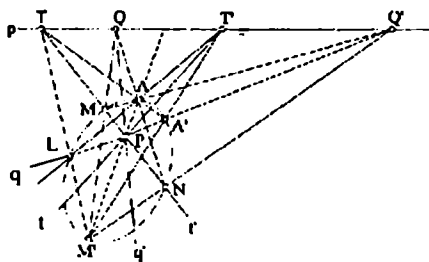


როგორც უკვე აღვნიშნეთ, კონიკა ამყარებს სიბრტყის პოლარულ გარდაქმ- სურ. 116

ნას და განსაზღვრავს ყოველ წრფეზე, რომელიც მას არ ეხება, შეუღლებული წერტილების ინვოლუციას. იქნებ შესაძლებელია გამოვიყენოთ ეს ინვოლუცია კონიკის განმსაზღვრელ ელემენტად?

ამ კითხვაზე დადებით პასუხს მივიღებთ, თუ შევძლებთ წრფეზე მოცემული ინვოლუციის გამოყენებით გარკვეული კონიკის აგებას.

ეთქვათ, მოცემულია p წრფის P პოლუსი (საძიებელი კონიკის მიმართ) და კონიკის ერთი M წერტილი. ავაგოთ კონიკა, რომელიც p წრფეზე ამყარებს მოცემულ ინვოლუციას (სურ. 117).



სურ. 117

ინვოლუციური ჰომოლოგია p ღერძით და P ცენტრით საძიებელ კონიკას თავის თავზე ასახავს (7.5). ამიტომ, ამ ჰომოლოგიაში M წერტილის შესაბამისი N წერტილი საძიებელი კონიკის კუთვნილი იქნება. ვიცით, რომ MP ორმაგ წრფეზე საძიებელი N წერტილი ჰარმონიულად არის შეუღლებული M წერტილთან P, T წერტილების მიმართ (7.5). მაშასადამე, გვაქვს p წრფესთან შეუღლებული MN ქორდა. ამიტომ, MQ' და NQ წრფეები, რომლებიც გადის p წრფის მოცემული ინვოლუციის შესაბამის Q'

და Q წერტილებზე, იკვეთება საძიებელი კონიკის A წერტილზე. ასეთნაირად შესაძლებელია კონიკის კუთვნილი წერტილების აგება

ამ წერტილების აგება შეიძლება შევასრულოთ $MM'AN$ სრული ოთხკუთხედით განსაზღვრული სამი ინვოლუციური პოპოლოგიით, რომლებიც სრულ ოთხკუთხედს და მაშასადამე კონიკასაც თავის თავზე ასახავს (7.5).

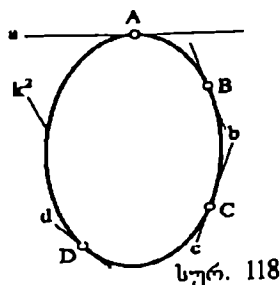
მაგალითად, $M \rightarrow M'$, $A \rightarrow N$ წერტილთა წყვილები არის შესაბამისები ინვოლუციურ პოპოლოგიაში Q ცენტრით და q ღერძით.

ამრიგად, p წრფის ინვოაციით, P პოლუსით და კიდევ ერთი წერტილით საესებით განსაზღვრულია ერთადერთი კონიკა.

8.3. მეორე რიგის ფუნდამენტური წირი

მეორე რიგის k წირს (კონიკას), რომელიც სიბრტყეზე ამყარებს პოლარულ გარდაქმნას, ამ გარდაქმნის ფუნდამენტური წირი ეწოდება. შეუღლებული წყვილების განსაზღვრებიდან გამოძინარეობს, რომ პოლუსები და პოლარები თვითშეუღლებულია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ პოლუსი ეკუთვნის k კონიკას და, ამასთან ერთად, პოლარა ეხება კონიკას. ეს უფლებას გვაძლევს განვიხილოთ ფუნდამენტური წირი, რომლის მიმართ დამყარებულია პოლარული გარდაქმნა, როგორც თავის პოლარებზე მდებარე პოლუსების სიმრავლე ან, როგორც თავის პოლუსებზე გამავალი პოლარების მომელები (სურ. 118).

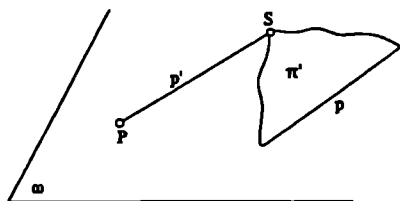
ამის საფუძველზე შეგვიძლია გავაფართოოთ პოლარული გარდაქმნის ცნება და შესაბამისი ელემენტების წყვილების აგება არ დავაკავშიროთ კონიკასთან, არამედ განვსაზღვროთ პოლარული გარდაქმნა, როგორც კორელაცია, რომელსაც ინვოლუციურობის თვისება აქვს. ამის



გამო, ასეთ კორელაციაში ფუნდამენტური წირი შეიძლება განისაზღვროს ინციდენტური ელემენტების წყვილებით ისე, როგორც ზემოთ იყო ჩამოყალიბებული (სურ. 118). თუ პოლარულ გარდაქმნაში არ იარსებებს თავისი პოლარის ინციდენტური პოლუსები, მაშინ ვიტყვით, რომ ფუნდამენტური წირი წარმოსახვითია. განვიხილოთ ასეთი პოლარული გარდაქმნის მაგალითი.

დავუშვათ, რომ წრფეთა და სიბრტყეთა S შეკვრაში პოლარული შესაბამისობა შემდეგნაირად არის დამყარებული (სურ. 119):

ყოველ p' წრფეს S შეკვრაში შეესაბამება მისი პერპენდიკულარული π' სიბრტყე და ყოველ π' სიბრტყეს შეესაბამება მისი პერპენდიკულარული p' წრფე. ასე



სურ. 119

მყარდება ორთოგონალურ-პოლარული გარდაქმნა S შეკვრაში. ეს გარდაქმნა პოლარულია, რადგან წარმოადგენს შეკვრის ელემენტების კორელაციურ შესაბამისობას და აქვს ინვოლუციურობის თვისება. თუ ამ შეკვრას α სიბრტყით გადავკვეთავთ, მივიღებთ ამ სიბრტყის წერტილების და წრფეების პოლარულ გარდაქმნას. მართლაც, ყოველ P წერტილს შეესაბამება α სიბრტყის p წრფე, რომელიც შემდეგნაირად განისაზღვრება: გავავლოთ $p' = PS$ წრფე და ავაგოთ სიბრტყე $\pi' \perp p'$. მაშინ $p = \pi' \cap \alpha$. ცხადია, p წრფეს შეესაბამება P წერტილი, რომელსაც შებრუნებული აგებით მივიღებთ. ამრიგად, გვაქვს α სიბრტყის წერტილების (P) და წრფეების (p) პოლარული შესაბამისობა. ამასთან, არ არსებობს წერტილი, რომელიც თავისი p პოლარის ინციდენტური იქნება, რადგან p' წრფე არ შეიძლება ეკუთვნოდეს თავის პერპენდიკულარულ π' სიბრტყეს. მაშასადამე, α სიბრტყის პოლარული გარდაქმნის ფუნდამენტური წირი წარმოსახვითია.

8.4. ავტოპოლარული სამკუთხედი

განვიხილოთ პოლარული გარდაქმნის კიდევ ერთი მაგალითი.

კორელაცია, რომელიც ასახავს სამკუთხედის წვეროებს მის მოპირდაპირე გვერდებზე პოლარული გარდაქმნაა.

აღვნიშნოთ სამკუთხედის A, B, C წვეროების მოპირდაპირე გვერდები a, b, c ასობით (სურ. 120). პირობის თანახმად, π კორელაცია ასახავს $\begin{pmatrix} A, B, C \\ a, b, c \end{pmatrix}$ ანუ $A \rightarrow a, B \rightarrow b, C \rightarrow c$. ვიპოვოთ a, b, c

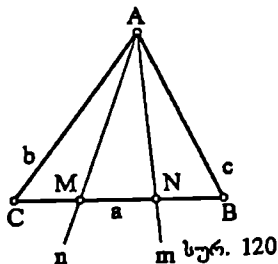
გვერდების შესაბამისი წერტილები ამ კორელაციაში. გვაქვს $a = BC$. ამიტომ, a გვერდის შესაბამისი წერტილი იქნება $A = b \cap c$ ანუ π კორელაცია ასახავს a გვერდს A წვეროზე. ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ π კორელაცია ასახავს $b \rightarrow B$ და $c \rightarrow C$. ამრიგად, სამკუთხედის წვეროები და გვერდები აისახება ინვოლუციურად. მოვნიშნოთ ახლა a გვერდზე რომელიმე M წერტილი. მისი შესაბამისი წრფე აღვნიშნოთ m ასობით. რადგან კორელაციაში MEa , ამიტომ $m \ni A$. მაშასადამე, როდესაც M გაირბენს a წერტილთა მწკრივს, მისი შესაბამისი m წრფე შემოწერს A კონას: π კორელაცია ასახავს $a(M)$ წერტილთა მწკრივს $A(m)$ კონაზე. რადგან კორელაცია არის პროექციული გარდაქმნა, ამიტომ

$$A(m) \cap a(M). \quad (1)$$

განვიხილოთ $A(m)$ კონის კვეთა a წრფით. აღვნიშნოთ $m \cap a = N$. როდესაც m წრფე შემოწერს $A(m)$ კონას, მაშინ N წერტილი გაირბენს $a(N)$ მწკრივს და

$$A(m) \cap a(N). \quad (2)$$

(1) და (2)-დან გამომდინარეობს, რომ $a(M) \cap a(N)$.



ამრიგად, თუ a გვერდის ყოველ M წერტილს შეესაბამება ამავე გვერდის N წერტილს, რომელიც პირველი წერტილის შესაბამის წრფეს ეკუთვნის, მაშინ a წრფის წერტილებს შორის შესაბამისობა პროექციული იქნება. თუ იმასაც აღვნიშნავთ, რომ ამ პროექციულ გარდაქმნაში B წერტილს შეესაბამება C წერტილი და C წერტილს B წერტილი, დავრწმუნდებით, რომ a გვერდის ეს გარდაქმნა ინვოლუციური იქნება, რადგან შესაბამის წერტილთა ერთი წყვილი ინვოლუციურადაა ასახული. ამრიგად, a წრფის გარდაქმნაში, რომელშიც M წერტილი აისახება N წერტილზე, ყველა წყვილი ინვოლუციური იქნება, ე.ი. N წერტილი აისახება M წერტილზე ანუ N წერტილის შესაბამისი წრფე გადის M წერტილზე. აღვნიშნოთ N წერტილის შესაბამისი წრფე n ასოთი: $N \rightarrow n, n \in M$.

ამრიგად, თუ $N = a \cap m$, მაშინ $n = (AM)$.

აქედან გამომდინარეობს, რომ, თუ $m = (AN)$, მაშინ მას შეესაბამება $M = a \cap n$. ამრიგად, თუ π ასახავს $m \rightarrow M$, მაშინ π ასახავს $M \rightarrow m$. აქედან გამომდინარეობს, რომ π^2 ადგილზე ტოვებს a წრფის ყველა წერტილს. ანუ a წრფეზე დამყარდება ia ინვოლუციური გარდაქმნა.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ π^2 ადგილზე ტოვებს b წრფის ყველა წერტილს ანუ b წრფეზე დამყარდება ib ინვოლუცია.

ამრიგად, π^2 არის კოლინეაცია, რომელსაც ორი ორმაგი წრფე აქვს და ამიტომ ის იგივეური კოლინეაცია იქნება, ე.ი. $\pi^2 = 1$ ანუ π არის პოლარული გარდაქმნა.

სამკუთხედს, რომლის წვეროები შეესაბამება მოპირდაპირე გვერდებს, ავტოპოლარული სამკუთხედი ეწოდება.

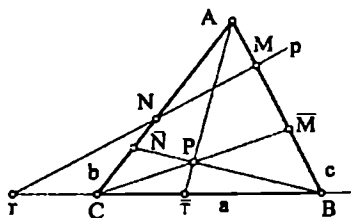
მოყვანილი მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს პოლარული სამკუთხედით მოცემული ერთი და მხოლოდ ერთი პოლარული გარდაქმნა; ეს გარდაქმნა ასახავს ნებისმიერ მოცემულ წერტილს, რომელიც ამ სამკუთხედის გვერდების ინციდენტ-

ტური არ არის, ნებისმიერ მოცემულ წრფეზე, რომელიც ამ სამკუთხედის არც ერთი წვეროს ინციდენტური არ არის. მართლაც, არსებობს ერთადერთი კორელაცია, რომელიც ოთხ დამოუკიდებელ A, B, C, P წერტილს ასახავს ოთხ დამოუკიდებელ a, b, c, p წრფეზე. ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად, ეს კორელაცია არის პოლარული გარდაქმნა ანუ პოლარული გარდაქმნა საესებით განსაზღვრულია ავტოპოლარული სამკუთხედით და შესაბამისი ელემენტების ერთი წყვილით.

მართლაც, კორელაცია ასახავს $\begin{pmatrix} A, B, C, P \\ a, b, c, p \end{pmatrix}$, სადაც a, b, c მოცე-

მული ABC სამკუთხედის გვერდებია, ხოლო P – ზოგადი მდებარეობის წერტილი. გვინდა დავამტკიცოთ, რომ p წრფეს შეესაბამება P წერტილი ანუ $p \rightarrow P$. მოცემულ კორელაციაში ABC წერტილებს შეესაბამება a, b, c გვერდები და პირიქით a, b, c წრფეებს შეესაბამება A, B, C წერტილები, რადგან ამ კორელაციაში $a=BC$ წრფეს შეესაბამება $A=bc \cap C$ წერტილი და ა.შ. გარდა ამისა, PA წრფეს შეესაბამება $p \cap a = T$ წერტილი. რადგან $PA \cap a = \bar{T}$, ამიტომ T და $\bar{T}a$ წრფის ia ინვოლუციის შესაბამის წერტილთა წყვილია. ამრიგად, $T \rightarrow A\bar{T}$, ანალოგიურად $M \rightarrow C\bar{M}$, საიდანაც $TM \rightarrow A\bar{T} \cap C\bar{M}$ ანუ $p \rightarrow P$ (სურ. 121).

პოლარიტეტის ასეთ განსაზღვრას გარკვეული უპირატესობა აქვს პოლარიტეტის განსაზღვრასთან კონიკის მეშვეობით. ეს უპირატესობა იმაში მდგომარეობს, რომ პოლარიტეტი განიხილება,



როგორც. ინვოლუციური კორელაცია, რომელიც შეთავსებული ელემენტების კორელაციის კერძო სახეა. გარდა ამისა, შესაბამისი ელემენტების აგება არ არის დაკავშირებული ფუნდამენტურ წირთან, რაც განსაკუთრებულად მოსახერხებელია პოლარიტეტები-

სათვის წარმოსახვითი ფუნდამენტური კონიკით. ასეთ შემთხვევაში პოლარულად შეუღლებული ელემენტების აგებისას, ფუნდამენტური კონიკის წარმოსახვითობის გამო, საჭირო ხდება პოლარიტეტის კორელაციურობით სარგებლობა.

განვიხილოთ პოლარული გარდაქმნის გამოყენებით სიბრტყეზე ორადობის პრინციპის დამტკიცების ერთ-ერთი მეთოდით.

დავუშვათ, სიბრტყეზე მოცემულია F ფიგურა. ავაგოთ F' ფიგურა ისე, რომ F ფიგურის ყოველი წრფე შეიცვალოს მისი პოლუსით რაიმე კონიკის მიმართ ამ სიბრტყეზე და ამ ფიგურის ყოველი წერტილი შეიცვალოს მისი პოლარით იგივე კონუსური კვეთის მიმართ. მაშინ F ფიგურის ყოველ წერტილს შეესაბამება F' ფიგურის წრფე და F ფიგურის ყოველი წრფეს შეესაბამება F' ფიგურის წერტილი. უფრო მეტიც, თუ F ფიგურის წრფე გაივლის მის რომელიმე წერტილზე, მაშინ F' ფიგურის შესაბამისი წერტილი განლაგდება იგივე ფიგურის შესაბამის წრფეზე.

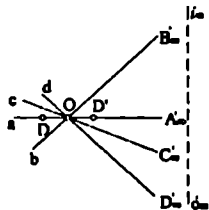
თუ F ფიგურის წერტილთა ორი მწკრივი (წრფეთა კონა) პროექციულია, მაშინ F' ფიგურის შესაბამისი მწკრივები (კონები) ასევე პროექციული იქნება. აქედან გამომდინარეობს, რომ F ფიგურის ყოველ პროექციულ თვისებას შესაბამება F' ფიგურის პროექციული თვისება, რომელშიც F ფიგურის წერტილები და წრფეები ადგილებს ცვლიან.

მეცხრე თავი. ევკლიდეს მეტრიკა პროექციული გეომეტრიის თვალსაზრისით

9.1. პოლარიტეტის თვისებები, რომლებიც დაკავშირებულია არასაკუთრივ წრფესთან

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, პოლარიტეტი სიბრტყის ყოველ წრფეზე გარკვეულ ინვოლუციას ამყარებს. არც არასაკუთრივი წრფეა გამონაკლისი. სიბრტყის ნებისმიერ პოლარულ გარდაქმნაში არასაკუთრივ წრფეს შეესაბამება საკუთრივი წერტილი — პოლარიტეტის ცენტრი. არასაკუთრივ წრფეზე მდებარე ყველა წერტილს შეესაბამება პოლარიტეტის ცენტრზე გამავალი პოლარები. ამ პოლარებს ეწოდება მოცემული პოლარიტეტის დიამეტრები. რადგან არასაკუთრივი წრფე უსასრულოდ შორს მდებარეობს, პოლარიტეტით მასზე დამყარებული ინვოლუციის თვისებებზე შეგვიძლია ვიმსჯელოთ პოლარიტეტის დიამეტრების კონაში დამყარებული ინვოლუციის მიხედვით, რადგან სწორედ პოლარიტეტის დიამეტრები აგვამილებს ინვოლუციას არასაკუთრივ წრფეზე. ეთქვათ, მოცემულ პოლარიტეტში O' არასაკუთრივ წრფეს შეესაბამება O პოლარიტეტის ცენტრი (სურ. 122). მოცემული პოლარიტეტით განისაზღვრება $O(a,b,c,d)$ დიამეტრების ინვოლუცია. გამოვარკვეოთ პოლარიტეტის ფუნდამენტური წირის სახე. თუ დიამეტრების შეუღლებული წყვილებია $a \bar{d}$, $b \bar{c}$ და ისინი ყოფს ერთმანეთს: $a,d \div b,c$, მაშინ ამ დიამეტრების ინვოლუცია ელიფსურია და i_∞ ინვოლუცია არასაკუთრივ O_∞ წრფეზეც ელიფსური იქნება. მაშასადამე, ფუნდამენტური წირი არ კვეთს არასაკუთრივ წრფეს ანუ ფუნდამენტური წირი ელიფსია. იმ შემთხვევაში, თუ a,b,c,d დიამეტრები ერთმანეთს არ ყოფს, არასაკუთრივ წრფეზე მივიღებთ i_∞ ჰიპერბოლურ ინვოლუციას და პოლარიტეტის ფუნდამენტური წირი ჰიპერბოლა იქნება, რადგან არასაკუთრივ წრფესთან ექნება ორი საერთო არასაკუთრივი

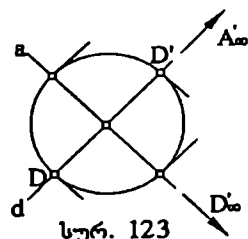
წერტილი. პოლარიტეტის ფუნდამენტური წირი შეიძლება წარმოსახვითი იყოს. ამის გარკვევას შეეძლებოდა იმ ინვოლუციის მიხედვით, რომელსაც პოლარიტეტი ამყარებს სიბრტყის ნებისმიერ წრფეზე, მათ შორის ნებისმიერ a, b, c, d დიამეტრზე. ინვოლუციის ორმაგი წერტილები ყოველ დიამეტრზე არის მისი გადაკვეთა ფუნდამენტურ წირთან, ამიტომ, თუ ფუნდამენტური წირი წარმოსახვითია, მაშინ დიამეტრზე ინვოლუციის ორი ორმაგი წერტილიც წარმოსახვითი უნდა იყოს და მოცემული პოლარიტეტის მიერ დიამეტრზე დამყარებული ინვოლუცია ელიფსური იქნება. მაგალითად, მოცემული პოლარიტეტი ამყარებს რომელიმე, მაგალითად, a დიამეტრზე ინვოლუციას შეუღლებულ წერტილთა $D \bar{D}'$ და $O \bar{A}'_\infty$ ორი წყვილით (სურ. 122). თუ ეს წყვილები ერთმანეთს ყოფს, ფუნდამენტური წირი წარმოსახვითია, წინააღმდეგ შემთხვევაში – ნამდვილი.



სურ. 122

ცხადია, პოლარიტეტის ფუნდამენტური წირი შეიძლება წრეწირი იყოს. ამისათვის პოლარიტეტის დიამეტრების ინვოლუცია ელიფსური უნდა იყოს და მისი შეუღლებული $a, d \neq b, c$ დიამეტრების წყვილების გაყოფის გარდა აუცილებელია ამ დიამეტრების პერპენდიკულარულობა, რადგან მხოლოდ ასეთ შემთხვევაში წრეწირის ყოველი, მაგალითად, a დიამეტრი მასთან შეუღლებული d დიამეტრის D_∞ პოლუსზე გაივლის (სურ. 123). მართლაც, წრეწირის d დიამეტრის პოლუსი არის ამ დიამეტრის ბოლოებში გაველებული მხეების ანუ d დიამეტრის პერპენდიკულარული წრფეების გადაკვეთის D'_∞ არასაკუთრივი წერტილი. ცხადია, რომ არასაკუთრივი წრფის პოლუსი წრეწირის O ცენტრი იქნება, რადგან პოლუსის განსაზღვრის თანახმად, იგი მეოთხე კარმონიული წერტილია D, D' შეუღლებულ წერტილთა წყვილისა და A'_∞ წერტილისათვის. O კონის ურთიერთპერპენდიკულარული დიამე-

ტრების ინვოლუციას ეწოდება დიამეტრების ორთოგონალური ინვოლუცია. ის ეკუთვნის ელიფსურ ინვოლუციებს, რადგან მისი ურთიერთპერპენდიკულარული შეუღლებული დიამეტრების არც ერთი წვეილი არ შეიძლება ეკუთვნოდეს ერთმანეთს ანუ დიამეტრების ორთოგონალური ინვოლუცია სიბრტყის არასაკუთრივ წრფეზე თავისი ორთოგონალურად შეუღლებული $a \perp d$, $b \perp c$ და ა.შ. დიამეტრების წვეილებით აგეგმილებს ინვოლუციას, რომელსაც აბსოლუტური ან ორთოგონალური ინვოლუცია ეწოდება. ამრიგად, პოლარიტეტი, რომლის ფუნდამენტური წირი წრეწირია, არასაკუთრივ წრფეზე ამყარებს ინვოლუციას, რომელსაც აბსოლუტური ან ორთოგონალური ინვოლუცია ეწოდება.



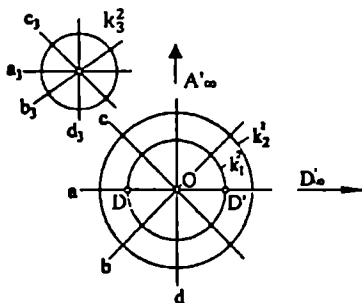
სურ. 123

9.2. წრეწირის პროექციული თვისებები. სიბრტყის აბსოლუტი.

ამრიგად, წრეწირი არასაკუთრივ წრფეზე ამყარებს აბსოლუტურ ინვოლუციას, რომელიც გეგმილდება არასაკუთრივ წრფეზე წრეწირის ორთოგონალურად შეუღლებული $a \perp d$, $b \perp c$ დიამეტრების წვეილებით. ნებისმიერი სხვა წრეწირი, რომელიც იგივე სიბრტყეში მდებარეობს, მაგალითად, k_1^2 წრეწირის კონცენტრული k_2^2 წრეწირი ან ნებისმიერი k_3^2 წრეწირი, $a_3 \perp d_3$, $b_3 \perp c_3$... შეუღლებული დიამეტრების წვეილებით არასაკუთრივ წრფეზე განსაზღვრავს იგივე ინვოლუციას, რომელსაც განსაზღვრავს k_1^2 წრეწირი, რადგან $a \parallel a_3$, $d \parallel d_3$ შეუღლებული დიამეტრებით არასაკუთრივ წრფეზე განისაზღვრება ერთი და იგივე D_∞ , A_∞ შეუღლებულ წერტილთა წვეილი (სურ. 124). ამრიგად, წრეწირის პროექციული არსი იმაში მდგომარეობს, რომ წრეწირები სხვადასხვა პოლარიტეტის განმსაზღვრელი მეორე რიგის წირთა სი-

მრავლეა, რომელიც არასაკუთრივ წრეზე ერთ აბსოლუტურ ინვოლუციას ამყარებს.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, აბსოლუტური ინვოლუცია ელიფსურ ინვოლუციებს ეკუთვნის ანუ ისეთ ინვოლუციებს, რომლებსაც წარმოსახვითი ორი ორმაგი წერტილი აქვს. აბსოლუტური ინვოლუციის ორმაგ წარმოსახვით წერტილებს დავარქვათ ციკლური



სურ. 124

წერტილები, რადგან ყველა წრეწირი არასაკუთრივ წრეესთან იკვეთება ამ წერტილებზე ანუ ყველა წრეწირი გადის წარმოსახვით ციკლურ წერტილებზე. შეიძლება ითქვას, რომ წრეწირი არის კონიკა, რომელიც გადის წარმოსახვითი ციკლური წერტილების წყვილზე.

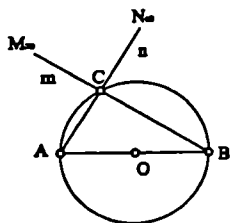
ე.ი. ეს წერტილები ყველა წრეწირის საერთო ორი წერტილია. სწორედ ამიტომ წრეწირები განისაზღვრება სამი დამოუკიდებელი წერტილით, რომლებიც ორ ციკლურ წერტილთან ერთად შეადგენს კონიკის განმსაზღვრელ ხუთ დამოუკიდებელ წერტილს.

წრეწირი განისაზღვრება აგრეთვე ცენტრით და ერთი ნამდვილი წერტილით. მართლაც, ერთი ნამდვილი წერტილი, მოცემული წრეწირის ინვოლუცია (მოცემულ შემთხვევაში, აბსოლუტური ინვოლუცია არასაკუთრივ წრეზე) და ამ წრეწირის პოლუსი (რომელიც ამ შემთხვევაში წრეწირის ცენტრია) სრულად განსაზღვრავს კონიკას (8.2, სურ. 117), რომელიც ამ შემთხვევაში წრეწირი იქნება.

ახლა შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ პერპენდიკულარული წრეების პროექციული განსაზღვრა.

a და **b** ორ წრფეს პერპენდიკულარული ეწოდება, თუ მათი არასაკუთრივი წერტილები შეუღლებულია აბსოლუტურ ინვოლუციაში.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, წრეწირის O ცენტრი არასაკუთრივი წრფის პოლუსია. მაშინ არასაკუთრივ წრფესთან შეუღლებული რომელიმე AB დიამეტრის ბოლოებიდან წრეწირის ნებისმიერი C წერტილი დაგვგმილება არასაკუთრივ წრფეზე (O ცენტრის პოლარაზე) აბსოლუტურ ინვოლუციაში შეუღლებულ წერტილთა M_∞ , N_∞ წყვილზე (8.2, სურ. 116), რადგან ეს წერტილები $BC=m$ და $AC=n$ ურთიერთპერპენდიკულარული წრფეების არასაკუთრივი წერტილებია (სურ. 125).



სურ. 125

ამრიგად პერპენდიკულარული წრფეების განსაზღვრა დაკავშირებულია აბსოლუტურ ინვოლუციასთან არასაკუთრივ წრფეზე.

არასაკუთრივ წრფეს და მის აბსოლუტურ ინვოლუციას სიბრტყის აბსოლუტი ეწოდება.

ამრიგად, თუ მოცემულია სიბრტყის “აბსოლუტი” – არასაკუთრივი წრფე და მისი აბსოლუტური ინვოლუცია – წრეწირი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც პროექციული ობიექტი და, პირიქით, სიბრტყის აბსოლუტი მოცემულია, თუ სიბრტყეში გამოხაზულია ერთი წრეწირი ცენტრით: ცენტრის პოლარა არის არასაკუთრივი წრფე, ხოლო ინვოლუცია, რომელსაც მასზე ამყარებს წრეწირი – აბსოლუტური ინვოლუცია.

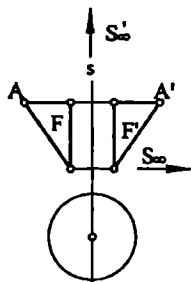
9.3. მეტრული გეომეტრიის გარდაქმნები, პროექციული გეომეტრიის თვალსაზრისით

როგორც აღვნიშნეთ, წრფეების პერპენდიკულარულობის განსაზღვრა დაკავშირებულია აბსოლუტურ ინვოლუციასთან არასა-

კუთრივ წრფეზე. არასაკუთრივ წრფეს და მის აბსოლუტურ ინ-
ვოლუციას ეუწოდეთ სიბრტყის აბსოლუტი. აბსოლუტის ცნებას-
თან, გარდა წრფეების პერპენდიკულარულობისა, დაკავშირებულია
ფიგურის სხვა მეტრული თვისებებიც. უფრო მეტიც, თუ პროექ-
ციულ სიბრტყეზე დაფიქსირებულია სიბრტყის “აბსოლუტი”, მა-
შინ ფიგურის ყველა იმ პროექციულ თვისებას, რომელიც განი-
საზღვრება ამ ფიგურის და არასაკუთრივი წრფის ურთიერთმდე-
ბარეობით, მეტრული თვისებები უნდა ეუწოდოთ. თუ გვინდა გა-
მოვეყნოთ ისეთი კოლინეაციები, რომლებიც ფიგურების მეტრულ
თვისებებს ინარჩუნებს, უნდა მოვითხოვოთ, რომ ეს კოლინეაციები
უცვლელად ტოვებდეს სიბრტყის აბსოლუტს.

ეს ნიშნავს, რომ გამოვყოფთ იმ კოლინეაციებს, რომლებიც არა მართო არასაკუთრივ წრეებს ასახავს თავის თავზე (ამ პირობას აკმაყოფილებს აფინური გარდაქმნებიც), არამედ თავის თავზე ასახავს (გარდაქმნის) აბსოლუტურ ინვოლუციას ანუ აბსოლუტურ ინვოლუციაში შესაბამის წერტილთა წყვილს ასახავს ისევ ამ ინვოლუციის შესაბამის წერტილთა წყვილზე. რადგან არასაკუთრივ წრეებზე აბსოლუტურ ინვოლუციას ამყარებს წრეწირი, ამიტომ მეტრული გეომეტრიის გარდაქმნები (კოლინეაციები) წრეწირს წრეწირზე უნდა ასახავდეს. ეს მეტრული გარდაქმნების მახასიათებელი პროექციული პირობაა. ამრიგად, მეტრული გარდაქმნები ის პროექციული გარდაქმნებია, რომლებიც წრეწირს ისევ წრეწირზე ასახავს.

სურ. 126



ს. 126

ენაზოთ, აკმაყოფილებს თუ არა მეტრული გეომეტრიის გარდაქმნები ამ მოთხოვნას. ამისათვის პროექციული თვალსაზრისით უნდა გავანალიზოთ სიბრტყის გეომეტრიული გარდაქმნები, რომლებიც შეესაბამება ფიგურათა ბრუნვებს და პარალელურ გადატანებს, აგრეთვე ანარეკლებს (ღერძულ

სიმეტრიებს). ახლა ვაჩვენოთ, რომ ყველა ეს გარდაქმნა შეიძლება დავიყვანოთ ღერძულ სიმეტრიაზე. ამიტომ, მეტრული გეომეტრიის გარდაქმნების განხილვას დავიწყებთ ღერძული სიმეტრიით, რომელიც სიბრტყის თავის თავზე ასახვაა ანუ არის სიბრტყის პროექციული გარდაქმნა (კოლინეაცია). როგორც უკვე აღვნიშნეთ (7.5), ამ თვალსაზრისით, ღერძული სიმეტრია არის ინვოლუციური ჰომოლოგია, რომლის ღერძი ემთხვევა სიმეტრიის ღერძს, ხოლო ცენტრი ღერძის პერპენდიკულარული წრფეების საერთო არასაკუთრივი წერტილია (სურ. 126). თუ გავიხსენებთ პერპენდიკულარული წრფეების პროექციულ განსაზღვრას, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ, ღერძული სიმეტრიის შემთხვევაში, S ჰომოლოგიის ცენტრი აბსოლუტურ ინვოლუციაში შეესაბამება S ჰომოლოგიის (სიმეტრიის) ღერძის S' არასაკუთრივ წერტილს.

ამრიგად, ღერძულმა სიმეტრიამ (ანარეკლმა) მიიღო პროექციული განსაზღვრა:

ანარეკლი არის აფინური ჰომოლოგია, რომლის არასაკუთრივი ცენტრი აბსოლუტურ ინვოლუციაში შეესაბამება ჰომოლოგიის ღერძის არასაკუთრივ წერტილს.

აღვნიშნოთ ღერძული სიმეტრიის მნიშვნელოვანი თვისება:

ღერძული სიმეტრია აბსოლუტურ ინვოლუციას თავის თავზე ასახავს.

და კიდევ ერთი

ღერძული სიმეტრია ფიგურის ორიენტაციას საწინააღმდეგოზე ცვლის.

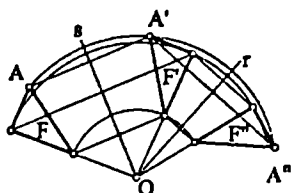
განვიხილოთ ახლა ბრუნვა პროექციული გეომეტრიის თვალსაზრისით.

ელემენტარულ გეომეტრიაში ბრუნვა განიხილება, როგორც სიბრტყის ისეთი გარდაქმნა, რომელიც ყველა წერტილს ერთი და იგივე φ კუთხით აბრუნებს S ცენტრის ირგვლივ.

პროექციულ გეომეტრიაში ბრუნვა შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ორი ანარეკლის კომპოზიცია, თანაც ერთი ანარეკლის

ღერძად გამოვიყენოთ ნებისმიერი წრფე, რომელიც ბრუნვის ცენტრზე გაივლის (სურ. 127).

პირველი r_1 ღერძი ნებისმიერად შევარჩიოთ და აესახოთ F ფიგურა F' ფიგურაზე. მეორე r_2 ღერძად შევარჩიოთ $A'A''$ მონაკვეთის შუაპერპენდიკულარი, რომელიც O ბრუნვის ცენტრზე გაივლის, ე.ი. ბრუნვა შე-

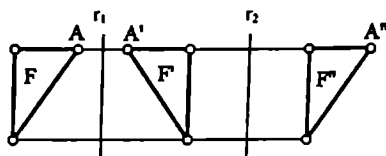


სურ. 127

ვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც ორი ანარეკლის კომპოზიცია. ცხადია, რომ წრეწირი, რომლის ცენტრია r_1 და r_2 ღერძების გადაკვეთის წერტილი, ასეთი ანარეკლებით თავის თავზე აისახება და, საერთოდ, ნებისმიერი წრეწირი აისახება წრეწირზე.

განვიხილოთ ახლა პარალელური გადატანა, რომელიც პროექციული გეომეტრიის პარაბოლური გარდაქმნაა არასაკუთრივი ღერძით; ელემენტარულ გეომეტრიაში პარალელური გადატანა განიხილება, როგორც ისეთი გარდაქმნა, რომელიც სიბრტყის ყველა წერტილს ერთი და იგივე მანძილზე ერთი და იგივე მიმართულებით გადაადგილებს

(სურ. 128). პარალელური გადატანა განისაზღვრება $\overline{AA''}$ ვექტორით, რომელსაც პარალელური გადატანის ვექტორი ეწოდება.



სურ. 128

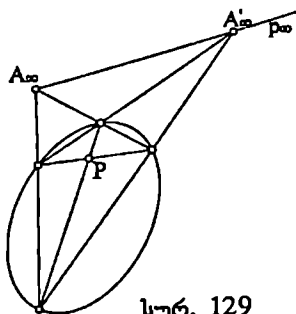
პარალელური გადატანა ყოველთვის შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც ორი ანარეკლის კომპოზიცია, რომელთა ღერძები გადატანის ვექტორის მიმართულების პერპენდიკულარულია, თანაც ამ ღერძებიდან ერთ-ერთი შეიძლება ნებისმიერად შევარჩიოთ, ხოლო მეორე ღერძად გამოვიყენოთ $A'A''$ მონაკვეთის შუაპერპენდიკულარი. მოცემულ შემთხვევაში ანარეკლების r_1 და r_2 ღერძები პარალელურია და იკვეთება O_{∞} არასაკუთრივ წერტილში. მაგრამ პროექციული გეომეტრიის თვალსაზრისით, საკუთრივ და არასა-

კუთრივ წერტილებს შორის განსხვავება არ არსებობს. ამიტომ, პარალელური გადატანის გარდაქმნა შეგვიძლია მივაკუთვნოთ ბრუნვებს და განვიხილოთ, როგორც ბრუნვა არასაკუთრივი წერტილის ირგვლივ.

როგორც დავრწმუნდით, მეტრული გეომეტრიის გარდაქმნები წარმოადგენს კოლინეაციებს, რომლებიც არ არღვევს სიბრტყის აბსოლუტს. ე.ი. თავის თავზე ასახავს აბსოლუტურ ინვოლუციას, რომელსაც ორთოგონალური ინვოლუციაც ეწოდება, რადგან ინარჩუნებს შეუღლებულ წერტილებზე გამავალ წრფეთა ორთოგონალურობას. ამიტომ, მეტრული გეომეტრიის გარდაქმნებს ზოგჯერ ორთოგონალურ გარდაქმნებსაც უწოდებენ.

9.4. პროექციული მეტრიკა

α სიბრტყეზე ავიღოთ ნებისმიერი კონიკა და დავარქვათ “წრეწირი”. მის ნებისმიერ შიგა წერტილს – ამ წრეწირის “ცენტრი”. ჩავთვალოთ ეს “წრეწირი” და “ცენტრი” ნამდვილი წრეწირის და მისი ცენტრის გეგმილებად (სურ. 129).

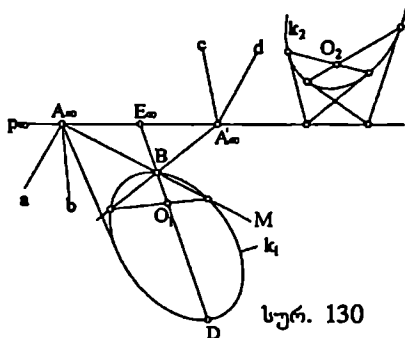


სურ. 129

“წრეწირის” P “ცენტრის” p_{∞} პოლარა უნდა ჩავთვალოთ “არასაკუთრივ” წრფედ (სურ. 129), ხოლო ინვოლუცია, რომელსაც მასზე წრეწირი ამყარებს – “აბსოლუტური” ინვოლუციადა. თუ “წრეწირი” და მისი “ცენტრი” მივიჩნიეთ ნამდვილი წრეწირის და მისი ცენტრის გეგმილებად, მაშინ “არასაკუთრივი წრფე” უნდა განვიხილოთ, როგორც დასაგეგმილებელი სიბრტყის ნამდვილი არასაკუთრივი წრფის გეგმილი, ხოლო “აბსოლუტური ინვოლუცია”, როგორც ნამდვილი აბსოლუტური ინვოლუციის გეგმილი. ასეთი პირობით სიბრტყის ნებისმიერ წრფეს შეიძლება დავარქვათ “არა-

საკუთრივი წრფე” და ნებისმიერ კონიკას – “წრეწირი”. მაშინ არასაკუთრივი წრფის პოლუსს “წრეწირის ცენტრი” დაერქმევა. საერთოდ, შემდგომში განხილულს ასეთი თვალსაზრისით შევხედოთ: “პერპენდიკულარული”, “პარალელური” წრფეები, “წრეწირები” და “კონგრუენტული ფიგურები” განვიხილოთ, როგორც ერთ α სიბრტყეში მდებარე ნამდვილი პერპენდიკულარული, პარალელური წრფეების, წრეწირების და კონგრუენტული ფიგურების გამოსახულებები. ცხადია, რომ დასაგეგმილებელ სიბრტყეში მდებარე ფიგურები და მათი გამოსახულებები α სიბრტყეში პროექციულად ეკვივალენტური ფიგურები იქნება. ამიტომ, დასაგეგმილებელ სიბრტყეში არასაკუთრივ წრფესთან დაკავშირებულ აგებათა პროექციულად ეკვივალენტური აგებების შესრულების შესაძლებლობას მივიღებთ α სიბრტყეში მოცემული (გამოხაზული) “არასაკუთრივი წრფის” და მასზე დამყარებული “აბსოლუტური ინვოლუციის” გამოყენებით.

ამიტომ, α სიბრტყეზე ავირჩიოთ ნებისმიერი p_{∞} წრფე და დავარქვათ “არასაკუთრივი” (სურ. 130). p_{∞} წრფეზე დავამყაროთ i_{∞} ელიფსური ინვოლუცია და ვუწოდოთ “აბსოლუტური”. ეს საკმარისია იმისათვის, რომ α სიბრტყეზე შევასრულოთ “მეტრული აგებები”, რომლებიც ჩვეულებრივი მეტრული აგებების პროექციულად ეკვივალენტური იქნება. ამის შემდეგ ევკლიდეს გეომეტრიის ცნებებს ექნება პროექციული განმარტება, რაც შესაძლებლობას მოგვცემს ავადგოთ ევკლიდეს მთელი პლანიმეტრია პროექციულ სიბრტყეზე.



სურ. 130

თუ p_{∞} წრფე მიღებულია “არასაკუთრივ” წრფედ და მასზე დამყარებული ინვოლუცია –

“აბსოლუტურ” ინვოლუციადა, უნდა მივიღოთ პროექციული მეტრიკის შემდეგი განსაზღვრებები:

1° p_{∞} წრფეზე გადაკვეთილი წრფეები პარალელურია. მაგალითად, $a \parallel b, c \parallel d$ და ა.შ.

2° ინვოლუციის შეუღლებულ წერტილებზე გამავალი წრფეები “პერპენდიკულარულია”. მაგალითად, $a \perp c, b \perp d$ და ა.შ.

3° მეორე რიგის $k_1^2, k_2^2, \dots$ წირები, რომლებიც განისაზღვრება i_{∞} ინვოლუციით, წრეწირებია. რადგან i_{∞} ინვოლუცია ელიფსურია, ამიტომ ყველა “წრეწირი” იკვეთება p_{∞} “არასაკუთრივ” წრფესთან წარმოსახვით “ციკლურ” წერტილებზე.

4° “წრეწირის” “ცენტრი” არის p_{∞} წრფის პოლუსი “წრეწირის” მიმართ. მაგალითად, $O_1, O_2, \dots$

5° ერთი “წრეწირის” ყველა რადიუსი ტოლი მონაკვეთებია. მაგალითად, $O_1B, O_1D, O_1M, \dots$

6° “ცენტრებზე” გამავალი წრფეები “წრეწირების” “დიამეტრებია”. მაგალითად, BD . “დიამეტრის” D და B ბოლოები პარმონიულად შეუღლებულია O_1, E_{∞} წყილის მიმართ, სადაც E_{∞} არის BD წრფის არასაკუთრივი წერტილი. ამიტომ, “ცენტრი” BD დიამეტრის შუაწერტილია.

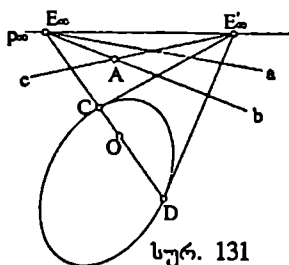
ახლა შევძლებთ შევასრულოთ პროექციული მეტრიკის აგებები სიბრტყეზე.

1. მოცემულია A წერტილი და a წრფე. A წერტილზე გავვლოთ a წრფის პარალელური b წრფე (სურ. 131).

სურათზე a და b წრფეები ერთ E_{∞} “არასაკუთრივ” წერტილზე იკვეთება. ამიტომ, A და E_{∞} წერტილებზე გამავალი b წრფე (1°) განსაზღვრის თანახმად, საძიებელი იქნება.

2. A წერტილზე გავავლოთ a წრფის პერპენდიკულარული წრფე (სურ. 131). ავავოთ E'_{∞} წერტილი, რომელიც შეუღლებულია a წრფის არასაკუთრივ E_{∞} წერტილთან p_{∞} წრფის i_{∞} “აბსოლუტურ” ინვოლუციაში. A და E'_{∞} წერტილებით განსაზღვრუ-

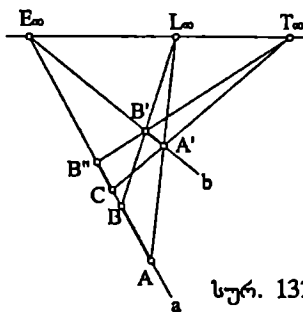
ლი c წრეე საძიებელი პერპენდიკულარული იქნება. მართლაც, b და c წრეეები გაივლის "აბსოლუტურ" ინვოლუციაში E_∞ და E'_∞ შეუღლებულ წერტილთა წყვილზე და, 2° განსაზღვრის თანახმად, ისინი პერპენდიკულარული იქნება.



სურ. 131

3. O წერტილზე შემოვხაზოთ "წრეწირი", რომელიც C წერტილზე გაივლის (სურ. 131).

აეგოთ k_1^2 "წრეწირი", რომელიც გაივლის C წერტილზე და რომლის O_1 "ცენტრი" p_∞ წრფის პოლუსი იქნება. ასეთი "წრეწირის" აგება შესრულებულია 117-ე სურათზე.

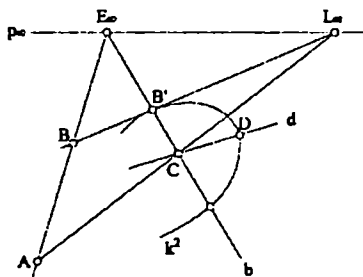


სურ. 132

4. მოცემულია AB მონაკვეთი (სურ. 132).

გადავზომოთ ეს მონაკვეთი ამავე წრეეზე C წერტილიდან.

ამისათვის AB მონაკვეთი ნებისმიერი L_∞ წერტილიდან დავაგეგმილოთ a წრფის პარალელურ b წრეეზე. დავგეგმილების შედეგად მივიღებთ $A'B'$ მონაკვეთს, რომლის სიგრძე AB მონაკვეთის სიგრძის ტოლია. მართლაც, AB და $A'B'$ არის $AA'B'B$ პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები და ტოლია.



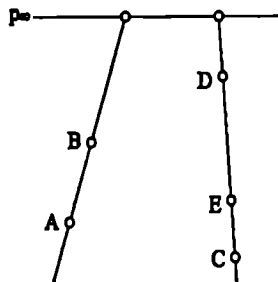
სურ. 133

ახლა მონაკვეთი $A'B'$ დავაგეგმილოთ $A'C$ წრფის T_∞ არასაკუთრივი წერტილიდან ისევ a წრეეზე. ასე მივიღებთ $B''C$ მონაკვეთს, რომელიც $A'B'$ მო-

ნაკვეთის “ტოლი” და C წერტილიდან გადაზომილი იქნება. ანუ C წერტილიდან a წრფეზე გადავზომეთ AB მონაკვეთის “ტოლი” მონაკვეთი.

ახლა გადავზომოთ AB მონაკვეთი სხვა, მაგალითად, d წრფის კუთვნილ C წერტილიდან (სურ. 133). C წერტილზე გავავლოთ a წრფის პარალელური b წრფე. შემდეგ ავაგოთ AC წრფე და მისი L_{∞} არასაკუთრივი წერტილიდან დავაგეგმილოთ AB მონაკვეთი b წრფეზე. როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, $B'C$ მონაკვეთი AB მონაკვეთის “ტოლია”. C წერტილის ირგვლივ შემოვწეროთ “წრეწირი” k^2 , რომელიც B' წერტილზე გაივლის (იხ. ამოცანა 3). ამ “წრეწირის” და d წრფის გადაკვეთის D წერტილით განისაზღვრება მონაკვეთი CD , რომელიც AB მონაკვეთის “ტოლია” და გადაზომილია d წრფის C წერტილიდან.

5. მოცემული ერთეულოვანი AB მონაკვეთით გავზომოთ მოცემული ნებისმიერი CD მონაკვეთი (სურ. 134).



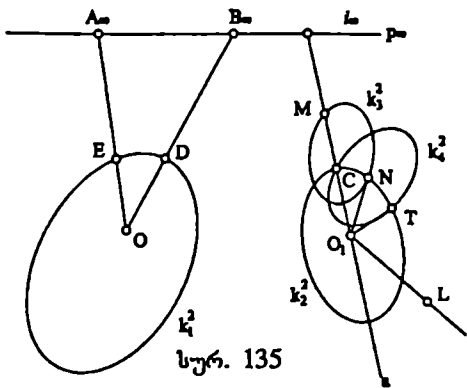
სურ. 134

AB ერთეულოვანი მონაკვეთი ჩვენთვის უკვე ცნობილი აგებით (იხ. ამოცანა 4) გადავზომოთ გასაზომი მონაკვეთის C წერტილიდან. მივიღებთ CE მონაკვეთს. შემდეგ CE მონაკვეთი n რიცხვჯერ გადავზომოთ CD მონაკვეთზე, სანამ მისი D ბოლო არ აღმოჩნდება გადაზომილი ერთეულოვანი მონაკვეთის ბოლოებს შორის. n რიცხვი იქნება CD მონაკვეთის სიგრძე. ასე შეიძლება გავზომოთ განსახილველი სიბრტყის ყველა მონაკვეთი.

6. რომელიმე a წრფიდან გადავზომოთ მოცემული $A_{\infty}OB_{\infty}$ კუთხე (სურ. 135).

O წერტილის ირგვლივ შემოვხაზოთ რაიმე k_1^2 “წრეწირი”, რომელიც გადაკვეთს მოცემულ კუთხეს E და D წერტილებში. შემ-

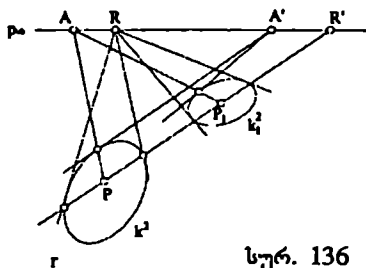
დეგ შემოვხაზოთ კიდევ ორი “წრეწირი”: $k_2^2 - a$ წრფის O_1 წერტილის ირგვლივ OE რადიუსის ტოლი O_1C რადიუსით და $k_3^2 - C$ წერტილის ირგვლივ ED რადიუსის ტოლი CM რადიუსით. აგებული k_2^2 და k_3^2 წრეწირების გადაკვეთის N წერტილი განსაზღვრავს CO_1N კუთხეს,



რომელიც მოცემული EOD კუთხის ტოლი იქნება. k_4^2 “წრეწირის” დახმარებით შეიძლება მეორედ გადავზომოთ მოცემული კუთხე. მივიღებთ NO_1T კუთხეს და ა.შ. თუ EOD კუთხეს მივიღებთ ერთეულოვან კუთხედ, მაშინ ანალოგიური აგებით შეიძლება გაიზომოს ნებისმიერი კუთხე, მაგალითად, CO_1L .

ვრწმუნდებით, რომ ნებისმიერი p წრფის და მასზე ელიფსური ინვოლუციის შერჩევა განსაზღვრავს სიბრტყეზე ევკლიდეს მთელ მეტრიკას.

ახლა შეგვიძლია ამ პროექციულ სქემაში “ღერძული სიმეტრია” განვსაზღვროთ. ასე დავარქვით ინვოლუციურ პოლოგიას, რომლის ცენტრი მისი ღერძის “პერპენდიკულარული” წრფეების არასაკუთრივ წერტილში მდებარეობს.



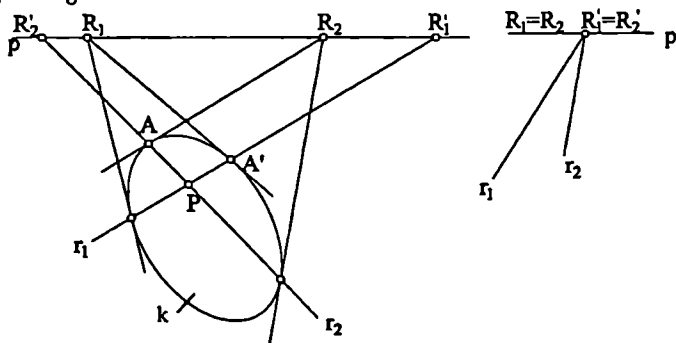
ცხადია, “სიმეტრიის” ცენტრი, რომლის ღერძი რომელიმე “წრეწირის” “ღიაშეტრია” (ნახ. 136), არის ამ “ღიაშეტრის” პოლუსი და ასეთი “სიმეტრია” ამ წრე-

წირს თავის თავზე ასახავს. აქედან გამომდინარეობს, რომ “ღერძული სიმეტრია” თავის თავზე ასახავს “არასაკუთრივი” წრფის “აბსოლუტურ” ინვოლუციას; მაშასადამე, ნებისმიერ წრეწირს იგი ასახავს წრეწირზე, თანაც ისე, რომ პირველი “წრეწირის” “ცენტრი” მეორე “წრეწირის” “ცენტრზე” აისახება.

მართლაც, k^2 კონიკის მიმართ p წრფის პოლუსია P წერტილი. k^2 კონიკა ამყარებს p წრფეზე ინვოლუციას შესაბამის წერტილთა A, A' და R, R' წყვილებით (სურ. 136). R არის r წრფის პოლუსი k^2 კონიკის მიმართ. k_1^2 კონიკის მიმართ p წრფის პოლუსია P_1 წერტილი, ხოლო k_1^2 კონიკა p წრფეზე ამყარებს იგივე ინვოლუციას, რაც მასზე k^2 კონიკამ დაამყარა. ამიტომ, R არის r წრფის პოლუსი k_1^2 კონიკის მიმართაც. მაშასადამე, ინვოლუციური p ჰომოლოგია R ცენტრით და r ღერძით k^2 და k_1^2 კონიკებს თავის თავზე ასახავს. თუ k^2 “წრეწირია” და P მისი “ცენტრი”, მაშინ k_1^2 -ც “წრეწირია” და P_1 – მისი ცენტრი, ხოლო p ჰომოლოგია არის “სიმეტრია”. ამრიგად, 136-ე სურათზე მოცემულია ღერძული სიმეტრიის გამოსახულება პროექციულ სიბრტყეზე.

როგორც აღენიშნეთ, ორი სიმეტრიის კომპოზიცია თავის თავზე ასახავს წრეწირებს, რომელთა ცენტრები ერთდროულად ორივე სიმეტრიის ღერძზე ძეგს, ე.ი. ღერძების გადაკვეთის წერტილზე, როგორც ცენტრზე შემოწერილ წრეწირებს. იმ შემთხვევაში, როდესაც კომპოზიციაში შემავალი სიმეტრიების ღერძები პარალელურია, არ არსებობს მათი გადაკვეთის წერტილის მქონე ცენტრიანი წრეწირი. მაშინ ორივე სიმეტრიას საერთო არასაკუთრივი ცენტრი აქვს და ამიტომ კომპოზიციის შედეგი იქნება პარაბოლური ჰომოლოგია არასაკუთრივი ღერძით ანუ პარალელური გადატანა. მართლაც, ვთქვათ, r_1 და r_2 წრფეები იკვეთება p წრფესთან R'_1 და R'_2 წერტილებში (სურ. 137.1). p წრფის რომელიმე ელიფსური ინვოლუცია ასახავს ამ წერტილებს R_1 და R_2 წერტილებზე. k არის ერთ-ერთი იმ კონიკებიდან, რომელიც p

წრფეზე ამყარებს ელიფსურ ინვოლუციას და p წრფეს მისი პოლუსის სახით შეუსაბამებს r_1 და r_2 წრფეების გადაკვეთის P წერტილს. ინვოლუციური პოპოლოგიები ρ_1 (ცენტრი R_1 , ღერძი r_1) და ρ_2 (ცენტრი R_2 , ღერძი r_2) ასახავს k კონიკას თავის თავზე (სურ. 137,1). ამ პოპოლოგიების კომპოზიციაც k კონიკას თავის თავზე ასახავს. ამრიგად, ორი სიმეტრიის კომპოზიცია იქნება ბრუნვა P წერტილის ირგვლივ, რომელიც A წერტილს ასახავს A' წერტილზე. კერძო შემთხვევაში, როდესაც r_1 და r_2 წრფეები p წრფეზე იკვეთება, R'_1 და R'_2 წერტილები ერთმანეთს შეუთავსდება; ელიფსურ ინვოლუციაში ამ წერტილების შესაბამისი R'_1 და R'_2 წერტილებიც შეუთავსდება ერთმანეთს (სურ. 137,2). მაშასადამე, ρ_1 და ρ_2 ინვოლუციურ პოპოლოგიებს ექნება განსხვავებული ღერძები (r_1 და r_2) და საერთო ცენტრი ($R_1=R_2$). ამიტომ, $\rho_1 \cdot \rho_2$ პოპოლოგიების კომპოზიცია არის პარაბოლური პოპოლოგია არასაკუთრივი p ღერძით ანუ პარალელური გადატანა. იგივე მოქმედებებია შესრულებული ევკლიდეს სიბრტყეში 128-ე სურათზე.



სურ. 137

თუ k “წრეწირია” და P მისი “ცენტრი”, მაშინ p “არასაკუთრივი” წრფეა და ρ_1, ρ_2 პოპოლოგიები – “ღერძული სიმეტრიები”.

ორი “ღერძული სიმეტრიის” კომპოზიციას ეუწოდეთ “ბრუნვა” მათი ღერძების გადაკვეთის წერტილის ირგვლივ. კერძოდ, “არასაკუთრივი წერტილის” ირგვლივ ბრუნვას (ანუ პარაბოლურ პო-მოლოგიას “არასაკუთრივი ღერძით”) ეუწოდოთ “პარალელური გადატანა”. წერტილს, რომლის ირგვლივაც ხდება “ბრუნვა” შეიძლება დავარქვათ “ბრუნვის ცენტრი”. ის იქნება ყველა იმ “წრეწირის” “ცენტრი”, რომლებიც “ბრუნვით” თავის თავზე აი-სახება.

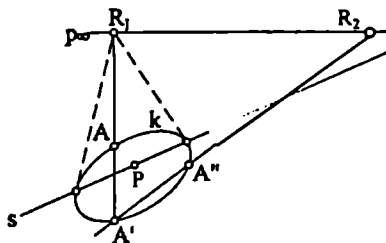
“სიმეტრიის” მსგავსად “ბრუნვა” ნებისმიერ “წრეწირს” ისევ “წრეწირზე” ასახავს, თანაც ისე, რომ პირველი “წრეწირის” ცენტრი მეორის “ცენტრზე” აისახება. უფრო მეტიც, ნებისმიერი კოლინეაცია, რომელიც ნებისმიერ წრეწირს და მის ცენტრს თა-ვის თავზე ასახავს, არის “ბრუნვა” ან “ღერძული სიმეტრია”.

ამრიგად, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, “ბრუნვა” შეგვიძლია წარ-მოვადგინოთ, როგორც სხვადასხვანაირად შერჩეული ორი “სიმე-ტრიის” კომპოზიცია.

ვთქვათ, A წერტილი “ბრუნავს” P ცენტრის ირგვლივ. P არის p წრფის პოლუსი k კონიკის მიმართ. ვთქვათ, π ბრუნვა P ცენტრის ირგვლივ ასახავს A წერტილს A' წერტილზე. დავა-მყაროთ p_1 “ღერძული სიმეტრია”, რომლის ღერძი k “წრეწირის” ნებისმიერი r_1 “ღიაშეკრული” (სურ. 138). ამ “სიმეტრიით” A წერტილი აისახება A' -ზე. დავამყაროთ მეორე p_2 “ღერძული სი-მეტრია”, რომელიც A' წერტილს ასახავს A'' წერტილზე. ცხა-დია, $p_1 \cdot p_2$ კომპოზიცია არის “ბრუნვა”, რომელიც ასახავს A წერტილს A'' წერტილზე, ხოლო, რადგან არსებობს მხოლოდ ერთი ასეთი ბრუნვა, ამიტომ $p_1 \cdot p_2 = \pi$. ვაკლიდეს სიბრტყეში იგივე მოქმედებებია შესრულებული 127-ე სურათზე.

ამრიგად, ვაკლიდეს გეომეტრიის გარდაქმნები (კოლინეაციები) წარმოვადგინეთ ანარეკლების კომპოზიციათა სახით.

ახლა ჩამოვყალიბოთ სიბრტყის კოლინეაციათა ჯგუფის ცნება, რომელიც განისაზღვრება კოლინეაციათა კომპოზიციების თვისებებით.



სურ. 138

თუ კოლინეაციათა ერთობლიობაში კომპოზიცია 1° ყოველთვის შეიძლება შესრულდეს, 2° - ცალსახაა, 3° - ასოციაციურია, ე.ი. $(\pi\rho) \cdot \alpha = \pi(\rho \cdot \alpha)$, 4° არსებობს იგივეური კოლინეაცია, 5° ნებისმიერი π კოლინეაციისათვის არსებობს შექცეული კოლინეაცია, მაშინ ამბობენ, რომ კოლინეაციათა ერთობლიობა ქმნის ჯგუფს კომპოზიციის მიმართ.

ჩამოთვლილი თვისებები აქვს სიბრტყის ყველა კოლინეაციას, ამიტომ სიბრტყის ყველა კოლინეაცია ქმნის ჯგუფს. ჩამოთვლილ თვისებებს აკმაყოფილებს მოძრაობათა ერთობლიობა, ამიტომ მოძრაობებიც ქმნის ჯგუფს. ჰომოლოგიების სიმრავლე ჯგუფს არ ქმნის, რადგან ჰომოლოგიების კომპოზიცია ყოველთვის ჰომოლოგია არ არის. მაგრამ არასაკუთრივი ღერძის მქონე ჰომოლოგიები ქმნის ჯგუფს. ამ ჯგუფში შედის ორი ტიპის ჰომოლოგია: პარაბოლური ჰომოლოგიები (SEs) –პარალელური გადატანა და ჰიპერბოლური (SEs) –ეკლიდეს გეომეტრიის გარდაქმნა, რომელსაც ჰომოთეტია ეწოდება. ორივე ტიპის ჰომოლოგია არასაკუთრივი ღერძით ამ ღერძის აბსოლუტურ ინვოლუციას თავის თავზე ასახავს (როგორც ჰომოლოგიის ორმაგი წრფე). მაშას-

დამე, ასეთი ჰომოლოგიები ნებისმიერ წრეწირს ასახავს ისევ წრეწირზე. ჰომოთეტიის და მოძრაობათა გარდაქმნის კომპოზიციები არის მსგავსების გარდაქმნა, რომელიც ყოველ ფიგურას ასახავს მსგავს ფიგურაზე (შესაძლოა არამსგავსად განლაგებულზე). მსგავსების გარდაქმნა ფიგურის ფორმას არ ცვლის. აქედან გამომდინარე, მას ეკვიფორმულ გარდაქმნასაც უწოდებენ. ამ გარდაქმნების ჯგუფები მეტრულ გეომეტრიაში შეისწავლება.

უფრო ფართო ჯგუფს შეადგენს იმ კოლინეაციების ერთობლიობა, რომლებიც არასაკუთრივ წრფეს თავის თავზე ასახავს (გარდაქმნის). ამ კოლინეაციების დამახასიათებელი თვისება იმაში მდგომარეობს, რომ ისინი პარალელურ წრფეებს ასახავს ასევე პარალელური წრფეებზე. მათ ეწოდება აფინური გარდაქმნები. ძვრები და გაწეღვები ამ გარდაქმნებს ეკუთვნის. ყველაზე ფართო ჯგუფი არის ყველა კოლინეაციის ჯგუფი.

ამრიგად, გავეცანით პროექციული გარდაქმნების შემდეგ ჯგუფებს: 1. პარალელური გადატანა; 2. მოძრაობა; 3. ეკვიფორმული გარდაქმნები; 4. აფინური გარდაქმნები და 5. კოლინეაციები.

ამ მწკრივში ყოველი მომდევნო ჯგუფი მოიცავს ყველა წინა ჯგუფს. პირველი სამი ჯგუფი შეისწავლება მეტრულ გეომეტრიაში, მეოთხე – აფინურ გეომეტრიაში, მეხუთე – პროექციულ გეომეტრიაში.

ახლა ადვილი გასაგებია დიდი ინგლისელი გეომეტრ კელის პრინციპი: პროექციული გეომეტრია არის მთელი გეომეტრია.

1. Вольберг О.А. Основные идеи проективной геометрии. Москва, 1936 г.
2. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. Москва, 1963 г.
3. Кокстер Х.С. Действительная проективная плоскость. Москва, 1959 г.
4. Четверухин Н.Ф. Проективная геометрия. Москва, 1953 г.
5. Глаголев Н.А. Проективная геометрия. Москва, 1963 г.
6. Юнг В.И. Проективная геометрия. Москва, 1949 г.
7. Яглом И.М., Ашкинази В.Г. Идеи и методы аффинной и проективной геометрии. I часть, Москва, 1936 г.
8. ე.ა. მჭედლიშვილი გეგმიური გეომეტრია და გამოსახულებათა მეთოდები (ლექციები). გორი, 1973 წ.

წინასიტყვაობა	3
პირველი თავი. შესავალი.	7
1.1. ეკლიდეს გეომეტრიის აქსიომატიკური საფუძვლები	7
1.2. მეხუთე პოსტულატი	11
1.3. არაეკლიდური გეომეტრიები	12
1.4. ფიგურათა გეომეტრიული თვისებები.	17
მეორე თავი. პროექციული გეომეტრიის ძირითადი იდეები	34
2.1. დაგეგმილების და კუთხის ოპერაციები	34
2.2. წერტილთა მწკრივი წრფეზე. ოთხი წერტილის რთული ფარდობა	37
2.3. არასაკუთრივი ელემენტები	42
2.4. პროექციული სივრცე.	47
2.5. ორადობის პრინციპი	56
2.6. სხვადასხვა საფეხურის ძირითადი სახეები	59
მესამე თავი. დეზარგის თეორემა. პარამონიზმი	63
3.1. დეზარგის თეორემა.	63
3.2. პარამონიზმი.	68
3.3. დეზარგის თეორემის კერძო შემთხვევები	77
მეოთხე თავი. კრ(ა)მციული შესაბამის(ა)ბა პირ(ა)ლი საწყისური სახეების წილის.	79
4.1. ძირითადი თეორემა. პროექციული შესაბამისობის განსაზღვრა.	79
4.2. პერსპექტიული განლაგება. შესაბამისი ელემენტების აგება	90
4.3. პარამონიული შესაბამისობანი. პროექციული გარდაქმნის კლასიფიკაცია	95

4.4. ორადი დებულებები წრფეთა და სიბრტყეთა შეკერებისათვის.	103
მეხუთე თავი. პროექციულ შესაბამისობათა გამოყენება გომეტიკულ სახეობათა წარმომადგენელთა.	106
5.1. პირველი საფეხურის მეორე რიგის სახეები.	106
5.2. პასკალის თეორემა და მისი შედეგები	112
5.3. ორადი თეორემა	116
5.4. მეორე რიგის წრფოვანი ზედაპირები.	119
5.5. მეორე რიგის სახეების პროექციული შესაბამისობა	126
მექმესამე თავი. ინვოლუცია.	130
6.1. განსაზღვრებები	130
6.2. ინვოლუცია წრფეზე და მეორე რიგის წირზე	132
6.3. ღეზარგის მეორე თეორემა	136
6.4. პოლუსები და პოლარები	138
6.5. ინვოლუციის მეტრული თვისებები	141
მეშვიდე თავი. პროექციული შესაბამისობა მართა საწყისების სახეობათა შორის	146
7.1. შესაბამისობა ორ ბრტყელ ველს შორის. შესაბამისობის განსაზღვრის საერთო ხერხი	146
7.2. კოლინეარული ველების პერსპექტიული განლაგება.	152
7.3. კოლინეარულის მეტრული თვისებები. მეზისის თეორემა	153
7.4. კოლინეარული შესაბამისობა შეთავსებულ ველებში. ორმაგი წერტილები.	156
7.5. პომოლოგია და მისი კერძო შემთხვევები	157
7.6. აფინური შესაბამისობა და ამისი კერძო შემთხვევები	168

მერვე თავი. კორელაციური შესაბამისობა შეთავსებულ ველზე	173
8.1 კორელაციური შესაბამისობის ზოგადი შემთხვევა. . .	173
8.2 პოლარული შესაბამისობა და მისი თვისებები.	174
8.3 მეორე რიგის ფუნდამენტური წირი	180
8.4 ავტოპოლარული სამკუთხედი.	181
მეცხრე თავი. ეპკლიდეს მემორია პროექციული გომეტრიის თვალსაზრისით. .	186
9.1. პოლარიტეტის თვისებები, რომლებიც დაკავშირებული არაა არასაკუთრივ წრფესთან.	186
9.2. წრფის პროექციული თვისებები. სიბრტყის აბსოლუტი	187
9.3. პეტრული გომეტრიის გარდაქმნები პროექციული გომეტრიის თვალსაზრისით	192
9.4. პროექციული პეტრიკა.	194
ლიტერატურა.	205