

შ. ფ ს ა კ ა კ ე

სივრავლეთა თეორიისა და მათემატიკური ლოგიკის ელემენტები

საქართველოს სსრ უმაღლესი და საშუალო
სპეციალური განათლების სამინისტროს მიერ
დამტკიცებულია სახელმძღვანელოდ სტუდენტებისათვის

517.2 + 517

519.5 + 517.11

☛ 988

წიგნიში გახსნილულია სიმრავლეთა ჯეოგრაფიისა და მათემა-
ტიკური ლოგიკის ძირითადი საკითხები. იგი განკუთვნილია
მსუ ბეჟანია-მათემატიკის ფაკულტეტისა და პედაგოგიური
ინსტიტუტების სტუდენტთათვის. ნაშრომი სარგებლობას მოუტანს
სამუდომ სკოლის მათემატიკის მასწავლებლებსაც.

Ⓒ ღიიიიისი უნივერსიტეტის გამომცემლობა, ღიიიიიი, 1978

20204
II $\frac{\text{---}}{\text{m } 608(06)-78}$ 6-78

რეპაუზირის წინასწარგება

ნაშრომი შეიქმნა იმ ღეჟყიების ბაბაზე, რმღებსაც ავტორი რიგი წლების განმავლობაში კიხეულობა ზბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის პირველ კურს-ზე.

წიგნი შედგება ორი ძირითადი ნაწილისაგან და ურთი დამატე-ვისაგან.

ძასაწყისში განიხილება სიმრაველთა ჟეორიის ძირითადი ყნებები ინტუიციურ ღონებზე. ამასთან, აბი განიხილის შედგად ყბადი ხდება სიმრაველთა ჟეორიის აქსიომატური გადმოყების აუცილე-ბლობა. შეშოიჭანება ყნებები: მსჯელობა, მიმარება, ჟვისება, ყნება, ყნების მოყულობა, ყნების შინაარსი, სიმრავლე, კლასი, ურთობლობა, ინეივივი, ულეშენჭი და ა.შ. ჟერმიწები: სიმრავლე, კლასი და ურთობლობა განიხილება არა როგორც სინონიშები, არა-შედი როგორც ურთიანეშისაგან განსხვავებულ შინაარსის მქონე სიტყვები. ამასთანავე კლასის ყნება განიხილება როგორც სიმრავ-ლის ყნების განზოგადება. როცა ლაპარაკია გარკვეული კატეგორიის საგანთა ურთობლობაზე, მაშინ ეხედელობაშია აღნიშნული კატეგო-რიის საყნები და ეხოლოდ ისინი. განსაზღვრული კატეგორიის საგ-

ნების კლასის ან სიმრავლის განხილვა კი გულისხმობს ახალი ან-
სტრუქტურული საცნის განხილვას, რომელიც განსხვავდება ხსენებული
კატეგორიის ყველა საცნისაგან. ნაჩვენებია ისეთი კლასების არ-
სებობა, რომლებიც არ აწიან სიმრავლეები.

შემოგთი გადმოცემულია სიმრავლეა ჯეორიის ძირითადი საკი-
ბები. შემოთვანება შენაარსული მათემატიკური ჯეორიის ცნება
და სიმრავლეა ჯეორია განხილდება როგორც ასეთი ჯეორიის მაგა-
ლითი. სიმრავლეა ჯეორიის ძირითადი საკიბების გადმოცემა იწ-
ყება ცვლადისა და კონსტანტის ცნების შემოვანით. იქვე ისაბღ-
რება ლოგიკური მკერაგორები. ჟერმინოლოგიის შემოვანებისას
მკაცრად ჭარდება სიმრავლურ-ჯეორიული ვეაღსაბრისი. მთავური
ძირითადი მათემატიკური მბიუეტი ისაბღვრება როგორც სიმრავლე
ან კლასი.

მეორე ნაწილი ნარმოებს ნინაბაბებაა აღებრის სისებმა-
გური გადმოცემა. შებარები მკლეე მოცემულია მრეოკატების ლ-
ოკა. მეორე ნაწილის ბოლოს მოცემულია ჟორმალური ჯეორიის ცნება
და ჟორმალურ და შენაარსული ჯეორიებს ბორის კავშირი.

ბაბოლოს, ბაბაებბი, ავგომბაგბის ურთი კლასის კარბაპ
მოგოქრებულ მაგალიბბე, ილუსტრირებულია ავგომბაგბის ჯეორიბი
ნინაბაბებაა აღებრის გამოყენება. საბეღობრ, ნაჩვენებია
როგორ შეიბლება ბაბკიბბეს საჭირო ჟვისების მქონე ავგომბაგბის
არსებობა, როგორ შეიბლება ბობბბილი იქნეს ასეთი ავგომბაგბის
კონსტრუქცია ნინაბაბებაა აღებრის გამოყენებბი. ამასბან,
ნაჩვენებია, რომ ხსენებული კონსტრუქცია განისაბღვრება ნინა-
ბაბებაა აღებრის ჟორმულია და რომ ხსენებული ჟორმულია მთავ-
ური შესაბლო გამარგოვებას მივყვარა ავგომბაგბის კონსტრუქციის
შესაბამის გამარგოვებბე.

განსაკუთრებბი უნდა აღინიშნოს გადმოცემის სიყბაბე და
კომპეტენტობა. კომპეტენტობა მიიღწევა ჟერმინაა განსაბღვრებ-

ბისა და ჯერემაა ჭორმუჭორებების დახვეწი. ეს იძლევა ბევრი ჯერების მიტოვებაა არსებობა შემოკლები შესაძლებლობა.

უნდა აღინიშნოს აგრეთვე, რომ ნიგნს შეუძლია შეასრულოს მნიშვნელოვანი როლი უარყოფი ენაზე შესაბამისი მანქანისგან განსხვავებით, რომელიც უნდა იყოს, დახვეწილობა და დაგეგმვა. მიუხედავად, რომ ამჟამად ანალიტიკური ნიგნს უარყოფი ენაზე არ არსებობს.

დ. მანუჩარაძე

სიმრავლეა მეორის ჯგუფი

§ 1. სიმრავლეა მეორის ჯგუფი

ამ პარაგრაფის მიზანია სიმრავლეა მეორის ჯგუფი
 ცნებაა გასაგება ინტუიციურ პრინცი, პარაგრაფი სიმრავლეა მეორის
 აქსიომური გადმოცემის აუცილებელია და ის მოცემები, რომელიც
 საჭიროა უნდა სიმრავლეა მეორის სხვადასხვა აქსიომური
 გადმოცემის.

1. მსჯელობა, მიმართება, ჯგუფი, ცნება. ყველაფერს, რის
 შესახებაც ა მ რ ი ს გამოხატება შეიძლება, ს ა გ ა ნ ს უნ-
 დება¹. საგნებს აღნიშნავენ ს ი მ მ რ ლ ე ბ ი მ. საგანს,
 რომელიც აღნიშნულია α სიმბოლოთი, ვთქვათ α ს ი მ მ რ ლ -
 ე ბ ი მ ი მ. ბევრ² მსჯელობაში საგანი
 "აღნიშნება" ს ა გ ა ნ ს. უნდა იცოდეთ საგნის აღნიშნუ-
 ნად სახელსა და სიმბოლოს ჩვენ გავიგებთ და განსაზღვრებთ
 გავაძლიერებთ ყურადღებას საგნის აღნიშნულ სიმბოლოზე.

მ ს ჯ ე ლ ე ბ ა ვთქვამს, რომელიც ჩანს პასუხ-
 ება საგნის ამ გარკვეული რიცხვით მოცემული საგნების მიმართ და
 რომელიც არის φ ე მ მ ა რ ი ზ ი მ მ ი ც პ ა რ ი, მაგრამ არ
 არის უნდა რაღაც უნდა რიცხვი და მცდარიც. ხსენებულ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$
 საგნებს მ ს ჯ ე ლ ე ბ ი მ ს ს ა გ ე ბ ი მ ვთქვამს (იგულისხ-
 მებთან, რომ მსჯელობის საგნები $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ რიცხვით არიან მოცემუ-

¹ საგნის ასეთი ცნება უარესად ფართოა. ჯერმინი "საგანი"
 შეიძლება უნდა გადმოცემა უფრო ვიწრო აზრით. ამასთანავე,
 ამის მიხედვით სათანადო მოპოვების მიზანსა და საგნის ცნებასთან
 დაკავშირებული ქვემოთ შემოწმების ცნებები.

რნი). α_i მსჯელობის საფაზს უწოდება $i - 1$ - უ რ ი მ ს ჯ -
 ე რ მ ი ს ს ა გ ა ნ ი. არ გამოვიყენებთ იმის შესაძლებლობას,
 რომ $i - 1$ - უ რ ი მსჯელობის საფაზი და j -ურ ი მსჯელობის საფა-
 ზი, განხილული ჩატარე საფაზები, ურთი და იგივენი იყონ მაშინ-
 ნაც, როცა $i \neq j$ (ვუვლინებომა, რომ $i \neq j$ შემთხვევაში ურთიანე-
 საფაზ ვანსხვავებთ " i -ურ მსჯელობის საფაზს" და " j -ურ
 მსჯელობის საფაზს" იმ შემთხვევაშიც, როცა ძლიერი, განხილული
 ჩატარე საფაზები, ურთი და იგივენი არიან). იმას, რაც დასტურ-
 ება მსჯელობაში მსჯელობის $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ საფაზების მიმართ, ურ-
 ება 3 რ 2 რ 3 ა ჭ ი ანუ 2 ი მ ი ა რ 2 ე მ ა. მეტი
 სიჭედილობის მას უწოდება აგრეთვე $n - 1$ - ა რ 2 რ 3 ა რ 2 ი მ ი ა რ-
 2 ე მ ა. $n=1$ შემთხვევაში პრედიკატს უწოდებენ აგრეთვე
 2 ე მ ა რ 2 ე მ ა ანუ 2 ი მ ი ა რ 2 ე მ ა.

მსჯელობა ჩატარე წესი ზნობილი წინადადებათი მოიცავს.
 ვუვლინებომა რომ, ეს მსჯელობის გამოხატველი A ზნობილი წინა-
 დადებათი ჩამოვიღებ α სიმბოლო (სახელი) აღნიშნავს მსჯე-
 ლის საფაზს, მაშინ A წინადადებათი α სიმბოლოს (სახელის)
 თითოეული (ე ა ვ ი ს უ ჭ ა ლ ი) 2 ე მ ი ა რ 2 ე მ ა¹ აღნიშნავს
 იმავე მსჯელობის საფაზს; ამასთანავე ჩვენი სხვადასხვა სიმბო-
 ლო (სახელი) აღნიშნული მსჯელობის საფაზები არ შეიცვლება
 იყონ ურთი და იგივე (მსჯელობის საფაზები). ზნობილი წინადა-
 დება არის მსჯელობის გამოხატველი მაშინ და მხოლოდ მაშინ,
 როცა მისთვის შესაძლებელია 2 ე მ ა რ 2 ე მ ა ანუ 2 ი მ ი ა რ 2 ე მ ა -
 2 ე მ ა რ 2 ე მ ა რ 2 ე მ ა რ 2 ე მ ა ანუ 2 ი მ ი ა რ 2 ე მ ა რ 2 ე მ ა რ 2 ე მ ა
 2 ე მ ა რ 2 ე მ ა (ე.ი. როცა იგი არის მუდარი ან ვერაძალი და არ

¹ საფაზის აღნიშვნელი სიმბოლოს წინადადებათი ზნობილია შე-
 მოსვლის ყნება მომდევნო პარაგრაფში შემოვიყენებთ.

პრეკვატს (იგულისხმება, რომ ამ აღნიშვნაში მყოფი $\alpha, \dots, \alpha_n$ სიმბოლოებისაგან განსხვავებული სიმბოლოების მნიშვნელობები დაფიქსირებულია — ამ მნიშვნელობების შეცვლა, საბოლოოდ, იწვევს პრეკვატის შეცვლას).

შენიშნოთ რომ, ლ A მსჯელობის საგანთა რიცხვი n ურთა აღემატება, მაშინ A' წინადადება ჩამოყალიბებულია მსჯელობას აღნიშნავს. მაშასადამე, ლ $n > 1$ და $i_1, \dots, i_k$ არიან ურთმანეთისაგან განსხვავებული n -ზე ნაკლები ან ჭოტი ნატრალური რიცხვები, მაშინ A' არის A_{i_1} მსჯელობის გამომხატველი წინადადება, რომლისთვისაც მსჯელობის საგნებია $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$ ($i_1, \dots, i_k$ მიმდევრობით A_{i_1} მსჯელობა ცალსახად იმადღვრება). მაგალითად, წინადადება " $\alpha > \beta$ ", გამოხატავს თბ სხვადასხვა მსჯელობას, რომლებსაც შესაბამისად მსჯელობის საგნებად ავტო " α და β ", " α ", " β " და " β და α ". ამ მსჯელობათა პრეკვატების აღნიშვნები შესაბამისად იქნება:

" $\alpha > \beta$ ", " $\alpha > \beta$ ", " $\alpha > \beta$ ", " $\alpha > \beta$ ".

მიორე და მესამე პრეკვატი, ცხარია, ღვისებებს წარმოადგენენ. ეს პრეკვატები, რომ ურთმანეთისაგან განსხვავებულან ცხარია. მამასადამე, განხილული მსჯელობები ურთმანეთისაგან განსხვავებულიან. კარგად რომ დავინახოთ განსხვავება " $\alpha > \beta$ " წინადადებათა აღნიშნული პირველი სამი მსჯელობას შორის ხელსაყრელია შემდეგი მაგალითის განხილვა.

ა პირველად " α და β და γ პირველ-ბებს შემდეგი წინადადებათ: "ივანე მაღალია პეტრეზე". ამასთანავე α პირველად კარგად იცნობდა ივანეს, პეტრე კი ნანახი არ ჰყავდა და მისი სიმამლის შესახებ არაფერი იყო, β პირველ-ბა კარგად იცნობდა პეტრეს, ივანე კი ნანახი არ ჰყავდა და მისი სიმამლის შესახებ არაფერი იყო, γ პირველბას კი არც ივანე ჰყავდა ნანახი და არც პეტრე და მათი სიმამლებების შესახებ

არაფერი იყო. ამ პირობებში, ცხადია, α პიროვნების მიერ მიღებული ინფორმაცია წარმოადგენს მსჯელობას, რომლისთვისაც მსჯელობის საგანია "ვეფრე" (ამ ინფორმაციაში შეფასებულია ვეფრეს სიმაღლე ცნობილი სიმაღლის დახმარებით), β პიროვნების მიერ მიღებული ინფორმაცია წარმოადგენს მსჯელობას, რომლისთვისაც მსჯელობის საგანია ივანე, γ პიროვნების მიერ მიღებული ინფორმაცია კი წარმოადგენს მსჯელობას, რომლისთვისაც მსჯელობის საგნებია ივანე და ვეფრე (ამ ინფორმაციაში არც ივანეს და არც ვეფრეს სიმაღლე შეფასებული არაა — არაა გამორიცხული ის, რომ ივანე და ვეფრე ორივე ჭანძარალი კაცები იყვნენ და არც ისაა გამორიცხული, რომ ივანე და ვეფრე ორივე ძლიერ დაბალი ჭანისანი იყვნენ).

საგნის ღირებულებას უწოდებენ $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ ($a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$), ზუ მთელმოქმედი სახის საგანს ამ ღირებულებას (ნიშნებს) გარეშე არსებობა არ შეუძლია. მაგალითად, კვარაყვინძვის გვერდების ურთიერთგეგმობა არსებობს ნიშნით. იგივე ღირებულება ობიექტებისთვის არაარსებობს ნიშნით.

მე A მსჯელობის არეოკაცია R , მაშინ ამბობენ, რომ R არის A მსჯელობის $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ ურთიერთობები ისე, რომ A' არის A მსჯელობის გამოხატულები ნიშნადება, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ არიან A მსჯელობის საგნები, $i_1, \dots, i_n$ არიან $\{1, 2, \dots, n\}$ - დან აღებული ურთიერთობისგან განსხვავებული ნაგურობები, A_i კი A' ნიშნადებობი გამოხატულები ისე, რომ მსჯელობა, რომლისთვისაც მსჯელობის საგნებია $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}$. ამ პირობებში, როცა დაარსებენ " A' ნიშნადება $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ ($a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$) $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ სიბრტყეობა $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ ", მხედველობაში აქვს A_i -ის არეოკაცია. კერძოდ, A' ნიშნადება $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ შეიძლება $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$

მუ საცნის შესახებ ჩვენი ცოდნის გაღრმავება წარმოებს ამ საცნის ცნების შემადგენელი მსჯელობებიდან ახალ მსჯელობაზე გადასვლით (ცხადია, ამ ახალ მსჯელობაზე მიკავშირებული ღონისძიებები საცნის ახალ არსებობა ნიშნებს წარმოადგენენ), მაშინ აღნიშნული ცნება უცვლელი რჩება. მაგრამ მუ სხვა რაიმე გზით მივალთ საცნის ისეთ ღრმა შესწავლას, რის შედეგად მივიღოთ საცნის ისეთი არსებობის ნიშანი, რომლის შესაბამისი მსჯელობა არ გამოიძიანარებს განხილული ცნების შემადგენელი მსჯელობებიდან, მაშინ აუცილებელი ხდება ცნების დატუსტება.

ც ნ ე ბ ი ს გ ა ნ ს ა ბ ი ე რ ა ეწოდება მსჯელობას, რომელიც ადგენს ამ ცნების შინაარსს. ცნების გამომხატველი (აღმნიშვნელი) სიტყვას ან სიტყვაზეა დაყრდნობა. ეს ეწოდება. ხშირად ცნებას და მის აღმნიშვნელ ჭრებიან ურთიერთლად საბეჭდავად.

მაგალითად, განსაზღვრობ "რომში ეწოდება ისეთ პარალელგრამას, რომლის ყველა კუთხე ურთიანობის ზოლია" მოიცავს ცნება, რომლის შინაარსს შეადგენს შემდეგი არსებობის ნიშნები: 1. პარალელგრამაა, 2. ყველა კუთხის ურთიანობაა. იმავე განსაზღვრობა შემოიჭანება აღნიშნული ცნების გამომხატველი (აღმნიშვნელი) ჭრებიანი "რომში".

ცნებას ეწოდება ბ რ გ ა პ ი ც ნ ე ბ ა, მუ მისი მოცულობა შეიცავს ურთიან მთელ საგანს. მუ ხსენებული მოცულობა ურთ საგანს შეიცავს, მაშინ მას ე რ მ ე უ ლ ი ე რ ა ნ ი ც ნ ე ბ ა ეწოდება.

რაგან ურთიან და იგივე წინადადება შეიძლება გამოხატავდეს სხვადასხვა საცნის (არსებობის) ნიშნებს, ამიტომ ხშირად ხელსაყრელია რამდენიმე ცნების ურთიერთლად განსაზღვრა.

მათემატიკაში განიხილავენ ცნებაზე განსაზღვრობის რიგითი და გზას და ამის მიხედვით ცნებებს უწოდებენ რიგით და ურთიან: ე.წ.

ძირითადი წარმომადგენელი უნდა იყოს. ძირითადი უნების მატარებელია: ნერვოზის უნება, ნერვოზის უნება, სიბრტყის უნება. წარმოებულ უნებათა მატარებელია: ნერვოზის მოწყობის უნება, ჭეხილის უნება, მრავალუბრების უნება. ძირითადი უნების, მატარებელი ნერვოზისა და სიბრტყის უნებების, განსაზღვრა შედგენილია წარმოებს. თავდაპირველად სხვა-დასხვა საშუალებებით (მატარებლის განხილვა, სხვადასხვა ღვა-საჩინოების მომარჯვება და ა.შ.) უნებულად წარმოადგენს საკანტე. ნერვოზისა და სიბრტყის შემთხვევაში, მატარებელი, ვამბობ: "წრფელ კარგ წარმოადგენს კვადრატს გაჭიმული ნერვოზი ძალი, სინათლის სხივი" და ა.შ. წრფე უნდა წარმოვიტვიფროთ, როგორც უსასრულო გაგრძელებული ორივე მხარეს, როგორც სიმსხლის არ მიქნე. სიბრტყეზე კარგ წარმოადგენს კვადრატს ზედიზე მინა, მატარებლის ღვაპირი და ა.შ. სიბრტყე უნდა წარმოვიტვიფროთ, როგორც სიბრტყის არ მიქნე და ა.შ. ამ გზით უნებულად წარმოადგენს სიბრტყეზე და წრფეზე. ამ წარმოადგენების შესწავლით ვაღწევთ სიბრტყისა და წრფის არსებობის ნიშნების აღმოჩენას და ამ არსებობის ნიშნების შესაბამის მსჯელობას გამოუმჯობესებელი წინადადებების ჩამოშვით ვამბობთ წრფისა და სიბრტყის უნებათა განსაზღვრას. ასევე წინადადებებია, მატარებელი: 1. რა ნერვოზზე შეიძლება წრფის გავლება, ისიც მხოლოდ უნების, 2. ზე წრფის ორი ნერვოზი სიბრტყის უნების, მაშინ იგი მხოლოდამა ამ სიბრტყეზე მიუძღვნება, 3. სამი ნერვოზზე შეიძლება სიბრტყის გავლება, ისიც მხოლოდ უნების და ა.შ. იტვირთება, რომ ის წინადადებები რომლებიც შეიცავს, მატარებელი, ჭერმინს "წრფე" ასახავს წრფის არსებობის ნიშნებს (ფიგურებს). უნების განსაზღვრის მეორე გზა გულისხმობს უნების განსაზღვრას აგრეთვე შემოკლებული ძირითადი და წარმოებულ უნებათა დახმარებით. ასევე განსაზღვრებია: "ორი განსხვავებული ნერვოზისა და მათ შორის მიუძღვნება ყველა ნერვოზისაგან შედგენილი

სიმძრაველს მოწავედით უწოდება", "მარტოვი შეკრული ჭებილისა და მისი მიგა არის გაერდინება მრავალუბოები უწოდება". ასევე სა-
ხის განსაზღვრებში მათემატიკაში ხასიათდება შეფარდებითი სი-
მულატი, რაც კულისხმობს შენობებს: ეს ახალი ცნების განსაზღვრა-
ში გამოყენებული ცნებები "აბსოლუტურად მუსტად" ასახავენ შესა-
ბამის საცნებს, მაშინ ახალ ცნებასაც უწდება იგივე ზეისება.
მაგრამ, რადგან ძირითადი ცნება არ შეიცვლება "აბსოლუტურად მუს-
სტად" ასახავენ შესაბამის საგანს და ნებისმიერი წარმოებული
ცნება, საბოლოო ანგარიშით, ისაზღვრება ძირითად ცნებების და-
მარებით, ამიტომ შესაბამისი საცნების მუსტად ასახვის ზეალაბ-
რისით არაუთხარი პრინციპული განსხვავება არაა ძირითად და
წარმოებული ცნებებს შორის. მიუხედავად ამისა, ხსენებული შეფარ-
დებითი სიმულის გამო, მათემატიკაში განსაზღვრებებზე იხვედება
მხოლოდ მეორე სახის განსაზღვრებები. პირველი სახის განსაზღვ-
რებებს უწოდებენ ა ზ ნ ე რ ი ლ ი ბ ი ბ ე გ ა ნ ს ა ბ ე ზ -
რ ე ბ ე ს. ამასთანავე ზეიან, რომ აღწერილობითი განსაზღვ-
რა არ წარმოადგენს განსაზღვრას მათემატიკური აზრით და ამის
მიხედვით ძირითად ცნებებს ზეიან ისევე ცნებებზე, რომლებიც გა-
ნსაზღვრებათ გარეშე შემოიჭანებინან. ძირითად ცნებებს უწოდე-
ბენ აგრეგე ს ა ნ ე რ ს ე ნ ე ბ ე ბ ს, გ ა მ ი ს ა ვ ა ლ
ე ნ ე ბ ე ბ ს და უ მ ა რ ტ ი ვ ე ს ე ნ ე ბ ე ბ ს. მათ
უმარტოვეს ცნებებს უწოდებენ იმითომ, რომ ისინი იმდენად მარტო-
ვნი არიან, რომ მათი დაყვანა უფრო მარტოვ ცნებებზე აღარ შეიძ-
ლება. მათ ძირითად ცნებებს, საწყის ცნებებსა და გამოსავალ ცნე-
ბებს უწოდებენ იმითომ, რომ ისინი, შემოიჭანებინან რა განსაზღვ-
რებათა გარეშე, საფუძვლად უდევთ ყველა პანარტენ მრავალრიცხო-
ვან ცნებათა განსაზღვრას.

ძირითადი ცნებათა შემაჯავებელი მსჯელობები გამომდინარეობს
წინადადებაში „**ეს არის**“ ენობრივად. ავსოცნებასა და

მან შედეგებს, რომლებიც აქსიომებიდან გამომდინარე მიიღებოდა, ეწოდება **მ ე მ ე მ ე მ**.

მეცნიერების განვითარების საწყის ეტაპზე ძირითადი ცნებები, კერძოდ აქსიომები, ბუნების საცნებსა და მოვლენებზე უშუალო დაკვირვებით მიიღებოდა. მეცნიერების განვითარების შემდგომ საფეხებზე ლოგიკური კვლევა მიღებული შედეგებზე დაყრდნობით შესაძლებელი ხდება ძირითადი ცნებათა (კერძოდ აქსიომათა) დაზუსტება. ამგვარად დაზუსტებული ძირითადი ცნებები იქცევა მხელის საფუძველი ლოგიკური კვლევის შექამებად და გამოსავად ნერვულად კვლევის შემდგომი ეტაპისათვის.

რადგან, მოყვნილი **ა** გამოწვევასა და ამ გამოწვევამით გამოხატული მსჯელობებს უნდა და იგივე ჭეშმარიტული მნიშვნელობები აქვს, მაშინვეცაა იგი უმეტესად განიხილება მსჯელობათა და გამოწვევამთა მიხედვით ჭეშმარიტული მნიშვნელობებზე დამოკიდებული ზღვრებით, ყველგან სადაც საწინააღმდეგო არ გამოდგინდება კონკრეტული, კონკრეტული რომ **მ მ ს კ ე ლ მ ბ ა** და **მ ი ს ი** **გ ა მ მ მ ა ჭ ე ე ლ ი** **წ ი ნ ა პ ა ე ე ბ ა** (**გ ა მ მ ა -**
მ ე ე ა მ ი) **გ ა ი გ ი ე ე ე ლ ი** **ა რ ი ა ნ**.

2. სიმრავლე, სიმრავლის განსაზღვრა. სიმრავლის ცნება მათემატიკური მეცნიერების მეტად მნიშვნელოვანი უაღრესად ფუნდამენტური ძირითადი ცნებაა. რადგანაც სიმრავლის ცნება ძირითადი (ე.ი. საწყისი) ცნებაა, ამიტომ ამ ცნების დადგენილი გაშუქება მიხედვით მათემატიკაში შეიძლება. შეიძლება ზოგადი და ნამდვირი რიცხვთა სიმრავლეზე, მხელ რიცხვთა სიმრავლეზე, მოყვნილი განტოლების ფასება სიმრავლეზე, მოყვნილი ნების ნერვულად სიმრავლეზე, მოყვნილი ბიძიკოების ნივთა სიმრავლეზე და ა.შ. ნამდვილი რიცხვები, მხელ რიცხვები, მოყვნილი განტოლების ფასები, ნერვული და ნივთი ნარმოადგენენ შესაბამისი სიმრავლის ე ლ ე მ ე ნ ჭ ე მ ს. შეიძლება იქცეს, რომ სიმრავლე

მ ე რ ტ ე ნ ი ე ნ ა (ყველა) ნიხი ელემენტებისაგან.

წინადადება " α არის A სიმრავლის ელემენტი" მოკლე რ ჩაიწერება ასე: " $\alpha \in A$ " (იკითხება: " α ეკუთვნის A სიმრავლეს"). ასევე, წინადადება " α და β სიმბოლოებით აღნიშნული საცნებო ურთი და იგივეა" მოკლედ ჩაიწერება ასე " $\alpha = \beta$ " (იკითხება " α უდრის β -ს" ან " α ტოლია β -ს"). უკანასკნელი წინადადების უარყოფა ჩაიწერება ასე: " $\alpha \neq \beta$ " (იკითხება: " α განსხვავდება β -გან"), " $\alpha \in A$ " წინადადების უარყოფა კი ჩაიწერება შემდეგნაირად: " $\alpha \notin A$ " (იკითხება: " α არ ეკუთვნის A სიმრავლეს").

სიმრავლის ცნების შემდგომი დადგენის მიზნით შევნიშნოთ, რომ სიმრავლე ცალსახად განისაზღვრება მისი ელემენტებით. ე.ი. ორი A და B სიმრავლე ტოლდება (ურთი და იგივე სიმრავლეებად) იმდროს, თუ მათ ურთი და იგივე ელემენტები აქვთ. ამ უკანასკნელი წინადადების შენაარსი ასე უნდა გამოგონო: თუ ცნობილია, რომ a რ ს ე ბ ს სიმრავლე, რომლის ელემენტებია განსაზღვრული კატეგორიის საცნებო, მაშინ ასევე სიმრავლე ურთი და იგივეა.

მანამდე როდესაც მათემატიკაში სიმრავლის ცნება ფორმალურად მიწოდებული არაა, ან უნდა არაა მარტივი იმის გამო, რომ სიმრავლეა ზოგჯერ ამჟამად ვერც და შენაარსიან შეცნობებად იქცა, არამედ იმ გამოვლინად გამოც, რომელსაც სიმრავლეა ზოგჯერ ახდენდა და ახდენს მთელი მათემატიკისა და რიცხვების შეცნობებებზე. მოკლედ მოვხატოთ ის გზები, რომელთაც სიმრავლეა ზოგჯერ განსაზღვრება მანამდე როდესაც მათემატიკის სხვადასხვა დარგებში და სხვა შეცნობებებში.

სიმრავლეა ზოგჯერ წარმოიშვა გასული საუკუნის ბოლოს და უკვე მოასწრო შეჭრა მათემატიკის ყველა დარგში და მთელი რიცხვების შეცნობებებში. ამჟამად სწრაფად მიმდინარეობს პროცესი

რიც მიყვანიერებათა მათემატიკისა და ამ პროცესში სიმრავლეთა
თეორია, მათემატიკური ლოგიკასთან ერთად, მთავარ როლს ასრულებს.
ძირითადი არხი, რომელითაც სიმრავლეთა თეორია იჭრება სხვა მი-
ყვანიერებებსა და მათემატიკის სხვადასხვა დარგებში, არის ა ქ -
ს ი მ უ რ ი მ ე მ რ ი .

აქსიომური მეთოდი დანამდებარე მათემატიკის ერთ-ერთი
ძირითადი მეთოდია. მან თავის განვითარების მანძილზე ძლიერ პი-
რი გვირგვინი განიცადა. აქსიომის ცნების ბეზომ მოცემული გან-
საზღვრა მისი განვითარების პირველ საფეხურს შეესაბამება. ამ
საფეხურზე შესწავლის ობიექტები რეალურად არსებული საგნებია,
აქსიომები კი ის კანონზომიერებებია, რომელთა სამართლიანობაში
აღნიშნულ საგნებზე უმეტესი პატივსაცემი აღნიშნულია. ამ შემთხ-
ვევაში აქსიომებიდან გამომდინარე დასკვნები სამართლიანია მხო-
ლოდ ობიექტუალური მოცემული სისტემისათვის, რამდენადაც ამ დასკ-
ვნების დამტკიცებას ჩვეულებრივ გამოიყენება აღნიშნული რეალურად
არსებული საგნების ისეთი მარტივი კონკრეტული ღონისძიებები, რომე-
ლთა გამომდინარე აქსიომებიდან არ აწარმოებენ (მოკიდრთი მაგა-
ნი კი არც გამოიყენებენ აქსიომებიდან). ამასთანავე საკითხი
აქსიომების სინთეზის შესახებ გადამწყვეტილი როლსა და ასევე
რად აგებული მიყვანიერება დაფუძნებული არაა.

აქსიომური მეთოდი თავის განვითარების შემდგომი საფეხურზე
წარმოადგენს იმ ძირითად არხს, რომელითაც სიმრავლეთა თეორია იჭ-
რება მათემატიკის სხვადასხვა დარგებსა და რიც სხვა მიყვანიერე-
ბებში.

მაგალითისათვის განვიხილოთ ჯგუფთა თეორია, რომელიც აქ-
სიომური მეთოდის განვითარების მეორე საფეხურის შესაბამისი თე-
ორიის წარმოდგენს.

ქ გ უ ჟ დ არის G სიმრავლე, რომელშიც მოცემულია გამ-
რავლების ოპერაცია " · " — ე. ი. G სიმრავლის ყოველი ორი α და β
2. მ. გუბაყაძე

ჯეგუნიშვილი უნდა იქნას გვეთქვას $a \cdot b$ ან ab , რომელსაც
 ამ ჩვეულების დამრეკი უნდა იქნას, და, ამასთანავე,
 ეს ჩვეულება აქვს ყველგან: $a \cdot b$. a და b აქვს იგივე:

$$1. (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

$$2. G - \text{ში არსებობს მარცხენა ერთეული } e, \text{ ა. ი.}$$

ისეთი ჯეგუნიშვილი e , რომ $e \cdot a = a$ ყველ $a \in G$ ჯეგუნიშვილისათვის.

$$3. G \text{ სიმრავლის ყველ } a \text{ ჯეგუნიშვილისათვის არსებო-}$$

$$\text{ბს } a^{-1}. \text{ მარცხენა შებრუნებული ჯეგუნიშვილი, ა. ი. ისეთი ჯეგუნიშვილი}$$

$$a^{-1}, \text{ რომ } a^{-1} \cdot a = e.$$

ამის შემდეგ აქვს იგივემეცა დაყრდნობით მტკიცება ჯეგუნიშ-
 ვი, რომელსაც უნდა იქნას a და b ჯეგუნიშვილისათვის. მიღებული ჯე-
 გუნიშვილის ძალა აქვს არა მარტო უნდა იქნას რომელიმე კონკრეტული ჯეგუნი-
 შვილის, არამედ ყველ სიმრავლისათვის, რომელიც a და b ჯეგუნიშ-
 ვიდან რომელიმე ჩვეულების მიმართ.

ჯეგუნიშვილის მატალიცები:

$$1. \text{ მთელი რიცხვით სიმრავლე შეკრების მიმართ (ჯეგუნიშვილის}$$

$$\text{როგორც გამოვიყენოთ } 0, \text{ მთელი } n \text{ რიცხვის შებრუნებული როგორც კი}$$

$$-n).$$

$$2. \text{ რაციონალური რიცხვით სიმრავლე შეკრების მიმართ.}$$

$$3. \text{ რაციონალური რიცხვით სიმრავლედან ნებისმიერ შემთხვევაში მი-}$$

$$\text{ღებული სიმრავლე (რეკურსიული) გამოვლინების მიმართ.}$$

$$4. \text{ ნამდვილი რიცხვით სიმრავლე შეკრების მიმართ.}$$

$$5. n \text{ რიცხვის რეკურსიული ნამდვილის სიმრავლე გამოვლინების მი-}$$

$$\text{მართ.}$$

$$6. n - \text{განზომილებიანი ვექტორის სივრცის ვექტორთა სიმრავ-}$$

$$\text{ლე შეკრების მიმართ.}$$

$$7. n - \text{განზომილებიანი ვექტორის } R^n \text{ სივრცე კომპონენტ-}$$

$$\text{თა მიხედვით განსაზღვრული ვექტორის მიმართ.}$$

ეს სია შესაძლოა ძლიერ იქნეს გაფართოებული.

რეზიუმე ღონისძიების მიზნობრივ მიმართულებით დაგეგმილ სამუშაო-
ებთან დაკავშირებით ყველა ჩამომავალი შემთხვევაშიც და სხვა მრავალ
შემთხვევაში.

ამრიგად, აქტიური მიმართვის განხორციელების მიზნად საფუძვლად
ის უნდადგას აქტიური ღონისძიების დასაწყისში მ რ ა ვ ა ლ ი
მ ნ ი მ ე ვ ნ ე ლ ი ა აქვს. ეს უნდასაყრდენი დანერგულია მა-
თემატიკის ძირითადი დამახასიათებელი ნიშანია. აქ უკვე საკითხი
აქტიურობის სისწორის შესახებ მოხსენიება და შეცნობა უფრო
დაფუძნებულია.

აქტიური მიმართვის განხორციელების შესაძლო საფუძვლიან დაკავ-
შირებულია ფორმალური ღონისძიების წარმომადგენელთან, სადაც ყოველ
მრავალსახეობა უნდაღეს საფუძვლიანად აყვანილი.

შევჩვენოთ ისევე სიმართლის ცნება.

სიმართლის ცნების დადგენა არ შეიძლება ნებისმიერად.
ანგარიში უნდა გაქნეს მთელი მათემატიკური არაქცეპტის — იმის ზე-
რეაქტიული იმართებად რეგულირებული "სიმართლა". კერძოდ, სიმართ-
ლის ცნება ისე უნდა იქნეს დადგენილი, რომ შესაძლებელი შემდეგი
მოხსენებები:

1'. ყოველი სიმართლა ცალსახად განსაზღვრავს საცნებო, რე-
მედიაციამ ს ი მ რ ა ვ ა ლ ი ს ე ლ ე მ ე ვ ნ ე ლ ი ა ნერგ-
ება. ამასთანავე, ყოველი სიმართლა ცალსახად ისაზღვრება მისი
ელემენტებით იმ აზრით, რომ ზე არსებობს ისევე სიმართლა, რომლის
ელემენტებია მხოლოდ და მხოლოდ მოცემული საგანთა ურთიერთობად
აღებული საცნებო, მაშინ ასევე სიმართლა უნდადგეს.

2'. ზე არს სიმართლა ან რაიმე სიმართლის ელემენტი,
მაშინ არსებობს სიმართლა, რომლის უნდადგეს ელემენტი არის $\mathcal{A}$
(ასევე სიმართლა $\{\mathcal{A}\}$ — იმ აღნიშვნა).

ჩვენ ვივარაუდებთ, რომ სიმართლის ცნება დადგენილია
ისე, რომ თითოეული სიმართლა შეიძენილია ელემენტებისაგან და

ჩვენ გავეცნობით სიმრავლის ცნების მონათესავე — კლასის ცნებას, რომლისთვისაც შესრულებული იქნება I' მოახლოების სრული ანალოგი. ზუ $\mathcal{X}$ ცვლადია, E კი — სიმრავლე, შესაბამისად კლასი, რომლის ელემენტებია მხოლოდ $\mathcal{X}$ -ის მნიშვნელობათა არეალ ალგებრი სტრუქტურა, მაშინ E -ს აგრეთვე უწოდებენ $\mathcal{X}$ ცვლადის მნიშვნელობების სიმრავლეს. მეტი სიჭრუჭისათვის, E -ს უწოდებენ აგრეთვე $\mathcal{X}$ ცვლადის მნიშვნელობების სიმრავლეს, შესაბამისად $\mathcal{X}$ ცვლადის მნიშვნელობების სიმრავლეს.

გაუვათ $\mathcal{X}$ არის ცვლადი და $P(\mathcal{X})$ არის ურთაქრობი $\mathcal{X}$ ცვლადის შემცველი წინადადება. მაშინ $P(\mathcal{X})$ იქნება $\mathcal{X}$ ცვლადის მნიშვნელობათა რამდენიმე წინადადება. $P(\mathcal{X})$ -ით აღვნიშნოთ წინადადება, რომელიც მიიღება $P(\mathcal{X})$ -დან ზუ მასში $\mathcal{X}$ -ის ღვინუ-ღვინუ შემოსვლების ნაცვლად ჩავსვამთ $\mathcal{X}_0$ -ს. ვიცუვისხმით, რომ $\mathcal{X}$ -ის ღვინუ $\mathcal{X}_0$ მნიშვნელობისათვის $P(\mathcal{X}_0)$ წინადადება ან ჭეშმარიტია ან მცდარი და არ არის ურთაქრობი ჭეშმარიტის და მცდარის (ე.ი. $P(\mathcal{X})$ წინადადება აკმაყოფილებს მესამის გამოჩინების კანონს და წინააღმდეგობის კანონს). მაშინ $P(\mathcal{X})$ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ღვინუ $\mathcal{X}$ -ის მიმართ. ეს ღვინუ სიმართლისათვის აღვნიშნოთ აგრეთვე P -ით. ცხადია, " $\mathcal{X}_0$ ს ატ-ანს (ე.ი. საგანს, რომელიც აღვნიშნეთ $\mathcal{X}_0$ -ით) ატ-ანს P ღვინუ $\mathcal{X}$ " ნიშნავს იმას, რომ $P(\mathcal{X}_0)$ არის ჭეშმარიტი წინადადება. $\mathcal{X}$ ცვლადის მნიშვნელობათა რამდენიმე $P_1(\mathcal{X})$ და $P_2(\mathcal{X})$ წინადადებაებს უწოდებთ ღვინუ (წერენ " $P_1(\mathcal{X}) \Leftrightarrow P_2(\mathcal{X})$ ", რაც იკითხება " $P_1(\mathcal{X})$ ღვინუ $P_2(\mathcal{X})$ -ის "), ზუ $\mathcal{X}$ -ის ღვინუ $\mathcal{X}_0$ მნიშვნელობისათვის $P_1(\mathcal{X}_0)$ და $P_2(\mathcal{X}_0)$ წინადადებაები ორივე ჭეშმარიტია ან ორივე მცდარია (ვტულისხმობთ, რომ $P_1(\mathcal{X})$ და $P_2(\mathcal{X})$ წინადადებაებისათვის შესრულებულია მესამის გამოჩინების კანონი და წინააღმდეგობის კანონი).

გეომეტრიის (გ.გ. კლასიკური) მათემატიკის სიმრავლეებისა-
მი წყვეტილი I' მოხსენიების სრული ანალიზი).

ახლა დავამტკიცოთ ისეთი კლასის არსებობა, რომელიც სიმ-
რავლეს არ წარმოადგენს.

საბერძნობა, დავამტკიცოთ რომ სიმრავლეს არ წარმოადგენს
 $K[P(x)]$ კლასი, სადა $P(x)$ არის შემიძლია წინადადება: " x
არის სიმრავლე, ამასთანავე ისეთი, რომელიც თავისთავს რეგულ-
არულად არ შეიცავს".

უკანასკნელი წინადადების დამტკიცების მიზნით დავუშვათ
წინააღმდეგი, გ.გ. რომ $K[P(x)]$ არის სიმრავლე და წინააღმდეგო-
ბის მიღების მიზნით დავამტკიცოთ

$$K[P(x)] \in K[P(x)] \quad \text{და} \quad K[P(x)] \notin K[P(x)]. \quad (1)$$

$K[P(x)] \in K[P(x)]$ წინადადების დამტკიცების მიზნით დავუშვათ
წინააღმდეგი, გ.გ. დავუშვათ, რომ

$$K[P(x)] \in K[P(x)] \quad (2)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $K[P(x)]$ სიმრავლეს აქვს $P(x)$
თვისება და, მაშასადამე,

$$K[P(x)] \in K[P(x)]. \quad (3)$$

ამრიგად მივიღეთ წინააღმდეგობა (2) და (3) წინადადებასა სა-
ხით. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ $K[P(x)] \notin K[P(x)]$.

$K[P(x)] \notin K[P(x)]$ წინადადების დამტკიცების მიზნით დავუშვათ
წინააღმდეგი, გ.გ. დავუშვათ, რომ

$$K[P(x)] \in K[P(x)]. \quad (4)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $K[P(x)]$ სიმრავლეს არ აქვს $P(x)$
თვისება და, მაშასადამე,

$$K[P(x)] \notin K[P(x)]. \quad (5)$$

ამრიგად მივიღეთ წინააღმდეგობა (4) და (5) წინადადებაებს სახ-
ით. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ $K[P(x)] \in K[R(x)]$.

ამრიგად დამტკიცდა (1), რაც წინააღმდეგობას წარმოად-
გენს. ეს წინააღმდეგობა ამტკიცებს იმას, რომ $P(x)$ ღვინების
მქონე საგანთა კლასი არაა სიმრავლე.

დამტკიცებული წინადადება უარყოფს სიმრავლეთა ღვინის
ქმედების კანონის პრინციპს, რომლიდანაც გამომდინარეობს, რომ
წებისმიერ $P(x)$ ღვინების მქონე საგანთა (ელემენტთა) კლასი სიმ-
რავლა (მხედველობაშია კანონის მიერ სიმრავლის ცნების შემდე-
გი განსაზღვრა: "სიმრავლე არის ჩვენი აღქმებიდან და ატარებს
აღებული ურთიანთისაგან სავსებით გამოსარჩევნ კომპლექტების წები-
სმიერი გაერთიანება ურთ მთელად").

ამრიგად, ზოგიერთი $P(x)$ ღვინების მქონე საგანთა (ელემენ-
ტთა) კლასი არ არის სიმრავლე. ამასთანავე, ცხადია, წებისმიერი
 A სიმრავლე არის $x \in A$ ღვინების მქონე საგანთა კლასი. ე.ი.
ღვინებით განსაზღვრული კლასის ცნება უფრო ზოგადი ცნებაა, ვიდრე
სიმრავლის ცნება. მაშასადამე, სიმრავლის ცნებასთან ურთაპირა
განხილვით იქნეს მისი ნიშანდობაზე უფრო ზოგადი ცნება, სახელგანთ,
კ ლ ა ს ი ს ც ნ ე ბ ა .

ისეთ კლასს, რომელიც სიმრავლეს არ წარმოადგენს ვუწოდოთ
მ ე ს ი მ რ ა ვ ლ ე . კლასის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს,
რომ ზესიმრავლეები არ არიან ელემენტები.

შენიშვნა. სიმრავლეთა ღვინის აქსიომებიდან გამომდინარე-
ობს, რომ ზესიმრავლეები სიმრავლეებთან შედარებით მუდამ
მცირეა არიან ელემენტებით (ამ წინადადების ზუსტი ატრიბუცია-
მყოფა წინ-ის პირველი პუნქტის ბოლოში მოყვანილ შენიშვნაში).

ქვემოთ ჭრები "საგანი" უმეტესად გამოყენებული იქნება
შემდეგი ატრიბუცია. ს ა გ ა ნ ი არის იდენტიკობისა და კლასების
საერთო სახელწოდება (კერძოდ, სიმრავლეები საგნებს წარმოადგენენ).

აღნიშნული ჭერმიწინის ორი აბრეშ ხმარებასთან დაკავშირებით გაუ-
გებრთბაა წარმოშობის მათიდან აცოლებას უმრუნველყოფს კონტეპლტი.

სიმრავლეთა ღორონის აქსოომეზიდან გამომდინარეობს, რომ არ-
სებობს ელემენტთა მიმდევრობები და ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე
 $\mathcal{N}$ და ამ ღორონის ნებისმიერ $P(X)$ ღვისებისათვის, სადაც X ელ-
ემენტური ცვლადია, არსებობს $P(X)$ ღვისების მქონე ელემენტთა კლასი
(ღორონის ღვისება მიიღება ღორონის წინადადების—ფორმულის ნე-
ბისმიერად ცვლადის მიმართ ღვისებად განხილვის შედეგად). ქვემოთ
ამ ფაქტით ხშირად ვსარგებლობ სპეციალური მიმთხვევის გარეშე.

§2. ზოგადი შენიშვნები შენაარსული ღორონების შესახებ

1. S_1, S და S_0 ღორონები ნებისმიერი $\mathcal{S}$ ნ ა ა რ-
ს უ ღ ი ღ ე რ ი ა (კრძალ ნებისმიერი $\mathcal{S}$ ნ ა ა რ ს უ ღ ი
მ ა ღ ე მ ა ღ ი კ უ რ ი ღ ე რ ი ა) შეესაბამება გარკვეუ-
ლი კატეგორიის ს ა გ ე ე ბ ს, ამ საგნებთან დაკავშირებულ
განსაზღვრულ $\mathcal{K}$ ნ ე ე ე ე ბ ს და ამ საგნებისა და ობიექტე-
ბის შესახებ $\mathcal{S}$ ნ ა პ ა პ ე ბ ა ღ ა განსაზღვრულ ს ი ს -
გ ე მ ა ს. ხსენებული საგნები შეადგენენ ე.წ. ს ა გ ა ნ ღ ა
 $\mathcal{K}$ ა რ ე ს ($\mathcal{K}$ კრძალ შემთხვევაში შეიძლება იყოს კლასი),
ობიექტებში კი შეადგენენ $\mathcal{K}$ ნ ე ე ე ღ ა ა რ ე ს. ობიექტთა
არე ყოველღვის შეიცავს საგანთა არეს და უფრო ფართოა, ვიდრე
საგანთა არე. ობიექტისა და საგნის ცნებები მხოლოდ პირობითაა
განსხვავებულიან ერთმანეთისაგან: გარკვეული კატეგორიის საგნები,
რომლებიც შეადგენენ საგანთა $\mathcal{K}$ არეს, გამოყოფილია ინტენსიური
შესაბამისათვის; შესაბამისი არცესში საჭირო ხდება $\mathcal{K}$ არესთან
შუნებრივად დაკავშირებული სხვა საგნების განხილვა, რომლებსაც
ეუწოდებო ობიექტებს $\mathcal{K}$ -დან აღებული ($\mathcal{C}$ ნ რ ი ღ ა პ ი) ს ა გ -
ნ ე ბ ი ს ა გ ა ნ განსახვავებლად.

მატალია, არიხმეფიკაში სატანა არე არის ნაჭურალურ რიყბ-
ჯმა სიბრავლე. ნაჭურალურ რიყბჯმა ქვესიბრავლეები, ნაჭურალურ
რიყბჯმა სიბრავლეზე ტანსაბღვრული მკერასიყვიბი $+$, $-$, $.$, $:$ და ბიბი-
რმეზები $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ და ა.ბ. ხსენებულ სატანა არესთან ბუ-
ნებრიყა დაყავბირებული რბიყეჭებია.

ბიყიხბიყმა, რიბ ბინაარსული ჟორიის ბინადატება სიხევიის
ხიხეული ბინადატება აყმაყოფილეებეს ბ ე ს ა ბ ი ს ტ ა ბ რ-
ი ი ყ ბ ე ი ს კ ა ნ რ ს და ბ ი ნ ა ა ზ ბ ე ე ტ რ ბ ა-
ხ ა კ ა ნ რ ს. ეს კანონები, რიგორე ვიყიხ, გულიხბიბის,
რიბ ტანხილული კლასის ხიხეული ბინადატება ან ჟებმარჩიყა ან
ბეყარი და არ ბეიძლება იყოს ერმარყლაპ ბეყარეყ და ჟებმარჩი-
ჭიყ.

რიბ ბეეძლეა ჩავბეროხ, ბესაბამისაპ ბარბიყექვახ, ესა ჟუ
ის ბინადატება ბიყვიული ბინაარსული ჟორიის ბინადატებაჟა კლ-
სიდან ან აღენიბნოხ, ბესაბამისაპ დაყსახელოხ, ბიყვიული ბინა-
არსული ჟორიის ესა ჟუ ის რბიყეჭი საჭიროა გეექნეს სიბილოებში,
ბესაბამისაპ სახელებში, რიბილებიყ უბუალოპ ან რიბილეა კიბბინაყი-
ებში ტარკევეული ბესების ბიხეევიოხ აღენიბნავენ (ბეროხ ბეჭყეველება-
ბი, ბესაბამისაპ ბევირ ბეჭყეველებაბი) ბიყვიული ბინაარსული ჟო-
რიის ბინადატებებსა და რბიყეჭებს. ერმანეხთან ტავაბიევიებო ბი-
ყვიული რბიყეჭის აღენიბენას და სახელს და ძირიხადაპ ტავამახვი-
ლებო გურაპილებას რბიყეჭმა აღენიბენებზე.

აღენიბნულის ბესაბამისაპ ყოველ ბინაარსულ ჟორიას აქვს
სიბილოოხ საყვებიოხ ტანსაბღვრული სიხევია, რიბიელსაყ ამ ჟ რ-
ი ი ი ს ა ლ ჟ ა ბ ე ე ტ ი ენოებია.

ბინაარსული ჟორიის ჟებმარჩიჭ ბინადატებაჟა კლასს უბო-
ებენ " ჟ ე ბ ი ა რ ი ჭ ს", ბეყარ ბინადატებაჟა კლასს უბო-
ებენ " ბ ი პ ა რ ს" და ამ რ კლასს ტანიხილავენ რიგორე
ბინაარსულ ჟორიის რბიყეჭებს. ამ რბიყეჭებს ბესაბამისაპ $\dagger$ და

მკურნალობის სპეციალურად მიუთითებს იმას, რომ მისი მკურნალები
 ჭერებშია (ე.ი. გამოსახლებულია). მკურნალობის რეალური
 მიუთითებს იმას, რომ მისი გამოყენების შედეგად ვლუტოლზე ფორ-
 მილას. მკურნალობის სუბსტანციური მიუთითებს იმას, რომ მისი
 გამოყენების შედეგად ვლუტოლზე ჭერის. აღნიშნულის გაგებას
 ნების, მიიჩნევენ რა საცნობარო ასობის უმარტივეს ჭერებზე და
 არაპრობლემა ასობის უმარტივეს ფორმულაზე, ჩვეულებრივ მათემა-
 ტიკაში ცნობილი ხერხების დახმარებით აძენენ S_1 ღეროების ფორ-
 მილებსა და ჭერებს (ამ ცნებაში ღუსტ განსაზღვრას მალე ვნა-
 ხავთ).

საცნობარო კონსტანტებისა და საცნობარო ცვლადების საე-
 რთო სახელწოდებაა $s, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$. ასევე,
 არაპრობლემა კონსტანტებისა და არაპრობლემა ცვლადების საერთო
 სახელწოდებაა $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$.
 $s, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ არის ნამდვირი
 ცვლადი, რომლის მნიშვნელობაა არაა სასრულო ნამდვირი რიც-
 ხა $\mathbb{R}$ სიმრავლე, $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$
 არის ცვლადი, რომლის მნიშვნელობაა არა არის $\{t, f\}$ სიმრავლე.
 მათემატიკის საცნობარო კონსტანტა აღნიშნავს $\mathbb{R}$ საცნობარო არის
 განსაზღვრული ელემენტის. $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$
 t, f და $\{t, f\}$, როგორც ვიცით, შესაბამისად აღნიშნავენ
 ქვიშარის მნიშვნელობებს "ქვიშარისა" და "მცირე". მრავალ-
 ანაკონსტანტა-არეობისა და ფუნქციონალური კონსტანტების
 მონაარსი მკითხველმა იცის საშუალო სკოლის კურსიდან. x, y, z
 $s, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ არის ცვლადი, რომლის მნიშვნელობაა არაა
 $\mathbb{R}$ ნამდვირი ცვლადის ნამდვირი ფუნქციაა კლასი ანუ ნამდვირი
 ცვლადის $\mathbb{R}$ -აგრიდან ნამდვირი ფუნქციაა კლასი. როგორც ვიცით-
 რებისა და მკურნალობის ნიშნების მონაარსს ქვიშარა გავეცნობით.

[illegible]

1. **პროპოზიციური ასო ანის ფორმულა.**

2. **ԵԱԿՈՅԻԿՈՒՄ ԿՍԻՍ ԿՐԻՍՏՈՍ.**

3. $\mathcal{A}$ არის n -აგვილიანი სპეციალური, ბესაბამისად
 ლოკალური, მკერდადური, $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ -ი არიან ტერმინი, ბესაბამი-
 სად ფორმულები, მაშინ $[\mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_n]$ არის ფორმულა ან ტერმინი იმი-
 სად მიხედვით $\mathcal{A}$ რეკურსიურად $\mathcal{A}$ სუბსტიტუირი.

4. *Ա* արհեստագործական, արհեստագործական, արհեստական ընդհանուր մասին, որպես ընդհանուր մասին 1-3 հոդով ընդհանուր:

[illegible][illegible]

უზნოებში. უბრალოდ აგრეთვე ფორმის სხვა გამარტივებული სახეები.

მაგალითები. x, x_1, x_2, p, q, q_1 არიან უმარტივესი ფორმები, ამასთანავე, პირველი სამი უმარტივესი ჭერებია, მომდევნო სამი კი უმარტივესი ფორმებია.

$$[x+y], [x+y]c, [(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p_1 \wedge q_2)]$$

არიან არაუმარტივესი ფორმები. ამასთანავე, მესამე არის გამარტივებული სახით ჩანერგილი ფორმულა. პირველი ორი არის ჭერები. ისინი გამარტივებული სახით შემდეგნაირად ჩაიწერებოდა:

$[x+y], [(x+y) \cdot c]$. ამ ფორმათა შემდგომი გამარტივებული სახეებია $x+y, (x+y) \cdot c$. ასევე, $\sqrt{x}$ და $\log x$ უნდა განვიხილო როგორც $[\sqrt{x}]$ და $[\log x]$ ფორმების გამარტივებული სახეები.

საკარგი. S_1 ლოგიკის ფორმალური შეიძლება გამოვყოფოთ სტრუქტურისამებრ ყველა ამ ლოგიკურ ფორმალურ წყვილ ფორმალურ წყვილების აღმართის შემდეგი მარტივი წესის საფუძველზე: "ფორმალური უნდა ჩავამატო ის, რომ მიღებული სიტყვა ფორმა იყოს". (პამფლეტი).

იმისათვის რომ დამავარდეს S_1 ლოგიკის აგება საჭიროა შემოვიღოთ იქნეს ლოგიკის ცნება. ეს ქვემოთ იქნება გაკეთებული.

შენიშვნა. როგორც ვხედავთ მინარსულ მათემატიკურ S_1 ლოგიკას გააჩნია ლოგიკის საკუთარი ენა. მას მ ა მ ე მ ა ტ ი კ ე ნ ე ნ ე ა ეწოდება. ნებისმიერი მათემატიკური ლოგიკა, კერძოდ ნებისმიერი მათემატიკური ლოგიკის ენა, როგორც წესი შეიძლება ჩვეულებრივ ენაში. ამ უკანასკნელ ენას მათემატიკური ენისა-გან განსახლებად, გ ა რ ე მ ე ნ ე ა ს ანუ მ ე ტ ა ე ნ ა ს უწოდებენ. ჩვენ შემთხვევაში მეტაენის როლი გამოიყენება (მეტაენ-ი მათემატიკური ინტერპრეტის კანონი და სხვა). იმისათვის

არე შეიყავს ს ი მ რ ა ვ ე ე ბ ს. სიმრავლეებისა და ინდი-
ვიდუალური სახეობებისა ე ე ბ ი ე ნ ზ ი.

ს ჯოგის ალგებრა შედგება შემდეგი სიმბოლოებისაგან.

1. $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$ (ე ე ბ ა ს უ რ ი ე ე ე ა ე ე-
ბ ი).

2. $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots$ (ე ე ბ ი ე ნ ზ უ რ ი
ე ე ე ა ე ე ბ ი)

3. $\in, =$ (ძ ი რ ი მ ა ე ი მ რ ა ე ე ი ე ი ა-
ნ ი ე რ ნ ს ზ ა ნ ზ ა - ე რ ე ი ე ა ზ ე ბ ი)

გარდა ამისა ალგებრა შეიყავს S_1 ჯოგის 6-11 პუნ-
ქტებში მოცემულ სიმბოლოებს.

კლასური ცვლადებისა და ელემენტური ცვლადების სახეობ
სახეობებისა ს ა ე ნ ი ბ რ ი ე ი ე ე ე ა ე ე ბ ი .

ს ჯოგის სხვადასხვა ჭიკის მკვლევარების ცნება
ისევე ისაზღვრება, როგორც S_1 ჯოგისაში. იგივე იმების ჭრების,
ჭრების, ჭრების ცნებებზე და ამ ცნებებთან დაკავშირებულ ცნებე-
ბზე.

ყველა ინდივიდუალური კლასი აღინიშნება J ასოთ, ყველა
სიმრავლეს კლასი აღინიშნება M ასოთ. ყველა ელემენტური
კლასი აღინიშნება E ასოთ. E -ს ენიშნება აგრეთვე ე ნ-
ე ე რ ს ა ე უ რ ი ე ე ა ს ი. θ -იმ ან θ -იმ აღინიშნება
ე.წ. ე ა რ ი ე ე ი ე ე ა ს ი, ე.წ. ისევე კლასი, რომელსაც
ელემენტური არ ექვს.

S_0 ჯოგის, განსაზღვრით, არის S ჯოგის ის კლასი
შემხვევა, როცა საგანმა არე არ შეიყავს ინდივიდუალურს. S_0 ჯო-
გის საგნის ცნება შემხვევა კლასის ცნებას და ელემენტის ცნე-
ბა შემხვევა სიმრავლის ცნებას. ამიტომ S_0 ჯოგისაში ნაცვლად
ჭრებისა "ელემენტური ცვლადი" შევიძლება ვისაზღვროთ ჭრები-
ნით "სიმრავლური ცვლადი". შევნიშნოთ, რომ S_0 ჯოგის საფუძვე-

ღმე შვიდღება აიგოს ღანაშეძრუე მადემატვის არსებობი ნაწილი.

ქვემოთ ჭერმინი "ს ი მ რ ა ვ ე ე ზ ა ზ ე რ ი ა"
აღნიშნავს ნებისმიერს S და S_0 ჯორიგებიან, იქ სადაც საწინა-
აღმდეგო არ გამოიძინარეობს კონტეპსტიკი.

ქვემოთ განსაზღვრებათა ჭრმულერებისას, სადაც არაა მიმ-
ება და არც კონტეპსტიკიან გამოიძინარეობს ზე რმელი ჯორიან
მხედველობაში, მკიხველია მხედველობაში უნდა იქონიოს მთლიური
 S_1 , S და S_0 ჯორიგებიან. კერძო, S_1 , S და S_0 ჯორიანთა
განსაზღვრის რასრულები მობნიო ამ ჯორიანთა ზ ე რ ი ე მ ი ს
ენება ჯრთი განსაზღვრიო შვიმოგანება.

სიმბოლოს, რმელიც აღნიშნავს განსაზღვრულ საგანს მოცემულ
საგანთა ჯრთიგობიან, ძ ი რ ი ზ ა რ ი კ რ ს ტ ა ნ ტ ა
ენიება. გემოთ ცვლირის ენებათაან რკავშირებოთ შვიმოგანელი
ენებების სრული ანალოგები იმავე გზოთ ისაზღვრება ძირითადი კონ-
სტანტის შემხვევაში, ასე მაგალითად, შვიდღება ვილაპარაკოთ ძ ი-
რ ი ზ ა რ ი კ რ ს ტ ა ნ ტ ი ს მ ი ნ ი შ ე ე ე ე ე ე ზ ა ზ ა
ა რ ე ე ე, ძ ი რ ი ზ ა რ ი კ რ ს ტ ა ნ ტ ი ს მ ი ნ ი შ ე-
ე ე ე ე ე ე ე, ნ ა მ ი ე ე ე (ძ ი რ ი ზ ა რ) კ რ ს ტ ა ნ-
ტ ა ე ე ე რ ა. შ. ძირითადი კონსტანტის მინიშნელობა შვიდღება
ეხადარ (კონკრეტული) არ იყოს მიმთხვეული. ძირითადი კონსტანტის
ჯუნიოთ ს ა კ უ ზ რ ი ე ი კ რ ს ტ ა ნ ტ ა ა ნ ა რ ა ს ა-
კ უ ზ რ ი ე ი კ რ ს ტ ა ნ ტ ა იმისდა მიხედვით მისი
მინიშნელობათა არე ჯრთადრთი რბიეჭისაგან შერეება ზე არა.

როგორც ვხედავთ, ძირითადი კონსტანტის მოცემა გულისხმობს
მისი მინიშნელობის მოცემას (ზემეა შესაძლოა, ეს მინიშნელობა
ეხადარ არ იყოს მიმთხვეული), ცვლირის მოცემა კი არ გულისხმობს
მისი მინიშნელობის მოცემას (მას შვიდღება მივცეთ ნებისმიერი
მინიშნელობა მისი მინიშნელობათა არეგან).

ცვლადისა და ძირითადი კონსტანტის მოჭანოლი განსაზღვრებები აღწერილობითი ხასიათისაა. ამიტომ საჭიროა ამ ცნებათა შენაარსის შემდგომი დაზუსტება დამატებითი მოხსოვნებით, მათ შენაარსს არსებითად განსაზღვრავს ის მეოთხედი, რომელთა საფუძველზე წარმოებს მათი გამოყენება.

ცვლადისა და ძირითადი კონსტანტებს შორის არსებული განსხვავებას განაპირობებს შემდეგი მოხსოვნა. ცვლადის შემცველი ფორმულის ჭეშმარიტობა ნიშნავს მის ჭეშმარიტობას ცვლადის მნიშვნელობათა ყოველი სისტემისათვის. ისეთი ფორმულის ჭეშმარიტობა კი, რომელიც ცვლადს არ შეიცავს, ნიშნავს მხოლოდ ერთ ნინადადების ჭეშმარიტობას (მაშინაც, როცა ამ ფორმულაში მცოდნე ძირითადი კონსტანტების მნიშვნელობები კონკრეტულად მიითვლებული არ არიან და, მაშასადამე, ჭეშმარიტად მიჩნეული ნინადადება მითითებული არ არის კონკრეტულად).

ხშირად ნაცვლად ჭერმინისა "ძირითადი კონსტანტა", სიმართვისათვის, გამოვიყენებთ ჭერმინს "კონსტანტა", თუ არაა გაუგებრობათა წარმოშობის საშიშროება.

2. ფორმის ცნებასთან დაკავშირებული ზოგიერთი ძირითადი ცნებები. (მოცემული ჯგუფის აღმადგენი) $\mathcal{B}$ სიტყვას $\mathcal{A}$ სიტყვაში შეიძლება ექნეს ნული ან რამდენიმე $\mathcal{B}$ ე მ ი ს ე ლ ა.

მაგალითი. $[p \rightarrow q]$ სიტყვას

$$[[[p \wedge [p \rightarrow q]] \vee q_1] \leftrightarrow [[p \rightarrow q] \rightarrow q]]$$

სიტყვაში აქვს ორი შემოსვლა, pp სიტყვას კი $ppppppppqqpp$ სიტყვაში აქვს შვიდი შემოსვლა. უკანასკნელი სიტყვის შესამე და მეოთხე ნვერი შეადგენს pp სიტყვის შესამე შემოსვლას.

ვიპოვოთ ხმებთ, რომ ცარიელი სიტყვას n სიგრძის მეორე სიტყვაში აქვს $n+1$ შემოსვლა: თუ $n > 0$, მაშინ პირველი შემოსვლა "წინ უსწრებს" პირველ სიმბოლოს, მეორე შემოსვლა არის პირველი სიმბოლოს "ნომრევენი" და "წინ უსწრებს" მეორე სიმბოლოს და ა.შ.

$\mathcal{A}$ სიფყვაში რიმილიმი სიფყვის რაიმე შუმიხვალს ეწოდება
 $\mathcal{A}$ ს ი ფ ყ ვ ა შ ი ნ ა წ ი ლ ი; $\mathcal{A}$ სიფყვისა და ცარიელი სი-
 ფყვის შუმიხვლებს $\mathcal{A}$ სიფყვაში ეწოდება $\mathcal{A}$ ს ი ფ ყ ვ ა შ ი
 ა რ ა ს ა ვ უ ზ რ ი ვ ი ნ ა წ ი ლ ე ბ ი, პანარქენ ნაწი-
 ლებს ეი — $\mathcal{A}$ ს ი ფ ყ ვ ა შ ი ს ა ვ უ ზ რ ი ვ ი ნ ა წ ი -
 ლ ე ბ ი. სიფყვის ნაწილი სიფყვას არ წარმოადგენს, მაგრამ სა-
 ჭიროვების შუმიხვებაში იგი ყოველთვის შეგვიძლია განვიხილოთ რი-
 გორე სიფყვა. $\mathcal{A}$ სიფყვის რიგი სხვადასხვა ნაწილი, განხილული რი-
 გორე სიფყვები, შეიძლება ერთი და იგივენი იყოს. $\mathcal{A}$ ფ რ მ -
 ი ს ნ ა წ ი ლ ი ეწოდება $\mathcal{A}$ სიფყვის ისე და მხოლოდ
 ისე ნაწილს, რომელიც არაა რიგარტორული ასე და ამასთანავე, გა-
 ნხილული რიგორე სიფყვა, ფორმას წარმოადგენს. $\mathcal{A}$ -ს ეწოდება
 $\mathcal{A}$ ფ რ მ ი ს ა რ ა ს ა ვ უ ზ რ ი ვ ი ნ ა წ ი ლ ი,
 პანარქენ ნაწილს ეი — $\mathcal{A}$ ფ რ მ ი ს ს ა ვ უ ზ რ ი ვ ი
 ნ ა წ ი ლ ე ბ ი. ფორმასთან დაკავშირებული ყნებში ბუნებრი-
 ვად გამოიყენება ფორმის ნაწილები საფის (განვიხილოთ რა ფორ-
 მის ნაწილებს რიგორე ფორმებს) და აგრეთვე ფორმულები და ჭერ-
 მების საფის. მაგალითად, შეიძლება ვილაპარაკოთ მოცემული
 ფ რ მ ი უ ლ ი ს უ მ ა რ ფ ი ვ ა ს ნ ა წ ი ლ ე ბ ი,
 ს ა გ რ მ ბ რ ი ვ ნ ა წ ი ლ ე ბ ი და ა.შ. ცხადია, ფორ-
 მის ნაწილი, განხილული რიგორე სიფყვა, არ შეიძლება იყოს ცარიელი.

ვთქვათ $\mathcal{C}$ არის n -აგვილიანი რიგარტორის შუმიხვალ
 $\mathcal{A}$ ფორმაში. მაშინ $\mathcal{A}$ სიფყვაში $\mathcal{C}$ -ს წინ მარცხენა ფრჩხი-
 ლი და $\mathcal{A}$ სიფყვის ნაწილი, რომლის პირველი და უკანასკნელი ნე-
 ვრიცა ხსენებული მარცხენა ფრჩხილი და მისი შესაბამისი მარჯვენა
 ფრჩხილი, ერთადერთი გზით წარმოიპოვება სახით: $[\mathcal{C}\mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_n]$,
 სადაც $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ არიან ფორმები ($\mathcal{A}$ ფორმის ნაწილები). ამ
 შუმიხვებაში ამბობენ, რომ $\mathcal{C}$ რ ა ვ ა ფ რ ი ს (უფრო
 ბუნებრივად, რ ა ვ ა ფ რ ი ს შ ე მ ი ს ვ ლ ი ს) რ ა ვ -

[illegible]

ქვემოთ, ისევ რეგორც წინა აბზაცში, სიძარცვივისაღების ნაცვლად ჭერვივისა " წ კვერატორის შიშისვლა" ხშირად ვისარგებლებ ჭერვივის " წ კვერატორი". ვისარგებლებ აგრეთვე სხვა ანალოგიური გავარცხილებში. გაუგებრობათა თავიდან აცილებას უზრუნველყოფს კონტეინერი.

[illegible]

ბაბმული შემოსვლა. ცხადია, ურთი და იგივე ავლარი შემოძლება იყოს

А ფორმის მავისუფალი ავლარიც და ბაბმული ავლარიც.

მაგალითი. S_1 ჟორონის

$$[[\forall x[x+y=z]] \wedge [\exists y[3x-4y=z]]] \wedge [\forall x[\forall z[x=z]]]$$

ფორმის მავისუფალი ავლარებია y და z , ბაბმული ავლარები კი არიან x და y . ამასთანავე, x -ის უკანასკნელი ორი შემოსვლა ბაბმულია $\forall$ მკერაფორული ნიშნის შესამე შემოსვლის მიერ.

ფორმას უწოდება Π - ა რ უ ლ ი ფ ო რ მ ა, ჟე მისი მავისუფალი ავლარების რიცხვი არის Π . იმ შემთხვევაში, როცა $\Pi=1,2,3$ შესაბამისად იხმარება ჟერმინები: ს ი ნ ტ უ ლ ა - რ უ ლ ი ფ ო რ მ ა ანუ უ ნ ა რ უ ლ ი ფ ო რ მ ა, ბ ი ნ - ა რ უ ლ ი ფ ო რ მ ა, ტ ე რ ნ ა რ უ ლ ი ფ ო რ მ ა. ისე 0-არული ფორმას, რომელიც არაა ძირითადი კონსტანტა, უწოდებენ აგრეთვე შ ე დ ტ ე ნ ი ლ კ ო ნ ს ტ ა ნ ტ ა ს. ძირითადი კონსტანტებისა და შერეული კონსტანტების საერთო სახელწოდებაა კ ო ნ ს ტ ა ნ ტ ა. მეტი სიძუსტისათვის ფორმულების შემთხვევაში გამოიყენება აგრეთვე ჟერმინები "კ რ კ მ ბ ი ც ი უ ლ ი ფ ო რ მ ა", "კ რ კ კ მ ბ ი ც ი უ ლ ი შ ე დ ტ ე ნ ი ლ კ ო ნ ს ტ ა ნ ტ ა", "კ რ კ კ მ ბ ი ც ი უ ლ ი კ ო ნ ს - ტ ა ნ ტ ა", ჟერმინის შემთხვევაში კი სარგებლობენ ჟერმინებით: "ს ა ტ ნ მ ბ რ ი ვ ი ფ ო რ მ ა", "ს ა ტ ნ მ ბ რ ი ვ ი შ ე დ ტ ე ნ ი ლ კ ო ნ ს ტ ა ნ ტ ა", "ს ა ტ ნ მ ბ რ ი - ვ ი კ ო ნ ს ტ ა ნ ტ ა". პროპიოციული 0-არული ფორმას (კ.ი. პროპიოციული კონსტანტას) უწოდებენ აგრეთვე ნ ი ნ ა პ ა პ ე - ბ ა ს.

ვთქვათ, А არის ფორმა, $X_1, \dots, X_n$ არის ურთმანდისა- გან განსხვავებული ავლარები, რომელთა შორის იმყოფება А ფორ- მაში მყოფი ყველა მავისუფალი ავლარი. იმ შემთხვევაში, როცა ცნობილია А -ში მყოფი ყველა მკერაფორის შინაარსი, ჩვეულებ-

ნევთ საგანდა, მესაბამისაჲ ჟეშმარნტურ მნიშვნელოზაჲ, გაფართო-
 ებურ არეს. ამაჲსანაჲჲ ვიკულისხმებთ რთმ, მუ ალნიშნული ო
 ოპერატორის შინაარსი განსაბღვრულია გაუფართოებერ არეზე, მაშინ
 მისი შინაარსი გაფართოებერ არეში ისანღვრება მემდეგი პრინცი-
 პიზ.

განუბღვრელი მნიშვნელოებზე ოპერირების პრინციპი. ემქეაჲ,
 ო არის n -აგვილიანი მარტივი სპეკიალური, მესაბამისაჲ ო-
 გიკური, ოპერატორი, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ არიან სიმბოლოები (არ მოვითხოვთ,
 რთმ ისინი ერთმანუთისაგან განსხეევებოძენ), რთმეღაგან თითო-
 ეულის მნიშვნელოზა საგანი ან საგნობრივი განუბღვრელი მნიშვნე-
 ლოზა, მესაბამისაჲ ჟეშმარნტური მნიშვნელოზა ან განუბღვრელი
 ჟეშმარნტური მნიშვნელოზა. $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$ იყოს სიმბოლოზა ნებისმიე-
 რი ისეჲ მიმბეროზა, რთმ $\{1, 2, \dots, n\}$ -დან აღებურ თითოეული
 i - ჲის α'_i -ს მნიშვნელოზა არის საგანი, მესაბამისაჲ
 ჟეშმარნტური მნიშვნელოზა, და, იმ შემთხეეეაში როჲა α_i -ს გან-
 საბღვრელი მნიშვნელოზა აქვს, α_i და α'_i სიმბოლოების მნიშვნე-
 ლებში ერთი და იგიეეა. მუ ო $\alpha'_1 \dots \alpha'_n$ -ის მნიშვნელოზა
 არაა დამოკიეებური $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$ სისტემის არეეეაზე და იგი განსა-
 ბღვრურ მნიშვნელოზას ნარმოაგენს, მაშინ განსაბღვრით ო $\alpha_1 \dots \alpha_n$ -
 ის მნიშვნელოზა არის ო $\alpha'_1 \dots \alpha'_n$. შინააღმბეგ შემთხეეეაში ვი-
 კულისხმებთ, რთმ ო $\alpha_1 \dots \alpha_n$ -ის მნიშვნელოზა განუბღვრელია.

ამ პრინციპიდან გამომბინარეობს, რთმ S_1 ჲეორიის ნების-
 მიერი მარტივი სპეკიალური კონსტანტა-ოპერატორის გამოყენების
 მებეგი, როჲა მისი ოპერანბებიდან ერთი მაინე განუბღვრელია, არის
 საგნობრივი განუბღვრელი მნიშვნელოზა. ქეემოთ ენახეე, რთმ ანა-
 ლოგიური დასკენა არაა სწორი ჲოგიერთი ჲოგიკური ეეეშირის მემთ-
 ხეეეაში.

3. ლოგიკური ოპერატორთა თინაარსის განსაზღვრა. S_1, S და S_0 ლოგიკურებში (და აგრეთვე ნებისმიერ სხვა ლოგიკურებში) $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ ლოგიკური კავშირებისა და $\forall a, \exists a, \tau a$ სახის კვანძოების თინაარსი შემოეცნაიარა ისაზღვრება.

ჩვეულებრივ ენაში გამოიყენება კავშირები "არა", "და", "ან", "მე-მაშინ-", "კვითვალენჭურია". ასე მაგალითად, "თუ ნაკლებია 4-ზე" და "თუ მეტია 3-ზე" ნინადადებდინან აღნიშნული კავშირებით მიიღება ნინადადებები: "თუ ნაკლებია 4-ზე და თუ მეტია 3-ზე", "თუ ნაკლებია 4-ზე ან თუ მეტია 3-ზე", "მე თუ ნაკლებია 4-ზე, მაშინ თუ მეტია 3-ზე", "არა თუ ნაკლებია 4-ზე და თუ მეტია 3-ზე" და ა.შ.

ლოგიკური კავშირები ჩვეულებრივი ენის "არა", "ან", "და", "გამომდინარეობს", "კვითვალენჭურია" კავშირებს შეესაბამებინან და ძირითადად ამ კავშირების თინაარსს გამოხატავენ.

თქვათ, A და B მოცემული თინაარსული ლოგიკის ისეთი ნებისმიერი ლოგიკურებია, რომელთა ყველა ოპერატორის თინაარსი განსაზღვრულია. $X_1, \dots, X_n$ იყონ ერთმანეთისაგან განსხვავებული ცვლადები, რომელთა შორის იმყოფება A და B ლოგიკურებში მყოფი ყველა თავისუფალი ცვლადი. არ გამოვრიცხათ $n=0$ შემთხვევას, ე.ი. შემთხვევას, როცა A და B ნინადადებებს წარმოადგენენ.

$n \neq 0$ შემთხვევაშიც A და B ლოგიკურებს განვიხილავთ, როგორც ($X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მნიშვნელობათა სისტემაზე დამოკიდებულ) ნინადადებებს. ვიულისხმობთ, რომ A და B ლოგიკურებს განუზღვრელი მნიშვნელობები არ აქვთ (ეს მოახერხება S და S_0 ლოგიკების შემთხვევაში, როგორც ქვემოთ ვნახავთ, შესრულებულია ყველა ლოგიკისათვის).

1. A და B ნინადადებათა (ლოგიკურებთა) კონიუნქცია აღნიშნება $A \wedge B$ -ით ან $[A \wedge B]$ -ით (იკითება " A და B ") და განსაზღვრით არის ნინა-

დაეძა (ფორმულა), რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A -ც ჭეშმარიტია და B -ც ჭეშმარიტია. (ე.ი. $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მნიშვნელობათა $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ სისტემისათვის $A \wedge B$ წინადადება ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ხსენებული ცვლადების მნიშვნელობათა იმავე სისტემისათვის A წინადადებაც ჭეშმარიტია და B წინადადებაც ჭეშმარიტია. აქვე შევნიშნოთ, რომ ლოგიკური კავშირების განსაზღვრისას ფრჩხილებში ვსვათ "ფორმულას" და პირველ პლანზე ვაყენებთ "წინადადებას"— ამით ხაზს ვუსვამთ იმას, რომ ლოგიკური კავშირები მოქმედებენ წინადადებაზე განხილულ ფორმულაზე. შევიგოთ, ლოგიკური კავშირების განსაზღვრებებში, სინარტყვისათვის, ფორმულებს აღარ ვახსენებთ). $A \wedge B$ კონიუნქციას უწოდებენ აგრეთვე A და B წინადადებათა კონიუნქციას (ფორმულა- A და B წინადადებათა კონიუნქცია). $A \vee B$ დისიუნქციას უწოდებენ აგრეთვე A და B დისიუნქციას (ფორმულა- A და B დისიუნქცია). $A \rightarrow B$ იმპლიკაციას უწოდებენ აგრეთვე A იმპლიკაციას B -ზე (ფორმულა- A იმპლიკაციას B -ზე). $A \leftrightarrow B$ ეკვივალენციას უწოდებენ აგრეთვე A ეკვივალენციას B -ზე (ფორმულა- A ეკვივალენციას B -ზე). $\neg A$ ნეგაციას უწოდებენ აგრეთვე A ნეგაციას (ფორმულა- A ნეგაცია). $\neg A$ ნეგაციას უწოდებენ აგრეთვე A ნეგაციას (ფორმულა- A ნეგაცია). $\neg A$ ნეგაციას უწოდებენ აგრეთვე A ნეგაციას (ფორმულა- A ნეგაცია).

აქვე შევნიშნოთ, რომ ლოგიკური ოპერატორთა (კერძოდ ლოგიკური კავშირთა) როლი თინაარსულ მათემატიკურ თეორიებში მხოლოდ მინახლოებით ემხვევა მათ სახელწოდებათა როლს ჩვეულებრივ ენაში. აღნიშნულ სახელწოდებათა თინაარსი ჩვეულებრივი ენის წინადადებაებში არსებითად არის დამოკიდებული კონტექსტზე. კონტექსტის მიხედვით მათ, ლოგიკურ ოპერატორებისაგან განსხვავებით, შეუძლიათ გამოხატონ, მაგალითად, მიზეზ-შედეგობრივი კავშირები და მოვლენათა მიმდევრობითობა დროში. ლოგიკურ ოპერატორთა თინაარსი მუსაბილსა და მისი განსაზღვრით და იგი არსებითად

ნება $\neg A$ -ი ან $[\neg A]$ -ი (იკითხება "ა რ ა A ") და გან-
 საზღვრით არის წინადადება, რომელიც ითვლება ჭეშმარიტად, როცა
 A მცდარია და ითვლება მცდარად, როცა A ჭეშმარიტია. სიმარ-
 თივისათვის $[\neg A]$ -ს ნაცვლად ხშირად წერენ $\bar{A}$ -ს, მაგრამ მკით-
 ხველმა ყველგან " $\bar{A}$ " უნდა წარმოიგონოს როგორც " $[\neg A]$ ".
 " $\neg$ " აროპოზიციული კავშირის სახელწოდებაა "ა რ ა " და რო-
 გორც უხედავთ, ამ აროპოზიციული კავშირის დაახლოებით ისეთივე თი-
 ნაარსი აქვს შინაარსულ ნათქვამს, როგორც ლოგიკურ აზრობა
 აქვს ჩვეულებრივ ენაში "არა" კავშირს.

4. A და B წ ი ნ ა პ ა რ ე ბ ა თ ა ი მ ე ლ ი კ ა -
 ც ი ა (ტ ა მ ი მ პ ი ნ ა რ ე მ ა) აღინიშნება $A \rightarrow B$ -ი ან
 $[A \rightarrow B]$ -ი (იკითხება " A -დან ტ ა მ ი მ პ ი ნ ა რ ე -
 მ ა B ") და, განსაზღვრით, არის წინადადება, რომელიც მცდარ-
 ია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A ჭეშმარიტია და B მცდარი.
 A -ს ეწოდება $A \rightarrow B$ ი მ ე ლ ი კ ა ც ი ი ს წ ა ნ ა მ ო -
 ჟ ე ა რ ი ანუ ა რ თ ე ა ე პ ე ნ თ ი, B -ს კი ეწოდება
 თ ე პ ე ნ ი ანუ ე მ ნ ს ე ე ე ნ თ ი.

" $\rightarrow$ " აროპოზიციული კავშირის სახელწოდებებია ჩვეულებ-
 რივი ენის შემდეგი კავშირები: "გამომდინარეობს", " თუ — მა-
 შინ — " და "არა — ან —". ამ უკანასკნელი კავშირების შინა-
 არსი ჩვეულებრივ ენაში რამდენიმე განსხვავდება " $\rightarrow$ " არო-
 პოზიციული კავშირის შინაარსისაგან. მიუხედავად ამისა, ჩვენ შე-
 დგები ჩვეულებრივი ენის ხსენებულ კავშირებს (მეფანაში) გამო-
 ვიყენებთ ისეთივე აზრით, როგორი აზრითაც შინაარსულ ნათქვამს-
 კურ ლოგიკურში გამოიყენება " $\rightarrow$ " აროპოზიციული კავშირი.

" $A \rightarrow B$ " იმპლიკაცია იკითხება აგრეთვე შემდეგნაირად. "თუ A ,
 მაშინ B ". ამასთანავე, ნაცვლად ურთი და იგივე აზრის
 მქონე ფრაზებისა: " A -დან გამომდინარეობს B " და "თუ A ,
 მაშინ B ", იმავე აზრით იხმარება შემდეგი ფრაზები: " B

ა რ ი ს ა უ ც ი ჯ ბ ე რ ი პ ი რ ზ ა *A* - ზ ე რ ი ს",
" *A* ა რ ი ს ს ა ვ მ ა რ ი ს ი პ ი რ ზ ა *B* - ზ ე რ ი ს".
აღნიშნული ფრაზები უფრო ზუსტად ასე გამოიხატება: " *B* არის
აუცილებელი პირობა იშისათვის, რომ ადგილი ჰქონდეს *A*-ს", " *A*
არის საკმარისი პირობა იშისათვის, რომ ადგილი ჰქონდეს *B*-ს".

ჩვენი განსაზღვრის მიხედვით "*A*→*B*" ჭეშმარიტია ყოველ-
თვის, როცა *A* მცდარია. ეს ფაქტი შეიძლება ასე გამოიხატოს:
"მ ი პ ა რ ი პ ა ნ ყ ვ ე ლ ა ფ რ ი გ ა მ ი მ ი რ ი ა-
რ ე ზ ს". ასევე, ის ფაქტი, რომ "*A*→*B*" ჭეშმარიტია
ყოველთვის, როცა *B* ჭეშმარიტია, შეიძლება ასე გამოიხატოს:
"ჭ ე შ მ ა რ ი ტ ი ყ ვ ე ლ ა ფ რ ი პ ა ნ გ ა მ ი მ ი რ ი ა-
ნ ა რ ე ზ ს".

შენიშვნა. როგორც აღვნიშნეთ "გამომდინარეობს" და "მე —
მაშინ —" კავშირების მიხედვით ჩვეულებრივ ენაში წამყვანი მე-
განსხვავებაა " → " პრეპოზიციული კავშირის მიხედვით. ჩვეულებრივ ენაში იგულისხმება, რომ როცა *A* და *B* წინადადება-
თა და *A* წინადადება მცდარია, მაშინ წინადადებას "მე *A*, მა-
შინ *B* " არ აქვს აზრი. მაგრამ ასეთი გაგება მათემატიკა-
ში ძალიან საყურადღებოა. მარჯვნივ, მაგალითად, ვიქცევთ ფორმას $x > 0$ —
წინადადებას (რომელიც აღვნიშნეთ *A*-თი) დამტკიცებუ-
ლობა რაიმე *B* წინადადება. არ ვიცით ჭეშმარიტია მე არა ფორმას
 $x > 0$, მაგრამ წინადადება "*A*-დან გამომდინარეობს *B*"
ჭეშმარიტია. ასევე "*A*-დან გამომდინარეობს *B*" შეიძლება
იცოს ჭეშმარიტია წინადადება მაშინაც, როცა *B* მცდარი წინადა-
დებაა. მეორე მხრივ, უბრალო წინადადებაში მეორის გამოყვანა
(*ე.ი. გამომდინარეობის დამტკიცება*) მაშინაც საინტერესოა, როცა
არ ვიცით პირველი წინადადება ჭეშმარიტია მე მცდარი — მე ვიცით
რომ პირველი წინადადება ჭეშმარიტია, მაშინ ხსენებული გამოყვანა
მეორე წინადადებას ჭეშმარიტობის დამტკიცება იქცევა (ხსენე-

ბული გამოყვანიდან და პირველი წინადადებას დამტკიცებოდან მსჯელობა უბრალო გაეროიანებში მიიღება მეორე წინადადებას ჭეშმარიტობის დამტკიცება). ლე უიცი, რომ B ჭეშმარიტია, მაშინ B წინადადებას დამტკიცება შევნიძლება მივიჩნიოთ B წინადადებას გამოყვანად ნებისმიერ ჭიქსიწეზულ A წინადადებად (რამდენადაც B -ს გამოყვანა A -დან ჯულისხმობს იმას, რომ მივიჩნიოთ A ჭეშმარიტად და დავადტკიცოთ B). ლე უიცი, რომ A მცდარია, მაშინ $A \rightarrow B$ იმპლიკაციის შედგენიანად დამტკიცება (ჯულისხმობს, რომ უიცი იმპლიკაციის შედგენიანად, როცა წანამძღვარი ჭეშმარიტია);

უქება, A ჭეშმარიტია და ამ დამტკიცებოდან გამოვიყვანოთ, რომ B -ც ჭეშმარიტია.

ჩვენი დამტკიცების ძალი A ჭეშმარიტია, ამიტომ $\neg A$ მცდარია. პირიქით A მცდარია (უიცი, რომ A მცდარია, ე.ი. შევნიძლება დავადტკიცოთ, რომ A მცდარია). ამიტომ $\neg A$ ჭეშმარიტია. ცხადია, $\neg A \rightarrow [\neg A \vee B]$ არის ჭეშმარიტი. აქედან, რადგან $\neg A$ ჭეშმარიტია, გამოდგინდარეობს, რომ $[\neg A \vee B]$ არის ჭეშმარიტი. აქედან, რადგან $\neg A$ მცდარია, გამოდგინდარეობს, რომ B არის ჭეშმარიტი.

დასასრულს შევნიშნოთ, რომ გამოდგინდარეობის ცნებას ჩვეულებრივ უნაში აქვს სხვაგვარი აზრი იმ შემთხვევაშიც კი, როცა წანამძღვარი და შედეგი ორივე ჭეშმარიტია. მაგალიტ, წინადადება "ლე $5 = 10:2$, მაშინ პარიტი საფრანგეთის დედაქალაქია" ჭეშმარიტი წინადადებაა იმპლიკაციის მოტანილი განსაზღვრის მიხედვით. მაგალიტ, "პარიტი საფრანგეთის დედაქალაქია" არის ჭეშმარიტი და ამიტომ იმალი წინადადება ჭეშმარიტია (მიუხედავად იმისა ჭეშმარიტია ლე არა წანამძღვარი—განხილული წინადადებაში წანამძღვარიც ჭეშმარიტია). გამოდგინდარეობის ცნების ჩვეულებრივი უნის მიხედვით გაგების შემთხვევაში განხილული წინადადება ჭეშმარიტი არაა. ის ჭაქტი, რომ "პარიტი საფრანგეთის დედაქალაქია" არაფრით არ გამოდგინდარეობს " $5 = 10:2$ " წანამძღვრიდან — რად-

რ მ ი ა რ გ ი ლ ი ა ქ რ ნ ე ნ ს **A** ა ნ რ მ ბ ა ს,
 ა უ ც ი ლ ე ბ ე ლ ი პ ა ს ა ა მ ა რ ი ს ი ა, მ ე ნ -
 რ უ ლ ე ბ უ ლ ი ი ყ რ ს **B** ა ნ რ მ ბ ა ს".

ლოგიკური კავშირები უნდა განვიხილოთ როგორც ფუნქციები,
 რომელთა არგუმენტები (მოცემული მაგნიტუდური ღირებულებები) წინადა-
 პებებია და რომელთა მნიშვნელობები ისევ წინადაპებებია. ამასთან-
 ნავე, ყოველი წინადადება შეიძლება გაუანტივოთ ამ წინადადების
 ჭეშმარიტურ მნიშვნელობასთან. ამრიგად, შეიძლება იმეფას, რომ
 ლოგიკური კავშირები არიან ფუნქციები, რომელთა განსაზღვრის არე
 არის $\{t, f\}$ და მნიშვნელობებს ეუბნებენ $\{t, f\}$ -დან.

ლოგიკური კავშირების მინიმალური ჭეშმარიტურ მნიშვნელობათა
 $\{t, f, t\}$ გაფარგლებული სისტემისათვის ადვილად ისაზღვრება გა-
 ნუზღვრული მნიშვნელობებზე ოპერირების პრინციპის საფუძველზე.

საუარჯიშო. დაამტკიცეთ, რომ ლოგიკური კავშირის ურჯერ
 გამოყენების შემდეგ, როცა მისი ურთიერთ ოპერანდი მაინც არის t ,
 ელემენტთა განსაზღვრული მნიშვნელობებს მხოლოდ და მხოლოდ შემდეგ
 შემთხვევებში:

$$t \vee t; t \vee t; f \rightarrow t; t \rightarrow t; f \wedge t; t \wedge f.$$

ამასთანავე, პირველი ოთხ შემთხვევაში ეს განსაზღვრული მნიშვნე-
 ლობა არის t , უკანასკნელი ორ შემთხვევაში კი — f .

6. ახლა განვსაზღვროთ $\forall$, $\exists$ და $\neg$ ოპერატორული ნიშ-
 ნების მინიმალური. $\forall a, \exists a$ და $\neg a$ სახის სიტყვებს, სადაც a მო-
 ცემული მინიმალური ღირებულების ნებისმიერი საგნობრივი ცვლადია,
 ეწოდება **კ ვ ა ნ ტ ო რ ე ბ ი ა ო პ ე რ ა ტ ო რ უ ლ ი**
ც ვ ლ ა რ ი თ. პროპოზიციულ კავშირებს და ამ კვანტორებს ეწო-
 დება **აგრეთვე** **ლ ო გ ი კ უ რ ი ოპ ე რ ა ტ ო რ ე ბ ი.**

$\forall a$ — ეწოდება **გ ო გ ა პ ო ბ ი ს კ ვ ა ნ ტ ო რ ი ა**
ოპ ე რ ა ტ ო რ უ ლ ი ც ვ ლ ა რ ი თ, $\exists a$ — კი ეწოდება
ა რ ს ე ბ ო ბ ი ს კ ვ ა ნ ტ ო რ ი ა ოპ ე რ ა ტ ო რ უ-

წინადადება არის მცდარი მაშინ რა მხოლოდ მაშინ, როცა a ავლადის ურთი მანძი, შესაბამისად ყოველი, მნიშვნელოვნებას A წინადადება არის მცდარი. სხვა შემთხვევებში იგი არის განუზღვრელი.

უბარია, $\forall a A$, შესაბამისად $\exists a A$, წინადადება არის განუზღვრელი მაშინ რა მხოლოდ მაშინ, როცა a ავლადის ურთი მნიშვნელოვნებას მანძი A წინადადება არის განუზღვრელი რა, ამასთანავე, a ავლადის თითოეული მნიშვნელოვნებას A წინადადება არის ჭეშმარიტი ან განუზღვრელი, შესაბამისად მცდარი ან განუზღვრელი.

უბარია, $\forall a A$ რა $\exists a A$ ჭორმუღებისათვის a მხოლოდ რამდენი ავლადს წარმოადგენს. ამასთანავე, a - გან განსხვავებული ავლადის შემოსვლა $\forall a A$, შესაბამისად $\exists a A$, ჭორმულაში წარმოადგენს ავლადის თავისუფალი შემოსვლას, მაშინ რა მხოლოდ მაშინ, როცა ეს შემოსვლა წარმოადგენს ავლადის თავისუფალი შემოსვლას A -ში.

განვიხილოთ მაგალითები S_1 თეორიიდან.

ჭორმულები:

$\sqrt{x} = y$; $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$; $\sqrt{(x+y)^2} = x+y$; $k^2(x,y) = x$ წარმოადგენენ x რა y ავლადებზე რამდენიმე წინადადებას, (უპანასკნელი რამდენიმე რა აგრეთვე k^2 ჭრეცხიონალურ ავლადზე) ე.ი. x რა y ავლადები ამ ჭორმულების თავისუფალი ავლადებს წარმოადგენენ (უპანასკნელის თავისუფალი ავლადი აგრეთვე k^2). ამ ჭორმულებში რამდენი ავლადები არ აკმატებს (იკმატებს, რა, მაგალითად, x^2 რა $k^2(x,y)$ შესაბამისად არიან $[x \cdot x]$ რა $[k^2 x y]$ ჭორმუგების გამარტივებული სახეები). რაც შეეხება ჭორმულებს

$$\exists x [\sqrt{x} = y], \quad (1)$$

$$\forall x [(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy], \quad (2)$$

$$\forall x [\sqrt{(x+y)^2} = x+y], \quad (3)$$

$$\exists y [k^2(x, y) = x], \quad (4)$$

ისინი მხოლოდ y ცვლადზე დამოკიდებული წინადადებად წარმოადგენენ, გარდა უკანასკნელისა, რომელიც k^2 და x ცვლადებზე დამოკიდებული წინადადებაა. ამასთანავე ავთილი დასაბუთია, რომ (1) ფორმულის მნიშვნელობა $y=5$ - ღერს არის t (ე.ი. $y=5$ - ღერს (1) წინადადება არის ჭეშმარიტი), $y=-5$ - ღერს კი (1) ფორმულის მნიშვნელობა არის f . ასევე ცხადია, რომ (2) ფორმულის მნიშვნელობა y -ის დამოკიდებული მნიშვნელობისათვის არის t , y -ის უარყოფითი მნიშვნელობისათვის კი არის f . (2) ფორმულის მნიშვნელობა y -ის ყოველ მნიშვნელობისათვის არის f . მართლაც, y -ის ნიშნულზე ნებისმიერ ფიქსირებულ y_0 მნიშვნელობისათვის $\forall x [\sqrt{(x+y_0)^2} = x+y_0]$ მართალია, რამდენადაც ზოგიერთ x -ის ისეთ x_0 მნიშვნელობას, რომლისათვისაც $x_0+y_0 < 0$ (ასეთი x_0 -ის არსებობა ცხადია), მაშინ $x=x_0$ მნიშვნელობისათვის $\sqrt{(x+y_0)^2} = x+y_0$. ფორმულა მდებარე წინადადებას წარმოადგენს.

$\forall$ და $\exists$ ოპერატორებს ნიშნებს იყენებენ აგრეთვე უფრო მოკლე ფორმით, სახეობით, შემდეგნაირად. $\forall a \in M$ და $\exists a \in M$ სახის სიტყვებს, სადაც a არის საგნობრივი ცვლადი M კონსტანტის მნიშვნელობის მატარებელი საგნისათვის რაიმე კლასი, $\forall$ და $\exists$ სიტყვები კი $\forall$ და $\exists$ სიტყვების ნიშნებს იყენებენ. ისინიც განსაზღვრით ლოგიკურ ოპერატორებს წარმოადგენენ და ისეთი მატარებელი, სადაც ფორმები განუზღვრელი მნიშვნელობებს არ ეძლეოდათ, მათი მნიშვნელობის მნიშვნელობის განსაზღვრება. ვთქვათ A რაიმე ფორმულაა, განხილული როგორც a ცვლადზე დამოკიდებული წინადადება. განსაზღვრით $\forall a \in M A$ (იკითხება: " M - დან ყველა a -სთვის A ") , შესაბამისად $\exists a \in M A$ (იკითხება: " არსებობს M -ის a ისეთი, რომ A ") , არის წინადადება, რომელიც ჭეშმა-

რჩევა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა a ცვლადის M -დან აღემატება ნულს, შესაბამისად უნდა მიიღოს, მნიშვნელობისაღების აღნიშვნა-
 რაღება არის შემთხვევითი. ზოგად შემთხვევაში $\forall a \in M$ და $\exists a \in M$ სა-
 ხის შემდგომელი კვანტორების მიხედვით განსაზღვრება ისევე ნარ-
 მობს, როგორც $\forall a$ და $\exists a$ კვანტორებისა.

მე მიხედვითი ღეროების საგანთა არე სასრულ ნამდვილი რე-
 ხთა სიმრავლეა და M არის რაღები სასრული ნამდვილი რიცხთა
 სიმრავლე, მაშინ $\forall a \in M$ და $\exists a \in M$ აღნიშვნების ნაცვლად იყენე-
 ბენ აგრეთვე შემდეგ გამარტივებულ აღნიშვნებს: $\forall a > 0, \exists a > 0$.
 ასევე შემთხვევაში ნაცვლად ფრანსისა " M -დან აღემატელი ყველი
 a - ღის" იყენებენ აგრეთვე ფრანსა "ყველი რაღები a -
 ღის". ასევე გამარტივებება $\exists a > 0$ კვანტორის შესაბამისი ფრანა.
 ანალოგიურად განისაზღვრება $\forall a \geq 0, \forall a < 0, \exists a \leq 0, \exists 0 \leq a < 10$ და
 ა.შ. კვანტორთა მიხედვით და ამ კვანტორებთან რაკავშირებული
 გამარტივებული განმარტებები.

τa სახის კვანტორის მიხედვით შემდეგნაირად ისაზღვრე-
 ბა. ჯეჟათა $\mathcal{A}$ რაიშე ღორმულა, განხილული როგორც a ცვლადე
 რამოკილებული ნინადაება. განსაზღვრით $\tau a \mathcal{A}$ (იკითხება:
 "ს ა გ ა ნ ი ა ი ს ე ღ ი, რ რ ი $\mathcal{A}$ ") არის ჭერი,
 რომელიც აღნიშნავს a ცვლადის მნიშვნელობათა არედან აღემატელი
 ნებისმიერი ისე a საგანს, რომლის ღისსაც $\mathcal{A}$ არის შემთხვევითი,
 მე ასევე საგანი არ არსებობს, მაშინ $\tau a \mathcal{A}$ აღნიშნავს a
 ცვლადის მნიშვნელობათა არედან აღემატელი ნებისმიერი საგანს. გან-
 საზღვრულთისაღების ხშირად გულისხმობენ შემდეგს: მოცემული
 ღეროების ნებისმიერი B ღორმულა, ნებისმიერი b საგნობრივი
 ცვლადი და B ღორმულაში მყოფი b - გან განსხვავებული ღა-
 ვისუფალი ცვლადების მნიშვნელობათა ყველი რაღებულ სისჭრამს
 ეთანადება b ცვლადის ყველა ისე მნიშვნელობათა ურთობლობა,
 რომლებსაღისაც B ღორმულა არის შემთხვევითი (როცა b - გან

განსხვავებული **Б** ჭრბულის ჭავისუფალი ცვლაების მნიშვნელობა-
ში ხსენებული სისტემაში მოცემული მნიშვნელობები არის პატენტირე-
ბული); ამგვარი ასევე არაპარტიკული ურთიერთობაში და აგრეთვე სპეცია-
ლის ყველა მნიშვნელობაა ურთიერთობაში მონიშნული **მონიშნული**
საგანი. ეს ურთიერთობა სიმრავლეს, შესაბამისად ცარიელი
სიმრავლეს, შიგნით, მაშინვე აღიარებენ, რომ ამ ურთიერთობაში
მონიშნული საგანი სიმრავლეს, შესაბამისად ცარიელი სიმრავლეს.
ამასთანავე **ტაშ** აღნიშნავს **ა** ცვლის ისევე მნიშვნელობაა
ურთიერთობაში მონიშნული საგანს, რომელიც სხვადასხვა **ა** ნიშნავს
ფუნქციონირება, ეს ასევე ურთიერთობა ცარიელს, მაშინვე **ტაშ** აღ-
ნიშნავს **ა** ცვლის ყველა მნიშვნელობაა ურთიერთობაში მონიშ-
ნული საგანს. მაშასადამე, **ტაშ** არის (ე.ი. აღნიშნავს) **ა** ჭრბუ-
ლის **ა** - გან განსხვავებული ჭავისუფალი ცვლაების მნიშვნელო-
ბაა სისტემაში გამოკვეთილი საგანი.

მაგარი შემთხვევაში **ტა** მკერდადღრის მნიშვნელობა
და შემოქმედება. **ტაშ** არის ჭრბი, რომელიც აღნიშნავს (**ა**
ცვლის მნიშვნელობაა არაღარ აღებული) ნებისმიერ ისევე **ა** სა-
განს, რომლისთვისაც **ა** ფუნქციონირება; ეს ასევე საგანი არ არსე-
ბობს, მაშინვე **ტაშ** აღნიშნავს ნებისმიერ ისევე **ა** საგანს, რომ-
ლისთვისაც **ა** არის განუღრველი; ეს ასევე საგანიც არ არსებობს,
მაშინვე **ტაშ** აღნიშნავს **ა** ცვლის მნიშვნელობაა არაღარ
აღებული ნებისმიერ საგანს (განსაზღვრული სისტემის აქვს შევნიშვნა
ვიცოცხებოთ, რომ **ტაშ** აღნიშნავს სათანადო ურთიერთობაში "მონი-
შნული საგან").

ესაბრძო, **ტაშ** ჭრბისთვის **ა** მხოლოდ პარტიკული ცვლა
წარმოადგენს. ამასთანავე, **ა** - გან განსხვავებული ცვლის
შემოსვლა **ტაშ** ჭრბში წარმოადგენს ცვლის ჭავისუფალი შემოს-
ვლას მაშინვე და მხოლოდ მაშინვე, როცა ეს შემოსვლა წარმოადგენს
ცვლის ჭავისუფალი შემოსვლას **ა**-ში.

რომელთა შიგნით სხვა ფრაზილი არ იმყოფება), განოვანგარნიშებდა აღნიშნულ სიტყვის იმ ნაწილის მნიშვნელობას, რომლის პირველ და უკანასკნელ სიმბოლოებს ხსენებული ფრაზილები წარმოადგენენ. მიწებული მნიშვნელობის აღმნიშვნელ სიმბოლოთი შევცვილთ ხსენებული ნაწილს და ამ გზით მიღებული სიტყვას დაწვრილ მუორე სტრიქონში. მუორე სტრიქონიდან იმავე გზით მიიღება შესამე სტრიქონი და ა.შ. პროცესი დამთავრება უკანასკნელ სტრიქონში $\mathcal{A}$ ფორმის მნიშვნელობის მიღებით.

კვანტორების შემცველი ფორმის მნიშვნელობების გამოთვლა უფრო ძნელ ამოცანას წარმოადგენს და მისი განხორციელება მოგჯერ არ ხერხდება.

მაგალითები: 1. გამოვთვალოთ $[[p \rightarrow [q \rightarrow p]] \leftrightarrow [p \leftrightarrow q]]$

ფორმის მნიშვნელობა p, q, r პროპოზიციული ცვლადების მნიშვნელობათა $\{, \text{t}, \text{f}\}$ სისტემისადვის. გემოთ მოვანილი წესის მიხედვით გამოთვლა შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\begin{aligned} & [[\{ \rightarrow [\text{t} \rightarrow \text{f}]] \leftrightarrow [\{ \leftrightarrow \text{t}]]]; \\ & [[\{ \rightarrow \text{f}] \leftrightarrow [\{ \leftrightarrow \text{t}]]]; \\ & [\text{t} \leftrightarrow [\{ \leftrightarrow \text{t}]]]; \\ & [\text{t} \leftrightarrow \text{f}]; \\ & \text{f}. \end{aligned}$$

2. $\mathcal{N}$ -ით აღვნიშნოთ ნატურალური რიცხვთა სიმრავლე და განვიხილოთ ფორმულა:

$$\exists n \in \mathcal{N} \exists m \in \mathcal{N} \exists l \in \mathcal{N} \exists k \in \mathcal{N} [n^k + m^k = l^k \wedge k > 2 \wedge n > 0 \wedge m > 0 \wedge l > 0].$$

ცხადია, ეს ფორმულა ღავისუფალი ცვლადებს არ შეიცავს. ამ ფორმის მნიშვნელობის გამოთვლა ნიშნავს გადვენევიტოთ უძნელესი პრობლემა ე.წ. ფერმას რიდი ღეორემის სადართლიანობის შესახებ.

უძველთ, $\mathcal{A}$ არის ფორმულა, T_1 და T_2 არიან ტერმები, $X_1, \dots, X_n$ კი — ურდმანდისსაგან განსხვავებული ცვლადები, რომელთა შორის იმყოფება $\mathcal{A}$ ფორმულის, შესაბამისად T_1 და T_2

გერმეზის, ყველა მავსუსუფალი ცვლილი. $\mathcal{A}$ ფორმულას ეწოდება
 n σ n τ r a p φ η θ ρ α β γ δ ϵ ζ η θ ι κ λ μ ν ξ $\omicron$ π ρ σ τ υ ϕ χ ψ ω δ ϵ ζ η θ ι κ λ μ ν ξ $\omicron$ π ρ σ τ υ ϕ χ ψ ω
 ძამისაპ n σ n τ r a p φ η θ ρ α β γ δ ϵ ζ η θ ι κ λ μ ν ξ $\omicron$ π ρ σ τ υ ϕ χ ψ ω
 ლუ $X_1, \dots, X_n$ ცვლილების მნიშვნელობათა ნებისმიერ სისტემისა-
 ლვის $\mathcal{A}$ ფორმულის მნიშვნელობა არის t , შესაძამისაპ f .
 $\mathcal{A}$ ფორმულას ეწოდება σ η s r η ζ δ a p ρ , ლუ მოიძებნება
 $X_1, \dots, X_n$ ცვლილების მნიშვნელობათა ერთი მაინც ისეთი
 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ სისტემა, რომლისთვისაც $\mathcal{A}$ ფორმულა ღებულობს
 მნიშვნელობას t . $\mathcal{A}$ ფორმულას ეწოდება m j k r η ζ δ a , ლუ
 იგი არის იგივერად φ η θ ρ α β γ δ ϵ ζ η θ ι κ λ μ ν ξ $\omicron$ π ρ σ τ υ ϕ χ ψ ω
 უკანასკნელი ფა-
 ეტის რამეტვიება. მეჭამაღემატვიური წინადადება " $\mathcal{A}$ არის ლე-
 თრება" ჩაიწერება შემდეგნაირად: $\vdash \mathcal{A}$ (იკითხება " ρ a θ -
 η ζ δ a p ρ a $\mathcal{A}$ " ან " $\mathcal{A}$ a r i s m j k r η ζ δ a ").
 $T_1 = T_2$ ტოლობას ეწოდება n σ η ζ δ a , ლუ $X_1, \dots, X_n$
 ცვლილების მნიშვნელობათა თითოეული სისტემისაღვის ან $T_1 = T_2$ ფორ-
 მულის მნიშვნელობა არის t ან $T_1 = T_2$ ტოლობის ორივე მბა-
 რეს განუდგურელი მნიშვნელობა აქვს.

რ უ მ ა". მნიშვნელოვან მეტაწინადადებას უწოდებენ აგრეთვე
 მ ე ჭ ა მ ა ზ ე მ ა ჭ ი კ უ რ ზ ე რ ე უ მ ა ს ან მ ე-
 ჭ ა ზ ე რ ე უ მ ა ს. უკანასკნელი ჭერმიწინის ნაცვლად უმეტესად
 იხმარება ჭერმიწინი ზ ე რ ე უ მ ა. ამრიგად, ჭერმიწინი "ჯერემა"
 იხმარება ორი აზრით. მკითხველი ადვილად შეამჩნევს მოვანილ ზე-
 რეზედობად რომელია მათემატიკური ჯერემა და რომელი მეტამათე-
 მატიკური ჯერემა (მეტაჯერემა).

ფაქტად, A და B არიან ჭრმები, $X_1, \dots, X_n$ არის ურთმა-
 ნეობისაგან განსხვავებული ცვლადების მიმდევრობა, რომლის წევრთა
 შორის იმყოფება A და B ჭრმების ყველა მავისუფალი ცვლადი.
 A და B ზ ე რ ე უ მ ა ს არიან ჭ რ ღ ა ს ნ ი, განსაზ-
 ზვრით, ნიშნავს იმას, რომ $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მნიშვნელობათა
 ნებისმიერ პალატიურ სისტემისათვის ორივე ჭრმა ღებულაში ან
 ურთი და იგივე განსაზღვრულ მნიშვნელობას ან ურთი და იგივე ჭი-
 პის განუზღვრელ მნიშვნელობას. ცხადია, ზე A და B ჭრლფასი
 ჭრმებია, მაშინ ამ ჭრმათა ჭიპი ურთი და იგივეა (ან ორივე
 ჭერმია ან ორივე ჭრმულა). ის გარემოება, რომ A და B ჭ-
 რმები ჭრლფასია და შეკვიძლია ამ ფაქტის დაზტოცება, ჩანდერება
 შემდეგნაირად: " $A \approx B$ ". ამ " $\approx$ " მეტამათემატიკური მი-
 მარებას უწოდებენ ჭ რ ღ ა ს ნ ი ბ ა ს. ამასთანავე აღნიშ-
 ნული ჩანაწერი, სიმარტვისათვის, იკითხება ასე: " A ჭ რ ღ-
 ა ს ნ ა B - ს ი", ცხადია, " $A \approx B$ " ჩანაწერის აზრი გა-
 ნსხვავდება " A ჭრლფასია B -სი" ჭრამის პირდაპირი აზრი-
 საგან. ამრიგად, ჭრამა " A ჭრლფასია B -სი" უნდა გავიგოთ
 არაპირდაპირი აზრით, სახელობრ " $A \approx B$ " ჩანაწერის აზრით,
 როცა იგი ამ ჩანაწერის ნასაყიობად გამოიყენება. ნაცვლად ჭრ-
 მისა "ჭ რ ღ ა ს ნ ჭ ე რ ე უ მ ი" უმეტესად იხმარება
 ჭრამა "ი ჭ ი ე უ რ ი ჭ ე რ ე უ მ ი". ზე T_1 და T_2 იგი-
 ვური ჭრმებია და შეკვიძლია ამ ფაქტის დაზტოცება, მაშინ ნაყ-

მაგალიტები: $1:x+2x-1:x$ და $2x$ არ არიან S_1 ჯგუფის იგივერი ტერმები.

$$[x+y] \cdot [x+y] \equiv xx+2xy+yy; [p \rightarrow [q \rightarrow p]] \Leftrightarrow t;$$

$$[x=2] \Rightarrow x \cdot x = 4; 1:x-1:x+x[x-1]=0 \Rightarrow x[x-1]=0.$$

მაგრამ შეზღუდული განმარტებას ადგილი არა აქვს.

ის ფაქტი, რომ A და B მუდამაღმართური გამოსახულებები ურთი და იგივე მუდამაღმართ რბიუტებას აღნიშნავენ, ჩაიწერება სახით: $A \equiv B$. ასე მაგალიტად, თუ A და B მუდამაღმართი მუდამაღმართი ჯგუფის სიფუტებას აღნიშნავენ ან მუდამაღმართი ჯგუფის სიფუტება, მაშინ $A \equiv B$ აღნიშნავს A და B სიფუტების ტრანსფორმაციას. ხშირად იქ, სადაც გაუგებრობა არაა მოსალოდნელი (უფრო ხშირად ასევე შემთხვევებთან დაკავშირებასა), ნაცვლად " $\equiv$ " ნიშნისა გამოვიყენებთ ტოლობის ჩვეულებრივ " $=$ " ნიშანს.

ჩაიგან მუდამაღმართი ჯგუფის რბიუტები (ფორმულები, ტერმები, სიფუტები და ა.შ.) ნუგაენაში (უფრო ღუგაპ—მუგაგორი) შესწავლის რბიუტები (საგნები) არიან, შემოგანილი მუგასიმიზოლები $\vdash, \equiv, \Rightarrow, \Leftarrow, \equiv$ და $\approx$ უნდა განვიხილო, როგორც მუგაენის (მუგაგორის) სპეციალური სიმიზოლები, როგორც სპეციალური მიგასიმიზოლები, როგორც რელიატივიტური სპეციალური მიგასიმიზოლები.

5. ლგორი ჯამი, ლგორი ნამრავლი და დე მოგანის კანტები. ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს შემდეგ ტოლობებთან სამარტლიანობა.

$$A \wedge [B \vee C] \Leftrightarrow [A \wedge B] \vee C; (1)$$

$$A \vee [B \wedge C] \Leftrightarrow [A \vee B] \wedge C; (2)$$

სადაც A, B და C მოცემული ზეობის ნებისმიერი ფორმულია. ვთქვათ $A_1, \dots, A_n$ არიან მოცემული ზეობის ნებისმიერი ფორმული. ფრჩხილთა აღებების ზოგადი წესების მიხედვით სიფყვა $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ აღნიშნავს $[[\dots[[A_1 \wedge A_2] \wedge A_3] \dots] \wedge A_n]$ ფორმულას (ურთი და იგივე მანრიტის მოქმედებებში სრულდება იმ მიმდევრობით რა მიმდევრობითაა არიან იხილი ჩანერჩილი). მაგრამ მუ მხედველობაში მივიღებთ (1) და (2) ზოლდალვებებს და ურთმა- ნეშთან გაუიიგივებთ ზოლდალვან ფორმულებს, მაშინ $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ სიფყვიდან ფრჩხილთა სხვადასხვა გზით აღებებით მიღებული ყველა ფორმულა ურთიერზოლდალვანია და შეგვიძლია ვიცულისხმობთ, რომ ასეთი ფორმულიდან ნებისმიერს აღნიშნავს $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ სიფყვა. ამასთანავე, $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ ფორმულას ურთება $A_1, \dots, A_n$ ფორმული (რ თ გ ი ვ უ რ ი) ნ ა მ - რ ა ვ ც ი, $A_1, \dots, A_n$ ფორმულებს ვი ურთებათ ამ (რ თ გ ი - ვ უ რ ი) ნ ა მ რ ა ვ ც ი ს მ ა ნ ა მ ა მ რ ა ვ ც ი ე ბ ი (A_i არის i - უ რ ი მ ა ნ ა მ ა მ რ ა ვ ც ი). ასევე შეგვიძლია ვიცულისხმობთ, რომ $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ სიფყვა აღნიშ- ნავს $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ სიფყვიდან ფრჩხილთა სხვადასხვა გზით აღ- ბებების შედგება მიღებული ფორმულიდან ნებისმიერს. ამასთანავე, $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ ფორმულას ურთება $A_1, \dots, A_n$ ფორმული (რ თ გ ი ვ უ რ ი) ჯ ა მ ი, $A_1, \dots, A_n$ ფორმულებს ვი ურთებათ ამ (რ თ გ ი ვ უ რ ი) ჯ ა მ ი ს მ ე ს ა ვ რ ე - ბ ე ბ ი (A_i არის i - უ რ ი მ ე ს ა ვ რ ე ბ ი). ავილი რასანახია, რომ $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ ლოგიკური ნამრავლი ჟუშ- მარჩია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა თითოეული A_i არის ჟუშ- მარჩი (ე. ი. ეს ლოგიკური ნამრავლი მისი ცვლადების მნიშვნელო- ბათი მხოლოდ და მხოლოდ ისეთი სისფყვისათვის ღებულობს ჟუშმარჩ- ზო მნიშვნელობას t -ს, რომლისათვისაც თითოეული A_i ღებულობს ჟუშმარჩო მნიშვნელობას t). ასევე, $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ ლოგი-

ნელბადა $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ სისტემისათვის $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ ფორმულ-
 ბიდან მიღებული მნიშვნელობა $\dagger$. აქედან "—" ნა-
 რატორის შინაარსის განსაზღვრის ძალით გამოძიონარეობს, რომ
 $X_1, \dots, X_m$ ცვლადების მნიშვნელობა $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ სისტემისათ-
 ვის $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ ფორმულბიდან მიღებული მნიშვნელობა
 $\dagger$. აქედან ლოგიკური ნამრავლის ბეზოთ აღნიშნულ ძვისების ძა-
 ლით გამოძიონარეობს, რომ $X_1, \dots, X_m$ ცვლადების მნიშვნელობა
 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ სისტემისათვის $\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_n$ ნამრავლი ღებუ-
 ლობს $\dagger$ მნიშვნელობას, $\neg[\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_n]$ კი ღებულობს
 $\dagger$ მნიშვნელობას. მოჭანილი მსჯელობიდან ადვილად დავასკვნით
 (3) ჭოლძალღვნების სამარბლიანობას.

ჟუ მოჭანილი მსჯელობაში ყველგან (3)-ს ბეგყვილით (4)-ით
 "ჯამს" ბეგყვილით "ნამრავლით" და პირიქით, ასევე $\dagger$ -ს ბეგყვი-
 ლით $\dagger$ -ში და პირიქით, ბივიღებთ (4) ჭოლძალღვნების დამჭვი-
 ცებას.

ბეგნიშნით, რომ ჟუ $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$ მოყამული მათემატიკური ჟეო-
 რიის ფორმულბია, T_1 და T_2 კი ჭერბები, მაშინ

$$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}, \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \text{ და } T_1 = T_2$$

განბილული მათემატიკური ჟეორიის (ახალი) ფორმულბს (ამ ფორმუ-
 ლების მავისუფალი ცვლადების მნიშვნელობათა სისტემაბე დამოკი-
 ლებულ ნინაპაღებბს) ნარმოაღგენენ. $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ ჭოლძალღვნება (ანუ
 ბეჭამათემატიკური კვივალენჭობა), $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ბეჭამათემატიკუ-
 რი გამოძიონარეობა და $T_1 \equiv T_2$ იტიურობა ნარმოაღგენენ ბეჭამა-
 თემატიკურ ნინაპაღებბს. სახელიბორ " $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ ", ისევე როჭორც
 " $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ", არის ბეჭამათემატიკური ნინაპაღება ორი $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$
 (მათემატიკური) ფორმულის ბესახებ, $T_1 \equiv T_2$ კი არის ბეჭამა-
 თემატიკური ნინაპაღება ორი T_1 და T_2 ჭერბის ბესახებ.

განბილულ $\leftrightarrow, \rightarrow, =$ მათემატიკურ იკერატორბსა და
 ბესაბადის $\Leftrightarrow, \Rightarrow, \equiv$ ბეჭამათემატიკურ იკერატორბს ბორის

მჭიდრო კავშირი არსებობს, რომელიც შედგება მეტაფორიკული გამო-
ყენების.

(2.1) ჯერემა. ზე $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$ მოცემული ჯერეის ყველ-
გან განსაზღვრული ჯერეობა, T_1 და T_2 კი არიან ყველ-
გან განსაზღვრული ჯერეობები¹, მაშინ

$$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}, \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}, T_1 \equiv T_2 \quad (1)$$

მეტამათემატიკური ნინაპაგებები ჭოღასია შესაბამისად შედგები
მეტამათემატიკური ნინაპაგებებისა:

$$\vdash \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}, \vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \vdash T_1 = T_2. \quad (2)$$

ახლა, განხილვ შეძახევაში ჭოღასნი არიან შედგები მეტამა-
თემატიკური ნინაპაგებები: " $T_1 = T_2$ არის ჯერემა", "შეგვი-
ძლია დავამტკიცოთ, რომ $T_1 = T_2$ არის იგივეობა" და " $T_1 \equiv T_2$ ".
გარდა ამისა ზოგად შეძახევაშიც (როცა $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, T_1 და T_2
ჯერეობისაგან არ მომხივება ყველგან განსაზღვრულობა) " $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ "
და " $T_1 \equiv T_2$ " მეტამათემატიკური ნინაპაგებები ჭოღასია შესა-
ბამისად შედგები მეტამათემატიკური ნინაპაგებებისა: " $\vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ "
და " შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ $T_1 = T_2$ ჭოლობა იგივეობა".

დამტკიცება ადვილად მიიღება ჯერეობის ჯერეობაში
მყოფ (მათემატიკურ და მეტამათემატიკურ) კვერთხით განსაზღვრე-
ბებთან.

შენიშვნა. ჯერეობის სამარჯოანობა არაა დამოკიდებული
იმაზე, ზე როგორ არის განსაზღვრული მოცემული ჯერეობის ჯერეობის
მნიშვნელობა მისი მათემატიკური ევლადების მნიშვნელობა და სისტემა-
სათვის.

1. S და S_0 ჯერეობები ნებისმიერი ჯერეობა არის ყველგან
განსაზღვრული.

§ 3. სიმრავლეა ზეორიის ბოკიურთი განსაზღვრება

ქვემოთ, იქ სადაც საზინააღმდეგო არ გამომონინარუბს კონფე-
სტინა, იგულისხმება, რომ განიხილება S და S_0 ზეორიებიდან
ნებისმიერი.

1. სიმრავლეა ზეორიის პრეიკაგები და ამ პრეიკაგებთან
დაკავშირებული ბოკიურთი უნება. ხშირად სიმრავლეა ზეორიაში
ნაცვლად $ორი =$ და $\in$ ძირითად პრეიკაგებისა, ძირითად პრეიკა-
გებად მიიჩნევენ შემდეგ სიმბოლოებს:

$$=, \in, \neq, \ni, \bar{\in}, \bar{\ni}, \subseteq, \supseteq, \subset, \supset, \neq, \neq, \neq, \neq. \quad (1)$$

ასეა შემხევევაში, ვიციო რა პირველი $ორი$ პრეიკაგის შინაარსი,
დანარჩენ პრეიკაგთა შინაარსს შემდეგი გოლძალოვნებშიო საზღ-
ვრავენ (სადაც a , b , A და B ნებისმიერი გერმეშია, X , შე-
საბამისად Y , კი არის ისეი ნებისმიერი ელემენტიური, შესაბა-
მისად კლასური, ცვლადი, რომელსაც არ აქვს თავისუფალი შემოსვლა
არც A და არც B გერმეში):

$$A \neq B \Leftrightarrow \neg [A = B].$$

$$A \ni a \Leftrightarrow a \in A.$$

$$a \bar{\in} A \Leftrightarrow \neg [a \in A]$$

$$A \bar{\ni} a \Leftrightarrow a \bar{\in} A.$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall X [X \in A \rightarrow X \in B] \wedge \exists Y [A = Y] \wedge \exists Y [B = Y].$$

$$A \supseteq B \Leftrightarrow B \subseteq A.$$

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B.$$

$$A = B \Leftrightarrow B \subset A$$

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \neg[A \subseteq B].$$

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow B \not\subseteq A.$$

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \neg[A \subset B]$$

$$A \not\subset B \Leftrightarrow B \not\subset A.$$

შენიშვნა. აქ პირველი ჭოლძალოვნების მარჯვენა მხარეში გვაქვს ისეთი წინადადება, რომლის შინაარსი ჩვენთვის ცნობილია: " $\neg$ " ლოგიკური კავშირის განსაზღვრის ძალით $\neg[A=B]$ ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A=B$ არის მცდარი;" = "პრეიკაჟის განსაზღვრის ძალით, $A=B$ მცდარია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A და B ჭერმების მნიშვნელობები ურმანუთისაგან განსხვავებული საგნებია (მხედველობაში ის გარემოება, რომ განხილურ სიმრავლეა ღორიებში ჭრმებს განუზღვრელი მნიშვნელობები არ აქვთ). აქედან გამოდინარეობს, რომ $\neg[A=B]$ ჭრმულა, და მამასაპამე მისი ჭოლძალოვანი $A \not\subseteq B$ ჭრმულა, ჭეშმარიტია მასში შემავარ ცვლადების მნიშვნელობათა მხოლოდ და მხოლოდ ისეთი სისჭმეებისათვის, რომლებმისთვისაც A და B ჭრმების მნიშვნელობები ურმანუთისაგან განსხვავებული საგნებია. $A \not\subseteq B$ წინადადება (ჭრმულს) პრეიკაჟი, როგორც ვიცით, აღინიშნება " $\neg_1 \neq \neg_2$ " -ით, რომელსაც ჩვენ მოკლედ აღვნიშნავთ აგრევე " $\neq$ " -ით. აქ მნიშვნელოვანია ის გარემოება, რომ $A \not\subseteq B$ ჭრმულს ჭეშმარიტული მნიშვნელობა ცალსახად ისაზღვრება A და B ჭრმების შესაძამისი მნიშვნელობები. ამასთანავე, რადგან მოყმული ღორების საგანთა არედან აღებული ნებისმიერი საგანი შეიძლება წარმოვიტვიოთ როგორც ჭრმის მნიშვნელობა, ხსენებული პირველი ჭოლძალოვნება ბუნებრივად განსაზღვრავს $[\neq A, B,]$ სახის

გონიერების უარყოფა, შეშინებულობა, უფ-
 ვნებლობა, უფვენებლობა უარყოფა, შეშ-
 ინებულობა უფვენებლობა უარყოფა,
 შეშინებლობა, შეშინებულობა, მკაცრად შე-
 მკაცრად, მკაცრად შეშინებლობა, შეშინ-
 ელობა უარყოფა, შეშინებლობა უარ-
 ყოფა, მკაცრად შეშინებლობა უარყო-
 ფა, მკაცრად შეშინებლობა უარყოფა.

(1) ძირითადი პრინციპები შედგენილი მარტო
 (2.5. ატომალური) ფორმულია შემდეგი სა-
 ხის ფორმული:

$$a=b; a \in A; A \ni a; A \subseteq B; A \supseteq B; A \subset B; A \supset B; (2)$$

$$a \neq b; a \notin A; A \not\ni a; A \not\subseteq B; A \not\supseteq B; A \not\subset B; A \not\supset B; (3)$$

სადაც a, b, A, B არიან ნებისმიერი საგნობრივი ობიექ-
 ტი. ამ მარტო ფორმულიდან ლოგიკური კავრატორების (2.6. ლოგი-
 კური კავშირებისა და კვანტორების) გამოყენებით აღებული 2.5.

ფორმული ფორმულია. რეალური ფორმულის მაგალითი

$$[x = \mathbb{N}_1 \wedge y \geq z] \vee [\forall x_1 [x_1 \in x \rightarrow x_1 \in z]].$$

მოგვიჩვენებთ, რომ შეშინებულობა-
 ში, როცა (1) სიმბოლოებიდან მოგვიჩვენებთ ნარმოვული რაოდენობის
 პრინციპი¹, (2)-დან და (3)-დან აღებული ნებისმიერი ფორმული
 შესაბამისი ძირითადი ან ნარმოვული მიმართების (კავრატორის) სა-
 ხელს უწყობენ მაშინაც, როცა a, b, A და B ნებისმიერი ობ-
 იექტი. მაგალითად, $A \subseteq B$ ფორმულია ნარმოვულია შეშინებ-
 ელობა მიმართება ანუ შეშინებლობა. იგივე
 იქნება სხვა მარტო ძირითადი ან ნარმოვული და აღებული მუდმი-

1 ნარმოვული კავრატორის ცნებას ქვემოთ განვსაზრვით (იხ. გვ. 71).

მედიანური რელიგიური კავრატორების შესახებაც. მაგალითად, $A \leftrightarrow B$
 მედიანური რელიგიური ნიშანდობას ეწოდება $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$ ან
 უფროა, A და B ნებისმიერი კლასებია (ე.ი., მაგალითად,
 A მედიანობილი ან უმეტესად აღნიშნავს მოცემულ შინაარსულ
 სიმრავლესა და რიგის ნებისმიერ ფუნქციურად კლასს ან აღნიშნავს
 ისეთ მაგალითურ ან მედიანური რელიგიური გამოსახადებას, რომლის
 მნიშვნელობა არის კლასი). ან $B \subseteq A$ ფუნქციურია, მაშინ ამბობენ,
 რომ B კლასი არის A კლასის ნაწილი, ანუ A
 კლასის ქვეკლასი. ან B კლასი ამბავს რომ სი-
 მრავლეს, მაშინ B -ს ეწოდება, აგრეთვე, A კლასის ქვე-
 სიმრავლე. ნაცვადი ფრანგისა " B კლასი არის A კლასის
 ნაწილი" სარგებლობენ, აგრეთვე, ფრანგის " B კლასის თე-
 რემა A - თი". A კლასს და ფარული კლასს (ე.ი. ისეთ
 კლასს ანუ სიმრავლეს, რომელსაც არც ერთი ელემენტი არ აქვს)
 ეწოდება A კლასის ან ანალოგიური ნაწილი (ფარული სიმრავლეს ეწოდება აგრეთვე ან ანა-
 ლოგიური ქვესიმრავლე. ან A სიმრავლეს,
 მაშინ A ეწოდება A სიმრავლეს ან ანალოგიური
 ნაწილი (ქვესიმრავლე). დანარჩენ ნაწილებს ეწოდება
 A კლასის სუბკლასი ან ანალოგიური ნაწილი მაშინ და მხო-
 ლოდ მაშინ, როცა $B \subseteq A \cap B \neq \emptyset$ ნიშანდობას არის ფუნქციური.
 A -ს ეწოდება აგრეთვე A კლასის სუბკლასი ქვე-
 კლასი (სუბკლასი ნაწილი), იმ შემთხვევაში კი, როცა
 A სიმრავლეს, მაშინ A -ს ეწოდება A სიმრავლეს
 სუბკლასი ქვესიმრავლე.

კლასებისათვის შემოტანილი ცნებებიდან ბუნებრივად იწვევი-
 რება ამ ცნებებსა სრული ანალოგიური სიმრავლეებისათვის. ამ კლას-
 ნაკრები ცნებებს შემოტანილად ვიცულისხმებთ განსაზღვრებას

ფორმულიზების გარეშე.

შეგვეძლო სიმრავლეთა ღებრის ძირითადი პრედიკატებზე მიტ-
ვერნის მიხედვით " $=$ " და " $\in$ " პრედიკატები, განარჩევილი კი
გამკვირვებელ რეგორს " $\mathcal{M}$ კი მ ა მ რ კ ჯ ლ ე ბ ე ლ ი ს ი მ ბ რ -
ლ რ ე ბ ი" (რეგორსი $\mathcal{M}$ ა რ მ რ ე ბ ე ლ ი კ რ ე პ ი კ ა ტ ე -
ბ ი — $\mathcal{M}$ ა რ მ რ ე ბ ე ლ ი რ კ ე რ ა ტ რ ე ბ ი). ამისათ-
ვის საკმარისი იქნებოდა შემთხვევაში მოცემული ზოგადიზმების მარცხე-
ნა მხარეები გამკვირვებელ, რეგორსი შესაბამისი მარჯვენა მხარეები
მცოფი ზოგორის " $\mathcal{M}$ შემოკლებული აღნიშვნა". მაგალითად, შეგვეძლო
 $A \subseteq B$, ან უფრო ზუსტად $A \subseteq B$ -ით აღნიშნული $[\subseteq AB]$,
გამკვირვებელ რეგორსი

$$\forall X [X \in A \rightarrow X \in B] \wedge \exists Y [A = Y] \wedge \exists Y [B = Y] (*)$$

ფორმულის აღნიშვნა (მოკლე ჩანერა). ადვილი დასადასტოვია, რომ (ისევე
რეგორსი შემთხვევაში განხილული შემთხვევაში) ამ შემთხვევაშიც $A \subseteq B$
ფორმულა (კ.ი. (*)) ფორმულა) შემთხვევაში მაშინ და მხოლოდ მაშინ,
როცა A და B კლასებია და A -ს მხოლოდელი ელემენტი არის B -ს
ელემენტი. $\mathcal{S}_0$ ღებრის შემთხვევაში შეგვეძლო " $\in$ " პრედიკატის
მიტვერნის ურთიერთ ძირითადი პრედიკატად, " $=$ " პრედიკატის კი
შემოკვეთიანი რეგორსი წარმოებული პრედიკატის — სახელობით, $A = B$
გამკვირვებელ რეგორსი $\forall X [X \in A \leftrightarrow X \in B]$ ფორმულის მოკლე
აღნიშვნა, სადაც X არის ნებისმიერი ისეთი ელემენტი ცვლადი,
რომელსაც არ აქვს შემოსვლა A და B ზღვრებში. ცხადია, $\mathcal{S}_0$ ღებ-
რითა

$$A = B \iff \forall X [X \in A \leftrightarrow X \in B]$$

განსაზღვრავს " $=$ " პრედიკატის შინაარსს " $\in$ " პრედიკატის
შინაარსის დახმარებით (X აქვს ნებისმიერი ისეთი ელემენტი
ცვლადი, რომელსაც შემოსვლა არ აქვს A და B ზღვრებში).

ზოგადიზმებზე, მუდამაღებამაგორსი გამოცდინარეობებსა და
იტივურებზე ხშირად იყენებენ განსაზღვრებებს და მუდამაგორებ-

ბის მოკლე რასაწერა. (2.1) თეორემის ძალით, მათ ნაცვლად (სა-
 თანადო შემთხვევაში) შესაძლებელია გამოვიყენოთ $A \leftrightarrow B, A \leftrightarrow B$
 და $T_1 = T_2$ სახის მეტამათემატიკური წინადადებაები. ასევე, იმა-
 ვე მიზნით ხშირად იყენებენ (იგივეურად) ჭეშმარიტ ფორმულად განხი-
 ლურ (მატემატიკურ) უკუვალენტუბებს, გამოვიყენოთ $T_1 = T_2$ და
 ფორმულა. იყენებენ აგრეთვე იგივეობად განხილურ ფორმულა. ამას-
 თანავე, ყოველ ცალკეულ შემთხვევაში, ხსენებული მათემატიკური ფორ-
 მულების "ჭეშმარიტ ფორმულად განხილვაზე" მიუთითებს კონტრ-
 სტი. ასევე მიუთითებს, ნაცვლად ღუსტი ფრაგმენტისა, გამარტივებუ-
 ლი ფრაგმენტის წარმოება. ასევე მიუთითებს მაგალითები: "უფროა
 A ", " უფროა $T_1 = T_2$ ", " განსაზღვრით $n + 0 = n$ ",
 " $n \cdot n$ ისაზღვრება ფორმით $n \cdot n = n + n + \dots + n$, სადაც შესაყრება
 რიცხვია n " და ა.შ. აქვე შევნიშნოთ, რომ ფორმის ჭეშმარიტ ფორ-
 მულად განხილვის მეტოდზე უფრო ზოგადია ფორმის იგივეობად გან-
 ხილვის მეტოდი. ფორმის იგივეობად განხილვაზე მიუთითებს ანალო-
 გური გამარტივებული ფრაგმენტის წარმოება. თეორემაში, სადაც ფორ-
 მები განუზღვრელ მნიშვნელობებს არ ეძლეოდა, თრევე მეტოდი
 ფორმალა. აქვე შევნიშნოთ, რომ ზოგჯერ ურთი და იგივე ცნების
 განსაზღვრა შეიძლება ჩამოყალიბდეს როგორც ფორმალა ფორმალის
 (იგივეობის ან ფორმალის) ან მეტამათემატიკური გამოვიყენო-
 რების საფუძველზე, ისე შესაძამისი ფორმულის იგივეურად ჭეშმარი-
 ტობის საფუძველზე. მაგალითად, სიმრავლური პრედიკატები ნაცვლად
 ფორმალის შეიძლება ამ ფორმალის შესაძამისი მათე-
 მატიკური უკუვალენტუბით განსაზღვრით (რომელთა მისაღებად
 საკმარისია " $\leftrightarrow$ " სიმბოლო შევცვალოთ " $\leftrightarrow$ " სიმბოლოთი).
 ქვემოთ (ფ.5, პუნქტი 6) მიმართებათა ტიპების განსაზღვრებაში
 " $\rightarrow$ " სიმბოლოს შეცვლა " $\Rightarrow$ " სიმბოლოთი არ შეიძლება.

კლასი, რომლის ელემენტებია $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ სიმბოლოებით აღნი-
 შნული ელემენტები, აღინიშნება $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ -ით. ანალოგიურად,

$\mathcal{A}$ -ს, რომლის ელემენტებია α_n მიმდევრობის ნაწევრი, აღინიშნება $\{\alpha_n: n \in \mathcal{N}\}$ -ით (იგი აღინიშნება, აგრეთვე, $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ და $\{\alpha_i: i=0, 1, 2, \dots\}$ სახით). სამოგადო, ეს X არის საცნობრივი ცვლადი და $P(X)$ არის ფორმულა — ნინაპარება (განხილული როგორც ზღვარება X -ის მიმართ), მაშინ $\{X: P(X)\}$ - ით აღინიშნება ისე X_0 ელემენტად $\mathcal{A}$ -ს, რომელსაც აქვს $P(X)$ ზღვარება. ეს გარდა აღნიშვნისა $T(X)$ არის ტერმინი, Y კი არის X - გან განსხვავებული და $P(X)$ და $T(X)$ ფორმულაში ზღვარება-ლი შემოსვლების არმქონე საცნობრივი ცვლადი, მაშინ $\{Y: \exists X[(Y = T(X)) \wedge P(X)]\}$ $\mathcal{A}$ -ს აღინიშნება, აგრეთვე, $\{T(X): P(X)\}$ -ით. იგი, ცხადია, არის ყველა $T(X_0)$ სახის ელემენტად $\mathcal{A}$ -ს, სადაც X_0 არის $P(X)$ ზღვარების მქონე ნებისმიერი ისეთი საგანი, რომ $T(X_0)$ არის ელემენტი. უკანასკნელ განსაზღვრებებში იტყობინება, რომ $T(X)$ და $P(X)$ ფორმულაში მყოფი X - გან განსხვავებული ზღვარების მნიშვნელობებში დაფიქსირებულია და განხილული $\mathcal{A}$ -ს ამა დაფიქსირებული მნიშვნელობადაა სისტემატა დაშორებული.

2. კლასური (კარძისიმიტული) კავრაცები. ეკუთვნის, რომ ექვემოთ მოგანიტ განსაზღვრებებში $B, A, A_1, A_2, \dots$ ნებაცვლად-ბი აღნიშნავენ კლასურ ცვლადებს.

A და B კლასების სხვაობა აღინიშნება $A \setminus B$ -ით (ძირითადი აღნიშვნაა $[\setminus AB]$) და ისაზღვრება შემდეგი ტოტალოვნებით

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \wedge x \notin B. \quad (1)$$

შენიშვნა: ნებისმიერი C კლასი ცალსახად ისაზღვრება მისი ელემენტებით. x არის C კლასის ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x \in C$ ნინაპარება არის ჭეშმარიტი.

(1) ტოტალოვნება ავამცნობს, რომ $x \in A \setminus B$ ნინაპარება ჭეშ-

$\exists n \in \mathcal{N}$ და $\forall n \in \mathcal{N}$ სიტყვებშია ნაცვლად, სიმართლენიშნად
 . იქ სადაც გაუგებრობა არაა მოსალოდნელი, იყენებენ შესაბამისად $\exists n$
 და $\forall n$ გამარტივებულ აღნიშვნებს

მე $\mathcal{A}$ კლასის ყველა ელემენტი სიმრავლეა¹, მაშინ $\mathcal{A}$
 კლასის სიმრავლეა გაერთიანება,
 შესაბამისად $\cup \mathcal{A}$ -ით, აღნიშნება $\cup \mathcal{A}$ -ით, შესა-
 ბამისად $\cap \mathcal{A}$ -ით, და ისაზღვრება ზოლად².

$$x \in \cup \mathcal{A} \iff \exists \alpha \in \mathcal{A} [x \in \alpha],$$

შესაბამისად

$$x \in \cap \mathcal{A} \iff \forall \alpha \in \mathcal{A} [x \in \alpha].$$

$\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$ კლასების სიმეტრიული სხ-
 სხვაობა აღნიშნება $\mathcal{A} \Delta \mathcal{B}$ -ით და ისაზღვრება ზოლად:

$$\mathcal{A} \Delta \mathcal{B} = [\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}] \cup [\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}].$$

ცხადია,

$$x \in \mathcal{A} \Delta \mathcal{B} \iff [x \in \mathcal{A} \wedge x \notin \mathcal{B}] \vee [x \in \mathcal{B} \wedge x \notin \mathcal{A}].$$

მე ამ ზოლად² მივიჩნევთ სიმეტრიული სხვაობის განსაზღ-
 ვრად, მაშინ წინა ზოლად² დამტკიცებადი იქნება.

$\mathcal{A}$ კლასის რამაც² აღნიშნება
 $C\mathcal{A}$ -ით და ისაზღვრება ზოლად:

$$x \in C\mathcal{A} \iff x \notin \mathcal{A}.$$

$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ სხვაობას აღნიშნავენ აგრეთვე $C_{\mathcal{A}}\mathcal{B}$ -ით და უნდა-
 ბენ $\mathcal{B}$ კლასის რამაც² $\mathcal{A}$ კლასის
 ბიბარ. ცხადია, $C_E \mathcal{A} = C\mathcal{A}$ (გავიხსენოთ, რომ E არის

1 მე იმეორებ $\mathcal{I}$ კლასი ცარიელა, მაშინ ეს პირობა შესრულ-
 ბულია ყველა კლასისათვის.

2 შეგვეძლოს ეს განსაზღვრა გაგვეცხადებინა იმ შემთხვევაშიც,
 როცა $\mathcal{A}$ კლასის ელემენტებს შორის გვხვდება იმეორეობი.

$$\Leftrightarrow [\overline{x \in \mathcal{A}_1} \wedge \overline{x \in \mathcal{A}_2} \wedge \dots \wedge \overline{x \in \mathcal{A}_n}]$$

$$\Leftrightarrow x \in C\mathcal{A}_1 \wedge x \in C\mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge x \in C\mathcal{A}_n$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^n C\mathcal{A}_i$$

(მესამე ჭოქდალვნება გამომდინარეობს რე მორგანის კანონიდან, რომელიც უბნა ლოგიკურ კავშირებს). ანალოგიურად დამტკიცება (3) იგივე რთბა.

მუნიშვნა I. დამტკიცებულ იგივე რთბები სამარტლანია იმ მუ-
მხვევაშიც, როცა ყველა $\mathcal{A}_i$ არის $\mathcal{A}$ კლასის ქვეკლასი და $C\mathcal{A}$ -
მოაბგენს $C\mathcal{A}_i$ -ს გამარტვებულ აღნიშვნას.

მუნიშვნა II. ძლიერ ბელსაყრელია მუმიტანილი ლოგიკურ სიმბოლო-
ლოთა გამოყენება მათემატიკის სპეციალურ პარტბში (განსაკუთრე-
ბით მათემატიკურ ანალიზში) განსაზღვრებათა და ღერემათა (და
აგრეფე ნებისმიერ სხვა ნინაპაბებათა) მოკლე რასაწერად. რიგი
სათანადო მაგალიტებისა უკვე ვნახე. გვეყნოთ სხვა მინიშნელოვან
მაგალიტებსაც:

ნამევილი რიცხვთა $\mathcal{A}$ სიმრავლეზე განსაზღვრული ნამევილი
 $f(x)$ ფუნქციის სასრული ზღვარი ($\mathcal{A}$ სიმრავლის პარტვების) x_0
ნერტიში აღინიშნება $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ -ით და ისაზღვრება ჭოქდა-
ლვნებში:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathcal{A} [0 < |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon].$$

ნინაპაბება " $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 ნერტიში " აღინიშნება
 $\mathcal{U}[f(x), x_0]$ -ით და ამ ნინაპაბების შინაარსი ისაზღვრება
ჭოქდალვნებში:

$$\mathcal{U}[f(x), x_0] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 [\forall x \in \mathcal{A} [|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon].$$

§ 4. სიმრავლურ-ჯეოგრაფიული ფენისაღმოსანი მათემატიკაში

1. ბოტანიკური ხასიათის შენიშვნები. როგორც ვიცით, ნებისმიერი ბინარული მათემატიკური ჯეოგრაფიული შენიშვნის გარკვეული კატეგორიის საგნებს, ამ საგნებთან დაკავშირებულ გარკვეულ ობიექტებსა და ამ საგნებისა და ობიექტების შესახებ წინადადებათა განსაზღვრულ სისტემას. მანამდევე ბინარული მათემატიკური ჯეოგრაფიული ცოდნა შენიშვნის ფუნქცია საგანი წარმოადგენს როგორც სიმრავლე ან კლასი და ეს საკმაოდ წარმატებით მიიღწევა.

ამ პარაგრაფში რიცხვის ცნება განისაზღვრება ბუნებრივი გნოზის სახით, რომ რიცხვები სიმრავლეები იყვნენ. აქვე მიმდინარეობს იქნება ის, ეს როგორ შეიძლება წარმოვიდგინოთ გეომეტრიული ობიექტები (წერტილის ჩათვლით) როგორც სიმრავლეები. სხვადასხვა სახის რიცხვის ცნებებთან ერთად ქვემოთ მოცემული იქნება ამ ცნებებთან დაკავშირებული ძირითადი ცნებები განსაზღვრებები. განხილული სხვადასხვა სახის რიცხვების ძირითადი ფუნქციების დამტკიცებები, ბოლომდე გამოწვევის გარეშე, მოცემული არ იქნება. დამატებითი დამატებითი ანუ დამტკიცებებს იმის შესახებ ვ. ლანკაუს ნიშნები [14]. მომდევნო პარაგრაფში მინიმალური მათემატიკური ობიექტები, რომლებიც აღინიშნებიან ჯერმინებში: გრაფიკი, მანძილი, ფუნქცია, გასასახვა, მიმართება, დაღებული სიმრავლე და სხვა, განსაზღვრული იქნება როგორც სიმრავლეები.

ჩვეულებრივ ენაში ნატურალური რიცხვები რიცხვის პრეკუსიის შემთხვევაში მიიღებიან. ქვემოთ ჩვენ გავყენებთ ნატურალურ რიცხვებს როგორც სიმრავლეებს — განხილული იქნება სხვადასხვა სახის ნატურალური რიცხვები, რომელთაგან მათემატიკური სახის ნატურალური რიცხვებს ისევევე ძირითადი ფუნქციები ექნებათ, რაც ჩვეულებრივი ენის ნატურალური რიცხვებს. შევნიშნოთ, რომ ყოველი სახის ნატურალური რიცხვები (კერძოდ, ჩვეულებრივი ენის ნატურალური რიცხვები)

და მათი ღვესებები შეგვიძლია გამოვიყენოთ შემდგომი სახის ნა-
ჭურალურ რიცხვთა განსაზღვრისა და შესწავლის რჩეს.

ქვემოთ, ამ პარაგრაფში, ყველგან შეგვიძლია ვიკლავებოთ,
რომ შესწავლება $\mathbb{N}$ და $\mathbb{N}_0$ მიმართულ (სიმრავლეთა) ჯგუფებში-
ვებიდან ნებისმიერი.

2. ჩვეულებრივი უნის ნაჭურალური რიცხვები. ჩვეულებრივი
უნის ნაჭურალური რიცხვის ცნება ძირითადი ცნებას წარმოადგენს.
ეს ნაჭურალური რიცხვები (აბოზითი სისტემის მიხედვით) აღინიშნე-
ბიან $0, 1, 2, \dots, 9$ სიმბოლოებით (ცხატებით) შედგენილი შემდეგი
სახის სიტყვებით: $0, 1, 2, 3, \dots, 9, 10, 11, \dots$. არაა იმის არავი-
თარი იმედი, რომ ჩვენ შევძლებთ ჩვეულებრივი უნის ნაჭურალური
რიცხვის ცნების დაყვანას რაიმე არსებითად უფრო მარტივ ცნება-
ზე. მაგრამ ეს შევისწავლოთ ჩვენს წარმოდგენებში ნაჭურალური რიც-
ხების შესახებ, შევძლებთ გამოვარკვეოთ ნაჭურალური რიცხვების
შესახებ ჩვენი მსჯელობების საფუძვლები. ასევე გამოვკვევას მივ-
ყვაროთ შემდეგ პასუხნამდე.

ჩვეულებრივი უნის ნაჭურალურ რიცხვთა მნიშვნელობა არის ობიექ-
ტული სისტემა ურთიერთობიანი ძირითადი მკერავი, ამასთანავე,
ეს ვიკლავებოთ, რომ ხსენებული მკერავი აღინიშნება " 1 " -ით
და ამ მკერავის $\mathbb{N}$ ნაჭურალურ რიცხვზე გამოყენების შემდეგი აღ-
ინიშნება $\mathbb{N}'$ -ით და $\mathbb{N}'$ -ს ეწოდება $\mathbb{N}$ -ის უ მ მ ა რ ი მ ე
მ მ მ მ , მაშინ ჩვეულებრივი უნის ნაჭურალურ რიცხვთა მნიშვნე-
ობის ყველა ცნობილი ძირითადი ღვესება არის შემდეგი $3 2 1 0 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0$
სახელწოდებით ცნობილი შემდეგი ხუთი წი-
ნადავებისა და ძირითადი არიმეტიკული მკერავებისა და მკერა-
ვიების ქვემოთ მოტანილი განსაზღვრებებისა.

1. 0 არის ნაჭურალური რიცხვი (უ.ი. ობიექტული მოკლული
სისტემაში არსებობს გარკვეული ობიექტი, რომელიც აღინიშნება
0 სიმბოლოთი).

2. n არის ნატურალური რიცხვი, მაშინ n' აგრეთვე ნატურალური რიცხვია.

3. ნებისმიერ m და n ნატურალურ რიცხვებში სადგის $m' = n'$ ზოლოშიდან გამომდინარეობს, რომ $m = n$.

4. ნებისმიერ ნატურალურ n რიცხვის სადგის $n' \neq 0$.

5. ვთქვათ $P(n)$ არის n ნატურალური რიცხვის რაიმე ზვისება (ე.ი. P არის წინადადება — გამონათქვამი, განხილული როგორც ზვისება n -ის მიმართ). პაუშვით, რომ

(1) 0 -ს აქვს P ზვისება;

(2) თუ რაიმე ნატურალურ n რიცხვს აქვს P ზვისება, მაშინ n -ის უშუალოდ შემდეგ n' ნატურალურ რიცხვსაც აქვს P ზვისება;

მაშინ ზოლოში ნატურალურ რიცხვს აქვს P ზვისება.

უკანასკნელი აქსიომა ცნობილია მ ა ლ ე მ ა ტ ი ვ რ ი
ი ნ პ უ ქ ი ნ ს ა რ ი ნ ე ც ი ვ ი ს ს ა ხ ე ლ ე ნ რ ე
ბ ი ზ . იგი მოკლეა ასე შეიძლება ჩამოყალიბდეს.

თუ (1) $P(0)$ და (2) ზოლოში ნატურალური n რიცხვისა-
ზვის $P(n)$ -დან გამომდინარეობს $P(n')$, მაშინ ყოველ ნატურა-
ლურ n რიცხვის ზვის $P(n)$.

აქ "თუ $P(0)$ " ნიშნავს "თუ $P(0)$ არის ყველაზე პირველი" და ა.შ.

ლოგიკური ოპერატორები კიდევ უფრო მოხერხებულად შეიძლება
ჩაენეროთ მათემატიკური ინტუიციის კანონი, სახელობრ, შემდეგნა-
ირაპ:

$$[P(0) \wedge \forall n [P(n) \rightarrow P(n')]] \Rightarrow \forall n P(n).$$

მათემატიკური ინტუიციის პრინციპის გამოყენებისას ჩვენ უსარ-
გებლოდ შემდეგი ტერმინოლოგიით.

$P(n)$ წინადადებას, რომელიც ყველა საინტერესო შემთხვევაში
რამკიდებულობა ნატურალურ n რიცხვზე, ეწოდება ი ნ პ უ ქ ი ნ-

მანარჩენი მკვერცეებში (გამრკვება, გამრკვება, გაყრცა, ახა-
რისხება) ადვილად ისაბღვრება შვერებინ მკვერცეინის რახმარებინ.

" > " შვერეკაფის შინაარსი ისაბღვრება შვერეგენაირად:

$$1. n' > n.$$

$$2. m > n \Rightarrow m' > n.$$

3. $m > n$ მაშინ და მხლორ მაშინ, როცა ეს მიიღება 1.
და 2. შენეებინს გამოყენებინ.

$<, \geq, \leq$ შვერეკაფებინს შინაარსი ადვილად ისაბღ-
რება " > " შვერეკაფის გამოყენებინ: $m < n \Leftrightarrow n > m$;
 $m \geq n \Leftrightarrow m > n \vee m = n$; $m \leq n \Leftrightarrow n \geq m$.

3. (ჩვეულებრივი) ნატურალური რიცხვებინ. ჩვენ ახლა ნატუ-
რალურ რიცხვებინს განვსაბღვრავთ, როგორც გაჩვენებ სიმრკვერებინ
(და მაჰ სხვა სახის ნატურალურ რიცხვებინსაგან განსხვავებულად
მაგჯერ ვუწოდებთ ჩ ვ ვ უ ც ე ბ რ ი ვ ნ ა ჭ უ რ ა ც უ რ
რ ი ც ხ ვ ე ბ ს). ურთადვილიანი სიმრკვერური "1" მკვერცეინა ისა-
ბღვრება შვერეგენაირად. $\mathcal{A}$ სიმრკვერებინ "1" მკვერცეინის გამოყენე-
ბინ მიიღებულ სიმრკვერე აღინიშნება $\mathcal{A}'$ -ით და განსაბღვრით
 $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{\mathcal{A}\}$. მაშინ განსაბღვრით, (ჩ ვ ვ უ ც ე ბ რ ი ვ ნ
ა ჭ უ რ ა ც უ რ რ ი ც ხ ვ ე ბ ი უწოდებათ შვერეგ
სიმრკვერებინ:

$$0, 0', 0'', 0''', 0''', \dots, \quad (1)$$

სადაც 0 არის ყარიელო სიმრკვერე. ეს სიმრკვერებინ წყვილ-
წყვილად განსხვავებებინან ურთმანუთისაგან. ადვილად შეიძლება
შევიწმინდეს, რომ სიმრკვერება ამ სისტემინსაფეინ "1" მკვერცეინის
ინიშართ შესრულებულთა პეანოს აღსიომებინ. (1) მიმდევრობინს წვე-
რებინ შესაბამისად აღინიშნებებინან ათობითი სისტემინს მიხვერით ცი-
ფრებინსაგან შერგენილი სიფყვებინ: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,
12, ...

აპრილად შეიძლება შევნიშნოთ, რომ ყოველი ორი m და n (ჩვეულებრივი) ნატურალური რიცხვისათვის შესრულებულია ერთი და მხოლოდ ერთი შემდეგი სამი შემთხვევიდან:

$$m \in n, n \in m, m = n$$

ამასთანავე,

$$n \in m \iff n \subset m$$

მაშასადამე, ყოველი ორი m და n ნატურალური რიცხვისათვის შესრულებულია ერთი და მხოლოდ ერთი შემდეგი სამი შემთხვევიდან:

$$m \subset n, n \subset m, m = n.$$

"I" მკერაყიის დახმარებით, ისევე როგორც წინა პუნქტში, ისაბლწრება ძირითადი პრედიკატები და ძირითადი მკერაყიები. ამასთანავე, აპრილი დასადახია, რომ:

$$m > n \iff m \supset n; m > n \iff m \supset n; m \geq n \iff m \supseteq n.$$

წინა პუნქტში აღნიშნულიდან გამომდინარეობს, რომ ჩვეულებრივ ნატურალურ რიცხვებს აქვთ ჩვეულებრივი უნის ნატურალურ რიცხვთა ყველა ძირითადი ღვისება.

4. დალაგებული სისტემები. მათემატიკური მეცნიერების საგანთა სიმრავლეების სახით წარმოგვენის (სიმრავლიზაციის) პრეცედენტი განსაკუთრებული როლს ასრულებს დალაგებული სისტემის ყნება.

ქვემოთ, ამ პუნქტში, იქ სადაც საწინააღმდეგო არ გამოძინარეობს კონტრადიქციდან, უიკლისხმეობ, რომ ყიფრუბისაგან შეგეგნილი სიტყვები აღნიშნავენ ჩვეულებრივ ნატურალურ რიცხვებს ათობითი სისტემის მიხედვით.

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ ელემენტებისაგან შეგეგნილი n -კ მბ-კ ნ ე ნ ე ტ ი ა ნ ი (ანუ n -ტ ე ტ ი ა ნ ი) დალაგებუბ უ ლ ი ს ი ს ტ ე ბ ა აღნიშნება $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ -ით (იგი აღნიშნება აგრევე $\langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \rangle$ -ით) და, განსაბღვრით, როცა $n=1$ არის α_0 , ხოლო როცა $n \neq 1$ არის

$\{\{k, \{a_k\}\} : k < n\}$ სიმრავლე ანუ, რაც იგივეა,

$$\{\{0, \{a_0\}\}, \{1, \{a_1\}\}, \dots, \{n-1, \{a_{n-1}\}\}$$

სიმრავლე (ცხადია, 0-კომპონენტიანი ძალაგებული სისტემა არის ცარიელი სიმრავლე და იგი აღინიშნება $(\)$ -ით ან $\langle \rangle$ -ით. A_{i-1} -ს ($i=1, 2, \dots$) ეწოდება განხილული ძალაგებული სისტემის i -ე რიგის ელემენტი ანუ i -ე რიგის n -ე ელემენტი, ანუ i -ე რიგის n -ე ელემენტი; თუ $n > 0$, მაშინ $\{i-1, \{A_{i-1}\}\}$ სიმრავლეს ეწოდება $(A_0, A_1, \dots, A_{n-1})$ ძალაგებული სისტემის i -ე რიგის ელემენტი. კომპონენტიანი ძალაგებული სისტემის ეწოდება (ძალაგებული) ნაწილი. აქვე აღვნიშნავთ, რომ ნაწილი შეიძლება იყოს ძალაგებული სისტემის ნაწილი ან არ იყოს. მაგალითად სიმრავლის ნაწილი ძალაგებული სისტემის აღინიშნებათ განუყოფელი ნაწილი, როცა ეს ნაწილი ძალაგებული სისტემის ნაწილია. მაგალითად სიმრავლის ნაწილი ძალაგებული სისტემის ნაწილია, როცა ეს ნაწილი ძალაგებული სისტემის ნაწილია.

ძალაგებული სისტემის აქვე შეიძლება აღვნიშნოთ.

(ა) ორი n -კომპონენტიანი ძალაგებული სისტემიდან ერთი სისტემის i -ური ელემენტი არ შეიძლება უდრიდეს მეორის j -ურ ($i \neq j$) ელემენტს (მხედველობიდან ის შემთხვევაა, როცა ეს სისტემები მანამდე იყვნენ ერთი).

(ბ) თუ $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ ელემენტური ცვლადებია, მაშინ

$$(A_1, \dots, A_n) = (B_1, \dots, B_n) \Leftrightarrow A_1 = B_1 \wedge \dots \wedge A_n = B_n.$$

(ც) n - კომპონენტიანი ძალაგებული სისტემა, როცა $n \neq 1$, არის n -ელემენტიანი სიმრავლე (ერთკომპონენტიანი ძალაგებული სისტემა შესაძლოა იყოს ნებისმიერი ელემენტი).

მაშასადამე, ვთქვათ $\{i-1, \{A_{i-1}\}\}$ და $\{j-1, \{B_{j-1}\}\}$ არიან A ნაწილიდან ნაწილი ნაწილი ელემენტები. რადგან $i \neq j$ და,

მაშასადამე, $i-1 \neq j-1$, აღნიშნულ ელემენტზეა გოლოზისადვის აუ-
ცილებელია $\{a_{i-1}\} = j-1$ და $\{b_{j-1}\} = i-1$ გოლოზაა სამარ-
ტლიანობა. ამისადვისი კი აუცილებელია $j-1=1=i-1$ გოლოზა (1
არის ურთაქრთი ჩვეულებრივი ნაჭურაღური რიცხვი, რიცხვის ელემენ-
ტაა რიცხვი ურთი). უკანასკნელი გოლოზა ენიდააღმდეგება $i \neq j$
პირრებას. ამით მტკიცება (ა) ვისება. (ბ) და (ც) ვისებები
მისი უბრალე შედეგებია.

(ბ) ვისება იძლევა საჭუძველს იმისადვის, რომ
($a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$)-ქენოის პალაგებული სისებია. (ბ) ვისება
შეიძლება ასეც გამოვტევათ: n -კომპონენტიანი პალაგებული სის-
ებია ურთაქრთი გზით ჩაინერება სახით: $(a_1, \dots, a_n)$. ცხადია,
(a, b) = (b, a) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a = b$.

შემდეგში ხშირად, სიმარტივისადვის, ნაცვლად ტრამინი-
სა "პალაგებული სისებია" ვისარგებლებ ტრამინით სისებია
(გაუგებრობააა ვაჟიდან აცილებას უბრუნველყოფს კონტეინერი).

შენიშვნა. ხშირად n -კომპონენტიანი პალაგებული სისებ-
ებებს განსაზღვრავენ შემდეგი გოლოზებით:

$$(\) = \emptyset ; (a) = a ; (a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\};$$

$$(a_1, \dots, a_n) = ((a_1, \dots, a_{n-1}), a_n) \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

(უკანასკნელი გოლოზაში კერ n -ს უნდა მივცეთ მნიშვნელობა 3 და
მივიღებთ სამკომპონენტიანი პალაგებული სისებების განსაზღვრას,
შემდეგ უნდა მივცეთ მნიშვნელობა 4 და მივიღებთ ოთხკომპონენტიანი
პალაგებული სისებების განსაზღვრას და ა.შ.). ამ შემთხვევაში n -
კომპონენტიანი პალაგებული სისებია ($n = 2, 3, \dots$) არის ურ-
ელემენტიანი ან ორელემენტიანი სიმრავლე (თუ $a = b$, მაშინ
 $\{a\}$ არის (a, b) პალაგებული წყვილის ურთაქრთი ელემენტი.
ინიდააღმდეგ შემთხვევაში (a, b) არის ორელემენტიანი სიმრავლე).

ამასთანავე, n -კომპონენტოანი პალატებული სისტემა ($n=2,3,\dots$)
 ამავ ეროს არის K -კომპონენტოანი პალატებული სისტემა ზოგ-
 ული ისე K - ზვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: $1 \leq K \leq n$.
 ამიტომ ასეა ნაჩვენებია შემოტანილი პალატებული სისტემის ცნება ინ-
 ვერს რიგ უხერხულობას. მაგრამ (6) ზოლდალოვნება ამ შემთხვევა-
 ში სანარტლოანია ($n=1,2$ შემთხვევაში ამის პამტყიება სი-
 ძნელეს არ ნარმოაბებენს, $n>2$ შემთხვევაებში კი მისი სანარ-
 ტოანობა ადვილად მიიღება მათემატიკური ინტუიციით). შემტომი
 მსჯელობები n -კომპონენტოანი სისტემების შესახებ ძირითადად
 ეყრდნობა (6) ზოლდალოვნებას და არ აქვს არსებითი მნიშვნელობა
 იმას, ზე როგორ არის განსაზღვრული n -კომპონენტოანი სისტემის
 ცნება (6) პირობის პაცით. პალატებული სისტემის ცნების უკანას-
 კნელი განსაზღვრას ვუწოდებ მ ე რ ე ე გ ა ნ ს ა ბ ე ვ რ ა.

5. გარე ნამრავლი და პროდუქტი. მოცემული $A_1, \dots, A_n$
 კ რ ა ს ე ბ ი ს პ ი რ პ ა პ ი რ ი ნ ა მ რ ა ე რ ი (ანუ
 გ ა რ ე ნ ა მ რ ა ე რ ი) ალენიშნება $X^n A_1 \cdot \dots A_n$ -ით
 და განსაზღვრით არის $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ სახის ყველა პალატებული
 სისტემის კლასი, სადაც α_i არის A_i კლასიდან ნებისმიერად
 აღებული ელემენტი. ნაცვლად $X^n A_1 \cdot \dots A_n$ ძირითადი ალენიშვნისა
 გამოვიყენებთ აგრეთვე შემდეგ გამარტოებულ ალენიშვნას: $\sum_{i=1}^n A_i$.
 გარდა ამისა, $n=2$ შემთხვევაში, ნაცვლად $X^2 A_1 A_2$ ალენიშ-
 ვნისა გამოვიყენებთ აგრეთვე $A_1 X A_2$ ალენიშვნას.

ცხადია, პირდაპირი ნამრავლის რაბატილიან X რკრასიას
 არ აქვს კომუტაციურიობის ზვისება. $A \times B$ მხოლოდ და მხოლოდ იმ
 შემთხვევაში უბრის $B \times A$ -ს, როცა $A=B$ ან, როცა A და
 B კლასებიდან ერთი მანცე ყარეკია.

ზე $\sum_{i=1}^n A_i$ ნამრავლის ზოგუელი A_i ზ ა ნ ა მ რ ა ე რ ი
 რ ა ე რ ი A კლასის ზოლია, მაშინ $\sum_{i=1}^n A_i$ ნამრავლს ეწოდება
 A კ რ ა ს ი ს n - უ რ ი ბ ა რ ი ს ბ ი და იტი

ც ბ ვ ჯ ბ ი". ასევე მოვიქცევით სხვა ანალოგიურ შემთხვევაშიც, როცა საუბო გვაქვს ჭრებიდან, რომელშიც გვხვდება სიჭეფა საფ-
ყისი ნაწილი "ურთიერთ".

შეკრებისა და გამოკლების ოპერაციიანი ოპერაციების გარდა, რომლებიც $+$ და $-$ სიმბოლოებით აღნიშნება, იხილავენ ი გ ი ვ უ რ და უ ა რ ყ რ ფ ი ს ურთაბოლიან $მ ვ ჯ ა ც ი ვ ბ ს$, რომ-
ლებსაც ისევ $+$ და $-$ სიმბოლოებით აღნიშნავენ. ნებისმიერ d მთელ რიცხვისათვის, განსაზღვრით $-d$ არის d -ს მოპირდაპირე მთე-
ლი რიცხვი, $+d$ კი არაა d . ამ ოპერაციების შემოჭანის შემ-
დეგ ცხადია, ნებისმიერი m ჩვეულებრივი ნატურალური რიცხვისათვის $+m$ აღნიშნავს $(m, 0)$ მთელ რიცხვს, $-m$ კი აღნიშნავს $(0, m)$ მთელ რიცხვს.

" $>$ " პრედიკატი ისაზღვრება შემდეგი ფორმალურებებით:

$$(n, 0) > (m, 0) \iff n > m;$$

$$(0, n) > (0, m) \iff m > n;$$

$$(n, 0) > (0, m) \iff n \neq 0 \vee m \neq 0;$$

$$(0, n) > (m, 0) \iff \text{ქ}.$$

" $\geq$ ", " $<$ ", " $\leq$ " პრედიკატები ისაზღვრება " $>$ " პრედიკა-
ტის დახმარებით ჩვეულებრივი გზით.

d მთელი რიცხვის მ რ ყ უ ლ ი აღნიშნება $|d|$ -ით და განსაზღვრით არის d -სა და მის მოპირდაპირე $-d$ -ს შორის უბოფესი: $|d| = \max(d; -d)$.

შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები განისაზღვრებიან შემდეგი იგიურობებით (სადაც m და n მთელ რიცხვთა აღნიშ-
ვნელ სიმბოლოებაც გამოყენებული ჩვეულებრივი ნატურალური რიცხვე-

ბის ალბინიშენელი სიმბოლოებია):

$$\pm m + [\pm n] \equiv \pm [m + n];$$

$$-n + [+m] \equiv +m + [-n] \equiv +[m - n], \text{ ან } m \geq n;$$

$$-n + [+m] \equiv +m + [-n] \equiv -[n - m], \text{ ან } n \geq m;$$

$$\pm m \cdot [\pm n] \equiv +[m \cdot n];$$

$$-n \cdot [+m] \equiv +m \cdot [-n] \equiv -[m \cdot n].$$

შეკრებისა და გამრავლების მკვერცხების დახმარებით ჩვეუ-
ლებრივი გზით ისაბლერება გამოკლების, გამოყვანისა და არაუარყოფით
მთელი ხარისხებზე ახარისხების მკვერცხები.

აგრეთვე შეიძლება დამტკიცდეს, რომ შემოჭანოლ არეკვასებასა
და მკვერცხებს აქვთ ის ძირითადი ღვისებები, რომლებიც მკითხველი-
სათვის ცნობილია სამუალო სკოლის კურსიდან. ამ ღვისებებსა დამტ-
კიცებამდე არ შეეკრებოდა.

7. წილადები და რაციონალური რიცხვები. მთელი რიცხვთა
(m, n), $n > 0$, სახის დალაგებულ წყვილებს უწოდებენ (ჩ ვ ე -
უ ლ ე ბ რ ი ე) წ ი ლ ა დ ე ბ ს. ე ვ ე ი ე ა ლ ე ბ ზ რ -
ბ ი ს მ ი მ ა რ ე ბ ა წ ი ლ ა დ ე ბ ს მ რ რ ი ს ალ-
ბინიშება " $\sim$ "-ით და ისაბლერება შემდეგი ჭოლძალგებებით

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \iff m_1 n_2 = m_2 n_1.$$

" $\sim$ " იკითხება: ე ვ ე ი ე ა ლ ე ბ ზ უ რ ი ა. " $\sim$ " მი-
მარების უარყოფა აღინიშნება " $\nprec$ "-ით და იკითხება: ა რ
ა რ ი ს ე ვ ე ი ე ა ლ ე ბ ზ უ რ ი.

მკვერცხების " $\sim$ " მიმარებას, როგორც აგრეთვე

შესამოწმებელია, აქვს რეგულუსურობის, სიმეტრიულობისა და ტრანზი-
ტულულობის ღვისებები¹. უ.ი.

$$\vdash (m, n) \sim (m, n);$$

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \Rightarrow (m_2, n_2) \sim (m_1, n_1);$$

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \wedge (m_2, n_2) \sim (m_3, n_3) \Rightarrow (m_1, n_1) \sim (m_3, n_3)$$

(აქ იგულისხმება, რომ n, n_1, n_2, n_3 დადებითი მთელი რიცხვებია).

$(m, 10^n)$ სახის წილადს ჩ ვ ვ უ ღ ე ბ რ ი ვ ი ა მ-
წ ი ღ ა პ ი ე წოდება. ნაცვად ტერმინებისა "ჩვეულებრივი წი-
ლადი" და "ჩვეულებრივი ადრიალი" ხშირად ვისარგებლებ ტერმი-
ნებით წ ი ღ ა პ ი და ა მ წ ი ღ ა პ ი (იქ სადაც კონფლი-
ქტ უბრუნველყოფს გაუგებრობაზე დავიდეთ აყილება).

d წილადის უკვეთაღწერ წილადზე კლასი აღვნიშნოთ
 A_d -ით. ყბათა, $d \in A_d$. თრ d და β წილადების შესაბამის
 A_d და A_β კლასებს ან არ აქვთ საერთო ელემენტები ან ურთმა-
ნებლს ემხებუვიან იმისდა მიხედვით $d \neq \beta$ აუ $d \sim \beta$. ამრიგად,
 A_d არის ურთიერთუკვეთაღწერ წილადზე კლასი. A_d სახის ურ-
თიერთუკვეთაღწერ წილადზე კლასებს (სიმრავლეებს) ჩ ა ყ ი თ-
ნ ა ღ უ რ ი ჩ ი ყ ბ ე ე ბ ი ე წოდება. რაყიოთაღწერი რიყ-
ბვის ნებობიიერ ელემენტს ეწოდება ამ ჩ ა ყ ი თ ნ ა ღ უ რ ი
ჩ ი ყ ბ ე ე ს წ ა რ მ ი თ ა პ ე ე ე ე ღ ი. ისინი, ყბათა,
წილადებს წარმოადგენენ.

(m, n) წილადი აღვნიშნება $\frac{m}{n}$ -ით. ამათადავთ, m -ს
ეწოდება ამ წ ი ღ ა პ ი ს მ ჩ ი ყ ბ ე ე ღ ი, n -ს კი
მ ნ ი ე ე ე ე ღ ი. წ ი ღ ა პ ს ე წოდება პ ა პ ე ბ ი თ ი

¹ მიმართებები და მათი ღვისებები დეტალურად შეისწავლება
მომდევნო პარაგრაფში.

ან უ ა რ ყ რ ფ რ ფ რ ფ რ ფ რ ან ა რ ა უ ა რ ყ რ ფ რ ფ რ ან
 ა რ ა პ ა პ ე ბ რ ფ რ იმისდა მიხედვით, მუ როგორია მისი
 მრისხველი (დადებითი, უარყოფითი, არაუარყოფითი მუ არადადები-
 თი). (მ, 1) სახის წილადს (ე.ი. $\frac{m}{1}$ სახის წილადს) ეწოდება
 მ მ ე რ ი წ ი ლ ა პ ი და იგი აღინიშნება m -ით. მუ m
 არის მთელი ნატურალური რიცხვი, მაშინ $\frac{m}{1}$ სახის წილადს ეწო-
 დება აგრეთვე ნ ა ტ უ რ ა ლ უ რ ი წ ი ლ ა პ ი. მ მ ე რ ი
 რ ა ც ი თ ნ ა ლ უ რ ი რ ი ც ხ ვ ი, განსაზღვრით, არის ისე-
 ზე რაციონალური რიცხვი, რომლის წარმომადგენელა (ე.ი. ელემენტი-
 ზა) შორის გვხვდება მთელი წილადი (ცხადია, მთელი რაციონალური
 რიცხვის წარმომადგენელა შორის მთელი წილადი ურთაქმრთე კავალენს-
 რნი არ შეიძლება იყონ). ასევე განისაზღვრება ნ ა ტ უ რ ა ლ-
 უ რ ი რ ა ც ი თ ნ ა ლ უ რ ი რ ი ც ხ ვ ი. რაციონალურ
 რიცხვს ეწოდება პ ა პ ე ბ რ ფ რ ან უ ა რ ყ რ ფ რ ფ რ ან
 ან ა რ ა უ ა რ ყ რ ფ რ ფ რ ან ა რ ა პ ა პ ე ბ რ ფ რ
 იმისდა მიხედვით, მუ როგორია მისი წარმომადგენელი.

რაციონალურ რიცხვს აღნიშნავენ მისი წარმომადგენლების
 აღნიშვნელი სიმბოლოებით. ამიტომ შეიძლება იმეცას, რომ რაციონა-
 ლური რიცხვები აღინიშნებიან წილადებით, მთელი რაციონალური რიც-
 ხვები აღინიშნებიან აგრეთვე მთელი რიცხვებით, ნატურალური რა-
 ციონალური რიცხვები კი—ნატურალური მთელი რიცხვებით და ჩვეულებ-
 რივი ნატურალური რიცხვებით. ამის შესაბამისად, რაციონალურ
 რიცხვთა ჯგუფიდან წილადები, მთელი რიცხვები და ნატურალური რი-
 ცხვები (უფრო ზუსტად — ამ რიცხვების აღნიშვნელი სიმბოლოები)
 განიხილებიან როგორც (შესაბამისი) რაციონალური რიცხვები.

რ წილადს ეწოდება უ რ ფ რ ფ რ ფ რ რ ა პ ა პ ე ბ რ
 რ ე წ ი ლ ა პ ე ბ ი, მუ მათ აქვთ ურთიანრი მნიშვნელები და
 ნათი მრისხველები მოკირდაკირე მთელი რიცხვებიან. რ რაციონა-

[illegible][illegible]

$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}$, $\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}$ $\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}$ $\frac{m_1}{n_1} : \frac{m_2}{n_2}$

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}$$

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}$$

$\frac{m}{n}$ နဂဇာပရိယတ္တိသုတ်တွင် ဘုံအား
 $\frac{n}{m}$ အဖို့ $\frac{-n}{-m}$ နဂဇာပရိယတ္တိသုတ်တွင် ဘုံအား

უარყოფითი, იმ შემთხვევაში კი, როცა m ნულია $\frac{m}{n}$ ნილას შემრუნებული არ აქვს. ორი d და β ნილასი $d \mid \beta$ ან $\beta \mid d$: β , განსაზღვრილ, უძრის პირველი ნილასისა და მეორე ნილასის შემრუნებულის ნამრავს (მეორე ნილასს შემრუნებული არ აქვს, მაშინ ან ორი ნილასის განაყოფი არაა განსაზღვრული). ეს განაყოფი აღინიშნება აგრეთვე d/β -ით ან $\frac{d}{\beta}$ -ით. ადვილად შევნიშნავთ, რომ d ნილასის შემრუნებული არის $\frac{1}{d}$ (ე.ი. $1:d$).

იქვეა, m და n ჰევულებრივი ნატურალური რიცხვებია. მაშინ ჩვენი შეთანხმებებიდან გამომდინარეობს, რომ $\frac{m}{n}$ აღნიშნავს $(\frac{m}{n}, 0)$ ნილასსა და m და n მთელი ნილადების განაყოფსა. მაგრამ ეს გარემოება გაუგებრობას არ გამოიწვევს, რადგან ხსენებული ნილადი და განაყოფი ერთი და იმავე ობიექტებს წარმოადგენენ. იმავე პირობებში, ცხადია, $\frac{-m}{-n} = \frac{m}{n}$. ამიტომ $\frac{-m}{-n}$ შეგვიძლია განვიხილო $\frac{m}{n}$ ნილასის აღნიშვნად. იგივე შეიძლება იქვეას იმ შემთხვევაშიც, როცა m მთელი რიცხვია, n კი — მთელი პარები-თი რიცხვი.

$>, <, \geq, \leq$ მიმართებები ნილადების შემთხვევაში ისა-ბღერება შემდეგი ტოლადოვნებებით:

$$\frac{m}{n} > \frac{k}{l} \Leftrightarrow ml > nk.$$

$$\frac{m}{n} < \frac{k}{l} \Leftrightarrow ml < nk.$$

$$\frac{m}{n} \geq \frac{k}{l} \Leftrightarrow ml \geq nk.$$

$$\frac{m}{n} \leq \frac{k}{l} \Leftrightarrow ml \leq nk.$$

$+, -, \cdot$ და $:$ პერაყოფი და $>, <, \geq, \leq$ მიმართებები რაციონალურ რიცხვებისათვის ისაბღერება მათი წარმომადგენლების მიხედვით.

მაგალითად, $\mathbb{Z}_1$ და $\mathbb{Z}_2$ რაციონალური რიცხვებში
დისკუსიაში უნდა იქნას რაციონალური რიცხვს, რომელიც
შეიძლება $\mathbb{Z}_1$ და $\mathbb{Z}_2$ რაციონალური რიცხვთა ნებისმიერად აღებული
ნარმოშად გვეღებოდეს $\mathbb{Z}_1$ (ასევე ნაირად განსაზღვრული რაციონალური
რიცხვთა ჯამი დამოკიდებული არ იქნება ნარმოშად გვეღებოდეს არა-
ბე). ასევე $\mathbb{Z}_1 > \mathbb{Z}_2$ ნიშნავს იმას, რომ $\mathbb{Z}_1$ -ის ნარმოშად გვეღებო-
ლი მდგომარეობა $\mathbb{Z}_2$ -ის ნარმოშად გვეღებობს. ახალ რიცხვებში
რაციონალური რიცხვებისადმი ისევე, როგორც წინა პერი-
ოდში მდგომარეობის შემთხვევაში.

აქვე დავამატებ შენიშვნას. ნიშნავს $\mathbb{Z}_1$ -
რიცხვთა სისტემის შემთხვევაში: ეს ნიშნავს მნიშვნელობა და მნი-
შვნელობის ურთი და იმავე ნიშნავს განსაზღვრული მდგომარეობა
განსაზღვრული ან განსაზღვრული მნიშვნელობის ნიშნავს
დამატებით ნიშნავს; ამასთანავე, ამ გზით მიიღება მნიშვნელობის
ყველა ნიშნავს ნიშნავს.

ნიშნავს დამატებით ნიშნავს რაციონალური რიცხვთა დამატებით
შემთხვევაში სხვათა იღებს: ნიშნავს მნიშვნელობისა და მნიშვნელობის ურთი
და იმავე ნიშნავს განსაზღვრული მდგომარეობა განსაზღვრული
ან განსაზღვრული ნიშნავს მნიშვნელობა არ იღებს, ამასთანავე ამ გზით
მიიღება ყველა ნიშნავს, რომელიც იღებს მნიშვნელობა აქვს, რაც
მნიშვნელობის ნიშნავს.

ნიშნავს და რაციონალური რიცხვების დამატებითი ნიშნავს-
შემთხვევაში, რომელიც ცნობილია მნიშვნელობისადმი სპეციალურ კუთხის
სიძველეს, მიიღება ხსენებული კუთხის მიმართ მსხვილად მდგომარეობის
დამატებითი.

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_+$ და $\mathbb{Q}_-$ სიმრავლეები შესაბამისად აღინიშნე-
ბიან რაციონალური რიცხვთა სიმრავლე, არაუარყოფით რაციონალური
რიცხვთა სიმრავლე და არადადებით რაციონალური რიცხვთა სიმრავლე.

ამ სიმრავლეებიდან ნულიან ამოგდებაში მიღებული სიმრავლეებს შესა-
ბამისად აღნიშნავენ Q^* , Q_+^* , Q_-^* სიმბოლოებით. Q_+^*
არის პაღები რაციონალური რიცხვთა სიმრავლე, Q_-^* კი — უარ-
ყოფი რაციონალური რიცხვთა სიმრავლე.

8. ნამდვილი რიცხვები. რაციონალური რიცხვთა $\mathbb{Q}$ სიმრავლეს
ენოვება ნ ა მ პ ვ ი ლ ი რ ი ც ხ ვ ი, ზუ მას უბოძესი ელე-
მენტები არ აქვს და, ამასთანავე, $\mathbb{Q}$ -დან აღებული ზოგჯერ (რაცი-
ონალური) $\mathbb{Z}$ რიცხვისათვის $\mathbb{Q}$ შეიყავს $\mathbb{Z}$ -ზე ნაკლებ ყველა რაცი-
ონალური რიცხვს.

ცხადია, რაციონალური რიცხვთა $\mathbb{Q}$ სიმრავლის არასაკუთრივი
ქვესიმრავლეები $\mathbb{Q}$ და $\mathbb{Q}$ ნამდვილი რიცხვებს წარმოადგენენ. მათ
უწოდებენ ა რ ა ს ა კ უ ზ რ ი ვ ნ ა მ პ ვ ი ლ ი რ ი ც ხ-
ვ ე ბ ს. პანარჩენ ნამდვილი რიცხვებს ეწოდებათ ს ა კ უ ზ რ ი-
ვ ი ნ ა მ პ ვ ი ლ ი რ ი ც ხ ვ ე ბ ი. საკუთრივ ნამდვილი
რიცხვებს უწოდებენ აგრეთვე ს ა ს რ უ ლ ნ ა მ პ ვ ი ლ
რ ი ც ხ ვ ე ბ ს, არასაკუთრივ ნამდვილი რიცხვებს კი —
უ ს ა ს რ უ ლ ნ ა მ პ ვ ი ლ რ ი ც ხ ვ ე ბ ს და ამ
 $\mathbb{Q}$ და $\mathbb{Q}$ უსასრულო ნამდვილი რიცხვებს აღნიშნავენ აგრეთვე
 $+\infty$ და $-\infty$ სიმბოლოებით, ამასთანავე $\mathbb{Q}$ რიცხვი აღინიშნება
 ∞ სიმბოლოებით. $+\infty$ და $-\infty$ უსასრულო ნამდვილი რიცხვებს შესა-
ბამისად ეწოდებათ აგრეთვე პ ა პ ე ბ ი ზ ი უ ს ა ს რ უ ლ-
ბ ა და უ ა რ ყ რ ზ ი ზ ი უ ს ა ს რ უ ლ ბ ა. შეიშავს
გარემოებები შეიძლება გამოვყოფთ სიმრავლას "ნამდვილი" იქ, სადაც
კონტინუუმი უმრავლესობა გამოვყოფთ და ვიძინებთ.

ერით და იმავე საგნის ორი სხვადასხვა სიმბოლოები აღნიშნა
(როგორც მათემატიკა ნამდვილი რიცხვთა ზოგჯერ პაღები უსასრუ-
ლოა აღინიშნება ∞ -ით და $\mathbb{Q}$ -ით) არავითარ სიმრავლეს არ
იწვევს. ყოველ უფრო უბრალოდ ერით და იმავე სიმბოლოები ორი
სხვადასხვა საგნის აღნიშნა. ასევე შეიშავს საჭიროა განსა-

რამე ღუ Ⴀ არის $\mathbb{C}$ -ს მკვირპაპირე, მაშინ, $\mathbb{C}$, ღავის მხრე,
 ექნება Ⴀ -ს მკვირპაპირე პა, მაშასადამე, Ⴀ პა $\mathbb{C}$ უ რ ღ Ⴀ -
 ე რ ღ მ მ კ ვ ი რ პ ა ვ ი რ ე ნ ა მ პ ე ვ ი ღ ი რ ი ც ხ ე ე -
 მ ი ექნებოან. ადვილი პასანახია აგრეღე, რამ $+\infty$ პა - ∞
 ურთიერმეკვირპაპირე ნამევილი რიცხებოია. განსამღვრნოპი უშუალო
 გამომეინარეობს, რამ $\mathbb{Z}_1$ პა $\mathbb{Z}_2$ რაყოონალური რიცხებოი ურთიერმეკ-
 ვირპაპირე რაყოონალური რიცხებოია მაშინ პა მხოლოე მაშინ, რაყა
 $\mathbb{Z}_1$ პა $\mathbb{Z}_2$ ნამევილი რაყოონალური რიცხებოი ურთიერმეკვირპაპირე-
 ნი არიან.

ურთიერმეკვირპაპირე ნამევილი რიცხებოის ენებაღე პაყრდნ-
 ბოი, მუსტაე ისე როგორც ნინა პუნქტოი, ისამღვრება უ ა რ ე რ -
 ღ ი ს რ კ ე ე რ ა ც ი ა "-", ი გ ი ე უ რ ი რ კ ე ე რ ა ც ი ა
 " + " პა ნ ა მ პ ე ვ ი ღ ი რ ი ც ხ ე ე ი ს მ მ პ ე ღ ი .

ექემოი ჩვენ შეგვიძლია ეიკლისხმოი პა ეიკლისხმებო კი-
 ეეც, რამ ∞ -იი აღინიშნება უსასრულო ნამევილი რიცხეი $\mathbb{Q}$,
 ამასთანავე, $+\infty$ პა - ∞ არიან ∞ -ბე $+$ პა - რკრაციებოი
 გამეყენებოი მიღებული კონსტანტა-ტერმებო, რომეოა მინშენეობე-
 ბოი შესამამისაე $\mathbb{Q}$ პა $\mathbb{R}$ არასაკუთრი ნამევილი რიცხებოი.

ახლა განესამღვრეოი შებრუნებული რიცხეის ენება.

პ ა ე ე მ ი ღ Ⴀ ნ ა მ პ ე ვ ი ღ ი Ⴀ რ ი ც ხ ე ე ი ს
 მ ე ე რ ე ე ე ბ ე უ ღ ი ნამევილი რიცხეი ენეება რაყოონალურ
 რიცხეა სიმრაველს, რომელსაე მივიღებო Ⴀ რიცხეის ბეპა კლასის
 ეელმენტაი შებრუნებულ რაყოონალურ რიცხეა სიმრაველსა პა არა-
 პაეებოი რაყოონალურ რიცხეა სიმრაველს გაერეიანებოიპან უეიეესი
 ეელმენტის (ღუ არსებობს) ამოეეებოი. უარყოფიი ნამევილი Ⴀ
 რიცხეის შებრუნებული ნამევილი რიცხეი ენეება რაყოონალურ რიც-
 ხეა სიმრაველს, რომელსაე მივიღებო Ⴀ რიცხეის ბეპა კლასის
 უარყოფიი ეელმენტაი (რაყოონალურ რიცხეა) შებრუნებულ რაყოონა-
 ლურ რიცხეა სიმრავეიპან უეიეესი ეელმენტის (ღუ არსებობს)

ამოცდებში. 0 -ს შებრუნებული არ აქვს.

აქტილად შემოწმდება, რომ $+ \infty$ -ის და $-\infty$ -ის შებრუნებული არის 0. აქტილად შემოწმდება აგრეთვე, რომ ლუ $\mathbb{Z}_1$ და $\mathbb{Z}_2$ ურთიერთშებრუნებული რაციონალური რიცხვებია, მაშინ $\mathbb{Z}_1$ და $\mathbb{Z}_2$ რაციონალური ნამდვილი რიცხვები ურთიერთშებრუნებული ნამდვილი რიცხვებია.

α და β ნამდვილი რიცხვების x ა თ ი $\alpha + \beta$ ეწოდება $\alpha + \beta$ სახის რაციონალურ რიცხვად სიმრავლეს, სადა α და β შე-საბამისად არიან α და β რიცხვების ნებისმიერი ელემენტები.

α და β ნამდვილი რიცხვების s ბ ვ ა მ ბ ა $\alpha - \beta$ ის-მღვრება ჭრმული: $\alpha - \beta = \alpha + [-\beta]$.

α და β ნამდვილი რიცხვების t ა თ მ ა ვ ი ი $\alpha \cdot \beta$ ისამღვრება შემდეგნაირად:

1. ლუ α და β პაღებილი რიცხვებია, მაშინ $\alpha \cdot \beta$ ნა-რავლი არის რაციონალურ რიცხვად სიმრავლე, რომლის ელემენტებია უარყოფილი რაციონალური რიცხვები და $\alpha \cdot \beta$ სახის რაციონალური რიცხვები, სადა α და β შესაბამისად არიან α და β რიცხ-ვების ნებისმიერი არაუარყოფილი ელემენტები.

2. ლუ α და β უარყოფილი რიცხვებია, მაშინ (თანამღვ-რით)

$$[\alpha \cdot \beta] = -\alpha \cdot [-\beta].$$

3. ლუ α და β რიცხვებიდან ურთი პაღებილი და მეორე უარყოფილი მაშინ (თანამღვრით)

$$[\alpha \cdot \beta] = -[-\alpha \cdot \beta] = -[\alpha \cdot [-\beta]].$$

4. ლუ α და β რიცხვებიდან ურთი მანც ლუა, მაშინ (თანამღვრით) $[\alpha \cdot \beta] = 0$.

α და β ნამდვილი რიცხვების t ა ნ ა ვ მ ჟ ი $\alpha : \beta$

ეწოდება α რიცხვისა და ∞ რიცხვის შეზღუდუბულის ნამრავს (მე-
 $\infty = 0$, მაშინ, ცხადია, α და ∞ რიცხვების განაყოფი $\alpha : \infty$ გან-
 საზღვრული არ იქნება).

$\alpha : \infty$ ნაცვლად იხმარება აგრეთვე $\frac{\alpha}{\infty}$ და α / ∞ აღნიშვნები, $\alpha \cdot \infty$ -ს
 ნაცვლად $\infty \cdot \alpha$ — $\alpha \infty$. ამასთანავე, $\alpha \cdot \infty$ -ს ანალოგიურად, $\alpha \infty$ განიხილება
 როგორც $[\alpha \infty]$ ფორმის გამარტივებული სახე — გამარტივებული აღნიშ-
 ვნა. ასევე, $\frac{\alpha}{\infty}$ და α / ∞ არიან $[\alpha \infty]$ ფორმის გამარტივებული აღნიშვნები.

შემოტანილი განსაზღვრებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს

(4.1) ჯეროვია. ნებისმიერი α სახეული ნამრავი რიცხვი-
 სახეის აბეილი აქვს ტოლობის:

$$\alpha + [\pm \infty] = [\pm \infty] + \alpha = [\pm \infty] + [\pm \infty] = \pm \infty. \quad (1)$$

$$\alpha \cdot [\pm \infty] = [\pm \infty \cdot \alpha] = \begin{cases} \pm \infty, & \text{როცა } \alpha > 0, \\ 0, & \text{როცა } \alpha = 0, \\ \mp \infty, & \text{როცა } \alpha < 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$[\pm \infty] \cdot [\pm \infty] = +\infty. \quad (3)$$

$$[\pm \infty] \cdot [\mp \infty] = -\infty. \quad (4)$$

$$\alpha : [\pm \infty] = 0. \quad (5)$$

$$[\pm \infty] + [\mp \infty] = -\infty. \quad (6)$$

ნ ა მ რ ვ ი ც ი ა რ ი ც ხ ვ ი ს ∞ - უ რ ი ხ ა რ ი -
 ს ხ ი, სადაც ∞ ნულისაგან განსხვავებული ნატურალური ნამრავილი
 რიცხვია, აღინიშნება α^n -ით და, განსაზღვრით, არის $\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha$,
 სადაც მანამამრავლად რიცხვი ∞ -ია. ამასთანავე, განსაზღვრით,

Ըստ ստորագրված $\sqrt[n]{a}$ -ի. ոգի բաժանումը և շարժական ուղիքի
 միջնորդ a բաժանումը ինքնակառուց. $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$.

5. Եթե n ընդհանուր և a շարժական թվեր, մասին $\sqrt[n]{a}$
 թվերն այն ժամանակվա մեծացնելու.

Խառնուկ, թվերն a ընդհանուր բաժանումը մասնավոր
 թվեր, Խառնուկի մասնավոր n — n ընդհանուր a թվերն
 թվեր, $a^{\frac{1}{n}}$ — ինքնակառուց և թվերն a ընդհանուր.
 Եթե $a \geq 1$, ընդհանուր $a < 1$, մասին $a^{\frac{1}{n}}$ թվերն n թվերն
 թվերն թվերն a — թվերն β ընդհանուր, ընդհանուր a — թվերն
 ընդհանուր β ընդհանուր, թվերն $a^{\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{n}}$ (թվերն n թվերն
 ընդհանուր թվեր, թվերն $a^{\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{n}}$, ընդհանուր թվերն
 թվերն ընդհանուր թվեր, ընդհանուր $a^{\frac{1}{n}}$ — թվեր).

Եթե a ընդհանուր ընդհանուր բաժանումը թվերն
 ընդհանուր թվեր, β — բաժանումը թվերն ընդհանուր
 թվեր. Եթե $a > 1$, ընդհանուր $a < 1$, մասին β թվերն
 թվերն β թվերն a ընդհանուր $\log_a \beta$ — թվերն
 ընդհանուր թվերն $a^{\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{n}}$, ընդհանուր $a^{\frac{1}{n}} > a^{\frac{1}{n}}$.

Եթե a ընդհանուր. Եթե a ընդհանուր: 1. $a^{\frac{1}{n}} = 1$ ($-\infty < a < +\infty$).

$$2. [a]^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} +\infty, & \text{թվեր } 0 < a < +\infty, \\ 0, & \text{թվեր } -\infty < a < 0. \end{cases}$$

$$3. a^{\log_a \beta} = \beta.$$

Եթե a ընդհանուր թվերն a ընդհանուր թվերն a ընդհանուր.

(4.2) Եթե a ընդհանուր (ընդհանուր թվերն a ընդհանուր
 ընդհանուր). Եթե a ընդհանուր թվերն a ընդհանուր
 թվերն a ընդհանուր A և B ընդհանուր թվեր, թվերն A ընդհանուր

(4.3) ჯეოგრაფია, ნამდვილი რიცხვთა ნებნისმიერ E სიმრავლეს აქვს ურთაბრუნადი ბედა, შესაბამისად ქვედა, საბოლოარი. ამასთანავე ბედიდან, შესაბამისად ქვემიდან, შემოსაბოლოო ნამდვილი რიცხვთა ნებნისმიერ არაყარბილი სიმრავლის ბედა, შესაბამისად ქვედა, საბოლოარი სანსრული ნამდვილი რიცხვია. ბედიდან, შესაბამისად ქვემიდან, შემოსაბოლოო ნამდვილი რიცხვთა ნებნისმიერ E სიმრავლის ბედა, შესაბამისად ქვედა, საბოლოარი γ არის $\neq \infty$, შესაბამისად $-\infty$.

დამტკიცება. ადვილად შემოწმდება, რომ ნამდვილი რიცხვთა ნებნისმიერი E სიმრავლის ურთაბრუნადი ბედა, შესაბამისად ქვედა, საბოლოარი არის UE -დან, შესაბამისად NE -დან, უდიდესი ელემენტის ამოკლებიში მიღებული სიმრავლე. ჯეოგრაფიის განარჩენ ნაწილთა სამარხდღიანობის შემოწმება სიძნელეს არ წარმოადგენს.

შენიშვნა. ვთქვათ, m და n ჩვეულებრივი ნატურალური რიცხვების აღმნიშვნელი სიმბოლოებია. მაშინ ბედიში შემოტანილი შეთანხმებუბების მიხედვით m და n აღნიშნავენ მთელი ნატურალური რიცხვებს, რაცოონალური ნატურალური რიცხვებსა და ნამდვილი ნატურალური რიცხვებს. m და n რიცხვებზე m პერაყიანთა წარმოებებისა მნიშვნელოვან არ აქვს იმას m და n -ს ჩამოხველილი სახის რიცხვებიდან თუ რომელი სახის რიცხვად განვიხილავთ. მაგალითად, m და n ნამდვილი ნატურალური რიცხვების ჯამი $m+n$ იგივეა, რაც m და n ჩვეულებრივი ნატურალური რიცხვების (შესაბამისად მთელი ნატურალური რიცხვების, შესაბამისად რაცოონალური ნატურალური რიცხვების) ჯამი, განხილული როგორც ნამდვილი რიცხვი.

ქვემოთ, როცა მსჯელობა იწარმოებს ნამდვილი რიცხვთა ჯეოგრაფიაში, ჭერბინებში "ნატურალური რიცხვი", "მთელი რიცხვი", "რაცოონალური რიცხვი" შესაბამისად უნდა გავიგოთ, როგორც "ნამდვილი ნატურალური რიცხვი", "ნამდვილი მთელი რიცხვი", "ნამდვილი რაცოონალური რიცხვი".

ჩვენთვის ახლა არსებობს ის, რომ ყველა სახის რიცხვი განსაზღვრულია როგორც სიმრავლე.

ახლა, ჩვეულებრივი გეომეტრიული ობიექტების სიმრავლეებზე წარმოსადგენად საკმარისია რიცხვითი ღერძი წარმოვიდგინოთ როგორც სასრული ნამდვილი რიცხვების სიმრავლე $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ (ღერძის მთავარი წერტილი გავიგებოთ შესაბამის ნამდვილ რიცხვთან — ამ წერტილის კოორდინატთან), სიბრტყე წარმოვიდგინოთ, როგორც $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ პირდაპირი ნამრავლი და საბოლოოდ $\mathbb{R}^n$ — n -განზომილებიან სივრცეზე წარმოვიდგინოთ როგორც $\mathbb{R}^n$.

მიმდევრო პარაგრაფში გავეყრებოთ, თუ როგორ ისაზღვრება როგორც სიმრავლეები ისეთი მნიშვნელობანი ცნებები, როგორიცაა გრაფიკი, მანძილი, ფუნქცია, მიმართება (ფუნქცია), ძალაგებული სიმრავლე და სხვა. აქვე შევნიშნოთ, რომ ისეთი ცნებები, როგორიცაა გეომეტრიული სივრცე, ჯგუფი, რგოლი, წერტილი სივრცე და ა.შ. ისაზღვრებიან როგორც სიმრავლეები. მაგალითად, G — გრაფიკი (M, M) ნიშნავს, სადაც პირველი კომპონენტი არის მეორე კომპონენტის ქვესიმრავლეა ისეთი სიმრავლე, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები (ე.წ. გეომეტრიული სივრცის აქსიომები): $I. x \in M; M \in M. II. M$ სიმრავლის ნებისმიერი ქვესიმრავლის გაერთიანება ისევ M -ის ელემენტია. $III. M$ — დან სასრული რაოდენობით აღებული სიმრავლეა მანაკვეთა ისევ M —ის ელემენტია. განსაზღვრით, M —ის ელემენტებს ეწოდებათ გეომეტრიული სივრცის ღია სიმრავლეები.

§ 5. გრაფიკი, მანძილი, ფუნქცია, გამსახვა,
მიმართება, ფუნქცია

ამ ტერმინებით აღნიშნულ მათემატიკურ ობიექტებს განვსაზღვრავთ როგორც სიმრავლეებს და შევისწავლოთ მათ ზოგიერთ ძირითად ფუნქციებს.

ქვემოთ ყველგან, სადაც საწინააღმდეგო არ გამოდგინარე-
 ზს კონტრუქციიდან, სიმართლის საფუძვლის უკუპრინციპობა, რომ ლაგერის
 აღფასების ესა და ის დიდი კურსივი შრეების ასე, რომორიგაა
 $A, B, G, X, Y, \dots$ აღნიშნავს ძირითადი კონსტანტის ან შედგენილ
 კონსტანტას, რომლის მნიშვნელობა არის კლასი, ან არის რამხმარე
 კონსტანტა (ე.ი. სიმბოლო, რომელიც არ შეიძლება მოცემული ღეოგრიის
 აღფასებში), რომელიც უშუალოდ აღნიშნავს მოცემული ღეოგრიის
 კლასს. ამასთანავე, რამხმარე კონსტანტების შემოტანა ნიშნავს
 ახალი ტაფარდებში ღეოგრიის ტაფარდებს, რომლის მისაღებად საკმა-
 რისია მოცემული ღეოგრიის აღფასებს რაენაგის რამხმარე კონსტანტე-
 ზი სათანადო ტიპის ძირითადი კონსტანტებია.

1. ტრაფიკი. G -კლასს ეწოდება G რ ა ფ ი კ ი, ღე მისი
 ღეოგრიის ელემენტი არის წყვილი. G ტრაფიკში შემავალი წყვილია
 პირველი წევრებისაგან შემდგენილი E კლასს ეწოდება G რ ა -
 ფ ი კ ი ს ტ ა ნ ს ა ტ ე ვ რ ი ს ა რ ე, მეორე წევრებისა-
 გან შემდგენილი F კლასს კი ეწოდება G რ ა ფ ი კ ი ს მ ნ ი -
 მ ე ვ ე რ ი ს ა მ ა ა რ ე. ცხადია, $E = \{x: \exists y [(x, y) \in G]\}$,
 $F = \{y: \exists x [(x, y) \in G]\}$. აღვიღებ შემნიშნავთ, რომ ცა-
 რიელი სიმრავლე არის ტრაფიკი.

(α, β) წყვილი ის ნიშნავს ი ა ნუ (α, β)
 წყვილი ის ს ი მ ე ტ რ ი უ რ ი ეწოდება (β, α) წყვილს.
 G რ ა ფ ი კ ი ს ი ნ ე ვ რ ი ს ა ნუ G რ ა -
 ფ ი კ ი ს ს ი მ ე ტ რ ი უ რ ი ეწოდება G -დან აღებული
 წყვილია ინვერსიებისაგან შემდგენილი კლასს (ტრაფიკს). α წყვი-
 ლის ინვერსია აღნიშნება α^{-1} -ით, G ტრაფიკის ინვერსია კი-
 G^{-1} -ით. ცხადია,

$$[\alpha^{-1}]^{-1} = \alpha; [G^{-1}]^{-1} = G.$$

G ტრაფიკის განსაზღვრის არე ემხვევა მისი ინვერსიის
 მნიშვნელობაა არეს რა G -ს მნიშვნელობაა არე ემხვევა მისი

ინვერსიის განსაზღვრის არეს. G გრაფიკს ეწოდება ს ი მ ე ტ-
 რ ი უ რ ი ო რ ა ფ ი კ ი, თუ იგი შეიცავს მისი ყოველი ელ-
 მენტის ინვერსიას. ცხადია, G გრაფიკი სიმეტრიულია მაშინ და
 მხოლოდ მაშინ, როცა $G = G^{-1}$; ე.ი. G გრაფიკი სიმეტრიულია
 მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იგი არის თავის თავის სიმეტრიული.

ნუბისმიერ M კლასისათვის Δ_M -ის აღინიშნება (m, m)
 სახის წყვილთა კლასი, სადაც m არის M -ის ნუბისმიერი ელემენ-
 ტი. Δ_M -ს ეწოდება M^2 კლასის სიკვანძო. ცხადია, იგი არის სიმეტრიული გრაფიკი.

G გრაფიკს ეწოდება ფუნქციონალური
 გრაფიკი, თუ

$$(x, y) \in G \wedge (x, z) \in G \Rightarrow y = z.$$

G გრაფიკს ეწოდება ინვერსიული გრაფიკი, თუ

$$(x, y) \in G \wedge (z, y) \in G \Rightarrow x = z.$$

გრაფიკს ეწოდება ბიექციური, თუ იგი ფუნქციონალურიცაა
 და ინვერსიურიც. სხვადასხვა რა: გრაფიკს ეწოდება ფუნქ-
 ციონალური, თუ მის ელემენტთა შორის არ არსებობს ურთიერთი პირ-
 ველი და ამავე დროს განსხვავებული მეორე წევრების მქონე წყვი-
 ლები. გრაფიკს ეწოდება ინვერსიური, თუ მის ელემენტთა შორის არ
 არსებობს ურთიერთი მეორე და ამავე დროს განსხვავებული პირველი
 წევრების მქონე წყვილები.

Q და P გრაფიკების კომპოზიცი-
 ია ანუ 'ნამრთველი' ეწოდება გრაფიკს, რომელიც აღინი-
 შნება $Q \circ P$ -ის და განისაზღვრება შემდეგი ფორმალური წესით:

$$(x, y) \in Q \circ P \Leftrightarrow \exists z [(x, z) \in P \wedge (z, y) \in Q].$$

აღვიღარ შეიძლება შევამჩნიოთ შემდეგი მეორეხარისხის სამართლი-

ანობა.

(5.1) ჯგერემა. 1. ჭუნქციონალური გრაფიკების კომპოზიციის არის ჭუნქციონალური გრაფიკი. იწვექციური გრაფიკების კომპოზიციის არის იწვექციური გრაფიკი.

2. G გრაფიკი ჭუნქციონალურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა G^{-1} გრაფიკი არის იწვექციური.

საჯარჯიშო. პამიგოკეზე, რომ ნებისმიერ P, Q, R გრაფიკებისათვის $[P \circ Q] \circ R = P \circ [Q \circ R]$ (კომპოზიციის ასოციაციურობის ჭვისება).

2. მანაქობა. სიმრავლეზე სამეღეღენჭიან პაღაგებულ Γ სისტემას (ს ა მ ე უ ლ ს) ეწოდება $\mathfrak{A} = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle$, ჭუ მისი პირველი კომპონენტი არის მერე და მესამე კომპონენტების პირდაპირი ნამრავლის ქვესიმრავლე.

ამრიგად, განსაზღვრის ძალით, ნებისმიერ $\Gamma = (G, X, Y)$ მანაქობის პირველი კომპონენტი არის გრაფიკი. მას ეწოდება Γ $\mathfrak{A} = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle$ გრაფიკი. მერე კომპონენტს (ე.ი. X -ს) ეწოდება Γ $\mathfrak{A} = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle$ გრაფიკის სისტემის $\mathfrak{A}$ ნაწილი, მესამეს (ე.ი. Y -ს) კი ეწოდება Γ $\mathfrak{A} = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle$ გრაფიკის $\mathfrak{B}$ ნაწილი. (G, X, Y) მანაქობას ეწოდებენ, აგრეთვე, $\mathfrak{A} = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle$ ს X და Y სისტემების სისტემის. ცხადია, ორი მანაქობა ჭოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი შესაბამისი კომპონენტები ჭოლი არიან.

მანაქობის ცნებასთან პავაუმირებული რიგი ჭერმინუბისა ბუნებრივად იწვექცირება გრაფიკის ცნებასთან პავაუმირებული შესაბამისი ჭერმინუბიდან: $\Gamma = (G, X, Y)$ $\mathfrak{A} = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle$ გრაფიკის სისტემის $\mathfrak{A}$ ნაწილი, შესაბამისად მინიშნულობაა არეს. ჭუ $\mathfrak{A}$ არის Γ მანაქობის განსაზღვრის არეს, შესაბამისად მინიშნულობაა არეს. ჭუ $\mathfrak{A}$ არის Γ მანაქობის განსაზღვრის არეპან აღებული ეღემენტი, მაშინ ამბო-

ენოვება δ ი ვ ე ც ი უ რ ი $\mathfrak{A}$ ნ ა პ რ ა მ ა ანუ δ ი ვ ე-
ც ი ა, ანუ უ რ ი $\mathfrak{A}$ δ ც ა ლ ს ა ხ ა $\mathfrak{A}$ ნ ა პ რ ა მ ა,
მე იგი ფუნქციონალური, ინექციური, ყველგან განსაზღვრული და
სიურექციულია. ცხადია, მანაობის დაყვანა არის ბიექცია მაშინ და
მხოლოდ მაშინ, როცა იგი არის ფუნქციონალური და ინექციური. მანა-
ობის განხილვ ბუფ $\mathfrak{A}$ ენოვება $\mathfrak{A}$ ნ ა პ რ ა მ ა ს $\mathfrak{A}$ ი რ ი-
 $\mathfrak{A}$ პ ი $\mathfrak{A}$ ი ვ ე ბ ი.

აქვილარ შეიძლება შემოწმდეს შემდეგი ჯორების სამართლი-
ანობა.

(5.2) ჯორება. ვთქვათ, Γ არის ნუბისმიერი მანაობა.

მაშინ:

1. Γ^{-1} არის ინექციური მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა Γ
არის ფუნქცია.

2. Γ^{-1} არის ფუნქცია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა Γ
არის ინექციური.

3. Γ^{-1} არის სიურექციული მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა
 Γ არის ყველგან განსაზღვრული.

4. Γ^{-1} არის ყველგან განსაზღვრული მაშინ და მხოლოდ მა-
შინ, როცა Γ არის სიურექციული.

5. Γ^{-1} არის ბიექცია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა Γ
არის ბიექცია.

(5.1) ჯორებშიდან გამოდინარეობს

(5.3) ჯორება. ფუნქციათა კომპოზიცია არის ფუნქცია.

ინექციურ მანაობათა კომპოზიცია არის ინექციური მანაობა.

(G, X, Y) ფუნქციას უნოვებენ აგრეგე $X \rightarrow Y$ $\mathfrak{A}$ ი ვ ი ს
ფუნქციას. $X \rightarrow Y$ $\mathfrak{A}$ ი ვ ი ს δ ი ვ ე ც ი ა ს უნ-
ოვებენ აგრეგე უ რ ი $\mathfrak{A}$ δ ც ა ლ ს ა ხ ა $\mathfrak{A}$ პ ა ს ა-
ხ ა ს X ს ი მ რ ა ვ ი ს ა Y ს ი მ რ ა ვ ი ს ა.
მე φ ასეი განასახება, მაშინ ამობენ აგრეგე, რომ φ

ა მ გ ა რ ე ბ ს უ რ თ ი ე რ თ ე ა რ ს ა ბ ა თ ა ნ ა -
 პ თ ა ს X პ ა Y ს ი მ რ ა ვ ე ჯ ე ბ ს ო რ რ ი ს. ამ
 შეიძლება ადამიანთა, აგრეთვე, რომ φ ფუნქცია პ ა
 მ ი ს ი ი ნ ვ ე რ ს ი ა φ^{-1} ა ბ რ ე ვ ე ჯ ე ბ ე
 უ რ თ ი ე რ თ ე ა რ ს ა ბ ა თ ა ნ ა პ თ ა ს X პ ა Y
 ს ი მ რ ა ვ ე ჯ ე ბ ს ო რ რ ი ს.

როგორც ვხედავთ, თუ φ არის ურთიერთცალკაბა მანაობა X
 პ ა Y სიმრავლეებს შორის, მაშინ X სიმრავლის თითოეული ელემენ-
 ტს უმანაობა Y სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი პ ა, პირიქით,
 Y სიმრავლის თითოეული ელემენტი უმანაობა X სიმრავლის ერ-
 თადერთ ელემენტს.

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ ადვილად შეიძლება შემოწმდეს შემ-
 დგი თეორემის სამართლიანობა.

(5.4) თეორემა. თუ Δ მანაობის ჩასვლის არე ემხვევა
 Γ მანაობის გამოსვლის არეს (პრაქტიკისადვის უმნიშვნელოვანე-
 სი შეიძლება), მაშინ Γ პ ა Δ მანაობათა ყველგან განსაზღ-
 ვრულობან, შესაბამისად სიურექციულობან, შესაბამისად ბიექ-
 ციურულობან, გამოდრინარებს $\Gamma \circ \Delta$ კომპოზიციის ყველგან გან-
 საზღვრულობა, შესაბამისად სიურექციულობა, შესაბამისად ბიექცი-
 ურობა.

შედეგი. თუ X პ ა Y სიმრავლეებს შორის შეიძლება პავა-
 მიყაროთ ურთიერთცალკაბა მანაობა პ ა, აგრეთვე, Y პ ა Z სიმრავ-
 ლეებს შორის შეიძლება პავამყაროთ ურთიერთცალკაბა მანაობა,
 მაშინ X პ ა Z სიმრავლეებს შორისაც შეიძლება პავამყაროთ ურთი-
 ერთცალკაბა მანაობა.

3. ფუნქცია, გადასახვა. ნინა პუნქტში მოგანიცი განსაზღ-
 ვრის მიხედვით, ფუნქცია ეწოდება ფუნქციონალურ მანაობას. მანა-
 ბის ცნების გარეშე ფუნქციის ცნება შეიძლება განისაზღვროს
 შემდეგნაირად: ფუნქცია ეწოდება სიმრავლეა ისეთ სამე-
 მ, მ, ფხაჟაჟ

ურს, რომლის პირველი კომპონენტი ურსა და მისვე დროს არის ფუნქციონალური გრაფიკი და მეორე და მესამე კომპონენტები პირდაპირი ნამრავლის ქვესიმრავლე.

მაინა პუნქტიდან უმჯალოდ გამოდინარეობს აგრძელებები: "ფუნქციონის გრაფიკი", ფუნქციონის გრაფიკის ელემენტები, "ფუნქციონის ჩასვლითი ანგარიში", "ფუნქციონის განსაზღვრის ანგარიში", "ფუნქციონის მნიშვნელობის ანგარიში", "ფუნქციონის ფუნქციონის" და ა.შ.

ინტეგრირებადი ფუნქციის უნებებზე, აგრძელება, ინტეგრირებადი, სინტეზირებადი ფუნქციის კი უნებებზე სინტეზირებადი.

$f = (G, X, Y)$ ფუნქციის, როგორც ელემენტი, უნებებზე აგრძელება $X \rightarrow Y$ გრაფიკის ფუნქციონისა. იმ ფაქტს, რომ f არის $X \rightarrow Y$ გრაფიკის ფუნქცია ასევე გამოდგება: " f ფუნქცია განსაზღვრულია X სიმრავლეში და მისი მნიშვნელობები ელემენტებს Y -ში" (ან "ში" მნიშვნელობის გარეშე მისი და არა ურთი მათგანი არ შეიძლება შეიცვალოს "მე" მნიშვნელობით), რაც სიმრავლურად ასე ჩამოყალიბდა: " $f: X \rightarrow Y$ " ან " $X \xrightarrow{f} Y$ ".

უფრო მეტი, $f = (G, X, Y)$ ნებისმიერი მოცემული ფუნქციისა. თუ $(\alpha, \beta) \in G$, მაშინ β -ს ეწოდება f ფუნქციონის მნიშვნელობა α ელემენტზე. ამ შემთხვევაში ამბობენ აგრძელება, რომ f ფუნქციონისა α ელემენტზე გარდა ამისა β -ში ან f ფუნქციონისა α ელემენტზე გარდა ამისა β -ში (გარდა ამისა β -ში). f ფუნქციის მნიშვნელობა α ელემენტზე აღინიშნება $f(\alpha)$ -ით ან $G(\alpha)$ -ით.

(G, X, Y) ფუნქციის უნებება არის ან გარდა ამისა $G = \emptyset$.

$f = (\Delta_X, X, X)$ სახის ფუნქციის ეწოდება

ი გ ი ვ უ რ ი ჭ უ ნ ქ ც ი ა. იგი აღნიშნება J_x -ით ან I_x -ით. J_x და I_x აღნიშვნის ნაცვლად გამოიყენება, აგრეთვე, J და I გამარტივებული აღნიშვნები (მე ვს გაუგებრობებს არ იწვევს).

6 $f = (X \times \{b\}, X, Y)$ სახის ფუნქციას (სადაც, ცხადია, Y -ის ელემენტები) უნდა ვაჩვენოთ.

ყველაზე ძანსაბეჭდურ ფუნქციას უწოდებენ, აგრეთვე, σ ა ρ ა-
 ს ა ბ ვ ა ს. ყველაზე ძანსაბეჭდურ $X \rightarrow Y$ ტიპის ფუნქციას
 უწოდებენ X ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს σ ა ρ ა ს ა ბ ვ ა ს Y
 ს ი მ რ ა ვ ლ ე მ ი. მუ უს გადისახვა სიურექტიულობა, მაშინ
 მას უწოდებენ, აგრეთვე, X ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს σ ა ρ ა ს ა ბ-
 ვ ა ს Y - ბე. J_X -ს უწოდებენ, აგრეთვე, X ს ი მ რ ა ვ ლ -
 ი ს მ ა ვ ი ს მ ა ვ ბ ე ი გ ი ვ უ რ σ ა ρ ა ს ა ბ -
 ვ ა ს (J_X რეი გადისახვაა უს ცხადია). კონსტანტურ ფუნქცი-
 ას უწოდებენ, აგრეთვე, γ კ ნ ს ტ ა ნ ტ უ რ σ ა ρ ა ს ა ბ -
 ვ ა ს. მუ h ფუნქცია არის გადისახვა, მაშინ h -ის მინიშვნე-
 ლმას α ეღებენებე $h(\alpha)$ -ს უწოდებენ აგრეთვე α ე ლ ე მ ე -
 ნ ტ ი ს ს ა ბ ე ს h σ ა ρ ა ს ა ბ ვ ი ს მ ი მ ა რ მ.
 უნდა განვასხვავოთ ტერმინები: " α ე ლ ე მ ე ნ ს ა ბ ე h გადისახ-
 ვის მიმართ" და $\{ \alpha \}$ სიმრავლის ს ა ბ ე h გადისახვის მიმართ".
 უკანასკნელი არის $\{ h(\alpha) \}$ სიმრავლე ან ცარიელი სიმრავლე იმისდა
 მიხედვით α ე ლ ე მ ე ნ ს მუ არა h ფუნქციის განსაბეჭდრის არეს.

3. $f = (G, X, Y)$ არის ფუნქცია $\beta \in Y$.
 მაშინ X სიმრავლის α ელემენტი ეწოდება β -
 ნივთაბა f ფუნქციის მიმართ,
 თუ $f(\alpha) = \beta$. ცხადია, $\{\beta\}$ სიმრავლის ნივთაბა არის β
 ელემენტის ყველა ნივთაბა სიმრავლე. ასევე, A სიმრავლის
 სრული ნივთაბა $f^{-1}(A)$ არის A სიმრავლის ელემენტთა ყველა

წინა სახეობის სიმრავლე.

[illegible]

1. f ფუნქციის გამოსვლის არეს აქვს სახე $\sum_{i=1}^n A_i$;
 ($n=1, 2, \dots$), მაშინ f ფუნქციას ზოგჯერ უწოდებენ n -ა რ-
 ციკლიკური ფუნქციისად, ხოლო n -ა რ-ცის ფუნქცი-
 ისად. იმ შემთხვევაში, როცა f ფუნქციას უწოდებენ
 n -ა რ-აგრიანი ფუნქციისად, $n \geq 2$, მაშინ ნაცვლად $f(\alpha)$ აღ-
 ნიშნისა, სარაც α არის $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (ე.ი. ნაცვლად $((\alpha_1, \dots, \alpha_n))$
 აღნიშნისა), სარგებლობენ $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ აღნიშვნით (ეს ბუნე-
 ბრიუიყა $((\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ტოლობის გამო). $n=2$ შემთ-
 ხვევაში ზოგჯერ სარგებლობენ $\alpha_1 \mid \alpha_2$ და $[\alpha_1, \alpha_2]$ გამარტოვებული
 აღნიშვნებითაყ. ცხადია, n -ა რ-აგრიანი ფუნქცია შეგვიძლია
 ძანვნიც იწოდო, სარგებ, როგორც 1-ა რ-აგრიანი ფუნქცია
 (ე.ი. n -ა რ-აგრიანი ფუნქციას შეგვიძლია ვუწოდო 1-ა რ-აგრიანი
 ფუნქცია). განხილუი შემთხვევაში A_k სიმრავლის თითოეული ელემენ-
 ტს ეწოდება n -ა რ-აგრიანი f ფუნქციის K -ე რ-ა რ-ცის-
 ბი ($K=1, 2, \dots, n$). ამის შესაბამისად n -ა რ-აგრიანი
 ფუნქციას უწოდებენ აგრეთვე n -ა რ-ცის ბი ფუნ-
 ციისად. კონტეუიტიკიდან ყოველიყის ცხადი იქნება თუ რამდენ ა რ-
 ციანი ფუნქცია განიხილება მოცემული f ფუნქცია ($f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$)
 აღნიშვნა, ჭრამა "განვიხილოთ n -ა რ-აგრიანი ფუნქცია f " და
 ა.შ. მიუთითებენ იმას, რომ f განიხილება, როგორც n -ა რ-აგრი-

ანონ ფუნქცია). $n = 1, 2, 3$ შემთხვევებში n -აგრილიან ფუნქცი-
ებს უწოდებენ აგრეთვე ს ი ნ გ ე ლ ა რ უ ლ (ანუ უ ნ ა რ უ ლ),
ბ ი ნ ა რ უ ლ, პ ა რ ა მ ე ტ რ ა რ უ ლ ფუნქციებს შესაბამისად.

ცხადია, $M^n \rightarrow Y$ ფიქსის ფუნქციას შეიძლება ვუწოდოთ
 n -აგრილიანი ფუნქცია. $M^n \rightarrow Y$ ფიქსის ფუნქციას, როცა იგი
განიხილება, როგორც n -აგრილიანი ფუნქცია, უწოდებენ აგრეთვე
 $M \rightarrow Y$ ფ ი კ ს ი ს n - ა გ რ ი ლ ი ა ნ ფ უ ნ ქ ც ი ა ს
(იგი, ცხადია, არაა $M \rightarrow Y$ ფიქსის ფუნქცია).

ფუნქციას უწოდება ნ ა ნ ი ლ რ მ რ ი ვ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა,
მე იგი არაა ყველგან განსაზღვრული (ე.ი. მე მისი განს-
აზღვრის არე მისი დამოსვლის არის საკუთრივი ნაწილი). $M \rightarrow M$
ფიქსის n -აგრილიან ფუნქციებს (ე.ი. $M^n \rightarrow M$ ფიქსის ფუნქციებს)
უწოდებენ აგრეთვე n - ა გ რ ი ლ ი ა ნ (ა ლ გ ე მ რ უ ლ)
მ ე ვ რ ა ც ი ა ს M - ზ ე. მას უწოდებენ აგრეთვე ყ ვ ე-
ლ გ ა ნ გ ა ნ ს ა ზ ე ვ რ უ ლ მ ე ვ რ ა ც ი ა ს ა ნ
ნ ა ნ ი ლ რ მ რ ი ვ ი ფ მ ე ვ რ ა ც ი ა ს M - ზ ე იმისა-
მიხედვით იგი ყველგან განსაზღვრული n -აგრილიანი ფუნქციაა,
მე n -აგრილიანი ნაწილზომიერი ფუნქციაა. ამასთანავე M -ს
უწოდებენ აღნიშნული მ ე ვ რ ა ც ი ა ს ბ მ ქ მ ე ვ რ ა ნ ს
ა რ ე ს. ურთაგრილიან მ ე ვ რ ა ც ი ა ს M -ზე უწოდება, აგრეთვე,
ს ი ნ გ ე ლ ა რ უ ლ ი ა ნუ უ ნ ა რ უ ლ ი მ ე ვ რ ა ც ი ა,
რომელიდან — ბ ი ნ ა რ უ ლ ი მ ე ვ რ ა ც ი ა, ს ა მ ა რ-
გ ი ლ ი ა ნ ს — ფ ე რ ნ ა რ უ ლ ი მ ე ვ რ ა ც ი ა.

4. ელებენიშება მკახი. გადისახვას, რომლის ჩასვლის არეა
 A სიწმინდე, უწოდება აგრეთვე A ს ი მ რ ა ვ ე ლ ი ს ე ლ ე-
მ ე ნ ზ ე ა მ კ ა ხ ი, ამ გადისახვის განსაზღვრის არეს,
(ან რაც იგივეა, დამოსვლის არეს) უწოდება ხსენებული ე ლ ე-
მ ე ნ ზ ე ა მ კ ა ხ ი ს ი ნ ე ვ ე ჟ ს ე ა ს ი მ რ ა ვ-
ე ლ ე, მინიშნულობაა არეს ეი — ე ლ ე მ ე ნ ზ ე ა ს ი მ რ ა-

ժանսաճըջրաշքն ղնըքշա $\mathcal{I}$ սոմրաշքն. Վշ մաթաղոաթ, ԲԾԻՐԱԲ
 ՍԱՐԳԵԾՂԾԶԵՆ ՄԶԻՐԵՂԻ ՍԱԽԻՆ ԱՂՆԻՄԶԵՆԾԻՈՒ.

$$(h_i)_{i=0,1,2,\dots}, (h_i)_{i \geq m}, (h_i)_{i < m}$$

ՐԱ Ա.Շ.

ՂԾ ՄԶԻՄԻՅԵՂՎԱԾԻ, ՐԽԿԱ $\mathcal{I}$ ԱՐԻՆ ՆԱԶՐԱԼԱՐ ՐԻԿԵՅԱ ՍՈՄՐԱՅ-
 ՐԻՆ Ս Ա Ֆ Կ Ո Ս Ո Մ Խ Ն Ա Յ Յ Յ Ք Ո, Ս Յ Զ Մ Յ Ն Շ Ո ԱՆ
 Ծ Ք Ր Ք Մ Խ Ն Ա Յ Յ Յ Ք Ո, մաժոն ՆԱԿՐԱԲ ԺԵՐԺԻՆԻՆՍԱ "ՐԽԱԽԻ"
 ՅԻՍԱՐԳԵԾԶԵՄ ԺԵՐԺԻՆՈՒ Մ Ո Մ Բ Յ Յ Ր Ք Ք Ք Ա (ՄԽԿԶՄՅՐ Մ
 ՆԱԶՐԱԼԱՐԻ ՐԻԿԵՅԻՈՒ ԺԱՆՍԱԾԸՅՐՅՐ ՆԱԶՐԱԼԱՐ ՐԻԿԵՅԱ ՍՈՄՐԱՅՐԻՆ
 (Ս Ա Ֆ Կ Ո Ս Ո) Մ Խ Ն Ա Յ Յ Յ Ք Ո, ՄԵՍԱԾԱՄԻՆՍԱԲ Ծ Ք Ր Ք
 Մ Խ Ն Ա Յ Յ Յ Ք Ո, ՅՆՐԻԶԱ Մ-ԶԵ ՆԱԿՐԾ, ՄԵՍԱԾԱՄԻՆՍԱԲ Մ-
 ԶԵ ՄԶ Ք ԱՆ ՇՐԸ, ԿՅԵՐԱ ՆԱԶՐԱԼԱՐ ՐԻԿԵՅԱ ՍՈՄՐԱՅՐԻՆ. ՔՅ Մ ՐԱ
 Ւ ՆԱԶՐԱԼԱՐԻ ՐԻԿԵՅԵՐԻՆ ՐԱ $m < n$, մաժոն m ՐԱ n ՐԻԿԵ-
 ՅԵՐՆ ՄՈՐԻՆ ՄՈՒԱՅՆԵՄԵՐ ՆԱԶՐԱԼԱՐ ՐԻԿԵՅԱ ՍՈՄՐԱՅՐԻՆ m ՐԱ n
 ՆԱԶՐԱԼԱՐ ՐԻԿԵՅԵՐԻՆ ԶԱՒԵՐՈՒ, ՅՆՐԻԶԱ Ն Ա Շ Յ Ր Ա Ր Յ Ր
 Ր Ո Կ Ե Յ Ք Ա Ս Յ Զ Մ Յ Ն Շ Ո. ՂԶԻ ԱՂՆԻՄԶԵՄԱ $[m, n]$ -ՂԾ).
 ՅՅԶԻՈՒ, ՍԱԲԱԿ ՍԱՆԻՆԱԱՂՄԻԶԵՐ ԱՐ ԺԱՄՈՄԻՆԱՐՅՈՒՆ ԿՈՆՇՅԱՅՐԻ-
 ՐԱՆ ՅՈԶՅՐԻՆԻՅԵՄԾ, ՐԽԾ ՄԻՄԻԶԵՐՐՈՒՆ ժԱՆՍԱԾԸՅՐԻՆ ԱՐՅ ԱՐԻՆ ԿՅԵՐԱ
 ՆԱԶՐԱԼԱՐ ՐԻԿԵՅԱ $\mathcal{N}$ ՍՈՄՐԱՅՐԸ.

ՄԻՄԻԶԵՐՐՈՒՆ ԶԱՍԱՆԵՐԱԲ ԲԾԻՐԱԲ

$$(h_i)_{i=0,1,2,\dots}; (h_i)_{i \geq m}; (h_i)_{i \leq m}; (h_i)_{n \leq i \leq m} \quad \text{ՐԱ Ա.Շ.}$$

ՍԱԽԻՆ ԱՂՆԻՄԶԵՄԻՆ ՆԱԿՐԱԲ ՄԵՍԱԾԱՄԻՆՍԱԲ ԺԱՄՈՂԿՅԵՄԱ ՄԶԻՐԵՂԻ
 ՍԱԽԻՆ ԱՂՆԻՄԶԵՄԻՆ:

$$h_0, h_1, h_2, \dots; h_m, h_{m+1}, h_{m+2}, \dots; h_0, h_1, \dots, h_m; h_n, h_{n+1}, \dots, h_m.$$

ՔՅ $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ ԱՐԻՆ ՍՈՄՐԱՅՐԵՄ ԐԽԱԽԻ, մաժոն $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ Ս Ո Յ-
 Ր Ա Յ Ր Յ Ք Ա Ր Խ Ա Ե Ո Ս Զ Ա Յ Ր Ք Ո Ա Ն Յ Ր Ա Ս, ՄԵՍԱ-
 ԾԱՄԻՆՍԱԲ Ք Ա Ն Ա Յ Յ Յ Ք Ա Ս, ԱՂՆԻՄԶԵՄԱ $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$ -ՂԾ, ՄԵՍԱ-

Ծանոթացրե՛ք, որ $\bigcap_{i \in I} A_i$ -ը, ըստ ճանաչողության շեմի թույլատրելի է:

$$x \in \bigcup_{i \in J} A_i \Leftrightarrow \exists i \in J [x \in A_i], \text{ շնորհաբանոր } x \in \bigcap_{i \in J} A_i \Leftrightarrow \forall i \in J [x \in A_i].$$

[illegible]

სიმრავლე, სახარულო, უსახარულო, ზედაპირი, ცარიელი და ა.შ. 2 1 2 -
მ 2 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144 145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160 161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176 177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192 193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208 209 210 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224 225 226 227 228 229 230 231 232 233 234 235 236 237 238 239 240 241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256 257 258 259 260 261 262 263 264 265 266 267 268 269 270 271 272 273 274 275 276 277 278 279 280 281 282 283 284 285 286 287 288 289 290 291 292 293 294 295 296 297 298 299 300 301 302 303 304 305 306 307 308 309 310 311 312 313 314 315 316 317 318 319 320 321 322 323 324 325 326 327 328 329 330 331 332 333 334 335 336 337 338 339 340 341 342 343 344 345 346 347 348 349 350 351 352 353 354 355 356 357 358 359 360 361 362 363 364 365 366 367 368 369 370 371 372 373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384 385 386 387 388 389 390 391 392 393 394 395 396 397 398 399 400 401 402 403 404 405 406 407 408 409 410 411 412 413 414 415 416 417 418 419 420 421 422 423 424 425 426 427 428 429 430 431 432 433 434 435 436 437 438 439 440 441 442 443 444 445 446 447 448 449 450 451 452 453 454 455 456 457 458 459 460 461 462 463 464 465 466 467 468 469 470 471 472 473 474 475 476 477 478 479 480 481 482 483 484 485 486 487 488 489 490 491 492 493 494 495 496 497 498 499 500 501 502 503 504 505 506 507 508 509 510 511 512 513 514 515 516 517 518 519 520 521 522 523 524 525 526 527 528 529 530 531 532 533 534 535 536 537 538 539 540 541 542 543 544 545 546 547 548 549 550 551 552 553 554 555 556 557 558 559 560 561 562 563 564 565 566 567 568 569 570 571 572 573 574 575 576 577 578 579 580 581 582 583 584 585 586 587 588 589 590 591 592 593 594 595 596 597 598 599 600 601 602 603 604 605 606 607 608 609 610 611 612 613 614 615 616 617 618 619 620 621 622 623 624 625 626 627 628 629 630 631 632 633 634 635 636 637 638 639 640 641 642 643 644 645 646 647 648 649 650 651 652 653 654 655 656 657 658 659 660 661 662 663 664 665 666 667 668 669 670 671 672 673 674 675 676 677 678 679 680 681 682 683 684 685 686 687 688 689 690 691 692 693 694 695 696 697 698 699 700 701 702 703 704 705 706 707 708 709 710 711 712 713 714 715 716 717 718 719 720 721 722 723 724 725 726 727 728 729 730 731 732 733 734 735 736 737 738 739 740 741 742 743 744 745 746 747 748 749 750 751 752 753 754 755 756 757 758 759 760 761 762 763 764 765 766 767 768 769 770 771 772 773 774 775 776 777 778 779 780 781 782 783 784 785 786 787 788 789 790 791 792 793 794 795 796 797 798 799 800 801 802 803 804 805 806 807 808 809 810 811 812 813 814 815 816 817 818 819 820 821 822 823 824 825 826 827 828 829 830 831 832 833 834 835 836 837 838 839 840 841 842 843 844 845 846 847 848 849 850 851 852 853 854 855 856 857 858 859 860 861 862 863 864 865 866 867 868 869 870 871 872 873 874 875 876 877 878 879 880 881 882 883 884 885 886 887 888 889 890 891 892 893 894 895 896 897 898 899 900 901 902 903 904 905 906 907 908 909 910 911 912 913 914 915 916 917 918 919 920 921 922 923 924 925 926 927 928 929 930 931 932 933 934 935 936 937 938 939 940 941 942 943 944 945 946 947 948 949 950 951 952 953 954 955 956 957 958 959 960 961 962 963 964 965 966 967 968 969 970 971 972 973 974 975 976 977 978 979 980 981 982 983 984 985 986 987 988 989 990 991 992 993 994 995 996 997 998 999 1000 1001 1002 1003 1004 1005 1006 1007 1008 1009 1010 1011 1012 1013 1014 1015 1016 1017 1018 1019 1020 1021 1022 1023 1024 1025 1026 1027 1028 1029 1030 1031 1032

5. მიმართება. სიმრავლეთა სამეცნიერო-პრაქტიკული

სისტემას ეწოდება $\mathcal{M}$ მ. მ. ა. რ. ზ. ა. ან $\mathcal{M}$ -აპოგონი-
 $\mathcal{M}$ მ. მ. ა. რ. ზ. ა., თუ მისი პირველი კომპონენტი არის
 ნულისაგან განსხვავებული ნატურალური რიცხვი n , მესამე კომ-
 პონენტი რაიმე $M_1, \dots, M_n$ სიმრავლეა $\sum_{i=1}^n M_i$ გარე ნამრავლა,
 მეორე კომპონენტი კი არის მესამე კომპონენტის ქვესიმრავლე. მი-
 მარჯვნივ პირველ კომპონენტს ეწოდება $\mathcal{M}$ მ. მ. ა. რ. ზ. ა. ნ-
 ა, მეორე კომპონენტს — $\mathcal{M}$ მ. მ. ა. რ. ზ. ა. გ. ა-
 ზ. ა. კ. ა., მესამე კომპონენტს კი — $\mathcal{M}$ მ. მ. ა. რ. ზ. ა. გ. ა-
 ნ. ა. ბ. ე. ა. რ. ა. $n=2$ შემთხვევა არის ყველაზე მნი-
 შვნელოვანი. მხოლოდ ამ შემთხვევაში მიმარჯვნივ გრაფიკი წარმოა-
 გენს გრაფიკს 1-ე პუნქტში განხილული აბრეშ. საზოგადო, $\mathcal{M}$ -
 აპოგონიანი მიმარჯვნივ გრაფიკი არის $\mathcal{M}$ -კომპონენტობანი სისტემების
 სიმრავლე ($n=1, 2, \dots$).

[illegible]

$(\Gamma(1, G, M))$ օրինարարության շնորհիվ, այդպես, M և n թիվները
 ընտանիքի անդամների թվերը ընտանիքի մեջ $\varphi = (n, G, M^n)$
 սահման օրինարարության միջանկյալով ամփոփվում, որոնք φ արդյունքում

უ ა რ ყ რ ფ ი ს (უ ჭ რ ღ რ ბ ი ს) მ ი მ ა რ ზ ე მ ა M
 ს ი მ რ ა ვ ე ჯ ბ ე . ეს მიმართება აღინიშნება სიმბოლოთა " $\neq$ "
 სიმბოლოთა.

აქვამ, f არის $A \rightarrow B$ ზონის ფუნქცია, ρ კი — ისეთი
 მიმართება A და B სიმრავლეა ელემენტებს შორის, რომ

$$x \rho y \iff y = f(x).$$

მაშინ ρ მიმართების გრაფიკი ემთხვევა f ფუნქციის გრაფიკს.

შევნიშნოთ, რომ $\varphi = (n, G, \bigcup_{i=1}^n M_i)$ მიმართება ცალსახად ისა-
 ბღერება $\varphi \alpha_1 \dots \alpha_n$ წინადადების შინაარსის განსაზღვრით, სადაც
 α_i არის M_i სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი (აქ ფრაზა " $\varphi \alpha_1 \dots \alpha_n$
 წინადადების შინაარსის განსაზღვრა" აუღიხმობს იმის განსაზღვ-
 რას, თუ რა შედეგზევაშია $\varphi \alpha_1 \dots \alpha_n$ წინადადება ჭეშმარიტი და
 რა შედეგზევაშია ცდარი). წინა პარაგრაფში მიმართებათა შემოჭა-
 ნას ვაწარმოებოთ " $\varphi \alpha_1 \dots \alpha_n$ " სახის წინადადებათა შინაარსის
 განსაზღვრით. ახლა, როცა სიმრავლეურ-თეორიული დებატების განსა-
 ზღვრისა, მიმართებებში განსაზღვრული გვაქვს როგორც სიმრავლე-
 ები, შემოცდლია წინა პარაგრაფში შემოჭანილი განსაზღვრებებში და-
 ვაჭუსოთ. ასე მაგალითად, სასრული ნამდვილი რიცხვთა R სიმრავ-
 ლეზე $>, <, \geq, \leq$ მიმართებებში (როგორც სიმრავლეებში) ასე
 უნდა განისაზღვროს:

$$> = (2, G_1, R^2); \quad < = (2, G_2, R^2);$$

$$\geq = (2, G_3, R^2); \quad \leq = (2, G_4, R^2);$$

სადაც G_1 , შესაბამისად G_2 , შესაბამისად G_3 , შესაბამი-
 სად G_4 , არის სასრული ნამდვილი რიცხვთა ისეთ (x, y) წყვილთა
 სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებს პირდაპირ: $x > y$, შესაბამი-
 სად $x < y$, შესაბამისად $x \geq y$, შესაბამისად $x \leq y$. ცხადია,

30. უმცირესი ატრიბუცია φ_x მ ი მ ა რ ე ბ ი ს σ ა ტ რ ი ბ უ -
 ც ი ბ ა M ს ი მ რ ა ვ ც ი ბ ი ა.

6. ორადგილიან მიმართებათა ძირითადი ჭიკჭიკი. უმეტესად, მო-
 ცემულია $\varphi = (2, G, M^2)$ მიმართება. ამბობენ, რომ φ მიმართება
 არის რ ე ჟ ც ი ბ ს უ რ ი, თუ $\forall x \in M [x \varphi x]$.
 ცხადია, $(2, G, M^2)$ მიმართება რეფლექსურია მაშინ და მხოლოდ მა-
 შინ, როცა $\Delta_M \subseteq G$ (ე.ი. როცა M^2 სიმრავლის დიაგონალის ყველა
 ელემენტი გაუხეხილ მიმართებშია გრადიუს).

ამბობენ, რომ φ მიმართება არის ა ნ ტ ი რ ე ჟ ც ი ბ ს
 უ რ ი, თუ $\forall x \in M \neg [x \varphi x]$ (ან, რაც იგივეა, $\forall x \neg [x \varphi x]$).
 ცხადია $(2, G, M^2)$ მიმართება ანტირეფლექსურია, მაშინ და მხო-
 ლოდ მაშინ, როცა $\Delta_M \cap G = \emptyset$ (ე.ი. როცა M^2 სიმრავლის დიაგო-
 ნალის არც ერთი ელემენტი არ გაუხეხილ მიმართებშია გრადიუს).

ამბობენ, რომ φ მიმართება არის ს ი მ ე ჟ რ ი უ ც ი ბ ი, თუ

$$x \varphi y \rightarrow y \varphi x.$$

ცხადია, φ მიმართება სიმეტრიულია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$x \varphi y \leftrightarrow y \varphi x.$$

ცხადია, აკრებელია, რომ $\varphi = (2, G, M^2)$ მიმართება სიმეტრიულია
 მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მიმართების გრადიუსი G არის სიმე-
 ტრიული, ე.ი. როცა $G = G^{-1}$ (ე.ი. როცა φ არის თავის თავის
 სიმეტრიული მიმართება).

ამბობენ, რომ φ მიმართება არის ა ნ ტ ი ს ი მ ე ჟ რ ი -
 უ ც ი ბ ი, თუ

$$x \varphi y \wedge x \neq y \rightarrow \neg [y \varphi x]$$

ცხადია, φ მიმართება არის ანტისიმეტრიული მაშინ და მხოლოდ მა-
 შინ, როცა

$$x \varphi y \wedge y \varphi x \rightarrow x = y.$$

ცხადია აგრეთვე, რომ $(2, G, M^2)$ მიმართება ანტიმომენტუალური
მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$G \cap G^{-1} \subseteq \Delta_M.$$

ყ მიმართებას უნდაქონდეს $\delta \delta \eta \eta \rho \rho$, თუ

$$\forall x \in M \forall y \in M [x \neq y \rightarrow [x \varphi y \vee y \varphi x]].$$

ცხადია, $(2, G, M^2)$ მიმართება მმულის მაშინ და მხოლოდ მაშინ,
როცა

$$M^2 \setminus \Delta_M \subseteq G \cup G^{-1}.$$

ყ მიმართებას უნდაქონდეს $\theta \theta \alpha \alpha \beta \beta \eta \eta \rho \rho$, თუ

$$x \varphi y \wedge y \varphi z \rightarrow x \varphi z.$$

ცხადია, $(2, G, M^2)$ მიმართება ტრანზიტულია მაშინ და მხოლოდ
მაშინ, როცა

$$G \circ G \subseteq G.$$

ტანხილურ ნიშნით $\theta \theta \alpha \alpha \beta \beta \eta \eta \rho \rho$ მიმართება -
ბაბა ბიბიბაბი ბიბიბიბი უნდაქონდეს.

აგრეთვე მუდმივად მუდმივად მუდმივად მუდმივად სამართლია -
ნება.

(5.5) დებულება. თუ $\theta = (2, G, M^2)$ მიმართება
არის რეკლამის ძირითადი ტიპისა და $A \subseteq M$, მაშინ მისი φ^{-1}
ინვერსია, შესაბამისად φ_A შევიწროება, აგრეთვე არის ინვერსი-
ზის.

ყ მიმართებას უნდაქონდეს $\eta \eta \eta \eta \alpha \alpha \beta \beta \theta \theta$ -
ბიბი მიმართება ბაბა, თუ იგი რეკლამის, სიმეტრიული და
ტრანზიტულია. თუ φ არის ეკვივალენტობის მიმართება, მაშინ
 $\alpha \varphi \beta$ - ნაცვალად ნერვად $\alpha \sim \beta$ ან $\alpha \sim \beta$ და ამბობენ " α და
 β ეკვივალენტობის არიან φ - ბი-
ბიბი " ან " α ეკვივალენტობის β - ბი

ფ - ს მ ი მ ა რ ზ".

ფ მიმარჯვებს უწოდება ა რ ა მ ე ა ე რ ი პ ა რ ა გ ე -
მ ი ს მ ი მ ა რ ზ ე ბ ა (ან ა რ ა მ ე ა ე რ ი პ ა რ ა -
გ ე ბ ა), ზე იგი ჭრანბიჭური, რეგულუსური და ანტიბიჭური.
ფ მიმარჯვებს უწოდება ს რ უ რ ი ა რ ა მ ე ა ე რ ი პ ა -
რ ა გ ე მ ი ს მ ი მ ა რ ზ ე ბ ა (ანუ ს რ უ რ ი ა რ ა -
მ ე ა ე რ ი პ ა რ ა გ ე ბ ა), ზე იგი მშვიდა და არის არა-
მკაცრი პალატების მიმარჯვება. ფ მიმარჯვებს უწოდებენ მ ე ა ე რ ი
პ ა რ ა გ ე მ ი ს მ ი მ ა რ ზ ე ბ ა ს (ან მ ე ა ე რ ი
პ ა რ ა გ ე ბ ა ს), ზე იგი ჭრანბიჭური და ანტირეგულუსურია
(იგი, ცხადია, ანტიბიჭური). ფ მიმარჯვებს უწოდება ს რ უ -
რ ი მ ე ა ე რ ა პ პ ა რ ა გ ე მ ი ს მ ი მ ა რ ზ ე ბ ა
(ანუ ს რ უ რ ი მ ე ა ე რ ი პ ა რ ა გ ე ბ ა), ზე იგი
მშვიდა და ამავე დროს არის მკაცრი პალატების მიმარჯვება. ამრიგად,
ჩვენ გვაქვს პალატება 4 ტიპი.

ზე ფ არის პალატება (რეგულმი ტიპისა), მაშინ მუტი
სიჭუსტისათვის ფ -ს უწოდება აგრეთვე M ს ი მ რ ა ე რ ი ს
პ ა რ ა გ ე ბ ა (სამანათო ტიპისა).

ზე ფ არის არამკაცრი პალატების მიმარჯვება (კრძორ,
სრული არამკაცრი პალატების მიმარჯვება), მაშინ აფბ -ს ნაცვლად
წერენ $\alpha \leq \beta$ ან $\alpha \leq \beta$ და ამბობენ " α ნ ა ე რ ე ბ ა
ან ტ რ ი ბ - გ ე" ან " α ნ ი ნ უ ს ნ რ ე ბ ს
ბ - ს", ან " α გ ე რ ი ს ბ - მ ი". ამასთანავე, ამ მუთი-
ბევაში, აფბ $\alpha \neq \beta$ - ს ნაცვლად წერენ $\alpha < \beta$ ან $\alpha < \beta$
და ამბობენ " α ნ ა ე რ ე ბ ა ბ - გ ე" ან " α მ ე ა ე -
რ ა პ ნ ი ნ უ ს ნ რ ე ბ ს ბ - ს", ან " α მ ე ა ე რ ა -
რ ა პ გ ე რ ი ს ბ - მ ი". ზე ფ არის მკაცრი პალატების
მიმარჯვება (კრძორ სრული მკაცრი პალატება), მაშინ აფბ - ს
ნაცვლად წერენ $\alpha < \beta$ ან $\alpha < \beta$. ასევე, აფბ $\alpha = \beta$ - ს

ნაცვლად ნერენ $\alpha \leq \beta$ ან $\alpha \leq \beta$. ამ ჩანაწერმა კითხვის ნუსეში იგივეა.

წინა ლემაშიდან გამომდინარეობს

(5.6) ლემა. ლ $\varphi = (2, G, M^2)$ არის რიგელობი
 ჭიკის პალატება და $A \subseteq M$, მაშინ მისი φ^{-1} ინვერსია და φ_A
 შევიწროება იმავე ჭიკის პალატებას წარმოადგენს.

პამოკიდებულია სხვაპასხვა ჭიკის პალატებში მორის გამ-
 იქმის შემდეგი ლემაში (რომლის სამარტლიანობის შემოწმება სი-
 ძნელეს არ წარმოადგენს).

(5.7) ლემა. 1. ლ $(2, G, M^2)$ არის M სიმრავლის
 არამკაცრი პალატება, მაშინ $(2, G \setminus \Delta_M, M^2)$ იქნება M სიმრავ-
 ლის მკაცრი პალატება.

2. ლ $(2, G, M^2)$ არის M სიმრავლის მკაცრი პალატება,
 მაშინ $(2, G \cup \Delta_M, M^2)$ იქნება M სიმრავლის არამკაცრი პალატე-
 ბა.

3. ლ $(2, G, M^2)$ არის M სიმრავლის სრული არამკაცრი
 პალატება, მაშინ $(2, G \setminus \Delta_M, M^2)$ იქნება M სიმრავლის სრული
 მკაცრი პალატება.

4. ლ $(2, G, M^2)$ არის M სიმრავლის სრული მკაცრი
 პალატება, მაშინ $(2, G \cup \Delta_M, M^2)$ იქნება M სიმრავლის სრული
 არამკაცრი პალატება.

$(2, G, M^2)$ მკაცრ პალატებას და $(2, G_1, M^2)$ არა-
 მკაცრ პალატებას ვუწოდოთ ურთიერთშესაბამისები, ლ $G = G_1 \setminus \Delta_M$
 (და, მაშასადამე, $G_1 = G \cup \Delta_M$).

ლავარქოთ. 1. პამტკიცოთ, რომ სასრული ნამდვილი რიცხვმა
 R სიმრავლეზე განსაზღვრული $\geq$ და $>$ მიმართებებში არიან
 ურთიერთშესაბამისი არამკაცრი და მკაცრი პალატებში.

2. პამტკიცოთ ამ წინადადებების სამი ანალოგიური წინა-
 პადება, რომლებსაც მივიღებთ:

(კერძო, ფუნქციონის) გამოსვლის არე, ჩასვლის არე, განსაზღვრის არე და მინიშნულობა არე, შესაბამისად მიმართების განსაზღვრის არე, ნაცვლად სიმრავლეებისა საზოგადოებრივ ურთიერთობებში. ამიტომ აღნიშნულ განსაზღვრულობა მოდიფიცირებისას საჭირო ხდება რიცხვითი მნიშვნელობის ტერმინები "სიმრავლე" და "ქვესიმრავლე" შეიცვალოს ტერმინებით "კლასი" და "ქვეკლასი". იგივე შეიძლება იქცეს ხსენებული (მოდიფიცირებული ტერმინების მიხედვით) ტერმინებით აღნიშნულ ცნობაში. ასევე მოდიფიცირებული განსაზღვრულობა და ცნობაში ფორმულირება უნდა იქცეს.

გრძელ და იმავე ტერმინის რიცხვითი სხვადასხვა აზრით ხმარებასთან დაკავშირებული გაუგებრობაში თავიდან ავიცილების მიზნით, საჭიროების შემთხვევაში, გამოვიყენებთ დამატებით ტერმინებს "მოდიფიცირებული აზრით". ამის შესაბამისად ხშირად ვისარგებლებთ შემდეგი სახის დამატებით ტერმინებით: "თანაბრება მოდიფიცირებული აზრით", "ფუნქცია მოდიფიცირებული აზრით", " π - ადგილიანი კვანძის მოდიფიცირებული აზრით" და ა.შ.

ნაცვლად ტერმინებისა "გამოსვლის არე", "ჩასვლის არე", "განსაზღვრის არე", "მინიშნულობა არე" ვისარგებლებთ აგრეთვე ტერმინებით: "გამოსვლის კლასი", "ჩასვლის კლასი", "განსაზღვრის კლასი", "მინიშნულობა კლასი". ეს ამ ტერმინებიდან, რომელიც ტერმინით აღნიშნულ საგანი (კლასი) სიმრავლეა, მაშინ ამ ტერმინებში სიტყვა "კლასი" შეიძლება შეიცვალოს სიტყვით "სიმრავლე".

ახლა, ამ პუნქტის დასასრულს, დავამტკიცებთ რაიმე სახის მიმართების შემდეგი საინტერესო ცნობა.

(5.8) თეორემა. ვთქვათ, ρ არის რაიმე რიცხვიანი მიმართება M სიმრავლის ელემენტებს შორის, შესაბამისად მოდიფიცირებული რაიმე რიცხვიანი მიმართება M კლასის ელემენტებს შორის. არ არსებობს M სიმრავლის, შესაბამისად კლასის, ისეთი π ელემენტი, რომელიც ρ მიმართებაში იმყოფებოდეს მხოლოდ და მხოლოდ

M -დან აღებული ისეთ ელემენტებთან, რომლებიც ρ მიმართებაში არ იმყოფებიან თავის თავთან.

დამტკიცება. ჯერედის ორივე ნაწილი ურთი და იმავე მსჯელობით დამტკიცება. m იყოს M -ის ნებისმიერი ელემენტი. უნდა დავამტკიცოთ, რომ მცარია შემდეგი წინადადება:

(*) m იმყოფება ρ მიმართებაში მხოლოდ და მხოლოდ M-დან აღებული ისეთ ელემენტებთან, რომლებიც ρ მიმართებაში არ იმყოფებიან თავის თავთან.

ცხადია, ან m იმყოფება ρ მიმართებაში თავის თავთან, ან m არ იმყოფება ρ მიმართებაში თავის თავთან. პირველ შემთხვევაში m იმყოფება ρ მიმართებაში M -ის ისეთ ელემენტთან (სახეობით m -თან), რომელიც ρ მიმართებაში იმყოფება თავის თავთან, და, მაშასადამე, (*) მცარია. მეორე შემთხვევაში m არ იმყოფება ρ მიმართებაში M -ის ისეთ ელემენტთან (სახეობით m -თან), რომელიც ρ მიმართებაში არ იმყოფება თავის თავთან, და, მაშასადამე, (*) მცარია.

შევნიშნოთ, რომ (5.8) ჯერედის სრული ანალოგი (იგივე პანტეიკეზი) საბარდლიანია იმ შემთხვევაში, როცა M არის საკანთა ნებისმიერი ურთობილობა და ρ არის M -ზე განსაზღვრული "ს ა ნ ე ი ს ი რ ა პ ე ი ლ ი ა ნ ი მ ი მ ა რ ე ჯ - მ ა". აქ არაა საუბარებულო ρ წარმოუდგენლად რატორე სიმრავლე — მოთხოვრება მხოლოდ ის, რომ განსაზღვრული იყოს თუ რა შემთხვევაში ითვლება ყველაობა $\alpha \rho \beta$ წინადადება (სადაც α და β არიან M ურთობილობიდან აღებული ნებისმიერი საგნები) მესამის განმარტების და წინააღმდეგობის კანონების დაცვით.

დამტკიცებული ჯერეობა ნათესს აქვს იმ ფაქტს, რომ არ არსებობს ისეთი სიმრავლე, რომლის ელემენტები ექნებოდა მხოლოდ და მხოლოდ ისეთი სიმრავლეები, რომლებიც თავის თავს რატორე ელემენტს არ შეიცავენ (საჭიროა განვიხილოთ ის კერძო შემთხვე-

ვა, როცა ρ არის $\exists$). ზუ სიმრავლის ცნებისაგან გამომდინარეობს, რომ სიმრავლე არ შეიძლება იყოს თავის თავს როგორც ელემენტს, მაშინ გამომდინარეობს, რომ $\rho = \exists$ შემთხვევაში გვაძლევს: არ არსებობს ისეთი სიმრავლე, რომლის ელემენტებია მხოლოდ და მხოლოდ სიმრავლეები. ამ შედეგის სამართლიანობა უშუალოდ გრძნობადობა (რამდენადაც ასეთი სიმრავლე იქნებოდა თავის თავის ელემენტად შემცველი).

ამრიგად, ისეთი სიმრავლის არ არსებობა, რომელსაც ელემენტებად ექნებოდა მხოლოდ და მხოლოდ ისეთი სიმრავლეები, რომლებიც თავის თავს ელემენტებად არ შეიცავენ, არ უნდა იქნეს მიზნული ვარაუდისაღწერა ფაქტად — იგი არის რაოდენობის მიმართების საკმაოდ მარტივი ფორმის ფორმის (ფორმისა, რომლის მიხედვითაც არსებითად რად არსებობს მიმართების, როგორც კლასის, უსასრულობა და სასრულობა).

8. მიმართება და ფუნქციის მოცემა ფორმული. მიმართების მოცემის უნივერსალური ხერხი მიმართების განსაზღვრა (მოცემა) არაპირდაპირი ფორმით. გვეცნოდ ამ ხერხს. ვთქვათ, A არის მოცემული სიმრავლეა ზოგადი არაპირდაპირი ფორმა (ფორმულა), $X_1, \dots, X_n$ არიან უნივერსალური განსაზღვრული საგნობრივი ცვლადები, $M_1, \dots, M_n$ კი ამ ზოგადი ნებისმიერი სიმრავლეებია, შესაბამისად კლასებია. მაშინ A არაპირდაპირი ფორმა განსაზღვრავს $M_1, \dots, M_n$ სიმრავლეა, შესაბამისად კლასა, ელემენტებს შორის n -ადგილიან φ მიმართებას, შესაბამისად მოპოვებული n -ადგილიან φ მიმართებას, შემდეგნაირად:

$\varphi = (n, G, \bigcup_{i=1}^n M_i)$ შესაბამისად $\varphi = G$, სადა G არის $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების უნივერსალური ფორმა (აქ, $\dots, a_n$) პარამეტრ სისტემაა სიმრავლე, შესაბამისად კლასი, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს: $a_i \in M_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

და მე $\mathcal{A}$ ანოპოტიკური ფორმაში $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების თავისუფალი
 შემოსვლები ნაცვლად ჩავსვამთ მათ მნიშვნელობას ($\alpha_1, \dots, \alpha_n$)
 სისტემას მივიღებთ ჭეშმარიტ წინადადებას (იკულისხმება, რომ $\mathcal{A}$
 ანოპოტიკური ფორმის $X_1, \dots, X_n$ ცვლადებისაგან განსხვავებული
 თავისუფალი ცვლადების მნიშვნელობები დაფიქსირებულია და, მაშა-
 სადამე, φ არის ამ უკანასკნელი თავისუფალი ცვლადების მნიშვნე-
 ლობადა სისტემაზე დამოკიდებული მიმართება. არ გამოვიწყებთ იმ
 შემთხვევას, როცა $X_1, \dots, X_n$ ცვლადებიდან ზოგიერთს ან ყველას
 თავისუფალი შემოსვლები არ აქვს $\mathcal{A}$ ანოპოტიკური ფორმაში).

ასეაღინარა განსაზღვრული მიმართებას პირველი შემთხვევაში
 უნდაქმნენ " $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მიმართ $\mathcal{A}$
 ანოპოტიკური ფორმის განსაზღვრული
 (n - ადგილი) მიმართებას $M_1, \dots, M_n$ სი-
 მისი ცვლილება ცვლილებების შორის ", მეორე
 შემთხვევაში კი უნდაქმნენ " $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების
 მიმართ $\mathcal{A}$ ანოპოტიკური ფორმის გან-
 სისაზღვრული მონივრული (n - ად-
 გილი) მიმართებას $M_1, \dots, M_n$ კლასის
 ცვლილებების შორის. ამ მიმართებას, შესაბამისად
 მოპოვებული მიმართებას, ხშირად იხუც $\mathcal{A}$ -თა აღნიშვნა
 (მეტი სიმკვრივისათვის იყენებენ აგრეთვე აღნიშვნას " $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ "
 ან უფრო ღუსტ აღნიშვნას " $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n; M_1, \dots, M_n)$ "). ამის
 შესაბამისად ანოპოტიკური ფორმის ზოგჯერ მიმართებას უნდაქმნენ.
 ამრიგად, $\mathcal{A}$ ანოპოტიკური ფორმა (ფორმულა) შეგვიძლია განვიხი-
 ლოთ, როგორც n - ადგილიანი მიმართება, შესაბამისად მოპოვებ-
 რებული n - ადგილიანი მიმართება, ნებისმიერად აღებული $M_1, \dots, M_n$
 სიმრავლეა ელემენტებს შორის, შესაბამისად $M_1, \dots, M_n$ კლასთა
 ელემენტებს შორის (ნებისმიერად აღებული ურთიდანობისაგან განსხვა-
 ებული $X_1, \dots, X_n$ საცნობარო ცვლადების მიმართ).

მაგალითი. x და y ცვლადების მიმართ S ჯგუფის $x > y$,
 $x \geq y$, $x < y$, $x \leq y$ ატომარულ ფორმულებში განსაზღვრული
 ორპოლიანი მიმართებები R სიმრავლის ელემენტებს შორის შესა-
 ბამისაპ არიან: $>$, $\geq$, $<$, $\leq$.

ანალოგიურაპ, ფუნქციის მოცემის უმინიმუმეკონკრეტული ხერხი
 ფუნქციის განსაზღვრა საცნობრივი ფორმულები (ე.ი. ფორმულები). გა-
 ეყენოთ ამ ხერხსაყ. უფრეა, $\mathcal{A}$ არის საცნობრივი ფორმა; $X_1, \dots, X_n$
 არიან მოცემული სიმრავლეა ჯგუფის ურთმანდისგან განსხვავ-
 ბული საცნობრივი ცვლადები; $M_1, \dots, M_n$ კი ამ ჯგუფის ნების-
 მიერი სიმრავლეებია, შესაბამისაპ კლსებია. მაშინ $\mathcal{A}$ საცნ-
 ბრივი ფორმა განსაზღვრავს n - აპოლიან φ ფუნქციას, შესა-
 ბამისაპ მოპიფიკირებულ n - აპოლიან φ ფუნქციას, შემდეგნაირაპ:

$$\varphi = (G, \bigotimes_{i=1}^n M_i, M), \text{ შესაბამისაპ } \varphi = G,$$

სადა G არის ყველა ისე $((\alpha_1, \dots, \alpha_n), a)$ სახის ნყვირთა
 სიმრავლე, შესაბამისაპ კლსი, რომლებიყ აქმაყოფილებენ პირ-
 ბას: $\alpha_i \in M_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) და ფე $\mathcal{A}$ -ში $X_1, \dots, X_n$ ცვლ-
 დების ნაცვლარ ჩავსვამთ მათ მინიმუმეკონკრეტული $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ სისფ-
 მას მივიღებთ a ელემენტის სახელს; M არის G გრაფიკის მინ-
 იმუმეკონკრეტული ნებისმიერი სიმრავლე, შესაბამისაპ
 კლსი.

აქუნაირაპ განსაზღვრულ n - აპოლიან φ ფუნქციას, შე-
 საბამისაპ მოპიფიკირებულ n - აპოლიან ფუნქციას, უმოდებენ
 $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მიმართ $\mathcal{A}$ საც-
 ნობრივი ფორმის განსაზღვრული n -
 აპოლიანი ფუნქციას, შესაბამისაპ მოპიფი-
 კირებულ n - აპოლიანი ფუნქციას, $\bigotimes_{i=1}^n M_i$
 გამოსვლიის არი. ამ ფუნქციას, შესაბამისაპ მოპი-
 ფიკირებულ ფუნქციას, ხშირაპ ისე $\mathcal{A}$ -ში აღნიშნავენ (მეტი

სიმეტრიის საფუძველზე იყენებენ აგრეთვე აღნიშვნას " $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ " ან უფრო ჭეშმარიტ აღნიშვნას " $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n; M_1, \dots, M_n, M)$ ", შესაბამისად " $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n; M_1, \dots, M_n)$ " ამის შესაბამისად საგნობრივ თორმას ხშირად ფუნქციას უწოდებენ. ამრიგად, $\mathcal{A}$ საგნობრივ თორმას შეიცავს განვიხილოთ როგორც n -აპრიტიანი ფუნქცია, შე-საბამისად n -აპრიტიანი მორფოციკრებულ ფუნქცია, ნებისმიერად აღებული ერთმანეთისაგან განსხვავებული $X_1, \dots, X_n$ საგნობრივ ცვლადების მიმართ გამოსვლის $\sum_{i=1}^n M_i$ არიო, სადაც $M_1, \dots, M_n$ აგრეთვე ნებისმიერად აღებული სიმრავლეებია, შესაბამისად კლასები.

აქველად შეიცავს რამდენიმე შედეგი ნინადაება. $\mathcal{A}$ არის S ღორიის n -აპრიტიანი ფუნქცია, შესაბამისად მორფოციკრებულ ფუნქცია, გამოსვლის $\sum_{i=1}^n M_i$ არიო და ჩასვლის M არიო, მაშინ $f(x_1, \dots, x_n)$ ღერმი, განხილული როგორც n -აპრიტიანი ფუნქცია, შესაბამისად n -აპრიტიანი მორფოციკრებულ ფუნქცია, $x_1, \dots, x_n$ ცვლადების მიმართ გამოსვლის $\sum_{i=1}^n M_i$ არიო და ჩასვლის M არიო, იგივეა რაც f . ამიტომ, რომ ბეზოთ აღნიშვნის შესაბამისად, განხილავენ რა $f(x_1, \dots, x_n)$ ღერმს როგორც ფუნქციას, ნაცვლად ღრადისა " f ფუნქცია" სარტებლბენ ღრადიო " $f(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქცია".

9. ნამდვილი რიცხვის წარმოდება ადრიალის სახით. მთელი ნამდვილი რიცხვებისაგან განსასხვავებლად მთელი რიცხვებს (ე.ი. ჩვეულებრივ ნატურალური რიცხვთა $(0, n)$ და $(n, 0)$ სახის წყვილებს) უწოდებენ ს ა კ უ მ რ ი ვ ი მ თ ე ლ ი რ ი ც ხ ვ ე - ბ ი. ამბობენ, რომ ს ა კ უ მ რ ი ვ ი მ თ ე ლ ი რ ი ც ხ ვ ე - ვ ი χ ნ ა კ ე ბ ი ა α ნ ა მ ე ვ ი ლ რ ი ც ხ ვ ე ბ ე და წერენ $\chi < \alpha$, $\mathcal{A}$ χ ნამდვილი მთელი რიცხვი ნაკლებია α -ზე. ქვემოთ ვისარტებლბთ სხვა ანალოგიური ღერმინებოთ მათ განსაზღვრებათა ღორმულირებების გარეშე. საკუთრივ მთელი რიცხვთა $\mathcal{A}$

მიმდევრობას უწოდება $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ არის ურთიერთ-
 $0, 1, 2, \dots, 9$ რიცხვებიდან ($i=1, 2, \dots$) და, ამასთანავე, ყო-
 ველ n - ზეის მიმდევრობა ისეთი $m > n$, რომ $a_m \neq 9$. გან-
 ხილული $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ მიმდევრობა $a_0, a_1, a_2, \dots$ აღნიშვნისა, a ან-
 ჯილდის აღნიშვნავენ აგრეთვე $a_0, a_1, a_2, \dots$ -ით. ამასთანავე, იმ
 შემთხვევაში როცა სარგებლობენ უკანასკნელი აღნიშვნით, a_i სიმ-
 ბოლოს ატიკივებენ a_i რიცხვის აღნიშვნად ციფრთან და უწოდებენ
 $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ i - ურთიერთ-
 ($i=1, 2, \dots$) , a_0 სიმბოლოს კი, როცა a_0 რიცხვი არაუარყო-
 ჟიანა, ატიკივებენ ათბითი სისტემის მიხედვით a_0 რიცხვის აღნი-
 შვნად სიტყვასთან, ხოლო როცა a_0 უარყოფიანა, ატიკივებენ $\bar{a}_0$ -თან,
 სადაც $\bar{a}_0$ არის ათბითი სისტემის მიხედვით $-a_0$ რიცხვის აღნი-
 შვნად სიტყვა. $0, a_1, a_2, a_3, \dots$ ანალიზს უწოდებენ $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ i - ურთი-
 რთი a_0 რიცხვის აღნიშვნა, რომლის მიხედვით ნაწილი არის
 $0, i$ - ურთი ათბითი ნიშანი კი არის a_i ($i=1, 2, \dots$)). ანალი-
 ზის აღსანიშნავად იყენებენ აგრეთვე $\overline{14}, 134219 \dots$ სახის გა-
 მსახურებას. ასეთი სახის აღნიშვნა არაა სრულყოფილი. იგი აღნი-
 შნავს ნებისმიერ ისეთ a ანალიზს, რომლისთვისაც $a_0 = -14, a_1 = 1,$
 $a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 2, a_5 = 1, a_6 = 9$. კერძო შემთხვევებში ასეთი სა-
 ხის აღნიშვნა კონკრეტული საფუძველზე ცალსახად განსაზღვრავს ან-
 ჯილდის. $-51, 8912 \dots$ სახის აღნიშვნას არ იყენებენ ანალიზის
 აღსანიშნავად: ქვემოთ ჩვენ გავამყარებთ ურთიერთცალსახა დანა-
 გობას სასრულო ნამდვილი რიცხვთან სიმრავლესა და ანალიზების სიმ-
 რავლეს შორის და ანალიზის აღნიშვნად სიმბოლოებს გამოვიყუ-
 ნებთ ამ ანალიზის შესაბამისი ნამდვილი რიცხვის აღნიშვნად.
 მაშინ $-51, 8912 \dots$ აღნიშნავს $51, 8912 \dots$ ანალიზის შესაბამის-
 სი ნამდვილი რიცხვის ნიშნობას რიცხვის აღნიშვნა. a ანალი-

1. მხედველობაში მივიღოთ წინა საკარგოში მოცემული წინადადება, ურთიერთობა, რომ ბევრად მოჭანოლი განსაზღვრა ურთიერთობა-საბა მანერობას ამჟამებს სასრული ნამდვილი რიცხვით სიმრავლესა და ახილად სიმრავლეს შორის. α ნამდვილი რიცხვს უწოდება $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 10^{-1} + \alpha_2 \cdot 10^{-2} + \dots + \alpha_n \cdot 10^{-n}$, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — მისი მნიშვნელობის ახილადი არის სასრული.

მოცემული ნებისმიერი სასრული ნამდვილი რიცხვს განვიტოვებთ შესაბამის ახილადთან. ანთ ახილადის აღნიშვნებში იქვევითან შესაბამის ნამდვილი რიცხვით აღნიშვნებად. აღნიშნული განვიტოვებთ საფუძველზე ნამდვილი რიცხვებზე წარმოებულ მკერაყიბიბან ინტეგრირებთან ახილადთა სიმრავლეზე განსაზღვრული მკერაყიბიბი.

$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 10^{-1} + \alpha_2 \cdot 10^{-2} + \dots + \alpha_n \cdot 10^{-n}$ საბის ჭოლბას, სადა α_0 არის ახილადი, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ არის მისი შესაბამისი ნამდვილი რიცხვი, უწოდება $\alpha_0 + \alpha_1 \cdot 10^{-1} + \alpha_2 \cdot 10^{-2} + \dots + \alpha_n \cdot 10^{-n}$ (გაბილა) $\alpha_0 + \alpha_1 \cdot 10^{-1} + \alpha_2 \cdot 10^{-2} + \dots + \alpha_n \cdot 10^{-n}$.

საკარგო 1. პამტყიყი 1. 1. α უსასრულო ახილადის განვიხილავთ, როგორც (შესაბამის). ნამდვილი რიცხვს, მათინ α_0 იქნება მისი მიახლოებთი მნიშვნელობა სიბუსტით 10^{-n} — მდე ნაკლებობით, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ იქნება მისი მიახლოებთი მნიშვნელობა $\frac{1}{10^n}$ — მდე სიბუსტით ნაკლებობით, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n + 1 \cdot 10^{-n}$ — მისი მიახლოებთი მნიშვნელობა $\frac{1}{10^n}$ — მდე სიბუსტით მეტობით.

2. სასრული ან უსასრულო პერიოდული ახილადი, განვიტოვოთ როგორც ნამდვილი რიცხვი, არის რაციონალური რიცხვი.

3. უსასრულო არაპერიოდული ახილადი, განვიტოვოთ როგორც ნამდვილი რიცხვი, არის ირაციონალური რიცხვი.

4. სასრული ნამდვილი რიცხვის შესაბამისი ახილადის ბევრად მოჭანოლი განსაზღვრა კორექტულია (ე.ი. აღნიშნული განსაზღვ-

ვრამე მოცემული პროცესი განსაზღვრული საკუთრივ მდე რიცხვა α მიმდევრობის ნებისმიერი ბოლო მონაკვეთი არ ემთხვევა $9,9,9,\dots$ მიმდევრობას).

5. განაზოგადე ამ პუნქტში მოტანილი ცნებები და შედეგები S -ობით წილადებისათვის, სადაც S არის 2-ზე მეტი ან ზოლი წარმოადგენს რიცხვი (S -ობითი წილადები აწილადების, ე.ი. აბობობი წილადების, ანალოგიურად ისაზღვრება რიცხვა ისე სისტემაში, რომლის ფუძე მიზნულია S).

10. წამდელი რიცხვის გომეფრთხი ინტერპრეტაცია, რიცხვითი ღერძი. რ ი ც ხ ვ ი ზ ი ჟ ე რ ძ ი ეწოდება ისე $\alpha = (d, 0, P)$ სამუელს, რომლის პირველი კომპონენტი წრფა, მეორე და მესამე კომპონენტები კი — პირველი კომპონენტის ემმანუელისაგან განსხვავებული წერტილები. მეორე კომპონენტს ეწოდება α ჟ ე რ ძ ი ს ს ა ზ ა ვ ე , $\ell = [OP)$ სხივის მიმართულებას ეწოდება α ჟ ე რ ძ ი ს პ ა რ ე ბ ი ზ ი მ ი მ ა რ ზ ე ჯ ა , $\ell' = [PO)$ სხივის მიმართულებას კი — α ჟ ე რ ძ ი ს უ ა რ ე ზ ე ბ ი მ ი მ ა რ ზ ე ჯ ა . $[OP]$ მონაკვეთის სიგრძე მიზნულია სიგრძის ერეულად. d წრფეს ეწოდება α ჟ ე რ ძ ი ს ფ უ ძ ე . რიცხვით ღერძს ჩვეულებრივ აიგივებენ მის ფუძესთან და ამის შესაბამისად იყენებენ გამარტივებულ გამოქმედებს. ასეა გამარტივებული გამოქმედების მაგალითები: " α ღერძის წერტილი" (მხედველობაშია d წრფის წერტილი), " α ღერძის წერტილად სიმრავლე" (მხედველობაშია d წრფე) და ა.შ. გარდა ამისა, გამოცემის გამარტივების მიზნით, შემოვიღო შემდეგი განსაზღვრებები (შეანბმებები): " α ღერძის A წერტილი იმყოფება (მეშარეობს) α ღერძის B წერტილთან დადებით, შესაბამისად უარყოფით, მიმართულებით" განსაზღვრით ნიშნავს იმას, რომ $B \neq A$ და $[BA)$ სხივი ℓ , შესაბამისად ℓ' , სხივის მანამიმართულია. აღნიშნული ფრაზის ნაცლად იყენებენ აგრეთვე შემდეგ გამარტივებულ ფრაზებს:

" x ჯერძის A ნერტილი იმყოფება x ჯერძის B ნერტილის მარჯვნივ, შესაბამისად მარცხნივ" და " x ჯერძის A ნერტილი იმყოფება x ჯერძის B ნერტილის მჯეო, შესაბამისად ქვევით".

"გადავზომოთ რაივე $[CD]$ მონაკვეთი x ჯერძის A ნერტილიდან პაღეზიოთ მიმარტულეზიოთ, შესაბამისად უარყოფიოთ მიმარტულეზიოთ" ნიშნავს უიპოვოთ x ჯერძის ისეთი B ნერტილი, რომელიც აქმყოფილეს პირიბებს: $|AB| = |CD|$ და $[AB)$ სიივი ℓ , შესაბამისად ℓ' , სიივის ჭანამიმარტულია ($|AB|$ -ოი ალონიშნება მანძილი A -დან B -მეღ). " $[AB]$ მონაკვეთი არის სიგრძის ჯრდეული" ნიშნავს: $[AB]$ მონაკვეთის სიგრძე არის სიგრძის ჯრდეული. ქვევით ვისარგებლებ სხვა ანალოგიური განსაზღვრებეზიოთ ამ განსაზღვრებაოა ცხადპ მოჭანის გარეშე.

x ჯერძის O საოვიისაგან განსხვავებულ ნერტილოა სიმრავლე იყოფა O ნერტილიდან პაღეზიოთ მიმარტულეზიოთ მეოფ და უარყოფიოთ მიმარტულეზიოთ მეოფ ურთიეროარამქვეა ნერტილოა სიმრავლეებპ (პირველი მათგანი ემეხვევა ℓ სიივის შესაბამის ღია სიივის, მეორე კი — ℓ სიივის მიპირპაპირე სიივის შესაბამის ღია სიივის).

x რიცხვიო ჯერძსა (ან, რაც იგივეა, $\mathcal{L}$ ნრფესა) და სასრულ ნამევილი რიცხვოა R სიმრავლეს შირის შეიძლება პავამყოროთ ურთიეროეაღსახა ჭანალოა შემევეი რრი აქსიომის საფუძველებე.

1. უწყვეტოზის აქსიომა, ჭუ x ჯერძის ნერტილოა სიმრავლე გაყოფილია რ A და B ქვესიმრავლეე ისე, რომ A სიმრავლის ჭიოკული ნერტილი (ელემენტი)მოოავსებულია B სიმრავლის ყველა ნერტილიდან უარყოფიოთ მიმარტულეზიოთ, მაშინ ან A სიმრავლე შეიყავს ისეთ ნერტილს, რომელიც იმყოფება A სიმრავლეში შემაველი ყველა პანარქენი ნერტილიდან პაღეზიოთ მიმარტულეზიოთ, ან B სიმრავლე შეიყავს ისეთ ნერტილს, რომელიც იმყოფება B სიმრავლეში შემაველი ყველა პანარქენი ნერტილიდან უარყოფიოთ მიმარტულეზიოთ.

2. არქიმედიის აქსიომა, ნემისმიერი რრი $[AB]$ და $[CD]$

მონაკვეთისათვის მოიძებნება ისეთი μ ნატურალური რიცხვი, რომ $[CD]$ მონაკვეთი A -დან $[AB]$ მონაკვეთში $[AB]$ მიმართულებით გადამოშვება μ -ჯერ და ამ გადამოშვების შემდეგ ან არ პარჩება ნაშთი, ან პარჩება $[CD]$ მონაკვეთზე ნაკლები ნაშთი.

მარტლაც, ვაქვამ, α არის ნებისმიერი სასრული ნამდვილი რიცხვი. მისი შესაბამისი ნერტილი განვსაზღვროთ შემდეგნაირად.

I შემთხვევა. α ა რ ი ს ნ ა მ რ ვ ი ღ ი რ ა ც ი ნ - ნ ა ლ უ რ ი რ ი ც ხ ვ ი. μ იყოს მისი შესაბამისი საკუთრივი რაციონალური რიცხვი, $\frac{m}{n}$ კი — μ -ის ნარმოშაძეგნელი (μ მთელი ნატურალური რიცხვისა). α ნამდვილი რაციონალური რიცხვის შემსაბამოთ α ღერძის ის M ნერტილი, რომელსაც მივიღებთ, α $[OP]$ ერთეულოვანი მონაკვეთის μ კონტრუენტული ნაწილად გაყოფით მიღებულ მონაკვეთს გადამოშვებთ α ღერძზე საშავიდან $|m|$ - ჯერ დადებითი ან უარყოფითი მიმართულებით იმისდა მიხედვით m დადებითია თუ უარყოფითი. ადვილი დასადახია, რომ $[OP]$ ერთეულოვანი მონაკვეთის $\mu \cdot K$ კონტრუენტული ნაწილად გაყოფით მიღებულ მონაკვეთს α გადამოშვებთ α ღერძზე საშავიდან $|m| \cdot K$ - ჯერ იმავე მიმართულებით, იმავე M ნერტილს მივიღებთ (ვკლავსხმობთ, რომ K საკუთრივი მთელი ნატურალური რიცხვისა). აქედან გამომდინარეობს, რომ M ნერტილი არ არის დამოკიდებული μ -ის $\frac{m}{n}$ ნარმოშაძეგნელის არჩევაზე და, მაშასადამე, α რიცხვის შესაბამისი M ნერტილის მოჭანილი განსაზღვრა კორექტულია. ადვილი დასადახია, რომ ნებისმიერი ორი ნამდვილი რაციონალური α_1 და α_2 რიცხვისათვის $\alpha_1 > \alpha_2$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა α_1 -ის შესაბამისი ნერტილი მოჭავსებულა α_2 -ის შესაბამის ნერტილიდან დადებითი მიმართულებით. μ საკუთრივი რაციონალური რიცხვის შესაბამისი ვუწოდოთ α ღერძის იმ ნერტილს, რომელიც არის ნამდვილი რაციონალური μ რიცხვის შესაბამისი.

II შემთხვევა. α ა რ ი ს ი რ ა ც ი ნ ნ ა ლ უ რ ი

ამისათვის საკმარისია დამტკიცება:

(1) თუ α და β დამტკიცებულია $\alpha > \beta$, მაშინ α -ს შესაბამისი α' ნერტილი იმყოფება β -ს შესაბამის β' ნერტილი-
დან დადებითი მიმართულებით (კერძოდ, $\alpha' \neq \beta'$).

(2) თუ M არის α ღერძის ნერტილი, α კი — ისეთი რაცი-
ონალური ნერტილია სიმრავლე, რომელია შესაბამისი ნერტილები იმ-
ყოფებიდან M ნერტილიდან უარყოფითი მიმართულებით, მაშინ α არის
დამტკიცებული რიცხვი, M კი α დამტკიცებული რიცხვის შესაბამისი ნერ-
ტილია.

დამტკიცებული რიცხვის შესაბამისი ნერტილის განსაზღვრიდან და
ამ განსაზღვრასთან დაკავშირებით მოცემული მსჯელობებიდან ადვილად
გამომდინარეობს.

(3) ნებისმიერი p დამტკიცებული რიცხვის შესაბამისი p' ნერტილი
იმყოფება მისი ნებისმიერი ელემენტის (საკუთარი რაციონალური
რიცხვის) შესაბამის ნერტილიდან დადებითი მიმართულებით. ასევე
 p' იმყოფება p დამტკიცებული რიცხვის ზედა კლასის ნებისმიერი z
ელემენტის შესაბამის z' ნერტილიდან უარყოფითი მიმართულებით, გარდა
იმ გამონაკლისი შემთხვევისა, როცა p არის z რაციონალური დამ-
ტკიცებული რიცხვი. ამ უკანასკნელ შემთხვევაში $z' = p'$.

ახლა (1)-ის დასამტკიცებლად შევნიშნოთ შემდეგი. რაგან $\alpha > \beta$,
არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი z , რომ $z \in \alpha$ და $z \notin \beta$.
აქედან (3) ნინადადების საფუძველზე დავასკვნით, რომ α' იმყოფება
 z -ის შესაბამის z' ნერტილიდან დადებითი მიმართულებით, β' კი
ან იმყოფება z' -დან უარყოფითი მიმართულებით ან ემთხვევა z' -ს.
გარდა შემთხვევაში α' იმყოფება β' -დან დადებითი მიმართულებით.

დამტკიცებული (1) ნინადადებიდან ადვილად დავასკვნით:

(4) C დამტკიცებული რიცხვი იმყოფება α და β დამტკიცებული რიც-
ხვებს შორის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა C — ს შესაბამისი
ნერტილი α ღერძიდან იმყოფება α და β რიცხვების შესაბამის

წერტილებს შორის.

აქედან ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის სახანაო ზღვების სა-
ფუძველზე გამოდინარეობს:

(5) ღერძის ორ ნებისმიერ წერტილს შორის იმყოფება ურთი-
მანვე რაციონალური წერტილი (ე.ი. ისეთი წერტილი, რომლის შესა-
ბამისი ნამდვილი რიცხვი რაციონალურია).

ახლა, (2)-ის რასამტკიცებლად შევნიშნოთ, რომ არქიმედის აქ-
სიომის ძალით α არ არის ყარველი სიმრავლე, (5) წინადადებას
ძალით კი α სიმრავლეს არ აქვს უბოძესი ელემენტი. (1)-დან გა-
მოდინარეობს აგრეთვე, რომ α შეიცავს მის ნებისმიერ ელემენტ-
ზე ნაკლებ ყველა რაციონალურ რიცხვს. მაშასადამე, α არის ნამდ-
ვილი რიცხვი. α ნამდვილი რიცხვის შესაბამისი α' წერტილი რომ
 M -ს ემხვევა ადვილად მტკიცდება წინააღმდეგის დაშვებით.

რიცხვითი α ღერძის M წერტილის შესაბამის ნამდვილ რიც-
ხვს M წერტილის α - კოორდინატის (ან, უბრალოდ,
კოორდინატის) ეწოდება. რიცხვითი ღერძის თითოეულ წერ-
ტილს აიჭივებენ ამ წერტილის შესაბამის ნამდვილ რიცხვთან (მის
კოორდინატთან). ამის შესაბამისად რიცხვითი ღერძის წერტილს უწო-
დებენ რაციონალურ α წერტილს, თუ მისი კოორდი-
ნატი რაციონალური (ნამდვილი) რიცხვია. ასევე შემოიჭანება ჭრ-
ბინები: რიცხვითი ღერძის მთელი α წერტილი, ნატურ-
ალური α წერტილი რაციონალურ α წერტილი

ბევრად ფაქტურად რაციონალურ შემდეგი ღერძები.

(4.9) ჯერჯილი. თუ α და β ნამდვილი რიცხვებია და
 $\alpha > \beta$, მაშინ α -ს შესაბამისი α' წერტილი α რიცხვითი ღერ-
ძიდან იმყოფება β -ს შესაბამის β' წერტილიდან დადებითი მანძი-
ლზე.

(4.10) ჯერჯილი. α რიცხვითი ღერძის ნებისმიერ ორ წერტილს

ჭილს შორის იმყოფება ურთი რაყიონალური წერტილი მანძილზე.

(4.11) ჯგერემა. C ნამდვილი რიცხვი მომავსებულობა α და β ნამდვილი რიცხვებს შორის, მაშინ α მხოლოდ მაშინ, როცა α რიცხვი იქნება C წერტილი (ე.ი. C რიცხვის შესაბამისი წერტილი) მომავსებულობა α რიცხვი იქნება α და β წერტილებს შორის.

11. მონაკვეთის სიგრძე. ვთქვათ სიგრძის ურთულად მიზნულობა $[OP]$ მონაკვეთი. $[AB]$ მონაკვეთის სიგრძე ურთულად α ნამდვილი რიცხვს, რომლის შესაბამისი აბსოლუტი $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ შემდეგნაირად ისაზღვრება. α_0 არის $[AB]$ მონაკვეთში $[OP]$ ურთულის A -დან $[AB]$ მიმართულებით გადამოშვება მანძილური რიცხვი. ვთქვამხმომ, რომ გადამოშვება რიცხვს გამოვხატავთ საკუთრივი ნატურალური მთელი რიცხვებით (სადა α_0 რიცხვის არსებობა გამოდგინაშე არქონების აუსიომიდან). α_1 არის წინა გადამოშვის შემდეგ მთელი ურთული A_1B ნაშთი ურთულის 10 კონგრუენტული ნაწილად გაყოფის შემდეგ მთელი მონაკვეთის A_1 -დან $[A_1B]$ მიმართულებით გადამოშვება მანძილური რიცხვი. საბოლოოდ, α_k განსაზღვრულია $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$ და k -ური ნაშთი, რომელიც წერტილისაგან განსხვავდება, მაშინ α_k არის k -ური A_kB ნაშთი ურთულის 10^k კონგრუენტული ნაწილად გაყოფის შემდეგ მთელი მონაკვეთის A_k -დან $[A_kB]$ მიმართულებით გადამოშვება მანძილური რიცხვი. α რომელიმე უსაზღვრო გადამოშვება შემდეგ მთელი ნაშთი გადამოშვებულია წერტილად, მაშინ არსებობს წერტილი და არსებობს შემდეგ მთელი $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ სახის სიგრძე, რომელიც მიზნული გვაქვს სასრული აბსოლუტის აღნიშვნად. ადვილად დამტკიცდება მომხმარებელი განსაზღვრის კორექტულობა (მონაკვეთის სიგრძე დამოკიდებული არ იქნება იმაზე, გადამოშვება A -დან ვაშარმოვით $[AB]$ მიმართულებით, α B -დან $[BA]$ მიმართულებით). $[AB]$ მონაკვეთის სიგრძე აღინიშნება

რეზონს, სიმეტრიულობისა და ტრანზიტულობის მკვლევარები.

მაგალითი. ნატურალური რიცხვთა $\mathcal{N}$ სიმრავლე $\mathcal{A}$ სიმრავლურად დაჯგუფებულია
მკვლევარ რიცხვთა $\mathcal{N}_2$ სიმრავლისა. მაგალითი ($G, \mathcal{N}, \mathcal{N}_2$), სადა
 $G = \{(n, 2n) : n \in \mathcal{N}\}$, არის ურთიერთმართლებიანი სიმრავლე $\mathcal{N}$ და $\mathcal{N}_2$
სიმრავლეებს შორის.

$\mathcal{A}$ სიმრავლეს ეწოდება **მკვლევარი**, **მკვლევარი** არის ნატურალური რიცხვთა სიმრავლის დაჯგუფებული.

ყველა $\mathcal{A}$ სიმრავლეს უმანაგებენ განკუთვნილი საგანს ისე,
რომ მხოლოდ და მხოლოდ უმანაგებონ დაჯგუფებული სიმრავლეებს
უმანაგებენ ერთი და იმავე საგანს. ამასთანავე, იმ საგანს, რომელიც
უმანაგებია $\mathcal{A}$ სიმრავლეს აღნიშნავენ $\bar{\mathcal{A}}$ სიმბოლოთი და ამ
საგანს ეწოდებენ $\mathcal{A}$ სიმრავლის სიმბოლო. მისი
შესაძლებელია ეს საგნები (სიმბოლოები) ისე შევარჩიოთ, რომ
ისინი სიმრავლეები იყონ და, ამასთანავე, სასრულო სიმრავლეთა სიმ-
ბოლოები იყონ მათი დაჯგუფებული ჩვეულებრივი ნატურალური
რიცხვები. უსასრულო სიმრავლეთა სიმბოლოებს უსასრულო
სიმბოლოები ეწოდება, ეწოდება, ნატურალური რიცხვებს (ე.ი.
სასრულო სიმრავლეთა სიმბოლოებს) $\mathcal{N}$ — სასრულო
სიმბოლოები.

ნატურალური რიცხვთა $\mathcal{N}$ სიმრავლის სიმბოლოს აღნიშნავენ
 $\mathcal{N}_0$ — იმ ($\mathcal{N}$ არის უბრალოდ აღმართვის პირველი ასე და ეწოდება
აღმართი). ნამდვილი რიცხვთა სიმრავლეს $\mathcal{R}$ სიმბოლოს
ეწოდებენ და მისი სიმბოლოს ($\mathcal{R}$ სიმბოლოს სიმბოლო —
 $\mathcal{R}_0$) აღნიშნავენ $\mathcal{R}$ — იმ. სიმბოლოებს აღნიშნავენ
აგრეთვე მოტივური მნიშვნულის ასეთი.

ყველა, $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$ ორი სიმბოლოა. $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$ იყონ ნე-
ბისმიერი ისეთი სიმრავლეები, რომ $\mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}}$ და $\mathcal{B} = \bar{\mathcal{B}}$. **მკვლევარი** $\mathcal{A}$ და
არის $\mathcal{B}$ — დაჯგუფებული და $\mathcal{A}$ არის $\mathcal{B}$ სიმრავლის ნაწილის
დაჯგუფებული, მაშინ განსაზღვროთ $\mathcal{A}$ სიმბოლო

$\alpha < b$ ან $b > \alpha$. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ნებისმიერად ალ-
 ბერს α და b სიმძლავრისათვის ადგილი აქვს ერთი და იგი-
 სე ერთი შედეგად სამი შემთხვევაში:

$$\alpha = b ; \alpha < b ; \alpha > b .$$

ახლა დავამტკიცებთ ჯეროვანს, საიდანაც გამომდინარეობს,
 რომ უსასრულო სიმძლავრეა კლასი უსასრულოა.

(6.1) ჯეროვანა (კანტორის). ნებისმიერ M სიმრავლის
 ქვესიმრავლეა M სიმრავლის სიმძლავრე მეტია M -ის სიმძლავ-
 რეზე.

დამტკიცება. სასრულო M სიმრავლის შემთხვევაში ჯერო-
 ვის სამართლიანობა ცხადია (ცარიე სიმრავლის ქვესიმრავლეა
 სიმრავლე ერთეულმენტიანი სიმრავლეა). ვიგულისხმობთ, რომ M უსა-
 სრულოა და დავამტკიცოთ, რომ $\overline{M} > \overline{M}$.

დავშვათ წინააღმდეგი, ე.ი. დავშვათ, რომ $\overline{M} = \overline{\overline{M}}$. მაშინ
 არსებობს φ ფუნქცია, რომელიც M სიმრავლეს ურთიერ-
 ტაბულაციას $\overline{M}$ სიმრავლეზე. განვიხილოთ

$$M_1 = \{ m : m \in M \wedge m \notin \varphi(m) \}$$

სიმრავლე. ცხადია, რომ იგი არის M -ის ქვემრავლე. $\varphi^{-1}(M_1)$ -ის
 m_1 -ცხადია, ან $m_1 \in \varphi(m_1) = M_1$, ან $m_1 \notin \varphi(m_1) = M_1$.
 პირველ შემთხვევაში M_1 -ის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ
 $m_1 \in M_1$ (წინააღმდეგობა), მეორე შემთხვევაში კი M_1 -ის გან-
 საზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ $m_1 \notin M_1$ (ისევ წინააღმდეგობა).

შენიშვნა. ეს კავთვალენობის ცნებას დავაერყვეთ
 კლასებზე (ბუნებრივად), მაშინ სიმრავლეა ჯეროვანი აუსიომიზმის
 საფუძველზე შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ბესიმრავლეები ურთიერ-
 კავთვალენობით არიან, სიმრავლე ბესიმრავლის კავთვალენობით არ

შეიძლება იყოს და ნებისმიერი სიმრავლე ეკვივალენტურია ნების-
მიერი ბუნსიმრავლის ნაწილისა.

2. ჯორჯმიუნი ჰელად სიმრავლეებზე, რომ დავამტკიცოთ რო-
მილიმი სიმრავლის ზედაპირა, საკმარისია ვაჩვენოთ როგორ შეიძლე-
ბა მისი ელემენტების მოცემა უსასრულო სიის სახით განმეორებათა
გარეშე. მაშინ პირველი ამ სიის შერევაა ნაჭურალორ რიცხვს
0-ს, მეორე - ნაჭურალორ რიცხვს 1-ს და ა.შ. ზემოა ეს სია უსა-
სრულოა, თითოეული ელემენტი იკავებს მასში რომელიმე სასრულო მდ-
ბარეობას. ანალოგიურად, რომ დავამტკიცოთ რომელიმე სიმრავლის
სასრულობა, საკმარისია ვაჩვენოთ როგორ შეიძლება მისი ელემენტ-
ების მოცემა სასრული სიის სახით განმეორებათა გარეშე. ხსენე-
ბული სახის სიას (როგორც პირველი, ისე მეორე შემთხვევაში) ეძლე-
ბა მოცემული ს ი მ რ ა ვ ლ ე ს გ ა რ ა ზ ე რ ა . პირიქითაჲ,
თუ $\mathcal{A}$ სასრული ან ზედაპირ სიმრავლეა, მაშინ არსებობს $\mathcal{A}$ სიმრავლის
გადახველა. მარჯვად, სასრული სიმრავლის შემთხვევაში ეს ცხადია.
ზედაპირ $\mathcal{A}$ სიმრავლის გადახველა იქნება $\varphi(0), \varphi(1), \dots$, სადა
 φ არის რაიმე ფუნქცია, რომელიც ურთიერფაქტაბად გადისაბავს
ნაჭურალორ რიცხვთა $\mathcal{N}$ სიმრავლეს $\mathcal{A}$ -ზე.

მეტი რიცხვთა სიმრავლე შეიძლება გადახვეალოთ მათი გან-
ლაგებით შემდეგ რიგში:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$$

ამრიგად, მეტი რიცხვთა სიმრავლე ზედაპირია. რაცოინალური
რიცხვთა სიმრავლე აგრეთვე ზედაპირია (მიუხედავად იმისა, რომ იგი
 $\varphi(2), \varphi(3), \dots$ ს ი მ რ ა ვ ლ ე ს ნაწილადგენს),
დადებითი ნიშანის სიმრავლე ვუნდოთ მისი ბრიცხველისა და მნიშე-
ნელის ჯამს. დადებითი რაციონალური რიცხვების გადახველა შეიძლება
მივიღოთ შემდეგნაირად: პირველი ნაწილად ავიღოთ რაციონალური რიცხ-
ვი, რომელიც აღინიშნება 2-ის ჭილი სიმრავლის მეორე ურთიერფაქტ
უკვეყი ნიშანით, შემდეგომ ნაწილად მივიღინოთ რაციონალური რიცხ-

ვინ, რომელიც აღინიშნებიან 3-ის ჭრი სიმაღლის მეორე პერეტი
ბრძაბობით დაღებულ ნილაგებში და ა.შ. ამ გზით მივიღებთ და-
გებში რაციონალურ რიცხვთა შემდეგ გაბაფვას:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \dots$$

ახლა უპანასკნელი გაბაფვის დახმარებით ყველა რაციონალურ რიცხ-
ვთა გაბაფვა შემდეგნაირად მიიღება:

$$0, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \dots$$

ახლა უაჩვენოთ ნილაგთა სიმრავლის ფელაობა. შევადგინოთ
შემდეგი უსასრულო ცხრილი, რომელიც ზიფიული ნილაგი გვხვდება
ერაჯერ და მხოლოდ ერთჯერ.

$$\begin{array}{cccccc} \frac{0}{1}, & \rightarrow & \frac{0}{2}, & \frac{0}{3}, & \rightarrow & \frac{0}{4}, & \frac{0}{5}, & \rightarrow & \frac{0}{6}, \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ \frac{1}{1}, & & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & & \frac{1}{4}, & \frac{1}{5}, & & \frac{1}{6}, \dots \\ & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & & \\ -\frac{1}{1}, & & -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{3}, & & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{5}, & & -\frac{1}{6}, \dots \\ & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & & \\ \frac{2}{1}, & & \frac{2}{2}, & \frac{2}{3}, & & \frac{2}{4}, & \frac{2}{5}, & & \frac{2}{6}, \dots \\ & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & & \\ -\frac{2}{1}, & & -\frac{2}{2}, & -\frac{2}{3}, & & -\frac{2}{4}, & -\frac{2}{5}, & & -\frac{2}{6}, \dots \\ & & & & & & & & \\ \frac{3}{1}, & & \frac{3}{2}, & \frac{3}{3}, & & \frac{3}{4}, & \frac{3}{5}, & & \frac{3}{6}, \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \end{array}$$

ეს პერეტი $\frac{0}{1}$ -დან და გაფვებით ნაჩვენებ ისრებს, მი-
ვიღებთ ნილაგთა სიმრავლის შემდეგ გაბაფვას:

$$\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{0}{3}, \frac{0}{4}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{-1}{3}, \dots$$

შენიშვნა. ცხადია, ჩვენ არ შეგვიძლია განხილული უსასრულო ცხრილის მდლიანად ავება, მაგრამ შეგვიძლია ავაგოთ ცხრილის ნაწილი, რომელსაც, მაგალითად, გოლფერძა მარჯუთხა სამკუთხედის ფორმა აქვს, რომლის "წვეროა" $\frac{0}{1}$ წილადი, და შემდეგ მანდათან-ბით ვზარდოთ ეს ნაწილი ფუძის პარალელური რიგონალეზის მიმადე-ბით ისე, რომ ყოველი რიგონალის რამადეზისმანვე ამ რიგონალ-ბე მომადესადეზული წვერებში ამოვიწეროთ სტრიქონში კადამელის მისა-ღებად.

ამრიგად ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემები:

(6.2) თეორემა. მთელი რიცხვმა სიმრავლე ღვლარია.

(6.3) თეორემა. წილადების სიმრავლე ღვლარია.

(6.4) თეორემა. რაციონალური რიცხვმა სიმრავლე ღვლარია.

ცხრილების განხილული მეთოდი ზოგადი ხასიათისაა და ამ მეთოდით შეიძლება დამტკიცდეს შემდეგი ზოგადი ხასიათის თეორემე-ბი.

(6.5) თეორემა. სასრული, შესაბამისად ღვლარი, $\mathcal{A}$ სიმრავლის ელემენტებისაგან შედგენილი n -კომპონენტიანი დალადეზული სისფემების სიმრავლე სასრულია, შესაბამისად ღვლარია ($n = 1, 2, \dots$).

(6.6) თეორემა. არადარიელი სასრული ან ღვლარი $\mathcal{A}$ სიმრავლის ელემენტებისაგან შედგენილი დალადეზული სისფემების სიმრავლე არის ღვლარი.

(6.5) თეორემის დამტკიცება. მოიძებნება $\mathcal{A}$ სიმრავლის კადამელა:

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots \quad (1)$$

მაშინ

$$(\alpha_0), (\alpha_1), (\alpha_2), \dots \quad (2)$$

იქნება $\mathcal{A}$ სიმრავლის ელემენტებისაგან შედგენილ ურთვერთან და-
ლაგებული სისტემაში სიმრავლის გადამვლა. (2) მიმდევრობის სასრულო-
ბა, შესაბამისად ზღვარობა, ცხადია. ამრიგად, $n=1$ - ზონ ზე-
რეზი სამართლიანია. დავუშვათ, რომ ზეორეზი სამართლიანია $n=k$ -
ზონ ($k \geq 1$) . მაშინდგოკური ინდუქციის კანონის ძალით სა-
კმარისია დავამტკიცოთ ზეორეზის სამართლიანობა $n=k+1$ -
ზონ.

დაშვების ძალით მოიძებნება $\mathcal{A}$ სიმრავლის ელემენტებისა-
გან შედგენილ K -კომპონენტიანი დალაგებული სისტემების სიმ-
რავლის გადამვლა.

$$(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_k^0), (\alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_k^1), (\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_k^2), \dots,$$

რომლის ნვერთა რიცხვი სასრულია, შესაბამისად ზღვარობა. ადვილი
დასადახია, რომ $\mathcal{A}$ სიმრავლის ელემენტებისაგან შედგენილ მთლიული
($k+1$) - კომპონენტიანი დალაგებული სისტემა გვხვდება
ურთვერ და მხოლოდ ურთვერ შემდეგ ცხრილი¹:

$$(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_k^0, \alpha_0), (\alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_k^1, \alpha_0), (\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_k^2, \alpha_0), \dots$$

$$(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_k^0, \alpha_1), (\alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_k^1, \alpha_1), (\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_k^2, \alpha_1), \dots$$

$$(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_k^0, \alpha_2), (\alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_k^1, \alpha_2), (\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_k^2, \alpha_2), \dots$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array}$$

რომლის როგორც სვეტების, ისე სტრიქონების რიცხვი სასრულია,

1 აქ ჩვენ მიხედველობაში გვაქვს და ვუყრდნობით დალაგებულ
სისტემაში ძირითად ზონსება:ორი n -ნვერთან დალაგებული სის-
ტემაში ზოლი არიან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ზოლი არიან
მათი ურთვერშესაბამისი ნვერები.

შესაბამისად უსასრულოა. ამ ცხრილიდან მიიღება $\mathcal{A}$ სიმრავლის
 ელემენტთაგან შედგენილი $(k+1)$ - წევრიანი პალატული სისრულ-
 მების გაძაფრა, როგორც ბევრი მივიღებ ნილაბა სიმრავლის გაძ-
 აფრა. ამასთანავე, მიღებული გაძაფრა იქნება სასრული, შესაბამი-
 სად უსასრულო.

ახლა (6.6) ლორეშის პასამტყიკუბლაპ სავმარისთა მთელი-
 ლ n -სთვის ($n=0, 1, 2, \dots$) n -ურ სტრიქონში შევადგინოთ $\mathcal{A}$
 სიმრავლის ელემენტებისაგან შედგენილი n -წევრიანი პალატული
 სისრულთა გაძაფრა და ამ გზით მიღებული ცხრილიდან მივიღოთ სა-
 ჭირო გაძაფრა ცხრილური მუდგობა.

(6.7) ლორეშა. ღვლარი $\mathcal{A}$ სიმრავლის უსასრულო $\mathcal{A}_1$ ქვესი-
 მრავლე არის ღვლარი.

მაშალა, $\mathcal{A}_1$ -ის გაძაფრა მიიღება $\mathcal{A}$ სიმრავლის გაძა-
 ფრიდან $\mathcal{A}_1$ -ში არშემაჯარი წევრების ამოგდება.

n ბ ა რ ი ს ბ ი ს ა ღ გ ე ბ რ უ ღ ი გ ა ნ ჭ რ-
 ღ ე ბ ა ეწოდება

$$\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n = 0 \quad (\alpha_0 \neq 0)$$

სახის განტოლებას ($n=0, 1, 2, \dots$). (6 ა მ პ ე რ ი ღ) ა ღ გ ე ბ რ უ ღ ი
 რ ი ე ბ ე ე ე წ რ ე ე ბ ა ისეა ნამდვილი რიცხვს, რომელიც
 წარმოადგენს მთელიყოფიერებებიდან აღებული განტოლების ღვას.
 არააღებული ნამდვილი რიცხვებს ეწოდება ჭ რ ა ნ ს ე ე პ ე ე-
 ჭ უ ღ ი რ ი ე ბ ე ე ე ბ ი.

(6.8) ლორეშა. აღებული რიცხვთა სიმრავლე არის ღვლარი.

პამტყიკუბა. მთელი რიცხვთა ნებისმიერ $(n+1)$ -წევრიანი
 $(m_0, m_1, \dots, m_n), m_i \neq 0$ სახის პალატული სისრულთა ($n \geq 0$) შევუსაბამოთ

$$m_0 x^n + m_1 x^{n-1} + \dots + m_{n-1} x + m_n = 0$$

აღებული განტოლება. მივიღებთ ურთიერთპარალელს φ მანკობას

მთელი რიცხვებით შედგენილ ალგებრული სახის ღალატული სისტემის B სიმრავლესა და მთელყოფიერებაშიან ალგებრულ განტოლებას A სიმრავლეს შორის. (6.2), (6.6) და (6.7) ჯორგებვის ძალი B ჯვარი სიმრავლა. პუნქტი B სიმრავლის გადამცლა: $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots$ მაშინ A სიმრავლის გადამცლა იქნება $\varphi(\beta_0), \varphi(\beta_1), \varphi(\beta_2), \dots$ ახლა, მთელი n - ჯვის ($n=0, 1, 2, \dots$) n -ურ სტრიქონში პუნქტი $\varphi(\beta_n)$ განტოლების ნამდვილ ჟესტა გადამცლა ღალატული მრავალ-
 ში (ამ ჟესტა რიცხვი, გაუსის ცნობილი ჯორგების ძალი, არ
 ალგებრება $\varphi(\beta_n)$ განტოლების ხარისხს). ამ ცხრილიდან, გვირ
 განხილული მთელი, მიიღება ალგებრული რიცხვების გადამცლა.

(6.9) ჯორგება, სიმრავლესა ჯვარი ან სასრული სიმრავლის
 გაერთიანება, ჟ მთელი მესაქრები არის ჯვარი ან სასრული,
 არის ჯვარი ან სასრული.

ღამჯიყება, $A_1, A_2, \dots$ იყოს ჯორგების ჟორმულირებაში
 ხსენებული სიმრავლესა ჯვარი ან სასრული სიმრავლის გადამცლა.
 n -ურ სტრიქონში პუნქტი A_n სიმრავლის გადამცლა. მიღებული
 ცხრილიდან გადამცლის მიღების მიზნით უნდა მოვიქცეთ ისე, როგორც
 ნილადა სიმრავლის გადამცლისას, იმ განსხვავებით, რომ პროცესის
 ყოველ ნაბიჯზე ნევრის ამონავს ვაწარმოებთ მაშინ და მხოლოდ მა-
 შინ, როცა იგი არ იმყოფება ადრე ამონავრი ნევრსა შორის.

(6.10) ჯორგება, ნამდვილ რიცხვსა ნებისმიერი ჯვარი A
 სიმრავლისათვის მოძებნება ისეი ნამდვილი რიცხვი, რომელიც A
 სიმრავლეს არ ეკუთვნის.

ღამჯიყება, ვაქტა,

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$$

არის A სიმრავლის გადამცლა. მთელი n - ჯვის α_n ნარმო-
 გიწით სახით: $\alpha_n = \beta_n + c_n$, სადა $0 \leq c_n < 1$. ვაქტა,
 $0, \alpha_0, \alpha_1, \dots$ არის n ნამდვილი რიცხვის ნარმოგენა (გაშლა)
 ადნოლაპა. n -ურ სტრიქონში პუნქტი ტოლია:

$\alpha_n = \beta_n + 0, \alpha_{n0} \alpha_{n1} \dots$. მივიღებთ ტოლობას შემდეგ მიმდევრობას:

$$\alpha_0 = \beta_0 + 0, \alpha_{00} \alpha_{01} \alpha_{02} \dots$$

$$\alpha_1 = \beta_1 + 0, \alpha_{10} \alpha_{11} \alpha_{12} \dots$$

$$\alpha_2 = \beta_2 + 0, \alpha_{20} \alpha_{21} \alpha_{22} \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

განვიხილოთ ნამდვილი რიცხვი $0, \beta_0 \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots$, სადაც β_n არის 5 ან 6 იმისამდინებევით $\alpha_{nn} \neq 5$, ან $\alpha_{nn} = 5$. ადვილი დასადახია, რომ $0, \beta_0 \beta_1 \beta_2 \dots \neq \alpha_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) და, მაშასადამე, $0, \beta_0 \beta_1 \beta_2 \dots \in \mathcal{A}$.

შედეგი I. ნამდვილი რიცხვთა სიმრავლე არ არის ღვლადი.

შედეგი II. ტრანსკუნდენტული რიცხვთა სიმრავლე არ არის ღვლადი.

შედეგი III. $\aleph_1 > \aleph_0$.

უკანასკნელი უტოლობისთან დაკავშირებით სიმრავლეთა ჯორიონის შემქმნელმა ც.კანტორმა გამოიკვლია პიპოტება (რომელიც კონტინუუმიის პიპოტების სახელწოდებითაც ცნობილი), რომ არ არსებობს ისეთი $\aleph$ სიმძლავრე, რომლისთვისაც შესრულებია პიპოტა $\aleph > \aleph_0$; ამჟამად დამტკიცებულია, რომ ეს პიპოტება, ისევე როგორც მისი უარყოფა, ღვლადობის სიმრავლეთა ჯორიონის აქსიომებთან (პირველი შემდეგი ეკსტენიის პ.ტოპელს მიეწერა კი-პ.კოჰენს). ეს იმას ნიშნავს, რომ ღვლადობის სიმრავლეთა ჯორიონის აქსიომებზე დაყრდნობით არ შეიძლება არც კონტინუუმიის პიპოტების დამტკიცება და არც მისი უარყოფა.

შევნიშნოთ, რომ (6.8) და (6.10) ჯორებთან მიკავშირებული მათემატიკური მსჯელობებიდან ადვილად გამომდინარეობს ტრანსკუნდენტული

ნამდვილ რიცხვთა ატომის ხარხი: უნდა ავსოთ აღვებრულ რიცხვთა
 $\mathcal{A}$ სიმრავლის ჩამოღობე $\alpha_0, \alpha_1, \dots$. ტაბაშელა რა (6.10) ჟეოგ-
 მის მიკოცებაში მოცემული ხარხი მიღებული $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots$ რიცხვი
 იქნება ტრანკეფენტული ნამდვილი რიცხვის მაგალითი.

ქასასრულს, შევნიშნოთ რომ მომდევნო II ჟავში შეისწავლება
 კერძო სახის უმარტივესი ჟეოგია. მკიხხველი ადვილად შენიშნავს,
 რომ II ჟავში მიტანილი ჟიჟების ყველა ჟეოგება სამარჯლიანია S ,
 S_0 და S_1 მაშემატიკური ჟეოგობისათვის.

წინადადებათა ალფაბეტი

§ 1. წინადადებათა ალფაბეტის ძირითადი განსაზღვრებები

1. წინადადებათა ალფაბეტის საფუძველი, მათემატიკური ლოგიკის ძირითადი მიზანია ფორმალური ალფაბეტი (ფორმალური სისტემა)¹ შეესაბამება. ასეთი ფორმალური სისტემა, მაგალითად, წინადადებათა ალფაბეტი, ალფაბეტი, ალფაბეტი ალფაბეტი ალფაბეტი.

წინადადებათა ალფაბეტი არ წარმოადგენს ფორმალურ ალფაბეტს. იგი არის ალფაბეტი (სისტემა) (სისტემა) სისტემა. მიუხედავად ამისა, ამ სისტემის შესახებ ძირითადი ფორმალური სისტემის შესახებ. მისი შესახებ მნიშვნელოვანია აგრეთვე იმიტომაც, რომ იგი გამოიყენება მანქანურ მათემატიკაში და, საბოლოოდ, ალფაბეტის სისტემაში — ელექტრონიკური სისტემების სისტემაში.

წინადადებათა ალფაბეტი წარმოადგენს მუდმივობას წინადადებათა სისტემების შესახებ. იგი შეესაბამება წინადადებათა სისტემის სისტემას, რომლის თანხვედრა წინადადებათა ალფაბეტის შესახებ გამოიყენება კანონს და წინადადებათა კანონს. ეს კანონები, როგორც უცხო, კანონები, რომელიც განხილული სისტემის თანხვედრა წინადადებათა ან მიმართა ან შეშინების და არ შეშინება იყოს უმარტივესად მიმართა და შეშინების. არაა არავითარი აუცილებლობა იმისა, რომ ლოგიკის ეს კანონები ჩვეულებრივ საკონკრეტო საკონკრეტო გამოიყენება, მაგრამ ჩვენ ვიზღუდებით წინადადებათა სისტემის

¹ გამოიყენება "სისტემა", "ალფაბეტი" ამ წიგნში იხილება რომელიც სინონიმები და მათი მნიშვნელობა დანაშაუნი მუდმივობა.

სტუდენტის განხილვა, რომელიმე მათგანს სამართლიანია ეს კანონები.

წინადადება აქვერბა მისი ავტორი შეიძლება მისაღებად მათგან-
გის ნებისმიერ კონკრეტულ პარტი (მა სპეციალურ, ნებისმიერ
მეცნიერების რომელიც გინდა კონკრეტულ პარტი) გამოსაყენებლად,
მე ეს კონკრეტული პარტი ისეთია, რომ მისი წინადადება სისტე-
მა აკმაყოფილებს მესამის გამოჩენის კანონს და წინააღმდეგობის
კანონს. ჩვენ ვუძღვრებით, რომ მათგანგის ნებისმიერი კონკრე-
ტული პარტის წინადადება სისტემა ამ ბოლო მოხმავებს აკმაყო-
ფილებს — ზემოა ამ საკითხში მათგანგისათვის შორის არაა სრული
შანსობა და აღნიშნული პარტის მოწინააღმდეგეები წინადადება
სისტემაზე უფრო სუსტი მოხმავებით ბოლოვებს და ამის შესაძმი-
სად უმინოდ განსხვავებულ ლოკუსზე გაერთიანებს. ასეთი მაგალითად
ინტუიციონისტური ლოკა. ასეთ მიმართებაში განხილვა ამ წიგ-
ნის ფარგლებიდან გამოდის.

მოვახდენთ აბსტრაქტიზება (განყენება) წინადადების შინაარ-
სისაგან და აგრეთვე მისი სტრუქტურისაგან. კერძოდ, არ გამოვყოფთ
წინადადებაში მსჯელობის საგნებს და პრედიკატს. მაგს შევიძლებ-
ათ და წინადადების განხილვის დროს ყურადღებას მივაქცევთ მხო-
ლოდ იმას, მე როგორია წინადადება — ჭეშმარიტი მე მცდარი. წინა-
დადების სხვა მონათებს სავსებით უგულებელვყოფთ. ასეინაირი
განხილვა, ცხადია, მოხმავს იმას, რომ ნებისმიერი რივი ჭეშ-
მართვი წინადადება ურთიანობისაგან არ განვსხვავდეთ — გავიგო-
ვთ და, ასევე, ნებისმიერი რივი მცდარი წინადადება ურთიანედი-
საგან არ განვსხვავდეთ — გავიგოვთ. ასეთი გაიგოვების შედეგად
მოცემული წინადადება სისტემის ყველა ჭეშმართვი წინადადება
ურთმდობა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ურთი რივი, რომელსაც
ბუნებრივია ეწოდოს "ჭ ე მ მ ა რ ი ტი", ზოგადი ჭეშმართვი
წინადადება კი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც კონსტანტა, რომელიც
აღნიშნავს ამ რივი (ე.ი. რ.პის მნიშვნელობა არის ეს რივი-

ტი). ამ ობიექტს ჩვენ მოკლე პლენიშენაზე $\vdash$ (სწორი შრიფტის) ასახე. ანალოგიურად, მცდარ წინადადებაზე ურთობიერება არის ობიექტი, რომელსაც ეწოდება "მ ც პ ა რ ი" და პლენიშენა (სწორი შრიფტის) $\nmid$ ასახე¹. ამასთანავე ზოგჯერ მცდარი წინადადება წარმოადგენს კონსტანტას, რომლის მნიშვნელობა არის პლენიშენი ობიექტის სახელწოდებით "მცდარი". ამრიგად, წინადადებაზე პლენიშენაზე ჩვენ საქმე ავსებს მხოლოდ ორი ობიექტად, რომლებსაც აგრეთვე $\vdash$ და $\nmid$ მ ც პ ა რ ი ტ უ რ მ ნ ი შ ე ნ ე რ ო ბ ე კ ტ ე ბ ს ე წოდებენ. მაგალითად², " $3+4=10$ " არის კონსტანტა, რომლის მნიშვნელობაა $\nmid$, ან უფრო ზუსტად, რომლის ჭეშმარიტული მნიშვნელობაა $\nmid$ (აქ ფრაზა "ჭეშმარიტული" ხაზს უსვამს წინადადებას მინაწილისადგან იმ აბსტრაქტიზმის ფაქტს, რომელიც ბევრი იყო ლაპარაკი).

ამრიგად, წინადადებაზე პლენიშენაზე ავსებს მხოლოდ ორი ძირითადი ობიექტი. ზოგი წინადადებაები $\vdash$ და $\nmid$ -ის ჩათვლით ამ ობიექტად პლენიშენი კონსტანტებია. კონსტანტისა და ამ კონსტანტად პლენიშენი საგნის განცხადების შედეგად შეიძლება ითქვას, რომ წინადადებაზე პლენიშენის ძირითადი ობიექტებია $\vdash$ და $\nmid$, ზოგჯერ წინადადება კი არის კონსტანტა, რომლის მნიშვნელობა არის ან $\vdash$ ან $\nmid$.

ასეადარსავე გაგებულ წინადადებაზე შესწავლა წარმოადგენს წინადადებაზე პლენიშენის საგანს.

ამრიგად, ზოგადი განხილვა შეიძლება ჩატარებული იქნეს

- 1 $\vdash$ არის პირველი $\mathcal{A}$ ინტერპრეტირებული სიტყვისა $truth$, რომელიც ნიშნავს ჭეშმარიტს, $\nmid$ კი არის პირველი $\mathcal{A}$ ინტერპრეტირებული სიტყვისა $false$, რომელიც ნიშნავს მცდარს.
- 2 აქ და ქვემოთ განხილულ წინადადებაზე მაგალითებში იტყობა, რომ ეს წინადადება იმყოფება წინადადებაზე მოყვანილ ფორმულურ სისტემაში და სისტემის წინადადებაზე გამოყენებული ურთობიერება (რომლებსაც ეწოდება ჭეშმარიტობა, მცდარი) შეესაბამება ჭეშმარიტობისა და მცდარობის ჩვეულებრივ გაგებას.

შემდეგ საფუძველზე. მოცემულია წინადადებათა ფიქსირებული სისტემა. ეს წინადადებათა სისტემა გაყოფილია წინადადებათა ორ ურთოდ-ლოშაპ ოსე, რომ სისტემის თითოეული წინადადება ეკუთვნის ერთსა და მხოლოდ ერთ ურთოდლობას. ერთ-ერთ ურთოდლობას ეწოდება $\mathfrak{P}$ ერთი მ ა რ ი ტ ი, მეორეს კი — $\mathfrak{Q}$ მ ა რ ი ტ ი. ეს ურთოდლობები მიჩნეულია წინადადებათა ალგებრის $\mathfrak{A}$ მ ა რ ი ტ ი ა რ ი ტ ი. ეს სისტემაშია აღნიშნულიან $\mathfrak{A}$ და $\mathfrak{B}$ ასო-ები. ამასთანავე, განხილული ფიქსირებული სისტემის თითოეული $\mathfrak{A}$ მ ა რ ი ტ ი ა რ ი ტ ი $\mathfrak{A}$ და $\mathfrak{B}$ მ ა რ ი ტ ი, რომელიც აღნიშნავს წინადადებათა ალგებრის იმ კოდექსს (იმ ურთოდლობას), რომელიც იგი იმყოფება. წინადადებაები " $\mathfrak{A}$ წინადადება არის ჭეშმარიტი (მცდარი)", " $\mathfrak{A}$ წინადადება აღნიშნავს ჭეშმარიტს (მცდარს)", " $\mathfrak{A}$ წინადადებას ჭეშმარიტული მნიშვნელობა არის ჭეშმარიტი (მცდარი)", " $\mathfrak{A}$ წინადადება ეკუთვნის იმ ურთოდლობას, რომელსაც ეწოდება ჭეშმარიტი (მცდარი)" ურთოდებოლოებას მსჯელობებს გამოხატავენ.

2. გოგონათა ძირითადი ცნებები. მოცემულია სისტემის წინა-დადებაებს აღნიშნავს $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ ასოები და აგრეთვე ამავე ასოები, რომელსაც ინდექსებად აქვთ დადებითი ნატურალური რიცხვები. წინადადებათა (როგორც კონსტანტისა) და ამ წინადადებათა აღნიშნულ კოდექსს ($\mathfrak{A}$ ან $\mathfrak{B}$) გამოვივების შედეგად, ხსენებული ასოები

$$\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{P}_2, \dots \quad (1)$$

უნდა განვიხილო როგორც $\mathfrak{P}$ ან $\mathfrak{Q}$ მ ა რ ი ტ ი, რომელთა მნიშვნელობების სიმრავლეა $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$. როგორც ვხედავთ, ყველათა სიმრავლე ზედათა. ამ ყველათა (1) სტრიქონით განსაზღვრული რიგი წოდებულია $\mathfrak{P}$ ან $\mathfrak{Q}$ მ ა რ ი ტ ი ა რ ი ტ ი. განვიხილო ყველაზე მეტი სიმრავლისაგან უწოდებენ $\mathfrak{A}$ მ ა რ ი ტ ი ა რ ი ტ ი ($\mathfrak{A}$ მ ა რ ი ტ ი ა რ ი ტ ი) ან $\mathfrak{B}$ მ ა რ ი ტ ი ა რ ი ტ ი.

ჭარბინებთან დაკავშირებული ძირითადი მათემატიკური კანონებისა-
გან. ენა-ობიექტი მკაცრად განსაზღვრული კანონების ("ტრამატი-
კის წესების") მიხედვითაა შედგენილი. მუშავენის საბეჭდოები კი
ჩვენ არ გვეჩვენა მკაცრად შემოჭარბული.

შენიშვნა. ორი ენის (ენა-ობიექტის და მუშავენის) არსებობა
დამახასიათებელია მათემატიკის ყველა დარგისათვის. მათემატიკური
ლოგიკა ამ მიხედვით მიიღო იმის გამოიწვევა, რომ იგი ამ საკითხს
უფრო მკვეთრად აყენებს და მას განსაკუთრებული ყურადღებას აქცევს.
ასე მაგალითად, ჩვეულებრივ მათემატიკაში " $3x + 5y = 8$ " და
" $6x + 10y = 16$ " ტოლობები მათემატიკური ენის წინადადებაა,
" $3x + 5y = 8$ განტოლება ტოლფასია $6x + 10y = 16$ განტოლები-
სა" კი მუშაუმათემატიკური წინადადებაა.

(1) მიმდევრობის სიმბოლოები ენა-ობიექტის ცვლადებს წარ-
მოადგენენ, რომელთა მიწვევადობის არეა $\{t, f\}$. ენა-ობიექტის
ცვლადებს მ ა ბ გ დ ე ვ ზ ი კ ლ მ ნ ო პ რ ყ რ ს ტ ც ღ ა ბ ე ბ ს უწოდებენ.
უფრო ჭარბი ღეროებში ვიძღვრებით წინადადებათა აღყვანას, ჩვენ საუბრ
გვაქვს სხვა ტიპის მათემატიკურ ცვლადებთანაც. გარდა მათემატიკ-
ური ცვლადებისა ჩვენ გამოვიყენებთ მ ე ბ ა მ ა ბ ე ბ ი-
კ ლ მ ნ ო პ რ ყ რ ს (მ ე ბ ა მ ა ბ ე ბ ს) ე.ი. ისეთ
ცვლადებს, რომლებიც გამოიყენება მუშავენაში მათემატიკური ობიექ-
ტების აღსანიშნავად (მათემატიკურ ობიექტებს წარმოადგენენ, მა-
გალითად, მათემატიკური ცვლადები, ფორმები და ა.შ.).

მუშავენის იმ წინადადებაებს, რომლებშიც გამოიყენება ადრე
ენა-ობიექტის სხვადასხვა ობიექტების შესახებ უწოდებთ მ ე ბ ა-
მ ა ბ გ დ ე ვ ზ ი კ ლ მ ნ ო პ რ ყ რ ს ნ ი ნ ა პ ა პ ე ბ ე ბ ი. ამის შე-
საბამისად გვეჩვენა მ ე ბ ა მ ა ბ ე ბ ა მ ა ბ ე ბ ი კ ლ მ ნ ო-
პ რ ყ რ ე ბ ი, მ ე ბ ა მ ა ბ ე ბ ა მ ა ბ ე ბ ი კ ლ მ ნ ო პ-
რ ყ რ ე ბ ე ბ ი და ა.შ. ასევე მათემატიკური ენის წინადადე-
გებთან დაკავშირებული იქნება მ ა ბ გ დ ე ვ ზ ი კ ლ მ ნ ო-
პ რ ყ რ ე ბ ე ბ ი

მეუბნება მათემატიკურ ობიექტებს (როგორცაა სიმბოლოები, ცვლადები, ფორმულები და ა.შ.) და ამიტომ წარმოემუღ ნინაძეებზე უმრავლეს შემთხვევაში მხოლოდ მაშინ აქვთ აზრი, როცა ნინაძეებში მცოფრ მეტაცვლები მათემატიკურ ობიექტებს აღნიშნავენ და ამ ობიექტებთან არიან გაიგივებული (და მათასამდე მეტამათემატიკურ ცვლადებს წარმოადგენენ). ჭრამაში "ვთქვათ *ა* არის ცვლადი" არ შეიძლება ვიცულისხმიო ნინაძეება "ვთქვათ *ა* არის მეტამათემატიკური ცვლადი", რადგან მათემატიკური თეორიის აღფაშვების შემოჭანის შემდეგ *ა* სიმბოლო რომ მათემატიკური ცვლადი არაა საკვებით ცხადია და აღნიშნულის გამო კონტუქსტიდან აშკარად გამომდინარეობს, რომ იგი მეტამათემატიკური ცვლადია. ისე რომ წარმოემუღ ნინაძეებისა "ვთქვათ *ა* არის მეტამათემატიკური ცვლადი" ისევე უადგილია, როგორც, მაგალითად, წარმოემუღ ნინაძეებისა "ვთქვათ 5 არის რიცხვი".

მათემატიკურ ცვლადებისაგან განსხვავებით, ჩვენ არ შევიძლება მკაფიოდ თავს შეთანხმებებით იმის შესახებ, თუ რა შემთხვევებში რომელი სიმბოლო იქნება გამოყენებული მეტაცვლებად. მაგრამ ცხადია, რომ მათემატიკური ცვლადები არ შეიძლება გამოყენებული იქნენ მეტაცვლებად.

შენიშვნა. ჩვეულებრივი უნის სიფყვები ურთი,ორი,სამი და ა.შ. რომლებიც აღინიშნებიან აგრეთვე მარტივი კონსტანტებით—ცოფრებით ან ციფრებისაგან შედგენილი კონსტანტებით, არ უნდა ავუროოთ ნატურალური რიცხვის მათემატიკურ ცნებაში. ეს უკანასკნელი განსაზღვრით სიმრავლეს წარმოადგენს. ხშირად, როცა სურთ ნატურალური რიცხვი, მაგალითად 5, განსაზღვრონ როგორც სიმრავლე, "სიძვაცრის მიზნით" ამით ცდილობენ არ გამოიყენონ ჩვეულებრივი უნის ნატურალური რიცხვი "ხუთი". ე.ი. ცდილობენ წინასწარ განმავისუფლონ თავი იმ კონსტანტისგან, რომელიც ჩვენ გვაქვს ჩვეულებრივი უნის ნატურალური რიცხვების შესახებ, ჭიქრობენ რა, რომ ჩვეულებრივი

ნატურალური რიცხვების შესახებ ჩვენი ცოდნის გამოყენება ნატურალური რიცხვების მათემატიკურ ცნების განსაზღვრაში იქნება ლოგიკური წრე. ამ არასწორი მოსაზრების დანიშნულებად გასარება ნიშნავს მათემატიკური ღეორიის შესწავლის მიზნით მუშაუნიტა გამოყენებაზე უარის თქმას. ეს კი, როგორც აღვიღო დასადახია, მუშაუნიტა.

3. წინადადებათა აღკვეთის აღმადგენი. წინადადებათა აღკვეთის უმარტივესი მათემატიკური ღეორიას. მას, ისევე როგორც ყოველი მათემატიკური ღეორიას, აქვს თავისი სპეციალური ენა, სპეციალური აღმადგენი.

წინადადებათა აღკვეთის აღმადგენი შედგება შემდეგი სიმბოლოებისაგან.

1. პროპოზიციული ცვლადები:

$$p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, \dots \quad (1)$$

(პროპოზიციული ცვლადთა დანიშნულები რიცხვ უნდა იქნება ა რ თ ა ბ ე - თ უ რ რ ი გ ს).

2. პროპოზიციული კონსტანტები : $\vdash, \vdash$.

3. ლოგიკური კავშირები:

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow.$$

4. ფრჩხილები (მარცხენა ფრჩხილი და მარჯვენა ფრჩხილი): $[,]$.

ამ აღმადგენის სიმბოლოთა შენაარსს ჩვენ უკვე გავეყარეთ:

პროპოზიციული ცვლადები არიან ცვლადები მნიშვნელობათა $\{\vdash, \vdash\}$ სიმრავლით (ისინი აღნიშნავენ წინადადებათა აღკვეთის წინადადებათა სისტემის ნებისმიერ წინადადებას, მაგრამ რამდენადაც ხსენებული წინადადებაები დანიშნულები როგორც ჭეშმარიტული მნიშვნელობათა აღმნიშვნელი კონსტანტები, საბოლოო ანგარიშით პროპოზიციული ცვლადების მნიშვნელობათა არეა $\{\vdash, \vdash\}$). პროპოზიციული კონსტანტები $\vdash$ და $\vdash$ შესაბამისად აღნიშნავენ ჭეშმარიტული მნიშვნელო-

ბულის "ჭეშმარიტს" და "მცდარს". ლოგიკური კავშირები წარმოადგენენ (ე.ი. აღნიშნავენ) წინადადებათა ალგებრის წინადადებათა სისტემაზე განსაზღვრულ ოპერაციებს (ფუნქციებს)—ხსენებული სისტემის ზოგადი წინადადების შესაბამისი ჭეშმარიტული მნიშვნელობათა განვითარების შედეგად, $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ ლოგიკური კავშირები საბოლოო ანგარიშით წარმოადგენენ $\{t, f\} \rightarrow \{t, f\}$ ტიპის ურთაქცეოებს და ორპირობიან ფუნქციებს—ოპერაციებს ($\neg$ არის ურთაქცეოანი, დანარჩენი კი—ორპირობიანი). ამ ფუნქციათა (ოპერაციათა) განსაზღვრებები წარმოადგენს მოცემული პირველი ლევის 92-ის 3-ე პუნქტში. სიძნელეს არ წარმოადგენს ამ ფუნქციების წყვილთა სიმრავლეების სახით წარმოადგენა. ეს ოპერაციები ინსაზღვრება აგრეთვე შეშეშებული ცხრილების სახით:

p	q	$V(p, q)$	$\wedge(p, q)$	$\neg(p, q)$	$\leftrightarrow(p, q)$
t	t	t	t	f	t
t	f	t	f	t	f
f	t	t	f	t	f
f	f	f	f	t	t

p	$\neg(p)$
t	f
f	t

სამოგალო $\{t, f\} \rightarrow \{t, f\}$ ტიპის n -პირობიან ფუნქციებს (ოპერაციებს) ($n = 1, 2, \dots$) უწოდებათ (n - ა რ - ბ ი რ ი ა ნ ი) ლევის 92-ის 3-ე პუნქტში. ამ ფუნქციების "ჭეშმარიტს" და "მცდარს" წარმოადგენენ $\{t, f\} \rightarrow \{t, f\}$ ტიპის ნულოპირობიან ფუნქციებს. მათ ჩვენ უწოდებთ 0 - ა რ - ბ ი რ ი ა ნ ლევის 92-ის 3-ე პუნქტში. ჩვეულებრივ, როცა ვილაპარაკებთ ლოგიკურ კავშირებზე მხედველობით არ გვეჩვენება 0 - ა რ - ბ ი რ ი ა ნ ლოგიკური კავშირები. ეს გვსურს ეს მსჯელობა

ვრცელდება O - ადგილიდან კავშირუბნის აუცილებლად უნდა გამოვიყენოთ დამატებითი ფრაზა " O - ადგილიდან ლოგიკური კავშირების ჩაღვლით" ან "პროპოზიციული კონსტანტების ჩაღვლით".

4. ფორმულა. ლოგიკური კავშირების, $\vdash$, $\neg$ კონსტანტების, პროპოზიციული ცვლადებისა და ფრაზილებისაგან (ე.ი. წინადადებათა ალგებრის ალგებრის სიმბოლოებისაგან), ჩვეულებრივ ალგებრაში ცნობილი წესების ანალოგიური წესების დახმარებით ადვილად, რომელთაც უნდა დავუბრუნოთ წინადადებათა ალგებრის ფორმულებს. მაგალითად, წინადადებათა ალგებრის ფორმულებია:

$$q; [(p \rightarrow q) \vee \neg q]; [(q \vee p) \leftrightarrow \neg q]; [[(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow s] \leftrightarrow q, \neg].$$

წინადადებათა ალგებრის ფორმულის ცნების (მუსხი) რეკურსიული განსაზღვრა შემდეგნაირად წარმოვაშენოთ:

1. ყ ან $\neg A$ არის პროპოზიციული ცვლადი ან პროპოზიციული კონსტანტა, მაშინ A არის ფორმულა.

2. ყ A და B ფორმულებია, $\neg$ კი ორადგილიანი ლოგიკური ოპერატორი, მაშინ $[A \vee B]$ არის ფორმულა.

3. ყ A არის ფორმულა, მაშინ $[\neg A]$ არის ფორმულა.

4. გარდა 1-3 პუნქტების გამოყენებით მიღებული ფორმულები-სა სხვა ფორმულა არ არსებობს.

$[\neg A]$ ფორმულას სიმართლურობის ხშირად აღნიშნავენ $\bar{A}$ -ით.

როგორც განსაზღვრილია ჩანს, წინადადებათა ალგებრის ფორმულაში მხოლოდ კვადრატული ფრაზილები შეიძლება გვქონდეს. ვადასა-ჩინოებისათვის მოგვარე კვადრატული ფრაზილების ნაცვლად შეგვიძლია გამოვიყენოთ სხვა სახის ფრაზილები, მაგრამ სხვა სახის ფრაზილებში ყველაზე კვადრატული ფრაზილები უნდა წარმოვიგონოთ.

ფორმულის მოჭანოვი განსაზღვრა მკორე განსხვავდება წინა თავში S_1 ჯორის შემთხვევაში მოცემული ზოგადი სახის განსაზღ-

ეროვნული ინტელიგენციის განსაზღვრისა. ამ ინტელიგენციის განსა-
ზღვრის მიზნობრივ საფუძველად, მაშინ მოგვანილო განსაზღვრის შესა-
ბამისი ფორმულები იქნებოდნენ გამარტივებული სახეები ინტელიგენ-
ციის განსაზღვრის შემოგვანილო ფორმულები.

ფორმულებში ხშირად აწარმოებენ ფრაზიოლოგიის გამოყოფას
ფრაზიოლოგიის ადგილის შესახებ საფუძველზე—აწარმოებენ ფრაზიოლო-
გიის ადგილის იმპერატორის გამოყოფას, რომ ფრაზიოლოგიის ადგი-
ლის შესახებ უზრუნველყოფენ გამოყოფილი ფრაზიოლოგიის ადგი-
ლის. ფრაზიოლოგიის ადგილის შესახებ გარკვეულ შეთანხმებებს წარმოა-
გენენ. ქვემოთ ვისაზღვრებ ფრაზიოლოგიის გამოყოფის გამოყოფის
მიზნობრივ გამარტივებში, მაგრამ მიხედვით უმარტივეს შემთხვევაში
და ამ უმარტივეს შემთხვევების შესაბამისი შესახებ ქვემოთ იქნება
მოცემული.

შენიშვნა. ხშირად ფორმულის ცნებას განიხილვენ უფრო
ვიწრო აზრით—როცა სურს განიხილოთ ისეთი ფორმულები, რომლებიც
კონსტანტებს არ შეიცავენ. ასეთ შემთხვევაში აღინიშნებენ წინა-
დადება ადგილის აღებაზე კონსტანტის გამო-
ყოფის. კბარა, ამ შემთხვევაში ფორმულის ცნების რეკონსტრუქცია
განსაზღვრის პირველი პუნქტიდან უნდა ამოვადოთ ფრაზა "ან პრეპო-
ზიცი კონსტანტა".

ფორმულა, რომელიც ლოგიკურ ნაშრომებს არ შეიცავს
მ ა რ ტ ი ვ ი ფ რ მ უ ლ ა ნ ე რ ე ბ ა დ. კბარა, წინადა-
დება ადგილის მარტივი ფორმულა არის ან პრეპოზიციური ცვლადი
ან პრეპოზიციური კონსტანტა. უნდა ან რამდენიმე ლოგიკური ნაშრო-
მის მიხედვით ფორმულას რ მ უ ლ ა ნ ე რ ე ბ ა დ. ფორმულა უნდა
განვიხილოთ როგორც მასში მცხდნი ცვლადის მნიშ-
ვნელობა სისრულეზე გამოკიდებული წინადადება.

კბარა, ფორმულები წარმოადგენენ წინადადება ადგილის
ადგენის სპეციალური სახის სიფუძვლეს.

ფორმული ნაწილი ს უნდა შეიცავდეს შემოკლებულ შემდეგი რეკურსული განსაზღვრის (ეს განსაზღვრა ზოგჯერ I თავის §2-ში მოცემული განსაზღვრისა):

1. ზე A არის ყველაზე ან კონსტანტა მაშინ A არის A ფორმულის ურთაქმარი ნაწილი.

2. ზე A და B ფორმულებია, $\neg$ კი — რაოდენობითი ლოგიკური კავშირი, მაშინ $[A \neg B]$ ფორმულის ურთაქმარი ნაწილია: A ფორმულის ნაწილები, B ფორმულის ნაწილები და ზოგ $[A \neg B]$ ფორმულა.

3. ზე A ფორმულაა, მაშინ $[\neg A]$ ფორმულის ნაწილებია A ფორმულის ნაწილები და ზოგ $[\neg A]$.

4. ნიკეშული ფორმულა არ აქვს სხვა ნაწილები, გარდა იმ ნაწილებისა, რომლებიც განისაზღვრება 1-3 პუნქტებით.

ეს განსაზღვრა რომ კორექტულია ჩანს შემდეგი მსჯელობიდან: უფროსი გვინდა ვიპოვოთ C ფორმულის ყველა ნაწილი.

1. ზე C ურთაქმარი სიმბოლოსაგან შედგება, მაშინ ეს სიმბოლო იქნება ყველაზე ან კონსტანტა და C იქნება თავისთავის ურთაქმარი ნაწილი.

2. ზე C -ს შემადგენელ სიმბოლოთა რიცხვი ურთბე შეგია, მაშინ, როგორც ადვილი დასადასტურებელია, C ურთაქმარი გვითხრობს ან $[\neg C_1]$ სახით ან $[C_1 \neg C_2]$ სახით (სადაც $\neg$ რაოდენობითი ლოგიკური კავშირია, C_1 , შესაბამისად C_1 და C_2 , კი ფორმულებია) და C იქნება C ფორმულის ურთი ნაწილი, დაწარჩენი ნაწილების მოძებნა კი პარის C_1 ფორმულის ნაწილების მოძებნაზე, შესაბამისად C_1 და C_2 ფორმულების ნაწილების მოძებნაზე, რომლებსაც სიმბოლოების რიცხვი ნაკლები აქვს, ვიდრე C ფორმულის სიმბოლოების რიცხვია. ამ უკანასკნელის, შესაბამისად ამ უკანასკნელთან, ნაწილების მოძებნა კვლავ დანიშნავდა უფრო ნაკლები რაოდენობით ალგებრული სიმბოლოებისაგან შედგენილი ფორმულის ან ფორმუ-

ლები ნაწილები. მოძებნაზე და ა.შ. ეს პროცესი აუცილებლად
რამდენიმე $\mathbb{C}$ ზომიერების ყველა ნაწილის მოძებნივ.

ადვილი დასაბუთება, რომ ზომიერების ნაწილები განხილული
როგორც სივრცეები, ზომიერებას წარმოადგენენ. მაგრამ ეს არ ნიშ-
ნავს იმას, რომ ზომიერების ნაწილები ზომიერებაში იყვნენ. ზომიერების
ერთი სხვადასხვა ნაწილი, განხილული როგორც ზომიერებაში შეიძლება
ჯრძმანუთისაგან არც განსხვავებული იყვნენ. ადვილი დასაბუთება, რომ,
ეს ზომიერების ზომიერებაში ნაწილს შევცვლით სხვა ზომიერებაში მიღებული
სივრცეა ისევე ზომიერება იქნება.

როგა აინტერესებთ $\mathcal{A}$ ზომიერების რამდენიმე ჯრძმანუთი-
საგან განსხვავებული $X_1, \dots, X_n$ ცვლადებისაგან, მაშინ ამ
ზომიერებას აღნიშნავენ ასე: $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$. აქ X_i ცვლ-
ადებიდან ზომიერებას ან ყველას შეიძლება არც პირდაპირ შემოსვლაში
 $\mathcal{A}$ -ში და $\mathcal{A}$ -ში შეიძლება იყვნენ $X_1, \dots, X_n$ ცვლადებისაგან
განსხვავებული ცვლადები. განხილული შემთხვევაში ამბობენ, რომ
 $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ არის $\mathcal{A}$ ზომიერების საფუძვალზე
რეკონსტრუქცია ან $\mathcal{A}$ ზომიერების საფუძვალზე რეკონსტრუქცია. $\mathcal{A}$ ზომიერების
საფუძვალზე რეკონსტრუქცია ან $\mathcal{A}$ ზომიერების საფუძვალზე რეკონსტრუქცია
შეიძლება სხვადასხვა $\mathcal{B}$ ზომიერების საფუძვალზე რეკონსტრუქცია
შეიძლება ზომიერების საფუძვალზე რეკონსტრუქცია. ან $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ არიან ზომ-
იერებაები (ამ ზომიერებისაგან არ მოვიღებთ ჯრძმანუთისაგან გან-
სხვავებულობას), $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ კი არის $\mathcal{A}$ ზომიერების საფ-
უძვალზე რეკონსტრუქცია, მაშინ $\mathcal{A}(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n)$ -ი აღნიშნავს
ზომიერებას, რომელიც მიიღება $\mathcal{A}$ -დან $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების
ნაცვლად შესაბამისად $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ ზომიერების ჯრძმანუთი ჩასმით
(ასევე ჩასმის შემდეგ მიღებული სივრცეა, რომ ზომიერება იქნება,
ცხადია). გაუგებრობაშია საფუძვალზე ასაყრდენად $\mathcal{A}$ -ცვლადიანი საფ-
უძვალზე რეკონსტრუქცია მხოლოდ ჯრძმანუთი უნდა იქნეს შემოჭანილი და
იგი ცხადია უნდა იქნეს მიჩნეული. მაგალითად, ეს $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_n$
ჯრძმანუთისაგან განსხვავებული ცვლადებია, მაშინ $\mathcal{A}(\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_n)$

აღნიშნავს სურსათის სხვადასხვა ადგილზე მდებარეობის მიხედვით $\mathcal{A}(Y_1, \dots, Y_n)$ განიხილება როგორც სავაჭრო-საფინანსო ადგილზე, ან $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ სავაჭრო-საფინანსო ადგილზე მდებარეობის მიხედვით განიხილება.

როგორც ვხედავთ, სავაჭრო-საფინანსო ადგილზე მდებარეობის მიხედვით განიხილება. ამიტომ აღნიშნული პირობებში, $\mathcal{A}$ ფორმულაში $X_1, \dots, X_n$ სავაჭრო-საფინანსო ადგილზე მდებარეობის მიხედვით განიხილება, ან $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ ფორმულაში $X_1, \dots, X_n$ სავაჭრო-საფინანსო ადგილზე მდებარეობის მიხედვით განიხილება:

$$(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n / X_1, \dots, X_n) \mathcal{A}.$$

უპირატესად განიხილება სავაჭრო-საფინანსო ადგილზე მდებარეობის მიხედვით განიხილება. $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ ფორმულაში $X_1, \dots, X_n$ სავაჭრო-საფინანსო ადგილზე მდებარეობის მიხედვით განიხილება.

შენიშვნა. $X_1, \dots, X_n$ სავაჭრო-საფინანსო ადგილზე მდებარეობის მიხედვით განიხილება. $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ ფორმულაში $X_1, \dots, X_n$ სავაჭრო-საფინანსო ადგილზე მდებარეობის მიხედვით განიხილება. $\mathcal{A}$ -ში X_i სავაჭრო-საფინანსო ადგილზე მდებარეობის მიხედვით განიხილება. $\mathcal{A}_i$ ფორმულაში $(i=1, 2, \dots, n)$ სავაჭრო-საფინანსო ადგილზე მდებარეობის მიხედვით განიხილება. $\mathcal{A}$ -ში X_i სავაჭრო-საფინანსო ადგილზე მდებარეობის მიხედვით განიხილება. $\mathcal{A}_1$ ფორმულაში X_1 სავაჭრო-საფინანსო ადგილზე მდებარეობის მიხედვით განიხილება. $\mathcal{A}_2$ ფორმულაში X_2 სავაჭრო-საფინანსო ადგილზე მდებარეობის მიხედვით განიხილება.

ვხედავთ, $\mathcal{A}$ არის ფორმულა, $X_1, \dots, X_n$ არის სავაჭრო-საფინანსო ადგილზე მდებარეობის მიხედვით განიხილება. ამიტომ $\mathcal{A}$ ფორმულაში $X_1, \dots, X_n$ სავაჭრო-საფინანსო ადგილზე მდებარეობის მიხედვით განიხილება. $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ ფორმულაში $X_1, \dots, X_n$ სავაჭრო-საფინანსო ადგილზე მდებარეობის მიხედვით განიხილება.

1 იგულისხმება, რომ X_i არის (სავაჭრო-საფინანსო) სავაჭრო-საფინანსო ადგილზე მდებარეობის მიხედვით განიხილება.

(**თეორემა** i - **მეორე** t არის t ან f და $\text{ფ } X_i$ და X_j ურთი და
 იგივე **ცვლადები**, მაშინ $\text{ფ}_i = \text{ფ}_j$) არის ის **ჭეშმარიტული მნიშვნე-**
ლობა, რომელიც მიიღება **შემაჯი** **აღმართები**: 1. **პირველი** **სტრი-**
ქონში **დავტერო** $\mathcal{A}$ **ფორმულა**. 2. **მეორე** **სტრიქონში** **დავტერო**
ფორმულაში **ცვლადი** **მოცემული მნიშვნელობების** **შეგანი** **მიღებული**
ფორმულა, 3. **მესამე** **სტრიქონში** **დავტერო** **ფორმულა**, რომელიც მიი-
 ღება **მეორე** **ფორმულიდან**, **ფ** **მის** **თეორემა** **შეგ** **ფრჩხილი** **ნეცვილი**
მეფ **გამოსახულებას** **შესაბამისი** **ფრჩხილები** **ჩაბელი** (**ე.ი.** **ურთ-**
მპერაფორიან **ნაწილ**—**ფორმულას**) **შეცვლი** **მისი** **ჭეშმარიტული**
მნიშვნელობი. **უკანასკნელი** **მპერაციას** **გავიმეორებ** **მანამ**, **სანამ**
არ **მივიღებ** **ურთაბრ** **ჭეშმარიტული მნიშვნელობისაგან** **შეგენილი**
ფორმულას. **ეს** **უკანასკნელი** **ჭეშმარიტული მნიშვნელობა**, **ცხადია**,
არის **მოცემული** **ფ** **რ** **მ** **უ** **ლ** **ი** **ს** **ჭ** **ე** **შ** **მ** **ა** **რ** **ი** **ფ** **უ** **ლ** **ი**
მ **ნ** **ი** **შ** **ვ** **ნ** **ე** **ლ** **ი** **ა** $X_1, \dots, X_n$ **ცვლადების**
ჭ **ე** **შ** **მ** **ა** **რ** **ი** **ფ** **უ** **ლ** **ი** **მ** **ნ** **ი** **შ** **ვ** **ნ** **ე** **ლ** **ი** **ა** **ა** ($\text{ფ}_1, \dots, \text{ფ}_n$)
ს **ი** **ს** **ფ** **ე** **შ** **მ** **ი** **ს** **ა** **ე** **ი** **ს**. **ცხადია**, **იგივე** **ჭეშმარიტული მნიშ-**
ვნელობა **იქნება** **აღნიშნული** **სტრიქონებში** **დაწერილი** **თეორემა** **ფორ-**
მულის **ჭეშმარიტული მნიშვნელობა** $X_1, \dots, X_n$ **ცვლადების** **ჭეშმა-**
რიტული მნიშვნელობა **განხილული** **სისტემისათვის**. **მაგრამ** **ეს** **ფორ-**
მულები **მეორედან** **დაწყებული** **არ** **შეიყავს** **ცვლადებს** **და** **ისინი** **ჩვეუ-**
ლებრივ **განხილვიდან** **როგორც** **აღნიშვნა** (**სახელი**) $\mathcal{A}$ **ფორმულის**
ჭეშმარიტული მნიშვნელობისა $X_1, \dots, X_n$ **ცვლადების მნიშვნელობა-**
ა ($\text{ფ}_1, \dots, \text{ფ}_n$) **სისტემისათვის**.

მაგალითი. **უპოვო** $[p \rightarrow ([p \leftrightarrow q] \vee r)]$ **ფორმულის**
ჭეშმარიტული მნიშვნელობა p, q **და** r **ცვლადების** **ჭეშმარიტული**
მნიშვნელობა **დალაგებული** ($t, f, \text{ფ}$) **სისტემისათვის**.

გამოანგარიშების **პროცესი** **ბევრი** **განხილული** **აღმართების**
მიხედვით **ასევე** **იქნება**:

$$[p \rightarrow [[p \leftrightarrow q] \vee r]];$$

$$[t \rightarrow [[t \leftrightarrow f] \vee f]];$$

$$[t \rightarrow [f \vee f]];$$

$$[t \rightarrow f];$$

f .

ბეზოტეზურიდან ადვილად გამოდინარეობს შემდეგი

(1.1). თეორემა. ვთქვათ $\mathcal{A}$ არის ფორმულა, $\mathcal{A}_i$ არის მისი ნაწილი, $X_1, \dots, X_n$ არიან ცვლადები, რომელთა შორის იმყოფება $\mathcal{A}$ ფორმულის ყველა ცვლადი, $\mathcal{C}$ არის $\mathcal{A}_i$ ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების ჭეშმარიტული მნიშვნელობათა მოცემული $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ სისტემისათვის, $\mathcal{A}'$ კი არის ფორმულა, რომელიც მიიღება $\mathcal{A}$ ფორმულიდან მისი $\mathcal{A}_i$ ნაწილის $\mathcal{C}$ -ში შეცვლით. მაშინ ურთმანებს ემთხვევა $\mathcal{A}$ და $\mathcal{A}'$ ფორმულები ჭეშმარიტული მნიშვნელობები $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების ჭეშმარიტული მნიშვნელობათა $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ სისტემისათვის.

როგორც ვხედავთ $\mathcal{A} = \mathcal{A}_i(X_1, \dots, X_n)$ ფორმულა, სადაც $X_1, \dots, X_n$ არიან ურთმანებისაგან განსხვავებული ცვლადები, რომელთა შორის იმყოფება $\mathcal{A}$ ფორმულაში შემავალი ყველა ცვლადი, ნარმოკარგენს $X_1, \dots, X_n$ ცვლადებზე რამოკიდებულ ნინაპარებას. იგი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც $\{t, f\} \rightarrow \{t, f\}$ ტიპის n -ადგილიანი ფუნქცია $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მიმართ. რადგან აქ $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მნიშვნელობათა სიმრავლე ორელებიანია, არგუმენტთა მნიშვნელობების რაღაცეებული სისტემების სიმრავლე 2^n ელემენტს შეიცავს. ამიტომ ასეთი ფუნქციებისათვის ყოველთვის შეიძლება შევადგინოთ მათი ჭეშმარიტული მნიშვნელობების ცხრილი (სრული) ცხრილი. მაგალითად, ბეზოტეზურიდან ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობათა ცხრილი

იქნება:

p, q, r	$[p \rightarrow [(p \leftrightarrow q) \vee r]]$
ტ ტ ტ	ტ
ტ ტ ჭ	ტ
ტ ჭ ტ	ტ
ტ ჭ ჭ	ჭ
ჭ ტ ტ	ტ
ჭ ტ ჭ	ტ
ჭ ჭ ტ	ტ
ჭ ჭ ჭ	ტ

ამ ცხრილის ჰიანასკნელ სვეტს მოცემული ფორმული ს
ტეზისა რიგულ მნიშვნელობაა ცხრი-
ლის მთავარი სვეტი ეწოდება.

ანალოგიური ცხრილები

$p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$, $\neg p$

ფორმულებისათვის იქნება:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
ტ	ტ	ტ	ტ	ტ	ტ
ტ	ჭ	ჭ	ტ	ჭ	ჭ
ჭ	ტ	ჭ	ტ	ტ	ჭ
ჭ	ჭ	ჭ	ჭ	ტ	ტ

p	$\neg p$
ტ	ჭ
ჭ	ტ

(პირველი ოთხი ფორმულის ცხრილები მოცემულია ტაბლიანდულ სა-
ხით).

ეს ცხრილები შეიძლება განვიხილო როგორც $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$
ლოგიკური კავშირების განსაზღვრებები. ზოგჯერ ამ ცხრილებს ეწოდება
აგრეთვე შესაბამისი ცხრილი კავშირის ტეზის

მ ა რ ი ტ უ რ ი მ ი ნ ი შ ე ნ ე რ კ მ ე ნ ი ს ო ბ რ ი ლ ი.

შენიშვნა. მეცნიერებრივ ნებისმიერ სპეციალურ პარტს საუბრე აქვს საგანთა გარკვეული არესთან. იგი შეიძლება აღნიშნულ სა-
განთა არეპან აღეშული საცნებს და მათ შეესახებ გამოთქმული წინა-
დადებებს. ამიტომ ჩვეულებრივ შეიძლება აღნიშნული შედეგები მრე ტიპის
მკვრატორებს.

1. მკვრატორები, რომელთა არტუმენტებს წინადადებები ან
პროპოზიციული სქემები (ანუ ჭეშმარიტული მნიშვნელობათა სქემები)
წარმოადგენენ. მათ უწოდებთ რ მ ტ ი ე უ რ ი მ ე ნ ა ტ მ-
რ ე მ ი. იტულისხმება, რომ მხედველობათა ის წინადადებები,
რომელთადაც საუბრე აქვს განხილული სპეციალურ ჟორობას.

2. მკვრატორები, რომელთა არტუმენტები განხილული სპეცია-
ლური პარტის საგანთა არეპან აღეშული საცნებთა ან საცნობრივი
სქემებია. მათ უწოდებთ ს ე ე ო ა ლ უ რ ი მ ე ნ ა ტ მ-
რ ე მ ი.

ამ ტერმინოლოგიაში გამოთქმა "სპეციალური" გამარტლებულია
იმიტომ, რომ სპეციალური მკვრატორები დამახასიატებელია სპეციალური
პარტებისათვის, ლოგიკური მკვრატორები კი, ჩვეულებრივ, საერთო
ყველა ჟორობისათვის. ლოგიკურ მკვრატორთა ჟვისებების შესწავ-
ლას სპეციალურ ჟორობებისათვან განცალკევებოთ აწარმოებენ. კერძო,
ლოგიკურ კავშირთა ჟვისებების შესწავლისას იხილვენ ისე ჟო-
რობას, სადაც საგანთა არე არ ტვაქვს, შესწავლის მზივეტები ადებ-
ნენ წინადადებათა რაღაც არეს ისე, რომ ეს წინადადებები აკმაყო-
ფილებენ მხოლოდ ზოგიერთ ზოტად მომხრვანს (მატალითად მომხრვენ,
რომ წინადადებათა არეპან აღეშული მითოვული წინადადებისათვის
შესრულებული იყოს მესამის გამოჩინებვის კანონი და წინააღმდეგო-
ბის კანონი).

მოტორე სპეციალური, ისე ლოგიკური მკვრატორები შეიძლება
იყოს მრტვარი: რ ე ლ ი ა ო ი უ რ ი მ ა ს უ მ ს ტ ა ნ ო ი -

უ რ ი. რელიგიური ენოქიზმის ისეთი რეპრეზენტაციის, რომელიც მნიშვნელობაში არა შეეძლება წინადადებადისაგან ანუ ჭეშმარიტული მნიშვნელობებისაგან, სუბსტანციური კი ენოქიზმის ისეთებს, რომელიც მნიშვნელობაში არა საგნებისაგან შეეძლება.

როგორც ვხედავთ, ლოგიკური კავშირები წარმოადგენენ ლოგიკური რეპრეზენტაციის კერძო შემთხვევას, ისინი წარმოადგენენ უმარტივესი სახის ლოგიკური რეპრეზენტაციის, რომლის როგორც არგუმენტები, ისე მნიშვნელობები წინადადებადისა (ჭეშმარიტული მნიშვნელობები).

ამ მაგნი ჩვენ ძირითადი საკითხი გვეჩვენება წინადადებადის ალტერნის ისეთი ფორმულაში, რომელიც შეიცავს მხოლოდ ცვლად ელემენტარულ წინადადებადის (ე.ი. არ შეიცავს არაპროპიოსიციულ კონსტანტებს). ამიტომ, იქ სადაც საწინააღმდეგო არ იქნება ღებულობი, უკუაღმართობა კიდეც, რომ განხილული ფორმულაში შეიცავს მხოლოდ ცვლად ელემენტარულ წინადადებადის.

როგორც აღვნიშნეთ, ფორმულაში არაპროპიოსიციული ცვლადების მნიშვნელობაში სისტემატე დამოკიდებული წინადადებადისა. მაშასადამე, ისინი არაპროპიოსიციულ ფორმულაში წარმოადგენენ. ამიტომ მოცემული $\mathcal{A}$ ფორმულა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ჭეშმარიტული მნიშვნელობაში $\{t, f\}$ სიმრავლეზე განსაზღვრული n -ადგილიანი არაპროპიოსიციული ფუნქცია $X_1, \dots, X_n$ არაპროპიოსიციული ცვლადების მიმართ, სადაც $X_1, \dots, X_n$ არიან ელემენტარული განსაზღვრული ცვლადები, რომელიც მათის იმყოფება $\mathcal{A}$ ფორმულაში მყოფი ყველა ცვლადი. ამ ცვლადებისათვის წინადადებადის ალტერნის არსებობა ჩვეულებრივი მათემატიკაში, რომელიც სწავლობს რ - ელემენტარული $\{t, f\}$ სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქციებს, რომელიც მნიშვნელობები იმავე სიმრავლეს ელემენტები. ასეთი მათემატიკა პირდაპირ გამოიყენება წინადადებადის ალტერნაში. მთელი რეგულაციის $\{t, f\}$ სიმრავლის ნაცვლად ავიღებთ სამეგულაციის სიმრავლეს, მაშინ ამ გზით მიღებული ზეოგია

გოცადლოვნებაა და მეტამათემატიკურ გამოცდინარეობაა
მაგალითები

$$p \Leftrightarrow \neg\neg p; p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p; [p \wedge \bar{p}] \vee q \Leftrightarrow q;$$

$$p \Rightarrow [q \rightarrow p]; p \Rightarrow p; [p \rightarrow q] \Rightarrow [[q \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow r]].$$

გარდა განილული მეტამათემატიკური სიმბოლოებისა მეტა-
ენაში გამოვიყენებთ მათემატიკურ სიმბოლოებსაც, როცა ეს
კავშირდება არ იწვევს: $\Leftrightarrow$ სიმბოლოს გამოვიყენებთ მეტა-
მათემატიკურ წინადადებას გოცადლობის ანუ უკუკავშირების
ჩასახერხებლად, $\rightarrow$ სიმბოლოს კი—იმის ჩასახერხებლად, რომ ურთი მეტა-
მათემატიკური წინადადება გამოცდინარეობს მეორეა და ა.შ.
ასე გამოვიყენებთ მაგალითებს ქვემოთ გავყენოთ (იხ. გვ. 183).

როგორც სპეციპალური მეტასიმბოლოები, ისე მეტაენაში გამო-
ყენებული მათემატიკური ლოგიკური სიმბოლოები იხმარება მხოლოდ
წინადადებაებში—დატყუნილი ფაქტების გადმოსაცემად. მათემატიკაში
კი მათემატიკური ღონის ადგენების სიმბოლოები გამოვიყენებთ
ისეთი (მათემატიკური) ობიექტების შესაბამისად, რომლებიც ჩვეულებრივ
წარმოდგენენ მეტამათემატიკური მხოლოდ წინადადებათა გამოხატუ-
ლი მსჯელობის საგანს. მაგალითად, მათემატიკური ლოგიკური კავში-
რები წარმოდგენენ რაღაცეებს, რომელთა დახმარებით ნებისმიერად
აღებული მათემატიკურ ღონელებიდან მიიღება ახალი მათემატიკური
ღონელები—ჩვენი შესწავლის ობიექტები. არის თუ არა ეს ღონე-
ლები იგივეა რა ქვეყნის, ღონეა, იგივეა რა მცდარი და ა.შ.
ეს უკვე შემიძლია შესწავლის საგნად. მეტამათემატიკური რაღაც-
გონებები შეიძლება გამოვიყენოთ (მათემატიკური რაღაცგონების
ანალიზისად) კომპლექსური წინადადებათა შესაბამისად და შემდეგ
შევსწავლოთ, არიან თუ არა ეს წინადადებაები ქვეყნის, მაგრამ
აღნიშნული რაღაცგონების ასეთიდან გამოვიყენებთ არაა დახმარება-

მუშელთა მათხვეობა.

ამრიგად, მათემატიკური წინადადებაები (ფორმულები) პრაქტიკულ
 წინადადებაებს წარმოადგენენ, მათემატიკური წინადადებაები
 კი (მე კონკრეტულად არაა ამკარად სანდოა დამატებითი) გა-
 რდასა და პრაქტიკულად დადასტურებული. ამასთანავე მათემატიკური წინა-
 დადებას ხშირად გამოარჩევილი სახით იძლევიან. მაგალითად, ნა-
 ვალია მისი გამოკვეთისა "უფრო ან ფორმულა არის იგივეა
 უფრო ან", "მე ან ფორმულა არის იგივეა უფრო ან", "დავუ-
 ვა, რომ ან ფორმულა არის იგივეა უფრო ან", "უფრო $T_1 = T_2$
 გეგმა არის იგივეა უფრო ან" და ა.შ. შესაძლებელია სარგებ-
 ლოვანი გამოარჩევილი გამოკვეთილი: "უფრო ან", "მე ან",
 "დავუვა ან" "უფრო $T_1 = T_2$ " და ა.შ. ასევე გამოარჩე-
 ვილი გამოკვეთილი: "დავუვა ან $T_1 = T_2$ გეგმა", "განსაზ-
 რებული გეგმა $\alpha = T$ " და ა.შ.

၁၃၅၅ ခုနှစ်တွင် နယ်လုပ်ငန်းများ ပိုမိုတိုးတက်စေရန်
အားပေးဆောင်ရွက်ပေးပါရန် တောင်းဆိုပါသည်။

Բնական թվերի համակարգում $a \leq b$ նշանակում է, որ a -ն b -ի նախորդողն է։ Այսինքն, $a \leq b$ նշանակում է, որ a -ն b -ի նախորդողն է։ Այսինքն, $a \leq b$ նշանակում է, որ a -ն b -ի նախորդողն է։

ფერის გამოვლენაში ცხადია და არაფერი არ ეტყობის—განხილვით
მეორე მეტანინადადებაში ყველაფერი ცხადია და მუსტად არის გამო-
ვლენილი.

გარდა ამისა მეტამათემატიკური ცვლადები გვაძლევს როგორ
მავსებლობის ცვლადების შენახვისას და უმავსებლობის იმ შემ-
თავებისას, რომლებშიც ჩვეულებრივ მღვდლები მათემატიკურ
ცვლადებს.

გამოცემის გამარტივების მიზნით ქვემოთ ვისარგებლებ
შემდეგი მნიშვნელოვანი შეთანხმებით. მეტანინადადება (მე-
თავების, აქსიომური სქემები და ა.შ.) გამოყენების დროს, თუ
საინტერესოა არ იქნება შემდეგი, ეტყობის, რომ ფორმული-
ბურ ნინადადებაში მყოფი ლინური ადამაშვის სწორი შინაგონი
ნახევრად მათი როგორი ასობრივ ნებისმიერ ფორმულას აღნიშნავს.
მაგალითად, " $AVB \iff \overline{B \wedge A}$ " მეტანინადადება ასე უნდა გვეჩვენ-
ოს: "თუ A და B არიან ფორმულები, მაშინ $AVB \iff \overline{B \wedge A}$ ".

ფორმულის იგივესად ქვემარტობის და იგივესად მცდარ-
ობის ცნებები ნინადადებაში აღვებრის შემთხვევაში ე.წ. ტავტო-
ლოგია და ნინადადებაობის ცნებებს ემთხვევიან და ისინი უნდა
ყავ. $\mathcal{A}$ ფორმულას ეწოდება ი გ ი ვ უ რ ა რ ყ ვ შ ი ა-
რ ი ტ ი ა ნუ ტ ა ვ ტ ი ლ ი გ ი ა, შესაბამისად ი გ ი ვ უ -
რ ა რ შ ი ე რ ა რ ი ა ნუ ნ ი ნ ა ა რ ი გ ი ა, თუ
 $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების ქვემარტული მნიშვნელობაა ყოველი
დალაგებული სინტაქსისათვის $\mathcal{A}$ ფორმულის ქვემარტული მნიშვნელობაა
 t , შესაბამისად f , სადაც $X_1, \dots, X_n$ არის ცვლადი მიმ-
დევრობა, რომლის ნევრად შორის იმყოფება $\mathcal{A}$ ფორმულის ყველა ცვლადი.
როგორც ვიცით, $\mathcal{A}$ ფორმულას ეწოდება შ ი ს რ უ ლ ე ბ ა რ ი, თუ
 $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების ქვემარტული მნიშვნელობაა უნა სინტაქს-
სათვის მანის $\mathcal{A}$ ფორმულის ქვემარტული მნიშვნელობაა t . ასევე,
ფორმულას ეწოდება მ ე რ ე ბ ა, თუ იგი იგივესად ქვემარტობა

ბოლოს დახმარებით ადვილად შეიძლება დავიპოვოთ $\rightarrow$ და $\leftrightarrow$ მუდმიანებმატოვრ სიმბოლოება გამოყენება. მარტლაც, ნაცვლად

$$A \rightarrow B \text{ და } A \leftrightarrow B$$

მუდმიანებმატოვრ წინადადებადებისა შეგვიძლია შესაძამებისად გამოვიყენოთ $\vdash [A \rightarrow B]$ და $\vdash [A \leftrightarrow B]$ მუდმიანებმატოვრ წინადადებადები.

ადვილი დასადახია, რომ ჭორმულეშ ბორის ჭოქდალოვნების მიმარტებას აქვს რეჭლეუსურების, სიმჭოროვებისა და ტრანზიტულობის დებისებები. იგივე იქვშის $\leftrightarrow$ სიმბოლოა აღნიშნული მუდმიანებმატოვრ მიმარტებადა. ე.ი. დებისმიერ A , B და C ჭორმულეშისათვის

$$A \leftrightarrow A;$$

$$[A \leftrightarrow B] \rightarrow [B \leftrightarrow A];$$

$$[A \leftrightarrow B] \wedge [B \leftrightarrow C] \rightarrow [A \leftrightarrow C].$$

შვენიშნოა, რომ აქაც " $\vdash$ " მუდმასიმბოლოს დახმარებით ყოველთვის შეგვიძლია დავიპოვოთ ადვილინოა " $\leftrightarrow$ " მუდმასიმბოლოს გამოყენება. " $\vdash$ " მუდმასიმბოლოს დახმარებით ბოტკერ შეიძლება დავიპოვოთ ადვილინოა აქრედე მუდმანაში მუდმიანებმატოვრ ლოტიკური კავშირების გამოყენება. მაქალიშად, უკანასკნელი სამი დამოკიდებულება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\vdash [A \leftrightarrow A]; \vdash [[A \rightarrow B] \rightarrow [B \leftrightarrow A]];$$

$$\vdash [[A \leftrightarrow B] \wedge [B \leftrightarrow C] \rightarrow [A \leftrightarrow C]].$$

შვენიშნოა, რომ უკანასკნელი დამოკიდებულება შეიძლება დამოისახოს შემდეგი მუდმანინადადებად:

$$\vdash [A \leftrightarrow B] \rightarrow [[B \leftrightarrow C] \rightarrow [A \leftrightarrow C]].$$

შევიწინოთ აგრეთვე, რომ განხილული გზით მეტაენაში გამო-
ყენებული მათემატიკური ლოგიკური კავშირების თავიდან აცილება
ბოტკერ არ შეიძლება. მაგალითად,

$$[A \leftrightarrow B] \longrightarrow [A_1 \leftrightarrow B_1] \quad (1)$$

მეტაენიდანააღება საბოლოოდ არაა ჭოგყასი შემდეგი მეტაენიდანაა-
დისა

$$\vdash [[A \leftrightarrow B] \longrightarrow [A_1 \leftrightarrow B_1]]. \quad (2)$$

მარტყ, ჟუ $X_1, \dots, X_n$ არის A და B ჭოწმულეებში მჟოჟი
ყვლაეების კადაჟელ და ვიყი, რომ ამ ყვლაეების მნიშვნელბაჟა
მოყვეული $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ სისჟემისაჟვის A და B ჭოწმულეებს ჟრჟი
და იგივე (ჟრჟმარბოლო) მნიშვნელბებში აჟვე, $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ სისჟე-
მისაჟვის კი—სხვაჟასხვა, მაშინ $A \leftrightarrow B$ მეტაენიდანააღება მყჟარბა
და, მაშასაჟამე, (1) არავიჟაი იწჟოწმაცისა არ შეიყავს A_1 და B_1
ჭოწმულეების შესახებ, (2)—ჟან კი გამოიჟინარჟოჟს, რომ $(\delta_1, \dots, \delta_n)$
სისჟემისაჟვის $A_1 \leftrightarrow B_1$ ჭოწმულის მნიშვნელბა, ისევე როჟოწყ
 $A \leftrightarrow B$ ჭოწმულისა, არის $\vdash$ და, მაშასაჟამე, $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ სისჟე-
მისაჟვის A_1 და B_1 ჭოწმულეებს ჟრჟი და იგივე მნიშვნელბებში
აჟვე. ამიჟომ (1) ნინაჟაეებბიჟან საბოლოოდ არ გამოიჟინარჟოჟს
(2).

შენიშნა. ორი ჭოწმულის ჭოლჟალოვნების კანსამოწჟრაში არ
იჟულისხმება, რომ ორივე ჭოწმულა ჟრჟი და იმავე ყვლაეებს შეი-
ყავს. მაგალითად, ჟვაჟჟს

$$q \leftrightarrow [[p \wedge q] \wedge \bar{p}] \vee q.$$

ყხაჟი, ჟუ რომელიმე ყვლაჟი შეჟის ორ ჭოლჟალოჟან ჭოწმულჟან
მიოლოჟ ჟრჟში, მაშინ, ეს ჟჟანასკნელი ჭოწმულა ამ ყვლაჟის სხვა-
ჟასხვა მნიშვნელბისაჟვის ღებულბს ჟრჟი და იმავე მნიშვნელ-
ბას, როყა სხვა ყვლაეების მნიშვნელბებში ჟაჟიჟსიწჟბულა. ე. ი.

მუმიცა ცვლადი შეიძინა ფორმულაში, მაგრამ ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა ამ ცვლადის მნიშვნელობაზე დამოკიდებული არ არის.

ამ პარაგრაფის პასაჟებს დავამტკიცოთ რამდენიმე ლემა.

(2.2) ლემა ($\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$). ლემა $\mathcal{A}$ -ის იგივეა ჭეშმარიტი, შესაბამისად იგივეა მცდარი, ფორმულა, $X_1, \dots, X_n$ არიან ურთიდანთისაგან განსხვავებული ცვლადები, $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ არიან ნებისმიერი ფორმულები, მაშინ

$$(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \vdash X_1, \dots, X_n) \mathcal{A} \quad (1)$$

არის იგივეა ჭეშმარიტი, შესაბამისად იგივეა მცდარი, ფორმულა.

ამ ლემას ეწოდება, აგრეთვე, $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ -ის შესაბამის კერძო შემთხვევას $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ -ის $n=1$ -ის შემთხვევაში $\mathcal{A} \vdash X_1$.

დამტკიცება. $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_m$ იყოს ურთიდანთისაგან განსხვავებული ცვლადები, რომელთა შორის იმყოფება $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n, \mathcal{A}$ ფორმულებში შემავალი ყველა ცვლადი. ცხადია $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_m$ ცვლადებს შორის იმყოფება (1) ფორმულაში შემავალი ყველა ცვლადი. განვიხილოთ ამ ცვლადების ჭეშმარიტ მნიშვნელობა ნებისმიერი პარამეტრი ($\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m$) სისტემა. $\mathcal{C}_i$ იყოს $\mathcal{A}_i$ ფორმულის ჭეშმარიტ მნიშვნელობა $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_m$ ცვლადთა ჭეშმარიტ მნიშვნელობების ($\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m$) პარამეტრი სისტემისათვის. ახლა დამტკიცების პასუხებისათვის საკმარისია შევნიშნოთ, რომ, (1.1) ლემის ძალით, (1) ფორმულის ჭეშმარიტ მნიშვნელობა $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_m$ ცვლადების მნიშვნელობათა ($\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m$) სისტემისათვის იგივეა, რაც $\mathcal{A}$ ფორმულის ჭეშმარიტ მნიშვნელობა $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების ჭეშმარიტ მნიშვნელობათა ($\mathcal{C}_1', \dots, \mathcal{C}_n'$) სისტემისათვის.

დამტკიცების ლემის პირველი ნაწილის იმ ვარიანტთან, რომლის მიხედვითაც საკმარისია ფრაზა "იგივეა ჭეშმარიტი" შეიცვალოს სიტყვით "ლემა", (2.1) ლემის დამტკიცება

(2.3) ჯერემა, უკუვახ A და B არიან ჭორმულები,
 $X_1, \dots, X_n$ არიან ურდმანუთისაგან განსხვავებული სვლაები,
 $A_1, \dots, A_n$ კი ნებისმიერი ჭორმულებია. მე
 $A \rightarrow B$, შესაბამისად. $A \Leftrightarrow B$,

მაშინ

$$(A_1, \dots, A_n / X_1, \dots, X_n) A \rightarrow (A_1, \dots, A_n / X_1, \dots, X_n) B,$$

შესაბამისად

$$(A_1, \dots, A_n / X_1, \dots, X_n) A \Leftrightarrow (A_1, \dots, A_n / X_1, \dots, X_n) B.$$

(2.4) ჯერემა (მ კ რ უ ს ა მ ნ ე ნ ს ი ს მ ე ს ი).

მე A და $A \rightarrow B$ არიან იგივერად ჭეშმარიტი ჭორმულები, მაშინ B
 არის იგივერად ჭეშმარიტი ჭორმული.

დადგენილება. $X_1, \dots, X_n$ იყოს სვლაები, რომელთა შორის
 იმყოფება A, B და $A \rightarrow B$ ჭორმულებში შემაჯალი ყველა სვლად,
 $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle$ იყოს $X_1, \dots, X_n$ სვლაების ჭეშმარიტული მნიშ-
 ვნელობათა ნებისმიერი სისტემა. საჭიროა ვაჩვენოთ, რომ B ჭორ-
 მულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა σ აღნიშნულ $X_1, \dots, X_n$ სვლა-
 ბის მნიშვნელობათა $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle$ სისტემისათვის არის $\vdash$.
 პირიქით A და $A \rightarrow B$ ჭორმულების ჭეშმარიტული მნიშვნელობა
 $X_1, \dots, X_n$ სვლაების ჭეშმარიტული მნიშვნელობათა $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle$
 სისტემისათვის არის $\vdash$. ამასთანავე, (1.1) ჯერემის ძალით,
 $A \rightarrow B$ ჭორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა $X_1, \dots, X_n$ სვლა-
 ბის ჭეშმარიტული მნიშვნელობათა $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle$ სისტემისათვის
 არის $[\vdash \rightarrow \sigma]$. მაშასადამე, $[\vdash \rightarrow \sigma]$ არის $\vdash$. აქედან
 იმპლიკაციის $\rightarrow$ სიმბოლოს შინაარსის განსაზღვრის ძალით გამოი-
 რიანარეობს, რომ σ არის $\vdash$.

ახლა დავამტკიცოთ ჯერემა ძირითადი ჭოლძალუვნებათა

შესახებ:

(2.5) ჯერემა, მე A, B და C არიან ჭორმულები, მაშინ
 ადგილი აქვს შემდეგ ჭოლძალუვნებებს:

$A \Leftrightarrow A.$ (1) (უარყოფის უარყოფის კანონი —
 ირმატი უარყოფის კანონი)

$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A.$ (2) (ტანადვლეების კომუტაციურობა)

$[A \wedge B] \wedge C \Leftrightarrow A \wedge [B \wedge C].$ (3) (ტანადვლეების ასოციაციურობა)

$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A.$ (4) (შეკრების კომუტაციურობა)

$[A \vee B] \vee C \Leftrightarrow A \vee [B \vee C].$ (5) (შეკრების ასოციაციურობა)

$A \wedge [B \vee C] \Leftrightarrow$ (ტანადვლეების დისტრიბუციულობა

$\Leftrightarrow [A \wedge B] \vee [A \wedge C].$ (6) შეკრების მიმართ —

დისტრიბუციულობის I კანონი)

$A \vee [B \wedge C] \Leftrightarrow$ (შეკრების დისტრიბუციულობა

$\Leftrightarrow [A \vee B] \wedge [A \vee C].$ (7) ტანადვლეების მიმართ —

დისტრიბუციულობის II კანონი)

$\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}. \quad (8)$

$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}. \quad (9)$

(დე მორგანის კანონები)

$A \vee A \Leftrightarrow A. \quad (10)$ (შეკრების იდემიტენციურობა)

$A \wedge A \Leftrightarrow A. \quad (11)$ (ტანადვლეების იდემიტენციურობა)

$A \wedge \perp \Leftrightarrow \perp. \quad (12)$ (ჟებმაროტ მანამამრავლის
 ელიმინაციის (მოშორების) კანონი)

$A \vee \top \Leftrightarrow \top. \quad (13)$ (მეპარი შესავრების
 ელიმინაციის (მოშორების) კანონი)

ამ ფორმულების (უფრო ზუსტად: მეტაფორმულების) საშარ-
 ლანობა აპვილაპ შემოქმედება $\vee, \wedge$ და $\neg$ ლგიკური ნებრაფ-
 რების ტანსაბღვრებების საფუძველზე, მუ ვიკულისხმებზე, რომ A, B
 და C არიან ურმანებოისაგან ტანსხვავებუი პოპოზიციუი ცვლ-
 პები. ზოგადი შემხხვევა ამ კერძო შემხხვევიდან მიიღება (2.3)
 მეორების ტანოყენებო.

რომ ტანოვარკვიოტ მოყმუი A და B ფორმულები არიან
 მუ არა ეკვივალენტიური, საკმარისია ავატოტ მანე ჟებმაროტურ

მინიშენელობაა სრული ცხრილებში $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მიმართ (სადაც $X_1, \dots, X_n$ არიან ურთმანთისაგან განსხვავებული ცვლადები, რომელთა შორის იმყოფება A და B ჭორმულებში შემავალი ყველა ცვლადი): ზუ ამ ცხრილებში მთავარი სვეტები ურთმანთი ალმჩინდა, მაშინ $A \Leftrightarrow B$, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი $A \not\Leftrightarrow B$.

ჭოლალუნენობაა მჭიკებში სუ მუთოი ძლიერ ზოგადია და ამიჭომ ამ მუთოი მინებური მჭიკებები შეიძლება ძლიერ გრძელი ალმჩინდეს. ამასთან რაკავშირებით ჭოლალუნენობაა მჭიკებას ხშირად სპეციალური მსჯელობით ანარმოებენ და ახერხებენ ცვლადთა მინიშენელობების ყველა სისტემის განხილვის ლავიდან აყილებას. მაგალითად, (8) კავთვალენჭურობა, იმ შემთხვევაში, როცა A და B ცვლადებია, ასე შეიძლება იქნეს რამჭიკებული:

რმიუნქეიის განსაზღვრის ძალით $A \vee B$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის მყარი, როცა A და B ორივე მყარია. ამიჭომ $\overline{A \vee B}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის ჭეშმარიტი, როცა A და B ორივე მყარია (ე.ი. როცა ორივეს ჭეშმარიტული მინიშენელობა არის ქ). ასევე, ცხადია, $\overline{A \wedge B}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის ჭეშმარიტი, როცა A და B ორივე მყარია (ე.ი. როცა ორივეს ჭეშმარიტული მინიშენელობა არის ქ).

ვიციხ რა ჭოლალუნენობაა რამჭიკების მუთოებში, ქვემოთ ჭოლალუნენობაა რამჭიკებებზე, ხშირად, არ შევჩერებებით და რაკვმანყოფილებით ჭოლალუნენობაა მხოლოდ ამოწერიხ.

იხუ საკითხებში, სადაც ჭოლალუნობა ჭორმულებში შეიძლება არ განვასხვაოთ ურთმანთისაგან, ე.ი. შეიძლება ჭოლალუნობა ჭორმულების გაიგივება, ჭოლალუნებში საშუალებას იძლევიან უანარმოო მოყმული ჭორმულების $\text{ი გ ი ე უ რ ი გ ა რ პ ა ე - მ ნ ე ბ ი}$ ისე, რომ ამ გარდაქმნების შედეგად მივიღოთ უჭრი მარტივ—უჭრი ხელსაყრელ ჭორმებზე. მოყმული ჭორმის (კერძოდ, ჭორმულის) $\text{ი გ ი ე უ რ ი გ ა რ პ ა ე მ ნ ა}$ ნიშნავს ამ ჭორ-

მისი ზოლფასი ფორმით შეცვალს.

(1.1) ჯერედის უბრალო შედეგია:

(2.6) ჯერედმა. მე რომელიმე ფორმულის რაიმე ნაწილს შევცვლით მისი ზოლფასიანი ფორმულით მივიღებთ ამ ფორმულის ზოლფასიან ფორმულას.

(2), (3), (4) და (5) ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ ლოგიკური გამრავლებისა და შეკრების $\wedge$ და $\vee$ ოპერაციებს აქვთ კომუტაციურობისა და ასოციაციურობის (ჯგუფობის) თვისებები. ამიტომ, მე $\mathcal{A}$ ფორმულა მიიღება $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ ფორმულებიდან მხოლოდ $\wedge$, შესაბამისად $\vee$, ოპერაციების გამოყენებით, მაშინ როგორც მიმდევრობითავე უნდა ვაწარმოოთ ეს ოპერაციები, ყოველთვის მივიღებთ $\mathcal{A}$ ფორმულის ზოლფასიან ფორმულას. ამიტომ ასეთი $\mathcal{A}$ ფორმულა შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_n, \quad (14)$$

შესაბამისად

$$\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 \vee \dots \vee \mathcal{A}_n, \quad (15)$$

რომლებშიც ყველა ფორმული გამოტოვებულია. ფორმულების სხვადასხვაგვარად აღბეჭენით მივიღებთ ურთი და იგივე ფორმულას ზოლფასიანებშიც სიმუსიკით.

(6) ფორმულა მიუთითებს, რომ $\wedge$ ოპერაცია რისტრიქციურია $\vee$ ოპერაციის მიმართ, როგორც ჩვეულებრივ აღებრათი გამრავლებას არის რისტრიქციური შეკრების მიმართ. ამ ანალოგიის გამო $\wedge$ ოპერაციას უწოდებ (ლოგიკური) გამრავლება, $\vee$ ოპერაციას კი — (ლოგიკური) შეკრება.

(14) ფორმულას უწოდებთ (ლიტერატურა) ნაწილობრივ, მის $\mathcal{A}_i$ ნაწილებს კი — ნაწილობრივ ნაწილებს. ასევე (15) ფორმულას უწოდებთ (ლიტერატურა) $\vee$ ნაწილი, მის $\mathcal{A}_i$ ნაწილებს კი — ნაწილობრივ ნაწილებს.

ურთი მხრივ, ნინადადებათა აღებრათი შეკრება-გამრავლე-

ლი კატეგორიის, სახელწოდება II კატეგორიის მკერატორი, $\wedge$ არის
 III კატეგორიის მკერატორი, $\neg$ კი უკანასკნელი IV კატეგორიის
 მკერატორია. ამასთანავე ზუ ფრჩხილები არ გვაქვს, მაშინ პირველ
 რიგში სრულდება უმაღლესი კატეგორიის მოქმედებები, შემდეგ უფრო
 მაღალი კატეგორიისა, შემდეგ კიდევ უფრო მაღალი და ა.შ. ამასთანა-
 ნავე, ურთი და იგივე კატეგორიის მკერატორების შემთხვევაში
 მოქმედებაა მიმდევრობა განისაზღვრება მრავლობითი მკერატორ-
 ბის შემთხვევაში $m \wedge n \wedge p \wedge r$ $m \wedge n \wedge p \wedge r$ $m \wedge n \wedge p \wedge r$
 $m \wedge n \wedge p \wedge r$ (ე.ი. ურთი და იგივე კატეგორიის ორი მკერატორიდან
 ის მოქმედებს პირველად, რომელიც მარცხნივ წერია), დანარჩენ
 მკერატორებისავეს კი — $m \wedge n \wedge p \wedge r$ $m \wedge n \wedge p \wedge r$ $m \wedge n \wedge p \wedge r$
 $m \wedge n \wedge p \wedge r$. ფრჩხილების შემთხვევაში პირველ რიგში
 სრულდება ფრჩხილთა წყვილის შიგნით მოთავსებული მოქმედებები
 წინა წესების დაცვით. გარდა ამისა, ზუ უარყოფის ნიშანი $\neg$
 ფორმულის წინაშე $\neg$ ნაწილის თავზეა, მაშინ ბეძეგია $\neg$ ნაწი-
 ლის გარე ფრჩხილები.

მოვიგონოთ მაგალითები (თითოეული სტრიქონში მარცხნივ
 მოთავსებულია ნარკვენივ მოთავსებული ფორმულის გამარტივებული
 ჩანაწერი):

$$\neg \neg \vee p q ; [[\neg [S \wedge \neg]] \vee [P \wedge q]].$$

$$p \rightarrow \neg \rightarrow s \leftrightarrow [p \leftrightarrow q] ; [[[p \rightarrow \neg] \rightarrow s] \leftrightarrow [p \leftrightarrow q]].$$

$$\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg q ; [[\neg [\neg p]] \rightarrow [\neg [\neg \neg q]]].$$

ორივე შემთხვევაში სიმრავლეს, რომელიც განსაზღვრულია
 შეკრების და გამრავლების მრავლობითი მკერატორები, უარყოფის
 ურთიგობითი მკერატორია და, გარდა ამისა, ამ სიმრავლის ელემენტ-
 ჭაა მორის არსებობს ორი ელემენტი, რომლებსაც შესაბამისად
 ეწოდება $m \wedge n \wedge p \wedge r$ და $m \wedge n \wedge p \wedge r$, ისე, რომ (ზუ ამ ურთი-

უცლსა და ნუცს მესაბამისად აღვნიშნავთ $\vdash$ და $\nexists$ ასევე, $\exists$ —
რეზის, გამრავლების და უარყოფის ოპერაციებს $\neg$ — $\forall, \wedge$ —
სიმბოლოებით) მესრულებულია $(1-13)$ პირობები (სადაც $\iff$ ნიშანი
უნდა გავიგოთ როგორც ტოლობის ნიშანი — ნინადადებაა აღვებრძოც
ტოლდალვებდა ტოლდას ნიშნავს გარკვეული აბრით), ენობება
ბ უ ც ი ს ა ც ე ბ რ ა.

მენიშენა, ბუცის აღვებრის განსაბღვრას ჩვენ საფუძვლად
დავებებთ აქსიომადა $(1-13)$ სისებება. არსებობს მრავალი $(1-13)$
სისებების ევებალენებური აქსიომადა სისებებები. (მაგალითად იბ.
[26]).

ამრიგად, ნინადადებაა აღვებრის ისე ფორმულადა სიმრავ-
ლე, რობილები $\iff$ და $\iff$ ლგობურ ეავშირებს არ მუცავენ, ურთი-
ერმეევებალენებური ფორმულების "გაიგებების" მებება გვადლეც
ბუცის აღვებრას. ამ ნინადადების ბუსტი აბრი მებებება: ნინადადე-
ბადა აღვებრის ევება ხსენებური სახის ურთიერმეევებალენებურ ფორ-
მულადა ელსებისაგან მებებნილი სიმრავლე აღვნიშნოთ Φ — ბი.
განხილური სახის ურთიერმეევებალენებურ ფორმულადა ელსის ნარმო-
მებებელი ვურთობ ამ ელსის ნებისმიერ ელებენეს. თითოეული
ასეგი ნარმომებებელი განეხილოთ როგორც მესაბამისი ელსის
აღნიშენა. $\wedge, \vee$ და $\neg$ ლგობური ეავშირები ბუნებრივად მებებ-
ბა განეხილოთ როგორც Φ სიმრავლებე განსაბღვრული ოპერაციები
(მაგალითად, მუ $\alpha, \beta \in \Phi$, მაშინ $\alpha \wedge \beta$ არის Φ სიმრავლის
ის $\subset$ ელებენესი, რომლის ნარმომებებელია $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, სადაც $\mathcal{A}$ და
 $\mathcal{B}$ არიან α და β ელებენებების ნარმომებებლები — $\subset$ რამ-
ეობებური არაა $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$ ნარმომებებლების არებაბე). $(1-13)$
ფორმულები გვიჩვენებს, რომ Φ სიმრავლე არის ბუცის აღვებრა
 $\wedge, \vee$ და $\neg$ ოპერაციების მიმართ, როცა ურთულისა და ნუცის
რობი $\vdash$ და $\nexists$ ელსები ($\vdash$ და $\nexists$ სიმბოლოებით აღნიშნული
 Φ სიმრავლის ელებენებები) გამოიბან.

§ 3. ლოგიკური ჩვერსტორმე ურთიერთდამოკიდებულება

ლოგიკური ჩვერსტორმეები $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ არ არიან ურთიერთდამოკიდებულებით. ეს ნიშნავს, რომ თუ ერთ-ერთი სიმბოლო გამოკლებული იქნება, დანარჩენების სისტემა უკმარისობს. ეს ნიშნავს, რომ თუ ერთ-ერთი სიმბოლო გამოკლებული იქნება, დანარჩენების სისტემა უკმარისობს.

მაგალითად, თუ A და B ნებისმიერი ფორმულებია, მაშინ გვერდება შემდეგი ლოგიკური ნებუნებები.

$$A \rightarrow B \leftrightarrow [A \rightarrow B] \wedge [B \rightarrow A]. \quad (1)$$

$$A \rightarrow B \leftrightarrow \bar{A} \vee B. \quad (2)$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow [\bar{A} \vee B] \wedge [B \vee \bar{A}]. \quad (3)$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow [A \wedge B] \vee [\bar{A} \wedge \bar{B}]. \quad (4)$$

(1) ლოგიკური ნებისმიერი ნებუნებები C ფორმულიდან შეიძლება გამოვიყენოთ " $\leftrightarrow$ " ჩვერსტორმე (გამოვიყენოთ შემდეგად მიიღება C ფორმულის ლოგიკური ნებუნებები C' ფორმულა, რომელიც " $\leftrightarrow$ " ჩვერსტორმე არ შეიცავს). აღნიშნული გამოვიყენოთ შემდეგნაირად მივიღებთ. A ფორმულაში უნდა მოვძებნოთ ისეთი ნებუნებები, რომელსაც აქვს სახე $[A_1 \leftrightarrow B_1]$ ისე, რომ A_1 და B_1 ნებუნებები " $\leftrightarrow$ " ჩვერსტორმე არ შეიცავდეს. ამ ნებუნებების შეცვლით (1) ლოგიკური ნებისმიერი ნებუნებები $[A_1 \leftrightarrow B_1] \wedge [B_1 \leftrightarrow A_1]$ -ით. მივიღებთ C ფორმულის ლოგიკური ნებუნებები C_1 ფორმულას (იხ. (2.6) თეორემა), რომელიც " $\leftrightarrow$ " ჩვერსტორმე ურთიერთდამოკიდებულება აქვს, ვიდრე C ფორმულაში. C_1 ფორმულას იმავე გზით გარდავქმნით C_2 ფორმულად. ეს პროცესი დამთავრდება C ფორმულის ლოგიკური ნებუნებები C_m ფორმულის მიღებით, რომელიც $\leftrightarrow$ ჩვერსტორმე არ აქვს შემოსვლა. ნაცადი (1) ფორმულისა შეცვლით გამოვიყენებთ (3) ფორმულას. იგივე იქნება (4) ფორმულის შესახებ. აღნიშნული

C_m ფორმულიდან ანალოგიურად (2) ფორმულის რაბმარებით გამოიხატება " $\rightarrow$ " რვერსიონი და მიიღება ისეთი C_n ფორმულა, რომელიც არ შეიცავს " $\leftarrow$ " და " $\rightarrow$ " რვერსიონებს და ზოგადოვანია C ფორმულას.

ამრიგად, " $\leftarrow$ " და " $\rightarrow$ " რვერსიონები რ ა მ ი კ ე ნ ე ბ უ ლ ნ ი არიან " V " $\wedge$ " და " $\neg$ " რვერსიონებსა და კონსტანტებზე (ნუ-აპოლიან რვერსიონებზე). ამ მიმართებლებით შეიძლება უფრო მეტის გაკეთება, სახელით, რამაშებით შეიძლება გამოვსრულებოთ კონსტანტები და ურთ-ურთი (რომელიც გვინდა) " $\wedge$ " და " V " რვერსიონებიდან. ამის მიღწევა შეიძლება შემდეგ ზოგადოვანებასა რაბმარებით:

$$t \iff p \vee \bar{p}. \quad (5)$$

$$f \iff p \wedge \bar{p}. \quad (6)$$

$$A \wedge B \iff \overline{A \vee \bar{B}}. \quad (7)$$

$$A \vee B \iff \overline{A \wedge \bar{B}}. \quad (8)$$

უფრო მეტიც, აპოლი აქვს შემდეგ ზოგადობა.

(3.1) ზოგადობა. ნინაპაპებასა ალგებრის ნებისმიერი A ფორმულისათვის მოიძებნება მისი ზოგადოვანი ისეთი A_1 ფორმულა, რომელიც $\neg, \wedge, V, \rightarrow, \leftarrow, t, f$ ზოგადობა რვერსიონებიდან¹ შეიცავს მხოლოდ $\neg$ და V , შესაბამისად $\neg$ და $\wedge$, შესაბამისად $\neg$ და $\rightarrow$, შესაბამისად f და $\rightarrow$, რვერსიონებს.

მაშალა, უკვე განვიხილეთ პირველი ორი შემთხვევა.

$\neg$ და $\rightarrow$ რვერსიონების შემთხვევა: ჯერ (1), (5) და (6) ზოგადოვანებების გამოყენებით გამოიხატება " $\leftarrow$ " რვერსიონი და კონსტანტები, შემდეგ (7) ზოგადოვანებით გამოიხატება რვერსიონი " $\wedge$ " და, რასაშუალო,

$$A \vee B \iff \overline{A \rightarrow B} \quad (9)$$

¹ იტყვიანება, რომ საქმე გვაქვს ნინაპაპებასა ისეთ ალგებრასთან, რომლის რვერსიონთა სისტემაა $\neg, V, \wedge, \rightarrow, \leftarrow, t, f$.

გოტალოვნებიც გამოიჩინებდა "V" ოპერატორი.

$\vdash$ და $\rightarrow$ ოპერატორების შემთხვევა: $\neg$ ოპერატორიცხად
 $\vdash, \neg, \vee, \wedge$ ოპერატორებს, როგორც წინა შემთხვევაში. დასას-
რულს გამოვიყენებთ $\neg$ ოპერატორს შემდეგი გოტალოვნების გამო-
ყენებით

$$\neg A \Leftrightarrow A \rightarrow \perp.$$

სავარჯიშო 1. " $\neg$ " ოპერატორის გამოიჩინების პროცესის
განსაზღვრისას მოვიხსენიებთ A_1 და B_1 ნაწილებიდან, რომ ისინი
არ შეიცვალნენ $\neg$ ოპერატორს. დაამტკიცეთ, რომ ამ შემთხვევის
მოხსნით შეგვიძლია პროცესი ნაბიჯების სასრული რიცხვის შემდეგ
აუცილებლად მიგვიყვანს $\neg$ ოპერატორის არშემცველ ფორმულამდე.

2. ოპერატორთა შემდეგი

$$(\vdash, \wedge), (\vdash, \vee), (\vdash, \rightarrow), (\vdash, \neg), (\vdash, \leftrightarrow), (\vdash, \leftrightarrow)$$

ნაწილებიდან თითოეულისათვის გამოარჩევთ აქვს თუ არა ამ ნაწი-
ლის ნაწილებიდან შემცვენი ოპერატორთა სისტემა წინა შემთხვე-
ვაში განხილული შემთხვევა.

ახლა დავამტკიცებთ შემდეგი

(3.2) თეორემა. მარტო $\neg$ და $\rightarrow$ ლოგიკური ოპერატორებით
და გოტალების დახმარებით შეუძლებელია წინადადებათა აღკვეთის
ყველა ფორმულის წარმოდგენა გოტალოვნებამდე სიჭრელად. ამასდა-
ნავე, ასეთი ფორმულის მაგალითია $p \wedge q$.

დადგენილება. $\neg$ ოპერატორით, რომ $p \wedge q$ ფორმულა არ
წარმოიქმნება p და q გოტალისა და $\neg$ და $\rightarrow$ ლოგიკური
ოპერატორების დახმარებით.

ამ მიზნით შევადგინოთ შემდეგი 8 ფორმულა:

$$p; q; \bar{p}; \bar{q}; p \leftrightarrow p; p \leftrightarrow \bar{p}; p \leftrightarrow q; p \leftrightarrow \bar{q}. \quad (10)$$

ცხადია, p და q ფორმულებიდან $\neg$ და $\rightarrow$ ოპერატორების გამო-
ყენებით მიღებული ფორმულების ერთობლიობა ემთხვევა ფორმულათა

ჯრთობლიობას, რომელსაც მივიღებთ (10) მიმდევრობის ფორმულაა
ჯრთობლიობიდან, ზე მას დაუმატებთ ახალ ფორმულებს შემდეგი
პროცესი ((10) მიმდევრობის ფორმულაა ჯრთობლიობის ნაცვლად
ამ პროცესის p და q ფორმულებზე გამოყენება მოკვების იგივე
შედეგს):

1. x რ მას დაუმატებთ ამ ჯრთობლიობის მთლიანი ფორმულის
უარყოფას, შემდეგ 30 , ამ გზით გაფართოებულ ფორმულაა ჯრთობლი-
ობას, დაუმატებთ $A \leftrightarrow B$ სახის მთლიანი 30 ვივალენტიობას, სადაც
 A , შესაბამისად B , არის ხსენებულ ფორმულაა გაფართოებული
ჯრთობლიობიდან აღებული ნებისმიერი ფორმულა.

2. 1-ლი პუნქტის გამოყენებით მიღებულ ფორმულაა ჯრთობლი-
ობაზე ისევ უნდა გამოვიყენოთ 1-ლი პუნქტი და ა.შ.

შევნიშნოთ, რომ ფორმულა (10) მიმდევრობიდან აღებული
ნებისმიერი ფორმულის უარყოფა, ისევე როგორც ამ მიმდევრობიდან
აღებული ნებისმიერი ორი ფორმულის 30 ვივალენტიობა, ამავ
მიმდევრობის ურთ-ურთი ფორმულის 30 ვივალენტიობა (ამის შემთხვევა
სიძნელეს არ წარმოადგენს). აქედან, (2.6) ზეორემის, ბევრად აღ-
ნიშნულისა და ფორმულაა შორის ზოლდალუბების დამოკიდებულების
ჭრანტიზულობის საფუძველზე, ავიღებ დასასკვნით, რომ p და q
ფორმულებიდან $\leftrightarrow$ და $\rightarrow$ ნპერაჭორების გამოყენებით მიღებული
მთლიანი ფორმულა ზოლდალუბანია (10) მიმდევრობიდან აღებული
ურთ-ურთი ფორმულისა. ამიტომ განხილულ შემთხვევაში დამტკიცების
დასრულებიდანის საკმარისია შევნიშნოთ, რომ $p \wedge q$ ფორმულა არაა
ზოლდალუბანი (10) მიმდევრობიდან აღებული არც ურთი ფორმულისა.

დასასრულს დავამტკიცოთ, რომ საზოგადო $p \wedge q$ ფორმულა არ
წარმოიგონება ცვლადებისა და $\rightarrow$ და $\leftrightarrow$ ნპერაჭორების დახმა-
რებით. დაუშვათ წინააღმდეგი, ე.ი. რომ არსებობს $p \wedge q$ ფორმულის
ზოლდალუბანი ცვლადებით და $\rightarrow$ და $\leftrightarrow$ ნპერაჭორებით შეგენილი
 A ფორმულა. A' იყოს ფორმულა, რომელიც მიიღება A -დან, ზე

შენიშვნა. $\mathcal{A}$ ჭორმულა შვიცავს მხოლოდ $V, \wedge, \neg$ მკვერთებს, მაშინ ჩრმატი უარყოფის კანონისა და ეს მორგანის კანონების გამოყენებით ადვილად მარმოვიტყვენ $\mathcal{A}$ -ს (გოლდალვ-ნეშამევი სიჭუსტით) ისე, $\mathcal{A}$ ჭორმულის სახით, რომელშიც " $\neg$ " ნიშნები მხოლოდ უმარტოვს ნაწილებს აქვთ. ამასთანავე, $\mathcal{A}$ არ შვიცავს კონსტანტებს, მაშინ არც $\mathcal{A}$ შვიცავს კონსტანტებს (ე.ი. ამ შემთხვევაში " $\neg$ " ნიშნები მხოლოდ ცვლადების ღვეზევა). მარტაც, ამისათვის საკმარისია $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{B}_1$ და $\mathcal{A}_2 \wedge \mathcal{B}_2$ სახის ნაწილები $\mathcal{A}$ ჭორმულისა შვიცავს მესამე მისაბამისად $\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{B}_1$ და $\mathcal{A}_2 \vee \mathcal{B}_2$ ჭორმულებით და ეს არცესი გატრელებს მანამ, სანამ არ მივაღწევთ იმას, რომ უარყოფის ნიშნები (შუბაც კერებები) აღმოაჩნდება მხოლოდ უმარტოვს ნაწილებს. მასსრულს, კერები უარყოფით ნიშნები გამოიჩინება ან შვიცვლება ურეკერებო ჩრმატი უარყოფის კანონის საჭუძვლებზე. ცხადია, $\mathcal{A}$ არ შვიცავს კონსტანტებს, მაშინ ამ არცესით მიღებული $\mathcal{A}$ ჭორმულაც არ შვიცავს კონსტანტებს.

მაგალითი:

$$\overline{p \wedge q \vee \bar{r}} \iff \overline{p \wedge q} \wedge \bar{\bar{r}} \iff [\bar{p} \vee \bar{q}] \wedge r.$$

54. ჩრამულების კანონი

ამ პარატრამუტი განვიხილავთ ისე, ჭორმულებს, რომლებიც არ შვიცავენ $\wedge, \vee$ და $\neg$ მკვერთებისაგან განსხვავებული მკვერთებს მულებიდან მკვერთების (ე.ი. კონსტანტების) ჩაღვლით (როგორც ვიცით, ყოველი ჭორმულა შვიცვლება დავიყვანოთ ასე, სახეზე). მხოლოდ (4.1) ღორების შვიცვია მატარი ჭორმით მოცემული.

$\wedge$ მკვერთისა ვუწოდოთ $\vee$ მკვერთის ჩრამულისა, პირიქით, $\vee$ მკვერთის ვუწოდოთ $\wedge$ მკვერთის ჩრამული. ამრიგად $\wedge$ და $\vee$ ურთობის ჩრამული მკვერ-

გორდება. — მივიჩნიოთ თავისთავის $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon$ მკერდგორად.

$\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$ გორმულებს ეწოდება $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon$ —
 $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon$ — $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon$ (და, მაშასადამე, მთელი-
 ული) მათგანი მიიღება მკერდისაგან მკერდგორის მთელი-
 ულის მრავლი მკერდგორით შევსებით. ამ მარჯვნივნი ნებისმიერი $\mathcal{A}$
 გორმულის მრავლი აქვნიშნავთ $\mathcal{A}^*$ -ით, $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ გორმუ-
 ლის მრავლი $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon$ — $\mathcal{A}^*(X_1, \dots, X_n)$ -ით. მაგალითად:

$$[(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma]^* \equiv [\alpha \wedge \beta] \vee \gamma.$$

შევნიშნოთ, რომ აქ " $*$ " მკერდისა მთელი-
 რასისა მრავლია. ამ მკერდისა მთელი-
 რასისა მრავლია, ამ მკერდისა მთელი-
 რასისა მრავლია.

$$[\bar{\mathcal{A}}]^* \equiv \bar{\mathcal{A}}^*; [\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}]^* \equiv \mathcal{A}^* \vee \mathcal{B}^*;$$

$$[\mathcal{A} \vee \mathcal{B}]^* \equiv \mathcal{A}^* \wedge \mathcal{B}^*; [\mathcal{A}^*]^* \equiv \mathcal{A}.$$

(4.1) გორმულები (გორმულები $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon$
 $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon$). მთ $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ და $\mathcal{A}^* \equiv \mathcal{A}^*(X_1, \dots, X_n)$
 არიან ურთიერთმართალი გორმულები¹, სადაც $X_1, \dots, X_n$ არიან
 ურთიდანთისაგან განსხვავებული ცვლადები, რომელთა მთელი-
 რასისა $\mathcal{A}$ და $\mathcal{A}^*$ გორმულებში შეიძლება ყველა ცვლადი, მაშინ

$$\bar{\mathcal{A}}(X_1, \dots, X_n) \Leftrightarrow \mathcal{A}^*(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n).$$

სხვანაირად: $\vee, \wedge$ და $\neg$ ლოგიკური მკერდგორებისაგან
 შეიქმნილი $\mathcal{A}$ გორმულის უარყოფა გორმულისა, რომელიც
 $\mathcal{A}$ გორმულის მრავლი $\mathcal{A}^*$ გორმულიდან მიიღება ყველა ცვლადის
 უარყოფით (ე.ი. ცვლადების თავზე ხაზების დასმით).

1 " $*$ " ნიშანი მიუთითებს, რომ მაგალითად $\mathcal{A}$ და $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$
 ურთი და იგივე გორმულებია და მაშასადამე, $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$
 არის $\mathcal{A}$ გორმულის თავდაპირველი აღნიშვნა.

თავისებრი, რომ $\mathcal{A} \not\equiv \mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ არის ნებისმიერი ისეთი ფორმულა, რომლის ხარისხი $d = m + 1$.

აქველად შევნიშნავთ, რომ $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ ფორმულას ექნება ერთ-ერთი შემდეგი სახეობები: $\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2$; $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$; $\overline{\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2}$; $\overline{\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2}$; $\overline{\overline{\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2}}$; ... ამ ფორმულებს უმანაძემა $\mathcal{A}^*$ -ის შემდეგი მესაძლო სახეები:

$\mathcal{A}_1^* \vee \mathcal{A}_2^*$; $\mathcal{A}_1^* \wedge \mathcal{A}_2^*$; $\overline{\mathcal{A}_1^* \vee \mathcal{A}_2^*}$; $\overline{\mathcal{A}_1^* \wedge \mathcal{A}_2^*}$; $\overline{\overline{\mathcal{A}_1^* \vee \mathcal{A}_2^*}}$; ..., სადაც $\mathcal{A}_i^*$ არის $\mathcal{A}_i$ ფორმულის ორადული ფორმულა ($i = 1, 2$).

პირველი შემთხვევა. რაგვან $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ ფორმულის ხარისხი $d = m + 1$ ყბარია, $\mathcal{A}_i(X_1, \dots, X_n)$ ფორმულის ხარისხი $d_i \leq m$. მაშასადამე, ინტუციური დაშვების ძალით, $\mathcal{A}_i(X_1, \dots, X_n)$ ფორმულისათვის სამარტლიანია ჟორემა. ამიგომ (2.6) ჟორემისა და რე მორტანის კანონის გამოყენებით აქველად ვაშულობთ:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)} &\equiv \overline{\mathcal{A}_1(X_1, \dots, X_n) \wedge \mathcal{A}_2(X_1, \dots, X_n)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{\mathcal{A}_1(X_1, \dots, X_n)} \vee \overline{\mathcal{A}_2(X_1, \dots, X_n)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A}_1^*(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n) \vee \mathcal{A}_2^*(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n) \equiv \mathcal{A}^*(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n). \end{aligned}$$

ანალოგიურად განიხილება მეორე შემთხვევა. პანარტენი ჟიჟი-ეული შემთხვევა აქველად პაიყვანება პირველი ორი შემთხვევიდან ერთ-ერთზე. მაგალიჟად, ჟუ $\mathcal{A}$ არის $\overline{\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2}$, მაშინ პირველი შემთხვევის ძალით (იხ. აქრევე (2.6) ჟორემა) გვექნება:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)} &\equiv \overline{\overline{\mathcal{A}_1(X_1, \dots, X_n) \wedge \mathcal{A}_2(X_1, \dots, X_n)}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{\overline{\mathcal{A}_1(X_1, \dots, X_n) \wedge \mathcal{A}_2(X_1, \dots, X_n)}} \equiv \mathcal{A}^*(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n). \end{aligned}$$

შედეგი (ფორმული უარყოფის განმარტება-
დაპრეშული პრინციპი). უმუჟა $\mathcal{A}$ ნინადაქმა

აღკვეთის ნებისმიერი ფორმულა, $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ კი მისი ისეთი
 ურთიდანეთის არმთავარი ნაწილებია, რომ მათ გარეშე მყოფი $\mathcal{A}$ ფორ-
 მულის თითოეული $\mathcal{A}$ ნაწილის $\mathcal{A}$ ფორმულის, $\mathcal{A}$ ფორმულის $\mathcal{A}$ ფორმულის
 უარყოფა $\neg \mathcal{A}$ ფორმულა $\mathcal{A}$ ფორმულისა, რომლის $\mathcal{A}$ -დან მისაღებად
 საკმარისია $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ ნაწილების გარეშე მყოფი $\mathcal{A}$ ნაწილის
 კონსტანტები შევსებულ მათი ორბულები, $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ ნაწილები
 და ამ ნაწილებს გარეშე მყოფი ცვლადები კი — მათი უარყოფები.

დამტკიცება. მოგვიჩვენოთ შევსებული ვიკონსტან-
 ტები, რომ $\mathcal{A}$ -ში $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ ნაწილების გარეშე კონსტანტები არაა
 — ნიშნადღებუ შეშეხვევაში ასეთი კონსტანტები გავაფართოვებ
 $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ მიმდევრობას (იხ. (2.6) თეორემა) ვეძვათ $X_1, \dots, X_n$
 არიან $\mathcal{A}$ -ში შემოსვლების არმთხე განსხვავებული ცვლადები და
 $\mathcal{B}$ არის ფორმულა, რომლის $\mathcal{A}$ -დან მისაღებად საკმარისია $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$
 ნაწილები შევსებულ $X_1, \dots, X_n$ ცვლადებით. მაშინ თეორემის ძალით
 $\mathcal{B}$ ფორმულა $\mathcal{B}'$ ფორმულისა, რომელიც $\mathcal{B}$ ფორმულის
 ორბულებიდან მიიღება ცვლადების უარყოფით. მტკიცების დასრულები-
 სადების საკმარისია შევნიშნოთ, რომ (იხ. (2.3) თეორემა):

$$\mathcal{A} \models (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \vdash X_1, \dots, X_n) \mathcal{B} \Leftrightarrow (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \vdash X_1, \dots, X_n) \mathcal{B}' \models \mathcal{A}'$$

(4.2) თეორემა. ვეძვათ $\mathcal{A} \models \mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ არის ფორმულა, X'_i
 კი არის X_i ან $\neg X_i$, $i=1, 2, \dots, n$. მაშინ $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ ფორმულა არის
 იგივერად ჭეშმარიტი, შესაბამისად იგივერად მცდარი, იმ და მხო-
 ლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $\mathcal{A}(X'_1, \dots, X'_n)$ ფორმულა არის იგივერად
 ჭეშმარიტი, შესაბამისად იგივერად მცდარი. კერძოდ, $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$
 ფორმულა არის იგივერად ჭეშმარიტი, შესაბამისად იგივერად მცდარი,
 მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathcal{A}(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)$ არის იგივერად
 ჭეშმარიტი, შესაბამისად იგივერად მცდარი.

დამტკიცება. ღუ $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ არის იგივერად
 ჭეშმარიტი [იგივერად მცდარი], მაშინ ურთიერთი ჩამოხსნის წესის
 ძალით $\mathcal{A}(X'_1, \dots, X'_n)$ ფორმულა იქნება იგივერად ჭეშმარიტი

[იგივე რაპი მცარნი]. აბლ რავეშვამ, რამ $\mathcal{A}(X'_1, \dots, X'_n)$ ჭორ-
მულ არის იგივე რაპი ჭვეშმარიტო [იგივე რაპი მცარნი]. საჭირთა
ვაჩვენოთ, რამ მაშინ $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ ჭორმულაყ არის იგივე რაპი
ჭვეშმარიტო [იგივე რაპი მცარნი].

ჯრდოოული ჩამდის ნუსის ძალით ჩვენი რაშვეშმარნი ტამომ-
რინარეობს, რამ ჭორმულა

$$(X'_1, \dots, X'_n / X_1, \dots, X_n) \mathcal{A}(X'_1, \dots, X'_n) \quad (1)$$

არის იგივე რაპი ჭვეშმარიტო [იგივე რაპი მცარნი]. აბლ რამტკიცებ-
სათვის საკმარისია შევნიშნოთ, რამ (1) ჭორმულა $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$
ჭორმულისაგან მიიღება ბოგიერო i -თვის (სახელობრ ყველა
ისუე $\underline{i}$ -თვის, რომელთათვისსაყ $X'_i = \bar{X}_i$) X_i ყველრის ნაყ-
ველა $\bar{X}_i$ -ის ჩამდით რა ტამოვიყვენოთ (2.6) ჭორეშა რა ის ჭაყ-
ტი, რამ იგივე რაპი ჭვეშმარიტო [იგივე რაპი მცარნი] ჭორმულის ჭოლ-
ძალივანი ჭორმულა იგივე რაპი ჭვეშმარიტოა [იგივე რაპი მცარნი].

(4.3) ჭორეშა. ვაქვამ $\mathcal{A}$ რა $\mathcal{B}$ არიან ჭორმულეში,
 $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ რა $\mathcal{B}(X_1, \dots, X_n)$ არიან მათი ჭავრაპირველი
აღნიშვნეში, X'_i ჯი არის X_i ან $\bar{X}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).
 $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ რა $\mathcal{B}(X_1, \dots, X_n)$ ჭორმულეში ჭოლძალივანნი
არიან მაშინ რა მხოლოდ მაშინ, როყა ჭოლძალივანნი არიან
 $\mathcal{A}(X'_1, \dots, X'_n)$ რა $\mathcal{B}(X'_1, \dots, X'_n)$ ჭორმულეში. კერძოდ,
 $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ რა $\mathcal{B}(X_1, \dots, X_n)$ ჭორმულეში ჭოლძალივანნი
არიან მაშინ რა მხოლოდ მაშინ, როყა ჭოლძალივანნი არიან
 $\mathcal{A}(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)$ რა $\mathcal{B}(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)$ ჭორმულეში.

რამტკიცება. (2.1) ჭორეშის ძალით საკმარისია რამტ-
კიცეს შეშრევი წინარაყება:

$$\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n) \rightarrow \mathcal{B}(X_1, \dots, X_n)$$

ჭორმულა იგივე რაპი ჭვეშმარიტოა მაშინ რა მხოლოდ მაშინ, როყა იგი-

$$A(X'_1, \dots, X'_n) \leftarrow B(X'_1, \dots, X'_n)$$

ფორმულა. ეს წინადადება კი წინა ფორმულის უბრალო შედეგია.

წინა ფორმულებიდან ადვილად გამომდინარეობს ორადულობის კანონი ანუ ორადულობის პრინციპი. იგი შემდეგნაირად წარმოდგება.

(4.4) ფორმულა (ორადულობის პრინციპი).

თუ A და B ფორმულები ზოგადივანნი არიან, მაშინ მათი ორადული A^* და B^* ფორმულები, აგრეთვე, ზოგადივანი ფორმულები იქნებიან. მაშასადამე,

$$A \Leftrightarrow B \rightarrow A^* \Leftrightarrow B^*.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $A(X_1, \dots, X_n)$ და $B(X_1, \dots, X_n)$ არიან A და B ფორმულების ზოგადივანი ალბათობები და, მაშასადამე, $X_1, \dots, X_n$ ერთმანეთისაგან განსხვავებული ცვლადები იქნებიან. A და B ფორმულებში შემავალი ყველა ცვლადი, რაგან ზოგადივანი ფორმულების უარყოფითი აგრეთვე ზოგადივანნი არიან, წინა ფორმულაში რამდენიმე ადვილად ვპოულობთ (A^* -ის ორადულია A):

$$A^*(X_1, \dots, X_n) \Leftrightarrow \bar{A}(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n) \Leftrightarrow \bar{B}(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n) \Leftrightarrow B^*(X_1, \dots, X_n).$$

მაშასადამე, $A^* \Leftrightarrow B^*$.

შედეგი I (ორადულობის სტრუქტურის პრინციპი). A და B ფორმულები ზოგადივანნი არიან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი ორადული A^* და B^* ფორმულები არიან ზოგადივანნი.

შედეგი II. A ფორმულა არის იგივერად ჭეშმარიტი [იგივერად მართალი], მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ორადული არის იგივერად მართალი [იგივერად ჭეშმარიტი].

მარტალი, A არის იგივერად ჭეშმარიტი [იგივერად

მეძაწი] მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იგი არის $pV\bar{p}$ ჭრმულის
 [$p\Lambda\bar{p}$ ჭრმულის] ჭოლძალოვანი. ამ ჭოლძალოვნებას კი, ორადულო-
 მის სრული პრინციპის ძალით, ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ,
 როცა Λ^* არის $p\Lambda\bar{p}$ ჭრმულის [$pV\bar{p}$ ჭრმულის] ჭოლძალოვანი. ამ
 უკანასკნელი ჭოლძალოვნებას კი ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ,
 როცა Λ^* არის იგივე რაპი მეძაწი [იგივე რაპი ჭეშმარიტი].

შენიშვნა. ადგილი დასაბამია შემდეგი წინადადების სამარ-
 ჭიანობა. ლე Λ ჭრმულაზე გამოვყენებთ პისტრიმუციული გარდა-
 მნებს პირველი პისტრიმუციული კანონის საფუძველზე და მივიღებთ
 B ჭრმულას, მაშინ A ჭრმულის ორადული Λ^* ჭრმულიდან B
 ჭრმულის ორადული ჭრმულაზე გადასვლა შეიძლება განხორციელდეს
 მეორე პისტრიმუციულობის კანონის საფუძველზე სავსებით ანალოგიური
 გზით. Λ^* ჭრმულიდან B^* ჭრმულაზე ასევე გადასვლას ეწოდება
 ო რ ა დ უ ლ ი ი მ ხსენებული გარდაქმნისა, რომელსაც A გადაჭ-
 ყავს B -ში.

§ 5. ამოხსნაობის პრობლემა

ნებისმიერ მათემატიკურ ლოგიკაში ბუნებრივად იმის
 ამოცანა: მოიძებნოს ისეთი ხერხი — ა რ გ მ რ ი მ ი ნ, რომელიც
 საშუალებას მოგვცემს დიდი რაოდენობის ჭრმულისაგან, სასრული
 რიცხვი "მეჯანიური" ხასიათის ელემენტარული ოპერაციების (ბიკუ-
 მის) შესრულებით, გამოვარკვეოთ არის ლე არა ეს ჭრმულა ლოგიკა.
 ამასთანავე სასურველია შეიძლება იმ ა რ გ მ რ ი მ ი ნ ს
 ბიკუმის რიცხვის შეფასება (ე.ი. ისეთი, საბოლოოდ მოცემული ჭრ-
 მულაზე გამოკიდებული, რიცხვის დასახელება, რომელსაც არ აღემა-
 ტება ხსენებული ელემენტარული ბიკუმის რიცხვი). აღნიშნული ამოცა-
 ნას ა მ ო ხ ს ნ ა პ ო მ ი ს უ რ ო მ ე ჯ ი მ ა ს უწოდებენ.

ადვილად შეიძლება დაერწმუნოთ იმაში, რომ ამ ნიშნში
 განხილული ჭიპის წინააღმდეგ ლოგიკის ბუნებრივად ამოხსნაობა-

ბის პრობლემა ჭოგჯასის ამოცანისა (პრობლემა): მოძებნოს ისეთი
ალგორითმი, რომელიც შესაძლებლობას მიეცევს მთავარი ფორმულა-
საშვინის გამოვარკვეთად არის ეს არა ეს ფორმულა იგივეა რა ჭეშმარი-
ტი (საქმე იმაშია, რომ განხილული ტიპის შინაარსზე ჯერჯერობით
ჯერჯერობა მტკიცებობს ხერხები არაფრით არაა შეძლებული; ამის
გამო გამოცდის იმისა, რომელი ფორმულა არ არის ჯერჯერობა აუცილებ-
ლობით გულისხმობს იმის გამოცდისა, რომ იგი არ არის იგივეა რა
ჭეშმარიტი: უკანასკნელის გარეშე გამოცდის იმისა, რომელი ფორ-
მულა არ არის ჯერჯერობა მოახსენებს იმის ჩვენებას, რომ მტკიცებობს
ა რ ე რ ი მ ე რ ი მ ა რ შეიძლება ვაჩვენოთ რომელი ფორ-
მულის ჯერჯერობა; ამ წინადადებას გამოცდისა კი შეუძლებელია,
რამდენადაც იგი უბრალო მტკიცებაა იმ მთავრებისა, რომელიც უკრ
ალბომიანი იმ არის, ეს გამოვარკვევათ ამ პრობლემის საჭირო ალ-
გორითმის მოძებნის გზით, მაშინ გვექნება ალგორითმი, რომელიც
გამოვარკვევს შეგვიძლია პასუხი გვეუბნება კითხვებს: არის ეს არა
მოცემული რომელი ფორმულა შესრულებადი, შესაძლებელია იგივეა რა მცა-
რი. უფრო მეტიც, გასახილველი საში ალგორითმიდან ურთ-ურთის
მოძებნა ნიშნავს პანარტივი მონის მოძებნასაც.

მარტაც, უფროა მოძებნება ალგორითმი, რომლის გამოცდენ-
ბით ნებისმიერ რომელი ფორმულისაშვინს წყდება საკითხი არის ეს არა
რომელი ფორმულა იგივეა რა ჭეშმარიტი. მაშინ, იმისაშვინს რომ გვეუბნება
პასუხი პანარტივი რ კითხვას, საკმარისია მოძებნილი ალგორითმის
გამოვარკვევს უკანასკნელ კითხვებს: (ა) არის ეს არა რომელი იგივეა რა
ჭეშმარიტი, (ბ) არის ეს არა რომელი იგივეა რა ჭეშმარიტი. (ა) კითხ-
ვაზე პირველი პასუხი ნიშნავს იმას, რომელი არის შესრულებადი
და არა იგივეა რა მცარი. (ბ) კითხვაზე პირველი პასუხი ნიშ-
ნავს იმას, რომელი არის იგივეა რა მცარი და არ არის შესრულე-
ბადი. ორივე (ა) და (ბ) კითხვებზე უარყოფითი პასუხი ნიშნავს
იმას, რომელი არის შესრულებადი და არ არის იგივეა რა მცარი.

ვმეტყვამ, ახლა, მოვძებნეთ ალგორითმი, რომლის გამოყენებით ნების-
მიერნაირი ფორმული სახის წყვეტა საკითხი იმის შესახებ არის, **მე**
არაა **მე** ფორმულა შესრულებადი. მაშინ საკმარისია მოძებნილი ალგო-
რიტმის დახმარებით ვუპასუხოთ კითხვებს: (α_1) არის **მე** არა **მე**
შესრულებადი, (β_1) არის **მე** არა **მე** შესრულებადი. (α_1) კითხვაზე
უარყოფითი პასუხი ნიშნავს იმას, რომ **მე** არაა იგივე რა **მე** იგივე რა
და არის იგივე რა მცხადი. (β_1) კითხვაზე უარყოფითი პასუხი
ნიშნავს, რომ **მე** არის იგივე რა **მე** იგივე რა და არ არის იგივე რა
მცხადი, რჩევი კითხვაზე პაუზითი პასუხი ნიშნავს იმას, რომ **მე**
არაა არც იგივე რა **მე** იგივე რა და არც იგივე რა მცხადი. ანალოგიურად
განიხილება შემთხვევა, როცა მოძებნილია ალგორითმი, რომლის გამო-
ყენებით წყვეტა საკითხი იმის შესახებ მოცემული **მე** ფორმულა არის
მე არა იგივე რა მცხადი.

ახლა გვალურად განვიხილოთ ნინაპაუზადა ალგორითმის შემთ-
ხვევა.

იმისათვის, რომ ვუპასუხოთ კითხვას არის **მე** არა მოცემული
ფორმულა იგივე რა **მე** იგივე რა, საკმარისია შევადგინოთ ამ ფორმუ-
ლის **მე** იგივე რა მნიშვნელობა ცხრილი და გავსინჯოთ ამ ცხრილის
მთავარი სვეტი. **მე** ამ სვეტში მხოლოდ $\pm$ ასე გვხვდება, მაშინ
მოცემული ფორმულა იქნება იგივე რა **მე** იგივე რა. ნინაპაუზაზე შემთ-
ხვევაში მოცემული ფორმულა არ იქნება იგივე რა **მე** იგივე რა. მაშა-
საპამე, რამდენადაც მოძებნილი გვაქვს ფორმულის **მე** იგივე რა
მნიშვნელობა ცხრილის შედგენის ალგორითმი, ჩვენ გვაქვს ალგო-
რიტმი, რომლის გამოყენებით წყვეტა საკითხი იმის შესახებ მოცე-
მული ფორმულა არის **მე** არა იგივე რა **მე** იგივე რა. ცხადია, **მე** ფორ-
მულის **მე** იგივე რა მნიშვნელობა ცხრილის დახმარებით პირდაპირ
შეიძლება გავყოთ პასუხი კითხვებს: არის **მე** არა **მე** ფორმულა იგი-
ვე რა მცხადი, არის **მე** არა **მე** ფორმულა შესრულებადი.

ეს მუდმივი ამოხსნაობის პრობლემა წყვეტის პრინციპულად,

უარყოფის ნიშნები ყველგან ცვლადობის მატება აწადინილ) მიუყვამ
მნიშვნელობას $\pm$ -ს, პანარჩენებს γ -ს, მაშინ მთელი ჯამი
მიიღებს მნიშვნელობას γ -ს. ე.ი. ჯამი არ იქნება იგივერად
ჭეშმარიტი. ეს ამტკიცებს აუცილებლობას.

ანალოგიურად დამტკიცდება

(5.2) ჯერემა. ელემენტარული ნამრაველი რომ იყოს იგივე-
რად მცდარი, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მასში იყოს მანამა-
მრავლების ურთი წყვილი მაინც, რომელმაცან ურთი არის ცვლადი,
მეორე γ -ს ცვლადის უარყოფა.

მოცემულია ფორმულის ტოლძალვან ფორმულას, რომელიც
ელემენტარული ნამრაველია ჯამს წარმოადგენს, ეწოდება ა ფორმულის
დ ი ბ ი უ ნ ე ც ი რ ი ნ ე რ მ ა ლ ე რ ი ფ ი რ მ ა.
ანალოგიურად, მოცემულია ა ფორმულის γ ნ ი უ ნ ე ც ი რ ი
ნ ე რ მ ა ლ ე რ ი ფ ი რ მ ა ეწოდება მის ტოლძალვან ფორმუ-
ლას, რომელიც ელემენტარული ჯამის ნამრაველს წარმოადგენს. ამბობენ,
რომ ა ფ ი რ მ უ ლ ა ი მ ე რ ფ ე მ ა დ ი ბ ი უ ნ ე ც ი -
უ რ [γ ნ ი უ ნ ე ც ი რ ი] ნ ე რ მ ა ლ ე რ ი ფ ი რ მ ა ი,
მე იგი წარმოადგენს ელემენტარული ნამრაველს ჯამს [ელემენტარული
ჯამის ნამრაველს].

ნებისმიერ ა ფორმულისათვის არსებობს მისი როგორც
პიზიუნქციური ნორმალური ფორმა, ისე კონიუნქციური ნორმალური
ფორმა. ეს ფორმები შემიძლია აღვთრიხიხი მოიძებნება.

1. ა ფორმულიდან გამოვრიცხავთ $\vee, \wedge, \neg$ კავრატორე-
ბისაგან განსხვავებულ კავრატორებს, ნულოვანი კავრატორების
(ე.ი. $\pm$ და γ კონსტანტების) ჩამვლით, ვა-ში გამოყენებულ
მეოთხე-სხეი გამოვრიცხვის შედეგად მიღებულ ა ფორმულა იქნება
ა ფორმულის ტოლძალვანი. რომელიც უარყოფის კანონისა და მე-
განის კანონების გამოყენებით ა -ს გარდაეყვინით ა ფორმულის
ტოლძალვან ისე ა ფორმულად, რომელშიც — კავრატორები

(ერედმატი) გვხვდება მხოლოდ ცვლაების ზედა (იხ. შენიშვნა 5-ის ბოლოში). ზე ამის შემდეგ $\mathcal{A}_2$ ფორმულაში მოვახდენთ ფრაზიკების გახსნას რისტრიქტული პირველი, შესაბამისად მეორე, კანონის საფუძველზე მივიღებთ $\mathcal{A}$ ფორმულის რიგოვქცეულ, შესაბამისად კონიუნქციურ, ნორმალურ ფორმას.

ვთქვათ, $\mathcal{A}$ არის ისეთი ფორმულა, რომელიც არ შეიცავს $\vee, \wedge$ და $\neg$ ოპერატორებისაგან განსხვავებულ ოპერატორებს ნულარტიკიდან ოპერატორების ჩათვლით, $\mathcal{A}^*$ არის $\mathcal{A}$ ფორმულის ორპული ფორმულა, $\mathcal{B}^*$ არის $\mathcal{A}^*$ ფორმულის რიგოვქცეული ნორმალური ფორმა, $\mathcal{B}$ კი არის $\mathcal{B}^*$ -ის ორპული ფორმულა. რადგან $\mathcal{A}^*$ და $\mathcal{B}^*$ ფორმულები ჭოქალაქიანნი არიან, ორპულობის პრინციპის ძალით ჭოქალაქიანნი იქნებიან ატრეფე $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$ ფორმულები. ამასთანავე, ცხადია, რადგან $\mathcal{B}^*$ ფორმულა იმყოფება რიგოვქცეულ ნორმალურ ფორმაში, მისი ორპული $\mathcal{B}$ ფორმულა იმყოფება კონიუნქციურ ნორმალურ ფორმაში და, მაშასადამე, $\mathcal{B}$ ფორმულა წარმოადგენს $\mathcal{A}$ ფორმულის კონიუნქციურ ნორმალურ ფორმას.

შენიშნოთ, რომ ზე $\mathcal{A}$ ფორმულისათვის მოქმდნილია მისი ერე-ერეი ნორმალური ფორმა, მაშინ მეორე ნორმალური ფორმის მისა-ღებად საკმარისია პირველი ნორმალურ ფორმაზე გამოვიყენოთ რისტრი-ქტული სათანადო კანონი. მაგალითად, რიგოვქცეული ნორმალური ფორმიდან კონიუნქციური ნორმალური ფორმის მისაღებად საკმარისია გამოვიყენოთ რისტრიქტული II კანონი.

მაგალითი 1. პავიყვანოთ რიგოვქცეული ნორმალურ ფორმაზე შემდეგი ფორმულა:

$$[p \rightarrow q] \rightarrow [\neg \wedge p] \vee \bar{q}. \quad (1)$$

გამოვირიცხოთ ჯერ $\wedge, \vee$ და $\neg$ ოპერატორ კავშირებისაგან განსხვავებული ოპერატორები, ამ შემთხვევაში უნდა გამოირიცხოთ იმპლიკაციის ნიშანი " $\rightarrow$ ". ამისათვის უნდა ვისარ-გებოთ შემდეგი კავივალენტიურობა:

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \vee B,$$

სადაც A და B ნებისმიერი ფორმულებია. ამ კავშირს ეწოდება **ტავტოლოგია**

$$\begin{aligned} [p \rightarrow q] \rightarrow [r \wedge p] \vee \bar{q} &\Leftrightarrow [\bar{p} \vee q] \rightarrow [r \wedge p] \vee \bar{q} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \bar{p} \vee q \vee [(r \wedge p) \vee \bar{q}] \Leftrightarrow [p \wedge \bar{q}] \vee [(r \wedge p) \vee \bar{q}] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [p \wedge \bar{q}] \vee [r \wedge p] \vee \bar{q}. \end{aligned}$$

მაგალითი 2. ნინა მაგალითში მიღებული პიკუიზმის

ნორმალური ფორმა

$$[p \wedge \bar{q}] \vee [r \wedge p] \vee \bar{q}$$

გარდაქმნა კონიუნქციურ ნორმალურ ფორმად. ამისათვის საკმარისი იქნება რისტრიქციულობის II კანონის გამოყენება (სიმარტივისათვის შეგვიძლია $\wedge$ მივიჩნიოთ შეკრების "+" ნიშნად, $\vee$ მივიჩნიოთ გამრავლების ნიშნად და მოვახდინოთ ფრაქციულობის გახსნა ისე, როგორც ეს ჩვეულებრივ ალგებრაში ხდება):

$$\begin{aligned} [p \wedge \bar{q}] \vee [r \wedge p] \vee \bar{q} &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [(p \vee r) \wedge (p \vee p) \wedge (\bar{q} \vee r) \wedge (\bar{q} \vee p)] \vee \bar{q} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [p \vee r \vee \bar{q}] \wedge [p \vee p \vee \bar{q}] \wedge [\bar{q} \vee r \vee \bar{q}] \wedge [\bar{q} \vee p \vee \bar{q}]. \end{aligned}$$

მიღებული კონიუნქციური ფორმის შემდეგი გამარტივება შეიძლება ზოგადი თანამართლების კანონის შესაყრებშიდან მხოლოდ ერთი პიკუიზმის (აქ ნორმალური თანამართლებისა და უნდა ამოვატოვოთ p -ს ერთი შემოსვლა).

შედეგად მაგალითი

$$p \vee [q \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge p] \vee [p \wedge r] \vee [q \wedge p] \vee [q \wedge r]$$

გვიჩვენებს, რომ ერთი და იგივე ფორმულას აქვს სხვადასხვა პიკუიზმის (და, მაშასადამე, კონიუნქციური) ფორმები. ისინი, ცხადია, ურთიერთგოგონიერი ფორმულები არიან.

შემდეგში ჩვენ მოცემული ჭრმულის ყველა პიზიუნიუნი,
შესაბამისპკონიუნიუნი, ნრმალური ჭრმუნიდან გამოყრდჱ ცალ-
სახაპ განსაბღვრუი ე.წ. სრულყოფილ პიზიუნიუნი, შესაბამისპ
კონიუნიუნი, ნრმალური ჭრმას.

ნრმალური ჭრმუნი პახმარუნი ამოხსნაპოზის პრბღემა
უფრო მარტივპ წყრება. სახელეოზრ, ადგილი აქვს შემდეგ რ ჭო-
რემას, რმღეზიყ (5.1) პა (5.2) ჭორეზეზიდან გამომპინარუზენ
შესაბამისპ.

(5.3) ღორემა. იმისაღვის, რმ ჭრმულა იყოს იგიუზრპ
ჭეშმარიტი, აუიღეზელი პა სპკმარისიყ, რმ მისი კონიუნიუნი
ნრმალური ჭრმის ლოლოუი ლანამარავლს პკონრეს რრი ისუი
შესპკრეზი, რმეღლგან ერლ არის რმეღლიმე ყვლპი, მკორე კი—
მისი უარყოფა.

(5.4) ღორემა. იმისაღვის, რმ ჭრმულა იყოს იგიუზრპ
მეპარი, აუიღეზელი პა სპკმარისიყ, რმ მისი პიზიუნიუნი
ნრმალური ჭრმის ლოლოუი შესპკრეზს პკონრეს რრი ისუი ლანა-
მამრავლი, რმეღლგან ერლ არის რმეღლიმე ყვლპი, მკორე კი—
მისი უარყოფა.

სპკარხიში. გამოარკვიოი იქნება ჭუ არა ჭრმულეზი

$$q \vee [p \wedge q] \vee [\bar{p} \wedge \bar{q}] \vee [\bar{p} \vee \bar{q}]$$

პა

$$[p \wedge q \wedge z] \vee [\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge z] \vee [p \wedge \bar{q} \wedge \bar{z}]$$

ა) იგიუზრპ ჭეშმარიტი,

ბ) შესრულდებაი,

ც) იგიუზრპ მეპარი.

წმ. ნებისმიერი ორმნიშვნელობიანი ფუნქციის

ძარმორგება წინადადებაა აღებურის ფორმულა

$\{t, f\} \rightarrow \{t, f\}$ ჭიპის n -აბგილიან ყველგან განსაზღვრულ ფუნქციას ეწოდება (n - ა ბ გ ი ლ ი ა ნ ი) ო რ მ ნ ი შ ე ვ ნ ე -
ლ ო მ ი ა ნ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა .

უფუძაა, $\mathcal{A}$ არის წინადადებათა აღებურის ფორმულა, $X_1, \dots, X_n$ არიან ურთმანუთისაგან განსხვავებული პროპოზიციული ცვლადები, რომელთა შორის იმყოფება $\mathcal{A}$ ფორმულის ყველა (პროპოზიციული) ცვლადი. $\mathcal{A}$ ფორმულა $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მიმართ განსაზღვრავს n -აბგილიან ორმნიშვნელობიან F ფუნქციას შემდეგნაირად: $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების ყუშმარცხელ მნიშვნელობათა ნებისმიერ $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle$ სისტემისათვის $F(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ განსაზღვრით არის $\mathcal{A}$ ფორმულის ყუშმარცხელ მნიშვნელობა $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების ყუშმარცხელ მნიშვნელობათა $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle$ სისტემისათვის. ასევე შემთხვევაში ამბობენ, რომ F ფუნქცია არის $\mathcal{A}$ ფორმულის $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მიმართ განსაზღვრული ფორმულა. $\mathcal{A}$ ფორმულის $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მიმართ განსაზღვრული ფორმულა F ფუნქციის ძარმორგება $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მიმართ.

ამ ტერმინებში ფრასა " $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მიმართ " შემოვიღოთ გამოვსვით იმ შემთხვევებში, როცა $X_1, \dots, X_n$ არის $\mathcal{A}$ ფორმულის ცვლადების გაძაველა აღებაველური რიგით ან როცა კონფიქტის სხვა რაიმე გზით უმრუნეველყოფს გაუგებრობათა თავიდან აცილებას. $\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$ და $p \leftrightarrow q$ ფორმულების მიკავშირებულ ფუნქციებს შესაბამისად ეწოდება აგრეთვე $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ ოპერატორები ან კავშირები.

ცხადია, ოპერატორი კავშირის მიკავშირებულ ფუნქცია

սահմանափակ ժամանակահատվածում իրականացվող լոգիկական գործողությունները:

Եթե A և B ֆորմուլաներ են, ապա $X_1, \dots, X_n$ արժեքներով փոխարինված A և B ֆորմուլաները $F(A, B)$ ֆորմուլաներ են, որոնք կոչվում են A և B ֆորմուլաների n -արժեքով փոխարինվածներ:

Նշենք, որ n -արժեքով փոխարինված $F(X_1, \dots, X_n)$ ֆորմուլաները n -արժեքով փոխարինված $F(X_1, \dots, X_n)$ ֆորմուլաների հետ համարժեցելի են:

Քանի որ n -արժեքով փոխարինված $F(X_1, \dots, X_n)$ ֆորմուլաները n -արժեքով փոխարինված $F(X_1, \dots, X_n)$ ֆորմուլաների հետ համարժեցելի են, ապա n -արժեքով փոխարինված $F(X_1, \dots, X_n)$ ֆորմուլաների հետ համարժեցելի են:

Քանի որ n -արժեքով փոխարինված $F(X_1, \dots, X_n)$ ֆորմուլաները n -արժեքով փոխարինված $F(X_1, \dots, X_n)$ ֆորմուլաների հետ համարժեցելի են, ապա n -արժեքով փոխարինված $F(X_1, \dots, X_n)$ ֆորմուլաների հետ համարժեցելի են:

Լեյբնիցի սկզբունք. $(\sigma_1^1, \dots, \sigma_n^1), \dots, (\sigma_1^m, \dots, \sigma_n^m)$ ունենալիս n -արժեքով փոխարինված $F(X_1, \dots, X_n)$ ֆորմուլաները n -արժեքով փոխարինված $F(X_1, \dots, X_n)$ ֆորմուլաների հետ համարժեցելի են:

პასამტკიცებელი ჟოურნალ არის შემდეგი ორი წინადადებად
 შედგენილი უბრალო შემთხვევა.

1. $F(X_1, \dots, X_n)$ ფუნქციის წარმოდგენა წინადადებად
 აღებული შემთხვევა ფორმულა:

$$A \pm [F(\sigma_1^i, \dots, \sigma_n^i) \wedge X_1^i \wedge \dots \wedge X_n^i] \vee \dots \vee [F(\sigma_1^m, \dots, \sigma_n^m) \wedge X_1^m \wedge \dots \wedge X_n^m], (1)$$

სადაც X_i^i არის X_i ან $\bar{X}_i$, იმისა მიხედვით σ_i^i არის t ან $\bar{t}$.

2. $F(X_1, \dots, X_n)$ ფუნქციის წარმოდგენა წინადადებად
 აღებული შემთხვევა ფორმულა:

$$B \pm [F(\sigma_1^i, \dots, \sigma_n^i) \vee X_1^i \vee \dots \vee X_n^i] \wedge \dots \wedge [F(\sigma_1^m, \dots, \sigma_n^m) \vee X_1^m \vee \dots \vee X_n^m], (2)$$

სადაც X_i^i არის X_i ან $\bar{X}_i$ იმისა მიხედვით σ_i^i არის t ან $\bar{t}$.

1-ლი წინადადების პასამტკიცებელი საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ
 ან $F(X_1, \dots, X_n)$ -ში და (1) ფორმულაში ჩავსვათ $X_1, \dots, X_n$
 ცვლადების ყველა შესაძლო მნიშვნელობა ($\sigma_1^i, \dots, \sigma_n^i$) სისტემას,
 სადაც i ნებისმიერი მატყობი ფიქსირებული რიცხვია $\{1, 2, \dots, n\}$ -
 რად, ორივე შემთხვევაში მივიღებთ $F(\sigma_1^i, \dots, \sigma_n^i)$ -ს.

$F(X_1, \dots, X_n)$ - ზღის ეს ცხადია - ჩასმის შემთხვევა უშუალოდ
 მივიღებთ $F(\sigma_1^i, \dots, \sigma_n^i)$. განხილული პარამეტრული სისტემის ჩასმა

(1) ფორმულის $F(\sigma_1^i, \dots, \sigma_n^i) \wedge X_1^i \wedge \dots \wedge X_n^i$ შესაყრებში გვაძლავს
 $F(\sigma_1^i, \dots, \sigma_n^i) \wedge Y_1^i \wedge \dots \wedge Y_n^i$ ფორმულას, სადაც ზოგჯერ Y_k^i არის ან

t ან $\bar{t}$. ამიტომ Y_k^i თანამიმრავლები, $t \Leftrightarrow \bar{t}$ და $B_0 \wedge t \Leftrightarrow B_0$
 ზოგჯერ ვიღებთ, შეიძლება ამოვაგოთ (პარამეტრი

$F(\sigma_1^i, \dots, \sigma_n^i)$ გამოსახატვება მთელი შესაყრების ზოგჯერ
 იქნება). ან ამავად შესაყრებში ყველა შესაძლო მნიშვნელობა სხვა
 ($\sigma_1^j, \dots, \sigma_n^j$), $i \neq j$, სისტემას ჩავსვათ, მივიღებთ ნამრავლს,
 რომელიც $\bar{t}$ -ის ზოგჯერ ვიღებთ. მართლაც, მივიღებთ ნამრავლ-
 ში ერთი თანამიმრაველი მაინც იქნება t თავად ხაზით ან $\bar{t}$ უხაზოდ,
 ე.ი. ნამრავლის ერთი თანამიმრაველი მაინც იქნება $\bar{t}$ -ის ზოგ-
 ძალიან ($\bar{t}$ -ის ზოგჯერ ვიღებთ ის თანამიმრაველი, რომელიც

σ_k^i -ს, სადაც k ისეთი ნატურალური რიცხვია, რომ $\sigma_k^i \neq \sigma_k^j$) და ამიტომ მთელი ნამრავლიც χ -ის ტოლდალევანი იქნება. ამავე მიზეზით, ზუ, ახლა, განვიხილო ($\sigma_1^i, \dots, \sigma_n^i$) პალ-
 გებულის სისტემას ჩავსვამთ (1) ფორმულის სხვა შესაყრებში მივი-
 ღებთ χ -ის ტოლდალევან ფორმულას. რაგან იგივეურად მცდარი
 (ვ.ი. χ -ის ტოლდალევანი) შესაყრებში, $B_0 V \chi \Leftrightarrow B_0$ ტოლდალევ-
 ნების ძალით, შეიძლება ამოვატოოთ ჯამიდან (იხ. აგრეთვე (2.6)
 ლეონი), საბოლოოდ $\mathcal{A}$ ფორმულაში $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების ნაყ-
 ვლაპ ($\sigma_1^i, \dots, \sigma_n^i$) პალგებულის სისტემის ჩასმით მიღებული ფორ-
 მულა ტოლდალევანი იქნება $F(\sigma_1^i, \dots, \sigma_n^i)$ -ის ვ.ი. მისი ჭეშ-
 მარიტული მნიშვნელობა იქნება $F(\sigma_1^i, \dots, \sigma_n^i)$.

მუ-2 წინაპარება პანტიკიკება მოტანილი მსჯელობის "ორაფ-
 ლი" მსჯელობით ვ.ი. მუ-2 წინაპარების პანტიკიკების მისაღებად
 საჭიროა მოტანილი მსჯელობაში ურთმანვეთთან შევანაცვლოთ ტერმინე-
 ბი: ჭეშმარიტი და მცდარი, ჯამი და ნამრავლი, შესაყრები და
 თანამამრავლი, $\wedge$ და $\vee$, $\dagger$ და χ .

შენიშვნა. მუ-2 წინაპარება შეიძლება გამოვიყვანოთ 1-ლი
 წინაპარებიდან შეპერეგნაირად. 1-ლი წინაპარების ძალით
 $\bar{F}(X_1, \dots, X_n)$ ფუნქცია (რომელიც განსაზღვრით ისეთი ფუნქციაა,
 რომლის მნიშვნელობები $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების ჭეშმარიტულ მნიშ-
 ვნელობათა ყოველი პალგებულის სისტემისათვის ფუნქციის შესაბა-
 მისი მნიშვნელობის ორადულს წარმოადგენს) წარმოიპოვება შეპერეგ-
 ფორმულით:

$$B_1 \equiv [\bar{F}(\sigma_1^i, \dots, \sigma_n^i) \wedge X_1^i \wedge \dots \wedge X_n^i] \vee \dots \vee [\bar{F}(\sigma_1^m, \dots, \sigma_n^m) \wedge X_1^m \wedge \dots \wedge X_n^m],$$
 სადაც X_e^i არის X_e ან $\bar{X}_e$ იმისა მიხედვით σ_e^i არის $\dagger$ ზუ χ .
 ცხადია, B_1 ფორმულის უარყოფა იქნება ისევ F ფუნქციის წარმო-
 გენა. ამ უარყოფისათვის ფორმულის უარყოფის განმეგაგებულის პრინ-
 ციპის ძალით (იხ. (4.1) ლეონების შეგუგ) ადვილად ვპოულობთ

$$B_1 \Leftrightarrow [F(\sigma_1^i, \dots, \sigma_n^i) \vee X_1^{i*} \vee \dots \vee X_n^{i*}] \wedge \dots \wedge [F(\sigma_1^m, \dots, \sigma_n^m) \vee X_1^{m*} \vee \dots \vee X_n^{m*}], (3)$$

სადაც X_i^* არის ან X_i ან $\bar{X}_i$ იმისდა მიხედვით σ_i^1 არის 1
 ან 2. ახლა, $2j-2$ წინადადებას დასაბუთებლად საკმარისია შევ-
 დიშდეთ, რომ (3) ჭოლძალღვრების მარჯვენა მხარე არის $F(X_1, \dots, X_n)$
 ჭუნქციის წარმოდგენა და იგი უმცირესა (2) ჭორმულას. აქვე შევ-
 დიშდეთ, რომ (3) ჭოლძალღვრების მარჯვენა მხარე ჭოლძალღვანია
 ჭორმულას.

$$[F(\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*) V X_1^* V \dots V X_n^*] \wedge \dots \wedge [F(\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*) V X_1^* V \dots V X_n^*], (4)$$

სადაც σ_k^* არის 1 ან 2 იმისდა მიხედვით $\sigma_k^{\text{წმ}}$ არის 1 ან 2 ;
 ე.ი. σ_k^* არის σ_k^1 კონსტანტის ორადული კონსტანტა (3)-დან
 (4) ჭორმულის ნისაღებად საკმარისია (3) ჭორმულის მანამამრავლე-
 ბი დადატოვებუბული მიმარმულეობით). ცხადია აგრმევე, რომ
 (4)-ში X_i^* არის X_i ან $\bar{X}_i$ იმისდა მიხედვით σ_i^* არის 1 ან
 2, რაც იგივეა, იმისდა მიხედვით σ_i^1 არის 1 ან 2 .

F ჭუნქციის განხილუი წარმოდგენებში აქვთ ის ნაკლი, რომ
 ისინი შეიკავენ არა მარჭო პრპოზიციული ცვლადებში, არამეი კონ-
 სტანტებში (კონსტანტებშია $F(\sigma_1^1, \dots, \sigma_n^1)$ სახის გამოსახულებე-
 ბი). ძნელი არაა ამ ნაკლის მავიდან აცილება: ანე მატალიზად, ან
 F არაა იგივერად მიყარი (ე.ი. იგივერად 1-ის ჭოლი) ჭუნქცია,
 მაშინ $\mathcal{A}$ ჭორმულაში ურ-ურთი შესაკრებში პირველი მანამამრაველი
 იქნება 1. მთოველი შესაკრები, რომლის პირველი მანამამრაველი
 არის 1 იქნება 1-ის ჭოლძალღვანი. ამიტომ ანეი შესაკრებები
 შეგვიძლია ამოვადოვო ჯამიდან. პარჩენილი შესაკრებებში (მათი
 რიბები ნული არ იქნება) პირველი მანამამრაველი არის 1,
 ამიტომ ამ შესაკრებებიდან ეს პირველი მანამამრავლები შეიძლება
 ამოვადოვო, რის შემდეგ საბოლოო მივიღებო F ჭუნქციის ისე
 წარმოდგენას, რომელიც მხოლოდ ცვლადი ელემენტარული წინადადე-
 ბებია. ანალოგიურად, ან F არაა იგივერად უბმარჩი, მაშინ (2)
 ჭორმულაში შეიძლება ამოვადოვო ის მანამამრავლები, რომელთა
 პირველი შესაკრები არის 1 (რადგან ანეი მანამამრავლები 1-ს

გოქტალოვანნი არიან), ღანარჩენი ღანამამრავლებიდან (რომელღა რიყბვი ღული არღა) ღვიღლება აწივარგოთ ჰირველი ღესაყრებში.

ამრიგად, ღუ $F(X_1, \dots, X_n)$ არღა იგივერად მყარნი, ღამშინ იგი ღარმოიგინება ღინაპარებაღა ალგებრის ისეღი ღორმულით, რომელიყ ღარმოარგენს $X'_1 \dots X'_n$ სახის ღამრავლების ლოგიკურ ჯამს, სადაყ X'_i არის X_i ან $\bar{X}_i$. ამასღანავე, ღვეტიღლია ეიგულისხმიო, რომ ღესაყრებში პალგებულია ღვიგენარირად: $X'_1 \dots X'_n$ ღესაყრებში ღინ უსწრებს $X''_1 \dots X''_n$ ღესაყრებს მაშინ პა მიოლორ ღამშინ, როყა $X_k = X'_k \neq X''_k = \bar{X}_k$, სადაყ K არის ისეღი უმიგრესნი ღაღურალური რიყბვი $\{1, 2, \dots, n\}$ - პან, რომ $X'_k \neq X''_k$. არღ-იგივერად მყარნი ორმინიშენელოშიანი ღუნეყიის ჯეღ ღარმოარგენაჲ პ ი ბ ი უ ნ ე ე ი ი უ რ ი ღ ა რ მ ი ო პ გ ე ნ ა ეწოება.

ღვენიშნოთ, რომ ნებისმიერი არაიგივერად მყარნი $F(X_1, \dots, X_n)$ ღუნეყიისაღვის პიბიუნეყიური ღარმოარგენა (ღესაყრებღა ალნიშნული პალგებში) არის ერღაპეროი.

მარღლყ, ბემოთ მიჭანილი მსჯელობიდან ჭანს, რომ $X'_1, \dots, X'_n$ ღამრავლი ჯეღ ღარმოარგენაში უნდა ღვეტიღეს ღესაყრებად მაშინ პა მიოლორ მაშინ, როყა $F(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ არის $\dagger$, სადაყ σ_i არის $\dagger$ ან $\ddagger$ ინისდა მიხედეოთ X'_i არის X_i ღუ $\bar{X}_i$.

ანალოგიურად, ღუ $F(X_1, \dots, X_n)$ ღუნეყია არღა იგივერად ჟეშმაროი, მაშინ იგი ერღაპეროი გბოთ ღარმოიგინება ღინაპარებაღა ალგებრის ისეღი ღორმულით, რომელიყ ღარმოარგენს $X'_1 \vee \dots \vee X'_n$ სახის ჯამების ლოგიკურ ღამრავლს, სადაყ X'_i არის X_i ან $\bar{X}_i$; პა ღამრავლები ღანამამრავლები პალგებულია ისევე, როგორყ ღესაყრებში იყო პალგებული ბემოთ განბილული ჯამში. არაიგივერად ჟეშმაროი ორმინიშენელოშიანი ღუნეყიის ჯეღ ღარმოარგენაჲ $\mathfrak{A}$ ო ნ ი უ ნ ე ე ი ი უ რ ი ღ ა რ მ ი ო პ გ ე ნ ა ეწოება. $F(X_1, \dots, X_n)$ ღუნეყიის ეონიუნეყიური ღარმოარგენა უშუალოდ მიიღება (4) ღორმულიდან საღანაპო ღანამამრავლებიისა პა ღესაყრებშიის ამოგებში.

მე $F(X_1, \dots, X_n)$ ფუნქცია არაა იგივე რაპ ვეშეშარიტი და არც იგივე რაპ მცარი, მაშინ $F(X_1, \dots, X_n)$ ფუნქციის განხილული ორივე სახის წარმოდგენა არაა სავარცხელს იყოს ურთიერთრად-ბულო. ურთი და იგივე ფუნქციის ორი წარმოდგენა, ცხადია, ურთიერთ-ტოლდალვანი უნდა იყოს.

მე $F(X_1, \dots, X_n)$ ფუნქცია იგივე რაპ მცარი, მაშინ მისი წარმოდგენა იქნება $X_1 \wedge \bar{X}_1$, ხოლო, მე $F(X_1, \dots, X_n)$ ფუნქცია იგივე რაპ ვეშეშარიტია, მაშინ მისი წარმოდგენა იქნება $X_1 \vee \bar{X}_1$.

მაგალიტები. 1. ვეშეშა, $F(X_1, X_2, X_3)$ არის სავარცხელს-ნი ორმნიშვნელოზიანი ფუნქცია, რომელიც ღებულობს მნიშვნელოზას $\pm$ მაშინ და მხოლოპ მაშინ, როცა არანაკლებ ორი არგუმენტი-სა ღებულობს მნიშვნელოზას $\pm$. პამტყიყე, რომ $F(X_1, X_2, X_3)$ ფუნქციის კონიუნქციური და დიზიუნქციური წარმოდგენები არიან მებეგვი ფორმულები:

$$[X_1 \vee X_2 \vee X_3] \wedge [\bar{X}_1 \vee X_2 \vee X_3] \wedge [X_1 \vee \bar{X}_2 \vee X_3] \wedge [X_1 \vee X_2 \vee \bar{X}_3];$$

$$[X_1 \wedge X_2 \wedge X_3] \vee [\bar{X}_1 \wedge X_2 \wedge X_3] \vee [X_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge X_3] \vee [X_1 \wedge X_2 \wedge \bar{X}_3].$$

ეს წარმოდგენები არიან ურთიერთრადბულონი. ვ.ი.თიშოელი ეს ფორმულა მისი ორადელი ფორმულის ტოლდალვანია.

2. ვეშეშა, $F(X_1, X_2, X_3, X_4)$ არის ოთხავარცხელსანი ორმნიშვნელოზიანი ფუნქცია, რომელიც ღებულობს მნიშვნელოზას $\pm$ — მაშინ და მხოლოპ მაშინ, როცა არანაკლებ 3 არგუმენტი-სა ღებულობს მნიშვნელოზას $\pm$. პამტყიყე, რომ $F(X_1, X_2, X_3, X_4)$ ფუნქციის დიზიუნქციური და კონიუნქციური წარმოდგენები არიან მებეგვი ფორმულები:

$$[X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge X_4] \vee [\bar{X}_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge X_4] \vee [X_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge X_3 \wedge X_4] \times$$

$$\vee [X_1 \wedge X_2 \wedge \bar{X}_3 \wedge X_4] \vee [X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge \bar{X}_4];$$

$$\begin{aligned}
& [X_1 \vee X_2 \vee X_3 \vee X_4] \wedge [\bar{X}_1 \vee X_2 \vee X_3 \vee X_4] \wedge [X_1 \vee \bar{X}_2 \vee X_3 \vee X_4] \times \\
& \wedge [X_1 \vee X_2 \vee \bar{X}_3 \vee X_4] \wedge [X_1 \vee X_2 \vee X_3 \vee \bar{X}_4] \wedge [\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2 \vee X_3 \vee X_4] \times \\
& \wedge [\bar{X}_1 \vee X_2 \vee \bar{X}_3 \vee X_4] \wedge [\bar{X}_1 \vee X_2 \vee X_3 \vee \bar{X}_4] \wedge [X_1 \vee \bar{X}_2 \vee \bar{X}_3 \vee X_4] \times \\
& \wedge [X_1 \vee \bar{X}_2 \vee X_3 \vee \bar{X}_4] \wedge [X_1 \vee X_2 \vee \bar{X}_3 \vee \bar{X}_4].
\end{aligned}$$

ცხადია, ეს ჭოღალოვანი ფორმულები არ არიან ურთიერთმართლები.

§7. ფორმულის სრულყოფილი ნორმალური ფორმები

ვთქვათ, $\mathcal{A}$ არის ნინაპაქებათა ალგებრის ფორმულა, $X_1, \dots, X_n$ არიან ურთიანთისაჲსი განსხვავებული ცვლადები, რომელთა შორის იმყოფება $\mathcal{A}$ ფორმულაში მყოფი ყველა ცვლადი, $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ კი არის $\mathcal{A}$ ფორმულის ლავაჲირველი აღნიშვნა. $\mathcal{A}$ ფორმულა ცალსახად განსაზღვრავს n -აგვილიან მრმნიშვნელობიან $F(X_1, \dots, X_n)$ ფუნქციას, რომლის მნიშვნელობა $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა ნებისმიერი პალაგებული სისჯემისათვის ეშხევა $\mathcal{A}$ ფორმულის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების ჭეშმარიტულ მნიშვნელობათა იშავე პალაგებული სისჯემისათვის. ასეუ მშხევევაში, როგორც ვიცით, ამშოვენ, რომ $\mathcal{A}$ ფორმულა არის F მრმნიშვნელობიანი ფუნქციის ჭარმოგვენა $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მიმართ, F ფუნქციას კი უნოგებენ $\mathcal{A}$ ფორმულის მიკავშირებული ფუნქციას $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მიმართ. $\mathcal{A}$ ფორმულა პა მისი მიკავშირებული ფუნქცია $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მიმართ, ცხადია, ურთი პა იგვეა არაა. მიუხედავად ამისა ხშირად ლაარაკობენ $\mathcal{A}$ ფორმულას, როგორც $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების ფუნქცია. ასეუ მშხევევაში მხეგველობაში აქვს $\mathcal{A}$ ფორმულის მიკავშირებული ფუნქცია $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მიმართ. ამასთანავე გულისხმობენ, რომ $\mathcal{A}$ ან, რა

იგივეა, $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ ჭორმულა წარმოადგენს ხსენებული მიკავშირებული ფუნქციის აღნიშვნას. აღნიშვნის შესაბამისად შეგვიძლია ვილაპარაკოთ წინადადებას აღკვეთის ჭორმული $\mathcal{A}$ ან, რაც იგივეა, $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ ჭ ო რ მ უ ლ ი ს (ფუნქციის) წ ა რ მ ო პ ე ნ ა ბ ე ე $X_1, \dots, X_n$ ც ვ ლ ა პ ე ე ბ ი ს მ ი მ ა რ ზ . ეს გამარჯვებული იქნება იმიტომ, რომ $\mathcal{A}'$ ჭ ო რ მ უ ლ ა ა რ ი ს $\mathcal{A}$ ჭ ო რ მ უ ლ ი ს წ ა რ მ ო პ ე ნ ა (ე.ი. მოიძებნება განსხვავებული ცვლადების ისეთი მიმდევრობა, რომ $\mathcal{A}'$ არის $\mathcal{A}$ ჭორმულის წარმოადგენა ცვლადთა ამ მიმდევრობის მიმართ), მაშინ $\mathcal{A}'$ არის $\mathcal{A}$ ჭორმულის ტოლძალუვანი.

როგორც ჩვენ ბევრს ვაჩვენებთ, ნებისმიერი არაიგივურად მცდარი $F(X_1, \dots, X_n)$ ფუნქციაა და, მაშასადამე, $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ ჭორმულა— $\mathcal{A}$ იგი იგივეურად მცდარი არაა (ე.ი. შესრულებადია), წარმოიგონება, როგორც $X'_1 \dots X'_n$ სახის დამრავლად ჯამი, სადაც X'_i არის ან X_i ან $\bar{X}_i$ ე.ი. წარმოიგონება სახით

$$[X'_1 X'_2 \dots X'_n] \vee [X''_1 X''_2 \dots X''_n] \vee \dots \vee [X'_m X'_2 \dots X'_n], \quad (1)$$

სადაც X'_i არის X_i ან $\bar{X}_i$. ამასთანავე, ასეთი წარმოადგენა ისაბლურება ცალსახად, $\mathcal{A}$ ვიცილისხმიდებ, რომ ურთიანრი შესაყრებში არ გვაქვს და შესაყრებში რიგი განსაბლურება შეიძლება მოხდეს: $\mathcal{A}$ ორი

$$X_1^k X_2^k \dots X_n^k \quad \text{და} \quad X_1^l X_2^l \dots X_n^l$$

შესაყრებში პირველი განსხვავებული დანამარავლებია X_i^k და X_i^l , მაშინ ამ ორი შესაყრებშიდან ის უსწრებს ნი, რომელიც შეიცავს X_i დანამარავლს (ურთ-ურთი შეიცავს X_i დანამარავლს, მეორე კი $\bar{X}_i$ -ს)

ამრიგად, $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ ჭორმულა იგივეურად მცდარი არაა, $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ ჭორმულის მრავალ რიგიურად ნორმალურ ჭორმულს მორის ჩვენ გამოვყავით ურთი, ცალსახად განსაბლურული,

პოპულაციური ნორმალური ფორმა. ასევე პოპულაციური ნორმალური ფორ-
 მას ეწოდება $\mathcal{A}$ ფორმული $\mathcal{A}$ სრულყოფილი $\mathcal{A}$ პო-
 პულაციური ნორმალური ფორმა $X_1, \dots, X_n$
 ცვლადების მიხედვით.

ადგილი პასანახია, რომ განხილული $\mathcal{A}$ ფორმულის სრულყოფი-
 ლი პოპულაციური ნორმალური ფორმა $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მიხედვით
 შეიძლება განისაზღვროს შემდეგნაირად:

$\mathcal{A}$ ფორმულის სრულყოფილი პოპულაციური ნორმალური ფორმა
 $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მიხედვით ეწოდება ისევე პოპულაციური ნორ-
 მალური ფორმას, რომელსაც აქვს შემდეგი ზვისებები:

a) არც ერთი შესაყრები არ შეიცავს ცვლადებს მათ უარყოფ-
 ფასთან ერთად.

b) არც ერთი შესაყრები არ შეიცავს ერთნაირ მანამამრავ-
 ლებს.

c) მასში არაა რაიმე ერთნაირი შესაყრები.

d) ზოგიერთი შესაყრები $\{1, 2, \dots, n\}$ -დან აღებული ყოველი
 i - ზვისი შესაყრის მანამამრავლის სახით ან X_i -ს ან $\bar{X}_i$ -ს და,
 ამასთანავე, არ შეიცავს არც ერთ ისევე ცვლადს, რომელიც არ იმყოფ-
 ფება $X_1, \dots, X_n$ ცვლადებს შორის.

e) ყოველი შესაყრებში i -ური მანამამრავლი არის ან X_i
 ან $\bar{X}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

g) თუ $X_1^k X_2^k \dots X_n^k$ და $X_1^e X_2^e \dots X_n^e$ არიან k -ური
 და ℓ -ური შესაყრებები, $k < \ell$ და i არის უმცირესი ისეთი ნატურალ-
 ლური რიცხვი, რომ $X_i^k \neq X_i^\ell$, მაშინ X_i^k არის X_i (და, მაშა-
 სამაშ, X_i^ℓ არის $\bar{X}_i$).

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$ ზვისებები საშუალებას იძლევიან შევიღუ-
 შაოთ მოცემული $\mathcal{A}$ ფორმულის სრულყოფილი პოპულაციური ნორმალური ფორ-
 მადი პარამეტრების შედგენი.

$\mathcal{A}$ ფორმულა $\mathcal{A}$ პარამეტრული რაიმე ისევე პოპულაციური

ნორმალურ ფორმაზე, რომელიც არ შეიცავს ახალ ცვლადებს. შეიძლება ეს ფორმა უნდა გარდაქმნათ მანძილში შევიტანოთ.

1. ამოვაცმოთ ის შესაყრებები, რომლებიც შეიცავენ რომელიმე X_i -ს მის უარყოფითთან ($\bar{X}_i$ -თან) ერთად.

2. თითოეული (ძარჩენილი) შესაყრებიდან ამოვაცმოთ განმეორებითი მანძიმრავლები (ე.ი. ისეთი მანძიმრავლები, რომელთა ნიშნები შესაყრებში არის იგივე მანძიმრავლები).

3. ამოვაცმოთ განმეორებითი შესაყრებები (შესაყრებთა შედარებისას უტოლებელობით მანძიმრავლები რიგს).

ცხადია, ასეთი გარდაქმნების შემდეგ მიიღება მოცემული ფორმულის ტოლფასი ფორმულა, რომელსაც აქვს α, β და γ თვისებები.

4. თუ აღნიშნული გამარტივების შემდეგ მიღებულ ფორმულაში რომელიმე B შესაყრები არ შეიცავს X_i ცვლადს, მაშინ მას შევცვლით ჯამით $[B \wedge X_i] \vee [B \wedge \bar{X}_i]$

ეს შეცვლა არის ფორმულის იგივერი გარდაქმნა (ე.ი. ისეთი გარდაქმნა, რომელსაც მოცემული ფორმულა იცვლება მისი ტოლფასი ფორმულით). მარტლად,

$$B \Leftrightarrow B \wedge [X_i \vee \bar{X}_i] \Leftrightarrow [B \wedge X_i] \vee [B \wedge \bar{X}_i].$$

ასეთი გარდაქმნით მივაღწევთ d პირობის შესრულებას. რის შემდეგ უნდა ამოვაცმოთ განმეორებითი შესაყრებები.

5. თითოეული შესაყრებში დავალაგებთ მანძიმრავლებს ისე, რომ შესრულებს e პირობა.

6. დავალაგებთ შესაყრებებს ისე, რომ შესრულებს g პირობა.

ცხადია, 1. გარდაქმნით მიიღწევა α პირობის შესრულება, 2. გარდაქმნით მიიღწევა β პირობის შესრულება α პირობის დაურღვევლად, ასევე 3. გარდაქმნით მიიღწევა γ პირობის შესრულება α და β პირობების დაურღვევლად და ა.შ.

თუ 1. გარდაქმნის შემდეგ ფორმულაში არ დარჩა არც ერთი

შესაჯრები, მაშინ ფორმულა იქნება იგივე რაპ მცხარნ რა მას არ ექნება სრულყოფილი რიგოუნქციური ნორმალური ფორმა. ნინააქმევე შემხბვევაში განხილული არცესიხ მიიღება ფორმულა, რიველიც აქმაყოფილებს $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$. არრბებს რა, მაშასადამე, იგი იქნება $\mathcal{A}$ ფორმულის სრულყოფილი რიგოუნქციური ნორმალური ფორმა $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მიმარხ.

შენიშვნა. მოჭანილი ნუსიპან ჩანს შემდეგი. ვექვახ, $\mathcal{A}_1$ არის $\mathcal{A}$ ფორმულის სრულყოფილი რიგოუნქციური ნორმალური ფორმა $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მიმარხ. $\mathcal{A}_1$ ფორმულიპან რჩე მივიღოხ $\mathcal{A}$ ფორმულის სრულყოფილი რიგოუნქციური ნორმალური ფორმა $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ ცვლადების მიმარხ საჭირო იქნება მხილოპ 4. რა ნ. რვერაციების გამოყენება.

ანალოგიურაპ ისაბღერება სრულყოფილი კონიუნქციური ნორმალური ფორმის ცნება. ეს განსაბღერა ცალიბება სრულყოფილი რიგოუნქციური ნორმალური ფორმის განსაბღერის რროს გამოყენებულ ტერმინოხ რრადული ტერმინებოხ. ჩვენ რაცქმაყოფილებოხ განსაბღერის მეორე ვარიანტის მოჭანიოხ.

განხილული $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ ფორმულის სრულყოფილი კონიუნქციური ნორმალური ფორმა $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მიმარხ ეწოდება ისე კონიუნქციური ნორმალური ფორმას, რიველსაც აქვს შემდეგი ღვისებები:

ა') არც ერეი მანამამრავლი არ შეიყავს ცვლადს მის უარყოფასთან ერეაპ.

ბ') არც ერეი მანამამრავლი არ შეიყავს რრ ერენაირ შესაჯრებს.

ც') მასში არაა რრი ერენაირი მანამამრავლი.

დ') ხიოქული მანამამრავლი $\{1, 2, \dots, n\}$ -პან აღებულ ცოვერ i - ღვის შეიყავს შესაჯრების სახიოხ ან X_i -ს ან $\bar{X}_i$ -ს რა, ამახმანავე, არ შეიყავს არცერე ცვლადს, რიველიც არ იმყოფე-

და $X_1, \dots, X_n$ ცვლადებს შორის.

ე') თითოეული მანამამრავლები i -ური მესაყრეები არის X_i ან $\bar{X}_i$ ($i=1, 2, \dots, n$).

გ') მუ $X_1^k V X_2^k V \dots V X_n^k$ და $X_1^\ell V X_2^\ell V \dots V X_n^\ell$ არიან k -ური და ℓ -ური მანამამრავლები, $k < \ell$ და i არის უმცირესი ისეთი ნატურალური რიცხვი, რომ $X_i^k \neq X_i^\ell$, მაშინ X_i^k არის X_i (და, მათაბაბამე, X_i^ℓ არის $\bar{X}_i$).

აქამ მუიძლება დამტკიცება, რომ თითოეული არამივივრად ჭეშმარიტ ჭორმულამ აქვს ურამაბრთი სრულყოფილი კონიუნქციური ნორმალური ჭორმა $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მიმართ, საბამ $X_1, \dots, X_n$ არიან ურამანდებისაბან განსხვავებული ცვლადები, რომელამ შორის იმყოფება განხილული ჭორმულამი მყოფი ყველა ცვლადი. მოცემული ჭორმულის სრულყოფილი კონიუნქციური ნორმალური ჭორმაზე დაცვანის ნესი არის იმი ნესის ანალოგიური, რომელიც ჩვენ ჩამოვამყალიბებ ზემოთ და ყალიბდება ორბული ჭერმიწებში.

ყველა ამ წინადადებათა დამტკიცება მუიძლება ანალოგიური გბით, ან მუიძლება, აგრეთვე, მივიღოთ ისინი ორბულბის კანონის გამოყენებით.

როგორც ვხედავთ მოცემული ჭორმულამ ყოველთვის მუიძლება დავიცვანოთ სრულყოფილი ნორმალური ჭორმაზე — კონიუნქციურიზე ან დიზიუნქციურიზე.

სრულყოფილი ნორმალური ჭორმები საშუალებას იძლევიან გაირკვეს მოცემული $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$ ჭორმულები არიან მუ არა ოლდალოვანნი ჭორმულები.

მარტაც, ვხევათ, $X_1, \dots, X_n$ არიან ურამანდებისა-ბან განსხვავებული ცვლადები, რომელამ შორის იმყოფება $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$ ჭორმულებში მუმაყალი ყველა ცვლადი. ზემოაღნიშნულიბან ადვილად გამომიწინარეობს მუმივეტი წინადადებაის სამარტლიანობა:

$\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$ ჭორმულების ოლდალოვებებისათვის, აუცილებელი

და საკმარისია, მაშინვე უნდა იქნეს სრულყოფილი პირობები-
ური [კონიუნქციური] ნორმალური ფორმა $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების
მიმართ, ან არცერთ მათგანს არ ექნება სრულყოფილი პირობებიური
[კონიუნქციური] ნორმალური ფორმა.

ამრიგად, A და B ფორმულების სრულყოფილი პირობებიური
(შესაბამისად კონიუნქციური) ფორმების შედარება ნებისმიერ
მათი ზოლდალვების შესახებ.

შემდეგში, როცა ლამაზი იქნება მხოლოდ რომელიმე A ფორ-
მულაზე და ამ ფორმულის სრულყოფილი ნორმალური ფორმაზე, მაშინ, ეს
საინტერესოა არ იქნება ჭეშუარი, მხედველობაში გვაქნება ის
სრულყოფილი ნორმალური ფორმები, რომლებიც შეიძლება მხოლოდ და
მხოლოდ A ფორმულაში მოხდეს. ასევე, ეს უნდა იქნება
განხილვის არეშია $A_1, \dots, A_n$ ფორმულები და მათი სრულყოფილი
ნორმალური ფორმები, მაშინ, ეს საინტერესოა არ იქნება ჭეშუარი,
მხედველობაში გვაქნება ის სრულყოფილი ნორმალური ფორმები, რომელ-
ბიც შეიძლება მხოლოდ და მხოლოდ იმ ცვლადებს, რომელთაგან ნებისმი-
ერი იმყოფება განხილულ ფორმულაშიდან ერთში მანდ.

სავარჯიშო. დამუშავებ სრულყოფილი პირობებიური (შესაბამის-
სად კონიუნქციური) ნორმალური ფორმაზე შემდეგი ფორმულები:

$$1. [p \wedge q \rightarrow r] \vee [p \rightarrow q];$$

$$2. p \vee [p \rightarrow q] \rightarrow q.$$

ამოცნებოთ ფორმულების გასამარტივებლად სასარგებლო
რამდენიმე ზოლდალვება, სადაც X და Y ნებისმიერი ფორმულებია:

$$X \vee X Y \iff X; \quad (1)$$

$$X[X Y] \iff X; \quad (2)$$

$$X \vee \bar{X} Y \iff X \vee Y; \quad (3)$$

$$\bar{X} \vee X Y \iff \bar{X} \vee Y; \quad (4)$$

$$X[\bar{X} \vee Y] \iff X Y; \quad (5)$$

$$\overline{X}[X \vee Y] \Leftrightarrow \overline{X} Y. \quad (6)$$

ეს უპიკავალირურობები სიჭყვიერად შეიძლება ჩამოვაცადოთ შემდეგნაირად.

(1) მე რაიმე ჯამის შესაყრებში შევის მეორე შესაყრუბში მამრავლად, მაშინ ჯამიდან შეიძლება ამოვაცდოთ ეს მეორე შესაყრები.

(2) მე რაიმე ნამრავლის მანამამრავლი შევის მეორე მანამამრავლი შესაყრებად, მაშინ ნამრავლიდან შეიძლება ამოვაცდოთ ეს მეორე მანამამრავლი.

(3-4) შესაყრებიდან შეიძლება ამოვაცდოთ მანამამრავლი, მე იგი ჭოლქალვანია მეორე შესაყრების უარყოფისა.

(5-6) მანამამრავლიდან შეიძლება ამოვაცდოთ შესაყრები, მე იგი ჭოლქალვანია მეორე მანამამრავლის უარყოფისა.

ამ პარატრაფსა და ნინა პარატრაფში მოჭანრი მსჯელობებისა და შედეგების საფუძველზე ადვილად ვრწმუნდებით შემდეგი მეორეობის სამარტლიანობაში.

(7.1) მეორეობა. უფუაფ $\mathcal{A}$ არის ჭორმულა, $X_1, \dots, X_n$ არიან ურმანდუნისაგან განსხვავებული პრპოპიოიული ცვლადები,

$\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ არის $\mathcal{A}$ ჭორმულის მავდაპირველი აღნიშვნა,

$$\langle \sigma_1^1, \dots, \sigma_n^1 \rangle, \dots, \langle \sigma_1^m, \dots, \sigma_n^m \rangle$$

ჟი არის $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მნიშვნელობათა ყველა სისჭმეობის მიმდევრობა, რაღაგებული ექსიკოტრაფიული ნუსიო. უფუაფ, ატრეფე, რომ X_i^l არის X_i ან $\overline{X}_i$ იმისდა მიხედვით σ_i^l არის $\pm$ ან $\mp$, σ_i^{l*} ჟი არის σ_i^l ჭეშმარიტული მნიშვნელობის ორადული ჭეშმარიტული მნიშვნელობა. მაშინ ადვილი აქვს შემდეგ ჭოლქალვანებას ($\mathcal{A}$ ჭორმულის ნარმოდგენებს):

$$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}(\sigma_1^1, \dots, \sigma_n^1) X_1^1 \dots X_n^1 \vee \dots \vee \mathcal{A}(\sigma_1^m, \dots, \sigma_n^m) X_1^m \dots X_n^m;$$

$$\mathcal{A} \Leftrightarrow [\mathcal{A}(\sigma_1^{1*}, \dots, \sigma_n^{1*}) \vee X_1^1 \vee \dots \vee X_n^1] \wedge \dots \wedge [\mathcal{A}(\sigma_1^{m*}, \dots, \sigma_n^{m*}) \vee X_1^m \vee \dots \vee X_n^m].$$

მარტალა, პირველი ჭოღალოვნების პასამჟიკეპილი განვი-
ხილავთ $X_1, \dots, X_k$ ($k \geq n$) ურთმანუთისაგან განსხვავებული
ცვლადების ისეთ მიმდევრობას, რომლის ნევრთა შორის იმჟაფება $\mathcal{A}$
ფორმულის ყველა ცვლადი, და ამ ცვლადების მნიშვნელობათა ნების-
მიერ $\langle \sigma_1^i, \dots, \sigma_k^i \rangle$ სისტემას ჩავსვამთ პასამჟიკეპილი პირველი
ჭოღალოვნების ორივე მხარეში და, როგორც წინა პარაგრაფის (1)
ფორმულის მჟიკეპილისას, ვაჩვენებთ, რომ ორივე მხარეში მივიღებთ
 $(\sigma_1^i, \dots, \sigma_k^i / X_1, \dots, X_k) \mathcal{A}$ — ჭოღალოვნებაშივე სიჭუსტით. მეორე
ჭოღალოვნება პირველიდან მიიღება ისევე, როგორც წინა პარაგრა-
ფის (4) ჭოღალოვნება გამოვიყვანეთ (1)-დან. შეგვეძლო მეორე
ჭოღალოვნება პაგვიმჟიკეპილია პირველი ჭოღალოვნების მჟიკეპილის
ძროს გამოყენებული მსჯელობის ანალოგიური ("ორადული") მსჯელობით.

შედეგი 1. უთქვამთ, მეორეების პირობებთან ურთაპ მესრულებუ-
ლია შემდეგი პირობა: $X_1, \dots, X_n$ ცვლადებს შორის იმჟაფება $\mathcal{A}$
ფორმულის ყველა ცვლადი და $\mathcal{A}$ ფორმულა არ არის იგივეურად მცდარი,
შესაბამისად იგივეურად ყვეშარტო. ამასთანავე, უთქვამთ $i_1, i_2, \dots, i_j$
არის $\{1, 2, \dots, n\}$ — დან აღებული ნატურალური რიცხვების ისეთი
მრდარი მანუსიბალური მიმდევრობა, რომ $\{1, 2, \dots, j\}$ — დან აღებული
ყოველი α — ზვის $\mathcal{A}(\sigma_1^{\alpha}, \dots, \sigma_n^{\alpha})$ არის $\mathbf{t}$, შესაბამისად
 $\mathcal{A}(\sigma_1^{\alpha*}, \dots, \sigma_n^{\alpha*})$ არის $\mathbf{f}$. მაშინ
 $\mathcal{A} \Leftrightarrow [X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}] \vee \dots \vee [X_1^{i_j} \dots X_n^{i_j}],$
შესაბამისად

$$\mathcal{A} \Leftrightarrow [X_1^{i_1} \vee X_1^{i_2} \vee \dots \vee X_1^{i_n}] \wedge \dots \wedge [X_n^{i_1} \vee X_n^{i_2} \vee \dots \vee X_n^{i_n}].$$

ამასთანავე, ამ ჭოღალოვნების მარჯვენა მხარე წარმოადგენს
 $\mathcal{A}$ ფორმულის სრულყოფილი დიზიუნქტიურ, შესაბამისად კონიუნქტიურ,
ნორმალურ ფორმას.

დასასრულს აღვნიშნოთ, რომ მეორეების ჭოღალოვნებები $n=1$
და $X_1 = X$ შემთხვევაში იღებენ შემდეგ სახეს:

$$A \Leftrightarrow A(t) \vee A(\bar{t});$$

$$A \Leftrightarrow [A(\bar{t}) \vee X] \wedge [A(t) \vee \bar{X}].$$

98. ნინაძე-ბაბუნაძის ალგებრის ძირითადი ჭრებულები

ეს A, B და C ნებისმიერი ჭრებულებია, მაშინ იგივეა
 ჭრებულთა შემდეგი ჭრებულები.

1. $A \rightarrow A$. (იგივეობის პრინციპი)
2. $[A \rightarrow B] \wedge [B \rightarrow C] \rightarrow [A \rightarrow C]$. (ჯაჭვური ძაბვა)
3. $[A \rightarrow [B \rightarrow C]] \rightarrow [B \rightarrow [A \rightarrow C]]$. (წანამძღვარა დაძაბა)
4. $[A \rightarrow [B \rightarrow C]] \rightarrow [A \wedge B \rightarrow C]$. (წანამძღვარის იმპორ-
 ტირება)
5. $[A \wedge B \rightarrow C] \rightarrow [A \rightarrow [B \rightarrow C]]$. (წანამძღვარის ექს-
 პორტირება)
6. $[A \rightarrow B] \rightarrow [[B \rightarrow C] \rightarrow [A \rightarrow C]]$ (იმპლიკაციაში ძაბვის
 შემოჭანა)
7. $[A \rightarrow B] \rightarrow [[C \rightarrow A] \rightarrow [C \rightarrow B]]$. (იმპლიკაციაში წანამძ-
 ღვრის შემოჭანა).
- 8_ა. $[A \rightarrow B] \rightarrow [[A \wedge C] \rightarrow [B \wedge C]]$. } (იმპლიკაციაში კონიუნ-
 კციური ნჯვრის შემოჭა-
 ნა)
- 8_ბ. $[A \rightarrow B] \rightarrow [[C \wedge A] \rightarrow [C \wedge B]]$. }
- 9_ა. $[A \rightarrow B] \rightarrow [[A \vee C] \rightarrow [B \vee C]]$. } (იმპლიკაციაში დიზიუნ-
 კციური ნჯვრის შემოჭა-
 ნა)
- 9_ბ. $[A \rightarrow B] \rightarrow [[C \vee A] \rightarrow [C \vee B]]$. }
- 10_ა. $\bar{A} \rightarrow [A \rightarrow B]$. } (წანამძღვრის უარყოფი-
 10_ბ. $A \rightarrow [\bar{A} \rightarrow B]$. } (კვუტრებუი)იმპლიკაციის
 პამტკიცება)
11. $B \rightarrow [A \rightarrow B]$. (იმპლიკაციის პამტკიცე-

$$12. [A \rightarrow B] \rightarrow [\bar{B} \rightarrow \bar{A}].$$

$$13. [A \rightarrow \bar{B}] \rightarrow [B \rightarrow \bar{A}].$$

$$14. [\bar{A} \rightarrow B] \rightarrow [\bar{B} \rightarrow A].$$

$$15. [\bar{A} \rightarrow \bar{B}] \rightarrow [B \rightarrow A].$$

ბა შერევის სამკვი-
ცები

(კონტრადიქცია)

(კონტრადიქცია
კონტრადიქციის
მომხსენებელი)

$$16. A \leftrightarrow A.$$

(ავტოტაუტოლოგია
რეგულარურობა)

$$17. [A \leftrightarrow B] \rightarrow [B \leftrightarrow A].$$

(ავტოტაუტოლოგია
სიმეტრიულობა)

$$18. [A \leftrightarrow B] \wedge [B \leftrightarrow C] \rightarrow [A \leftrightarrow C].$$

(ავტოტაუტოლოგია
ტრანზიტულობა)

$$19. [A \wedge B] \wedge C \leftrightarrow A \wedge [B \wedge C].$$

(ტაუტოლოგია
ასოციატიურობა)

$$20. [A \vee B] \vee C \leftrightarrow A \vee [B \vee C].$$

(ტაუტოლოგია
ასოციატიურობა)

$$21. A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A.$$

(ტაუტოლოგია
კომუტატიურობა)

$$22. A \vee B \leftrightarrow B \vee A.$$

(ტაუტოლოგია
კომუტატიურობა)

$$23. A \wedge [B \vee C] \leftrightarrow [A \wedge B] \vee [A \wedge C].$$

(ტაუტოლოგია
დისტრიბუტიურობა
შეკრების
მომხსენებელი)

$$24. A \vee [B \wedge C] \leftrightarrow [A \vee B] \wedge [A \vee C].$$

(ტაუტოლოგია
დისტრიბუტიურობა
შეკრების
მომხსენებელი)

$$25. A \wedge A \leftrightarrow A.$$

(ტაუტოლოგია
იდეპენდენცია)

პოტენტიზა)

$$26. \quad A \vee A \leftrightarrow A.$$

(შუკრების იდენტიფიკაციის
ბა)

$$27. \quad A \wedge [A \vee B] \leftrightarrow A.$$

(გამრავლების ელემენტარული
რეგულაციის მიმართ)

$$28. \quad A \vee [A \wedge B] \leftrightarrow A.$$

(შუკრების ელემენტარული
გამრავლების მიმართ)

$$29. \quad A \rightarrow [[A \rightarrow B] \leftrightarrow B].$$

$$30. \quad B \rightarrow [[A \rightarrow B] \leftrightarrow B].$$

$$31. \quad \bar{A} \rightarrow [[A \rightarrow B] \leftrightarrow \bar{A}].$$

$$32. \quad \bar{B} \rightarrow [[A \rightarrow B] \leftrightarrow \bar{A}].$$

$$33. \quad B \rightarrow [A \wedge B \leftrightarrow A].$$

$$34. \quad B \rightarrow [A \vee B \leftrightarrow B].$$

$$35. \quad \bar{B} \rightarrow [A \wedge B \leftrightarrow B].$$

$$36. \quad \bar{B} \rightarrow [A \vee B \leftrightarrow A].$$

(იმპლიკაციის, კონიუნქცი-
ისა და დიზიუნქციის
სპეციფიკური შემთხვევა-
ები)

$$37. \quad \bar{\bar{A}} \leftrightarrow A. \quad (\text{ორმაგი უარყოფის კანონი})$$

$$38. \quad A \wedge \bar{A}. \quad (\text{წინააღმდეგობის (უარყოფის) კანონი})$$

$$39. \quad A \vee \bar{A}. \quad (\text{მესამის გამოჩეხვის კანონი})$$

$$40. \quad A \wedge [B \vee \bar{B}] \leftrightarrow A.$$

$$41. \quad A \vee [B \wedge \bar{B}] \leftrightarrow A.$$

$$42. \quad A \wedge B \wedge \bar{B} \leftrightarrow B \wedge \bar{B}.$$

$$43. \quad A \vee B \vee \bar{B} \leftrightarrow B \vee \bar{B}.$$

44. $A \vee B \leftrightarrow \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$.
 45. $A \wedge B \leftrightarrow \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$.
 46. $A \rightarrow B \leftrightarrow \overline{A \wedge \overline{B}}$.
 47. $A \rightarrow B \leftrightarrow \overline{A} \vee B$.
 48. $A \wedge B \leftrightarrow \overline{A \rightarrow \overline{B}}$.
 49. $A \vee B \leftrightarrow [\overline{A} \rightarrow B]$.
 50. $\overline{A \wedge B} \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$.
 51. $\overline{A \vee B} \leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$.
- ($\rightarrow, \wedge, \vee$ ოპერატორებიდან მხოლოდ ერთი ნაცვითი ნებისმიერი ნების გამოსახვა ამ ნაცვითი მეორე ნაწილითა და $\neg$ ოპერატორის დახმარებით)
- (მეორე განის კანონები ანუ $\neg$ ოპერატორის მეშვეობით $\wedge$ და $\vee$ ოპერაციების შეცვლა)

შენიშვნა. (2.1) ზოგჯერ ძალიან, მხოლოდ ერთ-მხოლოდ, რომლის მთავარი ოპერატორია " $\leftrightarrow$ ", შესაბამისად " $\rightarrow$ ", ან ამ მთავარ ოპერატორს შევცვლით " $\leftrightarrow$ ", შესაბამისად " $\rightarrow$ ", მეტამათემატიკური ნიშნით, მივიღებთ ზოგჯერ, შესაბამისად (მეტამათემატიკურ) გამომდინარეობას. ამ ზოგჯერ, შესაბამისად გამომდინარეობებისა, შევინახოთ შესაბამის (მოჭანი) ზოგჯერ სახელწოდებას. ამ შენიშვნას განავრცობთ ნებისმიერ ზოგჯერ შესაბამის ზოგჯერ და ზოგჯერ, შესაბამისად ნებისმიერ ზოგჯერ შესაბამის ზოგჯერ და (მეტამათემატიკურ) გამომდინარეობებზე.

9. ნინაძე და ალექსანდრე ზოგჯერ

იმისა მიხედვით, ან რომელი ზოგჯერ კავშირები მიჩნეული ძირითად ზოგჯერ კავშირებზე ($\vdash$ და $\{ \}$ - ალექსანდრე ზოგჯერ კავშირების სახელით) ჩვენ საუბრე გვაქვს ნინაძე და ალექსანდრე ზოგჯერ. ზოგჯერ და ალექსანდრე ზოგჯერ.

სხვადასხვა ჭორმუღორებზე და ურთი და იგივე აქვს. ჩვენ ფაქტურად
გვეყვანოთ წინადადებათა აღებების რიგ ჭორმუღორებას:

ა) წინადადებათა აღებებს, სადაც ძირითადი ლოგიკური კავშირ-
ება მიჩნეულია $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \vdash$ და $\models$ (უპაანსებელი რის
უწოდება, აგრეთვე, ძირითადი და დამატებითი ლოგიკური კავში-
რებისა).

ბ) წინადადებათა აღებებს, სადაც ძირითადი ლოგიკური კავში-
რებია $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$.

წინადადებათა აღებების ნებისმიერ ჭორმუღორებაში ჭორმუღორის
უნება ცალკეა და ისაღებება ძირითადი ლოგიკური კავშირებით (ძირი-
თადი ლოგიკური კონსტანტების ჩათვლით). ეს ლოგიკური კავშირებს
შორის არ გვაქვს რაღაცეა მეტი ადგილიანი ლოგიკური კავშირები მაშინ
ჭორმუღორის უნებების რეკურსიული განსაზღვრის ჭორმუღორება არ შეი-
ვლება. მაგად შემთხვევაში შევალა დასჭირდება მარტო მე-3 პუნქტი,
რამელიც მაგად შემთხვევაში ასე ჩამოყალიბდება.

3. ეს $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ ჭორმუღორებია, $0 < n \neq 2$ და $\mathcal{C}$ არის
 n -ადგილიანი ლოგიკური ნებართვი, მაშინ $[\neg \mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_n]$ არის ჭორმუღორ

მოცემული წინადადებათა აღებების უწოდება სრული
ფუნქციური სისტემა წარმოადგენდა ამ წინადადებათა აღებების
ჭორმუღორის სახით. ჩვენ ვნახეთ, რომ ბევრად განხილული რიგე სახის
წინადადებათა აღებებს სრულია (ფუნქციონალური სისტემა). ყველა
სრული წინადადებათა აღებებში, უარყოფითი სისტემა უკუვალენსურნი
არის. განხილავთ არასრულ წინადადებათა აღებებებსაც.

უარა ბევრად განხილული ძირითადი ლოგიკური კავშირებისა
იხილავთ სხვა ლოგიკური კავშირებსაც. სინტაქსისათვის განვიხილოთ
ყველა ნულადგილიანი, ურთადგილიანი და რაადგილიანი ლოგიკური
კავშირების სია. ამ მიზნით ჯერ შევადგინოთ ყველა სრული
და რაადგილიანი ლოგიკური კავშირების სია.

ჭანხ ისუხ მრადგილიან კავშირებს, რმელშიც პაიფუანდებიან ურთ-
აბგილიან ან ნუღაბგილიან კავშირებზე. ასევე არაპრუბილუა რრ-
აბგილიანი კავშირი სუღ არის ნ. მახ შორის რრი არც ურთ არგუმენ-
ტზე არაა დამოკიდებული და არგუმენტა მინიშნულაშების ნებისმიერ
წყვილისაშვის ღებულშ მინიშნულაშა ლ-ს, შესაშამისაპ ზ-ს.
შემდგომი რრი მხლოპ პირველ არგუმენტზეა დამოკიდებული, ურთი
მაგანის ჭეშმარიტული მინიშნულაშა ემიხევეა ამ პირველი არგუმენ-
ტის ჭეშმარიტული მინიშნულაშა, მეორისა კი პირველი არგუმენტის
ჭეშმარიტული მინიშნულაშის რრადულია, უკანასკნელი რრი კი ანალო-
გიურად არის დამოკიდებული მხლოპ მეორე არგუმენტზე. ამრიგაპ,
ხსენებული ნ რპერაყიიდან პირველი რრი მუმიივეშ წარმოაგენენ
და მახ როლს წარმატებში ასრულებენ პრპოზიციული კონსტანტები. და-
ნარჩენი რთხიდან რრი რპერაყიის როლს უარყაფის რპერაგორი შესა-
რულებს, უკანასკნელი რრიდან მთავული იგივერი რპერაყიას ურთ-
ურთი არგუმენტის მიმართ და მახ როლს ცვლადში ასრულებენ.
ამიტომ ამ კავშირების შემოჭანა მიმანშენჩონილ არ არის.

მაშასადამე, არსებშიაპ რრადგილიან რპერაყიასა რიცხვი
იქნება $16-6 = 10$ (რთხელებენტიან ჭეშმარიტული მინიშნულაშა
მიმდევრუაშა განსაბღერაჟს რრადგილიან რპერაყიას— ასევე მიმდევ-
რუაშა რიცხვი კი არის 16).

ეს ათი არსებშიაპ რრადგილიანი რპერაყიის ცხრილი ქვემოთ
მოყვმულია შემდგენარაპ: პირველ სვეტში მოყვმულია ლოგიკური
კავშირის აღნიშვნა არგუმენტა აბგილების მიმთებში, რაც ჭირე-
ების დახმარებში ხორციელებმა, მეორე სვეტში მოყვმულია მუ-
როგორ იკითხება ლოგიკური კავშირის გამოყენებში შეპჯენილი
რთული წინადადება (ჭირეებში აღნიშნავენ ცარიელ აბგილებს, სადაც
უნდა იბჟეს რთული წინადადების შემადგენელი წინადადებები),
შესამე სვეტში მოყვმულია ლოგიკური კავშირის გამოყენებში შეპ-
ჯენილი რთული წინადადების ჭეშმარიტული მინიშნულაშა მიმდევრუ-

—V—	—ან— ბნ ორივე ერშადი)	ტეტე	(ბანუყოფელი) ბიბიუნქცია.
←	—, ზუ —	ტეტე	შეზრუნეზული იმპლიკაცია.
→	ზუ —, მაშინ —; — ბან (მაგერიბალურად) ბამბიბინარეზბს —; — (მაგერიბალურად) იმპლიკირეზბს — ბ	ტეტე	მაგერიბალური იმპლიკაცია; (ჭეშმარიტული) პირიბიბი კავშირი.
↔	— მაშინ რა ბიბიბი მაშინ, რიბა —; —(მაგერიბალურად კავშირეზბს — ბ ი	ტეტე	(ჭეშმარიტული) პირიბიბი ორბიბიბი კავშირი; (მაგერიბალური) კავშირ- ეზბიბი.
Λ	— რა —	ტეტე	კონიუნქცია.
Λ̄	— რა — არაბავსეზბიბი	ტეტე	ანტიკონიუნქცია; კონიუნქციის უარყოფა.
↗	— ან —, მაგრამ არა ორივე ერშადი; —(მაგერიბალურად) არა- კავშირეზბიბი — ბ ი	ტეტე	(მაგერიბალური) ანტიკავ- შირეზბიბი; (მაგერიბალური) კავშირ- ეზბიბის უარყოფა; არაკავშირეზბიბი; ბანუყოფელი ბიბიუნქცია.
↘	—, მაგრამ არა —	ტეტე	(მაგერიბალური) ანტიიმპლი- კაცია; არაიმპლიკაცია; (მაგერიბალური) იმპლიკაციის უარყოფა.
↖	არა —, მაგრამ —	ტეტე	შეზრუნეზული ანტიიმპლი- კაცია; შეზრუნეზული არა- იმპლიკაცია; შეზრუნეზული იმპლიკაციის უარყოფა.
—V̄—	არც —, არც —	ტეტე	ანტიბიბიუნქცია; არაბიბიუნქცია; ბიბიუნქციის უარყოფა.

ურთიერთი ძირითადი ლოგიკური კავშირი არის — და ურთიერთი
 ძირითადი კონსტანტა არის $\neg$. მეორე აღნიშვნა Q'_1 -ი. Q'_1
 განსაზღვრის არის წინადადება ატებრა, რომლის ძირითადი მკ-
 რაგორებიც ყველა შემთხვევაში განხილული ლოგიკური კავშირები (2.ი. 10
 არსებითად მრავალფეროვანი ლოგიკური კავშირი და უარყოფის მკრატ-
 რი $\neg$) და $\vdash$ და $\vdash$ კონსტანტები.

წინადადება ატებრის Q'_1 და P'_1 ფორმულირებების (2.ი.
 Q'_1 და P'_1 ლოგიკების) ფუნქციონალური სისტემა ადვილად გამოდგინა-
 რება (3.1) და (6.1) ლოგიკებისა.

წინადადება ატებრის ნებისმიერ ფორმულირებაში შეიძლება
 შემოვიტანოთ ცნებები: ფორმულირების შემთხვევაში ფორმულირების
 მნიშვნელობის მნიშვნელობის ცნებები (ან ყველა
 განსაზღვრული სისტემის) შემთხვევაში ფორმულირების მნიშვნელობის
 ცნებებისა და ნებისმიერად დაკავშირებული ცნებები, შემთხვევაში
 ფორმულირებისა, ნებისმიერად დაკავშირებული ფორმულირების
 ფორმულირებისა, ნებისმიერად დაკავშირებული ფორმულირების
 ფორმულირებისა, ფორმულირების ნებისმიერად დაკავშირებული ფორმულირებისა და
 ა.შ.

P'_1 -ში შეიძლება შემოვიტანოთ მუდმივების ლოგიკური განსა-
 ზღვრებებიც ყველა ის ძირითადი სიმბოლო (ძირითადი ლოგიკური
 კავშირები), რომლებიც Q'_1 -ში არიან P'_1 -ში კი არა. აღნიშნული
 სიმბოლოები განხილვით, როგორც (ფორმულირება) შემთხვევითი სიმ-
 ბოლოები და შემოვიტანოთ $D1-11$ განსაზღვრებები.

$$D1. \vdash \text{ — } \vdash \rightarrow \vdash \quad (1)$$

(აქ გრძელდება " — " ნიშნით იმ აზრით, რომ ამ გრძელ-
 მატიკის მიხედვით სიმბოლო ან სიმბოლოა ურთიერთი და
 მრავალფეროვანი (არის) მისი მარჯვნივ მიმართული ფორმულირების მიხედვით
 აღნიშვნის (შემოკლება): (1) იკითხება ასე: " $\vdash$ არის $\vdash \rightarrow \vdash$ "

ან ასე: " $\vdash$ აღნიშნავს $\rightarrow$ ფორმულას" ან ასე: " $\vdash$ არის $\rightarrow$ ფორმულის $\sigma \tau \theta \rho \gamma \delta \psi \epsilon \eta$ " (D1. ნიშნავს "განსაზღვრება 1-ს". ასევე გაიგება D2 და ა.შ.). D2-11-ში $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$ ნებისმიერი ფორმულებია.

D2. $[\neg \mathcal{A}] \text{ — } \mathcal{A} \rightarrow \perp$.

D3. $[\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}] \text{ — } \neg [\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}]$.

D4. $[\mathcal{A} \vee \mathcal{B}] \text{ — } [\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}] \rightarrow \mathcal{B}$.

D5. $[\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}] \text{ — } [\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}] \leftrightarrow \mathcal{B}$.

D6. $[\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}] \text{ — } [\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}] \wedge [\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}]$.

D7. $[\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}] \text{ — } [\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}] \vee [\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{A}]$.

D8. $[\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{B}] \text{ — } [\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}]$.

D9. $[\mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}] \text{ — } [\mathcal{B} \nrightarrow \mathcal{A}]$.

D10. $[\mathcal{A} \bar{\vee} \mathcal{B}] \text{ — } [\neg \mathcal{A}] \wedge [\neg \mathcal{B}]$.

D11. $[\mathcal{A} \bar{\wedge} \mathcal{B}] \text{ — } [\neg \mathcal{A}] \vee [\neg \mathcal{B}]$.

ამ განსაზღვრებებში შემოჭანრი სიმბოლოებს: $\vdash, \neg, \leftrightarrow, \vee, \wedge, \nrightarrow, \leftrightarrow, \leftarrow, \bar{\vee}, \bar{\wedge}$ უწოდებენ P'_1 ჯგუფის $\sigma \tau \theta \rho \gamma \delta \psi \epsilon \eta$ სიმბოლოებს. მათ უწოდებენ აგრეთვე $\mathcal{P}$ ან $\mathcal{P}'$ სიმბოლოებს (თუ $\mathcal{P}$ ან $\mathcal{P}'$ სიმბოლოებს), ამასთანავე, $\vdash$ -ს უწოდებენ $\mathcal{P}$ ან $\mathcal{P}'$ სიმბოლოებს.

ეს მოჭანრი განსაზღვრებებს შევისწავლოთ, ადვილად გავრ-
მახერებთ, რომ ნათელია განსაზღვრებაში " — " სიმბოლოს
მარჯვნივ და მარცხნივ გვანან Q'_1 ჯგუფის ურთიერთგოქმადოვა-
ნი ფორმულები. ეს უმჯუნველყოფს იმას, რომ ნათელია ნარმოვუ-
ლი $\mathcal{P}$ ან $\mathcal{P}'$ სიმბოლოს მიხედვით იცნოს, რაც ბევრად მინაწერს მას
(იცნოსხმება, რომ ძირითადი $\mathcal{P}$ ან $\mathcal{P}'$ სიმბოლოს არ უცვლით,

წარმოებულ რაქონათა 30 მისი განსაზღვრა ანიჭებს შინაარსს).
 აქვე შევნიშნო, რომ 58-ში მოცემული ფორმულები და სხვა მაგნი-
 ტიკური ფორმულები ფორმულებს წარმოადგენენ ნებისმიერ ისეთ შინა-
 არსულ მაგნიტურ ფორმულაში, რომელიც $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\nwarrow$, $\nearrow$, $\vee$
 სიმბოლოებიდან ნიშნული იმ შინაარსის მქონე (ძირითად ან წარმო-
 ებული) რაქონათა წარმოადგენს, რომელიც ბიძი (I თავში) მივა-
 წერეთ მას (დაამტკიცეთ). იგივე იქმნის ტოლფასობებზე, მაგნი-
 ტიკურ გამოდინარეობებსა და აგრეთვე რიცხვით ფორმულებზე
 (როგორცაა, მაგალითად, მოკლე პრინციპი ნუსი). ურთიერთი ჩამოს
 ნუსი სამართლიანი იქნება მხოლოდ უკანასკნელ ფორმულაში (2.0.
 ისეთ ფორმულაში, რომლის რაქონათა შორის არ გვხვდება უკანას-
 კნელი).

განხილვით განსაზღვრებათა საფუძველზე მიღებულ P_i' ფორმის
 ფორმულები შემოკლებული სახეებს $\rightarrow$ $\leftarrow$ $\nwarrow$ $\nearrow$ $\vee$ $\wedge$ $\oplus$ $\otimes$ $\odot$ $\oslash$
 მიეკუთვნება. ექვსად, $\mathcal{A}$ არის შემოკლებული ფორმულა.
 მაშინ ურთიერთისაგან უნდა განვასხვავოთ შემდეგი გამოთქმე-
 ბის შინაარსი: " $\mathcal{A}$ ფორმულა", "შემოკლებული ფორმულა $\mathcal{A}$ ".
 " $\mathcal{A}$ ფორმულაში" გვემის ის ფორმულა, რომლისთვისაც $\mathcal{A}$ არის
 შემოკლებული სახე; მეორე შემთხვევაში მხედველობაშია შემოკლე-
 ბული გამოსახულება.

განხილვით განსაზღვრებებში მარჯვნივ მოცემულ შემოკლებულ
 ფორმულებში უნდა ვიცულისხმოდ ამ შემოკლებული ფორმულებით აღნი-
 შნული ფორმულები. საბოლოოდ, სადაც საჭიროა აღმოვაჩინოთ არაა ფორმულა,
 მოცემული შემოკლებული ფორმულა უნდა განვიხილოთ, როგორც $\rightarrow$ $\leftarrow$ $\nwarrow$ $\nearrow$ $\vee$ $\wedge$ $\oplus$ $\otimes$ $\odot$ $\oslash$
 (სახეობით ის ფორმულა, რომელიც ამ შემოკლებული ფორ-
 მულითაა აღნიშნული).

გამოცემის სიმართლისათვის შემოკლებული ფორმულის ცნება-
 ში უნდა მოვაქციოთ ფორმულის ცნება — P_i' ფორმის ფორმულა
 ჩავთვლით "შემოკლებული ფორმულა" (სახეობით, ისეთ შემოკლებულ

ფორმულა, რომლის ნისაღებაა გამოყენებული შემამოკლებელი სიმბოლოების რიცხვი არის 0).

აღვიღი დასადახია, რომ P'_1 ჯოროის ნებისმიერი შემოკლებული ფორმულა წარმოადგენს Q'_1 ჯოროის ფორმულას და, პირიქით, Q'_1 ჯოროის ნებისმიერი ფორმულა არის P'_1 ჯოროის შემოკლებული ფორმულა.

P'_1 ჯოროის $\mathbb{C}$ შემოკლებული ფორმულიდან $\mathbb{C}$ ფორმულის აღგება ნის მიზნით შეგვიძლია ვისარგებლოთ შემდეგი აღგორიშით.

შემოკლებული $\mathbb{C}$ ფორმულაში ავიღებ ნებისმიერ წარმოებულ $\mathbb{C}$ რვერატორს მოქმეების მიწმამალური არით (ე.ი. ისეა წარმოებულ რვერატორს, რომლის მოქმეების არეში არ მიყოფება წარმოებულ რვერატორი). ამ რვერატორის შესაბამის ნაწილს ექნება ურ-ურთი შემდეგი სახეეშიდან: $\mathbb{C}, [\mathbb{C}A], [A\mathbb{C}B]$, სადა A და B არიან P'_1 ჯოროის შემოკლებული ფორმულაში (პირველ შემთხვევაში $\mathbb{C}$ არის $\mathbb{C}$, მეორე შემთხვევაში $\mathbb{C}$ არის $\rightarrow$, მესამე შემთხვევაში $\mathbb{C}$ არის რომელიმე რარგოლიანი წარმოებულ ლოგიკური კავშირი). ამის შემდეგ ამ ნაწილს შევყლით შესაბამისი D_i განსაზღვრის მიხედვით $\mathbb{D}$ შემოკლებული ფორმულია (აქ $\mathbb{D}$ შემოკლებული ფორმულის ნაცვლად შეგვადლო აველო $\mathbb{D}$ ფორმულა). ამ გზით მიღებული ფორმულა ბე ვიმოქმეებთ იმავე ნუსით და ა.შ.

ეს პროცესი დასრულებოია. მარტყ, მ ე მ ა მ რ ე ე ბ ე ე ი ს ი მ მ რ ე რ ს (წარმოებულ რვერატორის) ნ რ მ ე რ ი ვუწოდოთ შესაბამისი განსაზღვრის ნომრს. პროცესის დადოვლი მიჯის დროს ირიცებაა ნაწმოებულ რვერატორის რომელიმე შემოსვლა და მის ნაცვლად შემოიჭრება ნული ან რამდენიმე წარმოებულ რვერატორი, რომელაგან დადოვლის ნომერი გამოიციხვლის ნომრებ ნაკლებია. ახლა პროცესის დასრულებადია ავვიღად დამტყიყება შექყვეთი დადენატიკური ინდუქციით $\mathbb{N}$ -ის მიმართ, სადა $\mathbb{N}$ არის ფორმულაში მიყოფი წარმოებულ რვერატორა ნომრების ბაჟსინდუმი.

ადვილი პასანახია, რომ განხილული პროცესის შედეგი გამო-
კვეთილი არაა $\mathcal{C}$ ნაწარმოების შეჩვენებაზე.

განხილული პროცესის მთლიანი ნაბიჯზე ფაქტურად წარმოებს Q'_i ჯგუფის ფორმულაში ჩომეტიზე ნაწილის შეცვლა მისი ზოლ-
ლოვანი (Q'_i ჯგუფის) ფორმულით. აქედან ადვილად გავსკვნი,
რომ P'_i ჯგუფის $\mathcal{A}$ შემოკლებული ფორმულა და $\mathcal{A}$ ფორმულა არიან Q'_i ჯგუფის ურთიერთგოლდალოვანი ფორმულები. ცხადია, აგრევე,
რომ X ცვლადს აქვს შემოსვლა $\mathcal{A}$ შემოკლებული ფორმულაში მაშინ
და მხოლოდ მაშინ, როცა X ცვლადს შემოსვლა აქვს $\mathcal{A}$ ფორმულაში.

Q'_i ჯგუფის ნებისმიერ $\mathcal{A}$ ფორმულას შევსაბამო P'_i ჯგუ-
ფის $\mathcal{A}_i$ ფორმულა, რომელიც ცალსახად ისაზღვრება პირობით: $P'_i -$
ში $\mathcal{A}$ წარმოადგენს $\mathcal{A}_i$ ფორმულის შემოკლებული სახეს (ე.ი. $\mathcal{A}$ არის P'_i ჯგუფის შემოკლებული ფორმულა, რომელიც აღნიშნავს $\mathcal{A}_i$ -ს).
ცხადია, თუ Q'_i ჯგუფის $\mathcal{A}$ ფორმულა ამავე რგოს არის P'_i ჯგუფის
ფორმულა (ე.ი. $\mathcal{A}$ -ში ფრჩხილებისა და ცვლადების გარდა გვხვებ-
და მხოლოდ $\rightarrow$ ნაწარმოები და $\neg$ კონსტანტა), მაშინ $\mathcal{A} = \mathcal{A}_i$.

გეომეტრიკულიდან გამოდინარეობს:

1. $\mathcal{A}$ და $\mathcal{A}_i$ არიან Q'_i ჯგუფის ზოლდალოვანი ფორმულები.

2. $\mathcal{A}$ არის Q'_i ჯგუფის იგივერად ვერმარტივი, შესაბამისად
შესრულებადი, შესაბამისად იგივერად მცდარი, ფორმულა მაშინ და
მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathcal{A}_i$ არის ასევე ფორმულა P'_i ჯგუფისში.

შევნიშნოთ, რომ, უკანასკნელი ზღვრების საფუძველზე,
 Q'_i ჯგუფის ფუნქციონალური სინტაქსიდან ადვილად გამოდინარეობს
 P'_i ჯგუფის ფუნქციონალური სინტაქსი.

მარტლაც, რადგან Q'_i ჯგუფის ფუნქციონალურად სრულა,
ნებისმიერი n -ადგილიანი ჩომეტიშენებლობიანი $F(X_1, \dots, X_n)$ ფუნ-
ქცია წარმოადგენდა Q'_i ჯგუფის რაღაც $\mathcal{A}$ ფორმულით. მაშინ Q'_i
ჯგუფის $\mathcal{A}$ ფორმულის შესაბამისი P'_i ჯგუფის $\mathcal{A}_i$ ფორმულა იქნე-
და F ფუნქციის წარმოადგენა P'_i ჯგუფის ფორმულით.

3. P' არის წინადადება ალგებრის ნებისმიერი ისეთი
 ფორმულირება, რომლის ალგაბეტი P'_1 ჯეორიის ალგაბეტის გაფართო-
 ვბით (ახალი ლოგიკური კავშირების დამატებით) მიიღება (აქ ლოგი-
 კური კავშირთა შორის იტყობინება ნუტარტირანი ლოგიკური კავში-
 რებიც, ე.ი. კონსტანტებიც). P' ჯეორიითი შევნიშვია შევნიშვრ-
 ნით $D_I - D_{II}$ განსაზღვრებებიდან ისინი, რომლებიც განსაზღ-
 ვრავენ P'_1 ჯეორიის იმ წარმოებულ კავშირებს, რომლებიც P' ჯეო-
 რიითი არ გვხვდება ძირითადი ლოგიკური კავშირების სახით (ცხადია,
 შენარჩუნებულ განსაზღვრებებში P' ჯეორიის ყველა ძირითადი კავ-
 რატორი განხილულ უნდა იქნეს როგორც ძირითადი კავრატორი). მაშინ
 ყველაფერი, რაც ბევრთა ვაქვით P'_1 და Q'_1 ჯეორიების ურთიერ-
 კავშირზე, ძირითადად (იმ შემთხვევაში კი, როცა Q' ჯეორიის
 ალგაბეტი P' ჯეორიის ალგაბეტის გაფართოებას წარმოადგენს —
 მთლიანად) ძალაში იქნება P' და Q'_1 ჯეორიების დინამიკა.

ახლა ცხადია, თუ P' არის ნებისმიერი (ფუნქციონალური
 ატრიბუტ) სრული წინადადება ალგებრა, რომლის მთავარი ლოგიკური
 კავშირი Q'_1 ჯეორიის ლოგიკური კავშირის წარმოადგენს, მაშინ P' -
 ში განსაზღვრების დამართებით შეიძლება შემოვიტანოთ ის ლოგი-
 კური კავშირებიც, რომლებიც Q'_1 -ში არიან და P' -ში არ არიან.
 აქ არსებით რთლს დამართებს P წინადადება ალგებრის სისრულე,
 რომლის საფუძველზე ყველგვის მოიძებნება განსაზღვრებისათვის
 საჭირო ღვისების მქონე ფორმულები. საჭიროა:

1. განსაზღვრის რჩივე მხარეში იტყვს Q'_1 ჯეორიის ურთიერ-
 ტრძალვანი ფორმულები, თუ იქ მყოფ ნებისმიერი ფორმულების აღმნი-
 შვნელი მუტაცელებს მივიჩნივთ პრპოზიციულ ცვლადად.

2. წ წარმოებულ n -ადგილიანი ლოგიკური კავშირის განსაზ-
 ღვრების დარცხენა მხარეს უნდა ვქონდეს ან $[A_1, \dots, A_n]$, ან
 $[A_1, A_2]$ სახე იმისდა მიხედვით $n \neq 2$ თუ $n = 2$ (სადაც
 $A_1, \dots, A_n$ ნებისმიერი ფორმულები აღმნიშვნელი მუტაცელებია).

ამასთანავე, მარჯვენა მხარე არის ჭორბულა, რომელოც შეიძლება მხოლოდ და მხოლოდ იმავე (ნებისმიერ ჭორმულეების აღმნიშვნელი) ნიშანსაცვალდეს.

3. განსაზღვრის მარჯვენა მხარეში შეიძლება იმყოფებოდნენ მხოლოდ წინა განსაზღვრებები შემოტანილი წარმოებული ლოგიკური კავშირები.

4. განსაზღვრების მარჯვენა მხარე არ უნდა შეიცავდეს პროპოზიციული ცვლადებს, როცა $n \neq 0$.

სასურველია უკანასკნელი პირობა სრულდებოდეს $n=0$ შემთხვევაშიც და ეს ადვილად ხორციელდება, როცა ძირითადი ლოგიკური კავშირებს შორის იმყოფება $\vdash$ ან $\nmid$. წინააღმდეგ შემთხვევაში $\vdash$ და $\nmid$ კონსტანტებს საბჭოერავენ, მაგალითად, ასე:

$$\vdash \text{ — } [p \rightarrow p]; \quad \nmid \text{ — } [p \leftarrow p] \quad (1)$$

(ამ შემთხვევაში 4-ე პირობის შესრულება $n=0$ - ღვის შეუძლებელია).

მუ 1 — 4 პირობებთან ერთად შესრულებულია მე-4 პირობა $n=0$ შემთხვევისთვისაც, მაშინ P' ლოგიკის მოცემული $\mathcal{A}$ ჭორბულაში და მის ნებისმიერ შემოკლებულ სახეში ერთი და იგივე პროპოზიციული ცვლადები გვექნება. ეს ასე არ იქნება, როცა უსაზღვროდ (1)-დან აღებული ერთი განსაზღვრით მაინც. ამიტომ, მუ P' ლოგიკის ძირითადი ლოგიკური კავშირებს შორის არც ერთი კონსტანტა არ არის, მაშინ კონსტანტას არ შემოიჭანენ ხოლმე წარმოებული ლოგიკური ნაწარმოები.

აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ მუ P' წინადადებათა აღებრათი კონსტანტები წარმოებული ნაწარმოებებს წარმოადგენენ (და ისინი (1) ჭორბულები ისაზღვრებიან), მაშინ P' ლოგიკის $\mathcal{A}$ ჭორბულის $\mathcal{A}_1$ შემოკლებული სახეს შეიძლება ექნეს დამატებითი ცვლადები, მაგრამ $\mathcal{A}_1$ -ის ყველაზე მნიშვნელოვანი, როცა იგი განიხილება როგორც Q_1' -ის ჭორბულა, დამოკიდებული არ იქნება ხსენებული

დამატებული ცვლადების მნიშვნელობები.

შემდეგში "წინადადებათა აღებრის" ქვეშ წყველების, სადაც
საწინააღმდეგო არ იქნება ზემოთ, ვიკლასებზე უნდა ჩამოვიყალიბოთ
 P' სრულ წინადადებათა აღებრის, რომლის ძირითადი და წარმოებ-
ლი თავისებურების სისტემა შემდეგაა Q'_1 -ის თავისებურება სისტემის.
გარდა ამისა ვისარგებლებთ ტერმინებით: "უ ა ნ ს ტ ა ნ ტ ი
წ ი ნ ა პ ა ე ე ბ ა თ ა ა ლ გ ე ბ რ ა" და "წ ი ნ ა პ ა-
ე ე ბ ა თ ა ა ლ გ ე ბ რ ა ა ნ ს ტ ა ნ ტ ი თ". ამასთან-
დავე ვიკლასებთ, რომ ორივე ტერმინი აღნიშნავს სრულ წინა-
დადებათა აღებრის, რომლის არანაღიარებელი ძირითადი და წარმო-
ებლი თავისებურება სისტემა შემდეგაა Q'_1 ზეოროს არანაღიარებ-
ლი თავისებურება სისტემის—მხოლოდ პირველ შემთხვევაში პრეპო-
ზიტი კონსტანტები არ გვექნება არც ძირითადი კონსტანტის სახით
და არც წარმოებლი კონსტანტის სახით, მეორე შემთხვევაში კი
გვექნება ორივე პრეპოზიტი კონსტანტა, რომელთაგან უნდა მან-
ძირითადი (ზუ მეორე წარმოებლი პრეპოზიტი კონსტანტა, მაშინ
მისი განსაზღვრა ავსოვთ იღებს მე-4 პირობას $n=0$ - ზეის).

გვქვას, P' არის წინადადებათა აღებრის ან წინადადებათა
აღებრის უკონსტანტო. P' ზეოროს ზოგადი და შემდარსული მნიშ-
ვნელობის გამოანგარიშების დროს, როცა ეს ზოგადი შემოკლებლი
სახითაა მოცემული, შემოვიძლია შემოკლებლი ზოგადი მივიჩნიოთ
 Q'_1 ზეოროს ზოგადი და გამოვიანგარიშოთ მისი შემდარსული
მნიშვნელობა Q'_1 -ში.

ნებისმიერ P' წინადადებათა აღებრის ან უკონსტანტო წინა-
დადებათა აღებრის წარმოებლი თავისებურების განსაზღვრა სხვადასხვა
გზით შეიძლება იყოს მოცემული. საჭიროა ამ განსაზღვრებებს უმარ-
ტივსი სახე პირობე და თავიდანვე იყონ დაფიქსირებული.

არასრულ წინადადებათა აღებრის შემოკლებლი გზით
განხილული ყველა ლოკური კავშირის შემოგანა წარმოებლი ლოკური

კავშირებად, რადგან პატერნი უნდა იყოს პირიდან იმის შესახებ, რომ ნარმოებზე ლოგიკურ კავშირის განსაზღვრებაში მარჯვნივ და მარცხნივ მოთავსებული ფორმულები (ე.ი. ფორმულა და მისი შემოკლება) ზოლდალვანნი უნდა იყოს Q_i' ჟოურიადი, რაც განსაზღვრებაში მყოფ ნებისმიერ ფორმულაში პრეპარაციულ ცვლაებად მივიჩნევთ.

შენიშვნა ორპერატორის შესახებ. ჩვენ გეგმავთ უნიკალური ურთიერთორპერატორი $\wedge, \vee$ და $\neg$ ნებისმიერს და ურთიერთორპერატორი კონსტანტების t, f ნებისმიერს. Q_i' ჟოურიადი მათემატიკური ლოგიკური კავშირის აქვს ორპერატორი ლოგიკური კავშირი. სახელობრ, Q_i' ჟოურიადი გვექნება ურთიერთორპერატორი $\wedge, \vee$ და $\neg$ ნებისმიერს:

$(t, f), (\neg, \neg), (\leftrightarrow, \rightarrow), (\wedge, \vee), (\leftrightarrow, \leftrightarrow), (\leftrightarrow, \leftrightarrow), (\bar{\vee}, \bar{\wedge}).$

ასევე იმისა განსაზღვრავთ ორპერატორი $\wedge, \vee$ ნებისმიერს მიმართ გვექნება ურთიერთორპერატორი ფორმულაში ცნებები და პარამეტრები 54-ში განხილული ჟოურიადი სრული ანალიტიკი.

§ 10. პრეპარაციების ლოგიკა

ჩვენ გავყავთ ჟოურიადს, რომელსაც წინადადება ალგებრის სხვადასხვა ფორმულირებაში ვუწოდებთ.

მოცემული ჟოურიადის ძირითადი სიმბოლოა სისტემის ამ ჟოურიადის ალგებრის უწოდებენ.

პრეპარაციების ლოგიკის ცნებას ჩვენ შემოვიტანთ ალგებრის ბიზი მიზნების გამოყენებით.

პრეპარაციების ლოგიკა არის ნებისმიერი ჟოურიადი ჟოურიადი გარკვეული კლასიდან. ხსენებული კლასიდან აღებული ჟოურიადს ჩვენ ურთიერთორპერატორი განვასხვავებთ, როგორც პრეპარაციების ლოგიკის სხვადასხვა ფორმულირებაში. პრეპარაციების ლოგიკის მათემატიკური ფორმულირების ალგებრის მიზნება წინადადება ალგებრის რომელიმე ფორმულირების ალგებრის გადართობით ან

ასეთი გაფართოების შედეგად მიღებული აღფაშვიტებანი პროპოზიციული ცვლილებების ამოგდება.

ისევე როგორც წინადადებათა აღებრას (წინადადებათა აღებრ-
რის ნებისმიერ ფორმულირებას), პრედიკატების ლოგიკას საქმე აქვს
წინადადებათა გარკვეულ კლასთან და ამ კლასიდან აღებული თხროველი
წინადადებათა ისილავს იმ ღვაღსაზრისი, რომ იგი წარმოადგენს
ჭეშმარიტს ან მცაარს (წინადადებათა ამ კლასში 'შესრულებულია
წინააღმდეგობის კანონი და მესამის გამორიცხვის კანონი'). მაგრამ
წინადადებათა აღებრის შემხხვევისასგან განხხვევები, პრედიკატ-
ბის ლოგიკის წინადადებაში არ წარმოადგენენ განუყოფელი ობიექტებს.
აქ წინადადება ნაწევრება წინადადებათა გამოხატული მსჯელობის
საგნება და პრედიკატა: პრედიკატების ლოგიკის წინადადებათა
კლასის ელემენტები წარმოადგენენ წინადადებას საგნების შესახვა.
ეს საგნები წინადადებაში წინადადებათა გამოხატული მსჯელობის
საგნების როლი გვევლინებიან. აღნიშნული საგნები აგვინესაგნ-
თა K სისტემას, რომელსაც $s, a, g, a, n, t, a, a, r, g, s$ უწოდებენ.
აქ პრედიკატი ანუ მიმარება შეიძლება იყოს n -ადგილიანი
($n = 1, 2, \dots$). იგი წარმოადგენს K არზე განსაზღვრული n ადგილიანი
მიმარებას. პროპოზიციული ცვლი და პროპოზიციული კონსტანტა
შეგვიძლია განვიხილო, აგრევე, როგორც K არზე განსაზღვრული
ნულადგილიანი პრედიკატი—ნულადგილიანი მიმარება. ასევე შემხხვევა-
ში პროპოზიციული ცვლი იქნება მის მნიშვნელობაზე გამოკრებული
ნულადგილიანი პრედიკატი.

პრედიკატების ლოგიკაში იტულისხმება, რომ საგანთა არე
ფიქსირებულია, მაგრამ იგი კონკრეტლად მოცემული არარის უკანას-
კნელი გარემოებას დიდი მნიშვნელობა აქვს პრედიკატთა ლოგიკის
გამოყენების ღვაღსაზრისი. მათემატიკის მოცემული დარგში პრედი-
კატთა ლოგიკის გამოყენების მიზნი, უპირველეს ყოვლისა, უნდა
მივიჩნიოთ, რომ აღნიშნული მათემატიკური დარგის საგანთა არე არის

აწეროკატეზის ლოგიკის საგანთა K არე.

მაგალითისათვის, განვიხილოთ F_2^{01} აწეროკატეზის ლოგიკა, რომლის აღფაბეჭი შედგება შემდეგი სიმბოლოებისაგან:

1. ფრაზიილები: $[,]$;
2. არაპოზიციული კონსტანტები: t , f ;
3. არაპოზიციული ცვლადები $p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, \dots$;
4. ლოგიკური კავშირები: $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$;
5. ლოგიკური რაერაჭოოელი ნიშნები $\exists , \forall$;
6. საგნობრივი ცვლადები: $x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, \dots$;
7. n -აგრილიანი აწეროკატეზი ცვლადები ($n=1,2,\dots$):
 $p_0^n, p_1^n, p_2^n, \dots$;
8. n -აგრილიანი კონსტანტა-აწეროკატეზი ($n=1,2,\dots$);
9. საგნობრივი კონსტანტები.

F_2^{01} არის აწეროკატეზის ლოგიკის ნებისმიერი ფორმულირება აწეროკატეზის ლოგიკის ფორმულირებათა იმ კლასიდან, რომლებსაც მივიღებთ 8 და 9 პუნქტების შესაბამის სიმბოლოთა სხვადასხვა-გვარად შემოჭანით (ამ სიმბოლოთა რიცხვი შეიძლება იყოს ნული).

P_2' -ით აღვნიშნოთ წინადადებათა აღცებრის ის ფორმულირება, რომლის აღფაბეჭია 1-4 პუნქტებში მოცემული სიმბოლოები. ამრიგად, F_2^{01} აწეროკატეზის ლოგიკის აღფაბეჭი P_2' წინადადებათა აღცებრის აღფაბეჭის გაფარაოებას წარმოადგენს.

n -აგრილიანი აწეროკატეზი ცვლადი წარმოადგენს ცვლადს, რომლის მნიშვნელობათა სიმრავლეა საგანთა K არეზე განაბღე-რული n -აგრილიან მიმარაბებათა (n -აგრილიან აწეროკატეზთა) კლასი. თითოეული n -აგრილიანი აწეროკატეზი კონსტანტა ამ კლასის ფიქ-სირებულ ელემენტს აღნიშნავს. საგნობრივი ცვლადი წარმოადგენს ცვლადს, რომლის მნიშვნელობათა არეა საგანთა K არე. საგნობრივი კონსტანტა K -დან აღებულ ფიქსირებულ საგანს აღნიშნავს. რაგან საგანთა K არე კონერეფლად არაა მოცემული, ამიტომ საგნობრივი

ერში და იტოვებ ცვლადი შეიძლება იყოს $\mathcal{A}$ ფორმულის თავისუფალი ცვლადი და რამდენი ცვლადიც.

მაგალითი:

$$[\exists x[p_1^2xy]] \rightarrow \forall y[p_1^3xyz] \quad (1)$$

ფორმულაში x -ის პირველი ორი შემოსვლა რამდენია, მესამე შემოსვლა კი — თავისუფალი. მაშასადამე x არის (1) ფორმულის თავისუფალი ცვლადი და რამდენი ცვლადიც.

მე F_2^0 ჯეროის $\mathcal{A}$ ფორმულა ამავე ირის არის P_2' ჯეროის ფორმულა, მაშინ რამე ცვლადის ნებისმიერი შემოსვლა $\mathcal{A}$ -ში ნარმოადგენს ამ ცვლადის თავისუფალ შემოსვლას $\mathcal{A}$ -ში.

ისევე როგორც წინაპაღებაში აღვძრაში ფორმულა განიხილება როგორც ამ ფორმულაში მყოფი (თავისუფალი) ცვლადის მნიშვნელობა — და სისტემაზე რამოკიებელი წინაპაღება (და ეს წინაპაღება აღნიშნავს ჭეშმარიტს ან მცდარს), F_2^0 პრეიკაგების ლოკის მთელი ფორმულა უნდა განვიხილოთ, როგორც მასში მყოფი თავისუფალი ცვლადის მნიშვნელობა და სისტემაზე რამოკიებელი წინაპაღება. მე ეს $\mathcal{A}$ ფორმულა შეიცავს ისევე საგნობრივ ასოებს, რომლებიც რამდენი არ არის, მაშინ $\mathcal{A}$ ფორმულა უნდა განვიხილოთ როგორც წინაპაღება K -დან აღებული იმ საგნების შესახებ, რომლებიც ხსენებული საგნობრივი ასოების მნიშვნელობებს წარმოადგენენ. ამასთანავე, პრეიკის, რომელიცაა მთელი $\mathcal{A}$ ფორმულას მიეწერება ჭეშმარიტის მნიშვნელობა მისი თავისუფალი ცვლადის მნიშვნელობა და ნებისმიერი სისტემის, ბუნებრივად გამოიხილავს კვანტრების, ლოკური კავშირების, საგნობრივი კონსტანტებისა და კონსტანტა-პრეიკების (სა-განა K არის შერჩევის შემდეგ) შინაარსის განსაზღვრად.

წინა აბაყში აღნიშნულიდან და კვანტრების შინაარსის განსაზღვრად გამოიხილავს:

მე $\mathcal{A}$ არის პრეიკების ლოკის ფორმულა და a არის საგნობრივი ცვლადი, მაშინ $\forall a \mathcal{A}$, შესაბამისად $\exists a \mathcal{A}$, უნდა

განვიხილოთ როგორც $\mathcal{A}$ ფორმულის $\mathcal{A}$ - გან განსხვავებული თავისუფალი ცვლადების მნიშვნელობათა სისტემაზე დამოკიდებული წინადადება, რომელიც იწვევსა ჭეშმარიტად, მაშინ $\mathcal{A}$ მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathcal{A}$ -ს ყოველი, შესაბამისად $\mathcal{A}$ რეზიუმე $\mathcal{A}$, მნიშვნელობებისათვის $\mathcal{A}$ არის ჭეშმარიტი (იგულისხმება, რომ განარჩენი ცვლადების მნიშვნელობები დაფიქსირებულია და, ამანაშენავე განსაზღვრულია $\mathcal{A}$ ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობის ცნება მისი თავისუფალი ცვლადების მნიშვნელობათა ნებისმიერ სისტემისათვის).

შევიხილოთ, რომ იმ შემთხვევაშიც, როცა თითოეული კონსტანტა-პრედიკატის მნიშვნელობათა გამოთვლის ალგორითმი სახეება, არ არსებობს (საზოგადოებრივ) პრედიკატთა ლოგიკის ფორმულის ჭეშმარიტული მნიშვნელობების გამოთვლის ალგორითმი ვისი ცვლადების მნიშვნელობათა ისეთი სისტემებისათვისაც კი, რომლებშიც თითოეული ცვლადი-პრედიკატის მნიშვნელობის (იპერსტრუქტურის) მნიშვნელობათა გამოთვლის ალგორითმი სახეება. თუ, გარდა აღნიშნულისა, დამატებით მოვიხილოთ, რომ K არე სასრული იყოს, მაშინ ადვილად შეიძლება ასეთი ალგორითმის მოძებნა. იმ შემთხვევაშიც, როცა K უსასრულოა, ფორმულის მნიშვნელობის მოძებნის ამოცანა ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში დადებითად წყდება.

მაგალითი: განვიხილოთ ფორმულა

$$[\forall y [\exists x F^2(x, y)]] \rightarrow H^2(x, y). \quad (1)$$

ვიგულისხმობთ, რომ K არის ნამდვილი რიცხვთა სიმრავლე. მაშინ (1) ფორმულა მისი x, y, F^2, H^2 თავისუფალი ცვლადების მნიშვნელობათა $(5, 6, =, >)$ სისტემისათვის არაა მცხარე, $(6, 5, =, >)$ სისტემისათვის კი-ჭეშმარიტი.

რადგან პრედიკატების ლოგიკაში საგანთა K არე კონკრეტულად მოცემული არაა, ამიტომ რიგი ცნებებისა და ჭრამინებების შენაარსი, რომლებიც შემოვიტანეთ კონკრეტულად მოცემული საგანთა არის მქონე ლოგიკისათვის, უნდა მოიპოვებოდეს. ასეთი ჭრამინებია: ლოგიკა,

იგივეურად ჭეშმარიტი ფორმულა, ტოტალოვდება, შესრულებადია და
 ა.შ. ამ ტერმინების ნაცვლად ბოტიერმა კერძო შემთხვევაში სარგებ-
 ლობენ ტერმინებით, რომელთა მიხედვად საკმარისია აღნიშნულ ტერ-
 მინებს დაემატოს რამაზუსტებელი ფრაზა "K ა რ ე თ ი" ან "K
 ა რ ი ს მ ი მ ა რ ლ". იყენებენ აგრეთვე იგივე ტერმინებისავე,
 მაგრამ განსხვავებული აზრით.

F_2^{*1} -ით აღვნიშნოთ ნებისმიერი ისეთი პრეიკავტების
 ლოკუსი, რომლის კონსტანტა-პრეიკავტები განსაზღვრულა ნებისმიერ
 K საგანთა არისათვის და, ამასთანავე, მისი აღფაშვტი არ
 შეიცავს საკონტრინივ კონსტანტებს. F_2^{*1} ლოკუსში ხელსაყრელია
 შემდეგ ცნებათა შემოტანა. **ა** ფორმულას ეწოდება ი გ ი ვ უ -
 რ ა პ შ ე მ ა რ ი ტ ი ფ რ მ ი უ ლ ა (მოცემული ფიქ-
 სირებული) K ა რ ი ს მ ი მ ა რ ლ (K ა რ ე თ ი), შესა-
 ბამისად ი გ ი ვ უ რ ა პ მ ც რ ა რ ი ფ რ მ ი უ ლ ა K
 ა რ ი ს მ ი მ ა რ ლ, ან მისი ჭეშმარიტული მნიშვნელობა მასში
 მყოფი ძველსუფალი ცვლადების მნიშვნელობათა ყოველი სისტემისა-
 ლის არის $\pm$, შესაბამისად $\pm$, (იგულისხმება, რომ აღნიშნული
 ძველსუფალი ცვლადების მნიშვნელობათა არეები განსაზღვრულია K
 არის მოცემით). **ა** ფორმულას ეწოდება თ ე ს რ უ ღ ე ბ ა პ ი
 K ა რ ი ს მ ი მ ა რ ლ, ან მისი ჭეშმარიტული მნიშვნელო-
 ბა არის $\pm$ მასში მყოფი ძველსუფალი ცვლადების მნიშვნელობათა
 ერთი სისტემისათვის მანის. **ა** ფორმულას ეწოდება ი გ ი ვ უ -
 რ ა პ შ ე მ ა რ ი ტ ი, შესაბამისად ი გ ი ვ უ რ ა პ
 მ ც რ ა რ ი, შესაბამისად თ ე ს რ უ ღ ე ბ ა პ ი, ან იგი
 არის იგივეურად ჭეშმარიტი, შესაბამისად იგივეურად მცდარი, შესა-
 ბამისად შესრულებადი, ფორმულა ყოველი არაყარველი K არის მიმართ.
ა ფორმულას ეწოდება ლ ე რ ე მ ა K ა რ ი ს მ ი მ ა რ ლ, ან
 ან იგი არის იგივეურად ჭეშმარიტი K არის მიმართ და შეგვიძლია
 ამ ფაქტის რამდენიმე. **ა** ფორმულას ეწოდება ლ ე რ ე მ ა,

ალფაბეტის ალფაბეტში ან სპეციალურ პარტისაშვილის დამახასიათებელი
 სპეციალური მკერდადგომები. სპეციალური მკერდადგომები (ისევე როგორც
 ლოგიკური მკერდადგომები) შეიძლება იყოს $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega$. სპეციალური მკერდადგომების არსებობა
 (მინიპარაფრაზები) იმისა და მიხედვითაა ისინი სუბსტანციური არიან თუ
 რელიატიური. სპეციალური მკერდადგომები შეიძლება იყოს n -ადგი-
 ლიანი ($n = 1, 2, \dots$). ამასთანავე ისინი შეიძლება იყოს კონსტან-
 ტური და ცვლადი. ცვლადი n -ადგილიანი სუბსტანციური სპეციალ-
 რი მკერდადგომი არის ცვლადი, რომლის მინიპარაფრაზა არა არის $K \rightarrow K$
 ტიპის ყველაზე განსაზღვრული n -ადგილიანი ფუნქციაა სიმრავლე,
 n -ადგილიანი სუბსტანციური კონსტანტა-მკერდადგომი კი ამ სიმრავ-
 ლის ფიქსირებულ ელემენტებს უნდა აღნიშნავდეს. პრედიკატები რელა-
 ტიური სპეციალური მკერდადგომის წარმოადგენენ. ამიტომ დამატებით
 (სპეციალური პარტისაშვილის დამახასიათებელი) რელიატიური სპეციალ-
 რი მკერდადგომები შეიძლება იყოს მხოლოდ კონსტანტა-პრედიკატები.

n -ადგილიანი სპეციალური სუბსტანციური, შესაბამისად რელა-
 ტიური, ცვლადებს და კონსტანტებს n -ადგილიანი $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega$
 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega$

სპეციალური ლოგიკებში ბოლომდე რაპროდუცირებადი მკერდადგომის
 ნიშნული $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega$ მიიჩნევენ (მათი რიცხვი შე-
 საძღვაა ნულიც იყოს). იქ, სადაც საინტინსიტივო არ გამოიყენება
 კონტრაქტუალური ვიკტორიზაცია, რომ მიიჩნეული მკერდადგომია მხოლოდ
 და მხოლოდ რაპროდუცირებადი მარტივი სპეციალური კონსტანტა-მკერდადგომ-
 ბი და რაპროდუცირებადი ლოგიკური კავშირები. ისევე სპეციალური ლოგიკებში,
 სადაც მიიჩნეული მკერდადგომის რიცხვი ნულია, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega$
 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega$ ცნებები ისევე შემოიჭანება,
 როგორც S_1 ლოგიკაში (იხ. I, §2). ბოლო შემთხვევაში საჭიროა

§11. **ფორმალური და ანაფორმალური ანუ შინაარსული**

თეორიები. წინადადებათა ალგებრის ფორმალიზაცია

ჩვენ გავეცანიმ სრული წინადადებათა ალგებრის სხვადასხვა ფორმულირებებს და ვნახეთ, რომ წინადადებათა ალგებრის ეს ფორმულირებები არიან კვტივალენტური გარკვეული ამრით.

სრული წინადადებათა ალგებრის ერთ-ერთი ფორმულირების, სახელმძრ P_2' თეორიის, ძირითადი სიმბოლოები იყვნენ **არაბი-ციული ცვლადები** და

$[,], \wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \vdash, \{$

სიმბოლოები. **თითოეული აღნიშნული სიმბოლოს გარკვეული შინაარსი** აჩსი კონდა: $\vdash$ და $\{$ კონსტანტები შესაბამისად აღნიშნავენ ვეშეშარიტად და მცარად მოებულ განსაზღვრულ ამსტრაქტული რბიეეებს, **არაბიციული ცვლადები** წარმოადგენენ ცვლადებს მნიშვნელობათა $\{ \vdash, \{ \}$ არით, $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ სიმბოლოები აღნიშნავენ გარკვეული შინაარსის რვერაციებს, **ფრჩხილები** კი გამოიყენებოდა იმ მიმნი, რომ ნათელი ყოფილიყო ფორმულიში მყოფი ამა თუ იმ რვერაციის მოქმეების არე და რვერაციათა წარმოების მიმდევრობა.

ამრიტად, წინადადებათა ალგებრა წარმოადგენს თეორიას, რომლის აღფაშვტის სიმბოლოებს განსაზღვრული შინაარსი აქვთ. ამიტომ წინადადებათა ალგებრას (წინადადებათა ალგებრის თითოეული ფორმულირებას) შინაარსი აჩსი (შინაარსის მქონე) თეორია სუწოდენ. იტივე ითქმის პრეიკატების ლტიკასა და სხვა სპეციალურ თეორიებზე, რომლებზეც ბემოთ გვეონდა ლპარაკი.

არსებობენ ისეთი მათემატიკური თეორიები, რომლის აღფაშვტის სიმბოლოებს არავითარი შინაარსი არ აქვთ—ისინი არაფერს არ აღნიშნავენ. შესწავლის რბიეეებშია არა საგნები, რომლებიც თავის მხრივ თეორიის აღფაშვტის სიტყვებში აღნიშნებშიან, არამედ ხსენებული აღფაშვტის სიმბოლოები და ამ სიმბოლოებში შეტენილი

სხვადასხვა სახის ფ რ მ ა ლ უ რ ი რ ბიუჯეტი (სიყვავილი, სიყვავილი მიმდევრობები და ა.შ.). ამასთანავე, შეესაუბრა წარმო-
ვებს არა ძირითად სიმბოლოებად შედგენილი სიყვავილით აღნიშნულ
ბიუჯეტითა და სხვადასხვა განმარტებით, არამედ
სპეციალური წესებით, ე.წ. ფ რ მ ა ლ უ რ ი ა ქ ს ი მ ი ე-
ბ ი მ და გ ა მ ი მ ე ვ ა ნ ი ს წ ე ს ე ბ ი მ, რომელთა
შემოთავაზება ფ რ მ ა ლ უ რ ა პ (შინაარსზე დაყრდნობის გარეშე)
წარმოებს.

ასეთი შემთხვევა ფ რ მ ა ლ უ რ ს უნდადგინდეს, შინაარსზე
შემოთავაზებას, აგრეთვე, ა რ ა ფ რ მ ა ლ უ რ მ ე რ ი ე ბ ი ს
უნდადგინდეს.

ფორმალური შემთხვევაში საქმედო გეგმის შემდგომ ძირითად მიმდინ-
აობაში.

შესაძლებელია ძირითადი ბიუჯეტი და ძირითადი ფორმალური სიმ-
ბოლოები (რომლებიც აგრეთვე ფორმალური შემთხვევის აღგებებს), ასეთ
სიმბოლოება (სასრული) მიმდევრობები (ფ რ მ ა ლ უ რ ი ს ი მ-
ე ვ ა ე ბ ი ანუ ფ რ მ ა ლ უ რ ი გ ა მ ი მ ს ა ხ უ ლ ე ბ ე-
ბ ი) და ასეთი მიმდევრობა და მიმდევრობები. ზოგჯერ (ფორმალური)
სიყვავილი მიმდევრობა ფ რ მ ა პ, ზოგჯერ — ფ რ მ უ ლ ა პ
(არსებობენ ისეთი (ფორმალური) სიყვავილით, რომლებიც არც ზოგჯერ
და არც ფორმალური). სპეციალური განსაზღვრით გამოყოფენ ა ქ ს ი-
მ ი ე ბ ა პ წოდებულ ფორმალურ და კლასს. ფორმალურ და ზოგჯერ მიმ-
დევრობას უნდადგინდეს (ფ რ მ ა ლ უ რ ი) პ ა მ ი მ ე ვ ა ნ ი ე ბ ა.
პამიტიკება იმდენად იმის უკანასკნელი ნაწილი (ფ რ მ ი უ ლ ი ს)
პ ა მ ი მ ე ვ ა ნ ი ე ბ ა. ფორმალურ და უნდადგინდეს (ფ რ მ ა ლ უ რ ი)
მ ე რ ი ე ბ ა მუ მას აქვს (ფორმალური) პამიტიკება. ფორმალურ
ესა მუ ი ს მიმდევრობა არის მუ არა (ფორმალური) პამიტიკება განი-
საზღვრება აქსიომებით და სპეციალური ე.წ. გ ა მ ი მ ე ვ ა ნ ი ს
წ ე ს ე ბ ი მ.

აქ ჭერმინი მიმდევრობა იხმარება არა ჩვეულებრივ მათემა-
ტიკაში ცნობილი აბრეშ (არა როგორც ნატურალური რიცხვის ფუნქცია),
არამედ, მაგალითად, სიმბოლოთა მიმდევრობის ქვეშ იტყობისხმება
ჯრთმეორის გვერდით სტრიქონში დაწერილ (ფორმალურ) სიმბოლოთა-
გან შედგენილი გამოსახულება.

თითოეული გამოსვანის α ნუსი განსაზღვრავს, თუ რა
შემთხვევაში იხველება ქვეშარითაპ შემდეგი ტიპის წინადადება:
" $A_1, \dots, A_n$ ფორმულაშიდან გამომდინარეობს A ფორმულა",
სადაც n არის α გამოსვანის ნუსზე დამოკიდებული ნატურალური
რიცხვი. თუ $A_1, \dots, A_n, A$ ისეთი ფორმულაა, რომ წინადადება
" $A_1, \dots, A_n$ ფორმულაშიდან გამომდინარეობს A " არის ქვეშა-
რიტი α გამოსვანის ნუსის მიხედვით, მაშინ ამბობენ, რომ " A
ფორმულა გამომდინარეობს $A_1, \dots, A_n$
ფორმულაგან α გამოსვანის ნუსის
მიხედვით ". ამ შემთხვევაში ამბობენ, აგრეთვე, რომ " A
არის უშუალოდ $A_1, \dots, A_n$ წინადა-
დებებიდან (ფორმულაგან).

დამტკიცების ცნება ისაზღვრება შემდეგნაირად.

ფორმულათა $B_1, \dots, B_m$ მიმდევრობას ეწოდება დამტ-
კიცება, თუ თითოეული i -თვის, $1 \leq i \leq m$, შესრულებულია
ერთი მანძი შემდეგი პირობებიდან:

1. B_i არის აქსიომა;

2. B_i არის უშუალოდ დასკვნა $B_1, \dots, B_m$ მიმდევრობაში
მის წინ მდებარე ერთ ან რამდენიმე ფორმულიდან.

ფორმალური თეორიის ენას ეწოდება ფორმალური
ენა. ფორმალური თეორია, ისევე როგორც შენაარსული (მათემატი-
კური) თეორიები, შეიძლება მეტათეორიის გამოსვნიით. ფორმა-
ლური თეორიის მეტათეორია ისევე ისაზღვრება, როგორც შენაარსული
თეორიის მეტათეორია. ფორმალური თეორიის მეტათეორია ჩვეულებრივ

ქინაპრუსი და ზოგადი ნარმედიკანი, რამელიც შეესაბამება მრავალჯერ
გორმალური ზოგადი გორმალური გორმალური.

[illegible][illegible][illegible]

მისი ფორმალური ღეოგრაფიის შექმნა. ასევე შემთხვევაში მოცემული თი-
ნაარსული ღეოგრაფიის უმრავლეს შემთხვევაში ფორმალური ღეოგრაფიის ნა-
გული ნაწილია.

ამრიგად, მოცემული შინაარსული ღეოგრაფიის ფორმალური ნაწილი, უმრავ-
ლეს შემთხვევაში ამ შინაარსული ღეოგრაფიის შესაძლების მინიმალური-
ვანი ნაწილია, მხოლოდ მისი კი, იგი საშუალებას იძლევა შინაარსული
ღეოგრაფიის დაკრძალული ყოფნა ვაქცირებაში მიიყვანოს ნაწილი და
გამოვიყვანოთ იგი სხვა დარგებშიც, რისთვისაც საჭიროა შინაარსული
ღეოგრაფიის ფორმალური ნაწილის (ე.ი. შესაძლების ფორმალური ღეოგრაფიის)
სხვადასხვა ინტერპრეტაციის განხილვა.

ეს გარემოება განსაკუთრებით მინიმალურვანს ხიბს ფორმა-
ლურ ღეოგრაფიას. მსჯელობები და დანერგვებში შეიქმნა უმრავლესობა არა-
არსებითი მომენტებისაგან. მსჯელობებში გამოვიყენებთ მხოლოდ არსე-
ბითი მომენტები, რის გამოც ჩატარებული მსჯელობები და გამოყენე-
ბული მეთოდები უფრო ადვილად აუთორიტეტულ მრავალმხრივ გამოყენებას
— ყოფნა უფრო მუდამ ხდება მრავალმხრივ.

გარდა ამისა, აქსიომებისა და გამოყვანის წესების მკაცრად
შემოთქმული უფრო კონკრეტული ხასიათის აქვს მთელი ღეოგრაფია—რეგი-
ონალური ნაწილი უფრო ნაწილი იმისა და ამის გამო შესაძლებელი ხდება
გადანერგვითი იქნეს რეგიონალური ანტიპოდებისა, რომელთა გადარ-
გვითა შინაარსული ღეოგრაფიის უმრავლესობა იქნება დღესაც.

ფორმალური ღეოგრაფიის უმრავლეს, აგრეთვე, დიდი ნაწილი
სისხლის ნაწილია ანუ დიდი ნაწილია მისი განსაზღვრული არა-
რეგიონალური ასევე ღეოგრაფიის მკაცრად არის განსაზღვრული არა-
მარტო აქსიომები, არამედ, აგრეთვე, გასაშუავების დიდი-
დიდი ნაწილი.

ახლა, F_2^* ღეოგრაფიის განვიხილოთ როგორც მთავარი ფორმის შინა-
არსული ღეოგრაფია, სახელობრივ, როგორც უმრავლესობა ყველა იმ ღეოგრაფიის-
სა, რომლებსაც მივიღებთ საფუძვალად K არის ყველა (იკვლითხდება,

რომ F_2^{*1} ჟორონის ალგაბუტი დაფიქსირებულია). ასევე $\delta \kappa \sigma \alpha \rho \eta$ ფორმის $\sigma \eta \nu \alpha \alpha \rho \iota \varsigma \tau \epsilon \iota \eta$ ჟორონის ფორმალური $\delta \alpha \gamma \eta$ ან $\eta \nu \alpha \rho \iota \varsigma$ ჟორონის ფორმალური ჟორონის, რომლისთვისაც ამ ბოგარი ფორმის შინაარსული ჟორონის მიმოქცევი კერძო სახე მთავარ ინტერპრეტაციას წარმოადგენს. აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ $\alpha \rho \iota \varsigma \tau \epsilon \iota \eta$ F_2^{*1} პრეიკატების ლოგიკის, როგორც განხილული სახის ბოგარი ფორმის შინაარსული ჟორონის, ფორმალბაცია. ამას-თანვე, ამ უკანასკნელ ფორმალური ჟორონაში მიიღება მიმოქცევი ყველა შედეგი, რისი მიღებაც შეიძლება აღნიშნული ბოგარი ფორმის F_2^{*1} შინაარსული ჟორონაში.

მაგალითისათვის განვსაზღვროთ P_1' ნიშანაღა $\sigma \alpha \rho \eta \tau \epsilon \iota \eta$ ან $\rho \eta \tau \epsilon \iota \eta$, რომელიც P_1' შინაარსული ჟორონის ფორმალბაციაა.

საკმარისია განვსაზღვროთ ამ ფორმალური ჟორონის აქსიომები და გამოყვანის წესები (რადგან ფორმალბაციის ცნების განსაზღვრის თანახმად P_1' ჟორონის იგივე ალგაბუტი და ფორმები აქვს, რაც P_1' შინაარსული ჟორონის).

P_1' ჟორონის აქსიომებია:

I. $p \rightarrow [q \rightarrow p]$.

II. $[s \rightarrow [p \rightarrow q]] \rightarrow [[s \rightarrow p] \rightarrow [s \rightarrow q]]$.

III. $[[p \rightarrow \{ \}] \rightarrow \{ \}] \rightarrow P$.

P_1' ჟორონის გამოყვანის წესებია:

1.^o (მოქცევი პრინციპის წესი). თუ A და B არიან ფორმულები, მაშინ A და $[A \rightarrow B]$ ფორმულებიდან გამომდინარეობს B .

2.^o (ჩასმის წესი) თუ b არის პროპოზიციული ცვლადი, A და B კი არიან ფორმულები, მაშინ A -დან გამომდინარეობს B' , სადაც B' არის ფორმულა, რომელსაც მივიღებთ A -დან, თუ მასში b ცვლადის მიმოქცევი შემოსვლას შევცვლით ფორმულით.

რამდენივეს ურთ-ურთ მაგალითს P_1' ჟორონაში წარმოადგენს ფორმულათა შემდეგი მიმოქცევა:

$$\begin{aligned} & [[s \rightarrow [p \rightarrow q]] \rightarrow [[s \rightarrow p] \rightarrow [s \rightarrow q]]], \\ & [[s \rightarrow [\tau \rightarrow q]] \rightarrow [[s \rightarrow \tau] \rightarrow [s \rightarrow q]]], \\ & [[s \rightarrow [\tau \rightarrow p]] \rightarrow [[s \rightarrow \tau] \rightarrow [s \rightarrow p]]], \\ & [[p \rightarrow [\tau \rightarrow p]] \rightarrow [[p \rightarrow \tau] \rightarrow [p \rightarrow p]]], \\ & [[p \rightarrow [q \rightarrow p]] \rightarrow [[p \rightarrow q] \rightarrow [p \rightarrow p]]], \\ & [p \rightarrow [q \rightarrow p]], \\ & [[p \rightarrow q] \rightarrow [p \rightarrow p]], \\ & [[p \rightarrow [q \rightarrow p]] \rightarrow [p \rightarrow p]], \\ & [p \rightarrow p]. \end{aligned}$$

ამ დამტკიცების პირველი ჭრამულა არის მეორე აქსიომა;
 მეორე ჭრამულა მიიღება პირველიდან p -ს ნაცვლად $\neg$ -ის ჩასმით;
 მესამე მიიღება მეორიდან q -ს ნაცვლად p -ს ჩასმით; მეოთხე
 მიიღება მესამიდან S -ის ნაცვლად p -ს ჩასმით; მეხუთე მიიღება
 მეოთხიდან $\neg$ -ის ნაცვლად q -ს ჩასმით; მეექვსე არის პირველი
 აქსიომა; მეშვიდე მიიღება მთავს პრინციპი მეხუთე და მეექვსე
 ჭრამულებიდან; მერვე მიიღება მეშვიდედან q -ს ნაცვლად $[q \rightarrow p]$ -ს
 ჩასმით; დაბოლოს, მეცხრე მიიღება მთავს პრინციპი მერვე და მეექვსე-
 სე ჭრამულებიდან.

[illegible]

Երկրորդն էլ փակված լինելու հետևանքով: P'_1 շաղհուն
 զորմիշտ արևի շաղհունն ընդհանուր ընդհանուր ընդհանուր, իսկ P'_1
 P'_1 շաղհունն շաղհուն (յ.ճ. P'_1 շաղհունն ընդհանուր զորմիշտ
 զորմիշտ). Զորմիշտ, ընդհանուր, իսկ արևը ընդհանուր

მი, რომლის მიხედვით შეიძლება გავარკვეთო P'_i ჯეორიის ნების-
მიურად აღებული A ფორმულა არის ω არა ჯეორიმა და ωA ფორ-
მულა ჯეორიმა აღმოჩნდა, მაშინ ხსენებული ალგორითმის გამოყენე-
ბით შეიძლება მოვძებნოთ A ფორმულის დამტკიცება (ცხადია, ჩვენ-
თვის ცნობილი ალგორითმი, რომლის გამოყენებით შეიძლება გაირკვეს
 P'_i ჯეორიის A ფორმულა არის ω არა იგივე რად ვეძიებთ, ამავ-
დროს იქნება ალგორითმი, რომლის მიხედვით შეიძლება გაირკვეს P'_i
ჯეორიის ნებისმიერი A ფორმულა არის ω არა ჯეორიმა). ამ შედეგის
მიღების შემდეგ იმის ნაცვლად, რომ ვაჩვენოთ " P'_i ჯეორიის A
ფორმულა არის ჯეორიმა" საკმარისია დავამტკიცოთ " A არის P'_i
ჯეორიის ჯეორიმა". ე.ი. ნაცვლად ფორმალური ჯეორიისა მსჯელობები
შეიძლება ვაწარმოოთ შესაბამის შინაარსულ ჯეორიაში.

უფრო მძიმად ფორმალურ ჯეორიებში ასეთი ძლიერი შედეგების
მიღება შეუძლებელია (როგორც ამას გვიჩვენებს გოპალის ჯეორიებში).

შინაარსული ჯეორიის ფორმალიზაცია, ე.ი. ისეთი ფორმალური
ჯეორიის აგება, რომლისთვისაც მოცემული შინაარსული ჯეორია მთავარ
ინტერპრეტაციას წარმოადგენს, ყოველთვის გარკვეული სიძნელეების
გაძალახვას მოიწვევს. საჭიროა სათანადო აქსიომათა სისტემისა და
გამოყვანის წესების მოძებნა. მოცემული შინაარსული ჯეორიის ფორ-
მალიზაციის აგების შემდეგ მიხედვითაა უნდა გვეჩვენოს შემდეგი
სიძნელეები: შინაარსული ჯეორიაში ჩაფარებული მსჯელობები, და
მაშასადამე, ამ მსჯელობებიდან გამოდინარე შედეგები რომ გაა-
ვიფანოთ შესაბამის ფორმალურ ჯეორიაში, საჭიროა ჩაფარებულ იქნეს
იმავე პასუხების მომცემი მსჯელობები ფორმალური ჯეორიის შედუ-
ღული საშუალებებით (აქსიომებისა და გამოყვანის წესების გამოყე-
ნებით). შემზრუნველი ამოცანა, ე.ი. ფორმალურ ჯეორიაში მიღებული
მსჯელობისა და ამ მსჯელობებიდან გამომდინარე შედეგების გაა-
ფანა ფორმალური ჯეორიის შესაბამის შინაარსული ჯეორიაში (ან, უფრო
ბოგადად, ნებისმიერ მთავარ ინტერპრეტაციაში) არავითარ სიძნელეს

არ წარმოადგენს, რამდენადაც ფორმალური ჯეორიის აქსიომებში შესა-
ბამისი პინაარსული ჯეორიის ჟეშმარის ნინაპაებებს წარმოადგენენ,
ფორმალური ჯეორიის გამოყვანის წესები კი ხსენებულ პინაარსულ
ჯეორიაშიც გამოყვანის წესებს წარმოადგენენ (მრავალ სხვა გამოყ-
ვანის წესებთან ერთად).

ამ მიბეჭების გამო ხშირად ფორმალურ ჯეორიებს სწავლობენ
შესაბამისი პინაარსული ჯეორიის ევალუარი განხილვის გარეშე.
კმაყოფილებიდან ფორმალური ჯეორიის მთავარი ინტერპრეტაციის
მიხედვით განსაზღვრით—მათ ძირითად ენებებს შორის შესაბამისობის
რამყარებითა და ზოგიერთი საჭირო შენიშვნის გაკეთებით. ყოველი-
ვე ეს კუბდება წერილი შრიფტით. მკითხველს ადვილად შეუძლია
მთელი ჭეუსტი (წერილი შრიფტის ჩათვლით) განიხილოს როგორც პინა-
არსული ჯეორია.

წინადადებათა აღებრის გამოყენება

აზროვნების დარღვევა

წინადადებათა აღებრის დიდი გამოყენება აქვს ავტომატური მეორეადი. საბუნებისმეტყველო განვითარება ურთი ავტომატის მაგალითს, რომლის კონსტრუქციის შემუშავებაში წინადადებათა აღებრის შეუძლებლობა არსებითი როლი შეასრულოს.

დასავალი ასევე ამოცანა. უფრო, რა წევრისაგან შემდგარ კომპლექსს ფარული კენჭისფრისაშვის სჭირდება ავტომატი, რომელსაც აქვს შემდეგი ფუნქციები:

1. ავტომატი წარმოადგენს ელექტრონულ გადამრეცელს სისტემაში.

2. კომპლექსის მთლიანი წევრის მაგირის ურთიში არის მთლიანობა დაკავშირებული ავტომატის ბოლოვრთ გადამრეცელთან.

3. ზე დიდას ხელს აწერს კომპლექსის წევრთა უმრავლესობა, მაშინ აინდება სასიგნალო ნაშროს დადარჯავს ელექტრობარი, წინააღმდეგ შემთხვევაში არა.

აქ ბუნებრივად ისმის შემდეგი კითხვები:

ა) შეიძლება ზე არა ასევე ავტომატის გაკეთება?

ბ) ზე შეიძლება ასევე ავტომატის გაკეთება, როგორ უნდა იქნეს მოფიქრებული მისი კონსტრუქცია-მისი სქემა?

გ) ზე ასევე ავტომატის ურთ-ურთი სქემა მოფიქრებულია, მაშინ შესაძლებელია ზე არა ამ სქემის გამარტივება და როგორ უნდა ვეძიოთ ეს გამარტივებული სქემა?

დ) როგორია რ-ის ის მაქსიმალური მინიმუმება, როცა ასევე ავტომატის ავტომატური პრაქტიკულად განხორციელებიან (ზე ასევე ავტომატის ასაგებად მილიარდი გადამრეცელი საჭირო, მაშინ, ცხადია,

იგი პრაქტიკულად განუხორციელებადი იქნება).

ახლავთ ვნახათ, რომ მათემატიკური ლოგიკის მეტოქეში წარმატებით წყვეტს ყველა ამ საკითხს. ამასთანავე ადვილი გასანახია, რომ n - ზვის აგებული ავტომატი შეიძლება გამოვიყენოთ კომიტეტის უფრო ნაკლებ წევრზე რიგების შემოხვევაშიც. მაგალითად, თუ m არის მინიმალური უმრავლესობა მოცემულ კომიტეტში, n - წევრთან კომიტეტში კი K არის მინიმალური უმრავლესობა (ცხადია $K \geq m$), მაშინ $K - m$ ღირსი უნდა გავაჩვენოთ დაჭერილ მტკიცებაში (ცხადია, ლავარკია ისეთ მაგიონს უჭირავთ მოთავსებულ ღირსებზე, რომელთაც კომიტეტის წევრები არ სხეძან).

შევნიშნოთ, რომ თითოეული ღირსიან შეიძლება გავაკავშიროთ რამდენიმე გადამრთველი ისე, რომ ღირსებზე თითონ დაჭერილ შეკრუ-
ლი გადამრთველები გაიხსნას, გახსნილი გადამრთველები კი შეიკ-
რას, ღირსებზე თითონ ალბათ კი გადამრთველები საწყის მტკიცება-
ობას დაუბრუნებენ (ამისათვის საკმარისი იქნება გვეყენს
ვლექტრომაგნიტში თითოეული გადამრთველთან, ღირსებზე თითონ დაჭერა
იწვევებს ღირსიან დაკავშირებულ გადამრთველების ვლექტრომაგნი-
ტებში გენის გავლას და ვლექტრომაგნიტის ალბანებულ მტკიცება-
ში მოყვანა იწვევებს ისეთ მოძრაობას, რომელიც ცვლის შესაბამისი
გადამრთველის მტკიცებაობას, ღირსებზე თითონ ალბანის შემდეგ კი
სპეციალური გამზარა აბრუნებებს გადამრთველს საწყის მტკიცება-
ობაში).

სიმარტივისათვის ჯერ ვიცულისხმით, რომ $n=3$. ჩაგარბული
მსჯელობებში ადვილად განმოცადება ნებისმიერ n - ზვის.

P_1 იყოს წინადადება: "კომიტეტის პირველი წევრი თითონ
დაჭერს შესაბამის ღირსს", ან, რაც იგივეა, "კომიტეტის პირველი
წევრი არის კენჭსაყრელი წინადადების მომხრე". P_2 და P_3 იყოს
ანალოგიური წინადადებები კომიტეტის II და III წევრებისათვის.
 P_1 , P_2 და P_3 შეტვირთა განვიხილოთ, როგორც პრაქტიკული

ცვლადები: კომბინაციის / ნჯერის მიერ ღილაკზე ზედიზედ დაჭერის (არ დაჭერის) ფაქტი ნიშნავს იმას, რომ p_i ალგორითმით ცვლადმა მიიღო t მნიშვნელობა ($\bar{t}$ მნიშვნელობა) — იგივე იდეების p_2 და p_3 -ის შესახებაც.

შევაგვიჩინო ნინაძეებმა ალგორითმის ისეთი ფორმულა p_1, p_2, p_3 ალგორითმით ცვლადებით, რომელსაც აქვს ნამრავლთა ჯამის სახე, და რომელიც ღებულობს t მნიშვნელობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა კომბინაციის უმრავლესობა (ორი ნჯერი მაინც) ზედიზედ დაჭერის (არ დაჭერის) ფაქტს ღილაკს; ე.ი. როცა p_1 , p_2 და p_3 ცვლადებიდან უმრავლესობა (ორი მაინც) ღებულობს t მნიშვნელობას.

სრულყოფილი ნორმალური კომბინაციური ფორმებზე ლეონტოვის საფუძველზე ადვილად გავსაგვიჩინო, რომ ასეთი $\mathcal{A}$ ფორმულის შესაძგენად უპირველეს ყოვლისა უნდა ავიღოთ p_1 , p_2 და p_3 ცვლადების ყველა-რეალური მნიშვნელობათა ყველა ისეთი პარამეტრული სისტემა, რომლებშიც ნჯერმა უმრავლესობა არის t . ასეთი სისტემებია:

$$(t, t, t), (t, t, \bar{t}), (t, \bar{t}, t), (\bar{t}, t, t). \quad (1)$$

ახლა, ცხვენებული ლეონტოვის ძალით საძებნი $\mathcal{A}$ ფორმულა შეიძლება გვამოგვაროს ჩაინჯერის შემოგვანარად:

$$[p_1 \wedge p_2 \wedge p_3] \vee [p_1 \wedge p_2 \wedge \bar{p}_3] \vee [p_1 \wedge \bar{p}_2 \wedge p_3] \vee [\bar{p}_1 \wedge p_2 \wedge p_3] \quad (2)$$

(აქ ჯამის K -ური შესაყრები ($K=1,2,3,4$) უმანაძებია (1) მიმდევრობის K -ური სისტემას და შეგვეჩინოთ შემოგვანარად: ამ შესაყრების მანამამრავლებად აღებულია p_1 , p_2 და p_3 ცვლადები თავზე ხაზით ან უხაზოდ იმისდა მიხედვით ამ ცვლადებს მნიშვნელობებად განხილული სისტემაში უმანაძებია t ან $\bar{t}$). სიძნელეს არ წარმოადგენს იმის შემოგვანა, რომ (2) ფორმულა ღებულობს t მნიშვნელობას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა კომბინაციის ნჯერ-მა უმრავლესობა ზედიზედ დაჭერის ფაქტს ღილაკს; ე.ი. როცა p_1 , p_2 და p_3 ცვლადებიდან უმრავლესობა ღებულობს მნიშვნელობას t .

ახლა, ცხადია, ჩვენ გვჭირდება გაპამრმველთა ისეთი სისტე-
მის შედგენა, რომელიც პენს გააჭარბებს და აინდობს სასიგნალო და-
ბურა და დარეკავს ბარი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა (2) ჭორმულა
ეღბულობს $\bar{t}$ მნიშვნელობას.

გაპამრმველთა ასეთი სისტემის შედგენა (2) ჭორმულის აგებუ-
ლების გამოვლის მიზნით ადვილად ხორციელდება. გავუყენოთ ეს რეგო-
რირება გაპამრმველთა ასეთი სისტემის შედგენა.

კომიტეტის I ნაწილის ზოგადი დაკავშირებული მითითებები
გაპამრმველი აღენიშნოთ P_1 ან $\bar{P}_1$ ასეთი იმისა მიხედვით გაპამრ-
მველი საწყისი მომენტში (ე.ი. ხსენებული ზოგადი მითითებების
და) გახსნილია ეს შეკრები. ასეთი აგებულება აღნიშვნები $P_2, \bar{P}_2,$
 P_3 და $\bar{P}_3$ კომიტეტის II და III ნაწილში ზოგადი დაკავშირებული
გაპამრმველებიდან.

საქმის უზრუნველყოფი რეგო-კავშირები ნიშნისა შედგენი-
ლია შემდეგი: ეს (2) ნამრავლთა ჯამის ნაცვალად გვაქვს მხოლოდ
ერთი შესაყრები (ერთი ნამრავლი), მაგალითად $P_1 \wedge \bar{P}_2 \wedge P_3$, მაშინ
საჭირო გაპამრმველთა სისტემის მისაღებად საკმარისია სასიგნალო
ნამუშისა და ელექტრობარის გარდა ნარევი მიმდევრობით ჩავრთოთ
სამი $P_1, \bar{P}_2$ და P_3 გაპამრმველი. მაგალითად, ამ შემთხვევაში
დენი გაივლის ნარევი, სასიგნალო ნამუშა აინდობს და ელექტრობარი
დარეკავს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $P_1 \wedge \bar{P}_2 \wedge P_3$ ჭორმულა
იიღებს $\bar{t}$ მნიშვნელობას; ე.ი. როცა P_1 და P_3 იიღებენ $\bar{t}$
მნიშვნელობას, ხოლო P_2 იიღებს $\bar{t}$ მნიშვნელობას; ე.ი. როცა
კომიტეტის I და III ნაწილები მითითებული აქვთ ზოგადი, კომიტეტის II
ნაწილი კი არა. აქედან ჩანს, რომ ლოგიკური ნამრავლი უზრუნველ-
შესაძლებელია გაპამრმველთა მიმდევრობით ჩავრთვა ნარევი. ანალოგიური
მსჯელობით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ, მაგალითად, $\bar{P}_1 \vee P_2 \vee P_3$
ჯამის შესაძლებისა გაპამრმველთა სისტემის მისაღებად საკმარისია
ნარევი პარალელურად ჩავრთოთ $\bar{P}_1, P_2$ და P_3 გაპამრმველები.

ამრიგად, ლოკუსურ ჯამს უმანადება შესაბამის გადამრთველთა პარალელურად ჩართვა ნრეპში.

აღნიშნულის საფუძველზე, ახლა ადვილი დასაბუთია, რომ (2) ფორმულის შესაბამის გადამრთველთა სისტემის შესაბამისად სასიგნალო ნათურისა და ელექტრომართის გარდა ნრეპში უნდა ჩაირთოს თითოეული შესაბამისი (ნამრავლის) შესაბამისი გადამრთველები მიმდევრობით, ისე რომ თითოეული ნამრავლის შესაბამისი მიმდევრობით შეერეშული გადამრთველთა სამუშაოები ნრეპში უნდა ჩატარდეს პარალელურად და საჭირო ავტომატი მზად იქნება. ამრიგად, ავტომატს ექნება Π I ნახაზზე მოცემული სქემა:

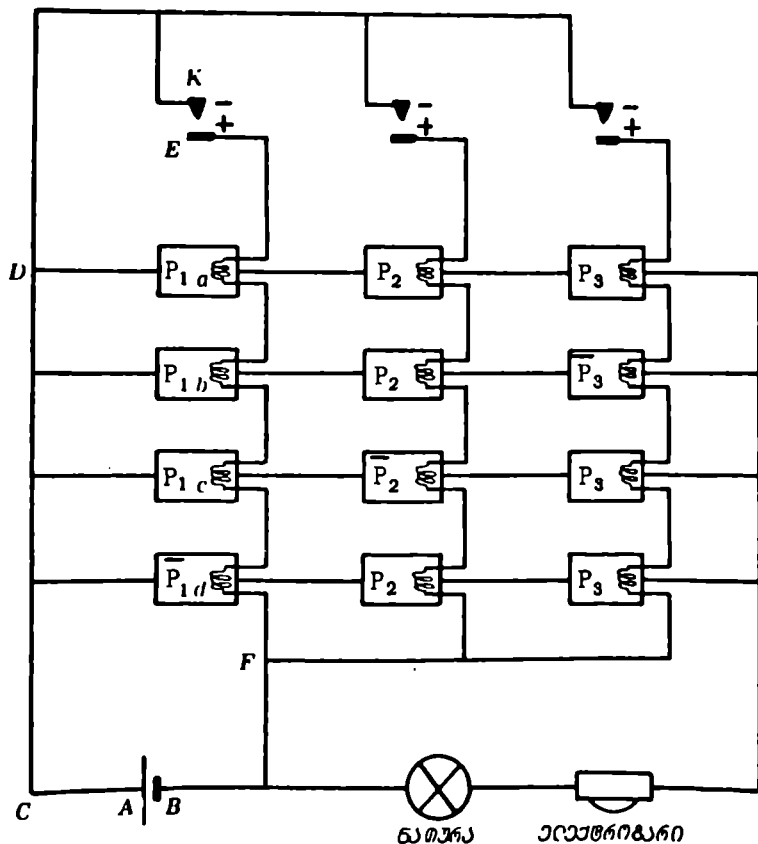
სქემაზე ღილაკები აღნიშნულია ∇ სიმბოლოებით. კომიტეტის I ნაწილის ღილაკს მიწერილი აქვს K ასო. ამ ღილაკზე თითონ დაჭერით შეიკრება $ACDKEFB$ ნრეპი, აღიგნება α , β , γ და δ ელექტრომაგნიტები და ეს ელექტრომაგნიტები გამოიწვევენ ისეთ გადაადგილებებს, რომელთა შედეგად სამივე P_1 გადამრთველი შეიკრება, $\bar{P}_1$ გადამრთველი კი გაიხსნება. კომიტეტის II და III ნაწილთა მიერ ღილაკზე თითონ დაჭერა ანალოგიურ ცვლილებებს იწვევს ავტომატში.

ადვილია შემოწმება იმისა, რომ ამ სქემის მიხედვით კონსტრუირებულ ავტომატს ექნება საჭირო ღებულებები.

მარტლაც, ეს კომიტეტის სამივე ნაწილი თითონ დაჭერის ღილაკს, მაშინ ზემოთა პირველი მიმდევრობით შეერეშული გადამრთველთა სისტემა ექნება გააფართებს (რადგან სამივე ღილაკზე თითონ დაჭერის შემთხვევაში ყველა P_1 , P_2 და P_3 გადამრთველი შეიკრება — ცხადია, აგრეთვე, რომ მიმდევრობით შეერეშულ გადამრთველთა პანარაჟნი სამი სისტემიდან არც ერთი ექნება არ გააფართებს, რადგან სამივე ღილაკზე თითონ დაჭერის შემთხვევაში $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ და $\bar{P}_3$ გადამრთველები გაიხსნებიან). ეს ახლა კომიტეტის მხოლოდ I და II ნაწილი დაჭერის ღილაკს თითონ, ე.ი. ეს P_1 , P_2 და P_3 ცვლილებების

მნიშვნელობა სისტემა (1) მიმდევრობის მეორე სისტემას უმცხვე-
ვა, მაშინ გენს გააჭარებს მხოლოდ და მხოლოდ შემოპან მეორე მიმ-
დევრობით შეერმეზურ გადამრმეველას სისტემა და ა.შ.

მოტანილო მსჯელობისა და კონსტრუქციის განმეგადება ნების-
მიერ R - ზვის არავითარ ზეორიულ სიძნელეს არ ნარმოადგენს,
რამდენადაც განხილული მეზოიო და მიდგომა საესეზიო ზეგარი ხასი-



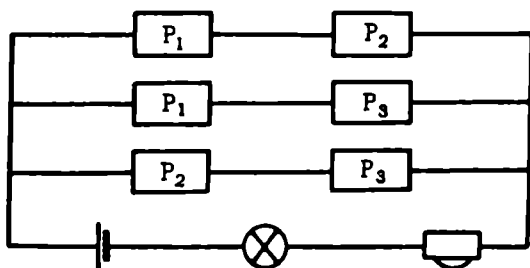
ნახ.1

$$[P_1 \wedge [P_2 \vee P_3]] \vee [P_1 \wedge P_3].$$

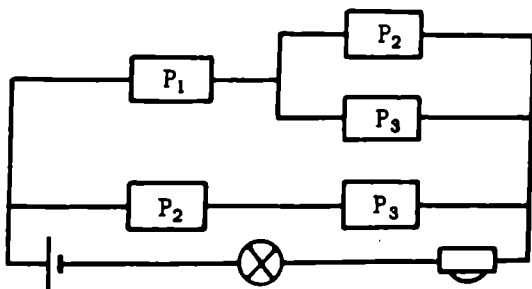
ამ უკანასკნელი ფორმულის მიხედვით აიგება იგივე ზღის-
ბის მქონე ავტომატი (იხ. ნახ. 2).

ამრიგად, c) კიბევაზე პასუხი სავსებით გაკეთდება.

შევნიშნოთ, რომ c) საკიბეხთან დაკავშირებით (ან უფრო ზუს-
ტად, ლოგიკური ფორმულის მიხედვით შექმნილი ნებისმიერი ავტომატის
სქემის გამარტივების საკიბეხთან დაკავშირებით) წარმოიშვა ზოგრი-
ული ხასიათის პრინციპი: მოიძებნოს წინადადება ადგილის ფორ-



ნახ. 2



ნახ. 3.

მულის " უ მ ა რ ტ ი ვ ე ს ი ტ რ მ ა ". ჩვენთვის ცნობილი ნორმალური ფორმები და სრულყოფილი ფორმები, როგორც ვხედავთ არ ნარმოადგენენ წინადადებათა აღკვეთის ფორმულის უმარტივეს ფორმებს. ეს არაბელმა ამჟამბაყ ამოუხსნელია და გასაგებია, რომ ამ პრობლემის გადამწყვეტას ბიბი არაქტიულო მნიშვნელობა აქვს.

ახლა შევჩერდეთ α) კიბხვაზე პასუხის გაცემის მიზნით.

მე კომიტეტის წევრთა რიცხვი არის 20, მაშინ, როგორც უბრალო გამოანგარიშება გვიჩვენებს (2) ფორმულის ანალოგიური ფორმულის მიხედვით კონსტრუირებული ავტომატის გადამრთველების რიცხვი დაახლოებით 9 მილიონი იქნება. ჭეჭნიკურად ასეთი ავტომატის აგება შესაძლებელია, მაგრამ უიმყოფებით ჩვენი შესაძლებლობის ზღვართან და აღნიშნული მიზნით ასეთი ავტომატის აგება მიზანშეწონილი არ იქნება. მეტა ხსენებული ფორმულის ძლიერ გამარტივება მათემატიკურ ლოგიკაში ცნობილი მეტოქებით შესაძლებელია—რაც უფრო ბიბი ფორმულა, მისი გამარტივება პროცენტუალად უფრო მეტად შეიძლება. მაგალითად, მე (3) ფორმულის ანალოგიური ფორმულა ვისარგებლებ, მაშინ შესაბამისი ავტომატის გადამრთველების რიცხვი იქნება დაახლოებით 1 850000, ე.ი. რ მილიონზე ნაკლები, რაც 1 ვარიანტთან შედარებით იძლევა 7 მილიონზე მეტი გადამრთველის ეკონომიას.

დასასრულს, შევნიშნოთ, რომ წინადადებათა აღკვეთაში მიღებული მეორეული დაკვეთის ბიბი არაქტიულო მნიშვნელობა აქვს. მაგალითად, V , $\wedge$ და — ლოგიკურ კავშირთა სისტემის ფუნქციონალური სისტემიდან გამომდინარეობს შემდეგი მნიშვნელოვანი დასკვნა: განხილული მეტოქით შეიძლება ნებისმიერად მოცემული პროგრამის შესაბამისი კენჭსაფრედი მანქანის კონსტრუირება. მაგალითად, შეიძლება ისეთი კენჭსაფრედი მანქანის კონსტრუირება, რომელიც ნათურა აინდობა და ელექტრომარტი პარკავს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა კომიტეტის წევრთა 3/4-ზე მეტი აძლევს ხმას კენჭსაფრედი წინადადებას, ან

შენვადბა, როგორც კი ფველა კენჭსაყრელი წინადადებას მომხრე კომიტეტის წევრი ზეზს დააჭერს ღილაკს. ამ ნაკლს შეიძლება ადვილად შევრიგებოიო, რომ მას არ აძლიერებებს შემდეგი გარე-
მოება. კენჭსაყრელი წინადადებას რომელიმე მოწინააღმდეგეს, როგორც
კი შეაფუძნს რომ კენჭსაყრელი წინადადება გარის, შეუძლია ზეზი
დააჭიროს ღილაკს და კენჭსაყრელი წინადადება არ გაუშვას (დაჭე-
რილ მტკომარეობაში მყოფი ღილაკების ღუწი რიცხვი აქციოს კენჭად).
ამ ნაკლის მოხსნა შეიძლება მაგალითად ასე: ღილაკებზე ზეზების
დაჭერის შემდეგ უნდა ხდება გენის ნყაროს ჩანდება (რომელიც
შეუძლია აწარმოოს კომიტეტის ზავიჯრომარეს ფველას დასადახად).

აღნიშნული ნაკლი არ ექნებათ ე.წ. მონოტონური ჭიპის კენჭ-
საყრელ ავტომატებს— პროგრამის მონოტონურობა გულისხმობს იმას,
რომ კენჭსაყრელი წინადადებას მომხრეა ჯგუფის გაფართოება არ
ამცირებს ამ წინადადებას გასვლის შანსს. ამიტომ ბევრად აღნიშნუ-
ლი ნაკლი უმნიშვნელოა, რადგან არამონოტონური პროგრამების მიხედ-
ვით მომუშავე კენჭსაყრელი მანქანების გამოყენების საჭიროება არ
არსებობს.

დასასრულს შევნიშნოთ, რომ პრაქტიკისათვის მეტად რიდი
მნიშვნელობა ექნება შემდეგი ზეზიური ხასიათის პრობლემის გადამ-
ყვებას:

მოიძებნოს მარტივი ზოგადი ნუსი ანუ ალგორიზმი, რომლის მიხედ-
ვით შეიძლება ვიპოვოთ მოცემული A ფორმულის უმარტივესი სახე
(ე.ი. ვიპოვოთ ისეთი უმარტივესი ფორმულა, რომელიც ტოლძალვანია
 A ფორმულისა). აქ ტრამინი "უმარტივესი" შეიძლება განვმარტოთ
შემდეგნაირად: B ფორმულას ვუწოდოთ A ფორმულის უმარტივესი სახე-
ზე შესრულებული შემდეგი პირობები:

$$1. B \Leftrightarrow A.$$

2. B ფორმულა შეიყავს მხოლოდ $\wedge$, $\vee$, $\neg$ ოპერატორებს
და $\rightarrow$ ოპერატორი B -ში გვხვდება მხოლოდ ცვლადების ზავზე.

3. **Б** ჭორმულაში ცვლაძების შემოსვლაა რიცხვი მინიმალური.
მოცემული **А** ჭორმულის ასევე უმარტივესი სახის არსებობა
ცხადია.

განხილეთ პრობლემა ჯერჯერობით გადანაცვლებით არაა.

საუარესი: 1. ასევე სქემა კენჭსაყრელი ავტომატის $n=5$ -
ების, რომელიც მუშაობს შედგენი პროგრამით: კომიტეტის ლავიჯო-
მარის ხმა იხველება 3 ქულა, ლავიჯომარის მოადგილის ხმა — 2
ქულა, კომიტეტის პანარჩენ ნევრთა ხმები კი—~~მომ~~—~~მომ~~ ქულა,
კენჭსაყრელი წინადადება კი გაიკოძეს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, რო-
ცა კენჭსაყრელი წინადადება მომხრეთა მიერ შეტრევილი ქულების
რიცხვი ჭოლია ან აღემატება ქულების მაქსიმალური რიცხვის $2/3$ -ს.

2. იგივე ამოცანა იმ განსხვავებით, რომ ლავიჯომარის ხმა
იხველება 2 ქულა, პანარჩენი ნევრებისა კი—~~მომ~~—~~მომ~~ ქულა.

3. იგივე ამოცანები $n=6$ - ივის და $n=10$ - ივის.

1. БУРБАКИ Н., Теория множеств, М., 1965.
2. БУРБАКИ Н., Функции действительного переменного, М., 1965.
3. БУРБАКИ Н., Интегрирование (меры, интегрирование мер), М., 1967.
4. ВАН ХАО, МАК-НОТОН Р., Аксиоматические системы теории множеств, М., 1963.
5. ГЕДЕЛЬ К., Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств, Успехи мат. наук, 3, вып. I (1948), 96-149.
6. ДЪЕДОННЕ Ж., Основы современного анализа, М., 1964.
7. КАРНАУ Х., Основания математической логики, М., 1969.
8. КАЦ М., УЛАМ С., Математика и логика, М., 1971.
9. КЛИНИ С.К., Введение в метаматематику, М., 1957.
10. КЛИНИ С.К., Математическая логика, М., 1973.
11. КОНДАКОВ Н.И., Введение в логику, М., 1967.
12. КОЭН П.ДЖ., Теория множеств и континуум-гипотеза, М., 1967.
13. КУРАТОВСКИЙ К., МОСТОВСКИЙ А., Теория множеств, М., 1970.
14. ЛАНДАУ Э., Основы анализа, М., 1970.
15. ЛИНДОН Р., Заметки по логике, М., 1968.
16. МАЛЫЦЕВ А.И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965.
17. МАРКОВ А.А., Теория алгоритмов, Тр. Мат. инст. АН СССР, 42, 1954.
18. МОСТОВСКИЙ А., Конструктивные множества и их приложения, М., 1973.
19. МЕНДЕЛЬСОН Э., Введение в математическую логику, М., 1971.

20. НОВИКОВ П.С., Элементы математической логики, М., 1973.
21. ПХАКАДЗЕ Ш.С., К теории лебеговской меры, Тр. Тбилисского математического ин-та АН ГССР, т.ХХУ, I-269.
22. ПХАКАДЗЕ Ш.С., Один общий метод построения эффективных примеров континуальной подгруппы абелевой группы действительных чисел с мерой нуль, обладающей континуальным множеством симметричных смежных классов, Тр. Тбилисского матем. ин-та АН ГССР, т.ХХІХ, 103-119
23. РАСЁВА Е., СИКОРСКИЙ Р., Математика метаматематики, М., 1972.
24. РОБИНСОН А., Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры, М., 1967.
25. РОДЖЕРС Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., 1972.
26. СИКОРСКИЙ Р., Булевы алгебры, М., 1969.
27. СТОЛЛ Р.Р., Множества, Логика, Математические теории, Просвещение, М., 1968.
28. უახლესი ა., რთავისა და გვერდუიანი მუცხიგისბათა მთმტმტ-გონი მუბავჯენი, თბილისი, 1971.
29. УСПЕНСКИЙ В.А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960.
30. ФРЕНКЕЛЬ А., БАР-ХИЛЛЕЛ И., Основания теории множеств, М., 1966.
31. ХАЛМОШ П., Теория меры, М., 1953.
32. ЧЕРЧ А., Введение в математическую логику, М., 1960.
33. ШИХАНОВИЧ Д.А., Введение в современную математику, М., 1965.
34. BACHMANN N., Transfinite Zahlen, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.

- 35. BERNAYS P., FRANKEL A.A, Axiomatic set theorie, Amsterdam, 1958.
- 36. KLAUA P., Allgemeine Mengenlehre, Berlin, 1964.
- 37. MOSTOWSKI A., Constructible sets with applications, Warszawa, 1969.
- 38. SIERPINSKI W., Hypothese du continy, Warszawa-Lwow, 1934.
- 39. SIERPINSKI W., Cardinal and ordinal numbers, Warszawa, 1958.
- 40. ULAM S.M., A collection of mathematical problems, New York, 1960.

გერმანიაში ძირითადი პარტიალია ქართული აღმ-
ბეჭის მიხედვით (ყურადღება არ ექცევა სხვა ენის ას-
კის: მაგალითად, "ნ-პოლიტიანი" სიტყვის პირველი ასო
მიჩნეულია "პ"; ამასთანავე მცირე გამოხატულები აღმბე-
ჭური რიგებიდან წარმოებს გერმან უფრო უფროგერად გამოყ-
ნების მიხედვით. რუსული (რამდენიმე სიტყვისაგან შედგენი-
ლი) გერმანი საბეჭედილი ყოველთვის ისე არ გვხვდება
როგორც კონტრასტი. წარმოებს სიტყვათა გამოხატულება და
სხვა ცვლილებები. სიტყვათა გამოხატულებით პირველი პოლი-
ტი გამოხატულია ის, რომელიც მოგონებთ არამყარად გან-
საზღვრული წესების მიხედვით მიჩნეულია გერმანიის მთავარი
სიტყვად. მოგონებ რუსული გერმანიის რიგი სიტყვათა მიჩნეული
მთავარი სიტყვად და ამის შესაბამისად ეს რუსული გერმანი
საბეჭედილი რამდენ გვხვდება. მთელი გერმანი მიხედვით-
ლი აქვს ის გვერდები, რომლებშიც არსებობდა განმარტებ-
ლია გერმანიის აღნიშნული ცნების შინაარსი. გვხვდება
ისეთი გერმანიები, რომელთა შინაარსი ცნობილია იტალი-
ხდება. ასეთ შემთხვევაშიც მიხედვითია ის გვერდები,
რომლებიც უფროგერად გაეხმარება მკითხველს გერმანიის
აღნიშნული ცნების შინაარსის პარტენაში. სინდროლოგი
გერმანიებიდან მოგონებ მიხედვით საბეჭედი-
ლი გვერდების მიხედვით, მეორე კი მოცემულია მეორე და
პირველი გერმანიების გოლომის სახით და იმ გვერდების
მიხედვით, სადაც აღნიშნულია, რომ ეს გერმანიები გამოი-
ყენებიან როგორც სინდროლოგი. საბეჭედილი შედარელი
მოგონებთ გერმანი კონტრასტი არ გვხვდება, მაგრამ კონ-
ტრასტი გოლომის მიხედვით ასეთი გერმანიების შემთხვევათა—სხვა
გერმანიებიდან მათ ინტუიციურად მოგონებ შემთხვევათა სა-
ჭიროება. ასეთ გერმანიებს მიხედვითი აქვს ის გვერდ-
ები, სადაც მოცემულია შესაბამისი გერმანიების განმარტ-
ებები და შესაბამისი მოგონებ შემთხვევათა. ამასთან
დაკავშირებით შეიძლება ითქვას, რომ საბეჭედილი კონტრ-
ასტის ძველგერად შევსებას წარმოადგენს. გერმანიის დასაფ-
ყისში მყოფი მთელი გერმანი, შემთხვევათა მიხედვით,

ცვლის ან სიფუძვას, ან ფრჩხილებში მოთავსებულ სიფუძვას
 ფრჩხილებში ჩაშვლით, ან რთულ სიფუძვას. ამასთანავე აღნი-
 შნული სიფუძვა ან რთული სიფუძვის შემაძგნელი სიფუძვა
 შესაძლოა იყოს მათემატიკური ასო ან ისეთი მათემატიკური
 გამოსახულება, რომლის პირველი ნივთიან მარცხენა ფრჩხილი,
 უკანასკნელი კი — მარჯვენა ფრჩხილი.

ი-პეტრიანის მიმართება
M სიმრავლეზე 120—121

- - - - განსაზღვრული
 120—121

აბრე 6

აბრეილი 134—135, 91

- სასრული 137

- უსასრულო 137

- ჩვეულებრივი 91

აბრეილის მთელი ნაწილი 135

- ლ-ური აბრეილი ნიშანი 135

- წილადური ნაწილი 135

აღებრა ბულის 191—192

აღებრული განტოლება (ი ხარის-
 ხის) 153

- რიცხვი 153

აღორიში 206

აღორიშიის ბიჯი 206

აღაბატი (ფორიისა) 26

- წინადადება აღებრისა
 165

აღაბატის სიფუძვა 27

აღაბატური რიგი 165

ამოხსნაობის პრობლემა
 205—207

ჟამყარებს ურთიერებასა
 მანაობას *X* და *Y* სიმრავ-
 ლეებს (კლასებს) შორის
 113, 128—130

ანტიცეპენტი 45

ანტიპრიმიუნიცია 236

ანტიკვიტალებობა (მატრიცალ-
 რი) 236

ანტიმპრიკაცია (მატრიცალური)
 236

ანტიკონიუნიცია 148, 236

ანტიკონიუნიციის ნიშანი
 198, 236

არაპრიმიუნიცია = ანტიპრიმიუნი-
 ცია 236

არაკვიტალებობა = ანტიკვი-
 ტალებობა 236

არათავსებაობა 198

არამპრიკაცია = ანტიმპრიკა-
 ცია 236

არაკონიუნიცია = ანტიკონიუნი-
 ცია 236

არასაკუთარი კონსტანტა 35

არ კუთვნიის 68

- ეტობა 68

- შეიძინა 68

- - მკაცრა 68

- შეიკავს 68

- - მკაცრა 68

- - როგორც ელემენტს 68

არქიმედის აქსიომა 140—141

ასო რკინატორული 29

- პროპრიუტი 30, 249

- საცნობრივი 30, 249

- სპეციალური რელიატიური

ასო სპეციალური სუბსტანციუ-
 რი 255
 აქსიომა 14, 17—19
 - ფორმალური 259
 აქსიომური მეთოდი 17—19
 აღრიცხვა=ფორმა 157

 ბიექცია 112
 - $X \rightarrow Y$ ტიპის 112
 ბიექციური ღანალობა=ბიექცია
 112
 ბულის აღცეზრა 191—192

 ბაბადვლა(სიმრავლის) 149
 - სასრული 149
 - უსასრულო 149
 გაბასახვა 115
 - X კლასისა Y კლასზე
 115, 128—130
 - - - - - ურთიერგაღსახა
 112—115, 128—130
 - - - - - კლასში 115, 128—130
 - კონსტანტური 115
 - X სიმრავლისა Y სიმრავლეზე
 115
 - - - - - ურთიერგაღსახა
 115
 - - - - - სიმრავლეში 115
 გაერზიანება რამდენიმე კლ-
 სის 74
 - - სიმრავლის 74
 - სიმრავლეზე მიმდევრობის
 74, 119—120
 - - α -ახისა 119—120
 გამომდინარეობა 45

გამომდინარეობა მეჭამაფემა-
 ტიკური 60, 69—70,
 178, 254, 256
 გამომდინარეობს $\mathcal{A}$ ფორმულიდან
 $\mathcal{B}$ ფორმულა 59, 178,
 254, 256
 - - - - - K არეში 254
 გამონააქვამი 8
 გამოყვანის წესი 259—260
 გამრავლების ასოციატიურობა
 231
 - რისტრიბუტიულობა შეკრების
 მიმართ 231
 - ელემენტარურობა შეკრების
 მიმართ 232
 - იდენტიფიკაციურობა 231
 - კომუტაციურობა 231
 განსაზღვრა 12—14,
 162—163, 243—244
 - აღწერილობითი 12—14
 - მათემატიკური 162—163
 - მეჭამაფემატიკური
 162—163
 განსაზღვრის არე $\mathcal{N}$ -აგეოლონი
 მიმართების 120
 - - ტრაფიკის 107
 - - ღანალობის 109
 - - ფუნქციის 114
 განსხვავება 68
 გარე ნამრავლი კლასების
 (სიმრავლეების) 86
 გარეზე ენა 32
 ტრაფიკი 107
 - ბიექციური 108
 - ინექციური 108
 - სიმეტრიული 108
 - ფუნქციონალური 108

ტრანსფორმაციის კომპოზიციის (ნამ-
 რაველი) 108
 ტრანსფორმაციის განსაზღვრის არე 107
 - ინვერსია 107
 - მნიშვნელობა არე 107
 - სიმეტრიული (ტრანსფორმაციის) 107
 ტრანსფორმაციის ტიპები 61

რაპორტის უსასრულოება 96
 რაღაცება არამკაცრი 126
 - მკაცრი 126
 - სრული არამკაცრი 12
 - - მკაცრი 126
 რაღაცებული სისტემა 83-84
 - - n -კომპონენტური 83-84
 - - n -წევრიანი 83-84
 - - ცარიელი 84
 $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ რაღაცებული სისტემა
 აქსიომატურად φ მიმართებაში
 121, 128-130
 - - - იმყოფება φ მიმართებაში
 121, 128-130
 - - სისტემისათვის სრულდება
 φ მიმართება 121,
 128-130
 რაღაცებული სისტემის მეორე
 განსაზღვრა 85
 - - $(I - \text{ური})$ კომპონენტური 84
 - - - კომპონენტური 84
 - - - წევრი 84
 - წევრი 84
 რამდენობა 260
 - ფორმალური 260-262
 - ბინარული 262
 რამდენობის ანალიზი 265
 რაღაცებული წევრი 84

რეკურსული ნამრავი კლასების
 (სიმრავლეების) 87
 რეკურსიულობა 44
 - განუყოფელი 236
 - განუყოფელი 236
 - ფორმალური (ბინარული) 44
 რეკურსიულობის სპეციალური შემთ-
 ხვევები 232
 - უარყოფა = ანტირეკურსიულობა
 236
 რეკურსიულობის წარმოდგენა (ორ-
 მნიშვნელობიანი ფუნქციის)
 219
 რეკურსიული n -განმარტებული
 სივრცე 106
 რეკურსიულობა 48
 - (მეტრიკული) 236
 - მეტრიკული ფუნქციური 59,
 177-178, 254, 256
 - ფორმალური (ბინარული) 48
 რეკურსიულობის რეკურსიულობა
 231
 - სიმეტრიულობა 231
 - სიმეტრიულობა 231
 - უარყოფა (მეტრიკული) = ან-
 ტირეკურსიულობა 236
 რეკურსიულობის (ან ფორმალური
 რეკურსიულობის) B ფორმალური-
 სი) 48
 რეკურსიულობის სიმრავლეები 146
 რეკურსიულობა 59, 69-70,
 177-178, 254, 256
 რეკურსიულობის 68
 რეკურსიულობის ნამრავი 209

ელემენტარული ჯამი 209
 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ელემენტები იმყოფე-
 ბიან φ მიმარტებაში 121
 ელემენტთა κ -ახი 117—118
 - - ზედაპირი 120
 - - სასრული 120
 - - $\mathcal{A}$ სიმრავლის 117
 - - უსასრულო 120
 - κ -ახის ელემენტთა სიმრავლე
 117
 - - იწვევსთა სიმრავლე 117
 - - ქვეოჯახი ($\mathcal{J}$ -ს შესაბამი-
 სი) 118
 ელემენტი 15, 19, 20, 34
 $\mathcal{E}$ ელემენტი უმარტება α ელ-
 მენტს Γ მანარტებაში 110
 ელემენტის სახე $\mathcal{H}$ გადამახვის
 მიმართ 115
 - მინამახე φ ფუნქციის მიმართ
 115
 ენა-ობიექტი 161
 ერთროული ჩამოსი წესი 185
 ერთობლობა 20
 ევოლუბა 68

ბოტარი ფორმის შინაარსული
 ბოროტის ფორმალბაცია
 263—264

მავდაპირველი აღნიშვნა
 170—171

მანარტება 109
 - ბიექციური 112
 - განსაბღვრულია α ელემენტზე
 110
 - X და Y სიმრავლეებს შორის

109
 მანარტება ინექციური 111
 - სიურექციური 111
 - ურთიერე ცალსახა 111
 - ფუნქციონალური 111
 - ყველგან განსაბღვრული 111
 მანარტებათა კომპობიცია (ნამ-
 რაველი) 110
 მანარტების გაგრძელება 111
 - გამოსვლის არე 109
 - განსაბღვრის არე 109
 - გრადიკი 109
 - რავყანა 111
 - - (X_1, Y_1) -ბე 111
 - ინექტსია 110
 - მინიშნელობათა არე 109
 - შვეტიწროება 111
 - - $\mathcal{A}$ სიმრავლეზე 110—111
 - ჩამვლის არე 109
 - ბორთბარი ტიპები 111—112
 მანაკვება რამდენიმე კლასის
 74
 - - სიმრავლის 74
 - სიმრავლეთა მიმდევრობის 74
 - - κ -ახის 119—120
 ბოროტება 14—15, 57—58,
 162—163, 181,
 253—254, 259—260
 - K არეს მიმართ 253
 - კანტორის 148
 - (მამემატიკური) 57—58,
 259—260, 262—263
 - (მეჭამამემატიკური)
 57—58, 262—263
 - ნამდვირ რიცხვთა უწყვეტო-
 ბის შესახებ 103
 - (პრეობაკტების ლგობაში)
 253—254

ზეორემა (სპეციალურ ზეორემა-
 ში) 256
 ზეორია 25—36, 258—267
 - არაფორმალური = შინაარსული
 ზეორია 157, 259
 - ფორმალური 258—267
 - შინაარსული 25—36,
 258—267
 ზეორიის აღფაშვტი 26
 - ინტერპრეტაცია 262
 - მათემატიკური ინტერპრეტაცია 262
 ზვისება 7, 120, 128—130
 - არსებობი 10
 - განსაზღვრული M სიმრავლეზე
 120, 128—130
 R (ზვისება) არის α საგანის
 ზვისება 8
 R ზვისება აქვს α საგანს 8
 $P(x)$ ზვისების მქონე ელემენ-
 ტთა კლასი 22
 ზელარი სიმრავლე 147

იგივეობა 57, 69—70
 იგივეობა მცარე ფორმულა
 57, 153, 256
 - ჭეშმარიტი ფორმულა 57,
 153, 256
 იგივეობა გასასახება (სიმრავ-
 ლისა ან კლასისა ზვის
 ზავზე) 115, 128—130
 - გასაქმნა (ფორმის, ფორმ-
 ლის, ჭერმის) 188—189
 - იპერაცია 89, 93, 99
 - ჭერმები 58, 256
 იგივეობა 59, 256, 69—70
 იგივეობის უარყოფა 60,
 69—70

იმპლიკაცია (მატერიალური)
 45, 236
 - მუდამაზმუდამოკუთრი 60, 178,
 254, 256, 69—70
 - ნინაპაღება (ფორმულათა)
 45
 - მუდმუნებური 236
 იმპლიკაციაში სასკვნის მუმი-
 ტანა 230
 - იგივემუმიტური ნუტრის მუმი-
 ტანა 230
 - კონუნუტური ნუტრის მუმი-
 ტანა 230
 - ნანამდღვრის მუმიტანა 230
 იმპლიკაციის სამტკიცება მუდ-
 ტის სამტკიცებობი 230
 - - ნანამდღვრის უარყოფი
 230
 - სპეციალური მუმიმხვევები
 232
 - უარყოფა (მატერიალური)
 = ანტიიმპლიკაცია 236
 ინტუტური აღნიშვნა 118
 ინტუტორი 20, 33
 ინტუტია (მამუდამოკუთრი)
 80—81
 - მუტუტუტობი (მამუდამოკუთრი)
 81
 ინტუტუტის ბაგისი 81
 - ცვლარი 81
 ინტუტუტური სამუტება 81
 - ნაბიჯი 81
 - ნინაპაღება 80—81
 ინტუტია 114
 ინტუტისი ორპტილიან მიმარ-
 ზების 123
 ინტუტისიული მიმარმუტები 123

ინტერპრეტაცია (ფორმალური ღერ-
რის) 261
- მთავარი 262
- ნაცვლისხმევი 261

კანონი გამრავლების ასოციაცი-
ურობის 187

- - - - - რისტრიბუციულობისა შერე-
ბის მიმართ 187

- - - - - იდეიზოტენდენციურობის 187

- - - - - კომუტაციურობის 187

- - - - - ჯუფთებაობის 187

- - - - - რისტრიბუციულობის მეორე
187, 190

- - - - - პირველი 187, 190

- - - - - მესამის გამორიცხვის 7,
232

- - - - - მცდარი შესატრების ელიმინა-
ციის (მოშორების) 187

- - - - - ორმაგი უარყოფის 187

- - - - - უარყოფის უარყოფის 187

- - - - - შერევის რისტრიბუციულობი-
სა გამრავლების მიმართ
187

- - - - - იდეიზოტენდენციურობის 187

- - - - - კომუტაციურობის 187

- - - - - ჯუფთებაობის 187

- - - - - წინააღმდეგობის (უარყოფის)
7, 232

- - - - - ჭეშმარიტ მანამამრავლის
ელიმინაციის (მოშორების)
187

- - - - - კანონები რე მორგანის (ლ-
ტიკური) 63, 187

- - - - - (სიმრავლეთა ღერობაში)
76

კვანტორი 30, 49

19. მ. ზედაძე

კვანტორი არსებობის (მ რვე-
რატორული ცვლილება) 49

- - - - - ზოგადობის (მ რვერატორული
ცვლილება) 49

- - - - - მ რვერატორული ცვლილება 49

- - - - - შეზღუდული 52-53

კლასების გაერთიანება 74

- - - - - მანაკვეთა 74

- - - - - სიმეტრიული სხვაობა 75

- - - - - სხვაობა 73

კლასთა მიმდევრობის გაერთი-
ანება 74

- - - - - მანაკვეთა 74

კლასების გარე ნამრავლი 86

- - - - - რეკურსული ნამრავლი 87

კლასი 15-16, 19-24,
33-34

- - - - - უნივერსალური 34

- - - - - ცარიელი 34

კლასი შეიქმნა B კლასში 70

- - - - - სიმრავლეში 70

კლასის არასაკუთრები ნაწილი
70

- - - - - ქვეკლასი 70

- - - - - ქვესიმრავლე 70

- - - - - რამათება 75

- - - - - რამათება კლასის მიმართ
75

- - - - - რეკურსი 108

- - - - - ელემენტები 22

- - - - - ნაწილი 70

- - - - - საკუთრები ნაწილი 70

- - - - - ქვესიმრავლე 70

- - - - - სიმრავლეთა გაერთიანება
75

- - - - - მანაკვეთა 75

- - - - - სხვაობა ნაწილი 70

- - - - - უნივერსალური 87

კლასის ქვეკლასი 70
 - ქვესიბრავლე 70
 - ქვესიბრავლეაი ოჯახი 118
 კონუნეცია 42, 236
 - ფორმულების (წინადადებათი)
 42
 კონუნეციის სპეციალური შემთ-
 ხვევები 232
 - უარყოფა = ანტიკონუნეცია
 236
 კონუნეციური წარმოტევა ორ-
 მნიშვნელობიან ფუნქციის
 219
 კონსტრუქცი 45
 კონსტანტა 39
 - არასაკუთარი 35
 - პროპოზიციული 27-30, 39
 - სატოპიკური 27-30, 39
 - საკუთარი 35
 - შეტყუებითი 39
 - ძირითადი 35
 - - (n-ადგილიანი) პრედიკატი
 27-30, 39
 - - (n-ადგილიანი) სუბსტანტი-
 ური ფუნქციონალური 27-30,
 39
 - წარმოებული 239
 - - პროპოზიციული 239
 კონსტანტას მნიშვნელობა 35,
 39-40
 კონტინუუმი 147
 კონტინუუმიის პიპოტეზა 155
 კონტრაპოზიცი 231
 - ორმაგი უარყოფის მოხსნით
 231
 კოორდინატი პალატებული სისტე-
 მის (i-ური) 84
 - რიცხვითი ღერძის წერტილის
 144

კუთვნილება 16, 69-70
 კუთვნილების უარყოფა 69-70
 ლოკია n-მნიშვნელობიანი 177
 - ორმნიშვნელობიანი 177
 - სამმნიშვნელობიანი 177
 ლოკიური ღერო = ფორმალური
 ღერო 263
 - კავშირი 166
 - - n-ადგილიანი (n=0,1,2,...)
 166
 - - არსებითად ორადგილიანი
 234-235
 - - წარმოებული 239
 - კავშირის მიკავშირებული
 ფუნქცია 214
 - - ქვეშაბრტყლ მნიშვნელობა-
 მა ცხრილი 174-175
 - სისტემა = ფორმალური ღერო
 263
 - კონსტანტა (ძირითადი) 234
 - ნამრავლი 43, 62, 189
 - - ფორმულების (წინადადება-
 თი) 43, 62, 189
 - ნამრავლის (i-ური) მანა-
 მამრავლი 62
 - ოპერატორი პამოკიებულია
 $\delta_1, \dots, \delta_n$ ლოკიურ ოპერა-
 ტორებზე 194-196
 - - წარმოებული 239
 - ოპერატორული ნიშანი 28, 248
 - - - ძირითადი 28
 - - - - რელატიური 28
 - - - - სუბსტანტიური 28
 - ჯამი 44, 62, 189
 - - ფორმულების (წინადადე-
 ბების) 44, 189

ლოგიკური ჯამის (i -ური) შესავ-
რები 62

მათემატიკური ენა 32-33,
161

- ლორემა 57-58, 259-260

- ინდუქციის პრინციპი 80-81

- წინადადება 33

მარტივი ჩასმის წესი 185

მარცხნიდან შეჯამების წესი
191

მარჯვნიდან შეჯამების წესი
191

მეტაგანსაბღერა 162-163

მეტაენა 32, 161

მეტალორემა 58, 162-163

მეტალორია 161

მეტამათემატიკური გამომდინა-
რება 60, 178, 254,
256, 69-70

- გამომდინარეობის უარყოფა
60, 256, 69-70

- განსაბღერა 163

- ლორემა 57-58, 262-263

- აკვივალენტობა 59, 69-70

- აკვივალენტობის მიმართება
59

- ენა 32-33, 161

- წინადადება 33, 162

მეტაოპერატორი რელიატიური
საკვიალური 61

მეტასიმბოლო რელიატიური საკ-
ვიალური 61

მეტასკალარი 33, 162

მეტაწინადადება = მეთამაშემა-
ტიკური წინადადება 33

მაღლი ნამდვილი რიცხვი 97

- რაციონალური რიცხვი 97

- რიცხვი 88-90

- - საკუთრივი 135

- წერტილი (რიცხვით ღერძზე)
144

- წილარი 92

მიკავშირებული ფუნქცია ლოგი-
კური კავშირის 214

- - ფორმულის ($X_1, \dots, X_n$ ცვლა-
ებლის მიმართ) 214

მიმართება 7, 120, 128-130

- ნ-ადგილიანი 7, 120,
128-130

- - M სიმრავლეზე (განსაბღ-
ერული) 120-121

- - - - A პროპოზიციული ფორ-
მით განსაბღერული ($X_1, \dots, X_n$
ცვლადების მიმართ) 132-133,
120-121

- - - სიმრავლის ელემენტებს
შორის 120

- - - - - A პროპოზიციული
ფორმით განსაბღერული
($X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მი-
მართ) 132-133, 120

- - $M_1, \dots, M_n$ სიმრავლეა
ელემენტებს შორის 120

- - $M_1, \dots, M_n$ სიმრავლეა
ელემენტებს შორის A პროპო-
ზიციული ფორმით განსაბღ-
ერული ($X_1, \dots, X_n$ ცვლადების
მიმართ) 132-133

- - ანტირეფლექსური 124

- - ანტისიმეტრიული 124

- - არამკაცრი ძალაგების 126

- - მშუღი 125

მიმართება უკვივალენტიზმის 125

- უკვივალენტიზმის 59, 177-178, 254, 256, 69-70
- იტივურიზმის 59, 69-70, 256
- კუთვნილების 68-70
- - უარყოფის 69
- "მეფია ან ჭოლია" R -ში, " $\geq$ " 122-123
- მეფობის R -ში, " $>$ " 122-123
- მკაცრად პალატების 126
- - მემაველობის 69-70
- - - უარყოფის 69-70
- - მემაველობის 69-70
- - - უარყოფის 69-70
- (მოდიფიკირებული) n -აგრი-ლიანი M კლასზე (განსაზღ-ვრული) 128-130
- - - - A პროპოზიციული ფორმიზ განსაზღვრული ($X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მი-მართ) 132-133, 120-121, 128-130
- - - $M_1, \dots, M_n$ კლასთა ელე-მენტებს შორის 128-130
- - - $M_1, \dots, M_n$ კლასთა ელე-მენტებს შორის A პროპოზი-ციული ფორმიზ განსაზღვრუ-ლი ($X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მიმართ) 132-133
- - - M კლასის ელემენტებს შორის 128-130
- - - - - A პროპოზიცი-ული ფორმიზ განსაზღვრული ($X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მი-მართ) 132-133, 120-121,

128-130

- მიმართება (მოდიფიკირებული) n -აგრილიანი M სიმრავლეზე (განსაზღვრული) 128-130
- - - - A პროპოზიციული ფორმიზ განსაზღვრული ($X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მი-მართ) 132-133, 120-121, 128-130
- - - $M_1, \dots, M_n$ სიმრავლეთა ელემენტებს შორის 128-130
- - - $M_1, \dots, M_n$ სიმრავლეთა ელემენტებს შორის A პროპო-ზიციული ფორმიზ განსაზღვრუ-ლი ($X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მიმართ) 132-133, 130
- - - M სიმრავლის ელემენ-ტებს შორის 128-130
- - - - - A პროპოზიციული ფორმიზ განსაზღვრული ($X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მი-მართ) 132-133, 130
- - მემაველობის 69-70
- - - უარყოფის 69-70
- - მემაველობის 69-70
- - - უარყოფის 69-70
- "ნაკლებია ან ჭოლია" R -ში, " $\leq$ " 122-123
- ნაკლებობის R -ში, " $<$ " 122-123
- რეფლექსური 124
- სანქსიონი (ორადგილიანი) 131
- სიმეტრიული 124
- სრული არამკაცრი პალატების 126
- - მკაცრი პალატების 126
- - ჭოლობის 68, 121

მიმართება ტოლობის უარყოფის
69, 121—122

- ტოლფასობის 58, 69—70, 256

- ტოლძალეულების 59, 69—70, 177—178, 254, 256

- ტრანზიტული 125

- უტოლობის, " $\neq$ " 121—122

- შეზღუდული კუთვნილების 69—70

- - - უარყოფის 69—70

- შემავლობის 69—70

- - უარყოფის 69—70

- შემცველობის 69—70

- - უარყოფის 69—70

მიმართებათა ძირითადი ტიპები 125

φ მიმართება სრულდება
($\alpha_1, \dots, \alpha_n$) პალატეზული
სისტემისათვის 121, 128—130

φ მიმართებას აკმაყოფილებს
($\alpha_1, \dots, \alpha_n$) პალატეზული
სისტემა 121, 128—130

φ მიმართებაში იმყოფება
($\alpha_1, \dots, \alpha_n$) პალატეზული
სისტემა 121, 128—130

- - - α_1 ელემენტი $\alpha_1, \dots, \alpha_n$
ელემენტებთან 121, 128—130

- - - იმყოფებიან $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ელ-
მენტები 121, 128—130

- - - $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ სატენები 8,
121, 128—130

მიმართებების ინვერსიულობა
(სიმეტრიულობა) 123

მიმართების გაგრძელება 123

- - M კლასზე 123, 128 - 130

მიმართების გაგრძელება M
სიმრავლეზე 123

- - $\sum_{i=1}^n B_i$ სიმრავლეზე 123

- განსაზღვრის არე 120, 128—130

- გრაფიკი 120, 128—130

- ინვერსია 123

- მოქმედების არე 121, 128—130

- შევიწროება 123

- - A სიმრავლეზე 123

- - $\sum_{i=1}^n M_i$ სიმრავლეზე 123

- წონა 120, 128—130

მიმდევრობა 119

- სასრული 119—120

- უსასრულო 119—120

- ცარიელი = ცარიელი ელემენტთა
ოჯახი 119—120

მკაცრად შემავლობა 69—70

- შემავლობის უარყოფა 69—70

- შემცველობა 69—70

- შემცველობის უარყოფა 69—70

მოთხოვნიერებული ენებები ("მო-
თხოვნიერებული აბრეშ")
128—130

მოძული (რიცხვის) 89, 95, 99

მოძუს პონენსის წესი 186

მონაკვეთი ნატურალურ რიცხვთა
სიმრავლის 119

- - - - საწყისი (ძოლი) 119

მონაკვეთის სიგრძე 145

მონომული მკერატორი 249

მოპირდაპირე ნამდვილი რიცხ-
ები 99

მსჯელობა 6

მსჯელობის აღნიშვნა 8

მსჯელობის გამომხატველი წი-
ნადადება (გამონათქვამი)

- 7, 8, 15
 მსჯელობის მიკავშირებული პრე-
 კიკატი 10
 - - პრეპიკატის აღნიშვნა 8
 - საცნებო 6
 - ი-ური საცნებო 7

- ნამდვილი რიცხვი 96
 - - აბოზიზ-რაციონალური 138
 - - არასაკუთარი 96
 - - მთელი 97
 - - ნატურალური 97
 - - რაციონალური 97
 - - საკუთარი 96
 - - სასრული 96
 - - ტრანსკუპერენტული 153
 - - უსასრულო 96
 - რიცხვის ბედა კლასი 97
 - - მთელი ნაწილი 135-136
 - - შეზღუდვებული 99
 - - წარმოტეხა (ტაშლა) აბზი-
 ლაპი 138
 - - ნილატური ნაწილი 135-138
 - (სასრული) რიცხვის შესაბა-
 მისი აბზილაპი 141
 ნამდვილი რიცხვთა სიმრავლე
 ბემოპან(ქვემოპან)შემოსამ-
 ღვრული 104
 - - სიმრავლის ბედა(ქვება)
 საბტვარი 104
 - - - ბემოპან(ქვემოპან)
 შემომსამტვრელი 104
 ნამრავლი ტაფაროვებული ამრიზ
 209
 ნატურალური მთელი რიცხვი 88
 - ნამდვილი რიცხვი 97
 - რაციონალური რიცხვი 92

ნატურალური რიცხვი საკუთარი
 135

- - ჩვეულებრივი 82-83
 - - - ენის 79-82
 - რიცხვის უმუალო შემდეგი 79
 - - ნილაპი რიცხვი 92
 ნაწილი კლასის 70
 - სიმრავლის 70
 ნაწილობრივი ფუნქცია 117
 ნიშანი = ღვისება 7
 - არსებობი 10
 ნორმალური ფორმა 210
 - - ბიბიუნქციური 210
 - - კონიუნქციური 210

- წბიეჭტაპ არე 25
 ობიეჭტი 25
 - ფორმალური 258-259
 ოპერანტი 37-38
 ოპერატორი 27-30
 - ო-აბტილიანი 27-30
 - კონსტანტა 27-30
 - ოტიკური 27-30, 175
 - მარტივი 29
 - მონიშნული 249
 - რელიატიური 27-30, 175
 - სპეციალური 27-30, 175
 - სუბსტანციური 27-30, 175
 - შემტენილი 29
 - ცვლადი 27-30
 - ძირითადი 27-30, 71
 - წარმოებული 71
 ოპერატორის ორადული 199
 - (შემოსვლის)მოქმედების არე
 37-38
 - - ოპერანტი 37-38

ოპერატორის (შემოსვლის) K -
 ური ოპერანტი 37—38
 - - შესაბამისი ნაწილი
 37—38
 ოპერატორული ასო 29
 - ნიშნის (შემოსვლის) მიერ
 გაზმული ცვლადი 38
 - ცვლადი 29
 ოპერაცია (აღებურული) n -აგვი-
 ლანი M -ზე 117
 - - M -ზე 117
 - ბინარული 117
 - იგივერი, + , 89, 93, 99
 - ნაწილობრივი 117
 - სინგულარული 117
 - ტერნარული 117
 - უარყოფის, —, 89, 93,
 99
 - უნარული 117
 - ყველაზე განსაზღვრული 117
 ოპერაციის მოქმედების არე
 117
 ორადგილიანი მიმართების ინ-
 ვერსია 123
 ორადგილი ოპერატორები 199,
 201
 - ფორმულები 200, 201
 ორადგილობრივი პრინციპი 205
 - სრული პრინციპი 205
 ორმაგი უარყოფის კანონი 187,
 232
 ორმნიშვნელობიანი ფუნქცია
 (n -აგვილიანი) 214
 - ფუნქციის რიგი ფუნქციური წარ-
 მოგება 219
 - - კონფუნქციური წარმოგება
 219
 - - წარმოგება $X_1, \dots, X_n$

ცვლადის მიმართ (წინადა-
 ებადა ალგებრის ფორმულით)
 214
 ოჯახის სიმრავლის ელემენტების
 117
 პეანოს აქსიომები 79—80
 პირდაპირი ნამრაველი კლასების
 (სიმრავლეების) 86
 პირობითი კავშირი 236
 პირობითი ორმხრივი კავშირი
 236
 პრეიკაჟი = მიმართება 7,
 10, 121
 - n -აგვილიანი 7, 10
 - წარმოებული 71
 პრეიკაჟების ლოკაცა
 246—257
 - ლოკიკის საგანდა არე 247
 - - ფორმულირება 246
 პრეიკაჟის აღნიშვნის ნუსი 8
 პრეიკაჟული ასო 249
 პრინციპი განუზღვრელ მნიშე-
 ნელობებზე ოპერირების 41
 - ორადგილობრივი 205
 - - სრული 205
 - ფორმულის უარყოფის 200
 - - - განმტკიცებული 202
 პრეიკაცია n -განმომილებიანი
 (კლასისა) ღერძებზე, რომელა
 ნომრებია $i_1, \dots, i_q$ 87—88
 - - პირდაპირი (კლასისა) ღერძე-
 ბზე, რომელა ნომრებია
 $i_1, \dots, i_q$ 87
 - - K -ური (კლასისა) 87—88
 - K -ური (კლასისა) 87—88
 პრეიკაციული ასო 30, 249

პრეპარატიული კავშირი 28

რაციონალური ნამდვილი რიცხვი
97

- რიცხვი 91

- - საკუთრივი 135

- წერტილი (რიცხვითი ღერძზე)
144

რეფლექსურობის ღვისება 59

რიცხვითი ღერძი 139

- ღერძის საბავე 139

- - ჭრე 139

- - წერტილი ირაციონალური
144

- - - მთელი 144

- - - ნატურალური 144

- - - რაციონალური 144

სატანთა არე 25

სატანთა გაფართოებული არე 40

სატანი 6, 24, 25

- ძირითადი 25

სატანს აქვს R ღვისება 8

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ სატანები იმყოფებიან
 R მიმართებაში 8, 121

სატანობრივი ძალი 30, 249

- განსაზღვრული მნიშვნელობა 40

- განუსაზღვრელი მნიშვნელობა 40

- კონსტანტა 27—28, 34, 35,
39

- ცვლადი 20, 28, 24

საკუთრივი კონსტანტა 35

- მთელი რიცხვი ნაკლებია ნამ-
დვილ რიცხვზე 135

- რაციონალური რიცხვი ნაკლე-
ბია ნამდვილ რიცხვზე 135

საწყისი მიმართება 131

სახელი 6

სეგმენტო ნატურალურ რიცხვთა
სიმრავლისა 119

სიმბოლო 6

სიმბოლოს მნიშვნელობა 6

- შემოსვლა სიფყვაში 27

სიმეტრიული მიმართება 119

- სხვაობა A და B კლასების
75

- - A და B სიმრავლეების 75

სიმეტრიულობის ღვისება 59

სიმრავლე 15—16, 19—24,
33—34

- ღვლადი 147

A სიმრავლე შედის B კლასში
70

- - - სიმრავლეში 70

სიმრავლეთა გაერთიანება 74

- უკვე აღებულია 146

- მანაკვეთა 74

- ღვრობა 35

- მიმდევრობის გაერთიანება 74

- - ღვრა ღვლადი 76

- - მანაკვეთა 74

- - უკვე აღებულია 76

- მკახი 118

- მკახის გაერთიანება 119 120

- - მანაკვეთა 119 20

- სიმეტრიული სხვაობა 75

- სხვაობა 73

სიმრავლის არასაკუთრივი ნა-
წილი 70

- - უკვე სიმრავლე 70

- გაბაღვლა 149

- გაბაღვლა არამკაცრი 126

- - სრული 126

- - მკაცრი 126

სიმრავლის პალატა მკაყრი
სრული 126

- პამატა 75

- - $\mathcal{A}$ კლასის (სიმრავლის) მი-
მარხ 75

- ელემენტი 15

- ნაწილი 70

- საკუთრივი ნაწილი 70

- - ქვესიმრავლე 70

- სახე Γ მანძილის ძრის 110

- - - - მიმარხ 110

- სრული ნაწილი 70

- - ქვესიმრავლე 70

- - წინასახე Γ მანძილის
(კერძო ფუნქციის) მიმარხ
110

- ქვესიმრავლე 70

სიმძლავრეა შედარება (მეტად-
ლეზობა) 147—148

სიმძლავრე 147

- კონტინუუმის 147

- სასრული 147

- სიმრავლის 147

- უსასრულო 147

სისრულე ფუნქციონალური 215

სიფყვა (აღაბაფის) 27

- ცარიელი 27

სიფყვის ნაწილი 37

- - არასაკუთრივი 37

- - საკუთრივი 37

- სიგრძე 27

- შეზღუდვა სიფყვაში 36

- ნევერი 27

სიურექცია 114

სრულყოფილი ნორმალური ფორმა

ფორმულისა პიზიუნქციური

($X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მი-
მარხ) 223

სრულყოფილი ნორმალური ფორმა

ფორმულისა კონიუნქციური

($X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მი-
მარხ) 223—224

სუბიექტი 1, 225—226

სხვაობა $\mathcal{A}$ და $\mathcal{B}$ კლასების (სიმ-
რავლეების) 73

შავტოლოგია (წინაპარებაა ალ-
ტერის შემხვევაში) = იგი-
ვერსაჲ ქვემარტივი ფორმულა
181

ფერმი 31, 250, 255—256

- უმარტივესი 31

- ყველგან განსაზღვრული 40

ფერმიანი 12

ფერმის განსაზღვრული მნიშვნე-
ლობა 40

- განუზღვრელი მნიშვნელობა
40

- პამტული ცვლადი 38

- მავისუფალი ცვლადი 38

- იგივერი გარდაქმნა 188—189

- ნაწილი 37

ფოლია 16, 18

ფოლობა 16, 69—70

- გრაფიკული 61

ფოლობის მიმარხება 68

- - M სიმრავლეზე 68, 121

- უარყოფა 16, 69—70

- უარყოფის (უფოლობის) მიმარხე-
ბა M სიმრავლეზე 121—122

ფოლფასი ფორმეზი (ფორმულეზი,
ფერმეზი) 58, 256

- - - - სპეციალურ ღეორიეზში
256

ფოლფასობა 58, 69—70, 256

გოლფასობის უარყოფა 60,
69—70

გოლძალვანი ფორმულები 59,
177—178, 254, 256

- - K არეს მიმართ 254

- - პრედიკატების ლოგიკაში
254

- - სპეციალურ მეორეხარისხი 256

გოლძალვანება 59, 69—70,
177—178, 254, 256

გოლძალვანების უარყოფა 60,
69—70

გრანტიზაციის შეესაბამება 59

გრანტიზაციის (ნამდვილი) რიცხ-
ვი 153

უარყოფა (წინადადების) 44—45

უარყოფის ოპერაცია (რიცხვები-
სათვის) 89, 93, 99

უარყოფის უარყოფის კანონი
187

უნივერსალური კლასი 34

უნივერსალური ოპერატორები
199, 201

- ფორმულები 200, 201

უსაბრუნო 96

- დადებითი 96

- უარყოფითი 96

უტოლობა 121—122, 69—70

უშუალო დასკვნა $A_1, \dots, A_n$ ნა-
მდებარეებიდან (ფორმულებიდან)
260

უშუალო შემდეგი (ნატურალური
რიცხვი) 79

უწყვეტობის აქსიომა 140

ფორმა 31, 255—256

- ნ-არული 39

- ბინარული 39

- პრედიკატული 31, 39

- საგნობრივი 31, 39

- სინტაქსური 39

- ტერმინული 39

- უმარტივესი 31

- ყველაზე განსაზღვრული 40

ფორმალური განსაზღვრული ფორმის
შინაარსული მეორიის
263—264

- შინაარსული მეორიის 262

ფორმალური აქსიომა 259

- გამოხატულება 259

- დამტკიცება 259—260

- დამტკიცების ანალიზი 265

- ენა 260

- მეორეა 259

- მეორეა 258—267

- მეორეის ინტერპრეტაცია
261

- - მთავარი ინტერპრეტაცია
262

- ობიექტი 258—259

- სიტყვა 259

ფორმის გამარტივებული სახე
31

- განსაზღვრული მნიშვნელობა
40

- განუზღვრელი მნიშვნელობა
40

- დამტკიცების ყველა 38

- შეესაბამება ყველა 38

- იგივერი გარდაქმნა
188—189

ფორმის მნიშვნელობა $X_1, \dots, X_n$
 ცვლადების მნიშვნელობათა
 ($\alpha_1, \dots, \alpha_n$) სისტემისათვის
 40
 - ნაწილი 37
 - - არასაკუთრივი 37
 -- პროპოზიციული 37
 - - სატოპოლოგიური 37
 - - საკუთრივი 37
 - - უმარტივესი 37
 - ფრაქციული წყვილი 31
 - - - შიგა 31
 ფორმულა 31, 167, 250,
 255—256
 - ატომალური 67, 249
 - გამომდინარეობს $A_1, \dots, A_n$
 ფორმულებიდან α გამოყვანის
 წესის მიხედვით 260
 - განხილული როგორც წინადაქ-
 ზათა სქემა 50
 - ზეირება 57, 253—254
 - - K არის მიმართ 253
 - იგივეურად მცარნი 57, 238,
 253, 256
 - - - K არის მიმართ 253
 - - ქვეშეპირი 57, 238,
 253, 256
 - - - K არის მიმართ 253
 - იმყოფება რიზიუნქიურ ნორ-
 მალურ ფორმაში 210
 - - კონიუნქიურ ნორმალურ
 ფორმაში 210
 - კუთვნილება 68, 69—70
 - მარტივი 67, 168
 - რთული 67, 168
 - ტოლობა 68, 121, 69—70
 - უმარტივესი 31
 - უტოლობა 121—122, 69—70

ფორმულა შემადგენლობა 69—70
 - შემცველობა 69—70
 - შესრულებადი 57, 181,
 238, 253, 256
 - - K არის მიმართ 253
 - ყველაზე განსაზღვრული 40
 ფორმულათა გამომდინარეობა
 (იმაპიკაყი) 45, 42—43
 - რიზიუნქიუა 44, 42—43
 - კლავიკალენტობა 48, 42—43
 - კონიუნქიუა 42
 - ლოგიკური ნამრავლი 43
 - - ჯამი 44, 42—43
 $\Psi_1, \dots, \Psi_n$ ფორმულები ენაყვლე-
 ბა $X_1, \dots, X_n$ ცვლადებს A -ში 166
 ფორმულის განსაზღვრული მნიშ-
 ნელობა 40
 - განუზღვრული მნიშვნელობა
 40
 - რამზულ ცვლადი 38
 - რამტკიყება 259—260
 - რიზიუნქიური ნორმალური
 ფორმა 210
 - ზავდაპირველი აღნიშვნა 170
 - ზავისუფალი ცვლადი 38
 - იგივეური გარაქმნა 188—189
 - კონიუნქიური ნორმალური
 ფორმა 210
 - მიკავშირებული ფუნქიუა
 $X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მი-
 მართ 214
 - ნაწილი 37, 169, 238
 - რრადული 200
 - უარყოფა 44—45
 - უარყოფის პრინციპი 200
 - - განზოგადებული პრინციპი
 202

ფორმულის შემოკლებული სახე
239

- წარმოებული აღნიშვნა 170

- ჭეშმარიტული მნიშვნელობა
172, 238

- ჭეშმარიტული მნიშვნელობა
(სრული)ცხრილი 173

- - - ცხრილის მთავარი სვეტი
174

ფუნქცია 111, 113—114

- n -აპეირიანი (ანუ n -არული)
116

- - (ანუ n -არული) $X \rightarrow Y$ ტი-
პის 112, 114

- - ორმნიშვნელობიანი 214

- ანგარიშს ურთიერებასა
თანაბრებას X და Y სიმრავ-
ლეებს შორის 113

- ჩარგუმენების 116

- არსად განსაზღვრული 114

- ბინარული 117

- განსაზღვრულია X სიმრავლეში
და თავის მნიშვნელობებს
ღებულობს Y სიმრავლეში
114

- და მისი ინვერსია ანბორცი-
ვლებენ ურთიერებასა
თანაბრებას X და Y სიმრავ-
ლეებს შორის 113

- α ელემენტის გააძაჟების
(გაძაბავს) ℓ -ში 114

- იგივეური 114—115

- ინექციური 114

- კონსტანტური 115

- მოკიდებულია $\mathcal{A}$ საგნობრი-
ვი ფორმიზ განსაზღვრული
($X_1, \dots, X_n$ ცვლადების მიმართ)
134

ფუნქცია ნაწილობრივი 117

- ორმნიშვნელობიანი (n -აპეი-
რიანი) 214

- $\mathcal{A}$ საგნობრივი ფორმიზ განსა-
ზღვრული $X_1, \dots, X_n$ ცვლად-
ების მიმართ 134

- სინკულარული 117

- სიურექციური 114

- ტრანარული 117

- $X \rightarrow Y$ ტიპის :12

- $X \rightarrow Y$ ტიპის n -აპეირიანი
117

- უნარული 117

- ყველგან განსაზღვრული 114

ფუნქციათა კომპოზიცია 114,
110

ფუნქციას α ელემენტი გააძა-
ვავს ℓ -ში 114

ფუნქციის გაგრძელება 111,
114

- გამოხვევის არე 114

- განსაზღვრის არე 114

- გრაფიკი 114

- მნიშვნელობა α ელემენტზე
114

- მნიშვნელობათა არე 114

- K -ური არგუმენტი 116

- შეზღუდული ფუნქცია 116

- შევიწროება 111, 114

- - $\mathcal{A}$ სიმრავლეზე 111,
114

- ჩასვლის არე 114

- ძირითადი ტიპები 114,
111—112

ფუნქციონალური სისრულე 234

შეზღუდული ანტიომპოკაცია

შებრუნებული არაიმპლიკაცია =
შებრუნებული ანტიიმპლიკა-
ცია 236

- იმპლიკაცია 236
- იმპლიკაციის უარყოფა 236
- კუთვნილება 69—70
- კუთვნილების უარყოფა
69—70

შეგვნილი კონსტანტა 39

- - პრეპოზიციური 39
- - საკნობრივი 39

შედეგი (იმპლიკაციაში) = კონ-
სტატენტი 45

შევის 68

- მკაცრად 68

შევიწროება ღანაობის 110—111

- მიმართების 120

შეიყავს 68

- მკაცრად 68

- როგორც ელემენტს 68

შეკრების ასოციაციურობა 201

- რისტიმუტიულობა გამრავლე-
ბის მიმართ 231

- ელემინაციურობა გამრავლების
მიმართ 232

- იდემატიფიკაციურობა 232

- კომუტაციურობა 231

შემაველობა 69—70

შემაველობის უარყოფა 69—70

შემათქმელები სიმბოლო 71,
239

- სიმბოლოს ნომერი 241

შემათქმელები ფორმულა 240

შენიშნადღერული ბეზოპან(სიმრავ-
ლე ნამდვილი რიცხვებისა)
104

- სიმრავლე(ნამდვილი რიცხვების)

შენიშნადღერული ევემოპან(სიმ-
რავლე ნამდვილი რიცხვების)

შენიშნავა სიმბოლოსა სიტყვაში
27, 36

- სიტყვისა სიტყვაში 36

შემცველობა 69—70

შემცველობის უარყოფა 69—70

შეფერის მჭრიხი 198

შინაარსული ღეროთა 25—36,
258—270

- ღეროთის ფორმალიზაცია 262

ჩასმა 171

- ერთიერთული 171

- მარტივი 185

- მიმდევრობითი 171

ჩასმის ნუსხი 185

- - ერთიერთული 185

- - მარტივი 185

ძარიელი ბალაგებელი სისტემა
84

- ელემენტთა ოჯახი 120

- კლასი 34

- მიმდევრობა = ძარიელი ელემენ-
ტთა ოჯახი 119

- სიმრავლე 34

- სიტყვა 27

ცვლადი 20, 35—36, 163

- n-აქტიური პრეპოზიტი
27—30, 20

- - ფუნქციონალური 27—30,
20

- - - სუბსტანციური 27—30,

ცვლადი რაბმული რკერაჭორული
ნოშნის (შემოსვლის) მიერ

38

- - (ფორმის) 38, 250
- ელემენტური 20, 34
- ჭავისუფალი (ფორმის) 38, 250
- ინდივიდუალური 20
- კლასური 20, 34
- კომპლექსური 20
- მათემატიკური 162
- მუჭაენის 162
- მუჭამათემატიკური 162
- ნამდვილი 20
- რკერაჭორული 29
- პრედიკატი 20, 27-30
- პრეპოზიციული 20, 27-30, 160
- საგნობრივი 20, 27-30, 34
- სიმრავლური 20, 34
- ფუნქციონალური 20, 27-30
- წინაპარობრივი 160

ცვლადის რაბმული შემოსვლა
(ფორმაში) 38, 250

- ჭავისუფალი შემოსვლა (ფორ-
მაში) 38, 250
- მნიშვნელობა 20, 35-36
- მნიშვნელობაში არე 20
- - კლასი 20-21
- - სიმრავლე 20-21

ცნება 11-12

- გამოსავალი 14
- ერეკლეულები 12
- ზოგადი 12
- საწყისი 14
- უმარტივესი 14

ცნება ძირითადი 12-13

- წარმოებულის 12-13

ცნების განსაზღვრა (განსაზღ-
ვრება) 12

- მოცულობა 11
- შინაარსი 11

ძირითადი კონსტანტა 35-36

- - (რ-არეგულიანი) პრედიკა-
ტი 27-30, 35
- - - სუბსტანციური ფუნქციონ-
რალური 27-30, 35
- - პრეპოზიციული 27-30, 35
- - საგნობრივი 27-30, 35
- კონსტანტის მნიშვნელობა 35
- - მნიშვნელობაში არე 35
- პრეპოზიციული კავშირი 28
- რკერაჭორი 27-30, 71
- საგანი 25

წანამდებარება გაყვამა 230

წანამდებარე 45

წანამდებარის ექსპორტირება
230

- იმპორტირება 230

წარმოებენა 13

წარმოებულის აღნიშვნა
170-171

- კონსტანტა 239

- ლოგიკური კავშირი 239

- რკერაჭორი 71, 239

- რკერაჭორის ნომერი 241

წილაკების კავშირები

ბილატი 90—92

- ჩვეულებრივი 90—92

- ნამდვილი რიცხვი 98

ბინააღმდეგობა (ბინაპაღებაჟა
აღებრაჟი) = იგივერაჟ
მცხარი ჟორმულა 181

ბინაპაღება 39

- ტამოხაჭავს საცნის ჟვისე-
ბას 11

- განხილული როგორც ჟვისება
(ნიშანი) 10—11

- - - მიმართება 10

- - - პრეიკატი 10

- მათემატიკური 162—163

- მეთამათემატიკური
162—163

- როგორც კონტინუა (აღნიშვნა,
სახელი) 160

ბინაპაღებაჟა აღებრაჟ
157—167

- - კონტინუი 245

- - სრული ჟუნქციონალური
აბრი 234

- - უკონტინუი 245

- აღებრის ჟორმულირება
233—234

- - ჟორმულის ნარმოცენა
 $X_1, \dots, X_n$ ცვლილების მი-
მართ 221—222

- აღრიცხვა 157, 264

- რიგიუნქცია 44

- უკონტინუი 48

- იმპლიკაცია 45

- კონიუნქცია 42

- სქემა 50

ბინაპაღების უარყოფა 44—45

ბევილი 84

ბევილის ინვერსია 107

ბევილის სიმეტრიული 107

ჟემმარიტი 6, 26, 158—160
ჟემმარიტი მნიშვნელობა
26—27, 158—160

- - განსაზღვრული 40

- - განუსაზღვრელი 40

(ჟემმარიტი) პირობი კავში-
რი 236

- პირობი ორმხრივი კავშირი
236

ჟემმარიტი მნიშვნელობაჟა
ტაფარმოებული არე 40

ჟამი ტაფარმოებული აბრი 229

ჟაჟური რასკენა 230

ჟაჟა ჟორია 17—19

ჟაჟი 17—18

∈ 16, 66—69

= 16, 66—69

∈̄ 16, 66—69

≠ 16, 66—69

ℵ 25

‡; † 26—27

S_L 27—31

S 33-34

S_0 34

$E; M; J; \emptyset; 0$ 34

$\neg; \wedge; \vee; \rightarrow; \leftrightarrow; \forall; \exists;$

τ 28, 42-53

$\dagger; \ddagger$ 40

$\forall a; \exists a$ 29, 49-51

$\forall a \in M; \forall a > 0; \exists a \geq 0$

ρ u. o. 52-53

$\tau_a; \tau$ 29, 53-54

$\vdash; \approx$ 57-58, 181-182

$\equiv$ 58-59

$\Rightarrow; \Leftrightarrow$ 59-60, 178, 254,
256

$\nRightarrow; \nLeftrightarrow$ 60, 178, 256

Ξ 61

$\ni; \bar{\ni}; \subseteq; \supseteq; \subset; \supset; \not\subset;$

$\not\supset; \not\subseteq; \not\supseteq$ 66-67

$\{a_1, \dots, a_n\}; \{a_0, a_1, a_2, \dots\};$

$\{a_i : i=0, 1, 2, \dots\}$ 72-73

$\{X: P(X)\}; \{T(X): P(X)\}$ 73

$A \setminus B$ 73

$U^n; \cap^n; \bigcup_{i=1}^n; \bigcap_{i=1}^n; \Delta; C_A; C;$ 74-75

$\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ ($n=0, 1, 2, \dots$);

$(a_1, \dots, a_n)$ ($n=0, 1, 2, \dots$); $\langle \rangle; ()$ 83-84

$X^n; X; \overset{n}{X}; \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_n$ 86, 87

$P_{i_1 \dots i_q}^n; P_{i_1 \dots i_q}^n;$

$P_{i_1 \dots i_q}^n; P_{i_1 \dots i_q}^n$ 87-88

$\sim; \simeq$ 85

$Q; Q_+; Q_-; Q^*; Q_+^*; Q_-^*$ 95-96

$R; R_+; R_-; R^*; R_+^*; R_-^*;$

$\bar{R}; \bar{R}_+; \bar{R}_-; \bar{R}^*; \bar{R}_+^*; \bar{R}_-^*$ 98

$J_X; 1_X; J; 1$ 115

$h_i; (h_i)_{i \in J}$ 118

$(h_i)_{i=0, 1, 2, \dots}; (h_i)_{i \geq m};$

$(h_i)_{i < m}$ u. o. o. 119

$h_0, h_1, h_2, \dots; h_m, h_{m+1}, h_{m+2}, \dots;$

$h_0, h_1, \dots, h_m;$

$h_n, h_{n+1}, \dots, h_m$ u. o. o. 119

$\varphi a_1 \dots a_n; a_1 \varphi a_2$ 121

$\leqslant; \leq; \leqslant; <$ 126-127

$\approx$ 146

$\mathfrak{X}_0; \mathfrak{X}; \overline{\mathcal{A}}$ 147

$\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n); \mathcal{A}(Y_1, \dots, Y_n)$ 170

$(Y_1, \dots, Y_n / X_1, \dots, X_n) \mathcal{A}$ 171

$/; \&$ 237

D_m ($m=1, 2, \dots, 11$) 238-239

$P'_1; Q'_1$ 237-238

$P'_2; F_2^{0'}$ 248

$F_2^{*'}$ 253

$P_1; P_2; Q_1; F_2^0; F_2^*; S'_1;$

$S'; S'_0$ 256

P'_1 264

შ ი ნ ა ა რ ს ი

რედაქტორის წინასიტყვაობა	3
შ ა ვ ი 1. სიმრავლეთა მათემატიკის ელემენტები	5
§ 1. სიმრავლეთა თეორიის ფუნდამენტური ცნებები.	6
1. ნსჯელობა, მიმართება, ჯგუფება, ცნება	6
2. სიმრავლე, კლასი, ინდივიდი	15
§ 2. ზოგადი შენიშვნები შინაარსული თეორიების შესახებ	25
1. S_1, S_2, S_3 თეორიები	25
2. ზოგადი ცნებასთან დაკავშირებული ზოგიერთი ძირითადი ცნებები.	36
3. ლოგიკურ ნაწარმოებთან შინაარსის განსაზღვრა	42
4. თეორემა, ზოგადობა, ზოგადი ცნება, გამოცხადება, იმპლიკაცია, იმპლიკანტი	55
5. ლოგიკური ჯამი, ლოგიკური ნამრავლი და მისი მნიშვნელობა	61
§ 3. სიმრავლეთა თეორიის ზოგიერთი განსაზღვრება	56
1. სიმრავლეთა თეორიის ძირითადი პრინციპები და ამ პრინციპებთან დაკავშირებული ზოგიერთი ცნება.	66
2. კლასური (კერძო სიმრავლური) ნაწარმოები.	73
§ 4. სიმრავლურ-თეორიული ზედსაზრისი მათემატიკაში.	78
1. ზოგადი ხასიათის შენიშვნები	78
2. ჩვეულებრივი ენის ნათქვამი რიცხვები	74
3. (ჩვეულებრივი) ნათქვამი რიცხვები.	82
4. დამატებითი სიხვედრები	83
5. ძირითადი და პრინციპები.	86
6. მთელი რიცხვები	88
7. ნიშნები და რაციონალური რიცხვები	90
8. ნამრავლი რიცხვები	96

§5. გრაფიკი, მანძილი, ფუნქცია, ტანსაცმელი, მიმართება, მუნიციპალიტეტი	106
1. გრაფიკი	107
2. მანძილი	109
3. ფუნქცია, ტანსაცმელი	113
4. ელემენტარული ოპერაციები	117
5. მიმართება	120
6. ორპერაციანი მიმართებათა ძირითადი ტიპები	124
7. მრავალკუთხედიანი გეომეტრია	128
8. მიმართებათა და ფუნქციების მრავალფეროვნება	132
9. ნამდვილი რიცხვების წარმოდგენა ანალიზის სახით	135
10. ნამდვილი რიცხვების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია, რიცხვითი ღირებულება	139
11. მრავალკუთხედიანი სივრცე	145
§6. სიმეტრიულობა და მუდმივი სიმეტრიულობა	146
1. ძირითადი განსაზღვრებები	146
2. ზოგადი მუდმივი სიმეტრიულობა	149
მ ა გ ი 11. ნინოქალაქის ადგილობრა	157
§1. ნინოქალაქის ადგილობრის ძირითადი განსაზღვრებები	157
1. ნინოქალაქის ადგილობრის სახელი	157
2. ზოგადი ძირითადი გეომეტრია	160
3. ნინოქალაქის ადგილობრის აღმართები	165
4. ფორმულა	167
§2. ფორმულათა გეომეტრიულობა (გეომეტრიულობა) და გეომეტრიულობის (გეომეტრიულობის) მიმართება	177
§3. ლოკალური კვანძოვანი ურთიერთდასაწყობებულობა	194
§4. ორპერაციანი კანონი	199
§5. ამოხსნაობის პრობლემა	206

§6. ნებისმიერი ორმნიშვნელობიანი ფუნქციის წარმოდგენა	
წინადადებაა აღებრის ფორმული	214
§7. ფორმულის სრულყოფილი ნორმალური ფორმები	221
§8. წინადადებაა აღებრის ძირითადი ფორმულები.	230
§9. წინადადებაა აღებრის სხვადასხვა ფორმულირებები.	233
§10. ანტიკვატების ლოგიკა	246
§11. ფორმალური და ანაფორმალური ანუ ეინაარსული ლოგიკები.	
წინადადებაა აღებრის ფორმალიზაცია.	258

II თავის დამატება: წინადადებაა აღებრის დამოყენება	
ანტიკვატების ლოგიკა	268
ლიტერატურა	280
გერმინებისა და სინთეზების საძიებელი	283

რედაქტორი ღ.ბ ა ზ ნ ა რ ა ძ ე

გამომცემლობის რედაქტორი რ.ჭ უ კ ე ა ძ ე

კორექტორი ც.ჩ ნ ბ ე ა რ ნ ა ნ ი

ხელმოწერილია რასაბეჭდად 25/1-78

ქაღალდის ფორმატი 60 X 84

ნაბეჭდი შაბახი 19,25

სააღრიცხვო-საგამომცემლო შაბახი 13,44

სბ 173

მეკვეთა 857

უგ 06509

ფირმა 1 000

ფასი 82 კპპ.

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი 380028,
ი.ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14.

საქ.სსრ მცენიერებათა აკადემიის სტამბა, თბილისი 380060,
კუჭუბოვის ქ.19.