ნ. ი. მუსხელიშვილი

# ანალიზური გეომეტრიის კურსი

მესამე შესწორებული და შევსებული გამოცემა

სსრკ უმაღლესი განათლების სამინისტროს მიერ დაშვებულია სახელმძღვანელოდ უნივერსიტეტების ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტებისთვის

ტექნიკა და შრომა

1951

რედაქტორი დ. ძველაძა

ტექ.. რედაქტორი დ. ჟივიძე
კორექტორი დ. დგებუაძე
გამომშვები შ. ხელაძე

---

ფე00924 შეკვ. № 881 ტირაჟი 2000.

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 15/V-51 წ. ანაწყობის ზომა 7X11. ქაღალდის ზომა 70X105. სასტამბო ფორმათა რაოდენობა 43. საავტორო ფორმათა რაოდენობა 43,49. საგ.-საღრიცხვო ფორმათა რაოდენობა 45,66

ფასი 17 მან.

---

საქართველოს სსრ მინისტრთა საბჭოსთან არსებული პოლიგრაფმრეწველობის, გამომცემლობებისა და წიგნით ვაჭრობის საქმეთა სამმართველოს სტამბა № 2.
თბილისი, ფურცელაძის ქ. № 5.

---

Типография № 2 Управления по делам полиграфической промышленности, издательств и книжной торговли при Совете Министров Грузинской ССР.
Тбилиси, ул. Пурцеладзе 5.

# ᲡᲘᲜᲐᲐᲠᲡᲘ


შესავალი . 1

თავი პირველი

## ვექტორები. პარალელური გეგმილები

I. ნაკვეთი, ღერძი, ვექტორი . . . . . 3

§ 1. ნაკვეთი (3).—§ 2. ღერძი (3).—§ 3. ვექტორები (4).—§ 4. ვექტორთა ტოლობა (5).—§ 5. ვექტორები თავისუფალი, სრიალა და დაბმული (6).

II. ვექტორთა ჯამი. ვექტორისა და რიცხვის ნამრავლი . . . 6

§ 6. შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციის შესახებ (6). —§ 7. ვექტორთა ჯამი (8).—§ 8. კერძო შემთხვევები (10).—§ 9. ვექტორთა სხვაობა (12).—§ 10. ვექტორისა და რიცხვის ნამრავლი (13).—§ 11. მოცემული მიმართულების პარალელური ვექტორები. ორტი (16).—§ 12. ვექტორები ღერძზე (17).

III. გეგმილები ღერძსა და სიბრტყეზე . . . . . 19

§ 13. გეგმილი ღერძზე (19).—§ 13 a. ერთსა და იმავე სიბრტყეზე მდებარე ნაკვთების გეგმილები (20).—§ 14. გეგმილი სიბრტყეზე (21).—§ 15. ვექტორთა ჯამისა და სხვაობის გეგმილები ღერძზე (22).—§ 16. ვექტორთა ჯამის ან სხვაობის გეგმილები სიბრტყეზე (23).—§ 17. ვექტორისა და რიცხვის ნამრაელის გეგმილი (24).

IV. მართკუთხოვანი გეგმილების გამოსათვლელი ფორმულები . . . 24

§ 18. კუთხე ორ მიმართულებას შორის (24).—§ 19. ვექტორის მართკუთხოვანი გეგმილის (ღერძზე) გამოსათვლელი ფორმულა (25).—§ 19a. განზოგადება (26).—§ 20. ვექტორის სიბრტყეზე მართკუთხოვანი გეგმილის სიგრძე (28).—§ 21. ბრტყელი ნაკეთის სიბრტყეზე გეგმილის ფართობი (28).

V. ორი ვექტორის სკალარული და ვექტორული ნამრავლი . 31

§ 22. ორი ვექტორის სკალარული ნამრაელი (31).—§ 23. ვექტორის მართკუთხოვანი გეგმილის გამოსახვა სკალარული ნამრაელის საშუალებით (34).—§ 24. სამი მიმართულების მარჯვენა და მარცხენა სისტემა (34).—§ 25. ორი ვექტორის ვექტორული ნამრაელი (35).—§ 26. სამი ვექტორის შერეული ნამრაელი (39).

თავი მეოთხე

## ვექტორისა და წერტილის კოორდინატები

I. დეკარტის კოორდინატები . . . . . 42

§ 27. კოორდინატები წრფეზე (ღერძზე) (42).—§ 28. ვექტორისა და წერტილის კოორდინატები სიბრტყეზე (44).—§ 29. მართკუთხოვანი კოორდინატები სიბრტყეზე (47).—§ 30. ვექტორისა და წერტილის კოორდინატები სივრცეში (48).—§ 31. მართკუთხოვანი კოორდინატები სივრცეში (51).—§ 32. ვექტორის დაშლა მოცემული მიმართულებების მიხედვით (52).—§ 33. განზოგადებული დეკარტის კოორდინატები (54).

II. ძირითადი აფინური ფორმულები . . . . . 57

§ 34. მოცემულ ვექტორთა ჯამის კოორდინატები (57).—§ 35. ვექტორის განსაზღვრა მოცემული სათავის და ბოლოს მიხედვით (58).—§ 36. რიცხვისა და ვექტორის ნამრავლის კოორდინატი (59).—§ 37. ორი ვექტორის პარალელობის პირობა (61).—§ 37a. ორი ვექტორის პარალელობის პირობა (გაგრძელება) (63).—§ 38. სამი წერტილის კოლინიარობის პირობა (63).—§ 39. სამი მოცემული ვექტორის კომპლანარობის პირობა (65).—§ 40. მოცემული ოთხი წერტილის კომპლანარობის პირობა (67).—§ 41. ნაკვეთის გაყოფა მოცემული ფარდობით (68).

III. ძირითადი მეტრული ფორმულები მართკუთხოვან კოორდინატებში . . . . . 71

§ 42. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი (71).—§ 43. ვექტორის სიგრძე, ვექტორის მიერ საკოორდინატო ღერძებთან შედგენილი კუთხეები; ორ წერტილს შორის მანძილი (72).—§ 44. ორტის კოორდინატები. მიმართულებას კოსინუსები (75).—§ 45. ორ ვექტორს (ან ორ მიმართულებას) შორის კუთხე (75).—§ 46. ორი ვექტორის (ან ორი მიმართულების) მართობულობის პირობა (77).—§ 47. სიბრტყეზე მიმართულების განსაზღვრა] (78).—§ 48. სიბრტყეზე ორ მიმართულებას შორის კუთხის განსაზღვრა, როცა კუთხეს ნიშანი მიეწერება (81).—§ 49. საერთო სათავის მქონე ორ ვექტორზე აგებული სამკუთხედის ფართობი (83).—§ 50. სამი წვეროთი მოცემული სამკუთხედის ფართობი (84).—§ 51. მოცემული ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი (85).—§ 52. სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი. პარალელეპიპედის მოცულობა (87).—§ 53. ტეტრაედრის მოცულობის პოვნა მისი წვეროების კოორდინატების მიხედვით (90).

IV. ძირითადი მეტრული ფორმულები დეკარტის ზოგად კოორდინატებში . . . . . 90

§ 54. კოვარიანტული და კონტრავარიანტული დეკარტის კოორდინატები (90).—§ 55. კოვარიანტულ და კონტრავარიანტულ კოორდი-

ნატებს შორის დამოკიდებულება (92).—§ 56. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის, ვექტორის სიგრძის, ორ წერტილს შორის მანძილისა და ორ მიმართულებას შორის კუთხის გამოსახულებანი (94).—§ 57. მიმართულების კოორდინატები და კოსინუსები განუზოგადებელ ირიბკუთხოვან კოორდინატებში (98).

V. კოორდინატთა სხვადასხვა სისტემა . . . . . 100

§ 58. სიბრტყეზე პოლარ კოორდინატთა სისტემა (100).—§ 59. განზოგადება (101).—§ 60. სიბრტყეზე პოლარ კოორდინატების გარდაქმნა დეკარტის კოორდინატებში (101).—§ 61. სივრცეში პოლარი კოორდინატები (103).—§ 62. ნახევარპოლარი (ცილინდრული) კოორდინატები (104).—§ 63. კოორდინატთა ზოგადი მეთოდი (105).

თავი მესამე

## დეკარტის კოორდინატთა გარდაქმნა, მოძრაობა და აფინური გარდაქმნები

I. დეკარტის კოორდინატთა გარდაქმნის ზოგადი ფორმულები . . . 108

§ 64. სათავის გადატანა (108).—§ 65. საკოორდინატო ვექტორთა შეცვლა (109).—§ 66. ზოგადი შემთხვევა (112).—§ 67 დამატებანი (115).—§ 68 კოვარიანტული კოორდინატების გარდაქმნა (119).

II. კოორდინატთა გარდაქმნის უმთავრესი კერძო შემთხვევები . . 120

§ 69. მართკუთხოვანი კოორდინატების გარდაქმნა სიბრტყეზე (120).—§ 70 სივრცეში მართკუთხოვანი კოორდინატების გარდაქმნა (123).—§ 71. მართკუთხოვანი კოორდინატების გარდაქმნის ფორმულების კოეფიციენტთა შორის დამოკიდებულებანი (126).—§ 72. ორთოგონალური ჩასმები. წინა პარაგრაფის ფორმულების ალგებრული გამოყვანა (129). § 73. ეილერის კუთხეები (131).—§ 74. არაგანზოგადებული ირიბკუთხოვანი კოორდინატების გარდაქმნა სიბრტყეზე (135).

III. მოძრაობანი და აფინური გარდაქმნები . . . . . 135

§ 75. მოძრაობანი (136).—§ 76. აფინური გარდაქმნები (139).—§77. მსგავსი გარდაქმნები და მოძრაობები, როგორც აფინური გარდაქმნის კერძო შემთხვევები (146).—§ 78. წერტილოვანი გარდაქმნების ჯგუფთა შესახებ. გეომეტრიული დისციპლინების კლასიფიკაციის შესახებ (151).

თავი მეოთხე

## ბრტყელი წირის განტოლების შესახებ. წრფე სიბრტყეზე

I. სიბრტყეზე წირთა ანალიზური წარმოდგენა . . . . . 154

§ 79. წირის განტოლება (154).—§ 80. მაგალითები წრფეწირისა და წრეწირის განტოლებანი (156).— § 81. წირთა პარამეტრული წარმოდგენა (161).—§ 82. წირის განტოლებანი კოორდინატთა სხვა-

დასხვა სისტემაში (162).—§ 83. ძირითადი საკითხები, წირთა ანალიზურ წარმოდგენასთან დაკავშირებულნი (163).—§ 84. სხვადასხვა წირის მაგალითები (165).— § 83. ბრტყელ წირთა კლასიფიკაცია (171).— § 86. შლადი და დაუშლადი ალგებრული წირები (173).— § 87. ორი წირის გადაკვეთის შესახებ (175).

II. წრფის განტოლებათა სხვადასხვა ხახე . . . . . 177

§ 88. განტოლება მიმართულების კოეფიციენტებში, პარამეტრული წარმოდგენა (177).—§ 89. წრფის დაყვანილი განტოლება (180).—§ 90. წრფის ზოგადი განტოლება (182).— § 91. წრფის ზოგადი განტოლების კერძო შემთხვევები (184).— § 92. $Ax+By+C$ სამწევრის ნიშანი (185).—§ 93. განტოლება ღერძთა ნაკვეთებში (186).— § 94. წრფის აგება მოცემული განტოლების მიხედვით (187).— § 95. ზოგადი განტოლების A და $B$ კოეფიციენტის გეომეტრიული მნიშვნელობა (188).— § 96. წრფის ნორმალური განტოლება (189).

III. ძირითადი ამოცანები წრფეზე . . . . . 192

§ 97. ამოცანა 1. ორი მოცემული წრფის პარალელობისა და თანამთხვევის პირობების პოვნა (192).—§ 98. ამოცანა 2. ორი წრფის გადაკვეთის წერტილის პოვნა (194).—§ 99. ამოცანა 3. საძიებელია დეკარტის კოორდინატთა ახალ სისტემაზე გადასვლის ფორმულები, როცა ღერძთა განტოლებანი მოცემულია (195). —§ 100. ამოცანა 4. მოცემული წრფისა და მოცემული მრუდის გადაკვეთის წერტილთა პოვნა (196).—§ 101. ამოცანა 5. ორ წრფეს შორის კუთხის პოვნა (200).—§ 102. ამოცანა 6. ორი წრფის მართობულობის პირობის პოვნა (201).—§ 103. ამოცანა 7. აღებულ წერტილსა და აღებულ წრფეს შორის მანძილის პოვნა (203).—§ 104. ამოცანა 8. პოვნა იმ ფარდობისა, რომლითაც აღებული წრფე კვეთს ორი მოცემული წერტილის შემაერთებელ ნაკვეთს (205).—§ 105. დამოუკიდებელ მუდმივთა რიცხვი წრფის განტოლებაში (205).—§ 106. წრფეთა კონა (206).—§ 107. ამოცანა 9. აღებულ წერტილზე გამავალი და აღებული მიმართულების პარალელური წრფის განტოლების პოვნა (207). —§ 108. ამოცანა 10. მოცემულ $M_1(x_1, y_1)$ და $M_2(x_2, y_2)$ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლების პოვნა (207).—§ 109. ამოცანა 11. აღებულ წერტილზე გამავალი და აღებული წრფის მართობული წრფის განტოლების პოვნა (208).—§ 110. ამოცანა 12. მოცემულ წერტილზე გამავალი და მოცემულ წრფესთან მოცემული კუთხის შემდგენი წრფის განტოლების პოვნა (209).—§ 111. ორი მოცემული წრფის გადაკვეთის წერტილზე გამავალ წრფეთა ზოგადი განტოლება (210).—§ 112. ამოცანა 13. ორი მოცემული წრფის გადაკვეთის წერტილზე და მეორე მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის პოვნა (212).—§113. პირობა იმისა, რომ სამი წრფე ერთ წერტილში იკვეთებოდეს (213).—§ 114. ამოცანა 14. მოცემულ წრფეთა გადაკვე-

თაზე გამავალი და მოცემული მიმართულების მქონე წრფის განტოლების პოვნა (215).—§ 115. $k$ მუდმივის გეომეტრიული მნიშვნელობა (215).

თავი მეხუთე

წრფე და სიბრტყე სივრცეში

I. ფართეულის განტოლება. წირის განტოლება . . . . . 219

§ 116. ფართეულის განტოლება (219).—§ 117. სფეროსა და წრიული კონუსის განტოლებანი მართკუთხოვან კოორდინატებში (221).—§ 118. ცილინდრის განტოლება (223).—§ 119. ფართეულთა კლასიფიკაცია (224).—§ 120. წირის განტოლება (225).—§ 121. წირებისა და ფართეულების პარამეტრული წარმოდგენა (227).—§ 122. სივრცეში წირებისა და ფართეულების გადაკვეთის შესახებ (229).

II. სიბრტყის განტოლება . . . . . 230

§ 123. სიბრტყის ზოგადი განტოლება, პარამეტრული წარმოდგენა (230).—§ 124. $A$, $B$, $C$ კოეფიციენტების გეომეტრიული მნიშვნელობა (232).—§ 125. კერძო შემთხვევები (233).—§ 126. $Ax+By+Cz+D$ ოთხწევრის ნიშანი (234).—§ 127. განტოლება ღერძთა ნაკვეთებში (234).—§ 128. განტოლებით მოცემული სიბრტყის აგება (235).—§ 129. სიბრტყის კვალი საკოორდინატო სიბრტყეებზე (236). —§ 130. ორი სიბრტყის პარალელურობისა და თანამთხვევის პირობები (237). § 131. სიბრტყის ნორმალური განტოლება (239).

III. წრფის განტოლებანი სივრცეში . . . . . 240

§ 132. განტოლებანი მიმართულების კოეფიციენტებში. პარამეტრული წარმოდგენა (240).—§ 133. წრფის დაყვანილი განტოლებანი (243).—§ 134. ორი წრფის პარალელობისა და თანამთხვევის პირობები (245).—§ 135. წრფის განტოლებანი ზოგადი სახით (246).

IV. ძირითადი ამოცანები წრფეზა და სიბრტყეზე . 248

§ 136. ამოცანა 1. იპოვეთ ორი სიბრტყის გადაკვეთა (248).—§ 137. ამოცანა 2. იპოვეთ სამი სიბრტყის გადაკვეთა (248).—§ 138. ამოცანა 3. იპოვეთ გადასვლის ფორმულები დეკარტის კოორდინატთა ახალ სისტემაზე, რომლის საკოორდინატო სიბრტყეები მოცემულია განტოლებებით (250).—§ 139. ამოცანა 4. იპოვეთ სიბრტყისა და წრფის გადაკვეთა (250).—§ 140. ამოცანა 5. იპოვეთ გადაკვეთა: 1°. მოცემული ფართეულისა და სიბრტყის, 2°. მოცემული ფართეულისა და წრფის, 3°. მოცემული მრუდისა და სიბრტყის (252).—§ 141. ამოცანა 6. იპოვეთ მოცემულ სიბრტყეთა ან წრფეთა შორის კუთხეები (254).—§ 142. ამოცანა 7. იპოვეთ მოცემულ წრფეთა და სიბრტყეთა მართობულობის პირობები (256).—§ 143. ამოცანა 8. იპოვეთ მანძილი წერტილიდან სიბრტყემდე (257).—§ 144. ამოცანა 9. იპოვეთ ფარდობა, რომლითაც მოცემული სიბრტყე ყოფს ორი მოცემული წერტი-

ლის შემაერთებელ ნაკვეთს (258).—§ 145. სიერცეში სიბრტყისა და წრფის მდებარეობის განმსაზღვრელი დამოუკიდებელი მუდმივების რიცხვი (258).—§ 146. წრფეთა და სიბრტყეთა შეკვრა. სიბრტყეთა კონა (259).—§ 147. ამოცანა 10. იპოვეთ მოცემულ წერტილზე გამავალი და მოცემული წრფის (ან ვექტორის) პარალელური წრფე (263).—§ 148. ამოცანა 11. იპოვეთ მოცემულ $M_1(x_1, y_1, z_1)$, წერტილზე გამავალი და მოცემული სიბრტყის $Ax+By+Cz+D=0$ მართობული წრფე (263).—§ 149. ამოცანა 12. იპოვეთ ორ მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფე (263).—§ 150. ამოცანა 13. იპოვეთ მოცემულ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ წერტილზე გამავალი და მოცემული სიბრტყის პარალელური სიბრტყე (263).—§151. ამოცანა 14. იპოვეთ მოცემულ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ წერტილზე გამავალი და მოცემული წრფის ან ვექტორის მართობული სიბრტყე (264)—§ 152. ამოცანა 15. იპოვეთ მოცემულ წრფეზე და მოცემულ წერტილზე გამავალი სიბრტყე (264).—§ 153. ამოცანა 16. იპოვეთ მოცემულ არაკოლინეარულ სამ წერტილზე გამავალი სიბრტყე (265).—§ 154. ამოცანა 17. იპოვეთ მოცემულ წრფეზე გამავალი და მეორე მოცემული წრფის ან ვექტორის პარალელური სიბრტყე (265).—§ 155. ამოცანა 18. იპოვეთ მოცემულ წრფეზე გამავალი და მოცემული სიბრტყის მართობული სიბრტყე (267).—§ 156. ამოცანა 19. იპოვეთ მოცემული ორი წრფის კომპლანარობის (გადაკვეთის) პირობა (267).—§ 157. ამოცანა 20. იპოვეთ მოცემულ $M$ წერტილიდან მოცემულ $\Delta$ წრფეზე ჩამოშვებული მართობის განტოლება (268).—§ 158. ამოცანა 21. იპოვეთ მოცემული $M_1(x_1, y_1, z_1)$ წერტილიდან მოცემულ $\Delta$ წრფემდე მანძილი (269).—§ 159. ამოცანა 22. იპოვეთ ორი წრფის საერთო მართობის განტოლება (270).—§ 160. ამოცანა 23. იპოვეთ ორ წრფეს შორის უმოკლესი მანძილი (271).

თავი მეექვსე

**წარმოსახვითი და არასაკუთრივი ელემენტები. ერთგვაროვანი დეკარტული და გეგმილური კოორდინატები. გეგმილური გარდაქმნები**

**I. წარმოსახვითი გეომეტრიული ელემენტები .** 273

§ 161. წარმოსახვითი წერტილები და ვექტორები (273).—§ 162. წარმოსახვითი წრფეები და სიბრტყეები (276).

**II. ერთგვაროვანი კოორდინატები და არასაკუთრივი ელემენტები. წრფისა და სიბრტყის კოორდინატები . . . . . .** 278

§ 163. დეკარტის ერთგვაროვანი კოორდინატები წრფეზე (278).—§ 164. ალგებრული განტოლების ფესვებზე გამოყენება (280).—§ 165. ერთგვაროვანი დეკარტის კოორდინატები სიბრტყეზე (282).—§ 166. წრფის განტოლება სიბრტყეზე ერთგვაროვან კოორდინატებში (284).—

§ 167. წრფის პარამეტრული წარმოდგენა სიბრტყეზე ერთგვაროვან კოორდინატებში (292).—§ 168. დეკარტის ერთგვაროვანი კოორდინატები სივრცეში (295).—§ 169. წრფის პარამეტრული წარმოდგენა სივრცეში (300).—§ 170. წრფის კოორდინატები სიბრტყეზე. ურთიერთობა წერტილთა და წრფეთა შორის (301).—§ 171. სიბრტყის კოორდინატები სივრცეში. წერტილთა და სიბრტყეთა შორის ურთიერთობა (304).—§ 172. გეგმილური გეომეტრიის ძირითადი გეომეტრიული საბეობანი (305).—§ 173. დეკარტის ერთგვაროვანი კოორდინატთა გარდაქმნა (306).—§ 174. ალგებრულ მრუდთა და ფართეულთა განტოლებანი ერთგვაროვან კოორდინატებში. ზოგიერთი ზოგადი დებულება (309).—§ 175. ციკლური წერტილები და სფერული წრეწირი (317).

III. გეგმილური კოორდინატები და გეგმილური გარდაქმნები . . . . 320

§ 176. წილად-წრფივი (ჰომოგრაფიული) ჩასმების შესახებ (320).— § 177. წერტილის გეგმილური კოორდინატები (322).— § 178. ალგებრული წირებისა და ფართეულის განტოლებანი ერთგვაროვან გეგმილურ კოორდინატებში (328).— §178a. წრფისა და კონის პარამეტრული წარმოდგენა გეგმილურ კოორდინატებში (331).— § 179. გეგმილური წერტილოვანი გარდაქმნა (332).— § 180. ოთხი წერტილის ორმაგი ფარდობა (337).— § 181. ჰარმონიული გაყოფა (342).— § 182. ორმაგი ფარდობის ინვარიანტობა ჰომოგრაფიული ჩასმის მიმართ (343).— § 183. კონის ოთხი წრფისა და ოთხი სიბრტყის ორმაგი ფარდობა (344).— § 184. დაგეგმილება და კვეთა (347). § 185. პირველი საფეხურის სახეობათა გეგმილური შესაბამობა (348).— § 186. გეგმილური კოორდინატების გეომეტრიული მნიშვნელობა წრფეზე (349).— § 187. ოთხი წერტილის ორმაგი ფარდობა წრფეზე, რომელიც მოცემულია პარამეტრული სახით (351).— § 188. პარამეტრულად მოცემული კონის ოთხი წრფის (სიბრტყის) ორმაგი ფარდობა. გეგმილური კოორდინატები კონაში (353).— § 189. პირველი საფეხურის ორი სახეობის გეგმილური შესაბამობის ანალიზური გამოსახულება (354).— § 190. პირველი საფეხურის დამთხვეული სახეობანი. ინვოლუცია (356). § 191. გეგმილური კოორდინატების გეომეტრიული მნიშვნელობა სიბრტყეზე და სივრცეში (358).— § 192. სიბრტყესა და სივრცეში გეგმილური კოორდინატების გარდაქმნის გეომეტრიული შინაარსი (363).— § 193. სიბრტყისა და სივრცის წერტილოვანი გარდაქმნის ძირითადი თვისებები (364).— § 194. კორელაცია (ურთიერთობა) (366).

თავი მეშვიდე

## კონუსური კვეთების უმარტივესი განტოლებანი და ელემენტარული თვისებანი

I. კონუსური კვეთების ნორმალური განტოლებანი. . . . . 368

§ 195. ელიფსის განმარტება და მისი ნორმალური სახის განტოლება (368).— § 196. ელიფსის ფორმის გამოკვლევა (371).— § 197. ჰიპერბო-

ლის განმარტება და მისი ნორმალური განტოლება (374).— § 198. ჰიპერბოლის ფორმის გამოკვლევა. ასიმპტოტები (376).— § 199. ფოკალური მანძილების თვისებები. ელიფსისა და ჰიპერბოლის დირექტრისები. ამ წირების ახალი განმარტება (379).— § 200. პარაბოლის განმარტება და მისი ნორმალური განტოლება (382).

II. ელიფსი, ჰიპერბოლი და პარაბოლი როგორც კონუსური კვეთები . . 387

§ 201. სწორი წრიული კონუსური კვეთა სიბრტყესთან (387). § 202. მოცემული კონუსური კვეთის მიღება მოცემული კონუსიდან (390).

III. კონუსური კვეთების განტოლების ზოგიერთი უმარტივესი სახე. კონუსური კვეთების მსგავსება . . . . . 391

§ 203. ჰიპერბოლის განტოლება ასიმპტოტების მიმართ (391). — § 204. კონუსური კვეთების პარამეტრული წარმოდგენა. აგება წერტილების მიხედვით (393).— § 205. კონუსური კვეთების პოლარული განტოლებანი ფოკუსების მიმართ (397).— § 206. კონუსური კვეთების განტოლებანი წვეროების მიმართ (400).— § 207. მსგავსი კონუსური კვეთები (402).

თავი მეოთხე

## მეოთხე რიგის წირების გეგმილური თვისებანი მხები და პოლარი

I. მეორე რიგის წირების გეგმილური კლასიფიკაცია . . . . . 405

§ 208. აღნიშვნები (405).— § 209. შლადი და დაუშლადი მეორე რიგის წირები. თანხვედნილი მეორე რიგის წირები (409).— § 210. მეორე რიგის წირის შლადობის პირობა (410).— § 211. მეორე რიგის წირი კანონიკური განტოლება გეგმილურ კოორდინატებში. გეგმილური კლასიფიკაცია (411).— § 212. მეორე რიგის წირის განსაზღვრა ხუთი წერტილით (414).— § 213. მეორე რიგის წირების კონა (417).— § 214. პასკალის თეორემა (419).— § 215. მეორე რიგის წირების შედგენა გეგმილური კონებით (421).

II. მეორე რიგის წირისა და წრფის გადაკვეთა. მხები . . . . . 422

§ 216. მეორე რიგის წირისა და წრფის გადაკვეთის განმსაზღვრელი განტოლება (422).—§ 217. მეორე რიგის წირის მხები (424).—§ 218. მხები, როგორც მკვეთის ზღვარი (426).

III. პოლუსი და პოლარი. ტანგენციალური განტოლება . . . . . 431

§ 219. მხების გატარება სიბრტყის მოცემული წერტილიდან. პოლუსი და პოლარი (431).—§ 220 პოლუსისა და პოლარის მეორენაირი განმარტება. შეუღლებული წერტილები (433).—§ 221. მეორე რიგის წირით განზღვრული პოლარობა (435).—§ 222. ავტოპოლარი სამკუთხედი (436).—§ 223. შეუღლებული წრფეები მეორე რიგის წირის ტანგენციალური განტოლება. კლასის ცნება (437).—§ 224. ურთიერთობის პრინციპის გამოყენება მეორე რიგის წირებისათვის (439).

თავი მეცხრე

## მეორე რიგის წირების აფინური და მეტრიკული თვისებანი

I. აფინური კლასიფიკაცია. ცენტრი, დიამეტრები, ასიმპტოტები . 440

§ 225. მეორე რიგის წირების აფინური კლასიფიკაცია (440).— § 225a. პარაბოლური ტიპის შლადი წირი (442).—§ 226. ასიმპტოტური მიმართულებანი (444).—§ 227. მეორე რიგის წირისა და წრფის გადაკვეთის განმსაზღვრელი განტოლება დეკარტის არაერთგვაროვან კოორდინატებში (445).—§ 228. მეორე რიგის წირის ცენტრი (447).— § 229. ასიმპტოტები (450).—§ 230. მეორე რიგის წირის დიამეტრები (452).—§ 231. დიამეტრების კავშირი მხებ წრფეებთან (456).—§ 232. დიამეტრი, როგორც არასაკუთრივ წერტილთა პოლარი (457).—§ 233. ნახაზით მოცემული მეორე რიგის წირის ცენტრისა და დიამეტრების აგება. დამატებითი ქორდები (458).—§ 234. მეორე რიგის ცენტრალური წირების განტოლება, შეუღლებული დიამეტრების მიმართ (459).—§ 235. პარაბოლური ტიპის წირების უმარტივესი განტოლებანი (462).—§ 236. მეორე რიგის წირის განტოლება მხებისა და შეხების წერტილში გატარებული დიამეტრის მიმართ (464).

II. მთავარი დიამეტრები. ნორმალური განტოლებანი მართკუთხა კოორდინატებში . . . . . 464

§ 237. მთავარი დიამეტრები (465).—§ 238. კონუსური კვეთების ნორმალური განტოლებანი დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებში (467).—§ 239. წრეხაზის განტოლების შესახებ (469).

III. ნორმალი. მხებთა ფოკალური თვისებები . . . . . 470

§ 240. ბრტყელი წირის ნორმალი (471).—§ 241. ელიფსის მხებთა თვისებები (471).—§ 242. ჰიპერბოლის მხებთა თვისება (473).— § 243. პარაბოლის მხებთა თვისებები (476).

IV. ელიფსის, ჰიპერბოლისა და პარაბოლის დიამეტრების გამოკვლევა 478

§ 244. ელიფსის დიამეტრები (478).—§ 245 ჰიპერბოლის დიამეტრები (480). § 246. პარაბოლის დიამეტრები (484).

თავი მეათე

## ინვარიანტები. მეორე რიგის წირის ფორმისა და მდებარეობის განსაზღვრა

I. ინვარიანტები . . . . . 485

§ 247. განტოლებათა გარდაქმნა დეკარტის კოორდინატების შეცვლის დროს (485).—§ 248. ინვარიანტის ცნება. მაგალითები (489).—

§ 249. მეორე რიგის წირების ძირითადი ინვარიანტები (490).—§ 250 მეტრიული ინვარიანტები დეკარტის განზოგადებულ კოორდინატთა შემთხვევაში (494).—§ 251. გამოყენება: აპოლონიუსის თეორემები (496).

**II. მეორე რიგის წირის განტოლების გამარტივება . . .** 497

§ 252. გარდაქმნა ცენტრის მიმართ (497);—§ 253. ორი ცვლადის კვადრატული ფორმის დაყვანა კანონიკურ სახეზე ორთოგონალური ჩასმით (500).—§ 254. მეორე რიგის ცენტრალური წირის გამარტივება (503).—§ 255. უცენტრო წირის გამარტივება (506).—§ 256. ორი პარალელური წრფის ერთობლიობის განტოლების გამარტივების მეორე ხერხი. პირობითი ინვარიანტი (510).—§ 257. შედეგების შეჯამება. 1. მეორე რიგის წირების აფინური კლასიფიკაცია (512).—§ 258. შედეგების შეჯამება. 2. მეორე რიგის წირის ფორმისა და ზომების განსაზღვრა მისი განტოლებით (514).—§ 259. შედეგების შეჯამება. 3. განტოლების დაყვანა ნორმალურ სახეზე და წირის მდებარეობის განსაზღვრა სიბრტყეზე (516).—§ 260. ორი მეორე რიგის წირის მსგავსების პირობა (521).—§ 261. ორი მეორე რიგის წირის კონგრუენტობის პირობა. $A$, $A_{33}$, $S$ ორთოგონალური ინვარიანტთა სისტემის სისრულის დამტკიცება (525).

თავი მეთერთმეტე

## მეორე რიგის ფართეულების ძირითადი თვისებები მხები სიბრტყე, ცენტრი დიამეტრები

**I. გეგმილური კლასიფიკაცია. მხები სიბრტყე .** 530

§ 262. აღნიშვნები (530)—§ 263. მეორე რიგის შლადი ფართეულები. თანამთხვევის პირობა (533)—§ 264. მეორე რიგის ფართეულების გეგმილური კლასიფიკაცია (534).— § 265. მეორე რიგის ფართეულისა და წრფის გადაკვეთის განმსაზღვრელი განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში (540).—§ 266. მხები წრფეები. მხები სიბრტყე (541).—§ 267. ფართეულები ელიფსური, ჰიპერბოლური და პარაბოლური წერტილებით (542).—§ 268. მხები კონუსი. პოლარი სიბრტყე და პოლუსი. ტანგენციალური განტოლება (546).

**II. მეორე რიგის ფართეულების აფინური თვისებანი. ცენტრი, დიამეტრები** 548

§ 269. არასაკუთრივ სიბრტყესთან გადაკვეთა. აფინური გადაკვეთა (548).—§ 270. მეორე რიგის ფართეულისა და წრფის გადაკვეთის განმსაზღვრელი განტოლება დეკარტის არაერთგვაროვან კოორდინატებში (552).—§ 271. ცენტრი (553).—§ 272. დიამეტრალური სიბრ-

ტყეები (554).—§ 273. ცენტრალური ფართეულების დიამეტრალური სიბრტყეები და დიამეტრები (556).—§ 274. დიამეტრალური სიბრტყეები როგორც არასაკუთრივი წერტილების პოლარი სიბრტყეები (558)—§ 275. ასიმპტოტები (558).

III. მეტრიკული თვისებანი. მთავარი დიამეტრალური სიბრტყეები. განტოლების დაყვანა ნორმალურ სახეზე . . . . . 556

§ 276. მთავარი დიამეტრალური სიბრტყეები და მთავარი მიმართულებები (558).—§ 277. ზოგიერთი ზოგადი დებულება სამი ცვლადის კვადრატული ფორმის გარდაქმნის შესახებ (561).—§ 278. $D(\lambda)=0$ განტოლებისა და მათ შესაბამის მთავარ მიმართულებათა თვისებანი (563).—§ 279. ფართეულის განტოლების გარდაქმნა დეკარტის კოორდინატების შეცვლის დროს (569).—§ 280. ორთოგონალური ინვარიანტები (570).—§ 281. მეორე რიგის ფართეულის განტოლების დაყვანა ნორმალურ სახეზე. 1. ცენტრალური ფართეულები (572).—§ 282. მეორე რიგის ფართეულების განტოლებათა დაყვანა ნორმალურ სახეზე 2. ფართეულები, რომლებსაც გარკვეული ცენტრი არა აქვთ (574).—§ 283. მეორე რიგის ფართეულის განტოლების დაყვანა ნორმალურ სახეზე. 3. შედეგების შეჯამება (578).—§ 283a. ნიშანთა დეკარტის წესი (579).

თავი მეთორმეტე

## მეორე რიგის ცალკეული ფართეულების ფორმების გამოკვლევა. წრფივი მსახველები. წრიული კვეთები

I. ცალკეული ფართეულების ფორმის გამოკვლევა . . . . 581

§ 284. ცალკეული ფართეულების ნორმალურ განტოლებათა ჩამოთვლა (581).—§ 285. მეორე რიგის ფართეულების გადაკვეთა პარალელური სიბრტყეებით (582).—§ 286. მეორე რიგის კონუსი (583).—§ 287. ელიფსოიდი (585).—§ 288, ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი (588).—§ 289 ორკალთა ჰიპერბოლოიდი (591).—§ 290. ელიფსური პარაბოლოიდი (594).—§ 291. ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი (597).

II. მეორე რიგის ფართეულების წრფივი მსახველები . . . . 600

§ 292. ზოგადი შენიშვნები (600).—§ 293. ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის წრფივი მსახველები (602).—§ 294. ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის წრფივი მსახველები (609).—§ 295. მეორე რიგის წრფოვანი ფართეულების აგება მოცემული სამი მსახველის მიხედვით (613).

III. მეორე რიგის ფართეულების წრიული კვეთანი . . . . . 614

§ 296. წინასწარი შენიშვნები (614).—§ 297. მეორე რიგის ცენტრალური ფართეულების წრიული კვეთანი (615).—§ 298. ელიფსური პარაბოლოიდისა და ელიფსური ცილინდრის წრიული კვეთები (620).

## დამატება

## ელემენტარული ცნობები წრფივი და კვადრატული ფორმების შესახებ

I. დეტერმინანტებისა და ცხრილების შესახებ . . 623

§ 1. დეტერმინანტების ზოგიერთი თვისება (623).—§ 2 დეტერმინანტის ან ცხრილის რანგი (627).—§ 3. ნულისაგან განსხვავებულ დეტერმინანტიან წრფივ განტოლებათა ამოხსნა (629)

II. წრფივი ფორმები . 631

§ 4. ალგებრული ფორმები, წრფივი ფორმები (631).—§ 5. წრფივი ფორმების სისტემა. დამოკიდებული და დამოუკიდებელი წრფივი ფორმები (631).—§ 6. გამოყენება წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ამოხსნისათვის ზოგად შემთხვევაში (637).—§ 6a. კერძო შემთხვევა (647).—§ 7. არაერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ამოხსნა (644).—§ 8. წრფივი ჩასმები (646).—§ 9. წრფივი ჩასმების მიმდევრობა (650).

III. ორადწრფივი და კვადრატული ფორმები . . . . . 651

§ 10. ორადწრფივი და კვადრატული ფორმები (651).—§ 11. კვადრატული ფორმების გარდაქმნა (654).—§ 12. კვადრატული ფორმის დაყვანა კანონიკურ სახეზე (657).—§ 13. კვადრატული ფორმის ორ წრფივ მამრავლად დაშლის პირობა (664).—§ 14. ორთოგონალური ჩასმები (666).—§ 15. კვადრატული ფორმის კანონიკურ სახეზე ორთოგონალური ჩასმით დაყვანის შესახებ (670).

## მესამე გამოცემის წინასიტყვაობა

წინამდებარე გამოცემა არსებითად მესამე რუსულ გამოცემას შეესაბამება. მასში შეტანილია მხოლოდ ზოგიერთი ცვლილება ტექსტის გაუმჯობესების მიზნით.

მთელი სამუშაო ამ გამოცემის მოსამზადებლად შეასრულეს დოცენტებმა დ. კვესელავამ, თ. ცხადაიამ და ე. წითლანაძემ, რისთვისაც მათ მადლობას ვუცხადებ.

ნ. მუხნელიშვილი

## ზოგიერთი განმარტება

(სტუდენტთა და მასწავლებელთათვის)

1°. საჭიროდ მიმაჩნია შემდეგ განმარტებათა მოცემა გადმოცემის ხასიათისა და მასალის შერჩევის შესახებ. ანალიზური გეომეტრიის სწავლება ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტებზე, ჩემი აზრით, შემდეგ ძირითად მიზანს უნდა ისახავდეს: გააცნოს დამწყებებს გეომეტრიაში ანალიზის გამოყენების გარკვეული ზოგადი მეთოდები და განუვითაროს მოსწავლეებს აუცილებელი მტკიცე ჩვევები ამ დარგში. ამ მთავარ მიზანს რომ არ ვისახავდეთ. მაშინ გადმოცემა იმ, შედარებით არც ისე მრავალ, გეომეტრიულ ეეშმარიტებათა, რაც კურსშია მოცემული, გაცილებით ნაკლებ ადგილს მოითხოვდა

გარდა ამისა, ანალიზური გეომეტრია უნდა ემსახურებოდეს ორ დამხმარე, მაგრამ მეტად მნიშვნელოვან მიზანს: რაც შეიძლება ადრე შეაჩვიოს მოსწავლეები ვექტორებით სარგებლობას და დეტერმინანტთა თეორიის, აგრეთვე წრფივ და კვადრატულ ფორმათა თეორიის პრაქტიკულ გამოყენებას. არა მგონია, რომ სასწავლო გეგმის რომელიმე სხვა საგანი ამ მიზნების მიღწევის უკეთეს საშუალებას იძლეოდეს.

მე შევეცადე გამეთვალისწინებინა ყველა ეს მოთხოვნილება და თანაც ვიზრუნე, რათა კურსი მეტისმეტად არ გადატვირთულიყო.

2°. პირველი კურსის სტუდენტებისათვის განკუთვნილი ყოველი მათემატიკური საგნის გადმოცემისას გვიხდება არჩევანი ლოგიკურ მიმდევრობასა და იმ მიმდევრობას შორის, რომელიც პედაგოგიური მოსაზრებებითაა ნაკარნახევი; უფრო სწორად, გვიხდება მეტად თუ ნაკლებად კომპრომისზე წასვლა. მე რამდენადმე უპირატესობა ლოგიკურ მიმდევრობას მივეცი. ამიტომ, მასალა გადმოცემულია იმ მიმდევრობით, რომლითაც უნდა გაიაროს მოსწავლემ იგი წიგნის მეორედ წაკითხვისა და კურსის შემდგომი განმეორების დროს. წიგნის პირველად წაკითხვისა და ლექციების სახით გადმოცემისას კი სასურველია მასალის ზოგიერთი გადასმა, რაზედაც ახლა იქნება ნათქვამი.

3°. მასალა, რომელიც ამა თუ იმ მოსაზრებით შეიძლება არასავალდებულოდ ჩაითვალოს პირველი კურსის სტუდენტთათვის, დაბეჭდილია წვრილი

შრიფტით (პეტიტით); ის შეიძლება მთლიანად იქნას გამოტოვებული, რაც ტექსტის დანარჩენი ნაწილის გაგებას ხელს არ შეუშლის (ეს არ შეეხება ცალკეული პარაგრაფების ბოლოს მოთავსებულ სავარჯიშოებს).

წიგნის პირველად წაკითხვისას შეიძლება (და სასურველიცაა) ზოგიერთი პარაგრაფი გამოვტოვოთ დროებით, მაგრამ მათ დავუბრუნდეთ შემდეგში. შესაბამისი მითითებები მოცემულია სქოლიოებში. უფრო არსებითს წარმოადგენს შემდეგი.

კურსის აგებას საფუძვლად უდევს კარგად ცნობილი იდეა გეომეტრიული თვისებების კლასიფიკაციისა მეტრიულ, აფინურ და გეგმილურ თვისებებად. ჩაგრამ დამწყებებს ამ იდეის ადვილად შეთვისება მხოლოდ იმის შემდეგ შეეძლებათ, როცა ისინი გარკვეულ კონკრეტულ მასალას გაეცნობიან და ზოგიერთ აუცილებელ ჩვევას შეიძენენ. ამიტომ კლასიფიკაციის იდეა წიგნის დასაწყისში გატარებულია ფარულად; ცხადი სახით ის გადმოცემულია მხოლოდ III თავის ბოლოს (§ 78). მიზანშეწონილად მიმაჩნია, რომ კლასიფიკაციის იდეის გაცნობა კიდევ უფრო შორს გადავწიოთ. ამასთან დაკავშირებით მე სასურველად მიმაჩნია, რომ კურსი გაელილ იქნას შემდეგი მიმდევრობით.

ჯერ ზედიზედ გავიაროთ I—V თავები, III თავის უმეტესი ნაწილის გამოტოვებით (სახელდობრ, დავკმაყოფილდეთ ამ თავის მხოლოდ 64—66 პარაგრაფებით) და, გამოვტოვებთ რა VI თავს, გადავიდეთ VII თავზე, რომელშიაც გადმოცემულია კონუსური კვეთების ელემენტარული თვისებები.

ამის შემდეგ უნდა დავუბრუნდეთ III თავის გამოტოვებულ ნაწილს და მერე გავიაროთ VI თავი. შემდეგ (VIII თავიდან დაწყებული) კურსი შეიძლება იმ მიმდევრობით გავიაროთ, როგორც ეს წიგნშია მოცემული[1]).

4°. მასალა ისეა გადმოცემული, რომ მსხვილი შრიფტით დაბეჭდილი ტექსტის გასაგებად საკმარისია მხოლოდ ზოგადი წარმოდგენა გეგმილურ კოორდინატებზე და გეგმილურ გარდაქმნებზე; ამისათვის, თავის მხრივ, საკმარისია VI თავის III განყოფილების 176—179 პარაგრაფების მასალის მხოლოდ ზერელედ გადათვალიერება.

5°. წიგნში მოცემულ „სავარჯიშოთა“ შესახებ უნდა შევნიშნო, რომ ისინი ვერავითარ შემთხვევაში ვერ შეცვლიან ამოცანათა სპეციალურ კრებულს. ეს სავარჯიშონი, რომელთა უმეტესობა ძალზე მარტივია და მკითხველისაგან არავითარ გამომგონებლობას არ მოითხოვს, განკუთვნილი არიან მხოლოდ ცალკეული დებულებებისა და ფორმულების განმარტებისათვის, რომლებიც მანამდე, ხოლო ზოგჯერ მათ შემდეგაც, გვხვდებიან.

6°. წიგნის ბოლოს „დამატების“ სახით მოცემულია ის ელემენტარული ცნობები წრფივ და კვადრატულ ფორმათა თეორიიდან, რაც აუცილებელია წიგნის ძირითადი ტექსტის გასაგებად; დამწყებებს ვურჩევ, რომ „დამატების“ მასალას გაეცნონ თანდათანობით, მის ცალკეულ ადგილებზე მითითებათა მიხედვით.

[1]) შეიძლება კიდევ, VII თავის შემდეგ, სადაც კონუსური კვეთების თვისებები შეისწავლება, უშუალოდ გაელილ იქნას XII თავის I განყოფილება, სადაც მეორე რიგის ცალკეული ფართეულების ფორმებია შესწავლილი.

# შ ე ს ა ვ ა ლ ი

ანალიზური გეომეტრიის საგანს წარმოადგენს გეომეტრიულ ნაკეთთა თვისებების შესწავლა აღრიცხვის, ანუ მ ა თ ე მ ა ტ ი კ უ რ ი ა ნ ა ლ ი ზ ი ს საშუალებით.

საქმე იმაშია, რომ, როგორც ქვემოთ ვნახავთ, შეიძლება სხვადასხვა ხერხით დამყარდეს მჭიდრო კავშირი გეომეტრიულ ნაკეთებსა, ერთი მხრივ, და რიცხვებს შორის მეორე მხრივ, ისეთნაირად, რომ ყოველ გეომეტრიულ ნაკეთს ან მის რომელიმე თვისებას უპასუხებდეს რიცხვთა გარკვეული სისტემა ან ამ რიცხვებს შორის გარკვეული დამოკიდებულება.

შესაძლებელია მრავალი ხერხის მოფიქრება აღნიშნული კავშირის განსახორციელებლად, მაგრამ მხოლოდ რამდენიმე მათგანია საინტერესო მათემატიკისა და მისი გამოყენებისათვის ბუნების მეტყველებაში. ამ ხერხებიდან ყველაზე მნიშვნელოვანია ხერხი, პირველად სისტემატურად გამოყენებული დეკარტის[1]) მიერ, რომელიც ანალიზური გეომეტრიის ფუძემდებლად შეიძლება ჩაითვალოს.

ამჯერად ჩვენთვის საკმარისია ვიცოდეთ, რომ აღნიშნული კავშირი გეომეტრიულსა და რიცხვით სახეებს შორის შეიძლება განხორციელდეს ამა თუ იმ ხერხით და, რომ, ამნაირად, შესაძლებელია ყოველი გეომეტრიული ამოცანა დაყვანილ იქნას ანალიზის ამოცანამდე.

ნათქვამიდან ცხადია, თუ რამდენად მნიშვნელოვანი როლი უნდა შეასრულოს ანალიზურმა გეომეტრიამ: ის საშუალებას იძლევა, რომ გეომეტრიისათვის გამოყენებულ იქნას მნიშვნელოვანი ნაწილი იმ განძისა, რაც დაგროვილია მათემატიკურ ანალიზში და, კერძოდ, ალგებრაში. უფრო მეტიც, ხშირად სასარგებლოა ანალიზის ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნა დაყვანილ იქნას გეომეტრიულ ნაკეთთა განხილვამდე; ამრიგად, გეომეტრიაც, თავის მხრივ, ანალიზისათვის არსებით დასაყრდენს წარმოადგენს. მაგალითად, ალგებრის მრავალი ამოცანის ამოხსნა განსაკუთრებით თვალსაჩინო ხდება გეომეტრიული განხილვის შედეგად.

„ანალიზური გეომეტრიის“ ქვეშ, ჩვეულებრივად, ესმით ამ მეცნიერების ის ნაწილი, რომელიც მხოლოდ ელემენტარული ალგებრით სარგებლობს[2]). ამავე აზრითაა გამოყენებული ეს ტერმინი ჩვენი წიგნის სათაურში.

---

[1]) დეკარტი (René Descartes, ანუ, მის დროს არსებულ სახელთა ლათინიზირების ჩვეულების თანახმად, Cartesius) ცნობილი ფრანგი მათემატიკოსი და ფილოსოფოსია (1596—1650).

[2]) ამ მეცნიერების სხვა დარგებს ეწოდება: დიფერენციალური გეომეტრია, ფართეულთა თეორია და სხვა.

მეტად სასარგებლო დამამარე საშუალებას ანალიზურ გეომეტრიაში (ისევე, როგორც მათემატიკის მრავალ სხვა ნაწილში) წარმოადგენს ვექტორის ცნება. ამ კურსს ჩვენ ვიწყებთ ვექტორთა შესახებ ძირითადი ცნებებისა და დებულებების გადმოცემით, ამასთან ვკმაყოფილდებით მხოლოდ ყველაზე აუცილებელით.

# თავი პირველი

## ვექტორები. პარალელური გეგმილები

### I. ნაკვეთი, ღერძი, ვექტორი

**§ 1. ნაკვეთი.** ნაკვეთის ცნება უკვე ელემენტარული გეომეტრიიდანაა ცნობილი: ნაკვეთი არის წრფის ნაწილი, რომელიც ორივე მხრიდან შემოსაზღვრულია ორი წერტილით. ნაკვეთის არსებითი ელემენტია მისი სიგრძე. გავიხსენოთ მოკლედ, როგორ უნდა გვესმოდეს ეს უკანასკნელი. ავიღოთ რომელიმე ნებისმიერი, მაგრამ გარკვეული ნაკვეთი, როგორც სიგრძის ერთეული, და გავზომოთ აღებული ნაკვეთი. ამ ნაკვეთის სიგრძე ეწოდება იმ რიცხვს, რომელიც გვიჩვენებს, თუ რამდენჯერ თავსდება ერთეული აღებულ ნაკვეთში. რასაკვირველია, შეიძლება მოხდეს, რომ ნაკვეთი-ერთეული მთელ რიცხვჯერ არ მოთავსდეს აღებულ ნაკვეთში, მაშინ მოცემული ნაკვეთის სიგრძე მთელი რიცხვი კი არ იქნება, არამედ წილადური ან ირაციონალურიც; სწორედ ეს უკანასკნელი არის ზოგადი შემთხვევა.

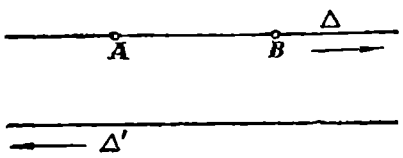
ყველაფერი ეს კარგადაა ცნობილი ელემენტარული მათემატიკიდან. ჩვენთვის საკმაროა მხოლოდ დავიხსომოთ, რომ აღებული ნაკვეთის სიგრძე შემდეგში ყველგან უნდა გვესმოდეს როგორც დადებითი რიცხვი, რომელსაც ვღებულობთ ერთეულ-ნაკვეთით გაზომვის საშუალებით.

**§ 2. ღერძი.** ანალიზურ გეომეტრიაში, გარდა წრფეწირის ცნებისა, ძირითადი მნიშვნელობა აქვს ღერძის ცნებას, რომელიც პირველთან მეტად დაახლოებული ცნებაა. განვიხილოთ რომელიმე $AB$ წრფე. წერტილი, რომელიც განუწყვეტლივ მოძრაობს ამ წრფეზე, შესაძლებელია აღწერდეს ამ წრფეს ორი მოპირდაპირე მიმართულებით: $A$-დან $B$-საკენ ან, პირიქით, $B$-დან $A$-საკენ. ავირჩიოთ რომელიმე ამ მიმართულებათაგანი და ვუწოდოთ მას დადებითი მიმართულება, ხოლო მოპირდაპირე მიმართულებას—უარყოფითი მიმართულება.

წრფე, რომელზედაც არჩეულია გარკვეული მიმართულება, დადებითად მიღებული, იწოდება ღერძად. ღერძი ჩვეულებრივ გამოისახება წრფის საშუალებით, რომელზედაც ისრით აღნიშნულია დადებითი მიმართულება; მაგალითად, ნახ. 1-ზე $\Delta$ ღერძი დადებითად მიმართულია $A$-დან $B$-საკენ.

ორი ღერძის შესახებ ამბობენ, რომ მათ აქვთ ერთი და იგივე მიმართულება, თუ ისინი არა მარტო პარალელური არიან, არა-

შედ ერთნაირი დადებითი მიმართულებაც აქვთ; იმ შემთხვევაში, როცა ორი ღერძი პარალელურია, მაგრამ მათი დადებითი მიმართულება სხვადასხვაა, ამბობენ, რომ ეს ღერძები მოპირდაპირედ არიან მიმართული. მაგალითად, $\Delta$ და $\Delta'$ ღერძები სწორედ ასეთია (იხ. ნახ. 1).



ნახ. 1.

§ 3. **ვექტორები.** ვექტორი ეწოდება წრფის ნაკვეთს, რომელსაც მინიჭებული აქვს გარკვეული დადებითი მიმართულება. ნახაზზე ვექტორი გამოისახება როგორც ნაკვეთი, რომელზედაც ისრით აღნიშნულია მიმართულება.

ვექტორის ერთ-ერთი ბოლო წერტილი იწოდება ვექტორის **სათავედ**, **ხოლო მეორე—მის ბოლოდ**; ვექტორის დადებითი მიმართულება სათავიდან ბოლოსაკენ ნიშნავს. ვექტორის სათავეს უწოდებენ აგრეთვე ვექტორის მოდების წერტილს. ვექტორს, რომლის სათავეა $A$ წერტილი, ბოლო ბოლო—$B$ წერტილი, ჩვენ აღვნიშნავთ ასე:

$$\overrightarrow{AB}.$$

პირველ ადგილას ვწერთ იმ ასოს, რომელიც სათავეს აღნიშნავს; ასოებს შორის დასმული ისარი გვიჩვენებს, რომ საქმე გვაქვს ვექტორთან და არა უბრალო ნაკვეთთან. ხშირად ვექტორს აღვნიშნავთ აგრეთვე ერთი ასოთი, რომლის ზემოთ ისარია გავლებული, როგორც, მაგალითად: $\vec{P}$.

$\overrightarrow{AB}$ ან $\vec{P}$ ვექტორის სიგრძისათვის ჩვენ ვიხმართ აღნიშვნას

$$|\overrightarrow{AB}| \text{ ან } |\vec{P}|.$$

ვექტორის სიგრძეს ხშირად უწოდებენ მის **აბსოლუტურ მნიშვნელობას** ანუ **ვექტორის მოდულს**.

ვექტორის ცნების გამოყენება მეტად ხელსაყრელია როგორც თვით მათემატიკაში, ისე ფიზიკისა და მექანიკის სხვადასხვა დარგში.

მრავალი ფიზიკური სიდიდის წარმოდგენა შეიძლება ვექტორის საშუალებით და ხშირად ასეთი წარმოდგენა ხელს უწყობს ფორმულებისა და საერთო დასკვნების განზოგადებას და გამარტივებას. სახელდობრ, ყოველი ფიზიკური სიდიდე, რომელსაც, გარდა გარკვეული რიცხვითი მნიშვნელობისა[1]), გარკვეული მიმართულებაც აქვს, შეიძლება წარმოდგენილ იქნას ვექტორით, რომლის სიგრძე (რიცხვობრივ) ტოლია განსახილავი სიდიდის რიცხვითი მნიშვნელობისა და მიმართულებაც ისეთივე აქვს, როგორც აღებულ სიდიდეს.

ვექტორით გამოსახული ფიზიკური სიდიდის მაგალითებად შეგვიძლია მოვიყვანოთ ძალა, სიჩქარე (აღებული წერტილისა), აჩქარება და სხვა. ისეთ

[1]) ეს რიცხვითი მნიშვნელობა მიიღება მოცემული სიდიდის გარკვეული (ნებისმიერად არჩეული) ერთეულით გაზომვის შედეგად.

სიდიდეებს, რომლებიც ვექტორით გამოისახებიან, ვექტორული სიდიდეები ეწოდებათ. ხშირად ვექტორული სიდიდისა და მისი გამომსახველი ვექტორის გაიგივება ხდება; მაგალითად, ამბობენ, რომ ძალა (ან სიჩქარე) არის ვექტორი [1]).

ვექტორულ სიდიდეს უპირისპირებენ სკალარულ სიდიდეს, რომელსაც არა აქვს მიმართულება და მთლიანად ხასიათდება მისი ზომის გამომსახველი რიცხვითი და ნიშნით; მაგალითად, ნაკვეთის სიგრძე, ფართობი, ტემპერატურა, მასა და სხვა, სკალარული სიდიდეებია. შემდეგში ჩვენ სკალარს ვუწოდებთ ისეთ რიცხვს (დადებითს ან უარყოფითს), რომელიც აღებულ სკალარულ სიდიდეს ახასიათებს.

**§ 4. ვექტორთა ტოლობა.** $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ორ ვექტორს ტოლი ეწოდებათ, თუ მათ ერთი და იგივე სიგრძე და მიმართულება აქვთ [2]). ეს ჯარიმოება ასე ჩაიწერება:

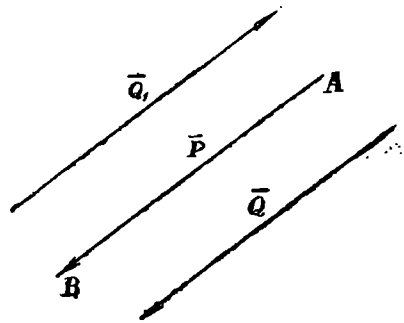
$$\vec{P}=\vec{Q}. \tag{1}$$

უნდა გავახსოვდეს, რომ ვექტორთა სიგრძეების ტოლობა კიდევ არ ნიშნავს მათ ტოლობას. ხაზი რომ გავუსვათ ამ ფაქტს, ჩვენ ხშირად (1) ტოლობას ვექტორულ ტოლობას ვუწოდებთ [3]).

თუ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორებს ერთი და იგივე სიგრძე აქვთ, ხოლო მიმართულება მოპირდაპირე, მაშინ ასეთ ვექტორებს **ურთიერთმოპირდაპირე** ეწოდებათ. ამას ასე გამოსახავენ:

$$\vec{P}=-\vec{Q}.$$

მაგალითად: ნახ. 2-ზე $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორები ტოლი არიან, ხოლო $\vec{P}$ და $\vec{Q}_1$—ურთიერთმოპირდაპირე.



ნახ. 2.

თუ ვექტორის სიგრძე ნულია, მაშინ ამბობენ, რომ ეს ვექტორი ნულის ტოლია. ასეთი ვექტორის მიმართულება განუზღვრელია და ის შეიძლება ნებისმიერი მიმართულების პარალელურად ჩავთვალოთ.

შემოვიღოთ კიდევ ერთი ტერმინი: მოცემული წერტილიდან მოცემული ვექტორის **გადადება**; ეს ნიშნავს ისეთი ვექტორის აგებას, რომელიც მოცემულის ტოლია და რომლის სათავეც მოცემული წერტილია.

---

[1]) ჩვენ მიეცა მოცემული განსაზღვრება ვექტორისა, როგორც მიმართული ნაკვეთისა, გარკვეული თვალსაზრისით, მკაცრად ვიწროა. შეიძლება უფრო ზოგადი, განყენებული განმარტება; ამ თვალსაზრისით მიმართული ნაკვეთი უკვე იქნება არა ვექტორი, არამედ ვექტორული სიდიდის ერთ-ერთი სახე.

[2]) შემდეგში, ვექტორის ან ღერძის მიმართულებად ყოველთვის ვიგულისხმებთ დადებით მიმართულებას.

[3]) ზოგჯერ ასეთ ტოლობას გეომეტრიულს უწოდებენ.

**§ 5. ვექტორები თავისუფალი, სრიალა და დაბმული.** შემდეგში განხილავ საკითხთა უმეტესი ნაწილისთვის არსებითი მნიშვნელობა აქვს ვექტორის მხოლოდ სიგრძეს და მიმართულებას; რაც შეეხება სათავის მდებარეობას, მას ყურადღება არ ექცევა. ამიტომ შემდეგში (თუ მისი საწინააღმდეგო განსაკუთრებით არაა აღნიშნული) ჩვენ იგივურად ჩავთვლით ისეთ ვექტორებს, რომელთაც ერთი და იგივე სიგრძე და მიმართულება აქვთ, სათავის მდებარეობის განურჩევლად. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ჩვენ იგივურად (ანუ ტოლფასად) ჩავთვლით ისეთ ვექტორებს, რომლებიც ტოლი არიან.

მაგრამ უნდა შევნიშნოთ, რომ თეორიული და გამოყენებითი მათემატიკის მრავალ საკითხში საჭირო ხდება ისეთი ვექტორების განხილვაც, რომელთა სათავის მდებარეობას არსებითი მნიშვნელობა აქვს. ამ უკანასკნელთაგან განსასხვავებლად, იმ ვექტორებს, რომლებიც ჩვენ ზემოთ დავახასიათეთ (ე. ი. ვექტორებს, რომელთა სათავის მდებარეობას მნიშვნელობა არა აქვს), თავისუფალი ვექტორები ეწოდება.

არათავისუფალ ვექტორთა შორის მათემატიკაში, მექანიკასა და ფიზიკაში განიხილებიან სრიალა და დაბმული ვექტორები.

სრიალა ეწოდება ისეთ ვექტორებს, რომლებიც ითვლებიან ტოლფასად, თუ ისინი არამც თუ ტოლი არიან, არამედ ერთსა და იმავე წრფეზე მდებარეობენ. სრიალა ვექტორის ერთ-ერთ მაგალითად შეიძლება მოვიყვანოთ მყარ სხეულზე მოდებული ძალა. მართლაც, მექანიკიდან ცნობილია, რომ ერთსა და იმავე წრფეზე მდებარე ორი ტოლი ძალა, ტოლფასია იმ გაგებით, რომ ისინი ერთნაირად მოქმედებენ მყარ სხეულზე.

დაბმული ვექტორები ისეთი ვექტორებია, რომლებიც ტოლფასად ჩაითვლებიან, თუ ისინი არამც თუ ტოლი არიან, არამედ ერთი და იგივე სათავეც აქვთ. ასეთია, მაგალითად, ძალა მოდებული რაიმე არამყარი (მაგალითად, დრეკადი) სხეულის რომელიმე წერტილზე.

## II. ᲛᲔᲥᲢᲝᲠᲗᲐ ᲯᲐᲛᲘ. ᲛᲔᲥᲢᲝᲠᲘᲡᲐ ᲓᲐ ᲠᲘᲪᲮᲕᲘᲡ ᲜᲐᲛᲠᲐᲕᲚᲘ

**§ 6. შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციის შესახებ.** ქვემოთ (ამ თავის ამავე და V განყოფილებაში) ჩვენ განვიხილავთ რამდენსამე უმარტივეს ოპერაციას, რომლებიც ანალოგიური არიან ჩვეულებრივ რიცხვთა შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებისა. აღნიშნულ ოპერაციათა განხილვა ვექტორთა თეორიის იმ ნაწილის საგანია, რომელსაც ვექტორული ალგებრა ეწოდება. ჩვენ დავკმაყოფილდებით ძირითად ცნებათა გადმოცემით.

ამა თუ იმ ოპერაციის შემოღება გამართლებულია იმ სარგებლობით, რაც მისი გამოყენებით მიიღება. სახელწოდება „შეკრება“ და „გამრავლება“, რომელიც აქ განსახილველ ოპერაციებს ეძლევა, გამართლებულია იმით, რომ მათ ჩვეულებრივ რიცხვთა შეკრებისა და გამრავლების ზოგიერთი თვისება გააჩნიათ.

აი ის თვისებები ჩვეულებრივ რიცხვთა შეკრებისა და გამრავლებისა, რომლებიც აქ განსახილველი ოპერაციებისთვის მართებული რჩებიან (როგორც ეს დამტკიცებული იქნება თითოეულ შემთხვევაში ცალკე).

1°. გადანაცვლებადობა (კომუტატურობა) შეკრებისთვის: ჯამი (როცა შესაკრებთა რიცხვი სასრულოა) არ არის დამოკიდებული იმ რიგზე, რომლითაც შეკრება სრულდება.

2°. შეჯგუფებადობა (ასოციატურობა) შეკრებისთვის: ჯამის შეუცვლელად შესაძლოა შესაკრებთა შეერთება ნებისმიერ ჯგუფებად, მაგ.,

$$(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c.$$

3°. განრიგებადობა (დისტრიბუტულობა), რომელიც სიტყვიერად ასე ჩამოყალიბდება: ჯამის გასამრავლებლად მოცემულ მამრავლზე, საკმარისია მასზე გავამრავლოთ თითოეული შესაკრები და შედეგები შევკრიბოთ. აღნიშნული თვისება ფორმულით ასე ჩაიწერება:

$$\left.\begin{aligned}(a_1+a_2+\ldots+a_n)\,b&=a_1b+a_2b+\ldots+a_nb,\\ b\,(a_1+a_2+\ldots+a_n)&=ba_1+ba_2+\ldots+ba_n.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

წინააღმდეგ ზემოხსენებული თვისებებისა, $ab=ba$ ტოლობით გამოთქმული თვისება (გადანაცვლებადობა გამრავლებისთვის) და აგრეთვე თვისება, რომელიც გამოთქმულია ტოლობით:

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$

(შეჯგუფებადობა გამრავლებისთვის) ქვემოთ განსახილველი ზოგიერთი ოპერაციისთვის არ არის მართებული.

**შენიშვნა 1.** თუ ცნობილია, რომ შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებს აქვთ 2° თვისება (ასოციატურობა შეკრებისთვის) და, გარდა ამისა, თვისება, რომელიც გამოთქმულია ტოლობებით:

$$(a_1+a_2)\,b=a_1b+a_2b,\quad b\,(a_1+a_2)=ba_1+ba_2 \tag{1a}$$

(დისტრიბუტულობა ორი შესაკრების შემთხვევაში), მაშინ აქედან გამომდინარეობენ ზოგადი ფორმულები (1). დავამტკიცოთ, მაგალითად, რომ (1a)-ს პირველი ფორმულიდან გამომდინარეობს (1)-ის პირველი ფორმულა. ვთქვათ, ცნობილია, რომ

$$(a_1+a_2)\,b=a_1b+a_2b, \tag{2}$$

ე. ი. ვთქვათ, მართებულია (1)-ის პირველი ფორმულა, როცა $n=2$. რომ დავამტკიცოთ მისი მართებულება ყოველ $n$-სთვის, საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ ის მართებულია $n$ შესაკრებისთვის, თუკი მართებულია $n-1$ შესაკრებისთვის („დამტკიცება $n$-დან $n+1$-ზე გადასვლით“ ანუ „სრული ინდუქციის მეთოდით“). $n-1$ შესაკრებისთვის აღნიშნულ ფორმულას აქვს ასეთი სახე:

$$(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})\,b=a_1b+a_2b+\ldots+a_{n-1}b; \tag{1b}$$

როგორც ზემოთ ვთქვით, ვიგულისხმებთ, რომ ეს მართებულია. 2°-ის თანახმად გვაქვს:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=a+a_n,$$

სადაც დროებით მიღებულია აღნიშვნა: $a=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}$. მაშასადამე, თუ მხედველობაში მივიღებთ (2)-ს, გვექნება:

$$(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n)\,b=(a+a_n)\,b=a\,b+a_nb=(a_1+\ldots+a_{n-1})\,b+a_nb;$$

აქედან, (1b)-ს თანახმად ელებულობთ საძიებელ ფორმულას.

საკმებით ანალოგიურად დამტკიცდება (1)-ის მეორე ფორმულაც.

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2.** ადვილია იმის დამტკიცება, რომ 1°—3° თვისებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს ჩვეულებრივი წესი ჯამის გამრავლებისა ჯამზე („მრავალწევრთა გამრავლების წესი"): პირველი ჯამის თითოეული შესაკრები უნდა გავამრავლოთ მეორე ჯამის თითოეულ შესაკრებზე და შედეგები შევკრიბოთ; მართლაც, ვთქვათ, გვაქვს ნამრავლი:

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\,(b_1+b_2+\ldots+b_n).$$

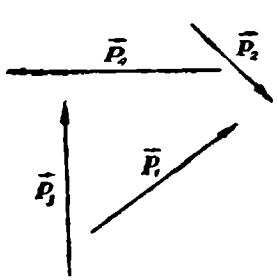
დროებით დავუშვათ, რომ $b_1+b_2+\ldots b_n=b$ და გამოვიყენოთ (1)-ის პირველი ფორმულა; გვექნება:

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\,(b_1+b_2+\ldots+b_n)=(a_1+a_2+\ldots+a_n)\,b=$$
$$=a_1b+a_2b+\ldots+a_nb.$$

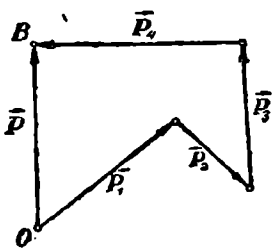
თუ უკანასკნელი ჯამის თითოეულ წევრში შევიტანთ $b$-ს ნაცვლად მის მნიშვნელობას $b_1+b_2+\ldots+b_n$ და გამოვიყენებთ (1)-ის მეორე ფორმულას, მივიღებთ სასურველ შედეგს.

**§ 7. ვექტორთა ჯამი.** ვთქვათ, მოცემულია სივრცეში მდებარე რამდენიმე ვექტორი:

$$\vec{P}_1,\ \vec{P}_2,\ \vec{P}_3,\ \ldots,\ \vec{P}_{n-1},\ \vec{P}_n$$




ნახ. 3a.




ნახ. 3b.

(ნახ. 3a; სიმარტივისთვის ნახაზზე წარმოდგენილია შემთხვევა, როდესაც 4 ვექტორია მოცემული, ე. ი. $n=4$).

სივრცის ნებისმიერ $O$ წერტილიდან გადავდოთ $\vec{P}_1$ ვექტორი (ნახ. 3b); შემდეგ, ამრიგად მიღებული ვექტორის ბოლოდან გადავდოთ $\vec{P}_2$; ამ უკანასკნელი ვექტორის ბოლოდან გადავდოთ $\vec{P}_3$ ვექტორი და ა. შ. მოკლეული ყველა ვექტორისთვის. ამნაირად მივიღებთ ტეხილს, შეუგენილს შესაბამისად

$$\vec{P}_1,\ \vec{P}_2,\ \vec{P}_3,\ \ldots,\ \vec{P}_{n-1},\ \vec{P}_n$$

ვექტორია ტოლი ვექტორებისგან, ისეთნაირად, რომ ყოველი წინმავალი ვექტორის ბოლოს ემთხვეოდეს მომდევნო ვექტორის სათავე.

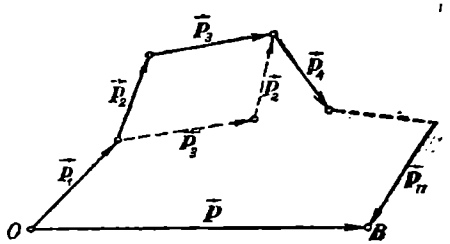
ამ ტეხილს (საზოგადოდ არა ჩაკეტილს) ეწოდება მოცემულ ვექტორთა სისტემის მრავალკუთხედი.

ვექტორი $\vec{P}=\overrightarrow{OB}$, რომელსაც სათავედ აქვს პირველი ვექტორის სათავე, ხოლო ბოლოდ—უკანასკნელი ვექტორის ბოლო, არის მოცემული მრავალკუთხედის შემკვრელი ვექტორი.

ეს შემკვრელი ვექტორი ან ყოველი სხვა მისი ტოლი, იწოდება აღებულ ვექტორთა ჯამად, რაც შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\overrightarrow{OB}=\vec{P}_1+\vec{P}_2+\vec{P}_3+\cdots+\vec{P}_{n-1}+\vec{P}_n. \qquad (1)$$

ზოგჯერ, რათა ხაზი გაესვას, რომ ჩვენ საქმე გვაქვს ვექტორების ჯამთან და არა მათი სიგრძეების ჯამთან, ჩვენ (1)-ს ვუწოდებთ ვექტორულ ჯამს.



ნახ. 4.

ვექტორთა ჯამის შესადგენად ჩვენ შესაკრებნი ავიღეთ გარკვეული რიგით, მაგრამ ადვილი დასამტკიცებელია, რომ შედეგი არ არის დამოკიდებული რიგზე, ე. ი. რომ ჩვენ მიერ განმარტებულს ვექტორთა შეკრებას აქვს გადანაცვლებადობის (კომუტატურობის) თვისება.

მართლაც, დავამტკიცოთ ჯერ-ჯერობით, რომ ჯამი

$$\vec{P}_1+\vec{P}_2+\vec{P}_3+\vec{P}_4+\cdots+\vec{P}_{n-1}+\vec{P}_n \qquad (2)$$

არ იცვლება ორ მეზობელ შესაკრებთა გადანაცვლებით. მაგალითად, გადავსვათ შესაკრებები $\vec{P}_2$ და $\vec{P}_3$, ე. ი. შევადგინოთ ჯამი

$$\vec{P}_1+\vec{P}_3+\vec{P}_2+\vec{P}_4+\cdots+\vec{P}_{n-1}+\vec{P}_n. \qquad (3)$$

მაშასადამე, უნდა დავამტკიცოთ, რომ

$$\vec{P}_1+\vec{P}_2+\vec{P}_3+\vec{P}_4+\cdots+\vec{P}_{n-1}+\vec{P}_n=\vec{P}_1+\vec{P}_3+\vec{P}_2+\vec{P}_4+\cdots+\vec{P}_{n-1}+\vec{P}_n.$$

ნახ. 4-დან, რომელზედაც თავიდანვე აღებულია ვექტორთა მრავალკუთხედი (2) მიმდევრობით, ხოლო პუნქტირით ნაჩვენებია ის ცვლილება, რომელსაც გვაძლევს $\vec{P}_2$ და $\vec{P}_3$-ს გადასმა, ჩანს, რომ $\vec{P}_1$ ვექტორის სათავე დარჩება ძველ ადგილზე და, ამგვარად, ყველა დანარჩენი ვექტორი თავის მდებარეობას არ შეიცვლის; ამიტომ მათი ჯამი $\overrightarrow{OB}$ უცვლელი დარჩება.

ახლა უკვე ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ჯამი არ შეიცვლება შესაკრებთა ნებისმიერი გადანაცვლებით. მართლაც, ყოველი გადანაცვლება შე-

გვიძლია განვიხილოთ როგორც შედეგი რამდენიმე, ორი მეზობელი შესაკრების თანმიმდევარი გადანაცვლებისა, საიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს ჩვენი წინადადების მართებულება.

მკითხველს ვანდობთ დაამტკიცოს, რომ ვექტორთა შეკრებას ახასიათებს აგრეთვე შეუჯგუფებადობის (ასოციატურობის) თვისება, ე. ი., რომ შეკრება შეიძლება შევასრულოთ შესაკრებთა ნებისმიერ ჯგუფებად შეერთებით.

#### სავარჯიშო მაგალითები

1. ააგეთ ჯამი ისეთი ვექტორებისა $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$, რომელთაც ერთი და იგივე მიმართულება აქვთ და დაამტკიცეთ, რომ ამ შემთხვევაში ჯამის სიგრძე ტოლია შესაკრებთა სიგრძეების ჯამისა.

დაამტკიცეთ, რომ ყველა სხვა შემთხვევაში ჯამის სიგრძე ნაკლებია, ვიდრე შესაკრებთა სიგრძეების ჯამი.

2. ააგეთ ჯამი ორი ურთიერთმოპირდაპირე ვექტორისა და დაამტკიცეთ, რომ მისი სიგრძე ტოლია შესაკრებთა სიგრძეების სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობისა, ხოლო მიმართულება იგივე ეჭნება, რაც უდიდეს (სიგრძით) შესაკრებს აქვს.

3. რა თავისებურება აქვს იმ ვექტორთა მრავალკუთხედს, რომელთა ჯამი ნულის ტოლია?

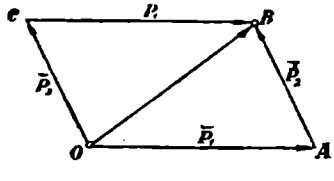
§ 8. **კერძო შემთხვევები.** თუ შესაკრებთა რიცხვი ორის ტოლია, მაშინ, როგორც უკვე აღნიშნული იყო და როგორც ეს უშუალოდ ჩანს ნახ. 5-დან, $\vec{P}_1+\vec{P}_2$ ჯამის შედგენის დროს იგივე $\overrightarrow{OB}$ ვექტორს მივიღებთ, რაც

$$\vec{P}_2+\vec{P}_1$$

ჯამისათვის. ასე, რომ

$$\overrightarrow{OB}=\vec{P}_1+\vec{P}_2=\vec{P}_2+\vec{P}_1.$$

ნახ. 5 გვიჩვენებს, რომ ორი ვექტორის ჯამი არის იმ პარალელოგრამის დიაგონალი, რომელიც აგებულია $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორებზე ისეთნაირად, რომ ამ უკანასკნელთა სათაეე ერთი და იგივეა; ამასთანავე, დიაგონალს უნდა მივცეთ მიმართულება საერთო სათაედან მოპირდაპირე წვეროსაკენ. ესაა ეგრეთ წოდებული ვექტორთა პარალელოგრამის წესი.



ნახ. 5.

წინა პარაგრაფის თანახმად ცხადია, რომ ვექტორთა ყოველი ჯამი შეგვიძლია შემდეგნაირად შევადგინოთ: შევკრიბოთ რომელიმე ორი შესაკრები ახლახან აღნიშნული წესით, მიღებულ შედეგს ამავე წესით მივუმატოთ შემდეგი შესაკრები და ა. შ.

ახლა განვიხილოთ სამი შესაკრების შემთხვევა $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ და $\vec{P}_3$. შეკრება შეიძლება ექვსი [1]) სხვადასხვა მიმდევრობით: $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3)$, $(\vec{P}_1, \vec{P}_3, \vec{P}_2)$, $(\vec{P}_2, \vec{P}_1, \vec{P}_3)$, $(\vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_1)$, $(\vec{P}_3, \vec{P}_1, \vec{P}_2)$, $(\vec{P}_3, \vec{P}_2, \vec{P}_1)$ (იხ. ნახ. 6).

[1]) სამი ელემენტისაგან გადანაცვლებათა რიცხვი იქნება $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

ყოველი ამ მიმდევრობათაგანი იძლევა, როგორც ეს მოსალოდნელია, ერთსა და იმავე $\overrightarrow{OB}$ ჯამს.

ნახაზიდან ჩანს, რომ სამი ვექტორის ჯამი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც იმ პარალელეპიპედის დიაგონალი, რომელიც აგებულია $\overrightarrow{P_1}$, $\overrightarrow{P_2}$ და $\overrightarrow{P_3}$ ვექტორებზე ისეთნაირად, რომ ამ უკანასკნელთ ერთი და იგივე სათავე ჰქონდეთ; დიაგონალი უნდა მივმართოთ საერთო სათავიდან მოპირდაპირე წვეროსკენ.

მკითხველს ვანდობთ შეამოწმოს ამ კერძო მაგალითით, რომ საძიებელი ჯამი მიიღება, თუ $\overrightarrow{P_1}$ და $\overrightarrow{P_2}$ ვექტორებს შევკრებთ პარალელოგრამის წესით და მიღებულ შედეგს იმავე წესით მივუმატებთ $\overrightarrow{P_3}$ ვექტორს.

### სავარჯიშო მაგალითები და დავალებანი

1. მოცემულია ორი ვექტორი $\overrightarrow{P}$ და $\overrightarrow{Q}$ და მათ შორის კუთხე $\vartheta$. იპოვეთ ამ ვექტორთა ჯამის სიგრძე $|\overrightarrow{K}|$ და აგრეთვე ის $\alpha$ და $\beta$ კუთხეები,[1]) რომელთაც შეადგენს ეს $\overrightarrow{K}$ ვექტორი $\overrightarrow{P}$ და $\overrightarrow{Q}$ ვექტორებთან.

პასუხი:

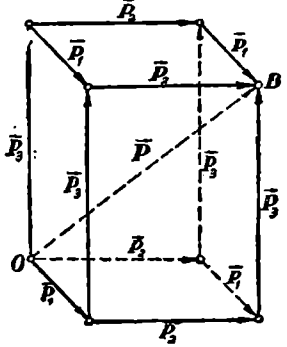
$$|\overrightarrow{Q}| = +\sqrt{|\overrightarrow{P}|^2+|\overrightarrow{Q}|^2+2|\overrightarrow{P}||\overrightarrow{Q}|\cos\vartheta};$$

რაც შეეხება კუთხეებს, ისინი შეიძლება ვიპოვოთ შემდეგი ტოლობებიდან:

$$\frac{\sin\alpha}{|\overrightarrow{Q}|} = \frac{\sin\beta}{|\overrightarrow{P}|} = \frac{\sin\vartheta}{|\overrightarrow{K}|}.$$

თუ, მაგალითად, $|\overrightarrow{Q}| \leq |\overrightarrow{P}|$, მაშინ $\alpha$ კუთხე იქნება მახვილი. მისი გამოთვლა შესაძლოა ცხრილებით, შემდეგი ტოლობის საშუალებით:

$$\sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{Q}|}{|\overrightarrow{K}|}\sin\vartheta;$$




ნახ. 6.

მაშინ $\beta$ კუთხე მოინახება შემდეგი ტოლობიდან:

$$\alpha+\beta=\vartheta.$$

2. დაამტკიცეთ $|\overrightarrow{K}|$-ის გამოსახულების მიხედვით (იხ. მაგ. 1), რომ $\vartheta$ კუთხის ცვლილებისას, თუ $\overrightarrow{P}$ და $\overrightarrow{Q}$ ვექტორების სიგრძეები უცვლელია, ჯამის სიგრძე იცვლება $|\overrightarrow{P}|-|\overrightarrow{Q}|$ და $|\overrightarrow{P}|+|\overrightarrow{Q}|$ საზღვრებში (ჩვენ გარკვეულობისთვის ვგულისხმობთ, რომ

$$|\overrightarrow{P}| \geq |\overrightarrow{Q}|).$$

---

[1]) ორ ვექტორს შორის კუთხე ეწოდება იმ კუთხეს, რომელსაც ქმნიან ამ ვექტორთა მიმართულებანი და რომლის მნიშვნელობა მოთავსებულია $0^\circ$ და $180^\circ$-ს შორის. თუ ვექტორთა სათავე ერთი და იგივე არ არის, მაშინ კუთხის გასაზომად საჭიროა მიმართულების შეუცვლელად ისე გადავიტანოთ ვექტორები, რომ მათ საერთო სათავე ჰქონდეთ.

ჟ-ს რომელ მნიშვნელობათათვის მიაღწევს ჯამის სიკრძე უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობას?

გამოიყვანეთ იგივე შედეგი ნახაზის უშუალო განხილვით.

9. სამი ვექტორი—$\vec{P}$, $\vec{Q}$ და $\vec{K}$—მოთავსებულია ერთსა და იმავე სიბრტყეზე; მოცემულია მათი სიგრძეები: $|\vec{P}|=2$, $|\vec{Q}|=|\vec{K}|=1$; გარდა ამისა, ცნობილია, რომ $\vec{Q}$ და $\vec{K}$ ვექტორები $\vec{P}$ ვექტორთან შეადგენენ 60°-იან კუთხეებს. იპოვეთ $\alpha$ კუთხე $\vec{Q}$ და $\vec{K}$ ვექტორებს შორის და $\vec{S}=\vec{P}+\vec{Q}+\vec{K}$ ჯამის სიგრძე.

პასუხი: $\alpha=0°$ ან $120°$; ამის შესაბამისად $|\vec{S}|=2\sqrt{3}$ ან $|\vec{S}|=3$.

4. აღებული ვექტორის დაშლა შესაკრებთა მოცემული რიცხვის მიხედვით (ე. ი. მოცემული ვექტორის წარმოდგენა როგორც რამდენიმე შესაკრების ჯამი), არის განუზღვრელი ამოცანა, ე. ი. მას უამრავი ამოხსნა აქვს.

თუ დავკმაყოფილდებით ისეთი ვექტორებით, რომლებიც ერთსა და იმავე სიბრტყეში იმყოფებიან, დაამტკიცეთ (მარტივი აგებით), რომ საკითხი რომელიმე $\vec{K}$ ვექტორის დაშლისა ორ შესაკრებად $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ განსზღვრული ხდება, თუ დამატებით მოცემულია ან:

a) მიმართულება (სხვადასხვა), რომელთა პარალელური იქნებიან $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ (ერთი ამონახსნი); ან

b) მიმართულება და სიგრძე ერთ-ერთი შესაკრებისა (ერთი ამონახსნი); ან

c) მიმართულება, რომლის პარალელურია ერთ-ერთი შესაკრები და სიგრძე მეორისა (ორი, ერთი ან არც ერთი ამონახსნი); ან

d) შესაკრებთა სიგრძეები (ორი, ერთი ან არც ერთი ამონახსნი).

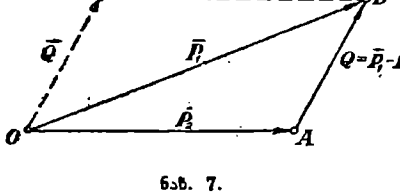
დაამტკიცეთ, რომ აქ აღნიშნული ყოველი შემთხვევა დაიყვანება სამკუთხედის ამოხსნის ერთ-ერთ ძირითად შემთხვევაზე.

5. სამი ვექტორი—$\vec{P}$, $\vec{Q}$ და $\vec{K}$—წყვილ-წყვილად ურთიერთმართობი არიან და მათი სიგრძეები შესაბამისად ტოლია 1, 2 და 3-ისა. იპოვეთ ამ ვექტორთა $\vec{S}$ ჯამის სიგრძე და ის კუთხეები $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, რომელთაც ეს ჯამი შეადგენს აღებულ ვექტორებთან.

პასუხი:

$$|S|=\sqrt{14},\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}},\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{14}},\quad \cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

**§ 9. ვექტორთა სხვაობა.** ორი $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორის სხვაობა ეწოდება ისეთ $\vec{Q}$ ვექტორს, რომელიც შეკრებილი $\vec{P}_2$-თან გვაძლევს $\vec{P}_1$-ს, ესე იგი $\vec{Q}$ არის ის ვექტორი, რომელიც შემდეგ პირობას აკმაყოფილებს:




ნახ. 7.

$$\vec{P}_1=\vec{P}_2+\vec{Q};$$

ამ გარემოებას ასე აღნიშნავენ:

$$\vec{Q}=\vec{P}_1-\vec{P}_2.$$

განმარტების თანახმად აშკარაა, რომ $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორების სხვაობის ასაგებად საკმარისია გადავდოთ რომელიმე წერტილიდან ეს ვექტორები და შემდეგ გავაველოთ ვექტორი $\overrightarrow{AB}$ მამცირის ბოლოდან სამცირის ბოლოსაკენ; ეს ვექტორი იქნება სწორედ საძიებელი სხვაობა (ნახ. 7).

ცხადია აგრეთვე, რომ სხვაობა $\vec{P}_1-\vec{P}_2$ შეიძლება მივიღოთ, თუ შევკრებთ ვექტორებს $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$, ე. ი., რომ

$$\vec{Q}=\vec{P}_1-\vec{P}_2=\vec{P}_1+(-\vec{P}_2).$$

გავიხსენოთ, რომ $\vec{P}_2$ აღნიშნავს ვექტორს $\vec{P}_2$ ვექტორის მოპირდაპირეს (იხ. ნახ. 7, პუნქტირი).

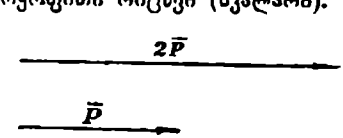
**სავარჯიშო მაგალითი**

ვიპოვოთ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორების სხვაობის სიგრძე $|\vec{K}|$, თუ $|\vec{P}|=3$, $|\vec{Q}|=5$ და კუთხე $\vec{P}$ და $\vec{Q}$-ს შორის არის 120°.

პასუხი: $|\vec{K}|=7$.

**§ 10. ვექტორისა და რიცხვის ნამრავლი.** ვთქვათ, $\vec{P}$ არის რომელიმე ვექტორი და $m$—რომელიმე დადებითი ან უარყოფითი რიცხვი (სკალარი).

$\vec{P}$ ვექტორისა და $m$ რიცხვის ნამრავლი $m\cdot\vec{P}$ ეწოდება ვექტორს, რომლის სიგრძეა $|m|\cdot|\vec{P}|$, ხოლო მიმართულება იგივე აქვს, რაც $\vec{P}$-ს, თუ $m>0$ და მოპირდაპირე $\vec{P}$-ს, თუ $m<0$.



ნახ. 8.

ასე, რომ ვექტორის გამრავლება 2-ზე ნიშნავს მისი სიგრძის გაორკეცებას მიმართულების შეუცვლელად; ვექტორის გამრავლება (—3)-ზე ნიშნავს სიგრძის გასამკეცებას და მოპირდაპირე მიმართულების მინიჭებას (იხ. ნახ. 8), სადაც გამოსახულია შემთხვევები: $m=+2$, $m=-1$, $m=-\frac{1}{2}$.

აშკარაა, სხვათა შორის, რომ, თუ $m$ მთელი დადებითი რიცხვია, მაშინ

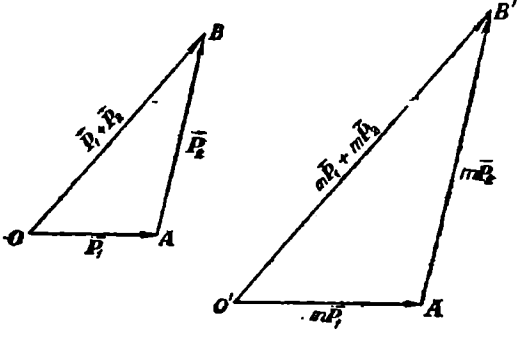
$$m\vec{P}=\vec{P}+\vec{P}+\ldots+\vec{P}$$

($m$ შესაკრებია). ნამრავლი $\vec{P}$ ვექტორისა და $\frac{1}{m}$ რიცხვისა აღინიშნება აგრეთვე $\frac{\vec{P}}{m}$-ით, ასე, რომ განმარტების ძალით:

$$\frac{\vec{P}}{m}=\frac{1}{m}\vec{P}. \qquad (1)$$

ცხადია, რომ $(-1)\ \vec{P}=-\vec{P}$.

აგრეთვე, ადვილი შესამჩნევია, რომ ჩვენ მიერ განმარტებულ გამრავლებას ახასიათებს ასოციატურობის თვისება რიცხვითი მამრავლის მიმართ, ე. ი., რომ




ნახ. 9.

$$m\cdot(n\vec{P})=mn\cdot\vec{P}, \qquad (2)$$

სადაც $m$ და $n$ ნებისმიერი რიცხვებია[1]); მაგალითად,

$$3\cdot(-2\vec{P})=-6\vec{P}.$$

ბოლოს, დავამტკიცოთ, რომ განსახილველ გამრავლებას აქვს განრიგების (დისტრიბუტულობის) თვისება როგორც ვექტორული მამრავლის, ისე რიცხვითი მამრავლის მიმართ, ე. ი., რომ

$$m(\vec{P}_1+\vec{P}_2+\ldots+\vec{P}_n)=m\vec{P}_1+m\vec{P}_2+\ldots+m\vec{P}_n \qquad (3)$$

და

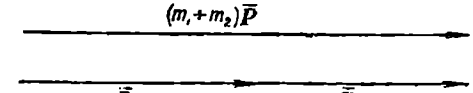
$$(m_1+m_2+\ldots+m_n)\vec{P}=m_1\vec{P}+m_2\vec{P}+\ldots+m_n\vec{P}; \qquad (4)$$

აქ $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ნებისმიერი რიცხვებია, ხოლო $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$—ნებისმიერი ვექტორები.

ჯერჯერობით დავამტკიცოთ (3) თვისება. (§ 6-ის 1 შენიშვნის თანახმად საკმარისია დავამტკიცოთ ეს თვისება იმ შემთხვევაში, როცა $n=2$, ე. ი. დავამტკიცოთ, რომ

$$m(\vec{P}_1+\vec{P}_2)=m\vec{P}_1+m\vec{P}_2. \qquad (3a)$$

ავაგოთ $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორთა $OAB$ მრავალკუთხედი და გავატაროთ $\overrightarrow{OB}$ შემკვრელი (ნახ. 9, მარცხნივ). შემდეგ, ავაგოთ $m\vec{P}_1$ და $m\vec{P}_2$ ვექტორთა მრავალკუთხედი $O'A'B'$ და გავატაროთ $\overrightarrow{O'B'}$ შემკვრელი. რადგან $O'A'B'$ სამკუთხედის გვერდები $O'A'$ და $A'B'$ პარალელურია და პროპორციული $OAB$ სამკუთხედის გვერდებისა, ამიტომ ეს სამკუთხედები მსგავსია. მაშასადამე, $O'B'$ გვერდი აგრეთვე პარალელურია $OB$ გვერდისა და მათი სიგრძეების ფარდობა




ნახ. 10.

[1]) $m\vec{P}$ ნამრავლს ჩვენ აგრეთვე აღვნიშნავთ $\vec{P}m$-ით; ამრიგად, თვით განმარტების თანახმად ზემოგანხილულ გამრავლებას აქვს გადანაცვლებადობის (კომუტატურობის) თვისება.

არის $|m|$. ცხადია, რომ $\overrightarrow{O'B'}$ და $\overrightarrow{OB}$-ს აქვთ ერთი და იგივე მიმართულება, თუ $m>0$, ხოლო მოპირდაპირე მიმართულება, თუ $m<0$. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\overrightarrow{O'B'} = m\overrightarrow{OB}.$$

მაგრამ $\overrightarrow{OB}=\vec{P}_1+\vec{P}_2$ და $\overrightarrow{O'B'}=m\vec{P}_1+m\vec{P}_2$, საიდანაც ვღებულობთ საძიებელ (3a) ფორმულას.

ნახ. 11.

იმავე § 6-ის 1 შენიშვნი, ძალით, (4) თვისების დამტკიცების დროს შეგვიძლია დავეყრდნოთ აგრეთვე შემთხვევით $n=2$, ესე იგი იმის დამტკიცებით, რომ

$$(m_1+m_2)\vec{P}=m_1\vec{P}+m_2\vec{P} \qquad (4a)$$

ამ ტოლობის მართებულება საკმაოდ ცხადია, როცა $m_1$ და $m_2$ ერთი და იმავე ნიშნისაა (იხ. ნახ. 10). მკითხველს შეუძლია ადვილად შეამოწმოს ეს ტოლობა იმ შემთხვევაშიაც, როცა $m_1$ და $m_2$-ს მოპირდაპირე ნიშნები აქვთ (იხ. ნახ. 11). ამრიგად, თეორემა შეიძლება დამტკიცებულად ჩაითვალოს.

#### სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. მოცემულია ორი ვექტორი $\overrightarrow{OA}$ და $\overrightarrow{OB}$ საერთო სათაით $O$. ააგეთ (პარალელოგრამის წესით) ვექტორი $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ იმავე $O$ სათავით და უშუალოდ შეამოწმეთ, რომ $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$. დაამტკიცეთ, რომ $C$ წერტილი შუახე ყოფს $AB$ ნაკეთს.

2. სიმძიმის ცენტრი. ვთქვათ, მოცემულია რამდენიმე ნივთიერი წერტილი (ე. ი. წერტილები, რომელთაც გარკვეული მასები მიეწერებათ). აღვნიშნოთ ესენი $M_1$, $M_2$, ..., $M_n$-ით მათი მასები[1]) კი შესაბამისად $m_1$, $m_2$, ..., $m_n$-ით. ავიღოთ ნებისმიერი $O$ წერტილი (გეომეტრიული) და ავაგოთ ვექტორი $\overrightarrow{OC}$ ისე, რომ

$$\overrightarrow{OC}=\frac{m_1\overrightarrow{OM_1}+m_2\overrightarrow{OM_2}+\ldots+m_n\overrightarrow{OM_n}}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$$

უნდა დავამტკიცოთ, რომ $C$ წერტილის მდებარეობა დამოუკიდებელია $O$ წერტილის შერჩევაზე. აქრიგად, ეს $C$ წერტილი დამოკიდებული იქნება მხოლოდ აღებულ ნივთიერ წერტილთა მდებარეობაზე და მათ მასებზე; ასეთ წერტილს უწოდებენ ნივთიერ წერტილთა სისტემის სიმძიმის ცენტრს ანუ ინერციის ცენტრს.

---

[1]) სიტყვებით: „ნივთიერი წერტილი", „მასა" ჩვენ ვსარგებლობთ განსაკუთრებით თვალსაჩინოებისათვის. არსებითად კი აქ საუბარია წერტილებზე, რომელთაგან თითოეულისათვის მიკუთვნილია რაღაც რიცხვი, რომელიც (პირობით) იწოდება „მასად". ეს მასები შეიძლება შარაყოფითიც იყვნენ: ამ შემთხვევაში ჩვენ დამატებით ვიგულისხმებთ, რომ მასების ჯამი $m_1+m_2+\ldots+m_n$ განსხვავდება ნულისაგან.

**დამტკიცება.** ავიღოთ, რომელიმე სხვა $O'$ წერტილი და ავაგოთ ვექტორი:

$$\overrightarrow{O'C'}=\frac{m_1\overrightarrow{O'M_1}+m_2\overrightarrow{O'M_2}+\ldots+m_n\overrightarrow{O'M_n}}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$$

ჩვენი წინადადება დამტკიცებული იქნება, თუ აღმოვაჩენთ, რომ $C'$ ემთხვევა $C$ წერტილს. მართლაც, $\overrightarrow{O'M_1}=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OM_1},\ldots,\ \overrightarrow{O'M_n}=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OM_n}$; თუ ამათ შევიტანთ წინა ტოლობის მარჯვენა მხარეში, მივიღებთ:

$$\overrightarrow{O'C'}=\frac{(m_1+m_2+\ldots+m_n)\ \overrightarrow{O'O}+m_1\overrightarrow{OM_1}+m_2\overrightarrow{OM_2}+\ldots+m_n\overrightarrow{OM_n}}{m_1+m_2+\ldots+m_n}=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{O'C}$$

მაშასადამე, $\overrightarrow{O'C'}=\overrightarrow{O'C}$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $C'$ ემთხვევა $C$-ს.

3. დაამტკიცეთ, რომ იმ ორი ნივთიერი წერტილისაგან შედგენილი სისტემის სიმძიმის ცენტრი $C$, რომელთა მასები არის $m_1$ და $m_2$, იმყოფება ამ წერტილების შემაერთებელ ნაკვეთზე და ყოფს ამ ნაკვეთს მასების უკუპროპორციულ ნაწილებად (კერძოდ, თუ ორივე მასა ტოლია, მაშინ სიმძიმის ცენტრი მათ შუაზე იმყოფება).

**მითითება.** ვთქვათ, $M_1$ და $M_2$ აღებული წერტილებია; $M_1M_2$ ნაკვეთზე აიღეთ ისეთი წერტილი $O$, რომლისთვისაც ადგილი აქვს პროპორციას: $\frac{|M_1O|}{|OM_2|}=\frac{m_2}{m_1}$ და შემდეგი ფორმულის გამოყენებით (იხ. წინა სავარჯიშო):

$$\overrightarrow{O'C}=\frac{m_1\overrightarrow{OM}+m_2\overrightarrow{OM_2}}{m_1+m_2}$$

დაამტკიცეთ, რომ $\overrightarrow{OC}=O$, ე. ი. რომ $C$ წერტილი ემთხვევა $O$-ს.

4. განაზოგადეთ წინა სავარჯიშოს შედეგი იმ შემთხვევისათვის, როცა განიხილებიან უარყოფითი მასებიც.

**პასუხი.** ორი მასის სიმძიმის ცენტრი ყველა შემთხვევაში იმყოფება $M_1M_2$ წრფეზე და განისაზღვრება პროპორციით:

$$\frac{|M_1C|}{|CM_2|}=\frac{|m_2|}{|m_1|};$$

ამასთანავე, $C$ აიღება $M_1$ და $M_2$ შორის, თუ მასები ერთი და იმავე ნიშნისაა და $M_1M_2$ ნაკვეთის გარეთ (იმ მხრისაკენ, საითკენაც უდიდესი აბსოლუტური მნიშვნელობის მასაა), თუ მასები სხვადასხვა ნიშნის არიან.

**§ 11. მოცემული მიმართულების პარალელური ვექტორები. ორტი.** ვექტორით შეგვიძლია ვისარგებლოთ სივრცეში რაიმე მიმართულების განსასაზღვრავად. ვინაიდან ვექტორის სიგრძეს ამ მიზნისათვის არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს, ამიტომ მიზანშეწონილია, რომ ამ შემთხვევაში ისეთი ვექტორით ვისარგებლოთ, რომლის სიგრძე ერთის ტოლია. ასეთ ვექტორს **ორტი**[1]) ანუ **ერთეული ვექტორი** ეწოდება. კერძოდ, მოცემული ღერძის ორტი ეწოდება ერთეულ სიგრძის ვექტორს, რომლის მიმართულება ღერძის მიმართულებას გვიჩვენებს.

განვიხილოთ რომელიმე ვექტორი $\vec{P}$ მოცემული $\vec{e}$ ორტის პარალელური (ნახ. 12). ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ეს ვექტორი შეიძლება წარმოდგენილ იქნას შემდეგი სახით:

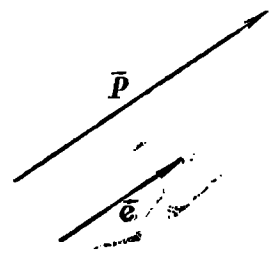
$$\vec{P}=\vec{e}\,P, \tag{1}$$

[1]) შემოკლებულია სიტყვა orientation.

სადაც $P$ (უისროდ!) ნიშნავს რაღაც რიცხვს (სკალარს), სახელდობრ, $P=\pm|\vec{P}|$; აქ ნიშანი (+) აიღება, თუ $\vec{P}$ და $\vec{e}$-ს ერთი და იგივე მიმართულება აქვთ, ხოლო (—) აიღება წინააღმდეგ შემთხვევაში. ეს უშუალოდ გამომდინარეობს ვექტორისა და რიცხვის ნამრაელის ცნებიდან, (მაგ., თუ $\vec{P}$ ვექტორის სიგრძე 5-ის ტოლია და მას იგივე მიმართულება აქვს, რაც $\vec{e}$-ს, მაშინ $\vec{P}=5\vec{e}$; თუკი $P$ ვექტორის სიგრძე $\frac{1}{2}$-ის ტოლია და $e$-ს წინააღმდეგი მიმართულება აქვს, მაშინ $\vec{P}=-\frac{1}{2}\vec{e}$).

$P$ რიცხვს ეწოდება $\vec{P}$ ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობა $\vec{e}$ ორტის მიმართულებით.

მაშასადამე, საჭიროა ურთიერთ განვასხვაოთ ვექტორის სიგრძე, რაც აღნიშნულია $|\vec{P}|$-თი და ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობა $P$. უკანასკნელ ცნებას მხოლოდ მაშინ აქვს აზრი, როდესაც მოცემულია გარკვეული $\vec{e}$ ორტი ($\vec{P}$-ს პარალელური), რომლის მიხედვითაც განიხილება $\vec{P}$ ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობა.



ნახ. 12.

ახლა განვიხილოთ რამდენიმე ვექტორი $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$ ერთი და იმავე $\vec{e}$ ორტის პარალელური. ცხადია, რომ მათი ჯამი

$$\vec{P}=\vec{P}_1+\vec{P}_2+\ldots+\vec{P}_n \qquad (2)$$

პარალელურია იმავე $\vec{e}$ ორტისა. ზემომიღებული აღნიშვნების მიხედვით გვაქვს:

$$\vec{P}=\vec{e}\,P,\ \vec{P}_1=\vec{e}\,P_1, \ldots, \vec{P}_n=\vec{e}\,P_n$$

და, წინა პარაგრაფის თანახმად, (2) ტოლობა მოგვცემს

$$\vec{e}\,P=\vec{e}\,P_1+\vec{e}\,P_2+\ldots+\vec{e}\,P_n=\vec{e}\,(P_1+P_2+\ldots+P_n)$$

საიდანაც ცხადია, რომ

$$P=P_1+P_2+\ldots+P_n,$$

ე. ი. ერთი და იმავე ორტის პარალელური ვექტორების ჯამის ალგებრული სიდიდე შესაკრებთა ალგებრული სიდიდეების ჯამის ტოლია.

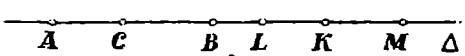
**§ 12. ვექტორები ღერძზე.** ერთი და იმავე გეზის პარალელურ ვექტორთა კერძო შემთხვევას წარმოადგენენ ვექტორები, რომლებიც ერთსა და იმავე $\Delta$ ღერძზე მდებარეობენ. ვთქვათ, $\vec{e}$ არის აღებული $\Delta$ ღერძის

ორტი და $\vec{P}$—ამ ღერძზე მდებარე რაშელისზე ვექტორის როგორც ზემოთ, აქაც გვექნება: $\vec{P}=\vec{e}P$, სადაც $P$ არის ვექ... ის ალგებრული მნიშვნელობა $\vec{e}$ ორტის მიმართ. გ... ხილველ შემთხვევაში ... დიდეს ჩვენ აგრეთვე ვუწოდებთ $P$ ვექტორის ალგებრულ მნიშვნელო... ა $\Delta$ ღერძის მიმართ [1]).

ახლა განვიხილოთ რამდენიმე ვექტორი: $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, ..., $\vec{KL}$, $\vec{LM}$, რომლებიც ისეთნაირად მდებარეობენ $\Delta$ ღერძზე, რომ ყოველ მომდევნო ვექტორის სათავე ემთხვევა წინმავალის ბო... ას (იხ. ნახ. 13). მაშინ $\vec{AM}$ ვექტორი იქნება აღებულ ვექტორთა ჯამი:

$$\vec{AM}=\vec{AB}+\vec{BC}+\ldots+\vec{KL}+\vec{LM}. \tag{1}$$

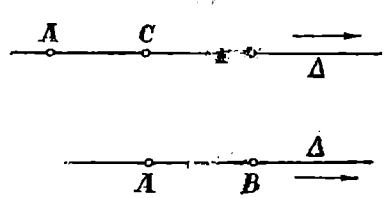
ვთქვათ, $AB$ (უისროდ) აღნ... ის ... ულ მნიშვნე... $\Delta$ ... მიმართ (და ან... ... ვექტორები... სათ... მა... ... ტრაგრაფის თანაშად ვე...




ნახ. 13.

$$AM=AB+BC+\ldots+KL+LM \tag{2}$$

ეს მარტივი ფორმულა ტრივიალური ხდება იმ შემთხვევაში, როდესაც ვექტორებს $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ და ა. შ. ერთი და იგივე მიმართულება აქვთ; საზოგადო შემთხვევაში (ნახ. 14) კი ეს ფორმულა, რომელიც ცნობილია შალის (Chasles) თეორემის სახელწოდებით, არც ისე აშკარაა. აღნიშნული ფორმულა ხშირად დიდ სარგებლობას წევს სხვადასხვა ზოგადი დასკვნების გაკეთებაში.




ნახ. 14.

### სავარჯიშო

1. მიაქციეთ ყურადღება ტოლობას:

$$AB+$$

2. შეამოწმეთ ტოლობა $AB+BC=AC$ იმ ... ... ვებისათვის, რომლებიც მე-14 ნახაზზეა წარმოდგენილი.

---

[1]) ამრიგად, $\vec{P}$ ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობა $\Delta$ ღერძის მიმართ ტოლია $\pm|\vec{P}|$, სადაც ნიშანი + აიღება იმ შემთხვევაში თუ ვექტორსა და $\Delta$ ღერძს ერთი და იგივე მიმართულება აქვთ, ხოლო ნიშანი—წინააღმდეგ შემთხვევაში.

## III. გეგმილები ღერძსა და სიბრტყეზე

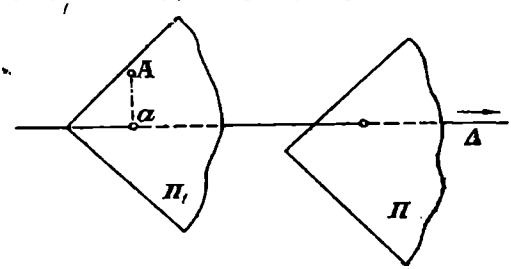
**§ 13. გეგმილი ღერძზე.** ვთქვათ, $\Delta$ არის რომელიმე ღერძი[1]), ხოლო $\Pi$ — რომელიმე სიბრტყე, არაპარალელური $\Delta$-სი ღერძისა (ნახ. 15).

ვთქვათ, რომ $A$ არის ნებისმიერი წერტილი, სივრცეში. გავატაროთ ამ წერტილზე სიბრტყე $\Pi_1$, პარალელური $\Pi$ სიბრტყისა და ვთქვათ, რომ $a$ არის გატარებული სიბრტყისა და $\Delta$ ღერძის გადაკვეთის წერტილი.

$a$ წერტილს ეწოდება $A$ წერტილის გეგმილი $\Delta$ ღერძზე, აღებული $\Pi$ სიბრტყის პარალელურად.

$\Delta$ ღერძს ეწოდება გეგმილთა ღერძი.

თუ $\Pi$ სიბრტყე $\Delta$ ღერძის მართობია, მაშინ გეგმილს მართკუთხოვანი (ანუ ორთოგონალური) ეწოდება. ამ შემთხვევაში $A$ წერტილის გეგმილი არის $A$ წერტილიდან $\Delta$ ღერძზე დაშვებული მართობის ფუძე.



ნახ. 15.

არამართკუთხა გეგმილები, მართკუთხოვანისაგან განსასხვავებლად, ზოგჯერ ირიბკუთხოვანად იწოდებიან ერთიც და მეორეც ერთად იწოდებიან პარალელურ გეგმილებად[2]).

ვთქვათ, $\overline{AB}$ არის რომელიმე ვექტორი და $a$ და $b$ აღნიშნავენ მისი სათავისა და ბოლოს გეგმილებს $\Delta$ ღერძზე; დაგეგმილება ხდება ერთი და იმავე $\Pi$ სიბრტყის პარალელურად (ნახ. 16). $\overline{ab}$ ვექტორს ეწოდება $\overline{AB}$ ვექტორის გეგმილი $\Delta$ ღერძზე $\Pi$ სიბრტყის პარალელურად აღებული[3]). იმის აღსანიშნავად, რომ $\overline{ab}$ არის $\overline{AB}$ ვექტორის გეგმილი $\Delta$ ღერძზე, $\Pi$ სიბრტყის პარალელურად აღებული, წერენ:

$$\overline{ab} = \text{გეგ}_{\Delta}^{\Pi}\,\overline{AB} \quad (\Pi\text{-ს პარალელურად}).$$

შემდეგში ჩვენ საქმე გვექნება უმთავრესად თვით $\overline{ab}$ გეგმილთან კი არა, არამედ მის ალგებრულ მნიშვნელობასთან $ab$; გეგმილის ამ ალგებრულ მნიშვნელობას ჩვენ აღვნიშნავთ ანალოგიურად, მაგრამ ვ განსხვავებით, რომ ასოებზე „გეგ“ ისარს არ გავუკეთებთ; ასე, რომ დავწერთ:

$$ab = \text{გეგ}_{\Delta}^{\Pi}\,\overline{AB} \quad (\Pi\text{-ს პარალელურად})$$

---

[1]) შემდეგში, სანამ საკითხი არ შეეხება ვექტორის გეგმილის ალგებრულ მნიშვნელობას (იხ. ქვემოთ), შესაძლოა $\Delta$-დ ვიგულისხმოთ არა ღერძი, არამედ წრფე.

[2]) გეგმილთა სხვა სახეებისგან განსასხვავებლად, როგორც, მაგალითად, ცენტრალურისგან.

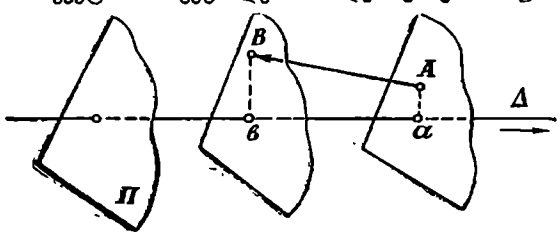
[3]) ხანდახან $\overline{AB}$ ვექტორის გეგმილად იწოდება $\overline{ab}$ ვექტორი კი არა, არამედ ამ ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობა $ab$, განხილული $\Delta$ ღერძის მიმართ.

თუ ფრჩხილებში არ არის დამატებითი მითითება, მაშინ ჩვეულებრივ გეგმილი მართკუთხოვნად იგულისხმება.

ადვილი შესამჩნევია, რომ თანატოლ ვექტორთა გეგმილები (ერთი და იმავე სიბრტყის პარალელურად აღებულნი) ერთსა და იმავე ღერძზე თანატოლი არიან, ესე იგი, თუ $\vec{P}=\vec{Q}$ მაშინ:

$$\overrightarrow{\text{გეგ}_{\Delta}}\,\vec{P}=\overrightarrow{\text{გეგ}_{\Delta}}\,\vec{Q},\quad \text{გეგ}_{\Delta}\,\vec{P}=\text{გეგ}_{\Delta}\,\vec{Q}.$$

აგრეთვე, თუ ორი ღერძი ერთნაირადაა მიმართული, მაშინ ნებისმიერი ვექტორის გეგმილები ამ ღერძებზე თანატოლი იქნებიან.




ნახ. 16.

შემდეგ, ორი ურთიერთმოპირდაპირე ვექტორის გეგმილები ერთსა და იმავე ღერძზე აგრეთვე ურთიერთმოპირდაპირე იქნებიან, ხოლო მათი ალგებრული მნიშვნელობანი თანატოლი არიან აბსოლუტურად, მაგრამ ნიშანი აქვთ მოპირდაპირე, ე. ი. $\text{გეგ}_{\Delta}(-\vec{P})=-\text{გეგ}_{\Delta}\vec{P}$ (გეგმილები აღებულია ერთი და იმავე სიბრტყის პარალელურად).

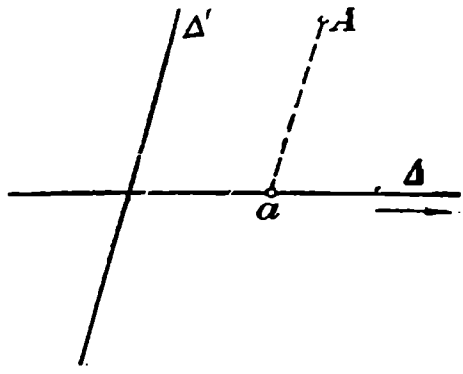
**შენიშვნები.** 1. თუ $\vec{P}$ ვექტორი პარალელურია II სიბრტყისა, მაშინ $A$ და $B$ წერტილების გეგმილები ერთიმეორეს ემთხვევა და ამიტომ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის გეგმილი (II-ს პარალელურად) ნულის ტოლია.

2. თუ $\vec{P}$ ვექტორი პარალელურია გეგმილთა $\Delta$ ღერძისა, მაშინ, ცხადია, $\vec{P}$ ვექტორის გეგმილი $\Delta$ ღერძზე $\vec{P}$ ვექტორის ტოლია, და მისი ალგებრული მნიშვნელობა ტოლია $\vec{P}$ ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობისა $\Delta$ ღერძის მიმართ.

**§ 13a. ერთსა და იმავე სიბრტყეზე მდებარე ნაკვთების გეგმილები.** თუ აღებულ საკითხში განსახილველი ყველა წერტილი და ვექტორი იმყოფება ერთსა და იმავე სიბრტყეში გეგმილთა ღერძთან ერთად, მაშინ გეგმილის ზემოხსენებული განმარტება შეგვიძლია შემდეგით შევცვალოთ (იხ. ნახ. 17, სადაც ნახაზის სიბრტყედ მიღებულია სწორედ ხსენებული სიბრტყე). ვთქვათ $\Delta'$ არის რომელიმე წრფე განსახილველ სიბრტყეზე, არაპარალელური გეგმილთა ღერძისა $\Delta$. რომელიმე $A$ წერტილიდან (რომელიც აღებულ სიბრტყეზე მდებარეობს) გავავლოთ წრფე $\Delta'$-ის პარალელური და ვთქვათ $a$ არის გავლებული წრფისა და $\Delta$ ღერძის გადაკვეთის წერტილი; $a$ წერტილს ეწოდება $A$ წერტილის გეგმილი $\Delta$ ღერძზე, აღებული $\Delta'$ წრფის პარალელურად. თუ $\Delta'$ მართობია $\Delta$ ღერძის, მაშინ გეგმილს მართკუთხოვანი ანუ ორთოგონალური ეწოდება.

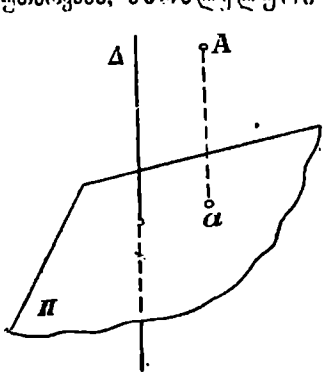
დანარჩენი განმარტებანი იგივე რჩებიან, რაც წინა პარაგრაფში, საკმარისია მხოლოდ ყველგან ნაცვლად „Π-ს სიბრტყის პარალელურად“ ვთქვათ „Δ′ წრფის პარალელურად“.

**§ 14. გეგმილი სიბრტყეზე.** ვთქვათ, Π არის რომელიმე სიბრტყე, ხოლო Δ ნებისმიერი წრფე, არაპარალელური Π სიბრტყისა (ნახ. 18). გავავლოთ აღებულ $A$ წერტილზე Δ-ს პარალელური $Aa$ წრფე, რომელიც Π სიბრტყეს გადაკვეთს რომელიმე $a$ წერტილზე. ამ წერტილს ეწოდება $A$-ს გეგმილი Π სიბრტყეზე, აღებული Δ წრფის პარალელურად.



ნახ. 17.

თუ Δ მართობია Π სიბრტყის, მაშინ გეგმილს ეწოდება მართკუთხოვანი ანუ ორთოგონალური; არამართკუთხოვან გეგმილებს უწოდებენ ირიბკუთხოვანს, ხოლო ორივეს ერთად როგორც მართკუთხოვანს, ისე ირიბკუთხოვანს, პარალელური ან ცილინდრული გეგმილები ეწოდება.



ნახ. 18.

მართკუთხოვანი გეგმილის შემთხვევაში $a$ არის $A$ წერტილიდან Π სიბრტყეზე დაშვებული მართობის ფუძე.

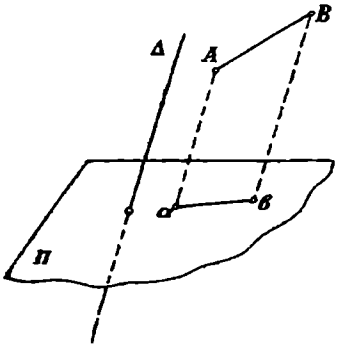
ახლა ვთქვათ, $\overrightarrow{AB}$ არის რომელიმე ვექტორი, ხოლო $a$ და $b$ შესაბამისად — სათავისა და ბოლოს გეგმილები Π სიბრტყეზე, აღებულნი Δ წრფის პარალელურად (ნახ. 19). მაშინ $\overrightarrow{ab}$ ვექტორს ეწოდება $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის გეგმილი Δ წრფის პარალელურად აღებული:

$$\overrightarrow{ab} = \text{გეგ}_{\Pi}\,\overrightarrow{AB}\,(\Delta\text{-ს პარალ.}).$$

საზოგადოდ, რომელიმე გეომეტრიული ნაკვთის გეგმილი Π სიბრტყეზე, ეწოდება ამ ნაკვთის წერტილთა გეგმილების გეომეტრიულ ადგილს. კერძოდ, სამკუთხედის გეგმილი არის აგრეთვე სამკუთხედი, რომლის წვეროები არიან შესაბამისად აღებული სამკუთხედის წვეროების გეგმილები [1]).

[1]) ამ სახელმძღვანელოს ნახაზები, რომლებიც სივრცულ ნაკვთებს გამოსახავენ, წარმოადგენენ სწორედ ამ ნაკვთების პარალელურ გეგმილებს ნახაზის სიბრტყეზე.

ვექტორების სიბრტყეზე დაგეგმილების შესახებ ადგილი აქვს იმავე მარტივ დებულებებს, როგორც ღერძზე დაგეგმილების შესახებ, სახელდობრ: ორი თანატოლი ვექტორის გეგმილები თანატოლია; ვექტორის გეგმილები ორ პარალელურ სიბრტყეზე თანატოლი არიან.




ნახ. 19.

**§ 15. ვექტორთა ჯამისა და სხვაობის გეგმილები ღერძზე.** ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი მნიშვნელოვანი დებულება:

ვექტორთა ჯამის გეგმილი ღერძზე ტოლია შესაკრებ ვექტორთა გეგმილების ჯამისა:

$$\overrightarrow{\text{გეგ}_{\Delta}}\vec{P}=\overrightarrow{\text{გეგ}_{\Delta}}\vec{P}_1+\overrightarrow{\text{გეგ}_{\Delta}}\vec{P}_2+ \\ +\dots+\overrightarrow{\text{გეგ}_{\Delta}}\vec{P}_{n-1}+\overrightarrow{\text{გეგ}_{\Delta}}\vec{P}_n, \tag{1}$$

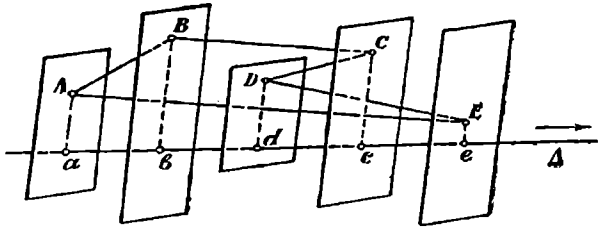
სადაც $\vec{P}$ აღნიშნავს ჯამს:

$$\vec{P}=\vec{P}_1+\vec{P}_2+\dots+\vec{P}_{n-1}+\vec{P}_n;$$

რასაკვირველია, იგულისხმება, რომ გეგმილები აიღებიან ერთსა და იმავე სიბრტყის პარალელურად.

მართლაც, დაეალაგოთ აღებული ვექტორები $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ ისე, როგორც ვექტორთა მრავალკუთხედის შედგენის დროს ვიქცევოდით; თუ სიმარტივისათვის დავემაყოფილდებით ოთხი შესაკრებით ($n=4$), მაშინ მივიღებთ, რომ (იხ. ნახ. 20)

$$\vec{P}_1=\overrightarrow{AB},\ \vec{P}_2=\overrightarrow{BC},\ \vec{P}_3=\overrightarrow{CD},\ \vec{P}_4=\overrightarrow{DE}.$$




ნახ. 20.

ამ ვექტორთა ჯამი იქნება $\vec{P}=\overrightarrow{AE}$.

ვთქვათ, $a, b, c, d, e$ შესაბამისად აღნიშნავენ $A, B, C, D, E$ წერტილთა გეგმილებს [1]). ვექტორთა ჯამის განმარტების მიხედვით, გვექნება:

$$\overrightarrow{ae}=\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{bc}+\overrightarrow{cd}+\overrightarrow{de}$$

[1]) შემდეგში, სადაც ეს გაუგებრობას არ გამოიწვევს, ჩვენ არ მივუთითებთ იმაზე, რომ გეგმილები აიღებიან ერთი და იმავე სიბრტყის პარალელურად.

მაგრამ:

$$\vec{ae} = \overrightarrow{\text{გეგ}_\Delta}\,\vec{P},\ \vec{ab} = \overrightarrow{\text{გეგ}_\Delta}\,\vec{P}_1,\ \vec{bc} = \overrightarrow{\text{გეგ}_\Delta}\,\vec{P}_2,\ \vec{cd} = \overrightarrow{\text{გეგ}_\Delta}\,\vec{P}_3,\ \vec{de} = \overrightarrow{\text{გეგ}_\Delta}\,\vec{P}_4.$$

თუ ჩავსვამთ ამ მნიშვნელობებს წინა ტოლობაში, მივიღებთ (1) ტოლობას, რასაც ვამტკიცებდით.

ვიმეორებთ, რომ ჩვენ დავკმაყოფილდით ოთხი შესაკრების შემთხვევით მხოლოდ ნახაზის გასამარტივებლად. საზოგადო შემთხვევაში დამტკიცება იგივეა.

დამტკიცებულიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ვექტორთა ჯამის გეგმილის ალგებრული მნიშვნელობა ტოლია შესაკრებთა გეგმილების ალგებრულ მნიშვნელობათა ჯამის, ე. ი.

$$\text{გეგ}_\Delta\,\vec{P} = \text{გეგ}_\Delta\,\vec{P}_1 + \text{გეგ}_\Delta\,\vec{P}_2 + \ldots + \text{გეგ}_\Delta\,\vec{P}_{n-1} + \text{გეგ}_\Delta\,\vec{P}_n.$$

სრულიად ასევე ადვილი საჩვენებელია, რომ ორი ვექტორის სხვაობის გეგმილი ტოლია ამ ვექტორთა გეგმილების სხვაობისა, ე. ი.

$$\overrightarrow{\text{გეგ}_\Delta}(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) = \overrightarrow{\text{გეგ}_\Delta}\,\vec{P}_1 - \overrightarrow{\text{გეგ}_\Delta}\,\vec{P}_2. \qquad (2)$$

მართლაც, § 9-ში ნათქვამის ძალით გვაქვს:

$$\vec{P}_1 - \vec{P}_2 = \vec{P}_2 + (-\vec{P}_2),$$

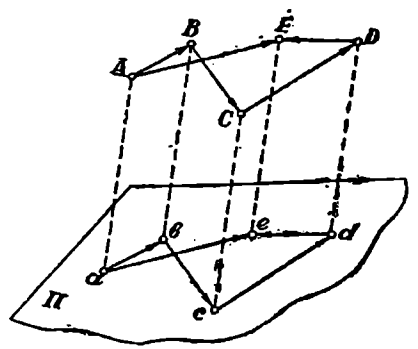
საიდანაც ზემოხსენებულის თანახმად:

$$\overrightarrow{\text{გეგ}_\Delta}(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) = \overrightarrow{\text{გეგ}_\Delta}\,\vec{P}_1 + \overrightarrow{\text{გეგ}_\Delta}(-\vec{P}_2) = \overrightarrow{\text{გეგ}_\Delta}\,\vec{P}_1 - \overrightarrow{\text{გეგ}_\Delta}\,\vec{P}_2.$$

გეგმილთა ალგებრული მნიშვნელობათათვის ანალოგიური ფორმულა გვექნება:

$$\text{გეგ}_\Delta(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) = \text{გეგ}_\Delta\,\vec{P}_1 - \text{გეგ}_\Delta\,\vec{P}_2.$$

**§ 16. ვექტორთა ჯამის ან სხვაობის გეგმილები სიბრტყეზე.** ადვილი საჩვენებელია აგრეთვე, რომ ღებულ ვექტორთა ჯამის გეგმილი $\Pi$ სიბრტყეზე ტოლია შესაკრებ ვექტორთა გეგმილების (იმავე სიბრტყეზე) ჯამისა, ე. ი. თუ:




ნახ. 21.

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \ldots + \vec{P}_n,$$

მაშინ:

$$\overrightarrow{\text{გეგ}_\Pi}\,\vec{P} = \overrightarrow{\text{გეგ}_\Pi}\,\vec{P}_1 + \text{გეგ}_\Pi\,\vec{P}_2 + \ldots + \overrightarrow{\text{გეგ}_\Pi}\,\vec{P}_n. \qquad (1)$$

რასაკვირველია იგულისხმება, რომ გეგმილები აიღებიან ერთი და იმავე წრფის პარალელურად. ეს თეორემა იმნაირადვე მტკიცდება, როგორც წინა პარაგრაფის თეორემა (იხ. ნახ. 21).

სრულიად ასევე, ორი ვექტორის სხვაობის გეგმილი ტოლია მათი გეგმილების სხვაობისა, ე. ი. თუ $\vec{Q}=\vec{P}_1-\vec{P}_2$, მაშინ:

$$\overrightarrow{\text{გეგ}_{\Pi}}\vec{Q}=\overrightarrow{\text{გეგ}_{\Pi}}\vec{P}_1-\overrightarrow{\text{გეგ}_{\Pi}}\vec{P}_2. \qquad (2)$$

**§ 17. ვექტორისა და რიცხვის ნამრავლის გეგმილი.** ადვილი დასამტკიცებელია, რომ თუ მოცემულ $\vec{P}$ ვექტორს გავამრავლებთ $m$ რიცხვზე, მაშინ ამავე რიცხვზე გამრავლდება ვექტორის გეგმილიც (მოცემულ ღერძზე ან მოცემულ სიბრტყეზე), რაც ფორმულით ასე ჩაიწერება:

$$\overrightarrow{\text{გეგ}}\ (m\vec{P})=m\cdot\overrightarrow{\text{გეგ}}\ \vec{P},$$

სადაც ნაგულისხმევია, რომ გეგმილი მოცემულ ღერძზე (ან მოცემულ სიბრტყეზე) აღებულია მოცემული სიბრტყის (ან მოცემული წრფის) პარალელურად.

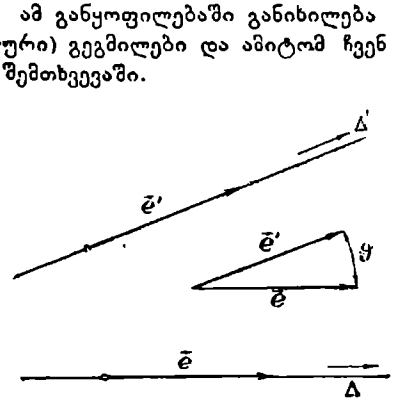
ანალოგიურ დამოკიდებულებას აქვს ადგილი მოცემულ ღერძზე ვექტორის გეგმილის ალგებრული მხიშვნელობისათვის, ე. ი.

$$\text{გეგ}\ (m\vec{P})=m\cdot\text{გეგ}\vec{P}.$$

მკითხველი ადვილად დაამტკიცებს ამ თითქმის აშკარა დებულებას, თუ ვექტორის სათავეს აიღებს ღერძზე (ან სიბრტყეზე) და თუ გამოიყენებს უმარტივეს დებულებებს მსგავსი სამკუთხედების შესახებ.

## IV. მართკუთხოვანი გეგმილების გამოსათვლელი ფორმულები

ამ განყოფილებაში განიხილება მხოლოდ მართკუთხოვანი (ორთოგონალური) გეგმილები და ამიტომ ჩვენ აღარ მოვიხსენიებთ ამას ყოველ კერძო შემთხვევაში.



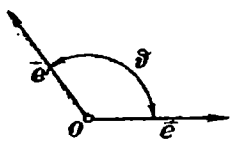

ნახ. 22.

**§ 18. კუთხე ორ მიმართულებას შორის.** კუთხე ორ მიმართულებას შორის (მაგ., ორ ღერძს შორის, ორ ვექტორს შორის ან ვექტორსა და ღერძს შორის) ეწოდება იმ კუთხეს, რომელსაც ადგენენ ნებისმიერი წერტილიდან გამოვავალი მოცემული მიმართულების ორტები.

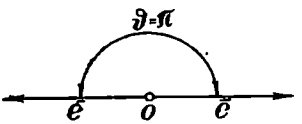
მაგ., კუთხე $\varphi$, $\Delta$ და $\Delta'$ ღერძებს შორის (ნახ. 22) არის ამ ღერძთა $\vec{e}$ და $\vec{e}'$ ორტებს შორის კუთხე; თვით ეს ორტები გატარებულია ნებისმიერი წერტილიდან.

ეს კუთხე განიხილება ყოველთვის ორტების დადებით მიმართულებებს შორის (იხ. ნახ. 23a) და შეუძლია მიიღოს ყველა მნიშვნელობა 0-დან $\pi$-მდე

(ე. ი. 0°-დან 180°-მდე). თუ $\varphi=0$, მაშინ $\vec{e}$ და $\vec{e'}$ მიმართულებანი ერთიმეორეს ემთხვევიან; თუ $\varphi=\pi$, მაშინ ეს მიმართულებანი ურთიერთმოპირდაპირე არიან (ნახ. 23b).




ნახ. 23a.



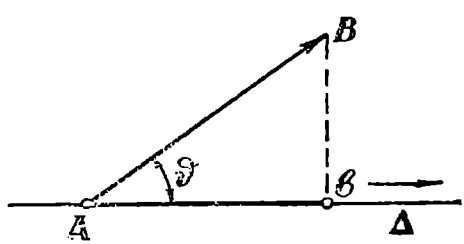

ნახ. 23b.

**§ 19. ვექტორის მართკუთხოვანი გეგმილის (ღერძზე) გამოსათვლელი ფორმულა.** ვთქვათ, მოცემულია $\Delta$ ღერძი და $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი, რომელიც $\Delta$ ღერძთან $\varphi$ კუთხეს ადგენს. $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის $\Delta$—ღერძზე მართკუთხოვანი გეგმილის ალგებრული მნიშვნელობის გამოსათვლელად არსებობს ფორმულა:

$$\text{გეგ}_{\Delta}\overrightarrow{AB}=|AB|\cos\varphi, \qquad (1)$$

რომელიც მართებულია როგორც სიდიდით, ისე ნიშნით; სიტყვიერად ეს ასე გამოითქმის: ვექტორის მართკუთხოვანი გეგმილის (ღერძზე) ალგებრული მნიშვნელობა ტოლია ვექტორის სიგრძისა და იმ კუთხის კოსინუსის ნამრავლისა, რომელსაც ვექტორი შეადგენს ღერძთან.

ამ ფორმულის გამოსაყვანად გადავიტანოთ აღებული ვექტორი ისე, რომ მისი $A$ სათავე დაემთხვეს $\Delta$ ღერძის ერთ-ერთ წერტილს.




ნახ. 24a.

ჯერჯერობით წარმოვიდგინოთ, რომ $\varphi$ კუთხე მახვილია. მაშინ (ნახ. 24a) $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის გეგმილის ალგებრული მნიშვნელობა $Ab$ არის დადებითი სიდიდე და $AbB$ სამკუთხედის განხილვა პირდაპირ გვაძლევს:

$$\text{გეგ}_{\Delta}\overrightarrow{AB}=Ab=|AB|\cos\varphi.$$

თუკი $\varphi$ ბლაგვი იქნება, მაშინ (ნახ. 24b) $AbB$ სამკუთხედი მოგვცემს:

$$|Ab|=|AB|\cos(180°-\varphi)=-|AB|\cos\varphi;$$

მაგრამ, ვინაიდან ამ შემთხვევაში $Ab<0$ ამიტომ, როგორც ზემოთ, აქაც გვექნება:

$$\text{გეგ}_{\Delta}\overrightarrow{AB}=Ab=-|AB|=+|AB|\cos\varphi,$$

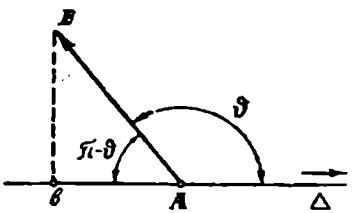
და ამნაირად (1) ფორმულა დამტკიცებულია.

კერძო შემთხვევები. 1. თუ $\vartheta=0$, მაშინ $\cos\vartheta=1$ და

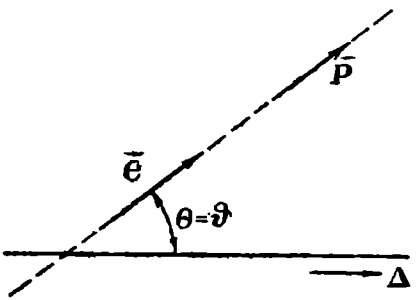
$$\text{გეგ}_\Delta \overrightarrow{AB}=|AB|.$$

2. თუ $\vartheta=180°$, მაშინ $\cos\vartheta=-1$ და $\text{გეგ}_\Delta \overrightarrow{AB}=-|AB|$.

3. თუ $\vartheta=90°$, ე. ი. $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი $\Delta$ ღერძის მართობია, მაშინ $\cos\vartheta=0$




ნახ. 24b.

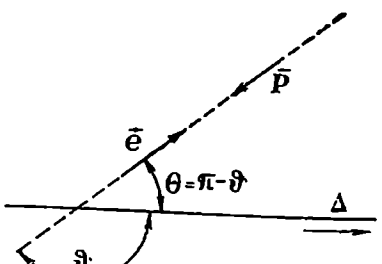



ნახ. 25a.

და $\text{გეგ}_\Delta \overrightarrow{AB}=0$; ყოველივე ეს გამომდინარეობს აგრეთვე გეგმილის თვით განმარტებიდან.

**§ 19a. განზოგადება.** ვთქვათ, $\vec{P}$ ვექტორი $\vec{e}$ ორტის პარალელურია, ისე რომ (§ 11):

$$\vec{P}=\vec{e}\,P; \qquad (1)$$




ნახ. 25b.

აღვნიშნოთ $\Theta$-თი კუთხე $\vec{e}$ ორტსა და $\Delta$ ღერძს შორის (ნახ. 25a და 25b).

ეს კუთხე ან $\vartheta$ კუთხის ტოლია $\vec{P}$-სა და $\Delta$-ს შორის (ნახ. 25a), ან $(\pi-\vartheta)$-ს ტოლია (ნახ. 25b). პირველ შემთხვევას აქვს ადგილი მაშინ, როდესაც $\vec{P}$ და $\vec{e}$-ს ერთი და იგივე მიმართულება აქვთ, ე. ი. როდესაც $P>0$; მეორე შემთხვევას კი მაშინ აქვს ადგილი, როდესაც $P<0$. ამიტომ წინა პარაგრაფის თანახმად, პირველ შემთხვევაში გვექნება:

$$\text{გეგ}_\Delta \vec{P}=|P|\cos\vartheta=P\cos\vartheta=P\cos\Theta;$$

მეორე შემთხვევაში (როდესაც $P<0$ და, მაშასადამე, $|P|=-P$) გვექნება:

$$\text{გეგ}_\Delta \vec{P}=|P|\cos\vartheta=-P\cos\vartheta=-P\cos(\pi-\Theta)=P\cdot\cos\Theta.$$

მაშასადამე, ყველა შემთხვევაში გვექნება ერთი და იგივე ფორმულა:

$$\text{გეგ}_{\Delta}\vec{P} = P\cos\Theta, \qquad (2)$$

სადაც $P$ აღნიშნავს $\vec{P}$ ვექტორის ალგებრულ მნიშვნელობას $\vec{e}$-ს მიმართ, ხოლო $\Theta$ არის კუთხე $\vec{e}$ ორტსა და გეგმილთა ღერძს შორის;

(2) ფორმულა წარმოადგენს წინა პარაგრაფის ფორმულის განზოგადებას; თუ $\vec{P}$ ვექტორს და $\vec{e}$ ორტს ერთი და იგივე მიმართულება აქვს, მაშინ (2) ფორმულა წინა პარაგრაფის ფორმულად იქცევა.

### სავარჯიშო მაგალითები და გამოყენებანი

1. $\vec{P}$ ვექტორი სიგრძით 10 შეადგენს $\Delta$ ღერძთან კუთხეს $150^{\circ}$. გამოითვალეთ $\vec{P}$ ვექტორის $\Delta$ ღერძზე მართკუთხოვანი გეგმილის ალგებრული მნიშვნელობა.

პასუხი: $-5\sqrt{3}$.

2. წინა მაგალითის პირობებში, როგორ გამოისახება $\vec{P}$ ვექტორის $\Delta$ ღერძზე მართკუთხოვანი გეგმილი, თუ ამ ღერძის ორტი არის $\vec{e}$.

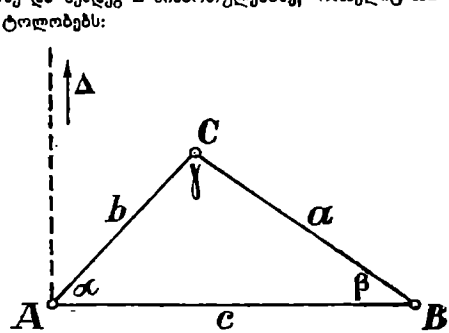
პასუხი: $-5\sqrt{3}\,\vec{e}$.

3. $\Delta'$ და $\Delta$ ღერძები ადგენენ კუთხეს $60^{\circ}$-ს. $\Delta'$ ღერძზე აღებულია ვექტორი სიგრძით 20 და მიმართულია $\Delta'$-ის მოპირდაპირედ. გამოითვალეთ ამ ვექტორის $\Delta$ ღერძზე მართკუთხოვანი გეგმილის ალგებრული მნიშვნელობა.

პასუხი: $-20\cos 60^{\circ} = -10$.

4. განვიხილოთ $ABC$ სამკუთხედი. თუ მივაწერთ მის გვერდებს მიმართულებებს ისეთნაირად, როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები (ნახ. 26), გვექნება: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$. თუ დავაგეგმილებთ ამ ტოლობას ჯერ $\overrightarrow{AB}$ მიმართულებაზე და შემდეგ $\Delta$ მიმართულებაზე, რომელიც $\overrightarrow{AB}$-ს მართობია (იხ. ნახ. 26), მივიღებთ შემდეგ ტოლობებს:

$$c = b\cos\alpha + a\cos\beta, \qquad (*)$$
$$0 = b\sin\alpha - a\sin\beta. \qquad (**)$$




ნახ. 26.

მეორე ტოლობა, რომელსაც შეგვიძლია დავუმატოთ ტოლობა

$$0 = c\sin\beta - b\sin\gamma$$

(რაც ანალოგიურად გამოიყვანება) გვაძლევს ტრიგონომეტრიიდან ცნობილ „სინუსების თეორემას“:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

5. წინა მაგალითის (*) და (**) ტოლობებიდან გამოიყვანეთ „კოსინუსების თეორემა“:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა: ორივე მხარე (*) ტოლობისა კვადრატში ავამაღლოთ; მივიღებთ:

$$c^2 = b^2\cos^2\alpha + a^2\cos^2\beta + 2ab\cos\alpha\cos\beta = b^2(1-\sin^2\alpha) +$$

$$+a^2(1-\sin^2\beta)+2ab\cos\alpha\cos\beta=a^2+b^2+2ab\cos\alpha\cos\beta-a^2\sin^2\beta-b^2\sin^2\alpha.$$

მაგრამ (**)-დან გამომდინარეობს, რომ:

$$b^2\sin^2\alpha=a^2\sin^2\beta=a\sin\beta\cdot a\sin\beta=a\sin\beta\cdot b\sin\alpha=ab\sin\alpha\sin\beta.$$

თუ შევიტანთ ამ მნიშვნელობებს წინა ფორმულაში, მივიღებთ:

$$c^2=a^2+b^2+2ab\,(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=a^2+b^2+2ab\cos(\alpha+\beta).$$

მაგრამ ვინაიდან, $\alpha+\beta=\pi-\gamma$, ამიტომ $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\pi-\gamma)=-\cos\gamma$, საიდანაც გ:- მომდინარეობს საძიებელი ფორმულა.

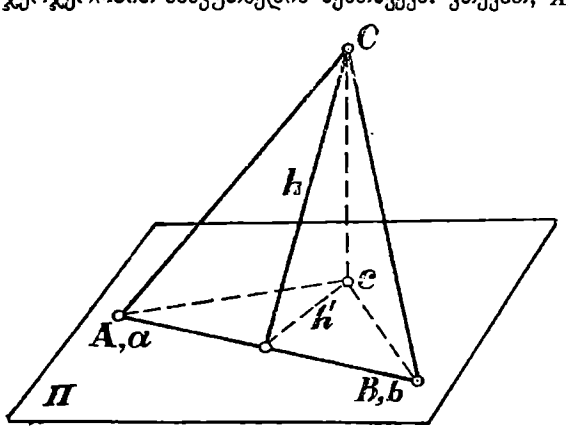
**§ 20. ვექტორის სიბრტყეზე მართკუთხოვანი გეგმილის სიგრძე.** ვთქვათ, $\Pi$ არის აღებული სიბრტყე და $\overrightarrow{AB}$ რომელიმე ვექტორი. აღვნიშნოთ $\vartheta$-თი მახვილი კუთხე $\Pi$ სიბრტყესა $AB$ ვექტორის მიმართულებას შორის [1]); ვთქვათ, $\overrightarrow{ab}$ არის $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის მართკუთხოვანი გეგმილი $\Pi$ სიბრტყეზე. მაშინ გვექნება:

$$|ab|=|AB|\cos\vartheta, \qquad (1)$$

ე. ი. მართკუთხოვანი გეგმილის სიგრძე ტოლია დასაგეგმილებელი ვექტორის სიგრძისა და იმ მახვილი კუთხის კოსინუსის ნამრავლისა, რომელსაც ვექტორი ადგენს სიბრტყესთან. დამტკიცებას ვანდობთ მკითხველს.

მითითება: $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი ისე გადავიტანოთ, რომ მისი სათავე სიბრტყის ერთ-ერთ წერტილს დაემთხვეს.

**§ 21. ბრტყელი ნაკვთის სიბრტყეზე გეგმილის ფართობი.** განვიხილოთ ჯერჯერობით სამკუთხედის შემთხვევა. ვთქვათ, $ABC$ რომელიმე სამკუთხედია;




ნახ. 27a.

$a$, $b$, $c$-თი აღვნიშნოთ $A$, $B$, $C$ წვეროების გეგმილები $\Pi$ სიბრტყეზე. აღვნიშნოთ $S$-ით $ABC$ სამკუთხედის ფართობი, ხოლო $s$-ით მისი $abc$ გეგმილის ფართობი. ეს ფართობები დაკავშირებული არიან წინა პარაგრაფის (1) ფორმულის საშუალებით ანალოგიური დამოკიდებულებით:

$$s=S\cos\vartheta, \qquad (1)$$

სადაც $\vartheta$ აღნიშნავს იმ მახვილ კუთხეს, რომელსაც შეადგენს გეგმილთა $\Pi$ სიბრტყე დასაგეგმილებელი სამკუთხედის სიბრტყესთან. ამ ფორმულის გა-

[1]) განმარტების მიხედვით, $\vartheta$ არის კუთხე $\overrightarrow{AB}$ ვექტორსა და მის მართკუთხოვან $\overrightarrow{ab}$ გეგმილს შორის.

მოყვანა მეტად ადვილია. მართლაც, წარმოვიდგინოთ, ჯერჯერობით, რომ სამკუთხედის ერთ-ერთი გეერდი, მაგ., $AB$ გეერდი, პარალელურია $\Pi$ სიბრტყისა (იხ. ნახ. 27a). ამ შემთხვევაში ჩვენ ყოველთვის შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, რომ $AB$ გეერდი თვით $\Pi$ სიბრტყეზე ძევს (ამისათვის საკმარისია $ABC$ სამკუთხედის ისე გადატანა, რომ მისი სიბრტყის მიმართულება არ შეიცვალოს, რაც მის გეგმილსაც არ შეცვლის). $ABC$ სამკუთხედის $S$ ფართობი

$$\text{ტოლია: } S = \frac{1}{2}|AB| \cdot h,$$

სადაც $h$ არის სამკუთხედის სიმაღლე. მეორეს მხრით, $abc$ გეგმილის ფართობი ტოლია:

$$s = \frac{1}{2}|ab| \cdot h',$$

სადაც $h'$ არის სამკუთხედის სიმაღლე. მაგრამ

$$|AB| = |ab|$$

და, გარდა ამისა,

$$h' = h\cos\vartheta,$$

ვინაიდან $h'$ არის $h$ სიმაღლის გეგმილი $\Pi$ სიბრტყეზე [1]), ხოლო კუთხე $h$-სა და $h'$-ს შორის არის სწორედ $\vartheta$ [2]). მაშასადამე,

$$s = \frac{1}{2}|ab| \cdot h' = \frac{1}{2}|AB|h\cos\vartheta = S\cos\vartheta,$$

რის დამტკიცებაც გვსურდა.

თუ $ABC$ სამკუთხედის არც ერთი გეერდი არ არის $\Pi$ სიბრტყის პარალელური, მაშინ, როგორც ეს ადვილი დასანახია, ყოველთვის შეიძლება მისი დაყოფა ისეთ ორ სამკუთხედად, რომელთა შორის თითოეულს აქვს გეერდი ამ სიბრტყის პარალელური (ნახ. 27b) და რადგანაც (1) ფორმულა მართებულია თითოეული ნაწილისათვის, ამიტომ იგი იქნება მართებული მთელი სამკუთხედისათვის.

თუ ახლა სამკუთხედის მაგიერ ავიღებთ ნებისმიერ ბრტყელ მრავალკუთხედს, მაშინ (1) ფორმულა ძალაში დარჩება, ვინაიდან ყოველი მრა-

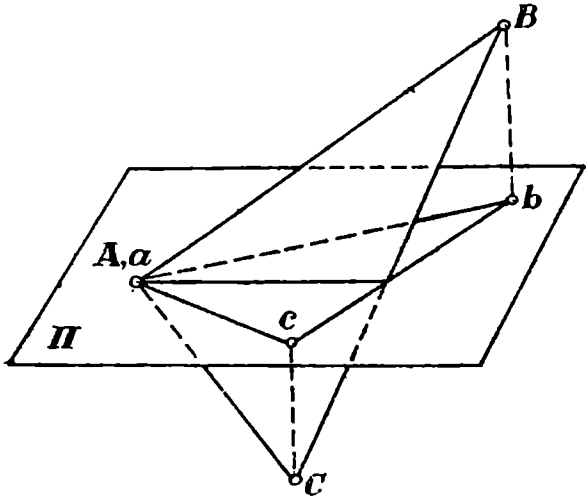
---

[1]) გავიხსენოთ ელემენტარული გეომეტრიის თეორემა: თუ სიბრტყისა და წრფის გადაკვეთის წერტილზე გავიყვანთ ამ სიბრტყეში ხსენებული წრფის მართობულ წრფეს, მაშინ ეს უკანასკნელი მართობი იქნება ამ წრფის გეგმილისა.

[2]) საჭიროა გავიხსენოთ სიბრტყეთა შორის კუთხის განმარტება, რომელიც ელემენტარულ გეომეტრიაში მოყვათ.

ვალკუთხედი შეიძლება რამდენიმე სამკუთხედად დაიყოს.

შემდეგ ყოველი ბრტყელი ნაკვთის ფართობი, რაიმე მრუდი წირით შემოსაზღვრული, განმარტების ძალით არის მასში ჩახაზული მრავალკუთხედის ფართობის ზღვარი. რადგანაც (1) ფორმულა ძალაშია ყოველი მრავალკუთხედისათვის, ამიტომ იგი მართებული დარჩება ზღვარზე გადასვლის დროსაც.



ნახ. 27b.

მაშ, თუ $S$-ით აღნიშნულია რაიმე ბრტყელი ნაკვთის ფართობი, ხოლო $s$-ით ამ ნაკვთის გეგმილის ფართობი რომელიმე სიბრტყეზე, მაშინ: $s = S\cos\varphi$, სადაც $\varphi$ არის ის მახვილი კუთხე, რომელსაც შეადგენენ დასაგეგმილებელი ნაკვთის სიბრტყე და გეგმილთა სიბრტყე.

### სავარჯიშო მაგალითები და გამოყენებანი

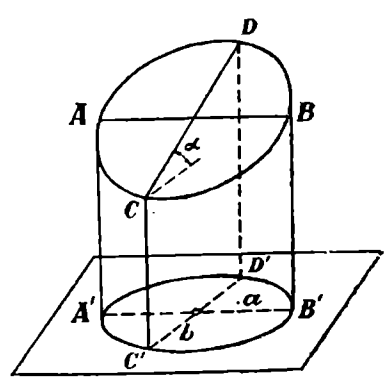
1. იპოვეთ მართი პრიზმის ირიბი კვეთის ფართობი, თუ კვეთის სიბრტყე შეადგენს ფუძესთან კუთხეს 30°-ს და თუ ფუძის ფართობი 16 კვ.სმ ტოლია.

პასუხი: $S = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ კვ.სმ.

2. გამოიყენეთ გეგმილის ფართობის თვისება და იპოვეთ იმ $\alpha$ კუთხის სიდიდე, რომელსაც შეადგენენ წესიერი ტეტრაედრის წახნაგები.

პასუხი: $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

3. თუ წრეწირს დავაგეგმილებთ II სიბრტყეზე, რომელიც პარალელური არ არის ამ წირის სიბრტყისა, მაშინ დაგეგმილების დროს მიღებულ წირს ელიფსი ეწოდება [1]). წრის $AB$ დიამეტრი, რომელიც II სიბრტყის პარალელურია (იხ. ნახ. 28), დაგეგმილებისას გვაძლევს $A'B'$ ნაკვეთს, რომელიც სიდიდით ტოლია $|AB| = 2a$, სადაც $a$ არის წრის რადიუსი.



ნახ. 28.

[1]) ამ წირს VII თავში დაწვრილებით შევისწავლით.

$CD$ დიამეტრი, რომელიც $AB$-ს მართობია, დაგეგმილებისას გვაძლევს $C'D'$ ნაკვეთს, რომელიც $A'B'$-ის მართობია და სიდიდით ტოლია $2a \cdot \cos\alpha$-სი, სადაც $\alpha$ არის კუთხე წრეწირის სიბრტყისა და $\Pi$ სიბრტყეს შორის.

სიდიდეები $a = \frac{1}{2}|A'B'|$ და $b = \frac{1}{2}|C'D'| = a\cos\alpha$ იწოდებიან შესაბამისად ელიფსის დიდ და მცირე ნახევარღერძებად. დამტკიცეთ, რომ ელიფსით შემოსაზღვრული $s$ ფართობი ტოლია $\pi ab$-სი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. გვექნება: $s = \pi a^2 \cos\alpha = \pi a \cdot a\cos\alpha = \pi ab$.

## V. ორი ვექტორის სკალარული და ვექტორული ნამრავლი

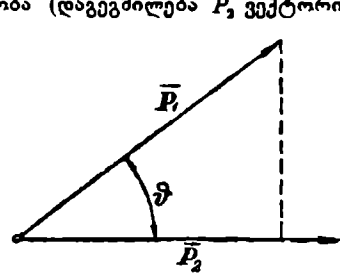
აქამდე ჩვენ ვექტორთა შეკრებისა და გამოკლების ოპერაციებს გარდა, გავეცანით რიცხვზე ვექტორის გამრავლების ოპერაციას. ახლა გავეცნობით კიდევ ორ ოპერაციას, სახელდობრ, ორი ვექტორის სკალარულსა და ვექტორულ გამრავლებას.

**§ 22. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი.** ორი $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორის სკალარული ნამრავლი ე წ ო დ ე ბ ა მ ა თ ი ს ი გ რ ძ ე ე ბ ი ს ა და მ ა თ შ ო რ ი ს მ ო თ ა ვ ს ე ბ უ ლ ი $\vartheta$ კ უ თ ხ ი ს კ ო ს ი ნ უ ს ი ს ნ ა მ რ ა ვ ს.

ვექტორთა სკალარულ ნამრავლს ჩვენ აღვნიშნავთ $\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2$ სიმბოლოთი [1]). განმარტების ძალით გვექნება:

$$\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 = |\vec{P}_1|\,|\vec{P}_2|\cos\vartheta.$$

თუ შევნიშნავთ, რომ ნამრავლი $|\vec{P}_1|\cos\vartheta$ არის $\vec{P}_1$ ვექტორის მართკუთხოვანი გეგმილის ალგებრული მნიშვნელობა (დაგეგმილება $\vec{P}_2$ ვექტორის მიმართულებაზე ხდება), შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ორი ვექტორის სკალარულ ნამრავლს მივიღებთ, თუ გავამრავლებთ ერთი მათგანის სიგრძეს მეორის მართკუთხოვან გეგმილის ალგებრულ მნიშვნელობაზე (დაგეგმილება ხდება პირველი ვექტორის მიმართულებაზე), ე. ი. ჩვენი აღნიშვნების თანახმად:



ნახ. 29.

$$\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 = |\vec{P}_1| \cdot \text{გეგ}_{\vec{P}_1}\vec{P}_2 = |\vec{P}_2| \cdot \text{გეგ}_{\vec{P}_2}\vec{P}_1. \quad (2)$$

ავხსნათ სკალარული ნამრავლის უბრალო მექანიკური მნიშვნელობა. თუ მუდმივი (გეზითა და სიდიდით) $\vec{F}$ ძალის მოდების წერტილი წრფივ გადაადგილებას განიცდის $A$ მდებარეობიდან $B$ მდებარეობაში, მაშინ განმარტების ძალით, მ უ შ ა ო ბ ა $R$, შესრულებული $\vec{F}$ ძალის მიერ, ტოლია $|AB|$ სიგრძი-

[1]) საჭიროა შევნიშნოთ, რომ ლიტერატურაში ჯერ კიდევ არ არის მტკიცედ დადგენილი აღნიშვნები მიღებული; სკალარული ნამრავლისათვის ხმარობენ კიდევ შემდეგ აღნიშვნებს $\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2$, $(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$, $(\vec{P}_1\,\vec{P}_2)$; ხშირად სკალარულ ნამრავლს უწოდებენ გ ე ო მ ე ტ რ ი უ ლ ს ან შ ი გ ა ნ ა მ რ ა ვ ლ ს.

სა და $\vec{F}$ ძალის გეგმილის (გადაადგილების მიმართულებით) ალგებრული მნიშვნელობის ნამრავლისა, ე. ი. $R=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\vec{F}|\cos\varphi$, სადაც $\varphi$ აღნიშნავს კუთხეს $\overrightarrow{AB}$ და $\vec{F}$ ვექტორს შორის. მაშასადამე, (1) ფორმულის ძალით:

$$R=\overrightarrow{AB}\cdot\vec{F}.$$

მაშასადამე, ჩვენს შემთხვევაში მუშაობა ტოლია გადაადგილების გამომსახველი ვექტორისა და ძალის გამომსახველი ვექტორის სკალარული ნამრავლისა.

აღვნიშნოთ სკალარული ნამრავლის მნიშვნელოვანი თვისება: იგი გახდება ნული ან მაშინ, როდესაც ერთ-ერთი გასამრავლებელი ვექტორი ნულია ან მაშინ, როდესაც აღებული ვექტორები ურთიერთმართობული არიან. მართლაც, უკანასკნელ შემთხვევაში $\varphi=\frac{\pi}{2}$ და, მაშასადამე, $\cos\varphi=0$.

რადგანაც ნულის ტოლი ვექტორის მიმართულება განუზღვრელია, ამიტომ იგი შეგვიძლია ვიგულისხმოთ ნებისმიერი გეზის მართობულად. ამიტომ შეიძლება ითქვას, რომ ყველა შემთხვევაში პირობა:

$$\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2=0 \tag{3}$$

არის $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორის მართობულობის პირობა.

თუ ორივე ვექტორი თანატოლია, ე. ი. $\vec{P}_1=\vec{P}_2=\vec{P}$, მაშინ $\varphi$ კუთხე მათ შორის ნულია და ამნაირად:

$$\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2=\vec{P}\cdot\vec{P}=|\vec{P}|\,|\vec{P}|\cos 0=|\vec{P}|^2.$$

ნამრავლი $\vec{P}\cdot\vec{P}$ აღინიშნება $\vec{P}^2$ სიმბოლოთი. ამრიგად, აღებული ვექტორის სიგრძის კვადრატი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ამ ვექტორის თავის თავზე სკალარულად გამრავლების შედეგი:

$$|\vec{P}|^2=\vec{P}\cdot\vec{P}=\vec{P}^2. \tag{4}$$

როგორც ზემოთ ვნახეთ, წინააღმდეგ რიცხვთა ნამრავლისა, სკალარული ნამრავლი შეიძლება გახდეს ნული ისე, რომ არც ერთი მამრავლი არ იყოს ნული. ახლა მოგვყავს ვექტორთა სკალარული ნამრავლის ის ძირითადი თვისებები, რომლებიც ანალოგიურია რიცხვთა ნამრავლის თვისებებისა.

უწინარეს ყოვლისა, თვითონ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ სკალარულ ნამრავლს აქვს გადანაცვლებადობის თვისება, ე. ი.

$$\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2=\vec{P}_2\cdot\vec{P}_1$$

შემდეგ, სკალარულ ნამრავლს აქვს განრიგებადობის თვისება, ე. ი. მართებულია ფორმულა

$$(\vec{P}_1+\vec{P}_2+\ldots+\vec{P}_n)\cdot\vec{Q}=\vec{P}_1\cdot\vec{Q}+\vec{P}_2\cdot\vec{Q}+\ldots+\vec{P}_n\cdot\vec{Q} \tag{5}$$

დამტკიცებისათვის შევნიშნოთ, რომ (2)-ს თანახმად

$$(\vec{P}_1+\vec{P}_2+\ldots+\vec{P}_n)\cdot\vec{Q}=|\vec{Q}|\cdot\text{გეგ}\,(\vec{P}_1+\vec{P}_2+\ldots+\vec{P}_n)=$$
$$=|\vec{Q}|\cdot(\text{გეგ}\,\vec{P}_1+\text{გეგ}\,\vec{P}_2+\ldots+\text{გეგ}\,\vec{P}_n)=$$
$$=|\vec{Q}|\cdot\text{გეგ}\,\vec{P}_1+|\vec{Q}|\cdot\text{გეგ}\,\vec{P}_2+\ldots+|\vec{Q}|\cdot\text{გეგ}\,\vec{P}_n,$$

სადაც გეგმილები აღებულია $\vec{Q}$-ს მიმართულებაზე; სიმოკლისათვის ჩვენ გამოვტოვეთ გეგმილთა ღერძის აღმნიშვნელი ნიშნაკი. მაგრამ იმავე (2) ფორმულის ძალით გვექნება:

$$|\vec{Q}|\cdot\text{გეგ}\,\vec{P}_1=\vec{Q}\cdot\vec{P}_1,\ |\vec{Q}|\cdot\text{გეგ}\,\vec{P}_2=\vec{Q}\cdot\vec{P}_2$$

და ასე შემდეგ.

თუ შევიტანთ ამათ წინა ფორმულაში, მივიღებთ სასურველ შედეგს (5).

დამტკიცებულიდან გამომდინარეობს, კერძოდ, რომ ვექტორთა ორი ჯამის სკალარული გადამრავლება შეიძლება შესრულდეს მრავალწევრთა გამრავლების ჩვეულებრივი წესით (იხ. § 6, შენიშვნა 2).

ბოლოს აღვნიშნოთ, რომ თუ $m_1$ და $m_2$ მოცემული რიცხვებია, მაშინ:

$$(m_1\vec{P}_1)\cdot(m_2\vec{P}_2)=(m_1m_2)\ (\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2); \tag{6}$$

მაგალითად:

$$3\vec{P}_1\cdot 4\vec{P}_2=12\,(\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2)=12\cdot|\vec{P}_1|\ |\vec{P}_2|\cos\vartheta.$$

ამის მართებულებას მკითხველი ადვილად დაამტკიცებს.

#### სავარჯიშო მაგალითები და გამოყენებანი

1. ვიცით რა, რომ სიდიდითა და მიმართულებით მუდმივი $\vec{F}$ ძალის მუშაობა $R$ მოდების წერტილის წრფივი გადაადგილების დროს $A$ მდებარეობიდან $B$ მდებარეობაში, გამოისახება ფორმულით: $R=\overrightarrow{AB}\cdot\vec{F}$, დაამტკიცეთ მუშაობის შემდეგი უმარტივესი თვისებანი.

*a*) მუშაობა ნულის ტოლია, როცა ძალა მართობია გადაადგილების მიმართულებისა.

*b*) ეოთსა და იმავე წერტილზე მოდებული რამდენიმე ძალის ტოლქმედის მუშაობა ტოლია შემადგენელთა მუშაობების ჯამისა (ერთ წერტილზე მოდებულ ძალთა ტოლქმედი ტოლია ამ ძალების ვექტორული ჯამისა; შესაკრებ ძალებს შემადგენელი ეწოდება; ტოლქმედი მოდებულია იმ-ვე წერტილზე).

*c*) $\vec{F}$ ძალის მუშაობათა ჯამი, მოდების წერტილის $ABC\ldots KL$ მრავალკუთხედის $AB$, $BC,\ldots,KL$ გვერდებზე გადაადგილების დროს (წვეროებს გავივლით აღნიშნული მიმდევრობით) ტოლია იმავე ძალის მუშაობისა მოდების წერტილის წრფივი გადაადგილების დროს $\overrightarrow{AL}$ შემკვრელზე.

2. დაამტკიცეთ ნებისმიერი ორი $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორისათვის მართებული ტოლობა:

$$(\vec{P}+\vec{Q})^2=(\vec{P}+\vec{Q})\cdot(\vec{P}+\vec{Q})=\vec{P}^2+\vec{Q}^2+2\,\vec{P}\cdot\vec{Q}=|\vec{P}|^2+|\vec{Q}|^2+2|\vec{P}|\cdot|\vec{Q}|\cos\vartheta,$$

სადაც $\vartheta$ არის კუთხე $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორებს შორის.

3. განიხილეთ ოთხი ვექტორი $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$, რომლებიც $ABDC$ რომბის გვერდებს შეადგენენ, ისე, რომ $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$. გამოსახეთ $\overrightarrow{AD}$ და $\overrightarrow{BC}$ დიაგონალე-

ბი, როგორც გვერდთა ვექტორული ჯამი და სხვაობა, დაამტკიცეთ რომ $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, ე. ი., რომ რომბის დიაგონალები ურთიერთმართობი არიან.

4. $ABC$ სამკუთხედის გვერდებს, მივაწერთ რა გარკვეულ მიმართულებებს, როგორც ერთ-ერთ უკვე განხილულ მაგალითში (§ 19; მაგ. 4), და თუ კვადრატში ავამაღლებთ ორივე ნაწილს შედეგი ტოლობისას $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, დაამტკიცეთ ტრიგონომეტრიიდან ცნობილი „კოსინუსების თეორემა": $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ (აღნიშნები იხ. ნახ. 26).

**§ 23. ვექტორის მართკუთხოვანი გეგმილის გამოსახვა სკალარული ნამრავლის საშუალებით.** თუ $\vec{e}$ აღნიშნავს $\Delta$ ღერძის ორტს, მაშინ ნებისმიერი $\vec{P}$ ვექტორის მართკუთხოვანი გეგმილის ($\Delta$ ღერძზე) ალგებრული მნიშვნელობა შეიძლება განხილული იყოს, როგორც $\vec{P}$ ვექტორისა და $\vec{e}$ ორტის სკალარული ნამრავლი, ე. ი.

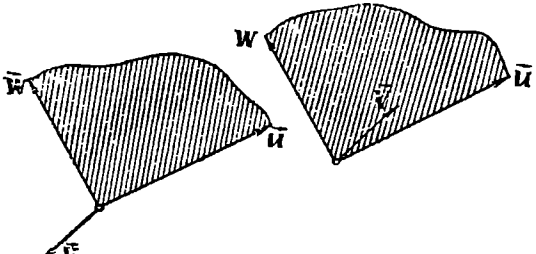
$$\text{გეგ}_{\Delta}\vec{P} = \vec{e} \cdot \vec{P}. \tag{1}$$

მართლაც:

$$\vec{e} \cdot \vec{P} = |\vec{e}| \cdot |\vec{P}| \cdot \cos\varphi = |\vec{P}| \cos\varphi,$$

ვინაიდან $|\vec{e}| = 1$ ($\varphi$ არის კუთხე $\vec{P}$-სა და $\Delta$-ს შორის, ანუ, რაც იგივეა, $\vec{P}$ და $\vec{e}$-ს შორის). უკანასკნელი ფორმულა ამტკიცებს გამოთქმულ დებულებას.

**§ 24. სამი მიმართულების მარჯვენა და მარცხენა სისტემა.** ახლა შემოვიღოთ ერთი ცნება, რომელიც ჩვენ დაგვჭირდება უახლოეს პარაგრაფში და შემდეგშიაც. განვიხილოთ სამი ორტი $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ერთი და იმავე სიბრტყის არაპარალელური და დაეუშვათ, რომ მათ საერთო სათავე აქვთ; წარმოვიდგინოთ დამკვირვებელი, რომლის ადგილმდებარეობა ისეთია $\vec{u}$ ორტის გასწვრივ, რომ ეს ორტი მიმართულია დამკვირვებლის ფეხებიდან თავისაკენ და ვთქვათ, რომ დამკვირვებელი იყურება $\vec{v}$ ორტის მიმართულებით. მაშინ ორ შემთხვევას შეიძლება ჰქონდეს ადგილი[1]): ან (ნახ. 30a) $\vec{w}$ ორტი მიმართულია (დამკვირვებლის მიმართ) მარცხნიდან მარჯვნისაკენ ან (ნახ. 30b) მარჯვნიდან მარცხნისაკენ. პირველ შემთხვევაში $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ორტები (აღებულნი ხსენებული მიმდევრობით) შეადგენენ მარცხენა სისტემას, მეორეში კი მარჯვენას. სახელწოდება „მარცხენა" იქედან წარმოიშვა, რომ პირველ შემთხვევაში $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ორტები (აღებულნი ხსენებული მიმდევრობით) ერთმანეთის მიმართ ისე არიან ორიენტირებული, როგორც




ნახ. 30a. ნახ. 30b.

[1]) ნახ. 30a და 30b-ზე $\vec{u}$ და $\vec{w}$ ორტები იმყოფებიან ნახაზის სიბრტყეში. 30a ნახაზზე $\vec{v}$ ორტი მიმართულია მკითხველისაკენ, 30b ნახაზზე კი მკითხველიდან.

მარცხენა ხელის ცერი, მაჩვენებელი თითი და შუათითი (იგულისხმება, რომ პირველი ორი თითი გაპიმეულია, ხოლო მესამე მოხრილია კუთხით ხელის გულისაკენ). ამგვარადვე $u$, $v$, $w$ ორტები, რომლებიც მარჯვენა სისტემას შეადგენენ, მარჯვენა ხელის თითებთან არიან დაკავშირებული.

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ორტების მარცხენა სისტემა ისევ მარცხენა სისტემად დარჩება, თუ მათს წრიულ გადანაცვლებას მოვახდენთ[1]), ე. ი., თუ მათ ასეთი მიმდევრობით განვიხილავთ: $v$, $w$, $u$. ანალოგიურ თვისებას აქვს ადგილი მარჯვენა სისტემისათვის. პირიქით, მარცხენა სისტემა გადავა მარჯვენა სისტემაში და პირუკუ, თუ ადგილს შევუნაცვლებთ მხოლოდ ორ ორტს. მაგალითად, თუ სისტემა $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ მარცხენაა, მაშინ სისტემა $\vec{v}$, $\vec{u}$ $\vec{w}$ იქნება მარჯვენა. მარჯვენა სისტემის სარკისებრი ანარეკლი გვაძლევს მარცხენა სისტემას და პირუკუ. ასევე შეიძლება განვასხვაოთ სამი ვექტორის, სამი ღერძის და საზოგადოდ სამი მიმართულების მარჯვენა და მარცხენა სისტემა.

§ 25. **ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი**[2]). გეომეტრიისა და გამოყენებითი მათემატიკის მრავალ საკითხში, გარდა უკვე განხილული სკალარული ნამრავლისა, დიდი მნიშვნელობა აქვს ორი ვექტორის ეგრეთ წოდებული ვ ე ქ ტ ო რ უ ლ ი ნ ა მ რ ა ვ ლ ი ს ც ნ ე ბ ა ს[3]), რომლის განმარტებაზე ახლა გადავდივართ.

$\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორის ვექტორული ნამრავლი ეწოდება $\vec{R}$ ვექტორს, რომელსაც შემდეგი პირობებით განვსაზღვრავთ:

a) $\vec{R}$ ვექტორის სიგრძე რიცხობრივად ტოლია $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორთა სიგრძეებისა და მათ შორის არსებული $\varphi$ კუთხის სინუსის ნამრავლისა:

$$|\vec{R}| = |\vec{P}|\,|\vec{Q}| \cdot \sin\varphi; \tag{1}$$

(იხ. ნახ. 31). სხვანაირად რომ ვთქვათ, $\vec{R}$ ვექტორის სიგრძე რიცხობრივად ტოლია $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობისა (თუ ვიგულისხმებთ, რომ ეს ვექტორები ერთი სათავიდან არიან გავლებული) ანუ, რაც იგივეა, ამ ვექტორებზე აგებული სამკუთხედის გაორკეცებული ფართობის ტოლია.

b) $\vec{R}$ ვექტორი $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორთა სიბრტყის[4]) მართობია. ეს პირობები კიდევ სავსებით ვერ განსაზღვრავენ $\vec{R}$ ვექტორს: რჩება კიდევ არჩევა-

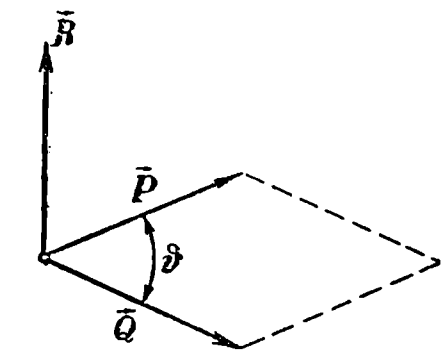
[1]) რამდენიმე $a$, $b$, $c$, ..., $k$ ელემენტის წრიული გადანაცვლება ეწოდება ისეთ გადანაცვლებას, რომლის მიხედვით ყოველი ელემენტი შეინაცვლება მისი მომდევნო ელემენტით, ხოლო უკანასკნელი—პირველით. მაგალითად, თუ გამოვიყენებთ წრიულ გადანაცვლებას სამი $a$, $b$, $c$ ელემენტისათვის, მივიღებთ $b$, $c$, $a$. თუ კიდევ ერთხელ მოვახდენთ წრიულ გადანაცვლებას, მივიღებთ $c$, $a$, $b$. თუ კიდევ ერთხელ მოვახდენთ, დავუბრუნდებით ისევ ძველ მიმდევრობას $a$, $b$, $c$.

[2]) პირველ წაკითხვისას, ეს პარაგრაფი შეიძლება გამოტოვებულ იქნას.

[3]) ვექტორულ ნამრავლს უწოდებენ აგრეთვე „გარე ნამრავლს".

[4]) ე. ი. $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორთა პარალელური სიბრტყისა. თვალსაჩინოებისათვის შეიძლება წარმოვიდგინოთ, რომ ამ ვექტორთა სათავე თანმხვედრილია, როგორც 31 ნახაზზე; მაშინ განხილული სიბრტყე არის $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორთა შემცველი სიბრტყე (ან ყოველი მისი პარალელური).

ნი ორ შესაძლებელ ურთიერთმოპირდაპირე მიმართულებას შორის. ეს ორ-ნაირობა რომ თავიდან ავიცილოთ, ჩვენ ვუმატებთ შემდეგ პირობას.




ნახ. 31.

c) $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ ვექტორები (აღნიშნული მიმდევრობით) შეადგენენ მარცხენა სისტემას.

რასაკვირველია, ეს პირობა შეიძლება იმ პირობით შეგვეცვალა, რომ ჩვენს ვექტორებს მარჯვენა სისტემა შეედგინათ; ჩვენ შევჩერდით მარცხენაზე მხოლოდ და მხოლოდ გარკვეულობისათვის (იხ. ქვემოთ, § 51).

$\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორთა ვექტორულ ნამრავლს ჩვენ აღვნიშნავთ ასე [1]):

$$\vec{P}\times\vec{Q}.$$

არ დავივიწყოთ, რომ ვექტორული ნამრავლი ვექტორია, მაშინ როდესაც სკალარული ნამრავლი—რიცხვია.

წინააღმდეგ ორი რიცხვის ნაჯრავლის თვისებისა, ვექტორული ნამრავლი, მსგავსად სკალარულისა, შეიძლება გახდეს ტოლი ისე, რომ ორივე თანამამრავლი იყოს ნულისაგან განსხვავებული. სახელდობრ, (1) ფორმულის თანახმად, აშკარაა, რომ ვექტორული ნამრავლი ნულის ტოლია, როცა ერთი თანამამრავლი ნულია ან როცა თანამამრავლები პარალელურია. ამგვარად, ვექტორთა პარალელობის პირობა შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$\vec{P}\times\vec{Q}=0 \tag{2}$$

(შეადარეთ მართობულობის ანალოგიურ პირობას $P\cdot\vec{Q}$, რომელიც გამოისახება სკალარული ნამრავლის საშუალებით).

შემდეგ, ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლისა და რიცხვთა ნამრავლის თვისების წინააღმდეგ, ვექტორულ ნამრავლს არა აქვს გადანაცვლებადობის თვისება, ე. ი. ის დამოკიდებულია მამრავლთა რიგზე. სახელდობრ, თვით განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\vec{Q}\times\vec{P}=-\vec{P}\times\vec{Q} \tag{3}$$

მართლაც, თუ შევცვლით $\vec{P}$, $\vec{Q}$ ვექტორთა მიმდევრობას, მაშინ უნდა შეიცვალოს $\vec{R}$ ვექტორის მიმართულება საწინააღმდეგოდ, რომ $\vec{Q}$, $\vec{P}$, $\vec{R}$ იყოს ისევ მარცხენა სისტემა.

---

[1]) ვექტორული ნამრავლისათვის იხმარება აგრეთვე აღნიშვნები:

$$[\vec{P}\cdot\vec{Q}],\ [\vec{P},\ \vec{Q}],\ \vec{P}\wedge\vec{Q}.$$

გადავიდეთ ვექტორული ნამრავლისათვის რიცხვთა ნამრავლის თვისებების ანალოგიურ თვისებათა დამტკიცებაზე; აღვნიშნოთ, უპირველეს ყოვლისა, ერთი მარტივი თვისება, რომელიც შემდეგი ტოლობით გამოისახება:

$$m\vec{P}\times n\vec{Q}=mn\,(\vec{P}\times\vec{Q}), \tag{4}$$

სადაც $m$, $n$ ნებისმიერი რიცხვებია. კერძოდ (თუ $m=-1$, $n=1$)

$$(-\vec{P})\times\vec{Q}=-(\vec{P}\times\vec{Q})=\vec{Q}\times\vec{P}. \tag{5}$$

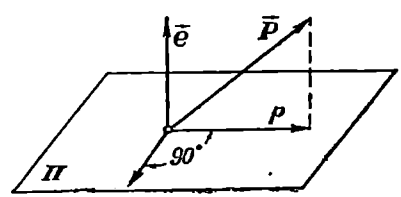
ძირითად თვისებას, რომლითაც ვექტორული ნამრავლი უახლოვდება რიცხვთა ნამრავლს, წარმოადგენს განაწილებადობის თვისება, რომელსაც ახლავე დავამტკიცებთ. დავიწყოთ ერთი მარტივი შენიშვნით, რომელიც შეეხება იმ შემთხვევას, როცა ერთი თანამამრავლი არის ორტი $\vec{e}$.

ვექტორული ნამრავლის თვით განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ $\vec{e}\times\vec{P}$ ნამრავლი შეიძლება შემდეგნაირად მივიღოთ (ნახ. 32): დავაგეგმილოთ, ორთოგონალურად $\vec{P}$ ვექტორი II სიბრტყეზე, რომელიც $\vec{e}$ ორტის მართობია და მიღებული გეგმილი $\vec{P}$ შევაბრუნოთ II სიბრტყეში მართი კუთხით საათის ისრის მიხედვით (იმ დამკვირვებლის მიმართ, რომელსაც ფეხები აქეს $\vec{e}$ ორტის სათავეში, ხოლო თავი ბოლოში).

ამ შენიშვნიდან ადვილად გამოიყვანება $\vec{e}$ ორტისა და $\vec{P}_1+\vec{P}_2+\ldots+\vec{P}_n$ ჯამის ვექტორული ნამრავლის თვისება, რომელიც შემდეგი ტოლობით გამოისახება:

$$\vec{e}\times(\vec{P}_1+\vec{P}_2+\ldots+\vec{P}_n)=\vec{e}\times\vec{P}_1+\vec{e}\times\vec{P}_2+\ldots+\vec{e}\times\vec{P}_n \tag{6}$$

მართლაც, ავაგოთ $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, ..., $\vec{P}_n$ ვექტორთა მრავალკუთხედი და მისი შემკვრელი ვექტორი $\vec{P}_1+\vec{P}_2+\ldots+\vec{P}_n$. მიღებული ნაკვთი დავაგეგმილოთ II სიბრტყეზე; ვთქვათ, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, ..., $\vec{P}_n$ და $\vec{P}$ არიან შესაბამისად $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, ..., $\vec{P}_n$ და $\vec{P}$ ვექტორის გეგმილები; რასაკვირველია, $\vec{P}$ იქნება $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, ..., $\vec{P}_n$ ვექტორთა მრავალკუთხედის შემკვრელი ვექტორი.



ნახ. 32.

თუ ახლა დაგეგმილებით მიღებულ ბრტყელ ნაკვთს შემოვაბრუნებთ სიბრტყეში მართი კუთხით (საათის ისრის მიხედვით), მივიღებთ ვექტორთა ახალ მრავალკუთხედს, რომლის გვერდები იქნებიან ვექტორები

$$\vec{e}\times\vec{P}_1,\ \vec{e}\times\vec{P}_2,\ \ldots,\ \vec{e}\times\vec{P}_n,$$

ხოლო შემკვრელი ვექტორია $\vec{e}\times\vec{P}$. ეს კი ამტკიცებს (6) ფორმულას. ადვილი დასანახია, რომ (6) ფორმულა მართებული დარჩება, თუ მასში $\vec{e}$ ორტს

ნებისმიერ $\vec{Q}$ ვექტორით შევცვლით. მართლაც, ყოველთვის გვექნება $\vec{Q}=Q\,\vec{e}$, სადაც $\vec{e}$ არის ორტი $\vec{Q}$ ვექტორის პარალელური, ხოლო $Q$ რაღაც რიცხვია. ამიტომ:

$$\vec{Q}\times(\vec{P}_1+\vec{P}_2+\ldots+\vec{P}_n)=Q[\vec{e}\times(\vec{P}_1+\vec{P}_2+\ldots+\vec{P}_n)=Q(\vec{e}\times\vec{P}_1)+$$
$$+Q(\vec{e}\times\vec{P}_2)+\ldots+Q(\vec{e}\times\vec{P}_n)=\vec{Q}\times\vec{P}_1+\vec{Q}\times\vec{P}_2+,\ldots+\vec{Q}\times\vec{P}_n, \qquad (7)$$

რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

შემდეგ, ცხადია, რომ წინა ფორმულა მართებული დარჩება მაშინაც, თუ ერთდროულად მარჯვნივ და მარცხნივ მამრავლთ შევუნაცვლებთ რიგს; მართლაც, ასეთი გადანაცვლებით ორივე მხარე ნიშანს იცვლის მოპირდაპირეზე.

ამრიგად, განრიგებადობის თვისება დამტკიცებულია. აქედან კი, კერძოდ (იხ. § 6, შენიშვნა 2), გამომდინარეობს, რომ ორი ჯამის ვექტორული ნამრავლის შესადგენად საკმარისია პირველი ჯამის თითოეული წევრი გავამრავლოთ (ვექტორულად) მეორე ჯამის თითოეულ წევრზე და მიღებულნი შევკრიბოთ.

უნდა გვახსოვდეს, რომ ვექტორული ნამრავლი დამოკიდებულია მამრავლთა რიგზე და ამიტომ გადამრავლების დროს საჭიროა თითოეულ ცალკე ნამრავლში მამრავლთა რიგი შევინარჩუნოთ. მაგალითად,

$$(\vec{P}_1+\vec{P}_2)\times(\vec{Q}_1+\vec{Q}_2)=\vec{P}_1\times\vec{Q}_1+\vec{P}_2\times\vec{Q}_1+\vec{P}_1\times\vec{Q}_2+\vec{P}_2\times Q_2;$$

შედეგი არ იქნება მართებული, თუ მაგალითად, უკანასკნელი შესაკრების მაგიერ დავწერთ: $Q_2\times P_2$.

#### სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. **ვექტორული მომენტი წერტილის მიმართ.** ვთქვათ, $\vec{P}=\vec{AB}$ რომელიმე დაბმული ან სრიალა ვექტორია (§ 5) და ვთქვათ, $C$ რომელიმე წერტილია. $\vec{P}$ ვექტორის **ვექტორული მომენტი $C$ წერტილის მიმართ** ეწოდება $\vec{L}$ ვექტორს, $C$ წერტილზე მოდებულს და შემდეგი პირობებით განსაზღვრულს: $\vec{L}$ ვექტორის სიგრძე რიცხვობრივ ტოლია $\vec{P}$ ვექტორის სიგრძისა და იმ $h$ მართობის ნამრავლისა, რომელიც ჩამოშვებულია $C$ წერტილიდან $\vec{P}$ ვექტორის შემცველ წრფეზე; $\vec{L}$ ვექტორი $CAB$ სიბრტყის მართობია და მიმართულია ისეთნაირად, რომ ვექტორები $\vec{CA}$, $\vec{Cb}$ და $\vec{L}$ შეადგენენ მარცხენა სისტემას. $C$ წერტილს ეწოდება მომენტის ცენტრი (ანუ პოლუსი).

ადვილი დასანახია, რომ ვექტორის მომენტი მოცემული წერტილის მიმართ არ შეიცვლება, თუ ამ ვექტორს მის შემცველ წრფეზე გადავაადგილებთ. პირიქით, თუ ამ წრფის გადაადგილებას ვახდენთ, მაშინ, მომენტი შეიცვლება, ვინაიდან ასეთ პირობებში ან $h$ სიდიდე შეიცვლება, ან $CAB$ სიბრტყის მიმართულება [და, მაშასადამე, $\vec{L}$-ის მიმართულებაც], ან ერთიც და მეორეც ერთად. აი რატომ იყენებენ ხოლმე ტერმინის ცნებას მხოლოდ დაბმული ან სრიალა ვექტორებისათვის და არა თავისუფალისათვის, რომლებიც ნებისმიერად შეიძლება გადაადგილდნენ (მიმართულების შეუცვლელად).

დასამტკიცებელია, რომ:

$$\vec{L}=\overrightarrow{CA}\times\vec{P}. \tag{8}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. განმარტების ძალით, $\vec{L}$ ვექტორის სიგრძე ტოლია $|\vec{L}|=|\vec{P}|\cdot|h|=2$ ფართ. $ABC$; ამნაირად $\vec{L}$ ვექტორის სიგრძე ტოლია $\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}$ ვექტორული ნამრავლის სიგრძისა. თუ შევნიშნავთ, რომ $\vec{L}$ ვექტორის გასხსაზღვრის თანახმად, მისი მიმართულებაც იგივეა, რაც ამ ნამრავლის მიმართულება, დავასკვნით, რომ:

$$\vec{L}=\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}. \tag{9}$$

მაგრამ, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\vec{P}$; თუ ამ გამოსახულებას შევიტანთ წინა ფორმულებში და შევნიშნავთ, რომ $\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CA}=0$, მივიღებთ საძიებელ (8) ფორმულას.

2. დაამტკიცეთ (4) ფორმულის გამოყენებით, რომ მოცემულ წერტილზე მოდებული რამდენიმე ვექტორის ტოლქმედის [1]) მომენტი შემადგენელთა მომენტების [2]) ჯამის ტოლია (ვარინიონის განხოგადებული თეორემა).

**§ 26. სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი** [3]). სკალარული და ვექტორული გამრაველების ურთიერთ კომბინაცია შესაძლოა სხვადასხვა ხერხით, რაც გვაძლევს მთელ რიგ სასარგებლო ფორმულებს. ჩვენ დავკმაყოფილდებით სამი ვექტორის ეგრეთ წოდებული შ ე რ ე უ ლ ი ნ ა მ რ ა ვ ლ ი ს განხილვით.

ვთქვათ, მოცემულია სამი ვექტორი $\vec{P}$, $\vec{Q}$ და $\vec{R}$. შევადგინოთ პირველი ორის ვექტორული ნამრაველი და მიღებული ვექტორი სკალარულად გავამრავლოთ მესამეზე, ე. ი. შევადგინოთ გამოსახულება:

$$(\vec{P}\times\vec{Q})\cdot\vec{R}.$$

ამას ეწოდება $\vec{P}$, $\vec{Q}$ და $\vec{R}$ სამი ვექტორის შერეული ნამრაველი, ვინაიდან მასში ადგილი აქვს როგორც სკალარულს, ისე ვექტორულ გამრაველებას. შერეულ ნამრაველს ასე აღნიშნავენ: $[\vec{P},\ \vec{Q},\ \vec{R}]$; ასე, რომ განმარტების ძალით

$$[\vec{P},\ \vec{Q},\ \vec{R}]=(\vec{P}\times\vec{Q})\cdot\vec{R}. \tag{1}$$

შერეული ნამრაველი არის სკალარული სიდიდე, ვინაიდან ის მიიღება ორი ვექტორის $(\vec{P}\times\vec{Q})$ და $\vec{R}$-ის სკალარულად გამრავლების შედეგად. მას აქვს მეტად მარტივი გეომეტრიული მნიშვნელობა. სახელდობრ, ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი, ამ ვექტორებზე (რომლებიც გადადებული არიან ერთი და იგივე წერტილიდან) აგებული პარალელეპიპედის მოცულობის ტოლია, იმ პირობით, თუ მოცულობას მივაწერთ გარკვეულ ნიშანს.

---

[1]) წერტილზე მოდებული რამდენიმე ვექტორის ტოლქმედი ეწოდება მათ ჯამს, იმავე წერტილზე მოდებულს.

[2]) აქ საუბარია ვექტორულ მომენტებზე (იხ. წინა სავარჯ.) რომელიღაც გარკვეული წერტილის მიმართ.

[3]) პირველ წაკითხვისას ეს პარაგრაფი შეიძლება გამოტოვებულ იქნას.

მართლაც, აღნიშნული $V$ მოცულობა $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის $S$ ფართობისა და $h$ სიმაღლის ნამრავლის ტოლია (იხ. ნახ. 33).

მაგრამ

$$S=|\vec{P}|\cdot|\vec{Q}|\cdot\sin\vartheta,$$

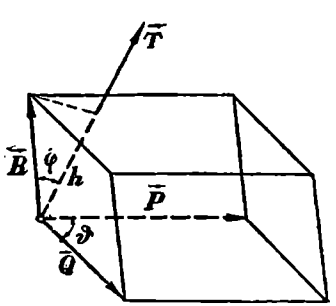
სადაც $\vartheta$ არის $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ შორის კუთხე. მაშასადამე, თუ $\vec{T}$ აღნიშნავს ვექტორულ ნამრავლს $\vec{P}\times\vec{Q}$, მაშინ $S=|\vec{T}|$. მეორეს მხრით, ცხადია, რომ

$$h=|R|\cos\varphi_0,$$

სადაც $\varphi_0$ არის მახვილი კუთხე $\vec{K}$-სა და სიმაღლეს შორის. ეს კუთხე ტოლია $\varphi$ კუთხისა, რომელიც მოთავსებულია $\vec{R}$ და $\vec{T}$-ს შორის ანდა ავსებს მას 180°-მდე, იმის მიხედვით, თუ როგორია $\vec{T}$-ს მიმართულება.

ამიტომ, $\cos\varphi_0=\pm\cos\varphi$ და ჩვენ გვექნება:

$$V=S\cdot h=|\vec{T}|\,|\vec{R}|\cos\varphi_0=\pm|\vec{T}|\cdot|\vec{R}|\cos\varphi=\pm\vec{T}\cdot\vec{R}$$




ნახ. 33.

ანუ, თუ გაეიხსენებთ, რომ

$$\vec{T}=\vec{P}\times\vec{Q},$$

$$V=\pm(\vec{P}\times\vec{Q})\cdot\vec{R}=\pm[\vec{P},\ \vec{Q},\ \vec{R}].$$

ნიშანი + ან — აირჩევა ისე, რომ მოცულობისთვის მივიღოთ დადებითი მნიშვნელობა.

შესაძლოა ჩამოვიშოროთ ეს პირობა და მოცულობა განვსაზღვროთ ფორმულით

$$V=[\vec{P},\ \vec{Q},\ \vec{R}] \qquad (2)$$

ეს ფორმულა მოცულობას მიაწერს გარკვეულ ნიშანს: სახელდობრ, როგორც ადვილი შესამჩნევია, მოცულობა იქნება დადებითი, თუ $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ შეადგენენ მარცხენა სისტემას; წინააღმდეგ შემთხვევაში, მოცულობა იქნება უარყოფითი [1]). გარდა ამისა, აშკარაა, რომ თუ ვექტორული ნამრავლის განმარტებაში c) პირობას (იხ. § 25-ის დასაწყისი) შევცვლით იმ პირობით, რომ ვექტორები $\vec{P}$, $\vec{Q}$ და $(\vec{P}\times\vec{Q})$ შეადგენენ მარჯვენა სისტემას, მაშინ $V>0$, თუ $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ შეადგენენ მარჯვენა სისტემას და $V<0$ —წინააღმდეგ შემთხვევაში.

---

[1]) მართლაც, პირველ შემთხვევაში ცხადია, რომ $\varphi$ კუთხე არის მახვილი და ამიტომ $[\vec{P},\ \vec{Q},\ \vec{R}]=|\vec{T}|\cdot|\vec{R}|\cos\varphi>0$; მეორე შემთხვევაში კი $\varphi$ კუთხე ბლაგვია და ამიტომ

$$|\vec{T}|\,|\vec{R}|\cos\varphi<0.$$

შერეული ნამრავლის გეომეტრიული მნიშვნელობის მიხედვით, ცხადია, რომ შერეული ნამრავლი არ შეიცვლება თანამამრავლთა წრიული გადანაცვლებით, ე. ი. რომ

$$[\vec{P},\ \vec{Q},\ \vec{R}]=[\vec{Q},\ \vec{R},\ \vec{P}]=[\vec{R},\ \vec{P},\ \vec{Q}] \tag{3}$$

ანუ

$$(\vec{P}\times\vec{Q})\cdot\vec{R}=(\vec{Q}\times\vec{R})\cdot\vec{P}=(\vec{R}\times\vec{P})\cdot\vec{Q}.$$

კერძოდ, აქედან გამომდინარეობს (ვინაიდან ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი არ არის დამოკიდებული თანამამრავლთა რიგზე), რომ

$$[\vec{P}\times\vec{Q}]\cdot\vec{R}=\vec{P}\cdot(\vec{Q}\times\vec{R}).$$

შემდეგ, ადვილი შესამჩნევია, რომ შერეული ნამრავლი იცვლის ნიშანს ნებისმიერი ორი თანამამრავლის ურთიერთგადანაცვლებით, მაგალითად,

$$[\vec{P},\ \vec{Q},\ \vec{R}]=-[\vec{Q},\ \vec{P},\ \vec{R}]. \tag{3a}$$

#### სავარჯიშო მაგალითები და გამოყენებანი

1. დაამტკიცეთ, რომ ტოლობა

$$[\vec{P},\ \vec{Q},\ \vec{R}]=0$$

არის აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ ვექტორები იყვნენ ერთი და იმავე სიბრტყის პარალელური.

2. ვ ე ქ ტ ო რ ი ს მ ო მ ე ნ ტ ი ღ ე რ ძ ი ს მ ი მ ა რ თ. სრიალა ან დაბმული $\vec{P}=\overrightarrow{AB}$ ვექტორის ს კ ა ლ ა რ უ ლ ი მ ო მ ე ნ ტ ი მ ო ც ე მ უ ლ ი Δ ღ ე რ ძ ი ს მ ი მ ა რ თ ეწოდება, Δ ღერძის რომელიმე წერტილის მიმართ $\vec{P}$ ვექტორის ვექტორული მომენტის[1]) Δ ღერძზე მართობული გეგმილის ალგებრულ მნიშვნელობას.

დაამტკიცეთ, რომ

$$L_\Delta=[\overrightarrow{CA},\ \vec{P},\ \vec{e}], \tag{4}$$

სადაც $\vec{e}$ არის Δ ღერძის ორტი, და რომ $L_\Delta$ დამოუკიდებელია $C$ წერტილის მდებარეობაზე Δ ღერძზე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განმარტების ძალით გვაქვს:

$$L_\Delta=\text{გეგ}_\Delta\overrightarrow{L}=\overrightarrow{L}\cdot\vec{e};$$

აქ $\overrightarrow{L}=\overrightarrow{CA}\times\vec{P}$ არის $\vec{P}$ ვექტორის ვექტორული მომენტი Δ ღერძზე მდებარე $C$ წერტილის მიმართ. მაშასადამე, $L_\Delta=(\overrightarrow{CA}\times\vec{P})\cdot\vec{e}=[\overrightarrow{CA},\ \vec{P},\ \vec{e}]$; სწორედ ეს არის საძიებელი ფორმულა.

თუ წრიულ გადანაცვლებებს მოვახდენთ, ამ ფორმულის გადაწერა კიდევ შემდეგნაირად შეიძლება:

$$L_\Delta=[\vec{P},\ \vec{e},\ \overrightarrow{CA}]=[\vec{e},\ \overrightarrow{CA},\ \vec{P}]=(\vec{e}\times\overrightarrow{CA})\cdot\vec{P}.$$

ვთქვათ, $C'$ აღნიშნავს რომელსამე სხვა წერტილს Δ ღერძზე. მაშინ $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'A}$ თუ შევიტანთ ამ მნიშვნელობას უკანასკნელ გამოსახულებაში და შევნიშნავთ, რომ

$$\vec{e}\times\overrightarrow{CC'}=0,$$

მივიღებთ:

$$L_\Delta=(\vec{e}\times\overrightarrow{C'A})\cdot\vec{P}=[\vec{e},\ \overrightarrow{C'A},\ \vec{P}]=[\overrightarrow{C'A},\ \vec{P},\ \vec{e}],$$

საიდანაც ჩანს, რომ $L_\Delta$ არ შეიცვლება, თუ $C$-ს მაგიერ $C'$-ს ჩავსვამთ.

[1]) იხ. წინა §-ის 1 სავარჯიშო.

## თავი მეოთხე

# ვექტორისა და წერტილის კოორდინატები

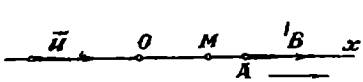
## 1. დეკარტის კოორდინატები

ახლა ჩვენ გადავდივართ გეომეტრიულ სახეთა და რიცხვთა შორის კავშირის განმახორციელებელ ერთ-ერთ ხერხზე. დავიწყოთ უმარტივესი გეომეტრიული სახეებით—წერტილებითა და ვექტორებით და შემოვიღოთ ამ სახეთა დეკარტის კოორდინატების ცნება. აღებული გეომეტრიული სახის კოორდინატებად იწოდებიან, საზოგადოდ, ის რიცხვები, რომლებიც სავსებით ახასიათებენ ამ სახესთან დაკავშირებულ არსებით გეომეტრიულ ელემენტებს.

§ 27. **კოორდინატები წრფეზე (ღერძზე).** ვთქვათ, მოცემულია რომელიმე ღერძი $Ox$ (ნახ. 34) და ამ ღერძზე მდებარე რომელიმე ვექტორი $\vec{P}=\overrightarrow{AB}$. ვთქვათ, $\vec{u}$ აღნიშნავს $Ox$ ღერძის ორტს. მაშინ (იხ. § 11) შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\vec{P}=\vec{u}X,$$

სადაც $X$ აღნიშნავს $\vec{P}$ ვექტორის ალგებრულ მნიშვნელობას $Ox$ ღერძის გასწვრივ, ე. ი.: $X=\pm|\vec{P}|$, სადაც $+$ ან $-$ აიღება იმის მიხედვით ემთხვევა $\vec{P}$-ს მიმართულება ღერძის მიმართულებას, თუ მოპირდაპირეა. თუ $\vec{P}$ ვექტორი მოცემულია, მაშინ $X$ სიდიდე სრულიად განსაზღვრულია (მაგ., თუ $\vec{P}$ ვექტორის სიგრძე 4-ის ტოლია, ხოლო მისი მიმართულება ღერძის მიმართულების მოპირდაპირეა, მაშინ $\vec{P}=-4\vec{u}$ და $X=-4$). პირიქით, თუ მოცემულია $X$ რიცხვი, მაშინ $\vec{P}$ ვექტორის სიგრძე და მიმართულება სრულიად განსაზღვრული იქნება (სიგრძე იქნება $X$-ის აბსოლუტური მნიშვნელობის ტოლი, ხოლო მიმართულება განისაზღვრება $X$-ის ნიშნით; მაგ., თუ $X=-3$, მაშინ $\vec{P}=-3\vec{u}$ და ამ ვექტორის სიგრძე 3-ის ტოლი იქნება, მიმართულება კი—ღერძის მიმართულების მოპირდაპირე).



ნახ. 34.

ისე როგორც ზემოთ, ჩვენ ჩავთვლით ვექტორს სრულიად მოცემულად, თუ ცნობილია მისი **სიგრძე** და **მიმართულება** (ასე რომ სათავის მდებარეობას არაეითარ ყურადღებას არ მივაქცევთ). ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $X$ სრულიად განსაზღვრავს $\vec{P}$ ვექტორს.

ეს რიცხვი $X$ (ე. ი., უბრალოდ, $\vec{P}$ ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობა $Ox$ ღერძის გასწვრივ) იწოდება როგორც $Ox$ ღერძზე მდებარე $\vec{P}$ ვექტორის დეკარტის კოორდინატი. თვით $Ox$ ღერძი კი იწოდება როგორც დეკარტის კოორდინატთა სისტემის ღერძი.

განმარტების თანახმად აშკარაა, რომ თანატოლი ორი ვექტორის კოორდინატები ურთიერთთანატოლი იქნებიან და, პირიქით, თუ ორი ვექტორის კოორდინატები თანატოლი არიან, მაშინ ვექტორები თანატოლი იქნებიან.

ახლა, ვთქვათ, $O$ აღნიშნავს $Ox$ ღერძზე რაიმე მუდმივ წერტილს (ნახ. 34). ნებისმიერი სხვა $M$ წერტილის მდებარეობა ამ ღერძზე სრულიად განისაზღვრება $\overrightarrow{OM}$ ვექტორის სიგრძითა და მიმართულებით; მეორეს მხრივ, ამ ვექტორის სიგრძე და მიმართულება სრულიად განისაზღვრება მისი კოორდინატით. აღვნიშნოთ $x$-ით ეს კოორდინატი, ე. ი. ვთქვათ [1]), რომ $x = OM$.

$x$ რიცხვს ამავე დროს ეწოდება $M$ წერტილის დეკარტის კოორდინატი; $O$ წერტილს კი კოორდინატთა სათავე.

ხშირად $x$ კოორდინატს უწოდებენ $M$ წერტილის აბსცისს, ხოლო $Ox$ ღერძს—აბსცისთა ღერძს.

კოორდინატთა სათავე ყოფს აბსცისთა ღერძს ორ ნაწილად. იმ წერტილებს, რომლებიც ერთ-ერთ ნაწილზე მდებარეობენ (ჩვენს ნახაზზე—წერტილები $O$-ს მარჯვნივ მდებარენი), დადებითი აბსცისები აქვთ, ხოლო უარყოფითი აბსცისები ეკნებათ მეორე ნაწილზე მდებარე წერტილებს (ნახაზზე—$O$ წერტილის მარცხნივ). პირველ ნაწილს შეიძლება ეწოდოს $x$ ღერძის დადებითი ნაწილი, ხოლო მეორეს—უარყოფითი.

ზემოხსენებულის მიხედვით აბსცისი შეიძლება კიდევ შემდეგნაირად განიმარტოს:

$M$ წერტილის აბსცისი არის რიცხვი $x$, რომლის აბსოლუტური მნიშვნელობა ტოლია $M$ წერტილის მანძილისა სათავიდან და რომელიც ითვლება დადებითად თუ $M$ იმყოფება ღერძის დადებით ნაწილზე, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში—უარყოფითად [2]).

იმის გამოსათქმელად, რომ $M$ წერტილის კოორდინატი არის $x$, წერენ: წერტილი $M(x)$. მაგ., წერტილი $M(-3)$ არის ის წერტილი, რომლის მანძილი სათავიდან სამი ერთეულის ტოლია და რომელიც ღერძის უარყოფით ნაწილზე მდებარეობს.

#### სავარჯიშო მაგალითები

1. ააგეთ ვექტორები: $\vec{P} = 2\vec{u}$; $\vec{P} = \frac{1}{2}\vec{u}$; $\vec{P} = -\frac{3}{4}\vec{u}$.

2. ააგეთ წერტილები $M(-1)$; $M(0)$; $M(10)$.

---

[1]) გავიხსენოთ, რომ $OM$ (უსიროდ ზემოთ) აღნიშნავს დადებითს ან უარყოფითს რიცხვს (იმისდა მიხედვით, თუ როგორი მიმართულება აქვს $\overrightarrow{OM}$ ვექტორს).

[2]) ყველა ზემოხსენებულში იგულისხმება, რომ ერთხელ და სამუდამოდ არჩეულია სიგრძის ერთეული (მაგ., სანტიმეტრი), რომლითაც იზომებიან ხაკვეთების სიგრძეები. სხვანაირად ახსნა არ ეკნებოდა სიტყვებს: „$x$-ის აბსოლუტური მნიშვნელობა ტოლია მანძილისა"...

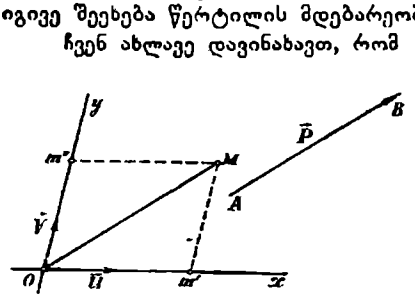
3. იპოვეთ მანძილი ორ წერტილს შორის: $M_1(-4)$ და $M_2(12)$.

4. მოცემულია ორი წერტილი $A(-3)$ და $B(-4)$; იპოვეთ $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{BA}$ ვექტორები

პასუხი: $\overrightarrow{AB}=-\vec{u}$, $\overrightarrow{BA}=\vec{u}$.

**§ 28. ვექტორისა და წერტილის კოორდინატები სიბრტყეზე.** წინა პარაგრაფში ჩვენ დაგვრწმუნდით, რომ აღებულ წრფეზე (ღერძზე) მდებარე ვექტორი საესებით განისაზღვრება ერთი რიცხვის (კოორდინატის) მოცემით; იგივე შეეხება წერტილის მდებარეობას აღებულ წრფეზე.

ჩვენ ახლაე დავინახავთ, რომ სიბრტყეზე მდებარე ვექტორის განსაზღვრისათვის აუცილებელია ორი რიცხვის მოცემა; იგივე შეეხება წერტილის მდებარეობის განსაზღვრას სიბრტყეზე.



ნახ. 35.

ავიღოთ მოცემულ სიბრტყეზე ორი ურთიერთგადამკვეთი ღერძი $Ox$ და $Oy$ (ნახ. 35). დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი ვექტორი $\vec{P}=\overrightarrow{AB}$, რომელიც ამ სიბრტყეზე იმყოფება, შეიძლება ისეთი ორი ვექტორის ჯამად წარმოვადგინოთ, რომელთა შორის თითოეული პარალელურია ერთ-ერთი ღერძისა.

მართლაც, გადავიტანოთ $\vec{P}$ ვექტორი (მისი სიგრძისა და მიმართულების შეუცვლელად) $O\overrightarrow{M}$ მდებარეობაში ისე, რომ მისი სათავე დაემთხვეს ღერძთა გადაკვეთის $O$ წერტილს.

ამის შემდეგ, გავიყვანოთ $Mm'$ და $Mm''$ წრფეები შესაბამისად $Oy$ და $Ox$ ღერძთა პარალელური და ვთქვათ, $m'$ და $m''$ აღნიშნავენ ამ წრფეთა გადაკვეთის წერტილებს შესაბამისად $Ox$-სთან და $Oy$ ღერძებთან. მაშინ ცხადია, რომ:

$$\vec{P}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{Om'}+\overrightarrow{Om''}, \tag{1}$$

რაც ჩვენს წინადადებას ამტკიცებს.

უკანასკნელ ტოლობას შეგვიძლია მივცეთ ისეთი სახე, რომელშიაც მკაფიოდ მეღავნდება (1) დაშლის ხასიათი.

მართლაც, აღვნიშნოთ $\vec{u}$-თი და $\vec{v}$-თი შესაბამისად $Ox$ ღერძისა და $Oy$ ღერძის ორტები; მაშინ (იხ. § 11):

$$\overrightarrow{Om'}=\vec{u}X;\ \overrightarrow{Om''}=\vec{u}Y, \tag{2}$$

სადაც $X$ და $Y$ შესაბამისად $\overrightarrow{Om'}$ და $\overrightarrow{Om''}$ ვექტორთა ალგებრულ მნიშვნელობებს აღნიშნავენ $Ox$ და $Oy$ ღერძების გასწვრივ. ამნაირად:

$$\vec{P}=\vec{u}X+\vec{v}Y. \tag{3}$$

$X$ და $Y$ სიდიდეების განმარტების მიხედვით, ცხადია, რომ:

$$\left.\begin{aligned} X&=\text{გეგ}_x\overrightarrow{OM}=\text{გეგ}_x\vec{P}\ (Oy\text{-ის პარალელურად}),\\ Y&=\text{გეგ}_y\overrightarrow{OM}=\text{გეგ}_y\vec{P}\ (Ox\text{-ის პარალელურად})\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

(გეგ$_x$ და გეგ$_y$ აღნიშნავენ გეგმილთა ალგებრულ მნიშვნელობებს შესაბამისად $Ox$ და $Oy$ ღერძზე).

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ მოცემული ვექტორის წარმოდგენა (3) სახით არის ერთადერთი, ე. ი. თუ იმავე $\vec{P}$ ვექტორისათვის გვაქვს დაშლა

$$\vec{P}=\vec{u}X'+\vec{v}Y',$$

მაშინ უსათუოდ: $X'=X$, $Y'=Y$. მართლაც, თუ წინა ფორმულას შევადარებთ (3)-ს, მივიღებთ $\vec{u}X'+\vec{v}Y'=\vec{u}X+\vec{v}Y$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\vec{u}(X'-X)+\vec{v}(Y'-Y)$, ან კიდევ:

$$\vec{ul}+\vec{vm}=0, \qquad (5)$$

სადაც $l=X'-X$, $m=Y'-Y$. მეორეს მხრივ, ადვილი შესამჩნევია, რომ (5) ტოლობა, რომელშიაც $\vec{u}$ და $\vec{v}$ არაპარალელური ვექტორებია, შესაძლოა მხოლოდ მაშინ, თუ $l=m=0$. მართლაც, წინაალმდეგ შემთხვევაში გვექნება, რომ სხვადასხვა მიმართულების პარალელური ვექტორები $\vec{ul}$ და $-\vec{vm}$ ტოლი არიან, რაც შეუძლებელია. ამრიგად, გვაქვს $l=m=0$, საიდანაც გამომდინარეობს, $X'=X$ და $Y'=Y$.

ამრიგად, $X$ და $Y$ სიდიდეები სრულიად განზღვრული არიან, თუ მოცემულია $\vec{P}$ ვექტორი; პირიქით, თუ $X$ და $Y$ მოცემულია, $\vec{P}$ ვექტორი სავსებით განისაზღვრება (3) ფორმულით [1]).

$X$ და $Y$ სიდიდეებს ეწოდებათ $\vec{P}$ ვექტორის დ ე კ ა რ ტ ი ს კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი. იმის აღსანიშნავად, რომ $X$ და $Y$ არიან $\vec{P}$ ვექტორის კოორდინატები, წერენ $\vec{P}(X, Y)$, ან $\vec{P}=(X, Y)$; უკანასკნელი ტოლობა უნდა გვესმოდეს, როგორც (3) ფ ო რ მ უ ლ ი ს მ ო კ ლ ე დ ჩ ა წ ე რ ა.

კოორდინატების განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ტოლ ვექტორთა კოორდინატები ტოლი არიან და, პირიქით, ერთნაირ კოორდინატებიანი ვექტორები თანატოლია.

ცხადია აგრეთვე, რომ თუ ვექტორი ნულის ტოლია (ე. ი. მისი სიგრძე ნულის ტოლია), მაშინ მისი კოორდინატებიც ნულის ტოლია და პირიქით.

ახლა ვთქვათ, რომ $M$ არის ნებისმიერი წერტილი მოცემულ სიბრტყეზე; $M$ წერტილის მდებარეობა სიბრტყეზე სრულიად განზღვრულია, თუ ცნობილია $\overrightarrow{OM}$ ვექტორის სიგრძე და მიმართულება (ნახ. 36), სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ ცნობილია კოორდინატები ამ ვექტორისა, რომელსაც ეწოდება, $M$ წერტილის რ ა დ ი უ ს - ვ ე ქ ტ ო რ ი $O$ წერტილის მიმართ.

აღვნიშნოთ $x$ და $y$-ით ეს კოორდინატები, ე. ი.:

$$x=\text{გეგ}_x\overrightarrow{OM} \text{ } (Oy \text{ ღერძის პარალელურად}),$$
$$y=\text{გეგ}_y\overrightarrow{OM} \text{ } (Ox \text{ ღერძის პარალელურად});$$

[1]) კიდევ ერთხელ გავიხსენოთ, რომ თავისუფალი ვექტორი განზღვრულად ითვლება, თუ ცნობილია მისი სიგრძე და მიმართულება; სათავის მდებარეობას მნიშვნელობა არა აქვს.

$x$ და $y$ რიცხვებს, რომლებიც სავსებით განსაზღვრავენ $M$ წერტილის მდებარეობას სიბრტყეზე, ეწოდებათ $M$ წერტილის დეკარტის კოორდინატები. წერტილის მოცემა ნიშნავს მისი კოორდინატების მოცემას.

იმის გამოსათქმელად, რომ $x$ და $y$ არიან $M$ წერტილის კოორდინატები, წერენ: წერტილი $M(x, y)$.

$x$ და $y$ კოორდინატები შეიძლება კიდევ სხვანაირად განვმარტოთ, ვთქვათ, $m'$ და $m''$ აღნიშნავენ $M$ წერტილის გეგმილებს $Ox$ და $Oy$ ღერძებზე (შესაბამისად $Oy$ და $Ox$ ღერძების პარალელურად); მაშინ $x=Om'$, $y=Om''$; სხვანაირად რომ ვთქვათ, $x$ არის $Om'$ ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობა, ე. ი. $m'$ წერტილის კოორდინატი $Ox$ ღერძზე (იხ. წინა §-ი); ანალოგიურად $y$-სათვის.

$M$ წერტილის ასაგებად მოცემული მისი კოორდინატების მიხედვით, საკმარისია მოვზომოთ (ნიშნის მხედველობაში მიღებით) $Ox$ ღერძზე ნაკვეთი $Om'=x$, ხოლო $Oy$ ღერძზე ნაკვეთი $Om''=y$ და მიღებულ წერტილებზე გავავლოთ შესაბამისად $Oy$ და $Ox$ ღერძების პარალელური წრფეები; ამ უკანასკნელთა გადაკვეთის წერტილი სწორედ $M$ წერტილი იქნება.

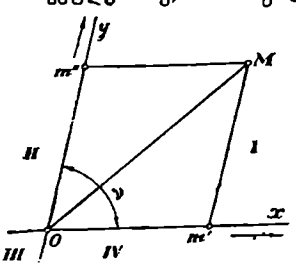
$Ox$ და $Oy$ ღერძებს ეწოდებათ დეკარტის კოორდინატთა სისტემის ღერძები, ხოლო $O$ წერტილს კი კოორდინატთა სათავის. ის კუთხე $\nu$, რომელსაც შეადგენენ ღერძთა დადებითი მიმართულებანი, საკოორდინატო კუთხედ იწოდება.

კოორდინატთა ღერძები მთელ სიბრტყეს ყოფენ ოთხ ნაწილად I, II, III, IV (იხ. ნახ. 36), რომელთა შორის თითოეული დახასიათდება იმ წერტილთა კოორდინატების ნიშნით, რომლებიც ამ ნაწილს ეკუთვნიან.

I ნაწილში ორივე კოორდინატი დადებითია, II ნაწილში $x<0$, $y>0$; III ნაწილში $x<0$, $y<0$ და IV ნაწილში $x>0$, $y<0$.

I ნაწილი (ე. ი. სადაც $x>0$, $y>0$) ხანდახან იწოდება, როგორც ნორმალური საკოორდინატო კუთხე.

ჩვეულებრივ, ნახაზზე $Ox$ ღერძი ($x$-თა ღერძი) ჰორიზონტალურად გაიყვანება და მიმართულია მარცხნიდან მარჯვნივ, საკენ, ხოლო $Oy$ ღერძი ($y$-თა ღერძი)—ქვემოდან ზემოთ.



ნახ. 36.

$x$ კოორდინატს $M$ წერტილის აბსცისი. ეწოდება, ხოლო $y$ კოორდინატს—ორდინატი. ამისდა მიხედვით $x$-თა ღერძი იწოდება აგრეთვე აბსცისთა ღერძად, ხოლო $y$-თა ღერძი—ორდინატთა ღერძად.

ნახაზის ზემოაღნიშნული განლაგების მიხედვით, იმ წერტილებს, რომლებიც $Oy$ ღერძის მარჯვნივ არიან მოთავსებული, დადებითი აბსცისები აქვთ, ხოლო წერტილებს, რომლებიც ამ ღერძის მარცხნივ არიან მოთავსებული—უარყოფითი აბსცისები. სრულიად ასევე, წერტილებს, რომლებიც $Ox$ ღერძის ზემოთ მდე

ბარეობენ, დადებითი ორდინატები აქვთ, ხოლო ამ ღერძის ქვემოთ—უარყოფითი ორდინატები.

მაგ., $M(-3, +5)$ წერტილი მოთავსებულია $Oy$ ღერძის მარცხნივ და $Ox$ ღერძის ზემოთ და ამ წერტილის ასაგებად საკმარისია $Ox$-ზე $O$ წერტილიდან მარცხნივ მოვზომოთ ნაკვეთი სიგრძით 3, ხოლო ამ ნაკვეთის ბოლოზე გავლებულ $y$-ის პარალელურ წრფეზე მოვზომოთ ზემოთკენ ნაკვეთი სიგრძით 5.

#### სავარჯიშო მაგალითები

1. დახაზეთ კოორდინატთა ღერძების რომელიმე სისტემა და სიგრძის ერთეულის არჩევით ააგეთ წერტილები:

$$M(0,0),\ M(5,0),\ M(0,3),\ M(0,-1),\ M(5,-2),\ M(-3,-3).$$

2. ააგეთ ვექტორი $\vec{P}(+3, -1)$.

3. ააგეთ ვექტორები (1.2) და (4,8) და დაამტკიცეთ, რომ ისინი პარალელურნი არიან.

4. ააგეთ წერტილები: $M_1(1,0)$ და $M_2(0,2)$, იპოვეთ მანძილი მათ შორის, როცა კოორდინატო კუთხე $\nu$ არის 60°-ის ტოლი.

პასუხი: $|M_1M_2| = \sqrt{3}$.

5. იპოვეთ მანძილი $M(4,4)$ წერტილიდან სათავემდე, როცა $\nu = 60°$.

პასუხი: $4\sqrt{3}$.

6. დაამტკიცეთ, § 8-ის 1 სავარჯიშოს მიხედვით, რომ $M(x, y)$ წერტილის მანძილი სათავემდე მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\nu} \qquad (*)$$

სადაც $\nu$ არის კოორდინატო კუთხე. გულდასმით გამოიკვლიეთ ამ ფორმულასა და აღნიშნულ სავარჯიშოს ფორმულას შორის განსხვავება. დაამტკიცეთ, რომ (*) ფორმულა ძალაშია არა მხოლოდ $x>0$, $y>0$-სათვის, არამედ ნიშანთა ყოველგვარი შესაძლებლობისთვისაც ($x>0$, $y<0$; $x<0$, $y>0$, $x<0$, $y<0$).

(ეს ფორმულა ქვემოთ გამოყვანილი იქნება ზოგადი მეთოდის საშუალებით, რომელიც არ მოითხოვს შესაძლო კერძო შემთხვევათა გამოკვლევას. მიუხედავად ამისა, მკითხველს ვურჩევთ ამ გამოკვლევის შესრულებას, რომ ცხადი გახდეს ზოგადი მეთოდის უპირატესობა).

**§ 29. მართკუთხოვანი კოორდინატები სიბრტყეზე.** თუ $\nu$ კუთხე ღერძთა შორის მართია $\left(\nu = \frac{\pi}{2}\right)$, მაშინ კოორდინატთა სისტემას ეწოდება დეკარტის მართკუთხოვანი ანუ ორთოგონალური სისტემა.

ამ შემთხვევაში $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის, ანუ რაც იგივეა, $\vec{P}$ ვექტორის კოორდინატები არიან ამ ვექტორის მართკუთხოვან გეგმილთა ალგებრული მნიშვნელობანი საკოორდინატო ღერძებზე:

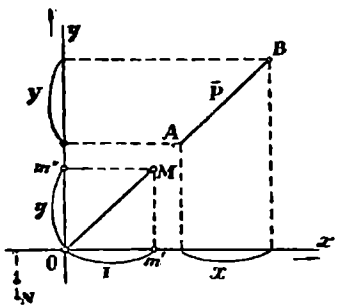
$$X = \text{გეგ}_x\vec{P},\quad Y = \text{გეგ}_y\vec{P},$$

სხვანაირად ეს ფორმულები შეიძლება შემდეგნაირად ჩაიწეროს:

$$X = \vec{u}\,\vec{P},\quad Y = \vec{v}\,\vec{P}, \qquad (1)$$

სადაც $\vec{u}$, $\vec{v}$ აღნიშნავენ საკოორდინატო ღერძების ორტებს.

სრულიად ასევე, ნებისმიერი $M$ წერტილის კოორდინატები არიან ამ წერტილის რადიუს-ვექტორის მართკუთხოვან გეგმილთა ალგებრული მნიშვნელობანი საკოორდინატო ღერძებზე (იხ. ნახ. 37).



ნახ. 37.

შეიძლება აგრეთვე ითქვას, რომ $M$ წერტილის კოორდინატები არიან ამ წერტილის მანძილები ღერძებამდე სათანადო ნიშნით აღებულნი. სახელდობრ, $x$ არის $M$ წერტილის მანძილი $Oy$ ღერძამდე აღებული (+) ნიშნით, თუ $M$ მდებარეობს $Oy$ ღერძიდან იმ მხარეზე, საითკენაც $Ox$ ღერძია მიმართული; ანალოგიურად $y$-სთვის.

იმისათვის, რომ აეაგოთ მაგ. $N(-3, -2)$ წერტილი, საჭიროა $Ox$ ღერძზე, უარყოფითი მიმართულებით, $O$ წერტილიდან მოვზომოთ ნაკვეთი სიგრძით 3 და ამ ნაკვეთის ბოლოზე აღვმართოთ პერპენდიკულარი სიგრძით 2, $Oy$ ღერძის მოპირდაპირე მიმართულებით; ამ პერპენდიკულარის ბოლო არის სწორედ $N$ წერტილი (იხ. ნახ. 37).

მართკუთხოვანი სისტემებისაგან განსასხვავებლად არამართკუთხოვან სისტემებს ირიბკუთხოვანი ეწოდებათ.

#### სავარჯიშო მაგალითები

1. ააგეთ ვექტორი $\vec{P}$ (5,4), იპოვეთ მისი სიგრძე და ტანგენსი იმ $\varphi$ კუთხისა, რომელსაც იგი შეადგენს $Ox$ ღერძთან.

პასუხი: $|\vec{P}|=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$; $\operatorname{tg}\varphi=\frac{4}{5}$

2. ააგეთ წერტილები $A$ (1,1), $B$ (3,2), მერე ააგეთ ვექტორი $\overrightarrow{AB}$, გამოითვალეთ მისი კოორდინატები და იპოვეთ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორისაგან $Ox$ ღერძთან შედგენილი $\varphi$ კუთხე.

პასუხი: $\overrightarrow{AB}=(2,1)$; $|AB|=\sqrt{5}$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2}$.

**§ 30. ვექტორისა და წერტილის კოორდინატები სივრცეში.** სივრცისთვის ზემოხსენებული ცნებების განზოგადება თავისთავად ცხადია. ავიღოთ სამი ღერძი $Ox$, $Oy$, $Oz$, რომლებიც გადაიკვეთებიან ერთ წერტილში $O$ და არ მდებარეობენ ერთსა და იმავე სიბრტყეში (იხ. ნახ. 38). ამ ღერძებს ვუწოდოთ დეკარტის კოორდინატთა სისტემის ღერძები, ხოლო $yOz$, $zOx$, $xOy$ სიბრტყეებს — საკოორდინატო სიბრტყეები. $O$ წერტილს ვუწოდოთ კოორდინატთა სათავე.

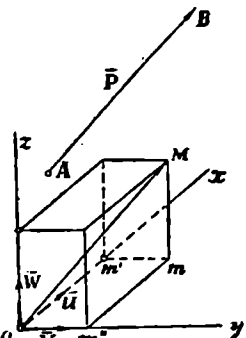
ვთქვათ, $\vec{P}=\overrightarrow{AB}$ არის რომელიმე ვექტორი, ნებისმიერად მდებარე სივრცეში. დავამტკიცოთ, რომ ეს ვექტორი შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც სამი ვექტორის ჯამი, რომელთა შორის თითოეული პარალელურია ერთ-ერთი ღერძისა.

მართლაც, გადავიტანოთ $\vec{P}$ ვექტორი $\overrightarrow{OM}$ მდებარეობაში და $M$-ზე გავატაროთ სამი სიბრტყე შესაბამისად სამი საკოორდინატო სიბრტყის პარალელური. ვთქვათ, $m'$, $m''$, $m'''$ აღნიშნავენ გატარებულ სიბრტყეთა გადაკვეთის წერტილებს შესაბამისად $Ox$, $Oy$, $Oz$ ღერძებთან.

ცხადია, რომ სამი საკოორდინატო სიბრტყე სამ გატარებულ სიბრტყესთან ერთად შეადგენს პარალელეპიპედს და რომ

$$\vec{P}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{Om'}+\overrightarrow{Om''}+\overrightarrow{Om'''}, \qquad (1)$$

რითაც მტკიცდება ზემოგამოთქმული დებულება.



ნახ. 38.

ისე, როგორც § 28-ში, უკანასკნელი დაშლა შეიძლება გამოვსახოთ ორტების საშუალებით. მართლაც, ვთქვათ, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ არიან შესაბამისად $Ox$, $Oy$, $Oz$ ღერძების ორტები. მაშინ აშკარაა, რომ:

$$\overrightarrow{Om'}=\vec{u}X,\ \overrightarrow{Om''}=\vec{v}Y,\ \overrightarrow{Om'''}=\vec{w}Z, \qquad (2)$$

სადაც $X$, $Y$, $Z$ აღნიშნავენ $\overrightarrow{Om'}$, $\overrightarrow{Om''}$ და $\overrightarrow{Om'''}$ ვექტორთა ალგებრულ მნიშვნელობებს $Ox$, $Oy$ და $Oz$ ღერძების გასწვრივ. ამნაირად ვღებულობთ ძირითად ფორმულას:

$$\vec{P}=\vec{u}X+\vec{v}Y+\vec{w}Z. \qquad (3)$$

$X$, $Y$ და $Z$ სიდიდეთა განმარტების თანახმად, აშკარაა, რომ $X=$გეგ$_x\vec{P}$ ($zOx$ სიბრტყის პარალელურად), $Y=$გეგ$_y\vec{P}$ ($zOx$ სიბრტყის პარალელურად), $Z=$გეგ$_z\vec{P}$ (აღებული $xOy$ სიბრტყის პარალელურად).

ადვილი გასაგებია, რომ (3) დაშლა ერთადერთია, ე. ი., თუ რაიმე სხვა გზით იმავე $\vec{P}$ ვექტორისათვის ვიპოვით, რომ

$$\vec{P}=\vec{u}X'+\vec{v}Y'+\vec{w}Z',$$

მაშინ, აუცილებლად $X'=X$, $Y'=Y$, $Z'=Z$. მართლაც, თუ წინა ფორმულას შევადარებთ (3)-ს, ისე, როგორც § 28-ში, მივიღებთ:

$$\vec{u}l+\vec{v}m+\vec{w}n=0,$$

სადაც, $l=X'-X$, $m=Y'-Y$, $n=Z'-Z$. მაგრამ წინა ტოლობა შესაძლოა მხოლოდ მაშინ, როცა $l=m=n=0$. მართლაც, ერთი მათგანი, მაგალითად, $n$ რომ არ იყოს ნული, მაშინ გვექნებოდა, რომ ნულისაგან განსხვავებული და $Oz$ ღერძის პარალელური $\vec{w}n$ ვექტორი—$\vec{u}l$—$\vec{v}m$ ვექტორის ტოლია, რომელიც $Oxy$ სიბრტყის პარალელურია (ვინაიდან უკანასკნელი ვექტორი არის $Oxy$ სიბრტყის პარალელურ —$\vec{u}l$ და —$\vec{v}m$ ვექტორთა ჯამი). მაგრამ ეს შეუ-

ძლებელია, ვინაიდან პირობის თანახმად $Oz$ ღერძი არ არის $Oxy$ სიბრტყის პარალელური.

ამნაირად, თუ მოცემულია $\vec{P}$ ვექტორი, მაშინ $X$, $Y$ და $Z$ სიდიდეები სავსებით განსაზღვრული იქნებიან და, პირიქით, თუ მოცემული არიან $X$, $Y$ და $Z$ ამით $\vec{P}$ ვექტორი სავსებით განისაზღვრება (3) ფორმულით.

მაგ., თუ $X=2$, $Y=3$, $Z=-3$, მაშინ ვექტორი $\vec{P}=2\vec{u}+3\vec{v}-3\vec{w}$ აიგება შემდეგნაირად: ნებისმიერი $A$ წერტილიდან გავატარებთ ვექტორს $2\vec{u}$ (ე. ი. ვექტორს სიგრძით 2 და მიმართულს ისე, როგორც $Ox$ ღერძი); ამ ვექტორის ბოლოდან გავატარებთ ვექტორს $3\vec{v}$ (ე. ი. ვექტორს სიგრძით 3 და მიმართულს ისე, როგორც $Oy$ ღერძი); და ბოლოს, უკანასკნელი ვექტორის ბოლოდან გავატარებთ ვექტორს $-3\vec{w}$ (ე. ი. ვექტორს სიგრძით 3 და $Oz$ ღერძის მოპირდაპირედ მიმართულს). შემკვრელი $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი, რომლის სათავე $A$-შია და ბოლო მოთავსებულია უკანასკნელად აგებულ ვექტორის $B$ ბოლოში, არის სწორედ საძიებელი $\vec{P}$ ვექტორი (იხ. ნახ. 39). შეიძლებოდა, რასაკვირველია, აგება მოგვეხდინა პარალელეპიპედის საშუალებითაც (როგორც ეს ნაჩვენებია პუნქტირით 39 ნახაზზე), მაგრამ ზემოხსენებული აგება უფრო მარტივია.

$X$, $Y$ და $Z$ იწოდებიან $\vec{P}$ ვექტორის დეკარტის კოორდინატებად. იმის აღსანიშნავად, რომ $X$, $Y$, $Z$ არიან $\vec{P}$ ვექტორის კოორდინატები, წერენ: $\vec{P}=(X, Y, Z)$; ეს არის (3) ფორმულის გამარტივებული ჩაწერა.

კოორდინატთა ცნების განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თანატოლი ვექტორების კოორდინატები თანატოლი არიან და, პირიქით, ერთნაირი კოორდინატებიანი ვექტორები თანატოლი არიან.

აშკარაა აგრეთვე, რომ თუ ვექტორი ნულის ტოლია, მაშინ სამივე კოორდინატი ნულის ტოლია და პირიქით.

ანალოგიურად იმისა, რაც ორი განზომილების შემთხვევისათვის გვქონდა (§ 28), სივრცეში რომელიმე $M$ წერტილის მდებარეობა შეიძლება განვსაზღვროთ $\overrightarrow{OM}$ დაბმული ვექტორის კოორდინატებით. ამ შემთხვევაშიაც $\overrightarrow{OM}$ ვექტორს ეწოდება $M$ წერტილის რადიუს-ვექტორი $O$ წერტილის მიმართ (ნახ. 40).

აღვნიშნოთ $x$, $y$ და $z$-ით ხსენებული კოორდინატები ე. ი. ვთქვათ:

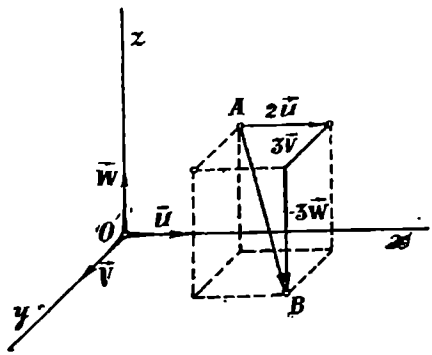
$x=$ გეგ. $\overrightarrow{OM}$ ($yOz$ სიბრტყის პარალელურად),

$y=$ გეგ. $\overrightarrow{OM}$ ($zOx$ სიბრტყის პარალელურად),

$z=$ გეგ. $\overrightarrow{OM}$ ($xOy$ სიბრტყის პარალელურად).

$x$, $y$ და $z$ რიცხვებს ეწოდებათ $M$ წერტილის დეკარტის კოორდინატები. თუ ეს რიცხვები მოცემული არიან, მაშინ $M$ წერტილის აგებისათვის საკმარისია მოვზომოთ საკოორდინატო ღერძებზე (ნიშნების გათვალისწინებით) ნაკვეთები $Om'=x$, $Om''=y$, $Om'''=z$ და $m'$, $m''$, $m'''$ წერტილებზე გავატაროთ სიბრტყეები შესაბამისად $yOz$, $zOx$ და $xOy$-ის პარალელური, ამ სიბრტყეთა გადაკვეთის წერტილი მოგვცემს $M$ წერტილს.

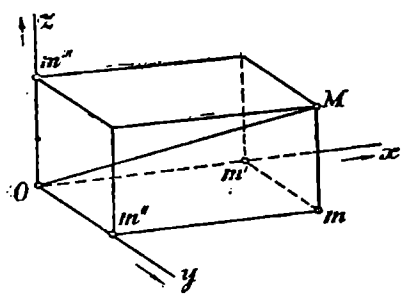
სიმარტივისათვის წარმოვიდგინოთ, რომ $xOy$ სიბრტყე ჰორიზონტალურია, $Oz$ ღერძი მიმართულია ქვემოდან ზემოთ, $Ox$ ღერძი—მარცხნიდან მარჯვნივ, ხოლო $Oy$ ღერძი ჩვენს მხარეზეა.




ნახ. 39.

საკოორდინატო სიბრტყეები ყოფენ მთელ სივრცეს რვა ნაწილად. სახელდობრ, ნახაზის ზემოხსენებული განლაგების მიხედვით, $xOy$ სიბრტყე ყოფს სივრცეს ორ ნაწილად: ზედა და ქვედა; თითოეული ნაწილი იყოფა, თავის მხრივ, $yOz$ სიბრტყით ორ ნაწილად: მარჯვენა და მარცხენა; ბოლოს, მიღებულ ოთხ ნაწილთაგან თითოეული იყოფა $zOx$ სიბრტყით ორ ნაწილად: წინა და უკანა. ამნაირად რვა ნაწილს ვღებულობთ.

ამ რვა ნაწილს შორის თითოეული ხასიათდება $x$, $y$ და $z$ კოორდინატების ნიშნებით, სახელდობრ, თუ $z>$ ან $<0$, მაშინ წერტილი ძევს $xOy$ სიბრტყის ზემოთ ან ქვემოთ; თუ $y>$ ან $<0$, მაშინ წერტილი ძევს $zOx$ სიბრტყის წინ ან უკან; თუ $x>$ ან $<0$, წერტილი ძევს $yOz$ სიბრტყის მარჯვნივ ან მარცხნივ.



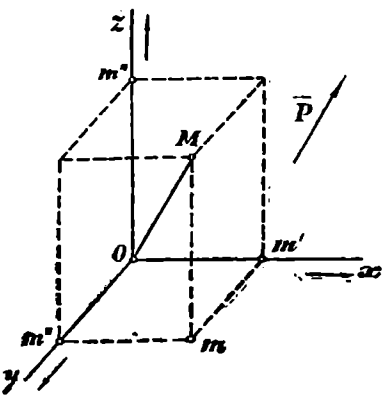

ნახ. 40.

სივრცის ის ნაწილი, სადაც სამივე კოორდინატი დადებითია, იწოდება **ნორმალურ საკოორდინატო კუთხედ**. ეს ნაწილი შედგება (თუ მივიღებთ მხედველობაში ნახაზის ზემოხსენებულ აგებულებას) იმ წერტილთაგან, რომლებიც მდებარეობენ $xOy$ სიბრტყის ზემოთ, $yOz$ სიბრტყის მარჯვნივ და $xOz$-ის წინ.

**§ 31. მართკუთხოვანი კოორდინატები სივრცეში.** განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ის შემთხვევა, როდესაც კოორდინატთა ღერძები წყვილ-წყვილად ურთიერთმართობი არიან. მაშინ კოორდინატთა სიბრტყეებიც ურთიერთმართობი იქნებიან და კოორდინატთა სისტემას ამ შემთხვევაში ეწოდება **დეკარტის მართკუთხოვანი** ანუ **ორთოგონალური სისტემა** (არამართკუთხოვან სისტემებს ეწოდება **ირიბკუთხოვანი**). მართკუთხოვანი სისტემის შემთხვევაში ვექტორის კოორდინატები არიან მისი **მართკუთხოვანი** გეგმილების ალგებრული მნიშვნელობანი კოორდინატთა ღერძებზე:

$$X=\text{გეგ}_x\vec{P},\quad Y=\text{გეგ}_y\vec{P},Z=\text{გეგ}_z\vec{P}.$$

თუ ისე, როგორც ზემოთ, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ აღნიშნავენ კოორდინატთა ღერძების ორტებს, მაშინ უკანასკნელი ფორმულები შეიძლება ასე გადაიწეროს (§ 23):



ნახ. 41

$$X=\vec{u}\cdot\vec{P},\quad Y=\vec{v}\cdot\vec{P},\quad Z=\vec{w}\cdot\vec{P}. \quad (1)$$

სრულიად ასევე $M$ წერტილის კოორდინატები $x$, $y$, $z$ არიან ამ წერტილის $\overrightarrow{OM}$ რადიუს-ვექტორის მართკუთხოვანი გეგმილების ალგებრული მნიშვნელობანი კოორდინატთა ღერძებზე (ნახ. 41).

ცხადია, რომ $x$, $y$, $z$ კოორდინატები რიცხვობრივ ტოლი არიან $M'$ წერტილის მანძილისა შესაბამისად $Oyz$, $Ozx$, $Oxy$ სიბრტყეებამდე, ნიშანი კი განისაზღვრება შემდეგი წესით: თუ $M$ მოთავსებულია საკოორდინატო სიბრტყის იმ მხარესაკენ, საითკენაც ძიმართულია ამ სიბრტყის მართობი ღერძი, მაშინ მანძილი ავიღოთ + ნიშნით; წინააღმდეგ შემთხვევაში (—) ნიშნით.

**§ 32. ვექტორის დაშლა მოცემული მიმართულებების მიხედვით.** ჩვენ სასარგებლოდ მიგვაჩნია, გავიმეოროთ ჩვენს მიერ მიღებული ზოგიერთი შედეგი. სიმოკლისათვის შევთანხმდეთ ერთ ტერმინში: თუ რამდენიმე თავისუფალი ვექტორი ერთი და იმავე სიბრტყის პარალელურია, მაშინ ვიტყვით, რომ ისინი კომპლანარული არიან [1]). კერძოდ, ორი ვექტორი ყოველთვის კომპლანარულია. ამაში რომ დავრწმუნდეთ, საკმარისია გადავდოთ ისინი ერთი და იმავე წერტილიდან. ცხადია, თუ ეს ორი ვექტორი ურთიერთპარალელური არ არის, მაშინ იმ სიბრტყის მიმართულება, რომელთა პარალელურიც ესორი ვექტორია, სავსებით გარკვეულია. მოცემული კომპლანარული ვექტორების პარალელურ ნებისმიერ სიბრტყეს ჩვენ ვუწოდებთ მოცემულ ვექტორთა სიბრტყეს.

§ 28-ში დავამტკიცეთ, რომ მოცემულ სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი $\vec{P}$ ვექტორი ყოველთვის შეიძლება წარმოდგენილ იქნას, როგორც იმავე სიბრტყეზე აღებული $\vec{u}$ და $\vec{v}$ ორტების პარალელური ორი ვექტორის ჯამი. თუ იქ ვლაპარაკობდით ერთსა და იმავე სიბრტყეზე მდებარე ვექტორების შესახებ, ეს მხოლოდ თვალსაჩინოებისთვის. არსებითად კი იქაც მხედველობაში გვქონდა კომპლანარული ვექტორები (ამ ტერმინის უკვე მოცემული გაგებით).

[1]) სიტყვა „კომპლანარი" არსებითად ნიშნავს: „საერთო სიბრტყის მქონეს". მაგრამ ვინაიდან აქ საქმე ეხება თავისუფალ ვექტორებს, რომელთა გადატანა (მიმართულებისა და სიგრძის შეუცვლელად) შეიძლება ნებისმიერი სახით, ამიტომ ჩვენ კომპლანარულს ვუწოდებთ ისეთ ვექტორებს, რომლებიც არიან ერთი და იმავე სიბრტყის პარალელური, რადგანაც შესაძლოა მათი გადატანა ერთსა და იმავე სიბრტყეზე.

ამიტომ, § 28-ის დასაწყისში ნათქვამი, უკეთესია ასე ჩამოვაყალიბოთ: ვთქვათ, $\vec{u}$ და $\vec{v}$ ნებისმიერი არაპარალელური ორტებია და ვთქვათ, რომ $\vec{P}$ ნებისმიერი ვექტორია, მათი კომპლანარული. მაშინ $\vec{P}$ ვექტორი შეიძლება წარმოდგენილ იქნას $\vec{u}$ და $\vec{v}$ ორტების პარალელური ორი ვექტორის ჯამის სახით

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \tag{1}$$

ამაში რომ დავრწმუნდეთ, საკმარისია ერთი და იმავე წერტილიდან გადავდოთ ვექტორები $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{P}$ და შევასრულოთ § 28-ში ნაჩვენები აგება.

(1) ფორმულა იძლევა $\vec{P}$ ვექტორის დაშლას მოცემული ორი (უცნობიერთ არაპარალელური) მიმართულებით, იმ პირობით, რომ $\vec{P}$ ვექტორი და ეს ორი მიმართულება კომპლანარულია. (1) ფორმულიდან ვღებულობთ (იხ. § 28):

$$\vec{P} = \vec{u}X + \vec{v}Y, \tag{2}$$

ე. ი. $\vec{P}$ ვექტორის დაშლას, მოცემული ორი ორტის მიხედვით, რომლებიც $\vec{P}$-ს კომპლანარულია.

სწორედ ასევე, § 30-ში ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ თუ მოცემულია სამი არაკომპლანარული ორტი, ანუ რაც იგივეა, თუ მოცემულია სამი არაკომპლანარული მიმართულება, მაშინ ყოველი $\vec{P}$ ვექტორი შესაძლოა დაშლილ იქნას ამ სამი მიმართულებით, ე. ი. წარმოდგენილ იქნას შემდეგი სახით:

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3, \tag{3}$$

სადაც ვექტორები $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ შესაბამისად მოცემულ მიმართულებათა პარალელურია. ეს დაშლა რომ მივიღოთ, საკმარისია ნებისმიერი $O$ წერტილიდან გადავდოთ ორტები $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ და შევასრულოთ § 30-ში ნაჩვენები აგება.

(3)-დან გამომდინარეობს $\vec{P}$ ვექტორის დაშლა (§ 30, სამი არაკომპლანარული ორტის მიხედვით:

$$\vec{P} = \vec{u}X + \vec{v}Y + \vec{w}Z \tag{4}$$

ზემოთქმულიდან ცხადია, რომ თავისუფალი ვექტორის კოორდინატთა განსაზღვრისათვის არაა საჭირო კოორდინატთა სათავის განხილვა, საკმარისია, ზოგად შემთხვევაში მოცემულ იქნას სამი (არაკომპლანარული) საკოორდინატო ორტი. მოცემული სიბრტყის პარალელური ვექტორების შემთხვევაში კი საკმარისია მოცემულ იქნას ორი (არაპარალელური) საკოორდინატო ორტი, ხოლო მოცემული მიმართულების პარალელური ვექტორების შემთხვევაში—ერთი საკოორდინატო ორტი. პირიქით, კოორდინატთა სათავის მდებარეობას, ცხადია, არსებითი მნიშვნელობა აქვს მაშინ, როცა საკითხი ეხება წერტილის კოორდინატებს.

ბოლოს, აღვნიშნავთ, რომ, თუ მოცემულია $\Pi$ სიბრტყე და მისი არაპარალელური $\Delta$ წრფე, მაშინ ყოველი $\vec{P}$ ვექტორი შეიძლება (ერთადერთი სახით) დაშლილ იქნას ასე:

$$\vec{r}=\vec{P}_{\Delta}+\vec{P}_{\Pi} \tag{5}$$

სადაც $\vec{P}_{\Delta}$ და $\vec{P}_{\Pi}$ ვექტორები შესაბამისად $\Delta$ და $\Pi$-ს პარალელურია. მართლაც, როგორც ადვილი შესამჩნევია

$$\vec{P}_{\Delta}=\text{გეგ}_{\Delta}\vec{P}(\text{აღებული} \parallel \Pi),\ \vec{P}_{\Pi}=\text{გეგ}_{\Pi}\vec{P}(\text{აღებული} \parallel \Delta).$$

**§ 33. განზოგადებული დეკარტის კოორდინატები.** დეკარტის კოორდინატთა ცნება შეიძლება რამდენადმე განზოგადდეს, თუ ვექტორის დაშლისთვის ვისარგებლებთ არა ორტებით, არამედ ნებისმიერი სიგრძის ვექტორებით.

დავიწყოთ მოცემული მიმართულების პარალელური ვექტორებით. ვთქვათ, $\vec{u}$ არის ნულისაგან განსხვავებული მოცემული მიმართულების ვექტორი. ყოველი სხვა $\vec{P}$ ვექტორი, მისი პარალელური, შესაძლოა წარმოდგენილ იქნას ერთადერთი შემდეგი სახით:

$$\vec{P}=u\vec{X}, \tag{1}$$

სადაც $X$ გარკვეული რიცხვია, სახელდობრ

$$X=\frac{P}{|u|} \tag{2}$$

($P$ არის ალგებრული მნიშვნელობა $\vec{P}$ ვექტორისა $\vec{u}$-ს მიმართ). ეს ფორმულები უშუალოდ გამომდინარეობენ რიცხვისა და ვექტორის ნამრავლის განმარტებიდან[1]). $X$ რიცხვს უწოდებენ $\vec{P}$ და $\vec{u}$ პარალელურ[2]) ვექტორთა შეფარდებას.

$X$ რიცხვს აქაც შეიძლება ეწოდოს $\vec{P}$ ვექტორის კოორდინატი, საკოორდინატო $\vec{u}$ ვექტორის მიმართ.

მოცემულ $Ox$ ღერძზე $M$ წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისათვის, ისე, როგორც წინათ, შეგვიძლია ვისარგებლოთ $\overrightarrow{OM}$ ვექტორით, რომელიც გადადებულია ამ ღერძის გარკვეულ $O$ წერტილიდან („კოორდინატთა სათავე"). ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$\overrightarrow{OM}=\vec{u}\cdot x, \tag{3}$$

[1]) ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ $\vec{u}X$ ვექტორის მიმართულება თანხვდება $\vec{P}$ ვექტორის მიმართულებას და მისი სიგრძე

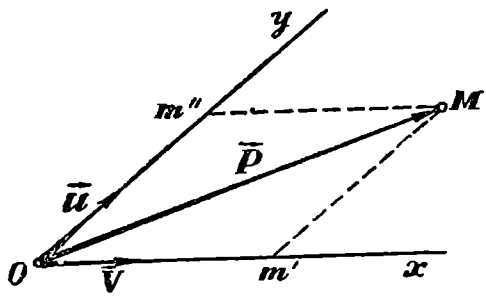
$$|\vec{u}\cdot X|=|\vec{u}|\cdot|X|=|\vec{u}|\cdot\frac{|\vec{P}|}{|\vec{u}|}=|\vec{P}|.$$

[2]) ორი ვექტორის შეფარდების ცნება განმარტებულია მხოლოდ პარალელური ვექტორების შემთხვევაში.

სადაც $\vec{u}$ არის მოცემული ღერძის პარალელური (ერთხელ და საბოლოოდ არჩეული) რაღაც ვექტორი („საკოორდინატო ვექტორი"), ხოლო $x$ არის გარკვეული რიცხვი, სახელდობრ,

$$x=\frac{OM}{|\vec{u}|}; \qquad (4)$$

$x$ რიცხვს აქაც ეწოდება $M$ წერტილის კოორდინატი.




ნახ. 42.

სრულიად ანალოგიურად, აღებული სიბრტყის პარალელური $\vec{P}$ ვექტორის მოცემულობისათვის შეიძლება ვისარგებლოთ ნებისმიერად არჩეული (ურთიერთ არაპარალელური) $\vec{u}$ და $\vec{v}$ ვექტორებით, რომლებიც მოცემული სიბრტყის პარალელური არიან (იხ. ნახ. 42, სადაც $\vec{u}$, $\vec{v}$ და $\vec{P}=\overrightarrow{OM}$ ვექტორები გამოსახულია, როგორც ერთსა და იმავე $O$ წერტილზე მოდებული, რაც ყოველთვის შესაძლოა). ისე, როგორც § 28-ში, მივიღებთ:

$$\vec{P}=\overrightarrow{Om'}+\overrightarrow{Om''},$$

საიდანაც, ზემოაღნიშნულის თანახმად

$$\vec{P}=\vec{u}X+\vec{v}Y, \qquad (5)$$

სადაც $X$ და $Y$ გარკვეული რიცხვებია, სახელდობრ: $X=\frac{Om'}{|\vec{u}|}$, $Y=\frac{Om''}{|\vec{v}|}$.

რიცხვები $X$ და $Y$ წარმოადგენენ $\vec{P}$ ვექტორის კოორდინატებს, განხილულს $\vec{u}$ და $\vec{v}$ საკოორდინატო ვექტორების მიმართ.

მოცემულ სიბრტყეზე წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისათვის, გარდა საკოორდინატო ვექტორებისა $\vec{u}$ და $\vec{v}$, აუცილებელია კიდევ კოორდინატთა სათავის არჩევა. მაშინ, სიბრტყეზე $M$ წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება მისი $\overrightarrow{OM}$ რადიუს-ვექტორით. ვთქვათ,

$$\overrightarrow{OM}=\vec{u}x+\vec{v}y;$$

ამით ჩვენ საშუალება გვეძლევა წერტილის მდებარეობა განესაზღვროთ ორი $x$, $y$ რიცხვის (კოორდინატების) საშუალებით.

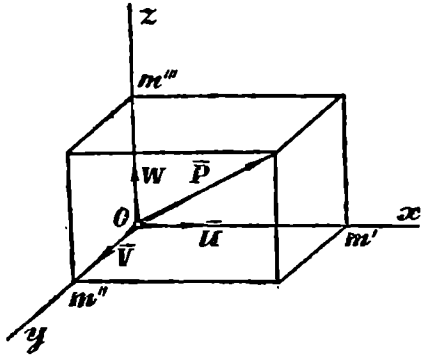
ბოლოს, სივრცეში მოცემული ნებისმიერი $\vec{P}$ ვექტორისათვის შეიძლება ვისარგებლოთ სამი (არაკომპლანარული) საკოორდინატო ვექტორით $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

თუ ამ ვექტორებს, თვალსაჩინოებისათვის, გადავდებთ ერთი და იმავე $O$ წერტილიდან, ისე, როგორც § 30-ში, მივიღებთ:

$$\vec{P}=\overrightarrow{Om'}+\overrightarrow{Om''}+\overrightarrow{Om'''},$$

საიდანაც

$$\vec{P}=\vec{u}X+\vec{v}Y+\vec{w}X. \qquad (6)$$




ნახ. 43.

სადაც

$$X=\frac{Om'}{|\vec{u}|},\quad Y=\frac{Om''}{|\vec{v}|},\quad Z=\frac{Om'''}{|\vec{w}|}.$$

რიცხვები $X$, $Y$, $Z$ წარმოადგენენ $\vec{P}$ ვექტორის კოორდინატებს $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ საკოორდინატო ვექტორების მიმართ.

$M$ წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისათვის საჭიროა კიდევ მოცემულ იქნას კოორდინატთა სათაესე $O$, რის შემდეგაც წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება ფორმულით:

$$\overrightarrow{OM}=\vec{u}x+\vec{v}y+\vec{w}z;$$

$x$, $y$, $z$ წარმოადგენენ $M$ წერტილის კოორდინატებს.

აქ განმარტებულ კოორდინატებს ჩვენ ვუწოდებთ დეკარტის განზოგადებულ კოორდინატებს ანუ დეკარტის კოორდინატებს ზოგადი სახით[1]. წინა პარაგრაფებში განხილული კოორდინატები წარმოადგენენ ამის კერძო შემთხვევას, როცა $|\vec{u}|=|\vec{v}|=|\vec{w}|=1$. ამ კოორდინატებს ჩვენ ახლა ვუწოდებთ განუზოგადებელ დეკარტის კოორდინატებს.

ზემოთქმულიდან ცხადია, რომ განზოგადებული კოორდინატები $X$, $Y$, $Z$ განუზოგადებელი კოორდინატებისა და შესაბამი საკოორდინატო ვექტორის სიგრძის შეფარდების ტოლია. შემდეგში, თუ საწინააღმდეგო არ იქნება მითითებული, დეკარტის კოორდინატებად ვიგულისხმებთ დეკარტის განზოგადებულ კოორდინატებს. ხოლო მართკუთხოვან (ანუ ორთოგონალურ) კოორდინატებად ჩვენ ვიგულისხმებთ (თუ საწინააღმდეგო არ იქნება მითითებული) დეკარტის განუზოგადებელ კოორდინატებს[2]).

---

[1]) მათ უწოდებენ აგრეთვე აფინურ კოორდინატებს. ამ ტერმინის მიზანშეწონილობა გასაგები გახდება, როცა ჩვენ განვიხილავთ ნაკეთების აფინურ თვისებებს (იხ. § 76, შენიშვნა).

[2]) თანამედროვე ლიტერატურაში დეკარტის კოორდინატებს უწოდებენ ხშირად მხოლოდ ამ უკანასკნელს (ე. ი. განუზოგადებელ დეკარტის მართკუთხოვან კოორდინატებს).

დეკარტის ზოგადი კოორდინატების შემთხვევაშიც წერტილისა და ვექტორისათვის გვექნება შემდეგი აღნიშვნები:

$$M(x, y, z),\ \vec{P}(x, y, z).$$

## II. ძირითადი აფინური ფორმულები

ამ განყოფილებაში ჩვენ გამოვიყვანთ რამდენსამე ძირითად ფორმულას, რომლებიც შეეხებიან ვექტორისა და წერტილის წარმოდგენას დეკარტის კოორდინატთა საშუალებით. ყველა ეს ფორმულა ისეთია, რომ მათ აქვთ საერთო ერთი და იგივე სახე, როგორც დეკარტის განზოგადებული კოორდინატების შემთხვევაში, ისე მართკუთხოვან კოორდინატთა შემთხვევაში. როგორც ქვემოთ დავინახავთ, ეს ფორმულები გამოსახავენ ნაკვთების ეგრეთ წოდებულ აფინურ თვისებებს[1]).

თითოეულ ფორმულას ჩვენ გამოვიყვანთ ჯერ ზოგად შემთხვევაში, სამგანზომილებიანი სივრცისათვის, ხოლო შემდეგ ვუჩვენებთ იმ გამარტივებებს, რომლებსაც ექნებათ ადგილი, თუ ნაკვთი მოთავსებული იქნება ერთსა და იმავე სიბრტყეზე.

ფორმულები უკანასკნელი შემთხვევისათვის, ე. ი. ორი განზომილების შემთხვევისათვის, შეიძლება გამოყვანილ იქნან ან უშუალოდ, ან მიღებულ იქნან ზოგადი ფორმულებიდან, თუ დავუშვებთ, რომ ვექტორის ან წერტილის კოორდინატი $Z$ ან $z$ ნულის ტოლია.

შემდეგში, თუ ვიტყვით: მოვნახოთ ვექტორი (ან წერტილი), მოცემულია ვექტორი (ან წერტილი), ამით ვგულისხმობთ: მოვნახოთ ვექტორის (ან წერტილის) კოორდინატები, მოცემულია ვექტორის (ან წერტილის) კოორდინატები.

**§ 34. მოცემულ ვექტორთა ჯამის კოორდინატები.** ვთქვათ, მოცემულია რამდენიმე ვექტორი:

$$\vec{P}_1=(X_1, Y_1, Z_1),\ \vec{P}_2=(X_2, Y_2, Z_2), \ldots,\ \vec{P}_n=(X_n, Y_n, Z_n).$$

მოვნახოთ ამათი ჯამი $\vec{P}$ (ე. ი. მოვნახოთ $\vec{P}$ ვექტორის კოორდინატები).

გვექნება (§ 33):

$$\begin{aligned}
\vec{P}_1 &= \vec{u}X_1 + \vec{v}Y_1 + \vec{w}Z_1,\\
\vec{P}_2 &= \vec{u}X_2 + \vec{v}Y_2 + \vec{w}Z_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{P}_n &= \vec{u}X_n + \vec{v}Y_n + \vec{w}Z_n.
\end{aligned}$$

ამათი შეკრებით მივიღებთ:

$$\vec{P}=\vec{P}_1+\vec{P}_2+\ldots+\vec{P}_n=\vec{u}(X_1+X_2+\ldots+X_n)+\vec{v}(Y_1+Y_2+\ldots+Y_n)+$$
$$+\vec{w}(Z_1+Z_2+\ldots+Z_n),$$

[1]) ამის შესახებ დაწვრილებით ნათქვამი იქნება თ. III, § 78-ში.

საიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ $\vec{P}$ ვექტორის საძიებელი კოორდინატები გვეძლევა ფორმულებით:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n,$$
$$Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n;$$

სიტყვებით ეს შემდეგნაირად გამოითქმის: **ვექტორთა ჯამის ყოველი კოორდინატი შესაკრები ვექტორების შესაბამ კოორდინატთა ჯამის ტოლია.**

ამავე წესით მოინახება **ორი ვექტორის სხვაობა.** სახელდობრ, თუ $\vec{Q}=(X, Y, Z)$ არის $\vec{P}_1(X_1, Y_1, Z_1)$ და $\vec{P}_2=(X_2, Y_2, Z_2)$ ვექტორთა სხვაობა, მაშინ

$$X=X_1-X_2,\ Y=Y_1-Y_2,\ Z=Z_1-Z_2,$$

ე. ი. ვექტორთა სხვაობის ყოველი კოორდინატი, სამცირისა და მამცირის შესაბამ კოორდინატთა სხვაობის ტოლია.

ორი განზომილების შემთხვევაში $\vec{P}_1=(X_1\ Y_1), \ldots, \vec{P}_n=(X_n,\ Y_n)$ ვექტორთა ჯამის კოორდინატები $(X, Y)$ გვეძლევა, ცხადია, იმავე ფორმულებით (ოღონდ ამოვარდება ფორმულა $Z$-ის შესახებ); სხვაობისთვისაც ასეთივე მდგომარეობას აქვს ადგილი.

მკითხველს ვანდობთ ეს ფორმულები გამოიყვანოს მოცემულ ღერძზე ვექტორთა ჯამის (ან სხვაობის) გეგმილის შესახებ არსებული თეორემების საშუალებით, ჯერ განუზოგადებელი კოორდინატებისთვის, ხოლო შემდეგ განზოგადებული კოორდინატების შემთხვევაში.

#### სავარჯიშო მაგალითები

1. იპოვეთ $\vec{P}_1=(3,1)$, $\vec{P}_2=(0,-1)$ და $\vec{P}_3=(-1,-1)$ ვექტორების (სიბრტყეზე) ჯამი.
პასუხი: (2,−1).

2. იპოვეთ $\vec{P}_1=(3, 1, 2)$. $\vec{P}_2=(3, 3, 3)$ და $\vec{P}_3=(0, 1, 1)$ ვექტორების ჯამი.
პასუხი: (6, 5, 6).

3. ნივთიერ $M$ წერტილზე მოდებულია $n$ ძალა

$$\vec{F}_1=(X_1, Y_1, Z_1),\ \vec{F}_2=(X_2, Y_2, Z_2), \ldots,\ \vec{F}_n=(X_n, Y_n, Z_n).$$

რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდნენ ამ ძალთა კოორდინატები იმისათვის, რომ ეს ძალები წონასწორობაში იმყოფებოდნენ (ე. ი., რომ მათი ტოლქმედი, რომელიც მათი ჯამის ტოლია, ნულად იქცეს)

პასუხი: $X_1+X_2+\ldots+X_n=0,\ Y_1+Y_2+\ldots+Y_n=0,\ Z_1+Z_2+\ldots+Z_n=0.$

**§ 35. ვექტორის განსაზღვრა მოცემული სათავის და ბოლოს მიხედვით.** ვთქვათ, მოცემულია ორი წერტილი $M_1(x_1, y_1, z_1)$ და $M_2(x_2, y_2, z_2)$ და მოითხოვება $\overrightarrow{M_1M_2}$ ვექტორის $X$, $Y$, $Z$ კოორდინატების პოვნა (ნახ. 40).

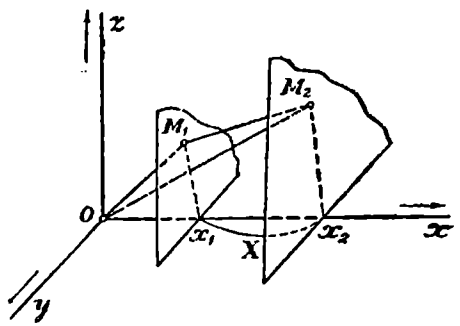
გვაქვს ვექტორული ტოლობა: $\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M_2}$, საიდანაც, $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$, ე. ი. $\overrightarrow{M_1M_2}$ ვექტორი არის $\overrightarrow{OM_2}$ და $\overrightarrow{OM_1}$ ვექტორების სხვაო-

ბა. მაგრამ ჩვენ ვიცით, რომ ვექტორთა სხვაობის კოორდინატები სამცირი და მამცირი ვექტორების შესაბამი კოორდინატების სხვაობის ტოლია. მეორეს მხრით, $\overline{OM}_2$ ვექტორის კოორდინატები არიან $x_2$, $y_2$, $z_2$, ხოლო ვექტორის კოორდინატებია $x_1$, $y_1$, $z_1$, მაშასადამე:

$$X=x_2-x_1,\quad Y=y_2-y_1,\quad Z=z_2-z_1$$

და ამით ამოცანა ამოხსნილია. სიტყვიერად: ვექტორის $X$ კოორდინატი ტოლია ვექტორის ბოლოს აბსცისს მინუს საწყისის აბსცისი; ანალოგიურად $Y$ და $Z$ კოორდინატებისათვის. რასაკვირველია, იგივე შეეხება ორი განზომილების შემთხვევასაც.

განუზოგადებელი კოორდინატების შემთხვევაში, ამ ფორმულების მართებულება უშუალოდ ჩანს ნახ. 44-დან; განზოგადებულ კოორდინატებზე გადასვლა არაეითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს.




ნახ. 44.

#### სავარჯიშო მაგალითები

1. ააგეთ $Oxy$ სიბრტყეზე წერტილები $A(1,0)$ და $B(3,2)$ და შეამოწმეთ ნახაზზე, რომ $\overrightarrow{AB}=(2,2)$, $\overrightarrow{BA}=(-2,-2)$.

2. იპოვეთ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი მისი $A(3, 5, 2)$ საწყისის და $B(-1,-5,-2)$ ბოლოს მიხედვით.

პასუხი: $\overrightarrow{AB}=(-4,-8,-4)$.

3. $\overrightarrow{P}=(X, Y, Z)$ ვექტორის საწყისი იმყოფება $A(x, y, z)$ წერტილში. იპოვეთ მისი ბოლო $B(x_1, y_1, z_1)$.

პასუხი: $x_1=x+X$, $y_1=y+Y$, $z_1=z+Z$.

4. სიბრტყეზე პარალელოგრამის სამი მომდევნო წვერო აღის $A(1,1)$, $B(2,-1)$, $C(6,8)$. იპოვეთ მეოთხე წვერო $D(x, y)$.

ამოხსნა. გვაქვს $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=(4,9)$. მაშასადამე (იხ. წინა სავარჯიშო), $x=1+4=5$, $y=1+9=10$.

**§ 36. რიცხვისა და ვექტორის ნამრავლის კოორდინატი.** ვთქვათ, $\overrightarrow{P}=(X, Y, Z)$ არის მოცემული ვექტორი, ხოლო $m$—მოცემული რიცხვია. მოვნახოთ $m\overrightarrow{P}$ ნამრავლის კოორდინატი, გვექნება:

$$m\overrightarrow{P}=m(\overrightarrow{u}X+\overrightarrow{v}Y+\overrightarrow{w}Z)=\overrightarrow{u}(mX)+\overrightarrow{v}(mY)+\overrightarrow{w}(mZ)$$

ე. ი.

$$m\cdot(X, Y, Z)=(mX, mY, mZ)$$

(ეს ფორმულა ასე უნდა იკითხებოდეს: $m$ რიცხვისა და $X$, $Y$, $Z$ კოორდინატებიანი ვექტორის ნამრავლი $mX$, $mY$, $mZ$ კოორდინატებიანი ვექტორის ტოლია).

კერძოდ, თუ $m=-1$, მივიღებთ, რომ $(-1)\vec{P}$ ანუ $(-\vec{P})$ ვექტორის კოორდინატები შესაბამისად $-X, -Y, -Z$-ის ტოლი არიან.

სხვანაირად, რომ ვთქვათ, ურთიერთმოპირდაპირე $\vec{P}$ და $-\vec{P}$ ვექტორების კოორდინატები აბსოლუტური სიდიდით ტოლი არიან, ხოლო ნიშნები მოპირდაპირე აქვთ. ეს სრულიად აშკარაა თვით ვექტორის კოორდინატების განმარტებიდანაც.

ორი განზომილების შემთხვევაში გვექნება:

$$m(X, Y)=(mX, mY).$$

#### სავარჯიშო მაგალითები და გამოყენებანი

1. სიბრტყეზე მოცემულია ორი ვექტორი $\vec{P}_1=(8, 2)$, $\vec{P}_2=(6, 10)$. იპოვეთ ვექტორი

$$\frac{1}{2}(\vec{P}_1+\vec{P}_2).$$

პასუხი: (7, 6).

2. მოცემულია ორი ვექტორი $\vec{P}_1=(1, 3, 5)$ და $\vec{P}_2=(2, 0, 4)$. იპოვეთ ვექტორი

$$\frac{1}{3}(\vec{P}_1+\vec{P}_2).$$

პასუხი: (1, 1, 3).

3. მოცემულია წერტილი $A(5, 4, 3)$. იპოვეთ $\overrightarrow{OA}$ ნაკვეთის შუაწერტილი, სადაც $O$ არის კოორდინატთა სათავე.

ამოხსნა. საძიებელი შუაწერტილი $C$ მოიცემა ფორმულით

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\left(\frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}\right).$$

მაშასადამე, $C$ წერტილის კოორდინატები არიან

$$\frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}.$$

4. განიხილება ნივთიერ წერტილთა სისტემა $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, ..., $M_n(x_n, y_n, z_n)$, რომელთა მასები არიან $m_1, m_2, \ldots, m_n$. ამ სისტემის სიმძიმის ცენტრი განისაზღვრება ფორმულით:

$$\overrightarrow{OC}=\frac{m_1\overrightarrow{OM}_1+m_2\overrightarrow{OM}_2+\ldots+m_n\overrightarrow{OM}_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}=\frac{1}{m}(m_1\overrightarrow{OM}_1+m_2\overrightarrow{OM}_2+\ldots+m_n\overrightarrow{OM}_n),$$

სადაც $O$ ნებისმიერი წერტილია, ხოლო $m$ აღნიშნავს ჯამს $m_1+m_2+\ldots+m_n$ (იხ. § 10, სავარჯიშო 2). თუ $O$-ს ჩავთვლით სათავედ, იპოვეთ სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

ამოხსნა. გვაქვს: $\overrightarrow{OM}_1=(x_1, y_1, z_1)$, ..., $\overrightarrow{OM}_n=(x_n, y_n, z_n)$. ამიტომ

$$m_1\overrightarrow{OM}=(m_1x_1, m_1y_1, m_1z_1), \ldots, m_n\overrightarrow{OM}_n=(m_nx_n, m_ny_n, m_nz_n).$$

მაშასადამე:

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{m}(m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n, m_1y_1+m_2y_2+\ldots+m_ny_n, m_1z_1+m_2z_2+\ldots+m_nz_n),$$

საიდანაც, დაუშვებთ რა, რომ $\overrightarrow{OC}=(x, y, z)$, ე. ი., თუ $C$ წერტილის კოორდინატებს აღვნიშნავთ $x$, $y$, $z$-ით, გვექნება:

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m}, \qquad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\ldots+m_ny_n}{m},$$

$$z=\frac{m_1z_1+m_2z_2+\ldots+m_nz_n}{m}.$$

ნ. თუ ვიცით, რომ თანატოლ მასიანი ორი ნივთიერი წერტილის სიმძიმის ცენტრი მათ შუაზე იმყოფება, იპოვეთ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ და $M_2(x_2, y_2, z_2)$ წერტილების შემაერთებელი ნაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატები $(x, y, z)$ წინა სავარჯიშოს გამოყენებით.

პასუხი: $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$, $z=\frac{z_1+z_2}{2}$.

**§ 37. ორი ვექტორის პარალელობის პირობა.** ვთქვათ, მოცემულია ორი ვექტორი: $\vec{P}_1(X_1, Y_1, Z_1)$ და $\vec{P}_2(X_2, Y_2, Z_2)$; საჭიროა ვიპოვოთ პირობები, რომელთაც უნდა აკმაყოფილებდნენ მოცემულ ვექტორთა კოორდინატები იმისათვის, რომ ისინი პარალელურნი იყვნენ.

თუ $\vec{P}_1=0$, ე. ი. თუ $X_1=Y_1=Z_1=0$, მაშინ მისი გეზი განუზღვრელია, და იგი შეიძლება ჩაითვალოს ნებისმიერი მიმართულების პარალელურად, კერძოდ, $\vec{P}_2$ ვექტორის პარალელურად.

ახლა ვთქვათ, $\vec{P}_1\neq 0$, იმისათვის, რომ $\vec{P}_2$ ვექტორი $\vec{P}_1$-ის პარალელური იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ:

$$\vec{P}_2=k\cdot\vec{P}_1, \tag{1}$$

სადაც $k$ რომელიმე რიცხვია [1]). ეს პირობა შეიძლება ასე გადაიწეროს (იხ. წინა პარაგრაფი):

$$X_2=kX_1, \quad Y_2=kY_1, \quad Z_2=kZ_1, \tag{2}$$

ანუ

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{Y_2}{Y_1}=\frac{Z_2}{Z_1}; \tag{3}$$

სწორედ ეს არის პარალელობის საძიებელი პირობა. მაშ, ორი ვექტორის პარალელობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ერთი ვექტორის კოორდინატები მეორის კოორდინატების პროპორციული იყვნენ (იხ. კიდევ შენიშვნა პარაგრაფის ბოლოში).

ორი განზომილების შემთხვევაში პარალელობის პირობა ასე გამოისახება (თუ $\vec{P}_1\neq 0$):

$$X_2=kX_1, \quad Y_2=kY_1, \tag{2a}$$

[1]) იხ. § 33, ფორმულა (1).

სადაც $k$ რომელიმე რიცხვია; ანუ:

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{Y_2}{Y_1} \tag{3a}$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: თუ ვამბობთ, რომ სიდიდეები $a_1, a_2, \ldots, a_m$ პროპორციულია $b_1, b_2, \ldots, b_m$ სიდიდეებისა (რომელთა შორის ყველა ერთდროულად ნულის ტოლი არ არის), ეს ნიშნავს, რომ:

$$a_1=kb_1,\ a_2=kb_2,\ \ldots,\ a_m=kb_m \tag{A}$$

სადაც $k$ რომელიმე რიცხვია[1]). თუ $b_1, b_2, \ldots, b_m$ სიდიდეთაგან არც ერთი არაა ნულის ტოლი, მაშინ ეს გარემოება შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_m}{b_m}. \tag{B}$$

მაგრამ, თუ $b_1, b_2, \ldots, b_m$ რიცხვთაგან ზოგიერთი ნულის ტოლია, მაგალითად, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ნულის ტოლი არ არიან, მაგრამ $b_{m+1}=b_{m+2}=b_{m+3}=\ldots=b_n=0$. მაშინ წინა ფორმულის მაგიერ, ($A$)-ს ძალით გვექნება:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_m}{b_m},\ a_{m+1}=a_{m+2}=\ldots=a_n=0, \tag{B'}$$

მაგრამ ამ შემთხვევაშიაც შეიძლება ($B$) ფორმულა შევინარჩუნოთ, თუ შევთანხმდებით შემდეგში: ($B$) ფორმულიდან ის ფარდობები ამოიშლებიან, რომელთა მნიშვნელი ნულის ტოლია, ხოლო ამოშლილ ფარდობათა მრიცხველი ნულს გაეტოლებიან.

სწორედ ასე უნდა გვესმოდეს (3) ფორმულა, როცა $X_2$, $Y_2$, $Z_2$ რიცხვთაგან ერთი ან ორი ნულის ტოლია (იხ. სავარჯ. 3 და 4).

#### სავარჯიშო მაგალითები

1. დაამტკიცეთ, რომ ვექტორები $\vec{P}_1=(3,2,1)$ და $\vec{P}_2=\left(\frac{3}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}\right)$ პარალელური არიან.

2. დაამტკიცეთ, რომ ვექტორები $\vec{P}_1=(3,0,2)$ და $\vec{P}_2=(-6,0,-4)$ პარალელური არიან.

3. იპოვეთ $(2,0,5)$ და $(X, Y, Z)$ ვექტორთა პარალელობის პირობა.

პ ა ს უ ხ ი: ($3$) პირობა გვაძლევს:

$$\frac{X}{2}=\frac{Y}{0}=\frac{Z}{5}.$$

ეს დამოკიდებულებანი ასე უნდა გვესმოდეს (იხ. შენიშვნა ზემოთ):

$$\frac{X}{2}=\frac{Z}{5},\quad Y=0.$$

4. იპოვეთ $(3,0,0)$ და $(X, Y, Z)$ ვექტორთა პარალელობის პირობა.

---

[1]) რომელიც შეიძლება ნულის ტოლიც იყოს.

პასუხი: (3) პირობის გამოყენება მოგვცემს: $\frac{X}{3}=\frac{Y}{0}=\frac{Z}{0}$; ზემოხსენებული შენიშვნის ძალით, ამ ფორმულიდან უნდა ამოვშალოთ $\frac{Y}{0}$ და $\frac{Z}{0}$, მაშინ არავითარი ტოლობა აღარ რჩება, და თუ ამოშლილი წილადების მრიცხველთ ნულს გავუტოლებთ, მივიღებთ $Y=0$, $Z=0$; სწორედ ეს არის პარალელობის საძიებელი პირობა. ეს, რასაკვირველია, აშკარაა, ვინაიდან (3, 0, 0) ვექტორი $Ox$ ღერძის პარალელურია და, მაშასადამე, $(X, Y, Z)$ ვექტორიც ამ ღერძის პარალელური უნდა იყოს, ე. ი. $Y=Z=0$, ხოლო $X$ ნებისმიერი სიდიდეა.

**§ 37a. ორი ვექტორის პარალელობის პირობა (გაგრძელება).** ორი ვექტორის პარალელობის პირობა შეიძლება უფრო ზოგადი და სიმეტრიული სახით ჩამოყალიბდეს, რომლისთვისაც შემთხვევა $\vec{P}_1=0$ გამონაკლისს არ შეადგენს. სახელდობრ, ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორების პარალელობისათვის აუცილებელი და საკმარისია ადგილი ჰქონდეს ტოლობას:

$$l\vec{P}_1+m\vec{P}_2=0, \tag{1}$$

სადაც $l$ და $m$ რომელიმე რიცხვებია, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან.

დავამტკიცოთ, რომ (1) პირობა საკმარისია. ვთქვათ, (1) ტოლობას აქვს ადგილი. ვინაიდან პირობის თანახმად $l$ და $m$ ერთდროულად ნული არ არის, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $m\neq 0$, მაშინ (1)-დან მივიღებთ $\vec{P}_2=-\frac{l}{m}\vec{P}_1$ ანუ $\vec{P}_2=k\vec{P}_1$, სადაც $k=-\frac{l}{m}$. მაშასადამე, $\vec{P}_2\parallel\vec{P}_1$, რის დამტკიცებაც გვინდოდა [1]).

ახლა დავამტკიცოთ, რომ (1) პირობა აუცილებელია. ვთქვათ, $\vec{P}_2\parallel\vec{P}_1$; თუ ერთ-ერთი $\vec{P}_1$ ან $\vec{P}_2$ ვექტორი ნულისაგან განსხვავებულია, მაგალითად, $\vec{P}_1\neq 0$, მაშინ, როგორც ვიცით, $\vec{P}_2=k\vec{P}_1$, სადაც $k$ რომელიმე რიცხვია. ეს ტოლობა შეგვიძლია გადავწეროთ ასე: $k\vec{P}_1+(-1)\vec{P}_2=0$. ამრიგად, ჩვენ მართლაც გვაქვს (1) სახის ტოლობა [2]). თუ ორივე ვექტორი ნულის ტოლია, მაშინ (1) ტოლობას აქვს ადგილი ნებისმიერად არჩეული $l$ და $m$-სათვის. ამრიგად, დებულება დამტკიცებულია.

**§ 38. სამი წერტილის კოლინეარობის [3]) პირობა.** იმისათვის, რომ სამი წერტილი $M(x, y, z)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ერთსა და იმავე წრფეზე იმყოფებოდეს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ვექტორები $\overrightarrow{M_1M}$ და

[1]) დასკვნა მართებულია იმ შემთხვევაშიაც, როცა $\vec{P}_1=0$, ვინაიდან ნულ ვექტორი ითვლება ნებისმიერი ვექტორის პარალელურად.

[2]) ჩვენს შემთხვევაში $l=k$, $m=-1\neq 0$.

[3]) წერტილებს ეწოდებათ კოლინეარული, თუ ისინი ერთსა და იმავე წრფეზე იმყოფებიან. პარალელურ თავისუფალ ვექტორებსაც შეიძლება ვუწოდოთ კოლინეარული (იხ. შენიშვნა 32 გვერდზე).

$\overrightarrow{M_1M_2}$ პარალელური იყვნენ (ნახ. 45). მაგრამ

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1),\quad \overrightarrow{M_1M}=(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1);$$

მაშასადამე, § 37-ის შედეგის ძალით, ამ ვექტორთა პარალელობის პირობა ასე გამოისახება:

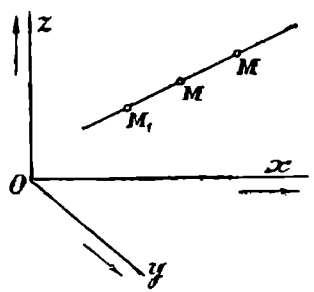
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{1}$$

სწორედ ეს არის სივრცეში მოცემული სამი წერტილის კოლინეარობის პირობა. სიბრტყეზე კი სამი წერტილის კოლინეარობის პირობა ასე გამოისახება:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{2}$$

ამან რომ უფრო სიმეტრიული სახე მიიღოს, ეს პირობა ასე გადავწეროთ:

$$(x-x_1)(y_2-y_1)-(y-y_1)(x_2-x_1)=0$$



ნახ. 45.

ანუ, რაც იგივეა

$$\begin{vmatrix} x-x_1, & y-y_1 \\ x_2-x_1, & y_2-y_1 \end{vmatrix}=0. \tag{2a}$$

ადვილად დაგრწმუნდებით, რომ ეს დეტერმინანტი შებრუნებული ნიშნით შემდეგი

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტის ტოლია. მართლაც, ამ დეტერმინანტის მეორე სტრიქონი გამოვაკლოთ მიმდევრობით პირველ და მესამე სტრიქონს (როგორც ცნობილია, ამით დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ იცვლება), მივიღებთ:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}$$

მაშასადამე, (2) პირობა ანუ, რაც იგივეა, (2a) პირობა შეიძლება გადაიწეროს შემდეგი სავსებით სიმეტრიული სახით:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{3}$$

**§ 39. სამი მოცემული ვექტორის კომპლანარობის პირობა.** ჩვენ შევთანხმდით (§ 32), რომ ერთი და იმავე სიბრტყის პარალელურ თავისუფალ ვექტორებს ვუწოდოთ კომპლანარული. ვიცით, რომ ორი ვექტორი ყოველთვის კომპლანარულია. ახლა ვთქვათ, მოცემულია სამი ვექტორი

$$\vec{P}_1=(X_1,\ Y_1,\ Z_1),\quad \vec{P}_2=(X_2,\ Y_2,\ Z_2),\quad \vec{P}_3=(X_3,\ Y_3,\ Z_3).$$

თუ ვექტორები $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ პარალელურია, მაშინ ცხადია, რომ სამივე ვექტორი კომპლანარულია [1]). დავუშვათ, რომ ვექტორები $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ არაპარალელურია. მაშინ, § 33-ში აღნიშნულის თანახმად, სამი ვექტორის კომპლანარობისთვის აუცილებელი და საკმარისია ისეთი ორი $k_1$ და $k_2$ რიცხვის არსებობა, რომ

$$\vec{P}_3=k_1\vec{P}_1+k_2\vec{P}_2; \tag{1}$$

მართლაც, თუ ადგილი აქვს წინა ტოლობას, მაშინ $\vec{P}_3$ ვექტორი $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ ვექტორთა სიბრტყის პარალელურია. პირიქით, $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორთა კომპლანარულ ყოველ $\vec{P}_3$ ვექტორს წარმოვადგენთ (1) ფორმულით; იხ. § 33, (5) ფორმულა.

სამი ვექტორის კომპლანარობის (1) პირობა შეიძლება წარმოდგენილ იქნას უფრო სიმეტრიული და ზოგადი სახით, რომელიც გამოდგება იმ შემთხვევაშიაც, როცა $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ პარალელურია. სახელდობრ, ჩვენ ახლა დავამტკიცებთ, რომ სამი $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ ვექტორის კომპლანარობისთვის აუცილებელი და საკმარისია ისეთი სამი $l$, $m$, $n$ რიცხვის არსებობა, რომლებიც ერთდროულად ნულის ტოლი არ არიან და რომლებისთვისაც ადგილი აქვს ტოლობას:

$$l\vec{P}_1+m\vec{P}_2+n\vec{P}_3=0. \tag{2}$$

ჯერჯერობით დავამტკიცებთ, რომ (2) პირობა საკმარისია. მართლაც, ვთქვათ, ეს პირობა დაცულია; მაშინ, თუ ვიგულისხმებთ, მაგალითად, $n\neq 0$ [2]), შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\vec{P}_3=-\frac{l}{n}\vec{P}_1-\frac{m}{n}\vec{P}_2=k_1\vec{P}_1+k_2\vec{P}_2$$

სადაც $k_1=-\frac{l}{n}$, $k_2=-\frac{m}{n}$. ეს კი გვიჩვენებს, რომ $\vec{P}_3$ ვექტორი $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორების კომპლანარულია [3]).

---

[1]) ეს რომ ცხადი გახდეს, საკმარისია წარმოვიდგინოთ $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ და $\vec{P}_3$ ვექტორებს საერთო სათავე აქვთ.

[2]) პირობის თანახმად, სამივე რიცხვი $l$, $m$, $n$ ერთდროულად არ არის ნული. ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ჩავთვალოთ მაგ., $n\neq 0$.

[3]) ცხადია, ეს დასკვნა მართებული დარჩება იმ შემთხვევაშიაც, როცა $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ პარალელურია.

ახლა დავამტკიცებთ, რომ (2) პირობა აუცილებელია, ე. ი. ამ პირობას აქვს ადგილი ყოველთვის, როცა $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ და $\vec{P}_3$ კომპლანარულია. მართლაც, თუ $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ურთიერთ არაპარალელურია, მაშინ გვექნება (1) ტოლობა, რომელიც შეგვიძლია გადავწეროთ ასეთი სახით

$$k_1\vec{P}_1 + k_2\vec{P}_2 + (-1)\vec{P}_3 = 0;$$

ამრიგად, (2) პირობა დაცულია (როცა $l=k_1$, $m=k_2$, $n=-1\neq 0$), თუ $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ პარალელურია, მაშინ § 37a-ს თანახმად გვექნება: $l\vec{P}_1+m\vec{P}_2=0$, სადაც $l$, $m$ რიცხვიდან ერთ-ერთი მაინც ნულისგან განსხვავებულია. ეს ტოლობა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახითაც:

$$l\vec{P}_1 + m\vec{P}_2 + 0\cdot\vec{P}_3 = 0,$$

მაშასადამე, ისევ გვაქვს (2) სახის ტოლობა. ამ შემთხვევაში $n=0$.

ამრიგად, (1) პირობის აუცილებლობა და საკმარისობა დამტკიცებულია. ეს პირობა შეგვიძლია გადავწეროთ ასე:

$$l\cdot(X_1,\ Y_1,\ Z_1) + m\cdot(X_2,\ Y_2,\ Z_2) + n\cdot(X_3,\ Y_3,\ Z_3) = 0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს:

$$lX_1 + mY_1 + nZ_1 = 0,\ lX_2 + mY_2 + nZ_2 = 0,\ lX_3 + mY_3 + nZ_3 = 0. \qquad (3)$$

მაგრამ დეტერმინანტთა თეორიიდან ცნობილია, რომ ისეთი რიცხვების არსებობისათვის, რომლებიც ერთდროულად ნულები არ არიან და უკანასკნელ განტოლებათა სისტემას აკმაყოფილებენ, აუცილებელი და საკმარისია, რომ:

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

სწორედ ეს არის მოცემული სამი ვექტორის კომპლანარობის პირობა, გამოსახული მათი კოორდინატების საშუალებით.

#### სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. დაამტკიცეთ, რომ ვექტორები (3, 5, 8), (1, 4, 1), (4, 9, 9) კომპლანარულია.

2. მონახეთ პირობა, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდნენ $\vec{P}(X, Y, Z)$ ვექტორის კოორდინატები, რომ $\vec{P}(X\ Y\ Z)$, (0, 2, 3) და (3, 0, 1) ვექტორები კომპლანარული იყვნენ.

პასუხი: $2X+9Y-6Z=0$

3. წრფივად დამოკიდებული და დამოუკიდებელი ვექტორები. ვექტორებს $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, ..., $\vec{P}_n$ ეწოდებათ წრფივად დამოკიდებული, თუ შეიძლება ისეთ $l_1$, $l_2$, ..., $l_n$ რიცხვთა მონახვა, რომლებიც ერთდროულად არ არიან ნულები და რომელთათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$l_1\vec{P}_1 + l_2\vec{P}_2 + \ldots + l_n\vec{P}_n = 0; \qquad (5)$$

თუკი (5) ტოლობას მხოლოდ მაშინ აქვს ადგილი, როცა $l_1=l_2=\ldots=l_m=0$, მაშინ $\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_m}$ ვექტორებს ეწოდებათ წ რ ფ ი ვ ა დ დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ი. ამ ტერმინების შემოღების შემდგომ § 37ა და ამ პარაგრაფში მიღებული შედეგები ასე შეიძლება ჩამოყალიბდეს:

თუ ო რ ი ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ ისინი ურთიერთპარალელური არიან და, პირიქით.

თუ ს ა მ ი ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ ისინი ურთიერთკომპლანარული არიან და, პირიქით.

ბოლოს, ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ყ ო ვ ე ლ ი ო თ ხ ი ვ ე ქ ტ ო რ ი წ რ ფ ი ვ ა დ დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ი ა. მართლაც, თუ $\overrightarrow{P_1}$, $\overrightarrow{P_2}$, $\overrightarrow{P_3}$, $\overrightarrow{P_4}$ ვექტორებიდან, მაგ., პირველი სამი წრფივად დამოუკიდებელია (და, მაშასადამე, არაკომპლანარულია), მაშინ გვექნება (§ 33):

$$\overrightarrow{P_4}=k_1\overrightarrow{P_1}+k_2\overrightarrow{P_2}+k_3\overrightarrow{P_3},$$

სადაც $k_1$, $k_2$, $k_3$ რომელიმე რიცხვებია. ეს ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$k_1\overrightarrow{P_1}+k_2\overrightarrow{P_2}+k_3\overrightarrow{P_3}+(-1)\overrightarrow{P_4}=0,$$

ესე იგი მოცემული ოთხი ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია. თუ პირველი სამი ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია, გვექნება:

$$l\overrightarrow{P_1}+m\overrightarrow{P_2}+n\overrightarrow{P_3}=0$$

მასთან, $l$, $m$, $n$ არ არიან ერთდროულად ნული. ეს ტოლობა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$l\overrightarrow{P_1}+m\overrightarrow{P_2}+n\overrightarrow{P_3}+0\cdot\overrightarrow{P_4}=0,$$

ე. ი. ამ შემთხვევაშიც მოცემული ოთხი ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია.

საზოგადოდ, თუ $\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_n}$ მოცემულ $n$ ვექტორს შორის $m$ ვექტორი ($m\leq n$) წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ ყველა $n$ ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია. მაგალითად, თუ $\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_m}$ ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ გვექნება: $l_1\overrightarrow{P_1}+l_2\overrightarrow{P_2}+\ldots+l_m\overrightarrow{P_m}=0$, სადაც $l_1, l_2, \ldots, l_m$ ყველა ნული არ არის. მაგრამ, ეს ტოლობა შეიძლება გადავწეროთ ამ სახითაც:

$$l_1\overrightarrow{P_1}+l_2\overrightarrow{P_2}+\ldots+l_m\overrightarrow{P_m}+0\cdot\overrightarrow{P_{m+1}}+\ldots+0\cdot\overrightarrow{P_n}=0,$$

ამით კი დებულება დამტკიცებულია.

კერძოდ, აქედან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $n$ ვექტორი, როცა $n\geq 4$, წრფივად დამოკიდებულია.

**§ 40. მოცემული ოთხი წერტილის კომპლანარობის პირობა.** წერტილებს ეწოდებათ კ ო მ პ ლ ა ნ ა რ უ ლ ი, თუ ისინი ერთსა და იმავე სიბრტყეზე არიან მოთავსებული. ორი ან სამი წერტილი ყოველთვის კომპლანარულია. იმისათვის, რომ ოთხი წერტილი $M(x, y, z)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ კომპლანარული იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ვექტორები $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ იყვნენ კომპლანარული [1]). თუ შევნიშნავთ, რომ

$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1),\quad \overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1),$$
$$\overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1)$$

[1]) რასაკვირველია, ამ ვექტორთა მაგიერ შეიძლება ავიღოთ ვექტორები $\overrightarrow{MM_1}$, $\overrightarrow{MM_2}$, $\overrightarrow{MM_3}$ და ა. შ.

და ამ ვექტორებზე გამოვიყენებთ (4) პირობას, მივიღებთ:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0; \qquad (1)$$

სწორედ ეს არის ოთხი წერტილის კომპლანარობის პირობა. ეს პირობა შეიძლება გადაიწეროს უფრო სიმეტრიული სახით (შეად. § 38), სახელდობრ, იგი ასე შეიძლება დაიწეროს:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad (2)$$

მართლაც, დეტერმინანტის პირველ, მესამე და მეოთხე სტრიქონს მიმდევრობით რომ გამოვაკლოთ მეორე სტრიქონი, მარცხენა მხარეში მივიღებთ:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$$

ეს კი იგივეა, რაც (1)-ს მარცხენა მხარე.

**§ 41. ნაკვეთის გაყოფა მოცემული ფარდობით.** მოცემულ ორ წერტილზე გამავალი $\Delta$ წრფის $M_1M_2$ ნაკვეთის გაყოფა მოცემული $\lambda$ ფარდობით ნიშნავს $\Delta$ წრფეზე ისეთი $M$ წერტილის პოვნას, რომ [1] (ნახ. 45 გვ. 67):

$$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\cdot\overrightarrow{MM_2}; \qquad (1)$$

(მიაქციეთ ყურადღება ასოების რიგს, რაც ანგარიშგასაწევია).

ადვილი დასანახია, რომ თუ $\lambda>0$, მაშინ $M$ წერტილი უნდა იმყოფებოდეს $M_1$-სა და $M_2$ წერტილს შორის, ვინაიდან ამ შემთხვევაში $\overrightarrow{M_1M}$ და $\overrightarrow{MM_2}$ ვექტორებს ერთი და იგივე მიმართულება უნდა ჰქონდეთ [2]; თუკი $\lambda<0$, მაშინ $M$ წერტილი $\Delta$-ზე $M_1M_2$ ნაკვეთის გარეთ უნდა იმყოფებოდეს, ვინაიდან ამ შემთხვევაში $\overrightarrow{M_1M}$ და $\overrightarrow{MM_2}$ ვექტორებს მოპირდაპირე მიმართულება უნდა ჰქონდეთ [3].

---

[1]) არსებითად. პირობა, რომ $M$ წერტილი იმყოფება $\Delta$ წრფეზე გამომდინარეობს (1) პირობიდან.

[2]) ამას უწოდებენ „შიგა გაყოფას".

[3]) „გარე გაყოფა".

შევნიშნოთ, რომ თუ $\Delta$-ს მივანიჭებთ გარკვეულ მიმართულებას (რა მიმართულებაც უნდა იყოს) და თუ $M_1M$ და $MM_2$-ით აღვნიშნავთ შესაბამ ვექტორთა ალგებრულ მნიშვნელობებს $\Delta$ ღერძის გასწვრივ, მაშინ (1)-ის ნაცვლად შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda. \tag{1a}$$

მოვნახოთ წერტილი $M,(x,\ y,\ z)$, როცა მოცემულია წერტილები $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ და რიცხვი $\lambda$.

პირობის თანახმად $(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)=\lambda\cdot(x_2-x,\ y_2-y,\ z_2-z)$, ე. ი.: $x-x_1=\lambda(x_2-x)$, $y-y_1=\lambda(y_2-y)$, $z-z_1=\lambda(z_2-z)$, საიდანაც პირდაპირ ვღებულობთ:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{2}$$

კერძოდ, $M_1M_2$ ნაკვეთის შუა წერტილის კოორდინატებისათვის მივიღებთ (ამ შემთხვევაში $\lambda=1$):

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}, \tag{3}$$

ე. ი., ეს კოორდინატები არიან ნაკვეთის ბოლოების კოორდინატთა საშუალო არითმეტიკული.

ორი განზომილების შემთხვევაში (2) ფორმულების მაგიერ გვექნება:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \tag{2a}$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. (2) ფორმულები აზრს კარგავენ, თუ $\lambda=-1$. ადვილი დასანახავია, რომ თუ $\lambda$ რჩება $(-1)$-საგან განსხვავებული, მაგრამ მიისწრაფვის ამ მნიშვნელობისაკენ, მაშინ $M$ წერტილი უსასრულოდ შორეული მდებარეობისკენ მიისწრაფვის. ეს გამომდინარეობს როგორც (2) ფორმულებიდან, ისე $\lambda$ სიდიდის გეომეტრიული მნიშვნელობიდან.

#### სავარჯიშო მაგალითები და გამოყენებანი

1. იპოვეთ იმ ნაკვეთის შუაწერტილი, რომელიც აერთებს წერტილებს (0, 1, 0) და (—3, 1, 2).

პ ა ს უ ხ ი: $\left(-\frac{3}{2},\ 1,\ 1\right)$.

2. სიბრტყის $A(0,0)$ და $B(2,2)$ წერტილებზე გამავალ წრფეზე იპოვეთ $M$ წეოტილი რომელიც $AB$-ს ყოფს ფარდობით $\lambda=-\frac{1}{2}$, და შეამოწმეთ ნახაზზე შედეგის მართებულება.

3. მოცემულია ორი წერტილი $A(2, 3, 6)$ და $B(5, 2, 8)$. იპოვეთ $AB$ წრფეზე ისეთი $C$ წერტილი, რომ $B$ იყოს $AC$ ნაკვეთის შუა წერტილი (მ ი თ ი თ ე ბ ა: ამოცანა დაიყვანება $AB$ ნაკვეთის გაყოფაზე ფარდობით $\lambda = -2$).

პ ა ს უ ხ ი: $(8, 1, 10)$.

4. სიბრტყეზე პარალელოგრამის ორი მოსაზღვრე წვეროა მოცემული: $A(2, 5)$ და $B(6, 6)$ და აგრეთვე დიაგონალთა გადაკვეთის წერტილი $K(3, 8)$. იპოვეთ დანარჩენი წვეროები.

პ ა ს უ ხ ი: $(4, 11)$ და $(0, 10)$.

4ა. პარალელოგრამის ორი მოსაზღვრე წვეროა მოცემული: $A(1, 3, -3)$ და $B(2, -5, 5)$ და აგრეთვე დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი $K(1, 1, 1)$. იპოვეთ დანარჩენი წვეროები.

პ ა ს უ ხ ი: $(1, -1{,}5$ და $(0, 7, -3)$.

5. $M_1(1, 2)$ და $M_2(4, 3)$ წერტილებზე გამავალ წრფეზე იპოვეთ ისეთი $M$ წერტილი, რომ $M_1M$ და $MM_2$ ნაკვეთების სიგრძეთა ფარდობა 2-ის ტოლი იყოს, ე. ი. რომ $|M_1M| = 2|MM_2|$ (მიაქციეთ ყურადღება განსხვავებას უკანასკნელ ფორმულასა და § 41-ის (1) ფორმულას შორის).

ო რ ი პ ა ს უ ხ ი: $M\left(3, \frac{8}{3}\right)$ და $M(7, 4)$.

6. მოცემულია სამკუთხედი თავის წვეროებით $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$; იპოვეთ მის ერთ-ერთ მედიანაზე ისეთი $M$ წერტილი, რომელიც ყოფს მას ფარდობით $\lambda = 2$ (დაწყებული სამკუთხედის წვეროდან); დაამტკიცეთ, რომ ეს წერტილი ორ დანარჩენ მედიანასაც ჰკუთვნის და ყოფს მათ იმავე ფარდობით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მედიანა $AD$, სადაც $D$ არის $BC$ გვერდის შუა წერტილი. $D$-ს კოორდინატები არიან $\frac{x_2+x_3}{2}$, $\frac{y_2+y_3}{2}$. მაშასადამე, $M(x, y)$ წერტილის კოორდინატები იქნებიან:

$$x = \frac{x_1 + 2\,\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

ამ გამოსახულებათა სიმეტრია გვიჩვენებს, რომ ჩვენ მივიღებთ იმავე წერტილს, თუ ორ სხვა მედიანას განვიხილავთ. სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილს ეწოდება მოცემული სამკუთხედის ფართობის სიმძიმის ცენტრი[1]).

7. იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობის სიმძიმის ცენტრი, რომლის წვეროები არიან: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ (იხ. წინა სავარჯიშო).

პ ა ს უ ხ ი: $x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$, $z = \frac{z_1+z_2+z_3}{3}$.

8. დაამტკიცეთ, რომ წრფეები, რომლებიც აერთებენ ტეტრაედრის წვეროებს მოპირდაპირე წახნაგთა ფართობების სიმძიმის ცენტრებთან, იკვეთებიან ერთ $M$ წერტილზე და რომ ეს წერტილი ყოფს ხსენებულ წრფეთა თითოეულ იმ ნაკვეთს, რომელიც მოთავსებულია წვეროსა და მოპირდაპირე წახნაგს შორის, ფარდობით $\lambda = 3$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა სრულიად ანალოგიურია სამკუთხედის მედიანებისათვის მსგავსი დებულების დამტკიცებისა (იხ. სავარჯიშო 6). $M$ წერტილს ეწოდება მოცემული ტ ე ტ რ ა ე დ-

---

[1]) იგი ემთხვევა განსახილველი სამკუთხედის სახის უსასრულოდ თხელი ერთგვაროვანი ფირფიტის სიმძიმის ცენტრს (ამ სიტყვის ჩვეულებრივი, მექანიკური მნიშვნელობით).

რის მოცულობის სიმძიმის ცენტრი. მისი კოორდინატები იქნებიან:

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\quad y=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4},\quad z=\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4},$$

სადაც $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$, $(x_3, y_3, z_3)$, $(x_4, y_4, z_4)$ არიან ტეტრაედრის წვეროების კოორდინატები.

9. დაამტკიცეთ, რომ ტეტრაედრის მოცულობის სიმძიმის ცენტრი ემთხვევა ტეტრაედრის წვეროებში მდებარე ოთხი ერთნაირი ნივთიერი წერტილის სიმძიმის ცენტრს (იხ. § 36, სავარჯ. 4).

დაამტკიცეთ ანალოგიური დებულება სამკუთხედისათვის.

10. თუ ვისარგებლებთ იმით, რომ ორი ნივთიერი წერტილის სიმძიმის ცენტრი ყოფს მათ შემაერთებელ ნაკვეთს მასების უკუპროპორციულ ნაწილებად, გამოიყვანეთ (2) ფორმულები სიმძიმის ცენტრის კოორდინატების სათანადო ფორმულებიდან (§ 36, სავარჯ. 4).

## III. ძირითადი მეტრული ფორმულები მართკუთხოვან კოორდინატებში

ამ განყოფილებაში ჩვენ გამოვიყვანთ იმ ძირითად ფორმულებს, რომელთა სახეც იცვლება, თუ გადავალთ მართკუთხოვან კოორდინატებიდან ზოგადი სახის დეკარტის კოორდინატებზე. ეს ფორმულები გამოთქვამენ ნაკვეთთა ეგრეთ წოდებულ მეტრულ თვისებებს (ამ ტერმინის ახსნა და მისი ზუსტი განმარტება მოცემული იქნება ქვემოთ, § 78-ში). ვინაიდან ასეთი ფორმულები საზოგადოდ საგრძნობლად მარტივდებიან, თუ გამოვიყენებთ მართკუთხოვან კოორდინატებს, ამიტომ ჩვენ ამ განყოფილებაში ვიგულისხმებთ, რომ კოორდინატები მართკუთხოვანია.

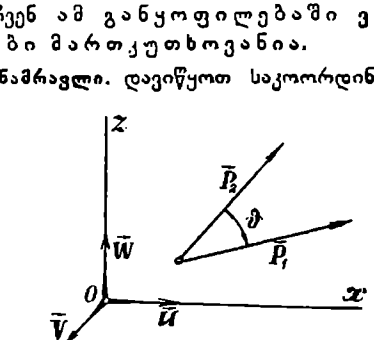
**§ 42. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი.** დავიწყოთ საკოორდინატო ღერძების $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ორტთა სკალარული ნამრავლის განხილვით. სკალარული ნამრავლის თვით განმარტებიდან გვაქვს[1]):

$$\vec{u}^2=\vec{v}^2=\vec{w}^2=1 \qquad (1)$$

და

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{w}\cdot\vec{u}=\vec{u}\cdot\vec{v}=0. \qquad (2)$$

(1) და (2) ფორმულები წარმოადგენენ საკოორდინატო ღერძების ორტთა „გამრავალების ცხრილს“.




ნახ. 46.

ვთქვათ, მოცემულია ორი ვექტორი

$$\vec{P}_1(X_1, Y_1, Z_1) \text{ და } \vec{P}_2(X_2, Y_2, Z_2)$$

და მოითხოვება მათი სკალარული ნამრავლის პოვნა (ნახ. 46).

ჩვენ ამ ამოცანას ორი ხერხით ამოვხსნით; ორივე ერთნაირად მარტივია.

[1]) მაგალითად, გვაქვს: $\vec{u}^2=\vec{u}\cdot\vec{u}=1\cdot 1\cdot\cos 0=1$; $\vec{v}\cdot\vec{w}=1\cdot 1\cdot\cos 90^\circ=0$.

პირველი ხერხი. გვაქვს:

$$\vec{P}_1 = \vec{u}X_1 + \vec{v}Y_1 + \vec{w}Z_1,$$
$$\vec{P}_2 = \vec{u}X_2 + \vec{v}Y_2 + \vec{w}Z_2.$$

§ 22-ში დამტკიცებულის ძალით, საძიებელი ნამრავლის მისაღებად საჭმარისია მარჯვენა მხარეები, როგორც ჩვეულებრივი მრავალწევრები გადავამრავლოთ და შედეგები შევკრიბოთ. ვინაიდან სხვადასხვა ორტის ნამრავლის ტოლია, ამიტომ გვრჩება მხოლოდ იმ წევრთა გადამრავლება, რომლებიც ერთნაირ ორტებს შეიცავენ, რაც მოგვცემს:

$$\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 = \vec{u}^2 X_1 X_2 + \vec{v}^2 Y_1 Y_2 + \vec{w}^2 Z_1 Z_2$$

ან, თუ მხედველობაში მივიღებთ (1)-ს, დაგვრჩება:

$$\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2. \qquad (3)$$

ეს არის ვექტორული ალგებრის ერთ-ერთი ძირითადი ფორმულა.

მეორე ხერხი. გვაქვს:

$$\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 = (\vec{u}X_1 + \vec{v}Y_1 + \vec{w}Z_1) \cdot \vec{P}_2 = X_1(\vec{u}\vec{P}_2) + Y_1(\vec{v}\vec{P}_2) + Z_1(\vec{w}\vec{P}_2),$$

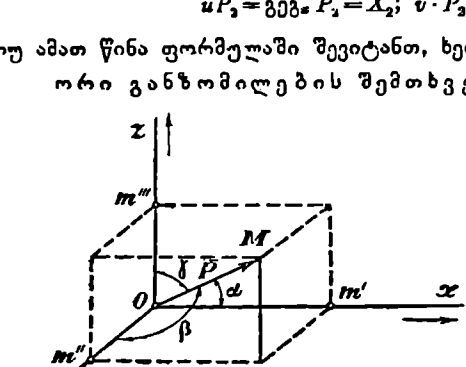
მაგრამ (§ 23)

$$\vec{u}\vec{P}_2 = \text{გეგ}_{\vec{u}}\vec{P}_2 = X_2;\ \vec{v}\cdot\vec{P}_2 = Y_2;\ \vec{w}\cdot\vec{P}_2 = Z_2;$$

თუ ამათ წინა ფორმულაში შევიტანთ, ხელახლა (3)-ს მივიღებთ.

ორი განზომილების შემთხვევაში $\vec{P}_1(X_1, Y_1)$ და $\vec{P}_2(X_2, Y_2)$ ვექტორების სკალარული ნამრავლისათვის მივიღებთ:

$$\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 = X_1 X_2 + Y_1 Y_2. \qquad (3a)$$




ნახ. 47.

**§ 43. ვექტორის სიგრძე, ვექტორის მიერ საკოორდინატო ღერძებთან შედგენილი კუთხეები; თრ წერტილს შორის მანძილი.** ვთქვათ, მოცემულია ვექტორი $\vec{P}(X, Y, Z)$; საჭიროა ვიპოვოთ მისი სიგრძე და ის კუთხეები $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, რომელთაც იგი შეადგენს საკოორდინატო ღერძებთან[1] (ნახ. 47).

სიგრძის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ წინა პარაგრაფის (3) ფორმულით, რომელშიაც მივიღოთ $\vec{P}_1 = \vec{P}_2 = \vec{P}$. ვინაიდან ჩვენს შემთხვევაში

[1]) ამ ნახაზზე $\vec{P}$ ვექტორი თვალსაჩინოებისათვის გამოსახულია სათავეზე მოდებულად, რაც ზოგადობას არ არღვევს.

$\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 = \vec{P}^2 = |\vec{P}|^2$, ამიტომ ხსენებული ფორმულა მოგვცემს:

$$|\vec{P}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \tag{1}$$

ანუ

$$|\vec{P}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{2}$$

მკითხველმა იგივე ფორმულა გამოიყვანოს ელემენტარული გეომეტრიის იმ თეორემის გამოყენებით, რომელიც მართკუთხოვან პარალელეპიპედის დიაგონალის სიგრძის კვადრატს შეეხება.

$\vec{P}$ ვექტორის მიერ საკოორდინატო ღერძებთან შედგენილი $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, კუთხეების გამოსათვლელად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ:

$$X = \text{გეგ}_x \vec{P} = |\vec{P}| \cos\alpha;\quad Y = |\vec{P}| \cos\beta;\quad Z = |\vec{P}| \cos\gamma, \tag{3}$$

საიდანაც, თუ მხედველობაში მივიღებთ (2)-ს,

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},\quad \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Y^2}}. \tag{4}$$

(1)—(4) ფორმულები ვექტორული ალგებრის ძირითადი ფორმულებია.

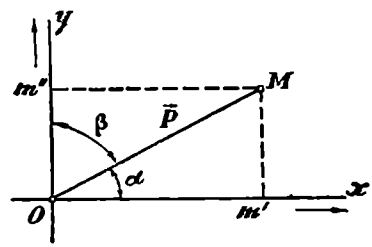
თუ (4) ტოლობებს კვადრატში ავამაღლებთ და შემდეგ შევკრებთ, მივიღებთ:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{X^2 + Y^2 + Z^2} = 1;$$

ე. ი.:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1; \tag{5}$$

ეს მეტად მნიშვნელოვანი ფორმულაა, რომელიც აკავშირებს ნებისმიერ ვექტორის (ან მიმართულების) კუთხეებს, შედგენილს საკოორდინატო ღერძებთან.



ნახ. 48.

ორი განზომილების შემთხვევაში (ნახ. 48) კერძოდ, გვექნება:

$$|\vec{P}| = \sqrt{X^2 + Y^2}, \tag{2a}$$

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}},\quad \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \tag{4a}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1. \tag{5a}$$

ორ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ და $M_2(x_2, y_2, z_2)$ წერტილს შორის მანძილის საპოვნელად (ნახ. 49) საკმარისია გამოვიყენოთ (2) ფორმულა ვექტორისათვის

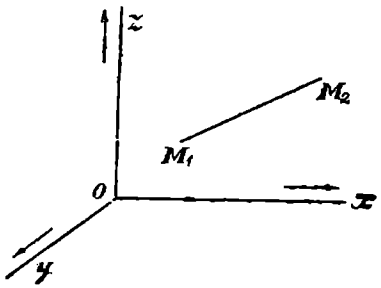
$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$, რაც გვაძლევს:

$$r=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}; \qquad (6)$$

კერძოდ, სათავემდე $M(x,\ y,\ z)$ წერტილის მანძილისათვის (ნახ. 47) გვექნება:

$$r=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \qquad (7)$$

ორი განზომილების შემთხვევაში შესაბამისად მივიღებთ:




ნახ. 49.

$$r=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}, \qquad (6a)$$

$$r=|OM|=\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (7a)$$

(ააგეთ სათანადო ნახაზები).

**სავარჯიშო მაგალითები**

1. იპოვეთ $\vec{P}=(2,\ -1)$ ვექტორის (სიბრტყეზე) სიგრძე და მისი კუთხეები ღერძებთან.

პასუხი; $|\vec{P}|=\sqrt{5}$. $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$,

$$\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

2. იპოვეთ მანძილი ორ წერტილს შორის $M_1(3,\ 2,\ 0)$, $M_2(4,-2,-2)$ და ის კუთხეები, რომელთაც $\overrightarrow{M_1M_2}$ ვექტორი შეადგენს ღერძებთან.

პასუხი: $|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{21}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{21}}$, $\cos\beta=-\frac{4}{\sqrt{21}}$, $\cos\gamma=-\frac{2}{\sqrt{21}}$.

3. მოცემულია (სიბრტყეზე) სამკუთხედი წვეროებით $A(1,\ 1)$, $B(3,3)$, $C(5,6)$. იპოვეთ $AB$ გვერდის შედიანის სიგრძე.

პასუხი: 5.

4. სამკუთხედის წვეროები არიან: $A(0,\ 0)$, $B(3,4)$, $C(0,\ 2)$. იპოვეთ შიგა $A$ კუთხის ბისექტრისისა და $BC$ გვერდის გადაკვეთის $M$ წერტილი (როგორც ცნობილია ელემენტარული გეომეტრიიდან, $M$ წერტილი ყოფს $BC$ გვერდს $|AB|$ და $|AC|$ სიგრძეების პროპორციულ ნაწილებად).

პასუხი; $M\left(\frac{6}{7},\ \frac{18}{7}\right)$.

5. იპოვეთ $\vec{P}$ ვექტორის (სივრცეში) კოორდინატები, თუ ცნობილია, რომ მისი სიგრძე 10-ს ტოლია, ხოლო კუთხეები $Ox$ და $Oy$ ღერძებთან $60°$-ის ტოლია თითოეული. [ისარგებლეთ (3) და (5) ფორმულებით].

პასუხი: $(5,\ 5,\ 5\sqrt{2})$ ან $(5,\ 5,\ -5\sqrt{2})$.

6. იპოვეთ ვექტორი $\vec{P}=(X,\ Y,\ Z)$ სიგრძით $|\vec{P}|=10$, პარალელური $(3,\ -1,\ 3)$ ვექტორისა.

პასუხი: $X=\pm\frac{30}{\sqrt{19}}$, $Y=\pm\frac{10}{\sqrt{19}}$, $Z=\pm\frac{30}{\sqrt{19}}$;

(ერთდროულად აიღება ან ზედა ნიშნები, ან ქვედა).

**§ 44. ორტის კოორდინატები. მიმართულების კოსინუსები.** ვთქვათ, $\vec{e}$ აღნიშნავს ორტს, ე. ი. ვექტორს, რომლის სიგრძე ერთის ტოლია. აღვნიშნოთ $l$, $m$, $n$-ით $\vec{e}$ ორტის კოორდინატები, ასე რომ:

$$\vec{e}=(l,\ m,\ n) \tag{1}$$

წინა პარაგრაფის (1) ფორმულა გვაძლევს (თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $|\vec{e}|=1$):

$$l^2+m^2+n^2=1, \tag{2}$$

ხოლო იმავე პარაგრაფის (3) ფორმულები ასე დაიწერებიან:

$$l=\cos\alpha,\ m=\cos\beta,\ n=\cos\gamma, \tag{3}$$

სადაც $\alpha$, $\beta$ და $\gamma$ აღნიშნავენ ორტის კუთხეებს ღერძებთან.

თუ ამ უკანასკნელ გამოსახულებებს წინა ფორმულაში შევიტანთ, მივიღებთ: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, ე. ი. ფორმულას, რომელიც უკვე გამოყვანილი იყო სხვა გზით [§ 43, (5)]. როგორც ცნობილია, სივრცეში ყოველი ორტი ახასიათებს გარკვეულ მიმართულებას. ამიტომ $l$, $m$, $n$ სიდიდეებს ჩვენ ვუწოდებთ აგრეთვე **მიმართულების კოორდინატებს** ან, თუ მხედველობაში მივიღებთ (3) ფორმულებს, **მიმართულების კოსინუსებს**.

მიმართულების კოსინუსები (ანუ კოორდინატები) ურთიერთ შორის დამოუკიდებელი კი არ არიან, არამედ ყოველთვის დაკავშირებული არიან (2) თანაფარდობით.

ადვილი დასანახია, რომ, პირუკუ, ყოველი სამი სიდიდე $l$, $m$, $n$ დაკავშირებული (2) თანაფარდობით, წარმოადგენს რაღაც მიმართულების კოსინუსებს. მართლაც, ვექტორი $\vec{e}=(l,\ m,\ n)$ არის ორტი, ვინაიდან მისი სიგრძე ერთის ტოლია თანახმად (2)-სა. ამიტომ $l$, $m$, $n$ არიან ამ ორტით დახასიათებული მიმართულების კოსინუსები.

**შენიშვნა.** განზოგადებული დეკარტის კოორდინატების შემთხვევაშიაც $\vec{e}$ ორტის $l$, $m$, $n$ კოორდინატებს ჩვენ ვუწოდებთ **მიმართულების კოორდინატებს**.

საჭიროა შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში ნებისმიერი სიგრძის ვექტორის ნაცვლად ორტით სარგებლობას უპირატესობა არა აქვს.

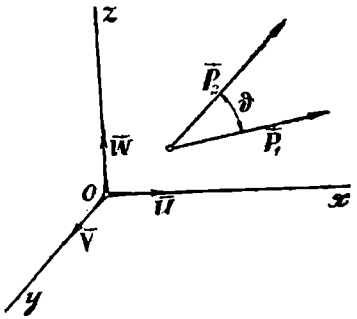
სასარგებლოდ ვთვლით აქვე ხაზი გავუსვათ, რომ ზოგად შემთხვევაში, მიმართულების კოორდინატები $l$, $m$, $n$ არ არიან მიმართულების კოსინუსების $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ თანხვედნილი, სადაც $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ აღნიშნავენ $\vec{e}$ ორტსა და საკოორდინატო ღერძებს შორის კუთხეებს (იხ. შენიშვნა § 47 ბოლოს და § 57).

**§ 45. ორ ვექტორს (ან ორ მიმართულებას) შორის კუთხე.** ვთქვათ, მოცემულია ორი ვექტორი $\vec{P}_1$ $(X_1,\ Y_1,\ Z_1)$ და $\vec{P}_2$ $(X_2,\ Y_2,\ Z_2)$. საჭიროა მათ შორის $\varphi$ კუთხის პოვნა (ნახ. 50).

სკალარული ნამრავლის განმარტების ძალით გვექნება:

$$\cos\vartheta=\frac{\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2}{|\vec{P}_1|\,|\vec{P}_2|}. \tag{1}$$

თუ აქ შევიტანთ მნიშვნელობებს [§ 42, ფორმ. (3) და § 43, ფორმ. (2)]:




ნახ. 50.

$$\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2,$$

$$|\vec{P}_1|=\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}$$

$$|\vec{P}_2|=\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}$$

მივიღებთ მნიშვნელოვან ფორმულას:

$$\cos\vartheta=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}. \tag{2}$$

თუ ნებისმიერი $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორების მაგიერ აიღებთ ორტებს: $\vec{e}_1=(l_1, m_1, n_1)$ და $\vec{e}_2=(l_2, m_2, n_2)$, მაშინ წინა ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\cos\vartheta=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2; \tag{3}$$

ეს საშუალებას გვაძლევს ორ მიმართულებას შორის $\vartheta$ კუთხე გამოვითვალოთ, თუ მოცემულია ამ მიმართულებათა კოსინუსები [ე. ი. სიდიდეები $l_1$, $m_1$, $n_1$ და $l_2$, $m_2$, $n_2$]. კერძოდ, თუ ორტები $\vec{e}_1$ და $\vec{e}_2$ თანმთხვეული არიან, მაშინ წინა ფორმულა უკვე ცნობილ ფორმულად გადაიქცევა: $l^2+m^2+n^2=1$ (თუ ჩავთვლით $l_1=l_2=l$, $m_1=m_2=m$, $n_1=n_2=n$).

ორი განზომილების შემთხვევაში ორ $\vec{P}_1(X_1, Y_1)$ და $\vec{P}_2(X_2, Y_2)$ ვექტორს შორის კუთხისათვის გვექნება ფორმულა:

$$\cos\vartheta=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2}},$$

ხოლო იმ ორ მიმართულებას შორის კუთხისათვის, რომელთა კოორდინატები არიან $(l_1, m_1)$ და $(l_2, m_2)$, გვექნება:

$$\cos\vartheta=l_1l_2+m_1m_2. \tag{3a}$$

#### სავარჯიშო მაგალითები

1. მოცემულია ორი ვექტორი: $\vec{P}=(+1, -1)$ და $\vec{Q}=(-8, 6)$ (სიბრტყეზე). იპოვეთ კუთხე $\vartheta$ მათ შორის.

პასუხი: $\cos\vartheta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$.

2. მოცემულია ორი ვექტორი $\vec{P}=(6, 8)$ და $\vec{Q}=(2, 6)$. იპოვეთ კუთხე მათ შორის.

პასუხი: $\vartheta=\frac{\pi}{2}$.

3. მონახეთ კუთხე (1, 2, 2) და (—1, 0, 1) ვექტორებს შორის.

პასუხი: $\cos\vartheta=\frac{1}{3\sqrt{2}}$.

4. შეამოწმეთ, რომ (1, 2, 3) და (2, 4, 6) ვექტორებს შორის კუთხე ნულის ტოლია.

5. იპოვეთ [სიბრტყეზე] ვექტორი $\vec{P}=(X, Y)$, რომლის სიგრძე 2-ის ტოლია და რომელიც $\vec{Q}=(3, 4)$ ვექტორთან შეადგენს კუთხეს $\vartheta=60°$.

პასუხი: $X$ და $Y$ განისაზღვრებიან შემდეგი სისტემიდან:

$$\frac{3X+4Y}{5\cdot 2}=\frac{1}{2},\quad X^2+Y^2=4,$$

საიდანაც:

$$X=\frac{3\pm 4\sqrt{3}}{5},\quad Y=\frac{4\pm 3\sqrt{3}}{5}.$$

ახსენით რატომ მივიღეთ ორი ამონახსენი.

**§ 46. ორი ვექტორის (ან ორი მიმართულების) მართობულობის პირობა.** იმისათვის, რომ ორი ვექტორი ურთიერთმართობი იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ (§ 22): $\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2=0$, რაც მოგვცემს [§ 42, ფორმ. (3)]:

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0; \tag{1}$$

სწორედ ასე არის ორი ვექტორის მართობულობის პირობა, გამოსახული ანალიზურად (ეს პირობა გამომდინარეობს აგრეთვე წინა პარაგრაფის ფორმულიდან, რომელიც $\cos\vartheta$-სათვის იყო მიღებული).

კერძოდ, თუ $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორების სიგრძეები ერთის ტოლია, მაშინ წინა პარაგრაფის აღნიშვნების მიხედვით, უკანასკნელი ფორმულა გვაძლევს ორი მიმართულების მართობულობის პირობას:

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0, \tag{2}$$

გამოსახულს მიმართულების კოსინუსების საშუალებით.

ორი განზომილების შემთხვევაში (1) და (2)-ის მაგიერ შესაბამისად მივიღებთ:

$$X_1X_2+Y_1Y_2=0, \tag{1a}$$

და

$$l_1l_2+m_1m_2=0. \tag{2a}$$

**სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი**

1. დაამტკიცეთ, რომ (სიბრტყეზე) ვექტორები $\vec{P}(X, Y)$ და $\vec{Q}(-Y, X)$ ყოველთვის ურთიერთმართობი არიან.

2. იპოვეთ ვექტორი $\vec{P}$ (სიბრტყეზე) სიგრძით 5, მართობი $\vec{Q}=(1, 2)$ ვექტორისა.

პასუხი: $X=\pm 2\sqrt{5}$, $Y=\mp\sqrt{5}$.

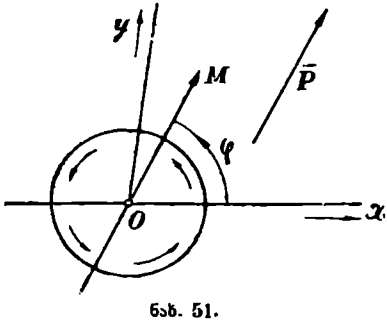
3. დაამტკიცეთ, რომ მოცემული $\vec{Q}_0=(X_0, Y_0)$ ვექტორისადმი მართობი $\vec{P}=(X, Y)$ ვექტორის კოორდინატები ყოველთვის შეიძლება ასე წარმოვიდგინოთ: $X=-mY_0$, $Y=mX_0$, სადაც $m$ რაღაც რიცხვია (იხ. სავარჯ. 1).

**§ 47. სიბრტყეზე მიმართულების განსაზღვრა.** იმის მაგიერ, რომ განვიხილოთ ორი კუთხე ($\alpha$ და $\beta$), რომელთაც ვექტორი (ან, საზოგადოდ, რომელიმე მიმართულება) შეადგენს $Ox$ და $Oy$ ღერძთან, შეიძლება დავკმაყოფილდეთ მხოლოდ ერთი კუთხით. მაგრამ ამისათვის საჭიროა წინასწარი შეთანხმება $Oxy$ სიბრტყეზე ბრუნვის დადებითი მიმართულების შესახებ. პირობა, რომელსაც ჩვენ აქ ერთხელ და სამუდამოდ მივიღებთ, შეეხება როგორც მართკუთხოვან, ისე ზოგადი სახის დეკარტის კოორდინატებს და საჭიროა მისი კარგად დამახსოვრება.

თავდაპირველად შევთანხმდეთ შემდეგში. ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია ორი არაპარალელური ვექტორი $\vec{u}$, $\vec{v}$. აღებული მიმდევრობით ამ ვექტორების მიერ განსაზღვრული ბრუნვის მიმართულებად სიბრტყეზე ჩვენ ვიგულისხმებთ იმას, რომელიც უმოკლესი გზით (ე. ი. $\pi$-ზე ნაკლებ კუთხით მობრუნებით) გადაგვიყვანს პირველი ვექტორის დადებითი მიმართულებიდან მეორის დადებით მიმართულებაზე.

$Oxy$ სიბრტყეზე ბრუნვის დადებით მიმართულებად ჩვენ მივიღებთ მიმართულებას, რომელსაც განსაზღვრავენ $Ox$, $Oy$ ღერძთა საკოორდინატო ვექტორები $\vec{u}$, $\vec{v}$. სხვანაირად, $Oxy$ სიბრტყეზე ბრუნვის დადებითი მიმართულება არის ის, რომლითაც უნდა მოვაბრუნოთ $Ox$ ღერძი $\pi$-ზე ნაკლები კუთხით, რომ იგი დაემთხვეს $Oy$ ღერძს[1]). ნახ. 51-ზე ბრუნვის დადებითი მიმართულება აღნიშნულია ისრებიანი წრით.

ახლა ვთქვათ, $\vec{P}$ არის რომელიმე ვექტორი $Oxy$ სიბრტყეზე; გადავიტანოთ იგი $\overrightarrow{OM}$ მდებარეობაში ისე, რომ მისი სათავე მოთავსდეს კოორდინატთა სათავეზე (ნახ. 51), და აღვნიშნოთ $\varphi$-თ კუთხე, რომელზედაც უნდა მოვაბრუნოთ $Ox$ ღერძი დადებითი მიმართულებით იმისათვის, რომ მისი მიმართულება $\vec{P}=\overrightarrow{OM}$ მიმართულებას ემთხვეოდეს. ცხადია, რომ ეს კუთხე $\varphi$ სავსებით განსაზღვრავს მოცემული ვექტორის მიმართულებას; ამ კუთხეს ჩვენ ხშირად აღვნიშნავთ $\widehat{Ox, \vec{P}}$ სიმბოლოთი, სადაც პირველ ადგილზე ის მიმართულება დაისმის, საიდანაც ხდება კუთხის ათვლა. $\varphi$ კუთხეს შეიძლება $2\pi$-ზე მეტი მნიშვნელობაც მიეწეროს, როგორც ეს ტრიგონომეტრიაში ხდება. სიბრტყეზე ერთსა და იმავე მიმართულებას ეთანადება $\varphi$ კუთხის უამრავი მნიშვნელობა, ერთიმეორისაგან განსხვავებული $2k\pi$ სახის სიდიდით, სადაც $k$ მთელი რიცხვია. მართლაც, რამდენჯერაც უნდა მოვაბრუნოთ აღებუ-



ნახ. 51.

[1]) ორი ღერძი თანმხვეულად ჩაითვლება მხოლოდ მაშინ, თუ მათი მიმართულებანი (დადებითი მიმართულებანი) თანმხვეულია.

ლი მიმართულება $2\pi$ კუთხით (სრული შემობრუნება), ჩვენ ისევე წინას დავუბრუნდებით.

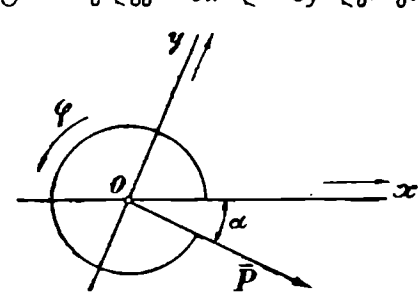
შევნიშნოთ, რომ $\varphi$ კუთხე შეიძლება ავთვალოთ $Ox$ ღერძის უარყოფითი მიმართულებითაც, მაგრამ, სამაგიეროდ, ამ კუთხეს უარყოფითი მნიშვნელობანი მიეწერება (როგორც ეს ტრიგონომეტრიაში ხდება).

დავუმატოთ კიდევ, რომ ასეთი სახით განმარტებული $\varphi$ კუთხე ყოველთვის იგივე არ არის, რაც $\alpha$ კუთხე $\vec{P}$ ვექტორსა და $Ox$ ღერძს შორის, რომელიც განმარტებული იყო ორ მიმართულებას შორის კუთხის შესახებ წინათ მოყვანილი პირობების მიხედვით. ეს წარმოიშობა იმ განსხვავებიდან, რასაც ადგილი აქვს $\alpha$ და $\varphi$ კუთხის ათვლის პირობებში. სახელდობრ, $\alpha$ კუთხე არის, პირობის თანახმად, დადებითი კუთხე, რომელიც $\pi$-ის არ აღემატება, მაშინ, როდესაც $\varphi$ კუთხეს შეუძლია ნებისმიერი მნიშვნელობა მიიღოს, კერძოდ, უარყოფითიც. მაგალითად, 52-ე ნახაზზე წარმოდგენილ შემთხვევაში $\varphi$ კუთხე არ არის $\alpha$-ს ტოლი; სახელდობრ, $\varphi$ კუთხეს შეიძლება მიეწეროს მნიშვნელობა $(-\alpha)$ ან $2\pi-\alpha$ ან, უფრო ზოგადად, $-\alpha+2k\pi$.

ახლა დავუბრუნდეთ მართკუთხოვან კოორდინატებს. ადვილი დასანახია, რომ ამ შემთხვევაში ყოველთვის გვექნება (ნახ. 53):

$$\cos\alpha=\cos\varphi,\quad \cos\beta=\sin\varphi, \tag{1}$$

სადაც $\alpha$ და $\beta$, ისე როგორც წინათ, აღნიშნავენ კუთხეებს (0-სა და $\pi$-ს შორის მოთავსებულს), რომელთაც $\vec{P}$ ვექტორი შეადგენს $Ox$ და $Oy$ ღერძებთან; ეს ფორმულები მართებულია არიან, რომელ მეოთხედშიაც უნდა იყოს $\varphi$ კუთხე [1]).



ნახ. 52.

შესაბამისად, $\vec{P}$ ვექტორის $X$ და $Y$ კოორდინატებისათვის გვექნება:

$$X=|\vec{P}|\cos\varphi,\quad Y=|\vec{P}|\sin\varphi \tag{2}$$

სადაც, როგორც ყოველთვის,

$$|\vec{P}|=\sqrt{X^2+Y^2}. \tag{3}$$

აქედან გამოგვყავს:

$$\cos\varphi=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}},\qquad \sin\varphi=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}} \tag{4}$$

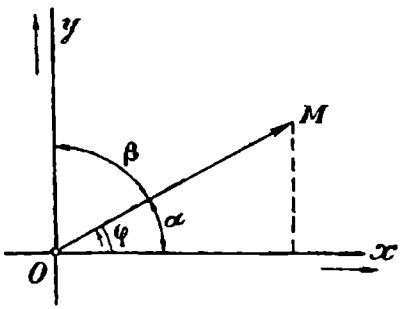
---

[1]) მკითხველი ადვილად შეამოწმებს, რომ თუ $\varphi$-ს ვიგულისხმებთ 0-სა და $2\pi$-ს შორის არსებულად, გვექნება: პირველ მეოთხედში: $\alpha=\varphi$, $\beta=\frac{\pi}{2}-\varphi$; მეორეში: $\alpha=\varphi$, $\beta=\varphi-\frac{\pi}{2}$; მესამეში: $\alpha=2\pi-\varphi$, $\beta=\varphi-\frac{\pi}{2}$; მეოთხეში: $\alpha=2\pi-\varphi$, $\beta=2\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi$.

თუ მეორეს პირველზე გავყოფთ, კიდევ შემდეგს მივიღებთ:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{Y}{X}. \tag{5}$$

(4) ფორმულები საშუალებას გვაძლევენ სავსებით განვსაზღვროთ $\varphi$ კუთხე (თუ არ ჩავთვლით $2k\pi$ სახის შესაკრებს, რომელსაც არავითარი გავლენა არა აქვს მიმართულებაზე), როცა მოცემულია ვექტორის კოორდინატები. $\varphi$ ს გამოსათვლელად საკმარისია ვისარგებლოთ ამ ფორმულებიდან მხოლოდ ერთ-ერთით, მაგალითად, ფორმულით $\sin\varphi$-სათვის; მაგრამ ეს ფორმულა, სავსებით არ განსაზღვრავს ვექტორის მიმართულებას. ის რომ სრულიად განსაზღვრული გახდეს, უნდა ვიცოდეთ კიდევ $\varphi$ კუთხის რომელიმე მეორე ტრიგონომეტრიული ფუნქციის ნიშანი, მაგალითად, $\cos\varphi$-ს ნიშანი. ყველაზე მარტივია $X$ და $Y$-ის ნიშნების მიხედვით (რომლებიც იგივეა, რაც $\cos\varphi$ და $\sin\varphi$-ს ნიშნები) განისაზღვროს ის მეოთხედი, რომელშიაც იმყოფება $\overrightarrow{P}$ ს მიმართულება, ხოლო ცხრილებით გამოთვლა ერთ-ერთი (4) ან (5) ფორმულით მოხდეს. მაგალითად, თუ $X=+2$, $Y=-2$, მაშინ საძიებელი მიმართულება იმყოფება მეოთხე მეოთხედში. ვინაიდან $\operatorname{tg}\varphi=\frac{-2}{+2}=-1$, ამიტომ აშკარაა, რომ: $\varphi=-45^\circ$ ან, რაც იგივეა, $\varphi=360^\circ-45^\circ=315^\circ$.



ნახ. 53.

როცა განსახილველი ვექტორის სიგრძე ერთის ტოლია, ე. ი. როცა ჩვენ საქმე გვაქვს $\vec{e}$ ორტთან, მაშინ მისი $(l, m, n)$ კოორდინატები ამავე დროს არიან მიმართულების კოსინუსები (§ 44); (1) ფორმულები ამ შემთხვევისათვის გვაძლევენ:

$$l=\cos\varphi,\quad m=\sin\varphi. \tag{6}$$

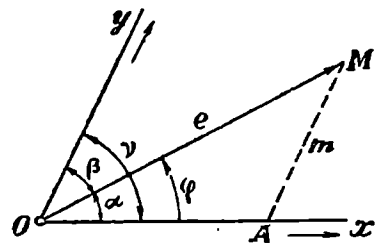
თანაფარდობა $l^2+m^2=1$, რომელიც ამ სიდიდეებს აკავშირებს, დაიყვანება, ამგვარად, ცნობილ ტრიგონომეტრიულ იგივეობაზე

$$\sin^2+\cos^2\varphi=1.$$

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა.** როგორც უკვე § 44-ის ბოლოს იყო აღნიშნული, არამართკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაში, გეზის კოორდინატები არ ემთხვევიან გეზის კოსინუსებს.

განვიხილოთ, მაგალითად, განუზოგადებელი ირიბკუთხოვანი კოორდინატები სიბრტყეზე. ვთქვათ, რომ $\vec{e}$ არის ორტი, მოცემული მიმართულების

დამახასიათებელი, $l$, $m$—მისი კოორდინატებია (ე. ი. $\vec{e}$ ორტის კოორდინატები), ხოლო $\alpha$, $\beta$—წარმოადგენენ კუთხეებს $\vec{e}$ ორტის შედგენილს $Ox$, $Oy$ ღერძებთან. თუ განვიხილავთ სამკუთხედს $OAM$ (ნახ. 54, რომელზედაც $\overrightarrow{OM}=\vec{e}$), ადვილად დავრწმუნდებით, რომ



ნახ. 54.

$$l=\frac{\sin(\nu-\varphi)}{\sin\nu}, \qquad m=\frac{\sin\varphi}{\sin\nu}, \qquad (7)$$

სადაც $\nu$ არის საკოორდინატო კუთხე, ხოლო $\varphi$ ის კუთხეა, რომელსაც $\vec{e}$ ორტი ადგენს $Ox$ ღერძთან; ეს კუთხე ათვლილია ისე, როგორც ზემოთ არის ნაჩვენები.

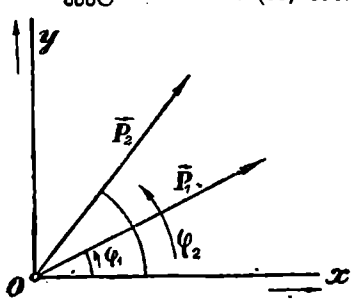
მიმართულების კოსინუსებისთვის კი ცხადია, გვექნება:

$$\cos\alpha=\cos\varphi, \quad \cos\beta=\cos(\nu-\varphi). \qquad (8)$$

**§ 48. სიბრტყეზე ორ მიმართულებას შორის კუთხის განსაზღვრა, რომელსაც ნიშანი მიეწერება.** ვთქვათ, მოცემულია $Oxy$ სიბრტყეზე ორი ვექტორი

$$\vec{P}_1=(X_1, Y_1) \text{ და } \vec{P}_2=(X_2, Y_2).$$

ორ ვექტორს შორის (ან, საზოგადოდ, მიმართულებას შორის) კუთხის შესახებ ჩვენ მივიღოთ პირობა იმის ანალოგიური, რაც წინა პარაგრაფში იყო მიღებული $\varphi$ კუთხის შესახებ მოცემულ ვექტორსა და $Ox$ ღერძს შორის; სახელდობრ, ავთვალოთ ეს კუთხე დადებითი მიმართულებით ერთ-ერთი მოცემული ვექტორიდან (საზოგადოდ, მიმართულებიდან). შესაძლებლად მივიჩნიოთ ათვლა უარყოფითი მიმართულებითაც, მაგრამ იმ პირობით, რომ კუთხეს ამ შემთხვევაში უარყოფითი მნიშვნელობანი მიეწეროს. თუ



ნახ. 55.

კუთხის ათვლა ხდება $\vec{P}_1$-ის მიმართულებიდან, მაშინ მას აღვნიშნავთ $\widehat{\vec{P}_1\vec{P}_2}$ სიმბოლოთი, სადაც პირველ ადგილზე დაისმის ვექტორი, რომლიდანაც ათვლება კუთხე.

ახლა ვიპოვოთ კუთხე $\vec{P}_1$-სა და $\vec{P}_2$-ს შორის. ამისათვის აღვნიშნოთ $\varphi_1$ და $\varphi_2$-ით კუთხეები, რომელთაც ეს ვექტორები შეადგენენ $Ox$ ღერძთან (იხ. წინა პარაგრაფი). მაშინ ცხადია, რომ (ნახ. 55): $\widehat{\vec{P}_1\vec{P}_2}=\varphi_2-\varphi_1$ (თუ რასაკვირველია, არ ჩავთვლით $2k\pi$ სახის შესაკრებს, რომლის მიმატებით წინა ტოლობის მარჯვენა მხარე არაფრით არ იცვლება). თუ სიმოკლისათვის აღვნიშნავთ $\widehat{P_1P_2}$ კუთხეს $\varphi$-თი, გვექნება: $\cos\varphi=\cos(\varphi_2-\varphi_1)$; $\sin\varphi=\sin(\varphi_2-\varphi_1)$;

ჰქედან, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\cos\varphi_2\cos\varphi_1+\sin\varphi_2\sin\varphi_1$, $\sin(\varphi_2-\varphi_1)=\sin\varphi_2\cos\varphi_1-\cos\varphi_2\sin\varphi_1$ და რომ

$$\cos\varphi_1=\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}},\quad \sin\varphi_1=\frac{Y_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}}$$

(და ანალოგიურად $\cos\varphi_2$ და $\sin\varphi_2$-სათვის), საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\cos\varphi=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}\ \sqrt{X_2^2+Y_2^2}}, \tag{1}$$

$$\sin\varphi=\frac{X_1Y_2-X_2Y_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}\ \sqrt{X_2^2+Y_2^2}} \tag{2}$$

თუ (2) ტოლობას (1)-ზე გავყოფთ, მივიღებთ კიდევ შემდეგს:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{X_1Y_2-X_2Y_1}{X_1X_2+Y_1Y_2}. \tag{3}$$

ყურადღება მივაქციოთ იმ გარემოებას, რომ (1) ფორმულის მარჯვენა მხარე სიმეტრიულია ორივე ვექტორის კოორდინატების მიმართ, მაშინ, როდესაც (2) და (3) ფორმულების მარჯვენა მხარეები ნიშანს იცვლიან მოპირდაპირეზე, თუ როლებს შევუცვლით $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორებს.

ეს მოსალოდნელიც იყო, ვინაიდან, აშკარაა, რომ $\widehat{\vec{P}_2,\vec{P}_1}=-(\widehat{\vec{P}_1,\vec{P}_2})+2k\pi$ და ამიტომ $\cos(\widehat{\vec{P}_2,\vec{P}_1})=\cos(\widehat{\vec{P}_1,\vec{P}_2})$ და $(\sin\widehat{\vec{P}_2,\vec{P}_1})=-\sin(\widehat{\vec{P}_1,\vec{P}_2})$.

(1) და (2) ფორმულები საშუალებით განსაზღვრავენ $\varphi$ კუთხეს (თუ, რასაკვირველია, არ ჩავთვლით $2k\pi$ სახის შესაკრებს). $\varphi$ კუთხის ნამდვილი გამოთვლისათვის, შეიძლება ვისარგებლოთ (3) ფორმულით, მეოთხედი კი განვსაზღვროთ $\cos\varphi$ და $\sin\varphi$-ს ნიშნების მიხედვით, რომლებიც იგივეა, რაც $X_1X_2+Y_1Y_2$-ისა და $X_1Y_2-X_2Y_1$-ის ნიშნები.

#### სავარჯიშო მაგალითები

**1.** სიბრტყეზე აღებული ორი ვექტორის მართობულობის პირობა გამოიყვანეთ (1) და (3) ფორმულის გამოყენებით.

**2.** იპოვეთ ის $\vec{P}=(X,\ Y)$ ვექტორი, რომლის სიგრძე 2-ის ტოლია და რომელიც შეადგენს $\vec{Q}=(3,\ 4)$ ვექტორთან კუთხეს $\widehat{\vec{Q},\vec{P}}=+60^\circ$ (იხ. § 45-ის ბოლოში სავარჯიშო 5).

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამოხსნისათვის შეგვიძლია ვისარგებლოთ ხსენებული სავარჯიშოს შედეგებით, თუ ნიშანს ისე შევარჩევთ, რომ $\sin\widehat{\vec{Q},\vec{P}}$ დადებითი იყოს, ე. ი., ისე, რომ $3Y-4X>0$; აქედან გამომდინარეობს, რომ საჭიროა ხსენებული სავარჯიშოს ფორმულებში ქვედა ნიშნების აღება.

შეიძლება ამოცანის ამოხსნა უშუალოდაც, თუ ვიპოვით კუთხეს $\varphi+60^\circ$, რომელსაც $\vec{P}$ ვექტორი შეადგენს $Ox$ ღერძთან, სადაც $\varphi$ არის კუთხე $\widehat{\vec{Ox},\vec{Q}}$ გვაქვს:

$\cos(\varphi+60^\circ)=\cos\varphi\cdot\cos 60^\circ-\sin\varphi\cdot\sin 60^\circ$, $\sin(\varphi+60^\circ)=\sin\varphi\cdot\cos 60^\circ+\cos\varphi\cdot\sin 60^\circ$,

მაგრამ

$$\cos\varphi=\frac{3}{5},\quad \sin\varphi=\frac{4}{5},\quad \cos 60^\circ=\frac{1}{2},\quad \sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

საიდანაც:

$$\cos(\varphi+60^\circ)=\frac{3-4\sqrt{3}}{10},\quad \sin(\varphi+60^\circ)=\frac{4+3\sqrt{3}}{10};$$

ბოლოს,

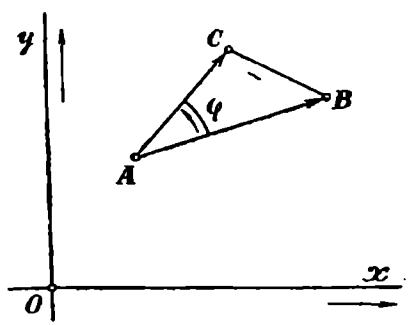
$$X=2\cos(\varphi+60^\circ)=\frac{3-4\sqrt{3}}{5},\qquad Y=2\sin(\varphi+60^\circ)=\frac{4+3\sqrt{3}}{5}.$$

ჩვენ რომ გვქონოდა $\widehat{\vec{Q},\vec{r}}=-60^\circ$, მაშინ მივიღებდით ხსენებულ სავარჯიშოს ფორმულებს ზედა ნიშნებით.

**§ 49. საერთო სათავის მქონე ორ ვექტორზე აგებული სამკუთხედის ფართობი.** ვთქვათ, $\vec{P}=\vec{AB}=(X_1,\ Y_1)$ და $\vec{P}_2=\vec{AC}=(X_2,\ Y_2)$ მოცემული ვექტორებია საერთო სათავით $A$ (ნახ. 56a, 56b).

თუ შევაერთებთ $B$ და $C$ ბოლოებს, მივიღებთ $ABC$ სამკუთხედს. ვიპოვოთ ამ სამკუთხედის $S$ ფართობი. ცნობილი ფორმულის მიხედვით გვექნება:

$$S=\frac{1}{2}|\vec{P}_1|\cdot|\vec{P}_2|\cdot\sin\varphi \qquad (1)$$




ნახ. 56a.

სადაც φ აღნიშნავს კუთხეს $\widehat{\vec{P}_1,\vec{P}_2}$.

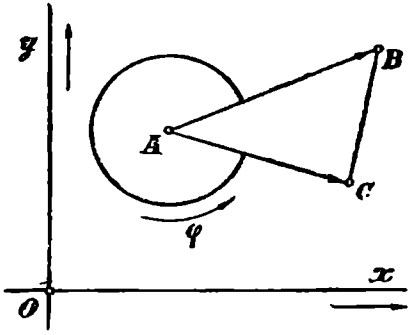
არსებითად, sin φ-ს მაგიერ უნდა დაწერილიყო $|\sin\varphi|$, ვინაიდან sin φ-ს შეუძლია უარყოფითი მნიშვნელობანიც მიიღოს. მაგრამ უფრო მოხერხებულია (1) ფორმულით სარგებლობა იმ სახით, როგორც ის დაწერილია. ეს ფორმულა მიაწერს $ABC$ სამკუთხედის ფართობს გარკვეულ ნიშანს. ადვილი გასაგებია, რომ ეს ნიშანი ეთანხმება ქვემომოყვანილ წესს, რომლითაც ჩვენ ვიხელმძღვანელებთ:

სამკუთხედის ფართობს ჩავთვლით დადებითად თუ $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ ვექტორებით განზღვრული ბრუნვის დადებითი მიმართულება[1]) თანხვდება $Ox$, $Oy$ საკოორდინატო ღერძთა ბრუნვის დადებით მიმართულებას. წინააღმდეგ შემთხვევაში ფართობს ჩავთვლით უარყოფითად.

ადვილი დასანახია, რომ ამ წესის თანახმად, ფართობი, იქნება დადებითი, თუ $ABCA$ მიმართულებით სამკუთხედის პერიმეტრის აღწერის დროს დამკვირვებელი ბრუნავს $Oxy$ სიბრტყეზე დადებითი მიმართულებით (ნახ. 56a); წინააღმდეგ შემთხვევაში კი ფართობი უარყოფითი იქნება (ნახ. 56b).

[1]) იხ. § 47.

ახლა, თუ (1) ფორმულაში sin φ-ის ნაცვლად ჩავსვამთ წინა პარაგრაფის (2) გამოსახულებას, მივიღებთ მეტად მნიშვნელოვან ფორმულას:




ნახ. 56b.

$$S=\frac{1}{2}(X_1Y_2-X_2Y_1), \qquad (2)$$

რომელიც მართებულია როგორც სიდიდით, ისე ნიშნით.

ამ ფორმულის წარმოდგენა შეიძლება დეტერმინანტის საშუალებითაც:

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

$\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობისათვის ცხადია, გვექნება ფორმულა:

$$S=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix};$$

ეს ფორმულაც ფართობს ანიჭებს გარკვეულ ნიშანს, იმ წესის თანახმად, რაც ზემოთ იყო აღნიშნული.

**§ 50. სამი წვეროთი მოცემული სამკუთხედის ფართობი.** ვთქვათ, მოცემულია სამი წერტილი: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ და $C(x_3, y_3)$. საჭიროა ვიპოვოთ $ABC$ სამკუთხედის $S$ ფართობი. ამასთანავე იგულისხმება, რომ $ABC$ სამკუთხედის პერიმეტრი აღიწერება $ABCA$ მიმართულებით და ამის შესაბამისად აიღება ფართობის ნიშანი (იხ. წინა პარაგრაფი).

საძიებელი ფართობი არის ის ფართობი, რომელიც აგებულია $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორებზე, ისე, როგორც წინა პარაგრაფში.

ჩვენს შემთხვევაში:

$$X_1=x_2-x_1,\quad Y_1=y_2-y_1,$$
$$X_2=x_3-x_1,\quad Y_2=y_3-y_1.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს წინა პარაგრაფის (2) ფორმულაში შევიტანთ, მივიღებთ:

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1, & y_2-y_1 \\ x_3-x_1, & y_3-y_1 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

ამ ფორმულას შეიძლება მიეცეს მეტად სიმეტრიული სახე, სახელდობრ:

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}; \qquad (2)$$

ამაში რომ დავრწმუნდეთ, საკმარისია ეს დეტერმინანტი გარდავქმნათ (იხ. § 38), რისთვისაც, მეორე და მესამე სტრიქონს მიმდევრობით გამოვაკლოთ პირველი სტრიქონი.

წინა ფორმულიდან შეიძლება გამოვიყვანოთ სიბრტყეზე სამი წერტილის კოლინეარობის პირობა, რომელიც გამოითქმება § 38-ის (3) ფორმულით. მართლაც, სამი წერტილის კოლინეარობისთვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ $S=0$, ეს კი გვაძლევს აღნიშნულ ფორმულას. მაგრამ, კოლინეარობის პირობის ასეთი გამოყვანა უფრო კერძო სახისაა, ვინემ § 38-ში განხილული, ვინაიდან იქ მართობული კოორდინატები არ იყო ნაგულისხმევი.

#### სავარჯიშოები

1. იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომლის წვეროები არიან

$$A(1, 0),\quad B(2, 3),\quad C(2, 2).$$

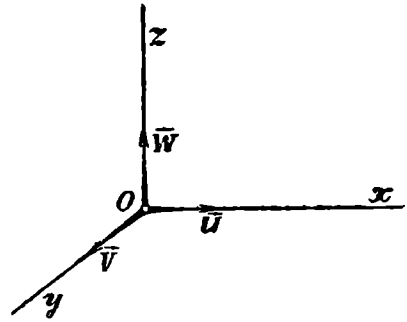
პასუხი: $S=-\frac{1}{2}$.

2. იპოვეთ $ABC$ სამკუთხედის $A$ წვეროს შესაბამი სიმაღლის სიგრძე $h$, თუ სამკუთხედის წვეროებია:

$$A(1, 1),\ B(3, 2)\ \text{და}\ C(4, 4)$$

პასუხი: $h=\frac{2|S|}{|BC|}=\frac{3}{\sqrt{5}}$.

**§ 51. მოცემული ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი**[1]. ამ §-ში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ საკოორდინატო ღერძები $Ox$, $Oy$, $Oz$, აღებულნი აქ ნაჩვენები მიმდევრობით, შეადგენენ მარცხენა სისტემას[2] (§ 24). ვექტორული ნამრავლის განმარტების თანახმად (§ 25) ორტებისთვის გვექნება შემდეგი „გამრავლების ცხრილი" (ნახ. 57):



ნახ. 57.

$$\vec{u}\times\vec{u}=\vec{v}\times\vec{v}=\vec{w}\times\vec{w}=0 \qquad (1)$$

$$\vec{v}\times\vec{w}=\vec{u},\ \vec{w}\times\vec{u}=\vec{v},\ \vec{u}\times\vec{v}=\vec{w}. \qquad (2)$$

საკმარისია (1) ფორმულებს გარდა დავიხსომოთ კიდევ (2) ფორმულებიდან პირველი; დანარჩენი მიიღება მისგან წრიული გადასმით.

---

[1]) პირველ წაკითხვისას შეიძლება ამ პარაგრაფის გამოტოვება.

[2]) საზოგადოდ, როცა საქმე გვექნება ვექტორულ ნამრავლთან, ყოველთვის ვიგულისხმებთ კოორდინატთა სისტემას მარცხენად. მაგრამ ყველა გამოყვანილი ფორმულა მართებული დარჩება მარჯვენა სისტემისათვისაც, თუ ვექტორული ნამრავლის $c$) მოთხოვნილებას შევცვლით იმ მოთხოვნილებით, რომ ვექტორები $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{K}$ შეადგენენ მარჯვენა სისტემას.

გარდა (2) ფორმულებისა შეიძლება განვიხილოთ შემდეგი ფორმულები:

$$\vec{w}\times\vec{v}=-\vec{u},\ \vec{u}\times\vec{w}=-\vec{v},\ \vec{v}\times\vec{u}=-\vec{w} \tag{2a}$$

ახლა მოვნახოთ მოცემული ორი ვექტორის

$$\vec{P}_1=\vec{u}X_1+\vec{v}Y_1+\vec{w}Z_1 \text{ და } \vec{P}_2=\vec{u}X_2+\vec{v}Y_2+\vec{w}Z_2$$

ვექტორული ნამრავლი.

თუ მარჯვენა ნაწილებს გადავამრავლებთ ვექტორულად (იხ. § 25) და მხედველობაში გვექნება (1) და (2) ფორმულები, ადვილად მივიღებთ:

$$\vec{P}_1\times\vec{P}_2=\vec{u}(Y_1Z_2-Y_2Z_1)+\vec{v}(Z_1X_2-Z_2X_1)+\vec{w}(X_1Y_2-X_2Y_1) \tag{3}$$

ამრიგად, თუ $\vec{R}=(X, Y, Z)$ აღნიშნავს $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორთა ვექტორულ ნამრავლს, მაშინ

$$X=Y_1Z_2-Y_2Z_1,\ Y=Z_1X_2-Z_2X_1,\ Z=X_1Y_2-X_2Y_1. \tag{4}$$

(3) და მისგან გამომდინარე (4) ფორმულის დახსომება ადვილია, თუ შევნიშნავთ, რომ (1) ფორმულა შეიძლება ჩაიწეროს ასეთი სახით:

$$\vec{P}_1\times\vec{P}_2=\begin{vmatrix} X_1, & Y_1, & Z_1 \\ X_2, & Y_2, & Z_2 \\ \vec{u}, & \vec{v}, & \vec{w} \end{vmatrix}, \tag{5}$$

ამ ფორმულის სისწორეში დავრწმუნდებით, თუ დეტერმინანტს დავშლით უკანასკნელი სტრიქონის ელემენტების მიხედვით.

#### სავარჯიშო მაგალითები და გამოყენებანი

1. იპოვეთ (6, 4, 5) და (−3, 2, 1) ვექტორების ვექტორული ნამრავლი.

პასუხი: (−6, −21, 24).

2. იპოვეთ ფართობი სამკუთხედისა, რომლის ორ გვერდს წარმოადგენენ $\vec{P}_1=(X_1, Y_1, Z_1)$ და $\vec{P}_2=(X_2, Y_2, Z_2)$ ვექტორები, რომელთაც სათავე საერთო აქვთ.

ამოხსნა. თუ $S$ არის საძიებელი ფართობი, მაშინ $S=\frac{1}{2}|\vec{R}|$, აქ $\vec{R}=[\vec{P}_1, \vec{P}_2]$. ვინაიდან $|\vec{R}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$, სადაც $X, Y, Z$ მოიცემიან (4) ფორმულებით, მივიღებთ:

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{(Y_1Z_2-Y_2Z_1)^2+(Z_1X_2-Z_2X_1)^2+(X_1Y_2-X_2Y_1)^2}.$$

3. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ მოცემულია მისი წვეროები:

$$A(x_1, y_1, z_1),\ B(x_2, y_2, z_2),\ C(x_3, y_3, z_3).$$

ამოხსნა: საძიებელი ფართობის მისაღებად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ ეს ამოცანა წინა ამოცანაზე დაიყვანება, თუ, მაგალითად, მივიღებთ:

$$\vec{P}_1=\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1),\ \vec{P}_2=\overrightarrow{AC}(x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1).$$

4. თუ ვისარგებლებთ ვექტორული ნამრავლის განმარტებით და (2) ფორმულებით, ვიპოვოთ $\sin\vartheta$, სადაც $\vartheta$ არის კუთხე მოცემულ ორ ვექტორს შორის.

ამოხსნა. გვაქვს: $P_1 \times P_2 = |\vec{P}_1|\,|\vec{P}_2| \cdot \sin\vartheta$, საიდანაც:

$$\sin\vartheta = \frac{\vec{P}_1 \times \vec{P}_2}{|\vec{P}_1| \cdot |\vec{P}_2|} = \frac{\sqrt{(Y_1Z_2 - Y_2Z_1)^2 + (Z_1X_2 - Z_2X_1)^2 + (X_1Y_2 - X_2Y_1)^2}}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\ \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}$$

5. ისარგებლეთ ფორმულით $\cos^2\vartheta = 1 - \sin^2\vartheta$, ზემომყვანილი გამოსახულებით $\sin\vartheta$-სათვის (იხ. წინა სავარჯ.) და გაბრასახულებით $\cos\vartheta$-სათვის [§ 43, ფორმ. (2)], დაამტკიცეთ ვილერის-ლაგრანჟის იგივობა:

$$(X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2)(X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2) - (X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2)^2 = \\ = (Y_1Z_2 - Y_2Z_1)^2 + (Z_1X_2 - Z_2X_1)^2 + (X_1Y_2 - X_2Y_1)^2,$$

რომელიც მართებულია ექვსი $X_1$, $Y_1$, $Z_1$; $X_2$, $Y_2$, $Z_2$ სიდიდის ყოველი ერთობლიობისათვის.

6. მოვნახოთ $A(x, y, z)$ წერტილში ხოდებული $\vec{P}(X, Y, Z)$ ვექტორის, $C(a, b, c)$ წერტილის მიმართ ვექტორული მომენტი $\vec{L}$-ის გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე [1].

ამოხსნა. განმარტების თანახმად (§ 25, სავარჯიშო 1) გვაქვს:

$$\vec{L} = \overrightarrow{CA} \times \vec{P}.$$

თუ საძიებელ გეგმილებს აღვნიშნავთ $L_x$, $L_y$, $L_z$-ით, თუ შევნიშნავთ, რომ $\overrightarrow{CA} = (x-a,\ y-b,\ z-c)$ და გამოვიყენებთ (4) ფორმულას, მივიღებთ:

$$L_x = (y-b)Z - (z-c)Y, \quad L_y = (z-c)X - (x-a)Z, \quad L_z = (x-a)Y - (y-b)X. \qquad (6)$$

**§ 52. სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი. პარალელეპიპედის მოცულობა** [2]. ახლა გამოვთვალოთ სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი $[\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3]$ (იხ. § 26),

$$\vec{P}_1 = (X_1, Y_1, Z_1), \quad \vec{P}_2 = (X_2, Y_2, Z_2), \quad \vec{P}_3 = (X_3, Y_3, Z_3).$$

დროებით თუ აღვნიშნავთ $\vec{P}_1 \times \vec{P}_2 = \vec{P} = (X, Y, Z)$, მაშინ, განმარტების თანახმად (§ 26), გვექნება:

$$[\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3] = \vec{P} \cdot \vec{P}_3 = XX_3 + YY_3 + ZZ_3,$$

საიდანაც, თუ შევნიშნავთ, რომ $X$, $Y$, $Z$ წარმოადგენენ წინა ჯ-ის (5) დეტერმინანტის უკანასკნელი სტრიქონის ელემენტთა შესაბამ ალგებრულ დამატებებს, დავასკვნით, რომ წინა ტოლობის მარჯვენა ნაწილი გიიღება, თუ აღნიშნული დეტერმინანტის უკანასკნელი სტრიქონის ელემენტებს შევცვლით შესაბამად $X_3$, $Y_3$, $Z_3$-ით. ამრიგად, ვღებულობთ მნიშვნელოვან ფორმულას:

$$[\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3] = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

---

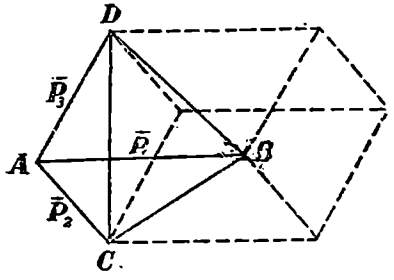
[1] კოორდინატთა ღერძებზე $\vec{L}$ ვექტორის გეგმილებს ჩვენ ვუწოდებთ $\vec{L}$-ის კოორდინატებს, ვინაიდან $\vec{L}$ არის დაბმული ვექტორი და მისი განსაზღვრისათვის საჭიროა მოცემული იყოს არა ხოლოდ მისი გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე, არამედ მოდების წერტილიც.

[2] პირველი წაკითხვის დროს ეს პარაგრაფი შეიძლება გამოტოვოთ.

ჩვენ ვიცით (§ 26), რომ ერთი და იმავე წერტილიდან გადადებულ სამ ვექტორზე $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ აგებული პარალელეპიპედის $V$ მოცულობა ამ ვექტორთა შერეული ნამრავლის ტოლია. მაშასადამე, (1) ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$V=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \tag{2}$$

როგორც ვიცით, ეს ფორმულა მოცულობას მიაწერს გარკვეულ ნიშანს. სახელდობრ, § 26-ში აღნიშნულის თანახმად ცხადია, რომ $V>0$, თუ $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ ვექტორები (ამ მიმდევრობით) ისეთი ორიენტირებული (მარჯვენა ან მარცხენა სისტემის თვალსაზრისით) როგორიც საკოორდინატო ვექტორები. წინააღმდეგ შემთხვევაში $V<0$.



ნახ. 58.

ახლა გამოვთვალოთ მოცემულ სამ ვექტორზე აგებული $ABCD$ ტეტრაედრის მოცულობა (ნახ. 58). ეს მოცულობა $V'$, იმავე ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის $V$ მოცულობის მეექვსედის ტოლია, ვინაიდან $V=Sh$, სადაც $S$ არის $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი, ხოლო $V'=\frac{1}{3}S'h$, სადაც $S'$ არის იმავე $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ ვექტორებზე აგებული სამკუთხედის ფართობი; $h$ არის მართობი, რომელიც $D$ წვეროდან დაშვებულია მოპირდაპირე წახნაგზე,

მაშასადამე,

$$V'=\frac{1}{2}\cdot[\vec{P}_1,\ \vec{P}_2,\ \vec{P}_3]=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

თუ არ გვინდა მოცულობას მივაწეროთ ნიშანი, მაშინ მარჯვენა მხარის აბსოლუტური მნიშვნელობა უნდა ავიღოთ.

უკანასკნელი ფორმულიდან შეიძლება ხელახლა გამოვიყვანოთ სამი ვექტორის კომპლანარობის პირობა (იხ. § 39). მართლაც, ეს პირობა, ცხადია, დაიყვანება პირობაზე $V=0$, რაც ხელახლა გვაძლევს ხსენებული პარაგრაფის (4) ფორმულას. მაგრამ იქ მიღებული პირობა უფრო ზოგადია, ვინაიდან იქ ჩვენ არ ვგულისხმობდით კოორდინატებს მაინცდამაინც მართკუთხოვნად.

#### სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

**1.** ისარგებლეთ (1) ფორმულით და დამტკიცეთ § 26-ის (3)—(3ა) ფორმულებით გამოთქმული თვისებები.

2. იპოვეთ $A(x, y, z)$ წერტილზე მოდებული $\vec{P}=(X, Y, Z)$ ვექტორის სკალარული მომენტები საკოორდინატო ღერძების მიმართ (იხ. § 26, სავარჯიშო მაგ. 2).

ა მ ო ხ ს ნ ა. $C$ წერტილად (იხ. § 28, სავარჯ. მაგ. 2) მივიღოთ კოორდინატთა სათავე; ვისარგებლოთ § 51-ის (6) ფორმულით (სავარჯ. მაგ. 6) და შევნიშნოთ, რომ ღერძების მიმართ სკალარული მომენტების განმარტების თანახმად, საძიებელ მომენტებს წარმოადგენენ $L_x$, $L_y$, $L_z$. მაშასადამე, გვექნება:

$$L_x = yZ - zY, \quad L_y = zX - xZ, \quad L_z = xY - yX.$$

მკითხველს ვანდობთ უკანასკნელი ფორმულების გამოყვანას ამავე §-ის (1) ფორმულიდან.

ვ. (2) ფორმულის გამოყენებით და დეტერმინანტთა გამრავლების წესის მიხედვით დავამტკიცოთ, რომ:

$$|\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3|^2 = \begin{vmatrix} \vec{P}_1 \cdot \vec{P}_1 & \vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 & \vec{P}_1 \cdot \vec{P}_3 \\ \vec{P}_2 \cdot \vec{P}_1 & \vec{P}_2 \cdot \vec{P}_2 & \vec{P}_2 \cdot \vec{P}_3 \\ \vec{P}_3 \cdot \vec{P}_1 & \vec{P}_3 \cdot \vec{P}_2 & \vec{P}_3 \cdot \vec{P}_3 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. გვაქვს:

$$|\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3|^2 = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

თუ გამოვიყენებთ დეტერმინანტთა გამრავლების წესს და თუ ამ გამრავლებას მოვახდენთ სტრიქონების მიხედვით, მივიღებთ:

$$|\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3|^2 = \begin{vmatrix} X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 & X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 & X_1X_3 + Y_1Y_3 + Z_1Z_3 \\ X_2X_1 + Y_2Y_1 + Z_2Z_1 & X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 & X_2X_3 + Y_2Y_3 + Z_2Z_3 \\ X_3X_1 + Y_3Y_1 + Z_3Z_1 & X_3X_2 + Y_3Y_2 + Z_3Z_2 & X_3^2 + Y_3^2 + Z_3^2 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

საიდანაც პირდაპირ გამომდინარეობს საძიებელი ფორმულა.

4. წინა სავარჯიშოს (1) ფორმულით ისარგებლეთ და დაამტკიცეთ ფორმულა.

$$V^2 = |\vec{P}_1|^2 \cdot |\vec{P}_2|^2 \cdot |\vec{P}_3|^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

სადაც $V$ აღნიშნავს $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობას, ხოლო $\lambda$, $\mu$, $\nu$ აღნიშნავენ, შესაბამისად, $\vec{P}_2$-სა და $\vec{P}_3$-ს, $\vec{P}_1$-სა და $\vec{P}_3$-ს შორის კუთხეებს.

5. შ ტ ა უ დ ტ ი ს ს ი ნ უ ს ი. ერთი და იმავე სათავიდან გავლებულს ორ $\vec{e}_1$ და $\vec{e}_2$ ორტებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი ტოლია.

$$|\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \sin(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}) = \sin(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2})$$

ანალოგიურად ამისა, ერთი და იმავე სათავიდან გავლებულს სამ $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ და $\vec{e}_3$ ორტზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობა ნიშნის მიწერით შეიძლება იწოდოს, როგორც ამ ორტებით განსაზღვრული სამწახნაგოვანი კუთხის სინუსი (შტაუდტის სინუსი). ზემოხსენებულის ძა-

ლით, იგი ტოლია შერეული ნამრავლის: $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$. წინა სავარჯიშოს ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ ამ სინჯის კვადრატი ტოლია:

$$[\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3]^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

**§ 53. ტეტრაედრის მოცულობის პოვნა მისი წვეროების კოორდინატების მიხედვით**[1]) თუ $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ არიან ტეტრაედრის წვეროების კოორდინატები (ნახ. 58), ცხადია, მისი მოცულობა $V$ მიიღება, წინა პარაგრაფის (3) ფორმულიდან, თუ ავიღებთ: $\vec{P}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{P}_2 = \overrightarrow{AC}$, $\vec{P}_3 = \overrightarrow{AD}$. მაშასადამე, გვექნება:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}, \tag{1}$$

ანუ (იხ. ანალოგიური გარდაქმნა § 40-ში),

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \tag{2}$$

ამ ფორმულიდან შეიძლება ხელახლა მივიღოთ ოთხი წერტილის კომპლანარობის პირობა, გამოყვანილი § 40-ში სხვა გზით (იხ. წინა პარაგრაფი).

## IV. ძირითადი მეტრული ფორმულები დეკარტის ზოგად კოორდინატებში

ამ განყოფილებაში ჩვენ უკვე მიღებული ფორმულებიდან (რომლებიც გამოყვანილია წინა განყოფილებაში) ზოგიერთს გავავრცელებთ დეკარტის ზოგადი კოორდინატების შემთხვევაში. „კოვარიანტულ კოორდინატთა“ ცნება (თანამედროვე ტენზორული აღრიცხვიდან გადმოტანილი), რომელსაც შემოვიტანთ შემდეგ პარაგრაფში, საშუალებას მოგვცემს შედეგები წარმოვადგინოთ უფრო მარტივი სახით, ვიდრე ეს ჩვეულებრივ კეთდება ანალიზური გეომეტრიის კურსებში.

**§ 54. კოვარიანტული და კონტრავარიანტული დეკარტის კოორდინატები.** $\vec{P}$ ვექტორის, $X$, $Y$, $Z$ კოორდინატების განმარტების საფუძვლად (§ 33) ჩვენ გვქონდა მიღებული ვექტორის დაშლა:

$$\vec{P} = \vec{u}X + \vec{v}Y + \vec{w}Z,$$

სადაც $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ საკოორდინატო ვექტორებია. მართკუთხოვან კოორდინატთა შემთხვევაში, როცა საკოორდინატო ვექტორებად აღებულია ურთიერთმარ-

[1]) პირველ წაკითხვისას ეს პარაგრაფი შეიძლება გამოტოვებულ იქნას.

თობული ორტები, ასეთი სახით განმარტებული კოორდინატები წარმოადგენენ ალგებრულ მნიშვნელობებს $\vec{P}$ ვექტორის გეგმილებისას საკოორდინატო ღერძებზე და შეიძლება წარმოდგენილ იქნან სკალარული ნამრავლის სახით (§ 31)

$$X=\vec{u}\cdot\vec{P},\quad Y=\vec{v}\cdot\vec{P},\quad Z=\vec{w}\cdot\vec{P}. \tag{1}$$

თუ უკანასკნელ ფორმულებს მივიღებთ ნებისმიერი საკოორდინატო $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ვექტორების (იგულისხმება არაკომპლანარული) შემთხვევისათვის განზოგადების საფუძვლად, მაშინ ბუნებრივია განხილვა შემდეგი სიდიდეებისა:

$$X^*=\vec{u}\cdot\vec{P},\quad Y^*=\vec{v}\cdot\vec{P},\quad Z^*=\vec{w}\cdot\vec{P}. \tag{2}$$

მართკუთხოვანი სისტემის შემთხვევაში $X^*$, $Y^*$, $Z^*$ სიდიდეები ჩვეულებრივი $X$, $Y$, $Z$ კოორდინატების თანხვდენილია. ზოგად შემთხვევაში კი, ამ თანხვდენას არა აქვს ადგილი, ვინაიდან თვით განმარტების მიხედვით

$$X^*=|\vec{u}|\,\text{გეგ}_{\vec{u}}\vec{P},\quad Y^*=|\vec{v}|\,\text{გეგ}_{\vec{v}}\vec{P},\quad Z^*=|\vec{w}|\,\text{გეგ}_{\vec{w}}\vec{P}, \tag{3}$$

სადაც იგულისხმება მართკუთხოვანი გეგმილები, მაშინ როცა $X$, $Y$, $Z$ სიდიდეები გვეძლევა ფორმულებით (იხ. § 33)

$$X=\text{გეგ}_{\vec{u}}\frac{\vec{P}}{|\vec{u}|},\quad Y=\text{გეგ}_{\vec{v}}\frac{\vec{P}}{|\vec{v}|},\quad Z=\text{გეგ}_{\vec{w}}\frac{\vec{P}}{|\vec{w}|},$$

სადაც ნაგულისხმევია გეგმილები შესაბამ საკოორდინატო სიბრტყეთა პარალელურად აღებული[1]).

მიუხედავად ამისა, $X^*$, $Y^*$, $Z^*$ სიდიდეებს შეიძლება ეუწოდოთ ვექტორის კოორდინატები, ვინაიდან მათი მოცულობა საკმაოდ განსაზღვრავს ვექტორს (და პირიქით); ამაში მკითხველი თვითონ ადვილად დარწმუნდება უბრალო გეომეტრიული მოსაზრებებით[2]).

რომ ურთიერთ განვასხვავოთ ეს ორგვარი კოორდინატები $X$, $Y$, $Z$ და $X^*$, $Y^*$, $Z^*$, პირველს ეუწოდოთ ჩვეულებრივი კონტრავარიანტული კოორდინატები, ხოლო მეორეს — კოვარიანტული[3]). შემდეგში, უველგან, სადაც ნათქვამი იქნება უბრალოდ კოორდინატები, ვიგულისხმებთ კონტრავარიანტულ კოორდინატებს.

საკმაოდ ანალოგიურად განიმარტება კოვარიანტული კოორდინატები ორი განზომილების შემთხვევაში. ნახ. 59-ზე გამოსახულია ეს შემთხვევა. თუ ვიგულისხმებთ, რომ კოორდინატები განუზოგადებელია (ე. ი. $|\vec{u}|=|\vec{v}|=|\vec{w}|=1$), მაშინ ნახაზზე

$$Om'=X,\quad Om''=Y,\quad On'=X^*,\quad On''=Y^*,$$

---

[1]) § 33-ში ეს გეგმილები აღნიშნულია $Om'$, $Om''$, $Om'''$-ით.

[2]) თუ მოცემულია $X^*$, $Y^*$, $Z^*$, მაშინ ამით მოცემულია $\vec{P}$ ვექტორის მართკუთხოვანი გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე.

[3]) ამ ტერმინების წარმოშობა ახსნილი იქნება § 69-ში.

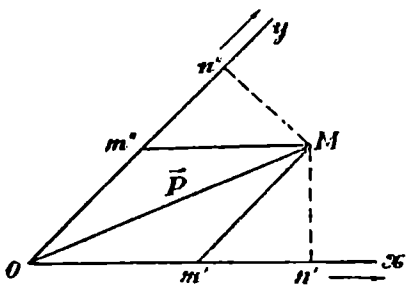
ზოგად შემთხვევაში კი

$$X=\frac{Om'}{|\vec{u}|},\quad Y=\frac{Om''}{|\vec{v}|},\quad X^*=On'\cdot|\vec{u}|,\quad Y^*=On''\cdot|\vec{v}|.$$

ერთი განზომილების შემთხვევაში ცხადია შეიძლება განხილულ იქნას კოვარიანტული კოორდინატი

$$X^*=|\vec{u}|\cdot P,$$

სადაც $|\vec{u}|$ არის საკოორდინატო ვექტორის სიგრძე, ხოლო—$P$ ალგებრული სიდიდე $\vec{P}$ ვექტორისა საკოორდინატო ღერძის მიმართ.




ნახ. 59.

წერტილის კოვარიანტული კოორდინატები, რომელთაც ჩვენ აღვნიშნავთ $x^*$, $y^*$, $z^*$-ით, განმარტებულია, როგორც კოორდინატთა სათაის მიმართ ამ წერტილის რადიუს-ვექტორის კოვარიანტული კოორდინატები.

**§ 55. კოვარიანტულ და კონტრავარიანტულ კოორდინატებს შორის დამოკიდებულება.** აღვნიშნოთ, შესაბამად $\lambda$, $\mu$, $\nu$-თი კუთხეები $Oy$ და $Oz$, $Oz$ და $Ox$, შორის (ნახ. 60).

წერის გასამარტივებლად შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\left.\begin{aligned}&\vec{u}^2=g_{11},\ \vec{v}^2=g_{22},\ \vec{w}^2=g_{33}\\&\vec{v}\cdot\vec{w}=g_{23},\ \vec{w}\cdot\vec{u}=g_{31},\ \vec{u}\cdot\vec{v}=g_{12},\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

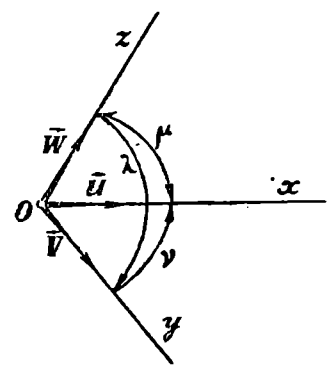
ასე, რომ

$$\left.\begin{aligned}&g_{11}=|\vec{u}|^2,\ g_{22}=|\vec{v}|^2,\ g_{33}=|\vec{w}|^2,\\&g_{23}=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos\lambda,\ g_{31}=|\vec{w}|\cdot|\vec{u}|\cos\mu,\ g_{12}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\nu\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

$g_{11}$, $g_{22}$... სიდიდეები წარმოადგენენ სკალარებს, რომლებიც საესებით განზღვრული არიან, როცა მოცემულია საკოორდინატო ვექტორთა სიგრძეები და მათ შორის კუთხეები. მართკუთხოვან კოორდინატთა შემთხვევაში

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=1,\ g_{23}=g_{31}=g_{12}=0$$

და (1) ფორმულები დაიყვანებიან საკოორდინატო ღერძთა ორტების „სკალარული გამრავლების ცხრილზე“ (§ 42). ზოგად შემთხვევაში (1) ფორმულა გვაძლევს საკოორდინატო ვექტორთა სკალარული გამრავლების ცხრილს, თუ $g_{ik}$-ს ქვეშ ვიგულისხმებთ (2) სიდიდეებს.




ნახ. 60.

ორი განზომილების შემთხვევაში ჩვენ გვექნება მხოლოდ სამი სიდიდე

$$g_{11}=|\vec{u}|^2,\ g_{22}=|\vec{v}|^2,$$
$$g_{12}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\nu. \qquad (2a)$$

ვუბრუნდებით რა ზოგად შემთხვევას, გამოვიყვანთ $\vec{P}$ ვექტორის კონტრავარიანტულ და კოვარიანტულ კოორდინატებს შორის დამოკიდებულებას. განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$\vec{P}=\vec{u}X+\vec{v}Y+\vec{w}Z,$$

სადაც $X$, $Y$, $Z$—კონტრავარიანტული კოორდინატებია. აქედან, კოვარიანტული $X^*$ კოორდინატებისათვის მივიღებთ:

$$X^*=\vec{u}\cdot\vec{P}=\vec{u}\cdot\vec{u}X+\vec{u}\cdot\vec{v}Y+\vec{u}\cdot\vec{w}Z$$

ანუ, (1)-ის თანახმად

$$\left.\begin{aligned} X^*&=g_{11}X+g_{12}Y+g_{13}Z,\\ Y^*&=g_{21}X+g_{22}Y+g_{23}Z,\\ Z^*&=g_{31}X+g_{32}Y+g_{33}Z; \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

უკანასკნელი ორი ფორმულა დაწერილია პირველის ანალოგიურად; სიმეტრიულობის მისაღწევად ჩვენ ხშირად $g_{12}$-ის ნაცვლად ვწერთ $g_{21}$-ს და ა. შ. (საზოგადოდ, შევთანხმდეთ, რომ ჩვენს შემთხვევაში $g_{ik}$ და $g_{ki}$ აღნიშნავენ ერთსა და იმავე სიდიდეებს). (3) ფორმულები გვაძლევენ კოვარიანტული კოორდინატების გამოსახვას კონტრავარიანტული კოორდინატებით.

კონტრავარიანტული კოორდინატების გამოსახულება რომ მივიღოთ კოვარიანტული კოორდინატებით, საკმარისია ამოვხსნათ $X$, $Y$, $Z$-ის მიმართ (3) განტოლებათა სისტემა. ამ სისტემის ამოხსნა ყოველთვის შესაძლოა, ვინაიდან დეტერმინანტი

$$G=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \vec{u}\cdot\vec{u} & \vec{u}\cdot\vec{v} & \vec{u}\cdot\vec{w}\\ \vec{v}\cdot\vec{u} & \vec{v}\cdot\vec{v} & \vec{v}\cdot\vec{w}\\ \vec{w}\cdot\vec{u} & \vec{w}\cdot\vec{v} & \vec{w}\cdot\vec{w} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

ნულისაგან განსხვავებულია. მართლაც, § 52-ის (4) ფორმულის თანახმად (სავარჯიშო მაგ. 3), $G=[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}]^2=V^2$, სადაც $V$ არის საკოორდინატო ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობა (§ 26); ამ პარალელეპიპედის მოცულობა ნული არ არის, ვინაიდან პირობის ძალით საკოორდინატო ვექტორები არაკომპლანარულია.

თუ ამოვხსნით (3) სისტემას დეტერმინანტთა თეორიის წესების მიხედვით (იხ. დამატება § 3), მივიღებთ

$$\left.\begin{aligned} X&=g^*_{11}X^*+g_{12}{}^*Y^*+g_{13}{}^*Z^*,\\ Y&=g^*_{21}X^*+g_{22}{}^*Y^*+g_{23}{}^*Z^*,\\ Z&=g^*_{31}X^*+g_{32}{}^*Y^*+g_{33}{}^*Z^*, \end{aligned}\right\}, \qquad (5)$$

სადაც

$$g^*_{ik}=\frac{G_{ik}}{G}\quad (i,\ k=1,\ 2,\ 3) \tag{6}$$

მასთან, $G_{ik}$ აღნიშნავს $G$ დეტერმინანტის $g_{ik}$ ელემენტის ალგებრულ დამატებას [1]). ცხადია, რომ სავსებით ასეთსავე ფორმულებს აქვს ადგილი აგრეთვე წერტილის კოორდინატებისთვისაც.

ორი განზომილების შემთხვევაში ანალოგიურად გვექნება:

$$X^*=g_{11}X+g_{12}Y,\quad Y^*=g^*_{21}X+g_{22}Y, \tag{3a}$$

$$X=g^*_{11}X^*+g^*_{12}Y^*,\quad Y=g^*_{21}X^*+g_{22}{}^*Y^*. \tag{5a}$$

ამ შემთხვევაში დეტერმინანტი

$$G=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} |\vec{u}|^2 & |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\nu\\ |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\nu & |\vec{v}|^2\end{vmatrix}=|\vec{u}|^2\ |\vec{v}|^2\sin^2\nu \tag{4a}$$

და როგორც ადვილი გამოსათვლელია,

$$g^*_{11}=\frac{1}{|\vec{u}|^2\sin^2\nu},\quad g^*_{22}=\frac{1}{|\vec{v}|^2\sin^2\nu},\quad g^*_{12}=g^*_{21}=-\frac{\cos\nu}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\sin^2\nu} \tag{6a}$$

#### სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. გამოიყვანეთ (3) ფორმულები განუზოგადებელი დეკარტის კოორდინატების შემთხვევაში.

პასუხი: $X^*=X+Y\cos\nu+Z\cos\mu,$
$Y^*=X\cos\nu+Y+Z\cos\lambda,$
$Z^*=X\cos\mu+Y\cos\lambda+Z.$

2. მონახეთ (5) ფორმულის $g_{ik}{}^*$ კოეფიციენტთა გამოსახულებები განუზოგადებელი კოორდინატების შემთხვევაში.

პასუხი: $g_{11}=\frac{\sin^2\lambda}{G},\quad g_{22}=\frac{\sin^2\mu}{G},\quad g_{33}=\frac{\sin^2\nu}{G},$

$g_{23}=g_{32}=\frac{\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda}{G},\quad g_{31}=g_{13}=\frac{\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu}{G},\quad g_{12}=g_{21}=\frac{\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu}{G}$

სადაც

$$G=\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu\\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda\\ \cos\mu & \cos\lambda & 1\end{vmatrix}.$$

**§ 56. ორი ვექტორის ხკალარული ნამრავლის, ვექტორის ხიგრძის, ორ წერტილს შორის მანძილისა და ორ მიმართულებას შორის კუთხის გამოხატუ-**

[1]) დეტერმინანტი $G$ სიმეტრიულია ($g_{ik}=g_{ki}$); ამიტომ $G_{ik}=G_{ki}$.

ლებანი. ვთქვათ, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ ვექტორები მოცემულია კონტრავარიანტული კოორდინატებით

$$(X_1,\ Y_1,\ Z_1) \text{ და } (X_2,\ Y_2,\ Z_2).$$

გამოვთვალოთ მათი სკალარული ნამრავლი. გვექნება:

$$\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 = (\vec{u}X_1 + \vec{v}Y_1 + \vec{w}Z_1) \cdot \vec{P}_2$$

საიდანაც, თუ გავიხსენებთ, რომ $\vec{u} \cdot \vec{P}_2 = X_2^*$ და ა. შ., მივიღებთ

$$\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 = X_1X_2^* + Y_1Y_2^* + Z_1Z_2^*. \tag{1}$$

ასეთივე წესით შეიძლება მივიღოთ

$$\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 = X_1^*X_2 + Y_1^*Y_2 + Z_1^*Z_2. \tag{1a}$$

მართკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაში $X_1^* = X_1$ და ა. შ. და ეს ფორმულები დაემთხვევიან წინათ გამოყვანილს.

ორი განზომილების შემთხვევაში გვექნება:

$$\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 = X_1X_2^* + Y_1Y_2^* = X_1^*X_2 + Y_1^*Y_2. \tag{2}$$

თუ (1) ან (1a) ფორმულაში დავუშვებთ, რომ $\vec{P}_1 = \vec{P}_2 = \vec{P}$, მაშინ $\vec{P} = (X,\ Y,\ Z)$ ვექტორის სიგრძისათვის მივიღებთ ფორმულას:

$$|\vec{P}|^2 = XX^* + YY^* + ZZ^*. \tag{3}$$

თუ ამ ფორმულაში შევიტანთ $X^*$, $Y^*$, $Z^*$-ის გამოსახულებებს წინა §-ის (3) ფორმულებიდან, მივიღებთ $|\vec{P}|^2$-ის გამოსახულებას ჩვეულებრივ (კონტრავარიანტულ) კოორდინატებში:

$$|\vec{P}|^2 = g_{11}X^2 + g_{22}Y^2 + g_{33}Z^2 + 2g_{23}YZ + 2g_{31}ZX + 2g_{12}XY. \tag{4}$$

ვხედავთ, რომ $|\vec{P}|^2$ არის სამი $X$, $Y$, $Z$ ცვლადის კვადრატული ფორმა [1]). ვინაიდან $|\vec{P}|^2$ სიდიდე ყოველთვის დადებითია, გარდა იმ შემთხვევისა, როცა $X = Y = Z = O$, ამიტომ ეს კვადრატული ფორმა დადებითია [2]), მასთან არაგანსაკუთრებული (ე. ი. მისი დისკრიმინანტი [3]) ნულისაგან განსხვავებულია). უკანასკნელი გამომდინარეობს აგრეთვე იქიდანაც, რომ აღნიშნული დისკრიმინანტი წარმოადგენს წინა §-ის (4) ფორმულის დეტერმინანტს.

შეიძლება დამტკიცდეს, რომ შებრუნებით, თუ მოცემულია სამი $X$, $Y$, $Z$ ცვლადის არაგანსაკუთრებული დადებითი კვადრატული ფორმა, მაშინ ყო-

[1]) ამ ტერმინის განმარტება იხ. დამატებაში, § 10.
[2]) იხ. დამატება, § 12.
[3]) იხ. დამატება, § 10.

ველთვის არსებობს დეკარტის ზოგად კოორდინატთა სისტემა, რომელშიაც ვექტორის სიგრძის კვადრატი გამოისახება ამ ფორმით; იხ. ქვემოთ, § 67,2°.

ვექტორის სიგრძის კვადრატი შეიძლება აგრეთვე უბრალოდ გამოისახოს კოვარიანტულ კოორდინატებში. სახელდობრ, თუ ვიმოქმედებთ სრულიად ისე, როგორც (4) ფორმულების გამოყვანაში, მივიღებთ:

$$|\vec{P}|^2 = g^*_{11}X^{*2} + g^*_{22}Y^{*2} + g^*_{33}Z^{*2} + 2g^*_{23}Y^*Z^* + 2g_{31}Z^*X^* + 2g_{12}X^*Y^*. \quad (5)$$

ზოგჯერ ხელსაყრელია $|\vec{P}|^2$-სთვის გვქონდეს გამოსახულება $X^*, Y^*, Z^*$-ის საშუალებით ისე, რომ გამოსახულებაში $g_{ik}$*-ს ნაცვლად შედიოდეს $g_{ik}$ სიდიდეები. ასეთი გამოსახულების მისაღებად, საკმარისია წინა ფორმულაში $g_{ik}$*-ს ნაცვლად შევიტანოთ მათი გამოსახულება $g_{ik}$-თი. იგივე შედეგი შეიძლება მივიღოთ უფრო მარტივადაც, სახელდობრ, წინა §-ის (3) ფორმულისა და ამ პარაგრაფის (3) ფორმულის მიხედვით გვაქვს:

$$\begin{aligned} g_{11}X + g_{12}Y + g_{13}Z &= X^* \\ g_{21}X + g_{22}Y + g_{23}Z &= Y^* \\ g_{31}X + g_{32}Y + g_{33}Z &= Z^* \\ X^*X + Y^*Y + Z^*Z &= |\vec{P}|^2. \end{aligned}$$

ვხედავთ, რომ სამი სიდიდე $X, Y, Z$ აკმაყოფილებს წინა ოთხ წრფივ განტოლებას. ეს კი, როგორც ვიცით, შესაძლოა მხოლოდ მაშინ, როცა ამ განტოლებათა ყველა კოეფიციენტისაგან შედგენილი დეტერმინანტი ნულის ტოლია, ე. ი. როცა

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & X^* \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & Y^* \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & Z^* \\ X^* & Y^* & Z^* & |\vec{P}|^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

თუ დეტერმინანტს დავშლით, ვთქვათ, უკანასკნელი სტრიქონის მიხედვით, მივიღებთ ერთ წევრს შემდეგი სახისას: $G \cdot |\vec{P}|^2$ და წევრებს, რომლებიც შეიცავენ $X^*$, $Y^*$, $Z^*$ სიდიდეთა კვადრატებს და ნამრავლებს; თუ ამ წევრებს გადავიტანთ მარჯვენა მხარეში და ორივე მხარეს გავყოფთ $G$ ზე (ვიცით, რომ $G \neq 0$), მივიღებთ $|\vec{P}|^2$-სათვის საძიებელ გამოსახულებას $X^*$, $Y^*$, $Z^*$ ცვლადთა კვადრატული ფორმის სახით.

ორი განზომილების შემთხვევაში, (4) და (6) ფორმულების ნაცვლად შესაბამისად მივიღებთ:

$$|\vec{P}|^2 = g_{11}X^2 + 2g_{12}XY + g_{22}Y^2 = |\vec{u}|^2 X^2 + 2|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\nu\, XY + |\vec{v}|^2 Y^2 \quad (4a)$$

და

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & X^* \\ g_{21} & g_{22} & Y^* \\ X^* & Y^* & |\vec{P}|^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (6a)$$

საიდანაც

$$|\vec{P}|^2 \sin^2\nu = \frac{X^{*2}}{|\vec{u}|^2} - \frac{2X^*Y^*}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}\cos\nu + \frac{Y^{*2}}{|\vec{v}|^2}. \tag{6b}$$

ვექტორის სიგრძის გამომსახველ სხვადასხვა ფორმულიდან უშუალოდ მიიღება $M_1(x_1, y_1, z_1)$ და $M_2(x_2, y_2, z_2)$ წერტილებს შორის მანძილის ფორმულა; ამისათვის მარჯვენა მხარეში უნდა ჩავსვათ:

$$X = x_2 - x_1,\quad X^* = x_2^* - x_1^* \text{ და ა. შ.}$$

$\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორებს შორის მოთავსებული $\vartheta$ კუთხისათვის გვაქვს ფორმულა

$$\cos\vartheta = \frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2}{|\vec{P}_1| \cdot |\vec{P}_2|} = \frac{X_1X_2^* + Y_1Y_2^* + Z_1Z_2^*}{|\vec{P}_1| \cdot |\vec{P}_2|}, \tag{7}$$

სადაც

$$|\vec{P}_1| = \sqrt{X_1X_1^* + Y_1Y_1^* + Z_1Z_1^*},\quad |\vec{P}_2| = \sqrt{X_2X_2^* + Y_2Y_2^* + Z_2Z_2^*}.$$

ანალოგიურ ფორმულას აქვს ადგილი ორი განზომილების შემთხვევაში.

#### სავარჯიშო მაგალითები და დამატებები

**1.** გამოიყვანეთ ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლისა და ვექტორის სიგრძის გამომსახველი ფორმულები, სიბრტყეზე კონტრავარიანტულ კოორდინატებში, განუზოგადებელ კოორდინატთა შემთხვევაში.

პასუხი:

$$\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 = X_1X_2 + Y_1Y_2 + (X_1Y_2 + X_2Y_1)\cos\nu,\quad |\vec{P}|^2 = X^2 + Y^2 + 2XY\cos\nu.$$

**2.** იგივე სივრცის შემთხვევაში.

პასუხი:

$$\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 + (Y_1Z_2 + Y_2Z_1)\cos\lambda + (Z_1X_2 + Z_2X_1)\cos\mu + (X_1Y_2 + X_2Y_1)\cos\nu.$$

$$|\vec{P}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2YZ\cos\lambda + 2ZX\cos\mu + 2XY\cos\nu.$$

**3.** გამოიყვანეთ ფორმულები $|\vec{P}|^2$-ის გამომსახველი სიბრტყეზე კოვარიანტულ კოორდინატთა შემთხვევაში.

პასუხი:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & X^* \\ \cos\nu & 1 & Y^* \\ X^* & Y^* & |\vec{P}|^2 \end{vmatrix} = 0,$$

საიდანაც

$$|\vec{P}|^2 \sin^2\nu = X^{*2} + Y^{*2} - 2X^*Y^*\cos\nu.$$

**4.** იგივე სივრცის შემთხვევაში.

პასუხი:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & X^* \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & Y^* \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & Z^* \\ X^* & Y^* & Z^* & |\vec{P}|^2 \end{vmatrix} = 0.$$

**§ 57. მიმართულების კოორდინატები და კოსინუსები განუზოგადებელ ირიბკუთხოვან კოორდინატებში.** განვაზოგადოთ § 44-ში შემოტანილი ცნებები და ფორმულები განუზოგადებელ ირიბკუთხოვან კოორდინატთა შემთხვევაში (მკითხველი ადვილად გამოიყვანს ანალოგიურ ფორმულებს ზოგად შემთხვევაში).

ვთქვათ, $\vec{e}$ არის ორტი, რომელიმე მიმართულების განმსაზღვრელი. ამ ორტის კონტრავარიანტული კოორდინატები ისე, როგორც წინათ, აღვნიშნოთ $l$, $m$, $n$-ით. ასე, რომ

$$\vec{e}=\vec{u}l+\vec{v}m+\vec{w}n \tag{1}$$

$l$, $m$, $n$ სიდიდეებს ვუწოდოთ მიმართულების ჩვეულებრივი ანუ კონტრავარიანტული კოორდინატები[1]).

რაც შეეხება $\vec{e}$ ორტის კოვარიანტულ კოორდინატებს, მათ აღვნიშნავთ $l^*$, $m^*$, $n^*$-ით; ამ სიდიდეებს ვუწოდებთ მიმართულების კოვარიანტულ კოორდინატებს. ცხადია, რომ:

$$l^*=\cos\alpha,\quad m^*=\cos\beta,\quad n^*=\cos\gamma, \tag{2}$$

სადაც $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ აღნიშნავენ კუთხეებს, შედგენილს $\vec{e}$ ორტის მიერ საკოორდინატო ღერძებთან.

მაშასადამე, მიმართულების კოსინუსები არიან შესაბამი ორტის კოვარიანტული კოორდინატები; ირიბკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაში ისინი იგივე არ არიან, რაც ($l$, $m$, $n$) მიმართულების ჩვეულებრივი (კონტრავარიანტული) კოორდინატები (როგორც უკვე ვთქვით § 44-ში), არამედ $l^*$, $m^*$, $n^*$ სიდიდეები დაკავშირებული არიან $l$, $m$, $n$ სიდიდეებთან § 55-ის იმავე (3a) ან (5) ფორმულებით, როგორც ნებისმიერი ვექტორის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კოორდინატები.

$\vec{e}^2=1$ ტოლობიდან, წინა პარაგრაფის (3) ფორმულის ძალით, გამომდინარეობს შემდეგი თანაფარდობა:

$$ll^*+mm^*+nn^*=1 \text{ ანუ } l\cos\alpha+m\cos\beta+n\cos\gamma=1, \tag{3}$$

რომელიც იმ თანაფარდობის მაგივრობას სწევს, რასაც ადგილი აქვს მართკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაში, სახელდობრ:

$$l^2+m^2+n^2=1 \text{ ანუ } \cos^2\alpha+\cos\beta+\cos^2\gamma=1.$$

თუ (3) დამოკიდებულებას გამოვსახავთ მიმართულების მხოლოდ ჩვეულებრივ კოორდინატებში, მაშინ წინა პარაგრაფის სავარჯიშო მაგალითი, 2-ის ფორმულის თანახმად მივიღებთ:

$$l^2+m^2+n^2+2mn\cos\lambda+2nl\cos\mu+2lm\cos\nu=1; \tag{4}$$

---

[1]) როდესაც შემდეგში ჩვენ საუბარი გვექნება უბრალოდ მიმართულების კოორდინატებზე, ყოველთვის მხედველობაში გვექნება ჩვეულებრივი (კონტრავარიანტული) კოორდინატები.

თუ ამ თანაფარდობას გამოვსახავთ მხოლოდ კოვარიანტული კოორდინატების (ე. ი. მიმართულების კოსინუსების) საშუალებით, მაშინ იმავე პარაგრაფის სავარჯიშო (4) მაგალითის ფორმულის ძალით მივიღებთ:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & l^* \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & m^* \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & n^* \\ l^* & m^* & n^* & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

ცხადია, რომ (4) თანაფარდობა საკმარისია იმისათვის, რომ $l$, $m$, $n$ იყვნენ რომელიმე მიმართულების კონტრავარიანტული კოორდინატები, ხოლო (5) თანაფარდობა საკმარისია იმისათვის, რომ $l^*$, $m^*$, $n^*$ იყვნენ რომელიმე მიმართულების კოსინუსები (იხ. § 44-ის ბოლო).

ორი განზომილების შემთხვევაში (4) და (5)-ის ნაცვლად შესაბამისად გვექნება:

$$l^2+m^2+2lm\cos\nu=1, \tag{4a}$$

და (იხ. წინა პარაგრაფის სავარჯიშო მაგალითი 3-ს ფორმულები)

$$l^{*2}+m^{*2}-2l^*m^*\cos\nu=\sin^2\nu, \tag{5a}$$

ან, რაც იგივეა:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\nu=\sin^2\nu. \tag{5b}$$

ამ შემთხვევაში (ორი განზომილების) შესაძლებელია, როგორც ნათქვამი იყო § 47-ში, სიბრტყეზე მიმართულების განსაზღვრისათვის ვისარგებლოთ ერთი $\varphi$ კუთხით, რომელსაც შეადგენს აღებული მიმართულება $Ox$ ღერძთან და რომელიც აითვლება $Ox$ ღერძიდან ხსენებულ პარაგრაფში მიღებული წესის მიხედვით (ნახ. 54, გვ. 81).

ადვილი შესამჩნევია, რომ $\cos\alpha=\cos\varphi$, $\cos\beta=\cos(\nu-\varphi)$.

ამრიგად, განსახილველი მიმართულების კოვარიანტული კოორდინატები იქნებიან:

$$l^*=\cos\varphi,\quad m^*=\cos(\nu-\varphi). \tag{6}$$

გავიხსენოთ (იხ. შენიშვნა § 47-ის ბოლოს), რომ მიმართულების ჩვეულებრივი კოორდინატებისთვის გვექნება:

$$l=\frac{\sin(\nu-\varphi)}{\sin\nu},\quad m=\frac{\sin\varphi}{\sin\nu}; \tag{7}$$

ამავე ფორმულების სხვა წესით გამოყვანა იხ. სავარჯიშო მაგალითებში 1.

### სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. § 53-ის (5ა) და (6ა) ფორმულებისა და ამ პარაგრაფის (6) ფორმულის საშუალებით გამოიყვანეთ (7) ფორმულები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. აღნიშნული ფორმულების თანახმად

$$l=\frac{1}{\sin^2\nu}\,[\cos\varphi\cos(\nu-\varphi)\cos\nu],\qquad m=\frac{1}{\sin^2\nu}\,[-\cos\varphi\cos\nu+\cos(\nu-\varphi)],$$

ანუ $\cos(\nu-\varphi)$-ს დაშლისა და ზოგიერთი გამარტივების შემდეგ

$$l=\frac{\sin(\nu-\varphi)}{\sin\nu},\quad m=\frac{\sin\varphi}{\sin\nu}.$$

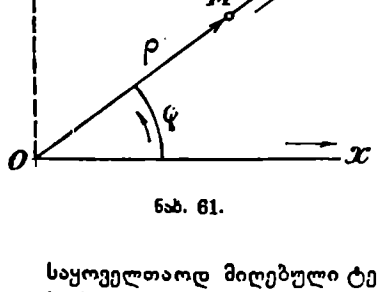
**2.** გამოიყვანეთ (5ა) თანაფარდობა უშუალოდ (6) ფორმულებიდან, ელემენტარული-ტრიგონომეტრიული გარდაქმნების საშუალებით.

## V. კოორდინატთა სხვადასხვა სისტემა

წრფივ კოორდინატთა გარდა არსებობს კიდევ უამრავი სხვა; ჩვენ დაწვრილებით განვიხილავთ მხოლოდ ზოგიერთ მათგანს, სახელდობრ, პოლარ კოორდინატთა სისტემას სიბრტყეზე და სივრცეში და ნახევრადპოლარ (ანუ ცილინდრულ) კოორდინატთა სისტემას. დანარჩენი სისტემების შესახებ დავკმაყოფილდებით ზოგადი ხასიათის მოკლე შენიშვნებით. ამასთანავე, ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ წერტილის კოორდინატებს.

**§ 58. სიბრტყეზე პოლარ კოორდინატთა სისტემა.** ამ სისტემაში ძირითად მუდმივ ელემენტებად, რომელთა მიმართ განისაზღვრება ნებისმიერი ნაკვთის მდებარეობა სიბრტყეზე, არიან $O$ წერტილი, პ ო ლ უ ს ა დ წოდებული, და $Ox$ ღერძი, წოდებული პ ო ლ ა რ ი ღ ე რ ძ ა დ (ნახ. 61).

ვთქვათ, $M$ არის სიბრტყის რომელიმე წერტილი, რომელიც $O$-ს არ ემთხვევა. აღვნიშნოთ $\rho$-თი $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორის სიგრძე, ხოლო $\varphi$-თ კუთხე, შედგენილი მის მიერ პოლარ ღერძთან, ათვლილი ამ ღერძიდან და განხილული გარკვეული ნიშნით [1]), ასე რომ, ჩვენი აღნიშვნების თანახმად:




ნახ. 61.

$$\rho=|OM|,\quad \varphi=\widehat{Ox,\overline{OM}}. \tag{1}$$

ცხადია, $\rho$ და $\varphi$ სიდიდეები სავსებით განსაზღვრავენ $M$ წერტილის მდებარეობას სიბრტყეზე; მათ ეწოდებათ $M$ წერტილის პ ო ლ ა რ ი კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი (თუ $M$ წერტილი პოლუსს ემთხვევა, მაშინ $\rho=0$, ხოლო $\varphi$ კუთხე განუსაზღვრელია).

წერტილს, რომელსაც პოლარ კოორდინატებად აქვს $\rho$ და $\varphi$, აღვნიშნავთ ასე: $M(\rho,\varphi)$.

საყოველთაოდ მიღებული ტერმინოლოგიის მიხედვით, $\rho$ იწოდება წერტილის რ ა დ ი უ ს - ვ ე ქ ტ ო რ ა დ; უფრო წესიერი იქნებოდა თქმა — სიგრძე

[1]) ამნაირად იგულისხმება, რომ სიბრტყეზე არჩეულია ბრუნვის გარკვეული დადებითი მიმართულება.

რადიუს-ვექტორისა, მაგრამ სიმოკლისთვის ჩვენ ხშირად გამოვტოვებთ სიტყვას „სიგრძე"-ს იქ, სადაც გაუგებრობას არ შეიძლება ჰქონდეს ადგილი.

$\varphi$ კუთხეს ჩვენ ეუწოდებთ პოლარ კუთხეს [1]).

ცხადია, რომ სიბრტყის ყველა წერტილის მისაღებად საკმარისია $\rho$ იცვლებოდეს საზღვრებში $(0, \infty)$, ხოლო $\varphi$ კუთხეს მიეცეს მნიშვნელობანი $(0, 2\pi)$ საზღვრებში მოქცეულნი (ზედა საზღვრის გამორიცხვით); მაგრამ ხშირად არც კი შემოაქვთ უკანასკნელი შეზღუდვა. $\varphi$ კუთხის მნიშვნელობანი, ერთი და იმავე წერტილის შესაბამი, ცხადია, განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან $2\pi$-ს ჯერადით.

§ 59. განზოგადება. ახლახან აღნიშნული სისტემის გარდა, ხშირად სარგებლობენ ცოტა უფრო ზოგადი სისტემით, სადაც $\rho$ ღებულობს აგრეთვე უარყოფით მნიშვნელობებსაც.

ვთქვათ (ნახ. 61), $\Delta$ აღნიშნავს ღერძს, გამავალს $O$ პოლუსზე და $M$ წერტილზე. ამ ღერძს შეიძლება მივცეთ ნებისმიერი გეზი ($O$-დან $M$-საკენ, ან $M$-დან $O$-სკენ). ახლა აღვნიშნოთ $\varphi$-თ კუთხე $Ox, \widehat{\Delta}$, შედგენილი $\Delta$ ღერძით $Ox$ პოლარ ღერძთან, ხოლო $\rho$-თი ალგებრული მნიშვნელობა $\overline{OM}$ ვექტორისა $\Delta$ ღერძის გასწვრივ. ცხადია, რომ, როგორც წინა შემთხვევაში $\rho$ და $\varphi$ სიდიდეები სავსებით განსაზღვრავენ $M$ წერტილის მდებარეობას სიბრტყეზე.

[თუ $\Delta$ ღერძის მიმართულებად არჩეულია ის, რომელიც $O$-დან არის მიმართული $M$-საკენ, მაშინ აღნიშნული სიდიდეები იგივეა, რაც წინა პარაგრაფის $\rho$ და $\varphi$ სიდიდეები].

ვინაიდან $M$ წერტილის ერთსა და იმავე მდებარეობას ეთანადება $\Delta$ ღერძის ურთიერთმოპირდაპირე ორი მიმართულება, ამიტომ პოლარი კუთხის მნიშვნელობანი $\varphi = Ox, \widehat{\Delta}$, ერთი და იმავე წერტილის შესაბამი, შეიძლება განსხვავდებოდნენ $\pi$-ს ჯერადით.

ცხადია, რომ, თუ $\rho$ და $\varphi$ აღნიშნავენ რომელიმე $M$ წერტილის პოლარ კოორდინატებს, მაშინ კოორდინატები $(-\rho)$ და $\varphi + \pi$ იქნებიან იმავე წერტილის კოორდინატებად [2]).

ამ პარაგრაფში აღნიშნულს კოორდინატთა სისტემას უწოდებენ პოლარ კოორდინატთა განზოგადებულ სისტემას.

§ 60. სიბრტყეზე პოლარ კოორდინატებიდან გარდაქმნა დეკარტის კოორდინატებში. პოლარი კოორდინატებიდან დეკარტის კოორდინატებზე გადასასვლელად და, პირიქით, საკმარისია გვქონდეს ფორმულები, რომელთა საშუალებით შესაძლოა მოცემული პოლარი სისტემიდან დეკარტის რომელიმე ერთ-ერთ სისტემაზე გადასვლა, ვინაიდან შემდეგ განყოფილებაში გამოყვა-

[1]) ამ ტერმინის გარდა, იხმარება კიდევ ანომალია, ამპლიტუდი, აზიმუტი და სხვ.

[2]) მართლაც, კუთხე $\varphi + \pi$ ახასიათებს მიმართულებას, იმის მოპირდაპირეს, რომელიც $\varphi$ კუთხეს ეთანადება.

ნილი იქნება ფორმულები, რომლებიც იძლევიან საშუალებას მოცემულ დეკარტის კოორდინატთა სისტემიდან ნებისმიერ სხვა სისტემაზე გადასვლისათვის.

ამიტომ, ჩვენ აქ დავკმაყოფილდებით პოლარ კოორდინატებიდან დეკარტის მართკუთხოვან კოორდინატებზე გადამყვანი ფორმულების გამოყვანით, როცა დეკარტის კოორდინატთა სისტემის სათავე არის პოლუსი $O$, $Ox$ ღერძია—პოლარი ღერძი, ხოლო $Oy$ ღერძი—$Ox$ ღერძის მართობია და ისეა მიმართული, რომ $Oy$-ის მიმართულებას შეეფერება პოლარი კუთხე $\varphi = +\frac{\pi}{2}$. თუ $x$ და $y$-ით აღვნიშნავთ $M$ წერტილის კოორდინატებს ამ სისტემის მიმართ, მაშინ, ცხადია:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi; \tag{1}$$

ეს ფორმულები, რომლებიც გამოსახავენ $x$ და $y$-ს $\rho$ და $\varphi$-ს საშუალებით, მართებული არიან, როგორც § 58-ის, ისე § 59-ის შემთხვევაში [1].

ფორმულები პირუკუ გადასვლისთვის პირდაპირ გამოიყვანება წინა ფორმულებიდან. მართლაც, ჯერ ერთი, რომ გვაქვს:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2,$$

საიდანაც

$$\rho = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2}$$

და მეორეს მხრით

$$\cos \varphi = \frac{x}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{3}$$

რადიკალების წინ ნიშანი შეიძლება სურვილისამებრ შეირჩეს, მაგრამ, ერთი და იგივე ყველა ფორმულაში (2) და (3) [2].

თუ ჩვენ შევჩერდებით § 58-ის სისტემაზე, მაშინ საჭიროა მხოლოდ (+) ნიშნის დატოვება და წინა ფორმულები მიიღებენ სახეს:

$$\rho = +\sqrt{x^2 + y^2}, \tag{3ª}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{+\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{+\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{3ᵇ}$$

როგორც ერთს, ისე მეორე შემთხვევაში, გვექნება:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \tag{4}$$

---

[1]) (1) ფორმულები გამოიყვანება § 19ა-ს (2) ფორმულების თანახმად.

[2]) თუ ავიღებთ (+) ნიშანს, მაშინ $\rho$ მიიღებს დადებით Ენიშვნელობას, თუკი (—) ნიშანს ავიღებთ, მაშინ $\rho$-სათვის უარყოფით Ენიშვნელობას მივიღებთ, მაგრამ, სამაგიეროდ, $\Delta$ ღერძი მიიღებს Ეიმართულებას იმის მოპირდაპირეს, რომელიც მიიღება რადიკალის წინ (+) ნიშნის აღებით.

ფორმულები (2) და (3) ან (2*) და (3*) საშუალებას გვაძლევენ გამოვითვალოთ პოლარი კოორდინატები, თუ ცნობილია მართკუთხოვანი. გამოთვლები ყველაზე უკეთესია ასე ვაწარმოოთ: თუ შევჩერდებით რადიკალის წინ გარკვეულ ნიშანზე, გამოვითვალოთ $\rho$ და შემდეგ $\cos\varphi$ და $\sin\varphi$-ის ნიშნების მიხედვით განვსაზღვრავთ იმ მეოთხედს, რომელშიაც იმყოფება $\varphi$ კუთხე; გამოთვლა ცხრილებით კი მოვახდინოთ (4) ფორმულის მიხედვით.

გავიხსენოთ, რომ (1—4) ფორმულები იმ კერძო შემთხვევას შეეხებიან, როცა დეკარტის კოორდინატთა სისტემა მართკუთხოვანია, და აბსცისთა ღერძი მიმართულია პოლარი ღერძის გასწვრივ.

#### სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. წინა აღნიშვნების მიხედვით იპოვეთ წერტილის მართკუთხოვანი კოორდინატები $x$ და $y$, თუ მოცემულია $\rho=2$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

პასუხი: $x=1$, $y=\sqrt{3}$.

2. მოცემულია მართკუთხოვანი კოორდინატები: $x=-5$, $y=+5$. იპოვეთ პოლარი კოორდინატები $\rho$ და $\varphi$ (არაგანზოგადებულ სისტემაში); აღნიშვნები იგივეა, რაც ზემოთ.

პასუხი: $\rho=+5\sqrt{2}$, $\varphi=\frac{3\pi}{4}$.

3. იპოვეთ მანძილი ორ წერტილს შორის $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ და $M_2(\rho_2, \varphi_2)$.

ამოხსნა. გვაქვს: $|M_1M_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=(\rho_2\cos\varphi_2-\rho_1\cos\varphi_1)^2+(\rho\sin\varphi_2-\rho_1\sin\varphi_1)^2$, სადაც $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ მართკუთხოვანი დეკარტის კოორდინატებია; აქედან აშკარა გამარტივებათა შემდგომ მივიღებთ:

$$|M_1M_2|^2=\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1).$$

ადვილია ამავე ფორმულის მიღება ნახაზის უშუალო განხილვით.

**§ 61. სივრცეში პოლარი კოორდინატები.** ამ სისტემაში ძირითად მუდმივ ელემენტებად არიან წერტილი $O$ (პოლუსი), ღერძი $Oz$ (პოლარი ღერძი) და ნახევარსიბრტყე $Ozx$, გამავალი $Oz$ ღერძზე.

ვთქვათ, $M$ არის სივრცის რომელიმე წერტილი (ნახ. 62)[1]. აღვნიშნოთ $\rho$-თი $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორის სიგრძე. $\theta$-თი კუთხე, შედგენილი $\overline{OM}$-ის მიერ $Oz$ პოლარ ღერძთან და, ბოლოს, $\varphi$-თ კუთხე, შედგენილი $Oz$ ღერძზე და $M$ წერტილზე გამავალი ნახევარსიბრტყით $Oxz$ პოლარ ნახევარსიბრტყესთან. კუთხე $\varphi$ აითვლება $Oxz$ ნახევარსიბრტყიდან რომელიმე გარკვეული მიმართულებით, მაგალითად, საათის ისრის მიხედვით ($Oz$-ის გასწვრივ მდგომი დამკვირვებელისათვის).

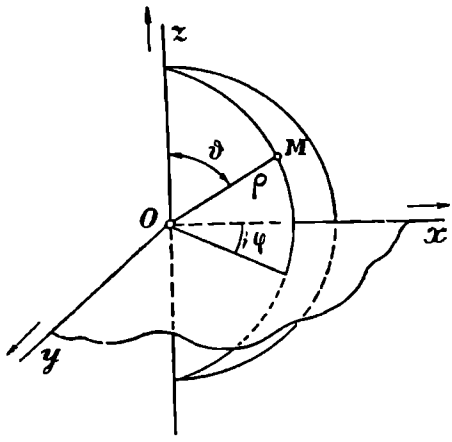
ცხადია, რომ საკმარისია $\rho$ ვცვალოთ საზღვრებში $(0, \infty)$, $\theta$—საზღვრებში $(0, \pi)$ და $\varphi$—საზღვრებში $(0, 2\pi)$ რომ მივიღოთ სივრცის ყველა წერტილი.

სიდიდეები $\rho$, $\theta$ და $\varphi$ იწოდებიან $M$ წერტილის პოლარ (ან სფერულ) კოორდინატებად.

[1]) ღერძები $Ox$ და $Oy$ ნახ. 62-ზე ჩვენ გავიყვანეთ მეტი თვალსაჩინოებისათვის, სიბრტყე $Oxy$ მართობულია $Oz$ ღერძისა, ხოლო $Ox$ ღერძის დადებითი ნაწილი მდებარეობს პოლარ ნახევარსიბრტყეზე.

ახლა ვიპოვოთ გადასვლის ფორმულები პოლარ კოორდინატებიდან დეკარტის მართკუთხოვანზე.

ჩვენ ვგულისხმობთ (ნახ. 62 და 63), რომ $Oz$ ღერძი პოლარ ღერძს ემთხვევა; $Ox$ მდებარეობს პოლარ ნახევარსიბრტყეში, ხოლო $Oy$ მართობულია ორივე ხსენებული ღერძისა და ამასთანავე ისეთნაირად არის მიმართული, რომ $\varphi$ კუთხე $Oyz$ ნახევარსიბრტყისათვის $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$-ის ტოლი იყოს.



ნახ. 62.

ცხადია,

$$z = \text{გეგ. } \overrightarrow{MO} = \rho\cos\vartheta.$$

შემდგომ, თუ დავაგეგმილებთ $\overrightarrow{OM}$ ვექტორს $Oxy$ სიბრტყეზე, მივიღებთ $Om$ ვექტორს (ნახ. 63), რომლის სიგრძეა

$$r = |Om| = \rho\cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \rho\sin\vartheta$$

და რომელიც შეადგენს $Ox$ ღერძთან $\varphi$ კუთხეს. თუ ამ ვექტორს დავაგეგმილებთ $Ox$-ზე და $Oy$-ზე, მივიღებთ:

$$x = |Om|\cos\varphi = \rho\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$y = |Om|\sin\varphi = \rho\sin\vartheta\sin\varphi.$$

მაშასადამე,

$$x = \rho\sin\vartheta\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\vartheta\sin\varphi,\quad z = \rho\cos\varphi. \tag{1}$$

პირუკუ, თუ ცნობილია $x$, $y$, $z$, შეგვიძლია $\rho$, $\vartheta$ და $\varphi$ განვსაზღვროთ. მართლაც, გვაქვს:

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{2}$$

შემდგომ, კუთხე, $\vartheta$ (0 და $\pi$-ს შორის მოქცეული) სავსებით განისაზღვრება ფორმულით:

$$\cos\vartheta = \frac{z}{\rho}; \tag{3}$$

$\varphi$ კუთხე კი (0 და $2\pi$-ს შორის მოქცეული) განისაზღვრება ფორმულებიდან:

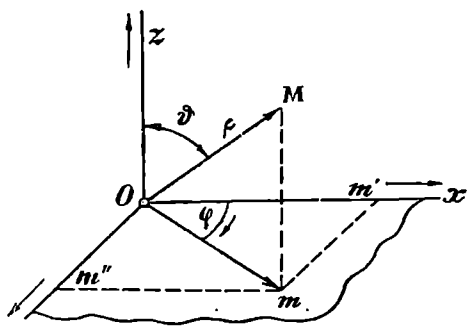
$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho\sin\vartheta},\quad \sin\varphi = \frac{y}{\rho\sin\vartheta}. \tag{4}$$

**§ 62. ნახევარპოლარი (ცილინდრული) კოორდინატები.** წინა პარაგრაფის აღნიშვნების მიხედვით, $M$ წერტილის მდებარეობა სავსებით განისაზ-

ღერება მისი $Oxy$ სიბრტყეზე $m$ გეგმილის პოლარი $(r, \varphi)$ კოორდინატების მოცემით და $z=mM$ კოორდინატით. სიდიდეები $r$, $\varphi$, $z$ იწოდებიან $M$ წერტილის **ნახევარპოლარ (ცილინდრულ) კოორდინატებად**.

ამ კოორდინატებიდან დეკარტის მართკუთხოვანზე გადასვლა ხდება შემდეგი ფორმულების საშუალებით (წინა პარაგრაფის აღნიშვნების მიხედვით);

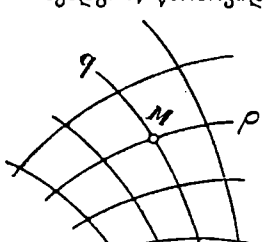
$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z. \quad (1)$$




ნახ. 63.

**§ 63. კოორდინატთა ზოგადი მეთოდი.** დეკარტის, პოლარ და ნახევარპოლარ კოორდინატთა სისტემები წარმოადგენენ კოორდინატთა ზოგადი მეთოდის განხორციელების მხოლოდ კერძო შემთხვევებს; იმისათვის, რომ წარმოდგენა ვიქონიოთ ამ მეთოდზე, დავიწყოთ სიბრტყეზე კოორდინატების შემთხვევით.

წარმოვიდგინოთ სიბრტყეზე (ნახ. 64) წირთა (მრუდთა ან წრფეთა) ორი სისტემა, რომელთაც ის თვისება აქვთ, რომ სიბრტყის ყოველ წერტილზე გაივლის თითოეული სისტემის მხოლოდ ერთი წირი და რომ $M$-ის გარდა, ეს ორი წირი არსად არ იკვეთება (მაგალითად, ჩვენ შეგვიძლია პირველი და მეორე სისტემის წირებად მივიღოთ შესაბამისად, $Oy$ და $Ox$ ღერძების პარალელური წრფეები (ნახ. 65). ხსენებულ წირებს **საკოორდინატო წირები** ვუწოდოთ.



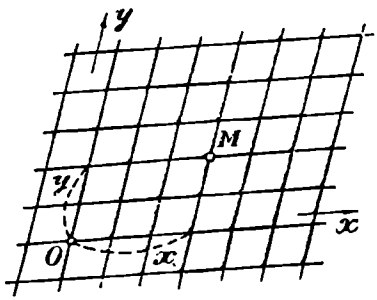

ნახ. 64.

შემდგომ, წარმოვიდგინოთ, რომ პირველი სისტემის ყოველი წირი სავსებით ხასიათდება გარკვეული $p$ რიცხვის მნიშვნელობით ისე, რომ ყოველ $p$ მნიშვნელობას ეთანადება პირველი სისტემის სრულიად განსაზღვრული წირი; ვთქვათ, ანალოგიურად, მეორე სისტემის წირები ხასიათდებიან გარკვეული $q$ რიცხვის მნიშვნელობით (ზემოხსენებულ მაგალითში შეიძლება მივიღოთ $p=x$, $q=y$, სადაც $x$ არის ნაკვეთი, პირველი სისტემის წრფით მოჭრილი $Ox$ ღერძზე, ხოლო $y$ ნაკვეთი, მოჭრილი $Oy$ ღერძზე მეორე სისტემის წრფის მიერ; ორივე ეს ნაკვეთი გარკვეული ნიშნით იგულისხმება).

ვთქვათ, $M$ არის სიბრტყის რომელიმე წერტილი; პირობის თანახმად, მასზე გაივლის თითოეული სისტემის თითო წირი. ამ წირთა დამახასიათებელი რიცხვები $p$ და $q$, აშკარაა, საკმარისად განსაზღვრავენ $M$ წერტილის მდებარეობას.

რეობას სიბრტყეზე და იწოდებიან $M$ წერტილის მრუდწიროვან კოორდინატებად.

თუ, კერძოდ, საკოორდინატო წირებად მივიღებთ ორი მოცემული $Oy$ და $Ox$ ღერძის პარალელურ წრფეებს და $p$ და $q$ სიდიდეებად რიცხვებს $x$ და $y$ (იხ. ზემოთ), მაშინ მივიღებთ განუზოგადებელ დეკარტის კოორდინატთა უკვე ცნობილ სისტემას.




ნახ. 65

პოლარ კოორდინატებამდე რომ მივიდეთ, განვიხილოთ საერთო $O$ ცენტრიანი წრეწირების სისტემა. თითოეული ამ წრეწირთაგან, რომელთაც ჩვენ მივიღებთ პირველი სისტემის საკოორდინატო წირებად, ხასიათდება თავისი რადიუსით $\rho$. მეორე სისტემის წირებად მივიღოთ $O$ წერტილიდან გამომავალი ნახევარწრფეები (სხივები); თითოეული ამ ნახევარწრფეთაგან ხასიათდება იმ $\varphi$ კუთხით, რომელსაც იგი შეადგენს რომელიმე მუდმივ $Ox$ ღერძთან სიბრტყეზე ($\varphi$ კუთხეს, როგორც ყოველთვის ჩვენ ვაწერთ გარკვეულ ნიშანს). თუ $p$ და $q$ სიდიდეებად შესაბამისად $\rho$ და $\varphi$-ს მივიღებთ, ამით, ცხადია, § 58-ის პოლარ სისტემამდე მივალთ.

შემდეგი მაგალითისათვის განვიხილოთ ეგრეთ წოდებული ბიპოლარი კოორდინატების სისტემა, რომელიც შემდეგნაირად შეიძლება განიმარტოს. ავიღოთ სიბრტყეზე ორი წერტილი $O$ და $O'$. მივიღოთ პირველი სისტემის წირებად წრეწირები ცენტრით $O$ წერტილში, ხოლო მეორე სისტემის წირებად—წრეწირები ცენტრით $O'$-ში. ვთქვათ, $p$ და $q$ კოორდინატების როლს ასრულებენ პირველი და მეორე სისტემის წრეწირთა რადიუსები $\rho$ და $\rho'$. სხვანაირად რომ ვთქვათ, რომელიმე $M$ წერტილის კოორდინატებად მივიღოთ ამ წერტილის მანძილი ორ მოცემულ წერტილამდე $O$ და $O'$. კოორდინატთა მიღებულ სისტემას ეწოდება ბიპოლარი სისტემა. შევნიშნოთ, რომ ამ სისტემის საკოორდინატო წირები მთლიანად არ აკმაყოფილებენ ზემოდასახელებულ პირობებს; სხვადასხვა სისტემის წირები, საზოგადოდ, ორ წერტილში იკვეთებიან; ამიტომ $\rho$, $\rho'$ მნიშვნელობათა ერთობლიობას საზოგადოდ, ერთი წერტილი კი არ შეეფერება, არამედ ორი. ეს მოუხერხებლობა რომ თავიდან ავიცილოთ, შეიძლება, მაგალითად, დავკმაყოფილდეთ სიბრტყის ერთი რომელიმე ნაწილით იმ ორთაგან, რომლებადაც ყოფს ამ სიბრტყეს $OO'$ წრფე.

შევნიშნოთ კიდევ, რომ ზემომოყვანილი მოსაზრებანი შეიძლება გამოვიყენოთ წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისათვის ნებისმიერ ფართეულზე (და არა მხოლოდ სიბრტყეზე). უმარტივესი მაგალითი—ეს არის საყოველთაოდ ცნობილი გეოგრაფიული კოორდინატები სფეროზე. აქ

საკოორდინატო წირებად არიან მერიდიანები და პარალელები, ხოლო კოორდინატებად $p$ და $q$—სიგრძედი და სიგანედი.

წინა მოსაზრებანი უშუალოდ განზოგადოდებიან სამი განზომილების შემთხვევისათვის.

წარმოვიდგინოთ სივრცეში ფართეულთა სამი სისტემა ისეთი, რომ სივრცის ყოველ წერტილზე გაივლის ერთი და მხოლოდ ერთი ფართეული თითოეული სისტემიდან და რომ ეს სამი ფართეული მხოლოდ ერთს საერთო $M$ წერტილში იკვეთება. ვთქვათ, პირველი სისტემის თითოეული ფართეული ხასიათდება რაღაც $p$ სიდიდის მნიშვნელობის მოცემით; ანალოგიურად, ვთქვათ, რომ მეორე და მესამე სისტემის თითოეული ფართეული ხასიათდება რაღაც $q$ და $r$ სიდიდეების მოცემით. განსახილველი ფართეულები იწოდებიან **საკოორდინატო ფართეულებად**, ხოლო ამ ფართეულთა გადაკვეთის წირები **საკოორდინატო წირებად**. ცხადია, რომ სივრცის ყოველ წერტილზე გადის სამი საკოორდინატო წირი.

თუ მოცემულია $M$ წერტილი, ამით მოცემული იქნებიან $M$ წერტილზე გამავალი საკოორდინატო ფართეულები, ე. ი. მოცემული იქნებიან $p$, $q$, $r$ სიდიდეთა მნიშვნელობანი და პირუკუ. სიდიდეები $p$, $q$, $r$ იწოდებიან $M$ წერტილის მრუდწიროვან კოორდინატებად.

დეკარტის კოორდინატები წარმოადგენენ მრუდწიროვანის კერძო შემთხვევას: ამ შემთხვევაში საკოორდინატო ფართეულები წარმოადგენენ კოორდინატთა სიბრტყეების პარალელურ სიბრტყეებს: $p$, $q$, $r$ სიდიდეთა როლს ასრულებენ $x$, $y$, $z$ ნაკვეთები (გარკვეული ნიშნით განხილულნი) ხსენებულ სიბრტყეთა მიერ მოჭრილი კოორდინატთა ღერძებზე (დაწყებული $O$-დან), ან მათი პროპორციული სიდიდეები (განზოგადებულ კოორდინატთა შემთხვევაში).

სივრცეში პოლარ კოორდინატთა შემთხვევაში § 61-ის აღნიშვნების მიხედვით, საკოორდინატო ფართეულები არიან სფეროები ცენტრით $O$ წერტილში, დახასიათებულნი რადიუსით $\rho$, $Oz$ ღერძზე გამავალი ნახევარსიბრტყეები, დახასიათებულნი $Ozx$ ნახევარსიბრტყესთან შედგენილი $\varphi$ კუთხით და წრიული კონუსები, რომელთა მსახველნი არიან სხივები, $O$ წერტილიდან გამომავალნი და $Oz$ ღერძთან $\vartheta$ კუთხით დახრილნი.

ნახევარპოლარ (ცილინდრულ) კოორდინატთა შემთხვევაში საკოორდინატო ფართეულები იქნებიან (§ 61-ის აღნიშვნების მიხედვით) წრიული ცილინდრები $Oz$ ღერძით, დახასიათებულნი განივი კვეთის $r$ რადიუსით, $Oz$ ღერძზე გამავალი ნახევარსიბრტყეები, დახასიათებულნი $Ozx$ ნახევარსიბრტყესთან შედგენილი $\varphi$ კუთხით და სიბრტყეები $Oz$-ის მართობულნი, დახასიათებულნი $Oz$ ღერძზე მოჭრილი (დაწყებული $O$ წერტილიდან) ნაკვეთის ალგებრული მნიშვნელობით.

## თავი მესამე[1])

# დეკარტის კოორდინატთა გარდაქმნა, მოძრაობა და აფინური გარდაქმნები

## I. დეკარტის კოორდინატთა გარდაქმნის ზოგადი ფორმულები

ერთი და იმავე წერტილის (ან ვექტორის) კოორდინატები დეკარტის კოორდინატთა სხვადასხვა სისტემის მიმართ, საზოგადოდ სხვადასხვაა. მეტად მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ წერტილის ან ვექტორის კოორდინატების გამოთვლა ერთი სისტემის მიმართ, როცა ცნობილია იმავე წერტილის ან ვექტორის კოორდინატები მეორე სისტემის მიმართ.

ამ საკითხის გადაწყვეტის დროს ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ცნობილია განსახილველ კოორდინატთა ორი სისტემის ძირითად ელემენტთა ურთიერთგანლაგება. დეკარტის კოორდინატთა მოცემული სისტემის ძირითად ელემენტებად ჩვენ ვგულისხმობთ სისტემის სათავეს და საკოორდინატო ვექტორებს. ცხადია, რომ ამ ელემენტებით განისაზღვრებიან კოორდინატთა ღერძებიც. როცა საკითხი ეხება ვექტორის კოორდინატებს (და არა წერტილისას), მაშინ, ცხადია, სათავის მდებარეობა განურჩეველია.

**§ 64. სათავის გადატანა.** დავიწყოთ იმ მარტივი შემთხვევის განხილვით, როცა ახალი სისტემა განსხვავდება ძველისაგან მხოლოდ სათავის მდებარეობით. ასე რომ, საკოორდინატო ვექტორები (და, მაშასადამე, ღერძთა მიმართულება) ორივე სისტემისათვის ერთი და იგივეა. ძველი სისტემის ღერძები აღვნიშნოთ $Ox$, $Oy$, $Oz$-ით, ხოლო ახალი ღერძები—$O'x'$, $O'y'$, $O'z'$. საკოორდინატო ვექტორები ორივე შემთხვევაში აღვნიშნოთ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$-თი. ახალი სისტემის მდებარეობა ძველის მიმართ, ცხადია, სავსებით განისაზღვრება ახალი $O'$ სათავის კოორდინატებით ძველის მიმართ. ვთქვათ, ეს კოორდინატებია $a$, $b$, $c$.

თუ $\vec{r}$ რომელიმე ვექტორია, მაშინ მისი კოორდინატები, ცხადია, ორივე სისტემის მიმართ ერთი და იგივეა. ახლა განვიხილოთ რომელიმე $M$ წერტილის ძველსა და ახალ კოორდინატებს შორის დამოკიდებულება. ვთქვათ,

---

[1]) წიგნის პირველი წაკითხვის დროს შეიძლება დროებით გამოტოვებულ იქნას ამ თავის ყველა პარაგრაფი, გარდა § § 64—66; იხ. „ზოგიერთი განმარტება" ამ წიგნის დასაწყისში, პუნქტი 3°.

$M$ წერტილის კოორდინატებია ძველ სისტემაში $x$, $y$, $z$, ხოლო ახალ სისტემაში $x'$, $y'$, $z'$. აშკარაა, რომ გვექნება (ნახ. 66):

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \tag{1}$$

მაგრამ, წერტილის კოორდინატების განმარტების თანახმად,

$$\overrightarrow{OM} = \vec{u}x + \vec{v}y + \vec{w}z, \quad \overrightarrow{O'M} = \vec{u}x' + \vec{v}y' + \vec{w}z', \quad \overrightarrow{OO'} = \vec{u}a + \vec{v}b + \vec{w}c.$$

თუ ამ გამოსახულებებს შევიტანთ წინა ფორმულაში, მაშინ მივიღებთ:

$$\vec{u}x + \vec{v}y + \vec{w}z = \vec{u}(x'+a) + \vec{v}(y'+b) + \vec{w}(z'+c),$$

საიდანაც გამომდინარეობს

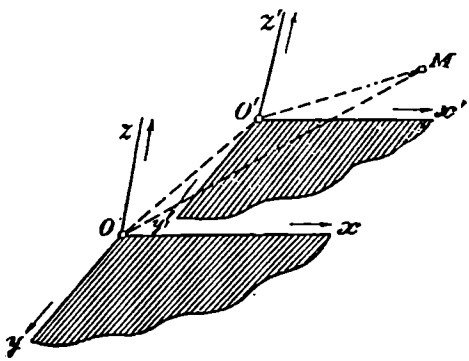
$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z'. \tag{2}$$

(2) ფორმულები საშუალებას გვაძლევენ გამოვითვალოთ ძველი კოორდინატები, როცა ახალია მოცემული და პირუკუ.

სიბრტყეზე კოორდინატების შემთხვევისათვის ანალოგიურად გვექნება:

$$x = a + x', \quad y = b + y'; \tag{3}$$

განუზოგადებელ კოორდინატთა შემთხვევაში მკითხველი ადვილად შეამოწმებს ამ ფორმულების მართებულებას უშუალოდ ნახაზის განხილვით (იხ. ნახ. 67).



ნახ. 66.

**§ 65. ხაკოორდინატო ვექტორთა შეცვლა.** ახლა განვიხილოთ მეორე კერძო შემთხვევა, როცა ახალი $O'x'y'z'$ სისტემის ღერძები, ძველი $Oxyz$ სისტემის ღერძებთან ადგენენ ნებისმიერ კუთხეს, ხოლო მათი სათავე თანხვედნილია (იხ. ნახ. 68). ახალი სისტემის საკოორდინატო ვექტორები შეიძლება განსხვავებულ იყოს ძველისაგან არა მარტო მიმართულებით, არამედ სიდიდითაც. ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $\vec{u}'$, $\vec{v}'$, $\vec{w}'$, ვექტორთა კოორდინატები ძველი სისტემის მიმართ მოცემულია. ვთქვათ, ეს კოორდინატებია შესაბამისად

$$(l_1, m_1, n_1), \quad (l_2, m_2, n_2), \quad (l_3, m_3, n_3)$$

ასე, რომ

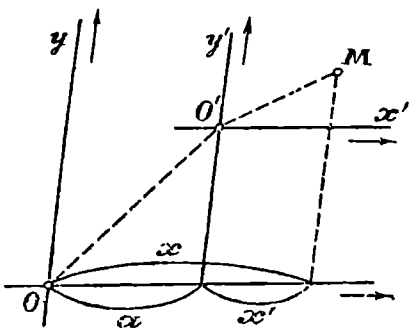
$$\left.\begin{aligned} \vec{u}' &= l_1\vec{u} + m_1\vec{v} + n_1\vec{w}, \\ \vec{v}' &= l_2\vec{u} + m_2\vec{v} + n_2\vec{w}, \\ \vec{w}' &= l_3\vec{u} + m_3\vec{v} + n_3\vec{w}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ვთქვათ, $\vec{P}$ არის რომელიმე ვექტორი, ხოლო $X$, $Y$, $Z$ და $X'$, $Y'$, $Z'$ მისი კოორდინატებია შესაბამისად ძველი და ახალი სისტემის მიმართ.

გვაქვს:

$$\vec{P} = \vec{u}X + \vec{v}Y + \vec{w}Z = \vec{u}'X' + \vec{v}'Y' + \vec{w}'Z'.$$

თუ მარჯვენა მხარეში $\vec{u}'$, $\vec{v}'$, $\vec{w}'$-ის ნაცვლად შევიტანთ მათს გამოსახულებებს (1) ფორმულებიდან და ერთმანეთს შევადარებთ ორივე მხარეში $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$-ს კოეფიციენტებს, მივიღებთ:




ნახ. 67.

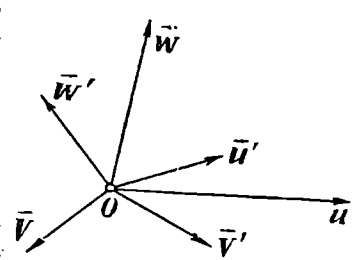
$$\left.\begin{aligned} X &= l_1X' + l_2Y' + l_3Z' \\ Y &= m_1X' + m_2Y' + m_3Z' \\ Z &= n_1X' + n_2Y' + n_3Z'. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ამნაირად ჩვენი ამოცანა გადაწყვეტილია: ძველი კოორდინატები გამოსახულია ახლის საშუალებით. თუ გვინდა ახალი კოორდინატები გამოვსახოთ ძველის საშუალებით, ამისათვის საკმარისია (2) სისტემის ამოხსნა $X'$, $Y'$, $Z'$-ის მიმართ, ანდა პირდაპირ გამოვიყენოთ უკანასკნელი შედეგი, ძველი და ახალი სისტემის როლების შეცვლით [1]).

იმ გარემოებიდან, რომ ძველი და ახალი ღერძების შენაცვლებით შეგვიძლია გამოვსახოთ $X'$, $Y'$, $Z'$ კოორდინატები $X$, $Y$, $Z$-ის საშუალებით, გამომდინარეობს, რომ (2) სისტემა ყოველთვის ამოიხსნება $X'$, $Y'$, $Z'$-ის მიმართ, ეს კი ნიშნავს, რომ დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} \quad \text{ანუ} \quad \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}$$

ნულისაგან განსხვავდება. ეს გამომდინარეობს აგრეთვე იქიდან, რომ უკანასკნელი დეტერმინანტის ნულთან ტოლობის შემთხვევაში ვექტორები კომპლანარული იქნებოდნენ (§ 39). ეს კი ეწინააღმდეგება საკოორდინატო ვექტორებისათვის მიღებულ პირობას.




ნახ. 68.

სრულიად აშკარაა, რომ ნებისმიერი $M$ წერტილის კოორდინატები გარდაიქმნებიან ამავე (2) ფორმულების მიხედვით, ვინაიდან $M$ წერტილის კო-

[1]) ამ უკანასკნელ შემთხვევაში მოცემულად უნდა ჩავთვალოთ ძველი სისტემის საკოორდინატო ვექტორების $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$-ს კოორდინატები ახალი სისტემის მიმართ.

ორდინატები არიან ამ წერტილის $\overrightarrow{OM}$ რადიუს-ვექტორის კოორდინატები. თუ, მაშასადამე, $x$, $y$, $z$ და $x'$, $y'$, $z'$ არიან $M$ წერტილის, შესაბამისად, ძველი და ახალი კოორდინატები, მაშინ:

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y' + l_3z' \\ y &= m_1x' + m_2y' + m_3z' \\ z &= n_1x' + n_2y' + n_3z' \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

სწორედ ასევე შეიძლება ახალი კოორდინატები გამოისახონ ძველის საშუალებით.

შევნიშნოთ, რომ $l_1$, $l_2$, ..., $n_3$ სიდიდეები (2) ან (3) ფორმულებში არიან მუდმივი სიდიდეები, დამოკიდებულნი მხოლოდ ძველი და ახალი სისტემის ურთიერთმდებარეობაზე და საკოორდინატო ვექტორების სიგრძეზე, მაგრამ დამოუკიდებელნი განსახილველ $\vec{P}$ ვექტორზე (ან $M$ წერტილზე).

სიბრტყეზე კოორდინატთა შემთხვევისათვის ანალოგიურად გვექნება:

$$\left.\begin{aligned} \vec{u'} &= l_1\vec{u} + m_1\vec{v}, \\ \vec{v'} &= l_2\vec{u} + m_2\vec{v} \end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

და

$$\left.\begin{aligned} X &= l_1X' + l_2Y', \\ Y &= m_1X' + m_2Y', \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

(ვექტორისათვის) და

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y' \\ y &= m_1x' + m_2y' \end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

(წერტილისათვის).

წრფეზე კოორდინატთა შემთხვევისათვის, ცხადია, გვექნება:

$$\vec{u} = l\vec{u'} \tag{1b}$$

და

$$X = lX' \tag{2b}$$

(ვექტორისათვის) და

$$x = lx' \tag{3b}$$

(წერტილისათვის); $l$ წარმოადგენს ნულისგან განსხვავებულ მუდმივს.

#### სავარჯიშო მაგალითები

1. ძველი კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე მართკუთხოვანია. ახალი $Ox'$ ღერძი შეადგენს ძველ $Ox$ ღერძთან კუთხეს 30°-ს, ხოლო ახალი $Oy'$ ღერძი შეადგენს იმავე $Ox$ ღერძთან კუთხეს 60°-ს (კუთხეები აითვლებიან $Ox$ ღერძიდან $Oy$ ღერძის მიმართულებით). საჭიროა რომელიმე $\vec{P}$ ვექტორის ძველი კოორდინატები $(X, Y)$ გამოისახონ ახალი $(X', Y')$ კოორდინატების საშუალებით და პირუკუ. კოორდინატები არაგანზოგადებულად ითვლებიან.

ამოხსნა. $\vec{u'}$ ვექტორის (ორტის) კოორდინატები ძველი სისტემის მიმართ იქნებიან (cos 30°, sin 30°), $\vec{v'}$-ს კოორდინატები იმავე სისტემის მიმართ იქნებიან (cos 60°, sin 60°). მაშასადამე,

$$\vec{u'} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}, \quad \vec{v'} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\vec{v};$$

ამგვარად:

$$l_1=-\frac{1}{2}\sqrt{3},\quad m_1=-\frac{1}{2},\quad l_2=-\frac{1}{2},\quad m_2=-\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

მაშასადამე:

$$X=-\frac{1}{2}(\sqrt{3}X'+Y'),\quad Y=-\frac{1}{2}(X'+\sqrt{3}Y').$$

ჩვენ გამოვსახეთ ძველი კოორდინატები ახლის საშუალებით. თუ ამოვხსნით უკანასკნელ განტოლებებს $X'$, $Y'$-ის მიმართ, მივიღებთ ახალი კოორდინატების გამოსახულებებს ძველის საშუალებით:

$$X'=\sqrt{3}X-Y,\quad Y'=-X+\sqrt{3}Y.$$

2. ახალი სისტემის $Ox'$, $Oy'$, $Oz'$ ღერძები ძველი სისტემის $yOz$, $zOx$, $xOy$ კუთხეების ბისექტრისებს წარმოადგენენ; ძველი სისტემა მართკუთხოვნად იგულისხმება. საჭიროა $\vec{P}$ ვექტორის ძველი კოორდინატები $X$, $Y$, $Z$ გამოვსახოთ ახალი $X'$, $Y'$, $Z'$, კოორდინატების საშუალებით; კოორდინატები არაგანზოგადებულია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს [1]):

$$\vec{u}'=0\cdot\vec{u}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{w}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{v}+\vec{w}),$$

$$\vec{v}'=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{u}+0\cdot v+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{w}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{u}+\vec{w}),$$

$$\vec{w}'=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{u}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}+0\cdot\vec{w}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{u}+\vec{v}).$$

მაშასადამე,

$$X=\frac{1}{\sqrt{2}}(Y'+Z'),\quad Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X'+Z'),\quad Z=\frac{1}{\sqrt{2}}(X'+Y').$$

**§ 66. ზოგადი შემთხვევა.** ახლა ვთქვათ, რომ ახალი $O'x'y'z'$ სისტემა სრულიად ნებისმიერად მდებარეობს ძველი $Oxyz$ სისტემის მიმართ. ვინაიდან ვექტორის კოორდინატები სრულიად დამოუკიდებელი არიან კოორდინატთა სათავის მდებარეობისაგან, ამიტომ, აშკარაა, ისინი გარდაიქმნებიან, წინა პარაგრაფის იმავე (2) ფორმულების მიხედვით, ვითომც ახალი $O'$ სათავე $O$-ში ყოფილიყო.

რაც შეეხება წერტილის კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულების გამოყვანას, შემოვიღოთ დამხმარე $O''x''y''z''$ სისტემა (ნახ. 69), რომელსაც სათავე აქვს $O'$-ში და რომლის საკოორდინატო ვექტორები ძველის ტოლია.

თუ აღვნიშნავთ $(x, y, z)$, $(x', y', z')$ და $(x'' y'' z'')$-ით $M$ წერტილის კოორდინატებს შესაბამისად ძველს, ახალს და დამხმარე სისტემაში, მაშინ გვექნება:

$$x=a+x'',\quad y=b+y'',\quad z=c+z'',$$

[1]) გარკვეულობისათვის ვგულისხმობთ, რომ ახალი ღერძების დადებითი ნაწილები მოთავსებულია ძველის დადებით ნაწილთა შორის, ესე იგი, რომ, მაგალითად, $Ox'$ შეადგენს $Oy$ და $Oz$-თან 45°-იან კუთხეებს.

სადაც $a$, $b$, $c$ აღნიშნავენ ახალი $O'$ სათავის კოორდინატებს ძველი სისტემის მიმართ. შემდგომ აძისა, წინა პარაგრაფის ფორმულების მიხედვით, მივიღებთ (თუ დამხმარე სისტემას განვიხილავთ, როგორც ძველს):

$$\begin{aligned} x'' &= l_1x' + l_2y' + l_3z', \\ y'' &= m_1x' + m_2y' + m_3z', \\ z'' &= n_1x' + n_2y' + n_3z'; \end{aligned}$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ წინა ფორმულებში, საბოლოოდ გვექნება:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + l_1x' + l_2y' + l_3z', \\ y &= b + m_1x' + m_2y' + m_3z', \\ z &= c + n_1x' + n_2y' + n_3z'. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

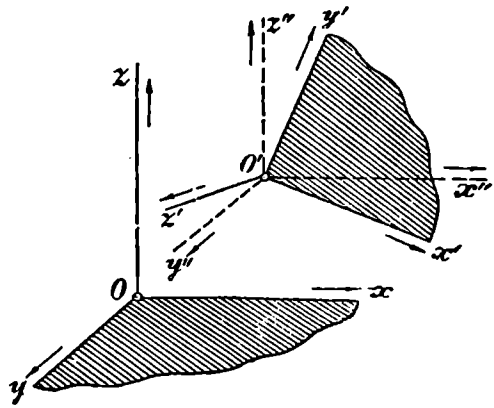
(1) ფორმულებში ყველა კოეფიციენტი $a$, $b$, ..., $n_3$ მუდმივი სიდიდეებია, $M$ წერტილის მდებარეობისაგან დამოუკიდებელნი (ხსენებული კოეფიციენტები დამოკიდებულია მხოლოდ ძველი და ახალი სისტემის ღერძთა ურთიერთმდებარეობაზე და საკოორდინატო ვექტორების სიგრძეზე).

სიბრტყეზე განხილულ კოორდინატთა შემთხვევისათვის (1) ფორმულების მაგიერ გვექნება უფრო მარტივი ფორმულები:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + l_1x' + l_2y', \\ y &= b + m_1x' + m_2y', \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

რომლებიც სრულიად ანალოგიური წესით გამოიყვანებიან.

თუ ძველსა და ახალ სისტემებს შევუცვლით როლებს, მივიღებთ საპირისპირო ანალოგიურ ფორმულებს:




ნახ. 69.

$$\left.\begin{aligned} x' &= a' + l'_1x + l'_2y + l'_3z, \\ y' &= b' + m'_1x + m'_2y + m'_3z, \\ z' &= c' + n'_1x + n'_2y + n'_3z \end{aligned}\right\} \qquad (1a)$$

სიბრტყის შემთხვევაში, ხოლო

$$\left.\begin{aligned} x' &= a' + l'_1x + l'_2y, \\ y' &= b' + m'_1x + m'_2y \end{aligned}\right\} \qquad (2a)$$

სიბრტყისათვის. (1a) და (2a) ფორმულები, ცხადია, შესაძლოა მიღებულ იქნას (1) და (2)-დან, თუ მათ ამოვხსნით შესაბამისად $x'$, $y'$, $z'$-ის ან $x'$, $y'$-ის მიმართ.

წრფეზე ($Ox$ ღერძზე) წერტილის კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულებს, ცხადია, აქვთ შემდეგი სახე:

$$x = a + lx',\ x' = a' + l'x \quad \left(\text{სადაც, } l' = \frac{1}{l},\ a' = -\frac{a}{l}\right). \tag{3}$$

თუ მიღებულ შედეგებს შევაჯამებთ, შეგვიძლია გამოვთქვათ შემდეგი ძირითადი დებულება: ვექტორის დეკარტის კოორდინატები ერთი სისტემის მიმართ, წარმოადგენენ წრფივ ერთგვაროვან ფუნქციებს იმავე ვექტორის დეკარტის კოორდინატებისა მეორე სისტემის მიმართ. წერტილის დეკარტის კოორდინატები წარმოადგენენ წრფივ ფუნქციებს[1]) (საზოგადოდ არაერთგვაროვანს) იმავე წერტილის დეკარტის კოორდინატებისა მეორე სისტემის მიმართ.

**შენიშვნა:** თუ ცვლადები $x$, $y$, $z$ გამოისახებიან $x'$, $y'$, $z'$ ცვლადთა საშუალებით შემდეგი სახის ფორმულებით:

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y' + l_3z', \\ y &= m_1x' + m_2y' + m_3z', \\ z &= n_1x' + n_2y' + n_3z', \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

მაშინ ამბობენ, რომ $x$, $y$, $z$ მიიღებიან $x'$, $y'$, $z'$-დან წრფივი ერთგვაროვანი ჩასმით (გარდაქმნით), რომლის ცხრილია

$$\begin{matrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3. \end{matrix} \tag{A}$$

ამ ცხრილის დეტერმინანტს, ე. ი. დეტერმინანტს

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} \tag{5}$$

ეწოდება ჩასმის დეტერმინანტი; $l_1$, $l_2$, ..., $n_3$ სიდიდეები ჩასმის კოეფიციენტებია. თუ $\Delta = 0$, მაშინ ჩასმას ეწოდება განსაკუთრებული, ხოლო თუ $\Delta \neq 0$, მაშინ ჩასმას ეწოდება არაგანსაკუთრებული.

---

[1]) ერთი ან რამდენიმე ცვლადის წრფივი ფუნქცია ეწოდება ამ ცვლადების მიმართ პირველი ხარისხის მთელ რაციონალურ ფუნქციას. მაგალითად, სამი $x$, $y$, $z$ ცვლადის წრფივ ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე: $Ax + By + Cz + D$, სადაც $A$, $B$, $C$, $D$ მუდმივი კოეფიციენტებია. თუ მუდმივი წევრი არ შედის, მაშინ წრფივ ფუნქციას ეწოდება ერთგვაროვანი; სამი ცვლადის შემთხვევაში წრფივ ერთგვაროვან ფუნქციას აქვს სახე: $Ax + By + Cz$.

(1) სახის ფორმულები აგრეთვე განსაზღვრავენ წრფივ ჩასმას (წრფივ გარდაქმნას), საზოგადოდ არაერთგვაროვანს[1]. სიდიდეები $a$, $b$, $c$, $l_1, \ldots, n_2$ ჩასმის კოეფიციენტებია. მაგრამ ამ შემთხვევაშიც ჩასმის დეტერმინანტი ეწოდება იმავე $\Delta$ დეტერმინანტს, რომელიც შედგენილია $l_1, \ldots, n_2$ კოეფიციენტებისაგან. ჩასმას ეწოდება განსაკუთრებული ან არაგანსაკუთრებული იმის მიხედვით $\Delta=0$ თუ $\Delta\neq 0$. ეს განმარტებანი ბუნებრივად გავრცელდებიან იმ შემთხვევაშიც, როცა ცვლადთა რიცხვი ნებისმიერია[2].

აღნიშნული ტერმინოლოგიით ზემოდამტკიცებული დებულება შეიძლება აგრეთვე შემდეგნაირად გამოითქვას: წერტილის ახალი კოორდინატები მიიღებიან ძველისაგან წრფივი (არაგანსაკუთრებული) ჩასმით[3], რომლის კოეფიციენტები მუდმივია; ხოლო ვექტორის ახალი კოორდინატები მიიღებიან ძველისაგან წრფივი ერთგვაროვანი (არაგანსაკუთრებული) ჩასმით, რომლის კოეფიციენტები მუდმივია (აქ კოეფიციენტებს მუდმივი ეწოდებათ იმ გაგებით, რომ ისინი არ არიან დამოკიდებული განსახილველ ვექტორზე ან წერტილზე, არამედ დამოკიდებული არიან მხოლოდ ძველ და ახალ საკოორდინატო ვექტორთა ურთიერთმდებარეობაზე და კოორდინატთა სათავეზე).

**§ 67. დამატებანი. 1°. სამკუთხედის ფართობისა და ტეტრაედრის მოცულობის ფორმულების განზოგადება.** § 49-ში ჩვენ გამოვიყვანეთ $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობისათვის (4) ფორმულა, რომელიც მართებულია მართკუთხოვან კოორდინატთა შემთხვევაში. გამოვიყვანოთ ანალოგიური ფორმულა ზოგადი სახის დეკარტის კოორდინატებისათვის. ვთქვათ, $X_1$, $Y_1$ და $X_2$, $Y_2$ წარმოადგენენ $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორთა კოორდინატებს განზოგადებულ დეკარტის სისტემაში. ავიღოთ დამხმარედ დეკარტის რომელიმე სისტემა, მაგრამ ისე, რომ ბრუნვის დადებითი მიმართულება ორიევსთვის იყოს ერთი და იგივე. მაშინ, თუ დავიცავთ § 49-ში მიღებულ ნიშანთა წესს, ორიევ სისტემაში ფართობს უნდა მივაწეროთ ერთი და იგივე ნიშანი. საძიებელ ფართობს მოგვცემს ფორმულა:

$$S=\left|\begin{array}{cc} X'_1 & Y'_1 \\ X'_2 & Y'_2 \end{array}\right|, \qquad (1)$$

სადაც $X'_1$, $Y'_1$, $X'_2$, $Y'_2$ აღებულ ვექტორთა კოორდინატებია მართკუთხოვან სისტემის მიმართ, რომელსაც ჩვენ განვიხილავთ, როგორც „ძველს", ასე რომ

$$X'_1=l_1X_1+l_2Y_1,\quad Y'_1=m_1X_1+m_2Y_1',$$
$$X'_2=l_1X_2+l_2Y_2,\quad Y'_2=m_1X_2+m_2Y_2,$$

სადაც $l_1$, $m_1$, და $l_2$, $m_2$ წარმოადგენენ მოცემული სისტემის საკოორდინატო $\vec{u}$ და $\vec{v}$ ვექტორთა კოორდინატებს (მართკუთხოვანი სისტემის მიმართ).

[1] ჩასმა ერთგვაროვანია, როცა $a=b=c=0$.

[2] იხ. დამატება § 8.

[3] რომ ჩასმის დეტერმინანტი $\Delta\neq 0$, ნათქვამია უკვე წინა §-ში.

ამრიგად,

$$S=\begin{vmatrix} l_1X_1+l_2Y_1 & m_1X_1+m_2Y_1 \\ l_1X_2+l_2Y_2 & m_1X_2+m_2Y_2 \end{vmatrix},$$

ანუ, თუ ვისარგებლებთ დეტერმინანტთა გამრაელების წესით,

$$S=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}, \tag{2}$$

საიდანაც

$$S=S_0\cdot\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}, \tag{3}$$

სადაც

$$S_0=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}$$

არის, იმავე (1) ფორმულის თანახმად, $\vec{u}$ და $\vec{v}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი. ორივე სისტემისათვის ბრუნვის დადებითი მიმართულების შესახებ მიღებული პირობის თანახმად, აღნიშნული ფართობი დადებითია. ცხადია, გვაქვს:

$$S_0=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\sin\nu,$$

სადაც $\nu$ მოცემული სისტემის საკოორდინატო კუთხეა, ასე, რომ საბოლოოდ,

$$S=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\sin\gamma\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

გავიხსენოთ, რომ ეს ფორმულა ფართობს მიაწერს ნიშანს იმავე წესის თანახმად, რაც გამოთქმული იყო § 49-ში.

საესებით ანალოგიურად, სამ ვექტორზე

$$\vec{P}_1=(X_1,\ Y_1,\ Z_1),\ \vec{P}_2=(X_2,\ Y_2,\ Z_2),\ \vec{P}_3=(X_3,\ Y_3,\ Z_3),$$

აგებული პარალელეპიპედის $v$ მოცულობისათვის, თუ მხედველობაში გვექნება § 52-ის (2) ფორმულა და თუ ვისარგებლებთ, როგორც ამის წინ, მართკუთხოვან კოორდინატთა დამხმარე სისტემით, რომელიც ისევეა ორიენტირებული (მარჯვენა ან მარცხენა სისტემის თვალსაზრისით), როგორც მოცემული, მაშინ მივიღებთ:

$$V=V_0\cdot\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

სადაც $V_0>0$ არის $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ საკოორდინატო ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობა, რომელიც გვეძლევა ფორმულით (იხ. § 52, სავარჯიშო, 4):

$$V_0^2=|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2\cdot|\vec{w}|^2\cdot\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}, \tag{6}$$

სადაც λ, μ, ν—საკოორდინატო ვექტორებს შორის კუთხეებია. (5) ფორმულა მოცულობას მიაწერს გარკვეულ ნიშანს, სახელდობრ, $V>0$, თუ $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ ვექტორები ისეთია ორიენტირებული (მარჯვენა ან მარცხენა სისტემის გაგებით), როგორც $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ საკოორდინატო ვექტორები, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი $V<0$.

სრულიად ისე, როგორც § § 50 და 53-ში, მივიღებთ სამკუთხედის ფართობისათვის ფორმულას

$$S=\frac{1}{2}\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\sin\nu\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}, \tag{7}$$

რომელიც მოცემულია წვეროების კოორდინატებში, და ტეტრაედრის მოცულობისათვის ფორმულას:

$$V=\frac{1}{6}V_0\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}. \tag{8}$$

2°. **ვექტორის სიგრძის განმსაზღვრელი კვადრატული ფორმის შესახებ.** § 56-ში ვნახეთ, რომ $\vec{P}=(X, Y, Z)$ ვექტორის სიგრძის კვადრატი გამოისახება $X$, $Y$, $Z$ კოორდინატთა კვადრატული ფორმით:

$$g_{11}X^2+g_{22}Y^2+g_{33}Z^2+2g_{23}YZ+2g_{31}ZX+2g_{12}XY \tag{9}$$

და რომ ეს კვადრატული ფორმა არაგანსაკუთრებულია და დადებითი. ბუნებრივად ისმება კითხვა: თუ ნებისმიერად მოცემულია არაგანსაკუთრებული დადებითი ფორმა, შეიძლება თუ არა მოინახოს დეკარტის კოორდინატთა ისეთი სისტემა, რომლის მიმართ მოცემული ფორმა წარმოადგენს ვექტორის სიგრძის კვადრატს?

პასუხი ცხადია იმ შემთხვევაში, როცა $g_{11}=g_{22}=g_{33}=1$, $g_{23}=g_{31}=g_{12}=0$, ე. ი. როცა ფორმას აქვს სახე:

$$X^2+Y^2+Z^2;$$

მართლაც, ამ შემთხვევაში ყოველი მართკუთხოვანი სისტემა აკმაყოფილებს პირობას. ახლა, ადვილია დამტკიცება იმისა, რომ პასუხი დადებითია ზოგად შემთხვევაშიაც. მართლაც, კვადრატულ ფორმათა თეორიაში მტკიცდება [1]), რომ შესაფერი, წრფივი ერთგვაროვანი არაგანსაკუთრებული ჩასმით:

$$\left.\begin{aligned}X&=l_1X'+l_2Y'+l_3Z',\\ Y&=m_1X'+m_2Y'+m_3Z',\\ Z&=n_1X'+n_2Y'+n_3Z',\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

[1]) იხ. დამატება, § 12.

სამი ცვლადის ყოველი არაგანსაკუთრებული დადებითი (9) ფორმა დაიყვანება შემდეგ სახემდე

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2.$$

თუ ახლა $X'$, $Y'$, $Z'$-ს განვიხილავთ როგორც ვექტორის კოორდინატებს რომელიმე მართკუთხოვან კოორდინატთა სისტემაში და შევარჩევთ დეკარტის მეორე სისტემას ისე, რომ ამ ორ სისტემაში ვექტორის კოორდინატები დაკავშირებულნი იყვნენ (10) დამოკიდებულებებით [1]), მაშინ ეს მეორე სისტემა დააკმაყოფილებს დასმულ პირობას.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ადვილად დავინახავთ, რომ ვექტორის სიგრძის კვადრატისათვის მოცემული (9) გამოსახულება, სავსებით განსაზღვრავს საკოორდინატო ვექტორთა სიგრძეს და მათ შორის კუთხეს. მართლაც, § 55-ის (2) ფორმულების თანახმად, გვექნება:

$$|\vec{u}| = \sqrt{g_{11}}, \quad |\vec{v}| = \sqrt{g_{22}}, \quad |\vec{w}| = \sqrt{g_{33}},$$

$$\cos\lambda = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}}, \quad \cos\mu = \frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33}g_{11}}}, \quad \cos\nu = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}.$$

თუ $g_{11}, \ldots, g_{33}$ სიდიდეები სავსებით ნებისმიერადაა მოცემული, მაშინ შესაძლოა, მაგალითად, $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{w}|$, $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ სიდიდეებისათვის მივიღოთ ვითარსი მნიშვნელობანი ან $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$-სათვის მივიღოთ სიდიდეები ერთზე მეტი. თუნდაც რომ $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{w}|$-სათვის მივიღოთ არსი სიდიდეები, ხოლო $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$-სათვის ერთზე ნაკლები მნიშვნელობანი, მაინც მოსალოდნელია შეუძლებელი იქნეს ისეთი სამწახნაგოვანი $Oxyz$ კუთხის აგება, რომლის ბრტყელი კუთხეები იქნება $\lambda$, $\mu$, $\nu$-ს ტოლი (ასეთი სამწახნაგოვანი კუთხის აგებისათვის, როგორც ადვილი შესამჩნევია, უნდა იყოს დაცული $\lambda+\mu+\nu<2\pi$). ამ პარაგრაფში დამტკიცებულიდან გამომდინარეობს, რომ ამას ადგილი არ ექნება, თუ მოცემული არაგანსაკუთრებული ფორმა არსებითად დადებითია.

ო რ ი გ ა ნ ზ ო მ ი ლ ე ბ ი ს შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა შ ი შესაძლებლობა კოორდინატთა ისეთი სისტემის აგებისა, რომლისთვისაც

$$|\vec{P}|^2 = g_{11}X^2 + 2g_{12}XY + g_{22}Y^2,$$

---

[1]) ასეთი მეორე სისტემის მოსანახავად, საკმარისია (10) დამოკიდებულება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$X' = l_1'X + l_2'Y + l_3'Z,$$
$$Y' = m_1'X + m_2'Y + m_3'Z,$$
$$Z' = n_1'X + n_2'Y + n_3'Z,$$

რომლისთვისაც საკმარისია (10) სისტემის ამოხსნა $X'$, $Y'$, $Z'$-ის მიმართ. მაშინ დეკარტის კოორდინატთა ის სისტემა, რომელიც განსაზღვრულია მართკუთხოვანი სისტემის მიმართ საკოორდინატო ვექტორებით: $\vec{u}=(l_1', m_1', n_1')$, $\vec{v}=(l_2', m_2', n_2')$, $\vec{w}=(l_3', m_3', n_3')$ იქნება სწორედ საძიებელი სისტემა.

სადაც მარჯვენა მხარეში დგას ნებისმიერი არაგანსაკუთრებული დადებითი ფორმა, ადვილად შეიძლება აგრეთვე უშუალოდ დამტკიცდეს, თუ ვისარგებლებთ შემდეგი დებულებით [1]): იმისათვის, რომ $g_{11}X^2+2g_{12}XY+g_{22}Y^2$ კვადრატული ფორმა იყოს განზღვრული და არაგანსაკუთრებული, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $g_{11}>0$, $g_{22}>0$, $g_{11}g_{22}-g^2_{12}>0$. შებრუნებით, ეს დებულება ადვილად შეიძლება გამოყვანილ იქნას ორი განზომილების შემთხვევაში გამოყენებული წინა მსჯელობიდან.

§ 68. **კოვარიანტული კოორდინატების გარდაქმნა.** წინა პარაგრაფებში, რასაკვირველია, ჩვენ ვიხილავდით ვექტორის (ან წერტილის) ჩვეულებრივ (კონტრავარიანტულ) კოორდინატებს. ახლა ვნახოთ, როგორ იცვლებიან ვექტორის კ ო ვ ა რ ი ა ნ ტ უ ლ ი კოორდინატები ერთი სისტემისაგან მეორეზე გადასვლის დროს.

ისე, როგორც ზემოთ, გვექნება:

$$\left.\begin{aligned}\vec{u}' &= l_1\vec{u}+m_1\vec{v}+n_1\vec{w},\\ \vec{v}' &= l_2\vec{u}+m_2\vec{v}+n_2\vec{w},\\ \vec{w}' &= l_3\vec{u}+m_3\vec{v}+n_3\vec{w},\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ეთქვათ, $X^*$, $Y^*$, $Z^*$ და $X'^*$, $Y'^*$, $Z'^*$ აღნიშნავენ $\vec{P}$ ვექტორის კოორდინატებს შესაბამისად, ძველი და ახალი სისტემის მიმართ. განმარტების ძალით $X'^*=\vec{u}'\cdot\vec{P}$, $Y'^*=\vec{v}'\cdot\vec{P}$, $Z'^*=\vec{w}'\cdot\vec{P}$, საიდანაც, თუ $\vec{u}'$, $\vec{v}'$, $\vec{w}'$-ის მაგიერ შევიტანთ (1) გამოსახულებებს და შევნიშნავთ, რომ $\vec{u}\cdot\vec{P}=X^*$ და ა. შ., მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned}X'^* &= l_1X^*+m_1Y^*+n_1Z^*,\\ Y'^* &= l_2X^*+m_2Y^*+n_2Z^*,\\ Z'^* &= l_3X^*+m_3Y^*+n_3Z^*.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

თუ ამ განტოლებებს ამოვხსნით $X^*$, $Y^*$, $Z^*$-ის მიმართ, ვიპოვით აგრეთვე ძველი კოორდინატების გამოსახულებას ახლის საშუალებით.

წ ე რ ტ ი ლ ი ს კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი ს ა თ ვ ი ს გარდაქმნის ფორმულები ზემომოყვანილი ფორმულების ანალოგიურია, თუ კოორდინატთა სათავე არ იცვლება. მკითხველს მოეთხოვება დაწეროს ფორმულები იმ შემთხვევისთვისაც, როცა კოორდინატთა სათავე იცვლის მდებარეობას.

ახლა გავაკეთოთ ერთი შენიშვნა როგორც ჩვეულებრივი (კონტრავარიანტული), ისე კოვარიანტული კოორდინატების გარდაქმნის ფორმულების შესახებ. ამისათვის გავიხსენოთ ჩვეულებრივი კოორდინატების გარდაქმნის ფორმულები (§ 65):

$$\left.\begin{aligned}X &= l_1X'+l_2Y'+l_3Z',\\ Y &= m_1X'+m_2Y'+m_3Z',\\ Z &= n_1X'+n_2Y'+n_3Z'.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

[1]) იხ. დამატება, § 12, შენიშვნა.

იმისათვის, რომ გავაადვილოთ (1), (2) და (3) ფორმულების შედარება, ამოვწეროთ (1) ფორმულებში შემავალი კოეფიციენტების ცხრილი:

$$\begin{matrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{matrix} \qquad (A)$$

თუ გამოვიყენებთ § 66-ის ბოლოში მოყვანილ ტერმინოლოგიას, (1) ფორმულების შინაარსი შეიძლება ასე გამოვთქვათ: ახალი საკოორდინატო ვექტორები მიიღებიან ძველისაგან წრფივი ჩასმით, რომლის ცხრილია (A). თუ დავაკვირდებით (2) ფორმულებს, დავინახავთ, რომ კოორდინატთა გარდაქმნის დროს, სიდიდეები $X^*$, $Y^*$, $Z^*$ გარდაიქმნებიან სწორედ ისეთივე წრფივი ჩასმით, როგორც საკოორდინატო ვექტორები. ალგებრული ტერმინოლოგიის თანახმად ეს მდგომარეობა ასე შეიძლება გამოითქვას: სიდიდეები $X^*$, $Y^*$, $Z^*$ *კოვარიანტულია* საკოორდინატო ვექტორებისა (ამით აიხსნება სახელწოდება „კოვარიანტული კოორდინატები").

ახლა, თუ შევადარებთ (3) ფორმულებს (1)-ს, დავინახავთ, რომ *ძველი* კოორდინატები $X$, $Y$, $Z$ გამოითქმებიან ახლით ისეთი ჩასმის საშუალებით, რომელიც მიიღება *ახალი* საკოორდინატო ვექტორების ძველით გამომსახველი ჩასმიდან, თუ (A) ცხრილში სტრიქონებს შევცვლით სვეტებით. თუ გამოვიყენებთ ალგებრის ტერმინოლოგიას, შეიძლება ითქვას, რომ ჩვეულებრივი კოორდინატები $X$, $Y$, $Z$ კონტრავარიანტულია საკოორდინატო ვექტორებისა; სწორედ ამით აიხსნება სახელწოდება „კონტრავარიანტული".

## II. კოორდინატთა გარდაქმნის უმთავრესი კერძო შემთხვევები

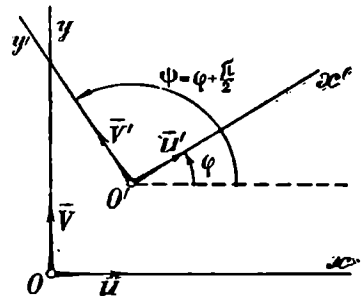
ამ განყოფილებაში ჩვენ დაწვრილებით გავარჩევთ კოორდინატთა გარდაქმნის ზოგიერთ უმთავრეს კერძო შემთხვევას, რომელთაც უფრო ხშირად ვხვდებით გამოყენებებში.

**§ 69. მართკუთხოვანი კოორდინატების გარდაქმნა სიბრტყეზე.** ჯერჯერობით დავუშვათ, რომ კოორდინატთა ძველი და ახალი სისტემა სიბრტყეზე ორივე მარჯვენაა (ნახ. 70a, 70b).

აქ უნდა გავარჩიოთ ორი შემთხვევა: პირველი, როცა ახალი სისტემა შეიძლება მიღებულ იყოს ძველიდან უბრალო გადაადგილებით თავის სიბრტყეში, ისე რომ ამ სიბრტყიდან არ გამოვიდეთ (ნახ. 70a). მეორე შემთხვევაში კი (ნახ. 70b) ჩვენ შეგვიძლია ასეთი გადაადგილებით შევათავსოთ მხოლოდ, მაგალითად, $O'x'$ და $Ox$ ღერძები; ხოლო $O'y'$ და $Oy$ ღერძები ამ დროს მოპირდაპირე მიმართულებას მიიღებენ.

სიმოკლისათვის ვიტყვით, რომ პირველ შემთხვევაში ღერძთა ორი სისტემა ეკუთვნის ერთსა და იმავე კლასს, ხოლო მეორე შემთხვევაში მოპირდაპირე კლასებს. ორივე შემთხვევაში ახალი სისტემის მდებარეობა ძველის მიმართ შეიძლება სავსებით დახასიათდეს ახალი $O'$-სათვის კოორდინატების მოცემით ძველი სისტემის მიმართ და $\varphi$ კუთხით, რომელსაც ადგენს

ახალი $O'x'$ ღერძი ძველ $Ox$ ღერძთან, თუკი კუთხეს მივაწერთ ამა თუ იმ ნიშანს, ათვლის მიმართულების მიხედვით. კუთხის ათვლის დადებით მიმართულებად ჩვენ ვღებულობთ მიმართულებას, რომელიც შეეფერება ძველ სისტემას (ე. ი. მიმართულებას, რომელიც უმოკლესი გზით მიგვიყვანს $Ox$-დან $Oy$-მდე [1]). კუთხე $\psi$, რომელსაც შეადგენს $O'y'$ ღერძი $Ox$ ღერძთან და რომელიც აითვლება იმავე წესით, რაც $\varphi$, ტოლი იქნება ან $\varphi+\frac{\pi}{2}$ (თუ სისტემები ერთი და იმავე კლასისაა) ან $\varphi-\frac{\pi}{2}$ (თუ სისტემები სხვადასხვა კლასისაა); ჩვენ ყურადღებას არ ვაქცევთ შესაკრებს $2k\pi$ სახისას, რომელსაც მნიშვნელობა არა აქვს.



ნახ. 70a.

ორივე განსახილველ შემთხვევაში, ცხადია გვექნება:

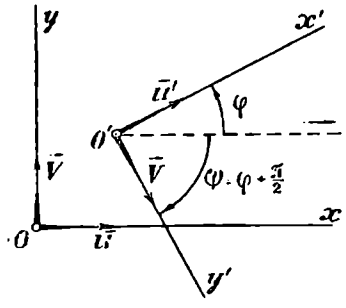
$$l_1=\cos\varphi,\quad m_1=\sin\varphi,\quad l_2=\cos\psi,\quad m_2=\sin\psi \tag{1}$$

და § 65-ის (2a) ფორმულებიდან ვექტორის კოორდინატთა გარდაქმნისათვის მივიღებთ

$$X=X'\cos\varphi+Y'\cos\psi,\quad Y=X'\sin\varphi+Y'\sin\psi \tag{2}$$

ანუ თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\psi=\varphi\pm\frac{\pi}{2}$,

$$X=X'\cos\varphi\mp Y'\sin\varphi,\quad Y=X'\sin\varphi\pm Y'\cos\varphi, \tag{3}$$



ნახ. 70b.

სადაც, ზედა ნიშნებია ასაღები ერთი და იმავე კლასის სისტემათა შემთხვევაში, ხოლო ქვედა ნიშნები—წინააღმდეგ შემთხვევაში.

ჩვენ მივიღეთ ძველი კოორდინატების გამოსახულება ახლის საშუალებით. თუ წინა განტოლებებს ამოვხსნით $X'$ და $Y'$-ის მიმართ, ან, თუ იმავე ფორმულებს გამოვიყენებთ ძველი და ახალი ღერძების როლების შეცვლით [2]), მივიღებთ ფორმულებს:

$$\left.\begin{aligned}X'&=X\cos\varphi\pm Y\sin\varphi,\\ Y'&=\mp X\sin\varphi\pm Y\cos\varphi,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

რომლებიც ახალ კოორდინატებს გამოსახავენ ძველის საშუალებით.

[1]) იხ. § 47.

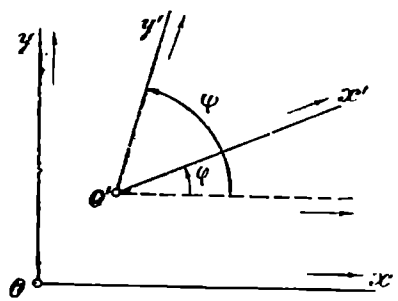
[2]) მასთან, ერთი და იმავე კლასის სისტემათა შემთხვევაში, კუთხე $\varphi$ შეიცვლება $-\varphi$ კუთხით, ხოლო სხვადასხვა კლასის სისტემათა შემთხვევაში $\varphi$ უცვლელი რჩება, ვინაიდან აღებული ორი სისტემისათვის კუთხის ათვლის მიმართულება მოკიოდაპირეა.

წერტილის კოორდინატები გარდაიქმნებიან შემდეგი ფორმულების მიხედვით (იხ. § 66)

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x'\cos\varphi \mp y'\sin\varphi, \\ y &= b + x'\sin\varphi \pm y'\cos\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

სადაც $a$ და $b$ აღნიშნავენ ახალი სათავის კოორდინატებს ძველი სისტემის მიმართ. წინა ფორმულები გამოსახავენ ძველ კოორდინატებს ახლის საშუალებით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ცხადია, რომ (1) და (2) ფორმულები ძალაში დარჩებიან მაშინაც, როდესაც ძველი სისტემა მართკუთხოვანია, ხოლო ახალი — განუზოგადებელი ირიბკუთხოვანია; მხოლოდ ამ შემთხვევაში $\psi$ კუთხე უკვე აღარ არის $\varphi \pm \frac{\pi}{2}$-ის ტოლი, არამედ ნებისმიერი შეიძლება იყოს (ნახ. 71).




ნახ. 71.

წერტილის კოორდინატთა გარდაქმნისათვის გვექნება ფორმულები:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x'\cos\varphi + y'\cos\psi, \\ y &= b + x'\sin\varphi + y'\sin\psi. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

**სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი**

1. იპოვეთ ახალი კოორდინატების გამოსახულებანი ძველის საშუალებით, თუ კოორდინატები მართკუთხოვანია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. საძიებელი გამოსახულებანი შეიძლება მივიღოთ, თუ (5) სისტემას ამოვხსნით $x'$ და $y'$-ის მიმართ. მაგრამ, უფრო მარტივი იქნება, თუ ასე მოვიქცევით: განვიხილოთ $\overrightarrow{O'M}$ ვექტორი, სადაც $O'$ არის ახალი სათავე, ხოლო $M$ განსახილველი წერტილი. ამ ვექტორის ძველი და ახალი კოორდინატები შესაბამისად იქნებიან:

$$(x-a,\ y-b) \text{ და } (x',\ y').$$

თუ $\overrightarrow{O'M}$ ვექტორისათვის გამოვიყენებთ (4) ფორმულებს, ერთბაშად მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\varphi + (y-b)\sin\varphi, \\ y' &= \mp(x-a)\sin\varphi \pm (y-b)\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

ზედა ნიშნები აიღებიან ერთი და იმავე კლასის სისტემათა შემთხვევაში, ქვედა ნიშნები კი — სხვადასხვა კლასის სისტემათა შემთხვევაში.

2. ამ პარაგრაფში მიღებული ალნიშნების მიხედვით, იპოვეთ ძველი სათავის კოორდინატები ახალი სისტემის მიმართ (თუ ვიგულისხმებთ, რომ ორივე სისტემა მართკუთხოვანია).

პ ა ს უ ხ ი: $a' = -a\cos\varphi - b\sin\varphi$, $b' = \pm a\sin\varphi \mp b\cos\varphi$.

3. მართკუთხოვანი სისტემის საკოორდინატო ღერძები შემობრუნდებიან $30^\circ$ კუთხით და სათავე გადაიტანება $O'(3, -1)$ წერტილში. იპოვეთ წერტილის ახალი კოორდინატები, თუ მისი ძველი კოორდინატები იყვნენ (3, 4).

პასუხი: $x' = \frac{5}{2}$, $y' = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

4. თუმცა ერთი მართკუთხოვანი სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს, მოცემული $P$ ვექტორის კოორდინატები $X$, $Y$ იცვლებიან თითოეული ცალ-ცალკე და ღებულობენ (3) ფორმულებით განსახღვრულ ახალ მნიშვნელობებს $X'$, $Y'$, მიუხედავად ამისა, გამოსახულება $X^2 + Y^2$ რჩება უცვლელი, ე. ი. ყოველი ვექტორისათვის გვექნება:

$$X^2 + Y^2 = X'^2 + Y'^2 \tag{8}$$

რაც აშკარაა, იმიტომ, რომ მარჯვენა და მარცხენა მხარე გამოსახავენ ერთი და იმავე ვექტორის სიგრძის კვადრატს.

დავამტკიცოთ, რომ შებრუნებით, თუ

$$X = l_1 X' + l_2 y', \quad Y = m_1 X' + m_2 Y' \tag{9}$$

ჩასმისათვის (8) ტოლობა მართებულია ყოველი ვექტორისათვის, მაშინ აუცილებლად

$$l_1 = \cos\varphi, \quad m_1 = \sin\varphi, \quad l_2 = \mp\sin\varphi, \quad m_2 = \pm\cos\varphi, \tag{10}$$

სადაც $\varphi$ — რომელიმე კუთხეა, ასე რომ (9) ჩასმას აქვს (3) სახე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ (9) გამოსახულებას შევიტანთ (8) ტოლობის მარცხენა ნაწილში და გავხსნით ფრჩხილებს, მივიღებთ:

$$(l_1^2 + m_1^2) X'^2 + 2(l_1 l_2 + m_1 m_2) X'Y' + (l_2^2 + m_2^2) Y'^2 = X'^2 + Y'^2;$$

ვინაიდან ამ ტოლობას უნდა ჰქონდეს ადგილი ყოველი $X'$, $Y'$-სათვის, ამიტომ მარჯვენა და მარცხენა მხარეში $X'^2$, $X'Y'$ და $Y'^2$-ის კოეფიციენტები ტოლი უნდა იყვნენ, საიდანაც მივიღებთ:

$$l_1^2 + m_1^2 = 1, \quad l_2^2 + m_2^2 = 1, \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0. \tag{11}$$

პირველი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ $l_1 = \cos\varphi$, $m_1 = \sin\varphi$, სადაც $\varphi$ — რომელიმე კუთხეა. მეორე ტოლობიდან ანალოგიურად გამომდინარეობს $l_2 = \cos\psi$, $m_2 = \sin\psi$, სადაც $\psi$ არის რომელიმე კუთხე. ბოლოს, (11)-ის მესამე ტოლობიდან გამომდინარეობს:

$$\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi = 0,$$

ე. ი. $\cos(\varphi - \psi) = 0$, საიდანაც $\psi = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$ ($2\pi$-ს ჯერადს, რომელსაც ფორმულისათვის მნიშვნელობა არა აქვს, ყურადღებას არ ვაქცევთ). ამრიგად, ღებულობთ (10) დამოკიდებულებას. თუ (9)-ში $l_1$, $l_2$, $m_1$, $m_2$ კოეფიციენტებს შევცვლით ამ მნიშვნელობებით და მათ ამოვხსნით $X'$, $Y'$-ის მიმართ, მივიღებთ

$$X' = l_1 X + m_1 Y, \quad Y' = l_2 X + m_2 Y; \tag{9a}$$

ამ ფორმულებისა და (8)-ს ძალით ანალოგიურად მივიღებთ:

$$l_1^2 + l_2^2 = 1, \quad m_1^2 + m_2^2 = 1, \quad l_1 m_1 + l_2 m_2 = 0. \tag{11a}$$

რომელიც აგრეთვე უშუალოდ გამომდინარეობს (10) ფორმულიდან.

(9) სახის ჩასმებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ (8) პირობას, ეწოდება **ორთოგონალური** (იხ. § 72). ჩვენ ვხედავთ, რომ ორთოგონალური ჩასმის კოეფიციენტები, ორი ცვლადის შემთხვევაში, დაკავშირებული არიან (11) დამოკიდებულებებით, რომელთა შედეგს წარმოადგენს (10); შებრუნებით (10-დან გამომდინარეობენ (11) და (11a).

**§ 70. ხივრცეში მართკუთხოვანი კოორდინატების გარდაქმნა.** ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც მართკუთხოვანი კოორდინატები სივრცეში გარდაიქმნებიან მართკუთხოვნად.

თვალსაჩინოებისათვის დავუშვათ, რომ (ნახ. 72) კოორდინატთა სათავე უცვლელი რჩება. ამ შემთხვევაში ახალი სისტემის მდებარეობა ძველის მიმართ განისაზღვრება ახალი ღერძების მიმართულებათა კოორდინატებით, ე. ი. ორტების კოორდინატებით $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

ვთქვათ, ისე როგორც ზემოთ

$$\left.\begin{aligned} \vec{u'} &= l_1\vec{u} + m_1\vec{v} + n_1\vec{w}, \\ \vec{v'} &= l_2\vec{u} + m_2\vec{v} + n_2\vec{w}, \\ \vec{w'} &= l_3\vec{u} + m_3\vec{v} + n_3\vec{w}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ვინაიდან კოორდინატები მართკუთხოვანი გვაქვს, ამიტომ მიმართულების კოორდინატები იქნებიან იმავე დროს მიმართულების კოსინუსები. თვალსაჩინოებისათვის დავალაგოთ ეს კოსინუსები ცხრილში:

| | $Ox$ | $Oy$ | $Oz$ |
|---|---|---|---|
| $Ox'$ | $l_1$ | $m_1$ | $n_1$ |
| $Oy'$ | $l_2$ | $m_2$ | $n_2$ |
| $Oz'$ | $l_3$ | $m_3$ | $n_3$ |

(A)

ამ ცხრილში, მაგალითად, $m_1$ აღნიშნავს $Ox'$ და $Oy$ შორის არსებული კუთხის კოსინუსს, და $n_2$—იმ კუთხის კოსინუსს, რომელსაც ადგენენ $O'y'$ და $Oz$.

§ 65-ის (2) ფორმულები უშუალოდ გვაძლევენ:

$$\left.\begin{aligned} X &= l_1X' + l_2Y' + l_3Z', \\ Y &= m_1X' + m_2Y' + m_3Z', \\ Z &= n_1X' + n_2Y' + n_3Z'. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ეს ფორმულები გამოსახავენ ძველ კოორდინატებს ახლის საშუალებით. თუ ძველსა და ახალ სისტემას როლებს შევუცვლით, მივიღებთ შექცეულ ფორმულებს:

$$\left.\begin{aligned} X' &= l_1X + m_1Y + n_1Z, \\ Y' &= l_2X + m_2Y + n_2Z, \\ Z' &= l_3X + m_3Y + n_3Z. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ამ ფორმულების მნიშვნელობის გამო, აქ აღვნიშნავთ მათი გამოყვანის კიდევ ერთ წესს, ცოტა უფრო მარტივს, ვიდრე ზემოხსენებული და მასზე დამოუკიდებელს.

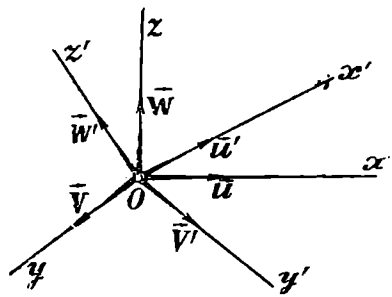
ვინაიდან ჩვენ საქმე გვაქვს მართკუთხოვან კოორდინატებთან, ამიტომ:

$$X' = \vec{u'} \cdot \vec{P},\quad Y' = \vec{v'} \cdot \vec{P},\quad \vec{Z'} = \vec{w'} \cdot P;$$

თუ აქ შევიტანთ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$-ს მაგიერ მათ გამოსახულებებს (1) და თუ შევნიშნავთ, რომ $\vec{u}\cdot\vec{P}=X$, $\vec{v}\cdot\vec{P}=Y$, $\vec{w}\cdot\vec{P}=Z$, ერთბაშად მივიღებთ (3) ფორმულებს. მათგან, ძველი და ახალი ღერძების როლების შეცვლით, ისევ (2) ფორმულებს მივიღებთ.

რასაკვირველია, ახლახან მოყვანილი წესი [1]) გამოსაყენებელია სიბრტყეზე მართკუთხოვანი კოორდინატების გარდაქმნისათვის, რაც წინა პარაგრაფში განვიხილეთ.

იგივე (2) და (3) ფორმულები გამოსაყენებელია წერტილის კოორდინატებისთვისაც, ვინაიდან კოორდინატთა სათავე არ იცვლება.



ნახ. 72.

იმ შემთხვევაში, როდესაც ღერძთა მიმართულებების შეცვლის დროს ხდება სათავის გადატანაც, მაშინ (1) და (2) ფორმულები ძალაში რჩებიან ვექტორის კოორდინატებისათვის. წერტილის კოორდინატებისათვის გვექნება (იხ. § 66):

$$\left.\begin{aligned} x &= a + l_1x' + l_2y' + l_3z', \\ y &= b + m_1x' + m_2y' + m_3z', \\ z &= c + n_1x' + n_2y' + n_3z', \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

სადაც $a$, $b$, $c$ აღნიშნავენ ახალი სათავის კოორდინატებს ძველი სისტემის მიმართ. ახალი კოორდინატების ძველის საშუალებით გამომსახველი ფორმულების მიღება არ წარმოადგენს არავითარ სიძნელეს (იხ. სავარჯ. 1).

#### სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. იპოვეთ, ამ პარაგრაფის აღნიშვნებში, ახალი კოორდინატების გამოსახვა ძველით.. პასუხი: (შეადარ. წინა პარაგრაფის სავარჯიშო [2]).

$$\left.\begin{aligned} x' &= l_1(x-a) + m_1(y-b) + n_1(z-c), \\ y' &= l_2(x-a) + m_2(y-b) + n_2(z-c), \\ z' &= l_3(x-a) + m_3(y-b) + n_3(z-c). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

2. ახალი სისტემა მიიღება ძველიდან $Oz$ ღერძის გარშემობრუნებით ისე, რომ ახალი $Ox'$ ღერძი, რომელიც $Oxy$ სიბრტყეში იმყოფება, შეადგენს $Ox$ ღერძთან $\varphi$ კუთხეს; იპოვეთ კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულები (ვექტორის ან წერტილის),

პასუხი: $x=x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$, $y=x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$, $z=z'$.

[1]) ეს წესი იმის ტოლფასია, რაც § 68-ში მოვიყვანეთ კოვარიანტული კოორდინატების გარდაქმნისათვის. ვინაიდან ჩვენს შემთხვევაში კოორდინატები მართკუთხოვანია; ამიტომ განსხვავება კოვარიანტულსა და ჩვეულებრივ კოორდინატებს შორის ისპობა.

[2]) შეადარეთ § 69 სავარჯიშო 4.

**§ 71. მართკუთხოვანი კოორდინატების გარდაქმნის ფორმულების კოეფიციენტთა შორის დამოკიდებულებანი.** ახალი სისტემის ღერძთა მიმართულების განსაზღვრისათვის ძველის მიმართ, ჩვენ ვიხილავდით ცხრა სიდიდეს (წინა პარაგრაფის (A) ცხრილის მიმართულების კოსინუსებს). ამ ცხრა სიდიდეს შორის ყველა არ არის ურთიერთდამოუკიდებელი. მართლაც, თუ, ისე როგორც ზემოთ, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ აღნიშნავენ ახალი ღერძების ორტებს, მაშინ გვექნება (იხ. წინა პარაგრაფის (A) ცხრილი):

$$\vec{u}'=(l_1,\ m_1,\ n_1),\ \vec{v}'=(l_2,\ m_2,\ n_2),\ \vec{w}'=(l_3,\ m_3,\ n_3) \tag{1}$$

(ე. ი. $\vec{u}'$ ორტის კოორდინატები ძველი სისტემის მიმართ იქნებიან $l_1$, $m_1$, $n_1$ და ა. შ.).

ვექტორები (ორტები) $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ უნდა აკმაყოფილებდნენ შემდეგ პირობებს (და მხოლოდ ამათ): მათი სიგრძე ერთის ტოლი უნდა იყოს და ისინი ურთიერთმართობი უნდა იყვნენ. ეს პირობები ასე გამოისახება:

$$\vec{u}'^2=\vec{v}'^2=\vec{w}'^2=1,\quad \vec{v}'\cdot\vec{w}'=\vec{w}'\cdot\vec{u}'=\vec{u}'\cdot\vec{v}'=0; \tag{2}$$

თუკი პირობებს განსახილველ ორტთა კოორდინატების საშუალებით გამოვსახავთ, მივიღებთ (§ 44, ფორმ. (2) და § 45, ფორმ. (2)):

$$\left.\begin{aligned} l_1^2+m_1^2+n_1^2&=1,\\ l_2^2+m_2^2+n_2^2&=1,\\ l_3^2+m_3^2+n_3^2&=1,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} l_2l_3+m_2m_3+n_2n_1&=0,\\ l_3l_1+m_2m_1+n_3n_1&=0,\\ l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2&=0.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

სულ გვაქვს ექვსი განტოლება ცხრა კოსინუსის დამაკავშირებელი. ამ განტოლებათა გეომეტრიული მნიშვნელობა გვიჩვენებს, რომ არც ერთი მათგანი არ არის დანარჩენთა შედეგი, ე. ი. რომ ეს განტოლებანი ურთიერთდამოუკიდებელი არიან[1]) და (3) და (4) განტოლებათა გარდა არ არსებობენ ისეთი სხვა, მათგან დამოუკიდებელი თანაშეფარდებანი, რომელთაც უნდა აკმაყოფილებდნენ ყოველი სამი ურთიერთმართობული მიმართულებათა კოორდინატები $l_1$, $l_2$, . . ., $n_3$[2]).

[1]) დავამტკიცოთ, მაგალითად, რომ პირველი მათგანი არ არის ბუთი დანარჩენის შედეგი. მართლაც, ბუთი უკანასკნელი განტოლება გვეუბნება მხოლოდ იმას, რომ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ვექტორები ურთიერთმართობული არიან [განტოლებანი (4)] და რომ $|\vec{v}'|=|\vec{w}'|=1$. აქედან, რასაკვირველია, არ გამომდინარეობს, რომ $\vec{u}'$ ვექტორსაც ერთის ტოლი სიგრძე უნდა ჰქონდეს, ე. ი. არ გამომდინარეობს პირველი განტოლების აუცილებლობა. სრულიად ასევე დავამტკიცებთ, რომ (3) და (4) განტოლებათაგან არც ერთი არ არის დანარჩენის შედეგი.

[2]) უკანასკნელი წინადადება ასე უნდა გვესმოდეს, რომ თუ ჩვენ შევძლებთ ისეთი თანაშეფარდების შედგენას, რომელსაც ყოველთვის აკმაყოფილებენ სიდიდეები $l_1$, $l_2$, . . ., $n_3$, მაშინ ეს თანაშეფარდება უთუოდ უკვე დაწერილ (3) და (4) თანაშეფარდებათა შედეგი იქნება. მართლაც, თუ (3) და (4) შესრულდა, მაშინ $\vec{u}'$, $\vec{v}'$, $\vec{w}'$ ვექტორები ურთიერთმართობულ ორტებს წარმოადგენენ და, მაშასადამე, ნებისმიერ სამ ურთიერთმართობულ მიმართულებათა დამაკავშირებელი ყოველი თანაშეფარდება იქნება (3) და (4) თანაშეფარდებათა შედეგი.

თუ ძველსა და ახალ სისტემას როლებს შევუცვლით, მაშინ (3) და (4) დამოკიდებულებათა მაგიერ მივიღებთ შემდეგ ექვს დამოკიდებულებას:

$$\left.\begin{aligned} l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 &= 1,\\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 &= 1,\\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1; \end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

$$\left.\begin{aligned} m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3 &= 0,\\ n_1l_1 + n_2l_2 + n_3l_3 &= 0.\\ l_1m_1 + l_2m_2 + l_3m_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

ზემოხსენებულის ძალით ეს უკანასკნელი დამოკიდებულებანი უნდა წარმოადგენდნენ (3) და (4)-ის შედეგს და მართლაც, დიდ სიძნელეს არ წარმოადგენს (3a) და (4a) თანაშეფარდებათა გამოყვანა (3) და (4)-დან მარტივი ალგებრული გარდაქმნებით (იხ. შემდეგი პარაგრაფი).

ვინაიდან $l_1, \ldots, n_3$ ცხრა კოსინუსს შორის არსებობს ექვსი დამოუკიდებელი თანაშეფარდება, ამიტომ ამ კოსინუსთაგან ექვსი შეიძლება სამი დანარჩენის საშუალებით გამოისახოს. აქედან ცხადია, ერთი მართკუთხოვანი სისტემის ღერძთა მიმართულებანი მეორის მიმართ ხასიათდება სულ სამი სიდიდით. ეს სიდიდეები (პარამეტრები) შეიძლება სხვადასხვანაირად შეირჩნენ. ყველაზე ხშირად ამისათვის სარგებლობენ ეგრეთ წოდებული ეილერის კუთხეებით, რომელთაც ქვემოთ განვიხილავთ (§ 73).

ორი განზომილების შემთხვევაში (3), (4), (3a), (4a) ნაცვლად გვექნება § 69-ის (11) და (11a) დამოკიდებულებანი. ვიცით აგრეთვე, რომ ამ შემთხვევაში კოეფიციენტები გამოისახებიან ერთი ფ კუთხით.

დავუბრუნდეთ სამი განზომილების შემთხვევას და გამოვიყვანოთ (3) და (4) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარე ერთი მნიშვნელოვანი ფორმულა. სახელდობრ, გამოვთვალოთ დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

გვაქვს

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix};$$

თუ უკანასკნელი ნამრავლისთვის გამოვიყენებთ დეტერმინანტთა გამრავლების წესს (შევასრულებთ რა სტრიქონობრივ გამრავლებას[1]) და თუ მხედველობაში მივიღებთ (3) და (4)-ს, გვექნება:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 & l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 & l_1l_3 + m_1m_3 + n_1n_2\\ l_2l_1 + m_2m_1 + n_2n_1 & l_2^2 + m_2^2 + n_2^2n_2 & l_2l_3 + m_2m_3 + n_2n_2\\ l_3l_1 + m_3m_1 + n_3n_1 & l_3l_2 + m_3m_2 + n_3n_2 & l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

[1]) იხ. დამატება, § 1, პუნქტი 7°.

საიდანაც ვღებულობთ ფორმულას

$$\Delta = \pm 1,$$

რომლის გამოყვანაც გვინდოდა [1]).

საინტერესოა მარჯვენა მხარეში ნიშნის შერჩევის საკითხი. ეს ნიშანი შემდეგი სახით განისაზღვრება.

§ 24-ში ჩვენ ვისწავლეთ სივრცეში სამი მიმართულების მარცხენა და მარჯვენა სისტემების განსხვავება. ამის შესაბამისად ვამბობთ, რომ ორი სისტემა მართკუთხოვანი ღერძებისა $Ox$, $Oy$, $Oz$ და $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ ეკუთვნიან ერთი და იმავე კლასს, თუ ორივე სისტემა მარცხენაა ან ორივე მარჯვენაა; წინააღმდეგ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ ისინი ეკუთვნიან სხვადასხვა კლასს. ერთი კლასის სისტემები შეიძლება ურთიერთშევათავსოთ ერთ-ერთის გადაადგილებით ისე, რომ ერთსახელოვანი ღერძები ურთიერთდაემთხვნენ; ამას არა აქვს ადგილი სხვადასხვა კლასის სისტემათათვის (მაგალითად, ამ შემთხვევაში, თუ $O'x'$, $O'y'$ ღერძებს შევათავსებთ შესაბამისად $Ox$, $Oy$ ღერძებთან, მაშინ $O'z'$ და $Oz$ ღერძები მიიღებენ ურთიერთმოპირდაპირე მიმართულებებს).

ახლა, ადვილი დასანახია, რომ (6) ფორმულაში ზედა ნიშანი ასაღები, თუ განსახილველ ღერძთა სისტემები ერთი და იმავე კლასისაა, ხოლო ქვედა ნიშანი—წინააღმდეგ შემთხვევაში. მართლაც, თუ განსახილველი სისტემები ერთი და იმავე კლასისაა, მაშინ შესაძლოა ამ სისტემების ურთიერთშეთავსება განუწყვეტელი გადაადგილებით. ამ განუწყვეტელი მოძრაობისას, ცხადია, $\Delta$ დეტერმინანტის ელემენტები განუწყვეტლად შეიცვლებიან და, მაშასადამე, $\Delta$ დეტერმინანტი შეინახავს მუდმივ მნიშვნელობას $(+1)$ ან $(-1)$-ს, ვინაიდან მას არ შეუძლია ნახტომით შეცვლა. შეთავსებული სისტემისთვის კი, ცხადია რომ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

ამიტომ, ერთი და იმავე კლასის სისტემებისათვის $\Delta = +1$. სხვადასხვა კლასის სისტემათა შემთხვევა სავსებით ანალოგიურად განიხილება. ამ შემთხვევაში, განუწყვეტელი მოძრაობით შეიძლება შევათავსოთ, მაგალითად, $O'x'$, $O'y'$ ღერძები $Ox$ და $Oy$ ღერძებთან; მაგრამ, მაშინ $Oz$ და $O'z'$ ღერძები მიიღებენ მოპირდაპირე მიმართულებებს და ჩვენ გვექნება:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

ზემომოყვანილი შედეგი კიდევ უფრო მარტივად შეიძლება დამტკიცდეს, თუ ვისარგებლებთ სამი ვექტორის შერეული ნამრავლის ცნებით (§ 26). მართ-

[1]) მეორეგვარი გამოყვანა ნაჩვენებია ქვემოთ, ამავე პარაგრაფში.

ლაც, § 52-ში ნათქვამის ძალით, $\Delta$ დეტერმინანტი წარმოადგენს ურთიერთმართობ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ სამი ორტის შერეულ ნამრავლს, ე. ი. $\Delta=[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$. მაშასადამე, $\Delta=\pm 1$, ამასთან ნიშანი პლუსი აიღება, თუ ღერძთა განსახილველი სისტემები ერთი და იმავე კლასისაა, ხოლო ნიშანი მინუსი (—) წინააღმდეგ შემთხვევაში [1]).

თუ ვისარგებლებთ ვექტორული ნამრავლის ცნებით, შეიძლება დავწეროთ კიდევ მთელი რიგი დამოკიდებულებანი, განსახილველ მიმართულებათა კოსინუსების დამაკავშირებელნი.

სახელდობრ, გარკვეულობისათვის თუ დავუშვებთ, რომ ღერძთა ძველი სისტემა არის მარცხენა, გვექნება:

$$\vec{v}\times\vec{w}=\pm\vec{u},\quad \vec{w}\times\vec{u}=\pm\vec{v},\quad \vec{u}\times\vec{v}=\pm\vec{w}, \tag{7}$$

სადაც ზედა ნიშანი აიღება იმ შემთხვევაში, როცა ახალი სისტემაც მარცხენაა, ხოლო ქვედა ნიშანი (—) წინააღმდეგ შემთხვევაში.

როგორც უკვე ვთქვით (§ 51, გვ. 85, გამოტანილი [2]), ყველა ფორმულა მართებული რჩება იმ შემთხვევაშიაც, როცა სისტემა $Oxyz$ მარჯვენაა. ამ შემთხვევაში საჭიროა მხოლოდ, რომ ყველა ფორმულირებაში (და, კერძოდ, ვექტორული ნამრავლის განმარტებაშიაც) სიტყვა „მარცხენა" შეიცვალოს სიტყვით „მარჯვენა" და, პირიქით.

§ 51-ის (4) ფორმულების საფუძველზე წინა ფორმულები მოგვცემს შემდეგი სახის ცხრა დამოკიდებულებას

$$l=\pm(m_2n_3-m_3n_2), \tag{8}$$

რომელთაგან ჩვენ ამოვწერეთ მხოლოდ პირველი; დანარჩენებს მივიღებთ, თუ მოვახდენთ ასოების $l$, $m$, $n$ და შემდეგ ნიშნაკების 1, 2, 3 წრიულ გადასმას. მოკლედ, ეს დამოკიდებულებანი გვიჩვენებენ, რომ

$$\Delta=\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტის ელემენტები ტოლია თავიანთი ალგებრული დამატებებისა, აღებული პლუსი ნიშნით, თუ საკოორდინატო სისტემები ერთი და იმავე კლასისაა და მინუსი ნიშნით, თუ სისტემები სხვადასხვა კლასისაა.

უკანასკნელ დეტერმინანტს თუ დავშლით ერთ-ერთი სტრიქონის ელემენტებით (ან ერთ-ერთი სვეტის ელემენტებით) და თუ ვისარგებლებთ (8) დამოკიდებულებებით, ბელახლა მივიღებთ (6) ფორმულას.

**§ 72. ორთოგონალური ჩასმები. წინა პარაგრაფის ფორმულების ალგებრული გამოყვანა.** წინა პარაგრაფში მიღებული შედეგი მიგვეყვანს მეტად

[1]) მართლაც, ვიცით, რომ $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ არის $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობა, გარკვეული ნიშნით აღებული (§ 52). ჩვენს შემთხვევაში ეს პარალელეპიპედი გადაიქცევა კუბად, რომლის წიბოები ერთეულია ტოლია.

მნიშვნელოვან ალგებრულ ცნებამდე **ორთოგონალური ჩასმისა.** ორთოგონალური ჩასმების შესახებ ჩვენ რამდენიმე სიტყვა უკვე ვთქვით § 69-ში (სავარჯიშო 4); იქ ჩვენ განააკუთრებით მარტივ, ორი ცვლადის შემთხვევასთან გვქონდა საქმე. აქ კი უფრო დაწვრილებით განვიხილავთ სამი ცვლადის შემთხვევას [1]).

წრფივ ერთგვაროვან ჩასმას

$$\left.\begin{aligned} X &= l_1X' + l_2Y' + l_3Z' \\ Y &= m_1X' + m_2Y' + m_3Z' \\ Z &= n_1X' + n_2Y' + n_3Z' \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ეწოდება **ორთოგონალური,** თუ იგივურად აქვს ადგილი ტოლობას:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = X'^2 + Y'^2 + Z'^2. \tag{2}$$

თუ ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილში შევიტანთ (1) გამოსახულებებს და, თუ შემდეგ მარჯვენა და მარცხენა მხარეში ცვლადთა კვადრატების და ნამრავლთა კოეფიციენტებს შესაბამისად ერთმანეთს შევადარებთ, მივიღებთ აუცილებელ და საკმარის პირობებს იმისას, რომ ჩასმა ორთოგონალური იყოს. ეს პირობებია

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1,\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1,\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1, \tag{3}$$

$$l_2l_3 + m_2m_3 + n_2n_3 = l_3l_1 + m_3m_1 + n_3n_1 = l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0. \tag{4}$$

ჩვენ, ამნაირად, მივიღეთ წინა პარაგრაფის იგივე (3) და (4) პირობები, რასაც უნდა აკმაყოფილებდნენ გარდაქმნის იმ ფორმულების კოეფიციენტები, რომლებიც გამოიყენებიან მართკუთხოვან კოორდინატთა ერთი სისტემიდან მეორე მართკუთხოვანზე (ორთოგონალურზე) გადასვლის დროს. სწორედ ამით აიხსნება სახელწოდება „ორთოგონალური ჩასმა“.

ვთქვათ, $\Delta$-თი აღნიშნულია ჩასმის დეტერმინანტი:

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}.$$

როგორც წინა პარაგრაფში დავინახეთ, (3) და (4) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს

$$\Delta = \pm 1. \tag{5}$$

იმ შემთხვევაში, როცა $\Delta = +1$, ჩვენ ვიტყვით, რომ ჩასმა არის პირველი კლასისა, მეორე შემთხვევაში კი—მეორე კლასისაა [2]).

[1]) ჩვენ შევჩერდით სამი ცვლადის შემთხვევაზე მისი გეომეტრიული მნიშვნელობის გამო. ცხადია, აქ ნათქვამი შეიძლება ცვლადთა ნებისმიერი რიცხვისათვის განვაზოგადოთ (იხ. დამატება, § 14).

[2]) გეომეტრიულად. პირველი კლასის ჩასმა შეეფერება იმ შემთხვევას, როცა ღერძთა ძველი და ახალი სისტემა ერთი და იმავე კლასისაა, მეორე კლასის ჩასმა შეეფერება სხვადასხვა კლასის სისტემათა შემთხვევას.

ახლა, თუ ამოვხსნით განტოლებათა სისტემას [(3), (4) განტოლებათაგან აღებულს]

$$\begin{aligned} l_1l_1 + m_1m_1 + n_1n_1 &= 1, \\ l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 &= 0, \\ l_1l_3 + m_1m_3 + n_1n_3 &= 0, \end{aligned}$$

რომელშიაც პირველ მამრავლებს ($l_1$, $m_1$, $n_1$) ჩვენ განვიხილავთ, როგორც უცნობთ, ხოლო მეორე მამრავლებს როგორც კოეფიციენტებს; დეტერმინანტთა თეორიის ცნობილი წესის მიხედვით მივიღებთ (იხ. დამატება, § 3):

$$l_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & m_1 & n_1 \\ 0 & m_2 & n_2 \\ 0 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}(m_2n_3 - m_3n_2) = \pm(m_2n_3 - m_3n_2),$$

და ორ სხვა ტოლობას, რომელთაც მივიღებთ $l$, $m$, $n$ ასოების წრიული გადასმით. ანალოგიურად დავამტკიცებთ კიდევ ექვს ტოლობას, რომელთაც წინა სამი ტოლობიდან მივიღებთ 1, 2, 3 ნიშნაკების წრიული გადასმით.

ამრიგად, ჩვენ ვღებულობთ, რომ (2) დეტერმინანტის ელემენტთა ალგებრული დამატებანი სათანადო ელემენტების ტოლი არიან, დადებითი ნიშნით, თუ ჩასმა პირველი კლასისაა ($\Delta = +1$) და უარყოფითი ნიშნით (—) მეორე კლასის შემთხვევაში ($\Delta = -1$) (შეადარეთ წინა პარაგრაფს).

თუ ამ გარემოებას მივიღებთ მხედველობაში და (1) სისტემას ამოვხსნით $X'$, $Y'$, $Z'$-ის მიმართ დეტერმინანტთა ხერხით, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} X' &= l_1X + m_1Y + n_1Z, \\ Y' &= l_2X + m_2Y + n_2Z, \\ Z' &= l_3X + m_3Y + n_3Z; \end{aligned}\right\} \qquad (1a)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ $X'$, $Y'$, $Z'$ გამოისახებიან $X$, $Y$, $Z$-ის მიმართ ჩასმით, რომელიც მიიღება წინანდელ გარდაქმნის კოეფიციენტთა ცხრილში სვეტებს თუ შევცვლით უბრალოდ სტრიქონებით (და პირუკუ). მიღებული ჩასმა, რასაკვირველია, დააკმაყოფილებს ორთოგონალობის (2) პირობის ძალით, (3), (4)-ის ანალოგიურ განტოლებებს, რომლებიც მიიღებიან (3), (4)-დან კოეფიციენტთა ცხრილში სტრიქონების სვეტებით შეცვლით და პირუკუ.

ამნაირად, ჩვენ მივიღეთ წინა პარაგრაფის (3a) და (4a) ფორმულები. ახლა ესენი გამოყვანილი არიან (3), (4) პირობებიდან წმინდა ალგებრული გზით.

§ 78. ეილერის კუთხეები[1]). როგორც უკვე ნათქვამი იყო § 71-ში, ერთი მართკუთხოვანი სისტემის ღერძთა მიმართულებანი მეორე სისტემის მიმართ (ე. ი. ერთი სისტემის ორიენტირება მეორის მიმართ) შეიძლება დახასიათდეს სამი კუთხით, რომელთაც ეილერის კუთხეები ეწოდება. გადავიდეთ ამათ განმარტებაზე.

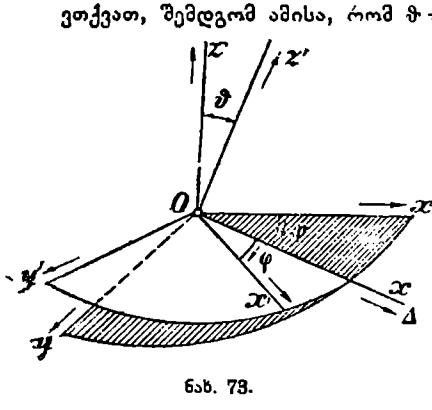
[1]) პირველ წაკითხვისას შეიძლება ამ პარაგრაფის გამოტოვება.

ვინაიდან საუბარი ღერძთა მიმართულებების განსაზღვრაზეა, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $Oxyz$ და $Ox'y'z'$ სისტემებს აქვთ საერთო სათავე $O$. წარმოვიდგინოთ, გარკვეულობისთვის, რომ ორივე სისტემა მარცხენაა. სხვა შემთხვევების შესახებ ნათქვამი იქნება პარაგრაფის ბოლოს. შენიშვნა 1-ში.

ვთქვათ, $\Delta$ აღნიშნავს $Ox'y'$ და $Oxy$ სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფეს (ნახ. 73); ამ წრფეს ჩვენ მივაწერთ გარკვეულ მიმართულებას, ე. ი. მას განვიხილავთ, როგორც ღერძს; სახელდობრ, $\Delta$ წრფის მიმართულებად ჩვენ ავარჩევთ ისეთს, რომ სამი $Oz$, $Oz'$ და $\Delta$ მიმართულებათა სისტემა მარცხენა იყოს.

ახლა ვთქვათ, $\psi = \widehat{Ox, \Delta}$ აღნიშნავს კუთხეს $Ox$-სა და $\Delta$-ს შორის, მოქცეულს $(0, 2\pi)$ საზღვრებში და ათვლილს $Oxy$ სიბრტყეში დადებითი მიმართულებით (ე. ი. $Ox$-იდან $Oy$-საკენ; § 42).

ვთქვათ, შემდგომ ამისა, რომ $\vartheta = \widehat{Oz, Oz'}$ არის კუთხე $Oz$-სა და $Oz'$-ს შორის, მოქცეული $(0, \pi)$ საზღვრებში და ვთქვათ ბოლოს, რომ $\varphi = \widehat{\Delta, Ox'}$ არის კუთხე $\Delta$ ღერძსა და $Ox'$-ს შორის, მოქცეული $(0, 2\pi)$ საზღვრებში და ათვლილი $\Delta$ ღერძიდან დადებითი მიმართულებით $Ox'y'$ სიბრტყეში.




ნახ. 73.

ცხადია, რომ ამ კუთხეების მოცემა სავსებით განსაზღვრავს $Ox'y'z'$ სისტემის მდებარეობას $Oxyz$ სისტემის მიმართ.

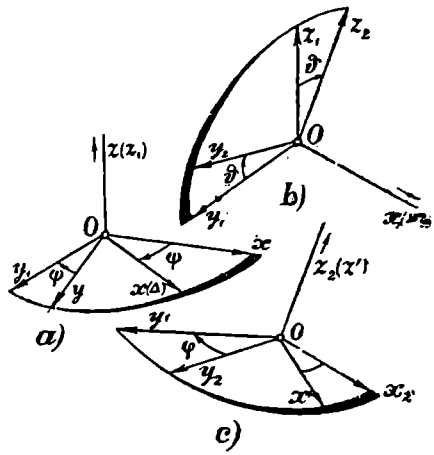
სახელდობრ, თუ ვიცით $\psi$ კუთხე, შეგვიძლია ავაგოთ ღერძი; შემდეგ, თუ გადავზომავთ $\Delta$-სადმი მართობულს და $Oz$-ზე გამავალ სიბრტყეში კუთხეს $\vartheta$ ($Oz$-დან საათის ისრის მიხედვით, $\Delta$-ს გასწვრივ მდგომი დამკვირვებელისათვის)[1]), მივიღებთ $Oz'$ მიმართულებას; შემდეგ, თუ მოვზომავთ $Oz'$-ის მართობულს და $\Delta$-ზე გამავალ სიბრტყეში კუთხეს $\varphi$ ($\Delta$ ღერძიდან დადებითი მიმართულებით, ესე იგი საათის ისრის მიხედვით $Oz'$-ის გასწვრივ მდგომი დამკვირვებელისათვის), მივიღებთ $Ox'$ ღერძს; ბოლოს, თუ მოვზომავთ $Ox'$-დან (იმავე მიმართულებით და იმავე სიბრტყეში) კუთხეს $+\frac{\pi}{2}$, მივიღებთ $Oy'$ ღერძს.

კუთხეები $\psi$, $\vartheta$ და $\varphi$ შემოღებულ იქნა ეილერის მიერ და ამიტომ მის სახელს ატარებენ.

[1]) ვინაიდან მხოლოდ ამ შემთხვევაში $Oz$, $Oz'$ და $\Delta$ ღერძების სისტემა იქნება მარცხენა (შეამოწმეთ ეს ნახაზზე). როცა ჩვენ ელაპარაკობთ ღერძის გასწვრივ მდგომ დამკვირვებელზე, ვგულისხმობთ, რომ ღერძი მიმართულია ფეხებიდან თავისაკენ.

ახლა გამოვიყვანოთ ფორმულები, რომლებიც ამ კუთხეების საშუალებით გამოსახავენ (A) ცხრილის მიმართულებათა კოსინუსებს (§ 70).

ამისათვის შევნიშნოთ, რომ ახალი სისტემა $Ox'y'z'$ შეიძლება მიღებული იყოს ძველიდან შემდეგნაირად: მოვაბრუნოთ $Oxyz$ სისტემა $Oz$-ის გარშემო $\psi$ კუთხეზე, მივიღებთ $Ox_1y_1z_1$ სისტემას, რომლის $Ox_1$ ღერძი ემთხვევა $\Delta$-ს, ხოლო $Oz_1$ ემთხვევა $Oz$-ს (ნახ. 74,a). თუ ამის შემდეგ $Ox_1y_1z_1$ სისტემას $Ox_1$ ღერძის გარშემო შევაბრუნებთ $\vartheta$ კუთხეზე, ჩვენ მივიღებთ $Ox_2y_2z_2$ სისტემას, რომლის $Ox_2$ ღერძი ემთხვევა $Ox_1$, ხოლო $Oz_2$ ღერძი შეადგენს $Oz_1$-თან $\vartheta$ კუთხეს (ნახ. 74,b). ბოლოს, თუ სისტემას $Oz_2$ ღერძის გარშემო შემოვაბრუნებთ $\varphi$ კუთხეზე, ცხადია, მივალთ საძიებელ $Ox'y'z'$ სისტემამდე, მასთან $Oz'$ ღერძი და $Oz_2$ ღერძი ერთიმეორეს ემთხვევა, ხოლო $Ox'$ ღერძი შეადგენს $Ox_2$ ღერძთან $\varphi$ კუთხეს (ნახ. 74,c).




ნახ. 74.

შემდეგ, აღვნიშნოთ $(X, Y, Z)$, $(X', Y', Z')$, $(X_1, Y_1, Z_1)$, $(X_2, Y_2, Z_2)$ ერთი და იმავე ვექტორის კოორდინატები შესაბამისად ძველი, ახალი და დამხმარე სისტემების მიმართ. ცხადია, მივიღებთ თანმიმდევრობით შემდეგ ფორმულებს [§ 69, ფორმულა (3)]:

a) $Oxyz$-დან $Ox_1y_1z_1$-ზე გადასვლისათვის (ნახ. 74,a)

$$\left.\begin{aligned} X &= X_1\cos\psi - Y_1\sin\psi,\\ Y &= X_1\sin\psi + Y_1\cos\psi,\\ Z &= Z_1; \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

b) $Ox_1y_1z_1$-დან $Ox_2y_2z_2$-ზე გადასვლის დროს (ნახ. 74,b)

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= X_2,\\ Y_1 &= Y_2\cos\vartheta - Z_2\sin\vartheta,\\ Z_1 &= Y_2\sin\vartheta + Z_2\cos\vartheta; \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

c) და, ბოლოს, $Ox_2y_2z_2$-დან $Ox'y'z'$-ზე გადასვლისათვის (ნახ. 74,c) გვექნება:

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= X'\cos\varphi - Y'\sin\varphi\\ Y_2 &= X'\sin\varphi + Y'\cos\varphi\\ Z_2 &= Z'. \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

თუ (b) ფორმულებს შევიტანთ (a)-ში და შემდეგ მიღებულ გამოსახულებას (c)-ში, მივიღებთ პირველად:

$$\begin{aligned} X &= X_2 \cos\psi - (Y_2 \cos\vartheta - Z_2 \sin\vartheta)\sin\psi, \\ Y &= X_2 \sin\psi + (Y_2 \cos\vartheta - Z_2 \sin\vartheta)\cos\psi, \\ Z &= Y_2 \sin\vartheta + Z_2 \cos\vartheta. \end{aligned}$$

ხოლო შემდეგ:

$$\begin{aligned} X &= (X'\cos\varphi - Y'\sin\varphi)\cos\psi - [(X'\sin\varphi + Y'\cos\varphi)\cos\vartheta - Z'\sin\vartheta]\sin\psi, \\ Y &= (X'\cos\varphi - Y'\sin\varphi)\sin\psi + [(X'\sin\varphi + Y'\cos\varphi)\cos\vartheta - Z'\sin\vartheta]\cos\psi, \\ Z &= (X'\sin\varphi + Y'\cos\varphi)\sin\vartheta + Z'\cos\vartheta. \end{aligned}$$

თუ ფრჩხილებს გავხსნით და მიღებულ ფორმულებს შევადარებთ ფორმულებს (§ 70-ისა)

$$\left.\begin{aligned} X &= l_1 X' + l_2 Y' + l_3 Z', \\ Y &= m_1 X' + m_2 Y' + m_3 Z', \\ Z &= n_1 X' + n_2 Y' + n_3 Z', \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

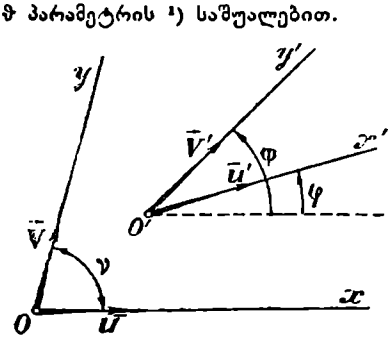
$$\left.\begin{aligned} l_1 &= \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi, \\ m_1 &= \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\sin\varphi, \\ n_1 &= \sin\vartheta\sin\varphi, \\ l_2 &= -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\cos\varphi, \\ m_2 &= -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi, \\ n_2 &= \sin\vartheta\cos\varphi, \\ l_3 &= \sin\psi\sin\vartheta, \\ m_3 &= -\cos\psi\sin\vartheta, \\ n_3 &= \cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ეს ფორმულები, რომლებიც ეილერს ეკუთვნის, ადვილი მისაღებია აგრეთვე სფერული ტრიგონომეტრიის ფორმულების გამოყენებით.

**შენიშვნა. 1.** თუ ახალი სისტემა—მარჯვენაა (ძველი კი როგორც ზემოთ,—მარცხენა), მაშინ ეილერის კუთხეების განმარტება, მაგალითად, შემდეგნაირად შეიძლება: ავიღოთ ღერძთა დამხმარე სისტემა $Ox'$, $Oy'$, $Oz''$, რომელშიაც პირველი ორი ღერძი იგივეა, რაც ახალი სისტემის პირველი ორი ღერძი $Ox'$, $Oy'$, ხოლო მესამე $Oz''$ ღერძი მიმართულია $Oz'$-ის მოპირდაპირედ. თუ განვსაზღვრავთ φ, ψ, ϑ კუთხეებს დამხმარე სისტემისათვის (რომელიც რასაკვირველია, მარცხენა იქნება), იგივე კუთხეებს შეიძლება ეწოდოს მოცემული მარჯვენა სისტემის ეილერის კუთხეები. ადვილი შესამჩნევია, რომ (1) და (2) ფორმულები ძალაში დარჩებიან, თუ, რომ (2) ფორმულებში $l_2$, $m_2$, $n_2$-ის გამოსახულებების ნიშანს შევცვლით მოპირდაპირეზე. აგრეთვე ადვილი გასაგებია, თუ როგორ უნდა შეიცვალოს φ, ψ, ϑ კუთხეების განსაზღვრა, როცა ძველი სისტემა მარჯვენაა.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. (2) ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ სამცვლადისათვის რომელიმე ორთოგონალური ჩასმის (იხ. წინა პარაგრაფი) კოეფიციენტები შეიძლება გამოისახონ სამი დამხმარე $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ პარამეტრის [1]) საშუალებით.

ეს ფაქტი შეიძლება დამტკიცდეს ორთოგონალური ჩასმის გეომეტრიული მნიშვნელობის გარეშე.



ნახ. 75.

**§ 74. არაგანზოგადებული ირიბკუთხოვანი კოორდინატების გარდაქმნა სიბრტყეზე.** დაეამთაეროთ ეს განყოფილება სიბრტყეზე არაგანზოგადებული ირიბკუთხოვანი კოორდინატების არაგანზოგადებულ ირიბკუთხოვანზე გარდაქმნით. ახალი ღერძების მდებარეობა ძველის მიმართ განსაზღვრული იქნება, თუ მოცემულია ახალი სათაეის $a$, $b$ კოორდინატები ძველის მიმართ და კუთხეები $\varphi$ და $\psi$, რომელთაც ახალი $O'x'$ და $O'y'$ ღერძები შეადგენენ ძველ $Ox$ ღერძთან (კუთხეების ათვლის მიმართულების შესახებ იხ. § 47) (ნახ. 75). ახალი ღერძების ორტებისათვის გვექნება (იხ. § 57, ფორმულები 7):

$$\left.\begin{aligned} \vec{u}' &= \frac{\sin(\nu-\varphi)}{\sin\nu}\,\vec{u} + \frac{\sin\varphi}{\sin\nu}\,\vec{v}, \\ \vec{v}' &= \frac{\sin(\nu-\psi)}{\sin\nu}\,\vec{u} + \frac{\sin\psi}{\sin\nu}\,\vec{v}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

სადაც $\nu$ არის ძ ვ ე ლ ი სისტემის საკოორდინატო კუთხე.

აქედან, § 65-ის (1a) და (2a) ფორმულების ძალით, ვექტორის კოორდინატებისათვის გვექნება:

$$X = \frac{X'\sin(\nu-\varphi) + Y'\sin(\nu-\psi)}{\sin\nu}, \qquad Y = \frac{X'\sin\varphi + Y'\sin\psi}{\sin\nu}. \qquad (2)$$

წერტილის კოორდინატებისათვის მიეიღებთ ანალოგიურ ფორმულებს, მხოლოდ მარჯვენა მხარეებს მიემატება, შესაბამისად, $a$ და $b$ სიდიდეები.

## III. მოძრაობანი და აფინური გარდაქმნები

წინა განყოფილებათა ფორმულები გვაძლევენ კავშირს ე რ თ ი და ი მ ა ვ ე წ ე რ ტ ი ლ ი ს დეკარტის კოორდინატებს შორის ორი სხვადასხვა სისტე-

[1]) მეორე კლასის ჩასმებში, $l_3$, $m_3$, $n_3$-ის გამოსახულებათა მარჯვენა ნაწილებში ნიშანი მოპირდაპირედ უნდა შეიცვალოს. ოთი ცვლადის შემთხვევაში ორთოგონალური ჩასმის კოეფიციენტები, როგორც ვიცით, ერთი $\varphi$ პარამეტრით გამოისახებიან.

მის მიმართ. მაგრამ იმავე ფორმულების აზრი შეიძლება სხვანაირადაც გადმოვცეთ. სახელდობრ, ეს ფორმულები შეიძლება განვიხილოთ იქნას, როგორც დამოკიდებულებანი, რომლებიც აკავშირებენ სხვადასხვა წერტილის კოორდინატებს ერთი და იმავე ან აგრეთვე სხვადასხვა სისტემის მიმართ. საკითხის ამგვარი დაყენება მიგვიყვანს ფუნდამენტალური მნიშვნელობის ახალ ცნებამდე, რომლის განმარტებაზე ჩვენ ახლა გადავალთ.

**§ 75. მოძრაობანი.** მეტი სიცხადისათვის დავიწყოთ მართკუთხოვან კოორდინატთა გარდაქმნასთან დაკავშირებული ფორმულებით და უპირველესად განვიხილოთ ორი განსხვავებული შემთხვევა.

ვთქვათ, $Oxy$ არის სიბრტყეზე მართკუთხოვან კოორდინატთა ღერძების რომელიმე სისტემა. წარმოვიდგინოთ, რომ ეს სიბრტყე გადავაადგილეთ თავის თავზე, როგორც მყარი რამ, ისე, რომ $Oxy$ სისტემამ დაიკავა ახალი მდებარეობა $O'x'y'$ (ნახ. 76). დაწვრილებით ეს შემდეგნაირად უნდა წარმოვიდგინოთ. გვაქვს ურთიერთდაფენილი ორი სიბრტყე $\Pi$ და $\Pi'$ (ქაღალდის ორი ფურცლის მსგავსად), რომელთაგან, პირველი უძრავია, ხოლო მეორეს შეუძლია მასზე სრიალი. $\Pi$ და $\Pi'$ სიბრტყეებზე აღებულია მართკუთხოვანი სისტემები $Oxy$ და $O'x'y'$, რომლებიც ურთიერთდამთხვეული იყვნენ $\Pi'$ სიბრტყის გადაადგილებამდე. გადაადგილების შემდეგ $O'x'y'$, სისტემა დაიკავებს სავსებით გარკვეულ მდებარეობას $Oxy$ სისტემის მიმართ. ამ ახალ მდებარეობაში განვიხილავთ $O'x'y'$ სისტემას. $\Pi'$-ის წერტილი, $\Pi$ სიბრტყის $M(x, y)$ წერტილის თანხვედნილი, გადაადგილების შემდეგ დაიკავებს ახალ $M'$ მდებარეობას. ვთქვათ, $x'$, $y'$ არიან $M'$ წერტილის კოორდინატები იმავე $Oxy$ სისტემის მიმართ. მოვნახოთ დამოკიდებულება წერტილის ძველი მდებარეობის $(x, y)$ კოორდინატებსა და ახალ $x'y'$ კოორდინატებს შორის. ამისათვის, $M'$ წერტილის კოორდინატებზე $Oxy$ და $O'x'y'$ ღერძთა სისტემის მიმართ გამოვიყენოთ § 60-ის (5) ფორმულები. განმარტების ძალით, პირველია $x'$, $y'$, ხოლო მეორე, ცხადია, რომ $x$, $y$-ის ტოლია, ვინაიდან $M'$-ს აქვს იგივე კოორდინატები $O'x'y'$, სისტემის მიმართ, როგორიც აქვს $M$ წერტილს $Oxy$-ის მიმართ (იხ. ნახ. 76).

ამრიგად, გვექნება [1]):

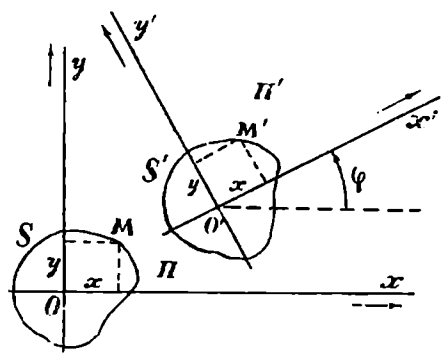
$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi + a,\\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi + b,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

სადაც $\varphi$ არის ის კუთხე, რომლითაც მობრუნდა $Ox'$ ღერძი, ხოლო $a$ და $b$ არის $O'$ წერტილის კოორდინატები (მისი ახალი მდებარეობისათვის). ამრიგად, გვაქვს იგივე ფორმულები, რაც გვქონდა § 69-ში (ოღონდ $x$, $y$-ის ნაცვლად სწერია $x'$, $y'$ და შებრუნებით). მიუხედავად ამისა, ამ ფორმულების

[1]) ჩვენს შემთხვევაში $M'$ წერტილის „ახალ" კოორდინატთა როლს ასრულებს $x$, $y$, ხოლო „ძველ" კოორდინატთა როლს (იმავე $M'$ წერტილისას) ასრულებს $x'$, $y'$; § 69-ის ფორმულებში ასაღებია ზედა ნიშნები, ვინაიდან $O'x'y'$ მიიღება $Oxy$-დან თავის სიბრტყეში გადაადგილებით.

აზრი სხვაგვარია: § 69-ში იგულისხმებოდა ერთი და იმავე წერტილის კოორდინატები სხვადასხვა სისტემის მიმართ, აქ კი—სხვადასხვა წერტილის კოორდინატები ერთი და იმავე სისტემის მიმართ.

(1) დამოკიდებულებანი $\Pi$ სიბრტყის ყოველ წერტილს შეუსაბამებს $\Pi'$ სიბრტყის საესებით გარკვეულ წერტილს და შებრუნებით. როცა დამყარებულია შესაბამობა ერთი სიბრტყის წერტილებთან ისე, რომ ერთი სიბრტყის ყოველ წერტილს უპასუხებს ერთი გარკვეული წერტილი მეორე სიბრტყისა და შებრუნებით, მაშინ ამბობენ, რომ ამ სიბრტყეებს შორის დამყარებულია წერტილობრივი ურთიერთ-ცალსახა[1]) შესაბამობა ანუ რომ საქმე გვაქვს წერტილობრივ[2]) ურთიერთ-ცალსახა გარდაქმნასთან ერთი სიბრტყისა მეორეზე. ამ შემთხვევაში, ყოველ ნაკვთს ერთ სიბრტყეზე შეესაბამება საესებით გარკვეული ნაკვთი მეორეზე და შებრუნებით.




ნახ. 76.

ჩვენს შემთხვევაში საქმე გვაქვს ასეთი შესაბამობის (გარდაქმნის) ერთ-ერთ უმარტივეს შემთხვევასთან: შესაბამი ნაკვთები $S$ და $S'$ მიიღებიან ერთიმეორისაგან უბრალო გადაადგილებით. ეს ნაკვთები ურთიერთ კონგრუენტული არიან, ე. ი. შესაძლოა ერთიმეორეზე დაფენილ იქნან ყველა შესაბამი წერტილით (ნახ. 76). ამიტომ (1) სახის გარდაქმნას ეწოდება მოძრაობა ანუ კონგრუენტული გარდაქმნა.

ცხადია, რომ თანმიმდევრობით შესრულებული ორი მოძრაობა მიგვიყვანს ისევ მოძრაობამდე.

აქამდე ჩვენ (1) ფორმულებში ვიხილავდით შესაბამ წერტილთა კოორდინატებს ერთი და იმავე $Oxy$ სისტემის მიმართ. ახლა დავუშვათ, რომ $x$, $y$ და $x'$, $y'$ წარმოადგენენ $M$ და $M'$ წერტილთა კოორდინატებს, რომელიმე ორი მართკუთხოვანი $Oxy$ და $O''x''y''$ სისტემების მიმართ; მასთან ფ აღნიშნავს, რომელიმე კუთხეს, ხოლო $a$ და $b$—რომელიმე რიცხვებს. ადვილი წარმოსადგენია, რომ (1) ფორმულებით გამოსახული შესაბამობა ამ შემთხვევაშიც წარმოადგენს მოძრაობას, თუკი $Oxy$ და $O''x''y''$ ერთსა და იმავე კლასს

[1]) „ურთიერთ-ცალსახა“ ნიშნავს, რომ ერთი სიბრტყის ყოველ წერტილს შეესაბამება მეორე სიბრტყის ერთი წერტილი და შებრუნებით. შემდეგში, როცა ვიტყვით შესაბამებას, ჩვენ ხშირად გამოვტოვებთ სიტყვას „ურთიერთ-ცალსახა-ს“, მაგრამ ვიგულისხმებთ მას.

[2]) ჩვენ გარდაქმნას ვუწოდებთ წერტილობრივს, როცა გარდაქმნის ძირითად ობიექტებს წარმოადგენენ წერტილები. არსებობენ გარდაქმნის სხვა სახეებიც, მაგალითად, ისეთნი, რომლითაც წერტილებს ერთ სიბრტყეზე შეესაბამება წრფეები მეორე სიბრტყეზე. ზოგიერთ ასეთ გარდაქმნას ჩვენ ქვემოთ გავეცნობით.

ეკუთვნიან (იხ. § 69). მართლაც, თუ გადავაადგილებთ $\Pi'$ სიბრტყეს, როგორც ერთ მთელს და $O''x''y''$ სისტემას ისე, რომ $O''x''y''$ სისტემა შეუთავსდეს $Oxy$ სისტემას, მაშინ ჩვენ დაეუბრუნდებით წინა შემთხვევას.

(1) სახის გარდაქმნებთან ერთად შეიძლება განხილულ იქნას შემდეგი სახის გარდაქმნებიც

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi + a,\\ y' &= x\sin\varphi - y\cos\varphi + b,\end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

რომლებიც შეესაბამებიან § 69-ში (5) ფორმულების ქვედა ნიშნებს. თუ ვიგულისხმებთ, რომ $M$ და $M'$ წერტილები განხილულია ერთი და იმავე $Oxy$ სისტემის მიმართ, მაშინ აღნიშნულ პარაგრაფში ნათქვამის თანახმად, ცხადია, რომ (1a) გარდაქმნა შედგება მოძრაობისაგან და შემდგომი სარკისებრი არეკლვისაგან $Ox$ ღერძის მიმართ. ამ სახის გარდაქმნასაც მოძრაობას უწოდებენ. მაგრამ, საკუთრივი გაგებით მოძრაობისაგან („საკუთრივი მოძრაობა“) განსასხვავებლად მათ უწოდებენ არასაკუთრივ მოძრაობას.

თუ (1a) ფორმულებში $M$ და $M'$ წერტილთა კოორდინატები განხილულია ერთი და იმავე კლასის სხვადასხვა მართკუთხოვანი სისტემის მიმართ, მაშინ ამ შემთხვევაშიც, როგორც ადვილი შესამჩნევია, ჩვენ გვექნება ისევ არასაკუთრივი მოძრაობა. პირიქით, თუ სისტემები სხვადასხვა კლასისაა, მაშინ (1a) ფორმულით გამოსახული მოძრაობა იქნება საკუთრივი, რასაც თვითონ მკითხველი ადვილად შეამოწმებს.

შესაძლოა აგრეთვე ჩავთვალოთ, რომ $\Pi$ და $\Pi'$ სიბრტყეები არ არიან ერთიმეორეზე დაფენილი და რომ $(x, y)$, $(x', y')$ აღნიშნავენ $M$ და $M'$ წერტილთა კოორდინატებს ორი მართკუთხოვანი სისტემის მიმართ, რომლებიც აღებული არიან $\Pi$ და $\Pi'$ სიბრტყეებზე.

აქაც ჩვენ გვაქვს კონგრუენტული შესაბამობა, ვინაიდან მოძრაობის საშუალებით (უკვე სამგანზომილებიან სივრცეში) შეგვიძლია $\Pi'$ სიბრტყე დავამთხვიოთ $\Pi$ სიბრტყეზე, რაც მიგვიყვანს წინა შემთხვევამდე. მაგრამ, თუ დავუშვებთ ისეთ მოძრაობებს, რომელთაც ნაკეთი გამოყავთ თავისი პირვანდელი სიბრტყიდან, მაშინ ისპობა განსხვავება ბრტყელ ნაკეთთა საკუთრივსა და არასაკუთრივ კონგრენტულ თანადობას შორის, ვინაიდან, თუ დავამთხვევთ $\Pi$ სიბრტყეზე $\Pi'$ სიბრტყეს ამა თუ იმ მხრით, ჩვენ მივიღებთ შესაბამობის ამა თუ იმ სახეს.

სრულიად ანალოგიურად შეიძლება განვიხილოთ სივრცითი ნაკეთების კონგრუენტული შესაბამობა ანუ მოძრაობა; აქაც შეიძლება წარმოვიდგინოთ ორი სივრცე ერთიმეორეში „მოთავსებული“. რასაკვირველია, ეს სავალდებულო არ არის (ისე, როგორც ბრტყელი მოძრაობის შემთხვევაში) და თუ ამას მივძართავთ, მხოლოდ იმიტომ, რომ უფრო ადვილად გავარჩიოთ $M$ და $M'$ წერტილები გარდაქმნამდე და გარდაქმნის შემდეგ.

სივრცითი მოძრაობა ხასიათდება შემდეგი სახის გარდაქმნის ფორმულებით:

$$\left.\begin{aligned} x' &= l_1x + l_2y + l_3z + a,\\ y' &= m_1x + m_2y + m_3z + b,\\ z' &= n_1x + n_2y + n_3z + c,\end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

სადაც

$$\begin{matrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{matrix} \tag{3}$$

არის რომელიმე ორთოგონალური ჩასმის [1]) ცხრილი, ხოლო $a$, $b$, $c$ სავსებით ნებისმიერი რიცხვებია. $x$, $y$, $z$ და $x'$, $y'$, $z'$ სიდიდეები წარმოადგენენ ორი $M$ და $M'$ წერტილის კოორდინატებს ერთი და იმავე ან ორი სხვადასხვა მართკუთხოვანი სისტემის მიმართ. პირველად ვიგულისხმებთ, რომ $M$ და $M'$ წერტილები განხილულია ერთი და იმავე $Oxyz$ სისტემის მიმართ. თუ წინა ცხრილის $\Delta$ დეტერმინანტი $(+1)$-ის ტოლია, მაშინ ჩვენ გვაქვს საკუთრივი მოძრაობა, რომელიც მდგომარეობს იმაში, რომ წერტილი $O$ გადადის $O'(a, b, c)$-ში, ხოლო ღერძები $Ox$, $Oy$, $Oz$ ღებულობენ $\vec{u}=(l_1, m_1, n_1)$, $\vec{v}=(l_2, m_2, n_2)$, $\vec{w}=(l_3, m_3, n_3)$ ორტების მიმართულებებს. თუკი $\Delta=-1$, მაშინ გვექნება არასაკუთრივი მოძრაობა, რომელიც შედგება საკუთრივი მოძრაობისა და სარკისებრი არეკლვისაგან ერთ-ერთი საკოორდინატო სიბრტყის მიმართ.

იმ შემთხვევაში, როცა $M$ და $M'$ წერტილები განხილულია ორი სხვადასხვა მართკუთხოვანი სისტემის მიმართ, (2) ფორმულები აგრეთვე გამოსახავენ მოძრაობას (საკუთრივს ან არასაკუთრივს), თუ (3) ცხრილი არის რომელიმე ორთოგონალური ჩასმის ცხრილი (შეადარეთ ორი განზომილების შემთხვევას).

§ 76. აფინური გარდაქმნები. მოძრაობის (კონგრუენტული გარდაქმნის) უშუალოდ განზოგადებას წარმოადგენს აფინური გარდაქმნა. დავიწყოთ ისევ ორი განზომილების შემთხვევით. ამბობენ, რომ $\Pi$ და $\Pi'$ სიბრტყეებს შორის დამყარებულია აფინური შესაბამობა (ანუ აფინური გარდაქმნა) თუ $\Pi$ სიბრტყის ყოველ $M$ წერტილს შეესაბამება $\Pi'$ სიბრტყის $M$ წერტილი, რომლის დეკარტის კოორდინატები დაკავშირებულია $M$ წერტილის კოორდინატებთან წრფივი დამოკიდებულებებით

$$x'=l_1x+l_2y+a, \quad y'=m_1x+m_2y+b; \tag{1}$$

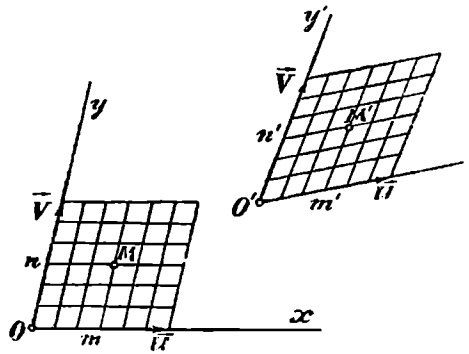
$x, y$ და $x'$, $y'$ წარმოადგენენ შესაბამად $M$ და $M'$ წერტილის დეკარტის კოორდინატებს რომელიმე სისტემების მიმართ $\Pi$ და $\Pi'$ სიბრტყეებზე. კოეფიციენტები $l_1$, $l_2$, $m_1$, $m_2$ შესაძლოა არჩეულ იქნან სავსებით ნებისმიერად. თუ წინააღმდეგი არ იქნება ნათქვამი, ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ (1) ჩასმა არის არაგანსაკუთრებული, ე. ი. რომ დეტერმინანტი

$$\Delta=\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \tag{2}$$

ნულისაგან განსხვავებულია (როცა $\Delta=0$, მაშინ გარდაქმნას ეწოდება განსაკუთრებული ან გადაგვარებული). პირობა $\Delta\neq 0$ იძლევა (1) ჩასმის

[1]) ჩვენ ვიცით (§ 71), რომ $\Delta=\pm 1$.

შექცევის შესაძლებლობას; (1) განტოლებები შესაძლოა ამოხსნილ იქნას $x$ და $y$-ის მიმართ და მიღებულ იქნას მათთვის აგრეთვე წრფივი გამოსახვები $x'$, $y'$-ის მიმართ. ამრიგად, როცა $\Delta \neq 0$, შესაბამობა ურთიერთ-ცალსახაა.




ნახ. 77.

უფრო ნათელი წარმოდგენა რომ მივიღოთ (1) გარდაქმნის გეომეტრიული შინაარსის შესახებ, უპირველესად ვიგულისხმოთ, რომ $l$ და $l'$ სიბრტყეები ერთიმეორეზეა დაფენილი და რომ $M$ და $M'$ წერტილები განხილულია დეკარტის კოორდინატთა ერთი და იმავე $Oxy$ სისტემის მიმართ.

ვთქვათ, $O$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ წარმოადგენენ სათავეს და საკოორდინატო ვექტორებს $Oxy$ სისტემისა, რომლის მიმართ განვიხილავთ $M$ და $M'$ წერტილებს. ავაგოთ დამხმარე სისტემა $O'x'y'$, რომლის სათავე იყოს $O'(a, b)$ და საკოორდინატო ვექტორები $\vec{u}=(l_1, m_1)$, $\vec{v}=(l_2, m_2)$; (იხ. ნახ. 77); აქ $a, b, l_1, m_1, l_2, m_2$ წარმოადგენენ კოორდინატებს $Oxy$ სისტემის მიმართ.

ადვილი შესამჩნევია, რომ $M'(x', y')$ წერტილს, რომელიც მიღებულია $M(x, y)$ წერტილისაგან აფინური გარდაქმნით (1), დამხმარე $O'x'y'$ სისტემის მიმართ აქვს ისეთივე $x, y$ კოორდინატები, როგორიც აქვს $M$ წერტილს $Oxy$ სისტემის მიმართ. მართლაც, იმ წერტილს, რომლის კოორდინატები $O'x'y'$ სისტემის მიმართ არის $x, y$, $Oxy$ სისტემის მიმართ იქნება კოორდინატებად $x', y'$, რომელიც მოცემულია (1) ფორმულებით, როგორც ეს გამომდინარეობს § 66-ის (2) ფორმულიდან.

ზემოაღნიშნულის თანახმად, განსახილველი გარდაქმნა შეიძლება ავწეროთ შემდეგნაირად: $\vec{u}$, $\vec{v}$-ზე აგებული პარალელოგრამის დეფორმაცია ხდება (პირველად გვერდების სიგრძის შეუცვლელად) ისე, რომ $\vec{u}$, $\vec{v}$ შორის მოთავსებული $\nu$ კუთხე ხდება $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ შორის მოთავსებულ $\nu'$ კუთხის ტოლი; შემდეგ მისი გვერდები გრძელდება (ან მოკლდება) ისე, რომ მათი სიგრძე $|\vec{u}|$ და $|\vec{v}|$ ნაცვლად ხდება $|\vec{u}'|$ და $|\vec{v}'|$. და ბოლოს, ამრიგად მიღებული პარალელოგრამი გადაიტანება ახალ მდებარეობაში ისე, რომ $O$ წვერო გადადის $O'$-ში, ხოლო გვერდი $\vec{u}$ უთავსდება $\vec{u}'$ გვერდს.

ამის შესაბამისად იცვლება სიბრტყის ყოველი $M$ წერტილის მდებარეობა: პარალელოგრამი $Om_1Mm_2$ (ნახ. 77) გარდაიქმნება $O'm'_1M'm'_2$ პარალელოგრამად, რომელიც მიიღება კუთხის ისეთივე ცვლილებით, შემდეგ გვერდთა გაჭიმვით (ან შეკუმშვით ისეთივე შეფარდებით, როგორც $\vec{u}$ და $\vec{v}$ გვერდები)

და ახალ მდებარეობაზე გადატანით ისეთივე მოძრაობით და შეიძლება არეკლვითაც, როგორიც ზემოგანხილული პარალელოგრამისათვის [1]). თუ ჩვენ წარმოვიდგენთ ბადეს წრფეებისას, რომლებიც $Ox$ და $Oy$ ღერძების პარალელური არიან და ადგენენ $\vec{u}$, $\vec{v}$-ზე აგებულ პარალელოგრამების მსგავს პარალელოგრამთა ბადეს, მაშინ გარდაქმნის შემდეგ ეს ბადე გარდიქმნება ბადედ $O'x'$ და $O'y'$ ღერძების პარალელური წრფეებისა, რომლებიც ადგენენ $\vec{u}'$, $\vec{v}'$-ზე აგებული პარალელოგრამების მსგავს პარალელოგრამთა ბადეს (ნახ. 77).

ადვილი დასანახია, რომ უფრო ზოგადი სახის გარდაქმნას ვერ მივიღებთ, თუ ვიგულისხმებთ, რომ (1) ფორმულებში $x$, $y$ და $x'$, $y'$ წარმოადგენენ $M$ და $M'$ წერტილთა კოორდინატებს, კოორდინატთა სხვადასხვა სისტემის მიმართ (ერთიმეორეზე დაფენილი) $\Pi$ და $\Pi'$ სიბრტყეებზე. მართლაც, შეგვიძლია $M'$ წერტილი განვიხილოთ იმავე სისტემის მიმართ, რა სისტემის მიმართაც $M$ წერტილს განვიხილავთ. $M'$ წერტილის კოორდინატები $x''$, $y''$ ამ უკანასკნელი სისტემის მიმართ გამოისახებიან იმავე $x'$, $y'$ კოორდინატებით, რომელშიაც ისინი პირველად იყვნენ განხილულნი წრფივი არაგანსაკუთრებული ჩასმით:

$$x''=l'_1x'+l'_2y'+a', \quad y''=m'_1x'+m'_2y'+b'; \tag{3}$$

თუ მარჯვენა მხარეში $x'$, $y'$-ის ნაცვლად შევიტანთ მათს გამოსახულებას (1) მივიღებთ იმავე სახის ფორმულებს, როგორც (1);

$$x''=l''_1x+l''_2y+a'', \quad y''=m''_1x+m''_2y+b'' \tag{4}$$

რომლებიც აკავშირებენ $M'$ და $M$ წერტილთა კოორდინატებს, უკვე ერთი და იმავე სისტემის მიმართ განხილულს. უკანასკნელი ჩასმის კოეფიციენტები $l''_1$, $l''_2$ და ა. შ. ადვილად გამოისახებიან (1) და (3)-ს კოეფიციენტთა საშუალებით. საყურადღებოა შევნიშნოთ, რომ (4) ჩასმა არაგანსაკუთრებულია, თუკი, როგორც ჩვენ ეს დაშვებული გვაქვს, ასეთი თვისება აქვს (1) ჩასმას. მართლაც, ადვილი შესამჩნევია, რომ (4) ჩასმის დეტერმინანტი (1) და (3) ჩასმების დეტერმინანტთა ნამრავლის ტოლია. მკითხველს ვანდობთ ამის შემოწმებას (იხ. აგრეთვე დამატება § 9) [2]).

ამრიგად, ზოგადობის დაურღვეველად შეგვიძლია ყოველთვის ვიგულისხმოთ, რომ აფინური გარდაქმნის (1) ფორმულებში კოორდინატები განხილულია ერთი და იმავე სისტემის მიმართ.

ბოლოს, თუ ვიგულისხმებთ, რომ $M$ და $M'$ წერტილები მოთავსებულია სხვადასხვა სიბრტყეზე, მაშინ საკმარისია ამ სიბრტყეთა დაფენა ერთიმეორეზე, რომ მივიღოთ წინა შემთხვევა.

---

[1]) § 248-ში იქნება დამტკიცებული, რომ ნებისმიერი აფინური გარდაქმნა წარმოადგენს შედეგს ორი უ რ თ ი ე რ თ მ ა რ თ ო ბ უ ლ ი შიმართულებით გაჭიმვისა და მოძრაობის და შეიძლება არეკლვისაც.

[2]) მითითებულ ადგილას ეს დამტკიცებულია ერთგვაროვანი ჩასმისათვის; მაგრამ, ადვილი შესაჩნევია, რომ თავისუფალი წევრები გავლენას ვერ ახდენენ ცვლადთა კოეფიციენტებისაგან შედგენილ ჩასმის დეტერმინანტში.

ახლა გამოვიყვანოთ აფინური გარდაქმნის ზოგიერთი ძირითადი თვისება.

1°. აფინური გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნა აგრეთვე აფინურია. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ თუ (1)-ს ამოვხსნით $x$, $y$-ის მიმართ, მივიღებთ იმავე სახის ფორმულებს, როგორც (1), რომელიც უკვე $x$, $y$-ს გამოსახავს $x'$, $y'$ საშუალებით.

2°. მიმდევრობით შესრულებული ორი აფინური გარდაქმნა გვაძლევს ისევ აფინურ გარდაქმნას. მართლაც, თუ (1) გარდაქმნის შემდეგ შევასრულებთ ახალ გარდაქმნას

$$x''=l'_1x'+l'_2y'+a', \quad y''=m'_1x'+m'_2y'+b'$$

მაშინ, $x'$, $y'$-ის ნაცვლად რომ ჩავსვათ მათი გამოსახულება (1), მივიღებთ შემდეგი სახის გარდაქმნას

$$x''=l''_1x+l''_2y+a'', \quad y''=m''_1x+m''_2y+b'',$$

რომელიც აგრეთვე არაგანსაკუთრებულია, თუკი მოცემული ორი არის არაგანსაკუთრებული (იხ. ზემოთქმული).

3°. აფინური გარდაქმნით წრფე გადადის წრფეში; პარალელური წრფეები პარალელებად რჩებიან; პარალელური ნაკვეთების შეფარდება უცვლელი რჩება. დამტკიცებისათვის შევნიშნოთ შემდეგი. ვთქვათ, $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ არის $\Pi$ სიბრტყის ორი წერტილი. გარდაქმნის შემდეგ ისინი გახდებიან $\Pi'$ სიბრტყის $A'(x'_1, y'_1)$ და $B'(x'_2, y'_2)$ წერტილებად. ჩვენ ვიტყვით, რომ აფინური გარდაქმნა (1) $\vec{AB}$ ვექტორს გარდაქმნის $\vec{A'B'}$ ვექტორად (ქვემოთ ცხადი გახდება, რომ არა მხოლოდ ბოლოები, არამედ $AB$ ნაკვეთის ყოველი წერტილი გადადის $A'B'$ ნაკვეთის წერტილებში, მაგრამ ამ შემთხვევაში ამას არა აქვს მნიშვნელობა), $\vec{P}=\vec{AB}$ ვექტორის კოორდინატები $X=x_2-x_1$, $Y=y_2-y_1$ დაკავშირებულია $\vec{P}=\vec{A'B'}$ ვექტორის კოორდინატებთან დამოკიდებულებებით

$$X'=l_1X+l_2Y, \quad Y'=m_1X+m_2Y, \tag{1a}$$

რომლებიც მიიღებიან უშუალოდ (1)-დან: (1a)-დან გამომდინარეობს, რომ II სიბრტყეზე აღებული ვექტორი $(kX, kY)=k\vec{P}$ გადადის $(kX', kY')=k\vec{P'}$ ვექტორად, II' სიბრტყეზე. ამრიგად, თუ გარდაქმნამდე გვქონდა ვექტორული ტოლობა (II სიბრტყეზე)

$$\vec{Q}=k\vec{P},$$

მაშინ, გარდაქმნის შემდეგ ეს გადადის ტოლობაში (II'-ზე)

$$\vec{Q'}=k\vec{P},$$

სადაც $\vec{P'}$ და $\vec{Q'}$ წარმოადგენენ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$-ს შესაბამ ვექტორებს; რაც ნიშნავს იმას, რომ გარდაქმნამდე პარალელური ვექტორები, გარდაქმნის შემდეგაც

რჩებიან პარალელური და მათი შეფარდება $k$ რჩება უცვლელი; კერძოდ, უცვლელი რჩება მათი სიგრძეთა შეფარდება $|k|$.

ახლა ვთქვათ, $\Delta$ არის რომელიმე წრფე $\Pi$ სიბრტყეზე და $A$, $B$—მისი რომელიმე ორი წერტილი. ვთქვათ, გარდაქმნის შემდეგ $A$ და $B$ გადადიან $A'$ და $B'$ წერტილებში $\Pi'$ სიბრტყეზე და ვთქვათ $\Delta'$ წარმოადგენს წრფეს, $A'$, $B'$ წერტილებზე გამავალს. დავამტკიცოთ, რომ $\Delta$ წრფის ნებისმიერი $C$ წერტილიც გადავა $\Delta'$ წრფის რომელიმე წერტილში. მართლაც, გვაქვს: $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$, სადაც $k$ რომელიმე რიცხვია. გარდაქმნის შემდეგ გვექნება: $\overrightarrow{A'C'}=k\overrightarrow{A'B'}$, ე. ი. $A'$ წერტილის შესაბამი $C'$ წერტილი მოთავსებულია ერთ წრფეზე $A'$ და $B'$-თან ერთად, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ზემოაღნიშნულიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ პარალელური წრფეები რჩებიან პარალელური (ვინაიდან პარალელური რჩებიან მათზე აღებული ნებისმიერი ვექტორები) და რომ პარალელური ნაკვეთების შეფარდება უცვლელი რჩება.

აღვნიშნოთ, რომ არაპარალელური ნაკვეთების შეფარდება საზოგადოდ იცვლება.

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა.** ზემოაღნიშნულიდან გამომდინარეობს კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი შედეგი. უპირველესად, ცხადია, რომ ვექტორული ტოლობა $\vec{P}=\vec{P}_1+\vec{P}_2+\ldots+\vec{P}_n$ გარდაქმნის შემდეგ გადადის ვექტორულ ტოლობაში $\vec{P}'=\vec{P}'_1+\vec{P}'_2+\ldots+\vec{P}'_n$, სადაც შტრიხებითაა აღნიშნული მოცემულიდან აფინური გარდაქმნით მიღებული ვექტორები. ამაში რომ დავრწმუნდეთ, საკმარისია განვიხილოთ $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\ldots$, $\vec{P}_n$ ვექტორთა მრავალკუთხედი $\vec{P}$—შემკვრელით. გარდაქმნის შემდეგ ეს მრავალკუთხედი გადაიქცევა $\vec{P}'_1$, $\vec{P}'_2$, $\ldots$, $\vec{P}'_n$ ვექტორთა მრავალკუთხედად $\vec{P}'$ შემკვრელით. აქედან, ზემოაღნიშნულის თანახმად გამომდინარეობს, რომ ვექტორული ტოლობა $\vec{P}=k_1\vec{P}_1+k_2\vec{P}_2+\ldots+k_n\vec{P}_n$ გადადის ვექტორულ ტოლობაში

$$\vec{P}'=k_1\vec{P}'_1+k_2\vec{P}'_2+\ldots+k_n\vec{P}'_n, \tag{5}$$

სადაც $k_1$, $k_2$, $\ldots$, $k_n$ ერთი და იგივეა ორივე ტოლობაში.

განვიხილოთ, კერძოდ, ნაკვთი შედგენილი $O$ წერტილისაგან და არაპარალელური $\vec{u}$ და $\vec{v}$ ვექტორებისაგან, რომლებიც განსაზღვრავენ დეკარტის კოორდინატთა რომელიმე სისტემას $\Pi$ სიბრტყეზე. $\Pi$ სიბრტყის ნებისმიერი $M$ წერტილის კოორდინატები ამ სისტემის მიმართ განისაზღვრებიან ტოლობით

$$\overrightarrow{OM}=\vec{u}x+\vec{v}y; \tag{6}$$

ახლა, $\Pi$ სიბრტყისათვის გამოვიყენოთ რომელიმე აფინური გარდაქმნა. მაშინ წინა ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\overrightarrow{O'M'}=\vec{u}'x+\vec{v}'y,$$

რომელიც გვიჩვენებს, რომ, თუ კოორდინატთა სისტემის ელემენტებზე $O$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ გამოვიყენებთ იმავე აფინურ გარდაქმნას, რაც გამოვიყენეთ მთელი სიბრტყისათვის, მაშინ გარდაქმნილ წერტილთა კოორდინატები გარდაქმნილი სისტემის მიმართ იქნებიან სწორედ ისეთივე, როგორიც არის გარდაუქმნელ წერტილთა კოორდინატები, გარდაუქმნელი სისტემის მიმართ.

ამ თვისების გამო დეკარტის (განზოგადებულ) კოორდინატებს ეწოდებათ აგრეთვე აფინური კოორდინატები.

4°. სიბრტყის აფინური გარდაქმნა სავსებით განზღვრულია სამი არაკოლინეარული წერტილის მოცემულობით, რომლებიც უნდა გადავიდნენ მოცემულ სამ არაკოლინეარულ წერტილში. მართლაც, ვთქვათ, $A$, $B$, $C$ მოცემული სამი არაკოლინეარული წერტილია $\Pi$ სიბრტყეზე და ვთქვათ, $A'$, $B'$, $C'$ ის სამი მოცემული არაკოლინეარული წერტილია, სადაც უნდა გადავიდნენ შესაბამისად $A$, $B$, $C$ წერტილები. $A$, $B$, $C$ წერტილები $\Pi$ სიბრტყეზე განსაზღვრავენ კოორდინატთა სისტემას, რომლის სათავეა $A$, ხოლო საკოორდინატო ვექტორებია $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$. ამ სისტემას $\Pi'$ სიბრტყეზე შეესაბამება სისტემა, რომლის სათავეა $O'$ და საკოორდინატო ვექტორებია $\vec{u}'=\overrightarrow{A'B'}$, $\vec{v}'=\overrightarrow{A'C'}$. ამით სავსებით განზღვრულია აფინური შესაბამობა $\Pi$ და $\Pi'$ სიბრტყეთა შორის; სახელდობრ, $M$ წერტილს, რომლის კოორდინატები აღნიშნული პირველი სისტემის მიმართ არის $x$, $y$, შეესაბამება $M'$ წერტილი ისეთივე კოორდინატებით, მეორე სისტემის მიმართ (იხ. წინა შენიშვნა). ამრიგად, თუ $x$, $y$-ით საზოგადოდ აღვნიშნავთ $\Pi$ სიბრტყის წერტილთა კოორდინატებს პირველი სისტემის მიმართ, ხოლო $x'$, $y'$-ით $\Pi'$ სიბრტყის წერტილთა კოორდინატებს მეორე სისტემის მიმართ, მაშინ ამ სიბრტყეთა შესაბამი წერტილებისათვის გვექნება:

$$x'=x,\quad y'=y \tag{7}$$

(წრფივი ჩასმის უმარტივესი სახე).

უკანასკნელად აღვნიშნოთ სიბრტყის აფინური გარდაქმნის შემდეგი თვისება.

5°. შეფარდება გარდაქმნილი ნაკვთის ფართობისა პირვანდელ ფართობთან ერთი და იგივეა ყოველგვარი ნაკვთისათვის (იგულისხმება ფართობის მქონე ნაკვთი). საკმარისია ეს დებულება დავამტკიცოთ იმ შემთხვევაში, როცა განსახილველი ნაკვთები პარალელოგრამებია, ვინაიდან ნაკვთის ფართობი შეიძლება განხილულ იქნას როგორც პარალელოგრამების ფართობთა ჯამის ზღვარი.

ვიგულისხმოთ, რომ $\Pi$ და $\Pi'$ სიბრტყეები ერთიმეორეზე დამთხვეულია და რომ წერტილები როგორც გარდაქმნამდე, ისე გარდაქმნის შემდეგ განხილული არიან ერთი და იმავე სისტემის მიმართ.

ამრიგად, ვთქვათ, $S$ არის II სიბრტყეზე $\vec{P}=(X_1, Y_1)$ და $\vec{Q}=(X_2, Y_2)$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი, გვექნება (§ 67):

$$S=S_0\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix},$$

სადაც $S_0$ წარმოადგენს იმ პარალელოგრამის ფართობს, რომელიც აგებულია $Ox$ და $Oy$ ღერძების $\vec{u}$, $\vec{v}$ საკოორდინატო ვექტორებზე. გარდაქმნის შემდეგ ფართობისათვის გვექნება:

$$S'=S_0\begin{vmatrix} X'_1 & Y'_1 \\ X'_2 & Y'_2 \end{vmatrix}$$

მარჯვენა მხარეში $X'_1$, $Y'_1$, $X'_2$, $Y'_2$ ნაცვლად თუ შევიტანთ (1a)-დან მიღებულ მათ მნიშვნელობებს, გვექნება:

$$S'=S_0\begin{vmatrix} l_1X_1+l_2Y_1 & m_1X_1+m_2Y_1 \\ l_1X_2+l_2Y_2 & m_1X_2+m_2Y_2 \end{vmatrix}=S_0\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix},$$

საიდანაც გამომდინარეობს

$$S'=S_0\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}, \tag{8}$$

ე. ი. $\frac{S'}{S_0}$ - ფარდობა არ არის დამოკიდებული პარალელოგრამის არჩევაზე, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

სრულებით ანალოგიურად არის განმარტებული აფინური გარდაქმნა სამ განზომილებიან სივრცეში. ამ შემთხვევაში (1)-ის ნაცვლად გვექნება ფორმულები:

$$\left.\begin{aligned} x' &= l_1x+l_2y+l_3z+a, \\ y' &= m_1x+m_2y+m_3z+b, \\ z' &= n_1x+n_2y+n_3z+c, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

თუ წინა ჩასმები არაგანსაკუთრებულია, მაშინ აფინურ გარდაქმნასაც ეწოდება არაგანსაკუთრებული; წინააღმდეგ შემთხვევაში ის იქნება განსაკუთრებული ანუ გადაგვარებული. შემდეგში, თუ საწინააღმდეგო არ იქნება ნათქვამი, ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ გარდაქმნა არაგანსაკუთრებულია.

ყველა თვისება 1°—3° ორგანზომილების შემთხვევაში განხილული, აქაც ძალაში რჩება. დამტკიცება მთლად ისეთივეა, რაც წინათ. გარდა 3° თვისებისა, ახლა გვაქვს კიდევ შემდეგი: აფინური გარდაქმნით, სიბრტყე გადადის სიბრტყეში და პარალელური სიბრტყეები რჩებიან პარალელურად. ეს არის 3° თვისების უშუალო შედეგი. მეტიც, 4° თვისების ნაცვლად ახლა გვაქვს: აფინური გარდაქმნა სავსებით განზღვრულია მოცემული ოთხი არაკომპლანარული წერტილით, რომლებიც უნდა გადავიდნენ მოცემულ ოთხ არაკომპლანარულ წერტილში.

ბოლოს, 5° თვისების ნაცვლად, ახლა გვაქვს შემდეგი: გარდაქმნილი ნაკეთის მოცულობის შეფარდება პირვანდელ მოცულობასთან ყოველი ნაკეთისათვის ერთი და იგივეა (იგულისხმება მოცულობის მქონე ნაკეთები). სახელდობრ, ადგილი აქვს ტოლობას:

$$V' = V \cdot \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}. \qquad (10)$$

დამტკიცება სავსებით ანალოგიურია 5° თვისების დამტკიცებისა. თვითონ 5° თვისება, როგორც ადვილი შესამჩნევია, ძალაში რჩება იმ ნაკეთებისთვის, რომლებიც მოთავსებული არიან ერთსა და იმავე სიბრტყეზე ან პარალელურ სიბრტყეებზე.

#### სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. დაამტკიცეთ, რომ, თუ $\Pi$ და $\Pi'$ სიბრტყეთა წერტილებს შორის დამყარებულია ურთიერთ-ცალსახა შესაბამობა ისე, რომ ყოველ $\vec{P}$ ვექტორს შეესაბამება $\vec{P}'$ ვექტორი და ყოველ ეს ტოლობას $\vec{P} = k_1\vec{P}_1 + k_2\vec{P}_2$ შეესაბამება ტოლობა $\vec{P}' = k_1\vec{P}'_1 + k_2\vec{P}'_2$, მაშინ $\Pi$ და $\Pi'$ შორის შესაბამება აფინურია.

დამტკიცება. თუ $\Pi$ სიბრტყეზე აღებულ კოორდინატთა სისტემას, რომლის სათავეა $O$ და საკოორდინატო ვექტორებია $\vec{u}$, $\vec{v}$, ხოლო $\Pi'$ სიბრტყეზე—სისტემას $O'$ სათავით და $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ საკოორდინატო ვექტორებით, სადაც შტრიხებით აღნიშნულია ელემენტთა შესაბამები, მაშინ შესაბამ $M$ და $M'$ წერტილთა კოორდინატები ურთიერთდაკავშირებული იქნებიან წრფივი დამოკიდებულებებით

$$x' = x,\ y' = y.$$

მაშასადამე, გარდაქმნა აფინურია.

2. დაამტკიცეთ, რომ, თუ $\Pi$ სიბრტყეზე აღებულ $S$ ნაკეთს დავაგვიწილებთ მეორე $\Pi'$ სიბრტყეზე, რომელიც წრფის პარალელურად (რომელიც არ არის არც $\Pi$ და არც $\Pi'$ სიბრტყის პარალელური), მაშინ $S'$ ნაკეთი $S$ ნაკეთთან დაკავშირებულია აფინური გარდაქმნით.

დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს წინა სავარჯიშოდან (ვინაიდან იქ აღნიშნული ყველა პირობა ამ შემთხვევაში დაცულია).

3. შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ, თუ გვაქვს სიბრტყის გარდაქმნა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

1°. ყოველ $M$ წერტილს შეესაბამება გარკვეული წერტილი $M'$ და პირიქით;

2° წერტილებს, სასრულო მანძილზე აღებულთ, შეესაბამება წერტილები სასრულო მანძილზე;

3°. ყოველ წრფეს შეესაბამება წრფე,

მაშინ გარდაქმნა არის აფინური. ეს დებულება მართებულია სივრცის შემთხვევაშიაც. ამ შემთხვევაში უკანასკნელი მოთხოვნა შეიძლება შეიცვალოს მოთხოვნით, რომ ყოველ სიბრტყეს შეესაბამება სიბრტყე.

**§ 77. მსგავსი გარდაქმნები და მოძრაობები, როგორც აფინური გარდაქმნის კერძო შემთხვევები.** § 75-ში განხილული მოძრაობები, ცხადია, წარმოადგენენ აფინური გარდაქმნის კერძო შემთხვევებს. მათი დამახასიათებე-

ლია ის, რომ კოორდინატთა მართკუთხოვან სისტემაში, წინა პარაგრაფის (9) ფორმულებში ცვლადთა კოეფიციენტების ცხრილი

$$\begin{matrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{matrix}$$

წარმოადგენს ორთოგონალური ჩასმის ცხრილს (ანალოგიურად ორი განზომილების შემთხვევაში).

აფინური გარდაქმნის სხვა მნიშვნელოვან კერძო შემთხვევას წარმოადგენს მსგავსი გარდაქმნა, რომელსაც რამდენიმე სიტყვით შევეხებით. დავიწყოთ ზოგიერთი ცნებით, რომლებიც არსებითად ეკუთვნიან ელემენტარულ გეომეტრიას.

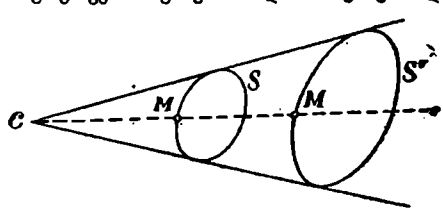
ორ ნაკვთს $S$ და $S'$ (სიბრტყეზე ან სივრცეში აღებულს) ეწოდებათ $C$ წერტილის მიმართ ჰომოთეტური, თუ $S$ ნაკვთის ყოველ $M$ წერტილს შეიძლება შეესაბამოს $S'$ ნაკვთის რომელიმე $M'$ წერტილი და, პირიქით, $S'$ ნაკვთის ყოველ $M'$ წერტილს — $S$ ნაკვთის რომელიმე $M$ წერტილი ისე, რომ ადგილი ჰქონდეს თანაფარდობას

$$\overline{CM} = k\overline{CM}, \tag{1}$$

სადაც $k$ მუდმივი რიცხვია, რომელსაც ეწოდება „მსგავსობის ფარდობა“. $C$ წერტილს ეწოდება ჰომოთეტობის ცენტრი ანუ მსგავსების ცენტრი (ნახ. 78).

ჰომოთეტიას ეწოდება პირდაპირი, თუ $k>0$, ხოლო შებრუნებული თუ $k<0$. ორ ნაკვთს ეწოდება მსგავსი, თუ ერთი მათგანის სათანადო მოძრაობით (საკუთრივით ან არასაკუთრივით) შეიძლება ისინი ჰომოთეტური გახდნენ.

ჰომოთეტურ ნაკვთებს ეწოდებათ აგრეთვე მსგავსი და მსგავსად დალაგებულნი თუ $k>0$, ან მსგავსი და შებრუნებით დალაგებულნი, თუ $k<0$.



ნახ. 78.

შევნიშნოთ, რომ ხშირად ორი ჰომოთეტური ნაკვთის წერტილთა შორის შეიძლება დამყარდეს შესაბამობა სხვადასხვანაირად, ასე რომ ერთდროულად არსებობდეს მსგავსების რამდენიმე ცენტრი; შემდეგ, მოცემულ მდებარეობაში ორი ნაკვთი შეიძლება ერთდროულად იყოს პირდაპირ ჰომოთეტური და შებრუნებული ჰომოთეტური.

თუ ცნობილია, რომ მოცემული ორი ნაკვთი ჰომოთეტურია და თუ მოცემულია ერთი ნაკვთის ორი წერტილი $M_1$, $M_2$, მეორე ნაკვთის მოცემული ორი წერტილის $M'_1$, $M'_2$-ის შესაბამი, მაშინ ჰომოთეტურობის ცენ-

ტრის ასაგებად საკმარისია მოცემული შესაბამი წერტილები შევაერთოთ წრფეებით. $M_1M'_1$ და $M_2M'_2$ წრფეთა გადაკვეთის წერტილი იქნება ჰომოთეტურობის საძიებელი ცენტრი.

კერძო შემთხვევაში, როცა $k=1$, როგორც ეს (1) ფორმულიდან ჩანს, $S$ და $S'$ ნაკვთები ურთიერთთანხვედებიან. ამ შემთხვევაში, ცხადია, მსგავსების ცენტრი შეიძლება იყოს არა მხოლოდ $C$, არამედ სივრცის ნებისმიერი წერტილი.

ახლა შევთანხმდეთ ზოგიერთ ტერმინზე. ვთქვათ, რომელიმე წერტილი გადაადგილებულია $M$ მდებარეობიდან $M'$ მდებარეობაში. $\overrightarrow{MM'}$ ვექტორს ვუწოდებთ გ ა დ ა ა დ გ ი ლ ე ბ ი ს ვ ე ქ ტ ო რ ს. თუ რომელიმე ნაკვთის ყოველ წერტილს გადავაადგილებთ ისე, რომ გადაადგილების ვექტორები სხვადასხვა წერტილისათვის ურთიერთტოლნი იყვნენ, მაშინ, ცხადია, მივიღებთ თავდაპირველი ნაკვთის კონგრუენტულს, ოღონდ სხვა მდებარეობაში. მეორე მდებარეობის შესახებ ამბობენ, რომ ის მიიღება პირველისაგან, გ ა დ ა ტ ა ნ ი თ ი გ ა დ ა ა დ გ ი ლ ე ბ ი თ. თუ $S$ და $S'$ ორი ნაკვთიდან ერთ-ერთი მიღებულია მეორისაგან გადატანითი გადაადგილებით, მაშინ ამბობენ, რომ ეს კონგრუენტული ნაკვთები მ ს გ ა ვ ს ა დ დ ა ლ ა გ ე ბ უ ლ ი ა. ამ ნაკვთთა შესაბამი წერტილების შემაერთებელი წრფეები ურთიერთპარალელურია, ე. ი., როგორც ამბობენ, უსასრულოეთში გადიკვეთებიან. ამიტომ, კონგრუენტული და მსგავსად დალაგებული ნაკვთები შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ჰომოთეტური, რომელთა ჰომოთეტურობის ცენტრი უსასრულოეთშია.

დავუბრუნდეთ ზოგად შემთხვევას, როცა $k$ ნებისმიერია, და დავამტკიცოთ, რომ, თუ ორი ჰომოთეტური ნაკვთიდან ერთ-ერთს გადატანით გადავაადგილებთ, მაშინ ეს ნაკვთები ახალ მდებარეობაშიც ჰომოთეტური იქნებიან, თუ ურთიერთშესაბამად ჩავთვლით ნაკვთთა იმავე წერტილებს (ახალ მდებარეობაში); მაგრამ ჰომოთეტურობის ცენტრი გადაინაცვლებს სავსებით გარკვეული სახით.

მართლაც, ვთქვათ, $S'$ ნაკვთმა განიცადა გადატანითი გადაადგილება და ვთქვათ, $\vec{u}$ არის მისი ყოველი წერტილის გადაადგილების ვექტორი. ახალი მდებარეობა $S'$ ნაკვთის $M'_1$ წერტილისა, რომელსაც წინათ $M'$ მდებარეობა ეკავა, განისაზღვრება ფორმულით:

$$\overrightarrow{CM'_1} = \overrightarrow{CM'} + \vec{U},$$

თუ ამაში შევიტანთ $\overrightarrow{CM'}$-ის მნიშვნელობას (1)-დან, გვექნება:

$$\overrightarrow{CM'_1} = k\overrightarrow{CM} + \vec{U}. \tag{2}$$

დავამტკიცოთ, რომ ეს დამოკიდებულება $M$ და $M'$ წერტილებს შორის შეიძლება წარმოდგენილ იქნას შემდეგი სახით;

$$\overrightarrow{CM'_1} = k\overrightarrow{C'M}, \tag{3}$$

სადაც $C'$ ჰომოთეტურობის ახალი ცენტრია. მართლაც, ვთქვათ, $C'$ რომელიმე წერტილია. მაშინ გვექნება:

$$\overrightarrow{CM'_1} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'M'_1},\ \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'M};$$

თუ ამ გამოსახულებებს შევიტანთ (2)-ში, მივიღებთ:

$$\overrightarrow{C'M'_1} = k\overrightarrow{C'M} + (k-1)\ \overrightarrow{CC'} + \vec{U}.$$

ეს დამოკიდებულება რომ დაემთხვეს (3)-ს, აუცილებელია და საკმარისი $C'$-ის შერჩევა შემდეგი პირობით:

$$(k-1)\ \overrightarrow{CC'} + \vec{U} = 0, \tag{4}$$

თუ $k \neq 1$, მივიღებთ

$$\overrightarrow{CC'} = \frac{\vec{U}}{1-k}; \tag{5}$$

ეს ფორმულა განსაზღვრავს $C'$-ის მდებარეობას. თუ $k=1$, მაშინ (4) პირობის დაცვა შეუძლებელია და ეს გასაგებიცაა, ვინაიდან, როცა $k=1$ ნაკვეთები $S$ და $S'$ პირვანდელ მდებარეობაში თანხვედნილია. ერთი მათგანის გადატანითი გადაადგილებით ისინი გახდებიან კონგრუენტულნი და მსგავსად დალაგებულნი. ზემოთ ჩვენ შევთანხმდით, რომ ამ შემთხვევაში, ვთქვათ, ცენტრი უსასრულეთშია. ამ გამოთქმის ბუნებრიობა ჩანს (5) ფორმულიდანაც, რომელიც გვიჩვენებს, რომ, როცა $k$ მიისწრაფვის 1-სკენ, მაშინ $C'$ წერტილი უსასრულეთში გადადის.

აღნიშნულიდან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ თუ ორი ნაკვთი მსგავსია, მაშინ ყოველთვის შესაძლოა მათი მოთავსება ისე, რომ ჰომოთეტურობის ცენტრს წარმოადგენდეს ნებისმიერი $C'$ წერტილი, რომელსაც უკავია ერთი მათგანის მიმართ ნებისმიერი წინასწარ მოცემული ადგილი. მართლაც, მსგავსების განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ მოცემული ნაკვთების მოთავსება შესაძლოა ისე, რომ ისინი ჰომოთეტური იყვნენ რომელიმე $C$ ცენტრის მიმართ. თუ $C'$ არის რომელიმე სხვა მოცემული წერტილი, მაშინ, თუ $\vec{U}$ ვექტორს ავარჩევთ (5) ფორმულის თანახმად, ე. ი. თუ დავუშვებთ

$$\vec{U} = (1-k)\ \overrightarrow{CC'} \tag{6}$$

და მოვახდენთ $S'$ ნაკვთის გადატანით გადაადგილებას ისე, რომ ყოველ მის წერტილს მივანიშნებთ $\vec{U}$ ვექტორით დახასიათებულ გადაადგილებას, მივიღებთ ნაკვთის საძიებელ მდებარეობას [1]). (1) გარდაქმნას, რომლის საშუალებით მოცემული ნაკვთიდან მისი ჰომოთეტური ნაკვთი მიიღება, ეწოდება ჰომოთეტური გარდაქმნა ანუ ჰომოთეტია. დავამტკიცოთ, რომ ეს არის

[1]) კონგრუენტულ ნაკვთთა შემთხვევაში, საკმარისია მათი ერთიმეორეზე დამთხვევა. მაშინ ყოველი $C'$ წერტილი ჰომოთეტურობის ცენტრი იქნება.

აფინური გარდაქმნის კერძო შემთხვევა. მართლაც, თუ ავიღებთ დეკარტის კოორდინატთა რომელიმე სისტემას და აღვნიშნავთ $C, M, M'$ წერტილთა კოორდინატებს შესაბამისად $(a, b, c)$, $(x, y, z)$, $(x', y', z')$-ით, მაშინ (1)-ის თანახმად, გვექნება:

$$x' - a = k(x - a), \quad y' - b = k(y - b), \quad z' = k(z - c) \tag{1a}$$

ანუ

$$x' = kx + a_0, \quad y' = ky + b_0, \quad z' = kz + c_0 \tag{1b}$$

(სადაც $a_0$, $b_0$, $c_0$ მუდმივებია), რაც წარმოადგენს აფინური გარდაქმნის კერძო შემთხვევას. თუ ჰომოთეტიას შევუერთებთ ნებისმიერ მოძრაობას (საკუთრივს ან არასაკუთრივს), მივიღებთ ისევ აფინური გარდაქმნის კერძო შემთხვევას, რომელსაც ეწოდება მსგავსი გარდაქმნა, ვინაიდან ამით ყოველი ნაკვთი მსგავს ნაკვთად გარდაიქმნება.

მართკუთხოვან კოორდინატებში მოძრაობა და მსგავსი გარდაქმნები შეიძლება დახასიათდეს კიდევ შემდეგნაირად: აფინური გარდაქმნა (ჩვენ ეწერთ გარდაქმნის ფორმულებს ვექტორებისათვის)[1]

$$\left.\begin{aligned} X' &= l_1X + l_2Y + l_3Z, \\ Y' &= m_1X + m_2Y + m_3Z, \\ Z' &= n_1X + n_2Y + n_3Z \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

წარმოადგენს მოძრაობას, თუ ყოველი ვექტორისათვის ადგილი აქვს

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = X^2 + Y^2 + Z^2. \tag{8}$$

ხოლო (7) გარდაქმნა მსგავსია, თუ ყოველი ვექტორისათვის

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = k(X^2 + Y^2 + Z^2), \tag{9}$$

სადაც $k$—მუდმივი მსგავსების შეფარდებაა (როცა $k=1$, როგორც კერძო შემთხვევა, გვექნება მოძრაობა).

აქედან, პირველი ცხადია, ვინაიდან, როგორც ვიცით, (8) პირობა დამახასიათებელია ორთოგონალური ჩასახისათვის და, მაშასადამე, (8) პირობის ძალით, (7) გარდაქმნა არის მოძრაობა.

მეორე გამომდინარეობს იქიდან, რომ ყოველი მსგავსი გარდაქმნა წარმოადგენს ჰომოთეტიისა და მოძრაობის შედეგს: როცა ჰომოთეტიას აქვს ადგილი, (1b)-ს თანახმად, ვექტორის კოორდინატთა გარდაქმნისათვის გვაქვს შემდეგი ფორმულები:

$$X' = kX, \quad Y' = kY, \quad Z' = kZ,$$

საიდანაც გამომდინარეობს (9); ვინაიდან მოძრაობის დროს გამოსახულება $X'^2 + Y'^2 + Z'^2$ უცვლელი რჩება, ამიტომ (9) რჩება ძალაში. ადვილი შესამჩნევია, რომ, პირიქით, (9) პირობიდან გამომდინარეობს, რომ შესაბამი გარდაქმნა —მსგავსია. მკითხველს ვანდობთ ამის დამტკიცებას.

---

[1] ამ ფორმულებიდან მიიღებიან წერტილთა გარდაქმნის ფორმულებიც, თუ მარჯვენა ნაწილებს დავუმატებთ თავისუფალ წევრებს.

**§ 78. წერტილოვანი გარდაქმნების ჯგუფთა შესახებ. გეომეტრიული დისციპლინების კლასიფიკაციის შესახებ.** წინა პარაგრაფებში განხილული გარდაქმნები წარმოადგენენ კერძო შემთხვევებს ზოგადი სახის **წერტილოვანი გარდაქმნებისა**, რომლებიც მდგომარეობენ იმაში, რომ მყარდება შესაბამობა სივრცის ყოველ $M(x, y, z)$ წერტილსა და საესებით გარკვეულ $M'(x', y', z')$ წერტილს შორის ისე, რომ $x', y', z'$ წარმოადგენენ $x, y, z$-ის სრულიად გარკვეულ ფუნქციებს:

$$x' = \varphi_1(x, y, z), \quad y' = \varphi_2(x, y, z), \quad z' = \varphi_3(x, y, z). \tag{1}$$

კერძოდ, თუ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ წარმოადგენენ $x, y, z$-ის წრფივ ფუნქციებს, მაშინ გვექნება ზემოგანხილული აფინური გარდაქმნები.

შემდეგში ჩვენ ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ (1) დამოკიდებულება ურთიერთ-ცალსახაა, ე. ი. რომ შესაძლოა მათი ცალსახად ამოხსნა $x, y, z$-ის მიმართ:

$$x = \psi_1(x', y', z'), \quad y = \psi_2(x', y', z'), \quad z = \psi_3(x', y', z'). \tag{1a}$$

(1a) გარდაქმნას ეწოდება (1) გარდაქმნის **შებრუნებული**.

თანამედროვე გეომეტრიაში ფუნდამენტალურ როლს ასრულებს **გარდაქმნათა ჯგუფის** ცნება. ვთქვათ, მოცემულია გარდაქმნების რომელიმე ერთობლიობა[1]) (რომელიც შეიცავს გარდაქმნათა სასრულო ან უსასრულო სიმრავლეს). ამბობენ, რომ გარდაქმნათა, ეს ერთობლიობა შეადგენს **ჯგუფს**, თუ:

1°. მიმდევრობა ორი გარდაქმნისა, რომლებიც ეკუთვნიან აღნიშნულ ერთობლიობას, გვაძლევენ გარდაქმნას, რომელიც ისევ ამ ერთობლიობას ეკუთვნის;

2°. ამ ერთობლიობაში შემავალი გარდაქმნების შებრუნებული გარდაქმნებიც მასში შედიან.

თუ მოცემულ ჯგუფში შემავალი გარდაქმნების რომელიმე ნაწილი აგრეთვე, თავის ხერხივ, შეადგენს ჯგუფს, მაშინ ამ უკანასკნელს ეწოდება მოცემულის **ქვეჯგუფი**.

მაგალითად, სივრცის ყველა **აფინური გარდაქმნების ერთობლიობა** შეადგენს ჯგუფს, ვინაიდან ორი აფინური გარდაქმნის მიმდევრობა წარმოადგენს ისევ აფინურ გარდაქმნას, და აფინური გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნაც—აგრეთვე აფინურია. ყველა **მსგავსი გარდაქმნის ერთობლიობა**, ცხადია, აგრეთვე შეადგენს ჯგუფს, რომელიც წარმოადგენს აფინურ გარდაქმნათა ჯგუფის ქვეჯგუფს. შემდეგ, ყველა **მოძრაობის ერთობლიობა** წარმოადგენს ჯგუფს, რომელიც მსგავს გარდაქმნათა ქვეჯგუფია.

მოძრაობათა ჯგუფიდან შეიძლება გამოიყოს, მაგალითად, კიდევ ქვეჯგუფი საკუთრივი გარდაქმნებისა.

---

[1]) ჩვენ ჯერჯერობით დავკმაყოფილდებით წერტილოვანი გარდაქმნებით.

პირიქით, არასაკუთრივ მოძრაობათა ერთობლიობა უკვე არ წარმოადგენს ჯგუფს, ვინაიდან ორი არასაკუთრივი მოძრაობის მიმდეერობა საკუთრივ მოძრაობას გვაძლევს.

თავის მხრივ, აფინური გარდაქმნები წარმოადგენენ ქვეჯგუფს გეგმილური გარდაქმნებისას, რომლებსაც VI თავში გაეცნობით.

ფ. კლეინს ეკუთვნის მეტად სასარგებლო აზრი, გადმოცემული მის განთქმულ „ერლანგენის პროკრამაში“ (1872), რომ გეომეტრიული დისციპლინების კლასიფიკაციის საფუძვლად მიღებულ იქნას გარდაქმნათა ჯგუფის ცნება. ჩვენ აქ დავკმაყოფილდებით ამ აზრის შესახებ მხოლოდ ელემენტარული ცნობებით [1]). თუ დაკრძებით ელემენტარული გეომეტრიის ცნებათა არეში, შეიძლება ვთქვათ, რომ გეომეტრია შეისწავლის ნაკვეთთა იმ თვისებებს, რომლებიც არ არიან დამოკიდებულნი სივრცეში მათს მდებარეობაზე და მათს აბსოლუტურ ზომაზე. ამის შესაბამისად, ნაკვეთის „გეომეტრიულ თვისებებად“ და „გეომეტრიულ სიდიდეებად“ ჩვენ გვესმის ისეთი თვისებები და სიდიდეები, რომლებიც უცვლელი რჩებიან ყოველი შესაძლო მოძრაობისა და ჰომოთეტური გარდაქმნისათვის. ასეთ გარდაქმნათა ერთობლიობა შეადგენს მსგავს გარდაქმნათა ჯგუფს, რომელსაც კლეინი ძირითადს ანუ მეტრიულს უწოდებს. იმ თვისებათა ერთობლიობა, რომლებიც რჩებიან უცვლელი (ანუ ინვარიანტი) ძირითადი ჯგუფის გარდაქმნებისათვის, კლეინის მიხედვით წარმოადგენს ელემენტარული (ანუ მეტრული) გეომეტრიის საგანს. ძირითადი ჯგუფის გარდაქმნების მიმართ უცვლელ თვისებათა ანუ სიდიდეთა რიცხვში შედიან, მაგ., წირის წრფეობა, ორი წრფის პარალელობა, ორი ნაკვეთის (ნებისმიერად დალაგებულების) სიგრძეთა ფარდობა, ორ წრფეს შორის კუთხე და სხვ. ამიტომ, ეს თვისებები და სიდიდეები განიხილებიან, როგორც „გეომეტრიული“ ელემენტარული (ანუ მეტრული) გეომეტრიის თვალსაზრისით.

მაგრამ არის მთელი რიგი თვისებები, რომლებიც უცვლელი (ინვარიანტი) რჩებიან უფრო ზოგადი გარდაქმნებისთვისაც. მაგალითად, წირის წრფეობა, ორი წრფის პარალელობა, ორი პარალელური ნაკვთის შეფარდება, მოცემული ნაკვთების შუა წერტილი და ა. შ. რჩებიან უცვლელი ზოგადი სახის აფინური გარდაქმნებისათვის. ასეთ თვისებათა ერთობლიობა შეიძლება გამოყოფილ იქნას, როგორც ცალკე გეომეტრიული დისციპლინა — აფინური გეომეტრია.

ანალოგიურად შეიძლება გამოყოფილ იქნას დისციპლინა, რომელსაც ეწოდება გეგმილური გეომეტრია (იმ თვისებათა ერთობლიობა, რომლებიც რჩებიან უცვლელი გეგმილური გარდაქმნებისათვის, რასაც გაეცნობით VI თავში).

საზოგადოდ, სივრცის გარდაქმნის ყოველ ჯგუფს შეესაბამება გარკვეული დისციპლინა; იგი შეისწავლის ერთობლიობას იმ თვისებებისას, რომლებიც უცვლელი რჩებიან მოცემული ჯგუფის გარდაქმნებისათვის.

---

[1]) უფრო დაწვრილებით იხ. მაგალითად, წიგნში Ф. Клейн Элементарная математика с точки зрения высшей, том второй М.—Л., 1934.

ერთ-ერთ უზოგადეს გეომეტრიულ დისციპლინას წარმოადგენს **ტოპოლოგია**; იგი შეისწავლის იმ თვისებათა ერთობლიობას, რომლებიც უცვლელი რჩებიან ყოველი შესაძლო უწყვეტი გარდაქმნისათვის (ტოპოლოგიურ თვისებებს ეკუთვნის, მაგ., წირის თვისება, რომ იყოს ჩაკეტილი; ტოპოლოგიის თვალსაზრისით არავითარი განსხვავება არ არსებობს წრეწირსა და სხვა ნებისმიერ ჩაკეტილ მრუდს შორის, რომლის მიღებაც შესაძლოა წრეწირისაგან უწყვეტი დეფორმაციით).

ვუბრუნდებით რა აფინურ გარდაქმნებს, შევნიშნავთ, რომ უკვე წინა თავში ჩვენ ცალკე განყოფილებად (განყოფილება II) გამოვყავით ფორმულები, რომლებიც ეხებოდნენ აფინურ თვისებებს, ე. ი. ისეთებს, რომლებიც უცვლელი რჩებიან აფინური ჯგუფის გარდაქმნებისათვის. ახლა გასაგებია, რატომ არ იცვლიან სახეს ასეთი ფორმულები მართკუთხოვანი კოორდინატებიდან ნებისმიერ დეკარტის კოორდინატებზე გადასვლის დროს. მართლაც, ვთქვათ, მოცემული ფორმულა გამოსახავს ნაკვთის რომელსაშე აფინურ თვისებას რომელიმე ნებისმიერად არჩეულ კოორდინატთა მართკუთხოვანი სისტემის მიმართ. ეს ფორმულა, პირობის თანახმად, არ შეიცვლის სახეს, თუ შევასრულებთ აფინურ გარდაქმნას, ე. ი. თუ ნაკვთის წერტილთა კოორდინატებზე ვაწარმოებთ ნებისმიერ (არაგანსაკუთრებულ) წრფივ ჩასმას. მაშასადამე, ის სახეს არ შეიცვლის მართკუთხოვანი სისტემიდან დეკარტის კოორდინატთა ნებისმიერ სისტემაზე გადასვლითაც, ვინაიდან გადასვლის ფორმულები ახალ სისტემაში გამოითქმებიან ისეთივე სახის წრფივი ჩასმებით.

ის ფორმულები, რომლებიც წინა თავში გამოყოფილია (წინა თავისა და IV თავის განყოფილებები) „მეტრულის“ სახელწოდებით, ეხებიან მეტრულ თვისებებს ამ სიტყვის ვიწრო გაგებით, ე. ი. თვისებებს, რომლებიც ინვარიანტული არიან მოძრაობების მიმართ (უჰომოთეტიოდ); აღნიშნული ფორმულებიდან ზოგიერთი კი უცვლელი რჩება მხოლოდ საკუთრივ მოძრაობათა მიმართ (მაგ., პარალელეპიპედის მოცულობის ფორმულა იმ შემთხვევაში, როცა მოცულობისათვის მიწერილია ნიშანი).

## თავი მეოთხე

## ბრტყელი წირის განტოლების შესახებ. წრფე სიბრტყეზე

ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ ისეთ წირებს, რომლებიც მოთავსებულია ერთსა და იმავე სიბრტყეზე (ბრტყელ წირებს).

ანალიზური გეომეტრიის (სიბრტყეზე) ერთ-ერთი ძირითადი საკითხი მდგომარეობს წირთა ანალიზურ გამოსახვაში იმ განტოლებათა საშუალებით, რომლებიც უკავშირებენ ერთიმეორეს წირის წერტილთა კოორდინატებს. მიუხედავად იმისა, რომ საკითხები მრუდი წირების შესახებ მიეკუთვნება კურსის შემდგომ თავებს, ჩვენ აქ წრფე-წირთა შესწავლას წინ წარუმძღვარებთ საერთოდ წირთა განტოლებების ძირითად ცნებათა გარჩევას (§ 79—87). ამ ცნებათა შეთვისება აუცილებელია მასალის დამუშავებისათვის.

### 1. სიბრტყეზე წირთა ანალიზური წარმოდგენა

**§ 79. წირის განტოლება.** ელემენტარულ გეომეტრიაში ჩვეულებრივ ისწავლება მხოლოდ ერთი მრუდი წირი—წრეწირი.

ჩვენი მიზანია საერთო განმარტება მივცეთ წირის ცნებას.

ვთქვათ,

$$\Phi(x,\ y)=0 \tag{1}$$

არის რომელიმე განტოლება, ორი $x$ და $y$ ცვლადის დამაკავშირებელი. ეს განტოლება, საზოგადოდ, განსაზღვრავს ერთ-ერთ ამ ცვლადს (მაგ., $y$-ს), როგორც მეორის ფუნქციას (მაგ., $x$-ს); სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ ამოვხსნით (1) განტოლებას $y$-ის მიმართ, მივიღებთ:

$$y=f(x), \tag{2}$$

სადაც $f(x)$ აღნიშნავს $x$-ის რომელიმე ფუნქციას; ეს ფუნქცია, რასაკვირველია, შეიძლება იყოს მრავალსახა ან ცალსახა. შემდეგში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ამ ფუნქციის ყველა მნიშვნელობა $x$-ის ცვლილებასთან ერთად განუწყვეტლივ იცვლება.

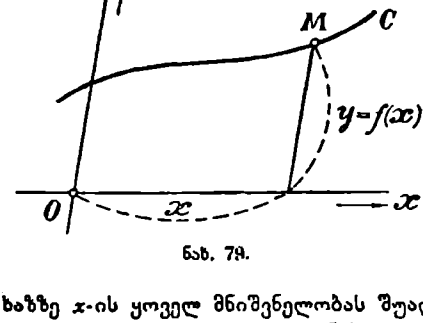
დავიწყოთ იმ შემთხვევის განხილვით, როდესაც $f(x)$ არის ცალსახა ფუნქცია, ყოველ შემთხვევაში $x$-ის ცვლილების რომელიმე შუალედში.

ავიღოთ დეკარტის კოორდინატების ღერძთა რომელიმე სისტემა და განვიხილოთ $x$ და $y$ ცვლადი, როგორც რომელიმე $M$ წერტილის კოორდინატები $Oxy$ სიბრტყეზე.

$x$-ის ყოველ მნიშვნელობას (განსახილველ შუალედში), (2) განტოლება შეუსაბამებს $y$-ის ერთ გარკვეულ მნიშვნელობას (ნახ. 79) [1]).

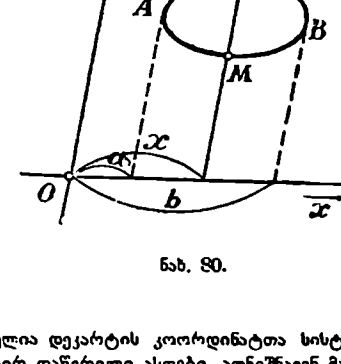
მაშასადამე, $x$-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება სიბრტყეზე ერთი გარკვეული $M$ წერტილი, კოორდინატებით $x$ და $y=f(x)$.

თუ ამის შემდგომ $x$ მიიღებს მნიშვნელობათა განუწყვეტელ ერთობლიობას, მაშინ სათანადო $M$ წერტილი დაიწყებს განუწყვეტელ გადაადგილებას $Oxy$ სიბრტყეზე და ასეთნაირად აღწერს რაღაც გეომეტრიულ ადგილს $C$-ს; ეს გეომეტრიული ადგილი იწოდება წ ი რ ა დ.



ნახ. 79.

ჩვენ ვგულისხმობთ $f(x)$-ს ც ა ლ ს ა ხ ა დ; მაგრამ ეს შეზღუდვა არ არის არსებითი; მართლაც, თუ $f(x)$ მრავალსახაა, მაშინ $x$-ის ყოველ მნიშვნელობას ეთანადება არა ერთი, არამედ რამდენიმე მნიშვნელობა $y=f(x)$; ე. ი. რამდენიმე წერტილი $M$, $M_1$, ... $x$-ის ცვლილების დროს თითოეული ამ წერტილთაგან აღწერს რაღაც გეომეტრიულ ადგილს; თითოეული ეს გეომეტრიული ადგილი (და აგრეთვე მათი ერთობლიობაც) წარმოადგენს იმას, რასაც ჩვენ ვუწოდებთ წირს (იხ. ნახ. 80; ამ ნახაზზე $x$-ის ყოველ მნიშვნელობას შუალედში $a<x<b$ ეთანადება ორი წერტილი: როცა $x$ იცვლება ხსენებულ შუალედში, მაშინ ეს წერტილები აღწერენ შესაბამისად $AMB$ და $AM'B$ რკალებს; მათი ერთობლიობა წარმოადგენს ჩაკეტილ წირს. $x$-ის იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც ამ შუალედის გარეთ იმყოფებიან, არც ერთი წერტილი არ ეთანადება).



ნახ. 80.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. $x$-ის ერთი და იმავე მნიშვნელობის შესაბამ წერტილებს $M$, $M'$, $M''$... შეუძლიათ აღწერონ არა მაინცადამაინც ერთი მთლიანი წირი, არამედ ერთმანეთთან სრულიად დაუკავშირებელი წირებიც; ამ წირთა ერთობლიობა მაინც წირად იწოდება—ეს არის წირი, (2) განტოლებით წარმოდგენილი.

[1]) აქ და შემდეგში, ნახაზზე, რომელიც განხილულია დეკარტის კოორდინატთა სისტემის მიმართ, ღერძთა პარალელური ნაკეთების პირდაპირ დაწერილი ასოები აღნიშნავენ მათ სიგრძეთა ან ალგებრულ მნიშვნელობათა შეფარდებას შესაბამ საკოორდინატო ვექტორთა სიგრძეებთან; არაგანზოგადებულ კოორდინატთა შემთხვევაში ეს ასოები აღნიშნავენ შესაბამ ნაკეთების სიგრძეებს ან ალგებრულ მნიშვნელობებს.

ახლა შევაჯამოთ ზემოხსენებული.

წირი (სიბრტყეზე), ჩვენის განმარტებით, წარმოადგენს ამ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ (2) სახის ორცვლადიან განტოლებას, ან რაც იგივეა, (1) სახის განტოლებას.

განტოლება (1) ან (2), რომელიც წირს განსაზღვრავს, იწოდება წირის განტოლებად.

წირის განმარტების თანახმად (2) განტოლება, ან, სულ ერთია, (1) განტოლება, დაკმაყოფილდება მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x$ და $y$ წარმოადგენენ აღებული წირის რომელიმე წერტილის კოორდინატებს. მაშ, აღებული წირის (სიბრტყეზე) განტოლება ეწოდება (1) სახის ორცვლადიან განტოლებას, რომელიც დაკმაყოფილდება მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x$ და $y$ ცვლადის მაგიერ შევიტანთ ამ წირის რომელიმე წერტილის კოორდინატებს.

მოკლედ, აღებული წირის განტოლება არის ისეთი დამოკიდებულება, რომელიც აკავშირებს აღებულ წირზე მოთავსებულ წერტილთა კოორდინატებს (და მხოლოდ ამ წერტილებისას).

ჩვენ შემდეგში სიმოკლისათვის ხშირად $\Phi(x, y)=0$ განტოლებით წარმოდგენილ წირს ვუწოდებთ უბრალოდ „წირს $\Phi(x, y)=0$“.

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა.** საჭიროა შევნიშნოთ, რომ ჩვენს მიერ მოყვანილი განმარტება წირისა მეტისმეტად ზოგადია. იგი შეიცავს ისეთ გეომეტრიულ სახეებსაც, რომლებიც ძალიან განსხვავდებიან იმისგან, რასაც ჩვენ მიჩვეული ვართ წირი ვუწოდოთ.

იმისათვის, რომ ცოტად თუ ბევრად დავუახლოოთ ზოგადი განმარტება იმ წარმოდგენას, რომელიც ჩვენი ინტუიციით გვაქვს მიღებული, საჭიროა $\Phi(x, y)$ ან $f(x)$ ფუნქციებს (1) ან (2) განტოლებაში დავადოთ ზოგიერთი შეზღუდვა (უწყვეტობა, წარმოებადობა გარკვეულ რიგამდე და სხვ.). ამის შესახებ იხ. დიფერენციალური გეომეტრიისა და ანალიზის კურსებში.

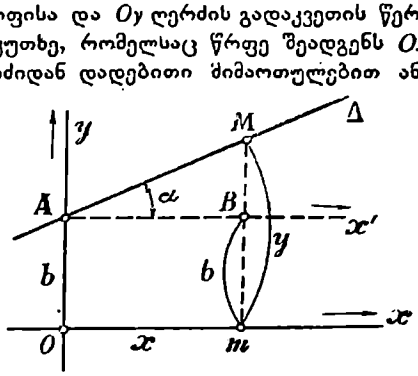
**§ 80. მაგალითები: წრფე წირიხა და წრეწირის განტოლებანი.** წინა პარაგრაფში მოყვანილ მოსაზრებათა ნათელსაყოფად ჩვენ შევადგენთ ორ უმარტივეს წირის განტოლებას—წრფისა და წრეწირის [1]). მკითხველს დაბეჯითებით მოეთხოვება ამ პარაგრაფის ბოლოში მოყვანილი ყველა სავარჯიშო მაგალითები ყურადღებით გააკეთოს და არ იუცხოვოს მათი ზედმეტი სიმარტივე, ეს მაგალითები ძალიან გააადვილებენ იმ ზოგადი დებულებების შეთვისებას, რომელთაც შემდეგში მოვიყვანთ.

მთელს ამ პარაგრაფში სიმარტივისათვის კოორდინატები მართკუთხოვნად იგულისხმებიან.

---

[1]) ამით დამტკიცებული იქნება, რომ წრფე და წრეწირი ყოველ შემთხვევაში წირის იმ ზოგად განმარტებას ემორჩილებიან, რაც წინა პარაგრაფში აღვნიშნეთ.

1. **წრფის განტოლება**[1]. ვთქვათ, $\Delta$ არის $Oxy$ სიბრტყეზე აღებული წრფე, არაპარალელური $Oy$ ღერძისა. წრფის მდებარეობა სავსებით განსაზღვრული იქნება, თუ ცნობილია: წრფისა და $Oy$ ღერძის გადაკვეთის წერტილის ორდინატი[2] $b=OA$ და ის $\alpha$ კუთხე, რომელსაც წრფე შეადგენს $Ox$ ღერძთან. ეს კუთხე აითვლება $Ox$ ღერძიდან დადებითი მიმართულებით ან, რაც იგივეა, დამხმარე $Ax'$ ღერძიდან, რომელიც ისეთნაირადვეა მიმართული, როგორც $Ox$ ღერძი (ნახ. 81).



ნახ. 81.

ვთქვათ $M(x, y)$ არის $\Delta$ წრფის ნებისმიერი წერტილი. აშკარაა, რომ $BM=AB\cdot\operatorname{tg}\alpha$ (აღნიშვნები ნაჩვენებია ნახაზზე). აქ $BM$ და $AB$ უნდა გვესმოდეს, როგორც $\overrightarrow{BM}$ და $\overrightarrow{AB}$ ვექტორების ალგებრული მნიშვნელობანი შესაბამისად $Oy$ და $Ox$ ღერძების გასწვრივ. მკითხველი ადვილად დარწმუნდება, რომ უკანასკნელი ფორმულა მართებულია ნიშნების თვალსაზრისითაც.

შემდგომ, გვექნება: $BM=y-b$, $AB=x$. თუ ჩავსვამთ ამ მნიშვნელობებს წინა ფორმულაში, მივიღებთ:

$$y-b=\operatorname{tg}\alpha\cdot x,$$

ანუ

$$y=ax+b, \tag{1}$$

სადაც სიმოკლისათვის შემოღებულია აღნიშვნა

$$\operatorname{tg}\alpha=a. \tag{2}$$

(1) განტოლებას აკმაყოფილებენ ჩვენი წრფის ყოველი წერტილის კოორდინატები და ადვილი გასაგებია, რომ, პირიქით, ყოველი წერტილი, რომელიც თავისი კოორდინატებით ამ განტოლებას აკმაყოფილებს, აუცილებლად ძევს ჩვენს წრფეზე.

მაშასადამე, (1) განტოლება არის $\Delta$ წრფის განტოლება. გავიხსენოთ, რომ ამ განტოლებაში $a$ და $b$ მუდმივი სიდიდეებია ($a=\operatorname{tg}\alpha$, $b=OA$).

სიდიდე $a$ იწოდება **საკუთხო კოეფიციენტად**, ვინაიდან იგი დამოკიდებულია $\Delta$ წრფესა და $Ox$ ღერძს შორის არსებულ კუთხეზე, ხოლო $b$ სიდიდეს ეწოდება **საწყისი ორდინატი** (ე. ი. ორდინატი, რომელიც შეეფერება აბსცისის ნულოვან მნიშვნელობას).

---

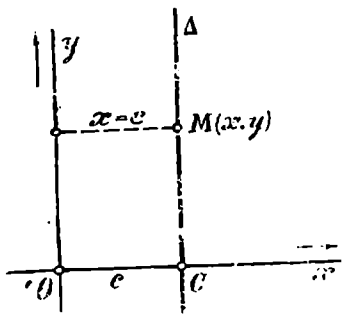
[1]) წრფის განტოლება შემდეგში კიდევ სხვანაირად იქნება გამოყვანილი, აქ ეს განტოლება გამოიყვანება მაგალითის სახით, წინა პარაგრაფში თქმულის ნათელსაყოფად.

[2]) $OA$-ს მაგიერ, რასაკვირველია, ჯნდა ვიხულისხმოთ $\overrightarrow{OA}$ ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობა $OY$ ღერძის გასწვრივ.

ახლა განვიხილოთ ზემოთ გამორიცხული კერძო შემთხვევა, როდესაც $\Delta$ წრფე $Oy$ ღერძის პარალელურია (ნახ. 82). ამ შემთხვევაში წრფის მდებარეობა სრულიად განისაზღვრება იმ წერტილის აბსცისით $c = OC$, სადაც წრფე გადაკვეთს $Ox$ ღერძს. ცხადია, რომ ამ წრფის ყოველი $M(x, y)$ წერტილის კოორდინატები (და მხოლოდ ამ წერტილების) აკმაყოფილებენ განტოლებას

$$x = c. \tag{3}$$

სწორედ ეს წარმოადგენს $\Delta$ წრფის განტოლებას; იმ გარემოებას, რომ მეორე $y$ კოორდინატი განტოლებაში არ შედის, არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს.



ნახ. 82.

თუ დაეუბრუნდებით ახლა ზოგად შემთხვევას, შევნიშნავთ, რომ, თუ მოცემულია წრფის განტოლება, მისი აგება ძალზე ადვილია. ამისათვის საკმარისია ვიპოვოთ რომელიმე ორი წერტილი, რომლებიც ამ წრფეს ეკუთვნის. ასეთი ორი წერტილის საპოვნელად საკმარისია $x$ ცვლადს (1) განტოლებაში მივანიჭოთ ორი სხვადასხვა კერძო მნიშვნელობა $x_1$, $x_2$ და (1) ფორმულის მიხედვით გამოვითვალოთ $y$ ცვლადის სათანადო მნიშვნელობანი; ვთქვათ, რომ ეს მნიშვნელობებია $y_1$ და $y_2$. მაშინ $(x_1, y_1)$ და $(x_1, y_2)$ წერტილები იქნება ჩვენს წრფეზე მდებარე წერტილები (იხ. სავარჯიშო მაგალითები პარაგრაფის ბოლოში).

2. **წრეწირის განტოლება.** ახლა შევადგინოთ წრეწირის განტოლება იმ პირობით, რომ მოცემულია ცენტრი $C(a, b)$ და რადიუსი $r$ (ნახ. 83).

ჩვენი წრეწირი, განმარტების ძალით, არის იმ წერტილების გეომეტრიული ადგილი, რომელთა მანძილი $C(a, b)$ წერტილამდე მუდმივი $r$ სიდიდის ტოლია.

ვთქვათ, $M(x, y)$ არის ნებისმიერი წერტილი სიბრტყეზე. მისი მანძილი $C$-მდე ტოლია:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2};$$

წერტილი $M$ წრეწირზე რომ იმყოფებოდეს, ამისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r,$$

ან რადიკალის მოსპობის შემდეგ:

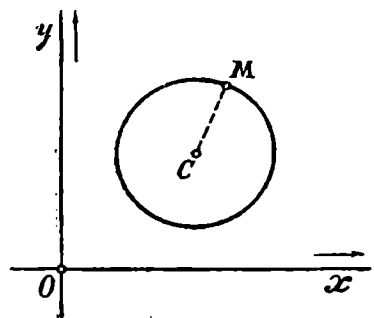
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \tag{4}$$

უკანასკნელი განტოლება წარმოადგენს აღებული წრეწირის განტოლებას. მართლაც, თვით მსჯელობიდან ჩანს, რომ იგი დაკმაყოფილდება მხო-

ლად და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $x$ და $y$ წარმოადგენენ წრეწირზე აღებულ რომელიმე წერტილის კოორდინატებს.

თუ წრეწირის ცენტრი სათავეზეა მოთავსებული, მაშინ განტოლებას უფრო მარტივი სახე ეძლევა:

$$x^2+y^2=r^2. \qquad (5)$$



ნახ. 83.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. განტოლება:

$$x^2+y^2+2Ax+2By+C=0, \qquad (6)$$

სადაც $A$ და $B$ არიან მუდმივები, შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$(x+A)^2+(y+B)^2=A^2+B^2-C.$$

თუ $A^2+B^2-C>0$, მაშინ, შეიძლება მივიღოთ $A^2+B^2-C=r^2$; ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში (5) წარმოადგენს იმ წრეწირს, რომლის ცენტრი იმყოფება $(-A, -B)$ წერტილში, ხოლო რადიუსია $r=\sqrt{A^2+B^2-C}$.

მაშასადამე, (6) სახის განტოლება, იმ პირობით, თუ შესრულებულია უტოლობა $A^2+B^2-C>0$, წარმოადგენს წრეწირის განტოლებას (მართკუთხოვან კოორდინატებში). ცხადია, რომ პირიქითაც, ნებისმიერი წრეწირის განტოლება, ე. ი. (4) განტოლება, ფრჩხილების გახსნისა და $r^2$-ის მარცხნივ გადატანის შემდეგ, მიიღებს (6) სახეს.

ცოტა უფრო ზოგადი სახის განტოლება, ვიდრე (6)-ია:

$$A_0(x^2+y^2)+2Ax+2By+C=0, \qquad (6a)$$

სადაც $A_0 \neq 0$ ყოველთვის შეგვიძლია $A_0$-ზე გაყოფით (6) სახეზე დავიყვანოთ. ამიტომ (6a) განტოლებაც რაღაც წრეწირს წარმოადგენს, თუ შესრულებულია გარკვეული უტოლობა, რომლის დაწერას მკითხველს მივანდობთ.

### სავარჯიშო მაგალითები

1. მოცემულია წრფის განტოლება $y=2x-3$. იპოვეთ ამ წრფის ის წერტილები $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$, რომელთა აბსცისები შესაბამისად არიან:

$$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=-1,\ x_4=2.$$

პ ა ს უ ხ ი: ამ წერტილთა ორდინატებია შესაბამისად:

$$y_1=-3,\ y_2=-1,\ y_3=-5,\ y_4=1.$$

2. ააგეთ (მაგალითად, მილიმეტრული ქაღალდის გამოყენებით) წერტილები $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ (წინა მაგალითის) და სახახავის დადებით შეამოწმეთ, რომ ეს წერტილები მდებარეობენ ერთსა და იმავე წრფეზე.

3. ააგეთ წრფე, რომლის განტოლება არის $y=-2x+4$.

ამოხსნა. თუ, მაგალითად, მივიღებთ $x=0$, გვექნება $y=4$. თუ $x=1$, გვექნება $y=2$. წერტილების ასაგებად, საკმარისია ავაგოთ $(0, 4)$ და $(1, 2)$ წერტილები და შევაერთოთ ესენი წრფით.

4. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც $Oy$ ღერძის პარალელურია და კვეთს $Ox$ ღერძს წერტილზე, რომლის აბსცისი $(-2)$-ის ტოლია.

პასუხი: $x=2$.

5. დაწერეთ $Ox$ და $Oy$ ღერძთა განტოლებანი.

პასუხი: $Ox$ ღერძის განტოლება არის $y=0$. $Oy$ ღერძის განტოლება კი $x=0$.

6. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც სათავეზე გადის და შუაზე ყოფს კუთხეს $Ox$ და $Oy$ ღერძების დადებით მიმართულებათა შორის.

პასუხი: $x=y$ ანუ $x-y=0$.

7. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც $(0, 3)$ წერტილზე გაივლის და $Ox$ ღერძთან შეადგენს კუთხეს $60°$-ს.

პასუხი: $y=x\sqrt{3}+3$.

8. წრფის განტოლება არის $y=3x-1$. იპოვეთ ის $\alpha$ კუთხე, რომელსაც იგი შეადგენს $Ox$ ღერძთან.

პასუხი: $\operatorname{tg}\alpha=3$.

9. წრფის განტოლება არის $y=-3x+6$. იპოვეთ მისი გადაკვეთის წერტილი $Ox$ ღერძთან.

ამოხსნა. საძიებელი $(x, 0)$ წერტილის კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდნენ მოცემულ განტოლებას. მაშასადამე, მისი აბსცისი უნდა აკმაყოფილებდეს პირობას: $0=-3x+6$, საიდანაც $x=2$.

შეამოწმეთ მიღებული შედეგის მართებულება განსახილველი წრფის აგებით მილიმეტრულ ქაღალდზე.

10. დაწერეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრი იმყოფება $(-1, 2)$ წერტილში. ხოლო რადიუსი 5-ის ტოლია.

პასუხი: $(x+1)^2+(y-2)^2=25$, ანუ $x^2+y^2+2x-4y=20$.

11. დაამტკიცეთ, რომ განტოლება $x^2+y^2+2x+2y=14$ არის წრეწირის განტოლება; იპოვეთ ცენტრი და რადიუსი.

ამოხსნა. ეს განტოლება შეიძლება ასე გადაიწეროს: $(x+1)^2+(y+1)^2=16$. მაშასადამე, ცენტრი იმყოფება $(-1, -1)$ წერტილში, ხოლო რადიუსი 4-ის ტოლია.

12. იპოვეთ ის $M$ წერტილი, რომელზედაც გადაიკვეთებიან წრფეები: $y=2x-1$ და $y=3x-2$.

ამოხსნა. გადაკვეთის $(x, y)$ წერტილის კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდნენ ორივე მოცემულ განტოლებას, ვინაიდან წერტილი იწყოფება როგორც ერთ, ისე მეორე წრფეზე, ამიტომ ჩვენ მივიღებთ საძიებელ წეოტილს, თუ ამოვხსნით განტოლებათა სისტემას: $y=2x-1$, $y=3x-2$. ამოხსნა მოგვცემს: $x=1$. $y=1$. მაშასადამე, გადაკვეთის წერტილი არის $M(1, 1)$.

შეამოწმეთ მიღებული შედეგი გრაფიკულად, განსახილველი წრფეების აგებით მილიმეტრულ ქაღალდზე.

13. მოცემულია წრეწირი თავისი განტოლებით $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ და წრფე განტოლებით: $y=2x$. იპოვეთ მათი გადაკვეთის წერტილები.

ამოხსნა. საძიებელი წერტილების კოორდინატები აკმაყოფილებენ ორივე მოცემულ განტოლებას (იხ. წინა მაგალითი). თუ ამოვხსნით ამ განტოლებათა სისტემას, მივიღებთ ორნაირ პასუხს:

$$x_1=\frac{5+2\sqrt{5}}{5},\quad y_1=\frac{10+4\sqrt{5}}{5},$$

და

$$x_2=\frac{5-2\sqrt{5}}{5},\quad y_2=\frac{10-4\sqrt{5}}{5}.$$

$(x_1, y_1)$ და $(x_2, y_2)$ არიან საძიებელი გადაკვეთის წერტილები.

§ 81. წირთა პარამეტრული წარმოდგენა. იმის მაგიერ, რომ წირის ანალიზური წარმოდგენისათვის ვისარგებლოთ $\Phi(x, y)=0$ სახის განტოლებით, ხშირად უფრო მოხერხებულია წირის წერტილთა ცვლადი კოორდინატები გამოისახოს მესამე დამხმარე $t$ ცვლადის ანუ პარამეტრის საშუალებით:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t), \tag{2}$$

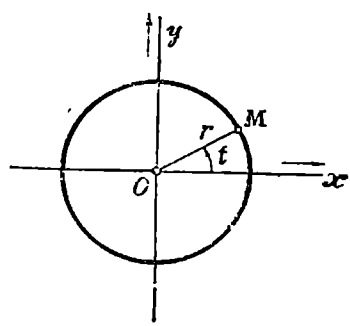
სადაც $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ ჩვეულებრივ იგულისხმებიან უწყვეტ ფუნქციებად.

ორი უკანასკნელი განტოლებიდან $t$-ს გამორიცხვით მივიღებთ ერთ განტოლებას (1) სახისას, ე. ი. წირის განტოლებას ჩვეულებრივი სახით.

ზემომოყვანილი მეთოდი მრუდის წარმოდგენისათვის $y=f(x)$ სახის განტოლების საშუალებით, არის პარამეტრული წარმოდგენის კერძო შემთხვევა: მართლაც, საკმარისია მივიღოთ $x=t$, რომ უკანასკნელი განტოლება დაყვანილ იქნას ორი განტოლების ერთობლიობამდე: $x=t$, $y=f(t)$, ე. ი. (2) სახის განტოლებამდე.

წირთა პარამეტრული წარმოდგენა თავისთავად მოითხოვება, თუ ამ წირს განვიხილავთ, როგორც სასრბოლეს იმ წერტილისას, რომელიც გარკვეული წესის მიხედვით მოძრაობს. თუ ამ შემთხვევაში $t$-თი აღვნიშნავთ დროს, რომელმაც განელო ნებისმიერად არჩეული საწყისი მომენტიდან, მაშინ $x$ და $y$ (მოძრავი წერტილის კოორდინატები) იქნებიან $t$ ცვლადის გარკვეული უწყვეტი ფუნქციები: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. ვინაიდან, თუ მოძრაობის წესი ცნობილია, მაშინ დროის ყოველ $t$ მომენტს ეთანადება წერტილის სრულიად გარკვეული მდებარეობა ან, რაც იგივეა, სრულიად გარკვეული მნიშვნელობა $x$ და $y$ კოორდინატებისა.

ავიღოთ მაგალითისათვის წრეწირი[1]) რადიუსით $r$ და ცენტრით სათავეზე. ვთქვათ, $M(x, y)$ არის წრეწირის ნებისმიერი წერტილი. ვიგულისხმოთ, რომ კოორდინატები მართკუთხოვანია.



ნახ. 84.

აღვნიშნოთ $t$-თი კუთხე, რომელსაც შეადგენს $\overrightarrow{OM}$ რადიუს-ვექტორი $Ox$ ღერძთან, იმ პირობით, რომ ეს აითვლება $Ox$-დან დადებითი მიმართულებით. ადვილი გასაგებია, რომ (იხ. ნახ. 84).

$$x=r\cos t,\quad y=r\sin t.$$

სწორედ ასეთია წრეწირის საძიებელი პარამეტრული წარმოდგენა.

იმისათვის, რომ პარამეტრული წარმოდგენიდან გადავიდეთ წრეწირის განტოლებაზე, საკმარისია $t$ ცვლადი გამოირიცხოს უკანასკნელი განტოლებებიდან. ამ მიზნისათვის ავამაღლოთ

[1]) წრფის პარამეტრული წარმოდგენა ქვემოთ იქნება მიღებული.

განტოლებათა ორივე მხარე კვადრატში და შევკრიბოთ, რის შემდგომ მივიღებთ: $x^2+y^2=r^2$ (ვინაიდან $\sin^2 t+\cos^2 t=1$); როგორც მოსალოდნელი იყო, ჩვენ მივიღეთ წინა პარაგრაფის (5) განტოლება.

**§ 82. წირის განტოლებანი კოორდინატთა სხვადასხვა სისტემაში.** წირის განტოლების სახე, რასაკვირველია, დამოკიდებულია არა მარტო თვით წირის სახეზე, არამედ კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზეც. თუ ერთი სისტემის მაგიერ სხვას ავიღებთ, მაშინ აღებული წირის განტოლება გარკვეული სახით შეიცვლება.

ვთქვათ,

$$\Phi(x,\ y)=0$$

არის მოცემული წირის განტოლება, დეკარტის კოორდინატთა გარკვეული $Oxy$ სისტემის მიმართ. ვთქვათ, აღებულია დეკარტის კოორდინატთა რომელიმე სხვა სისტემა $O\,x'y'$. ერთი და იმავე წერტილის კოორდინატები $(x,\ y)$ და $(x',\ y')$ ორივე ამ სისტემის მიმართ დაკავშირებული არიან შემდეგი სახის დამოკიდებულებებით (§ 66):

$$x=a+l_1x'+l_2y',\quad y=b+m_1x'+m_2y'; \tag{2}$$

თუ ამ გამოსახულებებს (1)-ში შევიტანთ მივიღებთ განტოლებას:

$$\Phi_1(x',\ y')=0, \tag{3}$$

სადაც სიმოკლისათვის შემოღებულია აღნიშვნა

$$\Phi(a+l_1x'+l_2y',\ b+m_1x'+m_2y')=\Phi_1(x',\ y'). \tag{4}$$

(3) განტოლება წარმოადგენს აღებული წირის განტოლებას, განხილულს ღერძთა ახალი სისტემის მიმართ.

აქამდე წირის ანალიზური წარმოდგენისათვის ჩვენ ვსარგებლობდით დეკარტის კოორდინატთა სისტემით. მაგრამ ასეთივე წარმატებით შეიძლებოდა რომელიმე სხვა სისტემის გამოყენება. რა სისტემაც უნდა ავიღოთ საფუძვლად, ყოველთვის შეიძლება შევადგინოთ აღებული წირის განტოლება, ე. ი. ორცვლადიანი განტოლება, რომელიც მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ დაკმაყოფილდება, თუ ცვლადთა მაგიერ აღებული წირის რომელიმე წერტილის კოორდინატებს შევიტანთ.

თუ (1) არის აღებული წირის განტოლება დეკარტის კოორდინატთა სისტემის მიმართ. მაშინ ამ განტოლებიდან რომ გადავიდეთ ამავე წირის განტოლებაზე სხვა რომელიმე სისტემის მიმართ, საკმარისია $x$ და $y$-ის მაგიერ შევიტანოთ მათი გამოსახულებანი ახალი კოორდინატების მიმართ.

ვთქვათ, მაგალითად, განტოლება

$$\Phi(x,\ y)=0$$

აღებულია წირის განტოლება წრფივი, მართკუთხოვანი კოორდინატების სისტემის მიმართ.

თუ ვიგულისხმებთ (იხ. § 60):

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,$$

მაშინ წინა განტოლება გარდაიქმნება და ახალ სახეს მიიღებს

$$\Phi_1(\rho,\ \varphi)=0, \tag{5}$$

სადაც სიმოკლისათვის მიღებულია აღნიშვნა: $\Phi_1(\rho,\ \varphi)=\Phi(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)$.

(5) განტოლება წარმოადგენს აღებული წირის განტოლებას პოლარული სისტემის მიმართ, რომელიც პირვანდელ სისტემასთან დაკავშირებულია ისე, როგორც ეს ნაჩვენებია § 60-ში.

§ 83. **ძირითადი საკითხები, წირთა ანალიზურ წარმოდგენასთან დაკავშირებულნი.** წირთა ანალიზური წარმოდგენა განტოლებათა საშუალებით შესაძლებლობას გვაძლევს შევისწავლოთ ამ წირების სახე და თვისებანი მათემატიკური ანალიზის გამოყენებით.

უპირველეს ყოვლისა, წირის სახეზე წარმოდგენას მივიღებთ განტოლების შემწეობით, თუ განვსაზღვრავთ სიბრტყეზე ამ წირის საკმარისად ახლო-ახლო მდებარე წერტილებს. ეს შემდეგნაირად შეიძლება გავაკეთოთ.

ვთქვათ,

$$\psi(x,\ y)=0 \tag{1}$$

არის განსახილველი წირის განტოლება კოორდინატთა რომელიმე სისტემის მიმართ. თუ ამოვხსნით მას $y$-ის მიმართ [1]), მივიღებთ განტოლებას:

$$y=f(x)$$

ვიცვლით $x$ ცვლადს საკმაოდ ახლო-ახლო მნიშვნელობანი $x_1$, $x_2$... და ა. შ. ამის მიხედვით განტოლება $y=f(x)$ საშუალებას მოგვცემს გამოვითვალოთ $y$ ცვლადის სათანადო მნიშვნელობანი; ვთქვათ, ესენი არიან: $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, $y_3=f(x_3)$ და ა. შ. თუ აღვნიშნავთ ქაღალდზე წერტილებს $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$ და ა. შ., მივიღებთ წერტილთა მიმდევრობას, რომლებიც აღებულ წირს ეკუთვნიან, და თუ ამის შემდგომ ამ წერტილებს გლუვი ხაზით შევაერთებთ, მივიღებთ მიახლოებით წარმოდგენას წირის მოხაზულობაზე.

(თუ საქმე გვაქვს მართკუთხოვან დეკარტის სისტემასთან, მაშინ ყველაზე უფრო მოხერხებულია მილიმეტრული ქაღალდით სარგებლობა).

თუ წირი წარმოდგენილია პარამეტრული სახით:

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t). \tag{3}$$

მაშინ ბისი წერტილების ასაგებად საკმარისია $t$ პარამეტრს მივანიჭოთ საკმაოდ ახლო ახლო მნიშვნელობანი $t_1$, $t_2$, $t_3$ და ა. შ. და გამოვთვალოთ უკა-

[1]) ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ ეს შესაძლებელია და რომ $y$ არის $x$-ის ცალსახა ფუნქცია, ყოველ შეპოვებაში $x$-ის ცვლილების გარკვეულ შუალედში. თუ $y$ არის მრავალსახა ფუნქცია, მაშინ $x$-ის ყოველ მნიშვნელობას ეთანადება $y$-ის რამდენიმე მნიშვნელობა, რაც არსებითად არ ცვლის იმ მსჯელობას, რაც ტექსტშია მოყვანილი (იხ. ნახ. 79).

ნასკნელ განტოლებათა საშუალებით სათანადო წერტილთა კოორდინატები $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$ და ა. შ.

წირის მოხაზულობის გამორკვევის აღნიშნული ხერხი (ცალ-ცალკე წერტილთა აგებით), ასე ვთქვათ, მექანიკური ხერხია. ასეთი ხერხი ხშირად იძლევა პრაქტიკული მიზნებისათვის სრულიად საკმარის შედეგებს, მაგრამ ხშირად აგრეთვე შეიძლება ის არასაკმარისი აღმოჩნდეს, ვინაიდან ასეთი ხერხი უმეტეს შემთხვევაში შესაძლებლობას არ გვაძლევს სრული დარწმუნებით ვიმსჯელოთ წირის ზოგად თვისებებზე, არ გვაძლევს ზოგად თვალსაზრისს. მრავალი თვისებითი თავისებურება, რომელიც წირს აქვს, შესაძლებელია ასეთი მექანიკური შესწავლის დროს გამოგვეპაროს.

წირის უფრო ზუსტი თვისებითი და რაოდენობითი შესწავლისათვის, საჭიროა მისი განტოლების შესწავლა ანალიზის მეთოდებით.

უმარტივეს შემთხვევაში (და უმარტივესი თვისებების შესწავლისათვის) შესაძლებელია ელემენტარული მათემატიკის საშუალებებით დავკმაყოფილდეთ; უფრო რთულ შემთხვევებში გვიხდება დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის საშუალებებსაც მივმართოთ. ეს უკანასკნელი შემთხვევები უკვე დიფერენციალური გეომეტრიის დარგს ეკუთვნის.

ხანდახან შესასწავლი წირის განტოლება უშუალოდ არ მოიცემა, არამედ წირი მოცემულია, როგორც გარკვეული პირობების დამაკმაყოფილებელი წერტილების გეომეტრიული ადგილი. მაშინ ამ წირის შესასწავლად ანალიზური გეომეტრიის მეთოდებით საჭიროა უპირველესად მისი განტოლების შედგენა (ან მისი პარამეტრული წარმოდგენა). ვნახოთ ზოგადი სახით, როგორ ხდება ეს. გავიხსენოთ, ჯერ ერთი, როგორ უნდა გვესმოდეს სიტყვები „გეომეტრიული ადგილი“. წერტილთა გეომეტრიული ადგილი (სიბრტყეზე) ეწოდება სიბრტყის იმ წერტილთა ერთობლიობას, რომელთა მდებარეობა ნებისმიერი არაა, არამედ გარკვეულ მოცემულ პირობებს ემორჩილება. გეომეტრიული ადგილის მოცემა ნიშნავს იმ პირობების მოცემას, რასაც უნდა ემორჩილებოდნენ გეომეტრიული ადგილის წერტილები.

ახლა ვთქვათ, რომ მოცემულია რომელიმე გეომეტრიული ადგილი. ამ შემთხვევაში ჩვენთვის საინტერესოა შემდეგი საკითხები: 1) გავიგოთ, წარმოადგენს თუ არა მოცემული გეომეტრიული ადგილი წირს; 2) დადებითი პასუხის შემთხვევაში, შევადგინოთ ამ წირის განტოლება.

ეს ორი საკითხი ერთდროულად წყდება შემდეგნაირად. ავიღოთ კოორდინატთა რომელიმე სისტემა; ვთქვათ, $x$, $y$ აღნიშნავენ განსახილველი გეომეტრიული ადგილის ნებისმიერი $M$ წერტილის კოორდინატებს. $M$ წერტილის მდებარეობა ემორჩილება გარკვეულ პირობებს, რომლებიც ამ გეომეტრიულ ადგილს ახასიათებენ. მაგრამ, რადგანაც $M$ წერტილის მდებარეობა საერთოდ ხასიათდება მისი $x$, $y$ კოორდინატებით, ამიტომ ის პირობები, რომელთაც უნდა აკმაყოფილებდეს $M$-ის მდებარეობა, დაიყვანებიან $x$ და $y$-ს დამაკავშირებელ დამოკიდებულებამდე. ამ უკანასკნელმა შეიძლება მიგვიყვანოს ერთადერთ განტოლებამდე

$$\Phi(x, y) = 0. \tag{1}$$

თუ ამას ადგილი აქვს, მაშინ განსახილველი გეომეტრიული ადგილი არის წირი, რომელიც უკანასკნელი განტოლებით გამოისახება. ამით ჩვენი ამოცანა გადაწყვეტილია.

მაგრამ შესაძლებელია მოხდეს, რომ ხსენებული პირობები ვერ გამოისახებიან (1) სახის ერთი განტოლებით, მაშინ განსახილველი გეომეტრიული ადგილი არ არის წირი.

ზოგიერთ შემთხვევაში გეომეტრიული ადგილის თვით განმარტებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ამ გეომეტრიული ადგილის წერტილთა მდებარეობა სავსებით ხასიათდება გარკვეული ცვლადი $t$ სიდიდის (პარამეტრის) მნიშვნელობებით. ეს ნიშნავს, რომ $x$ და $y$ კოორდინატები არიან ამ სიდიდის ფუნქციები, ე. ი. $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში განსახილველი გეომეტრიული ადგილი არის წირი; მისი პარამეტრული წარმოდგენა ნაპოვნი იქნება, თუ ვიპოვით $\varphi$ და $\psi$ ფუნქციებს.

აქამდე ჩვენ ვლაპარაკობდით წირთა თვისებების შესწავლაზე იმ ფუნქციონალური დამოკიდებულებების შესწავლის საშუალებით, რასაც ადგილი აქვს წირის წერტილთა კოორდინატებს შორის.

მაგრამ წირის განტოლებით შეგვიძლია ვისარგებლოთ შებრუნებული მიზნისთვისაც, ე. ი. რომ შევისწავლოთ მოცემული ფუნქციონალური დამოკიდებულება იმ წირის საშუალებით, რომელიც ამ დამოკიდებულებითაა წარმოდგენილი. სახელდობრ, თუ მოცემულია ფუნქციონალური დამოკიდებულება, ორი $x$ და $y$ ცვლადის დამაკავშირებელი, ე. ი., თუ მოცემულია დამოკიდებულება:

$$y=f(x),$$

სადაც $f(x)$ არის მოცემული ფუნქცია, მაშინ, თუ ავარჩევთ კოორდინატთა რომელიმე გარკვეულ სისტემას, შესაძლებლობა გვექნება ავაგოთ ის წირი, რომლის განტოლება სწორედ მოცემული განტოლება იქნება. ეს წირი ნათელ წარმოდგენას მოგვცემს $y$ ცვლადის ცვლილების ხასიათზე $x$ ცვლადის ცვლილებასთან დაკავშირებით. თუ დავხაზავთ ამ წირს ქაღალდზე, მივიღებთ ფუნქციის გრაფიკულ გამოსახულებას (ანუ გრაფიკს).

ასეთი გრაფიკით ხშირად წარმატებით შეიძლება შეიცვალოს $y$ ცვლადის განმსაზღვრელი ცხრილები, მაგალითად, თუ ავაგებთ გრაფიკს ფუნქციონალური დამოკიდებულებისათვის $y=10^x$ ანუ $x=\log y$, მაშინ ეს გრაფიკი [იქ, სადაც დიდი სიზუსტე არ არის საჭირო] გასწვეს ლოგარითმული ცხრილების მაგივრობას (იხ. შემდეგი პარაგრაფი, მაგალითი 1).

**§ 84. სხვადასხვა წირის მაგალითები.** ამ პარაგრაფში ჩვენ მოვეყავს რამდენიმე მაგალითი ზემოხსენებულის ნათელსაყოფად, დამატებით იმ მაგალითებისა, რომლებიც § 80-ში იყვნენ მოყვანილი და რომლებიც წრფესა და წრეწირს შეეხებოდნენ [1]).

---

[1]) მკითხველს ვურჩევთ აგრეთვე გადახედოს ელიფსის, ჰიპერბოლისა და პარაბოლის განტოლებათა განოყვანას, რაც მოთავსებულია VII თავში.

ამ მაგალითებში ჩვენ ვსარგებლობთ კოორდინატთა ამა თუ იმ სისტემით იმის მიხედვით, თუ რომელი უფრო მოხერხებულია. საჭიროა შევნიშნოთ, რომ თუმცა თეორიულად სულ ერთია რომელ სისტემას ავიღებთ წირის ანალიზური წარმოდგენისათვის და ფუნქციათა გრაფიკული გამოსახვისათვის, მაგრამ პრაქტიკული თვალსაზრისით კოორდინატთა სისტემის არჩევას მეტად დიდი მნიშვნელობა აქვს; მოუხერხებელ შერჩევას უმარტივეს შემთხვევაშიაც კი შეუძლია ძლიერ გაართულოს ფორმულები.

1. მ ა ჩ ვ ე ნ ე ბ ლ ი ა ნ ი ანუ ლ ო გ ა რ ი თ მ უ ლ ი ძ რ უ დ ი. განვიხილოთ განტოლება

$$y=a^x, \tag{1}$$

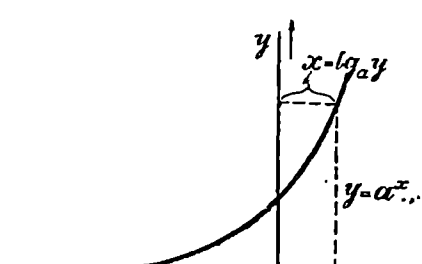
სადაც $a$ დადებითი მუდმივი რიცხვია. თუ $x$ და $y$-ს განვიხილავთ, როგორც წერტილის მართკუთხოვან დეკარტის კოორდინატებს, მაშინ (1) განტოლებით წარმოდგენილ წირს ეწოდება მ ა ჩ ვ ე ნ ე ბ ლ ი ა ნ ი (ანუ ლ ო გ ა რ ი თ მ უ ლ ი) მრუდი.

წარმოვიდგინოთ სიცხადისათვის, რომ $a>1$, და გამოვიკვლიოთ ჩვენი მრუდის სახე.

თუ $x=0$, მაშინ $y=a^0=1$; როცა $x$ იზრდება, მაშინ $a^x$-იც იზრდება; როცა $x$ მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, მაშინ $a^x$-იც უსასრულობისაკენ მიისწრაფვის. $x$-ის კლების დროს, $a^x$ მუდამ დადებითი რ ე ც ხ ვ ა და ნულისაკენ მიისწრაფვის, როცა $x$ მიისწრაფვის $(-\infty)$-საკენ.

მრუდს აქვს ისეთი სახე, როგორც ეს ნახ. 85-ზეა წარმოდგენილი.

ჩვენ დავინახეთ, რომ $x$-ის $(-\infty)$-საკენ მისწრაფების დროს, $y$ უსაზღვროდ კლებულობს; ეს ნიშნავს, რომ $x$-ის $(-\infty)$-საკენ მისწრაფებისას, მრუდის წერტილები უსაზღვროდ უახლოვდებიან $Ox$ ღერძს, თუმცა არასოდეს მას არ ემთხვევიან [1]).




ნახ. 85.

თუ არსებობს ისეთი წრფე, რომელიც ერთი ან მეორე მხრისაკენ უსასრულო გაგრძელების დროს უსაზღვროდ უახლოვდება აღებული მრუდის წერტილებს, ასეთ წრფეს აღებული მრუდის ა ს ი მ პ ტ ო ტ ი ეწოდება. როგორც ვხედავთ, $Ox$ ღერძი ჩვენს შემთხვევაში ასიმპტოტს წარმოადგენს.

თუ ჩვენი მრუდი დახაზულია საკმაო სიზუსტით და საკმაოდ დიდი

[1]) ჩვენ ვხედავთ აქ ისეთი შემთხვევის მაგალითს, როცა მრუდის „მიჭანიკურ“ აგებას ქაღალდზე წერტილთა მიძღევრობის აღნიშვნით შეუძლია შეცდომაში შ. გვიყანოს. თუ მაგ., $a=10$ და ერთეულად მივიღებთ სანტიმეტრს, უკვე მ-შინ, როცა $x=-3$, ჩვენ მივიღებდით $y=10^{-3}=0.001$ სმ=0.01 მმ. მაგრამ მილიმეტრის ერთი მეასედი, პრაქტიკულად თითქმის შეუმჩნეველი სიდიდეა, ასე რომ ბრუდს ჯერ-ჯერობით წყვეტილი დაწყვეტული $x=-3$-დან [და უფრო ადრეც], მოხვდებოდა $Ox$ ღერძზე და ჩვენ მივიღებდით ყალბ წარმოდგენას, ვითომც მრუდის ნაწილი $Ox$ ღერძს ემთხვეოდეს.

მასშტაბით, მაშინ შეიძლება მისი გამოყენება $a^x$ ფუნქციის მიახლოებითი გამოთვლისათვის, თუ მოცემულია $x$ ის მნიშვნელობა (ნახ. 85). ამავე მრუდით შეგვიძლია ვისარგებლოთ $x$-ის გამოსათვლელად, თუ მოცემულია $y$-ის მნიშვნელობა. (1) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ,

$$y=\lg_a x; \tag{2}$$

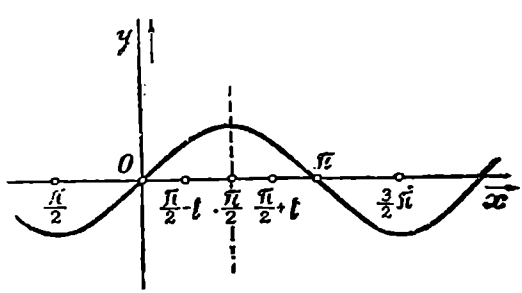
მაშასადამე, ჩვენი გრაფიკი საშუალებას გვაძლევს გამოვითვალოთ ლოგარითმები $a$ ფუძით. თუ ავაგებთ მრუდს იმ შემთხვევისათვის, როცა $a=10$, მივიღებთ გრაფიკს, რომელსაც შეუძლია ათობით ლოგარითმების ცხრილების მაგივრობა გასწიოს (თუ, რასაკვირველია, დიდი სიზუსტე არ არის საჭირო).

2. სინუსოიდი. ასე ეწოდება წირს, რომელიც დეკარტის მართკუთხოვანი სისტემის მიმართ გამოისახება განტოლებით:

$$y=\sin x. \tag{3}$$

შევეცადოთ ამ მრუდის მოხაზულობის გამორკვევას (ნახ. 86).

როცა $x=0$, მაშინ $y=0$. მაშასადამე, მრუდი გაივლის კოორდინატთა სათავეზე. როცა $x$ იზრდება 0-დან $\frac{\pi}{2}$-მდე, მაშინ $y=\sin x$ იზრდება ნულიდან უდიდეს მნიშვნელობამდე $\sin\frac{\pi}{2}=1$. $x$-ის შემდგომი ზრდის დროს, $y$ კლებულობს. ვინაიდან, საზოგადოდ, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$, ამიტომ მრუდი სიმეტრიულია იმ წრფის მიმართ, რომელიც $Oy$ ღერძის პარალელურია და კვეთს $Ox$ ღერძს წერტილში, რომლის აბსცისი $x=\frac{\pi}{2}$ (ნახ. 85, პუნქტირით აგებული წრფე).



ნახ. 86.

როცა $x=\pi$, $y$ ხელახლა ნული ხდება და ვინაიდან, საზოგადოდ,

$$\sin(\pi+t)=-\sin(\pi-t),$$

ამიტომ მრუდის ნაწილი შუალედისათვის $\pi\leq x\leq 2\pi$, წარმოადგენს ნაწილს შუალედისათვის $0\leq x\leq\pi$, მაგრამ სარკეში არეკლილს $Ox$ ღერძიდან და გადაწეულს ამავე ღერძზე $\pi$ მანძილით.

შემდეგ, მრუდის ნაწილი შუალედისათვის $2\pi\leq x\leq 4\pi$ ზუსტად იმავე სახის იქნება, რაც უკვე განხილულ ნაწილს ჰქონდა შუალედისათვის $0\leq x\leq 2\pi$, ვინაიდან $\sin x$ არის პერიოდული ფუნქცია პერიოდით $2\pi$; იგივე შეეხება შუალედს $4\pi\leq x\leq 6\pi$ და ა. შ.

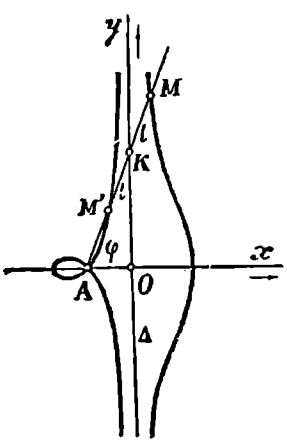
ბოლოს, $x$-ის უარყოფითი მნიშვნელობისათვის მივიღებთ იმავე სურათს. მრუდი თავის თავს დაემთხვევა, თუ მას გადავაადგილებთ $Ox$-ის გასწვრივ, მარჯვნივ ან მარცხნივ, $2\pi$ მანძილზე.

მკითხველს მივანდობთ დაამტკიცოს, რომ მრუდი, გამოსახული განტოლებით

$$y=\cos x \tag{4}$$

წარმოადგენს იმავე სინუსოიდს, გადაადგილებულს $Ox$ ღერძის გასწვრივ, $\frac{\pi}{2}$-ის ტოლ მანძილზე.

3. *კონხოიდი* არის მრუდი, შემდეგნაირად განმარტებული. გარკვეული უძრავი $A$ წერტილიდან გაიყვანება $AK$ წრფეები და მათზე იმ $K$ წერტილიდან, სადაც ეს წრფეები კვეთენ გარკვეულ უძრავ $\Delta$ წრფეს, მოიზომება (ორივე მხარეზე) მუდმივი $l$ სიდიდის ნაკვეთები $KM$ და $KM'$. ასეთნაირად მიღებულ $M$ და $M'$ წერტილთა ერთობლიობას ეწოდება *ნიკომედის კონხოიდი*. თვით განმარტებიდან ცხადია, რომ კონხოიდი შედგება ორი შტოსგან, რომლებიც $\Delta$ წრფის ორი მხრით მდებარეობენ. ადვილი გასაგებია აგრეთვე, რომ $\Delta$ წრფე იქნება ორივე შტოს ასიმპტოტი (იხ. ნახ. 87). ავიღოთ $Oy$ ღერძი $\Delta$ წრფეზე და $Ox$ ღერძად ავარჩიოთ $\Delta$ წრფის პერპენდიკულარი წრფე, მიმართული $A$ წერტილიდან $\Delta$ წრფის გადაკვეთის $O$ წერტილისაკენ. ეს $O$ წერტილი კოორდინატთა სათავე იქნება. ვთქვათ, $|OA|=a$. ვიპოვოთ ჯერჯერობით კონხოიდის პარამეტრული წარმოდგენა, თუ პარამეტრად მივიღებთ იმ $\varphi$ კუთხეს, რომელსაც შეადგენს $\overrightarrow{AK}$ ვექტორი $Ox$ ღერძთან და რომელიც აითვლება $Ox$ ღერძიდან.



ნახ. 87.

$\varphi$ კუთხე იცვლება შუალედში $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$-დან $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$-მდე. $M$ წერტილის კოორდინატებისათვის ($M$ წერტილი აღებულია $\overrightarrow{AK}$ ვექტორის გაგრძელებაზე) გვექნება[1]):

$$x=\text{გეგ}_x\overrightarrow{OM}=\text{გეგ}_x\overrightarrow{OK}+\text{გეგ}_x\overrightarrow{KM}=l\cos\varphi,$$
$$y=\text{გეგ}_y\overrightarrow{OM}=\text{გეგ}_y\overrightarrow{OK}+\text{გეგ}_y\overrightarrow{KM}=a\operatorname{tg}\varphi+l\sin\varphi.$$

იმ $M'$ წერტილთათვის, რომლებიც აღებულია მოპირდაპირე მხარეზე, ცხადია, იმავე ფორმულებს მივიღებთ, იმ განსხვავებით, რომ $l$-ის მაგიერ უნდა ავიღოთ $(-l)$.

[1]) $M$ წერტილის რადიუს-ვექტორი $\overrightarrow{OM}$ ნახაზზე არ არის წარმოდგენილი.

მაშასადამე, ჩვენი მრუდის პარამეტრული წარმოდგენა იქნება:

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm l\cos\varphi, \\ y &= a\operatorname{tg}\varphi \pm l\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

სადაც ერთდროულად აიღება ან ზედა ნიშნები (მარჯვენა შტოსთვის), ან ქვედა (მარცხენა შტოსთვის).

კონხოიდის პარამეტრული წარმოდგენიდან რომ მის განტოლებაზე გადავიდეთ, საკმარისია გამოვრიცხოთ $\varphi$ პარამეტრი (5) განტოლებებიდან. პირველი მათგანი გვაძლევს:

$$\cot\varphi = \pm\frac{x}{l};$$

მეორე კი მოგვცემს:

$$y = \left(\frac{a}{\cos\varphi} \pm l\right)\sin\varphi.$$

ან, თუ $\cos\varphi$-ს მაგიერ შევიტანთ ზემომიღებულ გამოსახულებას:

$$y = \pm\left(\frac{al}{x} + l\right)\sin\varphi = \pm\frac{l(x+a)}{x}\sin\varphi,$$

საიდანაც $\sin\varphi = \pm\frac{xy}{l(x+a)}$. თუ ახლა ვისარგებლებთ ფორმულით: $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ და შევიტანთ ამაში $\sin\varphi$-ს და $\cos\varphi$-სათვის ნაპოვნ მნიშვნელობებს, მივიღებთ [1]):

$$\frac{x^2y^2}{l^2(x+a)^2} + \frac{x^2}{l^2} = 1,$$

ან, აშკარა გამარტივების შემდეგ:

$$(x+a)^2(x^2 - l^2) + x^2y^2 = 0. \tag{6}$$

სწორედ ეს არის კონხოიდის განტოლება ჩვენს მიერ აღებული მართკუთხოვანი სისტემის მიმართ.

4. არქიმედის სპირალი. ვთქვათ, $\Delta$ ღერძი ბრუნავს უძრავ $O$ წერტილის გარშემო და ვთქვათ, რომ $\Delta$ ღერძის გასწვრივ მოძრაობს $M$ წერტილი ისე, რომ $\overrightarrow{OM}$ ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობა $\rho$ [$\Delta$ ღერძის გასწვრივ] ამ ღერძის მობრუნების $\varphi$ კუთხის პროპორციულია [ეს კუთხე აითვლება გარკვეული უძრავი $Ox$ ღერძიდან (ნახ. 88)]. წერტილის მიერ აღწე-

[1]) მკითხველს ვანდობთ დაამტკიცოს, რომ შესაძლოა დაეკმაყოფილდეთ მხოლოდ ზედა ნიშნით, თუ $\varphi$ კუთხეს მივანიჭებთ მნიშვნელობებს არა მხოლოდ $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ შუალედიდან, არამედ $(-\pi, +\pi)$ შუალედიდან ანუ, რაც იგივეა, $(0, 2\pi)$ შუალედიდან.

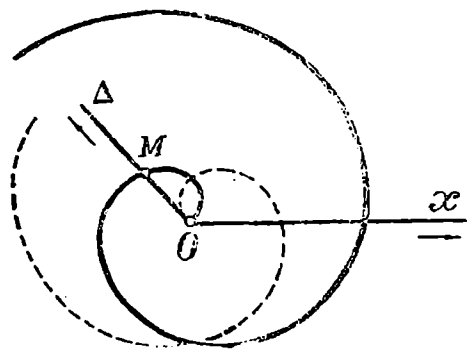
რილ სასრბოლეს ეწოდება არქიმედის სპირალი. თვით განმარტებიდან ვღებულობთ:

$$\rho = a\varphi, \tag{7}$$

სადაც $a$ არის გარკვეული მუდმივი სიდიდე (პროპორციულობის კოეფიციენტი).

სწორედ ეს არის არქიმედის სპირალის განტოლება პოლარ კოორდინატებში, თუ $O$-ს მივიღებთ პოლუსად, ხოლო $Ox$-ს პოლარ ღერძად.

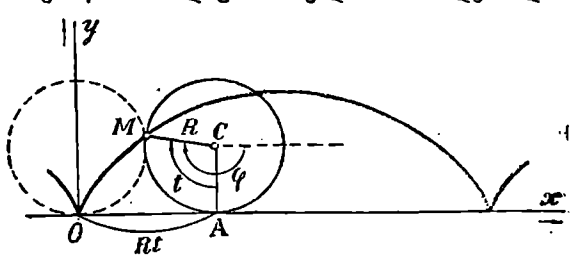
ჩავთვალოთ $a$ დადებით სიდიდედ. მაშინ სპირალის ის ნაწილი, რომელიც $\varphi$ კუთხის დადებით მნიშვნელობებს ეთანადება, იქნება ისეთი სახის, როგორც ეს წარმოდგენილია ნახაზზე (რასაკვირველია, სპირალი აკეთებს ხვეულების უსასრულო რიცხვს, როცა $\varphi$ იზრდება $O$-დან $\infty$-მდე). $\varphi$ კუთხის ათვლის დადებით მიმართულებად ჩვენ მივიღეთ საათის ისრის ბრუნვის მოპირდაპირე მიმართულება.



ნახ. 88.

მრუდის ის ნაწილი, რომელიც ეთანადება $\varphi$-ს უარყოფით მნიშვნელობებს, ნახაზზე წარმოდგენილია პუნქტირით [1]).

5. ციკლოიდი ეწოდება იმ მრუდს, რომელსაც აღწერს უძრავ წრფეზე უსრიალოდ მგორავი წრეწირის ერთ-ერთი $M$ წერტილი. ვთქვათ, $R$ აღნიშნავს მგორავი წრის რადიუსს. მივიღოთ $Ox$ ღერძად ის წრფე, რომელზედაც წრე გორავს, ხოლო სათავედ ავარჩიოთ ამ ღერძის ერთ-ერთი წერტილი, სადაც წრეწირის $M$ წერტილი $Ox$ ღერძზე მოხვდება; $Oy$ ღერძი მივმართოთ ისე, როგორც ეს აღნიშნულია ნახ. 89-ზე.



ნახ. 89.

განვიხილოთ მგორავი წრეწირის რომელიმე მდებარეობა და ვთქვათ, $A$ არის მისი შეხების წერტილი $Ox$ ღერძთან, ხოლო $C$ არის ცენტრი. აღნიშნოთ $t$-თი კუთხე $ACM$, ათვლილი $CA$ მიმართულებიდან ნახაზზე ისრით აღნიშნული მიმართულებისკენ. ცხადია, რომ $t$ კუთხის მოცემა (ამ კუთხეს

[1]) $\varphi$ კუთხეს ეხმაურეთ რადიანებში.

ჩვენ რადიანებით ვზომავთ) საშუალებით განსაზღვრავს მგრძავი წრეწირის მდებარეობას და, მაშასადამე, $M$ წერტილის მდებარეობასაც. ამიტომ $t$ სიდიდე შეიძლება პარამეტრად აირჩეს ციკლოიდის წარმოდგენისათვის.

რადგანაც გორვა უსრიალოდ ხდება, ამიტომ $OA$ ნაკეთი წრეწირის $AM$ რკალის $Rt$ სიგრძის ტოლია.

ახლა გამოვსახოთ $M$ წერტილის $x$, $y$ კოორდინატები $t$-ს საშუალებით. თუ $\overrightarrow{OM}$ არის $M$ წერტილის რადიუს-ვექტორი (ეს რადიუს-ვექტორი ნახაზზე არ არის აღნიშნული), მაშინ:

$$x = \text{გეგ}_x \overrightarrow{OM} = \text{გეგ}_x \overrightarrow{OA} + \text{გეგ}_x \overrightarrow{AC} + \text{გეგ}_x \overrightarrow{CM},$$
$$y = \text{გეგ}_y \overrightarrow{OM} = \text{გეგ}_y \overrightarrow{OA} + \text{გეგ}_y \overrightarrow{AC} + \text{გეგ}_y \overrightarrow{CM}.$$

მაგრამ აშკარაა, რომ:

$$\text{გეგ}_x \overrightarrow{OA} = OA = Rt, \quad \text{გეგ}_x \overrightarrow{AC} = 0, \quad \text{გეგ}_x \overrightarrow{CM} = -R \sin t$$
$$\text{გეგ}_y \overrightarrow{OA} = 0, \quad \text{გეგ}_y \overrightarrow{AC} = R, \quad \text{გეგ}_y \overrightarrow{CM} = -R \cos t.^{1})$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ წინა ფორმულებში, მივიღებთ ციკლოიდის პარამეტრულ წარმოდგენას:

$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t). \tag{8}$$

**§ 86. ბრტყელ წირთა კლასიფიკაცია.** თუ დავემყარებით წირთა წარმოდგენის შესაძლებლობას განტოლებათა საშუალებით დეკარტის კოორდინატების მიმართ, შეიძლება მოვახდინოთ ბრტყელ წირთა გარკვეული კლასიფიკაცია.

წირს ეწოდება ალგებრული, როცა მის განტოლებას შეიძლება მიეცეს სახე

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

სადაც $F(x, y)$ აღნიშნავს პოლინომს (მრავალწევრს), ესე იგი მთელ რაციონალურ ფუნქციას $x$ და $y$ ცვლადების მიმართ, სხვანაირად რომ ვთქვათ, წარმოადგენს $Ax^k y^l$ სახის წევრთა ჯამს, სადაც $k$ და $l$ მთელი არაუარყოფითი რიცხვებია, ხოლო $A$ მუდმივი კოეფიციენტია. ამ შემთხვევაში $y$ კოორდინატი, რომელიც (1) განტოლებით განისაზღვრება, როგორც $x$-ის არაცხადი ფუნქცია იქნება ალგებრული ფუნქცია.

---

[1]) შევნიშნოთ, რომ $\varphi$ კუთხე, რომელსაც $\overrightarrow{CM}$ ვექტორი შეადგენს $Ox$ ღერძთან და რომელიც ითვლება (ჩვენ მიერ შერჩეულ ღერძთა სისტემის მიხედვით) დადებითად საათის ისრის ბრუნვის მოპირდაპირე მიმართულებით, დაკავშირებულია $t$ კუთხესთან (რომელიც დადებითად ითვლება საათის ისრის ბრუნვისკენ) ფორმულით: $\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (სადაც $k$ მთელი რიცხვია) (იხ. ნახაზი). მაშასადამე,

$$\text{გეგ}_x \overrightarrow{CM} = R \cos \varphi = -R \sin t; \quad \text{გეგ}_y \overrightarrow{CM} = R \sin \varphi = -R \cos t.$$

ყველა არაალგებრულ წირს ეწოდება ტრანსცენდენტული მრუდი.

ალგებრული წირები, თავის მხრით, დაიყოფიან სხვადასხვა რიგის წირებად, სახელდობრ, ისეთი წირი, რომელიც (1) განტოლებით გამოისახება, იწოდება $n$ რიგის წირად, თუ $n$ აღნიშნავს $F(x, y)$ პოლინომის ხარისხს [1]).

მაგალითად, წრფე არის ალგებრული წირი პირველი რიგისა, ვინაიდან იგი გამოისახება პირველი ხარისხის განტოლებით (§ 80):

$$y-ax-b=0 \text{ ან } x-c=0.$$

წრეწირი არის მეორე რიგის ალგებრული წირი, ვინაიდან იგი მეორე ხარისხის განტოლებით გამოისახება (§ 80).

წირი, რომლის განტოლება არის:

$$x^3+y^3-3xy=0,$$

მესამე რიგის წირია. წინა პარაგრაფში განხილული კონხოიდი არის მეოთხე რიგის ალგებრული წირი (წინა პარაგრაფში განხილული ყველა სხვა წირი, ტრანსცენდენტული წირია; იხ. კიდევ § 87, შენიშვნა).

ცხადია, ალგებრულ წირთა აქ მოყვანილ კლასიფიკაციას აზრი არ ექნებოდა, წირის რიგი რომ დამოკიდებული ყოფილიყო კოორდინატთა სისტემის (დეკარტის სისტემის) არჩევაზე. ჩვენ ახლავე დავამტკიცებთ, რომ წირის რიგი არ არის დამოკიდებული ამ არჩევაზე.

მართლაც, ვთქვათ, დეკარტის კოორდინატთა მოცემულ სისტემაში ალგებრული წირის განტოლებას აქვს სახე:

$$F(x, y)=0,$$

სადაც $F(x, y)$ არის $x$, $y$ ცვლადების მთელი რაციონალური ფუნქცია.

თუ ავიღებთ დეკარტის კოორდინატთა სხვა სისტემას და $x$, $y$-ის ნაცვლად შევიტანთ მათ გამოსახულებებს ახალ კოორდინატებში:

$$x=a+l_1x'+l_2y', \quad y=b+m_1x'+m_2y' \tag{2}$$

(იხ. § 82), მივიღებთ იმავე წირის განტოლებას ახალი სისტემის მიმართ:

$$F'(x', y')=0,$$

სადაც $F'(x', y')$ პოლინომი წარმოადგენს $F(x, y)$ პოლინომში (2) გამოსახულების ჩასმის შედეგს. აღვილი დასამტკიცებელია, რომ $F(x, y)$ და $F'(x', y')$ პოლინომთა ხარისხები ერთნაირია. უპირველესად დავამტკიცოთ, რომ $F'(x', y')$-ის ხარისხი არ აღემატება $F(x, y)$-ის ხარისხს. მართლაც, $F(x, y)$ არის ჯამი $Ax^ky^l$ წევრებისა; თუ შევასრულებთ ზემოაღნიშნულ ჩასმას, მაშინ ამ წევრის ნაცვლად მივიღებთ გამოსახულებას:

$$A(a+l_1x'+l_2y')^k\ (b+m_1x'+m_2y')^l.$$

[1]) $Ax^ky^l$ მხოლოწევრის ხარისხი ეწოდება $k$ და $l$ მაჩვენებელთა ჯამს, ე. ი. $k+l$ მთელი $F(x, y)$ პოლინომის ხარისხი ეწოდება შესაკრებ წევრთა ხარისხთაგან უდიდესს.

თუ შეეასრულებთ გამრაელებას (ე. ი. თუ $A$-ს გავამრაელებთ $a+l_1x'+l_2y'$-ზე $k$-ჯერ და $(b+m_1x'+m_2y')$-ზე $l$-ჯერ), მაშინ, ცხადია, მივიღებთ $Bx'^ry'^s$ სახის წევრთა ჯამს, მასთან არც ერთი წევრისათვის $r+s$ არ იქნება მეტი, ვიდრე $k+l$.

თუ შევუცვლით როლებს $Oxy$ და $O'x'y'$ სისტემებს ისე, როგორც წინათ, დავრწმუნდებით, რომ $F$-ის ხარისხი არ აღემატება $F'$-ის ხარისხს; მაშასადამე, $F$ და $F'$ პოლინომთა ხარისხები ურთიერთტოლია.

ამრიგად, ჩვენ შეგვიძლია ვილაპარაკოთ ალგებრული წირის რიგის შესახებ ისე, რომ არ მივუთითოთ დეკარტის კოორდინატთა სისტემაზე, რომლის მიმართ წირის განტოლებაა მოცემული.

კიდევ ერთი საკითხი მოითხოვს გარჩევას. სახელდობრ, შესაძლოა ალგებრული წირის მოცემული განტოლება $F(x, y)=0$, სადაც $F(x, y)$ პოლინომია, იყოს ტოლფასი[1]) მეორე განტოლებისა $F_0(x, y)=0$, სადაც $F_0(x, y)$ აგრეთვე პოლინომია, მაგრამ უფრო დაბალი ხარისხისა, ვიდრე $F(x, y)$. მაგალითად, განტოლება $(x-y)^3=0$, ცხადია, ტოლფასია $x-y=0$ განტოლებისა.

ვთქვათ, $F_0(x, y)=0$ წარმოადგენს მოცემული განტოლების ტოლფასს, მაგრამ ისეთს, რომლის შეცვლა შეუძლებელია უფრო დაბალი ხარისხის ტოლფასი განტოლებით. მაშინ, ბუნებრივია, განსახილველი ალგებრული წირის რიგის ქვეშ ვიგულისხმოთ არა $F$ პოლინომის ხარისხი, არამედ $F_0$ პოლინომის ხარისხი. მაგრამ, ხშირად მიზანშეწონილია მოვიქცეთ სხვანაირადაც. ამის შესახებ დაწვრილებით ქვემოთ იქნება ნათქვამი § 174.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. არ უნდა დავივიწყოთ, რომ წირთა აქ მოყვანილი კლასიფიკაცია (დაყოფა ალგებრულ და ტრანსცენდენტულ წირებად) დამყარებულია წირთა წარმოდგენაზე განტოლებების საშუალებით დ ე კ ა რ ტ ი ს ს ი ს ტ ე მ ი ს მიმართ. მაგალითად, არქიმედის სპირალი, რომლის განტოლება არის: $\rho=a\varphi$, სადაც $\rho$ და $\varphi$ აღნიშნავენ პ ო ლ ა რ კოორდინატებს, ხოლო $a$ რომელსაც მუდმივს, არის ტ რ ა ნ ს ც ე ნ დ ე ნ ტ უ ლ ი წ ი რ ი, მიუხედავად იმისა, რომ მისი განტოლება არა თუ ალგებრულია, არამედ წრფივია პოლარი კოორდინატების მიმართ. მართლაც, თუ გადავალთ პოლარი კოორდინატებიდან დეკარტის კოორდინატებზე § 60-ის ფორმულების მიხედვით, გვექნება განტოლება:

$$\sqrt{x^2+y^2} = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

რომელიც ცხადია, ტრანსცენდენტულია.

§ 86. დ ა შ ლ ა დ ი და დ ა უ შ ლ ა დ ი ა ლ გ ე ბ რ უ ლ ი წ ი რ ე ბ ი.[2]) თუ ალგებრული მრუდის განტოლების

$$F(x, y)=0$$

[1]) განტოლებებს $F(x, y)=0$ და $F_0(x, y)=0$ ეწოდებათ ტ ო ლ ფ ა ს ი, თუ რიცხვთა ყ ო ვ ე ლ ი წყვილი $(x, y)$, რომელიც აკმაყოფილებს ერთს, დააკმაყოფილებს მეორესაც.

[2]) ამის შესახებ დაწვრილებით ქვემოთ იქნება ნათქვამი (§ 174-ში).

მარცხენა მხარე, რომელიც პოლინომს წარმოადგენს, შეიძლება დაიშალოს ორ მამრავლად, რომლებიც აგრეთვე პოლინომები არიან, ე. ი. თუ გვაქვს იგივეობა:

$$F(x, y) = F_1(x, y) \cdot F_2(x, y),$$

სადაც $F_1(x, y)$ და $F_2(x, y)$ პოლინომებს წარმოადგენენ (სხვანაირად რომ ვთქვათ, $x$ და $y$ ცვლადის მთელი რაციონალური ფუნქციებია), მაშინ (1) განტოლება ღებულობს სახეს:

$$F_1(x, y) \cdot F_2(x, y) = 0. \tag{2}$$

$x$ და $y$ ცვლადები, რომლებიც ამ განტოლებას აკმაყოფილებენ, რასაკვირველია, უნდა აკმაყოფილებდნენ ერთ-ერთ შემდეგ განტოლებას:

$$F_1(x, y) = 0 \quad \text{ან} \quad F_2(x, y) = 0; \tag{3}$$

პირიქით: ცვლადები, რომლებიც ერთ-ერთ ამათგანს აკმაყოფილებენ, აგრეთვე (2) განტოლებასაც დააკმაყოფილებენ. უკანასკნელ განტოლებათაგან თითოეული წარმოადგენს რაღაც ალგებრული მრუდის განტოლებას. ზემოხსენებულიდან აშკარაა, რომ (2) განტოლებით წარმოდგენილი მრუდის წერტილები, ეკუთვნიან ერთ-ერთს იმ მრუდეთაგან, რომლებიც გამოისახებიან განტოლებებით $F_1(x, y) = 0$ ან $F_2(x, y) = 0$ და, პირიქით.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, (2) განტოლებით წარმოდგენილი მრუდი შედგება იმ ორი მრუდის ერთობლიობისაგან, რომლებიც (3) განტოლებით გამოისახებიან.

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ (1) განტოლებით წარმოდგენილი მრუდი დაყვანადია ანუ დაშლადია, ვინაიდან ის იშლება ორ ალგებრულ წირად (3). თითოეული ამ უკანასკნელთაგან შესაძლოა, თავის მხრით, იყოს დაშლადი, ასე რომ დაშლადი მრუდი შეიძლება დაიშალოს არა თუ ორ, არამედ მეტ რიცხვ ალგებრულ მრუდად.

მაგალითად, წირი, რომელიც შემდეგი განტოლებით გამოისახება:

$$x^2 - y^2 = 0 \quad \text{ანუ} \quad (x - y)(x + y) = 0$$

იშლება ორ წრფედ, რომელთაც შემდეგი განტოლებანი შეეფერებათ:

$$x - y = 0 \quad \text{და} \quad x + y = 0.$$

თუ $F(x, y) = 0$ პოლინომი არ შეიძლება დაიშალოს ორ მამრავლად, რომლებიც პოლინომებს წარმოადგენენ, მაშინ (1) განტოლებით წარმოდგენილ წირს ეწოდება დაუყვანადი ანუ დაუშლადი.

ნათქვამიდან აშკარაა, რომ დაყვანადი მრუდის შესწავლა ყოველთვის შეგვიძლია დავიყვანოთ იმ დაუყვანად მრუდეთა შესწავლაზე, რომელთაგანაც იგი შედგება.

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა.** არ უნდა ვიფიქროთ, რომ ორი განსხვავებული შტოსაგან შემდგარი ალგებრული მრუდი (მაგალითად, ჰიპერბოლი, რომელსაც ჩვენ გავეცნობით VII თავში, ან § 84-ში განხილული კონხოიდი) ყოველთვის წარმოადგენს დაყვანად მრუდს. გადამწყვეტი მნიშვნელობა განცალკევებული შტოების არსებობას კი არ აქვს, არამედ მრუდის განტოლების მარცხენა ნაწილის დაშლას რამდენსამე მამრავლად, რომლებიც პოლინომებს წარმოადგენენ.

მაგალითად, ადვილი საჩვენებელია, რომ კონხოიდის განტოლების (§ 84) მარცხენა მხარე $(x+a)^2(x^2-l^2)+x^2y^2=0$ (როცა $a\neq 0$, $l\neq 0$) არ შეიძლება ასეთ ორ მამრავლად დაიშალოს. ამიტომ კონხოიდი დაუყვანადი მრუდია: მისი ორივე შტო ალგებრული თვალსაზრისით ერთ მთლიან რამეს წარმოადგენს (იგივე შეეხება ჰიპერბოლს, რომელსაც VII თავში გავეცნობით).

**§ 87. ორი წირის გადაკვეთის შესახებ.** შემდეგისათვის მნიშვნელოვანია ასეთი ამოცანის ამოხსნის შესაძლებლობა: მოცემულია ორი წირი თავიანთი განტოლებებით:

$$\Phi(x,\ y)=0 \tag{1}$$

და

$$\Psi(x,\ y)=0; \tag{2}$$

საჭიროა ამ წირთა გადაკვეთის წერტილების პოვნა. საძიებელი წერტილების კოორდინატები (თუკი არსებობენ ეს წერტილები) ერთდროულად უნდა აკმაყოფილებდნენ ორივე მოცემულ განტოლებას, ვინაიდან საძიებელი წერტილები ორივე წირს უნდა ეკუთვნოდნენ ერთდროულად. მაშასადამე, გადაკვეთის წერტილთა საპოვნელად, უნდა ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა [1]):

$$\begin{cases}\Phi(x,\ y)=0\\ \Psi(x,\ y)=0,\end{cases}$$

სადაც $x$ და $y$-ს, როგორც ორ უცნობს ვგულისხმობთ. რამდენი ამონახსნიც იქნება ამ სისტემას, იმდენი იქნება გადაკვეთის წერტილი; თუ სისტემას სრულიად არა აქვს ამონახსენი, მაშინ აღებული წირები არსად არ იკვეთებიან.

გადაკვეთის წერტილთა რიცხვი ალგებრული წირებისა, რომელთა რიგია $m$ და $n$, არ აღემატება ნამრავლს $m\cdot n$; გამონაკლისს შეიძლება წარმოადგენდის მხოლოდ ის შემთხვევა, როცა ერთი წირი მთლიანად შედის მეორის შემადგენლობაში ან, როცა წირები დაშლადია, საერთო ნაწილების მქონეა [2]). ქვემოთ (§ 100) იქნება მოყვანილი ამ დებულების დამტკიცება იმ შემთხვევაში, როცა განსახილველი წირებიდან ერთ-ერთი წრფეა. ხოლო დამტკიცება ზოგად შემთხვევისათვის კი შეიძლება მოინახოს უმაღლესი ალგებრის ყველა კურსში.

---

[1]) იხ. სავარჯიშო 12 და 13, § 80.

[2]) „ნაწილის" ქვეშ ჩვენ ვგულისხმობთ ნებისმიერს იმ ალგებრულ წირთაგან, რომლებადაც იშლება მოცემული წირი.

აქვე შევნიშნოთ (ამის შესახებ დაწვრილებით იხ. ქვემოთ, § 174), რომ, თუ გარკვეული წესით შევთანხმდებით გადაკვეთის „ჯერად" წერტილთა დათვლის შესახებ და სათვალავში მივიღებთ აგრეთვე „ვითარსი" და „უსასრულოდ დაშორებულ" წერტილებს, მაშინ შეიძლება დამტკიცდეს, რომ გადაკვეთის წერტილთა რიცხვი ყოველთვის $m \cdot n$-ის ტოლია, იმ გამონაკლისი შემთხვევის გარდა, როცა წირებს საერთო ნაწილები აქვთ. კერძოდ, $n$-ურ რიგის ალგებრული მრუდისა და წრფის, რომელიც მის შემადგენლობაში არ შედის, გადაკვეთის წერტილთა რიცხვი ყოველთვის $n$-ის ტოლია (თუ მხედველობაში გვექნება ზემოაღნიშნული განზოგადებული თვალსაზრისი). ამრიგად, მოცემული ალგებრული მრუდის რიგი შეიძლება განმარტებულ იქნას, როგორც ამ მრუდისა და ნებისმიერი წრფის გადაკვეთის წერტილთა რიცხვი, თუ წრფე არ შედის მრუდის შემადგენლობაში.

თუ ზოგად შემთხვევას დავუბრუნდებით, შევნიშნავთ, რომ ორი წირის გადაკვეთის ამოცანა ღებულობს განსაკუთრებით უბრალო სახეს, თუ ერთერთი წირი პარამეტრულად არის მოცემული.

ვთქვათ, მოითხოვება პარამეტრულად მოცემული წირის

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{3}$$

და $\Phi(x, y) = 0$ განტოლებით მოცემული წირის გადაკვეთის წერტილთა პოვნა. თუ (1) გამოსახულებებს შევიტანთ უკანასკნელ განტოლებაში, მივიღებთ განტოლებას ერთი $t$ უცნობით:

$$\Phi[\varphi(t), \ \psi(t)] = 0.$$

თუ ამ განტოლების ფესვებს ვიპოვით და (3)-ში შევიტანთ $t$-ს მაგიერ, სწორედ საძიებელ წერტილთა კოორდინატებს მივიღებთ.

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა.** ალგებრულ წირთა გადაკვეთის წერტილების რიცხვის შესახებ ზემოთქმულიდან, კერძოდ, გამომდინარეობს, რომ, თუ აღებულ წირს რომელსამე წრფესთან აქვს უსასრულო რაოდენობა საერთო წერტილებისა (მაგრამ ისე, რომ ეს წრფე აღებული წირის შემადგენელი ნაწილი არ არის), მაშინ წირი აუცილებლად ტრანსცენდენტულია.

ეს გარემოება პირდაპირ გვაძლევს საშუალებას დავასკვნათ, რომ, მაგალითად, სინუსოიდი, ციკლოიდი, არქიმედის სპირალი—ყველა ესენი ტრანსცენდენტული მრუდეებია.

მაგრამ შებრუნებული დასკვნის გაკეთება არ იქნება მართებული. მაგალითად, მაჩვენებლიანი მრუდი ტრანსცენდენტულია, მიუხედავად იმისა, რომ ნებისმიერი წრფე მას გადაკვეთს არა უმეტეს, ვიდრე ორ წერტილში [1]). როგორც ამის დამტკიცება შეიძლება და რაც თითქმის ცხადია ნახაზიდანაც (ნახ. 85).

---

[1]) რასაკვირველია, აქ საუბარია მხოლოდ ნამდვილ წერტილებზე; წარმოსახვითს წერტილებს ჩვენ ჯერ არ განვიხილავთ.

საშინაო მაგალითი

იპოვეთ იმ ორი წრეწირის გადაკვეთის წერტილები, რომელთა განტოლებანი არიან:

$$x^2+y^2=4 \text{ და } (x-1)^2+y^2=3.$$

პასუხი: $(1, \sqrt{3})$ და $(1, -\sqrt{3})$.

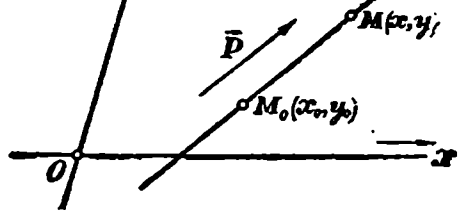
ჩვენ ვხედავთ, რომ გადაკვეთის წერტილთა რიცხვი (ნამდვილი წერტილებისა) ორის ტოლია. ჩვენ ვიცით, რომ ასეთი ორი წერტილი ყოველთვის არსებობს, თუ წრეწირები ერთმანეთს კვეთენ (ნამდვილ წერტილებში). ორი წრეწირის ერთმანეთთან შეხების შემთხვევაში ეს ორი წერტილი ერთმანეთს ემთხვევა (ორჯერ ჩაითვლება ერთი და იგივე წერტილი). ორი წრეწირის არც ერთი საერთო წერტილი არ არსებობს, თუ ისინი ერთმანეთს არ კვეთენ (ნამდვილ წერტილებში).

## II. წრფის განტოლებათა სხვადასხვა სახე

ამ განყოფილებაში ჩვენ უფრო დაწვრილებით შევისწავლით სიბრტყეზე წრფის განტოლებით წარმოდგენის საკითხს.

**§ 88. განტოლება მიმართულების კოეფიციენტებში. პარამეტრული წარმოდგენა.** § 80-ში ჩვენ გამოვიყვანეთ წრფის განტოლება იმ პირობით, რომ კოორდინატებს მართკუთხოვანი ვგულისხმობდით. ადვილია იმავე წესით წრფის განტოლების მიღება ნებისმიერ დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში. მაგრამ ჩვენ აქ ვარჩევთ განტოლების გამოყვანას სხვა გზით.

ვთქვათ, (ნახ. 90) $\Delta$ არის განსახილველი წრფე. მისი მდებარეობა სავსებით განისაზღვრება ერთ-ერთი მისი $M_0(x_0, y_0)$ წერტილის მოცემით და რომელიმე ვექტორით $\vec{P}(X, Y)$, რომელიც ნულის ტოლი არ არის და პარალელურია $\Delta$ წრფისა.




ნახ. 90.

მაშასადამე, ჩავთვალოთ ცნობილად $M_0$ წერტილის კოორდინატები $(x_0, y_0)$ და $\vec{P}$ ვექტორის კოორდინატები $X, Y$; $\vec{P}$ ვექტორს ვუწოდოთ აღებული წრფის მიმართულების ვექტორი.

იმისათვის, რომ $M(x, y)$ წერტილი $\Delta$ წრფეზე ძევდეს, აშკარაა, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ვექტორი $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0)$ პარალელური იყოს $\vec{P}(X, Y)$ ვექტორისა. თუ გავიხსენებთ ვექტორთა პარალელობის პირობას (§ 33), დავინახავთ, რომ ზემოხსენებული გარემოება შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y} \qquad (1)$$

ვინაიდან ეს განტოლება გამოსახავს იმის აუცილებელ და საკმარის პირობას, რომ $(x, y)$ წერტილი $\Delta$-ზე იმყოფებოდეს, ამიტომ სწორედ ეს იქნება $\Delta$ წრფის განტოლება.

მასში შემავალი კოეფიციენტები $X$ და $Y$ იწოდებიან მიმართულების კოეფიციენტებად, ვინაიდან ესენი საკმაოდ განსაზღვრავენ მიმართულების ვექტორს და, მაშასადამე, წრფის მიმართულებასაც. ამიტომ (1) განტოლებას უწოდებენ განტოლებას მიმართულების კოეფიციენტში.

ცხადია, რომ, პირიქით, ყოველი (1) სახის განტოლება არის ისეთი წრფის განტოლება, რომელიც $M_0(X, Y)$ წერტილზე გაივლის და პარალელური იქნება $\vec{P}$ ვექტორისა.

ახლა შევნიშნოთ, რომ $\vec{P}$ ვექტორის მაგიერ შეიძლება ავარჩიოთ მისი პარალელური (მიმართული ისეთნაირადვე ან მოპირდაპირედ) ნებისმიერი სხვა, სხვანაირად რომ ვთქვათ, კოეფიციენტები $X$ და $Y$ (1) განტოლებაში შეიძლება შევცვალოთ ნებისმიერი სიდიდეებით $kX$ და $kY$, რომლებიც მათი პროპორციულია, სადაც $k$ რომელიმე, ნულისაგან განსხვავებული რიცხვია.

ეს, რასაკვირველია, უშუალოდაც ცხადია, ვინაიდან (1) განტოლების ორივე მხრის ნებისმიერ $k$ რიცხვზე გაყოფით ($k\neq 0$) მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{x-x_0}{kX}=\frac{y-y_0}{kY}, \tag{1a}$$

რომელიც (1) განტოლების ტოლფასია.

ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ იმ $\Delta$ წრფის მიმართულება, რომელიც (1) განტოლებით განისაზღვრება, დამოკიდებულია თვით $X$ და $Y$ სიდიდეებზე კი არა, არამედ მათ ფარდობაზე, მაგალითად, ფარდობაზე:

$$a=\frac{Y}{X}; \tag{2}$$

ამ ფარდობას ეწოდება აღებული წრფის საკუთხო კოეფიციენტი; ვინაიდან იგი განსაზღვრავს წრფის მიმართულებას, და, მაშასადამე, იმ კუთხესაც, რომელსაც წრფე შეადგენს $Ox$ ღერძთან (იხ. კიდევ შემდეგი პარაგრაფი).

თუ დავუბრუნდებით (1) განტოლებას, შევნიშნავთ, რომ აქედან შეგვიძლია მივიღოთ ჩვენი წრფის მეტად მარტივი პარამეტრული წარმოდგენა. მართლაც, თუ $t$-თი აღვნიშნავთ (1) ფარდობათა საერთო ღირებულებას, ე. ი., თუ $\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=t$, მივიღებთ:

$$x=x_0+Xt,\quad y=y_0+Yt; \tag{3}$$

სწორედ ეს არის წრფის პარამეტრული წარმოდგენა; $t$ პარამეტრს აქვს მეტად მარტივი გეომეტრიული მნიშვნელობა, სახელდობრ, თვით განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ $t$ ტოლია $\overline{M_0M}$ და $\vec{P}$ პარალელური ვექტორების ფარდობა (იხ. გვ. 100).

ნებისმიერი სიგრძის $\vec{P}$ ვექტორის მაგიერ ჩვენ, რასაკვირველია, შეგვეძლია ავიღოთ ორტი, რომელიც $\vec{e}$-თი აღვნიშნოთ; ამ ორტის კოორდინატე-

ბი აღვნიშნოთ $l$ და $m$-ით, ე. ი. მივიღოთ:

$$\vec{e}=(l,\ m).$$

$l$ და $m$ სიდიდეებს ვუწოდებთ აღებული წრფის მიმართულების კოორდინატებს [1]). წრფის განტოლება ამ შემთხვევაში ასე დაიწერება:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}; \tag{4}$$

ამ განტოლებას ჩვენ ვუწოდებთ განტოლებას მიმართულების კოორდინატებში.

$\vec{e}$ ორტის გამოყენების შემთხვევაში (ნებისმიერი სიგრძის ვექტორის მაგიერ) პარამეტრული წარმოდგენა (3) მიიღებს სახეს:

$$x=x_0+lt,\ y=y_0+mt; \tag{5}$$

ამ შემთხვევაში $t$ პარამეტრი წარმოადგენს $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორის ალგებრულ სიდიდეს $\vec{e}$-ს გასწვრივ, ე. ი. ცვლადი $M$ წერტილის მანძილს მუდმივ $M_0$ წერტილამდე, გარკვეული ნიშნით განხილულს.

შენიშვნა. თუ $\Delta$ წრფე ერთ-ერთი საკოორდინატო ღერძის პარალელურია, მაშინ ერთ-ერთი კოეფიციენტი $X$ ან $Y$ ნულის ტოლია, ვინაიდან $\vec{P}$ ვექტორი ერთ-ერთი ღერძის პარალელური უნდა იყოს. თუ, მაგალითად, $\Delta$ პარალელურია $Oy$ ღერძისა, მაშინ $X=0$ და (1) განტოლება შემდეგ სახეს ღებულობს:

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{Y};$$

ეს უკანასკნელი განტოლება. § 37-ში ნათქვამის ძალით, უნდა გვესმოდეს, როგორც ტოლფასი $x-x_0=0$ განტოლებისა; მასთან $y-y_0$ სრულიად ნებისმიერი რჩება.

მაშასადამე, $Oy$ ღერძის პარალელური წრფის განტოლებას შემდეგი სახე აქვს:

$$x-c=0, \tag{6}$$

სადაც $c=x_0$ აღნიშნავს წრფისა და $Ox$ ღერძის გადაკვეთის წერტილის აბსცისს (ეს შედეგი ჩვენ უკვე მივიღეთ § 30-ში; იქ ჩვენ ვგულისხმობდით კოორდინატებს მართკუთხოვნად, რაც, რასაკვირველია, ამ შემთხვევაში არსებითი არ არის).

ანალოგიურ განტოლებას მივიღებთ $Ox$ ღერძის პარალელური წრფისათვის.

---

[1]) ვინაიდან ორტი $\vec{e}$ შეიძლება შევცვალოთ ორტით $-\vec{e}=(-l,\ -m)$, ამიტომ თუ $l$, $m$ წრფის მიმართულების კოორდინატებია, მაშინ $(-l,\ -m)$-იც იმავე წრფის მიმართულების კოორდინატები იქნებიან.

### სავარჯიშო მაგალითები

1. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის წერტილზე (0, 3) და პარალელურია ვექტორისა (2, 5).

პასუხი: $\frac{x}{2}=\frac{y-3}{5}$.

2. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის წერტილზე (3, —1) და პარალელურია ვექტორისა (5, 0).

პასუხი: $\frac{x-3}{5}=\frac{y+1}{0}$ ე. ი. (იხ. ზემოთ შენიშვნა) $y+1=0$.

**§ 89. წრფის დაყვანილი განტოლება.** ახლა წარმოვიდგინოთ, რომ $\Delta$. წრფე არ არის $Oy$ ღერძის პარალელური, ე. ი. რომ წინა პარაგრაფის (1) განტოლებაში $X\neq 0$. მაშინ ეს განტოლება, $Y$-ზე გამრავლებით, შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$y-y_0=a(x-x_0), \tag{1}$$

სადაც სიმოკლისათვის შემოღებულია აღნიშვნა:

$$a=\frac{Y}{X}. \tag{2}$$

(1) განტოლება შეიძლება კიდევ ასე გადაიწეროს:

$$y=ax+b, \tag{3}$$

სადაც $b=y_0-ax_0$ მუდმივი სიდიდეა.

(3) განტოლებას ეწოდება წრფის დაყვანილი ანუ უმარტივესი განტოლება[1]).

მეტად მნიშვნელოვანია და კარგად უნდა დავიხსომოთ (3) განტოლების $a$ და $b$ კოეფიციენტების გეომეტრიული მნიშვნელობა. თუ $x=0$, მაშინ, როგორც ამას (3) განტოლება გვიჩვენებს, $y=b$. მაშასადამე, $b$ არის ჩვენი წრფისა და $Oy$ ღერძის გადაკვეთის წერტილის ორდინატი, ანუ როგორც ამბობენ, საწყისი ორდინატი (ჩვენ უკვე შემოვიღეთ ეს ცნება § 80-ში).

რაც შეეხება $a$ კოეფიციენტს, როგორც უკვე წინა პარაგრაფში ვთქვით, იგი განსაზღვრავს ჩვენი წრფის მიმართულებას და იწოდება საკუთხო კოეფიციენტად.

მართკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაში, როგორც უკვე § 80-ში იყო ნაჩვენები გვაქვს:

$$a=\operatorname{tg}\alpha, \tag{4}$$

სადაც $\alpha$ არის კუთხე წრფესა და $Ox$ ღერძს შორის. გამოვიყვანოთ კიდევ ერთხელ ეს მნიშვნელოვანი დამოკიდებულება (2) ფორმულის გამოყენებით.

[1]) ის უკვე მიღებული იყო § 76-ში, თუმცა იქ კოორდინატებს მართკუთხოვნად გვულისხმობდით.

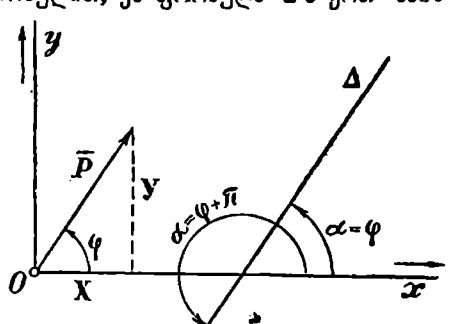
და ამასთანავე ცოტათი უფრო დაწვრილებით შევეხოთ კუთხის ათვლის საკითხს. ამ კუთხის ათვლას ჩვენ ვახდენთ $Ox$ ღერძიდან და მას მივაწერთ ნიშანს ათვლის მიმართულების მიხედვით [1]).

თუ $\varphi$ აღნიშნავს $P$ ვექტორის მიერ $Ox$ ღერძთან შედგენილ კუთხეს, მაშინ ცხადია, რომ $\alpha$ კუთხედ ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ $\varphi$ კუთხეც და $(\varphi+\pi)$ კუთხეც (ან, საზოგადოდ, კუთხე $\varphi+k\pi$, სადაც $k$ მთელი რიცხვია).

ეს იმიტომ ხდება, რომ წრფეს (წინააღმდეგ ღერძის ან ვექტორის თვისებისა) არა აქვს გარკვეული დადებითი მიმართულება, რის გამო $\varphi$-ს შეცვლა $\varphi+\pi$-თ იმავე მიმართულების წრფეს გვაძლევს.

ახლა დავუბრუნდეთ გამოსახულებას $a=-\frac{Y}{X}$. ვინაიდან $X$ და $Y$ არიან $\bar{P}$ ვექტორის კოორდინატები, ამიტომ, როგორც ეს § 42-დან ვიცით (და როგორც ეს 91 ნახაზიდან ჩანს), $a=-\frac{Y}{X}=\operatorname{tg}\varphi$; მაგრამ ვინაიდან $\varphi$ და $\alpha$ შეიძლება ურთიერთგანსხვავდებოდნენ $\pi$-ს ჯერადით, ხოლო $\operatorname{tg}\varphi$ ფუნქციას სწორედ $\pi$ აქვს პერიოდად, ამიტომ $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\alpha$ და ჩვენ ამით (4) ფორმულას ვღებულობთ.

მაშასადამე, თუ მოცემულია საკუთხო კოეფიციენტი $a$, მაშინ $\alpha$ კუთხე შეიძლება გამოთვლილი იყოს (4) ფორმულით; ეს ფორმულა $\alpha$-ს ერთ მნიშვნელობას კი არ გვაძლევს, არამედ $k\pi$ სახის შესაკრებით განსხვავებულ მნიშვნელობათა უსასრულო სიმრავლეს; ეს შესაკრები ვერავითარ გავლენას ვერ ახდენს $\Delta$-ს მიმართულებაზე; ამიტომ ყოველთვის შეგვიძლია დავკმაყოფილდეთ ამ მნიშვნელობათაგან ნებისმიერის გამოთვლით, მაგალითად, იმ მნიშვნელობისა, რომელიც $O$ და $\pi$-ს შორის იმყოფება.



ნახ. 91.

ზოგადი სახის დეკარტის კოორდინატთა შემთხვევაში საკუთხო კოეფიციენტისათვის გვექნება ფორმულა:

$$a=\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\nu-\alpha)} \tag{5}$$

სადაც, ისე, როგორც ზემოთ, $\alpha$ არის $\Delta$ წრფესა და $Ox$ ღერძს შორის კუთხე, რომელიც ათვლილია $Ox$ ღერძიდან; $\nu$ არის საკოორდინატო კუთხე, $|\vec{u}|$

[1]) დადებითი კუთხეების ათვლის მიმართულება, ჩვენი შეთანხმების ძალით, არის ის, რომელიც უმოკლესი გზით მიგვიყვანს $Ox$ ღერძიდან $Oy$ ღერძამდე.

და $|\vec{v}|$ შესაბამისად $Ox$ და $Oy$ ღერძების საკოორდინატო ვექტორთა სიგრძეებია. მკითხველს ვანდობთ ამ ფორმულის დამტკიცებას; იხ. ნახ. 92, სადაც $X$ და $Y$ ასოებით აღნიშნულია ნაკვეთები, რომელთა ალგებრული მნიშვნელობანია $|\vec{u}|X$ და $|\vec{v}|Y$.

თუ მოცემულია დაყვანილი განტოლება $y=ax+b$, მას ყოველთვის შეიძლება მიეცეს იმ განტოლების სახე, რომელსაც ჩვენ ვუწოდეთ განტოლება მიმართულების კოეფიციენტებში. ამისათვის საკმარისია დაეწეროთ მოცემული განტოლება შემდეგი სახით:

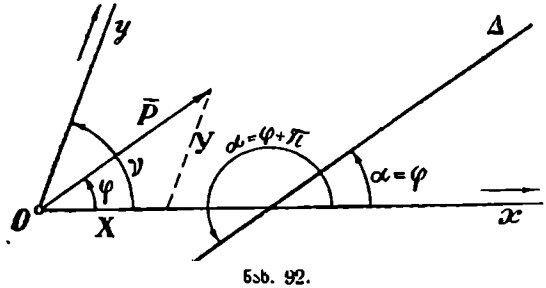
$$x=\frac{y-b}{a},$$

ანუ

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-b}{a}; \qquad (6)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ აღებულმა განტოლებამ მართლაც საძიებელი სახე მიიღო; ამ შემთხვევაში მიმართულების კოეფიციენტები იქნებიან $X=1$ და $Y=a$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. როცა დაყვანილი განტოლება გამოგვყავდა, ჩვენ ეგულისხმობდით, რომ წრფე არ არის $Oy$-ის პარალელური, ე. ი., $X\neq 0$. თუ $X=0$, მაშინ, რასაკვირველია, წრფის განტოლებას ვერ მივცემთ სახეს $y=ax+b$, ვინაიდან ამ შემთხვევაში მისი განტოლება იქნება $x=c$ (იხ. წინა პარაგრაფი). გამოსახულება $a=\frac{Y}{X}$ კარგავს



ნახ. 92.

აზრს (უსასრულოდ იქცევა). მაგრამ ამ შემთხვევაშიაც ხანდახან ხელსაყრელია, თუ ვილაპარაკებთ უსასრულობის ტოლ საკუთხო კოეფიციენტზე.

§ 90. წრფის ზოგადი განტოლება. ჩვენ დავინახეთ, რომ $Oy$ ღერძის არაპარალელური ყოველი წრფის განტოლება შეიძლება შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ: $y-ax-b=0$, ხოლო თუ ის პარალელურია $Oy$ ღერძისა, მაშინ შემდეგი სახით: $x-c=0$. ორივე ეს განტოლება წარმოადგენს შემდეგი განტოლების კერძო სახეს:

$$Ax+By+C=0, \qquad (1)$$

რომელიც პირველი ხარისხის განტოლების ზოგადი სახეა.

ადვილი გასაგებია, რომ, პირიქით, (1) სახის ყოველი განტოლება გარკვეული წრფის განტოლება იქნება.

ჩვენ, რასაკვირველია, ვგულისხმობთ, რომ $A$ და $B$ კოეფიციენტები ერთდროულად ორივე ნულის ტოლი არაა, სხვანაირად რომ ყოფილიყო, (1) განტოლება არ შეიცავდა $x$ და $y$ ცვლადებს და, ამგვარად, ვერავითარ დამოკიდებულებას ვერ გამოსახავდა მათ შორის.

განვიხილოთ შესაძლებელი ორი შემთხვევა:

1. ვთქვათ ჯერ, რომ $B \neq 0$. მაშინ (1) განტოლება შეიძლება ამოიხსნას $y$-ის მიმართ, რაც მოგვცემს:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

ანუ

$$y = ax + b, \tag{2}$$

სადაც

$$a = -\frac{A}{B},\ b = -\frac{C}{B}.$$

ამრიგად, ჩვენი განტოლება (1) არის იმ წრფის განტოლება, რომლის საწყისი ორდინატია $b$, ხოლო საკუთხო კოეფიციენტი $a$.

2. ახლა ვთქვათ, $B = 0$. მაშინ განტოლება მიიღებს სახეს:

$Ax + C = 0$, ანუ, ვინაიდან $A \neq 0$, $x = c$, სადაც $c = -\frac{C}{A}$.

ცხადია, რომ განტოლება $x - c = 0$ გამოსახავს $Oy$ ღერძის პარალელურ წრფეს, რომლის $Ox$ ღერძთან გადაკვეთის წერტილის აბსცისი არის $c$.

მაშასადამე, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ ყოველი წრფე პირველი ხარისხის განტოლებით გამოისახება და, პირიქით, ყოველი პირველი ხარისხის განტოლება წრფეს გამოსახავს.

(1) სახის განტოლებას ეწოდება **წრფის განტოლება ზოგადი სახით**. ზემოხსენებულიდან აშკარად ჩანს, როგორ დავიყვანოთ წრფის ზოგადი განტოლება უმარტივეს (დაყვანილ) სახემდე. ამისათვის საკმარისია ამოვხსნათ იგი $y$-ის მიმართ, თუ $B \neq 0$. თუკი $B = 0$, მაშინ განტოლება დაიყვანება შემდეგ სახეზე: $x - c = 0$.

დაყვანილი სახიდან, თავის მხრივ, ყოველთვის შეიძლება გადავიდეთ განტოლებაზე მიმართულების კოეფიციენტებში, როგორც ეს ნაჩვენებია წინა პარაგრაფის ბოლოში [იხ. ფორმულა (6)].

**შენიშვნა.** ჩვენ გამოვტოვეთ ის შემთხვევა, როცა $A = B = 0$. თუ ამას ადგილი აქვს, მაშინ (1) განტოლება შემდეგ სახეზე დაიყვანება:

$$C = 0.$$

თუ $C$ განსხვავდება ნულისგან, მაშინ წინა განტოლება ვერ დაკმაყოფილდება $x$ და $y$ ვერავითარი სასრული მნიშვნელობებით, ე. ი. ის არავითარ გეომეტრიულ ადგილს არ გამოსახავს (ელემენტარული გეომეტრიის

თვალსაზრისით). მაგრამ ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ წირი განტოლება გამოსახავს უსასრულოდ-შორეულ ანუ არასაკუთრივ წრფეს (იხ. თავი VI).

ასეთი „არასაკუთრივი წრფე“ ითვლება ყოველი სხვა წრფის პარალელურად, მოცემულ სიბრტყეზე. შემდეგში, ყველგან, თუ საწინააღმდეგო არ იქნება ნათქვამი, ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ წრფის განტოლებაში $A$ და $B$ კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც ნულისაგან განსხვავებულია.

ზოგჯერ აზრი აქვს იმ შემთხვევის განხილვასაც, როცა $A=B=C=0$; ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ განტოლება წარმოადგენს „გაურკვეველ“ წრფეს.

**სავარჯიშო მაგალითები**

1. დაიყვანეთ წრფის განტოლება $2x+2y-5=0$ უმარტივეს სახეზე.

პასუხი: $y=-x+\frac{5}{2}$.

2. დაიყვანეთ განტოლება $3x-5y+1=0$ უმარტივეს სახეზე და შემდეგ მიმართულების კოეფიციენტებიან სახემდე.

პასუხი: უმარტივესი (დაყვანილი) განტოლება იქნება:

$$y=\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}.$$

ერთ-ერთი სახე მიმართულების კოეფიციენტებიანი განტოლებისა იქნება:

$$\frac{y-\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{x-0}{1},$$

ანუ

$$\frac{x-0}{5}=\frac{y-\frac{1}{5}}{3}.$$

3) თუ კოორდინატებს მართკუთხოვნად ვიგულისხმებთ, იპოვეთ კუთხე: შედგენილი 1 მაგალითის წრფის მიერ $Ox$ ღერძთან:

პასუხი: $\alpha=-\frac{\pi}{4}$ ან, რაც იმავეზე დაყვანება:

$\alpha=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$; უფრო ზოგადად: $\alpha=\frac{3\pi}{4}+k\pi$.

**§ 91. წრფის ზოგადი განტოლების კერძო შემთხვევები.** თუ წრფის ზოგად განტოლებაში $Ax+By+C=0$. ერთ-ერთი კოეფიციენტი ნულია, ეს წრფის მდებარეობის გარკვეულ თავისებურებას ახასიათებს, რაზედაც ჩვენ აქ შევჩერდებით.

1. თუ ზოგად განტოლებაში $C=0$, მაშინ განტოლებას შემდეგი სახე ეძლევა: $Ax+By=0$.

სათანადო წრფე კოორდინატთა სათავეზე გადის, ვინაიდან უკანასკნელი განტოლება კმაყოფილდება შემდეგი მნიშვნელობებით: $x=0$, $y=0$.

2. თუ ზოგად განტოლებაში $B=0$, მაშინ იგი შემდეგ სახეზე დაიყვანება: $x=-\frac{C}{A}$, ე. ი. სათანადო წრფე $Oy$ ღერძის პარალელურია, როგორც უკვე აღვნიშნეთ წინა პარაგრაფში.

3. თუ ზოგად განტოლებაში $A=0$, იგი შემდეგ სახეზე დაიყვანება: $y=-\frac{C}{B}$ და სათანადო წრფე $Ox$ ღერძის პარალელური იქნება.

აღვნიშნოთ კიდევ, რომ თვით $Ox$ ღერძის განტოლებაა

$$y=0,$$

ხოლო $Oy$ ღერძის განტოლება არის

$$x=0.$$

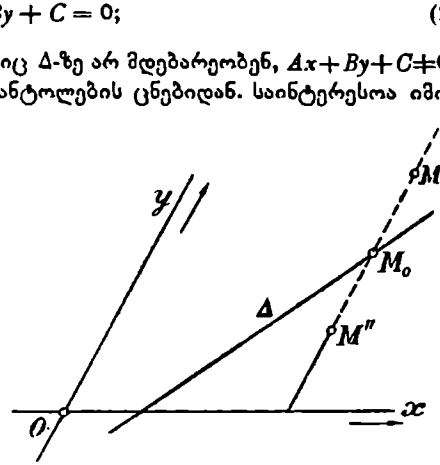
**§ 93. $Ax+By+C$ სამწევრის ნიშანი.** სამწევრი

$$Ax+By+C \tag{1}$$

ნული ხდება მხოლოდ მაშინ, როცა $(x, y)$ წერტილი ძევს $\Delta$ წრფეზე, რომლის განტოლება არის:

$$Ax+By+C=0; \tag{2}$$

ხოლო იმ წერტილთათვის, რომლებიც $\Delta$-ზე არ მდებარეობენ, $Ax+By+C\neq 0$; ეს გამომდინარეობს თვით წრფის განტოლების ცნებიდან. საინტერესოა იმის გამოკვლევა, თუ რა ნიშანს ღებულობს (1) სამწევრი სიბრტყის სხვადასხვა $M(x, y)$ წერტილთათვის.



ნახ. 93.

$\Delta$ წრფე ყოფს მთელ სიბრტყეს ორ ნაწილად. სანამ $M(x, y)$ წერტილი იმყოფება ერთ-ერთ ამ ნაწილში, (1) სამწევრი ინარჩუნებს მუდმივ ნიშანს, ვინაიდან ნიშნის შეცვლა მოპირდაპირეზე მას შეუძლია მხოლოდ წინასწარ ნულად გადაქცევით, ეს კი შეიძლება მხოლოდ მაშინ, როცა $M(x, y)$ წერტილი $\Delta$ წრფეზე მოხვდება. ახლა დავამტკიცოთ, რომ წრფის სხვადასხვა მხარეზე სამწევრს მოპირდაპირე ნიშანი აქვს. მართლაც, ვთქვათ, გარკვეულობისათვის, რომ $B>0$. გავავლოთ რომელიმე წრფე, პარალელური $Oy$ ღერძისა, რომელიც უთუოდ გადაკვეთს აღებულ $\Delta$ წრფეს[1]) რაღაც $M_0(x_0, y_0)$ წერტილში, და გავლებულ წრფეზე ავარჩიოთ კიდევ ორი წერტილი $M'(x_0, y')$

[1]) ვინაიდან, თუ $B\neq 0$, $\Delta$ წრფე $Oy$ ღერძის არაპარალელურია.

და $M''(x_0, y'')$ ისე, რომ $y' > y_0$ და $y'' < y_0$ (ნახ. 93). ვინაიდან $M_0(x_0, y_0)$ წერტილი $\Delta$ წრფეზე ძევს, მისი კოორდინატები (1) სამწევრს ნულად აქცევენ; ე. ი.: $Ax_0 + By_0 + C = 0$. თუ ამ ტოლობაში $y_0$-ს შევცვლით მეტი სიდიდით $y'$, ცხადია, ტოლობა დაირღვევა, და გვექნება: $Ax_0 + By' + C > 0$ (ვინაიდან $B > 0$); სრულიად ასევე $Ax_0 + By'' + C < 0$, ეს კი ამტკიცებს, რომ $\Delta$ წრფის სხვადასხვა მხარეზე (1) სამწევრი მოპირდაპირე ნიშნებს ღებულობს.

ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ $B > 0$; თუ $B < 0$, მაშინ ორ უკანასკნელ უტოლობაში უტოლობათა ნიშნები უნდა შებრუნდნენ და მიღებული შედეგი ძალაში დარჩება. ბოლოს, თუ $B = 0$, მაშინ უთუოდ $A$ ნულის ტოლი არ არის და ჩვენი მსჯელობა ძალაში დარჩება, თუ $Ox$ და $Oy$ ღერძებს როლებს შევუცვლით.

ვთქვათ, მაგალითად, მოცემულია წრფე:

$$2x + y - 3 = 0. \tag{3}$$

თუ სამწევრში

$$2x + y - 3$$

შევიტანთ სათავის კოორდინატებს (ე. ი. $x = 0$, $y = 0$), მას მიეცემა უარყოფითი მნიშვნელობა ($-3$). მაშასადამე, ყოველი იმ წერტილისათვის, რომელიც წრფის იმავე მხარეზე იმყოფება, რაც სათავე, გვექნება $2x + y - 3 < 0$; ხოლო მეორე მხარეზე მდებარე წერტილთათვის, $2x + y - 3 > 0$. მაგალითად, ვინაიდან $M(5, 3)$ წერტილის კოორდინატები (4) სამწევრს აქცევენ დადებით სიდიდედ: $2 \cdot 5 + 3 - 3 = 10$, ამიტომ $M$ წერტილი და კოორდინატთა სათავე $\Delta$ წრფის სხვადასხვა მხარეზე იმყოფებიან.

საზოგადოდ, ამ პარაგრაფში ნათქვამი, ცხადია, შესაძლებლობას გვაძლევს პირდაპირ გადავწყვიტოთ, ძევს თუ არა ორი მოცემული წერტილი აღებული წრფის ერთსა და იმავე მხარეზე, თუ სხვადასხვა მხარეზე.

#### ხავარჯიშო მაგალითები

1. დაამტკიცეთ, რომ წერტილები $(5, -1)$ და $(2, 3)$ იმყოფებიან $x + 2y - 1 = 0$ წრფის ერთ მხარეზე, ხოლო წერტილი $(1, -5)$ მეორე მხარეზე.

2. დაამტკიცეთ, რომ წრფე: $y = 2x + 1$ კვეთს $A(-2, 2)$ და $B(4, 1)$ წერტილზე გამავალ წრფეს $A$ და $B$ წ ე რ ტ ი ლ ე ბ ს შ ო რ ი ს.

ააგეთ უჯრედებიანი ქაღალდის საშუალებით ხსენებული წერტილები [თუ კოორდინატებს მართკუთხოვნად ვიგულისხმებთ] და შეამოწმეთ შედეგი ნახაზზე.

**§ 98. განტოლება ღერძთა ნაკვეთებში.** საჭიროა აღვნიშნოთ წრფის განტოლების კიდევ ერთი სახე, რომელზედაც შეიძლება დავიყვანოთ ზოგადი განტოლება:

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

იმ შემთხვევაში, როცა $C \neq 0$.

სახელდობრ, მისი ორივე ნაწილის $C$-ზე გაყოფით და აღნიშვნების შემოღებით:

$$-\frac{A}{C} = \frac{1}{p}, \quad -\frac{B}{C} = \frac{1}{q}, \tag{2}$$

მას შემდეგნაირად გადაეწერთ:

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1. \tag{3}$$

ამ მიტად სიმეტრიულ განტოლებაში $p$ და $q$ სიდიდეებს ძალიან მარტივი გეომეტრიული მნიშვნელობა აქვთ: სახელდობრ, $p$ არის ის ნაკვეთი, რომელსაც განსახილველი წრფე $Ox$ ღერძზე მოკვეთს და რომელიც გაზომილია ერთეულით $|\vec{u}|$ ($Ox$ ღერძის საკოორდინატო ვექტორის სიგრძით); $q$ არის ნაკვეთი, რომელსაც წრფე მოკვეთს $Oy$ ღერძს და რომელიც გაზომილია ერთეულით $|\vec{v}|$ ($Oy$ ღერძის საკოორდინატო ვექტორის სიგრძით); ნაგულისხმევია, რომ ორივე ამ ნაკვეთისათვის მიწერილია ნიშნები [1]).

მართლაც, ვიპოვოთ (3) განტოლებით გამოსახული წრფის ღერძთან გადაკვეთის წერტილი, სხვანაირად რომ ვთქვათ, ვიპოვოთ (3) წრფის ის წერტილი, რომლის $y$ ორდინატი ნულია. თუ (3) განტოლებაში შევიტანთ $y=0$. მივიღებთ: $\frac{x}{p}=1$, ე. ი. $x=p$, როგორც ეს უკვე ნათქვამი იყო; სრულიად ასევე დავამტკიცებთ დებულებას $q$-ს მიმართ.

ღებულობენ რა მხედველობაში $p$ და $q$ კოეფიციენტების ახლახან აღნიშნულ გეომეტრიულ მნიშვნელობას, (3) განტოლებას უწოდებენ წრფის **განტოლებას ღერძთა ნაკვეთებში.**

**შენიშვნა.** თუ $A$ კოეფიციენტი ზოგად განტოლებაში ნულია, მაშინ (2)-ის ძალით, $\frac{1}{p}=0$ (ე. ი. $p=\infty$) და (3) განტოლება ღებულობს სახეს: $\frac{y}{q}=1$; ეს განტოლება, როგორც მოსალოდნელი იყო, გამოსახავს $Ox$ ღერძის პარალელურ იმ წრფეს, რომელიც $Oy$ ღერძზე $q$ ნაკვეთს მოსჭრის (გაზომილს $|\vec{v}|$ ერთეულით). ამ შემთხვევაშიაც შეიძლება ითქვას, რომ წრფე მოსჭრის საკოორდინატო ღერძებზე ნაკვეთებს $p=\infty$ და $q$-ს.

ანალოგიური შენიშვნა შეეხება იმ შემთხვევასაც, როცა $B=0$.

**§ 94. წრფის აგება მოცემული განტოლების მიხედვით.** წინა პარაგრაფის (3) განტოლებით გამოსახული წრფე მარტივად აიგება. ამისათვის საკმარისია მოვზომოთ კოორდინატთა სათავიდან სათანადო ღერძებზე ნაკვეთები, რომელთა ალგებრული მნიშვნელობებია: $|\vec{u}|p$ და $|\vec{v}|q$, და შევაერთოთ მათი ბოლოები წრფით.

თუ წრფე მოცემულია ზოგადი სახის განტოლებით, რომელშიაც არც ერთი კოეფიციენტი ნული არაა, საკმარისია ეს განტოლება ზემოხსენებულ სახეზე დავიყვანოთ, რომ აღნიშნული აგების გამოყენება შესაძლო გახდეს.

---

[1]) ამ ნაკვეთების ალგებრული მნიშვნელობები $|\vec{u}|p$ და $|\vec{v}|q$-ს ტოლია. არაგანზოგადებულ კოორდინატებში კი $p$ და $q$-ს ტოლია.

განვიხილოთ, მაგალითად, წრფე, რომელიც მოცემულია არაგანზოგადებულ კოორდინატებში $x-3y-6=0$; თუ ორივე მხარეს 6-ზე გავყოფთ და ერთეულს გადავიტანთ განტოლების მარჯვენა მხარეზე, მივიღებთ: $\frac{x}{6}+\frac{y}{-2}=1$; მაშასადამე, წრფე მოსჭრის $Ox$ ღერძზე ნაკვეთს ზომით 6, ხოლო $Oy$ ღერძზე ნაკვეთს $(-2)$.

თუ ზოგადი განტოლების ერთ-ერთი კოეფიციენტი $A$ ან $B$ ნულის ტოლია, მაშინ წრფე ერთ-ერთი ღერძის პარალელურია და ამიტომ მისი აგებაც ადვილია.

თუ, ბოლოს, $C=0$, მაშინ წრფე გაივლის სათავეზე; მისი აგებისათვის საკმარისია კიდევ ერთი რომელიმე მისი წერტილი ავაგოთ; ამისათვის შეიძლება ამ წერტილის აბსცისი ჩვენის ნებით დავასახელოთ და განტოლებიდან სათანადო ორდინატი გამოვითვალოთ. მაგალითად, თუ მოცემულია წრფის განტოლება: $3x-4y=0$, მაშინ, თუ აქარჩევთ $x=4$, მივიღებთ $y=3$. ამიტომ წრფე გაივლის სათავეზე და (4, 3) წერტილზე.

საზოგადოდ, განტოლებით მოცემული წრფის ასაგებად საკმარისია რომელიმე ორი მისი წერტილის პოვნა, როგორც უკვე აღვნიშნეთ § 80-ში.

**§ 95. ზოგადი განტოლების $A$ და $B$ კოეფიციენტის გეომეტრიული მნიშვნელობა.** დავუბრუნდეთ წრფის ზოგადი სახის განტოლებას:

$$Ax+By+C=0; \tag{1}$$

ჩვენი მიზანია მივუთითოთ $A$ და $B$ კოეფიციენტების მეტად მარტივ გეომეტრიულ მნიშვნელობაზე, რაც ძალიან გააადვილებს მრავალი ამოცანის ამოხსნას. სახელდობრ, თუ დროებით ჩავთვლით $B\neq 0$ და ამოვხსნით (1) განტოლების $y$-ის მიმართ, მივიღებთ დაყვანილ განტოლებას:

$$y=ax+b, \tag{2}$$

სადაც საკუთხო კოეფიციენტი $a=-\frac{A}{B}$. მეორეს მხრივ, ჩვენ ვიცით (§ 89), რომ $a=\frac{Y}{X}$, სადაც $X$, $Y$ აღნიშნავენ ჩვენი წრფის მიმართულების ვექტორის კოორდინატებს. მაშასადამე:

$$-\frac{A}{B}=\frac{Y}{X} \text{ ანუ } \frac{X}{B}=-\frac{Y}{A}. \tag{3}$$

ახლა განვიხილოთ ვექტორი, რომლის კოორდინატები არიან $B$ და $-A$, ე. ი. ვექტორი $(B, -A)$. როგორც (3) ფორმულები გვიჩვენებენ, ეს ვექტორი აღებული წრფის მიმართულების ვექტორის პარალელურია და, მაშასადამე, თვით ამ წრფისაც.

ამგვარად, გვაქვს შემდეგი დებულება: $(B, -A)$ ვექტორი პარალელურია (1) განტოლებით წარმოდგენილი წრფისა.

ვინაიდან წრფის მიმართულების ვექტორად შეიძლება ავარჩიოთ ნებისმიერი ვექტორი, მისი პარალელური, ამიტომ ყოველთვის შეგვიძლია ჩავ-

თვალოთ, რომ ვექტორი $\vec{P}(B, -A)$ არის (1) განტოლებით წარმოდგენილი წრფის მიმართულების ვექტორი. ცხადია, რომ იმაეე მოსაზრებით შეგვიძლია ავიღოთ ვექტორი: $-\vec{P}(-B, A)$.

ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ $B \neq 0$. მაგრამ აშკარაა, რომ იმ შემთხვევაშიაც, როცა $B=0$, შედეგი მართებული რჩება [1]).

შეიძლება $A$, $B$ კოეფიციენტების კიდევ მეორენაირი გეომეტრიული მნიშვნელობა აღვნიშნოთ, რომელსაც წინაალმდეგ პირველისა, ადგილი აქვს მხოლოდ მართკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაში. სახელდობრ, ადვილი გამოსარკვევია, რომ ამ შემთხვევაში $\vec{Q}$ ვექტორი, რომელსაც კოორდინატებად აქვს $A$ და $B$, ე. ი. ვექტორი $\vec{Q}=(A, B)$, (1) განტოლებით წარმოდგენილი წრფის მართობია.

მართლაც, $\vec{P}\cdot\vec{Q}=B\cdot A+(-A)\cdot B=0$, ე. ი. $\vec{Q}$ ვექტორი $\vec{P}$ ვექტორის მართობია, რის დამტკიცებაც გვსურდა.

ეს შედეგი მართებული დარჩება განზოგადებულ დეკარტის კოორდინატების შემთხვევაშიაც, თუ მას ასე ჩამოვაყალიბებთ: $\vec{Q}$ ვექტორი, რომლის კოვარიანტული კოორდინატები არიან $A$ და $B$, მართობია (1) წრფისა.

დამტკიცებისათვის საკმარისია გავიხსენოთ ვექტორთა სკალარული ნამრავლის ფორმულა განზოგადებულ კოორდინატებში (§ 56), საიდანაც ისევ გამომდინარეობს, რომ $\vec{P}\cdot\vec{Q}=0$. ისე, როგორც ზემოთ ვგულისხმობთ, რომ $\vec{P}=(B, -A)$ არის ვექტორი, რომლის ჩვეულებრივი (კონტრავარიანტული) კოორდინატები არიან $B$ და $-A$.

**§ 96. წრფის ნორმალური განტოლება.** თუ კოორდინატებს მართკუთხოვნად ვიგულისხმებთ და $\vec{Q}=(A, B)$ ვექტორის ზემოაღნიშნული თვისებით ვისარგებლებთ, შეგვიძლია წრფის განტოლებას

$$Ax+By+C=0 \tag{1}$$

მივცეთ სახე, რომელიც ყურადღების ღირსია. სახელდობრ, თუ (1) განტოლებას გავამრავლებთ რაღაც $\lambda$ მამრავლზე (ნულისაგან განსხვავებულზე), ე. ი. თუ გადავწერთ მას შემდეგი სახით:

$$\lambda Ax+\lambda By+\lambda C=0, \tag{2}$$

ყოველთვის შეგვიძლია მივაღწიოთ იმას, რომ ვექტორი $V=(\lambda A, \lambda B)$, რომელიც წინა პარაგრაფის თანახმად, აღებული წრფის პერპენდიკულარია, იყოს ორტი. ამისათვის საკმარისია $\lambda$ ისე ავარჩიოთ, რომ: $(\lambda A)^2+(\lambda B)^2=1$, ე. ი.

$$\lambda=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{3}$$

რადიკალის წინ გარკვეულ ნიშანზე რომ შევჩერდეთ, შევთანხმდეთ მის ისეთს შერჩევაზე, რომ ნამრავლი $\lambda C$ უარყოფითი სიდიდე იყოს (ამ პირო-

[1]) მართლაც, ამ შემთხვევაში $\vec{P}=(0, -A)$ ვექტორი $Oy$ ღერძის პარალელურია, ისე როგორც მოცემული წრფე $Ax+C=0$.

ბის გეომეტრიული მნიშვნელობა ქვემოთ იქნება გამორკვეული); იმ შემთხვევაში კი, როცა $C=0$, ნიშანს რადიკალის წინ ნებისმიერად ავარჩევთ.

თუ $\psi$-ით აღვნიშნავთ კუთხეს, რომელსაც ორტი $\vec{V}=(\lambda A, \lambda B)$ შეადგენს $Ox$ ღერძთან (ეს კუთხე აითვლება ამ ღერძიდან), ხოლო $(-p)$-თი აღვნიშნავთ $\lambda C$ ნამრავლს, მივიღებთ:

$$\lambda A=\cos\psi,\ \lambda B=\sin\psi,\ \lambda C=-p \tag{4}$$

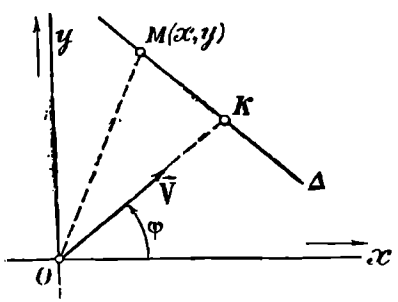
და (2) განტოლებას შემდეგი სახე მიეცემა:

$$x\cos\psi+y\sin\psi-p=0. \tag{5}$$

უკანასკნელ განტოლებას ეწოდება წრფის განტოლება ნორმალური სახით (Hesse-ს ნორმალური სახე).

ჩვენ ვიცით, რომ ვექტორი $\vec{V}=(\cos\psi, \sin\psi)$ აღებული $\Delta$ წრფის მართობია. დავამტკიცოთ, რომ, $\lambda$-ს ნიშნის შესახებ შეთანხმების მიხედვით (როცა $C\neq 0$). $\vec{V}$ ვექტორი, თუ მას სათავეზე მოვდებთ, მიმართული იქნება $\Delta$-საკენ და რომ $p=|OK|$ არის სათავიდან $\Delta$-ზე დაშვებული მართობის სიგრძე (იხ. ნახ. 94); $K$ აღნიშნავს ამ მართობის ფუძეს.

მართლაც, თუ $M(x, y)$ არის $\Delta$-ზე აღებული რომელიმე წერტილი, მაშინ გვექნება: $OK=\vec{V}\cdot\overrightarrow{OM}$, სადაც $OK$ არის $\overrightarrow{OK}$ ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობა $\vec{V}$-ს გასწვრივ. მაგრამ



ნახ. 94.

$$\vec{V}=(\cos\psi,\ \sin\psi),\ \overrightarrow{OM}=(x,\ y).$$

მაშასადამე,

$$OK=x\cos\psi+y\sin\psi,$$

საიდანაც, (5)-ის ძალით, $OK=p$. ვინაიდან პირობით $p>0$, ამიტომ $\overrightarrow{OK}$ ვექტორს უნდა ჰქონდეს $\vec{V}$ ვექტორის მიმართულება. მისი სიგრძე კი $p$-ს ტოლია; სწორედ ეს ამტკიცებს ჩვენს დებულებას.

დავუმატოთ, რომ როცა $C=0$, მაშინ $p=0$, ხოლო, $\vec{V}$-ს მიმართულება შეიძლება ნებისმიერად აირჩეს, როგორც ეს უკვე აღნიშნული იყო.

დავიხსომოთ, რომ (1) განტოლების ნორმალურ სახეზე დასაყვანად საკმარისია მისი გამრავლება $\lambda$ მამრავლზე, რომელიც (3) ფორმულით განისაზღვრება, ნიშანი კი ისე უნდა შეირჩეს, რომ $\lambda C\leqslant 0$. მამრავლს მანორმებელი (მაწესებელი) მამრავლი ეწოდება.

ირიბკუთხოვანი არაგანზოგადებული სისტემის შემთხვევაში ვექტორი, კოვარიანტული კოორდინატებით $\lambda A$, $\lambda B$, მართობია $\Delta$-სი [იხ. წინა პარაგრაფი]. ეს ვექტორი რომ ორტი იყოს, ისე უნდა შეირჩეს $\lambda$, რომ (§ 57):

$$(\lambda A)^2+(\lambda B)^2-2(\lambda A)(\lambda B)\cos\nu=\sin^2\nu,$$

საიდანაც

$$\lambda = \frac{\sin\nu}{\pm\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\nu}}, \tag{6}$$

თუ რადიკალის წინ ნიშანს ისე შევარჩევთ, რომ $\lambda C<0$ და თუ აღვნიშნავთ $\alpha$-თი და $\beta$-თი $\overrightarrow{V}$ ორტის მიერ $Ox$ და $Oy$ ღერძებთან შედგენილ კუთხეებს, ხოლო $(-p)$-თი ნამრავლს $\lambda C$, მაშინ გვექნება [1]:

$$\lambda A=\cos\alpha,\quad \lambda B=\cos\beta,\quad \lambda C=-p, \tag{7}$$

და (2) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0. \tag{8}$$

რომელსაც ნორმალური სახე ეწოდება.

ისე როგორც ზემოთ, ადვილი საჩვენებელია (საკმარისია სიტყვა-სიტყვით გავიმეოროთ ზემომოყვანილი მსჯელობა), რომ $O$ წერტილზე მოდებული $\overrightarrow{V}$ ორტი, იქნება მიმართული $\Delta$ წრფისაკენ და რომ $p$ არის $O$ წერტილიდან $\Delta$-ზე დაშვების მართობი სიგრძე.

$\lambda$ მამრავლი, განსაზღვრული (6) ფორმულით და პირობით $\lambda C\leqslant 0$, რომელზედაც (1) განტოლების გამრავლებით ეს უკანასკნელი ნორმალურ სახეზე დაიყვანება, აქაც იწოდება მანორმებელ (მაწესებელ) მამრავლად.

### ხავარჯიშო მაგალითები

1. დაიყვანეთ ნორმალურ სახეზე განტოლებანი (მართკუთხოვან კოორდინატებში):

*a)* $x-y+1=0$; *b)* $x+y=0$; *c)* $2x+3y-1=0$; *d)* $x+4=0$.

პასუხი:

*a)* $\frac{x}{-\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$ ანუ $x\cos\frac{3\pi}{4}+y\sin\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$;

*b)* $\frac{x}{\pm\sqrt{2}}+\frac{y}{\pm\sqrt{2}}=0$ ანუ $\pm x\cos\frac{\pi}{4}\pm y\sin\frac{\pi}{4}=0$;

*c)* $\frac{2x}{\sqrt{13}}+\frac{3y}{\sqrt{13}}-\frac{1}{\sqrt{13}}=0$ ანუ $x\cos\psi+y\sin\psi-\frac{1}{\sqrt{13}}=0$,

სადაც

$$\cos\psi=\frac{2}{\sqrt{13}},\quad \sin\psi=\frac{3}{\sqrt{13}};$$

---

[1]) ორი $\alpha$ და $\beta$ კუთხის მაგიერ შეიძლება შემოვიღოთ ერთი $\psi$ კუთხე, რომელიც $Ox$ ღერძთან არის შედგენილი და ამ ღერძიდანაა ათვლილი, თუ ანგარიშს გავუწევთ, ამასთანავე, ათვლის მიმართულებას, მაშინ

$$\cos\alpha=\cos\psi,\quad \cos\beta=\cos(\nu-\psi).$$

*d*) $-x-4=0$ ანუ $x\cos\pi-4=0$.

2. იპოვეთ წინა მაგალითში განხილულ წრფეებზე კოორდინატთა სათავიდან დაშვებულ მართობთა სიგრძეები.

პასუხი: *a*) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; *b*) 0; *c*) $\frac{1}{\sqrt{13}}$; *d*) 4.

## III. ძირითადი ამოცანები წრფეზე

წინა განყოფილებაში ჩვენ დაწვრილებით შევჩერდით წრფეთა წარმოდგენის საკითხზე განტოლებების საშუალებით. ჩვენ დავინახეთ, რომ წრფეები პირველი ხარისხის განტოლებით გამოისახებიან. ამგვარად, ყველა გეომეტრიული საკითხი, რომლებიც წრფეებს შეეხება ამ განტოლებათა განხილვაზე დაიყვანება.

ჩვენ ახლა ამოვხსნით რამდენსამე ასეთ საკითხს, ყველაზე უფრო მარტივსა და ძირითადს, და დავიწყებთ იმ ამოცანების ამოხსნით, რომლებიც განტოლებით მოცემულ წრფეებს შეეხებიან, შემდეგ ჩვენ ამოვხსნით რამდენსამე ამოცანას, რომლებიც მოითხოვენ წრფეთა განტოლებების მონახვას ამა თუ იმ გეომეტრიული პირობების მიხედვით.

შემდეგში სიტყვები: „მოცემულია წრფე", „ვიპოვოთ წრფე"—უნდა გვესმოდეს, როგორც: „მოცემულია წრფის განტოლება", „ვიპოვოთ წრფის განტოლება".

იმისდა მიხედვით, თუ რომელი სახეა უფრო მოხერხებული, და აგრეთვე გამოყენების საჭიროების მიხედვით, ჩვენ ავიღებთ წრფის განტოლებას ამა თუ იმ სახით.

დაეუმატოთ კიდევ, რომ წინა პარაგრაფებში მოცემულია ყველა ის საჭირო მოსაზრება, რაც საკმარისია ქვემომოყვანილი ამოცანების ამოხსნისათვის, ასე რომ მკითხველი, რომელსაც შეთვისებული აქვს წინა პარაგრაფების შინაარსი და აგრეთვე ზოგიერთი უმარტივესი ზოგადი დებულება, რასაც ქვემოთ გავეცნობით (§ 106 და 111), ადვილად ამოხსნის ამ ამოცანებს საკუთარი ძალითაც. ამიტომ ჩვენ თამამად შეგვეძლო ეს ამოცანები „სავარჯიშო მაგალითებისთვის" მიგვეკუთვნებინა, და თუ ამას არ ვაკეთებთ, ეს მხოლოდ იმიტომ, რომ ამოხსნის შედეგები მეტად მნიშვნელოვანია და საჭიროა მათი ხაზგასმით აღნიშვნა.

**§ 97. ამოცანა 1. ორი მოცემული წრფის პარალელობისა და თანაბოხვეგის პირობების პოვნა.** ვთქვათ, წრფეები მოცემულია ზოგადი სახის განტოლებებით:

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \tag{1}$$

და

$$A_2x+B_2y+C_2=0. \tag{2}$$

მათი პარალელობისათვის, ცხადია, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მათი მიმართულების ვექტორები (§ 95) $\vec{P}_1=(B_1, -A_1)$ და $\vec{P}_2=(B_2, -A_2)$

პარალელური იყვნენ. თუ გავიხსენებთ ვექტორთა პარალელობის პირობას, მივიღებთ:

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1} \tag{3}$$

ანუ

$$A_1B_2-A_2B_1=0. \tag{3a}$$

მაშასადამე, ზოგადი სახის განტოლებებით მოცემული ორი წრფის პარალელობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ $x$ და $y$ ცვლადებთან მდგომი კოეფიციენტები ერთ განტოლებაში პროპორციული იყვნენ მეორე განტოლების სათანადო კოეფიციენტებისა.

(3) პირობა შეიძლება კიდევ ასე გადაიწეროს:

$$A_2=kA_1,\ B_2=kB_1, \tag{4}$$

სადაც $k$ რაიმე მუდმივი რიცხვია — (3) ტოლობათა საერთო მნიშვნელობა.

იმისათვის, რომ წრეები თანამთხვეულნი იყვნენ (თანამთხვევა არის პარალელობის კერძო შემთხვევა). საჭიროა (3) ან (4) პირობებს კიდევ ერთი დაემატოს, რომელსაც შემდეგნაირად ვღებულობთ. ვთქვათ, $(x, y)$ აღნიშნავს მოცემულ წრეთა კუთვნილ რომელსამე წერტილს. მაშინ $x$ და $y$ ერთდროულად აკმაყოფილებენ ორივე განტოლებას (1) და (2). თუ (2)-ს $k$-ზე გავამრავლებთ და (1)-ს გამოვაკლებთ, მაშინ, (4)-ის თანახმად, მივიღებთ: $C_2=kC_1$.

მაშასადამე, თანამთხვევის შემთხვევაში უნდა გვქონდეს:

$$A_2=kA_1,\ B_2=kB_1,\ C_2=kC_1, \tag{5}$$

ან, რაც იგივეა:

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}. \tag{6}$$

ცხადია, რომ (5) პირობა აგრეთვე საკმარისიც არის, ვინაიდან ამ პირობის შესრულების დროს (1) განტოლება მიიღება (2) დან მუდმივ რიცხვზე გამრავლებით და, მაშასადამე, მისი ტოლფასია.

მაშასადამე, ზოგადი განტოლებით მოცემული ორი წრფის თანამთხვევისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ერთი განტოლების სამივე კოეფიციენტი პროპორციული იყოს მეორე განტოლების სათანადო კოეფიციენტებისა.

(5) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ ადგილი აქვს იგივეობას:

$$A_2x+B_2y+C_2=k(A_1x+B_1y+C_1), \tag{5a}$$

ე. ი. ტოლობას, მართებულს $x$ და $y$-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის. პირიქით, თუ (5a) არის იგივეობა, მაშინ აქედან გამომდინარეობენ (5) ტოლობანი [1]).

---

[1]) ადვილი გასაგებია, რომ $Ax+By+C=A'x+B'y+C'$ (*) სახის იგივეობიდან გამომდინარეობს: $A=A'$, $B=B'$, $C=C'$. მართლაც, ვინაიდან, პირობის თანახმად, (*) მართებულია $x$ და $y$-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, ის მართებული დარჩება მაშინაც, თუ მივიღებთ $x=y=0$, რაც გვაძლევს $C=C'$. ჩამდეგ, (*)-ში, თუ დავუშვებთ $x=1$, $y=0$, გვექნება $A=A'$. ანალოგიურად ვღებულობთ $B=B'$.

ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ (1) და (2) განტოლებებით მოცემულ წრფეთა თანამთხვევისათვის აუცილებელი და საკმარისია ისეთი მუდმივი $k$ რიცხვის არსებობა, რომლისთვისაც (5a) არის იგივობა.

თუ წრფეები დაყვანილი განტოლებებით არიან მოცემული:

$$y=a_1x+b_1,\quad y=a_2x+b_2, \tag{7}$$

მაშინ, აშკარაა, პარალელობის პირობა პირდაპირ საკუთხო კოეფიციენტთა ტოლობაში გამოისახება, ე. ი.

$$a_2=a_1, \tag{8}$$

ხოლო თანამთხვევის პირობები იქნებიან:

$$a_2=a_1,\quad b_2=b_1. \tag{9}$$

ეს პირობები უშუალოდ გამომდინარეობენ ზემოხსენებული (3) (პარალელობისათვის) და (6) (თანამთხვევისათვის) პირობებიდან თუ (7) განტოლებებს ასე გადავწერთ:

$$a_1x-y-b_1=0,\quad a_2x-y-b_2=0.$$

პირობები (8) და (9) უშუალოდაც სრულიად აშკარა ხდებიან, თუ გავიხსენებთ დაყვანილი განტოლების კოეფიციენტთა გეომეტრიულ მნიშვნელობებს.

ამ პარაგრაფში მიღებული შედეგები უშუალოდ გამომდინარეობენ წრფივ განტოლებათა თეორიის ელემენტებიდან, როგორც ეს ცხადი გახდება შემდეგი ამოცანის ამოხსნის დროს.

**§ 98. ამოცანა 2. ორი წრფის გადაკვეთის წერტილის პოვნა.** თუ წრფეები მოცემულია წინა პარაგრაფის (1) და (2) განტოლებებით, მაშინ მათი გადაკვეთის წერტილის საპოვნელად საჭირო იქნება ორუცნობიანი პირველი ხარისხის განტოლებათა შემდეგი სისტემის ამოხსნა:

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2=0. \tag{1}$$

მართლაც, საძიებელი წერტილის კოორდინატები $(x, y)$ უნდა აკმაყოფილებდნენ როგორც პირველი წრფის განტოლებას, ისე მეორისას (§ 83).

დეტერმინანტთა თეორიიდან ცნობილია, რომ [1]):

1°. თუ

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2-A_2B_1 \tag{2}$$

დეტერმინანტი ნულისგან განსხვავებულია, მაშინ (1) სისტემას აქვს ერთი და მხოლოდ ერთი ამონახსნი. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში გადაკვეთის ერთი წერტილი გვაქვს.

2°. თუ (2) დეტერმინანტი ნულის ტოლია [2]), მაშინ [ყოველ $x$, $y$-სათვის] გვაქვს იგივურად:

$$A_2x+B_2y=k(A_1x+B_1y),$$

[1]) იხ. დამატება. § 7.

[2]) მაშინ, ამ დეტერმინანტის რანგი ერთის ტოლია, რადგან ის არ შეიძლება იყოს ნულის ტოლი, ვინაიდან ეგულისხმობთ, რომ $A_1$ და $B_1$ ისე, როგორც $A_2$, $B_2$ არ შეიძლება ერთდროულად იყვნენ ნული.

ე. ი.

$$A_2 = kA_1,\quad B_2 = kB_1, \tag{3}$$

სადაც $k$ რაიმე რიცხვია. ამასთანავე, თუ $C_2 \neq kC_1$, მაშინ (1) სისტემას არა აქვს ამონახსნი. მაშასადამე, წრეები პარალელურია, მაგრამ არა დამთხვეული.

3°. ბოლოს, თუ $A_2 = KA_1$, $B_2 = kB_1$, $C_2 = kC_1$. ე. ი. იგივურად:

$$A_2x + B_2y + C_2 = k(A_1x + B_1y + C_1), \tag{4}$$

მაშინ (2) განტოლებები ურთიერთტოლფასია და, მაშასადამე, წრეები თანხვედნილია. პირიქით, თუ (2) განტოლებები ტოლფასია, მაშინ აუცილებლივ (4)-ს აქვს ადგილი.

ამრიგად, ჩვენ ხელახლა მივიღეთ წინა პარაგრაფის შედეგები.

განსახილველ მარტივ შემთხვევაში, ცხადია, ადვილად შეგვეძლო არ მიგვემართნა დეტერმინანტთა თეორიისათვის.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, მაშინ, როგორც უკვე ვნახეთ, გადაკვეთის წერტილი არსებობს. თუ ახლა ერთ წრეს უძრავად დავტოვებთ, ხოლო მეორეს ვაბრუნებთ (ერთ-ერთი მისი წერტილის გარშემო, რომელიც გადაკვეთის წერტილი არ არის) ისე, რომ იგი მიისწრაფვოდეს პირველის პარალელობისაკენ, მაშინ გადაკვეთის წერტილი დაიწყებს უსაზღვროდ დაშორებას. სწორედ ამიტომ ხშირად ამბობენ, რომ პარალელური წრეები იკვეთებიან, მაგრამ მათი გადაკვეთის წერტილი უსასრულობაში იმყოფება („არასაკუთრივი“ ანუ „უსასრულოდ შორი წერტილი“).

### სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. იპოვეთ შემდეგი წრეების გადაკვეთის წერტილი:

$$3x + 2y - 1 = 0,\quad 2x + y + 5 = 0.$$

პ ა ს უ ხ ი: წერტილი $(-11, 17)$.

2. იპოვეთ შემდეგი წრეების გადაკვეთის წერტილი:

$$5x - 2y = 5 \text{ და } 10x - 4y = 1.$$

პ ა ს უ ხ ი: გადაკვეთის წერტილი უსასრულობაშია (წრეები პარალელურია).

3. იპოვეთ გადაკვეთის წერტილი პარამეტრულად მოცემული წრფისა:

$$x = 2t,\ y = 1 - 3t,$$

წრფესთან

$$2x - 6y - 5 = 0.$$

პ ა ს უ ხ ი: $x = 1,\ y = -\frac{1}{2}$.

**§ 99. ამოცანა 3.** ხაძიებელია დეკარტის კოორდინატთა ახალ სისტემაზე გადასვლის ფორმულები, როცა ღერძთა განტოლებანი მოცემულია. ზოგჯერ საჭიროა დეკარტის კოორდინატთა მოცემული სისტემიდან გადასვლა

ახალ სისტემაზე, რომლის ღერძები $O'y'$, $O'x'$ მოთავსებულია გადამკვეთ წრფეებზე, რომლებიც მოცემული არიან შესაბამისად შემდეგი განტოლებებით:

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \tag{1}$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0, \tag{2}$$

ამასთანავე, ღერძთა დადებითი მიმართულებისა და საკოორდინატო ვექტორთა სიგრძეების არჩევა ჩვენზეა დამოკიდებული. ამ ამოცანის ამოხსნა ყველაზე მარტივად ხდება შემდეგი წესით:

§ 66-ის თანახმად გვაქვს:

$$x'=l'_1x+l'_2y+a',\ y'=m'_1x+m'_2y+b'.$$

ახალი $O'y'$ ღერძის წერტილები აკმაყოფილებენ განტოლებას $x'=0$, ე. ი.

$$l'_1x+l'_2y+a'=0;$$

ეინაიდან განტოლება უნდა იყოს (1) განტოლების ტოლფასი, ამიტომ წინა პარაგრაფის თანახმად

$$l'_1x+l'_2y+a'=k_1(A_1x+B_1y+C_1),$$

სადაც $k_1$ რაიმე მუდმივია. სრულიად ასევე

$$m'_1x+m'_2y+b'=k_2(A_2x+B_2y+C_2).$$

ამრიგად, გვექნება შემდეგი გადასვლის ფორმულები:

$$x'=k_1(A_1x+B_1y+C_1),\ y'=k_2(A_2x+B_2y+C_2), \tag{3}$$

სადაც $k_1$, $k_2$ რაიმე მუდმივებია (ცხადია, ნულისგან განსხვავებული). აშკარაა, რომ $k_1$ და $k_2$-ს სიდიდესა და ნიშნებზეა დამოკიდებული ახალ საკოორდინატო ვექტორთა სიდიდე და მიმართულება. თუ ეს სიდიდეები და მიმართულება ჩვენთვის განურჩეველია, მაშინ $k_1$ და $k_2$-ს შეგვიძლია მივანიჭოთ ნებისმიერად შერჩეული მნიშვნელობანი. ყველაზე მარტივი იქნება, ვთქვათ, $k_1=k_2=1$, ე. ი.

$$x'=A_1x+B_1y+C_1,\ y'=A_2x+B_2y+C_2. \tag{3a}$$

თუ ამოვხსნით (3) და (3a)-ს $x$, $y$-ის მიმართ, მაშინ მივიღებთ $x$, $y$-ის გამოსახულებებს $x'$, $y'$-ით. ასეთი ამოხსნა ყოველთვის შესაძლოა, ეინაიდან, მოცემულობის თანახმად, (1) და (2) წრფეები გადამკვეთია, ე. ი.

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

**§ 100. ამოცანა 4. მოცემული წრფისა და მოცემული მრუდის გადაკვეთის წერტილთა პოვნა.** ეს ამოცანა, ისე როგორც (2) ამოცანა, წარმოადგენს ორი წირის გადაკვეთის ამოცანის კერძო შემთხვევას, რომლის შესახებაც საუბარი გვქონდა § 87-ში.

ვთქვათ,

$$\Phi(x,\ y)=0 \tag{1}$$

არის მოცემული მრუდის განტოლება. მოცემული წრფის განტოლება წარმოვადგინოთ პარამეტრულად (§ 88):

$$x=x_0+Xt,\ y=y_0+Yt \tag{2}$$

(სადაც $x_0$, $y_0$, $X$, $Y$ მუდმივებია); $t$ პარამეტრის მნიშვნელობანი, რომლებიც გადაკვეთის წერტილებს შეეფერებიან, უნდა აკმაყოფილებდნენ განტოლებას (§ 87):

$$\Phi(x_0+Xt,\ y_0+Yt)=0. \tag{3}$$

ამ განტოლების ფესვები $t_1$, $t_2$ და ა. შ. ჩასმულნი (1)-ში, მოგვცემენ საძიებელ წერტილთა კოორდინატებს. (3) განტოლების ფესვთა რიცხვი შეიძლება უსასრულოდ დიდიც იყოს.

უფრო დაწვრილებით შევჩერდეთ იმ შემთხვევაზე, როცა (1) მრუდი არის ალგებრული, $n$-რი რიგის, ე. ი. $\Phi(x,\ y)$ არის პოლინომი, რომლის სახეა [1]):

$$\Phi(x,\ y)=\sum_{k,l} a_{k,l}x^k y^l \quad (k+l\leqslant n). \tag{4}$$

მაშინ, ცხადია, (3) განტოლების ხარისხი $t$-ს მიმართ იქნება $n$ (ზოგად შემთხვევაში) ან ნაკლები ვიდრე $n$, თუ ადგილი ექნება შეკვეცას.

შესაძლოა აგრეთვე ისიც, რომ (3) განტოლება გადაიქცეს იგივობად; ასეთ შემთხვევაში, (2) წრფის ყოველი წერტილი ეკუთვნის (1) მრუდს, ე. ი. (1) წრფე არის (2) მრუდის შემადგენელი ნაწილი. თუ გამოვრიცხავთ ამ შემთხვევას, მაშინ $t$-ს განსაზღვრისათვის გვექნება განტოლება, რომლის ხარისხი $\leqslant n$. ასე რომ, გადაკვეთის წერტილთა რიცხვი იქნება არა უმეტეს $n$-ისა. [გადაკვეთის წერტილთა რიცხვი იქნება ყოველთვის $n$-ის ტოლი, თუ შემოვიტანთ „წარმოსახვით“ და „უსასრულოდ დაშორებულ“ წერტილებს და აგრეთვე „თანხვედნილ“ წერტილებს, ამის შესახებ იხ. VI თავი, § 174].

ზემოხსენებულიდან, კერძოდ, გამოგვყავს შემდეგი დასკვნა: თუ წრფეს $n$-ურ რიგის წირთან აქვს $n$-ზე მეტი საერთო წერტილი, მაშინ წრფე მთლიანად ამ წირს ეკუთვნის.

ეს დებულება შეიძლება ამნაირადაც დამტკიცდეს. განვიხილოთ პირველად ის შემთხვევა, როცა ჩვენი წრფე წარმოადგენს $Ox$ ღერძს, ე. ი. მისი განტოლება არის $y=0$. თუ (1) განტოლებაში ჩავსვამთ $y=0$, მაშინ, (4)-ს ძალით, მივიღებთ განტოლებას

$$a_{n,0}x^n+a_{n-1,0}x^{n-1}+\ldots+a_{0,0}=0,$$

რომლის ხარისხი არ არის $n$-ზე მეტი. თუ მას აქვს $n$-ზე მეტი ფესვი, მაშინ ყველა მისი კოეფიციენტი ნულის ტოლია, ე. ი.

$$a_{n,0}=a_{n-1,0}=\ldots=a_{1,0}=a_{0,0}=0.$$

[1]) $x^k y^l$-ის კოეფიციენტი ჩვენ აღვნიშნეთ ორი ინდექსიანი ასოთი $k$ და $l$, რომ თვალსაჩინო იყოს, თუ რომელ წევრს ეკუთვნის ესა თუ ის კოეფიციენტი.

მაშასადამე, (4) პოლინომის ყველა ისეთ წევრთა კოეფიციენტი, რომლებიც არ შეიცავენ $y$-ს, ნულის ტოლია, ამიტომ $y$ შედის $\Phi(x, y)$ პოლინომის ყველა წევრში.

თუ $y$-ს გამოვიტანთ ფრჩხილის გარეთ, იგივურად გვექნება,

$$\Phi(x, y)=y\ \Phi_1(x, y),$$

სადაც $\Phi_1(x, y)$ არის $(n-1)$ ხარისხის რომელიმე პოლინომი. ამიტომ, მრუდის (1) განტოლება ღებულობს სახეს:

$$y\cdot\Phi_1(x, y)=0, \tag{5}$$

მაშასადამე, ჩვენი წირი იშლება ორად: $y=0$ და $\Phi_1(x, y)=0$.

თუ ჩვენი წრფე მოცემულია ზოგადი სახის განტოლებით

$$Ax+By+C=0, \tag{6}$$

მაშინ, ეს წრფე ავიღოთ ახალ ღერძად $O'x'$, ხოლო ახალ $O'y'$ ღერძად ავიღოთ ნებისმიერი სხვა წრფე (მოცემულის გადამკვეთი),

$$A'x+B'y+C'=0,$$

ე. ი. დავუშვათ (იხ. წინა პარაგრაფი):

$$y'=Ax+By+C,\ x'=A'x+B'y+C'. \tag{7}$$

ახალ ცვლადებში (1) განტოლება გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\Psi(x', y')=0, \tag{8}$$

სადაც $\Psi(x', y')=\Phi(x, y)$, თუ $x'$, $y'$-ის ნაცვლად შევიტანთ მათს გამოსახულებებს (7).

ზემომიღებულის თანახმად, თუ (6) წრფე კვეთს (1) წირს $n$-ზე მეტ წერტილში [და, მაშასადამე, $y'=0$ კვეთს წირს $n$-ზე მეტ წერტილში], მაშინ გვექნება იგივობა

$$\Psi(x', y')=y'\ \Psi_1(x', y'),$$

სადაც $\Psi_1(x', y')$ წარმოადგენს $(n-1)$ ხარისხის პოლინომს. თუ $x'$, $y'$-ს გამოვსახავთ ისევ $x$, $y$-ით, მივიღებთ იგივობას

$$\Phi(x, y)=(Ax+By+C)\ \Phi_1(x, y), \tag{9}$$

სადაც $\Phi_1(x, y)$—პოლინომია, რომელიც მიიღება $\Psi_1(x', y')$-დან (7) ჩასმით.

ამრიგად, თუ (6) წრფეს, $n$-ურ რიგის (1) წირთან აქვს $n$-ზე მეტი საერთო წერტილი, მაშინ (1) განტოლების მარცხენა მხარე დაიშლება მამრავლებად (9) ფორმულის თანახმად; მაშასადამე, (1) მრუდი დაიშლება (6) წრფედ და $(n-1)$ რიგის რომელიმე მრუდად $\Phi_1(x, y)=0$.

#### სავარჯიშო მაგალითები და გამოკვლევანი

1. იპოვეთ გადაკვეთის წერტილები წრფისა: $x=1+t$, $y=1-t$ და მრუდის $(x-1)^3+y^3=16$ (ეს მრუდი წრეწირია, თუ სისტემა მართკუთხოვანია).

პასუხი: $\left(\frac{3+\sqrt{31}}{2}, \frac{1-\sqrt{31}}{2}\right)$ და $\left(\frac{3-\sqrt{31}}{2}, \frac{1+\sqrt{31}}{2}\right)$.

2. **წერტილის ხარისხი წრეწირის მიმართ.** მოცემულია წრეწირი განტოლებით (კოორდინატები მართკუთხოვანია):

$$x^2+y^2+2Ax+2By+C=0 \qquad (*)$$

და, გარდა ამისა, წრფე, გამავალი $M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე და პარამეტრულად წარმოდგენილი:

$$x=x_0+lt, \quad y=y_0+mt, \qquad (**)$$

სადაც $l$, $m$ არიან მიმართულების კოორდინატები [ჩვენ ვიცით, რომ ამ შემთხვევაში $t$ წარმოადგენს მანძილს $(x, y)$ წერტილიდან $(x_0, y_0)$ წერტილამდე მანძილი თავისი ნიშნით განიხილება; იხ. § 64].

ვთქვათ, $M_1$ და $M_2$ ჩვენი წრფისა და წრეწირის გადაკვეთის წერტილებია. დასამტკიცებელია, რომ $M_0M_1$ და $M_0M_2$ მანძილების ნამრავლი არ არის დამოკიდებული $l$-ზე და $m$-ზე, ე. ი. $M_0$ წერტილზე გამავალი მკვეთის მიმართულებაზე [1]. ეს ნამრავლი, გარკვეული ნიშნით განხილული, იწოდება $M_0$ წერტილის ხარისხად აღებული წრეწირის მიმართ. [ის დადებითად ითვლება, როცა $\overrightarrow{M_0M_1}$ და $\overrightarrow{M_0M_2}$ ერთნაირად არიან მიმართული, ხოლო უარყოფითად — წინააღმდეგ შემთხვევაში]. იპოვით ამ ხარისხის გამოსახულებას.

ამოხსნა. თუ (**) მნიშვნელობებს შევიტანთ (*)-ში, გვექნება:

$$(x_0+lt)^2+(y_0+mt)^2+2A(x_0+lt)+2B(y_0+mt)+C=0,$$

საიდანაც, თუ მხედველობაში მივიღებთ ტოლობას $l^2+m^2=1$, დავწერთ:

$$t^2+2(lx_0+my_0+Al+Bm)t+x_0^2+2Ax_0+2By_0+C=0.$$

მაგრამ ჩვენ ვიცით ელემენტარული ალგებრიდან, რომ ამ განტოლების ფესვთა ნამრავლი $t_1t_2$ თავისუფალი წევრის ტოლია, ე. ი.:

$$t_1t_2=x_0^2+y_0^2+2Ax_0+2By_0+C.$$

მაგრამ $t_1=M_0M_1$, $t_2=M_0M_2$. სადაც $M_1$ და $M_2$ გადაკვეთის წერტილებია, $t_1$-ისა და $t_2$-ის შესაფერისი. ამასადამე, $M_0(x_0, y_0)$ წერტილის ხარისხისათვის მოცემული წრეწირის მიმართ შემდეგი გამოსახულება გვექნება:

$$k=x_0^2+y_0^2+2Ax_0+C; \qquad (***)$$

ვინაიდან ეს გამოსახულება დამოუკიდებელია $l$-ზე და $m$-ზე, ამით ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

ამასთანავე, ჩვენ ვხედავთ, რომ აღებული წერტილის ხარისხის მისაღებად მოცემული წრეწირის მიმართ, საკმარისია ამ წრეწირის (*) სახეზე დაყვანილი გატოლების მარცხენა მხარეში $x$ და $y$-ის მაგიერ შევიტანოთ მოცემული წერტილის კოორდინატები.

3. დაამტკიცეთ, რომ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა ხარისხები (იხ. წინა სავარჯ.) ორი მოცემული წრეწირის მიმართ თანაბარია, არის წრფე. ამ წრფეს ეწოდება მოცემულ წრეწირთა **რადიკალური ღერძი**.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულ წრეწირთა განტოლებანი არიან:

$$x^2+y^2+2A_1x+2B_1y+C_1=0$$

და

$$x^2+y^2+2A_2x+2B_2y+C_2=0.$$

---

[1] ეს დებულება მკითხველისათვის ელემენტარული გეომეტრიიდან უნდა იყოს ცნობილი.

თუ $(x_0, y_0)$ არის საძებნელი გეომეტრიული ადგილის ერთ-ერთი წერტილი, მაშინ თანახმად პირობისა [იხ. წინა სავარჯ. ფორმულა (***)],

$$x^2_0+y^2_0+2A_1x_0+2B_1y_0+C_1=x^2_0+y^2_0+2A_2x_0+2B_2y_0+C_2,$$

ან გამარტივების შემდეგ:

$$2(A_1-A_2)x_0+2(B_1-B_2)y_0+C_1-C_2=0.$$

მაშასადამე, ჩვენი გეომეტრიული ადგილის წერტილთა კოორდინატები $(x_0, y_0)$ აკმაყოფილებენ პირველი ხარისხის განტოლებას ამ კოორდინატთა მიმართ; ამგვარად, ეს გეომეტრიული ადგილი — წრფეა.

თუ აღებული წყვილები იკვეთებიან, მაშინ რადიკალური ღერძი არის მათი გადაკვეთის წერტილებზე გამავალი წრფე. მართლაც, გადაკვეთის წერტილებს აქვთ ერთნაირი ხარისხი ორივე წრეწირის მიმართ (ნულის ტოლი).

**§ 101. ამოცანა 6. ორ წრფეს შორის კუთხის პოვნა.** კუთხე $\Delta_1$ და $\Delta_2$ წრფეებს შორის, რომლებიც აქ ნაჩვენები მიმდევრობით არიან განხილული, ვუწოდოთ იმ კუთხეს, რომელზედაც უნდა შევაბრუნოთ $\Delta_1$ წრფე (დადებითი მიმართულებით), რომ იგი $\Delta_2$-ს დაემთხვეს (ნახ. 95); ამ კუთხეს ჩვენ აღვნიშნავთ $\widehat{\Delta_1, \Delta_2}$ ით. ამნაირად, მიმდევრობას, რომლითაც აღებული წრფეები განიხილებიან, აქვს მნიშვნელობა. თუ $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ მოცემულ წრფეთა მიმართულების ვექტორებია, მაშინ აშკარაა, რომ

$$\widehat{\Delta_1, \Delta_2}=\widehat{\vec{P}_1, \vec{P}_2}+k\pi,$$

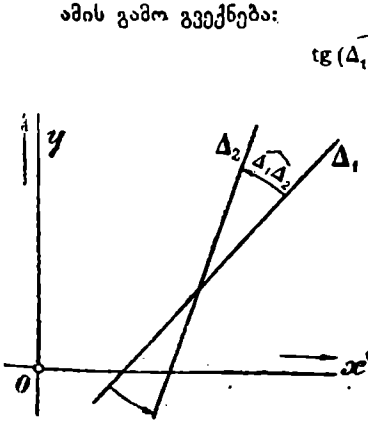
სადაც $k$ მთელი რიცხვია, ხოლო $\widehat{\vec{P}_1, \vec{P}_2}$ არის კუთხე, ისეთნაირად განსაზღვრული, როგორც ეს § 48-ში იყო მოყვანილი. ძართლაც, წრფის შემობრუნებით $\pi$ კუთხეზე, იგი თვითონ თავის თაეს დაემთხვევა (იხ. § 89).

ამის გამო გვექნება:

$$\operatorname{tg}(\widehat{\Delta_1, \Delta_2})=\operatorname{tg}(\widehat{\vec{P}_1, \vec{P}_2}); \tag{1}$$

პირიქით: ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\widehat{\Delta_1, \Delta_2}=\widehat{\vec{P}_1, \vec{P}_2}+k\pi.$$



ნახ. 95.

თუ $\Delta_1$ და $\Delta_2$ წრფეები მოცემული არიან ზოგადი სახის განტოლებებით

$$\left.\begin{aligned}A_1x+B_1y+C_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2=0,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

მაშინ შეგვიძლია ავიღოთ:

$$\vec{P}_1=(B_1, -A_1),\ \vec{P}_2=(B_2, -A_2). \tag{3}$$

თუ ახლა კოორდინატებს მართკუთხოვნად ჩავთვლით, შესაძლებლობა გვექნება § 48-ის (3) ფორმულა გამოვიყენოთ, სადაც უნდა ჩავსვათ:

$$\varphi=\widehat{\vec{P}_1, \vec{P}_2},\ X_1=B_1,\ Y_1=-A_1,\ X_2=B_2,\ Y_2=-A_2.$$

ამნაირად, მივიღებთ საძიებელ ფორმულას:

$$\operatorname{tg}(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}) = -\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}. \tag{4}$$

თუ წრფეები მოცემულია დაყვანილი განტოლებით:

$$y = a_1x + b_1, \quad y = a_2x + b_2, \tag{5}$$

მაშინ (4) ფორმულა მოგვცემს (მასში უნდა შევიტანოთ $A_1 = a_1$, $B_1 = -1$, $A_2 = a_2$, $B_2 = -1$):

$$\operatorname{tg}(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}) = \frac{a_2 - a_1}{1 + a_1a_2}. \tag{6}$$

ეს ფორმულა კარგად უნდა გვახსოვდეს; არ უნდა დავივიწყოთ ისიც, რომ ასოების მიმდევრობას აქ მნიშვნელობა აქვს: მრიცხველში იმ წრფის საკუთხო კოეფიციენტი უნდა გამოვაკლოთ, რომლიდანაც კუთხე აითვლება.

#### სავარჯიშო მაგალითები

(კოორდინატები მართკუთხოვანია).

1. იპოვეთ კუთხე $\Delta_1$ და $\Delta_2$ წრფეთა შორის, თუ განტოლებებია:

$$x - y - 1 = 0 \text{ და } 2x + 3y + 2 = 0.$$

პასუხი: $\operatorname{tg}(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}) = -5$.

2. იპოვეთ კუთხე შემდეგ წრფეთა შორის:

$$2x - 5y + 5 = 0, \quad 5x + 2y + 12 = 0.$$

პასუხი: $\operatorname{tg}(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}) = \infty$, ე. ი. წრფეები ურთიერთმართობულია.

3. იპოვეთ კუთხე შემდეგ წრფეთა შორის:

$$x - 1 = 0 \text{ და } 2x + 2y + 5 = 0.$$

პასუხი: $\operatorname{tg}(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}) = 1$, $\widehat{\Delta_1, \Delta_2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

**§ 102. ამოცანა 6. ორი წრფის მართობულობის პირობის პოვნა.** ვიგულისხმოთ, რომ კოორდინატები მართკუთხოვანია. თუ $\Delta_1$ და $\Delta_2$ წრფეები ურთიერთმართობულია, მაშინ:

$$\operatorname{tg}(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}) = \infty; \tag{1}$$

საიდანაც, წინა პარაგრაფის (4) ფორმულის თანახმად, გვექნება:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0; \tag{2}$$

სწორედ ამაში მდგომარეობს $\Delta_1$ და $\Delta_2$ წრფეების მართობულობის პირობა.

თუ წრფეები მოცემული არიან დაყვანილი განტოლებებით:

$$y = a_1x + b_1, \quad y = a_2x + b,$$

მაშინ მართობულობის პირობა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$a_1a_2+1=0, \tag{3}$$

ანუ

$$a_1=-\frac{1}{a_2}. \tag{4}$$

უკანასკნელი პირობა კარგად უნდა გვახსოვდეს. სიტყვიერად ის შეგვიძლია გამოითქმის: **ურთიერთმართობული წრფეების საკუთხო კოეფიციენტები მოპირდაპირენი არიან როგორც სიდიდით, ისე ნიშნით.**

შევნიშნოთ, რომ (2) ფორმულა უშუალოდ გამომდინარეობს მიმართულების ვექტორთა $\vec{P}_1=(B_1, -A_1)$ და $\vec{P}_2=(B_2, -A_2)$ მართობულობის პირობიდან. მართლაც, $\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2=B_1B_2+A_1A_2$. მაგრამ $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორთა მართობულობისთვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ $\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2=0$. საიდანაც პირდაპირ გამომდინარეობს (2).

გავიხსენოთ, რომ ამ ორი უკანასკნელი პარაგრაფის ფორმულები შეეხებიან მართკუთხოვან კოორდინატებს, მაშინ როდესაც პარალელობის პირობა მიღებული იყო ჩვენს მიერ ზოგადი შემთხვევისათვის (§ 97).

ძნელი არაა მართობულობის პირობის მიღება დეკარტის ზოგადი კოორდინატების შემთხვევისთვისაც. თუ § 56-ის ფორმულებით ვისარგებლებთ ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლისათვის. მკითხველს ვანდობთ შესაბამის ფორმულების დაწერას.

#### სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი
(კოორდინატები მართკუთხოვანია)

1. **იპოვეთ იმ წრფის საკუთხო კოეფიციენტი $a$, რომელიც მართობულია წრფისა**

$$y=-3x+1.$$

**პასუხი:** $a=+\frac{1}{3}$.

2. **დაამტკიცეთ, რომ წრფეები: $x-5y+1=0$ და $5x+y-8=0$ ურთიერთმართობული არიან.**

3. **გამოსახეთ მართობულობის პირობა წრფეთათვის:**

$$Ax+By+C=0 \text{ და } \frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}.$$

**პასუხი:** $\frac{A}{X}=\frac{B}{Y}$.

4. **გამოსახეთ მართობულობის პირობა შემდეგი წრფეებისათვის:**

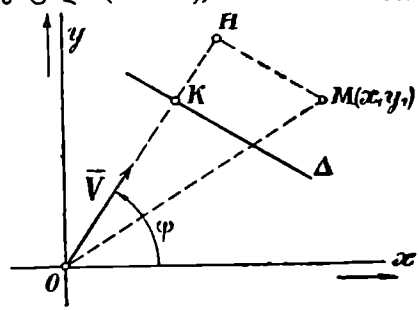
$$\frac{x-x_1}{X_1}=\frac{y-y_1}{Y_1} \text{ და } \frac{x-x_2}{X_2}=\frac{y-y_2}{Y_2}$$

**პასუხი:** $X_1X_2+Y_1Y_2=0$.

**§ 103. ამოცანა 7. აღებულ წერტილსა და აღებულ წრეს შორის მანძილის პოვნა.** წარმოვიდგინოთ ჯერ, რომ კოორდინატები მართკუთხოვანია და ვთქვათ, განსახილველი $\Delta$ წრფე მოცემულია ნორმალური განტოლებით (§ 96):

$$x\cos\psi + y\sin\psi - p = 0. \qquad (1)$$

თუ $M_1(x_1, y_1)$ არის მოცემული წერტილი (ნახ. 96), მაშინ მისი მანძილი $\Delta$ წრფემდე, ცხადია, $KH$ ნაკვეთის სიგრძის ტოლი იქნება, სადაც $K$ არის $O$-დან $\Delta$-ზე ჩამოშვებული მართობის ფუძე, ხოლო $H$ არის $M$ წერტილის მართკუთხოვანი გეგმილი ამ მართობზე (ან მის გაგრძელებაზე). ამ მანძილს მივაწეროთ გარკვეული ნიშანი; სახელდობრ, $M$ წერტილიდან $\Delta$ წრფემდე მანძილად $h$ ვიგულისხმოთ $\overline{KH}$ ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობა $\vec{V}$ ორტის გასწვრივ (ჩვენ აქ ვიყენებთ § 96-ის აღნიშვნებს).



ნახ. 96.

ეს ნიშნავს, რომ $h$ მანძილს ჩვენ ჩავთვლით დადებითად, როცა $M$ წერტილი და კოორდინატთა სათავე $\Delta$ წრფის სხვადასხვა მხარეზე იმყოფებიან; წინააღმდეგ შემთხვევაში $h$ იქნება უარყოფითი. ეს კრიტერიუმი არ გამოდგება, თუ $\Delta$ გაივლის $O$-ზე; მაგრამ, ცხადია, რომ ყველა შემთხვევაში $\Delta$-ს ერთსა და იმავე მხარეზე მდებარე წერტილებს შეეფერებიან ერთი და იმავე ნიშნის მქონე $h$-ის მნიშვნელობანი, ხოლო სხვადასხვა მხარეზე მდებარე წერტილებს — მნიშვნელობანი, რომელთაც სხვადასხვა ნიშანი აქვთ.

ცხადია, გვაქვს: $OH = \overrightarrow{OM}\cdot\vec{V}$, სადაც $OH$ აღნიშნავს $\overrightarrow{OH}$ ვექტორის ალგებრულ მნიშვნელობას $\vec{V}$-ს გასწვრივ; გარდა ამისა, $OK = p$. ამიტომ $h = \overrightarrow{OM}\cdot\vec{V} - p$.

მაგრამ $\overrightarrow{OM} = (x_1, y_1)$, $\vec{V} = (\cos\psi, \sin\psi)$. მაშასადამე,

$$\overrightarrow{OM}\cdot\vec{V} = x_1\cos\psi + y_1\sin\psi,$$

საიდანაც საბოლოოდ გვექნება:

$$h = x_1\cos\psi + y_1\sin\psi - p. \qquad (2)$$

მაშასადამე, გვაქვს წესი: **იმისათვის, რომ ვიპოვოთ მანძილი წერტილიდან წრფემდე, აღებული წრფის ნორმალური განტოლების მარცხენა მხარეში, მიმდინარე კოორდინატების[1] მაგიერ, უნდა ჩავსვათ მოცემული წერტილის კოორდინატები.**

[1] რომელიმე წირის $F(x, y) = 0$ განტოლებაში შემავალი კოორდინატები $x$ და $y$ სწორად იწოდებიან მიმდინარე კოორდინატებად.

თუ წრფის განტოლება ზოგადი სახითაა მოცემული

$$Ax+By+C=0, \tag{3}$$

მაშინ ამოცანის ამოსახსნელად საკმარისია ამ განტოლების ნორმალურ სახეზე დაყვანა ორივე მხარის მანორმებელ (მაწესებელ) $\lambda$ მამრავლზე გამრავლებით, სადაც

$$\lambda=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}; \tag{4}$$

ნიშანი აქ შერჩეული უნდა იყოს § 96-ში ნათქვამის თანახმად.

ამრიგად, გვაქვს ფორმულა

$$h=\lambda(Ax_1+By_1+C), \tag{5}$$

სადაც $\lambda$ მამრავლი არ არის დამოკიდებული $M(x_1, y_1)$ წერტილის კოორდინატებზე. ეს ფორმულა ძალაში რჩება ზოგადი სახის დეკარტის კოორდინატთა შემთხვევაშიც, ოღონდ ამ შემთხვევაში მუდმივი მამრავლი $\lambda$ უკვე არ გვეძლევა (4) ფორმულით, არამედ უფრო რთულით.

მართლაც, ვთქვათ, (3) არის წრფის განტოლება დეკარტის ნებისმიერ სისტემაში. ავიღოთ ნებისმიერი მართკუთხოვანი სისტემა და $x'$, $y'$-ით აღვნიშნოთ კოორდინატები ახალ სისტემაში. ვთქვათ, ახალ სისტემაზე გადასვლით $Ax+By+C$ ღებულობს სახეს $A'x'+B'y'+C'$. მაშინ ახალ სისტემაში

$$h=\lambda(A'x_1+B'y_1+C'),$$

სადაც

$$\lambda=\frac{1}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2}},$$

ხოლო $x'_1$, $y'_1$ წერტილის ახალი კოორდინატებია. თუ დავუბრუნდებით ძველ კოორდინატებს, მივიღებთ ისევ (5) ფორმულას.

#### ხაკარგიშო მაგალითები

1. იპოვეთ მანძილი სათავიდან წრფემდე: $x+2y-1=0$ (რომელიც მართკუთხოვან კოორდინატებშია მოცემული).

პასუხი: $\dfrac{0+2\cdot 0-1}{\pm\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{-1}{\sqrt{5}}$.

2. იპოვეთ მანძილი (3, 5) წერტილიდან წრფემდე: $2x+y+2=0$ (მოცემულია მართკუთხოვან კოორდინატებში).

პასუხი: $\dfrac{2\cdot 3+5+2}{-\sqrt{2^2+1^2}}=-\dfrac{13}{\sqrt{5}}$.

3. იპოვეთ მანძილი შემდეგ პარალელურ წრფეთა შორის (მოცემულია მართკუთხოვან კოორდინატებში)

$$2x+3y+6=0,\ 2x+3y-1=0$$

(მ ი თ ი თ ე ბ ა. აიღეთ ერთ-ერთ წრეზე წერტილი და იპოვეთ მისი მანძილი მეორემდე).

პ ა ს უ ხ ი: $h=\frac{7}{\sqrt{13}}$.

4. დაამტკიცეთ, რომ არაგანზოგადებულ ირიბკუთხოვან კოორდინატებში

$$\lambda=\frac{\sin\nu}{\pm\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\nu}},$$

სადაც $\nu$ საკოორდინატო კუთხეა.

§ 104. ამოცანა 8. პოვნა იმ ფარდობისა, რომლითაც აღებული წრფე კვეთს ორი მოცემული წერტილის შემაერთებელ ნაკვეთს. ვთქვათ, $M_1(x_1, y_1)$ და $M_2(x_2, y_2)$ მოცემული წერტილებია და $M$ არის $M_1M_2$ წრფისა და მოცემული $\Delta$ წრფის გადაკვეთის წერტილი (შეადგინეთ ნახაზი). ცხადია, რომ საძიებელი ფარდობა:

$$k=\frac{M_1M}{MM_2},$$

რომელსაც ჩვენ ნიშანს მივაწერთ ისე, როგორც § 41-ში, თავისი სიდიდით და ნიშნით — $\frac{h_1}{h_2}$ გამოსახულების ტოლია, სადაც $h_1$ და $h_2$ აღნიშნავენ შესაბამისად $M_1$ და $M_2$ წერტილების მანძილებს $\Delta$ წრფემდე, გარკვეული ნიშნის თანდართვით, წინა პარაგრაფის თანახმად. ნიშანი (—) უკანასკნელი წილადის წინ იმიტომ არის აღებული, რომ, თუ $M_1$ და $M_2$ წერტილები $\Delta$ წრფის სხვადასხვა მხარეზე მდებარეობენ, $h_1$ და $h_2$ სიდიდენი მოპირდაპირე ნიშნის იქნებიან (წინა პარაგრაფში ნათქვამის თანახმად), მაშინ როდესაც $k$ ფარდობა ამ შემთხვევაში დადებითი უნდა იყოს (§ 41); პირიქით, თუ $M_1$ და $M_2$ მდებარეობენ $\Delta$-ს ერთსა და იმავე მხარეზე, მაშინ $h_1$ და $h_2$ ერთნაირი ნიშნის არიან, ფარდობა კი უარყოფითი უნდა იყოს.

მაგრამ ჩვენ გვაქვს (იხ. წინა პარაგრაფი): $h_1=\lambda(Ax_1+By_1+C)$, $h_2=\lambda(Ax_2+B_2+C)$, სადაც $Ax+Fy+C$ არის $\Delta$ წრფის განტოლების მარცხენა მხარე, ხოლო $\lambda$ მუდმივი მამრავლია. მაშასადამე, საბოლოოდ გვექნება:

$$k=\frac{M_1M}{MM_2}=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}. \qquad (1)$$

§ 105. დამოუკიდებელ მუდმივთა რიცხვი წრფის განტოლებაში. სანამ გადავალთ იმ ამოცანების ამოხსნაზე, რომლებშიაც მოითხოვება წრფის განტოლების პოვნა ამა თუ იმ პირობების მიხედვით, გავაკეთოთ ზოგადი ხასიათის შემდეგი შენიშვნა.

წრფის დაყვანილი განტოლება $y=ax+b$ შეიცავს ორ მუდმივს $a$ და $b$-ს, რომლებიც საკმაოდ განსაზღვრავენ წრფის მდებარეობას. აქის მიხედვით, ამბობენ, რომ წრფის მდებარეობა სიბრტყეზე განისაზღვრება ორი დამოუკიდებელი მუდმივით. ამიტომ, ცხადია რომ წრფის პოვნის ამოცანა სრულიად განსაზღვრული იქნება ჩხოლოდ მაშინ, როცა მოცემულია ორი პირო-

ბა [1]) (რომლებიც საშუალებას გვაძლევენ ორივე უცნობი მუდმივი $a$ და $b$ განვსაზღვროთ).

ამას თითქო ეწინააღმდეგება წრფის ზოგადი განტოლება $Ax+By+C=0$, რომელიც სამ მუდმივს შეიცავს: $A$, $B$ და $C$-ს. ნამდვილად კი არსებითი მნიშვნელობა თვით ამ სამ სიდიდეს კი არა აქვს, არამედ რომელიმე ორი მათგანის ფარდობას მესამესადმი. ეს იქიდან წარმოიშობა, რომ, თუ წინა განტოლებაში ყველა კოეფიციენტს მათი პროპორციული სიდიდეებით შევცვლით, იგი გამოსახავს იმავე წრფეს.

მაგალითად, თუ ცნობილია, რომ საძიებელი წრფის კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ ორ დამოკიდებულებას: $\frac{A}{C}=3$, $\frac{B}{C}=5$, ან, რაც იგივეა: $\frac{A}{3}=\frac{B}{5}=\frac{C}{1}$, მაშინ შეიძლება, რომ საძიებელი წრფის განტოლება დაიწეროს შემდეგი სახით: $3x+5y+1=0$ ან სხვა სახით, რომელიც აქედან მიიღება მუდმივ მამრავლზე გამრავლებით, მაგალითად: $6x+10y+2=0$.

**§ 106. წრფეთა კონა.** წინა პარაგრაფში ნათქვამიდან აშკარაა, რომ, თუ ჩვენს წინაშე დაისვა საკითხი წრფის მოძებნის შესახებ ერთი მოცემული პირობის მიხედვით, ასეთი ამოცანა განუზღვრელი იქნება, ე. ი. საზოგადოდ რომ ვთქვათ, მას ექნება უამრავი ამონახსენი, რომლებიც უკვე დამოკიდებული არიან ორზე კი არა, არამედ ერთ დამოუკიდებელ მუდმივზე. ამის მაგალითს წარმოადგენს ერთ მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის მოძებნის ამოცანა. მას აქვს უამრავი ამონახსენი.

$M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე გამავალ წრფეთა ერთობლიობას ეწოდება წრფეთა კონა, რომლის ცენტრია $M_0$.

თუ $X$, $Y$ აღნიშნავენ იმ წრფის მიმართულების კოეფიციენტებს, რომლებიც ეკუთვნის $M_0$ ცენტრიან კონას, მაშინ ამ წრფის განტოლება იქნება (§ 88):

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}. \tag{1}$$

$X$ და $Y$-ის შეცვლით ჩვენ შეგვიძლია წრფის მიმართულების ვექტორს ნებისმიერი მიმართულება მივცეთ, ე. ი. კონის ნებისმიერი წრფე მივიღოთ. მაშასადამე, (1) განტოლება, სადაც $X$ და $Y$ ნებისმიერია (ერთდროულად ნულის არატოლი), წარმოადგენს კონის წრფეთა საერთო განტოლებას. ეს განტოლება, როცა $X\neq 0$, შეიძლება ასეც გადაიწეროს:

$$y-y_0=a(x-x_0), \tag{2}$$

[1]) აქ სიტყვა „პირობა“ ჩვენ გვესმის, როგორც მოთხოვნილება, რომელიც ანალიზურად შეიძლება ერთი განტოლებით გამოისახებოდეს. მაგალითად, მოთხოვნილება, რომ წრფე $y+ax+b$ გადიოდეს წერტილზე (3,5), გამოისახება ერთი ტოლობით: $5=a\cdot 3+b$; მაშასადამე, ჩვენ აქ გვაქვს ერთი „პირობა“.

სადაც $a=\frac{Y}{X}$ არის კონის წრფის საკუთხო კოეფიციენტი. თუ $X=0$ (ე. ი. $Oy$ ღერძის პარალელური წრფისათვის) გვექნება:

$$x-x_0=0. \tag{3}$$

ეს უკანასკნელი განტოლება მიზანშეწონილია განვიხილოთ როგორც (2) განტოლების კერძო შემთხვევა, იმ შეთანხმებით, რომ (3) განტოლება შეეფერება შემთხვევას $a=\infty$ [1]).

როგორც ეს მოსალოდნელი იყო, აღებულ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება დამოკიდებულია ერთ დამოუკიდებელ, ნებისმიერ მუდმივზე; თუ განტოლება დაწერილია (2) სახით, მაშინ ასეთი მუდმივი იქნება საკუთხო კოეფიციენტი $a$.

მივცემთ რა $a$-ს სხვადასხვა მნიშვნელობას, ჩვენ მივიღებთ სხვადასხვა წრფეს, რომლებიც ერთსა და იმავე $M_0$ წერტილზე გაივლიან, და თუ შევთანხმდებით, რომ $a$-ს მიენიჭოს აგრეთვე $\infty$ მნიშვნელობაც (იმ გაგებით, როგორც ზემოთ განემარტეთ), მაშინ შეიძლება დადასტურდეს, რომ (2) განტოლება, $a$ კოეფიციენტის სათანადო შერჩევით, გამოსახავს ყოველ წრფეს, აღებულ წერტილზე გამავალს.

შევნიშნოთ კიდევ, რომ მოცემულ $(x_0, y_0)$ წერტილზე გამავალ წრფეთა ზოგადი განტოლება (1) შეიძლება ასეც გადაიწეროს:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0, \tag{4}$$

სადაც $A$ და $B$ ნებისმიერი მუდმივებია, შემდეგნაირად განსაზღვრულნი: $Y=A$, $X=-B$ ($A$ და $B$ ერთდროულად ნულები არ არიან).

**§ 107. ამოცანა 9. აღებულ წერტილზე გამავალი და აღებული მიმართულების პარალელური წრფის განტოლების პოვნა.** თუ აღებული მიმართულების საკუთხო კოეფიციენტი არის $a$, ხოლო $M_1(x_1, y_1)$ აღებული წერტილია, მაშინ საძიებელი წრფის განტოლება, ცხადია, იქნება:

$$y-y_1=a(x-x_1). \tag{1}$$

თუ აღებული მიმართულება მოცემულია საკუთხო კოეფიციენტით კი არა, არამედ მიმართულების $(X, Y)$ კოეფიციენტებით, მაშინ საძიებელი წრფის განტოლება შეიძლება ასეც დაიწეროს:

$$\frac{x-x_1}{X}=\frac{y-y_1}{Y}, \tag{2}$$

რაც, არსებითად, იგივეა.

**§ 108. ამოცანა 10. მოცემულ ორ $M_1(x_1, y_1)$ და $M_2(x_2, y_2)$ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლების პოვნა.** ამისათვის საკმარისია წინა პარა-

[1]) (2) განტოლებას თუ დავწერთ შემდეგი სახით: $x-x_0=\frac{y-y_0}{a}$ და დავუშვებთ $a=\infty$, მივიღებთ $x-x_0=0$.

გრაფის (2) განტოლებაში კოეფიციენტები $X$ და $Y$ ისე შევარჩიოთ, რომ წრფე $M_2$ წერტილზედაც გადიოდეს. შევნიშნავთ რა, რომ ვექტორი $M_1M_2 = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$ მდებარეობს საძიებელ წრფეზე, შეგვიძლია იგი მივიღოთ მისი მიმართულების ვექტორად, ე. ი. შეგვიძლია დავწეროთ, რომ $X = x - x_1$, $Y = y - y_1$ და მაშინ საძიებელი წრფის განტოლება ასე დაიწერება:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{1}$$

ეს განტოლება შეიძლება ერთბაშად დაწერილიყო სამი $(x,\ y)$, $(x_1,\ y_1)$ და $(x_2,\ y_2)$ წერტილის კოლინეარობის პირობის თანახმად (§ 38). აღნიშნულ პარაგრაფში ნათქვამის თანახმად, საძიებელი წრფის განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სიმეტრული სახით:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

**§ 109. ამოცანა 11. აღებულ წერტილზე გამავალი და აღებული წრფის მართობული წრფის განტოლების პოვნა** (კოორდინატები მართკუთხოვანია). ვთქვათ, $M_1(x_1,\ y_1)$ მოცემული წერტილია და

$$y = a_1x + b_1 \tag{1}$$

არის მოცემული წრფე. $M_1$-ზე გამავალი ნებისმიერი წრფის განტოლებას აქვს სახე:

$$y - y_1 = a(x - x_1); \tag{2}$$

იმისათვის, რომ ეს წრფე მოცემული წრფის მართობული იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ (§ 102):

$$a = -\frac{1}{a_1}. \tag{3}$$

ჩავსვამთ რა ამ მნიშვნელობას წინა განტოლებაში, მივიღებთ:

$$y - y_1 = -\frac{1}{a_1}(x - x_1), \tag{4}$$

და ამით ჩვენი ამოცანა ამოხსნილია.

თუ აღებული წრფე მოცემულია მიმართულების კოეფიციენტებიანი განტოლებით: $\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y}$, მაშინ საძიებელი წრფის განტოლება იქნება:

$$X(x - x_1) + Y(y - y_1) = 0;$$

ეს გამომდინარეობს როგორც წინა ამოხსნიდან $\left(\text{ჩვენ შემთხვევაში } a_1=\frac{Y}{X}\right)$, აგრეთვე იმ ფაქტიდან (§ 95), რომ $(A, B)$ ვექტორი მართობია წრფისა

$$Ax+By+C=0.$$

**§ 110. ამოცანა 12.** **მოცემულ წერტილზე გამავალი და მოცემულ წრფესთან მოცემული კუთხის შემდგენი წრფის განტოლების პოვნა** (კოორდინატები მართკუთხოვანია). ეს ამოცანა შეიცავს, როგორც კერძო შემთხვევას, წინა ამოცანას და § 107-ის ამოცანასაც.

ვთქვათ, $\alpha$ არის კუთხე, რომელიც უნდა შეადგინოს საძიებელმა წრფემ მოცემულ წრფესთან ისე, რომ ეს კუთხე აითვლება მოცემული წრფიდან დადებითი მიმართულებით (§ 101). წინა პარაგრაფის აღნიშვნების მიხედვით, ჩვენ უნდა განვსაზღვროთ $a$ შემდეგი პირობიდან (§ 101):

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a-a_1}{1+aa_1}.$$

თუ ამ განტოლებას $a$-ს მიმართ ამოვხსნით და ნაპოვნ მნიშვნელობას წინა პარაგრაფის (2) განტოლებაში შევიტანთ, მივიღებთ საძიებელ განტოლებას:

$$y-y_1=\frac{a_1+\operatorname{tg}\alpha}{1-a_1\operatorname{tg}\alpha}(x-x_1).$$

თუ კუთხეების ათვლის მიმართულება აღნიშნული არაა, მაშინ $\operatorname{tg}\alpha$-ს მაგიერ $\pm\operatorname{tg}\alpha$ უნდა ავიღოთ. ამ შემთხვევაში ამოცანას ორი პასუხი ექნება; გამონაკლისს შეადგენენ შემთხვევები $\alpha=0$ და $\alpha=\frac{\pi}{2}$: ორ წინა პარაგრაფში განხილულნი, როდესაც ამოცანას მხოლოდ ერთი ამონახსენი აქვს.

#### სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

(§ 106—110-სათვის)

1. იპოვეთ $(6, -2)$ წერტილზე გამავალი და $3x-8y+2=0$ წრფის პარალელური წრფე.
პასუხი: $3(x-6)-8(y+2)=0$.

2. დაამტკიცეთ, რომ იმ წრფის განტოლებას, რომელიც $(x_0, y_0)$ წერტილზე გადის და $Ax+By+C$ წრფის პარალელურია, შემდეგი სახე აქვს:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

3. დაამტკიცეთ, რომ იმ წრფის განტოლებას, რომელიც $(x_0, y_0)$ წერტილზე გადის და $Ax+By+C=0$ წრფის მართობია, შემდეგი სახე აქვს (მართკუთხოვან კოორდინატებში):

$$B(x-x_0)-A(y-y_0)=0.$$

4. იპოვეთ $(2, 3)$ წერტილზე გამავალი და $3x-8y+2=0$ წრფის მართობი წრფე (მართკუთხოვან კოორდინატებში).
პასუხი: $8(x-2)+3(y-3)=0$.

5. იპოვეთ (2, 3) და (7, 8) წერტილებზე გამავალი წრფე.

პასუხი: $\frac{x-2}{7-2}=\frac{y-3}{8-3}$ ანუ $x-y+1=0$.

6. იპოვეთ ის წრფე, რომელიც (1, 3) წერტილზე გაივლის და $2x-y+5=0$ წრფესთან შეადგენა კუთხეს $60^\circ$-ს (მართკუთხოვან კოორდინატებში).

პასუხი: თუ კუთხე აითვლება აღებული წრფიდან, მაშინ საძიებელი წრფის განტოლება იქნება:

$$y-3=\frac{2+\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}}(x-1).$$

თუ ათვლის მიმართულება აღნიშნული არაა, მაშინ ამოცანას ორნაირი პასუხი ექნება (მეორე ამონახსნს მივიღებთ პირველიდან, თუ $\sqrt{3}$-ს შეუცვლით $-\sqrt{3}$-ით).

§ 111. ორი მოცემული წრფის გადაკვეთის წერტილზე გამავალ წრფეთა ზოგადი განტოლება. ხანდახან წრფეთა კონის ცენტრი უშუალოდ არ მოიცემა, არამედ მოცემულია კონის კუთვნილი ორი წრფე. მაშინ კონის ცენტრი შეიძლება ვიპოვოთ, როგორც ამ წრფეთა გადაკვეთის წერტილი.

მაგრამ გაცილებით უფრო მიზანშეწონილია ორი მოცემული წრფით განსაზღვრული კონის წრფეთა ზოგადი განტოლების უშუალო პოვნა, სხვანაირად რომ ვთქვათ, ორი მოცემული წრფის გადაკვეთის წერტილზე გამავალ წრფეთა ზოგადი განტოლების პოვნა.

ვთქვათ,

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \tag{1}$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0 \tag{2}$$

არიან მოცემული წრფეების განტოლებანი.

განვიხილოთ განტოლება:

$$l_1(A_1x+B_1y+C_1)+l_2(A_2x+B_2y+C_2)=0, \tag{3}$$

სადაც $l_1$ და $l_2$ აღნიშნავენ ნებისმიერ მუდმივ სიდიდეებს, რომლებიც ერთდროულად ნულის ტოლი არ არიან; ეს განტოლება მიიღება (1) და (2) განტოლებათაგან მათი $l_1$ და $l_2$-ზე გამრავლებით და წევრობრივი შეკრებით.

ცხადია, რომ (3) განტოლება, რომელიც შეიძლება შემდეგი სახით გადაიწეროს:

$$(l_1A_1+l_2A_2)x+(l_1B_1+l_2B_2)y+(l_1C_1+l_2C_2)=0, \tag{3a}$$

წარმოადგენს რაღაც წრფის განტოლებას, ვინაიდან ეს არის პირველი ხარისხის განტოლება. მართლაც, (3a) განტოლებაში $x$ და $y$-ის კოეფიციენტებში ერთდროულად არ შეიძლება იყოს ნული, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში დეტერმინანტი $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}$ აუცილებლივ ნული იქნება და წრფეები (1), (2) არ გადაიკვეთებოდნენ, რაც ეწინააღმდეგება ჩვენს დაშვებას.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ (3) წრფე აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს, ესე იგი დავამტკიცოთ, რომ (3) წრფე გაივლის (1) და (2) წრფეთ-

ბის გადაკვეთის წერტილზე როგორიც უნდა იყვნენ $l_1$ და $l_2$ მუდმივების მნიშვნელობანი.

მართლაც, თუ $(x_0, y_0)$ აღნიშნავენ (1) და (2) წრფეების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებს, მაშინ $A_1x_0+B_1y_0+C_1=0$, $A_2x_0+B_2y_0+C_2=0$ და ამიტომ:

$$l_1(A_1x_0+B_1y_0+C_1)+l_2(A_2x_0+B_2y_0+C_2)=0,$$

ე. ი. გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ (3) განტოლებას, სხვანაირად რომ ვთქვათ, $(x_0, y_0)$ წერტილი (3) წრფეზე ძევს, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ზემოვიღოთ სიმოკლისათვის შემდეგი აღნიშვნები:

$$F_1(x, y)=A_1x+B_1y+C_1,$$
$$F_2(x, y)=A_2x+B_2y+C_2.$$

$F_1(x, y)$ და $F_2(x, y)$ წარმოადგენენ $x$ და $y$ ცვლადების წრფივ ფუნქციებს. ასეთი აღნიშვნების მიხედვით, (3) განტოლება ასე გადაიწერება:

$$l_1F_1(x, y)+l_2F_2(x, y)=0. \qquad (4)$$

მივცემთ რა $l_1$ და $l_2$-ს სხვადასხვა მნიშვნელობას, ჩვენ მივიღებთ სხვადასხვა წრფეს, (1) და (2) წრფეთა გადაკვეთის წერტილზე გამავალს.

არსებითად რომ ვთქვათ, (4) წრფის მდებარეობა დამოკიდებულია თვით $l_1$ და $l_2$ სიდიდეებზე კი არა, არამედ მათ ფარდობაზე $k=\frac{l_1}{l_2}$; მართლაც, გავყოფთ რა (4)-ს $l_1$-ზე, ჩვენ დავიყვანთ მას სახეზე:

$$F_1(x, y)+kF_2(x, y)=0. \qquad (5)$$

რა თქმა უნდა, ეს შეიძლება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ $l_1 \neq 0$. მაგრამ, თუ $l_1=0$ (და, მაშასადამე, $l_2 \neq 0$, ვინაიდან, პირობის თანახმად, $l_1$ და $l_2$ არ შეიძლება ერთდროულად ნული იყვნენ), მაშინ (4) განტოლება შემდეგზე დაიყვანება: $F_2(x, y)=0$, ე. ი. (2) წრფის განტოლებაზე.

ახლა შევთანხმდეთ, რომ (5) განტოლებაში $k$ სიდიდეს შეუძლია მიიღოს $\infty$ მნიშვნელობაც, თუ ჩაითვლით, რომ ასეთ შემთხვევაში (2) განტოლება დაიყვანება $F_2(x, y)=0$ განტოლებაზე[1]). ამ განტოლების მიხედვით (4) და (5) განტოლებანი სრულიად ტოლფასი არიან.

შემდეგ პარაგრაფში ჩვენ დავინახავთ, რომ (4) განტოლებაში $l_1$ და $l_2$ სიდიდეების სათანადო შერჩევით [ანუ $k$-ს სათანადო შერჩევით (5)-ში] ჩვენ შევძლებთ კონის ნებისმიერი წრფის პოვნას. ამრიგად, (4) და (5) განტოლება მართლაც არის მოცეკული ორი წრფით განსაზღვრული კონის წრფეთა ზოგადი განტოლება.

აქამდე ჩვენ ვკულისხმობდით, რომ მოცემული წრფეები (1) და (2) იკვეთებიან რომელსამე წერტილში სასრულო მანძილზე. ახლა ვნახოთ რას გა-

[1]) თუ $F_1(x, y)+kF_2(x, y)=0$ განტოლებას შემდეგნაირად ვადაეწეროთ: $\frac{1}{k}F_1(x, y)+F_2(x, y)=0$ და დავეშვებთ, რომ $k=\infty$, მივიღებთ $F_2(x, y)=0$.

მოსახავს (4) განტოლება, თუ მოცემული წრფეები პარალელური არიან, მაგრამ არა თანხვედნილი, ე. ი. თუ $A_1=mA_2$, $B_1=mB_2$, $C_1=mC_2$, სადაც $m$ რომელიმე რიცხვია. ამ შემთხვევაში (4) განტოლება, ანუ რაც იგივეა, (3a) განტოლება, ღებულობს სახეს:

$$A'x+B'y+C'=0, \tag{6}$$

სადაც $A'=(ml_1+l_3)A_2$, $B'=(ml_1+l_3)B_2$, $C'=(ml_1+l_2)C_2$. უკანასკნელ ტოლობათაგან პირველი ორი გვიჩვენებს, რომ $l_1$ და $l_2$-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის (6) განტოლების პირველი ორი კოეფიციენტი (2) განტოლების პირველი ორი კოეფიციენტის პროპორციულია, ეს კი ნიშნავს, რომ (6) განტოლებით გამოსახული წრფე $l_1$ და $l_2$-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის (2) განტოლებით გამოსახული წრფის პარალელურია, ე. ი. ორივე მოცემული წრფის პარალელურია[1]).

როგორც შემდეგ პარაგრაფში დავინახავთ, მოცემულ წრფეთა პარალელური ყოველი წრფე შეიძლება (6)-დან იყოს მიღებული $l_1$ და $l_2$ რიცხვების სათანადო შერჩევით. პარალელურ წრფეთა ერთობლიობას აგრეთვე კონა ეწოდება, მაგრამ ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ კონის ცენტრი უსასრულობაშია, ანუ კონა არასაკუთრივია.

დასასრულ, თუ (1) და (2) წრფეები თანამთხვეული არიან, მაშინ ჩვენ გვექნება: $A_1=mA_2$, $B_1=mB_2$, $C_1=mC_2$ (სადაც $m$ რომელიმე რიცხვია) და (6) განტოლების სამივე კოეფიციენტი (2) განტოლების, ან, რაც იგივეა, შესაბამისი კოეფიციენტების პროპორციულია. მაშასადამე, ამ განსაკუთრებულ შემთხვევაში $l_1$ და $l_2$-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის (6) განტოლება ერთსა და იმავე წრფეს გამოსახავს (იმავეს, რაც მოცემული განტოლებანი). შემდეგში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ მოცემული წრფეები თანამთხვეული არ არიან.

**§ 112. ამოცანა 13. ორი მოცემული წრფის გადაკვეთის წერტილზე და მეორე მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის პოვნა.** შევეინარჩუნოთ წინა პარაგრაფის აღნიშვნები. ვთქვათ, გარდა ამისა, $M_1(x_1, y_1)$ არის რომელიმე მოცემული წერტილი, რომელიც არ ემთხვევა მოცემულ წრფეთა გადაკვეთის წერტილს. ჩვენი ამოცანა ამოხსნილი იქნება, თუ ისე შევარჩევთ $k$ პარამეტრს წინა პარაგრაფის (5) განტოლებაში, რომ ამ განტოლებით გამოსახული წრფე $M_1$ წერტილზე გადიოდეს. თუ გამოვთქვამთ $M_1(x_1, y_1)$ წერტილზე ამ წრფის გავლის პირობას, მივიღებთ:

$$F_1(x_1, y_1)+kF_2(x_1, y_1)=0, \tag{1}$$

ან უფრო დაწვრილებით:

$$A_1x+B_1y+C_1+k(A_2x+B_2y+C_2)=0; \tag{2}$$

[1]) გამონაკლისს შეიძლება წარმოადგენდეს შემთხვევა, როცა $ml_1+l_2=0$, ე. ი. $A'=B'=0$ (ამ შემთხვევაში, როგორც ადვილი დასანახია $C'\neq 0$). მაგრამ ამ შემთხვევაშიც შეიძლება ითქვას, რომ (6) წარმოადგენს „არასაკუთრივ“ წრფეს (იხ. § 90-ის ბოლო), რომელიც ნებისმიერი მიმართულების პარალელურია.

ეს დამოკიდებულება საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ $k$:

$$k=-\frac{A_1x_1+B_1y_1+C_1}{A_2x_1+B_2y_1+C_2}. \tag{3}$$

თუ შევიტანთ $k$-ს ნაპოვნ მნიშვნელობას წინა პარაგრაფის (5) განტოლებაში, მივიღებთ საძიებელ წრფის განტოლებას.

$k$ პარამეტრმა შეიძლება მიიღოს $\infty$ მნიშვნელობა მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა მნიშვნელი $A_2x_1+B_2y_1+C_2=0$. მაგრამ ეს ნიშნავს, რომ $M_1(x_1, y_1)$ წერტილი ძევს წინა პარაგრაფის (2) წრფეზე. მეორეს მხრით, წინა პარაგრაფში მიღებული პირობის თანახმად, მნიშვნელობას $k=\infty$ ეთანადება წრფე: $A_2x+B_2y+C_2=0$, როგორც ეს უნდა იყოს, ვინაიდან ამ შემთხვევაში საძიებელი წრფე მას უნდა დაემთხვეს.

რასაკვირველია, ყველაფერი აქ ნათქვამი შეეხება არასაკუთრივ კონასაც, ე. ი. როცა მოცემული წრფეები პარალელურია არიან (მაგრამ არა თანამთხვეულნი).

მაშასადამე, ამოცანას აქვს ყოველთვის მხოლოდ და მხოლოდ ერთი ამონახსენი [1]). $k$-სათვის უსასრულოდ დიდი მნიშვნელობის განხილვა რომ ავიცდინოთ, შესაძლოა ვისარგებლოთ წინა პარაგრაფის (4) განტოლებით.

ჩვენს მიერ ამოხსნილი ამოცანა ამტკიცებს იმასაც, რაც უკვე წინა პარაგრაფში გამოვთქვით, სახელდობრ, კონის კუთვნილი ყ ო ვ ე ლ ი წრფე შეიძლება მიღებულ იქნას ზოგადი განტოლებიდან: $F_1(x, y)+kF_2(x, y)=0$, თუ $k$ მუდმივს სათანადო მნიშვნელობას მივანიჭებთ. მართლაც, ჩვენ შეგვიძლია $k$-ს გარკვეული შერჩევით მივიღოთ კონის წრფე, რომელიც სიბრტყის ნებისმიერ წერტილზე გაივლის, მაშასადამე, შეგვიძლია მივიღოთ კონის ნებისმიერი წრფე.

**§ 113. პირობა იმისა, რომ სამი წრფე ერთ წერტილში იკვეთებოდეს.** ვთქვათ, მოცემულია სამი წრფე განტოლებებით:

$$F_1(x, y)=0,\ F_2(x, y)=0,\ F_3(x, y)=0, \tag{1}$$

სადაც სიმოკლისათვის შემოღებულია აღნიშვნები:

$$\begin{gathered}F_1(x, y)=A_1x+B_1y+C_1,\ F_2(x, y)=A_2x+B_2y+C_2,\\ F_3(x, y)=A_3x+B_3y+C_3.\end{gathered} \tag{2}$$

ყოველი ამ წრფის განტოლება, რომელიც პირველი ორი განტოლებით წარმოდგენილი წრფეების გადაკვეთაზე გაივლის, შეიძლება დაიწეროს შემდეგნაირად:

$$l_1F_1(x, y)+l_2F_2(x, y)=0. \tag{3}$$

---

[1]) გავიხსენოთ, რომ ჩვენ გამოვრიცხეთ ის შემთხვევა, როცა მოცემული წერტილი ემთხვევა მოცემულ წრფეთა გადაკვეთის წერტილს, ე. ი. როცა ერთდროულად: $A_1x_1+B_1y_1+C_1=0$, $A_2x_1+B_2y_1+C_2=0$.

ამას რომ ადგილი ჰქონდეს, მაშინ (3) ფორმულა მოგვცემდა $k$-სათვის განუზღვრელ მნიშვნელობას $\frac{0}{0}$. ამ შემთხვევაში წინა პარაგრაფის (5) განტოლება წყვეტს ამოცანას $k$-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის.

კერძოდ, თუ მოცემულ წრფეთაგან მესამე გაივლის პირველი ორის გადაკვეთის წერტილზე, მაშინ წინა განტოლება, $l_1$ და $l_2$ მუდმივების სათანადო შერჩევით, უნდა გამოსახავდეს ამ მესამე წრფეს. ეს კი ნიშნავს, რომ (3) განტოლების მარცხენა მხარე შეიძლება მხოლოდ მუდმივი მამრავლით განსხვავდებოდეს $F_3(x, y)=0$ განტოლების მარცხენა მხარისგან (§ 93); სხვანაირად რომ ვთქვათ, ჩვენ უნდა გვქონდეს იგივობა: $l_1F_1(x, y)+l_2F_2(x, y)=kF_3(x, y)$, სადაც $k$ რომელიმე მუდმივია, ნულისგან განსხვავებული. თუ სიმეტრიისათვის $k$-ს აღვნიშნავთ $(-l_3)$-ით, მაშინ წინა იგივობა შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$l_1F_1(x, y)+l_2F_2(x, y)+l_3F_3(x, y)=0. \qquad (4)$$

ცხადია, რომ პირიქითაც: თუ შეიძლება ისეთნაირად შევარჩიოთ ერთდროულად ნულის არატოლი სამი მუდმივი $l_1$, $l_2$, $l_3$, რომ ადგილი ჰქონდეს (4) იგივობას, მაშინ მოცემული სამი წრფე გადაიკვეთება ერთ წერტილში.

ყველა აქ ნათქვამი შეეხება იმ შემთხვევასაც, როცა მოცემულ წრფეთაგან ორი იკვეთება უსასრულობაში (ე. ი. პარალელური არიან). მაშინ (4) პირობა გამოსახავს იმას, რომ მესამე წრფეც იკვეთება პირველ ორთან უსასრულობაში, ე. ი. მათი პარალელურია.

მაშასადამე, იმისათვის, რომ სამი წრფე (1) ერთ (სასრულოან უსასრულოდ შორეულ) წერტილში იკვეთებოდეს[1]), აუცილებელი და საკმარისია, რომ შესაძლებელი იყოს ისეთი სამი $l_1$, $l_2$, $l_3$ რიცხვის შერჩევა (რომლებიც ერთდროულად ნულიარ არიან) და რომელთათვისაც (4) ტოლობა იგივობად იქცევა.

მაგალითად, წრფეები წარმოდგენილნი განტოლებებით:

$$x+2y-1=0,\ 2x+y-4=0,\ 4x+5y-6=0,$$

გაივლიან ერთ წერტილზე, ვინაიდან გვაქვს იგივობა:

$$2(x+2y-1)+1\cdot(2x+y-4)+(-1)\cdot(4x+5y-6)=0.$$

ადვილი შესამოწმებელია უშუალოდ, რომ ზემომოყვანილი დასკვნა (კურსივით დაბეჭდილი) ძალაში რჩება, თუ დავუშვებთ განსახილველი სამი წრფიდან ზოგიერთის თანხვედნას, მაშინ შესაძლოა მათ ჰქონდეთ საერთო წერტილთა უსასრულო სიმრავლე.

ბოლოს, შევნიშნოთ რომ (4) იგივობა ტოლფასია შემდეგი ტოლობებისა:

$$\left.\begin{aligned} l_1A_1+l_2A_2+l_3A_3&=0,\\ l_1B_1+l_2B_2+l_3B_3&=0,\\ l_1C_1+l_2C_2+l_3C_3&=0,\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

[1]) სხვანაირად რომ ვთქვათ, ეს წრფეები რომ ერთსა და იმავე კონას ეკუთვნოდნენ.

რომელთაც მივიღებთ, თუ (4)-ში $x$, $y$-ის კოეფიციენტებს და თავისუფალ წევრს ნულს გავუტოლებთ. მაშასადამე, იმისათვის, რომ სამ წრეს (2) ჰქონდეს საერთო წერტილი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{6}$$

ვინაიდან, როგორც დეტერმინანტთა თეორიიდან ცნობილია[1]), მხოლოდ და მხოლოდ ამ შემთხვევაში არსებობენ $l_1$, $l_2$, $l_3$ სიდიდეები, რომლებიც ერთდროულად არ არიან ნულის ტოლი და აკმაყოფილებენ (5) ერთგვაროვან განტოლებებს.

**§ 114. ამოცანა 14.** მოცემულ წრეთა გადაკვეთაზე გამავალი და მოცემული მიმართულების მქონე წრის განტოლების პოვნა. ვთქვათ, $a$ არის მოცემული მიმართულების საკუთხო კოეფიციენტი. § 111-ის აღნიშვნების მიხედვით, ამოცანა დაიყვანება $k$ მუდმივის განსაზღვრაზე განტოლებაში:

$$F_1(x, y) + kF_2(x, y) = 0 \tag{1}$$

ისე, რომ ამ განტოლებით გამოსახული წრეის საკუთხო კოეფიციენტი იყოს $a$-ს ტოლი.

გადავწერთ რა წინა განტოლებას შემდეგი სახით:

$$(A_1 + kA_2)x + (B_1 + kB_2)y + C_1 + kC_2 = 0,$$

ვპოულობთ, რომ საძიებელი პირობა გამოისახება ტოლობით— $\frac{A_1 + kA_2}{B_1 + kB_2} = a$, რაც წარმოადგენს $k$-ს მიმართ პირველი ხარისხის განტოლებას; ამოვხსნით რა ამ განტოლებას და ჩავსვამთ რა $k$-ს ნაპოვნ მნიშვნელობას (1)-ში, მივიღებთ საძიებელ განტოლებას[2]).

ანალოგიურად ამოიხსნება ამოცანა: მოცემულ წრეთა გადაკვეთაზე გამავალი და მოცემული მიმართულების მართობული წრეის პოვნა (უფრო ზოგადად, მოცემულ მიმართულებასთან მოცემული კუთხის შემქმნელი წრეის პოვნა) (იხ. § 109, 110).

**§ 115. $k$ მუდმივის გეომეტრიული მნიშვნელობა.** პარამეტრი $k$ განტოლებაში

$$F_1(x, y) + kF_2(x, y) = 0 \tag{1}$$

---

[1]) იხ. დამატება, § 6.

[2]) მკითხველს მოეთხოვება გამოიკვლიოს ის შემთხვევა, როდესაც $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, ე. ი. როცა ჩვენ საქმე გვაქვს პარალელურ წრეთა კონასთან. ამ შემთხვევაში ამოცანას ან სულ არა აქვს აძოხსნა, ან აქვს უამრავი.

ღებულობს მეტად მარტივ გეომეტრიულ მნიშვნელობას, თუ $F_1(x, y)=0$ და $F_2(x, y)=0$ წრფეების განტოლებანი მოცემული არიან ნორმალური სახით.

ამ შემთხვევაში, შემოვიღებთ რა § 96-ის აღნიშვნებს, თუ პირველ და მეორე წრფის ელემენტებს შესაბამისად მივაწერთ ნიშნაკებს 1 და 2-ს და კოორდინატებს მართკუთხოვნად ჩავთვლით, გვექნება:

$$F_1(x, y)=x\cos\psi_1+y\sin\psi_1-p_1$$
$$F_2(x, y)=x\cos\psi_2+y\sin\psi_2-p_2.$$

თუ შემდგომ ამისა, $h_1$ და $h_2$-ით აღვნიშნავთ (ნიშნის თანდართვით) რომელიმე $M(x, y)$ წერტილის მანძილებს შესაბამისად $F_1$ და $F_2$-მდე [1]), მივიღებთ (§ 103):

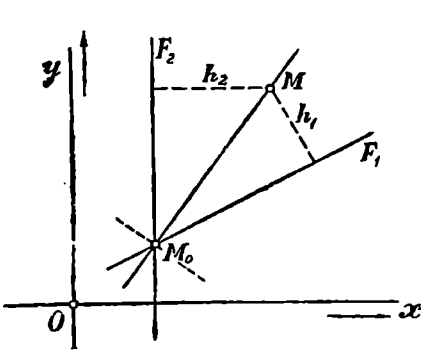
$$h_1=x\cos\psi_1+y\sin\psi_1-p_1,$$
$$h_2=x\cos\psi_2+y\sin\psi_2-p_2.$$

ამიტომ (1) განტოლება შეიძლება ასე გადაიწეროს: $h_1+kh_2=0$, ანუ

$$k=-\frac{h_1}{h_2}. \tag{2}$$

მაშასადამე, თუ ნიშანს ყურადღებას არ მივაქცევთ, $k$ მუდმივი ტოლია იმ მანძილთა ფარდობისა, რომლითაც (1) წრფეზე მდებარე ნებისმიერი წერტილი დაშორებულია $F_1(x, y)=0$ და $F_2(x, y)=0$ წრფეებიდან.

იმ პირობის მიხედვით, რომელსაც ადგილი აქვს მანძილთა ნიშნისათვის (§ 103), ცხადია, რომ $k$ არის უარყოფითი სიდიდე, თუ (1) წრფე გაივლის $F_1$ და $F_2$-ს შორის არსებულ იმ კუთხეზე, სადაც კოორდინატთა სათავე იმყოფება და მის ვერტიკალურ კუთხეზე (როგორც 97 ნახაზზეა); წინააღმდეგ შემთხვევაში (ნახ. 97, პუნქტირი) $k$ არის დადებითი [2]).




ნახ. 97.

ზოგად შემთხვევაში, როცა წრფეები $F_1$ და $F_2$ მოცემულია ზოგადი სახის განტოლებებით, ხოლო კოორდინატთა სისტემა დეკარტის განზოგადებულ სისტემას წარმოადგენს, გვექნება:

$$h_1=\lambda_1F_1(x, y),\quad h_2=\lambda_2F_2(x, y),$$

სადაც $\lambda_1$ და $\lambda_2$ მუდმივებია (§ 103) და 2-ის ნაცვლად მივიღებთ:

$$k=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\cdot\frac{h_1}{h_2} \tag{3}$$

[1]) სიმოკლისათვის $F$ წრფეს ჩვენ ვუწოდებთ $F(x, y)=0$ განტოლებით გამოსახულ წრფეს.

[2]) ამ კრიტერიუმს ადგილი არ ექნება, თუ $F_1$ და $F_2$ წრფეთაგან ერთი სათავეზე გაივლის.

### სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი (§§ 111—115)

1. იპოვეთ ის წრფე, რომელიც გადის სათავეზე და შემდეგ წრფეთა გადაკვეთაზე:

$$3x+y-1=0 \text{ და } 2x-8y+3=0.$$

პასუხი: $11x-5y=0$.

2. იპოვეთ ის წრფე, რომელიც გადის $x+y+1=0$ და $x+2y-2=0$ წრფეთა გადაკვეთაზე და პარალელურია $x=3y+5$ წრფისა.

პასუხი: $x-3y+13=0$.

3. იპოვეთ ის წრფე, რომელიც გადის $x-y-5=0$ და $2x-3y-1=0$ წრფეთა გადაკვეთაზე და მართობულია $x+2y=0$ წრფისა (კოორდინატები მართკუთხოვანია).

პასუხი: $2x-y-19=0$.

4. იპოვეთ იმ კუთხეების ბისექტრისათა განტოლება, რომლებიც მოთავსებული არიან ორ წრფეს შორის, თუ ამ წრფეთა ნორმალური განტოლებანი არიან: $F_1(x, y)=0$ და $F_2(x, y)=0$ (მართკუთხოვან კოორდინატებში).

ამოხსნა: წრფეები $F_1$ და $F_2$ შეადგენენ ორ კუთხეს, რომლებიც ერთიმეორის დამატებას წარმოადგენენ $\pi$-მდე. მაშასადამე; საძიებელია ორი ბისექტრისი. თუ განტოლებაში: $F_1(x, y)+kF_2(x, y)=0$ მივცემთ $k$ მუდმივს შესაფერ მნიშვნელობას, მივიღებთ თითოეულ მათგანის განტოლებას.

ვინაიდან ბისექტრისის თითოეული წერტილი ერთნაირადაა დაშორებული მოცემული $F_1$ და $F_2$ წრფეებიდან, ამიტომ, § 115-ის თანახმად, გვექნება: $k=\pm 1$.

ცხადია, რომ მნიშვნელობას $k=+1$ შეეფერება ერთი ბისექტრისი (სახელდობრ ის, რომელიც არ გაიელის სათავის შემცველ კუთხეზე), ხოლო მნიშვნელობას $k=-1$ შეეფერება მეორე ბისექტრისი.

თუ წრფეთა განტოლებანი ზოგადი სახით არიან მოცემული, მაშინ მათ შორის კუთხეების ბისექტრისათა განტოლებანი შემდეგნაირად დაიწერებიან (მართკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაში):

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}};$$

ორ შესაძლებელ ნიშანს ორი ბისექტრისი ეთანადება.

5. ორი წრფის მართობულობის პირობის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ წინა მაგალითში ხსენებული ორი ბისექტრისი ურთიერთმართობული არიან.

6. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის შინაგანი კუთხეების სამივე ბისექტრისი ერთ წერტილში იკვეთება.

დამტკიცება. ვთქვათ, რომ იმ წრფეების ნორმალური განტოლებანი, რომლებიც მართკუთხოვან კოორდინატებში სამკუთხედის გვერდებს წარმოადგენენ, არიან $F_1(x, y)=0$, $F_2(x, y)=0$ და $F_3(x, y)=0$. თუ სათავე სამკუთხედის შიგნითაა (რაც ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ), მაშინ შინაგანი კუთხეების ბისექტრისათა განტოლებანი იქნებიან (იხ. სავარჯ. 4):

$$F_3(x, y)-F_2(x, y)=0,\ F_3(x, y)-F_1(x, y)=0,\ F_1(x, y)-F_2(x, y)=0. \qquad (*)$$

მაგრამ, ვინაიდან ჩვენ გვაქვს იგივობა (სიმოკლისათვის აქ არ ვწერთ $x$ და $y$-ს):

$$1\cdot(F_3-F_2)+1\cdot(F_2-F_1)+1\cdot(F_1-F_3)=0,$$

ამიტომ § 113-ის თანახმად (*) განტოლებებით წარმოდგენილი წრფეები გაიელიან ერთ წერტილზე (ჩვენ შემთხვევაში $I_1=I_2=I_3=1$).

7. დაამტკიცეთ (იხ. წინა მაგალითი), რომ სამკუთხედის ორი გარეგანი კუთხის ბისექტრისები და მათი არა მოსაზღვრე შინაგანი კუთხის ბისექტრისი იკვეთებიან ერთ წერტილში.

დამტკიცება. წინა მაგალითის აღნიშვნების მიხედვით, იმ გარეგანი კუთხეების ბისექტრისები, რომელთაც შეადგენენ გვერდები $F_2$, $F_3$ და $F_3$, $F_1$, მოიცემიან განტოლებებით:

$$F_2+F_3=0,\ F_3+F_1=0.$$

$F_1$ და $F_2$ გვერდებს შორის შიგა კუთხის ბისექტრისი მოიცემა $F_1-F_2=0$ განტოლებით. მაგრამ, ვინაიდან გვაქვს იგივობა

$$1\cdot(F_2+F_3)+(-1)\cdot(F_3+F_1)+1\cdot(F_1-F_2)=0,$$

ამიტომ დებულება დამტკიცებულია.

8. დამტკიცეთ, რომ წრფილ-წყვილად აღებული სამი წრეწირის რადიკალური ღერძები (§ 100, სავარჯიშო 3) იკვეთებიან ერთ წერტილში. ეს წერტილი იწოდება მოცემული სამი წრეწირის რადიკალურ ცენტრად.

დამტკიცება: თუ

$$x^2+y^2+2A_1x+2B_1y+C_1=0,$$
$$x^2+y^2+2A_2x+2B_2y+C_2=0,$$
$$x^2+y^2+2A_3x+2B_3y+C_3=0,$$

არიან აღებულ წრეწირთა განტოლებანი, მაშინ რადიკალური ღერძების განტოლებანი იქნებიან (§ 104, სავარჯიშო 3):

$2(A_1-A_2)x+2(B_1-B_2)y+C_1-C_2=0$ (პირველი და მეორე წრეწირისათვის),
$2(A_2-A_3)x+2(B_2-B_3)y+C_2-C_3=0$ (მეორე და მესამე „ ),
$2(A_3-A_1)x+2(B_3-B_1)y+C_3-C_1=0$ (მესამე და პირველი „ ).

თუ შევკრებთ ამ განტოლებათა მარცხენა მხარეებს, როგორც ადვილი დასანახია, მიიღებთ გამოსახულებას იგივურად ნულის ტოლს, და აქედან გამომდინარეობს ჩვენს მიერ გამოთქმული დებულების მართებულება.

# თავი მეხუთე

## წრფე და სიბრტყე სივრცეში

### 1. ფართეულის განტოლება. წირის განტოლება

წინა თავში ჩვენ გავეცანით სიბრტყეზე გეომეტრიის ძირითად საკითხს—განტოლებათა საშუალებით ბრტყელ წირთა წარმოდგენის საკითხს.

სამგანზომილებიან სივრცეში გვიხდება ერთგანზომილებიან სახეებთან (წირებთან) ერთად ორგანზომილებიანი სახეების (ფართეულების) განხილვაც.

დავიწყოთ ფართეულთა განხილვით, ვინაიდან ანალიზური წარმოდგენის თვალსაზრისით ისინი, გარკვეული აზრით, ბრტყელი წირების ანალოგიური არიან.

მთელს ამ თავში იგულისხმება, რომ კოორდინატთა სისტემა დეკარტიულია. გარდა ამისა, ზოგჯერ ფორმულების გასამარტივებლად, მას ვიგულისხმებთ მართკუთხოვნად; ეს უკანასკნელი გარემოება ყოველთვის აღნიშნული იქნება.

**§ 116. ფართეულის განტოლება.** საერთოდ, ელემენტარულ გეომეტრიაში „ფართეულის“ ცნების ზოგად განმარტებას არ იძლევიან. იქ ჩვეულებრივ, განიხილავენ ფართეულთა კერძო სახეებს, სახელდობრ: სიბრტყეს, სფეროს, წრიულ ცილინდრს და კონუსს. აქ კი ჩვენ მოვიყვანთ ფართეულის ზოგად განმარტებას.

ფართეული ეწოდება იმ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, რომელთა კოორდინატები (კოორდინატთა მოცემული სისტემის მიმართ) აკმაყოფილებენ

$$\Phi(x, y, z)=0 \qquad (1)$$

სახის ერთ განტოლებას, სადაც $\Phi(x, y, z)$ აღნიშნავს სამი $x$, $y$, $z$ ცვლადის ფუნქციას [1]).

(1) განტოლებას ეწოდება ფართეულის განტოლება კოორდინატთა მოცემული სისტემის მიმართ.

ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ (1) განტოლება ფაქტიურად შეიცავს ცვლადთაგან ერთს მაინც, რომლის მიმართ მისი ამოხსნა შესაძლებელია. მაგალითად, $z$ ცვლადის მიმართ (1) განტოლების ამოხსნის შესაძლებლობის დაშვება გვაძლევს საშუალებას (1)

$$z=\varphi(x, y)$$

[1]) ეს განმარტება გამოსადეგია სივრცეში კოორდინატთა ყოველი სისტემისათვის.

სახით გადავწეროთ, სადაც $\varphi(x, y)$ $x$ და $y$ ცვლადების ცალსახა ან მრავალსახა ფუნქციაა.

ჩვენი განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ მოცემული ფართეულის განტოლება არის სამცვლადიანი[1]) განტოლება, რომელიც კმაყოფილდება მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როცა ცვლადთა მაგიერ შევიტანთ ფართეულის რომელიმე წერტილის კოორდინატებს.

„ფართეულის“ ცნების ზემომოყვანილი განმარტება მეტად ზოგადია. ამ განმარტებამ შეიძლება მოიცვას ისეთი სახეები, რომლებიც ძალზე განსხვავდებიან იმისაგან, რასაც ჩვენ მიჩვეულნი ვართ „ფართეული“ ვუწოდოთ. ამიტომ ფართეულთა უფრო დაწვრილებით შესწავლის დროს დამატებითი პირობები უნდა დაედოს $\Phi(x, y, z)$ ან $\varphi(x, y)$ ფუნქციას. იხ. დიფერენციალური გეომეტრიის კურსები.

თუ მოცემულია ფართეულის განტოლება კოორდინატთა გარკვეული სისტემის მიმართ, მაშინ ამავე ფართეულის განტოლების საპოვნელად მეორე სისტემის მიმართ, საკმარისია აღებულ განტოლებაში შევიტანოთ ძველი კოორდინატების მაგიერ მათი გამოსახულებანი ახლების საშუალებით.

მაგალითად, თუ

$$\Phi(x, y, z)=0$$

წარმოადგენს დეკარტის $Oxyz$ სისტემის მიმართ რაიმე ფართეულის განტოლებას, მაშინ ამავე ფართეულის განტოლების საპოვნელად დეკარტის მეორე $O'x'y'z'$ სისტემის მიმართ, საკმარისია წინა განტოლებაში ჩავსვათ $x$, $y$, $z$-ის გამოსახულებანი $x'$, $y'$, $z'$-ის საშუალებით; ამ გამოსახულებებს აქვთ ასეთი სახე [§ 66, (1) ფორმულები]:

$$\begin{aligned} x &= a + l_1x' + l_2y' + l_3z', \\ y &= b + m_1x' + m_2y' + m_3z', \\ z &= c + n_1x' + n_2y' + n_3z'. \end{aligned}$$

ამიტომ წინა განტოლება გარდაიქმნება შემდეგ განტოლებად:

$$\Phi_1(x', y', z')=0,$$

სადაც სიმოკლისათვის შემოღებულია აღნიშვნა

$$\Phi(a+l_1x'+l_2y'+l_3z',\ b+m_1x'+m_2y'+m_3z',\ c+n_1x'+n_2y'+n_3z')=\Phi_1(x', y', z')$$

(შეად. § 82).

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ელემენტარულ გეომეტრიაში განხილული ფართეულები მართლაც ემორჩილებიან ფართეულის ზემომოყვანილ ზოგად განმარტებას, რომ ყოველი მათგანისათვის შეიძლება შევადგინოთ (1) სახის

[1]) ფაქტიურად განტოლებაში შეიძლება არ შედიოდეს ყველა სამი ცვლადი (იხ. ქვემოთ, § 118).

განტოლება, რომელიც დაკმაყოფილდება მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x$, $y$, $z$-ის მაგიერ შეეიტანთ განსახილველი ფართეულის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატებს. ჩვენ დავკმაყოფილდეთ სფეროს, კონუსისა და ცილინდრის განტოლებების გამოყვანით; სიბრტყის განტოლება ცალკე განხილული იქნება ქვემოთ.

მოთხოვნილ განტოლებათა გამოსაყვანად ჩვენ შეგვიძლია ყოველ ცალკე შემთხვევაში ვისარგებლოთ სპეციალურად შერჩეული სისტემით, ვინაიდან გადასვლა რომელიმე მეორე სისტემაზე, ახლახან ნათქვამის ძალით, არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს.

**§ 117. სფეროსა და წრიული კონუსის განტოლებანი მართკუთხოვან კოორდინატებში.** 1. ვთქვათ, მოცემულია სფერო $r$ რადიუსით და ცენტრით $C(a, b, c)$ წერტილში. სფერო, განმარტების თანახმად არის ისეთ $M(x, y, z)$ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა მანძილი $C$-მდე $r$-ის ტოლია.

თუ ამ განმარტებას ანალიზურად გამოვსახავთ მართკუთხოვან კოორდინატებში, მივიღებთ:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r,$$

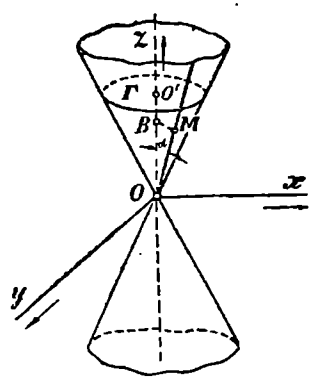
ანუ

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2. \qquad (1)$$

სწორედ ეს არის სფეროს განტოლება დეკარტის მართკუთხოვან კოორდინატებში. თუ სფეროს ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია მოთავსებული, მაშინ $a=b=c=0$, და წინა განტოლება ღებულობს

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \qquad (2)$$

სახეს.



ნახ. 98.

2. კონუსი ეწოდება ისეთ ფართეულს, რომელიც შექმნილია მუდმივ წერტილზე (წვეროზე) გამავალი და მუდმივი წირის (მიმმართველის) გადაკვეთი წრფეებით (მსახველებით).

თუ მიმმართველია $\Gamma$ წრეწირი, ხოლო წვერო $O$ მოთავსებულია წრეწირის $O'$ ცენტრიდან მის სიბრტყისადმი აღმართულ მართობზე (იხ. ნახ. 98), მაშინ კონუსს ეწოდება წრიული, ხოლო $OO'$ წრფეს კონუსის ღერძი. ყოველ კონუსს აქვს ორი კალთა, მდებარე წვეროს ორივე მხარეზე (ელემენტარულ გეომეტრიაში ჩვეულებრივ მხოლოდ ერთი კალთა განიხილება ანდა მხოლოდ ერთი კალთის ნაწილი, მოთავსებული წვეროსა და მიმმართველს შორის).

წრიული კონუსის განტოლების გამოსაყვანად, მისი წვერო მივიღოთ მართკუთხოვან კოორდინატთა სათავედ, ხოლო ამ სისტემის $Oz$ ღერძი მივმართოთ კონუსის ღერძის გასწვრივ.

ვთქვათ, $\alpha$ არის მახვილი კუთხე კონუსის მსახველსა და $Oz$ ღერძის დადებით მიმართულებას შორის. ეს კუთხე ცხადია, მუდმივი სიდიდეა. იმისათვის, რომ $M(x, y, z)$ წერტილი კონუსზე იყოს მოთავსებული, აუცილებელი და საკმარისია, რომ $OM$ და $Oz$ მიმართულებათა შორის მახვილი კუთხე $\alpha$-ს ტოლი იყოს. ეს პირობა რომ ანალიზურად გამოვსახოთ, აღვნიშნოთ $B$-თი $M$ წერტილის მართკუთხოვანი გეგმილი $Oz$-ზე. მაშინ, ჩვენი პირობა ასე გამოისახება:

$$\frac{|BM|}{|OB|} = \operatorname{tg}\alpha;$$

თუ შევნიშნავთ, რომ $B$ წერტილის კოორდინატებია $(0, 0, z)$, გვექნება $OB| = |z|$ და

$$|BM| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს წინა ტოლობაში ჩავსვამთ, მივიღებთ

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|z|} = \operatorname{tg}\alpha,$$

ანუ კვადრატში ამაღლებისა და მნიშვნელისაგან განთავისუფლების შემდეგ:

$$x^2+y^2 = k^2z^2, \tag{3}$$

სადაც სიმოკლისათვის შემოღებულია აღნიშვნა: $k = \operatorname{tg}\alpha$.

(3) განტოლება არის სწორედ ის, რასაც ვეძებდით. ზედმეტი არ იქნება კიდევ გავუსვათ ხაზი იმას, რომ უკანასკნელი განტოლება გამოყვანილია სპეციალურად არჩეულ კოორდინატთა სისტემისათვის.

#### სავარჯიშოები და დამატებები

1. დაამტკიცეთ, რომ სფეროს განტოლებას (მართკუთხოვან კოორდინატებში) აქვს სახე:

$$x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0\ ^1) \tag{1a}$$

(ამასთანავე, $A^2+B^2+C^2-D>0$) და რომ, პირიქით (1a) განტოლება გამოსახავს სფეროს, რომლის ცენტრი მოთავსებულია $(-A, -B, -C)$ წერტილში და რომლის რადიუსი ტოლია $r=\sqrt{A^2+B^2+C^2-D}$ (შეად. § 60, შენიშვნა).

2. იპოვეთ იმ წრიული კონუსის განტოლება, რომლის წვეროც სათავეშია მოთავსებული, ხოლო ღერძს აქვს $\vec{e}=(l, m, n)$ ორტის მიმართულება (კოორდინატები მართკუთხოვანია).

ა მ ო ხ ს ნ ა. იმისათვის, რომ $M(x, y, z)$ წერტილი კონუსზე იმყოფებოდეს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ $\theta$ კუთხე $\overrightarrow{OM}$-სა და $\vec{e}$-ს შორის ტოლი იყოს $\alpha$-სი ან $\pi-\alpha$-სი, სა-

---

1) ეს განტოლება შეიძლება კიდევ, რამდენსამე უფრო ზოგადი სახით, შემდეგნაირად წარმოვიდგინოთ: $A_0(x^2+y^2+z^2)+2Ax+2By+2Cz+D=0$, სადაც $A_0 \neq 0$. მართლაც, ორივე მხარის $A_0$-ზე გაყოფით მივიღებთ (1a) სახის განტოლებას.

დაც $\alpha$ ს იგივე მნიშვნელობა აქვს, რაც ზემოთ. მაშასადამე, $\cos\vartheta = \pm\cos\alpha$, $\cos^2\vartheta = \cos^2\alpha$. ჩაკრამ (§ 45), $\cos\vartheta = \dfrac{lx+my+nz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

მაშასადამე, $$\frac{(lx+my^2+nz)^2}{x^2+y^2+z^2} = a^2.$$

სადაც მიღებულია, რომ $\cos\alpha = a$, ანუ

$$(lx+my+nz)^2 = a^2(x^2+y^2+z^2). \qquad (4)$$

სწორედ ეს არის საძიებელი განტოლება, თუ $l = m = 0$, $n = \pm 1$, მაშინ, როგორც ეს ადვილი შესამჩნევია, ისევ (3) განტოლებაა მივიღებთ.

§ 118. ცილინდრის განტოლება. ცილინდრი ეწოდება ისეთ ფართეულს, რომელიც შექნილია მუდმივი წირის (მიმმართველის) მკვეთი ურთიერთპარალელური წრფეებით (მსახველებით).

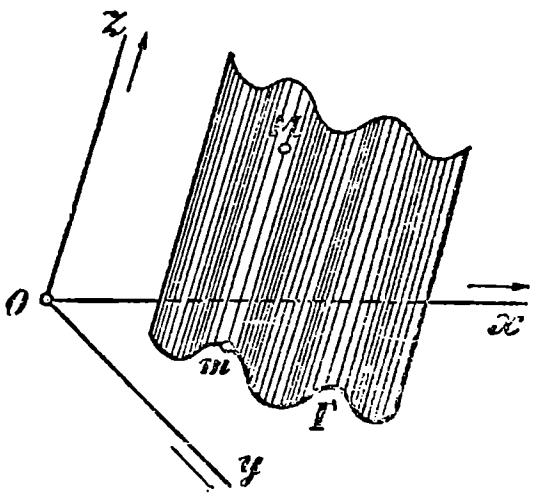
თუ მიმმართველი არის წრეწირი, ხოლო მსახველნი მართობი არიან ამ წრეწირის სიბრტყისადმი, მაშინ ცილინდრს წრიული ეწოდება.

ჩვენ აქ გამოვიკვლევთ ზოგადი სახის (და არა მხოლოდ წრიული) ცილინდრის განტოლებას.

ავიღოთ დეკარტის კოორდინატთა სისტემა, რომლის $Oz$ ღერძი პარალელურია ცილინდრის მსახველებისა. ვთქვათ, $\Gamma$ არის ცილინდრისა და $Oxy$ სიბრტყის გადაკვეთის წირი (ნახ. 99). ვთქვათ, გარდა ამისა,

$$\Phi(x, y) = 0 \qquad (1)$$

არის $\Gamma$ წირის განტოლება $Oxy$ სიბრტყეზე. იმისათვის, რომ სივრცის რომელიმე $M(x, y, z)$ წერტილი ეკუთვნოდეს ჩვენს ცილინდრს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ წერტილის $m$ გეგმილი $Oxy$ სიბრტყეზე ($Oz$-ის პარალელურად) იმყოფებოდეს $\Gamma$-ზე. მაშასადამე, იმისათვის, რომ $M(x, y, z)$ წერტილი იმყოფებოდეს მოცემულ ცილინდრზე აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ წერტილის $x$ და $y$ კოორდინატები დაკავშირებულ იყვნენ (1) განტოლებით (როგორიც არ უნდა იყოს მეორე $z$ კოორდინატის მნიშვნელობა).



ნახ. 99.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, (1) განტოლება, თუ მას განვიხილავთ, როგორც სივრცის წერტილთა კოორდინატების დამაკავშირებელ განტოლებას, არის მოცემული ცილინდრის განტოლება.

ეს განტოლება წარმოადგენს § 116-ის (1) განტოლების კერძო სახეს. მისი დამახასიათებელი თავისებურება მდგომარეობს იმაში, რომ ის $z$ კოორდინატს არ შეიცავს.

აშკარაა, რომ, პირიქითაც, ყოველი (1) სახის განტოლება არის ისეთი ცილინდრული ფართეულის განტოლება, რომლის მსახველნი $Oz$ ღერძის პარალელური არიან და რომლის გადაკვეთის წირი $Oxy$ სიბრტყესთან გამოისახება ამ სიბრტყეში (1) განტოლებით [1]).

ანალოგიურად, შემდეგი სახის განტოლებანი

$$\Phi(x, z)=0 \quad \text{და} \quad \Phi(y, z)=0$$

გამოსახავენ ცილინდრებს, რომელთა მსახველნი შესაბამისად $Oy$ და $Ox$ ღერძების პარალელური არიან.

ამრიგად, თუ ფართეულის განტოლებაში არ შედის ერთერთი კოორდინატი, ეს ფართეული წარმოადგენს ცილინდრს, რომელიც სათანადო ღერძის პარალელურია.

განვიხილოთ რამდენიმე კერძო შემთხვევა.

1. წრიული ცილინდრი. თუ ავიღებთ კოორდინატთა მართკუთხოვან სისტემას და დავუშვებთ, რომ $\Gamma$ არის წრეწირი, მაშინ (1) განტოლება გადაიქცევა ისეთი წრიული ცილინდრის განტოლებად, რომელიც $Oz$-ის პარალელურია. თუ $(a, b)$-თი აღვნიშნავთ $Oxy$ სიბრტყეში მდებარე წრეწირის ცენტრის კოორდინატებს, ხოლო $r$-ით მის რადიუსს, მაშინ განსახილველი განტოლება ასე დაიწერება (იხ. § 80):

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0. \tag{2}$$

2. განტოლება

$$Ax+By+C=0, \tag{3}$$

ცხადია, სივრცეში გამოსახავს $Oz$-ის პარალელურ სიბრტყეს, რომელიც $Oxy$ სიბრტყეს ჰკვეთს წრფეზე, რომელიც ამ უკანასკნელ სიბრტყეზე (3) განტოლებით გამოისახება (სიბრტყე არის ცილინდრული ფართეულის კერძო სახე, იმ შემთხვევის შესაბამისი, როცა $\Gamma$ წირი არის წრფე).

**§ 119. ფართეულთა კლასიფიკაცია.** ფართეულები დაიყოფიან ალგებრულ და ტრანსცენდენტულ ფართეულებად იმისდა მიხედვით, თუ რა სახე აქვს მათ განტოლებას დეკარტის კოორდინატებში, ისე როგორც ამას ადგილი აქვს ბრტყელ წირთათვის (იხ. § 85). ფართეულს ეწოდება ალგებრული, თუ მისი განტოლება შეიძლება წარმოვიდგინოთ

$$F(x, y, z)=0 \tag{1}$$

[1]) ჩვენ ხაზს ვუსვამთ სიტყვებს „ამ სიბრტყეში", ვინაიდან გვსურს ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ არ შეიძლება $\Phi(x, y)=0$ განტოლებას უბრალოდ $\Gamma$ წირის განტოლება ვწოდოთ; წინა განტოლება სივრცეში ცილინდრს გამოსახავს, და ამ ცილინდრის მხოლოდ ის წერტილები შეადგენენ $\Gamma$ წირს, რომელთათვისაც $z=0$.

სახით, სადაც $F(x, y, z)$ არის პოლინომი (მთელი რაციონალური ფუნქცია $x$, $y$ და $z$-ის მიმართ). ყველა არაალგებრული ფართეული ტრანსცენდენტული იწოდება.

ალგებრული ფართეულები, თავის მხრივ, დაიყოფიან სხვადასხვა რიგის ფართეულებად. სახელდობრ, თუ ფართეულის (1) განტოლებაში $F(x, y, z)$ პოლინომის ხარისხი $n$-ის ტოლია, მაშინ ამბობენ, რომ ფართეული $n$-რი რიგისაა. მაგალითად, სფერო, წრიული კონუსი და წრიული ცილინდრი არიან მეორე რიგის ალგებრული ფართეულები (იხ. მათი განტოლებანი წინა პარაგრაფებში). სიბრტყე კი არის პირველი რიგის ფართეული, როგორც ეს გამომდინარეობს წინა პარაგრაფის (3) განტოლებიდან.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ფართეულის რიგი დამოუკიდებელია დეკარტის კოორდინატთა სისტემის არჩევისაგან. ამის დამტკიცება § 85-ში მოყვანილი დამტკიცების ანალოგიურია და აქ მას არ გავიმეორებთ.

აგრეთვე, შეიძლება უშუალოდ გადმოტანილ იქნას § 85-ში ნათქვამი ჩვენს შემთხვევაში $F(x, y, z)=0$ განტოლების უფრო დაბალი ხარისხის განტოლებით შეცვლის შესახებ (დაწვრილებით ამის შესახებ იხ. ქვემოთ § 174).

ალგებრული ფართეული შეიძლება იყოს დაშლადი (დაყვანადი) ან დაუშლადი (დაუყვანადი) იმისდა მიხედვით, შესაძლოა თუ არა $F(x, y, z)$ პოლინომის დაშლა მამრავლებად ისე, რომ მამრავლები იყვნენ აგრეთვე პოლინომები (დაწვრილებით იხ. ქვემოთ § 174).

**§ 120. წირის განტოლებები.** სივრცეში წირი შეიძლება განიმარტოს, როგორც ორი ფართეულის თანაკვეთა, ე. ი., როგორც ერთდროულად ორ ფართეულზე მდებარე წერტილთა გეომეტრიული ადგილი. ვთქვათ, $\Phi(x, y, z)=0$, $\Psi(x, y, z)=0$ არიან ის ფართეულები, რომელთა გადაკვეთას წარმოადგენს მოცემული წირი. წირის ყოველი წერტილის კოორდინატები, ცხადია, ერთდროულად უნდა აკმაყოფილებდნენ ორივე უკანასკნელ განტოლებას და, პირიქით, წერტილები, რომელთა კოორდინატები ერთდროულად აკმაყოფილებენ ორივე ამ განტოლებას, მოცემულ წირს ეკუთვნიან. მოკლედ, მოცემული წირი არის იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა კოორდინატები ერთდროულად აკმაყოფილებენ ორი განტოლების სისტემას.

$$\left.\begin{aligned}\Phi(x, y, z)&=0,\\ \Psi(x, y, z)&=0,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

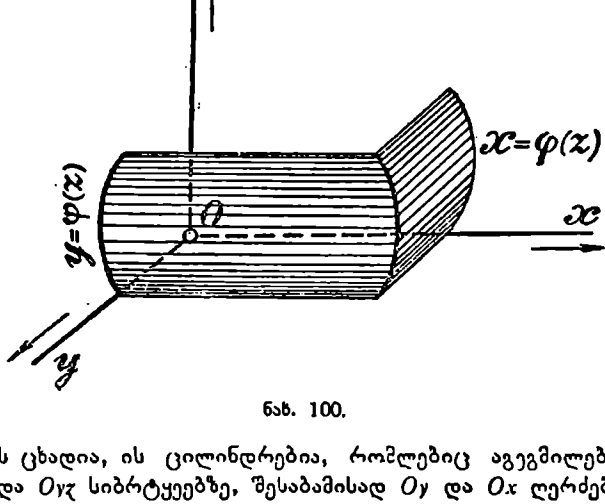
(1) განტოლებებს ეწოდება მოცემული წირის განტოლებები.

შევნიშნავთ, რომ მოცემული წირი შეიძლება წარმოდგენილი იქნას ორი განტოლებით უამრავი სხვადასხვა ხერხით: მართლაც, ნაცვლად ორი მოცემული ფართეულისა, ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერი წყვილი ფართეულებისა, რომლებიც ამ წირზე იკვეთებიან. ანალიზურად ეს იმას შეესაბამება, რომ (1) სისტემის ნაცვლად ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერი მისი ეკვივალენტური სისტემა.

მაგალითად, (1) სისტემა, საზოგადოდ, შეიძლება ამოიხსნას რომელიმე ორი ცვლადის, ვთქვათ, $x$-სა და $y$-ის მიმართ; მაშინ (1) სისტემის ნაცვლად ჩვენ მივიღებთ მის ეკვივალენტურ შემდეგ სისტემას

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(z), \\ y &= \psi(z), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ამ სისტემის განტოლებანი წარმოადგენენ ცილინდრთა განტოლებებს, რომელთა შორის პირველი $Oy$ ღერძის პარალელურია, ხოლო—მეორე $Ox$




ნახ. 100.

ღერძისა. ეს ცხადია, ის ცილინდრებია, რომლებიც აგვგმილებენ აღებულ წირს $Oxz$ და $Oyz$ სიბრტყეებზე, შესაბამისად $Oy$ და $Ox$ ღერძების პარალელურად (ნახ. 100).

ავიღოთ, მაგალითად, განტოლებათა სისტემა

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2, \\ x &= a. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

მართკუთხოვან კოორდინატებში ამ სისტემის პირველი განტოლება არის $r$ რადიუსის სფეროს განტოლება ცენტრით კოორდინატთა სათავეში, ხოლო მეორე წარმოადგენს $Oyz$ სიბრტყის პარალელური სიბრტყის განტოლებას, რომელიც $Ox$ ღერძზე მოსჭრის $a$ ნაკვეთს. ამ ორი ფართეულის გადაკვეთა, ცხადია, არის წ რ ე წ ი რ ი ცენტრით $Ox$ ღერძზე. რომლის სიბრტყე ამ ღერძის მართობია და სჭრის მასზე $a$ ნაკვეთს. ცხადია, გადაკვეთა მხოლოდ მაშინ არსებობს, როცა $a \leqslant r$.

(3) სისტემა შეიძლება შეიცვალოს ტოლფასი სისტემით

$$\left.\begin{aligned} y^2 + z^2 &= r^2 - a^2, \\ x &= a. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ამ სისტემის პირველი განტოლება გამოსახავს წრიულ ცილინდრს, რომლის ღერძია $Ox$, ხოლო განივი კვეთის რადიუსი ტოლია

$$\sqrt{r^2 - a^2}.$$

ჩვენი წრეწირი არის ამ ცილინდრისა და $x=a$ სიბრტყის გადაკვეთის წირი.

თუ წირი შეიძლება წარმოდგენილ იქნას როგორც ორი ალგებრული ფართეულის გადაკვეთა, ე. ი. შეიძლება წარმოდგენილ იქნას განტოლებათა სისტემით

$$F_1(x, y, z)=0, \quad F_2(x, y, z)=0, \tag{5}$$

სადაც $F_1$ და $F_2$ არიან პოლინომები $x$, $y$ და $z$-ის მიმართ, მაშინ იგი იწოდება ალგებრულ წირად.

წირის რიგი ეწოდება (5) განტოლებათა ხარისხების ნამრავლს.

ყოველ არაალგებრულ წირს ტრანსცენდენტული ეწოდება.

**§ 121. წირებისა და ფართეულების პარამეტრული წარმოდგენა.** წინა პარაგრაფში წირი განმარტებული იყო როგორც ორი ფართეულის გადაკვეთა. მაგრამ შეიძლება წირის განხილვა სხვა თვალსაზრისითაც; სახელდობრ, იგი შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც გარკვეული წესის მიხედვით მოძრაი წერტილის სასრბოლე. ამგვარად, ჩვენ მივიღებთ (იხ. § 81) პარამეტრულ წარმოდგენას, როცა $x$, $y$ და $z$ კოორდინატები გამოისახებიან, როგორც დამხმარე $t$ ცვლადის ფუნქციები:

$$x=\varphi_1(t), \quad y=\varphi_2(t), \quad z=\varphi_3(t), \tag{1}$$

სადაც $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ და $\varphi_3(t)$ არიან გარკვეულ შუალედში უწყვეტი ფუნქციები. თუ $t$ იცვლება ამ შუალედში, მაშინ $(x, y, z)$ წერტილი განუწყვეტლივ იცვლის მდებარეობას სივრცეში და აღწერს წირს.

წირის ეს ახალი განმარტება რომ არსებითად ზემოხსენებულის ტოლფასია, ამაში დავრწმუნდებით $t$-ს გამორიცხვით (1)-დან. თუ, მაგალითად, (1) სისტემის მესამე განტოლებას ამოვხსნით $t$-ს მიმართ, ე. ი. $t$-ს განვსაზღვრავთ $z$-ის საშუალებით და ნაპოვნ გამოსახულებას პირველსა და მეორე განტოლებაში შევიტანთ, მივიღებთ $x$ და $y$-სათვის წარმოდგენას $z$-ის საშუალებით:

$$x=\varphi(z), \quad y=\psi(z), \tag{2}$$

ე. ი. წინა პარაგრაფის (2) განტოლებებს.

პირიქით, თუ წირი მოცემულია (2) სახის განტოლებებით, და თუ აგარჩევთ ნებისმიერ ფუნქციას $\varphi_3(t)$ და მივიღებთ $z=\varphi_3(t)$, მაშინ გვექნება (1) სახის განტოლებანი

$$x=\varphi[\varphi_3(t)], \quad y=\psi[\varphi_3(t)], \quad z=\varphi_3(t)$$

ანუ

$$x=\varphi_1(t), \quad y=\varphi_2(t), \quad z=\varphi_3(t),$$

სადაც შემოღებულია აღნიშვნები

$$\varphi[\varphi_3(t)]=\varphi_1(t),\quad \psi[\varphi_3(t)]=\varphi_2(t).$$

მაგალითად, თუ წირი მოცემულია განტოლებებით

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=r^2,\\ x&=a\end{aligned}\right\},$$

(მართკუთხოვან კოორდინატებში ეს არის $Oyz$ სიბრტყის პარალელური წრეწირი ცენტრით $Ox$ ღერძზე), მაშინ, თუ მივიღებთ, რომ $z=r\sin t$, გვექნება:

$$y=\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}=r\cos t,$$

რაც გვაძლევს აღებული წირის მარტივ პარამეტრულ წარმოდგენას:

$$x=a,\ y=r\cos t,\ z=r\sin t\ ^1).$$

ფართეულიც აგრეთვე შეიძლება პარამეტრულად იქნას წარმოდგენილი, მხოლოდ აქ $x$, $y$, $z$ კოორდინატები იქნება ორი პარამეტრის ფუნქცია.

მართლაც, ვთქვათ, აღებული ფართეულის განტოლება არის

$$z=f(x,\ y). \tag{3}$$

ვთქვათ: $x=\varphi(p,\ q)$, $y=\psi(p,\ q)$, სადაც $\varphi(p,\ q)$, $\psi(p,\ q)$ არიან $p$ და $q$ ცვლადების ორი ნებისმიერად არჩეული ფუნქცია. მაგრამ ისეთი, რომ წინა განტოლებანი ამოხსნადი არიან $p$ და $q$-ს მიმართ (ე. ი. $p$ და $q$, თავის მხრივ, შეიძლება გამოსახულ იქნან $x$ და $y$-ით). თუ $x$ და $y$-ს, $p$ და $q$-ს საშუალებით წარმოდგენილ გამოსახულებებს შევიტანთ (3)-ში, მივიღებთ $z=f[\varphi(p,\ q),\ \psi(p,\ q)]$. აღვნიშნოთ უკანასკნელი ფუნქცია $\omega(p,\ q)$-თი, გვექნება:

$$x=\varphi(p,\ q),\ y=\psi(p,\ q),\ z=\omega(p,\ q). \tag{4}$$

პირიქით, (4) სახის განტოლებანი, რომელთა შორის რომელიმე ორი შეიძლება $p$ და $q$-ს ძიმართ ამოიხსნას, ყოველთვის წარმოადგენს რაღაც ფართეულს. მართლაც, ვთქვათ, მაგალითად, პირველი ორი განტოლების ამოხსნა შეიძლება $p$ და $q$-ს მიმართ, ისე, რომ მათი ამოხსნით მივიღებთ $p=f_1(x,\ y)$, $q=f_2(x,\ y)$. თუ ამათ შევიტანთ მე-3 განტოლებაში, მივიღებთ (3) სახის განტოლებას, ე. ი. ფართეულის განტოლებას.

მოკლედ, (4) პარამეტრული წარმოდგენიდან ფართეულის განტოლება რომ მივიღოთ, საკმარისია სამი განტოლებიდან (4) გამოვრიცხოთ ორი ცვლადი $p$ და $q$; მაშინ მივიღებთ $x$, $y$, $z$ ცვლადების შემცველ ერთ განტოლებას. სწორედ ეს იქნება ფართეულის განტოლება.

მაგალითად, თუ მოცემულია სფერო, რომლის ცენტრი იმყოფება მართკუთხოვანი კოორდინატების სათავეზე და რადიუსი კი $r$-ის ტოლია, მაშინ

[1]) ჩვენ არ ავიღეთ რადიკალის წინ ორნაირი ნიშანი $y$-ის გამოსახულებაში, ვინაიდან ორნაირი ნიშანი $\cos t$-ს წინ არ მოგვცემდა არაფერს ახალს: მართლაც, წერტილს $x=a$, $y=-r\cos t$, $z=r\sin t$ მივიღებთ ტექსტში მოცემული განტოლებიდან, თუ $t$-ს $\pi-t$-თი შევცვლით.

მისი განტოლება, როგორც ვიცით, იქნება:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

თუ მივიღებთ: $x = r \sin\vartheta \cos\varphi$, $y = r \sin\vartheta \sin\varphi$ (სადაც $\varphi$ და $\vartheta$ ასრულებენ $p$ და $q$ პარამეტრების როლს) და ამათ წინა განტოლებაში შევიტანთ, მივიღებთ: $r^2 \sin^2\vartheta + z^2 = r^2$, საიდანაც $z^2 = r^2 \cos^2\vartheta$, ანუ $z = r\cos\vartheta$ [1]), მაშასადამე, სფეროს პარამეტრული წარმოდგენა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r \cos\vartheta. \tag{5}$$

მკითხველი ადვილად გამოარკვევს $\vartheta$ და $\varphi$ პარამეტრების გეომეტრიულ მნიშვნელობას (იხ. § 61). ამ გეომეტრიული მნიშვნელობის მიხედვით, აშკარა ხდება, რომ სფეროს ყველა წერტილის მისაღებად საკმარისია ავიღოთ $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$.

**§ 122. სივრცეში წირებისა და ფართეულების გადაკვეთის შესახებ.** ორი ფართეულის გადაკვეთის წერტილთა კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდნენ ამ ფართეულთა განტოლებების ერთობლიობას $F_1(x, y, z) = 0$ და $F_2(x, y, z) = 0$. ვინაიდან ამ შემთხვევაში გვაქვს სამცვლადიანი ორი განტოლება. ამიტომ, საზოგადოდ, გადაკვეთის წერტილთა ჭსასრულო სიმრავლე გვექნება და ესენი, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, რაღაც წირს შეადგენენ.

სამი ფართეულის

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0, \quad F_3(x, y, z) = 0,$$

გადაკვეთის წერტილთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ უკანასკნელი სამი განტოლების ერთობლიობას. ვინაიდან აქ სამცვლადიანი სამი განტოლება გვაქვს, ამიტომ, საზოგადოდ, გადაკვეთის წერტილები ერთმანეთისაგან სასრული მანძილით იქნებიან დაშორებული; მათი რიცხვი ან სასრული იქნება, ან გვექნება უსასრულო სიმრავლე, მაგრამ, საზოგადოდ, ისინი არ ქმნიან უწყვეტ წირს. იგივე შეეხება $F(x, y, z) = 0$ ფართეულისა და იმ წირის გადაკვეთის წერტილებს, რომლის განტოლებანია $\Phi(x, y, z) = 0$, $\Psi(x, y, z) = 0$. თუ წირი მოცემულია პარამეტრულად: $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$, $z = \varphi_3(t)$, მაშინ მისი გადაკვეთის წერტილები ფართეულთან $F(x, y, z) = 0$, განისაზღვრებიან განტოლებიდან $F[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)] = 0$ (შეად. § 87).

და, ბოლოს, სივრცეში იმ ორი წირის გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები, რომლებიც მოცემული არიან შემდეგი განტოლებებით,

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Psi_1(x, y, z) = 0 \text{ და } \Phi_2(x, y, z) = 0, \quad \Psi_2(x, y, z) = 0,$$

უნდა აკმაყოფილებდნენ ოთხივე უკანასკნელ განტოლებას. ვინაიდან განტოლებათა რიცხვი აღემატება უცნობთა რიცხვს, ამიტომ ამ განტოლებებს არ აქვთ ამონახსნი, ე. ი., საზოგადოდ, სივრცეში ორი წირი არ იკვეთება.

[1]) ჩვენ არ ვიღებთ $\cos\vartheta$-ს წინ ორნაირ ნიშანს, რადგანაც ეს არაფერს ახალს არ მოგვცემს (იხ. სქოლიო წინა გვერდზე).

## II. სიბრტყის განტოლება

**§ 123. სიბრტყის ზოგადი განტოლება, პარამეტრული წარმოდგენა.** ახლა გადავიდეთ სიბრტყის განტოლების გამოყვანაზე, სახელდობრ, დავამტკიცოთ დებულება: თუ $x$, $y$, $z$ აღნიშნავენ დეკარტის კოორდინატებს, რაიმე $Oxyz$ სისტემის მიმართ, მაშინ ყოველი პირველი ხარისხის განტოლება

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

გამოსახავს სიბრტყეს და, პირიქით, ყოველი სიბრტყე გამოისახება პირველი ხარისხის განტოლებით; ჩვენ ვეგულისხმობთ, რომ $A$, $B$, $C$ არ არიან ერთდროულად ნულის ტოლი.

ამისი დამტკიცება ყველაზე უფრო მარტივია შემდეგი სახით. ვთქვათ, $\Pi$ არის მოცემული სიბრტყე. ავიღოთ კოორდინატთა ახალი სისტემა $O'x'y'z'$ ისეთი, რომ $O'x'$ და $O'y'$ ღერძები მოთავსებული იყვნენ ამ სიბრტყეზე. მაშინ, ახალ სისტემაში, $\Pi$ სიბრტყის განტოლება, ცხადია, იქნება: $z'=0$. თუ დავუბრუნდებით ძველ $Oxyz$ სისტემას, გვექნება შემდეგი სახის გადასვლის ფორმულები:

$$z' = Ax + By + Cz + D,$$

(და ორი ანალოგიური ფორმულა $x'$ და $y'$-სათვის), სადაც $A$, $B$, $C$ მუდმივებია, მასთან $A$, $B$, $C$ ერთდროულად არ არიან ნულის ტოლი[1]), და $z'=0$ განტოლება გადაიქცევა (1) განტოლებად.

პირიქით, თუ მოცემულია პირველი ხარისხის განტოლება (1), მაშინ, თუ ავიღებთ კოორდინატთა ახალ $O'x'y'z'$ სისტემას ისეთს, რომ გადასვლის ფორმულებს ჰქონდეს სახე:

$$\left.\begin{aligned} x' &= l'_1 x + l'_2 y + l'_3 z + a', \\ y' &= m'_1 x + m'_2 y + m'_3 z + b', \\ z' &= Ax + By + Cz + D, \end{aligned}\right\} \tag{*}$$

(სადაც, პირველ ორ სტრიქონში კოეფიციენტები შესაძლოა აღებულ იქნან საკუთრებით ნებისმიერად, ოღონდ ჩასმა იყოს არაგანსაკუთრებული[2]), მაშინ

[1]) იხ. § 66. ფორმულა (1a).

[2]) ე. ი. რომ დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} l'_1 & l'_2 & l'_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \\ A & B & C \end{vmatrix}$$

იყოს ნულისაგან განსხვავებული. ეს ყოველთვის შეიძლება მიღწეულ იქნას. მართლაც, $A$, $B$, $C$ რიცხვებიდან, პირობის თანახმად, ერთი მაინც ნულისაგან განსხვავებულია. მაგალითად, თუ-

(1) განტოლება მიიღებს სახეს

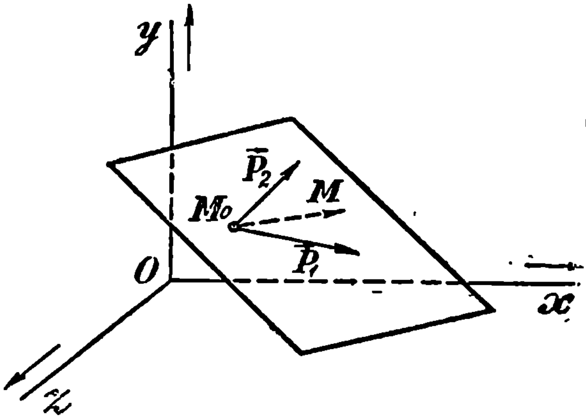
$$z' = 0,$$

საიდანაც ჩანს, რომ ის სიბრტყეს გამოსახავს.

შესაძლო რომ იყოს სიბრტყის განტოლების შედგენა, საჭიროა მოცემული გვქონდეს მისი მდებარეობა სივრცეში. ასეთი მოცემის ერთ-ერთი წესი მდგომარეობს იმაში, რომ მოიცემა სიბრტყის რაიმე წერტილი $M_0(x_0, y_0, z_0)$ და ორი ვექტორი

$$\vec{P}_1 = (X_1\ \ Y_1\ \ Z_1),$$
$$\vec{P}_2 = (X_2\ \ Y_2\ \ Z_2),$$

ურთიერთ არაპარალელური და სიბრტყის პარალელური (ნახ. 101). შევადგინოთ სიბრტყის განტოლება ამ მონაცემებით.




ნახ. 101.

ვთქვათ, $M(x, y, z)$ სივრცის რომელიმე წერტილია. ეს წერტილი რომ ჩვენს სიბრტყეზე იყოს მოთავსებული, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ვექტორი

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) \qquad (**)$$

იყოს $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორთა კომპლანარული, ე. ი. რომ (§ 39)

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

ეს არის მოცემული სიბრტყის განტოლება. თუ დავშლით დეტერმინანტს პირველი სტრიქონის ელემენტების მიხედვით, (2) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \qquad (3)$$

---

$C \neq 0$, მაშინ საკმარისია ავიღოთ $l'_1 = 1$, $l'_2 = 0$, $l'_3 = 0$, $m'_1 = 0$, $m'_2 = 1$, $m'_3 = 0$ და მაშინ დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ A & B & C \end{vmatrix} = C \neq 0.$$

როცა $\Delta \neq 0$, მაშინ (*) სისტემის ამოხსნა შეიძლება $x$, $y$, $z$-ის მიმართ და, მაშასადამე, შეიძლება ძველი კოორდინატების გამოსახვა ახლით, რაც მიგვიყვანს § 68-ის (1) ფორმულებთან. ეს სავსებით განსაზღვრავს ახალი სათავის მდებარეობასა და ახალ საკოორდინატო ვექტორებს.

სადაც

$$A=\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix},\ B=\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix},\ C=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix};$$

$A$, $B$, $C$ სიდიდეები არ შეიძლება ერთდროულად იყვნენ ნული, ვინაიდან, პირობის თანახმად $\vec{P}$ და $\vec{P}_2$ ვექტორები ურთიერთ არაპარალელურია[1]).

ბოლოს, თუ გაეხსნით ფრჩხილებს და თავისუფალ წევრს აღვნიშნავთ $D$-თი, მივიღებთ (1) განტოლებას.

ადვილი მისაღებია აგრეთვე სიბრტყის პარამეტრული წარმოდგენა. მართლაც, ვინაიდან $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორი $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორების კომპლანარულია, გვექნება [§ 39, ფორმულა (1)]:

$$\overrightarrow{M_0M}=\lambda P+\mu\vec{Q}, \tag{4}$$

სადაც $\lambda$ და $\mu$ რომელიმე რიცხვებია (პარამეტრები). $\lambda$ და $\mu$-ს შეცვლით შეგვიძლია მივიღოთ ჩვენი სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი. თუ მხედველობაში მივიღებთ (**)-ს, (4)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$x-x_0=\lambda X_1+\mu X_2,\ y-y_0=\lambda Y_1+\mu Y_2,\ z-z_0=\lambda Z_1+\mu Z_2,$$

ანუ, საბოლოოდ:

$$x=x_0+\lambda X_1+\mu X_2,\ y=y_0+\lambda Y_1+\mu Y_2,\ z=z_0+\lambda Z_1+\mu Z_2, \tag{5}$$

-ეს კი არის საძიებელი პარამეტრული წარმოდგენა; პარამეტრებს წარმოადგენენ $\lambda$ და $\mu$.

**შენიშვნა.** ზემოთ ჩვენ გამოვრიცხეთ შემთხვევა, როცა ზოგად განტოლებაში $A=B=C=0$, მაგრამ, ამ შემთხვევაშიც (ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $D\neq 0$) ამბობენ, რომ განტოლება გამოსახავს სიბრტყეს, სახელდობრ, უსასრულოდ დაშორებულს ანუ არასაკუთრივ სიბრტყეს[2]). ამის შესახებ იხ. დაწვრილებით VI თავში. შემდეგში, თუ წინააღმდეგი არ იქნება ნათქვამი, ჩვენ ვიგულისხმებთ ისე, როგორც ზემოთ, რომ $A$, $B$, $C$ სიდიდეები ერთდროულად არ არიან ნული. შემთხვევა, როცა $A=B=C=D=0$ არ არის საინტერესო. მიუხედავად ამისა, ზოგჯერ ამ შემთხვევის განხილვასაც აქვს აზრი („განუსაზღვრელი სიბრტყე").

**§ 124. $A$, $B$, $C$ კოეფიციენტების გეომეტრიული მნიშვნელობა.** მართკუთხოვან კოორდინატთა შემთხვევაში

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

[1]) რომ ყოფილიყო $A=B=C=0$, ე. ი. $Y_1Z_2-Y_2Z_1=0$, $Z_1X_2-Z_2X_1=0$, $X_1Y_2-X_2Y_1=0$, მაშინ გვექნებოდა:

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{Y_2}{Y_1}=\frac{Z_2}{Z_1},$$

ე. ი. ვექტორები პარალელური იქნებოდნენ.

[2]) იხ. § 80, შენიშვნა.

ზოგადი განტოლების $A$, $B$, $C$ კოეფიციენტებს აქვთ საკმაოდ მარტივი გეომეტრიული მნიშვნელობა; სახელდობრ, ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ვექტორი

$$\vec{P}=(A,\ B,\ C)$$

(1) სიბრტყის მართობია. ამაში, რომ დავრწმუნდეთ, საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ $\vec{P}$ ვექტორი სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი $M_1M_2$ ნაკვეთის მართობია. ვთქვათ, $M_1$ წერტილის კოორდინატებია $x_1$, $y_1$, $z_1$, ხოლო $M_2$ წერტილის კოორდინატებია $x_2$, $y_2$, $z_2$. ვინაიდან ორივე ეს წერტილი (1) სიბრტყეს ეკუთვნის, ამიტომ $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$, $Ax_2+By_2+Cz_2+D=0$; გამოკლებით მივიღებთ

$$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)=0,$$

საიდანაც ჩანს, რომ ვექტორი $(A,\ B,\ C)$ არის $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$ ვექტორის მართობი. $\vec{P}$ ვექტორს ვუწოდებთ $\Pi$ სიბრტყის მიმართულების ვექტორს.

ყველა ზემონათქვამი მართებული იქნება დეკარტის ზოგად კოორდინატთა შემთხვევაშიაც. თუ $\vec{P}$-ს ქვეშ ვიგულისხმებთ ვექტორს, რომლის კოვარიანტული კოორდინატებია $A$, $B$, $C$.

**§ 125. კერძო შემთხვევები.** სიბრტყის ზოგად განტოლებაში

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

ერთის ან რამდენიმე კოეფიციენტის ნულთან ტოლობა ახასიათებს კოორდინატთა ღერძების მიმართ მდებარეობის სხვადასხვა თავისებურებას, რომელთაც აქ აღვნიშნავთ:

1. თუ (1) განტოლებაში თავისუფალი წევრი $D=0$, მაშინ ეს განტოლება ღებულობს სახეს

$$Ax+By+Cz=0; \tag{2}$$

აშკარაა, რომ შესაბამისი სიბრტყე კოორდინატთა სათავეზე გაივლის (ვინაიდან (2) განტოლება კმაყოფილდება მნიშვნელობებით $x=y=z=0$).

2. ვთქვათ, (1) განტოლებაში ცვლადთან მდგომი ერთ-ერთი კოეფიციენტი ნულის ტოლია, მაგალითად, $C=0$, მაშინ ეს განტოლება ღებულობს სახეს:

$$Ax+By+D=0. \tag{3}$$

შესაბამისი სიბრტყე $Oz$ ღერძის პარალელურია და კვეთს $Oxy$ სიბრტყეს იმ წრფეზე, რომლის განტოლება ამ სიბრტყეში არის (3) განტოლება (იხ. § 118, 4°).

ცხადია, ჩვენი შედეგი შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ: თუ სიბრტყის განტოლებაში არ შედის ერთ-ერთი კოორდინატის შემცვე-

ლი წევრი, მაშინ სიბრტყე კოორდინატთა შესაბამისი ღერძის პარალელურია.

3. ვთქვათ, ცვლადებთან მდგომი ორი კოეფიციენტი ნულია, მაგალითად, $B=C=0$ მაშინ, ზემოხსენებულის თანახმად, სიბრტყე მთელი $Oyz$ სიბრტყის პარალელური იქნება.

ეს დასკვნა უშუალოდ გამომდინარეობს აგრეთვე

$$Ax+D=0$$

განტოლების განხილვიდან, რომელიც შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$x=-\frac{D}{A}.$$

ცხადია, განსახილველი სიბრტყე მოკრის $Ox$ ღერძზე ნაკვეთს, რომელიც $-\frac{D}{A}$-ს ტოლია, თუ $Ox$ ღერძზე სიგრძის ერთეულად მივიღებთ $|\vec{u}|$-ს.

კერძოდ, განტოლება $x=0$ გამოსახავს $Oyz$ სიბრტყეს. ანალოგიურად $y=0$ და $z=0$ განტოლებათათვის.

§ 126. $Ax+By+Cz+D$ **ოთხწევრის ნიშანი.** ისე როგორც § 92-ში, ადვილად დავასკვნით, რომ სიბრტყე

$$Ax+By+Cz+D=0$$

ყოფს მთელ სივრცეს ორ ნაწილად; ერთ მათგანში გამოსახულება

$$Ax+By+Cz+D$$

ღებულობს დადებით მნიშვნელობებს, ხოლო მეორეში—უარყოფითს. თვით სიბრტყეზე ეს გამოსახულება ნული ხდება.

§ 127. **განტოლება ღერძთა ნაკვეთებში**[1]). თუ სიბრტყის განტოლებაში

$$Ax+By+Cz+D=0$$

$D$ კოეფიციენტი ნული არ არის მაშინ, თუ ტოლობის ორივე მხარეს $-D$-ზე გავყოფთ და მივიღებთ აღნიშვნებს:

$$-\frac{A}{D}=\frac{1}{p},\quad -\frac{B}{D}=\frac{1}{q},\quad -\frac{C}{D}=\frac{1}{r}, \tag{1}$$

იგი მიიღებს სახეს

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1. \tag{2}$$

(2) განტოლებაში კოეფიციენტებს $p$, $q$ და $r$ მარტივი გეომეტრიული მნიშვნელობა აქვთ.

[1]) შად. § 93.

მართლაც, ვიპოვოთ (2) სიბრტყის გადაკვეთა $Ox$ ღერძთან. საძიებელი გადაკვეთის წერტილი არის (2) სიბრტყის ის წერტილი, რომლისათვისაც $y=z=0$. თუ ამათ შევიტანთ უკანასკნელ განტოლებაში, ვიპოვით

$$\frac{x}{p}=1,$$

ანუ $x=p$. თუ ანალოგიურად მოვიქცევით ორი დანარჩენი ღერძის მიმართ, დავასკვნით, რომ $p$, $q$ და $r$ აღნიშნავენ იმ ნაკვეთებს, რომელთაც მოჭრის აღებული სიბრტყე კოორდინატთა ღერძებზე, თუ სიგრძის ერთეულებად ამ ღერძებზე მივიღებთ, შესაბამისად, საკოორდინატო ვექტორთა $|\overrightarrow{u}|$, $|\overrightarrow{v}|$, $|\overrightarrow{w}|$ სიგრძეებს.

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა.** თუ $A$, $B$, $C$ კოეფიციენტებიდან ერთ-ერთი ნულის ტოლია, მაგალითად, $C=0$, მაშინ (2) განტოლების მაგიერ, ცხადია, მივიღებთ

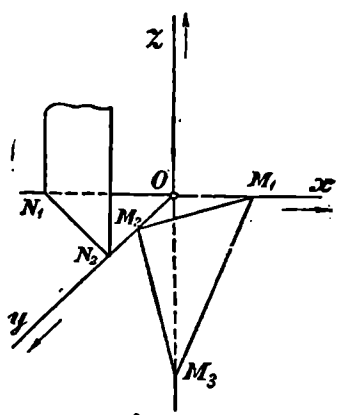
$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1, \tag{3}$$

სადაც $p$ და $q$-ს აქვთ იგივე (1) მნიშვნელობანი და იგივე გეომეტრიული აზრი; (3) განტოლება (2)-დან მიიღება, თუ ვიგულისხმებთ, რომ $r=\infty$; ეს გასაგებია, ვინაიდან, თუ $C=0$, სიბრტყე $Oz$ ღერძის პარალელური იქნება, ე. ი. მასზე მოჭრის უსასრულოდ დიდი სიგრძის ნაკვეთს.

**§ 128. განტოლებით მოცემული სიბრტყის აგება.**

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

განტოლებით მოცემული სიბრტყის ასაგებად, საკმარისია ვიპოვოთ მისი რომელიმე (ერთსა და იმავე წრფეზე არამდებარე) სამი წერტილი. სიბრტყის რომელიმე წერტილის საპოვნელად, საკმარისია (1) განტოლებაში ორ რომელიმე კოორდინატს (მაგ., $x$ და $y$-ს) მივცეთ ნებისმიერი მნიშვნელობა და მესამე კოორდინატი ამ განტოლებიდან გამოვითვალოთ.



ნახ. 102.

უმეტეს შემთხვევაში ყველაზე უფრო მარტივია სიბრტყისა და $Ox$, $Oy$ და $Oz$ ღერძების გადაკვეთის წერტილთა პოვნა და ამ წერტილების მიხედვით სიბრტყის აგება.

ვთქვათ, მაგალითად, მოცემულია განტოლება

$$2x+4y-z-8=0. \tag{2}$$

თუ ჩავსვამთ აქ $y=z=0$, მივიღებთ $x=4$; თუ $z=x=0$, მაშინ გვექნება $y=2$ და, ბოლოს, თუ $x=y=0$, მაშინ $z=-8$.

ამიტომ ჩვენი სიბრტყე კვეთს საკოორდინატო ღერძებს წერტილებში: $M_1(4, 0, 0)$, $M_2(0, 2, 0)$, $M_3(0, 0, -8)$ (ნახ. 102).

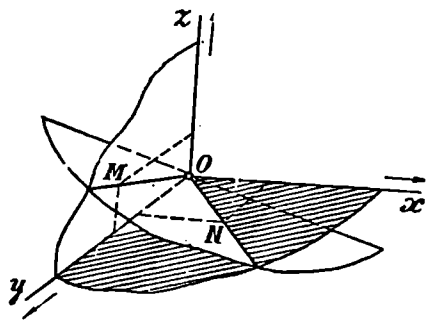
იგივე შედეგს მივიღებთ, თუ (2) განტოლებას შემდეგნაირად გადავწერთ:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-8}=1,$$

საიდანაც აშკარაა, რომ სიბრტყე მოჭრის საკოორდინატო ღერძებზე $4|\vec{u}|$, $2|\vec{v}|$ და $-8|\vec{w}|$ ნაკვეთებს.

ავიღოთ კიდევ სიბრტყის განტოლება

$$2x-3y+12=0 \qquad (3)$$




ნახ. 103.

ეს სიბრტყე $Oz$ ღერძის პარალელურია. თუ მის განტოლებაში შევიტანთ $y=0$, მივიღებთ $x=-6$, თუ $x=0$, მაშინ $y=4$; მაშასადამე, ჩვენი სიბრტყე $Oz$ ღერძის პარალელურია და გადის $N_1(-6, 0, 0)$ და $N_2(0, 4, 0)$ წერტილებზე (იხ. ნახ. 102).

იგივე შედეგს მივიღებთ, თუ (3) განტოლებას ასე გადავწერთ

$$\frac{x}{-6}+\frac{y}{4}=1,$$

საიდანაც ჩანს, რომ სიბრტყე მოჭრის საკოორდინატო ღერძებზე ნაკვეთებს $-6|\vec{u}|$, $4|\vec{v}|$ და $\infty$.

თუ სიბრტყე სათავეზე გადის, მაშინ ღერძებთან გადაკვეთის სამივე წერტილი სათავეს ემთხვევა. იმისათვის, რომ ავაგოთ კიდევ სიბრტყის რომელიმე ორი წერტილი, უყველაზე მარტივი იქნება იმ წერტილთა პოვნა, რომლებიც საკოორდინატო სიბრტყეებზე ძევს.

ვთქვათ, მაგალითად, მოცემულია განტოლება

$$x-y+2z=0,$$

თუ, მაგალითად, აქ შევიტანთ $x=0$ და $y=2$ მივიღებთ $z=1$, თუკი $z=0$ და $x=1$, მაშინ $y=1$; ამიტომ ჩვენი სიბრტყე გაივლის $O(0, 0, 0)$, $M(0, 2, 1)$ და $N(1, 1, 0)$ წერტილებზე (იხ. ნახ. 103).

**§ 129. სიბრტყის კვალი საკოორდინატო სიბრტყეებზე.**

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (1)$$

სიბრტყის აგება შეიძლება აგრეთვე თითოეულ საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემული სიბრტყის კ ვ ა ლ ი ს პოვნით, ე. ი. ამ სიბრტყისა და $Oyz$, $Ozx$ და $Oxy$ სიბრტყეების გადაკვეთის წრფეების პოვნით.

მაგალითად, (1) სიბრტყის, $Oxy$ სიბრტყესთან გადაკვეთის წრფე, ცხადია, არის იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა კოორდინატები ერთდროულად აკმაყოფილებენ (1) განტოლებას და $z=0$ პირობას. ამიტომ საძიებელი კვალის განტოლება $Oxy$ სიბრტყეზე იქნება:

$$Ax+By+D=0. \tag{2}$$

სრულიად ასევე, $Oyz$ ($x=0$) სიბრტყეზე კვალის განტოლება იქნება:

$$By+Cz+D=0, \tag{3}$$

და, ბოლოს, $Ozx$ ($y=0$) სიბრტყეზე კვალის განტოლება იქნება:

$$Ax+Cz+D=0. \tag{4}$$

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა.** არსებითად, $Oxy$ სიბრტყეზე კვალის განტოლება ასე უნდა დაგეწერა:

$$\left.\begin{aligned} Ax+By+D&=0,\\ z&=0, \end{aligned}\right\}$$

ვინაიდან (2) განტოლება თავისთავად $Oz$ ღერძის პარალელურ სიბრტყეს გამოსახავს. დამატებითი განტოლება კი $z=0$ შეცვლილია ზემოთ სიტყვიერი მითითებით იმაზე, რომ (2) განტოლება შეეხება $Oxy$ სიბრტყის წერტილებს.

იგივე ითქმის (3) და (4) განტოლებების შესახებ.

მკითხველს მოეთხოვება ააგოს წინა პარაგრაფში განხილული სიბრტყეების კვლები და მათი საშუალებით თვით სიბრტყეების აგება მოახდინოს.

#### ვარჯიშობა

1. იპოვეთ $4x+7y+3z+5=0$ სიბრტყის კვლები საკოორდინატო სიბრტყეებზე.

პასუხი. $7y+3z+5=0$; $4x+3z+5=0$; $4x+7y+5=0$.

2. იპოვეთ $x+y+1$ სიბრტყის კვლები საკოორდინატო სიბრტყეებზე (და ამათი საშუალებით ააგეთ მოცემული სიბრტყე).

პასუხი. $y+1=0$; $x+1=0$; $x+y+1=0$.

**§ 130. ორი სიბრტყის პარალელობისა და თანამთხვევის პირობები.** წინა პარაგრაფში ნათქვამი საშუალებას გვაძლევს ორი სიბრტყის

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

პარალელობის პირობა გამოვიყვანოთ.

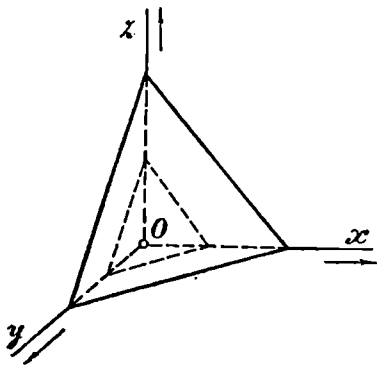
მართლაც, იმისათვის, რომ ეს სიბრტყეები პარალელური იყვნენ, აუცილებელი და საკმარისია, რომ პარალელური იყვნენ მათი კვლები საკოორდინატო სიბრტყეებზე (ნახ. 104).

$Oxy$ სიბრტყეზე კვლების

და

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+D_1=0\\ A_2x+B_2y+D_2=0\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

პარალელობის პირობა გვაძლევს (შეად. § 97)




ნახ. 104.

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1};$$

თუ დანარჩენი ორი საკოორდინატო სიბრტყისათვის ანალოგიურ ტოლობებს დავწერთ, საბოლოოდ მივიღებთ ორი სიბრტყის პარალელობის პირობას:

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}. \qquad (3)$$

მაშასადამე, იმისათვის, რომ ორი სიბრტყე პარალელური იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მათ განტოლებებში შესაბამის ცვლადებთან მდგომი კოეფიციენტები პროპორციული იყვნენ.

პარალელობის კერძო შემთხვევას თანამთხვევა წარმოადგენს.

ორი სიბრტყის თანამთხვევისათვის აუცილებელი და საკმარისია საკოორდინატო სიბრტყეებზე მათი კვლების თანამთხვევა. მაგრამ $Oxy$ სიბრტყე კვლების [იხ. (2) განტოლებანი] თანამთხვევის პირობა გვაძლევს ტოლობებს

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{D_2}{D_1}.$$

თუ ანალოგიურ ტოლობებს დავწერთ დანარჩენი ორი საკოორდინატო სიბრტყისათვის, საბოლოოდ მივიღებთ საძიებელ პირობებს:

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}=\frac{D_2}{D_1}. \qquad (4)$$

მაშასადამე, იმისათვის, რომ ორი სიბრტყე ერთიმეორეს ემთხვეოდეს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მათ განტოლებებში ყველა სათანადო კოეფიციენტი პროპორციული იყოს.

თუ $k$ აღნიშნავს (4) ფარდობათა საერთო მნიშვნელობას, მაშინ უკანასკნელი პირობები ასე შეიძლება გადაიწეროს:

$$A_2=kA_1,\ B_2=kB_1,\ C_2=kC_1,\ D_2=kD_1. \qquad (5)$$

აქედან გამომდინარეობს (იხ. § 97), რომ (1) განტოლებებით მოცემულ სიბრტყეთა თანამხვევისათვის, აუცილებელი და საკმარისია, რომ არსებობდეს ისეთი $k$ რიცხვი, რომლისათვისაც ადგილი აქვს იგივობას (ე. ი. ტოლობას, რომელიც $x$, $y$ და $z$-ის ყველა მნიშვნელობისათვის მართებულია)

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=k(A_1x+B_1y+C_1z+D_1).$$

§ 131. სიბრტყის ნორმალური განტოლება. სრულიად ანალოგიურად იმისა, რაც გაკეთებულ იქნა § 96-ში, შეგვიძლია სიბრტყის განტოლება მართკუთხოვან კოორდინატებში

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

დავიყვანოთ ეგრეთ წოდებულ ნორმალურ სახეზე

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0, \tag{2}$$

სადაც $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ რაღაც მიმართულების კოსინუსებია, ხოლო $p\geqslant 0$. ამისათვის საკმარისია (1) განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ $\lambda$ მუდმივზე და იგი ისე შევარჩიოთ რომ ვექტორი

$$\vec{V}=(\lambda A,\ \lambda B,\ \lambda C) \tag{3}$$

იყოს ორტი და, გარდა ამისა, რომ $\lambda D\leqslant 0$. პირველი მოთხოვნიდან გამომდინარეობს: $(\lambda A)^2+(\lambda B)^2+(\lambda C)^2=1$, საიდანაც

$$\lambda=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \tag{4}$$

ნიშანი შეირჩევა მეორე პირობის მიხედვით (როცა $D=0$ ნიშანი ნებისმიერია). თუ დავუშვებთ, რომ

$$\lambda A=\cos\alpha,\ \lambda B=\cos\beta,\ \lambda C=\cos\gamma, \tag{5}$$

განტოლებას დავიყვანთ საძიებელ სახემდე (2). $\lambda$-ს ეწოდება მანორმირებელი მამრავლი.

§ 124-ში ნათქვამის თანახმად (3)-დან გამომდინარეობს, რომ $\vec{V}$ ორტი (1) სიბრტყის მართობია. საჭიროებით ისე, როგორც § 96-ში, დავამტკიცებთ, რომ, როცა $D=0$, $\vec{V}$ ორტი მიმართულია კოორდინატთა სათავიდან სიბრტყისაკენ და რომ $p$ არის მანძილი კოორდინატთა სათავიდან სიბრტყემდე.

#### სავარჯიშოები

1. სათავედან სიბრტყეზე დაშვებული $OK$ მართობის სიგრძე ტოლია 8-ის. $\overrightarrow{OK}$ ვექტორს შეადგენს $Ox$ და $Oy$ ღერძებთან კუთხეებს $\alpha=60^\circ$, $\beta=45^\circ$; $Oz$ ღერძთან იგი შეადგენს მახვილ კუთხეს. იპოვეთ სიბრტყის ნორმალური განტოლება (კოორდინატები მართკუთხოვანია).

ამოხსნა. $\overrightarrow{OK}$ ვექტორის მიერ $Oz$ ღერძთან შედგენილი $\gamma$ კუთხეს ვიპოვით ფორმულიდან

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1;$$

ვინაიდან $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, მივიღებთ: $\cos\gamma=+\frac{1}{2}$ (ჩვენ ავიღეთ + ნიშანი, ვინაიდან, პირობის თანახმად, $\gamma$ კუთხე მახვილია). მაშასადამე, საძიებელი ნორმალური განტოლება იქნება:

$$\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y+\frac{1}{2}z-3=0.$$

2. დაიყვანეთ სიბრტყის განტოლება. $x+3y+3z+1=0$ ნორმალურ სახეზე.

პასუხი. $\frac{x+3y+3z+1}{-\sqrt{19}}=0.$

## III. წრფის განტოლებანი სივრცეში

**§ 132. განტოლებანი მიმართულების კოეფიციენტებში. პარამეტრული წარმოდგენა.** ახლა გამოვიყვანოთ სივრცეში წრფის განტოლებანი იმავე ხერხით, რაც § 88-ში გამოვიყენეთ. ვთქვათ, $\Delta$ არის მოცემული წრფე; მისი მდებარეობა საკმაოდ განისაზღვრება ერთ-ერთი მისი $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილის მოცემით და რაიმე ვექტორით $\vec{P}=(X, Y, Z)$, რომელიც ნულის ტოლი არ არის და ამ წრფის პარალელურია (ნახ. 105). ამ ვექტორს ჩვენ ვუწოდოთ $\Delta$ წრფის მიმართულების ვექტორი. იმისათვის, რომ $M(x, y, z)$ წერტილი ეკუთვნოდეს $\Delta$ წრფეს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ვექტორი $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ პარალელური იყოს $\vec{P}$-სი; ეს კი გვაძლევს (§ 37):

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}. \tag{1}$$

უკანასკნელი პირობა წარმოადგენს ორი განტოლების სისტემას, რომელიც შეიძლება დაიწეროს, მაგალითად, ასე:

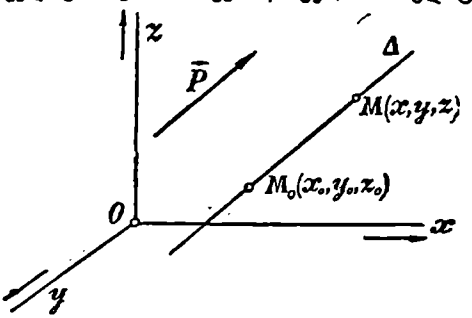
$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{z-z_0}{Z},\quad \frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}. \tag{1a}$$

ვინაიდან ეს განტოლებანი იმის აუცილებელ და საკმარის პირობას გამოსახავენ, რომ $(x, y, z)$ წერტილი აღებულ წრფეს ეკუთვნოდეს, ამიტომ სწორედ ესენი წარმოადგენენ ამ წრფის განტოლებებს.

ჩვენ ვხედავთ, რომ სივრცეში წრფე გამოისახება ორი განტოლებით, როგორც ეს უნდა ყოფილიყო კიდეც, სივრცეში წირთა ანალიზური წარმოდგენის შესახებ ზემოთქმულის თანახმად (§ 120). წრფისათვის დამახასიათებელი ის არის, რომ ორივე ეს განტოლება წრფივია.

$X, Y, Z$ სიდიდეები საკმაოდ განსაზღვრავენ წრფის მიმართულებას; ამიტომ მათ უწოდებენ ამ წრფის მიმართულების კოეფიციენტებს და, ამის შესაბამისად, (1) განტოლებებს ეწოდება განტოლებები მიმართულების კოეფიციენტებში.

ცხადია, რომ, პირიქით: (1) სახის განტოლებანი, სადაც $X$, $Y$, $Z$ ერთდროულად ნულები არ არიან, ყოველთვის გამოსახავენ წრფეს, რომელიც $(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე გაივლის და $(X, Y, Z)$ ვექტორის პარალელური იქნება.



ნახ. 105.

ვინაიდან $\vec{P}$ ვექტორი შეიძლება ნებისმიერი მისი პარალელური ვექტორით შეიცვალოს, ამიტომ $X$, $Y$, $Z$ სიდიდეები შეიძლება ნებისმიერი მათი პროპორციული სიდიდეებით შეიცვალოთ. აქედან გამომდინარეობს, რომ წრფის მიმართულება დამოკიდებულია არა თვით $X$, $Y$, $Z$ სიდიდეებზე, არამედ მათ ფარდობებზე, მაგალითად, მათ ფარდობებზე (შეად. § 88)

$$a=\frac{X}{Z},\quad b=\frac{Y}{Z}. \tag{2}$$

ამ ფარდობებს შეიძლება ეუწოდოთ აღებული წრფის **საკუთხო კოეფიციენტები** (იხ. შემდეგი პარაგრაფი).

(1) განტოლებებიდან ადვილად მივიღებთ **წრფის პარამეტრულ წარმოდგენასაც**. ამისათვის საკმარისია (1) ფარდობათა საერთო მნიშვნელობა აღვნიშნოთ $t$-თი, რაც გვაძლევს (შეად. § 88)

$$x=x_0+Xt,\quad y=y_0+Yt,\quad Z=Z_0+Zt. \tag{3}$$

$t$ პარამეტრს აქვს იგივე გეომეტრიული შინაარსი, რაც § 88-ში.

თუ ნებისმიერი სიგრძის $\vec{P}$ ვექტორის მაგიერ ავიღებთ ორტს $\vec{e}=(l, m, n)$, მაშინ (1) განტოლებანი მიიღებენ სახეს

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}; \tag{4}$$

სიდიდეები $l$, $m$, $n$ იწოდებიან Δ წრფის **მიმართულების კოორდინატებად**, ხოლო (4) განტოლებანი—**განტოლებად მიმართულების კოორდინატებში**.

შესაბამისი პარამეტრული წარმოდგენა მიიღებს სახეს

$$x=x_0+lt,\quad y=y_0+mt,\quad z=z_0+nt; \tag{5}$$

პარამეტრი ამ შემთხვევაში წარმოადგენს გარკვეული ნიშნით განხილულ მანძილს ცვლადი $M(x, y, z)$ წერტილიდან მუდმივ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილამდე (იხ. § 88).

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ მოცემულია $\Delta$ წრფის მიმართულების კოეფიციენტები $X, Y, Z$, მაშინ $l, m, n$ კოორდინატების საპოვნელად საკმარისია $X, Y, Z$ სიდიდეები ისეთს $k$ მამრავლზე გავაძრაკლოთ, რომ $(kX, kY, kZ)$ ვექტორის სიგრძე ერთის ტოლი იყოს.

მ ა რ თ კ უ თ ხ ო ვ ა ნ ი კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი ს შემთხვევაში ეს მოკვეცას

$$(kX)^2+(kY)^2+(kZ)^2=1,$$

საიდანაც

$$k=\pm\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

და

$$\left.\begin{aligned} l&=\pm\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\quad m=\pm\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\\ n&=\pm\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ორნაირი ნიშანი [1]) იმიტომ აიღება, რომ თუ $l, m, n$ არიან წრფის მიმართულების კოორდინატები, მაშინ $-l, -m, -n$ აგრეთვე იმავე წრფის მიმართულების კოორდინატები იქნებიან.

გავიხსენოთ, რომ განსახილველ (მართკუთხოვანი კოორდინატების) შემთხვევაში $l, m, n$ არიან იმავე დროს მიმართულების კოსინუსები, ე. ი.

$$l=\cos\alpha,\quad m=\cos\beta,\quad n=\cos\gamma, \tag{7}$$

სადაც $\alpha, \beta, \gamma$ აღნიშნავენ $\vec{e}=(l, m, n)$ ორტის მიერ შედგენილ კუთხეებს საკოორდინატო ღერძებთან. — $\vec{e}=(-l, -m, -n)$ ორტს შეესაბამება $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$ კუთხეები.

$\Delta$ წრფესა და საკოორდინატო ღერძებს შორის კუთხეებად ჩვენ ვიგულისხმებთ ან $\vec{e}$ ორტის კუთხეებს ამ ღერძებთან (ე. ი. $\alpha, \beta, \gamma$-ს) ანდა — $e$ ორტის კუთხეებს (ე. ი. $\pi-\alpha, \pi-\beta, \pi-\gamma$-ს), განურჩევლად.

ამრიგად, (6) ფ ო რ მ უ ლ ე ბ ი ს ა შ უ ა ლ ე ბ ა ს გ ვ ა ძ ლ ე ვ ე ნ ვ ი პ ო ვ ო თ (1) გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ი თ მ ო ც ე მ უ ლ ი წ რ ფ ი ს კ უ თ ხ ე ე ბ ი ს ა კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ო ღ ე რ ძ ე ბ თ ა ნ.

#### სავარჯიშოები და დამატებები

1. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც (1, 0, 1) წერტილზე გადის და $\vec{P}=(3, 2, 1)$ ვექტორის პარალელურია.

პ ა ს უ ხ ი. $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=z-1.$

2. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც (2, 3, 2) წერტილზე გადის და (0, 3, 5) ვექტორის პარალელურია.

[1]) ერთდროულად უნდა ავიღოთ ან ზედა ან ქვედა ნიშანი.

პასუხი. $\frac{x-2}{0}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-2}{5}$, ანუ $x=2$, $\frac{y-3}{3}=\frac{z-2}{5}$.

3. იპოვეთ $Oxy$ სიბრტყის პარალელური წრფის განტოლებათა ზოგადი სახე.

პასუხი. $\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{0}$, ანუ $\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}$, $z=z_0$.

4. იპოვეთ $Oz$ ღერძის პარალელური წრფის განტოლებათა ზოგადი სახე.

პასუხი. $\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{Z}$, ანუ $x=x_0$, $y=y_0$.

5. იპოვეთ ის კუთხეები, რომელთაც $\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-8}{3}$ წრფე შეადგენს (მართკუთხოვან) კოორდინატთა ღერძებთან.

პასუხი. $\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta=\pm\frac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma=\pm\frac{2}{\sqrt{14}}$.

**§ 133. წრფის დაყვანილი განტოლებანი.** თუ ვიგულისხმებთ, რომ წინა პარაგრაფის (1a) განტოლებებში $Z\neq 0$, მაშინ მათი გადაწერა ასე შეიძლება:

$$x-x_0=a(z-z_0),\quad y-y_0=b(z-z_0), \tag{1}$$

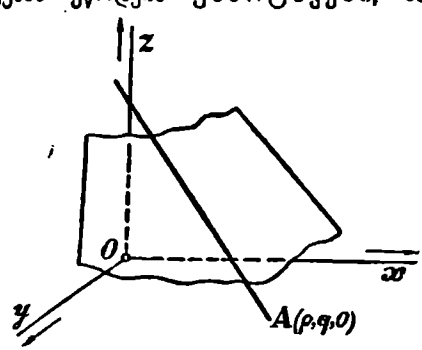
სადაც, წინანდებურად $a$ და $b$ აღნიშნავენ მუდმივებს

$$a=\frac{X}{Z},\quad b=\frac{Y}{Z} \tag{2}$$

ან კიდევ ასე:

$$\left.\begin{aligned} x&=az+p,\\ y&=bz+q,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

სადაც $p$ და $q$ აღნიშნავენ გარკვეულ მუდმივებს (სახელდობრ $p=x_0-az_0$, $q=y_0-bz_0$). (3) განტოლებათა სისტემას ეწოდება უმარტივესი, ან წრფის განტოლებათა დაყვანილი სისტემა.



ნახ. 106

თითოეულ ამ განტოლებათაგანი, მაგალითად, განტოლება $x=az+p$, თავისთავად აღებული, გამოსახავს სიბრტყეს (ვინაიდან ეს განტოლება პირველი ხარისხისაა). ვინაიდან წრფის წერტილთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ ორივე ამ განტოლებას, ამიტომ ეს წრფე ერთდროულად ორივე ამ სიბრტყეს ეკუთვნის. ე. ი. წარმოადგენს მათი გადაკვეთის წრფეს.

ვინაიდან პირველი განტოლება არ შეიცავს $y$-ს, ხოლო მეორე $x$-ს, ამიტომ პირველი სიბრტყე $Oy$ ღერძის პარალელურია, ხოლო მეორე — $Ox$ ღერ-

ძისა. მაშასადამე, (3) განტოლებებით გამოსახული სიბრტყეები, წარმოადგენენ იმ სიბრტყეებს, რომლებიც აგეგმილებენ აღებულ წრფეს, შესაბამისად $Ozx$ და $Oyz$ სიბრტყეებზე (დაგეგმილება ხდება, შესაბამისად, $Oy$ და $Ox$-ის პარალელურად) (ნახ. 106).

(3) განტოლებებში $a$, $b$, $p$ და $q$ კოეფიციენტებს უბრალო გეომეტრიული მნიშვნელობა აქვთ. სახელდობრ, ამჟარაა, რომ $p$ და $q$ წარმოადგენენ (3) წრფის $Oxy$ სიბრტყეზე კ ვ ა ლ ი ს კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ს. მართლაც, ამ კვალის კოორდინატების საპოვნელად, ე. ი. იმ $A$ წერტილის კოორდინატების საპოვნელად, რომელზედაც კვეთს (3) წრფე $Oxy$ სიბრტყეს, საჭიროა (3) სისტემაში შევიტანოთ $z=0$, რაც გვაძლევს

$$x=p,\ y=q.$$

$a$ და $b$ კოეფიციენტების გეომეტრიული მნიშვნელობის გამოსარკვევად დავკმაყოფილდეთ მ ა რ თ კ უ თ ხ ო ვ ა ნ ი კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი ს შემთხვევით. თუ წინა პარაგრაფის აღნიშვნებს შევინარჩუნებთ, ამ შემთხვევაში

$$a=\frac{X}{Z}=\frac{1}{n},\quad b=\frac{Y}{Z}=\frac{m}{n},$$

ანუ

$$a=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma},\quad b=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}, \tag{4}$$

სადაც $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ აღნიშნავენ $\Delta$ წრფის კუთხეებს საკოორდინატო ღერძებთან; შევნიშნოთ, რომ $a$ და $b$ მნიშვნელობანი არ შეიცვლებიან, თუ ერთდროულად $\alpha$, $\beta$ და $\gamma$-ს შევცვლით $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$ და $\pi-\gamma$-თი.

თუ მოცემულია დაყვანილი განტოლებანი (3), მაშინ ყოველთვის შეიძლება მათი გარდაქმნა განტოლებებად მიმართულების კოეფიციენტებში; ამისათვის საკმარისია (3) განტოლებანი ასე გადავწეროთ:

$$\frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}=\frac{z-0}{1} \tag{5}$$

ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ (3) განტოლებანი ყოველთვის გამოსახავს ისეთ წრფეს, რომელიც $(p, q, 0)$ წერტილზე გაივლის და რომელსაც ჭიმართულების კოეფიციენტებად აქვს $a$, $b$, 1 (ან ყოველი სამი რიცხვი, $a$, $b$, 1-ის პროპორციული).

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. $a$, $b$ სიდიდეთაგან ერთ-ერთი ან ორივე ერთად, კერძოდ, შეიძლება ნულის ტოლი იყოს. თუ, მაგალითად, $a=0$, მაშინ წრფის განტოლებანი მიიღებენ სახეს: $x=p$, $y=bz+q$; ამ შემთხვევაში წრფე მდებარეობს $Oyz$ სიბრტყის პარალელურ $x=p$ სიბრტყეში, ე. ი. წრფე $Oyz$ სიბრტყის პარალელურია. თუ $a=b=0$, მაშინ წრფის განტოლებანი მიიღებენ $x=p$, $y=q$ სახეს: ამ შემთხვევაში წრფე $Oz$ ღერძის პარალელურია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. (3) განტოლებათა გამოყვანის დროს, ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $Z \neq 0$. თუ $Z=0$, მაშინ $X$, $Y$ სიდიდეთაგან ერთი მაინც არ არის ნულის ტოლი (ვინაიდან სამივე სიდიდე $X$, $Y$, $Z$, პირობის თანახმად, ნული ვერ გახდება ერთდროულად); ვთქვათ, მაგალითად, $X \neq 0$; მაშინ ჩვენ შეგვძლებთ დაყვანილი განტოლებების დაწერას, თუ $z$ და $x$ ცვლადებს როლებს შევუცვლით.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი და დ ა მ ა ტ ე ბ ე ბ ი
(კოორდინატები მართკუთხოვანია)

1. იპოვეთ ის კუთხეები, რომელთაც (3) დაყვანილი განტოლებებით მოცემული წრფე შეადგენს საკოორდინატო ღერძებთან.

პ ა ს უ ხ ი. (3) ფორმულიდან და წინა პარაგრაფის (6) ფორმულიდან გამომდინარეობს

$$\cos\alpha = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}},\quad \cos\beta = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}},$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

2. იპოვეთ ის მახვილი $\gamma$ კუთხე, რომელსაც შეადგენს $Oz$ ღერძთან შემდეგი განტოლებებით მოცემული წრფე: $x=z+\frac{1}{2}$, $y=-2z+3$.

პ ა ს უ ხ ი. $\cos\gamma = +\frac{1}{\sqrt{6}}$.

**§ 134. ორი წრფის პარალელობისა და თანამთხვევის პირობები.** მიმართულების კოეფიციენტების თვით განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ წრფეები მოცემულია განტოლებებით

$$\frac{x-x_1}{X_1}=\frac{y-y_1}{Y_1}=\frac{z-z_1}{Z_1} \quad \text{და} \quad \frac{x-x_2}{X_2}=\frac{y-y_2}{Y_2}=\frac{z-z_2}{Z_2}, \tag{1}$$

მაშინ მათი პარალელობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ მიმართულების ვექტორები $(X_1, Y_1, Z_1)$ და $(X_2, Y_2, Z_2)$ პარალელური იყვნენ, ე. ი. რომ

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{Y_2}{Y_1}=\frac{Z_2}{Z_1}. \tag{2}$$

ეს ტოლობანი გამოსახავენ (1) წ რ ფ ე თ ა პ ა რ ა ლ ე ლ ო ბ ი ს პ ი რ ო ბ ე ბ ს.

თუ წრფეები დაყვანილი სახის განტოლებებითაა მოცემული:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 z + p_1,\\ y &= b_1 z + q_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{და} \quad \left.\begin{aligned} x &= a_2 z + p_2,\\ y &= b_2 z + q_2, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

მაშინ, თუ ამათ გადავწერთ წინა პარაგრაფის (5) სახით და გამოვიყენებთ (2) პირობას, დავრწმუნდებით, რომ პარალელობის პირობები გამოისახებიან ტოლობებით:

$$a_1 = a_2,\ b_1 = b_2. \tag{4}$$

$p$ და $b$ კოეფიციენტების გეომეტრიული მნიშვნელობის თანახმად (იხ. წინა პარაგრაფი) ცხადია, აგრეთვე, რომ (3) წრფეთა თანამთხვევისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ

$$a_1=a_2,\ b_1=b_2,\ p_1=p_2,\ q_1=q_2. \tag{5}$$

**§ 135. წრფის განტოლებანი ზოგადი სახით.** წრფის დაყვანილი განტოლებანი

$$\left.\begin{aligned} x &= az+p,\\ y &= bz+q \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

გვაძლევენ ამ წრფეს, როგორც გადაკვეთას ორი სიბრტყისა: $x-az-p=0$ და $y-bz-q=0$, რომლებიც შესაბამისად $Oy$ და $Oz$ ღერძების პარალელური არიან. მაგრამ, რასაკვირველია, წრფის ანალიზური წარმოდგენისათვის შეიძლება ნებისმიერი ისეთი ორი სიბრტყით ვისარგებლოთ, რომლებიც მოცემული წრფის გასწვრივ იკვეთებიან (მაგრამ ერთიმეორეს არ ემთხვევიან). ვთქვათ,

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ამ სიბრტყეთა განტოლებებია. უკანასკნელ განტოლებათა ერთობლიობა წარმოადგენს აღებული წრფის განტოლებებს ზოგადი სახით.

პირიქით, (2) განტოლებათა სისტემა ყოველთვის წარმოადგენს რაღაც წრფეს; იგულისხმება, რომ სიბრტყეები, რომლებიც თითოეულ ამ განტოლებით გამოისახებიან, არაპარალელური (და არათანამთხვეული) არიან. ეს უშუალოდ აშკარაა, ვინაიდან ჩვენ ვიცით, რომ (2) სისტემა წარმოადგენს ორი ხსენებული სიბრტყის გადაკვეთას, ე. ი. წრფეს.

ცხადია, რომ (2) სისტემა შეგვიძლია უამრავი სხვა, მისი ტოლფასი სისტემით შევცვალოთ. ეს იმას ნიშნავს, რომ აღებული ორი სიბრტყის მაგიერ ჩვენ შევვიძლია ავიღოთ ნებისმიერი სხვა ორი სიბრტყე, რომლებიც მოკვეთილი წრფის გასწვრივ იკვეთებიან. კერძოდ, (2) სისტემა ყოველთვის შეიძლება დავიყვანოთ უმარტივეს სახეზე (2) (ან ანალოგიურ სახეზე, სადაც $z$-ის როლს ასრულებს $x$ ან $y$). ამისათვის საკმარისია ამოვხსნათ (2) სისტემა $x$, $y$, $z$ ცვლადთაგან რომელიმე ორის მიმართ, რაც ყოველთვის შესაძლებელია, როგორც ამას ახლავე დავინახავთ.

უპირველეს ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ დეტერმინანტებიდან [1]

$$B_1C_2-B_2C_1,\ C_1A_2-C_2A_1,\ A_1B_2-A_2B_1 \tag{3}$$

[1]) ესენი არიან შემდეგი ცხრილიდან შედგენილი დეტერმინანტები:

$$\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2 \end{matrix}$$

ერთი მაინც არ არის ნულის ტოლი, ვინაიდან სამივე რომ ნული იყოს, გვექნებოდა:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2},$$

და (1) სისტემის განტოლებებით გამოსახული სიბრტყეები ამ შემთხვევაში პარალელური იქნებოდნენ, რაც პირობას ეწინააღმდეგება.

წაოძოვიდგინოთ გარკვეულობისათვის, რომ ნულისაგან განსხვავდება (3) სიდიდეთაგან მესამე, ე. ი., რომ

$$A_1B_2-A_2B_1\neq 0.$$

მაშინ, თუ (2) სისტემას ამოვხსნით $x$ და $y$ ცვლადების მიმართ, მივიღებთ (1) სახის განტოლებებს.

ამრიგად, დაყვანილი განტოლებები, რომ მივიღოთ ზოგადიდან, საკმარისია ეს უკანასკნელი ამოვხსნათ რომელიმე ორი ცვლადის მიმართ. თავის მხრივ, დაყვანილი განტოლებანი შეიძლება ერთბაშად გარდაექმნათ განტოლებებად მიმართულების კოეფიციენტებში (იხ. წინა პარაგრაფი).

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ (2) განტოლებებით წარმოდგენილი სიბრტყეები პარალელური არიან, მაინც მოხერხებულია აქაც ეთქვათ, რომ ეს სიბრტყეები ი კვეთებიან წრფეზე, მაგრამ, რომ მათი გადაკვეთის წრფე უ ს ა ს რ უ ლ ო დ დ ა შ ო რ ე ბ უ ლ ი ა ანუ ა რ ა ს ა კ უ თ რ ი ვ ი ა.

#### სავარჯიშოები

1. მოცემულია წრფის განტოლებანი ზოგადი სახით:

$$\left.\begin{aligned}x+y+z+5&=0,\\2x-y-2z+1&=0.\end{aligned}\right\}$$

იპოვეთ დაყვანილი განტოლებანი და განტოლებანი მიმართულების კოეფიციენტებში.

პ ა ს უ ხ ი. დაყვანილი განტოლებანი: $x=\frac{1}{3}z-2$, $y=-\frac{4}{3}z-3$ მიმართულების კოეფიციენტებში განტოლებების ერთ-ერთი სახე:

$$\frac{x+2}{\frac{1}{3}}=\frac{y+3}{-\left(\frac{4}{3}\right)}=\frac{z}{1}, \text{ ანუ } \frac{x+2}{1}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z}{3}.$$

2. იგივე ამოცანა წრფისათვის:

$$\left.\begin{aligned}x+2y+z&=0,\\2x+4y-z+6&=0\end{aligned}\right\}$$

პ ა ს უ ხ ი: დაყვანილი განტოლებები ($x$ და $z$-ის მიმართ ამოხსნით): $x=-2y-2$, $z=2$. მიმართულების კოეფიციენტებში განტოლების ერთ-ერთი სახე:

$$\frac{x+2}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{0}.$$

3. წრფე მოცემულია განტოლებებით

$$\left.\begin{aligned} 4x + 3y - 2z + 5 = 0, \\ 4x - 4y - z + 2 = 0; \end{aligned}\right\}$$

ვპოვეთ ის კუთხეები, რომელთაც იგი შეადგენს მართკუთხოვან საკოორდინატო ღერძებთან.

ამოხსნა. ამ წრფის დაყვანილი განტოლებანი იქნებიან:

$$x = \frac{5}{4}z - \frac{7}{2},\quad y = -z + 3;$$

მაშასადამე, მიმართულების კოეფიციენტები იქნებიან $\left(\frac{5}{4}, -1, 1\right)$ ან (5, —4, 4). აქედან

$$\cos\alpha = \pm\frac{5}{\sqrt{57}},\quad \cos\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{57}},\quad \cos\gamma = \pm\frac{4}{\sqrt{57}}.$$

## IV. ძირითადი ამოცანები წრფესა და სიბრტყეზე

წრფეებისა და სიბრტყეების ანალიზურ წარმოდგენასთან დაკავშირებულ სხვადასხვა ძირითადი ამოცანების ამოხსნაზე გადასვლისას, ჩვენ შეგვეძლო რამდენიმე წინასწარი შენიშვნა გაგვეკეთებინა, ანალოგიურად იმისა, რაც მოყვანილი იყო სიბრტყეზე წრფის შესახებ ძირითადი ამოცანების გარჩევის წინ. განმეორების თავიდან ასაცილებლად ჩვენ ამაზე აქ არ შევჩერდებით.

შემდეგში, სიტყვები: „მოცემულია სიბრტყე", „მოცემულია წრფე", „ვპოვეთ სიბრტყე" და ა. შ. ჩვენ ასე უნდა გვესმოდეს: „მოცემულია სიბრტყის განტოლება" და ა. შ.

**§ 136. ამოცანა 1. ვპოვეთ ორი სიბრტყის გადაკვეთა.** ორი სიბრტყე მოცემული განტოლებებით

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{1}$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \tag{2}$$

შეიძლება ან იკვეთებოდნენ (საერთო წრფე ჰქონდეთ), ან პარალელური იყვნენ (საერთო უსასრულოდ—შორეული წრფე ჰქონდეთ), ან თანამთხვეული იყვნენ (ყველა წერტილი საერთო ჰქონდეთ).

ჩვენ უკვე ვიცით, როგორ უნდა თავიდანვე გამორკვევა, თუ რომელ შემთხვევასთან გვაქვს საქმე (§ 130). პირველ შემთხვევაში (როცა სიბრტყეები იკვეთებიან სასრულ მანძილზე მდებარე წრფის გასწვრივ) ეს წრფე განისაზღვრება (1) და (2) განტოლებათა სისტემით. საჭიროების შემთხვევაში ჩვენ შეგვიძლია ეს სისტემა გარდავქმნათ, დაყვანილი სახის ან მიმართულების კოეფიციენტებში განტოლებებად (იხ. წინა პარაგრაფი).

**§ 137. ამოცანა 2. ვპოვეთ სამი სიბრტყის გადაკვეთა.** თუ მოცემულია სამი სიბრტყე შემდეგი განტოლებებით:

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

მათი გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები ერთდროულად უნდა აკმაყოფილებდნენ სამივე ამ განტოლებას.

ამ სისტემას აქვს ერთი გარკვეული ამონახსნი მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როცა დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

ნულისაგან განსხვავებულია. მხოლოდ ამ შემთხვევაში გადაიკვეთებიან (1) სიბრტყეები ერთ გარკვეულ წერტილში (სასრულ მანძილზე). ვანდობთ რა მკითხველს დანარჩენი შესაძლო შემთხვევების არართულს ალგებრულ გამოკვლევას[1]), დავკმაყოფილდებით შემდეგი შენიშვნებით, რომლებიც უშუალოდ გამომდინარეობენ სიბრტყეთა ცნობილი თვისებებიდან.

გარდა აღნიშნული შემთხვევისა, როცა $\Delta \neq 0$ და, მაშასადამე, არსებობს გადაკვეთის ე რ თ ი წერტილი, შესაძლოა წარმოგვიდგეს შემდეგი შემთხვევები (ყველა ამ შემთხვევაში $\Delta = 0$):

1. აღებულ სიბრტყეებს შეიძლება არც ერთი საერთო წერტილი არ ჰქონდეთ, ე. ი. შეადგენენ პრიზმას (პარალელური იყვნენ ერთი და იმავე წრფისა ისე, რომ ერთსა და იმავე წრფეზე არ იკვეთებოდნენ), ანდა ურთიერთპარალელური იყვნენ ისე, რომ ერთ სიბრტყედ არ გადაიქცნენ. ამ შემთხვევაში (და მხოლოდ ამ შემთხვევაში) (1) სისტემა უთავსადია.

2. სამივე მოცემული სიბრტყე შეიძლება ერთსა და იმავე წრფეზე იკვეთებოდეს ანდა ერთ სიბრტყედ გადაიქცნენ. მაშან (და მხოლოდ მაშინ) (1) სისტემას უამრავი ამონახსნი აქვს.

(1) სისტემის ამოხსნით, ყოველთვის შეიძლება გავიგოთ რომელ ზემოდასახელებულ შემთხვევასთან გვაქვს საქმე.

### სავარჯიშოები

1. იპოვეთ შემდეგი სამი სიბრტყის გადაკვეთის წერტილი:

$$x+y-z=0, \quad 2x-y+z-3=0, \quad x-y-2z+1=0.$$

პ ა ს უ ხ ი. წერტილი (1, 0, 1).

2. იპოვეთ შემდეგი სამი სიბრტყის გადაკვეთა:

$$x+2y+3z-1=0, \quad x+y+z+1=0, \quad 2x+3y+4z=0.$$

პ ა ს უ ხ ი. უკანასკნელი განტოლება არის პირველი ორის შედეგი (მიიღება პირველი ორის შეკრებით). ამიტომ მესამე განტოლება შეიძლება უკუვაგდოთ. დაგვრჩება პირველი ორი განტოლების დაკმაყოფილება. ეს ორი განტოლება განსაზღვრავს წრფეს

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z-1&=0,\\ x+y+z+1&=0, \end{aligned}\right\}$$

რომელზედაც იკვეთება სამივე მოცემული სიბრტყე.

---

[1]) ქვემოთ (§ 166) ჩვენ ჩავატარებთ სრულ გამოკვლევას ერთგვაროვან კოორდინატთა საშუალებით.

3. იპოვეთ შემდეგი სამი სიბრტყის გადაკვეთა:

$$x+2y+3z-1=0,\quad x+y+z+1=0,\quad 2x+3y+4z+5=0.$$

პასუხი. პირველი ორი განტოლება როს შეესაბამოთ და მიღებულს მესამე გამოვაკლოთ, დავგრჩება: $-5=0$, ე. ი. შეუძლებელი ტოლობა. მაშასადამე, აღებული სიბრტყეები არ იკვეთებიან (იკვეთებიან უსასრულოდ შორეულ წრტილზე). ადვილი შესაამოწმებელია, რომ ეს სიბრტყეები არაპარალელური აოიან. მაშასადამე, ისინი შეადგენენ პრიზმას.

**§ 138. ამოცანა 3. იპოვეთ გადახვლის ფორმულები დეკარტის კოორდინატთა ახალ სისტემაზე, რომლის საკოორდინატო სიბრტყეები მოცემულია განტოლებებით.** თუ ახალი საკოორდინატო სიბრტყეები მოცემულია წინა პარაგრაფის (1) განტოლებებით (მასთან პირველი გამოსახავს $O'y'z'$ სიბრტყეს, მეორე $O'z'x'$, ხოლო მესამე $O'x'y'$-ს), მაშინ საძიებელი გადასვლის ფორმულები იქნებიან (შეადარეთ § 99):

$$\left.\begin{aligned} x &= k_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1),\\ y' &= k_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2),\\ z' &= k_3(A_3x+B_3y+C_3z+D_3), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

სადაც $k_1$, $k_2$, $k_3$ მუდმივებია, რომელთა აღება შეიძლება ნებისმიერად (იგულისხმება ნულისაგან განსხვავებული), თუ საკოორდინატო ვექტორთა გეზი და სიგრძე განურჩეველია. ცხადია, ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ მოცემული სიბრტყეები გადაიკვეთებიან ერთ წერტილში, ე. ი. $\Delta\neq 0$. (1) ფორმულების დამტკიცება სავსებით ანალოგიურია § 99 ფორმულების დამტკიცებისა.

**§ 139. ამოცანა 4. იპოვეთ სიბრტყისა და წრფის გადაკვეთა.** თუ წრფე და სიბრტყე მოცემულია ზოგადი განტოლებებით (მაგალითად, წრფე წარმოდგენილია § 137-ის (1) სისტემის პირველი ორი განტოლებით, ხოლო სიბრტყე — იმავე სისტემის მესამე განტოლებით), მაშინ ჩვენ საქმე გვექნება ხსენებულ პარაგრაფში განხილულ ამოცანასთან.

ამოხსნა უფრო მარტივ სახეს მიიღებს თუ წრფე მოცემულია, მაგალითად, პარამეტრულად. ვთქვათ:

$$x=x_0+Xt,\quad y=y_0+Yt,\quad z=z_0+Zt \tag{1}$$

არის მოცემული წრფის პარამეტრული წარმოდგენა, ხოლო

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{2}$$

მოცემული სიბრტყის განტოლებაა. თუ (1) გამოსახულებებს შევიტანთ (2)-ში, მივიღებთ:

$$(AX+BY+CZ)t+Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \tag{3}$$

თუ $t$-სთან მდგომი კოეფიციენტი ნულის ტოლი არ არის, ჩვენ მივიღებთ $t$-ს სრულიად გარკვეულ მნიშვნელობას. თუ შევიტანთ ამას (1)-ში მივიღებთ გადაკვეთის წერტილის $x$, $y$, $z$ კოორდინატებს.

მაგრამ, თუ $AX+BY+CZ=0$ და, ამასთანავე, (3) განტოლების თავისუფალი წევრი $Ax_0+By_0+Cz_0+D$ ნულისაგან განსხვავდება, მაშინ გადაკვე-

თის წერტილი არ არსებობს (ან, როგორც ხშირად ამბობენ იგი უსასრულობაში იმყოფება); ეს ნიშნავს, რომ წრფე და სიბრტყე პარალელური არიან.

და, ბოლოს, თუ:

$$AX+BY+CZ=0 \tag{4}$$

და, გარდა ამისა:

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0, \tag{5}$$

მაშინ (3) განტოლება გადაიქცევა იგივობად: $0=0$ და, მაშასადამე, კმაყოფილდება $t$-ს ყველა მნიშვნელობისთვის. ეს ნიშნავს, რომ წრფე არამც თუ სიბრტყის პარალელურია, არამედ პირდაპირ მასზე მდებარეობს.

იმავე დასკვნებს მივიღებთ, თუ წრფე მოცემულია განტოლებებით მიმართულების კოეფიციენტებში:

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}. \tag{1a}$$

დავიხსომოთ, რომ (4) ტოლობა წარმოადგენს (1) წრფისა [ან, რაც იგივეა, (1a) წრფისა] და (2) სიბრტყის პარალელობის პირობას.

შეიძლება აგრეთვე ითქვას, რომ (4) პირობა არის (2) სიბრტყისა და $(X, Y, Z)$ ვექტორის პარალელობის პირობა.

(4) და (5) ტოლობათა ერთობლიობა გვაძლევს წრფისა და სიბრტყის თანამთხვევის პირობას.

თუ წრფე წარმოდგენილია დაყვანილი განტოლებებით

$$x=az+p,\ y=bz+q,$$

მაშინ, თუ მათ შემდეგი სახით გადავწერთ:

$$\frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}=\frac{z-0}{1},$$

დავინახავთ, რომ წრფისა და სიბრტყის პარალელობის პირობა იქნება:

$$Aa+Bb+C=0; \tag{4a}$$

წრფისა და სიბრტყის თანამთხვევის პირობები კი შედგებიან (4a) ტოლობასა და შემდეგი ტოლობისაგან:

$$Ap+Bq+D=0. \tag{5a}$$

#### სავარჯიშოები

1. იპოვეთ $x=3z+1$, $y=z-2$ წრფისა და $4x+y-11z+2=0$ სიბრტყის გადაკვეთის წერტილი.

პასუხი. $(-5, -4, -2)$.

2. $k$-ს რომელი მნიშვნელობისათვის $x=kz+2$, $y=2kz+4$ წრფე პარალელურია $x+y+z=0$ სიბრტყისა?

პასუხი. $k=-\frac{1}{3}$.

**§ 140. ამოცანა 5. იპოვეთ გადაკვეთა: 1°. მოცემული ფართეულისა და სიბრტყის, 2°. მოცემული ფართეულისა და წრფის, 3°. მოცემული მრუდისა და სიბრტყის, 1°. მოცემული**

$$\Phi(x,\ y,\ z)=0 \tag{1}$$

ფართეულისა და

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{2}$$

სიბრტყის გადაკვეთით მიიღება ბრტყელი წირი, რომლის განტოლებაა (1) და (2). თუ (1) არის $n$-რი რიგის ალგებრული ფართეული, მაშინ სიბრტყე მას გადაკვეთს ალგებრულ წირზე, რომლის რიგი არ აღემატება $n$-ს ან მთლიანად შედის ფართეულში, როგორც შემადგენელი ნაწილი. ამაში რომ დავრწმუნდეთ, განვიხილოთ (1) ფართეულის გადაკვეთა სიბრტყით $Z=0$ (ე. ი. $Oxy$ სიბრტყით). $Oxy$ სიბრტყესთან გადაკვეთა მოიცემა განტოლებით $\Phi(x,\ y,\ 0)=0$.

ცხადია, რომ ეს წარმოადგენს ალგებრული წირის განტოლებას, რომლის რიგი $n$-ზე მეტი არ არის, თუკი ის არ იქცევა იგივეობად. თუ $\Phi(x,\ y,\ 0)=0$ წარმოადგენს იგივობას, ეს ნიშნავს, რომ $z$ შედის $\Phi(x,\ y,\ z)$ პოლინომის ყოველ წევრში[1]), ე. ი. რომ $\Phi(x,\ y,\ z)=z\,\Phi_1(x,\ y,\ z)$, სადაც $\Phi_1(x,\ y,\ z)$ $n-1$ ხარისხის პოლინომია. ამიტომ ამ შემთხვევაში (1) განტოლება იშლება ორად: $z=0$ და $\Phi_1(x,\ y,\ z)=0$. რომ მოვნახოთ (1) ფართეულისა და ნებისმიერი (2) სიბრტყის გადაკვეთა, საკმარისია ეს უკანასკნელი ვიგულისხმოთ ახალ საკოორდინატო $O'x'y'$ სიბრტყედ, ზემოაღნიშნულის თანახმად, ეს მიგვიყვანს შედეგამდე, რაც დასაწყისში იყო ნაჩვენები. ამ მსჯელობებიდან გამომდინარეობს[2]), რომ თუ (2) სიბრტყე მთლიანად შედის (1) ფართეულის შემადგენლობაში, მაშინ გვექნება:

$$\Phi(x,\ y,\ z)=(Ax+By+Cz+D)\ \Phi_1(x,\ y,\ z),$$

სადაც $\Phi_1$ არის $n-1$ ხარისხის პოლინომი და (1) ფართეული იშლება ორად: (2) სიბრტყე და $n-1$ რიგის ფართეულად $\Phi_1(x,\ y,\ z)=0$.

შევნიშნოთ, რომ ზოგიერთი განზოგადებული ცნების შემოღება იძლევა იმის დამტკიცების საშუალებას, რომ გადაკვეთის წირი ყოველთვის $n$-რი რიგისაა (თუკი გამოვრიცხავთ დაშლის შემთხვევას), მაშინ ზემომიღებული შედეგი არ ეწინააღმდეგება სივრცეში ალგებრული წირის რიგის ზოგად განმარტებას[3]), როგორც იმ ფართეულთა რიგის ნამრავლისა, რომელთა გადაკვეთასაც ის წარმოადგენს.

2°. ახლა განვიხილოთ (1) ფართეულისა და წრფის გადაკვეთა. უკანასკნელი წარმოვადგინოთ პარამეტრულად

$$x=x_0+Xt,\ y=y_0+Yt,\ z=z_0+Zt. \tag{3}$$

---

[1]) შეად. ანალოგიური მსჯელობები § 100-ში.

[2]) იხ. ქვემოთ § 174.

[3]) აბ. § 120.

გადაკვეთის წერტილის შესაბამისი პარამეტრის მნიშვნელობა განისაზღვრება განტოლებიდან

$$\Phi(x_0+Xt,\ y_0+Yt,\ z_0+Zt). \tag{4}$$

თუ (1) არის $n$ რიგის ალგებრული ფართეული, მაშინ (4) განტოლება იქნება $n$ ან ნაკლები ხარისხის. ის შეიძლება იგივობაც გახდეს. ამრიგად გვექნება გადაკვეთის წერტილი არა უმეტეს $n$-ისა, თუ გამოვრიცხავთ შემთხვევას როცა წრფე მთლიანად ეკუთვნის ფართეულს (შეადარეთ § 100).

გარკვეული განზოგადების [1]) შემდეგ შეიძლება დამტკიცდეს, რომ თუ წრფე არ ეკუთვნის ფართეულს, მაშინ გადაკვეთის წერტილთა რიცხვი ყოველთვის $n$-ის ტოლია. ამრიგად, ალგებრული ფართეულის რიგი შეიძლება განმარტებულ იქნას, როგორც ფართეულისა და ნებისმიერი წრფის გადაკვეთის წერტილთა რიცხვი, თუ წრფე მთლიანად არ ეკუთვნის ფართეულს.

3°. ბოლოს, განვიხილოთ სიბრტყის და სივრცეში აღებული წირის გადაკვეთა, თუ წირი მოცემულია განტოლებებით

$$\Phi(x,\ y,\ z)=0,\ \Psi(x,\ y,\ z)=0. \tag{5}$$

ვინაიდან ყოველი სიბრტყე შეიძლება მიღებულ იქნას $Oxy$ სიბრტყედ, ამიტომ, ზოგადობის დაურღვეველად შეიძლება დავქმაყოფილდეთ ამ სიბრტყისა და წირის გადაკვეთის განხილვით.

(5) განტოლებებში თუ შევიტანთ $z=0$ მივიღებთ სისტემას

$$\Phi(x,\ y,\ 0)=0,\ \Psi(x,\ y,\ 0)=0. \tag{6}$$

ეს არის (5) ფართეულისა და $Oxy$ სიბრტყის გადაკვეთის წირთა განტოლებები. ამ წირების ურთიერთგადაკვეთა გვაძლევს (5) წირისა და $Oxy$ სიბრტყის გადაკვეთის საძიებელ წერტილებს. თუ (5) ფართეულები ალგებრულია, $m$ და $n$ რიგისა, მაშინ (6) წირებიც ალგებრულია, $m$ და $n$, ან უფრო ნაკლები რიგისა; ჩვენ გამოვრიცხავთ იმ შემთხვევას, როცა (6) განტოლებებიდან ერთ-ერთი იქცევა იგივეობად, ე. ი. როცა $Oxy$ სიბრტყე მთლიანად ეკუთვნის (5) ფართეულებიდან ერთ-ერთს. მაშასადამე, წირისა და სიბრტყის გადაკვეთის წერტილთა რიცხვი ტოლია $m\cdot n$ (ე. ი. წირის რიგისა) ან ნაკლებია, თუ გამოვრიცხავთ შემთხვევას, როცა (6) წირებს აქვთ საერთო ნაწილები.

ცნებების გარკვეული განზოგადების შემდეგ შეიძლება დამტკიცდეს, რომ სიბრტყისა და ალგებრული წირის გადაკვეთის წერტილთა რიცხვი, წირის რიგის ტოლია, თუ გამოვრიცხავთ შემთხვევას, როცა გადაკვეთის წერტილთა რიცხვი უსასრულოა.

#### სავარჯიშოები და დამატებები

1°. წერტილის ხარისხი სფეროს მიმართ განიმარტება საკვებით ისე, როგორც წრეწირისათვის (იხ. § 100; სავარჯიშო 2).

[1]) იხ. ქვემოთ, § 174.

დაამტკიცეთ, რომ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილის ხარისხი $k$, სფეროს მიმართ, რომლის განტოლებაა (იხ. § 117)

$$x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0$$

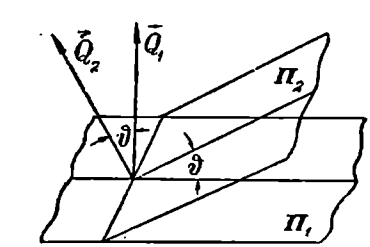
ტოლია იმ რიცხვისა, რომელსაც მოგვცემს ამ განტოლების მარცხენა მხარე თუ მასში $x, y, z$-ის ნაცვლად შევიტანთ $x_0, y_0, z_0$-ს.

2°. დაამტკიცეთ, რომ გეომეტრიული ადგილი წერტილებისა, რომელთა ხარისხები ორი სფეროს მიმართ ერთი და იგივეა, წარმოადგენს სიბრტყეს. ამ სიბრტყეს ეწოდება მოცემული ორი სფეროს რადიკალური სიბრტყე (იხ. § 118, სავარჯიშო 3).

**§ 141. ამოცანა 6. იპოვეთ მოცემულ სიბრტყეთა ან წრფეთა შორის კუთხეები** (კოორდინატები მართკუთხოვანი იგულისხმება). ორ $\Delta_1$ და $\Delta_2$ წრფეს შორის კუთხე $\widehat{\Delta_1\Delta_2}$ ჩვენ გვესმის ნებისმიერად ერთ-ერთი იმ კუთხეთაგან, რომლებიც ერთიმეორის დამატებას წარმოადგენენ $\pi$-მდე და რომელთაც შეადგენენ ერთ წერტილზე გამავალი და მოცემული პარალელური წრფეები. ეს კუთხე იმ $\varphi$ კუთხის ტოლია, რომელსაც შეადგენენ ამ წრფეთა მიმართულების $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ვექტორები ანდა მისი დამატებაა $\pi$-მდე.

ორ $\Pi_1$ და $\Pi_2$ სიბრტყეს შორის კუთხე $\widehat{\Pi_1,\Pi_2}$ ჩვენ გვესმის ნებისმიერად ერთ-ერთი იმ ორწახნაგოვან კუთხეთაგან, რომელთაც ეს სიბრტყეები შეადგენენ. ეს კუთხე იმ $\varphi$ კუთხის ტოლია, რომელსაც შეადგენენ ამ სიბრტყეთა მიმართულების $\vec{Q}_1$ და $\vec{Q}_2$ ვექტორები[1]) (ნახ. 107) ანდა მისი დამატებაა $\pi$-მდე.

და, ბოლოს, $\Delta$ წრფესა და $\Pi$ სიბრტყეს შორის კუთხე $\widehat{\Delta,\Pi}$ ჩვენ გვესმის ნებისმიერად ერთ-ერთი იმ კუთხეთაგან, რომლებიც ერთიმეორის დამატებას წარმოადგენენ $\pi$-მდე და რომელსაც შეადგენს $\Delta$ წრფე თავის მართკუთხოვან გეგმილთან $\Pi$ სიბრტყეზე. ეს კუთხე და ის $\varphi$ კუთხე, რომელსაც შეადგენენ წრფისა და სიბრტყის მიმართულების ვექტორები $\vec{P}$ და $\vec{Q}$, განსხვავდებიან ერთიმეორისაგან $\frac{\pi}{2}$ სიდიდით (ნახ. 108).




ნახ. 107.

ახლა, თუ გავიხსენებთ, რომ იმ წრფის მიმართულების ვექტორი, რომელიც მოცემულია განტოლებით

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}, \qquad (1)$$

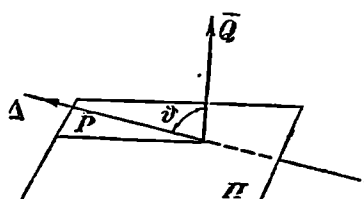
არის ვექტორი $\vec{P}=(X, Y, Z)$ (ან ყოველი მისი პარალელური), ხოლო სიბრტყისათვის

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (2)$$

მიმართულების ვექტორი არის ვექტორი $\vec{Q}=(A, B, C)$ ან ყოველი მისი პა-

[1]) ე. ი. აღებულ სიბრტყეებისადმი მართობული ვექტორები.

რალელური), მაშინ განტოლებებით მოცემულ სიბრტყეებსა და წრფეებს შორის კუთხეების პოვნის ამოცანა უშუალოდ დაიყვანება ორ ვექტორს შორის კუთხის პოვნის ამოცანაზე, რომელიც უკვე ამოვხსენით § 45-ში. თუ ამ პარაგრაფის ფორმულებით ვისარგებლებთ, მაშინ მივიღებთ შემდეგ დასკვნებს:



ნახ. 108.

1°. კუთხე ორ წრფეს შორის $\Delta_1$ და $\Delta_2$, რომელთა განტოლებებია

$$\left.\begin{aligned}\frac{x-x_1}{X_1}&=\frac{y-y_1}{Y_1}=\frac{z-z_1}{Z_1},\\ \frac{x-x_2}{X_2}&=\frac{y-y_2}{Y_2}=\frac{z-z_2}{Z_2},\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

მოიცემა ფორმულით

$$\cos(\widehat{\Delta_1,\Delta_2})=\pm\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\ \sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}\quad(4)$$

(ორნაირი ნიშანი იმიტომ აიღება, რომ კუთხე $\widehat{\Delta_1,\Delta_2}$ ან $\vartheta$-ს ტოლია, ან $\pi-\vartheta$-სი, სადაც $\vartheta$ არის კუთხე მოცემული წრფეების მიმართულებათა ვექტორებს შორის).

2°. კუთხე ორ სიბრტყეს შორის $\Pi_1$ და $\Pi_2$, რომელთა განტოლებებია

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\quad(5)$$

მოიცემა ფორმულით

$$\cos(\widehat{\Pi_1,\Pi_2})=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\ \sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\quad(6)$$

(ორნაირი ნიშანი იმავე მიზეზით აიღება, როგორც ზემოთ).

3. (1) განტოლებით მოცემული $\Delta$ წრფესა და (2) განტოლებით მოცემული $\Pi$ სიბრტყეს შორის კუთხე მოიცემა ფორმულით:

$$\sin(\widehat{\Pi,\Delta})=\pm\frac{AX+BY+CZ}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}};\quad(7)$$

რადიკალის წინ ისეთი ნიშანი უნდა ავიღოთ, რომ $\sin(\widehat{\Pi,\Delta})\geqslant 0$, ვინაიდან პირობის თანახმად, $\widehat{\Pi,\Delta}$ კუთხის ორივე მნიშვნელობა იმყოფება 0-სა და $\pi$-ს შორის.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ ზემოგანხილული წრფეები, ორივე ან ერთი მათგანი, მოიცემიან დაყვანილი განტოლებებით $x=az+b$, $y=bz+q$, მაშინ სათანადო ფორმულების მისაღებად საკმარისია გავიხსენოთ, რომ ამ წრფის მიმართუ-

ლების ვექტორად შეგვიძლია ავიღოთ ვექტორი $(a, b, 1)$, ასე რომ ამ შემთხვევაში $X=a$, $Y=b$, $Z=1$.

ამ პარაგრაფის ფორმულების გავრცელება განზოგადოებული დეკარტის კოორდინატთა შემთხვევისათვის ადვილია § 56-ის ფორმულების გამოყენებით. არ უნდა დავივიწყოთ მხოლოდ, რომ $A$, $B$, $C$ არიან იმ $\vec{Q}$ ვექტორის კოვარიანტული კოორდინატები, რომლებიც (2) სიბრტყის მართობია.

#### სავარჯიშოები

1. იპოვეთ $\theta$ კუთხე $x=2z+1$, $y=-z+5$ წრფესა და $x-3y+z-5=0$ სიბრტყეს შორის.

პასუხი. $\sin\theta=\frac{\sqrt{66}}{11}$.

2. იპოვეთ $\theta$ კუთხე $x+y+z+2=0$ და $x-y+z+4=0$ სიბრტყეებს შორის.

პასუხი. $\cos\theta=\pm\frac{1}{3}$.

3. იპოვეთ $\theta$ კუთხე $x=5z+1$, $y=2$ და $x=z+3$, $y=4z-8$ წრფეებს შორის.

პასუხი. $\cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{18}}$.

**§ 142. ამოცანა 7. იპოვეთ მოცემულ წრფეთა და სიბრტყეთა მართობულობის პირობები** (კოორდინატები მართკუთხოვანი იგულისხმება). თუ ვისარგებლებთ წინა პარაგრაფის ფორმულებით ან ორი ვექტორის მართობულობისა და პარალელობის უკვე ცნობილი პირობებით და წინა პარაგრაფის აღნიშვნებს შევინარჩუნებთ, ადვილად მივიღებთ:

1. ორი $\Delta_1$ და $\Delta_2$ წრფის მართობულობის პირობა:

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0. \tag{1}$$

2. ორი $\Pi_1$ და $\Pi_2$ სიბრტყის მართობულობის პირობა:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \tag{2}$$

3. $\Delta$ წრფისა და $\Pi$ სიბრტყის მართობულობის პირობა:

$$\frac{A}{X}=\frac{B}{Y}=\frac{C}{Z}. \tag{3}$$

გავიხსენოთ ამასთან შესადარებლად პარალელობის ის პირობები, რომლებიც წინათ გამოვიყვანეთ და რომლებიც ზოგადი სახის დეკარტის კოორდინატებისათვისაც გამოსაყენებელი არიან:

ორი წრფისათვის

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{Y_2}{Y_1}=\frac{Z_2}{Z_1} \tag{1a}$$

ორი სიბრტყისათვის

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \tag{2a}$$

წრფისა და სიბრტყისათვის

$$AX+BY+CZ=0. \tag{3a}$$

ადვილია აგრეთვე ამ უკანასკნელი ფორმულების გამოყვანა ორი ვექტორის პარალელობის ან მართობულობის პირობების გამოყენებით.

ყურადღება უნდა მიექცეს იმ განსხვავებას, რომელსაც ადგილი აქვს სიბრტყისა და წრფისათვის არსებული პირობების სახესა და ორი წრფის ან ორი სიბრტყისათვის შესაბამისი პირობების სახეს შორის.

**§ 143. ამოცანა 8. იპოვეთ მანძილი წერტილიდან სიბრტყემდე.** ეს ამოცანა § 103-ის ამოცანის ანალოგიურად ამოიხსნება.

ხსენებულ პარაგრაფში ჩატარებული მსჯელობის სავსებით ანალოგიურად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ თუ სიბრტყე მოცემულია ნორმალური განტოლებით, მართკუთხოვან კოორდინატებში

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0,$$

მაშინ $M(x_1, y_1, z_1)$ წერტილსა და სიბრტყეს შორის მანძილი $h$ მოიცემა ფორმულით

$$h=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p, \tag{1}$$

ე. ი. $h$ წარმოადგენს შედეგს, რომელსაც მივიღებთ თუ $M$ წერტილის კოორდინატებს შევიტანთ სიბრტყის ნორმალური განტოლების მარცხენა მხარეში.

თუ სიბრტყე მოცემულია ზოგადი განტოლებით

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{2}$$

მაშინ

$$h=\lambda(Ax_1+By_1+Cz_1+D), \tag{3}$$

სადაც $\lambda$ მანორმირებელი მამრავლია:

$$\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{4}$$

(3) შედეგი მართებული რჩება ზოგადი სახის დეკარტის კოორდინატთა შემთხვევაშიც, ოღონდ $\lambda$ მუდმივი უფრო რთული ფორმულით მოიცემა, ვიდრე (4).

(1) და (2) ფორმულები, ისე, როგორც § 103-ში, მანძილს მიაწერენ გარკვეულ ნიშანს. ჩვენთვის მნიშვნელოვანია გვახსოვდეს მხოლოდ ის, რომ სიბრტყის სხვადასხვა მხარეზე მდებარე წერტილისათვის $h$-ს აქვს სხვადასხვა ნიშანი.

**სავარჯიშოები**

1. იპოვეთ მანძილი (2, 3, 1) წერტილიდან $3x+2y+z+5=0$ სიბრტყემდე (კოორდინატები მართკუთხოვანია).

პასუხი. $h=-\frac{18}{\sqrt{14}}$.

2. იპოვეთ მანძილი შემდეგ პარალელურ სიბრტყეთა შორის:

$$2x+3y+2z-3=0 \text{ და } 4x+6y+4z-1=0.$$

მითითება. ერთ-ერთ სიბრტყეზე აიღეთ ნებისმიერი წერტილი და იპოვეთ მისი მანძილი მეორემდე.

პასუხი. $\frac{5\sqrt{17}}{34}$.

**§ 144. ამოცანა 9. იპოვეთ ფარდობა, რომლითაც მოცემული სიბრტყე ყოფს ორი მოცემული წერტილის შემაერთებელ ნაკვეთს.** თუ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ და $M_2(x_2, y_2, z_2)$ მოცემული წერტილებია, ხოლო $Ax+By+Cz+D=0$ მოცემული სიბრტყის განტოლებაა, მაშინ § 104-ის ანალოგიური მსჯელობით, მივიღებთ ფორმულას

$$k=\frac{M_1M}{MM_2}=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D}, \tag{1}$$

სადაც $M$ აღნიშნავს მოცემული სიბრტყისა და $M_1$ და $M_2$ წერტილების შემაერთებელი წრფის გადაკვეთის წერტილს.

**§ 145. სივრცეში სიბრტყისა და წრფის მდებარეობის განმსაზღვრელი დამოუკიდებელი მუდმივების რიცხვი.** სანამ გადავიდოდეთ იმ ამოცანების ამოხსნაზე, რომლებიც მოითხოვენ გარკვეული პირობების მიხედვით წრფისა და სიბრტყის პოვნას, გავაკეთოთ ერთი შენიშვნა, § 103-ის შენიშვნის მსგავსად.

სიბრტყის განტოლება

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$z=ax+by+c, \tag{2}$$

სადაც

$$a=-\frac{A}{C},\ b=-\frac{B}{C},\ c=-\frac{D}{C} \tag{3}$$

(ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $C\neq 0$; თუ $C=0$, მაშინ (1) განტოლების $x$ ან $y$-ის მიმართ ამოხსნა შეიძლებოდა).

მაშასადამე, იმისათვის, რომ სიბრტყის განტოლება დავწეროთ, საკმარისია ვიცოდეთ სამი სიდიდე $a$, $b$ და $c$ ამის შესაბამისად ამბობენ, რომ სიბრტყის მდებარეობა დამოკიდებულია სამ დამოუკიდებელ მუდმივზე [(2) განტოლებაში ასეთი მუდმივებია $a$, $b$ და $c$].

სიბრტყის განტოლების ზოგადი სახე (1) არ ეწინააღმდეგება ამ დებულებას, ვინაიდან არსებითი მნიშვნელობა მასში თვით ოთხს $A$, $B$, $C$, $D$

კოეფიციენტს კი არა აქვს, არამედ სამი მათგანის ფარდობას მეოთხესთან; ეს აშკარაა იქიდან, რომ თუ (1) განტოლების ყველა კოეფიციენტს შევცვლით მათი პროპორციული სიდიდეებით, ეს განტოლება იმავე სიბრტყეს გამოსახავს (იხ. § 105).

სივრცეში წრფის მდებარეობა განისაზღვრება ოთხი დამოუკიდებელი მუდმივით, როგორც ეს ჩანს წრფის დაუვანილი განტოლებებიდან

$$x=az+p,\quad y=bz+q; \tag{4}$$

$a$, $b$, $p$, $q$ მუდმივების გეომეტრიული მნიშვნელობის მიხედვით, აშკარაა, რომ ყველა ეს მუდმივი არსებითია, ვინაიდან ყოველი მათგანის ცვლილება იწვევს წრფის მდებარეობის ცვლილებას.

იგივეს თქმა არ შეიძლება $x_0$, $y_0$, $z_0$, $X$, $Y$, $Z$ მუდმივებზე, რომლებიც შედიან განტოლებაში მიმართულების კოეფიციენტებით

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z};$$

მართლაც, წრფის მდებარეობა არ შეიცვლება, თუ $(x_0, y_0, z_0)$ წერტილის მაგიერ ავიღებთ რომელიმე სხვა მის წერტილს, მაგალითად, $(p, q, 0)$ წერტილს, რომელზედაც კვეთს ეს წრფე $Oxy$ სიბრტყეს. გარდა ამისა, $X$, $Y$, $Z$ სიდიდეები შეიძლება შევცვალოთ ნებისმიერი, მათ მიმართ პროპორციული სიდიდეებით, მაგალითად, სიდიდეებით

$$\frac{X}{Z},\ \frac{Y}{Z},\ 1.$$

ამის შედეგად რჩება მხოლოდ ოთხი სიდიდე $p$, $q$, $a$, $b$ $\left(\text{სადაც } a=\frac{X}{Z},\ b=\frac{Y}{Z}\right)$, რომელთა მოცემით სავსებით განისაზღვრება წრფე.

ნათქვამიდან ცხადია, რომ სიბრტყის მდებარეობის განსაზღვრისათვის საჭიროა, საზოგადოდ, სამი პირობა, ხოლო სივრცეში წრფის მდებარეობის განსაზღვრისათვის ოთხი პირობა [1]).

**§ 146. წრფეთა და სიბრტყეთა შეკვრა. სიბრტყეთა კონა.** სივრცეში $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე გამავალ წრფეთა ერთობლიობას **წრფეთა შეკვრა** ეწოდება. შეკვრის ის წრფეები, რომლებიც ერთსა და იმავე სიბრტყეზე მდებარეობენ, კონას შეადგენენ (§ 106). $M_0$ წერტილს **შეკვრის ცენტრი** ეწოდება.

---

[1]) იხ. § 100-ის სქოლიო. შევნიშნოთ, სხვათა შორის, მოთხოვნა, რომ სივრცეში წრფე მოცემულს $(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე გადიოდეს, გამოისახება ორი პირობით:

$$x_0=az_0+p,\quad y=bz_0+q.$$

თუ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ არის შეკვრის ცენტრი, ცხადია, რომ ამ შეკვრის ნებისმიერი წრფის განტოლება შეიძლება ასე დაიწეროს:

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}, \tag{1}$$

სადაც $X$, $Y$, $Z$ არიან წრფის მიმართულების კოეფიციენტები. თუ ამათ სხვადასხვა მნიშვნელობას მივცემთ (ერთდროულად ნულის არატოლს), შეგვიძლია (1) წრფეს ნებისმიერი მიმართულება მივცეთ, ე. ი. შეგვიძლია შეკვრის ნებისმიერი წრფე მივიღოთ.

(1) განტოლებანი შეიძლება ასე დაიწეროს (თუ $Z\neq 0$):

$$x-x_0=a(z-z_0),\quad y-y_0=b(z-z_0), \tag{1a}$$

სადაც $a=\frac{X}{Z}$, $b=\frac{Y}{Z}$; მაშასადამე, შეკვრის კუთვნილი წრფის მდებარეობა დამოკიდებულია ორ დამოუკიდებელ მუდმივზე.

გავიხსენოთ (§ 106), რომ კონაში შემავალი წრფის მდებარეობა დამოკიდებულია ერთ მუდმივზე.

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე გამავალ სიბრტყეთა ერთობლიობას ეწოდება სიბრტყეთა შეკვრა, ხოლო $M_0$ წერტილს—შეკვრის ცენტრი.

ვიპოვოთ შეკვრაში შემავალი სიბრტყის ზოგადი განტოლება. იმისათვის, რომ სიბრტყე

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{2}$$

გადიოდეს $M_0$ წერტილზე, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებდნენ (1) განტოლებას, ე. ი., რომ

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$$

ეს არის ერთადერთი პირობა, რომელიც აკავშირებს განუსაზღვრელ კოეფიციენტებს $A$, $B$, $C$ და $D$. ეს პირობა შეიძლება ასეც გადაიწეროს:

$$D=-Ax_0-By_0-Cz_0;$$

თუ $D$-ს ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (2)-ში, მივიღებთ ამოცანის პირობების დამაკმაყოფილებელ განტოლებას

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{3}$$

თუ (3) განტოლებაში $A$, $B$ და $C$ კოეფიციენტებს სხვადასხვა მნიშვნელობას მივცემთ, მივიღებთ $M_0$ წერტილზე გამავალ სხვადასხვა სიბრტყეს.

შეკვრის თითოეული სიბრტყის მდებარეობა ხასიათდება (3) განტოლებაში შემავალი $A$, $B$ და $C$ კოეფიციენტების მნიშვნელობებით. მაგრამ, ცხადია, რომ არსებითი მნიშვნელობა აქვთ თვით ამ კოეფიციენტებს კი არა,

ერამედ მათ ფარდობებს. ამაში ჩვენ პირდაპირ დავრწმუნდებით, თუ (3) განტოლებას ამოვხსნით, მაგალითად, $z - z_0$-ის მიმართ:

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0),$$

სადაც

$$a = -\frac{A}{C},\quad b = -\frac{B}{C}.$$

მაშასადამე, მოცემული ცენტრიანი შეკვრის თითოეული სიბრტყე სავსებით განისაზღვრება ორი მუდმივით ისე, როგორც წრფეთა შეკვრის წრფის მდებარეობა.

სიბრტყეთა კონა ეწოდება მოცემულ $\Delta$ წრფეზე გამავალ სიბრტყეთა ერთობლიობას; ამ წრფეს კონის ღერძი ეწოდება.

ვიპოვოთ კონის სიბრტყის განტოლების ზოგადი სახე. ვთქვათ,

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$\Delta$ წრფის (ე. ი. კონის ღერძის) განტოლებებია. ზემოდაწერილ განტოლებათაგან, თითოეული ცალკე, გამოსახავს რაღაც სიბრტყეს. აღვნიშნოთ ეს სიბრტყეები $\Pi_1$ და $\Pi_2$-ით. $\Delta$ წრფე არის ამ სიბრტყეების გადაკვეთა და, მაშასადამე, ისინი ეკუთვნიან კონას.

მაშასადამე, ჩვენი ამოცანა ორი მოცემული სიბრტყის გადაკვეთაზე გამავალ სიბრტყეთა განტოლების ზოგადი სახის მიღებაში მდგომარეობს. ასეთი ჩამოყალიბებით ეს ამოცანა სრულიად იმის მსგავსია, რაც § (111)-ში იყო განხილული.

შევადგინოთ განტოლება:

$$l_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + l_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \tag{5}$$

სადაც $l_1$ და $l_2$ ნებისმიერი მუდმივი რიცხვებია, რომლებიც ერთდროულად ტოლი არ არიან. (5) განტოლება, რომელიც შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$(l_1A_1 + l_2A_2)x + (l_1B_1 + l_2B_2)y + (l_1C_1 + l_2C_2)z + l_1D_1 + l_2D_2 = 0,$$

არის სიბრტყის განტოლება, ვინაიდან იგი პირველი ხარისხისაა.

ეს სიბრტყე აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს, ე. ი. ის გაივლის $\Pi_1$ და $\Pi_2$ სიბრტყეების გადაკვეთის წრფეზე. მართლაც, ხსენებულ სიბრტყეთა გადაკვეთის წირის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები ერთდროულად აკმაყოფილებენ (4) განტოლებებს და ამიტომ ნულად აქცევენ (5) განტოლების მარცხენა მხარის ფრჩხილებში შემავალ გამოსახულებებს და ამით, მაშასადამე, მთელს მარცხენა მხარესაც. ამნაირად, $\Pi_1$ და $\Pi_2$ სიბრტყეების გადაკვეთის ყოველი წერტილი ეკუთვნის (5) სიბრტყეს, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

შემოვიღოთ სიმოკლისათვის აღნიშვნები:

$$F_1(x, y, z)=A_1x+B_1y+C_1z+D_1,\ F_2(x, y, z)=A_2x+B_2y+C_2z+D_2.$$

მაშინ (5) განტოლება შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$l_1F_1(x, y, z)+l_2F_2(x, y, z)=0. \tag{6}$$

თუ $l_1$ და $l_2$-ს მივცემთ სხვადასხვა მნიშვნელობას, მივიღებთ (1) წრფეზე გამავალ სხვადასხვა სიბრტყეს. ჩვენ ასეთნაირად რომ ყველა ასეთ სიბრტყეს მივიღებთ, ეს გამომაშკარავდება § 152-ის ამოცანის ამოხსნიდან.

ორი $l_1$ და $l_2$ მუდმივის მაგიერ შეიძლება ერთი მუდმივი შემოვიღოთ: $k=\frac{l_2}{l_1}$ და (6) განტოლებას ასეთი სახით დავწერთ:

$$F_1(x, y, z)+kF_2(x, y, z)=0. \tag{7}$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ კონის კუთვნილი სიბრტყის მდებარეობა დამოკიდებულია ერთ მუდმივზე (ისე, როგორც სიბრტყეზე წრფეთა კონის შემთხვევაში).

თუ სიბრტყეთა განტოლებანი: $F_1(x, y, z)=0$ და $F_2(x, y, z)=0$ აღებული არიან ნორმალური სახით, მაშინ $k$ მუდმივი ღებულობს მეტად მარტივ მნიშვნელობას; ამის გამორკვევას მკითხველს მივანდობთ (იხ. § 110).

ადვილი დასანახია, რომ თუ სიბრტყეები $F_1(x, y, z)=0$ და $F_2(x, y, z)=0$ პარალელური არიან, მაშინ (6) ან (7) განტოლებით წარმოდგენილი ყველა სიბრტყე ურთიერთპარალელურია. ამ შემთხვევაში, აგრეთვე, ამბობენ, რომ ჩვენ საქმე გვაქვს კონასთან, რომლის ღერძი იმყოფება უსასრულობაში („არასაკუთრივი ღერძი").

§ 113-ში ნათქვამის ანალოგიურად ადვილი დასამტკიცებელია[1]), რომ სამი სიბრტყე, მოცემული განტოლებებით

$$F_1(x, y, z)=0,\ F_2(x, y, z)=0,\ F_3(x, y, z)=0, \tag{8}$$

რომ ეკუთვნოდეს ერთსა და იმავე კონას, ამისათვის აუცილებელი და საკმარისია ისეთი $l_1$, $l_2$, $l_3$ სამი რიცხვის არსებობა, რომლებიც ერთდროულად არ არიან ნული და რომელთათვის იგივურად (ე. ი. ყოველი $x$, $y$, $z$-სათვის) აქვს ადგილი

$$l_1F_1(x, y, z)+l_2F_2(x, y, z)+l_3F_3(x, y, z)=0. \tag{9}$$

ანალოგიურად, იმისათვის, რომ ოთხი სიბრტყე

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ F_2(x, y, z) &= A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\\ F_3(x, y, z) &= A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,\\ F_4(x, y, z) &= A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

[1]) ამ პარაგრაფის დანარჩენ ნაწილში ჩამოყალიბებული ყველა დებულება ქვემოთ იქნება დამტკიცებული (თავი VI, § 168).

ეკუთვნოდეს ერთსა და იმავე შეკვრას (ე. ი. რომ ჰქონდეთ საერთო წერტილი[1]), აუცილებელი და საკმარისია არსებობდეს ისეთი $l_1$, $l_2$, $l_3$, $l_4$ ოთხი რიცხვი, რომლებიც ერთდროულად არ არიან ნული და რომელთათვის იგივეურად აქვს ადგილი ტოლობას:

$$l_1F_1(x, y, z)+l_2F_2(x, y, z)+l_3F_3(x, y, z)+l_4F_4(x, y, z)=0;$$

ეს პირობა ტოლფასია პირობისა

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}=0. \tag{11}$$

**§ 147. ამოცანა 10.** იპოვეთ მოცემულ წერტილზე გამავალი და მოცემული წრფის (ან ვექტორის) პარალელური წრფე. თუ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ არის მოცემული წერტილი, ხოლო $X$, $Y$, $Z$ მოცემული წრფის მიმართულების კოეფიციენტები (ან მოცემული ვექტორის კოორდინატები), მაშინ საძიებელი წრფის განტოლებანი, ცხადია, ასე დაიწერება:

$$\frac{x-x_1}{X}=\frac{y-y_1}{Y}=\frac{z-z_1}{Z}.$$

**§ 148. ამოცანა 11.** იპოვეთ მოცემულ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ წერტილზე გამავალი და მოცემული სიბრტყის $Ax+By+Cz+D=0$ მართობული წრფე. (კოორდინატები მართკუთხოვანია). ეს ამოცანა წინაზე დაიყვანება, ვინაიდან საძიებელი წრფე $(A, B, C)$ ვექტორის პარალელური უნდა იყოს.

**§ 149. ამოცანა 12.** იპოვეთ ორ მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფე. თუ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ და $M_2(x_2, y_2, z_2)$ მოცემული წერტილებია, მაშინ, ცხადია, (იხ. § 108), განტოლებანი

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

წარმოადგენენ საძიებელ წრფეს.

ამ შედეგის მიღება შეიძლება უშუალოდ. თუ მხედველობაში მივიღებთ სამი $(x, y, z)$, $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$, წერტილის კოლინეარობის პირობას.

**§ 150. ამოცანა 13.** იპოვეთ მოცემულ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ წერტილზე გამავალი და მოცემული სიბრტყის პარალელური სიბრტყე. ეთქვათ,

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \tag{1}$$

არის მოცემული სიბრტყის განტოლება.

[1] ამაში იგულისხმება ის შემთხვევაც, როცა საერთო წერტილი უსასრულოდ დაშორებულია („არასაკუთრივით"), ე. ი როცა ოთხივე სიბრტყე ერთსა და იმავე წრფის პარალელურია. დაწვრილებით იხ. თავი VI, § 168.

დასმული ამოცანის ამოსახსნელად მოცემულ წერტილზე გამავალ სიბრტყეთა ზოგად განტოლებაში $ABC$ კოეფიციენტები ისე უნდა შეეარჩიოთ (იხ. § 146):

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0, \qquad (2)$$

რომ უკანასკნელი განტოლებით გამოსახული სიბრტყე პარალელური იყოს (1) სიბრტყისა. მაგრამ, ამისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ $A$, $B$, $C$ კოეფიციენტები პროპორციული იყვნენ $A_1$, $B_1$, $C_1$ კოეფიციენტებისა. თუ $A$, $B$, $C$ კოეფიციენტების მაგიერ (2) განტოლებაში შევიტანთ მათ პროპორციულ სიდიდეებს $A_1$, $B_1$ და $C_1$, ვიპოვით საძიებელი სიბრტყის განტოლებას:

$$A_1(x-x_1)+B_1(y-y_1)+C_1(z-z_1)=0.$$

**§ 151. ამოცანა 14. იპოვეთ მოცემულ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ წერტილზე გამავალი და მოცემული წრფის ან ვექტორის მართობული სიბრტყე** (კოორდინატები მართკუთხოვანია). თუ $X$, $Y$, $Z$ აღნიშნავენ მოცემული წრფის მიმართულების კოეფიციენტებს (ან მოცემული ვექტორის კოორდინატებს), მაშინ წინა პარაგრაფის აღნიშვნების მიხედვით, $A$, $B$, $C$ კოეფიციენტები ამ სიდიდეების პროპორციული უნდა იყვნენ (იხ. § 142, 3). ამიტომ, ეს ამოცანა ისე ამოიხსნება, როგორც წინა ($A_1$, $B_1$, $C_1$-ის მაგიერ უნდა ავიღოთ $X$, $Y$, $Z$).

ზოგადი სახის დეკარტის კოორდინატთა შემთხვევაში იმავე ამოხსნას მივიღებთ, თუ $X$, $Y$, $Z$-ს ვიგულისხმებთ როგორც ვექტორის კოვარიანტულ კოორდინატებს.

**§ 152. ამოცანა 15. იპოვეთ მოცემულ წრფეზე და მოცემულ წერტილზე გამავალი სიბრტყე.** ეთქვათ, $F_1(x, Y, Z)=0$, $F_2(x, Y, Z)=0$ წარმოადგენენ მოცემული წრფის განტოლებებს. ჩვენ ვიცით, რომ განტოლება

$$F_1(x, y, z)+kF_2(x, y, z)=0 \qquad (1)$$

წარმოადგენს მოცემულ წრფეზე გამავალ რაღაც სიბრტყეს; ვეცადოთ მუდმივი ისე შევარჩიოთ, რომ ეს სიბრტყე გადიოდეს მოცემულ წრფეზე არამდებარე $M_1(x_1, y_1, z_1)$ წერტილზე. თუ გამოვსახავთ იმის პირობას, რომ $M_1$ წერტილი (1) სიბრტყეზე მდებარეობდეს, მივიღებთ

$$F_1(x_1, y_1, z_1)+kF_2(x_1, y_1, z_1)=0,$$

საიდანაც

$$k=-\frac{F_1(x_1, y_1, z_1)}{F_2(x_1, y_1, z_1)} \qquad (2)$$

თუ $k$-ს ამ მნიშვნელობას (1)-ში შევიტანთ, მივიღებთ საძიებელი სიბრტყის განტოლებას. იმ შემთხვევაში (და მხოლოდ მაშინ), როცა $M_1$ წერტილი იმყოფება სიბრტყეზე $F_2(x, y, z)=0$, $k$-სათვის მიიღება მნიშვნელობა $\infty$, ვინაიდან ამ (და მხოლოდ ამ) შემთხვევაში $k$-ს გამოსახულებაში მნიშვნე-

ლი, ე. ი. $F_2(x_1, y_1, z_1)$ ნულად იქცევა [1]). თუ შევთანხმდებით, რომ, როცა $k=\infty$, (1) განტოლება დაიყვანება $F_2(x, y, z)=0$ განტოლებაზე, დავინახავთ, რომ ჩვენს ამოცანას ყოველთვის ერთი გარკვეული ამონახსნი ექნება.

აქედან, კერძოდ, გამომდინარეობს, რომ, თუ (1) განტოლებაში $k$-ს მივცემთ სათანადო მნიშვნელობას, შეგვიძლია მივიღოთ აღებულ წრფეზე გამავალი ნებისმიერი სიბრტყე.

ვთქვათ, მაგალითად, მოთხოვნილია სიბრტყის გაყვანა $x=2z-1$, $y=z+5$ წრფეზე და $M_1(1, 3, 2)$ წერტილზე.

მოცემულ წრფეზე გამავალი სიბრტყეების ზოგადი განტოლება იქნება

$$(x-2z+1)+k(y-z-5)=0.$$

ეს სიბრტყე რომ (1, 3, 2) წერტილზე გადიოდეს, საჭიროა შესრულდეს პირობა $(1-2\cdot 2+1)+k(3-2-5)=0$ საიდანაც $k=-\frac{1}{2}$. თუ ამას შევიტანთ წინა განტოლებაში, გამარტივების შემდეგ მივიღებთ საძიებელი სიბრტყის განტოლებას

$$2x-y-3z-7=0.$$

**§ 153. ამოცანა 16. ორივეთ მოცემულ არაკოლინეარულ სამ წერტილზე გამავალი სიბრტყე.** თუ $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ მოცემული სამი წერტილია, მაშინ ამოცანის ამოხსნას უშუალოდ მივიღებთ, თუ გამოვსახავთ საძიებელი სიბრტყის ნებისმიერი $M(x, y, z)$ წერტილსა და მოცემული სამი წერტილის კომპლანარობის პირობას

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0. \qquad (1)$$

თუ (1)-ის მარცხენა მხარეში შემავალ დეტერმინანტს დავშლით პირველი სტრიქონის ელემენტების მიხედვით, მივიღებთ პირველი ხარისხის განტოლებას, ე. ი. სიბრტყის განტოლებას, რომელიც, ცხადია, აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს.

ადვილი დასანახია, რომ ვინაიდან მოცემული სამი წერტილი ერთ წრფეზე არ მდებარეობს, ამიტომ ამ განტოლებაში $x$, $y$, $z$-ის კოეფიციენტები ერთდროულად ნული არ იქნება.

ჩვენი ამოცანა შეიძლება აგრეთვე დაყვანილ იქნას წინა პარაგრაფის ამოცანაზე. ამისათვის საკმარისია შევადგინოთ ორ მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება (§ 149) და შემდგომ ამისა, შევადგინოთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც ამ წრფეზე და მესამე წერტილზე გადის (რაც წინა პარაგრაფის ამოცანას წარმოადგენს).

---

[1]) ვინაიდან, პირობის თანახმად $M_1$ არ ძევს მოცემულ წრფეზე, ამიტომ მრიცხველი $F_1(x_1, y_1, z_1)$ და მნიშვნელი $F_2(x_1, z_1, y_1)$ ერთდროულად ნულად ვერ იქცევა.

ნათქვამის ნათელსაყოფად განვიხილოთ მაგალითი.

ვთქვათ, მოთხოვნილია სიბრტყის გავლება სამ წერტილზე $M_1(1, 3, 7)$, $M_2(2, 3, 8)$ და $M_3(0, 1, 2)$.

$M_1$ და $M_2$ წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლებანი იქნება:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-7}{1}$$

ანუ

$$\left.\begin{aligned} y-3&=0,\\ x-z+6&=0. \end{aligned}\right\}$$

ამ წრფეზე გამავალ სიბრტყეთა ზოგადი განტოლება იქნება:

$$(y-3)+k(x-z+6)=0.$$

ახლა $k$ უნდა შევარჩიოთ ისე, რომ ეს განტოლება გამოსახავდეს $M_3(0, 1, 2)$ წერტილზედაც გამავალ სიბრტყეს. თუ ამის პირობას გამოვსახავთ, მივიღებთ

$$-2+k\cdot 4=0,$$

ე. ი. $k=\frac{1}{2}$. ამ მნიშვნელობის ჩასმა წინა განტოლებაში მოგვცემს საძიებელი სიბრტყის განტოლებას:

$$x+2y-z=0.$$

**§ 154. ამოცანა 17. იპოვეთ მოცემულ წრფეზე გამავალი და მეორე მოცემული წრფის ან ვექტორის პარალელური სიბრტყე.** (იგულისხმება, რომ მოცემული წრფეები არაპარალელურია, წინააღმდეგ შემთხვევაში, ცხადია, ამოცანა იქნებოდა განუზღვრელი).

თუ

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$$

იმ წრფის განტოლებაა, რომელზედაც უნდა გავატაროთ სიბრტყე, ხოლო $(X', Y', Z')$ მოცემული მეორე წრფის მიმართულების ვექტორია, მაშინ ამოცანის ამოხსნას მივიღებთ, თუ დავწერთ იმ სიბრტყის განტოლებას, რომელიც გადის $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე და პარალელურია ორი ვექტორის: $(X, Y, Z)$ და $(X', Y', Z')$. ასეთი განტოლება ჩვენ უკვე § 123-ში გამოვიყვანეთ, მას აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & Z-Z_0\\ X & Y & Z\\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix}=0. \qquad (1)$$

ეს ამოცანა სხვა წესითაც შეიძლება ამოიხსნას. სახელდობრ, დავწეროთ მოცემულ წრფეზე გამავალი სიბრტყის ზოგადი განტოლება [§ 146,

განტოლება (7)] და $k$ მუდმივის მნიშვნელობა ისე შევარჩიოთ, რომ ეს სიბრტყე მეორე მოცემული წრფის (ან ვექტორის) პარალელური იყოს.

ვთქვათ, მაგალითად, მოთხოვნილია სიბრტყის გაველება წრფეზე

$$4x=5z-2,\ y=-3z-1$$

ისე რომ პარალელური იყოს $\vec{P}=(2,\ 6,\ 1)$ ვექტორისა.

მოცემულ წრფეზე გამავალი ნებისმიერი სიბრტყის განტოლებას აქვს სახე

$$(4x-5z+2)+k(y+3z+1)=0$$

ანუ

$$4x+ky+(3k-5)z+2+k=0. \qquad (*)$$

ამ სიბრტყისა და $\vec{P}$ ვექტორის პარალელობის პირობა გვაძლევს:

$$2\cdot 4+6k+1\cdot(3k-5)=0,$$

საიდანაც $k=-\frac{1}{3}$ თუ ამას (*)-ში შევიტანთ, მივიღებთ საძიებელ განტოლებას:

$$12x-y-18z+5=0.$$

**§ 155. ამოცანა 18. ეპოვოთ მოცემულ წრფეზე გამავალი და მოცემული სიბრტყის მართობული სიბრტყე.** ეს ამოცანა ამოიხსნება (მართკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაში) წინა ამოცანის ანალოგიურად.

**§ 156. ამოცანა 19. ეპოვოთ მოცემული ორი წრფის კომპლანარობის (გადაკვეთის) პირობა.** სივრცეში აღებული ორი წრფე საზოგადოდ არ იკვეთება და არ არის კომპლანარული (ე. ი. არ მდებარეობენ ერთ სიბრტყეში).

თუ ორი წრფე კომპლანარულია, მაშინ ისინი იკვეთებიან სასრულ ან უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში (უკანასკნელი, როგორც საზოგადოდ, ისე გვესმის, რომ წრფეები პარალელურია). მოვნახოთ პირობა იმისა, რომ ორი წრფე

$$\frac{x-x_1}{X_1}=\frac{y-y_1}{Y_1}=\frac{z-z_1}{Z_1} \qquad (1)$$

და

$$\frac{x-x_2}{X_2}=\frac{y-y_2}{Y_2}=\frac{z-z_2}{Z_2} \qquad (2)$$

იყოს კომპლანარული (ე. ი. იკვეთებოდნენ სასრულ ან უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში).

ამისათვის დავწეროთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის (1) წრფეზე და პარალელურია (2). § 154-ის (1) ფორმულის თანახმად ეს განტოლებაა

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (3)$$

ჩვენი წრფეები რომ კომპლანარული იყვნენ, ამისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ (2) წრფე იყოს (3) სიბრტყის არა მხოლოდ პარალელური, არამედ ეკუთვნოდეს მას; ამისათვის კი, თავის მხრით, აუცილებელი და საკმარისია, რომ (2) წრფის წერტილებიდან თუნდაც ერთი ეკუთვნოდეს (3) სიბრტყეს. თუ გამოვსახავთ, რომ $(x_2, y_2, z_2)$ წერტილი მოთავსებულია (3) სიბრტყეზე, მივიღებთ საძიებელ პირობას

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

თუ წრფეები მოცემულია დაყვანილი განტოლებებით

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 z + p_1, \\ y &= b_1 z + q_1 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

და

$$\left.\begin{aligned} x &= a_2 z + p_2, \\ y &= b_2 z + q_2, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

მაშინ შეგვიძლია ავიღოთ

$$(X_1, Y_1, Z_1) = (a_1, b_1, 1), \quad (X_2, Y_2, Z_2) = (a_2, b_2, 1),$$
$$x_1 = p_1, \; y_1 = q_1, \; z_1 = 0, \quad x_2 = p_2, \; y_2 = q_2, \; z_2 = 0$$

და (4) პირობა მიიღებს სახეს

$$\begin{vmatrix} p_2 - p_1 & q_2 - q_1 & 0 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

საიდანაც, თუ მესამე სტრიქონიდან გამოვაკლებთ მეორეს, მივიღებთ

$$\begin{vmatrix} p_2 - p_1 & q_2 - q_1 \\ a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4a}$$

**§ 157. ამოცანა 20. იპოვეთ მოცემულ $M$ წერტილიდან მოცემულ $\Delta$ წრფეზე ჩამოშვებული მართობის განტოლება.** (კოორდინატები მართკუთხოვანია). საძიებელი მართობი შეგვიძლია განვმარტოთ, როგორც გადაკვეთის წირი $M$ წერტილზე და $\Delta$ წრფეზე გამავალი სიბრტყისა $M$ წერტილზე $\Delta$ წრფის მართობულად გამავალ სიბრტყესთან. ორივე სიბრტყის განტოლების პოვნა ჩვენ ვიცით (§ 152 და 151). ამ ორი განტოლების ერთობლიობა სწორედ საძიებელ წრფეს გამოსახავს.

**სავარჯიშოები და დამატებები.**

1. იპოვეთ (5, 6, 0) წერტილზე გამავალი და

$$y = 3x - 1, \; z = 2x + 5$$

წრფის პარალელური წრფე.

პასუხი. $x-5=\frac{y-6}{9}=\frac{z}{2}$.

2. იპოვეთ $(-3, 2, 1)$ წერტილზე გამავალი და $x+3z-1=0$ სიბრტყის მართობული წრფე (კოორდინატები მართკუთხოვანია).

პასუხი. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-1}{3}$, ანუ $y-2=0$, $3x-z+10=0$.

3. იპოვეთ $(1, 3, 5)$ და $(2, 3, 7)$ წერტილებზე გამავალი წრფე.

პასუხი. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-5}{2}$, ანუ $y-3=0$, $2x-z+3=0$.

4. იპოვეთ $(0, -3, 1)$ წერტილზე გამავალი და $(6, 8, 10)$ ვექტორის მართობული სიბრტყე (კოორდინატები მართობულია).

პასუხი. $6x+8(y+3)+10(z-1)$ ანუ $6x+8y+10z+14=0$.

5. იპოვეთ $y=2x+4$, $z=-x+1$ წრფეზე და $(2, 0, 0)$ წერტილზე გამავალი სიბრტყე.

პასუხი. $6x+y+8z-12=0$.

6. იპოვეთ $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, 1, -1)$ გამავალი სიბრტყე.

პასუხი. $x+y+z-1=0$.

7. იპოვეთ $x+y+1=0$, $x+2y+2z=0$ წრფეზე გამავალი და $2x-y-z=0$ სიბრტყის მართობული სიბრტყე (კოორდინატები მართობულია).

პასუხი. $3x+4y+2z+2=0$.

8. იპოვეთ (მართკუთხოვან კოორდინატებში) $(1, 0, 1)$ წერტილიდან $x=3z+2$, $y=2z$ წრფეზე ჩამოშვებული მართობის განტოლებანი; იპოვეთ ამ მართობის ფუძე.

პასუხი. მართობის განტოლებანი

$$x-2y+z-2=0,$$
$$3x+2y+z-4=0.$$

მართობის ფუძის კოორდინატები

$$\left(\frac{11}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{1}{7}\right).$$

9. იპოვეთ $p$-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $x=z+p$, $y=-z$ და $x=2z+1$, $y=3z+2$ წრფეები იკვეთებიან. იპოვეთ გადაკვეთის წერტილი.

პასუხი. $p=\frac{1}{2}$; გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები იქნებიან $\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

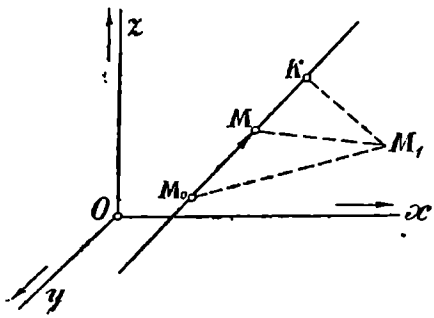
**§ 158. ამოცანა 21. იპოვეთ მოცემული $M_1(x_1, y_1, z_1)$ წერტილიდან მოცემულ $\Delta$ წრფემდე მანძილი**[1] (კოორდინატები მართკუთხოვანია). მანძილი წერტილიდან წრფემდე, რასაკვირველია, უნდა გვესმოდეს როგორც უმოკლესი მანძილი, ე. ი. $M_1$-დან $\Delta$-ზე დაშვებული მართობის სიგრძე. ამ სიგრძის პოვნა ადვილია შემდეგნაირად. ვიპოვოთ $M_1$ წერტილზე გამავალი $\Delta$ წრფის მართობული სიბრტყის განტოლება. ამ სიბრტყის $\Delta$-თან გადაკვეთის $k$ წერტილი არის აღნიშნული მართობის ფუძე. ვინაიდან ამ წერტილის პოვნა ჩვენ ვიცით, ამიტომ შესაძლებლობა გვექნება $|M_1K|$ მანძილიც გამოვითვალოთ.

[1]) პირველ წაკითხვისას ეს პარაგრაფი შეიძლება გამოტოვებულ იქნას.

მეორე ხერხით უფრო სწრაფად მივაღწევთ მიზანს. ვთქვათ,

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z} \tag{1}$$

არის $\Delta$ წრფის განტოლება. თვალსაჩინოებისათვის, ჩვენ ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ვექტორი $P=\overrightarrow{M_0M}=(X, Y, Z)$ მდებარეობს თვით $\Delta$ წრფეზე და მოდებულია ამ წრფის $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე (ნახ. 109).



ნახ. 109.

აღვნიშნოთ $\vec{Q}$-თი $\overrightarrow{M_1M_0}$ და $\vec{P}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი[1]), ე. ი.

$$\vec{Q}=\overrightarrow{M_1M_0}\times\vec{P}. \tag{2}$$

ჩვენ ვიცით (§ 25), რომ $|\vec{Q}|=2$ ფართ. $M_0MM_1=|\vec{P}|\cdot h$, სადაც $h$ საძიებელი მანძილია, მაშასადამე:

$$h=\frac{|\vec{Q}|}{|\vec{P}|}. \tag{3}$$

მაგრამ ჩვენ ვიცით, რომ კოორდინატები $\vec{Q}$ ვექტორისა, რომელიც წარმოადგენს

$$\overrightarrow{M_1M_0}=(x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1)$$

და

$$\vec{P}=(X,\ Y,\ Z)$$

ვექტორების ვექტორულ ნამრავლს, შესაბამისად შემდეგი დეტერმინანტების ტოლი არიან (§ 51):

$$\begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ Y & Z \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} z_0-z_1 & x_0-x_1 \\ Z & X \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 \\ X & Y \end{vmatrix};$$

მაშასადამე, $|\vec{Q}|$ სიგრძე ტოლია ამ დეტერმინანტთა კვადრატების ჯამისაგან კვადრატული რადიკალისა.

ამგვარად, (3) ფორმულა გვაძლევს:

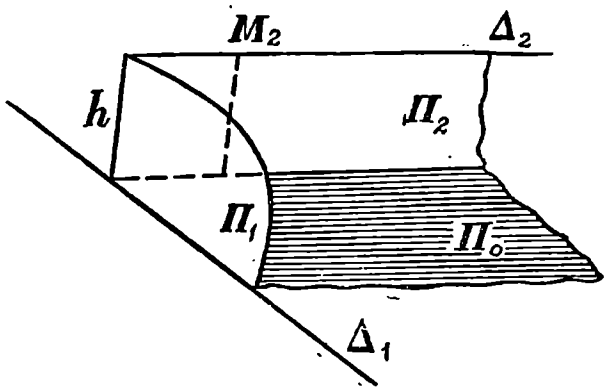
$$h=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ Y & Z \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_0-z_1 & x_0-x_1 \\ Z & X \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 \\ X & Y \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

**§ 159. ამოცანა 22. იპოვეთ ორი წრფის საერთო მართობის განტოლება[2]).** ჩვენ ვიცით, რომ სივრცეში ორი $\Delta_1$, $\Delta_2$ წრფე, საზოგადოდ, არ იკვეთება.

[1]) $\vec{Q}$ სხვა არაფერია, თუ არა $\vec{P}$ ვექტორის გეტორული მომენტი $M_1$ წერტილის მიმართ; იხ. § 50-ის სავარჯიშო 3.

[2]) პირველ წაკითხვისას ეს პარაგრაფი შეიძლება გამოტოვებულ იქნას.

ადვილი საჩვენებელია, რომ არსებობს ერთადერთი [1]) წრფე მოცემულ წრფეთა მკვეთი და ორივე მათგანის მართობული (საერთო მართობი). ამ წრფის პოვნა შემდეგნაირად შეიძლება.




ნახ. 110.

გავიყვანოთ $\Delta_1$ წრფეზე (ნახ. 110) სიბრტყე $\Pi_1$ პარალელური $\Delta_2$ წრფისა. შემდეგ გავიყვანოთ ორი სიბრტყე $\Pi_0$-ის მართობულად: ერთი ($\Pi_1$) $\Delta_1$-ზე, ხოლო მეორე—($\Pi_2$) $\Delta_2$-ზე. $\Pi_1$ და $\Pi_2$ სიბრტყეების გადაკვეთა საძიებელ საერთო მართობს მოგვცემს. თუ კოორდინატთა ღერძები მართკუთხოვანი არიან, მაშინ მისი განტოლება ადვილად მოინახება, ვინაიდან ჩვენ ვიცით, თუ როგორ უნდა ვიპოვოთ ყველა დასახელებული სიბრტყის, კერძოდ, $\Pi_1$ და $\Pi_2$ სიბრტყის განტოლება.

ადვილად დაერწმუნდებით, რომ ამ საერთო მართობის $h$ ნაკვეთი, რომელიც მოთავსებულია $\Delta_1$ და $\Delta_2$ წრფეებთან გადაკვეთის წერტილებს შორის, არის უმოკლესი მანძილი $\Delta_1$-სა და $\Delta_2$-ს შორის (ე. ი., რომ მანძილი შესაბამისად $\Delta_1$ და $\Delta_2$ წრფეზე აღებულ რომელიმე სხვა ორ წერტილს შორის მეტია $h$-ზე).

**§ 160. ამოცანა 28. იპოვეთ ორ წრფეს შორის უმოკლესი მანძილი [2]).** (კოორდინატები მართკუთხოვანია). ჩვენ შევინარჩუნებთ წინა პარაგრაფის აღნიშვნებს. $h$-ის გამოსათვლელად საერთო პერპენდიკულარის პოვნა არ არის საჭირო. საკმარისია მხოლოდ ვიპოვოთ $\Pi_0$ სიბრტყის განტოლება და შემდეგ ავიღოთ $\Delta_2$-ზე ნებისმიერი წერტილი და ვიპოვოთ მისი მანძილი $\Pi_0$ სიბრტყემდე. ეს მანძილი სწორედ $h$-ის ტოლია, ვინაიდან $\Delta_2$ წრფე $\Pi_0$ სიბრტყის პარალელურია.

[1]) გამონაკლისს შეადგენს შემთხვევა, როდესაც მოცემული წრფეები პარალელური არიან მაშინ საერთო მართობი უამრავია.

[2]) პირველი წაკითხვისას ეს პარაგრაფი შეიძლება გამოტოვებულ იქნას.

ვთქვათ,

$$\frac{x-x_1}{X_1}=\frac{y-y_1}{Y_1}=\frac{z-z_1}{Z}$$

და (1)

$$\frac{x-x_2}{X_2}=\frac{y-y_2}{Y_2}=\frac{z-z_2}{Z_2}$$

მოცემული $\Delta_1$ და $\Delta_2$ წრფეების განტოლებებია.

$\Delta_1$-ზე გამავალი და $\Delta_2$-ის პარალელური სიბრტყის განტოლება იქნება (იხ. § 154):

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (2)$$

ანუ, თუ დავშლით პირველი სტრიქონის ელემენტების მიხედვით:

$$(x-x_1)\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}+(y-y_1)\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}+(z-z_1)\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (3)$$

ახლა დაგვრჩა $\Delta_2$ წრფის რომელიმე წერტილის მანძილი ვიპოვოთ (3) სიბრტყემდე. უველაზე მარტივია, ამისათვის ავიღოთ $M_2(x_2, y_2, z_2)$ წერტილი.

ზოგადი წესის თანახმად ეს მანძილი მოიძებნება, თუ (3) განტოლებაში, რომელიც წინასწარ ნორმალურ სახეზე უნდა დავიყვანოთ, ჩავსვამთ $x$, $y$, $z$-ის მაგიერ $M$ წერტილის კოორდინატებს.

მაშასადამე, [1])

$$h=\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}}{\pm\sqrt{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}^2}}; \qquad (4)$$

---

[1]) (3) განტოლება რომ ნორმალურ სახეზე დავიყვანოთ, საკმარისია, როგორც ცნობილია, იგი გავამრავლოთ $\lambda=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$-ზე, სადაც $A$, $B$, $C$ აღნიშნავენ $X$, $Y$, $Z$-თან მდგომ კოეფიციენტებს (3) განტოლებაში, რომლის გახსნილი სახე არის (4).

## თავი მეექვსე

# წარმოსახვითი და არასაკუთრივი ელემენტები. ერთგვაროვანი დეკარტული და გეგმილური კოორდინატები. გეგმილური გარდაქმნები

ეს თავი ეთმობა ზოგიერთი გეომეტრიული ცნების გაფართოებას, რაც მიზნად ისახავს შეიტანოს მეტი ზოგადობა და ერთნაირობა ალგებრულ წირთა და ფართეულთა თეორიაში (კერძოდ, მეორე რიგის წირთა და ფართეულთა თეორიაში, რაც შემდეგ თავებში იქნება განხილული).

## I. წარმოსახვითი გეომეტრიული ელემენტები

**§ 161. წარმოსახვითი წერტილები და ვექტორები.** ანალიზურ გეომეტრიაში წარმოსახვითი ელემენტების (წარმოსახვით წერტილთა, წრფეთა, სიბრტყეთა და სხვ.), შემოტანა იმავე მიზანს ისახავს, რასაც ალგებრაში კომპლექსური (წარმოსახვითი) რიცხვების შემოტანა. ალგებრაში შესაძლებელია განხილული ყოფილიყო მხოლოდ არსი რიცხვები, თუ დავკმაყოფილდებოდით მხოლოდ პირველი ხარისხის განტოლების განხილვით. მაგრამ, როგორც კი გადავედით მეორე და უმაღლესი ხარისხის განტოლებებზე, რიცხვის ცნების განზოგადების აუცილებლობა კომპლექსურ რიცხვთა შემოტანით თავისთავად წარმოიშვა. მკითხველისათვის კარგადაა ცნობილი ის უხერხულობანი, რომლებიც წარმოიშობოდა ალგებრაში, თუ მხოლოდ არსი რიცხვების განხილვით შევიზღუდებოდით: მეორე და უმაღლესი ხარისხის განტოლებათა შესახებ თეორემების უმრავლესობა თავის ზოგადობას და ძალას დაკარგავდა; მაგ., თეორემა იმის შესახებ, რომ ყოველ $n$ ხარისხის განტოლებას აქვს სწორედ $n$ ფესვი.

სწორედ ასევე ანალიზურ გეომეტრიაშიაც წარმოსახვითი ელემენტების შემოტანა თავისთავად ისმება, როგორც კი გადავალთ პირველზე უფრო მაღალი რიგის მრუდების გადაკვეთის საკითხზე. თუ ჩვენ, ისევე როგორც ალგებრაში, დავკმაყოფილდებოდით მხოლოდ ნამდვილ წერტილთა განხილვით, მაშინ იძულებული ვიქნებოდით უარგვეყო მრავალი ზოგადი დებულება ან შეგვეცვალა ზოგიერთი მათგანი კერძო შემთხვევებით, უფრო რთულით და, მაშასადამე, ვერ უზრუნველვყოფდით, ზოგადობას და სიმკაცრეს.

მკითხველისათვის ეს ცხადი გახდება შემდგომი მასალის გაცნობისას; წარმოსახვითი ელემენტების ცნების შემოტანა არავითარ სიძნელეს არ ქმნის.

გარკვეულობისათვის განვიხილოთ სიბრტყეზე გეომეტრიასთან დაკავშირებული ცხებები.

ჩვენ ვიცით, რომ თუ მოცემულია $Oxy$ კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე, ყოველი წყვილი $x$, $y$ ნამდვილი რიცხვებისა განსაზღვრავს საესებით გარკვეულ ერთ $M(x, y)$ წერტილა სიბრტყეზე.

შევთანხმდეთ, რომ ყოველი წყვილი $x$, $y$ რიცხვებისა, აგრეთვე განსაზღვრავს საესებით გარკვეულ ერთ $M(x, y)$ წერტილს $Oxy$ სიბრტყეზე; წერტილს ვუწოდოთ ნამდვილი, თუ $x$ და $y$ რიცხვები ორივე ნამდვილია, და წარმოსახვითი, თუ $x$ და $y$ რიცხვებიდან ერთი მაინც წარმოსახვითია. ამგვარად, ჩვენ ფორმალურად განვსაზღვრეთ წარმოსახვითი წერტილი და ნუ შევეკდებით ამ ცნებას მიეცეთ მეტი აზრი, ვიდრე ეს განსაზღვრებაშია მოცემული.

აგრეთვე გამოთქმაც, რომ „წარმოსახვითი წერტილი $M(x, y)$ მდებარეობს მოცემულ კოორდინატთა $Oxy$ სიბრტყეზე“, უნდა გვესმოდეს პირობით და არ უნდა ეეცადოთ წარმოვიდგინოთ ამ წერტილის მდებარეობა სიბრტყეზე. კარგად უნდა დავიხსომოთ, რომ $Oxy$ სიბრტყეზე „წარმოსახვითი წერტილის“ ცნება საესებით ხასიათდება „$x$, $y$ რიცხვთა წყვილის“ ცნებით.

შევთანხმდეთ, რომ თუ $Oxy$ და $O'x'y'$ კოორდინატთა ღერძების ორი სისტემაა სიბრტყეზე, მაშინ $(x, y)$ და $(x', y')$ რიცხვები განსაზღვრავენ ერთსა და იმავე წერტილს, თუ $(x, y)$ და $(x', y')$ დაკავშირებულია ერთმანეთთან გარდაქმნის იძავე ფორმულებით, როგორც ნამდვილ წერტილთა შემთხვევაში, ე. ი., მაგალითად, მართკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაში

$$x = a + x' \cos\varphi - y' \sin\varphi,$$
$$y = b + x' \sin\varphi + y' \cos\varphi$$

ფორმულებით.

შემდეგ, შევთანხმდეთ, რომ ორი $M_1(x_1, y_1)$ და $M_2(x_2, y_2)$ წერტილი განსაზღვრავს $M_1M_2$ მონაკვეთს იმ შემთხვევაშიაც, თუ ერთი მათგანი ან ორივე წერტილი წარმოსახვითია. ამ შემთხვევაში მონაკვეთს წარმოსახვითი ეწოდება. $M(x, y)$ წერტილს

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ y &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

კოორდინატებით ვუწოდებთ $M_1M_2$ მონაკვეთის შუა წერტილს იმ შემთხვევაშიც, როცა $M_1$ და $M_2$ წერტილები წარმოსახვითია.

$M_1(x_1, y_1)$ და $M_2(x_2, y_2)$ წერტილებს წარმოსახვითი შეუღლებული ეწოდება, თუ $x_1$ და $x_2$ რიცხვები და აგრეთვე $y_1$ და $y_2$ რიცხვები შეუღლებული კომპლექსური რიცხვებია [1]).

---

[1]) კომპლექსურ რიცხვს აქვს სახე $a + ib$, სადაც $a$ და $b$ ნამდვილი რიცხვებია. ორ $a + ib$ და $a - ib$ კომპლექსურ რიცხვს შეუღლებული კომპლექსური რიცხვები ეწოდება. ორი შეუღლებული კომპლექსური რიცხვის ჯამი ნამდვილი რიცხვია. მაგალითად, $(a + ib) + (a - ib) = 2a$ — ნამდვილი რიცხვია.

შუა წერტილი $M_1M_2$ მონაკვეთისა, რომელიც აერთებს ორ შეუღლებულ წარმოსახვით წერტილს, ნამდვილი წერტილია. მართლაც, ამ შემთხვევაში $(x_1+x_2)$ და $(y_1+y_2)$ ნამდვილი რიცხვებია[1]) და, მაშასადამე, (1) ფორმულები განსაზღვრავენ ნამდვილ $(x, y)$ წერტილს.

უმრავლესობა ცნებებისა, რომლებიც ეხება ნამდვილ წერტილებს, შეიძლება (ფორმალურად) განვაზოგადოთ წარმოსახვითი წერტილების შემთხვევისათვის, როგორც ეს ახლახან იყო გაკეთებული ორი წარმოსახვითი წერტილის „შემაერთებელი" მონაკვეთის „შუა წერტილისათვის". ამრიგად, შესაძლებელია, მაგალითად, შევიტანოთ $r$ „მანძილის" ცნება ორ წერტილს შორის, რომელსაც განვსაზღვრავთ (მართკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაში სიბრტყეზე).

$$r=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y-y_1)^2}$$

ფორმულით და ა. შ.

სწორედ ასევე შეიძლება განვიხილოთ წარმოსახვითი ვექტორი სიბრტყეზე, განსაზღვრული ორი $X$, $Y$ „კოორდინატით", რომლებიც კომპლექსურ რიცხვებს წარმოადგენენ. ორ წარმოსახვით ვექტორს თანატოლი ეწოდება, თუ მათი კოორდინატები ტოლია; ორი ვექტორის ჯამი ეწოდება ვექტორს, რომლის კოორდინატები მოცემულ ვექტორთა შესაბამ კოორდინატთა ჯამების ტოლია; ვექტორის „სიგრძე" ეწოდება

$$\sqrt{X^2+Y^2}$$

რიცხვს (მართკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაში); ვექტორებს „პარალელური" ეწოდება, თუ მათი კოორდინატები პროპორციულია, და ა. შ.

შევნიშნოთ, რომ წარმოსახვითი ვექტორის შემთხვევაში, მისი სიგრძე შეიძლება ნულის ტოლი იყოს, მიუხედავად იმისა, რომ თვით ვექტორი არ არის ნულის ტოლი (ე. ი. მისი ორივე კოორდინატები არ არის ნულის ტოლი).

მართლაც,

$$X^2+Y^2=0$$

ტოლობიდან (ჩვენ ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ კოორდინატები მართკუთხოვანია) გამომდინარეობს, რომ

$$Y=\pm iX,$$

სადაც $i=\sqrt{-1}$ ასეთი ვექტორის $\frac{Y}{X}$ „კუთხური კოეფიციენტი", როგორც ვხედავთ, ტოლია $\pm i$. ასეთი „კუთხური კოეფიციენტის" მქონე ვექტორზე ამბობენ, რომ მას „იზოტროპული მიმართულება" აქვს.

ეს სახელწოდება იმით აიხსნება, რომ ასეთი ვექტორის „კუთხური კოეფიციენტი" არ იცვლება კოორდინატთა ღერძების შემობრუნებით.

[1]) იხ. წინა შენიშვნა.

მართლაც, განვიხილოთ, მაგალითად, შემთხვევა, როცა კუთხური კოეფიციენტი $+i$-ის ტოლია. კუორდინატთა ღერძების $\alpha$ კუთხით შემობრუნებისას, ვექტორის ახალი $X'$, $Y'$ კოორდინატები გამოისახება ძველი კოორდინატებით

$$X' = X\cos\alpha + Y\sin\alpha,\quad Y' = -X\sin\alpha + Y\cos\alpha$$

ფორმულებით [1]).

ამ ვექტორის კუთხური კოეფიციენტი ტოლია:

$$\frac{Y'}{X'} = \frac{-X\sin\alpha + Y\cos\alpha}{X\cos\alpha + Y\sin\alpha},$$

საიდანაც, თუ მარჯვენა ნაწილში მრიცხველსა და მნიშვნელს გავყოფთ $X$-ზე და გავიხსენებთ რომ $\frac{Y}{X} = i$, მივიღებთ

$$\frac{Y'}{X'} = \frac{-\sin\alpha + i\cos\alpha}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \frac{i(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = i,$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

მაშასადამე, ჩვენი ვექტორის „მიმართულება" ერთნაირია როგორც ძველი, ისე მობრუნებული ღერძების სისტემის მიმართ.

ყოველივე თქმული წარმოსახვითი წერტილებისა და ვექტორების შესახებ სიბრტყეზე, უშუალოდ განზოგადდება სივრცის შემთხვევაში. ამ განზოგადების თვალსაჩინოების გამო, ჩვენ მასზე არ შევჩერდებით (იზოტროპულ მიმართულებაზე სივრცეში ლაპარაკი გვექნება ქვემოთ).

**§ 162. წარმოსახვითი წრფეები და სიბრტყეები.** წინა პარაგრაფში თქმული ბუნებრივად განზოგადდება „წარმოსახვით" წრფეთა და სიბრტყეთა შემთხვევაზე.

მაგალითად, $Oxy$ სიბრტყეზე წარმოსახვითი წრფის ქვეშ უნდა გვესმოდეს ერთობლიობა (წარმოსახვითი და არსი) $(x, y)$ წერტილებისა, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ წრფივ

$$Ax + By + C = 0$$

განტოლებას, სადაც $A$ და $B$ ერთდროულად არ არის ნულის ტოლი და, სადაც $A$, $B$, $C$ აღნიშნავს კომპლექსურ რიცხვებს ($A$, $B$ და $C$ რიცხვებიდან ყველა სამი არ შეიძლება გახდეს ნამდვილი რომელიმე მუდმივ მამრავლზე შეკვეცით: ამ უკანასკნელ შემთხვევაში წრფე ნამდვილი იქნება).

თუ ამოვხსნით წინა განტოლებას $y$-ის მიმართ (ვიგულისხმოთ, რომ $B \neq 0$) მას დავიყვანთ

$$y = ax + b$$

სახეზე; $a$-ს კუთხური კოეფიციენტი ეწოდება (ნამდვილი წრფის ანალოგიურად). ორ წრფეს (წარმოსახვითს ან ნამდვილს) პარალელური ეწოდება, თუ მათი კუთხური კოეფიციენტები ტოლია. ორი წარმოსახვითი ან ნამდვილი

[1]) ისევე, როგორც წარმოსახვით წერტილთა შემთხვევაში, ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $(X, Y)$ და $(X', Y')$ რიცხვთა წყვილი გამოსახავს ერთსა და იმავე ვექტორს სხვადასხვა კოორდინატის ღერძების მიმართ. თუ ეს რიცხვები დაკავშირებულია გარდაქმნის იმავე ფორმულებით, რომლითაც დაკავშირებულია ნამდვილ ვექტორთა კოორდინატები.

წრფის „გადაკვეთის წერტილი“ ეწოდება წერტილს, რომლის კოორდინატები აკმაყოფილებენ ორივე წრფის განტოლებას.

ორ წრფეს შეუღლებული წარმოსახვითი ეწოდება, თუ ერთ-ერთი მათგანის განტოლების სათანადო მამრავლზე გამრავლებისას, მათი განტოლებების შესაბამისი კოეფიციენტები გახდება შეუღლებული წარმოსახვითი რიცხვები.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ორი შეუღლებული წარმოსახვითი წრფის გადაკვეთის წერტილი ყოველთვის ნამდვილია (თუ ისინი პარალელური არ არიან; იხ. სავარჯიშო).

შეუღლებული წარმოსახვითი წრფეების მაგალითისათვის შეიძლება ავიღოთ

$$y - y_0 = ai(x - x_0) \quad \text{და} \quad y - y_0 = -ai(x - x_0)$$

წრფეები, სადაც $a$, $x_0$ $y_0$, არსი რიცხვებია. ეს წრფეები იკვეთება ნამდვილ $(x_0, y_0)$ წერტილში.

მართკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაში, როცა $a=1$, მივიღებთ ორ შეუღლებულ

$$y - y_0 = i(x - x_0) \quad \text{და} \quad y - y_0 = -i(x - x_0)$$

წრფეს, რომლებსაც იზოტროპული წრფეები ეწოდება და რომლებიც გატარებულია $(x_0, y_0)$ წერტილიდან. ისინი იმით ხასიათდებიან, რომ აქვთ კუთხური კოეფიციენტი $\pm i$ (იხ. § 161) ამ წრფეებს ეწოდება აგრეთვე „ნულის სიგრძის წრფეები“, ვინაიდან, როგორც ადვილი შესამჩნევია, ერთ-ერთ მათგანზე აღებულ ორ ნებისმიერ წერტილს შორის მანძილი ნულის ტოლია.

სრულებით ანალოგიურად განისაზღვრება წარმოსახვითი სიბრტყეები და წრფეები სივრცეში.

### სავარჯიშოები

1. დაამტკიცეთ, რომ ორი წარმოსახვითი შეუღლებული წრფე იკვეთება ნამდვილ წერტილში (თუ ისინი პარალელური არ არიან).

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა, ვთქვათ,

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{და} \quad A'x + B'y + C = 0 \qquad (*)$$

შეცდომულ წრფეთა განტოლებებია, მასთან $A'$, $B'$, $C'$ სიდიდენი აღნიშნავენ შესაბამისად, $A$, $B$, $C$ სიდიდეთა შეუღლებულს. თუ ამოვხსნით (*) სისტემას, მივიღებთ:

$$x = \frac{C'B - CB'}{AB' - A'B}, \quad y = \frac{A'C - AC'}{AB' - A'B}.$$

$AB' - A'B$ სიდიდე წმინდა წარმოსახვითია, ვინაიდან $AB'$ და $A'B$ შეუღლებული კომპლექსური რიცხვებია; სწორედ ასევე $C'B - CB'$ და $A'C - AC'$—წმინდა წარმოსახვითი რიცხვებია. მაგრამ, რადგანაც ორი წმინდა წარმოსახვითი რიცხვის შეფარდება ნამდვილი რიცხვია, ამიტომ $x$ და $y$ არსი რიცხვებია.

2. დაამტკიცეთ, რომ ორი შეუღლებული წარმოსახვითი წრფის ერთობლიობა შეიძლება წარმოვიდგინოთ მეორე რიგის ერთი

$$ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

ნამდვილი კოეფიციენტებიანი განტოლებით.

დამტკიცება. წინა სავარჯიშოს (*) წრფეთა ერთობლიობა შეიძლება წარმოვიდგინოთ

$$(Ax+By+C)\ (A'x+B'y+C')=0$$

განტოლებით; თუ მოვახდენთ გადამრავლებას, მივიღებთ ნაჩვენები ტიპის განტოლებას.

## 11. ერთგვაროვანი კოორდინატები და არასაკუთრივი ელემენტები. წრფისა და სიბრტყის კოორდინატები

ანალიზური გეომეტრიის მრავალი დებულება აგრეთვე მნიშვნელოვნად მარტივდება და ზოგადი ხდება „უსასრულოდ დაშორებულ“, ანუ „არასაკუთრივ“ ელემენტთა (წერტილთა, წრფეთა, სიბრტყეთა) შემოტანით. ამას უველაზე უფრო ადვილად შეიძლება მივაღწიოთ ერთგვაროვანი კოორდინატების გამოყენებით, რომელთა განსაზღვრას ჩვენ ვიწყებთ.

§ 163. დეკარტის ერთგვაროვანი კოორდინატები წრფეზე. ჩვენ მრავალჯერ შევხვდით მოცემული გეომეტრიული თვისების დამახასიათებელ სიდიდეებს, რომლებისთვისაც, ერთნაირობის მიღწევის მიზნით, უსასრულოდ დიდი მნიშვნელობათა მინიჭება მიზანშეწონილი აღმოჩნდა (მაგ., კუთხური კოეფიციენტი). მასთან, თითოეულ შემთხვევაში გვიხდებოდა იმის განმარტება, თუ როგორ უნდა გვესმოდეს ესა თუ ის ფორმულა, თუ მასში შემავალი სიდიდეები ღებულობენ უსასრულოდ დიდ მნიშვნელობებს. ამ განმარტებებს, რომლებიც ხანდახან ძლიერ ართულებს გადმოცემას, შეიძლება გვერდი ავუხვიოთ, თუ სიდიდეს, რომელიც უსასრულოდ დიდი ხდება, გამოვსახავთ ორი სასრული სიდიდის ფარდობის სახით. ასე ვიქცევით, მაგალითად, სიბრტყეზე წრფის კუთხური კოეფიციენტის გამოსახვისას, როგორც ორი სიდიდის ფარდობისა: $\frac{Y}{X}$, სადაც $Y$ და $X$ წრფის მიმართულებისკოეფიციენტებია. მაშინ კუთხურ კოეფიციენტს $\infty$ შეესაბამება მიმართულების კოეფიციენტები

$$X=0,\quad Y\neq 0.$$

სრულიად ანალოგიურად შეიძლება მოვიქცეთ წრფეზე, სიბრტყეზე და სივრცეში წერტილთა კოორდინატების მიმართ. მეტი სიცხადისათვის დავიწყოთ წერტილთა კოორდინატებიდან წრფეზე.

$M$ წერტილის მდებარეობას $Ox$ ღერძზე ჩვენ აქამდე ვახასიათებდით ერთი რიცხვის—დეკარტის $x$ აბსცისის საშუალებით. ახლა შემოვიტანოთ ერთი $x$ რიცხვის მაგიერ, ორი $x_1$ და $x_2$ ($x_2\neq 0$) რიცხვი, რომლებიც დაქვემდებარებულია პირობაზე

$$x=\frac{x_1}{x_2}$$

$x_1$ და $x_2$ სიდიდეებს ეწოდება $M$ წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები. ცხადია, რომ თუ მოცემულია $x_1$, $x_2$ რიცხვები, მასთან $x_2 \neq 0$, $M$ წერტილი სავსებით განსაზღვრულია. პირიქით, თუ მოცემულია $M$ წერტილი, ე. ი. $x$ აბსცისი, მაშინ ეს კიდევ არ განსაზღვრავს ერთგვაროვან კოორდინატებს; განსაზღვრულია მხოლოდ მათი $\frac{x_1}{x_2}$ ფარდობა. სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ $x_1$, $x_2$ $M$ წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატებია, მაშინ $\lambda x_1$ და $\lambda x_2$ რიცხვები, სადაც $\lambda$ ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი რიცხვია, განსაზღვრავს იმავე წერტილს.

აქამდე ვგულისხმობდით, რომ $x_2 \neq 0$. ახლა შევცვალოთ ერთგვაროვან კოორდინატთა წინა განსაზღვრები უფრო ზოგადით, სახელდობრ, შევთანხმდეთ შემდეგში:

1°. ყოველი ორი რიცხვი $x_1$, $x_2$, რომლებიც ერთდროულად ნულს არ უდრიან განსაზღვრავენ მხოლოდ და მხოლოდ ერთ $M(x_1, x_2)$ წერტილს $Ox$ ღერძზე.

2°. $\lambda x_1$ $\lambda x_2$ რიცხვები, სადაც $\lambda$ ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი რიცხვია, განსაზღვრავენ იმავე წერტილს, რასაც $x_1$ და $x_2$ რიცხვები; სხვანაირად რომ ვთქვათ, მნიშვნელობა აქვს მხოლოდ $\frac{x_1}{x_2}$ ან $\frac{x_2}{x_1}$ ფარდობას (თუ $x_1$, $x_2$ რიცხვებიდან ერთ-ერთი მათგანი ნულის ტოლია, მაშინ უნდა ვიგულისხმოთ ამ ფარდობებიდან ის, რომლის მნიშვნელი ნულისაგან განსხვავებულია).

3°. თუ $x_2 \neq 0$, მაშინ $M(x_1, x_2)$ წერტილი არის $Ox$ ღერძის წერტილი, რომელსაც აქვს აბსცისად $x = \frac{x_1}{x_2}$.

4. თუ $x_2 = 0$, მაშინ $M(x_1, 0)$ წერტილს $Ox$ ღერძის უსასრულოდ დაშორებული, ანუ არასაკუთრივი წერტილი ეწოდება (რომ განვასხვავოთ „საკუთრივ“ წერტილებიდან).

„უსასრულოდ დაშორებული“ სახელწოდების ბუნებრივობა გამომდინარეობს იქიდან, რომ წერტილი $x = \frac{x_1}{x_2}$ აბსცისით მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, როცა $x_2$ ნულისაკენ მიისწრაფვის.

ამიტომ, ზოგჯერ ვიტყვით, რომ არასაკუთრივ წერტილს აქვს $x = \infty$ აბსცისი (ამავე დროს $+\infty$ და $-\infty$ ერთმანეთისაგან არ განვასხვავებთ).

აღვნიშნოთ, რომ ჩვენს მიერ მიღებულ პირობათა საფუძველზე, მოცემულ წრფეზე მხოლოდ ერთი უსასრულოდ დაშორებული წერტილი გვაქვს (წრფე თითქოს იკვრება უსასრულეთში); ეს გამომდინარეობს 2° პირობიდან, რომლის ძალით $(x_1, 0)$ და $(\lambda x_1, 0)$ სიმბოლოები ერთსა და იმავე წერტილს გამოსახავს; თუ $\lambda$-ს შესაფერისად შევარჩევთ, $\lambda x_1$-ს ყოველთვის შეიძლება ნებისმიერი მნიშვნელობა მივანიჭოთ, მაშასადამე, $(x_1, 0)$ სიმბოლო უნდა გამოსახავდეს ერთსა და იმავე წერტილს, როგორიც არ უნდა იყოს $x$ განსხვავებული ნულისაგან.

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა.** ის ფაქტი, რომ წრფეზე მხოლოდ ერთი უსასრულოდ დაშორებული წერტილია, არ წარმოადგენს აბსოლუტურ კანონს, არამედ ჩვენს მიერ მიღებულ $1^\circ - 4^\circ$ პირობათა ერთობლიობით განისაზღვრება. თუ დავუშვებთ სხვანაირ პირობებს, ჩვენ მივალთ სხვაგვარ დასკვნამდე. მაგალითად, ზოგჯერ მიზანშეწონილია მივიღოთ, რომ წრფეზე ორი უსასრულოდ დაშორებული წერტილია $x=+\infty$ და $x=-\infty$ მნიშვნელობათა შესაბამისი.

**§ 164. ალგებრული განტოლების ფესვებზე გამოყენება.** ზემონათქვამს ბუნებრივი იქნება დაეუკავშიროთ საკითხი ალგებრულ განტოლების „უსასრულოდ დიდი“ ფესვების შესახებ. სიცხადისათვის, ჯერ განვიხილოთ

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

კვადრატული განტოლება. ჩვენ შემდეგში ხშირად გვექნება საქმე ისეთ შემთხვევასთან, როცა გეომეტრიული საკითხის ამოხსნა ზოგადი სახით დაიყვანება (1) განტოლებამდე, რომელიც, ზოგიერთი კერძო დაშვებისას, პირველი ხარისხის

$$2bx+c=0 \tag{2}$$

განტოლებად იქცევა, იმის გამო, რომ $a$ კოეფიციენტი ნულის ტოლი გახდება. (2) განტოლებას, როცა $b\neq 0$, ერთი ფესვი აქვს. მაგრამ, ხშირად, იმ მიზნით, რომ არ შევზღუდოთ ზოგადობა, (2) განტოლებას განიხილავენ, როგორც (1) კვადრატული განტოლების კერძო შემთხვევას. ყველაზე უფრო მარტივად ამას აღწევენ შემდეგნაირად. განვიხილოთ $x$, როგორც რომელიმე წერტილის აბსცისი $Ox$ ღერძზე და შემოვიტანოთ ერთგვაროვანი კოორდინატები (ვთქვათ, ჯერჯერობით $x_2\neq 0$)

$$x=\frac{x_1}{x_2} \tag{3}$$

ტოლობით; თუ ამ გამოსახულებას შევიტანთ (1)-ში, მივიღებთ

$$a\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+2b\frac{x_1}{x_2}+c=0 \tag{1a}$$

განტოლებას, რომელიც $x^2_2$-ზე გამრავლების შემდეგ დაიყვანება

$$ax^2_1+2bx_1x_2+cx^2_2=0 \tag{4}$$

სახემდე („კვადრატული განტოლება ერთგვაროვანი სახით“). ეს უკანასკნელი განტოლება, რომელიც შეიცავს ორ $x_1$, $x_2$ უცნობს, არ განსაზღვრავს თითოეულ ცვალებადს ცალკეულად, არამედ მხოლოდ მათ ფარდობას

$$x=\frac{x_1}{x_2}\ (\text{თუ } x_2\neq 0)\ \text{ანუ } \frac{1}{x}=\frac{x_2}{x_1}\ (\text{თუ } x_1\neq 0);$$

ამ ფარდობებიდან პირველის განსაზღვრისათვის გვაქვს (3) განტოლება, ხოლო მეორის განსაზღვრისათვის — განტოლება, რომელიც მიიღება (4)-დან

$x^2_1$-ზე გაყოფით:

$$a + 2b\frac{x_2}{x_1} + c\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = 0. \tag{1b}$$

ახლა შევთანხმდეთ, რომ (1) განტოლება ყველა შემთხვევაში (მაშინაც კი, როცა $x_2=0$), სავსებით ეკვივალენტურია (4) განტოლებისა და ეს გავიგოთ შემდეგნაირად: (4) განტოლების ყოველი ამონახსნი, როცა $x_2 \neq 0$, გვაძლევს (1) განტოლების $x=\frac{x_1}{x_2}$ ჩვეულებრივ ამონახსნს. ამონახსნი კი, როცა $x_2=0$ (მაშასადამე, პირობის ძალით $x_1 \neq 0$) გვაძლევს (1) განტოლების „უსასრულოდ დიდ ამონახსნს", რომელსაც ჩვენ ასე აღვნიშნავთ: $x=\infty$; მივიღოთ, რომ ეს ტოლობა ეკვივალენტურია

$$\frac{1}{x} = \frac{x_2}{x_1} = 0$$

ტოლობისა.

(4) განტოლების ამოხსნას, როცა $x_2=0$, შეიძლება ადგილი ჰქონდეს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $a=0$; ვინაიდან, თუ $a \neq 0$ მაშინ $x_2=0$-თვის ჩვენ უნდა გვქონდეს: $ax^2_1=0$, ე. ი. $x_1=0$; მაგრამ მაშინ $x_1$ და $x_2$ ერთდროულად იქნება ნულის ტოლი, რასაც ჩვენ ყოველთვის გამოვრიცხავთ. როცა $a=0$ (4) განტოლება ღებულობს

$$x_2(2bx_1 + cx_2) = 0$$

სახეს და აქვს შემდეგი ამონახსნი (ვგულისხმობთ, $b \neq 0$):

1°. $x_1=$ ნებისმიერ მნიშვნელობას, $x_2=0$, ე. ი. $\frac{x_2}{x_1}=0$;

2°. $\frac{x_1}{x_2} = -\frac{c}{2b}$.

ნათქვამის შესაბამისად, ჩვენ მივედით შემდეგ დასკვნამდე: თუ (1) განტოლებაში $a=0$, $b \neq 0$, მაშინ განტოლებას აქვს შემდეგი ორი ამონახსნი:

$$x = -\frac{c}{2b} \text{ და } x=\infty.$$

თუ (1) განტოლებაში $a=b=0$, $c \neq 0$, მაშინ იგი მიიღებს $cx^2_2=0$ სახეს, და აქვს, როგორც ვხედავთ ორჯერადი ფესვი $x_2=0$ (მასთან, $x_1$ ნებისმიერია). ამის შესაბამისად, შეიძლება ვთქვათ, რომ როცა $a=b=0$, $c \neq 0$ (1) განტოლებას აქვს ორჯერადი ფესვი $x=\infty$ ანუ, რაც იგივეა, ორი უსასრულოდ დიდი ფესვი. იმავე შედეგამდე მიგვიყვანს (1) განტოლების ფესვთა ზღვრების განხილვა, როცა $a$, $b$ კოეფიციენტთაგან ერთ-ერთი ან ორივე ნულისკენ მიისწრაფვის; იხ. ქვემოთ სავარჯიშო.

წინა მსჯელობათა ანალოგიური მსჯელობანი, მიგვიყვანს შემდეგ შეთანხმებაზე, რომელსაც ჩვენ მივიღებთ ერთხელ და სამუდამოდ:

ვთქვათ, მოცემულია $n$ ხარისხის განტოლება

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0; \tag{5}$$

თუ $a_0=a_1=\cdots=a_{k-1}=0$, ხოლო $a_k\neq 0$, მაშინ ჩვენ ვიტყვით, რომ $n$ ხარისხის (4) განტოლებას აქვს უსასრულობის ტოლი $k$-ჯერადი ფესვი (ანუ უსასრულობის ტოლი $k$ ფესვი).

**სავარჯიშო**

ვთქვათ, $ax^2+bx+c=0$ კვადრატული განტოლების $a$, $b$, $c$ კოეფიციენტები ცვლადი სიდიდეებია, რომლებიც მიისწრაფვიან

$$\lim a=a_0,\ \lim b=b_0,\ \lim c=c_0$$

ზღვრებისაკენ.

დაამტკიცეთ, რომ თუ $a_0=0$, $b_0\neq 0$, მაშინ განტოლების ერთი ფესვთაგანი მიისწრაფვის [1]) $\infty$-კენ, ხოლო მეორე $-\frac{c_0}{2b}$-კენ. თუ $a_0=0$, $b_0=0$, $c_0\neq 0$, მაშინ ორივე ფესვი $\infty$-კენ მიისწრაფვის.

**§ 165. ერთგვაროვანი დეკარტის კოორდინატები სიბრტყეზე.** ახლა განვიხილოთ კოორდინატები სიბრტყეზე. ვთქვათ, $x$, $y$ არის $M$ წერტილის დეკარტის კოორდინატები. შემოვიტანოთ $x$, $y$ რიცხვების ნაცვლად სამი $x_1$, $x_2$, $x_3$ რიცხვი, რომლებიც ერთდროულად არაა ნულის ტოლი და რომლებსაც ეწოდება დეკარტის ერთგვაროვანი კოორდინატები; მასთან, შევთანხმდეთ შემდეგში (შეადარეთ ანალოგიურ პირობებს § 163-ში):

1°. ყოველი სამი $x_1$, $x_2$, $x_3$ რიცხვი, რომლებიც ერთდროულად არაა ნულის ტოლი, განსაზღვრავს $Oxy$ სიბრტყეზე მხოლოდ და მხოლოდ ერთ $M(x_1, x_2, x_3)$ წერტილს.

2°. $\lambda x_1$, $\lambda x_2$, $\lambda x_3$ რიცხვები, სადაც $\lambda\neq 0$, განსაზღვრავს იმავე წერტილს, რასაც $x_1$, $x_2$, $x_3$ რიცხვები; ამგვარად, მნიშვნელობა აქვს მხოლოდ $x_1$, $x_2$, $x_3$ რიცხვთა ერთმანეთთან ფარდობას.

3°. თუ $x_3\neq 0$, მაშინ $M(x_1, x_2, x_3)$ წერტილი არის $Oxy$ სიბრტყის წერტილი

$$x=\frac{x_1}{x_3},\quad y=\frac{x_2}{x_3} \tag{1}$$

არაერთგვაროვანი (ე. ი. ჩვეულებრივი) კოორდინატებით.

4°. თუ $x_3=0$, მაშინ $M(x_1, x_2, 0)$ წერტილს ეწოდება **უსასრულოდ დაშორებული**, ანუ **არასაკუთრივი** წერტილი სიბრტყეზე.

[1]) გამოთქმაში: $x$ მიისწრაფვის $\infty$-კენ, ჩვენ ვგულისხმობთ მხოლოდ იმას, რომ $\lim\frac{1}{x}=0$; მაშასადამე, ჩვენ არ ვაკეთებთ განსხვავებას ნიშნებით $+\infty$ და $-\infty$-კენ, იმ შემთხვევაშიაც კი, როცა $x$ გაირბენს ნამდვილ მნიშვნელობებს.

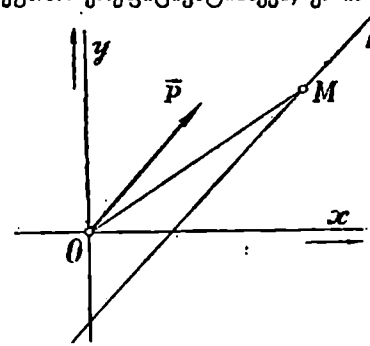
ამ მიღებული პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ არასაკუთრივი (უსასრულოდ დაშორებული) წერტილები სიბრტყეზე უსასრულოდ მრავალია, თითოეული მათგანი ხასიათდება ორი $x_1$, $x_2$ რიცხვის ფარდობით, რომლებიც ერთდროულად ნულის ტოლი არ არიან.

განვმარტოთ ეს უფრო დაწვრილებით. ვთქვათ, $M(x_1, x_2, 0)$ მოცემული არასაკუთრივი წერტილია; ზოგადობის შეუზღუდავად, შეგვიძლია მივიღოთ, რომ $x_1 \neq 0$ (რადგანაც წინააღმდეგ შემთხვევაში $x_1$ და $x_2$-ს შეიძლება როლები შევუცვალოთ). ავაგოთ რაიმე ვექტორი $\vec{P}(X, Y)$

$$\frac{Y}{X} = \frac{x_2}{x_1} = k \tag{2}$$

საკუთხო კოეფიციენტით. ვთქვათ, $\Delta$ არის $\vec{P}$ ვექტორის პარალელური ნებისმიერი წრფე, ხოლო $(M'(x'_1, x'_2, x'_3)$—რაიმე ცვლადი საკუთრივი წერტილი $\Delta$ წრფეზე (ნახ. 111). თუ $M'$ წერტილი, $\Delta$ წრფეზე მოძრაობისას, მიდის უსასრულობისაკენ (ამა თუ იმ მიმართულებით), მაშინ, ცხადია, $\frac{x'_2}{x'_1}$ ფარდობა, რაც, (1) თანახმად, $\overrightarrow{OM}$ ვექტორის $\frac{y'}{x'}$ საკუთხო კოეფიციენტის ტოლია ($x'$ და $y'$-ით აღნიშნულია $M'$ წერტილის არაერთგვაროვანი კოორდინატები), მიისწრაფვის $\vec{P}$ ვექტორის $k$ საკუთხო კოეფიციენტისაკენ, ე. ი.

$$\lim \frac{x'_2}{x'_1} = k = \frac{x_2}{x_1}. \tag{3}$$



ნახ. 111.

რადგანაც $M'$ წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$ განსაზღვრულია მხოლოდ (ნულისაგან განსხვავებული) საერთო მამრავლის სიზუსტით, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $\lim x'_1 = x_1$ [1]). მაშინ (3) დან, ცხადია, გამომდინარეობს, რომ $\lim x'_2 = x_2$; ცხადია აგრეთვე, რომ $\lim x'_3 = 0$.

ამრიგად, შეგვიძლია მივიღოთ, რომ $M'$ წერტილის უსასრულობისაკენ მისწრაფებისას

$$\lim x'_1 = x_1, \quad \lim x'_2 = x_2, \quad \lim x'_3 = 0.$$

ამის შესაბამისად, ჩვენ შევთანხმდებით, რომ $M'$ წერტილი მიისწრაფვის $M(x_1, x_2, 0)$ არასაკუთრივ წერტილისაკენ, ანუ, რაც იგივეა [2]), $M(X, Y, 0)$ წერტილისაკენ; და აგრეთვე, რომ არასაკუთრივი

[1]) მაგალითად, ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ მუდმივად $x'_1 = x_1$.

[2]) $M(x_1, x_2, 0)$ და $M(X, Y, 0)$ წერტილები ერთმანეთს ემთხვევიან, რადგანაც $x_1, x_2$ რიცხვები $X, Y$ რიცხვების პროპორციულია.

$M(x_1, x_2, 0)$ წერტილი მდებარეობს უსასრულოებში $\bar{P}(X, Y)$ ვექტორის, ანუ $\Delta$ წრფის მიმართულებით. ჩვენ ვიტყვით, აგრეთვე, რომ $M(x_1, x_2, 0)$ წარმოადგენს $\Delta$ წრფის უსასრულოდ დაშორებულ, ანუ არასაკუთრივ წერტილს. ამრიგად, როგორც ეს § 163 ნათქვამის მიხედვით უნდა ყოფილიყო, მოცემულ წრფეზე მხოლოდ ერთი უსასრულოდ დაშორებული წერტილია; ცხადია აგრეთვე, ურთიერთპარალელურ წრფეებს ერთი და იგივე უსასრულოდ დაშორებული წერტილი აქვთ.

ჩვენ განვიხილეთ ის შემთხვევა, როდესაც $M'(x'_1, x'_2, x'_3)$ წერტილი მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ მოცემული წრფის გასწვრივ. განვიხილოთ უფრო ზოგადი შემთხვევა. სახელდობრ, დავუშვათ, რომ მოძრავი $M'$ წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$ ისე იცვლებიან, რომ $\lim x'_1 = x_1$, $\lim x'_2 = x_2$, $\lim x'_3 = 0$, სადაც $x_1$ და $x_2$ გარკვეული რიცხვებია, რომლებიც ერთდროულად ნულს არ უდრიან. ამ შემთხვევაშიაც ჩვენ ვიტყვით, რომ $M'$ წერტილი მიისწრაფვის უსასრულოდ დაშორებულ ან არასაკუთრივ $M(x_1, x_2, 0)$ წერტილისაკენ.

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა.** თუ $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$ არავითარ ზღვრისაკენ არ მიისწრაფიან, ეს კიდევ იმას არ ნიშნავს, რომ $M'$ წერტილი არავითარ ზღვრისაკენ არ მიისწრაფვის. მართლაც, რასაკვირველია, შეიძლება მოხდეს, რომ $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$ არავითარ ზღვრისაკენ არ მიისწრაფვიან, მაშინ როდესაც $\lambda x'_1$, $\lambda x'_2$, $\lambda x'_3$ რიცხვები, სადაც $\lambda$ სათანადოდ შერჩეული (ცვლადი) მამრავლია, მიისწრაფვიან გარკვეული ზღვრებისაკენ, რომლებიც ერთდროულად ნაკლები არ არიან. მაშინ ცხადია, ჩვენი წერტილი მიისწრაფვის გარკვეული ზღვრისაკენ, რადგანაც $(\lambda x'_1, \lambda x'_2, \lambda x'_3)$ წერტილი იგივე $M'(x'_1, x'_2, x'_3)$ წერტილია.

**§ 166. წრფის განტოლება სიბრტყეზე ერთგვაროვან კოორდინატებში.** განვიხილოთ

$$a_1 x + a_2 y + a_3 = 0 \tag{a}$$

განტოლება, სადაც $a_1$, $a_2$, $a_3$ მუდმივი კოეფიციენტებია. ჩვენ ვიცით, რომ თუ $a_1$ და $a_2$ ერთდროულად არაა ნულის ტოლი, მაშინ ეს განტოლება გამოსახავს წრფეს $Oxy$ სიბრტყეზე.

თუ შემოვიტანთ ერთგვაროვან კოორდინატებს:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3},$$

მივიღებთ

$$a_1 \frac{x_1}{x_3} + a_2 \frac{x_2}{x_3} + a_3 = 0 \tag{b}$$

განტოლებას.

თუ ჩვენ დავკმაყოფილდებით საკუთრივი წერტილების განხილვით სიბრტყეზე ($x_3 \neq 0$) მაშინ (b) განტოლება შეგვიძლია გავამრავლოთ $x_3$-ზე, ე. ი. დავიყვანოთ

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \tag{1}$$

„ერთგვაროვან სახემდე“.

ჩვენი წრფის ყოველი საკუთრივი წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები აკმაყოფილებს (1) განტოლებას; პირიქით, ყოველი სამი $(x_1, x_2, x_3)$ რიცხვი, როცა $x_3 \neq 0$, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1) განტოლებას, გვაძლევს საკუთრივ წერტილს, რომელიც ჩვენს წრფეს ეკუთვნის.

შ ე ვ თ ა ნ ხ მ დ ე თ რომ საზოგადოდ ყ ო ვ ე ლ ი (საკუთრივი ან არასაკუთრივი) წერტილი ეკუთვნის ან არ ეკუთვნის ჩვენს წრფეს, იმისდა მიხედვით, აკმაყოფილებს თუ არა მისი კოორდინატები (1) განტოლებას; ჩვენ მხედველობაში გვაქვს სწორედ განტოლება, რომელიც აღებულია ერთგვაროვანი (1) სახით და არა (b) სახით.

კერძოდ, არასაკუთრივი იმ წერტილის $(x_1, x_2, 0)$ კოორდინატები, რომელიც ჩვენს წრფეს ეკუთვნის, უნდა აკმაყოფილებდეს

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$$

განტოლებას; ეს განტოლება $\frac{x_2}{x_1}$ ფარდობისათვის გვაძლევს სავსებით გარკვეულ მნიშვნელობას

$$\frac{x_2}{x_1} = -\frac{a_1}{a_2} \tag{2}$$

(როცა $a_2 = 0$, ეს ფორმულა უნდა შევცვალოთ შემდეგით: $x_1 = 0$, $x_2$ ნებისმიერია).

ამრიგად ჩვენ ვხედავთ, რომ ჩვენი პირობების ძალით, მოცემულ წრფეზე გვაქვს მხოლოდ ერთი უსასრულოდ დაშორებული წერტილი, რომლის ერთგვაროვან კოორდინატებად შეიძლება, მაგალითად, ვიღოთ $(a_2, -a_1, 0)$ ან ყოველი მათი პროპორციული რიცხვები, ეს ზუსტად ეთანხმება წინა პარაგრაფებში ნათქვამს.

ადვილი შესამჩნევია შემდგომ, რომ წინაპარაგრაფებში ნათქვამის შესაბამისად ყველა ურთიერთპარალელური წრფე შეიცავს ერთსა და იმავე უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს, ე. ი., როგორც იტყვიან, გადიან ერთსა და იმავე არასაკუთრივ წერტილზე. მართლაც, ჩვენ ვხედავთ, რომ ჩვენი წრფის უსასრულოდ დაშორებული წერტილი განისაზღვრება $a_1$, $a_2$ კოეფიციენტთა ფარდობით, ე. ი. დამოკიდებულია მხოლოდ წრფის კუთხურ კოეფიციენტზე.

ახლა გადავდგათ კიდევ ერთი ნაბიჯი შემოტანილ ცნებათა განზოგადების მიზნით. აქამდე ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ $a_1$ და $a_2$ ერთდროულად არ არიან ნულის ტოლი. ახლა უკუვაგდოთ ეს პირობა. თუ $a_1 = a_2 = 0$ და, გარდა ამისა, $a_3 = 0$, მაშინ ჩვენ გვექნება იგივური განტოლება $0 = 0$, რომელიც კმაყოფილდება სიბრტყის ყველა წერტილით. ეს შემთხვევა, საზოგადოდ, საინტერესო არ არის, მაგრამ ხანდახან მის განხილვასაც აზრი აქვს: ამბობენ, რომ როცა $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ (1) განტოლება წარმოადგენს „განუსაზღვრელ წრფეს“.

შემდეგში, თუ წინააღმდეგი არ იქნება აღნიშნული, ჩვენ ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ $a_1, a_2, a_3$ სიდიდეებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა $a_1 = a_2 = 0$, მაგრამ $a_3 \neq 0$. მაშინ (1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$a_3 x_3 = 0,$$

ანუ

$$x_3 = 0 \tag{3}$$

ამ შემთხვევაში, როგორც ჩვენ ვხედავთ, ჩვენს განტოლებას აკმაყოფილებს მხოლოდ არასაკუთრივი წერტილები; ცხადია, რომ მას აკმაყოფილებს ყოველი არასაკუთრივი წერტილი. ჩვენ ვიტყვით, რომ (3) განტოლება გამოსახავს არასაკუთრივ, ანუ უსასრულოდ დაშორებულ წრფეს.

ამრიგად, ჩვენი პირობების ძალით, სიბრტყეზე უსასრულოდ დაშორებულ წერტილთა ერთობლიობა შეადგენს ერთ უსასრულოდ დაშორებულ წრფეს [1]),

ამგვარად, ჩვენ არასაკუთრივ წერტილთა და არასაკუთრივი წრფის შემოტანით გავაფართოეთ წერტილისა და წრფის ცნება. ამავე დროს, როგორც ჩვენ ახლა დავინახავთ, შენარჩუნებულია წერტილებისა და წრფეების ძირითადი თვისება, რაც იმაში მდგომარეობს, რომ ორ არათანხვედნილ წერტილზე გადის მხოლოდ და მხოლოდ ერთი წრფე. მეორე ძირითადი თვისება კი, რაც იმაში მდგომარეობს, რომ ორი არათანხვედნილი წრფე ან პარალელურია ან იკვეთებიან ერთადერთ წერტილში, იცვლება უფრო მარტივით: ორი არათანხვედნილი წრფე ყოველთვის იკვეთება ერთ წერტილში (საკუთრივ ან არასაკუთრივში).

ჩვენ დავამტკიცებთ ორივე ამ თვისებას, თუ ამოვხსნით ამოცანებს: გავატაროთ წრფე ორ მოცემულ წერტილზე და ვიპოვოთ ორი მოცემული წრფის გადაკვეთა.

გავაკეთოთ შემდეგი წინასწარი შენიშვნა. წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატების თვით განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ $M'(x'_1, x'_2, x'_3)$ და $M''(x''_1, x''_2, x''_3)$ წერტილები თანხვდებიან მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$x_1'' = \lambda x'_1,\ x_2'' = \lambda x'_2,\ x_3'' = \lambda x'_3, \tag{4}$$

სადაც $\lambda$ ნულისაგან განსხვავებული რაიმე რიცხვია, სხვანაირად რომ ვთქვათ, როცა $x_1'', x_2'', x_3''$ რიცხვები $x'_1, x'_2, x'_3$ რიცხვების პროპორციული არიან.

[1]) მტკიცებაში უნდა ვიქონიოთ, რომ ეს დასკვნა (ისე, როგორც სხვა მისი ანალოგიური) გაომდინარეობს ჩვენს მიერ მიღებული პირობებიდან. შეიძლება მივიღოთი სხვა პირობები, რომლებიც სხვა დასკვნებამდე მიგვიყვანს (შად. აგრეთვე შენიშვნა § 163 ბოლოში) მაგალითად, კომპლექსურ ცვლადის ფუნქციათა თეორიაში მიხანშეწონილია მივიღოთ, რომ სიბრტყეზე გვაქვს მხოლოდ ერთი უსასრულოდ დაშორებული წერტილი.

აქედან გამომდინარეობს, რომ $M'(x_1', x_2', x_3')$ და $M''(x_1'', x_2'', x_3'')$ ორი წერტილის თანხვედნისათვის აუცილებელი და საკმარისია რომ,

$$\left.\begin{matrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{matrix}\right\} \tag{5}$$

მატრიცის რანგი 1-ის ტოლი იყოს. მართლაც, (4)-დან, ცხადია, გამომდინარეობს, რომ ყველა მეორე რიგის დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} x_2' & x_3' \\ x_2'' & x_3'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1' & x_3' \\ x_1'' & x_3'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1'' & x_2'' \end{vmatrix},$$

რომლებიც შეიძლება შედგენილ იქნას (5) ცხრილიდან, ტოლია ნულის. მაშასადამე, (5) ცხრილის რანგი ნაკლებია ორზე; ნულს კი ის არ შეიძლება უდრიდეს, რადგანაც ამ ცხრილის ელემენტებს შორის არიან ნულისაგან განსხვავებული ელემენტები. ადვილი შესამოწმებელია, რომ პირიქით, ამ დეტერმინანტების ნულთან ტოლობიდან, ე. ი. თანადობებიდან

$$x_2' x_3'' - x_3' x_2'' = 0, \quad x_3' x_1'' - x_1' x_3'' = 0, \quad x_1' x_2'' - x_2' x_1'' = 0$$

გამომდინარეობს, რომ $x_1''$, $x_2''$, $x_3''$ რიცხვები $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$ რიცხვების პროპორციულია [1]).

ზემონათქვამს ბუნებრივია უნდა დაეუკავშიროთ შემდეგი. ვთქვათ, მოცემულია ორი წრფე თავიანთი განტოლებებით ერთგვაროვან კოორდინატებში:

$$a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 = 0 \text{ და } a_1'' x_1 + a_2'' x_2 + a_3'' x_3 = 0 \tag{6}$$

ამ ორი წრფის თანხვედნისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ მათი განტოლებების კოეფიციენტები პროპორციული იყვნენ, ე. ი. რომ

$$a_1'' = ka_1', \quad a_2'' = ka_2', \quad a_3'' = ka_3', \tag{7}$$

სადაც $k$ ნულისაგან განსხვავებული რომელიმე რიცხვია [2]).

ამიტომ სავსებით, ისე როგორც ზემოთ, ჩვენ მივიღეთ ასეთ დასკვნამდე: (6) წრფეების თანხვედნისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ

$$\begin{matrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ a_1'' & a_2'' & a_3'' \end{matrix} \tag{8}$$

მატრიცის რანგი 1-ის ტოლი იყოს.

---

[1]) ეს ცხადია, თუ $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$ რიცხვებიდან არც ერთი ნულის ტოლი არ არის; მკითხველი ადვილად შეამოწმებს დებულების მაოთებულობას, მაშინაც, როცა იმათგან ერთი ან ორი ტოლია ნულის.

[2]) იმ შემთხვევისათვის, როცა ორივე წრფე საკუთრივია, ეს დამტკიცებულია ადრე (§ 47). იმ შემთხვევაში კი, როცა ორივე თანხვედნილი წრფე არასაკუთრივია, მათი განტოლებები შემდეგზე დაიყვანება: $a_2' x_2 = 0$ და $a_2'' x_2 = 0$ სადაც $a_2' \neq 0$, $a_2'' \neq 0$ და (7) ტოლობები აგრეთვე შესრულდება, თუ დავუშვებთ, რომ $k = \frac{a_2''}{a_2'}$.

ახლა გადავიდეთ ზემონახსენებ ამოცანის ამოხსნაზე ორ არათანხვედნილ $M'(x'_1, x'_2, x'_3)$ და $M''(x_1'', x_2'', x_3'')$ წერტილებზე წრფის გატარების შესახებ.

ვთქვათ, $a_1, a_2, a_3$ საძიებელი განტოლების კოეფიციენტებია, ხოლო $M(x_1, x_2, x_3)$—ერთ-ერთი მისი წერტილი. პირობის თანახმად ჩვენ უნდა გვქონდეს ერთდროულად:

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= 0,\\ a_1x'_1 + a_2x'_2 + a_3x'_3 &= 0,\\ a_1x_1'' + a_2x_2'' + a_3x_3'' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

რადგანაც $a_1, a_2, a_3$ ერთდროულად ნულს არ უდრიან, ამიტომ უნდა შესრულდეს ტოლობა

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ x'_1 & x'_2 & x'_3\\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

ვაჩვენოთ, რომ ეს სწორედ საძიებელი წრფის განტოლებაა. მართლაც, თუ (10) ის მარცხენა მხარის დეტერმინანტს დავშლით პირველი სტრიქონის ელემენტების მიხედვით და განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ ნულისაგან განსხვავებულ [1]) $k$ რიცხვზე, მივიღებთ

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \tag{10a}$$

სახის წრფივ განტოლებას, სადაც

$$a_1 = k(x'_2x_3'' - x_2''x'_3),\ a_2 = k(x'_3x_1'' - x_3''x'_1),\ a_3 = k(x'_1x_2'' - x_1''x'_2). \tag{11}$$

$a_1, a_2, a_3$ კოეფიციენტები ერთდროულად ნულს არ უდრიან, რადგანაც პირობის თანახმად $M'$, $M''$ წერტილები თანხვედნილი არ არიან [2]). ამრიგად, (10) გამოსახავს გარკვეულ წრფეს. ცხადია, რომ ეს წრფე აკმაყოფილებს დასმულ პირობებს, ე. ი. გადის $M'$ და $M''$ წერტილებზე [3]). მაშასადამე, ორ არათანხვედნილ (საკუთრივ ან არასაკუთრივ) წერტილზე გადის ერთი სავსებით განსაზღვრული წრფე.

---

[1]) რასაკვირველია, მამრავლი $k$ შეიძლება არც შემოვიტანოთ; ჩვენ ამას ვაკეთებთ (11) საბოლოო ფორმულების ხოვადობისათვის.

[2]) რომ $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, მაშინ

$$\begin{matrix} x'_1 & x'_2 & x'_3\\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{matrix}$$

მატრიცის რანგი ორზე ნაკლები (ერთის ტოლი) იქნებოდა.

[3]) მართლაც, $M'$ და $M''$ წერტილების კოორდინატების უშუალო ჩასმით დავრწმუნდებით, რომ ისინი (10) განტოლებას აკმაყოფილებენ.

შევნიშნოთ კიდევ, რომ (10) ტოლობა გამოსახავს იმის აუცილებელ და საკმარის პირობას, რომ

$$M(x_1, x_2, x_3),\ M'(x_1', x_2', x_3'),\ M''(x_1'', x_2'', x_3'')$$

სამი წერტილი კოლინეარული იყვნენ, ე. ი. ერთ საკუთრივ ან არასაკუთრივ წრფეზე მდებარეობდნენ. მართლაც, (10) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ არსებობენ $a_1$, $a_2$, $a_3$ რიცხვები, რომლებიც ერთდროულად ნულს არ უდრიან და აკმაყოფილებენ (a) პირობებს.

(10) პირობა მართებულია ყველა შემთხვევაში, ე. ი. $M$, $M'$, $M''$ წერტილები შეიძლება იყვნენ საკუთრივი ან არასაკუთრივი, ერთმანეთისაგან განსხვავებული ან თანხვედნილი.

ახლა გადავიდეთ ორი წრფის გადაკვეთის პოვნის ამოცანაზე. ვთქვათ, მოცემულია ორი არათანხვედნილი წრფე

$$\left.\begin{aligned} a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 &= 0, \\ a_1'' x_1 + a_2'' x_2 + a_3'' x_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

ამ სისტემის ამოხსნით $x_1$, $x_2$, $x_3$-ს მიმართ გვექნება[1]):

$$x_1 = k(a_2' a_3'' - a_2'' a_3'),\quad x_2 = k(a_3' a_1'' - a_3'' a_1'),\quad x_3 = k(a_1' a_2'' - a_1'' a_2'), \tag{13}$$

სადაც $k$ ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი რიცხვია. მარჯვენა მხარეები ერთდროულად ნულს არ უდრიან, რადგანაც (12) წრფეები, პირობის თანახმად, თანხვედნილი არ არიან. ამრიგად, არსებობს მხოლოდ და მხოლოდ ერთი გადაკვეთის წერტილი, განსაზღვრული (13) ფორმულებით.

თუ

$$a_1' a_2'' - a_1'' a_2' = 0, \tag{14}$$

მაშინ $x_3 = 0$, მხოლოდ და მხოლოდ ასეთ შემთხვევაში გადაკვეთის წერტილი არასაკუთრივია. ამნაირად, (14) პირობა წარმოადგენს (12) წრფეების პარალელობის პირობას; ეს შედეგი ჩვენ ზემოთ მივიღეთ.

თუ მოცემული წრფეებიდან ერთ-ერთი არასაკუთრივია, მაგალითად, თუ $a_1'' = a_2'' = 0$, $a_3'' \neq 0$, მაშინ (13) საფუძველზე, $ka_3''$ საერთო მამრავლის უკუგდების შემდეგ, მივიღებთ:

$$x_1 = a_2',\ x_2 = -a_1',\ x_3 = 0,$$

ე. ი. როგორც მოსალოდნელი იყო, $a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 = 0$ წრფის არასაკუთრივ წერტილს.

აღვნიშნოთ აქვე აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ

$$\left.\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 &= 0, \\ a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 &= 0, \\ a_1'' x_1 + a_2'' x_2 + a_3'' x_3 &= 0 \end{aligned}\right. \tag{15}$$

[1]) იხ. დამატება, § 6a.

სამი წრფე ერთ (საკუთრივ ან არასაკუთრივ) წერტილზე იკვეთებოდნენ, ე. ი. ერთ კონას ეკუთვნოდნენ. ეს პირობა, ცხადია მდგომარეობს

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a_1'' & a_2'' & a_3'' \end{vmatrix} = 0 \tag{16}$$

ტოლობაში, რაც იმას გამოსახავს, რომ (15) სისტემას აქვს $x_1$, $x_2$, $x_3$ ამოხსნა, განსხვავებული $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ამოხსნისაგან.

ზემოთმოყვანილი დასკვნები შეიძლება მიღებულ და ჩამოყალიბებულ იქნას რამდენადმე სხვაგვარადაც, თუ ვისარგებლებთ წრფივი ფორმების ცნებით (იხ. დამატება, § 4).

წერის შემოკლებისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$f = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \quad f_1 = a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3,$$
$$f_2 = a_1'' x_1 + a_2'' x_2 + a_3'' x_3;$$

$f$, $f_1$, $f_2$ წარმოადგენენ $x_1$, $x_2$, $x_3$ სამი ცვლადის წრფივ ფორმებს.

იმისათვის, რომ $f_1 = 0$ და $f_2 = 0$ განტოლებებით მოცემული ორი წრფე თანხვედნილი იყვნენ, აუცილებელი და საკმარისია, ეს განტოლებანი ეკვივალენტური იყვნენ, ამისათვის კი აუცილებელი და საკმარისია, რომ $f_1$ და $f_2$ ფორმები დაკავშირებული იყვნენ

$$f_2 = k f_1$$

თანადობით, სადაც $k$ რაიმე მუდმივია (იხ. დამატება, § 6, შედეგი). ჩვენს შემთხვევაში $k \neq 0$, რადგანაც $f_1$, $f_2$ ფორმებიდან არც ერთი არ უდრის იგივურად ნულს. წინა თანადობა ნიშნავს, რომ $f_1$ და $f_2$ ფორმები წრფივად არიან დამოკიდებული. მეორე მხრივ, იმისათვის, რომ $f_1$ და $f_2$ ფორმები წრფივად დამოკიდებული იყვნენ აუცილებელი და საკმარისია, რომ (8) მატრიცის რანგი ორზე ნაკლები იყოს (იხ. დამატება, § 5). ეს რანგი არ შეიძლება უდრიდეს ნულს (რადგანაც ცხრილში ნულისაგან განსხვავებული ელემენტებიც არიან); მაშასადამე, რანგი უდრის 1—შედეგი, რომელიც ზემოთ იყო მიღებული.

გადავიდეთ სამი წრფის გადაკვეთის საკითხის განხილვაზე. იმისათვის, რომ

$$f = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0 \tag{17}$$

განტოლებებით მოცემულ სამ წრფეს ჰქონდეს საერთო წერტილი (საკუთრივი ან არასაკუთრივი) აუცილებელი და საკმარისია, რომ (17) განტოლებებიდან ერთ-ერთი იყოს შედეგი ორი დანარჩენისა[1]). მაგრამ ამისათვის, თავის მხრივ,

[1]) თუ სამივე წრფე თანხვედნილია, მაშინ (17) განტოლებებიდან ნებისმიერი წარმოადგენს დანარჩენებიდან ყოველი მათგანის წრფივ კომბინაციას. თუკი, მაგალითად, $f_1 = 0$ და $f_2 = 0$ სხვადასხვაა თუ $f = 0$ წრფე გადის გადაკვეთის წერტილზე, მაშინ (17) განტოლებებიდან ყოველი წარმოადგენს ორი დანარჩენის შედეგს, რადგანაც ის კმაყოფილდება იგივე $x_1$, $x_2$, $x_3$ მნიშვნელობებით, რომლებიც აკმაყოფილებენ ორ დანარჩენ განტოლებას.

აუცილებელი და საკმარისია, რომ $f$, $f_1$, $f_2$ ფორმებიდან ერთ-ერთი იყოს დანარჩენების წრფივი კომბინაცია (იხ. დამატება, § 6, შედეგი), ანუ სხვა სიტყვებით, $f$, $f_1$, $f_2$ ფორმები რომ იყვნენ წრფივად დამოკიდებული, ე. ი. რომ

$$kf + k_1 f_1 + k_2 f_2 = 0 \tag{18}$$

იგივურად, სადაც $k$, $k_1$, $k_2$ რაიმე მუდმივებია, რომლებიც ერთდროულად ნულს არ უდრიან. მეორე მხრით, იმისათვის, რომ $f$, $f_1$, $f_2$ ფორმები წრფივად დამოკიდებული იყვნენ, აუცილებელი და საკმარისია, რომ

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a_1'' & a_2'' & a_3'' \end{matrix} \tag{19}$$

მატრიცის რანგი სამზე ნაკლები იყოს (იხ. დამატება, § 5), ე. ი. რომ ადგილი ჰქონდეს (16) პირობას,—შედეგი, რომელიც ზემოთაა ნაჩვენები.

ვთქვათ, $f_1=0$ და $f=0$ წრფეები თანხვედნილი არ არიან. იმის აუცილებელი და საკმარისი პირობა, რომ $f=0$ წრფე გადიოდეს წინა ორის გადაკვეთის წერტილზე, იმაში მდგომარეობს, რომ (19) მატრიცის რანგი იყოს ორის ტოლი. მართლაც, როგორც ახლახან დავინახეთ, ეს რანგი უნდა იყოს სამზე ნაკლები; მაგრამ ორზე ნაკლები ის არ შეიძლება იყოს, რადგანაც ორი უკანასკნელი სტრიქონისაგან შედგენილი ცხრილის რანგი არის 2, სხვანაირად $f_1=0$ და $f_2=0$ წრფეები თანხვედნილი იქნებოდნენ. აქედან, კერძოდ, გამომდინარეობს, რომ (19) ცხრილის პირველი სტრიქონი არის ორი უკანასკნელის წრფივი კომბინაცია (იხ. დამატება, § 5, შედეგი), ე. ი.

$$a_1 = \lambda a'_1 + \mu a_1'', \quad a_2 = \lambda a'_2 + \mu a_2'', \quad a_3 = \lambda a'_3 + \mu a_3'', \tag{20}$$

სადაც $\lambda$ და $\mu$ რაიმე რიცხვებია, რომლებიც ერთდროულად ნულს არ უდრიან.

უკანასკნელი ფორმულები გვაძლევენ $f_1=0$ და $f_2=0$ ორი მოცემული წრფის გადაკვეთის წერტილზე გამავალი $f=0$ წრფის განტოლების კოეფიციენტების ზოგად წარმოდგენას.

### სავარჯიშოები

1. გამოიკვლიეთ საკითხი ორ მოცემულ წერტილზე წრფის გატარების შესახებ; განიხილეთ ცალ-ცალკე შემთხვევები, როცა ორივე წერტილი საკუთრივია, როცა ერთი მათგანი არასაკუთრივია და, როცა ორივე არასაკუთრივია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ ორივე $M'$ და $M''$ მოცემული წერტილი საკუთრივია, მაშინ (10) წრფეც, როგორც ადვილი შესამოწმებელია, საკუთრივი იქნება [1]).

[1]) რადგანაც ამ შემთხვევაში $x'_3 \neq 0$, $x_3'' \neq 0$ ამიტომ, თუ კოორდინატებს პროპორციულად შევცვლით, შეგვიძლია მივიღოთ $x'_3 = x_3'' = 1$. ახლა რომ აღმოჩნდეს $a_1 = a_3 = 0$, მაშინ (11)-ს საფუძველზე გამოვიდოდა, რომ $x'_1 = x_1''$, $x'_2 = x_2''$, ე. ი. $M'$ და $M''$ წერტილები თანხვედნილი იქნებოდნენ.

თუ ერთ-ერთი წერტილი, მაგალითად $M''$, არასაკუთრივია, ხოლო მეორე,—$M'$ საკუთრივი, ე. ი. $x_3''=0$, $x'_3\neq 0$, მაშინ (10) განტოლება $x'_3$-ზე გაყოფის შემდეგ მიიღებს

$$-x_3''x_1+x_1''x_3+\frac{x'_1x_3''-x_3''x'_3}{x'_3}x_3=0$$

სახეს, ანუ არაერთგვაროვან კოორდინატებში

$$-x_3''x+x_1''y+\frac{x'_1x_3''-x_1''x'_3}{x'_3}=0.$$

ეს, ცხადია, $M'$ წერტილზე გამავალი და $(x_1'', x_3'')$ ვექტორის პარალელური წრფის განტოლებაა. ეს მოსალოდნელიც იყო, რადგან $(x_1'', x_3'', 0)$ არასაკუთრივ წერტილზე გამავალი წრფე $(x_1'', x_3'')$ ვექტორის პარალელურია.

თუ $M'$ და $M''$ ორივე წერტილი არასაკუთრივია ($x'_3=x_3''=0$), მაშინ (10) განტოლება მიიღებს

$$(x'_1x_3''-x''x'_3)x_3=0,$$

სახეს, ე. ი.

$$x_3=0,$$

მაშასადამე, როგორც მოსალოდნელი იყო, საძიებელი წრფე არასაკუთრივია (სათანადო წრფე შეიძლება შეიცავდეს მხოლოდ ერთ არასაკუთრივ წერტილს).

2. გამოვარკვიოთ (16) პირობის აზრი, როცა (15) წრფეებიდან ერთ-ერთი არასაკუთრივია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ, მაგალითად, (15) წრფეებიდან არასაკუთრივია მესამე, ე. ი. $a_1''=0$, $a_2''=0$, $a_3''\neq 0$. მაშინ (16) პირობა გვაძლევს:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ 0 & 0 & a_3'' \end{vmatrix} = a_3''(a_1a'_2-a'_1a_2)=0,$$

ანუ

$$a_1a'_2-a'_1a_2=0,$$

ე. ი. პირველი ორი წრფის პარალელობის პირობას, როგორც ეს მოსალოდნელი იყო.

**§ 167. წრფის პარამეტრული წარმოდგენა სიბრტყეზე ერთგვაროვან კოორდინატებში.** წრფე სიბრტყეზე ადვილად შეიძლება წარმოვიდგინოთ პარამეტრულად ერთგვაროვან კოორდინატებში. განვსაზღვროთ მოცემული წრფის მდებარეობა მისი რომელიმე ორი სხვადასხვა $M'(x'_1, x'_2, x'_3)$ და $M''(x_1'', x_2'', x_3'')$ წერტილით. ამ წრფის ნებისმიერი $M(x_1, x_2, x_3)$ წერტილის კოორდინატები ხასიათდება წინა პარაგრაფის (10) პირობით, რომელიც, ჩვენს შემთხვევაში, შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ;

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \end{matrix} \qquad (1)$$

ცხრილის რანგი ორის ტოლია (ის არ შეიძლება იყოს 2-ზე ნაკლები, ვინაიდან ორ უკანასკნელ სტრიქონიდან შედგენილი ცხრილის რანგი ორის ტოლია; ეს იქიდან გამომდინარეობს, რომ $M'$ და $M''$ წერტილები სხვადასხვაა).

მაშასადამე, პირველი სტრიქონი ორი უკანასკნელის წრფივ კომბინაციას წარმოადგენს ე. ი.[1])

$$x_1=\lambda x'_1+\mu x_1'',\ x_2=\lambda x'_2+\mu x_2'',\ x_3=\lambda x'_3+\mu x_3'', \tag{2}$$

სადაც $\lambda$, $\mu$ რიცხვებია, რომლებიც ერთდროულად არაა ნულის ტოლი (ვინაიდან $x_1$, $x_2$, $x_3$ ერთდროულად არაა ნულის ტოლი).

თუ $x_1$, $x_2$, $x_3$ რიცხვები[2]) მოცემულია, მაშინ $\lambda$ და $\mu$ სავსებით განსაზღვრულია[3]). მართლაც, $x'_ix'_j-x_i''x_j''$ ($i, j=1, 2, 3$) დეტერმინანტთა შორის ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან. ვთქვათ, ესაა, მაგალითად, $x'_1x_2''-x_1''x'_2$ დეტერმინანტი. თუ ამოვხსნით (2)-დან პირველ ორ განტოლებას $\lambda$ და $\mu$-ს მიმართ, მივიღებთ მათთვის შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$\lambda=\alpha x_1+\beta x_2,\ \mu=\gamma x_1+\delta x_2 \tag{3}$$

სადაც $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ სავსებით განსაზღვრული სიდიდეებია (მკითხველს ვანდობთ მათ გამოსახულებათა შედგენას). (1)-ში $\lambda$ და $\mu$-ს ცვალებადობით შეიძლება მივიღოთ განსახილველი წრფის ყველა წერტილი, არასაკუთრივი წერტილის ჩათვლითაც. როცა $\lambda=0$, მივიღებთ $M'$ წერტილს, ხოლო როცა $\mu=0-M'$ წერტილს; თუ $\lambda$ და $\mu$ ისეთია, რომ $\alpha x'_3+\mu x_3''=0$, მაშინ $x_3=0$ და ჩვენ მივიღებთ ჩვენი წრფის არასაკუთრივ წერტილს.

წერტილის მდებარეობაზე გავლენას ახდენს არა თვით $\lambda$ და $\mu$ რიცხვები, არამედ მათი ფარდობა $\frac{\lambda}{\mu}$ ან $\frac{\mu}{\lambda}$. მართლაც, დროებით მივიღოთ, $\mu\neq0$, ე. ი. $M$ წერტილი არ ემთხვევა $M'$ წერტილს, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია (2) განტოლება შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$x_1=\mu(hx'_1+x_1''),\ x_2=\mu(hx'_2+x_2''),\ x_3=\mu(hx'_3+x_3''), \tag{4}$$

სადაც

$$h=\frac{\lambda}{\mu}.$$

რადგანაც ერთგვაროვანი კოორდინატების გამრავლება ერთსა და იმავე რიცხვზე არ შეცვლის წერტილის მდებარეობას, ამიტომ წინა ფორმულებში შესაძლებელია $\mu$ მამრავლის მოცილება და მათი შემდეგნაირად გადაწერა:

$$x_1=hx'_1+x_1'',\ x_2=hx'_2+x_2'',\ x_3=hx'_3+x_3'', \tag{4a}$$

საიდანაც ჩანს, რომ $M$ წერტილის მდებარეობა დამოკიდებულია მხოლოდ $h$ ფარდობაზე. (4a)-დან გამომდინარეობს, რომ $h$-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება წრფის ერთი საესებით გარკვეული წერტილი.

---

[1]) იხ. დამატება, § 5, შედეგი.

[2]) რა თქმა უნდა იგულისხმება, ეს რიცხვები ისეთია, რომ (1) ცხრილის რანგი სამზე ნაკლებია (და, მაშასადამე, ორის ტოლია).

[3]) ეს ავრეთვე გამომდინარეობს დამატებაში ნათქვამიდან (§ 5, შედეგი). მაგრამ, მეტი სიცხადისათვის, ჩვენ მოგვყავს დამტკიცება უშუალოდ ჩვენი კერძო შემთხვევისათვის.

ადვილი შესამჩნევია, რომ პირიქით, წრფის ყოველ წერტილს შეესაბამება $h$-ის ერთი გარკვეული მნიშვნელობა (დროებით გამოვრიცხავთ $M'$ წერტილს). მართლაც, ვთქვათ, $M(x_1, x_2, x_3)$ ნებისმიერი წერტილია ჩვენი წრფისა. მაშინ იმავე წერტილის ყოველი სხვა ერთგვაროვანი კოორდინატები (კოორდინატთა იმავე სისტემის მიმართ) მიიღება $x_1$, $x_2$, $x_3$ სიდიდეებიდან, მათი გამრავლებით ნებისმიერ $k$ მამრავლზე, რომელიც განსხვავდება ნულისაგან; მაგრამ მაშინ $\lambda$ და $\mu$ გამრავლდება იმავე მამრავლზე, როგორც ეს გამომდინარეობს (3)-დან; მაშასადამე, $\frac{\lambda}{\mu} = h$ ფარდობა უცვლელია ერთსა და იმავე წერტილისათვის.

ჩვენ დროებით გამოვრიცხეთ შემთხვევა $\mu = 0$, ე. ი. $h = \infty$. ახლა შევთანხმდეთ (4a)-ში $h$ პარამეტრს მივანიჭოთ ზგრეთვე $\infty$ მნიშვნელობა; მასთან, ეს ასე უნდა გვესმოდეს, რომ მაშინ (2) ფორმულაში $\mu = 0$. ამგვარად, $h = \infty$ მნიშვნელობას შეესაბამება $M'$ წერტილი და, პირიქით.

ამგვარად, ჩვენ შეგვიძლია შემდეგი გამოვთქვათ: თუ $h = \frac{\lambda}{\mu}$ მივანიჭებთ ყველა შესაძლო მნიშვნელობას $\infty$-ის ჩათვლით, მივიღებთ ჩვენი წრფის ყველა წერტილს; ამასთან, წრფის ყოველ წერტილს შეესაბამება $h$-ის ერთი მნიშვნელობა და, პირიქით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. (4a) ფორმულიდან ადვილი მისაღებია წრფის პარამეტრული წარმოდგენა, რომელიც ჩვენ ზემოთ ბივიღეთ. სახელდობრ, $M'$ წერტილად ავიღოთ ჩვენი წრფის არასაკუთრივი წერტილი, ე. ი. დავუშვათ $x'_3 = 0$; მაშინ $(X, Y)$ ვექტორი, სადაც $X = x'_1$, $Y = x'_2$ არის ჩვენი წრფის მიმართულების ვექტორი. (4a) ფორმულები გვაძლევს: $x_1 = x_1'' + hX$, $x_2 = x_2'' + hY$, $x_3 = x_3''$ თუ გადავალთ $M$ წერტილის არაერთგვაროვან კოორდინატებზე: $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ და $M''$ წერტილისა: $x_0 = \frac{x_1''}{x_3''}$, $y = \frac{x_2''}{x_3''}$, მივიღებთ

$$x = x_0 + hX, \quad y = y_0 + hY, \tag{5}$$

ე. ი. § 88-ის ფორმულებს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. ჩვენ გამოვიყვანეთ § 41-ში (2a) ფორმულები, რომლებსაც ახლა შემდეგნაირად დავწერთ:

$$x = \frac{x' + mx''}{1 + m}, \quad y = \frac{y' + my''}{1 + m}, \tag{6}$$

სადაც $x$, $y$ გამოსახავს იმ $M$ წერტილის კოორდინატებს, რომლებიც ყოფს $M'$ $M''$ მონაკვეთს $m$ ფარდობით. აქ $M'$ და $M''$ საკუთრივი წერტილებია $(x', y')$, $(x'', y'')$ კოორდინატებით. ეს ფორმულები შეიძლება გაგვიხილოთ, როგორც $M'$ და $M''$ წერტილებზე გამავალი წრფის პარამეტრული წარმოდგენა; აქ პარამეტრს $m$ წარმოადგენს. როცა $m = -1$ მივიღებთ აოსაკუთრივ წერტილს, როცა $m = 0$ — წერტილს $M'$, როცა $m = \infty$ — წერტილს $M''$. ეს ფორმულები ადვილი მისაღებია (5) ფორმულიდან.

მართლაც, თუ $M'$ და $M''$ საკუთრივი წერტილებია, შეიძლება მივიღოთ $x'_3 = x_3'' = 1$. მაშინ $x'_1 = x'$, $x'_2 = y'$ და $x_1'' = x''$, $x_2'' = y''$; $M'$ და $M''$ წერტილთა არაერთგვაროვანი კოორდინატებია. თუ გავყოფთ წეერობრივ (2)-ის პირველ ორ განტოლებას მესამეზე და დავუშვებთ

$$\frac{x_1}{x_3} = x, \quad \frac{x_2}{x_3} = y,$$

მივიღებთ:

$$x=\frac{\lambda x'+\mu x''}{\lambda+\mu},\quad y=\frac{\lambda y'+\mu y''}{\lambda+\mu} \tag{6a}$$

საიდანაც, მრიცხველისა და მნიშვნელის λ-ზე გაყოფით, მივიღებთ (6).

**§ 168. დეკარტის ერთგვაროვანი კოორდინატები სივრცეში.** წინა მოსაზრებათა განზოგადება სივრცის შემთხვევაში არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს.

ვთქვათ, $M(x, y, z)$ სივრცის წერტილია. შევიტანოთ $x$, $y$, $z$-ის ნაცვლად ოთხი $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ სიდიდე, რომლებიც ერთდროულად არაა ნულის ტოლი და $x$, $y$, $z$-თან დაკავშირებულია

$$x=\frac{x_1}{x_4},\quad y=\frac{x_2}{x_4},\quad z=\frac{x_3}{x_4} \tag{1}$$

დამოკიდებულებებით.

$x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ რიცხვებს ეწოდება $M$ წერტილის დეკარტის ერთგვაროვანი კოორდინატები, რომელიც ამასთანავე, აღინიშნება ასე: $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$. წერტილის მდებარეობაზე გაელენას ახდენს არა თვით ერთგვაროვანი კოორდინატები, არამედ მათგან სამის ეროთხესთან შეფარდება. სივრცის ჩვეულებრივ (საკუთრივ) წერტილებისათვის უნდა იყოს $x_4 \neq 0$. თუ განვიხილავთ აგრეთვე $x_4=0$ მნიშვნელობასაც, ჩვენ განვაზოგადებთ წერტილის ცნებას, თუ შეკთანხმდებით, რომ $(x_1, x_2, x_3, 0)$ რიცხვთა ერთობლიობა გამოსახავს არასაკუთრივ ანუ უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს. ჩვენ ვიტყვით, რომ ეს წერტილი უსასრულოდ დაშორებულია

$$\vec{P}=(X, Y, Z)$$

ვექტორის მიმართულებით, სადაც $X=\lambda x_1$, $Y=\lambda x_2$, $Z=\lambda x_3$, ხოლო λ ნებისმიერი რიცხვია (მაგრამ არა ნული), მაგალითად, $\pm 1$.

$\vec{P}=(X, Y, Z)$ ვექტორის პარალელური ყველა წრფე შეიცავს ერთსა და იმავე უსასრულოდ დაშორებულ $M_0(X, Y, Z)$ წერტილს; იხ. ნათქვამი 165, 165 § ებში.

სიბრტყის განტოლება

$$a_1x+a_2y+a_3z+a_4=0 \tag{2}$$

ერთგვაროვან კოორდინატებში იქნება

$$f\equiv a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0. \tag{3}$$

ვიგულისხმოთ, რომ განტოლებას აზრი აქვს იმ შემთხვევაშიაც, როცა $a_1=a_2=a_3=0$. თუ $a_4$ აგრეთვე ნულის ტოლია, ჩვენ მივიღებთ იგივურ განტოლებას $0=0$, რომელსაც სივრცის ყველა წერტილი აკმაყოფილებს. ეს შემთხვევა საინტერესო არ არის; მაგრამ ხანდახან მას განხილვასაც აქვს აზრი („განუზღვრელ სიბრტყეს“).

შემდეგში ყველგან, თუ წინააღმდეგი არ იქნება ნათქვამი, ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $a_1, a_2, a_3, a_4$ ერთდროულად ნულს არ უდრიან თუ $a_1=a_2=a_3=0$ და, მაშასადამე, $a_4 \neq 0$ (3) განტოლება მოგვცემს

$$a_4 x_4=0, \quad \text{ანუ} \quad x_4=0,$$

ე. ი. კმაყოფილდება მხოლოდ არასაკუთრივი წერტილებით. ჩვენ ვიტყვით, რომ ის გამოსახავს არასაკუთრივ ანუ უსასრულოდ დაშორებულ სიბრტყეს. ამგვარად, ჩვენი პირობის თანახმად, სივრცის არასაკუთრივ წერტილთა ერთობლიობა შეადგენს ერთ არასაკუთრივ სიბრტყეს.

ორი

$$f_1 \equiv a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 + a'_4 x_4 = 0 \tag{4}$$

და

$$f_2 \equiv a_1'' x_1 + a_2'' x_2 + a_3'' x_3 + a_4'' x_4 = 0 \tag{5}$$

სიბრტყე თანხვედილია (ე. ი. ისეთი, რომ ყველა წერტილი ერთისა მეორესაც ეკუთვნის) მხოლოდ მაშინ, როცა $f_1$ და $f_2$ ფორმები წრფივად დამოკიდებულია, ე. ი., როცა ერთის კოეფიციენტები მეორის კოეფიციენტების პროპორციულია.

ვთქვათ, (4) და (5) რომელიმე არათანხვედილი სიბრტყეებია.

წერტილთა ერთობლიობა, რომლებიც ეკუთვნის ორივე სიბრტყეს, არის წრფე, თუ ორივე სიბრტყე საკუთრივია და არაპარაბოლური.

თუ ერთი მათგანი არის არასაკუთრივი სიბრტყე, მაგალითად, თუ $a_1''=a_2''=a_3''=0$, $a_4'' \neq 0$, მაშინ წინა განტოლებანი დაიყვანება შემდეგზე:

$$a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 + a'_4 x_4 = 0, \quad x_4 = 0.$$

ჩვენ მაინც ვიტყვით, რომ ეს განტოლებანი გამოსახავს (4) სიბრტყისა და არასაკუთრივ სიბრტყის გადაკვეთის წრფეს; ეს წრფე წარმოადგენს (5) სიბრტყის არასაკუთრივ წერტილთა ერთობლიობას და ეწოდება არასაკუთრივი ანუ უსასრულოდ დაშორებული წრფე ამ სიბრტყისა. ეს სავსებით ეთანხმება § 165 მიღებულ პირობებს, რომ სიბრტყის არასაკუთრივ წერტილთა ერთობლიობა შეადგენს მოცემული სიბრტყის ერთ (არასაკუთრივ) წრფეს.

(4) სიბრტყის $(x_1, x_2, x_3, 0)$ არასაკუთრივ წერტილთა ერთობლიობა განისაზღვრება

$$a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 = 0, \quad x_4 = 0$$

პირობებით.

ნებისმიერი

$$a_1'' x_1 + a_2'' x_2 + a_3'' x_3 + a_4'' x_4 = 0$$

სიბრტყის წერტილთა ერთობლიობა, რომელიც მოცემულის პარალელურია, ცხადია პირობებიდან განისაზღვრება:

$$a_1'' x_1 + a_2'' x_2 + a_3'' x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

ეს არასაკუთრივი წერტილები ერთი და იგივეა ორივე პარალელურ სიბრტყისათვის, ვინაიდან, პარალელობის ძალით, $a_1'', a_2'', a_3''$ კოეფიციენტები $a'_1, a'_2, a'_3$ კოეფიციენტების პროპორციულია და, მაშასადამე,

$$a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 = 0, \quad a_1'' x_1 + a_2'' x_2 + a_3'' x_3 = 0$$

განტოლებანი ეკვივალენტურია.

მაშასადამე, ორ პარალელურ სიბრტყეს აქვს საერთო არასაკუთრივი წრფე.

ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ **ყოველი ორი არათანხვედნილი სიბრტყე განსაზღვრავს მხოლოდ და მხოლოდ ერთ წრფეს** (საკუთრივს ან არასაკუთრივს).

ახლა ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ნებისმიერ ორ (საკუთრივ ან არასაკუთრივ) წერტილზე გადის მხოლოდ და მხოლოდ ერთი (საკუთრივი ან არასაკუთრივი) წრფე. ვთქვათ, მართლაც, $M'(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$ და $M''(x_1'', x_2'', x_3'', x_4'')$ ორი სხვადასხვა წერტილია. მოვეძებნოთ ჯერ ყველა სიბრტყე, რომლებიც ამ ორ წერტილზე გადის. იმისათვის, რომ სიბრტყე

$$f \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

$M'$ და $M''$ წერტილზე გადიოდეს, მისი განტოლების კოეფიციენტები უნდა აკმაყოფილებდეს ორ პირობას:

$$\left.\begin{aligned} a_1 x'_1 + a_2 x'_2 + a_3 x'_3 + a_4 x'_4 &= 0, \\ a_1 x_1'' + a_2 x_2'' + a_3 x_3'' + a_4 x_4'' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ამ სისტემის კოეფიციენტთა

$$\begin{matrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \end{matrix}$$

ცხრილის რანგი ორის ტოლია, ვინაიდან $M'$ და $M''$ წერტილები არათანხვედნილია [1]). მაშასადამე, (6) გვაძლევს ორ დამოუკიდებელ ამონახსნს [2]), რომლებსაც ჩვენ ასე აღვნიშნავთ:

$$\begin{matrix} a'_1, & a'_2, & a'_3, & a'_4, \\ a_1'', & a_2'', & a_3'', & a_4''. \end{matrix}$$

(6) სისტემის ყოველი ამონახსნი იქნება ამ ამონახსნთა წრფივი კომბინაცია, ე. ი.:

$$\left.\begin{aligned} a_1 = \lambda a'_1 + \mu a_1'', \quad a_2 = \lambda a'_2 + \mu a_2'', \\ a_3 = \lambda a'_3 + \mu a_3'', \quad a_4 = \lambda a'_4 + \mu a_4'' \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

[1]) იხ. დამატება, § 6.

[2]) იხ. ანალოგიური მტკიცება სიბრტყეზე წერტილთა შესახებ (§ 166).

(სადაც λ, μ ერთდროულად ნული არაა) და, მაშასადამე, საძიებელი სიბრტყის განტოლება იქნება:

$$f \equiv (\lambda a'_1 + \mu a_1'')\, x_1 + (\lambda a'_2 + \mu a_2'')\, x_2 + (\lambda a'_3 + \mu a_3'')\, x_3 + \\ + (\lambda a'_4 + \mu a_4'')\, x_4 = 0$$

ანუ

$$\lambda f_1 + \mu f_2 = 0, \tag{8}$$

სადაც, წინანდებურად,

$$f_1 \equiv a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 + a'_4 x_4, \quad f_2 \equiv a_1'' x_1 + a_2'' x_2 + a_3'' x_3 + a_4'' x_4.$$

თუ შევცვლით λ და μ ჩვენ მივიღებთ ყველა შესაძლო სიბრტყეს, რომლებიც გადის $M'$ და $M''$ წერტილზე. ჩვენ ვხედავთ, რომ ყველა ეს სიბრტყე გადის

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0 \tag{9}$$

სიბრტყეთა გადაკვეთაზე. სწორედ ეს გადაკვეთა განსაზღვრავს ორ $M'$ და $M''$ წერტილზე გამავალ წრფეს და ამასთან, როგორც ნათქვამიდან გამომდინარეობს, ერთადერთი სახით.

საზოგადოდ იმისათვის, რომ სამი სიბრტყე

$$f = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0$$

იკვეთებოდნენ ერთი საკუთრივი ან არასაკუთრივი წრფის გასწვრივ აუცილებელი და საკმარისია, რომ $f$, $f_1$, $f_2$ ფორმები წრფივად დამოუკიდებელი [1]) იყვნენ, ე. ი. რომ ადგილი ჰქონდეს

$$kf + k_1 f_1 + k_2 f_2 = 0 \tag{10}$$

იგივობას, სადაც $k$, $k_1$, $k_2$ მუდმივებია, რომლებიც ერთდროულად ნულს არ უდრიან. ამისათვის კი, თავის მხრით, აუცილებელი და საკმარისია, რომ

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a_1'' & a_2'' & a_2'' \end{matrix} \tag{11}$$

ცხრილის რანგი სამზე ნაკლები იყოს (იხ. დამატება, § 5).

თუ $f_1 = 0$ და $f_2 = 0$ სიბრტყეები ერთმანეთისაგან განსხვავებულია, ხოლო $f = 0$ სიბრტყე გადის მათი გადაკვეთის წრფეზე, მაშინ (11) ცხრილის რანგი უდრის ორს, რადგანაც ორი უკანასკნელი სტრიქონისაგან შედგენილი ცხრილის რანგი უდრის ორს (წინააღმდეგ შემთხვევაში $f_1 = 0$ და $f_2 = 0$ სიბრტყეები თანხვედნილი იქნებოდნენ).

[1]) თუ $f = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ სიბრტყეები თანხვედნილია, მაშინ ყოველი ამ განტოლებათაგანი არის შედეგი ყოველი სხვა იმათგანისა. თუკი, მ გალითად, ორი უკანასკნელი სიბრტყე სხვადასხვაა მაშინ $f = 0$ არის შედეგი ორი დანარჩენის (რადგანაც კმაყოფილდება $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ ცვლადების იმ მნიშვნელობებით, რომლებიც აკმაყოფილებენ $f_1 = 0$ და $f_2 = 0$ განტოლებებს). მაშასადამე (დამატება, § 8, შედეგი), $f$ ფორმა აღის $f_1$ და $f_2$ ფორმების წრფივი კომბინაციაა.

ამიტომ (11) ცხრილის პირველი სტრიქონი არის ორი უკანასკნელის წრფივი კომბინაცია (იხ. დამატება, § 5, შედეგი), ე. ი.

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \lambda a'_1 + \mu a_1'', & a_2 &= \lambda a'_2 + \mu a_2'', \\ a_3 &= \lambda a'_3 + \mu a_3'', & a_4 &= \lambda a'_4 + \mu a_4'', \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

სადაც λ და μ რაიმე რიცხვებია, რომლებიც ერთდროულად არ უდრიან ნულს. უკანასკნელი ტოლობები იძლევიან ორი არათანხვედნილი სიბრტყის გადაკვეთის წრფეზე გამავალი სიბრტყის განტოლების კოეფიციენტების ზოგად წარმოდგენას.

უბდგილო არ იქნება, თუ მიღებულ შედეგს დაეუპირისპირებთ შემდეგ დებულებას: იმისათვის, რომ სამი

$$M(x_1, x_2, x_3, x_4),\ M'(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4),\ M''(x_1'', x_2'', x_3'', x_4'')$$

წერტილი კოლინეარული იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ x'_1, & x'_2, & x'_3, & x', \\ x_1'', & x_2'', & x_3'', & x_4'' \end{matrix} \tag{13}$$

ცხრილის რანგი ნაკლები იყოს სამზე.

მართლაც, იმისათვის, რომ დასახელებული წერტილები კოლინეარული იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ არსებობდეს ორი სხვადასხვა სიბრტყე, რომლებიც გადის ყველა სამ წერტილში. ნებისმიერი სიბრტყის განტოლების $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ კოეფიციენტები, რომლებიც გაიელიან ჩვენს წერტილებში, უნდა აკმაყოფილებდნენ სამ განტოლებას:

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 &= 0, \\ a_1 x'_1 + a_2 x'_2 + a_3 x'_3 + a_4 x'_4 &= 0, \\ a_1 x''_1 + a_2 x_2'' + a_3 x_3'' + a_4 x_4'' &= 0. \end{aligned}$$

თუ (13) ცხრილის რანგი სამის ტოლია, მაშინ წინა სისტემას აქვს მხოლოდ ერთი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი[1]) და, მაშასადამე განსაზღვრავს მხოლოდ ერთ სიბრტყეს. მაშასადამე, (13) ცხრილის რანგი უნდა იყოს სამზე ნაკლები. პირიქით, თუ ამ ცხრილის რანგი სამზე ნაკლებია, მაშინ სისტემა, უკიდურეს შემთხვევაში, გვაძლევს ორ წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნს და ჩვენი წერტილები კოლინეარულია.

ბოლოს, გამოვარკვიოთ იმის პირობა, რომ ოთხი სიბრტყე

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ f_3 = 0,\ f_4 = 0 \tag{13}$$

ერთ შეკვრას ეკუთვნოდეს, ე. ი. ჰქონდეს (საკუთრივი ანუ არასაკუთრივი) წერტილი. იმისათვის, რომ (14) განტოლებებს ჰქონდეს ნულიდან გან-

[1]) იხ. დამატება, § 6.

სხვაებული ამონახსნები, აუცილებელი და საკმარისია, რომ $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$ ფორმათა კოეფიციენტებისაგან შედგენილი

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 \\ a_1'' & a_2'' & a_3'' & a_4'' \\ a_1''' & a_2''' & a_3''' & a_4''' \end{vmatrix} \tag{15}$$

დეტერმინანტი იყოს ნულის ტოლი. ეს პირობა ეკვივალენტურია შემდეგის: $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$ ფორმები უნდა იყოს წრფივად დამოკიდებული, ე. ი. ადგილი უნდა ჰქონდეს

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0 \tag{16}$$

იგივობას ($x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ ცვლადთა მიმართ), სადაც $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$ რაიმე რიცხვებია, რომლებიდანაც ყველა არაა ნულის ტოლი. ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ, უფრო ზოგადი სახით, § 146-ში ნაჩვენები შედეგები.

აღვნიშნოთ, კიდევ ოთხი $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $M'(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$, $M''(x_1'', x_2'', x_3'', x_4'')$, $M'''(x_1''', x_2''', x_3''', x_4''')$ წერტილის კომპლანარობის პირობა, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \end{vmatrix} = 0 \tag{17}$$

და რომელიც მტკიცდება სავსებით წინანდელის ანალოგიურად (შეად. სამი წერტილის კომპლანარობის პირობა სიბრტყეზე § 166-ში).

**§ 169. წრფის პარამეტრული წარმოდგენა სივრცეში.** ვთქვათ, განსახილველი წრფე მოცემულია თავისი ორი (სხვადასხვა) $M'$ და $M''$ წერტილით. წრფის ყოველი სხვა $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ წერტილი უნდა იყ[illegible]ოლინეარული $M'$ და $M''$ წერტილებთან და, მაშასადამე, წინა პარაგრაფ[illegible] ცხრილის რანგი უნდა იყოს სამზე ნაკლები; მაგრამ ორ უკანასკნელ სტრიქონ[illegible]ნ შედგენილი ცხრილის რანგი ორის ტოლია, ვინაიდან $M'$ და $M''$ წერტილები სხვადასხვაა. ამგვარად [1]), პირველი სტრიქონი არის დანარჩენების წრფივი კომბინაციაა:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \lambda x'_1 + \mu x_1'', & x_2 &= \lambda x'_2 + \mu x_2'', \\ x_3 &= \lambda x'_3 + \mu x_3'', & x_4 &= \lambda x'_4 + \mu x_4'', \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

სადაც $\lambda$ და $\mu$ ნებისმიერი რიცხვებია, რომლებიც ერთდროულად ნულს არ უდრიან. თუ მივანიჭებთ მათ ყველა შესაძლო მნიშვნელობას (გარდა $\lambda = \mu = 0$ მნიშვნელობისა), მივიღებთ წრფის ყველა წერტილს. ამიტომ შეიძლება გავა-

[1]) იხ. დამატება, § 5. შედეგი.

კეთოთ იგივე დასკვნები, რაც § 167-ში. კერძოდ, წერტილის მდებარეობა წრფეზე სავსებით განისაზღვრება

$$h=\frac{\lambda}{\mu}$$

ფარდობის მნიშვნელობით, პირიქით, $h$-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება წრფის მხოლოდ და მხოლოდ ერთი წერტილი; $h=\infty$ მნიშვნელობა არ გამოირიცხება.

**§ 170. წრფის კოორდინატები სიბრტყეზე. ურთიერთობა წერტილთა და წრფეთა შორის.** შემოვიღოთ ზოგიერთი ახალი ცნება. სიმარტივისათვის დავიწყოთ ორი განზომილების შემთხვევით. როგორც ცნობილია, წერტილის მდებარეობა სიბრტყეზე სავსებით განისაზღვრება სამი მისი ერთგვაროვან $x_1$, $x_2$, $x_3$ კოორდინატთა ფარდობებით. წრფის მდებარეობა კი სავსებით განისაზღვრება ამ წრფის

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0 \tag{1}$$

განტოლების $a_1$, $a_2$, $a_3$ კოეფიციენტთა ფარდობებით. ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია $a_1$, $a_2$, $a_3$ სიდიდეებს ვუწოდოთ წრფის ერთგვაროვანი დეკარტის კოორდინატები, ვინაიდან კოორდინატთა ქვეშ ჩვენ გვესმის სიდიდეები, რომლებიც განსაზღვრავენ მოცემულ სახეობას (ერთგვაროვანი კოორდინატების შემთხვევაში მნიშვნელობა აქვს მხოლოდ მათ ფარდობას). აგრეთვე, როგორც ჩვენ ვლაპარაკობთ $M(x_1, x_2, x_3)$ წერტილის შესახებ, ასევე შეიძლება ვილაპარაკოთ $\Delta(a_1, a_2, a_3)$ წრფის შესახებ.

თუ (1) განტოლებაში $x_1$, $x_2$, $x_3$—მივიღებთ მუდმივებად, ხოლო $a_1$, $a_2$, $a_3$—ცვლადებად, მაშინ ეს განტოლება გვაძლევს წრფეთა ერთობლიობას, რომლებიც გადის $(x_1, x_2, x_3)$ წერტილზე და, ამგვარად, განსაზღვრავს $(x_1, x_2, x_3)$ წერტილს, როგორც წრფეთა კონის ცენტრს. ამიტომ (1) განტოლებას, როცა $x_1$, $x_2$, $x_3$ მუდმივებია, ეწოდება წერტილის განტოლება წრფის კოორდინატებში.

წრფის ერთგვაროვანი კოორდინატების ნაცვლად, შეიძლება განვიხილოთ არაერთგვაროვანიც. უპირველესად შემოვიტანოთ არაერთგვაროვანი კოორდინატები $\left(x=\frac{x_1}{x_3},\ y=\frac{x_2}{x_3}\right)$ და გადავწეროთ (1) განტოლება

$$a_1x+a_2y+a_3=0.$$

ახლა გავყოთ ორივე ნაწილი $a_3$ ზე (ვგულისხმობთ, რომ $a_3\neq 0$) და დავუშვათ,

$$\frac{a_1}{a_3}=u,\qquad \frac{a_2}{a_3}=v: \tag{2}$$

მაშინ გვექნება:

$$ux+vy+1=0. \tag{3}$$

*u* და *v* სიდიდეებს წრფის დეკარტის არაერთგვაროვანი კოორდინატები ეწოდება.[1]) არაერთგვაროვანი კოორდინატები მოუხერხებელია, იმით, რომ ისინი არ გვაძლევენ საშუალებას გამოვსახოთ ყოველი წრფე, სახელდობრ, თუ განვიხილავთ *u* და *v* მხოლოდ სასრულ მნიშვნელობებს, (3) განტოლება გამოსახავს წრფეებს, რომლებიც არ გადიან კოორდინატთა სათაეში.

ჩვენ ვხედავთ, რომ (1) ანუ (3) განტოლება, რომელიც გამოსახავს, რომ $M(x_1, x_2, x_3)$ წერტილი და $\Delta(a_1, a_2, a_3)$ წრფე შეთავსებულია[2]) სავსებით სიმეტრიულია წერტილისა და წრფის კოორდინატთა მიმართ.

ამ სრული სიმეტრიულობის შედეგს წარმოადგენს ის, რომ ყოველ დებულებას, რომელიც (1) ან (3) განტოლებიდან ან ასეთ განტოლებათა სისტემიდან გამოიდინარეობს შეესაბამება „ურთიერთი" დებულება, რომელიც მიიღება სიტყვა „წერტილის" შეკვეთი სიტყვა „წრფეთი" და პირიქით. ეს—ეგრეთ წოდებული ურთიერთობის ანუ ორმაგობის პრინციპია წერტილთა და წრფეთათვის სიბრტყეზე.

ჩვენ არ შევეხებით აქ ამ პრინციპის დაფუძნებას, რომელიც დიდ როლს ასრულებს გეგმილურ გეომეტრიაში[3]), მაგრამ ჩვენ შემდეგში ხოკჯერ გამოვიყენებთ ურთიერთობის თვისებას, როგორც სხვადასხვა გეომეტრიულ კონფიგურაციათა კლასიფიკაციისა და შედარების მოხერხებულ საშუალებას. ჩვენ ქვემოთ მოგვყავს მაგალითები ასეთი დაპირისპირების შესახებ; წინასწარ შევნიშნოთ შემდეგი. წრფეები და წერტილები სიბრტყეზე შეიძლება განვიხილოთ ორი სხვადასხვა თვალსაზრისით. პირველი მეთოდით განხილვისას, ძირითად გეომეტრიულ ელემენტებს წარმოადგენენ წერტილები, წრფე კი განიხილება, როგორც მასთან შეთავსებული (მასზე მდებარე) წერტილთა „მატარებელი"; წრფეზე მდებარე წერტილები შეადგენს „წერტილთა წრფივ მწკრივს". მეორე მეთოდით განხილვისას, ძირითად ელემენტს წრფე წარმოადგენს, წერტილები კი განიხილება, როგორც მასთან შეთავსებულ (მასზე გამავალ) წრფეთა „მატარებელი". წერტილზე გამავალი წრფეები შეადგენენ კონას. მაშასადამე, წერტილთა წრფივ მწკრივთან ურთიერთობაშია წრფეთა კონა. წრფეს ყოგორც წერტილთა მატარებელს, შეესაბამება ურთიერთობის თვალსაზრისით წერტილი (კონის ცენტრი), როგორც წრფეთა მატარე-

---

[1]) წრფის კოორდინატებს როგორც ერთგვაროვანს, ისე არაერთგვაროვანსაც, აგრეთვე უწოდებენ პლიუკერის კოორდინატებს (გერმანელი მათემატიკოსის J. Plücker-ის მიხედვით) ან ტანგენციალურ (მხებით) კოორდინატებს; ამ უკანასკნელი სახელწოდების წარმოშობა ცხადი იქნება შემდგომიდან (იხ. § 224 და შემდეგი)

სახელწოდებას „წრფის დეკარტის კოორდინატები" ჩვენ ვხმარობთ ნახლოდ იმიტომ, რომ ეს კოორდინატები დაკავშირებულია დეკარტის სისტემასთან (წრფის კოორდინატები შემოტანილ იქნა დეკარტზე ბევრად გვიან).

[2]) ჩვენ გამოვიყენებთ ხოგჯერ ამ ტერმინს იმ მნიშვნელობით, რომ $M$ წერტილი იმყოფება $\Delta$ წრფეზე ანუ, რომ $\Delta$ წრფე გადის $M$ წერტილზე; ტერმინის მიზანია—შეიტანოს სიმეტრია აგრეთვე სიტყვიერ გამოთქმებში. ამ მიზნით იხმარება აგრეთვე ტერმინი „ინცინდენტობა" (წრფე და წერტილი „ინცინდენტურია", თუ წერტილი წრფეზე ძევს).

[3]) ურთიერთობის პრინციპის დაფუძნება შეიძლება ანალიზური გეომეტრიის აპარატის სარგებლობის გარეშეც. ასეთი დაფუძნება მდგომარეობს გეომეტრიულ აქსიომათა ანალიზსა და იმ გეომეტრიულ კონფიგურაციათა გამოყოფაში, რომლებიც ეყრდნობა მხოლოდ ისეთ აქსიომებს, რომლებშიაც ტერმინები „წერტილი" და „წრფე" სიმეტრიულად შედის. ცხადია, რომ ამ გეომეტრიულ კონფიგურაციებისათვის ადგილი აქვს ურთიერთობის პრინციპს.

ბელი. ნათქვამის შესაბამისად სიბრტყეც განიხილება ორი სხვადასხვა თვალსაზრისით: სიბრტყე, როგორც წერტილთა მატარებელი და სიბრტყე, როგორც წრფეთა მატარებელი.

ახლა გადავიდეთ საურთიერთო თვისებათა მაგალითებზე [1].

1. სამი $x_1, x_2, x_3$ რიცხვი, რომლებიც ერთდროულად არ არის ნულის ტოლი, განსაზღვრავს წერტილს სიბრტყეზე. ორი $(x_1, x_2, x_3)$ და $(x'_1, x'_2, x'_3)$ წერტილი თანხვედილია მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ x'_1, & x'_2, & x'_3 \end{matrix}$$

ცხრილის რანგი ერთის ტოლია.

2. წერტილები, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ წრფივ ერთგვაროვან

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0 \qquad (*)$$

განტოლებას (როცა $a_1, a_2, a_3$ მუდმივებია), შეადგენს წერტილთა წრფივ ბუნჯოვან, რომლებიც მდებარეობენ $(a_1, a_2, a_3)$ წრფეზე. (*) განტოლებას ეწოდება ამ წრფის განტოლება.

3. ორი სხვადასხვა, $M'(x'_1, x'_2, x'_3)$ და $M''(x''_1, x''_2, x''_3)$ წერტილი განსაზღვრავს მათთან შეთანხვედილ მხოლოდ და მხოლოდ ერთ წრფეს. ამ წრფესთან შეთანხვედილ წერტილთა კოორდინატები მოიცემა

$$x_1=\lambda x'_1+\mu x''_1,\ x_2=\lambda x'_2+\mu x''_2,\ x_3=\lambda x'_3+\mu x''_3$$

ფორმულებით, მასთან წერტილის მდებარეობაზე გავლენას ახდენს მხოლოდ $\frac{\lambda}{\mu}$ ფარდობა; ამ ფარდობის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება წერტილის სავსებით გაანსაზღვრული მდებარეობა წრფეზე და, პირიქით.

4. იმისათვის, რომ სამი

$$M(x_1, x_2, x_3),\ M'(x'_1, x'_2, x'_3),\ M''(x''_1, x''_2, x''_3)$$

წერტილი იყოს შეთანხვედილი რომელიმე წრფესთან, აუცილებელი და საკმარისია პირობა

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \end{vmatrix} = 0.$$

1a. სამი $a_1, a_2, a_3$ რიცხვი, რომლებიც ერთდროულად არაა ნულის ტოლი, განსაზღვრავს წრფეს სიბრტყეზე. ორი $(a_1, a_2, a_3)$ და $(a'_1, a'_2, a'_3)$ წრფე თანხვედილია მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ a'_1 & a'_2, & a'_3 \end{matrix}$$

ცხრილის რანგი ერთის ტოლია.

2a. წრფეები, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ წრფივ ერთგვაროვან

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0 \qquad (**)$$

განტოლებას (როცა $x_1, x_2, x_3$ მუდმივებია), შეადგენს კონას ცენტრით $(x_1, x_2, x_3)$ წერტილში. (**) განტოლებას ამ წერტილის განტოლება ეწოდება.

3a. ორი სხვადასხვა $\Delta'(a'_1, a'_2, a'_3)$ და $\Delta''(a''_1, a''_2, a''_3)$ წრფე განსაზღვრავს მათთან შეთანხვედილ მხოლოდ და მხოლოდ ერთ წრფეს, ამ წერტილთან შეთანხვედილ წრფეთა კოორდინატები მოიცემა

$$a_1=\lambda a'_1+\mu a''_1,\ a_2=\lambda a'_2+\mu a''_2,\ a_3=\lambda a'_3+\mu a''_3$$

ფორმულებით [2]. მასთან წრფის მდებარეობაზე გავლენას ახდენს მხოლოდ $\frac{\lambda}{\mu}$ ფარდობა; ამ ფარდობის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება სავსებით გარკვეული მდებარეობა წრფისა და, პირიქით [3].

4a. იმისათვის რომ სამი

$$\Delta(a_1, a_2, a_3),\ \Delta'(a'_1, a'_2, a'_3),\ \Delta''(a''_1, a''_2, a''_3)$$

წრფე იყოს შეთანხვედილი რომელიმე წერტილთან, აუცილებელი და საკმარისია პირობა

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 \end{vmatrix} = 0.$$

[1] ყველა მოყვანილი თვისება დამტკიცებულია წინა პარაგრაფში.

[2] ეს გამომდინარეობს § 166-ში ნათქვამიდან (იხ. (20) ფორმულები).

[3] ეს უკანასკნელი დებულება მტკიცდება ისევე, როგორც საურთიერთო დებულება, რომლებიც მოთავსებულია მარცხნივ და დამტკიცებულია § 167-ში.

იგივე პირობა შეიძლება ასე გამოვთქვათ: წრფივი ფორმები

$$\varphi_1 \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3,$$
$$\varphi_2 \equiv a_1x'_1 + a_2x'_2 + a_3x'_3,$$
$$\varphi_3 \equiv a_1x_1'' + a_2x_2'' + a_3x_3'',$$

სადაც $a_1, a_2, a_3$ განიხილება როგორც ცვლადები, უნდა იყოს წრფივად დამოკიდებული.

იგივე პირობა შეიძლება ასე გამოვთქვათ: წრფივი ფორმები

$$f_1 \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3,$$
$$f_2 \equiv a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3,$$
$$f_3 \equiv a_1''x_1 + a_2''x_2 + a_3''x_3,$$

სადაც $x_1, x_2, x_3$ განიხილება როგორც ცვლადები, უნდა იყოს წრფივად დამოკიდებული.

მკითხველს ვურჩევთ შეადგინოს დამოუკიდებლად ანალოგიური მაგალითები. შევნიშნოთ, რომ 3a დებულება (მარჯვენა სვეტში), ცხადია, შეიძლება გამოითქვას ასე:

$$a_1 = \lambda a'_1 + \mu a_1'', \quad a_2 = \lambda a'_2 + \mu a_2'', \quad a_3 = \lambda a'_3 + \mu a_3'' \tag{4}$$

ფორმულები, სადაც $\lambda$ და $\mu$ ცვლადი პარამეტრებია, რომლებიც ერთდროულად ნულს არ უდრიან, იძლევიან $\Delta'(a'_1, a'_2, a'_3)$, $\Delta''(a_1'', a_2'', a_3'')$ წრფეებით განსაზღვრული წრფეთა კონის პარამეტრულ წარმოდგენას: $a_1, a_2, a_3$ აღნიშნავენ $\Delta$ წრფეთა კონის ყოველი წრფის კოორდინატებს. $\frac{\lambda}{\mu}$ ფარდობის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება ერთი წრფე და, პირიქით; შეადარეთ ანალოგიური (საურთიერთო) პარამეტრული წარმოდგენა წრფისა (§ 167).

**§ 171. სიბრტყის კოორდინატები სივრცეში. წერტილთა და სიბრტყეთა შორის ურთიერთობა.** ახლა განვიხილოთ სიბრტყის განტოლება სივრცეში

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \tag{1}$$

სიბრტყეზე წრფის კოორდინატთა ანალოგიურად $a_1, a_2, a_3, a_4$ სიდიდეებს *სიბრტყის დეკარტის ერთგვაროვანი კოორდინატები* ეწოდება.

თუ (1)-ში $x_1, x_2, x_3, x_4$ განვიხილავთ, როგორც მუდმივებს, ხოლო $a_1, a_2, a_3, a_4$ — როგორც ცვლადებს, მაშინ ეს განტოლება გვაძლევს ყველა სიბრტყეს, რომლებიც გადიან მოცემულ $x_1, x_2, x_3, x_4$ წერტილზე, ე. ი. სიბრტყეთა შეკვრას. თუ $x_1, x_2, x_3, x_4$ მუდმივებია, მაშინ (1) განტოლებას ეწოდება *წერტილის განტოლება სიბრტყის კოორდინატებში*.

აქაც შეიძლება განვიხილოთ სიბრტყის არაერთგვაროვანი[1]) $u$ $v$ $w$ კოორდინატები, თუ მის განტოლებას გადავწერთ შემდეგი

$$ux + vy + wz + 1 = 0 \tag{2}$$

სახით.

(1) ანუ (2) განტოლების სრული სიმეტრია აქაც მიგვიყვანს ურთიერთობის პრინციპზე (იხ. წინა პარაგრაფი) მასთან, ახლა ურთიერთ ელემენტებად ითვლება წერტილები და სიბრ-

---

[1]) სიბრტყის კოორდინატებს (ერთგვაროვანი და არაერთგვაროვანი) აგრეთვე, როგორც წრფის კოორდინატებს, ზოგჯერ *პლიუკერის* ანუ *ტანგენციალური* კოორდინატები ეწოდება (იხ. სქოლიო 1) 302 გვერდზე.

ტყვები. წრფე სივრცეში განიხილება, ჩვეულებრივ არა როგორც დამოუკიდებელი ელემენტი, არამედ როგორც წრფივი მწკრივის წერტილთა მატარებელი, ანუ როგორც მასზე გამავალ სიბრტყეთა მატარებელი (როგორც სიბრტყეთა კონის ღერძი). პირველ სახეობაში წრფე წარმოდგენილია, როგორც წერტილთა მატარებელი, ხოლო მეორეში,—როგორც სიბრტყეთა მატარებელი.

მკითხველი ადვილად შეადგენს თვითონ მაგალითებს საურთიერთო დებულებებზე: კერძოდ, ყველა დებულება და ფორმულა, რომლებიც მოყვანილია § 148-ში, წყვილწყვილად საურთიერთოა. ჩვენ ვურჩევთ მკითხველს კიდევ ერთხელ გადაათვალიეროს § 168 ამ თვალსაზრისით.

ალვნიშნოთ კიდევ ფორმულები, საურთიერთო § 169 ფორმულებისა, რომლებიც იძლევიან წრფის (ე. ი. წერტილთა წრფივი მწკრივის) პარამეტრულ წარმოდგენას სივრცეში. სივრცეში წერტილთა წრფივი მწკრივის საურთიერთო სახეს წარმოადგენს სიბრტყეთა კონა. სიბრტყეთა კონა სავსებით განისაზღვრება თავისი ორი $\Pi'(a'_1, a'_2, a'_3, a'_4)$, $\Pi''(a''_1, a''_2, a''_3, a''_4)$ სიბრტყით, იმის ანალოგიურად, როგორც წერტილთა წრფივი მწკრივი განისაზღვრება თავისი ორი $M'(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$, $M''(x''_1, x''_2, x''_3, x''_4)$ წერტილით. ამ კონის ყოველი $\Pi$ სიბრტყის $a_1, a_2, a_3, a_4$ კოორდინატები მოიცემა § 169-ს (13) ფორმულებით:

$$a_1 = \lambda a'_1 + \mu a''_1,\quad a_2 = \lambda a'_2 + \mu a''_2,\quad a_3 = \lambda a'_3 + \mu a''_3,\quad a_4 = \lambda a'_4 + \mu a''_4, \tag{8}$$

სადაც $\lambda$, $\mu$ პარამეტრებია, რომლებიც ერთდროულად ნულს არ უდრიან.

ადვილი დასანახია (შეად. ანალოგიური მსჯელობა § 167-ის ბოლოში), რომ $\frac{\lambda}{\mu}$ ფარდობის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება კონის ერთი $\Pi$ სიბრტყე, და პირიქით.

(1) ფორმულები იძლევა სიბრტყეთა კონის პარამეტრულ წარმოდგენას.

§ 173. გეგმილური გეომეტრიის ძირითადი გეომეტრიული ხასიათობანი. წინა პარაგრაფებში ჩვენ დავამყარეთ ურთიერთობა წერტილთა და წრფეთა შორის სიბრტყეზე, წერტილთა და სიბრტყეთა შორის სივრცეში. ანალოგიური ურთიერთობის დამყარება შეიძლება სხვა სახეობათა შორისაც, მაგალითად, კონის წრფეთა, კონის სიბრტყეთა, სიბრტყეზე წერტილთა და წრფეთა შორის. ჩვენ აქ ამაზე დაწვრილებით არ შევჩერდებით, აღვნიშნავთ მხოლოდ, რომ გეგმილურ გეომეტრიაში (როშლის შესახებ ცნება მოცემული იქნება ქვემოთ) მოღებულია ძირითადი გეომეტრიული სახეობათა კლასიფიკაცია სხვადასხვა საფეხურის სახეობებად; ერთსა და იმავე საფეხურს აკუთვნებენ სახეობებს, რომელთა შორის შეიძლება დავამყაროთ ურთიერთობა (ზემონაჩენები აზრით). გეგმილურ გეომეტრიას საქმე აქვს ისეთ თვისებებთან, რომელთათვის მ რთებულია ურთიერთობის პრინციპი. ამიტომ გეგმილური გეომეტრიის დებულებანი, რომლებიც დამტკიცებულია მოცემული სახეობისათვის შეიძლება ავტომატურად გადავიტანოთ იმავე საფეხურის სახეობაზე.

ა ი ე ს ძ ი რ ი თ ა დ ი ს ა ხ ე ო ბ ა ნ ი და მათი კ ლ ა ს ი ფ ი კ ა ც ი ა:

სახეობათა ძირითადი ელემენტები: წ ე რ ტ ი ლ ე ბ ი, წ რ ფ ე ე ბ ი, ს ი ბ რ ტ ყ ე ე ბ ი.

**I.** პ ი რ ვ ე ლ ი ს ა ფ ე ხ უ რ ი ს ძ ი რ ი თ ა დ ი ს ა ხ ე ო ბ ა ნ ი. 1°. წერტილთა წრფივი მწკრივი (წრფის წერტილთა ერთობლიობა). 2°. წრფეთა კონა (სიბრტყეზე). 3°. სიბრტყეთა კონა.

**II.** მ ე ო რ ე ს ა ფ ე ხ უ რ ი ს ძ ი რ ი თ ა დ ი ს ა ხ ე ო ბ ა ნ ი. 1°. წერტილთა ბრტყელი სისტემა (წერტილთა ერთობლიობა სიბრტყეზე). 2°. წრფეთა ბრტყელი სისტემა (წრფეთა ერთობლიობა სიბრტყეზე). 3°. წრფეთა შეკერა. 4°. სიბრტყეთა შეკერა.

**III.** მ ე ს ა მ ე ს ა ფ ე ხ უ რ ი ს ძ ი რ ი თ ა დ ი ს ა ხ ე ო ბ ა ნ ი. 1°. წერტილთა სივრცითი სისტემა (სივრცის წერტილთა ერთობლიობა). 2°. სიბრტყეთა სივრცითი სისტემა (სივრცის სიბრტყეთა ერთობლიობა).

**§ 173. დეკარტის ერთგვაროვან კოორდინატთა გარდაქმნა.** სიმარტივისათვის დავიწყოთ წერტილის კოორდინატებიდან $Ox$ წრფეზე (ღერძზე).

$M$ წერტილის, რომელსაც ჯერჯერობით ჩვენ ჩავთვლით საკუთრივად, ერთგვაროვანი კოორდინატები $x_1$, $x_2$ ამავე წერტილის $x$ აბსცისასთან დაკავშირებულია დამოკიდებულებით

$$x=\frac{x_1}{x_2}. \tag{1}$$

განსახილველ წრფეზე დეკარტის კოორდინატთა სისტემის შეცვლის შემთხვევაში, ე. ი. კოორდინატთა $O$ სათავის სხვა $O'$ სათავეში გადატანის და საკოორდინატო $\vec{u}$ ვექტორის სხვა $\vec{u}'$ ვექტორით ($\vec{u}$ და $\vec{u}'$ ვექტორებს შეიძლება ჰქონდეთ ერთნაირი ან თანაწინააღმდეგი მიმართულება) შეცვლის შემთხვევაში, $M$ წერტილის $x'$ და $x$ ახალი და ძველი აბსცისები დაკავშირებულია

$$x=lx'+a \tag{2}$$

დამოკიდებულებით, სადაც $l$ და $a$ მუდმივებია, მასთან $l\neq 0$. თუ $x'_1$, $x'_2$ აღნიშნავენ იმავე $M$ წერტილის ერთგვაროვან კოორდინატებს, დაკავშირებულს ახალ სისტემასთან, მაშინ

$$x'=\frac{x'_1}{x'_2} \tag{1a}$$

და (2) დამოკიდებულება მიიღებს სახეს

$$\frac{x_1}{x_2}=l\frac{x'_1}{x'_2}+a.$$

მაგრამ, რადგანაც $x'_1$, $x'_2$ კოორდინატები ყოველთვის შეიძლება გავამრავლოთ ერთი და იმავე (ნულისაგან განსხვავებულ) რიცხვზე, ჩვენ ყოველთვის შეგვეძლია მივიღოთ, რომ $x'_2=x_2$ და მაშინ წინა ფორმულა შეიცვლება შემდეგით:

$$x_1=lx'_1+ax'_2,\quad x_2=x'_2 \tag{3}$$

ახალი კოორდინატების გამოსასახავად ძველის საშუალებით გვექნება:

$$x'_1=mx_1+bx_2,\quad x'_2=x_2, \tag{3a}$$

სადაც $m=\frac{1}{l}\neq 0$, $\quad b=-\frac{a}{l}$.

აქამდე ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ $M$ წერტილი საკუთრივია; მაგრამ ადვილი დასანახია, რომ (3) და (3a) საბოლოო ფორმულები მართებულია იმ შემთხვევაშიაც, როცა $M$ არასაკუთრივი წერტილია, ე. ი. $x_2=0$ ($x_1\neq 0$).

გადაეიდეთ სიბრტყეზე წერტილის კოორდინატების შემთხვევაზე. $M$ წერტილის დეკარტის ერთგვაროვანი $x_1$, $x_2$, $x_3$ კოორდინატები დაკავშირებულია იმავე წერტილის $x$, $y$ კოორდინატებთან

$$x=\frac{x_1}{x_3},\quad y=\frac{x_2}{x_3} \tag{4}$$

დამოკიდებულებებით (ჯერჯერობით ჩვენ მხედველობაში გვაქვს საკუთრივი წერტილები).

$Oxy$ სისტემის სხვა $O'x'y'$ სისტემით შეცვლისას, ძველი და ახალი $(x, y)$ და $(x', y')$ კოორდინატები დაკავშირებულია შემდეგი სახის დამოკიდებულებებით:

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x'+l_2y'+a,\\ y &= m_1x'+m_2y'+b. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

თუ $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$-ით აღვნიშნავთ საკუთრივი $M$ წერტილის ერთგვაროვან კოორდინატებს, რომლებიც დაკავშირებულია ახალ $O'x'y'$ სისტემასთან, მაშინ გვექნება:

$$x'=\frac{x'_1}{x'_3},\quad y'=\frac{x'_2}{x'_3}$$

და (5) დამოკიდებულებანი მიიღებს სახეს:

$$\frac{x_1}{x_3}=l_1\frac{x'_1}{x'_3}+l_2\frac{x'_2}{x'_3}+a,\quad \frac{x_2}{x_3}=m_1\frac{x'_1}{x'_3}+m_2\frac{x'_2}{x'_3}+b.$$

მაგრამ, რადგანაც $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$ კოორდინატები შეიძლება ყოველთვის გავამრავლოთ ერთსა და იმავე ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვზე, ჩვენ ყოველთვის შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $x'_3=x_3$ და მაშინ წინა ფორმულები მიიღებს უფრო მარტივ სახეს:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= l_1x'_1+l_2x'_2+ax'_3,\\ x_2 &= m_1x'_1+m_2x'_2+bx'_3,\\ x_3 &= x'_3. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ეს ფორმულები მართებული რჩება არასაკუთრივ წერტილებისთვისაც, ე. ი. როცა $x_3=x'_3=0$. მართლაც, ამ შემთხვევაში არასაკუთრივი $M$ წერტილი უსასრულოდ დაშორებულია $Oxy$ სიბრტყეზე $(x_1, x_2)$ ვექტორის მიმართულებით. ამ ვექტორის $(x'_1, x'_2)$ კოორდინატები ახალ კოორდინატთა სისტემაში დაკავშირებულია წინა კოორდინატებთან

$$x_1=l_1x'_1+l_2x'_2,\quad x_2=m_1x'_1+m_2x'_2$$

დამოკიდებულებებით, რომლებიც ემთხვევა (6) დამოკიდებულებებს, თუ ამ უკანასკნელებში დავუშვებთ $x_3=x'_3=0$. ამგვარად, ერთგვაროვანი $(x_1, x_2, 0)$ და $(x'_1, x'_2, 0)$ კოორდინატები, რომლებიც დაკავშირებულია (6) დამოკიდებულებებით, წარმოადგენენ ერთსა და იმავე წერტილს.

სივრცის შემთხვევაში გარდაქმნის ფორმულებს, როგორც ვიცით, არაერთგვაროვან კოორდინატებში აქვს შემდეგი სახე (§ 66, (1) ფორმულა):

$$\left.\begin{aligned} x&=b_1x'+l_2y'+l_3z'+a,\\ y&=m_1x'+m_2y'+m_3z'+b,\\ z&=n_1x'+n_2y'+n_3z'+c. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

ზემოაღნიშნულის ანალოგიურად, მივიღებთ სივრცეში წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატების გარდაქმნისათვის შემდეგ ფორმულებს:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=l_1x'_1+l_2x'_2+l_3x'_3+ax'_4,\\ x_2&=m_1x'_1+m_2x'_2+m_3x'_3+bx'_4,\\ x_3&=n_1x'_1+n_2x'_2+n_3x'_3+cx'_4,\\ x_4&=x'_4. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

ჩვენ ვხედავთ, ამრიგად, რომ ახალი და ძველი ერთგვაროვანი კოორდინატები დაკავშირებულია ერთმანეთთან წრფივი ერთგვაროვანი არაგანსაკუთრებული[1]) ჩასმით (ეს ერთნაირად შეეხება წრფეზე, სიბრტყეზე და სივრცეში კოორდინატების შემთხვევებს).

განვიხილოთ კიდევ წრფის ერთგვაროვანი კოორდინატების გარდაქმნა სიბრტყეზე ვთქვათ,

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0 \tag{9}$$

არის წრფის განტოლება წერტილის ძველ ერთგვაროვან კოორდინატებში. თუ $x_1, x_2, x_3$ ნაცვლად ჩავსვამთ მათ (6) გამოსახულებებს, მივიღებთ წრფის განტოლებას ახალ სისტემაში:

$$a'_1x'_1+a'_2x'_2+a'_3x'_3=0, \tag{10}$$

სადაც

$$\left.\begin{aligned} a'_1&=l_1a_1+m_1a_2,\\ a'_2&=l_2a_1+m_2a_2,\\ a'_3&=aa_1+ba_2+a_3. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$a'_1, a'_2, a'_3$ სიდიდეები (ანუ ყოველი მათი პროპორციული სამი სიდიდე) წარმოადგენენ ჩვენი წრფის ერთგვაროვან კოორდინატებს ახალი სისტემის შიმართ. ამიტომ (11) ფორმულები წარმოადგენენ წრფის კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულებს სიბრტყეზე.

---

[1]) (8) ჩასმა არაგანსაკუთრებულია, რადგანაც მისი დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & a\\ m_1 & m_2 & m_3 & b\\ n_1 & n_2 & n_3 & c\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3\\ m_1 & m_2 & m_3\\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} \neq 0;$$

ანალოგიურად წრფეზე და სიბრტყეზე კოორდინატების შემთხვევებში.

ჩვენ ვხედავთ, რომ ისევე როგორც წერტილის კოორდინატების შემთხვევაში, ძველი და ახალი კოორდინატები დაკავშირებულია ერთმანეთთან წრფივი ერთგვაროვანი არაგანსაკუთრებული ჩასმით.

ანალოგიურ ფორმულებს მივიღებთ სივრცეში სიბრტყის კოორდინატების გარდასაქმნელად.

**§ 174. ალგებრულ მრუდთა და ფართეულთა განტოლებანი ერთგვაროვან კოორდინატებში. ზოგიერთი ზოგადი დებულება.** უპირველეს ყოვლისა, შევნიშნოთ, რომ ყოველივე ზემონათქვამი ერთგვაროვან კოორდინატებზე და არასაკუთრივ ელემენტებზე გავრცელდება, რა თქმა უნდა, წარმოსახვით წერტილთა, წრფეთა და სიბრტყეთა შემთხვევაშიაც. ჩვენ ვიტყვით, რომ ერთგვაროვანი $x_1, x_2, x_3$ კოორდინატები სიბრტყეზე განსაზღვრავს წარმოსახვით წერტილს არაერთგვაროვანი კოორდინატებით $x=\frac{x_1}{x_3}$, $y=\frac{x_2}{x_3}$ თუ $x_1, x_2, x_3$ სიდიდეები კომპლექსურია, მასთან ისინი არ შეიძლება ერთდროულად ნამდვილი გავხადოთ საერთო მამრაელზე გამრაველებით (წინააღმდეგ შემთხვევაში წერტილი ნამდვილი იქნება). სავსებით ანალოგიურად განისაზღვრება სივრცეში წარმოსახვით წერტილთა ერთგვაროვანი კოორდინატები.

სიბრტყეზე წარმოსახვითი წრფეების და სივრცეში წარმოსახვითი სიბრტყეების კოორდინატები განისაზღვრებიან ანალოგიურად.

წინა პარაგრაფებში ჩვენ წარმოვადგინეთ წრფეთა და სიბრტყეთა განტოლებანი ერთგვაროვან კოორდინატებში. ამნაირადვე შეიძლება მოვიქცეთ ნებისმიერი ალგებრული წირის ან ფართეულის შემთხვევაში. დავიწყოთ წირის განტოლებიდან სიბრტყეზე. ვთქვათ,

$$F(x,\ y)=0 \tag{1}$$

არის $n$-რი რიგის წირის განტოლება სიბრტყეზე, სადაც $F(x, y)$ არის $n$-რი ხარისხის პოლინომი. თუ შევიტანთ მასში $x$ და $y$ მაგიერ მათ გამოსახულებებს ერთგვაროვანი კოორდინატებით

$$x=\frac{x_1}{x_3},\quad y=\frac{x_2}{x_3},$$

მივიღებთ

$$F\left(\frac{x_1}{x_3},\quad \frac{x_2}{x_3}\right)=0 \tag{2}$$

განტოლებას.

$x$ ცვლადი შევა მნიშვნელად სხვადასხვა წევრში, რომლებიც წარმოიშობა $F(x, y)$ პოლინომის წევრებიდან. მაგალითად,

$$Ax^py^q$$

სახის წევრი მოგვცემს

$$\frac{Ax_1^p x_2^q}{x_3^{p+q}}$$

წევრს.

რადგანაც $F(x, y)$ პოლინომში ერთი მაინც არის $n$ ხარისხის წევრი, ე. ი. $Ax^ly^m$ სახის წევრი, სადაც $l+m=n$ ამიტომ ეს უკანასკნელი მოგვცემს

$$\frac{Ax_1^l x_2^m}{x_3^n}$$

სახის წევრს; $x_3$ სიდიდე $n$-ზე დიდი ხარისხით არსად მნიშვნელებში არ შეგვა. თუ (2) ორივე ნაწილს გავამრავლებთ $x^n{}_3$ ზე, მივიღებთ, ცხადია,

$$\Phi(x_1, x_2, x_3)=0 \tag{3}$$

სახის განტოლებას, სადაც

$$\Phi(x_1, x_2, x_3)=x^n{}_3 F\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) \tag{4}$$

არის $n$-რი რიგის ერთგვაროვანი პოლინომი (ფორმა) $x_1$, $x_2$, $x_3$ მიმართ, ე. ი. $Ax_1^p x_2^q x_3^r$ სახის წევრთა ჯამი, სადაც ყველა წევრში $p+q+r=n$ [1]), ადვილი დასანახია, რომ $\Phi$ პოლინომი შეიძლება შევადგინოთ შემდეგი წესით: $F(x, y)$ პოლინომის ყოველ $Ax^py^q$ წევრში $x$, $y$ ცვლადები შეიცვლება $x_1$, $x_3$-ით და, გარდა ამისა, ეს წევრი მრავლდება $x_3$-ის ისეთ ხარისხზე, რომ მივიღოთ, საზოგადოდ, $n$-რი რიგის წევრი.

თავის მხრით, $F(x, y)$ პოლინომს მივიღებთ, თუ დავუშვებთ $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ ფორმაში $x_1=1$ და $x_1$, $x_2$ შევცვლით შესაბამად $x$, $y$-ით; ე. ი.

$$F(x, y)=\Phi(x, y, 1). \tag{5}$$

მაგალითად, $x^2+y^2-2x+1=0$ განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში შეიძლება წარმოვიდგინოთ $x_1^2+y_1^2-2x_1x_3+x^2{}_3=0$ სახით. თუ ამ უკანასკნელში ჩავსვამთ $x_3=1$, $x_1=x$, $x_2=y$ დავუბრუნდებით იმ განტოლებას, რომლიდანაც გამოვედით.

შევნიშნოთ, რომ თუ ჩვენ გვაქვს ნებისმიერად აღებული ერთგვაროვანი $n$-რი რიგის $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ პოლინომი, მაშინ, ჩავსვამთ რა მასში

$$x_3=1, \quad x_1=x, \quad x_2=y,$$

შეიძლება მივიღოთ $F(x, y)$ პოლინომი, რომლის ხარისხი $n$-ზე უფრო დაბალია: ცხადია, ამას ადგილი ექნება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $x_3$ შედის მამრავლად $\Phi$ პოლინომის ყველა წევრში. ჩვენს შემთხვევაში ეს შეუძლებელია, ვინაიდან $\Phi$ პოლინომში ერთი მაინც არის წევრი, რომელიც არ შეიცავს $x_3$ (ასეთი თვისება აქვს ყველა წევრს, რომლებიც წარმოიშობა $F$ პოლინომის $n$-რი ხარისხის წევრებიდან)

დავუბრუნდეთ (3) განტოლებას, რომელიც მიღებულია (2) განტოლებიდან $x_3^n$-ზე გადამრავლებით. ეს ოპერაცია სავსებით მართებულია, ვიდრე

[1]) მართლაც, თუ $\frac{Ax_1^p x_2^q}{x_3^{p+q}}$ გადავამრავლებთ $x_3^n$-ზე მივიღებთ

$$Ax_1^p x_2^q x_3^{n-p-q}=Ax_1^p x_2^q x_3^r$$

სადაც $r=n-p-q$, ე. ი. $p+q+r=n$.

ჩვენ დავკმაყოფილდებით საკუთრივ წერტილთა განხილვით, რადგანაც ამ შემთხვევაში $x_3 \neq 0$.

არასაკუთრივ წერტილთა შესახებ კი ჩვენ შევთანხმდეთ მივაკუთვნოთ ისინი მოცემულ წირს. მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი ერთგვაროვანი კოორდინატები აკმაყოფილებენ წირის განტოლებას, რომელიც უკვე დაყვანილია ბოლო ერთგვაროვან (3) სახეზე.

ახლა განვიხილოთ უფრო დაწვრილებით ალგებრული წირის დაყვანადობისა და დაუყვანადობის საკითხი, რომელთაც რამდენიმედ § 85-ში შევეხეთ.

დაყვანად პოლინომს ჩვენ ვუწოდებთ ისეთ პოლინომს, რომელიც შეიძლება დაიშალოს ისეთ მამრაელებად, რომლებიც წარმოადგენენ მუდმივისაგან განსხვავებულ [1]) პოლინომებს.

ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ $F(x, y)$ პოლინომი დაყვანადია, მაშინ დაყვანადია, შესაბამი ერთგვაროვანი $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ პოლინომიც და, პირიქით. მართლაც,

$$F(x, y) = F_1(x, y) \cdot F_2(x, y) \tag{6}$$

იგივობიდან, სადაც $F_1$ და $F_2$ არიან $n_1$ და $n_2$ ხარისხის პოლინომები (მასთან, $n_1 + n_2 = n$); ცხადია, გამომდინარეობს

$$F\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = F_1\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) \cdot F_2\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$$

იგივობა.

თუ ორივე ნაწილს გავამრავლებთ $x_3^n = x_3^{n_1} \cdot x_3^{n_2}$ სიდიდეზე და დავუშვებთ

$$x_3^n F\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = \Phi(x_1, x_2, x_3),$$

$$x_3^{n_1} F_1\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = \Phi_1(x_1, x_2, x_3),$$

$$x_3^{n_2} F_2\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = \Phi_2(x_1, x_2, x_3),$$

მივიღებთ

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \Phi_1(x_1, x_2, x_3) \cdot \Phi_2(x_1, x_2, x_3) \tag{6a}$$

იგივობას, სადაც $\Phi_1$ და $\Phi_2$ $n_1$ და $n_2$ ხარისხის ერთგვაროვანი პოლინომებია. პირიქით, თუ გვაქვს (6a) სახის დაშლა, მაშინ, ჩავსვამთ რა მასში $x_3 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ და შემოვიღებთ აღნიშვნებს, $\Phi_1(x, y, 1) = F_1(x, y)$, $\Phi_2(x, y, 1) = F_2(x, y)$, მივიღებთ (6) სახის დაშლას, სადაც $F_1$ და $F_2$, $n_1$ და $n_2$ ხარისხის პოლინომებია [2]).

[1]) მუდმივი შეიძლება ჩავთვალოთ პოლინომის კერძო შემთხვევად (ნულიანი რიგის პოლინომი); მაგრამ ჩვენ აქ ამას გამოვიცავთ.

[2]) არ შეიძლება ხარისხის დადაბლება, ვინაიდან მაშინ მათი ჯამი გახდებოდა $n$-ზე ნაკლები.

ნათქვამის თანახმად, დაყვანადობის საკითხების განხილვისას საკმარისია ვიხელმძღვანელოთ განტოლებებით ერთგვაროვან კოორდინატებში.

ალგებრაში [1]) მტკიცდება შემდეგი დებულება: $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ პოლინომი დაყვანადია, მაშინ ის შესაძლებელია, დავშალოთ ერთადერთი სახით, არადაყვანად მამრავლებად, ე. ი. წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \varphi_1^{\alpha_1} \cdot \varphi_2^{\alpha_2} \dots \varphi_k^{\alpha_k}, \tag{7}$$

სადაც $\varphi_i = \varphi_i(x_1, x_2, x_3)$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ ერთმანეთისაგან განსხვავებული [2]) ერთგვაროვანი პოლინომებია, ხოლო $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ მთელი დადებითი რიცხვებია. $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ პოლინომები, რომლებიც $\Phi$-ში შედის, არადაყვანადი მამრავლებია; ამბობენ, რომ $\varphi_1$ შედის მაძრაველად $\alpha_1$-ჯერ (ანუ $\alpha_1$ ჯერადად), $\varphi_2$ შედის $\alpha_2$-ჯერ და ა. შ.

როცა ვამბობთ, რომ (1) დაშლა შესაძლებელია მხოლოდ ერთი ხერხით, ვგულისხმობთ, რომ $\Phi$ პოლინომის ყველა სხვა დაშლა არადაყვანად მამრავლებად ემთხვევა წინას, თუ არ ჩავთვლით იმას, რომ $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ ნაცვლად შეიძლება ავიღოთ $A_1\varphi_1, \dots, A_k\varphi_k$, სადაც $A_1, \dots, A_k$ მუდმივებია (ისეთი რომ $A_1^{\alpha_1} \dots A_k^{\alpha_k} = 1$).

თუ $n$ $\Phi$ პოლინომის რიგია, ხოლო $n_1, \dots, n_k$ არიან $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ პოლინომების რიგები, მაშინ, ცხადია, $n = \alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_k n_k$.

ალგებრაში მტკიცდება აგრეთვე შემდეგი დებულება: თუ

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0 \text{ და } \Psi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

ორი განტოლება ეკვივალენტურია (ე. ი. ცვლადთა ერთნაირი მნიშვნელობებით [3]) კმაყოფილდება), მაშინ $\Phi$ და $\Psi$-ში შემავალი დაუყვანადი მამრავლები ერთი და იგივეა (მაგრამ შეიძლება, რა თქმა უნდა, შედიოდეს $\Phi$ და $\Psi$-ში სხვადასხვა რიცხვჯერ). კერძოდ, თუ $\Psi$ პოლინომი დაუყვანადია, მაშინ ის შედის მამრავლად $\Phi$-ში; თუ $\Phi$ და $\Psi$ ორივე დაუყვანადია, მაშინ ისინი შეიძლება განსხვავდებოდნენ მხოლოდ მუდმივი მამრავლით.

(წინა ალგებრული დებულებანი მართებულია ცვლადების ნებისმიერი რიცხვისათვის).

ახლა დავუბრუნდეთ ალგებრული წირის რიგის საკითხს (იხ. § 85). ვთქვათ, ალგებრული წირი მოცემულია (3)

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

განტოლებით ერთგვაროვან კოორდინატებში, სადაც $\Phi$ $n$-რი რიგის ერთგვაროვანი პოლინომია. თუ $\Phi$ პოლინომი დაუყვანადია, მაშინ (3) წირსაც

[1]) იხ. მაგ., M. Бохер, Введение в высшую алгебру, ОНТИ, 1934 г.

[2]) განსხვავებულად ვთქვით იგივე პოლინომებს, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან არა მარტო მუდმივი მამრავლებით. მაგალითად, $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ და $3(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)$ პოლინომებს ჩვენ არ ვთვლით ერთმანეთისა ან განსხვავებულად.

[3]) მხედველობაში გვაქვს როგორც არსი, ისე წარმოსახვითი მნიშვნელობანი.

დაუყვანადი ანუ დაუშლადი ეწოდება. თუ $\Phi$ პოლინომი დაყვანადია, მაშინ ის შეიძლება წარმოვიდგინოთ (7) სახით და წირის განტოლება მიიღებს

$$\varphi_1^{\alpha_1} \cdot \varphi_2^{\alpha_2} \dots \varphi_k^{\alpha_k} = 0, \tag{8}$$

სახეს, სადაც $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ დაუყვანადი ერთგვაროვანი პოლინომებია, ეს უკანასკნელი განტოლება, ცხადია, შემდეგის ეკვივალენტურია:

$$\varphi_1 \cdot \varphi_2 \dots \varphi_k = 0 \tag{9}$$

და მოცემული წირი იშლება $k$ დაუყვანად

$$\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0, \dots, \ \varphi_k = 0 \tag{10}$$

წირებად.

თუ ყველა $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ რიცხვი არაა ერთის ტოლი, მაშინ (10) განტოლების ხარისხი, ცხადია, დაბალია (8) განტოლების ხარისხზე. ადვილი შესამჩნევია აგრეთვე, რომ არ შეიძლება (9) განტოლების შეცვლა კიდევ უფრო დაბალი ხარისხის ეკვივალენტური $\Psi = 0$ განტოლებით, ვინაიდან, ზემოთქმულის თანახმად, $\Psi$ პოლინომი უნდა შეიცავდეს იმავე დაუყვანად $\varphi_1$, $\varphi_2, \dots, \varphi_k$ მამრავლებს.

ამიტომ, თითქოს ბუნებრივია, რომ მოცემული წირის რიგი ეწოდოს არა $n$-ს, არამედ (8) ტოლობის მარცხენა ნაწილის პოლინომის რიგს.

მაგრამ, უმეტეს შემთხვევებში, როცა საქმე გვაქვს (3) სახის განტოლებასთან, მიზანშეწონილია წირის რიგის ქვეშ ვიგულისხმოთ სწორედ $n$, ე. ი. რიგი გვესმოდეს განტოლების იმ სახის მიხედვით, როგორც ის მოცემულია; ამასთანავე ამბობენ, რომ მოცემული წირი შედგება დაუყვანადი $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \dots, \varphi_k = 0$ ნაწილებიდან, რომლებიც შედიან მასში შესაბამად $\alpha_1$-ჯერ ($\alpha_1$—ჯერადად), $\alpha_2$-ჯერ და ა. შ.

მაგალითად,

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 = 0 \tag{11}$$

განტოლებით მოცემული წირი შედგება იმავე წერტილებისაგან, რაც $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ წრფე. მაგრამ ხშირად ამბობენებენ თქვან, რომ (11) შეორე რიგის წირია, რომელიც წარმოადგენს ორმაგ (ორჯერად) წრფეს ანუ „ორ თანხვედენილ წრფეს“. ერთის შეხედვით, ეს შეიძლება გვეჩვენოს უსარგებლო გართულებად. მაგრამ უფრო ახლო განხილვისას აღმოჩნდება, რომ გამოსახვის ასეთი მეთოდი ძალზე მიზანშეწონილია. არსებითად საქმე შემდეგში მდგომარეობს: გვაქვს მთელი რიგი ზოგადი დებულებები და ფორმულები, რომლებიც შეეხებიან მეორე რიგის განტოლებით წარმოდგენილ ყველა წირს, იმ კერძო მნიშვნელობისაგან დამოუკიდებლად, რომლებიც შეიძლება ჰქონდეთ ამ განტოლების კოეფიციენტებს. ეს დებულებანი ძალაში რჩებიან, კერძოდ, მაშინაც, როცა განტოლების კოეფიციენტები ისეთია, რომ $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ პოლინომს აქვს $(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2$ სახე, ე. ი. როცა

მოცემული წირი დაიყვანება ორი თანხვედნილი წრფის ერთობლიობაზე. თუ ჩვენ თავიდანვე მოვეხსნიდით განხილვიდან ამ კერძო შემთხვევებს, მაშინ დასახელებულ დებულებათა ჩამოყალიბებისას, იძულებული ვიქნებოდით თითოეულ შემთხვევაში მთელი რიგი შენიშვნებისა გაგვეკეთებინა, რითაც გართულდებოდა და გაძნელდებოდა გადმოცემა და დებულებანი მოკლებული იქნებოდნენ ზოგადობას.

ანალოგიური შენიშვნები შეეხება ზოგად შემთხვევასაც. სახელდობრ, როცა ჩვენ შევისწავლით ერთ გარკვეულ წირს, რომელიც წარმოდგენილია (8) განტოლებით, მაშინ, ბუნებრივია, ეს განტოლება შეიცვლება უფრო დაბალი ხარისხის (9) განტოლებით, რომელიც იმავე წირს წარმოადგენს, რასაც მოცემული განტოლება (ე. ი. იმავე წერტილებიდან შედგება) და წირის რიგის ქვეშ უნდა გვესმოდეს უკანასკნელი განტოლების მარცხენა ნაწილის ხარისხი.

მაგრამ, თუ ჩვენ შევისწავლით $n$ რიგის წირს საზოგადოდ, და მათ შორის აღმოჩნდა (8) განტოლებით წარმოდგენილი დაყვანადი წირი, სადაც $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ რიცხვებიდან ზოგიერთი მეტია ერთზე, მაშინ მიზანშეწონილი არაა ეს განტოლება შევცვალოთ უფრო დაბალი რიგის (9) განტოლებით და წირს მივაწეროთ $n$-ზე უფრო დაბალი რიგი.

შემდეგში, როცა ჩვენ საქმე გვექნება (3) სახის განტოლებასთან, სადაც $\Phi$ $n$-რი ხარისხის პოლინომია ჩვენ მივაწერთ შესაბამის წირს $n$ რიგს, დამოუკიდებლად იმისაგან, შესაძლებელია თუ არა მოცემული განტოლების დაყვანა უფრო დაბალი ხარისხის განტოლებაზე.

ყურადღება მივაქციოთ კიდევ შემდეგ გარემოებას. როგორც აღვნიშნეთ, $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ პოლინომში, რომელიც მიიღება $F(x, y)$-დან ზემონაჩვენები გზით, ყველა წევრი არ შეიცავს მამრავლად $x_3$-ს და ამის გამო, თუ დავუშვებთ $x_3=1$ და $x_1$ და $x_2$ შევცვლით $x, y$-ით $n$-რი რიგის $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ პოლინომისაგან ჩვენ მივიღებთ $n$-რი ხარისხის $F(x, y)$ პოლინომს. მაგრამ მრავალ საკითხში, წირის განტოლება მოცემულია უშუალოდ ერთგვაროვან კოორდინატებში (3) სახით, მასთან შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ $x_3$ შედის მამრავლად ყველა წევრში. ასე რომ მრუდის განტოლებას აქვს სახე:

$$x_3^{\alpha}\Phi_1(x_1, x_2, x_3)=0,$$

სადაც $\Phi_1$ არის $n-\alpha$ ხარისხის ერთგვაროვანი პოლინომი, რომლის ყველა წევრი არ შეიცავს მამრავლად $x_3$.

თუ ამ პოლინომში დავუშვებთ $x_3=1$, $x_1=x$, $x_2=y$, ჩვენ მივიღებთ $n-\alpha$ ხარისხის განტოლებას:

$$\Phi_1(x, y, 1)=0.$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ მოცემული წირი იშლება ორად: არასაკუთრივ წრფედ $x_3=0$, რომელიც შედის $\alpha$-ჯერადად, და $n-\alpha$ რიგის წირად, რომელსაც გვაძლევს წინა განტოლება.

ყოველივე ზემონათქვამი ალგებრულ წირთა დაყვანადობისა და დაუყვანადობის შესახებ შეიძლება სათანადო ცვლილებებით გადატანილ იქნას ალ-

ვებრულ ფართეულთა შემთხვევაში. განსხვავება მხოლოდ ისაა, რომ სამი ცვლადის ერთგვაროვანი პოლინომის ნაცვლად ჩვენ საქმე გვექნება ოთხი ცვლადის

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

ერთგვაროვან პოლინომთან და (3) განტოლების ნაცვლად

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)=0 \qquad (12)$$

განტოლებასთან.

ზემოშემოღებული განზოგადებული ცნებები საშუალებას იძლევა დავადგინოთ სრული ზოგადობით დებულებანი, რომლებიც ჩვენს მიერ გამოთქმული იყო ზემოთ ალგებრულ წირთა წრფეებთან და ალგებრულ ფართეულთა წრფეებთან და სიბრტყეებთან გადაკვეთის შესახებ (§ 100 და § 140).

დავიწყოთ უკანასკნელიდან. ადვილი სანახავია, რომ $n$-რი რიგის ფართეულის სიბრტყესთან გადაკვეთა არის ყოველთვის $n$-რი რიგის წირი, თუკი სიბრტყე არ წარმოადგენს მოცემული ფართეულის ნაწილს. ვთქვათ, განსახილველი სიბრტყე არასაკუთრივია. თუ მივიღებთ მას $Oxy$ სიბრტყედ, ჩვენ ვიპოვით საძიებელი გადაკვეთის წირს, თუ (12)-ში დავუშვებთ $x_3=0$, რაც მოგვცემს $\Phi(x_1, x_2, 0, x_4)=0$ განტოლებას ანუ, თუ შემოვიღებთ $\Phi(x_1, x_2, 0, x_4)=\Psi(x_1, x_2, x_4)$ აღნიშვნას:

$$\Psi(x_1, x_2, x_4)=0$$

განტოლებას, რომელიც არის $n$-რი რიგის ერთგვაროვანი განტოლება, თუკი ის არ გადაიქცევა იგივობად [1]).

ამგვარად, გვაქვს $n$-რი რიგის წირი $Oxy$ სიბრტყეზე (ამასთანავე, ერთგვაროვანი $x_3$ კოორდინატის როლს ასრულებს $x_4$ კოორდინატი).

შესაძლებელია, რომ $x_4$ შედიოდეს მამრავლად ერთგვაროვან $\Psi(x_1, x_2, x_4)$ პოლინომის ყველა წევრში, მაშინ განტოლება მიიღებს სახეს:

$$x_4^{\alpha}\Psi_1(x_1, x_2, x_4)=0,$$

ე. ი. გადაკვეთის წრფე იშლება ორად: $x_4=0$ არასაკუთრივ წრფედ, რომელიც შედის $\alpha$-ჯერადობით, და

$$\Psi_1(x_1, x_2, x_4)=0$$

$n-\alpha$ რიგის წირად.

თუ ჩვენ თავიდანვე გამოვიყენებდით არაერთგვაროვან კოორდინატებს, მაშინ ამ წირისაგან მივიღებდით $n-\alpha$ რიგის

$$\Psi_1(x, y, 1)=0$$

განტოლებას.

---

[1]) ამ შემთხვევაში $Oxy$ სიბრტყე არის განსახილველი ფართეულის შემადგენელი ნაწილი.

ახლა ჩვენ ვხედავთ, თუ რით უნდა ავხსნათ, რომ ზოგჯერ გადაკვეთის წირი შეიძლება აღმოჩნდეს $n$-ზე ნაკლები რიგის, თუ არ ვისარგებლებთ ერთგვაროვანი კოორდინატებით: ამ შემთხვევაში მხედველობაში არ მიიღება არასაკუთრივი წრფე, რომელიც შედის წირში, როგორც $\alpha$-ჯერადი ნაწილი.

(12) ფართეულის არასაკუთრივ სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილები მოცემულია

$$\Phi(x_1, x_2, x_3), =0, \; x_4=0$$

განტოლებებით.

პირველი ამ განტოლებებიდან შეიძლება იგივობად გადაიქცეს. ეს ნიშნავს, რომ არასაკუთრივი სიბრტყე წარმოადგენს ფართეულის შემადგენელ ნაწილს. თუკი ეს არ მოხდა, მაშინ პირველი განტოლება იქნება $n$-რი რიგის და, ჩვენ შევთანხმდეთ, ვთქვათ, რომ წინა განტოლებანი განსაზღვრავენ $n$-რი რიგის არასაკუთრივ წირს.

ახლა გადავიდეთ (სიბრტყეზე) $n$-რი რიგის წირის წრფესთან გადაკვეთის საკითხზე. ვთქვათ, (3) მოცემული მრუდის განტოლებაა. დასმული საკითხი შეიძლება ამოიხსნას წინას სრული ანალოგიით თუ მოცემულ წრფეს, როცა ის არასაკუთრივია, მივიღებთ $Oy$ ღერძად და ცალკე განვიხილავთ შემთხვევას, როცა მოცემული წრფე საკუთრივია. ვანდობთ რა მკითხველს საკითხის ასეთი გზით განხილვას, ჩვენ გამოვიყენებთ სხვა მეთოდს, რომელსაც ის უპირატესობა აქვს, რომ ის ფართეულის წრფესთან გადაკვეთის საკითხშიც გამოიყენება.

ავიღოთ მოცემულ წრფეზე ორი რომელიმე განსხვავებული

$$M'(x'_1 \; x'_2 \; x'_3) \text{ და } M''(x_1'', \; x_2'', \; x_3'')$$

წერტილი.

მაშინ ამ წრფის წერტილთა კოორდინატები მოცემულია

$$x_1=\lambda x'_1+\mu x_1'', \; x_2=\lambda x'_2+\mu x_2'', \; x_3=\lambda x'_3+\mu x_3'' \qquad (13)$$

ფორმულებით (§ 167); წრფის ყოველ წერტილს შეესაბამება გარკვეული $\frac{\lambda}{\mu}$ ფარდობა და, პირიქით. თუ (13) გამოსახულებებს შევიტანთ (3)-ში, მივიღებთ განტოლებას, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდნენ $\lambda$, $\mu$ მნიშვნელობანი, რომლებიც შეესაბამებიან გადაკვეთის წერტილებს. ვინაიდან $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ არის $n$-რი ხარისხის ერთგვაროვანი პოლინომი, ამიტომ ხსენებულ განტოლებას, ცხადია, ექნება შემდეგი სახე:

$$A_0\lambda^n+A_1\lambda^{n-1}+\ldots+A_{n-1}\lambda\mu^{n-1}+A_n\mu^n=0 \qquad (14)$$

სადაც $A_0, A_1, \ldots, A_n$ მუდმივებია.

შესაძლებელია, რომ ამ განტოლების ყველა კოეფიციენტი ტოლი იყოს ნულის. ე. ი. $A_0=A_1=\ldots=A_n=0$. მაშინ ის დაკმაყოფილდება $\lambda$ და $\mu$ ს ყველა მნიშვნელობით. ასეთ შემთხვევაში მოცემული წრფე მთლიანად კუთვნის წირს, ე. ი. წარმოადგენს მის შემადგენელ ნაწილს. ჩვენ ვიცით, რომ ამ შემთხვევაში მოცემული წირი დაშლადია.

თუკი $A_0, A_1, \ldots, A_n$ კოეფიციენტებიდან ყველა არ უდრის ნულს, მაშინ (14) განტოლების ორივე მხარის $\mu^n$-ზე გაყოფით $h=\frac{\lambda}{\mu}$-ს მიმართ მივიღებთ $n$-რი რიგის განტოლებას:

$$A_0h^n+A_1h^{n-1}+\ldots+A_{n-1}h+A_n=0 \qquad (14a)$$

რომელსაც ზუსტად $n$ ფესვი ექნება, ეს ფესვები შეიძლება აღმოჩნდნენ ნამდვილი, წარმოსახვითი, განსხვავებული ან თანხვედენილი. (14a)-ს შეიძლება აგრეთვე ჰქონდეს მარტივი ან ჯერადი, უსასრულო ფესვი, სახელდობრ, მას ექნება $\alpha$-ჯერადი ფესვი $h=\infty$, თუ $A_0=A_1=\ldots=A_{\alpha-1}=0$, $A_\alpha\neq 0$, (იხ. § (164). ყოველ $h$ ფესვს შეესაბამება საესებით განსაზღვრული გადაკეთის წერტილი. თუ $h$ არის $\alpha$-ჯერადობის ფესვი, მაშინ ამბობენ, რომ ამ ფესვს შეესაბამება $\alpha$ „თანხვედენილი“ წერტილი, ან რომ გადაკეთა $\alpha$-ჯერადია. კერძოდ, თუ არსებობს $\alpha$-ჯერადი ფესვი $h=0$, ეს ნიშნავს, რომ $M'(x'_1, x'_2, x'_3)$ წერტილი არის $\alpha$-ჯერადი გადაკეთის წერტილი (როცა $h=\infty$, გვაქვს $\mu=0$, $\lambda\neq 0$, ამ მნიშვნელობებს კი შეესაბამება $M'$ წერტილი).

ამრიგად, $n$-რი რიგის ალგებრული წირი სიბრტყეზე იკვეთება ყოველ წრფესთან ზუსტად $n$ წერტილში; გამონაკლისს შეიძლება შეადგენდეს მხოლოდ ის შემთხვევა, როცა მოცემული წირი დაშლადია და მოცემული წრფე მისი შემადგენელი ნაწილია.

სავსებით ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $n$-რი რიგის ალგებრული ფართეული იკვეთება წრფესთან ზუსტად $n$ წერტილში; გამონაკლისს შეიძლება წარმოადგენდეს მხოლოდ ის შემთხვევა, როცა წრფე მთლიანად ეკუთვნის ფართეულს [1]).

**§ 175. ციკლური წერტილები და სფერული წრეწირი.** განვიხილოთ ზემომოყვანილი განზოგადებული ცნებების რამდენიმე გამოყენება. დავიწყოთ მოცემული წრეწირის არასაკუთრივ წრფესთან გადაკეთია საკითხიდან.

ვთქვათ, რომ კოორდინატები მართკუთხაა. ჩვენ ვიცით, რომ წრეწირის განტოლებას $(a, b)$ ცენტრით და $r$ რადიუსით აქვს სახე:

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0,$$

ანუ

$$x^2+y^2+2Ax+2By+C=0 \qquad (1)$$

სადაც

$$A=-a,\ B=-b,\ C=a^2+b^2-r^2$$

ერთგვაროვან კოორდინატებში ეს განტოლება ასე წარმოგვიდგება:

$$x_3^2+x_2^2+2Ax_1x_3+2Bx_2x_3+Cx_3^2=0.$$

ამ წრეწირისა და არასაკუთრივი წრფის გადაკეთის წერტილები მოცემულია

$$x_1^2+x_2^2=0,\ x_3=0$$

[1]) ფართეული შეიძლება მთლიანად შეიცავდეს წრფეს (წრფეთა უსასრულო სიმრავლესაც კი), მაგრამ არ იყოს დაშლადი; მოვიგონოთ, მაგალითად, ქონუსი ან ცილინდრი.

განტოლებებით, რაც გვაძლევს ორ ამოხსნას:

$$\frac{x_2}{x_1}=+i,\ x_3=0 \text{ და } \frac{x_2}{x_1}=-i,\ x_3=0.$$

რადგანაც ჩვენ გვაინტერესებს არა თვით $x_1\ x_2\ x_3$, არამედ მათი ფარდობანი, ამიტომ შეგვიძლია ავიღოთ $x_1=1$; მაშინ გვექნება $x_2=\pm i$ და საძიებელი გადაკვეთის წერტილები იქნება:

$$J_1(1,\ i,\ 0),\ J_2(1,\ -i,\ 0). \tag{2}$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ყოველი წრეწირი $Oxy$ სიბრტყეზე გადის ამ ორ წერტილში, რომლებიც ერთდროულად წარმოსახვითია და არასაკუთრივი, ამიტომ ამ წერტილებს წრიული ანუ ციკლური ეწოდება. ისინი წარმოადგენენ, როგორც ადვილი სანახავია, იზოტროპულ წოფეთა არასაკუთრივ წერტილებს, ე. ი.

$$y=ix+k \text{ და } y=-ix+k$$

წრფეების, რომელთა კუთხური კოეფიციენტებია $+i$ და $-i$ (§ 162).

ახლა ჩვენთვის გასაგებია, რატომ გადაიკვეთება ორი წრეწირი სიბრტყეზე ზუსტად ორ (ნამდვილ) წერტილში, თუმცა მეორე რიგის ორი მრუდი გადაიკვეთება, საზოგადოდ, ოთხ წერტილში. ჩვენ ვხედავთ, მართლაც, რომ ყოველ ორ წრეწირს ორივე ციკლური წერტილი საერთო აქვს და, მაშასადამე, შეიძლება ჰქონდეს კიდევ მხოლოდ ორი სხვა საერთო წერტილი.

ახლა ამოვხსნათ ამოცანა ორი წრეწირის გადაკვეთის შესახებ, რომელთა განტოლებებს დავწეროთ ერთგვაროვან კოორდინატებში:

$$\left.\begin{aligned} &x_1^2+x_2^2+2A_3x_1x_3+2B_3x_2x_3+C_3x_3^2=0\\ \text{და}\quad &x_1^2+x_2^2+2A_3x_1x_3+2B_3x_2x_3+C_3x_3^2=0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ამისათვის უნდა ამოვხსნათ წინა განტოლებათა სისტემა. აქედან გამოკლებით, მივიღებთ

$$x_3\left\{2(A_1-A_3)x_1+2(B_1-B_3)x_2+(c_1-c_3)x_3\right\}=0,$$

საიდანაც ვხედავთ, რომ საძიებელი გადაკვეთის წერტილები უნდა მდებარეობდნენ

$$x_3=0$$

და

$$2(A_1-A_3)x_1+2(B_1-B_3)x_2+(c_1-c_3)x_3=0 \tag{4}$$

წრფეებიდან ერთ-ერთ მათგანზე.

გადაკვეთის წერტილები, რომლებიც ეკუთვნიან ამ წრფეებიდან პირველ წრფეს, როგორც უკვე ვნახეთ, არი ის ორი ციკლური $J_1$ და $J_2$ წერტილი. თუ გამოვრიცხავთ ამ წერტილებს, დავუშვებთ $x_3\neq 0$, (4) განტოლება შეიძლება გადავწეროთ ჩვეულებრივი სახით:

$$2(A_1-A_3)x+2(B_1-B_3)y+(C_1-C_3)=0. \tag{4a}$$

ეს არის ჩვენი ორი წრეწირის რადიკალური ღერძი (§ 100, სავარჯიშო 3). ამ წრფის მოცემულ ერთ-ერთ ნებისმიერ წრეწირთან გადაკვეთის წერტილები გვაძლევს ორ სხვა საძიებელ გადაკვეთის წერტილს.

ეს ორი წერტილი შეიძლება იყოს ნამდვილი და სხვადასხვა, წარმოსახვითი, ანდა ნამდვილი და თანხვედნილი (როცა წრეწირები ეხებიან ერთმანეთს).

განვიხილოთ ბოლოს

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0,$$

ანუ

$$x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0$$

სფეროს არასაკუთრივ $x_4=0$ სიბრტყესთან გადაკვეთის საკითხი.

თუ დავწერთ სფეროს განტოლებას ერთგვაროვან კოორდინატებში და დავუშვებთ $x_4=0$, დავინახავთ, რომ საძიებელი გეომეტრიული ადგილი ხასიათდება

$$x^2_1+x^2_2+x^2_3=0,\ x_4=0 \qquad (5)$$

განტოლებებით.

ამ განტოლებათა ერთობლიობა წარმოადგენს არასაკუთრივ წარმოსახვით წირს, რომელსაც **სფერული წრეწირი** ეწოდება. ჩვენ ვხედავთ, რომ ყოველი სფერო გადის ამ წრეწირზე.

ადვილი შესანიშნავია, რომ სფერული წრეწირის ნებისმიერ საკუთრივ სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილები, წარმოადგენენ ამ სიბრტყის ციკლურ წერტილებს.

### სავარჯიშოები და დამატებები

1. დაამტკიცეთ, რომ მსგავსი გარდაქმნა სიბრტყეზე არ იწვევს ციკლური წერტილების გადაადგილებას სიბრტყეზე ან მხოლოდ და მხოლოდ მათ გადაადგილებას ურთიერთ შორის.

**დამტკიცება.** ციკლურ წერტილთა ერთგვაროვანი $x'_1, x'_2, x'_3$ კოორდინატები გარდაქმნამდე განისაზღვრება

$$x_1'^2+x_2'^2=0,\ x'_3=0$$

განტოლებებით (ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ კოორდინატები მართკუთხაა).

სიბრტყის ჰომოთეტური გარდაქმნა, როგორც ადვილი სანახავია, ერთგვაროვან კოორდინატებში შეიძლება წარმოდგენილ იქნას ასე:

$$x_1-ax_3=k(x'_1-ax'_3),\ x_2-bx_3=k(x'_2-bx'_3),\ x_3=x'_3.$$

არასაკუთრივი ($x_3=0,\ x'_3=0$) წრფის წერტილებისათვის ეს გვაძლევს:

$$x_1=kx'_1,\ x_2=kx'_2,$$

საიდანაც

$$x_1^2+x_2^2=k^2(x_1'^2+x_2'^2),\ x_3=x'_3=0.$$

მაშასადამე, თუ $x_1'^2+x_2'^2=0$, მაშინ $x^2_1+x^2_2=0$, ხოლო აქედან გამომდინარეობს ჩვენი დებულება ჰომოთეტური გარდაქმნის შემთხვევაში.

მოძრაობისას

$$x_1=x'_1\cos\varphi\mp x'_2\sin\varphi+ax'_3,$$
$$x_2=x'_1\sin\varphi\pm x'_2\cos\varphi+bx'_3$$

აგრეთვე, გვაქვს

$$x^2_1+x^2_2=x_1'^2+x_2'^2,$$

როცა $x_3=x'_3=0$, ხოლო აქედან გამომდინარეობს ჩვენი დებულება მოძრაობის შემთხვევაში.

რადგანაც მსგავსი გარდაქმნა შედგება ჰომოთეტური გარდაქმნისაგან, რომელსაც თან ხდევს მოძრაობა, ამიტომ ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

2. დაამტკიცეთ, რომ სივრცის მსგავსი გარდაქმნისას, სფერული წრეწირი (ჩვენ ვგულისხმობთ მართკუთხა კოორდინატებს):

$$x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2=0$$
$$x'_4=0$$

გადადის თავის თავში.

დამტკიცება. სავსებით ანალოგიურია წინა სავარჯიშოში მოყვანილი დამტკიცებისა.

3. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ პირიქითაც: ყოველი აფინური გარდაქმნა, რომელიც სფერულ წრეწირს ინარჩუნებს (ანუ ციკლურ წერტილებს ორი განხომილების შემთხვევაში) არის მსგავსი გარდაქმნა.

## III. გეგმილური კოორდინატები და გეგმილური გარდაქმნები

ნაკეთების აფინურ თვისებათა შესწავლისათვის დეკარტის განზოგადებული კოორდინატების გამოყენების მიზანშეწონილობა მდგომარეობს იმაში, რომ წერტილის მდებარეობა ამ კოორდინატებში განისაზღვრება ისეთ სიდიდეთა და თვისებათა საშუალებით, რომლებიც ინვარიანტული (უცვლელნი) რჩებიან აფინურ გარდაქმნებისას (წრფეთა შორის პარალელობა, პარალელურ ვექტორთა ფარდობა).

ჩვენ შემდეგში მოგვიწევს გავეცნოთ ეგრეთ წოდებულ გეგმილურ გარდაქმნებს, რომლებიც აფინურ გარდაქმნათა განზოგადებას წარმოადგენენ; ამ გარდაქმნების დროს წრფეები რჩებიან წრფეებად, ისე როგორც აფინურ გარდაქმნისას, მაგრამ წრფეთა შორის პარალელობა უკვე ირღვევა, და აგრეთვე იცვლება პარალელურ ნაკვეთთა ფარდობა. ჩვენ ჯერჯერობით მხედველობაში გვაქვს მხოლოდ ეგრეთ წოდებული წერტილოვანი გეგმილური გარდაქმნები.

ასეთ გარდაქმნებში უცვლელ თვისებათა შესწავლისათვის მიზანშეწონილია შემოვიტანოთ დეკარტის კოორდინატებთან შედარებით უფრო ზოგადი კოორდინატები, რომელთა განსაზღვრა აგრეთვე დამყარებული იქნებოდა თვისებებზე, რომლებიც უცვლელი რჩებიან გეგმილურ გარდაქმნისას.

შემდეგ მომდევნო პარაგრაფში (§ § 176—179) ჩვენ ვიძლევით წინასწარ წარმოდგენას წერტილის გეგმილურ კოორდინატებზე და გეგმილურ წერტილოვან გარდაქმნებზე; ამ პარაგრაფების შინაარსის გაცნობა (თუნდაც ზერელედ) საკმარისია მთელი შემდგომი წიგნის ძირითადი (ე. ი. მსხვილი შრიფტით ნაბეჭდი) ტექსტის გასაგებად. ამ თავის დანარჩენი პარაგრაფები, წვრილი შრიფტით ნაბეჭდი, განკუთვნილია იმ მკითხველთათვის, რომელთაც სურთ რამდენადმე ღრმად ჩაწვდნენ საქმის გეომეტრიულ არსს.

**§ 176. წილად-წრფივი (ჰომოგრაფიული) ჩასმების შესახებ.** შემდეგში ჩვენ საქმე გვექნება ეგრეთ წოდებული წილად-წრფივი ანუ ჰომოგრაფიულ ჩასმებთან, რომლის შესახებაც ჩვენ ვიტყვით აქ რაძდენსამე სიტყვას.

თუ $x$ და $y$ ცვლადები დაკავშირებული არიან დამოკიდებულებით

$$y=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, \tag{1}$$

სადაც $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ — მუდმივებია (ნამდვილი ან კომპლექსური), მაშინ ამბობენ, რომ $y$ მიიღება $x$-დან წილად-წრფივი ანუ ჰომოგრაფიული ჩასმით.

(1) ჩასმას ეწოდება *არაგანსაკუთრებული*, თუ დეტერმინანტი

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=\alpha\delta-\beta\gamma$$

ნულისაგან განსხვავებულია; წინააღმდეგ შემთხვევაში ჩასმას ეწოდება *განსაკუთრებული*.

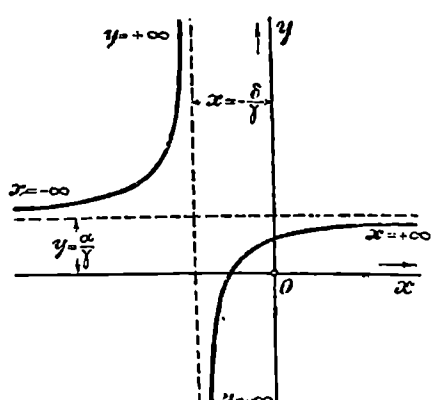
შემდეგში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ არაგანსაკუთრებულ ჩასმებს, ვინაიდან განსაკუთრებული ჩასმები ინტერესს არ იწვევ[1]).

ამ პირობებში (1) ჩასმა ცალსახად შებრუნებადია, ე. ი. (1) დამოკიდებულება ცალსახად ამოხსნადია $x$-ის მიმართ. სახელდობრ, თუ (1) განტოლებას ამოვხსნით $x$-ის მიმართ, მივიღებთ

$$x=\frac{\delta y-\beta}{-\gamma y+\alpha}. \tag{2}$$

ამრიგად, $x$ მიიღება $y$-დან აგრეთვე ჰომოგრაფიული არაგანსაკუთრებული ჩასმით.

ჰომოგრაფიული ჩასმების განხილვისას მიზანშეწონილია არ გამოვრიცხოთ მნიშვნელობები $x=\infty$, $y=\infty$. სახელდობრ, შეეთანხმდეთ, ვთქვათ, რომ $x=\infty$ მნიშვნელობას შეესაბამება $y=\frac{\alpha}{\gamma}$, ხოლო $y=\infty$ მნიშვნელობას — $x=-\frac{\delta}{\gamma}$; ეს მნიშვნელობები მიიღებიან (1) და (2) ფორმულებიდან ზღვარზე გადასვლის შედეგად, როცა შესაბამისად, $x\to\infty$ და $y\to\infty$.



ნახ. 112.

თუ (1) ჩასმაში გვაქვს $\gamma=0$ (მაშინ აუცილებლად $\alpha\neq 0$, $\delta\neq 0$, თორემ გვექნებოდა $\Delta=0$), ეს ჩასმა გადდება წრფივი (საზოგადოდ არაერთგვაროვანი) ჩასმა

$$y=\frac{\alpha}{\delta}x+\frac{\beta}{\delta}.$$

შემდეგში, ჩვენ წრფივ ჩასმას ზოგჯერ ვუწოდებთ *მთელ წრფივ ჩასმას*, თუ მოთხოვნილია მისი დაპირისპირება წილად წრფივ ჩასმასთან.

[1]) განსაკუთრებული ჩასმის შემთხვევაში, ე. ი. იმ შემთხვევაში, როცა $\alpha\delta-\beta\gamma=0$, რიცხვები $\alpha$ და $\beta$ პროპორციულია რიცხვებისა $\gamma$, $\delta$ და ამიტომ (1) ფორმულის მარჯვენა მხარე ფაქტიურად $x$-ზე აო არის დამოკიდებული.

**შავარჯიშოები და დამატებანი**

1. გამოსაკვლევია (1) ფორმულაში $y$-ის ცვალებადობა $x$-ის ცვალებადობასთან ერთად, როცა სიდიდეები $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ ნამდვილია.

ამოხსნა. ამ ამოცანას ჩვენ ამოვხსნით წარმოებულის ცნების გამოყენებით (თუმცა ეს უამისოდაც ადვილი მოსახერხებელია) გვაქვს:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma x+\delta)^2}$$

მაშასადამე, თუ $\alpha\delta-\beta\gamma>0$, მაშინ $y$ ყოველთვის იზრდება $x$-ის ზრდასთან ერთად, ხოლო თუ $\alpha\delta-\beta\gamma<0$, მაშინ $y$ ყოველთვის კლებულობს; ჩვენ ჯერჯერობით გამოვრიცხავთ $x=-\frac{\delta}{\gamma}$ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც $y=\infty$. განსაკუთრებული ჩასმის შემთხვევაში ($\alpha\delta-\beta\gamma=0$) $y$ მუდმივი რჩება.

უფრო დაწვრილებით გამოვიკვლიოთ შემთხვევა $\alpha\delta-\beta\gamma>0$ (შემთხვევა $\alpha\delta-\beta\gamma<0$ ანალოგიურად გამოიკვლევა). ვიგულისხმებთ აგრეთვე, რომ $\gamma\neq0$, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში საქმე გვექნებოდა მთელი წრფივ ჩასმასთან, რომლის გამოკვლევა სავსებით ელემენტარულია. როცა $x$ იზრდება $-\infty$-დან $-\frac{\delta}{\gamma}$-მდე, $y$ სიდიდე იზრდება $\frac{\alpha}{\gamma}$-დან $+\infty$-მდე; $-\frac{\delta}{\gamma}$-ზე $x$-ის გადასვლისას, $y$ გადახტება $+\infty$-დან $-\infty$-ზე. $x$-ის შემდგომი ზრდისას, $y$ იზრდება და როცა $x$ მიისწრაფვის $+\infty$-სკენ, $y$ ხელახლა მიისწრაფვის $\frac{\alpha}{\gamma}$-სკენ. ამრიგად, ჩვენ გვაქვს $y$-ის ცვალებადობის გრაფიკი ნახ. 112-ზე გამოსახული.

ჩვენ ვხედავთ, რომ $x$-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება $y$-ის ერთი მნიშვნელობა და, პირიქით. აქ ჩვენ არ განვასხვავებთ მნიშვნელობებს $x=+\infty, -\infty$ და $y=+\infty, -\infty$.

2. დავამტკიცოთ, რომ არაგანსაკუთრებული ჰომოგრაფიული გარდაქმნათა ერთობლიობა შეადგენს ჯგუფს (იხ. § 78).

დამტკიცება. როგორც უკვე ნაჩვენები იყო, ჰომოგრაფიულის შებრუნებული ჩასმა არის ჰომოგრაფიული. დასამტკიცებელი რჩება, რომ ორი არაგანსაკუთრებული ჰომოგრაფიული ჩასმის მიმდევრობა არის აგრეთვე არაგანსაკუთრებული ჰომოგრაფიული ჩასმა. ეს მტკიცდება უშუალო შემოწმებით: ვთქვათ, $y=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ არის ჰომოგრაფიული ჩასმა, რომლის შემდეგაც სრულდება მეორე ჩასმა, $z=\frac{\alpha' y+\beta'}{\gamma' y+\delta'}$. თუ უკანასკნელ ფორმულაში შევიტანთ $y$-ის წინა მნიშვნელობას, მივიღებთ:

$$z=\frac{\alpha'\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}+\beta'}{\gamma'\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}+\delta'}=\frac{(\alpha'\alpha+\beta'\gamma)x+(\alpha'\beta+\beta'\delta)}{(\gamma'\alpha+\delta'\gamma)x+(\gamma'\beta+\delta'\delta)}.$$

ეს არის ჰომოგრაფიული ჩასმა და მასთან არაგანსაკუთრებული, რადგანაც

$$\begin{vmatrix}\alpha'\alpha+\beta'\gamma & \alpha'\beta+\beta'\delta\\ \gamma'\alpha+\delta'\gamma & \gamma'\beta+\delta'\delta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq0.$$

**§ 127. წერტილის გეგმილური კოორდინატები. 1°. წერტილის გეგმილური კოორდინატები წრფეზე.** როგორც ვიცით, მოცემულ წრფეზე $M$ წერტილის მდებარეობა შეიძლება განსაზღვრულ იქნას დეკარტის ერთ-

ვეაროვანი კოორდინატებით $x_1$, $x_2$, რომელთა ფარდობა

$$\frac{x_1}{x_2}=x$$

წარმოადგენს ერთგვაროვან დეკარტის $x$ კოორდინატს (აბსცისს).

$x_1$ და $x_2$-ის ნაცვლად განსახილველად შემოვიტანოთ ახალი $y_1$ და $y_2$ სიდიდეები, დაკავშირებულნი წინასთან წრფივი ერთგვაროვანი არაგანსაკუთრებული ჩასმებით

$$\left.\begin{aligned} y_1&=\beta_{11}x_1+\beta_{12}x_2\\ y_2&=\beta_{21}x_1+\beta_{22}x_2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

სადაც $\beta_{ij}$ $(i,\ j=1,\ 2)$ — ისეთი მუდმივებია, რომლის დეტერმინანტი

$$B=\begin{vmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\\ \beta_{21} & \beta_{22}\end{vmatrix}$$

ნულისაგან განსხვავებულია (ეს პირობა გამოსახავს იმას, რომ განსახილველი ჩასმა — არაგანსაკუთრებულია).

$B\neq 0$ პირობის შედეგად, (1) ჩასმა შეიძლება ცალსახად შებრუნდეს, ე. ი. (1) განტოლებები შეიძლება ცალსახად იქნას ამოხსნილი $x_1$ და $x_2$-ის მიმართ, რაც მიგვიყვანს

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\alpha_{11}y_1+\alpha_{12}y_2,\\ x_2&=\alpha_{21}y_1+\alpha_{22}y_2, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

სახის დამოკიდებულებამდე, სადაც $\alpha_{ij}$ $(i,\ j=1,\ 2)$ — მუდმივებია, მასთან ისეთი, რომ დეტერმინანტი

$$A=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}=\frac{1}{B}$$

ნულისაგან განსხვავებულია [1]). (1) და (2)-დან გამომდინარეობს, რომ $x=\dfrac{x_1}{x_2}$

[1]) იხ. დამატება, § 8. ჩვენს მარტივ შემთხვევაში გამოთქმული ორი ცვლადის დებულება უშუალოდ ადვილად შემოწმდება. მართლაც, (1) სისტემას თუ ამოვხსნით $x_1$ და $x_2$-ის მიმართ, მივიღებთ

$$x_1=\frac{\beta_{22}y_1-\beta_{12}y_2}{B},\quad x_2=\frac{-\beta_{21}y_1+\beta_{11}y_2}{B}, \tag{*}$$

საიდანაც

$$\alpha_{11}=\frac{\beta_{22}}{B},\quad \alpha_{12}=-\frac{\beta_{12}}{B},\quad \alpha_{21}=-\frac{\beta_{21}}{B},\quad \alpha_{22}=\frac{\beta_{11}}{B}. \tag{**}$$

$A$ დეტერმინანტისათვის მივიღებთ გამოსახულებას

$$A=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}=\frac{1}{B}\begin{vmatrix}\beta_{22} & -\beta_{12}\\ -\beta_{21} & \beta_{11}\end{vmatrix}=\frac{1}{B}.$$

მაშასადამე, $A\neq 0$. შევნიშნოთ კიდევ, რომ (**)-ის საფუძველზე (3)-ის მეორე ტოლობა შეიძლება გადავწეროთ ასეთი სახით:

$$x=\frac{\beta_{22}y-\beta_{12}}{-\beta_{21}y+\beta_{11}}. \tag{***}$$

დეკარტის კოორდინატის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება სავსებით გარკვეული მნიშვნელობა ფარდობისა $\frac{y_1}{y_2}=y$, და პირუკუ, სახელდობრ,

$$y=\frac{\beta_{11}x+\beta_{12}}{\beta_{21}x+\beta_{22}},\quad x=\frac{\alpha_{11}y+\alpha_{12}}{\alpha_{21}y+\alpha_{22}}. \tag{3}$$

$y$-საც შეიძლება ვუწოდოთ $M$ წერტილის კოორდინატი, ვინაიდან ის სავსებით განსაზღვრავს ამ წერტილის მდებარეობას. ამ სიდიდეს ეწოდება მოცემულ წრფეზე $M$ წერტილის **არაერთგვაროვანი გეგმილური კოორდინატი**, ხოლო სიდიდეებს $y_1$ და $y_2$ ეწოდებათ ამ წერტილის **ერთგვაროვანი გეგმილური კოორდინატები**.

ამრიგად, წრფეზე ერთი და იმავე წერტილის ერთგვაროვანი გეგმილური და დეკარტის კოორდინატები დაკავშირებული არიან წრფივი ერთგვაროვანი არაგანსაკუთრებული ჩასმით, ხოლო არაერთგვაროვანი კოორდინატები — წილად-წრფივი არაგანსაკუთრებული ჩასმით. კერძოდ, წილად-წრფივი ჩასმა (3) შეიძლება იყოს მთელი წრფივიც (ეს იქნება, როცა $\beta_{21}=0$; მაშინ აგრეთვე $\alpha_{21}=0$); ამ შემთხვევაში, როგორც ადვილი შესამჩნევია, გეგმილური კოორდინატი $y$ იქნება, ისე როგორც $x$, დეკარტის კოორდინატი[1]. ამრიგად, დეკარტის კოორდინატები წარმოადგენენ გეგმილური კოორდინატების კერძო შემთხვევას.

გეგმილურ კოორდინატებს აქვთ მეტად მარტივი გეომეტრიული აზრი, რომელიც ქვემოთ იქნება ნაჩვენები (§ 186).

აქ, ჩვენ შევჩერდებით **გეგმილურ კოორდინატთა გარდაქმნის** საკითხზე. ერთ და იმავე წრფეზე შეიძლება ავარჩიოთ გეგმილურ კოორდინატთა უამრავი სისტემა. ეს არჩევანი განისაზღვრება წრფეზე დეკარტის კოორდინატთა დაწყებითი სისტემისა (ე. ი. სათავისა და საკოორდინატო ვექტორის არჩევით) და (1) ჩასჯის $\beta_{ij}$ კოეფიციენტთა არჩევით. ზოგადობის დაურღვეველად, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ გამოსავალი დეკარტის სისტემა ერთხელ და სამუდამოდ ფიქსირებულია. მართლაც, თუ $y_1$ და $y_2$ გეგმილურ კოორდინატთა განსაზღვრისას, საფუძვლად მივიღებთ დეკარტის კოორდინატთა რომელიმე ახალ სისტემას, ე. ი. (1) ფორმულების ნაცვლად ავიღებთ ფორმულებს

$$y_1=\beta'_{11}x'_1+\beta'_{12}x'_2,\ y_2=\beta'_{21}x'_1+\beta'_{22}x'_2,$$

სადაც $\beta'_{ij}$ — რომელიმე მუდმივებია, ისეთი, რომ მათგან შედგენილი დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია, ხოლო $x'_1$, $x'_2$-ით აღნიშნულია $M$ წერტილის დეკარტის ახალი კოორდინატები, მაშინ, თუ წინა დამოკიდებულებებში ჩავსვამთ დეკარტის ახალ კოორდინატთა გამოსახულებებს ძველით [§ 173, (3a) ფორმულები]: $x'_1=mx_1+bx_2$, $x'_2=x_2$, ცხადია, მივიღებთ

[1] მართლაც, ამ შემთხვევაში (3) ფორმულები გადაიქცევიან წრფეზე დეკარტის კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულებად.

ისევ (1) სახის ფორმულებს, $\beta_{ij}$ მუდმივთა რომელიმე მნიშვნელობათათვის, მასთან, როგორც ადვილი შესამჩნევია, გვექნება $B \neq 0$.

ამრიგად, როცა ვიხილავთ გეგმილურ კოორდინატთა გარდაქმნის საკითხს, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ საფუძვლად დადებული დეკარტის სისტემა — ყოველთვის ერთი და იგივეა.

მაშასადამე, ვთქვათ, გვაქვს გეგმილურ კოორდინატთა ერთი სისტემა, რომელიც განსაზღვრულია არაგანსაკუთრებული (1) ჩასმით, და მეორე სისტემა, განსაზღვრული სხვა არაგანსაკუთრებული ჩასმით:

$$x'_1 = \gamma_{11}x_1 + \gamma_{12}x_2, \quad y'_2 = \gamma_{21}x_1 + \gamma_{22}x_2.$$

უკანასკნელ ფორმულებში თუ შევიტანთ (2) გამოსახულებებს, ცხადია, მივიღებთ შემდეგი სახის ფორმულებს:

$$\left.\begin{aligned} y'_1 &= m_{11}y_1 + m_{12}y_2, \\ y'_2 &= m_{21}y_1 + m_{22}y_2, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

მასთან, როგორც ადვილი შესამჩნევია, დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}$$

ნულისაგან განსხვავებულია [1]). (4) სისტემას თუ ამოვხსნით $y_1$ და $y_2$-ის მიმართ, მივიღებთ

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= l_{11}x'_1 + l_{12}y'_2, \\ y_2 &= l_{21}y'_1 + l_{22}y'_2 \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

სახის ფორმულებს, სადაც დეტერმინანტი $\begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{vmatrix}$ ნულისაგან განსხვავებულია.

ამრიგად, **წრფეზე ერთი და იმავე წერტილის ერთგვაროვანი გეგმილური კოორდინატები სხვადასხვა სისტემის მიმართ ურთიერთდაკავშირებულია წრფივი ერთგვაროვანი არაგანსაკუთრებული ჩასმით.**

2°. **გეგმილური კოორდინატები სიბრტყეზე და სივრცეში.** სიბრტყისა და სივრცის შემთხვევაში განზოგადება არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს.

ვთქვათ, $x_1$, $x_2$, $x_3$—ერთგვაროვანი დეკარტის კოორდინატებია სიბრტყეზე. ამ სიდიდეთა ნაცვლად შემოვიღოთ ახალი სიდიდეები $y_1$, $y_2$, $y_3$, მათთან დაკავშირებული წრფივი ერთგვაროვანი ჩასმებით

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}x_3, \\ y_2 &= \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{23}x_3, \\ y_3 &= \beta_{31}x_1 + \beta_{32}x_2 + \beta_{33}x_3, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

[1]) იხ. დამატება, § 9.

სადაც $\beta_{ij}$ $(i, j=1, 2, 3)$ — მუდმივი კოეფიციენტებია, რომელთა დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია. უკანასკნელი პირობის გამო (5) ჩასმა შეიძლება ცალსახად შებრუნდეს და $x_1$, $x_2$, $x_3$ გამოისახოს $y_1$, $y_2$, $y_3$-ით:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3, \\ x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3, \\ x_3 &= \alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

სიბრტყეზე ყოველი $M$ წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება $x_1$, $x_2$, $x_3$ სიდიდეებიდან ორი სიდიდის ფარდობით მესამესთან. უკანასკნელი ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ $M$ წერტილის მდებარეობა აგრეთვე განისაზღვრება $y_1$, $y_2$, $y_3$ სიდიდეებიდან ორი სიდიდის ფარდობით მესამესთან [1]).

სიდიდეებს $y_1$, $y_2$, $y_3$ ეწოდებათ $M$ წერტილის ერთგვაროვანი გეგმილური კოორდინატები. არაერთგვაროვანი გეგმილური კოორდინატები შეიძლება ვუწოდოთ $y_1$, $y_2$, $y_3$ სიდიდეებიდან ნებისმიერ ორის ფარდობას მესამესთან.

სავსებით ანალოგიურად განისაზღვრება წერტილის გეგმილური კოორდინატები სივრცეში. სახელდობრ, თუ $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ წერტილის ერთგვაროვანი დეკარტის კოორდინატებია. მაშინ $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ სიდიდეებს, რომლებიც დაკავშირებული არიან $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$-სთან წრფივი არაგანსაკუთრებული ჩასმებით

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}x_3 + \beta_{14}x_4, \\ y_2 &= \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{23}x_3 + \beta_{24}x_4, \\ y_3 &= \beta_{31}x_1 + \beta_{32}x_2 + \beta_{33}x_3 + \beta_{34}x_4, \\ y_4 &= \beta_{41}x_1 + \beta_{42}x_2 + \beta_{43}x_3 + \beta_{44}x_4. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

სადაც $\beta_{ij}$ $(i, j=1, 2, 3, 4)$—მუდმივებია, რომელთა დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია, და მას შეიძლება ვუწოდოთ წერტილის ერთგვაროვანი გეგმილური კოორდინატები სივრცეში. $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ სიდიდეებიდან ნებისმიერი სამის ფარდობას მეოთხესთან შეიძლება ეწოდოს სივრცეში წერტილის არაერთგვაროვანი გეგმილური კოორდინატები.

იმის გამო, რომ (7) ჩასმა არაგანსაკუთრებულია, ის შეიძლება შებრუნდეს. რაც გვაძლევს

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3 + \alpha_{14}y_4, \\ x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3 + \alpha_{24}y_4, \\ x_3 &= \alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3 + \alpha_{34}y_4, \\ x_4 &= \alpha_{41}y_1 + \alpha_{42}y_2 + \alpha_{43}y_3 + \alpha_{44}y_4. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

[1]) $y_1$, $y_2$, $y_3$ სიდიდეები არ შეიძლება იყოს ერთდროულად ნულის ტოლი; მართლაც, თუ (6)-ში $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, მაშინ $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, რაც პირობას ეწინააღმდეგება.

გეგმილურ კოორდინატთა გეომეტრიული აზრი სიბრტყეზე და სივრცეში § 191-ში იქნება გამორკვეული. აქ კი ჩვენ დავკმაყოფილდებით გეგმილურ კოორდინატთა გარდაქმნების შესახებ შემდეგი შენიშვნებით.

სიბრტყეზე და სივრცეში შეიძლება შევარჩიოთ გეგმილურ კოორდინატთა უამრავი სისტემა. ეს არჩევანი დამოკიდებულია გამოსავალი დეკარტის კოორდინატთა სისტემის არჩევისაგან და (5) ან (7) ჩასმების $\beta_{ij}$ კოეფიციენტთა არჩევისაგან. ადვილი დასანახია (შეად. წრფეზე კოორდინატთა შემთხვევას), რომ ზოგადობის დაურღვეველად, შეიძლება გამოსავალი დეკარტის სისტემა დავაფიქსიროთ ერთხელ და სამუდამოდ.

საეს ებით ისევე, როგორც წრფეზე კოორდინატთა შემთხვევაში, ადვილი დასამტკიცებელია, რომ გეგმილურ კოორდინატთა ერთი სისტემის მეორით შეცვლისას ძველი და ახალი ერთგვაროვანი გეგმილური კოორდინატები ურთიერთდაკავშირებული არიან წრფივი ერთგვაროვანი არაგანსაკუთრებული ჩასმით.

ამრიგად, თუ $y_1$, $y_2$, $y_3$ და $y'_1$, $y'_2$, $y'_3$ აღნიშნავენ სიბრტყეზე ერთი და იმავე წერტილის ძველ და ახალ ერთგვაროვან კოორდინატებს, მაშინ

$$\left.\begin{aligned} y'_1 &= m_{11}y_1 + m_{12}y_2 + m_{13}y_3, \\ y'_2 &= m_{21}y_1 + m_{22}y_2 + m_{23}y_3, \\ y'_3 &= m_{31}y_1 + m_{32}y_2 + m_{33}y_3, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

და პირუკუ,

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= l_{11}y'_1 + l_{12}y'_2 + l_{13}y'_3, \\ y_2 &= l_{21}y'_1 + l_{22}y'_2 + l_{23}y'_3, \\ y_3 &= l_{31}y'_1 + l_{32}y'_2 + l_{33}y'_3, \end{aligned}\right\} \tag{9a}$$

სადაც $m_{ij}$ და $l_{ij}$—მუდმივებია, მასთან $m_{ij}$ და $l_{ij}$-საგან შედგენილი დეტერმინანტები ნულისაგან განსხვავებულია.

საეს ებით ანალოგიური ფორმულები გვაქვს სივრცის შემთხვევაში. სახელდობრ, თუ $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ და $y'_1$, $y'_2$, $y'_3$, $y'_4$ სივრცეში წერტილის ძველი და ახალი ერთგვაროვანი გეგმილური კოორდინატებია, მაშინ

$$\left.\begin{aligned} y'_1 &= m_{11}y_1 + m_{12}y_2 + m_{13}y_3 + m_{14}y_4, \\ y'_2 &= m_{21}y_1 + m_{22}y_2 + m_{23}y_3 + m_{24}y_4, \\ y'_3 &= m_{31}y_1 + m_{32}y_2 + m_{33}y_3 + m_{34}y_4, \\ y'_4 &= m_{41}y_1 + m_{42}y_2 + m_{43}y_3 + m_{44}y_4, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

და პირუკუ

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= l_{11}y'_1 + l_{12}y'_2 + l_{13}y'_3 + l_{14}y'_4, \\ y_2 &= l_{21}y'_1 + l_{22}y'_2 + l_{23}y'_3 + l_{24}y'_4, \\ y_3 &= l_{31}y'_1 + l_{32}y'_2 + l_{33}y'_3 + l_{34}y'_4, \\ y_4 &= l_{41}y'_1 + l_{42}y'_2 + l_{43}y'_3 + l_{44}y'_4, \end{aligned}\right\} \tag{10a}$$

სადაც $m_{ij}$ და $l_{ij}$ ისეთი მუდმივებია, რომ მათგან შედგენილი დეტერმინანტები ნულისაგან განსხვავებულია.

§ 192-ში გარკვეული იქნება სიბრტყეზე და სივრცეში გეგმილურ კოორდინატთა გარდაქმნის გეომეტრიული აზრი.

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა.** რადგან წერტილის მდებარეობაზე გავლენას ახდენს ერთგვაროვან კოორდინატთა მხოლოდ ურთიერთფარდობა, ამიტომ, გეგმილური კოორდინატების განმსაზღვრელი ფორმულები, შეგვეძლო დაგვეწერა რამდენადმე უფრო ზოგადი სახით, ვიდრე ეს ჩვენ გავაკეთეთ. მაგალითად, სიბრტყეზე წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატების განმსაზღვრელი (5) ფორმულების ნაცვლად; ჩვენ შეგვეძლო აგვეღო ფორმულები

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \lambda(\beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}x_3),\\ y_2 &= \lambda(\beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{23}x_3),\\ y_3 &= \lambda(\beta_{31}x_1 + \beta_{32}x_2 + \beta_{33}x_3). \end{aligned}\right\} \tag{5a}$$

სადაც $\lambda$ — ნებისმიერი (მუდმივი ან ცვლადი) მამრავლია, ნულისაგან განსხვავებული. მაგრამ ასეთი მამრავლის შემოტანა უმეტეს შემთხვევაში წარმოადგენს მხოლოდ უსარგებლო გართულებას, ვინაიდან (5ა) ფორმულის მარჯვენა მხარეში $\lambda x_1$, $\lambda x_2$, $\lambda x_3$-ის ნაცვლად თუ დავწერთ უბრალოდ $x_1$, $x_2$, $x_3$-ს (ეს შეგვიძლია გავაკეთოთ, რადგანაც $x_1$, $x_2$, $x_3$ და $\lambda x_1$, $\lambda x_2$, $\lambda x_3$ წარმოადგენენ ერთი და იმავე წერტილის კოორდინატებს), ჩვენ დავუბრუნდებით (5) ფორმულებს.

ანალოგიური შენიშვნა შეიძლება გავაკეთოთ ერთგვაროვანი გეგმილური კოორდინატების გარდაქმნის შესახებ, მაგალითად, სიბრტყეზე გეგმილურ კოორდინატთა გარდაქმნის (9) ფორმულის შესახებ.

**§ 178. ალგებრული წირებისა და ფართეულის განტოლებანი ერთგვაროვან გეგმილურ კოორდინატებში.** ვთქვათ,

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{1}$$

სადაც $\Phi$ — ერთგვაროვანი პოლინომია, არის სიბრტყეზე ალგებრული წირის განტოლება ერთგვაროვან დეკარტის კოორდინატებში. $x_1$, $x_2$, $x_3$-ის ნაცვლად თუ ჩავსვამთ მათ გამოსახულებებს ერთგვაროვან გეგმილურ კოორდინატებში $y_1$, $y_2$, $y_3$ § 177 (6) ფორმულების მიხედვით:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3,\\ x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3,\\ x_3 &= \alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

მივიღებთ ისეთივე სახის განტოლებას

$$\Psi(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0,$$

სადაც $\Psi$ — ერთგვაროვანი პოლინომია, იმავე რიგისა, რაც $\Phi$. ამიტომ, წირის რიგის განსაზღვრისას შეიძლება ვისარგებლოთ არა მარტო დეკარტის კოორდინატებით, არამედ გეგმილური კოორდინატებითაც.

სწორედ ასევე, ალგებრული ფართეულის განტოლებას ერთგვაროვან გეგმილურ კოორდინატებში აქვს სახე

$$\Psi(y_1, y_2, y_3, y_4)=0, \tag{3}$$

სადაც $\Psi$ — ერთგვაროვანი პოლინომია, რომლის რიგი არის ფართეულის რიგი.

წირებისა და ფართეულების განტოლებათა შესახებ § 174-ში ნათქვამი უცვლელად გადაიტანება განტოლებებზე გეგმილურ კოორდინატებში.

კერძოდ, სიბრტყეზე წრფის განტოლება, რომელსაც დეკარტის ერთგვაროვან კოორდინატებში აქვს სახე

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0, \tag{4}$$

სადაც $a_1$, $a_2$, $a_3$ — მუდმივებია და ერთდროულად ნულის ტოლი არ არიან, (2) ჩასმით გადადის იმავე სახის განტოლებაში

$$b_1y_1+b_2y_2+b_3y_3=0, \tag{5}$$

სადაც

$$\left.\begin{aligned} b_1&=\alpha_{11}a_1+\alpha_{21}a_2+\alpha_{31}a_3,\\ b_2&=\alpha_{12}a_1+\alpha_{22}a_2+\alpha_{32}a_3,\\ b_3&=\alpha_{13}a_1+\alpha_{23}a_2+\alpha_{33}a_3. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$b_1$, $b_2$, $b_3$ სიდიდეები არ შეიძლება იყოს ერთდროულად ნულის ტოლი, ვინაიდან $a_1$, $a_2$, $a_3$ ერთდროულად ნულის ტოლი არ არიან, ხოლო $\alpha_{ij}$ კოეფიციენტთა დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია.

საყსებით ანალოგიურ შედეგებს მივიღებთ სიბრტყის განტოლებისათვის სივრცეში: თუ

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0 \tag{7}$$

არის სიბრტყის განტოლება ერთგვაროვანი დეკარტის კოორდინატებში, მაშინ, თუ $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$-ს გამოვსახავთ § 177-ის (8) ფორმულის მიხედვით ერთგვაროვან გეგმილურ კოორდინატებში, მივიღებთ სიბრტყის განტოლებას ერთგვაროვან გეგმილურ კოორდინატებში. ამ განტოლებას აქვს სახე

$$b_1y_1+b_2y_2+b_3y_3+b_4y_4=0, \tag{8}$$

სადაც

$$\left.\begin{aligned} b_1&=\alpha_{11}a_1+\alpha_{21}a_2+\alpha_{31}a_3+\alpha_{41}a_4,\\ b_2&=\alpha_{12}a_1+\alpha_{21}a_2+\alpha_{32}a_3+\alpha_{42}a_4,\\ b_3&=\alpha_{13}a_1+\alpha_{23}a_2+\alpha_{33}a_3+\alpha_{43}a_4,\\ b_4&=\alpha_{14}a_1+\alpha_{24}a_2+\alpha_{34}a_3+\alpha_{44}a_4, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

წინა შემთხვევის ანალოგიურად სიდიდეები $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ არ შეიძლება ერთდროულად ნულის ტოლი იყოს.

(5) განტოლებაში შემავალ $b_1$, $b_2$, $b_3$ სიდიდეებს ეწოდებათ სიბრტყეზე წრფის ერთგვაროვანი გეგმილური კოორდინატები,

ხოლო (8) განტოლებაში შემავალ $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$-ს კი სივრცეში სიბრტყის ერთგვაროვანი გეგმილური კოორდინატები.

ყურადღება უნდა მიექცეს იმ გარემოებას, რომ განტოლება $y_3=0$ სიბრტყეზე უკვე არ გამოსახავს, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, არასაკუთრივ წრფეს, ხოლო სივრცეში განტოლება $y_4=0$ არ გამოსახავს, საზოგადოდ, არასაკუთრივ სიბრტყეს.

საზოგადოდ გეგმილურ კოორდინატთა გამოყენებისას არასაკუთრივი ელემენტები არაფრით არ განირჩევიან საკუთრივისაგან.

დ.სასრულს, მივუთითოთ, სიბრტყეზე წრფის გეგმილური კოორდინატების და სივრცეში სიბრტყის კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულებზე.

თუ სიბრტყეზე წრფის განტოლებაში (7) ჩავსვამთ $y_1$, $y_2$, $y_3$-ს ნაცვლად მათ გამოსახულებებს ახალ $y'_1$, $y'_2$, $y'_3$ კოორდინატებში, მოცემულს წინა პარაგრაფის (9ა) ფორმულებით, მაშინ ეს განტოლება მიიღებს სახეს

$$b'_1y'_1+b'_2y'_2+b'_3y'_3=0, \tag{9ა}$$

სადაც

$$\left.\begin{aligned} b'_1&=l_{11}b_1+l_{21}b_2+l_{31}b_3,\\ b'_2&=l_{12}b_1+l_{22}b_2+l_{32}b_3,\\ b'_3&=l_{13}b_1+l_{23}b_2+l_{33}b_3. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

ეს ფორმულები გამოსახავენ წრფის ახალ გეგმილურ კოორდინატებს ძველით; ხვენ ვხედავთ, რომ წრფის ახალი და ძველი კოორდინატები დაკავშირებული არიან წრფივი ერთგვაროვანი არასაკუთრივი ჩასმით.

(10) ფორმულების შედარება წინა პარაგრაფის (9ა) ფორმულებთან გვიჩვენებს, რომ წერტილებისა და წრფეთა კოორდინატები კონტრავარიანტულია (§ 68).

სავსებით ანალოგიური შედეგები მიიღებიან სივრცეში სიბრტყის კოორდინატებისათვის.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ვთქვათ, $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$, $\Pi_4$ ისეთი ოთხი სიბრტყეა სივრცეში, რომლებიც არ იკვეთებიან ერთ (საკუთრივ ან არასაკუთრივ) წერტილში. მაშინ, ყოველთვის შესაძლოა ისე შევარჩიოთ გეგმილურ კოორდინატთა სისტემა, რომ ამ სისტემაში $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$, $\Pi_4$ სიბრტყეთა განტოლებებს ჰქონდეთ, შესაბამისად, სახე:

$$y_1=0,\ y_2=0,\ y_3=0,\ y_4=0.$$

მართლაც, ვთქვათ,

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)&\equiv a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=0,\\ f_2(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)&\equiv a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=0,\\ f_3(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)&\equiv a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4=0,\\ f_4(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)&\equiv a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4=0 \end{aligned}\right.$$

$\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$, $\Pi_4$ სიბრტყეთა განტოლებებია ერთგვაროვან დეკარტის კოორდინატებში; $a_{ij}$ კოეფიციენტებისგან შედგენილი დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია, რადგანაც ჩვენი სიბრტყეები ერთ წერტილში არ იკვეთებიან (§ 168).

ცხადია, რომ გეგმილურ კოორდინატთა საძიებელ სისტემას მივიღებთ, თუ განვსაზღვრავთ მათ, მაგალითად, ფორმულებით [1]):

$$y_1=f_1(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4),\quad y_2=f_2(x_1,\ x_3,\ x_2,\ x_4),$$
$$y_3=f_3(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4),\quad y_4=f_4(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4),$$

ე. ი. თუ წინა პარაგრაფის (7) ფორმულებში ავიღებთ $\beta_{ij}=\alpha_{ij}$.

ანალოგიური შენიშვნა შეიძლება გავაკეთოთ ორი განზომილებისა და ერთი განზომილების შემთხვევისათვის.

**§ 178ა. ჭრფისა და კონის პარამეტრული წარმოდგენა გეგმილურ კოორდინატებში.** § 167-ში ჩვენ გავეცანით სიბრტყეზე წრფის პარამეტრულ წარმოდგენას. ვთქვათ, რომ $M'$ და $M''$ წრფის ორი სხვადასხვა მუდმივი წერტილია და, ვთქვათ, $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$ და $x_1''$, $x_2''$, $x_3''$—ამ წერტილთა ერთგვაროვანი დეკარტის კოორდინატებია. მაშინ ამ წრფის ყოველი $M$ წერტილის ერთგვაროვანი დეკარტის კოორდინატები $x_1$, $x_2$, $x_3$

$$x_1=\lambda x_1'+\mu x_1'',\quad x_2=\lambda x_2'+\mu x_2'',\quad x_3=\lambda x_3'+\mu x_3'', \tag{1}$$

ფორმულებით მოიცემიან, სადაც $\lambda$ და $\mu$ პარამეტრები ერთდროულად არ არიან ნულის ტოლი. $x_1$, $x_2$, $x_3$-ის გამოსახულებებს თუ შევიტანთ §. 177-ის (5) ფორმულაში, მივიღებთ, ცხადია, სავსებით ანალოგიურ ფორმულებს

$$y_1=\lambda y_1'+\mu y_1'',\quad y_2=\lambda y_2'+\mu y_2'',\quad y_3=\lambda y_3'+\mu y_3'' \tag{2}$$

სადაც $y_1$, $y_2$, $y_3$; $y_1'$, $y_2'$, $y_3'$; $y_1''$, $y_2''$, $y_3''$ უკვე აღნიშნავენ იმავე $M$, $M'$, $M''$ წერტილთა ერთგვაროვან გეგმილურ კოორდინატებს.

ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ $M$ წერტილის შესაბამი პარამეტრები $\lambda$, $\mu$ ერთი და იგივეა (1) და (2) ფორმულებში.

(1)-ის საურთიერთო ფორმულებს წარმოადგენენ ფორმულები, რომლებიც იძლევიან კონის პარამეტრულ წარმოდგენას (იხ. § 170-ის ბოლო):

$$a_1=\lambda a_1'+\mu a_1'',\quad a_2=\lambda a_2'+\mu a_2'',\quad a_3=\lambda a_3'+\mu a_3'', \tag{3}$$

სადაც $a_1'$, $a_2'$, $a_3'$ და $a_1''a_2''a_3''$ — კონის ორი მუდმივი წრფის $\Delta'$ და $\Delta''$-ის ერთგვაროვანი დეკარტის კოორდინატებია, $a_1$, $a_2$, $a_3$ კონის ნებისმიერი $\Delta$ წრფის ერთგვაროვანი დეკარტის კოორდინატებია, ხოლო $\lambda$, $\mu$—პარამეტრებია, რომლებიც ერთდროულად არ არიან ნულის ტოლი.

თუ $a_1$, $a_2$, $a_3$-ის (3) გამოსახულებებს შევიტანთ წინა პარაგრაფის (6) ფორმულებში, მივიღებთ წინა ფორმულების სავსებით ანალოგიურ ფორმულებს:

$$b_1=\lambda b_1'+\mu b_1'',\quad b_2=\lambda b_2'+\mu b_2'',\quad b_3=\lambda b_3'+\mu b_3'', \tag{4}$$

სადაც უკვე $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_1'$, $b_2'$, $b_3'$, $b_1''$, $b_2''$, $b_3''$ აღნიშნავენ $\Delta$, $\Delta'$, $\Delta''$ წრფეთა გეგმილურ კოორდინატებს.

დეკარტის ერთგვაროვან კოორდინატებში სივრცეში წრფის პარამეტრული წარმოდგენის (§ 169)

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\lambda x_1'+\mu x_1'',\quad x_2=\lambda x_2'+\mu x_2'',\\ x_3&=\lambda x_3'+\mu x_3'',\quad x_4=\lambda x_4'+\mu x_4'' \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

[1]) ეს საკითხი, რამდენადმე სხვაგვარად დასმული, განხილული იქნება კიდევ ჯერმოთ, § 191-ში.

სავსებით ანალოგიურად მივიღებთ ისეთივე წარმოდგენას გეგმილურ კოორდინატებში:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \lambda y'_1 + \mu y_1'', \quad y_2 = \lambda y'_2 + \mu y_2'', \\ y_3 &= \lambda y'_3 + \mu y_3'', \quad y_4 = \lambda y'_4 + \mu y_4''. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

სწორედ ასევე, სივრცეში სიბრტყეთა კონის დეკარტის ერთგვაროვან კოორდინატებში პარამეტრული წარმოდგენიდან (§ 171-ის ბოლო):

$$a_1 = \lambda a_1' + \mu a_1'', \quad a_2 = \lambda a_2' + \mu a_2'', \quad a_3 = \lambda a_3' + \mu a_3'', \quad a_4 = \lambda a_4' + \mu a_4'' \tag{7}$$

მივიღებთ ანალოგიურ წარმოდგენას სიბრტყეთა გეგმილურ კოორდინატებში:

$$b_1 = \lambda b'_1 + \mu b_1'', \quad b_2 = \lambda b'_2 + \mu b_2'', \quad b_3 = \lambda b'_3 + \mu b_3'', \quad b_4 = \lambda b'_4 + \mu b_4'' \tag{8}$$

აღნიშვნები გასაგებია.

**§ 179. გეგმილური წერტილოვანი გარდაქმნა.** 1°. **წრფის გეგმილური წერტილოვანი გარდაქმნა.** ვთქვათ, $\Delta$ და $\Delta'$ სივრცეები ორი ნებისმიერად განლაგებული წრფეა; კერძოდ, შეიძლება ეს წრფეები ერთიმეორეზე იყოს დადებული. თითოეულ ამ წრფეზე შევარჩიოთ გეგმილურ კოორდინატთა რომელიმე სისტემა (კერძოდ, ეს იყოს დეკარტის კოორდინატები). ვთქვათ, რომ $\Delta$ წრფის $M$ წერტილის ერთგვაროვანი გეგმილური კოორდინატებია $x_1$, $x_2$, ხოლო $x'_1$, $x'_2$ წარმოადგენენ $\Delta'$ წრფის $M'$ წერტილის ერთგვაროვან გეგმილურ კოორდინატებს. ახლა $M$ და $M'$ წერტილთა კოორდინატები დავაკავშიროთ რომელიმე არაგანსაკუთრებული წრფივი ერთგვაროვანი ჩასმებით:

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= l_{11}x_1 + l_{12}x_2, \\ x'_2 &= l_{21}x_1 + l_{22}x_2, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

სადაც $l_{ij}(i, j=1, 2)$—მუდმივებია, ისეთი, რომ მათი დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია.

ეს ჩასმა, იმის გამო, რომ ის არის არაგანსაკუთრებული, შესაძლოა შებრუნდეს, ე. ი. $x_1$ და $x_2$ შეიძლება ცალსახად გამოისახოს $x'_1$ და $x'_2$-ით, მასთან აგრეთვე არაგანსაკუთრებული წრფივი ერთგვაროვანი ჩასმებით:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= m_{11}x'_1 + m_{12}x'_2, \\ x_2 &= m_{21}x'_1 + m_{22}x'_2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$M$ და $M'$-ის არაერთგვაროვანი გეგმილური კოორდინატები

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \quad x' = \frac{x'_1}{x'_2}$$

ურთიერთდაკავშირებული იქნებიან (1) და (2)-დან გამომდინარე თანაფარდობებით:

$$x' = \frac{l_{11}x + l_{12}}{l_{21}x + l_{22}}, \quad x = \frac{m_{11}x' + m_{12}}{m_{21}x' + m_{22}}, \tag{3}$$

ე. ი. $x'$ კოორდინატი დაკავშირებულია $x$ კოორდინატთან (და პირუკუ) წილად-წრფივი (ანუ ჰომოგრაფიული) არაგანსაკუთრებული ჩასმით (§ 176).

ამრიგად, (1) თანაფარდობანი, რომელთა შედეგებსაც წარმოადგენენ (2) და (3) თანაფარდობანი, $\Delta$ წრფის ყოველ $M$ წერტილს შეუსაბამებენ $\Delta'$ წრფის მხოლოდ და მხოლოდ ერთ $M'$ წერტილს, და პირუკუ; ამასთან, არავითარი გარჩევა არ ხდება საკუთრივსა და არასაკუთრივ წერტილებს შორის.

$\Delta$ და $\Delta'$ წრფეთა წერტილებს შორის ნაჩვენებ შესაბამობას ეწოდება გეგმილური წერტილოვანი შესაბამობა ან კიდევ ჰომოგრაფიული შესაბამობა.

ამბობენ კიდევ, რომ $\Delta'$ წრფის წერტილები მიიღებიან $\Delta$ წრფის წერტილებიდან (და პირუკუ) გეგმილური (ანუ ჰომოგრაფიული) გარდაქმნით.

წარმოშობა სახელწოდებისა „გეგმილური შესაბამობა“ ანუ „გეგმილური გარდაქმნა“ ასეთია: ადვილი საჩვენებელია (ეს გაკეთებული იქნება ქვემოთ, § 185-ში), რომ $\Delta$ და $\Delta'$ წრფეები, რომელთა წერტილებს შორის დამყარებულია ზემონაჩვენები შესაბამობა, შესაძლოა მივიყვანოთ (მათი გადატანით) ისეთ მდებარეობამდე, რომ $\Delta'$ წრფის წერტილები $M'_1$, $M'_2$, $M'_3$, ..., რომლებიც შეესაბამებიან $\Delta$ წრფის წერტილებს $M_1$, $M_2$, $M_3$, .., წარმოადგენდნენ $\Delta$ წრფის $M_1$, $M_2$, $M_3$, ... წერტილთა ცენტრალურ გეგმილებს (რომელიმე $C$ ცენტრიდან) $\Delta'$ წრფეზე. $M$ წერტილის ცენტრალური გეგმილი, $C$ ცენტრიდან, $\Delta'$ წრფეზე ეწოდება $M'$ წერტილს, $CM$ სხივის გადაკვეთას $\Delta'$ წრფესთან (ნახ. 113), ცენტრი $C$ შეიძლება გადავიდეს უსასრულოდ შორს, და მაშინ ჩვენ საქმე გვექნება პარალელურ გეგმილებთან, რომლებიც დაწვრილებით შესწავლილია 1 თავში.

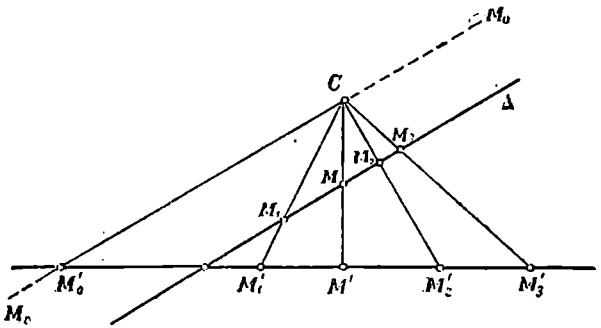
როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, გეგმილური გარდაქმნისას არავითარი გარჩევა არ ხდება საკუთრივ და არასაკუთრივ წერტილებს შორის; $\Delta$ წრფის არასაკუთრივი წერტილი გადადის, საზოგადოდ, $\Delta'$ წრფის საკუთრივ წერტილში და პირუკუ. მაგალითად, ნახ. 113-ზე $\Delta$ წრფის არასაკუთრივი წერტილი $M_0$ (ის გეგმილდება $\Delta$ წრფის პარალელური $CM'_0$ სხივით) გადადის $\Delta'$ წრფის $M'_0$ წერტილში.

წრფის გეგმილური გარდაქმნები დაწვრილებით განხილული იქნება ამ თავის შემდგომ პარაგრაფებში.

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა.** ზოგადობის დაურღვეველად, ყოველთვის შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ $\Delta$ და $\Delta'$ წრფეთა წერტილების ჰომოგრაფიული შესაბამობის განმსაზღვრელ (1) ფორმულებში, სიდიდეები $x_1$, $x_2$ და $x_1'$, $x_2'$ წარმოადგენენ $\Delta$ და $\Delta'$ წრფეებზე ერთგვაროვან დეკარტის კოორდინატებს (და არა აუცილებლივ გეგმილურს ზოგად სახისა). მართლაც, თუ (1) ფორმულებში $x_1$, $x_2$ და $x_1'$, $x_2'$ აღნიშნავენ გეგმილურ კოორდინატებს, მაშინ, ეს კოორდინატები რომ გამოვთქვათ $\Delta$ და $\Delta$ წრფეებზე ერთგვაროვანი დეკარტის კოორდინატებით (გეგმილურ კოორდინატთა განმარტების მიხედვით ეს დაიყვანება წრფივ ერთგვაროვან არაგანსაკუთრებულ ჩასმებამდე), როგორც

ადვილი შესამჩნევია, მიეალთ უკვე დეკარტის კოორდინატთა დამაკავშირებელ, ისევ (1) სახის ფორმულებამდე.

2°. სიბრტყისა და სივრცის გეგმილური წერტილოვანი გარდაქმნები. გადავიდეთ ორ სიბრტყეს შორის გეგმილურ წერტილოვანი შესაბამობის განმარტებაზე. ასე ეწოდება II და II′ (სხვადასხვა ან ერთიმეორეზე დადებული) სიბრტყეთა შორის ცალსახად-შექცევად შესაბამობას, რომლითაც ერთი სიბრტყის წერტილთა ერთგვაროვანი კოორდინატები მიიღებიან მეორე სიბრტყის შესაბამის წერტილის ერთგვაროვან გეგმილურ კოორდინატებიდან წრფივი ერთგვაროვანი არაგანსაკუთრებული ჩასმით.



ნახ. 113.

ამრიგად, თუ $M(x_1, x_2, x_3)$ და $M'(x_1, x_2, x_3)$ — ურთიერთშესაბამისი წერტილებია Π და Π′ სიბრტყისა, მაშინ

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= l_{11}x_1 + l_{12}x_2 + l_{13}x_3, \\ x'_2 &= l_{21}x_1 + l_{22}x_2 + l_{23}x_3, \\ x'_3 &= l_{31}x_1 + l_{32}x_2 + l_{33}x_3, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

სადაც $l_{ij}$ — მუდმივებია, მასთან, ამათგან შედგენილი დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია. სიდიდეები $x_1$, $x_2$, $x_3$ გამოისახებიან $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$-ის საშუალებით ანალოგიური ფორმულებით, რომლებიც მიიღებიან (4) სისტემის ამოხსნით $x_1$, $x_2$, $x_3$-ის მიმართ:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= m_{11}x'_1 + m_{12}x'_2 + m_{13}x'_3, \\ x_2 &= m_{21}x'_1 + m_{22}x'_2 + m_{23}x'_3, \\ x_3 &= m_{31}x'_1 + m_{32}x'_2 + m_{33}x'_3, \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

სადაც $m_{ij}$ — მუდმივებია, რომელთა დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია.

გეგმილურ წერტილოვან შესაბამობას ეწოდება აგრეთვე ჰომოგრაფიული შესაბამობა (ჰომოგრაფია), ანუ კოლინეარული შესაბამობა (კოლინეაცია); უკანასკნელი სახელწოდება მიგვითითებს იმაზე, რომ ასეთი შესაბამობისას ერთი სიბრტყის კოლინეარულ წერტილებს შეესაბამებათ მეორე სიბრტყის აგრეთვე კოლინეარული წერტილები, როგორც ეს დამტკიცებული იქნება ქვემოთ ამავე პარაგრაფში.

II სიბრტყის ყოველ ნაკეთს შეესაბამება Π′ სიბრტყის გარკვეული ნაკვთი და პირუკუ. ამ ნაკვთებს ეწოდებათ ჰომოგრაფიულად (ანუ კოლინეარულად) შესაბამი. ამბობენ აგრეთვე, რომ ერთი ნაკვთი მიიღება მეორედან ჰომოგრაფიული (კოლინეარული) გარდაქმნით.

აღვნიშნოთ ჰომოგრაფიული გარდაქმნის ძირითადი თვისებები.

ა) ზედიზედ შესრულებული ორი ჰომოგრაფიული გარდაქმნა გვაძლევს ისევ ჰომოგრაფიულ გარდაქმნას. ჰომოგრაფიული გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნა არის აგრეთვე ჰომოგრაფიული[1]. ეს თვისებები, წრფივი ჩასმების თვისებებიდან უშუალოდ გამომდინარენი (იხ. დამატება, § 9), გვიჩვენებს, რომ ჰომოგრაფიული გარდაქმნათა ერთობლიობა შეადგენს ჯგუფს (იხ. § 78).

ბ) აღებულ სიბრტყეზე ყოველ წრფეს შეესაბამება წრფე მეორე სიბრტყეზე. მართლაც, ვთქვათ

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \tag{5}$$

არის წრფე Π სიბრტყეზე. Π′ სიბრტყეზე შესაბამი წრფის განტოლებას მივიღებთ, თუ (5)-ში $x_1$, $x_2$, $x_3$-ის ნაცელად ჩავსვამთ მათ გამოსახულებებს (4a)-ს $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$-ით გამოთქმულს, რაც მოგვცემს იმავე სახის განტოლებას:

$$a'_1x'_1 + a'_2x'_2 + a'_3x'_3 = 0 \tag{5a}$$

სადაც $a'_1$, $a'_2$, $a'_3$-განისაზღვრებიან ფორმულებით

$$\left.\begin{aligned} a'_1 &= m_{11}a_1 + m_{21}a_2 + m_{31}a_3, \\ a'_2 &= m_{12}a_1 + m_{22}a_2 + m_{32}a_3, \\ a'_3 &= m_{13}a_1 + m_{23}a_2 + m_{33}a_3, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

რადგანაც $a_1$, $a_2$, $a_3$ ერთდროულად არ არიან ნულის ტოლი (როგორც გარკვეული წრფის განტოლების კოეფიციენტები), ამიტომ $a'_1$, $a'_2$, $a'_3$ არ არიან ერთდროულად ნულის ტოლი (ვინაიდან ჩასმის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია). მაშასადამე, (5) წრფეს შეესაბამება წრფე (5a).

გ) Π და Π′ სიბრტყეთა ჰომოგრაფიულ შესაბამობას ურთიერთშესაბამი Δ და Δ′ წრფეთა წერტილები მოყავს ჰომოგრაფიულ შესაბამობაში. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ეს ნიშნავს, რომ Π და Π′ სიბრტყეთა განსახილველი ჰომოგრაფიული შესაბამოზისას Π სიბრტყის რომელიმე Δ წრფე გადადის Π′ სიბრტყის Δ′ წრფედ. (4) და (4a) ფორმულების ძალით Δ წრფის თითოეულ წერტილს შეესაბამება Δ′ წრფის მხოლოდ და მხოლოდ ერთი წერტილი და პირუკუ; Δ და Δ′ წრფეთა წერტილებს შორის ეს შესაბამობა ქნება ჰომოგრაფიული, ამ პარაგრაფის 1°. პუნქტში მოცემულ წრფეთა შორის ჰომოგრაფიული შესაბამობის განმარტების მიხედვით. ამ დებულების დამტკიცება ქვემოთ იქნება ნაჩვენები (§ 193. პუნქტი 2°). ახლახან ნაჩვენები

[1] ამ თვისებებს ადგილი აქვთ აგრეთვე წრფის ჰომოგრაფიული გარდაქმნის შემთხვევაში, რომელიც განხილულია 1° პუნქტში.

თვისებით (და აგრეთვე თვისებით, რომელიც დამტკიცებული იქნება ქვემოთ, § 193, პუნქტი 3°) აიხსნება სახელწოდება „გეგმილური შესაბამობა".

სივრცის შემთხვევისთვის ჰომოგრაფიის ცნება (ე. ი. გეგმილური წერტილოვანი შესაბამობის ცნება) უშუალოდ გადაიტანება სივრცის ორ ნაკვთს ეწოდება ჰომოგრაფიულად (ანუ კოლინეარულად) შესაბამი, თუ შესაბამ წერტილთა ერთგვაროვანი კოორდინატები დაკავშირებული არიან წრფივი ერთგვაროვანი არაგანსაკუთრებული ჩასმით.

აქაც, ცხადია, ჰომოგრაფიული გარდაქმნები შეადგენენ ჯგუფს.

ადვილი დასამტკიცებელია (ამას ვანდობთ მკითხველს), რომ სივრცის ჰომოგრაფიული გარდაქმნისას სიბრტყეები გადადიან სიბრტყეებად, წრფეები — წრფეებად.

აგრეთვე ძნელი დასამტკიცებელი არ არის, რომ ზემონაჩვენები თვისება c) გავრცელდება სივრცის ჰომოგრაფიული გარდაქმნის შემთხვევაშიაც და რომ ადგილი აქვს ანალოგიურ თვისებას სივრცის ჰომოგრაფიული გარდაქმნისას ურთიერთშესაბამ სიბრტყეთათვის.

აფინური გარდაქმნები შეადგენენ ჰომოგრაფიულის ქვეჯგუფებს. ორი განზომილების შემთხვევაში ეს აფინური ქვეჯგუფი ხასიათდება იმით, რომ სიბრტყის არასაკუთრივი წრფე შეესაბამება სიბრტყის არასაკუთრივ წრფეს (თუ $\Pi$ და $\Pi'$ შეთავსებულია, მაშინ არასაკუთრივი წრფე გადადის თავის თავში). მართლაც, ახლა გამოვიყენებთ ერთგვაროვან დეკარტის კოორდინატებს. $\Pi$ სიბრტყის არასაკუთრივი წრფე ხასიათდება განტოლებით

$$x_3 = 0.$$

(4a)-ს თანახმად მისი შესაბამი წრფის განტოლება არის

$$m_{31}x'_1 + m_{32}x'_2 + m_{33}x'_3 = 0.$$

ეს წრფე რომ იყოს არასაკუთრივი, ე. ი. განტოლებად რომ ჰქონდეს $x'_3 = 0$ ამისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ $m_{31} = m_{32} = 0$, $m_{33} \neq 0$; მაგრამ, მაშინ (4a) ჩასმა ღებულობს შემდეგ სახეს (შეიძლება ვთქვათ, რომ $m_{33} = 1$, რადგანაც უფლება გვაქვს ერთგვაროვანი კოორდინატები შევცვალოთ მათი პროპორციული სიდიდეებით):

$$\begin{aligned} x_1 &= m_{11}x'_1 + m_{12}x'_2 + m_{13}x'_3, \\ x_2 &= m_{21}x'_1 + m_{22}x'_2 + m_{23}x'_3, \\ x_3 &= x'_3, \end{aligned}$$

რომელიც, ცხადია, აფინური გარდაქმნის დამახასიათებელია.

ანალოგიურად, სივრცის აფინური გარდაქმნები გამოირჩევიან ჰომოგრაფიულად იმით, რომ აფინურ გარდაქმნისას არასაკუთრივი სიბრტყე თავის თავში გადადის.

ნაკვთთა თვისებებს, რომლებიც უცვლელი რჩებიან ჰომოგრაფიული გარდაქმნებისას, ეწოდებათ გეგმილური. გეგმილური გეომეტრიის საგანს შეადგენს ნაკვთთა გეგმილური თვისებების შესწავლა.

გეგმილურ გეომეტრიაში არასაკუთრიეი ელემენტები არაფრით არ განსხვაედებიან სხვა დანარჩენისაგან. პირიქით, აფინურ გეომეტრიაში არასაკუთრიეი ელემენტები განსაკუთრებულ როლს ასრულებენ.

ამასთან არის დაკავშირებული ის გარემოება, რომ აფინური გარდაქმნებისას პარალელური სიბრტყეები და წრფეები რჩებიან პარალელური, ხოლო გეგმილურ გარდაქმნებისას პარალელობა, საზოგადოდ, ირღვევა.

ამრიგად, პარალელობის თვისება არ წარმოადგენს გეგმილურ თვისებას. ერთი და იმავე წრფის ორი ნაკეთის ფარდობა, რომელიც უცვლელი რჩება აფინური გარდაქმნისას, გეგმილური გარდაქმნის შემთხვევაში, საზოგადოდ, იცვლება, ე. ი. არ წარმოადგენს ინვარიანტს.

ამიტომ, გეგმილურ თვისებათა უფრო დაწვრილებით შესწავლისას უნდა შემოვიღოთ სხვა სიდიდე, გეგმილურ გარდაქმნათა მიმართ ინვარიანტული. ეს არის — ეგრეთ წოდებული ორმაგი ანუ ანჰარმონიული ფარდობა ოთხი კოლინეარული წერტილისა, რომლებიც განხილული იქნება შემდეგ პარაგრაფში და რომელიც ძირითად როლს ასრულებს გეგმილურ გეომეტრიაში.

**§ 180. ოთხი წერტილის ორმაგი ფარდობა.** როგორც ზემოთ პარაგრაფის ბოლოს იყო აღნიშნული, გეგმილურ გეომეტრიაში ძირითად როლს ასრულებს ოთხი კოლინეარული წერტილის ორმაგი ფარდობა, რომლის ანხილვაზე ჩვენ ახლა გადავდივართ.

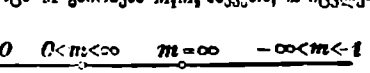
დავიწყოთ ერთ წრფეზე მდებარე სამი წერტილის მარტივი ფარდობის გამარტებით, რომელსაც ჩვენ უკვე არსებითად, ადრე შეეხებოდით (§ 41). ვთქვათ, $M_1$, $M_2$, $M$ არიან $\Delta$ წრფის წერტილები მივაკუთვნოთ ამ წრფეს რომელიმე დადებითი მიმართულება (სულერთია, რომელი იქნება) და შევადგინოთ $M_1M$ და $MM_2$ ნაკვეთების ალგებრულ მნიშვნელობათა ფარდობა:

$$m = \frac{M_1M}{MM_2},$$

ამ ფარდობას აქვს გარკვეული ნიშანი, დამოუკიდებლად იმისა, თუ რომელი მიმართულება იქნება არჩეული $\Delta$ წრფეზე დადებით მიმართულებად (ვინაიდან მიმართულების შეცვლისას საწინააღმდეგოდ, მრიცხველიც და მნიშვნელიც იცვლის ნიშანს). სახელდობრ, $m>0$, როცა $M$ მოთავსებულია $M_1$, $M_2$ შორის და $m<0$, როცა $M$ მოთავსებულია $M_1M_2$ ნაკვეთის გარეთ. ასეთ ფარდობასთან უკვე გვქონდა საქმე § 41-ში („ფარდობა, რომლითაც $M$ წერტილი ყოფს $M_1M_2$ ნაკვეთს"). ახლა მას ვეუწოდოთ სამი $M_1$, $M_2$, $M$ წერტილის მარტივი ფარდობა (განხილული ნაჩვენები მიმდევრობით) და აღვნიშნოთ ($M_1$, $M_2$, $M$)-ით, ასე, როგ

$$m = (M_1, M_2, M) = \frac{M_1M}{MM_2}. \tag{1}$$

უშუალოდ ცხადია, რომ თუ $M_1$ და $M_2$ წერტილები რჩება უძრავი, ხოლო $M$ გაირბენს $\Delta$-ს, მაშინ $m$ იცვლება შემდეგნაირად (ნახ. 113): როცა $M$ გაირბენს $M_1M_2$ ნაკვეთს, $m$ იცვლება 0-დან $+\infty$-მდე; როცა $M$ გადადის $M_2$ წერტილზე, $m$, $+\infty$-დან გადაიქცევა $-\infty$-ად და შემდეგ, იზრდება რა განუწყვეტლივ, მიისწრაფვის $-1$-საკენ, როცა $M$ გადადის უსასრულოდ შორს. უკანასკნელად, როცა $M$ მოძრაობს $M_1$-დან მოპირდაპირე მიმართულებით, $m$ კლებულობს ნულიდან $-1$-მდე; ამგვარად, $\Delta$ წრფის არასაკუთრივ წერტილს შეესაბამება მნიშვნელობა $m=-1$. საზოგადოდ, $m$-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება $M$ წერტილის ერ-



ნახ. 114.

თი მდებარეობა და პირუკუ. ამრიგად, როცა $m=\pm\infty$ გვაქვს აგრეთვე მხოლოდ ე რ თ ი $M_2$ წერტილი; ამიტომ საჭირო არ არის განვასხვავოთ ეს მნიშვნელობანი $m=+\infty$ და $m=-\infty$.

თუ ავიღებთ Δ-ზე დეკარტის კოორდინატთა გარკვეულ სისტემას, მაშინ მასზე აღებული ნებისმიერი წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება $x$ აბსცისით; თუ $x_1$, $x_2$, $x$ არის $M_1$, $M_2$, $M$ წერტილთა აბსცისები, მაშინ, ცხადია,

$$m=(M_1,\ M_2,\ M)=\frac{x-x_1}{x_2-x}. \tag{2}$$

უკანასკნელ სიდიდეს უწოდებენ, აგრეთვე, ს ა მ ი  რ ი ც ხ ვ ი ს  მ ა რ ტ ი ვ  ფ ა რ დ ო ბ ა ს და აღნიშნავენ $(x_1, x_2, x)$-ით, ასე რომ

$$(x_1,\ x_2,\ x)=\frac{x-x_1}{x_2-x}. \tag{2a}$$

ეს ფორმულა კიდევ ერთხელ გვიჩვენებს, რომ $M$ წერტილის ყოველ მდებარეობას, ე. ი. $x$-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება $m$-ის ერთი მნიშვნელობა და პირუკუ.

ახლა გადავიდეთ ოთხი $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M$ წერტილის ორმაგი (ანუ ანჰარმონიული) ფარდობის განმარტებაზე. ასე უწოდებენ სიდიდეს, რომელიც შემდეგნაირად მიიღება: 1) შევადგინოთ პირველად პ ი რ ვ ე ლ ი  ო რ ი  წ ე რ ტ ი ლ ი ს ა  და  მ ე ს ა მ ი ს  მარტივი ფარდობა $(M_1, M_2, M_3)$; 2) შემდეგ შევადგინოთ ისევ პ ი რ ვ ე ლ ი  ო რ ი  წ ე რ ტ ი ლ ი ს  და  მ ე ო თ ხ ი ს  მარტივი ფარდობა $(M_1, M_2, M_4)$ და ბოლოს, გავყოთ პირველი მეორეზე. ოთხი $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ წერტილის ორმაგ ფარდობას ჩვენ აღვნიშნავთ $(M_1, M_2, M_3, M_4)$ სიმბოლოთი. ამგვარად, განმარტების თანახმად

$$\lambda=(M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4)=\frac{(M_1,\ M_2,\ M_3)}{(M_1,\ M_2,\ M_4)}, \tag{3}$$

ანუ

$$\lambda=(M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4)=\frac{M_1M_3}{M_3M_2}:\frac{M_1M_4}{M_4M_2}, \tag{4}$$

ან კიდევ

$$\lambda=(M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4)=\frac{M_1M_3}{M_3M_2}\cdot\frac{M_4M_2}{M_1M_4}. \tag{4a}$$

ადვილი გამოსარკვევია λ სიდიდის ნიშანი. მრიცხველი და მნიშვნელი (3)-ში ერთდროულად დადებითი ან უარყოფითია, როცა $M_3$ და $M_4$ ერთდროულად მდებარეობს $M_1M_2$ ნაკვეთის შიგნით ან გარეთ. თუ ერთ-ერთი $M_3$, $M_4$ წერტილებიდან ძევს $M_1M_2$ ნაკვეთის შიგნით, ხოლო მეორე გარეთ, მაშინ მრიცხველს და მნიშვნელს (3)-ში ექნება სხვადასხვა ნიშანი. უკანასკნელი შემთხვევა შეიძლება დავახასიათოთ, თუ ვიტყვით, რომ $(M_1, M_2)$ და $(M_3, M_4)$ წერტილთა წყვილები ყოფენ ერთმანეთს (ე. ი. ამ წყვილებიდან ნებისმიერი მათგანის ორ წერტილს შორის გვექნება მეორის წერტილი). ამგვარად, ჩვენ შეგვიძლია გამოვთქვათ: $\lambda>0$ თუ $(M_1, M_2)$ და $(M_3, M_4)$ წყვილები არ ყოფენ ერთმანეთს და $\lambda<0$, თუ ეს წყვილები ყოფენ ერთმანეთს.

აქამდე ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ წერტილები სხვადასხვაა; მაგრამ შემდეგში ჩვენ დავუშვებთ იმ შემთხვევასაც, როცა ამ წერტილებიდან ორი მათგანი თანხვდენილია; ამასთანავე, λ სათვის შესაძლებელია მივიღოთ მნიშვნელობა $\infty$, როგორც მაგ., იმ შემთხვევაში, როცა $M_4$ ემთხვევა $M_1$-ს. ეს უნდა გვესმოდეს იმ აზრით, რომ თუ $M_4$ მიისწრაფვის $M_1$-საკენ, მაშინ λ მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ (ჩვენ აქაც არ ვანსხვავებთ $+\infty$ და $-\infty$).

ახლა ვნახოთ, როგორ იცვლება λ, როცა $M_1$, $M_2$, $M_3$ წერტილები რჩებიან უძრავი, ხოლო $M_4$ გაირბენს Δ წრფეს; ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $M_1$, $M_2$, $M_3$ წერტილები სხვადასხვაა. თუ აღვნიშნავთ დროებით $M_4$-ს $M$-ით, (4a)-ს ძალით გვექნება

$$\lambda=k\cdot\frac{MM_2}{M_1M}\left(\text{სადაც }\ k=\frac{M_1M_3}{M_3M_2}\right) \tag{4b}$$

საიდანაც გამომდინარეობს[1], რომ $\lambda$ ღებულობს ყველა ნამდვილ მნიშვნელობას $\lambda=\infty$ ჩათვლით, როცა $M$ გაირბენს $\Delta$ წრფეს და $\lambda$-ს ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება $M$ წერტილის მხოლოდ და მხოლოდ ერთი მდებარეობა.

კერძოდ, როცა $M$ ემთხვევა $M_1$, $M_2$, $M_3$ წერტილებს, სიდიდე $\lambda$ შესაბამისად ღებულობს შემდეგ მნიშვნელობებს: $\infty$, 0, 1; ეს კარგად უნდა დავიხსომოთ.

თუ შემოვიღებთ $\Delta$ წრფეზე წერტილთა აბსცისებს და $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$-ით აღვნიშნავთ $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ წერტილთა აბსცისებს, ცხადია, გვექნება:

$$\lambda=(M_1, M_2, M_3, M_4)=\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}:\frac{x_1-x_4}{x_2-x_4}; \tag{5}$$

უკანასკნელ სიდიდეს უწოდებენ, აგრეთვე, ოთხი $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ რიცხვის ორმაგ ფარდობას და აღნიშნავენ სიმბოლოთი $(x_1, x_2, x_3, x_4)$, ასე, რომ განმარტების თანახმად

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)=\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}:\frac{x_1-x_4}{x_2-x_4}=\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}\cdot\frac{x_2-x_4}{x_1-x_4}. \tag{6}$$

ამ სიმბოლოს იყენებენ მაშინაც, როცა $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ რიცხვებიდან ერთ-ერთი მათგანი— უსასრულოა. მაგალითად, თუ $x_1=\infty$, გვექნება[2]:

$$(\infty, x_2, x_3, x_4)=\frac{x_2-x_4}{x_2-x_3}. \tag{7}$$

აღვნიშნოთ ტოლობანი, რომლებიც ჩვენ ხშირად შეგვხვდება (მათ მისაღებად უნდა დავუშვათ $x_1=\infty$, $x_2=0$, $x_3=\alpha$, $x_4=\beta$ ან $x_1=\infty$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=k$):

$$(\infty, 0, \alpha, \beta)=\frac{\beta}{\alpha}, \quad (\infty, 0, 1, k)=k. \tag{8}$$

მოცემული ოთხი წერტილის ორმაგი ფარდობა, რა თქმა უნდა, დამოკიდებულია იმ რიგზე. რომლითაც ისინი განიხილებიან. გადავსწერთ რა $(M_1, M_2, M_3, M_4)$ სიმბოლოში $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ ელემენტებს ყოველნაირად, მივიღებთ სხვადახვა მნიშვნელობას. რადგანაც არსებობს ოთხი ელემენტის $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$ გადანაცვლება, ამიტომ, ერთი შეხედვით, შეიძლება გვეჩვენოს, რომ ვღებულობთ 24 სხვადასხვა მნიშვნელობას.

ნამდვილად კი შესაძლებელია მიღებულ იქნას სულ 6 სხვადასხვა მნიშვნელობა; ეს გამომდინარეობს შემდეგი მარტივი დებულებიდან: ორმაგი ფარდობა არ შეიცვლება თუ შევუცვლით ადგილს რომელიმე ორ ელემენტს და, ერთდროულად, დავნარჩენ ორსაც. მაგალითად,

$$(M_1, M_2, M_3, M_4)=(M_3, M_4, M_1, M_2).$$

---

[1]) (4b) ფორმულა გვაძლევს:

$$\lambda=\frac{k}{m}, \text{ სადაც } m=\frac{M_1M}{MM_2};$$

საიდანაც გამომდინარეობს გამოთქმული დებულების მართებულება.

[2]) (6) ძალით გვაქვს:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)=\frac{x_3-x_1}{x_4-x_1}\cdot\frac{x_2-x_4}{x_2-x_3}.$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $x_1\to\infty$ მივიღებთ ხსენებულ ფორმულას. ვინაიდან, ცხადია,

$$\lim_{x_1\to\infty}\frac{x_3-x_1}{x_4-x_1}=1.$$

ამ დებულებას მკითხველი ადვილად დაამტკიცებს უშუალო შემოწმების გზით (4a) ფორმულის საშუალებით.

ამიტომ, რომ მივიღოთ ყველა შესაძლო მნიშვნელობა, რომლებსაც ღებულობს $(M_1, M_2, M_3, M_4)$ სიმბოლო ელემენტთა გადასმისას, საკმარისია გადავსვათ მაგ., $M_2$, $M_3$, $M_4$ ელემენტები, $M_1$ ელემენტის დატოვებით ადგილზე. მართლაც, თუ ჩვენ გვაქვს რაიმე გადანაცვლება, მაშინ ყოველთვის შესაძლოა, სიმბოლოს მნიშვნელობის შეუცვლელად, $M_1$ ჩავსვათ პირველ ადგილზე, თუ ის გადაინაცვლება იმ ელემენტთან, რომელიც დგას პირველ ადგილზე და ერთდროულად გადაინაცვლება ორი დანარჩენი ელემენტიც. აქიტომ ჩვენს სიმბოლოს შეეძლია მიიღოს მხოლოდ $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ სხვადასხვა მნიშვნელობა. ადვილი საჩვენებელია (იხ. ქვემოთ, სავარჯიშო), რომ თუ

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = \lambda,$$

მაშინ ელემენტთა ყოველნაირი გადაადგილებით, ჩვენ მივიღებთ შემდეგ 6 მნიშვნელობას:

$$\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

კერძოდ, (4)-დან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ, თუ შეუცვლით ადგილებს პირველ ორ ელემენტს, ან უკანასკნელ ორ ელემენტს, მაშინ ორმაგი ფარდობის მნიშვნელობა შეიცვლება მისი შებრუნებული სიდიდით, ე. ი.

$$(M_2, M_1, M_3, M_4) = (M_1, M_2, M_4, M_3) = \frac{1}{\lambda}.$$

### სავარჯიშო და დამატებანი

1. დაამტკიცეთ იგივობა:

$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_4)(x_3 - x_1) = (x_3 - x_2)(x_1 - x_4).$$

დამტკიცება მიიღება უშუალო შემოწმებით. ნაჩვენები შედეგი უფრო მარტივად მიიღება ასე: გვაქვს:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ვინაიდან დეტერმინანტში პირველი სტრიქონი მესამის პროპორციულია. პირველ სტრიქონს გამოვაკლოთ მეორე, მივიღებთ:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2, & x_1 - x_3, & x_1 - x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

თუ დავშლით დეტერმინანტს პირველი სტრიქონის ელემენტების მიხედვით, მივიღებთ სასურველ იგივობას.

2. წინა იგივობის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ თუ $(M_1, M_2, M_3, M_4)$ სიმბოლოში გადავსვამთ ორ წყვილ ელემენტს, მაშინ მივიღებთ მნიშვნელობას, რომელიც წინას შეავსებს 1-მდე, ე. ი.

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) + (M_1, M_3, M_2, M_4) = 1.$$

დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს ფორმულებიდან:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)}, \quad (x_1, x_3, x_2, x_4) = \frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)}.$$

3. წინა ფორმულების გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ თუ

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = \lambda,$$

მაშინ

$$(M_1, M_2, M_4, M_3) = \frac{1}{\lambda}, \quad (M_1, M_3, M_2, M_4) = 1-\lambda, \quad (M_1, M_3, M_4, M_2) = \frac{1}{1-\lambda},$$

$$(M_1, M_4, M_2, M_3) = 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda-1}{\lambda}, \quad (M_1, M_4, M_3, M_2) = \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

რადგანაც ჩვენ შევასრულეთ სამი უკანასკნელი ელემენტის ყველა შესაძლო გადანაცვლება, ამით ამოიწურება ყველა შესაძლო მნიშვნელობა მოცემული ოთხი წერტილის ორმაგი ფარდობისათვის, ამ წეოტილთა მდებარეობის რიგის მიხედვით.

4. თუ ალვნიშნავთ $\lambda^*$-თი (იხ. წინა სავარჯიშო)

$$\lambda, \frac{1}{\lambda}, \quad 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \quad \frac{\lambda-1}{\lambda}, \quad \frac{\lambda}{\lambda-1}, \tag{A}$$

სიდიდეებიდან ერთ-ერთ მათგანს, მაშინ

$$\lambda^*, \frac{1}{\lambda^*}, \quad 1-\lambda^*, \frac{1}{1-\lambda^*}, \quad \frac{\lambda^*-1}{\lambda^*}, \quad \frac{\lambda^*}{\lambda^*-1} \tag{A*}$$

სიდიდეები წარმოადგენენ იმავე (A) სიდიდეებს, მხოლოდ აღებულს სხვა რიგით. მართლაც, $\lambda^* = (M_i, M_j, M_k, M_l)$, სადაც $i$, $j$, $k$, $l$ აღნიშნავენ ნიშნებს 1, 2, 3, 4 რომელიმე რიგზე. თუ გადავსვამთ ამ ნიშნებს, მივიღებთ ($A^*$) სიდიდეებს; გარდა ამისა, ჩვენ ვიცით, რომ ამასთანავე, მივიღებთ (A) სიდიდეებს.

5. როგორი უნდა იყოს ოთხი $M_1, M_2, M_3, M_4$ წერტილის დალაგება, რომ წინა სავარჯიშოში გაახილული (A) სიდიდეებიდან, ყველა არ იყოს სხვადასხვა? დაშვებულია, რომ გაანსახილველი წეოტილები სხვადასხვაა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. წინა სავარჯიშოში ნათქვამის თანახმად, საკმარისია გამოვიკვლიოთ ის შემთხვევა, როცა $\lambda$ ტოლია დაწარჩენი რიცხვებიდან ერთ-ერთისა (A)-დან.

a) ვთქვათ, $\lambda = \frac{1}{\lambda}$; მაშინ $\lambda^2 = 1$, $\lambda = \pm 1$. თუ $\lambda = 1$, მაშინ განსახილველი წერტილებიდან ორი უნდა იყოს თანხვედნილი [1]). მაგრამ ჩვენ გამოვრიცხავთ თანხვედნის შემთხვევას. მაშასადამე, $\lambda = -1$; (A) მიმდევრობის რიცხვები დაიყვანება შემდეგზე:

$$-1, -1, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2};$$

ეს რიცხვები წყვილწყვილად ტოლია. როცა $\lambda = -1$, ამბობენ, რომ $(M_1, M_2)$ და $(M_3, M_4)$ წერტილთა წყვილი ყოფს ერთმანეთს ჰარმონიულად (იხ. შემდეგი პარაგრაფი).

b) როცა $\lambda = 1 - \lambda$, გვაქვს $\lambda = \frac{1}{2}$ და (A) რიცხვები დაიყვანება შემდეგზე:

$$\frac{1}{2}, \quad 2, \quad \frac{1}{2}, \quad 2, \quad -1, \quad -1;$$

ჩვენ გვაქვს იგივე რიცხვები, რაც a) შემთხვევაში, მხოლოდ სხვა რიგით. ვაშასადამე, თუ შეგვცვლით $M_1, M_2, M_3, M_4$ ელემენტების როლს, მივალთ წინა შემთხვევაზე.

---

[1]) თუ, მაგალითად, $M_1$ და $M_2$ სხვადასხვაა, მაშინ, როგორც (3) ფორმულა გვიჩვენებს, $\lambda = 1$-საოვის წერტილები $M_3$ და $M_4$ თანხვედებიან.

c) $\lambda = \frac{1}{1-\lambda}$, ე. ი. $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. ეს შემთხვევა შეუძლებელია, თუ მხოლოდ ნამდვილ წერტილებს განვიხილავთ.

d) $\lambda = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$, ე. ი. $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ (იგივე შემთხვევა, რაც c).

e) $\lambda = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$, ე. ი. $\lambda = 0$ ანუ $\lambda = 2$. როცა $\lambda = 0$ განსახილველი წერტილებიდან ცხადია, ორი თანხვედნილია. როცა $\lambda = 2$ რიცხვები (A) დაიყვანებიან შემდეგზე:

$$2, \frac{1}{2}, -1, -1, \frac{1}{2}, 2;$$

ამრიგად, გვაქვს შემთხვევა (a).

ამგვარად, თუ დავკმაყოფილდებით არათანხვედნილ ნამდვილ წერტილთა განხილვით, (A) მიმდევრობის რიცხვები შეიძლება იყოს არა სხვადასხვა მხოლოდ მაშინ, როცა განსახილველი ოთხი წერტილი წარმოადგენს ორ წყვილს, ერთმანეთის გაყოფს ჰარმონიულად.

§ 181. ჰარმონიული გაყოფა. თუ

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = -1, \tag{1}$$

მაშინ ამბობენ, რომ $M_1$, $M_2$ წერტილები იყოფა $M_3$, $M_4$ წერტილებით ჰარმონიულად ანდა, რომ $M_3$, $M_4$ წერტილები ჰარმონიულად შეუღლებულია $M_1$, $M_2$ წერტილთა მიმართ.

წინა პარაგრაფში ნათქვამის საფუძველზე, (1) დამოკიდებულება არ დაირღვევა, თუ შეუცვლით ადგილებს $M_1$, $M_2$ და $M_3$, $M_4$ წყვილებს. ის, აგრეთვე არ დაირღვევა თუ გადავიყვანთ ელემენტებს ერთ-ერთ წყვილში. [1]). ამიტომ, თუ ყურადღებას არ მივაქცევთ თითოეულ წყვილში ელემენტთა რიგს, ჩვენ შეგვიძლია პირდაპირ ვთქვათ, რომ წერტილთა $M_1$, $M_2$ და $M_3$, $M_4$ წყვილები ყოფს ერთმანეთს ჰარმონიულად. ის, რომ ისინი მართლა ჰყოფს ერთმანეთს, გამომდინარეობს იქიდან, რომ $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ წერტილთა ორმაგი ფარდობა უარყოფითია. ჰარმონიული გაყოფის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $M_3$, $M_4$ წყვილი ჰარმონიულად ყოფს $M_1$, $M_2$ წყვილს, მაშინ $M_3$, $M_4$ წერტილები ყოფს $M_1 M_2$ მონაკვეთის ერთსა და იმავე (აბსოლუტური მნიშვნელობით) ფარდობით, მაშასადამე, ერთი წერტილი ყოფს მონაკვეთის შიგნიდან, ხოლო მეორე—გარედან. $M_1$ და $M_2$-ს ჩავთვლით უძრავად. ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ $M_4$ წერტილი გადადის უსასრულობაში, მაშინ მისი ჰარმონიულად შეულღებული $M_3$ წერტილი მოხვდება $M_1 M_2$ ნაკვეთის შუაში. მართლაც, როგორც ადვილი დასანახია, წინა პარაგრაფის (4a) ფორმულების ძალით, თუ $M_4$ იმყოფება უსასრულოდ შორს, მაშინ

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = -\frac{M_1 M_3}{M_2 M_4},$$

საიდანაც, (1) ძალით,

$$\frac{M_1 M_3}{M_2 M_4} = 1,$$

ე. ი. $M_3$ არის $M_1 M_2$ მონაკვეთის შუა წერტილი.

შემდეგ, თუ $M_3$ უახლოვდება $M_1$ (ან $M_2$)-ს მაშინ $M_4$ წერტილიც უახლოვდება $M_1$ (ან $M_2$)-ს; ეს გამომდინარეობს წინა პარაგრაფის იმავე (4a) ფორმულიდან. მართლაც, თუ

---

[1]) ჩვენ ვიცით, რომ ამ შემთხვევაში (იხ. წინა პარაგრაფი) $\lambda$ შეიცვლება $-\frac{1}{\lambda}$ სიდიდით. მაგრამ, როცა $\lambda = -1$, მაშინ $\lambda = \frac{1}{\lambda}$.

მრიცხველში $M_1 M_3$ მიისწრაფვის ნულისკენ, მაშინ მნიშვნელში $M_1 M_4$ უნდა მიისწრაფოდეს ნულისკენ, სხვანაირად, $\lambda$ არ შეიძლება დარჩეს სასრული (ჩვენ შეთხვევაში კი $\lambda = -1$; ასევე დავამტკიცებთ, რომ თუ $M_2 M_3$ მიისწრაფვის ნულისკენ, მაშინ $M_2 M_4$-ც მიისწრაფვის ნულისკენ.

ამგვარად, $M_1$ წერტილი თავის თავის შეუღლებულია ($M_1$, $M_2$ წყვილის მიმართ); სჭორედ ასევე $M_2$ თავის თავის შეუღლებულია; სხვა „თავის თავის შეუღლებული" წერტილები ($M_1$, $M_2$ წყვილის მიმართ), ცხადია, არ არიან.

§ 182. ორმაგი ფარდობის ინვარიანტობა ჰომოგრაფიული ჩასმის მიმართ. ორმაგი ფარდობის მთავარ თვისებას, რომლის გამოც ის ასე დიდ ძირითად როლს გეგმილურ გეომეტრიაში, წარმოადგენს მისი ინვარიანტობა (უცვლელობა) ჰომოგრაფიული ანუ წრფილად-წრფივი ჩასმის მიმართ. დავამტკიცოთ ეს თვისება.

ვთქვათ, რომ ცვლადები $x$ და $y$ უთანაერთდაკავშირებულია ჰომოგრაფიული არაგანსაკუთრებული ჩასმით (§ 176)

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}. \tag{1}$$

თვისება, რომლის დამტკიცებაც ჩვენ გვინდა, შემდეგში მდგომარეობს: თუ $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ წარმოადგენენ $x$ ცვლადის როძელიმე მნიშვნელობებს, ხოლო $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ შესაბამი მნიშვნელობებია $y$—ცვლადისა, მაშინ

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4). \tag{2}$$

დამტკიცებისათვის განვიხილოთ ჯერ მარტივი ფარდობა

$$(y_1, y_2, y) = \frac{y - y_1}{y_2 - y}.$$

ელემენტარული გამოთვლები გვაძლევს

$$y - y_1 = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} - \frac{\alpha x_1 + \beta}{\gamma x_1 + \delta} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x + \delta)(\gamma x_1 + \delta)} (x - x_1),$$

$$y_2 - y = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x + \delta)(\gamma x_2 + \delta)} (x_2 - x).$$

საიდანაც გამომდინარეობს

$$(y_1, y_2, y) = k(x_1, x_2, x), \tag{3}$$

სადაც სიდიდე $k = \frac{\gamma x_2 + \delta}{\gamma x_1 + \delta}$ მხოლოდ $x_1$ და $x_2$-ზეა დამოკიდებული. სხვათა შორის ჩვენ ვხედავთ, რომ სამი წერტილის მარტივი ფარდობა არაინვარიანტულია ზოგადი სახის ჰომოგრაფიული ჩასმის მიმართ [1]. თუ (3)-ში მიმდევრობით ჩავსვამთ $x = x_3$, $x = x_4$, ვიღებთ

$$(y_1, y_2, y_3) = k(x_1, x_2, x_3), \quad (y_1, y_2, y_4) = k(x_1, x_2, x_4),$$

საიდანაც

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = \frac{(y_1, y_2, y_3)}{(y_1, y_2, y_4)} = \frac{(x_1, x_2, x_3)}{(x_1, x_2, x_4)} = (x_1, x_3, x_3, x_4),$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა. მკითხველი ადვილად შეამჩნევს, რომ შეუძლია ძალაში რჩება მაშინაც, როცა $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ ან $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ რიცხვებიდან ერთ-ერთი გადაიქცევა უსასრულობად.

[1]) მაგრამ ის ინვარიანტია (მთლი) წრფივი ჩასმის მიმართ, ე. ი. $y = lx + a$ ჩასმის მიმართ, რომელიც არის წრფის წერტილთა აფინური გარდაქმნის გამოსახველი. ეს გამომდინარეობს აფინური გარდაქმნების ჩვენთვის ცნობილი თვისებებიდან და აგრეთვე (3) ფორმულიდანაც, ვინაიდან, როცა $\gamma = 0$ (ამ შეთხვევაში წილად-რაციონალური გარდაქმნა გადაიქცევა წრფივად) გვაქვს $k = 1$.

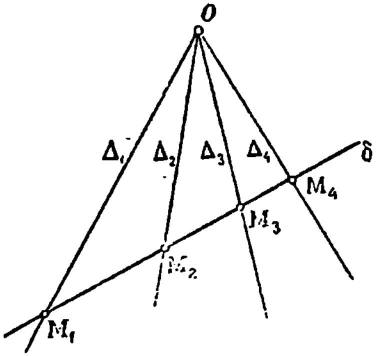
ადვილი დასანახია, რომ ადგილი აქვს შებრუნებულ ჯებულებასაც, სახელდობრ, თუ $x$ და $y$ ორი ცვლადია, ერთიმეორესთან ისე დაკავშირებული, რომ ორმაგი ფარდობა ($x_1$, $x_2$, $x_3$, $x$) ტოლია ორმაგ ფარდობისა ($y_1$, $y_2$, $y_3$, $y$), სადაც $x_1$, $x_2$, $x_3$—ურთიერთგასხვავებული, რომელიმე კერძო მნიშვნელობებია $x$-სა, ხოლო $y_1$, $y_2$, $y_3$—შესაბამი მნიშვნელობებია $y$-ისა, მაშინ $x$ და $y$ დაკავშირებულია წილად წრფივი ჩასმით. მართლაც, პირობის მიხედვით გვაქვს:

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} \, \frac{x_2 - x}{x_1 - x} = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} \, \frac{y_2 - y}{y_1 - y}$$

ე. ი.

$$\frac{x_2 - x}{x_1 - x} = k \frac{y_2 - y}{y_1 - y},$$

სადაც $k$ — რომელიმე მუდმივია. უკანასკნელ განტოლებას თუ ამოვხსნით $y$ (ან $x$-ის) მიმართ, მივიღებთ $x$-ის (ან $y$-ის) წილად-წრფივ ფუნქციას, რომელიც, კერძოდ, შეიძლება იყოს მთელი წრფივიც.




ნახ. 115.

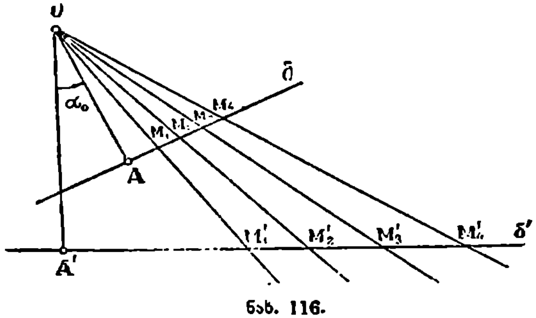
§ 183. კონის ოთხი წრფისა და ოთხი სიბრტყის ორმაგი ფარდობა. ჩვენ განვსაზღვრეთ § 180-ში ორმაგი ფარდობა წრფეზე აღებულ წერტილთათვის. ახლა ეს ცნება გავავრცელოთ პირველი საფეხურის ორ დანარჩენ სახეობის ელემენტებზე (ე. ი. წრფეთა კონის და სიბრტყეთა კონის ელემენტებზე).

ვთქვათ, მოცემულია წრფეთა კონა, ე. ი. ერთ სიბრტყეზე მდებარე და ერთ წერტილში გამავალ წრფეთა ერთობლიობა. კონა გადავკვეთოთ δ წრფით, რომელიც არ გადის ცენტრში (ნახ. 115). კონის ოთხი $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$, $\Delta_4$ წრფის ორმაგი ფარდობა ($\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$, $\Delta_4$) ეწოდება ამ წრფეების δ წრფესთან გადაკვეთის ოთხ $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ წერტილის ორმაგ ფარდობას. მაშასადამე, განსაზღვრის თანახმად:

$$(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) = (M_1, M_2, M_3, M_4). \tag{I}$$

ამ განმარტებას აქვს აზრი, ვინაიდან, როგორც ჩვენ ახლა ვუჩვენებთ, ოთხი $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ წერტილის ორმაგი ფარდობა არ არის დამოკიდებული δ წრფის არჩევაზე.

ყველაზე უფრო მარტივ დ ამაში დავრწმუნდებით ასე. ვიგულისხმოთ, რომ კონის $O$ ცენტრი საკუთრივი წერტილია (ნახ. 116). ჩამოვუშვათ $O$-დან δ წრფეზე მართობი და ამ მართობის $A$ ფუძე მივიღოთ აბსცისთა ათვლის სათავედ δ—წრფეზე, რომელსაც, შევურჩევთ რა გარკვეულ დადებით მიმართულებას (სულერთია რომელს), განვიხილავთ როგორც ღერძს; სიმარტივისათვის საკოორდინატო ვექტორად ავიღოთ ორტი.




ნახ. 116.

თუ $x$ არის კონის Δ წრფის δ-სთან გადაკვეთის წერტილის აბსცისი, (ეს აბსცისი, ცხადია, სავსებით განსაზღვრავს Δ წრფეს და, პირიქით), მაშინ

$$x = h \ \mathrm{tg}\, \alpha,$$

სადაც $h=|OA|$. ხოლო $\alpha$ არის კუთხე, რომელსაც $\Delta$ წრფე შეადგენს $\overrightarrow{OA}$-სთან; ამასთანავე, ეს კუთხე ათვლილია გარკვეული დადებითი მიმართულებით (სახელდობრ, იმ მიმართულებით, რომელიც ეთანხმება $\pi$-ზე არჩეულ დადებით მიმართულებას).

შემოვიღებთ რა აღნიშვნას

$$\operatorname{tg}\alpha=m,$$

გვექნება: $x=h\cdot m$, საიდანაც ნათელია, რომ სიდიდე $m$ სავსებით ახასიათებს $\Delta$ წრფის მდებარეობას და, პირიქით, $m$ სიდიდეს შეიძლება ეუწოდოთ კონის წრფის ტანგენს-კოორდინატი.

თავისთავად ცხადი აღნიშვნებით გვექნება:

$$(M_1, M_2, M_3, M_4)=(x_1, x_2, x_3, x_4)=(m_1, m_2, m_3, m_4),$$

საიდანაც

$$(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4)=(m_1, m_2, m_3, m_4). \qquad (2)$$

ახლა კონას თუ გადავკვეთავთ სხვა $\pi'$ წრფით და $m'$-ით აღვნიშნავთ კონის $\Delta$ წრფის შესაბამ ტანგენს-კოორდინატს, მაშინ გადაკვეთის ახალ წერტილებისათვის ანალოგიურად ვღებულობთ:

$$(M'_1, M'_2, M'_3, M'_4)=(m'_1, m'_2, m'_3, m'_4),$$

ამასთანავე, $m'=\operatorname{tg}\alpha'$, სადაც $\alpha'$ არის კუთხე, რომელსაც $\Delta$ წრფე (იხ. ნახ. 116) ადგენს $\overrightarrow{OA'}$-თან, $A'$ არის $O$-დან $\pi'$-ზე ჩამოტანებული მართობის ფუძე. ადვილი დასანახია, რომ $\alpha'=\alpha_0+\alpha$, სადაც $\alpha_0$ არის კუთხე, რომელსაც $\overrightarrow{OA}$ ადგენს $\overrightarrow{OA'}$-თან (ჩვენ ვირჩევთ ყველა კუთხის ათვლისათვის ერთსა და იმავე დადებით მიმართულებას და უკუვაგდებთ $\pi$-ის ჯერად შესაკრებს, რომელსაც არა აქვს ბრუნკნელობა) და, მაშასადამე,

$$\operatorname{tg}\alpha'=\operatorname{tg}(\alpha_0+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_0+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha_0\operatorname{tg}\alpha}, \qquad (3)$$

საიდანაც

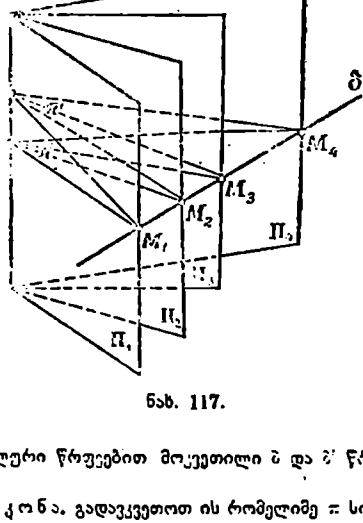
$$m'=\frac{m_0+m}{1-m_0m},$$

ამასთანავე, $m_0=\operatorname{tg}\alpha_0$. ამგვარად, $m'$ არის $m$-ის წილად-წრფივი ფუნქცია და, წინა პარაგრაფში ნათქვამის საფუძველზე,

$$(m'_1, m'_2, m'_3, m'_4)=(m_1, m_2, m_3, m_4).$$

ამიტომ $(M'_1, M'_2, M'_3, M'_4)=$
$=(M_1, M_2, M_3, M_4)$,

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.




ნახ. 117.

ეს უკანასკნელი დასკვნა ძალაში რჩება მაშინაც, როცა კონის ცენტრი არასაკუთრივია, ე. ი. კონის წრფეები ერთმანეთის პარალელურია. ამ შემთხვევაში

$$(M'_1, M'_2, M'_3, M'_4)=(M_1, M_2, M_3, M_4)$$

ტოლობა უშუალოდ მყარდება, ვინაიდან პარალელური წრფეებით მოკვეთილი $\pi$ და $\pi'$ წრფეების ნაკვეთები პროპორციულია.

ახლა ვთქვათ, მოცემულია სიბრტყეთა კონა. გადავკვეთოთ ის რომელიმე $\pi$ სიბრტყით, რომელიც კონას არ ეკუთვნის. გადაკვეთაში მივიღებთ წრფეთა კონას (რომლის ცენტრი არის $\pi$ სიბრტყის გადაკვეთა კონის ღერძთან). კონის ოთხი $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$, $\Pi_4$ სიბრტყის

ორმაგი ფარდობა ($\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$) ეწოდება ორმაგ ფარდობას იმ წრფეებისა, რომლებიც მიიღებიან ამ სიბრტყეების გადაკვეთით $\pi$ სიბრტყესთან.

ეს ფარდობა არ არის დამოკიდებული $\pi$ სიბრტყის არჩევაზე. მართლაც, ვთქვათ, $\pi'$ არის სხვა სიბრტყე, რომელიც გადაკვეთს კონას და, ვთქვათ, $b$ არის $\pi$ და $\pi'$ სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფე (იხ. ნახ. 117). მაშინ ორმაგი ფარდობა ოთხი წრფისა, რომლებიც მიიღებიან კონის გადაკვეთით $\pi$ ან $\pi'$ სიბრტყეებთან, ტოლია $b$ წრფის $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ სიბრტყეებთან გადაკვეთის ოთხი წერტილის ორმაგი ფარდობისა: მაშასადამე, ის ერთი და იგივეა ორივე $\pi$ და $\pi'$ სიბრტყისათვის. ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $b$ წრფე არ კვეთს კონის ღერძს. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ჩვენ დებულების დასამტკიცებლად საკმარისია ავიღოთ მესამე $\pi''$ სიბრტყე, რომელიც გადაიკვეთება როგორც $\pi$, ისე $\pi'$ სიბრტყესთან წრფეებზე, რომლებიც არ გადაკვეთენ კონის ღერძს. ჩვენი დასკვნა მართებულია იმ შემთხვევაშიც, როცა კონის ღერძი არის არაასაკუთრივი წრფე, ე. ი. როცა კონის სიბრტყეები ერთმანეთის პარალელურია.

ჰარმონიულად გაყოფის ცნება, რომელიც ზემოთ შემოღებული იყო წრფეზე აღებულ წერტილთათვის, შეიძლება უცვლელად იქნას გადატანილი პირველი საფეხურის ორ დანარჩენ სახეობათა ელემენტებზე.

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა.** განსაზღვრეთ რა § 160-ში ორმაგი ფარდობა მოცემულ წრფეზე აღებული ოთხი წერტილისათვის, ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ ეს წრფე არის საკუთრივი. ახლა შეგვიძლია განვაზოგადოთ ორმაგი ფარდობის ცნება იმ შემთხვევაშიაც, როცა წერტილები აღებულია არასაკუთრივ წრფეზე. სახელდობრ, მოცემულ არასაკუთრივ წრფეზე მდებარე ოთხ $M_1, M_2, M_3, M_4$ წერტილის ორმაგი ფარდობის ქვეშ ჩვენ ვიგულისხმებთ ოთხ $OM_1, OM_2, OM_3, OM_4$ წრფეთა ორმაგ ფარდობას, სადაც $O$ არის ნებისმიერად აღებული საკუთრივი წერტილი. ეს უკანასკნელი წრფეები ეკუთვნიან იმ სიბრტყეზე მდებარე კონას, რომელიც გადის $O$ წერტილში და მოცემულ არასაკუთრივ წრფეზე.

ანალოგიურად განისაზღვრება ოთხი წრფის ორმაგი ფარდობა, რომლებიც ეკუთვნიან არასაკუთრივ სიბრტყეზე მდებარე კონას.

### სავარჯიშოები და დამატებანი

1. დაამტკიცეთ შემდეგი ფორმულა ოთხი $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ წრფის ორმაგი ფარდობისათვის, რომლებიც ეკუთვნიან კონას არასაკუთრივი ცენტრით;

$$(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) = \frac{\sin(\Delta_1, \Delta_3)}{\sin(\Delta_2, \Delta_3)} : \frac{\sin(\Delta_1, \Delta_4)}{\sin(\Delta_2, \Delta_4)}, \tag{4}$$

სადაც $(\Delta_i, \Delta_k)$-ით აღნიშნულია კუთხე, რომელიც ათვლილია $\Delta_i$-დან $\Delta_k$-კენ. ამასთანავე, დაშვებულია, რომ კონის სიბრტყეზე არჩეულია კუთხეთა ათვლის გარკვეული მიმართულება (სულერთია რომელი) და $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ წრფეები (კუთხეების ათვლისას) განიხილებიან, როგორც ღერძები (ასე, რომ ამ წრფეებს მინიჭებული ექნებათ გარკვეული დადებითი მიმართულება, სულერთია რომელი).

**დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა.** უპირველეს ყოვლისა, ცხადია, რომ (1)-ის მარჯვენა ნაწილი არ შეიცვლება, თუ შევცვლით კუთხეთა ათვლის მიმართულებას (ვინაიდან, მაშინ ნიშანს იცვლის ყველა ოთხივე სინუსი) ანუ თუ შევცვლით ერთდროულად მიმართულებებით $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ წრფეებიდან რომელიმე მათგანის დადებით მიმართულებას (ვინაიდან, მაშინ ნიშანს იცვლის ორი სინუსი).

(2)-ის ძალით, აღვნიშნოთ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ მნიშვნელობებს $\alpha$-სი, რომლებიც $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ წრფეებს შეესაბამებიან, გვექნება:

$$(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) = (\operatorname{tg}\alpha_1, \operatorname{tg}\alpha_2, \operatorname{tg}\alpha_3, \operatorname{tg}\alpha_4) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_3 - \operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_3} : \frac{\operatorname{tg}\alpha_4 - \operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_4}.$$

მაგრამ $\operatorname{tg}\alpha_3 - \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\sin\alpha_3}{\cos\alpha_3} - \frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} = \frac{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}{\cos\alpha_3 \cos\alpha_1}$; თუ დავწერთ ანალოგიურ ფორმუ-

ლებს ტანგენსების დანარჩენ სხვაობებისათვის და ჩავსვამთ წინა ფორმულაში, მივიღებთ (ვინაიდან ყველა კოსინუსი შეიკვეცება):

$$(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) = \frac{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)} : \frac{\sin(\alpha_4 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_2 - \alpha_4)},$$

საიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს საძიებელი (4) ფორმულა.

2. დაამტკიცეთ, რომ საკუთრივი ღერძის მქონე კონის ოთხი სიბრტყის ორმაგი ფარდობისათვის მივიღებთ ფორმულას, რომელიც (1) ფორმულის სახებით ანალოგიურია.

დამტკიცებისათვის, საკმარისია, კონა გადავკვეთოთ ღერძისადმი მართობი სიბრტყით.

§ 184. დაგეგმილება და კვეთა. ახლა შემოვიღოთ რამდენიმე ელემენტარული ცნება, რომლებსაც ქვემოთ გამოვიყენებთ. ჩვენ მხედველობაში გვაქვს ეგრეთ წოდებული ძირითადი გეგმილური ოპერაციები: დაგეგმილება და კვეთა.

1°. წერტილებისა და წრფეებისაგან შედგენილი ნაკვთის დაგეგმილება მოცემული ცენტრიდან იმაში მდგომარეობს, რომ მოცემული წერტილიდან („ცენტრიდან") ვხედავთ გავატაროთ წრფეები და სიბრტყეები, რომლებიც ნაკვთის წერტილებსა და წრფეებზე გაივლიან.

მაგალითად, თუ მოცემული წერტილიდან დავაგეგმილებთ წრფის წერტილთა მოცემულ სიმდევრობას, მივიღებთ წრფეთა კონას. თუ მოცემული ცენტრიდან დავაგეგმილებთ წერტილთა (ან წრფეთა) ბრტყელ სისტემას, მივიღებთ წრფეთა (ან სიბრტყეთა) ძნულს.

2°. წერტილებით შედგენილი მოცემული ნაკვთის დაგეგმილება მოცემული წრფიდან იმაში მდგომარეობს, რომ მოცემულ წრფეზე უნდა გავატაროთ ისეთი სიბრტყეები, რომლებიც მოცემულ ნაკვთის წერტილებზე გაივლიან.

მაგალითად, თუ მოცემული წრფიდან ვაგეგმილებთ წრფის წერტილთა მოცემულ მიმდევრობას, მივიღებთ სიბრტყეთა კონას.

ზემოხსენებული ორი ოპერაციის შეთანადებულს წარმოადგენს შემდეგი ოპერაციები:

3°. წრფეებისა და სიბრტყეებისაგან შედგენილი ნაკვთის კვეთა სიბრტყით, რომელიც მდგომარეობს მოცემული ნაკვთის ელემენტების კვეთაში მოცემული სიბრტყით (კვეთაში მივიღებთ წერტილებსა და წრფეებს).

4° სიბრტყეებით შედგენილი ნაკვთის კვეთა წრფით, რომელიც მდგომარეობს მოცემული ნაკვთის კვეთაში წრფით (კვეთაში მივიღებთ წერტილებს).

მოცემულ ორ ძირითად სახეობას (§ 172) პერსპექტული ანუ პერსპექტულ შესაბამობაში მყოფი ეწოდება, თუ ერთი მათგანი დაგეგმილებით ან კვეთით მიიღება მეორისაგან, ანდა თუ ორივე მოცემული სახეობა მიიღება ერთი და იმავე სახეობის დაგეგმილებისა და კვეთის შედეგად.

მაგალითად, წრფის წერტილთა მიმდევრობა და მისი მაჯგმილებელ წრფეთა კონა (ნახ. 115) — პერსპექტულია. პერსპექტულია აგრეთვე წრფის წერტილთა მიმდევრობა და მისი მაგეგმილებელ სიბრტყეთა კონა. გარდა ამისა, პერსპექტულია წრფის წერტილთა ორი მიმდევრობა, რომლებიც მიიღება წრფეთა ერთი და იგივე კონის კვეთის შედეგად ორი წრფით $b$ და $b'$ (ნახ. 116) და ა. შ.

როცა წრფის წერტილთა ორი მიმდევრობა წარმოადგენს წრფეთა ერთი და იგივე კონის კვეთას ორი $b$ და $b'$ წრფით (ნახ. 116), მაშინ იტყვიან, რომ მეორე მიმდევრობა მიღებულია პირველიდან (ან პირველი მიღებულია მეორიდან) $b$ მიმდევრობის დაგეგმილებით $b'$ მიმდევრობაზე (ან $b'$-ის დაგეგმილებით $b$-ზე) $O$ ცენტრიდან, სადაც $O$—კონის ცენტრია.

ანალოგიურად იტყვიან მაშინაც, როცა წრფის წერტილთა ერთ მიმდევრობას აგეგმილებენ მეორეზე მოცემული $\Delta$ წრფიდან, თუ ეს მიმდევრობანი წარმოადგენს ერთი და იმავე სიბრტყეთა კონის კვეთას $\Delta$ ღერძთან.

ასევე იტყვიან წერტილთა ერთი ბრტყელი სისტემის შეორეზე დაგეგმილების შემთხვევაში მოცემული $O$ ცენტრიდან, თუ ორივე ბრტყელი სისტემა წარმოადგენს წრფეთა ერთი და იმავე ძნულის კვეთას $\Pi$ და $\Pi'$ ორი სიბრტყით.

**§ 185. პირველი საფეხურის სახეობათა გეგმილური შესაბამობა.** § 179-ში ჩვენ შემოვიღეთ ორი წრფის წერტილთა გეგმილური შესაბამობის ცნება. ახლა ეს ცნება გავავრცელოთ საზოგადოდ პირველი საფეხურის [1]) სახეობებზე § 183-ში ნათქვამიდან ცხადია, რომ თუ პირველი საფეხურის ორი ძირითადი სახეობა შექცევად-ცალსახა პერსპექტულ შესაბამობაშია (იხ. წინა პარაგრაფი), მაშინ ერთი სახეობის ორი ელემენტის ორმაგი ფარდობა უდრის მეორე სახეობის შესაბამ ელემენტების ორმაგ ფარდობას.

პერსპექტული შესაბამობა კერძო შემთხვევაა გეგმილური შესაბამობისა, რომელსაც პირველი საფეხურის სახეობებისთვის ახლა შემდეგნაირად განვსაზღვრავთ:

ორი პირველი საფეხურის სახეობის გეგმილური შესაბამობა ეწოდება ისეთ შექცევად-ცალსახა შესაბამობას, როცა ერთი სახეობის ნებისმიერი ოთხი ელემენტის ორმაგი ფარდობა უდრის მეორე სახეობის შესაბამი ელემენტების ორმაგ ფარდობას [2]).

ისეთი ორი სახეობის შესახებ, რომლებიც გეგმილურ შესაბამობაში არიან აგრეთვე იტყვიან, რომ ერთი მათგანი მიიღება მეორესაგან გეგმილური გარდაქმნით.

პირველი საფეხურის ორ სახეობას შორის გეგმილური შესაბამობა სავსებით განისაზღვრება ერთი სახეობის სამი $A'$, $B'$, $C'$ ელემენტის მოცემით, რომლებიც შეესაბამება მეორე სახეობის მოცემულ სამ ელემენტს $A$, $B$, $C$. მართლაც, ვთქვათ, $M$ არის უკანასკნელი სახეობის რაიმე ელემენტი, ხოლო $M'$ არის პირველი სახეობის შესაბამი ელემენტი. გეგმილური შესაბამობის განსაზღვრის მიხედვით გვაქვს:

$$(A', B', C', M')=(A, B, C, M),$$

რომლებიც სავსებით განსაზღვრავენ $M'$ ელემენტს, როცა მოცემულია ელემენტი $M$ და პირიქით. იმის მიხედვით, თუ პირველი საფეხურის როგორ სახეობებთან გვაქვს საქმე, ამ გამოსახულებაში ასოები აღნიშნავს ან წრფის წერტილთა მიმდევრობის წერტილებს, ან კონის წრფეებს, ანდა კონის სიბრტყეებს.

გეგმილური გარდაქმნის გეომეტრიული შინაარსი მოცემულია შემდეგ დებულებაში:

როცა პირველი საფეხურის ორი სახეობა გეგმილურ შესაბამობაშია, მაშინ ნებისმიერი მათგანი შეიძლება მივიღოთ მეორესაგან სასრულო რიცხვის მიმდევრობითი დაგეგმილებისა და კვეთის შედეგად; შებრუნებული წინადადებაც აგრეთვე მართებულია.

შებრუნებული დებულების მართებულობა ცხადია, ვინაიდან ყოველი დაგეგმილებისა და კვეთისას შესაბამი ელემენტების ორმაგი ფარდობანი ურთიერთთანატოლია.

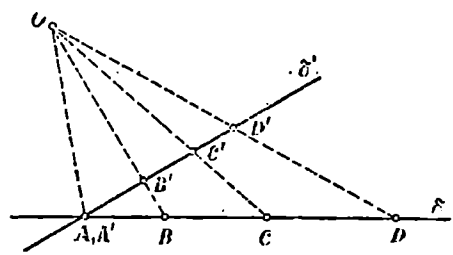
პირდაპირი წინადადების დამტკიცება საკმარისია ჩავატაროთ, ერთსა და იმავე სიბრტყეზე მოთავსებულ, წრფის წერტილთა ორ მიმდევრობათა შესახებ. მართლაც, წრფეთა ან სიბრტყეთა ყოველი კონიდან, კვეთის საშუალებით, შეიძლება გადავიდეთ წრფის წერტილთა მიმდევრობაზე. გარდა ამისა, თუ წრფის წერტილთა ორი მიმდევრობა ერთსა და იმავე სიბრტყეზე არ მდებარეობს, მაშინ რაიმე წერტილიდან (რომელიც არც ერთ განხილულ მიმდევრობას არ ეკუთვნის) ორივე მიმდევრობის დაგეგმილებით და მიღებულ სიბრტყეთა ორი კონის გადაკვეთით, მივიღებთ ერთ სიბრტყეზე მდებარე ორ სწორხაზოვან მიმდევრობას. დასასრულ, ჩვენ ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ წრფის წერტილთა მოცემული მიმდევრობანი ერთსა და იმავე წრფეზე არ მდებარეობენ (ვინაიდან დაგეგმილებით და კვეთით შეგვიძლია ერთ-ერთი მოცემული მიმდევრობა შევცვალოთ სხვა წრფეზე მდებარე სხვა მიმდევრობით).

განვიხილოთ პირველად ის კერძო შემთხვევა, როცა წრფის წერტილთა მოცემული მიმდევრობების შესაბამი $A$ და $A'$ წერტილები ემთხვევა იმ $s$ და $s'$ წრფეების გადაკვეთის წერტილს, რომლებზედაც მოცემული მიმდევრობანი მდებარეობენ. ვთქვათ, $B$ და $C$ არის პირველი მიმდევრობის სხვა ორი წერტილი, ხოლო $B'$ და $C'$ არის შესაბამი წერტილები მეორე მიმდევ-

[1]) იხ. § 172.

[2]) ქვემოთ ნაჩვენები იქნება (§ 189), რომ ეს განსაზღვრა, წრფის წერტილთა მიმდევრობისათვის, ეთანხმება წინათ შემოღებულ განსაზღვრას (§ 179, 1°).

რობისა. გავატაროთ $BB'$ და $CC'$ წრფეები და, ვთქვათ, $O$ არის მათი გადაკვეთის წერტილი [1] (ნახ. 118ა). ახლა დავამტკიცოთ, რომ წრფის წერტილთა განხილული მიმდევრობანი მიიღება $b'$-ის დაგეგმილებით $b$-ზე $O$ წერტილიდან.

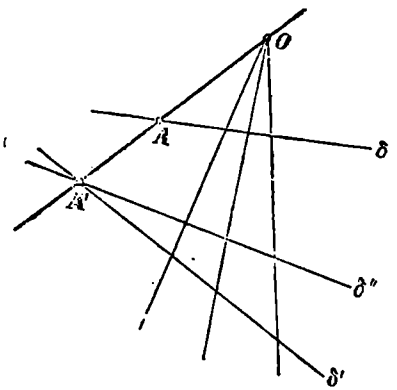


ნახ. 118ა.

მართლაც, ვთქვათ, $D$ პირველი მიმდევრობის ოომელიღაც წერტილია, ხოლო $D'$ — მეოთე მიმდევრობის შესაბამი წერტილი. გეგმილური შესაბამობის გამოყარტების მიხედვით გვაქვს:

$$(A', B', C', D') = (A, B, C, D) \quad (1)$$

დავამტკიცოთ, რომ $D$ და $D'$ ემყოფება ერთ წრფეზე $O$ წერტილთან ერთად. ვთქვათ, $D''$ არის $OD$ წრფის გადაკვეთის წერტილი $b'$ წრფესთან, რომელზედაც მოთავსებულია წრფის წერტილთა მეოთე მიმდეროობა. ორმაგი ფარდობის თვისებათა ძალით გვაქვს: $(A', B', C', D'') = (A, B, C, D)$; მაშასადამე, (1)-ის ძალით, $(A', B', C', D'') = (A', B', C', D')$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $D''$ ემთხვევა $D'$-ს, ვინაიდან არსებობს მხოლოდ ერთი წერტილი $D'$ წრფისა, რომლისთვისაც ორმაგ ფარდობას $(A', B', C', D')$ აქვს მოცემული ღირებულება წყვილელი წერტილებისათვის $A', B', C'$. ამგვარად, ჩვენი წინადადება დამტკიცებულია განხილულ კერძო შემთხვევაში [2].



ნახ. 118ბ.

ახლა განვიხილოთ ყველაზე ზოგადი შემთხვევა წრფის წერტილთა ორი რიმდევრობისა, რომლებიც მოთავსებულია ერთ სიბრტყეზე ცდებარე $b$ და $b'$ (ნახ. 118ბ). ვთქვათ, $A$ და $A'$ არის ამ მიმდევრობების რაიმე შესაბამი წერტილები. გავატაროთ ამ წერტილებზე $AA'$ წრფე და მასზე ავიღოთ რაიმე $O$ წერტილი, რომელიც არ ემთხვევა $A$ და $A'$ წერტილებს. ამის შემდეგ, დავაგეგმილოთ პირველი მიმდევრობა $O$ წერტილიდან რაიმე $b''$ წრფეზე, რომელიც გაივლის $A'$ წერტილზე და არ ემთხვევა $b$. ნაშინ $b$-ზე მდებარე მიმდევრობის ნაცვლად ჩვენ მივიღებთ $b''$-ზე მდებარე ახალ მიმდევრობას, რომელიც $b'$-ზე მდებარე მიმდევრობას მიმართ ისეთია დალაგებული, როგორც განხილულ წინა კერძო შემთხვევაში.

აქედან გამომდინარეობს ზემოგამოთქმული ზოგადი დებულების მართებულება.

§ 186. გეგმილური კოორდინატების გეომეტრიული მნიშვნელობა წრფეზე. § 177-ში (1°-ში) შემოღებული იყო გეგმილური კოორდინატების ცნება წრფეზე. ახლა ადვილი გამოსარკვევია ამ კოორდინატების გეომეტრიული შინაარსი.

[1] წერტილი $O$ შეიძლება იყოს არასაკუთრივიც.

[2] აქედან, კერძოდ, გამომდინარეობს § 179-ში (1°) დაუმტკიცებლად გამოთქმული დებულება იმის შესახებ, რომ თუ $\Delta$ და $\Delta'$ წრფეების წერტილებს შორის დადგენილია გეგმილური შესაბამობა, მაშინ ეს წრფეები შეიძლება გადავიტანოთ ისეთ მდებარეობაში, რომ $\Delta'$ წრფის ის წერტილები, რომლებიც $\Delta$ წრფის წერტილებს შეესაბამება, მიიღებოდეს რაიმე $O$ ცენტრიდან დაგეგმილებით. მართლაც, ამისათვის საკმარისია ისე მოვათავსოთ წრფეები $\Delta$ და $\Delta'$, რომ ისინი ერთმანეთს არ ემთხვეოდეს, მაგრამ ემთხვეოდეს მათი რომელიმე შესაბამი წერტილები $A$ და $A'$. მაშინ ჩვენ გეეცნება ტეკსტში განხილული შემთხვევა.

მოვიგონოთ, რომ თუ $x$ აღნიშნავს წერტილის დეკარტის (არაერთგვაროვან) კოორდინატს მოცემულ წრფეზე, მაშინ იმავე წერტილის გეგმილური (არაერთგვაროვანი) კოორდინატი განისაზღვრება ფორმულით

$$y = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, \tag{1}$$

სადაც $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ ისეთი მუდმივებია, რომ $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$.

ერთგვაროვანი გეგმილური კოორდინატები კი ეწოდება ისეთ $y_1$ და $y_2$ რიცხვებს, რომლებიც ერთდროულად ნულის ტოლი არ არის და $\frac{y_1}{y_2}=y$. $y$-ის გეომეტრიული შინაარსის გასარკვევად აღნიშნოთ, პირველ ყოვლისა, შემდეგი: თუ $M$, $M'$, $M''$, $M'''$ არის ჩვენი წრფის ოთხი წერტილი დეკარტის (არაერთგვაროვანი) კოორდინატებით $x$, $x'$, $x''$, $x'''$, მაშინ

$$(M, M', M'', M''')=(x, x', x'', x''')=(y, y', y'', y'''),$$

გინაიდან $y$ და $x$ ცვლადები ურთიერთცალსახაშია წილად-წრფივი ჩასმით. ახლა ავიღოთ წრფეზე სამი $A$, $B$, $E$ წერტილი, რომლებიც შეესაბამება $y$-ის შემდეგ მნიშვნელობებს: $\infty$, 0, 1, ე. ი. ერთგვაროვანი კოორდინატების $y_1$, $y_2$-ის შემდეგ მნიშვნელობებს: (1, 0), (0, 1), (1, 1), ანდა ყოველგვარ მათ პროპორციულ მნიშვნელობებს. მაშინ [იხ. § 180, ფორმულა (8)]

$$(A, B, E, M) = \infty, 0, 1, y)=y,$$

ამგვარად, $M$ წერტილის გეგმილური არაერთგვაროვანი $y$ კოორდინატი წარმოადგენს სამი მუდმივი $A$, $B$, $E$ წერტილისა და $M$ წერტილის ორმაგ ფარდობას:

$$y = \frac{y_1}{y_2} = (A, B, E, M), \tag{2}$$

პირიქით, თუ წრფეზე ავიღებთ სამ ნებისმიერ $A$, $B$, $E$ წერტილს და $y$-ს განვსაზღვრავთ (2) ტოლობით, მ ვიღებთ, რომ $y$ არის $x$-ის წილად-წრფივი ფუნქცია, ე. ი. $y$ წარმოადგენს (არაერთგვაროვან) გეგმილურ კოორდინატს იმ აზრით, როგორც ეს განსაზღვრული იყო ჩვენს მიერ დასაწყისში.

წერტილებს $A$ და $B$ ძირითადი წერტილები ეწოდება, ხოლო $E$—გეგმილურ კოორდინატთა მოცემული სისტემის ერთეული წერტილი.

ზემდეკისათვის მნიშვნელოვანია აღვნიშნოთ, რომ ძირითად $A$ და $B$ წერტილთა მიმართ ჰარმონიულად შეუღლებული $M$ და $M'$ წერტილების (არაერთგვაროვანი) კოორდინატები $y$ და $y'$ სიდიდით თანატოლია და ნიშნებით სხვადასხვა. მართლაც პირობიდან $(A, B, M, M') = -1$ გამომდინარეობს

$$(\infty, 0, y, y')=\frac{y'}{y} = -1,$$

ე. ი.

$$y'=-y. \tag{*}$$

§ 177-ში (პუნქტი 1) განხილული საკითხი, მოცემულ წრფეზე გეგმილურ კოორდინატთა გარდაქმნის შესახებ, შეგვიძლია ახლა წარმოვიდგინოთ თვალსაჩინო გეომეტრიული სახით.

ავიღოთ $A$, $B$, $E$-ს ნაცვლად ახალი $A'$, $B'$, $E'$ წერტილები და, ვთქვათ, $Z$ არის $M$ წერტილის გეომეტრიული კოორდინატი ამ ახალი სისტემის მიმართ:

$$Z=(A', B', E', M).$$

თუ $y'$, $y''$, $y'''$ არის $A'$,$B'$,$E'$ წერტილების გეგმილური კოორდინატები ძველი სისტემის მიმართ, მაშინ

$$Z=(y', y'', y''', y),$$

ე. ი. $Z$ არის $y$-ის წილად-წრფივი ფუნქცია:

$$z = \frac{ay+b}{cy+d}, \tag{3}$$

სადაც $a$, $b$, $c$, $d$—მუდმივებია. პირიქით, თუ $y$ და $z$ როლებს შეუცვლით, მივიღებთ $y$-ს როგორც $z$-ის წილად-წრფივ ფუნქციას. აქედან გამომდინარეობს, რომ ჩასმა (3) არაგანკუთრია (რაც უშუალოდაც ადვილი დასამტკიცებელია).

გადავალთ რა ერთგვაროვან კოორდინატებზე და ავიღებთ $z = \frac{z_1}{z_2}$, $y = \frac{y_1}{y_2}$, მივიღებთ

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ay_1+by_2}{cy_1+dy_2}.$$

ვინაიდან აქ არსებითია $z_1$-ის ტოლობა $z_2$-თან, ამიტომ შეგვიძლია ავიღოთ

$$z_1 = ay_1+by_2, \quad z_2 = cy_1+dy_2. \tag{4}$$

მაშასადამე, ერთგვაროვანი გეგმილური კოორდინატები გარდაიქმნება ერთგვაროვანი არაგანკუთრი ჩასმით, როგორც ეს ნაჩვენები იყო ზემოთ (§ 177).

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. იგულისხმება, რომ ერთ-ერთ ძირითად წერტილად შეიძლება ავიღოთ წრფის არასაკუთრივი წერტილიც. თუ, მაგალითად, $A$ არასაკუთრივი წერტილია მაშინ, როცა $x = \infty$ ჩვენ უნდა გვქონდეს $y = \infty$ ე. ი. როცა $x_2 = 0$ უნდა გვქონდეს $y_2 = 0$.

ამიტომ ფორმულაში (1) $\gamma = 0$ და ჩვენ გვექნება:

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\beta}{\delta} = lx + a \left( l = -\frac{\alpha}{\beta}, \quad a = \frac{\beta}{\delta} \right),$$

ე. ი. ამ შემთხვევაში $y$ არის, ჩვენს წრფეზე აღებული დეკარტის კოორდინატთა გარკვეული სისტემის ზომართ აღებული ჩვეულებრივი აბსცისა.

§ 187. ოთხი წერტილის ორმაგი ფარდობა წრფეზე, რომელიც მოცემულია პარამეტრული ხაზით. ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია $\Delta$ წოფე მისი ორი სხვადასხვა წერტილით $M'(y'_1, y'_2, y'_3)$ და $M''(y''_1, y''_2, y''_3)$; მაშინ მისი წერტილების ერთგვაროვანი გეგმილური კოორდინატები მოცემულია ფორმულებით (§ 177-a)

$$y_1 = \lambda y_1' + \mu y_1'', \quad y_2 = \lambda y_2' + \mu y_2'', \quad y_3 = \lambda y_3' + \mu y_3'', \tag{1}$$

სადაც $\lambda$ და $\mu$ პარამეტრებია, რომელთა ტოლობა

$$h = \frac{\lambda}{\mu} \tag{2}$$

განსაზღვრავს $M(y_1, y_2, y_3)$ წერტილის მდებარეობას წრფეზე. ახლა დავამტკიცოთ, რომ ამ წრფის ოთხი $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ წერტილის ორმაგი ფარდობა უდრის $h$-ის შესაბამ მნიშვნელობათა ორმაგ ფარდობას, ე. ი.

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = (h_1, h_2, h_3, h_4), \tag{3}$$

სადაც $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$ აღნიშნავს $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ წერტილთა შესაბამ $h$-ის მნიშვნელობებს.

§ 178a-ში მოყვანილი (2) ფორმულების ბაზით, დამტკიცების დროს ჩვენ შეგვიძლია (1) ფორმულები შევცვალოთ ფორმულებით

$$x_1 = \lambda x_1' + \mu x_1'', \quad x_2 = \lambda x_2' + \mu x_2'', \quad x_3 = \lambda x_3' + \mu x_3'', \tag{1a}$$

სადაც ახლა უკვე მონაწილეობს წერტილების დეკარტის ერთგვაროვანი კოორდინატები. ვიგულისხმოთ უკერძოებობით, რომ განხილული წრფე საკუთრივია და შემოვიღოთ დეკარტის

არაერთგვაროვანი კოორდინატები $x=\frac{x_1}{x_3}$ და $y=\frac{x_2}{x_3}$; მაშინ (1a)-დან მივიღებთ

$$x=\frac{hx_1'+x_1''}{hx_3'+x_3''},\quad y=\frac{hx_2'+x_2''}{hx_3'+x_3''}. \tag{1b}$$

ზოგადობის დაურღვეველად, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\Delta$ წრფე პარალელური არ არის $Oy$ ღერძისა (წინააღმდეგ შემთხვევაში როლებს შევუცვლიდით $Oy$ და $Ox$ ღერძებს და იმე ჩავატარებდით მსჯელობას). ამ შემთხვევაში ორმაგი ფარდობა $(M_1, M_2, M_3, M_4)=(N_1, N_2, N_3, N_4)$ სადაც $N_1$, $N_2$, $N_3$, $N_4$ არის $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ წერტილების გეგმილები $Ox$ ღერძზე, აღებული $Oy$ ღერძის პარალელურად. მაგრამ $(N_1, N_2, N_3, N_4)=(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)})$, სადაც $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$ არის $x$-ის ის მნიშვნელობანი, რომლებსაც მივიღებთ (1b)-ს პირველ ფორმულაში მიმდევრობით $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$-ის ნასვით. მაგრამ, რადგანაც $x$ არის $h$-ის წილად-წრფივი ფუნქცია, ამიტომ $(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)})=(h_1, h_2, h_3, h_4)$ და ჩვენი დებულებაც დამტკიცებულია.

(3)-დან გამომდინარეობს, რომ პარამეტრი $h=\frac{\lambda}{\mu}$, რომელიც განსაზღვრავს $M$ წერტილის მდებარეობას $\Delta$ წრფეზე, არის გეგმილური კოორდინატი, თუ $M'$ და $M''$-ს ძირითად წერტილებად მივიღებთ, ხოლო ერთეულ წერტილად $E$ წერტილს, რომელიც შეესაბამება მნიშვნელობას $h=1$ (ე. ი. $\lambda=\mu$). მართლაც, $M'$ და $M''$ წერტილებს შეესაბამება მნიშვნელობანი $h=\infty$ და $h=0$; ამიტომ

$$(M', M'', E, M)=(\infty, 0, 1, h)=h.$$

წინა შედეგები მართებულია იმ შემთხვევაშიაც, როცა $\Delta$ წრფე არასაკუთრივია, ე. ი. როცა $x_3'=x_3''=0$. მაშინ გვექნება პარამეტრული წარმოდგენა

$$x_1=\lambda x_1'+\mu x_1'',\quad x_2=\lambda x_2'+\mu x_2'',\quad x_3=0. \tag{4}$$

განვიხილოთ არასაკუთრივ (4) წრფესთან ერთად საკუთრივი წრფე (1a), რომელშიაც $x_1'$, $x_1''$, $x_2'$, $x_2''$ იმასვე აღნიშნავენ, რასაც (1a)-ში, ხოლო $x_3'$ და $x_3''$ ნულიდან განსხვავებული არიან, სხვა მხრივ კი ნებისმიერი. ადვილი სანახავია, რომ $\delta$ წრფე, რომელიც კოორდინატთა სათავეს აერთებს (4) წრფის ნებისმიერ წერტილთან, გაივლის აგრეთვე (1b) წრფის იმ წერტილზეც, რომელიც იმავე $\frac{\lambda}{\mu}=h$ მნიშვნელობას შეესაბამება; მართლაც, წრფეს, რომელიც აერთებს სათავეს (4) წრფის იმ წერტილთან, რომელიც შეესაბამება მოცემული $h$-ის მნიშვნელობას, აქვს $\frac{hx_2'+x_2''}{hx_1'+x_1''}$-ის ტოლი საკუთხო კოეფიციენტი; მაგრამ ასეთივე კუთხური კოეფიციენტი აქვს იმ წრფესაც, რომელიც კოორდინატთა სათავეს აერთებს (1a) წრფის იმ წერტილთან, რომელიც შეესაბამება მოცემულ $h$. ამიტომ $O$ ცენტრიანი კონის იმ ოთხი წრფის ორმაგი ფარდობა, რომლებიც გადიან არასაკუთრივი $\Delta$ წრფის მოცემულ ოთხ წერტილზე (ეს ორმაგი ფარდობა კი არის მოცემული ოთხი წერტილის ორმაგი ფარდობა), უდრის (1a) წრფის იმ ოთხი წერტილის ორმაგ ფარდობას, რომლებიც $h$-ის იმავე მნიშვნელობებს შეესაბამება. აქედან გამომდინარეობს ჩვენი დებულებაც.

სავსებით ანალოგიურ მოსაზრებებს მივიღებთ სივრცეში აღებული ისეთი წრფის წერტილებისთვისაც, რომელიც მოცემულია პარამეტრულად (§ 178a).

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა.** იქიდან, რომ $h$ არის გეგმილური კოორდინატი, როცა $M'$ და $M''$ ძირითადი წერტილებია, წინა პარაგრაფში ნათქვამის ძალით, გამომდინარეობს, რომ თუ $h_1$ და $h_2$ აღნიშნავს $\lambda$ პარამეტრის მნიშვნელობებს, შესაბამს, $M'$ და $M''$ წერტილების მიმართ ჰარმონიულად შეუღლებულ წერტილებისა $A$ და $B$, მაშინ

$$h_1+h_2=0.$$

**§ 188. პარამეტრულად მოცემული კონის ოთხი წრფის (ხიბრტყის) ორმაგი ფარდობა. გეგმილური კოორდინატები კონაში.** გადავდივართ რა წრფის წერტილთა მიმდევრობიდან წრფეთა კონაზე, ჩვენ შეგვიძლია შემოვიღოთ კონის წრფის გეგმილური კოორდინატის ცნება.

ვთქვათ, კონა განსაზღვრულია მისი ორი წრფით $\Delta'(b_1', b_2', b_3')$ და $\Delta''(b_1'', b_2'', b_3'')$, სადაც ასოები ფრჩხილებში აღნიშნავს შესაბამისი წრფეების ერთგვაროვან გეგმილურ კოორდინატებს. კონის ყოველი $\Delta(b_1, b_2, b_3)$ წრფის კოორდინატები ასე წარმოიდგინება (იხ. § 178a):

$$b_1=\lambda b_1'+\mu b_1'', \quad b_2=\lambda b_2'+\mu b_2'', \quad b_3=\lambda b_3'+\mu b_3''. \tag{1}$$

$\Delta$ წრფის მდებარეობა სავსებით დახასიათებულია ფარდობით

$$h=\frac{\lambda}{\mu}; \tag{2}$$

კერძოდ, როცა $h=\infty$ $\Delta$ წრფე ემთხვევა $\Delta'$-ს, ხოლო როცა $h=0$ — $\Delta''$-ს.

ადვილი სანახავია, რომ კონის $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ ოთხი წრფის ორმაგი ფარდობა უდრის $h$ პარამეტრის იმ $h_1, h_2, h_3, h_4$ მნიშვნელობათა ორმაგ ფარდობას, რომლებიც ამ წრფეებს შეესაბამებიან, ე. ი.

$$(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4)=(h_1, h_2, h_3, h_4). \tag{3}$$

წინა პარაგრაფის ანალოგიურად, აქაც დამტკიცების დროს შეგვიძლია გამოვიდეთ კონის წრფეების პარამეტრული წარმოდგენიდან დეკარტის ერთგვაროვან კოორდინატებში, ე. ი. წარმოდგენიდან (იხ. § 178a):

$$a_1=\lambda a_1'+\mu a_1'', \quad a_2=\lambda a_2'+\mu a_2'', \quad a_3=\lambda a_3'+\mu a_3''. \tag{1a}$$

$\Delta(a_1, a_2, a_3)$ წრფის განტოლება (დეკარტის ერთგვაროვან კოორდინატებში) არის:

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0,$$

ანუ, (1a) ძალით,

$$(\lambda a_1'+\mu a_1'')x_1+(\lambda a_2'+\mu a_2'')x_2+(\lambda a_3'+\mu a_3'')x_3=0,$$

ანუ კიდევ, თუ არაერთგვაროვან კოორდინატებზე გადავალთ, $x=\frac{x_1}{x_3}$, $y=\frac{x_2}{x_3}$:

$$(\lambda a_1'+\mu a_1'')x+(\lambda a_2'+\mu a_2'')y+(\lambda a_3'+\mu a_3'')=0.$$

ამ წრფის $Ox$ ღერძთან გადაკვეთის წერტილის $x$ აბსცისის მისაღებად წინა განტოლებაში დავუშვათ $y=0$, მაშინ მივიღებთ [1])

$$x=-\frac{\lambda a_3'+\mu a_3''}{\lambda a_1'+\mu a_1''}=-\frac{ha_3'+a_3''}{ha_1'+a_1''}.$$

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ ოთხი წრფის ორმაგი ფარდობა უდრის ამ წრფეთა $Ox$ ღერძთან გადაკვეთის ოთხი წერტილის ორმაგ ფარდობას, ე. ი. სიდიდეს $(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)})$, სადაც $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}$ აღნიშნავენ $x$-ის იმ მნიშვნელობებს, რომლებსაც მივიღებთ წინა ფორმულა-

---

[1]) ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $Ox$ ღერძი კონას არ ეკუთვნის. თუ ეს ასე არ არის, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია ჩავატაროთ ანალოგიური მსჯელობა, თუ $Ox$-ის ნაცვლად ავიღებთ $Oy$ ღერძს. გარდა ამისა, თუ $O$ კონის ცენტრია, მაშინ შეგვიძლია განვიხილოთ კონის წრფეთა გადაკვეთა რომელიმე წრფესთან, რომელიც გადის ერთ-ერთი ღერძის პარალელურად, მაგალითად, $y=c$ წრფესთან, სადაც $c\neq 0$. საბოლოო შედეგი იგივე იქნება.

ში $h$-ის ნაცვლად $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$-ის ჩასმით. მაგრამ, რადგანაც $x$ არის $h$-ის წილად-წრფივი ფუნქცია, როგორც ამას წინა ფორმულა გვიჩვენებს, ამიტომ გვექნება

$$(x^{(1)}, x^{(3)}, x^{(2)}, x^{(4)}) = (h_1, h_3, h_2, h_4),$$

საიდანაც გამომდინარეობს (3) ფორმულა.

კერძოდ, თუ (3) ფორმულას გამოვიყენებთ $\Delta'$, $\Delta''$, $E$, $\Delta$ წრფეებზე, სადაც $E$ არის კონის ის წრფე, რომელიც შეესაბამება $h=1$ (ე. ი. $\lambda=\mu$), ხოლო $\Delta$ აღნიშნავს ნებისმიერ წრფეს, მივიღებთ

$$(\Delta', \Delta'', E, \Delta) = (\infty, 0, 1, h) = h.$$

ამგვარად

$$h = \frac{\lambda}{\mu} = (\Delta', \Delta'', E, \Delta). \tag{4}$$

$h=\frac{\lambda}{\mu}$ სიდიდეს ეწოდება კონის კუთვნილი $\Delta$ წრფის (არაერთგვაროვანი) გეგმილური კოორდინატი, ხოლო $\lambda$, $\mu$-ს კი—იმავე წრფის ერთგვაროვანი გეგმილური კოორდინატები.

$h=\infty$ და $h=0$ მნიშვნელობათა შესაბამისი წრფეები $\Delta'$ და $\Delta''$ იქნება „ძირითადი წრფეები", ხოლო $E$, შესაბამისი $h=1$ მნიშვნელობისა, იქნება კოორდინატთა მიღებული სისტემის „ერთეული წრფე". $\Delta'$, $\Delta''$, $E$ წრფეები შეიძლება არჩეული იყოს სავსებით ნებისმიერად. საჭიროა მხოლოდ, რომ ისინი სხვადასხვა წრფე იყვნენ.

სავსებით ანალოგიურად შეიძლება შემოვიღოთ კონის კუთვნილი სიბრტყის გეგმილური კოორდინატი $h$, ანუ ერთგვაროვანი გეგმილური კოორდინატები $\lambda$, $\mu$. სახელდობრ, ამ შემთხვევაში გვექნება

$$h = \frac{\lambda}{\mu} = (\Pi', \Pi'', E, \Pi),$$

სადაც $\Pi'$, $\Pi''$ მუდმივი „ძირითადი სიბრტყეებია", $E$ „ერთეული სიბრტყეა" შესაბამისი მნიშვნელობისა $h=1$, ხოლო $\Pi$ სიბრტყეა, რომელიც $h$-ს შეესაბამება.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ $\alpha$ არის კუთხე, რომელსაც კონის $\Delta$ წრფე შეადგენს რაიმე მუდმივ მიმართულებასთან, მაშინ სიდიდე $m=\operatorname{tg}\alpha$ (ტანგენს-კოორდინატი) შეგვიძლია გავიხილოთ როგორც გეგმილური კოორდინატი. მართლაც, ვთქვათ, $\Delta'$, $\Delta''$, $E$ არის კონის სამი წრფე, რომლებიც შეესაბამებიან მნიშვნელობებს $m=\infty$, $m=0$ და $m=1$ (ე. ი. $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\alpha=0$ და $\alpha=\frac{\pi}{4}$), მაშინ [1])

$$(\Delta', \Delta'', E, \Delta) = (\infty, 0, 1, m) = m;$$

მაშასადამე, თუ ძირითად წრფეებად ავიღებთ $\Delta'$ და $\Delta''$, ხოლო $E$-ს ერთეულ წრფედ, მაშინ $m$ იქნება გეგმილური კოორდინატი.

**§ 189. ბირველი საფეხურის ორი სახეობის გეგმილური შესაბამობის ანალიზური გამოხახულება.** ვთქვათ, მოცემულია პირველი საფეხურის ორი სახეობა, რომელთა ელემენტები მოყვანილია გეგმილურ შესაბამობაში.

გარკვეულობისათვის, განვიხილოთ წრფის წერტილთა ორი მიმდევრობა, რომლებიც მდებარეობენ წრფეებზე $\Delta$ და $\Delta'$. ვთქვათ, $h$ და $h'$ არის $\Delta$ და $\Delta'$ წრფეებზე აღებული შესაბამისი $M$ და $M'$ წერტილების გეგმილური კოორდინატები. გეგმილური შესაბამობის განმარტების თანახმად, გვაქვს

$$(M_1, M_2, M_3, M) = (M_1', M_2', M_3', M'), \tag{1}$$

[1]) § 183-ის (2) ფორმულის ძალით, კონის ოთხი წრფის ორმაგი ფარდობა უდრის $m$-ის შესაბამის მნიშვნელობათა ორმაგ ფარდობას.

სადაც $M_1$, $M_2$, $M_3$ არის $\Delta$ წრფის სამი სხვადასხვა წერტილი, ხოლო $M_1'$, $M_2'$, $M_3'$ კი—$\Delta'$ წრფის შესაბამისი წერტილები. (1) ტოლობიდან გამომდინარეობს (§ 187)

$$(h_1,\ h_2,\ h_3,\ h)=(h_1',\ h_2',\ h_3',\ h'),$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ $h'$ არის $h$-ის წილად-წრფივი ფუნქცია და, პირიქით:

$$h'=\frac{\alpha h+\beta}{\gamma h+\delta},\quad h=\frac{\alpha' h'+\beta'}{\gamma' h'+\delta'}. \tag{2}$$

თუ არაერთგვაროვანი კოორდინატების $h$ და $h'$-ის ნაცვლად შემოვიღებთ ერთგვაროვან კოორდინატებს $(\lambda,\ \mu)$ და $(\lambda',\ \mu')$:

$$h=\frac{\lambda}{\mu},\quad h'=\frac{\lambda'}{\mu'},$$

ჩავსვამთ მათ წინა ფორმულებში და მხედველობაში მივიღებთ, რომ ერთგვაროვანი კოორდინატები შეიძლება შევცვალოთ მათი პროპორციული სიდიდეებით, შეგვიძლია დავუშვათ

$$\left.\begin{aligned}\lambda' &= \alpha\lambda+\beta\mu, & \lambda&=\alpha'\lambda'+\beta'\mu',\\ \mu' &= \gamma\lambda+\delta\mu, & \mu&=\gamma'\lambda'+\delta'\mu',\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ე. ი. შესაბამისი წერტილების ერთგვაროვანი გეგმილური კოორდინატები, გეგმილური შესაბამობის დროს, ურთიერთ შორის დაკავშირებულია წრფივი ერთგვაროვანი არასაკუთრივი ჩასმით [1]).

პირიქით, თუ ადგილი აქვს ფორმულებს (2) და (3), მაშინ შესაბამობა გეგმილურია, ვინაიდან, მაშინ (1) ტოლობას ადგილი ექნება წრფის წერტილთა ერთი მიმდევრობის ნებისმიერი ოთხი წერტილისა და მეორე მიმდევრობის შესაბამის წერტილებისათვის.

ნათქვამი, ცხადია, უშუალოდ გავრცელდება პირველი სტუპურის სხვა სახეობებზეც წრფეთა ან სიბრტყეთა კონუსზე), და ჩვენ მივიღებთ შემდეგ დებულებას:

თუ პირველი საფეხურის ორი სახეობა გეგმილურ შესაბამობაში იმყოფება, მაშინ შესაბამისი ელემენტების არაერთგვაროვანი გეგმილური კოორდინატები დაკავშირებულია (არასაკუთრივი) წილად-წრფივი ჩასმით და, პირიქით, ერთგვაროვანი კოორდინატები დაკავშირებულია წრფივი ერთგვაროვანი (არასაკუთრივი) ჩასმით.

დავუბრუნდეთ წრფის წერტილთა მიმდევრობის შემთხვევას. თუ $A$, $B$, $E$ არის ძირითადი წერტილები და ერთეული წერტილი კოორდინატთა სისტემის პირველ წრფეზე, ხოლო $A'$, $B'$, $E'$—ანალოგიური წერტილები მეორეზე, მაშინ, გეგმილური კოორდინატების განსაზღვრის თანახმად,

$$h=(A,\ B,\ E,\ M),\quad h'=(A',\ B',\ E',\ M').$$

ვთქვათ, განხილული მიმდევრობანი გეგმილურ შესაბამობაში იმყოფებიან და, ვთქვათ $A'$, $B'$, $E'$ წერტილებად აღებულია $A$, $B$, $E$ წერტილების შესაბამისი წერტილები; თუ $M$, $M$ შესაბამისი წერტილებია, მაშინ $(A,\ B,\ E,\ M)=(A',\ B',\ E',\ M')$ და, მაშასადამე,

$$h=h'. \tag{4}$$

ამგვარად, ამ შემთხვევაში (2) ფორმულები დაიყვანება შესაბამის წერტილთა გეგმილურ კოორდინატების ტოლობაზე.

---

[1]) § 179-ში (1°-ში) ეს თვისება მიღებული იყო წრფის წერტილთა ორი მიმდევრობის გეგმილური შესაბამობის განსასაზღვრად; ახლა კი იგი მიღებულია § 185-ში მოცემული სხვა (გეომეტრიული) განსაზღვრის შედეგად. ჩვენ ვხედავთ, რომ ორივე ეს განსაზღვრა ეკვივალენტურია.

ეს უკანასკნელი უშუალოდ ვრცელდება პირველი საფეხურის სხვა სახეობებზეც.

ასე, მაგალითად, თუ მოცემული წრფის წერტილთა მიმდევრობა და წრფეთა კონა გეგმილურ შესაბამობაშია, მაშინ შესაბამისი ელემენტების (წრფის წერტილთა მიმდევრობის წერტილებისა და კონის წრფის) კოორდინატები $h$ და $h'$ ურთიერთთანატოლია, თუ ძირითად და ერთეულ ელემენტებად ორივე სახეობაში აღებულია ერთმანეთის შესაბამისი ელემენტები.

**§ 190. ბრველი ხაფეხურის დამოხვეული სახეობანი. ინვოლუცია.** განვიხილოთ გარკვეულობისათვის $\Sigma_1$ წრფის წერტილთა ორი მიმდევრობა. ეს მიმდევრობანი შეიძლება მოთავსებული იყოს სხვადასხვა $\Delta$ და $\Delta'$ წრფეზე ან ერთსა და იმავე წრფეზე.

ამ უკანასკნელ შემთხვევაში იტყვიან, რომ განხილული მიმდევრობანი ერთმანეთზეა დამთხვეული. აქ (როგორც ზემოთ ვიკეთებდით მსგავს შემთხვევებში) მოხერხებულია ვიგულისხმოთ, რომ ჩვენ გვაქვს ორი ერთმანეთზე დამთხვეული $\Delta$ და $\Delta'$ წრფეები, რომლებზედაც იმყოფებიან განხილული მიმდევრობანი. საქმე შემდეგშია. ვთქვათ, განხილული მიმდევრობების $M$ და $M'$ წერტილები მოყვანილია ცალსახა-შებრუნებად შესაბამობაში, ისე რომ

$$x' = \varphi(x), \quad x = \psi(x'), \tag{1}$$

სადაც $x$ და $x'$ აღნიშნავენ $M$ და $M'$ წერტილების აბსცისებს, ხოლო $\varphi$ და $\psi$ ცალსახა ფუნქციებია. ახლა ვთქვათ, $N$ იმ წრფის რაიმე წერტილია, რომელზედაც მოთავსებულია ორივე მიმდევრობა. თუ ნაჩენები არ არიან წერტილთა რომელ მიმდევრობას ეკუთვნის ეს წერტილი, მაშინ ჩვენ არ გვეცოდინება (1) ფორმულებიდან რომლით უნდა გამოვთვალოთ შესაბამისი წერტილის კოორდინატი. სწორედ ამიტომაა მოხერხებული დამთხვეული მიმდევრობების განხილვა, როგორც ერთმანეთზე დამთხვეულ ორ წრფეზე მდებარე მიმდევრობებისა; როცა ჩვენ მიეუთითებთ წრფეს, რომელზედაც მოთავსებულია წერტილი $N$, ამით ჩვენ ვუთითებთ იმ მიმდევრობასაც, რომელსაც იგი ეკუთვნის.

მაგრამ არის ფრიად ღნიშვნელოვანი შემთხვევაც, როცა ასეთი განსხვავება ზედმეტია: ეს არის ის შემთხვევა, როცა წერტილთა ორ მიმდევრობას შორის შესაბამობა ისეთია, რომ მოცემული $M$ წერტილის შესაბამის $M'$ წერტილს ერთი და იგივე მდებარეობა აქვს, მიუხედავად იმისა, $M$ წერტილი განიხილება, როგორც პირველი თუ როგორც მეორე მიმდევრობის წერტილი. ანალიზურად ეს იმას ნიშნავს, რომ ფუნქციები $\varphi$ და $\psi$ ერთნაირია (თუ ორივე მიმდევრობის წერტილები აღებულია ერთი და იგივე კოორდინატთა სისტემის მიმართ). ამ შემთხვევაში არ არის საჭიროება $\Delta$ და $\Delta'$ წრფეების განსხვავებისა და, საზოგადოდ, განსხვავება პირველი მიმდევრობისა მეორისაგან. შეგვიძლია უბრალოდ ვთქვათ, რომ ერთი და იგივე მიმდევრობის წერტილები წყვილ-წყვილად მოყვანილია შესაბამობაში ისე, რომ თუ $M$ წერტილს შეესაბამება $M'$, მაშინ, პირიქითაც $M'$-ს შეესაბამება წერტილი $M$.

ასეთ შესაბამობას ი ნ ვ ო ლ უ ტ ო რ უ ლ ს უწოდებენ. შემდეგში გეგმილურ ინვოლუტორულ შესაბამობას ჩვენ ვუწოდებთ ი ნ ვ ო ლ უ ც ი ა ს.

მოვძებნოთ ზოგადი ანალიზური გამოსახულება ინვოლუციისათვის. ვთქვათ, განხილული მიმდევრობის $M$ წერტილის გეგმილური კოორდინატია $h$; თუ $M'$ შესაბამისი წერტილია, ხოლო $h'$—მისი კოორდინატი იმავე სისტემის მიმართ, მაშინ

$$h' = \frac{\alpha h + \beta}{\gamma h + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0),$$

ვინაიდან, პირობის თანახმად, შესაბამობა გეგმილურია.

წინა ტოლობა შეიძლება ასეც ჩაიწეროს:

$$\gamma h h' - \alpha h + \delta h' - \beta = 0.$$

ვინაიდან $M$ და $M'$ წერტილებს შორის შესაბამობა ინვოლუტორულია, ამიტომ ეს ტოლობა ეკვივალენტური უნდა იყოს შემდეგი ტოლობისა

$$\gamma h' h - \alpha h' + \delta h - \beta = 0,$$

რომელიც მიიღება $h$ და $h'$-ის გადაადგილებით. თუ პირველ ტოლობას გამოვაკლებთ მეორეს, მივიღებთ

$$(\alpha+\delta)(h'-h)=0.$$

თუ $\alpha+\delta\neq 0$, მივიღებთ

$$h'=h,$$

ე. ი. ჩვენი ინვოლუცია უბრალოდ იმაში მდგომარეობს, რომ ყოველი წერტილი შეესაბამება თავის თავს. უკუვაგდოთ ეს ინტერესს მოკლებული შემთხვევა, და ვიგულისხმოთ, რომ

$$\alpha+\delta=0;$$

მაშინ, $h$ და $h'$-ს შორის ინვოლუციის გამომსახველი დამოკიდებულება მიიღებს სახეს

$$\gamma hh'+\delta(h+h')-\beta=0,$$

ანუ, თუ სიმეტრიულობისათვის ვიგულისხმებთ $\gamma=a$, $\delta=-\alpha=b$, $-\beta=c$, გვექნება:

$$ahh'+b(h+h')+c=0, \tag{2}$$

სადაც $a$, $b$, $c$ ისეთი მუდმივებია, რომ

$$ac-b^2\neq 0$$

ეს უკანასკნელი გამომდინარეობს უტოლობიდან $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$.

ახლა მოვძებნოთ ინვოლუციის ორმაგი წერტილები, ე. ი. წერტილები, რომლებიც შეესაბამებიან თავის თავს. თუ $M'$ წერტილი ემთხვევა მის შესაბამის $M$ წერტილს, მაშინ $h'=h$ და (2) მივიღებთ

$$ah+2bh+c=0, \tag{3}$$

საიდანაც $h$-სთვის მოვძებნით ორ მნიშვნელობას:

$$h=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}. \tag{4}$$

მაშასადამე, ყოველთვის არსებობს ორი ორმაგი წერტილი $A$ და $B$; ეს წერტილები ნამდვილია, თუ $b^2-ac\neq 0$, წარმოსახვითი შეუღლებული წერტილებია, თუ $b^2-ac<0$.

თუ ორმაგი წერტილები ემთხვევა კოორდინატთა სისტემის ძირითად წერტილებს $A$-ს ($h=\infty$) და $B$-ს ($h=0$), მაშინ განტოლებას (3) უნდა ჰქონდეს ფესვები $h=0$ და $h=\infty$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $a=c=0$, და ტოლობა (2) მიიღებს სახეს

$$h+h'=0,$$

ე. ი. შესაბამისი წერტილების კოორდინატები სიდიდით ტოლია და განსხვავებულია ნიშნებით. აქედან გამომდინარეობს (იხ. შენიშვნა § 187-ის ბოლოში), რომ $M$ და $M'$ წერტილები ჰარმონიულად შეუღლებულია $A$ და $B$ წერტილების მიმართ. ამგვარად, ყოველი ინვოლუცია წარმოადგენს ჰარმონიულად შეუღლებას ორი ნამდვილი ან წარმოსახვითი წერტილის მიმართ. ცხადია, რომ პირიქითაც, ისეთ წერტილთა წყვილ-წყვილი შესაბამობა, რომლებიც ჰარმონიულად შეუღლებული არიან ორი მოცემული $A$ და $B$ წერტილის მიმართ, წარმოადგენს ინვოლუციას ორმაგი $A$ და $B$ წერტილებით.

ყოველივე აქ ნათქვამი შეიძლება ზუსტად გადავიტანოთ სხვა საფეხურის სახეობებზეც, ე. ი. წრფეთა კონაზე და სიბრტყეთა კონაზე.

წრფეთა (ან სიბრტყეთა) ორ კონას ერთმანეთზე დამოხვეული ეწოდება, თუ მათი ცენტრები (ან ღერძები) ერთმანეთს ემთხვევა. ამ კონების მიმართ შეგვიძლია გავიმეოროთ ყოველივე ზემოთათქვამი, საჭიროა მხოლოდ ყველგან სიტყვა „წერტილი“ შევცვალოთ სიტყვით „წრფე“ (ან „სიბრტყე“).

მაგალითისათვის განვიხილოთ კონის წრფეთა ორთოგონალური ინვოლუცია, როცა ყოველ წრფეს შეესაბამება მისი მართობი წრფე. ამ ინვოლუციის ანალიზური გამოსახვისათვის, გეგმილურ კოორდინატად ავიღოთ ტანგენს-კოორდინატი $m = \operatorname{tg}\alpha$, სადაც $\alpha$ ის კუთხეა, რომელსაც კონის წრფე შეადგენს მუდმივ წრფესთან (იხ. § 188, შენიშვნა). იმის პირობა, რომ კონის $\Delta$ და $\Delta'$ წრფეები, რომლებიც შეესაბამებიან $m$ და $m'$ მნიშვნელობებს, ურთიერთმართობი იყოს, როგორც ვიცით, მდგომარეობს შემდეგში: $m = -\frac{1}{m'}$ ანუ

$$mm' + 1 = 0.$$

ეს უკანასკნელი (2) ტოლობის კერძო შემთხვევაა; მაშასადამე, ჩვენ ნამდვილად საქმე გვაქვს ინვოლუციასთან.

ჩვენი ინვოლუციის ორმაგი წრფეები ის წრფეებია, რომელთა კუთხო კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ განტოლებას $m^2 + 1 = 0$, საიდანაც $m = \pm i$; მაშასადამე, როგორც მოსალოდნელი იყო, ორმაგი წრფეები წარმოსახვითია. როგორც ჩანს, ესენი არიან სიბრტყის იზოტროპიული წრფეები, რომლებზედაც კონა მდებარეობს (იხ. § 162).

პირიქით, კონის იზოტროპიული წრფეებით განსაზღვრული ინვოლუცია არის ორთოგონალური ინვოლუცია.

ამგვარად, სიბრტყეზე ურთიერთმართობი მიმართულებანი შეიძლება განმარტებულ იქნას, როგორც ამ სიბრტყის იზოტროპიული წრფეების მიმართ ჰარმონიულად შეუღლებული მიმართულებანი.

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა.** ადვილი სანახავია, რომ თუ პირველი საფეხურის ორი დამთხვეული სახეობის, სამი ერთმანეთისგან განსხვავებული რაიმე $A$, $B$, $C$ ელემენტი ერთი სახეობისა ემთხვევა მეორე სახეობის შესაბამის სამ $A'$, $B'$, $C'$ [1]) ელემენტს, მაშინ ისინი ერთმანეთს ემთხვევიან ყველა ელემენტით.

მართლაც, თუ $M$ და $M'$ არის ჩვენი სახეობების რაიმე შესაბამი ელემენტები, მაშინ, გეგმილური შესაბამობის განმარტების ძალით, გვეკნება:

$$(A, B, C, M) = (A', B', C', M'),$$

საიდანაც $(A, B, C, M) = (A, B, C, M')$, ვინაიდან $A'$, $B'$, $C'$ ემთხვევა $A$, $B$, $C$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $M'$ ემთხვევა $M$.

**§ 191. გეგმილური კოორდინატების გეომეტრიული მნიშვნელობა სიბრტყეში.** 1°. § 177-ში (2°-ში) შემოღებული იყო გეგმილური კოორდინატების ცნება სიბრტყეზე. მოვიგონოთ, რომ წერტილის გეგმილური ერთგვაროვანი კოორდინატები $y_1$, $y_2$, $y_3$ დაკავშირებულია იმავე წერტილის დეკარტის კოორდინატებთან ერთგვაროვანი არასაკუთრივი ჩასმით

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}x_3 \equiv f_1(x_1, x_2, x_3), \\ y_2 &= \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{23}x_3 \equiv f_2(x_1, x_2, x_3), \\ y_3 &= \beta_{31}x_1 + \beta_{32}x_2 + \beta_{33}x_3 \equiv f_3(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

სადაც $\beta_{ij}$—მუდმივებია, რომელთა დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია.

წინა პარაგრაფების შედეგები საშუალებას გვაძლევს ადვილად გამოვარკვიოთ გეგმილური კოორდინატების გეომეტრიული მნიშვნელობა სიბრტყეზე. ამისათვის განვიხილოთ სამი წრფე [2]), რომელთა განტოლებებს $y_1$, $y_2$, $y_3$ კოორდინატებში, შესაბამისად, აქვს სახე

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0$$

---

[1]) თუ ერთი სახეობის $A$ ელემენტი ემთხვევა მეორის შესაბამის $A'$ ელემენტს, მაშინ იტყვიან, რომ $A$ ელემენტი შეესაბამება თავის თავს.

[2]) აქ $f_1$, $f_2$, $f_3$ აღნიშნავენ იგივეს, რასაც (1) ფორმულებში.

ეს წრფეები ერთ წერტილში არ იკვეთებიან (ვინაიდან, პირობის თანახმად, $\beta_{ik}$ კოეფიციენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია) და ამიტომ ისინი შეადგენენ სამკუთხედს, რომელსაც ეწოდება განხილულ კოორდინატთა გეომილური სისტემის ძირითადი სამკუთხედი.

ამ სამკუთხედის წვეროები აღვნიშნოთ $A_1$, $A_2$, $A_3$-თი; სახელდობრ, $A_1$ იყოს $y_2=0$ და $y_3=0$ გვერდების გადაკვეთის წერტილი, $A_2$ იყოს $y_3=0$ და $y_1=0$ გვერდების გადაკვეთის წერტილი, და $A_3$ კი იყოს $y_1=0$ და $y_2=0$ გვერდების გადაკვეთის წერტილი. ამგვარად, ამ წერტილების გეომილური კოორდინატები იქნება[1]: (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1). შემოვიღოთ აგრეთვე ერთეულის წერტილი, ე. ი. წერტილი $E$ კოორდინატებით (1, 1, 1)[2].

ახლა განვიხილოთ ორმაგი ფარდობა ოთხი წრფისა, რომლებიც გაივლიან $A_1$ წვეროზე და $A_2$, $A_3$, $E$, $M$ წერტილებზე (ნახ. 119). $A_1$ წერტილზე, ე. ი. $y_2=0$ და $y_3=0$ წრფეების გადაკვეთაზე, გამავალ ყოველ წრფეს აქვს განტოლება $\lambda y_2+\mu y_3=0$, ანუ, თუ აღვნიშნავთ $h=\frac{\mu}{\lambda}$,

$$y_2+hy_3=0, \tag{3}$$

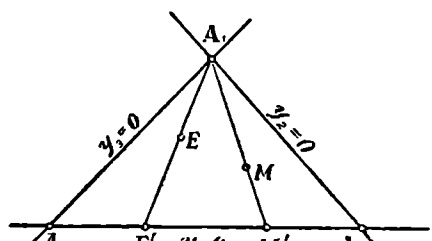
სადაც $h$ არის განხილული წრფის მდებარეობის განმსაზღვრელი პარამეტრი. როცა $h=\infty$ მივიღებთ $A_1A$ წრფეს (ე. ი. $y_3=0$), როცა $h=0$ მივიღებთ $A_1A_3$ წრფეს (ე. ი. $y_2=0$), როცა $h=-1$ გვექნება $A_1E$ წრფე. ამიტომ, $A_1A_2$, $A_1A_3$, $A_1E$, $A_1M$ წრფეების ორმაგი ფარდობა, რომელსაც ჩვენ აღვნიშნავთ სიმბოლოთი

$$A_1(A_2, A_3, E, M),$$

მოცემული იქნება ფორმულით

$$A_1(A_2, A_3, E, M)=(\infty, 0, -1, h)=-h,$$

სადაც $h$-ით აღნიშნულია პარამეტრის ის მნიშვნელობა (3) ტოლობაში, რომელიც შეესაბამება $A_1M$ წრფეს. თუ $y_1$, $y_2$, $y_3$ აღნიშნავენ $M$ წერტილის კოორდინატებს და, მაშასადამე, (3) ძალით, $h=-\frac{y_2}{y_3}$, მაშინ წინა ფორმულა მოგვცემს პირველს შემდეგი ფორმულებიდან:




ნახ. 119.

$$\frac{y_2}{y_3}=A_1(A_2, A_3, E, M),\ \frac{y_3}{y_1}=A_2(A_3, A_1, E, M),\ \frac{y_1}{y_2}=A_3(A_1, A_2, E, M); \tag{4}$$

ორი უკანასკნელი ფორმულა მიღებულია პირველი ფორმულიდან 1, 2, 3 ნიშნაკების წრიული გადანაცვლებით.

ამგვარად, ჩვენ ვხედავთ, თუ რა გეომეტრიული შინაარსი აქვს ერთგვაროვანი კოორდინატების $y_1$, $y_2$, $y_3$-ის ფარდობებს.

(4) ფორმულების შინაარსი უფრო ნათელი გახდება, თუ მათ ჩავწერთ შემდეგნაირად:

$$\frac{y_2}{y_3}=(A_2, A_3, E', M') \text{ (და ორი ანალოგიური)}, \tag{4a}$$

სადაც $E'$ და $M'$ აღნიშნავენ $A_1E$ და $A_1M$ წრფეების გადაკვეთის წერტილებს $A_2A_3$ წრფესთან. უკანასკნელი ფორმულა გვიჩვენებს, რომ $\frac{y_2}{y_3}$ არის $M'$ წერტილის (არაერთგვაროვანი)

[1] მაგალითად, $A_1$ წერტილისათვის გვექნება $y_1\neq 0$, $y_2=0$, $y_3=0$; ვინაიდან კოორდინატები შეიძლება შეიცვალოს მათი პროპორციული სიდიდეებით, ამიტომ შეგვიძლია ჩავთვალოთ $y_1=1$.

[2] ანუ, რაც იგივეა, $(k, k, k)$ კოორდინატებით, სადაც $k$ ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი რიცხვია.

გეგმილური კოორდინატი $A_3A_3$ წრფეზე, როცა $A_2$, $A_3$ ძირითადი წერტილებია და $E$ ერთეული წერტილი.

ადვილი საჩვენებელია, რომ ყოველი სამი ერთ წრფეზე არამდებარე წერტილი $A_1, A_2, A_3$ შეიძლება არჩეული იყოს ძირითადი სამკუთხედის წვეროდ. ერთეული წერტილი $E$ შეიძლება აგრეთვე არჩეული იყოს ნებისმიერად (საჭიროა, მხოლოდ, რომ იგი ძირითადი სამკუთხედის არც ერთ გვერდზე [1]) არ მდებარეობდეს).

მართლაც, ვთქვათ, $f_1(x_1, x_2, x_3)=0$, $f_2(x_1, x_2, x_3)=0$, $f_3(x_1, x_2, x_3)=0$ არის $A_2A_3$, $A_3A_1$, $A_1A_2$ გვერდების განტოლებები, სადაც $f_1$, $f_2$, $f_3$ წრფივად დამოუკიდებელი ფორმებია $x_1$, $x_2$, $x_3$ ცვალებადებისა. ვინაიდან $y_1$, $y_2$, $y_3$ კოორდინატებში ამ წრფეების განტოლებებს უნდა ჰქონდეთ სახე $y_1=0$, $y_2=0$, $y_3=0$, ამიტომ

$$y_1=\lambda_1 f_1(x_1, x_2, x_3), \quad y_2=\lambda_2 f_2(x_1, x_2, x_3), \quad y_3=\lambda_3 f_3(x_1, x_2, x_3), \tag{5}$$

სადაც $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ მუდმივებია. საჭიროა ეს მუდმივები შევარჩიოთ პირობიდან $y_1=y_2=y_3=1$ როცა $x_1=x_1^0$, $x_2=x_2^0$, $x_3=x_3^0$, სადაც $x_1^0$, $x_2^0$, $x_3^0$ მოცემული $E$ წერტილის კოორდინატებია. ეს მუდამ შესაძლებელია, ვინაიდან $f_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0)\neq 0$, რადგანაც $E$ წერტილი $A_2A_3$ წრფეზე არ მდებარეობს; ანალოგიურად გვექნება $f_2$ და $f_3$-სთვის [თუ პირობას $y_1=y_2=y_3=1$ შევცვლით პირობით $y_1=y_2=y_3=k$, სადაც $k$ ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი მუდმივია, მაშინ წინა მუდმივების $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ ნაცვლად გვექნებოდა $k\lambda_1$, $k\lambda_2$, $k\lambda_3$, ე. ი. (5) ტოლობების მარჯვენა მხარეები გამრავლდება ერთსა და იმავე მუდმივზე, რასაც მნიშვნელობა არა აქვს].

(5) ტოლობებს აქვს (1) სახე და ამიტომ $y_1$, $y_2$, $y_3$ იქნებიან გეგმილური კოორდინატები, რომლებიც აკმაყოფილებენ ყველა შემოღებულ პირობას.

ძირითადი სამკუთხედის ერთ-ერთი გვერდი შეიძლება იყოს არასაკუთრივიც. ამ შემთხვევაში ჩვენ ხელახლა მივიღებთ დეკარტის კოორდინატებს. მართლაც, თუ, მაგალითად, $A_1$ და $A_2$ არასაკუთრივი წერტილებია, და, მაშასადამე, $A_1A_2$—არასაკუთრივი წრფე, მაშინ მისი განტოლება არის $x_3=0$ და ამიტომ (5) ფორმულებში $f_3(x_1, x_2, x_3)=x_3$. შეგვიძლია ვიგულისხმოთ აგრეთვე $\lambda_3=1$ (ეს ნიშნავს $y_1$, $y_2$, $y_3$-ის ერთსა და იმავე რიცხვზე გამრავლებას) და (5) ტოლობები მიიღებს სახეს

$$y_1=k_{11}x_1+k_{12}x_2+k_{13}x_3, \quad y_2=k_{21}x_1+k_{22}x_2+k_{23}x_3, \quad y_3=x_3,$$

სადაც $k_{ij}$ მუდმივებია; უკანასკნელი ტოლობები წარმოადგენენ დეკარტის კოორდინატების გარდაქმნის ფორმულებს ისევე დეკარტის კოორდინატებად (§ 173) და ჩვენი წინადადებაც დამტკიცებულია. ადვილი დასამტკიცებელია იგივე უშუალოდაც, თუ ვისარგებლებთ (4) ფორმულებით; იხილეთ ქვემოთ სავარჯიშო.

წრფის გეგმილურ კოორდინატებს აქვთ ფრიად მარტივი გეომეტრიული შინაარსი, ანალოგიური (4) ფორმულებით მოცემული წერტილის კოორდინატებისა. ეს შინაარსი, რომ გამოვარკვიოთ, საკმარისია, ურთიერთობის პრინციპის გამოყენებით, წერტილის კოორდინატებიდან გადავიდეთ წრფის კოორდინატებზე (იხ. ქვემოთ სავარჯიშო).

2°. § 177-ში (პუნქტი 2). შემოღებული იყო წერტილის კოორდინატების ცნება სივრცეში; სახელდობრ, რაიმე წერტილის გეგმილური ერთგვაროვანი $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ კოორდინატები დაკავშირებულია იმავე წერტილის დეკარტის ერთგვაროვან $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ კოორდინატებთან წრფივი ერთგვაროვანი არაგანსაკუთრებული ჩასმით

$$\left.\begin{aligned} y_1&=\beta_{11}x_1+\beta_{12}x_2+\beta_{13}x_3+\beta_{14}x_4\equiv f_1(x_1, x_2, x_3, x_4),\\ y_2&=\beta_{21}x_1+\beta_{22}x_2+\beta_{23}x_3+\beta_{24}x_4\equiv f_2(x_1, x_2, x_3, x_4),\\ y_3&=\beta_{31}x_1+\beta_{32}x_2+\beta_{33}x_3+\beta_{34}x_4\equiv f_3(x_1, x_2, x_3, x_4),\\ y_4&=\beta_{41}x_1+\beta_{42}x_2+\beta_{43}x_3+\beta_{44}x_4\equiv f_4(x_1, x_2, x_3, x_4), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

სადაც $\beta_{ij}$ — მუდმივებია, რომელთა დეტერმინანტი ნულის ტოლი არ არის.

[1]) სამკუთხედის გვერდად იგულისხმება მთელი წრფე და არა მხოლოდ მონაკვეთი წვეროებს შორის.

ახლა გამოვარკვიოთ გეგმილური კოორდინატების გეომეტრიული შინაარსი სივრცეში. ზემოხსენებულის სრული ანალოგიის გამო, ჩვენ აქ დავკმაყოფილდებით მოკლე მითითებებით.

სიბრტყეები $f_1=0$. $f_2=0$, $f_3=0$, $f_4=0$ ანუ $y_1=0$, $y_2=0$, $y_3=0$, $y_4=0$ ქმნიან ძირითად ტეტრაედრს. $y_1=0$, $y_2=0$, $y_3=0$, $y_4=0$ წახნაგების პირდაპირ მდებარე წვეროები ამ ტეტრაედრში არის (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0). (0, 0, 0, 1). აქ ფრჩხილებში აღებულია $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ კოორდინატების მნიშვნელობანი [1] (ნახ. 120).

შევიღოთ „ერთეული წერტილი“ $E(1, 1, 1, 1)$ და გავატაროთ რომელიმე $A_iA_j$ წიბოზე ($i$, $j$ არის არა ერთმანეთის ტოლი რიცხვები 1, 2, 3, 4 რიცხვებიდან) ოთხი სიბრტყე, რომლებიც გაივლიან, შესაბამისად, $A_k$, $A_l$, $E$ და $M$-ზე; $A_k$ და $A_l$ აღნიშნავენ, $A_i$ და $A_j$-სგან განსხვავებულ წვეროებს; ისე, რომ $A_iA_j$ და $A_kA_l$ ერთმანეთის მოპირდაპირე წიბოები არიან (როგორც, მაგალითად, წიბოები $A_2A_4$ და $A_1A_3$ 120 ნახაზზე).

ამ ოთხი სიბრტყის ორმაგი ფარდობა აღვნიშნოთ სიმბოლოთი: $A_iA_j(A_k, A_l, E, M)$. მაშინ, ადვილად დავრწმენდებით, რომ

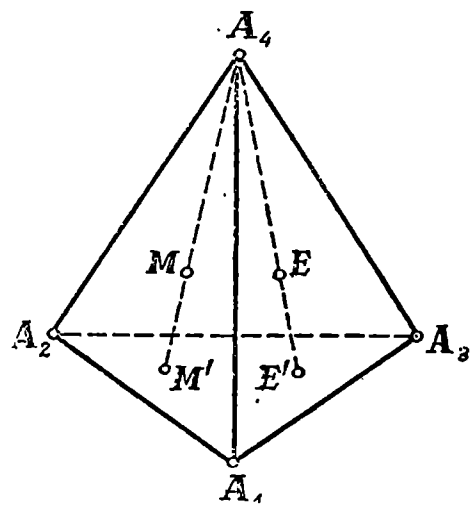
$$\frac{y_k}{y_l}=A_iA_j(A_k, A_l, E, M). \qquad (7)$$

მართლაც [2]), იმ სიბრტყის ზოგად განტოლებას, რომელიც გაივლის $y_k=0$ და $y_l=0$ წახნაგების გადაკვეთის წიბოზე $A_iA_j$, აქვს სახე

$$y_k+hy_l=0. \qquad (8)$$

$y_l=0$ წახნაგს (რომელიც გადის $A_k$-ზე) შეესაბამება $h=\infty$, ხოლო $y_k=0$ წახნაგს (რომელიც გადის $A_l$-ზე) შეესაბამება $h=0$; უკანასკნელად, $E$ წერტილზე გამავალ სიბრტყეს შეესაბამება $h=-1$, მაშასადამე,

$$A_iA_j(A_k, A_l, E, M)=(\infty, 0, -1, h)=-h,$$



ნახ. 120.

სადაც $h$ აღნიშნავს პარამეტრის იმ მნიშვნელობას (8)-ში, რომელიც შეესაბამება $M(y_1, y_2, y_3, y_4)$-ზე გამავალ სიბრტყეს; (8) ტოლობის ძალით, $h=\frac{y_k}{y_l}$ და ჩვენ ვღებულობთ (7) ფორმულას.

მკითხველს ვანდობთ დაამტკიცოს შემდეგი: თუ $A_4$ წვეროზე გავატარებთ $A_4E$ და $A_4M$ წრფეებს და თუ $E'$, $M'$ ამ წრფეების გადაკვეთის წერტილებია $A_1A_2A_3$ წახნაგთან, მაშინ $y_1$, $y_2$, $y_3$ იქნება $M'$ წერტილის გეგმილური კოორდინატები ხსენებული წახნაგის სიბრტყეზე ძირითადი სამკუთხედით $A_1A_2A_3$ და ერთეული წერტილით $E'$; ანალოგიურად სხვა წახნაგებისათვის.

ანალოგიურად განისაზღვრება სიბრტყის გეგმილური კოორდინატები და შეისწავლება მათი გეომეტრიული შინაარსი. გარდა ამისა, ადვილი სანახავია, რომ ძირითად

[1]) $A_1$ წერტილისათვის, ნაცვლად კოორდინატებისა (1, 0, 0, 0), შეგვიძლია ავიღოთ ($k$, 0. 0, 0), სადაც $k$ ნებისმიერი რიცხვია, რომელიც ნულის ტოლი არ არის. ასევე დანარჩენი წვეროებისთვის.

[2]) მკითხველს ვურჩევთ ჩაატაროს აქ მოყვანილი მსჯელობა, როცა $i$, $j$, $k$, $l$-ს აქვთ გარკვეული მნიშვნელობანი, მაგალითად, $i=2$, $j=4$, $k=1$, $l=3$.

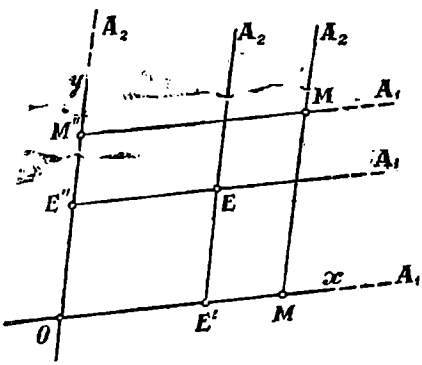
ტეტრაედრად შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერი ტეტრაედრი და ნებისმიერი $E$ წერტილი შეგვიძლია ავირჩიოთ ერთეულ წერტილად (მხოლოდ იგი არ უნდა იმყოფებოდეს ტეტრაედრის არც ერთ წახნაგზე).

### სავარჯიშოები და დამატებები

1. (4) ფორმულების გამოყენებით, გამოიკვლიეთ წერტილის გეგმილური კოორდინატების გეომეტრიული შინაარსი სიბრტყეზე იმ შემთხვევაში, როცა ძირითადი სამკუთხედის გვერდი $A_1A_2$ არის არასაკუთრივი წრფე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. აღვნიშნოთ $A_3$ წერტილი ასოთი $O$, ხოლო $Ox$-ითა და $Oy$-ით კი—ის წრფეები, რომელთა მიმართულებაზეც იმყოფებიან წერტილები $A_1$ და $A_3$. ვთქვათ, $E$-არის ნებისმიერად შერჩეული ერთეული წერტილი. იგი უნდა იყოს საკუთრივი (არ უნდა იმყოფებოდეს $A_1A_2$ გვერდზე) და არ უნდა მდებარეობდეს $Ox$-სა და $Oy$-ზე. ვთქვათ, $E'$ და $E''$ არის $E$ წერტილის გეგმილები $Ox$-სა და $Oy$-ზე (აღებული $Ox$-ისა და $Oy$-ის პარალელურად), ხოლო $M'$, $M''$ იყოს ნებისმიერი $M$ წერტილის გეგმილები იმავე ღერძებზე (ნახ. 121).

თანახმად (4) ფორმულათაგან მეორე ფორმულისა ფარდობა $\frac{y_2}{y_1}$ უდრის კონის იმ ოთხი წრფის ორმაგ ფარდობას, რომელთა ცენტრია $A_2$ წერტილში (ე. ი. ეს წრფეები იქნება $Oy$-ის პარალელური) და რომლებიც გადის წერტილებზე $O$, $A_1$, $E$ და $M$; მაგრამ ეს ორმაგი ფარდობა უდრის $Ox$ წრფის $O$, $A_1$, $E'$, $M'$ წერტილთა ორმაგ ფარდობას. მაშასადამე [1]),



ნახ. 121.

$$\frac{y_2}{y_1} = (O, A_1, E', M') = -\frac{OE'}{OM'},$$

საიდანაც

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{OM'}{OE'}.$$

სავსებით ანალოგიურად მივიღებთ

$$\frac{y_2}{y_3} = \frac{OM''}{OE''}.$$

ამგვარად, $y_1$, $y_2$, $y_3$ იქნება დეკარტის ერთგვაროვანი კოორდინატები; სათავე იქნება $O$ წერტილი, ხოლო საკოორდინატო ვექტორები $u = \overline{OE'}$ და $v = \overline{OE''}$.

2. ვთქვათ, $b_1$, $b_2$, $b_3$ არის $\Delta$ წრფის გეგმილური კოორდინატები სიბრტყეზე. ძირითადი სამკუთხედის გვერდები აღვნიშნოთ $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$-ით, რომლებიც მდებარეობენ $A_1$, $A_2$, $A_3$ წვეროების პირდაპირ, ხოლო $E$-თი კი ერთეული წრფე, რომლისთვისაც $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ (ანუ, უბრალოდ, $b_1 = b_2 = b_3 \neq 0$). აღვნიშნოთ სიმბოლოთი $\Delta_1$ ($\Delta_2$, $\Delta_3$, $E$, $\Delta$) ორმაგი ფარდო-

[1]) $A_1$ წერტილი რომ საკუთრივი ყოფილიყო, მაშინ გვექნებოდა

$$(O, A_1, E', M') = \frac{OE'}{E'A_1} : \frac{OM'}{M'A_1} = -\frac{OE'}{OM'} \cdot \frac{M'A_1}{E'A_1}.$$

მაგრამ, რადგანაც $A_1$ არასაკუთრივი წერტილია, ამიტომ უნდა მივიღოთ $\frac{M'A_1}{E'A_1} = 1$ (ვინაიდან ფარდობა $\frac{M'A}{E'A}$ მიისწრაფვის ერთისაკენ, როცა საკუთრივი წერტილი $A$ უსასრულობისაკენ მიისწრაფვის).

ბა $\Delta_3$, $\Delta_3$, $E$, $\Delta$ წრფეების გადაკვეთის წერტილებისა $\Delta_1$ წრფესთან. მოითხოვება დაამტკიცოთ, რომ ადგილი აქვს ფორმულებს

$$\frac{b_2}{b_3} = \Delta_1(\Delta_2, \Delta_3, E, \Delta)$$

(და კიდევ ორ ანალოგიურს, რომლებიც მიიღება წრიული გადანაცვლებით). ეს ფორმულები გვიჩვენებენ გეგმილური კოორდინატების გეომეტრიულ შინაარს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვსაზღვროთ წერტილის მდებარეობა $\Delta$ ($y_1 = 0$) წრფეზე არაერთგვაროვანი გეგმილური კოორდინატით $y = \frac{y_2}{y_3}$. ამ წრფეზე $A_2$ და $A_3$ წერტილებს (ესენი არიან $\Delta_1$-ის გადაკვეთის წერტილები $\Delta_2$-თან და $\Delta_3$-თან) შეესაბამება მნიშვნელობანი $y=0$ და $y=\infty$. იმისათვის, რომ მივიღოთ $\Delta_1$-ის $\Delta$ წრფესთან გადაკვეთის წერტილის შესაბამისი მნიშვნელობა $y$-ისა, საჭიროა $\Delta$ წრფის განტოლებაში $b_1y_1+b_2y_2+b_3y_3=0$. დავუშვათ, $y_1=0$, რაც მოგვცემს

$$y = \frac{y_2}{y_3} = -\frac{b_3}{b_2}.$$

საბოლოოდ, რომ მივიღოთ $y$-ის მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება $\Delta_1$-ის $E$-სთან გადაკვეთის წერტილს, საჭიროა უკანასკნელ ფორმულაში დავუშვათ $b_2=b_3=1$; ეს მოგვცემს $y=-1$. მაშასადამე [1]),

$$\Delta_1(\Delta_2, \Delta_3, E, \Delta) = \left(0, \infty, -1, -\frac{b_3}{b_2}\right) = \frac{b_3}{b_2}$$

და სწორედ ეს იყო დასამტკიცებელი [2]).

3. მე-(7) ფორმულების გამოყენებით, გამოვარკვიოთ წერტილის გეგმილური კოორდინატების გეომეტრიული მნიშვნელობა სივრცეში, როცა ძირითადი ტეტრაედრის $A_1A_2A_3$ წახნაგი არის არასაკუთრივი სიბრტყე (შეადარეთ სავარჯიშოს 1).

4. შევისწავლოთ სიბრტყის გეგმილური კოორდინატების გეომეტრიული შინაარსი სივრცეში (შეადარეთ სავარჯიშოს 2).

**§ 192. სიბრტყეზე და სივრცეში გეგმილური კოორდინატების. გარდაქმნის გეომეტრიული შინაარსი.** § 177-ში (პუნქტი 2) განხილული იყო წერტილის გეგმილური კოორდინატების გარდაქმნის საკითხი სიბრტყესა და სივრცეში. ახლა ჩვენ ადვილად შეგვიძლია გამოვარკვიოთ გეგმილური კოორდინატების გარდაქმნის გეომეტრიული შინაარსი.

სახელდობრ, წინა პარაგრაფში (პუნქტი), ნათქვამის თანახმად. ცხადია; რომ გეგმილური კოორდინატების სისტემის შეცვლა სიბრტყეზე დაიყვანება ძირითადი სამკუთხედისა და ერთეული წერტილის შეცვლაზე.

თუ მოცემულია ძირითადი სამკუთხედის გვერდების განტოლებები $f_1(y_1, y_2, y_3)=0$, $f_2(y_1, y_3, y_3)=0$, $f_3(y_1, y_2, y_3)=0$ გეგმილური კოორდინატების ძველი სისტემის მიმართ, და თუ $y_1^0$, $y_2^0$, $y_3^0$, არის ახალი ერთეული წერტილის კოორდინატები, მაშინ ახალ სისტემაზე გადასვლა სიძნელეს აღარ წარმოადგენს: ამისათვის საკმარისია გეგმილური კოორდინატების განმარტების მიმართ სიტყვა-სიტყვით გავიმეოროთ წინა პარაგრაფში (პუნქტი 1) ნათქვამი, როცა მოცემულია ძირითადი სამკუთხედის წვეროები $A_1$, $A_2$, $A_3$ და ერთეული წერტილი $E$; მართლაც, ყოველივე ზემოხსენებული აქ ძალაში დარჩება, თუ დეკარტის $x_1$, $x_2$, $x_3$ კოორდინატების ნაცვლად ვიგულისხმებთ ძველ გეგმილურ კოორდინატებს $y_1$, $y_2$, $y_3$; ნაცვლად $A_1$, $A_2$, $A_3$ და $E$ წერტილებისა ვიგულისხმებთ ახალი ძირითადი სამკუთხედის წვე-

---

[1]) გვაქვს $(0, \infty, \alpha, \beta) = \frac{1}{(\infty, 0, \alpha, \beta)} = \frac{\alpha}{\beta}$.

[2]) ეს დამტკიცება (გარეგნულად) ოდნავ განსხვავდება შესაბამისი წინადადების დამტკიცებისაგან წერტილის კოორდინატებისათვის. მკითხველს ვანდობთ დამტკიცება ჩაატაროს სხვანაირად, სახელდობრ, ისე, რომ იგი უშუალოდ მიიღებოდეს წერტილის კოორდინატებისათვის დამტკიცებისაგან ურთიერთსახეობებზე გადასვლის გზით.

როებს $A_1'$, $A_2'$, $A_3'$ და ახალ ერთეულ წერტილს $E'$, ხოლო ნაცვლად $y_1$, $y_2$, $y_3$-ისა ვიგულისხმებთ ახალ გეგმილურ კოორდინატებს $y_1'$, $y_2'$, $y_3'$.

სამგანზომილებიან სივრცეში განზოგადება იმდენად ცხადია, რომ მასზე ჩვენ არ შევჩერდებით.

**§ 193. სიბრტყისა და სივრცის გეგმილური წერტილოვანი გარდაქმნის ძირითადი თვისებები.** § 179-ში (პუნქტი 2°) შემოღებული იყო სიბრტყისა და სივრცის გეგმილურ-წერტილოვანი ანუ ჰომოგრაფიული გარდაქმნის ცნება და შესწავლილი იყო ასეთი გარდაქმნების ზოგიერთი თვისება. აქ ჩვენ გვინდა რამდენადმე შევავსოთ იქ ნათქვამი.

1. ხსენებულ პარაგრაფში ნაჩვენები იყო, რომ ორი სიბრტყის Π და Π′ ჰომოგრაფიული შესაბამობის დროს ერთი სიბრტყის წრფის წერტილთა მიმდევრობები შეესაბამება მეორე სიბრტყის წრფის წერტილთა მიმდევრობებს, ე. ი. წრფეები შეესაბამებიან წრფეებს. ამავე დროს ერთმანეთის შესაბამისი წრფეების ერთგვაროვანი გეგმილური კოორდინატები ურთიერთდაკავშირებულია წრფივი ერთგვაროვანი არაგანსაკუთრებული ჩასმით. აქედან გამომდინარეობს, რომ Π და Π′ სიბრტყეთაგან ერთ-ერთზე აღებულ წრფეთა კონას შეესაბამება წრფეთა კონა მეორეზე; ამის დამტკიცება ანალოგიურია წრფის წერტილთა მიმდევრობების შესაბამობის შესახებ არსებული დებულების დამტკიცებისა (ეს წინადადებანი თანახიარია).

2. Π და Π′ სიბრტყეების ჰომოგრაფიულ შესაბამობას პირველი საფეხურის სახეობანი, რომლებიც ამ სიბრტყეებს ეკუთვნიან [1], მოყავს გეგმილურ შესაბამობაში.

მართლაც, განვიხილოთ Π-ზე წრფის წერტილთა მიმდევრობა, მოცემული პარამეტრულად:

$$x_1=\lambda y_1+\mu \zeta_1,\quad x_2=\lambda y_2+\mu \zeta_2,\quad x_3=\lambda y_3+\mu \zeta_3, \tag{1}$$

სადაც ($y_1, y_2, y_3$) და ($\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$) განხილული წრფის წერტილთა მიმდევრობის ორი რომელიღაც წერტილია. ჩავსვათ ეს გამოსახულებანი § 179-ის (4) ფორმულებში, მივიღებთ იმავე სახის ფორმულებს:

$$x_1'=\lambda y_1'+\mu \zeta_1',\quad x_2'=\lambda y_2'+\mu \zeta_2',\quad x_3'=\lambda y_3'+\mu \zeta_3', \tag{1a}$$

სადაც ($x_1', x_2', x_3'$), ($y_1', y_2', y_3'$), ($\zeta_1', \zeta_2', \zeta_3'$) აღნიშნავს Π′ სიბრტყის იმ წერტილებს რომლებიც შეესაბამება Π სიბრტყის წერტილებს ($x_1, x_2, x_3$), ($y_1, y_2, y_3$), ($\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$). ფორმულებიდან (1) და (1a) ხელახლა დავასკვნით, რომ წრფის წერტილთა მიმდევრობას Π-ზე შეესაბამება წრფის წერტილთა მიმდევრობა Π′-ზე. გარდა ამისა, ჩვენ ვხედავთ, რომ ეს მიმდევრობანი გეგმილურია, ვინაიდან ყოველი მიმდევრობის ოთხი წერტილის ორმაგი ფარდობა განისაზღვრება $h=\frac{\lambda}{\mu}$ სიდიდის ოთხი მნიშვნელობის ორმაგი ფარდობით, ორივე მიმდევრობის შესაბამი წერტილები კი განისაზღვრება $h$-ის ერთი და იგივე მნიშვნელობით, როგორც ეს გამომდინარეობს ფორმულებიდან (1) და (1a).

სავსებით ასევე დამტკიცდება ეს წინადადება Π და Π′-ზე მდებარე შესაბამისი კონების შესახებ.

ამ თვისებებით, და კიდევ ერთი თვისებით, რომელსაც ახლა (3° პუნქტში) დავამტკიცებთ, აიხსნება სახელწოდება „გეგმილური შესაბამობა“.

3°. Π და Π′ სიბრტყეთა შორის ყოველი ჰომოგრაფია შედეგია სასრული რაოდენობის დაგეგმილებისა და კვეთისა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ჩვენ ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ სიბრტყეები Π და Π′ შეთავსებული არ არიან, ვინაიდან, წინააღმდეგ შემთხვევაში, ჩვენ შეგვიძლია, მაგალითად, Π′ სიბრტყიდან, ერთი დაგეგმილებით და კვეთით გადავიდეთ, მასთან არაშეთავსებულ, სხვა სიბრტყეზე.

ახლა განვიხილოთ სამი შემთხვევა: a) ვთქვათ, Π და Π′ სიბრტყეების გადაკვეთის Δ წრფის ყველა წერტილი თავის თავს შეესაბამება [2]. ვთქვათ, $A$ და $B$ არის Π სიბრტყის

[1]) § 179-ში ეს წინადადება (დაუმტკიცებლად) უკვე გამოთქმული იყო წრფის წერტილთა მიმდევრობებისთვის.

[2]) Δ წრფე შეიძლება არასაკუთრივეც იყოს.

რომელიმე წერტილები, ხოლო $A'$ და $B'$ — მათი შესაბამი წერტილები სიბრტყეზე. ვთქვათ, $M$ არის $AB$ წრფის გადაკვეთის წერტილი $\Delta$-სთან. $A'B'$ წრფის $\Delta$-სთან გადაკვეთის $M'$ წერტილი იქნება $M$ წერტილის შესაბამი (ვინაიდან $M$ და $M'$ არის შესაბამი წრფეების გადაკვეთის წერტილები). მაშასადამე, $M$ და $M'$ ერთმანეთს ემთხვევა (ვინაიდან $\Delta$ წრფის წერტილები, პირობის თანახმად, თავის თავს შეესაბამებიან). ამგვარად, ოთხი $A$, $B$, $A'$ $B'$ წერტილი ერთ სიბრტყეზე მდებარეობს (იმ სიბრტყეზე, რომელიც გადის $MAB$ და $MA'B'$ წრფეებზე). საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $AA'$ და $BB'$ წრფეები, როგორც კომპლანარული წრფეები, გადაიკვეთება რაიმე (საკუთრივ ან არასაკუთრივ) წერტილში $O$.

თუ ახლა $\Pi$ და $\Pi'$-ზე ავიღებთ ერთმანეთის შესაბამ წერტილთა სხვა წყვილს $C$ და $C'$, მაშინ, იმავე მოსაზრებების გამო, წრფემ $CC'$ უნდა გადაკვეთოს ორივე $AA'$ და $BB'$ წრფე. ცხადია, რომ თუ $CC'$ წრფე არ მდებარეობს $AA'$ და $BB'$ წრფეებთან საერთო სიბრტყეში, იგი უსათუოდ გაივლის $O$ წერტილზე. მაგრამ იგი გაივლის $O$ წერტილზე მაშინაც, როცა მდებარეობს $AA'$ და $BB'$ წრფეების საერთო სიბრტყეში; მართლაც, ავიღოთ კიდევ ისეთი $DD'$ წრფე (სადაც $D$ და $D'$ შესაბამი წერტილებია $\Pi$ და $\Pi'$-ზე), რომელიც არ მდებარეობს $AA'$ და $BB'$ წრფეების საერთო სიბრტყეში. მაშინ $DD'$ გაივლის $O$-ზე, და ამიტომ $CC'$ წრფე, რომელმაც უნდა გადაკვეთოს სამივე $AA'$, $BB'$, $CC'$ წრფე უსათუოდ გაივლის $O$ წერტილზე.

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\Pi$ და $\Pi'$ სიბრტყეები პერსპექტულია (პერსპექტულობის ცენტრია $O$) და რომ ჩვენი ჰომოგრაფია მიიღებს $\Pi$-ს დაგეგმილებით $\Pi'$-ზე $O$ ცენტრიდან.

b) ვთქვათ, $\Delta$ წრფე შეიცავს ერთ ისეთ $M$ წერტილს, რომლის შესაბამი $M'$ წერტილი ემთხვევა $M$.

გავატაროთ $M$ წერტილიდან წრფე $II$ სიბრტყეზე და ავიღოთ მასზე ორი ნებისმიერი $A$ და $B$ წერტილი. ვთქვათ, $A'$ და $B'$ არის $A$ და $B$ წერტილების შესაბამი წერტილები $II'$ სიბრტყეზე. როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, $AA'$ და $BB'$ წრფეები გადაიკვეთებიან რომელიმე $O$ წერტილში. ამ წერტილიდან დავაგეგმილოთ $\Pi'$ სიბრტყე დამხმარე $\Pi_1$ სიბრტყეზე, რომელიც გადის $ABM$ წრფეზე.

$\Pi$ და $\Pi'$ სიბრტყეებს, რომლებიც, ცხადია, გეგმილურ შესაბამობაში იმყოფებიან, აქვთ საერთო $ABM$ წრფე; ამასთან, ამ წრფის სამი $A$, $B$, $M$ წერტილი თავის თავს შეესაბამება. მაშასადამე, ამ წრფის ყველა წერტილი [1]) თავის თავს შეესაბამება, და ჩვენ ეუახლოვდებით წინა შემთხვევას.

c) ავიღოთ ყველაზე ზოგადი შემთხვევა. ვთქვათ, $A$ და $A'$ არის, $\Pi$ და $\Pi'$ სიბრტყეზე აღებული, ერთმანეთის შესაბამი რაიმე წერტილები. ავიღოთ $AA'$ წრფეზე რაიმე წერტილი $O$ და აქედან დავაგეგმილოთ $\Pi'$ სიბრტყე სხვა რომელიმე $\Pi_1$ სიბრტყეზე, რომელიც გადის $A$ წერტილზე. $\Pi$ და $\Pi'$ სიბრტყეების გადაკვეთის $A$ წერტილი თავის თავის შესაბამი იქნება და ჩვენ ეუახლოვდებით წინა შემთხვევას.

4. როგორც უკვე აღვნიშნეთ § 179-ში, სივრცის გეგმილური გარდაქმნის დროს წრფეები გადადიან წრფეებში, სიბრტყეები—სიბრტყეებში. ადვილი დასანახია, რომ სიბრტყეთა კონა გადადის სიბრტყეთა კონაში, წრფეთა და სიბრტყეთა ძნულები—წრფეთა და სიბრტყეთა ძნულებში.

მკითხველს ვანდობთ დაამტკიცოს, რომ ერთმანეთის შესაბამისი, პირველი და მეორე საფეხურის სახეობანი, გეგმილურია.

### სავარჯიშო და დამატებანი

1. დაამტკიცეთ, რომ თუ ძირითადი საკოორდინატო სამკუთხედის წვეროები $A'$, $B'$, $C'$ $\Pi'$ სიბრტყეზე, და ერთეული წერტილი $E'$ არის, $\Pi$ სიბრტყეზე საკოორდინატო სამკუთხედის $A$, $B$, $C$ წვეროების და ერთეული $E$ წერტილის შესაბამისი წერტილები, მაშინ § 179-ის (4) და (4a) ფორმულებს ექნება სახე:

$$x_1=x_1',\ x_2=x_2',\ x_3=x_3',$$

(ანუ, რაც იგივეს ნიშნავს, $x_1=\rho x_1'$, $x_2=\rho x_2'$, $x_3=\rho x_3'$, სადაც $\rho$ ნულისაგან განსხვავებული, პროპორციულობის ნებისმიერი კოეფიციენტია).

[1]) იხ. § 190-ის შენიშვნა.

დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს გეგმილური კორდინატების გეომეტრიული შინაარსიდან და ორმაგი ფარდობის იმ თვისებიდან, რომლის მიხედვითაც იგი უცვლელი რჩება გეგმილური გარდაქმნის შედეგად.

2. დაამტკიცეთ, რომ ორი $\Pi$ და $\Pi'$ სიბრტყის გეგმილური შესაბამობა სავსებით განსაზღვრულია, თუ მოცემულია $\Pi$ სიბრტყის ოთხი $A, B, C, D$ შესაბამისი ოთხი $A', B', C', D'$ წერტილი $\Pi'$ სიბრტყისა; იგულისხმება, რომ არც ერთი სამი $A, B, C, D$ წერტილთაგან ერთ წრფეზე არ მდებარეობს.

დამტკიცება. ავიღოთ $\Pi$ სიბრტყეზე წერტილები $A, B, C$ ძირითადი სამკუთხედის წვეროებად, $D$ კი—ერთეულ წერტილად; გარდა ამისა, ავიღოთ $A', B', C'$ წვრტილები ძირითადი სამკუთხედის წვეროებად $\Pi'$ სიბრტყეზე, ხოლო $D'$—ერთეულ წერტილად.

მაშინ $\Pi$ და $\Pi'$ სიბრტყეების შესაბამობა შემდეგზე დაიყვანება:

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3',$$

ე. ი. სავსებით განსაზღვრულია.

3. დაამტკიცეთ, წინა ორი დებულების, ანალოგიური დებულებანი სივრცის შემთხვევაში (მეორე დებულებაში, ოთხი წერტილის ნაცვლად, ახლა ხუთი წერტილი გვექნება, რომელთაგან არც ერთი ოთხი ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობს).

§ 194. კორელაცია (ურთიერთობა). ზემოთ ჩვენ განვიხილეთ ორი სიბრტყის გეგმილური შესაბამობის ის სახე, როცა წერტილებს შეესაბამება წერტილები, წრფეებს—წრფეები. განვიხილოთ სიბრტყეთა შესაბამობის კიდევ ერთი სახე, რომელსაც ისევ გეგმილური ეწოდება, როცა წერტილებს შეესაბამება წრფეები, ხოლო წრფეებს—წერტილები. გეგმილური შესაბამობის ამ სახეს, რომელიც ახლა ზუსტად იქნება განძარტებული, ეწოდება კორელაცია ანუ ურთიერთობა.

სახელდობრ, კორელაცია (ურთიერთობა) ეწოდება ისეთ შესაბამობას, რომელიც გამოისახება ფორმულებით:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= l_{11}x_1' + l_{12}x_2' + l_{13}x_3', \\ a_2 &= l_{21}x_1' + l_{22}x_2' + l_{23}x_3', \\ a_3 &= l_{31}x_1' + l_{32}x_2' + l_{33}x_3', \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

სადაც $a_1, a_2, a_3$ არის წრფის კოორდინატები $\Pi$ სიბრტყეზე, ხოლო $x_1', x_2', x_3'$ არის წერტილის კოორდინატები $\Pi'$ სიბრტყეზე; ამასთანავე, იგულისხმება, რომ ჩასმა (1) არაგანსაკუთრებულია. თუ სისტემას (1) ამოვხსნით $x_1', x_2', x_3'$ მიმართ, მივიღებთ

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= m_{11}a_1 + m_{12}a_2 + m_{13}a_3, \\ x_2' &= m_{21}a_1 + m_{22}a_3 + m_{23}a_3, \\ x_3' &= m_{31}a_1 + m_{32}a_2 + m_{33}a_3. \end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

(1) ჩასმას შუა-ცალსახა შესაბამობაში მოყავს $\Pi'$ სიბრტყის ყოველი $M'(x_1', x_2', x_3')$ წერტილი სიბრტყის გარკვეულ $\Delta(a_1, a_2, a_3)$ წრფესთან.

ადვილი დასანახია, რომ $\Pi'$ სიბრტყის $M'$ წერტილებს, მოთავსებულს $\Delta'$ წრფეზე შეესაბამებიან $\Pi$ სიბრტყის ისეთი წრფეები, რომლებიც ერთსა და იმავე $M$ წერტილზე გადიან. მართლაც, ვთქვათ,

$$a_1'x_1' + a_2'x_2' + a_3'x_3' = 0 \tag{2}$$

არის $\Delta'$ წრფის განტოლება, სადაც $a_1', a_2', a_3'$ მუდმივებია. თუ მასში შევიტანთ (1) გამოსახულებებს, მივიღებთ შემდეგ წრფივ განტოლებას:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

რომელიც აკავშირებს $a_1$, $a_2$, $a_3$ ცვლადებს, სადაც $x_1$, $x_2$, $x_3$-ით აღნიშნულია მუდმივები

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= m_{11}a_1' + m_{21}a_2' + m_{31}a_3', \\ x_2 &= m_{12}a_1' + m_{22}a_2' + m_{32}a_3', \\ x_3 &= m_{13}a_1' + m_{23}a_2' + m_{33}a_3'. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

მაშასადამე, $(a_1, a_2, a_3)$ წრფეები ყველა გადის $M(x_1, x_2, x_3)$ წერტილზე. ამგვარად, $\Pi'$ სიბრტყის ყოველ $\Delta'$ წრფის წერტილთა მიმდევრობას შეესაბამება $\Pi$ სიბრტყის წრფეთა კონა, რომლის $M(x_1, x_2, x_3)$ ცენტრი განისაზღვრება (3) ფორმულებით. მოკლედ, შეიძლება ითქვას, რომ $\Pi'$ სიბრტყის ყოველ $\Delta'$ წრფეს შეესაბამება $\Pi$ სიბრტყის გარკვეული წერტილი.

ადვილი დასანახია, რომ წრფის წერტილთა მიმდევრობა დაშისი შესაბამისი კონა გეგმილურია; დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

კორელაციები ჯგუფს არ ადგენს; მართლაც, ადვილი დასანახია, რომ ორ კორელაციას, ჩატარებულს ერთიმეორეზე, მიეყენებით ჰომოგრაფიაზე. პირიქით, ყ ვ ე ლ ა კ ო რ ე ლ ა ც ი ი ს და ჰ ო მ ო გ რ ა ფ ი ი ს ე რ თ ო ბ ლ ი ო ბ ა, ცხადია, შეადგენს ჯგუფს, რომელსაც გ ე გ მ ი ლ უ რ ო ბ ი ს ჯ გ უ ფ ი ეწოდება.

კორელაცია (ურთიერთობა) სივრცეში სავსებით ანალოგიურად განისაზღვრება. მხოლოდ წრფეების ნაცვლად აქ გვექნება სიბრტყეები: ისე რომ, სივრცეში, კორელაციის დროს, წერტილებს შეესაბამება სიბრტყეები და, პირიქით.

## თავი მეშვიდე

# კონუსური კვეთების უმარტივესი განტოლებანი და ელემენტარული თვისებანი

პირველი რიგის წირების (წრფეების) შემდეგ, ალგებრული თვალსაზრისით, უმარტივეს წირებს მეორე რიგის წირები წარმოადგენენ. ჩვენ შემდეგში ვნახავთ, რომ ყოველი (ნამდვილი) მეორე რიგის წირი, თუ იგი არ იშლება ორი წრფის ერთობლიობად, არის ან ელიფსი, ან ჰიპერბოლი ანდა პარაბოლი, რომელთა განმარტებანი უახლოეს პარაგრაფებში იქნება მოცემული. ეს სამი წირი ატარებს აგრეთვე კონუსური კვეთების საერთო სახელწოდებას, რადგან, როგორც ნაჩვენები იქნება 201 და 202 §§-ში, ისინი შეიძლება მიღებულ იქნან ჩვეულებრივი წრიული კონუსისა და სიბრტყეების გადაკვეთით.

ჩვენ დავიწყებთ ელიფსის, ჰიპერბოლისა და პარაბოლის უმარტივესი განმარტებებით და მათი უმარტივესი განტოლებების გამოყვანით.

მთელ ამ თავში, თუ საწინააღმდეგოზე ცალკე არ არის მითითებული, მსჯელობა ისეთ წირებს შეეხება, რომლებიც ერთსა და იმავე სიბრტყეში არიან მოთავსებული.

## I. კონუსური კვეთების ნორმალური განტოლებანი

**§ 105. ელიფსის განმარტება და მისი ნორმალური სახის განტოლება.** ელიფსი ეწოდება იმ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, რომელთა მანძილების ჯამი ორ მოცემულ წერტილამდე მუდმივი სიდიდეა. განსაზღვრაში ხსენებულ ორ მკვიდრ წერტილს ელიფსის ფოკუსები ეწოდება. აღვნიშნოთ ისინი $F$ და $F'$, ხოლო მანძილი მათ შორის $2c$. დაბოლოს, ვთქვათ, $2a$ აღნიშნავს დადებით მუდმივ სიდიდეს—ელიფსის რომელიმე $M$ წერტილის მანძილების ჯამს ფოკუსებამდე (ნახ. 122).

განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$r' + r = 2a, \tag{1}$$

სადაც

$$r' = |F'M|, \quad r = |FM|.$$

ცხადია, რომ გეომეტრიული ადგილის არსებობის შესაძლებლობისათვის, ადგილი უნდა ჰქონდეს უტოლობას $2c \leq 2a$.

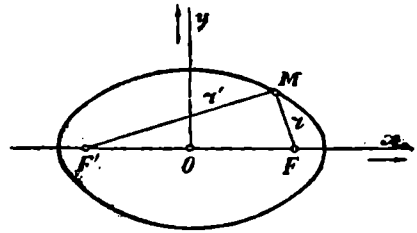
იმ შემთხვევაში, როცა $2c=2a$ გეომეტრიული ადგილი წარმოადგენს წრფის ნაკვეთს, რომელიც $F'$ და $F$ წერტილებს შორის არის მოთავსებული. ამ შემთხვევას, როგორც ინტერეს მოკლებულს, ჩვენ შემდეგში გამოვრიცხავთ განხილვიდან და ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ $2c<2a$ ე. ი.

$$c<a. \tag{2}$$

თუ $c=0$, მაშინ $F'$ და $F$ წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა, და

$$|F'M|=|FM|=a.$$

ამ შემთხვევაში ჩვენი ელიფსი გადაიქცევა $a$ რადიუსიან წრეწირად. ამგვარად, წრეწირი ელიფსის კერძო შემთხვევაა.




ნახ. 122.

ავიღოთ მართკუთხა კოორდინატთა სათავე $F'F$ ნაკვეთის შუაში, და $Ox$ ღერძი ამ ნაკვეთის გასწვრივ მივმართოთ ისე, რომ $F'$ და $F$ წერტილების კოორდინატები, შესაბამისად, იყოს

$$(-c,\ 0),\ (+c,\ 0).$$

$M(x,\ y)$ წერტილის $r'$ და $r$ მანძილები ამ წერტილებამდე მოცემული იქნება ფორმულებით

$$r'=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\quad r=\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \tag{3}$$

(1)-იხ თანახმად გვაქვს

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \tag{4}$$

ეს არის ელიფსის განტოლება ჩვენ მიერ აღებულ კოორდინატთა სისტემაში. რადიკალების მოსპობით იგი შეიძლება საგრძნობლად გავამარტივოთ. ამისათვის მეორე რადიკალი გადავიტანოთ მარჯვნივ და ორივე მხარე ავამაღლოთ კვადრატში, მივიღებთ:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

საიდანაც, თუ რადიკალს მარცხენა მხარეს, ხოლო დანარჩენ წევრებს მარჯვნივ გადავიტანთ და მოვახდენთ შეკვეცას, გვექნება:

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx. \tag{5}$$

ავამაღლოთ ხელახლა კვადრატში; ცხადი გამარტივების შემდეგ, მივიღებთ:

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

სიდიდე $a^2-c^2$ დადებითია, რადგან $c<a$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$b^2=a^2-c^2,\ b=\sqrt{a^2-c^2}\ (b<a) \tag{6}$$

და ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ $a^2b^2$, საბოლოოდ მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{7}$$

რომელსაც ელიფსის ნორმალური განტოლება ეწოდება.

სანამ გადავიდოდეთ ელიფსის განტოლებით მისი ფორმის შესწავლაზე, ვუჩვენოთ მარტივი ხერხი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს განუწყვეტელი მოძრაობით დავხაზოთ ელიფსი. სახელდობრ, ამისათვის ჩვენ შეგვიძლია მოვიქცეთ ასე: დავამაგროთ $2a$ სიგრძის უჭიმადი ძაფის ბოლოები $F'$ და $F$ ფოკუსებში და დავჭიმოთ იგი ფანქრის წვეტით. ფანქარი ვამოძრაოთ ქაღალდზე ისე, რომ იგი სრიალებდეს ძაფის გასწვრივ. მაშინ ფანქრის წვეტი შემოხაზავს ელიფსს, როგორც ეს თვით ამ წირის განმარტებიდან გამომდინარეობს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ელიფსის ნორმალური განტოლების გამოყვანის დროს, ჩვენ მოგვიხდა (4) განტოლებაში რადიკალების მოსპობა; ამ მიზნისათვის ჩვენ ორჯერ გამოვიყენეთ განტოლების ორივე მხარის კვადრატში ამაღლების ოპერაცია. როგორც ცნობილია, ასეთმა ოპერაციამ შეიძლება მიგვიყვანოს ისეთ განტოლებამდე, რაც გამოსავალი განტოლების ეკვივალენტური არ არის, სახელდობრ, შეიძლება მივიღოთ ისეთი განტოლება, რომელსაც არა მარტო ის ამოხსნები აქვს, რაც გამოსავალს, არამედ სხვა „ზედმეტი" ამოხსნებიც. ამიტომ ისმება საკითხი: ხომ არ შეიცავს (7) განტოლებით გამოსახული წირი ისეთ წერტილებს, რომლებიც არ აკმაყოფილებენ გამოსავალ (4) განტოლებას, ე. ი. $r'+r=2a$ პირობას. ადვილი საჩვენებელია, რომ ეს ასე არ არის. მართლაც, თუ შებრუნებული რიგით ჩავატარებთ გარდაქმნის ოპერაციებს, ვნახავთ, რომ თუ რომელიმე წერტილის კოორდინატები (7) განტოლებას აკმაყოფილებენ, მაშინ ისინი

$$\pm r' \pm r = 2a$$

პირობასაც დააკმაყოფილებენ.

დავამტკიცოთ, რომ ეს უკანასკნელი განტოლება შეიძლება დაკმაყოფილებულ იქნას (ნამდვილი წერტილებით) მხოლოდ მაშინ, როცა აღებულია ზედა ნიშნები. მართლაც, $-r'-r=2a$ განტოლებას, ცხადია, ამოხსნა არა აქვს, რადგან $r>0$, $r'>0$. შემდეგ, იმავე მიზეზით, განტოლებას $r'-r=2a$ არა აქვს ამოხსნა, თუ $r'<r$. ამ უკანასკნელ განტოლებას არა აქვს ამოხსნა მაშინაც, როცა $r'\geqslant r$, ვინაიდან, როგორც ცნობილია, სამკუთხედის ორი გვერდის სხვაობა არ აღემატება მესამე გვერდს, საიდანაც გამომდინარეობს

$$r'-r\leqslant 2c<2a;$$

სრულებით ასევე შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ $r-r'=2a$ განტოლებასაც ამოხსნა არა აქვს. ამგვარად, რჩება მხოლოდ ერთი შესაძლებლობა: $r'+r=2a$, და ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

**§ 196. ელიფსის ფორმის გამოკვლევა.** წინა პარაგრაფში გამოყვანილი ელიფსის ნორმალური განტოლება

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

გვიჩვენებს, რომ თუ წერტილი $M(x, y)$ ეკუთვნის ელიფსს, მაშინ მასვე ეკუთვნის წერტილებიც $M(x, -y)$, $M(-x, y)$, $M(-x, -y)$, ვინაიდან (1) განტოლებაში შედის მხოლოდ $x$ და $y$ სიდიდეების კვადრატები, რის გამოც ერთერთი კოორდინატის ნიშნის შეცვლა საწინააღმდეგო ნიშნით ტოლობას არ არღვევს.

ეს გვიჩვენებს, რომ $Ox$ და $Oy$ ღერძები ელიფსის სიმეტრიის[1]) ღერძებია. შემოკლებით ამ წრფეებს ელიფსის ღერძები ეწოდება. ზემოთქმულიდან აგრეთვე ცხადია, რომ ელიფსი სიმეტრიულია $O$ წერტილის მიმართ, რომელსაც ამის გამო ცენტრი ეწოდება.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ელიფსი სასრული წირია. მართლაც, (1) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

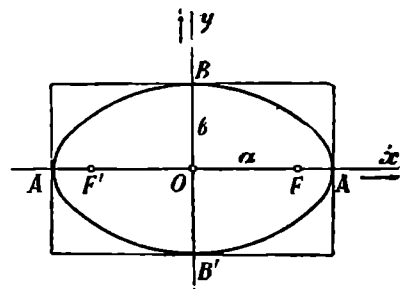
$$\frac{x^2}{a^2}\leq 1,\quad \frac{y^2}{b^2}\leq 1,$$

საიდანაც

$$-a\leq x\leq +a,\quad -b\leq y\leq +b.$$

ეს უტოლობანი გვიჩვენებს, რომ ელიფსი მთლიანად მოთავსებულია 123 ნახაზზე ნაჩვენებ მართკუთხედში, სადაც

$$|OA'|=|OA|=a,\ |OB'|=|OB|=b.$$



ნახ. 123.

ახლა შევისწავლოთ უფრო დაწვრილებით წირის ფორმა. ამოვხსნათ (1) განტოლება $y$-ის მიმართ:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \tag{2}$$

---

[1]) მოცემულ გეომეტრიულ ნაკვთს უწოდებენ სიმეტრიულს რაიმე II სიბრტყის მიმართ, თუ ნაკვთის ყოველ $M$ წერტილს შეიძლება ამავე ნაკვთის სხვა $M'$ წერტილი შეეფსებამოთ ისე, რომ ნაკვეთი $MM'$ იყოს II სიბრტყის მართობი და ამ უკანასკნელით შუაზე იყოფოდეს. ნაკვთს ეწოდება სიმეტრიული რაიმე $\Delta$ წრფის მიმართ, თუ ნაკვთის ყოველ $M$ წერტილს შეიძლება შეეფსებამოთ იმავე ნაკვთის სხვა $M'$ წერტილი ისე, რომ $MM'$ ნაკვეთი იყოს $\Delta$-ს მართობი, კვეთდეს მას და ამით იყოფოდეს შუაზე. ბოლოს ნაკვთი სიმეტრიული რაიმე $C$ წერტილის მიმართ, თუ ნაკვთის ყოველ $M$ წერტილს შეიძლება ამავე ნაკვთის სხვა $M'$ წერტილი შეეფსებამოთ ისე, რომ ნაკვეთი $MM'$ გადიოდეს $C$ წერტილზე და ამ წერტილში იყოფოდეს შუაზე. პირველ შემთხვევაში II სიბრტყეს ეწოდება სიმეტრიის სიბრტყე, მეორე შემთხვევაში $\Delta$ წრფეს—სიმეტრიის ღერძი, ხოლო მესამე შემთხვევაში $C$ წერტილს—სიმეტრიის ცენტრი, ან უბრალოდ, ცენტრი.

წირის სიმეტრიულობის გამო, საკმარისია შევისწავლოთ $x \geq 0$, $y \geq 0$ კვადრატში მოქცეული მისი ნაწილი. ამიტომ საკმარისია რადიკალის წინ დავტოვოთ მხოლოდ ნიშანი (+), ე. ი. ავიღოთ

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{2a}$$

როცა $x=0$ გვექნება $y=b$. როცა $x$ იზრდება $y$ ორდინატი კლებულობს და როცა $x=a$ ორდინატი იქცევა 0-ად.

ამგვარად, ჩვენ ვღებულობთ მრუდის $BA$ ნაწილს; დანარჩენი ნაწილები შეიძლება სიმეტრიის საფუძველზე შევავსოთ.

ჩვენ ვხედავთ, რომ ელიფსი შეკრული წირია.

$Ox$ ღერძიდან მაქსიმალურად დაშორებული წერტილებია $B$ და $B'$, რომლებიც $Oy$ ღერძზე არიან მოთავსებული (მანძილი უდრის $b$). მაქსიმალურად დაშორებული წერტილები $Oy$ ღერძიდან არიან $A$ და $A'$, რომლებიც $Ox$ ღერძებზე არიან მოთავსებული (მანძილი უდრის $a$). ამ ოთხ წერტილს $A$, $A'$, $B$, $B'$ უწოდებენ ელიფსის წ ვ ე რ ო ე ბ ს.

$2a$ სიდიდეს ეწოდება ელიფსის დ ი დ ი ღ ე რ ძ ი, ხოლო $2b$—ელიფსის მ ც ი რ ე ღ ე რ ძ ი [1]); $a$ და $b$ სიდიდეები, შესაბამისად, არიან ელიფსის დ ი დ ი და მ ც ი რ ე ნ ა ხ ე ვ ა რ ღ ე რ ძ ე ბ ი.

თუ $a=b$, მაშინ ელიფსის განტოლება მიიღებს სახეს

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

ე. ი. ელიფსი გადაიქცევა $a$ რადიუსიან წრეწირად. ამ შემთხვევაში სიდიდე

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

(ფოკუსების მანძილი ცენტრამდე) გახდება ნული.

როცა $a \neq b$ სიდიდე $c$ არ უდრის ნულს და იგი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ზომა წრიული ფორმიდან ელიფსის გადახრისა. მას ეწოდება ელიფსის წ რ ფ ი ვ ი ე ქ ს ც ე ნ ტ რ ი ს ი ტ ე ტ ი. არსებითად, ელიფსის ფორმაზე ზეგავლენას ახდენს არა თვით სიდიდე $c$, არამედ მისი ფარდობა ერთ-ერთ ნახევარღერძთან, მაგალითად, დიდ $a$ ნახევარღერძთან.

ამ ფარდობას

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \tag{3}$$

ეწოდება რ ი ც ხ ვ ი თ ი ე ქ ს ც ე ნ ტ რ ი ს ი ტ ე ტ ი (ვინაიდან იგი განუყენებული სიდიდეა) ან, უბრალოდ, ე ლ ი ფ ს ი ს ე ქ ს ც ე ნ ტ რ ი ს ი ტ ე ტ ი. რო-

[1]) შევნიშნოთ, რომ სიტყვა „ღერძი“ ორი მნიშვნელობით იხმარება: ზემოთ იგი გამოყენებული იყო „სიმეტრიის ღერძის“ აზრით და შეეხებოდა მთელ წრფეს, აქ კი ის აღნიშნავს სიგრძეს სიმეტრიის ღერძის ნაკვეთისა, რომელიც მოთავსებულია ორ წვეროს შორის. რა თქმა უნდა, ამან არ შეიძლება გაუგებრობა გამოიწვიოს, ვინაიდან ყოველთვის ცხადი იქნება თუ რაზეა, ლაპარაკი.

გორც (3) ფორმულიდან ჩანს, ელიფსის ექსცენტრისიტეტი ყოველთვის ერთზე ნაკლებია.

თუ $a$ და $c$ მოცემულია, ამით ელიფსი მთლიანად განსაზღვრულია, ვინაიდან მცირე ნახევარღერძი შეიძლება განვსაზღვროთ ფორმულით

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{a^2-a^2e^2},$$

საიდანაც

$$b=a\sqrt{1-e^2}. \tag{4}$$

### სავარჯიშოები და დამატებანი

1. მოვძებნოთ ნახევარღერძები $a$, $b$, წრფივი ექსცენტრისიტეტი $c$ და რიცხვითი ექსცენტრისიტეტი $e$ ელიფსისა $4x^2+9y^2=1$.

პასუხი:

$$a=\frac{1}{2},\quad b=\frac{1}{3},\quad c=\frac{\sqrt{5}}{6},\quad e=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

2. ელიფსი როგორც წრეწირის აფინური გარდაქმნის შედეგი. ვაჩვენოთ, რომ ელიფსი წარმოადგენს წრეწირის ისეთი აფინური გარდაქმნის შედეგს, რომელიც შედგება ორი ურთიერთმართობი მიმართულებით გაჭიმვისაგან [1]) (იხ. § 76).

დამტკიცება. ავიღოთ მართკუთხოვანი კოორდინატთა სათავედ წრეწირის ცენტრში. მაშინ წრეწირის განტოლებას ექნება სახე:

$$x^2+y^2=r^2$$

სადაც $r$ წრეწირის რადიუსია. ზემოხსენებულ აფინურ გარდაქმნას აქვს სახე $x'=kx$, $y'=ly$ სადაც $k$, $l$ მუდმივებია. ჩავსვათ წრეწირის განტოლებაში მნიშვნელობანი: $x=\frac{x'}{k}$, $y=\frac{y'}{l}$, ვიღებთ წირის განტოლებას, რომელშიაც გარდაიქმნება წრეწირი:

$$\frac{x'^2}{k^2}+\frac{y'^2}{l^2}=r^2,$$

ანუ

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1,$$

სადაც $a=kr$, $b=lr$. მაშასადამე, წირი ელიფსია.

3. ელიფსი როგორც წრეწირის გეგმილი. ვაჩვენოთ, რომ ელიფსი $a$, $b$ ნახევარღერძებით, შეიძლება განვიხილოთ როგორც $a$ რადიუსიანი წრეწირის მართკუთხოვანი გეგმილი იმ სიბრტყეში, რომელიც ელიფსის სიბრტყესთან ადგენს $\alpha$ კუთხეს, სადაც

$$\cos\alpha=\frac{b}{a}\quad\left(\text{ე. ი. }\alpha=\arccos\frac{b}{a}\right).$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $\Pi'$ წარმოადგენს წრეწირის სიბრტყეს, ხოლო $\Pi$—გეგმილთა სიბრტყეს. ვთქვათ, $O'x'y'$ მართკუთხოვანი ღერძების სისტემა ისეთნაირადაა შერჩეული $\Pi'$

[1]) ქვემოთ (§ 234) ნაჩვენები იქნება, რომ ყოველგვარი აფინური გარდაქმნით წრეწირი გადაიქცევა ელიფსად (ან დარჩება წრეწირად).

სიბრტყეზე, რომ $O'x'$ ღერძი II სიბრტყის პარალელურია, ხოლო კოორდინატთა სათავე $O'$ ემთხვევა $a$ დასაგეგმილებელ წრეწირის ცენტრს. ვთქვათ, $Oxy$ აღნიშნავს $O'x'y'$ სისტემის (მართკუთხა) გეგმილს II სიბრტყეზე.

თუ $M'(x', y')$ დასაგეგმილებელი წრეწირის რაიმე წერტილია, მაშინ II სიბრტყეზე მისი $M$ გეგმილის $x$, $y$ კოორდინატები, ცხადია, იქნება: $x = x'$, $y = y' \cos \alpha$. მაგრამ, რადგანაც

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1,$$

ამიტომ

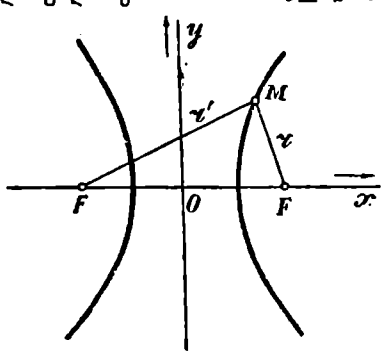
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 \cos^2 \alpha} = 1,$$

ანუ

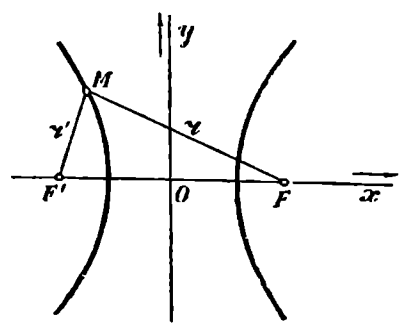
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

საიდანაც გამომდინარეობს ჩვენი დებულება.

**§ 197. ჰიპერბოლის განმარტება და მისი ნორმალური განტოლება.** ჰიპერბოლი ეწოდება წერტილთა ისეთ გეომეტრიულ ადგილს, რომელთა ორ მოცემულ წერტილამდე მანძილების სხვაობა მუდმივი სიდიდეა (აბსოლუტური სიდიდით). აღვნიშნოთ მოცემული წერტილები, რომლებსაც ჰიპერბოლის ფოკუსები ეწოდება, $F$ და $F'$-ით, მათ შორის მანძილი $2c$, ხოლო ჰიპერბოლის წერტილების ფოკუსებამდე მანძილების სხვაობის აბსოლუტური სიდიდე $2a$. ცხადია, რომ დაცული უნდა იყოს პირობა: $2c \geq 2a$. თუ, კერძოდ, $2c = 2a$, მაშინ გეომეტრიული




ნახ. 124a.




ნახ. 124b.

ადგილი შედგენილი იქნება $F$ და $F'$ წერტილებზე გამავალი წრფის ისეთი წერტილებისაგან, რომლებიც $FF'$ ნაკვეთის გარეთ მდებარეობენ. ამ შემთხვევას ჩვენ გამოვრიცხავთ და შემდეგში ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ $c > a$.

განმარტების თანახმად, გვაქვს (ნახ. 124a, 124b):

$$r' - r = \pm 2a$$

სადაც $r'=|F'M|$, $r=|FM|$; მარჯვენა მხარეზე (+) ნიშანი უნდა ავიღოთ მაშინ, როცა $r'>r$ (ნახ. 124a), ხოლო (—)—მაშინ, როცა $r'<r$ (ნახ. 124b).

ჰიპერბოლის განმარტებიდან ცხადია, რომ ეს წირი შედგება ორი ცალკეული შტოსაგან, ერთ მათგანზე $r'>r$, ხოლო მეორეზე $r'<r$.

ეს აგრეთვე გამომდინარეობს ჰიპერბოლის განტოლებიდანაც, რომელსაც ახლა გამოვიყვანთ.

$Ox$ ღერძი მივმართოთ ფოკუსების შემაერთებელი წრფის გასწვრივ და ავიღოთ მართკუთხოვანი კოორდინატების სათავე—მათ შორის მოთავსებული ნაკვეთის შუა წერტილში, ისე რომ $F'$ და $F$ წერტილებს კოორდინატებად ჰქონდეთ შესაბამისად $(-c, 0)$ და $(c, 0)$.

მაშინ (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a. \tag{2}$$

გადავიტანოთ მეორე რადიკალი ტოლობის მარჯვენა მხარეზე და ორივე მხარე ავამაღლოთ კვადრატში, გამარტივების შემდეგ, გვექნება (შეადარეთ § 195):

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=cx-a^2 \tag{3}$$

კიდევ ავამაღლოთ ორივე მხარე კვადრატში და მოვახდინოთ გამარტივება, მივიღებთ

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

განტოლებას, რომელიც სავსებით ისეთივეა, როგორც ელიფსის შემთხვევაში, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ ახლა $a<c$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$b^2=c^2-a^2,\quad b=\sqrt{c^2-a^2} \tag{4}$$

და წინა განტოლების ორივე მხარე გავყოთ $a^2(a^2-c^2)=-a^2b^2$ სიდიდეზე, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{5}$$

ეს არის ჰიპერბოლის ნ ო რ მ ა ლ უ რ ი განტოლება [1]).

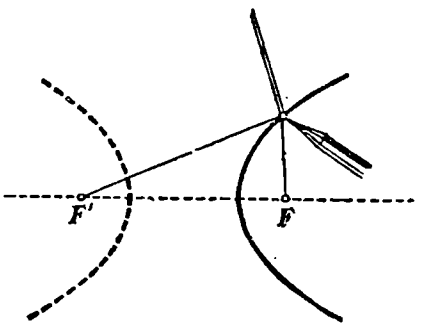
ჰიპერბოლის განსაზღვრა ჩვენ გვაძლევს მისი აგების მარტივ ხერხს განუწყვეტელი მოძრაობით: ავიღოთ ორი ძაფი, რომელთა სიგრძეების სხვაობა უდრის $2a$ და დავამაგროთ ამ ძაფების თითო ბოლო $F'$ და $F$ წერტილებზე. თუ ერთმანეთთან შეერთებულ მეორე ბოლოებს ხელით დავიჭერთ და ვამოძრავებთ ფანქრის წვეტს ძაფების გასწვრივ ისე, რომ ძაფები მიჭერილი იყვნენ ქაღალდზე, ამასთანავე დაჭიმული და თანამხებნი დაწყებული მხაზავი წვეტიდან ბოლოების შეერთების ადგილამდე, მაშინ წვეტი აღწერს ჰიპერ-

[1]) მკითხველს ვანდობთ დაამტკიცოს, რომ (2) განტოლების გარდაქმნას (4) განტოლებად არავითარი ზედმეტი წერტილები არ შემოაქვს. შეადარეთ შენიშვნას § 195-ის ბოლოში.

ბოლის ერთი შტოს ნაწილს (მით უფრო დიდს, რაც უფრო გრძელი იქნება ძაფი) (ნახ. 125).

$F'$ და $F$ წერტილების როლების შეცვლით მივიღებთ მეორე შტოს ნაწილს.

**§ 198. ჰიპერბოლის ფორმის გამოკვლევა. ასიმპტოტები.** ისევე, როგორც ელიფსის შემთხვევაში, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $Ox$ და $Oy$ ღერძები ჰიპერბოლის სიმეტრიის ღერძებია; მათ ეწოდებათ აგრეთვე ჰიპერბოლის ღ ე რ ძ ე ბ ი; ჰიპერბოლი სიმეტრიულია აგრეთვე $O$ წერტილის მიმართაც, რომელსაც, ამის გამო, ეწოდება ჰიპერბოლის ც ე ნ ტ რ ი.



ნახ. 125.

ზემონათქვამის თანახმად, საკმარისია შევისწავლოთ ჰიპერბოლის მხოლოდ ის ნაწილი, რომლისთვისაც $x \geq 0$, $y \geq 0$.

ამოვხსნათ § 197-ის (5) განტოლება $y$-ის მიმართ, მივიღებთ

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \qquad (1)$$

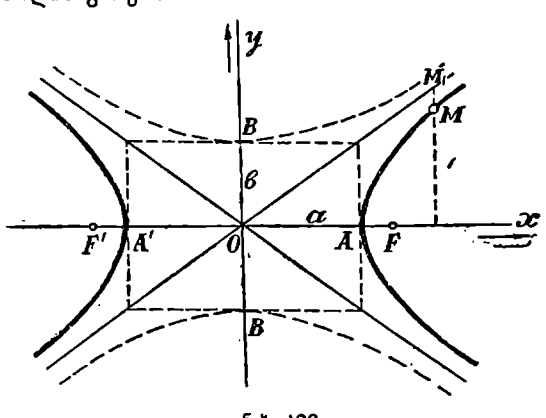
უკანასკნელი ფორმულა გვიჩვენებს, რომ $x^2 \geq a^2$, ე. ი. $x \geq a$ ან $x \leq -a$; წინააღმდეგ შემთხვევაში $y$-სათვის წარმოსახვით გამოსახულებას მივიღებდით.

ამგვარად, ჰიპერბოლი მთლიანად მოთავსებულია $x = -a$ და $x = +a$ წრფეებს შორის მოქცეული ზოლის გარეთ.

ახლა განვიხილოთ ჰიპერბოლის ის ნაწილი, სადაც $y \geq 0$, $x \geq a$. მაშინ

$$y = +\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

როცა $x = a$ გვაქვს $y = 0$. როცა $x$ იზრდება $a$-დან $\infty$-მდე, $y$ იზრდება აგრეთვე 0-დან $\infty$-მდე. ამგვარად, განხილული ნაწილი განფენილია უსასრულობამდე. დანარჩენი ნაწილების მისაღებად უნდა ვისარგებლოთ წირის სიმეტრიულობით $Ox$ და $Oy$ ღერძების მიმართ (ნახ. 126).



ნახ. 126.

ჰიპერბოლის გადაკვეთის $A$ და $A'$ წერტილებს $Ox$ ღერძთან ეწოდება მისი წ ვ ე რ ო ე ბ ი, $AA' = 2a$ სიდიდეს ეწოდება ჰიპერბოლის გ რ ძ ი ვ ი

ღერძი, ხოლო სიდიდეს $2b$ განივი ღერძი (ამ უკანასკნელი სიდიდის გეომეტრიული აზრი ქვემოთ იქნება გამორკვეული).

$a$ და $b$ სიდიდეებს ეწოდებათ, შესაბამისად, გრძივი და განივი ნახევარღერძები.

$2a$ სიდიდეს ხშირად უწოდებენ აგრეთვე ჰიპერბოლის ნამდვილ ღერძს, ხოლო სიდიდეს $2b$ — წარმოსახვით ღერძს (ამის შესაბამისად, $a$ და $b$-ს უწოდებენ ნამდვილ და წარმოსახვით ნახევარღერძებს).

სახელწოდება „წარმოსახვითი ღერძი“ წარმოიშვა იქიდან, რომ თუ ვეძებთ ჰიპერბოლის გადაკვეთის წერტილებს $Oy$ ღერძთან, მაშინ (1) ფორმულაში ჩასმით $x=0$, მივიღებთ: $y=\pm ib$. ამგვარად, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $Oy$ ღერძის ნაკვეთი, მოთავსებული ჰიპერბოლის $Oy$ ღერძთან გადაკვეთის (წარმოსახვით) წერტილებს შორის, უდრის $2ib$; უკანასკნელი სიდიდისათვის ჩვენ შეგვეძლო გვეწოდებინა წარმოსახვითი ღერძი. მაგრამ, როგორც ნათქვამი იყო უკვე, წარმოსახვით ღერძს, ჩვეულებრივად, უწოდებენ $2b$ სიდიდეს.

$c=\sqrt{a^2+b^2}$ სიდიდეს ეწოდება ჰიპერბოლის წრფივი ექსცენტრისიტეტი, ხოლო

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \tag{2}$$

სიდიდეს ეწოდება რიცხვითი ექსცენტრისიტეტი ან, უბრალოდ, ექსცენტრისიტეტი.

თუ $a=b$, მაშინ ჰიპერბოლს ეწოდება ტოლგვერდა (ტოლფერდა).

ჰიპერბოლის დაშორებული ნაწილების უფრო ზუსტ წარმოდგენას იძლევიან მისი ასიმპტოტები, რომელთა არსებობას ახლა ვაჩვენებთ.

გავიხსენოთ, რომ მოცემული წირის ასიმპტოტი ეწოდება ისეთ წრფეს (თუ ასეთი წრფე არსებობს), რომელსაც ის თვისება აქვს, რომ მის გასწვრივ უსასრულობისაკენ მიმსწრაფი წერტილი, უსაზღვროდ უახლოვდება მოცემული წირის წერტილებს.

ადვილი მისახვედრია, რომ ჰიპერბოლს ორი ასიმპტოტი აქვს. მართლაც, თუ ყურადღებას მივაქცევთ (1) განტოლებას, შევამჩნევთ, რომ $x$-ის დიდი მნიშვნელობებისათვის, შედარებით მცირე შეცდომას დავუშვებთ, თუ რადიკალის ქვეშ უკუვაგდებთ $a^2$ სასრულ სიდიდეს, ე. ი. $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ სიდიდის მაგივრად ავიღებთ

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2}$$

სიდიდეს, ანუ

$$y=\pm\frac{b}{a}x. \tag{3}$$

უკანასკნელი განტოლება განსაზღვრავს ორ წრფეს:

$$y=+\frac{b}{a}x \quad \text{და} \quad y=-\frac{b}{a}x,$$

ანუ

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \text{ და } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0. \tag{3a}$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ეს წრფეები ნამდვილად ჩვენი ჰიპერბოლის ასიმპტოტებია. თუ მხედველობაში მივიღებთ წირის სიმეტრიულობას, საკმარისია განვიხილოთ მისი მხოლოდ ის ნაწილი, რომლისთვისაც $x>0$, $y>0$. ვთქვათ, $M(x, y)$ ამ ნაწილის რომელიმე წერტილია, ხოლო $M_1(x, y_1)$ არის $y_1=+\frac{b}{a}x$ წრფის ის წერტილი, რომელსაც იგივე აბსცისი აქვს (ნახ. 126). გვაქვს:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \quad y_1=\frac{b}{a}x,$$

საიდანაც

$$MM_1=y_1-y=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})>0;$$

მაშასადამე,

$$\lim_{x\to\infty}(y_1-y)=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-a^2})=$$

$$=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sqrt{x^2-a^2})(x-\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=0,$$

ვინაიდან უკანასკნელი წილადის მრიცხველი სასრული სიდიდეა, ხოლო მნიშვნელი მიისწრაფვის $\infty$-სკენ.

ამრიგად, ჩვენ ვხედავთ, რომ $MM_1\to 0$, ეს კი ამტკიცებს, რომ წრფე ასიმპტოტს წარმოადგენს.

სიმეტრიულობის გამო, დავასკვნით, რომ (3) წრფეები წარმოადგენენ ასიმპტოტებს ჰიპერბოლის ორივე შტოსი, რომლებიც მოთავსებულია ამ წრფეებით შედგენილი $Ox$ ღერძის შემცველ ვერტიკალურ კუთხეებში.

ასიმპტოტების კუთხური კოეფიციენტები, შესაბამისად უდრიან $+\frac{b}{a}$ და $-\frac{b}{a}$. თუ ჰიპერბოლი ტოლგვერდაა (ე. ი. $a=b$), მაშინ ასიმპტოტები ურთიერთმართობია (და, პირიქით).

ხშირად სასარგებლოა, მოცემულ ჰიპერბოლთან ერთად, განვიხილოთ ჰიპერბოლი, განსაზღვრული განტოლებით

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1, \tag{4}$$

ანუ

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1.$$

უკანასკნელი განტოლება გვიჩვენებს, რომ ჩვენ ნამდვილად ჰიპერბოლთან გვაქვს საქმე, რადგანაც იგი შეიძლება მიღებული იყოს მოცემული ჰიპერბოლის განტოლებიდან, თუ $Ox$ და $Oy$ ღერძებს და $a$, $b$ სიდიდეებს როლებს შეუცვლით. როგორც ადვილი შესამჩნევია, ამ ჰიპერბოლს იგივე ასიმპტოტები აქვს, რაც მოცემულს, მაგრამ მოთავსებულია მათგან შედგენილ სხვა კუთხეებს შორის (ნახ. 126 წყვეტილი ხაზით). მას მოცემული ჰიპერბოლის შ ე უ ღ ლ ე ბ უ ლ ი ეწოდება.

მოცემული ჰიპერბოლის განივი („წარმოსახვითი") ღერძი შეიძლება განვსაზღვროთ, როგორც მისი შეუღლებული ჰიპერბოლის გრძივი („ნამდვილი") ღერძი.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. მოძებნეთ ნახევარღერძები $a$, $b$, წრფივი ექსცენტრისიტეტი $c$ და რიცხვითი ექსცენტრისიტეტი $e$ ჰიპერბოლისა:

$$x^2 - 2y^2 = 5.$$

პ ა ს უ ხ ი.

$$a = \sqrt{5}, \quad b = \sqrt{\frac{5}{2}}, \quad c = \sqrt{\frac{15}{2}}, \quad e = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

2. მოძებნეთ ჰიპერბოლის ასიმპტოტების განტოლებანი

$$2x^2 - 3y^2 = 3.$$

პ ა ს უ ხ ი.

$$\sqrt{2}x \pm \sqrt{3}y = 0.$$

**§ 199. ფოკალური მანძილების თვისებები. ელიფსისა და ჰიპერბოლის დირექტრისები. ამ წირების ახალი განმარტება.** სანამ პარაბოლის განსაზღვრაზე გადავალთ, გამოვიყვანოთ ელიფსისა და ჰიპერბოლის კიდევ ერთი შესანიშნავი საერთო თვისება; ეს თვისება ჩვენ დაგვჭირდება შემდეგში პარაბოლის განსაზღვრისათვის.

§ 195-ში ჩვენ მივიღეთ (5) ფორმულა, რომელიც ახლა ასე დავწეროთ:

$$ar = a^2 - cx$$

ანუ

$$r = a - ex \tag{1}$$

სადაც $r$ აღნიშნავს ელიფსის $(x, y)$ წერტილის მანძილს $F(c, 0)$ ფოკუსამდე, რომელსაც სიმოკლისათვის ვუწოდებთ „მარჯვენა" ფოკუსს. ანალოგიურ ფორმულას მივიღებთ $(x, y)$ წერტილის $r'$ მანძილისათვის „მარცხენა" $F'(-c, 0)$ ფოკუსამდე. მართლაც, ელიფსის განსაზღვრის თანახმად, $r' + r = 2a$, საიდანაც $r' = 2a - r$, ე. ი.

$$r' = a + ex. \tag{1a}$$

ჰიპერბოლის შემთხვევაში ჩვენ § 197-ში გვქონდა (3) ფორმულა, რომელიც ახლა ($\pm a$-ზე გაყოფის შემდეგ) ასე დავწეროთ:

$$r = \pm(ex - a), \tag{2}$$

სადაც $r$ აღნიშნავს ჰიპერბოლის $(x, y)$ წერტილის მანძილს მარჯვენა ფოკუსამდე; ამასთანავე, მარჯვენა შტოსათვის უნდა ავიღოთ ნიშანი (+), ხოლო მარცხენასათვის—ნიშანი (—).

მანძილი მარცხენა ფოკუსამდე მიიღება ფორმულიდან $r' - r = \pm 2a$ (სადაც ნიშნები (+) ან (—) უნდა ავიღოთ ზემონაჩვენები წესით); ეს ფორმულა გვაძლევს:

$$r' = r \pm 2a = \pm ex \mp a \pm 2a,$$

ე. ი.

$$r' = \pm (ex + a). \tag{2a}$$

ამ ფორმულაში, ისე როგორც (2) ფორმულაში, (+) ნიშანი უნდა ავიღოთ მარჯვენა შტოსათვის, ხოლო ნიშანი (—)—მარცხენა შტოსათვის.

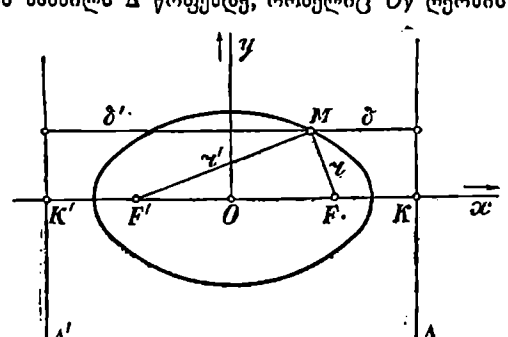
(1) და (2$a$) ფორმულები ამტკიცებენ განხილული წირების ფოკუსთა შემდეგ შესანიშნავ თვისებას: **ამ წირების წერტილების მანძილები მათ ფოკუსამდე შეიძლება გამოისახოს კოორდინატების წრფივი ფუნქციის სახით** [1]).

გამოყვანილ ფორმულებს აქვთ მეტად მარტივი გეომეტრიული მნიშვნელობა, რომლის გამორკვევაზე ახლა გადავალთ.

(1) ფორმულა, რომელიც შეეხება ელიფსს, გადავწეროთ ასე:

$$r = e\left(\frac{a}{e} - x\right). \tag{3}$$

ცხადია, $\delta = \frac{a}{e} - x$ სიდიდე წარმოადგენს ელიფსის $M(x, y)$ წერტილის მანძილს $\Delta$ წრფემდე, რომელიც $Oy$ ღერძის პარალელურია და მისგან დაშორებულია $\frac{a}{e}$ მანძილით ($\Delta$ წრფის $Ox$ ღერძთან გადაკვეთის $K$ წერტილის აბსცისი უდრის $+\frac{a}{e}$).




ნახ. 127.

ცხადია, რომ $\Delta$ წრფე ელიფსის გარეთ არის მოთავსებული, ვინაიდან $e < 1$, და ამიტომ $\frac{a}{e} > a$ (ნახ. 127).

ახლა (3) ფორმულა ასე შეიძლება გადაიწეროს:

$$r = e\delta \text{ ანუ } \frac{r}{\delta} = e. \tag{4}$$

[1]) ჩვენს შემთხვევაში შერჩეულ კოორდინატთა სისტემისათვის, ეს მანძილები წარმოადგენენ მხოლოდ $x$ კოორდინატის ფუნქციებს.

სიმეტრიულობის გამო დავასკვნით, რომ $F'$ ფოკუსის შესაბამის $\Delta'$ წრფეს, რომელიც აგრეთვე $Oy$ ღერძის პარალელურია და $Ox$ ღერძს კვეთს $K'$ წერტილში აბსცისით $-\frac{a}{e}$, აქვს ის თვისება, რომ

$$r' = e\delta' \text{ ანუ } \frac{r'}{\delta'} = e, \tag{4a}$$

სადაც $r'$ და $\delta'$ აღნიშნავენ, შესაბამისად, $M$ წერტილის მანძილებს $F'$ ფოკუსამდე და $\Delta'$ წრფემდე.

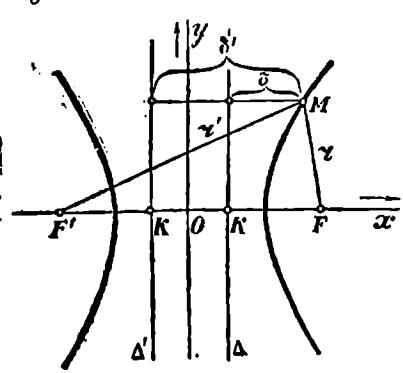
$F$ და $F'$ ფოკუსების შესაბამის $\Delta$ და $\Delta'$ წრფეებს ელიფსის დირექტრისები ეწოდება.

ამ წრფეებს (4) და (4a) ფორმულების ძალით აქვს შემდეგი თვისება:

ელიფსის ნებისმიერი წერტილის ფოკუსამდე და შესაბამ დირექტრისამდე მანძილების ფარდობა არის მუდმივი სიდიდე (ექსცენტრისიტეტის ტოლი).

სრულიად ასევე ადვილი შესამჩნევია, რომ (2) და (2a) ფორმულების ძალით, ჰიპერბოლის $F$ და $F'$ ფოკუსებს შეესაბამება, ჰიპერბოლის დირექტრისებად წოდებული, $Oy$ ღერძის პარალელური ისეთი $\Delta$ და $\Delta'$ წრფეები, რომლებიც $Ox$ ღერძს შესაბამისად $x = +\frac{a}{e}$ და $x = -\frac{a}{e}$ წერტილებში გადაკვეთენ და რომლებსაც აქვთ თვისება, რომ ჰიპერბოლის ნებისმიერი წერტილის ფოკუსამდე და შესაბამ დირექტრისამდე მანძილების ფარდობა მუდმივი სიდიდეა (ექსცენტრისიტეტის ტოლი).

ვინაიდან ჩვენ შემთხვევაში $e > 1$, $\frac{a}{e} < a$, ამიტომ ჰიპერბოლის დირექტრისები მოთავსებულია მის შტოებს შორის (ნახ. 128).




ნახ. 128.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს თვისება დამახასიათებელია ელიფსისა და ჰიპერბოლისათვის, ე. ი. იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა მანძილების ფარდობა მოცემულ $F$ წერტილამდე და მოცემულ $\Delta$ წრფემდე ერთიდან განსხვავებული მუდმივი სიდიდეა, წარმოადგენს ელიფსს ან ჰიპერბოლს. სახელდობრ, თუ $e$ აღნიშნავს ხსენებულ მუდმივ ფარდობას, მაშინ როცა $e < 1$ გვექნება ელიფსი, ხოლო როცა $e > 1$—ჰიპერბოლი.

მართლაც, შევარჩიოთ მართკუთხოვან კოორდინატთა ღერძები ისე, რომ $Oy$ ღერძი $\Delta$ წრფის პარალელური იყოს, ხოლო $Ox$ ღერძი გადიოდეს $F$ წერ-

ტილზე. კოორდინატთა სათავე შევარჩიოთ ისე, რომ $F$ წერტილის და $\Delta$ წრფის $Ox$ ღერძთან გადაკვეთის $K$ წერტილს ჰქონდეს, შესაბამისად, შემდეგი აბსცისები:

$$OF=ae,\ OK=\frac{a}{e},$$

სადაც $a$ რაღაც დადებითი რიცხვია, რომელიც უნდა განისაზღვროს შემდეგი პირობით: თუ $l$ წარმოადგენს მანძილს $F$ წერტილიდან $\Delta$ წრფემდე (ეს სიდიდე, ისე როგორც $e$ სიდიდე, მოცემული უნდა ვიგულისხმოთ), მაშინ

$$l=|FK|=\left|\frac{a}{e}-ae\right|=\frac{a|1-e^2|}{e},$$

საიდანაც

$$a=\frac{el}{|1-e^2|}. \tag{5}$$

თუ $M(x, y)$ აღნიშნავს ჩვენი გეომეტრიული ადგილის რაიმე წერტილს, მაშინ, პირობის თანახმად, უნდა გვქონდეს $r=e\delta$, სადაც

$$r=\sqrt{(x-ae)^2+y^2}$$

და

$$\delta=\left|\frac{a}{e}-x\right|.$$

მაშასადამე,

$$\sqrt{(x-ae)^2+y^2}=\left|\frac{a}{e}-x\right|e.$$

ორივე მხარე ავამაღლოთ კვადრატში, მივიღებთ:

$$x^2-2aex+a^2e^2+y^2=a^2-2aex+e^2x^2$$

ანუ, ცხადი გამარტივებების შემდეგ,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1.$$

თუ $e<1$, მაშინ $a^2(1-e^2)=b^2$ აღნიშვნის შემდეგ, მივიღებთ ელიფსის განტოლებას, და თუ $e>1$, მაშინ $a^2(a^2-1)=b^2$ აღნიშვნის შემდეგ, მივიღებთ ჰიპერბოლის განტოლებას.

როცა $e=1$ მაშინ კოორდინატთა ღერძები აღარ შეიძლება შევარჩიოთ ნაჩვენები ხერხით, რადგან (5) ფორმულიდან ამ შემთხვევაში მივიღებდით $a=\infty$. ჩვენ ვნახავთ, რომ როცა $e=1$, მივიღებთ ელიფსისა და ჰიპერბოლისგან განსხვავებულ წირს, რომელსაც პარაბოლი ეწოდება.

**§ 200. პარაბოლის განმარტება და მისი ნორმალური განტოლება.** პარაბოლი ეწოდება ისეთ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს,

რომლებიც თანასწორი მანძილებით არიან დაშორებული მოცემული წერტილიდან (რომელსაც ფოკუსი ეწოდება) და მოცემული წრფიდან (რომელსაც დირექტრისი ეწოდება).

ამგვარად, პარაბოლს უპირავს საშუალო ადგილი ელიფსსა და ჰიპერბოლს შორის, იმ აზრით, რომ ყველა ეს სამი წირი შეიძლება განვსაზღვროთ თვისებით (იხ. § 199):

$$r = e\delta, \tag{1}$$

სადაც $r$ წირის წერტილის მანძილია ფოკუსამდე, $\delta$—მანძილი შესაბამ დირექტრისამდე, ხოლო $e$—მუდმივი სიდიდე. სახელდობრ, როცა $e<1$ გვაქვს ელიფსი, როცა $e=1$—პარაბოლი, ხოლო როცა $e>1$—ჰიპერბოლი.

ახლა გამოვიყვანოთ პარაბოლის განტოლება. ვთქვათ, $\Delta$ პარაბოლის დირექტრისია, ხოლო $F$ მისი ფოკუსი. მანძილი ფოკუსიდან დირექტრისამდე აღვნიშნოთ $p$-თი. $Ox$ ღერძი გავატაროთ ფოკუსზე და მივმართოთ დირექტრისის მართობულად. მართკუთხოვან კოორდინატთა სათავე ავიღოთ ფოკუსსა და დირექტრისს შორის მოთავსებული ნაკვეთის შუა წერტილში ისე, რომ $F$ ფოკუსის კოორდინატები იყოს $\left(+\frac{p}{2}, 0\right)$, ხოლო $\Delta$ დირექტრისის $Ox$ ღერძთან გადაკვეთის $K$ წერტილის კოორდინატები $\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$.

განსაზღვრის თანახმად გვაქვს:

$$r = \delta, \tag{2}$$

სადაც

$$r = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \qquad \delta = x + \frac{p}{2}.$$

მაშასადამე, პარაბოლის განტოლება იქნება:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2},$$

ანუ, კვადრატში ამაღლებისა და გამარტივების შემდეგ:

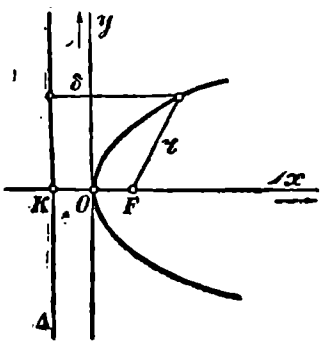
$$y^2 = 2px. \tag{3}$$

ეს არის პარაბოლის უმარტივესი სახის განტოლება, რომელსაც ნორმალური ეწოდება.

ჩვენ ვხედავთ, რომ პარაბოლი მთლიანად $Oy$ ღერძის მარჯვნივ არის მოთავსებული (რადგან, ცხადია, უნდა იყოს: $x \geq 0$). როცა $x=0$ გვაქვს: $y=0$, ე. ი. პარაბოლი გადის კოორდინატთა სათავეზე. როცა $x$ იზრდება, მაშინ ორივე შესაბამი $y = \pm\sqrt{2px}$ მნიშვნელობანიც აგრეთვე უსაზღვროდ იზრდებიან და წირს 129 ნახაზზე ნაჩვენები სახე აქვს.

ცხადია, $Ox$ ღერძი პარაბოლის სიმეტრიის ღერძია და ამიტომაც მას ეწოდება პარაბოლის ღერძი; $O$ წერტილი პარაბოლის წვეროა, $p$ სიდიდეს ეწოდება პარაბოლის პარამეტრი.

ცხადია, რომ პარაბოლს, ელიფსსა და ჰიპერბოლისგან განსხვავებით, ცენტრი არა აქვს. ასევე ამ წირთაგან განსხვავებით, მას მხოლოდ ერთი ფოკუსი და ერთი დირექტრისი აქვს.



ნახ. 129.

შემდეგ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ პარაბოლს ასიმპტოტები არა აქვს. მართლაც, უშუალოდ ჩანს, რომ ასიმპტოტი არ შეიძლება პარალელური იყოს არც $Oy$ ღერძის, არც $Ox$ ღერძის ისე, რომ თუ ასიმპტოტი არსებობს, მაშინ მის განტოლებას უნდა ჰქონდეს სახე:

$$y = ax + b,$$

სადაც $a$ და $b$ მუდმივებია და $a \neq 0$. ამ წრფის გასწვრივ უსასრულობისკენ მიმსწრაფი წერტილისათვის გვექნება:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(a + \frac{b}{x}\right) = a.$$

თუ ეს წრფე პარაბოლის ასიმპტოტია, მაშინ პარაბოლის $(x, y_1)$ წერტილისათვის, რომელსაც იგივე აბსცისი აქვს, რაც $(x, y)$ წერტილს, ასიმპტოტის განსაზღვრის თანახმად, უნდა გვქონდა

$$\lim_{x\to\infty} (y_1 - y) = 0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y_1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = a.$$

მაგრამ, პარაბოლის წერტილებისათვის $y_1 = \pm\sqrt{2px}$, საიდანაც

$$\frac{y_1}{x} = \pm\frac{\sqrt{2px}}{x} = \pm\frac{\sqrt{2p}}{\sqrt{x}},$$

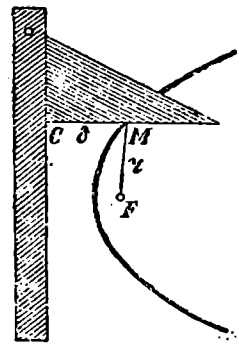
და, მაშასადამე,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y_1}{x} = 0,$$

რაც ზემოთ მიღებულს ეწინააღმდეგება.

დასასრულს, მოვიყვანოთ მარტივი ხერხი, რომლის საშუალებითაც შეგვიძლია დავხაზოთ პარაბოლი განუწყვეტელი მოძრაობით.

დავამაგროთ სახაზავი ისე, რომ მისი ნაპირი დირექტრისზე იყოს დამთხვეული; მივადოთ ამ სახაზავს კუთხედის ერთ-ერთი კათეტი; მეორე კათეტის რომელიმე წერტილზე ისეთი სიგრძის ძაფი მოვაბათ, რომ მისი ბოლო კათეტის გასწერივ დაჭიმვისას მართი კუთხის $C$ წერტილში თავდებოდეს; დასასრულს, მეორე ბოლო ამ ძაფისა დავამაგროთ ფოკუსში (ნახ. 130). თუ ახლა კუთხედს ვამოძრავებთ სახაზავის გასწერივ და, ამასთანავე, ძაფს დაეჭიმავთ თავისუფალ კათეტზე მიჭერილი ფანქრის $M$ წვეტით, მაშინ ეს წვეტი შემოხაზავს პარაბოლის ნაწილს (მით უფრო დიდს, რაც უფრო გრძელია თავისუფალი კათეტი და ძაფი).



ნახ. 130.

მართლაც, ცხადია, ყოველთვის:

$$|MF|=|MC|.$$

**სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი**

1. აჩვენეთ, რომ წირი $y^2=3x+4$ პარაბოლია და მოძებნეთ მისი პარამეტრი და წვეროს მდებარეობა (მ ი თ ი თ ე ბ ა: კოორდინატთა სათავე უნდა გადაიტანოთ $Ox$ ღერძის ისეთ წერტილში, რომ თავისუფალი წევრი მოისპოს).

პ ა ს უ ხ ი. $p=\frac{3}{2}$. წვერო მოთავსებულია წერტილში $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$.

2. აჩვენეთ, რომ წირი $y=ax^2+2bx+c$ $(a\neq 0)$ პარაბოლია, რომლის ღერძი $Oy$ ღერძის პარალელურია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული განტოლება შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$y=a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+c-\frac{b^2}{a}$$

ანუ

$$y-\beta=a(x-\alpha)^2,$$

სადაც

$$\beta=c-\frac{b^2}{a},\quad \alpha=-\frac{b}{a}.$$

თუ ავიღებთ კოორდინატთა ახალ $O'x'y'$ სისტემას, რომლის ღერძები ძველი სისტემის პარალელურია, ხოლო სათავე $O'(\alpha, \beta)$ წერტილშია, მაშინ წინა განტოლება მიიღებს სახეს (ახალ კოორდინატებში)

$$y'=ax'^2 \text{ ანუ } x'^2=\frac{1}{a}y'.$$

თუ $a>0$, მაშინ აღნიშვნით $\frac{1}{a}=2p$, მივიღებთ განტოლებას $x'^2=2py'$. ცხადია, ეს არის პარაბოლი, რომლის პარამეტრია $p$ და რომლის ღერძი $O'y'$ ღერძის მიმართულებისაა. თუ $a<0$, მაშინ, აღნიშვნით $\frac{1}{a}=-2p$, მივიღებთ $x'^2=-2py'$. შევუცვალოთ $Oy'$ ღერძს

მიმართულება საწინააღმდეგოზე, ე. ი. $y'$ შევცვალოთ $-y'$, მივიღებთ ისევე პარაბოლის განტოლებას $p$ პარამეტრით, როშლის ღერძი ახალი $O'y'$ ღერძის მიმართულებისაა (ეს პარაბოლი ამოზნექილობით იქით იქნება მიმართული, საითაც ძველი $Oy$ ღერძია). მაშასადამე, ორივე შემთხვევაში ვღებულობთ პარაბოლს პარამეტრით

$$p=\frac{1}{2|a|}.$$

**3.** დამტკიცეთ შემდეგი დებულება: თუ რაიმე წირის ცვლადი $M(x, y)$ წერტილის მანძილი რომელიმე მუდმივ $F(a, b)$ წერტილამდე შეიძლება გამოვსახოთ, როგორც $M$ წერტილის კოორდინატთა რაღაც წრფივი ფუნქციის მნიშვნელობა (აღებული + ან — ნიშნით), მაშინ ეს წირი ან ელიფსია, ან ჰიპერბოლი, ანდა პარაბოლი (ან წარმოადგენს ერთ-ერთ ამ წირთაგანის ნაწილს).

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $r=|FM|$ პირობის თანახმად გვაქვს:

$$r=\pm(Ax+By+C), \qquad (*)$$

სადაც $A$, $B$, $C$ მუდმივებია. განვიხილოთ წრფე

$$Ax+By+C=0.$$

ვიგულისხმოთ, რომ კოორდინატები მართკუთხოვანია, რაც, ცხადია, ზოგადობას არ არღვევს. $M$ წერტილის მანძილი $\delta$ ამ წრფემდე, როგორც ცნობილია, მოცემულია ფორმულით

$$\delta=\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},$$

საიდანაც

$$\pm(Ax+By+C)=\delta\sqrt{A^2+B^2}.$$

ამიტომაც, (*) ფორმულის ძალით, გვექნება:

$$r=e\delta,$$

სადაც

$$e=\sqrt{A^2+B^2}.$$

აქედან ცხადია, რომ $M$ წერტილი ეკუთვნის ჰიპერბოლს, თუ $e>1$, პარაბოლს, თუ $e=1$ და ელიფსს, თუ $e<1$.

**4.** ფ ო კ უ ს ე ბ ი ს ზ ო გ ა დ ი გ ა ნ ს ა ხ ღ ვ რ ა დ ა მ ა თ ი მ ო ძ ე ბ ნ ა. მივიღოთ მეოთხე რიგის წირის ფოკუსის შემდეგნაირი განსაზღვრა: წირის ფოკუსი $F$ ისეთი წერტილია, რომ მისი ნებისმიერი წერტილის $F$ წერტილამდე და რომელიმე მუდმივ $\Delta$ წრფემდე მანძილების ფარდობა, მუდმივი სიდიდეა. გამოვიდეთ ამ განსაზღვრიდან და მოვძებნოთ ელიფსის, ჰიპერბოლისა და პარაბოლის ყველა ფოკუსი. დავიწყოთ ელიფსით, რომელიც მოცემულია (დეკარტის კოორდინატებში) განტოლებით:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a\geq b). \qquad (**)$$

ვთქვათ, $F(\alpha, \beta)$ საძიებელი ფოკუსია, და ვთქვათ, $\Delta$ წრფის განტოლებას აქვს სახე $A'x+B'y+C'=0$. განსაზღვრის თანახმად, გვაქვს: $\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=\pm k(A'x+B'y+C')$, სადაც $k$ მუდმივი მამრავლია. აღვნიშნოთ $kA'$, $kB'$, $kC'$ სიდიდეები, შესაბამისად $A$, $B$, $C$, გვექნება:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(Ax+By+C)^2$$

ანუ, ფრჩხილების გახსნის შემდეგ:

$$(1-A^2)x^2+(1-B^2)y^2-2ABxy-2(\alpha+AC)x-2(\beta+BC)y=C^2-\alpha^2-\beta^2, \qquad (***)$$

ეს განტოლება უნდა დაკმაყოფილდეს $(x, y)$ კოორდინატების იმავე მნიშვნელობისათვის, რომლებისთვისაც (**) განტოლება კმაყოფილდება; აქედან დაუყოვნებლივ, რომ ამ განტოლებების კოეფიციენტები პროპორციული უნდა იყოს. ე. ი. უნდა გვქონდეს:

$$AB=0, \quad \alpha+AC=0, \quad \beta+BC=0,$$
$$(1-A^2)a^2=(1-B^2)b^2=C^2-\alpha^2-\beta^2.$$

ამ განტოლებათაგან პირველი გვიჩვენებს, რომ ან $A=0$, ან $B=0$. ვთქვათ, ჯერ $B=0$ მაშინ $\beta=0$. წინა განტოლებებიდან ადვილად მივიღებთ:

$$A=\pm\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\pm e; \quad C=\pm a, \quad \alpha=\pm ae=\pm\sqrt{a^2-b^2};$$

ჩვენ მივიღეთ, უკვე წინათ ცნობილი, დიდ ღერძზე მდებარე ფოკუსები.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $A=0$. ზემონათქვამის სრულიად ანალოგიურად მივიღებთ:

$$\alpha=0, \quad \beta=\pm i\sqrt{a^2-b^2}.$$

ამგვარად, თუ მხოლოდ ნამდვილი ელემენტების განხილვით შემოვიფარგლებით, $A=0$ შემთხვევა უნდა უკუგდებულ იქნას. მაგრამ, მიზანშეწონილია ვთქვათ, რომ ამ შემთხვევას შეესაბამება ორი წარმოსახვითი ფოკუსი, „მოთავსებული" მცირე ღერძზე. ამრიგად, ელიფსს აქვს ოთხი ფოკუსი, მაგრამ მათ შორის მხოლოდ ორია ნამდვილი.

მკითხველს ვანდობთ დაამტკიცოს, რომ ჰიპერბოლსაც აქვს ოთხი ფოკუსი, რომელთაგან ორი ნამდვილია (რომლებიც ჩვენთვის უკვე ცნობილი იყო წინათ).

პარაბოლის შემთხვევაში, თუ (***) განტოლებას შევადარებთ განტოლებას

$$y^2-2px=0,$$

დავასკვნით:

$$1-A^2=0, \quad AB=0, \quad \beta+BC=0,$$
$$C^2-\alpha^2-\beta^2=0, \quad 1-B^2=\frac{\alpha+AC}{p};$$

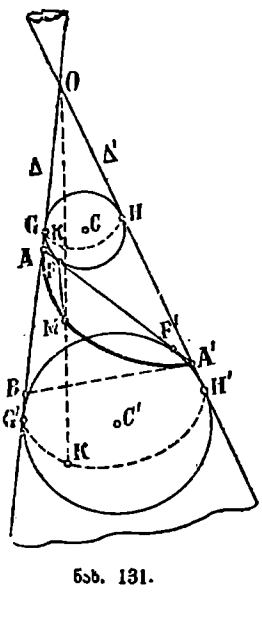
ამ განტოლებათაგან პირველიდან მივიღებთ: $A=\pm 1$; მეორედან ვასკვნით, რომ $B=0$; მაშასადამე, მესამე ტოლობის ძალით $\beta=0$. საბოლოოდ ორი უკანასკნელი ტოლობა გვაძლევს $\alpha=p\pm C$ და $\alpha^2=C^2$ ეს შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha=\frac{p}{2}$, $\pm C=-\frac{p}{2}$. მაშასადამე, ჩვენ ვღებულობთ (ჩვენთვის უკვე ცნობილ) ერთ ფოკუსს.

## II. ელიფსი, ჰიპერბოლი და პარაბოლი როგორც კონუსური კვეთები

**§ 201. სწორი წრიული კონუსის კვეთა სიბრტყეებთან.** ჩვენ ზემოთ აღვნიშნეთ, რომ ელიფსი, ჰიპერბოლი და პარაბოლი წარმოადგენს წრიული კონუსისა და სიბრტყეების გადაკვეთის წირებს. წრიული კონუსის ქვეშ აქ ვგულისხმობთ სწორ წრიულ კონუსს, რომელიც წარმოადგენს მოცემულ წერტილზე (წვეროზე) და მოცემულ წრეწირზე გამავალ წრფეთა გეომეტრიულ ადგილს. იგულისხმება, რომ მ ო ც ე მ უ ლ ი სიბრტყე მისი ცენტრისა და წვეროს შემაერთებელი წრფის მართობია (ამ წრფეს ეწოდება კონუსის ღერძი). ელემენტარულ გეომეტრიაში ჩვეულებრივად განიხილება კონუსის მხოლოდ ის ნაწილი, რომელიც მოქცეულია წვეროსა და მიმმართველ წრეწირს შორის, აქ კი განვიხილავთ მთელ კონუსს, რომელიც უსასრულობამდეა

განფენილი წვეროს ორიენ მხარეზე. V თავში ვნახეთ, რომ სწორი წრიული კონუსი მეორე რიგის [1]) ფართეულია.

განვიხილოთ კონუსის კვეთა რომელიმე II სიბრტყესთან (რომელიც გადის $A$, $M$ და $A'$ წერტილებზე, ნახ. 131), რომელიც წვეროზე არ გადის. გავატაროთ კონუსის ღერძზე ნახაზის სიბრტყის მართობი სიბრტყე. ეს უკანასკნელი სიბრტყე გაკვეთს კონუსს ორ მსახველზე $\Delta$ და $\Delta'$, ხოლო II სიბრტყე—რომელიმე $AA'$ წრფეზე.



ნახ. 131.

განვიხილოთ ცალკე სამი შემთხვევა:

1. ვთქვათ, II სიბრტყე კვეთს კონუსის მხოლოდ ერთ კალთას, ისე რომ არც ერთი მსახველის პარალელი არ არის (ნახ. 131), მაშინ $AA'$ წრფის მსახველებთან გადაკვეთის $A$ და $A'$ წერტილები მდებარეობენ ერთსა და იმავე მხარეზე $O$ წეროდან. ამის შემდეგ ავაგოთ ისეთი წრეწირები, რომლებიც მოთავსებულია კონუსის ზიგნით და ეხებიან $OA$, $OA'$ მსახველებს და $AA'$ წრფეს. ასეთი წრეწირები იქნება ორი: ერთი $OAA'$ სამკუთხედში ჩახაზული, ხოლო მეორე — მოთავსებული $OAA'$ სამკუთხედის გარეთ და კონუსის ზიგნით. ამ წრეხაზების $C$ და $C'$ ცენტრები, ცხადია, მოთავსებული იქნებიან კონუსის ღერძზე. ვთქვათ, ამ წრეწირების შეხების წერტილები $AA'$ წრფესთან არის $F$ და $F'$. თუ ამ წრეწირებს ვაბრუნებთ კონუსის ღერძის გარშემო, მაშინ ისინი შემოხაზავენ ორ სფეროს, რომლებიც კონუსს ეხებიან $GH$ და $G'H'$ წრეწირების გასწვრივ, რომელთა სიბრტყეები კონუსის ღერძის მართობია ($G$, $H$; $G'$, $H'$ აღნიშნავენ სფეროების შეხების წერტილებს $OA$ და $OA'$ მსახველებთან).

ეს სფეროები II სიბრტყეს $F$ და $F'$ წერტილებში ეხებიან.

ახლა ვთქვათ, $M$ აღნიშნავს II სიბრტყისა და კონუსის გადაკვეთის წირის რომელიმე წერტილს. გავატაროთ ამ წერტილზე კონუსის მსახველი, რომელიც $GH$ და $G'H'$ წრეწირებს $K$ და $K'$ წერტილებში გადაკვეთს. ცხადია, რომ $|KK'| = |GG'| = |HH'|$ სიგრძე დამოუკიდებელია $M$ წერტილის მდებარეობისაგან გადაკვეთის წირზე.

გარდა ამისა, ცხადია, რომ $|MF| = |MK|$, ვინაიდან $MF$ და $MK$ არის $M$ წერტილიდან გატარებული პირველი სფეროს მხები წრფეები; სრულიად ასევე ცხადია, რომ $|MF'| = |MK'|$.

ამიტომ $|MF| + |MF'| = |MK| + |MK'| = |KK'|$, ე. ი. $M$ წერტილის მანძილების ჯამი $F$ და $F'$ წერტილებამდე მუდმივი სიდიდეა. ამგვარად, ჩვენი წირი წარმოადგენს ელიფსს ფოკუსებით $F$ და $F'$ და დიდი ღერძით $2a = |KK'|$.

თუ $A'$ წერტილზე გავატარებთ $GH$ წრფის პარალელურ წრფეს და $B$ არის მისი გადაკვეთის წერტილი $OA$ მსახველთან, მაშინ ამ მსახველის $AB$ ნაკვეთის სიგრძე უდრის $|FF'|$ ფოკალურ მანძილს. მართლაც, $|FF'|$ სიგრძე მიიღება $|AA'|$ დიდი ღერძიდან $|AF|$ და $|A'F'|$ სიგრძეების გამოკლებით. მეორე მხრივ,

$$|AA'| = 2a = |GG'|, \; |AF| = |AG|, \; |A'F'| = |A'H'| = |BG'|$$

და, მაშასადამე, იგივე ფოკალური მანძილი უდრის:

$$|GG'| - |AG| - |BG'| = |AB|.$$

[1]) როგორც ჩვენ ქვემოთ ვნახავთ, დახრილი წრიული კონუსი აგრეთვე მეორე რიგის ფართეულია და მისი კვეთები სიბრტყეებთან არ განსხვავდებიან სწორი წრიული კონუსის კვეთებისაგან.

მკითხველს ვანდობთ დაამტკიცოს, რომ $\Pi$ სიბრტყის გადაკვეთას $D$ და $D'$ წრფეები (ნახაზზე ისინი აღნიშნული არ არიან) $GH$ და $G'H'$ წრეწირების სიბრტყეებთან ელიფსის დირექტრისები იქნება.

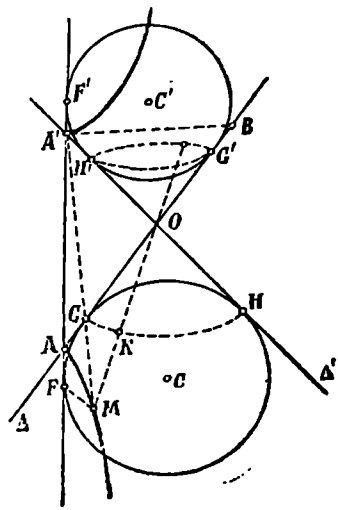
2. ახლა განვიხილოთ ისეთი შემთხვევა, როცა $\Pi$ სიბრტყე კონუსის ორივე კალთას ჰკვეთს (ნახ. 132), ისე, რომ $A$ და $A'$ წერტილები კონუსის სხვადასხვა კალთაზე მდებარეობენ.

ამ შემთხვევაში $\Pi$ სიბრტყე პარალელურია კონუსის ორი მსახველისა; ამ უკანასკნელს მივიღებთ თუ კონუსს გავკვეთთ მის წვეროზე გამავალ $\Pi$ სიბრტყის პარალელური სიბრტყით.

ავაგოთ ხელახლა, კონუსის შიგნით მოთავსებული, ორი წრეწირი, რომლებიც ეხებიან $OA$, $OA'$ მსახველებს და $AA'$ წრფეს. ვთქვათ, $F$ და $F'$ შეხების წერტილებია $AA'$ წრფესთან.

ამ წრეწირების ცენტრები $C$ და $C'$ კონუსის ღერძზეა მოთავსებული.

თუ წრეწირებს ვაბრუნებთ კონუსის ღერძის გარშემო, მაშინ მივიღებთ ორ ისეთ სფეროს, რომლებიც $\Pi$ სიბრტყეს ეხებიან $F$ და $F'$ წერტილებში, ხოლო კონუსს $GH$ და $G'H'$ წრეწირების გასწვრივ, რომელთა სიბრტყეები ღერძის მართობია (ნახაზზე $G$, $H$, $G'$, $H'$, იმავე დროს აღნიშნავენ სფეროს შეხების წერტილებს $OA$ და $OA'$ მსახველებთან).



ნახ. 132.

$\Pi$ სიბრტყის გადაკვეთის წირი კონუსთან ცხადია, შედგება ორი ცალკეული შტოსაგან, რომლებიც მდებარეობენ კონუსის სხვადასხვა კალთაზე. ვთქვათ, $M$ ამ წირის ნებისმიერი წერტილია. ამ წერტილზე გავატაროთ კონუსის მსახველი. იგი $GH$ და $G'H'$ წრეწირებს გადაკვეთს $K$ და $K'$ წერტილებში; ამასთანავე, სიგრძე $|KK'|=|GG'|=|HH'|$, რომელიც $M$ წერტილის მდებარეობისაგან დამოუკიდებელია, მუდმივი სიდიდე იქნება.

გვაქვს:

$$|MF|=|MK|,\ |MF'|=|MK'|,$$

და ამიტომ

$$|MF'|-|MF|=|MK'|-|MK|=|KK'|.$$

$M$ წერტილი ჩვენ ავიღეთ იმ კალთაზე, სადაც მოთავსებული იყო $A$ წერტილი; თუ ჩვენ $M$ წერტილს მეორე კალთაზე ავიღებდით, მაშინ გვექნებოდა:

$$|MF|-|MF'|=|KK'|.$$

ამგვარად, $M$ წერტილის მანძილების სხვაობა $F$ და $F'$ წერტილებამდე მუდმივი სიდიდეა; მაშასადამე, ჩვენი წირი წარმოადგენს ჰიპერბოლს. ამ ჰიპერბოლის გრძივი ღერძი $|AA'|=2a$, როგორც წინა ფორმულებიდან ჩანს, უდრის $|KK'|=|GG'|=|HH'|$.

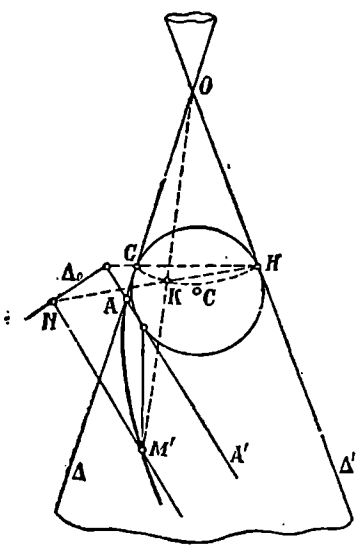
თუ $A'$ წერტილზე გავატარებთ $GH$ წრფის პარალელურ $A'B$ წრფეს $OA$ მსახველის გადაკვეთამდე $B$ წერტილში, მაშინ ამ მსახველის $AB$ მონაკვეთის სიგრძე ტოლი იქნება $|FF'|$ ფოკალური მანძილისა. დამტკიცება სრულიად ანალოგიურია ელიფსის შემთხვევაში მოყვანილი დამტკიცებისა.

მკითხველს ვანდობთ დაამტკიცოს, რომ $GH$ და $G'H'$ წრეწირების სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფეები $\Pi$ სიბრტყესთან (ნახაზზე აღნიშნული არ არიან) განვილული ჰიპერბოლის დირექტრისები იქნებიან.

**3.** ვთქვათ, $\Pi$ სიბრტყე მხოლოდ ერთ კალთას კვეთს და, მაშასადამე, პარალელურია ერთ-ერთი, მაგალითად, $\Delta'$ მსახველისა. მაშინ $AA'$ წრფე მხოლოდ $\Delta$ მსახველს გადაკვეთს რაღაც $A$ წერტილში (ნახ. 133).

ავაგოთ კონუსის შიგნით წრეწირი, რომელიც ეხება $\Delta$, $\Delta'$, $AA'$ წრფეებს. ვთქვათ, $G$, $H$ $F$ აღნიშნავენ, შესაბამისად, შეხების წერტილებს. წრეწირის ცენტრი $C$ მოთავსებულია კონუსის ღერძზე.

თუ ვაბრუნებთ წრეწირს ამ ღერძის გარშემო მივიღებთ სფეროს, რომელიც კონუსს ეხება $GH$ წრეწირის გასწვრივ, რომლის სიბრტყე ღერძის მართობია. ვთქვათ, $\Delta_0$ წარმოადგენს $\Pi$ სიბრტყის გადაკვეთის წრფეს $GH$ წრეწირის სიბრტყესთან.



ნახ. 133.

$\Pi$ სიბრტყის გადაკვეთის წირი კონუსთან ცხადია, განფენილი იქნება უსასრულობამდე და შედგება ერთი შტოსაგან. ვთქვათ, $M$ ამ წირის ნებისმიერი წერტილია. გავატაროთ $M$ წერტილზე კონუსის მსახველი (იგი $GH$ წრეწირს რაღაც $K$ წერტილში გადაკვეთს), და ამის გარდა, დავუშვათ $M$ წერტილიდან $\Delta_0$ წრფეზე $MN$ მართობი. $MN$ წრფე პარალელურია $AA'$ წრფისა და ამიტომ პარალელური იქნება $\Delta'$ მსახველისაც. მაშასადამე, $MN$ და $\Delta'$ წრფეები ერთ სიბრტყეში იმყოფებიან და ამავე სიბრტყეში იქნება მოთავსებული $OM$ მსახველიც. ამიტომ $N$, $K$, $H$ წერტილები მოთავსებული არიან ხსენებულ სიბრტყისა და $GH$ წრეწირის სიბრტყის გადაკვეთის ერთსა და იმავე წრფეზე.

ცხადია, რომ $KNM$ და $KHO$ სამკუთხედები მსგავსია და, რადგანაც $|OK|=|OH|$, ამიტომ $|MN|=|MK|$ და, მაშასადამე, $|MN|=|MF|$. ამგვარად, $M$ წერტილის მანძილები $F$ წერტილამდე და $\Delta_0$ წრფემდე თანატოლია; ეს კი გვიჩვენებს, რომ წირი წარმოადგენს პარაბოლს $F$ ფოკუსით და $\Delta_0$ დირექტრისით.

ელიფსი, ჰიპერბოლი და პარაბოლი, როგორც წრიული კონუსისა და სიბრტყეების გადაკვეთის წირები. ცნობილი იყო ჯერ კიდევ ძველი ბერძნებისათვის. თხზულება კონუსური კვეთების შესახებ ეკუთვნის აპოლონიუსს (დაახლოებით 225 წლის წინ ჩვენ წელთაღრიცხვამდე); აღნიშნულ თხზულებაში მოცემულია ამ წირების მანამდე ცნობილი ძირითადი თვისებანი, და ისეთი თვისებანიც, რომლებიც აღმოჩენილი იყო თვით მათ მიერ.

ამ პარაგრაფში მოყვანილი ფოკუსებისა და დირექტრისების აგების ხერხი და კონუსური კვეთების ფოკუსებისა და დირექტრისების მიმართ თვისებათა დამტკიცება მოცემული იყო 1822 წ. დანდელენის (Dandelin) მიერ. ჩვენ აქ აღვადგინეთ (უმნიშვნელო ცვლილებებით) Briot et Bouquet [1])-ის ცნობილ კურსში მოცემული დამტკიცებანი.

**202. მოცემული კონუსური კვეთის შიგება მოცემული კონუსიდან.** ადვილი საჩვენებელია, რომ ნებისმიერი ელიფსი და პარაბოლი შეიძლება მივიღოთ, როგორც ნებისმიერი მოცემული კონუსის გადაკვეთა სათანადო სიბრტყით. ჰიპერბოლის შემთხვევაში კი არსებობს შეზღუდვა; ამის შესახებ ქვემოთ იქნება აღნიშნული.

ახლა დავიწყოთ ელიფსის შემთხვევით. ვიგულისხმოთ, რომ მოცემულია მისი დიდი ღერძი $2a$ და ფოკალური მანძილი $2c<2a$. თუ ვისარგებლებთ წინა პარაგრაფის აღნიშვნებით, ვნახავთ, რომ $AA'B$ სამკუთხედში (ნახ. 131) ცნობილია $|AB|=2c$, $|AA'|=2a$ გვერდები და კუთხე $ABA'$, რომელიც უდრის $\frac{\pi}{2}-\alpha$, სადაც $\alpha$ კონუსის მსახველებით შედგენილი მახვი-

[1]) Lecons de géométrie analytique, 4-e édition, Paris, 1893.

ლი კუთხეა მის ღერძთან. ასეთი სამკუთხედი ყოველთვის შეიძლება ავაგოთ. მართლაც, გავატაროთ ნახაზის სიბრტყის ნებისმიერი $B$ წერტილიდან ნახევარწრფე $BA'$ და მონაკვეთი $BA$, სიგრძით $2c$, რომელიც $BA'$ წრფესთან ადგენს $\frac{\pi}{2}-\alpha$ კუთხეს; უკანასკნელად $A$ წერტილიდან შემოვხაზოთ წრეწირი, რადიუსით $2a$, რომელიც აუცილებლად გადაკვეთს ნახევარწრფეს რაღაც $A'$ წერტილში (რადგან, პირობის თანახმად, $2a > |BA| = 2c$).

ავაგებთ ჩა $AA'B$ სამკუთხედს, აღვმართოთ მისი $A'B$ გვერდის შუა წერტილიდან მართობი, $BA$ გვერდის გაგრძელების გადაკვეთის $O$ წერტილამდე.

ამნაირად მივიღებთ (ა) ნახაზის $OAA'$ სამკუთხედის ყველა ელემენტს, რომლებიც აკმაყოფილებენ ყველა მოთხოვნილ პირობებს.

გადავიდეთ ჰიპერბოლის შემთხვევაზე, აქაც ჩავთვალოთ მოცემულად $2a$ (ნამდვილი ღერძი) და $2c$ (ფოკალური მანძილი). ამ შემთხვევაში საკითხი დაიყვანება ისეთი $AA'B$ სამკუთხედის აგებაზე, რომლისთვისაც მოცემულია $|AA'| = 2a$, $|AB| = 2c$ გვერდები და $AA'$ გვერდის პირდაპირ მდებარე $ABA' = \frac{\pi}{2}-\alpha$ კუთხე (ნახ. 132). ვინაიდან ახლა $2c > 2a$, ამიტომ ასეთი აგება ყოველთვის არ არის შესაძლებელი. ცხადია, აგების შესაძლებლობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ გვერდი $|AA'| = 2a$ ნაკლები არ იყოს, $A$ წერტილიდან $A'B$ წრფეზე დაშვებული მართობის სიგრძეზე. ამ უკანასკნელის სიგრძე კი ტოლია $|AB| \cos\alpha = 2c\cos\alpha$. ამგვარად, აგების შესაძლებლობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ $2a > 2c\cos\alpha$, ანუ

$$\cos\alpha < \frac{a}{c}.$$

თუ $2\beta$-თი აღნიშნულია კუთხე ჰიპერბოლის ასიმპტოტებს შორის (ის, რომლის შიგნითაც იგია მოთავსებული), მაშინ $\cos\beta = \frac{a}{c}$. მაშასადამე, წინა უტოლობა გვაძლევს: $\cos\alpha < \cos\beta$, ე. ი. $\alpha > \beta$. ამგვარად, მოცემული ჰიპერბოლის მისაღებად, მოცემული კონუსის გადაკვეთით სიბრტყესთან, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ჰიპერბოლის ასიმპტოტებს შორის მოთავსებული კუთხე $2\beta$ არ აღემატებოდეს კონუსის გაშლის $2\alpha$ კუთხეს.

დასასრულ განვიხილოთ პარაბოლის შემთხვევა. ჩავთვალოთ მოცემულად მისი პარამეტრი $p$. შევაერთოთ სფეროს $C$ ცენტრი $A$ და $G$ წერტილებთან (აღნიშვნები იგივეა, რაც 133 ნახაზზე), მივიღებთ მართკუთხა $CAG$ სამკუთხედს, რომლის $AG$ კათეტი უდრის $\frac{p}{2}$, ხოლო $CAG$ კუთხე $\frac{\pi}{2}-\alpha$. ამგვარად, საკითხი დაიყვანება, ყოველთვის შესაძლებელ, მართკუთხა სამკუთხედის ელემენტარულ აგებაზე მოცემული კათეტითა და მასზე მილი კუთხით.

თუ ეს სამკუთხედი აგებულია, მაშინ $OA$ მონაკვეთის ასაგებად, რომელიც ახასიათებს გამკვეთი სიბრტყის მდებარეობას, საკმარისია $C$ წერტილიდან აღვმართოთ $AC$ წრფის პერპენდიკულარი, $AG$ წრფის გადაკვეთის $O$ წერტილამდე.

## III. კონუსური კვეთების განტოლებების ზოგიერთი უმარტივესი სახე. კონუსური კვეთების მსგავსება

გამოვიყვანოთ ელიფსის, ჰიპერბოლისა და პარაბოლის განტოლებათა ზოგიერთი სხვა უმარტივესი სახის განტოლება, რომლებიც სხვადასხვა საკითხში მეტად სასარგებლოა.

**§ 203. ჰიპერბოლის განტოლება ასიმპტოტების მიმართ.** თუ კოორდინატთა ღერძებად ჰიპერბოლის ასიმპტოტებს ავიღებთ, მაშინ მისი განტოლება მეტად მარტივ სახეს მიიღებს.

მართლაც, ჰიპერბოლის ნორმალური განტოლება შეიძლება დავწეროთ ასე:

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=1. \qquad (*)$$

თუ დეკარტის $Ox'y'$ კოორდინატებად მივიღებთ ასიმპტოტებს:

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \quad \text{და} \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0,$$

მაშინ გვექნება გარდაქმნის შემდეგი სახის ფორმულები (§ 99):

$$x'=k_1\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right),\quad y'=k_2\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right), \qquad (**)$$

სადაც $k_1$ და $k_2$, ნულისგან განსხვავებული, ნებისმიერი მუდმივი მამრავლებია. ამიტომ ახალ კოორდინატებში ჰიპერბოლის (*) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$x'y'=k, \qquad (1)$$

სადაც $k=k_1k_2$ მუდმივი სიდიდეა. ახალი სისტემის საკოორდინატო ვექტორები, საზოგადოდ, არ წარმოადგენენ ორტებს. თუ ჩვენ გვინდა გვქონდეს არაგანზოგადებული სისტემა, სათანადოდ უნდა შევარჩიოთ $k_1$ და $k_2$ მუდმივები. ამისათვის ამოვხსნათ (**) ტოლობანი $x$ და $y$ მიმართ, რაც მოგვცემს

$$k=l_1x'+l_2y',\ y=m_1x'+m_2y',$$

სადაც $(l_1,\ m_1)=\left(\frac{a}{2k_1},\ \frac{b}{2k_1}\right)$, $(l_2,\ m_2)=\left(\frac{a}{2k_2},-\frac{b}{2k_2}\right)$, როგორც ცნობილია, იქნებიან ახალი ღერძების საკოორდინატო ვექტორები. იმისათვის, რომ ახალი სისტემა არაგანზოგადებული იყოს, საჭიროა: $l_1^2+m_1^2=1$, $l_2^2+m_2^2=1$, საიდანაც მივიღებთ: $k_1^2=k_2^2=\frac{a^2+b^2}{4}$. თუ $k_1$ და $k_2$ ავიღებთ დადებითს, გვექნება $k_1=k_2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ და, მაშასადამე,

$$k=\frac{a^2+b^2}{4}. \qquad (2)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ მოცემული ჰიპერბოლის შეუღლებული ჰიპერბოლის განტოლებას იმავე ღერძების მიმართ ექნება სახე

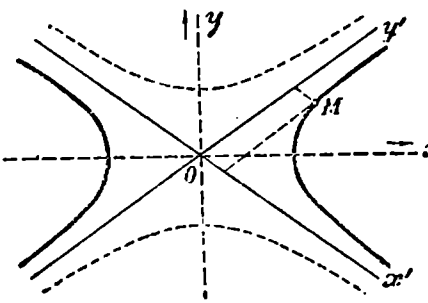
$$x'y'=-k. \qquad (3)$$

(1) და (3) ჰიპერბოლები 134 ნახაზზე გამოსახულია, შესაბამისად, მთლიანი და წყვეტილი ხაზებით.

(1) განტოლებიდან კიდევ ერთხელ ცხადად ჩანს, რომ კოორდინატთა $Ox'$, $Oy'$ ღერძები წარმოადგენს წირის ასიმპტოტებს. მართლაც, მაგალითად,

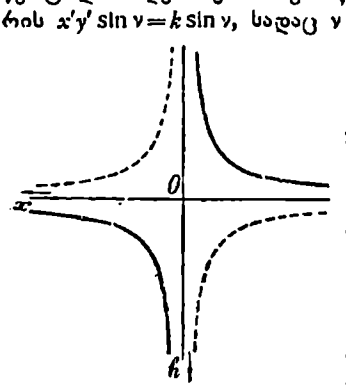
$$y' = \frac{k}{x'},$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ თუ $x'$ მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, მაშინ $y'$ მიისწრაფვის ნულისაკენ, ე. ი. წირის წერტილები უსასრულოდ უახლოვდებიან $Ox'$ ღერძს. ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ თუ $y'$ მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, მაშინ $x'$ მიისწრაფვის ნულისაკენ.



ნახ. 134.

(1) განტოლებას შემდეგი მარტივი გეომეტრიული შინაარსი აქვს: თუ ჰიპერბოლის რომელიმე $M$ წერტილიდან გავატარებთ ასიმპტოტების პარალელურ წრფეებს, მაშინ ამ წრფეებსა და ასიმპტოტებს შორის მოთავსებული პარალელოგრამის ფართი წარმოადგენს მუდმივ სიდიდეს, რომელიც დამოუკიდებელია $M$ წერტილის მდებარეობისაგან წირზე. მართლაც, ცხადია, რომ ეს ფართი უდრის $x'y' \sin\nu = k \sin\nu$, სადაც $\nu$ ასიმპტოტებს შორის მოთავსებული კუთხეა.



ნახ. 135.

ტოლფერდა ჰიპერბოლის შემთხვევაში ($a=b$), ასიმპტოტებს შორის მოთავსებული კუთხე მართია, და ამიტომ $Ox'y'$ ღერძების სისტემა მართკუთხოვანია (ნახ. 135).

**§ 204. კონუსური კვეთების პარამეტრული წარმოდგენა. აგება წერტილების მიხედვით.** თუ ელიფსის განტოლებას

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

ამოვხსნით რომელიმე ერთ-ერთი ცვლადის $x$ ან $y$-ის მიმართ, ჩვენ მივიღებთ მათ გამოსახულებას მეორე ცვლადის საშუალებით ორსახა ფუნქციის სახით; მაგ., თუ ამოვხსნით $y$-ის მიმართ, მივიღებთ:

$$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \qquad (2)$$

ამიტომ, ზოგჯერ სასურველია $x$ და $y$ ცვლადები გამოვსახოთ ახალი დამხმარე ცვლადის (პარამეტრის) ცალსახა ფუნქციების საშუალებით[1]).

[1]) ამით, როგორც მიღებულია გამოთქმა, ვაღწევთ (1) ფუნქციონალური დამოკიდებულების უნიფორმიზაციას.

ერთ-ერთი უმარტივესი ხერხი ამ მიზნის მისაღწევად მდგომარეობს შემდეგში. შევნიშნოთ, რომ ელიფსის ყველა იმ წერტილისათვის, რომლებისთვისაც $\left|\frac{x}{a}\right| \leq 1$, შეგვიძლია დავუშვათ, რომ

$$\frac{x}{a} = \cos\varphi \text{ ე. ი. } x = a\cos\varphi,$$

სადაც φ კუთხე ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ მოთავსებული $(0, \pi)$ საზღვრებში; ამით მოცემული $x$-ის შესაბამისი φ კუთხის სიდიდე მთლიანად განისაზღვრება. მაშინ (2) ფორმულა მოგვცემს: $y = \pm b\sin\varphi$. ვინაიდან, პირობის ძალით, $0 \leq \varphi \leq \pi$, გვექნება $\sin\varphi > 0$, ამიტომ ზედა ნიშანი უნდა ავიღოთ „ზედა" წერტილებისათვის ($y > 0$), ხოლო ქვედა ნიშანი „—ქვედა" წერტილებისათვის. ორმაგი ნიშნისაგან შეიძლება გავთავისუფლდეთ, თუ დავუშვებთ, რომ φ იცვლება $(0, 2\pi)$ შუალედში და თუ ავიღებთ მხოლოდ ზედა ნიშანს; მართლაც, ზემონათქვამიდან ცხადია, რომ წერტილი, რომელიც განზღვრულია კოორდინატებით:

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi, \tag{3}$$

ერთი მიმართულებით მოძრაობით შემოხაზავს ელიფსის ზედა ნაწილს, როცა φ გაირბენს მნიშვნელობებს 0-დან π-მდე, ხოლო შემდეგ—ქვედა ნაწილს, როცა φ გაირბენს მნიშვნელობებს π-დან $2\pi$-მდე.

φ პარამეტრს მეტად მარტივი გეომეტრიული მნიშვნელობა აქვს. მართლაც შემოვხაზოთ $O$ წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, ორი წრეწირი რადიუსებით $a$ და $b$ (ნახ. 136). გავატაროთ $O$ წერტილიდან სხივი, რომელიც $Ox$ ღერძთან ადგენს φ კუთხეს. ვთქვათ, იგი მცირე და დიდ წრეწირებს შესაბამისად $B$ და $A$ წერტილებში კვეთს. გავატაროთ კიდევ $B$ წერტილიდან $Ox$ ღერძის პარალელური წრფე $A$ წერტილიდან ამ ღერძზე დაშვებული პერპენდიკულარის გადაკვეთამდე. ვთქვათ, $M(x, y)$ აღნიშნავს ამ წერტილს. ცხადია, მაშინ გვექნება: $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$; მაშასადამე, $M(x, y)$ წერტილი ეკუთვნის ჩვენ ელიფსს და შეესაბამება პარამეტრის φ მნიშვნელობას.

ამგვარად, (3) განტოლებებში φ პარამეტრის გეომეტრიული მნიშვნელობა ნათელია: φ წარმოადგენს იმ კუთხეს, რომელსაც $OA$ სხივი ადგენს $Ox$ ღერძთან, სადაც $A$ დიდი წრეწირის წერტილია, რომელსაც იგივე აბსცისი აქვს, რაც $M$ წერტილს, და $Ox$ ღერძიდან მოთავსებულია იმავე მხარეზე, საითაც $M$.

ამასთანავე, ჩვენ ვღებულობთ ერთ-ერთ უმარტივეს ხერხს ელიფსის ნებისმიერი წერტილის აგებისათვის ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით. ამისათვის საკმარისია $OA$ სხივს მივცეთ სხვადასხვა მიმართულება და ვაწარმოოთ შესაბამისი $M$ წერტილების აგება ახლახან ნაჩვენები ხერხით.

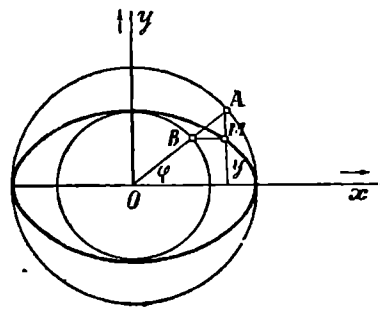
მკითხველს ვანდობთ დაამტკიცოს, რომ ჰიპერბოლი

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4}$$

პარამეტრულად შეიძლება წარმოდგენილ იქნას შემდეგნაირად:

$$x=\frac{a}{\cos\varphi},\quad y=b\operatorname{tg}\varphi. \tag{5}$$

ამასთანავე, ჰიპერბოლის ყველა წერტილის მისაღებად საკმარისია $\varphi$ ვცვალოთ $0\leq\varphi\leq 2\pi$ საზღვრებში, ანუ, რაც იგივეზე, დაიყვანება, $-\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\frac{3\pi}{2}$ საზღვრებში. სახელდობრ, როცა $\varphi$ იზრდება $-\frac{\pi}{2}$-დან $+\frac{\pi}{2}$-მდე $(x, y)$ წერტილი შემოხაზავს ჰიპერბოლის მარჯვენა შტოს, ხოლო როცა $\varphi$ იზრდება $+\frac{\pi}{2}$-დან $\frac{3\pi}{2}$-მდე — მარცხენა შტოს. $\varphi$-ს მნიშვნელობებს $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ შეესაბამებიან ჰიპერბოლის „უსასრულოდ დაშორებული“ წერტილები, სხვანაირად, როცა $\varphi$ უახლოვდება ერთ-ერთ ამ მნიშვნელობას, წერტილი $(x, y)$ მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ.



ნახ. 136.

$\varphi$ კუთხის გეომეტრიული მნიშვნელობა ნათელი ხდება ჰიპერბოლის იმ წერტილთა აგების შემდეგი ხერხიდან, რომლებიც მოცემულ $\varphi$ კუთხის მნიშვნელობას შეესაბამებიან.

შემოვხაზოთ $O$ წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, წრეწირები $a$ და $b$ რადიუსებით (ჩვენ შემთხვევაში $b$ შეიძლება იყოს მეტი, ნაკლები ან ტოლი $a$-ზე, ნახ. 137). გავატაროთ $O$-დან სხივი, რომელიც $Ox$ ღერძთან $\varphi$ კუთხეს ადგენს; ვთქვათ, $A$ და $B$ აღნიშნავენ მის გადაკვეთის წერტილებს პირველ და მეორე წრეწირებთან და ვთქვათ $AK$ და $BL$ წარმოადგენენ ამ სხივიდან აღმართულ მართობებს, რომლებიც $Ox$ ღერძს $K$ და $L$ წერტილებში ჰკვეთენ. თუ ახლა $K$ წერტილიდან აღვმართავთ $Ox$ ღერძის მართობს და ამ მართობზე, $Ox$ ღერძის იმავე მხრივ, საითაც $A$ და $B$ წერტილებია, ავიღებთ ისეთ $M$ წერტილს, რომ $|KM|=|LB|$, მაშინ $M$ წერტილი მიეკუთვნება ჩვენს ჰიპერბოლს და შეესაბამება მოცემულ $\varphi$ პარამეტრის მნიშვნელობას.

ამასთანავე, ჩვენ მივიღეთ ჰიპერბოლის ნებისმიერი რაოდენობის წერტილთა აგების უმარტივესი ხერხი.

ახლა განვიხილოთ პარაბოლის განტოლება

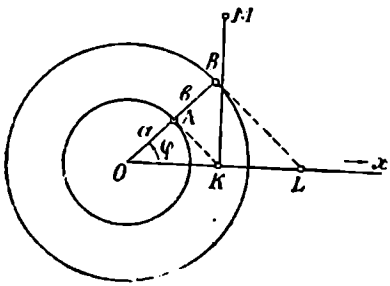
$$y^2=2px. \tag{6}$$

ეს უკანასკნელი იძლევა $x$ როგორც $y$ კოორდინატის ცალსახა ფუნქციას, ისე რომ, თუ დავუშვებთ $y=t$, მივიღებთ პარაბოლის მარტივ პარა-

მეტრულ წარმოდგენას ცალსახა ფუნქციების საშუალებით:

$$x=\frac{t^2}{2p},\quad y=t. \tag{7}$$

იმისათვის, რომ მივიღოთ პარაბოლის ყველა წერტილი საჭიროა $t$ ვცვალოთ $-\infty$-დან $+\infty$-მდე.

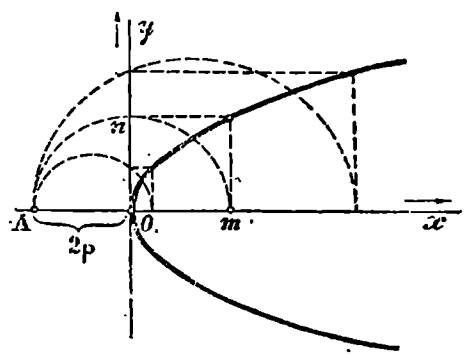



ნახ. 137.

(6) განტოლებას უშუალოდ მივყეებართ ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით პარაბოლის ნებისმიერი რაოდენობის წერტილთა აგების შემდეგ ხერხზე. ვთქვათ, $A$ აღნიშნავს $Ox$ ღერძის (მუდმივ) წერტილს აბსცისით $-2p$. პარაბოლის იმ წერტილის ასაგებად, რომლის აბსცისია $Om=x$, უნდა მოვიქცეთ ასე: ავაგოთ $Am$ მონაკვეთზე როგორც დიამეტრზე წრეწირი. ვთქვათ, $n$ წარმოადგენს ერთ-ერთ მის გადაკვეთის წერტილს $Oy$ ღერძთან (ნახ. 138). მაშინ $m$ და $n$ წერტილებიდან აღმართულ კოორდინატთა ღერძების მართობთა გადაკვეთა მოგვცემს ერთ-ერთ საძიებელ წერტილს (მეორე წერტილი სიმეტრიული იქნება $Ox$ ღერძის მიმართ).

მართლაც, ელემენტარული გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ მართკუთხა სამკუთხედის სიმაღლე ჰიპოტენუზის ნაკვეთების საშუალო პროპორციულია. ჩვენ შემთხვევაში $|On|=|y|$, წარმოადგენს სიმაღლეს $Anm$ სამკუთხედისა (ნახაზზე არ არის აღნიშნული) მართი კუთხით $n$ წერტილში. მაშასადამე, $|On|^2=2p|Om|$, ე. ი.

$$y^2=2px.$$




ნახ. 138.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ცხადია, რომ მოცემული წირი პარამეტრულად შეიძლება უამრავი სხვადასხვა ხერხით წარმოვადგინოთ. კერძოდ, ელიფსის, ჰიპერბოლისა და პარაბოლისათვის, გარდა ზემომოყვანილისა, არსებობს კიდევ უსასრულო სიმრავლე პარამეტრული წარმოდგენისა. ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ პარაბოლის (7) პარამეტრული წარმოდგენა წირის წერტილთა კოორდინატებს გამოსახავს პარამეტრის არა მარტო ცალსახა, არამედ რ ა ც ი ო ნ ა ლ უ რ ი ფუნქციებით. შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ელიფსს და ჰიპერ-

ბოლსაც ასეთიეე თვისება აქვთ, ე. ი. შეიძლება მათ პარამეტრულ წარმოდგენას მივაღწიოთ აგრეთვე (ძალზე მარტივი) რაციონალური ფუნქციების საშუალებით; მაგრამ ჩვენ ამაზე არ შევჩერდებით.

**§ 205. კონუსური კვეთების პოლარული განტოლებანი ფოკუსების მიმართ.** სამივე კონუსური კვეთა შეიძლება მეტად მარტივად წარმოვადგინოთ განტოლებებით პოლარულ კოორდინატებში, თუ პოლუსს მოვათავსებთ ერთ-ერთ ფოკუსში (პარაბოლის შემთხვევაში—ერთადერთ ფოკუსში). სრული გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ პოლარული ღერძი, პოლუსად მიღებულ ფოკუსიდან, მიმართულია უახლოეს წვეროსაკენ (პარაბოლის შემთხვევაში მის ერთადერთ წვეროსაკენ).

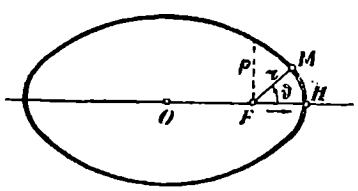
ელიფსის შემთხვევაში, პოლუსად ავიღოთ მარჯვენა ფოკუსი; მაშინ, პირობის თანახმად, პოლარული ღერძი მიმართული იქნება მარჯვნივ (ნახ. 139a).

§ 199-ის (1) ფორმულის თანახმად გვაქვს

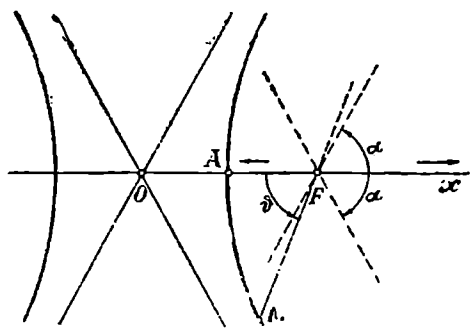
$$r = a - ex.$$

მაგრამ, მეორეს მხრივ, $x = \text{გეგ}_x \overrightarrow{OM} = \text{გეგ}_x (\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FM}) = c + r\cos\vartheta = ae + r\cos\vartheta$. ჩავსვათ $x$-ის ეს მნიშვნელობა წინა ფორმულაში, ცხადია, გარდაქმნების შემდეგ, მივიღებთ

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta}, \qquad (1)$$




ნახ. 139a.




ნახ. 139b.

სადაც $p = a(1 - e^2)$ ანუ, თუ მოვიგონებთ, რომ $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$:

$$p = a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a}. \qquad (2)$$

(1) განტოლება წარმოადგენს სწორედ ელიფსის საძიებელ პოლარულ განტოლებას. ვინაიდან ელიფსის შემთხვევაში $e < 1$, ამიტომ $1 + e\cos\vartheta$ ყოველთვის დადებითი სიდიდეა.

ჰიპერბოლის შემთხვევაში პოლუსად ავიღოთ, მაგალითად, ისევ მარჯვენა ფოკუსი. მაშინ პოლარული ღერძი $Ox$ ღერძის მოპირდაპირე მხრივ უნდა მივმართოთ (ნახ. 139b). § 199-ის (2) ფორმულის ძალით, გვაქვს: $r = \pm(ex - a)$ (+ მარჯვენა, ხოლო — მარცხენა შტოსათვის).

მაგრამ $x=\text{გეგ}_x \overrightarrow{OM}=\text{გეგ}_x \overrightarrow{OF}+\text{გეგ}_x \overrightarrow{FM}=ae+\text{გეგ}_x \overrightarrow{FM}$.

ვინაიდან პოლარული ღერძი $Ox$ ღერძის მოპირდაპირე მხრით არის მიმართული, ამიტომ $\text{გეგ}_x \overrightarrow{FM}=-r\cos\vartheta$. მაშასადამე, გვექნება:

$$r=\pm(ae^2-er\cos\vartheta-a),$$

საიდანაც

$$r=\pm\frac{p}{1\pm e\cos\vartheta}, \tag{3}$$

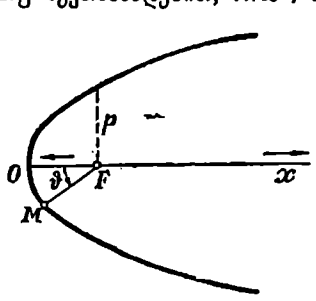
სადაც

$$p=a(e^2-1)=\frac{b^2}{a} \tag{4}$$

და სადაც ნიშანი + აიღება მარჯვენა, ხოლო ნიშანი — მარცხენა შტოსათვის. შეიძლება (3)-ში დავკმაყოფილდეთ მხოლოდ ზედა ნიშნებით, ე. ი. ავიღოთ

$$r=\frac{p}{1+e\cos\vartheta},$$

ანუ შეეთანხმდებით, რომ $r$-სათვის დავუშვათ აგრეთვე უარყოფითი მნიშვნელობებიც იმ პირობით, რომ ამ შემთხვევაში $\overrightarrow{FM}$ ვექტორი ვატაროთ არა $\vartheta$ კუთხით, არამედ $\pi+\vartheta$ კუთხით, ე. ი. მიმართულებით, რომელიც $\vartheta$ კუთხით ნაჩვენები მიმართულების საწინააღმდეგოა („პოლარულ კოორდინატთა განზოგადებული სისტემა").



ნახ. 139c.

მართლაც, თუ წინა ფორმულაში $\vartheta$-ს შევცვლით $\pi+\vartheta$-თი და, ამასთანავე, $r$-ს შევცვლით $-r$-ით, მივიღებთ ფორმულას:

$$-r=\frac{p}{1-e\cos\vartheta},\quad \text{ანუ}\quad r=\frac{-p}{1-e\cos\vartheta},$$

ე. ი. ფორმულას, რომელიც (3)-ში ქვედა ნიშნებს შეესაბამება.

$\vartheta$ კუთხის ცვალებადობის შუალედად შეგვიძლია ავიღოთ შუალედი (სიდიდით $2\pi$):

$$-\pi+\alpha\leq\vartheta\pi+\alpha,$$

სადაც $\alpha$ აღნიშნავს მახვილ კუთხეს ასიმპტოტებსა და $Ox$[1]) ღერძს შორის.

ამ შემთხვევაში მარჯვენა შტოზე გვექნება $-\pi+\alpha<\vartheta<\pi-\alpha$, ხოლო მარცხენაზე $\pi-\alpha<\vartheta<\pi+\alpha$; იხ. ქვემოთ სავარჯიშო.

---

[1]) ეს კუთხე განისაზღვრება ფორმულით: $\text{tg}\,\alpha=\frac{b}{a}$, საიდანაც

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{e}.$$

ბოლოს, პარაბოლის შემთხვევაში (ნახ. 139c), § 200-ის ძალით, გვაქვს:

$$r=\frac{p}{2}+x$$

სადაც

$$x=\text{გეგ}_{\bullet}\,\overrightarrow{OM}=\text{გეგ}_{x}\,\overrightarrow{OF}+\text{გეგ}_{x}\,\overrightarrow{FM}=\frac{p}{2}-r\cos\vartheta.$$

ამ მნიშვნელობის წინა ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ

$$r=\frac{p}{1+\cos\vartheta}.$$

ამგვარად, ჩვენ ვხედავთ, რომ სამივე შემთხვევაში კონუსური კვეთების განტოლებას აქვს (1) სახე; განსხვავება მათ შორის მხოლოდ ის არის, რომ ელიფსისათვის $e<1$, პარაბოლისთვის $e=1$, ხოლო ჰიპერბოლისთვის $e>1$.

პარაბოლის შემთხვევაში, სიდიდე $p$ წოდებული იყო მის პარამეტრად. ელიფსისა და ჰიპერბოლის განტოლებებში შემავალ $p=\frac{b^2}{a}$ სიდიდეს აგრეთვე ეწოდება შესაბამისი წირის პარამეტრი. სამივე შემთხვევაში პარამეტრს მეტად მარტივი გეომეტრიული მნიშვნელობა აქვს: იგი უდრის სიგრძეს პერპენდიკულარისა, რომელიც აღმართულია ფოკუსის შემცველ ღერძისადმი ფოკუსიდან წირის ერთ-ერთ წერტილში გადაკვეთამდე. სხვა სიტყვებით, $p$ არის „ორდინატი ფოკუსთან". მართლაც, ამ ორდინატის მნიშვნელობას მივიღებთ, თუ (1) ფორმულაში დავუშვებთ $\vartheta=\frac{\pi}{2}$, რაც მოგვცემს

$$r=p.$$

**ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო**

1. (1) ფორმულის საშუალებით შეისწავლეთ ჰიპერბოლის შემთხვევაში $r$-ის ცვალებადობა $\vartheta$ კუთხის ცვალებადობის დროს.

პ ა ს უ ხ ი. როცა $\vartheta=\pm(\pi-\alpha)$, გვაქვს:

$$\cos\vartheta=-\cos\alpha=-\frac{1}{e}\ \text{და}\ 1+e\cos=0.$$

როცა $\vartheta$ მოთავსებულია შუალედში: $-(\pi-\alpha)<\vartheta<\pi-\alpha$, მაშინ $1+e\cos\vartheta>0$, $r>0$. როცა $\vartheta$ იზრდება $-(\pi-\alpha)$-დან $+(-\alpha)$-მდე, მაშინ $r$ ჯერ კლებულობს $+\infty$-დან მინიმუმამდე $\frac{p}{1+e}$ (როცა $\vartheta=0$, რაც შეესაბამება $A$ წვეროს) და შემდეგ ხელახლა იზრდება $+\infty$-მდე. როცა $\vartheta$ გაივლის $\pi-\alpha$ მნიშვნელობას $r$ უცბად გადადის $+\infty$-დან $-\infty$-სკენ და $M$ წერტილი უცბად გადახტება მარცხენა შტოზე.

ინარჩუნებს რა ყოველთვის უარყოფით მნიშვნელობებს, $r$ ჯერ იზრდება (აბსოლუტური მნიშვნელობით კლებულობს) $-\frac{p}{e-1}$ სიდიდემდე (როცა $\vartheta=\pi$ და შეესაბამება $A'$ წვეროს), ხოლო შემდეგ ხელახლა კლებულობს $-\infty$-მდე, როცა $\vartheta$ უახლოვდება $\pi+\alpha$ მნიშვნელობას.

2. აჩვენეთ, რომ განტოლება

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\vartheta - \vartheta_0)},$$

სადაც $\vartheta_0$—მუდმივია, არის ისეთი კონუსური კვეთის პოლარული განტოლება, რომლის ფოკუსი მოთავსებულია პოლუსში, ხოლო უახლოეს წვეროსაკენ მიმართული ფოკალური ღერძი [1]) პოლარულ ღერძთან ადგენს $\vartheta_0$ კუთხეს.

3. მოძებნეთ ელიფსისა და ჰიპერბოლის პოლარული განტოლებანი, თუ პოლუსი აღებულია ცენტრში, ხოლო პოლარული ღერძი მიმართულია ფოკალური ღერძის გასწვრივ.

პ ა ს უ ხ ი. ელიფსისათვის:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{b^2};$$

ჰიპერბოლისათვის:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\vartheta}{a^2} - \frac{\sin^2\vartheta}{b^2}.$$

**§ 206. კონუსური კვეთების განტოლებანი წვეროების მიმართ.** აღვნიშნოთ ელიფსისა და ჰიპერბოლის განტოლებათა კიდევ ერთი სახე, ანალოგიური პარაბოლის $y^2 = 2px$ განტოლებისა.

სახელდობრ, ავიღოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სათავედ წირის (ელიფსის ან ჰიპერბოლის) ერთ-ერთი წვერო, ხოლო $Ox$ ღერძი მივმართოთ $O$-დან უახლოესი ფოკუსისაკენ. ვთქვათ, $O'x'y'$ აღნიშნავს ღერძების იმ სისტემას, რომელიც წინათ (§§ 195 და 197) აღნიშნული იყო $Oxy$-ით, ისე რომ ელიფსისა და ჰიპერბოლის განტოლებანი ამ ღერძების მიმართ, შესაბამისად, ასე დაიწერება:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \text{ და } \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1. \qquad (*)$$

ელიფსის შემთხვევაში ახალ სათავედ შეიძლება მარცხენა წვერო ავიღოთ, და მაშინ $Ox$ ღერძს იგივე მიმართულება ექნება, რაც $O'x'$. ჰიპერბოლის შემთხვევაში კი, სათავე შეიძლება მარჯვენა წვეროში მოვათავსოთ, და მაშინ $Ox$ ღერძი, როგორც პირველ შემთხვევაში, მიმართული იქნება $O'x'$-ის გასწვრივ.

ძველ $(x'y')$ და ახალ $(x, y)$ კოორდინატებს შორის დამოკიდებულება ელიფსის შემთხვევაში მოცემული იქნება ფორმულებით: $x' = x - a$, $y' = y$.

ჩავსვათ ეს გამოსახულებანი (*) განტოლებათაგან პირველში, ცხადი გამარტივებების შემდეგ, მივიღებთ

$$y^2 = 2px - qx^2,$$

სადაც

$$p = \frac{b^2}{a}$$

[1]) ე. ი. ფოკუსებზე (პარაბოლის შემთხვევაში ფოკუსზე) გამავალი სიმეტრიის ღერძი.

ელიფსის პარამეტრია (§ 205), ხოლო

$$q=\frac{b^2}{a^2}.$$

ჰიპერბოლის შემთხვევაში გვექნება: $x'=x+a$, $y'=y$ და (*) ფორმულების მეორე განტოლება მოგვცემს:

$$y^2=2px+qx^2,$$

სადაც $p=\frac{b^2}{a}$ ჰიპერბოლის პარამეტრია, ხოლო $q=\frac{b^2}{a^2}$, ე. ი. $p$ და $q$ ისეთივე მნიშვნელობანი აქვთ, რაც ელიფსის შემთხვევაში.

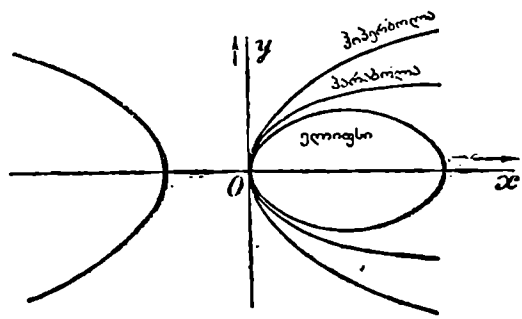
ახლა გავიხსენოთ წინათ გამოყვანილი პარაბოლის განტოლება, მივიღებთ შემდეგ შედეგს: თუ მართკუთხა კოორდინატთა სათავეს ავიღებთ კონუსური კვეთის წვეროში, ხოლო $Ox$ ღერძს მივმართავთ უახლოეს ფოკუსისაკენ, მაშინ:

$$y^2=2px-qx^2 \quad \text{(ელიფსისათვის)}, \tag{1}$$
$$y^2=2px \quad \text{(პარაბოლისათვის)}, \tag{2}$$
$$y^2=2px+qx^2 \quad \text{(ჰიპერბოლისათვის)}. \tag{3}$$

(1) — (3) ფორმულები შეიძლება გავაერთიანოთ ერთ ფორმულაში, თუ შევნიშნავთ, რომ ელიფსის შემთხვევაში $q=\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2}=1-e^2$, ხოლო ჰიპერბოლის შემთხვევაში $\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=e^2-1$. ამიტომ, ჩვენი ფორმულები გაერთიანდება შემდეგ ერთ ფორმულაში:

$$y^2=2px+(e^2-1)x^2. \tag{4}$$

როცა $e<1$ გვექნება ელიფსი, როცა $e>1$ — ჰიპერბოლი, ხოლო როცა $e=1$ — პარაბოლი.



ნახ. 140.

140-ე ნახაზზე ეს სამი წირი წარმოდგენილია ერთი და იგივე ღერძების სისტემის მიმართ. (1) — (3) ფორმულებიდან ცხადია, რომ პარამეტრის ერთი და იგივე მნიშვნელობისათვის, ელიფსის, პარაბოლისა და ჰიპერბოლის წერტილებისათვის $(x, y_1)$, $(x, y_2)$, $(x, y_3)$, რომლებსაც ერთი და იგივე $x>0$ აბსცისი აქვთ, გვექნება:

$$|y_1|<|y_2|<|y_3|.$$

ხ ა ვ ა რ ჯ ი შ ი

გამოსახეთ ელიფსისა და ჰიპერბოლის შემთხვევაში $a$ ნახევარღერძი $p$ და $e$ სიდიდეების საშუალებით, და გამოიკვლიოთ თუ რა ემართებათ ამ წირებს, თუ მუდმივი $p$-სათვის ექსცენტრისიტეტი $e$ მიისწრაფვის ერთისაკენ.

პ ა ს უ ხ ი. $a=\frac{p}{1-e^2}$ (ელიფსისათვის), $a=\frac{p}{e^2-1}$ (ჰიპერბოლისათვის). მაშასადამე, როცა $e$ მიისწრაფვის ერთისაკენ, ელიფსის მარჯვენა წვერო მიდის უსასრულობაში: ელიფსი მიისწრაფვის პარაბოლისაკენ: $y^2=2px$. ასევე ჰიპერბოლის მარცხენა შტო მთლიანად მიდის უსასრულობაში, მარჯვენა კი მიისწრაფვის იმავე პარაბოლისაკენ.

**§ 207. მსგავსი კონუსური კვეთები.** ეს თავი დავამთავროთ კონუსური კვეთების მსგავსობის საკითხის გამოკვლევით [1]).

ჯერ განვიხილოთ ელიფსების შემთხვევა და ვაჩვენოთ, რომ ელიფსის ყოველი მსგავსი ნაკვთი აგრეთვე ელიფსია, რომლის ნახევარღერძები მოცემული ელიფსის ნახევარღერძების პროპორციულია.

მართლაც, ვთქვათ, გვაქვს მოცემული $\Gamma$ ელიფსის მსგავსი ნაკვთი. მოვიყვანოთ იგი $\Gamma$ ელიფსის ჰომოთეტურ [2]) მდებარეობაში, და შემდეგ მივანიჭოთ მას ისეთი გადატანითი გადაადგილება, რომ მსგავსობის ცენტრი დაემთხვეს ელიფსის ცენტრს [3]); აღვნიშნოთ ჩვენი ნაკვთის ახალი მდებარეობა $\Gamma'$-ით.

ავიღოთ ელიფსის განტოლება ნორმალური სახით:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1}$$

ვთქვათ, $M'(x', y')$ არის $\Gamma'$ ნაკვთის წერტილი, რომელიც შეესაბამება ელიფსის $M(x, y)$ წერტილს. პირობის თანახმად გვაქვს:

$$\overrightarrow{OM'}=k\cdot\overrightarrow{OM},$$

სადაც $k$ მუდმივია, საიდანაც

$$x'=kx,\ y'=ky,\ x=\frac{x'}{k},\ y=\frac{y'}{k}.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი (1)-ში, მივიღებთ $\Gamma'$ წირის განტოლებას

$$\frac{x'^2}{k^2a^2}+\frac{y'^2}{k^2b^2}=1. \tag{2}$$

მაშასადამე, $\Gamma'$ წარმოადგენს ელიფსს, რომელსაც იგივე სიმეტრიის ღერძები და იგივე ცენტრი აქვს, რაც მოცემულს და რომლის ნახევარღერძებია

$$a'=|k|a,\quad b'=|k|b, \tag{3}$$

[1]) სახოგადოდ მსგავსობათა შესახებ იხ. § 77.

[2]) იხ. § 77.

[3]) § 77-ში დამტკიცებულია, რომ ეს ყოველთვის შესაძლებელია.

ეს კი ჩვენ დებულებას ამტკიცებს. ცხადია, რომ პირიქითაც, თუ ორი ელიფსის ნახევარღერძები პროპორციულია, მაშინ ეს ელიფსები მსგავსნი არიან.

$\Gamma'$ და $\Gamma''$ მსგავსი ელიფსების ექსცენტრისიტეტები $e$ და $e'$ ცხადია, ერთმანეთის ტოლია, რადგან

$$e'^2=\frac{k^2a^2-k^2b^2}{k^2a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=e^2.$$

პირიქით, ცხადია, რომ თუ $e'=e$, მაშინ ელიფსების ნახევარღერძები პროპორციულია, ვინაიდან ამ შემთხვევაში

$$\frac{a'^2-b'^2}{a'^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}$$

და, მაშასადამე, $\frac{b'^2}{a'^2}=\frac{b^2}{a^2}$, ე. ი. $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}$.

სრულებით ასევე დავამტკიცებთ, რომ მოცემული ჰიპერბოლის ყოველი მსგავსი ნაკვთი, არის აგრეთვე ჰიპერბოლი, რომლის გრძივი და განივი ნახევარღერძები შესაბამისად მოცემული ჰიპერბოლის გრძივი და განივი ნახევარღერძების პროპორციულია და, პირიქით, რომ ორი ჰიპერბოლი, რომლებიც ამ პირობას აკმაყოფილებენ, მსგავსია.

აქედან გამომდინარეობს, რომ მსგავსი ჰიპერბოლების ექსცენტრისიტეტები თანატოლია და, რომ პირიქითაც, თანატოლექსცენტრისიტეტებიანი ჰიპერბოლები მსგავსნი არიან.

დასასრულ დავამტკიცოთ, რომ პარაბოლის მსგავსი ნებისმიერი ნაკვთი აგრეთვე პარაბოლია, და რომ ყველა პარაბოლი ურთიერთმსგავსია. მართლაც, ვთქვათ, რომ $\Gamma''$ არის

$$y^2=2px$$

პარაბოლის მსგავსი ნაკვთი, მოთავსებული ისეთნაირად, რომ მსგავსობის ცენტრი კოორდინატთა სათავეს ემთხვეოდეს. წინანდელის ანალოგიურად გვექნება: $x=\frac{x'}{k}$, $y=\frac{y'}{k}$, საიდანაც

$$y'^2=2pkx'.$$

ეს არის ისეთი პარაბოლი, რომლის წვერო და ღერძი მოცემული პარაბოლის წვეროსა და ღერძს ემთხვევა. მართლაც, თუ $k>0$, მაშინ, თუ დავუშვებთ $p'=pk$ მივიღებთ პარაბოლის ნორმალურ განტოლებას $y'^2=2p'x'$, $p'$ პარამეტრით. თუ $k<0$ მაშინ, დავუშვებთ რა

$$p'=-kp>0,$$

მივიღებთ:

$$y'^2=-2p'x'.$$

თუ ახლა $Ox$ ღერძის მიმართულებას პირუკუ მიმართულებით შევცვლით, მაშინ $x'$-ის ნაცვლად უნდა დავწეროთ $-x'$, და ჩვენ ხელახლა მივიღებთ განტოლებას:

$$y'^2 = 2p'x';$$

ამ პარაბოლს ჩაზნექილობა მოცემული პარაბოლის ჩაზნექილობის საწინააღმდეგო მხარეზე ექნება. ორივე შემთხვევაში $\Gamma'$ პარაბოლის პარამეტრი არის:

$$p' = |k| \cdot p$$

$|k|$-ს სათანადო შერჩევით შეგვიძლია მივიღოთ პარაბოლი ნებისმიერი პარამეტრით, რომელიც მოცემულის მსგავსია. მაშასადამე, ყველა პარაბოლი ურთიერთმსგავსია.

ზემონათქვამიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ორი კონუსური კვეთის მსგავსობისათვის აუცილებელი და საკმარისია მათი ექსცენტრისიტეტების ტოლობა.

შევნიშნოთ კიდევ, რომ მეორე რიგის ჰომოთეტური წირების სიმეტრიის ღერძები ურთიერთ პარალელურია (კერძოდ, ურთიერთ პარალელურია ფოკალური ღერძები).

ეს იქიდან გამომდინარეობს, რომ, როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, ერთერთი ამ წირის გადატანითი გადაადგილებით შეიძლება სიმეტრიის ღერძები ერთმანეთს დავამთხვიოთ (ამასთანავე, ფოკალური ღერძი შეუთავსდება აგრეთვე ფოკალურს).

ბოლოს, ადვილი სანახავია, რომ თუ ორი ელიფსი ან ორი ჰიპერბოლი ჰომოთეტურია, $k$ მსგავსობის ფარდობით, მაშინ ისინი ჰომოთეტური არიან $-k$ მსგავსობის ფარდობითაც.

ეს უშუალოდ ცხადია იმ შემთხვევაში, როცა ჰომოთეტური ელიფსების (ანუ ჰიპერბოლების) ცენტრები თანხვედნილია, რადგანაც, მაგალითად, ელიფსის შემთხვევაში, $k$-ს $-k$-თი შეცვლით (2) განტოლება არ იცვლება.

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ ერთ-ერთი ნაკვთის გადატანითი გადაადგილების დროს ჰომოთეტობა შენარჩუნებულია, ამასთანავე, შენარჩუნებულია მსგავსობის ფარდობაც (იცვლება მხოლოდ მსგავსობის ცენტრი), მაშინ გამოთქმული დებულება ცხადი გახდება.

# თავი მეოთხე

## მეორე რიგის წირების გეგმილური თვისებანი. მხები და პოლარი

ახლა გადავიდეთ ზოგადი განტოლებით მოცემული მეორე რიგის წირების შესწავლაზე. VI თავის ბოლოში ნათქვამის თანახმად, ბუნებრივია დავიწყოთ ამ წირების გეგმილური თვისებებით და შემდეგ გადავიდეთ აფინურ და მეტრიულ თვისებებზე. ჩვენ ასეც მოვიქცევით, თუმცა ასეთი წესი ერთხელ უკვე დავარღვიეთ, როცა წინა თავში მეტრიული ხასიათის განსაზღვრებით დავიწყეთ. ჩვენ ასე მოვიქეცით მხოლოდ იმ მიზნით, რომ თვალსაჩინო მასალა წინ წაგვეძღოლა უფრო განყენებულისათვის.

### I. მეორე რიგის წირების გეგმილური კლასიფიკაცია

**§ 208. აღნიშვნები.** ვთქვათ, $x$, $y$ აღნიშნავენ წერტილის (არაერთგვაროვან) დეკარტის კოორდინატებს. მეორე ხარისხის უზოგადეს განტოლებას ამ ცვლადების მიმართ აქვს სახე:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

ერთგვაროვანი დეკარტის კოორდინატებში $x_1$, $x_2$, $x_3$ $\left(x = \frac{x_1}{x_3},\ y = \frac{x_2}{x_3}\right)$ ეს განტოლება ასე გამოისახება (§ 174):

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1x_3 + ex_2x_3 + fx_3^2 = 0.$$

იმისათვის, რომ ფორმულებს სიმეტრიული სახე მივცეთ კოეფიციენტები $x_ix_j$ სახის ნაშრავლებთან აღვნიშნოთ $2a_{ij}$(თუ $i \neq j$), ხოლო კოეფიციენტები $x_i^2$ სახის წევრებთან $x_{ii}$, ისე რომ წინა განტოლების მარცხენა მხარე, რომელსაც, სიმოკლისათვის, ჩვენ $\Phi(x_1, x_2, x_3)$-თ აღვნიშნავთ, ახლა ასე დაიწერება [1]):

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2. \quad (1)$$

---

[1]) ჩვენ მივიღებთ, რომ ჩვენ შემთხვევაში $a_{ji}$ იმასვე აღნიშნავს, რასაც $a_{ij}$. საჭიროების შემთხვევაში ნიშნაკებს შემდეგში დავწერთ ამა თუ იმ რიგით.

$\Phi(x_1, x_2, x_3)$ პოლინომი წარმოადგენს კვადრატულ ფორმას[1]) $x_1, x_2, x_3$ სამი ცვლადის მიმართ. ამის შესაბამად განტოლების მარცხენა მხარეს დეკარტის არაერთგვაროვან კოორდინატებში ექნება სახე:

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}; \tag{1a}$$

$F(x, y)$ არის (საზოგადოდ არაერთგვაროვანი) მეორე ხარისხის პოლინომი.

ერთგვაროვან კოორდინატებში მეორე რიგის წირის უზოგადეს განტოლებას აქვს სახე:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{2}$$

ხოლო არაერთგვაროვან კოორდინატებში კი

$$F(x, y) = 0. \tag{3}$$

$F(x, y)$ პოლინომი $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ ფორმასთან დაკავშირებულია ტოლობით

$$F(x, y) = \Phi(x, y, 1). \tag{4}$$

თავის მხრივ, $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ შეიძლება მივიღოთ $F(x, y)$-დან თუ $x$, $y$-ს შევცვლით $x_1$, $x_2$ და ცალკეულ წევრებს გავამრავლებთ $x_3$-ის ისეთ ხარისხზე, რომ მივიღოთ მეორე რიგის ერთგვაროვანი პოლინომი („ერთგვაროვნებამდე შევსება").

შემდეგში ჩვენ გამოვიყენებთ კიდევ ასეთ აღნიშვნებს. $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ ფორმის $x_1$, $x_2$, $x_3$ ნაწილობრივი წარმოებულების ნახევრებს აღვნიშნავთ, შესაბამად, $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$-თ, ისე რომ:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \Phi_3 &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ცხადი სიმეტრიულობის გამო, ერთსა და იმავე კოეფიციენტებს ჩვენ სხვადასხვა სტრიქონში ვწერთ სხვადასხვანაირად; მაგ., მეორე სტრიქონში კოეფიციენტი $a_{12}$ აღნიშნულია $a_{21}$-ით. ამით ვაღწევთ იმას, რომ პირველი სტრიქონის ყველა კოეფიციენტის პირველი ნიშნაკი არის 1, მეორე სტრიქონის —2, მესამის —3.

ანალოგიურად დავწერთ:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ F_2 &= \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

[1]) იხ. დამატება § 10.

უშუალო შემოწმებით დავრწმუნდებით, რომ ყოველთვის აღგილი აქვს იგივობას („ეილერის ფგივობა“):

$$\Phi(x_1, x_2, x_3)=x_1\Phi_1+x_2\Phi_2+x_3\Phi_3. \tag{7}$$

თუ წინა იგივობაში დავუშვებთ: $x_3=1$, $x_1=x$, $x_2=y$, მაშინ იგი მიიღებს სახეს:

$$F(x, y)=x\Phi_1(x, y, 1)+y\Phi_2(x, y, 1)+\Phi_3(x, y, 1). \tag{7a}$$

$\Phi_1(x, y, 1)$-ის და $\Phi_2(x, y, 1)$-ის ნაცვლად ჩვენ შეგვეძლო მარტივად დაგვეწერა $F_1(x, y)$ და $F_2(x, y)$, მაგრამ ეს არ გავაკეთეთ სიმეტრიის შენარჩუნების მიზნით.

ბოლოს, $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ კვადრატულ ფორმასთან ერთად, ჩვენ მოგვიხდება ზოგჯერ $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ ცვლადების მასთან დაკავშირებული ორადწრფივი ფორმის [1])

$$\begin{aligned}&\Omega(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3=\\ &=y_1\Phi_1(x_1, x_2, x_3)+y_2\Phi_2(x_1, x_2, x_3)+y_3\Phi_3(x_1, x_2, x_3)=\\ &=(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)y_1+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)y_2+\\ &\quad+(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3)y_3.\end{aligned} \tag{8}$$

განხილვა.

ეს ორადწრფივი ფორმა, ცხადია, სიმეტრიულია, ე. ი. არ იცვლის თავის მნიშვნელობას, თუ როლებს შევუცვლით $x$-ებსა და $y$-ებს:

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3)=\Omega(y_1, y_2, y_3; x_1, x_2, x_3). \tag{9}$$

წერის სიმოკლისათვის, ჩვენ ხშირად $\Omega(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3)$-ს აღვნიშნავთ მარტივად $\Omega(x; y)$-ით.

$\Phi(x_1, x_2, x_3)$ ფორმა მიიღება $\Omega(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3)$ ფორმიდან თუ დავუშვებთ, რომ: $x_1=y_1$, $x_2=y_2$, $x_3=y_3$, ისე რომ $\Phi(x_1, x_2, x_3)=\Omega(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3)$ ანუ მოკლედ:

$$\Omega(x; x)=\Phi(x_1, x_2, x_3). \tag{10}$$

$\Omega$ ორადწრფივ ფორმას ეწოდება პოლარული ფორმა $\Phi$ კვადრატული ფორმის მიმართ.

უშუალო გამოთვლებით ადვილად შევამოწმებთ შემდეგ იგივობას, რომლითაც ჩვენ ძალიან ხშირად ვისარგებლებთ:

$$\Phi(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)=\Omega(x; x)+2\Omega(x; y)+\Omega(y; y). \tag{11}$$

მარჯვენა მხარეში $\Omega(x; x)$ და $\Omega(y; y)$ ფორმების ნაცვლად ჩვენ შეგვეძლო შესაბამად დაგვეწერა $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ და $\Phi(y_1, y_2, y_3)$, მაგრამ ეს არ გავაკეთეთ სიმეტრიულობის თვალსაზრისით.

შევნიშნოთ კიდევ ერთი იგივობა, რომელიც ადვილად გამოიყვანება წინა იგივობიდან და რომელიც უშუალოდაც ადვილად შეიძლება აგრეთვე შევამოწმოთ:

$$F(x+x', y+y')=\varphi(x, y)+2[xF_1(x', y')+yF_2(x', y')]+F(x', y'), \tag{11a}$$

[1]) იხ. დამატება § 10.

სადაც

$$\varphi(x,\ y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2 \tag{12}$$

არის კვადრატული ფორმა, რომელიც წარმოადგენს მეორე რიგის წევრთა ერთობლიობას $F(x,\ y)$ პოლინომში.

წერის გამარტივებისათვის ზოგჯერ $x_1$, $x_2$, $x_3$ ერთგვაროვან კოორდინატებს $x$, $y$, $t$ სიდიდეებით აღვნიშნავთ. თუ $x$, $y$, $t$ სიდიდეების შემცველ განტოლებებში დავუშვებთ $t=1$, მივიღებთ შესაბამ ფორმულებს არაერთგვაროვან კოორდინატებში.

აქამდე ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ $x_1$, $x_2$, $x_3$ წერტილის დეკარტის ერთგვაროვანი კოორდინატებია; მაგრამ, ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ აგრეთვე, რომ $x_1$, $x_2$, $x_3$ წარმოადგენენ ერთგვაროვან გეგმილურ კოორდინატებს.

საზოგადოდ მთელ ამ თავში, ყველგან სადაც წინააღმდეგზე ცალკე არ არის მითითებული, $x_1$, $x_2$, $x_3$ კოორდინატების (ანუ $x$, $y$, $t$ კოორდინატების) ქვეშ შეიძლება ზოგადი სახის ერთგვაროვანი გეგმილური კოორდინატები ვიგულისხმოთ.

ჩვენ ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ $a_{ij}$ კოეფიციენტები ერთდროულად ნულს არ უდრიან. გარდა ამისა, თუ წინააღმდეგზე ცალკე არ არის მითითებული, ვიგულისხმებთ, რომ ყველა $a_{ij}$ კოეფიციენტი ნამდვილია.

ძალიან ხშირად ჩვენ საქმე გვექნება

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{13}$$

დეტერმინანტთან, რომელსაც $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3)$ კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტი ეწოდება.

$a_{ij}$ ელემენტების ალგებრულ დამატებებს აღვნიშნავთ $A_{ij}$-ით. კერძოდ,

$$A_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a^2_{12} \tag{14}$$

წარმოადგენს, (12) ფორმულის $\varphi(x,\ y)$ კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტს.

შენიშვნა. $A$ დისკრიმინანტის შედგენის წესი ყველაზე მარტივად ასე უნდა დავიმახსოვროთ: უნდა ავიღოთ $\Phi$ ფორმის $x_1$, $x_2$, $x_3$ ცვალებადებით ნაწილობრივი წარმოებულების ნახევრები და შემდეგ მიღებული $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$ წრფივი ფორმების კოეფიციენტებიდან შევადგინოთ დეტერმინანტი; იხ. (5) ფორმულები. მაგალითად, თუ

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1^2+x_2^2-8x_1x_3+x_3^2,$$

მაშინ

$$\Phi_1=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}= 1\cdot x_1+0\cdot x_2-4\cdot x_3,$$
$$\Phi_2=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}= 0\cdot x_1+1\cdot x_2+0\cdot x_3,$$
$$\Phi_3=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}=-4\cdot x_1+0\cdot x_2+1\cdot x_3;$$

მაშასადამე,

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 1\end{vmatrix}=-15.$$

$A_{33}$ არის უკანასკნელი დეტერმინანტის მარჯვენა ქვედა ელემენტის ალგებრული დამატება:

$$A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1.$$

**§ 209. შლადი და დაუშლადი მეორე რიგის წირები. თანხვდენილი მეორე რიგის წირები.** ვთქვათ,

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3)=0 \tag{1}$$

არის მოცემული მეორე რიგის წირის განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში ($\Phi$ წარმოადგენს მეორე ხარისხის ერთგვაროვან პოლინომს, ე. ი. კვადრატულ ფორმას). ჩვენ ვიცით (§ 74), რომ თუ ეს წირი

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0 \tag{2}$$

წრფით გადიკვეთება ორზე მეტ წერტილში, მაშინ (2) წრფე მთლიანად ეკუთვნის (1) წირს და ამიტომ $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3)$ პოლინომი დაიშლება ორ თანამამრავლად, რომელთაგან ერთი არის: $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$; მაშასადამე, მეორე თანამამრავლიც უნდა იყოს წრფივი. ამგვარად ვღებულობთ იგივურად:

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3)=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3). \tag{3}$$

ამ შემთხვევაში (1) წირი იშლება ორ წრფედ და ამიტომ მას ეწოდება **შლადი** ანუ **გადაგვარებული**. უფრო კერძო შემთხვევაში, (3) ტოლობაში შემავალი წრფივი ფორმები შეიძლება ერთმანეთისგან განსხვავდებოდეს მხოლოდ მუდმივი თანამამრავლით, ე. ი.

$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=k(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)$$

და მაშინ

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3)=k(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2. \tag{4}$$

ამნაირად, (1) წირი ამ შემთხვევაში წარმოადგენს ორ თანხვდენილ წრფეს („ორმაგი წრფე“).

§ 174-ში ნათქვამის თანახმად, ადვილი გამოსაყვანია აგრეთვე ორი მეორე რიგის წირის

$$\Phi(x_1, x_2, x_3)=0 \text{ და } \Psi(x_1, x_2, x_3)=0$$

თანხვდენის პირობა.

მართლაც, თუ ეს წირები თანხვდენილია, ე. ი. თუ წინა განტოლებანი ეკვივალენტურია, მაშინ $\Phi$ და $\Psi$ პოლინომები ერთი და იგივე დაუყვანადი მამრავლებისგან უნდა შედგებოდნენ. ამიტომ $\Phi$ და $\Psi$ შეიძლება ერთმანეთისაგან მხოლოდ მუდმივი მამრავლით განსხვავდებოდნენ, ე. ი. უნდა იგივურად გვქონდეს:

$$\Psi(x_1, x_2, x_3)=k\Phi(x_1, x_2, x_3), \tag{5}$$

სადაც $k$ ნულისგან განსხვავებული მუდმივი სიდიდეა. ცხადია, რომ პირიქითაც: თუ უკანასკნელ იგივობას ადგილი აქვს, მაშინ $\Phi$ და $\Psi$ წირები თანხვდენილი არიან.

ქვემოთ (§ 212) დამტკიცებული იქნება, რომ ორი მეორე რიგის წირის თანხვდენისათვის საკმარისია, რომ მათ ჰქონდეთ ხუთი საერთო წერტილი, რომელთაგან არც ერთი ოთხი მათგანი ერთსა და იმავე წრფეზე არ მდებარეობენ.

§ 210. **მეორე რიგის წირის შლადობის პირობა.** ადვილი გამოსარკვევია, შლადია თუ დაუშლადი მეორე რიგის წირი, მოცემული განტოლებით

$$\Phi(x_1, x_2, x_3)=$$
$$=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2=0.$$

მართლაც, იმისათვის, რომ $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ ფორმა იშლებოდეს ორ წრფივ მამრავლად აუცილებელი და საკმარისია (იხ. დამატება § 13), რომ ამ ფორმის დისკრიმინანტის რანგი, ე. ი. რანგი დეტერმინანტისა:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1}$$

უდრიდეს ერთს ან ორს. ვინაიდან ჩვენი დეტერმინანტი მესამე რიგისაა, ამიტომ რანგი დააკმაყოფილებს ამ პირობას, თუ თვითონ დეტერმინანტი უდრის ნულს. მაშასადამე, მეორე რიგის წირის შლადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია პირობა

$$A=0. \tag{2}$$

თუ $A$ დისკრიმინანტის რანგი უდრის ორს, მაშინ წირი იშლება ორ სხვადასხვა ნამდვილ ან წარმოსახვით წრფეებად. თუკი რანგი უდრის ერთს, მაშინ $\Phi$ ფორმას აქვს სახე:

$$\Phi=k(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2$$

და წირი მაშინ წარმოადგენს, ყოველთვის ორი ნამდვილი [1]) თანხვედნილი წრფის ერთობლიობას.

იმ წრფეების საერთო წერტილს, რომელთა მიხედვითაც აღებული წირი იშლება, ეწოდება წირის **ორმაგი წერტილი**. ამ შემთხვევაში, როცა წირი წარმოადგენს ორ თანხვედნილ წრფეთა ერთობლიობას, მაშინ ყველა მისი წერტილი ორმაგია.

**§ 211. მეორე რიგის წირის კანონიკური განტოლება გეგმილურ კოორდინატებში. გეგმილური კლასიფიკაცია.** როგორც ცნობილია (იხ. დამატება, § 12), წრფივი ერთგვაროვანი ჩასმით:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= l_{11}x_1' + l_{12}x_2' + l_{13}x_3', \\ x_2 &= l_{21}x_1' + l_{22}x_2' + l_{23}x_3', \\ x_3 &= l_{31}x_1' + l_{32}x_2' + l_{33}x_3' \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

ყოველი კვადრატული ფორმა $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ შეიძლება დავიყვანოთ კანონიკურ სახემდე:

$$\Phi'(x_1, x_2, x_3) = \varepsilon_1 x_1'^2 + \varepsilon_2 x_2'^2 + \varepsilon_3 x_3'^2, \qquad (**)$$

სადაც $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ მუდმივებია. თუ $\Phi$ ფორმის კოეფიციენტები ნამდვილია, როგორც ამას ჩვენ ყოველთვის ვგულისხმობდით, მაშინ ნაჩვენები დაყვანა შეიძლება ვაწარმოოთ **ნამდვილი** კოეფიციენტებიანი ჩასმით, ისე რომ $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ იქნებიან ნამდვილი რიცხვები; ჩვენ შემდეგშიც ყოველთვის ვიგულისხმებთ ამას.

მაშასადამე, მეორე რიგის წირის ყოველი განტოლება:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0 \qquad (1)$$

შეიძლება დავიყვანოთ „კანონიკურ სახეზე“ [2]):

$$\Phi'(x_1', x_2', x_3') = \varepsilon_1 x_1'^2 + \varepsilon_2 x_2'^2 + \varepsilon_3 x_3'^2 = 0. \qquad (2)$$

თუ $\Phi$ ფორმის დეტერმინანტი $\Delta$ ნულისაგან განსხვავებულია (როგორც ვიცით, ამ შემთხვევაში წირი დაუშლადია), მაშინ არც ერთი $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ რიცხვთაგანი არ უდრის ნულს და შემდგომი წრფივი ჩასმით შეიძლება მივაღწიოთ იმას, რომ ამ რიცხვებს ჰქონდეთ მნიშვნელობა [3]) $\pm 1$. თუ სამივე რიცხვი $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ ერთნაირი ნიშნისაა, მაშინ ახალ კოორდინატებში გარდაქმნილ (2) განტოლებას ექნება სახე (საჭიროების შემთხვევაში ყველა წევრის ნიშნებს ვცვლით შებრუნებულით)

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 0; \qquad (3)$$

---

[1]) იხ. შემდეგი პარაგრაფი.

[2]) ამ დაყვანის გეომეტრიული აზრი ნაჩვენები იქნება § 222-ში.

[3]) მაგ., თუ $\varepsilon_1 > 0$, დავუშვებთ $\sqrt{\varepsilon_1}\, x_1' = x_1''$, რის შემდეგაც წევრი $\varepsilon_1 x_1'^2$ მიიღებს სახეს: $x_1''^2$; თუ $\varepsilon_1 < 0$, დავუშვებთ $\sqrt{-\varepsilon_1}\, x_1' = x_1''$, და, მაშასადამე, $\varepsilon_1 x_1'^2 = -x_1''^2$. ანალოგიურად შევიქცევით სხვა ცვლადების მიმართაც.

თუკი $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ რიცხვთა შორის ორი ერთნაირი ნიშნისაა, ხოლო მესამე საწინააღმდეგო ნიშნის, მაშინ გვექნება (ვცვლით რა, საჭიროების შემთხვევაში, ცვლადების ნომერაციას):

$$x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0. \tag{4}$$

ამგვარად, ყოველი დაუშლადი მეორე რიგის წირის განტოლება, წრფივი ერთგვაროვანი ჩასმით, შეიძლება დაყვანილ იქნას ერთ-ერთ (3) ან (4) სახემდე.

თუ $A$ დისკრიმინანტის რანგი უდრის ნულს, მაშინ (2) განტოლებაში ერთ-ერთი $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ რიცხვთაგანი ნულის ტოლია, და იგი შეიძლება დაყვანილ იქნას ერთ-ერთ შემდეგ სახემდე

$$x_1'^2 + x_2'^2 = 0, \text{ ე. ი. } (x_1' + ix_2')(x_1' - ix_2') = 0 \tag{5}$$

ან

$$x_1'^2 - x_2'^2 = 0, \text{ ე. ი. } (x_1' + x_2')(x_1' - x_2') = 0. \tag{6}$$

პირველ შემთხვევაში ჩვენ გვაქვს ორი წარმოსახვითი შეუღლებული წრფის ერთობლიობა: $x_1' + ix_2' = 0$ და $x_1' - ix_2' = 0$, ორმაგი წერტილით [1]): (0, 0, 1). მეორე შემთხვევაში — ორი ნამდვილი წრფის ერთობლიობა, ორმაგი წერტილით: (0, 0, 1).

და, ბოლოს, თუ $A$ დისკრიმინანტის რანგი უდრის ერთს, მაშინ $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ რიცხვთაგან ორი უდრის ნულს, მაგ. $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, $\varepsilon_1 \neq 0$; ამ შემთხვევაში (3) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$x_1'^2 = 0 \tag{7}$$

და ყოველთვის გამოსახავს ორმაგ ნამდვილ წრფეს. ამ წრფის ყველა წერტილი — ორმაგია.

სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $x_1$, $x_2$, $x_3$ აღნიშნავენ წერტილის (ერთგვაროვან) კოორდინატებს.

(*) გარდაქმნა შეიძლება ორი სხვადასხვა თვალსაზრისით გავიგოთ.

1°. სიდიდეები $x_1$, $x_2$, $x_3$ შეიძლება განვიხილოთ როგორც ($x_1$, $x_2$, $x_3$) წერტილის გეგმილური კოორდინატები, რაიმე გეგმილურ კოორდინატთა სისტემის მიმართ, რომელიც მთლიანად განისაზღვრება (*) ჩასმის კოეფიციენტებით; იხ. § 177. მაშინ ჩვენი შედეგი შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ: ყოველი მეორე რიგის წირის განტოლება გეგმილურ კოორდინატთა სისტემის სათანადო შერჩევით შეიძლება დაყვანილ იქნას (2) კანონიკურ სახემდე, სადაც $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ უდრიან $+1$-ს ან ნულს. სხვადასხვა შემთხვევის მიხედვით, ჩვენ გვექნება ერთ-ერთი (3), (4), (5), (6), (7) სახის განტოლება. ყველა შემთხვევაში, გარდა (3) და (4) შემთხვევებისა, ე. ი. გარდა $A \neq 0$ შემთხვევისა, ჩვენ საქმე გვაქვს შლად წირთან.

[1]) მართლაც, $x_1' + ix_2' = 0$, $x_1' - ix_2' = 0$ წრფეების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებია $x_1' = 0$, $x_2' = 0$, $x_3'$ — ნებისმიერი (ნულისგან განსხვავებული); მაგრამ ჩვენ ყოველთვის შეგვიძლია ჩავთვალოთ $x_3' = 1$.

2°. შეიძლება აგრეთვე $x_1$, $x_2$, $x_3$ განვიხილოთ როგორც რაიმე $M'$ წერტილის დეკარტის ერთგვაროვანი კოორდინატები, იმავე სისტემის მიმართ რაც $M(x_1, x_2, x_3)$ წერტილი. მაშინ (*) ჩასმა (§ 179) განსაზღვრავს სიბრტყის რაიმე წერტილოვან გეგმილურ გარდაქმნას (ე. ი. ჰომოგრაფიას) და ჩვენ შეგვიძლია გამოვთქვათ შემდეგი დებულება:

სიბრტყის სათანადო ჰომოგრაფიული გარდაქმნით ყოველი მეორე რიგის წირი შეიძლება გარდავქმნათ ერთ-ერთი (3)—(7) განტოლებით გამოსახულ წირად.

კერძოდ, ყოველი დაუშლადი მეორე რიგის წირი შეიძლება გარდაქმნათ ერთ-ერთ (3), (4) წირად.

ჩვენ ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ დეკარტის კოორდინატთა სისტემა, რომლის მიმართაც განხილულია მოცემული და გარდაქმნილი წირი მართკუთხოვანია. თუ (3) და (4) განტოლებებს გადავწერთ არაერთგვაროვან კოორდინატებში, შესაბამისად გვექნება:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0 \tag{3a}$$

და

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{4a}$$

ცხადია, პირველი განტოლება $x$ და $y$-ის არავითარი ნამდვილი მნიშვნელობებით არ კმაყოფილდება, ე. ი. გამოსახავს წარმოსახვით წირს. მეორე კი წარმოადგენს წრეწირის განტოლებას. ამგვარად, ჩვენ ვხედავთ, რომ ყოველი ნამდვილი დაუშლადი მეორე რიგის წირი, გეგმილური გარდაქმნით, შეიძლება დაყვანილ იქნას წრეწირზე. აქედან გამომდინარეობს (და ეს ყველაზე არსებითია), რომ ყველა მეორე რიგის ნამდვილი დაუშლადი წირები ჰომოგრაფიული გარდაქმნით შეიძლება ერთი-მეორეში გადავიყვანოთ.

გეგმილური გეომეტრიის თვალსაზრისით ყველა წირი, რომლებიც ერთიმეორისაგან მიიღებიან ამ გზით, ეკვივალენტურია და, მაშასადამე, ამ აზრით, ყველა ნამდვილი დაუშლადი მეორე რიგის წირი ეკვივალენტურია (ამგვარად, გეგმილური თვალსაზრისით, ელიფსსა, ჰიპერბოლსა და პარაბოლს შორის განსხვავება არ არის).

შევაჯამებთ რა ყოველივეს, შეიძლება ითქვას, რომ, გეგმილური თვალსაზრისით, ყველა მეორე რიგის წირი იყოფა შემდეგ კატეგორიებად:

a) დაუშლადი წირები;

b) შლადი წირები.

a) კატეგორიაში ვარჩევთ ორ ქვეკატეგორიას: $a_1$) ნამდვილი წირები და $a_2$) წარმოსახვითი წირები.

b) კატეგორიაში ვარჩევთ: $b_1$) ორი სხვადასხვა წრფის ერთობლიობას და $b_2$) ორი თანხვდენილი წრფის ერთობლიობას. უკანასკნელად $b_1$) ქვეკატეგორიაში გვაქვს კიდევ ორი შემთხვევა: $b_1'$) ნამდვილი წრფეები და $b_1''$) შეუღლებული წარმოსახვითი წრფეები.

**შენიშვნა.** შლად მეორე რიგის წირთა ყველა შემთხვევაში, როგორც ჩვენ ვნახეთ, კანონიკური ფორმა $\Phi'$ შეიძლება ასე დაიწეროს ($\varepsilon_3=0$):

$$\Phi'=\varepsilon_1 x_1'^2+\varepsilon_2 x_2'^2;$$

(როცა $\varepsilon_3=0$ გვექნება ორმაგი წრფე). ამის გამო, ცხადია, რომ წირის ორმაგი წერტილი აკმაყოფილებს სამ განტოლებას [1]):

$$\Phi_1'=\varepsilon_1 x_1'=0,\quad \Phi_2'=\varepsilon_2 x_2'=0,\quad \Phi_3'=\varepsilon_3 x_3'=0 \tag{8}$$

(უკანასკნელი დაიყვანება იგივობაზე $0=0$). მაგრამ წინა სისტემა, თუ ძველ $x_1$, $x_2$, $x_3$ ცვლადებს დაუბრუნდებით, ეკვივალენტური სისტემის [2])

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0,\\ \Phi_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0.\\ \Phi_3&=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

ამიტომ ორმაგი წერტილის მოსაძებნად ეს სისტემა ვნახოთ. თუ $\Delta$ დეტერმინანტის რანგი ტოლის ორს, მაშინ მივიღებთ ერთ ორმაგ წერტილს (როგორც ეს წინათაც ვნახეთ: თუ რანგი ტოლის ერთს, მაშინ (9) განტოლებანი ერთ მაგალითზე დაიყვანებიან და ჩვენ მივიღებთ მთელ წრფეს ორმაგ წერტილებით შედგენილ წირიდან (ეს ეს იქნება ჩვენი ორმაგი წრფე).

ნულთანასწორი ორმაგი ეკვივალენტი ერთეულ რიცხვ წერტილს, რომელიც კოორდინატებში (9) სისტემას აკმაყოფილებს. თუ $\Delta\neq 0$, ე. ი. თუ წირი დეგენერირებული (მაშინ (9) სისტემას არა აქვს ნულთანასწორი ამონახსნი), ამონახსნი მაშასადამე, დაუშვებელ წირს ორმაგი წერტილები არა აქვს.

**§ 212. მეორე რიგის წირის განსაზღვრა ხუთი წერტილით.** ვთქვათ,

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \tag{1}$$

არის მეორე რიგის წირის განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში, რომლებშიაც ჩვენ ალვნიშნავთ $x$, $y$, $t$-ით. როგორც ვხედავთ, ამ განტოლებაში შედის ექვსი ნულთანა კოეფიციენტი $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{22}$, $a_{13}$, $a_{23}$, $a_{33}$. მაგრამ, რადგანაც ამ ნულთანების შეცვლით მათი პროპორციული სიდიდეებით, წირი არ იცვლება, ამიტომ ცხადია, რომ ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ არა თვით ეს მუდმივები, არამედ ხუთი მათგანის ფარდობის მეექვსესთან. მაშასადამე, მეორე რიგის წირის ფორმა და მდებარეობა განისაზღვრება ხუთი მუდმივით. აქედან გამომდინარეობს, რომ საზოგადოდ მეორე რიგის წირი შეიძლება განისაზღვროს ხუთი პირობის მოკლებით.

კერძოდ, მეორე რიგის წირი საზოგადოდ მთლიანად განისაზღვრება მისი ხუთი წერტილის მოცემით. სხვა სიტყვებით, თუ სიბრტყეზე მოცემულია ხუთი წერტილი $M_1(x_1, y_1, t_1)$, $M_2(x_2, y_2, t_2)$, ..., $M_5(x_5, y_5, t_5)$,

[1]) ჩვენ ვნახეთ, რომ, როცა $\varepsilon_3\neq 0$, ორმაგი წერტილი აკმაყოფილებს $x_1'=x_2'=0$ პირობას, როცა $\varepsilon_3=0$, წირის ყველა წერტილი ორმაგია და აკმაყოფილებს $x_1'=0$ პირობას.

[2]) იხ. დამატება, § 11.

მაშინ, საზოგადოდ, შეიძლება მოვძებნოთ მხოლოდ ერთი მეორე რიგის წირი, რომელიც ამ წერტილებზე გაივლის (ამ დებულების მკაცრი ჩამოყალიბება იხ. ქვემოთ). მართლაც, თუ (1) საძებნი წირის განტოლებაა, მაშინ გამოვსახავთ რა, რომ იგი მოცემულ წერტილებზე გადის, მივიღებთ ხუთ განტოლებას

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 + 2a_{13}x_1l_1 + 2a_{23}y_1l_1 + a_{33}l_1^2 = 0,\\
&a_{11}x_2^2 + 2a_{12}x_2y_2 + a_{22}y_2^2 + 2a_{13}x_2l_2 + 2a_{23}y_2l_2 + a_{33}l_2^2 = 0,\\
&a_{11}x_3^2 + 2a_{12}x_3y_3 + a_{22}y_3^2 + 2a_{13}x_3l_3 + 2a_{23}y_3l_3 + a_{33}l_3^2 = 0,\\
&a_{11}x_4^2 + 2a_{12}x_4y_4 + a_{22}y_4^2 + 2a_{13}x_4l_4 + 2a_{23}y_4l_4 + a_{33}l_4^2 = 0,\\
&a_{11}x_5^2 + 2a_{12}x_5y_5 + a_{22}y_5^2 + 2a_{13}x_5l_5 + 2a_{23}y_5l_5 + a_{33}l_5^2 = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

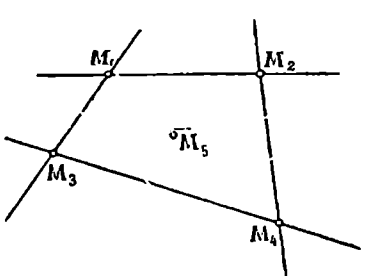
რომლებიც წრფივი და ერთგვაროვანია $a_{11}, \ldots, a_{33}$ ექვსი უცნობი სიდიდის მიმართ. ეს ხუთი განტოლება, საზოგადოდ, მოგვცემს სრულიად განსაზღვრულ მნიშვნელობებს უცნობ სიდიდეთაგან ხუთი მათგანის ფარდობისა მეექვსესთან.

მაგრამ, მოცემულ წერტილთა ზოგიერთი კერძო განლაგების დროს, ზემონათქვამი შეიძლება მართებული არ აღმოჩნდეს. თუ, მაგალითად, მოცემულ წერტილთაგან ოთხი მათგანი ერთსა და იმავე წრფეზე მდებარეობს, მაშინ, ცხადია, არსებობს მეორე რიგის წირთა უსასრულო სიმრავლე, რომლებიც მოცემულ წერტილებზე გადიან: თითოეული მათგანი წარმოადგენს, ორი წრფის ერთობლიობას, რომელთაგან ერთი ხსენებულ ოთხ წერტილზე გადის. ხოლო მეორე—მეხუთე წერტილზე გამავალი ნებისმიერი წრფეა. თუ, უფრო კერძო შემთხვევაში, ყველა ხუთივე წერტილი ერთსა და იმავე წრფეზე მდებარეობს, მაშინ ამოხსნას წარმოადგენს ორი წრფის ერთობლიობა. რომელთაგან პირველი მოცემულ წერტილებზე გადის, ხოლო მეორე სრულებით ნებისმიერია.

ადვილი სანახავია, რომ, გარდა ხსენებულ კერძო შემთხვევებისა, ჩვენ ყოველთვის მივიღებთ სრულიად განსაზღვრულ მეორე რიგის წირს, ე. ი სიბრტყის ყოველი ხუთი სხვადასხვა წერტილი, რომელთაგან არც ერთი ოთხი მათგანი ერთსა და იმავე წრფეზე არ მდებარეობს, განსაზღვრავს მათზე გამავალ ერთსა და მხოლოდ ერთ მეორე რიგის წირს.

დავამტკიცოთ გამოთქმული დებულება. ცნობილია (იხ. დამატება § 6), რომ წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა (2) ან გვაძლევს საკმაოდ განსაზღვრულ მნიშვნელობებს $a_{11}, \ldots, a_{33}$ უცნობთა ფარდობებისთვის, ანდა ზოგიერთი (2) განტოლებათაგან წარმოადგენს დანარჩენთა წრფივ კომბინაციას. პირველ შემთხვევაში ჩვენ მივიღებთ საკმაოდ განსაზღვრულ მეორე რიგის წირს. მეორე შემთხვევაში ერთი მათგანი მაინც, ვთქვათ, უკანასკნელი, წარმოადგენს დანარჩენთა შედეგს. ეს იმას ნიშნავს, რომ $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ წერტილებზე გამავალი ყოველი მეორე რიგის წირი გაივლის $M_5$ წერტილზე. პირველად ვაჩვენოთ, რომ ეს შეიძლება მოხდეს მხოლოდ მაშინ, როცა $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ წერტილთაგან სამი მათგანი მოთავსებულია ერთსა და იმავე წრფეზე. მართლაც, დავუშვათ წინააღმდეგი. $M_1M_2$ და $M_3M_4$ წრფეთა

წყვილი (ნახ. 141) წარმოადგენს $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ წერტილებზე გამავალ მეორე რიგის წირს; იგივე თვისება აქვს $M_1M_3$ და $M_2M_4$ წრფეთა ერთობლიობით შედგენილ მეორე რიგის წირსაც. მაგრამ ამ ორ მეორე რიგის წირს გარდა $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ წერტილებისა, სხვა არც ერთი საერთო წერტილი არა აქვთ; მაშასადამე, ორივე ისინი ერთდროულად არ შეიძლება გადიოდეს $M_5$ წერტილზე, ეს კი მოცემულ პირობას ეწინააღმდეგება.



ნახ. 141.

ამგვარად, ვთქვათ, მაგალითად, $M_1$, $M_2$, $M_3$ წერტილები მოთავსებულია ერთ წრფეზე. ვაჩვენოთ, რომ $M_5$ წერტილიც მოთავსებული იქნება ამ წრფეზე.

მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში, ჩვენ შეგვეძლო ისეთი მეორე რიგის წირი აგვეგო, რომელიც გაივლის $M_1$, $M_3$, $M_3$, $M_4$ წერტილებზე და არ გადის $M_5$-ზე; ამისათვის საკმარისია ავიღოთ ორი ისეთი წრფის ერთობლიობა, რომელთაგან ერთი გადის $M_1$, $M_2$, $M_3$-ზე, ხოლო მეორე $M_4$-ზე და არ გადის $M_5$-ზე.

ამნაირად, ერთ-ერთი (2) განტოლებათაგანი შეიძლება იყოს დანარჩენთა შედეგი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა მოცემულ წერტილთაგან ოთხი მათგანი მოთავსებულია ერთსა და იმავე წრფეზე, როგორც უკვე ნათქვამი იყო, ამ უკანასკნელ შემთხვევაში ამოცანას აქვს არა ერთი, არამედ ამოხსნათა უსასრულო სიმრავლე.

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1.** ხუთი წერტილით მეორე რიგის წირის განსაზღვრის დებულების თვით დამტკიცების ხერხიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ორ მეორე რიგის წირს ყველა წერტილი საერთო აქვს, მაშინ მათი განტოლებების კოეფიციენტები პროპორციულია [1]).

მართლაც, ავიღოთ ერთ-ერთ წირზე ხუთი სხვადასხვა წერტილი. თუ მათ შორის არ არის ოთხი ისეთი წერტილი, რომლებიც ერთ წრფეზე არიან მოთავსებული, მაშინ (2) სისტემა $a_{11}, \ldots, a_{33}$ კოეფიციენტების საშუალებით განსაზღვრულ ფარდობებს მოგვცემს, ვინაიდან მეორე რიგის წირის განტოლების კოეფიციენტები $a'_{11}, \ldots, a'_{33}$ აკმაყოფილებს იმავე სისტემას, ამიტომ ისინი პროპორციული უნდა იყვნენ $a_{11}, \ldots, a_{33}$ კოეფიციენტებისა.

თუ აღებულ ხუთ წერტილს შორის ოთხი ერთსა და იმავე წრფეზე მდებარეობს, მაშინ თითოეული წირი იშლება ორ წრფედ, და მაშინ ჩვენი დებულება უშუალოდ ადვილად შემოწმდება.

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2.** იგულისხმება, რომ მთელი ზემომოყვანილი მსჯელობა შეიძლება ჩავატაროთ არაერთგვაროვანი კოორდინატებისთვისაც. მაგრამ მაშინ, ზოგიერთ შემთხვევაში არასაკუთრივ ელემენტებთან დაკავშირებით, დაგვჭირდება დამატებითი გამოკვლევა.

[1]) ეს დებულება უკვე მიღებულია ჩვენს მიერ სხვა გზით (§ 209).

ხ ა ვ ა რ ჯ ი შ ი

ააგეთ მეორე რიგის წირი, რომელიც გადის წერტილებზე (არაერთგვაროვან კოორდინატებში);

$$M_1(3, 0),\ M_2(-3, 0),\ M_3(0, 2),\ M_4(0, -2),\ M_5\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 1\right).$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. საძიებელი წირის განტოლების კოეფიციენტები განისაზღვრება სისტემიდან:

$$\begin{gathered}9a_{11}+6a_{13}+a_{33}=0\\ 9a_{11}-6a_{13}+a_{33}=0\\ 4a_{22}+4a_{23}+a_{33}=0\\ 4a_{22}-4a_{23}+a_{33}=0\end{gathered}$$

$$\frac{27}{4}a_{11}+3\sqrt{3}\,a_{13}+a_{22}+3\sqrt{3}\,a_{13}+2a_{23}+a_{33}=0.$$

თუ მეორე განტოლებას პირველს გამოვაკლებთ, მივიღებთ $a_{13}=0$; მეოთხე განტოლების მესამედან გამოკლებით გვექნება $a_{23}=0$, ისე რომ სისტემა დაიყვანება შემდეგზე:

$$9a_{11}+a_{33}=0,\ 4a_{22}+a_{33}=0,$$

$$\frac{27}{4}a_{11}+3\sqrt{3}\,a_{12}+a_{22}+a_{33}=0.$$

პირველი ორი განტოლებიდან გვაქვს:

$$a_{11}=-\frac{a_{33}}{9},\qquad a_{22}=-\frac{a_{33}}{4}.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი უკანასკნელში, მივიღებთ $a_{12}=0$. ამგვარად, საბოლოოდ $a_{13}=a_{12}=a_{23}=0$, და მოსაძებნი წირის განტოლება მიიღებს სახეს ($a_{33}$-ზე გაყოფის შემდეგ):

$$-\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{4}y^2+1=0$$

ანუ

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

§ 213. მეორე რიგის წირების კონა. წინა პარაგრაფში ნათქვამის თანახმად, სიბრტყის მოცემულ ყოველ ოთხ წერტილზე გადის მეორე რიგის წირების უსასრულო სიმრავლე. თუ მოცემული ოთხი წერტილი ერთ წრფეზე არ არის მოთავსებული, მაშინ ამ წირების, ერთობლიობა დამოკიდებულია ერთ პარამეტრზე (ეს ახლა იქნება ნაჩვენები) და ეწოდება მ ე ო რ ე რ ი გ ი ს წ ი რ ე ბ ი ს კ ო ნ ა.

მოვძებნოთ ზოგადი განტოლება მეორე რიგის წირებისა, რომლებიც კონას ეკუთვნიან. ვთქვათ, $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ მოცემული წერტილებია, რომლებიც ერთ წრფეზე არ მდებარეობენ. ავიღოთ რაიმე მეხუთე წერტილი $M'$ და გავატაროთ მეორე რიგის წირი $\Phi(x, y, t)=0$ ხუთ წერტილზე $M_1, \ldots, M_4, M'$. შემდეგ ავიღოთ კიდევ ერთი წერტილი $M'$, რომელიც არ მდებარეობს $\Phi(x, y, t)=0$ წირზე და გავატაროთ ხელახლა მეორე რიგის $\Psi(x, y, t)=0$ წირი ხუთ წერტილზე $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$, $M''$, რომელიც, ცხადია, განსხვავე-

ბული იქნება პირველისგან. ამნაირად ჩვენ გვექნება, მოცემულ ოთხ წერტილზე გამავალი, ორი მეორე რიგის წირი. დავამტკიცოთ, რომ ამავე ოთხ წერტილზე გამავალი ყოველი მეორე რიგის წირი შეიძლება წარმოვადგინოთ განტოლებით

$$\lambda\Phi(x,\ y,\ t)+\mu\Psi(x,\ y,\ t)=0, \tag{1}$$

სადაც $\lambda$ და $\mu$ მუდმივებია, რომლებიც ერთდროულად ნულის ტოლი არ არიან.

მართლაც, ცხადია, რომ (1) განტოლება წარმოადგენს, მოცემულ ოთხ წერტილზე გამავალ მეორე რიგის წირს[1]). დასასრულ ვაჩვენოთ, რომ თუ $\lambda$-ს და $\mu$-ს ვაძლევთ შესაფერ მნიშვნელობებს, ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ, ამ წერტილებზე გამავალი ყოველი მეორე რიგის წირი. ვთქვათ, $\Phi_0(x,\ y,\ t)=0$ ასეთი წირია. ავიღოთ მასზე რაიმე $M_0(x_0,\ y_0,\ t_0)$ წერტილი, რომელიც $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ წერტილთაგან სამთან ერთად ერთ წრფეზე არ მდებარეობს, და შევარჩიოთ $\lambda$ და $\mu$ პარამეტრები ისე, რომ (1) წირი გადიოდეს ამ წერტილზედაც. ამისათვის საკმარისია $\lambda$-ს და $\mu$-ს მივცეთ ისეთი მნიშვნელობანი, რომ

$$\lambda\Phi(x_0,\ y_0,\ t_0)+\mu\Psi(x_0,\ y_0,\ t_0)=0, \tag{2}$$

რაც, ცხადია, ყოველთვის შესაძლებელია. თუ $\lambda$ და $\mu$ პარამეტრები შერჩეულია ნაჩვენები წესით, მაშინ (1) წირი გაივლის იმავე $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$, $M_0$ ხუთ წერტილზე, რომლებზედაც გადის $\Psi_0(x,\ y,\ t)=0$ წირი, და, მაშასადამე, დამთხვეულია მასზე.

(1) განტოლება შეიცავს ორ ნებისმიერ $\lambda$ და $\mu$ პარამეტრს, მაგრამ ამ განტოლებით მოცემული წირები, ცხადია, დამოკიდებულია მხოლოდ ამ პარამეტრთა ფარდობაზე, ე. ი. ერთ პარამეტრზე $k=\frac{\lambda}{\mu}$. როცა $k=0$ მივიღებთ წირს $\Psi=0$, ხოლო როცა $k=\infty$ (ე. ი. როცა $\mu=0$, $\lambda\neq 0$)—წირს $\Phi=0$.

ქერძოდ, $\Phi=0$ და $\Psi=0$ წირების ნაცვლად, ჩვენ შეგვიძლია, მაგალითად, ავიღოთ წრფეთა წყვილები $(M_1M_2,\ M_3M_4)$ და $(M_1M_3,\ M_2M_4)$, ისე, რომ $\Phi=0$ და $\Psi=0$ წირების მოძებნა არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს. ამნაირად, თუ $f_1=0$, $f_2=0$, $f_3=0$, $f_4=0$, სადაც $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$ არიან $x$, $y$, $t$ ცვლადების წრფივი ფორმები, წარმოადგენენ $M_1M_2$, $M_3M_4$, $M_1M_3$, $M_2M_4$ წრფეების განტოლებებს, მაშინ 4 წერტილზე გამავალი მეორე რიგის წირების ზოგადი განტოლება, იქნება:

$$\lambda f_1f_2+\mu f_3f_4=0 \tag{3}$$

ანუ

$$f_3f_4+kf_1f_2=0, \tag{3a}$$

[1]) ამ განტოლების მარცხენა მხარე არ შეიძლება იგივურად უდრიდეს ნულს, რადგან, წინააღმდეგ შემთხვევაში, $\Phi=0$ და $\Psi=0$ წირები არ იქნებოდნენ სხვადასხვა.

სადაც

$$k=\frac{\lambda}{\mu}.$$

ზემონათქვამის მიხედვით ადვილი გადასაწყვეტია ამოცანა მოცემულ ხუთ წერტილზე გამავალი მეორე რიგის წირის მოძებნის შესახებ: ამისათვის საკმარისია დავწეროთ მოცემულ წერტილთაგან ოთხზე გამავალი წირის (3) განტოლება, და შემდეგ ისე შევარჩიოთ $\frac{\lambda}{\mu}$ ფარდობა, რომ წირი გადიოდეს მეხუთე წერტილზედაც.

### სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. ამოხსენით § 212-ში მოყვანილი ამოცანა, ამ პარაგრაფის ბოლოში მოყვანილი მეთოდით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. $M_1M_2$, $M_3M_4$, $M_1M_3$, $M_2M_4$ წრფეების განტოლებანი შესაბამად იქნება (ჩვენ ვიყენებთ აოაერთგვაროვან კოორდინატებს):

$$y=0,\ x=0,\ 2x+3y-6=0,\ 2x+3y+6=0,$$

ისე, რომ $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ წერტილებზე გამავალ მეორე რიგის წირებია ზოგადი განტოლება იქნება:

$$\lambda xy+\mu(2x+3y-6)(2x+3y+6)=0.$$

თუ შევნიშნავთ, რომ ეს წირი გადის $M_5\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},1\right)$ წერტილზე, მივიღებთ $\lambda=-12\mu$. ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ, მაგალითად, $\mu=1$, $\lambda=-12$. თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ, მივიღებთ საძიებელი წირის განტოლებას:

$$4x^2+9y^2-36=0.$$

2. მოძებნეთ მეორე რიგის წირის ზოგადი განტოლება, რომლებიც მოკვეთენ $\Phi=0$ მეორე რიგის წირისა და $f_1=0$, $f_2=0$ წრფეების დადკვეთის ოთხ წერტილზე გადის.

პ ა ს უ ხ ი. $\lambda\Phi+\mu f_1f_2=0$.

3. მოძებნეთ მეორე რიგის წირების ზოგადი განტოლება, რომლებიც მეორე რიგის წირისა $\Phi=0$ და $f_1=0$ წრფის გადაკვეთის ორ წერტილზე გადის.

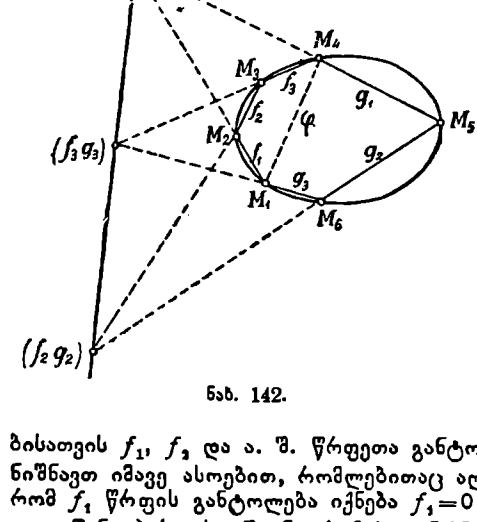
პ ა ს უ ხ ი. $\lambda\Phi+f_1f_2=0$, სადაც $\lambda$ ნებისმიერი მუდმივია, ხოლო $f_2$ ნებისმიერი წრფივი ფორმა, ე. ი. $f_2=ax+by+ct$, სადაც $a$, $b$, $c$ ნებისმიერი რიცხვებია. ჩვენ ვხედავთ, რომ წირი დამოკიდებულია სამი ნებისმიერი პარამეტრისაგან ($\lambda$, $a$, $b$, $c$ სიდიდეთაგან სამის ფარდობაზე მეოთხესთან).

§ 214. **პასკალის თეორემა.** როგორც ვნახეთ, მეორე რიგის წირი სავსებით განისაზღვრება მისი ხუთი წერტილით, იმ პირობით, რომ არც ერთი ოთხი მათგანი კოლინეარული არ არის. მაშასადამე, წირის ნებისმიერი მეექვსე წერტილი მოცემულ ხუთ წერტილთან დაკავშირებული უნდა იყოს გარკვეული დამოკიდებულებით. ამ დამოკიდებულების გეომეტრიული შინაარსი მოცემულია პასკალის შემდეგი თეორემით: **მეორე რიგის წირში ჩახაზული ექვსკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების გადაკვეთის წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობენ.**

ჯერ განვმარტოთ თეორემის შინაარსი. ვთქვათ, $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ მოცემულ მეორე რიგის წირზე აღებული ექვსი წერტილია. შევაერთოთ ისინი თანამიმდევრობით (იმ რიგით, როგორც ისინი დაწერილია) წრფეებით. მივიღებთ ექვსკუთხედს $M_1M_2$, $M_2M_3$, $M_3M_4$, $M_4M_5$, $M_5M_6$, $M_6M_1$ გვერდებით (თუ აღებულ წერტილებს სხვა მიმდევრობით შევაერთებდით, მაშინ მივიღებდით სხვა ექვსკუთხედს; თეორემა ძალაშია ნებისმიერი მათგანისთვის). აღვნიშნოთ გვერდები, იმ მიმდევრობით როგორც ისინი დაწერილია, შემდეგნაირად (ნახ. 142):

$$f_1,\ f_2,\ f_3,\ g_1,\ g_2,\ g_3.$$

$f_1$ და $g_1$, $f_2$ და $g_2$, $f_3$ და $g_3$ მოპირდაპირე გვერდები ეწოდება. პასკალის თეორემა გვეუბნება, რომ $(f_1g_1)$, $(f_2g_2)$, $(f_3g_3)$ წერტილები ერთ წრფეზეა მოთავსებული; $(fg)$ სიმბოლოთი ჩვენ აღვნიშნავთ $f$ და $g$ წრფეების გადაკვეთის წერტილს.




ნახ. 142.

უფრო მეტი სიცხადისთვის თეორემის დამტკიცებას ჩვენ ჩავატარებთ იმ პირობით, რომ მოცემული წირი დაუშლადია და, მაშასადამე, არც ერთი სამი $M_1, \ldots, M_6$ წეროთაგან კოლინეარული არ არის. თუმცა თეორემის დამტკიცება ადვილი ჩასატარებელია ზოგად შემთხვევაშიც. $(f_3g_1)$ და $(g_3f_1)$ წერტილებზე გავატაროთ დამხმარე წრფე $\varphi$. მივიღებთ ორ ოთხკუთხედს $f_1$, $f_2$, $f_3$, $\varphi$ და $g_1$, $g_2$, $g_3$, $\varphi$ გვერდებით. თითოეული მათგანის გარშემო შემოხაზულია ჩვენი მეორე რიგის წირი.

უფრო მეტი თვალსაჩინოებისათვის $f_1$, $f_2$ და ა. შ. წრფეთა განტოლებების მარცხენა მხარეებს აღვნიშნავთ იმავე ასოებით, რომლებითაც აღვნიშნავთ თვითონ წრფეებს (ისე, რომ $f_1$ წრფის განტოლება იქნება $f_1=0$ და ა. შ.).

წინა პარაგრაფში ნათქვამის თანახმად, ჩვენი მეორე რიგის წირის განტოლება ერთ-ერთი შემდეგი სახით შეიძლება დაიწეროს:

$$f_1f_3+\lambda f_2\varphi=0 \quad \text{და} \quad g_1g_3+\mu g_2\varphi=0,$$

სადაც $\lambda$ და $\mu$ სათანადოდ შერჩეული რიცხვებია[1].) ვინაიდან ორივე ეს განტოლება ერთსა და იმავე მეორე რიგის წირს გამოსახავს, ამიტომ უნდა გვქონდეს შემდეგი იგივობა:

$$g_1g_3+\mu g_2\varphi=\nu(f_1f_3+\lambda f_2\varphi),$$

სადაც $\nu$ რაღაც მუდმივი მამრავლია.

[1]) აქ $\lambda$ და $\mu$ აღნიშნავენ იმას, რაც წინა პარაგრაფში აღნიშნული იყო $k$-თი.

ზოგადობის დაურღვეველად, შეგვიძლია მივიღოთ, რომ $\nu=1$, ვინაიდან $\nu$ მამრავლი შეიძლება $f_1$ და $f_2$ წრფივი ფუნქციების კოეფიციენტებს მივუერთოთ. ამგვარად, ჩვენ გვაქვს იგივობა

$$g_1g_2+\mu g_2\varphi=f_1f_2+\lambda f_2\varphi,$$

საიდანაც

$$g_1g_2-f_1f_3=\varphi\cdot(\lambda f_2-\mu g_2) \tag{3}$$

განტოლება $\varphi\cdot(\lambda f_2-\mu g_2)=0$, თავის მხრივ, წარმოადგენს წრფეთა წყვილს, რომელთაგან ერთია $\varphi$; მეორე აღვნიშნოთ $\varphi'$-ით. ეს უკანასკნელი წრფე ცხადია, გადის $(f_2g_2)$[1] წერტილზე. (1) იგივობის ძალით, განტოლება $g_1g_2-f_1f_3=0$ გამოსახავს იმავე წრფეთა წყვილს, რასაც წინა განტოლება. წრფეთა ეს წყვილი ცხადია, გადის $(g_1f_1)$, $(g_2f_2)$, $(g_1f_2)$, $(g_2f_1)$ წერტილებზე. უკანასკნელი ორი მდებარეობს $\varphi$ წრფეზე; პირველი ორი ცხადია, მასზე არ მდებარეობს[2]), მაშასადამე, მდებარეობს $\varphi'$ წრფეზე, რომელიც შეიცავს $(f_2g_2)$ წერტილსაც. ამგვარად, $(g_1f_1)$, $(g_2f_2)$, $(g_2f_2)$ წერტილები მოთავსებული არიან ერთ $\varphi'$ წრფეზე, რაც ჩვენ სწორედ უნდა დაგვემტკიცებინა.

პასკალის თეორემა საშუალებას გვაძლევს, მხოლოდ სახაზავის საშუალებით, ავაგოთ მეორე რიგის წირის ნებისმიერი რაოდენობის წერტილები, თუ მოცემულია მისი ხუთი წერტილი; ამის დამტკიცებას ვანდობთ მკითხველს.

§ 215. **მეორე რიგის წირების შედგენა გეგმილური კონებით.** დავამტკიცოთ კიდევ შემდეგი დებულება, რომელიც, ისე როგორც პასკალის თეორემა, მეორე რიგის წირის სწორ განმარტების საშუალებას იძლევა.

ვთქვათ, $F$ და $G$ არიან $\Gamma$ მეორე რიგის წირის წერტილები (ნახ. 143). განვიხილოთ წრფეთა კონები $F$ და $G$ ცენტრებით და შევუსაბამოთ ერთმანეთს ამ კონების ისეთი $f$ და $g$ წრფეები, რომლებიც $\Gamma$ წირის ერთსა და იმავე $M$ წერტილზე გადიან. კონათა ასეთნაირად მიღებული შესაბამობა გეგმილურია. პირიქით, ორი გეგმილური კონის შესაბამის წრფეთა გადაკვეთის წერტილები ქმნიან მეორე რიგის წირს, რომელიც კონების ცენტრებზე გადის.

მართლაც, ვთქვათ, $f'$ და $f''$ პირველი კონის ორი წრფეა, ხოლო $g'$ და $g''$—მეორე კონის შესაბამი წრფეები. ვინაიდან ჩვენი წირი გადის $f'$, $g''$ წრფეთა წყვილის $g'$, $f''$ წრფეთა წყვილთან გადაკვეთის წერტილებზე, ამიტომ მისი განტოლება შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$f'g''-kf''g'=0,$$

სადაც $k$ რაღაც რიცხვია, ანუ, თუ $k$-ს მივუერთებთ ერთ-ერთ $f''$, $g'$ წრფივ ფუნქციას, გვექნება

$$f'g''-f''g'=0, \tag{1}$$

[1]) ვინაიდან ამ წრფის განტოლება არის $\varphi'=\lambda f_2-\mu g_2=0$.

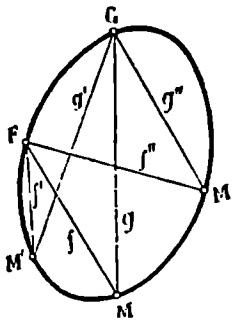
[2]) $(g_1f_1)$ წერტილი შეიძლება მდებარეობდეს $\varphi$-ზე, მხოლოდ მაშინ, როცა $g_1$ ან $f_1$ (ან ორივე ერთად) თანხვდებიან $\varphi$-ს. მაგრამ, მაშინ ერთ-ერთი წერტილი $M_2$ ან $M_3$ (ან ორივე ერთად) უნდა მდებარეობდნენ $\varphi$-ზე, ე. ი. $M_1$ და $M_4$ ერთად მოთავსდებიან ერთ წრფეზე, რაც ამ პირობას ეწინააღმდეგება.

ანუ კიდევ

$$\frac{f''}{f'} = \frac{g''}{g'}. \tag{1a}$$

ამგვარად ჩვენი წირის ყოველი წერტილი აკმაყოფილებს (1a) განტოლებას.

ახლა ვთქვათ, $f$ პირველი კონის რაიმე წრფეა, ხოლო $g$ — მეორე კონის შესაბამი წრფე. ამ წრფეების განტოლებანი შესაბამად იქნება:




ნახ. 143.

$$f' - \lambda f'' = 0 \quad \text{და} \quad g' - \mu g'' = 0, \tag{2}$$

სადაც $\lambda$ და $\mu$ რაღაც რიცხვებია.

ამ წრფეებს, მოცემულ წირზე მდებარე, საერთო $M$ წერტილი აქვთ. თუ ჩავსვამთ ამ წერტილის კოორდინატებს (2)-ში და მხედველობაში მივიღებთ (1a)-ს, მივიღებთ

$$\lambda = \mu$$

ამნაირად, ჩვენი კონების შესაბამი წრფეებისათვის $\lambda = \mu$, აქედან კი გამომდინარეობს, რომ შესაბამობა გეგმილურია (§ 189).

პირიქით, ვთქვათ, გვაქვს გეგმილურად შესაბამი ორი კონა (2). ჩვენ ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ (§ 189), რომ ეს გეგმილური შესაბამობა გამოსახულია $\lambda = \mu$ ტოლობით. მაშასადამე, ორი კონის შესაბამის წრფეებს ექნებათ განტოლებანი:

$$f' = \lambda f'', \quad g' = \lambda g''$$

ერთი და-იგივე $\lambda$-თი. ამ წრფეების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ ორივე წინა განტოლებას. გამოვრიცხოთ $\lambda$, მივიღებთ (1a)-ს ანუ (1)-ს, საიდანაც ჩანს, რომ შესაბამი წრფეების გადაკვეთის წერტილები ქმნიან (1) მეორე რიგის წირს. ცხადია, ეს წირი გადის $G$ და $D'$ წერტილებზე.

## მეორე რიგის წირისა და წრფის გადაკვეთა. მხები

**§ 216. მეორე რიგის წირისა და წრფის გადაკვეთის განმსაზღვრელი განტოლება.** ერთ-ერთ მთავარ ხერხს მეორე რიგის წირთა თვისებების შესწავლისათვის, წარმოადგენს მათი წრფეებთან გადაკვეთის შესწავლა. ჩვენ რამდენჯერმე უკვე გვქონდა შემთხვევა შევხებოდით ალგებრულ, კერძოდ, მეორე რიგის წირების წრფესთან გადაკვეთის საკითხს.

ახლა ეს საკითხი განვიხილოთ უფრო დაწვრილებით და დავიწყოთ იმ მარტივი და სიმეტრიული განტოლების გამოყვანით, რომელიც განსაზღვრავს მეორე რიგის წირისა და წრფის გადაკვეთის წერტილებს.

ვთქვათ, მოცემულია მეორე რიგის წირი ერთგვაროვან კოორდინატებში:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3)=0, \tag{1}$$

სადაც, ჩვენს მიერ მიღებული აღნიშვნების თანახმად (§ 208),

$$\Phi(x_1, x_2, x_3)= \\ =a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2. \tag{2}$$

ვთქვათ, გარდა ამისა, მოცემულია რაღაც წრფე; ვიგულისხმოთ, რომ იგი მოცემულია პარამეტრული სახით[1]):

$$x_1=\lambda x_1'+\mu x_1'', \quad x_2=\lambda x_2'+\mu x_2'', \quad x_3=\lambda x_3'+\mu x_3'', \tag{3}$$

სადაც $x_1', x_2', x_3'$ და $x_1'', x_2'', x_3''$ მოცემული წრფის ორი რაიმე სხვადასხვა წერტილია.

ჩავსვათ (3) გამოსახულებანი (1) განტოლებაში და მხედველობაში მივიღოთ § 208-ის (1) ფორმულა, მივიღებთ განტოლებას

$$\lambda^2\Omega(x'; x')+2\lambda\mu\Omega(x'; x'')+\mu^2\Omega(x''; x'')=0 \tag{4}$$

სადაც, § 208-ის აღნიშვნების თანახმად,

$$\Omega(x'; x'')=\Omega(x_1', x_2', x_3', x_1'', x_2'', x_3'')= \\ =x_1''\Phi_1(x_1', x_2', x_3')+x_2''\Phi_2(x_1', x_2', x_3')+x_3''\Phi_3(x_1', x_2', x_3')= \\ =x_1''(a_{11}x_1'+a_{12}x_2'+a_{13}x_3')+x_2''(a_{21}x_1'+a_{22}x_2'+a_{23}x_3')+ \\ +x_3''(a_{31}x_1'+a_{32}x_2'+a_{33}x_3'), \tag{5}$$

ხოლო $\Omega(x'; x')=\Phi(x_1' x_2' x_3')$ მიიღება $\Omega(x'; x'')$-სგან მასში $x_1'', x_2'', x_3''$-ის $x_1', x_2', x_3'$-ით შეცვლით; ანალოგიურად გვექნება $\Omega(x''; x'')$ გამოსახულებისთვისაც.

(4) განტოლება განსაზღვრავს ფარდობას:

$$h=\frac{\lambda}{\mu};$$

სახელდობრ, თუ (4) განტოლებას გავყოფთ $\mu^2$-ზე, $h$-ის განსასაზღვრავად მივიღებთ განტოლებას

$$h^2\Omega(x'; x')+2h\Omega(x'; x'')+\Omega(x''; x'')=0. \tag{4a}$$

თუ ამ კვადრატული განტოლების ყველა სამივე კოეფიციენტი ნულის ტოლია, მაშინ ის გადაიქცევა იგივობად და, მაშასადამე, განხილული წრფე მთლიანად ეკუთვნის ჩვენს წირს (ეს შეიძლება მოხდეს მხოლოდ მაშინ, როცა წირი დაშლადია). თუ გამოვრიცხავთ ამ შემთხვევას, ჩვენ შეგვიძლია ყოველთვის ვიგულისხმოთ, რომ $\Omega(x'; x')\neq 0$, ე. ი. $(x_1', x_2', x_3')$ წერტილი გან-

[1]) იხ. § 167 (დეკარტის კოორდინატებისათვის) და § 178a (გეგმილური კოორდინატებისათვის).

ხილულ წირზე არ მდებარეობს [1]). მაშინ (4a) განტოლების ამოხსნა მოცემული იქნება ფორმულით:

$$h=\frac{-\Omega(x';\ x'')\pm\sqrt{[\Omega(x';\ x'')]^2-\Omega(x';\ x')\,\Omega(x'';\ x'')}}{\Omega(x';\ x')}. \qquad (6)$$

ამგვარად, ჩვენ გვაქვს ორი გადაკვეთის წერტილი (ნამდვილი წარმოსახვითი, სხვადასხვა ან ერთმანეთზე დამთხვეული).

§ 217. **მეორე რიგის წირის მხები.** $\Delta$ წრფეს ეწოდება მოცემული $\Gamma$ მეორე რიგის წირის მ ხ ე ბ ი, თუ $\Delta$-ს $\Gamma$-სთან გადაკვეთის ორი წერტილი თანხვედენილია. იმ წერტილს, რომელშიაც თანხვდებიან ხსენებული წერტილები, ეწოდება შ ე ხ ე ბ ი ს წ ე რ ტ ი ლ ი.

მოვძებნოთ $\Gamma$ მეორე რიგის წირის

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3)=0 \qquad (1)$$

მხების განტოლება მოცემულ $M_0$ წერტილში. აღვნიშნოთ შეხების წერტილის კოორდინატები $y_1$, $y_2$, $y_3$-ით; პირობის თანახმად, $M_0$ წერტილი მოცემულ წირს ეკუთვნის, ისე რომ

$$\Phi(y_1,\ y_2,\ y_3)=0.$$

ვთქვათ, $M(x_1,\ x_2,\ x_3)$ საძიებელი მხების სხვა რომელიმე (ნებისმიერი) წერტილია (ნახ. 144). იმისათვის, რომ მოვძებნოთ განტოლება, რომელსაც $M$ წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ (ეს იქნება სწორედ მხების განტოლება), გამოვსახოთ, რომ $M_0M$ წრფის $\Gamma$ წირის გადაკვეთის ორი წერტილი დამთხვეულია. ამისათვის გამოვიყენოთ § 216 (4a) განტოლება, სადაც $(x_1',\ x_2',\ x_3')$ წერტილად ავიღოთ $M(x_1,\ x_2,\ x_3)$ წერტილი, ხოლო $(x_1''\ x_2''\ x_3'')$ წერტილად — $M_0(y_1,\ y_2,\ y_3)$.

ვინაიდან, პირობის თანახმად, $\Omega(y;\ y)=\Phi(y_1,\ y_2,\ y_3)=0$, ამიტომ ხსენებული განტოლება მიიღებს სახეს:

$$h^2\Omega(x;\ x)+2h\Omega(x;\ y)=0. \qquad (*)$$

როგორც მოსალოდნელი იყო, ამ განტოლების ერთი ფესვია $h=0$ (ვინაიდან მნიშვნელობა $h=0$ შეესაბამება $M_0$ წერტილს). იმისათვის, რომ მეორე ფესვიც ნულის ტოლი იყოს, ცხადია, აუცილებელი და საკმარისია, რომ $\Omega(x;\ y)=0$.

ამგვარად, $M_0(y_1,\ y_2,\ y_3)$ წერტილში მხების განტოლებას აქვს სახე:

$$\Omega(x_1,\ x_2,\ x_3;\ y_1,\ y_2,\ y_3)=0, \qquad (2)$$

ანუ, უფრო გაშლილად,

$$x_1\Phi_1(y_1,\ y_2,\ y_3)+x_2\Phi_2(y_1,\ y_2,\ y_3)+x_3\Phi_3(y_1,\ y_2,\ y_3)=0, \qquad (3)$$

[1]) ეს დაშვება არსებითი არ არის. როცა $\Omega(x';\ x')=0$ (6) ფორმულა არ გამოდგება.

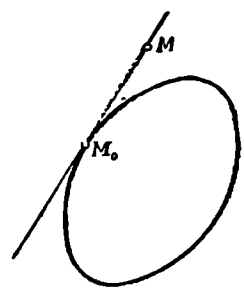
სადაც, § 208-ის აღნიშვნების თანახმად, $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$ ბრიან $\Phi(y_1, y_2, y_3)$ ფუნქციის ნაწილობრივი წარმოებულები, შესაბამად, $y_1$, $y_2$, $y_3$-ით. ამიტომ, (3) განტოლება ასეც შეიძლება გადაიწეროს:

$$x_1\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}+x_2\frac{\partial\Phi}{\partial y_2}+x_3\frac{\partial\Phi}{\partial y_3}=0; \quad (3a)$$

უკანასკნელი განტოლება (3)-სგან განსხვავდება მხოლოდ მუდმივი მამრავლით 2.

წინა განტოლებებში $y_1$, $y_2$, $y_3$ — მუდმივებია (შეხების წერტილის კოორდინატები), ხოლო $x_1\,x_2\,x_3$ —მიმდინარე კოორდინატები.

მე-(3) განტოლება გამოსახავს სავსებით განსაზღვრულ წრფეს, იმ შემთხვევის გარდა, როცა ერთდროულად



ნახ. 144.

$$\Phi_1(y_1, y_2, y_3)=\Phi_2(y_1, y_2, y_3)=\Phi_3(y_1, y_2, y_3)=0. \quad (4)$$

შაგრამ ეს მხოლოდ მაშინ შეიძლება მოხდეს, როცა $\Gamma$ დაშლადი წირია, ხოლო $M_0(y_1, y_2, y_3)$—მისი ორმაგი წერტილი (§ 211, შენიშვნა).

ამგვარად, $\Gamma$ წირის ყოველ $M_0$ წერტილზე შეიძლება გავატაროთ მხოლოდ ერთი მხები. გამონაკლისს წარმოადგენს მხოლოდ ის შემთხვევა, როცა $\Gamma$ შლადი წირია და $M_0$—მისი ორმაგი წერტილი.

ამ უკანასკნელ შემთხვევაში „მხებად“ შეგვიძლია მივიღოთ ყოველი ისეთი წრფე, რომელიც ამ წერტილზე გაივლის, ვინაიდან ასეთი წრფე წირს ჰკვეთს ორ თანხვედენილ წერტილში. ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ $M_0$ წერტილს ერთ-ერთ იმ წრფეზე ავიღებთ, რომლებადაც $\Gamma'$ იშლება (მხოლოდ არა მათ გადაკვეთაზე), მაშინ მხები ამ წრფეზეა დამთხვეული.

პრაქტიკულად ხშირად მოსახერხებელია მხების განტოლება დავწეროთ არაერთგვაროვან კოორდინატებში. ამ განტოლების მისაღებად (3)-ში უნდა დავუშვათ, რომ $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=1$, $y_1=x_0$, $y_2=y_0$, $y_3=1$, რაც, § 208-ს აღნიშვნებით, მოგვცემს განტოლებას:

$$x\Phi_1(x_0, y_0, 1)+y\Phi_2(x_0, y_0, 1)+\Phi_3(x_0, y_0, 1)=0. \quad (5)$$

ამ განტოლებას შეიძლება სხვა სახეც მივცეთ. სახელდობრ, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $M(x_0, y_0)$ წერტილი ჩვენ წირზე მდებარეობს, გვექნება: $F(x_0, y_0)=\Phi(x_0, y_0, 1)=0$ და § 208-ის (7a) იგივობა მოგვცემს:

$$x_0\Phi_1(x_0, y_0, 1)+y_0\Phi_2(x_0, y_0, 1)+\Phi_3(x_0, y_0, 1)=0. \quad (**)$$

გამოვაკლოთ (**) ტოლობა (5)-ს, მივიღებთ მხების განტოლებას შემდეგი სახით:

$$(x-x_0)\Phi_1(x_0, y_0, 1)+(y-y_0)\Phi_2(x_0, y_0, 1)=0. \quad (6)$$

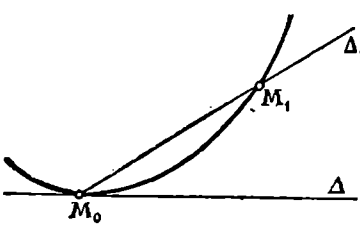
ან კიდევ (იხ. § 208-ის აღნიშვნები):

$$(x-x_0)\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x_0}+(y-y_0)\frac{\partial F(x_0, y^0)}{\partial y_0}=0. \qquad (6a)$$

**§ 218. მხები, როგორც მკვეთის ზღვარი.** მხების ზემომოცემული სწორი ალგებრული განმარტება ჩვენს მიერ მოცემული იყო მეორე რიგის წირებისათვის. იგი ადვილად შეიძლება განვაზოგადოთ ნებისმიერი რიგის ალგებრული წირებისათვის (და აგრეთვე ეგრეთ წოდებულ „ანალიზურ“ წირებისათვისაც). ჩვენ ამ განზოგადებაზე აღარ შევჩერდებით, მხოლოდ მოვიყვანთ დიფერენციალურ გეომეტრიაში ჩვეულებრივად მიღებულ განმარტებას მხებისა, რაც გამოსადეგია ყოველგვარი წირისათვის.

ჩვენ ვნახავთ, რომ მხების ეს განმარტება გამოყენებული მეორე რიგის წირისათვის მიგვიყვანს იმავე შედეგამდე, რაზედაც პირველ განმარტებას მივყევართ (თუ გამორიცხავთ ერთ კერძო შემთხვევას, რომლის შესახებ ცალკე იქნება ნათქვამი).

დავუშვათ, მოცემულია რაიმე წირი და ვთქვათ $M_0$ და $M_1$ მისი რომელიმე ორი წერტილია, ხოლო $\Delta_1$—ამ ორ წერტილზე გამავალი წრფე („მკვეთი“) (ნახ. 145). ახლა წარმოვიდგინოთ, რომ $M_0$ წერტილი უძრავად რჩება, ხოლო $M_1$ წერტილი ისე მიისწრაფვის $M_0$-სკენ, რომ ყოველთვის წირზე რჩება. $\Delta$ წრფეს, რომელიც $\Delta_1$ მკვეთის ზღვრულ მდებარეობას წარმოადგენს, როცა $M_1$ წერტილი მიისწრაფვის $M_0$ წერტილისკენ, ეწოდება მოცემული წირის მხები $M_0$ წერტილში.




ნახ. 145.

ცხადია, შესაძლებელია ისეთი შემთხვევა, რომ როცა $M_1$ უახლოვდება $M_0$-ს მკვეთი $\Delta_1$ არ მიისწრაფვის გარკვეული ზღვრული მდებარეობისაკენ; მაშინ ამბობენ, რომ მოცემულ წირს $M_0$ წერტილში მხები არა აქვს.

მხების ეს განმარტება გამოსადეგია არა მარტო ბრტყელი, არამედ სივრცითი წირებისათვისაც [1]).

დავკმაყოფილდეთ მხოლოდ ბრტყელი წირების შემთხვევით და შევეცადოთ გამოვარკვიოთ, თუ რა პირობებში შეგვიძლია, ვთქვათ, რომ მოცემულ წირს მოცემულ წერტილში აქვს მხები და როგორ მოვძებნოთ იგი.

ვთქვათ,

$$F(x, y)=0 \qquad (1)$$

არის განსახილველი წირის განტოლება სიბრტყეზე დეკარტის არაერთგვაროვან კოორდინატებში.

[1]) თუ მკითხველი არ იცნობს დიფერენციალური აღრიცხვის საფუძვლებს, მას შეუძლია გამოტოვოს ამ პარაგრაფის დანარჩენი ნაწილი.

ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $F(x, y)$ ფუნქცია არა მარტო განუწყვეტელია, არამედ აქვს განუწყვეტელი პირველი რიგის ნაწილობრივი წარმოებულებიც $x$ და $y$-ის ცვალებადობის რაიმე არეში, რომლის განხილვითაც ჩვენ შემოვი ფარგლებით.

ვთქვათ, $(x_0, y_0)$ არის (1) წირის რაიმე წერტილი. თუ ერთი მაინც $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ ნაწილობრივ წარმოებულთაგან $(x_0, y_0)$ წერტილში ნულისგან განსხვავებულია, მაშინ ამ წერტილს განხილული წირის ჩვეულებრივი წერტილი ეწოდება; თუკი

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0} = 0,$$

მაშინ $(x_0, y_0)$ წერტილს ეწოდება განსაკუთრებული წერტილი.

შემდეგში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $(x_0, y_0)$ წირის ჩვეულებრივი წერტილია, ისე რომ, ამ წერტილში $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ სიდიდეთაგან ერთ-ერთი ნულისგან განსხვავებულია. ვიგულისხმოთ, მაგალითად, რომ $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$.

არაცხადი ფუნქციათა შესახებ ცნობილი დებულების ძალით, (1) განტოლება $y$-ს განსაზღვრავს როგორც $x$-ის ცალსახა ფუნქციას:

$$y = f(x), \tag{2}$$

იმ პირობით, რომ განიხილება მხოლოდ ისეთი $(x, y)$ წერტილები, რომლებიც საკმარისად ახლო არიან $(x_0, y_0)$ წერტილთან. ამასთანავე, $f(x)$ ფუნქციას აქვს საკმარისად განზღვრული განუწყვეტელი წარმოებული $x = x_0$ წერტილის მახლობლობაში.

(2) განტოლებიდან ადვილად შეიძლება გადავიდეთ ჩვენი წირის პარამეტრული სახით წარმოდგენაზე, თუ დავუშვებთ, მაგალითად, რომ

$$x = t, \quad y = f(t). \tag{3}$$

უფრო მეტი ზოგადობისათვის, ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $x = \varphi_1(t)$, სადაც $\varphi_1(t)$ არის $t$-ს ნებისმიერი ფუნქცია; მაშინ გვექნება:

$$y = f[\varphi_1(t)] = \varphi_2(t).$$

ყოველივე ეს ნათქვამი იყო ჯერ კიდევ § 81-ში; აქ კი გავაკეთებთ არსებით დამატებას. სახელდობრ, შევნიშნოთ, რომ, თუ $(x_0, y_0)$ ჩვენი წირის ჩვეულებრივი წერტილია, მაშინ მისი პარამეტრული სახით წარმოდგენა:

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t) \tag{4}$$

ისე შეგვიძლია შევარჩიოთ, რომ $t$ პარამეტრის მნიშვნელობათათვის რომელიმე საკმარისად მცირე $t_0 - h$, $t_0 + h$ შუალედში, სადაც $t_0$ არის $(x_0; y_0)$

წერტილის შესაბამი პარამეტრის მნიშვნელობა, ორივე $\varphi_1(t)$ და $\varphi_2(t)$ ფუნქცია იყოს ცალსახა და ჰქონდეს განუწყვეტელი წარმოებულები, ამასთანავე, ერთ-ერთი ამ წარმოებულთაგანი მაინც არსად ამ შუალედში ნულად არ გადაიქცეს.

მართლაც, ამისათვის საკმარისია $\varphi_1(t)$ ფუნქციად ავიღოთ ისეთი ნებისმიერი ფუნქცია, რომელსაც მოცემულ შუალედში ექნება ნულისგან განსხვავებული განუწყვეტელი წარმოებული და $\varphi(t_0)=x_0$. მაშინ $\varphi_2(t)=f[\varphi_1(t)]$ ფუნქციასაც ექნება განუწყვეტელი წარმოებული (საკმარისად მცირე შუალედში $t_0-h'$, $t_0+h'$), ვინაიდან ჩვენ ვიცით, რომ $f(x)$ ფუნქციას განუწყვეტელი წარმოებული აქვს.

ჩვენი მსჯელობა ჩატარებული იყო იმ დაშვებით, რომ

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0} \neq 0.$$

თუ $\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0}=0$, მაშინ, პირობის თანახმად, $\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x_0} \neq 0$ და ჩვენ ხელახლა მივიღებთ იმავე შედეგს, თუ $x$ და $y$, $\varphi_1(t)$ და $\varphi_2(t)$ როლებს შევუცვლით.

თუ $\varphi_1(t)$ და $\varphi_2(t)$ ფუნქციებს ხსენებული თვისება აქვთ, მაშინ ვიტყვით, რომ (4) ფორმულები იძლევიან წირის ნორმალურ პარამეტრულ წარმოდგენას $(x_0, y_0)$ წერტილის მახლობლობაში. ნორმალური წარმოდგენის არსებითი თვისება ის არის, რომ $t$ პარამეტრის ყოველ მნიშვნელობას ($t_0$-ის მახლობლობაში) შეესაბამება წირის ე რ თ ი გარკვეული წერტილი და, პირიქით, $(x_0, y_0)$ წერტილის მახლობლობაში, წირის ყოველ $(x, y)$ წერტილს, შეესაბამება პარამეტრის ერთი გარკვეული მნიშვნელობა ($t_0$-ის მახლობლობაში). პირველი დებულება გამომდინარეობს $\varphi_1$ და $\varphi_2$ ფუნქციების ცალსახობიდან. მეორე დებულებაც აგრეთვე ადვილი დასამტკიცებელია: პირობის თანახმად, $\varphi_1'$ ან $\varphi_2'$ წარმოებულთაგან ერთ-ერთი მაინც 0-სგან განსხვავებულია ($t=t_0$ მნიშვნელობის მახლობლობაში). ვთქვათ, მაგ., $\varphi_1'(t) \neq 0$. მაშინ არაცხადი ფუნქციათა თეორემის ძალით ტოლობა $x=\varphi_1(t)$ მოცემული $x$-სთვის ($x_0$-ის მახლობლობაში) იძლევა ერთ, საკმაოდ განზღვრულ მნიშვნელობას $t$-სთვის.

ახლა გადავიდეთ მხების მოძებნაზე $(x_0, y_0)$ წერტილში. ჩვენ ვნახავთ, რომ ზემოხსენებულ პირობებში მხები ყოველთვის არსებობს.

მართლაც, ვთქვათ, $t_0$ და $t_1$ არიან $t$ პარამეტრის ის მნიშვნელობანი, რომლებიც შეესაბამებიან $M_0$ და $M_1$ წერტილებს. ამ წერტილთა კოორდინატები $(x_0, y_0)$ და $(x_1, y_1)$ მოცემული იქნებიან ფორმულებით

$$x_0=\varphi_1(t_0),\ y_0=\varphi_2(t_0);\ x_1=\varphi_1(t_1),\ y_1=\varphi_2(t_1).$$

$M_0$ და $M_1$ წერტილებზე გამავალ $\Delta_1$ წრფის მიმმართველ ვექტორად შეიძლება ავიღოთ ვექტორი $(x_1-x_0,\ y_1-y_0)$ ან ნებისმიერი მისი პარალელური

ვექტორი, მაგალითად, $(x, y)$ ვექტორი, სადაც

$$X=\frac{x_1-x_0}{t_1-t_0},\quad Y=\frac{y_1-y_0}{t_1-t_0};$$

ჩვენ სწორედ ამ უკანასკნელ ვექტორს ავიღებთ. როცა $t_1$ მიისწრაფვის $t_0$-სკენ $X$ და $Y$ სიდიდეები მიისწრაფვიან გარკვეული $X_0$, $Y_0$ ზღვრებისაკენ, სახელდობრ:

$$X_0=\lim_{t_1\to t_0} X=\lim_{t_1\to t_0}\frac{\varphi_1(t_1)-\varphi_1(t_0)}{t_1-t_0}=\varphi_1'(t_0),\quad Y_0=\varphi_2'(t_0).$$

$(X_0, Y_0)$ ვექტორი ნულისგან განსხვავებულია, ვინაიდან, პირობის თანახმად, $\varphi_1'(t_0)$, $\varphi_2'(t_0)$ სიდიდეთაგან ერთ-ერთი მაინც ნულის ტოლი არ არის. მაშასადამე, ამ ვექტორს გარკვეული მიმართულება აქვს. ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ როცა $t_1\to t_0$ მაშინ $\Delta_1$ წრფე მიისწრაფვის სავსებით განზღვრულ $\Delta$ წრფისაკენ, რომელიც გადის $M_0$ წერტილზე და მიმართულების ვექტორად აქვს $(X_0, Y_0)$. მაშასადამე, მხები არსებობს და მისი განტოლება არის:

$$\frac{x-x_0}{X_0}=\frac{y-y_0}{Y_0} \tag{5}$$

ანუ

$$\frac{x-x_0}{x_0'}=\frac{y-y_0}{y_0'}. \tag{6}$$

აქ $x_0'$ და $y_0'$ აღნიშნავს $x'=\frac{dx}{dt}$, $y'=\frac{dy}{dt}$ წარმოებულების მნიშვნელობებს პარამეტრის $t=t_0$ მნიშვნელობისათვის, რომელიც $M_0$ წერტილს შეესაბამება.

თუ წირის განტოლება მოცემულია ცხადი სახით (2), მაშინ შეგვიძლია ავიღოთ $x=t$, $y=f(t)$; გვექნება:

$$x'=1,\ y'=f'(t),\ y_0'=f'(t_0)=f'(x_0)$$

და მხების (6) განტოლება შეიძლება ასე დაიწეროს:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0). \tag{7}$$

თუ წირი მოცემულია ზოგადი სახის განტოლებით, მაშინ მხების განტოლების გამოსაყვანად აუცილებელი არ არის ფაქტიურად გადავიდეთ პარამეტრულ წარმოდგენაზე; საკმარისია ვიცოდეთ, რომ ასეთი წარმოდგენა შესაძლებელია. წარმოვიდგინოთ, რომ წირის განტოლებაში

$$F(x, y)=0$$

$x$ და $y$-ის ნაცვლად ჩასმულია მათი გამოსახულებანი $t$ პარამეტრის საშუალებით. მაშინ წინა განტოლება იგივობად გადაიქცევა. გავაწარმოოთ იგი

(რთული ფუნქციის გაწარმოების წესით), მივიღებთ

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\frac{dy}{dt}=0,$$

საიდანაც, თუ $t$-ს ნაცვლად ჩავსვამთ $t_0$-ს:

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x_0}x_0'+\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0}y_0'=0.$$

ვინაიდან, პირობის თანახმად, $\frac{\partial F}{\partial x_0}$, $\frac{\partial F}{\partial y_0}$ წარმოებულთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, ამიტომ წინა ტოლობა საეჭვოთ განსაზღვრავს $x_0'$ და $y_0'$ სიდიდეთა ფარდობას. ჩავსვათ $x_0'$, $y_0'$-ის ნაცვლად მათი პროპორციული [(6) ტოლობის ძალით] $x-x_0$, $y-y_0$ სიდიდეები, მივიღებთ მხების განტოლებას შემდეგი სახით:

$$(x-x_0)\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x_0}+(y-y_0)\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0}=0. \tag{8}$$

კერძოდ, თუ $F(x, y)$ მეორე ხარისხის პოლინომია, მაშინ განხილული წირი მეორე რიგისაა; ამ წირს განსაკუთრებული წერტილი მხოლოდ იმ შემთხვევაში შეიძლება ჰქონდეს, როცა იგი ორ წრფედ იშლება; განსაკუთრებულ წერტილს ამ შემთხვევაში წარმოადგენს ამ წრფეების გადაკვეთა, ე. ი. ორმაგი წერტილი. მართლაც, თუ $\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x_0}=0$, $\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0}$ ე. ი. თუ $\Phi_1(x_0, y_0, 1)=\Phi_2(x_0, y_0, 1)=0$, მაშინ წინა პარაგრაფის (**) ფორმულის ძალით, აგრეთვე $\Phi_3(x_0, y_0, 1)=0$. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში

$$\Phi_1(x_0, y_0, 1)=0,\quad \Phi_2(x_0, y_0, 1)=0,\quad \Phi_3(x_0, y_0, 1)=0$$

და აქედან კი გამომდინარეობს ჩვენი დებულება (იხ. წინა პარაგრაფი).

თუ გამოვრიცხავთ იმ შემთხვევას, როცა $(x_0, y_0)$ განსაკუთრებული წერტილია მაშინ, როგორც ვხედავთ, ამ პარაგრაფში მოცემულ მხების განმარტებას, მივყევართ იმავე შედეგამდე, რაზედაც ადრე მიღებულმა განმარტებამ მიგვიყვანა.

ჩვენ არ შევჩერდებით განსაკუთრებულ წერტილებში მხებთა საკითხზე.

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა.** პარამეტრული სახით მოცემულ სივრცის წირის შემთხვევაში

$$x=\varphi_1(t),\ y=\varphi_2(t),\ z=\varphi_3(t),$$

სადაც $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ ცალსახა ფუნქციებია, რომლებსაც რაიმე შუალედში განუწყვეტელი წარმოებულები აქვთ და ამასთანავე, ერთ-ერთი ამ წარმოებულთაგანი მაინც ნულისგან განსხვავებულია, მხები არსებობს და მოცემულია განტოლებით:

$$\frac{x-x_0}{x_0'}=\frac{y-y_0}{y_0'}=\frac{z-z_0}{z_0'}. \tag{9}$$

ამის დასამტკიცებლად საკმარისია თითქმის სიტყვა-სიტყვით გავიმეოროთ ამ პარაგრაფში მოყვანილი მსჯელობა.

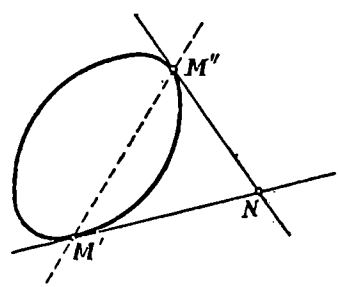
## III. პოლუსი და პოლარი. ტანგენციალური განტოლება

**§ 219. მხების გატარება სიბრტყის მოცემული წერტილიდან. პოლუსი და პოლარი.** დავსვათ შემდეგი ამოცანა: მოცემულია სიბრტყეზე ნებისმიერი წერტილი $N(y_1, y_2, y_3)$; გავატაროთ ამ წერტილიდან $\Gamma$ მეორე რიგის წირის მხები.

ვთქვათ,

$$\Phi(x_1, x_2, x_3)=0 \tag{1}$$

$\Gamma$ წირის განტოლებაა, რომლის შესახებაც შემდეგში (თუ საწინააღმდეგოზე მითითებული არ არის) ვიგულისხმებთ, რომ იგი დაუშლადია [1]) და ვთქვათ $M'(x_1', x_2', x_3')$ მოცემული $N$ წერტილიდან $\Gamma$ წირისადმი გატარებული ერთ-ერთი შემხების, ჯერჯერობით უცნობი, მხების წერტილია (ნახ. 146). $M'$ წერტილზე გატარებული მხების განტოლებას აქვს სახე:



ნახ. 146.

$$\Omega(x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3')=0,$$

სადაც $x_1', x_2', x_3'$ მუდმივებია, ხოლო $x_1, x_2, x_3$ კი — მიმდინარე კოორდინატები. იმისათვის, რომ ეს წრფე აკმაყოფილებდეს ამოცანის პირობებს, საჭიროა იგი გადიოდეს $N(y_1, y_2, y_3)$ წერტილზე. გამოვსახოთ ეს პირობა, მივიღებთ

$$\Omega(y_1, y_2, y_3; x_1', x_2', x_3')=0.$$

ამგვარად, შეხების $M'(x_1', x_2', x_3')$ წერტილის კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდნენ წინა განტოლებას და $\Phi(x_1', x_2', x_3')=0$ განტოლებას, რომელიც გამოსახავს იმას, რომ $M'$ წერტილი $\Gamma$ წირზე მდებარეობს.

თუ წერის სიმარტივისათვის ნიშნაკებს ჩამოვაცილებთ, ვნახავთ, რომ საძიებელი შეხების წერტილის კოორდინატები $x_1, x_2, x_3$ აკმაყოფილებენ ორ განტოლებას: (1) განტოლებას და $\Omega(y_1, y_2, y_3; x_1, x_2, x_3)=0$, ან, უფრო დაწვრილებით,

$$x_1\Phi_1(y_1, y_2, y_3)+x_2\Phi_2(y_1, y_2, y_3)+x_3\Phi_3(y_1, y_2, y_3)=0. \tag{2}$$

ახლა, თუ წინა განტოლებაში $x_1, x_2, x_3$-ს განვიხილავთ როგორც მიმდინარე კოორდინატებს, მაშინ შევამჩნევთ, რომ საძიებელი შეხების წერტილი მდებარეობს (2) წრფის და $\Gamma$ წირის გადაკვეთაზე.

[1]) დაშლადი წირის შემთხვევა დასმული ამოცანის ამოხსნისათვის საინტერესო არ არის, ვინაიდან ამ შემთხვევაში ამოხსნა ისედაც ცხადია.

(2) წრფე [1]) $\Gamma$ წირს ორ $M'$ და $M''$ (ნამდვილ, წარმოსახვით, სხვადასხვა ან თანხვედნილ) წერტილში ჰკვეთს და თითოეული მათგანი, ცხადია, აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას.

ამგვარად, დასმული ამოცანის ამოხსნისათვის საკმარისია მოვძებნოთ (2) წრფის $\Gamma$ წირთან გადაკვეთის $M'$ და $M''$ წერტილები და ამ წერტილებზე გავატაროთ მისი მხები წრფეები. ამ უკანასკნელი ამოცანის ამოხსნა კი ჩვენ უკვე შეგვიძლია.

ჩვენ ვხედავთ, რომ სიბრტყის ნებისმიერი მოცემული წერტილიდან შესაძლებელია გავატაროთ მოცემული მეორე რიგის წირის ორი და მხოლოდ ორი მხები (ნამდვილი, წარმოსახვითი, სხვადასხვა ან თანხვედნილი).

(2) წრფეს, რომელიც ყოველთვის ნამდვილია, თუ $N$ წერტილი ნამდვილია, ეწოდება $N$ წერტილის პ ო ლ ა რ ი [2]) $\Gamma$ წირის მიმართ; $N$ წერტილს კი ეწოდება (2) წრფის პ ო ლ უ ს ი $\Gamma$ წირის მიმართ.

გადავწეროთ (2) განტოლება ასე:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \tag{2a}$$

სადაც

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \Phi_1(y_1, y_2, y_3) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ u_2 &= \Phi_2(y_1, y_2, y_3) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \\ u_3 &= \Phi_3(y_1, y_2, y_3) = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$u_1$, $u_2$, $u_3$ სიდიდეები არიან (2) წრფის (ერთგვაროვანი) კოორდინატები, ე. ი. $N(y_1, y_2, y_3)$ წერტილის პოლარის კოორდინატები. ვინაიდან, პირობის თანახმად, $\Gamma$ წირი დაუშლადია, ამიტომ დეტერმინანტი

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ნულისგან განსხვავებულია და (3) სისტემა ამოხსნადია $y_1$, $y_2$, $y_3$-ის მიმართ.

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + b_{13}u_3, \\ y_2 &= b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + b_{23}u_3, \\ y_3 &= b_{31}u_1 + b_{32}u_2 + b_{33}u_3, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

სადაც

$$b_{ij} = \frac{A_{ij}}{A} = \frac{A_{ji}}{A} \tag{5}$$

[1]) ეს წრფე საკმაოდ განზოგადებულია, ვინაიდან, პირობის თანახმად, $\Gamma$ წირი დაუშლადია და, მაშასადამე, (2) განტოლების კოეფიციენტები არ შეიძლება ერთდროულად ნულის ტოლი იყვნენ.

[2]) ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ პოლარის განტოლებას ფორმალურად იგივე სახე აქვს, რაც შემხების განტოლებას, მხოლოდ პოლარის განტოლებაში $y_1$, $y_2$, $y_3$ აღნიშნავს ნებისმიერი წერტილის კოორდინატებს, და არა აუცილებლად $\Gamma$-ზე მოთავსებულ წერტილისას.

და სადაც $A_{ij}$ წარმოადგენს $a_{ij}$ ელემენტის ალგებრულ დამატებას $A$ დეტერმინანტში [1]).

(4) დან გამომდინარეობს, რომ სიბრტყის ყოველ $\Delta(u_1, u_2, u_3)$ წრფეს ეთანადება საკმაოდ განსაზღვრული $N(y_1, y_2, y_3)$ პოლუსი, ე. ი. წერტილი, რომლის პოლარსაც იგი წარმოადგენს.

ახლა გამოვარკვიოთ შემდეგი მნიშვნელოვანი საკითხი: როდის არის პოლუსი მოთავსებული თავის პოლარზე.

თუ $N(y_1, y_2, y_3)$ წერტილი მოთავსებულია თავის პოლარზე, მაშინ ეს წერტილი ეკუთვნის თვით $\Gamma$ წირს და პოლარი გადაიქცევა $\Gamma$ წირის შეხებად $N$ წერტილში. მართლაც, თუ $N$ წერტილი (2) პოლარზე დებარეობს, მაშინ მისი კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდნენ (2) განტოლებას, საიდანაც გამომდინარეობს

$$y_1\Phi_1(y_1, y_2, y_3) + y_2\Phi_2(y_1, y_2, y_3) + y_3\Phi_3(y_1, y_2, y_3) = \\ = \Phi(y_1, y_2, y_3) = 0;$$

მაშასადამე, $N$ წერტილი ეკუთვნის $\Gamma$-ს. ცხადია, მაშინ (2) განტოლება წარმოადგენს $\Gamma$ წირის შეხების განტოლებას $N$ წერტილში.

პირიქით, თუ $N$ ეკუთვნის $\Gamma$-ს, მაშინ იგი ბოთავსებულია თავის პოლარზე, რომელიც ამ შემთხვევაში გადაიქცევა მხებად $N$ წერტილში; ეს უშუალოდ გამომდინარეობს $N$ წერტილის პოლარის (2) განტოლებიდან.

რადგანაც მოცემულ წრფეს მხოლოდ ერთი პოლუსი აქვს, ამიტომ ცხადია, რომ $\Gamma$ წირის ყოველი მხების პოლუსი თვით შეხების წერტილია.

ზემოთ ჩვენ ვნახეთ, რომ მოცემული წერტილიდან მოცემულ მეორე რიგის წირისადმი ორი მხების გატარება შეიძლება; ეს მხები წრფეები შეიძლება ერთმანეთზე დამთხვეულიც იყვნენ. ახლახან ნათქვამის ძალით, ამას შეიძლება ადგილი ჰქონდეს მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როცა $N$ წერტილი მდებარეობს თვით $\Gamma$ წირზე. მართლაც, ამ შემთხვევაში $M'$ და $M''$ წერტილები უნდა თანხვდენილი იყვნენ, ე. ი. $M$ წერტილის პოლარი უნდა გადაიქცეს $\Gamma$-ს მხებად.

თუ მოცემულ $N$ წერტილიდან $\Gamma$ წირისადმი გატარებული მხები წრფეები სხვადასხვაა და წარმოსახვითი, მაშინ $M$ წერტილს ეწოდება შიგა წერტილი $\Gamma$-ს მიმართ; თუკი მხები წრფეები სხვადასხვა და ნამდვილია, მაშინ $M$-ს გარე წერტილი ეწოდება. ჩვენ ვნახეთ, რომ თუ ეს მხები წრფეები ერთმანეთზეა დამთხვეული, მაშინ წერტილი თვით $\Gamma$-ზეა მოთავსებული.

**§ 220. პოლუსისა და პოლარის მეორენაირი განმარტება. შეუღლებული წერტილები.** პოლუსისა და პოლარის შესახებ უფრო მნიშვნელოვანი შედეგები გამომდინარეობენ მათი მეორენაირი განმარტებიდან, რომელიც ახლა იქნება მოცემული. დავიწყოთ $\Gamma$ მეორე რიგის წირის მიმართ შეუღლებული წერტილების ცნების შემოტანით.

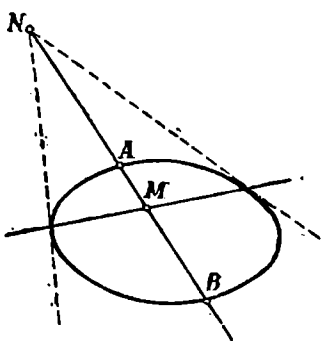
---

[1]) ვინაიდან $A$ დეტერმინანტი სიმეტრიულია, ე. ი. $a_{ij} = a_{ji}$, ამიტომ $A_{ij} = A_{ji}$.

ორ $M$ და $N$ წერტილს ეწოდება **შეუღლებული** მეორე რიგის წირის მიმართ, თუ ეს წერტილები ჰარმონიულად შეუღლებულია $MN$ წრფის და $\Gamma$ წირის გადაკვეთის $A$ და $B$ წერტილების მიმართ (ნახ. 147), ე. ი. თუ

$$(M, N, A, B) = -1.$$

ყოველ ნ წრფეზე, რომელიც $\Gamma$ წირს ორ სხვადასხვა (ნამდვილ ან წარმოსახვით) წერტილში ჰკვეთს, შეუღლებულ წერტილთა წყვილების უსასრულო სიმრავლეა მოიაზებული: ამ წრფის ყოველ წერტილს შეესაბამება სხვებით გარკვეული შეუღლებული წერტილი. ეს შესაბამობა წარმოადგენს ი ნ ვ ო ლ უ ც ი ას (§ 18), რომლის ორმაგი წერტილებია ნ წრფის და $\Gamma$ წირის გადაკვეთის $A$ და $B$ წერტილები.



ნახ. 147.

მოვძებნოთ დამოკიდებულება, რომელიც აკავშირებს ორი შეუღლებული $M(x_1, x_2, x_3)$ და $N(y_1, y_2, y_3)$ წერტილების კოორდინატებს. ამისათვის შევადგინოთ განტოლება, რომელიც განსაზღვრავს $MN$ წრფისა და

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

განტოლებით მოცემული წირის გადაკვეთის $A$ და $B$ წერტილებს.

ვისარგებლებთ რა § 216-ის აღნიშვნებით, (აქ $x_1', x_2', x_3'$-ის როლს შეასრულებენ $x_1, x_2, x_3$, ხოლო $x_1'', x_2'', x_3''$-ის როლს — შესაბამად, $y_1, y_2, y_3$) გვექნება:

$$h^2\Omega(x; x) + 2h\Omega(x; y) + \Omega(y; y) = 0.$$

ამ განტოლების $h_1$ და $h_2$ ფესვებს შეესაბამება გადაკვეთის ორი $A$ და $B$ წერტილი. იმისათვის, რომ $(M, N)$ და $(A, B)$ ორი წყვილი ერთმანეთის ჰარმონიულად ჰყოფდნენ, აუცილებელი და საკმარისია [1]) (§ 187. შენიშვნა), რომ $h_1 = -h_2$ ანუ $h_1 + h_2 = 0$. ეს კი ნიშნავს, რომ წინა განტოლებაში შუა კოეფიციენტი ნულის ტოლია, ე. ი.

$$\Omega(x; y) = 0. \tag{1}$$

სწორედ ეს არის ის დამოკიდებულება, რომელიც აკავშირებს შეუღლებულ $M$ და $N$ წერტილების კოორდინატებს. იგი სიმეტრიულია ორივე $M$, N წერტილების მიმართ, რადგანაც $\Omega(x; y) = \Omega(y; x)$.

ახლა ავიღოთ სიბრტყეზე რაიმე ნებისმიერი უძრავი წერტილი $N(y_1, y_2, y_3)$ და მოვძებნოთ მისი შეუღლებული $\Gamma$ წირის მიმართ $M(x_1, x_2, x_3)$ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი. ცხადია, ეს გეომეტრიული ადგილი მოცემული იქნება განტოლებით: $\Omega(x; y) = 0$, ანუ გაშლილად:

$$x_1\Phi_1(y_1, y_2, y_3) + x_2\Phi_2(y_1, y_2, y_3) + x_3\Phi_3(y_1, y_2, y_3) = 0, \tag{2}$$

სადაც $y_1, y_2, y_3$ მუდმივებია, ხოლო $x_1, x_2, x_3$—მიმდინარე კოორდინატები. ჩვენ ვხედავთ, რომ საძიებელი გეომეტრიული ადგილი წრფეა. მას ეწოდება $N$ წერტილის **პოლარი** $\Gamma$ წირის მიმართ.

ამ პარაგრაფის (2) განტოლება ემთხვევა წინა პარაგრაფის (2) განტოლებას და, მაშასადამე, პოლარის ორივენაირი განმარტება ეკვივალენტურია.

---

[1]) როგორც ვიცით (§ 187), $h$ პარამეტრი შეიძლება განხილულ იქნას, როგორც გეგმილური კოორდინატი $MN$ წრფეზე, $M$ და $N$ ძირითადი წერტილებით.

$N$ წერტილი არის (2) წრფის პოლუსი $\Gamma$-ს მიმართ.

ნათქვამის თანახმად ცხადია, რომ (1) ტოლობა გამოხატავს შემდეგს: $M$ წერტილი მოთავსებულია $N$ წერტილის პოლარზე, ხოლო $N$ წერტილი კი $M$ წერტილის პოლარზე. ამიტომაც შეუღლებული წერტილები ასე შეიძლება დავახასიათოთ: $M$ და $N$ წერტილები შეუღლებულია $\Gamma$ წირის მიმართ, თუ თითოეული მათგანი მეორის პოლარზეა მოთავსებული. ცხადია, საკმარისია, რომ, მაგალითად, $M$ წერტილი მოთავსებული იყოს $N$ წერტილის პოლარზე; აქედან უკვე გამომდინარეობს, რომ $N$ წერტილიც მოთავსებულია $M$ წერტილის პოლარზე. ეს უშუალოდ გამომდინარეობს იქიდან, რომ $\Omega(x; y) = \Omega(y; x)$.

**შენიშვნა.** პოლარის განსაზღვრა გამოსადეგია მაშინაც, როცა $\Gamma$ დაშლადი მეორე რიგის წირია. მაგრამ ამ შემთხვევაში შესაბამობა პოლუსსა და პოლარს შორის ცალსახად შებრუნებადი არ იქნება.

მკითხველს ვანდობთ დაამტკიცოს შემდეგი. ვთქვათ, $\Gamma$ იშლება ორ სხვადასხვა $\gamma'$ და $\gamma''$ წრფედ, რომლებიც იკვეთებიან რაღაც $O$ წერტილში. მაშინ ყოველი $O$-საგან განსხვავებული $N$ წერტილის პოლარი $\Delta$ სავსებით განზღვრული, $O$ წერტილზე გამავალი წრფეა. $\Delta$ და $ON$ წრფეები ჰარმონიულად შეუღლებულია $\gamma'$ და $\gamma''$ წრფეების მიმართ. $O$ წერტილის პოლარი განუსაზღვრელი წრფეა. $O$ წერტილზე გამავალ, ყოველ $\Delta$ წრფეს, პოლუსების უსასრულო სიმრავლე აქვს: ამ პოლუსების გეომეტრიული ადგილი $O$ წერტილზე გამავალი $\Delta'$ წრფეა, რომელიც ჰარმონიულად შეუღლებულია $\Delta$-სთან $\gamma'$ და $\gamma''$ წრფეების მიმართ.

ყოველი წრფის პოლუსი, რომელიც $O$ წერტილზე არ გადის, არის $O$ წერტილი.

ყოველივე ეს შეიძლება დამტკიცდეს ამ პარაგრაფში მოცემული პოლარის განმარტების გამოყენებით, ან თუ მის განმარტებად წინა პარაგრაფის (2) განტოლებას მივიღებთ.

მკითხველს ვანდობთ აგრეთვე განიხილოს ის შემთხვევა, როცა $\Gamma$ ორი თანხვედნილი წრფის ერთობლიობას წარმოადგენს.

**§ 221. მეორე რიგის წირით განზღვრული პოლარობა.** ვთქვათ, როგორც წინათ

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{1}$$

დაუშლადი $\Gamma$ მეორე რიგის წირის განტოლებაა. ჩვენ ვნახეთ, რომ ეს წირი ყოველ $M(x_1, x_2, x_3)$ წერტილსა—პოლუსსა—და სავსებით განზღვრულ $\Delta(u_1, u_2, u_3)$ წრფეს—პოლარს—შორის ამყარებს გარკვეულ შესაბამობას და, პირიქით; ფორმულებს, რომლებიც აკავშირებენ პოლუსისა და პოლარის კოორდინატებს, აქვთ სახე (§ 219):

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ u_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ u_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

რომელთა ამოხსნა $x_1$, $x_2$, $x_3$-ის მიმართ გვაძლევს:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + b_{13}u_3, \\ x_2 &= b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + b_{23}u_3, \\ x_3 &= b_{31}u_1 + b_{32}u_2 + b_{33}u_3, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

სადაც, როგორც წინათ $b_{ij} = \frac{A_{ij}}{A}$.

სიბრტყეზე წერტილებისა და წრფეების (2) ანუ (3) შესაბამობა წარმოადგენს კორელაციის (ურთიერთობის) კერძო სახეს. ორ დაშხვეულ სიბრტყეს შორის (§ 194): ეს კერძო სახე ხასიათდება იმით, რომ (2) ჩასმის კოეფიციენტთა ცხრილი, და, მაშასადამე, (3)-იც სიმეტრიულია.

ასეთ კორელაციას პოლარობა ეწოდება. თუ მოცემულია პოლარობა, ე. ი. (2) კორელაცია ნებისმიერი სიმეტრიული ცხრილით [1], მაშინ ყოველთვის აღსებობს ამ პოლარობა-

[1] იგულისხმება, რომ მისი დეტერმინანტი ნულისგან განსხვავებულია.

ბის განმსაზღვრელი მეორე რიგის წირი. ამ წირის განტოლებაა (1), თუ $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ ქვეშ ვიგულისხმებთ კვადრატულ ფორმას $a_{ij}$ კოეფიციენტებით.

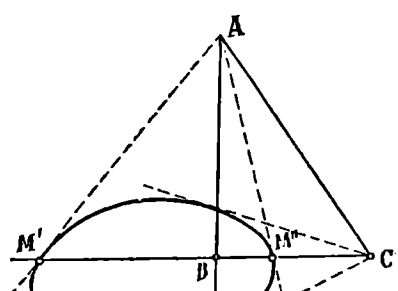
პოლარობის დამახასიათებელი გეომეტრიული თავისებურება, რომელიც მათ ზოგადი სახის კორელაციისაგან ანსხვავებს, მდგომარეობს იმ თვისებაში, რომელიც მითითებული იყო წინა პარაგრაფის ბოლოში, სახელდობრ: თუ $M$ წერტილი მოთავსებულია $N$ წერტილის პოლარზე, მაშინ $N$ წერტილიც მოთავსებულია $M$ წერტილის პოლარზე.

ნაჩვენები თვისებიდან კერძოდ გამომდინარეობს, რომ თუ $\Delta'$ წრფე ბრუნავს $M$ წერტილის გარშემო, მაშინ $\Delta'$ წრფის პოლუსი $M'$ შემოხაზავს $M$ წერტილის $\Delta$ პოლარს, და თუ $M$ წერტილი გაირბენს რაიმე $\Delta'$ წრფეს, მაშინ $M$ წერტილის პოლარი $\Delta$ ბრუნავს $\Delta'$ წრფის $M'$ პოლუსის გარშემო.

სხვა სიტყვებით, ისეთ წრფეთა კონის პოლუსთა გეომეტრიული ადგილი, რომლის ცენტრი $M$ წერტილშია, არის $M$ წერტილის $\Delta$ პოლარზე მოთავსებულ წერტილთა მიმდევრობა. $\Delta$ წრფეზე მდებარე წერტილთა მიმდევრობის პოლართა გეომეტრიული ადგილი არის ისეთი კონა, რომლის ცენტრი $\Delta$ წრფის $M$ პოლუსია.

კორელაციის ზოგადი თვისებებიდან (§ 194) გამომდინარეობს, რომ ხსენებული მიმდევრობანი წერტილებისა და კონების გეგმილეთაა.

§ 222. ავტოპოლარი სამკუთხედი. შესაძლებელია ვაგაოთ ისეთ სამკუთხედთა უსასრულო სიმრავლე, რომლებსაც ის თვისება აქვთ, რომ თითოეული მათი წვეროთ წარმოადგენდეს მოპირდაპირე გვერდის პოლუსს მოცემული მეორე რიგის $\Gamma$ წირის მიმართ. მართლაც, ავიღოთ ნებისმიერი წერტილი $A$, რომელიც არ მდებარეობს $\Gamma$-ზე, და ვაგაოთ მისი პოლარი (ნახ. 148); ავიღოთ ამ პოლარზე ნებისმიერი წერტილი $B$, რომელიც არ მდებარეობს $\Gamma$-ზე, და მისი შეუღლებული წერტილი $C$. ადვილი სანახავია, რომ $ABC$ სამკუთხედი აკმაყოფილებს მოთხოვნილ პირობებს. მართლაც, თვით აგებით, $BC$ წარმოადგენს $A$ წერტილის პოლარს. გარდა ამისა, $CA$ არის $B$ წერტილის პოლარი, რადგანაც პოლარი უნდა გადიოდეს $A$ წერტილზე ($BC$ წრფის პოლუსზე) და $C$ წერტილზე (ვინაიდან $C$ და $B$ შეუღლებული წერტილებია). ასევე დავამტკიცოთ, რომ $AB$ წრფე $C$ წერტილის პოლარია.



ნახ. 148.

სამკუთხედს, რომელსაც ხსენებული თვისება აქვს, ეწოდება ავტოპოლარი ანუ თვითშეუღლებული სამკუთხედი $\Gamma$-ს მიმართ.

თუ ამ სამკუთხედს ვიღებთ გეგმილურ კოორდინატთა სისტემის ძირითად სამკუთხედად, მაშინ $\Gamma$-ს განტოლება მიიღებს მეტად მარტივ სახეს. მართლაც, ვთქვათ, $\Phi(x_1, x_2, x_3)=0$ არის $\Gamma$ წირის განტოლება კოორდინატთა ამ სისტემის მიმართ. $A(1, 0, 0)$ წერტილის პოლარი მოიცემა განტოლებით

$$x_1\Phi_1(1, 0, 0)+x_2\Phi_2(1, 0, 0)+x_3\Phi_3(1, 0, 0)=0,$$

ე. ი.

$$x_1a_{11}+x_2a_{21}+x_3a_{31}=0.$$

ბაგრამ პირობის თანახმად, ეს პოლარი არის $BC$ წრფე, რომლის განტოლებაა

$$x_1=0.$$

ნაშასადამე, უნდა გვქონდეს: $a_{21}=a_{31}=0$. ასევე დავამტკიცებთ, რომ ყველა სხვადასხვა ნიშნაკიანი $a_{ij}$ კოეფიციენტები ნულის ტოლია და $\Gamma$ წირის განტოლებას აქვს სახე:

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=0,$$

ანუ, თუ სწვა აღნიშნებს შემოვიღებთ,

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 0. \tag{1}$$

ცხადია, რომ პირიქითაც: თუ $\Gamma$ წირის განტოლებას აქვს (1) სახე, მაშინ ძირითადი სამკუთხედი ამ წირის მიმართ ავტოპოლარულია.

ახლა ჩვენ უკვე ვიცით, თუ რა გეომეტრიული შინაარსი აქვს წირის განტოლების უკანასკნელ (1) სახეზე, რომელზედაც უკვე ლაპარაკი იყო § 211-ში.

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა.** ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ $\Gamma$ წირი დაუწლადია. მაგრამ ადვილი მისახვედრია, თუ როგორ უნდა ვიაროთ ავტოპოლარი სამკუთხედი დაწლადი წირის შემთხვევაშიც [1]. მკითხველს ვანდობთ ეს თვითონ ჩაატაროს, და დაამტკიცოს აგრეთვე, რომ ამ შემთხვევაშიც გვექნება (1) სახის განტოლება, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ საერთო $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ რიცხვებიდან ყველა არ იქნება ნულისგან განსხვავებული.

§ 223. **შეუღლებული წრფეები. მეორე რიგის წირის ტანგენციალური განტოლება.** კლასის ცნება. შეუღლებულ წერტილთა შესახებ ცნება წრფეებისათვის არის შეუღლებულ წრეთა ცნება. ორ წრფეს ეწოდება შ ე უ ღ ლ ე ბ უ ლ ი მეორე რიგის $\Gamma$ წირის მიმართ, თუ თითოეული მათგანი მეოთხე პოლუსზე გადის. მაგ., 148 ნახაზზე $AB$ და $AC$ წრფეები შეუღლებულია (ისე როგორც ნებისმიერი წყვილი ავტოპოლარი სამკუთხედის გვერდებისა).

$\Gamma$-ს ყოველი მხები თავის თავის შეუღლებულია (ვინაიდან მხები შეიცავს თავის პოლუსს) და, პირიქით: ყოველი თავის თავის შეუღლებული წრფე არის მხები (ვინაიდან წრფე, რომელიც შეიცავს თავის პოლუსს, არის მხები).

$A$ წერტილიდან (რომელიც $\Gamma$-ზე არ მდებარეობს) გატარებული $AB$ და $AC$ შეუღლებული წრფეები $\Gamma$-ს მიმართ, ჰარმონიულად შეუღლებულია $A$ წეროტილიდან $\Gamma$-სადმი გატარებული $AM'$ და $AM''$ მხები წრფეების მიმართ. მართლაც (ნახ. 148), ეთქვათ, $M'M''$ $A$ წერტილის პოლარია. განხილული წრფეების გადაკვეთის $B$ და $C$ წერტილები პოლართან ჰარმონიულად შეუღლებულია $M'$, $M''$ წერტილების მიმართ (რადგანაც, მაგალითად, $B$ არის $AC$ წრფის პოლუსი). მაშასადამე, $AB$ და $AC$ წრფეები ჰარმონიულად შეუღლებულია $AM'$ და $AM''$ წრფეებთან.

ამგვარად, შესაბამობა შეუღლებული წრფეებისა, რომლებიც ეკუთვნიან კონას მოცემული ცენტრით $A$ წერტილში, არის ინვოლუცია, ოომლის ორმაგი წრფეები $A$ წერტილიდან $\Gamma$-სადმი გატარებული მხები წრფეებია.

ახლა მოვძებნოთ ანალიზური გამოსახულება იმ პირობისა, რომელსაც ადგილი უნდა ჰქონდეს ორმ ორი მოცემული $\Delta(u_1, u_2, u_3)$ და $\Delta'(v_1, v_2, v_3)$ წრფე შეუღლებული იყოს. ისე, როგორც ვინათ, ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $\Gamma$—დაუწლადი წირია.

$\Delta$ წრფის $M(x_1, x_2, x_3)$ პოლუსის კოორდინატები მოცემულია § 211-ის (4) ფორმულებით:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + b_{13}u_3, \\ x_2 &= b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + b_{23}u_3, \\ x_3 &= b_{31}u_1 + b_{32}u_2 + b_{33}u_3, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

სადაც ვინაიდებურად $b_{ij} = \frac{A_{ij}}{A}$.

იმისათვის, რომ $\Delta'$ წრფე გადიოდეს $M$ წერტილზე, აუცილებელი და საკმარისია, რომ სრულდეს ტოლობა

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0 \tag{2}$$

ანუ

$$v_1(b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + b_{13}u_3) + v_2(b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + b_{23}u_3) + v_3(b_{31}u_1 + b_{32}u_2 + b_{33}u_3) = 0. \tag{3}$$

[1] იხ. შენიშვნა § 230-ის ბოლოში.

აღვნიშნოთ $\Psi(u_1, u_2, u_3)$-ით კვადრატული ფორმა $b_{ij}$ კოეფიციენტებით:

$$\Psi(u_1, u_2, u_3) = \sum_{i,j} b_{ij} u_i u_j. \tag{4}$$

მაშინ (3) ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$v_1 \Psi_1(u_1, u_2, u_3) + v_2 \Psi_2(u_1, u_2, u_3) + v_3 \Psi_3(u_1, u_2, u_3) = 0, \tag{3a}$$

სადაც

$$\left.\begin{aligned} \Psi_1(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2}\frac{\partial \Psi}{\partial u_1}, \quad \Psi_2(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2}\frac{\partial \Psi}{\partial u_2}, \\ \Psi_3(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2}\frac{\partial \Psi}{\partial u_3}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ამგვარად, ჩვენ გვაქვს იმ ტოლობის მთლიანი ანალოგია, რომელიც შეუღლებულ წერტილთა კოორდინატებს აკავშირებდა, მაგრამ აქ წერტილის კოორდინატების ნაცვლად გვაქვს წრფის კოორდინატები, ხოლო $\Phi$ ფორმის ნაცვლად $\Psi$ ფორმა.

$\Phi$ და $\Psi$ ფორმებს, რომელთა $a_{ij}$ და $b_{ij}$ კოეფიციენტები დაკავშირებულია ტოლობებით:

$$b_{ij} = \frac{A_{ij}}{A}, \tag{*}$$

ეწოდება მიკავშირებული ფორმები. ადვილი შესამჩნევია, რომ აგრეთვე გვაქვს [1]

$$a_{ij} = \frac{B_{ij}}{B}, \tag{**}$$

სადაც

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

ხოლო $B_{ij}$, $b_{ij}$ ელემენტის ალგებრული დამატება $B$ დეტერმინანტში, რომელიც ნულისგან განსხვავებულია, როგორც ეს გამომდინარეობს (1) სისტემის ამოხსნადობიდან $u_1, u_2, u_3$-ის მიმართ.

იმისათვის, რომ $\Delta(u_1, u_2, u_3)$ წრფე $\Gamma$ წირის მხები იყოს აუცილებელი და საკმარისია, რომ მისი შეუღლებული წრფე თვითონ მასვე ემთხვეოდეს [2], ე. ი. $v_1, v_2, v_3$ პროპორციული იყოს $u_1, u_2, u_3$-ის; რადგანაც პროპორციულობის კოეფიციენტს მნიშვნელობა არა აქვს, ამიტომ შეგვიძლია მივიღოთ

$$v_1 = u_1, \quad v_2 = u_2, \quad v_3 = u_3.$$

თუ (3) ან (3a) ფორმულებში $v_1, v_2, v_3$-ის ნაცვლად ჩავსვამთ $u_1, u_2, u_3$-ს, მივიღებთ განტოლებას:

$$\Psi(u_1, u_2, u_3) = 0, \tag{6}$$

რომელიც წარმოადგენს იმის აუცილებელ და საკმარის პირობას, რომ $\Delta(u_1, u_2, u_3)$ წრფე $\Gamma$-ს შემხები იყოს.

[1] მართლაც, თუ (1) სისტემას ამოვხსნით $u_1, u_2, u_3$-ის მიმართ, უნდა მივიღოთ ხელახლა § 219-ის (4) ტოლობანი (მაგრამ ახლა $y_1, y_2, y_3$-ის ნაცვლად ვწერთ $x_1, x_2, x_3$-ს) საიდანაც გამომდინარეობს ჩვენი დებულება.

[2] მართლაც, $\Gamma$-ს მხები შეიცავს თავის პოლუსს და ამიტომ თავის თავის შეუღლებულია და, პირიქით.

ამიტომ (6) განტოლებას ეწოდება Γ წირის განტოლება მხების კოორდინატებში, ანუ ტანგენციალურ კოორდინატებში, ანუ კიდევ ტანგენციალური განტოლება.

თუ მოცემულია არაგანსაკუთრებული კვადრატული ფორმა $\Psi(u_1, u_2, u_3)$, მაშინ ყოველთვის შეიძლება მოვძებნოთ ისეთი მეორე რიგის Γ′ წირი, რომლისთვისაც (6) იქნება განტოლება ტანგენციალურ კოორდინატებში; ამ წირის განტოლება წერტილოვან კოორდინატებში იქნება $\Phi(x_1, x_2, x_3)=0$, სადაც Φ არის Ψ ფორმის მაკავშირებული ფორმა.

სახოგადოდ, შეიძლება ვაჩვენოთ (ამაზე ჩვენ არ შევჩერდებით), რომ ნებისმიერი ალგებრული წირის მხების ერთგვაროვანი კოორდინატები ერთმანეთთან დაკავშირებულია $\Psi(u_1, u_2, u_3)=0$ სახის ალგებრული განტოლებით, სადაც Ψ—ერთგვაროვანი პოლინომია. ამ განტოლებას ეწოდება მოცემული წირის ტანგენციალური განტოლება, ხოლო მის ხარისხს—წირის კლასი. წირის რიგი და კლასი, სახოგადოდ, ერთი და იგივე არ არის. დაუშლადი მეორე რიგის წირის შემთხვევაში კი, როგორც ჩვენ ვნახეთ, კლასი აგრეთვე ორის ტოლია. მაშასადამე, დაუშლადი მეორე რიგის წირები იმავე დროს იქნებიან, მეორე კლასის წირები.

მოცემული წირის კლასი შეიძლება გეომეტრიულად განვმარტოთ, როგორც რიცხვი შემხებთა, რომლებიც გატარებული არიან წირისადმი მასზე არ მდებარე ნებისმიერი წერტილიდან.

მართლაც, ვთქვათ, $M(x_1, x_2, x_3)$ სიბრტყის რომელიმე წერტილია. მოცემული წირისადმი $M$ წერტილიდან გატარებული შემხების $u_1$, $u_2$, $u_3$ კოორდინატები ერთდროულად უნდა აკმაყოფილებდნენ ორ განტოლებას:

$$\Psi(u_1, u_2, u_3)=0 \text{ და } u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0;$$

საზოგადოდ, ამ სისტემის ამოხსნათა რიცხვი უდრის Ψ პოლინომის ხარისხს, საიდანაც გამომდინარეობს ჩვენი დებულება (ცხადია, უნდა ვეძებოთ არა თვით $u_1$, $u_2$, $u_3$, არამედ მათი ფარდობები).

§ 224. ურთიერთობის პრინციპის გამოყენება მეორე რიგის წირებისათვის. წერტილოვან და ტანგენციალურ კოორდინატებში მეორე რიგის წირის განტოლებათა სრული ანალოგია აქაც საშუალებას გვაძლევს გამოვიყენოთ ურთიერთობის პრინციპი სახელდობრ, ნაცვლად იმისა, რომ მეორე რიგის წირი განვიხილოთ, როგორც წერტილთა მატარებელი, იგი შეგვეძლია განვიხილოთ, როგორც (მისდამი შემხებ) წრფეთა მატარებელი.

ყოველი დებულებიდან, რომელიც შეეხება პოლუსს, პოლარს და მხებს შეიძლება მივიღოთ „საურთიერთო“ დებულება, თუ გამოთქმას: „წერტილები, რომლებიც ეკუთვნიან წირს“ შევცვლით გამოთქმით: „წირის მხები წრფეები“, და თუ სიტყვას: „პოლუსი“ შევცვლით „პოლარი“ და, პირიქით, დანარჩენ გარდაქმნებს კი ვაწარმოებთ § 170-ში ნაჩვენები წესით.

ჩვენ აქ ვიძლევით გამოთქმული აზრის დაწვრილებით დასაბუთებას, მაგრამ მკითხველს შეუძლია ისარგებლოს ამით, როგორც სახელმძღვანელო აზრით, ზემოთ უკვე დამტკიცებულ დებულებათა საურთიერთო დებულებების დამტკიცების დროს.

გამოყენებისათვის მკითხველს ვურჩევთ დაამტკიცოს შემდეგი დებულებანი.

1°. ბრიანშონის თეორემა (პასკალის თეორემის საურთიერთო) მეორე რიგის წირის გარშერო შემოხაზული ექვსკუთხედის მოპირდაპირე წვეროების შემაერთებელი წრფეები, ერთ წერტილში იკვეთებიან.

2°. § 215 — თეორემის საურთიერთო თეორემები:

a) ვთქვათ, $f$ და $g$ არის მეორე რიგის Γ წირის ორი მხები. განვიხილოთ მათზე მოთავსებულ წერტილთა მიმდევრობანი, და შევუსაბამოთ ერთმანეთს ამ მიმდევრობათა ის წერტილები, რომლებიც მიიღებიან Γ-ს მხები წრფეების გადაკვეთით $f$ და $g$ წრფეებთან. ასეთნაირად მიღებული შესაბამობა გეგმილური იქნება.

b) ორი გეგმილური წრფივი მიმდევრობის სათანადო წერტილთა შემაერთებელი წრფეები არიან მხებნი რაღაც მეორე რიგის Γ წირისა, რომელიც ეხება იმ წრფეებს, რომელ ზედაც მოთავსებულია მოცემული მიმდევრობანი.

## თავი მეცხრე

# მეორე რიგის წირების აფინური და მეტრიკული თვისებანი

## I. აფინური კლასიფიკაცია. ცენტრი, დიამეტრები, ასიმპტოტები

**§ 225. მეორე რიგის წირების აფინური კლასიფიკაცია.** ჩვენ ვიცით, რომ აფინური გარდაქმნები (სიბრტყეზე) წარმოადგენენ გეგმილური გარდაქმნების ქვეჯგუფს და ხასიათდებიან იმით, რომ აფინური გარდაქმნით არასაკუთრივი წრფე რჩება არასაკუთრივ წრფედ (იხ. § 179-ის ბოლო). ამიტომ ნაკვთების აფინური თვისებები ხასიათდება მათი ურთიერთდამოკიდებულებით არასაკუთრივ წრფესთან. ამის გამო მეორე რიგის წირების აფინური თვისებების შესწავლას დავიწყებთ მათი გადაკვეთების განხილვით არასაკუთრივ წრფესთან.

ვთქვათ,

$$F(x, y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \qquad (1)$$

არის მეორე რიგის წირის განტოლება დეკარტის არაერთგვაროვან კოორდინატებში $x$, $y$ და ვთქვათ,

$$\Phi(x, y, t)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xt+2a_{23}yt+a_{33}t^2=0 \qquad (1a)$$

იმავე წირის განტოლებაა დეკარტის ერთგვაროვან კოორდინატებში [1]).

ქვემოთ ყველგან (როცა წინააღმდეგ შემთხვევაზე ცალკე არ არის მითითებული) ვიგულისხმებთ, რომ $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{22}$ კოეფიციენტები ერთდროულად ნულის ტოლი არ არიან, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში (1) აღარ იქნება მეორე რიგის წირი. მოვიგონოთ, რომ, ჩვენი შეთანხმების თანახმად, ყველა კოეფიციენტი ნამდვილი რიცხვებია.

მოვძებნოთ (1a) წირის გადაკვეთა არასაკუთრივ წრფესთან

$$t=0, \qquad (2)$$

---

[1]) წინა თავისაგან განსხვავებით. აქ არსებითია დეკარტის (და არა ზოგადი სახის გეგმილური) კოორდინატები. ვინაიდან აფინური თვისებების შესწავლაში არასაკუთრივი ელემენტები განსაკუთრებულ როლს ასრულებს, ამიტომ ჩვეულებრივად უფრო მოხერხებულია ვისარგებლოთ დეკარტის არაერთგვაროვანი კოორდინატებით. შემდეგში ჩვენ სწორედ ასე მოვიქცევით გარდა მცირედი გამონაკლისებისა (როგორც, მაგალითად, ამ პარაგრაფში) რაზედაც მუდამ ცალკე იქნება მითითებული.

ე. ი. მოვძებნოთ მოცემული წირის არასაკუთრივი წერტილები. ჩავსვათ (1a) განტოლებაში $t=0$, მივიღებთ განტოლებას

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0, \tag{3}$$

რომელიც განსაზღვრავს ფარდობის $\frac{y}{x}$ $\left(\text{ან } \frac{x}{y}\right)$ მნიშვნელობებს. ვიგულისხმოთ პირველად, რომ $a_{11} \neq 0$; მაშინ შეუძლებელია, რომ $x=0$ (ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში ჩვენ გვექნებოდა აგრეთვე $y=0$, მაგრამ $x$, $y$, $t$ ერთდროულად ნულის ტოლი არ შეიძლება იყვნენ). და ამიტომ (3) განტოლება შეგვიძლია $x^2$-ზე გავყოთ, რაც მოგვცემს განტოლებას

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0, \tag{3a}$$

რომელიც განსაზღვრავს კუთხურ კოეფიციენტებს $k = \frac{y}{x}$ იმ მიმართულებისა, რომლითაც დაშორებულია მოსაძებნი არასაკუთრივი წერტილები.

(3a) განტოლების ფესვების ხასიათი დამოკიდებულია $a_{11}a_{22} - a_{12}^2a_1^2$ გამოსახულების ნიშანზე, რაც წარმოადგენს § 208-ში შემოღებულ დეტერმინანტს $A_{33}$:

$$a_{11}a_{32} - a_{12}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{33}, \tag{4}$$

და რომელიც $\Phi$ კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტში

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} \tag{5}$$

$a_{33}$ ელემენტის ალგებრულ დამატებას წარმოადგენს. გავიხსენოთ, რომ $A_{33}$ დისკრიმინანტია

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \tag{6}$$

კვადრატული ფორმისა, რომელიც მიიღება $\Phi$-სგან, თუ მასში ამოვშლით $t$-ს შემცველ წევრებს.

თუ $A_{33} > 0$, მაშინ (3a) განტოლებას აქვს ორი შეუღლებული წარმოსახვითი ფესვითი და არასაკუთრივი წრფე მოცემულ წირს ორ წარმოსახვითს წერტილში ჰკვეთს; თუ $A_{33} < 0$, მაშინ განტოლებას ორი ნამდვილი ფესვი აქვს და არასაკუთრივი წრფე წირს ჰკვეთს ორ სხვადასხვა ნამდვილ წერტილში; ბოლოს, თუ $A_{33} = 0$, მაშინ განტოლებას ერთი ორმაგი ფესვი აქვს და არასაკუთრივი წრფე წარმოადგენს წირის „მხებს". ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს დასკვნები მართებულია მაშინაც, როცა $a_{22} = 0$[1]).

პირველ შემთხვევაში ($A_{33} > 0$) ჩვენ ვიტყვით, რომ წირი — ელიფსური ტიპისაა, მეორე შემთხვევაში ($A_{33} < 0$), იგი ჰიპერბოლური ტიპისაა, ხოლო მესამე შემთხვევაში ($A_{33} = 0$) — პარაბოლური ტიპისა.

[1]) მართლაც, როცა $a_{22} = 0$, გვაქვს: $A_{33} = -a_{12}^2$ თუ $a_{12} \neq 0$, მაშინ $A_{33} < 0$: ამასთანავე, (3a) განტოლებას აქვს ორი ნამდვილი ფესვი, რომელთაგან ერთი უდრის $\infty$, ხოლო მეორე სასრულოა. თუკი $a_{12} = 0$, მაშინ $A_{33} = 0$: (3a) განტოლებას აქვს ერთი ორმაგი ფესვი $k = \infty$.

ელიფსური ტიპის დაუშლად წირს ეწოდება ელიფსი, ჰიპერბოლური ტიპის დაუშლად წირს—ჰიპერბოლი, პარაბოლური ტიპის დაუშლად წირს—პარაბოლი.

ჩვენ ქვემოთ (§ 238) ვნახავთ, რომ ელიფსის, ჰიპერბოლისა და პარაბოლის ამ განმარტებას მივყეევართ იმავე შედეგამდე, რაზედაც მიგვიყვანა წინათ (VII თავში) შემოღებულმა განმარტებამ, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ ელიფსი, აქ მოყვანილი განსაზღვრით, შეიძლება იყოს არა მარტო ნამდვილი (მაშინ ჩვენ გვექნება წინა შემთხვევა), არამედ წარმოსახვითიც; თუმცა, სანამ ეს დამტკიცებული არ იქნება, ელიფსის ჰიპერბოლისა და პარაბოლის ქვეშ ჩვენ ვიგულისხმებთ ამ პარაგრაფში განსაზღვრულ წირებს.

ცნობილია, რომ მეორე რიგის შლადი წირი ხასიათდება ტოლობით $A=0$, სადაც $A$ არის (5) დეტერმინანტი, და ამგვარად ჩვენ ვღებულობთ ელიფსის, ჰიპერბოლისა და პარაბოლის შემდეგ დამახასიათებელ ნიშნებს:

როცა $A\neq 0$, $A_{33}>0$ წირი ელიფსია,
$A\neq 0$, $A_{33}<0$ „ ჰიპერბოლია,
„ $A\neq 0$, $A_{33}=0$ „ პარაბოლია.

გარდა ამისა, როცა $A=0$, ჩვენ გვაქვს შლადი მეორე რიგის წირი ან ელიფსური ტიპის (როცა $A_{33}=0$), ან ჰიპერბოლური ტიპის (როცა $A_{33}<0$), ან პარაბოლური ტიპის (როცა $A_{33}=0$).

ქვემოთ ჩვენ ვნახავთ (§ 234), რომ პირველ შემთხვევაში წირი იშლება ორ წარმოსახვით შეუღლებულ არაპარალელურ წრფედ, მეორე შემთხვევაში—ორ ნამდვილ არაპარალელურ წრფედ, ხოლო მესამე შემთხვევაში—ორ პარალელურ წრფედ; ეს უკანასკნელი დამტკიცებული იქნება შემდეგ პარაგრაფში.

**§ 225ა. პარაბოლური ტიპის შლადი წირი.** პარაბოლური ტიპის შლადი წირი ხასიათდება შემდეგი ტოლობებით:

$$A=0,\quad A_{33}=0. \tag{1}$$

დავამტკიცოთ, რომ ამ შემთხვევაში წირი წარმოადგენს ორი წრფის ერთობლიობას და ამასთანავე მოვძებნოთ ეს წრფეები.

წინასწარ შევნიშნოთ, რომ (1) ტოლობებიდან გამომდინარეობს კიდევ ორი ტოლობა[1]): $A_{13}=A_{23}=0$, ისე რომ ჩვენ გვექნება:

$$A_{13}=A_{23}=A_{33}=0, \tag{2}$$

[1]) პირობიდან $A=0$ გამომდინარეობს, რომ ყველა დეტერმინანტი, შედგენილი

$$A_{11},\ A_{12},\ A_{13}$$
$$A_{21},\ A_{22},\ A_{23}$$
$$A_{31},\ A_{32},\ A_{33}$$

ცხრილიდან, ნულის ტოლია (იხ. § 6ა დამატების შედეგი), კერძოდ,

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} = A_{11}A_{33}-A_{13}^2=0 \quad \begin{vmatrix} A_{23} & A_{33} \\ A_{33} & A_{33} \end{vmatrix} = A_{23}A_{33}-A_{33}^2=0.$$

მაგრამ, რადგანაც $A_{33}=0$, ამიტომ $A_{13}=A_{23}=0$.

ანუ, უფრო დაწვრილებით, $a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} = a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, ან კიდევ

$$a_{12}a_{23} = a_{22}a_{13},\quad a_{12}a_{13} = a_{11}a_{23},\quad a_{11}a_{22} = a_{12}^2. \tag{2a}$$

ცხადია, პირიქითაც, (2) ანუ (2a) ტოლობებიდან გამომდინარეობენ (1) ფორმულები.

(2a) ფორმულებით ჩვენი წირის განტოლებას

$$a_{11}x^2 = 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{3}$$

ადვილად შეიძლება მივცეთ ისეთი სახე, საიდანაც პირდაპირ გამოიყვანება-საჭირო შედეგი. მართლაც, დავუშვათ, მაგალითად, რომ $a_{11} \neq 0$ (თუ $a_{11} \neq 0$, მაშინ აუცილებლად $a_{22} \neq 0$[1]), და შეგვიძლია იგივე მსჯელობა ჩავატაროთ (თუ $a_{11}$-ს და $a_{22}$-ს როლებს შევუცვლით).

გავამრავლოთ (3) განტოლების ორივე მხარე $a_{11}$-ზე, მივიღებთ

$$a_{11}^2x^2 + 2a_{11}a_{12}xy + a_{11}a_{22}y^2 + 2a_{11}a_{13}x + 2a_{11}a_{23}y + a_{11}a_{33} = 0$$

ანუ, (2a) ტოლობების ძალით,

$$a_{11}^2x^2 + 2a_{11}a_{12}xy + a_{12}^2y^2 + 2a_{11}a_{13}x + 2a_{12}a_{13}y + a_{11}a_{33} = 0.$$

ცხადია, რომ წინა განტოლება შეიძლება ასეც გადაიწეროს:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13})^2 + a_{11}a_{33} - a_{13}^2 = 0,$$

ანუ, ვინაიდან ჩვენი აღნიშვნების თანახმად:

$$a_{11}a_{33} - a_{13}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{22}$$

($A_{22}$ არის $a_{22}$ ელემენტის ალგებრული დამატება $A$ დისკრიმინანტში), კიდევ ასე:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = \pm\sqrt{-A_{22}}. \tag{4}$$

მაშასადამე, ჩვენი წირი წარმოადგენს ორი პარალელური წრფის ერთობლიობას:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} - \sqrt{-A_{22}} &= 0, \\ a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + \sqrt{-A_{22}} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

თუ $A_{22} < 0$, მაშინ ეს წრფეები ნამდვილია, თუ $A_{22} > 0$, ისინი წარმოსახვითია, თუ $A_{22} = 0$ დამთხვეულია.

თუ $a_{22} \neq 0$, მაშინ შევუცვლით რა როლებს $x$, $y$ და ინდექსებს 1.2, დავრწმუნდებით, რომ ამ წრფეების განტოლებები შეიძლება ასეც წარმოვადგინოთ:

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \pm \sqrt{-A_{11}} = 0, \tag{6}$$

[1] თუ $a_{11} = a_{22} = 0$, მაშინ $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $a_{12} = 0$, ე. ი. რომ $a_{11} = a_{22} = a_{12} = 0$, ეს კი ეწინააღმდეგება წინათ მიღებულ პირობას.

სადაც

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}^2. \qquad (**)$$

თუ ორივე $a_{11}$ და $a_{22}$ სიდიდე ნულისგან განსხვავებულია, მაშინ ერთდროულად გამოსადეგია (4) განტოლებებიც და (5) განტოლებებიც. სხვათა შორის აქედან გამომდინარეობს, რომ განხილულ ზოგად შემთხვევაში $A_{11}$-ს და $A_{22}$-ს ერთი და იგივე ნიშანი უნდა ჰქონდეთ (დადებითი, თუ წირები წარმოსახვითია და უარყოფითი, თუ ისინი ნამდვილია). ეს უშუალოდაც ადვილი დასამტკიცებელია.

თუ $a_{11}=0$, $a_{22}\neq 0$, მაშინ, როგორც ადვილად დავრწმუნდებით (2a) და (*) ფორმულებით, გეექნება კიდევ $a_{13}=a_{13}=A_{23}=0$, და (4) განტოლება, როგორც მოსალოდნელი იყო, გადაიქცევა იგივობად $0=0$, რადგანაც იგი მიღებულია მოცემული განტოლების ნულის ტოლ $a_{11}$ სიდიდეზე გამრავლებით. ამ შემთხვევაში უნდა ვისარგებლოთ (6) განტოლებით. ანალოგიურ შენიშვნას აქვს ადგილი იმ შემთხვევაშიც, როცა $a_{22}=0$, $a_{11}\neq 0$.

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა.** ჩვენ შევთანხმდით, რომ მეორე რიგის წირის განტოლებაში კოეფიციენტები $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{22}$ ერთდროულად ნულის ტოლი არ არიან. მიუხედავად ამისა, ზოგჯერ აზრი აქვს [1]) განვიხილოთ ის შემთხვევაც, როცა $a_{11}=a_{12}=a_{22}=0$. ამ შემთხვევაში ჩვენი წირის განტოლებას ერთგვაროვან კოორდინატებში აქვს სახე

$$2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t^2 = (2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}t)\,t = 0,$$

ისე რომ წირი დაიშლება ორ წრფედ:

$$2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}t = 0 \quad \text{და} \quad t=0,$$

რომელთაგან მეორე არასაკუთრივი წრფეა (შევნიშნოთ, რომ პირველიც შეიძლება იყოს არასაკუთრივი წრფე, როცა $a_{13}=a_{23}=0$).

ასეთი შლადი წირი, როგორც ორი წრფის ერთობლიობა, რომლებსაც საერთო არასაკუთრივი წერტილი აქვთ, პარაბოლურ ტიპს უნდა მივაკუთვნოთ [2]).

§ 226. **ასიმპტოტური მიმართულებანი.** იმ მიმართულებებს, რომლითაც მოცემული წირის არასაკუთრივი წერტილებია დაცილებული, ეწოდება ა ს ი მ პ ტ ო ტ უ რ ი მიმართულებანი. თუ $x$, $y$, 0 არის წირის ერთ-ერთი არასაკუთრივი წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები, მაშინ არასაკუთრივი წერტილი დაშორებულია $x$, $y$ ვექტორის მიმართულებით; ამ ვექტორის კოორდინატები აკმაყოფილებენ (§ 225):

$$\varphi(X,\ Y) = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 = 0; \qquad (1)$$

[1]) მაგალითად, როცა შევისწავლით მეორე რიგის ზედაპირის გადაკვეთის საკითხს სიბრტყესთან; ამ საკითხში, კერძოდ, შეიძლება შევხვდეთ აქ განხილულ შემთხვევასაც.

[2]) ცხადია, პარაბოლური ტიპის დაშლადი წირის დამახასიათებელი პირობები $A=0$ $A_{33}=0$ აქ დაცულია.

პირიქით, მიმართულება, რომელიც ამ პირობას აკმაყოფილებს ასიმპტოტურია.

შევნიშნოთ, რომ პარაბოლური ტიპის წირების შემთხვევაში, ზოგადობის დაურღვევლად, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $a_{22} \neq 0$ (თუ $a_{22}=0$, მაშინ შევუცვლით რა როლებს $x$ და $y$, შეგვიძლია ჩავატაროთ იგივე მსჯელობა). როცა $a_{22} \neq 0$, მაშინ აუცილებლად $X \neq 0$ (შეადარეთ § 225) და (1) ტოლობა შეიძლება გადაეწეროთ ასე:

$$a_{22}\left(\frac{Y}{X}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{Y}{X}\right) + a_{11} = 0;$$

ამოვხსნათ ეს განტოლება. მივიღებთ (მხედველობაში გვაქვს, რომ $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$):

$$\frac{Y}{X} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = -\frac{a_{11}}{a_{12}}, \tag{2}$$

საიდანაც გამომდინარეობს

$$\left.\begin{aligned} a_{11}X + a_{12}Y &= 0, \\ a_{12}X + a_{22}Y &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ამგვარად, ასიმპტოტური მიმართულების ვექტორის კოორდინატები პარაბოლური ტიპის წირისათვის აკმაყოფილებენ (3) პირობებს; პირიქით, (3) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $(X, Y)$ ასიმპტოტური მიმართულება აქვს. მართლაც, თუ (3) განტოლებებს გაეამრავლებთ შესაბამად $X$-სა და $Y$-ზე და შევკრებთ, მივიღებთ (1) განტოლებას.

(3)-დან გამომდინარეობს, რომ თუ ჩვენი წირი ორი პარალელური წრფის ერთობლიობაა, მაშინ ასიმპტოტური მიმართულება $(X, Y)$ ამ წრფეების პარალელურია (ამ წრფეების განტოლებანი იხილეთ წინა პარაგრაფში).

**§ 227. მეორე რიგის წირისა და წრფის გადაკვეთის განმსაზღვრელი განტოლება დეკარტის არაერთგვაროვან კოორდინატებში.** ისე როგორც წინათ, ვთქვათ,

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{1}$$

არის მეორე რიგის წირის განტოლება დეკარტის არაერთგვაროვან კოორდინატებში.

ახლა შევადგინოთ განტოლება, რომელიც განსაზღვრავს (1) წირის გადაკვეთას წრფესთან $\Delta$, რომლის პარამეტრული განტოლება არის (§ 88):

$$x = x_0 + X \cdot s, \quad y = y_0 + Y \cdot s \tag{2}$$

გავიხსენოთ, რომ $x_0$, $y_0$-ით აღნიშნულია $\Delta$ წრფის რაიმე (ნებისმიერად არჩეული) მუდმივი $M_0$ წერტილის კოორდინატები, $(X, Y)$—ამ წრფის მიმართულების ვექტორია, ხოლო $s$—ცვალებადი პარამეტრი, რომლის ყოო-

ვექტორული შინაარსი შემდეგია: თუ $M$ მოცემულ $s$-ის მნიშვნელობის შესაბამი წერტილია, მაშინ $s$ არის $\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორის ფარდობა მიმართულების $\vec{P}(X, Y)$ ვექტორთან, ე. ი.

$$\overrightarrow{M_0M} = s\vec{P}.$$

გადაკვეთის წერტილების მოსაძებნად, ჩავსვათ (1)-ში $x$, $y$-ის ნაცვლად მათი (2) გამოსახულებანი. ჩასმის შედეგი უშუალოდ შეიძლება დაიწეროს § 208-ის (11a) ფორმულის გამოყენებით, თუ მასში $x$, $y$-ის ნაცვლად ავიღებთ $Xs$, $Ys$, ხოლო $x'$, $y'$-ის ნაცვლად შესაბამად $x_0$, $y_0$. ეს მოგვცემს განტოლებას:

$$\varphi(X, Y)s^2 + 2[XF_1(x_0, y_0) + YF_2(x_0, y_0)]s + F(x_0, y_0) = 0, \qquad (3)$$

სადაც გამოყენებულია წინანდელი აღნიშვნები:

$$\varphi(X, Y) = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2, \qquad (4)$$

$$F_1(x, y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13},\ F_2(x, y) = a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \qquad (5)$$

(3) განტოლებას აქვს ორი $s_1$, $s_2$ ფესვი, რომელთა ჩასმა (2)-ში მოგვცემს გადაკვეთის ორ წერტილს $(x_1, y_1)$ და $(x_2, y_2)$.

თუ

$$\varphi(X, Y) = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 = 0$$

მაშინ განხილული განტოლების ერთი ფესვი მაინც უსასრულობის ტოლია და, მაშასადამე, ერთ-ერთი გადაკვეთის წერტილი არასაკუთრივი იქნება. ჩვენ ვხედავთ, რომ, როგორც მოსალოდნელი იყო, მოცემულ წრფეს ამ შემთხვევაში ასიმპტოტური მიმართულება აქვს.

#### სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. მოძებნეთ მოცემული მეორე რიგის წირის მუები $(x_0, y_0)$ წერტილში უშუალოდ (3) განტოლებიდან.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ (3) განტოლებაში ვიგულისხმებთ, რომ $x_0$, $y_0$ მოცემული წირის წერტილის კოორდინატებია, გვექნება: $F(x_0, y_0) = 0$. (3) განტოლებას, ამ შემთხვევაში, აქვს ერთი ფესვი $s = 0$. გამოვსახავთ რა, რომ მეორე ფესვიც ნულის ტოლია, მივიღებთ:

$$XF_1(x_0, y_0) + YF_2(x_0, y_0) = 0.$$

თუ $X$, $Y$, შევცვლით მათი პროპორციული $x - x_0$, $y - y_0$ სიდიდეებით, სადაც $x$, $y$ მხების ნებისმიერი წერტილის კოორდინატებია, მივიღებთ საძიებელ განტოლებას:

$$(x - x_0)F_1(x_0, y_0) + (y - y_0)F_2(x_0, y_0) = 0,$$

რომელიც იგივეა, რაც § 217-ის (6a) განტოლება.

2. მოძებნეთ იმ წირების ასიმპტოტური მიმართულებანი, რომლებიც მოცემულია განტოლებებით:

$$1)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad 2)\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad 3)\ y^2 = 2px.$$

პ ა ს უ ხ ი: ასიმპტოტურ მიმართულებათა კუთხური კოეფიციენტები მოცემულია ფორმულებით:

$$1)\ k=\frac{Y}{X}=\pm i\frac{b}{a}\text{ (წარმოსახვითი მიმართულებანი)},$$

$$2)\ k=\pm\frac{b}{a},\qquad 3)\ k=0.$$

8. დაამტკიცეთ, რომ როცა წირი ორი ურთიერთგადამკვეთი წრფის ერთობლიობაა, მაშინ ასიმპტოტური მიმართულებანი ამ წრფეების პარალელურია. ეს უშუალოდ ცხადია გეომეტრიულადაც.

§ 228. **მეორე რიგის წირის ცენტრი.** მეორე რიგის წირის ცენტრი ეწოდება ისეთ წერტილს, რომელსაც ის თვისება აქვს, რომ მასზე გამავალი ნებისმიერი ქორდა ამ წერტილით შუაზე იყოფა (ქორდას ჩვენ ვუწოდებთ წრფის შონაკვეთს, რომელიც წირის ორ ნებისმიერ წერტილს აერთებს). გამოვარკვიოთ, აქვს თუ არა მოცემულ მეორე რიგის წირს ცენტრი და მოვძებნოთ მისი განსაზღვრის ხერხი.

ვთქვათ, $(x_0,\ y_0)$ საძიებელი $C$ ცენტრის კოორდინატებია. გავატაროთ $C(x_0,\ y_0)$ წერტილზე რაიმე წრფე $x=x_0+Xs,\ y=y_0+Ys$, რომელსაც არაასიმპტოტური მიმართულება აქვს. ეს წრფე ჩვენს წირს გადაჰკვეთს ორ $M_1$ და $M_2$ წერტილში, რომელთა მდებარეობა განისაზღვრება წინა პარაგრაფის (3) განტოლებიდან. იმისათვის, რომ $C$ წერტილი იყოს $M_1M_2$ ქორდის შუა წერტილი აუცილებელი და საკმარისია პირობა: $s_1=-s_2$, ე. ი. $s_1+s_2=0$, სადაც $s_1$ და $s_2$ ხსენებული განტოლების ფესვებია. ამისათვის კი, თავის მხრით, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ განტოლებაში კოეფიციენტი $s$-ის პირველ ხარისხთან იყოს ნულის ტოლი, ე. ი. რომ:

$$XF_1(x_0,\ y_0)+YF_2(x_0,\ y_0)=0. \tag{1}$$

თუ $C$ ცენტრია, მაშინ ეს პირობა დაცული უნდა იყოს გამკვეთი წრფის ყოველგვარი მიმართულებისათვის, ე. ი. $X$ და $Y$-ის ყოველგვარი მნიშვნელობისათვის. მაშასადამე, უნდა გვქონდეს:

$$\begin{aligned}F_1(x_0,\ y_0)&=a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}=0,\\ F_2(x_0,\ y_0)&=a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}=0.\end{aligned} \tag{2}$$

ცხადია, რომ, პირიქითაც, ყოველი წერტილი $C(x_0,\ y_0)$, რომლის კოორდინატები წინა ორ განტოლებას აკმაყოფილებენ, ცენტრი იქნება.

ჩვენ ვხედავთ, რომ ცენტრი განისაზღვრება

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}&=0\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}&=0\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ორი წრფის [1]) გადაკვეთით.

[1]) ამ წრფეების გეომეტრიული მნიშვნელობა გამორკვეული იქნება § 230 ში.

ელიფსური და ჰიპერბოლური ტიპის წირების შემთხვევაში დეტერმინანტი:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{33} \neq 0$$

და წინა განტოლებათა სისტემას აქვს ერთი და მხოლოდ ერთი ამონახსნი. ამგვარად, ელიფსური და ჰიპერბოლური ტიპის წირებს აქვთ ერთი სავსებით გარკვეული ცენტრი.

პარაბოლური ტიპის წირების შემთხვევაში $A_{33}=0$ და (3) წრფეები ერთმანეთის პარალელურია. თუ ისინი ერთმანეთზე დამთხვეული არ არის, მაშინ ცენტრი, მისი პირდაპირი მნიშვნელობით, არ არსებობს; თუმცა ზოგჯერ ჩვენ ვიტყვით, რომ არსებობს ერთი არასაკუთრივი ცენტრი—(3) წრფეთა გადაკვეთის არასაკუთრივი წერტილი. თუ (3) წრფეები დამთხვეულია, მაშინ მათი ყოველი წერტილი ცენტრია. ამ შემთხვევაში გვაქვს ცენტრთა წრფე. ადვილი სანახავია, რომ ამ შემთხვევაში განხილული მეორე რიგის წირი ორი პარალელური წრფის ერთობლიობას წარმოადგენს. მართლაც, თუ (3) წრფეები დამთხვეულია, მაშინ მათი განტოლებათა კოეფიციენტები პროპორციულია, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტი ნულის ტოლია (ვინაიდან მასში პირველი ორი სტრიქონი პროპორციულია). მაშასადამე, $A=A_{33}=0$, საიდანაც გამომდინარეობს ჩვენი დებულება (იხ. § 225a). პირიქით, თუ მოცემული წირი ორი პარალელური წრფის ერთობლიობაა, მაშინ, როგორც ეს გამომდინარეობს

$$A_{13}=A_{23}=A_{33}=0$$

ტოლობებიდან (§ 225a), (3) წრფეები თანამთხვეულია.

ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ პარაბოლს, როგორც პარაბოლური ტიპის დაუშლად წირს, ცენტრი არა აქვს ანუ, უკეთ, აქვს ერთი არასაკუთრივი ცენტრი; იგი, როგორც ადვილი სანახავია, დაშორებულია ასიმპტოტური მიმართულებით [1]).

გამოვარკვიოთ კიდევ შემდეგი საკითხი: როდის არის მეორე რიგის წირის ცენტრი მოთავსებული თვით წირზე (მხედველობაში გვაქვს საკუთრივი ცენტრი)?

---

[1]) (3) წრფეების (რომლებიც ამ შემთხვევაში პარალელურია) კუთხური კოეფიციენტი ტოლია

$$k = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = -\frac{a_{22}}{a_{21}},$$

ე. ი. ასიმპტოტური მიმართულების კუთხური კოეფიციენტის ტოლია; იხ. § 216, ფორმულა (2).

ჩვენ ვიცით, რომ თუ $(x_0, y_0)$ წერტილი წირს ეკუთვნის და თუ მისი კოორდინატები ერთდროულად აქრობენ (2) განტოლებებს, მაშინ წირი შლადია და $(x_0, y_0)$ წერტილი წირის ორჯერადი წერტილია[1]. ამგვარად, თუ ცენტრი მოთავსებულია თვით წირზე, მაშინ წირი შლადია. ცენტრი, ამ შემთხვევაში წირის ორჯერადი წერტილია.

საჭიროა შევნიშნოთ, რომ თუ კოორდინატთა სათავე წირის ცენტრშია მოთავსებული (ან ერთ-ერთ ცენტრში), მაშინ მის განტოლებაში პირველი ხარისხის წევრები არ შედიან. მართლაც, ამ შემთხვევაში (3) განტოლებები უნდა დაკმაყოფილდეს $x=0$, $y=0$ მნიშვნელობებით, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $a_{13}=a_{23}=0$. წირის განტოლებას ამ შემთხვევაში შემდეგი სახე აქვს:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0. \qquad (4)$$

პირიქით, ცხადია, რომ წირს, რომელიც წარმოდგენილია (4) სახის განტოლებით, ცენტრი (ან ერთ-ერთი ცენტრთაგანი) კოორდინატთა სათავეში აქვს.

ყველგან ქვემოთ წირს ჩვენ ცენტრალურს ვუწოდებთ, თუ მას ერთი გარკვეული საკუთრივი ცენტრი აქვს.

### ხ ა ვ ა რ ჯ ი შ ი

1. მოძებნეთ

$$x^3 - xy + 3y^3 + x - 1 = 0$$

წირის ცენტრი.

ა მ ო ხ ს ნ ა: მარცხენა მხარის $x$-ით და $y$-ით წარმოებულები გავუტოლოთ ნულს, მივიღებთ:

$$2x - y + 1 = 0, \quad -x + 6y = 0.$$

ამ განტოლებათა ამოხსნა მოგვცემს:

$$x = -\frac{6}{11}, \quad y = -\frac{1}{11}.$$

მაშასადამე, წირს (ერთადერთი) ცენტრი აქვს $\left(-\frac{6}{11}, -\frac{1}{11}\right)$ წერტილში.

2. მოძებნეთ

$$x^3 + 2xy + y^2 + 2x + y - 5 = 0$$

წირის ცენტრი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცენტრის განმსაზღვრელი განტოლებანი იქნება:

$$2x + 2y + 2 = 0, \quad 2x + 2y + 1 = 0.$$

ამ განტოლებებს საერთო ამონახსნი არა აქვთ, ვინაიდან ისინი გამოსახავენ პარალელურ, არადამთხვეულ წრფეებს. მაშასადამე, წირს ცენტრი არა აქვს (აქვს არასაკუთრივი ცენტრი).

3. მოძებნეთ

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + y - 6 = 0$$

წირის ცენტრი.

---

[1]) იხ. § 218-ის ბოლო.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამ შემთხვევაში ცენტრის განმსაზღვრელი განტოლებანი იქნება:

$$2x+2y+1=0, \quad 2x+2y+1=0.$$

წირს აქვს ცენტრთა უსასრულო სიმრავლე, სახელდობრ, $2x+2y+1=0$ წრფის ყველა წერტილი.

§ 229. **ასიმპტოტები.** მეორე რიგის წირის ასიმპტოტს ახლა ჩვენ ვუწოდებთ ისეთ წრფეს, რომლის ორივე გადაკვეთის წერტილი წირთან ერთმანეთს ემთხვევა ერთ არასაკუთრივ წერტილში [1]). სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ასიმპტოტები წირის მხები წრფეებია არასაკუთრივ წერტილებში. ცხადია, რომ ასიმპტოტებს აქვთ ასიმპტოტური მიმართულებანი.

ეინაიდან ელიფსს ნამდვილი არასაკუთრივი წერტილები არა აქვს, ამიტომ მას ნამდვილი ასიმპტოტებიც არა აქვს. ჰიპერბოლს, რომელსაც ორი სხვადასხვა ნამდვილი არასაკუთრივი წერტილი აქვს, ექნება ორი ნამდვილი ასიმპტოტი. ბოლოს, პარაბოლის ორივე არასაკუთრივი წერტილები ერთმანეთს ემთხვევიან. მაშასადამე, არასაკუთრივი წრფე პარაბოლის მხებია არასაკუთრივ წერტილში, ე. ი. პარაბოლის (ერთადერთი) ასიმპტოტია არასაკუთრივი წრფე. პარაბოლს საკუთრივი ასიმპტოტები არა აქვს.

ყველაფერი ეს ადვილი დასამტკიცებელია ანალიზურად და ამასთანავე ადვილი მოსაძებნია ასიმპტოტების განტოლებანი. დავიწყოთ უკანასკნელი ამოცანის ამოხსნით.

ვთქვათ, $(X, Y)$ საძიებელი ასიმპტოტის მიმართულების ვექტორია, ხოლო $M(x, y)$—მისი რომელიმე წერტილი. თუ § 227-ის (3) განტოლებაში $M_0(x_0, y_0)$ წერტილად ავიღებთ $M(x, y)$ წერტილს, მაშინ, იმისათვის, რომ მისი ორივე ფესვი უსასრულობის ტოლი იყოს, ამ განტოლებაში $\rho$-ის და $\rho^2$-ის კოეფიციენტები ნულის ტოლი უნდა იყოს. მაშასადამე, უნდა გვქონდეს:

$$\varphi(X, Y)=a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2=0 \tag{1}$$

და

$$XF_1(x, y)+YF_2(x, y)=0. \tag{2}$$

პირველი განტოლება განსაზღვრავს $\frac{Y}{X}$ ფარდობას და გამოსახავს იმას, რომ $(X, Y)$ ვექტორს ასიმპტოტური მიმართულება აქვს.

მეორე განტოლება, როცა $X$, $Y$ მუდმივებია, რომლებიც წინა პირობას აკმაყოფილებენ, გვაძლევს ასიმპტოტების განტოლებას. (2) განტოლებას გაშლილად შემდეგი სახე აქვს:

$$(a_{11}X+a_{21}Y)x+(a_{12}X+a_{22}Y)+(a_{13}X+a_{23}Y)=0; \tag{2a}$$

კოეფიციენტები $x$ და $y$-ის წინ, ე. ი. სიდიდეები

$$a=a_{11}X+a_{21}Y, \quad b=a_{12}X+a_{22}Y$$

[1]) წინათ (იხ. § 198) მოცემული იყო ასიმპტოტების სხვაგვარი განმარტება. ადვილი სანახავია, რომ მეორე რიგის წირის შემთხვევაში, თუ გამოვრიცხავთ იმ შემთხვევას, როცა წირი ორი პარალელური წრფის ერთობლიობაა, ორივე ეს განმარტება ერთი და იგივეა. იხ. ამ პარაგრაფის ბოლო და სავარჯიშო.

არ შეიძლება ერთდროულად ნული იყვნენ, თუ წირი ცენტრალურია, ე. ი. თუ $a_{11}a_{22}-a_{12}^2\neq 0$. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში (2) წრფე საკუთრივია. ცხადია, იგი გაივლის ცენტრზე [1]).

ამგვარად, **ცენტრალური წირების ასიმპტოტები არიან ასიმპტოტური მიმართულების წრფეები, რომლებიც ცენტრზე გადიან.** ჰიპერბოლური ტიპის წირებისათვის ასიმპტოტები ნამდვილია, ელიფსური ტიპის წირებისთვის კი ისინი წარმოსახვითია.

ახლა განვიხილოთ პარაბოლური ტიპის წირები. ამ შემთხვევაში, როგორც ვიცით, ასიმპტოტური მიმართულებისათვის $a=b=0$ (§ 226).

მაშასადამე, პარაბოლური ტიპის წირის შემთხვევაში, ასიმპტოტი ან არასაკუთრივია, ან არ არის სავსებით განსაზღვრული (განსაზღვრულია მხოლოდ მისი მიმართულება $X$, $Y$). უკანასკნელ შემთხვევას შეიძლება ადგილი ჰქონდეს მხოლოდ მაშინ, როცა ერთდროულად

$$a_{11}X+a_{21}Y=0,\ a_{12}X+a_{22}Y=0,\ a_{13}X+a_{23}Y=0; \qquad (*)$$

მაგრამ, ცხადია, უკანასკნელი ტოლობანი შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა

$$A_{13}=A_{23}=A_{33}=0,$$

ე. ი. როცა ჩვენი წირი წარმოადგენს ორი პარალელური წრფის ერთობლიობას (იხ. § 225a).

ამნაირად, პარაბოლს ასიმპტოტები არა აქვს მათი პირდაპირი მნიშვნელობით; მის ერთადერთ ასიმპტოტს წარმოადგენს არასაკუთრივი წრფე. პარალელურ წრფეთა წყვილის შემთხვევაში კი, როგორც ადვილი შესაბჩნეია, მათი პარალელური ყოველი წრფე ასიმპტოტს წარმოადგენს. ეს გასაგებიცაა, ვინაიდან პარალელურ წრფეთა წყვილი ყოველ მათ პარალელურ წრფესთან გადიკვეთება, ერთ „ორჯერად“ არასაკუთრივ წერტილში.

**სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი**

1. მოძებნეთ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

წირის ასიმპტოტები.

პასუხი: ასიმპტოტები

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \text{ და } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$$

წრფეთა წყვილია, რომელსაც იძლევა

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

განტოლება.

---

[1]) რადგანაც ცენტრი $F_1=0$ და $F_2=0$ წრფეების გადაკვეთის წერტილია.

2. მოძებნეთ

$$y^2 = 2px.$$

წირის ასიმპტოტები.

პასუხი: ასიმპტოტი არასაკუთრივი წრფეა.

3. დაამტკიცეთ, რომ ურთიერთგადამკვეთ წრფეთა წყვილის ასიმპტოტები თვით ეს წრფეებია.

**§ 230. მეორე რიგის წირის დიამეტრები.** განვიხილოთ რაიმე მოცემული არაასიმპტოტური მიმართულების პარალელური წრფეები.

ყოველი მათგანი მოცემულ მეორე რიგის წირს ჰკვეთს ორ $M_1$ და $M_2$ წერტილში და განსაზღვრავს $M_1M_2$ ქორდას. ამ ქორდების შუა წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს მოცემული მიმართულების შეუღლებული დიამეტრი ეწოდება. ამრიგად, მოცემული მეორე რიგის წირის და მოცემული მიმართულების შეუღლებული დიამეტრი არის მოცემული მიმართულების პარალელურ ქორდათა შუა წერტილების გეომეტრიული ადგილი. ეს განსაზღვრა წარმოადგენს, ელემენტარულ გეომეტრიაში ცნობილ, წრეწირის დიამეტრის ცნების უშუალო განზოგადებას. სახელდობრ, თანახმად აქ მოყვანილი განსაზღვრისა, თუ განვიხილავთ წრეწირის მხოლოდ ნამდვილ წერტილებს, წრეწირის დიამეტრი, რომელიც მოცემული მიმართულების შეუღლებულია, ცხადია, არის, წრის შიგნით მოთავსებული მონაკვეთი წრფისა, რომელიც წრის ცენტრზე გაივლის და მოცემული მიმართულების მართობია (ნახ. 149).

ქვემოთ ჩვენ ვნახავთ, რომ, თუ მხედველობაში მივიღებთ წრეწირის წარმოსახვით წერტილებსაც, მაშინ დიამეტრად უნდა ჩავთვალოთ მთელი ზემოხსენებული წრფე.

ახლა დავსვათ ამოცანა: მოვძებნოთ მეორე რიგის წირის დიამეტრი, რომელიც მოცემული მიმართულების შეუღლებულია.

ვთქვათ, $P=(X, Y)$— მოცემული (არაასიმპტოტური) მიმართულების ვექტორია. ვთქვათ, $(x_0, y_0)$ საძიებელი დიამეტრის რაიმე წერტილია. მოვძებნოთ განტოლება, რომელსაც ამ წერტილის კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდეს.

ვთქვათ, $P = (X, Y)$ მოცემული (არაასიმპტოტური) მიმართულების ვექტორია. ვთქვათ, $(x_0, y_0)$ საძიებელი დიამეტრის რაიმე წერტილია. შევადგინოთ ის განტოლება, რომელსაც დააკმაყოფილებს ამ წერტილის კოორდინატები.

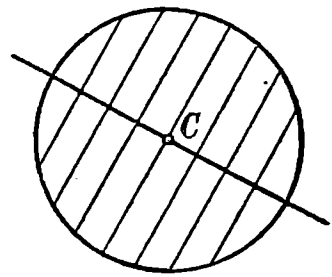
$(x_0, y_0)$ წერტილზე გამავალი და მოცემული $(X, Y)$ მიმართულების პარალელური წრფის განტოლება პარამეტრული სახით შეიძლება შემდეგნაირად წარმოვიდგინოთ:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + Xs, \\ y &= y_0 + Ys. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

წინანდელი აღნიშვნებით, (1) წრფის მეორე რიგის წირთან გადაკვეთის $M_1$ და $M_2$ წერტილების შესაბამისი $s_1$ და $s_2$ მნიშვნელობანი განისაზღვრება § 227-ის (3) განტოლებიდან.

იმისათვის, რომ $(x_0, y_0)$ — $M_1M_2$ ქორდის შუა წერტილი იყოს, აუცილებელი და საკმარისია პირობა: $s_1+s_2=0$. ამისათვის კი, თავის მხრივ, აუცილებელი და საკმარისია, რომ (შეად. § 228)

$$XF_1(x_0, y_0)+YF_2(x_0, y_0)=0.$$



ნახ. 149.

ეს უკანასკნელი ტოლობა აუცილებელი და საკმარისი პირობაა იმისა, რომ $(x_0, y_0)$ წერტილი იკუთვნოდეს $(X, Y)$ მიმართულების შეუღლებულ დიამეტრს. აღვნიშნოთ $x_0$, $y_0$ უბრალოდ $x$, $y$-ით და წინა განტოლება, რომელიც საძიებელი დიამეტრის განტოლებას წარმოადგენს, გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$XF_1(x, y)+YF_2(x, y)=0, \tag{2}$$

ანუ, თუ ჩავსვამთ $F_1$ და $F_2$ მნიშვნელობებს:

$$X(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})+Y(a_{21}x+a_{22}y+a_{23})=0. \tag{2a}$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ მოცემული მიმართულების შეუღლებული დიამეტრი არის წრფე [1]). დავიხსომოთ წესი, რომლის მიხედვითაც უნდა შევადგინოთ მისი განტოლება: $F(x, y)$ ფუნქციის ნაწილობრივი წარმოებულები $x$-ით და $y$-ით უნდა გავამრავლოთ, შესაბამისად $X$ და $Y$-ზე (მოცემული მიმართულების კოეფიციენტებზე), შედეგი შევკრიბოთ და გავუტოლოთ ნულს [2]).

კერძოდ, $X\neq 0$, $Y=0$ მიმართულების (ე. ი. $Ox$ ღერძის მიმართულების) შეუღლებული დიამეტრი იქნება $F_1=0$ წრფე, ე. ი.

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0, \tag{3a}$$

ხოლო, $Oy$ ღერძის მიმართულების შეუღლებული დიამეტრია ($X=0$, $Y\neq 0$) $F_2=0$ წრფე, ე. ი.

$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}=0. \tag{3b}$$

(3a) და (3b) წრფეები ჩვენ უკვე შეგვხვდა § 228-ში; ეს ის წრფეებია, რომელთა გადაკვეთა განსაზღვრავდა წირის ცენტრს. ახლა უკვე გამოვარკვიეთ მათი გეომეტრიული შინაარსი.

ყველა (2) წრფე გადის (3a) და (3b) წრფეების გადაკვეთაზე. მაშასადამე, ყველა დიამეტრი გადის (საკუთრივ ან არასაკუთრივ)

[1]) ჩვენ ქვემოთ ვნახავთ, რომ თუ $(X, Y)$ მიმართულება არაასიმპტოტურია, მაშინ ეს წრფე საკუთრივია და განსზღვრული.

[2]) სასეთნაირად მიღებული განტოლება (2) ანუ (2.1) განტოლებისაგან განსხვავდება მხოლოდ ნუმერიული თანამამრავლით 2.

ცენტრზე. თუ გვაქვს ცენტრებისაგან შედგენილი წრფე, მაშინ ყველა დიამეტრი დამთხვეულია მასზე: თუ ცენტრი არასაკუთრივია, მაშინ ყველა დიამეტრი ურთიერთპარალელურია (გადის ერთსა და იმავე არასაკუთრივ წერტილზე).

(2) წრფე არ შეიძლება იყოს არასაკუთრივი ან განუზღვრელი, თუ, როგორც ჩვენ ჯერჯერობით ვგულისხმობთ, $(X, Y)$ მიმართულება არაასიმპტოტურია.

მართლაც, (2a) განტოლება შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$ax + by + c = 0, \tag{2b}$$

სადაც

$$a = a_{11}X + a_{21}Y, \quad b = a_{12}X + a_{22}Y, \quad c = a_{13}X + a_{23}Y$$

თუ $a = b = 0$, მაშინ (იხ. წინა პარაგრაფი) წირი აუცილებლად პარაბოლური ტიპისაა და $(X, Y)$ მიმართულება ასიმპტოტურია. მაშასადამე, არაასიმპტოტური $(X, Y)$ მიმართულებისათვის (2) წრფე ყოველთვის საკუთრივია და განზღვრული.

აქამდე ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ $(X, Y)$ მიმართულება არაასიმპტოტურია. ახლა მოვიცილოთ ეს პირობა და ვუწოდოთ $(X, Y)$ მიმართულების შეუღლებული დიამეტრი (2) წრფეს, როგორიც არ უნდა იყვნენ $X$, $Y$ (ერთდროულად ნულის ტოლი არ არიან). თუ $(X, Y)$—არაასიმპტოტური მიმართულებაა, მაშინ მივიღებთ დიამეტრს ამ სიტყვის ჩვეულებრივი მნიშვნელობით. თუკი $(X, Y)$—ასიმპტოტური მიმართულებაა (2) განტოლება გადაიქცევა ასიმპტოტების განტოლებად (იხ. წინა პარაგრაფი). ამგვარად, ასიმპტოტს შეიძლება ვუწოდოთ თვითშეუღლებული დიამეტრი. (2b) განტოლება შეიძლება აღმოჩნდეს განუზღვრელიც თუ $a = b = c = 0$. ამ შემთხვევაში ჩვენი მეორე რიგის წირი წარმოადგენს ორი პარალელური წრფის ერთობლიობას[1]) და $(X, Y)$—მიმართულება ამ წრფეების პარალელურია. ამ შემთხვევაში ასიმპტოტური მიმართულების შეუღლებულ „დიამეტრად“ შეგვიძლია ჩავთვალოთ ყოველგვარი წრფე.

საზოგადოდ, ყველა შემთხვევაში, ცენტრზე (ან ერთ-ერთ ცენტრზე) გამავალ ყოველ წრფეს შეიძლება დიამეტრი ვუწოდოთ. მაგალითად, პარალელურ წრფეთა წყვილის შემთხვევაში, ყოველი წრფე გაკვეთს ცენტრთა წრფეს (საკუთრივ ან არასაკუთრივ წერტილში) და ამიტომ შეიძლება ის დიამეტრად მივიღოთ.

ახლა განვიხილოთ დაწვრილებით ცენტრალური წირის შემთხვევა (ე. ი. წირისა, რომელსაც ერთი საკუთრივი ცენტრი აქვს).

ადვილი მოსაძებნია ტოლობა, რომელიც აკავშირებს დიამეტრის კუთხურ კოეფიციენტს იმ მიმართულების კუთხურ კოეფიციენტთან $k = \frac{Y}{X}$, რომელთანაც იგი შეუღლებულია.

---

[1]) იხ. წინა პარაგრაფი.

დიამეტრის კუთხური კოეფიციენტი $k'$ მოცემულია ფორმულით:

$$k' = -\frac{a_{11}X + a_{12}Y}{a_{21}X + a_{22}Y} = -\frac{a_{11} + a_{12}k}{a_{21} + a_{22}k}. \tag{4}$$

მარჯვენა მხარე განხილული ცენტრალური წირის შემთხვევაში არ შეიძლება განუზღვრელი იყოს, რადგანაც ამ შემთხვევაში არ შეიძლება, რომ ერთდროულად

$$a_{11}X + a_{12}Y = a_{21}X + a_{22}Y = 0.$$

(4) ტოლობა გაერთმნიშვნელიანების შემდეგ შეიძლება დაიწეროს $k$ და $k'$-ის მიმართ საყსებით სიმეტრიული სახით:

$$a_{22}kk' + a_{12}(k + k') + a_{11} = 0. \tag{5}$$

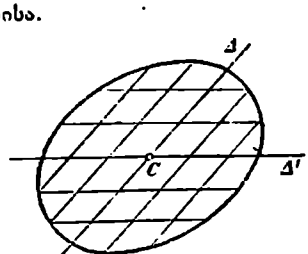
პირიქით, თუ ამოვხსნით (5) განტოლებას $k$-ს მიმართ, მივიღებთ $k$-ს გამოსახულებას $k'$-ით:

$$k = -\frac{a_{11} + a_{12}k'}{a_{21} + a_{22}k'}. \tag{6}$$

როგორც მოსალოდნელი იყო, (5) ფორმულის სიმეტრიულობის გამო, რომელიც აკავშირებს $k$ და $k'$, (6) ფორმულა შეიძლება (4)-დან მივიღოთ უბრალოდ $k$ და $k'$-ის ადგილების შეცვლით.

ახლა განვიხილოთ ორი $\Delta'$ და $\Delta$ დიამეტრი, რომელთაგან პირველი მეორეს მიმართულების შეუღლებულია. ამ დიამეტრების $k'$ და $k$ კუთხური კოეფიციენტები დაკავშირებული არიან (4) ფორმულით, რომლიდანაც გამომდინარეობს (6) ფორმულა; უკანასკნელი, თავის მხრივ, გვიჩვენებს, რომ დიამეტრი $\Delta$ შეუღლებულია $\Delta'$ დიამეტრის მიმართულებისა.

ამგვარად, თითოეული $\Delta$ და $\Delta'$ დიამეტრი მეორის პარალელურ ქორდას შუაზე ყოფ. ასეთ ორ დიამეტრს შეუღლებული დიამეტრები ეწოდება. 150 ნახაზზე გამოსახულია ორი შეუღლებული $\Delta$ და $\Delta'$ დიამეტრი და მათი პარალელური ქორდები.




ნახ. 150.

ვნიშნოთ, რომ შეუღლებულ დიამეტრთა შორის შესაბამება არის ინვოლუცია (§ 190, როგორც ეს (5)-ტოლობიდან ჩანს. ამ ინვოლუციის ორმაგ წრფეებს წარმოადგენ ის წრფეები, რომელთა კუთხური კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ განტოლებას:

$$a_{22}k^2 + 2a_{12}k + a_{11} = 0,$$

რომელიც(მიიღება (5) განტოლებიდან, როცა $k' = k$. მაგრამ წინა განტოლება აბსისათვის ასიმპტოტურ მიმართულებას; ვინაიდან, გარდა ამისა, ჩვენი წრფეები ცენტრზე გადიან, ამიტომ ისი ასიმპტოტებია. ამგვარად, შეუღლებული დიამეტრების ინვოლუციის ორმაგი წრფეები ასიმპტოტებია. ამნაირად, ჩვენ კიდევ ერთხელ ვეკუთვნით იმ საფუძველს, რომ ასიმპტოტებს შეუღლებული დიამეტრები ვუწოდოთ.

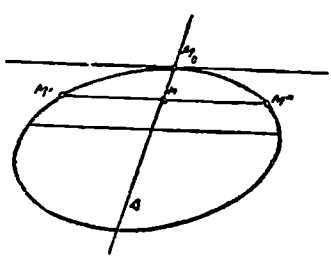
ახლა გადავიდეთ უცენტრო წირზე (ან, უფრო ზუსტად, ისეთ წირზე, რომელსაც ერთი არასაკუთრივი ცენტრი აქვს), ე. ი. პარაბოლზე. ამ შემთხვევაში (3a) და (3b) წრფეები ურთიერთ პარალელურია, მაგრამ არადამთხვეული. მათი საერთო მიმართულებაა სიმპტოტურია, რადგანაც მათი კუთხური კოეფიციენტი

$$k=-\frac{a_{11}}{a_{12}}=-\frac{a_{21}}{a_{22}}, \tag{7}$$

ასიმპტოტური მიმართულების კუთხური კოეფიციენტია. ამიტომ, ყველა დიამეტრი ასიმპტოტური მიმართულების პარალელურია; ეს ასეც იყო მოსალოდნელი, ვინაიდან ყველა დიამეტრი გადის არასაკუთრივ ცენტრზე, რომელიც ასიმპტოტური მიმართულებით არის დაშორებული.

საბოლოოდ, თუ ჩვენ გვაქვს პარალელურ წრფეთა წყვილი, მაშინ, როგორც ზემოთ ვნახეთ, არაასიმპტოტური მიმართულების შეუღლებული დიამეტრები ემთხვევიან ცენტრთა წრფეს, ხოლო ასიმპტოტური მიმართულების შეუღლებული დიამეტრები—განუზღვრელი წრფეებია.

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა.** როგორც ზემონათქვამიდან ჩანს, დიამეტრი წრფეა (და არა წრფის მონაკვეთი). მიუხედავად ამისა, ხშირად დიამეტრისა და წირის გადაკვეთის წერტილებს დიამეტრის ბოლოებს უწოდებენ. გარდა ამისა, ზოგჯერ სიტყვა დიამეტრის ქვეშ გულისხმობენ დიამეტრის მონაკვეთს, რომელიც მოქცეულია წირთან მისი გადაკვეთის წერტილებს შორის (თუ გადაკვეთის ორი წერტილი სასრულოდ მან ძილზე გვაქვს). შემდეგში ჩვენც გამოვიყენებთ ამ გამოთქმებს, იმ ვარაუდით, რომ ეს გაუგებრობას არ გამოიწვევს, ვინაიდან ყოველ ცალკე შემთხვევაში ნათელი იქნება, თუ რაზეა ხუბარი.



ნახ. 151.

მოცემული (ნამდვილი) მიმართულების პარალელური ქორდები ზოგი შეიძლება იყოს ნამდვილი და ზოგი წარმოსახვითი; მაგრამ უკანასკნელ შემთხვევაშიც მათი შუა წერტილებ ნამდვილია, ვინაიდან, თუ ნამდვილი წრფე ჩვენ წირს წარმოსახვით წერტილებში ჰკვეთს, მაშინ ისინი შეუღლებული[1]) წარმოსახვითი წერტილები ქნება და, მაშასადამე, მათგან განსაზღვრული მონაკვეთის შუა წერტილი ნამდვილი წერტილია.

**§ 231. დიამეტრების კავშირი მხებ წრფეებთან.** ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი, თითქმის ცხადი, თვისება. განვიხილოთ მხები მეორე რიგის წირის რაიმე წერტილში; შეხების წერტილში გამავალი დიამეტრ მხე-

[1]) ჩვენ, როგორც ყოველთვის, ვგულისხმობთ, რომ მოცემული მეორე რიგის წირის კოეფიციენტები ნამდვილია.

ბის მიმართულების შეუღლებულია. ეს დებულება ადვილად დამტკიცდება ელემენტარული გზით, თუ უშუალოდ გამოვალთ მხებისა და დიამეტრის განსაზღვრიდან.

ვთქვათ, $\Delta$ წირის $M_0$ წერტილში გამავალი დიამეტრია (ნახ. 151). განვიხილოთ $M'M''$ ქორდა, რომელიც დიამეტრით შუაზე იყოფა; ვთქვათ, $M$ ამ ქორდის შუა წერტილია. თუ $M'M''$ ქორდას თავის თავის პარალელურად გადავაადგილებთ, მაშინ $M$ წერტილი გადაადგილდება $\Delta$ დიამეტრის გასწვრივ. როცა $M$ წერტილი უახლოვდება $M_0$-ს, ორივე წერტილი $M'$ და $M''$ მიისწრაფვიან $M_0$ წერტილისკენ და, მაშასადამე, ზღვარში $M'$ და $M''$ წერტილებზე გამავალი წრფე მხებად გადაიქცევა; აქედან გამომდინარეობს ჩვენი დებულება.

ადვილი დასამტკიცებელია აგრეთვე ეს დებულება ანალიზურადაც. ვთქვათ, $(x_0, y_0)$ შეხების წერტილის კოორდინატებია. ჩვენ ვიცით, რომ $(X, Y)$ მიმართულების შეუღლებული დიამეტრის განტოლება არის:

$$XF_2(x, y) + YF_3(x, y) = 0.$$

თუ დიამეტრი გადის $(x_0, y_0)$ წერტილზე, მაშინ უნდა იყოს:

$$XF_1(x_0, y_0) + YF_2(x_0, y_0) = 0,$$

საიდანაც მოიძებნება იმ ქორდის კუთხური კოეფიციენტი, რომლის შეუღლებულიც დიამეტრია:

$$\frac{Y}{X} = -\frac{F_1(x_0, y_0)}{F_2(x_0, y_0)}.$$

ასეთივე კუთხური კოეფიციენტი აქვს მხებს $(x_0, y_0)$ წერტილში, როგორც ეს მხების განტოლებიდან გამომდინარეობს. აქედან კი გამომდინარეობს ჩვენი დებულება.

აქედან, კერძოდ, გამომდინარეობს, რომ ერთი და იმავე დიამეტრის ბოლოებზე გატარებული მხები წრფეები ურთიერთ პარალელურია. პირიქით, თუ ჩვენ გვაქვს მეორე რიგის წირის ორი ურთიერთ პარალელური მხები, მაშინ შეხების წერტილთა შემაერთებელი წრფე ამ მხებთა მიმართულების შეუღლებული დიამეტრია.

**§ 232. დიამეტრი, როგორც არასაკუთრივ წერტილთა პოლარი.** მოცემული მიმართულების შეუღლებული დიამეტრი შეიძლება აგრეთვე განვიხილოთ, როგორც მოცემული მიმართულებით დაშორებული არასაკუთრივი წერტილის პოლარი.

ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ გავიხსენებთ პოლარის განმარტებას, მოყვანილს § 220-ში. მართლაც, ვთქვათ, მოცემულია $(X, Y)$ ვექტორის მიმართულებით დაშორებული არასაკუთრივი $M_0(X, Y, O)$ წერტილი. განსაზღვრის თანახმად, ამ წერტილის პოლარი არის $M_0$ წერტილზე გამავალ (ე. ი. $(X, Y)$ მიმართულების პარალელურ) ბ წრფეთა იმ წერტილების გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც ჰარმონიულად შეუღლებულია $M_0$-თან ბ წრფეების და წიოის გადაკვეთის $A$, $B$ წერტილების მიმართ. მაგრამ რადგანაც $M_0$ წერტილი უსასრულოდ დაშორებულია, ამიტომ მისი შეუღლებული წერტილი $AB$ მონაკვეთის შუა წერტილი იქნება, აქედან კი გამომდინარეობს ჩვენი დებულება.

დიამეტრის აქ მოყვანილი განმარტება რომ წინათ მიღებულ განმარტებას ეთანხმება, ეს ადვილი შესამოწმებელია ანალიზურად, თუ პოლარის განტოლებაში, რომელიც ასე შეიძლება დაიწეროს:

$$y_1\Phi_1(x_1, x_2, x_3) + y_2\Phi_2(x_1, x_2, x_3) + y_3\Phi_3(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

ჩავსვამთ $y_1 = X$, $y_2 = Y$, $Y_3 = 0$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$, რის შედეგად მივიღებთ სწორედ § 230-ის (2) განტოლებას.

ანალოგიურად, **მეორე რიგის წირის ცენტრი** $C$ არის არასაკუთრივი წრფის პოლუსი. ვინაიდან არასაკუთრივი წრფის ყოველი წერტილის პოლარი გადის მის პოლუსზე $C$, ამიტომ ყველა დიამეტრი გადის $C$ წერტილზე, როგორც ჩვენ ეს უკვე დამტკიცებული გვქონდა სხვა გზით. კერძოდ, თუ ცენტრი არასაკუთრივია, მაშინ ყველა დიამეტრი ურთიერთ პარალელურია.

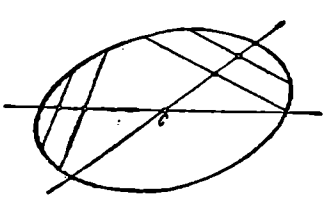
შეუღლებული დიამეტრები, ცხადია, იქნებიან წირის ცენტრზე გამავალი და ამ წირის მიმართ შეუღლებული დიამეტრები § 223-ში მოყვანილი აზრით.

თვითშეუღლებული დიამეტრები იქნებიან შეუღლებულ დიამეტრთა ინვოლუციის (§ 223) ორმაგი წრფეები, ე. ი. წირის მხები წრფეები გატარებული ცენტრიდან; მაშასადამე, როგორც უკვე ზემოთ ვნახეთ, ისინი ასიმპტოტებს წარმოადგენენ.

საზოგადოდ, ცენტრისა და დიამეტრების შესახებ წინა პარაგრაფებში დამტკიცებული ვისებანი ადვილი გამოსაყვანია აქ მოყვანილი განსაზღვრებიდან. კერძოდ, ის ფაქტი, რომ ერთი და იმავე დიამეტრის ბოლოებზე გატარებული შემხები წრფეები ურთიერთ პარალელურია, გამომდინარეობს იქიდან, რომ ისინი უნდა გადაიკვეთონ დიამეტრის პოლუსში, ე. ი. რაღაც არასაკუთრივ წერტილში.

**§ 233. ნახაზით მოცემული მეორე რიგის წირის ცენტრისა და დიამეტრების აგება. დამატებითი ქორდები.** თუ მეორე რიგის წირი მოცემულია ნახაზით, მაშინ ძალიან ადვილი ასაგებია მოცემული მიმართულების შეუღლებული დიამეტრი: ამისათვის საკმარისია გავატაროთ მოცემული მიმართულების პარალელური რაიმე ორი ქორდა და ავაგოთ მათ შუა წერტილებზე გამავალი წრფე (ნახ. 152).

თუ ავიღებთ კიდევ სხვა რომელსამე მიმართულებას და ავაგებთ მის შეუღლებულ დიამეტრს, ვიპოვით ცენტრსაც როგორც ამ ორი დიამეტრის გადაკვეთის წერტილს.

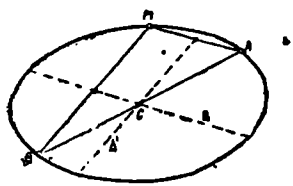


ნახ. 152.

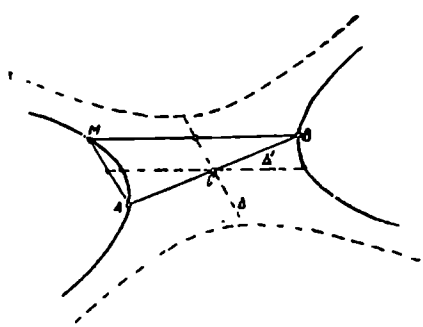
აგებისათვის ძალიან სასარგებლოა მეორე რიგის ცენტრალური წირის დამატებითი ქორდების ცნება. ასე ეწოდება ისეთ ორ ქორდას, რომლებიც აერთებენ წირის რაიმე $M$ წერტილს, მის რომელიმე $AB$ დიამეტრის ბოლოსთან. (იხ. ნახ. 153a, 153b).

ადვილი სანახავია, რომ **დამატებითი ქორდების პარალელური დიამეტრები ურთიერთშეუღლებულია.** მართლაც, $AM$ ქორდის პარალელური დიამეტრი $\Delta$, $BM$ ქორდას შუაზე ჰყოფს (ვინაიდან იგი გადის

$ABM$ სამკუთხედის $BA$ გვერდის შუა წერტილზე და $AM$ გვერდის პარალელურია). მაშასადამე, $\Delta$ დიამეტრი $BM$ ქორდის მიმართულების შეუღლებულია, ე. ი. $BM$ ქორდის პარალელური $\Delta'$ დიამეტრისაც.



ნახ. 153ა.



ნახ. 153ბ.

**§ 234. მეორე რიგის ცენტრალური წირების განტოლება. შეუღლებული დიამეტრების მიმართ.** ჩვენ ვიცით, რომ ყოველ მეორე რიგის ცენტრალურ წირს შეუღლებულ დიამეტრთა წყვილების უსასრულო სიმრავლე აქვს. ვნახოთ, რა სახე აქვს წირის განტოლებას, თუ კოორდინატთა სათავე ცენტრშია, ხოლო კოორდინატთა ღერძები მიმართულია შეუღლებული დიამეტრების გასწვრივ.

რადგანაც ცენტრი კოორდინატთა სათავეში იმყოფება, ამიტომ წირის განტოლებაში პირველი ხარისხის წევრები არ გვექნება, და მას ექნება სახე (იხ. § 228):

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0. \tag{1}$$

$Ox$ ღერძის შეუღლებულ დიამეტრს აქვს სახე (§ 230):

$$a_{11}x + a_{12}y = 0.$$

ვინაიდან ეს წრფე $Oy$ ღერძზე უნდა იყოს დამთხვეული, ამიტომ უნდა გვქონდეს: $a_{12} = 0$. მაშასადამე, ცენტრალური წირის განტოლებას შეუღლებული დიამეტრების მიმართ აქვს სახე:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0. \tag{2}$$

ამ განტოლებაში $a_{11}$ და $a_{22}$ ნულისაგან განსხვავებულია, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში $A_{33} = a_{11}a_{22}$ სიდიდე ნულის ტოლი იქნებოდა და წირი არ იქნებოდა ცენტრალური.

განვიხილოთ პირველად ის შემთხვევა, როცა $a_{33} \neq 0$. გაყოფთ რა (2) განტოლების ორივე მხარეს $a_{33}$-ზე და დავუშვებთ რა, რომ

$$\lambda_1 = -\frac{a_{11}}{a_{33}}, \quad \lambda_2 = -\frac{a_{22}}{a_{33}},$$

მივიღებთ განტოლებას:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 1. \tag{3}$$

თუ $\lambda_1$ და $\lambda_2$ ორივე დადებითია, მაშინ აღნიშვნით:

$$\lambda_1 = \frac{1}{a^2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{b^2},$$

მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

თუ $\lambda_1$ და $\lambda_2$ ორივე უარყოფითია, მაშინ აღნიშვნით:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{a^2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{b^2},$$

მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1. \tag{5}$$

საბოლოოდ, თუ $\lambda_1$ და $\lambda_2$ სხვადასხვა ნიშნები აქვთ, მაშინ ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში საკმარისია როლები შევუცვალოთ $Ox$ და $Oy$ ღერძებს), და აღნიშვნით:

$$\lambda_1 = \frac{1}{a^2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{b^2},$$

მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{6}$$

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $a_{33} = 0$. თუ $a_{11}$ და $a_{22}$ ერთნაირი ნიშნისა არიან, მაშინ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში საკმარისია საწინააღმდეგოზე შევუცვალოთ ნიშნები განტოლების ორივე მხარეს). დავუშვათ, $a_{11} = k_1^2$, $a_{22} = k_2^2$, მივიღებთ განტოლებას:

$$k_1^2 x^2 + k_2^2 y^2 = 0, \tag{7}$$

რომელიც გამოსახავს $k_1 x + ik_2 y = 0$ და $k_1 x - ik_2 y = 0$ ორი წარმოსახვითი წრფის ერთობლიობას; თუკი $a_{11}$ და $a_{22}$ სხვადასხვა ნიშნისაა, მაშინ ანალოგიური წესით მივიღებთ:

$$k_1^2 x^2 - k_2^2 y^2 = 0, \tag{8}$$

რაც წარმოადგენს $k_1 x + k_2 y = 0$ და $k_1 x - k_2 y = 0$ ორი ნამდვილი წრფის ერთობლიობას. ამგვარად, ყოველი მეორე რიგის ცენტრალური წირის განტოლება შეიძლება დაყვანილ იქნას ერთ-ერთ (4) — (8) სახეზე.

თუ დავეყრდნობით § 225-ში მოცემულ განმარტებას, შეიძლება ითქვას, რომ (4) და (5) შემთხვევებში წირი წარმოადგენს ელიფსს, ვინაიდან, როგორც ადვილი შესამოწმებელია, ამ შემთხვევაში წირი ელიფსური ტიპისაა და დაუშლადია [1]). (5) შემთხვევაში წირს არც ერთი ნამდვილი წერტილი არა აქვს და მას წარმოსახვითი ელიფსი ეწოდება (6) შემთხვევაში წირი ჰიპერბოლური ტიპისაა და დაუშლადია [2]), ე. ი. წირი—ჰიპერბოლია.

გარდა ამისა, ჩვენ ვხედავთ, რომ მეორე რიგის დაშლადი წირები შეიძლება ერთ-ერთი (7) ან (8) განტოლებით წარმოვადგინოთ. პირველ შემთხვევაში ჩვენ გვაქვს ელიფსური ტიპის [3]), ხოლო მეორე შემთხვევაში ჰიპერბოლური [4]) ტიპის წირი.

ამგვარად, ელიფსური ტიპის დაშლადი წირი წარმოადგენს ორი წარმოსახვითი შეუღლებული არაპარალელური წრფის ერთობლიობას, ხოლო ჰიპერბოლური ტიპის დაშლადი წირი—ორი ნამდვილი არაპარალელური წრფის ერთობლიობას.

(4) — (8) განტოლებანი შეიძლება კიდევ გავამარტივოთ, თუ სათანადოდ შევარჩევთ საკოორდინატო ვექტორების სიგრძეებს. სახელდობრ, მათ შეიძლება მივცეთ შესაბამისად შემდეგი სახე:

$$x^2+y^2=1, \qquad (4a)$$

$$x^2+y^2=-1, \qquad (5a)$$

$$x^2-y^2=1, \qquad (6a)$$

$$x^2+y^2=0, \qquad (7a)$$

$$x^2-y^2=0. \qquad (8a)$$

მაგალითად, (4a) განტოლება (4) განტოლებიდან მიიღება $x$ და $y$-ის შეცვლით $ax$ და $by$-ით, რაც საკოორდინატო ვექტორების სიგრძეთა შეცვლას ნიშნავს; ანალოგიურად გვექნება დანარჩენ განტოლებათა შემთხვევაშიც.

(4a) განტოლებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ყველა ნამდვილი ელიფსები შეიძლება მიღებულ იქნან ერთმეორესაგან აფინური გარდაქმნით. მართლაც, ვთქვათ, $Oxy$ სიბრტყეზე მოცემულია ორი ელიფსი. კოორდინატთა ახალი სისტემების $O'x'y'$ და $O''x''y''$ სათანადო შერჩევით, ამ ელიფსების განტოლებებს შეიძლება მივცეთ შესაბამისად სახე: $x'^2+y'^2=1$

---

[1]) მართლაც, ჩვენს შემთხვევაში $F(x, y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$; $a_{11}=\frac{1}{a^2}$, $a_{22}=-\frac{1}{b^2}$,

$$a_{33}=a_{13}=a_{23}=0,\ a_{12}=-1,\ A_{33}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}>0, \quad A=\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0, \\ 0, & \frac{1}{b^2} & 0, \\ 0, & 0, & -1 \end{vmatrix}\neq 0.$$

[2]) შეადარეთ წინა სქოლიო.

[3]) მართლაც, ჩვენ შემთხვევაში $F(x, y)=k_1^2x^2+k_2^2y^2$; $A_{33}=k_1^2\cdot k_2^2>0$;

$$A=\begin{vmatrix} k_1^2, & 0, & 0 \\ 0, & k_2^2, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}=0.$$

[4]) შეადარეთ წინა სქოლიო.

და $x''^2+y''^2=1$. ეს ორი ელიფსი, ცხადია, მიიღება ერთიმეორესაგან აფინური გარდაქმნით:

$$x'=x'', \quad y'=y''.$$

იგივე ითქმის დანარჩენ (4)—(8) სახის წირების მიმართაც. პირიქით, როგორც ადვილი სანახავია, არ შეიძლება ერთ-ერთი ასეთი სახის წირი მიღებული იყოს სხვა სახის წირისაგან აფინური გარდაქმნით.

ცხადია, რომ მოცემული წირის შეუღლებული დიამეტრები აფინური გარდაქმნით გადადიან გარდაქმნილი წირის შეუღლებულ დიამეტრებად. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ ქორდის შუა წერტილი აფინური გარდაქმნით ისევ შუა წერტილად რჩება.

საზოგადოდ, ამ თავში და აგრეთვე წინა თავში ჩამოთვლილი ყველა თვისება აფინური გარდაქმნის დროს უცვლელი რჩება, ვინაიდან ყველა განსაზღვრის დროს ჩვენ ვსარგებლობდით ჯერჯერობით მხოლოდ აფინური (ზოგჯერ მხოლოდ გეგმილური) თვისებებით.

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1.** ის გარემოება, რომ, თუ კოორდინატთა ღერძებად შეუღლებული დიამეტრებია მიღებული, მაშინ წირის განტოლება (3) სახეს ღებულობს, უშუალოდ გამომდინარეობს იქიდან, რომ ორი შეუღლებული დიამეტრი არასაკუთრივ წრფესთან ერთად, როგორც ადვილი შესამჩნევია, ადგენენ ავტოპოლარულ სამკუთხედს (იხ. § § 222, 232).

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2.** ჩვენ ჯერ მაინც არ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ჩვენს მიერ § 225-ში განსაზღვრული ნამდვილი ელიფსი და ჰიპერბოლი, იგივე წირებია, რასაც უყურებდით ელიფსს და ჰიპერბოლს დასაწყისში (§ 195 და მომდევნოები); ჩვენ კიდევ უნდა დავამტკიცოთ, რომ ნამდვილი ელიფსისა და ჰიპერბოლის განტოლებანი, ისე როგორც აქ არიან ისინი განმარტებული, შეიძლება დაყვანილ იქნან დეკარტის მართკუთხა კოორდინატების სათანადო შერჩევით, შესაბამისად, (4) და (6) სახეზე. ეს დამტკიცებული იქნება ცოტა ქვემოთ (§ 238).

**§ 235. პარაბოლური ტიპის წირების უმარტივესი განტოლებანი.** პარაბოლური ტიპის წირის დიამეტრები, როგორც ვიცით, ყველა ერთმანეთის პარალელურია. ამიტომ ჩვენ არ შეგვიძლია კოორდინატთა ღერძებად ორი შეუღლებული დიამეტრი ავიღოთ.

მიუხედავად ამისა, ჩვენ შეგვიძლია ასეთი წირის განტოლება გავამარტივოთ, თუ $Oy$ ღერძად ავიღებთ დიამეტრების არაპარალელურ ნებისმიერ წრფეს, ხოლო $Ox$ ღერძად $Oy$ მიმართულების შეუღლებულ დიამეტრს. $Oy$ მიმართულების შეუღლებულ დიამეტრს განტოლებად აქვს:

$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}=0.$$

ვინაიდან, პირობის თანახმად, ეს დიამეტრი $Ox$ ღერძზეა დამთხვეული, ამიტომ უნდა გვქონდეს $a_{21}=a_{23}=0$, $a_{22}\neq 0$. რადგანაც, გარდა ამისა, $a_{12}a_{22}-a_{12}^2=a_{11}a_{22}=0$ (ვინაიდან წირი პარაბოლური ტიპისაა), ამიტომ $a_{11}=0$. მაშასადამე, წირის განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$a_{22}y^2+2a_{13}x+a_{33}=0. \qquad (1)$$

ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $a_{13} \neq 0$. ამ შემთხვევაში (1) წირი $Ox$ ღერძს ჰკვეთს; მართლაც, თუ დაეუშვებთ $y=0$, მივიღებთ გადაკვეთის წერტილის აბსცისს $x = -\frac{a_{33}}{2a_{13}}$; გადავიტანოთ კოორდინატთა სათავე (საკოორდინატო ვექტორების შეუცვლელად) ამ წერტილში; მაშინ, როგორც ადვილი შესამჩნევია, წირის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0,$$

ანუ, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას: $-\frac{a_{13}}{a_{22}} = p$,

$$y^2 = 2px. \tag{2}$$

ამ განტოლებით მოცემული წირი, როგორც ადვილი შესამოწმებელია, თუ შევადგენთ $A$ დეტერმინანტს, დაუშლადია; მაშასადამე, იგი წარმოადგენს პარაბოლს. განხილულ შემთხვევაში, $Ox$ ღერძი წარმოადგენს პარაბოლის დიამეტრს, ხოლო $Oy$ ღერძი პარაბოლის მხებია ამ დიამეტრისა და პარაბოლის გადაკვეთის წერტილში, როგორც ეს გამომდინარეობს § 231-ში ნათქვამიდან (და როგორც ეს ადვილი შესამოწმებელია უშუალოდაც).

თუ $a_{13}=0$, მაშინ (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$a_{22}y^2 + a_{33} = 0,$$

ე. ი.

$$y = \pm\sqrt{-\frac{a_{33}}{a_{22}}}. \tag{3}$$

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში ჩვენი წირი წარმოადგენს ორი პარალელური წრფის ერთობლიობას, ნამდვილს (თუ $a_{22}$ და $a_{33}$ სხვადასხვა ნიშნისაა) ან წარმოსახვითს (თუ $a_{22}$ და $a_{33}$ ერთნაირი ნიშნისაა). თუ $a_{33}=0$, მაშინ ჩვენ გვაქვს ორი ერთმანეთზე დამთხვეული წრფე.

ამგვარად, პარაბოლური ტიპის წირი ან პარაბოლია, და მაშინ მისი განტოლება შეიძლება დავიყვანოთ (2) სახეზე, ან ორი პარალელური წრფის ერთობლიობაა, როგორც ეს უკვე ზემოთ ვნახეთ (§ 225a).

საკოორდინატო ვექტორების სიგრძეთა სათანადო შერჩევით (შეადარეთ წინა პარაგრაფს) პარაბოლის განტოლებას შეიძლება მიეცეთ შემდეგი სახე:

$$y^2 = 2x. \tag{2a}$$

კერძოდ, აქედან გამომდინარეობს, რომ პარაბოლები შეიძლება მიღებულ იქნან ერთმანეთისაგან აფინური გარდაქმნით. უფრო მეტიც, ყველა პარაბოლი ურთიერთმსგავსია; ეს ცხადი გახდება მაშინ, როცა ჩვენ დავამტკიცებთ (§ 238-ში), რომ პარაბოლები, ისე როგორც ისინი აქ იყვნენ განმარტებული, ზემოთ (§ 200-ში) განსაზღვრული პარაბოლებია, რომელთა შესახებაც (§ 207) უკვე დამტკიცებული იყო, რომ ყველა ისინი მსგავსნი არიან.

**§ 236. მეორე რიგის წირის განტოლება მხებისა და შეხების წერტილში გატარებული დიამეტრის მიმართ.** ასეთი განტოლება პარაბოლის შემთხვევისათვის ჩვენ უკვე გამოვიყვანეთ. ახლა შეეადგინოთ ანალოგიური განტოლება ნებისმიერი დაუშლადი მეორე რიგის წირისათვის. ვთქვათ,

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

წარმოადგენს წირის განტოლებას, ხსენებული ღერძების სისტემის მიმართ, ვინაიდან, წირი გადის $O$ წერტილზე, ამიტომ $a_{33}=0$. გარდა ამისა, მხების განტოლება $O$ წერტილში არის:

$$a_{13}x + a_{23}y = 0$$

და რადგანაც ეს წრფე უნდა ემთხვეოდეს $Oy$ ღერძს, ამიტომ [1])

$$a_{13} = 0, \quad a_{13} \neq 0.$$

ბოლოს, $Oy$ ღერძის მიმართულების შეუღლებული დიამეტრის განტოლება არის:

$$a_{11}x + a_{21}y = 0,$$

ვინაიდან $a_{23}=0$. ეს დიამეტრი $Ox$ ღერძზე უნდა იყოს დამთხვეული. მაშასადამე, უნდა იყოს: $a_{12}=0$, $a_{22} \neq 0$.

ამგვარად, (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0, \qquad (2)$$

ანუ

$$y^2 = 2px + qx^2, \qquad (3)$$

სადაც

$$p = -\frac{a_{13}}{a_{22}}, \quad q = -\frac{a_{11}}{a_{22}}.$$

თუ $y^2 - 2px - 2qx^2 = 0$ განტოლებისათვის შეეადგენთ $A_{33}$ სიდიდეს დაეარწმუნდებით, რომ როცა $q<0$, გვექნება ელიფსი, როცა $q>0$ — ჰიპერბოლი, ხოლო როცა $q=0$ — პარაბოლი. ამგვარად, ჩვენ განვაზოგადეთ § 206-ის შედეგი.

## II. მთავარი დიამეტრები. ნორმალური განტოლებანი მართკუთხა კოორდინატებში

კონუსური კვეთების მეტრიული თვისებების შესწავლას ჩვენ დავიწყებთ მთავარი დიამეტრების საკითხით. ამ თავში ვიგულისხმებთ, რომ კოორდინატები მართკუთხოვანია.

[1]) მხების განტოლება, რადგანაც წირი დაუშლადია, განხლვრული უნდა იყოს.

**§ 237. მთავარი დიამეტრები.** მეორე რიგის წირის დიამეტრს ეწოდება მთავარი, თუ იგი მართობია იმ მიმართულების, რომლის შეუღლებულიც ის არის. ასეთი დიამეტრი, ცხადია, წირის სიმეტრიის ღერძია და ამიტომ მას აგრეთვე წირის ღერძს უწოდებენ. ღერძის გადაკვეთის წერტილებს წირთან წირის წვეროები ეწოდება.

დავსვათ ასეთი ამოცანა: მოვძებნოთ მეორე რიგის წირის მთავარი დიამეტრები.

ვთქვათ,

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \tag{1}$$

მოცემული წირის განტოლებაა (მართკუთხა კოორდინატებში).

პირველად განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა წირს გარკვეული ცენტრი აქვს ($A_{33}\neq 0$). ამ შემთხვევაში წირის მთავარი დიამეტრებია ურთიერთ მართობი შეუღლებული დიამეტრები.

ვთქვათ, $k_1$ და $k_2$ ამ დიამეტრების კუთხური კოეფიციენტებია. ისინი ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი დამოკიდებულებით (§ 230):

$$a_{22}k_1k_2+a_{12}(k_1+k_2)+a_{11}=0, \tag{2}$$

რასაც ახლა უნდა დავუმატოთ კიდევ მართობის პირობა:

$$k_1k_2=-1. \tag{3}$$

ვთქვათ, პირველად $a_{12}\neq 0$. მაშინ (2) და (3) განტოლებანი, რომლებიც ასეც შეიძლება გადაიწეროს

$$k_1+k_2=-\frac{a_{11}-a_{22}}{a_{12}},\quad k_1k_2=-1, \tag{4}$$

გვიჩვენებენ, რომ $k_1$ და $k_2$ შემდეგი კვადრატული განტოლების ფესვებია:

$$a_{12}k^2+(a_{11}-a_{22})k-a_{12}=0. \tag{5}$$

რადგანაც სიდიდე

$$(a_{11}-a_{12})^2+4a_{12}^2$$

დადებითია, ამიტომ (5) განტოლებას აქვს ორი ნამდვილი ფესვი, რომლებიც საძიებელი მთავარი დიამეტრების კუთხურ კოეფიციენტებს წარმოადგენენ.

ჩვენ გამოვრიცხეთ ის შემთხვევა, როცა $a_{12}=0$; მაგრამ ადვილი შესამოწმებელია, რომ (5) განტოლება გვაძლევს მთავარი დიამეტრების მიმართულებას ყველა (ცენტრალური წირის) შემთხვევაში. მართლაც, თუ $a_{12}=0$, მაგრამ $a_{11}-a_{22}\neq 0$, მაშინ (5) განტოლებას აქვს ორი ფესვი: $k_1=0$, $k_2=\infty$; მეორეს მხრივ, უშუალო შემოწმებას მივყევართ იმ დასკვნამდე, რომ როცა $a_{12}=0$, მაშინ ($X_1\neq 0$, $Y_1=0$) მიმართულების, ე. ი. $Ox$ ღერძის მიმართულების, შეუღლებული დიამეტრი $Oy$ ღერძის პარალელურია, ე. ი. მისი კუთ-

ხური კოეფიციენტი $k_2=\infty$. ბოლოს თუ $a_{12}=0$, $a_{11}=a_{22}$ ერთდროულად, მაშინ (5) განტოლება გადაიქცევა იგივეობად $0=0$; ამ შემთხვევაში ყველა დიამეტრი იქნება მთავარი და, როგორც § 239-ში ვნახავთ, მოცემული წირი წარმოადგენს (ნამდვილ ან წარმოსახვით) წრეხაზს.

მთავარი დიამეტრების განტოლებათა მოსაძებნად საკმარისია დიამეტრის ზოგად განტოლებაში:

$$XF_1(x,\ y)+YF_2(x,\ y)=0 \tag{6}$$

$X$ და $Y$-ის ნაცვლად ჩავსვათ

$$\frac{Y_1}{X_1}=k_1 \text{ ან } \frac{Y_2}{X_2}=k_2 \tag{7}$$

ტოლობებით განზღვრული $(X_1,\ Y_1)$ ან $(X_2,\ Y_2)$ რიცხვთა წყვილი, სადაც $k_1$ და $k_2$ — (5) განტოლების ფესვებია. ეს წესი ძალაში რჩება მაშინაც, როცა $a_{12}=0$, $a_{11}-a_{22}\neq 0$, ე. ი., როცა $k_1=0$, $k_2=\infty$. მაშინ უნდა ავიღოთ $X_1\neq 0$, $Y_1=0$ და $X_2=0$, $Y_2\neq 0$. იმ შემთხვევაში კი, როცა $a_{12}=0$, $a_{11}=a_{22}$ სიდიდეებს $X$ და $Y$ შეიძლება მივცეთ ნებისმიერი მნიშვნელობანი, რომლებიც ერთდროულად ნულის ტოლი არ არიან.

ახლა განვიხილოთ პარაბოლური ტიპის წირის შემთხვევა, როცა

$$A_{33}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0.$$

ამ შემთხვევაში ყველა დიამეტრი ურთიერთ პარალელურია და მათი კუთხური კოეფიციენტი უდრის (§ 230)

$$k=-\frac{a_{11}}{a_{12}}=-\frac{a_{12}}{a_{22}} \tag{8}$$

($a_{11}:a_{12}$ და $a_{12}:a_{22}$ ორი ფარდობიდან ერთ-ერთი მაინც არ არის განუზღვრელი, რადგანაც, თუ მაგალითად, $a_{11}=a_{12}=0$, მაშინ აუცილებლად $a_{22}\neq 0$, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში წირი მეორე რიგის არ იქნებოდა).

ამ მიმართულების მართობი ქორდების კუთხური კოეფიციენტი $k'$, მოცემულია ფორმულით

$$\frac{Y}{X}=k'=-\frac{1}{k}=\frac{a_{12}}{a_{11}}=\frac{a_{22}}{a_{12}}. \tag{9}$$

მთავარი დიამეტრის განტოლების მისაღებად, (6) განტოლებაში $X$ და $Y$ ნაცვლად უნდა ჩავსვათ ნებისმიერ რიცხვთა ისეთი წყვილი (ერთდროულად ნულის არა ტოლი), რომელთა ფარდობა მოცემულია წინა ფორმულით. მაგალითად, შეიძლება ავიღოთ

$$X=a_{11},\ Y=a_{12},\ \text{ან}\ X=a_{12},\ Y=a_{22}$$

(თუ $a_{11}=a_{12}=0$, მაშინ უნდა ავიღოთ მეორე წყვილი).

ამგვარად, მთავარი დიამეტრის განტოლება დაიწერება ასე:

$$a_{11}F_1 + a_{12}F_2 = 0 \text{ ან } a_{12}F_1 + a_{22}F_2 = 0. \qquad (10)$$

მთავარი დიამეტრების მოძებნის საკითხი შეიძლება აგრეთვე სხვა, უფრო სიმეტრიული ხერხით ამოეხსნათ, რომლის განზოგადება დასაშვებია სამგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაშიც (და აგრეთვე ნებისმიერი განზომილების სივრცის შემთხვევაში). მაგრამ ჩვენ აქ ამაზე არ შევჩერდებით, რადგანაც მეორე რიგის ზედაპირების განტოლებათა გამარტივების საკითხში (თავი XI) ხსენებულ ხერხს გამოვიყენებთ სამი განზომილების შემთხვევაში, რის შემდეგაც მკითხველს ადვილად შეუძლია გამოიყენოს ის ორი განზომილების შემთხვევაშიც.

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა.** დამატებითი ქორდების (§ 233) საშუალებით, ადვილად შეიძლება ავაგოთ ნახაზით მოცემული ელიფსისა და ჰიპერბოლის მთავარი დიამეტრები. ამისათვის საკმარისია ავაგოთ წირის რომელიმე დიამეტრი $AB$ (§ 223) და შემოვახაზოთ წრეხაზი, რომელსაც დიამეტრად აქვს $AB$. თუ $M$ ამ წრეხაზის მოცემულ წირთან გადაკვეთის ერთ-ერთი წერტილია, მაშინ $AM$ და $MB$ ქორდები იქნებიან ურთიერთ მართობი დამატებითი ქორდები, ხოლო მათი პარალელური დიამეტრები—მთავარი დიამეტრები. ამ უკანასკნელთა გადაკვეთის წერტილები წირთან მოგვცემენ მის წვეროებს.

პარაბოლის მთავარი დიამეტრის ასაგებად, საკმარისია ავაგოთ ერთი რომელიმე დიამეტრი $\Delta$, გავატაროთ მისი მართობი ქორდა და ამ ქორდის შუა წერტილზე გავატაროთ $\Delta$ წრფის პარალელური წრფე. ეს იქნება პარაბოლის მთავარი დიამეტრი. მისი გადაკვეთის წერტილი პარაბოლასთან განსაზღვრავს წვეროს.

§ 238. **კონუსური კვეთების ნორმალური განტოლებანი დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებში.** თუ მოცემულია მეორე რიგის ცენტრალური წირი და თუ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემად ავიღებთ მთავარ დიამეტრებს, მაშინ წირის განტოლებას დავიყვანთ ერთ-ერთ შემდეგ სახეზე (სადაც $a$, $b$, $k_1$, $k_2$, $p$ ნამდვილი რიცხვებია) (იხ. § 234)

1°. ნამდვილი ელიფსის შემთხვევაში

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1°a. წარმოსახვითი ელიფსის შემთხვევაში

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

2°. ჰიპერბოლის შემთხვევაში

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3°. წარმოსახვით შეუღლებულ არაპარალელურ წრფეთა შემთხვევაში

$$k_1^2x^2 + k_2^2y^2 = 0.$$

4°. ნამდვილ არაპარალელურ წრფეთა შემთხვევაში

$$k_1^2x^2 - k_2^2y^2 = 0.$$

თუ წირს გარკვეული ცენტრი არა აქვს (ცენტრი არა აქვს[1]) ან აქვს ცენტრთა წრფე), მაშინ, ავიღებთ რა $Ox$ ღერძად მთავარ დიამეტრს, ხოლო $Oy$ ღერძად წირის მხებს წვეროში[2]) (პარაბოლის შემთხვევაში), ან მის მართობ ნებისმიერ წრფეს (ორი პარალელური წრფის შემთხვევაში), გვექნება (იხ. § 235):

5°. პარაბოლის შემთხვევაში

$$y^2 = 2px.$$

6°. პარალელურ წრფეთა წყვილის შემთხვევაში

$$y^2 = \pm k^2$$

(ზედა ნიშნის დროს წრფეები ნამდვილია, ქვედა ნიშნის დროს — წარმოსახვითი).

ახლა ჩვენ ვხედავთ, რომ ის წირები, რომლებსაც § 225-ში ჩვენ ელიფსი, ჰიპერბოლი და პარაბოლი ვუწოდეთ, იგივე წირებია, რომლებიც განსაზღვრული იყო VII თავში (გარდა წარმოსახვითი ელიფსისა, რომელიც VII თავში განხილული არ ყოფილა).

ჩვენ უკვე ვხედავთ (§ 234), რომ აფინური თვალსაზრისით ყველა ელიფსი, ისე როგორც ყველა ჰიპერბოლი და პარაბოლი, ეკვივალენტურია.

მეტრიული თვალსაზრისით, ელიფსები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან ზომით[3]) და ფორმით (მეტად ან ნაკლებად გაგრძელებული); ელიფსთა შორის თავისი უმარტივესი ფორმით გამოირჩევა წრეხაზი.

იგივე ითქმის ჰიპერბოლისა (წრეხაზის ანალოგიურ როლს ჰიპერბოლთა შორის ტოლფერდა ჰიპერბოლი ასრულებს) და პარაბოლის მიმართაც[4]).

როგორც გამოყენება, დავამტკიცოთ § 76-ში (სქოლიო 141 გვერდზე) გამოთქმული დებულება, სახელდობრ: ყოველი აფინური გარდაქმნა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც შედეგი მოძრაობისა, შესაძლოა, არეკლვისა და ოი უთიერთ მართობი მიმართულებით გაჭიმვის დამატებით. ვთქვათ, $\Gamma$ რაიმე წრეხაზია $\Pi$ სიბრტყეზე. $\Pi$ სიბრტყის აფინური გარდაქმნით $\Pi'$ სიბრტყეში $\Gamma$ წრეხაზი გადაიქცევა რაიმე $\Gamma$ ელიფსად $\Pi'$ სიბრტყეზე. ამ ელიფსის მთავარ დიამეტრებს შეესაბამება $\Gamma$ წრეხაზის ორი ურთიერთ მართობი დიამეტრი[5]). ამგვარად, ყოველთვის არსებობს ისეთი ორი ურთიერთ მართობი მიმართულება, ოომლებიც გარდაქმნის შემდეგაც ურთიერთ მართობი რჩებიან, ვთქვათ ახლა, $O$ არის $\Pi$ სიბრტყის რაიმე წერტილი და $\vec{u}$, $\vec{v}$—ორი ვექტორი, სათავით $O$ წერტილში, რომლებსაც ახლახანს ხსენებული მიმართულებანი აქვთ. ვთქვათ, $O'$, $u'$ $v'$ მათი შესაბამისი ელემენტებია $\Pi'$ სიბრტყეზე. მოძრაობით, შესაძლოა არეკლვის დამატებით, ჩვენ შეგვიძლია $O$ წერტილი დავამთხეოოთ $O'$ წერტილზე და $\vec{u}$, $\vec{v}$ ვექტორები მივმართოთ $\vec{u'}$, $\vec{v'}$ ვექტორთა გასწვრივ (რომლებიც, პირობის თანახმად, ურთიერთ მართობი არიან).

ახლა ცხადია, რომ მოთხოვნილი დებულების დასამტკიცებლად, საკმარისია დავუმატოთ სათანადო გაჭიმვა $\vec{u}$ და $\vec{v}$ მიმართულებათა გასწვრივ.

[1]) ე. ი. ცენტრი არასაკუთრივი წერტილია.

[2]) ე. ი. მთავარი დიამეტრის წირთან გადაკვეთის წერტილში.

[3]) სიტყვა „მეტრიული" ჩვენ აქ ვიწრო მნიშვნელობით გვესმის, მიგვაჩნია რა ნაკვეთი არაერთნაირი ზომებით ერთმანეთისაგან განსხვავებულად.

[4]) ჩვენ ვიცით, რომ ყველა პარაბოლი ერთმანეთის მსგავსია; თუ სიტყვა „მეტრიულ"-ს ფართო მნიშვნელობით გავიგებთ (ვგულისხმობთ მსგავს ფიგურათა ეკვივალენტობას), მაშინ ყველა პარაბოლი ურთიერთ ეკვივალენტური იქნება.

[5]) აფინური გარდაქმნის დროს შეუღლებული დიამეტრები ისევ შეუღლებული რჩებიან, წრისათვის კი ისინი ურთიერთ მართობი არიან.

§ 239. წრეხაზის განტოლების შეხახებ. როგორც ვიცით (§ 80),

$$(x-a)^2+(y-b)^2+r^2=0 \tag{1}$$

განტოლებით მოცემული წირი (მართკუთხა კოორდინატებში) არის წრეხაზი.

$$(x-a)^2+(y-b)^2+r^2=0 \tag{1a}$$

განტოლებით მოცემულ წირს ჩვენ ვუწოდებთ წარმოსახვითს წრეხაზს, ცენტრით $(a, b)$ წერტილში და წარმოსახვითი რადიუსით $ir$ (ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $r$ ნამდვილი რიცხვია).

თუ კოორდინატთა სათავეს ცენტრში გადავიტანთ, მაშინ (1) და (1a) განტოლებანი მიიღებენ სახეს

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=\pm 1$$

(+ ნამდვილი, ხოლო — წარმოსახვითი წრეხაზისათვის), ისე რომ წრეხაზი ელიფსის კერძო სახეა.

ადვილი გადასაწყვეტია საკითხი: როგორია აუცილებელი და საკმარისი პირობები იმისა, რომ განტოლება (მართკუთხა კოორდინატებში)

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \tag{2}$$

წრეხაზს წარმოადგენს.

იმისათვის, რომ (2) წირი წარმოადგენდეს იმავე წირს, რასაც (1) ან (1a) [1], [ამ განტოლებებს ჩვენ ასე გადავწერთ:

$$(x-a)^2+(y-b)^2-k=0, \tag{1b}$$

სადაც $k=\pm r^2$], აუცილებელი და საკმარისია, რომ იგივურად გვქონდეს

$$\begin{aligned}a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=\\ =k(x^2+y^2-2ax-2bx+a^2+b^2-K),\end{aligned}$$

სადაც $k$ ნულისაგან განსხვავებული რაიმე მუდმივია.

თუ შევადარებთ კოეფიციენტებს, მივიღებთ

$$\left.\begin{aligned}a_{11}=k,\ a_{12}=0,\ a_{22}=k,\ a_{13}=-ka,\ a_{23}=-kb,\\ a_{33}=k(a^2+b^2-K).\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ამ დამოკიდებულებებიდან, კერძოდ, გამომდინარეობს, რომ

$$a_{11}=a_{22}\neq 0,\ a_{12}=0. \tag{4}$$

[1] მხედველობაში გვაქვს, რომ წირების იგივეობა ნიშნავს როგორც ნამდვილი, ისე წარმოსახვითი წერტილების დამთხვევას.

პირიქით, თუ (4) პირობები დაცულია, მაშინ (1) განტოლება წარმოადგენს წრეხაზს. ეს უკანასკნელი არსებითად უკვე დამტკიცებული იყო § 80-ში; გავიმეოროთ ეს დამტკიცება, ზოგიერთი დამატებით. თუ (4) პირობები დაცულია; მაშინ შეიძლება მოვძებნოთ ისეთი რიცხვები $k$, $a$, $b$, $K$, რომლებიც აკმაყოფილებენ (3) პირობებს, სახელდობრ, ცხადია, გვაქვს

$$k = a_{11} = a_{22},\ a = \frac{-a_{13}}{a_{11}},\ b = \frac{-a_{23}}{a_{11}},$$

$$K = a^2 + b^2 - \frac{a_{33}}{a_{11}} = \frac{a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33}}{a_{11}^2}.$$

თუ $K > 0$, მაშინ წრეხაზი ნამდვილია, თუ $K < 0$, მაშინ — წარმოსახვითია. ბოლოს თუ $K = 0$, მაშინ მოცემული განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$, რომელიც კმაყოფილდება მხოლოდ შემდეგი ნამდვილი მნიშვნელობებით:

$$x = a,\ y = b.$$

ამ შემთხვევაში შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ჩვენ გვაქვს ნულოვან რადიუსიანი წრეხაზი.

ნულოვან რადიუსიანი წრეხაზი წარმოადგენს, ორი იზოტროპული წრფის ერთობლიობას (§ 162): $y - b = i(x-a)$, $y - b = -i(x-a)$, რომლებიც ნამდვილ წერტილზე $(a, b)$ გაივლიან.

ჩვენ ვნახეთ § 175-ში, რომ ყველა წრეხაზი გაივლის ციკლურ წერტილებზე. ადვილი სანახავია, რომ პირიქითაც: ყოველი მეორე რიგის წირი, რომელიც ციკლურ წერტილებზე გადის, წრეხაზია.

მართლაც, თუ წირი (განტოლებას ვწერთ ერთგვაროვან კოორდინატებში)

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t^2 = 0$$

გადის $(1, i, 0)$ და $(1, -i, 0)$ წერტილებზე, მაშინ ჩვენ უნდა გექონდეს

$$a_{11} + 2a_{12}i - a_{22} = 0,$$
$$a_{11} - 2a_{12}i - a_{22} = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ: $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$, ეს კი ამტკიცებს ჩვენს დებულებას. ამ დასკვნის მისაღებად ისიც საკმარისია, რომ წირი გადიოდეს ე რ თ - ე რ თ ციკლურ წერტილზე, მაგ.: $(1, i, 0)$, რადგანაც ეს გვაძლევს განტოლებას

$$a_{11} + 2a_{12}i - a_{22} = 0,$$
$$a_{11} - 2a_{12}i - a_{22} = 0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს (ვინაიდან ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ ყველა კოეფიციენტი ნამდვილია), რომ

$$a_{11} = a_{22} = 0,\ a_{12} = 0.$$

## III. ნორმალი. მხებთა ფოკალური თვისებები

მთელ ამ თავში იგულისხმება მ ა რ თ კ უ თ ხ ო ვ ა ნ ი კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი, თუ ამის საწინააღმდეგო ცალკე არ არის აღნიშნული.

**§ 240. ბრტყელი წირის ნორმალი.** მოცემული ბრტყელი წირის ნორმალი ეწოდება მხების მართობ წრფეს, ამართულს შეხების[1]) წერტილში (განხილული წირის სიბრტყეში). ადვილი მოსაძებნია ნორმალის განტოლება დეკარტის მართკუთხოვან კოორდინატებში.

მხების განტოლებიდან[2])

$$(x - x_0) F_1(x_0, y_0) + (y - y_0) F_2(x_0, y_0) = 0$$

დავასკვნით, რომ ვექტორი კოორდინატებით: $X = F_1(x_0, y_0)$, $Y = F_2(x_0, y_0)$, მართობია მხებისა, და ამიტომ იგი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ნორმალის მიმართულების ვექტორი. მაშასადამე, ნორმალის განტოლება შეიძლება ასე წარმოვიდგინოთ:

$$\frac{x - x_0}{F_1(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F_2(x_0, y_0)}. \tag{1}$$

**§ 241. ელიფსის მხებთა თვისებები.** ვთქვათ, მოცემულია ელიფსი ნორმალური განტოლებით

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{1}$$

ვინაიდან ჩვენს შემთხვევაში

$$\Phi(x, y, t) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - t^2$$

და

$$\Phi_1(x_0, y_0, 1) = \frac{x_0}{a^2}, \quad \Phi_2(x_0, y_0, 1) = \frac{y_0}{b^2}, \quad \Phi_3(x_0, y_0, 1) = -1,$$

ამიტომ მხების განტოლება მიიღებს სახეს [§ 217, ფორმულა (5)]

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

სადაც $x_0$, $y_0$ შეხების $M_0$ წერტილის კოორდინატებია (ნახ. 154).

მოვძებნოთ მხების გადაკვეთის $M_1(x_1, 0)$ წერტილი $Ox$ ღერძთან. ამისათვის (2) განტოლებაში დავუშვათ $y = 0$, $x = x_1$, რაც მოგვცემს:

$$\frac{x_1 x_0}{a^2} = 1,$$

---

[1]) ნორმალის ცნება არც აფინურია და არც გეგმილური, ვინაიდან აფინური გარდაქმნის დროს (მით უმეტეს, გეგმილური გარდაქმნისას) მართი კუთხე, საზოგადოდ, არ რჩება მართი.

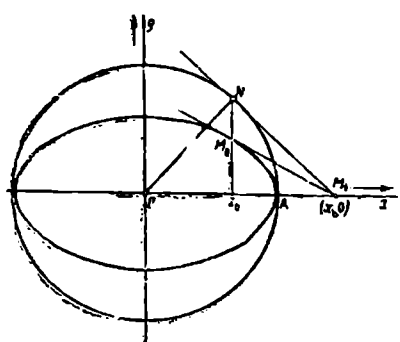
[2]) იხ. § 217-ის (6) განტოლება, § 208-ში მიღებული აღნიშვნების მიხედვით

$$F_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y}.$$

ე. ი.

$$x_1 = \frac{a^2}{x_0}. \tag{3}$$

უკანასკნელი ფორმულა გვიჩვენებს, რომ $M_1$ წერტილი ძალიან მარტივად შეგვიძლია ავაგოთ ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით, როცა მოცემულია შეხების $M_1$ წერტილი: ამისათვის საკმარისია $O$ წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, შემოვხაზოთ წრეწირი რადიუსით $a$, გავატაროთ $M_0$ წერტილზე $Ox$ ღერძის მართობი წრფე წრეწირთან გადაკვეთის $N$ წერტილამდე და, ბოლოს, ავმართოთ $N$ წერტილიდან $ON$ წრფის მართობი. ამ მართობის გადაკვეთის წერტილი $Ox$ ღერძთან იქნება საძიებელი წერტილი. მართლაც, როგორც ელემენტარული გეომეტრიიდან ცნობილია,

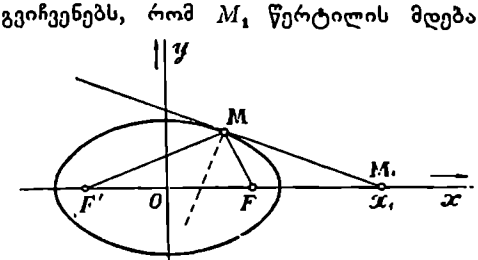



ნახ. 154.

$$|ON|^2 = a^2 = x_0 x_1.$$

ავაგებთ რა $M_1$ წერტილს, ის უნდა შევაერთოთ წრფით $M_0$ წერტილთან, ამით მხებიც მოძებნილი იქნება გრაფიკული გზით.

გარდა ამისა, (3) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ $M_1$ წერტილის მდებარეობა დამოკიდებულია მხოლოდ $a$ და $x_0$ სიდიდეებზე, ისე რომ ყველა იმ ელიფსისათვის, რომლებსაც იგივე $A'A$ ღერძი აქვთ, რაც მოცემულს, მხები $x_0$ აბსცისის მქონე წერტილში გაივლის $M_1$ წერტილში. კერძოდ, ამას ადგილი ექნება $a$ რადიუსთან წრეწირისათვის, რომლის ცენტრი $O$ წერტილშია. აქედან კიდევ ერთხელ გამომდინარეობს $M_1$ წერტილის აგების ზემომოყვანილი წესის სისწორე.




ნახ. 155.

ახლა დავამტკიცოთ ერთი მეტად მნიშვნელოვანი თვისება:

ელიფსის მხები შეხების წერტილში ფოკუსებიდან გატარებულ რადიუს-ვექტორებთან თანატოლ კუთხეებს ადგენს.

ვთქვათ, $F'$ და $F$—ელიფსის ფოკუსებია და $M_0$ შეხების წერტილი. ადვილი შესამჩნევია, რომ მხები გაივლის $F'M_0F$ კუთხის გარეთ. ჩვენ გვინდა

დავამტკიცოთ, რომ $M_0F'$ და $M_0F$ მიმართულებით შედგენილი მახვილი კუთხეები მხებთან, ურთიერთ თანატოლია, ე. ი. რომ მხები $M_0F$-ით და $F'M_0$-ის გაგრძელებით შედგენილი კუთხის ბისექტრისია (ნახ. 155).

ელემენტარული გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ $F'M_0F$ სამკუთხედში $M_0$ წვეროსთან შიგა ან გარე კუთხის ბისექტრისი მოპირდაპირე გვერდს $|F'M_0|$ და $|FM_0|$ გვერდების პროპორციულ ნაწილებად ჰყოფს, და, პირიქით, თუ $M_0M_1$ წრფე $F'F$ გვერდს ისეთ $M_1$ წერტილში ჰკვეთს, რომ დაცულია პირობა

$$\frac{|F'M_0|}{|FM_0|}=\frac{|F'M_1|}{|FM_1|}, \tag{4}$$

მაშინ $M_0M$ არის ბისექტრისი გარე (თუ $M_1$ მოთავსებულია $FF$ მონაკვეთის გარეთ) ან შიგა (თუ $M_1$ მოთავსებულია $F'F$ მონაკვეთზე) კუთხისა $M_0$ წვეროსთან. ჩვენს შემთხვევაში ცხადია, რომ $M_1$ მოთავსებულია $F'F$ მონაკვეთის გარეთ. დავამტკიცოთ, რომ ადგილი აქვს (4) ტოლობას.

§ 119-ის ფორმულების ძალით, რომლებიც გვაძლევენ ელიფსის წერტილთა მანძილებს ფოკუსებამდე, გვაქვს

$$|F'M_0|=a+ex_0,\ |FM_0|=-ex_0,$$

სადაც $e=\frac{c}{a}$ აღნიშნავს, როგორც ყოველთვის, ექსცენტრისიტეტს; გარდა ამისა, ამ პარაგრაფის (3) ფორმულის ძალით,

$$|F'M_1|=|x_1+c|=\left|\frac{x^2}{x_0}+c\right|=\frac{a(a+ex_0)}{|x_0|},$$

და ანალოგიურად

$$|FM_1|=\frac{a(a-ex_0)}{|x_0|}.$$

მაშასადამე,

$$\frac{|F'M_1|}{|FM_1|}=\frac{a+ex_0}{a-ex_0}=\frac{|F'M_0|}{|FM_0|},$$

ჩვენ სწორედ ეს უნდა დაგვემტკიცებინა.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ ელიფსის ნორმალი $M_0$ წერტილში $F'M_0F$ კუთხის ბისექტრისია.

ელიფსის დიდი ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებულ ზედაპირს ეწოდება მოგრძო ბრუნვითი ელიფსოიდი.

წარმოვიდგინოთ ასეთი ფორმის სარკე. გეომეტრიული ოპტიკის არეკლვის ძირითადი კანონის ძალით (დაცემული და ანარეკლი სხივი ნორმალთან ერთსა და იმავე კუთხეს ადგენენ) დავასკვნით ხსენებული სახის სარკის შემდეგ თვისებას: ერთ-ერთ ფოკუსში მოთავსებული წყაროდან გამოსული სხივები, არეკლვის შემდეგ მეორეში იკრიბებიან (ამ თვისებით აიხსნება სახელწოდება „ფოკუსი“).

§ 242. **ჰიპერბოლის მხებთა თვისება.** ვთქვათ, მოცემულია ჰიპერბოლი ნორმალური განტოლებით

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0. \tag{1}$$

ამ შემთხვევაში

$$\Phi(x, y, t) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - t^2,$$

და მხების განტოლება $M_0(x_0, y_0)$ წერტილში მიიღებს სახეს

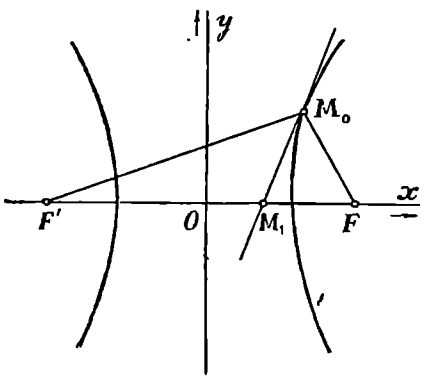
$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{2}$$

მხების გადაკვეთის $M_1(x_1, 0)$ წერტილი $Ox$ ღერძთან განისაზღვრება ფორმულით:

$$\frac{x_1x_0}{a^2} = 1, \text{ ე. ი. } x_1 = \frac{a^2}{x_0}. \tag{3}$$

რადგანაც ჰიპერბოლის (ნამდვილი) წერტილებისთვის $|x_0| \geq a$, ამიტომ $|x_1| \leq a$, მაშასადამე, $M_1(x_1, 0)$ წერტილი მოთავსებულია ჰიპერბოლის $A'$ და $A$ წვეროებს შორის.

(2) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ადვილად შეგვიძლია ავაგოთ $M_1$ წერტილი, როცა მოცემულია $a$ და $x_0$; აგებას ვანდობთ მკითხველს (შეადარეთ ელიფსის შემთხვევას). თუ ავაგებთ $M_1$ წერტილს და შევაერთებთ მას $M_0$ წერტილთან წრფით, მივიღებთ ჰიპერბოლის მხებს მოცემულ $M_0$ წერტილში (ნახ. 156).



ნახ. 156.

სრულებით იმის ანალოგიურად, როგორც ელიფსის შემთხვევაში, შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ ჰიპერბოლის მხები, ფოკუსების და შეხების წერტილის შემაერთებელ წრფეებით შედგენილ კუთხეს შუაზე ჰყოფს. ამ შემთხვევაში საკითხი ეხება $F'M_0F$ ან მის ვერტიკალურ კუთხეს. ამის დასამტკიცებლად საკმარისია შევამოწმოთ, რომ

$$\frac{|F'M_1|}{|FM_1|} = \frac{|F'M_0|}{|FM_0|};$$

ამ შემოწმებას ვანდობთ მკითხველს.

მხების ნაჩვენები თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ ჰიპერბოლის ნორმალი $M_0F$ მონაკვეთსა და $F'M_0$ მონაკვეთის გაგრძელებით შედგენილ კუთხეს შუაზე ჰყოფს.

თუ ჰიპერბოლს ვაბრუნებთ $F'F$ ღერძის გარშემო, მივიღებთ ორი ცალკეული ნაწილით (კალთებით) შედგენილ ფართეულს, რომელსაც ბრუნვის

ორკალთა ჰიპერბოლოიდი ეწოდება. წარმოვიდგინოთ ჩაზნექილი სარკე, რომლის ზედაპირს ჰიპერბოლოიდის ერთი კალთის ფორმა აქვს. ნორმალის გამოყვანილი თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ $F$ ფოკუსში მოთავსებული სინათლის წყაროდან გამოსული სხივები, სარკის ზედაპირიდან არეკლვის შემდეგ, მიიღებენ ისეთ მიმართულებას, როგორსაც ყველა ისინი მიიღებდნენ, თუ მეორე $F'$ ფოკუსიდან გამოვიდოდნენ.

თუ ჰიპერბოლი მოცემულია განტოლებით

$$xy = k, \tag{4}$$

ე. ი. თუ (საზოგადოდ ირიბკუთხა) კოორდინატთა ღერძებად ასიმპტოტებია აღებული (§ 203), მაშინ

$$\Phi(x, y, t) = xy - kt^2,$$

$$\Phi_1(x_0, y_0, 1) = \frac{1}{2} y_0, \quad \Phi_2(x_0, y_0, 1) = \frac{1}{2} x_0, \quad \Phi_3(x_0, y_0, 1) = -k,$$

და მხების განტოლება მიიღებს სახეს

$$xy_0 + yx_0 = 2k.$$

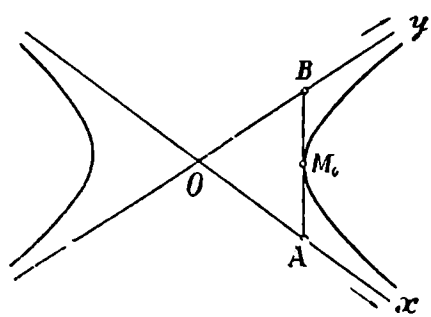
სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ, რომ კოორდინატები არაგანზოგადებულია. მხებით მოკვეთილი მონაკვეთები ღერძებიდან (ასიმპტოტებიდან), შესაბამისად ტოლია (ნახ. 157):

$$OA = \frac{2k}{y_0}, \quad OB = \frac{2k}{x_0},$$

ანუ, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $x_0 y_0 = k$:

$$OA = 2x_0, \quad OB = 2y_0. \tag{5}$$

აქედან, სხვათა შორის გამომდინარეობს, რომ მხების მონაკვეთი ასიმპტოტებს შორის შეხების წერტილით შუაზე იყოფა.



ნახ. 157.

ამის შემდეგ, (5) ფორმულის ძალით, შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ ასიმპტოტებითა და მხებით შედგენილი სამკუთხედის ფართი მუდმივი სიდიდეა (ე. ი. დამოუკიდებელია შეხების წერტილის მდებარეობისაგან).

მართლაც, ეს ფართობი უდრის

$$\frac{1}{2} |OA| \cdot |OB| \sin \nu = 2 |x_0 y_0| \sin \nu = 2k \sin \nu,$$

სადაც $\nu$ ასიმპტოტებს შორის მოთავსებული კუთხეა.

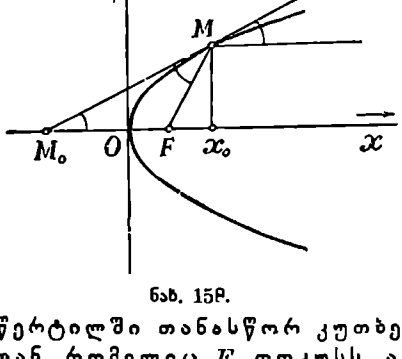
**§ 243. პარაბოლის მხებთა თვისებები.** აგიღოთ პარაბოლის განტოლება ნორმალური სახით:

$$y^2 - 2px = 0. \tag{1}$$

ვაქვს:

$$\Phi(x, y, t) = y^2 - 2pxt,$$

$$\Phi_1(x_0, y_0, 1) = -p, \quad \Phi_2(x_0, y_0, 1) = y_0, \quad \Phi_3 = (x_0, y_0, 1) = -px_0$$




ნახ. 158.

და მხების განტოლება იქნება

$$-px + y_0 y - px_0 = 0$$

ანუ

$$y_0 y = p(x + x_0). \tag{2}$$

მხები $Ox$ ღერძს ჰკვეთს $M_1(x_1, 0]$ წერტილში, სადაც $x_1 = -x_0$ (ნახ. 158), საიდანაც გამომდინარეობს ძალიან მარტივი და ცხადი ხერხი მხების აგებისათვის.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ პარაბოლის მხები ნებისმიერ $M$ წერტილში თანასწორ კუთხეებს ადგენს რადიუს-ვექტორთან, რომელიც $F$ ფოკუსს აერთებს $M$ წერტილთან და $M$ წერტილიდან გატარებული ღერძის პარალელურ წრფესთან (ეს თვისება შეიძლება განვიხილოთ როგორც ელიფსის მხების ანალოგიური დებულების ზღვრული შემთხვევა: ჩვენს შემთხვევაში ერთ-ერთი ფოკუსი უსასრულოდ დაშორებულია პარაბოლის ღერძის მიმართულებით).

ამის დასამტკიცებლად, შევნიშნოთ, რომ $M_1FM$ სამკუთხედი ტოლფერდიანია[1]) და, მაშასადამე, მისი $M_1$ და $M$ კუთხეები თანატოლია. მაგრამ კუთხე $M_1$ წვეროსთან უდრის $M$ წერტილზე ღერძის პარალელურად გატარებულ წრფესთან მხებით შედგენილ კუთხეს, ხოლო კუთხე $M$ წვეროსთან არის მხების კუთხე რადიუს-ვექტორთან.

აქედან გამომდინარეობს შემდეგი თვისება ისეთი ჩაზნექილი პარაბოლური სარკისა, რომლის ზედაპირი შედგენილია პარაბოლის ბრუნვით ღერძის გარშემო: ფოკუსიდან გამოსული სხივები, არეკლვის შემდეგ, ღერძის პარალელური ხდებიან. პირიქით, კონა პარალელური სხივებისა, რომლებიც ამ სარკეს ღერძის მიმართულებით ეცემა, ფოკუსში იკრიბება.

[1]) მართლაც, ჩვენ ვიცით (§ 200), რომ $|FM| = \frac{p}{2} + x_0$. მაგრამ

$$|M_1F| = |x_1| + |OF| = \frac{p}{2} + x_0,$$

რადგანაც $p = 2|OF|$ და, ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად $|x_1| = |x_0|$. მაშასადამე, $|MF| = |M_1F|$.

**სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი (§§ 241—243-სათვის)**

1. დაამტკიცეთ, რომ ელიფსის შემთხვევაში, შიგა და გარე წერტილების ცნება შემოტანილი § 219-ის ბოლოში იგივეა, რაც ჩვეულებრივი ცნება შიგა და გარე წერტილებისა ჩაკეტილი წირისათვის.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. „გარე" და „შიგა" წერტილების ქვეშ ჩვენ ვიგულისხმებთ გარე და შიგა წერტილებს მათი ჩვეულებრივი მნიშვნელობით და დავამტკიცებთ, რომ ეს ეთანხმება § 219-ში შემოტანილ ცნებებს.

ვთქვათ, $M$ $(\xi, \eta)$ მოცემული წერტილია, რომელზედაც ელიფსის მხების გატარება მოითხოვება. შეხების წერტილები განისაზღვრება

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1$$

ელიფსის გადაკვეთით წრფესთან — $M$ წერტილის პოლართან;

$$\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} = 1.$$

შეხების წერტილების მოსაძებნად წინა სისტემა უნდა ამოვხსნათ $x$, $y$-ის მიმართ, გამოვრიცხათ რა $y$-ს, უბრალო გამარტივებათა შემდეგ მივიღებთ $x$-ის განმსაზღვრელ კვადრატულ განტოლებას:

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0,$$

სადაც სიმოკლისათვის შემოღებულია აღნიშვნები:

$$A = \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2},$$

$$B = -\xi,$$

$$C = a^2\left(1 - \frac{\eta^2}{b^2}\right).$$

ამ განტოლების ფესვები იქნება ნამდვილი, თუ $B^2 - AC > 0$, წარმოსახვითი, თუ $B^2 - AC < 0$, თანატოლი, თუ $B^2 - AC = 0$.

უბრალო გამოთვლა გვიჩვენებს, რომ

$$B^2 - AC = \frac{a^2\eta^2}{b^2}\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1\right);$$

მაშასადამე, $B^2 - AC$ გამოსახულების ნიშანი განისაზღვრება

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1$$

გამოსახულების ნიშნით.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს გამოსახულება დადებითია, თუ $(\xi, \eta)$ წერტილი მოთავსებულია ელიფსის გარეთ, და უარყოფითია, თუ $(\xi, \eta)$ წერტილი ელიფსის შიგნით იმყოფება. აქედან კი გამომდინარეობს ჩვენი დებულება. თუ წინა გამოსახულება ნულის ტოლია, მაშინ $(\xi, \eta)$ წერტილი მოთავსებულია ელიფსზე, და ჩვენ გვეუბნება, როგორც მოსალოდნელი იყო, ერთი („ორი, თანხვედნილი") მხები.

2. დაამტკიცეთ, რომ § 219-ში მოცემული განსაზღვრების მიხედვით, ჰიპერბოლის მიმართ გარე წერტილები ყველა ის წერტილებია, რომლებიც მოკცეულია ჰიპერბოლის ორ შტოს შორის, ხოლო შიგა წერტილებია ყველა დანარჩენი წერტილი (გარდა თვით ჰიპერბოლის წერტილებისა).

3. დაამტკიცეთ, რომ პარაბოლის შიგა წერტილები სიბრტყის იმ ნაწილის წერტილებია, რომელშიაც ფოკუსი არ იმყოფება.

## IV. ელიფსის, ჰიპერბოლისა და პარაბოლის დიამეტრების გამოკვლევა

ახლა შევისწაელოთ უფრო დაწვრილებით საკითხი დიამეტრების შესახებ თითოეული დაუშლადი ნამდვილი მეორე რიგის წირისათვის. მთელ ამ განყოფილებაში, თუ საწინააღმდეგო არ იქნება აღნიშნული, იგულისხმება მართკუთხოვანი კოორდინატები.

§ 244. ელიფსის დიამეტრები. დავიწყოთ ელიფსით, რომელიც მოცემულია ნორმალური განტოლებით

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1}$$

ჩვენს შემთხვევაში

$$a_{11}=\frac{1}{a^2},$$
$$a_{12}=0,$$
$$a_{22}=\frac{1}{b^2}$$

და შეუღლებულ $\Delta$ და $\Delta'$ დიამეტრების $k$ და $k'$ კუთხური კოეფიციენტების შემაკავშირებელი განტოლება, ე. ი. § 230-ის (5) განტოლება, დაიყვანება შემდეგზე:

$$kk'=-\frac{b^2}{a^2}, \tag{2}$$

ანუ, თუ დავუშვებთ $k=\operatorname{tg}\varphi$, $k'=\operatorname{tg}\varphi'$, სადაც $\varphi$ და $\varphi'$ შეუღლებული დიამეტრებით შედგენილი კუთხეებია $Ox$ ღერძთან,

$$\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\varphi'=-\frac{b^2}{a^2}. \tag{2a}$$

დავუშვათ, რომ (ნახ. 159) $\Delta$ დიამეტრი გადის პირველ საკოორდინატო კუთხეში (და, მაშასადამე, მესამეშიც). მაშინ, შეგვიძლია მივიღოთ, რომ

$$0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2},\ \operatorname{tg}\varphi=k\geq 0.$$

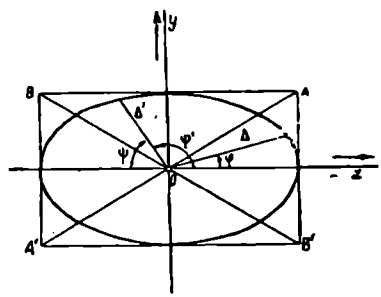
წინა ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ ამ შემთხვევაში

$$\operatorname{tg}\varphi'=k'\leq 0,$$

ე. ი. $\Delta$ დიამეტრის შეუღლებული დიამეტრი $\Delta'$ გადის მეორე და მეოთხე საკოორდინატო კუთხეებში და, მაშასადამე, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ

$$\frac{\pi}{2}\leq\varphi'\leq\pi.$$

როცა $\varphi = 0$, მაშინ, (2a) ფორმულის ძალით, $\operatorname{tg}\varphi' = \infty$ და $\varphi' = \frac{\pi}{2}$; როცა $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \infty$, მაშინ, იმავე ფორმულის ძალით, $\operatorname{tg}\varphi' = 0$. მაშასადამე, კოორდინატთა ღერძები წარმოადგენენ მთავარ დიამეტრებს, ე. ი. ელიფსის ღერძებს, როგორც ეს უკვე წინათაც ვნახეთ.



ნახ. 159.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ ჩვენ საქმე გვაქვს ელიფსთან ამ სიტყვის ნამდვილი მნიშვნელობით ($b < a$), და არა წრეხაზთან, მაშინ სხვა მთავარი დიამეტრები (ღერძები), გარდა ზემონაჩვენებისა, არ არსებობენ.

მართლაც, იმისათვის, რომ ორი შეუღლებული დიამეტრი ურთიერთ მართობი იყოს, საჭიროა

$$kk' = -1.$$

მაგრამ, მეორეს მხრით, (2) ფორმულის ძალით, $kk' = -\frac{b^2}{a^2}$, იმ პირობით, რომ $\frac{b^2}{a^2} < 1$. მაშასადამე, ასეთი შეუღლებული დიამეტრები არ შეიძლება არსებობდნენ, გარდა იმ შემთხვევისა, როცა $k$, $k'$ სიდიდეთაგან ერთ-ერთი ნულის ტოლია, ხოლო მეორე— უსასრულობისა, და $k \cdot k'$ ნამრავლისათვის განუზღვრელობას ვღებულობთ. ჩვენ ვნახეთ, რომ ამ უკანასკნელ შემთხვევაში ნამდვილად ვღებულობთ ურთიერთ მართობ შეუღლებულ დიამეტრებს.

ვნახოთ, როგორ იცვლება $\Delta'$ დიამეტრის მიმართულება, როცა დიამეტრი $\Delta$ ბრუნავს 0 წერტილის გარშემო, ისე რომ $\varphi$ იზრდება 0-დან $\frac{\pi}{2}$-მდე. მეტი გარკვეულობისათვის, დავუშვათ, რომ $\psi = \pi - \varphi'$. (2a) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\psi = \frac{b^2}{a^2};$$

მაშასადამე, $\operatorname{tg}\psi > \frac{b}{a}$, სანამ $\operatorname{tg}\varphi < \frac{b}{a}$; როცა $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$, მაშინ აგრეთვე $\operatorname{tg}\psi = \frac{b}{a}$ და, ბოლოს, $\operatorname{tg}\psi < \frac{b}{a}$, როცა $\operatorname{tg}\varphi > \frac{b}{a}$.

თუ $A'A$ და $B'B$ აღნიშნავენ იმ მართკუთხედის დიაგონალებს, რომლის შუა ხაზები[1]) ელიფსის ღერძებია $2a$, $2b$ (ცხადია, ეს მართკუთხედი შემოხაზულია ელიფსის გარშემო, რადგანაც ის ელიფსს წვეროებში ეხება) და თუ

[1]) ე. ი. მოპირდაპირე გვერდების შუა წერტილთა შემაერთებელი მონაკვეთები.

$\alpha$-თი აღნიშნულია ამ დიამეტრებით შედგენილი მახვილი კუთხე $Ox$ ღერძთან, მაშინ

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

წინა ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ როცა $\varphi < \alpha$, მაშინ $\psi > a$, ე. ი. სანამ $\Delta$ მოქცეულია $xOA$ (და მის ვერტიკალურ) კუთხეში, $\Delta'$ მოქცეულია $yOB$ (და მის ვერტიკალურ) კუთხეში. როცა $\Delta$ უახლოვდება $A'A$, მაშინ $\Delta'$ უახლოვდება $B'B$. როცა $\Delta$ გადადის $AOy$ კუთხეში, მაშინ $\Delta'$ გადადის $OB$ წრფესა და უარყოფით $Ox$ ღერძს შორის მოთავსებულ კუთხეში. $A'A$ და $B'B$ წრფეების გასწვრივ მიმართული დიამეტრები, ერთადერთი შეუღლებული დიამეტრებია, რომლებიც ელიფსის ღერძების სიმეტრიულად არიან დალაგებული.

წრეწირის შემთხვევაში ($b = a$) გვაქვს: $kk' = -1$; მაშასადამე, ამ შემთხვევაში ყველა შეუღლებული დიამეტრი ურთიერთ მართობია; მისი ყოველი დიამეტრი მთავარია, რაც, რა თქმა უნდა, უშუალოდაც ცხადია.

ბოლოს, შევნიშნოთ, რომ თუ შეუღლებულ დიამეტრთა ბოლოებიდან გავატარებთ ელიფსის მხებებს, მაშინ ეს წრფეები შეადგენენ ელიფსის გარშემო შემოხაზულ პარალელოგრამს. მართლაც, ერთი და იმავე დიამეტრის ბოლოებიდან გატარებული მხებები მეორე დიამეტრის პარალელურია (§ 231). ამ პარალელოგრამის შუა ხაზები (ე. ი. მოპირდაპირე გვერდების შუა წერტილთა შემაერთებელი წრფეები), ცხადია, აღებული შეუღლებული დიამეტრებია.

#### სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. დაამტკიცეთ, რომ თუ წრეხაზს თავისი ურთიერთ მართობი დიამეტრებიანად დავაგეგმილებთ სიბრტყეზე, მაშინ ამ დიამეტრების გეგმილები იქნება იმ ელიფსის შეუღლებული დიამეტრები, რომელიც მოცემული წრეხაზის გეგმილია.

დამტკიცება ემყარება იმას, რომ დაგეგმილების დროს წრეხაზის ურთიერთ პარალელური ქორდები გადადიან ელიფსის პარალელურ ქორდებად, და დასაგეგმილებელი ქორდების შუა წერტილები გეგმილში იძლევიან ქორდების შუა წერტილებს.

2. განიხილეთ ელიფსი, როგორც წრეწირის გეგმილი და დაამტკიცეთ, რომ მოცემული ელიფსის გარშემო შემოხაზული პარალელოგრამის ფართობი მუდმივი სიდიდეა [1]).

მ ი თ ი თ ე ბ ა. მოცემული ელიფსის გარშემო შემოხაზული პარალელოგრამი, ცხადია, წარმოადგენს დასაგეგმილებელი წრეწირის გარშემო შემოხაზული კვადრატის გეგმილს.

**§ 245. ჰიპერბოლის დიამეტრები.** განვიხილოთ ჰიპერბოლი

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

ამ შემთხვევაში

$$a_{11} = \frac{1}{a^2},$$

$$a_{12} = 0,$$

$$a_{22} = -\frac{1}{b^2}$$

[1]) ეს არის ეგრეთ წოდებული აპოლონიუსის მეორე თეორემა ელიფსისათვის (იხ. § 251).

და შეუღლებული დიამეტრების კუთხური კოეფიციენტები დაკავშირებულია ერთმანეთთან ფორმულით

$$kk' = \frac{b^2}{a^2}, \tag{2}$$

ანუ

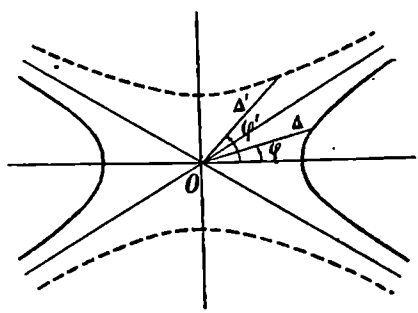
$$\operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi' = \frac{b^2}{a^2}. \tag{2a}$$

თუ $\operatorname{tg}\varphi > 0$, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. მაშინ (2a) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ $\operatorname{tg}\varphi' > 0$ და, მაშასადამე, შეგვიძლია ავრეთვე ვიგულისხმოთ, რომ $0 \leq \varphi' \leq \frac{\pi}{2}$.

როცა $\varphi = 0$, გვაქვს: $\operatorname{tg}\varphi = 0$ და, მაშასადამე, (2) ფორმულის ძალით, $\operatorname{tg}\varphi' = \infty$, ე. ი. $\varphi' = \frac{\pi}{2}$.

ამგვარად, $Ox$ და $Oy$ ღერძები წარმოადგენენ ჰიპერბოლის ურთიერთ მართობ, ე. ი. მთავარ დიამეტრებს (ღერძებს).

მაშასადამე, თუ $\Delta$ დიამეტრი გადის პირველ და მესამე საკოორდინატო კუთხეებში, მაშინ მისი შეუღლებული დიამეტრიც $\Delta'$ გადის იმავე კუთხეებში (ნახ. 160); საერთოდ ასევე, სიმეტრიულობის გამო, ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ დიამეტრი გადის მეორე და მეოთხე საკოორდინატო კუთხეებში, მაშინ მისი შეუღლებული დიამეტრიც გაივლის იმავე კუთხეებში. კერძოდ, ცხადია, რომ სიმეტრიის ღერძები წარმოადგენენ ერთადერთ ურთიერთ მართობ შეუღლებულ დიამეტრებს.



ნახ. 160.

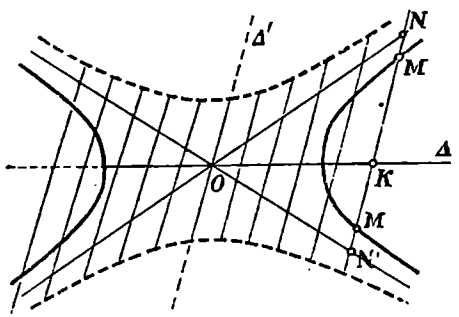
ვთქვათ, $\alpha$ აღნიშნავს ასიმპტოტებით შედგენილ მახვილ კუთხეს $Ox$ ღერძთან. ჩვენ ვიცით, რომ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b^2}{a^2}$. (2a) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ $\operatorname{tg}\varphi < \frac{b}{a}$, მაშინ $\operatorname{tg}\varphi' > \frac{b}{a}$, ე. ი. რომ, თუ $\varphi < \alpha$, მაშინ $\varphi' > \alpha$. მაშასადამე. შეუღლებული დიამეტრები ასიმპტოტების სხვადასხვა მხარეზე მდებარეობენ; თუ ერთი მათგანი ჰიპერბოლს კვეთს (ნახ. 160 დიამეტრი $\Delta$), მაშინ მეორე მას აღარ გადაკვეთს (ნახ. 160 დიამეტრი $\Delta'$), მაგრამ, სამაგიეროდ, გადაკვეთს შეუღლებულ ჰიპერბოლს

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{a^2}{b^2} = -1, \tag{1a}$$

რომელიც ნახაზზე გამოსახულია წყვეტილი ხაზით.

როცა $\Delta$ ასიმპტოტებს უახლოვდება, მაშინ $\Delta'$-იც უახლოვდება მას, ისე რომ ასიმპტოტი, როგორც უკვე ნათქვამი იყო (§ 230), შეიძლება განვიხილოთ, როგორც თვითშეუღლებული დიამეტრი.

(2) ფორმულის ძალით, რომელიც ერთი და იგივეა (1) და (1a) ჰიპერბოლისათვის, დაეასკვნით, რომ მოცემულ (1) ჰიპერბოლს და მის შეუღლებულ (1a) ჰიპერბოლს ერთი და იგივე დიამეტრები აქვთ და ერთი მათგანის შეუღლებული დიამეტრები, შეუღლებული იქნებიან მეორეს მიმართაც. მოცემული და მისი შეუღლებული ჰიპერბოლების ერთდროულ განხილვას ის უპირატესობა აქვს, რომ წრფეები, რომლებიც ერთ მათგანს წარმოსახვითს წერტილებში კვეთენ მეორეს ნამდვილ წერტილებში გაკვეთენ, და დიამეტრები შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც მოცემული ან შეუღლებული ჰიპერბოლების, ყოველთვის ნამდვილი პარალელური ქორდების შუა წერტილთა გეომეტრიული ადგილი. მაგალითად, $\Delta$ დიამეტრის ის ნაწილი, რომელიც (6) ნახაზზე გამოსახულია უწყვეტი ხაზით, (1a) ჰიპერბოლის $\Delta'$ დიამეტრის პარალელურ ნამდვილ ქორდებს შუაზე ჰყოფს. იმავე $\Delta$ დიამეტრის ის ნაწილი, რომელიც ნახაზზე გამოსახულია წყვეტილი ხაზით, ორივე ჰიპერბოლის ნამდვილ ქორდებს შუაზე ჰყოფს.



ნახ. 161.

ჩვენი ჰიპერბოლების ასიმპტოტთა ერთობლიობა არის (შლადი) მეორე რიგის წირი, მოცემული განტოლებით

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \qquad (3)$$

ამ წირის შეუღლებულ დიამეტრთა კუთხური კოეფიციენტები $k$ და $k'$ იმავე (2) ანუ (2a) ფორმულებით არის დაკავშირებული. მაშასადამე, (1), (1a), ან (3) წირთაგან ერთ-ერთის შეუღლებული დიამეტრები, შეუღლებული იქნება დანარჩენი ორისთვისაც.

აქედან ადვილი გამოსაყვანია შემდეგი მარტივი დებულება: გამკვეთის მონაკვეთები, ჰიპერბოლსა და ასიმპტოტებს შორის, ურთიერთთანატოლია.

მართლაც, ვთქვათ, $MM'$ მკვეთი (1) ჰიპერბოლს კვეთს $M$ და $M'$ წერტილებში (ნახ. 161). ვთქვათ, $K$ არის $MM'$ ქორდის შუა წერტილი, მაშინ $OK$ წარმოადგენს მკვეთის მიმართულების შეუღლებულ დიამეტრს. გარდა ამისა, ვთქვათ, $N$ და $N'$ მკვეთის გადაკვეთის წერტილებია ასიმპტოტებთან. ზემონათქვამის ძალით, დიამეტრი $OK$ შუაზე ჰყოფს (3) წირის $NN'$ ქორდასაც. მაშასადამე, ჩვენ ერთდროულად გვაქვს

$$KM = KM', \; KN = KN',$$

საიდანაც, თუ მათ ერთმანეთს გამოვაკლებთ, მივიღებთ: $MN = M'N'$, და ჩვენ სწორედ ეს უნდა დაგვემტკიცებინა.

თუ $A'A$, $B'B$ ორი შეუღლებული დიამეტრის ბოლო წერტილებიდან (იმ დიამეტრის ბოლო წერტილებად, რომელიც ჰიპერბოლს არ კვეთს, ვგულისხმობთ მისი გადაკვეთის $B$, $B'$ წერტილებს შეუღლებულ ჰიპერბოლთან) გავატარებთ მოცემული და შეუღლებული ჰიპერბოლების მხებებს, მივიღებთ პარალელოგრამს (ნახ. 162), რომლის შუა ხაზები აღებული დიამეტრებია (შეადარეთ წინა პარაგრაფის ბოლოს).

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ამ პარალელოგრამის დიაგონალები ასიმპტოტების გასწვრივ არის მიმართული. მართლაც, მივმართოთ დეკარტის არაგანზოგადებულ კოორდინატთა სისტემის $Ox'$ და $Oy'$ ღერძები ხსენებული შეუღლებული დიამეტრების გასწვრივ. მაშინ ჰიპერბოლის განტოლება მიიღებს სახეს (§ 234):

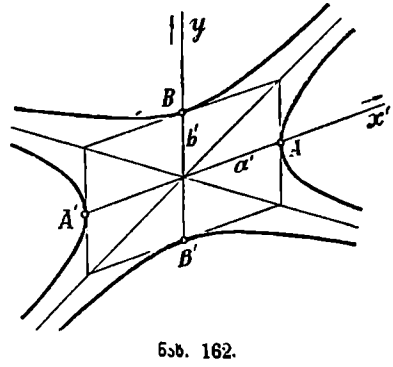
$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1,$$

სადაც, როგორც ადვილი დასანახია, $a'$ და $b'$, შესაბამისად, ნახევარდიამეტრთა სიგრძეები (მართლაც, თუ დავუშვებთ, მაგალითად, $y' = 0$, მივიღებთ $x' = \pm a'$).

ასიმპტოტთა ერთობლიობის განტოლებას იმავე კოორდინატებში, როგორც ადვილი დასანახია, ექნება შემდეგი სახე [1]):

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 0. \qquad (*)$$

გარდა ამისა, ცხადია, რომ ზემოხსენებული დიაგონალების კუთხური კოეფიციენტები, ახალ კოორდინატებში, უდრის $\pm \frac{b'}{a'}$; მაგრამ ამავე სიდიდეებს უდრის (*) ასიმპტოტების კუთხური კოეფიციენტებიც.



ნახ. 162.

სიმოკლისათვის, განხილულ პარალელოგრამს ჩვენ ვუწოდებთ მოცემული ჰიპერბოლის გარშემო შემოხაზულს.

ადვილი გამოსარკვევია, რომ მოცემულ ჰიპერბოლზე შემოხაზული პარალელოგრამის ფართობი მუდმივი სიდიდეა [2]). მართლაც, ეს ფართობი, ცხადია, უდრის იმ სამკუთხედის გაორკეცებულ ფართობს, რომელიც მოქცეულია მის

[1]) იხ. § 229-ის სავარჯიშო 1 (იქ, ისე როგორც აქ, კოორდინატები არ იგულისხმებოდა მართკუთხოვანი).

[2]) ეს ე. წ. აპოლონიუსის მეორე თეორემაა ჰიპერბოლისათვის (იხ. კიდევ § 251).

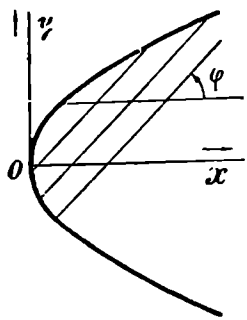
ერთ-ერთ გვერდსა და ასიმპტოტებს შორის. ეს უკანასკნელი კი, როგორც ნაჩვენები იყო § 242-ის ბოლოში, მუდმივი სიდიდეა.

ანალოგიური დებულება ელიფსისათვის ნაჩვენებია წინა პარაგრაფში (სავარჯიშო 2).

**§ 246. პარაბოლის დიამეტრები.** ავიღოთ პარაბოლის ნორმალური განტოლება

$$y^2 - 2px = 0. \tag{1}$$

$(X, Y)$ მიმართულებით შეუღლებული დიამეტრის განტოლება არის




ნახ. 163.

$$XF_1(x, y) + YF_2(x, y) = 0$$

ანუ, რადგანაც ჩვენს შემთხვევაში

$$F(x, y) = y^2 - 2px,$$

ამიტომ

$$-pX + yY = 0.$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\frac{Y}{X} = k$, წინა განტოლება შეგვიძლია ასეც გადავწეროთ:

$$y = \frac{p}{k}. \tag{2}$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ პარაბოლის ყველა დიამეტრი ერთმანეთის პარალელურია ($Ox$ ღერძის პარალელურია), როგორც ეს წინათაც ვიცოდით (ნახ. 163).

დიამეტრის მიერ იმ ქორდებთან შედგენილი $\varphi$ კუთხე, რომლებსაც ეს დიამეტრი შუაზე ყოფს, განისაზღვრება ფორმულით

$$\operatorname{tg} \varphi = k. \tag{3}$$

დიამეტრი იქნება მთავარი (ღერძი) მხოლოდ მაშინ, როცა $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ე. ი. როცა $k = \infty$. ამ შემთხვევაში (2) განტოლება გადაიქცევა $y = 0$ განტოლებად, ე. ი. $Ox$ ღერძის განტოლებად.

## თავი მეათე

## ინვარიანტები. მეორე რიგის წირის ფორმისა და მდებარეობის განსაზღვრა

ჩვენ უკვე ვიცით, თუ როგორ მარტივ სახეზე შეიძლება დავიყვანოთ მეორე რიგის წირის განტოლება მართკუთხოვან კოორდინატებში. ამ თავში ჩვენ შევეხებით ამ დაყვანის ფაქტიურად განხორციელების საკითხს და წირის ფორმისა და მდებარეობის უშუალო განსაზღვრას მისი განტოლების მიხედვით.

ამ საკითხების განხილვისას არსებით როლს ასრულებს ინვარიანტის ცნება.

### I. ინვარიანტები

**§ 247. განტოლებათა გარდაქმნა დეკარტის კოორდინატების შეცვლის დროს.** დავიწყოთ იმ საკითხის შესწავლით, თუ როგორ იცვლება მეორე რიგის წირის განტოლების მარცხენა მხარის

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} \qquad (1)$$

კოეფიციენტები, თუ დეკარტის კოორდინატთა მოცემულ $Oxy$ სისტემას შევცვლით სხვა $O'x'y'$ სისტემით.

ჩვენ ვიცით, რომ ასეთი შეცვლის დროს ერთი და იმავე წერტილის ძველი და ახალი კოორდინატები ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი წრფივი სახის დამოკიდებულებებით:

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y' + \alpha, \\ y &= m_1x' + m_2y' + \beta, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

სადაც $l_1$, $l_2$, $m_1$, $m_2$, $\alpha$, $\beta$ მუდმივები დამოკიდებულია ახალი სისტემის მდებარეობაზე ძველის მიმართ და საკოორდინატო ვექტორების ზომასა და მიმართულებაზე. სახელდობრ, $\alpha$, $\beta$ აღნიშნავენ $O'$ ახალი სათავის კოორდინატებს ძველი სისტემის მიმართ, $(l_1, m_1)$ და $(l_2, m_2)$ კი — $O'x'$, $O'y'$ ახალი ღერძების კოორდინატთა ვექტორების კოორდინატებს. კერძოდ, იმ შემთხვევაში, როცა ორივე სისტემა ერთი და იმავე კლასის (§ 69) მართკუთხოვანი სისტემაა, ისე რომ ახალი სისტემა მიღებულია ძველისაგან სათავის გადა-

ტანით (α, β) წერტილში და φ კუთხით მობრუნებით, (2) ფორმულები მიიღებენ სახეს:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi - y' \sin\varphi + \alpha, \\ y &= x' \sin\varphi + y' \cos\varphi + \beta. \end{aligned} \tag{3}$$

თუ (1) პოლინომში $x$, $y$-ის ნაცვლად ჩავსვამთ მათ გამოსახულებებს (2), მაშინ $F(x, y)$ გადაიქცევა ისევ მეორე რიგის პოლინომად $x'$, $y'$-ის მიმართ. ამ პოლინომს ჩვენ აღვნიშნავთ $F(x', y')$-ით, ხოლო მის კოეფიციენტებს შესაბამისად $a_{11}'$, $2a_{12}'$ და ა. შ., ისე რომ

$$F'(x', y') = a_{11}'x'^2 + 2a_{12}'x'y' + a_{22}'y'^2 + 2a_{13}'x' + 2a_{23}'y' + a_{33}'. \tag{4}$$

ცხადია, ახალი კოეფიციენტები $a_{11}', \dots, a_{33}'$ გარკვეული წესით იქნებიან დამოკიდებული ძველ $a_{11}, \dots, a_{33}$ კოეფიციენტებზე. ახალ კოეფიციენტთა ძველი კოეფიციენტებით გამოთვლის საკითხს, გამოთვლების გასამარტივებლად, ჩვენ ორ ნაწილად გავყოფთ; ჯერ ცალკე განვიხილავთ კოორდინატთა სათავის გადატანის შემთხვევას კოორდინატთა ვექტორების შეუცვლელად, შემდეგ კი კოორდინატთა ვექტორების შეცვლის შემთხვევას სათავის შეუცვლელად.

1°. სათავის გადატანა. ამ შემთხვევაში, თუ სათავე გადატანილია $O'(\alpha, \beta)$ წერტილში, ძველი კოორდინატები $(x, y)$ ახალ კოორდინატებთან დაკავშირებულია განტოლებებით

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta. \tag{5}$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი (1) პოლინომში და ვისარგებლოთ § 208-ის (11a) ფორმულით, მივიღებთ

$$\begin{aligned} F'(x', y') = a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \\ + 2F_1(\alpha', \beta)x' + 2F_2(\alpha, \beta)y' + F(\alpha, \beta). \end{aligned} \tag{6}$$

ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ შემდეგი მარტივი შედეგი, რომელიც საჭიროა დავიხსომოთ:

კოორდინატთა სათავის $(\alpha, \beta)$ წერტილში გადატანის დროს $F(x, y)$ პოლინომი შემდეგნაირად გარდაიქმნება: მეორე განზომილების წევრთა კოეფიციენტები უცვლელი დარჩება; კოეფიციენტები პირველი ხარისხის $x'$ და $y'$ ახალ ცვლადებთან, შესაბამისად, უდრის $F(x, y)$ პოლინომის $2F_1$ და $2F_2$ კერძო წარმოებულების მნიშვნელობებს $(\alpha, \beta)$ წერტილში; ბოლოს თავისუფალი წევრი უდრის $F'(x, y)$ პოლინომის მნიშვნელობას იმავე $(\alpha, \beta)$ წერტილში.

2. კოორდინატთა ვექტორების შეცვლა სათავის შეუცვლელად. ამ შემთხვევაში

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y', \\ y &= m_1x' + m_2y'. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

თუ ამ მნიშვნელობებს ჩაესვამთ $F(x, y)$ პოლინომში, მაშინ მივიღებთ $F'(x', y')$ პოლინომს. გარდაქმნის (7) ფორმულების ერთგვაროვნობის გამო, სავსებით ცხადია, რომ $F'(x', y')$ პოლინომში მეორე განზომილების წევრები წარმოიშობა მხოლოდ და მხოლოდ $F(x, y)$ პოლინომის მეორე განზომილების წევრებისაგან, პირველი განზომილების წევრები — პირველი განზომილების წევრებისაგან და ნულოვანი განზომილების წევრი (თავისუფალი წევრი) სრულებით არ შეიცვლება.

ამგვარად, გვექნება

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = a_{11}'x'^2 + 2a_{12}'x'y' + a_{22}'y'^2 \tag{8}$$

$$a_{13}x + a_{23}y = a_{13}'x' + a_{23}'y' \tag{9}$$

$$a_{33} = a_{33}'.$$

იმისათვის, რომ მივიღოთ ახალ კოეფიციენტთა გამოსახულება მეორე განზომილების წევრებთან, საკმარისია ვისარგებლოთ (8) ტოლობით, რომელიც იგივობად უნდა იქცეს, თუ მის მარცხენა მხარეში $x$, $y$-ის ნაცვლად (7) გამოსახულებას შევიტანთ. ეს მოგვცემს:

$$a_{11}(l_1x' + l_2y')^2 + 2a_{12}(l_1x' + l_2y')(m_1x' + m_2y') + a_{22}(m_1x' + m_2y')^2 = \\ = a_{11}'x'^2 + 2a_{12}'x'y' + a_{22}'y'^2.$$

გაეხსნათ ფრჩხილები მარცხენა მხარეში და გაეუტოლოთ ერთმანეთს ორივე მხარეში კოეფიციენტები $x'^2$, $x'y'$, $y'^2$ წევრების წინ, მივიღებთ

$$\left.\begin{aligned} a_{11}' &= a_{11}l_1^2 + a_{22}m_1^2 + 2a_{12}l_1m_1, \\ a_{22}' &= a_{11}l_2^2 + a_{22}m_2^2 + 2a_{12}l_2m_2, \\ a_{12}' &= a_{11}l_1l_2 + a_{22}m_1m_2 + a_{12}(l_1m_2 + l_2m_1). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

სრულებით ასევე მივიღებთ ახალ კოეფიციენტთა გამოსახულებებს პირველი განზომილების წევრებიდან (9) ფორმულის დახმარებით, რაც გვაძლევს:

$$a_{13}(l_1x' + l_2y') + a_{23}(m_1x' + m_2y') = a_{13}'x' + a_{23}'y',$$

საიდანაც (კოეფიციენტთა შედარებით)

$$\left.\begin{aligned} a_{13}' &= a_{13}l_1 + a_{23}m_1, \\ a_{23}' &= a_{13}l_1 + a_{23}m_1. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

ბოლოს გავიხსენოთ, რომ

$$a_{33}' = a_{33}.$$

მართკუთხა კოორდინატთა ღერძების მობრუნების შემთხვევაში, როცა გარდაქმნის ფორმულებს აქვთ სახე:

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \quad y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi,$$

ე. ი., როცა

$$l_1 = \cos\varphi, \quad m_1 = \sin\varphi, \quad l_2 = -\sin\varphi, \quad m_2 = \cos\varphi,$$

წინა ფორმულები მოგვცემენ

$$\left.\begin{aligned} a_{11}' &= a_{11}\cos^2\varphi + a_{22}\sin^2\varphi + 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi,\\ a_{22}' &= a_{11}\sin^2\varphi + a_{22}\cos^2\varphi - 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi,\\ a_{12}' &= -(a_{11}-a_{22})\sin\varphi\cos\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi). \end{aligned}\right\} \qquad (10a)$$

$$\left.\begin{aligned} a_{13}' &= a_{13}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi,\\ a_{23}' &= -a_{13}\sin\varphi + a_{23}\cos\varphi,\\ a_{33}' &= a_{33}. \end{aligned}\right\} \qquad (11a)$$

შემდეგში ჩვენ უმთავრესად საქმე გვექნება (10a) ფორმულებთან. ისინი შეიძლება ცოტა გავამარტივოთ. სახელდობრ, გავიხსენოთ, რომ

$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}, \quad \sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}, \quad \sin\varphi\cos\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2},$$

მივიღებთ საკმარისად მარტივ ფორმულებს

$$\left.\begin{aligned} a_{11}' &= \frac{a_{11}+a_{22}}{2} + \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\cos 2\varphi + a_{12}\sin 2\varphi,\\ a_{22}' &= \frac{a_{11}+a_{22}}{2} - \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\cos 2\varphi - a_{12}\sin 2\varphi,\\ a_{12}' &= -\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\sin 2\varphi + a_{12}\cos 2\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

ამ ფორმულების დახსომება საჭირო არ არის.

თუ ჩვენ გვაქვს კოორდინატთა ზოგადი სახის გარდაქმნა (სათავის გადატანა, საკოორდინატო ვექტორების შეცვლასთან ერთად), მაშინ ახალ კოეფიციენტთა მნიშვნელობები მიიღება წინა ფორმულებით, თუ მიმდევრობით ჩავატარებთ ჯერ სათავის გადატანას, ხოლო შემდეგ საკოორდინატო ვექტორების შეცვლას (ან შებრუნებული რიგით).

შემდეგისათვის საჭიროა შევნიშნოთ შემდეგი. აქამდე საკითხი შეეხებოდა $F(x, y)$ პოლინომის გარდაქმნას როცა ვცვლიდით კოორდინატთა სისტემას.

თუ საკითხი შეეხება მოცემული წირის განტოლებას $F(x, y)=0$, მაშინ იმავე წირის განტოლების მისაღებად ახალი $O'x'y'$ სისტემის მიმართ, $F(x, y)$ პოლინომში $x$, $y$ ცვალებადები უნდა შევცვალოთ მათი გამოსახულებებით $x'$, $y'$. მაგრამ, ამის შემდეგ, ჩვენ შეგვიძლია ასეთნაირად მიღებული განტოლება $F'(x', y') = 0$ გავამრავლოთ ნებისმიერ მუდმივ თანამამრავლზე $k$, რომელიც ნულს არ უდრის. მაშინ ახალი განტოლების კოეფიციენტები უკვე აღარ იქნებიან იგივე, რაც წინა ფორმულებით მიიღება, თუმცა მათგან მხოლოდ მუდმივი თანამამრავლით იქნებიან განსხვავებული (ნებისმიერი, მაგრამ ნულისაგან განსხვავებული თანამამრავლით).

როცა შემდეგში ლაპარაკი იქნება წირის განტოლების გარდაქმნაზე კოორდინატთა შეცვლის დროს, ჩვენ ყოველთვის ვიგულისხმებთ (თუ ამის

საწინააღმდეგო არ იქნება აღნიშნული), რომ გარდაქმნა ხდება მუდმივ თანამამრავლზე გამრავლების გარეშე, ე. ი., რომ საკითხი შეეხება $F(x, y)$ პოლინომის გარდაქმნას.

§ 248. **ინვარიანტის ცნება. მაგალითები.** ახლა გადავდივართ ერთ-ერთ მნიშვნელოვან საკითხზე, სახელდობრ, მეორე რიგის წირებთან დაკავშირებულ ინვარიანტების ცნებაზე.

ამ ცნების განმარტებას ჩვენ დავიწყებთ მაგალითით. სიმარტივისათვის, ვიგულისხმებთ, რომ კოორდინატები მართკუთხოვანია.

თუ (12) ფორმულების პირველ ორ ფორმულას შევკრებთ, მივიღებთ

$$a_{11}' + a_{22}' = a_{11} + a_{22}.$$

მაშასადამე, თუმცა კოორდინატთა ღერძების მობრუნებით $a_{11}$ და $a_{22}$ სიდიდეთაგან თითოეული ცალ-ცალკე იცვლება (გადაიქცევიან ახალ $a_{11}'$, $a_{22}'$ სიდიდეებად), მაგრამ მათი ჯამი უცვლელი რჩება. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ეს შედეგი სწორია სხვადასხვა კლასის სისტემების შემთხვევაშიც. გარდა ამისა, ჩვენ ვიცით, რომ $a_{11}$ და $a_{22}$ სიდიდეები უცვლელი რჩება სათავის გადატანის დროს. ამგვარად, კვადრატულ ცვალებადების კოეფიციენტთა ჯამი

$$S = a_{11} + a_{22} \tag{1}$$

უცვლელი რჩება მართკუთხოვანი კოორდინატების ნებისმიერი გარდაქმნის დროს. ეს იმას ნიშნავს, რომ $S$ არის $F(x, y)$ პოლინომის ინვარიანტი მართკუთხა კოორდინატების გარდაქმნის დროს.

საზოგადოდ, $F(x, y)$ პოლინომის კოეფიციენტთა ყოველ ფუნქციას

$$f(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33})$$

ეწოდება ინვარიანტი მართკუთხოვან კოორდინატთა გარდაქმნის დროს, თუ ამ ფუნქციის მნიშვნელობა უცვლელი რჩება მოცემულ მართკუთხა სისტემიდან ნებისმიერ სხვა მართკუთხა სისტემაზე გადასვლის დროს, ე. ი. თუ

$$f(a_{11}', \ldots, a_{33}') = f(a_{11}, \ldots, a_{33}).$$

ინვარიანტის ცნების ძირითადი მნიშვნელობა ცხადი გახდება, თუ შევნიშნავთ, რომ $f(a_{11}, \ldots, a_{33})$ სახის გამოსახულება მხოლოდ მაშინ შეიძლება წარმოადგენდეს გეომეტრიულ სიდიდეს, დამახასიათებელს თვით განხილული წირისათვის და არა დამოკიდებულს კოორდინატთა ღერძების შემთხვევით მდებარეობაზე, როცა ეს გამოსახულება ინვარიანტია. ამიტომაც $F(x, y)$ პოლინომის ინვარიანტთა მოძებნის საკითხი ერთ-ერთი ძირითადი საკითხია მეორე რიგის წირების თეორიაში.

ჩვენ, როგორც უკვე ნათქვამი იყო, ჯერჯერობით დავკმაყოფილდებით ინვარიანტების მოძებნით მართკუთხოვანი კოორდინატების გარდაქმნის მიმართ, ანუ, როგორც ამბობენ, ორთოგონალური ინვარიანტებით.

შემდეგში ინვარიანტებზე ლაპარაკის დროს, თუ ამის საწინააღმდეგო არ იქნება აღნიშნული, ჩვენ ვიგულისხმებთ ორთოგონალურ ინვარიანტებს.

მოვიყვანოთ ინვარიანტის კიდევ ერთი მაგალითი. § 247-ის (12) ფორმულები გვაძლევენ:

$$a_{11}' - a_{22}' = (a_{11} - a_{22}) \cos 2\varphi + 2a_{12} \sin 2\varphi,$$
$$2a_{12}' = -(a_{11} - a_{22}) \sin 2\varphi + 2a_{12} \cos 2\varphi.$$

თუ ამ ტოლობებს კვადრატში ავამაღლებთ და შევკრებთ, მივიღებთ:

$$(a_{11}' - a_{22}')^2 + 4a_{12}'^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2.$$

მაშასადამე, გამოსახულება

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \tag{2}$$

აგრეთვე ინვარიანტია (ეს შედეგი მართებულია სხვადასხვა კლასის სისტემების მიმართაც).

ის შეიძლება აგრეთვე გადაიწეროს ასე:

$$a_{11}^2 + a_{22}^2 - 2a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2 = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2).$$

ახლა აღვნიშნოთ შემდეგი გარემოება. თუ ჩვენ გვაქვს რამდენიმე ინვარიანტი $J_1, J_2, \ldots J_n$, მაშინ მათი ყოველი ფუნქცია $\Phi(J_1, J_2, \ldots, J_n)$ აგრეთვე ინვარიანტი იქნება. ეს სრულიად ცხადია, რადგანაც თუ $J_1, J_2, \ldots, J_n$ უცვლელი რჩებიან კოორდინატთა შეცვლის დროს, მაშინ $\Phi(J_1, J_2, \ldots, J_n)$-იც უცვლელი დარჩება.

ამგვარად, მაგალითად, $S^2 = (a_{11} + a_{22})^2$ ინვარიანტია, რადგანაც $S$ ინვარიანტია. გამოვაკლოთ $S^2$ ახლახან მოძებნილ ინვარიანტს $(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$, მივიღებთ ხელახლა ინვარიანტს $-4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$, ანუ, თუ ჩამოვაცილებთ მუდმივ თანამამრავლს $-4$, ინვარიანტს

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

შემდეგ პარაგრაფში მოყვანილი იქნება წინა გამოსახულების ინვარიანტობის სხვანაირი დამტკიცება.

§ 249. **მეორე რიგის წირების ძირითადი ინვარიანტები.** წინა პარაგრაფში მოძებნილი ინვარიანტები შეიძლება მიღებული იყოს კიდევ კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტის თვისებების გამოყენებით (იხ. დამატება § (1); ამავე გზით მოვძებნით კიდევ ერთ ინვარიანტს და, ამნაირად, მივიღებთ მეორე რიგის წირთან დაკავშირებულ, ყველა ძირითად ინვარიანტს.

ამისათვის განვიხილოთ კვადრატული ფორმა

$$\Phi(x, y, t) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{12}y^2 + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t^2, \tag{1}$$

რომელიც $F(x, y)$ პოლინომიდან მიიღება „ერთგვაროვნობამდე შევსებით“, და აგრეთვე კვადრატული ფორმა

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \tag{2}$$

რომელიც წარმოადგენს $F(x, y)$ პოლინომის მეორე განზომილების წევრთა ერთობლიობას.

დაეწეროთ, რომ (1) კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტი არის

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

და რომ (2) კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტი $A_{33}$ წარმოადგენს $a_{33}$ ელემენტის ალგებრულ დამატებას წინა დეტერმინანტში

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \tag{4}$$

ახლა გავიხსენოთ დებულება იმის შესახებ (იხ. დამატება § 11), რომ მოცემული კვადრატული ფორმიდან ცვლადთა წრფივი ერთგვაროვანი გარდაქმნით მიღებული ფორმის დისკრიმინანტი ტოლია მოცემული ფორმის დისკრიმინანტისა და ჩასმის დეტერმინანტის კვადრატის ნამრავლისა.

როცა $Oxy$ მართკუთხა ღერძების სისტემიდან გადავდივართ $O'x'y'$ მართკუთხა ღერძების სისტემაზე, მაშინ $x$, $y$ ცვლადები $F(x, y)$ პოლინომში გარდაიქმნება შემდეგი არაერთგვაროვანი ჩასმით [1])

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + \alpha, \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + \beta. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

იმისათვის, რომ საქმე გვქონდეს $\Phi(x, y, t)$ კვადრატული ფორმის $x$, $y$, $t$ ცვლადების წრფივ ერთგვაროვან ჩასმასთან, შევთანხმდეთ, რომ ეს უკანასკნელი დავუქვემდებაროთ შემდეგ ჩასმას:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + \alpha t', \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + \beta t', \\ t &= t'. \end{aligned}\right\} \tag{5a}$$

როცა $t = t' = 1$, მაშინ ეს ჩასმა გადაიქცევა (5) ჩასმად, ხოლო მოცემული და გარდაქმნილი ფორმები $\Phi(x, y, t)$ და $\Phi'(x', y', t')$ გადაიქცევიან მოცემულ $F(x, y)$ და გარდაქმნილ $F'(x', y')$ პოლინომებად.

---

[1]) წერის სიმოკლისათვის, ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ იმ შემთხვევას, როცა კოორდინატთა ღერძების სისტემები ერთი და იმავე კლასისაა. წინააღმდეგ შემთხვევაში (5) ფორმულების ნაცვლად გვექნება ფორმულები:

$$x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi + \alpha,$$
$$y = x'\sin\varphi - y'\cos\varphi + \beta;$$

ამ პარაგრაფში მოყვანილი ყველა შედეგი ამ შემთხვევაშიც მართებული დარჩება.

(5a) ჩასმის დეტერმინანტი უდრის

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi, & -\sin\varphi, & \alpha \\ \sin\varphi, & \cos\varphi, & \beta \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi, & -\sin\varphi \\ \sin\varphi, & \cos\varphi \end{vmatrix} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

ამიტომ $\Phi(x, y, t)$ კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტი $A$ კოორდინატების გარდაქმნის დროს უცვლელი დარჩება, ე. ი. გვექნება

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{21}' & a_{22}' & a_{23}' \\ a_{31}' & a_{32}' & a_{33}' \end{vmatrix}.$$

ამგვარად, დისკრიმინანტი $A$ ინვარიანტია.

ახლა გამოვიყენოთ იგივე თეორემა $\varphi(x, y)$ კვადრატული ფორმისათვის, როცა აღებულია წრფივი ჩასმა

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

რადგანაც ამ ჩასმის დეტერმინანტი უდრის 1, ამიტომ $\varphi(x, y)$ კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტი

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

უცვლელი რჩება კოორდინატთა ღერძების მობრუნების დროს. ვინაიდან, გარდა ამისა, სათავის გადატანა $F(x, y)$ პოლინომის $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{22}$ კოეფიციენტებს სრულებით არ ცვლის, ამიტომ $A_{33}$ უცვლელი რჩება მართკუთხა კოორდინატების ყოველგვარი გარდაქმნის დროს. ამგვარად, $A_{33}$-ის ინვარიანტობა ხელახლა დამტკიცებულია.

განვიხილოთ კვადრატული ფორმა [1])

$$\varphi(x, y) - \lambda(x^2 + y^2) = (a_{11} - \lambda)x^2 + 2a_{12}x'y' + (a_{22} - \lambda)y^2, \qquad (*)$$

სადაც $\lambda$ ნებისმიერი მუდმივია.

(6) ჩასმით ეს ფორმა გადადის შემდეგ ფორმაში

$$\varphi'(x'y') - \lambda(x'^2 + y'^2) = (a_{11}' - \lambda)x'^2 + 2a_{12}'x'y' + (a_{12}' - \lambda)y'^2, \qquad (**)$$

ვინაიდან (6) ჩასმის დროს ადგილი აქვს იგივურად ტოლობას

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2.$$

რადგან (*) და (**) ფორმების დისკრიმინანტები ურთიერთთანატოლი უნდა იყოს, ამიტომ

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda, & a_{12} \\ a_{21} & , a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}' - \lambda, & a_{12}' \\ a_{21}' & , a_{22}' - \lambda \end{vmatrix},$$

[1]) აქ ჩვენ კერძო შემთხვევისათვის ვიყენებთ ზოგად ხერხს, რომელიც ნაჩვენებია დამატებაში (§ 14).

ანუ, თუ დეტერმინანტებს გამოვთვლით, მივიღებთ

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = \lambda^2 - (a_{11}' + a_{22}')\lambda + (a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2).$$

ამ დამოკიდებულებას ადგილი უნდა ჰქონდეს ყოველი λ-სათვის, მაშასადამე, მარჯვენა და მარცხენა მხარეში λ-ს სხვადასხვა ხარისხებთან მდგომი კოეფიციენტები ერთი და იგივე უნდა იყოს. ეს გვაძლევს

$$a_{11} + a_{22} = a_{11}' + a_{22}', \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2.$$

მეორე ამ ტოლობათაგან გამოხატავს $A_{33}$-ის ინვარიანტობას, პირველი კი გვიჩვენებს, რომ

$$S = a_{11} + a_{22}$$

გარსახულებაც აგრეთვე ინვარიანტია, რომელიც წინა პარაგრაფში მიღებული იყო სხვა გზით.

ამგვარად, ჩვენ მივდივართ შემდეგ მნიშვნელოვან დასკვნამდე: გამოსახულებანი

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}, \quad S = a_{11} + a_{12} \tag{7}$$

არიან $F(x, y)$ პოლინომის ორთოგონალური ინვარიანტები.

$A$ და $A_{33}$ არიან, შესაბამისად, $\Phi(x, y, t)$ და $\varphi(x, y)$ ფორმების დისკრიმინანტები. სიმოკლისათვის, ჩვენ მათ ვუწოდებთ შესაბამისად $F(x, y)$ პოლინომის „დიდ“ და „პატარა“ დისკრიმინანტებს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. გავიხსენოთ, რომ ტოლობა $A = 0$ გამოსახავს აუცილებელ და საკმარის პირობას იმისა, რომ ჩვენი მეორე რიგის წირი შლადი იყოს.

ტოლობა $A_{33} = 0$ კი გამოსახავს აუცილებელ და საკმარის პირობას იმისა, რომ კვადრატული ფორმა $\varphi(x, y)$ სრული კვადრატი იყოს, ე. ი., რომ

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = \lambda(ax + by)^2;$$

იხ. დამატება § 12-ის დასაწყისში.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. გარდა (8) ინვარიანტებისა, შეიძლება შევადგინოთ სხვა ინვარიანტთა უსასრულო სიმრავლე: ყოველი ფუნქცია $A$, $A_{33}$, $S$ სიდიდეებისა აგრეთვე ინვარიანტი იქნება (იხ. წინა პარაგრაფი). საკითხი იმის შესახებ, იქნება თუ არა, პირიქით, ყოველი ინვარიანტი ნაჩვენები სამი სიდიდის ფუნქცია, განხილული იქნება ქვემოთ (§ 261).

აღვნიშნოთ, რომ, კერძოდ, კვადრატული განტოლების

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - S\lambda - A_{33} = 0$$

ფესვებიც $\lambda_1$ და $\lambda_2$ აგრეთვე ინვარიანტები იქნება, ვინაიდან ამ განტოლების კოეფიციენტები მართკუთხოვანი კოორდინატების შეცვლის დროს არ იცვლება. (7) ინვარიანტებისაგან განსხვავებით, $\lambda_1$ და $\lambda_2$ სიდიდეები ირაციონალური ინვარიანტებია (ე. ი. არ გამოისახებიან $F$ პოლინომის კოეფიციენტებით რაციონალურად). $S$ და $A_{33}$ ინვარიანტები არიან $\lambda_1$ და $\lambda_2$-ის ფუნქციები:

$$S=\lambda_1+\lambda_2,\quad A_{33}=\lambda_1\lambda_2.$$

ინვარიანტებს შეიძლება მივაკუთვნოთ აგრეთვე $A$ და $A_{33}$ დეტერმინანტების რანგებიც; $A$ დეტერმინანტის რანგი არა მარტო ორთოგონალური ინვარიანტია, არამედ გეგმილურიც, რადგანაც იგი ყოველი გეგმილური გარდაქმნის დროსაც უცვლელი რჩება (ე. ი. $x$, $y$, $z$, $t$ ცვალებადთა ყოველი წრფივი ერთგვაროვანი არაგანსაკუთრებული ჩასმის დროს; იხ. დამატება § 11).

**§ 250. მეტრიული ინვარიანტები დეკარტის განზოგადებულ კოორდინატთა შემთხვევაში.** მეორე რიგის წირის მეტრიული თვისებების [1]) გამომსახველი ფორმულები არ უნდა იყოს დამოკიდებული წირის მდებარეობაზე დეკარტის კოორდინატთა სისტემის მიმართ, მაგრამ ისინი, საზოგადოდ, დამოკიდებულია $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ საკოორდინატო ვექტორების სიგრძეებისაგან და მათ შორის მოთავსებულ $\nu$ კუთხისაგან (ე. ი. დამოკიდებულია სისტემის ფორმისა და ზომისაგან, მაგრამ დამოუკიდებელია მისი მდებარეობისაგან წირის მიმართ).

სისტემის ფორმა და ზომა სავსებით ხასიათდება კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებით (რომელსაც ჩვენ ძირითად მეტრიულ ფორმას ვუწოდებთ):

$$g_{11}X^2+2g_{12}XY+g_{22}Y^2, \tag{1}$$

რაც ნებისმიერ $\overrightarrow{P}(X,\ Y)$ ვექტორის სიგრძის კვადრატს გამოსახავს; აქ ჩვენ ვიყენებთ § 56-ის აღნიშვნებს. მართლაც, ჩვენ გვაქვს (§ 55):

$$g_{11}=|\overrightarrow{u}|^2,\ g_{22}=|\overrightarrow{v}|^2,\ g_{12}=|\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}|\cos\nu, \tag{2}$$

რაც საშუალებით განსაზღვრავს $|\overrightarrow{u}|$, $|\overrightarrow{v}|$ და $\nu$-ს ($0<\nu<\pi$) როცა მოცემულია [2]) $g_{11}$, $g_{22}$ და $g_{12}$.

ამის შესაბამისად $F(x,\ y)$ პოლინომის მეტრიული ინვარიანტების ქვეშ ჩვენ გვესმის $F(x,\ y)$ პოლინომის და (1) ძირითადი მეტრიული ფორმის კოეფიციენტებისაგან დამოკიდებული ისეთი

$$f(a_{11},\ a_{12},\ a_{22},\ a_{13},\ a_{23},\ a_{33},\ g_{11},\ g_{12},\ g_{22}),$$

ფუნქცია, რომელიც უცვლელი რჩება დეკარტის მოცემული სისტემის სხვა ნებისმიერი სისტემით შეცვლის დროს.

ჩვენ მოვძებნით მეტრიულ ინვარიანტებს, რომლებიც ანზოგადებენ $A$, $A_{33}$, $S$ ორთოგონალურ ინვარიანტებს და რომლებიც გვაძლევენ ამ უკანასკნელთ მართკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაში (ე. ი. როცა $g_{11}=g_{22}=1$, $g_{12}=0$).

ამ მიზნით შევნიშნოთ შემდეგი. ჩასმით [შეადარეთ წინა პარაგრაფის (5a) ფორმულებს]

$$x=l_1x'+l_2y'+\alpha l,\ y=m_1x'+m_2y'+\beta l'+l=l' \tag{3}$$

$\Phi(x,\ y,\ 1)$ ფორმაში; ამ ფორმების დისკრიმინანტების $A$ და $A'$ ერთმანეთთან დაკავშირებულია დამოკიდებულებით

$$A'=A\cdot\Delta^2, \tag{4}$$

[1]) მხედველობაში გვაქვს მეტრიული თვისებები ვიწრო მნიშვნელობით (§ 78).

[2]) $g_{11}$, $g_{12}$, $g_{22}$ ყოველთვის ისე უნდა იყოს მოცემული, რომ (1) ფორმა დადებითი იყოს. იხ. § 67,2°.

სადაც

$$\Delta=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & \alpha \\ m_1 & m_2 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

ვექტორის კოორდინატებისათვის (3)-ს შეესაბამება შემდეგი ჩასმა:

$$X=l_1X'+l_2Y',$$
$$Y=m_1X'+m_2Y'; \tag{3a}$$

ამ ჩასმით (1) ფორმა იქცევა ფორმად

$$g_{11}'X'^2+2g_{12}'X'Y'+g_{22}'Y'^2. \tag{1'}$$

(1) ფორმის დისკრიმინანტი

$$G=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \tag{6}$$

(1) ფორმის $G'$ დისკრიმინანტთან დაკავშირებულია ფორმულით

$$G'=G\Delta^2, \tag{7}$$

სადაც, როგორც ეს (3) ფორმულიდან ჩანს, $\Delta$ იგივე დეტერმინანტია, რაც (4) ფორმულაში.

(4) და (7)-დან გამომდინარეობს

$$\frac{A'}{G'}=\frac{A}{G},$$

ე. ი. $\frac{A}{G}$ მეტრიული ინვარიანტია.

სრულებით ასევე დავამტკიცებთ, რომ, $\frac{A_{22}}{G}$, სადაც $A_{22}$ წინანდებურად.

$$\varphi(x,\ y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$$

ფორმის დისკრიმინანტია, ინვარიანტია ისეთი გარდაქმნის მიმართ, რომელიც კოორდინატთა სათავეს უცვლელად ტოვებს.

ბოლოს, განვიხილოთ ფორმა

$$\varphi(x,\ y)-\lambda(g_{11}x^2+2g_{12}xy+g_{22}y^2)=$$
$$=(a_{11}-\lambda g_{11})x^2+2(a_{12}-\lambda g_{12})xy+(a_{22}-\lambda g_{22})y^2.$$

ზემონათქვამის ძალით, ამ ფორმის დისკრიმინანტის ფარდობა $G$-სთან, ე. ი. ფარდობა

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda g_{11} & a_{12}-\lambda g_{12} \\ a_{21}-\lambda g_{21} & a_{22}-\lambda g_{22} \end{vmatrix}:G$$

არის ინვარიანტი კოორდინატთა ისეთი გარდაქმნის მიმართ, რომელიც სათავეს არ ცვლის. თუ დეტერმინანტს დავშლით, ცხადია, გამარტივებათა შემდეგ, მივიღებთ, რომ ეს ფარდობა უდრის

$$\lambda^2-\lambda\frac{a_{11}g_{22}+a_{22}g_{11}-2a_{12}g_{12}}{G}+\frac{A_{22}}{G}.$$

ვინაიდან უკანასკნელი გამოსახულება ინვარიანტია ყოველი $\lambda$-სათვის, ამიტომ ყველა კოეფიციენტი $\lambda$ სხვადასხვა ხარისხთან ინვარიანტია. თავისუფალი წევრი და კოეფიციენტი

$\lambda^2$-ის წინ ახალს არაფერს იძლევიან. გვრჩება კიდევ ერთი ახალი ინვარიანტი

$$\frac{(a_{11}g_{22}+a_{22}g_{11}-2a_{12}g_{12})}{G}.$$

ამგვარად, ჩვენ გვაქვს სამი ინვარიანტი

$$A^*=\frac{A}{G},\quad A^*_{33}=\frac{A_{33}}{G},\quad S^*=\frac{a_{11}g_{22}+a_{22}g_{11}-2a_{12}g_{12}}{G}. \tag{6}$$

უკანასკნელი ორი გამოსახულების ინვარიანტობა უკვე დამტკიცებულია მხოლოდ იმ პირობით, რომ სათავე უცვლელი რჩება; მაგრამ, ცხადია, სათავის გადატანა გაელენას არ ახდენს $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{22}$ და $A_{33}$ სიდიდეებზე; რაც შეეხება $g_{11}$, $g_{12}$, $g_{22}$ სიდიდეებს, მათი გარდაქმნის დროს ჩვენ ვიყენებთ ვექტორის კოორდინატების გარდაქმნის (3ა) ფორმულებს, სადაც სათავის მდებარეობას არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს.

დეკარტის არაგანზოგადებული (ირიბკუთხა) სისტემის შემთხვევაში

$$g_{11}=1,\ g_{12}=\cos\nu,\ g_{22}=1,$$

$$G=\begin{vmatrix}1 & \cos\nu\\ \cos\nu & 1\end{vmatrix}=\sin^2\nu,$$

და (8) ინვარიანტები მიიღებენ სახეს

$$A^*=\frac{A}{\sin^2\nu},\quad A^*_{33}=\frac{A_{33}}{\sin^2\nu},\quad S^*=\frac{a_{11}+a_{22}-2a_{12}\cos\nu}{\sin^2\nu} \tag{9}$$

როცა $\nu=\frac{\pi}{2}$, ეს ინვარიანტები გადაიქცევიან ორთოგონალურ $A$, $A_{33}$, $S$ ინვარიანტებად.

**§ 251. გამოყენება: აპოლონიუსის თეორემები.** ვთქვათ, მოცემულია ელიფსის განტოლება მართკუთხოვან $Oxy$ კოორდინატებში

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0. \tag{1}$$

არაგანზოგადებული სისტემის ახალ ღერძებად ავიღოთ ორი რომელიმე შეუღლებული დიამეტრი, მივიღებთ შემდეგი სახის განტოლებას

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}-1=0, \tag{1'}$$

რომელიც იმავე წირს გამოსახავს. (1) ტოლობის მარცხენა მხარის პოლინომი მიიღება (1') ტოლობის მარცხენა მხარის პოლინომისაგან კოორდინატების შემდეგი სახის შეცვლით: $x=l_1x'+l_2y'$, $y=m_1x'+m_2y'$, შედეგის მუდმივ მამრავლზე გამრავლების გარეშე; ეს იქიდან გამომდინარეობს, რომ ამ პოლინომების თავისუფალი წევრები ერთი და იგივეა. თუ ამ პოლინომებისთვის

$$S^*=\frac{a_{11}+a_{22}-2a_{12}\cos\nu}{\sin^2\nu},\quad A^*_{33}=\frac{A_{33}}{\sin^2\nu}$$

ინვარიანტებს შევადგენთ, ჩვენ მივიღებთ ორ მნიშვნელოვან დამოკიდებულებას, რომლებიც $a$, $b$ ნახევარღერძების სიგრძეებს აკავშირებენ შეუღლებული ნახევარდიამეტრების[1]) $a'$, $b'$ სიგრძეებთან და ამ უკანასკნელთა შორის მოთავსებულ $\nu$ კუთხესთან.

[1]) რომ $a'$, $b'$ იქნებიან $Ox'$ და $Oy'$ ღერძების გასწვრივ მიმართული ნახევარდიამეტრების სიგრძეები ცხადია: თუ (1') ტოლობაში დავუშვებთ $y=0$, მივიღებთ $x'=\pm a$; ანალოგიურად $b'$-სთვისაც.

მართლაც, $Ox$, $Oy$ სისტემისათვის გვაქვს

$$a_{11}=\frac{1}{a^2},\quad a_{22}=\frac{1}{b^2},\ a_{12}=0,\quad \nu=\frac{\pi}{2},$$

და, მაშასადამე,

$$S^*=S=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2},\quad A^*_{33}=A_{33}=\frac{1}{a^2b^2}.$$

ანალოგიურად $Ox'$, $Oy'$ ღერძებისთვის გვექნება

$$S^*=\left(\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}\right)\frac{1}{\sin^2\nu},\quad A^*_{33}=\frac{1}{a'^2b'^2\sin^2\nu}.$$

გაეუტოლოთ ერთმანეთს მარჯვენა მხარეები, მივიღებთ

$$a'^2b'^2\sin^2\nu=a^2b^2,$$
$$\frac{a'^2+b'^2}{a'^2b'^2\sin^2\nu}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}.$$

უკანასკნელი დამოკიდებულებები მოგვცემს:

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2,$$

და, ამნაირად, ჩვენ გვაქვს შემდეგი დამოკიდებულებანი:

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2;\ a'b'\sin\nu=ab. \tag{2}$$

ეს ფორმულები გვაძლევენ აპოლონიუსის შემდეგ ორ თეორემას:

1. ელიფსის შეუღლებული ნახევარდიამეტრების კვადრატების ჯამი მუდმივი სიდიდეა (ტოლია ნახევარღერძების კვადრატების ჯამისა).

2. ელიფსის შეუღლებულ ნახევარდიამეტრებზე აგებული პარალელოგრამის ფართი, მუდმივი სიდიდეა (ტოლია ნახევარღერძებზე აგებული მართკუთხედის ფართისა).

ანალოგიური თეორემები გვაქვს ჰიპერბოლისთვის. სახელდობრ, ზემომოყვანილის სრულებით მსგავსი გზით, მივიღებთ ფორმულებს

$$a'^2-b'^2=a^2-b^2;\ a'b'\sin\nu=ab. \tag{3}$$

ამგვარად, აპოლონიუსის მეორე თეორემა ჰიპერბოლისთვის ჩამოყალიბდება სრულებით ისე, როგორც ელიფსის შემთხვევაში. პირველი თეორემა კი შეიცვლება ასე:

ჰიპერბოლის შეუღლებულ ნახევარდიამეტრთა კვადრატების სხვაობა მუდმივი სიდიდეა (ტოლია ნახევარღერძების კვადრატების სხვაობისა).

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. აპოლონიუსის მეორე თეორემა ელიფსისათვის არსებითად იგივეა, რაც § 244-ის 2 სავარჯიშოში ნაჩვენები დებულება.

ხოლო ჰიპერბოლისთვის აპოლონიუსის მეორე თეორემა არსებითად ეგივეა, რაც § 245-ის ბოლოში დამტკიცებული დებულება.

## II. მეორე რიგის წირის განტოლების გამარტივება

**§ 252. გარდაქმნა ცენტრის მიმართ.** თუ მეორე რიგის წირს (საკუთრივი) ცენტრი აქვს (ერთი ან უსასრულო სიმრავლე), მაშინ მისი განტოლება შეიძლება გავამარტივოთ კოორდინატთა სათავის გადატანით ცენტრში (ან ერთ-ერთ ცენტრთაგანში). სახელდობრ, § 228-დან ჩვენ ვიცით, რომ წირის განტოლება ღერ-

ძების ახალი სისტემის მიმართ (სათავით ცენტრში) პირველი ხარისხის წევრებს არ შეიცავს და, მაშასადამე, მისი განტოლება ღებულობს სახეს

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a_{33}' = 0, \tag{1}$$

სადაც $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{22}$-ს იგივე მნიშვნელობანი აქვთ, რაც მოცემულ განტოლებაში, ხოლო $a_{33}' = F(\alpha, \beta)$ (იხ. § 247).

$a_{33}'$ კოეფიციენტი ცენტრალური წირის შემთხვევაში (ერთი გარკვეული ცენტრის მქონე წირისათვის), ე. ი. როცა

$$A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0, \tag{2}$$

ადვილად შეიძლება გამოვსახოთ, მოცემული განტოლების კოეფიციენტებით.

მართლაც, ჩვენ ვიცით, რომ მოცემული განტოლების მარცხენა მხარის კოეფიციენტებით შედგენილი დეტერმინანტი:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ინვარიანტია, ე. ი. ის უდრის (1) განტოლების მარცხენა მხარის კოეფიციენტებისაგან შედგენილ ანალოგიურ დეტერმინანტს. მაგრამ ეს მარცხენა მხარე მოცემული განტოლების მარცხენა მხარისაგან განსხვავდება იმით, რომ (1) განტოლების მარცხენა მხარეში $a_{13}$ და $a_{23}$ შეცვლილია ნულებით, ხოლო $a_{33}$ — სიდიდით $a_{33}'$, მაშასადამე,

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}' \end{vmatrix} = a_{33}' A_{33},$$

საიდანაც

$$a_{33}' = \frac{A}{A_{33}}. \tag{3}$$

ამგვარად, თუ

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

განტოლებით მოცემულ წირს გარკვეული ცენტრი აქვს (ე. ი. $A_{33} \neq 0$), მაშინ იმავე წირის განტოლებას, კოორდინატთა სათავის ცენტრში გადატანის შემდეგ, ექნება სახე

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0. \tag{4}$$

დამტკიცების დროს ჩვენ ვისარგებლეთ $A$ და $A_{33}$ სიდიდეების ინვარიანტობით მართკუთხა კოორდინატების გარდაქმნის დროს; თუმცა ადვილი სანახავია, რომ ეს შედეგი ძალაშია ზოგადი სახის დეკარტის კოორდინატთა შემთხვევაშიც.

ამისათვის საკმარისია წინა დამტკიცებაში $A$-ს ნაცვლად ვიხმაროთ ინვარიანტი $A^* = \frac{A}{G}$; მაშინ $A = a_{31}' A_{33}$ ტოლობის ნაცვლად მივიღებთ

$$\frac{A}{G} = a_{33}', \quad \frac{A_{33}}{G},$$

საიდანაც ხელახლა გამომდინარეობს (3) ფორმულა.

(3) ფორმულის მართებულება შეიძლება დავამტკიცოთ უშუალოდაც, ისე რომ არ ვისარგებლოთ $\frac{A}{G}$ სიდიდის (ან მართკუთხა კოორდინატების შემთხვევაში $A$ სიდიდის) ინვარიანტობით.

მართლაც, $a_{33}' = F(\alpha, \beta)$. ახლა შემოვიღოთ $F(x, y)$-ის ნაცვლად კვადრატული ფორმა $\Phi(x, y, t)$, რომელიც, როცა $t = 1$, გადაიქცევა $F(x, y)$-ად. ჩავსვათ იგივეობაში

$$x\Phi_1 + y\Phi_2 + t\Phi_3 = \Phi(x, y, t)$$

$x$, $y$, $t$-ს ნაცვლად $\alpha$, $\beta$, 1, სადაც $\alpha$, $\beta$ ცენტრის კოორდინატებია, და შევნიშნოთ, რომ

$$\Phi_1(\alpha, \beta, 1) = \Phi_2(\alpha, \beta, 1) = 0,$$

ვიღებთ

$$\Phi(\alpha, \beta, 1) = F(\alpha, \beta) = \Phi_3(\alpha, \beta, 1) = a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}.$$

მაგრამ, ჩვენ გვაქვს [1])

$$\alpha = \frac{A_{31}}{A_{33}}, \quad \beta = \frac{A_{32}}{A_{33}}, \tag{5}$$

და, მაშასადამე,

$$a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33} = \frac{A_{31}a_{31} + A_{32}a_{32} + A_{33}a_{33}}{A_{33}} = \frac{A}{A_{33}},$$

საიდანაც გამომდინარეობს საძიებელი შედეგი:

$$F(\alpha, \beta) = \frac{A}{A_{33}}.$$

### სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. მოვძებნოთ

$$x'^2 + 2y'^2 - 4y = 0$$

წირის ცენტრი და გარდავქმნათ ეს განტოლება ცენტრის მიმართ.

პასუხი. ცენტრი (0, 1) წერტილშია. ცენტრის მიმართ გარდაქმნილ განტოლებას აქვს სახე:

$$x'^2 + 2y'^2 - 2 = 0.$$

---

[1]) ამ ფორმულებს მივიღებთ, თუ ჩვენ ამოვხსნით $a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13} = 0$, $a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23} = 0$ განტოლებებს, რომლებიც ცენტრის მდებარეობას განსაზღვრავენ.

2. იგულისხმეთ (6) ფორმულაში $A_{33}$-ის ინვარიანტობა დამტკიცებულად და ამ ფორმულიდან დაამტკიცეთ $A$ დისკრიმინანტის ინვარიანტობა (მართკუთხა კოორდინატებში).

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვიგულისხმოთ პირველად, რომ $A_{33} \neq 0$, თუ ღერძების მოცემული სისტემის ნაცვლად ავიღებთ ახალ სისტემას, მაშინ $F(x, y)$ პოლინომი გარდაიქმნება $F'(x', y')$ პოლინომად, ისე რომ $F'(x', y') = F(x, y)$, თუ $x$, $y$ და $x'$, $y'$ აღნიშნავს ერთი და იმავე წერტილის კოორდინატებს სხვადასხვა სისტემის მიმართ. კერძოდ, $F'(\alpha', \beta') = F(\alpha, \beta)$, სადაც $\alpha$, $\beta$ და $\alpha'$, $\beta'$ ცენტრის კოორდინატებია ძველი და ახალი სისტემის მიმართ.

მაშასადამე, (6) ფორმულის ძალით,

$$\frac{A'}{A_{33}'} = \frac{A}{A_{33}},$$

სადაც $A'$ და $A_{33}'$ აღნიშნავენ $F(x', y')$ გამოსახულების კოეფიციენტებისგან შედგენილ დეტერმინანტებს ისევე, როგორც $A$ და $A_{33}$ აღნიშნავენ $F(x, y)$ გამოსახულების კოეფიციენტებისგან შედგენილ დეტერმინანტებს. ამგვარად, ფარდობა $\frac{A}{A'}$ ინვარიანტია.

მართკუთხა კოორდინატების შემთხვევაში, როგორც ვიცით, $A_{33}$ სიდიდე ინვარიანტია, მაშასადამე, ინვარიანტი იქნება $A_{33}\frac{A}{A_{33}} = A$ გამოსახულებაც.

ამგვარად, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ მართკუთხა კოორდინატების გარდაქმნის დროს $A$ წარმოადგენს ინვარიანტს. დამტკიცების დროს ვგულისხმობდით, რომ $A_{33} \neq 0$; თუმცა ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ამ შეზღუდვას მნიშვნელობა არა აქვს.

მართლაც, ვთქვათ, $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$. შევცვალოთ $a_{12}$ სიდიდით $a_{12} + \varepsilon$, სადაც $\varepsilon \neq 0$ ნებისმიერად მცირე სიდიდეა, დანარჩენი კოეფიციენტები კი დავტოვოთ უცვლელად. მაშინ, ცხადია, რომ გვექნება $A_{33} \neq 0$, და, მაშასადამე, დამტკიცებულის თანახმად, $A' = A$. ამ ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა მხარეში ჩვენ გვაქვს შესაბამისად $a_{11}', \ldots, a_{33}'$ და $a_{11}, \ldots a_{33}$. კოეფიციენტების უწყვეტი ფუნქციები (პოლინომები); მაშასადამე, $A' = A$ ტოლობა მართებული დარჩება მაშინაც, როცა გადავალთ ხღვარზე $\lim \varepsilon = 0$, აქედან კი გამომდინარეობს ჩვენი დებულება.

**§ 253. ორი ცვლადის კვადრატული ფორმის დაყვანა კანონიკურ სახეზე ორთოგონალური ჩასმით.** ჩვენ ვნახეთ, რომ კოორდინატთა სათავის გადატანით ცენტრში (თუ ასეთი არსებობს) პირველი ხარისხის წევრები $F(x, y)$ პოლინომში შეიძლება მოვსპოთ.

ვიგულისხმოთ, რომ კოორდინატები მართკუთხოვანია და გამოვარკვიოთ ახლა რა გამარტივებას შეიძლება მივაღწიოთ ღ ე რ ძ ე ბ ი ს მ ო ბ რ უ ნ ე ბ ი თ.

განვიხილოთ განტოლება

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = C, \qquad (*)$$

სადაც $C$—მუდმივია. ეს განტოლება წარმოადგენს ისეთი მეორე რიგის წირს, რომელსაც აქვს ცენტრი ან ცენტრთა წრფე; მართლაც, ვინაიდან მასში პირველი ხარისხის წევრები არ შედის, ამიტომ კოორდინატთა სათავე წარმოადგენს წირის ცენტრს.

ვიგულისხმოთ ჯერ, რომ ცენტრი ერთადერთია ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$). თუ ღერძების სისტემას მოვაბრუნებთ ისე, რომ ერთი მათგანი ერთ-ერთ მთავარ დიამეტრს დაემთხვეს, მაშინ მეორე ღერძიც დაემთხვევა მეორე მთავარ დიამეტრს და ჩვენ მივიღებთ ისეთ ახალ განტოლებას, რომელშიც $xy$ ნამრავლის შემცველი წევრი არ გვექნება.

იმ შემთხვევაში, როცა (*) წირს აქვს ცენტრთა წრფე, ე. ი. როცა წირი წარმოადგენს პარალელურ წრფეთა წყვილს, მაშინაც ჩვენ მივიღებთ იმავე შედეგს, თუ ერთ-ერთ ღერძს მივმართავთ (ერთადერთი) დიამეტრის გასწვრივ. ამ (წრფეთა წყვილის) შემთხვევაში მთავარ დიამეტრს ჩვენ პირობით ვუწოდებთ ისეთ (ნებისმიერ) წრფესაც, რომელიც მართობია დიამეტრისა ამ სიტყვის საკუთარი მნიშვნელობით.

ამგვარად. ყველა შემთხვევაში, თუ კოორდინატთა ღერძებს, მივმართავთ მთავარი დიამეტრების გასწვრივ, (*) განტოლებაში $x$, $y$-ის შემცველი წევრი მოისპობა.

ამას ახლა დავამტკიცებთ უშუალოდ. სახელდობრ, დავამტკიცებთ შემდეგ ალგებრულ თეორემას:

მართკუთხოვან კოორდინატთა ღერძების სათანადო მობრუნებით ორი $x$ და $y$ ცვლადის ყოველი კვადრატული ფორმა

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \tag{1}$$

შეიძლება დავიყვანოთ კანონიკურ სახეზე:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_1 y'^2, \tag{2}$$

ე. ი. ისეთ კვადრატულ ფორმაზე, რომელიც შეიცავს მხოლოდ ცვლადების კვადრატებს; $\lambda_1$ და $\lambda_2$ სიდიდეები აღნიშნავენ მუდმივებს, რომლებიც წარმოადგენენ ფესვებს შემდეგი კვადრატული განტოლებისა:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - S\lambda + \Delta_{33} = 0. \tag{3}$$

თუ $a_{11}$, $a_{21}$, $a_{22}$ ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ $\lambda_1$ და $\lambda_2$ ფესვებიც ნამდვილია.

ეს თეორემა წარმოადგენს კერძო შემთხვევას ძალიან მნიშვნელოვანი ალგებრული თეორემისა ორთოგონალური ჩასმით ნებისმიერი კვადრატული ფორმის კვადრატების ჯამზე დაყვანის შესახებ [1]).

ჩვენ ვნახეთ (§ 247). რომ თუ ახალი $Ox'$ ღერძი ძველ $Ox$ ღერძთან $\varphi$ კუთხეს ადგენს, მაშინ (1) ფორმა გარდაიქმნება შემდეგნაირად:

$$a_{11}'x'^2 + 2a_{12}'x'y' + a_{22}'y'^2, \tag{1a}$$

სადაც, კერძოდ,

$$a_{12}' = -\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\sin 2\varphi + a_{12}\cos 2\varphi.$$

თუ $\varphi$ კუთხეს შევარჩევთ ისე, რომ $a_{12}' = 0$, ე. ი. თუ დავუშვებთ, რომ

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}, \tag{4}$$

[1]) ზოგადი დებულება იხ. დამატებაში, § 15.

მივიღებთ საძიებელი (2) სახის ფორმას, სადაც

$$\lambda_1 = a_{11}', \quad \lambda_2 = a_{22}';$$

$\lambda_1$ და $\lambda_2$ სიდიდეები შეიძლება გამოითვალოს § 247-ის (12) ფორმულით, სადაც φ-ს ნაცვლად (4) ფორმულით განსაზღვრული მნიშვნელობა უნდა ჩაისვას.

(4) განტოლების მარჯვენა მხარე განუზღვრელი შეიძლება იყოს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $a_{12} = 0$, $a_{11} = a_{22}$. ამ შემთხვევაში (1) ფორმას თავიდანვე ექნება სახე:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 = \lambda(x^2 + y^2),$$

სადაც $\lambda = a_{11} = a_{22}$, და ინარჩუნებს ამავე სახეს ყოველგვარი φ-სთვის.

ყველა დანარჩენ შემთხვევაში (4) განტოლება განსაზღვრავს $Ox'$ ღერძის ოთხ შესაძლო მიმართულებას, რომლებიც მდებარეობენ ორ ურთიერთმართობ წრფეზე. მართლაც, თუ φ ერთ-ერთი იმ კუთხეთაგანია [მაგ., მახვილი კუთხეა][1]), რომელიც (4) პირობას აკმაყოფილებს, მაშინ სხვა შესაძლო კუთხეები იქნება: $\varphi + \frac{\pi}{2}$, $\varphi + \pi$, $\varphi + \frac{3\pi}{2}$ და ყველა ის კუთხე, რომელიც ამათგან $2\pi$ ჯერადით განსხვავდება.

თუ φ კუთხედ ამ ოთხიდან რომელიმე მათგანს ავიღებთ, ჩვენ მივიღებთ $Ox'$ და $Oy'$ ახალი ღერძების საკუთარ გარკვეულ მიმართულებებს და, § 247-ის (12) ფორმულებით, $\lambda_1$ და $\lambda_2$-ის საკუთარ განსაზღვრულ მნიშვნელობებს.

მაგრამ შესაძლებელია $\lambda_1$ და $\lambda_2$ უფრო მარტივადაც გამოვთვალოთ. ჩვენ ვიცით, რომ

$$S = a_{11} + a_{22} = a_{11}' + a_{22}', \quad A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2.$$

თუ შევნიშნავთ, რომ

$$a_{11}' = \lambda_1, \quad a_{22}' = \lambda_2, \quad a_{12}' = 0,$$

მივიღებთ

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= a_{11} + a_{22} = S, \\ \lambda_1\lambda_2 &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = A_{33}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

საიდანაც გაჩნდინარეობს, რომ $\lambda_1$ და $\lambda_2$ (3) კვადრატული განტოლების ფესვებია, როგორც ეს ნათქვამი იყო თეორემაში.

ის გარემოება, რომ $\lambda_1$ და $\lambda_2$ ნამდვილი რიცხვებია, როცა $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{22}$ სიდიდეები ნამდვილია, უშუალოდ გამომდინარეობს § 247-ის (12) ფორმუ-

[1]) რადგანაც $\operatorname{tg} 2\varphi$, როცა φ იცვლება 0-დან $\frac{\pi}{2}$-მდე, ღებულობს ყველა მნიშვნელობას —∞-დან +∞-მდე, ამიტომ ყოველთვის შეიძლება მოვძებნოთ ისეთი მახვილი კუთხე φ, რომელიც (4) პირობას აკმაყოფილებს.

ლებიდან, და აგრეთვე იქედან, რომ

$$S^2 - 4A_{33} = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = \\ = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0, \tag{6}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ (3) განტოლების ფესვები ნამდვილია.

იმის გამოსარკვევად, (3) განტოლების რომელი ფესვი უნდა ავიღოთ $\lambda_1$-ად, ხოლო რომელი $\lambda_2$-ედ, ხელახლა მივმართოთ § 247-ის (12) ფორმულებს. გამოვაკლოთ მეორე მათგანი პირველს, მივიღებთ

$$a_{11}' - a_{22}' = (a_{11} - a_{22})\cos 2\varphi + 2a_{12}\sin 2\varphi = \\ = 2a_{12}\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}\cos 2\varphi + \sin 2\varphi\right).$$

შემდეგ შევნიშნოთ, რომ

$$\frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\varphi} = \frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi},$$

და, რომ

$$a_{11}' = \lambda_1, \quad a_{22}' = \lambda_2,$$

მივიღებთ

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2a_{12}}{\sin 2\varphi}. \tag{7}$$

ეს ფორმულა კი სავსებით განსაზღვრავს ფესვთა აღნიშვნების არჩევას. თუ, მაგალითად, $\varphi$ კუთხეს ჩვენ ვგულისხმობთ მახვილს, მაშინ $\lambda_1 - \lambda_2$ სხვაობის ნიშანი უნდა ემთხვეოდეს $a_{12}$-ის ნიშანს.

**§ 254. მეორე რიგის ცენტრალური წირის გამარტივება.** წინა პარაგრაფში ნათქვამის შემდეგ, მეორე რიგის წირის განტოლების გამარტივების ამოცანა ძალიან მარტივად იხსნება.

დავიწყოთ ცენტრალური წირის შემთხვევით, ე. ი. შემთხვევით, როცა

$$A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0. \tag{1}$$

გადავიტანთ რა კოორდინატთა სათავეს წირის ცენტრში $C(\alpha, \beta)$, ე. ი. დავუშვებთ რა $x = \alpha + x'$, $y = \beta + y'$, მოცემული წირის განტოლებას დავიყვანთ შემდეგ სახეზე (§ 252):

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0. \tag{2}$$

გარდა ამისა, თუ ღერძების $Cx'y'$ სისტემის ნაცვლად ავიღებთ $C\xi\eta$ სისტემას, რომლის $C\xi$ ღერძი $Cx'$ ღერძთან შეადგენს

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \tag{3}$$

განტოლებით განზღვრულ φ კუთხეს, მაშინ (2) განტოლებას დავიყვანთ სახეზე

$$\lambda_1\xi^2+\lambda_2\eta^2+k=0, \tag{4}$$

სადაც სიმოკლისათვის მიღებულია აღნიშვნა

$$K=\frac{A}{A_{33}}, \tag{5}$$

ხოლო $\lambda_1$ და $\lambda_2$ არის

$$\lambda^2-S\lambda+A_{33}=0 \tag{6}$$

განტოლების ფესვები.

ვინაიდან, პირობის თანახმად, $A_{33}\neq 0$, ამიტომ $\lambda_1$ და $\lambda_2$ ფესვთაგან არც ერთი ნულის ტოლი არ არის. ახლა განვიხილოთ (4) განტოლების კოეფიციენტთა ნიშნების კომბინაციების ყველა შესაძლო შემთხვევა.

პირველი შემთხვევა: $k\neq 0$, ე. ი. $A\neq 0$. ეს შემთხვევა, თავის მხრით, იყოფა შემდეგ შემთხვევებად:

1a) $\lambda_1$, $\lambda_2$ და $k$ ერთნაირი ნიშნებისაა. მაშინ ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{\lambda_1}{k}=\frac{1}{a^2},\quad \frac{\lambda_2}{k}=\frac{1}{b^2},$$

და (4) განტოლება, $k$-ზე გაყოფის შემდეგ, მიიღებს სახეს

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+1=0.$$

ეს წარმოსახვითი ელიფსის განტოლებაა.

გამოვარკვიოთ, მოცემული განტოლების კოეფიციენტების რა დამოკიდებულებებით ხასიათდება ეს შემთხვევა. (6) ფორმულის ძალით, იმისათვის, რომ $\lambda_1$ და $\lambda_2$ ერთნაირი ნიშნისა იყოს, აუცილებელი და საკმარისია პირობა $A_{33}>0$.

ამ უკანასკნელი პირობის გამო, $k$-ს, (5) ფორმულის ძალით, ექნება $A$-ს ნიშანი, ხოლო $\lambda_1$-ს და $\lambda_2$-ს — $S=a_{11}+a_{22}$-ს ნიშანი, რადგანაც $\lambda_1+\lambda_2=S$.

ამგვარად, 1a შემთხვევა (წარმოსახვითი ელიფსი) ხასიათდება პირობებით:

$A\neq 0$, $A_{33}>0$, $A$-ს და $S$-ს ერთნაირი ნიშნები აქვთ.

1b) $\lambda_1$-ს, $\lambda_2$-ს ერთნაირი და $k$-ს საწინააღმდეგო, ნიშანი აქვთ.

ამ შემთხვევაში, თუ დავუშვებთ, რომ

$$\frac{\lambda_1}{k}=-\frac{1}{a_2},\quad \frac{\lambda_2}{k}=-\frac{1}{b^2},$$

(3) განტოლებას დავიყვანთ შემდეგ სახეზე

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1.$$

ამგვარად, ჩვენ ვღებულობთ ნამდვილი ელიფსის ნორმალურ განტოლებას. მაშასადამე, ჩვენი წირი ელიფსია. წინანდელის ანალოგიურად დაერწმუნდებით, რომ 1b შემთხვევა (ნამდვილი ელიფსი) ხასიათდება შემდეგი პირობებით

$$A \neq 0,\ A_{33} > 0,\ A\text{-ს და } S\text{-ს სხვადასხვა ნიშნები აქვთ.}$$

ზემოთ უკვე ვნახეთ, რომ $A \neq 0$, $A_{33} > 0$ პირობები ახასიათებენ ელიფსს. ახლა ჩვენ მივიღეთ პირობები იმის შესახებ, თუ როგორ გავარჩიოთ ნამდვილი და წარმოსახვითი ელიფსი.

1c) $\lambda_1$-ს და $\lambda_2$-ს სხვადასხვა ნიშნები აქვთ. ამ შემთხვევაში შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{\lambda_1}{k} = \pm\frac{1}{a^2},\quad \frac{\lambda_2}{k} = \pm\frac{1}{b^2},$$

(აქ ერთდროულად უნდა ავიღოთ ან ზედა ან ქვედა ნიშნები) და (4) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = \pm 1.$$

ჩვენ მივიღეთ ჰიპერბოლის ნორმალური განტოლება. მაშასადამე, წირი ჰიპერბოლია. ჰიპერბოლის შემთხვევა ხასიათდება შემდეგი პირობებით (რაც ჩვენ წინათაც ვიცოდით)

$$A \neq 0,\ A_{33} < 0.$$

მეორე შემთხვევა: $k=0$, ე. ი. $A=0$. აქ შეიძლება ორი უფრო კერძო შემთხვევა წარმოგვიდგეს:

2a) $\lambda_1$-ს და $\lambda_2$-ს ერთნაირი ნიშნები აქვთ. ამ შემთხვევაში შეიძლება დავუშვათ

$$\lambda_1 = \pm k_1^2,\ \lambda^2 = \pm k_2^2,$$

რის შემდეგ (3) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$k_1^2\xi^2 + k_2^2\eta^2 = 0.$$

ეს განტოლება წარმოადგენს ორი წარმოსახვითი შეუღლებული წრფის ერთობლიობას:

$$k_1\xi + ik_2\eta = 0,$$
$$k_1\xi - ik_2\eta = 0.$$

განხილული შემთხვევა ხასიათდება პირობებით

$$A = 0,\ A_{33} > 0,$$

რაც წინათაც გვქონდა მიღებული.

2b) $\lambda_1$-ს და $\lambda_2$-ს სხვადასხვა ნიშნები აქვთ. ამ შემთხვევაში, ცხადია, (4) განტოლება მიიღებს სახეს

$$k_1^2\xi^2 - k_2^2\eta^2 = 0,$$

ანუ

$$(k_1\xi + k_2\eta)\ (k_1\xi - k_2\eta) = 0;$$

მაშასადამე, ჩვენი წირი წარმოადგენს ორ (ნამდვილ) ურთიერთ გადამკვეთ წრფეს:

$$k_1\xi + k_2\eta = 0 \quad \text{და} \quad k_1\xi - k_2\eta = 0.$$

ეს შემთხვევა ხასიათდება პირობებით

$$A = 0,\ A_{33} < 0,$$

რაც ჩვენთვის წინათაც ცნობილი იყო.

§ 255. **უცენტრო წირის განტოლების გამარტივება.** გასარჩევი დაგვრჩა ის შემთხვევა, როცა

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

განტოლების კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ პარაბოლური ტიპის წირებისათვის დამახასიათებელ პირობას:

$$A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0. \qquad (2)$$

ამ შემთხვევაში წირს ან სრულებით არა აქვს ცენტრი (აქვს არასაკუთრივი ცენტრი), ან აქვს ცენტრთა წრფე.

იმისათვის, რომ $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ კვადრატული ფორმა დავიყვანოთ

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 x'^2$$

კანონიკურ სახეზე (§ 253), დავიწყოთ ღერძების მობრუნებით. როგორც ვიცით, ამისათვის კოორდინატთა ღერძები უნდა მოვაბრუნოთ $\varphi$ კუთხით, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{12} - a_{22}}. \qquad (3)$$

$\lambda_1$ და $\lambda_2$ კი იქნება $\lambda^2 - S\lambda + A_{33} = 0$ კვადრატული განტოლების ფესვები, რომელიც, (2) ტოლობის ძალით, ღებულობს სახეს: $\lambda^2 - S\lambda = 0$; მაშასადამე, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = S$, და (1) განტოლება მიიღებს სახეს (ჩვენ ვიცით, რომ ღერძების მობრუნების დროს თავისუფალი წევრი არ იცვლება)

$$Sy'^2 + 2a_{13}'x' + 2a_{23}'y' + a_{33} = 0. \qquad (4)$$

წინა განტოლებიდან, სხვათა შორის, გამომდინარეობს, რომ განხილულ შემთხვევაში $S \neq 0$, რადგან სხვანაირად განტოლება მეორე რიგისა არ იქნებოდა.

სანამ გადავიდოდეთ შემდგომ გამარტივებაზე, შევნიშნოთ, რომ (4) განტოლება შეიძლება მივიღოთ კიდევ სხვა, პრაქტიკულად უფრო მოსახერხებელი, გზით.

შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $a_{11} \neq 0$, ვინაიდან $a_{11}$ რომ ნულს უდრიდეს, მაშინ (2) ფორმულის ძალით, $a_{12}$ იქნებოდა ნულის ტოლი და განტოლებას უკვე სასურველი სახე ექნებოდა. ამნაირად, ვთქვათ,

$$a_{11} \neq 0.$$

მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}^2x^2 + 2a_{12}a_{11}xy + a_{11}a_{22}y^2) =$$

$$= \frac{1}{a_{11}}(a_{11}^2x^2 + 2a_{11}a_{11}xy + a_{12}^2y^2) =$$

$$= \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x + a_{11}y)^2,$$

და (1) განტოლება ასე გადაიწერება:

$$\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x + a_{12}y)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{5}$$

იმისათვის, რომ ეს განტოლება დავიყვანოთ (4) სახეზე, ცხადია, საკმარისია, კოორდინატთა ღერძები მოვაბრუნოთ ისე, რომ ახალი $Ox'$ ღერძი დაემთხვეს $a_{11}x + a_{12}y = 0$ წრფეს, რადგან ასეთ შემთხვევაში გვექნება:

$$a_{11}x + a_{12}y = ky', \tag{6}$$

სადაც $k$ მუდმივია (§ 99). ღერძების $\varphi$ კუთხით მობრუნების დროს გვაქვს

$$y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

$\varphi$ უნდა შევარჩიოთ (6) პირობის თანახმად, რაც გვაძლევს

$$a_{11}x + a_{12}y = k(-x\sin\varphi + y\cos\varphi),$$

საიდანაც

$$k\sin\varphi = -a_{11}, \quad k\cos\varphi = a_{12}.$$

ავამაღლოთ ორივე ტოლობა კვადრატში და შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$k^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 = a_{11}^2 + a_{11}a_{22} = a_{11}S,$$

ე. ი.

$$k = \pm\sqrt{a_{11}S} \tag{7}$$

და

$$\cos\varphi = \frac{a_{12}}{\pm\sqrt{a_{11}S}}, \quad \sin\varphi = \frac{-a_{11}}{\pm\sqrt{a_{11}S}}, \tag{8}$$

სადაც რადიკალების წინ უნდა ავიღოთ ან ზედა, ან ქვედა ნიშნები. (8) ფორმულების ნაცვლად შეგვიძლია ვისარგებლოთ შემდეგითაც:

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{a_{11}}{a_{12}}=-\frac{a_{12}}{a_{22}}. \tag{9}$$

უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარე დაწერილია

$$a_{11}a_{22}=a_{12}^2$$

ტოლობის საფუძველზე.

მკითხველს ვანდობთ დაამტკიცოს, რომ (3) ფორმულა არის (8) ანუ (9) ფორმულების შედეგი.

თუ $\cos\varphi$ და $\sin\varphi$ ასე განსაზღვრის შემდეგ (5) ფორმულაში $x$, $y$-ის ნაცვლად ჩავსვამთ მათ გამოსახულებას $x'$, $y'$-ით, (6) ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$-\frac{k^2}{a_{11}}\,y'^2+2a_{13}'x'+2a_{23}'y'+a_{33}=0,$$

სადაც, § 247-ის (11a) ფორმულების ძალით,

$$\left.\begin{aligned} a_{13}'&=a_{13}\cos\varphi+a_{23}\sin\varphi=\frac{a_{13}a_{12}-a_{11}a_{23}}{\pm\sqrt{a_{11}S}}=\frac{A_{32}}{\pm\sqrt{a_{11}S}},\\ a_{23}'&=-a_{13}\sin\varphi+a_{23}\cos\varphi=\frac{a_{11}a_{13}+a_{12}a_{23}}{\pm\sqrt{a_{11}S}}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

თუ შევნიშნავთ, რომ $k^2=a_{11}S$, მივიღებთ ხელახლა (4) ფორმულას.

თუ უშუალოდ მოცემული წირის განტოლებიდან გამოვალთ, $a_{13}'$ კოეფიციენტისათვის შეიძლება ვიპოვოთ კიდევ სხვანაირი გამოსახულება. მართლაც, შევადგინოთ (4) განტოლების მარცხენა მხარისთვის ინვარიანტი $A$, გვექნება

$$A=\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13}' \\ 0 & S & a_{23}' \\ a_{13}' & a_{23}' & a_{33}' \end{vmatrix}=-Sa_{13}'^2,$$

საიდანაც [1])

$$a_{13}'=\pm\sqrt{-\frac{A}{S}}. \tag{11}$$

(10) და (11) ტოლობების შედარება, სხვათა შორის, გვიჩვენებს, რომ $A_{33}^2=-a_{11}A$; ეს ტოლობა შეიძლება უშუალოდაც დაეამტკიცოთ (იგი მართებულია მხოლოდ მაშინ, როცა $A_{33}=0$).

[1]) (11) ფორმულიდან ჩანს, რომ განსახილველ შემთხვევაში ($A_{33}=0$) $A$ და $S$ ინვარიანტებს სხვადასხვა ნიშნები უნდა ჰქონდეთ. ეს უშუალოდაც ადვილი დასამტკიცებელია.

ახლა ცალ-ცალკე განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

პ ი რ ვ ე ლ ი შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა: $A \neq 0$ (პ ა რ ა ბ ო ლ ი). მაშინ, (11) ფორმულის ძალით $a_{12}' \neq 0$ და ჩვენ შეგვიძლია, კოორდინატთა სათავის გადატანით სათანადო $(\alpha, \beta)$ წერტილში, (4) განტოლების მარცხენა მხარეში მოვსპოთ მეორე და მეოთხე წევრი. მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ

$$x' = \alpha + \xi, \quad y' = \beta + \eta,$$

(4) განტოლებას დავიყვანთ სახეზე

$$S\eta^2 + 2a_{13}'\xi + 2(S\beta + a_{23}')\eta + S\beta^2 + 2a_{13}'\alpha + 2a_{23}\beta + a_{33} = 0,$$

ანუ

$$S\eta^2 + 2a_{13}'\xi + 2(S\beta + a_{23}')\eta + (S\beta + a_{23}')\beta + 2a_{12}'\alpha + a_{23}'\beta + a_{33} = 0.$$

საკმარისია $\alpha$ და $\beta$ შევარჩიოთ ისე, რომ $S\beta + a_{23}' = 0$, $2a_{13}'\alpha + a_{33}'\beta + a_{33} = 0$, ე. ი.

$$\beta = -\frac{a_{23}'}{S}, \quad \alpha = -\frac{1}{2a_{13}'}\left(a_{33} - \frac{a_{23}'^2}{S}\right), \tag{12}$$

განტოლებამ რომ მიიღოს საძიებელი სახე

$$S\eta^2 + 2a_{13}'\xi = 0.$$

გავყოთ ორივე მხარე $S$-ზე, შეიძლება იგი გადავწეროთ ასეც:

$$\eta^2 = 2P\xi, \tag{13}$$

სადაც $P = \frac{-a_{13}'}{S}$. ჩვენ ვხედავთ, რომ ჩვენი პარაბოლის პარამეტრი $p$ უდრის $|P|$-ს სახელდობრ, როცა $P > 0$, მაშინ $p = P$, ცხადია, ღერძის პარამეტრი. როცა $P < 0$, $\xi$ ღერძის მიმართულების საწინააღმდეგოზე შევცვლით, ე. ი. $\xi$-ს შევცვლით $-\xi$-ით, შეგვიძლია განტოლებას მივცეთ შემდეგი სახე: $\eta^2 = -2P\xi$, ანუ $\eta^2 = 2p\xi$, სადაც $p = -P > 0$.

ადვილად შეიძლება $p$ პარამეტრი გამოვსახოთ $A$ და $S$ ინვარიანტებით. სახელდობრ, (11) ფორმულის ძალით, $P = -\frac{a_{13}'}{S}$- ფორმულიდან, გამომდინარეობს:

$$p = |P| = +\sqrt{-\frac{A}{S^3}} \tag{14}$$

(როგორც უკვე აღნიშნული იყო, რადიკალის ქვეშ ჩვენ გვაქვს დადებითი სიდიდე).

$\xi$ ღერძი წარმოადგენს პარაბოლის სიმეტრიის ღერძს, ხოლო ახალი სათავე — პარაბოლის წვეროს.

ახლა უკვე ცხადია კოორდინატთა გარდაქმნის გეომეტრიული შინაარსი: პირველი გარდაქმნის დროს $Ox'$ ღერძი მიმართული იყო პარაბოლის

ღერძის პარალელურად, მეორე გარდაქმნისას კი კოორდინატთა სათავე გადატანილი იყო მის წვეროში.

მეორე შემთხვევა: $A=0$ (პარალელურ წრფეთა წყვილი). ამ შემთხვევაში $a_{13}'=0$, და (4) განტოლება ღებულობს შემდეგ სახეს

$$Sy'^2+2a_{23}'y+a_{33}=0,$$

ანუ, თუ კოორდინატთა სათავეს გადავიტანთ $(\alpha, \beta)$ წერტილში, ე. ი. თუ დავუშვებთ, რომ $x'=\alpha+\xi$, $y'=\beta+\eta$, მაშინ

$$S\eta^2+2(S\beta+a_{23}')\eta+S\beta^2+2a_{23}\beta+a_{33}=0.$$

დავუშვათ,

$$S\beta+a_{23}'=0,$$

ე. ი.

$$\beta=-\frac{a_{23}'}{S}.$$

და $\alpha$ შევარჩიოთ ნებისმიერად (მაგალითად, $\alpha=0$), ამით წინა განტოლებას დავიყვანთ სახეზე

$$S\eta^2+k=0, \tag{15}$$

სადაც

$$k=a_{33}-\frac{a_{23}'}{S}.$$

ეს კი პარალელურ წრფეთა წყვილის უმარტივესი განტოლებაა.

თუ $S$ და $k$-ს ერთი და იგივე ნიშანი აქვთ, მაშინ წრფეები წარმოსახვითია. თუ ეს სიდიდეები სხვადასხვა ნიშნისაა, მაშინ წრფეები ნამდვილი და სხვადასხვაა. როცა $k=0$, მაშინ ორი ერთმანეთზე დამთხვეული წრფის შემთხვევა გვაქვს.

**§ 256. ორი პარალელური წრფის ერთობლიობის განტოლების გამარტივების მეორე ხერხი. პირობითი ინვარიანტი.** იმ შემთხვევაში, როცა

$$A=0,\ A_{33}=0,$$

ე. ი. როცა წირი წარმოადგენს ორი პარალელური წრფის ერთობლიობას, ჩვენ შეგვიძლია პირდაპირ დავწეროთ ამ წრფეების განტოლებანი. სახელდობრ, როგორც ნაჩვენები იყო § 225a-ში, ამ წრფეების განტოლებებია

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}\pm\sqrt{-A_{22}}=0, \tag{1}$$

ანუ

$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}\pm\sqrt{-A_{11}}=0. \tag{2}$$

თუ $a_{11}\neq 0$, მაშინ გამოსადეგია (1) განტოლებანი; თუ $a_{22}\neq 0$, მაშინ გამოსადეგია (2) განტოლებანი. თუ ორივე სიდიდე $a_{11}$ და $a_{22}$ ნულისგან განსხვავებულია, მაშინ გამოსადეგია ორივე სახე.

ეს განტოლებები გამოსადეგია დეკარტის კოორდინატთა ზოგად შემთხვევაშიც.

დაეუბრუნდეთ შემთხვევას: $a_{11} \neq 0$. ადვილად შეიძლება მოვძებნოთ მანძილი (1) პარალელურ წრფეს შორის იმ შემთხვევაში, როცა ისინი ნამდვილია, ე. ი. $A_{22} < 0$.

ვიგულისხმოთ, რომ კოორდინატები მართკუთხოვანია. მანძილები კოორდინატთა სათავიდან (1) წრფეებამდე მოიცემა ფორმულებით

$$h_1 = \frac{a_{12} + \sqrt{-A_{22}}}{\pm\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}, \quad h_2 = \frac{a_{12} - \sqrt{-A_{22}}}{\pm\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}.$$

თუ შევთანხმდებით, რომ, როცა წრფეები კოორდინატთა სათავის ერთ მხარეზეა მოთავსებული, $h_1$ და $h_2$-ს ერთნაირი ნიშნები აქვთ, მაშინ ორივე ფორმულის მნიშვნელებში რადიკალების წინ ერთნაირი ნიშნები უნდა ავიღოთ, და სხვადასხვა ნიშნები უნდა ავიღოთ ი შემთხვევაში, როცა წრფეები სათავის სხვადასხვა მხარეზე არიან. მაშასადამე, მანძილი ამ წრფეებს შორის უდრის $|h_2 - h_1|$, ე. ი.

$$h = \frac{2\sqrt{-A_{22}}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}.$$

გავიხსენოთ, რომ $a_{12}^2 = a_{11}\, a_{22}$, გვექნება

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = a_{11}(a_{11} + a_{22}) = a_{11}S,$$

საიდანაც

$$h^2 = \frac{-4A_{22}}{a_{11}S} \tag{3}$$

თუ $a_{22} \neq 0$, მაშინ სრულიად ანალოგიურად, (2) ფორმულების ძალით, მივიღებთ

$$h^2 = \frac{-4A_{11}}{a_{22}S} \tag{4}$$

თუ $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, მაშინ ადგილი აქვს ორივე (3) და (4) ფორმულებს, საიდანაც გამომდინარეობს

$$h^2 = \frac{4A_{22}}{a_{11}S} = -\frac{4A_{11}}{a_{22}S} = \frac{-4A_{22} - 4A_{11}}{a_{11}S + a_{22}S},$$

ანუ

$$h^2 = -\frac{4(A_{11} + A_{22})}{S^2}. \tag{5}$$

ცხადია, უკანასკნელი ფორმულა მართებულია მაშინაც, როცა $a_{11}$ და $a_{22}$ სიდიდეთაგან ერთ-ერთი ნულის ტოლია [1]).

ვინაიდან $h^2$ სიდიდე დამოკიდებულია კოორდინატთა სათავის არჩევაზე, ამიტომ (5) ფორმულის მარჯვენა მხარე ინვარიანტია (მართკუთხა კოორდინატების შემთხვევაში); რადგანაც, გარდა ამისა, $S$-იც ინვარიანტია, ამიტომ მივდივართ შემდეგ დასკვნამდე:

---

[1]) მართლაც, თუ მაგალითად, $a_{11}=0$. მაშინ, როგორც უკვე ზემოთ (§ 225a-ის ბოლო) ვნახეთ, $A_{22}$-იც უდრის ნულს, და (5) ფორმულა მოგვცემს

$$h^2 = -\frac{4A_{11}}{S^2} = -\frac{4A_{11}}{a_{22}^2},$$

ე. ი. იგივე (4) ფორმულას, რადგან ამ შემთხვევაში $S = a_{22}$.

გამოსახულება

$$H=A_{11}+A_{22}, \tag{6}$$

ინვარიანტია (მართკუთხა კოორდინატებში), თუ დაცულია პირობები:

$$A=A_{33}=0, \tag{7}$$

ან მათი ეკვივალენტური პირობები (§ 225a)

$$A_{31}=A_{32}=A_{33}=0, \tag{8}$$

რაც ახასიათებს მოცემული წირის დაშლის შემთხვევას ორი პარალელური წრფის ერთობლიობად.

$h$-ის მნიშვნელობის გამოყვანის დროს ვგულისხმობდით, რომ ჩვენი წირი იშლება ორ ნამდვილ წრფედ (ე. ი. რომ $A_{33}<0$, შესაბამისად, $A_{11}<0$). მაგრამ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ეს შეზღუდვა შეიძლება უკუვაგდოთ ისე, რომ შედეგი

$$H=A_{11}+A_{22}$$

სიდიდის ინვარიანტობის შესახებ მართებული დარჩეს.

ადვილად დავრწმუნდებით აგრეთვე, რომ $H$ ინვარიანტია მაშინაც, როცა დაცულია (7) პირობები.

იმის გამო, რომ $H$ ინვარიანტი რჩება მხოლოდ მაშინ, როცა დაცულია (7) ანუ, რაც იგივეა, (8) პირობები, ამიტომ მას პირობითი ინვარიანტი ეწოდება.

$H$ სიდიდის გამოყენებით, ადვილად გამოვთვლით $k$ სიდიდეს, რომელიც შედის გამარტივებულ $S\eta^3+k=0$ განტოლებაში. სახელდობრ, $S\eta^3+k$ ფუნქციისათვის გვაქვს:

$$a_{11}=a_{12}=a_{13}=a_{23}=0,\ a_{22}=S,\ a_{33}=k,$$

საიდანაც

$$A_{11}=Sk,\ A_{22}=0.$$

მაშასადამე,

$$H=Sk$$

და

$$k=\frac{H}{S}. \tag{9}$$

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ წრფეები, რომლებადაც მოცემული წირი იშლება წარმოსახვითი იქნება, თუ $H>0$, ნამდვილი, თუ $H<0$ და დამთხვეული, თუ $H=0$. ეს უშუალოდ გამომდინარეობს ამ წრფეების განტოლებიდან:

$$\eta^3+\frac{k}{S}=0,$$

ანუ

$$\eta^3+\frac{H}{S^3}=0.$$

**§ 257. შედეგების შეჯამება. 1. მეორე რიგის წირების აფინური კლასიფიკაცია.** შევაჯამოთ წინა სამი პარაგრაფის შედეგები. ეს შედეგები შეეხება:

1. მეორე რიგის წირების აფინურ კლასიფიკაციას და წირის განტოლებით მისი სახის განსაზღვრის ხერხს (ნამდვილი ელიფსი, წარმოსახვითი ელიფსი, ჰიპერბოლი, პარაბოლი, ორი არაპარალელური წარმოსახვითი წრფის ერთობლიობა, ორი არაპარალელური ნამდვილი წრფის ერთობლიობა, ორი ნამდვილი ან წარმოსახვითი პარალელური წრფის ერთობლიობა);

ეს კლასიფიკაცია უკვე ზემოთ იყო მოყვანილი (§§ 225, 234, 235), მაგრამ ჩვენ მაშინ არ გვქონდა მარტივი წესები მოცემული განტოლებით, ნამდვილი და წარმოსახვითი წირების გასარჩევად.

2. წირის განტოლებით მისი ფორმისა და ზომების დამახასიათებელი ელემენტების განსაზღვრის ხერხს.

3. $Oxy$ სიბრტყეზე წირის მდებარეობის განსაზღვრის ხერხს.

დავიწყოთ კლასიფიკაციის საკითხით. ვთქვათ, მოცემულია მეორე რიგის წირის განტოლება

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (1)$$

ამ განტოლებით წარმოდგენილი წირის ხასიათი განისაზღვრება შემდეგი სიდიდეებით:

$$\left.\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \\ S &= a_{11} + a_{22}, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

რომლებიც ინვარიანტულია მართკუთხოვანი კოორდინატების გარდაქმნის მიმართ.

უპირველეს ყოვლისა, ჩვენ გვაქვს შემდეგი ზოგადი დებულებანი:

1. მეორე რიგის წირი იშლება ორ (ნამდვილ ან წარმოსახვით) წრფედ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A = 0$.

2. უტოლობა $A_{33} > 0$ ახასიათებს „ელიფსური ტიპის“ წირს (ელიფსი. წარმოსახვითი ელიფსი, ორი არაპარალელური შეუღლებული წარმოსახვითი წრფის ერთობლიობა).

3. უტოლობა $A_{33} < 0$ ახასიათებს „ჰიპერბოლური ტიპის“ წირს (ჰიპერბოლი, ორი ურთიერთ გადამკვეთი ნამდვილი წრფის ერთობლიობა).

4. ტოლობა $A_{33} = 0$ ახასიათებს „პარაბოლური ტიპის“ წირს (პარაბოლი, ორი ნამდვილი ან წარმოსახვითი პარალელური წრფის ერთობლიობა). იგივე წირები ხასიათდება იმით, რომ მათ არა აქვთ გარკვეული ცენტრი: ან არა აქვთ ცენტრი (პარაბოლი) ან აქვთ ცენტრთა წრფე (პარალელური წრფეები).

დაწვრილებითი შედეგები მოცემულია შემდეგ ცხრილში.

| I. $A \neq 0$. | II. $A = 0$. |
|---|---|
| დაუშლადი მეორე რიგის წირი. | ორი წრფის ერთობლიობა. |
| 1a) $A_{33} > 0$, $A$ და $S$ ერთნაირი ნიშნისაა: წარმოსახვითი ელიფსი. | 1. $A_{33} > 0$: ორი წარმოსახვითი არაპარალელური შეუღლებული წრფის ერთობლიობა. |
| 1b) $A_{33} > 0$, $A$ და $S$ სხვადასხვა ნიშნისაა: ელიფსი. | 2. $A_{33} < 0$: ორი ნამდვილი არაპარალელური წრფის ერთობლიობა. |
| 2. $A_{33} < 0$: ჰიპერბოლი. | 3. $A_{33} = 0$: (ნამდვილ, წარმოსახვით, სხვადასხვა ან თანხვედრილ) პარალელურ წრფეთა ერთობლიობა. |
| 3. $A_{33} = 0$: პარაბოლი. | |

იმისათვის, რომ გავარჩიოთ მარჯვენა სეტის უკანასკნელ შემთხვევაში ($A=A_{33}=0$) როგორი წრფეები გვაქვს: ნამდვილი და სხვადასხვა, წარმოსახვითი თუ დამთხვეული[1]), ამისათვის, წინა პარაგრაფში ნათქვამის თანახმად, შეგვიძლია ვისარგებლოთ შემდეგი წესით: როცა $a_{11}\neq 0$, მაშინ წრფეები იქნებიან ნამდვილი და სხვადასხვა, თუ $A_{23}<0$; დამთხვეული, თუ $A_{23}=0$; წარმოსახვითი, თუ $A_{23}>0$. როცა $a_{11}=0$, მაშინ გამოსადეგია იგივე წესი, მხოლოდ $A_{23}$ უნდა შეიცვალოს $A_{11}$-ით.

ამასთანავე შეიძლება ვისარგებლოთ პირობითი ინვარიანტით $H=A_{11}+A_{22}$; როცა $H<0$, მაშინ წრფეები ნამდვილია და სხვადასხვა; როცა $H=0$ –ისინი თანხვდენილია; როცა $H>0$, წრფეები წარმოსახვითია.

თუმცა ამ პარაგრაფში მოყვანილი ზოგიერთი შედეგი მიღებულია მართკუთხოვანი კოორდინატებისათვის, მაგრამ ისინი ძალაში რჩებიან ზოგადი სახის დეკარტის კოორდინატთა შემთხვევაშიც.

მართლაც, ვთქვათ, (1) განტოლება დაწერილია არამართკუთხა სისტემის მიმართ. განვიხილოთ მოცემულ წირთან ერთად სხვა წირი, რომელსაც იგივე (1) განტოლება აქვს, მხოლოდ მართკუთხა სისტემის მიმართ. ეს ახალი წირი, ცხადია, მოცემული წირის აფინური გარდაქმნის შედეგს წარმოადგენს. ამიტომაც ორივე წირი, იმ აზრით, რომლითაც ჩვენ ამას ამ პარაგრაფში განვიხილავდით, ერთი და იმავე ხასიათისაა. მეორეს მხრივ, მეორე წირისათვის გამოსადეგია ყველა ზემომყვანილი შედეგი. აქედან კი გამომდინარეობს ჩვენი დებულება.

§ 258. **შედეგების შეჯამება. 2. მეორე რიგის წირის ფორმისა და ზომების განსაზღვრა მისი განტოლებით.** ჩვენ ვნახეთ, თუ როგორ უნდა გამოვარკვიოთ წირის (ელიფსის, ჰიპერბოლის და ა. შ.) ხასიათი მისი განტოლებით. გადავიდეთ ახლა წირის ფორმისა და ზომების დამახასიათებელ ელემენტების გამოთვლაზე. ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ გარდა იმ შემთხვევისა, როცა წირი ორ პარალელურ წრფედ იშლება, ეს ელემენტები ხასიათდება იმავე ინვარიანტებით (კოორდინატებს ვგულისხმობთ მართკუთხოვანს).

$$A,\ A_{33},\ S.$$

სახელდობრ, §§ 254—256-ში ნათქვამიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი დებულებანი:

1. ელიფსისა და ჰიპერბოლის შემთხვევაში, $a$, $b$ ნახევარღერძების განსაზღვრისათვის საკმარისია ამოვხსნათ განტოლება:

$$\lambda^2-S\lambda+A_{33}=0. \tag{1}$$

თუ $\lambda_1$ და $\lambda_2$ ამ განტოლების ფესვებია (ისინი უსათუოდ ნამდვილი იქნებიან), მაშინ:

[1]) დამთხვეული წრფეები ყოველთვის ნამდვილია (როგორც ყოველთვის, ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ კოეფიციენტები წირის განტოლებაში ნამდვილი რიცხვებია).

a) ნამდვილი ელიფსის შემთხვევაში:

$$a^2 = -\frac{A}{\lambda_1 A_{33}} \quad \text{და} \quad b^2 = -\frac{A}{\lambda_2 A_{33}}. \tag{2}$$

ვიგულისხმოთ, რომ $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$. მაშინ $a$ იქნება დიდი ნახევარღერძი, ხოლო $b$—მცირე ნახევარღერძი. თუ $\lambda_1 = \lambda_2$, მაშინ გვექნება წრეხაზი.

b) ჰიპერბოლის შემთხვევაში, თუ ვიგულისხმებთ, რომ

$$-\frac{A}{\lambda_1 A_{33}} > 0, \quad -\frac{A}{\lambda_2 A_{33}} > 0, \tag{3}$$

გვექნება

$$a^2 = -\frac{A}{\lambda_1 A_{33}}, \qquad b^2 = \frac{A}{\lambda_2 A_{33}}, \tag{4}$$

სადაც $a$ და $b$ შესაბამისად გრძივი და განივი ნახევარღერძებია.

2. ასიმპტოტებს შორის კუთხე $2\alpha$ შეიძლება შემდეგნაირად განვსაზღვროთ. გვაქვს

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2^2}} = \frac{\sqrt{-A_{33}}}{|\lambda_2|}, \tag{5}$$

სადაც $\lambda_2$ არის (1) განტოლების ერთ-ერთი ფესვი. თუ $2\alpha$-ს ჭეშ იმ კუთხეს ვიგულისხმებთ, რომლის შიგნითაც ჰიპერბოლია მოქცეული (და არა მის ძოსახღერე კუთხეს), მაშინ $\lambda_2$ (3) პირობის თანახმად უნდა შეესარჩიოთ.

(5) ფორმულის ნაცვლად შეგვიძლია ვისარგებლოთ უფრო სიმეტრიული ფორმულით რომელიც ასე მიიღება. გვაქვს:

$$\cos 2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

ანუ, თუ შევნიშნავთ, რომ $\lambda_1 + \lambda_2 = S$, $\lambda_2 - \lambda_1 = \pm\sqrt{S^2 - 4A_{33}}$:

$$\cos 2\alpha = \frac{S}{\pm\sqrt{S^2 - 4A_{33}}}. \tag{6}$$

ცხადია, $\cos 2\alpha > 0$, როცა $a > b$ ($|\lambda_1| > |\lambda_2|$), და $\cos 2\alpha < 0$, როცა $a < b$ ($|\lambda_1| > |\lambda_2|$). ვინაიდან $S = \lambda_1 + \lambda_2$ აქვს $\lambda_1$, $\lambda_2$ რიცხვთაგან აბსოლუტური სიდიდით ჭდიდესის ნიშანი, ამიტომ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ფესვის წინ ყოველთვის უნდა ავიღოთ $\lambda_2$-ს ნიშანი.

ჩვენ ვხედავთ, რომ, როგორც მოსალოდნელი იყო, კუთხე ასიმპტოტებს შორის დამოკიდებულია მხოლოდ და მხოლოდ წირის განტოლების პირველი სამი წევრის $a_{11}$, $a_{12}$ და $a_{22}$ კოეფიციენტებზე.

3. თუ წირი იშლება ორ ნამდვილ ურთიერთ გადამკვეთ წრფედ, მაშინ კუთხე ამ წრფეებს შორის იმავე (6) ფორმულით მოიცემა, რის დამტკიცებასაც (ხემოთ ყოფილის სრულიად ანალოგიური ხერხით) ვანდობთ მკითხველს.

4. პარაბოლის შემთხვევაში მისი პარამეტრი $p$ განისაზღვრება ფორმულით:

$$p = \sqrt{-\frac{A}{S^3}}.$$

ბ. თუ წირი იშლება ორი პარალელური წრფის ერთობლიობად, მაშინ მანძილი $h$ ამ წრფეებს შორის უკვე აღარ შეიძლება გამოისახოს $A$, $A_{33}$, $S$ ინვარიანტებით (რომელთაგან პირველი ორი ნულის ტოლია). მაგრამ ეს მანძილი გამოისახება $S$ ინვარიანტით და პირობითი ინვარიანტით $H$ (§ 256):

$$h^2 = -\frac{4H}{S^2}.$$

**§ 250. შედეგების შეჯამება. 3. განტოლების დაყვანა ნორმალურ სახეზე და წირის მდებარეობის განსაზღვრა სიბრტყეზე.** თუ მართკუთხოვანი $Oxy$ სისტემის[1]) მიმართ, მოცემული წირის ფორმისა და განზომილების გარდა, საჭიროა განვსაზღვროთ მისი მდებარეობაც სიბრტყეზე, მაშინ, ცხადია, საკმარისია მოვძებნოთ ახალი $\xi$, $\eta$ მართკუთხოვანი ღერძების ისეთი მდებარეობა, რომლის მიმართ წირის განტოლება მიიღებს ერთ-ერთ ზემონაჩვენებ უმარტივეს სახეს. სავსებით ცხადია, რომ ამ ახალი ღერძების მდებარეობა (ე. ი. წირის მდებარეობა $Oxy$ სიბრტყეზე) აღარ შეიძლება უკვე განისაზღვროს მხოლოდ ინვარიანტებით, რადგან ინვარიანტებს სწორედ ის თვისება აქვთ, რომ ისინი დამოუკიდებელი არიან წირის მდებარეობისაგან კოორდინატთა ღერძების მიმართ.

განვიხილოთ ცალ-ცალკე ცენტრალური წირების და უცენტრო წირების შემთხვევა.

1. ცენტრალური წირის დაყვანისათვის კანონიკურ სახეზე

$$\lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0 \tag{1}$$

კოორდინატთა სათავე უნდა გადავიტანოთ წირის ცენტრში $C$, რომელიც განსაზღვრულია როგორც

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \quad a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0$$

წრფეების გადაკვეთა, და შემდეგ ავიღოთ $C\xi\eta$ ღერძების ისეთი სისტემა, რომლის $C\xi$ ღერძი $Ox$ ღერძთან ადგენს

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \tag{2}$$

ფორმულით განსაზღვრულ $\varphi$ კუთხეს.

თუ $\varphi_0$ არის ისეთი მახვილი დადებითი კუთხე, რომელიც ამ პირობას აკმაყოფილებს, მაშინ $\varphi$ კუთხისათვის, $0, 2\pi$ საზღვრებში მივიღებთ ოთხ მნიშვნელობას:

$$\varphi = \varphi_0, \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \varphi_0 + \pi, \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{3\pi}{2}.$$

ღერძი $C\xi$ იქნება სიმეტრიის ერთ-ერთი ღერძი, ხოლო $C\eta$—მეორე.

[1]) თუ წირი განხილულია არამართკუთხა სისტემის მიმართ, მაშინ საკმარისია წინასწარ გადავიდეთ რაიმე მართკუთხა სისტემაზე.

თუ ჩვენ გვინდა $O\xi$ ღერძი მივმართოთ ელიფსის დიდი ღერძის გასწვრივ (ან ჰიპერბოლის გრძივი ღერძის გასწვრივ), მაშინ შევარჩევთ რა $\lambda_1$-ს და $\lambda_2$-ს $|\lambda_1|<|\lambda_2|$ პირობის შესაბამისად (ელიფსის შემთხვევაში) ანდა წინა პარაგრაფის (3) პირობის შესაბამისად (ჰიპერბოლის შემთხვევაში), φ კუთხეს დაუქვემდებარებთ კიდევ ერთ პირობას (იხ. § 253-ის ბოლო):

$$\sin 2\varphi=\frac{2a_{12}}{\lambda_1-\lambda_2} \tag{3}$$

(მნიშვნელოვანია მხოლოდ მარჯვენა მხარის ნიშანი). ამ დამატებითს პირობას φ-ს ზემონაჩვენები ოთხი მნიშვნელობიდან მხოლოდ ორი აკმაყოფილებს, სახელდობრ $\varphi_0$ და $\varphi_0+\pi$, ან $\varphi_0+\frac{\pi}{2}$ და $\varphi_0+\frac{3\pi}{2}$. ეს ორი მნიშვნელობა იძლევა $O\xi$ ღერძის ორ ურთიერთ თანაწინააღმდეგ მიმართულებას.

2. პარაბოლის განტოლების

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=1 \tag{4}$$

ნორმალურ სახეზე დაყვანისათვის, შემდეგნაირად ვიქცევით.

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $a_{11}\neq 0$ და მხედველობაში მივიღებთ, რომ $a_{12}^2=a_{11}a_{22}$, წინა განტოლებას გადავწერთ შემდეგი სახით:

$$\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x+a_{12}y)^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0; \tag{5}$$

შემდეგ შემოვაბრუნოთ ღერძების სისტემა ისე, რომ ახალი ღერძი $Ox'$ მიმართული იყოს $a_{11}x+a_{12}y=0$ წრფის გასწვრივ. ამისათვის მობრუნების კუთხე φ უნდა აკმაყოფილებდეს პირობას

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{a_{11}}{a_{12}}=-\frac{a_{12}}{a_{22}}. \tag{6}$$

ეს პირობა φ კუთხისთვის იძლევა ორ შესაძლო მნიშვნელობას; თუ ერთი მათგანია $\varphi_0$, მაშინ მეორე იქნება $\varphi_0+\pi$.

(6) ფორმულის ნაცვლად შეიძლება ვისარგებლოთ მისგან გამომდინარე შემდეგი ფორმულებითაც

$$\cos\varphi=\frac{a_{12}}{\pm\sqrt{a_{11}S}},\qquad \sin\varphi=-\frac{a_{11}}{\pm\sqrt{a_{11}S}}. \tag{6a}$$

თუ (5) განტოლებაში $x$ და $y$-ის ნაცვლად შევიტანთ მათ გამოსახულებას ახალი კოორდინატებით:

$$x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi,$$
$$y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi,$$

მაშინ იგი მიიღებს სახეს

$$Sy'^2+2a_{13}'x'+2a_{23}'y'+a_{33}=0, \tag{4a}$$

სადაც

$$\left.\begin{aligned} a_{13}' &= a_{13}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi = \frac{A_{33}}{\pm\sqrt{a_{11}S}}, \\ a_{23}' &= -a_{13}\sin\varphi + a_{23}\cos\varphi = \frac{a_{11}a_{23} + a_{12}a_{13}}{\pm\sqrt{a_{11}S}}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

გარდა ამისა, თუ კოორდინატთა სათავეს გადავიტანთ $(\alpha, \beta)$ წერტილში, სადაც

$$\alpha = -\frac{1}{2a_{13}'}\left(a_{33} - \frac{a_{23}'^2}{S}\right), \quad \beta = -\frac{a_{23}'}{S}, \tag{8}$$

წინა განტოლებას დავიყვანთ სახეზე

$$\eta^2 = 1P\xi,$$

სადაც

$$P = -\frac{a_{13}'}{S} = \pm\sqrt{-\frac{A}{S^2}}. \tag{9}$$

თუ ჩვენ გვინდა, რომ $\xi$ ღერძი მიმართული იყოს იქით, საითაც მიმართულია პარაბოლის ჩაზნექილობა, ამისათვის (6a) ფორმულებში ფესვის წინ უნდა ავიღოთ ისეთი ნიშანი, რომ $a_{13}'$ სიდიდეს ჰქონდეს $S$-ის შებრუნებული ნიშანი.

იმ შემთხვევაში, როცა $a_{11} = 0$, გვექნება აგრეთვე $a_{12} = 0$; და (4) განტოლებას თავიდანვე ექნება (4a) სახე.

3. დაბოლოს, იმ შემთხვევაში, როცა წირი იშლება ორ პარალელურ წრფედ, ამ წრფეების განტოლებანი მოცემულია ფორმულებით

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \pm \sqrt{-A_{22}} = 0 \tag{10}$$

(თუ $a_{11} \neq 0$) ან

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \pm \sqrt{-A_{11}} = 0 \tag{10a}$$

(თუ $a_{22} \neq 0$).

**სავარჯიშო § § 254—259-სათვის**

(კოორდინატები მართკუთხოვანია)

1. განსაზღვრეთ

$$x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x - 8y + 6 = 0$$

წირის ფორმა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad S = 3.$$

ვინაიდან $A_{33} > 0$, ამიტომ წირი ელიფსური ტიპისაა, და რადგანაც $A$ და $S$ სხვადასხვა ნიშნები აქვთ, ამიტომ იგი ნამდვილი ელიფსია. ნახევარღერძების განსაზღვრისათვის ამოვხსნათ კვადრატული განტოლება:

$$\lambda^2 - S\lambda + A_{33} = 0,$$

ანუ

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0,$$

საიდანაც

$$\lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

ნახევარღერძები $a$ და $b$ მოცემულია ფორმულებით:

$$a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1 A_{33}} = \frac{4}{3 - \sqrt{5}} = 3 + \sqrt{5}, \quad b^2 = \frac{4}{3 + \sqrt{5}} = 3 - \sqrt{5}.$$

2. განსაზღვრეთ

$$x^2 - 4xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$$

წირის ფორმა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad S = 2.$$

ვინაიდან $\Delta \neq 0$, $A_{33} < 0$, ამიტომ წირი ჰიპერბოლია. ნახევარღერძების განსაზღვრისათვის ამოვხსნათ განტოლება:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$$

საიდანაც

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3.$$

ნახევარღერძები მოცემულია ტოლობებით:

$$a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1 A_{33}} = 3, \quad b^2 = \frac{\Delta}{\lambda_2 A_{33}} = 1.$$

3. განსაზღვრეთ

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 - x + 2 = 0$$

წირის ფორმა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -\frac{1}{2} \\ 6 & 9 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{9}{4}, \quad A_{33} = 0, \quad S = 13.$$

რადგან $\Delta \neq 0$, $A_{33} = 0$, ამიტომ წირი პარაბოლია. მისი პარამეტრია

$$p = \sqrt{-\frac{\Delta}{S^3}} = \frac{3}{26\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{338}.$$

4. განსაზღვრეთ

$$3x^2 + 5xy + 2y^2 + 3x + 2y = 0$$

წირის ფორმა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{33} = -\frac{1}{4}, \quad S = 5.$$

•რადგან $A=0$, ამიტომ წირი იშლება ორ წრფედ. ვინაიდან $A_{33}<0$, ამიტომ ეს წრფეები ნამდვილია, რომლებიც სასრულ მანძილზე გადაიკვეთებიან.

ამ წრფეებს შორის კუთხე $2\alpha$ შეიძლება განისაზღვროს § 258-ის (6) ფორმულით:

$$\cos 2\alpha=\frac{S}{\sqrt{S^2-4A_{33}}}=\frac{5}{\sqrt{25}}.$$

5. განსაზღვრეთ

$$4x^2-20xy+25y^2+4x-10y-8=0$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს:

$$A=\begin{vmatrix} 4 & -10 & 2\\ -10 & 25 & -5\\ 2 & -5 & -8\end{vmatrix}=0,\quad A_{33}=0.$$

მაშასადამე, ჩვენ გვაქვს ორი პარალელური წრფის ერთობლიობა. ამ წრფეების მოსაძებნად, მოცემული განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$(2x-5y+1)^2-9=0,$$

საიდანაც ვღებულობთ ორი პარალელური წრფის განტოლებებს

$$2x-5y+4=0 \text{ და } 2x-5y-2=0.$$

მანძილი $h$ ამ წრფეებს შორის მოიცემა ფორმულით

$$h=\frac{6}{\sqrt{29}}.$$

6. განსაზღვრეთ

$$10x^2+6xy+12y^2+40=0$$

წირის ფორმა.

ა ბ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს:

$$A=\begin{vmatrix} 10 & 3 & 0\\ 3 & 12 & 0\\ 0 & 0 & 40\end{vmatrix}=4440,\quad A_{33}=111,\quad S=22.$$

რადგანაც $A_{33}>0$ და $A$-ს იგივე ნიშანი აქვს, რაც $S$-ს, ამიტომ წირი წარმოსახვითია (წარმოსახვითი ელიფსი).

7. განსაზღვრეთ

$$10x^2+6xy+12y^2=0$$

წირის ფორმა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს:

$$A=0,\quad A_{33}=111.$$

ვინაიდან $A=0$, ამიტომ ჩვენ გვაქვს ორი წრფის ერთობლიობა; რადგან $A>0$, ამიტომ ეს წრფეები წარმოსახვითია (რომლებიც იკვეთებიან ნამდვილ წერტილში $x=0$, $y=0$).

8. მოძებნეთ ელიფსის მდებარეობა სიბრტყეზე პირველ სავარჯიშო მაგალითში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცენტრის კოორდინატები განისაზღვრება განტოლებებიდან

$$x+y-2=0,\quad x+2x-4=0,$$

საიდანაც

$$x=0,\quad y=2.$$

კუთხე φ, რომელსაც ელიფსის დიდი ღერძი $Ox$ ღერძთან ადგენს, განისაზღვრება ფორმულით

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{2}{1-2} = -2$$

და დამატებითი პირობით, რომ $\sin 2\varphi < 0$, ვინაიდან

$$\sin 2\varphi = \frac{2a_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{2}{-\sqrt{5}} < 0.$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $2\varphi$ მოთავსებულია 0 და $2\pi$ შორის, ვხედავთ, რომ $2\varphi$ იმყოფება მეოთხე მეოთხედში.

9. მოძებნეთ პარაბოლის მდებარეობა სიბრტყეზე მესამე სავარჯიშო მაგალითში.

ა მ ო ხ ს ნ ა [1]). პარაბოლის განტოლება გადავწეროთ ასე:

$$(2x+3y)^2 - x + 2 = 0.$$

შემდეგ კოორდინატთა ღერძები მოვაბრუნოთ ისე, რომ

$$2x+3y = ky' = k(-x\sin\varphi + y\cos\varphi),$$

საიდანაც

$$-k\sin\varphi = 2,\quad k\cos\varphi = 3,\quad k^2 = 13,\quad k = \sqrt{13}\ \text{(ვილებთ + ნიშანს)},$$

$$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}},\quad \sin\varphi = \frac{-2}{\sqrt{13}}.$$

მაშასადამე, ჩვენი განტოლება დაიყვანება შემდეგ სახეზე (გავიხსენოთ, რომ $x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$)

$$13y'^2 - \frac{3x'}{\sqrt{13}} - \frac{2y'}{\sqrt{13}} + 2 = 0.$$

ვიგულისხმოთ, გარდა ამისა, რომ $x' = \alpha + \xi$, $y' = \beta + \eta$; მივიღებთ

$$13\eta^2 + \left(26\beta - \frac{2}{\sqrt{13}}\right)\eta - \frac{3}{\sqrt{13}}\xi - \frac{3\alpha}{\sqrt{13}} - \frac{2\beta}{\sqrt{13}} + 13\beta^2 + 2 = 0.$$

ახლა შევარჩიოთ $\alpha$ და $\beta$ ასეთი პირობებიდან:

$$26\beta - \frac{2}{\sqrt{13}} = 0,\quad -\frac{3\alpha}{\sqrt{13}} - \frac{2\beta}{\sqrt{13}} + 13\beta^2 + 2 = 0$$

საიდანაც

$$\alpha = \frac{337}{507}\sqrt{13},\quad \beta = \frac{\sqrt{13}}{169}.$$

**§ 260. ორი მეორე რიგის წირის მსგავსების პირობა.** წინა პარაგრაფებში ნათქვამის ძალით, ადვილად შეიძლება დავამტკიცოთ ერთი მარტივი დებულება, რომელიც ხშირად სასარგებლო აღმოჩნდება.

თუ ორი მოცემული ნამდვილი, დაუშლადი მეორე რიგის წირის განტოლებებში

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

[1]) აქ ჩვენ ღერძთა მაგალითზე ვიმეორებთ ზოგად შემთხვევაში ჩატარებულ მსჯელობას და გამოთვლებს.

და

$$a_{11}'x^2 + 2a_{12}'xy + a_{22}'y^2 + 2a_{13}'x + 2a_{23}'y + a_{33}' = 0 \qquad (2)$$

კოეფიციენტები მეორე განზომილების წევრებთან პროპორციულია, ე. ი., თუ

$$\frac{a_{11}'}{a_{11}} = \frac{a_{12}'}{a_{12}} = \frac{a_{22}'}{a_{22}}, \qquad (3)$$

მაშინ ეს წირები ჰომოთეტურია; გამონაკლისს შეიძლება ადგილი ჰქონდეს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ეს წირები ჰიპერბოლებია. ამ შემთხვევაში, ჰიპერბოლები ან ჰომოთეტურია, ან ერთი მათგანი მეორის შეუღლებული ჰიპერბოლის ჰომოთეტურია.

მართლაც, თუ ადგილი აქვს (3) პირობას, მაშინ, ერთ-ერთი განტოლების გამრავლებით სათანადოდ შერჩეულ მამრავლზე, ჩვენ შეგვიძლია მივაღწიოთ იმას, რომ მეორე განზომილების წევრთა კოეფიციენტები ორივე განტოლებაში თანატოლი იყოს, ე. ი., რომ

$$a_{11}' = a_{11},\ a_{12}' = a_{12},\ a_{22}' = a_{22}. \qquad (3a)$$

რადგანაც წირის ტიპი (ელიფსური, ჰიპერბოლური, პარაბოლური) განისაზღვრება მხოლოდ მეორე განზომილების წევრთა კოეფიციენტებით, ამიტომ ორივე წირი ერთი და იმავე ტიპისაა.

პირველად განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა წირები პარაბოლებია. ვინაიდან პარაბოლის ღერძის მიმართულება განისაზღვრება მხოლოდ მეორე განზომილების წევრთა კოეფიციენტებით, ამიტომ ამ პარაბოლების ღერძები პარალელურია. მაშასადამე, ჩვენი პარაბოლები ჰომოთეტურია (ვინაიდან მათი წვეროები და ღერძები შეიძლება ერთმანეთს დავამთხვიოთ ერთი მათგანის გადატანხთი გადაადგილებით).

ახლა გადავიდეთ ცენტრალური წირების შემთხვევაზე. თუ კოორდინატთა სათავეს გადავიტანთ (1) წირის ცენტრში, მაშინ, როგორც ვიცით, მისი განტოლება შიიღებს სახეს:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0 \qquad (1a)$$

(სიმარტივისათვის ახალი კოორდინატები იმავე ასოებით აღვნიშნეთ).

სრულიად ასევე, მეორე წირის განტოლება, რომელიც დაწერილია ძველი ღერძების პარალელური ღერძების მიმართ, რომლის სათავე ამ წირის ცენტრშია, იქნება:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{A'}{A_{33}} = 0, \qquad (2a)$$

სადაც $A'$ აღნიშნავს (2) განტოლების მარცხენა მხარის „დიდ" დისკრიმინანტს (ორივე განტოლების მარცხენა მხარის $A_{33}$ დისკრიმინანტები თანატო-

ლია, რადგან მათში, პირობის თანახმად, მეორე განზომილების წევრთა კოეფიციენტები თანატოლია).

(1a) და (2a) განტოლებანი დაწერილია ორი სხვადასხვა სისტემის კოორდინატთა ღერძების მიმართ, რომლებიც ერთმანეთისგან განსხვავდებიან მხოლოდ სათაყის მდებარეობით. გადავაადგილოთ გადატანითი მოძრაობით ერთ-ერთი ამ სისტემათაგანი, შესაბამის წირთან ერთად, ისე რომ კოორდინატთა სათაყეები ერთმანეთს დაემთხვეს, მაშინ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ (1a) და (2a) განტოლებანი დაწერილია ერთი და იმავე სისტემის ღერძების მიმართ.

(1a) წირის ყოველ $(x, y)$ წერტილს შევუსაბამოთ $(x', y')$ წერტილი, რომელიც მასთან დაკავშირებულია დამოკიდებულებებით

$$x = kx', \quad y = ky', \quad (k \neq 0);$$

მაშინ (1a) წირი გადაიქცევა შემდეგ წირად:

$$a_{11}k^2x'^2 + 2a_{12}k^2x'y' + a_{22}k^2y'^2 + \frac{\Delta}{\Delta_{33}} = 0,$$

ანუ

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{\Delta}{k^2\Delta_{33}} = 0, \tag{1b}$$

რომელიც ჰომოთეტური იქნება (1a) წირისა, ჰომოთეტიის ცენტრით კოორდინატთა სათაყეში და მსგავსების შეფარდებით $k$.

(1b) წირი დაემთხვევა (1a) წირს, თუ

$$\frac{\Delta}{k^2\Delta_{33}} = \frac{\Delta'}{\Delta_{33}}, \quad \text{ე. ი.} \quad k^2 = \frac{\Delta}{\Delta'}. \tag{4}$$

თუ მოცემული წირები (ნამდვილი) ელიფსებია, მაშინ $\Delta$ და $\Delta'$ აუცილებლად ერთი და იმავე ნიშნისაა [1]) და, მაშასადამე, ასეთი $k$ ყოველთვის შეიძლება შეეარჩიოთ; ამგვარად, მოცემული ელიფსები ჰომოთეტურია.

თუ მოცემული წირები ჰიპერბოლებია, ისინი ჰომოთეტური იქნებიან, მაშინ, როდესაც $\Delta$ და $\Delta'$ ერთნაირი ნიშნები აქვთ. თუ $\Delta$ და $\Delta'$ სხვადასხვა ნიშანი აქვს, მაშინ (2a) ჰიპერბოლი ჰომოთეტური იქნება (1a) ჰიპერბოლის შეუღლებული ჰიპერბოლისა [2]).

ამგვარად, ჩვენი დებულება სავსებით დამტკიცებულია.

---

[1]) ვინაიდან $\Delta$ და $\Delta'$ ნიშნები უნდა ემთხვეოდეს $S = a_{11} + a_{22}$ ნიშანს (§ 257).

[2]) ორი ჰიპერბოლი, რომლებიც მოცემულია განტოლებებით

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + k = 0 \text{ და } a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - k = 0$$

ურთიერთ შეუღლებულია, რადგანაც ღერძების ერთი და იმავე მობრუნებით, რომლითაც $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{12}y^2$ კვადრატული ფორმა კანონიკურ სახეზე დაიყვანება, მათი განტოლებები შეიძლება დავიყვანოთ შემდეგ სახეზე:

$$\lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 + k = 0 \text{ და } \lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 - k = 0.$$

ადვილად შეიძლება მოვძებნოთ აგრეთვე (1) და (2) წირების მსგავსების ნიშანი (აუცილებელი ჰომოთეტობის გარეშე). წინანდებურად ვიგულისხმოთ, რომ მოცემული წირები ნამდვილია და ერთმანეთს არ ჰკვეთენ; გარდა ამისა, სიმარტივისათვის ვიგულისხმებთ, რომ კოორდინატთა ღერძები მართკუთხოვანია.

თუ მოცემული წირები ელიფსები ან ჰიპერბოლებია, მაშინ მათი მსგავსებისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ მათი ნახევარღერძები პროპორციული იყოს (§ 207). ე. ი. რომ

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{ანუ} \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{b'^2}{a'^2}$$

[შტრიხებით ჩვენ აღვნიშნავთ (2) წირის შესაბამის სიდიდეებს].

მეორეს მხრივ, § 258-ის (2) და (3) ფორმულების ძალით გვაქვს

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \text{(ელიფსის შემთხვევაში)},$$

$$\frac{b^2}{a^2} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \text{ (ჰიპერბოლის შემთხვევაში)},$$

სადაც $\lambda_1$ და $\lambda_2$ ფესვებია განტოლებისა

$$\lambda^2 - S\lambda + A_{33} = 0. \qquad (*)$$

ანალოგიურად

$$\frac{b'^2}{a'^2} = \frac{\lambda_1'}{\lambda_2'} \text{ (ელიფსის შემთხვევაში)};$$

$$\frac{b'^2}{a'^2} = -\frac{\lambda_1'}{\lambda_2'} \text{ (ჰიპერბოლის შემთხვევაში)},$$

სადაც $\lambda_1'$ და $\lambda_2'$ ფესვებია განტოლებისა

$$\lambda'^2 - S'\lambda' + A_{33}' = 0. \qquad (**)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ (**) განტოლების ფესვები პროპორციული უნდა იყოს (*) განტოლების ფესვებისა.

თუ დავუშვებთ, რომ $\lambda_1' = k\lambda_1$, $\lambda_2' = k\lambda_2$, სადაც $k$ პროპორციულობის კოეფიციენტია, დავრწმუნდებით, რომ $\lambda_1$ და $\lambda_2$ უნდა აკმაყოფილებდნენ განტოლებას

$$k^2\lambda^2 - S'k\lambda + A_{33}' = 0,$$

ანუ

$$\lambda^2 - \frac{S'}{k}\lambda + \frac{A_{33}'}{k^2} = 0.$$

რომელიც (**) განტოლებიდან $\lambda' = k\lambda$ ჩასმით მიიღება. ვინაიდან უკანასკნელ განტოლებას იგივე ფესვები უნდა ჰქონდეს, რაც (*) განტოლებას, ამიტომ უნდა იყოს

$$\frac{S'}{k} = S, \quad \frac{A_{33}'}{k^2} = A_{33}$$

ანუ

$$S' = kS, \quad A_{33}' = k^2 A_{33}, \qquad (5)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{S'^2}{A_{33}'} = \frac{S^2}{A_{33}}. \qquad (6)$$

პირიქით, თუ დაცულია (6) პირობა მაშინ, ცხადია, ყოველთვის შეიძლება შევარჩიოთ ისეთი $k$, ოომ დაცული იყოს (5) პირობები.

(6) პირობა არის აუცილებელი პირობა წირების მსგავსებისა. იგი აგრეთვე საკმარისია, როცა $A_{33}>0$, ე. ი. როცა—წირები ელიფსებია; თუკი წირები ჰიპერბოლებია ($A_{33}<0$), მაშინ, როცა დაცულია (6) პირობა, ისინი ან ურთიერთ მსგავსნი იქნებიან, ან ერთი მათგანი მეორის შეულებული ჰიპერბოლის მსგავსი იქნება. მართლაც, ელიფსების შემთხვევაში $\lambda_1'=k\lambda_1$, $\lambda_2'=k\lambda_2$ პროპორციებიდან, § 258-ის (2) ფორმულის ძალით, გამომდინარეობს

$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{b'^2}{a'^2},$$

ე. ი. — ელიფსების მსგავსება.

ჰიპერბოლების შემთხვევაში (ე. ი. $A_{33}<0$), თუ $\lambda_1$ და $\lambda_2$ შეესაბამებიან (1) ჰიპერბოლის გრძივ და განივ ღერძებს, მაშინ $\lambda_1'=k\lambda_1$ და $\lambda_2'=k\lambda_2$ შეესაბამებიან (2) ჰიპერბოლის როგორც გრძივ და განივ ღერძებს, ისე განივ და გრძივ ღერძებს. მაშასადამე, გვექნება ან

$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{b'^2}{a'^2}$$

ან

$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{a'^2}{b'^2},$$

ეს კი ამტკიცებს ჩვენს დებულებას.

ბოლოს, როცა $A_{33}=0$, (1) წირი პარაბოლია; მაშასადამე, მისი მსგავსი წირიც პარაბოლი უნდა იყოს, ე. ი. უნდა იყოს $A_{33}'=0$. პირიქით, თუ $A_{33}=A_{33}'=0$, მაშინ მოცემული წირები პარაბოლებია და, მაშასადამე, ურთიერთ მსგავსი.

**§ 261. ორი მეორე რიგის წირის კონგრუენტობის პირობა.** $A$, $A_{33}$, $S$ ორთოგონალურ ინვარიანტთა ხისტემის ხისრულის დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია ორი მეორე რიგის წირი:

$$F(x,\ y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0, \tag{1}$$

$$F'(x',\ y')=a_{11}'x'^2+2a_{12}'x'y'+a_{22}'y'^2+2a_{13}'x'+2a_{23}'y'+a_{33}'=0, \tag{2}$$

ერთი და იმავე სისტემის მართკუთხა ღერძების მიმართ (სიმარტივისათვის შტრიხებით ჩვენ აღვნიშნეთ მეორე წირის წერტილთა კოორდინატები, თუმცა ორივე წირი, როგორც ნათქვამი იყო, აღებულია ერთი და იმავე სისტემის ღერძების მიმართ).

მოვახდინოთ (2) განტოლებაში ჩასმა:

$$\left.\begin{aligned} x'&=x\cos\varphi+y\sin\varphi+\alpha',\\ y'&=-x\sin\varphi+y\cos\varphi+\beta'. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

მაშინ (2) განტოლება მიიღებს სახეს

$$F''(x,\ y)=a_{11}''x^2+2a_{12}''xy+a_{22}''y^2+2a_{13}''x+2a_{23}''y+a_{33}''=0 \tag{2a}$$

იმ ჩასმას, რომელიც, პირიქით, $x$, $y$-ს გამოსახავს $x'$, $y'$-ით, ექნება სახე

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\varphi+y'\sin\varphi+\alpha,\\ y&=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi+\beta. \end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

ახლა განვიხილოთ (3) ანუ (3a) ჩასმა არა როგორც კოორდინატთა გარდაქმნა, არამედ როგორც მოძრაობის გამომსახველი ფორმულები.

თუ მოცემული (1) და (2) წირები კონგრუენტულია, მაშინ ერთი მათგანი მოძრაობით შეიძლება შევუთავსოთ მეორეს, ე. ი. უნდა არსებობდეს (3) სახის ისეთი ჩასმა, რომლის შემ-

დეგ (2) განტოლება გადაიქცევა (2a) განტოლებად, რომელიც გამოსახავს იმავე წირს, რასაც (1) განტოლება. პირიქით, თუ ასეთი ჩასმა არსებობს, ცხადია, მაშინ წირები კონგრუენტულია.

თუ (1) და (2a) განტოლებანი ერთსა და იმავე წირს გამოსახავენ, მაშინ ადგილი უნდა ჰქონდეს იგივეობას

$$F'(x, y) \equiv kF(x, y),$$

სადაც $k$ რაიმე მუდმივია, ე. ი. ტოლობას

$$F'(x', y') = kF(x, y),$$

რომელიც იგივეობა უნდა იყოს, თუ მარცხენა მხარეში $x'$, $y'$-ის ნაცვლად ვიგულისხმებთ მათ (3) გამოსახვებს.

სანამ გამოვარკვევდეთ, თუ რა პირობებშია ეს შესაძლებელი, გამოვარკვიოთ შემდეგი საკითხი:

რა პირობებით უნდა იყოს $F(x, y)$ და $F'(x', y')$ პოლინომების კოეფიციენტები ურთიერთდაკავშირებული იმისათვის, რომ შეიძლებოდეს ამ პოლინომების ერთმანეთზე დაყვანა (3) სახის ჩასმით?, ე. ი. რა პირობებში შეიძლება გვქონდეს იგივეობა

$$F'(x', y') \equiv F(x, y),$$

სადაც მარცხენა მხარეში $x'$ და $y'$-ის ნაცვლად უნდა ვიგულისხმოთ მათი (3) გამოსახვები.

თუ შესაძლებელია (3) ჩასმის ხსენებული წესით შერწყმა, მაშინ $F(x, y)$ და $F'(x', y')$ პოლინომებს ეწოდება ეკვივალენტური[1]) მოძრაობის მიმართ, ე. ი. (3) ანუ (3a) სახის გარდაქმნის მიმართ.

ამგვარად, ჩვენ ვსვამთ მოცემული $F$ და $F'$ პოლინომების ეკვივალენტობის საკითხს.

ამ საკითხზე პასუხის გაცემა არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს. ვთქვათ, $A$, $A_{33}$, $S$ არის $F(x, y)$ პოლინომისათვის შედგენილი ინვარიანტები, ხოლო $A'$, $A'_{33}$, $S'$ — $F'(x', y')$ პოლინომისათვის შედგენილი ინვარიანტები. რადგანაც ერთი პოლინომი შეიძლება მიღებული იყოს მეორესაგან (3) სახის ჩასმით, ამიტომ, თვით ინვარიანტის განმარტების ძალით:

$$A = A', \quad A_{33} = A_{33}', \quad S = S'. \tag{4}$$

ამგვარად, $F(x, y)$ და $F'(x', y')$ პოლინომთა ეკვივალენტობისათვის (4) პირობა აუცილებელია.

დავამტკიცოთ, რომ ეს პირობა აგრეთვე საკმარისია, თუ გამოვრიცხავთ იმ შემთხვევას, როცა $A = A_{33} = 0$.

მართლაც, თუ $A_{33} \neq 0$, მაშინ, როგორც ნაჩვენები იყო § 254-ში, (3) სახის ჩასმით, ორივე პოლინომი $F(x, y)$ და $F'(x', y')$ შეიძლება დაყვანილი იყოს სახეზე

$$\lambda_1 \xi^3 + \lambda_2 \eta^3 + \frac{A}{A_{33}},$$

სადაც $\lambda_1$ და $\lambda_2$ დამოკიდებული არიან მხოლოდ და მხოლოდ $A_{33}$ და $S$ ინვარიანტებზე, და, მაშასადამე, ორივე პოლინომისათვის ერთი და იგივენი არიან.

იმ შემთხვევაში კი, როცა $A_{33} = 0$, $A \neq 0$, ორივე პოლინომი შეიძლება დავიყვანოთ სახეზე (§ 255)

$$S\eta^3 + 2\sqrt{-\frac{A}{S}}\,\xi.$$

---

[1]) ეს განსაზღვრა ვრცელდება კომპლექსურ კოეფიციენტებიან პოლინომებზეც. თუმცა აქ ჩვენ, როგორც ზემოთ, ვგულისხმობთ, რომ კოეფიციენტები $a_{11}, \ldots, a_{33}$ ნამდვილი რიცხვებია.

ორივე შემთხვევაში ორივე პოლინომი ეკვივალენტურია ერთი და იმავე მესამე პოლინომისა, და ამიტომ, ცხადია, ეკვივალენტური იქნებიან ერთმანეთისაც.

ამნაირად, ჩვენი დებულება დამტკიცებულია. გამონაკლის შემთხვევაში, როცა $A=A_{33}=0$, (4) პირობა უკვე აღარ უზრუნველყოფს ეკვივალენტობას; მაგრამ ამ შემთხვევაში საკმარისია დავუმატოთ კიდევ ერთი პირობა

$$H=H', \tag{5}$$

სადაც $H=A_{11}+A_{22}$, § 256-ში შემოღებული, პირობითი ინვარიანტია. მართლაც, ამ შემთხვევაში ორივე პოლინომი შეიძლება დაყვანილი იყოს სახეზე

$$S_1^2+\frac{H}{S}.$$

ამგვარად, ჩვენ გვაქვს შემდეგი მნიშვნელოვანი დებულება:

$F(x, y)$ და $F'(x', y')$ პოლინომების ეკვივალენტობისათვის აუცილებელია, რომ $A$, $A_{33}$, $S$ ინვარიანტები ორივე პოლინომისათვის ერთი და იგივე იყოს. ეს პირობა არა საკმარისი შეიძლება იყოს მხოლოდ მაშინ, როცა $A=A_{33}=0$. ამ შემთხვევაში ეკვივალენტობისათვის საკმარისია, ხსენებული ინვარიანტების გარდა, თანატოლი იყოს პირობითი ინვარიანტებიც $H$.

დამტკიცებული დებულება საშუალებას გვაძლევს გამოვარკვიოთ კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი საკითხი.

წინა პარაგრაფებში ჩვენ მოვძებნეთ სამი ინვარიანტი $A$, $A_{33}$, $S$ (მართკუთხა კოორდინატებში). ცხადია, რომ ამ სიდიდეთა ყოველი (ცალსახა) ფუნქცია, მაგალითად $A^2$, $A\cdot A_{33}$, $\frac{A}{S^3}$ და ა. შ., აგრეთვე ინვარიანტი იქნება. ბუნებრივად ისმება საკითხი: არსებობს თუ არა $A$, $A_{33}$, $S$ ინვარიანტების გარდა სხვა ინვარიანტები, რომლებიც არ არიან მათი ფუნქცია.

პასუხი არსებითად უარყოფითია და მოცემულია შემდეგი დებულებით: თუ გამოვრიცხავთ კოეფიციენტთა იმ მნიშვნელობებს, რომლებისთვისაც $A=A_{33}=0$, მაშინ ყოველი ინვარიანტი $J$ არის $A$, $A_{33}$, $S$ სამი ინვარიანტის ფუნქცია. მართლაც, განმარტების თანახმად, ინვარიანტი $J$ არის $F(x, y)$ პოლინომის $a_{11}, \ldots a_{33}$ კოეფიციენტთა ისეთი ფუნქცია, რომელსაც ის თვისება აქვს, რომ იგი უცვლელი რჩება (3) სახის ჩასმების დროს, ე. ი. უცვლელი რჩება $F(x, y)$ პოლინომის კოეფიციენტების შეცვლის დროს ზუსტად მისი ეკვივალენტური პოლინომის კოეფიციენტებით.

მაგრამ თუ $A$, $A_{33}$, $S$ ინვარიანტები მოცემულია (სადაც $A=A_{33}=0$ მნიშვნელობანი გამორიცხულია), მაშინ, თუმცა ამ მნიშვნელობებს შეიძლება სხვადასხვა $F(x, y)$ პოლინომი შეესაბამებოდეს, მაგრამ ყველა ეს პოლინომი ეკვივალენტური იქნებიან და, მაშასადამე $J$-ს ექნება სავსებით განსაზღვრული მნიშვნელობა; ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $J$ არის $A$, $A_{33}$, $S$-ის ფუნქცია.

გარდა ამისა, ცხადია, ჩვენი დებულება შეიძლება დავახუსტოთ ასე: ყოველი ინვარიანტი $J$, კოეფიციენტთა იმ მნიშვნელობებისათვის, როცა ადგილი არა აქვს $A=A_{33}=0$ პირობას, არის $A$, $A_{33}$, $S$ ინვარიანტთა გარკვეული ფუნქცია; ხსენებული პირობის შემთხვევაში კი, $J$ არის $S$-ის და პირობითი $H$ ინვარიანტის ფუნქცია.

თუ ყურადღებას არ მივაქცევთ გამონაკლისს, რომელსაც შეიძლება ადგილი ჰქონდეს, როცა $A=A_{33}=0$, ამბობენ, რომ $A$, $A_{33}$, $S$ ინვარიანტების სისტემა სრულია, იმ აზრით, რომ ყოველი სხვა ინვარიანტი მათი ფუნქციაა. ჩვენ ვნახეთ, რომ ნამდვილი სისრულისათვის, როცა $A=A_{33}=0$, საჭიროა დავუმატოთ კიდევ პირობითი ინვარიანტი $H$.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ თუ $J$ არის $a_{11}, \ldots a_{33}$ კოეფიციენტთა განუწყვეტელი ფუნქცია, მაშინ იგი იქნება $A$, $A_{33}$, $S$ სიდიდეთა ფუნქცია ხსენებულ გამონაკლის შემთხვევაშიც. გარდა ამისა, შეიძლება დამტკიცდეს, რომ თუ $J$ არის $a_{11}, \ldots a_{33}$ სიდიდეთა რაციონალური ფუნქცია, მაშინ ის იქნება რაციონალური ფუნქცია $A$, $A_{33}$, $S$ სიდიდეებისაც. ამ დებულებათა დამტკიცებაზე ჩვენ აღარ შევჩერდებით.

ახლა დავუბრუნდეთ

$$F(x,\ y)=0 \text{ და } F'(x',\ y')=0$$

განტოლებებით მოცემული წირების კონგრუენტობის საკითხს.

ზემონათქვამის ძალით ცხადია, რომ წირები კონგრუენტულია მხოლოდ მაშინ, როცა $k\neq 0$ თანამამრავლის სათანადო შერჩევისას $F(x,\ y)$ პოლინომები ეკვივალენტურია.

თუ $F'(x',\ y')$ პოლინომისათვის შედგენილი ინვარიანტებია $A'$, $A_{33}'$ და $S'$, მაშინ ცხადია, რომ $kF'(x',\ y')$ პოლინომისათვის შედგენილი შესაბამისი ინვარიანტები იქნება

$$k^3A',\ k^2A'_{33},\ kS',$$

და მაშასადამე, $F$ და $kF'$ პოლინომთა ეკვივალენტობისათვის, ე. ი. $F=0$ და $F'=0$ წირების კონგრუენტობისათვის, უნდა გვქონდეს:

$$A=k^3A',\ A_{33}=Ak_{33}',\ S=kS', \tag{6}$$

სადაც $k$ ნულისგან განსხვავებული რაიმე რიცხვია.

ეს პირობა აგრეთვე საკმარისია, თუ $A$ და $A_{33}$ ინვარიანტები ერთდროულად ნულად არ იქცევიან.

თუ გამოვრიცხავთ $k$-ს, (6) პირობა შეგვიძლია გადავწეროთ ასე:

$$\frac{A^2}{A'^3}=\frac{A_{33}{}^3}{A_{33}{}'^3}=\frac{S^6}{S'^6}. \tag{7}$$

მაშასადამე, $F=0$ და $F'=0$ ორი წირის კონგრუენტობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ერთი წირისათვის შედგენილი ინვარიანტები $A^2$, $A_{33}{}^3$, $S^6$, პროპორციული იყოს მეორე [1]) წირის შესაბამისი ინვარიანტებისა.

გამონაკლისს შეიძლება წარმოადგენდეს $A=A_{33}=0$ შემთხვევა. ამ შემთხვევაში, (6) პირობის ნაცვლად, ცხადია, გვექნება პირობა:

$$S=kS',\ H=k^2H', \tag{6a}$$

ანუ

$$\frac{S^3}{S'^2}=\frac{H}{H'}. \tag{8}$$

### სავარჯიშო მაგალითები

1. ამ პარაგრაფში მიღებული შედეგების მიხედვით გამოვიყვანოთ იმის პირობა, რომ $F(x,\ y)=0$ განტოლება წარმოადგენდეს $r$ რადიუსიან წრეხაზს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვიგულისხმოთ, რომ კოორდინატები მართკუთხოვანია. საკითხი დაიყვანება მოცემული წირისა და $x^2+y^2-r^2=0$ წრეხაზის კონგრუენტობის პირობის გამორკვევაზე. წრეხაზის შესაბამის ინვარიანტებს შემდეგში შტრიხებით აღვნიშნავთ. გვაქვს

$$A'=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-r^2,\end{vmatrix}=-r^3,\ A_{33}'=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1,\ S'=2.$$

(6) პირობები მიიღებენ სახეს

$$A=-k^3r^3,\ A_{33}=k^2,\ S=2k.$$

[1]) (7) პროპორცია, როგორც ყოველთვის, უნდა გვესმოდეს იმ აზრით, რომ ერთ-ერთი მნიშვნელი ნულის ტოლი გახდება, მაშინ შესაბამისი წილადის მრიცხველიც უნდა გაუტოლდეს ნულს, ხოლო თვით წილადი პროპორციიდან უნდა ამოიშალოს.

ორი უკანასკნელი პირობიდან ვღებულობთ, რომ $A_{33}=\frac{S^2}{4}$, ანუ

$$4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)=(a_{11}+a_{22})^2=a_{11}^2+a_{22}^2+2a_{11}a_{22},$$

ან კიდევ (თუ ყველა წევრს ერთ მხარეზე გადავიტანთ)

$$(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2=0.$$

რადგან კოეფიციენტებად ნამდვილ რიცხვებს ვგულისხმობთ, ამიტომ უკანასკნელ ტოლობას მხოლოდ მაშინ შეიძლება ადგილი ჰქონდეს, როცა $a_{12}=0$ და $a_{11}-a_{22}=0$. ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ სხვა გზით იგივე პირობები, რაც ზემოთ (§ 239). $r^2$-სათვის მივიღებთ გამოსახულებას:

$$r^2=-\frac{A}{k^3}=-\frac{8A}{S^3}.$$

მაგრამ ჩვენს შემთხვევაში $a_{11}=a_{22}$, $a_{12}=0$; მაშასადამე, $S=2a_{11}$ და

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{11} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}^2a_{33}-a_{11}a_{23}^2-a_{11}a_{13}^2=a_{11}(a_{11}a_{33}-a_{13}^2-a_{23}^2),$$

საიდანაც

$$r^2=\frac{a_{13}^2+a_{23}^2-a_{21}a_{33}}{a_{11}^3},$$

რაც აგრეთვე ემთხვევა § 229-ის შედეგს. იმისათვის, რომ წრეხაზი იყოს ნამდვილი, დაცული უნდა იყოს პირობა

$$a_{13}^2+a_{23}^2-a_{21}a_{33}>0.$$

2. გამოვარკვიოთ აუცილებელი და საკმარისი პირობები იმისა, რომ $F(x, y)=0$ განტოლება გამოსახავდეს ტოლფერდა ჰიპერბოლს (კოორდინატები მართკუთხოვანია).

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამისათვის მოცემული წირი კონგრუენტული უნდა იყოს

$$x^2-y^2-a^2=0$$

წირისა, სადაც $a$ — მუდმივია. ამ უკანასკნელისთვის გვაქვს:

$$A'=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{vmatrix}=a^2,\ A_{33}'=-1,\ S'=0.$$

(6) პირობები გვაძლევენ

$$A=k^2a^2,\ A_{33}=-k^2,\ S=0. \qquad (*$$

მაშასადამე, საძიებელი პირობები დაიყვანებიან შემდეგზე:

$$S=0,\ A_{33}<0.$$

თუ ეს პირობები დაცულია, მაშინ ყოველთვის შეიძლება მოვძებნოთ ისეთი $k$ და $a$ რიცხვები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (*) პირობას; სახელდობრ, მივიღებთ:

$$k=\pm\sqrt{-A_{33}},\ a^2=\frac{A}{\pm\sqrt{-A_{33}}},$$

სადაც ფესვის წინ ისეთი ნიშანი უნდა ავიღოთ, რომ

$$a^2>0.$$

## თავი მეთერთმეტე

# მეოთხე რიგის ფართეულების ძირითადი თვისებები, მხები სიბრტყე, ცენტრი, დიამეტრები

ახლა გადავდივართ მეორე რიგის ფართეულთა შესწავლაზე; ამასთანავე, ჩვენ დაწვრილებით არ შევჩერდებით იმ შედეგებზე, რომლებიც მიიღებიან შესაბამისი მეორე რიგის წირის შემთხვევის ანალოგიურად.

## I. გეგმილური კლასიფიკაცია. მხები სიბრტყე

**§ 262. აღნიშვნები.** მეორე რიგის ფართეულის განტოლებას დეკარტის არაერთგვაროვან კოორდინატებში აქვს სახე

$$F(x,\ y,\ z)=0, \tag{1}$$

სადაც $F(x,\ y,\ z)$ მეორე ხარისხის პოლინომია; უზოგადეს შემთხვევაში

$$F(x,\ y,\ z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy+ \\ 2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+2a_{44}, \tag{2}$$

სადაც $a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{44}$ მუდმივი კოეფიციენტებია (რიცხვით 10) [1].

დეკარტის ერთგვაროვან $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ კოორდინატებში, რომლებიც მოცემულია ფორმულებით:

$$x=\frac{x_1}{x_4},\quad y=\frac{x_2}{x_4},\quad z=\frac{x_3}{x_4},$$

ეს განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=0. \tag{1a}$$

სადაც $\Phi$—მეორე რიგის ერთგვაროვანი პოლინომია (კვადრატული ფორმა):

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{23}x_2x_3+ \\ +2a_{31}x_3x_1+2a_{12}x_1x_2+2a_{14}x_1x_4+2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4+a_{44}x_4^2, \tag{3}$$

---

[1]) როცა ლაპარაკია (1) პოლინომის კოეფიციენტებზე, მოხერხებულობის მიხედვით, ჩვენ $a_{23}$-ის ნაცვლად დავწერთ $a_{32}$, $a_{31}$-ის ნაცვლად—$a_{13}$-ს და ა. შ., ე. ი. ვიგულისხმებთ, რომ $a_{ij}$ და $a_{ji}$ $(i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ ერთსა და იმავე სიდიდეს აღნიშნავენ.

რომელიც $F(x, y, z)$ პოლინომად გადაიქცევა თუ დავუშვებთ, რომ

$$x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z,\ x_4=1.$$

ისე რომ

$$F(x, y, z)=\Phi(x, y, z, 1). \tag{4}$$

შემდეგში ჩვენ ვიხმართ აგრეთვე შემდეგ აღნიშვნებს (შეადარეთ § 208):

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_1&=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4,\\
\Phi_2&=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4,\\
\Phi_3&=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4,\\
\Phi_4&=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_4}=a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4,
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

და, ანალოგიურად:

$$\left.\begin{aligned}
F_1&=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14},\\
F_2&=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y}=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24},\\
F_3&=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z}=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

აქაც ადგილი აქვს „ეილერის იგივეობას“ (შეადარეთ § 208)

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1\Phi_1+x_2\Phi_2+x_3\Phi_3+x_4\Phi_4 \tag{7}$$

და ანალოგიურ იგივეობას

$$\begin{aligned}F(x, y, z)=x\Phi_1(x, y, z, 1)+y\Phi_2(x, y, z, 1)+\\+z\Phi_3(x, y, z, 1)+\Phi_4(x, y, z, 1).\end{aligned} \tag{7a}$$

$\Phi$ კვადრატულ ფორმასთან ერთად ჩვენ შეგვხვდება $\Phi$-ს მიმართ „პოლარული“, სიმეტრიული ორწრფივი ფორმა:

$$\begin{aligned}\Omega(x_1, x_2, x_3, x_4; y_1, y_2, y_3, y_4)=\\=y_1\Phi_1(x_1, x_2, x_3, x_4)+y_2\Phi_2(x_1, x_2, x_3, x_4)+\\y_3\Phi_3(x_1, x_2, x_3, x_4)+y_4\Phi_4(x_1, x_2, x_3, x_4),\end{aligned} \tag{8}$$

რომელსაც $\Omega(x; y)$-ით აღვნიშნავთ. გვაქვს

$$\Omega(x; y)=\Omega(y; x), \tag{9}$$

$$\Omega(x; x)=\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4). \tag{10}$$

უშუალო შემოწმება გვიჩვენებს, რომ (შეადარეთ § 208):

$$\Phi(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3,\ x_4+y_4)=\\ \Omega(x,\ x)+2\Omega(x,\ y)+\Omega(y,\ y), \tag{11}$$

საიდანაც გამომდინარეობს აგრეთვე

$$F(x+x',\ y+y',\ z+z')=\varphi(x,\ y,\ z)+2[xF_1(x',\ y',\ z')+\\ +yF_2(x',\ y',\ z')+zF_3(x',\ y',\ z')]+F(x',\ y',\ z'), \tag{11a}$$

სადაც

$$\varphi(x,\ y,\ z)=a_{11}x^2+a_{12}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy \tag{12}$$

კვადრატული ფორმაა, რომელიც წარმოადგენს მეორე განზომილების წევრთა ერთობლიობას $F(x,\ y,\ z)$ პოლინომში.

$\Phi$ ფორმის დისკრიმინანტს $A$-თი აღვნიშნავთ.

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}, \tag{13}$$

ხოლო $a_{ij}$ ელემენტის ალგებრულ დამატებას $A$ დეტერმინანტში $A_{ij}$-თი. კერძოდ,

$$A_{44}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} \tag{14}$$

არის $\varphi(x,\ y,\ z)$ კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტი.

ხშირად $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ ნაცვლად დავწერთ $x,\ y,\ z,\ t$. შემდეგში ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ $a_{ij}$ კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია.

გარდა ამისა, ამ თავში, რომელიც მიძღვნილია გეგმილური თვისებებისადმი, ჩვენ არ გამოვრიცხავთ იმ შემთხვევას, როცა $F(x,\ y,\ z)$ პოლინომის მეორე განზომილების წევრთა ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლია, ე. ი. როცა $a_{11}=a_{22}=a_{33}=a_{23}=a_{31}=a_{12}=0$. ამ შემთხვევაში (1a) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$x_3(2a_{14}x_1+2a_{24}x_2+2a_{34}x_3+a_{44}x_4)=0$$

და ფართეული იშლება $x_4=0$ არასაკუთრივ სიბრტყედ და (საზოგადოდ საკუთრივ)

$$2a_{14}x_1+2a_{24}x_2+2a_{34}x_3+2a_{44}x_4=0$$

სიბრტყედ.

ჩვენ ყოველთვის გამოვრიცხავთ იმ შემთხვევას, როცა $\Phi$ ფორმის (ან $F$ პოლინომის) ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლია.

მთელ ამ განყოფილებაში $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ კოორდინატების ქვეშ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, არა მარტო დეკარტის, არა-

მედ ზოგადი სახის გეგმილური ერთგვაროვანი კოორდინატებიც (რა თქმა უნდა, ამ შემთხვევაში, განტოლება $x_4=0$ უკვე აღარ გამოსახავს, საზოგადოდ, არასაკუთრივ სიბრტყეს).

§ 263. **მეორე რიგის შლადი ფართეულები. თანამთხვევის პირობა.** მეორე რიგის ფართეული შლადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ კვადრატული ფორმა იშლება ორ წრფივ თანამამრავლად, ე. ი. როცა იგივურად

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \\ =(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4)\cdot(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4), \qquad (1)$$

სადაც $a_1, \ldots, a_4$, $b_1, \ldots, b_4$ მუდმივებია. ამისათვის კი აუცილებელი და საკმარისია, რომ $A$ დისკრიმინანტის რანგი ტოლი იყოს ორის ან ერთის (იხ. დამატება § 13).

ფართეული იშლება მხოლოდ ამ შემთხვევაში და წარმოადგენს ორ (ნამდვილ ან წარმოსახვით) სიბრტყეს. თუ $A$ დისკრიმინანტის რანგი უდრის ერთს, მაშინ გვექნება:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)=k(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4)^2 \qquad (1a)$$

სადაც $k$—მუდმივია, და ფართეული წარმოადგენს ორი ერთმანეთზე დამთხვეული (ყოველთვის ნამდვილი; იხ. შემდეგი პარაგრაფი) სიბრტყის ერთობლიობას.

შევნიშნოთ კიდევ, რომ

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)=0 \text{ და } \Psi(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$$

ორი მეორე რიგის ფართეულის დამთხვევისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ადგილი ჰქონდეს იგივეობას (შეადარეთ § 209).

$$\Psi(x_1, x_2, x_3, x_4)=k\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4), \qquad (2)$$

სადაც $k$ ნულისგან განსხვავებული მუდმივია.

რადგანაც მეორე რიგის ფართეულის ზოგადი სახის განტოლება შეიცავს $a_{ij}$ სახის ათ კოეფიციენტს, ამიტომ ფართეულის ფორმა და მდებარეობა განისაზღვრება ცხრა სიდიდით ($a_{ij}$ კოეფიციენტთაგან ცხრა მათგანის ფარდობით მეათესთან).

ამიტომაც, საზოგადოდ, ფართეულის განსაზღვრისათვის საკმარისია მოცემული იყოს მისი ცხრა წერტილი.

მოცემულ ცხრა წერტილზე ფართეულის გატარების საკითხი დაიყვანება ცხრა წრფივი ერთგვაროვანი განტოლების სისტემის ამოხსნაზე ათი $a_{ij}$ უცნობით (შეადარეთ § 212). ეს სისტემა, საზოგადოდ, გვაძლევს $a_{ij}$ სიდიდეთაგან ცხრის სავსებით განსაზღვრულ მნიშვნელობის ფარდობას მეათესთან. მაგრამ ეს სისტემა შეიძლება განუზღვრელიც აღმოჩნდეს, და მაშინ ჩვენ მივიღებთ მეორე რიგის ფართეულების უსასრულო სიმრავლეს, რომლებიც

მოცემულ წერტილებზე გაივლიან. ყოველ შემთხვევაში ყოველთვის არსებობს მეორე რიგის ფართეული, რომელიც გადის ცხრა ნებისმიერად მოცემულ წერტილზე.

ახლა აღვნიშნოთ კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი გარემოება. ჩვენ ვიცით, რომ თუ $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ ცვლადების ნაცვლად შევიტანთ ახალ $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$, $x_4'$ ცვლადებს, რომლებიც წინა ცვლადებთან დაკავშირებულია წრფივი ერთგვაროვანი არაგანსაკუთრებული ჩასმით, სხვანაირად, თუ შევიტანთ გეგმილური კოორდინატების ახალ სისტემას, მაშინ $\Phi$ ფორმა, გარდაიქმნება $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$, $x_4'$ ცვლადების ახალ $\Phi'$ ფორმად, რომლის დისკრიმინანტი $A'$ დაკავშირებულია $\Phi$ ფორმის $A$ დისკრიმინანტთან შემდეგი დამოკიდებულებით (იხ. დამატება, § 11):

$$A' = A \cdot \Delta^2,$$

სადაც $\Delta \neq 0$ ჩასმის დეტერმინანტია. მაშასადამე, $A$ დისკრიმინანტის ნიშანი უცვლელი რჩება გეგმილური კოორდინატების შეცვლის დროს. ეს ნიშანი უცვლელი რჩება ფართეულის განტოლების $\Phi = 0$ შეცვლის დროსაც მისი ეკვივალენტური $\Psi = 0$ განტოლებით. მართლაც, რადგანაც ეს განტოლებები, პირობის თანახმად, ეკვივალენტურია, ამიტომ ადგილი აქვს (2) იგივეობას, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\Psi$ ფორმის კოეფიციენტები შეიძლება მიღებული იყოს $\Phi$ ფორმის კოეფიციენტებისგან ერთსა და იმავე $k$ რიცხვზე გამრავლებით. მაგრამ, თუ მეოთხე რიგის დეტერმინანტში $A$ ყველა $a_{ij}$ ელემენტს შევცვლით $ka_{ij}$ ელემენტებით, მაშინ დეტერმინანტი გამრავლდება $k^4$-ზე, ე. ი. არ შეიცვლის ნიშანს.

ამგვარად, $A$ დისკრიმინანტის ნიშანი ინვარიანტია როგორც გეგმილური კოორდინატების შეცვლის დროს, ისე ფართეულის განტოლების შეცვლისას მისი ეკვივალენტური განტოლებით [1]).

**§ 264. მეორე რიგის ფართეულების გეგმილური კლასიფიკაცია.** სათანადო წრფივი, ერთგვაროვანი, არასაკუთრივი, ნამდვილ კოეფიციენტებიანი ჩასმით, რომელიც $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ ცვლადებს გამოსახავს ახალი $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$, $x_4'$ ცვლადებით, კვადრატული ფორმა $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ შეიძლება დაყვანილ იქნას კანონიკურ სახეზე (იხ. § 12-ის დამატება; შეადარეთ აგრეთვე § 211):

$$\Phi'(x_1', x_2', x_3', x_4') = \varepsilon_1 x_1'^2 + \varepsilon_2 x_2'^2 + \varepsilon_3 x_3'^2 + \varepsilon_4 x_4'^2, \qquad (1)$$

სადაც $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$, $\varepsilon_4$ უდრიან $\pm 1$ ან 0, და ზედაპირის განტოლება დაიყვანება „კანონიკურ“ სახეზე:

$$\Phi'(x_1', x_2', x_3', x_4') = \varepsilon_1 x_1'^2 + \varepsilon_2 x_2'^2 + \varepsilon_3 x_3'^2 + \varepsilon_4 x_4'^2 = 0. \qquad (2)$$

[1]) მეორე რიგის წირებს შემთხვევაში ანალოგიურ დისკრიმინანტს $A$ (იხ. წინა თავი) ეს თვისება არა აქვს, რადგანაც ამ შემთხვევაში $A$ მესამე რიგის დეტერმინანტია და მრავლდება არა $k^4$, არამედ $k^3$. მაშასადამე, როცა $k < 0$ იგი ნიშანს გამოიცვლის.

განვიხილოთ ჩვენი გარდაქმნა, როგორც ახალ გეგმილურ კოორდინატებზე გადასვლა და გავარჩიოთ ყველა შემთხვევა, რომლებიც აქ შეიძლება წარმოგვიდგეს.

a) არაგანსაკუთრებული მეორე რიგის ფართეულები. ასე ეწოდება იმ ფართეულებს, რომლებისთვისაც დისკრიმინანტი $A$ ნულისაგან განსხვავებულია.

ამ შემთხვევაში $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$, $\varepsilon_4$ რიცხვთაგან არც ერთი ნულის ტოლი არაა. ამ რიცხვების ნიშნების მიხედვით ფართეულის განტოლება ახალ კოორდინატებში ერთ-ერთ შემდეგ სახეზე დაიყვანება [1]).

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = 0, \qquad (a_1)$$
$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_4'^2 = 0, \qquad (a_2)$$
$$x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 - x_4'^2 = 0. \qquad (a_3)$$

პირველ შემთხვევაში ფართეული მთლიანად წარმოსახვითია, ე. ი. არ შეიცავს არც ერთ ნამდვილ წერტილს. მეორე და მესამე შემთხვევაში ნამდვილია.

თუ წინასწარ ცნობილია, რომ ფართეული ნამდვილია, მაშინ გამოსავალ $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$ განტოლების კოეფიციენტების მიხედვით, ადვილად შეიძლება განვსაზღვროთ, თუ $(a_2)$ ან $(a_3)$ სახეთაგან რომელი მათგანი გვაქვს. სახელდობრ, ადვილი სანახავია, რომ პირველ შემთხვევაში $A<0$, ხოლო მეორე შემთხვევაში $A>0$. მართლაც, თუ შევადგენთ $(a_3)$ და $(a_3)$ ტოლობათა მარცხენა მხარეებისათვის $A'$ დისკრიმინანტს, ვნახავთ, რომ პირველ შემთხვევაში [1]) $A'<0$, ხოლო მეორე შემთხვევაში $A'>0$. მაგრამ $A$ და $A'$ დისკრიმინანტთა ნიშნები ერთი და იგივეა (იხ. წინა პარაგრაფი); აქედან კი გამომდინარეობს ჩვენი დებულება. იმის შესახებ, თუ რა გეომეტრიული თვისებებით განირჩევიან ერთმანეთისაგან $(a_2)$ და $(a_3)$ ფართეულები ქვემოთ იქნება ნათქვამი [2]) (§ 267).

b) განსაკუთრებული დაუშლადი ფართეულები. ასე ეწოდება ისეთ დაუშლად ფართეულებს, რომლებისთვისაც $A=0$. ამ შემთხვევაში $A$ დისკრიმინანტის რანგი სამის ტოლი უნდა იყოს (რადგანაც, ის რომ სამზე ნაკლები იყოს, მაშინ ფართეული შლადი იქნებოდა). ვინაიდან $A$-ს რანგი

[1]) საჭიროების შემთხვევაში ჩვენ ყველა წევრს შეუცვლით ნიშანს და შევცვლით ცვლადების ნომერაციას.

[2]) მაგალითად, $(a_3)$-ის მარცხენა მხარისათვის

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

[3]) იხ. აგრეთვე ამ §-ის № 5 სავარჯიშო.

სამს უდრის, ამიტომ ერთ-ერთი $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$, $\varepsilon_4$ რიცხვთაგან ნულის ტოლია, დანარჩენები კი ნულისაგან განსხვავებულია. ვთქვათ, $\varepsilon_4=0$. $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ სიდიდეების ნიშნების მიხედვით, კანონიკურ განტოლებებს ექნება ერთ-ერთი სახე შემდეგი ორი განტოლებიდან:

$$x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2=0, \qquad (b_1)$$
$$x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2=0. \qquad (b_2)$$

პირველ შემთხვევაში ფართეული წარმოსახვითია, მაგრამ არა მთლიანად: იგი შეიცავს ერთ ნამდვილ წერტილს (0, 0, 0, 1). მეორე შემთხვევაში ფართეული ნამდვილია. დავამტკიცოთ, რომ $(b_1)$ და $(b_2)$ ფართეულები კონუსებია (პირველ შემთხვევაში—„წარმოსახვითი კონუსი“). ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ ყოველი წრფე, რომელიც (0, 0, 0, 1) წერტილს ფართეულის რომელსამე $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ წერტილთან აერთებს, მთლიანად მას ეკუთვნის. მართლაც, ამ წრფის ნებისმიერი $M(x_1', x_2', x_3', x_4')$ წერტილის კოორდინატები მოცემულია ფორმულებით (გავიხსენოთ წრფის პარამეტრული წარმოდგენა, რაც მოყვანილი იყო § 169-ში, ხოლო გეგმილურ კოორდინატებში § 178a-ში

$$x_1'=\lambda\cdot 0+\mu\xi_1,$$
$$x_2'=\lambda\cdot 0+\mu\xi_2,$$
$$x_3'=\lambda\cdot 0+\mu\xi_3,$$
$$x_4'=\lambda\cdot 0+\mu\xi_4,$$

ე. ი. $x_1'=\mu\xi_1$, $x_2'=\mu\xi_2$, $x_3'=\mu\xi_3$, $x_4'=\lambda\mu\xi_4$. ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი $(b_1)$ ან $(b_2)$ ტოლობებში; ვნახავთ, რომ ეს განტოლებები იგივურად კმაყოფილდებიან (რადგანაც $\mu^2$ გამოიტანება ფრჩხილებს გარეთ, ხოლო $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$, პირობის თანახმად, აკმაყოფილებენ ამ განტოლებებს). ჩვენ ვხედავთ, რომ $(b_1)$ და $(b_2)$ კონუსების წვეროს წარმოადგენს (0, 0, 0, 1) წერტილი. წვეროს უწოდებენ აგრეთვე ფართეულის ორმაგ წერტილს [1]).

c) წლადი ფართეულები (ამ ფართეულებს ჩვენ აგრეთვე ვაკუთვნებთ განკუთრი ფართეულების კატეგორიას). ამ შემთხვევაში $A$ დისკრიმინანტის რანგი ორს ან ერთს უდრის. ვთქვათ, იგი უდრის ორს. მაშინ ფართეულის განტოლება დაიყვანება ერთ-ერთ შემდეგ სახეზე:

$$x_1'^2+x_2'^2=0, \qquad (c_1)$$
$$x_1'^2-x_2'^2=0. \qquad (c_2)$$

პირველ შემთხვევაში გვაქვს ორი წარმოსახვითი სიბრტყის ერთობლიობა, ხოლო მეორე შემთხვევაში ორი ნამდვილი სიბრტყის ერთობლიობა. ორივე შემთხვევაში სიბრტყეები ურთიერთ გადიკვეთებიან ნამდვილ წრფეზე

$$x_1'=0, \quad x_2'=0.$$

[1]) თუ წვეროს წარმოადგენს არასაკუთრივ წერტილს, მაშინ კონუსი გადაიქცევა ცილინდრად. გეგმილური თვალსაზრისით ცილინდრი კონუსისაგან არ განირჩევა.

ამ წრფის ყოველ წერტილს ფართეულის **ორმაგი წერტილი** ეწოდება.

ვთქვათ, $\Delta$ დისკრიმინანტის რანგი უდრის 1. მაშინ ფართეულის განტოლება დაიყვანება სახეზე

$$x_1'^2=0 \qquad (c_3)$$

და იგი წარმოადგენს ორმაგ (ნამდვილ) სიბრტყეს. ამ შემთხვევაში ფართეულის ყველა წერტილი — „ორმაგია". ცხადია, c) შემთხვევა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც კონუსის კერძო შემთხვევა („შლადი კონუსი").

რადგანაც წრფივი ჩასმა შეიძლება გავიგოთ არა მხოლოდ როგორც კოორდინატების შეცვლა, არამედ როგორც გეგმილური გარდაქმნაც, ამიტომ, ამ პარაგრაფში ნათქვამის თანახმად, შეიძლება გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნა.

**გეგმილური თვალსაზრისით მეორე რიგის არაგანკუთვნილი ფართეულები შემდეგ კატეგორიად იყოფა:**

a) არაგანკუთვნილი ფართეულები, რომლებიც, თავის მხრივ, იყოფიან $a_1$) წარმოსახვით ფართეულებად, $a_2$) ნამდვილ ფართეულებად უარყოფითი დისკრიმინანტით, $a_3$) ნამდვილ ფართეულებად დადებითი დისკრიმინანტით.

b) განკუთრი დაუშლადი ფართეულები (კონუსები), რომლებიც იყოფიან $b_1$) წარმოსახვით კონუსებად და $b_2$) ნამდვილ კონუსებად.

c) დაუშლადი ფართეულები, რომლებიც იყოფიან $c_1$) წარმოსახვით შეუღლებულ (სხვადასხვა) სიბრტყეთა წყვილად, $c_2$) ნამდვილ სხვადასხვა სიბრტყეთა წყვილად და $c_3$) დამთხვეულ სიბრტყეთა წყვილად.

$a_1$), $a_2$), $a_3$), $b_1$), $b_2$), $b_3$), $c_1$), $c_2$), $c_3$) ფართეულებიდან ერთი და იმავე კატეგორიის ფართეულები გეგმილური გარდაქმნით, შეიძლება ერთიმეორეში გადავიყვანოთ.

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა** 1. ადვილად შეიძლება მოიძებნოს განკუთრი ფართეულის ორმაგი წერტილი (ან ორმაგი წერტილები). მართლაც, განკუთრი ფართეულების ყველა შემთხვევაში მათი განტოლება დაიყვანება სახეზე

$$\Phi'(x_1', x_2', x_3')=\varepsilon_1 x_1'^2+\varepsilon_2 x_2'^2+\varepsilon_3 x_3'^2=0$$

(დაუშლადი კონუსის შემთხვევაში $\varepsilon_1\neq 0$, $\varepsilon_2\neq 0$, $\varepsilon_3=0$; სხვადასხვა სიბრტყეთა წყვილის შემთხვევაში $\varepsilon_1\neq 0$, $\varepsilon_2\neq 0$, $\varepsilon_3=0$; დამთხვეულ სიბრტყეთა წყვილის შემთხვევაში $\varepsilon_1\neq 0$, $\varepsilon_2=0$. $\varepsilon_3=0$). როგორც ადვილად დავრწმუნდებით, ყველა შემთხვევაში ორმაგი წერტილების კოორდინატები აკმაყოფილებენ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\Phi_1'=\lambda_1 x_1'=0,\quad \Phi_2'=\lambda_2' x_2'=0,\quad \Phi_3'=\lambda_3 x_3'=0,$$
$$\Phi_4'=0,\quad x_4'=0,$$

და, პირიქით, ყოველი ისეთი წერტილი, რომლის კოორდინატები ამ განტოლებებს აკმაყოფილებს, იქნება ორმაგი. მაგრამ წინა სისტემა ეკვივალენტუ-

რია სისტემისა (იხ. § 11-ის დამატება)

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0,\\ \Phi_2 &= a_{21}x_1 + a_{21}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0,\\ \Phi_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = 0,\\ \Phi_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = 0.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

მაშასადამე, ორმაგი წერტილის (ან ორმაგი წერტილების) კოორდინატების მოსაძებნად უნდა ამოვხსნათ (3) სისტემა. საზოგადოდ, ფართეულის ორმაგ წერტილად ჩვენ ვიგულისხმებთ ისეთ ნებისმიერ წერტილს, რომლის კოორდინატები აკმაყოფილებენ (3) სისტემას.

თუ $A$ დეტერმინანტის რანგი უდრის ოთხს (ე. ი. $A \neq 0$), მაშინ სისტემას ამოხსნა არა აქვს (გარდა ამოხსნისა $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$). მაშასადამე, არაგანკუთრ ფართეულებს ორმაგი წერტილები არა აქვთ. თუ $A$ დეტერმინანტის რანგი უდრის სამს, მაშინ (3) სისტემას ერთი დამოუკიდებელი ამოხსნა აქვს, ე. ი. ერთი ორმაგი წერტილი გვაქვს; თუ რანგი უდრის ორს, მაშინ (3) სისტემის ორი განტოლება წარმოადგენს ორი დანარჩენის შედეგს და ორმაგი წერტილები წრფეს შეადგენენ; ბოლოს, თუ რანგი უდრის 1, მაშინ (3) განტოლებათა შორის მხოლოდ ერთია დამოუკიდებელი, და ჩვენ გვაქვს ორმაგ წერტილთა სიბრტყე, რომელიც მთელ ფართეულს შეადგენს.

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა** 2. ადვილი შესამჩნევია, რომ $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ ერთგვაროვან გეგმილურ კოორდინატებში ყოველი განტოლება

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{4}$$

სახისა, სადაც $\varphi$ კვადრატული ფორმაა, რომელიც $x_4$-ს არ შეიცავს, წარმოადგენს (მეორე რიგის) კონუსს წვეროთი (0, 0, 0, 1) წერტილში. მართლაც, იმ წრფის კოორდინატები, რომელიც ამ წერტილს აერთებს ფართეულის ნებისმიერ $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ წერტილთან, მოცემულია ფორმულებით (იხ. ზემოთ) $x_1 = \mu\xi_1$, $x_2 = \mu\xi_2$, $x_3 = \mu\xi_3$, $x_4 = \lambda + \mu\xi_4$, რომელთა ჩასმა $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ ფორმაში მოგვცემს

$$\varphi(\mu\xi_1, \mu\xi_2, \mu\xi_3) = \mu_2\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0,$$

რადგანაც $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ წერტილი (4) ფართეულზეა მოთავსებული.

წინათ (§ 117) ჩვენ კონუსი განვმარტეთ, როგორც ისეთ წრფეთა (მსახველთა) გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც გადიან მოცემულ წერტილზე (წვეროზე) და ჰკვეთენ მოცემულ წირს (მიმმართველს). ცხადია, აქ კონუსად წოდებული ზედაპირი შეესაბამება ამ განმარტებას. მიმმართველად შეგვიძლია ავიღოთ, კონუსზე შემოხაზული და ყველა მსახველის გადამკვეთი, ნებისმიერი წირი, მაგალითად, კონუსის გადაკვეთის წირი რაიმე სიბრტყესთან, რომელიც არ გადის წვეროზე; გადაკვეთა იქნება მეორე რიგის წირი (ვინაიდან ფართეული მეორე რიგისაა). ჩვენს შემთხვევაში, ყველაზე მარტივია (4). ფართეულის გადამკვეთ სიბრტყედ ავიღოთ $x_4 = 0$. მაშინ ამ სიბრტყესთან გა-

დაკვეთის წირის განტოლება იქნება იგივე (4) განტოლება, სადაც $x_1$, $x_2$, $x_3$ უკვე უნდა განვიხილოთ, როგორც ერთგვაროვანი კოორდინატები $x_4=0$ სიბრტყეზე (თუ საქმე გვაქვს ზოგადი სახის გეგმილურ კოორდინატებთან, მაშინ $x_4=0$ სიბრტყე არ წარმოადგენს აუცილებლად არასაკუთრივ სიბრტყეს).

თუ ეს წირი იშლება ორ წრფედ, მაშინ კონუსი იშლება ორი სიბრტყის ერთობლიობად.

ახლა განვიხილოთ $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ როგორც დეკარტის ერთგვაროვანი კოორდინატები.

მაშინ (4) კონუსის განტოლება, დეკარტის არაერთგვაროვან კოორდინატებში $x=\frac{x_1}{x_4}$, $y=\frac{x_2}{x_4}$, $z=\frac{x_3}{x_4}$, მიიღებს სახეს:

$$\varphi(x, y, z)=0,$$

ე. ი. გარეგნულად იმავე სახეს ინარჩუნებს.

ადვილი საჩვენებელია, რომ, საზოგადოდ, ყოველი შემდეგი სახის განტოლება

$$\varphi(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=0 \qquad (5a)$$

სადაც $x$, $y$, $z$—დეკარტის არაერთგვაროვანი კოორდინატებია. $x_0$, $y_0$, $z_0$ კი მუდმივები, ხოლო $\varphi$ კვადრატული ფორმა ($x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ არგუმენტების ერთგვაროვანი პოლინომი), წარმოადგენს მეორე რიგის კონუსს წვეროთი $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილში. ამაში რომ დავრწმუნდეთ. საკმარისია კოორდინატთა სათავე გადავიტანოთ $(x_0, y_0, z_0)$ წერტილში.

#### სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. დაამტკიცეთ უშუალოდ, რომ (5a) განტოლება წარმოადგენს კონუსს წვეროთი $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილში.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ $M'(x', y', z')$ წერტილი (5a) ფართეულზე იმყოფება, მაშინ $M_0M'$ წრფის ყოველ წერტილს კოორდინატებად ექნება $x=x_0+(x'-x_0)s$, $y=y_0+(y'-y_0)s$, $z=z_0+(z'-z_0)s$, სადაც $s$ პარამეტრია. აქედან: $x-x_0=(x'-x_0)s$, $y-y_0=(y'-y_0)s$, $z-z_0=(z'-z_0)s$. შევიტანოთ ეს მნიშვნელობანი (5a) განტოლების მარცხენა მხარეში, ვნახავთ, რომ იგი მიიღებს სახეს: $s^2\varphi(x'-x_0, y'-y_0, z'-z_0)$, ე. ი. გაუტოლდება ნულს. ვინაიდან, $M'$ წერტილი, პირობის თანახმად, ფართეულზე მდებარეობს. მაშასადამე, $M_0M'$ წრფის ყოველი წერტილი ფართეულს ეკუთვნის.

2. დაამტკიცეთ, რომ თუ კონუსის მიმმართველი ნებისმიერი მეორე რიგის $\gamma$ წირია, მაშინ კონუსი მეორე რიგისაა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ავირჩიოთ გეგმილური კოორდინატების სისტემა ისე, რომ $\gamma$ წირის $\Pi$ სიბრტყის განტოლება იყოს $x_4=0$, ხოლო კონუსის $C$ წვეროს ჰქონდეს კოორდინატები 0, 0, 0, 1; როგორც § 178-ის ბოლოს მოყვანილი შენიშვნიდან გამომდინარეობს, ასეთი სისტემის შერჩევა მუდამ შესაძლებელია. მაშინ, თუ $\varphi(x_1, x_2, x_3)=0$ არის $\gamma$ წირის განტოლება $\Pi$ სიბრტყეზე, კონუსის განტოლებაც იქნება $\varphi(x_1, x_2, x_3)=0$ (იხ. ზემოთ შენიშვნა 2), ე. ი. ჩვენი კონუსი მეორე რიგის ფართეულია.

3. დაამტკიცეთ, რომ წრფე

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_3 &= \lambda (x_2 - x_4), \\ x_1 + x_3 &= -\frac{1}{\lambda}(x_2 + x_4), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

სადაც $\lambda$ ნებისმიერი მუდმივია, მთლიანად ეკუთვნის ფართეულს

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0.$$

დაამტკიცეთ იგივე შემდეგი წრფისთვისაც:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_4 &= \lambda (x_2 - x_3) \\ x_1 + x_4 &= -\frac{1}{\lambda}(x_2 + x_3) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. გადავამრავლოთ (6) ტოლობათა მარცხენა და მარჯვენა მხარეები ერთმანეთზე, მივიღებთ

$$x_1^2 - x_3^2 = -x_2^2 + x_4^2, \text{ საიდანაც } x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0,$$

ე. ი. (6) წრფის ყველა წერტილი ეკუთვნის ჩვენს ფართეულს. სრულიად ასეთივე გზით დავამტკიცებთ (7) წრფისთვისაც.

აქედან გამომდინარეობს, რომ $(\mathfrak{a}_3)$ კატეგორიის (იხ. ზემოთ) ყოველ ფართეულს ნებისმიერ ნამდვილ სიბრტყესთან აქვს ნამდვილი საერთო წერტილები, რადგანაც ყოველი სიბრტყე რომელიმე ნებისმიერ (6), (7) წრფეთაგანს ჰკვეთს ნამდვილ წერტილებში, თუ $\lambda$ ნამდვილი რიცხვია.

4. დაამტკიცეთ, რომ $(\mathfrak{a}_2)$ კატეგორიის ფართეულზე

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$$

ნამდვილი წრფეები არ მდებარეობენ.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ამ ფართეულზე რომ ნამდვილი წრფეები არსებობდეს, მაშინ ამ ფართეულს ნებისმიერ სიბრტყესთან ექნებოდა ნამდვილი საერთო წერტილები, ამასთანავე, მაგალითად, სიბრტყეს $x_4 = 0$ არც ერთი საერთო წერტილი არა აქვს ამ ზედაპირთან.

3, 3 და 4 სავარჯიშოების მიხედვით, $(\mathfrak{a}_2)$ და $(\mathfrak{a}_3)$ კატეგორიის ფართეულები შეიძლება დახასიათებულ იქნას შემდეგნაირად: ფართეული ეკუთვნის $(\mathfrak{a}_2)$ კატეგორიას, თუ იგი არაგანკუთრია, ნამდვილია და არ შეიცავს ნამდვილ წრფეებს; ფართეული ეკუთვნის $(\mathfrak{a}_3)$ კატეგორიას, თუ იგი არაგანკუთრია და შეიცავს ნამდვილ წრფეებს.

**§ 265. მეორე რიგის ფართეულისა და წრფის გადაკვეთის განმსაზღვრელი განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში.** ვთქვათ, საძიებელია მეორე რიგის ფართეულის

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{1}$$

გადაკვეთის წერტილები წრფესთან, რომელიც მოცემულია პარამეტრული სახით:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \lambda x_1' + \mu x_1'', \quad x_2 = \lambda x_2' + \mu x_2'', \\ x_3 &= \lambda x_3' + \mu x_3'', \quad x_4 = \lambda x_4' + \mu x_4''; \end{aligned}\right\} \tag{*}$$

აქ $(x_1', x_2', x_3', x_4')$ და $(x_1'', x_2'', x_3'', x_4'')$ აღნიშნავენ, განხილულ წრფეზე აღებულ, რაიმე ორ $M'$ და $M''$ წერტილს. თუ (*) ფორმულებს ჩავსვამთ

(1)-ში, სრულიად ისევე, როგორც § 216-ში, მივიღებთ განტოლებას, რომელიც განსაზღვრავს გადაკვეთის წერტილთა შესაბამის $\lambda$ და $\mu$ პარამეტრების ფარდობას [1]):

$$\lambda^2\Omega(x';\ x') + 2\lambda\mu\Omega(x';\ x'') + \mu^2\Omega(x'';\ x'') = 0, \tag{2}$$

სადაც გამოყენებულია § 262-ის აღნიშვნები. $h = \frac{\lambda}{\mu}$ განსაზღვრისათვის ვღებულობთ განტოლებას

$$h^2\Omega(x';\ x') + 2h\Omega(x';\ x'') + \Omega(x'';\ x'') = 0. \tag{2a}$$

თუ ერთდროულად

$$\Omega(x';\ x') = \Omega(x';\ x'') = \Omega(x'';\ x'') = 0, \tag{3}$$

მაშინ (2) განტოლება იგივეურად კმაყოფილდება, და წრფე მთლიანად ფართეულს ეკუთვნის. სხვა შემთხვევაში (2a) განტოლებას ორი ამოხსნა აქვს (ნამდვილი, წარმოსახვითი, სხვადასხვა ან ჯერადი) და ჩვენ ვღებულობთ გადაკვეთის ორ წერტილს.

თუ (2a) განტოლებას ორზე მეტი ამოხსნა აქვს, ე. ი. თუ წრფე ფართეულს ორზე მეტ წერტილში კვეთს, მაშინ აუცილებლად ადგილი აქვს (3) ტოლობებს და წრფე მთლიანად ფართეულს ეკუთვნის.

§ 266. **მხები წრფეები. მხები სიბრტყე.** წრფეს, რომელიც მეორე რიგის ფართეულს ორ ერთმანეთზე დამთხვეულ წერტილში კვეთს, ეწოდება ფართეულის მხები. გადაკვეთის წერტილს ეწოდება შეხების წერტილი.

ფართეულზე მთლიანად მოთავსებულ წრფეებს ჩვენ მივაკუთვნებთ აგრეთვე მხებ წრფეებს.

განვიხილოთ საკითხი იმის შესახებ, თუ რამდენი მხები აქვს მეორე რიგის ფართეულს მოცემულ $M_0(y_1, y_2, y_3, y_4)$ წერტილში. ვთქვათ $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ მხების რომელიმე წერტილია. ავიღოთ წინა პარაგრაფის (2a) განტოლებაში $M'$ და $M''$ წერტილებად შესაბამისად $M$ და $M_0$. მაშინ, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\Omega(y;\ y) = \Phi(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$ (რადგანაც $M_0$ წერტილი იმყოფება), (2a) განტოლება მიიღებს სახეს

$$h^2\Omega(x;\ x) + 2h\Omega(x;\ y) = 0.$$

ამ განტოლების ერთ-ერთი ფესვი $h$ ნულის ტოლია (იგი შეესაბამება $M_0$ წერტილს); იმისათვის, რომ მეორე ფესვიც ნულის ტოლი იყოს, აუცილებელი და საკმარისია შემდეგი პირობა:

$$\Omega(x;\ y) = 0, \tag{1}$$

[1]) ეს განტოლება გარეგნულად არაფრით არ განსხვავდება § 216-ის (4) განტოლებისაგან; მაგრამ, აქ $\Omega$ აღნიშნავს ოთხი წყვილი ცვალებადის ორად წრფივ ფორმას; იქ $\Omega$ აღნიშნავდა სამი წყვილი ცვალებადის ორად წრფივ ფორმას.

ან, გაშლილად,

$$x_1\Phi_1(y_1, y_2, y_3, y_4) + x_2\Phi_2(y_1, y_2, y_3, y_4) + \\ + x_3\Phi_3(y_1, y_2, y_3, y_4) + x_4\Phi_4(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0. \quad (2)$$

წინა განტოლება, როცა $y_1, y_2, y_3, y_4$ მუდმივებია, წარმოადგენს სიბრტყის განტოლებას. ჩვენ, ამგვარად, ვხედავთ, რომ ფართეულის ყველა $M_0M$ მხები წრფე მოთავსებულია (2) სიბრტყეში; ამ სიბრტყის ყოველი წრფე, რომელიც $M_0$ წერტილზე გადის, ფართეულს შეეხება.

ამიტომ (2) სიბრტყეს ეწოდება მხები სიბრტყე $M_0$ წერტილში. მხები სიბრტყე განუზღვრელი შეიძლება იყოს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $M_0$ წერტილის კოორდინატები ერთდროულად აკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებებს:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4 = 0;$$

მაგრამ ჩვენ ვიცით [1]), რომ ეს შეიძლება მოხდეს მხოლოდ მაშინ, როცა ფართეული განკუთრია, ხოლო $M_0$—მისი ორმაგი წერტილი (ან ერთ-ერთი ორმაგ წერტილთაგანი).

ამ შემთხვევაში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ორმაგ წერტილზე გამავალი ყოველი სიბრტყე (ან წრფე) „მხები“ სიბრტყეა.

$x, y, z$ არაერთგვაროვან კოორდინატებში,

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1a)$$

განტოლებით მოცემული მეორე რიგის ფართეულის მხები სიბრტყის განტოლება $(x_0, y_0, z_0)$ წერტილში, ცხადია, დაიწერება ასე:

$$x\Phi_1(x_0, y_0, z_0, 1) + y\Phi_2(x_0, y_0, z_0, 1) + \\ + z\Phi_3(x_0, y_0, z_0, 1) + \Phi_4(x_0, y_0, z_0, 1) = 0, \quad (2a)$$

ან კიდევ, როგორც ადვილი შესამოწმებელია, ასეც:

$$(x - x_0)F_1(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)F_2(x_0, y_0, z_0) + \\ + (z - z_0)F_3(x_0, y_0, z_0) = 0; \quad (2b)$$

შეადარეთ § 217.

**§ 267. ფართეულები ელიფსური, ჰიპერბოლური და პარაბოლური წერტილებით.** მხები სიბრტყე, როგორც ყოველი სხვა სიბრტყე, მეორე რიგის ფართეულს ან გადაკვეთს მეორე რიგის წირზე [2]), ან მთლიანად ეკუთვნის ფართეულს; უკანასკნელ შემთხვევას შეიძლება ადგილი ჰქონდეს შლადი ფართეულის შემთხვევაში. ამ პარაგრაფში შლადი ფართეულების შემთხვევა განხილვიდან გამორიცხულია. მაგრამ ფართეულის მხებ სიბრტყესთან გადაკვე-

[1]) § 264, შენიშვნა 1.

[2]) არ უნდა გეეგონოს, რომ მხებ სიბრტყეს ფართეულთან მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი აქვს; იხ. ქვემოთ.

თით მიღებული მეორე რიგის წირი ყოველთვის შლადია (წარმოსახვით ან ნამდვილ წრფეებად), ორმაგი წერტილით შეხების ადგილზე.

მართლაც, ვთქვათ, $\gamma$ არის

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)=0 \qquad (1)$$

ფართეულის გადაკვეთის (მეორე რიგის) წირი $M_0(y_1, y_2, y_3, y_4)$ წერტილზე გამავალ მხებ სიბრტყესთან. ამ სიბრტყის განტოლებაა

$$\Omega(x;\ y)=0.$$

ახლა ვთქვათ, რომ $M'(x_1', x_2', x_3', x_4')$ არის $\gamma$ წირის რაიმე წერტილი. რადგანაც ეს წერტილი ერთდროულად იმყოფება (1) და (2) ფართეულებზე, ამიტომ $\Omega(x';\ x')=\Phi(x_1', x_2', x_3', x_4')=0$; $\Omega(x';\ y)=0$. გარდა ამისა, $\Omega(y;\ y)=0$, რადგანაც $M_0$ წერტილი (1) ფართეულზე იმყოფება. ამგვარად, გვაქვს

$$\Omega(x';\ x')=\Omega(x';\ y)=\Omega(y;\ y)=0;$$

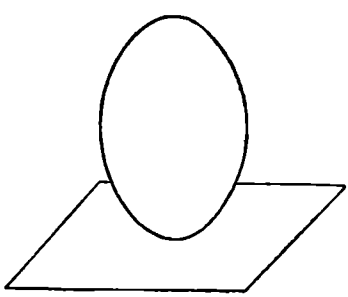
ეს გვიჩვენებს (იხ. § 265), რომ $M_0M'$ წრფე მთლიანად (1) ფართეულს ეკუთვნის; ვინაიდან ეს წრფე (2) სიბრტყესაც ეკუთვნის, ამიტომ იგი $\gamma$ წირის შემადგენელი ნაწილია, მაშასადამე, $\gamma$ შლადი წირია; ცხადია, $M_0$ ორმაგი წერტილია, ვინაიდან, როგორც ვნახეთ, $M_0$ წერტილის შემაერთებელი ყოველი წრფე $\gamma$ წირის ნებისმიერ წერტილთან მთლიანად $\gamma$ წირს ეკუთვნის.

ადვილი შესამჩნევია, რომ პირიქითაც: თუ სიბრტყე მეორე რიგის ფართეულს ორ წრფეზე კვეთს, მაშინ იგი ფართეულის მხებია ამ წრფეების გადაკვეთის $M_0$ წერტილში. მართლაც, წრფე, რომელიც მთლიანად ფართეულს ეკუთვნის, მხების კერძო შემთხვევაა. ვინაიდან, გარდა ამისა, სიბრტყე გადის ფართეულის $M_0$ წერტილზე გამავალ ორ მხებზე, ამიტომ იგი მხებ სიბრტყეს ემთხვევა, რადგანაც ეს უკანასკნელიც ხსენებულ ორ მხებს შეიცავს.

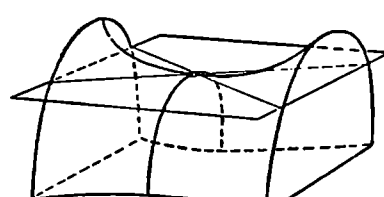
ახლა შევჩერდეთ ნამდვილი ფართეულების შემთხვევაზე. თუ მხები სიბრტყე (ნამდვილ) $M_0$ წერტილში ფართეულს ორ წარმოსახვითს (შეუღლებულ) წრფეზე კვეთს, მაშინ $M_0$ წერტილს ფართეულის ელიფსური წერტილი ეწოდება; ამ შემთხვევაში მხოლოდ ერთი ნამდვილი გადაკვეთის წერტილი გვაქვს (ნახ. 164); თუ გადაკვეთა ორ სხვადასხვა ნამდვილ წრფეზე ხდება, მაშინ წერტილს ჰიპერბოლური ეწოდება (ნახ. 165); ბოლოს, თუ გადაკვეთა ორ დამთხვეულ წრფეზე ხდება, მაშინ წერტილს პარაბოლური ეწოდება (ნახ. 166). ადვილი საჩვენებელია, რომ ერთი და იმავე ფართეულის ყველა წერტილი ერთი და იმავე ტიპისაა (ელიფსური, ჰიპერბოლური, პარაბოლური) და ეს ტიპი საესებით დახასიათებულია $A$ დისკრიმინანტის ნიშნით. ჩვენ მხედველობიდან გამოვრიცხავთ განკუთრი ფართეულების ორმაგ წერტილებს.

მართლაც, ვთქვათ, $M$ ფართეულის რაიმე წერტილია და $\Pi$—მხები სიბრტყე ამ წერტილში. შევარჩიოთ გეგმილურ კოორდინატთა სისტემა $y_1, y_2, y_3, y_4$ ისე, რომ ამ სისტემის მიმართ $\Pi$ სიბრტყის განტოლებას ჰქონდეს სახე $y_3=0$,

ხოლო $M$ წერტილის კოორდინატები იყოს 0, 0, 0, 1 (1-ის ნაცვლად შეგვიძლია ავიღოთ ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი რიცხვი). ცხადია, ასეთი სისტემა ყოველთვის შეიძლება შევარჩიოთ [1]). ახლა დავწეროთ ჩვენი ფართეულის განტოლება ამ სისტემის მიმართ, რომელშიაც სიმარტივისათვის $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ ისევ $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$-ით აღვნიშნოთ, ხოლო კოეფიციენტებისათვის $a_{ij}$ დავტოვოთ ძველი აღნიშვნები. მაშინ $M(0, 0, 0, 1)$ წერტილში ადგილი ექნება ტოლობებს



ნახ. 164.



ნახ. 165.

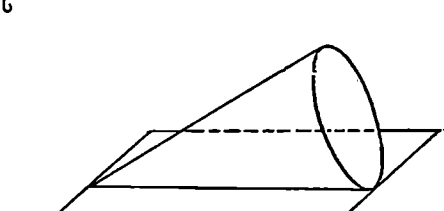
$$\Phi_1 = a_{14},\quad \Phi_2 = a_{24},\quad \Phi_3 = a_{34},\quad \Phi_4 = a_{44}$$

და $M$ წერტილში მხები $\Pi$ სიბრტყის განტოლება დაიწერება ასე:

$$a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4 = 0;$$

რადგანაც ეს სიბრტყე უნდა ემთხვეოდეს $x_3 = 0$ სიბრტყეს, ამიტომ უნდა იყოს:

$$a_{14} = a_{24} = a_{44} = 0,\ a_{34} \neq 0\ ^{2}) \quad (*)$$



ნახ. 166.

მხები სიბრტყის გადაკვეთის წირი $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ ფართეულთან $x_3 = 0$ სიბრტყეში მოცემული იქნება განტოლებით $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, ე. ი. გაშლილი სახით,

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0.$$

ჩვენ კიდევ ერთხელ ვრწმუნდებით, რომ ეს წირი შლადია. იგი იქნება ელიფსური, ჰიპერბოლური ან პარაბოლური ტიპისა იმის მიხედვით, გამოსახულება: $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ მეტია ნულზე, ნაკლებია ნულზე თუ ნულის ტოლია.

---

[1]) იხ. შენიშვნა § 178-ის ბოლოში. თუ ამ შენიშვნით ვისარგებლებთ, საძიებელ გეგმილურ კოორდინატთა სისტემის მისაღებად საკმარისია $\Pi_3$-ის ნაცვლად ავიღოთ $\Pi$, $\Pi_1$ და $\Pi_2$-ის ნაცვლად ის სიბრტყეები, რომლებიც გაივლიან $M$ წერტილზე, ხოლო $\Pi_4$-ის ნაცვლად— ნებისმიერი სიბრტყე ისე, რომ სიბრტყეები $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$, $\Pi_4$ ერთ წერტილზე არ გადიოდნენ.

[2]) რომ $a_{14} = 0$, მაშინ მხები სიბრტყე განუზღვრელი იქნებოდა, რაც მხოლოდ ორმაგ წერტილში შეიძლება იყოს.

ახლა შევადგინოთ დისკრიმინანტი $A$; თუ მხედველობაში მივიღებთ (*) ფორმულებს, გვექნება

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix} = -a_{34}^2(a_{12}a_{22}-a_{12}^2).$$

მაშასადამე, $A$-ს ნიშანი $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ გამოსახულების ნიშნის საწინააღმდეგოა. გარდა ამისა, ჩვენ ვიცით, რომ $A$-ს ნიშანი ინვარიანტია. ამიტომ $A$-ს ქვეშ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ დისკრიმინანტი, რომელიც შედგენილია ნებისმიერად შერჩეულ (დეკარტისა ან გეგმილური) კოორდინატთა სისტემისათვის.

ამგვარად, ჩვენ გვაქვს ასეთი შედეგი: *როცა $A<0$, მაშინ ფართეულის ყველა წერტილი ელიფსურია, როცა $A>0$ — ყველა წერტილი ჰიპერბოლურია, როცა $A=0$, ყველა წერტილი პარაბოლურია.* როგორც ვიცით, პირობა $A=0$ ახასიათებს კონუსს (ჩვენ აქ არ განვიხილავთ შლად ფართეულებს). გეომეტრიულადაც სავსებით ცხადია, რომ კონუსს მხები სიბრტყე მთელი მსახველის გასწვრივ ეხება და, მაშასადამე, მასთან ორი ერთმანეთზე დამთხვეული საერთო წრფე აქვს.

დავუბრუნდეთ არაგანკუთრ ფართეულებს; ჩვენ ვხედავთ, რომ გეომეტრიულად $(a_2)$ და $(a_3)$ კატეგორიის (§ 264) ფართეულები განირჩევიან ერთმანეთისაგან: პირველ შემთხვევაში ფართეულის ყველა წერტილი ელიფსურია, ხოლო მეორე შემთხვევაში — ჰიპერბოლური [1]).

არაგანკუთრი ფართეულს ყოველ წერტილში შეიძლება გავატაროთ გარკვეული მხები სიბრტყე; ამიტომაც $(a_3)$ კატეგორიის ფართეულთა ყოველ წერტილზე გადის ორი ისეთი ნამდვილი წრფე, რომლებიც მთლიანად ფართეულს ეკუთვნიან („წრფივი მსახველნი"). $(a_3)$ კატეგორიის ფართეულს ყოველ ნამდვილ $\Pi$ სიბრტყესთან ნამდვილი საერთო წერტილები აქვს, რადგანაც თითოეული მისი მსახველი ყოველ სიბრტყეს ჰკვეთს (საკუთრივ ან არა საკუთრივ წერტილში). $(a_1)$ კატეგორიის ფარეულებს ყველა სიბრტყესთან არა აქვთ საერთო ნამდვილი წერტილები, მაგალითად, თუ ფართეულის განტოლება § 264 ის $(a_2)$ სახით არის აღებული, მაშინ ცხადია, რომ $x_4=0$ სიბრტყეს მასთან არც ერთი საერთო ნამდვილი წერტილი არა აქვს.

აქედან გამომდინარეობს, რომ $(a_2)$ კატეგორიის ფართეულებზე ნამდვილი წრფეები არ მდებარეობენ (§ 264 ის სავარჯიშოში ეს ჩვენ უკვე დამტკიცებული გვქონდა; სავარჯიშო 4). იგივე შედეგი შემდეგნაირადაც შეიძლება მივიღოთ. ვთქვათ, არსებობს ისეთი $\Delta$ წრფე, რომელიც მთლიანად ფართეულზე მდებარეობს. $\Delta$ წრფეზე გამავალი ყოველი $\Pi$ სიბრტყე ფართეულს გადაკვეთს კიდევ ერთ $\Delta'$ წრფეზე (ვინაიდან გადაკვეთაში ისეთი მეორე რიგის წირი უნდა მივიღოთ, რომელიც უსათუოდ შეიცავს $\Delta$ წრფეს, როკორც შემადგენელ ნაწილს). $\Delta$ და $\Delta'$ წრფეების გადაკვეთის $M_0$ წერტილზე $\Pi$ სიბრ-

[1]) მართლაც, პირველ შემთხვევაში $A<0$, ბოლო მეორე შემთხვევაში $A>0$.

ტყე ფართეულს უნდა ეხებოდეს. მაგრამ მაშინ შეხების წერტილი ჰიპერბოლური იქნებოდა, რაც შეუძლებელია, თუ ფართეული $(a_2)$ კატეგორიისაა.

**§ 268. მხები კონუსი. პოლარი სიბრტყე და პოლუსი. ტანგენციალური განტოლება.** ახლა დავსვათ შემდეგი ამოცანა: მოცემულია სივრცის $N(y_1, y_2, y_3, y_4)$ წერტილი; მოვძებნოთ ყველა მხები, რომლებიც ამ წერტილიდან შეიძლება გავატაროთ მოცემული $\Gamma$ ფართეულისადმი ($N$ წერტილი, საზოგადოდ, არ მდებარეობს $\Gamma$-ზე).

ვთქვათ, $N$ წერტილიდან $\Gamma$ ფართეულისადმი გატარებულ მხებთაგან, რომელიმე $NM$ მათგანის შეხების წერტილია $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$. ავიღოთ § 265-ის (2a) ფორმულაში $M'$ და $M''$ წერტილების მაგივრად შესაბამისად $N$ და $M$ წერტილები, მივიღებთ:

$$h^2\Omega(y;\ y)+2h\Omega(x;\ y)=0 \qquad (*)$$

რადგანაც, პირობის თანახმად, $M$ წერტილი $\Gamma$-ზე მდებარეობს, ამიტომ $\Omega(x;\ x)=0$. ამ განტოლების ერთ-ერთი ფესვი $h$ უდრის ნულს (იგი გვაძლევს $M$ წერტილს); იმისათვის, რომ მეორე ფესვიც ნულის ტოლი იყოს (მხოლოდ ამ პირობებში იქნება $MN$ წრფე მხები), აუცილებელი და საკმარისია

$$\Omega(x;\ y)=0 \qquad (1)$$

გარდა ამისა. $M$ წერტილის კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდნენ $\Gamma$ ფართეულის განტოლებას:

$$\Omega(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=0, \qquad (2)$$

თუ ახლა $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$-ს განვიხილავთ, როგორც მიმდინარე კოორდინატებს, ვნახავთ, რომ საძიებელი შეხების $M$ წერტილები არიან (1) სიბრტყის გადაკვეთის წერტილები (2) ფართეულთან. ეს გადაკვეთა იქნება მეორე რიგის წირი, რომელსაც აღვნიშნავთ $\gamma$-ით. $N$ წერტილიდან $\Gamma$ ფართეულისადმი გატარებული მხები წრფეები ადგენენ კონუსს, $N$ წვეროთი და $\gamma$ მიმმართველით. მას ეწოდება **მხები კონუსი**. (1) სიბრტყეს კი ეწოდება $N$ წერტილის **პოლარი სიბრტყე** $\Gamma$ ფართეულის მიმართ. $N$ არის (1) სიბრტყის **პოლუსი**. თუ $N$ — ნამდვილი წერტილია, მაშინ (1) სიბრტყე ყოველთვის ნამდვილია. მაგრამ შეიძლება, რომ იგი $\Gamma$ ფართეულს წარმოსახვით წირზე კვეთდეს, მაშინ მხები კონუსი წარმოსახვითია.

ფორმალურად პოლარი სიბრტყის განტოლებას იგივე სახე აქვს, რაც მხებ სიბრტყისას. მხოლოდ აქ $(y_1, y_2, y_3, y_4)$ სივრცის ნებისმიერი წერტილია, და არა აუცილებლად $\Gamma$ ფართეულის წერტილი.

თუ $N$ წერტილი $\Gamma$-ზე იმყოფება, მაშინ პოლარი სიბრტყე გადაიქცევა მხებ სიბრტყედ და მხები კონუსიც იმავე სიბრტყით იქნება გამოსახული.

ადვილად შეიძლება შევადგინოთ მხები კონუსის განტოლება უშუალოდ. მართლაც, ვთქვათ, $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ აღნიშნავს $N$ წერტილიდან $\Gamma$ ფართეულისადმი გატარებულ, მხების რომელიმე წერტილს (და არა აუცი-

ლებლად შეხების წერტილს); მაშინ (*) განტოლების ნაცელად გვექნება სრული კვადრატული განტოლება $h$-ის მიმართ:

$$h^2\Omega(y;\ y)+2h\Omega(x;\ y)+\Omega(x;\ x)=0.$$

იმისათვის, რომ $MN$ მხები წრფე იყოს, საჭიროა, რომ ამ განტოლების ფესვები თანატოლი იყოს, ამ უკანასკნელისათვის კი საჭიროა პირობა:

$$\Omega(x;\ x)\Omega(x;\ y)-\Omega^2(x;\ y)=0. \tag{3}$$

ეს ის განტოლებაა, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს $N$ წერტილიდან გატარებული $\Gamma$ ფართეულის ნებისმიერი მხების ნებისმიერი წერტილი. მაშასადამე, ეს არის მხები კონუსის განტოლება. ჩვენ ვნახეთ, რომ ეს კონუსი მეორე რიგისაა. (3) განტოლება რომ კონუსს წარმოადგენს წეროთი $N(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$ წერტილში, ადვილად შეიძლება შევამოწმოთ უშუალოდაც, რასაც ვანდობთ მკითხველს [1]). რა თქმა უნდა, აქ გამორიცხული არც ის შემთხვევაა, როცა (3) კონუსი იშლება ორ სიბრტყედ.

დავუბრუნდეთ პოლარი სიბრტყის განტოლებას. გაშლილი სახით იგი დაიწერება ასე:

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4=0, \tag{4}$$

სადაც

$$\left.\begin{aligned} u_1&=\Phi_1(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4), & u_2&=\Phi_2(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4),\\ u_3&=\Phi_3(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4), & u_4&=\Phi_4(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(5) ფორმულები განსაზღვრავენ პოლარი სიბრტყის $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ კოორდინატებს პოლუსის კოორდინატებით.

თუ $\Gamma$ ფართეული არაგანკუთრია, მაშინ (5) განტოლებანი, ცალსახად ამოიხსნება $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ უცნობების მიმართ, რადგანაც ამ შემთხვევაში $A$ დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია.

ამგვარად, ყოველი არაგანკუთრი მეორე რიგის ფართეული ამყარებს ურთიერთ ცალსახა შესაბამისობას. სივრცის წერტილებსა და სიბრტყეებს შორის. ეს შესაბამისობა კორელაციის კერძო სახეა (§ 194), რომელსაც პოლარობა ეწოდება და ხასიათდება იმით, რომ (5) ჩასმის კოეფიციენტები ადგენს სიმეტრიულ ცხრილს (შეადარეთ პოლარობის ანალოგიური თვისებანი სიბრტყეზე § § 219—221).

გეომეტრიულად პოლარობა (ზოგადი სახის კორელაციისაგან განსხვავებით) ხასიათდება იმით, რომ მას აქვს შემდეგი თვისება: თუ $N$ წერტილი მოთავსებულია $M$ წერტილის პოლარ სიბრტყეზე, მაშინ $M$ წერტილიც მოთავსებულია $N$ წერტილის პოლარ სიბრტყეზე; ეს თვისება უშუალო შედეგია შემდეგი ტოლობისა:

$$\Omega(x;\ y)=\Omega(y;\ x),$$

რომელიც გამოსახავს $\Omega$ ფორმის სიმეტრიულობას, ე. ი. (5) ჩასმის ცხრილის სიმეტრიულობას.

---

[1]) შეიძლება, მაგალითად, ასე მოვიქცეთ: აღვნიშნოთ (3) განტოლების მარცხენა მხარე $\Psi(x_1, x_2, x_3, x_4)$-ით; უშუალო ჩასმით დავრწმუნდებით, რომ $\Psi'_1=\frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial x}=0$; $\Psi'_2=0$; $\Psi'_3=0$; $\Psi_4=0$ განტოლებები კმაყოფილდება $x_1=y_1$; $x_2=y_2$; $x_3=y_3$; $x_4=y_4$ მნიშვნელობებისათვის, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ (3) ფართეული განკუთრია, რომლის ორმაგი წერტილია $N$.

ორ $M$ და $N$ წერტილს, რომელთაგან თითოეული მათგანი მეორის პოლარ სიბრტყეზე მდებარეობს, ეწოდება შ ე უ ღ ლ ე ბ უ ლ ი წერტილები. ასევე ორ სიბრტყეს, რომელთაგან თითოეული მათგანი მეორის პოლარზე გადის, ეწოდება შ ე უ ღ ლ ე ბ უ ლ ი სიბრტყეები.

შეიძლება შეუღლებული წერტილების სხვა განმარტებაც მოვიყვანოთ, რომელიც იგივე შედეგს გვაძლევს და რომელიც § 220-ში მოყვანილ განმარტების ანალოგიურია. სახელდობრ, $M$ და $N$ წერტილები შეუღლებულია $\Gamma$ ფართეულის მიმართ, თუ ისინი ჰარმონიულად შეუღლებულია $MN$ წრფის $\Gamma$ ფართეულთან გადაკვეთის $A$ და $B$ წერტილებთან.

სრულიად ისევე, როგორც § 220-ში, შეიძლება დამტკიცდეს, რომ $\Gamma$ ფართეულის მიმართ $N(y_1, y_2, y_3, y_4)$ წერტილის შეუღლებულ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი მოცემულია $\Omega(x, y)=0$ განტოლებით, ე. ი. წარმოადგენს $N$ წერტილის პოლარ სიბრტყეს.

ავტოპოლარი სამკუთხედის ანალოგიას (§ 222) აქ წარმოადგენს ა ვ ტ ო პ ო ლ ა რ ი ტ ე ტ რ ა ე დ რ ი, რომლის წვეროები იქნება მოპირდაპირე წახნაგების პოლუსები. მკითხველს ვანდობთ დამტკიცოს, რომ შესაძლებელია აგებულ იქნას ავტოპოლარ ტეტრაედრთა უსასრულო სიმრავლე დამტკიცება შეიძლება ან უშუალოდ პოლუსისა და პოლარი სიბრტყის ზემოთ მოყვანილ თვისებათა გამოყენებით, ანდა, იმის ჩვენებით, რომ თუ ფართეულის განტოლება დაყვანილია კანონიკურ სახეზე

$$\varepsilon_1 x_1^2+\varepsilon_2 x_2^2+\varepsilon_3 x_3^2+\varepsilon_4 x_4^2=0,$$

მაშინ ძირითადი საკოორდინატო ტეტრაედრი ავტოპოლარული იქნება. ეს, ამასთანავე, იძლევა განტოლების კანონიკურ სახეზე დაყვანის გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას.

§ 223-ში დამტკიცებულის სრულიად ანალოგიურად, შეიძლება ვიჩვენოთ (ამასაც ვანდობთ მკითხველს), რომ არაგანკუთრ ფართეულების შემთხვევაში $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ კოორდინატები ურთიერთ დაკავშირებულია მეორე რიგის განტოლებით:

$$\Psi(u_1, u_2, u_3, u_4)=0, \tag{6}$$

სადაც

$$\Psi(u_1, u_2, u_3, u_4)=\sum b_{ij} u_i u_j$$

არის $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ფორმის მიკავშირებული კვადრატული ფორმა; მიკავშირების ქვეშ ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $b_{ij}$ კოეფიციენტები, $A_{ij}$ კოეფიციენტებთან დაკავშირებულია ფორმულებით:

$$b_{ij}=\frac{A_{ij}}{A}.$$

(6) განტოლება არის მოცემული ფართეულის ტანგენციალური განტოლება. ვინაიდან იგი მეორე რიგისაა, ამიტომ ამბობენ, რომ ზედაპირი მ ე ო რ ე კ ლ ა ს ი ს ა ა. მაშასადამე, მეორე რიგის (არაგანკუთრი) ფართეული ამავე დროს მეორე კლასის ფართეულია (ალგებრული ფართეულის რიგი და კლასი, საზოგადოდ, თანხვედნილი არ არის).

## II. მეორე რიგის ფართეულების აფინური თვისებანი. ცენტრი, დიამეტრები

**§ 269. არასაკუთრივ სიბრტყესთან გადაკვეთა. აფინური გადაკვეთა[1].** ისე, როგორც მეორე რიგის წირების შემთხვევაში, მეორე რიგის ფართეულების აფინურ კლასიფიკაციასაც საფუძვლად დავუდებთ მათი არასაკუთრივი ელემენტების განხილვას.

[1] მკითხველს ვურჩევთ, რომ პირველი წაკითხვის დროს ამ პარაგრაფის შინაარსს ზოგადად გაეცნოს, ხოლო დაწვრილებით დაამუშაოს მას შემდეგ, როცა ფართეულის ფორმის საკითხს გაეცნობა (თავი XII, განყოფილება 1).

შემდეგში ჩვენ გამოვიყენებთ როგორც ერთგვაროვან, ისე არაერთგვაროვან კოორდინატებს; ამასთანავე, ერთგვაროვან კოორდინატებს აღვნიშნავთ $x, y, z, t$, ხოლო არაერთგვაროვან კოორდინატებს $x, y, z$. ამის შესაბამისად მეორე რიგის $\Gamma$ ფართეულის განტოლება არაერთგვაროვან კოორდინატებში დაიწერება ასე:

$$F(x, y, z)=0,$$

ერთგვაროვან კოორდინატებში კი

$$\Phi(x, y, z, t)=0. \tag{1a}$$

აღნიშვნები აქ იგივეა რაც § 262-ში.

შემდეგში ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ (1) განტოლებაში კოეფიციენტები მეორე განზომილების წევრებთან ყველა ნულის ტოლი არ არის; უამისოდ (1) ფართეული მეორე რიგისა არ იქნებოდა.

მოვძებნოთ ამ ფართეულის ყველა არასაკუთრივი წერტილი, ე. ი. ყველა ის წერტილი, რომლებიც მდებარეობს არასაკუთრივ $t=0$ სიბრტყეზე ($\Gamma$ ფართეულის გადაკვეთის წერტილები არასაკუთრივ სიბრტყესთან).

დაეუშვათ (1a) განტოლებაში, რომ $t=0$, მივიღებთ განტოლებას (§ 262 ის აღნიშვნებით)

$$\varphi(x, y, z)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{14}yz+a_{33}z^2=0. \tag{2}$$

მაშასადამე, $\Gamma$ ფართეულის არასაკუთრივი წერტილები განისაზღვრება (2) განტოლებით $t=0$ პირობასთან ერთად.

ზემოთ შემოღებული პირობის მიხედვით (§ 174) ჩვენ ვიტყვით, რომ (2) განტოლება განსაზღვრავს რაღაც მეორე რიგის წირს არასაკუთრივ სიბრტყეზე. აღვნიშნოთ ეს წირი $\gamma_\infty$-ით.

თავისთავად აღებული (2) განტოლება წარმოადგენს მეორე რიგის კონუსს წვეროთი კოორდინატთა $O$ სათავეში, რომელიც არასაკუთრივ სიბრტყეს იმავე $\gamma_\infty$ წირზე კვეთს, რომელზედაც მოცემული ზედაპირი $\Gamma$; ამ კონუსის მსახველები გვაძლევს იმ მიმართულებებს, რომლითაც დაშორებულია $\Gamma$ ზედაპირის არასაკუთრივი წერტილები. ამიტომ (2) კონუსს ეწოდება $O$ წერტილზე გატარებულ ასიმპტოტურ მიმართულებათა კონუსი.

იმის მაგივრად, რომ განხილულ იქნას $\gamma_\infty$ წირი, შეიძლება განვიხილოთ (2) კონუსი. ამ პარაგრაფის შემდეგი ტექსტის კითხვის დროს მკითხველს ვურჩევთ, რომ ყველაფერი, რაც $\gamma_\infty$ წირის შესახებ იქნება ნათქვამი, სათანადოდ გადაიტანოს (2) კონუსზე. ასე, მაგალითად, როცა ჩვენ ვიტყვით, რომ $\gamma_\infty$ წირი იშლება ორ წრფედ, ეს იმავე დროს ნიშნავს, რომ (2) კონუსი იშლება ორ სიბრტყედ.

მეორე რიგის ფართეულთა ქვემომოყვანილი აფინური კლასიფიკაცია დამყარებულია $\gamma_\infty$ წირის (ანუ, რაც იმაზეზე დაიყვანება, ასიმპტო-

ტურ მიმართულებათა კონუსის) განხილვაზე, ამა თუ იმ გეგმილურ კატეგორიასთან (§ 264) დაკავშირებით, რომელსაც Γ მიეკუთვნება.

ამასთანავე, არსებითია ის თუ $\gamma_\infty$ ნამდვილი, დაუშლადი თუ შლადი წირია. ეს კი ადვილი გამოსარკვევია $\varphi(x, y, z)$ ფორმის კანონიკურ სახეზე $\varphi'(x', y', z') + \varepsilon_1 x'^2 + \varepsilon_2 y'^2 + \varepsilon_3 z'^2$ დაყვანით წრფივი ჩასმის საშუალებით, რაც მოითხოვს მხოლოდ მარტივი რაციონალური ოპერაციების გამოყენებას (იხ. § 12-ის დამატება).

კერძოდ, $\gamma_\infty$ წირი შლადია მხოლოდ მაშინ, როცა $\varphi(x, y, z)$ ფორმის დისკრიმინანტი

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ნულის ტოლია.

დავიწყოთ **არაგანკუთრი ფართეულების** განხილვით, რომლებიც, როგორც ცნობილია, დახასიათებულია პირობით

$$A \neq 0$$

და ჩამოვთვალოთ ყველა შესაძლო შემთხვევა.

1°. $\gamma_\infty$ წირი დაუშლადი და წარმოსახვითია. ვინაიდან ამ შემთხვევაში Γ ფართეულს არც ერთი არასაკუთრივი წერტილი არა აქვს, ამიტომ ნებისმიერი (ნამდვილი) სიბრტყე Γ ფართეულს ისეთი მეორე რიგის წირზე გადაკვეთს, რომელსაც არც ერთი ნამდვილი არასაკუთრივი წერტილი არა აქვს. ე. ი. გადაკვეთს ელიფსური ტიპის წირზე[1]). ამ შემთხვევაში Γ ფართეულს **ელიფსოიდი** ეწოდება. ეს ფართეული § 264-ის მხოლოდ $(a_1)$ ან $(a_2)$ კატეგორიებს შეიძლება ეკუთვნოდეს, რადგანაც $(a_3)$ კატეგორიის ფართეულებს ყოველ ნამდვილ (კერძოდ, არასაკუთრივ) სიბრტყესთან ნამდვილი საერთო წერტილები აქვს (§ 267). პირველ შემთხვევაში ელიფსოიდი წარმოსახვითია, ხოლო მეორე შემთხვევაში ნამდვილი. ეს ორი შემთხვევა ერთმანეთისაგან განირჩევა იმით, რომ პირველ შემთხვევაში $A > 0$, ხოლო მეორე შემთხვევაში $A < 0$.

ამგვარად, თუ $\gamma_\infty$ დაუშლადი და წარმოსახვითი წირია, მაშინ როცა $A > 0$, წარმოსახვითი ელიფსოიდი გვაქვს, ხოლო როცა $A < 0$, — ნამდვილი ელიფსოიდი.

2°. $\gamma_\infty$ წირი დაუშლადი და ნამდვილია. რადგან Γ ფართეული ნამდვილ წერტილებს შეიცავს, ამიტომ Γ შეიძლება მხოლოდ § 264-ის $(a_2)$ და $(a_3)$ კატეგორიებს ეკუთვნოდეს. ვთქვათ, Π სივრცის ნებისმიერი სიბრტყეა. თუ Π სიბრტყე $\gamma_\infty$ წირს ორ ნამდვილ სხვადასხვა წერტილში კვეთს[2]),

[1]) თუ სიბრტყე $\gamma$ წირის მხები არ არის, მაშინ გადაკვეთის წირი დაუშლადი იქნება, ე. ი. ჩვენს შემთხვევაში — ელიფსი. ანალოგიური შენიშვნას აქვს ადგილი ქვემოთ ჩამოთვლილ შემთხვევებშიც.

[2]) Π სიბრტყის გადაკვეთა $\gamma$ მეორე რიგის წირთან მოცემულია $\gamma$ წირის გადაკვეთით Δ წრფესთან; სადაც Δ წრფე წარმოადგენს Π სიბრტყისა და $\gamma$ წირის სიბრტყის გადაკვეთას.

მაშინ II სიბრტყისა და Γ ფართეულის გადაკვეთა ჰიპერბოლური ტიპის წირი იქნება. თუ II სიბრტყე $\gamma_\infty$ წირს წარმოსახვით წერტილებში კვეთს, მაშინ II-ს და Γ-ს გადაკვეთა ელიფსური ტიპის წირია. ბოლოს, თუ II სიბრტყე $\gamma_\infty$-ს ორ დამთხვეულ წერტილში კვეთს, მაშინ II და Γ-ს გადაკვეთა პარაბოლური ტიპის წირია. მაშასადამე, Γ ფართეულისა და სიბრტყეების გადაკვეთით შეიძლება მიღებულ იქნას სამივე ტიპის წირები.

ამ შემთხვევაში Γ ფართეულს ჰ ი პ ე რ ბ ო ლ ო ი დ ი ეწოდება. თუ ჰიპერბოლოიდი ($a_2$) კატეგორიას ეკუთვნის, ე. ი. თუ მხოლოდ ელიფსური წერტილები აქვს, მაშინ მას ო რ კ ა ლ თ ა ჰიპერბოლოიდი ეწოდება. თუ ის ($a_3$) კატეგორიას ეკუთვნის, ე. ი. თუ მხოლოდ ჰიპერბოლური წერტილები აქვს, მაშინ მას ც ა ლ კ ა ლ თ ა ჰიპერბოლოიდი ეწოდება (სახელწოდებანი ცხადი გახდება ამ ფართეულების ფორმის შესწავლის შემდეგ).

ამგვარად, თუ $\gamma_\infty$ დაუშლადი და ნ ა მ დ ვ ი ლ ი წ ი რ ი ა, მ ა შ ი ნ რ ო ც ა $A>0$ ც ა ლ კ ა ლ თ ა ჰ ი პ ე რ ბ ო ლ ო ი დ ი გ ვ ე ქ ნ ე ბ ა, ხ ო ლ ო რ ო ც ა $A<0$—ო რ კ ა ლ თ ა.

3°. $\gamma_\infty$ წირი შლადია და წარმოსახვითი. ამ შემთხვევაში $\gamma_\infty$-ს ერთადერთი ნამდვილი წერტილი აქვს, სახელდობრ, $\gamma_\infty$ წირის ორმაგი წერტილი $G$. არასაკუთრივი სიბრტყე წარმოადგენს Γ ფართეულის მხებს $G$ წერტილში. $G$ წერტილზე გამავალი ყოველი საკუთრივი სიბრტყე Γ ფართეულს პარაბოლზე [1]) კვეთს. ყველა ეს სიბრტყე ერთი და იმავე წრფის პარალელურია, სახელდობრ, პარალელურია ნებისმიერი წრფისა იმ წრფეთაგან, რომელთა მიმართულებითაც დაშორებულია $G$ წერტილი. ყოველი სხვა სიბრტყე Γ ზედაპირს ელიფსური ტიპის წირზე კვეთს. Γ ფართეულის ყველა წერტილი ელიფსურია (ე. ი. $A<0$), ვინაიდან ელიფსურია, მაგალითად, $G$ წერტილი.

ამ ფართეულს ე ლ ი ფ ს უ რ ი პ ა რ ა ბ ო ლ ო ი დ ი ეწოდება. როგორც ადვილი სანახავია, იგი ეკუთვნის ($a_2$) კატეგორიას, ვინაიდან $A<0$.

4. $\gamma_\infty$ წირი შლადია და ნამდვილი. იგი აუცილებლად შედგება ორი სხვადასხვა წრფისაგან [2]). მართლაც, იგი რომ შედგენილი იყოს ერთმანეთზე დამთხვეული ორი წრფისაგან, მაშინ არასაკუთრივი სიბრტყე შეეხებოდა Γ ფართეულს მთელ წრფეზე და Γ ფართეულს პარაბოლური წერტილები ექნებოდა, რაც შესაძლებელია მხოლოდ განსაკუთრებული ფართეულების შემთხვევაში. აქაც არასაკუთრივი სიბრტყე Γ ფართეულს შეეხება $\gamma_\infty$ წირის ორმაგ წერტილში $G$.

ყოველ $G$ წერტილზე გამავალი სიბრტყე Γ ფართეულს პარაბოლური ტიპის წირზე კვეთს. ყოველი სხვა სიბრტყე Γ-ს ჰიპერბოლური ტიპის წირზე გადაკვეთს. ფართეულის ყველა წერტილი ჰიპერბოლურია.

---

[1]) გადაკვეთა წარმოადგენს პარაბოლური ტიპის წირს არასაკუთრივი წერტილით $G$. გადაკვეთის წირი რომ პარაბოლურ წრფეთა წყვილი ყოფილიყო (რომლებიც $G$ წერტილში იკვეთებიან), მაშინ სიბრტყე Γ-ს მხები იქნებოდა $G$ წერტილში. მაგრამ ასეთს მხოლოდ არასაკუთრივი სიბრტყე წარმოადგენს.

[2]) ეს წრფეები ორმ დამთხვეულნი ყოფილიყვნენ, მაშინ არასაკუთრივი სიბრტყე Γ-ს შეეხებოდა წრფის გასწვრივ, და Γ ფართეულს პარაბოლური წერტილები ექნებოდა, რაც შესაძლებელია მხოლოდ განკუთრი ფართეულების შემთხვევაში.

ამ ფართეულს ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი ეწოდება. ცხადია, იგი ($a_3$) კატეგორიას ეკუთვნის.

დავიხსომოთ, რომ ელიფსოიდისა და ჰიპერბოლოიდის შემთხვევაში $A_{44} \neq 0$, ხოლო პარაბოლოიდის შემთხვევაში $A_{44}=0$; ორივე შემთხვევაში $A \neq 0$.

გადავდივართ რა განკუთრ დაუშლად ფართეულებზე ($A=0$, $A$-ს რანგი უდრის სამს) შევნიშნოთ, რომ აფინური თვალსაზრისით კონუსი უკვე უნდა გავარჩიოთ ცილინდრისაგან (ცილინდრი ისეთი კონუსია, რომლის წვერო არასაკუთრივი წერტილია) და რომ არსებობს სხვადასხვა სახის ცილინდრი: ელიფსური (რომლის მიმმართველი ელიფსია), ჰიპერბოლური (რომლის მიმმართველი ჰიპერბოლია), პარაბოლური (რომლის მიმმართველი პარაბოლია). (იხ. ქვემოთ § § 281, 282).

**§ 270. მეორე რიგის ფართეულისა და წრფის გადაკვეთის განმსაზღვრელი განტოლება დეკარტის არაერთგვაროვან კოორდინატებში.** შემდეგში ჩვენ გამოვიყენებთ დეკარტის არაერთგვაროვან კოორდინატებს და ამიტომ დავიწყებთ იმ განტოლების შედგენით, რომელიც განსაზღვრავს ამ კოორდინატებით მოცემულ მეორე რიგის

$$F(x, y, z)=0 \tag{1}$$

ფართეულის გადაკვეთას პარამეტრული სახით მოცემულ წრფესთან:

$$x=x_0+Xs,\ y=y_0+Ys,\ z=z_0+Zs, \tag{2}$$

სადაც $(x_0, y_0, z_0)$ წრფის რაიმე წერტილია, $(X, Y, Z)$ — მისი მიმმართველი ვექტორი, ხოლო $s$—ცვალებადი პარამეტრი. ჩავსვათ (2) გამოსახულებანი (1) განტოლებაში, მივიღებთ $S$-ის განმსაზღვრელ კვადრატულ განტოლებას [1]),

$$\varphi(X, Y, Z)s^2+2[XF_1(x_0, y_0, z_0)+YF_2(x_0, y_0, z_0)+ \\ +ZF_3(x_0, y_0, z_0)]s+F(x_0, y_0, z_0)=0, \tag{3}$$

სადაც ისე, როგორც წინათ,

$$\varphi(X, Y, Z)=a_{11}X^2+a_{22}Y^2+a_{33}Z^2+2a_{23}YZ+2a_{31}ZX+2a_{12}XY. \tag{4}$$

თუ

$$\varphi(X, Y, Z)=0, \tag{5}$$

მაშინ წინა განტოლების $s_1$, $s_2$ ფესვთაგან ერთი მაინც უდრის $\infty$-ს. ე. ი. წრფე ფართეულს გადაკვეთს არასაკუთრივ წერტილში, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მას ასიმპტოტური მიმართულება აქვს (§ 269). იგივე შედეგი შეგვეძლო მიგვეღო ასიმპტოტურ მიმართულებათა კონუსის განტოლებიდან [(§ 269, (2)]. მართლაც, თუ გამოვსახავთ, რომ $(X, Y, Z)$ ვექტორის მიმართულებით დაშორებული არასაკუთრივი წერტილი, ე. ი. $(X, Y, Z, 0)$ წერტილი, ერთ-

[1]) იხ. § 262-ის აღნიშვნები.

გვაროვანი კოორდინატებით ეკუთვნის § 269-ის (2) კონუსს, უშუალოდ მივიღებთ (5) პირობას.

§ 271. ცენტრი. მეორე რიგის ფართეულის ცენტრი ეწოდება ისეთ წერტილს, რომელსაც ის თვისება აქვს, რომ მასზე გატარებული ყველა ქორდა ამ წერტილით შუაზე იყოფა.

იმისათვის, რომ $O(x_0, y_0, z_0)$ წერტილი ფართეულის ცენტრი იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ყველა შესაძლო $(X, Y, Z)$ მიმართულებისათვის წინა პარაგრაფის (3) განტოლების საშუალო კოეფიციენტი ნულის ტოლი იყოს (რადგანაც მხოლოდ ამ შემთხვევაშია შესაძლებელი, რომ ამ განტოლების $s_1$ და $s_2$ ფესვები ყოველი მიმართულებისათვის აკმაყოფილებდნენ $s_1 + s_2 = 0$ პირობას). აქედან კი გამომდინარეობს, რომ ცენტრის კოორდინატები განისაზღვრება შემდეგი განტოლებებით (შეადარეთ § 228):

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0, \quad F_3(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

ანუ, დაწვრილებით,

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} &= 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} &= 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

თუ ამ განტოლებებში $x$, $y$, $z$-ს განვიხილავთ როგორც მიმდინარე კოორდინატებს, მაშინ თითოეული მათგანი გამოსახავს რაღაც სიბრტყეს. მაშასადამე, ცენტრი განისაზღვრება როგორც სამი სიბრტყის გადაკვეთა.

თუ (2) სისტემის დეტერმინანტი

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ ერთი და მხოლოდ ერთი საკუთრივი ცენტრი გვაქვს. ამ შემთხვევაში ფართეულს ცენტრალური ფართეული ეწოდება.

კერძოდ ელიფსოიდი და ჰიპერბოლოიდი (269) ცენტრალური ფართეულებია.

თუ $A_{44} = 0$, მაშინ (2) სიბრტყეები ან სრულებით არ კვეთენ ერთმანეთს (საკუთრივ წერტილში), ან გადიკვეთებიან ერთ წრფეზე, ან სამივე ემთხვევა ერთმანეთს. პირველ შემთხვევაში ცენტრი (საკუთრივი) საერთოდ არა გვაქვს, მეორე შემთხვევაში გვექნება ცენტრთა წრფე, მესამე შემთხვევაში—ცენტრთა სიბრტყე.

შესაძლებელია, არასაკუთრივი ელემენტების შემოტანით, ცენტრის ცნება განვაზოგადოთ. თუ ცენტრს ვუწოდებთ ყოველ ისეთ წერტილს (საკუთრივს ან არასაკუთრივს), რომლის ერთგვაროვანი კოორდინატები აკმაყოფი-

ლებენ ერთგვაროვან სახეზე დაყვანილ (2) განტოლებებს:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t &= 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t &= 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

ანუ მოკლედ

$$\Phi_1(x, y, z, t) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z, t) = 0, \quad \Phi_3(x, y, z, t) = 0. \tag{1a}$$

თუ არ განვასხვავებთ საკუთრივ და არასაკუთრივ ელემენტებს, შეიძლება ითქვას, რომ ფართეულს გარკვეული ცენტრი აქვს, თუ

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{matrix} \tag{3}$$

ცხრილის რანგი უდრის სამს. თუ ამ ცხრილის რანგი უდრის ორს, მაშინ გვაქვს ცენტრთა წრფე და თუ ხსენებული რანგი ერთს უდრის, მაშინ—ცენტრთა სიბრტყე.

არაგანკუთრი ფართეულების შემთხვევაში (3) ცხრილის რანგი ყოველთვის სამის ტოლია; მართლაც, ეს რანგი რომ სამზე ნაკლები იყოს, მაშინ $A$ დეტერმინანტის დაშლით უკანასკნელი სტრიქონის ელემენტების მიხედვით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $A = 0$.

კერძოდ, აქედან გამომდინარეობს, რომ პარაბოლოიდს ერთადერთი არასაკუთრივი ცენტრი აქვს, რადგან ამ შემთხვევაში $A_{44} = 0$, $A \neq 0$ და (3) ცხრილის რანგი უდრის სამს. თუ (2a) სისტემას ამოვხსნით დამატებაში ნაჩვენები ხერხით (§ 6a), დავრწმუნდებით, რომ $t \neq 0$.

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ, თუ ცენტრთა სიბრტყე გვაქვს, მაშინ არ შეიძლება იგი არასაკუთრივი იყოს. მართლაც, რომ ყველა (2a) წრფე არასაკუთრივ სიბრტყეს ეთხვეოდეს, მაშინ გვექნებოდა: $(a_{ij} = 0.\ (ij = 1, 2, 3)$, რაც ზემოჩამოთვლილ პირობას ეწინააღმდეგება.

შემდეგში ყველგან, თუ ამის საწინააღმდეგო ცალკე არ არის აღნიშნული, როცა ვიტყვით ცენტრის არსებობის ან არ არსებობის შესახებ, მხედველობაში გვექნება საკუთრივი ცენტრი.

შევნიშნოთ, რომ ცენტრალური ფართეულები (ე. ი. ფართეულები, რომლებსაც ერთი გარკვეული საკუთრივი ცენტრი აქვთ) ხასიათდებიან პირობით

$$A_{44} \neq 0.$$

პოლოს. შევნიშნოთ, რომ თუ კოორდინატთა სათავე ფართეულის ცენტრია, მაშინ მის განტოლებაში პირველი ხარისხის წევრები არ შედიან და, პირიქით (შდრ. § 223).

**§ 272. დიამეტრალური სიბრტყეები.** მოვკიდოთ მეორე რიგის ფართეულს, ყველა ამ პირდის შუა წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომე-

ლიც მოცემული $(X, Y, Z)$ მიმართულების პარალელურია; ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ეს მიმართულება ასიმპტოტური არ არის.

ვთქვათ, $M(x_0, y_0, z_0)$ საძიებელი გეომეტრიული ადგილის რაიმე წერტილია. $(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე გამავალი და $(X, Y, Z)$ მიმართულების პარალელური წრფის ფართეულთან გადაკვეთის წერტილები მოცემულია § 270-ის (3) განტოლების $s_1$, $s_2$ ფესვებით. იმისათვის, რომ $M_0$ ქორდის შუა წერტილი იყოს, საჭიროა: $s_1 + s_2 = 0$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$XF_1(x_0, y_0, z_0) + YF_2(x_0, y_0, z_0) + ZF_3(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

უკანასკნელი განტოლება, თუ მასში $x_0$, $y_0$, $z_0$ განვიხილავთ როგორც მიმდინარე კოორდინატებს, წარმოადგენს საძიებელი გეომეტრიული ადგილის განტოლებას.

თუ აღვნიშნავთ $x_0$, $y_0$, $z_0$-ს უბრალოდ $x$, $y$, $z$-თ, ეს განტოლება გადაიწერება ასე:

$$XF_1(x, y, z) + YF_2(x, y, z) + ZF_3(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

ან, უფრო დაწვრილებით:

$$\begin{aligned} X(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) + Y(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) + \\ + Z(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}) = 0, \end{aligned} \tag{1a}$$

ან კიდევ:

$$Lx + My + Nz + K = 0, \tag{2}$$

სადაც სიმოკლისათვის შემოღებულია აღნიშვნები:

$$\left.\begin{aligned} L &= a_{11}X + a_{21}Y + a_{31}Z = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial X}, \\ M &= a_{12}X + a_{22}Y + a_{32}Z = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial Y}, \\ N &= a_{13}X + a_{23}Y + a_{33}Z = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial Z} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

და

$$K = a_{14}X + a_{24}Y + a_{34}Z. \tag{4}$$

ადვილი სანახავია, რომ $L$, $M$, $N$ კოეფიციენტები (2) განტოლებაში არ შეიძლება ერთდროულად ნულის ტოლი იყოს, თუ მოცემული $(X, Y, Z)$ მიმართულება, როგორც ვგულისხმობდით, ასიმპტოტური არ არის.

მართლაც, გავამრავლოთ (3) განტოლებანი, შესაბამისად, $X$, $Y$, $Z$-ზე და შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$LX + MY + NZ = \varphi(X, Y, Z) \tag{5}$$

რომ ერთდროულად ადგილი ჰქონდეს ტოლობებს $L = M = N = 0$, მაშინ გვექნებოდა $\varphi(X, Y, Z) = 0$, ე. ი. $(X, Y, Z)$ ასიმპტოტური მიმართულება იქნებოდა.

ამგვარად, ჩვენ ვხედავთ, რომ (2) განტოლება და, მაშასადამე, (1)-იც, გამოსახავს რაღაც სიბრტყეს; ამ სიბრტყეს ეწოდება *მოცემული* $(X, Y, Z)$ *მიმართულების შეუღლებული დიამეტრალური სიბრტყე*.

ადვილად შეგვიძლია დავიხსომოთ $(X, Y, Z)$ მიმართულების შეუღლებული დიამეტრალური სიბრტყის განტოლების შედგენის წესი; ეს წესი გამომდინარეობს (1) განტოლებიდან: იმისათვის, რომ მოცემული მიმართულების შეუღლებული დიამეტრალური სიბრტყის განტოლება შევადგინოთ, საკმარისია ავიღოთ $F(x, y, z)$ პოლინომის ნაწილობრივი წარმოებულები $x$, $y$ და $z$-ით, გავამრავლოთ ისინი შესაბამისად $X$, $Y$, $Z$-ზე, შედეგი შევკრიბოთ და გავუტოლოთ ნულს.

ახლა მოვიყვანოთ დიამეტრალური სიბრტყეების შემდეგი მნიშვნელოვანი თვისება: *ყველა დიამეტრალური სიბრტყე ფართეულის ცენტრზე გადის* (ან *ყველა ცენტრზე*). ეს უშუალოდ გამომდინარეობს (1) განტოლებიდან, ვინაიდან ცენტრი (ცენტრები) წარმოადგენს სამი სიბრტყის:

$$F_1 = 0,\ F_2 = 0,\ F_3 = 0$$

გადაკვეთას.

კერძოდ, თუ გვაქვს ცენტრთა წრფე, მაშინ ყველა დიამეტრალური სიბრტყე ამ წრფეზე გადის. თუ გვაქვს ცენტრთა სიბრტყე, მაშინ ყველა დიამეტრალური სიბრტყე ამ სიბრტყეს ემთხვევა.

ცხადია, ზემონათქვამი გამოსადეგია *არასაკუთრივი ცენტრების* შემთხვევაშიც. თუ ჩვენ გვაქვს ერთი არასაკუთრივი ცენტრი, მაშინ ყველა დიამეტრალური სიბრტყე მასზე გადის და, მაშასადამე, ერთი და იმავე წრფის პარალელურია. თუ გვაქვს ცენტრთა არასაკუთრივი წრფე, მაშინ ყველა დიამეტრალური სიბრტყე მასზე გადის და, მაშასადამე, ისინი ურთიერთ პარალელური არიან.

საზოგადოდ, ყოველთვის როცა საკუთრივი ცენტრი არა გვაქვს, ყველა დიამეტრალური სიბრტყე ერთი და იმავე წრფის პარალელურია.

აქამდე ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ $(X, Y, Z)$ მიმართულება არაასიმპტოტური იყო. მაგრამ შეგვიძლია განვაზოგადოთ დიამეტრალური სიბრტყის ცნება, თუ განვსაზღვრავთ $(X, Y, Z)$ მიმართულების შეუღლებულ დიამეტრალურ სიბრტყეს (1) განტოლებით *ნებისმიერი* $X, Y, Z$ *ისათვის*, რომლებიც ერთდროულად ნულები არ არიან.

თუ $(X, Y, Z)$—ერთ-ერთი ასიმპტოტური მიმართულებაა, მაშინ მისი შეუღლებული დიამეტრალური სიბრტყე მისივე პარალელურია (ე. ი. იმ მიმართულების პარალელურია, რომლის შეუღლებულიც თვითონ არის). ეს უშუალოდ გამომდინარეობს (5) იგივეობიდან. იმავე იგივეობიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $(X, Y, Z)$ ასიმპტოტური მიმართულება არ არის, მაშინ არ შეიძლება ის პარალელური იყოს მისი შეუღლებული დიამეტრისა.

§ 273. **ცენტრალური ფართეულების დიამეტრალური სიბრტყეები და დიამეტრები.** შევჩერდეთ უფრო დაწვრილებით *ცენტრალურ ფართეულებზე*. თუ კოორდინატთა სათავეს მოვათავსებთ ცენტრში, მაშინ $(X, Y, Z)$

მიმართულების შეუღლებული დიამეტრალური სიბრტყის განტოლება მიიღებს სახეს (რადგანაც ამ შემთხვევაში $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$; იხ. § 271-ის ბოლო)

$$Lx + My + Nz, \tag{1}$$

სადაც $L$, $M$, $N$ მოცემულია წინა პარაგრაფის (3) ფორმულებით. ვინაიდან ჩვენს შემთხვევაში $A_{44} \neq 0$, ამიტომ წინა პარაგრაფის (3) განტოლებანი ცალსახად ამოიხსნება $X$, $Y$, $Z$-ის მიმართ. მაშასადამე, ცენტრზე გამავალი ყოველი (1) სახის სიბრტყე, საკუთარი გარკვეული ($X$, $Y$, $Z$) მიმართულების შეუღლებული დიამეტრალური სიბრტყეა.

ცენტრზე გამავალ ყოველ წრფეს დიამეტრი ეწოდება. თუ დიამეტრალური სიბრტყე დიამეტრის მიმართულების შეუღლებულია, მაშინ დიამეტრს და დიამეტრალურ სიბრტყეს შეუღლებული ეწოდება.

ვთქვათ, $\Delta$ არაასიმპტოტური მიმართულების მქონე რაიმე დიამეტრია. მივიღოთ იგი $Oz$ ღერძად, ხოლო მისი შეუღლებული დიამეტრალური სიბრტყე მივიღოთ $Oxy$ სიბრტყედ. მაშინ $\Delta$-ს (ე. ი. $Oz$ ღერძის) მიმმართველ ვექტორად შეგვიძლია ავიღოთ ვექტორი (0, 0, 1) და წინა პარაგრაფის (3) ფორმულებით, $\Delta$-ს შეუღლებული, დიამეტრალური სიბრტყისათვის გვექნება: $L = a_{31}$, $M = a_{32}$, $N = a_{33}$. ვინაიდან, გარდა ამისა, აღნიშნული დიამეტრალური სიბრტყე $Oxy$ სიბრტყეს უნდა ემთხვეოდეს, ამიტომ $L = M = 0$, ე. ი. $a_{31} = a_{32} = 0$.

მაშასადამე, ფართეულის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + a_{44} = 0 \tag{2}$$

გადავკვეთოთ ზედაპირი $Oxy$ სიბრტყის პარალელური სიბრტყით $z = h$; თუ წინა განტოლებაში ჩავსვამთ $z = h$, მივიღებთ:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + C = 0, \tag{3}$$

სადაც $C = a_{44} + a_{33}h^2$. (3) განტოლება წარმოადგენს გადაკვეთის წირის გეგმილს $Oxy$ სიბრტყეზე $Oz$ ღერძის პარალელურად. ჩვენ ვხედავთ, რომ (3) წირი წარმოადგენს ცენტრალურ წირს, ცენტრით $O$ წერტილში. მაშასადამე, ჩვენი ფართეულის გადაკვეთის წირი $z = h$ სიბრტყესთან ცენტრალურია, რომლის ცენტრი $Oz$ ღერძზეა.

აქედან გამოგვყავს დასკვნა: დიამეტრი (არაასიმპტოტური მიმართულებისა) არის მოცემული ფართეულის იმ სიბრტყეებთან გადაკვეთის წირთა ცენტრების გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც პარალელური არიან აღებული დიამეტრის შეუღლებული დიამეტრალური სიბრტყისა.

ანალოგიურ დებულებებს (ზოგიერთი სახეცვლილებით) აქვს ადგილი არაცენტრალური ფართეულისათვის. ყველა შემთხვევაში დიამეტრები ეწოდება (საკუთრივ ან არასაკუთრივ) ცენტრზე გამავალ წრფეებს.

**§ 274. დიამეტრალური სიბრტყეები როგორც არასაკუთრივი წერტილების პოლარი სიბრტყეები.** § 232-ში ნათქვამის ანალოგიურად, $(X, Y, Z)$ იმართულების შეუღლებული დიამეტრალური სიბრტყე შეიძლება განვსაზღვროთ, როგორც $(X, Y, Z, 0)$ არასაკუთრივი წერტილის პოლარი სიბრტყე. სრულიად ასევე ცენტრი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც არასაკუთრივი სიბრტყის პოლუსი.

ამ ახალი განსაზღვრებიდან ადვილად გამოიყვანება დიამეტრალური სიბრტყეებისა და ცენტრის, ზემოთ სხვა გზით მიღებული, ყველა თვისება. მაგრამ ამაზე აქ არ შევჩერდებით.

**§ 275. ასიმპტოტები.** მეორე რიგის Γ ფართეულის ა ს ი მ პ ტ ო ტ ი ეწოდება ყოველ ისეთ წრფეს, რომლის გადაკვეთის ორივე წერტილი Γ ფართეულთან არასაკუთრივ წერტილს ემთხვევა. სხვანაირად, ასიმპტოტი არის Γ ფართეულის მხები არასაკუთრივ წერტილში.

ვთქვათ, $N$ სივრცის რაიმე წერტილია, Π—მისი პოლარი სიბრტყე Γ-ს მიმართ და γ—გადაკვეთის წირი Π სიბრტყესთან Γ ფართეულისა. $N$ წერტილიდან Γ ფართეულისადმი გატარებული მხები წრფეები $N$ წერტილს აერთებენ γ წირის წერტილებთან. ის მხები წრფეები, რომლებიც Γ ფართეულს არასაკუთრივ წერტილებში ეხებიან, γ წირის იმ წერტილებზე უნდა გადიოდნენ, რომლებიც არასაკუთრივ სიბრტყეზე მდებარეობენ. ასეთი წერტილები საზოგადოდ ორია (ესენია γ-ს გადაკვეთის წერტილები არასაკუთრივ სიბრტყესთან). მაშასადამე, საზოგადოდ, მოცემული ნებისმიერი წერტილიდან Γ ფართეულის ორი ასიმპტოტის გატარება შეიძლება. მაგრამ თუ $N$ ფართეულის ცენტრში იმყოფება. მაშინ Π სიბრტყე (ე. ი. $N$ წერტილის პოლარი სიბრტყე Γ-ს მიმართ) არასაკუთრივი სიბრტყეა; γ—მთლიანად არასაკუთრივი წირია და ყოველი წრფე, რომელიც $N$ წერტილზე და γ-ს ნებისმიერ წერტილზე გაივლის, ასიმპტოტი იქნება.

მაშასადამე, ცენტრიდან გატარებული ასიმპტოტები ადგენენ კონუსს, რომელსაც ა ს ი მ პ ტ ო ტ უ რ ი კ ო ნ უ ს ი ეწოდება. ცხადია, იგი წარმოადგენს ცენტრიდან გატარებულ ასიმპტოტურ მიმართულებათა კონუსს. არ უნდა დაგვავიწყდეს, რომ ასიმპტოტები შეიძლება იყოს წარმოსახვითიც და, აგრეთვე. არასაკუთრივიც.

## III. მეტრიკული თვისებანი. მთავარი დიამეტრალური სიბრტყეები. განტოლების დაყვანა ნორმალურ სახეზე

მთელ ამ თავში, რომელიც მიძღვნილია მეტრიკული თვისებებისადმი, კოორდინატები იგულისხმება მართკუთხოვანი, თუ ამის საწინააღმდეგო არ იქნება ნათქვამი.

**§ 276. მთავარი დიამეტრალური სიბრტყეები და მთავარი მიმართულებები.** $(X, Y, Z)$ მიმართულებას (მოცემული მეორე რიგის ფართეულების მიმართ) მ თ ა ვ ა რ ი მიმართულება ეწოდება, თუ მისი შეუღლებული დიამეტრალური სიბრტყე მისივე მართობია. შესაბამის დიამეტრალურ სიბრტყე-

საც აგრეთვე მთავარი დიამეტრალური სიბრტყე ეწოდება. ცხადია, იგი ფართეულის სიმეტრიის სიბრტყეს წარმოადგენს.

მთავარ მიმართულებათა მოძებნა ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანაა მეორე რიგის ფართეულების მეტრიკულ თეორიაში, და ახლა ჩვენ გადავდივართ ამ საკითხის განხილვაზე.

§ 272-იდან ჩვენ ვიცით, რომ $(X, Y, Z)$ მიმართულების შეუღლებული დიამეტრალური სიბრტყის განტოლებას აქვს სახე

$$Lx + My + Nz + K = 0, \tag{1}$$

სადაც (ახლა ინდექსებს ჩვენ სხვა რიგით ვწერთ)

$$\left.\begin{aligned} L &= a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z, \\ M &= a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z, \\ N &= a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

იმისათვის, რომ $(X, Y, Z)$ მთავარი მიმართულება იყოს, ე. ი. იმისათვის, რომ (1) სიბრტყე მართობი იყოს $(X, Y, Z)$ მიმართულებისა, აუცილებელი და საკმარისია, რომ $L, M, N$ სიდიდეები პროპორციული იყოს $X, Y, Z$ სიდიდეებისა, ე. ი. ადგილი უნდა ჰქონდეს

$$L = \lambda X,\ M = \lambda Y,\ N = \lambda Z \tag{3}$$

დამოკიდებულებებს, სადაც $\lambda$ რაღაც რიცხვია; ან, უფრო დაწვრილებით,

$$\left.\begin{aligned} a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z &= \lambda X, \\ a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z &= \lambda Y, \\ a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z &= \lambda Z, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ან კიდევ (თუ ყველა წევრს მარცხნივ გადავიტანთ):

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)X + a_{12}Y + a_{13}Z &= 0, \\ a_{21}X + (a_{22} - \lambda)Y + a_{23}Z &= 0, \\ a_{31}X + a_{32}Y + (a_{33} - \lambda)Z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

ამგვარად, $X, Y, Z$ სიდიდეები უნდა აკმაყოფილებდნენ განტოლებათა (4a) სისტემას. თუ ამ სისტემის დეტერმინანტი

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} \tag{5}$$

ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ მისი ერთადერთი ამონახსნია $X=0$, $Y=0$, $Z=0$. მაგრამ, პირობის თანახმად, $X, Y, Z$ (მიმმართველი ვექტორის კოორდინატები), ერთდროულად ნულის ტოლი არ უნდა იყოს. მაშასადამე, რიცხვი $\lambda$ უნდა აკმაყოფილებდეს განტოლებას

$$D(\lambda) = 0.. \tag{6}$$

ეს განტოლება მესამე ხარისხისაა, რადგანაც $D(\lambda)$ მესამე რიგის პოლინომია:

$$D(\lambda)=S_0\lambda^3+S\lambda^2+S'\lambda+S'.$$

ადვილად შეიძლება გამოვთვალოთ ამ პოლინომის კოეფიციენტები. მართლაც, ცხადია, რომ ის წევრები, რომლებიც $\lambda^3$-ს და $\lambda^2$-ს შეიცავენ, წარმოიშობიან მხოლოდ და მხოლოდ დეტერმინანტის მთავარი დიაგონალის წევრთა გადამრავლებით

$$(a_{11}-\lambda)\ (a_{22}-\lambda)\ (a_{33}-\lambda).$$

აქედან ცხადია, რომ $\lambda^3$-ის კოეფიციენტი $-1$-ის ტოლია, ხოლო $\lambda^2$-ის კოეფიციენტი არის $a_{11}+a_{22}+a_{33}$. გარდა ამისა, თავისუფალი წევრი $S''$ დეტერმინანტში $D(\lambda)$ უდრის $D(0)$; მაშასადამე,

$$S''=D(0)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

უკანასკნელი დეტერმინანტი $\varphi(x, y, z)$ ფორმის დისკრიმინანტია, რომელიც ჩვენ აღნიშნული გვქონდა $A_{44}$. ადვილად შეიძლება აგრეთვე მოიძებნოს $S'$-ის გამოსახულებაც, მაგრამ ჩვენ ის არ დაგვჭირდება.

ამგვარად, გვაქვს:

$$D(\lambda)=-\lambda^3+S\lambda^2+S'\lambda+A_{44}, \tag{7}$$

სადაც, კერძოდ,

$$S=a_{11}+a_{22}+a_{33}. \tag{8}$$

ვთქვათ, $\lambda$ აღნიშნავს $D(\lambda)=0$ განტოლების [1]) ერთ-ერთ ფესვს. თუ ახლა (4a) სისტემაში $\lambda$-ის ამ მნიშვნელობას ვიგულისხმებთ, მაშინ, როგორც ცნობილია, ამ სისტემას ექნება $(X, Y, Z)$-ის მიმართ ნულისაგან განსხვავებული ამოხსნა. ასეთი ამონახსნების რიცხვი იქნება უსასრულო, რადგანაც თუ $(X, Y, Z)$ ერთი რომელიმე ამონახსნია, მაშინ $kX, kY, kZ$, სადაც $k$ სავსებით ნებისმიერი მამრავლია, ცხადია, აგრეთვე ამონახსნი იქნება.

მიუხედავად ამისა, ისეთ ორ ამონახსნს, რომლებიც ერთმანეთისაგან საერთო მუდმივი მამრავლით განსხვავდებიან, ჩვენ მაინც სხვადასხვა ამონახსნებად არ ჩავთვლით [2]).

დავუშვათ, კერძოდ, რომ $\lambda$ არის $D(\lambda)=0$ განტოლების ნამდვილი ფესვი. მაშინ, ცხადია, შესაბამის (4a) სისტემას ნამდვილი $(X, Y, Z)$ ამონახსნი აქვს, რადგანაც ამ სისტემის ყველა კოეფიციენტი ნამდვილი რიცხვებია.

[1]) ჭვემოთ ნაჩვენები იქნება, რომ $D(\lambda)=0$ განტოლების ყველა ფესვი ნამდვილია. მაგრამ ჯერ ჩვენ ამ პირობით არ ვსარგებლობთ.

[2]) $(kX, kY, kZ)$ ამონახსნი, ცხადია, გვაძლევს იმავე მიმართულებას, რასაც $(X, Y, Z)$. ამიტომ არ ჩავთვალეთ სხვადასხვა ამონახსნად ისეთი ამონახსნები, რომლებიც ერთმანეთისაგან საერთო თანამამრავლით განსხვავდებიან.

$(X, Y, Z)$ ვექტორით დახასიათებული მიმართულება, ერთ-ერთი საძიებელი მთავარი მიმართულება იქნება. გამონაკლისს შეიძლება ადგილი ჰქონდეს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $(X, Y, Z)$ მიმართულება ასიმპტოტური აღმოჩნდება, რადგანაც ამ შემთხვევაში მას არ შეესაბამება დიამეტრალური სიბრტყე ამ სიტყვის პირდაპირი მნიშვნელობით. მიუხედავად ამისა, მთავარ მიმართულებას ჩვენ ვუწოდებთ ყოველ ისეთ მიმართულებას, რომლის $X, Y, Z$ კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ (4), ანუ (4a) სისტემას; ჩვენ ვიტყვით, რომ ეს მიმართულება შეესაბამება $D(\lambda)=0$ განტოლების მოცემულ $\lambda$ ფესვს.

ჩვენ ვნახეთ, რომ ყოველ (ნამდვილ) $\lambda$ ფესვს ერთი მთავარი მიმართულება მაინც შეესაბამება. ქვემოთ ვნახავთ, რომ საზოგადოდ მოცემულ ფესვს მხოლოდ ერთი მთავარი მიმართულება შეესაბამება. მაგრამ ზოგიერთ შემთხვევაში შესაძლებელია მოცემულ ფესვს შეესაბამებოდეს მთავარ მიმართულებათა უსასრულო სიმრავლე.

**§ 277. ზოგიერთი ზოგადი დებულება სამი ცვლადის კვადრატულ ფორმის გარდაქმნის შესახებ.** შემდეგი მასალის წაკითხვის გასაადვილებლად, ჩვენ აქ მოვიყვანთ (ზოგჯერ დავამტკიცებთ კიდეც) კვადრატული ფორმების გარდაქმნათა შესახებ იმ დებულებებს, რომლებიც დამტკიცებულია დამატებაში ზოგადი შემთხვევისათვის. ჩვენ მსჯელობა გვექნება სამი ცვლადის კვადრატული ფორმის

$$\varphi(X, Y, Z)=a_{11}X^2+a_{22}Y^2+a_{33}Z^2+2a_{23}YZ+2a_{31}ZX+2a_{12}XY \quad (1)$$

შესახებ.

დავიწყოთ შემდეგი შენიშვნით. დეტერმინანტი

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} \quad (2)$$

წარმოადგენს

$$\psi(X, Y, Z)=\varphi(X, Y, Z)-\lambda(X^2+Y^2+Z^2) \quad (3)$$

კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტს.

მართკუთხა კოორდინატების გარდაქმნის დროს $X, Y, Z$ სიდიდეები, როგორც ვიცით, გარდაიქმნებიან შემდეგი სახის ჩასმით:

$$\left.\begin{aligned} X &= l_1X'+l_2Y'+l_3Z', \\ Y &= m_1X'+m_2Y'+m_3Z', \\ Z &= n_1X'+n_2Y'+n_3Z', \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

სადაც

$$X^2+Y^2+Z^2=X'^2+Y'^2+Z'^2,$$

ე. ი. (4) ჩასმა ორთოგონალურია. მაშასადამე, ჩასმის დეტერმინანტი:

$$\Delta=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}=\pm 1; \tag{5}$$

ეს უკვე დამტკიცებული იყო § 71 [1])-ში.

(4) ჩასმით $\varphi(X, Y, Z)$ კვადრატული ფორმა გარდაიქმნება ფორმად:

$$\varphi'(X', Y', Z')=a_{11}'X'^2+a_{22}'Y'^2+a_{33}'Z'^2+2a_{23}'Y'Z'+ \\ +2a_{32}'Z'X'+2a_{12}'X'Y', \tag{1a}$$

სადაც $a_{11}', \ldots, a_{33}'$ სრულიად გარკვეულად გამოისახებიან $\varphi(X, Y, Z)$ ფორმის კოეფიციენტებისა და (4) ჩასმის $l_1, \ldots, n_3$ კოეფიციენტების საშუალებით; $\psi$ ფორმა კი გარდაიქმნება ფორმად

$$\psi(X', Y', Z')=\varphi'(X', Y', Z')-\lambda(X'^2+Y'^2+Z'^2). \tag{3a}$$

დამატებაში ნათქვამის თანახმად (§ 14), (3) და (3a) ფორმების დისკრიმინანტები თანატოლია. მაშასადამე-ყოველი $\lambda$-სათვის

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}'-\lambda & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{21}' & a_{22}'-\lambda & a_{23}' \\ a_{31}' & a_{32}' & a_{33}'-\lambda \end{vmatrix}. \tag{6}$$

ამგვარად, $D(\lambda)$ ინვარიანტია ორთოგონალური ჩასმის დროს, ე. ი. ორთოგონალური ინვარიანტია. თუ დაგშლით ამ დეტერმინანტს და დავალაგებთ $\lambda$-ს ხარისხების მიხედვით, ე. ი. დავწერთ შემდეგი სახით:

$$D(\lambda)=-\lambda^3+S\lambda^2+S'\lambda+A_{44}, \tag{7}$$

მაშინ $S$, $S'$, $A_{44}$ სიდიდეებიც ინვარიანტები უნდა იყოს. აღვნიშნოთ, კერძოდ, ორი ინვარიანტი

$$A_{44} \text{ და } S=a_{11}+a_{22}+a_{33}. \tag{8}$$

რადგანაც $D(\lambda)=0$ განტოლება ხსენებული ჩასმით უცვლელი რჩება, ამიტომ მისი ფესვებიც აგრეთვე ინვარიანტებია.

გარდა ამისა, უნდა აღვნიშნოთ, რომ $D(\lambda)$ დეტერმინანტის რაგიც (4) გარდაქმნის დროს უცვლელი რჩება. დამტკიცება იხილეთ დამატებაში, § 11.

[1]) იხ. კიდევ დამატება, § 14.

ბოლოს, გავიხსენოთ, რომ (როგორც ნაჩვენებია დამატებაში, § 11) წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial X}&=(a_{11}-\lambda)X+a_{12}Y+a_{13}Z=0,\\ \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial Y}&=a_{21}X+(a_{22}-\lambda)Y+a_{23}Z=0,\\ \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial Z}&=a_{31}X+a_{32}Y+(a_{33}-\lambda)Z=0\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

(2) ჩასმის შემდეგ გადადის სისტემაში, რომელიც შემდეგის ეკვივალენტურია:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial\psi'}{\partial X}&=(a_{11}'-\lambda)X'+a_{12}'Y'+a_{13}'Z'=0,\\ \frac{1}{2}\frac{\partial\psi'}{\partial Y}&=a_{21}'X'+(a_{22}'-\lambda)Y'+a_{23}'Z'=0,\\ \frac{1}{2}\frac{\partial\psi'}{\partial Z}&=a_{31}'X'+a_{32}'Y'+(a_{33}'-\lambda)Z'=0.\end{aligned}\right\}\qquad(9a)$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ $X$, $Y$, $Z$ აკმაყოფილებენ (9) სისტემას, მაშინ $X'$, $Y'$, $Z'$ სიდიდეები, რომლებიც მათთან დაკავშირებულია (4) ჩასმით, აკმაყოფილებენ (9a) სისტემას და, პირიქით, თუ $X'$, $Y'$, $Z'$ აკმაყოფილებენ (9a) სისტემას, მაშინ შესაბამისი $X$, $Y$, $Z$ (9) სისტემას.

**278. $D(\lambda)=0$ განტოლების ფესვებისა და მათ შესაბამის მთავარ მიმართულებათა თვისებანი.** ახლა გადავდივართ $D(\lambda)=0$ განტოლების ფესვებისა და მათ შესაბამის მთავარ მიმართულებათა შესახებ მთელი რიგი დებულებების დამტკიცებაზე.

1. **$D(\lambda)=0$ განტოლების ყველა ფესვი ნამდვილია.** მართლაც, ვთქვათ, ჩვენს განტოლებას აქვს წარმოსახვითი (კომპლექსური) ფესვი $\lambda_1=\alpha+i\beta$. მაშინ, ალგებრის ერთ-ერთი ცნობილი თეორემის ძალით, მას ექნება აგრეთვე შეუღლებული ფესვი $\lambda_2=\alpha-i\beta$.

ვთქვათ, $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ არის § 276-ის (4a) ანუ (4) სისტემის რაიმე ამონახსნი, რომელიც შეესაბამება $\lambda=\lambda_1$ მნიშვნელობას, ე. ი. ვთქვათ, რომ

$$\left.\begin{aligned}a_{11}X_1+a_{12}Y_1+a_{13}Z_1&=\lambda_1X_1,\\ a_{21}X_1+a_{22}Y_1+a_{23}Z_1&=\lambda_1Y_1,\\ a_{31}X_1+a_{32}Y_1+a_{33}Z_1&=\lambda_1Z_1.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

ვთქვათ, $X_2$, $Y_2$, $Z_2$ არის $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ რიცხვების შესაბამისი შეუღლებული რიცხვები. ეს რიცხვები, ცხადია, დააკმაყოფილებენ შემდეგ სისტემას:

$$\left.\begin{aligned}a_{11}X_2+a_{12}Y_2+a_{13}Z_2&=\lambda_1X_2,\\ a_{21}X_2+a_{22}Y_2+a_{23}Z_2&=\lambda_2Y_2,\\ a_{31}X_2+a_{32}Y_2+a_{33}Z_2&=\lambda_2Z_2,\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

რომელიც მიიღება (1) სისტემიდან, თუ მასში შემავალ კომპლექსურ სიდიდეებს შევცვლით შეუღლებული სიდიდეებით.

გავამრავლოთ (1) სისტემის განტოლებანი შესაბამისად $X_2$, $Y_2$, $Z_2$-ზე და შევკრიბოთ. მივიღებთ

$$(a_{11}X_1 + a_{12}Y_1 + a_{13}Z_1)X_2 + (a_{21}X_1 + a_{22}Y_1 + a_{23}Z_1)Y_2 + \\ + (a_{31}X_1 + a_{32}Y_1 + a_{33}Z_1)Z_2 = \lambda_1(X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2).$$

ასევე მოვიქცეთ (2) სისტემაშიაც, ე. ი. გავამრავლოთ (2) სისტემის განტოლებანი შესაბამისად $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ და შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$(a_{11}X_2 + a_{12}Y_2 + a_{13}Z_2)X_1 + (a_{21}X_2 + a_{22}Y_2 + a_{23}Z_2)Y_1 + \\ + (a_{31}X_2 + a_{32}Y_2 + a_{33}Z_2)Z_1 = \lambda_2(X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2).$$

რადგანაც, $a_{ij}=a_{ji}$, წინა ტოლობათა მარცხენა მხარეები თანატოლია. ამიტომ, თუ ამ ორ ტოლობას ერთმანეთს გამოვაკლებთ, მივიღებთ:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2) = 0. \tag{3}$$

მაგრამ სიდიდე $X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$ აუცილებლად ნულისაგან განსხვავებულია[1]). მაშასადამე, უნდა იყოს $\lambda_1 - \lambda_2 = (\alpha + i\beta) - (\alpha - i\beta) = 2i\beta = 0$, ე. ი., $\beta = 0$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\lambda_1$ ნამდვილი რიცხვია; სწორედ ეს იყო დასამტკიცებელი.

2. $D(\lambda)=0$ განტოლების ორი სხვადასხვა ფესვის შესაბამისი მთავარი მიმართულებანი ურთიერთ მართობია.

მართლაც, ვთქვათ, $\lambda_1$ და $\lambda_2$ არის $D(\lambda)=0$ განტოლების ორი სხვადასხვა ფესვი; ჩვენ ახლა უკვე ვიცით, რომ ეს ფესვები ნამდვილია. ვთქვათ, $(X_1, Y_1, Z_1)$ და $(X_2, Y_2, Z_2)$ ამ ფესვების შესაბამისი მიმართულებანია. ეს სიდიდეები აკმაყოფილებენ, შესაბამისად, (1) და (2) სისტემებს, რომელთაგან, როგორც ვნახეთ, გამომდინარეობს (3) ტოლობა. მაგრამ რადგანაც, პირობის თანახმად, $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, ამიტომ აუცილებლად

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0, \tag{4}$$

ეს კი წარმოადგენს სწორედ $(X_1, Y_1, Z_1)$ და $(X_2, Y_2, Z_2)$ ვექტორების მართობობის პირობას.

3. თუ $D(\lambda)=0$ განტოლების ყველა ფესვი სხვადასხვაა, მაშინ თითოეულ ფესვს მხოლოდ ერთი მთავარი მიმართულება შეესაბამება, ისე რომ გვექნება მხოლოდ სამი მთავარი მიმართულება (რომლებიც, წინა თეორემის ძალით, ურთიერთ მართობი იქნებიან). თუ კოორდინატთა $Ox'$, $Oy'$, $Oz'$, ახალ ღერძებს

[1]) $\alpha + i\beta$ კომპლექსური რიცხვის ნამრავლი შეუღლებულ $\alpha - i\beta$ რიცხვზე $\alpha^2 + \beta^2$-ის ტოლია, მაშასადამე, თუ მოცემული რიცხვი ნულის ტოლი არ არის, მაშინ ეს ნამრავლი დადებითი სიდიდე იქნება.

ამ სამი მთავარი მიმართულების პარალელურად მივმართავთ, მაშინ კვადრატული ფორმა

$$\varphi(X, Y, Z)=a_{11}X^2+a_{22}Y^2+a_{33}Z^2+2a_{23}YZ+2a_{31}ZX+2a_{12}XY$$

დაიყვანება „კანონიკურ სახეზე“:

$$\varphi'(X', Y', Z')=\lambda_1X'^2+\lambda_2Y'^2+\lambda_3Z'^2.$$

მართლაც, ჩვენ ვიცით, რომ $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ ფესვთაგან თითოეულს ერთი მთავარი მიმართულება მაინც შეესაბამება. თუ მოცემულ ფესვს რამდენიმე მთავარი მიმართულება შეესაბამება (ქვემოთ ვნახავთ, რომ ჩვენს შემთხვევაში ამას არ შეიძლება ადგილი ჰქონდეს), მაშინ ავიღოთ რომელიმე მათგანი, ისე რომ გვექნება, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ ფესვების შესაბამისი, სამი (ურთიერთ მართობი) მიმართულება $(X_1, Y_1, Z_1)$, $(X_2, Y_2, Z_2)$, $(X_3, Y_3, Z_3)$.

მივმართოთ ახალი სისტემის $Ox'$, $Oy'$, $Oz'$ ღერძები შესაბამისად ამ მიმართულებათა პარალელურად. მაშინ $\varphi(X, Y, Z)$ კვადრატული ფორმა დაიყვანება ახალ $X'$, $Y'$, $Z'$ ცვლადების კვადრატულ ფორმაზე, რომელსაც აღვნიშნავთ ასე:

$$\varphi'(X', Y', Z')=a_{11}'X'^2+\ldots+2a_{12}'X'Y'.$$

თუ $X_1'$, $Y_1'$, $Z_1'$ არის $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ ვექტორის ახალი კოორდინატები, მაშინ ისინი უნდა აკმაყოფილებდნენ შემდეგ სისტემას (იხ. წინა პარაგრაფის ბოლო):

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}'-\lambda_1)X_1'+a_{12}'Y_1'+a_{13}'Z_1'&=0,\\ a_{21}'X_1'+(a_{22}'-\lambda_1)Y_1'+a_{23}'Z_1'&=0,\\ a_{31}'X_1'+a_{32}'Y_1'+(a_{33}'-\lambda_1)Z_1'&=0,\end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

მაგრამ ახალი სისტემის ღერძების მიმართ $X_1'$, $Y_1'$, $Z_1'$ ვექტორი $Ox'$ ღერძის პარალელურია, ე. ი. გვაქვს $X_1'\neq 0$, $Y_1'=Z_1'=0$.

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი (5) სისტემაში, მივიღებთ:

$$(a_{11}'-\lambda)X_1'=0,\ a_{21}'X_1'=0,\ a_{31}'X_1'=0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს:

$$a_{11}'=\lambda_1,\ a_{21}'=0,\ a_{31}'=0. \tag{6}$$

ასევე დავამტკიცებთ, რომ $a_{22}'=\lambda_2$, $a_{33}'=\lambda_3$ და ყველა სხვადასხვა ინდექსებიანი კოეფიციენტი ნულის ტოლია. ამგვარად $\varphi'$ ფორმას აქვს შემდეგი სახე (კანონიკური სახე):

$$\varphi'(X', Y', Z')=\lambda_1X'^2+\lambda_2Y'^2+\lambda_3Z'^2. \tag{7}$$

მთავარ მიმართულებათა განმსაზღვრელი, § 276-ის (4a) განტოლებათა სისტემა, შედგენილი ახალი სისტემის ღერძების მიმართ, ე. ი., შედგენილი (7) ფორმისათვის, მიიღებს სახეს

$$(\lambda_1-\lambda)X'=0,\ (\lambda_2-\lambda)Y'=0,\ (\lambda_3-\lambda)Z'=0.$$

ამ სისტემას ამოხსნა აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა $\lambda$ უდრის $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ მნიშვნელობათაგან ერთ-ერთს, რაც ჩვენთვის ცნობილი იყო წინათაც. მაგრამ აქედან გამომდინარეობს კიდევ ასეთი შედეგი.

როცა $\lambda=\lambda_1$ მაშინ ეს სისტემა მიიღებს სახეს:

$$0\cdot X'=0,\ (\lambda_2-\lambda_1)\,Y'=0,\ (\lambda_3-\lambda_1)\,Z'=0.$$

რადგანაც $\lambda_2-\lambda_1$ და $\lambda_3-\lambda_1$, პირობის თანახმად, ნულისაგან განსხვავებულია, ამიტომ აუცილებლად $Y'=Z'=0$; სიდიდე $X'$ კი ნებისმიერი რჩება; იგი უნდა ავიღოთ ნულისაგან განსხვავებული, რადგანაც უამისოდ მივიღებთ $X'=Y'=Z'=0$.

მაშასადამე, $\lambda=\lambda_1$ ფესვს შეესაბამება ერთი და მხოლოდ ერთი მიმართულება $(X', 0, 0)$, ე. ი. $Ox'$ ღერძის მიმართულება. სრულიად ასევე დავამტკიცებთ, რომ $\lambda_2$ და $\lambda_3$ ფესვებსაც მხოლოდ თითო მიმართულება (სახელდობრ, $Oy'$ და $Oz'$ ღერძების მიმართულება) შეესაბამება.

ამგვარად, მესამე დებულება მთლიანად დამტკიცებულია. იგი წარმოადგენს ქვემომოყვანილი შემდეგი დებულების კერძო შემთხვევას.

4. $D(\lambda)=0$ განტოლების ყოველ მარტივ ფესვს შეესაბამება ერთი სავსებით განსაზღვრული მთავარი მიმართულება. ორჯერად ფესვს შეესაბამება მთავარ მიმართულებათა უსასრულო სიმრავლე (სახელდობრ, ორჯერადი ფესვის შესაბამისი მთავარი მიმართულება იქნება ყველა ის მიმართულება, რომელიც მოცემული ორჯერადი ფესვისაგან განსხვავებული ფესვის შესაბამისი მთავარი მიმართულების მართობია); ბოლოს, თუ განტოლებას ერთი სამჯერადი ფესვი აქვს, მაშინ ყველა მიმართულება მთავარი იქნება. ყველა შემთხვევაში არსებობს ურთიერთ მართობ მთავარ მიმართულებათა ერთი სამეული მაინც და, თუ ახალ ღერძებს ამ მიმართულებებს მივცემთ, მაშინ $\varphi$ ფორმა გარდაიქმნება ფორმად

$$\varphi'=\lambda_1X'^2+\lambda_2Y'^2+\lambda_3Z'^2, \tag{8}$$

სადაც $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ არიან $D(\lambda)=0$ განტოლების ფესვები, რომლებიც შეიძლება ერთმანეთის თანატოლიც იქნენ.

დავამტკიცოთ ეს დებულება. ვთქვათ, $\lambda_3$ არის $D(\lambda)=0$ განტოლების ერთი რომელიმე ფესვი, მარტივი ან ჯერადი. ახალი ღერძების სისტემა ავიღოთ ისე, რომ $Oz'$ ღერძი მიმართული იყოს ამ ფესვის შესაბამისი მთავარი მიმართულების პარალელურად (ან თუ ასეთი მიმართულება რამდენიმეა, ერთ-ერთი მათგანის პარალელურად)) $Ox'$ და $Oy'$ ღერძები მივმართოთ ნებისმიერად (იგულისხმება, რომ ისინი $Oz'$-ის და ერთმანეთის მართობია).

მაშინ, სრულიად ისევე, როგორც წინა დებულების დამტკიცებისას, მოვძებნით, რომ

$$a_{33}'=\lambda_3,\ a_{13}'=0,\ a_{23}'=0.$$

მაშასადამე, ასეთნაირად შერჩეული ღერძებისათვის გვექნება:

$$\varphi'(X',\ Y',\ Z')=\lambda_3 Z'^2+a_{11}'X'^2+2a_{12}'X'Y'+a_{22}Y'^2.$$

მაგრამ ჩვენ უკვე ვიცით [1]), რომ $Ox'y'$ ღერძების და მათი სიბრტყის სათანადო მობრუნებით (ამასთან $Z'$ კოორდინატი არ იცვლება) ორი ცვლადის კვადრატული ფორმა

$$a_{11}X'^2+2a_{12}X'Y'+a_{22}Y'^2$$

შეიძლება დავიყვანოთ კანონიკურ სახეზე

$$\lambda_1 X'^2+\lambda_2 Y'^2.$$

სიმარტივისათვის ახალი კოორდინატები მობრუნებული სისტემის მიმართ ხელახლა აღვნიშნეთ $X'$, $Y'$-ით, ამგვარად, ღერძების სათანადო შერჩევით $\varphi$ კვადრატული ფორმა დაიყვანება კანონიკურ სახეზე

$$\varphi'=\lambda_1 X'^2+\lambda_2 Y'^2+\lambda_3 Z'^2.$$

$\lambda_1$ და $\lambda_2$ ფესვების შესახებ ჯერ არ ვიცით, არიან თუ არა ისინი $D(\lambda)=0$ განტოლების ფესვები. მაგრამ ეს ძალიან ადვილად შეიძლება დავამტკიცოთ. მართლაც, შევადგინოთ $D(\lambda)$ დეტერმინანტი $\varphi'$ ფორმის მიხედვით, მივიღებთ იგივეობას [2]).

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda_1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda_1-\lambda)\ (\lambda_2-\lambda)\ (\lambda_3-\lambda).$$

მაშასადამე, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ არიან $D(\lambda)=0$ განტოლების ფესვები.

ახლა განვიხილოთ ცალ-ცალკე სამი შემთხვევა.

ა) ყველა $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ ფესვები სხვადასხვაა. ამ შემთხვევაში, როგორც უკვე ვიცით, თითოეულ ფესვს შეესაბამება მხოლოდ ერთი მთავარი მიმართულება; ეს ქვემოთ ნათქვამიდანაც გამომდინარეობს.

$\lambda_1$ ფესვის შესაბამისი მთავარი მიმართულების $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ კოორდინატების მოსაძებნად (ძველი სისტემის ღერძების მიმართ), საჭიროა ამოვხსნათ სისტემა

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\lambda_1)X_1+a_{12}Y_1+a_{13}Z_1&=0,\\ a_{21}X_1+(a_{22}-\lambda_1)Y_1+a_{23}Z_1&=0,\\ a_{31}X_1+a_{32}Y_1+(a_{33}-\lambda_1)Z_1&=0.\end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

[1]) ეს დამტკიცებულია § 253-ში. ეს დებულება შეიძლება დამტკიცდეს § 253-ში დამტკიცებულისაგან დამოუკიდებლადაც, თუ გამოვიყენებთ ამ პარაგრაფში ნათქვამს ორი ცვლადის კვადრატული ფორმისათვის:

$$\varphi(X,\ Y)=a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2.$$

[2]) გავიხსენოთ, რომ $D(\lambda)$ დეტერმინანტი კოორდინატების გარდაქმნის დროს უცვლელი რჩება.

ამ სისტემის $D(\lambda)$ დეტერმინანტის რანგი ორის ტოლია, რადგანაც გარდაქმნილი (8) ფორმისათვის შედგენილი $D(\lambda_1)$ დეტერმინანტი არის

$$D(\lambda_1)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3-\lambda_1 \end{vmatrix}$$

და მისი რანგი, ცხადია, ორის ტოლია [1]), ვინაიდან $D(\lambda_1)=0$, ხოლო მეორე რიგის დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} \lambda_2-\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_3-\lambda_1 \end{vmatrix}=(\lambda_2-\lambda_1)\ (\lambda_3-\lambda_1)$$

ნულისაგან განსხვავებულია, რადგან, პირობის თანახმად, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ ერთმანეთისაგან განსხვავებულია.

მაშასადამე, (9) სისტემის ერთი რომელიმე განტოლება შედეგია ორი დანარჩენისა, რომლებიც გვაძლევენ სავსებით განსაზღვრულ მნიშვნელობებს, $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ სიდიდეთა ფარდობებისთვის, ე. ი. გვაძლევენ სავსებით განზღვრულ მთავარ მიმართულებას.

ასევე მოვძებნით $\lambda_1$ და $\lambda_2$ ფესვების შესაბამის მთავარ მიმართულებებსაც.

b) $\lambda_1$ და $\lambda_2$ ფესვები ერთმანეთის ტოლია, ხოლო მესამე ფესვი $\lambda_3$ მათგან განსხვავებულია:

$$\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3.$$

როცა $\lambda=\lambda_3$, ისე როგორც წინა შემთხვევაში, მივიღებთ სავსებით განზღვრულ ($X_3$, $Y_3$, $Z_3$) მთავარ მიმართულებას.

როცა $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$, მაშინ (9) სისტემის $D(\lambda_1)$ დეტერმინანტის რანგი 1-ის ტოლი იქნება, რადგანაც გარდაქმნილი ფორმის მიხედვით შედგენილი $D(\lambda_1)$ დეტერმინანტი იქნება

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3-\lambda_1 \end{vmatrix},$$

რომლის რანგი, ცხადია, 1-ს უდრის.

მაშასადამე, (9) სისტემაში ორი განტოლება ერთადერთი მესამის შედეგი იქნება, რომელსაც სიმოკლისათვის ასე დავწერთ:

$$AX+BY+CZ=0. \tag{10}$$

ამგვარად, ჩვენ ვღებულობთ მთავარ მიმართულებათა უსასრულო სიმრავლეს, რომლებიც შეესაბამებიან $\lambda_1=\lambda_2$ ორჯერად ფესვს. ცხადია, ამ მიმართულებათა სიმრავლეს მიეკუთვნება ყველა ის მიმართულება, რომელიც ($A$, $B$, $C$) ვექტორის მართობია. მაგრამ, რადგანაც ყველა ეს მიმართულება

[1]) გავიხსენოთ, რომ $D(\lambda)$ დეტერმინანტის რანგი გარდაქმნის დროს არ იცვლება.

$(X_3, Y_3, Z_3)$ ვექტორის მართობიც უნდა იყოს, ამიტომ $(A, B, C)$ და $(X_3, Y_3, Z_3)$ ვექტორები ერთმანეთის პარალელურია და $\lambda_1=\lambda_2$ ორჯერადი ფესვის შესაბამისი მთავარი მიმართულებანი მხოლოდ ისინი იქნებიან, რომლებიც $\lambda_3$ მარტივი ფესვის შესაბამის $(X_3, Y_3, Z_3)$ მიმართულების მართობი არიან. თუ ერთ-ერთ მათგანს $(X_1, Y_1, Z_1)$ ნებისმიერად ავირჩევთ, და შემდეგ ავიღებთ რომელსამე $(X_2, Y_2, Z_2)$ ვექტორს, რომელიც მართობია ორივე $(X_1, Y_1, Z_1)$ და $(X_3, Y_3, Z_3)$ ვექტორისა, მივიღებთ ურთიერთ მართობ მიმართულებათა სამეულს. ავიღებთ რა კოორდინატთა ღერძებს ამ მიმართულებათა პარალელურად, $\varphi$ კვადრატულ ფორმას დავიყვანთ (8) კანონიკურ სახეზე.

c) ბოლოს, თუ $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$, მაშინ (9) სისტემის დეტერმინანტის რანგი უდრის ნულს, რადგანაც გარდაქმნილი (8) ფორმის მიხედვით შედგენილი $D(\lambda_1)$ დეტერმინანტის ყველა ელემენტი ნულის ტოლი იქნება. მაშასადამე, (9) სისტემა იგივურად დაკმაყოფილდება ყოველი $(X, Y, Z)$ მიმართულებისთვის; ყოველი მიმართულება იქნება მთავარი. ამ შემთხვევაში $\varphi$ ფორმას (8) კანონიკური სახე აქვს ყოველნაირად შერჩეულ (სწორკუთხა) კოორდინატთა ღერძებისათვის, კერძოდ თავიდან აღებული სისტემის მიმართაც.

ამგვარად, ჩვენ ვღებულობთ შემდეგ ალგებრულ თეორემას: **სამი ცვლადის ყოველი კვადრატული ფორმა, ორთოგონალური ჩასმით, შეიძლება დავიყვანოთ კანონიკურ სახეზე**

$$\varphi=\lambda_1X'^2+\lambda_2Y'^2+\lambda_3Z'^2,$$

**სადაც $D(\lambda)=0$ განტოლების ფესვები $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ყველა ნამდვილია.** ამასთანავე, ჩვენ გვაქვს ხერხი ხსენებული გარდაქმნის პრაქტიკულად ჩატარებისთვის.

**§ 279. ფართეულის განტოლების გარდაქმნა დეკარტის კოორდინატების შეცვლის დროს.** შემდეგ პარაგრაფებში ჩვენ გავარჩევთ მეორე რიგის ფართეულების განტოლების გამარტივების საკითხს მართკუთხოვანი კოორდინატების გარდაქმნის დროს. წინასწარ შევნიშნოთ შემდეგი გარემოებანი (ამ პარაგრაფში ნათქვამი მართებულია ზოგადი სახის დეკარტის კოორდინატთა შემთხვევაშიც):

1°. კოორდინატთა სათავის გადატანის დროს:

$$x=x'+\alpha,\quad y=y'+\beta,\quad z=z'+\gamma,$$

$F(x, y, z)$ პოლინომი შემდეგნაირად იცვლება:

$$\begin{aligned}F(x'+\alpha,\ y'+\beta,\ z'+\gamma)=\\ =a_{11}x'^2+a_{22}y'^2+a_{33}z'^2+2a_{23}y'z'+2a_{31}z'x'+2a_{12}x'y'+\\ +2F_1(\alpha,\ \beta,\ \gamma)x'+2F_2(\alpha,\ \beta,\ \gamma)y'+2F_3(\alpha,\ \beta,\ \gamma)z'+\\ +F(\alpha,\ \beta,\ \gamma).\end{aligned}\tag{1}$$

ე. ი. კოორდინატთა სათავის $(\alpha, \beta, \gamma)$ წერტილში გადატანით $F(x, y, z)$ პოლინომი იცვლება ასე: მეორე განზომილების წევრებთან კოეფიციენტები უცვლელი რჩება; კოეფიციენტები $x'$, $y'$, $z'$ ახალ ცვლადებთან, შესაბამისად, ტოლია $2F$, $2F_1$ $2F_2$, $2F_3$ ნაწილობრივი წარმოებულების მნიშვნელობებისა $(\alpha, \beta, \gamma)$ წერტილში; ბოლოს, თავისუფალი წევრი ტოლია $F(x, y, z)$ პოლინომის მნიშვნელობისა იმავე წერტილში.

2°. ჩვენ აქ არ ამოვწერთ იმ ფორმულებს, რომლებიც გვაძლევენ $F(x, y, z)$ პოლინომის კოეფიციენტებს საკოორდინატო ვექტორების მობრუნების დროს სათავის შეუცვლელად, მხოლოდ შევნიშნავთ, რომ ამ შემთხვევაში თავისუფალი წევრი უცვლელი რჩება, გარდაქმნილი პოლინომის მეორე განზომილების წევრები წარმოიშობა მხოლოდ და მხოლოდ გარდასაქმნელი პოლინომის მეორე განზომილების წევრებისაგან, და ანალოგიურად იქცევიან პირველი განზომილების წევრებიც.

**§ 280. ორთოგონალური ინვარიანტები.** ისე როგორც მეორე რიგის წირების შემთხვევაში, მეორე რიგის ფართეულების განტოლებათა გარდაქმნის დროსაც ძირითად როლს ინვარიანტები ასრულებენ.

უპირველეს ყოვლისა, ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $F(x, y, z)$ პოლინომის „დიდი დისკრიმინანტი"—ასე ვუწოდებთ $\Phi(x, y, z, t)$ ფორმის $A$ დისკრიმინანტს — ინვარიანტია მართკუთხოვან კოორდინატთა გარდაქმნის დროს.

მართლაც, ჩვენ ვიცით, რომ გარდაქმნის ფორმულებს შემდეგი სახე აქვს:

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y' + l_3z' + \alpha, \\ y &= m_1x' + m_2y' + m_3z' + \beta, \\ z &= n_1x' + n_2y' + n_3z' + \gamma, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

სადაც $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ახალი $O'$ სათავის კოორდინატებია, ხოლო $(l_1, m_1, n_1)$, $(l_2, m_2, n_2)$, $(l_3, m_3, n_3)$ ახალი $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ ღერძების მიმართულების კოსინუსები ძველი ღერძების მიმართ.

ამ ფორმულებთან ერთად განვიხილოთ შემდეგი ჩასმა:

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y' + l_3z' + \alpha t', \\ y &= m_1x' + m_2y' + m_3z' + \beta t', \\ z &= n_1x' + n_2y' + n_3z' + \gamma t', \\ t &= t'. \end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

როცა $t = t' = 1$, მივიღებთ (1) ჩასმას და $\Phi$ ფორმა გადაიქცევა $F(x, y, z)$ პოლინომად.

(1a) ჩასმის დეტერმინანტი არის

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & \alpha \\ m_1 & m_2 & m_3 & \beta \\ n_1 & n_2 & n_3 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = \pm 1. \tag{2}$$

აქედან დავასკვნით, რომ $A$ დისკრიმინანტი ინვარიანტია, რადგანაც, როგორც ვიცით, (1a) ჩასმით Φ ფორმის გარდაქმნის დროს დისკრიმინანტი მრავლდება ჩასმის დეტერმინანტის კვადრატზე, რაც ერთის ტოლია.

გარდა ამისა, ჩვენ ვიცით, რომ

$$\varphi(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy \tag{3}$$

კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტი, რომელიც $F(x, y, z)$ პოლინომის მეორე განზომილების წევრთა ერთობლიობას წარმოადგენს, ე. ი. დეტერმინანტი

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{4}$$

[$F(x, y, z)$ პოლინომის „მცირე დისკრიმინანტი“] ინვარიანტია (1) სახის ჩასმის მიმართ, თუ $\alpha = \beta = \gamma = 0$. მაგრამ ცხადია, რომ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ სიდიდეები არავითარ გავლენას არ ახდენენ მეორე განზომილების წევრებზე. მაშასადამე, $A_{44}$ ინვარიანტია (1) სახის ყოველი ჩასმის მიმართ.

გარდა ამისა, ჩვენ ვნახავთ, რომ

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

განტოლების $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ ფესვებიც აგრეთვე უცვლელი რჩება. მაშასადამე, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ სიდიდეებიც ინვარიანტია ($A$ და $A_{44}$ ინვარიანტებიდან განსხვავებით ესენი ირაციონალური ინვარიანტებია).

ამგვარად, ჩვენ ვიპოვეთ $F(x, y, z)$ პოლინომის შემდეგი ინვარიანტები მართკუთხოვანი კოორდინატების გარდაქმნის მიმართ):

$$A,\ A_{44},\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3. \tag{6}$$

$A$ და $A_{44}$ დეტერმინანტების რანგებიც აგრეთვე უცვლელი რჩება, და ამიტომ ისინიც ინვარიანტებს უნდა მივაკუთვნოთ.

შემდეგში ჩვენ ვნახავთ, რომ ჩამოთვლილი ინვარიანტები საკმარისი განსაზღვრავს (1) ფართეულის სახეს.

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა.** ადვილი სანახავია, რომ

$$A_{44} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \tag{7}$$

რადგანაც $A_{44}$ არის (5) განტოლების, ე. ი. § 277-ის (7) განტოლების, თავისუფალი წევრი. ეს იქიდანაც გამომდინარეობს, რომ, თუ შევადგენთ $A_{44}$ ინვარიანტს φ ფორმისათვის, მის შემდეგ რაც ის დაყვანილია კანონიკურ სახემდე $\lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 + \lambda_3z^2$, გვექნება

$$A_{44} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

**§ 231. მეორე რიგის ფართეულის განტოლების დაყვანა ნორმალურ სახეზე. 1. ცენტრალური ფართეულები.** დავიწყოთ ისეთი ფართეულებით, რომლებისთვისაც

$$A_{44} \neq 0. \tag{1}$$

ვთქვათ, $O'(\alpha, \beta, \gamma)$ არის ფართეულის ცენტრი, რომლის მოძებნა ჩვენ უკვე ვიცით. თუ კოორდინატთა სათავეს ამ წერტილში გადავიტანთ, ე. ი. თუ მოვახდენთ ჩასმას

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta, \quad z = z' + \gamma,$$

$F(x, y, z)$-ს შემდეგ სახეზე დავიყვანთ (§ 271):

$$\left.\begin{aligned} F(x', y', z') = a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + \\ + 2a_{23}y'z' + 2a_{31}z'x' + 2a_{12}x'y' + a_{44}' \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

სადაც არ შედიან ისეთი წევრები, რომლებიც შეიცავენ კოორდინატებს პირველ ხარისხში. გარდა ამისა, ჩვენ ვიცით (§ 279), რომ $a_{44}' = F(\alpha, \beta, \gamma)$. მაგრამ $F(\alpha, \beta, \gamma)$-ს გამოთვლის გარეშეც ადვილი მოსაძებნია $A_{44}'$. მართლაც, შევადგინოთ ინვარიანტი $A$ (2) პოლინომის მიხედვით, მივიღებთ:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}' \end{vmatrix} = a_{44}' A_{44}, \text{ და, მაშასადამე, } a_{44}' = \frac{A}{A_{44}}.$$

ამგვარად, კოორდინატთა სათავის გადატანით ცენტრში, $F(x, y, z) = 0$ განტოლება შემდეგ სახეზე დაიყვანება:

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{23}y'z' + 2a_{31}z'x' + 2a_{12}x'y' + \frac{A}{A_{44}} = 0. \tag{3}$$

მოვძებნოთ შემდეგ, § 278-ში ნაჩვენები წესით, ჩვენი ფართეულის ერთმანეთის მართობი სამი მთავარი მიმართულება და ახალი $O'\xi$, $O'\eta$, $O'\zeta$ ღერძები მივმართოთ ამ მიმართულებათა გასწვრივ, სათავის შეუცვლელად. თუ $x'$, $y'$, $z'$ კოორდინატების ნაცვლად ჩავსვამთ მათ გამოსახულებებს $\xi$, $\eta$, $\zeta$ კოორდინატებით, (3) განტოლებას დავიყვანთ სახეზე

$$\lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + \lambda_3\zeta^2 + \frac{A}{A_{44}} = 0 \tag{4}$$

(რადგან ღერძების მობრუნების დროს, $x'$, $y'$, $z'$ წრფივი ერთგვაროვანი ფუნქციებია $\xi$, $\eta$, $\zeta$ კოორდინატებისა, ამიტომ თავისუფალი წევრი არ შეიცვლება). რადგან $A_{44} \neq 0$, ამიტომ $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ სიდიდეები ყველა ნულისაგან განსხვავებულია, ვინაიდან $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = A_{44}$ [1]).

[1]) იხ. § 280-ის შენიშვნა.

ვთქვათ, ჯერ, რომ $A \neq 0$. მაშინ (4) განტოლება შემდეგი სახით შეიძლება გადაიწეროს:

$$k_1\xi^2 + k_2\eta^2 + k_3\zeta^2 = 1, \tag{5}$$

სადაც

$$k_1 = -\frac{\lambda_1 A_{44}}{A}, \quad k_2 = -\frac{\lambda_2 A_{44}}{A}, \quad k_3 = -\frac{\lambda_3 A_{44}}{A}. \tag{6}$$

ზედაპირის სახე დამოკიდებულია $k_1$, $k_2$, $k_3$ სიდიდეთა ნიშნებზე. აქ შესაძლებელია შემდეგი შემთხვევები წარმოგვიდგეს.

a) $k_1$, $k_2$, $k_3$ ყველა დადებითია. თუ დავუშვებთ:

$$k_1 = \frac{1}{a^2}, \quad k_2 = \frac{1}{b^2}, \quad k_3 = \frac{1}{c^2},$$

მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1,$$

ეს ნამდვილი ელიფსოიდის განტოლებაა (იხ. § 269 1°). მართლაც, ეს ფართეული დაუშლადია ($A \neq 0$) და აქვს ნამდვილი წერტილები. $\gamma_\infty$ წირის (§ 269) განტოლება იქნება

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 0;$$

იგი დაუშლადი და წარმოსახვითია.

b) $k_1$, $k_2$, $k_3$ სამივე უარყოფითია. მაშინ, წინა შემთხვევის ანალოგიურად, მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = -1,$$

ახლა, ეს წარმოსახვითი ელიფსოიდის განტოლებაა.

c) $k_1$, $k_2$, $k_3$ რიცხვთაგან ერთი უარყოფითია, სხვები დადებითი. ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ (თუ საჭიროა, შეგვიძლია ნომერაცია შევცვალოთ), რომ $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k_3 < 0$. თუ აღვნიშნავთ:

$$k_1 = \frac{1}{a^2}, \quad k_2 = \frac{1}{b^2}, \quad k_3 = -\frac{1}{c^2},$$

მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} = 1,$$

ეს წარმოადგენს ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის განტოლებას (იხ. § 269, 2°). მართლაც. ეს ზედაპირი ეკუთვნის § 264-ის ($a_3$) კატეგორიას,

რადგანაც მისი განტოლება (ξ, η, ζ, τ) ერთგვაროვან კოორდინატებში ასე დაიწერება:

$$\frac{\xi^2}{a^2}=\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}-\tau^2=0;$$

$\Upsilon_\infty$ წირს აქვს განტოლება

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}=0;$$

ივი დაუშლადი და ნამდვილი წირია.

d) $k_1$, $k_2$, $k_3$ რიცხვთაგან ორი უარყოფითია, ერთი დადებითი. ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, მაგალითად, რომ $k_1<0$, $k_2<0$, $k_3>0$. თუ აღვნიშნავთ:

$$k_1=-\frac{1}{a^2},\quad k^2=-\frac{1}{b^2},\quad k_3=\frac{1}{c^2},$$

მივიღებთ განტოლებას:

$$-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1,$$

ე. ი. მივიღებთ (იხ. § 269, 2°), როგორც ადვილად დავრწმუნდებით (შეადარეთ წინა შემთხვევას), ორკალთა ჰიპერბოლოიდის განტოლებას.

ვთქვათ, ახლა $\Delta=0$. მაშინ (4) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\lambda_1\xi^2+\lambda_2\eta^2+\lambda_3\zeta^2=0$$

და $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ სიდიდეთა ნიშნების მიხედვით, ისე როგორც ზემოთ, შეიძლება ერთ-ერთი შემდეგი განტოლება გვქონდეს:

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=0$$

(წარმოსახვითი კონუსი; ამ შემთხვევაში $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ ყველა ერთნაირი ნიშნისაა), ან

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}=0$$

(ნამდვილი კონუსი; ამ შემთხვევაში $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ ყველას ერთნაირი ნიშნები არა აქვთ).

ამით ამოიწურება მეორე რიგის ფართეულები, რომლებსაც გარკვეული ცენტრი აქვთ.

§ 282. **მეორე რიგის ფართეულების განტოლებათა დაყვანა ნორმალურ სახეზე. 2. ფართეულები, რომლებსაც გარკვეული ცენტრი არა აქვთ.** ახლა დავუშვათ, რომ

$$\Delta_{44}=0, \tag{1}$$

ე. ი., რომ ფართეულს ან სულ არა აქვს ცენტრი [1]) ან აქვს ცენტრთა უსასრულო სიმრავლე. ამ შემთხვევაში $D(\lambda)=0$ განტოლების ერთი ან ორი ფესვი ნულის ტოლია, ვინაიდან, როგორც ვიცით, $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=A_{44}$. ვიგულისხმოთ, რომ $\lambda_3=0$.

ახლა ჩვენ იმით დავიწყებთ, რომ მოვძებნით სამ ურთიერთ მართობ მთავარ მიმართულებას და კოორდინატთა ღერძებს მოვაბრუნებთ ისეთნაირად, რომ ისინი პარალელური გახდნენ ამ მიმართულებების. მაშინ მეორე განზომილების წევრთა ერთობლიობა მიიღებს სახეს:

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2,$$

ხოლო $F'(x,\ y,\ z)=0$ განტოლება შემდეგნაირად გარდაიქმნება:

$$F(x',\ y',\ z')=\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+2a_{14}'x'+2a_{24}'y'+2a_{34}z'+a_{44}=0 \qquad (2)$$

(რადგან ჩვენ ღერძების მხოლოდ მობრუნებას ვახდენთ სათავის შეუცვლელად, ამიტომ თავისუფალი წევრი უცვლელი დარჩება). შევადგინოთ $F(x', y', z')$ გარდაქმნილი პოლინომისათვის დისკრიმინანტი $A$, მივიღებთ

$$A=\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & a_{14}' \\ 0 & \lambda_2 & 0 & a_{24}' \\ 0 & 0 & 0 & a_{34}' \\ a_{41}' & a_{42}' & a_{43}' & a_{44}' \end{vmatrix}=-a_{34}'^2\lambda_1\lambda_2. \qquad (3)$$

ვთქვათ, ჯერ $A\neq 0$. მაშინ $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2\neq 0$, $a_{34}\neq 0$.

თუ კოორდინატთა სათავეს გადავიტანთ რაიმე $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ წერტილში, ე. ი. დავუშვებთ $x'=\xi+\alpha$, $y'=\eta+\beta$, $z'=\zeta+\lambda$, მაშინ (2) განტოლება შემდეგნაირად გარდაიქმნება:

$$\lambda_1\xi^2+\lambda_2\eta^2+2a_{34}'\zeta+2(a_{14}'+\lambda_1\alpha)\xi+2(a_{24}'+\lambda_2\beta)\eta+ \\ +a_{44}+\lambda_1\alpha^2+\lambda_2\beta^2+2a_{14}'\alpha+2a_{24}'\beta+2a_{34}'\gamma=0.$$

ახლა $\alpha$, $\beta$ და $\gamma$ ისეთნაირად შევარჩიოთ, რომ

$$\lambda_1\alpha+a_{14}'=0,\ \lambda_2\beta+a_{24}'=0, \\ a_{44}+\lambda_1\alpha^2+\lambda_2\beta^2+2a_{14}'\alpha+2a_{24}'\beta+2a_{34}'\gamma=0.$$

ეს ყოველთვის შესაძლებელია: პირველი ორი პირობა განსაზღვრავს $\alpha$ და $\beta$, ხოლო მესამე [2]) განსაზღვრავს $\gamma$. ამის შემდეგ ჩვენი განტოლება მიიღებს სახეს

$$\lambda_1\xi^2+\lambda_2\eta^2+2a_{34}'\zeta=0. \qquad (4)$$

თუ $\lambda_1$-ს და $\lambda_2$-ს ერთნაირი ნიშანი აქვთ (ეს მოხდება, როცა $A<0$), მაშინ შევცვლით რა საჭიროების შემთხვევაში ღერძის მიმართულებას საწი-

[1]) ე. ი. აქვს არასაკუთრივი ცენტრი.

[2]) პირველი ორი პირობის ძალით, მესამე პირობა გამარტივდება და მიიღებს სახეს

$$a_{44}+a_{14}'\alpha+a_{24}'\beta+2a_{34}'\gamma=0.$$

ნააღმდეგო მიმართულებით, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$\frac{1}{p}=-\frac{\lambda_1}{a_{34}'}>0,\quad \frac{1}{q}=-\frac{\lambda_2}{a_{34}'}>0,$$

და (4) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{\xi^2}{p}+\frac{\eta^2}{q}=2\zeta,$$

შესაბამისი ფართეული ელიფსური პარაბოლოიდია.

მართლაც, წირი $\gamma_\infty$:

$$\frac{\xi^2}{p}+\frac{\eta^2}{q}=0$$

შლადია და წარმოსახვითი (იხ. § 269, 3°).

თუ $\lambda_1$-ს და $\lambda_2$-ს სხვადასხვა ნიშანი აქვთ (ეს იქნება, როცა $A>0$), მაშინ ასეთივე წესით მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{\xi^2}{p}-\frac{\eta^2}{q}=2\zeta,$$

ე. ი. ჰიპერბოლურ პარაბოლოიდის განტოლებას, რადგანაც წირი $\gamma_\infty$ შლადია და ნამდვილი (§ 269, 4°). ვინაიდან (3) ფორმულის ძალით

$$a_{34}'=\pm\sqrt{-\frac{A}{\lambda_1\lambda_2}}, \tag{3a}$$

ამიტომ $p$ და $q$ შეიძლება გამოვითვალოთ კოორდინატთა ღერძების გარდაუქმნელად.

ბოლოს, განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $A=0$. ამ შემთხვევაში $a_{34}'^2\lambda_1\lambda_2=0$. მაშასადამე, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $a_{34}'$ რიცხვთაგან ერთ-ერთი ნულის ტოლია. თუ $\lambda_1$ და $\lambda_2$ ორივე ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ $a_{34}'=0$, და (2) განტოლება გადაიქცევა ორი $x$, $y$ ცვლადის შემცველ განტოლებად; მაშასადამე, იგი გამოსახავს ისეთ ცილინდრს, რომლის მსახველები $Oz$ ღერძის პარალელურია. კერძოდ, ეს ცილინდრი შეიძლება ორ სიბრტყედ დაიშალოს (ნამდვილ ან წარმოსახვით სიბრტყეებად). თუ ამ შემთხვევას გამოვრიცხავთ (როგორც ვიცით, იგი ხასიათდება იმით, რომ $A$ დეტერმინანტის რანგი უდრის ერთს ან ორს), მივიღებთ ერთ-ერთ შემდეგ შემთხვევას: 1) $\lambda_1$-ს და $\lambda_2$-ს ერთნაირი ნიშნები აქვთ; მაშინ (2) განტოლება $Oxy$ სიბრტყეზე წარმოადგენს ელიფსს, და კოორდინატთა სათავის გადატანით მას შეიძლება შემდეგი სახე მივცეთ:

$$\frac{\xi^2}{a_2}+\frac{\eta^2}{b^2}=\pm 1.$$

ამ შემთხვევაში ფართეული ელიფსური ცილინდრია (ნამდვილი ან წარმოსახვითი).

2) $\lambda_1$ და $\lambda_2$ სხვადასხვა ნიშნისაა; მაშინ ანალოგიურად მივიღებთ

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1$$

ე. ი.— ჰიპერბოლურ ცილინდრს.

3) $\lambda_1$ და $\lambda_2$ რიცხვთაგან ერთ-ერთი ნულის ტოლია[1]); მაშინ ჩვენ გვექნება პარაბოლური ცილინდრი ან ორი პარალელური სიბრტყის (ნამდვილი ან წარმოსახვითი), ერთობლიობა. მართლაც, ამ შემთხვევაში (თუ, მაგალითად, $\lambda_1 = 0$) (2) განტოლება დაიყვანება შემდეგ სახეზე:

$$\lambda_2 y'^2 + 2a_{14}'x' + 2a_{24}'y' + 2a_{34}'z' + a_{44} = 0.$$

ავიღოთ ახალი $O\xi\eta\zeta$ ღერძების ისეთი სისტემა, რომ $O\eta$ ღერძი დამთხვეული იყოს $Oy'$-ზე, ხოლო $O\xi\zeta$ სისტემა მობრუნებული იყოს $Ox'z'$ სისტემასთან $\alpha$ კუთხით.

მაშინ გვექნება:

$$y' = \eta, \quad x' = \xi\cos\alpha - \zeta\sin\alpha, \quad z' = \xi\sin\alpha + \zeta\cos\alpha,$$

და წინა განტოლება მიიღებს სახეს

$$\lambda_2\eta^2 + 2\xi(a_{14}'\cos\alpha + a_{34}'\sin\alpha) + 2a_{24}'\eta + 2\zeta(-a_{44}'\sin\alpha + a_{34}'\cos\alpha) + a_{44} = 0.$$

თუ $\alpha$ კუთხეს ისე შევარჩევთ, რომ

$$-a_{14}'\sin\alpha + a_{34}'\cos\alpha = 0, \quad \text{ე. ი.} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a_{34}'}{a_{14}'},$$

განტოლებას მივცემთ ასეთ სახეს:

$$\lambda_2\eta^2 + 2a_{14}''\xi + 2a_{24}'\eta + a_{44} = 0.$$

თუ $a_{14}' \neq 0$, მაშინ $O\xi\eta$ სიბრტყეზე სათავის გადატანით წინა განტოლება შეიძლება დავიყვანოთ სახეზე

$$\eta^2 = 2p\xi$$

და ფართეული წარმოადგენს პარაბოლურ ცილინდრს. თუ $a_{14}'' = 0$, მაშინ, როგორც ადვილი სანახავია, ფართეული წარმოადგენს ორი პარალელური სიბრტყის ერთობლიობას. ეს უკანასკნელი შემთხვევა წინა შემთხვევისაგან იმით განსხვავდება, რომ $\Delta$ დეტერმინანტის რანგი უდრის 1 ან 2 (რაც, საზოგადოდ, ახასიათებს ფართეულის დაშლას ორ სიბრტყედ).

[1]) ორივე ფესვი $\lambda_1$ და $\lambda_2$ არ შეიძლება ნული იყოს, ვინაიდან ასეთ შემთხვევაში მეორე რიგის ფართეულის განტოლება კი არ გვექნებოდა, არამედ პირველი რიგისა.

**§ 283. მეორე რიგის ფართეულის განტოლების დაყვანა ნორმალურ სახეზე. 3. შედეგების შეჯამება.** თუ შევაჯამებთ წინა პარაგრაფებში ნათქვამს, შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნები.

1. მეორე რიგის ფართეული ორ სიბრტყედ იშლება მხოლოდ მაშინ, როცა $A$ დეტერმინანტის რანგი 1-ის ან 2-ის ტოლია [1]).

2. თუ დაშლის შემთხვევას გამოვრიცხავთ, მაშინ ყველა დანარჩენი შესაძლო შემთხვევა დაიყვანება ქვემოთ მოყვანილ ცხრილებში აღნიშნულ შემთხვევებზე, სადაც $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ აღნიშნავენ $D(\lambda)=0$ განტოლების ფესვებს და (როცა $A \neq 0$)

$$k_1=-\frac{\lambda_1 A_{44}}{A}, \quad k_2=-\frac{\lambda_2 A_{44}}{A}, \quad k_3=-\frac{\lambda_3 A_{44}}{A}.$$

I. $A \neq 0$. (არაგანკუთრი ფართეულები).

| | |
|---|---|
| $A_{44} \neq 0$: ცენტრალური ფართეულები (გვაქვს ერთი საკუთრივი ცენტრი)· | $A_{44}=0$: უცენტრო: (გვაქვს ერთი არასაკუთრივი ცენტრი. |
| 1) $k_1$, $k_2$, $k_3$ ყველა დადებითია: ნამდვილი ელიფსოიდი. | 1) $A<0$. ელიფსური პარაბოლოიდი. |
| 1a) $k_1$, $k_2$, $k_3$ ყველა უარყოფითია: წარმოსახვითი ელიფსოიდი. | 2) $A>0$. ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი. |
| 2) $k_1$, $k_2$, $k_3$ რიცხვთაგან ორი დადებითია: ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი. | |
| 3) $k_1$, $k_2$, $k_3$ რიცხვთაგან ორი უარყოფითია: ორკალთა ჰიპერბოლოიდი. | |

II. $A=0$. განკუთრი ფართეულები (კონუსები და ცილინდრები)

| | |
|---|---|
| $A_{44} \neq 0$: ცენტრალური ფართეულები (გვაქვს ერთი საკუთრივი ცენტრი). | $A_{44}=0$ ($\lambda_3=0$): ფართეულები, რომლებსაც გარკვეული ცენტრი არა აქვთ (გვაქვს ცენტრთა საკუთრივი ან არასაკუთრივი წრფე). |
| 1) $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ ყველა ერთნაირი ნიშნისაა: წარმოსახვითი კონუსი. | 1) $\lambda_1$, $\lambda_2$ ორივე ერთნაირი ნიშნისაა): ელიფსური ცილინდრი (ნამდვილი ან წარმოსახვითი). |
| 2) $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ სხვადასხვა ნიშნები აქვთ: ნამდვილი კონუსი. | 2. $\lambda_1$, $\lambda_2$ სხვადასხვა ნიშნები აქვთ: ჰიპერბოლური ცილინდრი. |
| | 3) $\lambda_1$, $\lambda_2$ უდრის ნულს: პარაბოლური ცილინდრი. |

**შენიშვნები.** იმის გამოსარკვევად, თუ ჩამოთვლილ შემთხვევათაგან რომელს ეკუთვნის მოცემული ფართეული, აუცილებელი არ არის ამოვხსნათ $D(\lambda)=-\lambda^3+S\lambda^2+S'\lambda+A_{44}=0$ განტოლება; საკმარისია მხოლოდ გამო-

[1]). არ შეიძლება რანგი უდრიდეს ნულს, რადგანაც მაშინ მოცემული განტოლების ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლი იქნება.

ვარკვიოთ $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ ფესვების (რომლებიც, როგორც ვიცით, ყოველთვის ნამდვილი რიცხვებია) ნიშნები. ნიშნების გამორკვევა კი შეიძლება, მაგალითად, დეკარტის ცნობილი წესით [1]).

2. იმ შემთხვევაში, როცა ფართეულს გარკვეული ცენტრი აქვს ($A_{14}=0$), $D(\lambda)=0$ განტოლების ერთ-ერთი ფესვი უდრის ნულს; დანარჩენი ორი ფესვი მოიძებნება — $\lambda^2+S\lambda+S'=0$ კვადრატული განტოლებიდან.

**283a. ნიშანთა დეკარტის წესი.** შევეხოთ რამდენიმე სიტყვით ნიშანთა დეკარტის წესს, რომელზედაც ვუთითებდით წინა პარაგრაფის პირველ შენიშვნაში.

ვთქვათ, მოცემულია $n$ ხარისხის ალგებრული განტოლება

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0, \qquad (1)$$

რომელშიაც შესაძლებელია ზოგიერთი კოეფიციენტი ნულის ტოლიც იყოს. თუ ყველა კოეფიციენტი ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ განტოლებას სრული ეწოდება. თუ ორ მეზობელ კოეფიციენტს სხვადასხვა ნიშანი აქვთ, მაშინ ამბობენ, რომ ადგილი აქვს ნიშნის ცვლას. თუკი ორ მეზობელ კოეფიციენტს ერთი და იგივე ნიშანი აქვთ, მაშინ ამბობენ, რომ ადგილი აქვს ნიშნის მუდმივობას. ამასთანავე, მხედველობაში გვაქვს მხოლოდ ნულისაგან განსხვავებული კოეფიციენტები. მაგალითად, განტოლებაში

$$x^5-3x^3-2x^2+1=0$$

ადგილი აქვს ნიშნების ორ ცვლას (პირველი და მეორე წევრები, მესამე და მეოთხე წევრები) და ნიშნების ერთ მუდმივობას (მეორე და მესამე წევრები).

ვთქვათ, $p$ არის ნიშნების ცვლის რიცხვი, ხოლო $q$—ნიშნების მუდმივობის რიცხვი. ცხადია, რომ $p+q=m-1$, სადაც $m$, ნულისაგან განსხვავებულ კოეფიციენტთა რიცხვია. სრულ განტოლებაში $p+q=n$.

დეკარტის წესი, ზოგად შემთხვევაში, მდგომარეობს შემდეგში: $f(x)=0$ განტოლების დადებითი ფესვების რიცხვი უდრის ნიშნების ცვლის რიცხვს, ან ნაკლებია მასზე ლუწი რიცხვით [2]). ცხადია, აქედან გამომდინარეობს, რომ უარყოფითი ფესვების რიცხვი უდრის ნიშნების ცვლის რიცხვს $f(-x)=0$ განტოლებაში, ან მასზე ნაკლებია ლუწი რიცხვით. თუ $f(x)=0$ სრული განტოლებაა, მაშინ ნიშნების ყოველ ცვლას ეთანადება ნიშნების მუდმივობა $f(-x)=0$ განტოლებაში, და ნიშნების ყოველ მუდმივობას ეთანადება — ნიშნების ცვლა (რადგანაც ორ მეზობელ წევრს შორის ერთი ყოველთვის ლუწი ხარისხისაა, ხოლო მეორე — კენტი ხარისხის, ისე რომ $x$-ის — $x$-ით შეცვლის დროს, ერთი ნიშანს იცვლის, ხოლო მეორე არა). ამიტომ სრული განტოლების შემთხვევაში შეგვიძლია ვთქვათ, დადებით ფესვთა რიცხვი უდრის ნიშნების ცვლის რიცხვს ან ნაკლებია მასზე ლუწი რიცხვით, უარყოფით ფესვთა რიცხვი კი უდრის ნიშნების მუდმივობის რიცხვს ან ნაკლებია მასზე ლუწი რიცხვით.

გარდა ამისა, აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ სრული განტოლების ყველა ფესვი ნამდვილია, მაშინ დადებითი ფესვების რიცხვი ზუსტად უდრის $p$-ს, ხოლო უარყოფითი ფესვების რიცხვი — $q$-ს [3]) ამგვარად, თუ მოცემული განტოლება სრულია და წინასწარ ცნობილია, რომ ყველა მისი ფესვი ნამდვილია, მაშინ დეკარტის წესი ფესვების ნიშნების საკითხს მთლიანად წყვეტს. სწორედ ამ უკანასკნელ გარემოებას აქვს ადგილი ჩვენთვის საინტერესო დამხმარე $D(\lambda)=0$ განტოლების შემთხვევაში. ადვილი სანახავია, რომ ამ განტოლებისათვის, რომლის ფესვები ნამდვილია, ყოველთვის ადგილი აქვს შემდეგ დებულებას: დადე-

[1]) იხ. შემდეგი პარაგრაფი.

[2]) ამ წესის დამტკიცება მოცემულია ალგებრის კურსებში.

[3]) მართლაც, დადებითი ფესვების რიცხვი რომ $p$-ზე ნაკლები იყოს, ანუ უარყოფით ფესვების რიცხვი $q$-ზე ნაკლები, მაშინ ყველა ნამდვილი ფესვების რიცხვი ნაკლები იქნებოდა, ვიდრე $p+q=n$, რაც პირობას ეწინააღმდეგება.

ბით ფესვთა რიცხვი ზუსტად უდრის ნიშნების მუდმივობის რიცხვს. მართლაც, სრული განტოლების შემთხვევაში, ეს უკვე დამტკიცებულია. არასრული განტოლების შემთხვევაში ნიშნების ცვლის რიცხვი უდრის 0,1 ან 2 (ვინაიდან კოეფიციენტების რიცხვი სამს არ აღემატება). პირველ და მეორე შემთხვევაში დებულება ცხადია. ნიშნების ორი ცვლის შემთხვევაში კი, ზოგადი წესის თანახმად, დადებითი ფესვების რიცხვი შეიძლება იყოს 2 ან 0. დავამტკიცოთ, რომ უკანასკნელ შემთხვევას არ შეიძლება ადგილი ჰქონდეს. მართლაც, მაშინ ჩვენ განტოლებას სამი უარყოფითი ფესვი ექნებოდა და, მაშასადამე, $D(-\lambda)=0$ განტოლებაში ნიშნების სამი ცვლა მაინც გვექნებოდა, რაც შეუძლებელია, რადგანაც განტოლება არასრულია. უკანასკნელი პუნქტის დამტკიცების დროს ჩვენ მხედველობაში არ მივიღეთ, რომ შესაძლებელია განხილულ განტოლებას ნულის ტოლი ფესვებიც ჰქონდეს. მაგრამ ამ შემთხვევაშიც, როგორც ადვილი შესამოწმებელია უშუალოდ (ამას ვანდობთ მკითხველს), წესი ძალაში რჩება.

## თავი მეთორმეტე

# მეორე რიგის ცალკეული ფართეულების ფორმის გამოკვლევა. წრფივი მსახველები. წრიული კვეთები

## I. ცალკეული ფართეულების ფორმის გამოკვლევა

**§ 284. ცალკეული ფართეულების ნორმალურ განტოლებათა ჩამოთვლა.** წინა პარაგრაფებში ჩვენ დავრწმუნდით, რომ მართკუთხოვანი კოორდინატების სათანადო შერჩევით მეორე რიგის ფართეულის უზოგადესი განტოლება (ნამდვილი კოეფიციენტებით), შეიძლება დავიყვანოთ ერთ-ერთ ქვემომოყვანილ სახეზე ($p$, $q$ აღნიშნავენ დადებით სიდიდეებს):

A. მეორე რიგის არაგანკუთრი ფართეულები

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (ნამდვილი ელიფსოიდი).

1a. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ (წარმოსახვითი ელიფსოიდი).

2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი).

3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (ორკალთა ჰიპერბოლოიდი).

4. $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ (ელიფსური პარაბოლოიდი).

5. $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ (ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი).

B. მეორე რიგის დაუშლადი განკუთრი ფართეულები

6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (მეორე რიგის ნამდვილი კონუსი).

6a. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ (მეორე რიგის წარმოსახვითი კონუსი).

7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (ნამდვილი ელიფსური ცილინდრი).

7a. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ (წარმოსახვითი ელიფსური ცილინდრი).

8. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ჰიპერბოლური ცილინდრი).

9. $y^2 = 2px$ (პარაბოლური ცილინდრი).

### C. მეორე რიგის შლადი ფართეულები

მეორე რიგის შლადი ფართეულები წარმოადგენენ ორი სიბრტყის ერთობლიობას, რომლებიც შეიძლება ურთიერთ შეუღლებული წარმოსახვითი სიბრტყეებიც იყვნენ. ეს სიბრტყეები შეიძლება პარალელური და აგრეთვე დამთხვეულიც იყვნენ.

**§ 285. მეორე რიგის ფართეულების გადაკვეთა პარალელური სიბრტყეებით.** შემდეგ პარაგრაფებში ჩვენ შევისწავლით ზემოჩამოთვლილ ნამდვილ ფართეულების ფორმას (გარდა ცილინდრებისა, ვინაიდან მათი ფორმა ძალიან მარტივია), პარალელური სიბრტყეებით გადაკვეთის საშუალებით.

ქვემომოყვანილი მარტივი დებულება ძალიან აადვილებს ამ შესწავლას.

პარალელური სიბრტყეებით მეორე რიგის ფართეულის გადაკვეთის წირები მსგავსია და, გარდა ამისა, ჰომოთეტური. გამონაკლისს შეიძლება წარმოადგენდეს მხოლოდ ის შემთხვევა, როცა გადაკვეთის წირები ჰიპერბოლებია; ორი ნებისმიერი ასეთი ჰიპერბოლი ან ურთიერთჰომოთეტურია, ან ერთი მათგანი მეორეს შეუღლებული ჰიპერბოლის ჰომოთეტურია.

ჩვენ მხედველობაში გვაქვს კვეთაში მიღებული ნამდვილი დაუშლადი წირები.

მართლაც, ავიღოთ $Oxy$ სიბრტყე გამკვეთი სიბრტყეების პარალელურად. ვთქვათ,

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

არის მოცემული ფართეულის განტოლება, ხოლო $z = h$ — გამკვეთი სიბრტყის განტოლება. ჩავსვათ წინა განტოლებაში $z = h$, მივიღებთ განტოლებას

$$F = (x, y, h) = 0, \tag{2}$$

რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს გადაკვეთის $\gamma$ წირის $x$, $y$ კოორდინატები.

მაშასადამე, (2) განტოლება, განხილული როგორც წირის განტოლება $Oxy$ სიბრტყეში, წარმოადგენს გადაკვეთის წირის გეგმილს $Oxy$ სიბრტყეზე. (2) განტოლებაში მეორე განზომილების წევრები იქნება:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

რომლებიც დამოუკიდებელი არიან $h$-სგან. მაშასადამე, სხვადასხვა $h$-ის შესაბამისი $\gamma'$ წირების განტოლებებში, კოეფიციენტები მეორე განზომილების წევრებთან ერთნაირია, ეს კი ამტკიცებს ჩვენს დებულებას (იხ. § 260).

§ 286. მეორე რიგის კონუსი. დავიწყოთ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{1}$$

ფართეულის განხილვით. ჩვენ ვიცით, რომ ეს ფართეული კონუსია, რომლის წვეროკოორდინატთა სათავეშია.

ვინაიდან (1) განტოლება მხოლოდ ცვლადების კვადრატებს შეიცავს, ამიტომ ცხადია, რომ კოორდინატთა სიბრტყეები ამ კონუსის სიმეტრიის სიბრტყეებია, კოორდინატთა ღერძები—სიმეტრიის ღერძები, ხოლო სათავე (წვეროკ)—სიმეტრიის ცენტრი.

უფრო ახლოს რომ გავეცნოთ ჩვენი კონუსის ფორმას, გადავკვეთოთ იგი $Oxy$ სიბრტყის პარალელური სიბრტყით

$$z=h$$

($h$ აღნიშნავს მუდმივს).

გადაკვეთაში მივიღებთ წირს

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{h^2}{c^2}=0,\quad z=h,$$

რომლის გეგმილი $Oxy$ სიბრტყეზე ცხადია იქნება:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{h^2}{c^2}=0,$$

ანუ, თუ გავყოფთ $\frac{h^2}{c^2}$ სიდიდეზე:

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1, \tag{2}$$

სადაც სიმოკლისათვის შემოღებულია აღნიშვნები

$$a'=\frac{ah}{c},\quad b'=\frac{bh}{c}.$$

მაშასადამე, გადაკვეთა წარმოადგენს ელიფსს $a'$, $b'$ ნახევარღერძებით, რომლის ცენტრი $Oz$ ღერძზეა.

სხვადასხვა $h$-სთვის მივიღებთ სხვადასხვა ელიფსს, რომლებიც ერთმანეთის მსგავსნი იქნებიან.

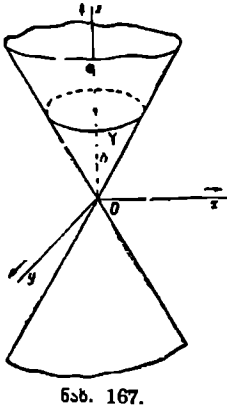
ვთქვათ, $\gamma$ აღნიშნავს რომელიმე მათგანს. მაშინ ჩვენი კონუსი, ცხადია, შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც იმ წრფეთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც გადიან $O$ წერტილზე და $\gamma$ ელიფსზე: $\gamma$ იქნება ამ წრფეების მიმმართველი ელიფსი.

კერძოდ, თუ $a=b$, მივიღებთ წრიულ [1]) კონუსს ანუ ბრუნვის კონუსს, რომელიც ელემენტარულ გეომეტრიაში განიხილება.

კონუსი შედგება ორი კალთისაგან, რომლებიც იმყოფებიან წვეროს ორივე მხარეზე (ნახ. 167). კონუსის წვეროზე გამავალი სიბრტყეები იყოფა სამ კატეგორიად:

a) სიბრტყეები, რომლებიც $\gamma$ ელიფსს ორ სხვადასხვა წერტილში კვეთს; ცხადია, ეს სიბრტყეები კონუსს ორ წრფეზე (მსახველებზე) კვეთს;

b) სიბრტყეები, რომლებიც $\gamma$ ელიფსს არ კვეთს; ცხადია, ამ სიბრტყეებს კონუსთან მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი აქვთ (წვერო);



ნახ. 167.

c) სიბრტყეები, რომლებსაც $\gamma$ წირთან მხოლოდ ერთი, ან უკეთ — ორი ერთმანეთზე დამთხვეული, საერთო წერტილი აქვთ თითოეულ ამ სიბრტყეს, ცხადია, კონუსთან მხოლოდ ერთი (უკეთ — ორი ერთმანეთზე დამთხვეული) საერთო წრფე აქვს. ასეთი სიბრტყე (რომელსაც აღვნიშნავთ $\Pi$) $\gamma$ ელიფსის სიბრტყეს ისეთ წრფეზე კვეთს, რომელიც $\gamma$ ელიფსის მხებია. ამგვარად, $\Pi$ სიბრტყე გაივლის კონუსის მსახველებზე და $\gamma$-ს მხებზე (რომელიც გატარებულია მსახველის გადაკვეთის წერტილზე ელიფსთან). ეს სიბრტყე წარმოადგენს კონუსის მხებ სიბრტყეს; ხსენებული მსახველი კი არის ამ სიბრტყის კონუსთან შეხების წრფე.

ახლა განვიხილოთ ჩვენი კონუსის გადაკვეთა ისეთი სიბრტყეებით, რომლებიც წვეროზე არ გადიან, ჩვენ ვიცით, რომ გადაკვეთაში მივიღებთ მეორე რიგის წირს. განვიხილოთ, რა წირები მიიღებიან გადაკვეთაში.

თუ წვეროზე გამავალი და მოცემული კვეთი სიბრტყის პარალელური სიბრტყე b) კატეგორიას ეკუთვნის, მაშინ, ცხადია, მოცემული სიბრტყე კონუსის მხოლოდ ერთ კალთას და მის ყველა მსახველს კვეთს. მაშასადამე, გადაკვეთა წარმოადგენს მეორე რიგის ჩაკეტილ სასრულ წირს, ე. ი. ელიფსს.

თუ წვეროზე გამავალი და მოცემული სიბრტყის პარალელური სიბრტყე a) კატეგორიას ეკუთვნის, მაშინ, ცხადია, მოცემული სიბრტყე კონუსის ორივე კალთას კვეთს; მაშასადამე, გადაკვეთის წირი შედგება ორი ცალკეული შტოსაგან, ე. ი. ეს წირი ჰიპერბოლია.

ბოლოს, თუ მოცემული სიბრტყის პარალელური და წვეროზე გამავალი სიბრტყე c) კატეგორიას ეკუთვნის (ე. ი. კონუსს ეხება ერთ-ერთი მსახველის გასწვრივ), მაშინ მოცემული სიბრტყე კონუსის მხოლოდ ერთ კალთას კვეთს. ვინაიდან, გარდა ამისა, კონუსის ერთ-ერთი მსახველი მისი პარალელურია, ამიტომ გადაკვეთის წირი უსასრულობაშია განფენილი (და შედგება ერთი შტოსაგან). მაშასადამე, გადაკვეთის წირი პარაბოლია.

[1]) ჩვენ ქვემოთ ვნახავთ (§ 297), რომ ყოველი (დაუშლადი) მეორე რიგის კონუსი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც „დახრილი“ წრიული კონუსი.

ამგვარად, ჩვენ კიდევ ერთხელ ვნახეთ, რომ ელიფსი, ჰიპერბოლი და პარაბოლი წარმოადგენენ მეორე რიგის კონუსის (კერძოდ, სწორი წრიული კონუსის) გადაკვეთის წირებს სიბრტყეებთან.

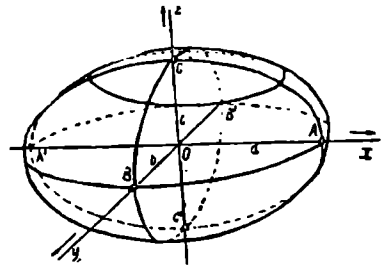
§ 287. ელიფსოიდი. ახლა განვიხილოთ ელიფსოიდი, რომელიც მოცემულია განტოლებით

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

გასაგებია, რომ კოორდინატთა სიბრტყეები ფართეულის სიმეტრიის სიბრტყეები („მთავარი დიამეტრალური სიბრტყეები“) იქნება კოორდინატთა ღერძები—სიმეტრიის ღერძები („ღერძები“), ხოლო კოორდინატთა სათავე—სიმეტრიის ცენტრი („ცენტრი“), ამასთანავე, ცხადია, რომ ფართეულის ყველა წერტილისათვის ადგილი აქვს უტოლობებს

$$|x|\leq a,\ |y|\leq b,\ |z|\leq c.$$

მაშასადამე, მთელი ფართეული მოთავსებულია $2a$, $2b$, $2c$ წიბოების მქონე სწორკუთხა პარალელეპიპედის შიგნით, რომლის წახნაგები კოორდინატთა სიბრტყეების პარალელურია და $Ox$, $Oy$, $Oz$ ღერძებიდან კვეთენ მონაკვეთებს, შესაბამისად, $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$ ტოლს (ნახ. 168).



ნახ. 168.

ჩვენ ვიცით, რომ (1) ფართეულის ყოველგვარი გადაკვეთა სიბრტყით გვაძლევს მეორე რიგის წირს; ვინაიდან გადაკვეთის წირი, ზემონათქვამის ძალით, არ შეიძლება განფენილი იყოს უსასრულობაში, ამიტომ იგი ელიფსია. ამგვარად, (1) ფართეულის კვეთა სიბრტყეებით, როგორც ჩვენ უკვე ზემოთ ვნახეთ (§ 269), წარმოადგენენ ელიფსებს.

მისი ფორმის ნათელი წარმოდგენისათვის, გადავკვეთოთ იგი კოორდინატთა სიბრტყეების პარალელური სიბრტყეებით.

$Oxy$ სიბრტყე (ე. ი. $z=0$) მას გადაკვეთს ელიფსზე, რომლის განტოლება $Oxy$ სიბრტყეში იქნება

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{2}$$

$Oxz$ სიბრტყე ($y=0$) მას გადაკვეთს ელიფსზე, რომლის განტოლება იმავე სიბრტყეში იქნება

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{3}$$

ბოლოს $Oyz$ სიბრტყე მას გადაკვეთს ისეთ ელიფსზე, რომლის განტოლება ამ სიბრტყეში იქნება

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{4}$$

(2), (3), (4) ელიფსებს „მთავარი ელიფსები“ ეწოდება. ახლა განვიხილოთ ჩვენი ფართეულის გადაკვეთა $Oxy$ სიბრტყის პარალელური სიბრტყეებით. ვთქვათ,

$$z=h$$

ერთ-ერთი ასეთი სიბრტყეა. ჩავსვათ (1) განტოლებაში $z=h$, მივიღებთ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2};$$

თუ ამ უკანასკნელს განვიხილავთ როგორც წირის განტოლებას $Oxy$ სიბრტყეში, მაშინ იგი წარმოადგენს გადაკვეთის წირის გეგმილს $Oxy$ სიბრტყეზე.

ცხადია, რომ ეს წირი ნამდვილი იქნება მხოლოდ მაშინ, როცა $|h|\leq c$.

გავყოთ წინა განტოლება $1-\frac{h^2}{c^2}$ და შედეგი გადავწეროთ ასე:

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}=1, \tag{5}$$

სადაც სიმოკლისათვის მიღებულია

$$a'=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, \quad b'=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, \tag{6}$$

ამგვარად, გადაკვეთის წირი არის ელიფსი $a'$, $b'$ ნახევარღერძებით, რომლის ცენტრი $Oz$ ღერძზეა. როცა $h=0$, გვექნება $a=a'$ $b=b'$, ე. ი. მივიღებთ მთავარ ელიფსს (2). როცა $h$ იზრდება 0-დან $c$-მდე, ნახევარღერძები $a'$, $b'$ მცირდება; (5) ელიფსი თანდათან მცირდება ისე, რომ ყოველთვის თავის მსგავსი რჩება, და როცა $h=c$, იგი იკუმშება $Oz$ ღერძის $C$ წერტილში.

ამნაირად, სიბრტყე $z=c$ ელიფსოიდს ეხება $C$ წერტილში.

სიმეტრიული მდგომარეობაა მაშინაც, როცა $h$ მცირდება 0-დან—$c$-მდე; სიბრტყე $z=-c$ ელიფსოიდს ეხება $C'(0, 0, -c)$ წერტილში, რომელიც მოთავსებულია $Oz$ ღერძზე.

სრულიად ანალოგიურ შედეგებს მივიღებთ, თუ განვიხილავთ ამ ფართეულის კვეთას $x=h$ და $y=h$ სიბრტყეებით. სიბრტყეები $x=\pm a$, $y=\pm b$ ფართეულს ეხებიან $A(a, 0, 0)$, $A'(-a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $B'(0, -b, 0)$ წერტილებში.

$A$, $A'$, $B$, $B'$, $C$, $C'$ წერტილებს ელიფსოიდის წვეროები ეწოდება, $AA'$, $BB'$, $CC'$ მონაკვეთებს და აგრეთვე მათ სიგრძეებს $2a$, $2b$, $2c$ — მისი ღერძები, ხოლო $a$, $b$, $c$ — ნახევარღერძები.

თუ

$$a > b > c,$$

მაშინ $a$-ს ეწოდება დიდი, $b$-ს — საშუალო, ხოლო $c$-ს — მცირე ღერძი.

კერძოდ, როცა $a=b$, ყველა (5) ელიფსი წრეხაზად გადაიქცევა. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში ჩვენი ელიფსოიდი შეიძლება მივიღოთ $ACA'C'$ ელიფსის ბრუნვით $C'C$ ღერძის გარშემო. ასეთ ელიფსოიდს ბრუნვის ელიფსოიდი ეწოდება. თუ $c > a$ მას ეწოდება მოგრძო ელიფსოიდი, თუ $c < a$ — დამოკლებული ელიფსოიდი.

ბოლოს, თუ $a=b=c$, მაშინ ელიფსოიდი სფეროდ გადაიქცევა.

#### სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. დაწერეთ (1) ელიფსოიდის მხები სიბრტყის განტოლება $(x_0, y_0, z_0)$ წერტილში.

პასუხი: $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$

2. შეადგინეთ $(X, Y, Z)$ მიმართულების შეუღლებული დიამეტრალური სიბრტყის განტოლება.

პასუხი: $\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} + \frac{Zz}{c^2} = 0,$

3. გამოიყვანეთ იმის პირობა, რომ მეორე რიგის განტოლება $F(x, y, z)=0$ წარმოადგენდეს სფეროს, ე. ი. დაიყვანებოდეს სახეზე

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 - K = 0,$$

სადაც $K=\pm r^2$ (ზედა ნიშნისათვის გვექნება ნამდვილი სფერო, ქვედა ნიშნისათვის — წარმოსახვითი).

პასუხი: § 239-ში მოყვანილი მეთოდის ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ ამის აუცილებელი და საკმარისი პირობებია (მართკუთხოვან კოორდინატებში) შემდეგი:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} \neq 0;\ a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0;$$

ამასთანავე, $K$ მოცემულია ფორმულით

$$K = \frac{a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{11}a_{44}}{a_{11}^2}.$$

როცა $K > 0$, გვექნება ნამდვილი სფერო, როცა $K < 0$ — წარმოსახვითი სფერო. როცა $K=0$, მაშინ მოცემული განტოლება დაიყვანება შემდეგ სახეზე:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = 0.$$

ეს არის „ნულ რადიუსიანი სფერო „ანუ" იზოტროპული კონუსი".

გამოყვანილი პირობა შეიძლება შევცვალოთ შემდეგითაც: იმისათვის, რომ $F(x, y, z)=0$ ფართეული წარმოადგენდეს სფეროს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ იგი სფერულ წრეწირზე გადიოდეს (§ 175), ე. ი. რომ მისი გადაკვეთა არასაკუთრივ სიბრტყესთან წარმოსახვითი არასაკუთრივი წრეწირი იყოს.

დამტკიცებას ვანდობთ მკითხველს.

**§ 288. ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი.** ამ ფართეულის ნორმალურ განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

იგი სიმეტრიულია კოორდინატთა სიბრტყეებისა („მთავარი დიამეტრალური სიბრტყეები"), კოორდინატთა ღერძებისა („ღერძების") და კოორდინატთა $O$ სათავის მიმართ (ნახ. 169), რომელიც ფართეულის ცენტრს წარმოადგენს.

ამ ფართეულის გადაკვეთა $Oxy$ სიბრტყესთან იქნება ელიფსი

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{2}$$

(„მთავარი" ანუ „საყელური" ელიფსი), $Oxz$ სიბრტყესთან — ჰიპერბოლი:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{3}$$

ხოლო $Oyz$ სიბრტყესთან — ჰიპერბოლი

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{3a}$$

(„მთავარი ჰიპერბოლები"). თუ ჩვენს ფართეულს გადავკვეთთ სიბრტყით $z=h$, მივიღებთ ისეთ წირს, რომლის გეგმილი $Oxy$ სიბრტყეში მოცემული იქნება განტოლებით

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2},$$

ანუ

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1, \tag{4}$$

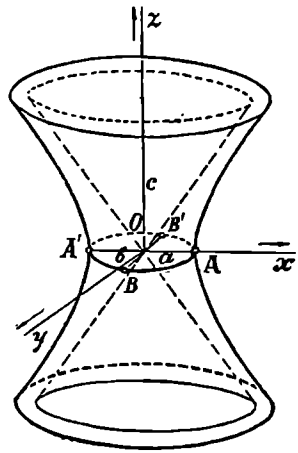
სადაც

$$a'=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}, \quad b'=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}. \tag{5}$$

ეს არის ელიფსი $a'$, $b'$ ნახევარღერძებით; გადაკვეთის წირი ყოველთვის არსებობს. როცა $h=0$, მივიღებთ საყელურ ელიფსს (2).

როცა ($h$) იზრდება, $a'$, $b'$ ნახევარღერძებიც უსაზღვროდ იზრდება, ხოლო (4) ელიფსი უსაზღვროდ დიდდება, ისე რომ ყოველთვის საყელური ელიფსის მსგავსი რჩება. ცხადია, რომ ფართეული შედგება ერთი კალთისაგან, რომელიც განფენილია უსასრულობაში $Oxy$ სიბრტყის ორივე მხარეზე.

საყელური ელიფსის $A$, $A'$, $B$, $B'$ წვეროებს ეწოდება განხილული ჰიპერბოლოიდის წვეროები. $AA'$ და $BB'$ მონაკვეთებს და აგრეთვე მათ სიგრძეებს $|AA'|=2a$ და $|BB'|=2b$ ეწოდება მისი განივი ღერძები. $Oz$ ღერძის მონაკვეთს, რომლის სიგრძეა $2c$ და რომლის შუა წერტილია $O$, და მის სიგრძეს ეწოდება გრძივი ღერძი.



ნახ. 169.

ჰიპერბოლოიდის ფორმის ნათელ წარმოდგენას უსასრულოდ დაშორებული წერტილებისათვის გვაძლევს ასიმპტოტური კონუსის განხილვა.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \qquad (6)$$

(ეს ასიმპტოტური კონუსია, იმიტომ რომ იგი წარმოადგენს ასიმპტოტურ მიმართულებათა კონუსს, რომლის წვეროც ცენტრშია; იხ. § 275).

ამ კონუსის გადაკვეთა $z=h$ სიბრტყით, როგორც ვნახეთ, წარმოადგენს ელიფსს ცენტრით $Oz$ ღერძზე და ნახევარღერძებით

$$a''=\frac{a|h|}{c}, \quad b''=\frac{b|h|}{c};$$

ეს ელიფსი მსგავსია იმავე სიბრტყით ჰიპერბოლოიდის გადაკვეთაში მიღებული ელიფსისა.

ვინაიდან, (5) ფორმულების ძალით $a''<a'$, $b''<b'$, ამიტომ პირველი ელიფსი მოთავსებულია მეორეს შიგნით. მაშასადამე, (6) კონუსი მთლიანად მოთავსებულია ჰიპერბოლოიდის შიგნით (ე. ი. სივრცის იმ ნაწილში, რომელშიაც $Oz$ ღერძი გადის).

გარდა ამისა, ადვილი საჩვენებელია, რომ როცა $|h|$ უსაზღვროდ იზრდება, მაშინ $a'-a''$ და $b'-b''$ სხვაობანი ნულისაკენ მიისწრაფვიან.

მაგალითად,

$$a'-a''=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}-\frac{a|h|}{c}.$$

გავამრავლოთ და გავყოთ მარჯვენა მხარე სიდიდეზე

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}+\frac{a|h|}{c},$$

ცხადი გამარტივების შემდეგ მივიღებთ

$$a'-a''=\frac{a}{\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}+\frac{a|h|}{c}},$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\lim\limits_{h\to\infty}(a'-a'')=0$.

ისეთნაირადვე დავამტკიცებთ, რომ

$$\lim_{h\to\infty}(b'-b'')=0.$$

ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ ჩვენი ჰიპერბოლოიდისა და (6) კონუსის გადაკვეთის ელიფსები, როცა $h$ იზრდება, ერთმანეთისაკენ მიისწრაფვიან, ე. ი. სივრცის საკმარისად დაშორებულ ნაწილებში კონუსი ნებისმიერად უახლოვდება ჰიპერბოლოიდს.

თუ $a=b$, მაშინ (4) ელიფსი გადაიქცევა წრეწირად, და (1) ჰიპერბოლოიდი შეიძლება მიღებულ იქნას (3) ანუ (3a) ჰიპერბოლების ბრუნვით გარკვეული ღერძის გარშემო. ასეთ ჰიპერბოლოიდს **ბრუნვის ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი** ეწოდება.

§ 269-ში ნაჩვენები იყო, რომ ჰიპერბოლოიდისა და სიბრტყეების გადაკვეთით შეგვიძლია მივიღოთ სამივე ტიპის წირები (ელიფსური, ჰიპერბოლური, პარაბოლური). ეს ფაქტი შეიძლება ანალიზურადაც ვაჩვენოთ (იხ. სავარჯიშო).

### სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. დაამტკიცეთ, რომ (1) ჰიპერბოლოიდის გადაკვეთის წირები $Oyz$ და $Oxz$ სიბრტყეების პარალელური სიბრტყეებით, არის ჰიპერბოლები (კერძოდ, გადაკვეთა შეიძლება იყოს ორი წრფის ერთობლიობაც, თუ გამკვეთი სიბრტყეები საყელური ელიფსის წვეროებზე გადიან).

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. $y=h$ სიბრტყეში მოთავსებული გადაკვეთის წირის გეგმილი $Oxz$ სიბრტყეზე მოცემულია განტოლებით

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}.$$

ეს კი წარმოადგენს ჰიპერბოლს, როცა $|h|\neq b$, ან ორი წრფის ერთობლიობას, როცა

$$h=\pm b.$$

ანალოგიურად გვექნება

$$x=h$$

სიბრტყეებით გადაკვეთისთვის.

2. დაამტკიცეთ, რომ (1) ჰიპერბოლოიდის გადაკვეთა $Oz$ ღერძის პარალელური სიბრტყეებით, არის ჰიპერბოლები (კერძოდ, გადაკვეთა შეიძლება იყოს ორი გადამკვეთი წრფის ერთობლიობა).

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვინაიდან ჰიპერბოლოიდის გადაკვეთა $Oyz$ სიბრტყის პარალელური სიბრტყეებით უკვე განხილული იყო წინა სავარჯიშო მაგალითში, ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ გამკვეთი სიბრტყე ამ სიბრტყის პარალელური არ არის. ვთქვათ, მისი განტოლება არის $y=mx+k$. ჩავსვათ ეს განტოლება ჰიპერბოლოიდის (1) განტოლებაში $y$-ის ნაცვლად, მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+k)^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

რომელიც გამოსახავს განხილული კვეთის გეგმილს $Oxz$ სიბრტყეზე. ამ განტოლებაში $a_{11}$, $a_{33}$ კოეფიციენტები [1]) $x^2$, $z^2$ ცვლადებთან, შესაბამისად, უდრის $-\frac{1}{a^2}\cdot+\frac{m^2}{b^2}$, $-\frac{1}{c^2}$. კოეფიციენტი $xz$ წევრთან $2a_{13}$ უდრის ნულს.

მაშასადამე, $A_{33}=a_{11}a_{33}-a_{13}^2=-\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)<0$ და, ამგვარად, განხილული გეგმილი ჰიპერბოლური ტიპის წირია, ე. ი. ან ჰიპერბოლი, ან ორი გადამკვეთი წრფის ერთობლიობა. ასეთივე ტიპის იქნება დასაგეგმილებელი წირიც, ეს კი ამტკიცებს ჩვენს დებულებას.

3. დაამტკიცეთ, რომ (1) ჰიპერბოლოიდისა და სიბრტყეების გადაკვეთის წირებს შორის იმყოფება სამივე ტიპის (ელიფსური, ჰიპერბოლური და პარაბოლური) წირები და რომ მისი გადაკვეთის წირი მოცემულ სიბრტყესთან იმავე ტიპისაა, როგორც ასიმპტოტური კონუსის იმავე სიბრტყესთან გადაკვეთის წირი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. $Oz$ ღერძის პარალელური სიბრტყეებით გადაკვეთის წირები ჩვენ უკვე შესწავლილი გვაქვს (ისინი ჰიპერბოლური ტიპის წირებია). განვიხილოთ $Oz$ ღერძის არაპარალელური სიბრტყის $z=mx+ny+k$ გადაკვეთის წირი.

ჩავსვათ ეს გამოსახულება $z$-ის ნაცვლად (1) განტოლებაში, მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(mx+ny+k)^2}{c^2}=1, \tag{7}$$

რომელიც გამოსახავს გადაკვეთის წირის გეგმილს $Oxy$ სიბრტყეზე.

ამ განტოლებაში მეორე განზომილების წევრების კოეფიციენტები იქნება [2]):

$$a_{11}=\frac{1}{a^2}-\frac{m^2}{c^2},\ 2a_{12}=-\frac{2mn}{c^2},\quad a_{22}=\frac{1}{b^2}-\frac{n^2}{c^2};$$

მაშასადამე,

$$A_{33}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=\frac{1}{a^2b^2}-\frac{1}{c^2}\left(\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{a^2}\right).$$

ცხადია, რომ თუ $m$ და $n$ სიდიდეებს მივცემთ სათანადო მნიშვნელობებს, შეგვიძლია შემდეგ პირობათაგან: $A_{33}>0$, $A_{33}=0$, $A_{33}<0$ დავაკმაყოფილოთ ყოველი მათგანი, ე. ი. დაგეგმილებისას შეგვიძლია მივიღოთ სამივე ტიპის წირები. ასეთივე ტიპისა იქნება გადაკვეთის წირიც.

გარდა ამისა, ცხადია, რომ $A_{33}$ სრულებით არ იცვლება, თუ (7) განტოლების მარჯვენა მხარეში ერთის მაგივრად დავწერთ ნულს (ან სხვა ნებისმიერ მუდმივს). მაშასადამე, გადაკვეთის წირის ტიპი არ იცვლება, თუ მოცემული ფართეულის მაგივრად მის ასიმპტოტურ კონუსს ავიღებთ.

4. წინა სავარჯიშო მაგალითში ნათქვამის მიხედვით, დაამტკიცეთ, რომ ასიმპტოტური კონუსის მხები სიბრტყეების პარალელური სიბრტყეები (და მხოლოდ ასეთი სიბრტყეები) ჰიპერბოლოიდს გადაკვეთენ პარაბოლებ.

**§ 289. ორკალთა ჰიპერბოლოიდი.** ამ ფართეულის ნორმალურ განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{1}$$

მას სიმეტრიულობის იგივე თვისებები აქვს, რაც წინა პარაგრაფებში განხილულ ფართეულებს; $Oyz$, $Ozx$, $Oxy$ სიბრტყეები („მთავარი დიამეტრა-

[1]) აქ ჩვენ ვიყენებთ § 208-ის აღნიშვნებს, რომელშიაც შეცვლილია $y$-ის და $z$-ის როლები.

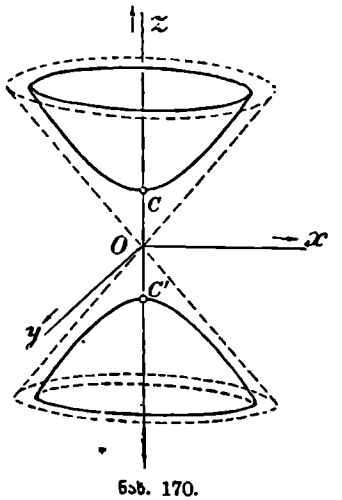
[2]) ჩვენ ვიყენებთ § 208-ის აღნიშვნებს.

ლური სიბრტყეები") წარმოადგენენ მისი სიმეტრიის სიბრტყეებს, $Ox$, $Oy$, $Oz$. ღერძები — სიმეტრიის ღერძებს („ღერძები"); წერტილი $O$ — სიმეტრიის ცენტრს (ცენტრი).

$Oxy$ სიბრტყე ფართეულს არ კვეთს, რადგანაც როცა $z=0$ მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1,$$

რომელიც წარმოსახვითი ელიფსია. $Oxz$ და $Oyz$ სიბრტყეები განხილულ ფართეულს შემდეგ ჰიპერბოლებზე კვეთს:



ნახ. 170.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{2}$$

და

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{3}$$

(„მთავარი ჰიპერბოლები", რომელთაგან 170 ნახაზზე გამოსახულია პირველი).

გადავკვეთოთ ჩვენი ფართეული $z=h$ სიბრტყით.

გადაკვეთაში მივიღებთ ისეთ წირს, რომლის გეგმილი $Oxy$ სიბრტყეში მოცემულია განტოლებით

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1.$$

მაშასადამე, გადაკვეთის წირი ნამდვილია, თუ $|h|\geq c$, და წარმოსახვითია, თუ $|h|<c$.

თუ დავუშვებთ, რომ $|h|>c$, მაშინ წინა განტოლება შეიძლება შემდეგი სახით გადავწეროთ:

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1, \tag{4}$$

სადაც

$$a'=a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},$$

$$b'=b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}. \tag{5}$$

ე. ი. გადაკვეთის წირი წარმოადგენს ელიფსს $a'$, $b'$ ნახევარღერძებით, რომლის ცენტრი $Oz$ ღერძზეა. როცა $|h|$ იზრდება, მაშინ ეს ელიფსიც უსაზღვროდ იზრდება ისე, რომ ყოველთვის თავისივე მსგავსი რჩება.

როცა $h$ მიისწრაფვის $c$-სკენ, მაშინ $a'$ და $b'$ მიისწრაფვის ნულისკენ, და ელიფსი იკუმშება $Oz$ ღერძზე მოთავსებულ $C'(0, 0, c)$ წერტილისაკენ. თუ $h$ მიისწრაფვის $(-c)$-სკენ, მაშინ ელიფსი იკუმშება $C'(0, 0, c)$ წერტილისაკენ. $z=+c$ და $z=-c$ სიბრტყეები ჰიპერბოლოიდს ეხება სწორედ ამ წერტილებში, რომლებსაც მისი წვეროები ეწოდება.

$CC'$ მონაკვეთს და აგრეთვე მის სიგრძეს $2c$ ეწოდება ორკალთა ჰიპერბოლოიდის გრძივი ღერძი; $Ox$ და $Oy$ ღერძებზე მდებარე შესაბამის მონაკვეთებს, სიგრძით $2a$ და $2b$ (რომელთა შუა წერტილია სათავე $O$), ეწოდება განივი ღერძები.

$z=c$, $z=-c$ სიბრტყეებს შორის ჰიპერბოლოიდის წერტილები არ ამყოფება; მაშასადამე, იგი ორი ცალკეული კალთისაგან შედგება.

ისე როგორც წინა პარაგრაფში, განვიხილოთ კონუსი

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \qquad (ბ)$$

რომელიც ჩვენი ფართეულის ასიმპტოტურ კონუსს წარმოადგენს.

ადვილი სანახავია (შეად. წინა პარაგრაფს), რომ ჩვენი ფართეული მთლიანად მოთავსებულია ამ კონუსის შიგნით. და მისი საკმარისად დაშორებული ნაწილები უსასრულოდ უახლოვდება კონუსს.

თუ $a=b$, მაშინ ჩვენი ჰიპერბოლოიდი წარმოადგენს ბრუნვის ორკალთა ჰიპერბოლოიდს, რომელიც მიიღება ისეთი ჰიპერბოლის ბრუნვით $CC'$ ღერძის გარშემო, რომლის გრძივი ღერძია $|CC'|=2c$ და განივი ღერძი $2a=2b$.

ხშირად სასარგებლოა ერთდროულად განხილვა ცალკალთა და ორკალთა ჰიპერბოლოიდებისა

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

და

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

რომელთა განტოლებანი მხოლოდ ნიშნებით განსხვავდებიან მარჯვენა მხარეში. ამ ჰიპერბოლოიდებს ეწოდება ერთმანეთის მიმართ შეუღლებული ჰიპერბოლოიდები.

ზემოთ და ამ პარაგრაფში ნათქვამის ძალით, ამ ფართეულებს აქვთ საერთო ასიმპტოტური კონუსი

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

რომელიც მათ ისეთნაირად ყოფს, რომ პირველი მათგანი ასიმპტოტური კონუსის გარეთაა, მეორე კი—შიგნით.

მათი განივი და გრძივი ღერძები ერთი და იგივეა. ამით ცხადი ხდება ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის „გრძივი ღერძის“ და ორკალთა ჰიპერბოლოიდის „განივი ღერძების“ გეომეტრიული შინაარსი.

#### სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. დაამტკიცეთ, რომ ორკალთა ჰიპერბოლოიდის $Oxz$, $Oyz$ სიბრტყეების პარალელური სიბრტყეებით გადაკვეთის წირები ჰიპერბოლები იქნება.

2. დაამტკიცეთ, რომ ორკალთა ჰიპერბოლოიდის და სიბრტყეების გადაკვეთაში შეიძლება მივიღოთ სამივე ტიპის კონუსური კვეთა. დაამტკიცეთ, რომ წირები მოცემული სიბრტყის გადაკვეთისა მოცემულ ორკალთა ჰიპერბოლოიდთან, მის შეუღლებულ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდთან და მათ საერთო ასიმპტოტურ კონუსთან ერთი და იმავე ტიპის წირები იქნება.

დამტკიცება ისეთივეა, როგორიც წინა პარაგრაფის 2 და 3 სავარჯიშოებისა.

§ 290. **ელიფსური პარაბოლოიდი.** ამ ფართეულს განტოლებად აქვს

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \tag{1}$$

სადაც $p$ და $q$ ერთნაირი ნიშნის მუდმივებია. ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $p>0$, $q>0$.

ცხადია, $Oxz$ და $Oyz$ სიბრტყეები („მთავარი დიამეტრალური სიბრტყეები“) წარმოადგენენ მისი სიმეტრიის სიბრტყეებს და $Oz$ ღერძი—სიმეტრიის ღერძს.

ასიმპტოტურ მიმართულებათა კონუსი

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 0, \tag{2}$$

რომლის წვეროც $O$ წერტილშია, იშლება ორ წარმოსახვით შეუღლებულ სიბრტყედ, რომლებიც გადაიკვეთება (ნამდვილ) $Oz$ წრფეზე. მაშასადამე, ერთადერთი ნამდვილი ასიმპტოტური მიმართულება არის $Oz$ მიმართულება, ე. ი. ფართეულის ღერძის მიმართულება. ეს მიმართულება არასაკუთრივ სიბრტყეს ხვდება ფართეულის ერთადერთ არასაკუთრივ წერტილში (0, 0, 1, 0). არასაკუთრივი სიბრტყე ფართეულს ეხება ამ წერტილში (§ 269). მკითხველს ვანდობთ კიდევ ერთხელ დაამტკიცოს ეს, რისთვისაც საჭიროა შევადგინოთ (1) ფართეულის განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში და დავწეროთ მხები სიბრტყის განტოლება წერტილში ერთგვაროვანი კოორდინატებით (0, 0, 1, 0).

ეს წერტილი წარმოადგენს ფართეულის არასაკუთრივ წერტილს და ერთადერთ ცენტრს, რაც ადვილი შესამოწმებელია უშუალოდაც, თუ შევადგენთ ცენტრის განმსაზღვრელ განტოლებებს.

ამიტომ ყველა დიამეტრალური სიბრტყე $Oz$ ღერძის პარალელურია (მკითხველს ვანდობთ შეამოწმოს ეს უშუალოდ დიამეტრალური სიბრტყეების განტოლებათა შედგენით).

ფართეულის ყველა წერტილი $Oxy$ სიბრტყის ერთ მხარეზეა მოთავსებული, სახელდობრ, იქით, საითაც $z>0$, რადგანაც როცა $z<0$, (1) განტოლებას ნამდვილი ამოხსნები არა აქვს (ნახ. 171).

$Oxz$ და $Oyz$ სიბრტყეები ფართეულს კვეთს პარაბოლებზე

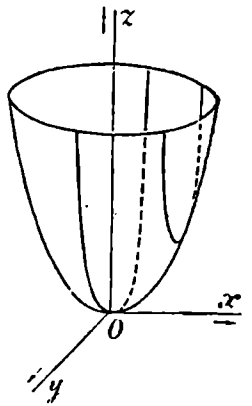
$$x^2=2pz \text{ და } y^2=qz \tag{3}$$

(„მთავარი პარაბოლები"), რომელთა პარამეტრებია $p$ და $q$ და ღერძი — $Oz$. $p$ და $q$ სიდიდეებს პარაბოლოიდის პარამეტრები ეწოდება.

განვიხილოთ ჩვენი ფართეულის გადაკვეთა $Oxy$ სიბრტყის პარალელური სიბრტყეებით

$$z=h;$$

როგორც ნათქვამი იყო, უნდა ვიგულისხმოთ, რომ $h>0$. გადაკვეთის წირის გეგმილი $Oxy$ სიბრტყეზე მოცემულია განტოლებით



ნახ. 171.

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2h,$$

ანუ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

სადაც

$$a=\sqrt{2ph}\,,\quad b=\sqrt{2qh}\,; \tag{4}$$

მაშასადამე, გადაკვეთა ელიფსია $a$, $b$ ნახევარღერძებით, რომლის ცენტრი $Oz$ ღერძზეა. როცა $h$ იზრდება, ეს ელიფსიც უსაზღვროდ იზრდება ისე, რომ ყოველთვის თავისიენ მსგავსი რჩება.

როცა $h$ მიისწრაფვის ნულისაკენ, ელიფსი იკუმშება $O$ წერტილში. $Oxy$ სიბრტყე პარაბოლოიდს ეხება ამ წერტილში, რომელსაც პარაბოლოიდის წვერო ეწოდება.

ახლა განვიხილოთ ჩვენი ფართეულის გადაკვეთა $Oyz$ სიბრტყის პარალელური სიბრტყით $x=x_0$. გადაკვეთაში მივიღებთ ისეთ წირს, რომლის გეგმილი $Oyz$ სიბრტყეზე მოცემულია განტოლებით

$$\frac{y^2}{q}=2z-\frac{x_0^2}{p},$$

ანუ

$$y^2=2q(z-z_0), \tag{5}$$

სადაც

$$z_0=\frac{x_0^2}{2p}. \tag{6}$$

მაშასადამე, საძიებელი გადაკვეთა წარმოადგენს პარაბოლს $q$ პარამეტრით, რომლის ღერძი $Oz$-ის პარალელურია და რომლის წვერო მოთავსებულია $Oxz$ სიბრტყეში. წვეროს კოორდინატები $(x_0, z_0)$ ერთმანეთთან დაკავ-

შირებულია (6) დამოკიდებულებით და, მაშასადამე, წვეროთ მოთავსებულია $x^2=2pz$ პარაბოლზე.

შევნიშნოთ, რომ (5) პარაბოლის პარამეტრი ($q$ სიდიდე) დამოკიდებულია $x=x_0$ გადამკვეთი სიბრტყის მდებარეობაზე. მაშასადამე, ყველა პარაბოლი, რომელიც $x=x_0$ სიბრტყეების გადაკვეთით მიიღება, კონგრუენტული არიან.

სრულიად ანალოგიურ შედეგს მივიღებთ მაშინაც, თუ განვიხილავთ $Oxz$ სიბრტყის პარალელური სიბრტყეების გადაკვეთას განხილულ[1] ფართეულთან.

ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს შემდეგი დებულება:

ელიფსური პარაბოლოიდი არის ფართეული, რომელიც შედგენილია უცვლელი პარაბოლის წვეროს სრიალით მეორე უცვლელ პარაბოლზე, რომლის სიბრტყე მოძრავი პარაბოლის მართობია, ხოლო ღერძს იგივე მიმართულება აქვს.

ხსენებული პარაბოლების $p$ და $q$ პარამეტრები მოცემული პარაბოლოიდის პარამეტრები არიან.

ჩვენ ვნახეთ, რომ ელიფსური პარაბოლოიდის ბრტყელი კვეთები ან ელიფსებია, ან პარაბოლები; ამ ფაქტის ანალიზური დამტკიცება მოყვანილია ქვემოთ სავარჯიშო მაგალითებში.

#### სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

დაამტკიცეთ, რომ (1) ელიფსური პარაბოლოიდის გადაკვეთა, $Oz$ ღერძის პარალელური სიბრტყეებით, პარაბოლები იქნება.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. გამოთქმული დებულება თითქმის ცხადია, ვინაიდან ადვილი დასანახია, რომ გადაკვეთის წირი (მეორე რიგისა) უსასრულობაშია განფენილი და ერთი შტოსაგან შედგება, რაც მხოლოდ პარაბოლი შეიძლება იყოს.

ანალიზურად ეს დებულება შეიძლება დავამტკიცოთ ასე. დავუშვათ, რომ გამკვეთი სიბრტყე $Oyz$ სიბრტყის პარალელური არ არის; დავწეროთ მისი განტოლება შემდეგი სახით:

$$y=mx+k$$

და $y$-ის ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ (1) განტოლებაში; მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{(mx+k)^2}{q}-2z=0,$$

ანუ

$$\left(\frac{1}{p}+\frac{m^2}{q}\right)x^2+\frac{2mkx}{q}-2z+\frac{k^2}{q}=0,$$

რომელიც გამოსახავს გადაკვეთის წირის გეგმილს $Oxz$ სიბრტყეზე.

რადგანაც დისკრიმინანტი[1] $A_{33}=0$, ამიტომ ეს გეგმილი პარაბოლური ტიპის წირია. იმისათვის, რათა დავრწმუნდეთ, რომ ეს გეგმილი პარაბოლია, საკმარისია შევადგინოთ დისკრიმინანტი

$$A=\begin{vmatrix} \frac{1}{p}+\frac{m^2}{q} & 0 & \frac{mk}{q} \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{mk}{q} & -1 & \frac{k^2}{q} \end{vmatrix}=-\left(\frac{1}{p}+\frac{m^2}{q}\right),$$

[1]) ჩვენ აქ ვიყენებთ იმავე აღნიშვნებს, რასაც X თავში ვხმარობდით, მხოლოდ ვცვლით $y$-ის და $z$-ის როლებს.

რომელიც ნულისაგან განსხვავებულია. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ თვით გადაკვეთის წირი პარაბოლია.

2. დაამტკიცეთ, რომ ელიფსური პარაბოლოიდის გადაკვეთა, $Oz$ ღერძის არაპარალელური სიბრტყეებით, ელიფსები იქნება.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ $z=mx+ny+k$ გამკვეთი სიბრტყის განტოლებაა, მაშინ გადაკვეთის წირის გეგმილის განტოლება $Oxy$ სიბრტყეზე იქნება:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{b}-2(mx+ny+k)=0.$$

ამ წირისათვის $A_{33}=\frac{1}{pq}>0$; მაშასადამე, გადაკვეთის წირი (ნამდვილი ან წარმოსახვითი) ელიფსია, რომელიც შეიძლება გადაგვარდეს წარმოსახვით შეუღლებულ წრფეთა წყვილადაც.

ამგვარად, ელიფსური პარაბოლოიდის ბრტყელი კვეთები ან პარაბოლებია (სავარჯიშო 1), ან ელიფსები.

**§ 291. ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი.** ამ ფართეულის ნორმალურ განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \tag{1}$$

სადაც $p>0$, $q>0$. მისთვის $Oxz$ და $Oyz$ სიბრტყეები („მთავარი დიამეტრალური სიბრტყეები") სიმეტრიის სიბრტყეებია, $Oz$ ღერძი—სიმეტრიის ღერძი („ღერძი").

ასიმპტოტურ მიმართულებათა კონუსი:

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=0, \tag{2}$$

რომლის წვერო $O$ წერტილშია, იშლება ორ ნამდვილ სიბრტყედ. (2) ფართეულის ორმაგი წრფე, ე. ი. $Oz$ ღერძი, არასაკუთრივ სიბრტყეს კვეთს იმ წერტილში, რომლის ერთგვაროვანი კოორდინატებია (0, 0, 1, 0); არასაკუთრივი სიბრტყე ფართეულს ეხება ამ წერტილში (ეს უკანასკნელი გამომდინარეობს § 269-ში ნათქვამიდან; იგი ადვილად შეიძლება შეეამოწმოთ უშუალოდაც). როგორც უშუალო შემოწმება გვიჩვენებს, ეს წერტილი იმავე დროს ფართეულის ერთადერთ და არასაკუთრივ ცენტრს წარმოადგენს. ამიტომ ყველა დიამეტრალური სიბრტყე $Oz$ ღერძის პარალელური იქნება.

ჩვენი ფართეულის გადაკვეთა $z=0$ სიბრტყით წარმოადგენს ორი წრფის ერთობლიობას:

ე. ი.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=0,\\[2ex]&\frac{x}{\sqrt{p}}\pm\frac{y}{\sqrt{q}}=0.\end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

(ნახ. 172-ზე $\Delta'$ და $\Delta''$ ). ამ ფართოულის გადაკვეთა მთავარი სიბრტყეებით იქნება

$$x^2=2pz \text{ და } y^2=-2qz \tag{3}$$

პარაბოლები („მთავარი პარაბოლები") პარამეტრებით $p$, $q$, რომლებიც მიმართულია $Oz$ ღერძის პარალელურად ერთმანეთის თანაწინააღმდეგ მხარეზე.

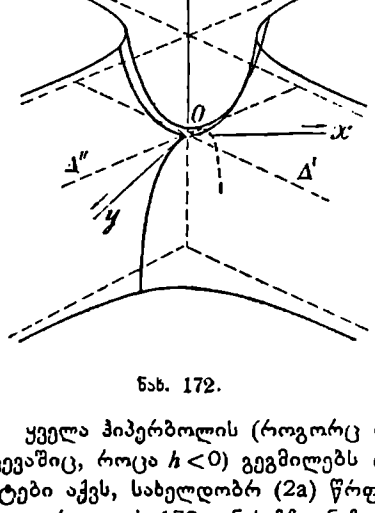
ფართოულის გადაკვეთას $z=h$ სიბრტყით $Oxy$ სიბრტყეში გეგმილად აქვს ჰიპერბოლი

$$\frac{x^2}{2ph}-\frac{y^2}{2qh}=1. \tag{4}$$

თუ $h>0$, მაშინ ამ ჰიპერბოლის გრძივი ღერძი მიმართულია $Ox$ ღერძის გასწვრივ, ხოლო განივი — $Oy$ ღერძის გასწვრივ. მისი ნახევარღერძები სიდიდით უდრის

$$a=\sqrt{2ph} \text{ და } b=\sqrt{2qh}. \tag{5}$$

როცა $h$ იზრდება, ნახევარღერძებიც უსაზღვროდ იზრდება. ამავე დროს ყველა ჰიპერბოლი ერთმანეთის მსგავსი და მსგავსად დალაგებული რჩება.




ნახ. 172.

როცა $h<0$, მაშინ (4) განტოლება შეიძლება გადავწეროთ ასე:

$$\frac{x^2}{-2ph}-\frac{y^2}{-2qh}=-1,$$

ანუ

$$-\frac{x^2}{2p|h|}-\frac{y^2}{2q|h|}=-1,$$

საიდანაც ჩანს, რომ ამ შემთხვევაში ჩვენ გვაქვს ისეთი ჰიპერბოლი, რომელიც დადებითი $h$-ის შესაბამისი ჰიპერბოლის შეუღლებულია. ეს ჰიპერბოლებიც ურთიერთ მსგავსია და მსგავსად დალაგებული.

ყველა ჰიპერბოლის (როგორც იმ შემთხვევაში, როცა $h>0$, ისე იმ შემთხვევაშიც, როცა $h<0$) გეგმილებს $Oxy$ სიბრტყეზე ერთი და იგივე ასიმპტოტები აქვს, სახელდობრ (2a) წრფეები.

ფართოულს 172-ე ნახაზზე ნაჩვენები სახე აქვს.

მისი გადაკვეთა $x=x_0$ სიბრტყეებით არის ისეთი პარაბოლები, რომელთა გეგმილები $Oyz$ სიბრტყეში მოცემულია განტოლებით:

$$\frac{y^2}{q}=-2z+\frac{x_0^2}{p},$$

ანუ

$$y^2 = -2q(z - z_0), \tag{6}$$

სადაც

$$z_0 = \frac{x_0^2}{2p}. \tag{7}$$

ყველა ეს პარაბოლი კონგრუენტულია და პარამეტრად აქვთ $q$. გადაკვეთაში მიღებული პარაბოლის წვეროს მოთავსებულია $x^2 = 2pz$ მთავარ პარაბოლზე ($Oxz$ სიბრტყეში), ხოლო ღერძი მიმართულია $Oz$-ის საწინააღმდეგო მხარეზე.

სრულიად ანალოგიურ შედეგს მივიღებთ $y = y_0$ სიბრტყეებით გადაკვეთის შემთხვევაში.

აქედან გამომდინარეობს, რომ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის თვისება, საერთოდ ანალოგიურია ელიფსური პარაბოლოიდის თვისებისა (იხ. წინა პარაგრაფის ბოლო), განსხვავება მხოლოდ იმაშია, რომ ჩვენს შემთხვევაში მოძრავი და უძრავი პარაბოლების ღერძები მიმართულია ერთმანეთის საწინააღმდეგო მხარეზე.

ადვილი დასანახია, რომ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის ყველა ბრტყელი კვეთა ან ჰიპერბოლური ან პარაბოლური ტიპის წირებია (იხ. სავარჯიშო 2 და 3).

#### სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. დაამტკიცეთ, რომ თუ ახალ $Ox'$, $Oy'$ ღერძებს (2) წრფეების გასწვრივ ავიღებთ, ხოლო $Oz$ ღერძს უცვლელად დავტოვებთ, მაშინ ახალი ღერძების მიმართ, რომლებიც, სახოგადოდ, ირიბკუთხაა, ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის განტოლება მიიღებს სახეს

$$x'y' = kz,$$

სადაც

$$k = \frac{p+q}{2}.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. საკმარისია შევნიშნოთ, რომ ხსენებული წესით ღერძების შერჩევა მოგვცემს იგივეობას (შეადარეთ § 203)

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = \frac{4x'y'}{p+q}.$$

2. დაამტკიცეთ, რომ (1) პარაბოლოიდის $Oz$ ღერძის პარალელური სიბრტყეებით გადაკვეთის წირები, ან პარაბოლებია, ან წრფეები.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $y = mx + k$ გამკვეთი სიბრტყეა. გადაკვეთის გეგმილი $Oxz$ სიბრტყეზე მოიცემა განტოლებით (შეად. წინა პარაგრაფის 1 სავარჯიშოს)

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{m^2}{q}\right)x^2 - \frac{2mkx}{q} - 2z - \frac{k^2}{q} = 0.$$

მაშასადამე, $A_{33} = 0$; ე. ი. წირი პარაბოლური ტიპისაა. დისკრიმინანტი $\Delta = -\frac{1}{p} + \frac{m^2}{q}$. თუ $m^2 \neq \frac{q}{p}$, მაშინ ჩვენ გვექნება პარაბოლი; თუკი $m = \pm\sqrt{\frac{q}{p}}$, მაშინ გადაკვეთის გეგმილის

განტოლება პირველი ხარისხის იქნება, რაც გამოსახავს წრფეს. ამ შემთხვევაში შეიძლება ითქვას, რომ გადაკვეთაში გვაქვს ორი წრფე, რომელთაგან ერთი არაგანკუთრია.

3. დამტკიცეთ, რომ (1) ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის $Oz$ ღერძის არაპარალელური სიბრტყეებით გადაკვეთის წირები ჰიპერბოლური ტიპის წირები იქნება.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. მეორე სავარჯიშო მაგალითში შემოღებულ აღნიშვნების ანალოგიით, მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2(mx+ny+k) = 0,$$

რომლისთვისაც $A_{33} = -\frac{1}{pq} < 0$: მაშასადამე, გადაკვეთის წირები—ჰიპერბოლური ტიპისაა.

## II. მეორე რიგის ფართეულების წრფივი მსახველები

ამ განყოფილებაში ჩვენ შევუდგებით იმ ნამდვილი წრფეების მოძებნას, რომლებიც მოცემულ მეორე რიგის ფართეულზე მდებარეობენ. ვინაიდან განკუთრი ფართეულების (კონუსი, ცილინდრი, ორი სიბრტყის ერთობლიობა) შემთხვევაში ამ საკითხის ამოხსნა სრულიად ელემენტარულია, ამიტომ შემდეგში ჩვენ შევეხებით მხოლოდ არაგანკუთრ მეორე რიგის ფართეულებს.

§ 292. **ზოგადი შენიშვნები.** ჩვენ უკვე ვნახეთ (§ 267), რომ ფართეულები ელიფსური წერტილებით (ასეთი ფართეულებია: ელიფსოიდი, ორკალთა ჰიპერბოლოიდი, ელიფსური პარაბოლოიდი) არ შეიძლება შეიცავდნენ ნამდვილ წრფეებს; პირიქით, ფართეულები ჰიპერბოლური წერტილებით (ასეთი ფართეულებია: ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი და ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი) შეიცავენ ნამდვილი წრფეების უსასრულო სიმრავლეს.

ქვემოთ ჩვენ ვნახავთ, რომ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი და ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი შეიძლება (ორი ხერხით) შემოვხაზოთ წრფის მოძრაობით (ჩვენ მხედველობაში გვაქვს ნამდვილი წრფეები). ამიტომ, წრფეებს, რომლებიც ამ ფართეულებს ეკუთვნიან, ეწოდება წრფივი მსახველები, ხოლო თვით ფართეულებს — წრფოვანი ფართეულები.

ქვემოთ მოყვანილი ელემენტარული წესით ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ ელიფსოიდი, ორკალთა ჰიპერბოლოიდი და ელიფსური პარაბოლოიდი არ შეიძლება შეიცავდნენ წრფეებს [1]).

ელიფსოიდის შემთხვევაში ეს ცხადია, რადგან ეს ფართეული მთლიანად იმყოფება სასრულ მანძილზე და არ შეიძლება შეიცავდეს მთელ წრფეს [2]).

ორკალთა ჰიპერბოლოიდის

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

შემთხვევაში ჩვენ ვიცით, რომ მისი გადაკვეთა $Oxy$ სიბრტყის პარალელური სიბრტყეებით ელიფსებია. მაშასადამე, არ შეიძლება მასზე მდებარეობ-

[1]) ამ პარაგრაფის სავარჯიშოში მოცემულია ამ წინადადების კიდევ ერთი დამტკიცება.

[2]) შეუძლებელია, რომ წრფე ნაწილობრივ ეკუთვნოდეს ფართეულს: ჩვენ ვიცით, რომ, რადგან წრფეს მეორე რიგის ფართეულთან ორზე მეტი წერტილი აქვს, მაშინ იგი მთლიანად ფართეულს ეკუთვნის.

დეს $Oxy$ სიბრტყის პარალელური წრფეები. ყოველი ისეთი წრფე კი, რომელიც $Oxy$ სიბრტყეს კვეთს, არ შეიძლება მთლიანად მოთავსებული იყოს ჩვენს ფართეულზე, რადგანაც ამ ფართეულს $Oxy$ სიბრტყის მახლობლობაში წერტილები არა აქვს. ანალოგიურად გვექნება ელიფსური პარაბოლოიდის შემთხვევაშიც.

ახლა მხედველობაში ვიქონიოთ შემდეგი გარემოება: იმისათვის, რომ პარამეტრული სახით მოცემული წრფე (პარამეტრი აღნიშნული გვაქვს $t$-თი)

$$x=x_0+Xt,\ y=y_0+Yt,\ z=z_0+Zt \tag{1}$$

მთლიანად ეკუთვნოდეს ფართეულს $F(x, y, z)=0$, აუცილებელი და საკმარისია, რომ (იხ. § 270)

$$\left.\begin{aligned} \varphi(X,\ Y,\ Z)&=0,\\ XF_1(x_0, y_0, z_0)+YF_2(x_0, y_0, z_0)+ZF_3(x_0, y_0, z_0)&=0,\\ F(x_0, y_0, z_0)&=0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ამგვარად, წრფივი მსახველების მოძებნის საკითხი დაიყვანება უკანასკნელი განტოლებების გამოკვლევაზე. პირველი განტოლებიდან ჩანს, რომ ყველა წრფივ მსახველს ასიმპტოტური მიმართულება აქვს, რაც უშუალოდაც ცხადია.

#### ხავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

დაამტკიცეთ (2) განტოლებების საშუალებით, რომ ელიფსოიდი, ორკალთა ჰიპერბოლოიდი და ელიფსური პარაბოლოიდი არ შეიცავენ (ნამდვილ) წრფივ მსახველებს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ნორმალური განტოლებით მოცემული ელიფსოიდის შემთხვევაში $\varphi(X, Y, Z)=0$ განტოლებას მხოლოდ ერთი ნამდვილი ამონახსნი აქვს: $x=y=z=0$, რომელიც ამოცანის პირობას არ აკმაყოფილებს (რადგანაც, პირობის თანახმად, $X, Y, Z$ რიცხვთაგან ერთი მაინც ნულისაგან განსხვავებული უნდა იყოს).

ორკალთა ჰიპერბოლოიდის შემთხვევაში (2) განტოლებათაგან პირველი მოგვცემს

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0,$$

საიდანაც ჩანს, რომ $Z\neq 0$. მაშასადამე, წრფივი მსახველები არ შეიძლება $Oz$ ღერძის პარალელური იყოს. თუ $(x_0, y_0, z_0)$ წერტილად ავიღებთ მის გადაკვეთის წერტილს $Oxy$ სიბრტყესთან, გვექნება $z_0=0$, და მაშინ (2) განტოლებათაგან მესამე მიიღებს სახეს

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=-1;$$

ამ განტოლებას ნამდვილი ამონახსნი არა აქვს და ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

ელიფსური პარაბოლოიდის

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0$$

შემთხვევაში გვაქვს

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს $X=Y=0$ და, მაშასადამე, $Z\neq 0$. (2) განტოლებათაგან მეორე კი გვაძლევს (ვინაიდან $F_1=-1$) — $Z=0$, რაც ახლა მიღებულ შედეგს ეწინააღმდეგება.

**§ 293. ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის წრფივი მსახველები.** ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

შემთხვევაში წინა პარაგრაფის (2) განტოლებანი შემდეგ სახეს მიიღებენ:

$$\left.\begin{gathered}\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0,\qquad \frac{Xx_0}{a^2}+\frac{Yy_0}{b^2}-\frac{Zz_0}{c^2}=0,\\ \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1.\end{gathered}\right\}\qquad (1)$$

პირველი ამ განტოლებათაგან გვიჩვენებს, რომ $Z\neq 0$ (უამისოდ გვექნებოდა $X=Y=Z=0$); მაშასადამე, საძიებელი მსახველი გადაკვეთს $Oxy$ სიბრტყეს. თუ $(x_0, y_0, z_0)$ წერტილად ამ წერტილს ავიღებთ, გვექნება $z_0=0$.

რადგანაც ჩვენ გვაინტერესებს არა თვით $X$, $Y$, $Z$ სიდიდეები, არამედ მათი ფარდობანი და, გარდა ამისა, ჩვენ ვიცით, რომ $Z\neq 0$, ამიტომ, ფორმულების გასამარტივებლად, შეგვეძლია დავუშვათ, რომ $Z=c$. მაშინ (1) განტოლებანი მიიღებენ სახეს

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1,\qquad \frac{Xx_0}{a^2}+\frac{Yy_0}{b^2}=0, \qquad (2)$$

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1. \qquad (3)$$

ჩვენი ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ მოვძებნოთ (2) და (3) განტოლებათა საერთო ამონახსნი.

(3) განტოლება უბრალოდ იმას გამოსახავს, რომ $(x_0, y_0, 0)$ წერტილი საყელურ ელიფსზე იმყოფება. დავწეროთ ეს ელიფსი პარამეტრული სახით:

$$x_0=a\cos\varphi,\quad y_0=b\sin\varphi. \qquad (4)$$

ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi$ მოთავსებულია საზღვრებში 0-დან $2\pi$-მდე, რაც მოგვცემს საყელური ელიფსის ყველა წერტილს. ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი (2) განტოლებათაგან მეორეში, მივიღებთ

$$\frac{X\cos\varphi}{a}+\frac{Y\sin\varphi}{b}=0,$$

ანუ

$$\frac{X}{a\sin\varphi}=-\frac{Y}{b\cos\varphi}.$$

აღვნიშნოთ დროებით წინა ფარდობათა საერთო მნიშვნელობა $\lambda$, გვექნება

$$X=a\lambda\sin\varphi,\quad Y=-b\lambda\cos\varphi;$$

ჩაესვათ ეს მნიშვნელობანი (2) განტოლებათაგან პირველში, მივიღებთ

$$\lambda^2=1,\ \lambda=\pm 1,$$

საიდანაც, საბოლოოდ ვღებულობთ:

$$X=\pm a\sin\varphi,\ Y=\pm b\cos\varphi, \tag{5}$$

სადაც ერთდროულად ზედა ან ქვედა ნიშნები უნდა ავიღოთ.

(4) და (5) ფორმულები გვაძლევენ, დამხმარე $\varphi$ პარამეტრით გამოსახულ, (2) და (3) განტოლებათა უზოგადეს ამოხსნას.

ჩვენ ვხედავთ, რომ საყელური ელიფსის ყოველ წერტილზე, რომელიც მოცემული $\varphi$-ს მნიშვნელობით არის დახასიათებული, გადის ორი წრფივი მსახველი, რომელთა მიმართულების კოეფიციენტია, შესაბამისად,

$$(+a\sin\varphi,\ -b\cos\varphi,\ c)\ \text{და}\ (-a\sin\varphi,+b\cos\varphi,\ c).$$

ეს ორი მსახველი პარამეტრულად შეიძლება შემდეგი განტოლებებით წარმოვადგინოთ:

$$x=a\cos\varphi+ta\sin\varphi,\ y=b\sin\varphi-tb\cos\varphi,\ z=ct \tag{6}$$

და

$$x=a\cos\varphi-ta\sin\varphi,\ y=b\sin\varphi+tb\cos\varphi,\ z=ct \tag{7}$$

(ყოველი მოცემული მსახველისათვის $\varphi$ მუდმივი სიდიდეა, ხოლო $t$—ცვალებადი პარამეტრი).

თუ (6) ან (7) განტოლებიდან $t$ პარამეტრს გამოვრიცხავთ, მივიღებთ ამ წრფეების დაყვანილი სახის განტოლებებს

$$x=a\cos\varphi+z\frac{a}{c}\sin\varphi,\quad y=b\sin\varphi-z\frac{b}{c}\cos\varphi \tag{6a}$$

და

$$x=a\cos\varphi-z\frac{a}{c}\sin\varphi,\quad y=b\sin\varphi+z\frac{b}{c}\cos\varphi. \tag{7a}$$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ საყელური ელიფსის მოცემულ $(x_0, y_0)$ წერტილზე გამავალი (6) და (7) მსახველები იმ სიბრტყეშია მოთავსებული, რომელიც გადის ამ წერტილში გამავალი საყელური ელიფსის მხებზე და რომელიც ხსენებული ელიფსის სიბრტყის მართობია.

ამისათვის საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ (6) და (7) მსახველების გეგმილები $Oxy$ სიბრტყეზე წარმოადგენენ საყელური ელიფსის მხებ წრფეებს $(x_0, y_0)$ წერტილში. ამ წერტილში მხების განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1,$$

ანუ, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $x_0=a\cos\varphi$, $y_0=b\sin\varphi$:

$$\frac{x\cos\varphi}{a}+\frac{y\sin\varphi}{b}=1. \tag{8}$$

(6a) მსახველის გეგმილის განტოლების მისაღებად $Oxy$ სიბრტყეზე, საკმარისია (6a) განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ $z$. იმისათვის, რომ ეს გამორიცხვა ჩავატაროთ, პირველი მათგანი უნდა გავამრავლოთ $\frac{\cos\varphi}{a}$-ზე, მეორე $\frac{\sin\varphi}{a}$-ზე და შევკრიბოთ, რაც მოგვცემს სწორედ (8) განტოლებას; ეს კი ამტკიცებს ჩვენს დებულებას (6a) მსახველის მიმართ. ასევე დავამტკიცებთ მას (7a) მსახველის მიმართაც.

გარდა ამისა, ადვილი დასამტკიცებელია, რომ განხილული მსახველები ერთნაირად არიან დახრილი საყელური ელიფსის მხებთან, ე. ი. თანასწორ კუთხეებს შეადგენენ $Oz$ ღერძთან. მართლაც, განხილული მსახველების მიმართველზე $(a\sin\varphi, -b\cos\varphi, c)$ და $(-a\sin\varphi, b\cos\varphi, c)$ ვექტორების მიერ $Oz$ ღერძთან შედგენილი $\gamma$ მახვილი კუთხე მოცემულია ფორმულით

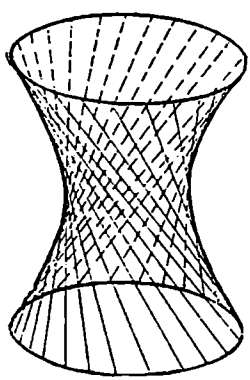
$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi + c^2}}. \tag{9}$$

ამ მსახველებს შორის მოთავსებული $\theta$ კუთხე კი მოცემულია ფორმულით

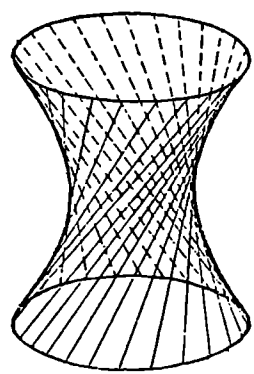
$$\cos\theta = \pm\frac{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi - c^2}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi + c^2}. \tag{9a}$$

კერძოდ, ბრუნვის ჰიპერბოლოიდის შემთხვევაში, როცა $a=b$, $\gamma$ კუთხისათვის ვღებულობთ

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \quad \text{ანუ} \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{a}{c}$$



ნახ. 173a.



ნახ. 173b.

ფორმულით განსაზღვრულ მუდმივ მნიშვნელობას.

დავუბრუნდეთ ზოგად შემთხვევას. ჩვენ ვხედავთ, რომ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი ორი სისტემის წრფივ მსახველებს შეიცავს (ნახ. 173a, 173b):

(6) ანუ (6a) ფორმულებით განსაზღვრულ მსახველებს, რომლებსაც სიმოკლისათვის პირველი სისტემის მსახველებს ვუწოდებთ, და (7) ანუ (7a) ფორმულებით განსაზღვრულ მსახველებს, რომლებსაც მეორე სისტემის მსახველებს ვუწოდებთ.

ახლა დავამტკიცოთ ამ მსახველების ზოგიერთი ძირითადი თვისება.

1. ერთი და იმავე სისტემის ნებისმიერი ორი მსახველი არც გადიკვეთება და არც ერთმანეთის პარალელურია (ე. ი. არ ეკუთვნის ერთსა და იმავე სიბრტყეს).

მართლაც, ვთქვათ,

$$x=a\cos\varphi+z\frac{a}{c}\sin\varphi,\quad y=b\sin\varphi-z\frac{b}{c}\cos\varphi$$

და

$$x=a\cos\psi+z\frac{a}{c}\sin\psi,\quad y=b\sin\psi-z\frac{b}{c}\cos\psi$$

პირველი სისტემის ორი მსახველია. იმისათვის, რომ ეს ორი წრფე ერთსა და იმავე სიბრტყეზე მდებარეობდეს აუცილებელი და საკმარისია პირობა (იხ. § 156):

$$0=\begin{vmatrix} a(\cos\varphi-\cos\psi) & b(\sin\varphi-\sin\psi) \\ \frac{a}{c}(\sin\varphi-\sin\psi) & -\frac{b}{c}(\cos\varphi-\cos\psi) \end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{ab}{c}\left\{(\cos\varphi-\cos\psi)^2+(\sin\varphi-\sin\psi)^2\right\},$$

რომელიც შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\cos\varphi=\cos\psi,\ \sin\varphi=\sin\psi.$$

რადგან პირობის თანახმად $\varphi$ და $\psi$ მოთავსებულია 0 და $2\pi$ შორის, ამიტომ წინა ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $\varphi=\psi$. მაშასადამე, პირველი სისტემის ორი სხვადასხვა მსახველს არ შეუძლია დააკმაყოფილოს წინა პირობა. ასევე დამტკიცდება ეს დებულება მეორე სისტემის მსახველებისთვისაც.

2. პირველი სისტემის ყოველი მსახველი გადაკვეთს მეორე სისტემის ყოველ მსახველს (ან მისი პარალელურია).

მართლაც, ვთქვათ,

$$x=a\cos\varphi+z\frac{a}{c}\sin\varphi,\ y=b\sin\varphi-z\frac{b}{c}\cos\varphi \tag{10}$$

პირველი სისტემის რაიმე მსახველია, და

$$x=a\cos\psi-z\frac{a}{c}\sin\psi,\quad y=b\sin\psi+z\frac{b}{c}\cos\psi \tag{11}$$

—მეორე სისტემის ნებისმიერი მსახველი. გადაკეთის პირობა (სასრულ ან უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში)

$$\begin{vmatrix} a(\cos\varphi - \cos\psi), & b(\sin\varphi - \sin\psi) \\ \frac{a}{c}(\sin\varphi + \sin\psi), & \frac{b}{c}(\cos\varphi + \cos\psi) \end{vmatrix} = 0$$

იგივურად შესრულებულია, რადგან მისი მარცხენა მხარის დეტერმინანტი უდრის

$$-\frac{ab}{c}\{(\cos^2\varphi - \cos^2\psi) + (\sin^2\varphi - \sin^2\psi)\} = -\frac{ab}{c}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi - \cos^2\psi - \sin^2\psi) = -\frac{ab}{c}(1-1) = 0.$$

ეს კი ჩვენს დებულებას სავსებით ამტკიცებს.

კერძოდ, სხვადასხვა სისტემის მსახველები შეიძლება ერთმანეთს უსასრულოდ დაშორებულ წერტილშიც კვეთდნენ, ე. ი. შეიძლება ერთმანეთის პარალელური იყვნენ. სახელდობრ, ერთი სისტემის ყოველი მსახველი მეორე სისტემის ერთი და მხოლოდ ერთი მსახველის პარალელურია.

მართლაც, (10) და (11) მსახველების პარალელობისთვის საჭიროა:

$$\sin\varphi = -\sin\psi,\quad \cos\varphi = -\cos\psi,$$

საიდანაც $\varphi = \psi + \pi + 2k\pi$ (სადაც $k$ მთელი რიცხვია).

$\varphi$ და $\psi$ კუთხეებს შორის მიღებული დამოკიდებულება გვიჩვენებს, რომ ეს ორი მსახველი გადის საყელური ელიფსის ერთი და იმავე დიამეტრის ბოლო წერტილებზე.

3. ჰიპერბოლოიდის ყოველ წერტილზე თითოეული სისტემის თითო მსახველი გადის. მართლაც, ვთქვათ, $(x_0, y_0, z_0)$ არის ჰიპერბოლოიდის ნებისმიერი წერტილი, ისე რომ

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1. \tag{12}$$

დავამტკიცოთ, რომ მასზე პირველი სისტემის ერთი (და მხოლოდ ერთი) მსახველი გადის. იმისათვის, რომ (6a) მსახველი $(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე გადიოდეს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ

$$x_0 = a\cos\varphi + z_0\frac{a}{c}\sin\varphi,\quad y_0 = b\sin\varphi - z_0\frac{b}{c}\cos\varphi.$$

ამოვხსნათ წინა სისტემა $\cos\varphi$ და $\sin\varphi$ მიმართ (ჩვენ დროებით ვგულისხმობთ, რომ $\cos\varphi$ და $\sin\varphi$ ერთმანეთისგან დამოუკიდებელი უცნობებია), მივიღებთ

$$\cos\varphi = \frac{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0 z_0}{bc}}{1 + \frac{z_0^2}{c^2}};\qquad \sin\varphi = \frac{\frac{y_0}{b} + \frac{x_0 z_0}{ac}}{1 + \frac{z_0^2}{c^2}}. \tag{13}$$

იმისათვის, რომ არსებობდეს ისეთი კუთხე φ, რომელიც ორივე ამ პირობას დააკმაყოფილებს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მარჯვენა მხარეების კვადრატების ჯამი უდრიდეს 1; კვადრატების ეს ჯამი კი უდრის

$$\frac{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{y_0^2\tilde{z}_0^2}{b^2c^2}+\frac{x_0^2\tilde{z}_0^2}{a^2c^2}}{\left(1+\frac{\tilde{z}_0^2}{c^2}\right)^2}=\frac{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}}{1+\frac{\tilde{z}_0^2}{c^2}}.$$

აქ უკანასკნელი წილადი, (12) განტოლების ძალით, უდრის ერთს. ამგვარად, (13) ფორმულები φ კუთხისათვის ერთ საესებით გარკვეულ მნიშვნელობას გვაძლევს, რომელიც მოთავსებულია 0 და $2\pi$ შორის, ეს კი ამტკიცებს ჩვენ დებულებას.

სრულიად ასევე დამტკიცდება დებულება მეორე სისტემის მსახველების მიმართაც.

4. ბოლოს შევნიშნოთ, რომ ერთი და იმავე სისტემის ნებისმიერი სამი მსახველი არ შეიძლება ერთი და იმავე სიბრტყის პარალელური იყოს. მართლაც, გავატაროთ $O$ სათავეზე მოცემული მსახველის პარალელური სამი წრფე, მივიღებთ ასიმპტოტური კონუსის სამ სხვადასხვა მსახველს. ეს სამი წრფე არ შეიძლება მოთავსებული იყოს ერთსა და იმავე სიბრტყეში, რადგანაც წინააღმდეგ შემთხვევაში ეს სიბრტყე კონუსს სამ წრფეზე გადაკვეთდა, რაც შეუძლებელია.

ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი შეიძლება აღვწეროთ (ორნაირად) წრფის მოძრაობით. მეტი სიცხადისათვის შევნიშნოთ წინასწარ შემდეგი.

ვთქვათ, მოცემულია $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ სამი წრფე, რომელთაგან არც ერთი ორი მათგანი ერთ სიბრტყეზე არ მდებარეობს. არსებობს წრფეთა უსასრულო სიმრავლე, რომლებიც სამივე წრფეს გადაკვეთენ; სახელდობრ, $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ წრფეთაგან რომელიმე მათგანის ყოველ $A$ წერტილზე გადის ერთი და მხოლოდ ერთი წრფე, რომელიც დანარჩენ ორ წრფესაც კვეთს (აქ მხედველობაში გვაქვს ისიც, რომ შეიძლება გადაკვეთა უსასრულოდ დაშორებულ წერტილშიც მოხდეს).

მართლაც, ვთქვათ, მაგალითად, $A$ არის $\Delta_1$ წრფის რომელიმე წერტილი. $A$ წერტილზე გამავალი და $\Delta_2$, $\Delta_3$ წრფეების გადამკვეთი წრფე აუცილებლად მდებარეობს $A$ წერტილზე და $\Delta_2$, $\Delta_3$ წრფებზე გამავალ $\Pi'$ და $\Pi''$ სიბრტყეებში. ცხადია, ასეთი სიბრტყეები არ შეიძლება იყვნენ პარალელურნი (რადგანაც მათ აქვთ საერთო წერტილი) და არც დამთხვეულნი (რადგანაც, მაშინ $\Delta_2$ და $\Delta_3$ ერთსა და იმავე სიბრტყეში იქნებოდნენ მოთავსებულნი). მაშასადამე, $\Pi'$ და $\Pi''$ სიბრტყეების გადაკვეთის წრფე ყოველთვის არსებობს და, ცხადია, აკმაყოფილებს მოთხოვნილ პირობებს.

ახლა დავუბრუნდეთ ჩვენს ჰიპერბოლოიდს. ავიღოთ მასზე ერთი და იმავე სისტემის, ვთქვათ, პირველი სისტემის, $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ სამი წრფე. ყოველი

$\Delta'$ წრფე, რომელიც ყველა $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ წრფეს კვეთს, აუცილებლად მეორე სისტემის მსახველი იქნება. მართლაც, ვთქვათ, $A$ აღნიშნავს $\Delta'$ წრფის გადაკვეთის წერტილს რომელსამე $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ წრფესთან. ჩვენ ვიცით, რომ $A$ წერტილზე მეორე სისტემის ერთი და მხოლოდ ერთი მსახველი გადის; ეს მსახველი სამივე $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ მსახველს კვეთს (იხ. ზემოთ, 2). მაგრამ, რადგანაც $A$ წერტილზე მხოლოდ ერთი წრფე შეიძლება გადიოდეს, ამიტომ ხსენებული მსახველი $\Delta'$ წრფეს ემთხვევა, რაც ჩვენს დებულებას ამტკიცებს.

თუ $A$ წერტილს ვამოძრავებთ ერთ-ერთ $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ წრფეზე, მაშინ $\Delta'$ წრფე, რომელიც გადის $A$ წერტილზე და სამივე $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ წრფეს კვეთს, შემოხაზავს აღებულ ჰიპერბოლოიდს [1]).

ამგვარად, *ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი ისეთი $\Delta'$ წრფით შემოხაზული ფართეულია, რომელიც თავისი მოძრაობის დროს ერთი და იმავე სისტემის სამ მსახველს კვეთს.* ვინაიდან $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ მსახველები შეიძლება ნებისმიერად იყვნენ აღებული როგორც პირველ, ისე მეორე (მხოლოდ სამივე ერთი და იმავე) სისტემიდან, ამიტომ არსებობს მოცემული ჰიპერბოლოიდის, როგორც წრფის განუწყვეტელი მოძრაობით შემოხაზული ფართეულის, მიღების ორი წესი.

ქვემოთ დამტკიცებული იქნება (§ 295), რომ თუ მოცემულია ნებისმიერი სამი წრფე, რომლებიც ერთი და იმავე სიბრტყის პარალელური არ არიან და ნებისმიერი ორი მათგანი ერთ სიბრტყეში არაა მოთავსებული, მაშინ მოცემული წრფეების გადამკვეთი წრფის წერტილები რაღაც ცალკალთა ჰიპერბოლოიდს აღწერენ.

ბოლოს გავაკეთოთ კიდევ ერთი შენიშვნა ბრუნვის ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის შესახებ. ამ შემთხვევაში ($a=b$) საყელური ელიფსი გადაიქცევა (საყელურ) წრეწირად. ვთქვათ, $M$ ამ წრეწირის რომელიმე წერტილია და $\Delta$—ერთ-ერთი სისტემის მსახველი, რომელიც $M$-ზე გადის. ჩვენ ვიცით, რომ $\Delta$ იმ სიბრტყეში იმყოფება, რომელიც $Oxy$ სიბრტყის მართობია და წრეწირს ეხება $M$ წერტილში. მაშასადამე, $\Delta$ მართობია $OM$ რადიუსისა; გარდა ამისა, ჩვენ ვიცით, რომ წრეწირის სიბრტყესთან იგი მუდმივ კუთხეს ადგენს.

ზემონათქვამიდან ცხადია, რომ თუ განვიხილავთ $Oz$ ღერძისა და $\Delta$ წრფისაგან შედგენილ ნაკვთს, და ვაბრუნებთ მას $Oz$ ღერძის გარშემო, მაშინ $\Delta$ წრფე შემოხაზავს ბრუნვის ჰიპერბოლოიდს.

---

[1]) ასეთი მოძრაობით ჩვენ მივიღებთ მოცემული ჰიპერბოლოიდის ყველა წერტილს. მართლაც, ვთქვათ, $A$ მოძრაობს, მაგალითად, $\Delta_1$ წრფეზე. თუ $M_0$ ჰიპერბოლოიდის ნებისმიერი წერტილია, მაშინ ყოველთვის არსებობს მეორე სისტემის ისეთი $\Delta'$ მსახველი, რომელიც $M_0$ წერტილზე გაივლის. როგორც ვიცით, ეს მსახველი უსათუოდ გადაკვეთს $\Delta_1$-ს რაღაც $A_0$ წერტილში, მაშასადამე, როცა $A$ მიაღწევს $A_0$-ს, მივიღებთ $M_0$ წერტილზე გამავალ $\Delta'$ წრფეს. აქვე უნდა დავუმატოთ, რომ $M_0$ წერტილზე გამავალი მეორე სისტემის მსახველი შეიძლება $\Delta_1$-ის პარალელურიც იყოს (როგორც ვიცით, ასეთი მსახველი შეიძლება იყოს მხოლოდ ერთი); მაშასადამე, რომ მივიღოთ ჰიპერბოლოიდის ყველა წერტილი, ამისათვის უნდა განვიხილოთ $A$ წერტილის უსასრულოდ დაშორებული მდებარეობაც და ვიგულისხმოთ, რომ მას შეესაბამება $\Delta_1$-ის პარალელური მეორე სისტემის მსახველი.

საზოგადოდ, თუ ავიღებთ ორი არაგადამკვეთი, არაპარალელური და ერთმანეთის არამართობი წრფისაგან შემდგარ ნაკვთს, და ამ ნაკვთს ვბრუნებთ ერთ-ერთი ამ წრფის გარშემო, მაშინ მეორე წრფე შემოხაზავს ბრუნვის ცალკალთა ჰიპერბოლოიდს.

**§ 294. ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის წრფივი მსახველები.** გადავიდეთ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}-2z=0. \tag{1}$$

წრფივი მსახველების მოძებნაზე.

ჩვენ ვიცით, რომ $Oxy$ სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეთა შორის, (1) ფართეულს მხოლოდ თვით $Oxy$ სიბრტყე კვეთს წრფეებზე; დანარჩენი სიბრტყეები მას ჰიპერბოლებზე კვეთენ. მაშასადამე, (1) ფართეულის ყოველი წრფივი მსახველი $Oxy$ სიბრტყეს კვეთს (ან მასზეა მოთავსებული). ამიტომ, მსახველის პარამეტრული სახის განტოლებაში:

$$x=x_0+Xt,\ y=y_0+Yt,\ z=z_0+Zt,$$

თუ მსახველის $(x_0, y_0, z_0)$ წერტილად $Oxy$ სიბრტყეში მდებარე წერტილს ავიღებთ, ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ $z_0=0$.

ამის შესაბამისად, § 292-ის (2) განტოლებანი მიიღებს სახეს

$$\frac{X^2}{p}-\frac{Y^2}{q}=0,\quad \frac{Xx_0}{p}-\frac{Yy_0}{q}-Z=0,\quad \frac{x_0^2}{p}-\frac{y_0^2}{q}=0. \tag{2}$$

ამ განტოლებათაგან უკანასკნელი გვაძლევს:

$$\frac{x_0}{\sqrt{p}}=\pm\frac{y}{\sqrt{q}},$$

ანუ, თუ ამ ფარდობათა საერთო მნიშვნელობას აღვნიშნავთ $\lambda$:

$$x_0=\lambda\sqrt{p},\quad y_0=\pm\lambda\sqrt{q}. \tag{3}$$

გარდა ამისა, (2) განტოლებათაგან პირველი გვაძლევს:

$$\frac{X}{\sqrt{p}}=\mp\frac{Y}{\sqrt{q}}.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ არც $X$ და არც $Y$ არ შეიძლება ნულის ტოლი იყოს, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში წინა განტოლებიდან და (2) განტოლებიდან მივიღებდით, რომ $X=Y=Z=0$, რაც შეუძლებელია. ვინაიდან ჩვენ გვაინტერესებს მხოლოდ $X$, $Y$, $Z$ სიდიდეების ფარდობები, ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ $\frac{X}{\sqrt{p}}=1$; მაშინ, უკანასკნელად მიღებული ფორმულის ძალით, გვექნება

$$X=\sqrt{p},\quad Y=\mp\sqrt{q}. \tag{3ა}$$

გამოვრიცხოთ განხილვიდან დროებით ის შემთხვევა, როცა $Z=0$ (რომელსაც $Oxy$ სიბრტყეში მდებარე ორი მსახველი შეესაბამება). მაშინ, ცხადია, რომ (3) და (3a) ფორმულებში ერთდროულად უნდა ავიღოთ ზედა ან ქვედა ნიშნები, ვინაიდან უამისოდ, (2) ფორმულათაგან საშუალო ფორმულის ძალით, მივიღებდით, რომ $Z=0$.

ჩავსვათ (3) და (3a) მნიშვნელობანი (2) ფორმულების შუა ფორმულაში, მივიღებთ

$$Z=2\lambda.$$

ამგვარად, საბოლოოდ ვღებულობთ:

$$x_0=\lambda\sqrt{p}\,,\quad y_0=\pm\lambda\sqrt{q}\,,$$
$$X=\sqrt{p}\,,\quad Y=\pm\sqrt{q}\,,\quad Z=2\lambda,$$

სადაც ერთდროულად ზედა ან ქვედა ნიშნები უნდა ავიღოთ.

$\lambda$-ს თითოეული მნიშვნელობისათვის გვექნება ორი მსახველი:

$$x=\lambda\sqrt{p}+t\sqrt{p}\,,\quad y=\lambda\sqrt{q}-t\sqrt{q}\,,\quad z=2\lambda t \tag{4}$$

და

$$x=\lambda\sqrt{p}+t\sqrt{p}\,,\quad y=-\lambda\sqrt{q}+t\sqrt{q}\,,\quad z=2\lambda t. \tag{5}$$

თუ მათგან გამოვრიცხავთ $t$-ს, მივიღებთ მსახველების დაყვანილი სახის განტოლებებს

$$x=\lambda\sqrt{p}+\frac{\sqrt{p}}{2\lambda}\,z,\quad y=\lambda\sqrt{q}-\frac{\sqrt{q}}{2\lambda}\,z \tag{4a}$$

და

$$x=\lambda\sqrt{p}+\frac{\sqrt{p}}{2\lambda}\,z,\quad y=-\lambda\sqrt{q}+\frac{\sqrt{q}}{2\lambda}\,z. \tag{5a}$$

ჩვენ დროებით გამოვრიცხეთ ის შემთხვევა, როცა $Z=0$, რომელსაც $Oxy$ სიბრტყეზე შეესაბამება ორი მსახველი. მაგრამ ადვილი დასანახია, რომ ამ მსახველების მისაღებად (4) და (5) განტოლებებში უნდა დავუშვათ $\lambda=0$, რაც მოგვცემს:

$$x=t\sqrt{p}\,,\quad y=-t\sqrt{q}\,,\quad z=0$$

და

$$x=t\sqrt{p}\,,\quad y=t\sqrt{q}\,,\quad z=0,$$

ანუ

$$\frac{x}{\sqrt{p}}=-\frac{y}{\sqrt{q}},\ z=0 \text{ და } \frac{x}{\sqrt{p}}=\frac{y}{\sqrt{q}},\ z=0.$$

თუ შევთანხმდებით, რომ, როცა $\lambda=0$, მაშინ (4a) და (5a) განტოლებები ამავე მსახველებს გამოსახავს, მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ, თუ (4a) და (5a) ფორმულებში $\lambda$-ს მივცემთ ყველა შესაძლო მნიშვნელობას, მივიღებთ ჩვენი ჰიპერბოლოიდის ყველა მსახველს.

შემდეგში (4a) მსახველებს ჩვენ ვუწოდებთ პირველი სისტემის მსახველებს, ხოლო (5a) მსახველებს—მეორე სისტემის მსახველებს.

წინააღმდეგ ჰიპერბოლოიდის შემთხვევისა, აქ ერთი და იმავე სისტემის ყველა მსახველი ერთი და იმავე სიბრტყის პარალელურია. სახელდობრ, პირველი და მეორე სისტემის მსახველები, შესაბამისად, პარალელურია სიბრტყეების

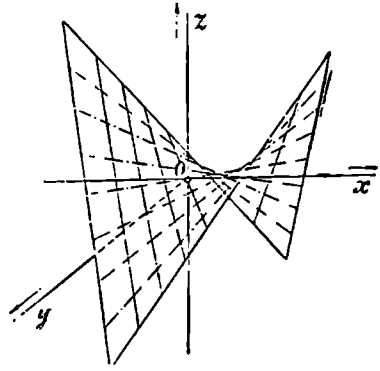
$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0 \text{ და } \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0, \tag{6}$$

რომლებიც გადიან ჰიპერბოლოიდის ღერძზე და წვეროზე გამავალ ორ მსახველზე.

რომ დავამტკიცოთ ეს, მაგალითად, პირველი სისტემის მსახველების მიმართ, საკმარისია გავყოთ (4a) განტოლებანი; შესაბამისად, $\sqrt{p}$ და $\sqrt{q}$ და შევკრიბოთ. მივიღებთ სიბრტყის განტოლებას

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=2\lambda,$$

რომელიც აუცილებლად შეიცავს ჩვენს მსახველს და პარალელურია (6) სიბრტყეთაგან პირველი სიბრტყისა. ანალოგიურად გვექნება მეორე სისტემის მსახველებისთვის.



ნახ. 174.

სხვათა შორის, აქედან გამომდინარეობს, რომ პირველი და მეორე სისტემის მსახველები სხვადასხვა წრფეებია, ვინაიდან ისინი პარალელურია სხვადასხვა (6) სიბრტყეებისა [1]).

გარდა ამისა, ადვილი დასამტკიცებელია, რომ (4a) და (5a) მსახველების თვისებანი ანალოგიურია ჰიპერბოლოიდის მსახველების თვისებებისა (ნახ. 174),

1. ერთი და იმავე სისტემის ორი მსახველი არც პარალელურია და არც ერთმანეთს გადაკვეთენ. მართლაც, რომ პირველი სისტემის ორი მსახველი

$$x=\lambda\sqrt{p}+\frac{\sqrt{p}}{2\lambda}z,\quad y=\sqrt{q}-\frac{\sqrt{q}}{2\lambda}z$$

და

$$x=\mu\sqrt{p}+\frac{\sqrt{p}}{2\mu}z,\quad y=\mu\sqrt{q}-\frac{\sqrt{q}}{2\mu}z$$

[1]) მსახველი არ შეიძლება ერთდროულად ორივე (6) სიბრტყის პარალელური იყოს, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში იგი პარალელური იქნებოდა მათი გადაკვეთის წრფისა, ე. ი. $Oz$ ღერძისა. მაგრამ $Oz$ ღერძის პარალელური მსახველები სრულიად არ არსებობს. მართლაც, თუ (2) განტოლებებში $X=Y=0$, მაშინ $Z$-იც ნული იქნებოდა, რაც შეუძლებელია.

ერთმანეთის გადამკვეთი ან პარალელური ყოფილიყო, მაშინ გვექნებოდა (შეად. წინა პარაგრაფს):

$$\begin{vmatrix} \sqrt{p}\,(\lambda-\mu) & \sqrt{q}\,(\lambda-\mu) \\ \frac{\sqrt{p}}{2}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu}\right) & -\frac{\sqrt{q}}{2}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu}\right) \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{pq}\,(\lambda-\mu)^2}{\lambda\mu} = 0,$$

რაც შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $\lambda=\mu$.

2. თრი სხვადასხვა სისტემის მსახველები ყოველთვის ერთმანეთს კვეთენ (ან ერთმანეთის პარალელურია). მართლაც, ვთქვათ, მოცემულია ორი სხვადასხვა სისტემის მსახველი

$$x=\lambda\sqrt{p}+\frac{\sqrt{p}}{2\lambda}\zeta,\quad y=\lambda\sqrt{q}-\frac{\sqrt{q}}{2\lambda}\zeta$$

და

$$x=\mu\sqrt{p}+\frac{\sqrt{p}}{2\mu}\zeta,\quad y=-\mu\sqrt{q}+\frac{\sqrt{q}}{2\mu}\zeta.$$

ამ წრფეების გადაკვეთის პირობა მდგომარეობს იმაში, რომ დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} \sqrt{p}\,(\lambda-\mu) & \sqrt{q}\,(\lambda+\mu) \\ \frac{\sqrt{p}}{2}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu}\right) & -\frac{\sqrt{q}}{2}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}\right) \end{vmatrix}$$

ნულის ტოლი იყოს.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს დეტერმინანტი მართლაც ნულის ტოლია ყოველგვარი $\lambda$ და $\mu$-სთვის.

3. პარაბოლოიდის ყოველ წერტილზე გადის თითოეული სისტემის თითო მსახველი. მართლაც, ვთქვათ, $(x_0, y_0, z_0)$ არის პარაბოლოიდის რაიმე წერტილი. იმისათვის, რომ (4a) მსახველი ამ წერტილზე გადიოდეს, საჭიროა, რომ $\lambda$ აკმაყოფილებდეს პირობებს

$$x_0=\lambda\sqrt{p}+\frac{\sqrt{p}}{2\lambda}z_0,\quad y_0=\lambda\sqrt{q}-\frac{\sqrt{q}}{2\lambda}z_0.$$

გავყოთ პირველი განტოლება $\sqrt{p}$-ზე, ხოლო მეორე $\sqrt{q}$-ზე და შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$\lambda=\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}+\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right);$$

უშუალო ჩასმით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მოძებნილი $\lambda$-ს მნიშვნელობა,

$$\frac{x_0^2}{p}-\frac{y_0^2}{q}=2z_0$$

პირობის ძალით, აკმაყოფილებს ორივე წინა განტოლებას.

სრულიად ანალოგიურად დამტკიცდება ეს დებულება მეორე სისტემის მსახველების მიმართაც.

ნათქვამიდან გამომდინარეობს (შეადარეთ წინა პარაგრაფის ანალოგიურ დასკვნას), რომ ერთი სისტემის რომელიმე სამი მსახველის გადამკვეთი ყოველი წრფე, თვითონ მეორე სისტემის მსახველია, რომელიც თავისი მოძრაობის დროს მთელ ფართეულს აღწერს.

აღებულ შემთხვევაში ფართეულის აგების ამ ხერხის ნაცვლად შეიძლება, უფრო მარტივი, სხვა ხერხიც განვიხილოთ.

ვთქვათ, $\Delta_1$ და $\Delta_2$ როშელიმე სისტემის, მაგალითად, პირველი სისტემის, რაიმე მსახველებია. მაშინ მეორე სისტემის ნებისმიერი მსახველი $\Delta_1$ და $\Delta$, ორივე მსახველს გადაკვეთს და პარალელური იქნება შემდეგი უძრავი სიბრტყისა:

$$\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0.$$

აქედან დავასკვნით, რომ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი შეიძლება შეოვხაზოთ ისეთი წრფის მოძრაობით, რომელიც კვეთს ორ უძრავ წრფეს და რომელიც პარალელური რჩება უძრავი სიბრტყისა.

მოცემული ფართეულის შემოხაზვის ასეთი ხერხი ორია, იმისდა მიხედვით პირველი თუ მეორე სისტემის მსახველით არის იგი შემოხაზული. პირველ და მეორე შემთხვევაშიც მოძრავი წრფე პარალელურია, შესაბამისად, (6) სიბრტყეთაგან პირველი ან მეორე სიბრტყისა, რომლებსაც ამის გამო ჰიპერბოლოიდის მიმმართველი სიბრტყეები ეწოდება.

**§ 295. მეორე რიგის წრფოვანი ფართეულების აგება მოცემული სამი მსახველის მიხედვით.** ვთქვათ, მოცემულია ნებისმიერი სამი წრფე $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ ისე, რომ არც ერთი ორი მათგანი ერთსა და იმავე სიბრტყეში არ მდებარეობს. დავამტკიცოთ, რომ ყოველი $\Delta$ წრფე, რომელიც მოცემულ წრფეებს კვეთს და რომელიც მათზე სრიალებს, ან აღწერს ცალკალთა ჰიპერბოლოიდს (თუ $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ წრფეები ერთი და იმავე სიბრტყის პარალელური არ არიან, ან ჰიპერბოლურ პარაბოლოიდს (თუ $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ წრფეები ერთი და იმავე სიბრტყის პარალელურია).

მართლაც, ავიღოთ თითოეულ მოცემულ წრფეზე სამ-სამი წერტილი (ნებისმიერად). ჩვენ ვიცით (§ 263), რომ ყოველთვის არსებობს ისეთი $\Sigma$ ფართეული, რომელიც ამ ცხრა წერტილზე გაივლის. ვინაიდან ამ ფართეულს თითოეულ მოცემულ $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ წრფესთან სამი საერთო წერტილი აქვს, ამიტომ იგი მთლიანად შეიცავს ამ წრფეებს.

ვინაიდან მეორე რიგის ფართეულებს შორის მხოლოდ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი და ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი შეიძლება შეიცავდეს ისეთ სამ წრფეს, რომლებიც წყვილ-წყვილად ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობენ, ამიტომ განხილული ფართეული ან ცალკალთა ჰიპერბოლოიდია, ან ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი, და $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ წრფეები მსახველების ერთსა და იმავე სისტემას ეკუთვნიან.

ხსენებული ფართეულების მსახველთა თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ წრფეები ერთი და იმავე სიბრტყის პარალელურია, მაშინ მივიღებთ ჰიპერბოლოიდს, წინააღმდეგ შემთხვევაში—პარაბოლოიდს.

გარდა ამისა, წინა ორ პარაგრაფში ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ $\Delta$ წრფე, რომელიც $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ წრფეებზე სრიალებს, შემოხაზავს $\Sigma$ ფართეულს, ეს კი მთლიანად ამტკიცებს გამოთქმულ დებულებებს.

სრულიად ასევე ადვილი დასამტკიცებელია, რომ თუ მოცემულია $\Delta_1$, $\Delta_2$ ორი წრფე, რომლებიც ერთსა და იმავე სიბრტყეში არ არიან მოთავსებული, და $\Pi$ სიბრტყე, რომელიც არც ერთი ამ წრფის პარალელური არაა, მაშინ $\Delta_1$ და $\Delta_2$ წრფეებზე $\Pi$ სიბრტყის პარალელურად მოძრავი $\Delta$ წრფე შემოხაზავს ჰიპერბოლურ პარაბოლოიდს.

დამტკიცებისთვის, საკმარისია ავიღოთ $\Delta'$, $\Delta''$, $\Delta'''$ სამი წრფე, რომლებიც პარალელურია $\Pi$ სიბრტყისა და კვეთენ ორივე $\Delta_1$, $\Delta_2$ წრფეს. ზემონათქვამის ძალით, ყოველთვის შეგვიძლია ავაგოთ ისეთი მეორე რიგის ფართეული, რომლისთვისაც $\Delta'$, $\Delta''$, $\Delta'''$ წრფეები ერთი და იმავე სისტემის მსახველები იქნება, და ეს ფართეული აუცილებლად ჰიპერბოლური პარაბოლოიდია.

$\Delta_1$ და $\Delta_2$ წრფეები იქნებიან ფართეულის მსახველნი, ხოლო მათზე მოძრავი წრფე, რომელიც $\Pi$ სიბრტყის პარალელურია, ამ ფართეულს შემოხაზავს.

## III. მეორე რიგის ფართეულების წრიული კვეთანი

**§ 296. წინასწარი შენიშვნები.** მრავალი სხვადასხვა თვალსაზრისით საინტერესოა საკითხი იმის შესახებ, თუ რა შემთხვევებში წარმოადგენს მეორე რიგის ფართეულისა და სიბრტყის გადაკვეთა წრეწირზე („წრიული კვეთა“).

სანამ გადავიდოდეთ წრიული კვეთების მოძებნაზე, წინასწარ აღვნიშნოთ შემდეგი გარემოება. თუ რაიმე სიბრტყე $\Pi$ მოცემულ მეორე რიგის ფართეულს წრეწირზე კვეთს, მაშინ $\Pi$ სიბრტყის ყოველი პარალელური სიბრტყეც ამ ფართეულს გადაკვეთს წრეწირზე (თუ გადაკვეთა ნამდვილი წირია). ეს დებულება წარმოადგენს § 285-ის დებულების უშუალო შედეგს, მაგრამ ჩვენ მას კიდევ ერთხელ დავამტკიცებთ, § 285-ში გამოყენებული მეთოდით.

ავირჩიოთ დროებით (მართკუთხა) კოორდინატების ისეთი სისტემა, რომლის $Oxy$ სიბრტყე პარალელურია $\Pi$ სიბრტყისა. მაშინ $\Pi$ სიბრტყის განტოლებას ამ სისტემის მიმართ ექნება სახე

$$z = h \tag{1}$$

ვთქვათ, მოცემული ფართეულის განტოლება ამ სისტემის მიმართ არის

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + \\ + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \tag{2}$$

თუ დავუშვებთ ამ განტოლებაში, რომ $z = h$, მივიღებთ განსილული კვეთის გეგმილის განტოლებას $Oxy$ სიბრტყეში.

ამ განტოლებაში $x^2$, $y^2$ და $xy$-ის შემცველი წევრების კოეფიციენტები შესაბამად იქნება $a_{11}$, $a_{22}$, $2a_{12}$. იმისათვის, რომ განხილული წირი წრებაზი იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ

$$a_{11}=a_{22},\quad a_{12}=0. \tag{3}$$

როგორც ვხედავთ, ეს პირობა სრულიად არ არის დამოკიდებული $h$-ზე, ისე რომ, თუ იგი დაცულია რაიმე მოცემული $h$-სთვის, მაშინ იგი დაცული იქნება ყოველი სხვა $h$-სთვისაც, ეს კი ამტკიცებს ჩვენს დებულებას.

მაინც უნდა გვახსოვდეს, რომ მაშინაც, როცა (3) პირობები დაცულია, შეიძლება გადაკვეთა წარმოსახვითი წირი იყოს. თუ დავკმაყოფილდებით მხოლოდ ნამდვილი წირების განხილვით, მაშინ უნდა ვთქვათ, რომ ყველა ის სიბრტყე, რომლებიც $\Pi$-ს პარალელურია და მოცემულ ფართეულს ნამდვილ წირებზე კვეთენ, გადაკვეთაში წრეწირებს გვაძლევს.

წინა ნათქვამიდან გამომდინარეობს კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი შედეგი: თუ ორი მეორე რიგის ფართეულის განტოლებებში (რომლებიც დაწერილია ერთი და იმავე სისტემის ღერძების მიმართ) მეორე განზომილების წევრები ერთი და იგივეა, მაშინ სიბრტყეები, რომლებიც ერთ-ერთ მათგანს წრეწირებზე კვეთენ, მეორესაც წრეწირებზე გადაკვეთენ.

მართლაც, ამ შემთხვევაში, თუ კოორდინატთა ღერძებს სხვა ნებისმიერი ღერძებით შევცვლით [1]), კერძოდ ისეთი (მართკუთხა) ღერძებით, რომელთა $Oxy$ სიბრტყე პარალელური იქნება სიბრტყისა, რომელიც ერთ-ერთ ფართეულს წრეწირზე კვეთს, მაშინ ფართეულების განტოლებებში მეორე განზომილების წევრები ერთი და იგივე დარჩება. მაგრამ კოორდინატთა ამ სისტემის მიმართ ერთ-ერთი ფართეულისათვის ადგილი ექნება (3) პირობებს; მაშასადამე, ამ პირობებს ექნება ადგილი მეორე ფართეულისთვისაც, რაც ამტკიცებს ჩვენს დებულებას.

აქ ნათქვამის ძალით, მაგალითად, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ შეუღლებული ჰიპერბოლოიდების და მათი ასიმპტოტური კონუსის წრეწირზე გამკვეთი სიბრტყეები ერთი და იგივენი იქნებიან.

ზემონათქვამის ანალოგიურად, აქაც უნდა შევნიშნოთ, რომ შესაძლებელია ისეთი შემთხვევაც, როცა სიბრტყე მოცემულ ერთ-ერთ ფართეულს წრეწირზე კვეთს, ხოლო მეორე ფართეულს სრულებით არ კვეთს (კვეთს წარმოსახვით წრეხაზზე). მაგრამ თუ იგი მეორესაც ნამდვილ წირზე კვეთს, მაშინ ეს წირი წრეწირი იქნება.

**§ 297. მეორე რიგის ცენტრალური ფართეულების წრიული კვეთანი.** დავიწყოთ მეორე რიგის ცენტრალური ფართეულების: ელიფსოიდის, ორიველ ჰიპერბოლოიდისა და კონუსის წრიული კვეთების მოძებნით. თუ გამოვრიც-

[1]) ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ მოცემული ფართეულების განტოლებანი დაყვანილია $F(x, y, z)=0$ სახეზე, და ღერძების გარდაქმნის დროს $F(x, y, z)$ პოლინომებში ვკმაყოფილდებით $x$, $y$, $z$ ცვლადების შეცვლით ახალი კოორდინატებით (ისე რომ არ ვაწარმოებთ განტოლებების შეკვეცას ან გამრავლებას მუდმივ მამრავლებზე).

ხავთ დროებით კონუსს, მაშინ ჩამოთვლილი ფართეულების განტოლებანი შეიძლება შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ:

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma}=1. \tag{1}$$

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს რაიმე სიბრტყე, რომელიც (1) ფართეულს წრეწირზე კვეთს, მაშინ კოორდინატთა სათავეზე (ცენტრზე) გამავალი მისი პარალელური სიბრტყე ჩვენს ფართეულს აგრეთვე წრეწირზე გადაკვეთს (წინა პარაგრაფში ნათქვამის ძალით), თუ ეს გადაკვეთა ნამდვილი წირია. მაგრამ ცხადია, რომ ელიფსოიდისა და ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის შემთხვევაში, ცენტრზე გამავალი ყოველი სიბრტყე, ფართეულს ნამდვილ წირზე გადაკვეთს. ამგვარად, ელიფსოიდისა და ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის შემთხვევაში შეგვიძლია დავკმაყოფილდეთ ცენტრზე გამავალი ისეთი სიბრტყეების პოვნით, რომლებიც წრიულ კვეთებს გვაძლევენ. ყველა დანარჩენი სიბრტყე, რომელიც კვეთაში წრეწირს მოგვცემს, მათი პარალელური იქნება.

ამგვარად, ვთქვათ, მოცემული გვაქვს წრიული კვეთა, რომლის სიბრტყე სათავეზე გადის. ვთქვათ, კვეთის რადიუსია $r$. ავაგოთ $r$ რადიუსიანი სფერო, რომლის ცენტრი სათავეშია. ცხადია, ეს სფერო განხილულ წრიულ კვეთაზე გაივლის.

დავწეროთ მისი განტოლება შემდეგი სახით:

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=1. \tag{2}$$

საძიებელი წრიული კვეთის წერტილები ერთდროულად უნდა აკმაყოფილებდეს (1) და (2) განტოლებებს და, მაშასადამე, იმ განტოლებასაც, რომელიც მიიღება მათი გამოკლებით, ე. ი. განტოლებას

$$\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{r^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{r^2}\right)y^2+\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{r^2}\right)z^2=0. \tag{3}$$

(3) განტოლებით წარმოდგენილი მეორე რიგის ფართეული კონუსია წვეროთი კოორდინატთა სათავეში, რომელიც შემადგენელ ნაწილად შეიცავს იმ სიბრტყეს, რომელიც გვაძლევს აღებულ წრიულ კვეთას. მართლაც, თუ $(x_0, y_0, z_0)$ განხილული წრიული კვეთის რომელიმე წერტილია, მაშინ იგი ეკუთვნის (3) კონუსს და, მაშასადამე, კოორდინატთა სათავეზე და ამ წერტილზე გამავალი მთელი წრფეც (3) ფართეულს ეკუთვნის. მაშასადამე, ეს უკანასკნელი ფართეული შეიცავს $O$ წერტილზე გამავალ და წრიული კვეთის სიბრტყეში (რომელიც, ამგვარად მთლიანად (3) ეკუთვნის) მოთავსებულ ყველა წრფეს.

მაგრამ ჩვენ ვიცით, რომ ამ შემთხვევაში (3) ფართეული უნდა დაიშალოს ორ სიბრტყედ; ამისათვის კი აუცილებელი და საკმარისია, რომ (3)

განტოლების მარცხენა მხარის დისკრიმინანტი ნულის ტოლი იყოს. მაგრამ ეს დისკრიმინანტი არის

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha}-\frac{1}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta}-\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma}-\frac{1}{r^2} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{r^2}\right).$$

მაშასადამე, უნდა გვქონდეს

$$\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{r^2}\right)-\left(\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{r^2}\right)=0. \tag{4}$$

ახლა განვიხილოთ ელიფსოიდისა და ჰიპერბოლოიდის შემთხვევა ცალ-ცალკე.

1. ე ლ ი ფ ს ო ი დ ი ს შემთხვევაში გვექნება

$$\alpha=a^2,\ \beta=b^2,\ \gamma=c^2. \tag{5}$$

ვიგულისხმოთ, რომ

$$a>b>c. \tag{6}$$

(4) განტოლება $r$-სთვის გვაძლევს სამ მნიშვნელობას

$$r=a,\ r=b,\ r=c.$$

როცა $r=a$, მაშინ (3) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)y^2+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)z^2=0.$$

ვინაიდან $y^2$ და $z^2$-ის წინ მდგომ კოეფიციენტებს ერთნაირი ნიშნები აქვს, ამიტომ წინა განტოლება მხოლოდ $Ox$ ღერძის წერტილებით კმაყოფილდება (ე. ი. მაშინ, როცა $y=z=0$) და, მაშასადამე, არ შეიძლება იგი წარმოადგენდეს ორი ნამდვილი სიბრტყის ერთობლიობას (იგი წარმოადგენს ორი წარმოსახვითი სიბრტყის ურთობლიობას, რომლებიც ერთმანეთს ნამდვილ წრფეზე გადაკვეთენ). ასეთივე შედეგს მივიღებთ, როცა $r=c$.

დაგვრჩენია განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა $r=b$. ამ შემთხვევაში (3) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)z^2=0,$$

ანუ

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)x^2-\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)z^2=0.$$

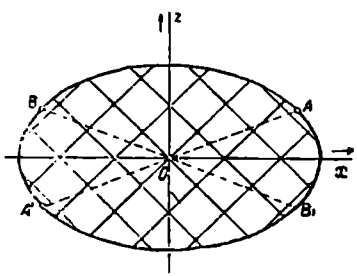
რადგანაც

$$\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}>0,\quad \frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}>0,$$

ამიტომ წინა განტოლება მოგვცემს ისეთი ორი ნამდვილი სიბრტყის ერთობლიობას

$$\left.\begin{aligned} x\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}-z\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}=0,\\ x\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}+z\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}=0,\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

რომლებიც ელიფსოიდის **საშუალო** ღერძზე გადიან და ერთნაირად არიან დახრილი დიდი (ან მცირე) ღერძისადმი.




ნახ. 175.

ყველა დანარჩენი წრიული კვეთა მიიღება ამ ორი სიბრტყის პარალელური სიბრტყეებით.

ამგვარად, ჩვენ ვღებულობთ წრიული კვეთების ორ ჯგუფს; მათი სიბრტყეები ერთ-ერთი (7) სიბრტყის პარალელურია. 175 ნახაზზე გამოსახულია $Oxz$ სიბრტყეში მოთავსებული მთავარი ელიფსი და იმ სიბრტყეთა კვალები (ეს სიბრტყეები $Oxz$ სიბრტყის მართობია), რომლებიც წრიულ კვეთებს გვაძლევენ. ეს კვალებიც ხსენებულ ელიფსში ქმნის პარალელურ ქორდების ორ ჯგუფს. ცხადია, რომ წრიული კვეთების ცენტრები მოთავსებულია ამ ქორდების შუა წერტილებში. მაშასადამე, ერთი და იმავე ჯგუფის წრიული კვეთების ცენტრები მოთავსებულია ერთსა და იმავე წრფეზე; სახელდობრ, ისინი მოთავსებული არიან $Oxz$ სიბრტყეში მდებარე მთავარი ელიფსის დიამეტრზე, რომლის მიმართულება შესაბამისი წრიული კვეთების კვალთა მიმართულების შეუღლებულია, $AA'$ და $BB'$ წრფეები, რომლებზედაც წრიული კვეთების ცენტრებია მოთავსებული, ელიფსოიდს $A$, $A'$, $B$, $B'$ წერტილებში კვეთს, რომლებსაც **მომრგვალების წერტილები ანუ ომბილიკური წერტილები** ეწოდება.

ბრუნვის შეკუმშული ელიფსოიდის შემთხვევაში ($a=b>c$) (7) სიბრტყეები ემთხვევა $z=0$ სიბრტყეს და ჩვენ ვღებულობთ წრიული კვეთების ერთ ჯგუფს, რომლებიც ბრუნვის ღერძის მართობული არიან. მომრგვალების წერტილები (რომელთა რიცხვი ახლა მხოლოდ ორი იქნება) დაემთხვევა ბრუნვის ღერძის ბოლო წერტილებს. გაჭიმული ბრუნვის ელიფსოიდის შემთხვევაშიც ($a>b=c$) მივიღებთ ანალოგიურ შედეგს. ბოლოს, როცა $a=b=c$,

ელიფსოიდი წარმოადგენს სფეროს და ყოველი კვეთა მაშინ წრიულია. ამ შემთხვევაში ფართეულის ყველა წერტილი მომრგვალების წერტილია.

2. ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის შემთხვევაში გვაქვს

$$\alpha=a^2,\ \beta=b^2,\ \gamma=-c^2.$$

მაშასადამე, $r$-ისთვის მხოლოდ ორი ნამდვილი მნიშვნელობა შეიძლება ავიღოთ: $r=a$ და $r=b$. დაეუშვათ, რომ $a>b$.

მაშინ, წინანდელის ანალოგიურად, ადვილად შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ (3) ფართეული მხოლოდ მაშინ იშლება ორ ნამდვილ სიბრტყედ, როცა $r=a$; მისი განტოლება ამ შემთხვევაში იქნება

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)y^2-\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)z^2=0.$$

იგი იშლება ორ წრფივ განტოლებად

$$\left.\begin{aligned} y\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}-z\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}=0,\\ y\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}+z\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}=0. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

მაშასადამე, წრიულ კვეთებს გვაძლევს (8) სიბრტყეები, რომლებიც საყელური ელიფსის დიდ ღერძზე გადიან და ერთნაირად არიან დახრილი ამ ელიფსის სიბრტყისადმი. ყველა სხვა წრიულ კვეთას გვაძლევს ხსენებული სიბრტყეების პარალელური სიბრტყეები. ამგვარად, აქაც ორი ჯგუფის წრიული კვეთები გვაქვს.

იმ სიბრტყეების კვალები, რომლებიც წრიულ კვეთებს გვაძლევენ, $Oyz$ სიბრტყეში ქმნიან ამ სიბრტყეში მდებარე მთავარი ჰიპერბოლის პარალელურ ქორდათა ორ ჯგუფს. ცხადია, რომ წრიული კვეთების ცენტრები მოთავსებულია ამ ჰიპერბოლის დიამეტრებზე, რომლებიც ხსენებული ქორდების შეუღლებულია; რადგანაც ქორდები ჰიპერბოლს ნამდვილ წერტილებში კვეთენ, ამიტომ ეს დიამეტრები მას არ გადაკვეთენ (გადაკვეთენ შეუღლებულ ჰიპერბოლს).

ცალკალთა ბრუნვის ჰიპერბოლოიდის შემთხვევაში ($a=b$) ორივე (8) სიბრტყე ემთხვევა $z=0$ სიბრტყეს, და გვექნება წრიული კვეთების მხოლოდ ერთი ჯგუფი, რომლებიც ბრუნვის ღერძის მართობია და რომელთა ცენტრები ამ ღერძზეა მოთავსებული.

3. ახლა განვიხილოთ ორკალთა ჰიპერბოლოიდი:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad (*)$$

§ 296-ში ნათქვამის ძალით, ადვილი დასანახია, რომ ამ ორკალთა ჰიპერბოლოიდის წრიული კვეთის ყოველი სიბრტყე იქნება მისი შეუღლებული ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (**)$$

წრიული კვეთის სიბრტყე.

პირიქით, სიბრტყეები, რომლებიც გვაძლევენ (**) ჰიპერბოლოიდის წრიულ კვეთას, მოგვცემენ აგრეთვე წრიულ კვეთას (*) ჰიპერბოლოიდშიც, თუ გადაკვეთის წირი ნამდვილია.

მაშასადამე, ორკალთა ჰიპერბოლოიდის წრიულ კვეთებს გვაძლევენ, ერთ-ერთი (8) სიბრტყის პარალელური ისეთი სიბრტყეები, რომლებიც, საზოგადოდ, შეხვდებიან ჩვენს ფართეულს. აქაც გვაქვს წრიული კვეთების ორი ჯგუფი.

როგორც ზემოთ იყო ნათქვამი, ამ წრეების ცენტრთა შემაერთებელი წრფეები მოთავსებულია $Oyz$ სიბრტყეში და მოცემულ (*) ორკალთა ჰიპერბოლოიდს ისინი კვეთენ ოთხ წერტილში, რომლებსაც მომრგვალების წერტილები ანუ ომბილიკური წერტილები ეწოდება.

ბრუნვის ორკალთა ჰიპერბოლოიდის შემთხვევაში ($a=b$) წრიული კვეთების ორივე ჯგუფი ერთ ჯგუფს წარმოადგენს და მისი მომრგვალების წერტილები (მათი რიცხვი იქნება ორი) ჰიპერბოლოიდის წვეროებია.

4. ადვილი მოსაძებნია აგრეთვე კონუსის

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (***)$$

წრიული კვეთები.

მართლაც, § 296-ში ნათქვამის ძალით, ამ წრიულ კვეთებს გვაძლევენ იგივე სიბრტყეები, რომლებიც (**) ჰიპერბოლოიდის შემთხვევაში წრიულ კვეთებს იძლეოდნენ.

თუ ერთ-ერთ წრიულ კვეთას განვიხილავთ როგორც მიმმართველს. ვნახავთ, რომ ყოველი მეორე რიგის (***) კონუსი შეიძლება განხილული იყოს როგორც „დახრილი წრიული კონუსი“, ე. ი. როგორც იმ წრფეთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც უძრავ წერტილზე და უძრავ წრეწირზე გადიან.

როცა $a=b$ („სწორი წრიული კონუსი“), მაშინ ორივე ჯგუფის წრიული კვეთები ერთ ჯგუფს წარმოადგენენ.

**§ 298. ელიფსური პარაბოლოიდისა და ელიფსური ცილინდრის წრიული კვეთები.** ჩვენ დაგვრჩენია განვიხილოთ მხოლოდ ელიფსური პარაბოლოიდისა და ელიფსური ცილინდრის წრიული კვეთები, ვინაიდან ჰიპერბოლურ პარაბოლოიდს და აგრეთვე პარაბოლურ და ჰიპერბოლურ ცილინდრებს წრიული კვეთები არა აქვთ. მართლაც, ჩვენ ვიცით, რომ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის ყველა ბრტყელი კვეთა პარაბოლური და ჰიპერბოლური

ტიპის წირებია. ცხადია აგრეთვე, რომ პარაბოლურ და ჰიპერბოლურ ცილინდრებსაც არ შეიძლება წრიული კვეთები ჰქონდეთ.

ამგვარად, განვიხილოთ ელიფსური პარაბოლოიდი

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z. \tag{1}$$

§ 296-ში ნათქვამის ძალით, ის სიბრტყეები, რომლებიც (1) ფართეულის წრიულ კვეთებს გვაძლევენ, აგრეთვე წრიულ კვეთებს მოგვცემენ ელიფსურ ცილინდრშიც

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=1. \tag{2}$$

იმავე § 297-ში ნათქვამის ძალით, შეგვიძლია დავკმაყოფილდეთ იმ კვეთების მოძებნით, რომელთა სიბრტყეები კოორდინატთა სათავეზე გადიან. ვთქვათ, $r$ აღნიშნავს ერთ-ერთი ასეთი კვეთის რადიუსს, ხოლო

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=1 \tag{3}$$

წარმოადგენს იმ სფეროს განტოლებას, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია და რომელიც აღებულ კვეთაზე გადის. გამოვაკლოთ (3) ტოლობა (2)-ს, მივიღებთ განტოლებას

$$\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r^2}\right)y^2-\frac{z^2}{r^2}=0, \tag{4}$$

რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს საძიებელი კვეთის წერტილები. სრულიად ისე, როგორც წინა პარაგრაფში, დავასკვნით, რომ $r$ უნდა აკმაყოფილებდეს განტოლებას

$$\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r^2}\right)\cdot\frac{1}{r^2}=0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $r^2=p$, ან $r^2=q$.

ვთქვათ, $p>q$. ადვილი დასანახია, რომ როცა $r^2=q$, მაშინ (4) კონუსი არ იშლება ნამდვილ სიბრტყეებად. დაგვრჩენია ვიგულისხმოთ, რომ $r^2=p$. მაშინ (4) განტოლება შეიძლება გადავწეროთ ასე:

$$\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)y^2-\frac{z^2}{p}=0$$

და წარმოადგენს ორ ნამდვილ სიბრტყეს

$$y\sqrt{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}-z\sqrt{\frac{1}{p}}=0 \text{ და } y\sqrt{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}-z\sqrt{\frac{1}{p}}=0. \tag{5}$$

რომლებიც გადიან ცილინდრის განივ კვეთაში მიღებული ელიფსის

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=1$$

დიდ ღერძზე, და ერთნაირად არიან დახრილი აღნიშნული განივი კვეთის სიბრტყისადმი.

უველა დანარჩენი წრიული კვეთა მიიღება ისეთი სიბრტყეებით, რომლებიც (5) სიბრტყეთაგან ერთ-ერთის პარალელურია. მაშასადამე, ამ შემთხვევაშიც ჩვენ გვაქვს წრიული კვეთების ორი ჯგუფი, რომლებიც ერთნაირად არიან დახრილი ცილინდრის განივი კვეთისადმი. წრიული ცილინდრის შემთხვევაში კვეთების ორივე ეს ჯგუფი ერთმანეთს ემთხვევა.

დავუბრუნდეთ (1) პარაბოლოიდს. ნათქვამის თანახმად, მის წრიულ კვეთებს ისეთი სიბრტყეები გვაძლევენ, რომლებიც ერთ-ერთი (5) სიბრტყის პარალელურია და რომლებიც მოცემულ ზედაპირს შეხვდება.

წრიული კვეთების კვალები $Oyz$ სიბრტყეზე გვაძლევს $y^2=2qz$ პარაბოლის ქორდებს; წრიული კვეთების ცენტრები მოთავსებულია ამ ქორდების შუა წერტილებში, ე. ი. მათი მიმართულებების შეუღლებულ მიმართულებათა დიამეტრებზე. ამგვარად, $Oyz$ სიბრტყეში ჩვენ გვაქვს ღერძის პარალელური ორი წრფე, რომლებზედაც მოთავსებულია წრიული კვეთების ცენტრები. ეს წრფეები პარაბოლოიდს კვეთს ორ წერტილში, რომლებსაც მომრგვალების წერტილები ეწოდება.

ბრუნვის პარაბოლოიდის შემთხვევაში ($p=q$) გვექნება მხოლოდ ერთი ჯგუფი წრიული კვეთებისა, რომელთა ცენტრები ბრუნვის ღერძზეა მოთავსებული. მომრგვალების წერტილი იქნება მხოლოდ ერთი—პარაბოლოიდის წვერო.

## დამატება

# ელემენტარული ცნობები წრფივი და კვადრატული ფორმების შესახებ

ქვემოთ ჩვენ მოგვყავს წრფივი, კვადრატული და ორად წრფივი ფორმების ის თვისებები, რომლებითაც ჩვენ ვსარგებლობდით კურსის გადმოცემის დროს. ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ მკითხველი იცნობს დეტერმინანტთა თეორიის ელემენტებს. მიუხედავად ამისა, განყოფილებაში (§ § 1—3) ჩვენ მაინც ვიძლევით დეტერმინანტების ზოგიერთ ძირითად თვისებას და ზოგჯერ ამ თვისებების დამტკიცებაც მოგვყავს.

## I. დეტერმინანტებისა და ცხრილების შესახებ

**§ 1. დეტერმინანტების ზოგიერთი თვისება.** ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ მკითხველმა იცის—რას წარმოადგენს $n$-რი რიგის დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1}$$

შედგენილი $n^2$ ელემენტებისაგან, რომლებიც დალაგებულია $n$ სტრიქონისა და $n$ სვეტისაგან შედგენილ ცხრილში

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}. \end{matrix} \tag{2}$$

თითოეული ელემენტი აღნიშნულია ერთი ასოთი (ჩვენს შემთხვევაში $a$-თი) და ორი ინდექსით (ნიშნაკით), რომელთაგან პირველი უჩვენებს იმ სტრიქონის, ხოლო მეორე იმ სვეტის ნომერს, რომლებსაც მოცემული ელემენტი ეკუთვნის.

ახლა გავიხსენოთ შემდეგი ცნება.

თუ (2) დეტერმინანტში ამოვშლით $i$-ურ სტრიქონს და $k$-ურ სვეტს, ე. ი. თუ ამოვშლით ამ სვეტს და სტრიქონს, რომლებიც $a_{ik}$ ელემენტზე გა-

დაიკვეთებიან, მივიღებთ $(n-1)$ რიგის დეტერმინანტს, რომელსაც $a_{ik}$ ელემენტის მ ი ნ ო რ ი ეწოდება. ამ მინორს, რომლის ნიშანი გარკვეული წესით არის აღებული (ამ წესს ახლავე მოვიყვანთ), $a_{ik}$ ე ლ ე მ ე ნ ტ ი ს ა ლ გ ე ბ რ უ ლ ი დ ა მ ა ტ ე ბ ა ეწოდება.

ნიშნის აღების ხსენებული წესი მდგომარეობს შემდეგში: თუ $i$ და $k$ რიცხვები ერთნაირი სილუწისაა[1]), მაშინ მინორის წინ უნდა ავიღოთ ნიშანი პლუსი; თუკი $i$ და $k$ სხვადასხვა სილუწისაა[2]), მაშინ უნდა ავიღოთ ნიშანი მინუსი.

მაგალითად, მესამე რიგის დეტერმინანტში

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

უკანასკნელი სტრიქონის ელემენტების (ე. ი. $a_{31}$, $a_{32}$, $a_{33}$ ელემენტების) მინორებია, შესაბამისად, მეორე რიგის დეტერმინანტები

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

ხოლო იმავე ელემენტების ალგებრული დამატებანი. შესაბამისად, იქნებიან

$$A_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad A_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

საზოგადოდ, $A$ დეტერმინანტში $A_{ik}$-ით ჩვენ აღვნიშნავთ $a_{ik}$ ელემენტის ალგებრულ დამატებას.

დეტერმინანტს ეწოდება ს ი მ ე ტ რ ი უ ლ ი, თუ $a_{ij}=a_{ji}$, ე. ი. თუ „მთავარი დიაგონალის" (რომელიც ზემოდან ქვემოთ და მარცხნიდან მარჯვნივ მიდის) მიმართ სიმეტრიულად დალაგებული ელემენტები ერთმანეთის თანატოლია. ადვილი დასანახია, რომ სიმეტრიული დეტერმინანტის შემთხვევაში

$$A_{ij}=A_{ji}.$$

ჩვენ ცნობილად ვთვლით აგრეთვე დეტერმინანტების ქვემომოყვანილ (ზოგჯერ მოკლე დამტკიცებებით) თვისებებს:

1°. თუ დეტერმინანტში სტრიქონებს და სვეტებს როლებს შევუცვლით (ე. ი. თუ სტრიქონებს შევცვლით იმავე ნომრის სვეტებით და პირიქით) ამით დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ შეიცვლება.

2°. თუ ორ სტრიქონს (ან ორ სვეტს) ადგილებს შევუცვლით, ამით დეტერმინანტი მხოლოდ ნიშანს შეიცვლის.

[1]) ე. ი. ან ორივე რიცხვი ლუწია, ან ორივე კენტი.

[2]) ე. ი. ერთი მათგანი ლუწია, ხოლო მეორე კენტი.

3°. თუ დეტერმინანტში ორი სტრიქონი (ან ორი სვეტი) ერთნაირია, მაშინ დეტერმინანტი ნულის ტოლია (ცხადია, ეს თვისება წინა თვისების უშუალო შედეგია).

4°. დეტერმინანტი $A$ ტოლია რომელიმე სტრიქონის (ან სვეტის) ელემენტებისა და შესაბამის ალგებრულ დამატებათა ნამრავლების ჯამისა. გამოვთქვათ ეს დებულება ფორმულით.

ვთქვათ, მაგალითად, აღებული გვაქვს $k$-რი სტრიქონი; მაშინ ახლახან ნათქვამის მიხედვით

$$A=a_{k_1}A_{k_1}+a_{k_2}A_{k_2}+\cdots+a_{k_n}A_{k_n}, \tag{3}$$

ან, მოკლედ

$$A=\sum_{i=1}^{n}a_{ki}A_{ki} \tag{3a}$$

(აჯამვა ხდება $i$ ნიშნაკის მიხედვით).

ანალოგიურად, თუ ავიღებთ $k$-რ სვეტს, გვექნება:

$$A=a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+\cdots+a_{nk}A_{nk}=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}A_{ik} \tag{4}$$

(3) და (4) ფორმულები გამოსახავენ დეტერმინანტის დაშლას $k$-რი სტრიქონის ან $k$-რი სვეტის ელემენტების მიხედვით.

თუ (3) ფორმულის მარჯვენა მხარეში $k$-რი სტრიქონის ელემენტებს $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_n}$, შევცვლით სხვა რომელიმე $l$ სტრიქონის ელემენტებით $a_{l_1}, a_{l_2}, \ldots, a_{l_n}$, მაშინ მივიღებთ არა $A$ დეტერმინანტს, არამედ ისეთ დეტერმინანტს, რომელშიც ორი სტრიქონი ერთნაირია (სახელდობრ, ახალი დეტერმინანტის $k$-რი სტრიქონი იგივეა, რაც $l$ ნიშნაკიანი სტრიქონი). მაშასადამე, ეს ახალი დეტერმინანტი ნულის ტოლი იქნება. ამგვარად, ვღებულობთ

$$a_{l_1}A_{k_2}+a_{l_2}A_{k_2}+\cdots+a_{l_n}A_{k_n}=0 \quad (\text{თუ } l\neq k). \tag{5}$$

(3) და (5) შედეგები შეიძლება ერთი ფორმულით გამოვსახოთ:

$$a_{l_1}A_{k_1}+a_{l_2}A_{k_2}+\cdots+a_{l_n}A_{k_n}=\begin{cases}A, & \text{თუ } l=k,\\ 0, & \text{თუ } l\neq k.\end{cases} \tag{6}$$

სრულიად ასევე, თუ დეტერმინანტს დავშლით $k$-რის სვეტის ელემენტების მიხედვით, მივიღებთ:

$$a_{1l}A_{1k}+a_{2l}A_{2k}+,\ldots a_{nl}A_{nk}=\begin{cases}A, & \text{თუ } l=k,\\ 0, & \text{თუ } l\neq k.\end{cases} \tag{7}$$

5°. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის ყველა ელემენტი წარმოადგენს ორი რიცხვის ჯამს, მაშინ მოცემული დეტერმინანტი ისეთი ორი დეტერმინანტის ჯამია, რომლებიც მიიღებიან მოცემულიდან, თუ ხსენებულ

სვეტში დავტოვებთ მხოლოდ პირველ შესაკრებებს ან მხოლოდ მეორე შესაკრებებს. ეს უშუალოდ გამომდინარეობს (4) ფორმულიდან.

ანალოგიურ დებულებას მივიღებთ, თუ სტრიქონებსა და სვეტებს როლებს შევუცვლით.

მაგალითები:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

6°. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტს ერთსა და იმავე რიცხვზე გავამრავლებთ, ამით მთელი დეტერმინანტიც იმავე რიცხვზე გამრავლდება.

დეტერმინანტი არ შეიცვლება, თუ ერთი სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებს მივუმატებთ ერთსა და იმავე რიცხვზე გამრავლებულ მეორე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებს.

7°. განვიხილოთ ერთი და იგივე $n$-რი რიგის ორი დეტერმინანტი

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} \text{ და } B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots b_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots b_{nn} \end{vmatrix}.$$

ამ დეტერმინანტების $AB$ ნამრავლი შეიძლება წარმოვადგინოთ აგრეთვე $n$-რი რიგის დეტერმინანტის სახით

$$C=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots c_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1} & c_{n2} \cdots c_{nn} \end{vmatrix},$$

რომლის ელემენტები შედგენილია შემდეგი წესის მიხედვით: ელემენტი $c_{ik}$ წარმოადგენს $A$ დეტერმინანტის $i$-რი სტრიქონისა და $B$ დეტერმინანტის $k$-რი სტრიქონის შესაბამისი ელემენტების ნამრავლთა ჯამს. ე. ი.

$$c_{ik}=a_{i1}b_{k1}+a_{i2}b_{k2}+\ldots+a_{in}b_{kn}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{ks}. \tag{8}$$

ვინაიდან სტრიქონების შეცვლისას სვეტებით და პირიქით, დეტერმინანტი არ იცვლება, ამიტომ წინა კანონს შეიძლება სხვადასხვა სახე მივცეთ, თუ $A$, $B$ და $C$ დეტერმინანტებში სტრიქონებს შევცვლით სვეტებით და, პირიქით. მაგალითად, თუ $B$ დეტერმინანტში წინასწარ სვეტებს შევცვლით სტრიქონებით და პირიქით, და გამოვიყენებთ (8) წესს, მივიღებთ:

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sk}, \tag{9}$$

ე. ი. ნაცვლად „სტრიქონული“ გამრავლებისა (8), ჩვენ მივიღეთ პირველი დეტერმინანტის სტრიქონების ელემენტთა ნამრავლი მეორე დეტერმინანტის შესაბამის ელემენტებზე.

$$c_{11}\ c_{12}\cdots c_{1n}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_{n1}\ c_{n2}\cdots c_{nn}$$

ცხრილის შესახებ, რომლის ელემენტები შედგენილია

$$\begin{matrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{matrix} \quad \text{და} \quad \begin{matrix} b_{11}\cdots b_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}\cdots b_{nn} \end{matrix}$$

ცხრილების ელემენტებით ერთ-ერთი ზემომოყვანილი (8) ან (9) წესით, ამბობენ, რომ იგი მიღებულია უკანასკნელი ორი ცხრილის გამრავლებით (პირველ შემთხვევაში სტრიქონული გამრავლებით, ხოლო მეორე შემთხვევაში სტრიქონების სვეტებზე გამრავლებით).

§ 2. **დეტერმინანტის ან ცხრილის რანგი.** წინა პარაგრაფის (2) ცხრილიდან შეგვიძლია შევადგინოთ არა მარტო $n$-რი რიგის $A$ დეტერმინანტი, არამედ მრავალი სხვა დეტერმინანტიც თუ ამოვშლით მასში გარკვეული რაოდენობის ნებისმიერ სტრიქონებს და იმავე რაოდენობის ნებისმიერ სვეტებს. ყველა ამ დეტერმინანტს ($A$ დეტერმინანტის ჩათვლით) ჩვენ ვუწოდებთ § 1-ის (2) ცხრილიდან შედგენილ დეტერმინანტს.

თუ დეტერმინანტი $A$ ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ ამბობენ, რომ ცხრილის რ ა ნ გ ი უდრის $n$-ს, თუ $A=0$, მაშინ რანგი $n$-ზე ნაკლებია. სახელდობრ, ცხრილის რ ა ნ გ ი შემდეგნაირად განისაზღვრება: თუ § 1-ის (2) ცხრილიდან შედგენილ $r$ რიგის დეტერმინანტებს შორის ერთი მაინც ნულისგან განსხვავებულია, ხოლო ყველა მათზე მაღალი რიგის დეტერმინანტი ნულის ტოლია, მაშინ ამბობენ, რომ ცხრილის რანგი $r$-ის ტოლია.

ხშირად, ცხრილის რანგის მაგიერად, ლაპარაკობენ $A$ დეტერმინანტის რანგზე.

§ 1-ის (2) ცხრილი წარმოადგენს „კვადრატულ“ ცხრილს, რომელიც შედგენილია სტრიქონებისა და სვეტების ერთნაირი რაოდენობით. რანგის ცნება შეიძლება განვაზოგადოთ „მართკუთხა“ ცხრილზეც:

$$\begin{matrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\cdots a_{2n} \\ \\ a_{m1}\ a_{m2}\cdots a_{mn} \end{matrix} \qquad (1)$$

რომელიც შედგენილია $m$ სტრიქონისა და $n$ სვეტისაგან, სადაც $m$ შეიძლება განსხვავებული იყოს $n$-სგან. ამ ცხრილიდან ზოგიერთი სტრიქონისა და

სვეტის ამოშლით (ისეთი რაოდენობით, რომ დარჩენილი ცხრილი კვადრატული იყოს) შეიძლება შევადგინოთ სხვადასხვა დეტერმინანტი. თუ ამ დეტერმინანტებს შორის ერთი მაინც $r$ რიგის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია, ხოლო ყველა სხვა $r$-ზე მაღალი რიგის დეტერმინანტები ნულის ტოლია, მაშინ ამბობენ, რომ (1) ცხრილის რანგი არის $r$. ცხადია, რომ ცხრილის რანგი არ შეიძლება მეტი იყოს $m$ და $n$ რიცხვთაგან უმცირესზე.

იმისათვის, რომ ცხრილის რანგი უდრიდეს $r$-ს, საკმარისია ამ ცხრილში მოვძებნოთ ერთი მაინც $r$ რიგის დეტერმინანტი, რომელიც ნულისაგან განსხვავებულია და, ამის გარდა, დავამტკიცოთ, რომ ამ ცხრილიდან შედგენილი ყველა $(r+1)$ რიგის დეტერმინანტი ნულის ტოლია. მართლაც, მაშინ ნულის ტოლი იქნება ყველა $(r+2)$ რიგის დეტერმინანტიც, რაშიაც ადვილად დავრწმუნდებით, თუ მათ დავშლით რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის მიხედვით. ასევე დავრწმუნდებით, რომ $(r+3)$ რიგის დეტერმინანტებიც უდრის ნულს და ა. შ., ე. ი. ყველა დეტერმინანტი $r$-ზე მეტი რიგისა ნულია.

ახლა დავამტკიცოთ დებულება, რომელიც შემდეგში დაგვჭირდება. შევთანხმდეთ, ვთქვათ, რომ მოცემული სტრიქონი არის სხვა მოცემული სტრიქონების წ რ ფ ი ვ ი კ ო მ ბ ი ნ ა ც ი ა, თუ ის შეიძლება მიღებულ იქნას აღნ უკანასკნელი სტრიქონების რაიმე რიცხვზე გამრავლებით და შეკრებით [1])

მაგალითად, თუ ორი

$$a_{i_1},\ a_{i_2},\ \ldots,\ a_{i_n}$$

$$a_{j_1},\ a_{j_2},\ \ldots,\ a_{j_n}$$

სტრიქონის საშუალებით შევადგენთ

$$\lambda a_{i_1}+\mu a_{j_1},\ \lambda a_{i_2}+\mu a_{j_2},\ \ldots,\lambda a_{i_n}+\mu a_{j_n} \tag{2}$$

სტრიქონს, მაშინ ეს უკანასკნელი იქნება წინა ორის წრფივი კომბინაცია. დებულება, რომელიც ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ, მდგომარეობს შემდეგში:

ც ხ რ ი ლ ი ს რ ა ნ გ ი ა რ ი ც ვ ლ ე ბ ა, თ უ მ ა ს დ ა ვ უ მ ა ტ ე ბ თ ი ს ე თ ს ტ რ ი ქ ო ნ ს, რ ო მ ე ლ ი ც წ ა რ მ ო ა დ გ ე ნ ს მ ო ც ე მ უ ლ ი ც ხ რ ი ლ ი ს რ ო მ ე ლ ი მ ე ს ტ რ ი ქ ო ნ ე ბ ი ს წ რ ფ ი ვ ი კ ო მ ბ ი ნ ა ც ი ა ს.

ვთქვათ, მაგალითად, (1) ცხრილს, რომლის რანგი უდრის $r$-ს, დავუმატეთ (2) სტრიქონი. დავამტკიცოთ, რომ ამ ცხრილის ყველა $r+1$ რიგის დეტერმინანტი უდრის ნულს. მართლაც, თუ მოცემული $r+1$ რიგის დეტერმინანტი მთლიანად ეკუთვნის ძველ ცხრილს, მაშინ იგი ნულის ტოლია (ვინაიდან ძველი ცხრილის რანგი უდრის $r$-ს). ახლა ავიღოთ რომელიმე ისეთი $r+1$ რიგის დეტერმინანტი, რომელიც ახალი სტრიქონის ელემენტებს შეიცავს:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2} & \ldots & a_{i_1k_{r+1}} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_2} & \ldots & a_{i_2k_{r+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda a_{ik_1}+\mu a_{jk_1} & \lambda a_{ik_2}+\mu a_{jk_2} & \ldots & \lambda a_{ik_{r+1}}+\mu a_{jk_{r+1}} \end{vmatrix} \tag{3}$$

[1]) „სტრიქონის გამრავლება რიცხვზე“ ნიშნავს სტრიქონის ყოველი ელემენტის გამრავლებას ამ რიცხვზე.

§ 1 (5°)-ში ნათქვამის ძალით, ეს დეტერმინანტი უდრის შემდეგ ჯამს;

$$\lambda \begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2} \cdots & a_{i_1k_{r+1}} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_2} \cdots & a_{i_2k_{r+1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i_rk_1} & a_{i_rk_2} \cdots & a_{i_rk_{r+1}} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2} \cdots & a_{i_1k_{r+1}} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_2} \cdots & a_{i_2k_{r+1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{jk_1} & a_{jk_2} \cdots & a_{jk_{r+1}} \end{vmatrix};$$

მაგრამ ორი წინა დეტერმინანტი, იმის გამო, რომ მათში ერთნაირი სტრიქონებია, ან იმის გამო, რომ ისინი (1) ცხრილიდან მიღებული $r+1$ რიგის დეტერმინანტებია, უდრის ნულს.

ამგვარად, (3) დეტერმინანტი ნულის ტოლია. მეორეს მხრით, ძველ ცხრილში და, მაშასადამე, ახალშიც, ისეთი $r$ რიგის დეტერმინანტი გვაქვს, რომელიც ნულიდან განსხვავებულია. მაშასადამე, ახალი ცხრილის რანგი ძველი ცხრილის $r$ რანგის ტოლია.

ცხადია, რომ დამატკიცების მსვლელობა ასეთივე დარჩება მაშინაც, როცა დამატებული სტრიქონი მიღებულია არა ორი, არამედ ნებისმიერი რიცხვის სტრიქონთა კომბინაციით.

თუ სტრიქონებს შევცვლით სვეტებით, მივიღებთ სრულიად ანალოგიურ დებულებას.

შ ე დ ე გ ი. აღვნიშნოთ წინა დებულებების უშუალო შედეგი: თუ ცხრილის ყველა სტრიქონი $r$ სტრიქონის წრფივი კომბინაციაა, და თუ ეს უკანასკნელი შეიცავს $r$ რიგის ნულისაგან განსხვავებულ დეტერმინანტს, მაშინ ცხრილის რანგი უდრის $r$-ს, მართლაც, ცხადია,, რომ ხსენებული $r$ სტრიქონისგან შედგენილი ცხრილის რანგი $r$-ის ტოლია. მაგრამ ეს რანგი უცვლელი რჩება მაშინაც, როცა ამ ცხრილს დავუმატებთ ნებისმიერი რიცხვის ისეთ სტრიქონებს, რომლებიც აღებულ სტრიქონთა წრფივ კომბინაციას წარმოადგენენ.

§ 8. **ნულისაგან განსხვავებულ დეტერმინანტიან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა.** ბოლოს, გავიხსენოთ, თუ როგორ უნდა ამოიხსნას $n$ წრფივ განტოლებათა სისტემა $n$ უცნობით $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

სადაც $a_{11}, \ldots, a_{nn}$, $b_1, \ldots b_n$ მოცემული სიდიდეებია.

ჯერ განვიხილავთ იმ მარტივ შემთხვევას, როცა უცნობთა კოეფიციენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

ნულისაგან განსხვავებულია.

გავამრავლოთ (1) განტოლებანი, შესაბამისად, რიცხვებზე

$$A_{1k},\ A_{2k},\ \ldots,\ A_{nk},$$

ე. ი. $k$ სვეტის $a_{1k},\ a_{2k}\ldots,\ a_{nk}$ ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე, და შევკრიბოთ. ცხადია, მიღებული ტოლობის მარცხენა მხარეში $x_i$ უცნობის კოეფიციენტი იქნება

$$a_{1i}A_{1k}+a_{2i}A_{2k}+\ldots+a_{ni}A_{nk};$$

მაგრამ ეს ჯამი ნულის ტოლია ყოველი $i$-სთვის, გარდა $i=k$ მნიშვნელობისა, როცა იგი $A$-ს ტოლია; იხ. § 1-ის 7 ფორმულა.

მაშასადამე, მარჯვენა მხარეში დარჩება ერთადერთი წევრი $Ax_k$; ამგვარად, მივიღებთ

$$Ax_k=A_{1k}b_1+A_{2k}b_2+\ldots+A_{nk}b_n, \tag{2}$$

საიდანაც

$$x_k=\frac{1}{A}(A_{1k}b_1+A_{2k}b_2+\ldots+A_{nk}b_n). \tag{3}$$

თუ $k$-ს მივცემთ მნიშვნელობებს: $1, 2, \ldots, n$, მივიღებთ ყველა უცნობის საძებნი მნიშვნელობებს. (1) სისტემაში მათი უშუალო ჩასმით დავრწმუნდებით, რომ იგი ნამდვილად დაკმაყოფილდება ნაპოვნი მნიშვნელობით.

(3) ამოხსნა, ცხადია, შეიძლება ასეც გადავწეროთ:

$$x_k=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1}\ldots a_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1}\ldots a_{nn}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n}\\ \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn}\end{vmatrix}} \tag{4}$$

ე. ი. $x_k$ გამოისახება წილადით, რომლის მნიშვნელი (1) სისტემის უცნობთა კოეფიციენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტია, ხოლო მრიცხველი ისეთი დეტერმინანტია, რომელიც მიიღება ამ უკანასკნელისაგან $k$-რი სვეტის $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ელემენტებისაგან შედგენილი სვეტით შეცვლით.

შევნიშნოთ, რომ $x_k$ სიდიდეები მოცემულია $b_1, b_2, \ldots, b_n$ წევრების წრფივი და ერთგვაროვანი სახით; ეს უკანასკნელი უშუალოდ გამომდინარეობს (3) ფორმულიდან.

კერძოდ, თუ $b_1=b_2=\ldots=b_n=0$, მაშინ, როგორც (2), (3), (4) ფორმულები გვიჩვენებენ, გვექნება

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=0.$$

მაშასადამე, თუ $A$ დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ წრფივ და ერთგვაროვან სისტემას:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0,$$

მხოლოდ „ნულოვანი“ ამოხსნა აქვს: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

შემთხვევა, როცა $A = 0$, ქვემოთ იქნება განხილული (§§ 6, 7).

## II. წრფივი ფორმები

**§ 4. ალგებრული ფორმები, წრფივი ფორმები.** რამდენიმე $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადის ალგებრული ფორმა ეწოდება ამ ცვლადთა მთელ რაციონალურ და ერთგვაროვან ფუნქციას. გავიხსენოთ, რომ მთელ რაციონალურ ფუნქციას მაშინ ეწოდება ერთგვაროვანი, როცა ყველა მისი წევრი ერთი და იმავე ხარისხისაა, ან, როგორც ამბობენ, ერთი და იმავე განზომილებისაა. იმ რიცხვს, რომელიც ფორმის თითოეული წევრის ხარისხს (განზომილებას) გვიჩვენებს, ფორმის რიგი ანუ განზომილება ეწოდება.

პირველი რიგის ფორმებს ეწოდება წრფივი ფორმები, მეორე რიგისას კვადრატული და ა. შ.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადების $f$ წრფივ ფორმას შემდეგი სახე აქვს

$$f = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n, \tag{1}$$

სადაც $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ფორმის მუდმივი კოეფიციენტებია. მაგალითად, $3x + 4y + 2z$ წარმოადგენს $x, y, z$ ცვლადების წრფივ ფორმას.

წრფივი ფორმა იგივურად (ე. ი. ცვლადების ყოველგვარი მნიშვნელობისათვის) ნულის ტოლია მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა კოეფიციენტი $a_1, a_2, \ldots, a_n = 0$. მართლაც, თუ $f = 0$ იგივურად, მაშინ თუ, მაგალითად, დავუშვებთ $x_1 = 1$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$, მივიღებთ, რომ $a_1 = 0$; ასევე დავამტკიცებთ დანარჩენი კოეფიციენტების ნულთან ტოლობასაც. პირიქით, თუ ფორმის ყველა კოეფიციენტი უდრის ნულს, მაშინ ცხადია, რომ $f = 0$ იგივურად.

**§ 5. წრფივი ფორმების სისტემა. დამოკიდებული და დამოუკიდებელი წრფივი ფორმები.** განსაკუთრებულ ინტერესს იწვევს რამდენიმე წრფივი ფორმის ერთობლიობის შესწავლა.

ვთქვათ, მოცემულია $m$ წრფივი ფორმა. $f_1, f_2, \ldots, f_m$, რომლებიც განზღვრულია შემდეგი ტოლობებით

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ f_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

კოეფიციენტებს აქ ორი ნიშნაკი აქვთ. პირველი მათგანი გვიჩვენებს ფორმის ნომერს, ხოლო მეორე—ცვლადის ნომერს, რომელზედაც მოცემული კოეფიციენტი მრავლდება.

თუ არსებობს ისეთი $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ რიცხვები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, რომ ადგილი ჰქონდეს იგივეობას [1])

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m = 0, \tag{2}$$

მაშინ $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ფორმებს ეწოდება წრფივად დამოკიდებული ან უბრალოდ, დამოკიდებული ფორმები.

თუ ასეთი $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ რიცხვების მოძებნა არ შეიძლება, გარდა $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$, მაშინ განხილულ ფორმებს წრფივად დამოუკიდებელი ან, უბრალოდ, დამოუკიდებელი ფორმები ეწოდება.

ამ ფორმების ასეთი სახელწოდებანი გასაგებია: თუ ადგილი აქვს (2) იგივეობას და ვიგულისხმებთ, მაგ., $\lambda_m \neq 0$, მაშინ გვექნება

$$f_m = k_1 f_1 + k_2 f_2 + \ldots + k_{m-1} f_{m-1}, \tag{3}$$

სადაც

$$k_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m}, \ldots, \; k_{m-1} = -\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m},$$

ე. ი. $f_m$ წარმოადგენს დანარჩენი ფორმების წრფივ კომბინაციას [2]). ამასთანავე ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $m \geq 2$. წრფივად დამოუკიდებლობისა და დამოკიდებულების განსაზღვრა, რაც (2) ტოლობას ემყარება, გამოსადეგია მხოლოდ ერთი ფორმისთვისაც ($m = 1$); ცხადია, ამ შემთხვევაში ფორმა „წრფივად დამოუკიდებელია“ მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა იგი ნულის ტოლი არ არის იგივურად.

. როგორც მარტივი მაგალითი, მოვიყვანოთ კიდევ ორი ფორმის შემთხვევა:

$f_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$ და $f_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n$.

ახლახან ნათქვამის ძალით, ეს ორი ფორმა დამოკიდებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ადგილი აქვს ერთ-ერთ შემდეგ იგივეობას

$$f_2 = kf_1 \text{ ან } f_1 = k'f_2, \tag{*}$$

სადაც $k$ და $k'$ მუდმივებია. თუ, მაგალითად, ფორმა $f_1$ იგივურად ნული არ არის, მაშინ (*) ტოლობათაგან პირველს აქვს ადგილი. თუ $f_2$ იგივურად ნული არ არის, მაშინ მეორეს აქვს ადგილი. თუ ორივე ფორმა $f_1$ და $f_2$ იგივურად არ უდრის ნულს, მაშინ ადგილი აქვს ორივე ამ ტოლობას [3]).

---

[1]) ე. ი. ისეთ ტოლობას, რომელიც მართებულია $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადების ყოველგვარი მნიშვნელობისთვის.

[2]) $k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}$ სიდიდეებიდან ზოგიერთი (შეიძლება ყველაც) ნულის ტოლი იყოს.

[3]) რადგანაც, პირობის თანახმად, $f_1, f_2$ ფორმები დამოკიდებულია, გვაქვს $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$, სადაც $\lambda_1, \lambda_2$ რაიმე მუდმივებია, რომლებიც ერთდროულად ნულს არ უდრიან. თუ $f_1, f_2$ ფორმებიდან არც ერთი ნულს არ უდრის, მაშინ, ცხადია, $\lambda_1, \lambda_2$ რიცხვებიდანაც არ შეიძლება რომელიმე ნული იყოს და ჩვენ გვექნება ორივე (*) ტოლობა. თუკი, მაგალითად, $f_1$ არ უდრის იგივურად ნულს, ხოლო $f_2$ იგივურად ნულია, მაშინ (*) ტოლობებიდან გვექნება პირველი, სადაც $k = 0$ უნდა ავიღოთ.

იგივეობიდან $f_2=kf_1$, ე. ი. იგივეობიდან $a_{21}x_1+\ldots+a_{2n}x_n=k(a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x)$ გამომდინარეობს

$$a_{21}=ka_{11},\ a_{22}=ka_{12},\ \ldots,\ a_{2n}=ka_{1n}, \qquad (**)$$

ე. ი. $f_2$ ფორმის კოეფიციენტები პროპორციულია $f_1$ ფორმის კოეფიციენტებისა.

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი მნიშვნელოვანი დებულება:

*$f_1, f_2, \ldots, f_m$ ფორმები წრფივად დამოუკიდებელია მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი კოეფიციენტების ცხრილის*

$$\begin{matrix} a_{11}\ a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ldots a_{mn} \end{matrix} \qquad (4)$$

*რანგი უდრის ფორმების რიცხვს, ე. ი. $m$-ს.*

უფრო ზოგადად: თუ (4) ცხრილის რანგი უდრის $r\leq m$, მაშინ მოცემულ

$$f_1, f_2, \ldots, f_m \qquad (5)$$

ფორმებიდან აღებული ნებისმიერი $r+k\ (k=1,2\ldots)$ ფორმა ერთმანეთზე იქნება დამოკიდებული; (5) ფორმებიდან ყოველთვის შეიძლება ავარჩიოთ ერთმანეთისგან დამოუკიდებელი $r$ ფორმა; ყველა დანარჩენი (5) ფორმა იქნება არჩეული $r$ ფორმის წრფივი კომბინაცია.

მართლაც, ვთქვათ, (4) ცხრილის რანგია $r$, ისე რომ ამ ცხრილიდან შედგენილი ერთი $r$ რიგის დეტერმინანტი მაინც განსხვავდება ნულისაგან. ზოგადობის დაურღვეველად, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\ldots a_{1r} \\ a_{21}\ a_{22}\ldots a_{2r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}\ a_{r2}\ldots a_{rr} \end{vmatrix}\neq 0. \qquad (6)$$

(ამისათვის, საჭიროების შემთხვევაში, საკმარისია გადაესვათ ნომრები $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ფორმებში და $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადებში).

დავამტკიცოთ, რომ $f_1, f_2, \ldots, f_r$ დამოუკიდებელი ფორმებია. მართლაც, დაეუშვათ, რომ არსებობს იგივეობა

$$\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\ldots+\lambda_r f_r=0 \qquad (7)$$

ახლა, უფრო დაწვრილებით

$$\begin{aligned} &\lambda_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n)+ \\ &+\lambda_2(a_{21}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{2n}x_n)+ \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+\lambda_r(a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rn}x_n)=0. \end{aligned}$$

ვინაიდან, დაშვების თანახმად, წინა ტოლობა არის იგივეობა, ამიტომ $x_1, x_2, \ldots x_n$ ცვლადების წინ მდგომი კოეფიციენტები ნულის ტოლი უნდა იყოს, ე. ი. უნდა გვქონდეს

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \ldots + \lambda_r a_{r1} = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \ldots + \lambda_r a_{rn} = 0.
\end{aligned}$$

მაგრამ, რადგანაც პირველ $r$ განტოლებაში, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$-ის წინ მდგომი კოეფიციენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი, პირობის თანახმად, ნულისაგან განსხვავებულია [1]), ამიტომ, § 3-ში ნათქვამის ძალით, უნდა გვქონდეს $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0$. მაშასადამე, (7) იგივეობას ადგილი არ შეიძლება ჰქონდეს, თუ ერთი $\lambda_i$ რიცხვი მაინც ნულისაგან განსხვავებულია; ეს კი იმას ამტკიცებს, რომ $f_1, f_2, \ldots, f_r$ ფორმები დამოუკიდებელია.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ყველა დანარჩენი $f_{r+1}, f_{r+2}, \ldots, f_m$ ფორმა იქნება $f_1, f_2, \ldots, f_r$ ფორმების წრფივი კომბინაცია.

ვთქვათ, $f_l$ არის $f_{r+1}, \ldots, f_m$ ფორმათაგან ერთ-ერთი ფორმა. შევადგინოთ დეტერმინანტი

$$D_i = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} \ldots a_{1r} & f_1\\
a_{21} & a_{22} \ldots a_{2r} & f_2\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\\
a_{r1} & a_{r2} \ldots a_{rr} & f_r\\
a_{l1} & a_{l2} \ldots a_{lr} & f_l
\end{vmatrix},$$

რომელიც, როგორც ჩანს, მიღებულია $D$ დეტერმინანტისაგან ერთი სტრიქონისა და ერთი სვეტის დამატებით, და დავამტკიცოთ, რომ იგი იგივურად ნულის ტოლია.

მართლაც, თუ $f_1, f_2, \ldots, f_r$, $f_l$-ის ნაცვლად ჩავსვამთ მათ მნიშვნელობებს, მივიღებთ:

$$D_i = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} \ldots a_{1r} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\\
a_{21} & a_{22} \ldots a_{2r} & a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{r1} & a_{r2} \ldots a_{rr} & a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n\\
a_{l1} & a_{l2} \ldots a_{lr} & a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ln}x_n
\end{vmatrix}.$$

§ 1, 5°-ში ნათქვამის ძალით, წინა დეტერმინანტი შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც შემდეგი $n$ შესაკრების ჯამი:

$$D_i = x_1 \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} \ldots a_{1r} & a_{11}\\
a_{21} & a_{22} \ldots a_{2r} & a_{21}\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\\
a_{l1} & a_{l2} \ldots a_{lr} & a_{l1}
\end{vmatrix} + \ldots + x_n \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} \ldots a_{1r} & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} \ldots a_{2r} & a_{2n}\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
a_{l1} & a_{l2} \ldots a_{lr} & a_{ln}
\end{vmatrix}.$$

[1]) ეს იგივე $D$ დეტერმინანტია, ოღონდ სტრიქონები შეცვლილია სვეტებით.

მაგრამ მარჯვენა მხარეში მყოფი ყველა დეტერმინანტი ნულის ტოლია (იმიტომ, რომ მათში ორი სვეტი ერთი და იგივეა, ან იმიტომაც, რომ ისინი 4) ცხრილიდან, რომლის რანგი $r$-ის ტოლია, მიღებული $r+1$ რიგის დეტერმინანტებია.

ამგვარად, იგივურად გვაქვს:

$$D_i=0.$$

თუ $D_i$ დეტერმინანტს დავშლით უკანასკნელი სვეტის ელემენტების მიხედვით. მივიღებთ:

$$D_i=\lambda_1 f_1\lambda_2 f_2+\ldots+\lambda_r f_r+Df_i,$$

სადაც $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_r$, $D$ იქნება $f_1, f_2, \ldots, f_r$, $f_i$ ელემენტების ალგებრული დამატებანი $D_i$ დეტერმინანტში ($D$-ს აქ იგივე მნიშვნელობა აქვს, რაც ზემოთ).

მაშასადამე, $D_i=0$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$Df_i+\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\ldots+\lambda_r f_r=0; \tag{8}$$

რადგან $D\neq 0$, ამიტომ, გავყოფთ რა მიღებული ტოლობის ორივე მხარეს $D$-ზე (და მუდმივებს აღვნიშნავთ $k_1$, $k_2\ldots k_r$-ით), მივიღებთ

$$f_i=k_1 f_1+k_2 f_2+\ldots+k_r f_r, \tag{8a}$$

ე. ი. $f_i$ ფორმა არის $f_1, f_2, \ldots, f_r$ ფორმების წრფივი კომბინაცია, ეს კი ამტკიცებს ჩვენს დებულებას.

დაგვრჩენია დავამტკიცოთ, რომ $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ფორმათაგან ნებისმიერად შერჩეული $(r+k)$ $(k=1, 2, \ldots)$ ფორმა დამოკიდებული ფორმებია. უკვე ნათქვამის ძალით, ეს თითქმის ცხადია. მართლაც, შერჩეული ფორმების კოეფიციენტთა ცხრილი (4) ცხრილის ნაწილია; ამიტომ მისი რანგი არ შეიძლება ამ ცხრილის რანგზე, ე. ი. $r$-ზე მეტი იყოს. ვთქვათ, $r'\leq r$ ამ ახალი ცხრილის რანგია. მაშინ, ზემონათქვამის ძალით, ჩვენს მიერ შერჩეული ფორმები იქნება მათი რიცხვიდან რომელიმე $r'$ ფორმების წრფივი კომბინაცია, ე. ი. ეს ფორმები დამოკიდებული ფორმებია.

ამგვარად, ჩვენი დებულება საკმაოდ დამტკიცებულია. მისგან გამომდინარეობს ერთი შედეგი, რომელიც აუცილებლად უნდა აღვნიშნოთ: (4) ცხრილის რანგი უდრის ერთმანეთისგან დამოუკიდებელი ფორმების მაქსიმალურ რიცხვს, რომლებიც შეიძლება არჩეული იყოს $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ფორმებიდან.

აღვნიშნოთ, რომ (8) დამოკიდებულება მოკლედ ასე შეიძლება დაიწეროს $D_i=0$, ანუ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1r} & f_1 \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2r} & f_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2}\cdots a_{rr} & f_r \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots a_{ir} & f_i \end{vmatrix}=0. \tag{9}$$

შ ე დ ე გ ი. ზემონათქვამიდან უშუალოდ გამომდინარეობს ერთი შედეგი, რომელიც წარმოადგენს § 2-ის ბოლოში მოყვანილი შედეგის შებრუნებულ შედეგს. სახელდობრ, ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ თუ

$$\begin{matrix} a_{11}\ a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\ a_{m2}\cdots a_{mn} \end{matrix} \tag{4}$$

ცხრილის რანგი უდრის $r$ ($r \leqq m$, $r \leqq n$), მაშინ ნებისმიერი მისი სტრიქონი არის ისეთი ნებისმიერი $r$ სტრიქონის წრფივი კომბინაცია, რომელიც შეიცავს ნულისაგან განსხვავებულ $r$ რიგის დეტერმინანტს.

მართლაც, ვიგულისხმოთ, მაგალითად, რომ პირველ $r$ სტრიქონში არსებობს ნულისაგან განსხვავებული $r$ რიგის დეტერმინანტი. ზოგადობის შეუზღუდველად, შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ ეს არის (6) ფორმულის დეტერმინანტი. თუ გამოვიყენებთ (8a) ფორმულას და შევადარებთ მარჯვენა და მარცხენა მხარეში $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ის წინ მდგომ კოეფიციენტებს, მივიღებთ

$$\begin{aligned} a_{l1} &= k_1 a_{11} + k_2 a_{21} + \cdots + k_r a_{r1}, \\ a_{l2} &= k_1 a_{12} + k_2 a_{22} + \cdots + k_r a_{r2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{ln} &= k_1 a_{1n} + k_2 a_{2n} + \cdots + k_r a_{rn}, \end{aligned} \tag{8b}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $l$-რი სტრიქონის ელემენტების მისაღებად პირველი $r$ სტრიქონი უნდა გავამრავლოთ შესაბამისად, $k_1, k_2, \ldots, k_r$-ზე და შევკრიბოთ. ამით $k_1, k_2, \ldots, k_n$ სიდიდეები სავსებით განისაზღვრება. მართლაც, თუ ყურადღებას მივაქცევთ (8b) დამოკიდებულებათა პირველ $r$ ტოლობას და მათ განვიხილავთ როგორც განტოლებებს $k_1, k_2, \ldots, k_n$ უცნობებით, დავრწმუნდებით, რომ ამ სისტემას მხოლოდ ერთი ამონახსნი აქვს, რადგან $D \neq 0$.

ჩვენ შეგვიძლია (8b) სახის დამოკიდებულებანი მაშინაც დავწეროთ, როცა $r$-ის ნაცვლად ავიღებთ სტრიქონების მეტ რიცხვს, მაგალითად, $s$ სტრიქონს, სადაც $s > r$.

მართლაც, ჩვენ შეგვიძლია, მაგალითად, (8b) დამოკიდებულებების მარჯვენა მხარეებს დავუმატოთ ზედმეტ სტრიქონთა ელემენტები, გამრავლებული ნულზე. მაგრამ, თუ ავიღებთ $s > r$, უკვე აღარ შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ $k_1, k_2, \ldots, k_s$ მამრავლები სავსებით განზღვრული იქნება.

მოვიყვანოთ მარტივი მაგალითი. განვიხილოთ ორი სტრიქონით შედგენილი ცხრილი:

$$\begin{matrix} a_1,\ a_2 \ldots a_n \\ b_1,\ b_2 \ldots b_n \end{matrix} \tag{10}$$

თუ ყველა მეორე რიგის დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix} = a_i b_k - a_k b_i$$

უდრის ნულს, ხოლო პირველი სტრიქონის ერთი ელემენტი მაინც ნულისგან განსხვავებულია, მაშინ გვექნება:

$$b_1 = ka_1,\ b_2 = ka_2, \ldots,\ b_n = ka_n, \tag{11}$$

ე. ი. მეორე სტრიქონის ელემენტები პროპორციულია პირველი სტრიქონის ელემენტებისა[1]). (11) ფორმულები მაშინაც მართებულია, როცა (10) ცხრილის რანგი უდრის ნულს (ე. ი. ყველა მისი ელემენტი უდრის ნულს), მაგრამ მაშინ $k$ განუსაზღვრელი დარჩება.

**§ 6. გამოყენება წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ამოხსნისათვის ზოგად შემთხვევაში.** § 3-ში ჩვენ მოვიყვანეთ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის წესი იმ შემთხვევაში, როცა სისტემის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია.

ახლა უკვე შეიძლება მოვიყვანოთ ამოხსნის წესი უზოგადეს შემთხვევაში. დავიწყოთ ისეთი სისტემით, რომელიც შეიცავს $m$ წრფივ ერთგვაროვან განტოლებას $n$ უცნობით (სადაც $m$ და $n$ შეიძლება სხვადასხვა რიცხვი იყოს):

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\}, \tag{1}$$

ან, მოკლედ,

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0, \ldots,\ f_m = 0, \tag{1a}$$

სადაც

$$f_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \quad (i = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ m). \tag{2}$$

კოეფიციენტთა ცხრილის

$$\begin{array}{llll} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array} \tag{3}$$

რანგი არ შეიძლება $n$-ზე (უცნობთა რიცხვზე) და არც $m$-ზე (განტოლებათა რიცხვზე) მეტი იყოს. თუ ამ ცხრილის რანგი უდრის უცნობთა რიცხვს (ეს შეიძლება მხოლოდ მაშინ, როცა $m \geq n$), მაშინ (1) სისტემას მხოლოდ ერთადერთი ამოხსნა აქვს:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n 0,$$

რომელსაც, სიმოკლისათვის, „ნულოვან“ ამოხსნას ვუწოდებთ. ეს შედეგი გამომდინარეობს § 3-ში ნათქვამიდან, რადგან, თუ (3) ცხრილის რანგი უდრის

[1]) ჩვენ არ შეგვეძლია ვთქვათ, რომ პირველი სტრიქონის ელემენტებიც პროპორციულია მეორე სტრიქონის ელემენტებისა, რომელშიც არ ვიცით არსებობს თუ არა ნულისაგან განსხვავებული ელემენტები.

$n$-ს, მაშინ (3) განტოლებებიდან ყოველთვის შეიძლება ისეთი $n$ განტოლება, ავარჩიოთ, რომლის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია [1]), ასეთი $n$ განტოლება კი შეიძლება დაკმაყოფილებული იყოს მხოლოდ ნულოვანი ამოხსნით.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ თუ (3) ცხრილის რანგი უცნობთა რიცხვზე ნაკლებია, მაშინ (1) სისტემას აქვს არანულოვანი [2]) ამოხსნების უსასრულო სიმრავლე. მართლაც, ვთქვათ, (3) ცხრილის რანგი არის $r$ და, ვთქვათ, $r<n$. თუ გადავსვამთ, საჭიროების შემთხვევაში, განტოლებათა და უცნობთა ნომერაციას, შეგვიძლია ყოველთვის ვიგულისხმოთ, რომ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2r} \\ \\ a_{r1} & a_{r2} \dots a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

მაშინ, წინა პარაგრაფში ნათქვამის ძალით, $f_1, f_2, \dots, f_r$ ფორმები ურთიერთ დამოუკიდებელი იქნებიან, ხოლო ყველა დანარჩენი: $f_{r+1}, f_{r+2}, \dots f_m$ მათი წრფივი კომბინაცია იქნება. მაშასადამე, უცნობთა ყველა ის მნიშვნელობა, რომლებიც აკმაყოფილებენ

$$f_1=0,\ f_2=0, \dots,\ f_r=0 \tag{4}$$

განტოლებებს, ე. ი. (1) სისტემის პირველ $r$ განტოლებას, დააკმაყოფილებს აგრეთვე ყველა დანარჩენ განტოლებასაც [3]).

ამგვარად, ჩვენ უნდა ვიზრუნოთ (1) სისტემის მხოლოდ პირველი $r$ განტოლების ამოხსნისათვის; დანარჩენი განტოლებანი მათი შედეგია. თუ $r$ განტოლებების ამ სისტემას გადავწერთ შემდეგი სახით:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r &= -(a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n) \\ \dots\dots\dots\

ამგვარად, $x_{r+1}, \ldots, x_n$ უცნობები, რომელთა რიცხვი უდრის $(n-r)$, საკმაებით ნებისმიერი რჩება, ხოლო დანარჩენი უცნობები $x_1, x_2, \ldots, x_r$, რომელთა რიცხვია $r$, გამოისახება მათი საშუალებით. § 3-ის (3) ფორმულის ძალით, ადვილი დასანახია, რომ $x_1, x_2, \ldots, x_r$ უცნობები $x_{r+1}, \ldots, x_n$ უცნობებით გამოისახება წრფივი ერთგვაროვანი ფუნქციის სახით.

კერძოდ, თუ განტოლებათა რიცხვი ნაკლებია უცნობთა რიცხვზე (ე. ი. $m < n$), მაშინ რანგი $r \leqq m < n$, და სისტემას ყოველთვის აქვს ამოხსნათა უსასრულო სიმრავლე. შევისწავლოთ, უფრო დაწვრილებით ამოხსნათა განუზღვრელობის ხარისხი. ამისათვის წინასწარ მოვიყვანოთ რამდენიმე შენიშვნა. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს (1) სისტემის რამდენიმე (ვთქვათ, $s$) ამოხსნა:

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(1)}\ x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{(s)}\ x_2^{(s)}, \ldots, x_n^{(s)} \end{array}\right\} \tag{6}$$

(ზედა ნიშნაკი გვიჩვენებს ამოხსნის ნომერს, ხოლო ქვედა, როგორც წინათ, უცნობის ნომერს). ადვილი დასანახია, რომ ამ ამონახსნების ნებისმიერი წრფივი კომბინაცია, აგრეთვე ამონახსნი იქნება; სხვანაირად, თუ

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 x_1^{(1)} + \lambda_2 x_1^{(2)} + \ldots + \lambda_s x_1^{(s)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \lambda_1 x_n^{(1)} + \lambda_2 x_n^{(2)} + \ldots + \lambda_s x_n^{(s)}. \end{array}\right\} \tag{7}$$

სადაც $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ნებისმიერი რიცხვებია, მაშინ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ აგრეთვე ამოხსნა იქნება. ეს გამომდინარეობს (1) განტოლებათა წრფივი და ერთგვაროვანი ხასიათიდან. ნათქვამის მართებულება შეიძლება უშუალო ჩასმით შემოწმდეს.

ამასთან დაკავშირებით, (6) ამონახსნებს ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი (ან, უბრალოდ, დამოუკიდებელი) ამონახსნები, თუ არც ერთი (6) სტრიქონთაგანი არ წარმოადგენს დანარჩენი სტრიქონების წრფივ კომბინაციას. წინააღმდეგ შემთხვევაში ამოხსნები — წრფივად დამოკიდებულია. როცა ჩვენ მხოლოდ ერთ-ერთი ამონახსნი გვაქვს ($s=1$), მაშინ მას ვუწოდებთ „წრფივად დამოუკიდებელს“, თუ $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$ რიცხვებს შორის ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან.

§ 2-ის და § 5-ის შედეგებში ნათქვამიდან გამომდინარეობს: იმისათვის, რომ (6) ამონახსნები წრფივად დამოუკიდებელი იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ (1) ცხრილის რანგი უდრიდეს $s$.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ თუ (3) ცხრილის რანგი უდრის $r$, მაშინ (1) სისტემას $n-r$ დამოუკიდებელი ამონახსნი აქვს.

მართლაც, თუ (5) სისტემას ამოვხსნით $x_1, x_2, \ldots, x_r$-ის მიმართ, მივიღებთ შემდეგი სახის ფორმულებს:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_{11}x_{r+1} + b_{12}x_{r+2} + \ldots + b_{1,n-r}x_n,\\ x_2 &= b_{21}x_{r+1} + b_{22}x_{r+2} + \ldots + b_{2,n-r}x_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_r &= b_{r1}x_{r+1} + b_{r2}x_{r+2} + \ldots + b_{r,n-r}x_n, \end{aligned}\right\} \tag{5a}$$

სადაც $b_{11}$, $b_{12}$ და ა. შ. რაღაც განსაზღვრული მუდმივებია (მათი გამოსახულებების ცოდნას ჩვენთვის მნიშვნელობა არა აქვს), ხოლო $x_{r+1}, \ldots, x_n$ — სავსებით ნებისმიერი სიდიდეებია. (1) სისტემის (5a) ზოგად ამონახსნს შეიძლება უფრო სიმეტრიული სახე მივცეთ, თუ მას ასე დავწერთ:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_{11}\lambda_1 + b_{12}\lambda_2 + \ldots + b_{1,n-r}\lambda_{n-r},\\ x_2 &= b_{21}\lambda_1 + b_{22}\lambda_2 + \ldots + b_{2,n-r}\lambda_{n-r},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_r &= b_{r1}\lambda_1 + b_{r2}\lambda_2 + \ldots + b_{r,n-r}\lambda_{n-r},\\ x_{r+1} &= \lambda_1,\\ x_{r+2} &= \lambda_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n &= \lambda_{n-r}. \end{aligned}\right\} \tag{5b}$$

თუ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}$-ს მივცემთ ყოველგვარ მნიშვნელობას, მივიღებთ (1) სისტემის ყველა ამონახსნს.

რადგანაც $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}$ სავსებით ნებისმიერი სიდიდეებია, ჩვენ შეგვიძლია მათ მივცეთ ნებისმიერი კერძო მნიშვნელობანი და, ამგვარად, მივიღოთ სხვადასხვა კერძო ამოხსნა. შევადგინოთ $n - r$ კერძო ამოხსნა, რომლებიც შეესაბამებიან $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}$-ის შემდეგ კერძო მნიშვნელობებს:

პირველი ამონახსნისათვის: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_{n-r} = 0$;
მეორე „ $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \ldots, \lambda_{n-r} = 0$,
. . . .

ნულისაგან განსხვავებულია. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (1) სისტემის ნებისმიერი ამოხსნა წარმოადგენს (8) ამოხსნების წრფივ კომბინაციას. მართლაც, თუ (8) ცხრილის სტრიქონებს გავამრავლებთ შესაბამისად $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}$-ზე და შევკრებთ, მივიღებთ (5b) ამოხსნას.

ჩვენს მიერ ნაპოვნი (8) ამოხსნები (რიცხვით $n-r$) არ წარმოადგენს რაიმე გამონაკლის შემთხვევას. სახელდობრ, ადვილად შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ თუ გვაქვს რაიმე $n-r$ დამოუკიდებელი ამონახსნი:

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(1)}, \quad x_2^{(1)}, \quad \ldots, x_n^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{(n-r)}, x_2^{(n-r)}, \ldots, x_n^{(n-r)}, \end{array}\right\} \tag{9}$$

მაშინ ჩვენი სისტემის ყოველი ამონახსნი [კერძოდ, ნებისმიერი (8) ამონახსნიც] მათ წრფივ კომბინაციას წარმოადგენს.

მართლაც, უპირველესად შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან (9) ცხრილის სტრიქონები (1) სისტემის ამოხსნებია, ამიტომ (9) ცხრილის ნებისმიერი სტრიქონი წარმოადგენს (8) ცხრილის სტრიქონთა წრფივ კომბინაციას. მაშასადამე, თუ ჩვენ (8) ცხრილს დავუმატებთ (9) ცხრილის ყველა სტრიქონს, მაშინ, 2-ში (შედეგი) ნათქვამის ძალით, ასეთნაირად მიღებული ცხრილის რანგი იქნება აგრეთვე $n-r$. ახლა ვთქვათ, მოცემულია (1) სისტემის რაიმე ამოხსნა: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. თუ ამ ამოხსნასაც დავუმატებთ წინა ცხრილს როგორც სტრიქონს, მაშინ მისი რანგი დარჩება ისევ $n-r$-ის ტოლი, რადგანაც ახალი სტრიქონი წარმოადგენს პირველი $n-r$ სტრიქონის წრფივ კომბინაციას. ამიტომ, § 5-ის შენიშვნის ძალით, ეს უკანასკნელი სტრიქონი იქნება (9) სტრიქონების წრფივი კომბინაცია, რადგანაც ეს სტრიქონები შეიცავს ნულისაგან განსხვავებულ $r$ რიგის დეტერმინანტს [ეს უკანასკნელი გამომდინარეობს (9) ამოხსნების დამოუკიდებლობიდან].

შევაჯამებთ რა ყველა ზემონათქვამს, შეგვიძლია გამოვთქვათ შემდეგი დებულება:

თუ (1) სისტემის რანგი $r$-ის ტოლია, მაშინ ყოველთვის შეიძლება მოვძებნოთ ერთმანეთზე დამოუკიდებელი $n-r$ ამოხსნა; არ არსებობს ამაზე მეტი ერთმანეთზე დამოუკიდებელი ამოხსნები. ნებისმიერი $n-r$ დამოუკიდებელი (9) ამოხსნების საშუალებით შეიძლება შევადგინოთ ყოველი $x_1, \ldots, x_n$ ამონახსნი შემდეგი წრფივი კომბინაციით:

$$\begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 x_1^{(1)} + \lambda_2 x_1^{(2)} + \ldots + \lambda_{n-r} x_1^{(n-r)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \lambda_1 x_n^{(1)} + \lambda_2 x_n^{(2)} + \ldots + \lambda_{n-r} x_n^{(n-r)}. \end{array} \tag{10}$$

შ ე დ ე გ ი: ბოლოს აღვნიშნოთ ერთი უშუალო შედეგი. თუ (1a) სისტემას დავუმატებთ ახალ განტოლებას $f=0$, რომელიც წარმოადგენს (1a) სის-

ტემის შედეგს, ე. ი. ამ სისტემის ყოველი ამოხსნით კმაყოფილდება, მაშინ ამით დამოუკიდებელი ამოხსნების შესაძლო რიცხვი არ შეიცვლება. ამიტომ, $f$ ფორმის კოეფიციენტების სტრიქონით შევსებული (3) ცხრილის რანგი დარჩება უცვლელი, ე. ი. $r$. მაშასადამე, $f$ ფორმა წარმოადგენს $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ფორმების წრფივ კომბინაციას (უფრო მეტიც: წინა ფორმებიდან, მხოლოდ პირველ $r$ ფორმისა $f_1, f_2, \ldots, f_r$; თუკი $f_1, f_2, \ldots, f_r$ წრფივად დამოუკიდებელი ფორმებია).

**§ 6a. კერძო შემთხვევა.** ჩვენთვის განსაკუთრებით საინტერესოა ის შემთხვევა, როცა ცხრილის რანგი $r$ ერთით ნაკლებია უცნობთა რიცხვზე $n$. თუ ამ შემთხვევაში დავწერთ მხოლოდ დამოუკიდებელ განტოლებებს, რომელთა მარცხენა მხარეები წრფივად დამოუკიდებელია (ზოგადობის შეუმცირებლად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ესენია პირველი $n-1$ განტოლება), გვექნება სისტემა

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots \\ \cdot \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \cdots + a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = 0. \end{array}\right\} \quad (1)$$

პირობის თანახმად

$$\begin{array}{lll} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots a_{n-1,n} \end{array} \quad (2)$$

ცხრილის რანგი უდრის $n-1$; ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$A_{n1}, A_{n2}, \ldots, A_{nn} \quad (3)$$

$n-1$ რიგის დეტერმინანტებს შორის, რომლებიც მიღებულია (2) ცხრილში პირველი, მეორე, ..., $n$-რი სვეტების ამოშლით არიან ნულისაგან განსხვავებული. შევთანხმდეთ, რომ (3) დეტერმინანტები განიხილება სათანადო ნიშნებით, სახელდობრ, განვიხილოთ ისინი, როგორც

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (4)$$

დეტერმინანტის უკანასკნელი სტრიქონის ელემენტების ალგებრული დამატებანი (უკანასკნელი სტრიქონი შეიძლება შედგებოდეს ნებისმიერად აღებული ელემენტებისაგან).

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (3) სტრიქონი გვაძლევს (1) სისტემის ერთ-ერთ ამოხსნას; მაგალითად, თუ (1) სისტემის პირველი განტოლების მარცხენა მხარეში $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ის ნაცვლად ჩავსვამთ (3) სიდიდეებს, მივიღებთ:

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1n}A_{1n}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\\ a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n}\end{vmatrix}=0$$

(ვინაიდან ამ დეტერმინანტის ორი სტრიქონი ერთი და იგივეა); ასევე დავრწმუნდებით, რომ აღებული მნიშვნელობებით დანარჩენი განტოლებებიც კმაყოფილდება.

ვინაიდან, გარდა ამისა, (1) სისტემას მხოლოდ ერთი დამოუკიდებელი ამონახსნი შეიძლება ჰქონდეს (რადგან მისი რანგი უდრის $n-1$), ამიტომ ამ სისტემის ყ ო ვ ე ლ ი ამოხსნა მოცემული იქნება ფორმულით

$$x_1=\lambda A_{n1},\ x_2=\lambda A_{n2},\ \ldots,\ x_n=\lambda A_{nn}, \tag{5}$$

სადაც $\lambda$ რაღაც რიცხვია. სხვა სიტყვებით, (1) სისტემის ყოველი ამოხსნა (3) ამოხსნის პროპორციულია.

შ ე დ ე გ ი. თუ (4) დეტერმინანტის რანგი უდრის $n-1$, მაშინ ნებისმიერი სტრიქონის ელემენტების ალგებრული დამატებანი პროპორციულია სხვა სტრიქონის ელემენტების ალგებრული დამატებებისა (თუ მხოლოდ ეს უკანასკნელი ალგებრული დამატებანი ყველა ნულის ტოლი არ არის). მართლაც, შევადგინოთ $n$ განტოლებათა სისტემა

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n&=0\end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

რადგან $A$ დეტერმინანტის რანგი უდრის $n-1$, ამიტომ ერთ-ერთი წინა განტოლება დანარჩენთა შედეგია და ჩვენ შეგვიძლია (6) სისტემიდან ერთი ნებისმიერი განტოლება ამოვშალოთ, მხოლოდ ისეთი, რომ დარჩენილი განტოლებების კოეფიციენტთა ცხრილის რანგი იყოს $n-1$. თუ $k$-რი სტრიქონის ელემენტთა ალგებრული დამატებანი

$$A_{k1},\ A_{k2},\ \ldots,\ A_{kn} \tag{3a}$$

ყველა ნულის ტოლი არ არის, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია ამოვშალოთ $k$-რი განტოლება. მაშინ, ზემონათქვამის თანახმად, (6) სისტემის ყოველი ამონახსნი პროპორციული იქნება (3a) სტრიქონისა [1]).

თუ $i$-ურ სტრიქონის ელემენტთა ალგებრული დამატებებიც

$$A_{i1},\ A_{i2},\ \ldots,\ A_{in} \tag{3b}$$

[1]) ე. ი. მოცემული იქნება ფორმულებით

$$x_1=\lambda A_{k1},\ x_2=\lambda A_{k2},\ \ldots,\ x_n=\lambda A_{kn}.$$

ყველა ნულის ტოლი არ არის, მაშინ ეს სტრიქონიც მოგვცემს (6) სისტემის არანულოვან ამოხსნას და, მაშასადამე, ეს სტრიქონი პროპორციული იქნება (3a) სტრიქონისა, ე. ი.

$$\frac{A_{i1}}{A_{k1}}=\frac{A_{i2}}{A_{k2}}=\ldots=\frac{A_{in}}{A_{kn}} \tag{7}$$

ცხადია, ეს ფორმულა მართებული დარჩება იმ შემთხვევაშიც, როცა ყველა (3b) სიდიდე ნულის ტოლია.

ავარჩიოთ (7)-დან ფარდობათა რომელიმე წყვილი, გვექნება

$$\frac{A_{ir}}{A_{kr}}=\frac{A_{is}}{A_{ks}},$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ (თუ $A$ დეტერმინანტის რანგი $n-1$-ის ტოლია)

$$A_{ir}A_{ks}-A_{kr}A_{is}=0, \tag{8}$$

რომელსაც ადგილი აქვს $i$, $r$, $k$, $s$-ის ყველა მნიშვნელობისათვის. (8) ტოლობანი დამტკიცებულია იმ შემთხვევისათვის, როცა (3a) სიდიდეები ყველა ნულის ტოლი არ არის. მაგრამ, ცხადია, ისინი მართებულია იმ შემთხვევაშიც, როცა ყველა ეს სიდიდე ნულის ტოლია. ძალიან ადვილად შეიძლება (8) ტოლობანი დავიხსომოთ, თუ შევნიშნავთ, რომ ისინი გამოსახავენ შემდეგ დებულებას:

როცა $A=0$, მაშინ

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12}\ldots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}\ldots A_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n1} & A_{n2}\ldots A_{nn} \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტის რანგი არ აღემატება ერთს. მართლაც, როცა $A=0$, მაშინ $A$ დეტერმინანტის რანგი უდრის $n-1$ ან $n-1$-ზე ნაკლებია. პირველ შემთხვევაში თეორემა უკვე დამტკიცებულია: იგი გამომდინარეობს (8)-დან; მეორე შემთხვევაში თეორემა თავისთავად ცხადია, რადგან მაშინ ყველა $A_{ij}=0$.

**§ 7. არაერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ამოხსნა.** გადავდიეართ რა არაერთგვაროვან განტოლებათა სისტემაზე, სიმარტივისათვის განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა განტოლებათა რიცხვი უდრის უცნობთა რიცხვს. ვთქვათ, ეს სისტემა არის

$$\left.\begin{aligned} f_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n&=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

თუ დეტერმინანტი

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ სისტემას აქვს ერთი სავსებით გარკვეული ამონახსნი, რომელიც მიიღება § 3-ის წესით.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა $A=0$ და, მაშასადამე, $A$ დეტერმინანტის რანგი $r$ ნაკლებია $n$-ზე. ვიგულისხმოთ, რომ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

მაშინ, § 5-ში ნათქვამის ძალით, $f_1, f_2, \ldots, f_r$ ფორმები ურთიერთ დამოუკიდებელი იქნება, ხოლო $f_{r+1}, f_{r+2}, \ldots, f_n$ ფორმები — მათი წრფივი კომბინაცია, სახელდობრ, მათთან დაკავშირებული § 5-ის (9) ფორმულებით

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & f_1 \\ a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & f_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & f_r \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lr} & f_l \end{vmatrix} = 0 \ (l=r+1, \ r+2, \ldots, \ n). \qquad (3)$$

რადგან, (1) ტოლობათა ძალით $f_i=b_i$, ამიტომ, იმისათვის, რომ (1) სისტემას ამოხსნა ჰქონდეს, თავისუფალი წევრები $b_i$ უნდა აკმაყოფილებდნენ პირობებს:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & b_r \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lr} & b_l \end{vmatrix} = 0 \ (i=r+1, \ r+2, \ldots, \ n). \qquad (4)$$

თუ (4) პირობები დაცულია, მაშინ, ცხადია, რომ $(n-r)$ განტოლება

$$f_{r+1}=b_{r+1}, \ldots, \ f_n=b_n$$

წარმოადგენს პირველი $r$

$$f_1=b_1, \ f_2=b_2, \ldots, \ f_r=b_r$$

განტოლების შედეგს. თუ ამ უკანასკნელ განტოლებებში $x_{r+1}, \ldots, x_n$ სიდიდეებს დავტოვებთ, როგორც ნებისმიერ უცნობებს, და ამოვხსნით მათ $x_1$,

$x_3, \ldots, x_r$ უცნობების მიმართ, ისე როგორც წინა პარაგრაფში, მივიღებთ ამოხსნების უსასრულო სიმრავლეს [ვინაიდან $n-r$ უცნობი ნებისმიერი რჩება].

ამგვარად, როცა $A=0$, მაშინ არაერთგვაროვან სისტემას ან სრულებით არა აქვს ამოხსნა [როცა (4) პირობები დაცული არ არის] ან აქვს ამოხსნების უსასრულო სიმრავლე [როცა დაცულია (4) პირობები].

თუ განტოლებათა რიცხვი ნაკლებია უცნობთა რიცხვზე, მაშინ ეს შემთხვევა ყოველთვის შეიძლება დავიყვანოთ წინა შემთხვევაზე, თუ მოცემულ განტოლებებს დავუმატებთ: $0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=0$ სახის განტოლებათა საჭირო რიცხვს, რომლებიც დაკმაყოფილებული არიან იგივურად და არავითარ გავლენას არ ახდენენ მოცემულ სისტემაზე.

**§ 8. წრფივი ჩასმები.** თუ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადების ნაცვლად შემოღებულია ახალი $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ ცვლადები, რომლებიც ძველი ცვლადების წრფივი ფორმებია, ე. ი. თუ

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \mu_{11}x_1+\mu_{12}x_2+\ldots+\mu_{1n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= \mu_{n1}x_1+\mu_{n2}x_2+\ldots+\mu_{nn}x_n \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

მაშინ ამბობენ, რომ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადებზე მოხდენილია წრფივი ერთგვაროვანი ჩასმა, ანუ წრფივი ერთგვაროვანი გარდაქმნა ცხრილით:

$$\begin{matrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \ldots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \ldots & \mu_{2n} \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \ldots & \mu_{nn} \end{matrix} \tag{2}$$

თუ დეტერმინანტი

$$M=\begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \ldots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \ldots & \mu_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \ldots & \mu_{nn} \end{vmatrix} \tag{3}$$

ნულის ტოლია, მაშინ, როგორც წინა პარაგრაფიდან ვიცით, (1) ფორმულების მარჯვენა ნაწილი დამოკიდებულია ერთმანეთზე და, მაშასადამე, გვექნება შემდეგი სახის დამოკიდებულება:

$$\lambda_1x_1'+\ldots+\lambda_nx_n'=0,$$

სადაც $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ რაღაც მუდმივებია, რომლებიც ყველა ერთდროულად არ უდრის ნულს.

ამგვარად, ამ შემთხვევაში ახალი ცვლადები არ შეიძლება ერთმანეთზე დამოუკიდებელი იყოს. ამ შემთხვევაში, ე. ი. როცა $M=0$, ჩასმას განკუთრი ჩასმა ეწოდება.

ასევე ჩასმას **არაგანკუთრი** ეწოდება, თუ $M \neq 0$. შემდეგში ჩვენ **განვიხილავთ მხოლოდ არაგანკუთრ ჩასმებს.**

ამ შემთხვევაში შეგვიძლია ნებისმიერად აღებულ $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ ცვლადებისათვის ამოვხსნათ (1) სისტემა ძველი $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადების მიმართ და გამოვსახოთ ისინი ახალი ცვლადებით. სახელდობრ, § 3-ში ნათქვამის ძალით, მივიღებთ შემდეგი სახის ფორმულებს:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \lambda_{11}x_1' + \ldots + \lambda_{1n}x_n', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \lambda_{n1}x_1' + \ldots + \lambda_{nn}x_n', \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ე. ი. ძველი ცვლადებიც ახლის საშუალებით მიიღება წრფივი ერთგვაროვანი ჩასმით. ადვილი გამოსათვლელია აგრეთვე

$$\begin{matrix} \lambda_{11} \ldots \lambda_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{n1} \ldots \lambda_{nn} \end{matrix} \tag{5}$$

ცხრილის ელემენტები § 3-ში ნათქვამის მიხედვით.

ცხადია, ამ ჩასმის დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_{11} \ldots \lambda_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{n1} \ldots \lambda_{nn} \end{vmatrix} \tag{6}$$

განსხვავდება ნულისაგან, ვინაიდან უამისოდ (4) ტოლობათა მარჯვენა მხარეები დამოკიდებული ფორმები იქნებოდა, ეს კი გამოიწვევდა $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადების ურთიერთ დამოკიდებულებას, რაც არ შეიძლება, რადგან ისინი დამოუკიდებელი ცვლადებია.

ის გარემოება, რომ $\Delta \neq 0$, გამომდინარეობს აგრეთვე შემდეგი ტოლობიდან:

$$\Delta \cdot M = 1, \tag{7}$$

რომლის დამტკიცებას ვანდობთ მკითხველს.

ახლა განვიხილოთ $n$ წრფივი ფორმა

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n &= a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

ანუ, მოკლედ:

$$f_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

მოვახდინოთ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადების გარდაქმნა (4) ჩასმით; მაშინ (8) ფორმები გადაიქცევა ახალი ცვლადებით გამოსახულ ფორმებად:

$$f_i' = a_{i1}'x_1' + \ldots + a_{in}'x_n'. \tag{9}$$

$f_i'$ ასოთი ჩვენ აღვნიშნავთ იმ ფორმას, რომელიც მიღებულია $f_i$ ფორმისაგან $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადების შეცვლით მათი (4) გამოსახულებებით, ისე, რომ განსაზღვრის თანახმად, გვაქვს იგივეობა

$$f_i' = f_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \tag{10}$$

სადაც მარჯვენა მხარეში $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადების ნაცვლად უნდა ვიგულისხმოთ მათი (4) გამოსახულებანი.

ადვილად შეიძლება გარდაქმნილი (9) ფორმების $a_{ik}'$ კოეფიციენტების გამოთვლა.

მართლაც, თუ (10)-ის მარჯვენა მხარეში $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ის ნაცვლად ჩავსვამთ მათ (4) მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$\begin{aligned} f_i' = {} & a_{i1}(\lambda_{11}x_1' + \lambda_{12}x_2' + \ldots + \lambda_{1n}x_n') + \\ & + a_{i2}(\lambda_{21}x_1' + \lambda_{22}x_2' + \ldots + \lambda_{2n}x_n') + \\ & \ldots\ldots \\ & + a_{in}(\lambda_{n1}x_1' + \lambda_{n2}x_2' + \ldots + \lambda_{nn}x_n'). \end{aligned}$$

კოეფიციენტი $a_{ik}'$ უდრის $x_k'$ ცვლადის კოეფიციენტს წინა ფორმის მარჯვენა მხარეში. მაშასადამე,

$$a_{ik}' = a_{i1}\lambda_{1k} + a_{i2}\lambda_{2k} + \ldots + a_{in}\lambda_{nk} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}\lambda_{sk}. \tag{11}$$

ამ ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ ცხრილი

$$\begin{matrix} a_{11}', a_{12}', \ldots, a_{1n}' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}', a_{n2}', \ldots, a_{nn}' \end{matrix} \tag{12}$$

მიღებულია

$$\begin{matrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{matrix} \quad \text{და} \quad \begin{matrix} \lambda_{11} \ldots \lambda_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_{n1} \ldots \lambda_{nn} \end{matrix}$$

ცხრილებიდან პირველის სტრიქონების გამრავლებით მეორის სვეტებზე (§ 1). ამიტომ დეტერმინანტი

$$A' = \begin{vmatrix} a_{11}' \ldots a_{1n}' \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}' \ldots a_{nn}' \end{vmatrix} \tag{13}$$

წარმოადგენს $A$ და $\Lambda$ დეტერმინანტების ნამრაელს, და ჩვენ ვღებულობთ შემდეგ მნიშვნელოვან ფორმულას:

$$\Delta' = \Delta \cdot \Lambda. \tag{14}$$

ახლა შევნიშნოთ შემდეგი მნიშვნელოვანი გარემოება.

თუ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ფორმებიდან აღებული რამდენიმე ფორმა დამოკიდებული ფორმებია, მაშინ მათი გარდაქმნით მიღებული ფორმებიც ერთმანეთზე დამოკიდებული იქნება. დამოუკიდებელ ფორმათა გარდაქმნით მიღებული ფორმები კი აგრეთვე დამოუკიდებელი იქნებიან.

მართლაც, თუ გვაქვს იგივეობა:

$$\lambda_i f_i + \lambda_k f_k + \ldots + \lambda_l f_l = 0, \tag{*}$$

მაშინ (4) გარდაქმნის შემდეგ იგი მიიღებს სახეს

$$\lambda_i f_i' + \lambda_k f_k' + \ldots + \lambda_l f_l' = 0. \tag{**}$$

პირიქით, (**) იგივეობიდან გამომდინარეობს (*). აქედან კი გამომდინარეობს ჩვენი დებულება.

მეორეს მხრით,

$$\begin{matrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{matrix} \qquad \text{და} \qquad \begin{matrix} a_{11}' \ldots a_{1n}' \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}' \ldots a_{nn}' \end{matrix}$$

ცხრილების რანგები განისაზღვრება უდიდესი რიცხვებით იმ დამოუკიდებელი ფორმებისა, რომლებიც შეიძლება ავარჩიოთ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ან, შესაბამისად, $f_1', f_2', \ldots, f_n'$ ფორმებიდან. მაგრამ, ახლახან დამტკიცებულის ძალით, ეს რიცხვები ერთმანეთის ტოლია. მაშასადამე, წინა ცხრილების რანგები ერთი და იგივეა.

რადგან (5) ცხრილი სავსებით ნებისმიერად შეიძლება იქნას აღებული მხოლოდ იმ პირობით, რომ შესაბამისი დეტერმინანტი $\Lambda$ ნულისაგან განსხვავებული იყოს, ამიტომ ჩვენ ვღებულობთ შემდეგ მნიშვნელოვან დებულებას.

თუ მოცემულ ცხრილს

$$a_{11} \ldots a_{1n}$$

$$a_{n1} \ldots a_{nn}$$

გავამრავლებთ ნებისმიერ ცხრილზე:

$$\lambda_{11} \ldots \lambda_{1n}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_{n1} \ldots \lambda_{nn},$$

რომლის შესაბამისი დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ მიღებულ ცხრილს

$$a_{11}' \dots a_{1n}'$$
$$\dots\dots\dots$$
$$a_{n1}' \dots a_{nn}'$$

იგივე რანგი ექნება, რაც მოცემულ ცხრილს.

ეს დებულება ჩვენ დავამტკიცეთ პირველი ცხრილის სტრიქონების გამრავლებით მეორე ცხრილის სვეტებზე. მაგრამ ცხადია, რომ დებულება მართებულია ცხრილების სხვა წესებით გამრავლების დროსაც (სტრიქონებისა სტრიქონებზე, სვეტებისა სვეტებზე). დამტკიცებისათვის საკმარისია გამოსავალ დეტერმინანტებში ორივეს ან ერთ-ერთს) სტრიქონებსა და სვეტებს შეეუცვალოთ როლები.

**§ 9. წრფივი ჩასმების მიმდევრობა.** ვთქვათ, $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადებზე მოხდენილია ჩასმა

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \mu_{11}x_1 + \dots + \mu_{1n}x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' &= \mu_{n1}x_1 + \dots + \mu_{nn}x_n, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ხოლო $x_1', \dots, x_n'$ ცვლადებზე, თავის მხრივ, სხვა ჩასმა

$$\begin{aligned} x_1'' &= \mu_{11}'x_1' + \dots + \mu_{1n}'x_n', \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n'' &= \mu_{n1}'x_1' + \dots + \mu_{nn}'x_n'. \end{aligned} \tag{2}$$

შევიტანოთ უკანასკნელ ფორმულებში $x_1', \dots, x_n'$ ცვლადების ნაცვლად მათი (1) გამოსახულებანი, ცხადია, მივიღებთ, რომ $x_1'', \dots x_n''$ სიდიდეები თავიდან აღებულ სიდიდეებთან დაკავშირებულია აგრეთვე წრფივი ჩასმით:

$$\begin{aligned} x_1'' &= \mu_{11}''x_1 + \mu_{12}''x_2 + \dots + \mu_{1n}''x_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n'' &= \mu_{n1}''x_1 + \mu_{n2}''x_2 + \dots + \mu_{nn}''x_n, \end{aligned} \tag{3}$$

რომელიც გამოსახავს მიმდევრობით ჩატარებული (1) და (2) ჩასმის შედეგს. ადვილი დასანახია, რომ

$$\mu_{ik}'' = \sum_{s=1}^{n} \mu_{is}'\mu_{sk}. \tag{4}$$

დეტერმინანტების გამრავლების წესის თანახმად, აქედან გამომდინარეობს, რომ (3) ჩასმის დეტერმინანტი $M''$ უდრის (1) და (2) ჩასმების $M$ და $M'$ დეტერმინანტების ნამრავლს:

$$M'' = M \cdot M'. \tag{5}$$

თუ, როგორც ჩვენ ყოველთვის ვგულისხმობთ, (1) და (2) ჩასმები არაგანკუთრია, ე. ი. $M \neq 0$, $M' \neq 0$, მაშინ, წინა ტოლობის ძალით, $M'' \neq 0$.

ამგვარად, ორი არაგანკუთრი ჩასმის შედეგი არის აგრეთვე არაგანკუთრი ჩასმა.

## III. ორადწრფივი და კვადრატული ფორმები

**§ 10. ორადწრფივი და კვადრატული ფორმები.** განვიხილოთ ცვლადთა ორი მიმდევრობა (თითოეული $n$ ცვლადით)

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

ამ ცვლადების ორადწრფივი ფორმა ეწოდება ისეთ მთელ რაციონალურ ფუნქციას, რომელიც წრფივი და ერთგვაროვანია თითოეული მიმდევრობის ცვლადთა მიმართ. ამგვარად, ორადწრფივი ფორმა არის $y_i$, $x_j$ სახის წევრებისა და მუდმივი კოეფიციენტების ნამრავლთა ჯამი. კოეფიციენტებს აღვნიშნავთ ერთი ასოთი ორი ნიშნაკით, მაგალითად, $a_{ij}$; პირველი ნიშნაკი უჩვენებს სათანადო წევრში შემავალ $y_i$ ცვლადის ნომერს, ხოლო მეორე—$x_j$ ცვლადის ნომერს. თუ მოცემულ ორადწრფივ ფორმას აღვნიშნავთ $\Omega(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ან, უბრალოდ $\Omega$-თი, გვექნება

$$\begin{aligned}\Omega = {} & a_{11}y_1x_1 + a_{12}y_1x_2 + \ldots + a_{1n}y_1x_n + \\ & + a_{21}y_2x_1 + a_{22}y_2x_2 + \ldots + a_{2n}y_2x_n + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{n1}y_nx_1 + a_{n2}y_nx_2 + \ldots + a_{nn}y_nx_n,\end{aligned} \tag{1}$$

ან, მოკლედ:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_ix_j, \tag{1a}$$

ან კიდევ

$$\Omega = y_1\Omega_1 + y_2\Omega_2 + \ldots + y_n\Omega_n = \sum_{i=1}^{n} y_i\Omega_i, \tag{2}$$

სადაც

$$\Omega_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n) \tag{3}$$

აღნიშნავს $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადთა წრფივ ფორმებს.

ორადწრფივი ფორმის მაგალითს წარმოადგენს $\overline{P} = (x, y, z)$ და $\overline{P'} = (x', y', z')$ ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი, რომელიც მართკუთხოვან კოორდინატებში უდრის

$$xx' + yy' + zz',$$

და, მაშასადამე, წარმოადგენს ორი

$$x, y, z \text{ და } x', y', z'$$

მიმდევრობის ცვლადთა (მოცემული ვექტორების კოორდინატთა) ორადწრფივ ფორმას (აღებულ შემთხვევაში $n=3$).

თუ

$$a_{ij} = a_{ji}, \tag{4}$$

ე. ი. თუ $y_i x_j$ და $y_j x_i$ წევრებთან კოეფიციენტები ერთი და იგივეა, მაშინ ორადწრფივ ფორმას სიმეტრიული ეწოდება. სიმეტრიული ორადწრფივი ფორმა არ იცვლება, თუ $x_i$ და $y_i$ ცვლადებს ადგილებს შევუცვლით. ზემომოყვანილი სკალარული ნამრავლის გამოსახულება წარმოადგენს სიმეტრიულ ორადწრფივ ფორმას.

თუ სიმეტრიულ ორადწრფივ ფორმაში $\Omega$ დავუშვებთ, რომ

$$x_1 = y_1,\ x_2 = y_2, \ldots,\ x_n = y_n,$$

მაშინ იგი გადაიქცევა კვადრატულ ფორმად, რომელსაც ჩვენ აღვნიშნავთ $\Phi$-თი:

$$\begin{aligned} \Phi = {} & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + a_{n3}x_nx_3 + \ldots + a_{nn}x_n^2. \end{aligned} \tag{5}$$

აქ მარჯვენა მხარეში არიან ისეთი წევრები, რომლებიც ერთმანეთის თანატოლია; სახელდობრ, (4) პირობის თანახმად, $a_{ij}x_ix_j$ და $a_{ji}x_jx_i$ სახის წევრები ერთმანეთის ტოლია და ჯამში გვაძლევს $2a_{ij}x_ix_j$. ამგვარად, (5) გამოსახულების მაგივრად შეიძლება დავწეროთ (პირველ სტრიქონში ამოწერილია დიაგონალური წევრები, რომლებიც შეიცავენ ცვლადების კვადრატებს)

$$\begin{aligned} \Phi = {} & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 \\ & + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + 2a_{23}x_2x_3 + \ldots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + 2a_{n-1,\,n}x_{n-1}x_n \end{aligned} \tag{6}$$

იმის მაგივრად, რომ $x_ix_j$ წევრის კოეფიციენტი აღვნიშნოთ $2a_{ij}$, ჩვენ შეგვეძლო გვეხმარა უბრალოდ აღნიშნა $a_{ij}$, მაგრამ მაშინ მივიღებდით ნაკლებად სიმეტრიული სახის ფორმულებს.

(5) ფორმულა შეიძლება მოკლედ გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{5a}$$

ანუ

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} x_i \Phi_i, \tag{7}$$

სადაც, აღნიშვნების ერთნაირობისათვის, $\Phi_i$-ით აღნიშნული გვაქვს ის ფორმები, რომლებიც ზემოთ აღნიშნული იყო $\Omega_i$-ით, ე. ი.

$$\Phi_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j. \tag{8}$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$\Phi_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \tag{8a}$$

მაშასადამე, (7) ტოლობა შეიძლება ასეც გადაიწეროს:

$$2\Phi = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \tag{7a}$$

ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველ (5) კვადრატულ ფორმას შეიძლება ყოველთვის შევუსაბამოთ ორადწრფივი ფორმა

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} y_i \Phi_i = \frac{1}{1} \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \tag{9}$$

$\Omega$ ორადწრფივ ფორმას ეწოდება პ ო ლ ა რ უ ლ ი ფორმა $\Phi$ კვადრატული ფორმის მიმართ

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \tag{10}$$

დეტერმინანტს, რომელიც ნაჩვენები წესით შედგენილია $\Phi$ კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებისაგან, ეწოდება მ ი ს ი დ ი ს კ რ ი მ ი ნ ა ნ ტ ი. (4) ტოლობის ძალით, კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტი სიმეტრიული დეტერმინანტია.

$A$ დეტერმინანტს ეწოდება აგრეთვე $\Omega$ ორადწრფივი ფორმის დისკრიმინანტიც ($\Omega$ ფორმის როგორც სიმეტრიულობის, ისე არასიმეტრიულობის შემთხვევაში).

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ცხადია, რომ თუ არასიმეტრიულ ორადწრფივ ფორმაში დავუშვებთ $x_i = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, მივიღებთ აგრეთვე კვადრატულ ფორმას-

მაგრამ მაშინ $x_iy_j$ წევრის კოეფიციენტი იქნება არა $2a_{ij}$ ან $2a_{ji}$, არამედ $(a_{ij}+a_{ji})$ ჯამი. ამის გამო, ცხადია, რომ შეიძლება მოიძებნოს უსასრულო სიმრავლე ისეთი ორადწრფივი ფორმებისა, რომლებიც, როცა $x_i=y_i$, გადაიქცევა მოცემულ კვადრატულ ფორმად. მაგრამ, როგორც ვნახეთ, არსებობს მხოლოდ ერთადერთი სიმეტრიული ფორმა, რომელსაც ეს თვისება აქვს. ეს ფორმა არის (9) ფორმულით განსაზღვრული პოლარი ფორმა.

**§ 11. კვადრატული ფორმების გარდაქმნა.** ვთქვათ, მოცემულია კვადრატული ფორმა

$$\Phi=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \tag{1}$$

და ვთქვათ, $x_i$ ცვლადების მაგიერ შემოღებულია ახალი $x_i'$ ცვლადები შემდეგი წრფივი ერთგვაროვანი ჩასმით (§ 8):

$$x_i=\sum_{k=1}^{n}\lambda_{ik}x_k' \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{2}$$

მაშინ, ცხადია, $\Phi$ ფორმა გადაიქცევა ახალ $x_i'$ ცვლადთა $\Phi'$ ფორმად:

$$\Phi'=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}'x_i'x_j'. \tag{3}$$

გარდაქმნილი ფორმის $a_{ij}'$ კოეფიციენტები რომ გამოვთვალოთ, საკმარისია (1) გამოსახულების მარჯვენა მხარეში ჩავსვათ (2) გამოსახულებანი და მსგავსი წევრები შევკრიბოთ. მიუხედავად იმისა, რომ ეს ოპერაცია არაკითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს, ჩვენ მაინც მოვიყვანთ ამ გარდაქმნის შემდეგ ორ წესს. განვიხილოთ $\Phi$ ფორმის პოლარი, ფორმა $\Omega$:

$$\Omega=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_ix_j=\sum_{i=1}^{n}y_i\Phi_i, \tag{4}$$

სადაც, როგორც ყოველთვის,

$$\Phi_i=a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j. \tag{5}$$

$\Omega$ ფორმიდან წინასწარ მივიღოთ $\Phi'$ ფორმის პოლარი, ფორმა $\Omega'$, რისთვისაც საკმარისია (4) ტოლობის მარჯვენა მხარეში $x_i$ ცვლადების ნაცვლად ჩავსვათ (2) გამოსახულებანი, და $y_i$ ცვლადებზე ვაწარმოოთ ისეთივე სახის ჩასმა, ე. ი.

$$y_i=\sum_{k=1}^{n}\lambda_{ik}y_k'. \tag{2a}$$

თუ ამის შემდეგ მიღებულ შედეგში დავუშვებთ $y_i'=x_i'\,(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, ცხადია, მივიღებთ $\Phi'$ ფორმას.

ცხადია, რომ Ω ფორმის გარდაქმნა Ω′ ფორმად შეიძლება ვაწარმოოთ ორ საფეხურად: პირველად გარდავქმნათ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადები და შემდეგ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ცვლადები.

ამგვარად, შევცვალოთ ჯერ (4)-ის მარჯვენა მხარეში $x_i$ ცვლადები (2) ვამოსახულებებით. მაშინ Ω გადაიქცევა $x_1', \ldots, x_n', y_1, \ldots, y_n$ ცვლადების ფორმად:

$$\Omega'' = y_1\Phi_1'' + y_2\Phi_2'' + \ldots + y_n\Phi_n'' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a''_{ij}y_i x_j', \tag{6}$$

სადაც $\Phi_1''$, $\Phi_2''$, $\ldots$, $\Phi_n''$ აღნიშნავს წრფივ ფორმებს

$$\Phi_i'' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}''x_j', \tag{7}$$

რომლებიც მიღებულია (5) ფორმებიდან $x_1, \ldots, x_n$ ცვლადების შეცვლით (2) გამოსახულებებით.

§ 8-ის (11) ფორმულების ძალით, $a_{ij}''$ კოეფიციენტები მოცემულია შემდეგი ფორმულებით [1]):

$$a_{ij}'' = \sum_{s=1}^{n} a_{is}\lambda_{sj} \tag{8}$$

და, იმავე § 8-ის ძალით, Ω″ ორადწრფივი ფორმის დისკრიმინანტი, ე. ი. დეტერმინანტი

$$A'' = \begin{vmatrix} a_{11}'' & a_{12}'' & \ldots & a_{1n}'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}'' & a_{n2}'' & \ldots & a_{nn}'' \end{vmatrix},$$

მოცემულია ფორმულით

$$A'' = A \cdot \Lambda, \tag{9}$$

სადაც $A$ არის Ω ფორმის (ანუ გამოსავალი Φ ფორმის) დისკრიმინანტი, ხოლო Λ—(2) ჩასმის დეტერმინანტი.

ახლა მოვახდინოთ Ω′′ ფორმაში (2a) ჩასმა, მივიღებთ საძიებელ ფორმას:

$$\Omega' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i'y_j',$$

სადაც $a_{ij}$ კოეფიციენტები გამოისახება $a_{ij}''$ კოეფიციენტებით იმის ანალოგიური ფორმულებით, რომლითაც გამოსახული იყო $a_{ij}''$ კოეფიციენტები გამოსავალი ფორმის კოეფიციენტებით.

ამ ფორმულებს ჩვენ აქ არ ამოვწერთ, აღვნიშნავთ მხოლოდ შემდეგ მნიშვნელოვან გარემოებას.

[1]) აქ $a_{ik}'$ კოეფიციენტთა როლს ასრულებენ $a_{ij}''$.

(9) ფორმულის ანალოგიურად, ცხადია, გვექნება:

$$A' = A'' \Lambda,$$

სადაც $A'$ არის $\Omega'$ ფორმის დისკრიმინანტი, ისე რომ

$$A' = A\Lambda^2. \tag{10}$$

მაშასადამე, გარდაქმნილი ფორმის დისკრიმინანტი ტოლია გამოსავალი ფორმის დისკრიმინანტისა და ჩასმის დეტერმინანტის კვადრატის ნამრავლისა.

გარდა ამისა, ჩვენ ვიცით (§ 8), რომ $A''$ და $A$ დეტერმინანტების რანგი ერთი და იგივეა; სრულიად ასევე $A'$ და $A''$ დეტერმინანტების რანგი ერთი და იგივეა, და ამიტომ $A$ და $A'$ დეტერმინანტებსაც ერთნაირი რანგი ექნება.

ამგვარად, ჩვენ ვღებულობთ ძირითადი მნიშვნელობის შემდეგ დებულებას: კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტი უცვლელი რჩება ცვლადთა წრფივი და ერთგვაროვანი გარდაქმნის დროს (იგულისხმება, რომ საკითხი ეხება არაგანკუთრ გარდაქმნას).

დაეუმატოთ ამას კიდევ შემდეგი შენიშვნა. არ უნდა ვიფიქროთ, რომ

$$\Phi_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j' = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_i'}{\partial x_i'}, \tag{11}$$

წრფივი ფორმები, რომლებიც გარდაქმნილ $\Phi'$ ფორმასთან ისეევა დაკავშირებული, როგორც $\Phi_i$ ფორმები — გამოსავალ $\Phi$ ფორმასთან, მიიღება ცვლადთა უბრალო (2) გარდაქმნით. მოვძებნოთ დამოკიდებულება $\Phi_i$ და $\Phi_i'$ ფორმებს შორის.

$\Omega$ და $\Omega'$ ფორმების განსაზღვრიდან გვაქვს:

$$\Omega' = \Omega,$$

სადაც წინა ტოლობა წარმოადგენს იგივეობას, თუ მარჯვენა მხარეში $x_i$ და $y_i$ ცვლადების ნაცვლად ვიგულისხმებთ მათ (2) და (2a) გამოსახულებებს. წინა ტოლობა შეიძლება გადავწეროთ ასე:

$$y_1'\Phi_1' + y_2'\Phi_2' + \ldots + y_n'\Phi_n' = y_1\Phi_1 + y_2\Phi_2 + \ldots + y_n\Phi_n, \tag{12}$$

თუ მარჯვენა მხარეში $y_i$ ცვლადების ნაცვლად ჩავსვამთ მათ (2a) გამოსახულებებს $y_i'$ ცვლადებით, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} y_1'\Phi_1' + y_2'\Phi_2' + \ldots + y_n'\Phi_n' = {} & (\lambda_{11}y_1' + \lambda_{12}y_2' + \ldots + \lambda_{1n}y_n')\Phi_1 + \\ & + (\lambda_{21}y_1' + \lambda_{22}y_2' + \ldots + \lambda_{2n}y_n')\Phi_2 + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (\lambda_{n1}y_1' + \lambda_{n2}y_2' + \ldots + \lambda_{nn}y_n')\Phi_n. \end{aligned}$$

ეს ტოლობა წარმოადგენს იგივეობას, თუ მარჯვენა მხარეში $x_i$ ცვლადების ნაცვლად ვიგულისხმებთ მათ გამოსახულებებს $x_i'$ ცვლადებით.

თუ შევადარებთ ტოლობის ორივე მხარეში $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ ცვლადების კოეფიციენტებს, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\Phi_i' = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \Phi_i. \tag{13}$$

ამგვარად, $\Phi_i'$ ფორმები წარმოადგენენ $\Phi_i$ ფორმების წრფივ და ერთგვაროვან კომბინაციას, თუ ამ უკანასკნელ ფორმებში $x_i$ ცვლადების მაგივრად ვიგულისხმებთ მათ (2) გამოსახულებებს.

შევუცვლით რა როლებს ძველ და ახალ კოორდინატებს, იმავე წესით დავრწმუნდებით, რომ $\Phi_i$ ფორმებიც წარმოადგენენ $\Phi_i'$ ფორმების წრფივ კომბინაციას. ეს იქიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\lambda_{ij}$ კოეფიციენტებისგან შედგენილი დეტერმინანტი, თანახმად ჩვენი დაშვებისა, ნულისაგან განსხვავებულია და, მაშასადამე, (13) ტოლობანი შეიძლება ამოვხსნათ $\Phi_i$ სიდიდეების მიმართ.

აქედან გამომდინარეობს ერთი ცხადი შედეგი: თუ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადების მოცემული მნიშვნელობანი აკმაყოფილებენ განტოლებებს:

$$\Phi_1 = 0, \ \Phi_2 = 0, \ldots, \ \Phi_n = 0, \tag{14}$$

მაშინ მათი შესაბამისი $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ მნიშვნელობანი დააკმაყოფილებენ განტოლებებს

$$\Phi_1' = 0, \ \Phi_2' = 0, \ldots, \ \Phi_n' = 0. \tag{15}$$

სხვა სიტყვებით, მიუხედავად იმისა, რომ $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ ფუნქციები (2) ჩასმით უშუალოდ არ დადიან $\Phi_1', \Phi_2', \ldots, \Phi_n'$ ფუნქციებში, (14) განტოლებათა სისტემა მაინც გადადის ეკვივალენტურ (15) სისტემაში (და პირიქით).

**§ 12. კვადრატული ფორმის დაყვანა კანონიკურ სახეზე.** ახლა გადავიდეთ წრფივი ჩასმით კვადრატული ფორმის

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{1}$$

გამარტივების საკითხზე. სახელდობრ, დავამტკიცოთ, რომ ყოველი კვადრატული ფორმა $\Phi$ (არაგანკუთრი) წრფივი ჩასმით

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_j' \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

შეიძლება დავიყვანოთ „კანონიკურ“ სახეზე

$$\Phi' = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \ldots + \lambda_r x_r'^2, \tag{3}$$

სადაც ცვლადების მხოლოდ კვადრატები შედიან; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ ნულისაგან განსხვავებული მუდმივებია.

უნდა შევნიშნოთ, რომ თუ მოცემული ფორმის კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ ჩასმის კოეფიციენტებიც შეიძლება ნამდვილი რიცხვები ავიღოთ; ცხადია, ამ შემთხვევაში (3) ფორმულის $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ კოეფიციენტებიც ნამდვილი რიცხვები იქნებიან.

(2) ფორმულები, რომლებიც ახალ და ძველ ცვლადებს აკავშირებენ, შეიძლება დავწეროთ ასეც (თუ მათ ამოვხსნით $x_i'$ ცვლადების მიმართ):

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2a}$$

მეტი სიცხადისათვის განვიხილოთ ჯერ ორი ცვლადის ფორმა:

$$\Phi = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ ამ ფორმაში ერთი კვადრატული წევრი მაინც შედის, ე. ი. $a_{11}$ და $a_{22}$ სიდიდეთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან. შეეცვლით რა, საჭიროების შემთხვევაში, ცვლადების ნომერაციას, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $a_{11} \neq 0$. მაშინ გვექნება:

$$\Phi = a_{11}\left(x_1 + \frac{2a_{12}}{a_{11}}x_1x_2\right) + a_{22}x_2^2 =$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}x_2}{a_{11}}\right)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}x_2^2 + a_{22}x_2^2,$$

ანუ

$$\Phi = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x^2\right)^2 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right)x_2^2.$$

თუ ავიღებთ ჩასმას

$$x_1' = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2, \quad x_2' = x_2,$$

მაშინ $\Phi$ ფორმას დავიყვანთ მოთხოვნილ კანონიკურ სახეზე:

$$\Phi' = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2,$$

სადაც $\lambda_1 = a_{11}$, $\lambda_2 = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}}$. შეიძლება მოხდეს, რომ $\lambda_2 = 0$; მაშინ $\Phi$ ფორმა დაიყვანება შემდეგ სახეზე:

$$\Phi' = \lambda_1 x_2'^2.$$

ზემოთ ჩვენ გამოვრიცხეთ ის შემთხვევა, როცა $a_{11} = a_{22} = 0$. ამ შემთხვევაში გამოსავალ ფორმას აქვს შემდეგი სახე:

$$\Phi = 2a_{12}x_1x_2.$$

თუ, როგორც ჩვენ ყოველთვის ვგულისხმობთ, გამოსავალი ფორმა იგივეურად ნულის ტოლი არ არის, მაშინ $a_{12} \neq 0$.

ავიღოთ ჩასმა

$$x_1 = \frac{x_1' + x_2'}{2}, \quad x_2 = \frac{x_1' - x_2'}{2},$$

ე. ი.

$$x_1' = x_1 + x_2, \quad x_2' = x_1 - x_2,$$

ხელახლა მივიღებთ:

$$\Phi' = 2a_{12}(x_1'^2 - x_2'^2) = 2a_{12}x_1'^2 - 2a_{12}x_2'^2 = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2,$$

სადაც

$$\lambda_1 = 2a_{12}, \quad \lambda_2 = -2a_{12}.$$

ახლა დაეუბრუნდეთ ზოგად შემთხვევას.

მოვახდინოთ კვადრატული ფორმის თანდათანობითი დაყვანა (3) კანონიკურ სახეზე ცვლადების მიმდევრობითი წრფივი ჩასმით.

თუ (1) ფორმაში არც ერთი ისეთი წევრი არ შედის, რომელიც ცვლადის კვადრატს შეიცავს, მაშინ წრფივი ჩასმით ყოველთვის შეგვიძლია მას ისეთი სახე მივცეთ, სადაც ასეთი წევრები იქნება.

მართლაც, ვთქვათ,

$$a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 0.$$

მაშინ ერთი $a_{ij}$ $(i \neq j)$ კოეფიციენტი მაინც განსხვავებული იქნება ნულისაგან, უამისოდ ფორმა იგივეურად ნულის ტოლი იქნებოდა.

მოვახდენთ რა, საჭიროების შემთხვევაში, ცვლადთა ნომერაციის შეცვლას, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$a_{12} \neq 0.$$

მაშინ, თუ ავიღებთ ჩასმას

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_1' + x_2'}{2}, \quad x_2 = \frac{x_1' - x_2'}{2}, \\ x_3 &= x_3', \ \ldots, \ x_n = x_n', \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

მივიღებთ $2a_{12}x_1x_2$ წევრის ნაცვლად $2a_{12}x_1'^2 - 2a_{12}x_2'^2$ წევრებს; ცხადია, რომ ეს წევრები არც ერთ სხვა წევრთან არ შეიკვეცება, რადგან არც ერთი სხვა წევრი $x_1'^2$ და $x_2'^2$-ს არ შეიცავს.

ამგვარად, მოვახდენთ რა, საჭიროების შემთხვევაში, (4) სახის ჩასმას, შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ $\Phi$ ფორმა ერთი ცვლადის კვადრატს მაინც შეიცავს. თუ, საჭიროების შემთხვევაში, შევცვლით ცვლადების ნომერაციას, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $a_{11} \neq 0$. ახლა ამოვწეროთ $\Phi$ ფორმის ყველა ის წევრი, რომლებიც შეიცავენ $x_1$ ცვლადს; ეს წევრები იქნებიან:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n. \tag{*}$$

უკანასკნელი ჯამი შეიძლება გადაიწეროს ასე:

$$a_{11}\left(x_1^2+\frac{2a_{12}}{a_{11}}x_1x_2+\ldots+\frac{2a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n\right)=$$

$$=a_{11}\left(x_1+\frac{a_{12}x_2}{a_{11}}+\ldots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2+\text{ის წევრები, რომლებიც არ შეი-}$$

ცავენ $x_1$-ს. (**)

შევიტანოთ $\Phi$ ფორმაში (*) წევრების ნაცვლად (**) გამოსახულება, მივიღებთ

$$\Phi=a_{11}\left(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\ldots+\frac{a_1^n}{a_{11}}x_n\right)^2+\Phi_1(x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n),$$

სადაც $\Phi_1$ უკვე $n-1$ ცვლადის $x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n$-ის კვადრატული ფორმაა.

თუ ავიღებთ ჩასმას

$$\left.\begin{aligned}x_1'&=x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\ldots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\\ x_2'&=x_2,\ x_3'=x_3,\ \ldots,\ x_n'=x_n\end{aligned}\right\},\qquad(5)$$

ამით $\Phi$ ფორმას დავიყვანთ შემდეგ სახეზე:

$$\Phi'=a_{11}x_1'^2+\Phi_1(x_2',\ \ldots,\ x_n'),$$

სადაც გამოყოფილია ერთი კვადრატული წევრი, ხოლო $\Phi_1$ წარმოადგენს $n-1$ ცვლადის კვადრატულ ფორმას.

თუ $\Phi_1$ იგივურად ნულის ტოლია, მაშინ დაყვანის პროცესი დამთავრებულია; წინააღმდეგ შემთხვევაში, თუ $\Phi_1$ ფორმაზე გამოვიყენებთ ახლახან ნაჩვენებ ხერხს, ამით მისგან გამოვყოფთ ერთ კვადრატულ წევრს და დაგვრჩება უკვე $n-2$ ცვლადის ფორმა და ა. შ., ისე, რომ, ბოლოს და ბოლოს, ჩვენ მივიღებთ (3) სახის ფორმას, რომელიც მხოლოდ კვადრატულ წევრებს შეიცავს.

მთელ ამ დაყვანას ჩვენ ვაღწევთ (4) ანუ (5) სახის წრფივი ჩასმების მიმდევრობითი გამოყენებით. ცხადია, რომ რადგან ეს ჩასმები შეიძლება შევაქციოთ, ამიტომ ისინი არაგანკუთრი ჩასმებია. ამიტომ ამ ჩასმების მიმდევრობის შედეგიც არაგანკუთრი ჩასმაა (§ 9).

ამგვარად, გამოთქმული დებულება დამტკიცებულია.

ცხადია, რომ (3) გამოსახულების მარჯვენა მხარეში წევრთა რიცხვი $r$ არ აღემატება ცვლადთა რიცხვს $n$ და, საზოგადოდ, მისი ტოლი იქნება. ადვილად შეიძლება $r$ რიცხვის წინასწარი გამოთვლაც.

მართლაც, ჩვენ ვიცით, რომ კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტის რანგი ცვლადთა წრფივი გარდაქმნით არ იცვლება (§ 11).

შევადგინოთ $\Phi'$ ფორმის დისკრიმინანტი. ეს არის $n$ რიგის დეტერმინანტი

$$\Delta=\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

რომლის რანგი, ცხადია, უდრის $r$, რადგან პირველი $r$ სტრიქონისა და პირველი $r$ სვეტისაგან შედგენილი დეტერმინანტი უდრის $\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_r$ და განსხვავდება ნულისაგან, ყველა $r$-ზე მაღალი რიგის დეტერმინანტები კი შეიცავს მხოლოდ ნულებისაგან შედგენილ სტრიქონს (სვეტს), და ამიტომ ყველა ისინი ნულის ტოლია.

ამგვარად, **კანონიკური ფორმის წევრთა რიცხვი $r$ უდრის მოცემული ფორმის დისკრიმინანტს.**

თუ მოცემული ფორმის დისკრიმინანტი

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ მისი რანგი უდრის $n$, მაშასადამე, კანონიკურ ფორმას ექნება შემდეგი სახე

$$\Phi'=\lambda_1 x_1'^2+\dots+\lambda_n x_n'^2, \tag{3a}$$

სადაც ყველა $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ განსხვავებულია ნულისაგან. ამ შემთხვევაში მოცემულ ფორმას **არაგანკუთრი** ფორმა ეწოდება.

თუკი $A=0$, მაშინ (3) გამოსახულებაში $r<n$ და მოცემულ ფორმას **განკუთრი** ფორმა ეწოდება.

ზოგჯერ უკეთესია $\Phi'$ ფორმა, მაშინაც კი, როცა იგი განკუთრია, (3a) სახით დავწეროთ. ამ შემთხვევაში $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ რიცხვთაგან ზოგიერთი ნულის ტოლია.

მოცემული ფორმის (3) კანონიკურ სახეზე დაყვანის შემდეგ, შეიძლება იგი კიდევ გავამარტივოთ ჩასმით

$$\xi_1=\sqrt{\lambda_1}x_1', \dots, \xi_r=\sqrt{\lambda_r}x_r'$$
$$\xi_{r+1}=x'_{r+1}, \dots, \xi_n=x_n'.$$

მაშინ ჩვენი ფორმა დაიყვანება უბრალოდ კვადრატების ჯამზე:

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\dots+\xi_r^2.$$

თუმცა ასეთი დაყვანა, თუ მხოლოდ ნამდვილ რიცხვთა არეში დავრჩებით, რასაც სწორედ შემდეგში ვიგულისხმებთ (თუ საწინააღმდეგოზე ცალკე არ იქნება მითითებული), მხოლოდ იმ შემთხვევაშია შესაძლებელი, როცა $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ დადებითი რიცხვებია.

თუ ზოგიერთი $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_r$ რიცხვთაგან უარყოფითია, მაშინ, ზოგადობის დაურღვეველად, შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ

$$\lambda_1>0,\ \lambda_2>0 \ldots \lambda_k>0,\ \lambda_{k+1}<0, \ldots,\ \lambda_r<0,$$

(რა თქმა უნდა შეიძლება მოხდეს, რომ $k=0$, ე. ი. ყველა $\lambda$ რიცხვი იყოს უარყოფითი, ან $k=r$, ე. ი. ყველა $\lambda$ რიცხვი დადებითი იყოს).

მაშინ, თუ დავუშვებთ

$$\xi_1=\sqrt{\lambda_1}\,x_1', \ldots,\ \xi_k=\sqrt{\lambda_k}\,x_k',\ \xi_{k+1}=\sqrt{-\lambda_{k+1}}\,x'_{k+1}, \ldots,$$

$$\xi_r=\sqrt{-\lambda_r}\,x_r',\ \xi_{r+1}=x_r'{}_{+1}, \ldots,\ \xi_n=x_n',$$

ამით ჩვენს ფორმას დავიყვანთ შემდეგ სახეზე

$$\xi_1{}^2+\xi_2{}^2+\ldots+\xi_k{}^2-\xi^2{}_{k+1}-\ldots-\xi_r{}^2. \qquad (a)$$

ჩვენ ვნახეთ, რომ კანონიკური ფორმის წევრთა რიცხვი $r$ განისაზღვრება გამოსავალი ფორმით. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ დადებითი წევრების რიცხვიც $k$ (და, მაშასადამე, უარყოფით წევრთა რიცხვიც $r-k$) აგრეთვე არ არის დამოკიდებული აღებული ფორმის კანონიკურ სახეზე დაყვანის ხერხზე (აქ ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ გამოსავალი ფორმის კოეფიციენტები და აგრეთვე განხილული ჩასმების კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია).

მართლაც, დავუშვათ, რომ აღებული კვადრატული ფორმა რაიმე წესით დავიყვანეთ შემდეგ სახეზე:

$$\xi_1'{}^2+\ldots+\xi_{k_1}'{}^2-\xi'{}^2{}_{k+1}-\ldots-\xi_r'{}^2, \qquad (b)$$

სადაც $k' \neq k$, მაგალითად, $k'>k$.

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, \ldots, \xi_n$ ცვლადები და აგრეთვე $\xi_1', \ldots, \xi_r', \ldots, \xi_n'$ იქნება თავიდან აღებულ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადების წრფივი და ერთგვაროვანი ფუნქციები. ამ უკანასკნელთ ყოველთვის შეგვიძლია მივცეთ ისეთი კერძო მნიშვნელობანი (რომლებიც ყველა ერთდროულად ნული არ არის), რომ მივიღოთ:

$$\xi_1=\xi_2=\ldots=\xi_k=\xi'_{k+1}=\ldots=\xi_r'=\xi'_{r+1}=\ldots=\xi_n'=0.$$

მართლაც, წინა დამოკიდებულებანი გვაძლევენ წრფივ და ერთგვაროვან განტოლებებს $x_1, \ldots, x_n$ უცნობების მიმართ, სადაც ამ განტოლებათა რიცხვი $k+(n-k')=n+k-k'$ ნაკლებია $n$-ზე, ვინაიდან $k-k'<0$.

მაშასადამე, ამ სისტემას ყოველთვის აქვს არანულოვანი ამოხსნა. თუ ავიღებთ ცვლადების ასეთ კერძო მნიშვნელობებს, (a) და (b) ფორმებისთვის,

მივიღებთ შემდეგ კერძო მნიშვნელობებს: $-\xi^2_{k+1}-\ldots-\xi_r{}^2$ და $\xi_1{}'^2+\ldots+\xi_{k'}{}'^2$, და, მაშასადამე (ცვლადთა აღებულ კერძო მნიშვნელობებისათვის), გვექნება

$$-\xi^2_{k+1}-\ldots-\xi_r{}^2=\xi_1{}'^2+\ldots+\xi_{k'}{}'^2,$$

ეს კი მხოლოდ მაშინ არის შესაძლებელი, როცა

$$\xi_{k+1}=\ldots=\xi_r=\xi_1{}'=\ldots=\xi_{k1}=0,$$

რადგან, პირობის თანახმად, ჩვენ საქმე გვაქვს ნამდვილ სიდიდეებთან. ამგვარად, უნდა გვქონდეს

$$\xi_1{}'=\xi_2{}'=\ldots=\xi_{k'}{}'=\xi'_{k+1}=\ldots=\xi_n{}'=0,$$

ეს კი მხოლოდ მაშინ არის შესაძლებელი, როცა [1])

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=0,$$

რაც პირობას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე, უნდა იყოს: $k=k'$.

ზემოთ დამტკიცებული თეორემა ატარებს „კვადრატული ფორმის ინერციის კანონის“ სახელწოდებას.

დავუბრუნდეთ (3) კანონიკურ სახეს და შევნიშნოთ შემდეგი: თუ ყველა $\lambda_i$ კოეფიციენტი დადებითია, მაშინ ცხადია, რომ $\Phi'$ ფორმას და, მაშასადამე, გამოსავალ $\Phi$ ფორმასაც, შეუძლია მხოლოდ დადებითი მნიშვნელობანი მიიღოს. თუ ყველა $\lambda_i$ კოეფიციენტი უარყოფითია, მაშინ ფორმას შეუძლია მხოლოდ უარყოფითი მნიშვნელობანი მიიღოს. ორივე შემთხვევაში ფორმას განსაზღვრული [2]) ფორმა ეწოდება. პირველ შემთხვევაში მას ეწოდება დადებითი ფორმა, მეორე შემთხვევაში კი — უარყოფითი ფორმა.

ბოლოს, ადვილი დასანახია, რომ არაგანკუთრი განსაზღვრული ფორმა ნულის ტოლი შეიძლება იყოს მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა $x_1$, $x_2,\ldots,$ $x_n$ ცვლადები ყველა ნულის ტოლია. მართლაც, თუ $\Phi=0$, და, მაშასადამე,

$$\Phi'=\lambda_1x_1{}'^2+\ldots+\lambda_nx_n{}'^2=0,$$

მაშინ აუცილებლად გვექნება $x_1{}'=x_2{}'=\ldots=x_n{}'=0$ (ვინაიდან ყველა $\lambda_i$ კოეფიციენტი ერთი და იგივე ნიშნისაა და განსხვავებულია ნულისაგან). აქედან კი გამომდინარეობს, რომ

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=0.$$

---

[1]) პირობის თანახმად, $\xi_1{}', \xi_2{}',\ldots\xi_n{}'$ არიან $x_1, x_2,\ldots, x_n$ ცვლადთა წრფივი ერთგვაროვანი ფუნქციები, რომლებიც მათთან დაკავშირებულია $\xi_1{}'=\mu_{11}x_1+\mu_{12}x_2+\ldots+\mu_{1n}x_n,\ldots\xi_{1n}{}'=\mu_1x_1+\ldots\mu_{nn}x_n$ სახის დამოკიდებულებებით, სადაც $\mu_{ij}$ კოეფიციენტებისგან შედგენილი დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია (ჩასმა არაგანკუთრია). მაშასადამე, თუ $\xi_1{}'=\ldots=\xi_n{}'=0$, მაშინ აუცილებლად $x_1=\ldots=x_n=0$.

[2]) ზოგი ავტორი ამ სახელწოდებას ხმარობს მხოლოდ არაგანკუთრი ფორმების შემთხვევაში; განკუთრი ფორმების შემთხვევაში ისინი ხმარობენ სახელწოდებას „ნახევრად განსაზღვრული“.

**შ ე ნ ი შ ვ ნ ა.** არსებობს მარტივი ზოგადი წესი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს გამოვარკვიოთ, — მოცემული ფორმა დადებითია, უარყოფითი, თუ განუსაზღვრელი. ამ წესზე (რომელიც მოცემულია უმაღლესი ალგებრის კურსებში) ჩვენ აქ არ შევჩერდებით. შევნიშნავთ მხოლოდ შემდეგს: იმისათვის, რომ ორი ცვლადის კვადრატული ფორმა

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

არაგანკუთრი და დადებითი იყოს აუცილებელი და საკმარისია, რომ $a_{11}>0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2>0$ (და, მაშასადამე, კოეფიციენტიც $a_{22}>0$); ეს უშუალოდ გამომდინარეობს ამ პარაგრაფის დასაწყისში მოყვანილი ფორმულებიდან.

**§ 13. კვადრატული ფორმის ორ წრფივ მამრავლად დაშლის პირობა.** წინა პარაგრაფში ნათქვამი საშუალებას გვაძლევს, სხვათა შორის, პირდაპირ ვუპასუხოთ კითხვას: რა პირობებში შეიძლება კვადრატული ფორმა

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \tag{1}$$

წარმოვადგინოთ ორი წრფივი (ნამდვილი ან წარმოსახვითი) მამრავლის ნამრავლის სახით:

$$\Phi=(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)\ (b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n). \tag{2}$$

დავამტკიცოთ, რომ ამისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ მოცემული ფორმის დისკრიმინანტის რანგი იყოს ერთი ან ორი.

მართლაც, თუ წრფივი ფორმები

$$f_1 = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \quad \text{და} \quad f_2 = b_1x_1 + \ldots + b_nx_n \tag{3}$$

ურთიერთ დამოუკიდებელი არიან, მაშინ ჩასმაში

$$\begin{aligned}
x_1' &= a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n,\\
x_2' &= b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n,\\
x_3' &= c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n' &= l_1x_1 + l_2x_2 + \ldots + l_nx_n
\end{aligned}$$

ისე შეგვიძლია შევარჩიოთ $c_1, \ldots, c_n, \ldots, l_1, \ldots, l_n$ კოეფიციენტები, რომ ჩასმა არაგანკუთრი იყოს [1]). ამ ჩასმის შემდეგ ჩვენი ფორმა დაიყვანება შემდეგ სახეზე

$$\Phi' = x_1'x_2'.$$

---

[1]) ეს ყოველთვის შესაძლებელია მრავალი სხვადასხვა წესით. მართლაც, ვინაიდან (3) წრფივი ფორმები დამოუკიდებელი ფორმებია, ამიტომ

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{matrix}$$

თუ ამის შემდეგ დავუშვებთ, რომ $x_1' = \xi_1 - \xi_2$, $x_2' = \xi_1 + \xi_2$, $x_3' = \xi_3, \ldots, x_n = \xi_n$, ამ ფორმას დავიყვანთ სახეზე

$$\xi_1^2 - \xi_2^2.$$

მაშასადამე, ჩვენს შემთხვევაში $r=2$ და დისკრიმინანტის რანგიც ორის ტოლია. თუ (3) ფორმები ურთიერთ დამოკიდებული ფორმებია, მაშინ იგივურად გვექნება:

$$(b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n) = k(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n),$$

სადაც $k$ რაღაც მუდმივია. მაშასადამე, განხილულ ფორმას ექნება სახე

$$\Phi = k(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)^2. \qquad (2a)$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ, მაგალითად, $a_1 \neq 0$, და დავუშვებთ, რომ

$$x_1' = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n,\ x_2' = x_2, \ldots,\ x_n' = x_n,$$

მაშინ მას დავიყვანთ შემდეგ სახეზე

$$\Phi' = kx_1'^2.$$

ამგვარად, ამ შემთხვევაში $r=1$.

პირიქით, თუ $r=1$ ან $r=2$, მაშინ, როგორც ვიცით, $\Phi$ ფორმა შეიძლება დავიყვანოთ შემდეგ სახეზე:

$$\Phi' = \lambda_1 x_1'^2,$$

ან

$$\Phi' = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2.$$

---

ცხრილის რანგი ორის ტოლია (§ 5) და, მაშასადამე, ერთ-ერთი შემდეგი სახის:

$$a_1b_2 - a_2b_1,\ a_1b_3 - a_3b_1, \ldots$$

დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია. ზოგადობის დაურღვეველად, შეიძლება ვიგულისხმოთ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. მაშინ, მაგალითად, ჩასმა

$$\begin{aligned}
x_1' &= a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \\
x_2' &= b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n \\
x_3' &= x_3, \\
x_4' &= x_4, \\
&\ldots\ldots \\
x_n' &= x_n
\end{aligned}$$

დააკმაყოფილებს ჩვენს პირობას, რადგან მისი დეტერმინანტი:

$$\begin{vmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \ldots a_n \\
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \ldots b_n \\
0 & 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\
0 & 0 & 0 & 1\ 0 \ldots 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0\ 0 \ldots 0
\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

ნულისაგან განსხვავებულია.

თუ ჩავსვამთ, პირველ შემთხვევაში, $x_1'$-ის ნაცვლად მის გამოსახულებას $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადებით, ვნახავთ, რომ $\Phi$-ს აქვს (2a) სახე, ე. ი. $\Psi$ წარმოადგენს წრფივი ფუნქციის სრულ კვადრატს.

მეორე შემთხვევაში, გვაქვს

$$\Phi' = (\sqrt{\pm\lambda_1}\, x_1' + \sqrt{\mp\lambda_2}\, x_2')\ (\sqrt{\pm\lambda_1}\, x_1' - \sqrt{\mp\lambda_2}\, x_2'),$$

ე. ი. ფორმა იშლება ორ, ნამდვილ ან წარმოსახვით მამრავლად. თუ $\lambda_1$ და $\lambda_2$-ს სხვადასხვა ნიშნები აქვთ, მაშინ ყოველთვის შეიძლება ისე შევარჩიოთ $\pm\lambda_1$ და $\mp\lambda_2$ ნიშნები, რომ თანამამრავლები ნამდვილი მივიღოთ. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ცხადია, ეს შეუძლებელია. ამგვარად, ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

მაგალითი. ორი ცვლადის კვადრატული ფორმა

$$\Phi = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

ყოველთვის იშლება ორ წრფივ მამრავლად. წინა პარაგრაფის დასაწყისში მოყვანილი ფორმულებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ, როცა

$$a_{11}a_{22} - a^2_{12} > 0,$$

მაშინ ეს მამრავლები სხვადასხვა და წარმოსახვითია; როცა $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, მაშინ ეს მამრავლები სხვადასხვა და ნამდვილია; როცა $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, მაშინ ისინი ერთნაირია (და ნამდვილი).

§ 14. **ორთოგონალური ჩასმები.** განვიხილოთ კერძო სახის კვადრატული ფორმა

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2. \tag{1}$$

წრფივი ჩასმით

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \lambda_{11}x_1' + \ldots + \lambda_{1n}x_n' \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \lambda_{n1}x_1' + \ldots + \lambda_{nn}x_n' \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

იგი, საზოგადოდ, დაიყვანება ზოგადი სახის ფორმაზე

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i'x_j'.$$

მიუხედავად ამისა, (2) ჩასმის $\lambda_{ij}$ კოეფიციენტების გარკვეული შერჩევით, შესაძლებელია ისეთი შემთხვევაც მოხდეს, რომ გარდაქმნილ ფორმას ჰქონდეს აგრეთვე სახე

$$x_1'^2 + \ldots + x_n'^2. \tag{3}$$

ასეთ შემთხვევაში (2) ჩასმას **ორთოგონალური** ჩასმა ეწოდება. ეს სახელწოდება ამ ჩასმებს მიეკუთვნა ანალოგიით იმ ჩასმებთან, რომლებიც, როცა $n=3$ ან $n=2$, მართობული კოორდინატების გარდაქმნას გამოსახავენ; იხ. თავი III, § 72.

ადვილი გამოსაყვანია ის დამოკიდებულებანი, რომლებიც უნდა აკავშირებდნენ ორთოგონალური ჩასმის კოეფიციენტებს და რომლებიც წარმოადგენენ § 71-ის (3), (4), (3a), (4a) დამოკიდებულებათა განზოგადებას. მართლაც, თუ შევიტანთ (1)-ში (2) გამოსახულებებს და დავწერთ, რომ მიღებულ გამოსახულებაში $x_r'x_s'$ წევრებთან კოეფიციენტები უდრის ნულს, თუ $r \neq s$, და უდრის 1, თუ $r=s$, ადვილად მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ir}\lambda_{is} = \begin{cases} 0, & \text{თუ } r \neq s, \\ 1, & \text{თუ } r = s. \end{cases} \tag{4}$$

ეს ფორმულები წარმოადგენენ § 72-ის (3) და (4) ფორმულების განზოგადებას. აღვნიშნოთ (2) ჩასმის დეტერმინანტი $\Delta$-ით:

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \dots \lambda_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} \dots \lambda_{nn} \end{vmatrix}.$$

თუ მოვახდენთ გამრავლებას $\Lambda \cdot \Lambda$ (სტრიქონების მიხედვით) და გამოვიყენებთ (4) ფორმულებს, დავრწმუნდებით, რომ:

$$\Lambda^2 = \Lambda \cdot \Lambda = \begin{vmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 & 0 \dots 0 \end{vmatrix} = 1,$$

საიდანაც

$$\Lambda = \pm 1. \tag{5}$$

ახლა მივცეთ (4) ფორმულებში $r$ ნიშნაკს რაიმე გარკვეული მნიშვნელობა და გამოვყოთ ამ დამოკიდებულებათაგან ისინი, რომლებიც ნიშნაკის ამ მნიშვნელობას შეესაბამებიან. ამნაირად, ჩვენ მივიღებთ $n$ განტოლებათა სისტემას:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ir}\lambda_{is} = \delta_{rs} \quad (s=1, 2, \dots n),$$

სადაც $\delta_{rs}$ აღნიშნავს ნულს, თუ $s \neq r$, და ერთს, თუ $s=r$. თუ $\lambda_{1r}, \lambda_{2r}, \dots, \lambda_{nr}$ სიდიდეებს განვიხილავთ როგორც უცნობებს და წინა სისტემას ამოვხსნით § 3-ის წესით, აღვნიშნავთ რა $\lambda_{kr}$ ელემენტის ალგებრულ დამატებას $\Delta_{kr}$-ით, მივიღებთ:

$$\lambda_{1r} = \frac{\Lambda_{1r}}{\Lambda}, \dots, \lambda_{nr} = \frac{\Lambda_{nr}}{\Lambda},$$

ანუ, (5)-ის ძალით,

$$\lambda_{kr} = \pm \Lambda_{kr}. \tag{6}$$

სადაც მარჯვნივ ისეთივე ნიშანი უნდა ავიღოთ, როგორც (5)-ში. ამოვხსნათ ახლა (2) განტოლებანი $x_1', x_2', \ldots, x_n'$-ის მიმართ, (5) და (6) ფორმულების ძალით, მივიღებთ (იხ. § 3)

$$\begin{aligned} x_1' &= \lambda_{11}x_1 + \lambda_{21}x_2 + \ldots + \lambda_{n1}x_n \\ x_2' &= \lambda_{12}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \ldots + \lambda_{n2}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= \lambda_{1n}x_1 + \lambda_{2n}x_2 + \ldots + \lambda_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{2a}$$

ამგვარად, ჩვენ ვხედავთ, რომ (2) ჩასმის შებრუნებული ჩასმა (2a), მიიღება (2) ჩასმის კოეფიციენტთა ცხრილში სტრიქონების შეცვლით სვეტებით და, პირიქით,

თუ (2a) ჩასმაზე გამოვიყენებთ იმავე მსჯელობას, რასაც (2) ჩასმაზე, მივიღებთ (4)-ს ნაცვლად შემდეგ დამოკიდებულებებს

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ri}\lambda_{is} = \begin{cases} 0, & \text{როცა } r \neq s, \\ 1, & \text{როცა } r = s, \end{cases} \tag{4a}$$

რომლებიც წარმოადგენენ (4) დამოკიდებულებათა შედეგს, სრულიად ისევე, როგორც კერძო შემთხვევაში $n=3$, § 71-ის (3a) და (4a) ფორმულები წარმოადგენენ იმავე პარაგრაფის (3) და (4) ფორმულების შედეგს.

აღვნიშნოთ კიდევ ჩვენთვის მეტად საინტერესო შემდეგი გარემოება.

ვთქვათ, მოცემულია ნებისმიერი კვადრატული ფორმა

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \tag{7}$$

და, ვთქვათ, მასში მოხდენილია ორთოგონალური (2) ჩასმა, ისე რომ $\Phi$ ფორმას გარდაქმნის შემდეგ აქვს სახე:

$$\Phi' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}'x_i'x_j'. \tag{8}$$

მაშინ $\Phi$ და $\Phi'$ ფორმების დისკრიმინანტები თანატოლი იქნებიან, ე. ი.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}' \ldots a_{1n}' \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}' \ldots a_{nn}' \end{vmatrix}. \tag{9}$$

ეს გამომდინარეობს

$$A' = A \cdot \Lambda^2$$

ტოლობიდან და ორთოგონალური ჩასმის (5) თვისებიდან.

დამტკიცებული შედეგი ჩამოყალიბდება შემდეგნაირად: კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტი ინვარიანტია ორთოგონალური

ჩასმების მიმართ ანუ მოკლედ: დისკრიმინანტი „ორთოგონალური“ ინვარიანტია.

ადვილი საპოვნელია კიდევ, Ψ ფორმის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი, მთელი რიგი ისეთი გამოსახულებანი, რომლებსაც ინვარიანტების იგივე თვისებები აქვთ.

მართლაც, განვიხილოთ დამხმარე ფორმა

$$\Psi = \Phi - \lambda (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2),$$

სადაც λ ნებისმიერი პარამეტრია. ორთოგონალური (2) ჩასმით ეს ფორმა გადადის

$$\Psi' = \Phi' - \lambda (x_1'^2 + x_2'^2 + \ldots + x_n'^2)$$

ფორმაში, რადგან ამ დროს Φ გადადის Φ'-ში, ხოლო $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ გადაიქცევა $x_1'^2 + \ldots + x_n'^2$ გამოსახულებად.

დამტკიცებულის თანახმად, Ψ და Ψ' ფორმების დისკრიმინანტები ერთმანეთის თანატოლი უნდა იყოს. Ψ ფორმის $D$ დისკრიმინანტი Φ ფორმის $\Delta$ დისკრიმინანტისაგან მხოლოდ იმით განსხვავდება, რომ დიაგონალური $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ ელემენტები შეცვლილია $a_{11} - \lambda, a_{22} - \lambda, \ldots, a_{nn} - \lambda$ სხვაობებით, ისე რომ

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}. \tag{10}$$

ანალოგიური გამოსახულება გვაქვს Ψ' ფორმის დისკრიმინანტისთვისაც; ამიტომ, ნათქვამის თანახმად, გვექნება

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \quad \ldots a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}' - \lambda \ldots a_{1n}' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}' \quad \ldots a_{nn}' - \lambda \end{vmatrix}, \tag{11}$$

რომელიც მართებულია λ პარამეტრის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის.

მეორეს მხრივ, თუ დავშლით (10) დეტერმინანტს და დავალაგებთ λ ს ხარისხების მიხედვით, გვექნება

$$D = C_0\lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + \ldots + C_{n-1}\lambda + C_n, \tag{12}$$

სადაც $C_0, C_1, \ldots, C_n$ არიან $a_{ij}$ კოეფიციენტებისაგან შედგენილი გარკვეული გამოსახულებანი. ჩვენ არ მოვიყვანთ აქ ყველა ამ გამოსახულებას, დავკმაყოფილდებით მხოლოდ $C_0$, $C_1$ და $C_n$ [1]) რიცხვების მოძებნით. უპირველეს ყოვლისა, ცხადია, რომ $\lambda^n$ და $\lambda^{n-1}$ ხარისხების შემცველი წევრები შეიძლება

[1]) წიგნის ტექსტში ეს გამოსახულებანი გამოთვლილი იყო იმ კერძო შემთხვევებისთვისაც, რომლებიც ჩვენ გვჭირდებოდა (სახელდობრ, იმ შემთხვევებში, როცა $n = 2$ და $n = 3$).

წარმოიშვან მხოლოდ ისეთი წევრებიდან, რომლებიც მთავარი დიაგონალის ელემენტთა გადამრავლებით მიიღებიან:

$$(a_{11}-\lambda)\dots(a_{nn}-\lambda)=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\dots$$

(ჩვენ ამოვწერეთ მხოლოდ ჩვენთვის საინტერესო წევრები). მაშასადამე,

$$C_0=(-1)^n,\quad C_1=(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}).$$

რომ გამოვთვალოთ $C_n$, შევნიშნოთ, რომ (12) ფორმულის ძალით, $C_n$ ტოლია $D$ დეტერმინანტის მნიშვნელობისა, როცა $\lambda=0$, მაშასადამე,

$$C_n=\begin{vmatrix} a_{11}\dots a_{1n}\\ \dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\\ a_{n1}\dots a_{nn}\end{vmatrix}=A.$$

ახლა დავუბრუნდეთ (11) ტოლობას. დავშალოთ მარჯვენა მხარე და დავალაგოთ $\lambda$-ს ხარისხების მიხედვით, მივიღებთ ტოლობას:

$$C_0\lambda^n+C_1\lambda^{n-1}+\dots+C_n=C_0'\lambda^n+C_1'\lambda^{n-1}+\dots+C_n', \qquad (11a)$$

სადაც $C_0',\dots,C_n'$ კოეფიციენტები $a_{ij}$ სიდიდეებისაგან შედგენილი გამოსახულებანია სრულიად ისევე, როგორც $C_0,\dots,C_n$ კოეფიციენტები იყო შედგენილი $a_{ij}$ სიდიდეებისაგან. რადგან (11) ტოლობა მართებულია $\lambda$-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის, ამიტომ უნდა გექონდეს:

$$C_0=C_0',\quad C_1=C_1',\dots,\quad C_n=C_n' \qquad (13)$$

ე. ი. $C_0, C_1,\dots, C_n$ აგრეთვე ორთოგონალური ინვარიანტები იქნება. $C_n$ და $C_n$ არაფერს ახალს არ გვაძლევენ, ვინაიდან $C_0=(-1)^n$ წარმოადგენს მუდმივს, ხოლო $C_n$ უკვე ცნობილი $A$ ინვარიანტია, მაგრამ $C_1, C_2,\dots, C_{n-1}$ სიდიდეები ახალი ინვარიანტებია. აღვნიშნოთ $C_1$ კოეფიციენტი $(-1)^{n-1}$ $S$-ით, გვექნება

$$S=a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}.$$

დამტკიცებულის თანახმად, $C_1$ და, მაშასადამე, $S$-იც, ე. ი. დიაგონალურ წევრთა ჯამი, ორთოგონალური ინვარიანტია.

**§ 15. კვადრატული ფორმის კანონიკურ სახეზე ორთოგონალური ჩასმით დაყვანის შესახებ.** ზემოთ დამტკიცებული იყო თეორემა, რომ ყოველი კვადრატული $\Phi$ ფორმა წრფივი ჩასმით შეიძლება დავიყვანოთ კანონიკურ სახეზე:

$$\Phi'=\lambda_1x_1'^2+\lambda_1x_2'^2+\dots+\lambda_nx_n'^2 \qquad (1)$$

(მარჯვენა მხარეს ჩვენ ახლა ვწერთ $n$ წევრის სახით და ვგულისხმობთ, რომ $\lambda_i$ სიდიდეთაგან ზოგიერთი შეიძლება ნულის ტოლი იყოს).

ბუნებრივად ისმება კითხვა: შეიძლება თუ არა მივაღწიოთ იმავე დაყვანას ორთოგონალური ჩასმით?

პასუხი ყოველთვის დადებითია, თუ გამოსავალ ფორმას ნამდვილი კოეფიციენტები აქვს. ამ შემთხვევაში $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ აგრეთვე ნამდვილი რიცხვებია.

ამ დებულების დამტკიცება არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს და შეიძლება უშუალოდ მივიღოთ წიგნის ტექსტში (§ 278) მოყვანილი კერძო შემთხვევის $n=3$ დამტკიცების განზოგადებით.

ჩვენ არ ვჩერდებით ამ დამტკიცებაზე, შევნიშნავთ მხოლოდ, რომ კანონიკური ფორმის $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ კოეფიციენტები უნდა იყოს შემდეგი $n$ რიგის

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

განტოლების ფესვები.

მართლაც, მარცხენა მხარის დეტერმინანტი წინა პარაგრაფის $D$ დეტერმინანტია. ცხადია, $\Phi'$ ფორმისათვის შედგენილი ასეთი დეტერმინანტი იქნება

$$\begin{vmatrix} \lambda_1-\lambda & 0 & \ldots 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda \ldots & 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \\ 0 & 0 & \ldots \lambda_n-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1-\lambda)\ (\lambda_2-\lambda)\ldots(\lambda_n-\lambda).$$

რადგან, წინა პარაგრაფში ნათქვამის ძალით, გამოსავალი და გარდაქმნილი ფორმებისთვის შედგენილი $D$ დეტერმინანტები იგივურად თანატოლია, ამიტომ გვექნება

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} & \ldots\ldots\ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1-\lambda)\ (\lambda_2-\lambda)\ldots(\lambda_n-\lambda),$$

საიდანაც ცხადად ჩანს, რომ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ რიცხვები (2) განტოლების ფესვებია.

(2) განტოლება „საუკუნებრივი“ განტოლების სახელწოდებას ატარებს, რადგან მსგავსი განტოლებით განისაზღვრება, ეგრეთ წოდებული „საუკუნებრივი წევრები“ ციურ მექანიკაში.