მ. კუჭაიძე

# თეორიული მექანიკა

საქართველოს სსრ უმაღლესი და საშუალო სპეციალური
განათლების სამინისტროს მიერ დამტკიცებულია
სახელმძღვანელოდ ტექნიკუმებისათვის

გამომცემლობა „განათლება"
თბილისი—1971

# პირველი განყოფილება

## შესავალი

### 1. თეორიული მექანიკის საგანი და მისი მნიშვნელობა თანამედროვე ტექნიკასა და ბუნებისმეტყველებაში

ყოველგვარი ცვლილება, ყოველგვარი პროცესი, რომელიც მატერიალურ სამყაროში ხიდინარეობს, არის მოძრაობა. მოძრაობა მატერიის შინაგანი თვისებაა, იგი წარმოუდგენელია მატერიის გარეშე.

არსებობს მოძრაობის სხვადასხვა სახე. მოძრაობის ერთ-ერთი სახეა მექანიკური მოძრაობა. მექანიკური მოძრაობა ეწოდება მატერიალური სხეულის მდებარეობის შეცვლას სხვა რომელიმე სხეულის მიმართ, ანუ მის გადაადგილებას სივრცეში დროის მიხედვით.

მექანიკა ეწოდება მეცნიერებას, რომელიც შეისწავლის მექანიკურ მოძრაობებს.

განსაკუთრებული მნიშვნელობა ენიჭება მექანიკას ამჟამად, როდესაც საბჭოთა მეცნიერებისა და ტექნიკის ბრწყინვალე მიღწევების შედეგად ისტორიაში დაიწყო ახალი ერა, რომელიც მთელი რიგი გამარჯვებებით აღინიშნება კოსმოსური სივრცის ათვისებაში.

თეორიული მექანიკა იქმნებოდა კაცობრიობის კულტურის განვითარებასთან ერთად. მექანიკის ძირავალი კანონი და ფაქტები ცნობილი იყო უძველეს დროშიც; ასეთია არქიმედის გამოჩენილი კანონი ბერკეტზე, რომელსაც დღესაც არ დაუკარგავს მნიშვნელობა ტექნიკაში.

თეორიული მექანიკა, შეისწავლის რა მექანიკურ მოძრაობას სივრცეში დროის მიხედვით, ფართოდ იყენებს მათემატიკური კვლევის მეთოდებს, ფორმალური ლოგიკის მეთოდებს.

მექანიკის ყოველი განყოფილების საფუძვლად მიღებულია მთელი რიგი ცნებები და განსაზღვრები, გარკვეული აქსიომების სისტემა, ანუ ცდებით შემოწმებული ჰეშმარიტებანი, და ფორმალური ლოგიკური მსჯელობით გამოყვანილია სათანადო დასკვნები. ეს დასკვნები წარმოადგენენ წესებს სხვადასხვა გაანგარიშებისათვის, რომლებიც აუცილებელია ამა თუ იმ მექანიკური მოძრაობის რაოდენობრივი შესწავლისათვის.

თეორიული მექანიკა იყოფა სამ ნაწილად: სტატიკად, კინემატიკად და დინამიკად.

სტატიკა შეისწავლის მატერიალური სხეულების წონასწორობის პირობებს.

კინემატიკა შეისწავლის მატერიალური სხეულების მოძრაობას გეომეტრიული თვალსაზრისით. ის ყურადღებას არ აქცევს იმ მიზეზებს (ძალებს), რომლებმაც გამოიწვიეს მოძრაობა. ამრიგად, კინემატიკა შეისწავლის მოძრაობას დროის მიხედვით, გამომწვევი მიზეზის (ძალების) გარეშე.

დინამიკა შეისწავლის მატერიალური სხეულების მოძრაობის კანონებს მოძრაობის გამომწვევ მიზეზებთან (ძალებთან) ერთად.

ვინაიდან მატერიალური სხეულების მექანიკურ მოძრაობას ჩვენ ვამჩნევთ ყველგან ბუნებასა და ტექნიკაში, და მატერიალური სხეულების მექანიკური მოძრაობის კანონებს შეისწავლის თეორიული მექანიკა, ამიტომ თეორიულ მექანიკას ფართოდ იყენებენ საბუნებისმეტყველო მეცნიერებასა და ტექნიკაში.

## 2. სიდიდის ცნება. ცვლადი და მუდმივი სიდიდეები

სიდიდე ეწოდება ობიექტს, რომელიც შეიძლება გაიზომოს და გამოისახოს რიცხვით (ან რიცხვებით), ე. ი. სიდიდე ჰქვია ობიექტს, რომლისადმი შეიძლება რაიმე სახით გამოყენებულ იქნეს გაზომვის პროცესი.

როდესაც თვალყურს ვადევნებთ ბუნების მოვლენებს, შევნიშნავთ, რომ მათში მონაწილე სიდიდეებიდან ზოგიერთი არ იცვლება, ე. ი. ინარჩუნებს ერთსა და იმავე რიცხვით მნიშვნელობას, ზოკი კი განიცდის ცვლილებას, ე. ი. ღებულობს სხვადასხვა რიცხვით მნიშვნელობას. ამრიგად:

ცვლადი ეწოდება ისეთ სიდიდეს, რომელიც მოცემულ პროცესში ღებულობს სხვადასხვა რიცხვით მნიშვნელობას; მუდმივი კი ისეთი სიდიდეა, რომელიც მოცემულ პროცესში ინარჩუნებს ერთსა და იმავე რიცხვით მნიშვნელობას.

## 3. ზოგიერთი ცნება ვექტორული ალგებრიდან

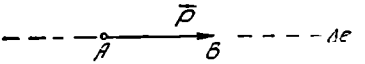
### ა. სკალარული და ვექტორული სიდიდეები

ყველა სიდიდე მექანიკაში შეიძლება დაიყოს სკალარულ და ვექტორულ სიდიდეებად.

სკალარული სიდიდე ისეთი სიდიდეა, რომელიც განისაზღვრება ერთი დადებითი ან უარყოფითი ნამდვილი რიცხვით; ასეთებია დრო, ტემპერატურა და სხვა.

ვექტორული სიდიდე ისეთი სიდიდეა, რომელიც განისაზღვრება წრფისმიმართულებიანი მონაკვეთით სივრცეში და აქვს განსაზღვრული რიცხვითი მნიშვნელობა; ასეთებია, მაგალითად, ძალა, სიჩქარე და აჩქარება.

ამრიგად, ვექტორის გამოსახვა შეიძლება წრფისმიმართულებიანი $AB$ მონაკვეთით (ნახ. 1), რომლის სიგრძე ერთეულად მიღებულ მასშტაბში ვექტორის რიცხვით მნიშვნელობას შეესაბამება, მიმართულება კი ვექტორის მიმართულებას ემთხვევა. $\Delta l$ წრფეს, რომელზედაც მიმართულია ვექტორი, ვექტორის ფუძე ეწოდება.



ნახ. 1

ამრიგად, ვექტორი გეომეტრიულად განისაზღვრება შემდეგი ელემენტებით:

1) ფუძით ანუ მოქმედების წრფით;

2) ვექტორის გამომსახველი მონაკვეთის $AB$ სიგრძით;

3) გეზით ანუ მოქმედების მიმართულებით (გეზი ისრით აღინიშნება).

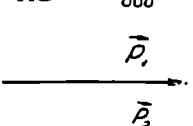
ვექტორის რიცხვითი მნიშვნელობის აბსოლუტურ სიდიდეს ვექტორის მოდული ეწოდება.

ვექტორის მოდული $AB$ მონაკვეთის სიგრძეს შეესაბამება. ვექტორს, რომლის მოდული უდრის ნულს, ნული ვექტორი ეწოდება.

ვექტორის გამომსახველი $AB$ მონაკვეთის $A$ და $B$ ბოლოებს ითანადოდ ვექტორის $A$ საწყისი და $B$ ბოლო ეწოდება.

ვექტორი აღინიშნება ან ერთი ასოთი, თავზე ისრით ($\vec{P}$) ან ხაზით ($\overline{P}$), ერთი მსხვილი შრიფტის ასოთი ან ორი ასოთი, თავზე ისრით ($\vec{AB}$) ან ხაზით ($\overline{AB}$) (ნახ. 1); ამრიგად, ვექტორი $AB = \vec{AB} = \vec{P}$.

$AB$ მონაკვეთის სიგრძე გამოსახავს $\vec{AB}$ ვექტორის მოდულს.



ნახ. 2

$\vec{AB}$ ვექტორის მოდული $= (\vec{AB}) = AB$,
ანუ
$\vec{P}$ ვექტორის მოდული $= (\vec{P}) = P$.

ორი ვექტორი ტოლად ითვლება, თუ ისინი პარალელურებია, ერთმხრივაა მიმართული და ტოლი მოდულები აქვთ (ნახ. 2);

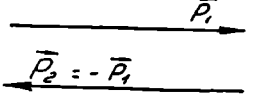
მაშასადამე, თუ

$$P_1 = P_2 \quad \text{და} \quad \vec{P}_1 \downarrow\downarrow \vec{P},$$

მაშინ

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_2.$$

თუ $\vec{P}_2$ ვექტორს $\vec{P}_1$ ვექტორის საწინააღმდეგო მიმართულება აქვს და ერთმანეთის პარალელურია, ასეთ ვექტორებს მოპირდაპირე ვექტორები ეწოდება (ნახ. 3). ამრიგად, თუ




ნახ. 3

$$P_1 = P_2 \quad \text{და} \quad \vec{P}_1 \downarrow \uparrow \vec{P}_2,$$

მაშინ

$$\vec{P}_1 = -\vec{P}_2.$$

ერთი და იმავე სიბრტყის პარალელურ ვექტორებს კომპლანარული ვექტორები ეწოდება.

ვექტორს, რომელიც თავისი მიმართულებით ემთხვევა მოცემული ვექტორის მიმართულებას და რომლის მოდული ერთის ტოლია, მოცემული ვექტორის ერთეული ვექტორი, ორტი ანუ მგეზავი ეწოდება.

ცხადია, რომ ერთეული ვექტორის გამომსახველი მონაკვეთის სიგრძე სიგრძის ერთეულის ტოლი უნდა იყოს.

ერთეულ ვექტორს $\vec{e}$ ასოთი აღნიშნავენ; ამ ვექტორის მოდულია (ნახ. 4)

$$|\vec{e}| = 1.$$

ერთეული ვექტორის საშუალებით ყოველი ვექტორი შეგვიძლია გამოვსახოთ როგორც ვექტორის მოდულის ნამრავლი ერთეულ ვექტორზე

$$\vec{P} = P \cdot \vec{e}.$$

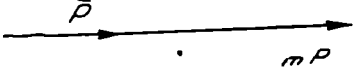
საიდანაც

$$\vec{e} = \frac{\vec{P}}{P}.$$




ნახ. 4

ასეთი წარმოდგენით ვექტორი იშლება ორ ელემენტად: ვექტორის რიცხვით მნიშვნელობის მოცემ მოდულად და ერთეულ ვექტორად, რომელიც განსაზღვრავს მოცემული ვექტორის მიმართულებას სივრცეში.




ნახ. 5

$\vec{P}$ ვექტორის გავრავლებით $m$ სკალარზე მივიღებთ ახალ $\vec{Q}$ ვექტორს (ნახ. 5)

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{P} = mP\vec{e}.$$

თუ ორი ვექტორი კოლინეარულია, მაშინ ორი კოლინეარული ვექტორის ფარდობა მუდამ დადებით ან უარყოფით სკალარს გვაძლევს, რაც ამ ვექტორების მიმართულებებზეა დამოკიდებული. მართლაც, ვთქვათ

$$\vec{P}_1 = P_1 \cdot \vec{e} \quad \text{და} \quad \vec{P}_2 = P_2 \cdot \vec{e},$$

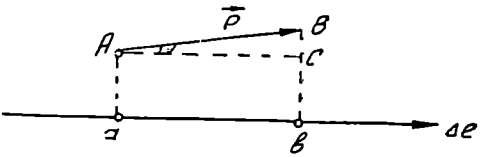
მაშინ

$$\frac{\vec{P}_1}{\vec{P}_2} = \frac{P_1 \cdot \vec{e}}{P_2 \cdot \vec{e}} = \frac{P_1}{P_2}.$$

### ბ. ვექტორის გეგმილი ღერძზე

წრფეს, რომელზედაც არჩეულია მიმართულება, ღერძი ეწოდება.

$\vec{P} = \vec{AB}$ ვექტორის გეგმილი $\Delta l$ ღერძზე ეწოდება ამ ღერძის $ab$ მონაკვეთს, რომელიც მოქცეულია ვექტორის $A$ დასაწყისისა და $B$ ბოლოს გეგმილებს შორის ღერძზე (ნახ. 6), ე. ი. ვექტორის გეგმილი ღერძზე უდრის ვექტორის მოდულის ნამრავლს ვექტორსა და ღერძს შორის კუთხის კოსინუსზე. ამ განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ ვექტორის გეგმილი ღერძზე სკალარული სიდიდეა; იგი დადებითი ან უარყოფითია იმისდა მიხედვით, მახვილი თუ ბლაგვი იქნება კუთხე, რომელსაც ადგენს ვექტორი გეგმილთ ღერძთან.



ნახ. 6

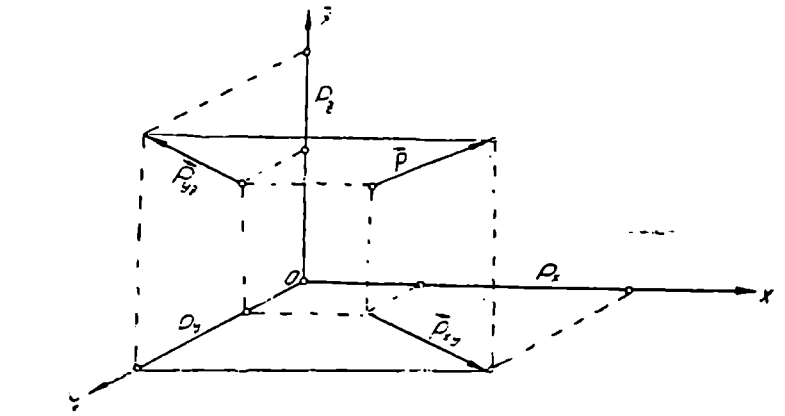
შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ანალიზურად ვექტორი სივრცეში სავსებით განისაზღვრება თავისი გეგმილებით კოორდინატთა ღერძებზე (ნახ. 7); ამის გამო ამ გეგმილებს ზოგჯერ ვექტორის კოორდინატებს უწოდებენ საკოორდინატო ღერძებზე.

მაგალითად, თუ მოცემულია $\vec{P}$ ვექტორი, მაშინ ცნობილია მისი $P$ მოდული და მიმართულება, რომელიც განისაზღვრება მიმმართველი კოსინუსებით. კოორდინატთა ღერძებზე ვექტორის გეგმილები იქნება:

$$P_x = P \cdot \cos(\widehat{\vec{P}, x});$$

$$P_y = P \cdot \cos(\widehat{\vec{P}, y});$$

$$P_z = P \cdot \cos(\widehat{\vec{P}, z}).$$

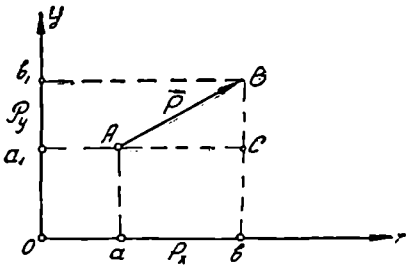


ნახ. 7

ვექტორის მოდულია]

$$P=\sqrt{P_{x_1}^2+P_{y_1}^2+P_z^2}.$$

თუ ვექტორი ძევს $xOy$ სიბრტყეში, სათანადოდ გვექნება (ნახ. 8):



ნახ. 8

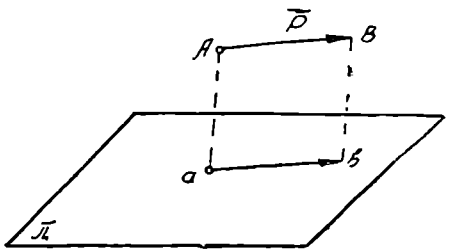
$$P_x = P\cdot\cos(\hat{\overline{P}, x});$$

$$P_y = P\cdot\cos(\hat{\overline{P}, y}),$$

ხოლო ვექტორის მოდული

$$P=\sqrt{P_x^2+P_y^2}.$$

### 8. ვექტორის გეგმილი სიბრტყეზე (ნახ. 9)



ნახ. 9

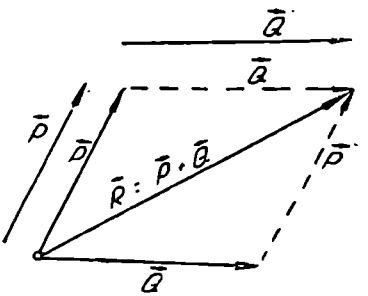
ვთქვათ, მოცემულია $\overline{P}$ ვექტორი და $\pi$ სიბრტყე. $\overline{P}$ ვექტორის $A$ დასაწყისიდან და $B$ ბოლო წერტილიდან $\pi$ სიბრტყეზე დავუშვათ $Aa$ და $Bb$ მართობები, მაშინ $\overline{ab}$ ვექ-

ტორი (რომელსაც შეგვიძლია მივანიჭოთ მიმართულება $a$ წერტილიდან $b$ წერტილისაკენ) $\vec{P}$ ვექტორის გეგმილი იქნება $\pi$ სიბრტყეზე.

კიდევ ერთხელ შევნიშნოთ, რომ ვექტორის გეგმილი ღერძზე სკალარული სიდიდეა, ხოლო ვექტორის გეგმილი სიბრტყეზე არის ვექტორი.

### დ. ვექტორთა შეკრება და გამოკლება

ორი $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორის ჯამი ეწოდება $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$ ვექტორს (ნახ. 10), რომელიც $\vec{P}$ ვექტორის დასაწყისს აერთებს $\vec{Q}$ ვექტორის ბოლოსთან, სადაც $\vec{Q}$ ვექტორი გატარებულია $\vec{P}$ ვექტორის ბოლოდან.

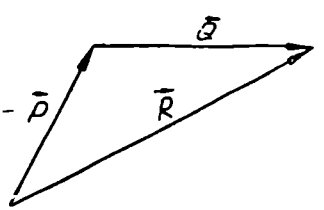


ნახ. 10

ამრიგად, ვექტორთა შეკრება დაიწერება შემდეგნაირად

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}.$$

ვექტორთა შეკრების დადგენილი კანონი შემდეგნაირადაც შეიძლება განვახორციელოთ (ნახ. 11): სივრცის ნებისმიერი $A$ წერტილიდან გავატაროთ $\vec{P}$ ვექტორის გეომეტრიულად ტოლი ვექტორი; შემდეგ $\vec{P}$ ვექტორის ბოლოზე გავატაროთ $\vec{Q}$ ვექტორის გეომეტრიულად ტოლი ვექტორი. $\vec{R}$ ვექტორი, რომელიც აერთებს $\vec{P}$ ვექტორის საწყისს $\vec{Q}$ ვექტორის ბოლოსთან; $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორების გეომეტრიული ჯამი იქნება

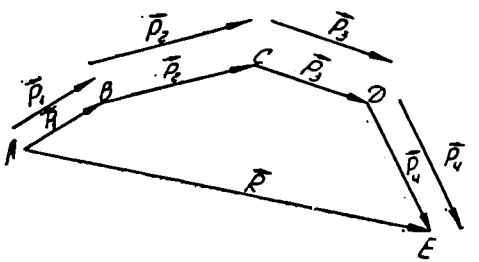


ნახ. 11

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}.$$

ვექტორთა შეკრების უკანასკნელი წესი შეიძლება განვაზოგადოთ, როდესაც შესაკრებია ორზე მეტი ვექტორი. მართლაც, თუ საჭიროა რამდენიმე ვექტორის შეკრება (ნახ. 12), მაშინ აღნიშნული წესის გამოყენებით ავაგებთ $ABCDE$ ტეხილს, რომლის გვერდები მოცემული ვექტორები იქნება, მასთან მეორე ვექტორის საწყისი ემთხვევა პირველი ვექტორის ბოლო წერტილს, მესამე ვექტორის საწყისი ემთხვევა მეორე ვექტორის ბოლოს და ა. შ.

ამ ვექტორთა ჯამი იქნება $\vec{K}$ ვექტორი, რომლის საწყისი ემთხვევა პირველი ვექტორის საწყისს, ხოლო ბოლო წერტილი—უკანასკნელი ვექტორის ბოლო წერტილს. როდესაც მოცემული ვექტორები გვაძლევს ჩაკეტილ მრავალკუთხედს, ამბობენ, რომ ვექტორთა ჯამი ნულის ტოლია.

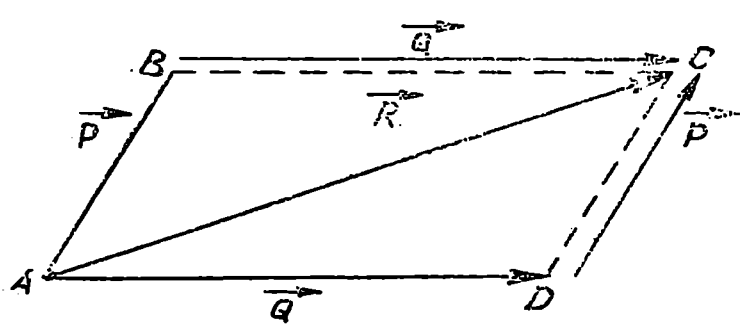



ნახ. 12

ვექტორთა ჯამის აგების წესიდან გამომდინარეობს, რომ მათი ჯამი დამოკიდებული არ არის შესაკრებთა მიმდევრობაზე, ანუ ვექტორთა შეკრება კომუტატიურია. ორი ვექტორისათვის ეს უკანასკნელი შეიძლება ჩაიწეროს ასეთნაირად

$$\vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P}.$$

კერძოდ, როცა $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორები თავმოყრილია, ე. ი. როცა ამ ვექტორებს საერთო $A$ საწყისი წერტილი აქვთ, მაშინ მათი გეომეტრიული ჯამი ისეთი $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$ ვექტორია, რომელიც $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექ-



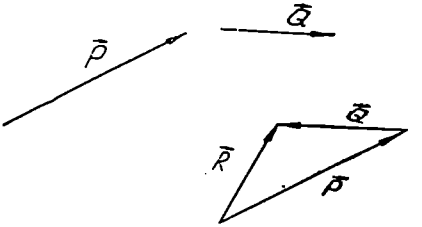

ნახ. 12, ა

ტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალურ ვექტორს წარმოადგენს და რომლის საწყისი $A$ წერტილია, ხოლო ბოლო—პარალელოგრამის მოპირდაპირე წვერო (ნახ. 12 ა).

ვექტორთა შეკრების ამ წესს პარალელოგრამის წესი ეწოდება.

$\vec{Q}$ ვექტორის გამოკლება $\vec{P}$ ვექტორიდან შემდეგი წესით წარმოებს: ავაგებთ $\vec{P}$ ვექტორს (ნახ. 13) და მისი ბოლოდან გავატარებთ $-\vec{Q}$ ვექტორს.

$\vec{R}$ ვექტორი, რომლის საწყისი ემთხვევა $\vec{P}$ ვექტორის საწყისს, ხოლო ბოლო წერტილი ემთხვევა $-\vec{Q}$ ვექტორის ბოლოს, წარმოადგენს $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორების სხვაობას. ზემონათქვამი შეიძლება შემდეგნაირად დაიწეროს



ნახ. 13

$$\vec{R}=\vec{P}+(-\vec{Q})=\vec{P}-\vec{Q}.$$

### ე. ვექტორების დაშლა

ვექტორის დაშლა რამდენიმე ვექტორის ჯამად საზოგადოდ განუსაზღვრელი ამოცანაა, მაგრამ ზოგ შემთხვევაში, დამატებით პირობებს თუ მივიღებთ, ეს ამოცანა შეიძლება განსაზღვრული აღმოჩნდეს. ასეთ შემთხვევებს ეკუთვნის:

1) ვექტორის დაშლა მოცემულ სამ არაკომპლანარულ მიმართულებად და

2) ვექტორის დაშლა მოცემულ ორ მიმართულებად, რომლებიც მოცემული ვექტორის კომპლანარულია*).

ვთქვათ, $\vec{R}=\vec{OM}$ ვექტორი გვსურს წარმოვადგინოთ მოცემული წრფეების პარალელური სამი არაკომპლანარული ვექტორის ჯამად (ნახ. 14, ა). ამისათვის ვექტორის საწყისზე გავატარებთ მოცემული მიმართულებების პარალელურ წრფეებს, და მოცემულ $\vec{OM}$ ვექტორზე, როგორც დიაგონალზე, ავაგებთ პარალელეპიპედს, რომლის წიბოები ამ წრფეების განსწვრივია მიმართული; მაშინ, როგორც ნახაზიდან ჩანს

$$\vec{R}=\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

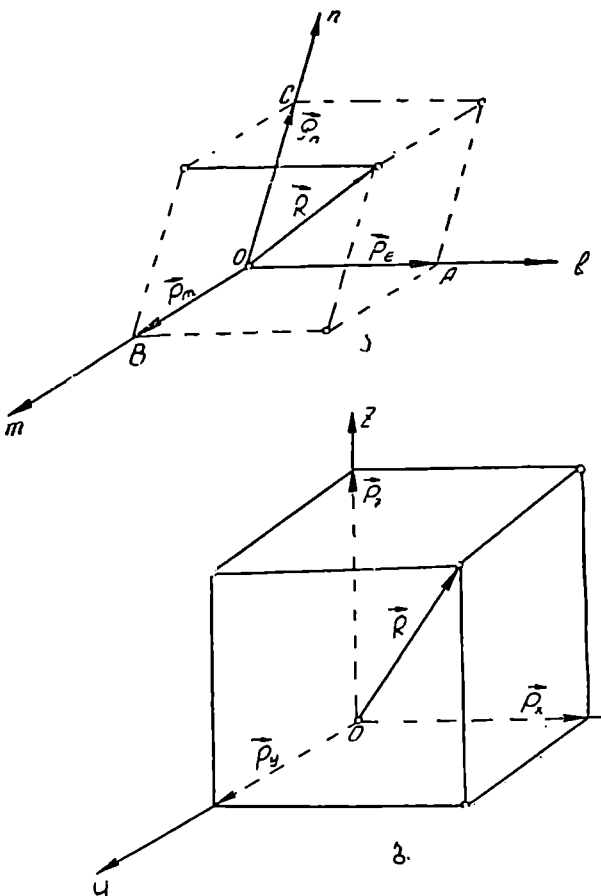
$$\vec{OA}=\vec{P}_l;\ \vec{OB}=\vec{P}_m \quad \text{და} \quad \vec{OC}=\vec{P}_n;$$

*) ერთი და იმავე სიბრტყის პარალელურ ვექტორებს კომპლანარული ვექტორები ეწოდება.

მაშინ გვექნება

$$\vec{R} = \vec{P}_l + \vec{P}_m + \vec{P}_n.$$

თუ $lmn$ ტრიედრს ირიბკუთხა კოორდინატთა სისტემად მივიჩნევთ, მაშინ $\vec{P}_l$, $\vec{P}_m$ და $\vec{P}_n$ ვექტორები $\vec{R}$ ვექტორის ირიბკუთხა მდგენელები (კომპონენტები) იქნება $l$, $m$ და $n$ ღერძებზე.




ნახ. 14

მართკუთხა $xyz$ კოორდინატთა სისტემაში (ნახ. 14, ბ) გვექნება

$$\vec{R} = \vec{P}_x + \vec{P}_y + \vec{P}_z, \qquad (*)$$

სადაც $\vec{P}_x$, $\vec{P}_y$ და $\vec{P}_z$ იქნება $\vec{R}$ ვექტორის მართკუთხა მდგენელები $x$, $y$ და $z$ ღერძებზე.

თუ $x$ ღერძზე ერთეული ვექტორი იქნება $\vec{i}$, $y$ ღერძზე $\vec{j}$ და $z$ ღერძზე $\vec{k}$, მაშინ

$$\vec{P}_x = \vec{i}P_x; \qquad \vec{P}_y = \vec{j}P_y \quad \text{და} \quad \vec{P}_z = \vec{k}P_z.$$

ამ შემთხვევაში (*) გამოსახულება ასეთნაირად დაიწერება

$$\vec{R} = \vec{i}P_x + \vec{j}P_y + \vec{k}P_z.$$

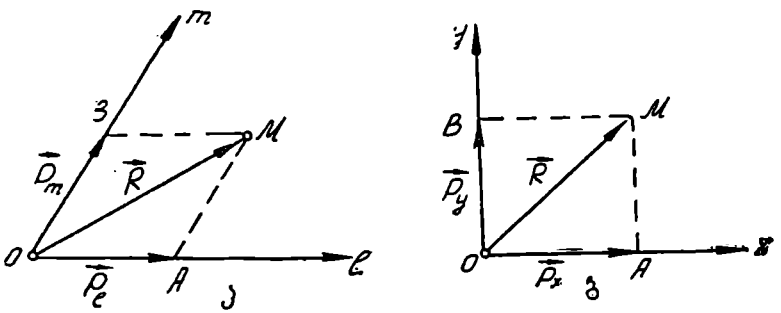
ვთქვათ, საჭიროა $\vec{R}$ ვექტორის დაშლა ორ მიმართულებად, რომლებიც ამ ვექტორის კომპლანარულია.

წინა შემთხვევის ანალოგიურად მოვიქცეთ და გვექნება

$$\vec{OM} = \vec{R} = \vec{OA} + \vec{OB},$$

ანუ (ნახ. 15, ა)

$$\vec{R} = \vec{P}_l + \vec{P}_m.$$




ნახ. 15

თუ *lom* სისტემა ბრტყელი ირიბკუთხა კოორდინატთა სისტემაა, მაშინ $\vec{P}_l$ და $\vec{P}_m$ იქნება $\vec{R}$ ვექტორის კომპონენტები $l$ და $m$ მიმართულებებზე.

ბრტყელი მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის დროს (ნახ. 15, ბ) გვექნება

$$\vec{R} = \vec{P}_x + \vec{P}_y = \vec{i}P_x + \vec{j}P_y.$$

### 3. ვექტორთა ჯამის გეგმილი ღერძსა და სიბრტყეზე

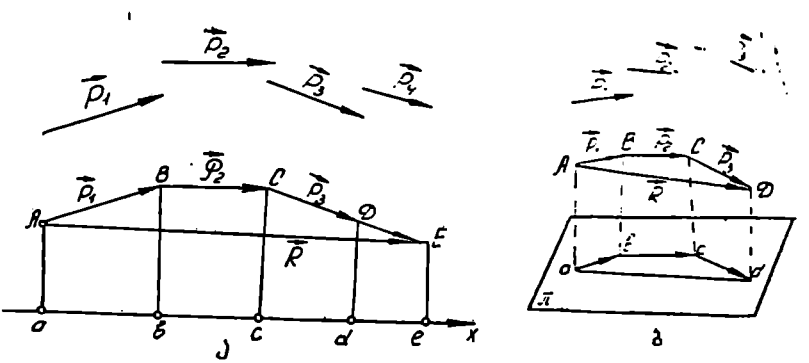
ავიღოთ რამდენიმე ვექტორი $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$ და $x$ ღერძი (ნახ. 16, ა). ავაგოთ მოცემული ვექტორების $\vec{R}$ ჯამვექტორი. დავაგეგმილოთ მოცემული ვექტორები და მათი $\vec{R}$ ჯამი $x$ ღერძზე. ამ მიზნით

$A$, $B$ $C$, $D$, $E$ წერტილებიდან $Aa$, $Bb$, $Cc$, $Dd$ და $Ee$ მართობები დავუშვათ $x$ ღერძზე. მოცემული $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ და $\vec{P}_4$ ვექტორების გეგმილები $x$ ღერძზე სათანადოდ იქნება $ab$, $bc$, $cd$ და $de$, ხოლო $\vec{R}$ ჯამვექტორის გეგმილია $ae$.

როგორც 16, ა ნახაზიდან ჩანს,

$$ae = ab + bc + cd + de$$

(ეს ფორმულა მართებულია ვექტორთა ნებისმიერი განლაგებისათვის), ე. ი. ვექტორთა ჯამის გეგმილი მოცემულ ღერძზე მდგენელი ვექტორების გეგმილების ჯამს უდრის იმავე ღერძზე.




ნახ. 16

ავიღოთ რამდენიმე ვექტორი $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ და $\vec{P}_3$ და $\pi$ სიბრტყე (ნახ. 16, ბ). ავაგოთ მოცემული ვექტორების $\vec{R}$ ჯამი. მოცემული ვექტორები და მათი ჯამი დავაგეგმილოთ $\pi$ სიბრტყეზე. ამ მიზნით $A$, $B$, $C$, $D$ წერტილებიდან $\pi$ სიბრტყეზე დავუშვათ $Aa$, $Bb$, $Cc$ და $Dd$ მართობები; მაშინ $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$ ვექტორები მოცემული $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ და $\vec{P}_3$ ვექტორების გეგმილები იქნება $\pi$ სიბრტყეზე.

მაგრამ 16, ბ ნახაზიდან ჩანს, რომ $\overline{ad}$ ვექტორი $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ და $\overline{cd}$ ვექტორების ჯამია. მაშასადამე, ვექტორების ჯამის გეგმილი მოცემულ სიბრტყეზე მდგენელი ვექტორების გეგმილების ჯამს უდრის იმავე სიბრტყეზე.

## 4. მექანიკის განვითარების მოკლე ისტორიული მიმოხილვა

მექანიკა ერთი უძველესი მეცნიერებათაგანია. მექანიკის ისტორია უწყვეტად დაკავშირებულია საზოგადოების საწარმოო ძალთა განვითარების ისტორიასთან (ამ განვითარების ყოველ ეტაპზე), ტექნიკისა და წარმოების განვითარების დონესთან.

„ბუნების დიალექტიკაში“ ენგელსი წერს: „...ბევრ ქვეყანაში მიწათმოქმედების განვითარების, ქალაქების წარმოქმნის, მსხვილი ნაგებობების მშენებლობისა და ჯელოსნობის წინსვლასთან ერთად განვითარდა მექანიკა. ამის შემდეგ იგი საჭირო შეიქმნა ნაოსნობასა და სამხედრო საქმეში“.

უძველეს ტრაქტატებში მექანიკის შესახებ ნათქვამია ძალებსა და მათ ძირითად თვისებებზე.

სახელგანთქმულ ბერძენ ფილოსოფოს არისტოტელესთვის (384—322 წწ. ჩვენს წელთაღრიცხვამდე) ცნობილი იყო ერთ წერტილზე მოდებული და ერთი წრფის გასწვრივ მოქმედი ძალების შეკრება.

თავისი დროის უდიდესმა ბერძენმა მეცნიერმა არქიმედემ (287—212 წწ. ჩვენს წელთაღრიცხვამდე) ჩამოაყალიბა კანონი ბერკეტის წონასწორობის შესახებ. იგი მართებულად ითვლება გეომეტრიული სტატიკისა და ჰიდროსტატიკის დამაარსებლად. მანვე განავითარა თეორია მარტივ მანქანებზე და აღმოაჩინა ჰიდროსტატიკური წნევის კანონი.

საშუალო საუკუნეების ეპოქა ხასიათდება მექანიკისა და სხვა საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა განვითარების დროებით შეწყვეტით, რაც აიხსნება საზოგადოებრივ დამოკიდებულებათა ხასიათით ფეოდალურ წყობილებაში და თეოლოგიის გაბატონებით ფილოსოფიასა და მეცნიერებაში. მხოლოდ მეთხუთმეტე საუკუნის დასაწყისში სავაჭრო კაპიტალის, ხელოსნობის, ნაოსნობისა და სამხედრო საქმის განვითარებასთან დაკავშირებით სწრაფად იწყო განვითარება მექანიკამ. ამ ეპოქაში მოღვაწეობდა ცნობილი იტალიელი მხატვარი, ფიზიკოსი და ინჟინერი ლეონარდო და ვინჩი (1452—1519 წწ.). მან პირველმა გაწყვიტა კავშირი საშუალო საუკუნეების სქოლასტიკასთან. იგი დიდ მნიშვნელობას ანიჭებდა ცდებს და მათემატიკის გამოყენებას მექანიკის ამოცანების ამოხსნისას. მექანიკის დარგში ლეონარდო და ვინჩიმ გამოიკვლია სხეულის მოძრაობა დახრილ სიბრტყეზე და სრიალის ხახუნი. ექსპერიმენტების საფუძველზე იგი იმ დასკვნამდე მივიდა, რომ სრიალის ხახუნის ძალა დამოკიდებული არ არის

პოხახუნე სხეულთა შეხების ზედაპირის სიდიდეზე. ბლოკზე მოდებული ძალთა წონასწორობის გამოკვლევისას მან მექანიკაში შემოიღო ძალის მომენტის ცნება.

ლეონარდო და ვინჩის შემდეგ უდიდესმა პოლონელმა მეცნიერმა ნიკოლოზ კოპერნიკმა (1473—1543 წწ.) შექმნა მსოფლიოს ჰელიოცენტრული სისტემა, რომელმაც შეცვალა პტოლომეს გეოცენტრული სისტემა და მთელი გადატრიალება მოახდინა იმ ეპოქის მეცნიერულ მსოფლმხედველობაში. კოპერნიკის აღმოჩენამ საფუძველი ჩაუყარა ციურ მექანიკას — ციურ სხეულთა მოძრაობის მეცნიერებას.

ახალ ეპოქას მექანიკის განვითარებაში საფუძველი ჩაუყარა უდიდესმა იტალიელმა მეცნიერმა გალილეო გალილეიმ (1564—1642 წწ.).

გალილეი ითვლება მექანიკის ერთ-ერთი განყოფილების — დინამიკის, ე. ი. მატერიალურ სხეულთა მოძრაობის ფუძემდებლად. მან პირველმა შემოიღო ცნებები მოძრავ სხეულთა სიჩქარესა და აჩქარებაზე არათანაბარი წრფივი გადატანითი მოძრაობის დროს და ცდების საშუალებით დაადგინა სიცარიელეში სხეულთა ვარდნის ზუსტი კანონები. გარდა ამისა, გალილეიმ დაადგინა დინამიკის ერთ-ერთი ძირითადი კანონი — ინერციის კანონი.

გალილეის გამოკვლევათა გამგრძელებლად დინამიკაში ითვლება ჰოლანდიელი მეცნიერი ჰიუგენსი, რომელმაც შექმნა ფიზიკური ქანქარას თეორია და განავითარა გალილეის მიერ შემოღებული აჩქარების ცნება წერტილის მრუდწირული მოძრაობისათვის; მანვე ჩამოაყალიბა ცნება ცენტრიდანულ ძალაზე. ჰიუგენსის ზოგიერთი შრომა შეეხება მყარ სხეულთა დარტყმის თეორიას.

გალილეის მიერ დაწყებული დინამიკის ძირითადი კანონების დადგენა დაამთავრა უკვდავმა ინგლისელმა მეცნიერმა ისაკ ნიუტონმა (1643—1727 წწ.)

ნიუტონმა საბოლოო სახე მისცა კლასიკურ მექანიკას. საკმარისია გავეცნოთ ნიუტონის შრომას: „ნატურალური ფილოსოფიის მათემატიკური პრინციპები“, რომ სრული წარმოდგენა ვიქონიოთ კლასიკური მექანიკის კანონებზე.

მაშინ, როდესაც ნიუტონი ავითარებდა დინამიკას, სტატიკამ თავისი შემდგომი განვითარება ჰპოვა უმთავრესად მისი თანამედროვის, ფრანგი მეცნიერის ვარინიონის (1654—1722 წწ.) შრომებში.

ვარინიონმა საბოლოო სახით დაადგინა ცნება წერტილის მიმართ ძალის მომენტის შესახებ და დაამტკიცა თეორემა ძალთა ტოლქმედის მომენტის შესახებ.

მეჩვიდმეტე საუკუნის მექანიკის ისტორია შეიძლება დავახასიათოთ როგორც დინამიკის საფუძვლების დადგენის პერიოდი.

მეთვრამეტე საუკუნის მეცნიერ მექანიკოსებისაგან აღსანიშნავია ივანე ბერნული, ეილერი, დანიელ ბერნული, დალამბერი და ლაგრანჟი.

ივანე ბერნულიმ (1667—1748 წწ.) პირველმა ჩამოაყალიბა ზოგადი სახით მექანიკის ერთ-ერთი ძირითადი პრინციპი — შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი. გარდა ამისა, ი. ბერნულიმ გამოიკვლია მყარ სხეულთა დარტყმის მოვლენა.

ივანე ბერნულის შვილმა დანიელ ბერნულიმ (1700—1782 წწ.), რომელიც პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი იყო, 1738 წელს გამოსცა ფუნდამენტური შრომა „ჰიდროდინამიკა“, სადაც მან ამოხსნა განტოლება, რომელიც მის სახელს ატარებს და დღემდე ჰიდრომექანიკის ერთ-ერთი ძირითადი განტოლებათაგანია.

1743 წელს მეთვრამეტე საუკუნის გამოჩენილმა ფრანგმა მეცნიერმა დალამბერმა (1717—1785 წწ.) თავის ნაშრომში „დინამიკის ტრაქტატი“ ჩამოაყალიბა მექანიკის მეტად მნიშვნელოვანი პრინციპი, რომელიც მის სახელს ატარებს და არათავისუფალი მექანიკური სისტემის დინამიკის ამოცანების ამოხსნის ზოგად მეთოდს გვაძლევს.

მექანიკაში ანალიზური მეთოდის განვითარებამ ნათელი გამოსახულება ჰპოვა გამოჩენილი ფრანგი მათემატიკოსის ლაგრანჟეს (1736—1813 წწ.) შრომებში. მისი თხზულება „ანალიზური მექანიკა“ აგებულია მკაცრად, ერთიანი საერთო პრინციპის — შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპის — საფუძველზე.

ახალი სამანქანო ტექნიკის მოთხოვნებმა საფუძველი მისცა დამოუკიდებელი დისციპლინის — ტექნიკური მექანიკის ანუ გამოყენებითი მექანიკის ჩამოყალიბებას.

ტექნიკური მექანიკის ჩამოყალიბებასა და განვითარებაში დიდი წვლილი მიუძღვით ფრანგ მეცნიერებს: პონსელეს (1788—1867 წწ.), კორიოლისს (1792—1843 წწ.), რეზალსა (1828—1896 წწ.) და სხვებს. მათი შრომებით საფუძველი ჩაეყარა მანქანათა დინამიკას; მასთან, საფუძვლად მიღებული იყო ენერგეტიკული პრინციპი. ამ პრინციპის გამოყენებით პონსელემ პირველმა ჩამოაყალიბა ცნება მექანიკურ მუშაობაზე.

პირველი რუსი მეცნიერი იყო აკადემიკოსი მიხეილ ლომონოსოვი (1711—1765 წწ.), რომელმაც ექსპერიმენტულად დაადგინა ნივთიერების მუდმივობის კანონი.

ლომონოსოვთან ერთად მოღვაწეობდა პეტერბურგის აკადემიის წევრი, უდიდესი მათემატიკოსი და მექანიკოსი ლეონარდ ეილე-

რი (1707—1783 წწ.), რომელიც საფრანგეთიდან მოწვეული იყო რუსეთში დანიელ ბერნულთან ერთად. იმ დროს, როდესაც ნიუტონი თავის „პრინციპებში“ სარგებლობდა განსაკუთრებით გეომეტრიული მეთოდით, ეილერმა შექმნა მექანიკის ამოცანების ამოხსნის ანალიზური მეთოდები.

მეცხრამეტე საუკუნის გამოჩენილი რუსი მათემატიკოსი და მექანიკოსია მ. ო ს ტ რ ო გ რ ა დ ს კ ი (1801—1862 წწ.), რომელიც რუსეთის ანალიზური მექანიკის წარმომადგენელია. მან დამოუკიდებლად ჩამოაყალიბა მექანიკის ერთ-ერთი ძირითადი პრინციპი — უ მ ც ი რ ე ს ი მ ო ქ მ ე დ ე ბ ი ს პ რ ი ნ ც ი პ ი. მისი გამოკვლევები შეეხება აგრეთვე ჰიდრომექანიკას, დრეკადობის თეორიასა და ბალისტიკას.

მეორე გამოჩენილი რუსი მათემატიკოსი და მექანიკოსია აკადემიკოსი პ. ჩ ე ბ ი შ ე ვ ი (1821—1894 წწ.), რომლის შრომებმა დიდი გავლენა იქონია მექანიკის განვითარებაზე რუსეთში და საზღვარგარეთ. მექანიკის დარგში ჩებიშევი მექანიზმებისა და მანქანათა თეორიის რუსული სკოლის მამამთავრად ითვლება.

ჩებიშევის ერთ-ერთ ნიჭიერ მოწაფედ ითვლება გენიალური რუსი მათემატიკოსი ა. ლ ი ა პ უ ნ ო ვ ი (1857—1918 წწ.). მისი ყველა ნაშრომი შეეხება მექანიკის ორ ურთულეს ამოცანას: 1) იმ ფორმების მოძებნას, რომლის მიღება შეუძლია ერთვაროვან სითხეს, რომელიც თანაბრად ბრუნავს ერთგვარი უძრავი ღერძის გარშემო, თუ ამ სითხის ნაწილაკები მიიზიდება ნიუტონის კანონის მიხედვით, და 2) მექანიკურ სისტემათა მოძრაობის მდგრადობას.

ამის შემდეგ უნდა მოვიხსენიოთ პირველი რუსი მათემატიკოსი ქალ ს ო ფ ი ო კ ო ვ ა ლ ე ვ ს კ ა ი ა (1850—1891 წწ.), რომელმაც თავის შრომაში „მყარი სხეულის მოძრაობა უძრავი წერტილის გარშემო“ მთლიანად ამოხსნა ეს ამოცანა ახალი შემთხვევისათვის, რომელიც ეილერისა და ლაგრანჟის შემთხვევებზე გაცილებით რთულია. ამ ნაშრომმა კოვალევსკაიას დიდი მეცნიერის სახელი მოუხვეჭა.

მეცხრამეტე საუკუნის დასასრულს რუსეთში აღმოცენდა თეორიული მექანიკის ახალი განყოფილება — ც ვ ლ ა დ ი მ ა ს ი ს ს ხ ე უ ლ ი ს მ ე ქ ა ნ ი კ ა, რომლის განვითარებაში დიდი ღვაწლი მიუძღვის ცნობილ რუს მეცნიერს ი. მ ე შ ჩ ე რ ს კ ი ს (1859—1935 წწ.).

ამჟამად ცვლადი მასის სხეულთა მექანიკა რეაქტიული ძრავების თეორიისა და რაკეტების დინამიკის საფუძვლად ითვლება.

მოსკოვის უნივერსიტეტისა და მოსკოვის უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლის პროფესორი, დიდი რუსი მეცნიერი ნ ი კ ო ლ ო ზ ჟ უ კ ო ვ ს კ ი (1847—1924 წწ.) თანამედროვე თეორიული და ექსპერი-

შენტული აეროდინამიკის ფუძემდებელია. მასვე ეკუთვნის უამრავი შრომა თეორიული მექანიკის ყველა დარგში და უმთავრესად აერო- და ჰიდრომექანიკაში.

ნ. ჟუკოვსკი გეომეტრიულ მეთოდს მექანიკაში დიდ მნიშვნელობას ანიჭებდა არა მარტო სამეცნიერო კვლევებში, არამედ თეორიული მექანიკის სწავლებაშიაც.

ვ. ი. ლ ე ნ ი ნ მ ა ნ. ე. ჟუკოვსკის „რუსეთის ავიაციის მამა“ უწოდა.

ნ. ჟუკოვსკიმ რუსეთში ჩამოაყალიბა ჰიდრო- და აერომექანიკოსების დიდი სკოლა, რომლის ერთ-ერთი ბრწყინვალე წარმომადგენელია აკად. ს. ჩ ა პ ლ ი გ ი ნ ი (1869—1942 წწ.).

ჩაპლიგინის მთავარი შრომები შეეხება მყარი სხეულის დინამიკას და ჰიდრო- და აეროდინამიკას. თავის მასწავლებელ ნ. ჟუკოვსკისთან ერთად ს. ჩაპლიგინმა დიდი როლი შეასრულა რუსეთის ავიაციის განვითარებაში.

დიდ რუს მეცნიერთა შორის აღსანიშნავია კ. ც ი ო ლ კ ო ვ ს კ ი (1857—1935 წწ.). ციოლკოვსკი ცნობილია თავისი შრომებით რეაქტიული მოძრაობის თეორიაში. მან მრავალი ახალი იდეა დასახა პლანეტებს შორის კავშირის რეაქტიული აპარატების კონსტრუირებისათვის.

მექანიკის დარგში დიდი მიღწევები აქვთ საბჭოთა მეცნიერებს. ამას მოწმობს ბალისტიკური რაკეტების, დედამიწის ხელოვნური თანამგზავრებისა და კოსმოსური ხომალდების შექმნა.

მექანიკის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი დარგის — დრეკადობის მათემატიკური თეორიის დამუშავებაში უდიდესი ღვაწლი მიუძღვის ქართველ მეცნიერებს, აკადემიკოსებს: ნ. მ უ ს ხ ე ლ ი შ ვ ი ლ ს, ი. ვ ე კ უ ა ს, ვ. კ უ პ რ ა ძ ე ს და მათ მოწაფეებს, რომლებმაც საყოველთაო აღიარება მოუპოვეს საბჭოთა მეცნიერებას.

# სვაჟიკა.

## I თავი

## ძირითადი ცნებანი, განსაზღვრები და მყარი სხეულის სტატიკის აქსიომები

### § 1. ძირითადი ცნებანი და განსაზღვრები

მყარი სხეულის სტატიკაში განიხილება მექანიკური ურთიერთმოქმედებანი აბსოლუტურად მყარ სხეულებს შორის და ასეთი სხეულების წონასწორობის პირობები.

მატერიალური სხეული შეიძლება ვუწოდოთ მატერიის (ნივთიერების) ერთგვარ რაოდენობას, რომელიც ავსებს რაღაც მოცულობას სივრცეში. არის შემთხვევა, როდესაც სხეულს ამა თუ იმ მიმართულებით აქვს მეტად მცირე ზომები სხვა მიმართულების ზომებთან შედარებით. ასეთ შემთხვევებში სხეული წარმოადგენს მატერიალურ ზედაპირს ან მატერიალურ წირს.

ერთი სხეულის მექანიკური ზემოქმედება მეორეზე ეწოდება ამ სხეულების ისეთ ურთიერთმოქმედებას, რომლის დროსაც უგულებელყოფენ ცვლილებებს სხეულის ქიმიურ სტრუქტურაში და მის ფიზიკურ მდგომარეობაში (გახურებას, გაცივებას და ა. შ.). როდესაც სხეული განიცდის მექანიკურ ზემოქმედებას სხვა მატერიალური სხეულებისაგან, მაშინ მას შეუძლია შეიცვალოს თავისი მოძრაობა სივრცეში ან დარჩეს წონასწორობაში (მოსვენებულ მდგომარეობაში). მექანიკურ ზემოქმედებას შეიძლება ადგილი ჰქონდეს როგორც სხეულთა შეხებისას, ისე გარკვეულ მანძილზედაც (მიზიდულობა, განზიდულობა). მაგალითად, დედამიწის მიზიდულობა, რასაც განიცდის ყოველი სხეული, წარმოქმნის სხეულის წონას ანუ სიმძიმის ძალას.

აბსოლუტურად მყარი სხეული ეწოდება ისეთ მატერიალურ სხეულს, რომლის გეომეტრიული ფორმები და ზომები

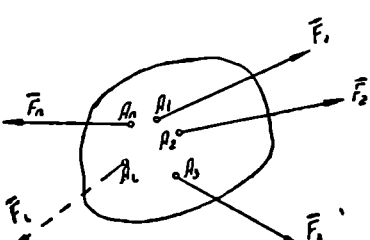
არ იცვლება არავითარი მექანიკური ზემოქმედების შედეგად სხვა სხეულებისაგან. აბსოლუტურად მყარი სხეულის ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი უცვლელია ნებისმიერი მექანიკური ზემოქმედების შედეგად სხვა სხეულებისაგან.

ბუნებაში აბსოლუტურად მყარი სხეულები არ არსებობს. ყოველი სხეული იცვლის ფორმას (დეფორმირდება) მოდებული ზემოქმედების შედეგად. მაგრამ ეს დეფორმაციები შეიძლება ისეთი უმნიშვნელო იყოს, რომ მათი აღმოჩენისათვის საჭირო შეიქმნეს განსაკუთრებით რთული თანამედროვე ხელსაწყოების გამოყენება. ბევრ შემთხვევაში მყარ სხეულთა მოძრაობაზე ასეთი მცირე დეფორმაციები არ მოქმედებენ.

ნივთიერი (მატერიალური) წერტილი ეწოდება მატერიალურ სხეულს, რომლის ზომები შეიძლება მხედველობაში არ მივიღოთ.

მექანიკის ერთ-ერთ ძირითად ცნებას წარმოადგენს ძალა. ძალა ვექტორული ფიზიკური სიდიდეა, რომელიც რიცხვითი მნიშვნელობით და მიმართულებით გამოსახავს მოცემულ სხეულზე სხვა მატერიალური სხეულის ზემოქმედებას.

ძალა განისაზღვრება სხეულზე მოდების წერტილით, მიმართულებით და რიცხვითი მნიშვნელობით. სხეულზე მოდებული ძალის სიდიდის გამომსახველი ერთეულების დადგენისათვის მას (ძალას), ჩვეულებრივ, ადარებენ ძალებს, რომლითაც დედამიწა თავისი მიზიდულობით მოქმედებს სხეულზე. ამრიგად, ძალა იზომება ნიუტონებით (ნ). 9,8 ნიუტონის ანუ 1 კგ-ის ტოლი ძალა იმ მექანიკურ ზემოქმედებას გამოსახავს, რომელსაც თავისი მიზიდულობით აწარმოებს დედამიწა 1 დც³ წყლის მასაზე +4°C-ის დროს (ზღვის დონეზე ნორმალური ატმოსფერული წნევის დროს). ასეთი ზემოქმედება სხეულზე შეგვიძლია მუდამ განვახორციელოთ არა მარტო ვერტიკალური მიმართულებით, არამედ სხვა ნებისმიერი, მაგალითად, ჰორიზონტალური მიმართულებით.



ნახ. 17

ძალთა სისტემა ეწოდება ძალთა ჯგუფს, რომელიც სხეულის სხვადასხვა წერტილზეა მოდებული (ნახ. 17). სისტემის ძალები

სხვადასხვაგვარად მოქმედებენ მოცემულ სხეულზე სხვა მატერიალური ობიექტებიდან.

მოცემულ მყარ სხეულზე მოდებულ ძალთა სისტემას აღვნიშნავთ შემდეგნაირად

$$(\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ \vec{F}_3,\ \ldots,\vec{F}_n).$$

**ძალთა ორ სისტემას ეკვივალენტური ანუ ტოლფასი ეწოდება, თუ თითოეული მათგანი ერთი და იმავე სახის მექანიკურ მოქმედებას მოახდენს სხეულზე.**

ძალთა სისტემების ეკვივალენტობა შემდეგნაირად აღინიშნება

$$(\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ \vec{F}_3,\ \ldots,\ \vec{F}_n)\sim(\vec{F}'_1,\ \vec{F}'_2,\ \vec{F}'_3,\ \ldots,\ \vec{F}'_n).$$

**ძალთა სისტემა ნულის ეკვივალენტური ან გაწონასწორებული** იქნება მაშინ, თუ მას მოვდებთ მოსვენებულ მდგომარეობაში მყოფ სხეულს და სხეულის მდგომარეობა არ შეიცვლება; მას შემდეგნაირად აღნიშნავენ

$$(\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ \vec{F}_3,\ \ldots,\ \vec{F}_n)\sim 0.$$

ძოძრავ სხეულზე ნულის ეკვივალენტური ძალთა სისტემა რომ მოვდოთ, სხეულის მოძრაობის ხასიათი არ შეიცვლება.

მოცემული ძალთა სისტემის ტოლქმედი ძალა ამ ძალთა სისტემის ეკვივალენტურ ძალას ეწოდება. $(\vec{F}_1.\ \vec{F}_2,\ \vec{F}_3,\ \ldots,\ \vec{F}_n)$ ძალთა სისტემის ტოლქმედ ძალას $\vec{R}$-ით აღვნიშნავთ, მაშინ

$$(\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ \vec{F}_3,\ \ldots,\ \vec{F}_n)\sim\vec{R}.$$

საჭიროა აღინიშნოს, რომ არა ყველა ძალთა სისტემას აქვს ტოლქმედი. მაგალითად, ერთ სიბრტყეში არამდებარე ორ ძალას არა აქვს ტოლქმედი.

$(\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ \vec{F}_3,\ \ldots,\ \vec{F}_n)$ ძალთა სისტემის **გამაწონასწორებელი ძალა** ისეთი ძალაა, რომელიც ამ სისტემის დამატებით მოკვეცს ნულის ტოლფას ახალ სისტემას.

თუ გამაწონასწორებელი ძალა იქნება $\vec{Q}$, მაშინ

$$(\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ \vec{F}_3,\ \ldots,\vec{F}_n,\ \vec{Q})\sim 0.$$

გამაწონასწორებელი ძალა მხოლოდ ისეთ ძალთა სისტემას გააჩნია, რომელსაც აქვს ტოლქმედი ძალა. მაშინ გამაწონასწორებელი ძალა ტოლქმედი ძალის ვექტორის შებრუნებული ვექტორით გამოისახება, ე. ი.

$$\vec{Q}=-\vec{R}.$$

გამაწონასწორებელი ძალები სხეულზე იმ წრფის გასწვრივ მოქმედებენ, რომლითაც სხეულზე მოდებულია ტოლქმედი ძალა, მაგრამ შებრუნებული მიმართულებით.

## § 2. სტატიკის აქსიომები

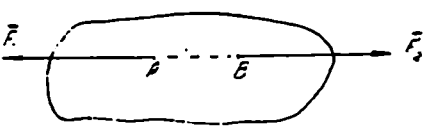
მექანიკაში დადგენილია სხეულთა მოძრაობის შესწავლის მეთოდები, რომელთა საფუძვლად მიღებულია აქსიომებად წოდებული დებულებანი. მექანიკის და, კერძოდ, სტატიკის აქსიომების საფუძვლად კაცობრიობის მიერ დაგროვილი ცდებია მიღებული.

**პირველი აქსიომა.** მყარ სხეულზე მოდებული ორი ძალა წონასწორდება, თუ ეს ძალები ერთ წრფეზე მოქმედებენ, სიდიდით ტოლებია და ურთიერთსაწინააღმდეგოდ არიან მიმართული.

ეს აქსიომა მართებულია აბსოლუტურად მყარი სხეულისათვის.

მე-18 ნახაზზე

$$\overline{F}_2 = -\overline{F}_1.$$




ნახ.18

ასეთ ძალთა სისტემა ნულის ტოლფასია

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2) \sim 0.$$

**მეორე აქსიომა.** სხეულის მექანიკური მდგომარეობა არ შეიცვლება, თუ ძალთა სისტემას დავუმატებთ ან გამოვაკლებთ ნულის ეკვივალენტურ ძალთა სისტემას.

ვთქვათ, სხეულზე ჯერ მოდებულია ძალთა სისტემა $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots, \overline{F}_n)$. ვთქვათ, ძალთა სისტემა $(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \ldots, \overline{P}_n) \sim 0$, ე. ი. გაწონასწორებულია. მაშინ ძალთა სისტემა $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots, \overline{F}_n)$ ეკვივალენტურია სისტემისა, რომელიც შედგება სისტემისაგან

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots, \overline{F}_n) \quad \text{და} \quad (\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \ldots, \overline{P}_n) \sim 0,$$

ე. ი.

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots, \overline{F}_n) \sim |(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots, \overline{F}_n);$$
$$(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \ldots, \overline{P}_n)|.$$

**I შედეგი.** მოყვანილი ორი აქსიომიდან გამოიყვანება თეორემა იმის შესახებ, რომ ყოველი ძალა, სხეულზე მისი მოქმედების დაურღვევლად, შეგვიძლია გადავიტანოთ ფუძის გასწვრივ.

განვიხილოთ აბსოლუტურად მყარი სხეული, რომლის $A$ წერტილზე მოქმედებს $\vec{F}$ ძალა (ნახ. 19). ავიღოთ გამაწონასწორებელი $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალთა სისტემა; ეს ძალები სიდიდით $\vec{F}$ ძალის ტოლებია და ამ უკანასკნელის ფუძის გასწვრივაა მიმართული.

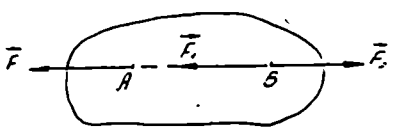
$\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალები მოვდოთ $\vec{F}$ ძალის ფუძეზე მდებარე $B$ წერტილზე, მაშინ

$$\vec{F} \sim \{\vec{F};\ (\vec{F}_1,\ \vec{F}_2)\},$$

მასთან

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1,\ = -\vec{F}.$$

მაგრამ პირველი აქსიომის მიხედვით $\vec{F}$ და $\vec{F}_2$ ძალები წარმოქმნიან გაწონასწორებულ სისტემას, ე. ი. $(\vec{F},\ \vec{F}_2) \sim 0$ და მეორე აქსიომის ძალით შეიძლება მათი უკუვდება. დარჩენილი $\vec{F}_1$ ძალა $\vec{F}$ ძალის ტოლია, მაგრამ $B$ წერტილზეა მოდებული.



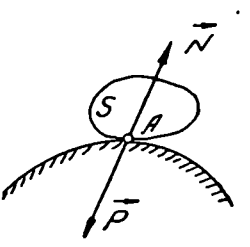

ნახ. 19

II შედეგი. მხოლოდ ისეთ ძალთა სისტემას შეიძლება ჰქონდეს გამაწონასწორებელი ძალა, რომელი სისტემის დაყვანაც შეიძლება ტოლქმედ ძალაზე, მაშინ გამაწონასწორებელი ძალა ამ ტოლქმედი ძალის რიცხვითი მნიშვნელობის ტოლია და მიმართულებით მისი საწინააღმდეგოა, მასთან ორი ძალა ერთ წრფეზე ძევს.

**მესამე აქსიომა.** *ერთი სხეულის ქმედება მეორეზე იწვევს ტოლსა და საწინააღმდეგო უკუქმედებას პირველზე.*

ამ აქსიომას იყენებენ დინამიკაშიც და მას ეწოდება ნიუტონის კანონი *ქმედება-უკუქმედების ტოლობის შესახებ.*

თუ მოცემულ სხეულზე მოდებულია მეორე სხეულიდან ზემოქმედების $\vec{F}$ ძალა, მაშინ მოცემული სხეულიდან მეორე სხეულზე მოდებული იქნება $\vec{F}'$ ძალა, რომელიც $\vec{F}$ ძალის ტოლი და პირდაპირ შებრუნებულია $(\vec{F}' = -\vec{F})$.

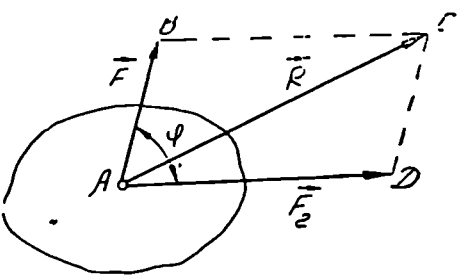



ნახ. 20

ვთქვათ, $S$ სხეული (ნახ. 20) $A$ წერტილში აწვება მეორე სხეულს $\vec{P}$ ძალით. თავის მხრივ მეორე სხეული მოქმედებს პირველ სხეულზე $A$ წერტილში $\vec{N}$ ძალით. ეს ძალები ტოლი და შებრუნებულებია, მაგ-

რამ სხვადასხვა სხეულზეა მოდებული. ერთ გეომეტრიულ $A$ წერტილში თითქოს თავს იყრის ორი მატერიალური წერტილი: ერთი მატერიალური წერტილი ეკუთვნის ერთ ურთიერთმოქმედ სხეულს, მეორე მატერიალური წერტილი კი—მეორე სხეულს. ამის გამო, ცხადია, ქმედება და უკუქმედება არ წარმოქმნის ნულის ეკვივალენტურ ძალთა სისტემას. მათ მიმართ არ შეიძლება სტატიკის პირველი აქსიომის გამოყენება, რადგან ეს ძალები სხვადასხვა სხეულზეა მოდებული.

**მეოთხე აქსიომა.** მყარი სხეულის ერთ წერტილზე კუთხით მოდებული ორი ძალის ტოლქმედი ამ ძალებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალით გამოისახება და ამ დიაგონალის გასწვრივაა მიმართული (ნახ. 21).



ნახ. 21

ვთქვათ, მყარი სხეულის $A$ წერტილზე $\varphi$ კუთხით მოდებულია ორი ძალა $\overline{F}_1$ და $\overline{F}_2$, მაშინ ამ აქსიომის ძალით ვწერთ

$$\overline{R}=\overline{F}_1+\overline{F}_2.$$

მიღებული ვექტორული ტოლობა გვიჩვენებს, რომ მყარი სხეულის ერთ წერტილზე კუთხით მოდებული ორი ძალის ვექტორი პარალელოგრამის წესით იკრიბება.

ეს აქსიომა შებრუნებულადაც მტკიცდება. ძალის დაშლა უამრავი ხერხით შეიძლება ორ ძალად, რომლებიც მოცემული ძალის ფუძის ნებისმიერ წერტილზეა მოდებული. მდგენელ ძალებს ნებისმიერ ერთ სიბრტყეში განალაგებენ, მასთან ეს სიბრტყე დასაშლელი ძალის ფუძეზე უნდა გადიოდეს.

თავისუფალი მყარი სხეული ეწოდება ისეთ სხეულს, რომელსაც შეუძლია ნებისმიერი გადაადგილება მოცემული მდებარეობიდან, რისთვისაც საჭიროა სათანადო ძალების მოდება.

სხეულზე მოქმედი ბმები ეწოდება სხეულის თავისუფალი მოძრაობის შემზღუდებს, რომლებიც შენარჩუნებულია სხეულზე მოდებული ნებისმიერი ძალების დროს.

**მეხუთე აქსიომა.** ბმების მოქმედების ეფექტი ისეთივეა, როგორც განსაზღვრული დამატებითი ძა-

ლებისა, რომელთა მოდება შეიძლება თავისუფალ სხეულზე.

ძალებს, რომლებიც გამოსახავენ მხოლოდ ბმების მოქმედებას, ბმების რეაქციები ეწოდება.

ძალებს, რომლებსაც შეუძლიათ თავისუფალ სხეულს მიანიჭონ მოძრაობა, აქტიური ძალები ეწოდება.

თუ სხეულზე აქტიურ ძალებს გარდა ბმების რეაქციებსაც მოვდებთ, მაშინ სხეული თავისუფალ სხეულად შეგვიძლია განვიხილოთ.

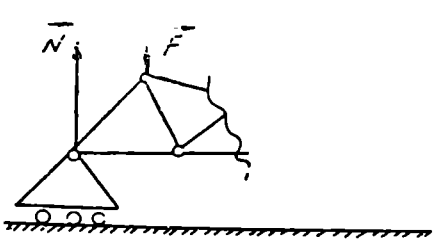
პრაქტიკულად ბმები ძირითადად ხორციელდება სხვადასხვა სხეულებით, რომლებიც ზღუდავენ მოცემული სხეულის თავისუფალ მოძრაობას.

თუ სხეულზე, რომელიც ემორჩილება ზოგიერთ ბმებს, მოქმედებს აქტიური ძალები, მაშინ ბმების რეაქციები ამ ძალებზეა დამოკიდებული.

მოძრავი სხეული შეიძლება იმყოფებოდეს ბმების რეაქციების ზემოქმედების ქვეშ აქტიური ძალების არარსებობის დროს. მაგალითად, თუ მატერიალური (ნივთიერი) წერტილი მოძრაობს მოსრილ მატერიალურ ზედაპირზე, იგი ზედაპირის რეაქციას განიცდის აქტიური ძალების არარსებობის დროსაც (მაგალითად, უწონადობის პირობებში).

**ბმების რეაქციების ძირითადი ტიპები.** განვიხილოთ ბმების ძირითადი სახეები და მათი რეაქციის ძალები.

22-ე ნახაზზე გამოსახულია გლუვი ზედაპირის რეაქცია მოძრავ ხაყრდენზე (საგორავებით). როდესაც ერთმანეთს ეხება აბსოლუტურად გლუვი სხეულები, მაშინ ურთიერთმოქმედების ძალები მათი ზედაპირების შეხების წერტილზე გატარებულ ნორმალზე გაივლის.




ნახ. 22

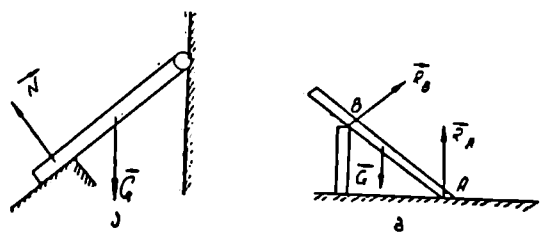
23, ა ნახაზზე ნაჩვენებია გლუვი ზედაპირის $\bar{N}$ რეაქცია ამ ზედაპირზე მდებარე ღეროზე.

23, ბ ნახაზზე გამოსახულია გლუვი იატაკისა და გლუვი შვერილის რეაქციები იატაკსა და შვერილზე მოთავსებულ ღეროზე, რომელსაც შეუძლია სრიალი ამ საყრდენ ზედაპირებზე.

თუ ორი ერთმანეთთან შეუღლებული სხეულის ურთიერთმოქმედებისას წარმოიქმნება მხოლოდ ერთი რეაქცია თითოეული სხეულიდან

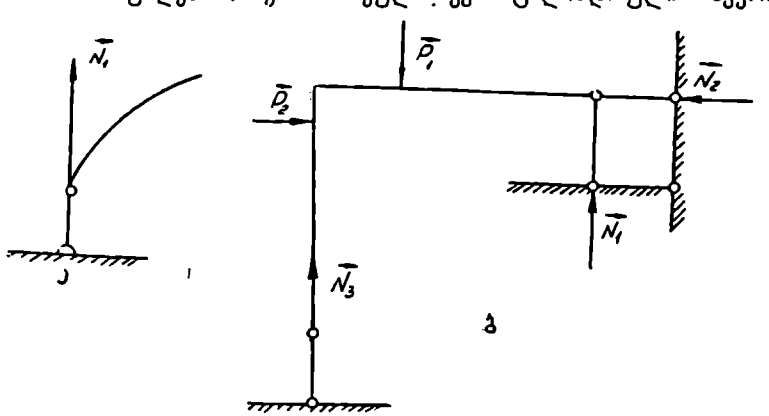
შეორეზე, მაშინ ამ რეაქციის ძალის დაშლა შეიძლება ორ მდგენელად, რომელთა მიმართულება საყრდენი ღერაკებით აღინიშნება (ნახ. 24, ა და ბ).

24, ა ნახაზზე გამოსახული არ არის თაღის დატვირთული ნაწილი. სხეულთა შეუღლება ხშირად ხორციელდება სახსრების საშუალებით. სახსარი ეწოდება მოწყობილობას, რომელიც აერთებს სხეულებს და საშუალებას აძლევს ამ სხეულებს შეასრულონ ურთიერთფარდობითი ბრუნვა.




ნახ. 23

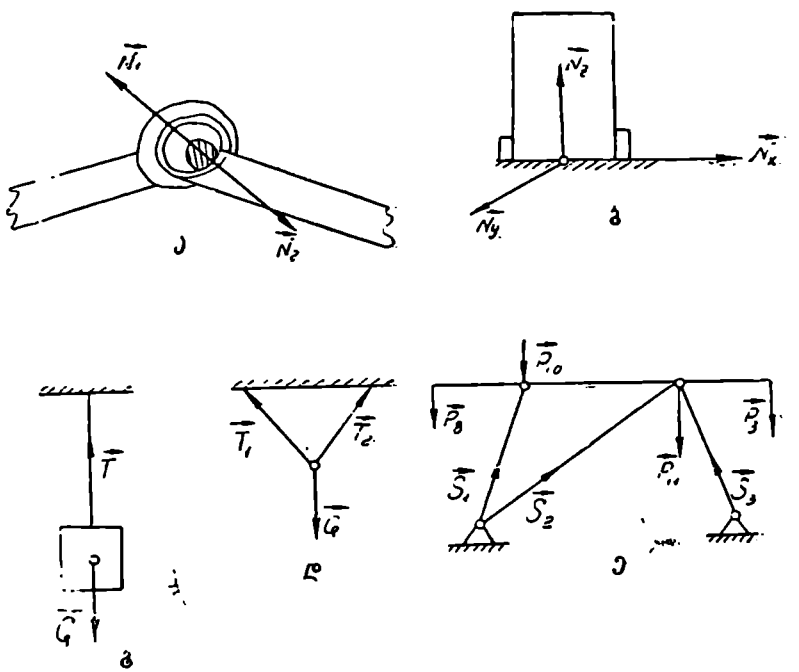
ცილინდრული სახსარი სხეულებს საშუალებას აძლევს იბრუნონ ერთი ღერძის ვარშემო და ისრიალონ მეორე ღერძის გასწვრივ. 25, ა ნახაზზე გეგმაში გამოსახულია ორი სხეულის შეუღლება ცილინდრული სახსრის საშუალებით. ერთ სხეულს აქვს ცილინდრული შვერილი




ნახ. 24

(შიგა წრეწირი გეგმაში), რომელიც მეორე სხეულში (გარე წრეწირი) გაკეთებულ ნახვრეტშია ჩადგმული. შვერილი მეორე სხეულის ბრუნვის ღერძს წარმოადგენს.

როდესაც არ არსებობს ხახუნი, მაშინ სხეულთა ურთიერთრეაქციები ცილინდრულ სახსარში სახსრის ღერძის მართობულ ერთ სიბრტყეში განლაგდება ნებისმიერი აქტიური ძალების შემთხვევაში. თუკი ცილინდრული სახსარი არ აფერხებს სხეულის გადაადგილებას მხოლოდ ერთი მიმართულებით — ცილინდრის ღერძის გასწვრივ, და აფერხებს მოძრაობას საწინააღმდეგო მიმართულებით, მაშინ ცილინდრულ სახსარს საქუსლე ეწოდება. ამ შემთხვევაში საყრდენ რეაქციას სამი $N_x$, $N_y$ და $N_z$ მდგენელი აქვს სივრცეში (ნახ. 25, ბ).




ნ ა ხ. 25

სფერული სახსარი ეწოდება მოწყობილობას, რომელიც შეუღლებულ სხეულებს (შეუღლების საერთო წერტილით) საშუალებას აძლევს შეასრულონ სივრცეში ურთიერთფარდობითი მოძრაობა. სფერული სახსარი შედგება ერთ სხეულზე მდებარე სფერული ფიალისა და მეორე სხეულის (იმავე დიამეტრის) სფერული შვერილისაგან.

სხეულის საყრდენი რეაქცია სფერულ სახსარში აქტიური ძალების ცვლილებისას იცვლება, არ რჩება ერთ სიბრტყეში და მას შეძ-

ლება ჰქონდეს ნებისმიერი მიმართულება სივრცეში; იგი იშლება სამ მდგენელად კოორდინატთა ღერძების გასწვრივ.

თუ ბმა ხორციელდება ძაფით, მაშინ რეაქციის ძალა მიმართული იქნება ან ძაფის გასწვრივ მისი წრფივობისას (ნახ. 25, გ და დ), ან მის მხებზე.

თუ ბმა ხორციელდება მყარი უწონადი წრფივი ღეროთი, რომელსაც ბოლოებში აქვს სახსრები ხახუნის გარეშე და რომელზედაც მხოლოდ ბოლოებში მოქმედებს ძალები, მაშინ რეაქციის ძალა მიმართული იქნება ღეროს გასწვრივ (ნახ. 25, ე). ამ ნახაზზე $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ და $\bar{S}_3$ რეაქციები სახსრულად ძელაკთან შეერთებული სამი ღეროს გასწვრივაა მიმართული. მყარი სხეული წვრილი ღეროს სახით წონასწორობაში იმყოფება მის ბოლოზე მოდებული ძალების მოქმედებით მხოლოდ მაშინ, როდესაც ძალთა სისტემა ღეროს ყოველ ბოლოზე ტოლქმედზე დაიყვანება და ეს ორი ტოლქმედი ღეროს ბოლოებზე გამავალი წრფის გასწვრივაა მიმართული ურთიერთ შებრუნებულად, თან რიცხობრივად თანატოლებია. ზოგად შემთხვევაში რეაქციები უცნობია სიდიდით და მიმართულებით და განისაზღვრება სხეულზე მოდებული ყველა აქტიური ძალისა და ბმების რეაქციების წონასწორობის პირობების მიხედვით.

**მეექვსე აქსიომა** (გამყარების აქსიომა). მექანიკური სისტემის წონასწორობა არ დაირღვევა ახალი ბმების დამატებით; კერძოდ, მექანიკური სისტემის წონასწორობა არ დაირღვევა, თუ სისტემის ყველა ნაწილი ერთმანეთთან უცვლელად (ხისტად) იქნება შეერთებული. მექანიკურ სისტემად იგულისხმება მატერიალური სხეულებისა და წერტილების ერთობლიობა.

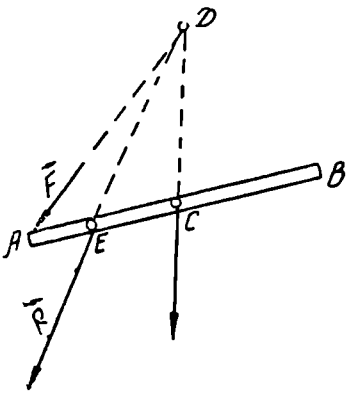
ამ აქსიომას დიდი მნიშვნელობა ენიჭება დეფორმადი სხეულების წონასწორობის შესწავლისას. ამ კანონიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ დეფორმადი (არა აბსოლუტურად მყარი) სხეული მოცემული ძალების ზემოქმედებით წონასწორობაშია და აბსოლუტურად მყარი გახდება (გამყარდება), მისი წონასწორობა არ დაირღვევა.

ეს კანონი კავშირს ამყარებს აბსოლუტურად მყარი სხეულის სტატიკასა და დეფორმადი სხეულის სტატიკას შორის.

სტატიკაში იყენებენ სხეულის გაბარიტების (ზომების) გადიდების (გაფართოების) ხერხს, რომელიც მდგომარეობს იმაში, რომ ზოგჯერ საჭიროა წარმოდგენით გავზარდოთ სხეულის ზომები. შეიძლება,

ასე რომ ვთქვათ, ხისტად შევამაგროთ ერთი სხეული მეორესთან, რომელზედაც არავითარი ძალა არ მოქმედებს.

მაგალითისათვის განვიხილოთ $AB$ ღერო (ნახ. 26), რომელზედაც მოქმედებს მისი სიმძიმის $\vec{G}$ ძალა და $A$ ბოლოზე მოდებული $\vec{F}$ ძალა. ამ ორი ძალის ფუძე იკვეთება $D$ წერტილში. ეს ძალები $D$ წერტილში რომ გადაიტანოთ, მაშინ, სტატიკის აქსიომის მიხედვით, ამ ძალების შეცვლა შეიძლება ერთი $\vec{R}$ ტოლქმედით, რომლის ფუძე $AB$ ღეროს კვეთს $E$ წერტილში. აი ამ წერტილში გადავიტანოთ $\vec{R}$ ძალა, მაგრამ ეს ოპერაციები რომ ჩავატაროთ და მოცემული ორი ძალა ერთი ძალით შევცვალოთ, უნდა ჩავთვალოთ, რომ $D$ წერტილი ღეროს ეკუთვნის; ამით თითქოს გავადიდეთ (გავაფართოეთ) ღერო უწონად ფართობთან შეერთებით.



ნახ. 26

ცხადია, მოცემულ მრავალ ძალთა სისტემას მისი ეკვივალენტური უფრო მარტივი და რაც შეიძლება მცირერიცხოვანი ძალთა სისტემით თუ შევცვლით, ამით გავაადვილებთ სხეულის მოძრაობის შესწავლას.

ამრიგად, მყარ სხეულზე მოდებული ძალთა სისტემის უფრო მცირე რაოდენობის ძალებზე დაყვანის მეთოდების დამუშავება სტატიკის ერთ-ერთ ძირითად ამოცანას წარმოადგენს.

## II თავი

# თავმოყრილ ძალთა ბრტყელი სისტემა

### § 1. მყარი სხეულის ერთ წერტილზე მოდებული და ერთი წრფის გასწვრივ მოძმედი ძალების შეკრება

ვთქვათ, მყარი სხეულის $A$ წერტილზე მოდებულია ერთი წრფის გასწვრივ მოქმედი და ერთმხრივ მიმართული ორი ძალა $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$

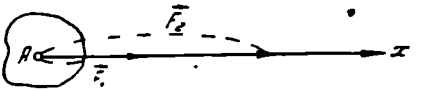
(ნახ. 27); მაშინ $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ ძალთა სისტემის ეკვივალენტური ერთი $\vec{R}$ ძალა მოცემული ძალების ტოლქმედი იქნება

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

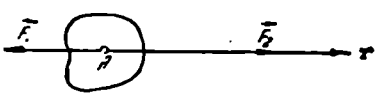
ვექტორული ტოლობის გარდა ამ შემთხვევაში ადგილი აქვს ალგებრულ ტოლობასაც

$$R = F_1 + F_2,$$

ე. ი. როდესაც მყარი სხეულის ერთ წერტილზე ერთი წრფის გასწვრივ მოდებულია ერთმხრივ მიმართული ორი ძალა, მათი ტოლქმედის მოდული მოცემული ძალების მოდულების ჯამს უდრის.



ნახ. 27



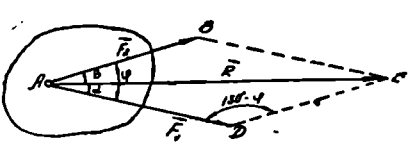
ნახ. 28

ახლა, ვთქვათ, $F_2 > F_1$, მასთან $\vec{F}_2$ ძალა ღერძის დადებით მხარესაა მიმართული, $\vec{F}_1$ ძალა კი პირდაპირ შებრუნებულად (ნახ. 28); მაშინ $\vec{R}$ ტოლქმედის მოდული $R = F_2 - F_1$.

## § 2. მყარი სხეულის ერთ წერტილზე კუთხით მოდებული ორი ძალის შეკრება

ვთქვათ, მყარი სხეულის $A$ წერტილზე $\varphi$ კუთხით მოდებულია ორი ძალა $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ (ნახ. 29).

მყარი სხეულის ერთ წერტილზე კუთხით მოქმედი ორი ძალის შეკრება ვექტორთა პარალელოგრამის წესით სრულდება. კუთხით მოქმედი ორი ძალის ტოლქმედი სიდიდით და მიმართულებით ამ ძალებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალს უდრის.



ნახ. 29

ვთქვათ, $\vec{R}$ ტოლქმედი $\vec{F}_1$ ძალასთან ადგენს $\alpha$ კუთხეს, ხოლო $\vec{F}_2$ ძალასთან — $\beta$ კუთხეს.

$\triangle ADC$-დან გვაქვს

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(180^\circ - \varphi)$$

და, რადგან $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos\varphi$, გვექნება

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi,$$

საიდანაც ტოლქმედის მოდულისათვის გვაქვს

$$\boxed{R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi}.} \qquad (1)$$

ამავე სამკუთხედიდან სინუსების თეორემის გამოყენებით გვექნება

$$\frac{F_1}{\sin\alpha} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin(180^\circ - \varphi)};$$

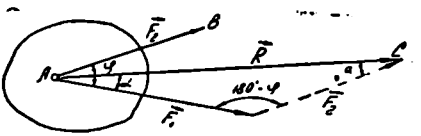
რადგან

$$\sin(180^\circ - \varphi) = \sin\varphi,$$

ამიტომ

$$\frac{F_1}{\sin\alpha} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\varphi},$$

საიდანაც ტოლქმედსა და მდგენელ ძალებს შორის კუთხეთა სინუსებისათვის გვექნება



ნახ. 30

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{F_1}{R}\sin\varphi; \\ \sin\beta &= \frac{F_2}{R}\sin\varphi. \end{aligned}} \qquad (2)$$

ძალთა პარალელოგრამის აგების ნაცვლად ზოგჯერ ძალთა სამკუთხედის აგებით კმაყოფილდებიან (ნახ. 30).

$ADC$ სამკუთხედს ეწოდება ძალთა სამკუთხედი, რომელშიაც მდგენელი $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალები ერთიმეორის მიმდევრობითაა განლაგებული; $\vec{R}$ ტოლქმედი ძალა კი უკანასკნელი ძალის შესახვედრადაა მიმართული.

## § 3. ძალის დაშლა ორ მდგენელ ძალად

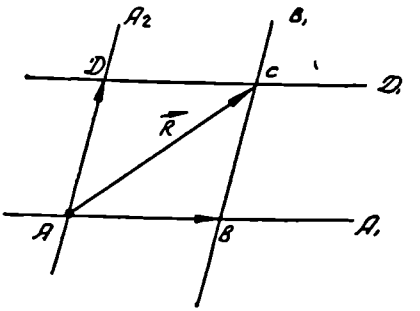
საზოგადოდ, ძალის დაშლა ორ მდგენელ ძალად განუსაზღვრელი ამოცანაა, რადგან იგი დაიყვანება ერთი გვერდის მიხედვით სამკუთხედის აგებაზე.

ამოცანა განსაზღვრული რომ გავხადოთ, უნდა დავსახოთ დამატებითი პირობები.

განვიხილოთ ამ ამოცანის ოთხი შემთხვევა:

ა) მოცემულია $\vec{R}$ ძალა და მის $A$ დასაწყისზე გამავალი ორი წრფე (მიმართულება)—$AA_1$ და $AA_2$.

ეს $\vec{R}$ ძალა დავშალოთ მისი მდებარეობის სიბრტყეში ორ მდგენელ ძალად (ნახ. 31). ამისათვის $\vec{R}$ ძალის $C$ ბოლო წერტილზე გავატაროთ $AA_1$ და $AA_2$ მიმართულების (წრფეების) პარალელური $DD_1$ და $BB_1$ მიმართულებები (წრფეები); მაშინ მოცემულ $AA_1$ და $AA_2$ წრფეებზე მოვკვეთავთ $\vec{AB}$ და $\vec{AD}$ ვექტორებს, რომლებიც $\vec{R}$ ძალის მდგენელებს გამოსახავენ.



ნახ. 31

ბ) მოცემულია $\vec{R}$ ძალა (ნახ. 32). ეს ძალა დავშალოთ მისი მდებარეობის სიბრტყეში მოთავსებულ ორ მდგენელ ძალად, რომელთა რიცხვითი მნიშვნელობები ცნობილია.

$\vec{R}$ ძალის ვექტორის $A$ საწყისიდან და $C$ ბოლო წერტილიდან, როგორც ცენტრებიდან, მდგენელი ძალების რიცხვითი მნიშვნელობების ანუ $F_1$ და $F_2$ მოდულების ტოლი რადიუსებით ორი რკალი გავატაროთ $B$ და $D$ წერტილებში გადაკვეთამდე. მიღებული $ABC$ და $ACD$ სამკუთხედები შევავსოთ სათანადო პარალელოგრამებამდე, რომლებშიაც $AC$ დიაგონალია. მაშინ ვექტორები $\vec{AB}$ და $\vec{AN}$ ან $\vec{AD}$ და $\vec{AM}$ მოცემული $\vec{R}$ ძალის საძიებელი მდგენელები იქნება.

ამრიგად, ამ ამოცანას აქვს ორი ამოხსნა, რაც წრეხაზების გადაკვეთის ორ $B$ და $D$ წერტილს შეესაბამება.

ამ ამოცანის ამოხსნა შესაძლებელია, როდესაც

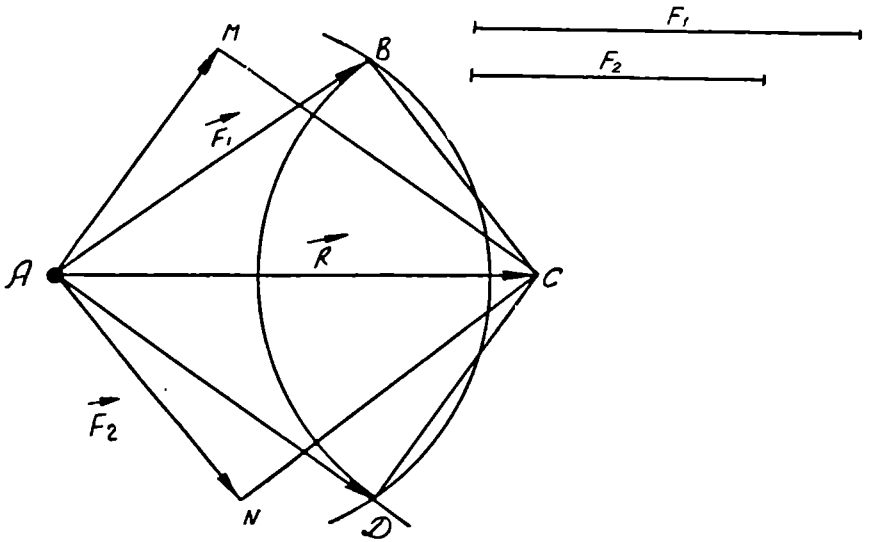
$$R \leqslant F_1 + F_2.$$

გ) მოცემულია $\vec{R}$ ძალა. ეს ძალა დავშალოთ ისეთ ორ მდგენელ ძალად, რომელთაგანაც ერთი $\vec{F_1}$ მდგენელის $F_1$ მოდული და $AM$ მიმართულება ცნობილია (ნახ. 33).

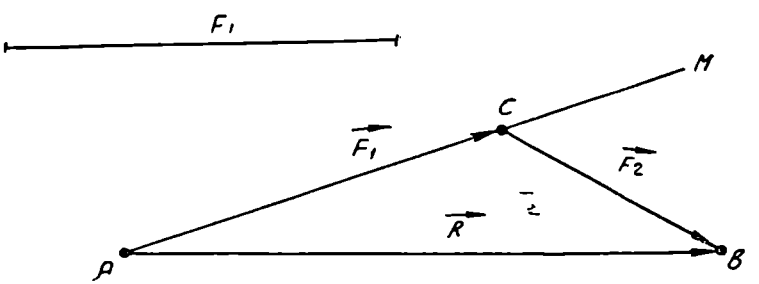
რადგან $\vec{F_1}$ მდგენელი ძალის $AM$ მიმართულება ცნობილია, ამიტომ $AM$ მიმართულებაზე მოვზომოთ $\vec{AC} = \vec{F_1}$ ვექტორი. $C$ და $B$ წერტილებს $CB$ წრფით თუ შევაერთებთ, მივიღებთ საძიებელ მეორე $\vec{F_2}$ მდგენელ ძალას.

დ) მოცემულია $\overline{R}$ ძალა, ერთი მდგენელის მიმართულება $AA_1$ და მეორის—$F_2$ მოდული (ნახ. 34).

ვიპოვოთ პირველი მდგენელის $F_1$ მოდული და მეორის მიმართულება.




ნახ. 32

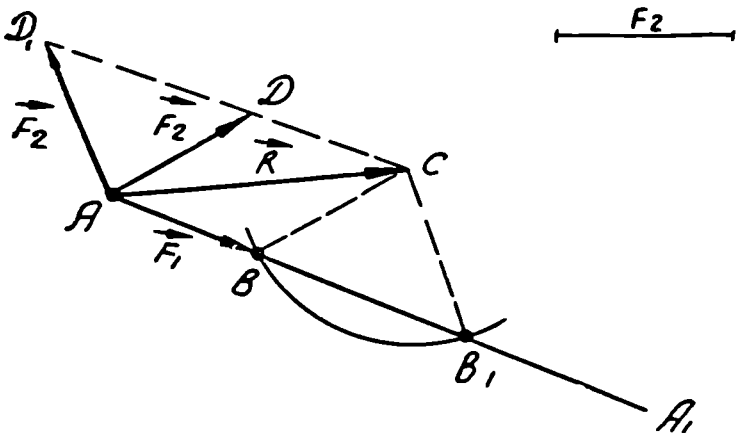



ნახ. 33

$\overline{R}$ ძალის $A$ დასაწყისიდან გავატაროთ $\overline{F_1}$ ძალის მოცემული $AA_1$ მიმართულება. $\overline{R}$ ძალის $C$ ბოლო წერტილიდან $\overline{F_2}$ ძალის $F_2$ მოდულის ტოლი რადიუსით აღვწეროთ რკალი,რომელიც $AA_1$ მიმართულებას $B$ და $B_1$ წერტილებში გადაკვეთს. ეს წერტილები წრფეებით შევაერ-

თოთ $C$ წერტილთან. შემდეგ $C$ წერტილიდან $BC$ და $B_1C$ მონაკვეთების შესაბამისად ტოლი და პარალელური $AD$ და $AD_1$ მონაკვეთები გავატაროთ. მივიღებთ ორ $ABCD$ და $AD_1CB_1$ პარალელოგრამს.

ამ ამოცანას აქვს ორი ამოხსნა:




ნახ. 34

1) $\vec{F}_2$ ძალის მიმართულებაა $AD$, ხოლო $\vec{F}_1$ ძალის მოდული $AB$;

2) $\vec{F}_2$ ძალის მიმართულებაა $AD_1$, ხოლო $\vec{F}_1$ ძალის მოდული $AB_1$.

$C$ წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, აღწერილი რკალი $AA_1$ წრფეს თუ მხოლოდ ერთ წერტილში შეეხება, მაშინ ერთი ამოხსნა გვექნება. ამ შემთხვევაში $B$ და $B_1$ წერტილები თანათავსდებიან. თუ რკალს $AA_1$ წრფესთან არ ექნება საერთო წერტილები, მაშინ ამოცანას არც ერთი ამოხსნა არ ექნება.

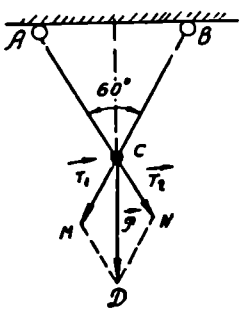
### მაგალითები

1. $P=210$ ნიუტონი წონის ტვირთი დაკიდებულია ორ ბაგირზე, რომლებიც სიმეტრიულად გახლაგებულია შვეულის მიმართ. ამ ბაგირებს შორის კუთხეა 60°. განსაზღვრეთ თითოეულ ბაგირზე მოქმედი ძალა (ნახ. 35).

ამოხსნა

$\vec{P}$ ძალა დავშალოთ $AC$ და $BC$ ბაგირების მიმართულებით $\vec{T}_1$ და $\vec{T}_2$ მდგენელებად.

სიმეტრიის გამო (რადგან $\vec{P}$ ძალის მოქმედების წრფე $ACB$ კუთხეს შუაზე ყოფს) შეგვიძლია დავწეროთ:



ნახ. 35

$$\vec{T}_1 = \vec{T}_2$$

და რადგან

$$P = \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2\cos 60^\circ} =$$

$$= \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2 \cdot \frac{1}{2}} =$$

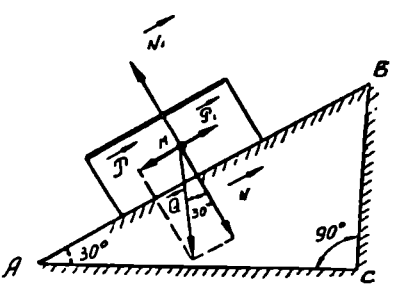
$$= \sqrt{3T_1^2} = T_1\sqrt{3},$$

აქედან

$$T_1 = T_2 = \frac{P}{\sqrt{3}} = \frac{P\sqrt{3}}{3} = \frac{210\cdot\sqrt{3}}{3} = 70\sqrt{3} =$$

$$= 70\cdot 1{,}73 = 121{,}1 \text{ ნიუტონს.}$$

2. აბსოლუტურად გლუვ $AB$ დახრილ სიბრტყეზე (ნახ. 36), რომელიც 30° კუთხეს ქმნის ჰორიზონტთან, ძევს $Q = 1200$ ნიუტონი წონის სხეული. როგორი $\vec{P}_1$ ძალა უნდა მოვდოთ სიბრტყის პარალელურად სხეულს $\vec{Q}$ ძალის მოდების წერტილში, რომ სხეული შევაკავოთ წონასწორობის მდგომარეობაში?



ნახ. 36

ამოხსნა

$\vec{Q}$ ძალა დავშალოთ ორ $\vec{P}$ და $\vec{N}$ მდგენელ ძალად, რომელთაგანაც $\vec{P}$ ძალა $AB$ დახრილი სიბრტყის პარალელურია, ხოლო $\vec{N}$ ძალა—$AB$ სიბრტყის მართობული.

რადგან $ABC$ სამკუთხედი მართკუთხა სამკუთხედია ($\angle ACB = 90^\circ$), ამიტომ $\vec{Q}$ და $\vec{N}$ ძალებს შორის კუთხე 30° უდრის და ვპოულობთ:

$$N = Q \cdot \cos 30^\circ = 1200 \cdot \cos 30^\circ = 1200 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 600 \cdot 1{,}73 = 1038 \text{ ნიუტონს;}$$

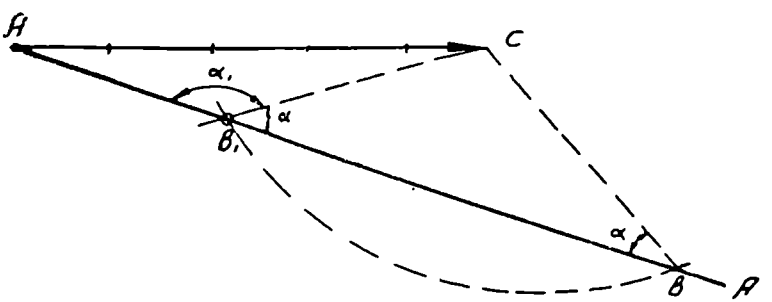
$$P = Q \cdot \sin 30^\circ = 1200 \cdot \frac{1}{2} = 600 \text{ ნიუტონს.}$$

$\overline{N}$ ძალა წონასწორდება $\overline{N}_1$ ნორმალური რეაქციის ძალით.

სხეული წონასწორობაში რომ ვამყოფოთ, $M$ წერტილზე $\overline{P}$ ძალის მოქმედების წრფის გასწვრივ $\overline{P}$ ძალის მიმართულების შებრუნებული მიმართულებით უნდა მოვდოთ მოდულით ტოლი $\overline{P}_1$ ძალა; მაშასადამე,

$$P_1 = P = Q \cdot \sin 30^\circ = 600 \text{ ნიუტონს.}$$

3. $F = 5$ ნიუტონი ძალა დაშალეთ ისეთ ორ მდგენელად, რომელთაგანაც ერთი 3 ნიუტონის ტოლია, მეორე კი $\overline{F}$ ძალის მიმართულებასთან $30^\circ$ კუთხეს ადგენს (ნახ. 37).




ნახ. 37

ამოხსნა

მოვზომოთ მოცემული $\overline{F}$ ძალის ამსახველი $\overline{AC}$ ვექტორი. $C$ წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, 3 ნიუტონი ძალის ტოლი რნაკვეთით (აღებულ მასშტაბში) აღვწეროთ რკალი, რომელიც $AA_1$ მიმართულებას $B$ და $B_1$ წერტილებში კვეთს; მაშასადამე, გვექნება ორი ამოხსნა.

$\alpha$-თი აღვნიშნოთ ის კუთხე, რომელსაც $CB$ და $AB$ მიმართულებები; მაშინ, სინუსების თეორემის ძალით, $ABC$ სამკუთხედიდან გვექნება

$$\frac{AC}{\sin\alpha} = \frac{BC}{\sin 30^\circ},$$

ანუ

$$\frac{5}{\sin\alpha} = \frac{3}{\frac{1}{2}},$$

აქედან

$$\sin\alpha = \frac{5\cdot\frac{1}{2}}{3} = \frac{5}{6} = 0{,}833.$$

ტრიგონომეტრიული ცხრილებიდან ვპოულობთ

$$\alpha = 56^\circ 24';$$

მაგრამ

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha = 0{,}833;$$

მაშასადამე, გვაქვს მეორე მნიშვნელობაც

$$\alpha_1 = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 56^\circ 24' = 123^\circ 36'.$$

უცნობი $\vec{F}_1$ ძალა განისაზღვრება $ABC$ სამკუთხედიდან, სახელდობრ

$$\frac{AB}{\sin(ABC)} = \frac{BC}{\sin 30^\circ};$$

აქედან ($BC = 3$ ნიუტონს)

$$AB = BC\frac{\sin\angle ABC}{\sin 30^\circ} = 3\frac{\sin[180^\circ - (30^\circ + 56^\circ 24')]}{\frac{1}{2}} =$$

$$= 3\cdot\frac{\sin 93^\circ 36'}{\frac{1}{2}} = 6\cdot 0{,}998 = 5{,}98,$$

ე. ი. საძიებელი ძალა $F_1 = 5{,}98$ ნიუტონს.

$\triangle AB_1C$ თუ ამოვხსნით, მივიღებთ

$$\frac{AB_1}{\sin\angle ACB_1} = \frac{CB_1}{\sin 30^\circ};$$

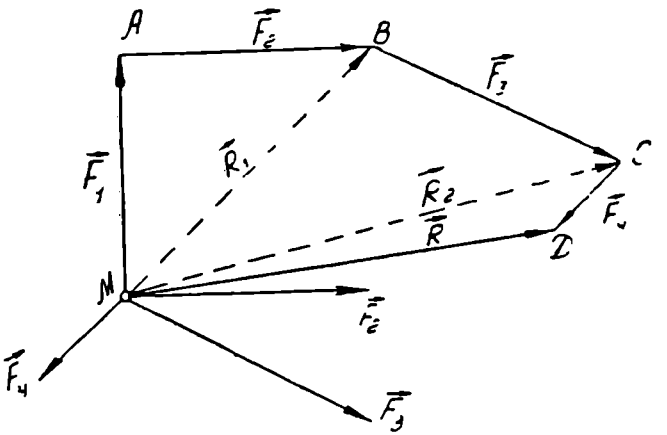
მაგრამ $CB_1 = 3$ ნიუტონს; $\sphericalangle ACB_1 = 180^\circ - (30^\circ + 123^\circ 36') = 26^\circ 24'$, მაშასადამე,

$$AB_1 = \frac{CB_1\sin\angle ACB_1}{\sin 30^\circ} = \frac{3\cdot\sin 26^\circ 24'}{\frac{1}{2}} = 6\cdot 0{,}4636 = 2{,}78.$$

მაშინ $\vec{F}_1$ ძალის მეორე რაცხვითი მნიშვნელობა 2,78 ნიუტონია.

## § 4. თავმოყრილ ძალთა სისტემა. წონასწორობის პირობა

თავმოყრილ ძალთა სისტემა ისეთ ძალთა სისტემას ეწოდება, რომელთა ფუძეები ერთ წერტილში იკვეთება. ამავე დროს, თუ ამ სისტემის ყველა ძალის ფუძე ერთ სიბრტყეში ძევს, ასეთ ძალთა სისტემას თავმოყრილ ძალთა ბრტყელი სისტემა ეწოდება.




ნახ. 38

ვთქვათ, მყარი სხეულის ერთ $M$ წერტილზე მოდებულია თავმოყრილი ძალები $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ და $\vec{F}_4$ (ნახ. 38).

ამ ძალთა შეკრება ან თანდათან შეგვიძლია და მივიღებთ

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2=\vec{R}_1;$$
$$\vec{R}_1+\vec{F}_3=\vec{R}_2;$$
$$\vec{R}_2+\vec{F}_4=\vec{R}$$

ანუ

$$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4,$$

ან შეგვიძლია მოცემულ ძალებზე ავაგოთ ძალთა $MABCD$ მრავალკუთხედი, რომლის ჩამკეტი $\vec{MD}=\vec{R}$ ვექტორი თავმოყრილ ძალთა ტოლქმედი იქნება.

ეს წესი ნებისმიერ თავმოყრილ ძალთა სისტემისთვისაც გამოდგება, ე. ი. როდესაც მოცემულია $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n)$ თავმოყრილ ძალთა

სისტემა, მაშინ ამ ძალთა ტოლქმედი იმავე წერტილზეა მოდებული და მოცემული ძალების გეომეტრიულ ჯამს უდრის

$$\boxed{\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\ \dots\ +\vec{F}_n.}$$

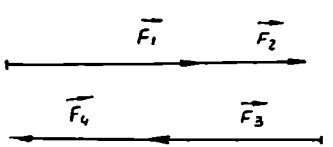
თავმოყრილ ძალთა სისტემა წონასწორობაშია მაშინ, როდესაც მათი ტოლქმედი ნულს უდრის, ხოლო ნახაზზე პირველი ძალის საწყისი და უკანასკნელი ძალის ბოლო წერტილი ერთ წერტილში იყრის თავს; მაშასადამე, ტოლქმედის ვექტორის გატარება საჭირო აღარ არის. ამ შემთხვევაში

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\ \dots\ +\vec{F}_n=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=0.$$

$\left(\text{აქ სიმბოლო } \sum_{i=1}^{n} \text{ აღნიშნავს ჯამს, როცა } i \text{ იცვლება 1-დან } n\text{-მდე}\right)$.

თავმოყრილ ძალთა წონასწორობის გეომეტრიული პირობა მოითხოვს, რომ ძალთა მრავალკუთხედი ჩაიკეტოს; ამრიგად, ტოლქმედი ძალა გახდება ნული.

თუ შესაკრები ძალები ერთ წრფეზე მდებარეობენ, მაშინ ძალთა მრავალკუთხედის ნაცვლად წრფის მონაკვეთს მივიღებთ. წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ უკანასკნელი ვექტორის ბოლო წერტილი (ნახ. 39) დაემთხვეს პირველი ვექტორის საწყისს. ამ შემთხვევაში ტოლქმედი ნულს უდრის.




ნახ. 39

თუ მოცემულია არათავისუფალი მყარი სხეული და მასზე მოდებულია თავმოყრილ ძალთა ბრტყელი სისტემა, მაშინ ამ სხეულის წონასწორობის ამოცანა შემდეგი წესით უნდა ამოვხსნათ:

ა) უცნობი სიდიდეების საპოვნელად გამოვყოთ მყარი სხეული (ან წერტილი), რომლის წონასწორობა უნდა განვიხილოთ;

ბ) გამოვსახოთ მოცემული (აქტიური) ძალები;

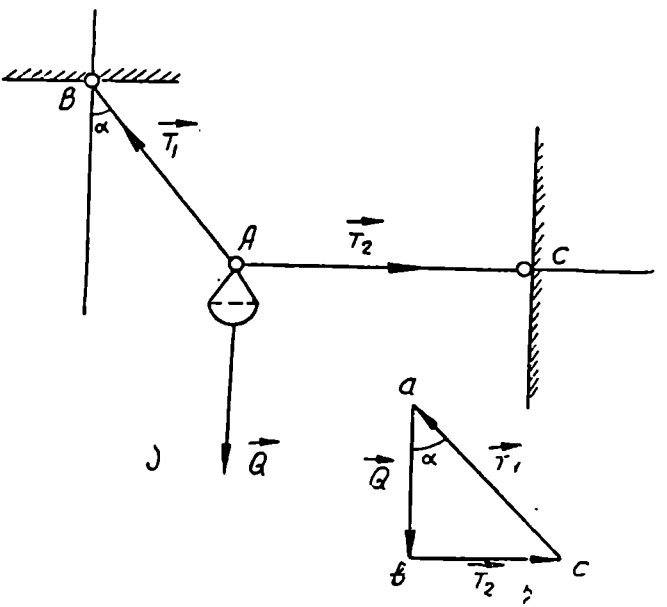
გ) ჩამოვთვალოთ ბმები და მათი მოქმედება შევცვალოთ ბმების რეაქციის ძალებით;

დ) მრავალი ძალის შემთხვევაში ავაგოთ ჩაკეტილ ძალთა მრავალკუთხედი, სამი ძალის შემთხვევაში კი—ძალთა სამკუთხედი;

ე) უცნობი ძალები განვსაზღვროთ გეომეტრიული ხერხით ან გრაფიკულად.

### მაგალითები

1. $Q=12$ ნიუტონი წონის ელექტრული ნათურა დაკიდებულია $AB$ თასმაზე და ჰორიზონტალური $AC$ თოკით გაწეულია მარჯვნივ, ისე რომ $AB$ თასმის მიერ შვეულ მიმართულებასთან შედგენილი კუთხე $\alpha=30°$. იპოვეთ დაჭიმულობანი $AB$ თასმასა და $AC$ თოკში (ნახ. 40).




ნახ. 40

### ამოხსნა

ამ ამოცანაში უნდა განისაზღვროს $AB$ თასმისა და $AC$ თოკის დაჭიმულობანი. ნათურის $Q$ წონა ცნობილია. აქტიური $\overline{Q}$ ძალა (ნათურის სიმძიმის ძალა) $A$ წერტილზე მოქმედებს. ეს $A$ წერტილი არათავისუფალია და წონასწორობაში იმყოფება ორი ბმის ($AB$ თასმისა და $AC$ თოკის) არსებობით. გავათავისუფლოთ ეს წერტილი ბმებისაგან; ამისათვის წარმოდგენით გადავჭრათ თასმა და თოკი და ბმები შევცვალოთ მათი $\overline{T}_1$ და $\overline{T}_2$ რეაქციის ძალებით, მაშინ $A$ წერტილი შეიძლება განვიხილოთ როგორც თავისუფალი წერტილი, რომელიც წონას-

წორობაში იმყოფება სამი ძალის ზემოქმედებით, სახელდობრ: აქტიური $\vec{Q}$ ძალისა და თასმისა და თოკის $\vec{T}_1$ და $\vec{T}_2$ რეაქციის ძალების ზემოქმედებით. ეს რეაქციის ძალები რიცხობრივად თასმისა და თოკის დაჭიმულობის ძალების ტოლია.

$A$ წერტილის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ სამი ძალის ტოლქმედი, რომელთა მოქმედების წრფეები ერთ $A$ წერტილში იკვეთებიან, ნულის ტოლი იყოს, ე. ი. ძალებმა ჩაკეტილი სამკუთხედი შექმნან. ძალთა სამკუთხედის აგებას მოდულით და მიმართულებით ცნობილი $\vec{Q}$ ძალით ვიწყებთ. ავაგებთ ძალთა სამკუთხედს (ნახ. 40, ბ); ამისათვის სიბრტყის ნებისმიერ $a$ წერტილზე გავატარებთ მოცემული $\vec{Q}$ ძალის ტოლსა და პარალელურ $\vec{ab}$ ვექტორს; შემდეგ $\vec{ab}$ ვექტორის $b$ ბოლო წერტილზე გავატარებთ $\vec{T}_2$ ძალის მოქმედების წრფის პარალელურ წრფეს, ხოლო $\vec{ab}$ ვექტორის $a$ დასაწყისზე—$\vec{T}_1$ ძალის მოქმედების წრფის პარალელურ წრფეს. ამ უკანასკნელი ორი წრფის თანკვეთის წერტილია $C$. ყველა ისარს შემოვლით ერთი მიმართულებით თუ დავსვამთ, $\vec{T}_1$ და $\vec{T}_2$ ძალების მიმართულებებს ვიპოვით.

$\vec{T}_1$ და $\vec{T}_2$ ძალების რიცხვითი მნიშვნელობების პოვნა $abc$ სამკუთხედიდან შეიძლება, რადგან $\triangle abc$ მართკუთხაა და $\angle acb = 30°$; ამიტომ

$$Q = T_1 \cdot \cos 30°,$$
$$Q = T_2 \cdot \cos 60°;$$

აქედან

$$T_1 = \frac{Q}{\cos 30°} = \frac{12}{\frac{3}{2}} = \frac{24}{1{,}73} = 13{,}8 \text{ ნიუტონს};$$

$$T_2 = \frac{Q}{\cos 60°} = \frac{12}{\frac{1}{2}} = 24 \text{ ნიუტონს}.$$

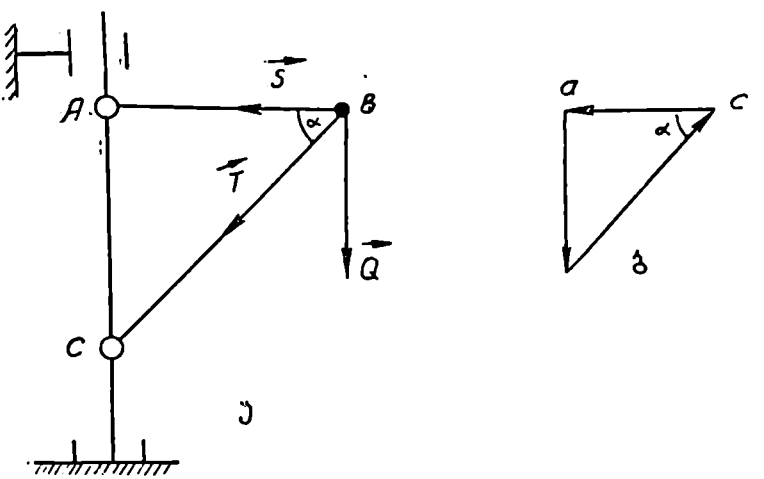
2. კანონსაზღვროთ კედლის ამწის $AB$ წევისა და $BC$ ქვესაბრჯენის ძალები, თუ $A$, $B$ და $C$ წერტილებში სახსრებია (ნახ. 41, ა), ხოლო $\alpha = 60°$.

ამწე გათვალისწინებულია $Q = 5100$ ნიუტონი ტვირთის აწევისათვის.

## ამოხსნა

წინასწარ შევნიშნოთ, რომ ღეროს ძალად ღეროს გასწვრივ მოქმედი ძალა ითვლება. ძალა ღეროს გაჭიმავს ან შეკუმშავს. ღეროს

ძალების განსასაზღვრავად განვიხილოთ $B$ კვანძის (სახსრული ჭანჭიკის) წონასწორობა. ამისათვის $B$ კვანძი წარმოდგენით გავათავისუფლოთ ბმებისაგან, რისთვისაც უკუვაგდოთ $BA$ და $BC$ ღეროები და მათი მოქმედება $\overline{S}$ და $\overline{T}$ რეაქციის ძალებით შევცვალოთ. ვთქვათ, ეს ძალები მიმართულია კვანძიდან ღეროების გასწვრივ, რაც გაჭიმვას შეესაბამება. ახლა $B$ კვანძი შეგვიძლია განვიხილოთ თავისუფალ წერტილად, რომელიც სამი $\overline{Q}$, $\overline{S}$ და $\overline{T}$ ძალის ზემოქმედებაში იმყოფება. ამ ძალების წრფეები იმავე $B$ წერტილში იკვეთება.




ნახ. 41

$B$ კვანძის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ სამი ძალის ტოლქმედი ნულის ტოლი იყოს, ე. ი. რომ ძალებმა ჩაკეტილ ძალთა სამკუთხედი შექმნან.

ძალთა სამკუთხედის აგებას მოდულით და მიმართულებით ცნობილი $\overline{Q}$ ძალით ვიწყებთ.

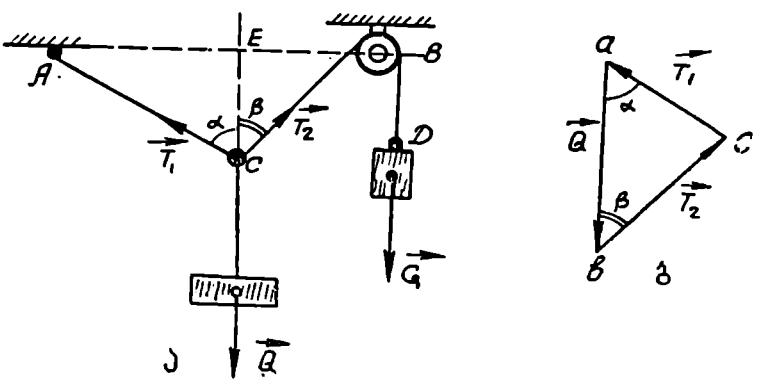
სიბრტყის ნებისმიერი $a$ წერტილიდან გავატარებთ $\overline{Q}$ ძალის ტოლსა და პარალელურ $\overline{ab}$ ვექტორს, რომლის $a$ საწყისსა და $b$ ბოლოზე, შესაბამისად, $\overline{S}$ და $\overline{T}$ ძალების მიმართულებათა პარალელურ წრფეებს გავატარებთ; ეს წრფეები $C$ წერტილში იკვეთებიან; მივიღებთ $abc$ სამკუთხედს. ძალთა მიმართულება ნაჩვენებია 41, ბ ნახაზზე. $\overline{T}$ რეაქციის ძალის მიმართულება მივიღეთ 41, ა ნახ-ზე. იგი ნაჩვენები მიმართულების პირდაპირსაწინააღმდეგოა; ეს კი იმაზე მიგვითითებს, რომ $CB$ ღერო გაჭიმული კი არ არის, არამედ შეკუმშულია.

$\Delta abc$ მართკუთხაა, $\alpha = 60^\circ$, მაშასადამე, $Q = T \cdot \sin\alpha$, საიდანაც;

$$T = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{5100}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 5900 \text{ ნიუტონს;}$$

$$S = T \cdot \cos\alpha = 5900 \cdot \frac{1}{2} = 2950 \text{ ნიუტონს.}$$

3. $AC$ თოკზე, რომლის ერთი ბოლო დამაგრებულია $A$ წერტილზე, ხოლო მეორე—$C$ წერტილზე, მიბმულია ტვირთი $Q = 100$ ნიუტონი და $CBD$ თოკი, რომელიც გადაკიდებულია ბლოკზე; $CBD$ თოკის $D$ ბოლო წერტილზე მიბმულია $\vec{G}$ წონის საწონი. მხედველობაში ნუ მიიღებთ ხახუნს ბლოკში და განსაზღვრეთ: $AC$ თოკის დაჭიმულობა და $\vec{G}$ ტვირთის მოდული, თუ წონასწორობის მდგომარეობაში $CE$ შვეულთან თოკების მიერ შედგენილი კუთხეები $\alpha = 45^\circ$ და $\beta = 30^\circ$ (ნახ. 42, ა).




ნახ. 42

ა მ ო ხ ს ნ ა

განვიხილოთ $C$ წერტილის წონასწორობა, რისთვისაც იგი გავათავისუფლოთ ბმებისაგან. ამისათვის წარმოდგენით გადავჭრათ თოკები და მათი მოქმედება შევცვალოთ რეაქციის ძალებით. $C$ წერტილი ისეთ თავისუფალ წერტილად განვიხილოთ, რომელიც წონასწორობაში იმყოფება შემდეგი სამი ძალის ზემოქმედებით: $\vec{Q}$ ტვირთის, $AC$ თოკის $\vec{T}_1$ რეაქციის ძალით და $AB$ თოკის $\vec{T}_2$ რეაქციის ძალით ($\vec{G}$ ტვირთი გადაკიდებულია უძრავ ბლოკზე, რომელიც არ ცვლის $\vec{G}$ ძალის მოდულს, მაგრამ ცვლის მის მიმართულებას).

$C$ წერტილზე მოდებული სამი ურთიერთგამაწონასწორებელი $Q$, $\vec{T}_1$ და $\vec{T}_2$ ძალისაგან ავაგოთ $abc$ ძალთა სამკუთხედი (ნახ. 42, ბ), რომელშიც $\beta = \angle abc = 30°$ და $\alpha = \angle cab = 45°$.

სინუსების თეორემის ძალით გვაქვს

$$\frac{Q}{\sin 105°} = \frac{T_1}{\sin 30°} = \frac{T_2}{\sin 45°},$$

საიდანაც

$$T_1 = Q \cdot \frac{\sin 30°}{\sin 105°} = 100 \cdot \frac{0{,}5}{0{,}966} \cong 51{,}76 \text{ ნ};$$

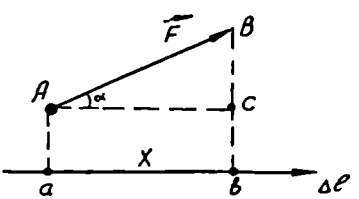
$$T_2 = G = Q \cdot \frac{\sin 45°}{\sin 105°} = 100 \cdot \frac{0{,}707}{0{,}966} = 73{,}18 \text{ ნ}.$$

## § 5. ძალის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე

ვთქვათ, ძალის $\vec{F} = \overline{AB}$ ვექტორი მოდებულია სიბრტყის რაიმე $A$ წერტილზე. დავაგეგმილოთ ეს ვექტორი $\Delta l$ ღერძზე (ნახ. 43).

აღვნიშნოთ $X = ab$ მოცემული ვექტორის გეგმილი ამ ღერძზე:

$$X = \text{გეგ}_{\Delta l} \vec{F}.$$



ნახ. 43

$A$ წერტილიდან $Bb$-ზე დავუშვათ $AC$ მართობი და განვიხილოთ $ACB$ მართკუთხა სამკუთხედი, რომელშიაც

$$\alpha = \angle CAB;$$

მაშინ

$$AC = F \cdot \cos\alpha;$$

რადგან $aACb$ მართკუთხედში $X = ab = AC$, ამიტომ

$$\boxed{X = F \cdot \cos\alpha.} \qquad (1)$$

ამრიგად, **ძალის გეგმილი ღერძზე უდრის ძალის მოდულის ნამრავლს ძალისა და ღერძის დადებით მიმართულებებს შორის კუთხის კოსინუსზე.**

განვიხილოთ კერძო შემთხვევები:

ა) $\alpha = 0°$, ე. ი. ძალა გეგმილთ ღერძის პარალელურია და ძალასა და ღერძს ერთნაირი მიმართულებები აქვთ, მაშინ

$$\cos\alpha = \cos 0° = 1,$$

ამის გამო

$$X = F_1 \cos\alpha = F \cdot 1 = F.$$

ბ) $\alpha = 180^\circ$, ე. ი. ძალა გეგმილთ ღერძის პარალელურია, მაგრამ ძალას გეგმილთ ღერძის შებრუნებული მიმართულება აქვს, მაშინ

$$\cos\alpha = \cos 180^\circ = -1 \text{ და}$$

$$X = F \cdot \cos\alpha = F \cdot (-1) = -F.$$

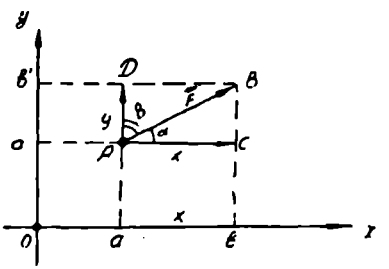
გ) $\alpha = 90^\circ$, ე. ი. ძალა გეგმილთ ღერძის მართობულია, მაშინ

$$\cos\alpha = \cos 90^\circ = 0 \text{ და}$$

$$X = F \cdot \cos\alpha = F \cdot 0 = 0,$$

ე. ი. თუ ძალის ვექტორი გეგმილთ ღერძის მართობულია, მაშინ ძალის გეგმილი ამ ღერძზე წერტილად იქცევა (ამ შემთხვევაში ძალის ვექტორის გეგმილი გეგმილთ ღერძზე ნულის ტოლია).

ახლა ავიღოთ მართკუთხა ორღერძოვანი კოორდინატთა სისტემა და ძალის $\overline{F}$ ვექტორი დავაგეგმილოთ კოორდინატთა ღერძებზე (ნახ. 44).




ნახ. 44

$\overline{F}$ ძალის გეგმილი $Ox$ აბსცისთა ღერძზე

$$X = ab = AC = F \cdot \cos\alpha,$$

ხოლო $OY$ ორდინატთა ღერძზე

$$Y = a'b' = AD = F \cdot \cos\beta.$$

ამრიგად, $\overline{F}$ ძალის გეგმილებისათვის მივიღებთ:

$$\boxed{\begin{aligned} X &= F \cdot \cos\alpha; \\ Y &= F \cdot \cos\beta. \end{aligned}} \qquad (2)$$

ამ ფორმულებიდან $\overline{F}$ ძალის მიმართულების კოსინუსებისათვის გვაქვს

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{X}{F}; \quad \cos\beta = \frac{Y}{F}.} \qquad (3)$$

განვიხილოთ $ACB$ მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტებია:

$$AC = X \text{ და } CB = Y,$$

ხოლო ჰიპოტენუზა $AB = F$.

პითაგორის თეორემის ძალით

$$F^2 = X^2 + Y^2,$$

საიდანაც $\overline{F}$ ძალის მოდულისათვის გვაქვს

$$\boxed{F = \sqrt{X^2 + Y^2}.} \qquad (4)$$

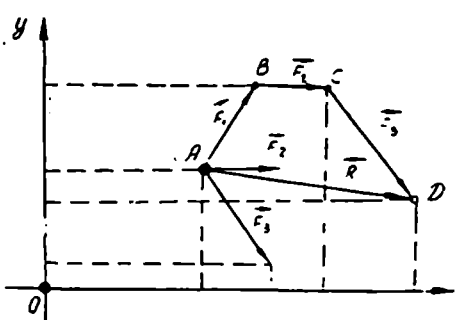
შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ზოგ შემთხვევაში ძალის გეგმილების განსაზღვრისათვის კმაყოფილდებიან $ACB$ მართკუთხა სამკუთხედის განხილვით, რომელშიაც

$$X = F \cdot \cos\alpha \quad \text{და} \quad Y = F \cdot \sin\alpha. \qquad (5)$$

**დასკვნა:** მიღებული (2) და (5) ფორმულებით ანალიზურად განისაზღვრება ძალის გეგმილების სიდიდე; (3) ფორმულებით განისაზღვრება ძალის მიმართულება, ხოლო (4) ფორმულით — ძალის მოდული.

## § 6. თავმოყრილ ძალთა ბრტყელი სისტემის ტოლქმედის პოვნა ანალიზურად

ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ვექტორთა გეომეტრიული ჯამის გეგმილი რაიმე ღერძზე უდრის შემადგენელი ვექტორების გეგმილების ალგებრულ ჯამს იმავე ღერძზე. რადგან ეს დასკვნა მართებულია ძალთა ვექტორებისთვისაც, ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ერთ წერტილში თ ა ვ მ ო ყ რ ი ლ ძ ა ლ თ ა ს ი ს ტ ე მ ი ს ტ ო ლ ქ მ ე დ ი ს გ ე გ მ ი ლ ი რ ა ი მ ე ღ ე რ ძ ზ ე უ დ რ ი ს მ დ გ ე ნ ე ლ ი ძ ა ლ ე ბ ი ს გ ე გმილების ალგებრულ ჯამს იმავე ღერძზე.



ნახ. 45

*Ox* და *Oy* კოორდინატთა ღერძებზე თავმოყრილ ძალთა სისტემის $\overline{R}$ ტოლქმედის გეგმილები აღვნიშნოთ $R_x$ და $R_y$-ით (ნახ. 45), ხოლო $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ და $\overline{F}_3$ მდგენელი ძალების გეგმილები, სათანადოდ, იყოს:

*Ox* ღერძზე: $X_1$, $X_2$ და $X_3$;

*Oy* ღერძზე: $Y_1$, $Y_2$ და $Y_3$,

მაშინ მივიღებთ:

$$R_x = X_1 + X_2 + X_3,$$
$$R_y = Y_1 + Y_2 + Y_3.$$

თავმოყრილ ძალთა ბრტყელი სისტემის $\vec{R}$ ტოლქმედის მოდული განისაზღვრება ფორმულით

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

მრავალი ძალის შემთხვევაში გვაქვს:

$$\left.\begin{aligned} R_x &= X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i; \\ R_y &= Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots + Y_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2}. \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{R_x}{R}; \\ \cos\beta &= \frac{R_y}{R}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

(1) ფორმულებით განისაზღვრება თავმოყრილ ძალთა ბრტყელი სისტემის ტოლქმედის გეგმილები ანალიზურად; (2) ფორმულით — ტოლქმედის მოდული, ხოლო (3) ფორმულებით — კუთხეები ტოლქმედის გეგმილებსა და თვით ტოლქმედს შორის (ამ ფორმულებს მიმართულების კოსინუსები ეწოდება).

## § 7. თავმოყრილ ძალთა ბრტყელი სისტემის წონასწორობის ანალიზური პირობა

როგორც წინა პარაგრაფიდან იყო ცნობილი, თავმოყრილ ძალთა ბრტყელი სისტემის ტოლქმედის მოდული განისაზღვრება (2) ფორმულით, რომლის მარჯვენა ნაწილი დადებით შესაკრებთა ჯამია, ამიტომ ტოლქმედის $R$ მოდული ნულად იქცევა მხოლოდ მაშინ, თუ

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \quad \text{და} \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0, \quad (1)$$

და, პირიქით, თუ ადგილი ექნება (1) ტოლობებს, მაშინ ტოლქმედის მოდული

$$R = 0. \qquad (2)$$

ამრიგად, ერთ სიბრტყეში მდებარე თავმოყრილ ძალთა სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ ძალთა გეგმილების ალგებრული ჯამი კოორდინატთა ღერძებზე ნულის ტოლი იყოს.

თავმოყრილ ძალთა ბრტყელი სისტემის ამოცანების ამოხსნის გეგმა ასეთია.

ა) გამოიყოს ის მყარი სხეული (ან წერტილი), რომლის წონასწორობა უნდა განიხილონ უცნობი სიდიდეების საპოვნელად;

ბ) გამოისახოს აქტიური (მოცემული) ძალები:

გ) ჩამოითვალოს ბმები და მათი მოქმედება შეიცვალოს ბმების რეაქციების ძალებით:

დ) შედგეს წონასწორობის ორი განტოლება.

ამ განტოლებების შესადგენად კოორდინატთა ღერძებზე უნდა დაგეგმილდეს ყველა აქტიური და ბმების რეაქციების ძალები და ამ გეგმილების ალგებრული ჯამის ნულთან გატოლებით ამოიხსნას ორუცნობიანი, ორი განტოლებისაგან შედგენილი სისტემა.

ამ ტიპის ამოცანების ამოხსნისას კოორდინატთა ღერძების მდებარეობა შეიძლება ნებისმიერი იყოს. ჩვეულებრივ იღებენ ჰორიზონტალურ და ვერტიკალურ ღერძებს, მაგრამ შეიძლება ერთ-ერთი კოორდინატთა ღერძი ერთ-ერთი უცნობი ძალის მართობულად მივმართოთ. კოორდინატთა ღერძების ასეთი შერჩევის დროს წონასწორობის განტოლებები მარტივდება; თითოეულ განტოლებაში შეიძლება დარჩეს მხოლოდ თითო უცნობი.

შევთანხმდეთ და ბრტყელი სისტემის კოორდინატთა ღერძები ჩავთვალოთ დადებითად: აბსცისთა ღერძი—მარცხნიდან მარჯვნივ, ხოლო ორდინატთა ღერძი—ქვემოდან ზემოთ.

### მაგალითები

1. იპოვეთ $\overline{F}$ ძალის $F$ მოდული, თუ ცნობილია ძალის გეგმილები: $X=3$ ნიუტონს და $Y=4$ ნიუტონს.

### ამოხსნა

გამოვიყენოთ ფორმულა

$$F = \sqrt{X^2+Y^2}.$$

მნიშვნელობების ჩასმით ვპოულობთ

$$F = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ ნიუტონს.}$$

მიმართულების განსაზღვრისათვის ვსარგებლობთ ფორმულებით:

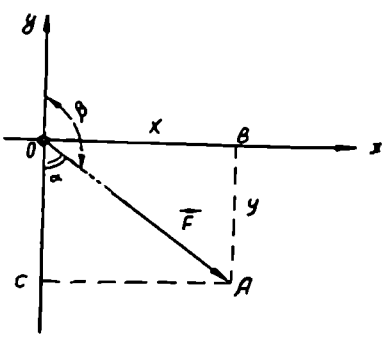
$$\cos\alpha = \frac{X}{F} \quad \text{და} \quad \cos\beta = \frac{Y}{F}.$$

მნიშვნელობების ჩასმით ვპოულობთ

$$\cos\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6, \quad \text{ე. ი.} \quad \alpha = 53^\circ 6';$$

$$\cos\beta = \frac{4}{5} = 0{,}8, \quad \text{ე. ი.} \quad \beta = 36\ 54',$$

ე. ი. $\overline{F}$ ძალა $OX$ ღერძთან ადგენს $\alpha$ კუთხეს, ხოლო $OY$ ღერძთან $\beta$ კუთხეს, რომელთა მნიშვნელობები უკვე განსაზღვრულია.




ნახ. 46

2. მოცემულია ძალის გეგმილები $X = 3$ ნიუტონს და $Y = -4$ ნიუტონს. იპოვეთ ძალა.

ამოხსნა

ძალის მოდული

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 \text{ ნიუტონს.}$$

ვპოულობთ ძალის მიმართულებას

$$\cos\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6; \quad \alpha = 53^\circ 6';$$

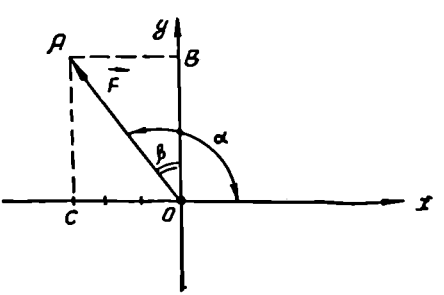
$$\cos\beta = -\frac{4}{5} = -0{,}8;$$

$\beta = 143^\circ 6'$ (ნახ. 46).

3. იპოვეთ ძალა, თუ ცნობილია მისი გეგმილები $X = -3$ ნ და $Y = 4$ ნ (ნახ. 47).

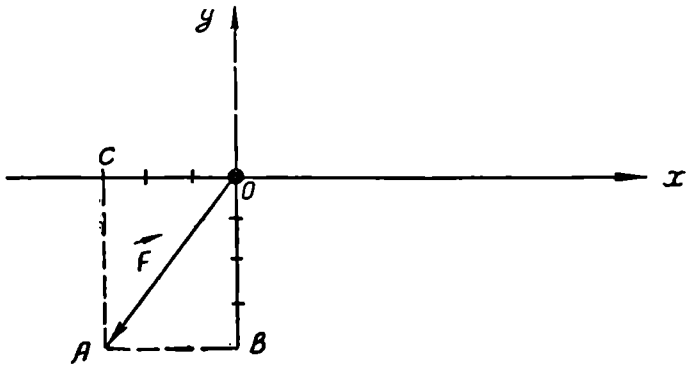
ამოხსნა

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 \text{ ნიუტონს.}$$




ნახ. 47

4. იპოვეთ ძალა, თუ ცნობილია მისი გეგმილები: $X = -3$ ნიუტონს და $Y = -4$ ნიუტონს (ნახ. 48).




ნახ. 48

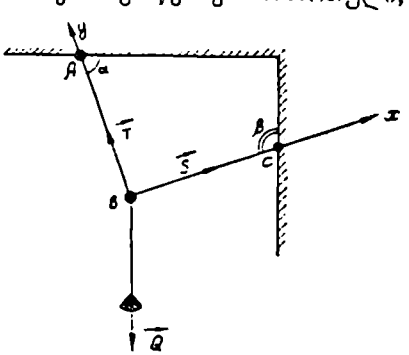
ამოხსნა

$$F = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5 \text{ ნ}.$$

**5.** 60 ნიუტონი წონის ელექტრული შუქხათურა $AB$ თასმით დაკიდებულია ჭერზე და შემდეგ გაწეულია კედლისაკენ $BC$ თოკით (ნახ. 49). განსაზღვრეთ $AB$ თასმის $\overline{T}$ დაჭიმულობა და $BC$ თოკის $\overline{S}$ დაჭიმულობა, თუ ცნობილია, რომ კუთხე $\alpha = 60^\circ$ და კუთხე $\beta = 120^\circ$. თასმისა და თოკის წონას უგულებელვყოფთ.

ამოხსნა

$B$ წერტილზე მოდებულია სამი ძალა: შუქნათურის $\overline{Q}$ წონა, $\overline{T}$ და $\overline{S}$ ბმების რეაქციები, რომლებიც ამ ბმების გასწვრივაა მიმართული; ამ სამი ძალის მოქმედების წრფეები ერთ $B$ წერტილში იკვეთებიან.




ნახ. 49

რადგან $\angle ABC = 90^\circ$, ამიტომ კოორდინატთა ღერძები შეგვიძლია გავატაროთ $B$ წერტილზე, უცნობი $\overline{T}$ და $\overline{S}$ ძალების მოქმედების წრფეების გასწვრივ.

რადგან ძალთა ვექტორების მიერ ამ ღერძებთან შედგენილი კუთხეები ცნობილია, ამიტომ ვპოულობთ $\overline{Q}$, $\overline{T}$ და $\overline{S}$ ძალების გეგმილებს შერჩეულ კოორდინატთა ღერძებზე.

შედეგი შეგვაქვს ცხრილში:

| ძალები \ ღერძები | $Bx$ ღერძზე | $By$ ღერძზე |
|---|---|---|
| $\vec{T}$ | 0 | $T$ |
| $\vec{S}$ | $S$ | 0 |
| $\vec{Q}$ | $-Q\cdot\cos 60°$ | $-Q\cdot\cos 30°$ |

წონასწორობის (1) პირობების გამოყენებით ვადგენთ განტოლებებს:

$$S-Q\cdot\cos 60°=0;$$

$$T-Q\cdot\cos 30°=0,$$

საიდანაც

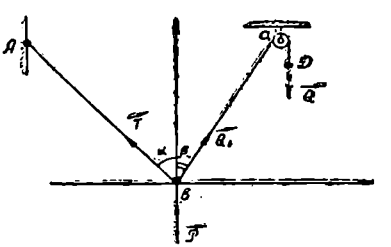
$$S=Q\cdot\cos 60°=60\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=30 \text{ ნიუტონს},$$

$$T=Q\cdot\cos 30°=60\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=51{,}6 \text{ ნიუტონს}.$$

**6**. $ABCD$ ძაფი დამაგრებულია $A$ წერტილში და $C$ წერტილში გადაკიდებულია ბლოკზე (ნახ. 50). $B$ წერტილში ძაფზე მოქმედებს $\vec{P}$ ძალა, რომელიც $D$ წერტილზე მოდებული $Q=600$ ნიუტონი ძალით წონასწორდება. ბლოკში ხახუნის უგულებელყოფით განსაზღვრეთ ძაფის $AB$ ნაწილის დაჭიმულობა და $\vec{P}$ ძალის მოდული, თუ წონასწორობის მდგომარეობაში ძაფის ნაწილების მიერ $B$ წერტილზე გამავალ შვეულთან შედგენილი კუთხეებია:

$\alpha=45°$ და $\beta=30°$.




ნახ. 50

ამოხსნა

განვიხილოთ $B$ წერტილის წონასწორობა. ამ წერტილზე მოდებულია $\vec{P}$, $\vec{Q}_1$ და $\vec{T}$ ძალები, რომლებიც ცვლიან ძაფის $BC$ და $AB$ ნაწილების დაჭიმულობებს. ამ სამი ძალის მოქმედების წრფეები ერთ $B$ წერტილში იკვეთებიან.

$B$ წერტილზე გავატაროთ კოორდინატთა $Bx$ და $By$ ღერძები.

აღსანიშნავია, რომ $\vec{Q}_1$ ძალა ცვლის $\vec{Q}$ ძალის მოქმედებას; ამიტომ დაგეგმილებისას, სადაც $\vec{Q}_1$ ძალა გვაქვს, მას რიცხობრივად $\vec{Q}$ ძალით შევცვლით.

ღერძებზე დაგეგმილებით შევავსებთ ცხრილს.

წონასწორობის (1) პირობების გამოყენებით შევადგენთ განტოლებებს:

$$-T\cdot\sin 45^\circ+Q\cdot\sin 30^\circ=0;$$

$$T\cdot\cos 45^\circ+$$

$$+\ Q\cdot\cos 30^\circ-P=0.$$

პირველი განტოლებიდან გვაქვს

$$T=Q\frac{\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}=$$

| ძალები \ გეგმილები | $Bx$ ღერძზე | $By$ ღერძზე |
|---|---|---|
| $\vec{T}$ | $-T\cdot\sin\alpha$ | $T\cdot\cos\alpha$ |
| $\vec{Q}$ | $Q\cdot\sin\beta$ | $Q\cdot\cos\beta$ |
| $\vec{P}$ | 0 | $-P$ |

$$=600\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=424\ \text{ნიუტონს.}$$

მეორე განტოლებიდან გვაქვს

$$P=T\cdot\cos 45^\circ+Q\cdot\cos 30^\circ=424\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}+600\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=$$

$$=298{,}92+519=817{,}92\ \text{ნიუტონს.}$$

## § 8. თეორემა ერთ სიბრტყეში მდებარე სამი არაპარალელური ძალის წონასწორობის შესახებ

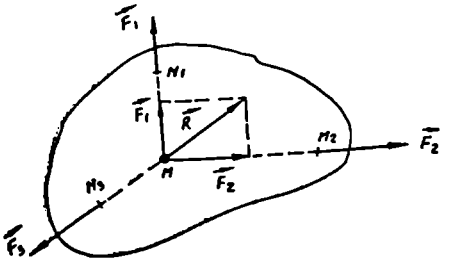
**თეორემა.** თუ მყარ სხეულზე მოდებული სამი არაპარალელური ძალა წონასწორობაშია, მაშინ მათი ფუძეები ერთ წერტილში იკვეთებიან.

ვთქვათ, მყარი სხეულის $M_1$, $M_2$ და $M_3$ წერტილებზე მოდებულია სამი ძალა $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ და $\vec{F}_3$, რომლებიც ერთ სიბრტყეში მდებარეობენ (ნახ. 51), არაპარალელურებია და ურთიერთწონასწორდებიან.

იმის გამო, რომ მოცემული ძალები არაპარალელურებია, ორი მათგანის, მაგალითად, $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალების ფუძეები უნდა იკვეთებოდეს სიბრტყის ერთ წერტილში, მაგალითად, $M$ წერტილში.

$\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალები გადავიტანოთ მათი ფუძეების გადაკვეთის $M$ წერტილში და შევკრიბოთ (ძალთა პარალელოგრამის წესით), მივიღებთ მათ $\vec{R}$ ტოლქმედს. ცხადია, $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალების $\vec{R}$ ტოლქმედით შეცვლით არ დაგვირღვევია ძალთა სისტემის წონასწორობა, მაგრამ სისტემა დავიყვანეთ ორ ურთიერთგამაწონასწორებელ $\vec{R}$ და $\vec{F}_3$ ძალაზე. ეს ძალები, პირველი პრინციპის საფუძველზე, ტოლი უნდა იყვნენ მო-

დულით, მდებარეობდნენ ერთ წრფეზე და მიმართული იყვნენ ურთიერთსაწინააღმდეგოდ, ამის გამო $\overline{F_3}$ ძალის ფუძე ემთხვევა $\overline{R}$ ტოლქმედის ფუძეს და, მაშასადამე, $M$ წერტილზე გადის.




ნახ. 51

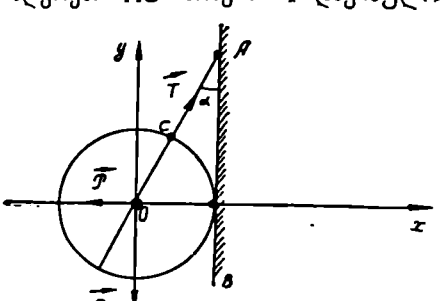
ამრიგად, მოცემული სამი ძალის ფუძეები ერთ წერტილში იკვეთებიან, რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

სამი არაპარალელური ძალისათვის მიღებული წონასწორობის პირობა წარმოადგენს აუცილებელ პირობას, თუმცა იგი საკმარისი არ არის. შეგვიძლია ვთქვათ, რომ, თუ სამი არაპარალელური ძალა წონასწორობაშია, მაშინ მათი ფუძეები ერთ წერტილში იკვეთებიან, მაგრამ, თუ სამი ძალის ფუძეები ერთ წერტილში იკვეთებიან, აქედან სრულიადაც არ გამომდინარეობს, რომ ეს სამი ძალა წონასწორობაში იქნება.

ნათქვამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

### მაგალითები

1. $G=100$ ნიუტონი წონის ერთგვაროვანი სფერო $AC$ თოკით მიბმულია ვერტიკალურ გლუვ $AB$ კედელზე. $AC$ თოკი $AB$ კედელთან ადგენს $\alpha=30^\circ$ კუთხეს. განსაზღვრეთ $AC$ თოკის $\overline{T}$ დაჭიმულობა და სფეროს $AB$ კედელზე $\overline{P}$ წნევა (ნახ. 52).




ნახ. 52

ამოხსნა

ამ შემთხვევაში არათავისუფალი სხეული სფეროა. განვიხილოთ სფეროს წონასწორობა. ვერტიკალური $AB$ კედელი და $AC$ თოკი ბმებია; გავთავისუფლდეთ ბმებისაგან.

სფეროზე მოდებულია სიმძიმის $\overline{G}$ ძალა, $AC$ თოკის $\overline{T}$ დაჭიმულობა და $AB$ კედლის $\overline{P}$ რეაქციის ძალა.

$\overline{G}$ სიმძიმის ძალა (წონა) სფეროს $O$ ცენტრზეა მოდებული. იმის გამო, რომ კედელი გლუვია, $\overline{P}$ რეაქციის ძალა $AB$ კედლისადმი ნორმალს მიჰყვება; ამიტომ $\overline{P}$ ძალა სფეროს $O$ ცენტრზე გადის. ამ $O$ წერტილზე გავატაროთ $Ox$ და $Oy$ კოორდინატთა ღერძები, სათანადოდ, ჰორიზონტალური და ვერტიკალური მიმართულებებით.

ძალთა გეგმილების მნიშვნელობები კოორდინატთა ღერძებზე შევიტანოთ ცხრილში:

| ძალები \ გეგმილები | $Ox$ ღერძზე | $Oy$ ღერძზე |
|---|---|---|
| $\overline{T}$ | $T\cdot\sin\alpha$ | $T\cdot\cos\alpha$ |
| $\overline{P}$ | $-P$ | 0 |
| $\overline{G}$ | 0 | $-G$ |

წონასწორობის პირობების გამოყენებით ვადგენთ განტოლებებს:

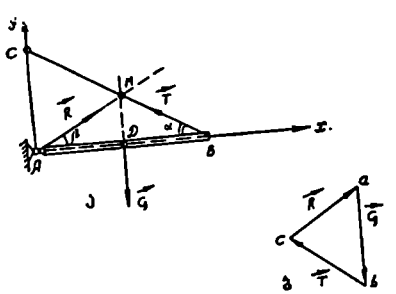
$$T\cdot\sin\alpha - P = 0,$$
$$T\cdot\cos\alpha - G = 0,$$

საიდანაც

$$T = \frac{G}{\cos\alpha} = \frac{100}{\cos 30^\circ} = \frac{100\cdot 2}{\sqrt{3}} = 115{,}5 \text{ ნ.}$$

$$P = T\cdot\sin\alpha = T\cdot\sin 30^\circ = 115{,}5\cdot\frac{1}{2} = 57{,}75 \text{ ნ.}$$

2. $G = 1000$ ნიუტონი წონის ერთგვაროვანი $AB$ ღერო სახსრის საშუალებით დამაგრებულია $A$ წერტილში. $BC$ გვარლით $AB$ ღერო შეკავებულია ჰორიზონტალურ მდებარეობაში, მასთან კუთხე $\alpha = 30^\circ$. იპოვეთ $A$ სახსრის $\overline{R}$ რეაქციის ძალა და $BC$ გვარლის $\overline{T}$ დაჭიმულობა (ნახ. 53).



ნახ. 53

ამოხსნა

განვიხილოთ $AB$ ღეროს წონასწორობა; ამისათვის ჯერ განვსაზღვროთ $A$ სახსრის $\overline{R}$ რეაქციის ძალის მიმართულება.

იმის გამო, რომ ღეროზე მოდებულია სამი ძალა: ღეროს $\overline{G}$ წონა, გვარლის $\overline{T}$ დაჭიმულობა და სახსრის $\overline{R}$ რეაქციის ძალა, შეგვიძლია ვისარგებლოთ სამი ურთიერთგამაწონასწორებელი ძალის თეორემით, რომელთა ფუძეები ერთ

წერტილში უნდა იკვეთებოდნენ. $\vec{G}$ ძალის ფუძე განვაგრძოთ $\vec{T}$ დაჰიმულობის ძალის გადაკვეთამდე $M$ წერტილში. აღვნიშნოთ, რომ ღერო ერთგვაროვანია და სიმძიმის $\vec{G}$ ძალა $AB$ ღეროს შუა $D$ წერტილზეა მოდებული; $\vec{R}$ ძალის ფუძე $M$ წერტილზე უნდა გადადიოდეს; მაშასადამე, $\vec{R}$ ძალა $AM$ წრფის გასწვრივაა მიმართული.

ამოცანა ამოვხსნათ გრაფიკულად და ანალიზურად.

გრაფიკული ამოხსნისათვის ვაგებთ ძალთა სამკუთხედს. ნებისმიერი $a$ წერტილიდან გავატარებთ $\vec{G}$ ძალის გამომსახველ $\vec{ab}$ ვექტორს; ამ ვექტორის $a$ საწყისიდან და $b$ ბოლო წერტილიდან გავატარებთ $\vec{T}$ და $\vec{R}$ ძალების გამომსახველ და $AM$ და $CB$ წრფეების პარალელურ $\vec{ca}$ და $\vec{bc}$ ვექტორებს, რომლებიც საძიებელ $\vec{T}$ და $\vec{R}$ ძალებს განსაზღვრავენ.

ამოცანის ანალიზურად ამოხსნისათვის $AB$ ღეროზე გავატაროთ $Ax$ ღერძი და მისი მართობი $Ay$ ღერძი.

$\vec{R}$ ძალის მიერ $Ax$ ღერძთან შედგენილი კუთხე აღვნიშნოთ $\beta$ ასოთი, თან შევნიშნოთ, რომ $BAD$ სამკუთხედი $AMD$ სამკუთხედის ტოლია, მაშასადამე, $\beta = 30°$.

ღეროზე მოდებულ ძალებს კოორდინატთა ღერძებზე თუ დავაგეგმილებთ და წონასწორობის პირობებს გამოვიყენებთ, მივიღებთ შემდეგ ორ განტოლებას:

$$R \cdot \cos\beta - T \cdot \cos\alpha = 0,$$

$$R \cdot \sin\beta + T \cdot \sin\alpha - G = 0,$$

და, ვინაიდან $\alpha = \beta = 30°$, ამიტომ

$$R \cdot \cos\beta = T \cdot \cos\alpha \quad \text{ანუ} \quad \underline{R = T.}$$

მეორე განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ:

$$2T \cdot \sin 30° = G,$$

აქედან

$$T = \frac{G}{2\sin 30°} = \frac{1000}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1000 \text{ ნ},$$

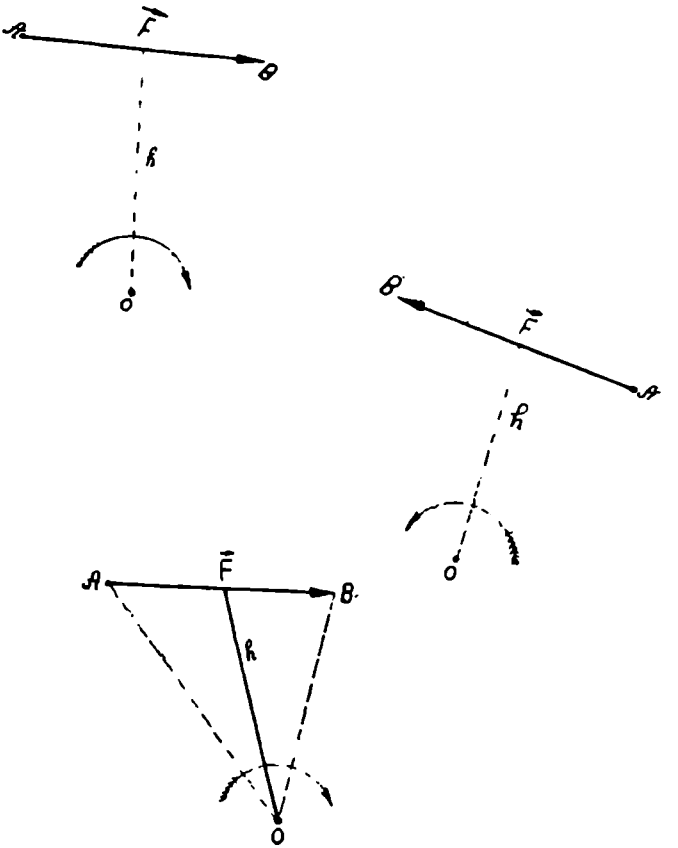
და, რადგან $R = T$, ამიტომ

$$R = 1000 \text{ ნ}.$$

# ძალის სკალარული მომენტი წერტილის მიმართ. ერთ სიბრტყეზე მდებარე პარალელური ძალები. ძალთა წყვილის თეორია

## § 1. ძალის სკალარული მომენტი წერტილის მიმართ

ძალის სკალარული მომენტი მოცემული წერტილის მიმართ ეწოდება პლუს ან მინუს ნიშნით აღებულ ძალის მოდულის ნამრავლს მხარზე, ანუ წერტილიდან ძალის ფუძეზე დაშვებული მართობის სიგრძეზე (ნახ. 54).




ნახ. 54

$\vec{F}$ ძალის $h$ მხარი ეწოდება მანძილს $O$ წერტილიდან $\vec{F}$ ძალის ფუძემდე. $h$ მხარი $O$ წერტილიდან $\vec{F}$ ძალის ფუძეზე დაშვებული მართობის სიგრძეა.

ძალის მომენტი წერტილის მიმართ არსებობს, თუ $O$ წერტილი არ ძევს $\vec{F}$ ძალის ფუძეზე.

როდესაც $\vec{F}$ ძალა ცდილობს სხეულის ბრუნვას $O$ წერტილის გარშემო საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით, მაშინ ძალის მომენტი წერტილის მიმართ დადებითია, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი—უარყოფითი.

$O$ წერტილს ეწოდება მ ო მ ე ნ ტ ი ს ც ე ნ ტ რ ი.

$\vec{F}$ ძალის სკალარული მომენტი $O$ წერტილის მიმართ აღვნიშნოთ $m_0(\vec{F})$-ით ან $m$-ით და გვექნება

$$\boxed{m=m_0(\vec{F}) = \pm F\cdot h.}$$

ძალის სკალარული მომენტის განზომილებაა ძალის ნამრავლი სიგრძეზე.

წერტილის მიმართ ძალის სკალარული მომენტის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ იგი დამოკიდებული არ არის ძალის გადატანაზე ფუძის გასწვრივ.

ძალის სკალარული მომენტი წერტილის მიმართ უდრის ნულს, თუ ძალის ფუძე გადის მომენტის ცენტრში.

სიდიდით ტოლი, მიმართულებით ურთიერთსაწინააღმდეგო და თან ერთი წრფის გასწვრივ მოქმედი ორი ძალის სკალარული მომენტების ჯამი წერტილის მიმართ უდრის ნულს.

ძალის მომენტი მოცემული წერტილის (მ ო მ ე ნ ტ თ ა ც ე ნ ტ რ ი ს) მიმართ არ შეიცვლება, თუ ძალის მოდების წერტილს გადავიტანთ ძალის ფუძის ნებისმიერ წერტილში.

რიცხობრივად $\vec{F}$ ძალის სკალარული მომენტი $O$ წერტილის მიმართ უდრის $\vec{F}$ ძალასა და $O$ წერტილზე აგებული $AOB$ სამკუთხედის გაორკეცებულ ფართობს გარკვეული ნიშნით

$$\boxed{m_0(\vec{F}) = \pm\, 2\,\text{ფარ.}\,\Delta AOB}$$

მართლაც, სამკუთხედის ფართობია

$$\text{ფარ.}\ \Delta AOB = \frac{F\cdot h}{2},$$

საიდანაც

$$F \cdot h = 2 \text{ ფარ. } \Delta AOB,$$

მაგრამ

$$m_0(\overline{F}) = \pm F \cdot h,$$

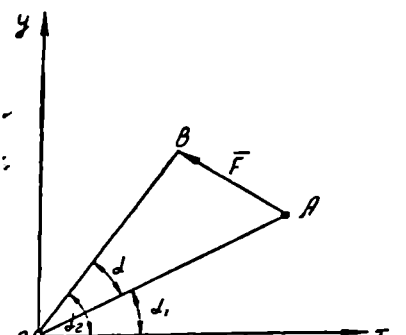
ამიტომ

$$m_0(\overline{F}) = \pm 2 \text{ ფარ. } \Delta AOB.$$

ახლა ანალიზურად გამოვსახოთ ძალის სკალარული მომენტი წერტილის მიმართ (ნახ. 55).

ბრუნვის დადებით გეზად კოორდინატთა $xOy$ სიბრტყეზე ითვლება ის, რომლითაც $90^\circ$-ით უნდა მობრუნდეს $Ox$ ღერძი, რომ დაემთხვეს $Oy$ ღერძს.

$\overline{F}$ ძალის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე იყოს $X$ და $Y$; $\overline{F}$ ძალის $A$ საწყისი წერტილის კოორდინატები კი $x$ და $y$. ვიპოვოთ $\overline{F}$ ძალის სკალარული მომენტი კოორდინატთა $O$ სათავის მიმართ.



ნახ. 55

როგორც ზემოთ იყო განმარტებული

$$m = \pm 2 \text{ ფარ. } \Delta AOB,$$

მაგრამ

$$\text{ფარ. } \Delta AOB = \frac{OA \cdot OB \cdot \sin \alpha}{2},$$

ამიტომ

$$m = \pm OA \cdot OB \cdot \sin \alpha,$$

მაგრამ

$$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1,$$

ამიტომ

$$m = +OA \cdot OB \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1).$$

მარჯვენა ნაწილში გამოვტოვეთ ნიშანი (—), რადგან მარჯვენა ნაწილი იმ სახით, რომლითაც დაწერილია, მომენტის სწორ მნიშვნელობას იძლევა. რადგან

$$\sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin\alpha_2 \cdot \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 \cdot \sin\alpha_1,$$

ამიტომ

$$m = OA \cdot \cos \alpha_1 \cdot OB \cdot \sin \alpha_2 - OA \cdot \sin \alpha_1 \cdot OB \cdot \cos \alpha_2, \qquad (*)$$

მაგრამ

$$OA \cdot \cos \alpha_1 = x; \quad OA \cdot \sin \alpha_1 = y$$

(რადგან $x$ და $y$ არის $A$ წერტილის კოორდინატები). მეორე მხრივ, $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$.

$Ox$ და $Oy$ ღერძებზე დაგეგმილებით მივიღებთ:

$$OB \cdot \cos \alpha_2 = \text{გეგ}_x \ \vec{OB} = \text{გეგ}_x \vec{OA} + \text{გეგ}_x \vec{AB} = x + X;$$

$$OB \cdot \sin \alpha_2 = \text{გეგ}_y \ \vec{OB} = \text{გეგ}_y \vec{OA} + \text{გეგ}_y \vec{AB} = y + Y.$$

ეს მნიშვნელობები (*) ფორმულაში რომ ჩავსვათ, მივიღებთ

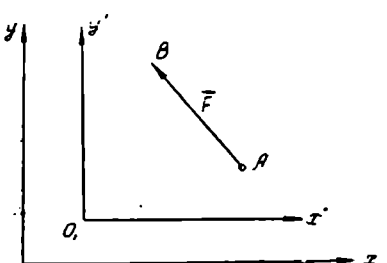
$$m = x(y+Y) - y(x+X) = xy + xY - xy - yX,$$

ანუ

$$\boxed{m = xY - yX.} \qquad (**)$$

ამრიგად ვიპოვეთ $\vec{F}$ ძალის $m$ სკალარული მომენტის გამოსახულება კოორდინატთა $O$ სათავის მიმართ.

ახლა ვიპოვოთ ზოგადი ფორმულა, რომელიც მოგვცემს $\vec{F}$ ძალის სკალარული მომენტის გამოსახულებას ნებისმიერი $O_1(a, b)$ წერტილის მიმართ. ეს მომენტი აღვნიშნოთ $m'$-ით (ნახ. 56).



ნახ. 56

ამ მიზნით ავიღოთ $x'O_1y'$ კოორდინატთა ორღერძი, რომლის სათავეა $O_1(a_1b)$ წერტილი.

$x'O_1y'$ სისტემის ღერძები სათანადოდ $xOy$ სისტემის ღერძების პარალელურია. (**) ფორმულის მიხედვით, რომელსაც ვიყენებთ $x'O_1y'$ ორღერძის მიმართ, გვექნება

$$m' = x'Y - y'X, \qquad (*'*)$$

სადაც $x'$ და $y'$-ით აღნიშნულია $A$ წერტილის კოორდინატები $x'O_1y'$ ორღერძის მიმართ. მაგრამ

$$x' = x - a \quad \text{და} \quad y' = y - b,$$

ამიტომ (*_*) ფორმულა მოგვცემს შემდეგ ზოგად ძირითად ფორმულას

$$m' = (x-a)Y - (y-b)X.$$

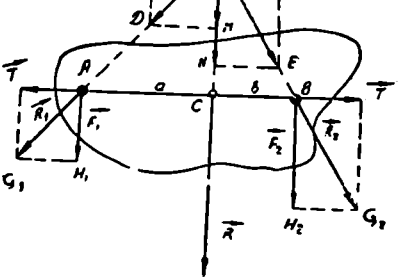
## § 2. ერთმხრივ მიმართული ორი პარალელური ძალის შეკრება

აქამდე განვიხილავდით მყარი სხეულის ერთ წერტილზე მოდებულ ძალებს. ახლა განვიხილოთ მყარი სხეულის სხვადასხვა წერტილზე მოდებული ძალები. თავდაპირველად განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, სახელდობრ, პარალელურ ძალთა შემთხვევა.

ვთქვათ, მყარი სხეულის $A$ და $B$ წერტილებზე მოდებულია ერთმხრივ მიმართული $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ პარალელური ძალები (ნახ. 57). საჭიროა ამ ძალთა ტოლქმედის პოვნა.

$A$ და $B$ წერტილებზე გავატაროთ $AB$ წრფე და ამ წერტილებზე მოვდოთ $AB$ წრფის გასწვრივ მოქმედი ორი $\vec{T}$ და $\vec{T}'$ გამაწონასწორებელი ძალა.

$A$ წერტილზე მოდებული $\vec{F}_1$ და $\vec{T}$ ძალთა სისტემა შევკრიბოთ ძალთა პარალელოგრამის წესით; მივიღებთ მათ $\vec{R}_1$ ტოლქმედს. სწორედ ასევე შევკრიბოთ $B$ წერტილზე მოდებული $\vec{F}_2$ და $\vec{T}'$ ძალთა სისტემა; მივიღებთ მათ $\vec{R}_2$ ტოლქმედს.



ნახ. 57

ამრიგად, $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ პარალელურ ძალთა სისტემა უკვე არაპარალელური ეკვივალენტური $\vec{R}_1$ და $\vec{R}_2$ ძალთა სისტემით შევცვალეთ.

$\vec{R}_1$ და $\vec{R}_2$ ძალები მათი ფუძეების გასწვრივ გავასრიალოთ და გადაკვეთის $O$ წერტილზე მოვდოთ. მივიღებთ $\vec{OD}$ და $\vec{OE}$ ვექტორებს. $AB \parallel KL$ და $OC \parallel \vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ მიმართულებებზე ისინი დავშალოთ მდგენელებად, მივიღებთ:

$$\Delta ODM = \Delta AG_1H_1$$

და

$$\Delta OEN = \Delta BG_2H_2.$$

ამ სამკუთხედთა ტოლობიდან ვპოულობთ:

$$MD = OK = H_1G_1 = T;$$
$$NE = OL = H_2G_2 = T';$$
$$OM = AH_1 = F_1;$$
$$ON = BH_2 = F_2.$$

თუ უკუვაგდებთ გამაწონასწორებელ $\vec{OK}$ და $\vec{OL}$ ძალებს, დაგვრჩება ძალები:

$$\vec{OM} = \vec{F}_1 \quad \text{და} \quad \vec{ON} = \vec{F}_2,$$

რომლებსაც საერთო $OC$ ფუძე აქვთ. როგორც ცნობილია, ასეთ ძალთა ტოლქმედის მოდული მათი მოდულების ჯამს უდრის, ხოლო ვინაიდან $\vec{OM}$ და $\vec{ON}$ ძალთა სისტემა $A$ და $B$ წერტილებზე მოდებულ ერთმხრივ მიმართულ $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალთა სისტემის ეკვივალენტურია, ამიტომ $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალთა ტოლქმედის მოდული მათი მოდულების ჯამს უდრის.

$$\boxed{R = F_1 + F_2.} \tag{1}$$

მასთან, $\vec{R}$ ტოლქმედს $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალების მიმართულება აქვს.

$\vec{R}$ ტოლქმედი გავასრიალოთ ფუძის გასწვრივ და $AB$ წრფესთან გადაკვეთის $C$ წერტილზე მოვდოთ; მივიღებთ $AOC$ და $BOC$ სამკუთხედებს, რომლებიც, სათანადოდ, $DOM$ და $EON$ სამკუთხედების მსგავსია. სამკუთხედთა მსგავსებიდან ვპოულობთ:

$$\frac{OC}{AC} = \frac{OM}{MD} = \frac{E_1}{T}$$

და

$$\frac{OC}{BC} = \frac{ON}{NE} = \frac{F_2}{T'},$$

საიდანაც

$$F_1 \cdot AC = OC \cdot T$$

და

$$F_2 \cdot BC = OC \cdot T'.$$

ამ გამოსახულებათა მარჯვენა ნაწილები ტოლებია, ამიტომ ტოლია მარცხენა ნაწილებიც, ე. ი.

$$F_1 \cdot AC = F_2 \cdot BC.$$

შემოვილოთ აღნიშვნები: $AC=a$ და $BC=b$;

მაშინ

$$F_1 \cdot a = F_2 \cdot b,$$

საიდანაც

$$\boxed{\frac{F_1}{F_2} = \frac{b}{a}} \qquad (2)$$

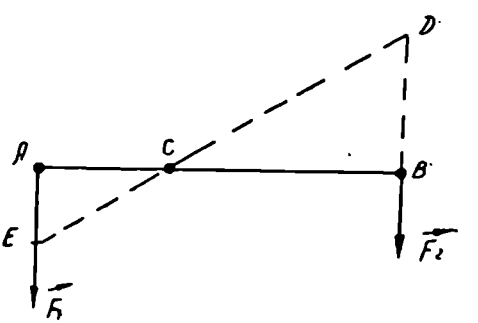
აქ $a$ და $b$, სათანადოდ, $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალების $R$ ტოლქმედის მოდების $C$ წერტილამდე დაშორების მანძილები ანუ მხრებია, ამიტომ (2) პროპორცია ასეთნაირად იკითხება:

ერთმხრივ მიმართული პარალელური ძალების მოდულების ფარდობა მათი მხრების ფარდობის უკუპროპორციულია.

(2) პროპორცია განსაზღვრავს $C$ წერტილს, ე. ი. $\vec{R}$ ტოლქმედის მოდების წერტილის მდებარეობას.

ამრიგად, მივიღეთ ერთმხრივ მიმართული ორი პარალელური ძალის შეკრების შემდეგი წესი:

ერთმხრივ მიმართული ორი პარალელური ძალის ტოლქმედის მოდული შესაკრებ ძალთა მოდულების ჯამს უდრის და იმავე მხარესაა მიმართული, საითკენაც შესაკრები ძალებია; ტოლქმედის წუძე პარალელური ძალების მოდების წერტილებს შორის მანძილს ძალთა მოდულების უკუპროპორციულ ნაწილებად ყოფს.




ნახ. 58

ტოლქმედი ძალის მოდების $C$ წერტილის პოვნა ადვილად შეიძლება შემდეგი გეომეტრიული ხერხით (ნახ. 58):

$A$ წერტილიდან (ნახ. 58) $\vec{F}_1$ ძალის მიმართულებით გადავზომავთ $\vec{F}_2$ ძალის მოდულის ტოლ $AE$ მონაკვეთს, $B$ წერტილიდან $\vec{F}_2$ ძალის შებრუნებული მიმართულებით კი $\vec{F}_1$ ძალის მოდულის ტოლ $BD$ მონაკვეთს.

$E$ და $D$ წერტილებზე გატარებული $DE$ წრფე $AB$ წრფეს კვეთს საძიებელ $C$ წერტილში. $ACE$ და $BCD$ სამკუთხედთა მსგავსებიდან ვპოულობთ

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AE}{BD}.$$

რადგან $AE = F_2$ და $BD = F_1$, ამიტომ ეს პროპორცია მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}.$$

მოცემული ძალის ორ პარალელურ ძალად დაშლის საკითხის გადასაწყვეტად დამატებითი მონაცემებია საჭირო.

### ა) მოცემულია საძიებელი ძალების ფუძეები

ამ შემთხვევაში მოცემული $\vec{R}$ ძალის მოდების $C$ წერტილს გარდა ცნობილი იქნება საძიებელი $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალების მოდების $A$ და $B$ წერტილები (ნახ. 58). ამ წერტილების პოვნა შეიძლება $C$ წერტილზე ნებისმიერი წრფის გატარებით, რომელიც მოცემულ ფუძეებს $A$ და $B$ წერტილებში გადაკვეთს.

ამ შემთხვევაში (1) და (2) ფორმულები წყვეტს საკითხს. მართლაც, ამ ფორმულებით გვაქვს:

$$F_1 + F_2 = R$$

და

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{AC}{BC}.$$

შევადგინოთ წარმოებული პროპორცია.

$$\frac{F_2}{F_1 + F_2} = \frac{AC}{BC + AC},$$

ანუ

$$\frac{F_2}{R} = \frac{AC}{AB};$$

აქედან

$$F_2 = R \cdot \frac{AC}{AB}.$$

შემდეგ ვპოულობთ

$$F_1 = R - F_2 = R - R \cdot \frac{AC}{AB} = R\left(1 - \frac{AC}{AB}\right) =$$

$$= R \cdot \frac{AB - AC}{AB} = R \cdot \frac{BC}{AB}.$$

**ბ) ცნობილია ერთ-ერთი შესაკრები $\vec{F}_1$ ძალა და მისი ფუძე**

ამ შემთხვევაში $\vec{F}_1$ ძალის მოდების $A$ წერტილის პოვნა შეიძლება $\vec{R}$ ძალის მოდების $C$ წერტილზე ნებისმიერი წრფის გატარებით $\vec{F}_1$ ძალის ფუძის $A$ წერტილში გადაკვეთამდე.

(1) და (2) ფორმულებში უცნობი იქნება $\vec{F}_2$ ძალის მოდული და მისი მოდების $B$ წერტილის მდებარეობა, რომლებისთვისაც ვპოულობთ:

$$F_2 = R - F_1;\ BC = AC \cdot \frac{F_1}{F_2}.$$

**გ) ცნობილია ერთი შესაკრების მოდული და მეორის ფუძე**

ამ შემთხვევაშიც საკითხი წყდება (1) და (2) ფორმულების გამოყენებით.

**მაგალითები**

**1.** 15 ნიუტონი ძალა დაშალეთ ორ პარალელურ $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალად, თუ ცნობილია, რომ მოცემულ ძალასა და საძიებელ ძალებს შორის მანძილი სათანადოდ არის 20 და 30 სმ.

ამოხსნა

(2) ფორმულიდან გვაქვს

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3},$$

საიდანაც

$$F_2 = \frac{2}{3} F_1.$$

ამ მნიშვნელობის (1) ფორმულაში შეტანით, მივიღებთ:

$$F_1 + \frac{2}{3} F_1 = 15;$$

$$1\frac{2}{3} F_1 = 15;\ \frac{5}{3} F_1 = 15;$$

$$F_1 = \frac{3}{5} \cdot 15 = 9 \text{ ნიუტონს;}$$

მაშინ

$$F_2 = \frac{2}{3} F_1 = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6 \text{ ნიუტონს.}$$

2. 30 ნიუტონი ძალა დავშალოთ ორ პარალელურ ძალად, რომელთაგან ერთი $F_1 = 18$ ნიუტონს და მოცემული 30 ნიუტონი ძალისაგან დაშორებულია 28 სმ მანძილით.

ამოხსნა

(1) ფორმულით ვპოულობთ

$$F_2 = 30 - 18 = 12 \text{ ნიუტონს.}$$

მეორე ფორმულით

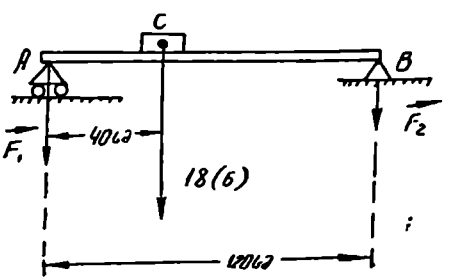
$$\frac{28}{BC} = \frac{12}{18};$$

აქედან

$$BC = 28 \cdot \frac{18}{12} = 42 \text{ სმ,}$$

ე. ი. საძიებელი მეორე შესაკრები ძალა უდრის 12 ნიუტონს და მისი ფუძე 42 სმ-ით არის დაშორებული მოცემული 30 ნიუტონი ძალის ფუძისაგან.

3. ორ საყრდენზე მდებარე $AB$ კოჭზე მოთავსებულია 18 ნიუტონი ტვირთი, რომელიც კოჭის მარცხენა $A$ საყრდენიდან დაშორებულია 40 სმ-ით.




ნახ. 59

იპოვეთ ტვირთის წნევა თითოეულ საყრდენზე, თუ საყრდენებს შორის მანძილია 120 სმ (ნახ. 59). კოჭის წონა უგულებელყოფილია.

ამოხსნა

ამ მაგალითში საძიებელი $\overline{F}_1$ და $\overline{F}_2$ ძალების მოდების $A$ და $B$ წერტილები ცნობილია.

(1) და (2) ფორმულებით ვპოულობთ:

$$F_1 + F_2 = 18$$

და

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{40}{120-40} = \frac{1}{2}.$$

ამ განტოლებათა ამოხსნით ვპოულობთ:

$$F_1 = 12 \text{ ნიუტონს და } F_2 = 6 \text{ ნიუტონს.}$$

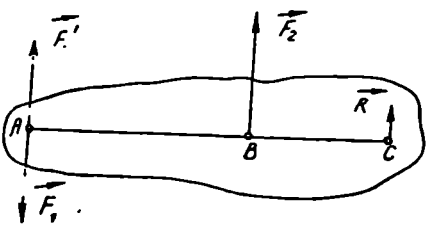
## § 3. სხვადასხვა მოდულის ორი ანტიპარალელური ძალის შეკრება

ვთქვათ, მყარი სხეულის $A$ და $B$ წერტილებზე მოდებულია ორი ძალა, $\overline{F}_1$ და $\overline{F}_2$, მასთან მოდულით $F_2 > F_1$ (ნახ. 60); ასეთ ძალებს ანტიპარალელური ძალები ეწოდება.

$\overline{F}_2$ ძალა დავშალოთ ორ პარალელურ ძალად, რომელთაგან ერთი $\overline{F}_1'$ ძალა, ვთქვათ, მოდებულია $\overline{F}_1$ ძალის მოდების $A$ წერტილზე, თან მოდულით $\overline{F}_1$ ძალის მოდულის ტოლია, მასთან ერთ წრფეზე ძევს და შებრუნებული მიმართულება აქვს,

ე. ი. მოდულით

$$F_1' = F_1.$$




ნახ. 60

წინა პარაგრაფის (1) ფორმულით ვპოულობთ მეორე ძალას

$$R = F_2 - F_1' = F_2 - F_1. \quad (1)$$

$\overline{R}$ ძალის მოდების წერტილი აღვნიშნოთ $C$ ასოთი, მაშინ წინა პარაგრაფის (2) ფორმულით ვიპოვით

$$\frac{F_2 - F_1}{F_1} = \frac{AB}{AC}.$$

შევადგინოთ წარმოებული პროპორცია და მივიღებთ

$$\frac{F_2 - F_1 + F_1}{F_1} = \frac{AB + BC}{BC}$$

ანუ

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{AC}{BC}. \quad (2)$$

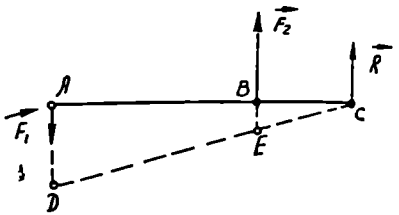
თუ უკუვაგდებთ გამაწონასწორებელ ძალთა $\overline{F}_1$ და $\overline{F}_1'$ სისტემას, დაგვრჩება $C$ წერტილზე მოდებული $\overline{R}$ ძალა.

ამრიგად, ამ პარაგრაფის (1) და (2) ფორმულების ძალით მივიღებთ ორი ანტიპარალელური ძალის შეკრების შემდეგ წესს:

**ორი ანტიპარალელური ძალის ტოლქმედის მოდული ამ ძალთა მოდულების სხვაობას უდრის, დიდი ძალის გარეთაა და დიდი ძალის მიმართულება აქვს; ტოლქმედის ფუძე მდგენელი ძალების მოდების წერტილებს შორის მანძილს გარე ფართობით ყოფს შესაკრები ძალების უკუპროპორციულ ნაწილებად.**

ამ შემთხვევაშიაც ტოლქმედის მოდების წერტილის პოვნა შეიძლება შემდეგი მარტივი გეომეტრიული აგებით (ნახ. 61).

მცირე $\overrightarrow{F_1}$ ძალის მოდების $A$ წერტილიდან ამ ძალის მიმართულებაზე გადავზომოთ დიდი $\overrightarrow{F_2}$ ძალის მოდულის ტოლი $AD$ მონაკვეთი, ხოლო $B$ წერტილიდან — დიდი $\overrightarrow{F_2}$ ძალის მიმართულების საწინააღმდეგო მიმართულებით მცირე $\overrightarrow{F_1}$ ძალის მოდულის ტოლი $BE$ მონაკვეთი.




ნახ 61

$D$ და $E$ წერტილებზე გამავალი წრფე $AB$ წრფის გაგრძელებას საძიებელ $C$ წერტილში გადაკვეთს. მართლაც, $ACD$ და $BCE$ სამკუთხედების მსგავსებიდან გვაქვს

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BE}.$$

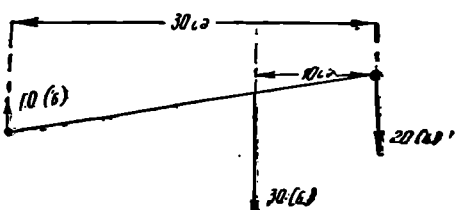
რადგან

$$\frac{AD}{BE} = \frac{F_2}{F_1},$$

ამიტომ

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}.$$

რაც შეეხება ძალის ორ ანტიპარალელურ ძალად დაშლის საკითხს, იგი წინა პარაგრაფში მოყვანილი წესის მიხედვით წარმოებს. აქ მხოლოდ უნდა აღინიშნოს, რომ, თუ საძიებელი ძალების (მდგენელების) მოქმედების წრფეები მოცემული ძალის ერთ მხარეს ძევს, მაშინ საძიებელ ძალებს ურთიერთშებრუნებული მიმართულებები ექნებათ, მასთან მეტ მდგენელს (რომელიც მოცემული ძალის მახლობლადაა) მოცემული ძალის მიმართულება ექნება.




ნახ. 62

**მაგალითი.** 20 ნიუტონი ძალა დავშალოთ ორ ანტიპარალელურ ძალად, რომელთა ფუძეები მოცემული ძალის ერთ მხარეზეა მოქცეული და ამ ძალიდან დაშორებულია 10 და 30 სმ მანძილით (ნახ. 62).

პირველი მდგენელი იყოს $\vec{F}_1$ და მეორე $\vec{F}_2$, მაშინ

$$F_1 - F_2 = 20;$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{30}{10} = 3,$$

საიდანაც

$$F_1 = 3F_2;$$

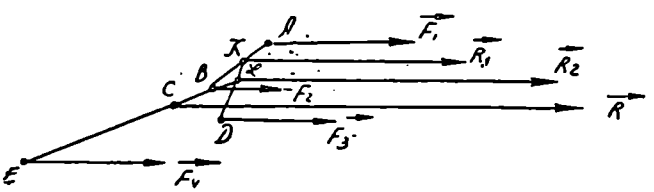
მაშასადამე,

$$3F_2 - F_2 = 20; \quad 2F_2 = 20; \quad F_2 = 10 \text{ ნ}; \quad F_1 = 3F_2 = 3 \cdot 10 = 30 \text{ ნ}.$$

## § 4. ერთ სიბრტყეში მდებარე მრავალი პარალელური ძალის შეკრება. პარალელურ ძალთა ცენტრი

ორი პარალელური ძალის შეკრების ხერხის გავრცელება შეიძლება ნებისმიერ პარალელურ ძალაზე.

ვთქვათ, მყარი სხეულის $A$, $B$, $D$ და $E$ წერტილებზე (ნახ. 63) მოდებულია პარალელური ძალები $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ და $\vec{F}_4$.




ნახ. 63

ჯერ შევკრიბოთ $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალები, ვიპოვით მათ $\vec{R}_1$ ტოლქმედს ( $R_1 = F_1 + F_2$); შემდეგ შევკრიბოთ $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_3$ ძალები და მივიღებთ $\vec{R}_2$ ტოლქმედს ($R_2 = R_1 + F_3 = F_1 + F_2 + F_3$); დაბოლოს შევკრიბოთ $\vec{R}_2$ და $\vec{F}_4$ ძალები და მივიღებთ საერთო $\vec{R}$ ტოლქმედს

$$R = R_2 + F_4 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4.$$

ამრიგად, ერთმხრივ მიმართული მრავალი პარალელური ძალის ტოლქმედის მოდული უდრის შესაკრებთა მოდულების ჯამს და ტოლქმედის ვექტორი მოცემული ძალების პარალელურია.

თუ პარალელური ძალები ურთიერთშებრუნებულად არიან მიმართული, მაშინ ჯერ ვეძებთ ერთმხრივ მიმართულ ძალებს და ვპოულობთ მათ ტოლქმედს

$$R_1 = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots$$

შემდეგ ვკრებთ მოპირდაპირე მხარეს მიმართულ ძალებს და ვპოულობთ მათ ტოლქმედს

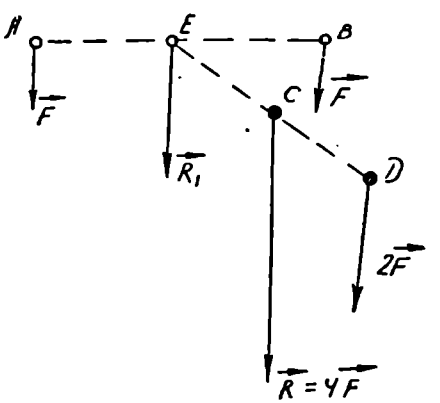
$$R_2 = P_1 + P_3 + P_5 + \ldots$$

ამრიგად, მივიღებთ ურთიერთშებრუნებულ ორ პარალელურ ძალას: $\overline{R}_1$ და $\overline{R}_2$, რომელთა $\overline{R}$ ტოლქმედი მოცემული ძალთა სისტემის ტოლქმედი იქნება. ამ ტოლქმედის მოდული

$$R = R_1 - R_2.$$

### მაგალითები

**1.** მყარი სხეულის $A$ და $B$ წერტილებზე ერთმხრივ მიმართული და პარალელური $\overline{F}$ და $\overline{F}$ ძალებია მოდებული; მესამე $D$ წერტილზე, რომელიც არ ძევს $AB$ წრფეზე, მოდებულია პირველი ორი ძალის პარალელური და იმავე მხარეს მიმართული $2\overline{F}$ ძალა. იპოვეთ ამ ძალთა ტოლქმედი (ნახ. 64).




ნახ. 64

ამოხსნა

ორი ტოლი $\overline{F}$ და $\overline{F}$ ძალის ტოლქმედის მოდული

$$R_1 = F + F = 2F.$$

$\overline{R}_1$ ძალა $AB$ მანძილის შუა $E$ წერტილზეა მოდებული $\left(\text{მართლაც, } \dfrac{AE}{BE} = \dfrac{F}{F} = 1;\ AE = BE\right)$.

$\overline{R}_1 = 2\overline{F}$ ძალა და მესამე $2\overline{F}$ ძალა შევკრიბოთ (ეს ძალა $D$ წერტილზეა მოდებული). ვიპოვით მათ $\overline{R}$ ტოლქმედს, რომლის მოდულია

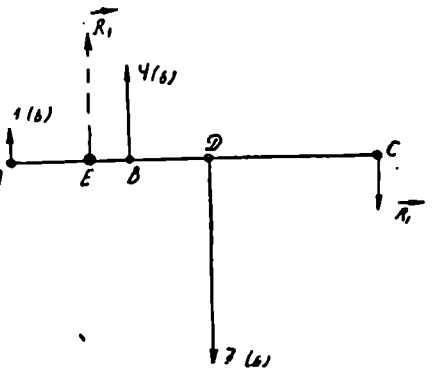
$$R = R_1 + 2F = 2F + 2F = 4F.$$

$\overline{R}$ ძალის მოდების $C$ წერტილი $DE$ მანძილს შუაზე ყოფს, რადგან

$$\frac{EC}{DC} = \frac{2F}{2F} = 1.$$

ამრიგად, $\overline{R}$ ტოლქმედის მოდების $C$ წერტილი $ABD$ სამკუთხედის $D$ წვეროდან გატარებული მედიანის შუა წერტილშია.

2. ერთ წრფეზე მდებარე სამ $A$, $B$ და $D$ წერტილზე მოდებულია პარალელური სამი ძალა, ამ ძალების სიდიდეა, სათანადოდ, 1 ნ, 4 ნ და 7 ნ, მასთან, 7 ნ ძალა პირველი ორი ძალის საწინააღმდეგო მიმართულებისაა. იპოვეთ ამ სამი ძალის ტოლქმედი, თუ $AB=BD=a$ სმ (ნახ. 65).



ნახ. 65

ა მ ო ხ ს ნ ა

მოცემული ძალების ტოლქმედის მოდული $R=1+4-7=-2$ ნიუტონს.

მინუს ნიშანი მიგვითითებს იმაზე, რომ $\overline{R}$ ძალას და 7 ნ ძალას ერთნაირი მიმართულება აქვთ.

1 ნ და 4 ნ ძალთა $\overline{R}_1$ ტოლქმედის მოდების $E$ წერტილი მოიძებნება ფარდობიდან

$$\frac{AE}{BE}=\frac{4}{1},\quad \text{საიდანაც } AE=4BE.$$

მაგრამ $AE+BE=AB=a$; მაშასადამე,

$$4BE+BE=a,$$

აქედან

$$BE=\frac{a}{5}\ \text{სმ}$$

და

$$ED=\frac{a}{5}+a=\frac{6}{5}\ a\ \text{სმ}.$$

$\overline{R}_1$ და 7 ნ ძალების $\overline{R}$ ტოლქმედის მოდების $C$ წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება ფარდობიდან

$$\frac{EC}{DC}=\frac{7}{R_1},$$

ხოლო, ვინაიდან $R_1=1+4=5$ ნ,
ამიტომ

$$\frac{EC}{DC}=\frac{7}{5},$$

მაგრამ

$$EC = ED + DC = \frac{6}{5}a + DC,$$

მაშასადამე,

$$\frac{\frac{6}{5}a + DC}{DC} = \frac{7}{5},$$

აქედან

$$\frac{6a}{5DC} + 1 = \frac{7}{5},$$

ანუ

$$\frac{6a}{5DC} = \frac{2}{5};$$

მაშინ

$$DC = \frac{6a}{2} = 3a.$$

ამრიგად, $\vec{R}$ ტოლქმედი $D$ წერტილის მარჯვნივაა და მისგან $3a$ მანძილითაა დაშორებული, რადგან $C$ წერტილი $ED$ მანძილს გარე ფარდობით ყოფს.

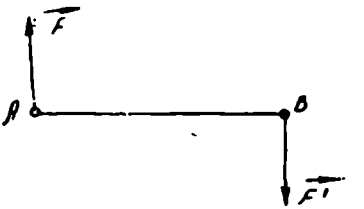
დავუბრუნდეთ 63-ე ნახაზს და დავუშვათ, რომ $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ და $\vec{F}_4$ ძალები მოდების წერტილის მიმართ ერთ მხარეს მობრუნდნენ ერთი და იმავე კუთხით. ცხადია, ასეთი მობრუნების დროს ძალები ინარჩუნებენ ურთიერთპარალელურ მდებარეობას. ამ ძალთა შეკრებით მივიღებთ მათ ტოლქმედს, რომელიც $C$ წერტილის მიმართ იმავე კუთხით შემობრუნდება, ე. ი. ყველა პარალელური ძალის ერთი და იმავე კუთხით მობრუნებისას მათი ტოლქმედიც იმავე კუთხით შემობრუნდება. რადგან ძალის მოდების წერტილად შეიძლება მყარი სხეულის ნებისმიერი წერტილის მიღება, რომელიც მოქმედების წრფეზე ძევს, ამიტომ დავასკვნით, რომ პარალელური ძალების ერთი და იმავე კუთხით მობრუნებისას ტოლქმედი ძალის მოდების $C$ წერტილი არ შემობრუნდება.

პარალელურ ძალთა მოდების იმ წერტილს, რომელიც მდებარეობას არ იცვლის ყველა ძალის ერთი და იმავე კუთხით მობრუნებისას, პარალელურ ძალთა ცენტრი ეწოდება.

პარალელურ ძალთა ცენტრის მდებარეობა მხოლოდ შესაკრებ ძალთა სიდიდესა და მათი მოდების წერტილთა მდებარეობაზეა დამოკიდებული, და ამ შემთხვევაში არავითარი გავლენა არა აქვს ამ ძალთა მიმართულებას.

## § 5. ძალთა წყვილი

ადვილი შესამჩნევია, რომ ორი ტოლი ანტიპარალელური ძალისათვის სრულიად სხვა შინაარსის შედეგს მივიღებთ. მართლაც, ვთქვათ, მყარი სხეულის $A$ და $B$ წერტილებზე მოდებულია მოდულით ტოლი და მიმართულებით ურთიერთშებრუნებული $\overline{F}$ და $\overline{F}'$ ძალები (ნახ. 66).



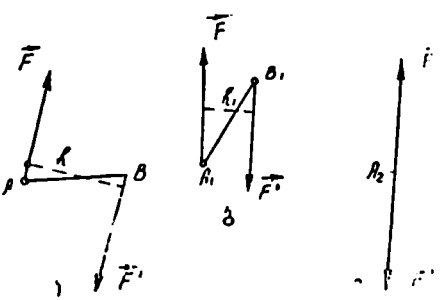
ნახ. 66

ასეთი ორი ძალის ტოლქმედის მოდული ნულის ტოლია

$$R = F - F' = 0.$$

მაგრამ ეს ძალები წონასწორობაში არ იმყოფებიან, რადგან ასეთი ძალების წონასწორობისათვის აუცილებელია, რომ ისინი მდებარეობდნენ ერთ წრფეზე, რაც, ამ შემთხვევაში, ასე არ არის. აქ გვაქვს ძალთა ქმედების განსაკუთრებული შემთხვევა.

**სხეულის ორ წერტილზე მოდებული მოდულით ტოლი, პარალელური და ურთიერთშებრუნებულად მიმართული ორი ძალის ერთობლიობა მეტად ადრე გამარტივდება და მას ძალთა წყვილი ანუ წყვილძალა ეწოდება.**



ნახ. 67

$\overline{R}$ ტოლქმედის მოდების წერტილი უსასრულოდშია.

ხშირად $\overline{F}$ და $\overline{F}'$ ძალებისაგან შედგენილ ძალთა წყვილს აღნიშნავენ სიმბოლოთი $(\overline{F}, \overline{F}')$.

ვთქვათ, მყარ სხეულზე მოქმედებს $(\overline{F}_1, \overline{F}')$ ძალთა წყვილი (ნახ. 67).

ძალთა წყვილის მდგენელი $\overline{F}$ და $\overline{F}'$ ძალების ფუძეები თანდათან რომ დავაახლოოთ (ნახ. 67, ბ), შეგვიძლია ისეთ შემთხვევაზე დავიდეთ, როდესაც $\overline{F}$ და $\overline{F}'$ ძალებს ერთი მოქმედების წრფე ექნებათ (ნახ. 67, გ). მაგრამ ამ შემთხვევაში $\overline{F}$ და $\overline{F}'$ ძალები გაწონასწორდებიან.

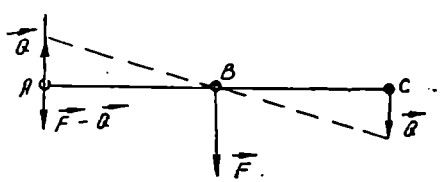
მაშასადამე, ძალთა წყვილის მოქმედება განისაზღვრება არა მარტო მდებენელი ძალების სიდიდით, არამედ ამ ძალების ფუძეებს შორის მანძილითაც.

ძალთა წყვილის ძალების ფუძეებს შორის მანძილს ძალთა წყვილის მხარი ეწოდება.

ახლა ვნახოთ, თუ თავისი მოქმედებით როგორი ორი ძალთა წყვილი უნდა ჩავთვალოთ ტოლებად, ე. ი. ტოლფასებად.

ვთქვათ, $AB$ სხეულზე მოდებულია $(\vec{F},\ \vec{F}_1)$ ძალთა წყვილი, რომლის მხარია $AB=h$ (ნახ. 68).

$B$ წერტილზე მოდებული $\vec{F}'$ ძალა დავშალოთ ორ პარალელურ მდგენელ ძალად, მასთან ერთი მათგანის სიდიდე იყოს $Q$, მაშინ მიორის სიდიდე იქნება $F'-Q$; ეს მეორე $F'-Q$ ძალის ვექტორი $A$ წერტილზე უნდა იყოს მოდებული.



ნახ. 68

ამ შემთხვევაში ვწერთ ფარდობას

$$\frac{AB}{BC}=\frac{Q}{F'-Q};$$

ან ყოველ მიმყოლ წევრს თავის წინა წევრს თუ მივუმატებთ, მივიღებთ:

$$\frac{AB}{AB+BC}=\frac{Q}{Q+F'-Q},$$

ანუ

$$\boxed{\frac{AB}{AC}=\frac{Q}{F'}.} \qquad (ა)$$

$A$ წერტილზე ზემოთ მოქმედებს ძალა $\vec{F}'$, ქვემოთ კი $\vec{F}'-\vec{Q}$; მათი ტოლქმედია

$$\vec{F}'-(\vec{F}'-\vec{Q})=\vec{Q};$$

ეს უკანასკნელი მიმართულია ზემოთ.

ამრიგად, $(\vec{F},\ \vec{F}')$ ძალთა წყვილის ნაცვლად მივიღეთ $AC$ მხრიანი $(\vec{Q},\ \vec{Q}')$ ძალთა წყვილი, რომელიც მოცემული $(\vec{F},\ \vec{F}')$ ძალთა წყვილის ტოლფასია.

(ა) პროპორციიდან გვაქვს

$$F\cdot AB=Q\cdot AC, \qquad (ბ)$$

ე. ი. ორი ძალთა წყვილის ტოლფასობისათვის აუცილებელია, რომ ერთი ძალთა წყვილის ძალის ნამრავლი თავის მხარზე უდრიდეს მეორე ძალთა წყვილის ძალის ნამრავლს თავის მხარზე.

ძალთა წყვილის ძალის ნამრავლს თავის მხარზე ძალთა წყვილის სვალარული მომენტი ეწოდება. ეს ნამრავლი უნდა ავიღოთ გარკვეული ნიშნით.

მომენტის ერთეულად მიღებულია ერთეული ძალის სიგრძის ერთეულზე ნამრავლი; ასე, მაგალითად, 1 ნიუტონმეტრი.

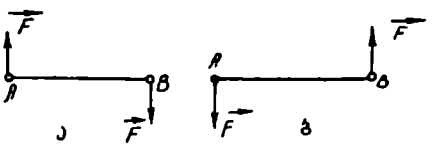
თუ ძალთა წყვილის მდგენელი თითოეული ძალა 100 ნიუტონს უდრის, ხოლო მხარი 2 მეტრია, მაშინ ძალთა წყვილის მომენტი იქნება

$$100 \cdot 2 \text{ ნიუტონმეტრი} = 200 \text{ ნიუტონმეტრს.}$$

თუ ძალთა წყვილის ძალებია $\vec{F}$ და $\vec{F}'$, ხოლო მხარი $h$, მაშინ ძალთა წყვილის მომენტი

$$\boxed{m = \pm F \cdot h.} \qquad (გ)$$

ამ ფორმულაში ნიშანი პირობით აიღება შემდეგი წესის მიხედვით (ნახ. 69).



ნახ. 69

თუ $(\vec{F}, \vec{F}')$ ძალთა წყვილი ცდილობს სხეულის მობრუნებას საათის ისრის ბრუნვის მიმართულებით (ნახ. 69, ა), მაშინ ძალთა წყვილის მომენტს დადებითი ნიშანი აქვს, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი (ნახ. 69, ბ)—უარყოფითი ნიშანი.

## § 6. ძალთა წყვილების ძირითადი თვისებები

წინა პარაგრაფში ნაჩვენები იყო, რომ ძალთა წყვილის მოქმედება მისი მომენტით განისაზღვრება. აქედან გამომდინარეობს:

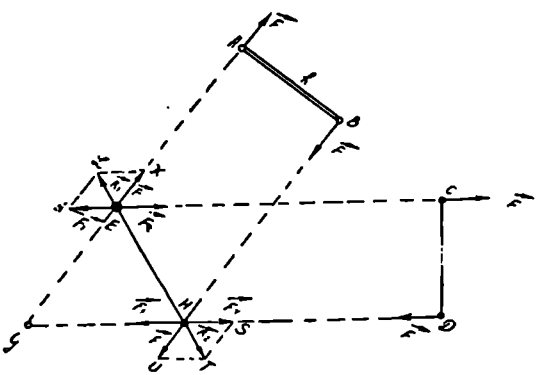
**პირველი თვისება:** სხეულზე მოდებული ძალთა წყვილის მოქმედების შეუცვლელად შეგვიძლია შევცვალოთ მისი მდგენელი ძალები და ძალთა წყვილის მხარი, ისე რომ ძალთა წყვილის მომენტი უცვლელი დარჩეს [იხ. წინა პარაგრაფის (ბ) ფორმულა].

**მეორე თვისება:** სხეულზე მოდებული ძალთა წყვილის მოქმედების შეუცვლელად შეიძლება ძალთა წყვილის გადატანა სიბრტყის ნებისმიერ ადგილას; ამისთვის საჭიროა მათ ჰქონდეთ ერთნაირი მომენტი.

ვთქვათ, სხეულზე მოქმედებს $AB = h$ მხრიანი $(\vec{F}, \vec{F}')$ ძალთა წყვილი (ნახ. 70). ამ ძალთა წყვილის მოქმედების სიბრტყის ნებისმიერ ადგილას ავიღოთ $CD = h$ სიგრძის მონაკვეთი და $C$ და $D$ წერტილებზე გავატაროთ $CD$ მონაკვეთის მართობული წრფეები, რომლებიც $(\vec{F}, \vec{F}')$ ძალთა წყვილის $\vec{F}$ და $\vec{F}'$ ძალების მოქმედების წრფეებს $E$, $P$, $H$, $G$ წერტილებში კვეთენ.

$EPHG$ ოთხკუთხედი რომბია, რადგან, პირობის ძალით, მისი $AB$ და $CD$ სიმაღლეები თანატოლებია.

$(\vec{F}, \vec{F}')$ მოცემული ძალთა წყვილის $\vec{F}$ და $\vec{F}'$ ძალები ამ რომბის $E$ და $H$ წერტილებში გადავიტანოთ და იმავე წერტილებზე მოვდოთ გამაწონასწორებელი ძალები: $\vec{F}$ ძალის ტოლი $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალები $E$ წერტილზე, ხოლო მეორე $\vec{F}$ ძალის ტოლი $\vec{F}_3$ და $\vec{F}_4$ ძალები $H$ წერტილზე.



ნახ. 70

$E$ წერტილზე მოდებული $\vec{F}_1$ და $\vec{F}$ ძალთა სისტემა შევცვალოთ მაჲი $\vec{R}_1$ ტოლქმედით, ხოლო $H$ წერტილზე მოდებული $\vec{F}$ და $\vec{F}_4$ ძალები—მათი $\vec{R}_2$ ტოლქმედით.

$EKLN$ ოთხკუთხედის $EK$ და $EN$ გვერდები ტოლებია, მაშასადამე, $EL$ დიაგონალი $KEN$ კუთხის შუაზე ყოფს. იმავე საფუძველზე $HSTU$ ოთხკუთხედის $HT$ დიაგონალი $SHU$ კუთხეს შუაზე ყოფს. აქედან, $\vec{R}_1$ და $\vec{R}_2$ ძალები ერთ წრფეზე მდებარეობენ, ხოლო ვინაიდან ეს ძალები ტოლი და ურთიერთშებრუნებულია, აჲიტომ მათი უკუვდება შეიძლება, როგორც ურთიერთგამაწონასწორებელი ძალებისა. ამის შემდეგ გვრჩება ურთიერთთანატოლი ორი ძალა $\vec{P}_2$ და $\vec{P}_3$; მათ თუ გავასრიალებთ ფუძის გასწვრივ $C$ და $D$ წერტილებში, $AB$ მხრიანი $(\vec{F}, \vec{F}')$ ძალთა წყვილის ნაცვლად მივიღებთ $CD$ მხრიან ძალთა წყვილს, მასთან, თავისთავად ცხადია, რომ მათი მომენტები ტოლებია. მაშასადამე, $(\vec{F}, \vec{F}')$ ძალთა წყვილის გადატანა შეიძლება სიბრტყის ნებისმიერ ადგილას.

ძალთა წყვილის დამტკიცებული თვისებებიდან ჩანს, რომ ძალთა წყვილის მოქმედება სხეულზე მისი მომენტით განისაზღვრება. ორი ძალთა წყვილი ტოლფასია (ეკვივალენტურია), თუ მათი მომენტები ერთმანეთის ტოლია (იგულისხმება როგორც სიდიდით, ისე ნიშნით).

## § 7. ერთ სიბრტყეზე მდებარე ძალთა წყვილების შეკრება. ძალთა წყვილების წონასწორობა

ვთქვათ, მყარ სხეულზე მოდებულია რამდენიმე ძალთა წყვილი:

$(\vec{F}_1, \vec{F}'_1)$ ძალთა წყვილი $h_1$ მხრით და $m_1$ მომენტით;

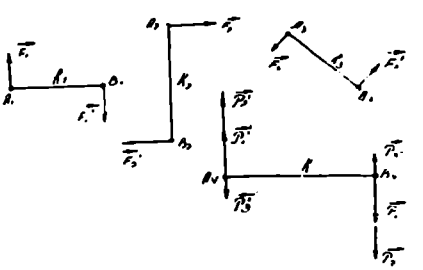
$(\vec{F}_2, \vec{F}'_2)$ ძალთა წყვილი $h_2$ მხრით და $m_2$ მომენტით;

$(\vec{F}_3, \vec{F}'_3)$ ძალთა წყვილი $h_3$ მხრით და $m_3$ მომენტით (ნახ. 71).

ამ ძალთა წყვილების მომენტების სიდიდეა:

$$m_1 = F_1 \cdot h_1; \quad m_2 = F_2 \cdot h_2 \quad \text{და} \quad m_3 = F_3 \cdot h_3.$$

ავიღოთ ნებისმიერი სიგრძის $A_1B_1 = h$ მონაკვეთი და მოცემული ძალთა წყვილები დავიყვანოთ ამ $h$ მხარზე, ე. ი. მოცემული ძალთა წყვილები შევცვალოთ მათი ტოლფასი $(\vec{P}_1, \vec{P}'_1)$, $(\vec{P}_2, \vec{P}'_2)$ და $(\vec{P}_3, \vec{P}'_3)$ ძალთა წყვილებით, რომლებსაც ერთნაირი $h$ მხარი აქვთ (წინა პარაგრაფის პირველი თვისების ძალით), მაშინ



ნახ. 71

$$m_1 = P_1 \cdot h; \quad m_2 = P_2 \cdot h$$

და $$m_3 = P_3 \cdot h;$$

ამრიგად,

$$F_1 \cdot h_1 = P_1 \cdot h; \quad F_2 \cdot h_2 = P_2 \cdot h \quad \text{და} \quad F_3 \cdot h_3 = P_3 \cdot h.$$

რადგან სიბრტყეზე მდებარე ძალთა წყვილის გადატანა შეიძლება ამ სიბრტყის ნებისმიერ ადგილას, ამიტომ მიღებული ძალთა წყვილები გადავაადგილოთ ისე, რომ მათი მხრები დაემთხვეს $A_1B_1$ მონაკვეთს; მაშინ ძალები $A_1B_1$ მონაკვეთისადმი მართობულ ორ პარალელურ წრფეზე მოთავსდება.

$A_1$ წერტილზე მოდებული $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ და $\vec{P}_3$ ძალების შეკრებით მივიღებთ მათ ტოლქმედს, რომლის მოდული

$$R = P_1 + P_2 - P_3.$$

$B_4$ წერტილზე მოდებული $\vec{P}_1'$, $\vec{P}_2'$ და $\vec{P}_3'$ ძალების შეკრებით, მივიღებთ მათ ტოლქმედს, რომლის მოდული

$$R' = P_1' + P_2' - P_3'.$$

ცხადია, $\vec{R}$ და $\vec{R}'$ ძალები ქმნიან ძალთა წყვილს.

ამრიგად, მოცემული $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$, $(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$ და $(\vec{F}_3, \vec{F}_3')$ ძალთა წყვილები დაიყვანება ერთ $(\vec{R}, \vec{R}')$ ძალთა წყვილზე, რომელიც მოცემული ძალთა წყვილების ტოლქმედი ძალთა წყვილია და რომლის მომენტი

$$m = R \cdot h,$$

ანუ

$$\boxed{\begin{aligned} m = m_1 + m_2 + m_3 = P_1 \cdot h + P_2 \cdot h - P_3 \cdot h = \\ = F_1 \cdot h_1 + F_2 \cdot h_2 - F_3 \cdot h_3. \end{aligned}} \qquad (1)$$

ამრიგად, შეიძლება სიბრტყეზე ნებისმიერად განლაგებული ძალთა წყვილების შეკრება. მათი შეკრების დროს მიიღება ერთი ტოლქმედი ძალთა წყვილი, რომლის მომენტი შესაკრები ძალთა წყვილების მომენტების ჯამს უდრის.

კერძო შემთხვევაში, თუ მოცემულია ორი ძალთა წყვილი, რომელთაც სიდიდით ტოლი, მაგრამ ნიშნით ურთიერთსაწინააღმდეგო მომენტები აქვთ, ასეთი ძალთა წყვილების ტოლქმედის მომენტი ნულს უდრის; ორი ასეთი ძალთა წყვილი ურთიერთგამაწონასწორებელი ძალთა წყვილია.

აქედან დასკვნა: ძალთა წყვილები წონასწორობაშია, თუ მათი მომენტების ალგებრული ჯამი ნულს უდრის.

$$\boxed{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n = 0.} \qquad (2)$$

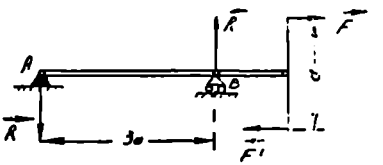
ეს პირობა ძალთა წყვილების წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა.

### მაგალითები

**1.** ორ საყრდენზე მდებარე ერთკონსოლიან კოჭზე მოქმედებს $(\vec{F}, \vec{F}')$ ძალთა წყვილი, რომლის მომენტია $m = F \cdot h$ (ნახ. 72). განსაზღვრეთ საყრდენთა (ბმების) რეაქციები.

ამოხსნა

სხეულზე მოქმედი ძალთა წყვილის გაწონასწორება ისევ ძალთა წყვილით შეიძლება. რეაქციულ ძალთა წყვილს საყრდენთა რეაქციები წარმოქმნიან. რადგან მოქმედი ძალთა წყვილი ცდილობს კოჭის ბრუნვას საათის ისრის მიმართულებით, ამიტომ მისი გამაწონასწორებელი ძალთა წყვილი ბრუნვას საწინააღმდეგო მიმართულებით უნდა იწვევდეს. სახსრულად მოძრავი $B$ საყრდენის რეაქცია ვერტიკალურად არის მიმართული. თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ საყრდენთა რეაქციები უნდა ადგენდეს ძალთა წყვილს საათის ისრის საწინააღმდეგო ბრუნვის მომენტით, $A$ საყრდენის რეაქციაც ვერტიკალზე უნდა იყოს მიმართული, მაგრამ გეზით ქვემოთ, მაშინ როდესაც $B$ საყრდენის რეაქცია მიმართულია ზემოთ.



ნახ. 72

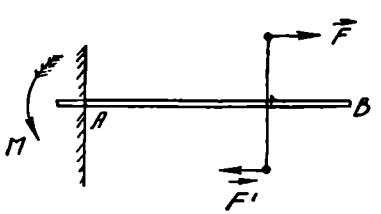
საყრდენთა რეაქციები თუ იქნება $\vec{R}$ და $\vec{R}'$, მაშინ წონასწორობის (2) განტოლების ძალით გვექნება

$$R \cdot 3a - F \cdot a = 0,$$

საიდანაც

$$R = F \cdot \frac{a}{3a} = \frac{1}{3} F.$$

2. კედელში ჩაკეთებულ კოჭზე მოდებულია $m$ მომენტიანი ($\vec{F}$, $\vec{F}'$) ძალთა წყვილი (ნახ. 72 ა). განსაზღვრეთ ჩაკეთების რეაქციები. კოჭის საკუთარი წონა უგულებელყოფილია.



ნახ. 72, ა

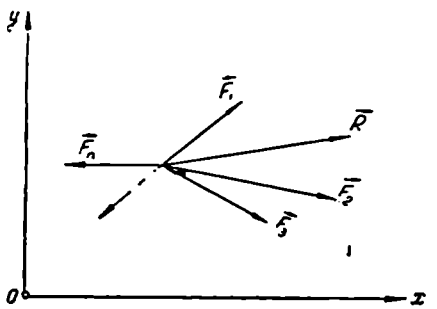
ამოხსნა

კოჭის ჩაკეთებული ბოლო ხისტი საყრდენის სახისაა, იგი ხელს უშლის კოჭის ამ ბოლოს არა მარტო გადაადგილებას ძალების მოქმედების სიბრტყეში, არამედ ბრუნვასაც ამავე სიბრტყეში; ამიტომ, წარმოდგენით მოვაშოროთ ჩაკეთება და იგი შევცვალოთ რეაქციის ძალით (ნახაზზე ნაჩვენები არ არის), რომელიც ხელს უშლის კოჭის ბოლოს გადაადგილებას, და რეაქტიული $m$ მომენტით, რომელიც ხელს უშლის კოჭის ბოლოს მობრუნებას.

ჩვენს შემთხვევაში კოჭზე მოდებულია $m$-მომენტიანი $(\vec{F}, \vec{F}')$ ძალთა წყვილი, რომელიც ცდილობს მოაბრუნოს კოჭი საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით, რასაც ხელს უშლის ჩაკეთების რეაქტიული $M$ მომენტი. კოჭზე მოდებული ორივე მომენტი ურთიერთწონასწორდება. წონასწორობის განტოლებიდან გამომდინარეობს $m-M=0$, საიდანაც რეაქტიული მომენტი $M=m$.

## § 8. ვარინიონის თეორემა

**ტოლქმედი ძალის სკალარული მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ უდრის შესაკრები ძალების სკალარული მომენტების ჯამს იმავე წერტილის მიმართ.**




ნახ. 73

განსახილავ სიბრტყეზე ავიღოთ $xOy$ ორღერძი (ნახ. 73), რომლის სათავეც მომენტთა $O$ ცენტრში მოვათავსოთ.

მოცემული ძალებია:

$\vec{F}_1(X_1, Y_1)$, $\vec{F}_2(X_2, Y_2)$,

$\vec{F}_3(X_3, Y_3)$, ..., $\vec{F}_n(X_n, Y_n)$.

$A$ წერტილის კოორდინატებია $(x, y)$:

$$\text{მომ}_0\ \vec{F}_1 = xY_1 - yX_1;$$
$$\text{მომ}_0\ \vec{F}_2 = xY_2 - yX_2;$$
$$\text{მომ}_0\ \vec{F}_3 = xY_3 - yX_3;$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\text{მომ}_0\ \vec{F}_n = xY_n - yX_n.$$

მათი შეკრებით მივიღებთ

$$\text{მომ}_0\ \vec{F}_1 + \text{მომ}_0\ \vec{F}_2 + \text{მომ}_0\ \vec{F}_3 + \ldots + \text{მომ}_0\ \vec{F}_n =$$
$$= x(Y_1+Y_2+Y_3+\ldots+Y_n) - y(X_1+X_2+X_3+$$
$$+\ldots+X_n) = xY - yX,$$

სადაც

$$X = X_1+X_2+X_3+\ldots+X_n;$$
$$Y = Y_1+Y_2+Y_3+\ldots+Y_n.$$

მაგრამ $X$ და $Y$ არის $\overline{R}$ ტოლქმედის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე. მაშასადამე,

$$\text{მომ}_0\ \overline{R} = xY - yX.$$

ამრიგად, მივიღეთ

$$\text{მომ}_0\ \overline{R} = \text{მომ}_0\ \overline{F}_1 + \text{მომ}_0\ \overline{F}_2 + \ldots + \text{მომ}_0\ \overline{F}_n.$$

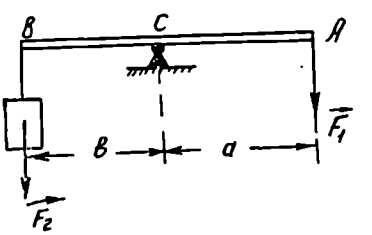
ეს კი ამტკიცებს ვარინიონის თეორემას.

## § 9. ბერკეტის თეორია

ბერკეტი ეწოდება მყარ სხეულს, რომელსაც შეუძლია ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო და რომელზედაც ამ ღერძისადმი მართობული ძალები მოქმედებენ.

თუ ნახაზის სიბრტყეს ძალთა მოქმედების სიბრტყედ მივიღებთ, მაშინ ამ სიბრტყის ღერძთან გადაკვეთის წერტილი საყრდენი წერტილი იქნება.

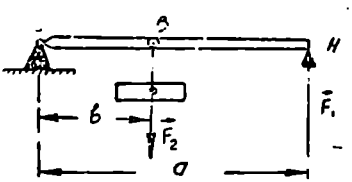
როდესაც $\overline{F}_1$ და $\overline{F}_2$ ძალები (ნახ. 74) $C$ საყრდენის სხვადასხვა მხარეს არის მოდებული $A$ და $B$ წერტილებზე, გვაქვს პირველი გვარის ბერკეტი.




ნახ. 74

თუკი $\overline{F}_1$ და $\overline{F}_2$ ძალები (ნახ. 75) $C$ საყრდენის ერთ მხარეზეა მოდებული $A$ და $C$ წერტილებზე, მაშინ მეორე გვარის ბერკეტი გვექნება.

ახლა ვნახოთ, თუ როგორ პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს $\overline{F}_1$ და $\overline{F}_2$ ძალები იმისათვის, რომ ბერკეტი წონასწორობაში დარჩეს.




ნახ. 75

ვთქვათ, მოდებულ ძალთა ტოლქმედია $\overline{R}$.

უკუვაგდოთ ბმა (უძრავი წერტილი) და იგი შევცვალოთ $\overline{N}$ რეაქციის ძალით. ახლა ბერკეტი წონასწორობაში უნდა იყოს ორი ძალის ($\overline{R}$ და $\overline{N}$) ზემოქმედებით. რადგან $\overline{N}$ რეაქციის ძალა $C$ წერტილზეა მოდებული, ამიტომ წონასწორობისათვის აუცილებელია, რომ ტოლქმედი $\overline{R}$ ძალაც ამ $C$ წერტილზე გადიოდეს. მაგრამ ამ შემთხვევაში

$$m_0(\overline{R}) = 0.$$

ტოლქმედის მომენტის თეორემის მიხედვით

$$m_0(\vec{R}) = m_0(\vec{F}_1) + m_0(\vec{F}_2);$$

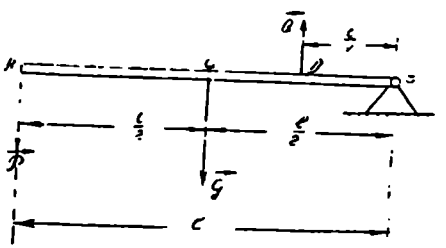
მაშასადამე, ბერკეტზე მოდებული ძალების წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ძალთა მომენტების ალგებრული ჯამი საყრდენი წერტილის მიმართ უდრიდეს ნულს

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} m_0(\vec{F}_i) = 0.} \qquad (1)$$

### მაგალითები

**1.** $AB$ ბერკეტს შეუძლია ბრუნვა თავისი $B$ ბოლოს ეარშემო (ნახ. 76).

ბერკეტის $G$ ნიუტონი წონა მოდებულია მის შუა $C$ წერტილზე; გარდა ამისა, $B$ საყრდენიდან ბერკეტის სიგრძის $\frac{1}{4}$ მანძილზე მოდებულია $\vec{G}$ წონაზე 2,5-ჯერ მეტი სიდიდის $\vec{Q}$ ძალა, რომელიც მიმართულია ქვემოდან ზემოთ. იპოვეთ ის $\vec{P}$ ძალა, რომელიც მოდებული იქნება ბერკეტის $A$ ბოლოზე და წონასწორობაში მოიყვანს ბერკეტს. ბერკეტის სიგრძეა $l$.



ნახ. 76

### ამოხსნა

(1) ფორმულის ძალით შევადგენთ მომენტთა ჯამის განტოლებას $B$ წერტილის მიმართ, მივიღებთ:

$$Q \cdot \frac{l}{4} - G \cdot \frac{l}{2} - P \cdot l = 0;$$

აქედან

$$R = Q \cdot \frac{l}{4} - G \cdot \frac{l}{2};$$

რადგან

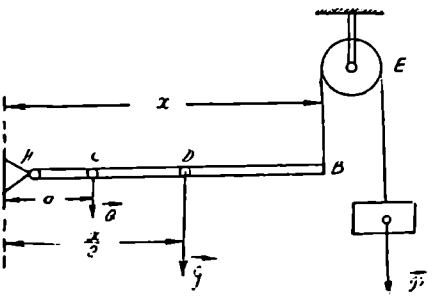
$$Q = 2{,}5\,G,$$

ამიტომ

$$P = 2{,}5\,G\cdot\frac{l}{4} - G\cdot\frac{l}{2} = \frac{1}{8}\,G.$$

**2.** $G=100$ ნ წონის ჰორიზონტალურ $AB$ ღეროს შეუძლია ბრუნვა უძრავი $A$ წერტილის გარშემო (ნახ. 77). ღეროს $B$ ბოლოზე მიბმულია $E$ ბლოკზე გადაკიდებული თოკი, რომლის ბოლოზე დაკიდებულია ტვირთი $P=150$ ნ.

$A$ ბოლოდან $a = 20$ დეციმეტრ მანძილზე დაკიდებულია $Q = 1000$ ნ ტვირთი. რა $x$ სიგრძის უნდა იყოს $AB$ ღერო, თუ იგი წონასწორობაში იმყოფება?



ნახ. 77

ამოხსნა

$AB$ ღერო წარმოადგენს ბერკეტს, რომელსაც შეუძლია ბრუნვა $A$ სახსრის გარშემო. $B$ ბოლოზე ეს ბერკეტი შეკავებულია თოკით, რომლის დაჭიმვის $\vec{P}'$ ძალა $\vec{P}$ ტვირთის ტოლია. $\vec{Q}$ ტვირთი მოდებულია $C$ წერტილზე და მიმართულია ვერტიკალურად ქვემოთ.

$AB$ ღეროს $\vec{G}$ წონა ღეროს შუა $D$ წერტილზეა მოდებული.

გამოვიყენოთ ბერკეტის წონასწორობის პირობა: ყველა ძალის მომენტების ალგებრული ჯამი ბრუნვის ცენტრის მიმართ ნულის ტოლია და რადგან ძალთა მომენტებია:

$$m_A(\vec{Q}) = Q\cdot a;$$

$$m_A(\vec{G}) = G\cdot\frac{x}{2};$$

$$m_A(\vec{P}) = -P'\cdot x = -P\cdot x,$$

ამიტომ

$$Q\cdot a + G\cdot\frac{x}{2} - P\cdot x = 0.$$

მნიშვნელობათა ჩასმით მივიღებთ

$$1000\cdot 20 + 100\cdot\frac{x}{2} - 150\cdot x = 0;$$

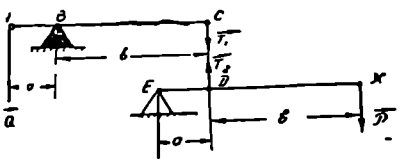
აქედან

$$2000+50\,x-150\,x=0$$

საიდანაც

$$x=\frac{20000}{100}=200 \text{ დეციმეტრს.}$$

3. 78-ე ნახაზზე წარმოდგენილია სხვადასხვამხრიანი ორი $ABC$ და $DEK$ ბერკეტის სისტემა. ეს ბერკეტები ერთმანეთთან შეერთებულია $CD$ წევათი. $B$ და $E$ წერტილები უძრავ საყრდენებს წარმოადგენენ.



ნახ. 78

როგორი $\vec{P}$ ძალა უნდა მოვდოთ ამ სისტემის $K$ წერტილში, რომ ავწიოთ $A$ წერტილში მოდებული $Q=1000$ ნ ტვირთი, თუ $a=50$ სმ და $b=200$ სმ?

ამოხსნა

ორმაგი ბერკეტების სისტემა იმ შემთხვევაში გამოიყენება, როდესაც დიდი ძალების გაწონასწორება გვიხდება შედარებით მცირე ძალებით.

განვიხილოთ $ABC$ ბერკეტის წონასწორობა.

ამ ბერკეტზე მოდებულია ტვირთის $\vec{Q}$ წონა და წევის $\vec{T_1}$ რეაქციის ძალა.

შევადგინოთ წონასწორობის განტოლება

$$m_B(\vec{Q})+m_B(\vec{T}_1)=0,$$

ანუ

$$-Q\cdot a+T_1\cdot b=0 \qquad (ა)$$

$CD$ წევის საშუალებით ხორციელდება ურთიერთმოქმედება ბერკეტებს შორის.

ურთიერთმოქმედების პრინციპით $EK$ ბერკეტზე წევის $\vec{T_2}$ რეაქციის ძალა $\vec{T}_1$ ძალის ტოლი და პირდაპირშებრუნებულია, ე. ი.

$$\vec{T}_2=-\vec{T}_1.$$

ახლა განვიხილოთ $EDK$ ბერკეტის წონასწორობა. მასზე მოდებულია $CD$ წევის $\vec{T_2}$ რეაქციის ძალა და $\vec{P}$ ძალა. ამ ბერკეტის წონასწორობის პირობაა

$$m_E(\overline{T}_2) + m_E(\overline{P}) = 0,$$

ანუ

$$-T_2 \cdot a + P(a+b) = 0. \qquad (ბ)$$

(ა) განტოლებიდან გვაქვს:

$$T_1 = Q \cdot \frac{a}{b} = 1000 \cdot \frac{50}{200} = 250 \text{ ნიუტონს.}$$

რადგან $T_2 = T_1$, ამიტომ (ბ) განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

$$P = T_2 \cdot \frac{a}{a+b} = 250 \cdot \frac{50}{250} = 50 \text{ ნიუტონს.}$$

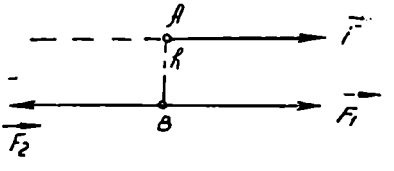
## IV თ ა ვ ი

# ნებისმიერად განლაგებულ ძალთა ბრტყელი სისტემა

### § 1. ძალის დაყვანა მოცემულ წერტილზე

ახლა განვიხილოთ ძალის თავისთავის პარალელურად გადატანის შემთხვევა.

ვთქვათ, მყარი სხეულის $A$ წერტილზე მოდებულია $\overline{F}$ ძალა (ნახ. 79). ძალის მდებარეობის სიბრტყეში ავიღოთ ნებისმიერი $B$ წერტილი და ამ უკანასკნელზე $\overline{F}$ ძალის პარალელურად გატარებულ წრფეზე მოვდოთ $\overline{F}$ ძალის მოდულის ტოლი ურთიერთშებრუნებული ორი ძალა— $\overline{F}_1$ და $\overline{F}_2$. რადგან $\overline{F}_1$ და $\overline{F}_2$ ძალები ურთიერთ წონასწორდება, ამიტომ მიღებული სამი $\overline{F}$, $\overline{F}_1$ და $\overline{F}_2$ ძალის სისტემა მოცემული $\overline{F}$ ძალის ტოლფასია.



ნახ. 79

ახლა განვიხილოთ $\overline{F}_1$ ძალა, როგორც $B$ წერტილში თავისთავის პარალელურად გადატანილი ძალა; მაშინ სამი ძალიდან დარჩენილი $\overline{F}$ და $\overline{F}_2$ ძალები $(\overline{F}, \overline{F}_2)$ ძალთა წყვილს შექმნის.

მაშასადამე, მოცემული ძალის გადატანა შეიძლება თავისთავის პარალელურად სხეულის ნებისმიერ წერტილში საძიებელი ძალთა წყვილის დამატებით.

$A$ წერტილზე მოდებული $\overline{F}$ ძალის შეცვლას $B$ წერტილზე მოდებული $\overline{F}_1$ ძალით $(\overline{F}_1 = \overline{F})$ და $(\overline{F}, \overline{F}_2)$ ძალთა წყვილით ძალის მოცე-

მულ $B$ წერტილზე დაყვანა ეწოდება. $B$ წერტილს დაყვანის ცენტრი ჰქვია.

($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$) ძალთა წყვილს დამატებული ძალთა წყვილი დავარქვათ.

ამრიგად, ძალის გადატანა თავისთავის პარალელურად შეიძლებანებისმიერად შერჩეულ დადაყვანის ცენტრად წოდებულ წერტილში ძალთა წყვილის დამატებით, რომლის მომენტი მოცემული ძალის მომენტს უდრის დაყვანის ცენტრის მიმართ.

შევნიშნოთ, რომ დამატებული ძალთა ($\vec{F}$, $\vec{F}_2$) წყვილის მომენტი უდრის მოცემული $\vec{F}$ ძალის მომენტს დაყვანის $B$ ცენტრის მიმართ. პარალელურ ძალებს შორის მანძილი აღვნიშნოთ $h$-ით; ეს მანძილი ძალთა წყვილის მხარია; მეორე მხრივ $B$ წერტილიდან $\vec{F}$ ძალის ფუძეზე დაშვებული $h$ სიკრძის მართობი $\vec{F}$ ძალის მხარი იქნება. მაშასადამე, ($\vec{F}$, $\vec{F}_2$) ძალთა წყვილის მომენტი უდრის $\vec{F}$ ძალის მომენტს $B$ წერტილის მიმართ

$$\boxed{m(\vec{F},\ \vec{F}_2) = m_B(\vec{F}).} \tag{ა}$$

რადგან

$$m_B(\vec{F}) = F \cdot h,$$

ამიტომ

$$m(\vec{F},\ \vec{F}_2) = m_B(\vec{F}) = F \cdot h; \tag{ბ}$$

აქედან ძალთა წყვილის მხარი:

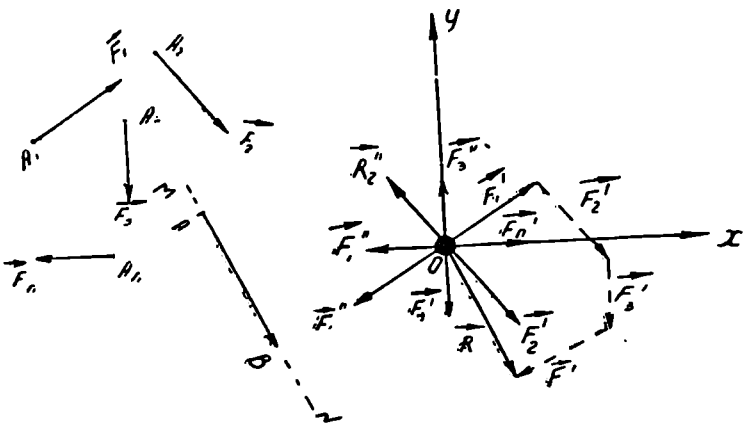
$$h = \frac{m(\vec{F}, \vec{F}_2)}{F}. \tag{გ}$$

## § 2. სიბრტყეზე ნებისმიერად განლაგებულ ძალთა სისტემის დაყვანა მოცემულ წერტილზე

თუ ერთ სიბრტყეზე მდებარე ძალთა სისტემის ძალები ერთ წერტილში არ იკვეთებიან და თანაპარალელურებიც არ არიან, ძალთა ასეთ სისტემას ძალთა ნებისმიერი ბრტყელი სისტემა ეწოდება.

ვთქვათ, სიბრტყის $A_1$, $A_2$, $A_3$, ..., $A_n$ წერტილებზე, სათანადოდ, მოდებულია ნებისმიერი ძალები $F_1$, $F_2$, $F_3$, ..., $F_n$ (ნახ. 80). ამ სიბრტყეში ავიღოთ ნებისმიერი $O$ წერტილი და ამ წერტილზე დავიყვანოთ მოცემული ძალები. დაყვანის შედეგად მივიღებთ $O$ წერტილზე

დაყვანილ $\vec{F}_1'$, $\vec{F}_2'$, $\vec{F}_3'$, ... , $\vec{F}_n'$ ძალებსა და $(\vec{F}_1, \vec{F}_1'')$, $(\vec{F}_2, \vec{F}_2'')$, $(\vec{F}_3, \vec{F}_3'')$, ... , $(\vec{F}_n, \vec{F}_n'')$ დამატებულ ძალთა წყვილებს, რომელთა მომენტები მოცემული $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ..., $\vec{F}_n$ ძალების მომენტებს უდრის დაყვანის $O$ ცენტრის მიმართ.




ნახ. 80

ერთ $O$ წერტილზე მოდებული $\vec{F}_1'$, $\vec{F}_2'$, $\vec{F}_3'$, ... , $\vec{F}_n'$ ძალები შეგვიძლია შევკრიბოთ ძალთა მრავალკუთხედის წესით და, შაშასადამე, შევცვალოთ მათი ტოლფასი ერთი $\vec{R}$ ძალით, რომელიც დაყვანის $O$ ცენტრზეა მოდებული და უდრის ამ ძალების გეომეტრიულ ჯამს

$$\vec{R}=\vec{F}_1'+\vec{F}_2'+\vec{F}_3'+ \dots +\vec{F}_n',$$

ან, რადგან

$$\vec{F}_1'=\vec{F}_1,\ \vec{F}_2'=\vec{F}_2,\ \vec{F}_3'=\vec{F}_3,\ \dots ,\ \vec{F}_n'=\vec{F}_n,$$

გვექნება

$$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n \qquad (ა)$$

ან, საზოგადოდ,

$$\boxed{\vec{R}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i} \qquad (1)$$

(სადაც $i=1, 2, 3, \dots , n$),

ე. ი. მოცემული ძალთა სისტემის გეომეტრიული

ჯამის ტოლ ვექტორს ამ სისტემის მთავარი ანუ ჯამვექტორი (ნაკრები ვექტორი) ეწოდება.

ახლა განვიხილოთ ყველა დამატებული ძალთა წყვილები:

$$(\vec{F}_1,\ \vec{F}_1''),\ (\vec{F}_2,\ \vec{F}_2''),\ (\vec{F}_3,\ \vec{F}_3''),\ \ldots,\ (\vec{F}_n,\ \vec{F}_n'').$$

რადგან ეს ძალთა წყვილები ერთ სიბრტყეში მდებარეობენ, ამ ძალთა წყვილების შეკრების თეორემის საფუძველზე შეგვიძლია მათი ტოლქმედი ძალთა წყვილით შეცვლა, რომლის მომენტის ალგებრული სიდიდეა

$$M_0 = m(\vec{F}_1,\ \vec{F}_1'') + m(\vec{F}_2,\ \vec{F}_2'') + m(\vec{F}_3,\ \vec{F}_3'') + \ldots + m(\vec{F}_n,\ \vec{F}_n'') =$$

$$= m_0(\vec{F}_1) + m_0(\vec{F}_2) + m_0(\vec{F}_3) + \ldots + m_0(\vec{F}_n), \qquad (ბ)$$

ან, საზოგადოდ

$$\boxed{M_0 = \sum_{i=1}^{n} m_0(\vec{F}_i),} \qquad (2)$$

ე. ი. სიბრტყეზე ნებისმიერად განლაგებულ ძალთა მომენტების ალგებრულ ჯამს დაყვანის ცენტრის მიმართ ეწოდება ძალთა სისტემის მთავარი მომენტი ანუ ჯამმომენტი (ნაკრები მომენტი).

ხაზგასმით უნდა აღინიშნოს, რომ $O_z$წერტილზე (დაყვანის ცენტრზე) მოდებული $\vec{R}$ მთავარი ვექტორი მოცემულ ძალთა ტოლქმედისაგან განსხვავდება იმით, რომ ზოგად შემთხვევაში მისი ფუძე არ ემთხვევა ტოლქმედის ფუძეს. დავუშვათ, რომ მოცემული $\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ \vec{F}_3,\ \ldots\ \ldots,\ \vec{F}_n$ ძალთა ტოლქმედი პირობით ძევს $MN$ წრფეზე და უდრის $\vec{AB}$ ვექტორს; ცხადია, მთავარ ვექტორს იგივე ფუძე ექნებოდა მხოლოდ იმ შემთხვევაში, დაყვანის $O$ ცენტრი ამ ფუძეზე რომ მდებარეობდეს. ამ შემთხვევაში $\vec{R}$ მთავარი ვექტორი $\vec{AB}$ ტოლქმედს გამოსახავდა. დაყვანის ცენტრი ნებისმიერად შევარჩიეთ სიბრტყის $O$ წერტილში. დაყვანის ცენტრად სიბრტყის რაიმე სხვა წერტილი რომ შეგვერჩია, მაშინ მთავარი ვექტორის აბსოლუტური სიდიდე და მიმართულება იგივე იქნებოდა, რაც გვქონდა დაყვანის $O$ ცენტრის შემთხვევაში, რადგან იგი ისევ ასეთივე ძალთა სისტემის გეომეტრიული ჯამი იქნებოდა, მაგრამ ახალი დაყვანის ცენტრის მიმართ.

ამრიგად, მთავარი ვექტორის მნიშვნელობა დამოკიდებული არ არის დაყვანის ცენტრის შერჩევაზე.

მთავარი მომენტის (რომელსაც ჯამმომენტი ან ნაკრები მომენტი ეწოდება) მნიშვნელობა დამოკიდებულია დაყვანის ცენტრის მდებარეობაზე.

ამიტომ, როდესაც საუბარი გვაქვს მოცემული სისტემის მთავარ მომენტზე, უთუოდ უნდა აღვნიშნოთ, თუ რომელი დაყვანის ცენტრის მიმართ აიღება ეს მომენტი.

მთავარი $\vec{R}$ ვექტორის მოდულის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ დაგეგმილების მეთოდით.

დაყვანის $O$ ცენტრზე გავატაროთ $Ox$ და $Oy$ კოორდინატთა ღერძები (ნახ. 80). ამ ღერძზე დავაგეგმილოთ $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ... , $\vec{F}_n$ ძალები. ძალთა ვეგმილები $Ox$ ღერძზე აღვნიშნოთ სიმბოლოებით: $X_1$, $X_2$, $X_3$, ..., $X_n$, ხოლო $Oy$ ღერძზე: $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$, ..., $Y_n$; მაშინ, თუ მთავარი ვექტორის გეგმილები სათანადო ღერძებზე იქნება $X$ და $Y$, გვექნება:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad (\text{ა})$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots + Y_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i. \qquad (\text{ბ})$$

მთავარი ვექტორის (რომელსაც ჯამვექტორს ანუ ნაკრებ ვექტორს უწოდებენ) მოდული

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2} \qquad (\text{გ})$$

(აქ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$).

მთავარი ვექტორის მიმართულება განისაზღვრება მთავარ ვექტორსა და კოორდინატთა ღერძებს შორის კუთხის კოსინუსებით:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{X}{R}, \\ \cos\beta &= \frac{Y}{R}, \end{aligned}\right\} \qquad (\text{დ})$$

ძალთა ბრტყელი სისტემის ძალისა და ძალთა წყვილისაგან შემდგარი ტოლფასი სისტემის შეცვლისას გვხვდება სხვადასხვა ხერხი შემთხვევები; განვიხილოთ ისინი.

## § 3. დაყვანის კერძო შემთხვევები

ა) მთავარი ვექტორი ნულისაგან განსხვავებულია, ხოლო მთავარი მომენტი ნულის ტოლია, ე. ი.

$$\overline{R} \neq 0; \quad M_0 = 0. \tag{ა}$$

ამ შემთხვევაში $A_i$ წერტილებზე მოდებული $\overline{F}_i$ ძალები ერთ ძალაზე—ტოლქმედზე დაიყვანება, თან ეს ტოლქმედი დაყვანის ცენტრზეა მოდებული, რადგან შემაჯამებელი ძალთა წყვილი არ არსებობს (მისი მომენტი ნულს უდრის).

ბ) მთავარი ვექტორი ნულს უდრის, ხოლო მთავარი მომენტი ნულისაგან განსხვავებულია, ე. ი.

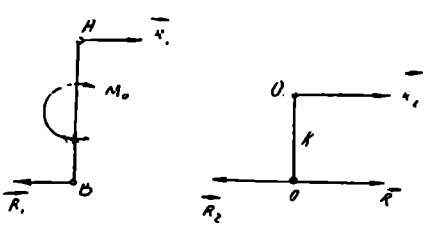
$$\overline{R} = 0 \quad \text{და} \quad M_0 \neq 0.$$

ამ შემთხვევაში მოცემული $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, ... , $\overline{F}_n$ ძალთა სისტემა ძალთა წყვილზე დაიყვანება. განსახილველ შემთხვევაში მთავარი მომენტი დამოკიდებული არ არის დაყვანის ცენტრის შერჩევაზე.

გ) მთავარი ვექტორი და მთავარი მომენტი ნულისაგან განსხვავებულია, ე. ი.

$$\overline{R} \neq 0 \quad \text{და} \quad M_0 \neq 0.$$

ამ შემთხვევაში $A_i$ წერტილებზე მოდებული $\overline{F}_i$ ძალები $O$ დაყვანის ცენტრზე მოდებულ $\overline{R}$ მთავარ ვექტორზე და $M_0$ მთავარ მომენტზე დაიყვანება. ვთქვათ, $M_0$ მომენტი დაყვანილი ($\overline{R}_1$, $\overline{R}_1$) ძალთა წყვილის მომენტია.



ნახ. 81

ვთქვათ, $M_0 > 0$ (ნახ. 81). ავიღოთ ($\overline{R}_1$, $\overline{R}'_1$) ძალთა წყვილი $M_0$ მომენტით და შევცვალოთ ისეთი ტოლფასი ძალთა წყვილით, რომლის ძალები ადგენენ ($\overline{R}_2$, $\overline{R}'_2$) ძალთა წყვილს და რომლის მომენტი მოდულით $\overline{R}$ ძალის მომენტს უდრის. მაშინ ახალი ტოლფასი ძალთა წყვილის მომენტი

$$M_0 = R_2 \cdot h = R \cdot h,$$

სადაც $h$ შეცვლილი ძალთა წყვილის მხარია.

ვისარგებლოთ ძალთა წყვილის გადატანის თვისებით და იგი გადავაადგილოთ ისე, რომ მისი ერთი ძალა მოდებული იყოს $O$ წერტილზე და $\overline{R}$ ძალის პირდაპირშებრუნებულად იყოს მიმართული.

ადვილი შესამჩნევია, რომ მოცემული ძალთა ბრტყელი სისტემა $\vec{R}$ ძალისა და $(\vec{R}_1, \vec{R}_1')$ ძალთა წყვილის ტოლფასია. მაგრამ $\vec{R}_2$ და $\vec{R}$ ძალები წონასწორდებიან და გვრჩება $O_1$ წერტილზე მოდებული $\vec{R}_2'$ ძალა, რომელიც მოცემული ძალთა სისტემის ტოლქმედია.

მაშასადამე, თუ მოცემული ძალთა ბრტყელი სისტემის მთავარი ვექტორი და მთავარი მომენტი განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ ეს სისტემა $\vec{R}$ მთავარი ვექტორის ტოლ $\vec{R}_2'$ ტოლქმედზე დაიყვანება. ტოლქმედის მოქმედების წრფე გადის $O_1$ წერტილზე, რომელიც დაყვანის $O$ ცენტრიდან დაშორებულია $h = \dfrac{M_0}{R_2'}$ მანძილით, მასთან გადაზომილია ისე, რომ $\vec{R}_2'$ ტოლქმედის $O$ წერტილის (დაყვანის ცენტრის) მიმართ მომენტის ნიშანი $M_0$ მთავარი მომენტის ნიშანს ემთხვევა. განხილულ მოქმედებას ძალთა სისტემის უმარტივეს სახეზე დაყვანა ეწოდება.

ზემოაღნიშნულის გამოყენებით შეგვიძლია დავამტკიცოთ **ვარინიონის თეორემა ძალთა ბრტყელი სისტემის ძალების ნებისმიერად განლაგების შემთხვევისათვის.** მართლაც, ტოლქმედის მომენტი დაყვანის $O$ ცენტრის მიმართ მთავარი მომენტის ტოლია

$$m_0(\vec{R}_2') = R_2' \cdot h = R_2' \cdot \frac{M_0}{R_2'} = M_0.$$

მაგრამ მთავარი მომენტი

$$M_0 = \sum_{i=1}^{n} m_0(\vec{F}_i);$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\boxed{m_0(\vec{R}_2') = \sum_{i=1}^{n} m_0(\vec{F}_i),}$$

ე. ი. ბრტყელ ძალთა სისტემის ტოლქმედის მომენტი ამ ძალთა მდებარეობის სიბრტყის ნებისმიერი დაყვანის ცენტრის მიმართ ამ სისტემის ძალების მომენტების ალგებრული ჯამის ტოლია იმავე დაყვანის ცენტრის მიმართ.

## მაგალითები

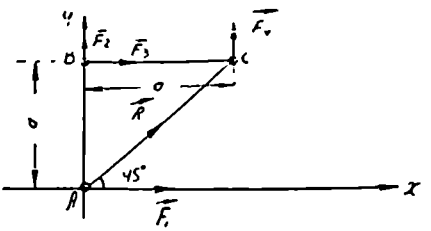
**1.** ერთნაირი $a=10$ სმ კათეტებიანი მართკუთხა სამკუთხედის ფორმის მქონე მყარ სხეულზე ამ სამკუთხედის $A$, $B$ და $C$ წვეროებში სათანადოდ მოდებულია ძალები

$$F_1=F_2=F_3=F_4=1000 \text{ ნ}$$

(ნახ. 82). ძალთა ეს სისტემა დაიყვანეთ $A$ წერტილზე.

### ამოხსნა

დაყვანის $A$ ცენტრზე გავატაროთ $Ax$ და $Ay$ კოორდინატთა ღერძები და მოცემული ძალები დავაგეგმილოთ ამ ღერძებზე. შემდეგ ავიღოთ ამ ძალთა მომენტები დაყვანის $A$ ცენტრის მიმართ.



ნახ. 82

$$X=F_1+F_3=1000+1000=2000 \text{ ნ};$$

$$Y=F_2+F_4=1000+1000=2000 \text{ ნ}.$$

მთავარი ვექტორის მოდული იქნება

$$R=\sqrt{X^2+Y^2}=\sqrt{2000^2+2000^2}=2000\sqrt{2}=$$
$$=2000\cdot 1{,}41=2820 \text{ ნიუტონს}.$$

მთავარი ვექტორის მიმართულებაა

$$\cos\alpha=\cos(\widehat{\vec{R},Ax})=\frac{X}{R}=\frac{2000}{2820}=\frac{2000}{2000\sqrt{2}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos 45^\circ,$$

ე. ი. $\alpha=45^\circ$.

მთავარი მომენტი $M_A$ დაყვანის $A$ ცენტრის მიმართ

$$M_A=+F_3\cdot a-F_4\cdot a=+1000\cdot 10-1000\cdot 10=0.$$

რადგან $\vec{R}\neq 0$ და $M_A=0$, ამიტომ მოცემული ძალთა ბრტყელი სისტემა დაიყვანება ტოლქმედზე, რომელიც $ABC$ მართკუთხა სამკუთხედის $AC$ ჰიპოტენუზას მიყვება და რომლის სიდიდეა 2820 ნიუტონი.

**2.** $ABCD$ მართკუთხედის ფორმის მყარი სხეულის გვერდების გასწვრივ მოდებულია ტოლი სიდიდის ძალები (ნახ. 83)

$$F_1=F_2=F_3=F_4=1000 \text{ ნიუტონს}.$$

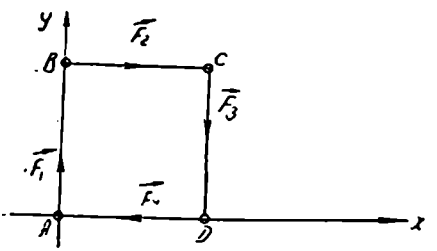
მართკუთხედის გვერდებია

$$AB=2AD=0{,}2 \text{ მ}.$$

ძალთა ეს სისტემა დაიყვანეთ $A$ წერტილზე.

ამოხსნა

დაყვანის $A$ ცენტრზე გავატაროთ $Ax$ და $Ay$ კოორდინატთა ღერძები; ამ ღერძებზე დავაგეგმილოთ მოცემული ძალები და განვსაზღვროთ მათი მომენტები $A$ წერტილის მიმართ.



ნახ. 83

$$X=-F_4+F_2=-1000+1000=0,$$

$$Y=F_1-F_3=1000-1000=0;$$

მთავარი ვექტორის მოდული

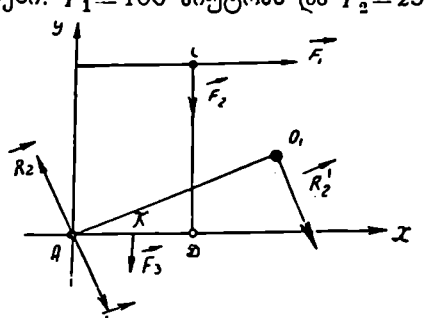
$$R=\sqrt{X^2+Y^2}=0.$$

მთავარი $M_A$ მომენტი დაყვანის $A$ ცენტრის მიმართ

$$M_A=+F_2\cdot AB+F_3\cdot AD=+$$
$$+1000\cdot 0{,}2+1000\cdot 0{,}1=300 \text{ ნიუტონმეტრი}.$$

რადგან $\vec{R}=0$ და $M_A\neq 0$, ამიტომ მოცემული ძალთა ბრტყელი სისტემა დაიყვანება ერთ ძალთა წყვილზე, რომლის მომენტია $M_A=+300$ ნმ.

3. $ABCD$ მართკუთხედის (ნახ. 84) $C$ წერტილზე მოდებულია ძალები: $F_1=100$ ნიუტონს და $F_2=25$ ნიუტონს. მესამე $F_3=50$ ნიუტონი ძალა $AD$ გვერდის შუა $K$ წერტილზეა მოდებული. მართკუთხედის გვერდები $AB=0{,}2$ მ და $AD=0{,}1$ მ. ძალთა ეს სისტემა დაიყვანეთ უმარტივეს სახეზე.



ნახ. 84

ამოხსნა

$A$ წვერო მივიღოთ დაყვანის ცენტრად და კოორდინატთა სათავედ; გავატაროთ $Ax$ და $Ay$ კოორდინატთა ღერძები; ამ ღერძებზე დავაგეგმილოთ მოცემული ძალები და განვსაზღვროთ მათი მომენტები დაყვანის $A$ ცენტრის მიმართ.

$$X = F_1 = 100 \text{ ნიუტონს;}$$

$$Y = -F_2 - F_3 = -25 - 50 = -75 \text{ ნიუტონს.}$$

მთავარი ვექტორის მოდული

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{100^2 + (-75)^2} = 125 \text{ ნიუტონს.}$$

მთავარი ვექტორის მიმართულება

$$\cos\alpha = \cos(\vec{R}, \hat{Ax}) = \frac{X}{R} = \frac{100}{125} = 0{,}8;$$

$$\cos\beta = \cos(\vec{R}, \hat{Ay}) = \frac{Y}{R} = -\frac{75}{125} = -0{,}6.$$

ამ ძალთა მთავარი მომენტი $A$ წერტილის მიმართ

$$M_A = +F_1 \cdot AB + F_2 \cdot AD + F_3 \cdot \frac{AD}{3} =$$

$$= 100 \cdot 0{,}2 + 25 \cdot 0{,}1 + 50 \cdot 0{,}05 = 25 \text{ ნიუტონმეტრი.}$$

რადგან $\vec{R} \neq 0$ და $M_A \neq 0$, ამიტომ სისტემის დაყვანა შეიძლება ტოლქმედზე.

გაეთავისუფლდეთ $M_A$ მომენტიანი ძალთა წყვილისაგან. ამ ძალთა წყვილის მდგენელი ძალები მთავარი $\vec{R}$ ვექტორის მოდულის ტოლად მივიღოთ, მაშინ ძალთა წყვილის მხარი

$$h = \frac{M_A}{R} = \frac{25}{125} = 0{,}2 \text{ მ.}$$

ეს ძალთა წყვილი განვალაგოთ ისე, რომ მისი ერთ-ერთი $\vec{R}_2$ ძალა მოდებული იყოს $A$ წერტილზე და $\vec{R}$ ვექტორის პირდაპირშებრუნებულად იყოს მიმართული. $A$ წერტილზე მოდებული $\vec{R}$ და $\vec{R}_2$ ძალები წონასწორდება, გვრჩება $\vec{R}'_2$ ძალა, რომელიც $O_1$ წერტილზე გადის და $A$ წერტილიდან დაშორებულია მანძილით

$$AO_1 = h.$$

### § 4. წონასწორობის პირობები

ძალთა ბრტყელი სისტემის დაყვანის ცენტრზე დაყვანისას შეიძლება მოხდეს, რომ მთავარი ვექტორი და მთავარი მომენტი აღმოჩნდეს ნულის ტოლი

$$\boxed{\vec{R} = 0 \quad \text{და} \quad M_0 = 0.} \qquad (ა)$$

$\vec{R}=0$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ დაყვანის ცენტრზე მოდებული ყველა ძალის გეომეტრიული ჯამი ნულს უდრის; მაშასადამე, ეს ძალები ურთიერთწონასწორდებიან.

$M_0=0$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ დამატებული ძალთა წყვილების მომენტების ალგებრული ჯამი ნულს უდრის; მაშასადამე, ეს ძალთა წყვილები ურთიერთ წონასწორდებიან.

ამრიგად, ვხედავთ, რომ ძალთა მთელი სისტემა გაწონასწორებულ სისტემას წარმოადგენს. მაშასადამე, ძალთა ბრტყელი სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია შემდეგი ორი პირობის დაცვა:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{R}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=0 \\ \text{და} \\ M_0=\sum_{i=1}^{n}m_0(\vec{F}_i)=0. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

ამრიგად, ძალთა ბრტყელი სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ სისტემის მთავარი ვექტორი და ნებისმიერად შერჩეული დაყვანის ცენტრის მიმართ მთავარი მომენტი უდრიდეს ნულს.

ახლა წონასწორობის (1) პირობებიდან გამომდინარე ვიპოვოთ წონასწორობის ანალიზური პირობები.

ამ პირობების მიღება სამი სხვადასხვა ფორმით შეიძლება.

### წონასწორობის პირობების ანალიზური გამოსახვა

$\vec{R}$ მთავარი ვექტორისა და $M_0$ მთავარი მომენტის სიდიდეები განისაზღვრება ტოლობებით:

$$R=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)^2}$$

და

$$M_0=\sum_{i=1}^{n}m_0(\vec{F}_i).$$

მაგრამ $\vec{R}$ მთავარი ვექტორი ნულის ტოლი შეიძლება იყოს მაშინ, როდესაც ერთდროულად

$$\sum_{i=1}^{n} X_i=0 \quad \text{და} \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i=0.$$

მაშასადამე, წონასწორობის (1) პირობები შესრულდება, თუ დაცული იქნება ტოლობები:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} X_i=0;\\ &\sum_{i=1}^{n} Y_i=0;\\ &\sum_{i=1}^{n} m_0(\vec{F}_i)=0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ე. ი. ძალთა ბრტყელი სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ სისტემის ძალთა გეგმილების ალგებრული ჯამი ნებისმიერად შერჩეულ ორ კოორდინატთა ღერძზე უდრიდეს ნულს და ამ ძალთა მომენტების ალგებრული ჯამი ნებისმიერად შერჩეული წერტილის მიმართ უდრიდეს ნულს.

### წონასწორობის პირობების მეორე ფორმა

ნებისმიერი ბრტყელი ძალთა სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ ძალთა მომენტების ალგებრული ჯამი რაიმე ორი A და B წერტილის მიმართ და ამ ძალთა გეგმილების ჯამი AB წრფისადმი არამართობულ OX ღერძზე უდრიდეს ნულს, ე. ი.

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\vec{F}_i)=0; \quad \sum_{i=1}^{n} m_B(\vec{F}_i)=0; \quad \sum_{i=1}^{n} X_i=0. \tag{3}$$

წონასწორობის ეს პირობები აუცილებელია, რადგან თუ რომელიმე მათგანი არ სრულდება, მაგალითად, ან მთავარი ვექტორი $\vec{R} \neq 0$, ან მთავარი მომენტი $M_0 \neq 0$, მაშინ სისტემა წონასწორობაში არ იქნება.

ამ პირობის საკმარისობა რომ დავამტკიცოთ, შემდეგნაირად ვიმსჯელოთ:

ვთქვათ, $\vec{R}$ მთავარი ვექტორი არ უდრის ნულს, მაშინ მოცემული ძალთა ბრტყელი სისტემა დაიყვანება ერთ ტოლქმედზე, რომელიც მთავარი ვექტორის ტოლია. თუ არსებობს ასეთი ტოლქმედი, მაშინ იგი შერჩეული ღერძის მართობული უნდა იყოს (ამ ძალის გეგმილი ამ ღერძზე ნულის ტოლი უნდა იყოს) და, გარდა ამისა, მისი მოქმედების წრფე $A$ და $B$ წერტილებზე უნდა გადიოდეს (რადგან ტოლქმედის მომენტი ამ წერტილების მიმართ ნულის ტოლი უნდა იყოს.) მაგრამ ეს შეუძლებელია, რადგან გეგმილთ ღერძი და $A$ და $B$ წერტილები შერჩეულია ისე, რომ არც ერთი წრფე არ შეიძლება გადიოდეს მოცემულ წერტილებზე და ერთდროულად გეგმილთ ღერძის მართობული იყოს. მაშასადამე, ძალთა სისტემას არა აქვს ტოლქმედი და სისტემის მთავარი ვექტორი ნულის ტოლი უნდა იყოს. მაგრამ სისტემა შეიძლება არ დაიყვანებოდეს ძალთა წყვილზე, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში სისტემის ყველა ძალის მომენტების ჯამი ნებისმიერი $A$ და $B$ წერტილების მიმართ ნულისაგან განსხვავებული იქნება. ამრიგად, როგორც მთავარი ვექტორი, ისე მთავარი მომენტი ნულის ტოლი უნდა იყოს.

### წონასწორობის პირობების მესამე ფორმა

ნებისმიერი ბრტყელი ძალთა სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ ძალთა მომენტების ალგებრული ჯამი ერთ წრფეზე არამდებარე სამი $A$, $B$ და $C$ წერტილის მიმართ ნულის ტოლი იყოს, ე. ი.

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} m_A(\vec{F}_i) &= 0; \\ \sum_{i=1}^{n} m_B(\vec{F}_i) &= 0; \\ \sum_{i=1}^{n} m_C(\vec{F}_i) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

მართლაც, თუ ცნობილია, რომ მთავარი ვექტორი და მთავარი მომენტი ნულის ტოლია, მაშინ ნულის ტოლი უნდა იყოს მოცემული ძალთა მომენტების ჯამი სამი $A$, $B$ და $C$ წერტილის მიმართ. მაშასადამე, მომენტების სამი განტოლება წონასწორობის აუცილებელი პირობაა. იგი ამავე დროს საკმარისიც არის. დავუშვათ, რომ ძალთა სისტემა არ იმყოფება წონასწორობაში, ე. ი. მისი მთავარი ვექტორი არ უდრის ნულს; ეს იმას ნიშნავს, რომ მოცემული ძალთა სისტემა ტოლქმედზე დაიყვანება. მაგრამ, იმის გამო, რომ ტოლქმედის მომენტი სამი სხვადასხვა წერტილის მიმართ ნულის ტოლია, ტოლქმედის ფუძე სამივე წერტილზე უნდა გადიოდეს. ეს კი შეუძლებელია, რადგან ეს წერტილები ერთ წრფეზე არ მდებარეობენ. მაშასადამე, მოცემულ პირობებში მთავარი $\overline{R}$ ვექტორი ნულის ტოლი უნდა იყოს. მეორე მხრივ, მთავარი $M_0$ მომენტი ნულისაგან განსხვავებული რომ იყოს, მაშინ ძალთა სისტემა ძალთა წყვილზე დაიყვანებოდა, ეს კი შეუძლებელია, რადგან ძალთა მომენტების ჯამი ნებისმიერი წერტილის მიმართ არ შეიძლებოდა ნულის ტოლი ყოფილიყო.

ამრიგად, ძალთა ბრტყელი სისტემის შემთხვევაში წონასწორობის პირობები მიიღება შემდეგი სამი ხერხით:

1) უნდა შედგეს ძალთა გეგმილების ორი განტოლება ორ ღერძზე და მომენტთა განტოლება რაიმე წერტილის მიმართ;

2) უნდა შედგეს მომენტთა ორი განტოლება რაიმე ორი წერტილის მიმართ და ერთი ძალთა გეგმილების განტოლება ისეთ ღერძზე, რომელიც ამ ორი წერტილის მაერთებელი წრფის მართობული არ იქნება.

3) შედგეს მომენტთა სამი განტოლება ერთ წერტილზე არამდებარე სამი წერტილის მიმართ.

აქვე ხაზგასმით უნდა აღინიშნოს, რომ $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, ..., $\overline{F}_n$ ძალთა ბრტყელ სისტემასთან ერთად სხეულზე იმავე სიბრტყეში თუ მოდებული იქნება $m_1$, $m_2$, $m_3$, ..., $m_n$ მომენტებიანი ძალთა წყვილები, მაშინ წონასწორობის პირობის შედგენისას ამ ძალთა წყვილების მომენტები ძალთა მომენტების განტოლებებში შევა (გეგმილთ განტოლებებში ძალთა წყვილები არ შედის, რადგან ძალთა წყვილის ძალების ჯამი ნებისმიერ ღერძზე, ცხადია, ნულს უდრის).

სიბრტყეზე ნებისმიერად განლაგებულ ძალთა სისტემის წონასწორობაზე ამოცანების ამოხსნის მეთოდიკა იგივეა, რაც თავმოყრილ ძალთა სისტემის წონასწორობაზე ამოცანების ამოხსნისას.

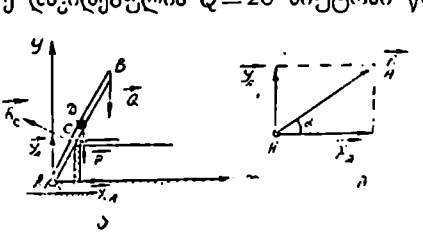
ა) უპირველეს ყოვლისა წესდება, თუ რომელი სხეულის წონასწორობა უნდა იქნეს განხილული ამოცანის ამოსახსნელად.

ბ) გამოვლინდება სხეულზე მოქმედი აქტიური და რეაქტიული ძალები და იძაბება ნახაზზე. გავიხსენოთ, რომ უძრავი სახსრის შემთხვევაში მისი რეაქცია უცნობია მოდულით და მიმართულებით და მას ცვლიან მოდულით უცნობი ორი მდგენელით, რომლებიც კოორდინატთა ღერძების დადებით მიმართულებას მიჰყვებიან. ამოხსნის შედეგად ძალების რომელიმე საძიებელი გეგმური თუ უარყოფითი აღმოჩნდება, ეს იმას ნიშნავს, რომ ძალის სათანადო მდგენელი სინამდვილეში მოწინააღმდეგე მხარესაა მიმართული.

გ) ჩაიწერება წონასწორობის განტოლებები. იმ წერტილის შერჩევისას, რომლის მიმართაც დგება მომენტთა განტოლება, მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ განტოლებათა ამოხსნა მით უფრო მარტივი იქნება, უცნობთა რაც უფრო ნაკლები რაოდენობა შევა თითოეულ განტოლებაში. ამის გამო მომენტთა ცენტრი უცნობ ძალთა მოქმედების წრფეების გადაკვეთის წერტილებში უნდა ავიღოთ.

### მაგალითები

**1.** $l=8$ მ სიგრძის $AB$ ღერო (ნახ. 85) შეკავებულია $A$ სახსრით, ხოლო შუალედური $C$ წერტილით ეყრდნობა $h=3$ მ სიმაღლის ბოძს. $AB$ ღეროს წონაა $P=12$ ნიუტონი და $\alpha=60^\circ$ კუთხეს ადგენს ჰორიზონტთან. ღეროს $B$ ბოლოზე დაკიდებულია $Q=20$ ნიუტონი წონის ტვირთი. განსაზღვრეთ ღეროზე წნევა $A$ სახსრისა და ბოძისაგან. ღეროს სიმძიმის $D$ ცენტრი ღეროს შუა წერტილშია.



ნახ. 85

ამოხსნა

$AB$ ღეროზე მოქმედებს მოცემული ორი ძალა: ღეროს $\overline{P}$ წონა, რომელიც $AB$ ღეროს შუა $D$ წერტილშია მოდებული, და $B$ წერტილზე მოდებული $\overline{Q}$ ძალა. ღერო ორი ბმის ქვეშაა: უძრავი $A$ სახსრისა და ბოძისა.

ბოძის $C$ საყრდენის $\overline{R}_C$ რეაქციის ძალა ღეროს ღერძის მართობულად არის მიმართული.

$A$ სახსრის $\overline{R}_A$ რეაქციის ძალა უცნობია მოდულით და მიმართულებით. ამიტომ გამოვსახოთ ამ რეაქციის ძალის ორი თანამართობი მდგენელი. კოორდინატთა ღერძები მივმართოთ 85, ა ნახ-ის მიხედვით.

რეაქციის $\overline{X}_A$ და $\overline{Y}_A$ მდგენელები $Ax$ და $Ay$ ღერძების დადებითი მიმართულებით მივმართოთ. ახლა უკვე $AB$ ღერო შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც თავისუფალი მყარი სხეული, რომელიც წონასწორობაშია ხუთი ძალის მოქმედებით.

მომენტთა ცენტრად მივიღოთ $A$ წერტილი და შევადგინოთ ძალთა გეგმილებისა და $A$ წერტილის მიმართ ძალთა მომენტების ცხრილი:

| ძალა | გეგმილი $X$ ღერძზე | გეგმილი $Y$ ღერძზე | მომენტი $A$ წერტილის მიმართ |
|---|---|---|---|
| $\overline{Q}$ | 0 | $-Q$ | $+Q\cdot l\cdot\cos 60^\circ$ |
| $\overline{P}$ | 0 | $-P$ | $+P\,\frac{l}{2}\cdot\cos 60^\circ$ |
| $\overline{R}_C$ | $-R_C\cdot\cos 30^\circ$ | $R_C\cdot\cos 60^\circ$ | $-R_C\cdot\frac{h}{\sin 60^\circ}$ |
| $\overline{X}_A$ | $X_A$ | 0 | 0 |
| $\overline{Y}_A$ | 0 | $Y_A$ | 0 |

აქედან ვადგენთ წონასწორობის განტოლებებს:

$$-R_C\cdot\cos 30^\circ+X_A=0;$$

$$-Q-P+R_C\cdot\cos 60^\circ+Y_A=0;$$

$$Q\cdot l\cos 60+P\,\frac{l}{2}\cdot\cos 60^\circ-R_C\cdot\frac{h}{\sin 60^\circ}=0.$$

უკანასკნელი განტოლებიდან განვსაზღვრავთ ბოძის რეაქციას

$$R_C=\frac{Q\cdot l\cos 60^\circ+P\frac{l}{2}\cdot\cos 60^\circ}{\frac{h}{\sin 60^\circ}}=\frac{20\cdot 8\,\frac{1}{2}+12\cdot 4\,\frac{1}{2}}{\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}}\cong 30 \text{ ნიუტონს.}$$

ამის შემდეგ განვსაზღვრავთ მდგენელ რეაქციებს:

$$X_A=R_C\cdot\cos 30^\circ=30\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=26 \text{ ნ;}$$

$$Y_A=Q+P-R_C\cos 60^\circ=20+12-15=17 \text{ ნ.}$$

$X_A$ და $Y_A$ ძალების შეკრებით მივიღებთ სახსრის რეაქციას (ნახ. 85, ბ), რომლის მოდული

$$R_A=\sqrt{X_A^2+Y_A^2}=\sqrt{26^2+17^2}\cong 31 \text{ ნ.}$$

$\vec{R}_A$ ძალის მიმართულების განსაზღვრისათვის ვიყენებთ ფორმულას

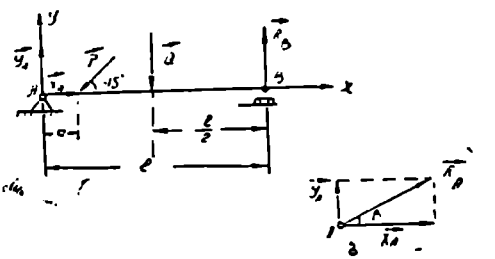
$$\cos\alpha = \frac{X_A}{R_A} = \frac{26}{31} = 0{,}84,$$

საიდანაც

$$\alpha = 32^\circ 50'.$$

**2.** $l = 10$ მ სიგრძის $AB$ კოჭი ეყრდნობა სახსრულ უძრავ საყრდენს $A$ წერტილში და სახსრულ მოძრავ საყრდენს $B$ წერტილში (ნახ. 86, ა).

კოჭის მარცხენა $A$ ბოლოდან $a = 2$ მ მანძილზე კოჭის ღერძისადმი 45° კუთხით მოდებულია ძალა $P = 6000$ ნიუტონს. კოჭის $\vec{Q}$ წონა მის შუა წერტილზეა მოდებული ($Q = 3000$ ნიუტონს). განსაზღვრეთ საყრდენთა რეაქციები.



ნახ. 86

ამოხსნა

განვიხილოთ $AB$ კოჭის წონასწორობა. უძრავი $A$ სახსარი და საჭორავებზე მოთავსებული $B$ სახსარი ბმებს წარმოადგენენ.

კოჭზე მოდებულია $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ძალები და საყრდენთა $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B$ რეაქციები.

მოძრავი საყრდენის $\vec{R}_B$ რეაქცია საყრდენის სიბრტყის მართობულია, ე. ი. ამ შემთხვევაში ვერტიკალურია.

$A$ წერტილი სახსრულად უძრავი საყრდენია; ამიტომ ამ წერტილში რეაქციის მიმართულების წინასწარ მითითება არ შეიძლება. ეს რეაქცია დავშალოთ ორ მდგენელად: ჰორიზონტალურ $\vec{X}_A$ და ვერტიკალურ $\vec{Y}_A$ მდგენელად; ვიპოვოთ მათი მოდულები.

კოორდინატთა სათავე ავიღოთ $A$ წერტილში; $Ax$ ღერძი ჰორიზონტალურად მარჯვნივ მივმართოთ, $Ay$ ღერძი კი—ვერტიკალურად ზემოთ.

დავაგეგმილოთ ძალები კოორდინატთა ღერძებზე და ვიპოვოთ ძალთა მომენტები $A$ წერტილის მიმართ.

| ძალა | $X$ გეგმილი ღერძზე | გეგმილი $Y$ ღერძზე | მომენტი $A$ წერტილის მიმართ |
|---|---|---|---|
| $\overline{R}_B$ | 0 | $R_B$ | $-R_B \cdot l$ |
| $\overline{X}_A$ | $X_A$ | 0 | 0 |
| $\overline{Y}_A$ | 0 | $Y_A$ | 0 |
| $\overline{P}$ | $-P \cdot \cos 45°$ | $-P \cdot \cos 45°$ | $P\,a \cdot 2 \cos 45°$ |
| $\overline{Q}$ | 0 | $-Q$ | $Q \cdot \frac{l}{2}$ |

წონასწორობის განტოლებებია:

$$X_A - P \cdot \cos 45° = 0; \tag{1}$$

$$-Q + R_B + Y_A - P \cdot \cos 45° = 0; \tag{2}$$

$$-R_B \cdot l + 2P \cdot a \cdot \cos 45° + Q \cdot 5 = 0. \tag{3}$$

(1) განტოლებიდან ვპოულობთ

$$X_A = P \cdot \cos 45° = 6000 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4230 \text{ ნიუტონს.}$$

(2) განტოლებიდან გვაქვს

$$Y_A = P \cdot \cos 45° + Q - R_B = 6000 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 3000 - 2348 = 4882 \text{ ნიუტონს.}$$

(3) განტოლებიდან გვაქვს

$$R_B = \frac{2P\ a \cdot \cos 45° + Q \cdot 5}{l} = \frac{2 \cdot 6000 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 3000 \cdot 5}{10} = 2348 \text{ ნიუტონს.}$$

სახსრის $\overline{R}_A$ რეაქციის მოდული

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{4230^2 + 4882^2} = 6460 \text{ ნიუტონს.}$$

$\overline{R}_A$ ძალის მიმართულების განსაზღვრისათვის საკმარისია გავოკიანგარიშოთ ამ ძალის მიერ $Ax$ ღერძთან შედგენილი $\beta$ კუთხე. ძალთა მართკუთხა სამკუთხედიდან (ნახ. 86, ბ) გვაქვს

$$\cos \beta = \frac{X_A}{R_A} = \frac{4230}{6460} = 0{,}655,$$

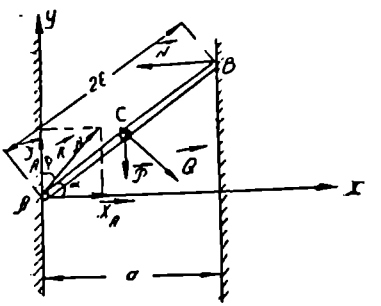
საიდანაც

$$\beta = 49^{\circ}.$$

**8.** ერთმანეთისაგან $a=4$ მ მანძილით დაშორებულ ორ გლუვ ვერტიკალურ კედელს შორის (ნახ. 87) მოთავსებულია $2l=5$ მ სიგრძისა და $P=100$ ნიუტონი წონის $AB$ ღერო. მისი ერთი ბოლო $A$ სახსრით კედელზეა მიმაგრებული, მეორე კი თავისუფლად ეყრდნობა მეორე კედლის $B$ წერტილს. $AB$ ღეროს შუა $C$ წერტილში ღეროს ღერძის მართობულად მოდებულია ძალა $Q=2P$. განსაზღვრეთ $A$ სახსრის რეაქცია და მეორე კედლის $\overline{N}$ რეაქცია.

ამოხსნა

განვიხილოთ $AB$ ღეროს წონასწორობა. მასზეა უძრავი $A$ სახსარი და კედელი. ღეროს $A$ წერტილზე მოდებულია სახსრის რეაქცია, რომლის მოდული და მიმართულება ჩვენთვის უცნობია; ამის გამო ეს რეაქცია წარმოვიდგინოთ ორი $\overline{X}_A$ და $\overline{Y}_A$ მდგენელის სახით.



ნახ. 87

$B$ წერტილის $\overline{N}$ რეაქცია კედლის მართობულია, რადგან კედელი გლუვია. გავატაროთ $Ax$ და $Ay$ საკოორდინატო ღერძები და მომენტთა ცენტრად $A$ წერტილი მივიღოთ; შევადგინოთ კოორდინატთა ღერძებზე ძალთა გეგმილებისა და $A$ წერტილის მიმართ მომენტების ცხრილი.

| ძალა | გეგმილი $Ox$ ღერძზე | გეგმილი $Oy$ ღერძზე | მომენტი $A$ წერტილის მიმართ |
|---|---|---|---|
| $\overline{X}_A$ | $X_A$ | 0 | 0 |
| $\overline{Y}_A$ | 0 | $Y_A$ | 0 |
| $\overline{P}$ | 0 | $-P$ | $P\cdot\frac{a}{2}$ |
| $\overline{Q}$ | $Q\cdot\sin\alpha$ | $-Q\cdot\cos\alpha$ | $Q\cdot l$ |
| $\overline{N}$ | $-N$ | 0 | $-N\cdot 2l\cdot\sin\alpha$ |

წონასწორობის განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$X_A - N + Q\sin\alpha = 0; \qquad (ა)$$

$$Y_A - P - Q\cdot\cos\alpha = 0; \qquad (ბ)$$

$$P\cdot\frac{a}{2} + Ql - N\cdot 2l\cdot\sin\alpha = 0. \qquad (გ)$$

რადგან ჩვენთვის ცნობილია ღეროს სიგრძე და კედლებს შორის მანძილი, ამიტომ შეიძლება ვიპოვოთ $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$ მნიშვნელობები:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = 0{,}6;$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{2l} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

(გ) განტოლებიდან ვპოულობთ

$$N = \frac{P\frac{a}{2} + Q\cdot l}{2l\cdot\sin\alpha} = \frac{100\cdot 2 + 200\cdot 2{,}5}{5\cdot 0{,}6} = 233 \text{ ნიუტონს.}$$

(ა) განტოლებიდან მივიღებთ

$$X_A = N - Q\cdot\sin\alpha = 233 - 200\cdot 0{,}6 = 113 \text{ ნიუტონს.}$$

(ბ) განტოლებიდან ვპოულობთ

$$Y_A = P + Q\cdot\cos\alpha = 100 + 200\cdot 0{,}8 = 260 \text{ ნიუტონს.}$$

საბსრის $\vec{R}_A$ რეაქციის მიმართულების განსაზღვრისათვის საკმარისია გამოვთვალოთ $\beta$ კუთხე, რომელსაც ეს ძალა ადგენს $Oy$ ღერძთან

$$\cos\beta = \frac{Y_A}{R_A} = \frac{260}{284} = 0{,}915,$$

საიდანაც

$$\beta = 23°40'.$$

4. ტოლგვერდა სამკუთხედის ფორმის აბსოლუტურად ხისტი, უწონადი $ABC$ ფირფიტა (ნახ. 88) წონასწორობაში მოდის სამი სახსროვანი ღეროს საშუალებით, რომელთაგანაც $AD$ და $KC$ ვერტიკალურია,

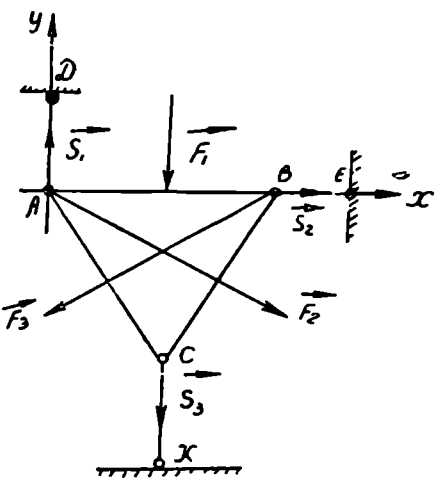
ხოლო $BE$ — ჰორიზონტალური. ფირფიტაზე მოქმედებს სამკუთხედის მედიანებზე მიმართული სამი ძალა:

$F_1 = 60$ ნიუტონი, $F_2 = 40$ ნიუტონი და $F_3 = 20$ ნიუტონი.

იპოვეთ ძალები ღეროებში.

ამოხსნა

გაეთავისუფლდეთ ბმებისაგან და მათ ნაცვლად შემოვიღოთ $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ და $\vec{S}_3$ რეაქციის ძალები. სამკუთხედის გვერდის სიგრძეა $a$. ამ ამოცანის ამოხსნისათვის გამოვიყენოთ წონასწორობის პირობების მეორე და მესამე ფორმა. $AE$ წრფე ღერძად დავსახოთ და ამ ღერძზე დავაგეგმილოთ ძალები; $A$, $B$ და $C$ წერტილების მიმართ ავიღოთ ძალთა მომენტები, მივიღებთ:




ნახ. 88

| ძალა | გეგმილი $OX$ ღერძზე | მომენტები | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $A$ წერტილის მიმართ | $B$ წერტილის მიმართ | $C$ წერტილის მიმართ |
| $\vec{F}_1$ | 0 | $F_1 \cdot \frac{a}{2}$ | $-F_1 \cdot \frac{a}{2}$ | 0 |
| $\vec{F}_2$ | $F_2 \cdot \cos 30°$ | 0 | $-F_2 \cdot \frac{a}{2}$ | $F_2 \cdot \frac{a}{2}$ |
| $\vec{F}_3$ | $-F_3 \cdot \cos 30°$ | $F_3 \cdot \frac{a}{2}$ | 0 | $-F_3 \cdot \frac{a}{2}$ |
| $\vec{S}_1$ | 0 | 0 | $S_1 \cdot a$ | $S_1 \cdot \frac{a}{2}$ |
| $\vec{S}_2$ | $S_2$ | 0 | 0 | $S_2 \cdot \cos 30°$ |
| $\vec{S}_3$ | 0 | $S_3 \cdot \frac{a}{2}$ | $-S_3 \cdot \frac{a}{2}$ | 0 |

ა) ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ მეორე ფორმის წონასწორობის პირობები:

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\vec{F}_i) = F_1 \cdot \frac{a}{2} + S_3 \cdot \frac{a}{2} + F_3 \cdot \frac{a}{2} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_B(\vec{F}_i) = S_1 \cdot a - S_3 \cdot \frac{a}{2} - F_2 \cdot \frac{a}{2} - F_1 \cdot \frac{a}{2} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = -F_3 \cdot \cos 30^\circ + F_2 \cdot \cos 30^\circ + S_2 = 0.$$

პირველი განტოლებიდან

$$S_3 = -(F_1 + F_3) = -(60 + 20) = -80 \text{ ნიუტონს.}$$

მეორე განტოლებიდან

$$2S_1 = S_3 + F_2 + F_1 = -80 + 40 + 60 = 20 \text{ ნიუტონს.}$$

$$S_1 = 10 \text{ ნიუტონს.}$$

მესამე განტოლებიდან გვაქვს

$$S_2 = F_3 \cdot \cos 30^\circ - F_2 \cdot \cos 30^\circ = (20 - 40)\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 10\sqrt{3} \text{ ნიუტონი} = -17{,}3 \text{ ნიუტონს.}$$

ბ) ახლა ამოცანის ამოხსნისათვის გამოვიყენოთ წონასწორობის პირობების მესამე ფორმა

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} m_B(\vec{F}_i) = 0 \text{ და } \sum_{i=1}^{n} m_C(\vec{F}_i) = 0.$$

მნიშვნელობათა ჩასმით, მივიღებთ:

$$F_1 \cdot \frac{a}{2} + S_3 \cdot \frac{a}{2} + F_3 \cdot \frac{a}{2} = 0;$$

$$S_1 a + F_1 \cdot \frac{a}{2} - S_3 \cdot \frac{a}{2} - F_2 \cdot \frac{a}{2} = 0;$$

$$S_1 \cdot \frac{a}{2} - F_3 \cdot \frac{a}{2} - S_2 a \cdot \cos 30^\circ + F_2 \cdot \frac{a}{2} = 0.$$

პირველი განტოლებიდან

$$S_3 = -F_1 - F_2 = -80 \text{ ნიუტონს.}$$

მეორე განტოლებიდან

$$S_1 = -\frac{1}{2}(F_1 + S_3 + F_2) = 10 \text{ ნიუტონს.}$$

მესამე განტოლებიდან

$$S_2 = \frac{10 - 40 - 10}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = -10\sqrt{3} = -17{,}3 \text{ ნიუტონს.}$$

## § 5. პარალელურ ძალთა ბრტყელი სისტემის წონასწორობა

ვთქვათ, მყარ სხეულზე მოდებულია $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ პარალელურ ძალთა სისტემა (ნახ. 89).

გავატაროთ მოცემულ ძალთა პარალელური $Oy$ ღერძი; ამ ღერძის მართობულად კი — $Ox$ ღერძი.

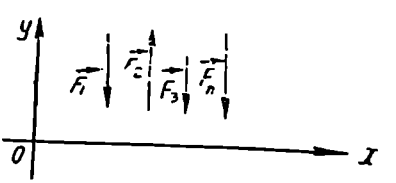
დავწეროთ ძალთა ბრტყელი სისტემის წონასწორობის სამი პირობა:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \quad \text{და} \quad \sum_{i=1}^{n} m_0(\overline{F}_i) = 0$$

და თან შევნიშნოთ, რომ პირველი მათგანი იგივეობად იქცევა

$$0 \equiv 0$$

ძალთა ნებისმიერი მნიშვნელობის დროს. რადგან მოცემული ძალების გეგმილები $Ox$ ღერძზე ნულს უდრის, ამიტომ წონასწორობის პირველი პირობა $\sum_{i=1}^{n} X_i = 0$ აღარ გვჭირდება. ამის გამო ერთ სიბრტყეში მდებარე პარალელურ ძალთა წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია წონასწორობის ორი პირობა:




ნახ. 89

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \quad \text{და} \quad \sum_{i=1}^{n} m_0(\overline{F}_i) = 0.} \qquad (1)$$

რადგან მოცემული ძალები $Oy$ ღერძის პარალელურია, ამიტომ ძალთა გეგმილები ამ ღერძზე ძალთა მოდულებს უდრის სათანადო ნიშნებით, რაც ძალის მიმართულებაზეა დამოკიდებული.

ამრიგად, პარალელურ ძალთა ბრტყელი სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ ძალთა ალგებრული ჯამი ნულის ტოლი იყოს და მათი მომენტების ჯამი ნებისმიერად აღებული წერტილის მიმართ უდრიდეს ნულს.

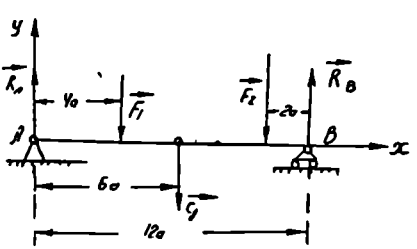
პარალელური ძალების წონასწორობის პირობების მეორე ფორმაა

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\vec{F}_i) = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} m_B(\vec{F}_i) = 0. \tag{2}$$

უნდა აღინიშნოს, რომ $A$ და $B$ წერტილები ძალთა პარალელურ წრფეზე არ უნდა მდებარეობდნენ.

### მაგალითები

**1.** $G=400$ ნიუტონი წონის ჰორიზონტალური კოჭი ორი ვერტიკალური $F_1=200$ ნიუტონი და $F_2=600$ ნიუტონი ძალებით არის დატვირთული (ნახ. 90).




ნახ. 90

განსაზღვრეთ $A$ და $B$ საყრდენთა $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B$ რეაქციების ძალთა სიდიდეები (ყველა ზომა აღნიშნულია ნახაზზე).

ამოხსნა

განვიხილოთ $AB$ კოჭის წონასწორობა. კოჭზე მოდებულია სიმძიმის $\vec{G}$ ძალა (შუა წერტილში), $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალები. საყრდენთა $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B$ რეაქციები შვეულად ზემოთ არის მიმართული. ამრიგად, კოჭზე მოდებულია პარალელურ ძალთა სისტემა, რომელთა რიცხვში ორი $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B$ უცნობია. კოჭის ღერძი მივმართოთ მარჯვნივ, $Ay$ ღერძი კი—ძალების პარალელურად (შვეულად) ზემოთ. ძალების პარალელურ $Ay$ ღერძზე ძალების გეგმილების განტოლება იქნება

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = R_A - F_1 - G - F_2 + R_B = 0. \tag{ა}$$

შევადგინოთ მომენტთა განტოლება $A$ წერტილის მიმართ

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\vec{F}_i)=F_1\cdot 4a + G\cdot 6a+F_2\cdot 10\,a-R_B\cdot 12\,a=0. \qquad (ბ)$$

(ბ) განტოლებიდან შეგვიძლია ვიპოვოთ $R_B$ ძალა, შემდეგ ნაპოვნი მნიშვნელობის (ა) განტოლებაში ჩასმით განვსაზღვრავთ $R_A$ ძალას:

$$R_B=\frac{F_1\cdot 4a+G\cdot 6a+F_2\cdot 10a}{12\,a}=$$

$$=\frac{200\cdot 4+400\cdot 6+600\cdot 10}{12}=775 \text{ ნიუტონს;}$$

$$R_A=F_1+G+F_2-R_B=200+400+600-775=425 \text{ ნიუტონს.}$$

ამ ამოცანის ამოხსნა შეიძლება წონასწორობის ორი განტოლებითაც; თითოეულ მათგანში შედის ერთი უცნობი სიდიდე:

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\vec{F}_i)=0 \quad \text{და} \quad \sum_{i=1}^{n} m_B(\vec{F}_i)=0.$$

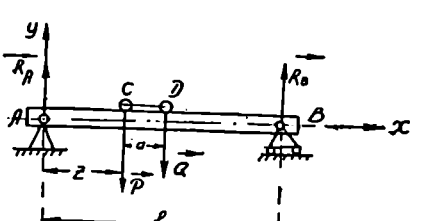
მეორე განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

$$R_A\cdot 12\,a-F_1\cdot 8\,a-G\cdot 6a-F_2\cdot 2\,a=0;$$

მნიშვნელობების შეტანით და $a$-ზე შეკვეცით მივიღებთ

$$R_A=425 \text{ ნიუტონს.}$$

2. ორ საყრდენზე მდებარე $l=18$ მ მალიანი ხიდამწეს კოჭის გასწვრივ (ნახ. 91) შეუძლია ურიკას გადაადგილება. ტვირთიანი ურიკას წონაა 3200 ნიუტონი; ეს წონა კოჭს $C$ და $D$ ბორბლებით გადაეცემა; ამასთან, $C$ ბორბლით გადაეცემა $P=1800$ ნიუტონი ძალა, ხოლო $D$ ბორბლით — $Q=1500$ ნიუტონი ძალა. ბორბლებს შორის მანძილია $a=1$ მ.



ნახ. 91

განსაზღვრეთ, თუ მარცხენა საყრდენიდან რა მანძილზე უნდა შევაჩეროთ ურიკა ისე, რომ ამ მომენტში $A$ საყრდენის რეაქცია $B$ საყრდენის რეაქციაზე ორჯერ მეტი იყოს.

საძიებელი მანძილი იყოს $z$. განვიხილოთ $AB$ კოჭის წონასწორობა. ამ შემთხვევაში ბმებია $A$ და $B$ საყრდენები. კოჭზე მოქმედებს ურიკას სიმძიმის ძალა, $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ წონები და ურთიერთპარალელურ საყრდენთა $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B$ რეაქციის ძალები.

$Ax$ ღერძი მივმართოთ კოჭის ღერძის გასწვრივ, $Ay$ ღერძი კი—ძალების პარალელურად, შვეულად, ზემოთ. პარალელურ ღერძზე ძალების გეგმილების განტოლება იქნება

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = R_A - P - Q + R_B = 0. \qquad (ა)$$

შევადგინოთ ძალთა მომენტების განტოლება $A$ წერტილის მიმართ

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\vec{F}_i) = P \cdot z + Q(z+a) - R_B \cdot l = 0. \qquad (ბ)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $A$ საყრდენის რეაქცია ორჯერ აღემატება $B$ საყრდენის რეაქციას, მაშინ (ა) განტოლებაში $R_A = 2R_B$ ჩასმით მივიღებთ

$$3R_B = P + Q = 1800 + 1500 = 3300 \text{ ნ};$$

აქედან

$$R_B = 1100 \text{ ნ}.$$

(ბ) განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

$$1800 \cdot z + 1500(z+1) - R_B \cdot 18 = 0,$$

ანუ

$$3300z = 1100 \cdot 18 - 1500;$$

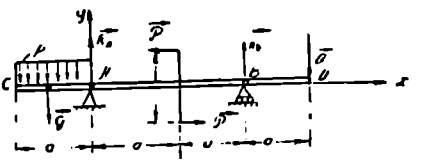
აქედან

$$z = 5{,}5 \text{ მ}.$$

**8.** კონსოლიან ჰორიზონტალურ კოჭზე (ნახ. 92) მოქმედებს ($\vec{P}$, $\vec{P}$) ძალთა წყვილი, კოჭის მარცხენა კონსოლზე —$p$ ინტენსივობის თანაბრად განაწილებული დატვირთვა, ხოლო მარჯვენა კონსოლის $D$ წერტილზე—ვერტიკალური $\vec{Q}$ დატვირთვა. განსაზღვრეთ საყრდენთა რეაქციები, თუ $P = 1000$ ნიუტონს, $Q = 2000$ ნიუტონს, $p = 2000$ ნ/მ, $a = 0{,}8$ მ.

თუ კოჭზე მოქმედებს თანაბრად განაწილებული დატვირთვა, მაშინ რეაქციების განსაზღვრისას შეიძლება მისი ტოლქმედით შეცვლა. ტოლქმედის მოდების წერტილი დატვირთული $CA$ უბნის შუა წერტილში იქნება მოთავსებული. რადგან დატვირთვის უბნის სიგრძეა $a$, ამიტომ ტოლქმედი

$$G = p \cdot a = 2000 \cdot 0{,}8 = 1600 \text{ ნიუტონს.}$$



ნახ. 92

$\vec{G}$ ძალა $A$ საყრდენიდან $\frac{a}{2}$ მანძილითაა დაშორებული. მოძრავი $B$ საყრდენის $\vec{R}_B$ რეაქცია $B$ წერტილზე გადის და საყრდენის სიბრტყის მართობულად არის მიმართული.

უძრავი $A$ საყრდენის $\vec{R}_A$ რეაქცია, ამ შემთხვევაში, აგრეთვე ვერტიკალურად არის მიმართული, რადგან მოცემულ $\vec{G}$ და $\vec{Q}$ ძალთა წყვილს შეუძლია სხეულის მხოლოდ ბრუნვა, მაგრამ არ შეუძლია მისი გადაადგილება ჰორიზონტალური მიმართულებით.

კოორდინატთა სათავედ $A$ წერტილი ავიღოთ, $Ax$ ღერძი მივმართოთ ჰორიზონტალურად მარჯვნივ, $Ay$ ღერძი კი — ვერტიკალურად ზემოთ.

ამ შემთხვევაში წონასწორობის განტოლებები იქნება:

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\vec{F}_i) = -G \cdot \frac{a}{2} - P \cdot a - R_B \cdot 2a + Q \cdot 3a = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = R_B + R_A - G - Q = 0,$$

საიდანაც

$$-\frac{G}{2} - P - 2R_B + 3Q = 0,$$

ანუ რიცხვითი მნიშვნელობების ჩასმით მივიღებთ

$$-800 - 1000 - 2R_B + 6000 = 0;$$

აქედან

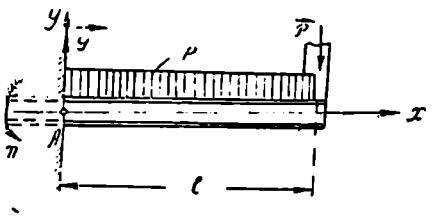
$$R_B = 2100 \text{ ნიუტონს.}$$

მეორე განტოლებიდან გვაქვს:

$$R_A = G + Q - R_B = 1600 + 2000 - 2100 = 1500 \text{ ნიუტონს.}$$

შევნიშნოთ, რომ ძალთა წყვილის მომენტი მხოლოდ მომენტთა განტოლებაში შედის.

4. აივნის შემკავებელი ჰორიზონტალური კოჭი განიცდის (ნახ. 93) $p = 2000$ ნ/მ ინტენსივობის თანაბრად განლაგებული დატვირთვის მოქმედებას; გარდა ამისა, კოჭის თავისუფალ ბოლოზე მოდებულია ძალა $P = 2000$ ნიუტონს. სვეტის ღერძიდან კედლამდე მანძილია $l = 1{,}5$ მ.



ნახ. 93

განსაზღვრეთ ჩაკეთების რეაქცია.

ამოხსნა

ჩვენთვის ცნობილია, რომ კედლის ჩაკეთებაში წარმოიქმნება $A$ წერტილზე მოდებული საყრდენის $Y$ რეაქცია და რეაქტიული $m$ მომენტი.

თანაბრად განაწილებული დატვირთვა $l$ მალის შუა წერტილში მოდებული ტოლქმედით შევცვალოთ.

კოჭის წონასწორობის განტოლებები იქნება:

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\vec{F}_i) = P \cdot l + p \cdot l \cdot \frac{l}{2} - m = 0; \qquad (ა)$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = Y - P - p \cdot l = 0. \qquad (ბ)$$

(ა) განტოლებიდან

$$m = P \cdot l + p\frac{l^2}{2} = 2000 \cdot 1{,}5 + 2000 \cdot \frac{1{,}5^2}{2} = 5250 \text{ ნ. მ.}$$

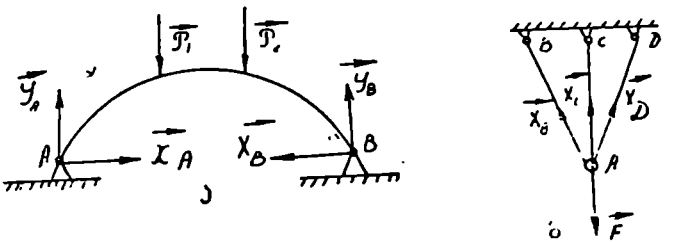
(ბ) განტოლებიდან

$$Y = P + pl = 2000 + 2000 \cdot 1{,}5 = 5000 \text{ ნიუტონს.}$$

## § 6. ცნება სტატიკურად შეკვეთ ამოცანებზე

აქამდე ისეთ შემთხვევებს განვიხილავდით, სადაც უცნობთა რიცხვი სამს არ აღემატებოდა და განტოლებაც სამი გვქონდა. სტატიკის

ამოცანებს, რომელთა ამოხსნა შეიძლება აბსოლუტურად მყარი სხეულის სტატიკის განტოლებებით, სტატიკურად გარკვეული ანუ სტატიკურად რკვევადი ამოცანები ეწოდება. ა·უ გვაქვს ძალთა ბრტყელი სისტემა და ამოცანაში უცნობთა რიცხვი სამს აღემატება, მაშინ აბსოლუტურად მყარი სხეულის სტატიკის განტოლებები ამოცანის ამოხსნისათვის საკმარისი აღარ იქნება, რადგან უცნობთა რაოდენობა განტოლებათა რაოდენობას აღემატება; ასეთ შემთხვევაში საქმე გვაქვს სტატიკურად ურკვევ ამოცანებთან.




ნახ. 94

ასე, მაგალითად, 94, ა ნახ-ზე წარმოდგენილია თაღი, რომლისთვისაც საყრდენთა რეაქციების განსაზღვრა სტატიკურად ურკვევ ამოცანას წარმოადგენს. თაღზე მოქმედებს $\overline{P}_1$ და $\overline{P}_2$ ძალები; თაღის $A$ და $B$ ფუძეები სახსრულადაა მიმაგრებული უძრავ საყრდენებთან, ე. ი. გვაქვს ორსახსრიანი თაღი. რადგან ორი საყრდენი უძრავია, ამიტომ თითოეული საყრდენი გვაძლევს ორ-ორი საყრდენის რეაქციას: ჰორიზონტალურ $\overline{X}_A$ და $\overline{X}_B$ და ვერტიკალურ $\overline{Y}_A$ და $\overline{Y}_B$ რეაქციებს. ამრიგად, განტოლება სამია, უცნობთა რაოდენობა კი— ოთხი.

მეორე მაგალითი წარმოდგენილია 94, ბ ნახ-ზე. აქ სამი $AB$, $AC$ და $AD$ ღეროთი შეკმნილ $A$ კვანძზე მოქმედებს $\overline{F}$ ძალა. საჭიროა ძალვების განსაზღვრა ამ ღეროებში. ამ შემთხვევაში ერთ წერტილში თავს იყრის ოთხი ძალა: $\overline{F}$, $\overline{X}_B$, $\overline{X}_C$ და $\overline{X}_D$. ძალთა ასეთი სისტემისათვის სტატიკა გვაძლევს წონასწორობის მხოლოდ ორ განტოლებას:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \quad \text{და} \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0;$$

ჩვენ კი გვაქვს სამი უცნობი; მაშასადამე, სტატიკის განტოლებები ამოცანის ამოხსნისათვის საკმარისი არ არის.

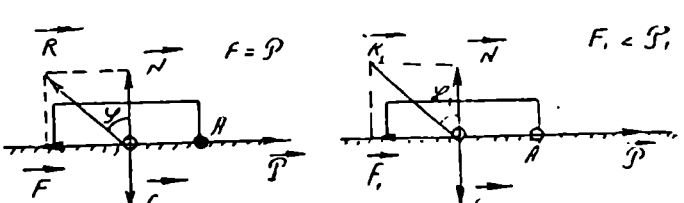
სტატიკურად ურკვევი ამოცანები განსაკუთრებული მეთოდებით ამოიხსნება „მასალათა გამძლეობის“ კურსში. ეს მეთოდები ითვალისწინებენ სხეულთა დეფორმაციებს მოდებული ძალების ზემოქმედებით.

# ხახუნი

## § 1. სრიალის ხახუნი

აქამდე არათავისუფალი მყარი სხეულის წონასწორობას რომ განვიხილავდით, შეთანხმებული ვიყავით, რომ თანმხები სხეულების ზედაპირები იდეალურად გლუვი იყო, ამავე დროს ვგულისხმობდით, რომ თუ ერთი წონადი ან დატვირთული სხეული ეყრდნობა მეორე სხეულის უძრავ ზედაპირს რაიმე წერტილზე, მაშინ საყრდენი ზედაპირის რეაქცია ამ ზედაპირის ნორმალს მიჰყვება. სინამდვილეში კი ეს სწორი არ არის, რადგან სხეულთა თანხების ზედაპირებს შორის წარმოიქმნება ხახუნის ძალები, რომლებიც ცვლიან რეაქციის მიმართულებას.

სრიალის ხახუნის ანუ პირველი გვარის ხახუნის ძალა წინაღობის იმ ძალას ეწოდება, რომელიც ერთი სხეულის მეორის ზედაპირზე სრიალის დროს წარმოიქმნება. ეს ძალა წარმოიქმნება იმის გამო, რომ ზედაპირები ერთგვარად ხორკლიანია და მათ შორის შებმა წარმოეზს.




ნახ. 95

ვთქვათ, უძრავ ჰორიზონტალურ ზედაპირზე $\vec{G}$ წონის მძიმე სხეული ძევს (ნახ. 95, ა).

ცხადია, ამ ზედაპირის ნორმალური $\vec{N}$ რეაქციის მოდული უდრის სხეულის $\vec{G}$ წონის მოდულს

$$N = G.$$

განსახილველი სხეულის $A$ წერტილს მოვდოთ ჰორიზონტალური $\vec{P}$ ძალა.

როდესაც $\vec{P}=0$, მაშინ სხეული წონასწორობაში რჩება. თუკი $\vec{P}$ ძალის სიდიდის ზრდას დავიწყებთ რაიმე მნიშვნელობამდე, მაშინაც სხეული წონასწორობაში დარჩება, რადგან ორ თანმხებ სხეულს შორის,

რომელთა ზედაპირები მეტად ან ნაკლებად ხორკლიანია, წარმოიქმნება ბმის ძალები, რომელთა $\overline{F}$ ტოლქმედი მოდულით $\overline{P}$ ძალის მოდულის ტოლი იქნება და უძრავი ზედაპირის გასწვრივ იქნება მიმართული $\overline{P}$ ძალის შებრუნებულად.

$\overline{F}$ ძალა სრიალის ხახუნის ძალაა.

განსახილველ შემთხვევაში სრული რეაქციის $\overline{R}$ ძალა იშლება $\overline{N}$ ნორმალურ და $\overline{F}$ ჰორიზონტალურ მდგენელებად.

$\overline{R}$ ძალა $\overline{N}$ ნორმალურ მდგენელთან ქმნის φ კუთხეს.

$\overline{P}$ ძალის მოდული გავზარდოთ რაიმე $P_1$ მნიშვნელობამდე, რომლის დროსაც სხეული იწყებს მოძრაობას. ამ დროს ძალას ზღვრული მნიშვნელობა ეკნება (ნახ. 95, ბ), ხოლო $\overline{R}_1$ სრული რეაქციის მიერ ზედაპირის ნორმალთან შედგენილ φ კუთხეს ხახუნის კუთხე ეწოდება.

სხეულის ფარდობითი მოსვენებული მდგომარეობის დროს წარმოქმნილ ხახუნის ძალას მოსვენების ხახუნი ანუ სტატიკური ხახუნი ეწოდება (ნახ. 95, ა); სხეულის ფარდობითი მოძრაობის დროს წარმოქმნილ ხახუნის ძალას კი—სრიალის ხახუნი.

ხახუნი რთული ფიზიკურ-მექანიკური მოვლენაა და მისი ზუსტი კანონები დღემდე ჩამოყალიბებული არ არის. თეორიულ მექანიკაში განიხილება ცდით დადგენილი ზოგიერთი კანონზომიერება, რომელთაც ხახუნის კანონები ეწოდება და შემდეგნაირად გამოითქმება:

1. ხახუნის ძალის მოდულს ნებისმიერი მნიშვნელობის მიღება შეუძლია ნულიდან $F_1$ მნიშვნელობამდე, რომელსაც ხახუნის ზღვრული ძალა ეწოდება. ხახუნის ძალა სხეულის მამოძრავებელი ძალის პირდაპირ შებრუნებულად არის მიმართული.

2. ზღვრული ხახუნის ძალის მოდული სხეულის სიბრტყეზე ნორმალური N წნევის პროპორციულია (ჩვენს შემთხვევაში $N=G$), ე. ი.

$$\boxed{F_1 = f \cdot N,} \qquad (1)$$

სადაც $f$ პროპორციულობის კოეფიციენტი, ანუ სრიალის ხახუნის სტატიკური კოეფიციენტია.

ხახუნის $f$ კოეფიციენტი განყენებული რიცხვია, ცდით განისაზღვრება, დამოკიდებულია თანმხები სხეულების მასალასა და ზედაპი-

რების მდგომარეობაზე (დამუშავების ხასიათზე, ტემპერატურაზე, ტენიანობაზე, ცხებაზე და ა. შ.).

3. ზღვრული ხახუნის ძალის მოდული დამოკიდებული არა არის მოხახუნე ზედაპირების ზომებზე.

ნახ. 95, ბ-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{F_1}{N};$$

მეორე მხრივ, (1) ფორმულიდან

$$f=\frac{F_1}{N},$$

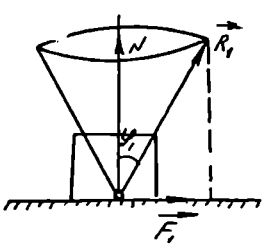
მაშასადამე,

$$\boxed{f=\operatorname{tg}\varphi_2,} \qquad (2)$$

ე. ი. სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი ხახუნის კუთხის ტანგენსის ტოლია.

ახლა განვიხილოთ სხეული, რომელსაც ყოველი მიმართულებით შეუძლია გადაადგილება ხორკლიან საყრდენ ზედაპირზე.

თუ ხახუნის კოეფიციენტი ერთნაირია ყოველი მიმართულებით მოძრაობისას, ამ ზედაპირის $\vec{R}_1$ რეაქცია ნორმალისაგან გადაიხრება ყოველი მიმართულებით ერთნაირი $\varphi_1$ ხახუნის კუთხით, ე. ი. ამ რეაქციის წარმოდგენა შეიძლება როგორც მრგვალი კონუსის მსახველისა, როდესაც კონუსი წვეროთი ქვემოთაა მიმართული და იგი ხახუნის კონუსის სახელწოდებას ატარებს (ნახ. 96). ზემოაღნიშნული პირობა დაცული არ არის ხეზე სრიალის დროს, რადგან ხორკლიანობა ბოჭკოების სიგრძივ და განივად სხვადასხვანაირია. ამ შემთხვევაში ხახუნის კონუსის მსახველები ნორმალურ საყრდენ ზედაპირთან სხვადასხვა კუთხეს ადგენენ, ამიტომ კონუსის ფუძე არამრგვალი იქნება.



ნახ. 96

რადგან $F<F_1$, ამიტომ

$$F\leqslant f\cdot N,$$

მაშასადამე,

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{F}{N}\leqslant\frac{f\cdot N}{N},$$

აქედან

$$\operatorname{tg}\varphi \leqslant f,$$

ან

$$\operatorname{tg}\varphi \leqslant \operatorname{tg}\varphi_1,$$

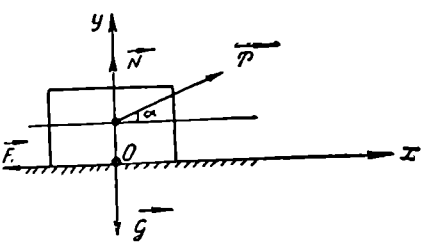
მაშასადამე,

$$\varphi \leqslant \varphi_1.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ საყრდენი ზედაპირის სრული რეაქცია არ შეიძლება შორდებოდეს ხახუნის კონუსს.

### მაგალითები

**1.** განსაზღვრეთ, თუ ჰორიზონტთან $\alpha = 30°$ კუთხით მიმართული რაღაც $\vec{P}$ ძალა უნდა მოვდოთ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე მდებარე $G = 160$ ნიუტონი წონის მყარ სხეულს (ნახ. 97), რომ დავძრათ იგი ადგილიდან, თუ სხეულის სიბრტყეზე ხახუნის სტატიკური კოეფიციენტი $f = 0{,}5$.




ნახ. 97

ა მ ო ხ ს ნ ა

სხეულზე მოდებულია ძალები $\vec{P}$, $\vec{G}$, $\vec{N}$ და $\vec{F}$. კოორდინატთა საწყისი იყოს $O$ წერტილი. $Ox$ ღერძი მივმართოთ ჰორიზონტალურად მარჯვნივ, $Oy$ ღერძი კი—ვერტიკალურად ზემოთ. ძალების ამ ღერძებზე დაგეგმილებიდან მივიღებთ წონასწორობის განტოლებებს:

$$P\cdot\cos\alpha - F = 0; \qquad (ა)$$

$$N + P\cdot\sin\alpha - G = 0. \qquad (ბ)$$

(ბ) განტოლებიდან გვაქვს

$$N = G - P\cdot\sin\alpha. \qquad (გ)$$

რადგან

$$F = f\cdot N,$$

ამიტომ

$$F = f(G - P\cdot\sin\alpha)$$

ან (ა) განტოლებაში ჩასმით ვპოულობთ

$$P\cdot\cos\alpha - f\cdot G + P\cdot f\cdot\sin\alpha = 0,$$

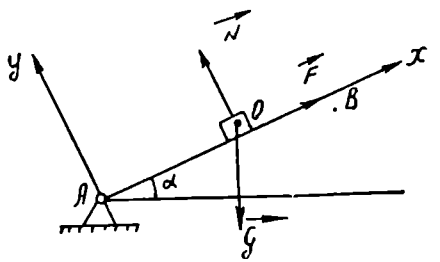
საიდანაც

$$P=\frac{f\cdot G}{\cos\alpha+f\cdot\sin\alpha},$$

ან რიცხვითი მნიშვნელობების შეტანით

$$P=\frac{0{,}5\cdot 160}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot+0{,}5\cdot\frac{1}{2}}\cong 72 \text{ ნიუტონს.}$$

2. $AB$ სიბრტყეს შეუძლია ბრუნვა $A$ სახსარზე გამავალი ღერძის გარშემო ისე, რომ მისი დაყენება შეიძლება ნებისმიერი დახრის კუთხით ჰორიზონტთან (ნახ. 98).




ნახ. 98

დახრილ $AB$ სიბრტყეზე ძევს $G$ ნიუტონი წონის სხეული. როგორი დახრის $\alpha$ კუთხის დროს დარჩება სხეული წონასწორობაში?

ამოხსნა

ვთქვათ, $O$ წერტილზე მოდებულია ვერტიკალურად ქვემოთ მიმართული სხეულის $\vec{G}$ წონა. $\vec{N}$ იყოს სიბრტყის ნორმალური რეაქცია, ხოლო $\vec{F}$—ხახუნის ძალა. $Ax$ ღერძად $AB$ წრფე მივიღოთ, მაშინ $Ay$ ღერძი მის მართობულად იქნება მიმართული. სხეული წონასწორობაში იქნება სიბრტყეზე $\vec{G}$, $\vec{N}$ და $\vec{F}$ ძალების ზემოქმედებით.

ძალებს კოორდინატთა ღერძებზე თუ დავაგეგმილებთ, მივიღებთ წონასწორობის განტოლებებს:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i=F-G\cdot\sin\alpha=0; \qquad \sum_{i=1}^{n} Y_i=N-G\cdot\cos\alpha=0,$$

საიდანაც

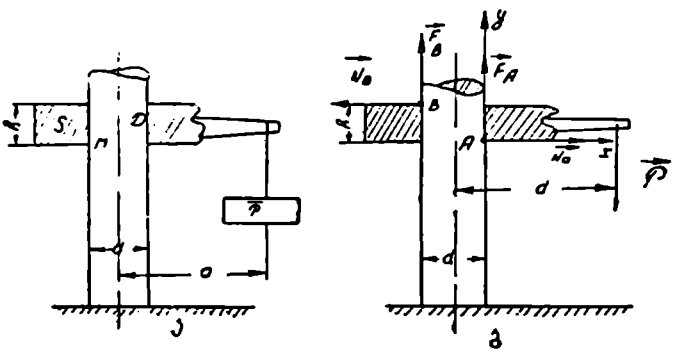
$$F=G\cdot\sin\alpha; \qquad N=G\cdot\cos\alpha; \qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{F}{N}.$$

$F_1=f\cdot N$ განტოლების გამოყენებით (უდიდესი სრიალის ხახუნის ძალის სიდიდე) სხეულის წონასწორობისათვის მივიღებთ

$$\operatorname{tg}\alpha\leqslant\frac{F_1}{N}\leqslant\frac{f\cdot N}{N}\leqslant f\leqslant\operatorname{tg}\varphi,$$

ე. ი. სხეული მოსვენებულ მდგომარეობაში დარჩება მანამ, სანამ სიბრტყის დახრის $\alpha$ კუთხე არ აღემატება ხახუნის კუთხეს.

3. იპოვეთ, რა უმცირეს $a$ მანძილზე უნდა დავკიდოთ $M$ სადგარის ვერტიკალური ღერძიდან $DE$ ბერკეტზე ტვირთი (ნახ. 99), რომ $M$ სადგარზე ჩამოცმული $S$ ქუროო (რომელიც მოთავსებულია ბერკეტის ბოლოზე) არ სრიალებდეს ბერკეტზე, თუ ქუროს სადგარზე სრიალის ხახუნის $f$ კოეფიციენტი და ქუროს $h$ სიმაღლე ცნობილია.




ნახ. 99

## ამოხსნა

ტვირთის ბერკეტზე მოქმედებისას ქუროო დაცურდება, ე. ი. ქუროო მიეჭირება სადგარს $A$ და $B$ წერტილებში (ნახ. 99, ბ). მაშასადამე, ამ წერტილებში ქუროზე მოდებულ ძალთა რიცხვში შევყავს $\vec{N}_A$ და $\vec{N}_B$ რეაქციები და $\vec{F}_A$ და $\vec{F}_B$ ხახუნის ძალები.

შევარჩიოთ კოორდინატთა $Ax$ და $Ay$ ღერძები და შევადგინოთ წონასწორობის სამი განტოლება:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = N_A - N_B = 0; \qquad (ა)$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = F_A + F_B - P = 0; \qquad (ბ)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\vec{F}_i) = P \cdot \left(a - \frac{d}{2}\right) + F_B \cdot d - N_B \cdot h = 0, \qquad (გ)$$

სადაც $d$ ქუროს დიამეტრია, $P$—ტვირთის წონა.

(ა) განტოლებიდან ვპოულობთ

$$N_A = N_B.$$

რადგან

$$F_A = f \cdot N_A \quad \text{და} \quad F_B = f \cdot N_B,$$

ამიტომ (ბ) განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

$$f \cdot N_A + f \cdot N_B - P = 0;$$

აქედან

$$N_B = N_A = \frac{P}{2f}.$$

$N_B$-ს მნიშვნელობის (გ) განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

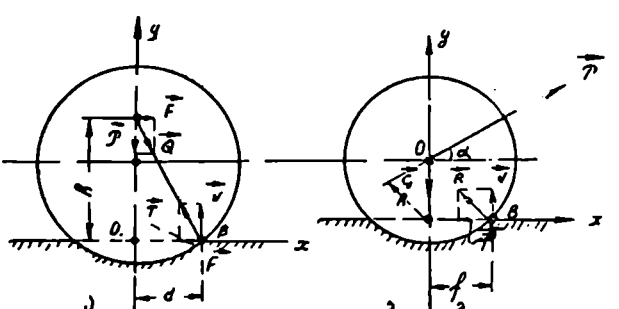
$$P \cdot a - P \cdot \frac{d}{2} + f \cdot \frac{P}{2f} \cdot d - \frac{P}{2f} \cdot h = 0,$$

საიდანაც შეკვეცის შემდეგ გვექნება

$$a \geqslant \frac{h}{2f}.$$

## § 2. გორვის ხახუნი

გორვის ხახუნი ანუ მეორე გვარის ხახუნი ეწოდება წინაღობას, რომელიც წარმოიქმნება ერთი სხეულის მეორის ზედაპირზე გორვისას.




ნახ. 100

გორვის ხახუნი უმთავრესად წარმოიქმნება იმის გამო, რომ თანმხები სხეულები არ წარმოადგენენ აბსოლუტურად მყარ სხეულებს და დეფორმირდებიან თანხების ადგილებში. მართლაც, წარმოვიდგინოთ თანაბრად მგორავი ცილინდრული სხეული (ნახ. 100, ა), რომელზედაც მოდებულია მოდულით და მიმართულებით მუდმივი $\vec{F}$ ძალა.

საგორავის წონის (ვერტიკალური წნევის) გამო ცილინდრი ნაწილობრივ ჩაიწნევა გორვის ზედაპირში და თავის წინ გორვის გზაზე ერთგვარ შეფერხებას წარმოქმნის შვერილის სახით. ამ შემთხვევაში ცილინდრის შეხება სიბრტყესთან წირზე (მსახველზე) კი არ წარმოებს, არამედ რაიმე ზედაპირზე. ცილინდრის ამ ზედაპირზე წნევის ძალის მოდების წერტილი და, მაშასადამე, საყრდენის რეაქციის ცილინდრზე მოდების წერტილიც უმნიშვნელოდ წაინაცვლებს სხეულის შესაძლო გადაადგილების მიმართულებით, მაგალითად, გადავა $B$ წერტილში.

ვთქვათ, მრგვალი ცილინდრული საგორავი, რომელზედაც მოდებულია ვერტიკალურად $\vec{P}$ ძალა (რომელშიაც საგორავის წონაც შედის) და წნევის $\vec{F}$ ძალა, თანაბრად მიგორავს ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\vec{P}$ და $\vec{F}$ ძალთა $\vec{Q}$ ტოლქმედი საყრდენი სიბრტყის $\vec{R}$ რეაქციით წონასწორდება.

$\vec{R}$ რეაქციის ძალა დავშალოთ ნორმალურ $\vec{N}$ რეაქციად და სრიალის ხახუნის $\vec{T}$ ძალად. რადგან საგორავზე მოდებული ძალები წონასწორობაშია, ამიტომ ძალთა გეგმილების ჯამი $O_1x$ და $O_1y$ ღერძებზე და ძალთა მომენტების ჯამი $O_1$ წერტილის მიმართ უდრის ნულს:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i=0; \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i=0; \quad \sum_{i=1}^{n} m_{o_1}(\vec{F}_i) = 0$$

ანუ

$$F-T=0; \quad N-P=0; \quad F\cdot h-N\cdot d=0;$$

აქედან

$$T=F; \quad N=P \quad \text{და} \quad N\cdot d=F\cdot h.$$

$\vec{P}$ და $\vec{N}$ ძალები ($\vec{P}$, $\vec{N}$) ძალთა წყვილს ქმნიან, რომელიც აფერხებს გორვას. ამ ძალთა წყვილს გორვის ხახუნის ძალთა წყვილი ეწოდება და შემდეგ კანონზომიერებას ემორჩილება:

1. ხახუნის ძალთა წყვილის მომენტი რომელიმე მაქსიმალურ მნიშვნელობას არ აღემატება (მოცემულ პირობებში).

2. გორვის ხახუნის ძალთა წყვილის მომენტის მაქსიმალური მნიშვნელობა დამოკიდებული არ არის საგორავის რადიუსზე.

3. გორვის ხახუნის ძალთა წყვილის მომენტის მაქსიმალური მნიშვნელობა საგორავის სიბრტყეზე ნორმალური წნევის ($\vec{N}$ ნორმალური რეაქციის) პროპორციულია. ე. ი.

$$M_{\max}=f_{\text{გ}}\cdot N=f_{\text{გ}}\cdot P.$$

პროპორციულობის $f_ბ$ კოეფიციენტს გორვის ხახუნის კოეფიციენტი ეწოდება, ხაზობრივი სიდიდეა და თან დამოკიდებულია საგორავის მასალასა და საყრდენ სიბრტყეზე.

პირველი კანონის თანახმად გორვის ხახუნის ძალის წყვილის მომენტი:

$$\left.\begin{aligned} & M_{max} \geqslant N \cdot d, \\ \text{ე. ი. } & F \cdot h \leqslant P \cdot f_ბ, \\ & F \leqslant \frac{P \cdot f_ბ}{h}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

უკანასკნელ პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს წევის $\vec{F}$ ძალა საგორავის თანაბარი გორვის დროს. ვგულისხმობთ, რომ საგორავი უსრიალოდ გორავს, მაშინ პირველი გვარის ხახუნის $\vec{T}$ ძალა სტატიკური ხახუნის ძალაა. ცნობილია, რომ იგი არ აღემატება ერთგვარ მაქსიმალურ მნიშვნელობას (ჩვენს შემთხვევაში $T_{max} = f \cdot P$, სადაც $f$ მაქსიმალური სტატიკური ხახუნის კოეფიციენტია).

რადგან $T = F$, ამიტომ

$$\boxed{F \leqslant f \cdot P.} \qquad (2)$$

ამრიგად, საგორავის უსრიალოდ თანაბარი გორვის დროს წევის $\vec{F}$ ძალა (1) და (2) პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს.

### მაგალითი

განსაზღვრეთ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე ცილინდრული საგორავის თანაბარი გორვისათვის საჭირო $\vec{P}$ ძალა (ნახ. 100, ბ), თუ საგორავის დიამეტრია 120 სმ, მისი წონა $G = 1200$ ნიუტონს, გორვის ხახუნის კოეფიციენტი $f_ბ = 0{,}3$ სმ, ხოლო $\vec{P}$ ძალის მიერ ჰორიზონტალურ სიბრტყესთან შედგენილი კუთხე $\alpha = 30°$. განსაზღვრეთ აგრეთვე სიბრტყის $\vec{R}$ რეაქცია.

### ამოხსნა

ცილინდრული საგორავის ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე თანაბარი გორვის დროს საგორავზე მოქმედი ძალები ურთიერთწონასწორდებიან. საგორავზე მოდებულია ორი აქტიური ძალა: საგორავის $\vec{G}$ წონა და წევის $\vec{P}$ ძალა. საგორავზე მოქმედებს ერთი ბმა—ჰორიზონტალური სიბრტყე.

განვთავისუფლდეთ ბმისაგან; წარმოდგენით უკუვაგდოთ ჰორიზონტალური სიბრტყე და მისი მოქმედება შევცვალოთ $\overline{R}$ ძალით, რომელიც (რეაქცია) საგორავის ცენტრზე გატარებული ვერტიკალისაგან $f_ბ$ მანძილით დაშორებულ $B$ წერტილზეა მოდებული. $B$ წერტილიდან $O$ წერტილისაკენ მიმართულ $\overline{R}$ რეაქციის ძალას ვშლით ორ მდგენელად. სიბრტყის მართობულ ნორმალურ $\overline{N}$ მდგენელად და სიბრტყის ვასწვრივ მიმართულ გორვის ხახუნის $\overline{T}$ მდგენელად.

ამრიგად, საგორავზე მოდებულია ნებისმიერი ბრტყელი $\overline{G}$, $\overline{N}$ $\overline{P}$ და $\overline{T}$ ძალთა სისტემა.

ჰორიზონტალური ღერძი იყოს $Cx$ ღერძი, ვერტიკალური კი—$Cy$ ღერძი; უკანასკნელი საგორავის ცენტრზე გადის. მომენტთა ცენტრად $C$ წერტილი მივიღოთ, მაშინ წონასწორობის განტოლებები იქნება:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = P\cdot\cos\alpha - T = 0, \qquad (ა)$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = -G + N + P\cdot\sin\alpha = 0, \qquad (ბ)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_C(\overline{F}_i) = P\cdot h - f_ბ\cdot N = 0. \qquad (გ)$$

$\overline{P}$ ძალის $h$ მხარი მართკუთხა $KOC$ სამკუთხედიდან განვსაზღვროთ, თან დავუშვათ, რომ $CO = r$ (საგორავის დეფორმაციის სიმცირის გამო)

$$h = r\cdot\cos\alpha.$$

ამოცანის პირობიდან, მონაცემებისა და $h$-ის მნიშვნელობის (გ) განტოლებაში ჩასმით, მივიღებთ

$$N = P\cdot\frac{h}{f_ბ} = P\cdot\frac{r}{f_ბ}\cdot\cos\alpha.$$

$N$-ის მნიშვნელობის (ბ) განტოლებაში შეტანით მივიღებთ

$$G - P\cdot\sin\alpha - P\cdot\frac{r}{f_ბ}\cdot\cos\alpha = 0,$$

აქედან

$$P = \frac{G}{\sin\alpha + \frac{r}{f_ბ}\cdot\cos\alpha} = \frac{1200}{0{,}5 + \frac{60}{0{,}3}\cdot 0{,}866} = 6{,}9 \text{ ნ}.$$

(ა) განტოლების ამოხსნით განვსაზღვრავთ გორვის ხახუნის ძალას

$$T = P \cdot \cos \alpha = 6{,}9 \cdot 0{,}866 \approx 6 \text{ ნიუტონს.}$$

(ბ) განტოლებიდან განვსაზღვრავთ საყრდენის რეაქციის ნორმალურ მდგენელს

$$N = P \cdot \frac{r}{f_\delta} \cdot \cos \alpha = 6{,}9 \cdot \frac{60}{0{,}3} \cdot 0{,}866 = 1195 \text{ ნ.}$$

## § 3. სხეულის დახრილ სიბრტყეზე მოძრაობისას წარმოძვრილი ხახუნი

განვიხილოთ სხეულის (ცოციას) დახრილ სიბრტყეზე თანაბარი მოძრაობის შემთხვევა.

ვთქვათ, $\overline{G}$ წონის $M$ სხეული (ნახ. 101, ა) თანაბრად გადაადგილდება დახრილ სიბრტყეზე ქვემოდან ზემოთ, ჰორიზონტთან $\beta$ კუთხით მოქმედი $\overline{P}$ ძალის მოქმედებით.

ვთქვათ, ცნობილია $M$ ცოციას სიბრტყეზე ხახუნის $f$ კოეფიციენტი. $M$ ცოცია განიცდის $\overline{P}$ ძალის, $\overline{G}$ წონის, $\overline{F}$ ხახუნის ძალისა და $\overline{N}$ რეაქციის ძალის მოქმედებას.

განვსაზღვროთ $M$ ცოცია რა პირობებში აცოცდება თანაბრად სიბრტყეზე ზემოთ, თუ დახრილი სიბრტყე ჰორიზონტთან ადგენს $\alpha$ კუთხეს.

$\overline{N}$ და $\overline{F}$ კექტორებზე ვაგებთ ძალთა პარალელოგრამს და ვპოულობთ $\overline{R}$ ტოლქმედის მიმართულებას. $\overline{R}$ ტოლქმედი $nn$ ნორმალისაგან გადაიხრება მარცხნივ, ხახუნის $\varphi$ კუთხეზე. რადგან სხეული წრფივად და თანაბრად გადაადგილდება, ამიტომ მასზე მოდებული ძალთა მრავალკუთხედი ჩაკეტილი უნდა იყოს.

ვაგებთ ძალთა ჩაკეტილ $abc$ სამკუთხედს (ნახ. 101, ბ) მოდულით და მიმართულებით მოცემულ $\overline{G}$ ძალაზე და მიმართულებით ცნობილ $\overline{P}$ და $\overline{R}$ ძალებზე.

სინუსების თეორემით ვპოულობთ

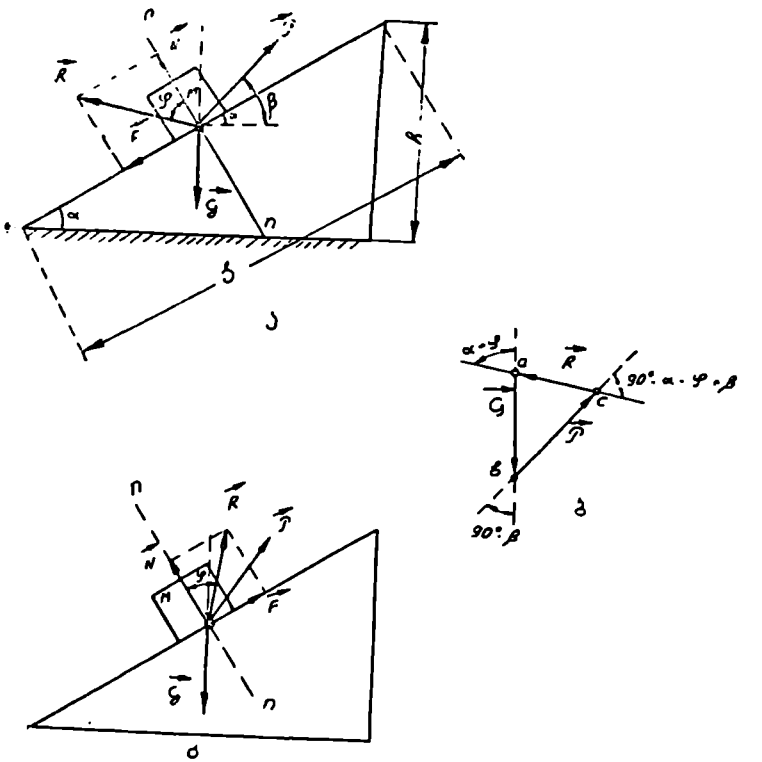
$$\frac{G}{\sin[90^\circ - (\alpha + \varphi - \beta)]} = \frac{P}{\sin(\alpha + \varphi)}.$$

საიდანაც

$$P = G \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta + \varphi)}. \qquad (ა)$$

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება ისეთი შემთხვევა, როდესაც $\overline{P}$ ძალა დახრილი სიბრტყის პარალელური ან ჰორიზონტალურია, მაშინ პირველი შემთხვევისათვის ($\beta=\alpha$) და

$$P=G\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\alpha-\alpha+\varphi)}=G\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}. \qquad (ბ)$$




ნახ. 101

მეორე შემთხვევისათვის ($\beta=0$) და

$$P=G\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\alpha+\varphi)}=G\cdot\operatorname{tg}(\alpha+\varphi). \qquad (გ)$$

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $M$ ცოცია, რომელზედაც მოქმედებს $\overline{P}$ ძალა, თანაბრად ეშვება ქვემოთ დახრილ სიბრტყეზე. ამ შემთხვევაში (ნახ. 101, გ) ხახუნის $\overline{F}$ ძალა შეიცვლის მიმართულებას

და, მაშასადამე, ხახუნის φ კუთხე უნდა მოვზომოთ მოპირდაპირე მხარეს, ე. ი. მარჯვნივ ნორმალისაგან; ასეთ შემთხვევაში საკმარისია (ა) ფორმულაში φ შევცვალოთ (—φ)-ით, ე. ი.

$$P=G\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos(\alpha-\beta-\varphi)}. \qquad (დ)$$

ანალოგიურად, იმ შემთხვევისათვის, როდესაც $\vec{P}$ ძალა დახრილი სიბრტყის პარალელურია, გვექნება

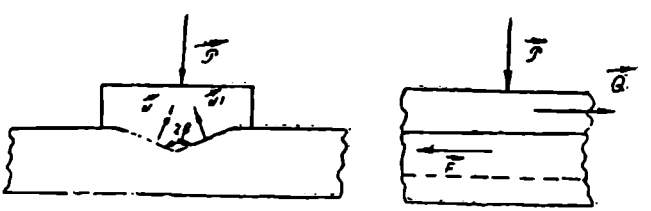
$$P=G\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}, \qquad (ე)$$

ხოლო, როდესაც $\vec{P}$ ძალა ჰორიზონტალის პარალელურია

$$P=G\cdot\operatorname{tg}(\alpha-\varphi). \qquad (ვ)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი

$\vec{P}$ ნიუტონის წონის სოლისებრი ცოცია თანაბრად მოძრაობს მიმართველებში (ნახ. 102) $\vec{Q}$ ძალის მოქმედებით.



ნახ. 102

იპოვეთ ცოციას ხახუნის ძალა და შეადარეთ იგი სხეულის სიბრტყეზე მოძრაობისას წარმოქმნილ ხახუნის ძალას.

ა მ ო ხ ს ნ ა

ცოციას მიმმართველებთან თანხების წახნაგებზე წარმოქმნილი ნორმალური რეაქციები იყოს $\vec{N}$ და $\vec{N}'$.

ძალები დავაგეგმილოთ შვეულ ღერძზე და მხედველობაში მივიღოთ, რომ $N=N'$, მაშინ ვიპოვით

$$2N\cdot\sin\beta=P,$$

საიდანაც

$$N=\frac{P}{2\sin\beta}.$$

თუ $f$ იქნება ხახუნის კოეფიციენტი, მაშინ ხახუნის ძალა ერთ წახნაგზე

$$F_1 = f \cdot N = \frac{f \cdot P}{2 \sin \beta};$$

სრული ხახუნის ძალა თანხების მთელ ზედაპირზე

$$F = 2F_1 = P \cdot \frac{f}{\sin \beta} = P \cdot f_1,$$

სადაც $f_1 = \frac{f}{\sin \beta}$ პირობითი ხახუნის კოეფიციენტია.

აქედან დავასკვნით, რომ სოლისებრი ცოციას ხახუნი მეტია, ვიდრე ხახუნი ბრტყელი ცოციას მოძრაობის დროს ($f_1 > f$). სოლისებრ ცოციას იყენებენ ისეთ მექანიზმებში, სადაც საჭიროა ხახუნის გადიდება.

VI თავი

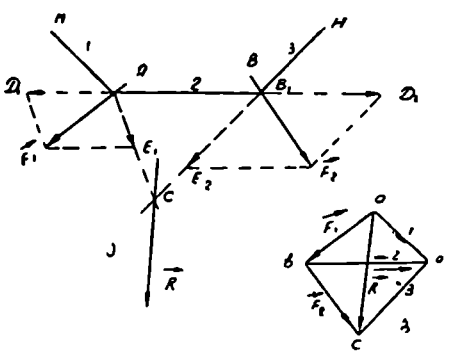
# გრაფიკული სტატიკის საფუძვლები. ფერმები

## §. 1 თოკის მრავალკუთხედი

აქამდე სიბრტყეზე ნებისმიერად განლაგებულ ძალთა სისტემის შეკრებისა და წონასწორობისათვის ვადგენდით სამ განტოლებას. მაგრამ ეს ე. წ. ანალიზური მეთოდი ერთადერთი როდია. იმავე საკითხების გადაწყვეტა გრაფიკული მეთოდითაც შეიძლება. სტატიკის იმ ნაწილს, რომელიც შეისწავლის გრაფიკულ მეთოდებს, გრაფიკული სტატიკა ან, მოკლედ, გრაფოსტატიკა ეწოდება.

კურსის დასაწყისში ნათქვამი იყო ე. წ. ძალთა მრავალკუთხედის აგებაზე, მაგრამ ამ აგებით მხოლოდ სხეულის ერთ წერტილზე მოდებული ძალთა ტოლქმედი განისაზღვრება. ამ შემთხვევაში ტოლქმედი ძალის მოდების წერტილი წინასწარ იყო ცნობილი, სახელდობრ: ძალთა ტოლქმედი სხეულის იმ წერტილზეა მოდებული, რომელზედაც მოდებული იყო მოცემულ ძალთა სისტემა. ამ შემთხვევაში ტოლქმედი ძალა სავსებით განისაზღვრება ძალთა მრავალკუთხედის აგებით.

იმ შემთხვევაში კი, როდესაც საჭიროა მყარი სხეულის სხვადასხვა წერტილზე მოდებული ძალთა სისტემის ტოლქმედის პოვნა, ერთი ძალთა მრავალკუთხედის აგებით მხოლოდ ტოლქმედის სიდიდე და მიმართულება განისაზღვრება, მაგრამ ტოლქმედის მოდების წერტილი, ან ტოლქმედის ფუძე განუსაზღვრელი რჩება. ძალის განმსაზღვრელი ეს უკანასკნელი ელემენტი, სახელდობრ, ტოლქმედი ძალის ფუძე, ე. წ. თოკის მრავალკუთხედის აგებით განისაზღვრება.



ნახ. 103

ვთქვათ, საჭიროა მყარი სხეულის $A$ და $B$ წერტილებზე მოდებული $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალების ტოლქმედის პოვნა (ნახ. 103, ა).

$\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალებზე ავაგოთ ძალთა $abc$ სამკუთხედი (ნახ. 103, ბ) და ვიპოვოთ ამ ძალთა $\vec{R}$ ტოლქმედი. იმ წერტილის საპოვნელად, რომელზედაც გაივლის ტოლქმედი, შევარჩიოთ პოლუსად წოდებული ნებისმიერი $O$ წერტილი და იგი შევუერთოთ ძალთა მრავალკუთხედის (ამ შემთხვევაში ძალთა სამკუთხედის) ყველა $a$, $b$ და $c$ წვეროს; მივიღებთ $abO$, $bcO$ და $acO$ სამკუთხედებს.

$\vec{F}_1$ ძალას ტოლქმედად თუ ჩავთვლით, მაშინ მდგენელები იქნება $aO$ და $Ob$.

$\vec{F}_1$ ძალა დავშალოთ $aO$ და $Ob$ პარალელურ მდგენელებად (ნახ. 103, ა); ამისათვის ნებისმიერი $M$ წერტილიდან $aO$-ს პარალელური წრფე გავატაროთ და $\vec{F}_1$ ძალა გადავიტანოთ $A_1$ წერტილზე, რომელიც მისი ფუძის $M$ წერტილზე გატარებულ წრფესთან გადაკვეთის წერტილს წარმოადგენს; $A_1$ წერტილზე $Ob$-ს პარალელური წრფე გავატაროთ და იგი $\vec{F}_2$ ძალის ფუძესთან $B_1$ წერტილში გადაკვეთამდე განვაგრძოთ. $\vec{F}_1$ ძალას ამ ორი მიმართულებით თუ დავშლით, $Ob$-ს ტოლსა და პარალელურ $A_1\vec{D}_1$ ძალასა და $aO$-ს ტოლსა და პარალელურ $A_1\vec{E}_1$ ძალას მივიღებთ. ამაში დავრწმუნდებით, თუ $A_1E_1F_1$ და $aOb$ სამკუთხედებს განვიხილავთ.

$B_1$ წერტილში გადატანილი $\vec{F}_2$ ძალა დავშალოთ $bO$ და $Oc$ პარალელურ მიმართულებად; მივიღებთ $bO$-ს ტოლსა და პარალელურ

$B_1D_2$ ძალასა და $Oc$-ს ტოლსა და პარალელურ $B_1E_2$ ძალას, რაც $B_1D_2F_2$ და $bOc$ სამკუთხედთა ტოლობიდან გამომდინარეობს.

როგორც ვხედავთ, $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალთა სისტემა ტოლფასი $A_1\vec{D}_1$, $A_1\vec{E}_1$, $B_1\vec{D}_2$ და $B_1\vec{E}_2$ ძალთა სისტემით შეიცვალა. რადგან $A_1\vec{D}_1$ და $B_1\vec{D}_2$ ძალები სიდიდით ტოლებია და საერთო მოქმედების წრფე აქვთ, მათ, როგორც ურთიერთგამაწონასწორებელ ძალებს, უკუვაგდებთ. აქის შედეგად მოცემული $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალთა სისტემა $C$ წერტილში თანმკვეთი მისი ტოლფასი $A_1\vec{E}_1$ და $B_1\vec{E}_2$ ძალთა სისტემით შეიცვალა. მაშასადამე, ამ წერტილზე უნდა გადიოდეს მოცემულ ძალთა სისტემის ტოლქმედი.

$MA_1B_1H$ ტეხილ წირს თოკის მრავალგვერდა ეწოდება, ხოლო $MA_1$, $A_1B_1$ და $B_1H$ მონაკვეთებს—მისი გვერდები.

ამრიგად, ტოლქმედის მოდული და მიმართულება განისაზღვრება ძალთა მრავალკუთხედით, ხოლო ტოლქმედის მოქმედების წრფე—თოკის მრავალგვერდის კიდური გვერდების გადაკვეთით.

ძალთა მრავალკუთხედის წვეროების პოლუსთან მაერთებელ $aO$, $bO$ და $cO$ წრფეებს სხივები ეწოდება. თოკის მრავალგვერდის გვერდები სათანადო სხივების პარალელურებია.

103, ა და ბ ნახაზის განხილვით შევნიშნავთ, რომ თუ ძალთა მრავალკუთხედში $\vec{F}_1$ ძალას 1 და 2 სხივები ფარგლავს, მაშინ ამ სხივების პარალელური თოკის მრავალგვერდის გვერდები იმავე $\vec{F}_1$ ძალაზე იკვეთება.

$\vec{F}_2$ ძალაზე თოკის მრავალგვერდის მეორე და მესამე გვერდები იკვეთება; ეს ძალა ძალთა მრავალკუთხედში შემოიფარგლება მეორე და მესამე სხივებით, რომლებიც, სათანადოდ, თოკის მრავალგვერდის მეორე და მესამე გვერდების პარალელურია.

სწორედ ასევე, $\vec{R}$ ტოლქმედზე თოკის მრავალგვერდის 1-ლი და მე-3 გვერდები იკვეთება; $\vec{R}$ ძალას ძალთა მრავალკუთხედში პირველი და მესამე სხივები შემოფარგლავენ.

ეს წესი აუცილებლად უნდა დავიმახსოვროთ იმისათვის, რომ შეცდომა არ დაეუშვათ თოკის მრავალგვერდის აგებისას, რომლის ფორმა ზოგჯერ შეიძლება მეტად გაუგებარი აღმოჩნდეს.

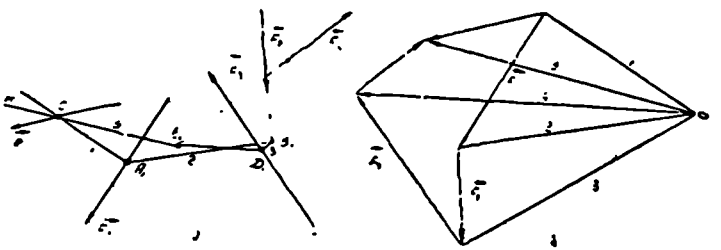
დავუშვათ, რომ $M$ და $H$ წერტილებში დამაგრებულია თოკის ბოლოები, რომლებზედაც ორი რგოლია ჩამოცმული. ამ რგოლებზე $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალები რომ მოვდოთ, როგორც ეს 103, ა ნახაზზეა ნაჩვენები, მაშინ თოკი $MA_1B_1H$ მრავალგვერდის სახეს მიიღებს; ამიტომ მას თოკის მრავალგვერდი ეწოდება.

## მაგალითები

1. იპოვეთ ოთხი $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ და $\vec{F}_4$ ძალის ტოლქმედი (ნახ. 104, ა).

### ამოხსნა

მოცემულ ძალებზე ძალთა მრავალკუთხედს (ნახ. 104, ბ) ვაგებთ და $\vec{R}$ ტოლქმედ ძალას ვპოულობთ. შემდეგ ძალთა მრავალკუთხედის ყველა წვეროს ნებისმიერ $O$ პოლუსს ვუერთებთ სხივებით, რომლებსაც მათი აგების რიგის მიხედვით ვნომრავთ.



ნახ. 104

ნებისმიერი $M$ წერტილიდან თოკის მრავალგვერდის პირველ გვერდს 1-ლი სხივის პარალელურად გავატარებთ $\vec{F}_1$ ძალის გადაკვეთამდე; გადაკვეთის წერტილიდან მე-2 სხივის პარალელურ თოკის მრავალგვერდის მეორე გვერდს გავატარებთ $\vec{F}_2$ ძალის გადაკვეთამდე და ა. შ.

ზემოთ მოყვანილი წესით გავატაროთ თოკის მრავალგვერდის ყველა გვერდი. თოკის მრავალგვერდის ($MA_1B_1D_1E_1H$) კიდური გვერდების გადაკვეთის $C$ წერტილი $\vec{R}$ ტოლქმედის მოქმედების წრფეზე ძევს.

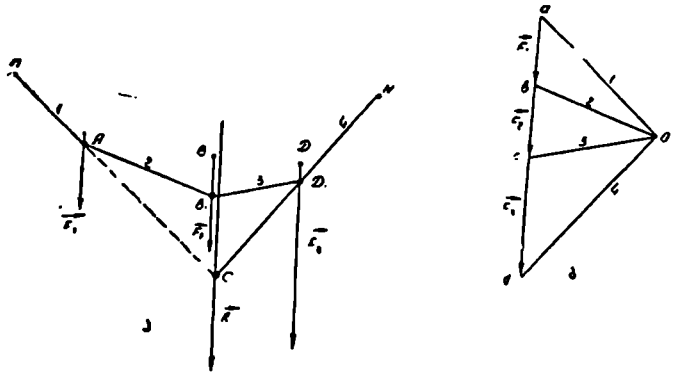
2. იპოვეთ, სამი პარალელური $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ და $\vec{F}_3$ ძალის (ნახ. 105, ა) ტოლქმედი.

ძალები მყარი სხეულის $A$, $B$ და $D$ წერტილებზეა მოდებული.

### ამოხსნა

ნებისმიერი $a$ წერტილიდან (ნახ. 105, ბ) ავაგებთ $abcd$ ძალთა მრავალკუთხედს, რომელიც ამ შემთხვევაში გაჭიმულია წრფედ. ნებისმიერად შერჩეული $O$ პოლუსიდან 1, 2, 3 და 4 სხივებს გავატარებთ და 105, ა ნახაზზე ნებისმიერი $M$ წერტილიდან თოკის $MA_1B_1D_1N$ მრავალგვერდს ავაგებთ ზემოთ მოყვანილი წესის მიხედვით. ამ მრავალ-

გვერდის კიდურა $MA_1$ და $ND_1$ გვერდებს $C$ წერტილში გადაკვეთამდე განვაგრძობთ. ამ წერტილზე გაივლის $\overline{R}$ ტოლქმედი ძალა, რომლის სიდიდესა და მიმართულებას ძალთა მრავალკუთხედიდან ვპოულობთ.

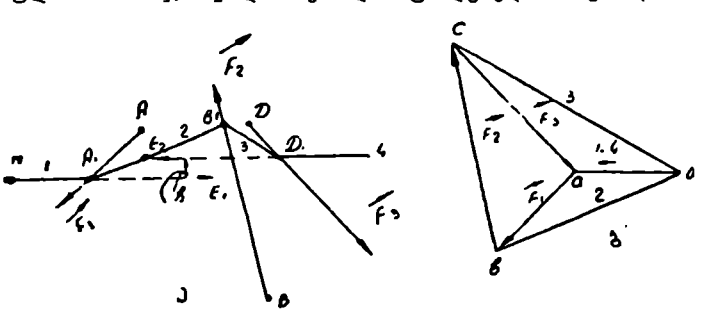


ნახ. 105

ცნობილია, რომ ტოლქმედი ძალის დასაწყისი პირველი ძალის დასაწყისშია, ხოლო ბოლო—უკანასკნელი ძალის ბოლოში. მაშასადამე, ძალთა მრავალკუთხედში იგი გამოისახება $a$ დასაწყისიანი და $b$ ბოლოიანი ვექტორით.

## § 2. წონასწორობის პირობები და საყრდენთა რეაქციების განსაზღვრა

ვთქვათ, საჭიროა მყარი სხეულის სამ $A$, $B$ და $D$ წერტილზე მოდებული სამი $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ და $\overline{F}_3$ ძალთა ტოლქმედის პოვნა (ნახ. 106, ა).



ნახ. 106

ძალთა მრავალკუთხედის აგებით (ნახ. 106, ბ) ვრწმუნდებით, რომ იგი ჩაკეტილია. ეს იმაზე მიგვითითებს, რომ ტოლქმედი ძალა ამ შემთხვევაში ნულის ტოლია.

ამის შემდეგ ვაგებთ თოკის მრავალგვერდს. ვინაიდან ი.ი.ოეულ ძალაზე იკვეთება სათანადო სხივების პარალელური თოკის მრავალგვერდის ორი გვერდი, რომლებითაც იფარგლება ეს ძალა, ამიტომ $\vec{F}_3$ ძალაზე მესამე და მეოთხე სხივების პარალელური თოკის მრავალგვერდის მე-3 და მე-4 გვერდები უნდა გადაიკვეთოს. მაგრამ მე-4 სხივი 1-ლ სხივს ემთხვევა, რადგან $\vec{F}_3$ ძალის ბოლო $\vec{F}_1$ ძალის დასაწყისს ემთხვევა; მაშასადამე, თოკის მრავალგვერდის მე-4 გვერდი 1-ლი გვერდის პარალელური იქნება. 106-ე ნახაზის მიხედვით ყოველ ძალას შლიან სათანადო სხივების ტოლი ვექტორებით გამოსახულ ორ მდგენელად. ასე, მაგალითად, $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალთა სისტემა შეიცვალა ორი ტოლფასი ძალთა სისტემით; ერთი მათგანი $A_1\vec{E}_1$ ძალაა, რომელიც $aO$ მდგენელის ტოლი და პარალელურია (ნახ. 103, ა), მეორე კი $B_1\vec{E}_2$ ძალაა, რომელიც $Oc$ მდგენელის ტოლი და პარალელურია.

ამ შემთხვევაში $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ და $\vec{F}_3$ ძალთა სისტემა (ნახ. 106, ბ) ორი $A_1\vec{E}_1$ და $D_1\vec{E}_2$ ძალის ტოლფასი სისტემით შეიცვალა, მასთან ორივე $aO$ მდგენელის ტოლი და პარალელურია, თან ურთიერთშებრუნებულად არიან მიმართული, ე. ი. ისინი წარმოქმნიან ძალთა წყვილს, რომლის მხარი უმოკლესი $h$ მანძილია $A_1\vec{E}_1$ და $D_1\vec{E}_2$ ძალებს შორის.

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ ძალთა მრავალკუთხედი ჩაკეტილია, ხოლო თოკის მრავალგვერდი მრავალკუთხედად არ იკვრება, მაშინ ძალთა სისტემა ძალთა წყვილზე დაიყვანება; ამ შემთხვევაში თოკის მრავალგვერდის კიდური გვერდები თანაპარალელურია.

ამ ძალთა წყვილის მომენტი მით ნაკლებია, რაც უფრო მცირეა $h$ მხარი. ძალთა წყვილის მომენტი ნულის ტოლი იქნება, თუ $h$ მხარი ნულის ტოლია. ამას ადგილი ექნება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც თოკის მრავალგვერდის კიდური გვერდები ერთ წრფეზე მდებარეობენ, ე. ი. ამ შემთხვევაში თოკის მრავალგვერდი ჩაკეტილ მრავალკუთხედად იქცევა (ნახ. 107, მრავალკუთხედი $A_1B_1D_1A_1$).

ამრიგად, *ძალთა ბრტყელი სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ჩაკეტილი იყოს ძალთა და თოკის მრავალკუთხედები.*

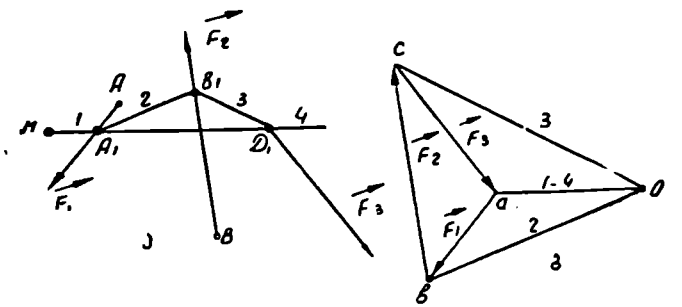
ახლა ვნახოთ, თუ როგორ განისაზღვრება საყრდენთა რეაქციები გრაფიკული მეთოდით.

ჰორიზონტალური $AB$ კოჭი დატვირთულია $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ და $\vec{P}_3$ (ნახ. 108, ა) ძალებით.

საჭიროა $A$ და $B$ საყრდენთა რეაქციების განსაზღვრა.

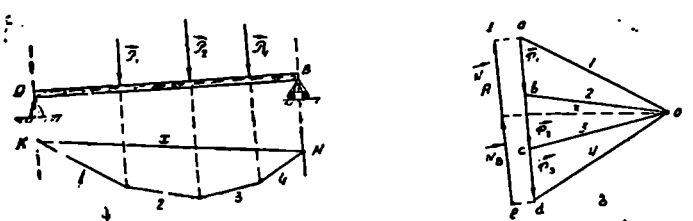
მოცემული ძალების მიხედვით ავაგებთ *abcd* ძალთა მრავალკუთხედს (ნახ. 108, ბ), რომელიც ამ მაგალითში ერთ წრფედ გაიშიმა.

ავიღოთ ნებისმიერი *O* პოლუსი და 1, 2, 3 და 4 სხივები გავატაროთ; შემდეგ ავაგოთ მრავალგვერდი და აღვნიშნოთ *K* და *H* წერტილები, რომლებშიაც თოკის მრავალგვერდის კიდურა გვერდები საყრდენთა რეაქციების ფუძეებს კვეთს.




ნახ. 107

ორიჟე რეაქცია ცნობილი რომ ყოფილიყო, მაშინ ძალთა მრავალკუთხედზე მათი მიშენებით ჩაკეტილ მრავალკუთხედს მივიღებდით. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ერთ-ერთი რეაქციის ბოლო დაემთხვეოდა $\vec{P}_1$ ძალის დასაწყისს.

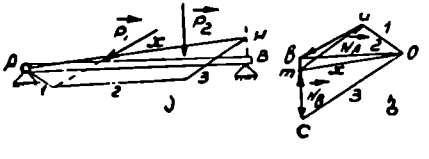



ნახ. 108

დავუშვათ, რომ $\vec{P}_3$ ძალის ბოლოზე ავაგეთ $\vec{N}_B$ რეაქცია. მაშინ ძალთა მრავალკუთხედში $\vec{N}_B$ რეაქცია შემოიფარგლებოდა მე-4 სხივით და კიდევ რომელიმე, ჯერ ჩვენთვის უცნობი სხივით.

მაგრამ ასეთ შემთხვევაში 108, ა ნახ-ზე მე-4 და $x$ სხივების პარალელური თოკის მრავალგვერდის გვერდები უნდა გადაიკვეთოს $\vec{N}_B$

რეაქციის მიმართულებაზე. იმის გამო, რომ თოკის მრავალგვერდის მე-4 გვერდი $\vec{N}_B$ რეაქციის მიმართულებასთან $H$ წერტილში იკვეთება, მისი მეორე გვერდიც, რომელიც ჯერ უცნობი $x$ სხივის პარალელურია, იმავე $H$ წერტილზე გაივლის. ამის შემდეგ $\vec{N}_B$ რეაქციის ბოლოზე $\vec{N}_A$ რეაქცია რომ მივაშენოთ, ამ უკანასკნელის ბოლო $\vec{P}_1$ ძალის $a$ დასაწყისს უნდა დაემთხვეს. მაშასადამე, $\vec{N}_B$ რეაქცია ძალთა მრავალკუთხედში $x$ და 1 სხივებით იფარგლება. მაგრამ ასეთ შემთხვევაში ამ სხივების პარალელური თოკის მრავალგვერდის გვერდები ამ რეაქციის მიმართულებაზე იკვეთება. რადგან 1-ლი გვერდი $\vec{N}_B$ რეაქციის მიმართულებას $K$ წერტილში კვეთს, ამიტომ $x$ სხივის პარალელური გვერდიც ამ წერტილზე უნდა გადიოდეს. ამრიგად, თოკის მრავალგვერდის ეს გვერდი $H$ და $K$ წერტილებზე უნდა გადიოდეს. ამის შემდეგ ძალთა მრავალკუთხედის $O$ პოლუსზე თოკის მრავალგვერდის $HK$ გვერდის პარალელური $x$ სხივი გავატაროთ; მივიღებთ $m$ წერტილს. მაშინ $\vec{N}_B$ რეაქცია $\vec{dm}$ ვექტორით გამოისახება, $\vec{N}_A$ რეაქცია კი — $\vec{ma}$ ვექტორით, რაც 108, ბ ნახ-ზე აღნიშნულია რეაქციების ამსახველი ვექტორების მარცხნივ გატანით.



ნახ. 109

თუ კოჭის ერთი $A$ ბოლო დგართან სახსრით იქნება შეერთებული (ნახ. 109, ა), ხოლო მეორე $B$ ბოლო თავისუფლად ძევს საყრდენზე, მაშინ თოკის მრავალგვერდის აგება უძრავი $A$ წერტილიდან უნდა დავიწყოთ, რადგან ამ შემთხვევაში წინასწარ ცნობილია მხოლოდ ეს ერთი წერტილი, რომელზედაც გაივლის საყრდენის რეაქცია.

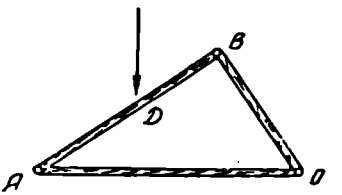
ძალთა მრავალკუთხედის აგების შემდეგ ვიწყებთ თოკის მრავალგვერდის აგებას, ისე რომ 1-ლი სხივის პარალელური თოკის მრავალგვერდის 1-ლი გვერდი $A$ წერტილზე გადიოდეს.

ძალთა მრავალკუთხედის $O$ პოლუსზე გავატაროთ $x$ სხივი, რომელიც თოკის მრავალგვერდის $x$ გვერდის პარალელურია; ამით ვპოულობთ $\vec{N}_A$ და $\vec{N}_B$ რეაქციებს.

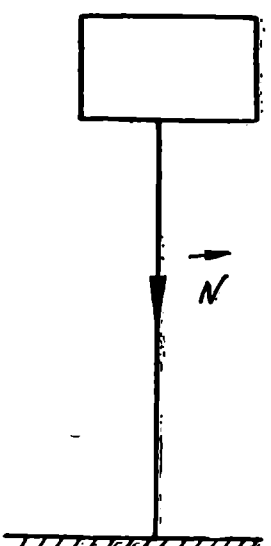
### § 3. ფერმის განსაზღვრა

ღეროვანი ფერმა ღეროებისაგან შემდგარი ნაგებობაა. ღეროების ბოლოები ერთმანეთთან სახსრითაა შეერთებული ისე, რომ ჩაკეტილ სამკუთხედებს ქმნიან.

ფერმა ბრტყელია, თუ მისი წარმომქმნელი ყველა ღეროვანი სამკუთხედი და მათი წვეროები, რომლებსაც კვანძები ეწოდება, ერთ სიბრტყეში ძევს. ამ დროს ფერმაზე მოდებული ყველა გარე ძალა ფერმის სიბრტყეში უნდა მდებარეობდეს და მხოლოდ გარე კვანძებზე უნდა იყოს მოდებული, რადგან, წინააღმდეგ შემთხვევაში, ასეთი ფერმა ღეროვანი არ იქნებოდა. მართლაც, თუ ძალა მოდებულია ღეროს რაიმე $D$ წერტილზე (ნახ. 110), მაშინ იგი გაღუნავდა $AB$ ღეროს; ასეთ შემთხვევაში $AB$ ღეროს ვერ დავარქმევთ, რადგან ღერო ნაგებობის ისეთ ნაწილს ეწოდება, რომელიც მხოლოდ ღერძულ დატვირთვას (ნახ. 111) ეწინააღმდეგება.



ნახ. 110



ნახ. 111

ამიტომ ასეთი ბმის $\overline{N}$ რეაქცია ღეროს გასწვრივაა მიმართული.

მაგრამ სტატიკის საშუალებით ყოველ ღეროვან ფერმაში როდი შეიძლება ძალის განსაზღვრა ღეროში.

ახლა ვნახოთ, თუ როგორი პირობა უნდა დააკმაყოფილოს ღეროვანმა ფერმამ, რომლის ღეროების ძალების განსაზღვრა შეიძლება სტატიკის ხერხით.

ვთქვათ, ფერმა $n$ კვანძისაგან შედგება (ნახ. 112). ერთი კვანძის წონასწორობის განხილვით შეგვიძლია წონასწორობის ორი განტოლების შედგენა:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0.$$

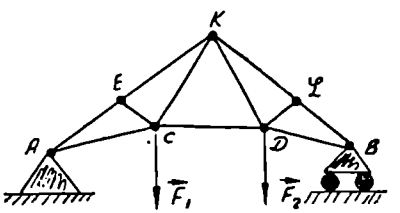
ამ განტოლებებში შედის კვანძზე მოდებული გარე ძალებისა და ღეროს ამ კვანძში ღავმოყრილი რეაქციების გეგმილები. რადგან ფერმას აქვს $n$ კვანძი, ამიტომ შეგვიძლია წონასწორობის $2n$ განტოლების შედგენა, რომლებშიაც შედის მოდებული გარე ძალები და საყრდენთა რეაქციები. მაგრამ მოდებული გარე ძალებისა და საყრდენთა რეაქციებისათვის შეიძლება წონასწორობის სამი განტოლების შედგენა:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} m_0(\vec{F}_i) = 0,$$

ან

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} m_B(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} m_C(\vec{F}_i) = 0.$$

მაგრამ ეს სამი განტოლება დამოუკიდებელი არ იქნება; მათი მიღება შეიძლება წინათ შედგენილი $2n$ განტოლებიდან. $2n$ განტოლებიდან უცნობი საყრდენი რეაქციების განმსაზღვრელ სამ განტოლებას თუ გამოვრიცხავთ, ღეროების რეაქციების განსაზღვრისათვის დაგვრჩება $2n-3$ განტოლება. როგორც ცნობილია, ღეროს რეაქცია ღეროს ღერძის გასწვრივაა მიმართული; მაშასადამე, უცნობი რჩება მისი სიდიდე. ამრიგად, $2n-3$ განტოლება $m$ უცნობის განსაზღვრის საკმარისი პირობა იქნება, თუ $m$-ით ღეროთა რაოდენობას აღვნიშნავთ.




ნახ. 112

რადგან განტოლებათა რიცხვი უცნობთა რიცხვს უნდა უდრიდეს, ამიტომ გვექნება

$$\boxed{m = 2n - 3.} \qquad (1)$$

ეს ტოლობა თანაფარდობას ამყარებს ფერმის ღეროთა რაოდენობასა და კვანძთა რაოდენობას შორის. მისი ამოხსნა შეიძლება სტატიკის მეთოდით. ასეთ ფერმებს სტატიკურად რკვევადი ფერმები ეწოდება.

112-ე ნახ-ზე გამოსახულ ფერმას 11 ღერო და 7 კვანძი აქვს.

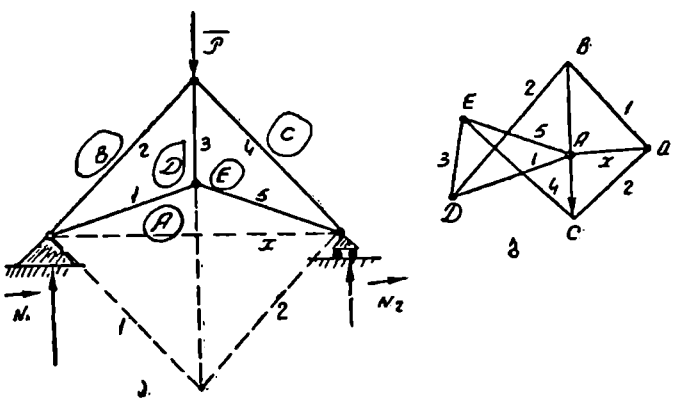
$m = 2n - 3$ ფორმულით ვპოულობთ

$$11 = 2 \cdot 7 - 3,$$

ე. ი. აღნიშნული ტოლობა დაცულია; მაშასადამე, ფერმა სტატიკურად რკვევადია.

## § 4. ძალვების განსაზღვრა ფერმის ღეროებში

განვსაზღვროთ საყრდენთა რეაქციები და მათი გარე ძალებად მიღებით თითოეული კვანძი განვიხილოთ ცალ-ცალკე. ვაგებთ ძალთა მრავალკუთხედს. აგებას იმ ძალიდან ვიწყებთ, რომლის სიდიდე და მიმართულება ცნობილია; შემდეგ მას ჩავკეტავთ იმ ღეროების პარალელური მიმართულებებით, რომელთა (ღეროების) რეაქციები უნდა განვსაზღვროთ. მაგრამ ამის გაკეთება შეიძლება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც მოცემულ კვანძში თავს იყრის ორი ღერო; ამიტომ ღეროების რეაქციების განსაზღვრა იმ კვანძებიდან იწყება, სადაც თავს იყრის ორი ღერო და რომელზედაც ცნობილი გარე ძალაა მოდებული. ამის გამორკვევა შემდეგი მაგალითით შეიძლება.




ნახ. 113

ვთქვათ, საჭიროა ძალვების განსაზღვრა 113, ა ნახაზზე გამოსახული ფერმის ღეროებში. ეს ფერმა ზედა კვანძში დატვირთულია $\overrightarrow{P}$ ძალით.

გაანგარიშება დავიწყოთ საყრდენთა რეაქციების განსაზღვრით. ამისათვის ავაგოთ ცნობილი $\overrightarrow{P}$ ძალიდან დაწყებული ძალთა მრავალკუთხედი. მთელი აგება ერთ ნახაზზე რომ მოთავსდეს, მოვიქცეთ შემდეგნაირად. ფერმის გარშემო სიბრტყე მოდებული $\overrightarrow{P}$ ძალით და ორივე საყრდენის რეაქციით $A$, $B$ და $C$ ასოებით აღნიშნულ ცალკე უბნებად დავყოთ. ამრიგად, ყოველი გარე ძალა მოსაზღვრე უბნებს შორის საზღვარს წარმოადგენს. ასე, მაგალითად, $\overrightarrow{P}$ ძალა $B$ და $C$ უბნების საზღვარია; $\overrightarrow{N}_1$ რეაქცია $A$ და $B$ უბნებს შორის საზღვარია და ა. შ.

ფერმის ღეროებით შემოსაზღვრული უბნები $D$ და $E$ ასოებით აღვნიშნოთ.

ძალთა მრავალკუთხედს ვაგებთ ვარკვეული წესით. ფერმის გარშემო საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით თუ წავალთ, მოვხვდებით $A$ უბნიდან $B$ უბანში, შემდეგ გადავდივართ $C$ უბანში; ამავე დროს გადავდივართ $\overline{N}_1$ ძალიდან $\overline{P}$ ძალაზე და ა. შ. ძალთა მრავალკუთხედის აგება $\overline{P}$ ძალით დავიწყოთ; მისი დასაწყისი იმ უბნის ასოთი აღვნიშნოთ, რომელ უბანზეც ამ ძალიდან გადავდივართ: ამ შემთხვევაში $\overline{P}$ ძალის დასაწყისს აღვნიშნავთ $B$ ასოთი (ნახ. 113, ბ), ხოლო ბოლოს—$C$ ასოთი. $\overline{P}$ ძალის გარდა სხვა ძალებიც რომ ყოფილიყო მოდებული, მაშინ $\overline{P}$ ძალის ბოლოზე ის ძალა უნდა მიგვეშენებინა, რომელსაც $C$ უბანი საზღვრავს შემდეგისაგან. ამ მოქმედების გაგრძელებით ვაგებთ ძალთა მრავალკუთხედს. ჩვენს მაგალითში მხოლოდ ერთი მოდებული $\overline{P}$ ძალა გვაქვს; ამ ძალის აგების შემდეგ შევარჩევთ $O$ პოლუსს და მხოლოდ ამის შემდეგ შევუდგებით თოკის მრავალგვერდის აგებას, რომელსაც $x$ გვერდით ჩავკეტავთ (თოკის მრავალკუთხედის გვერდები წყვეტილითაა გატარებული). შემდეგ $O$ პოლუსზე გავატარებთ $x$ გვერდის პარალელურ სხივს; ამით ვიპოვით $\overline{N}_1$ და $\overline{N}_2$ რეაქციებს, მასთან $C$ და $A$ უბნების საზღვარია $\overline{N}_2$ რეაქცია; იგი ძალთა მრავალკუთხედის $C$ წერტილიდან გამოდის, მისი ბოლო კი, ზემოთ მიღებული წესის მიხედვით, $A$ ასოთი აღვნიშნოთ. $A$ უბნის $B$ უბნისაგან გამომყოფ $\overline{N}_1$ რეაქციას დასაწყისი ექნება $A$ წერტილში, ბოლო კი—$B$ წერტილში.

ძალთა მრავალკუთხედის აგებით და საყრდენთა რეაქციების განსაზღვრით გადავდივართ ღეროთა რეაქციების განსაზღვრაზე.

ვიწყებთ იმ კვანძის წონასწორობის განხილვით, სადაც თავს იყრის ორი ღერო; მაგალითად, დავიწყოთ იმ კვანძიდან, რომელზედაც მოდებულია $\overline{N}_1$ რეაქცია. ძალთა მრავალკუთხედზე იგი $A$ და $B$ ასოებითაა აღნიშნული. ფერმის ამ კვანძში სამი $A$, $B$ და $D$ უბანი იყრის თავს. 1-ლი ღერო $D$ უბანს $A$ უბნისაგან გამოყოფს, ამიტომ ძალთა მრავალკუთხედის $A$ წერტილიდან 1-ლი ღეროს პარალელურ წრფეს გავატარებთ. სწორედ ასევე, მე-2 ღერო $B$ უბანს გამოყოფს $D$ უბნისაგან, ამიტომ ძალთა მრავალკუთხედის $B$ წერტილზე მე-2 ღეროს პარალელურ წრფეს გავატარებთ. ამ ორი წრფის გადაკვეთის წერტილს $D$ ასოთი აღვნიშნავთ. ჩაკეტილ $ABD$ ძალთა სამკუთხედს თუ განვიხილავთ, ვიპოვით, რომ 1-ლი ღეროს რეაქცია მასზე $\overrightarrow{DA}$ ვექტორითაა გამოსახული, მე-2 ღეროს რეაქცია კი—$\overrightarrow{BD}$ ვექტორით.

შემდეგ გადავდივართ იმ კვანძზე, რომელზედაც მოდებულია $\bar{P}$ ძალა. ვხედავთ, რომ ამ კვანძში თავს იყრის $B$, $D$, $E$ და $C$ უბნები, ამიტომ $C$ წერტილზე გავატარებთ მე-4 ღეროს პარალელურ წრფეს, $D$ წერტილზე კი—მე-3 ღეროს პარალელურ წრფეს; მათი გადაკვეთის წერტილი $E$ ასოთი აღვნიშნოთ, რადგან 3 და 4 ღეროები მოსაზღვრე უბნებიდან $E$ უბანს გამოყოფენ. $ABCDE$ პარალელკუთხედის გვერდები ძალებს განსაზღვრავენ ყველა უბანში. ამ ნახაზიდან ჩანს, რომ ერთ კვანძში თავმოყრილი გარე ძალა და ღეროები ჩაკეტილ სამკუთხედს ქმნიან.

სტატიკის პრინციპის ძალით, თვით მე-2 ღერო განიცდის ასეთივე მოქმედების, მაგრამ შებრუნებული მიმართულების ძალის მოქმედებას (ეს ძალა ღეროს შიგნითაა მიმართული). ასეთი ძალის მოქმედებით მე-2 ღერო იკუმშება.

იმავე $ABD$ სამკუთხედიდან ვპოულობთ, რომ 1-ლი ღეროს რეაქცია $D$ წერტილისაკენ იქნება მიმართული. მისი იმავე კვანძში გადატანით ვნახავთ, რომ იგი ღეროს შიგნითაა მიმართული. მაშასადამე, თვით 1-ლი ღერო ისეთივე ძალის ზემოქმედებაშია, რომელიც ღეროს გაგრძელებას მიჰყვება; ასეთი ძალის ზემოქმედებით 1-ლი ღერო გაიჭიმება.

თუ შევთანხმდებით და გამჭიმავ ძალებს დიაგრამაზე ცალფა ხაზით გამოვსახავთ, ხოლო მკუმშავ ძალებს—ორფათი, $BD$ გვერდი ორფა ხაზით უნდა გავატაროთ, $AD$ გვერდი კი—ცალფათი.

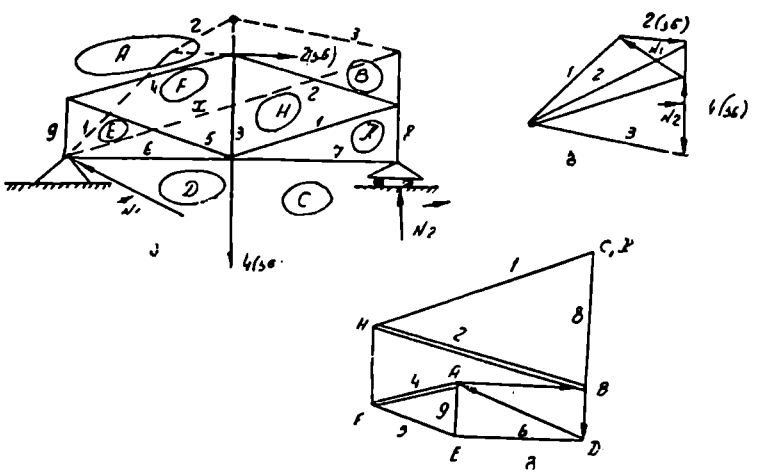
$B$, $D$, $E$ და $C$ უბნებისა და $\bar{P}$ ძალის თავმოყრის კვანძის განხილვით დიაგრამაზე იმავე ასოებით აღნიშნულ ძალთა მრავალკუთხედს ვპოულობთ. რადგან კვანძის წონასწორობის დროს ყველა ძალის დენადობა ერთნაირია, ამიტომ მე-4 ღეროს რეაქცია $C$ წერტილიდან $D$ წერტილში მიემართება; მისი კვანძზე გადატანიდან ჩანს, რომ იგი ღეროს გაგრძელებას მიჰყვება; მაშასადამე, თვით მე-4 ღერო შეკუმშული იქნება, რაც ორფა ხაზითაა აღნიშნული.

მე-3 ღეროს რეაქცია $E$ წერტილიდან $D$ წერტილისკენაა მიმართული; მისი კვანძზე გადატანით მე-3 ღერო იჭიმება. სწორედ ასეთივე ხერხით განვსაზღვრავთ დანარჩენ ღეროებში მოქმედ ძალებს.

### მ ა გ ა ლ ი თ ი

იპოვეთ 114-ე ნახ-ზე გამოსახული ფერმის ღეროების ძალები.

ჯერ ვაგებთ ძალთა მრავალკუთხედს, შემდეგ კი— ძალის მრავალკუთხედს და ვპოულობთ $\overline{N}_1$ და $\overline{N}_2$ რეაქციებს. ამ რეაქციებს ფერმაზე აღვნიშნავთ. ფერმის შემომფარგლავ სიბრტყეებსა და ღეროების შემომფარგლავ უბნებს სათანადო ასოებით აღვნიშნავთ. შემდეგ ვაგებთ ძალთა მრავალკუთხედს (ნახ. 114, ა) შესაკრებ ძალთა წესის დაცვით. მაგალითად, აგება დავიწყოთ 2 კილონიუტონი ძალით. მისი დასაწყისი აღვნიშნოთ $A$ ასოთი, ბოლო კი—$B$ ასოთი. ამის შემდეგ ფერმის გარშემო გავყვეთ საათის ისრის მოძრაობას $\overline{N}_2$ რეაქციამდე, ამ რეაქციას მივაშენოთ $B$ წერტილში 2 კილონიუტონი ძალა და მისი ბოლო $C$ ასოთი აღვნიშნოთ. შემდეგ მივდივართ იმავე მიმართულებით და ვხვდებით 4 კილონიუტონ ძალას, რომელსაც მივაშენებთ $C$ წერტილზე; ამ ძალის ბოლოს $D$ ასოთი აღვნიშნავთ. $D$ უბნიდან $A$ უბანში მოვხვდებით $\overline{N}_1$ რეაქციაზე გავლით, რომელსაც მივაშენებთ $D$ წერტილზე, მისი ბოლო კი $A$ წერტილში მოხვდება.




ნახ. 114

ამ წესით აიგება $ABCDA$ ძალთა მრავალკუთხედი (ნახ. 114). ამის შემდეგ შევუდგებით ღეროების ძალვების განსაზღვრას. დასაწყისისათვის შევარჩევთ კვანძს, რომელზედაც $\overline{N}_1$ რეაქციაა მოდებული, რადგან ამ კვანძში თავს იყრის ორი ღერო. $\overline{N}_1$ რეაქცია ძალთა მრავალკუთხედში $\overline{DA}$ ვექტორითაა წარმოდგენილი.

მე-6 ღერო $E$ უბანს $D$ უბნისაგან გამოჰყოფს; ამ შემთხვევაში $D$ წერტილზე გავატარებთ მე-6 ღეროს პარალელურ წრფეს, $A$ წერტილზე კი—მე-9 ღეროს პარალელურ წრფეს. ამ ორი წრფის გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ $E$ ასოთი, ე. ი. იმ ასოთი, რომლითაც დანარჩენი უბნებისაგან მე-6 და მე-9 ღეროებით გამოყოფილი უბანია აღნიშნული.

გადავდივართ შემდეგ კვანძზე, რომელშიაც მე-9, მე-5 და მე-4 ღეროები იყრის თავს. რადგან მე-4 ღერო $F$ უბნისაგან $A$ უბანს გამოჰყოფს, ამიტომ $A$ წერტილზე მე-4 ღეროს პარალელური წრფე გაგვყავს; $E$ წერტილიდან მე-5 ღეროს პარალელური წრფე გავატაროთ და მათი გადაკვეთის წერტილი $F$ ასოთი აღვნიშნოთ.

ამის შემდეგ გადავდივართ იმ კვანძზე, რომელზედაც 2 კილონიუტონი ძალაა მოდებული; ეს ძალა ძალთა მრავალკუთხედში $\overline{AB}$ ვექტორითაა ასახული.

რადგან მე-3 ღერო $H$ უბანს $F$ უბნისაგან გამოყოფს, ამიტომ $F$ წერტილზე გაგვყავს მე-3 ღეროს პარალელური წრფე, $B$ წერტილზე—$B$ უბნის $H$ უბნისაგან გამომყოფი მე-2 ღეროს პარალელური წრფე. ამ წრფეთა გადაკვეთის წერტილი $H$ ასოთი აღვნიშნოთ.

შემდეგ გადავდივართ კვანძზე, რომელშიაც თავს იყრის 2,1 და 8 კვანძები; $H$ წერტილზე გაგვყავს 1-ლი ღეროს პარალელური წრფე, $C$ წერტილიდან კი—მე-8 ღეროს პარალელური წრფე. ეს ორი წრფე $C$ წერტილში იკვეთება; მაგრამ ეს წერტილი, ზოგადი წესის მიხედვით, $K$ ასოთი უნდა აღვნიშნოთ. ამრიგად, ამ მაგალითში $K$ წერტილი $C$ წერტილს უთავსდება.

დაბოლოს, $B$ წერტილიდან გაგვყავს მე-8 ღეროს პარალელური წრფე; ეს წრფე, ზოგადი წესის მიხედვით, 1-ლი ღეროს პარალელურ წრფესთან $K$ წერტილში უნდა იკვეთებოდეს.

ამრიგად, ავაგეთ ძალთა $ABDEFHCK$ მრავალკუთხედი.

$ADE$ სამკუთხედის განხილვით ვპოულობთ, რომ მე-9 ღეროს რეაქცია $A$ წერტილიდან $E$ წერტილისკენაა მიმართული და მას $\overline{N}_1$ რეაქციის მოდების კვანძში თუ გადავიტანთ, მე-9 ღეროს რეაქცია ღეროს გავრძელების მიმართულებას გაჰყვება; მაშასადამე, მე-9 ღერო შეკუმშული იქნება, რაც დიაგრამაზე ორფა ხაზით არის აღნიშნული.

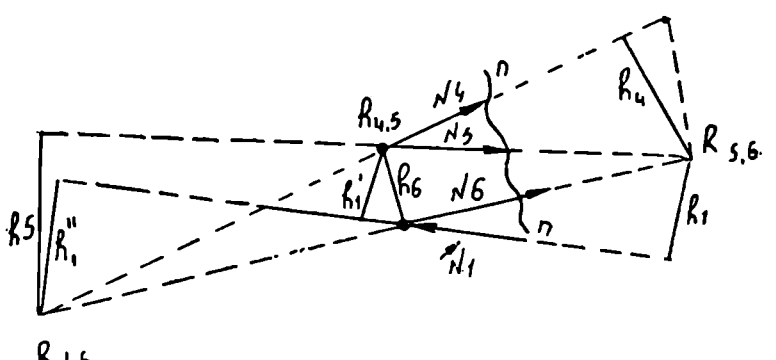
რადგან $K$ და $C$ წერტილები დიაგრამაზე თანხვდებიან, ამიტომ მე-7 ღეროს რეაქცია ნულის ტოლია. ასეთი მსჯელობის ჯაგრძელებით ვიპოვით, რომ მე-2, მე-4 და მე-8 ღეროები შეკუმშული იქნება, დანარჩენები კი—გაჭიმული.

## § 5. ფერმის ღეროებში ძალვების განსაზღვრის გრაფიკულ-ანალიზური მეთოდი

ფერმების გაანგარიშების წმინდა გრაფიკული მეთოდის გარდა არსებობს აგრეთვე გრაფიკულ-ანალიზური მეთოდი. ეს მეთოდი იმაში მდგომარეობს, რომ ფერმას გაჰკვეთენ ორ ნაწილად და ერთ-ერთი ნაწილისათვის ადგენენ წონასწორობის სამ განტოლებას შემდეგი ფორმით:

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\vec{F}_i)=0; \qquad \sum_{i=1}^{n} m_B(\vec{F}_i)=0 \qquad \text{და} \qquad \sum_{i=1}^{n} m_C(\vec{F}_i)=0.$$

ფერმა წარმოდგენით ისე უნდა გავკვეთოთ, რომ მის ერთ წერტილში მოხვდეს არათანამკვეთი სამი ღერო. სამი გაკვეთილი ღეროდან ყოველი წყვილი ღეროს თანაკვეთის მიმდევრობითი სამი წერტილი მომენტების ცენტრებად მივიჩნიოთ და ამ წერტილების მიმართ მომენტთა სამი განტოლება შევადგინოთ. ამ დროს ძალთა მხრებს არ გამოითვლიან, არამედ გაზომავენ ფერმის გამოსახულების სქემაზე. განსახილველი სამი ღეროდან ორი პარალელური თუ აღმოჩნდა, მაშინ მომენტთა სამი განტოლებიდან ერთ-ერთის ნაცვლად ადგენენ ყველა ძალის (და ღეროების რეაქციების) გეგმილთ ჯამს პარალელური ღეროების მართობ ღერძზე.




ნახ. 115

მაგალითად, განვსაზღვროთ წინა პარაგრაფში განხილული ფერმის მე-4, მე-5 და მე-6 ღეროების ძალვები. ამისათვის ფერმა $n-n$ კვეთით გავკვეთოთ (ნახ. 115) და მარცხენა ნაწილის წონასწორობა განვიხილოთ მასზე მოქმედი ყველა ძალის მოხსნით და გაკვეთილი ღეროების $\vec{N}_4$,

$\vec{N}_5$ და $\vec{N}_6$ რეაქციებით შეცვლით. შემდეგ ყოველი წყვილი გაკვეთილი ღეროს თანკვეთის წერტილები სათანადოდ $R_{4-5}$, $R_{4-6}$ და $R_{5-6}$ წერტილებით აღვნიშნოთ; ეს წერტილები მომენტთა ცენტრებად მივიღოთ. ამ წერტილებიდან ძალების მიმართულებებზე $h_1$, $h_1'$, $h_1''$, $h_4$, $h_5$, $h_6$,... მართობები დავუშვათ და მათი გაზომვის შემდეგ შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$N_1 \cdot h_1' - N_6 \cdot h_6 = 0;$$
$$-N_1 \cdot h_1'' + N_5 \cdot h_5 = 0;$$
$$N_1 \cdot h_1 + N_4 \cdot h_4 = 0.$$

მაგრამ საყრდენის $N_1$ რეაქცია უკვე ნაპოვნი იყო ($N_1 = 2{,}61$ კილონიუტონს). მხრების გაზომვით, ვპოულობთ:

$$h_1 = 28 \text{ მმ}; \quad h_1' = 13 \text{ მმ}; \quad h_1'' = 29{,}5 \text{ მმ};$$
$$h_4 = 29{,}5 \text{ მმ}; \quad h_5 = 30 \text{ მმ} \quad \text{და} \quad h_6 = 16 \text{ მმ}.$$

მათი წონასწორობის განტოლებებში ჩასმით, მივიღებთ:

$$2{,}61 \cdot 13 - N_6 \cdot 16 = 0;$$
$$-2{,}61 \cdot 29{,}5 + N_5 \cdot 30 = 0;$$
$$2{,}61 \cdot 28 + N_4 \cdot 29{,}5 = 0,$$

საიდანაც ვპოულობთ:

$$N_6 = 2{,}12 \text{ კილონიუტონს};$$
$$N_5 = 2{,}57 \text{ კილონიუტონს};$$
$$N_4 = -2{,}48 \text{ კილონიუტონს}.$$

რადგან $\vec{N}_6$ და $\vec{N}_5$ რეაქციები დადებითი და ღეროებისკენ შიგნით მიმართული აღმოჩნდნენ, ამიტომ მე-6 და მე-5 ღეროები იჭიმება ძალებით — 2,12 კილონიუტონი და 2,57 კილონიუტონი.

$\vec{N}_4$ რეაქცია უარყოფითი აღმოჩნდა, ე. ი. იგი ნახაზზე ნაჩვენები მიმართულების შებრუნებულად უნდა მივმართოთ, სახელდობრ, მე-4 ღეროდან; ეს ღერო შეიკუმშება 2,48 კილონიუტონი ძალით.

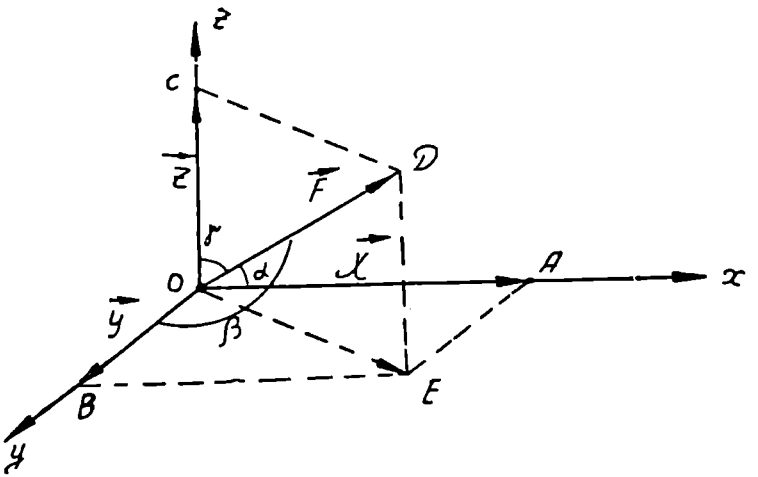
იგივე ძალები ზემოთ ნაპოვნი იყო გრაფიკული მეთოდით.

# სტატიკა სივრცეში

## § 1. ძალთა პარალელეპიპედის წესი

ახლა გადავდივართ ისეთი საკითხების განხილვაზე, რომლებიც შეეხება მყარ სხეულზე მოდებულ და ერთ სიბრტყეში არმდებარე ძალთა შეკრებასა და წონასწორობას.

ჯერ განვიხილოთ ისეთი შემთხვევა, როდესაც სხეულზე მოქმედი ძალების მოქმედების წრფეები ერთ წერტილში იკვეთება; თან ისეთი უმარტივესი შემთხვევით დავიწყოთ, როდესაც, მაგალითად, ძალა მყარი სხეულის $O$ წერტილზეა მოდებული (ნახ. 116). $O$ წერტილზე გავატაროთ სიბრტყე და ზედ ორი თანამართობი $Ox$ და $Oy$ კოორდინატთა ღერძი გავატაროთ. შემდეგ $O$ წერტილიდან ამ $xOy$ სიბრტყისაღმი მართობი მესამე $Oz$ კოორდინატთა ღერძი გავატაროთ.




ნახ. 116

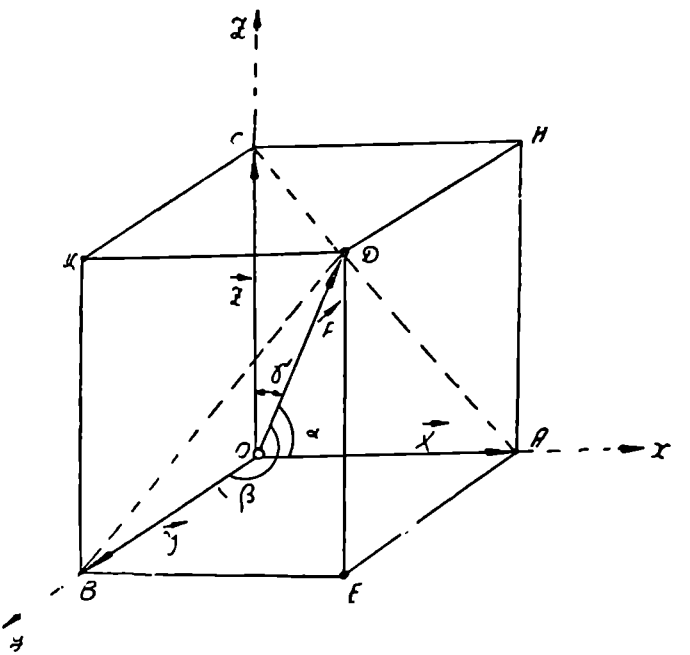
$\alpha$, $\beta$ და $\gamma$-თი $\vec{F}$ ძალის მიერ სათანადოდ $Ox$, $Oy$ და $Oz$ ღერძებთან შედგენილი კუთხეები აღვნიშნოთ.

გავატაროთ $\vec{F}$ ძალისა და $Oz$ ღერძის შემცველი $OCDE$ სიბრტყე, რომელიც $xOy$ საკოორდინატო სიბრტყეს $OE$ წრფეზე გადაკვეთს. შემდეგ $\vec{F}$ ძალა პარალელოგრამის წესით დავშალოთ ორ თანამართობ

მდგენელად: 1) $Oz$ ღერძის გასწვრივ მიმართულ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{Z}$ მდგენელად და 2) $xOy$ სიბრტყეში მდებარე $\overrightarrow{OE}$ მდგენელად. $\overrightarrow{OE}$ მდგენელი პარალელოგრამის წესით დავშალოთ ორ მდგენელად: ა) $Ox$ ღერძის გასწვრივ მიმართულ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{X}$ მდგენელად და ბ) $OY$ ღერძის გასწვრივ მიმართულ $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{Y}$ მდგენელად.

ამრიგად, $\overrightarrow{F}$ ძალა დავშალეთ სამ თანამართობ $\overrightarrow{X}$, $\overrightarrow{Y}$ და $\overrightarrow{Z}$ მდგენელად.

$AE$ და $DE$ მონაკვეთების შემცველი სიბრტყე საკოორდინატო სიბრტყის პარალელურია და $xOz$ სიბრტყეს $HA$ წრფეზე ჰკვეთს (ნახ. 117); ამავე დროს მივიღებთ $EAHD$ მართკუთხედს.




ნახ. 117

სწორედ ასევე, $BE$ და $DE$ მონაკვეთების შემცველი სიბრტყის გატარებით მივიღებთ $EDKB$ მართკუთხედს. ეს მართკუთხედები $OABE$, $OAHC$ და $OCKB$ მართკუთხედებთან ერთად ქმნიან პარალელეპიპედს,

რომლის დიაგონალია $\vec{F}$ ძალა, მდგენელები კი $\vec{OA}=\vec{X}$, $\vec{OB}=\vec{Y}$ და $\vec{OC}=\vec{Z}$, ე. ი. პარალელეპიპედის გვერდები.

აქედან შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შებრუნებული დასკვნაც: სივრცის ერთ წერტილზე სამი თანამართობი ძალის ტოლქმედი სიდიდით და მიმართულებით ამ ძალებზე აგებული პარალელეპიპედის დიაგონალით გამოისახება.

$ODA$, $ODB$ და $ODC$ მართკუთხა სამკუთხედებიდან გვაქვს:

$$OA=OD\cdot\cos\alpha;$$
$$OB=OD\cdot\cos\beta;$$
$$OC=OD\cdot\cos\gamma.$$

რადგან

$$OA=X,\quad OB=Y,\quad OC=Z\quad\text{და}\quad OD=F,$$

ამიტომ

$$\boxed{\begin{aligned}X&=F\cdot\cos\alpha;\\Y&=F\cdot\cos\beta;\\Z&=F\cdot\cos\gamma.\end{aligned}}\qquad(1)$$

ე. ი. ძალის გეგმილები სამ თანამართობ კოორდინატთა ღერძებზე უდრის ძალის სიდიდის ნამრავლს ძალასა და ღერძს შორის კუთხის კოსინუსზე.

რადგან პარალელეპიპედის დიაგონალის კვადრატი მისი სამი განზომილების კვადრატების ჯამს უდრის, ძალის მოდულისათვის გვექნება:

$$F^2=X^2+Y^2+Z^2,$$

საიდანაც

$$\boxed{F=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\qquad(2)$$

ტოლქმედის მიმართულების განსაზღვრისათვის (1) ფორმულებიდან გვაქვს:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{X}{F}=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}};\\\cos\beta&=\frac{Y}{F}=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}};\\\cos\gamma&=\frac{Z}{F}=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

ამ სამი გამოსახულების კვადრატში ამაღლებით და შეკრებით, მივიღებთ

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{X^2 + Y^2 + Z^2} = 1. \qquad (4)$$

ეს თანაფარდობა გვიჩვენებს, რომ ძალების მიერ კოორდინატთა ღერძებთან შედგენილი სამი კუთხის ნებისმიერად აღება არ შეიძლება. მაგალითად, არ შეიძლება $\vec{F}$ ძალის აგება, რომელიც $OX$, $OY$ და $OZ$ ღერძებთან ცალ-ცალკე 45°-იან კუთხეს შექმნის, რადგან $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ამიტომ, (4) ფორმულაში ჩასმით, პასუხში 1-ის ნაცვლად 1,5 მივიღებთ, მართლაც

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{6}{4} = 1{,}5.$$

## § 2. სივრცის ერთ წერტილზე მოდებული ძალების შეკრება, მათი წონასწორობის პირობა

ვთქვათ, სივრცის $O$ წერტილზე მოდებულია ძალები $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ..., $\vec{F}_n$. საჭიროა ამ ძალთა ტოლქმედის პოვნა.

ამისათვის $O$ წერტილზე სამ თანამართობ $Ox$, $Oy$ და $Oz$ ღერძებს გავატარებთ და მოცემულ ძალებს ამ ღერძებზე დავაგეგმილებთ, მივიღებთ:

$\vec{F}_1$ ძალის $X_1$, $Y_1$ და $Z_1$ გეგმილებს;

$\vec{F}_2$ ძალის $X_2$, $Y_2$ და $Z_2$ გეგმილებს;

$\vec{F}_3$ ძალის $X_3$, $Y_3$ და $Z_3$ გეგმილებს;

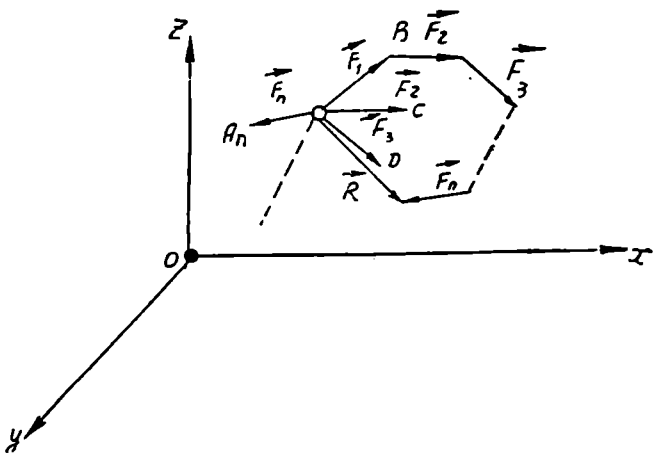
. . .

$\vec{F}_n$ ძალის $X_n$, $Y_n$ და $Z_n$ გეგმილებს.

მოცემულ ძალებზე ძალთა მრავალკუთხედს თუ ავაგებთ (ნახ. 118), მაშინ $\vec{R}$ ტოლქმედი ძალა ამ მრავალკუთხედის ჩამკეტი გვერდი იქნება.

$\vec{R}$ ტოლქმედის გეგმილები $OX$, $OY$ და $OZ$ ღერძებზე იყოს $X$, $Y$ და $Z$, მაშინ სამი ღერძისათვის თან მიმდევრობით თუ გამოვიყენებთ ჩამკეტი გვერდის გეგმილის თეორემას, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} X &= X_1+X_2+X_3+\ \dots\ +X_n=\sum_{i=1}^{n} X_i;\\ Y &= Y_1+Y_2+Y_3+\ \dots\ +Y_n=\sum_{i=1}^{n} Y_i;\\ Z &= Z_1+Z_2+Z_3+\ \dots\ +Z_n=\sum_{i=1}^{n} Z_i. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$




ნახ. 118

$\vec{R}$ ტოლქმედის მოდულისათვის გვაქვს

$$R=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)^2}. \qquad (2)$$

თუ $\vec{R}$ ტოლქმედი $Ox$, $Oy$ და $Oz$ კოორდინატთა ღერძებთან, სათანადოდ, ადგენს $\alpha$, $\beta$ და $\gamma$ კუთხეებს, მაშინ ტოლქმედის მიმართულების განსაზღვრისათვის გვექნება (მიმართულების კუთხეთა კოსინუსები):

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{R};\\ \cos\beta &= \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{R};\\ \cos\gamma &= \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{R}.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც თავმოყრილ ძალთა სისტემა წონასწორობაშია, $\bar{R}$ ტოლქმედი ძალა ნულის ტოლი უნდა იყოს, ე. ი.

$$\bar{R}=0; \qquad (4)$$

მაშინ ტოლქმედის გეგმილებიც ნულის ტოლია

$$X=Y=Z=0. \qquad (5)$$

მაგრამ ეს შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როდესაც სივრცეში ერთ წერტილში თავმოყრილ ძალთა სისტემის გეგმილების ჯამი კოორდინატთა ღერძებზე უდრის ნულს, ე. ი.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i=0; \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \quad \text{და} \quad \sum_{i=1}^{n} Z_i=0. \qquad (6)$$

ან, რაც იგივეა:

$$\boxed{\begin{aligned}&X_1+X_2+X_3+\ldots+X_n=0;\\ &Y_1+Y_2+Y_3+\ldots+Y_n=0;\\ &Z_1+Z_2+Z_3+\ldots+Z_n=0.\end{aligned}} \qquad (7)$$

ამ განტოლებებს სივრცეში (არა ერთ სიბრტყეში) მდებარე და ერთ წერტილზე შეკრებული ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებები ეწოდება.

### მაგალითები

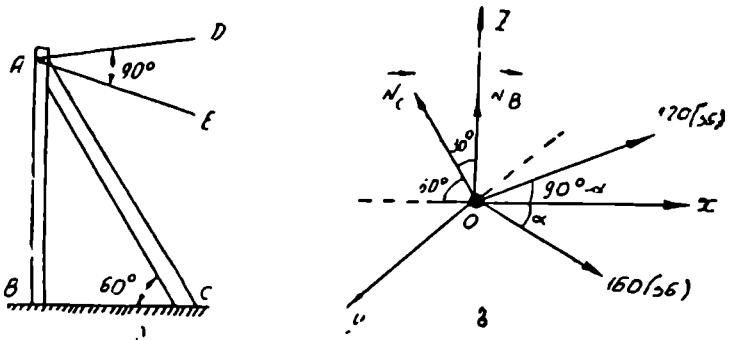
**1.** სატელეგრაფო ხაზის ჰორიზონტალური სადენები $AC$ ირიბნიან ვერტიკალურ $AB$ სვეტზეა დაკრებული (ნახ. 119, ა) და ერთმა-

ნეთთან 90° კუთხეს ქმნიან ($\angle DAE = 90°$). იპოვეთ $\alpha$ კუთხე $ABC$ და $BAE$ სიბრტყეებს შორის, რომლის დროსაც სვეტი არ განიცდის გვერდით ღუნვას. იპოვეთ აგრეთვე ამ დროს $AC$ ირიბანაში წარმოქმნილი ძალვა, თუ იგი ჰორიზონტთან 60° კუთხითაა დაყენებული. $AD$ სადენის დაჭიმულობაა 120 ნიუტონი; $AE$ სადენისა კი—160 ნიუტონი.

ამოხსნა

$ABC$ სიბრტყე $Axz$ სიბრტყედ მივიღოთ და შევადგინოთ ძალთა განლაგების სქემა სვეტის $\vec{N}_B$ რეაქციისა და ირიბანას $\vec{N}_C$ რეაქციის შეყვანით (ნახ. 119).

ძალების მიერ კოორდინატთა ღერძებთან შედგენილი კუთხეები იქნება:




ნახ. 119

| ძალა | $\measuredangle(\vec{F}, x)$ | $\measuredangle(\vec{F}, y)$ | $\measuredangle(\vec{F}, z)$ |
|---|---|---|---|
| 16 კილონიუტონი | $\alpha$ | 90°—$\alpha$ | 90° |
| 12 კილო ნიუტონი | 90°—$\alpha$ | 180°—$\alpha$ | 90° |
| $\vec{N}_B$ | 90° | 90° | 0° |
| $\vec{N}_C$ | 120° | 90° | 30° |

ამ ცხრილის გამოყენებით შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 160 \cdot \cos\alpha + 120\cos(90° - \alpha) + N_B \cdot \cos \cdot 90° + N_C \cdot \cos 120° = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 160 \cdot \cos(90^\circ - \alpha) + 120\cos(180^\circ - \alpha) +$$

$$+ N_B \cdot \cos 90^\circ + N_C \cdot \cos 90^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 160 \cdot \cos 90^\circ + 120 \cdot \cos 90^\circ + N_B \cdot \cos 0^\circ + N_C \cdot \cos 30^\circ = 0,$$

შაგრამ

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha; \quad \cos 90^\circ = 0;$$

$$\cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} = -0{,}5;$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha; \quad \cos 0^\circ = 1; \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ამ მნიშვნელობათა წონასწორობის განტოლებებში ჩასმით მივიღებთ:

$$160 \cdot \cos\alpha + 120 \cdot \sin\alpha - 0{,}5\, N_C = 0;$$

$$160 \cdot \sin\alpha - 120 \cdot \cos\alpha = 0;$$

$$N_B + N_C \cdot \frac{3}{2} = 0.$$

მეორე განტოლებიდან ვპოულობთ

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{120}{160} = \frac{3}{4};$$

შაშინ

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5};$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}.$$

პირველ განტოლებაში შეტანით მივიღებთ

$$160 \cdot \frac{4}{5} + 120 \cdot \frac{3}{5} - 0{,}5\, N_C = 0,$$

აქედან

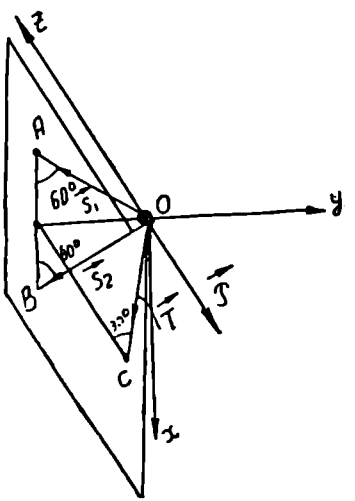
$$N_C = \frac{640 + 360}{5 \cdot 0{,}5} = 400 \text{ ნიუტონს.}$$

მესამე განტოლებიდან კი გვექნება

$$N_B = -400 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cong -346 \text{ ნიუტონს.}$$

მინუს ნიშანი მიგვითითებს იმაზე, რომ $\overline{N}_B$ რეაქცია ზემოთ კი არ იქნება მიმართული, არამედ ქვემოთ. მაშასადამე, სვეტის ამოგლეჯას შეეცდება სადენები. $AB$ ირიბანა იკუმშება 400 ნიუტონი ძალით.

**2.** სამი $OA$, $OB$ და $OC$ ღერო (ნახ. 120) მიმაგრებულია ვერტიკალურ კედელზე ისეთნაირად, რომ $AO$ და $BO$ ღეროები განლაგებულია ჰორიზონტალურ სიბრტყეში და კედელთან ადგენენ 60° კუთხეს. მესამე $OC$ ღერო ძევს ვერტიკალურ სიბრტყეში, რომელიც გადის $O$ წერტილზე, $AB$ წრფის შუა წერტილზე და თან კედელთან 30° კუთხეს ადგენს.



ნახ. 120

ღეროები კედელზე მიმაგრებულია სახსრებით და სახსრებითაა შეერთებული $O$ წერტილში, რომელზედაც $P = 100$ ნიუტონი წონის ტვირთია დაკიდებული.

განსაზღვრეთ ძალები $OA$, $OB$ და $OC$ ღეროებში.

ა მ ო ხ ს ნ ა

მოცემული $\overline{P}$ ძალა (ტვირთის წონა) $O$ წერტილზეა მოდებული. ეს წერტილი არათავისუფალი წერტილია; ბმებად $OA$, $OB$ და $OC$ ღეროები ითვლება. ბმებს $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$ და $\overline{T}$ რეაქციებით შევცვლით. რადგან ღეროები სახსრულადაა დამაგრებული და მათ წონას უგულებელვყოფთ, ამიტომ ღეროების რეაქციები ღეროების გასწვრივაა მიმართული.

დავუშვათ, რომ ღეროები გაჭიმულია, ე. ი. რეაქციები $O$ წერტილიდან მოემართება.

$\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, $\overline{T}$ და $\overline{P}$ ძალები ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობენ.

ამ ძალებით შევადგინოთ, წონასწორობის სამი განტოლება; ამისათვის ჯერ $O$ სათავიანი $xyz$ კოორდინატთა სისტემის ღერძები დავსა-

ხოთ. $Oz$ ღერძი შევეულად მივმართოთ ზემოთ, $Ox$ ღერძი—$AB$ წრფის პარალელურად, ხოლო $Oy$ ღერძი—$ABO$ ტოლგვერდა სამკუთხედის სიმაღლის გასწვრივ.

ახლა ვიპოვოთ ძალთა გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე და ჩავწეროთ ისინი ცხრილში.

| ძალა | გეგმილები | | |
|---|---|---|---|
| | $Ox$ ღერძზე | $Oy$ ღერძზე | $Oz$ ღერძზე |
| $\overline{P}$ | 0 | 0 | $-P$ |
| $\overline{S_1}$ | $-S_1 \cos 60°$ | $-S_1 \cdot \cos 30°$ | 0 |
| $\overline{S_2}$ | $S_2 \cdot \cos 60°$ | $-S_2 \cdot \cos 30°$ | 0 |
| $\overline{T}$ | 0 | $-T \cdot \cos 60°$ | $-T \cdot \cos 30°$ |

შევადგინოთ წონასწორობის სამი განტოლება; ამისათვის საკმარისია ნულს გავუტოლოთ ძალვების გეგმილთ ჯამი თვითეულ ღერძზე:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = -S_1 \cdot \cos 60° + S_2 \cdot \cos 60° = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = -S_1 \cdot \cos 30° - S_2 \cdot \cos 30° - T \cdot \cos 60° = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = -T \cdot \cos 30° - P = 0,$$

ანუ

$$-S_1 + S_2 = 0,$$

$$-S_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - S_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - T \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

$$-T \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - P = 0.$$

ამ განტოლებათა სისტემის ამოხსნით $S_1$, $S_2$ და $T$ უცნობების მიმართ, მივიღებთ:

$$S_1 = S_2,$$

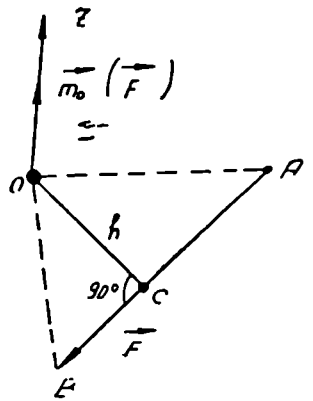
$$T = -\frac{2P}{\sqrt{3}} = -\frac{100 \cdot 2}{\sqrt{3}} \approx -116 \text{ ნ}$$

და

$$S_1 \cdot \sqrt{3} + 116 \cdot \frac{1}{2} = 0; \quad S_1 = S_2 = \frac{116}{2\sqrt{3}} = 33{,}5 \text{ ნ}.$$

## § 3. ძალის ვექტორული მომენტი წერტილის მიმართ. ძალის მომენტი ღერძის მიმართ

ერთ სიბრტყეში მდებარე ძალისათვის ძალის სკალარული მომენტი ამ სიბრტყეში მდებარე წერტილის მიმართ საკმაოდ განისაზღვრება როგორც (+) ან (—) ნიშნით აღებული ძალის მოდულის ნამრავლი მხარზე. ასეთი განმარტება სივრცის სტატიკისათვის უკვე საკმარისი არ არის. ამ შემთხვევაში ერთი და იმავე წერტილის მიმართ ერთნაირმოდულიანი მომენტების მქონე ძალები სხვადასხვაგვარად მოქმედებენ, თუ ამ ძალთა ფუძეზე გატარებული სიბრტყეები და მომენტთა საერთო ცენტრი არ თანხვდება.



ნახ. 121

ვთქვათ, მოცემულია $\vec{F}$ ძალა და $O$ წერტილი (ნახ. 121).

$O$ წერტილიდან $\vec{F}$ ძალის ფუძეზე დავუშვათ $OC$ მართობი ($Oc=h$), რომელიც $\vec{F}$ ძალის მხარი იქნება; მაშინ $\vec{F}$ ძალის მომენტი $O$ წერტილის მიმართ წარმოადგენს ვექტორს, რომლის მოდული $\overline{F}$ ძალის $F$ მოდულის $h$ მხარზე ნამრავლს უდრის.

$\vec{F}$ ძალის მომენტის ვექტორი იმ სიბრტყის მართობს მიჰყვება, რომელიც $O$ წერტილზე და $\vec{F}$ ძალაზე გადის, თან მიმართულია იმ მხარეს, საიდანაც სხეულის ბრუნვა მოცემული ძალით საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებას ემთხვევა.

ამრიგად, $\vec{F}$ ძალის ვექტორული მომენტი რაიმე $O$ წერტილის მიმართ არის $\vec{m}_o(\vec{F})$ ვექტორი, მოდებული $O$ წერტილზე და განსაზღვრული შემდეგი პირობებით (ნახ. 121):

ა) მისი სიგრძე უდრის $\vec{F}$ ძალის მოდულის ნამრავლს მართობის $h$ სიგრძეზე, რომელიც დაშვებულია $O$ წერტილიდან $\vec{F}$ ძალის ფუძეზე

$$|\vec{m}_0(\vec{F})| = h\,|\vec{F}|;$$

ბ) ის არის მართობი $O$ წერტილზე და $\vec{F}$ ძალაზე გამავალი სიბრტყისა;

გ) მისი გეზი ისეა ასარჩევი, რომ $\vec{F}$ ძალა მას უვლიდეს დადებითი გეზით (ე. ი., რომ მზვერავისათვის, რომელიც $\vec{m}_0(\vec{F})$ ვექტორის გასწვრივ დგას და $\vec{F}$ ძალას უყურებს, ეს უკანასკნელი მოგეზული იყოს მარცხნიდან მარჯვნივ).

$O$ წერტილს ეწოდება მომენტის ცენტრი, ხოლო $h$-ს — მომენტის მხარი.

ვექტორული მომენტი არ იცვლება $\vec{F}$ ძალის გასრიალებით ფუძის გასწვრივ; ვექტორული მომენტი ნულია, როდესაც $\vec{F}$ ძალა ნულს უდრის, ანდა როდესაც მისი ფუძე გადის $O$ წერტილზე (მომენტის ცენტრზე); $\vec{F}$ ძალის გეზი საწინააღმდეგოთი რომ შევცვალოთ, მაშინ მომენტის გეზიც საწინააღმდეგოთი შეიცვლება.

განმარტებულიდან გამომდინარეობს, რომ ძალის ვექტორული მომენტის აბსოლუტური სიდიდე

$$|\vec{m}_0(\vec{F})| = 2 \text{ ფარ. } \triangle AOB.$$

სივრცის სტატიკაში წერტილის მიმართ ძალის მომენტის ცნებასთან ერთად გვხვდება ცნება ღერძის მიმართ ძალის მომენტის შესახებ.

ვთქვათ, მოცემულია $\vec{F}$ ძალა და ამ ძალასთან ერთ სიბრტყეში არმდებარე რაიმე $Oz$ ღერძი (ნახ. 122).

გავატაროთ $Oz$ ღერძის მართობული $\pi$ სიბრტყე, რომელიც ღერძს $O$ წერტილში კვეთს, რომ გამოვთვალოთ $\vec{F}$ ძალის მომენტი $Oz$ ღერძის მიმართ, $\vec{F}$ ძალა $\pi$ სიბრტყეზე უნდა დავაგეგმილოთ, მივიღებთ $\vec{F}_{xy}$ გეგმილს, შემდეგ უნდა გამოვიანგარიშოთ ამ გეგმილის მომენტი $O$ წერტილის მიმართ.

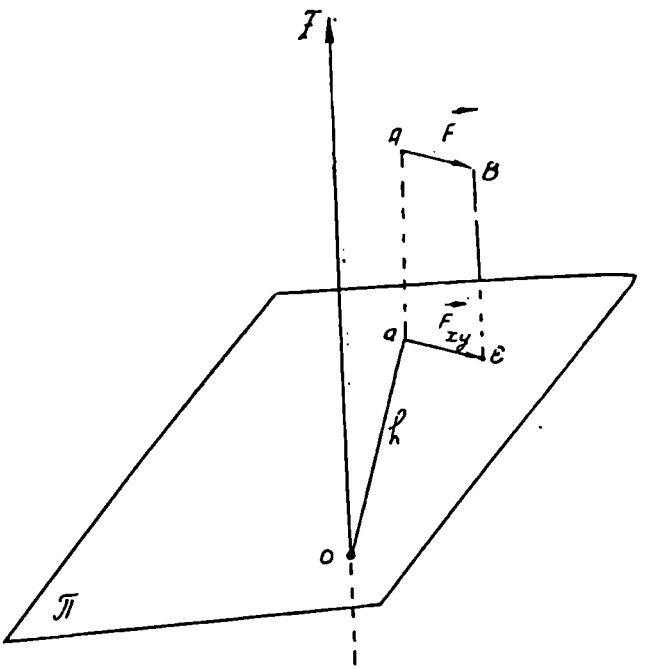
ამრიგად, $\vec{F}$ ძალის მომენტი $Oz$ ღერძის მიმართ უდრის ამ ძალის $Oz$ ღერძის მართობულ $\pi$ სიბრტყეზე გეგმილის მომენტს ღერძისა და სიბრტყის გადაკვეთის $O$ წერტილის მიმართ:

$$\boxed{m_z(\vec{F}) = \pm \vec{F}_{xy} \cdot h,} \qquad (2)$$

სადაც $\vec{F}_{xy}$ მოცემული $\vec{F}$ ძალის გეგმილია $\pi$ სიბრტყეზე; $h$ არის $\vec{F}_{xy}$ ძალის მხარი $O$ წერტილის მიმართ; (+) ნიშანი აიღება იმ შემთხვევაში, თუ ძალა ღერძის გარშემო იწვევს სხეულის ბრუნვას საათის ისრის ბრუნვის მიმართულებით; წინააღმდეგ შემთხვევაში აიღება მინუს ნიშანი.

განვიხილოთ ძალის ღერძისადმი მომენტის კერძო შემთხვევები.

ა) ვთქვათ, $\vec{F}$ ძალა $Oz$ ღერძის პარალელურად არის მიმართული (ნახ. 123), მაშინ




ნახ. 122.

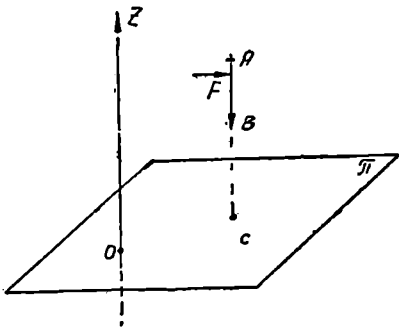
$$m_z(\vec{F}) = 0. \tag{3}$$

რადგან $\vec{F}$ ძალის $\pi$ სიბრტყეზე გეგმილი ნულია $(F \perp O_z)$, ამის გამო ძალის მომენტი ღერძის მიმართ ამ შემთხვევაში ნულის ტოლი იქნება.

ბ) ვთქვათ, $\vec{F}$ ძალა ძევს იმ სიბრტყეში, რომელიც $Oz$ ღერძზე გადის, მაშინ $\vec{F}$ ძალის მომენტი ამ ღერძის მიმართ ნულს უდრის,

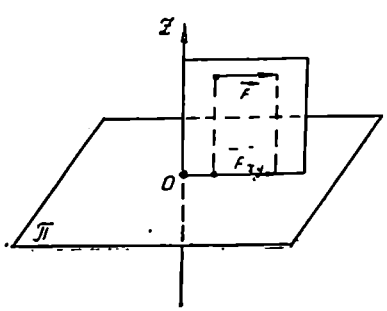
რადგან ამ სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი ძალა ან გადაკვეთს ამ $Oz$ ღერძს, მაშასადამე, მხარი $h=0$ (ნახ. 124), ან პარალელურია.

ახლა ჩამოვაყალიბოთ კავშირი წერტილის მიმართ ძალის მომენტსა (ნახ. 125) და იმ ღერძის მიმართ ძალის მომენტს შორის, რომელიც ამ წერტილზე ვადის; თან დავამტკიცოთ, რომ წერტილის მიმართ ძალის მომენტის გეგმილი ამ წერტილზე გამავალ ღერძზე უდრის ძალის მომენტს ამ ღერძის მიმართ. მართლაც, $\vec{F}$ ძალის მომენტი $O$ წერტილის მიმართ $AOB$ სამკუთხედის სიბრტყისადმი მართობული $\vec{m}_0(\vec{F})$ ვექტორით განისაზღვრება.



ნახ. 123

ავაგოთ $\vec{m}_0(\vec{F})$ ვექტორი. როგორც აღნიშნული იყო, იგი რიცხობრივად $\triangle ABO$-ს გაორკეცებულ ფართობს უდრის. მოცემულ $O$ წერტილზე ნებისმიერი $Oz$ ღერძი გავატაროთ და $\vec{F}$ ძალის მომენტი ვიპოვოთ ამ ღერძის მიმართ; ამ მიზნით $\vec{F}$ ძალა $Oz$ ღერძისადმი მართობულ $\pi$ სიბრტყეზე დავაგეგმილოთ



ნახ. 124

$$m_z(\vec{F})=2 \text{ ფარ. } \triangle Oab.$$

$Oab$ სამკუთხედი $OAB$ სამკუთხედის გეგმილია $\pi$ სიბრტყეზე, მაშასადამე,

$$\text{ფარ. } \triangle Oab = \text{ფარ. } \triangle OAB \cdot \cos\alpha,$$

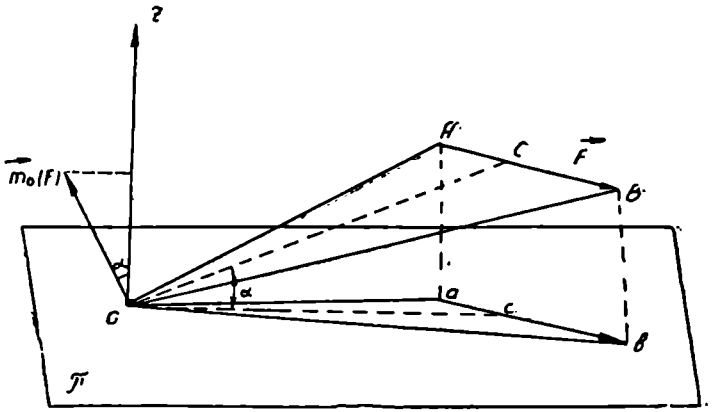
სადაც $\alpha$ კუთხეა ამ სამკუთხედებს შორის (ორწახნაგა კუთხის ხაზობრივი კუთხე).

ამ ტოლობის ორივე მხარეს 2-ზე თუ გავამრავლებთ, მივიღებთ

$$2 \text{ ფარ. } \triangle Oab = 2 \text{ ფარ} \cdot \triangle OAB \cdot \cos\alpha,$$

ამიტომ

$$\boxed{m_z(\vec{F}) = |\vec{m}_0(\vec{F})| \cdot \cos\alpha.} \qquad (4)$$




ნახ. 125

## § 4. ძალთა წყვილის მომენტი. ძალთა წყვილის თეორია სივრცეში

ძალთა წყვილის სივრცითი განლაგების დროს სიბრტყის სტატიკაში მიღებული ძალთა წყვილის მომენტის განმარტება უკვე საკმარისი არ არის. საჭიროა, ამას გარდა, ძალთა წყვილის მოქმედების სიბრტყის სივრცეში მიმართულების აღნიშვნა. ამის გაკეთება შეიძლება, თუ სიბრტყისადმი მართობის მიმართულებას მივუთითებთ.

შეიძლება ძალთა წყვილის მომენტის წარმოდგენა, როგორც ვექტორის, რომელიც სავსებით განსაზღვრავს მომენტის რიცხვითს მნიშვნელობას, ძალთა წყვილის მოქმედების სიბრტყის მიმართულებას და ძალთა წყვილის ბრუნვის მიმართულებას.

*ძალთა წყვილის მომენტი ეწოდება ვექტორს, რომელიც მოდულით ძალთა წყვილის მდგენელი ძალის მომენტს უდრის და მიმართულია იმ მხარეს, საიდანაც ძალთა წყვილის ბრუნვა სრულდება საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით* (ნახ. 126).

ძალთა წყვილის ვექტორული მომენტი $\overline{m}$-ით აღვნიშნოთ. სურათზე გამოსახული $\overline{m}$ ვექტორი $A$ და $B$ წერტილებზე მოდებულ ძალთა $(\overline{F}, \overline{F})$ წყვილის მომენტს წარმოადგენს.

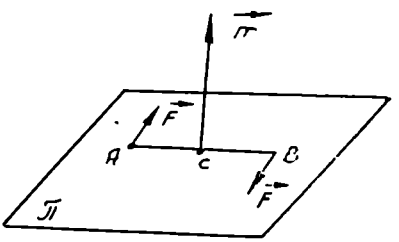
როდესაც მოცემულია $\overline{m}$ მომენტი, შეიძლება მოცემული ძალთა წყვილის სხეულზე მოქმედების მახასიათებელი ყველა ელემენტის განსაზღვრა. ასეთებია:

ა) ძალთა წყვილის მოქმედების სიბრტყე (იგი $\overline{m}$ ვექტორის მართობულია);

ბ) ძალთა წყვილის ბრუნვის მიმართულება თავისსავე სიბრტყეში (ძალთა წყვილი იწვევს სხეულის ბრუნვას საათის ისრის ბრუნვის მიმართულებით, თუ დაკვირვებას ვაწარმოებთ $\overline{m}$ ვექტორის ბოლოდან);

გ) ძალთა წყვილის მომენტის რიცხვითი მნიშვნელობა (რომელიც აღებულ მასშტაბში $\overline{m}$ ვექტორის სიგრძეს უდრის).

$\overline{m}$ ვექტორის დასაწყისად ხშირად იღებენ მოცემული ძალთა წყვილის ძალების მოდების წერტილების მაერთებელი მონაკვეთის შუა წერტილს, თუმცა $\overline{m}$ ვექტორის მოდების წერტილის შერჩევა ნებისმიერად შეიძლება, რადგან ძალთა წყვილის გადატანა შეიძლება ამ სიბრტყის ნებისმიერ მდებარეობაში. მაშასადამე, ძალთა წყვილის მომენტი თავისუფალი ვექტორია.



ნახ. 126

ძალთა წყვილების სივრცით თეორიაში განიხილება თეორემები:

1) ძალთა წყვილების გადატანის შესახებ ძალთა წყვილის მოქმედების სიბრტყის პარალელურ ნებისმიერ სიბრტყეში;

2) ძალთა წყვილების ტოლფასობის შესახებ და

3) ძალთა წყვილების შეკრების შესახებ სივრცეში.

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ ამ თეორემების ფორმულირება:

1) მყარ სხეულზე ძალთა წყვილის მოქმედების შეუცვლელად ძალთა წყვილის გადატანა შეიძლება მისი მოქმედების სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეში;

2) ძალთა წყვილები თანატოლფასნი არიან, თუ მათი მომენტები გეომეტრიულად ტოლებია;

3) ტოლქმედი ძალთა წყვილის მომენტი მდგენელი ძალთა წყვილის მომენტების ვექტორული ჯამის ტოლია. სივრცითი ძალთა წყვილის სისტემის ზემოქმედებაში მყოფი მყარი სხეულის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ მდგენელი ძალთა წყვილების მომენტების ვექტორული ჯამი ნულის ტოლი იყოს

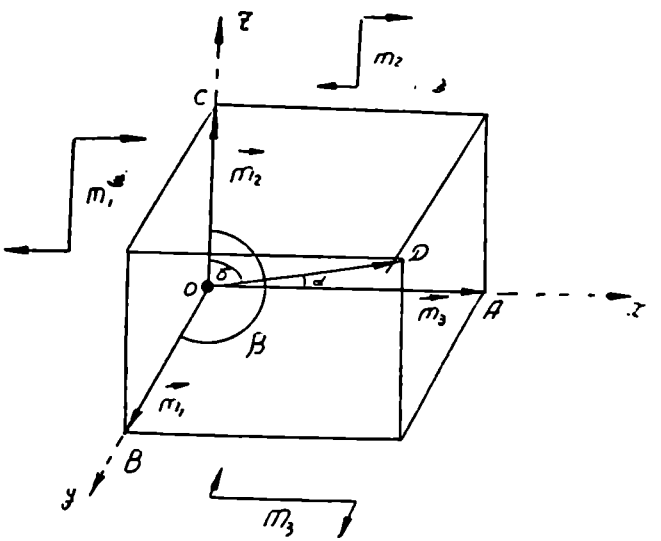
$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \overline{m}_i = 0,} \qquad (1)$$

ე. ი. სხეულზე მოქმედი ძალთა წყვილების მომენტებზე აგებული მრავალკუთხედი ჩაკეტილი უნდა იყოს.

### მაგალითი

სამი ძალთა წყვილი *Oyz*, *Oxz* და *Oxy* კოორდინატთა სიბრტყეებში ძევს (ნახ. 127). პირველი ძალთა წყვილის მომენტია $m_1 = 20$ ნმ, მეორე ძალთა წყვილის მომენტია $m_2 = 40$ ნმ, მესამე კი $m_3 = 30$ ნმ.

იპოვეთ ტოლქმედი ძალთა წყვილის მომენტის მოდული და მიმართულება.




ნახ. 127

### ამოხსნა

ნებისმიერი წერტილიდან, მაგალითად, კოორდინატთა *O* სათავიდან გავატაროთ მოცემული ძალთა წყვილების მომენტების ამსახველი $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ და $\vec{OC}$ ვექტორები.

რადგან შესაკრები ძალთა წყვილები კოორდინატთა სიბრტყეებშია განლაგებული, ამიტომ ეს ვექტორები სათანადო კოორდინატთა ღერძებს მიჰყვება.

ტოლქმედი ძალთა წყვილის საძიებელი მომენტი ამ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის დიაგონალით გამოისახება:

$$\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

ამ დიაგონალზე მიმართული ტოლქმედი ვექტორის მოდული

$$OD = \sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2} = \sqrt{20^2 + 40^2 + 30^2} = 54 \text{ ნ.მ.}$$

ტოლქმედი ძალთა წყვილის მომენტის ვექტორის მიმართულება განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$\cos\alpha = \frac{OA}{OD} = \frac{20}{54};$$

$$\cos\beta = \frac{OB}{OD} = \frac{40}{54};$$

$$\cos\gamma = \frac{OC}{OD} = \frac{30}{54},$$

ე. ი.

$$\alpha = 68^\circ;$$

$$\beta = 42^\circ;$$

$$\gamma = 56^\circ.$$

## § 5. სივრცითი ძალთა სისტემის დაყვანა ძალასა და ძალთა წყვილზე

ჩვენთვის ცნობილია, რომ ძალის გადატანა შეიძლება თავისთავის პარალელურად სიბრტყის ნებისმიერ წერტილში მასზე ძალთა წყვილის დამატებით, რომლის მომენტი მოცემული ძალის მომენტს უდრის ამ წერტილის მიმართ.

ეს წესი გამოვიყენოთ ისეთი შემთხვევისათვის, როდესაც სხეულზე მოქმედებს სივრცეში ნებისმიერად განლაგებული ძალები.

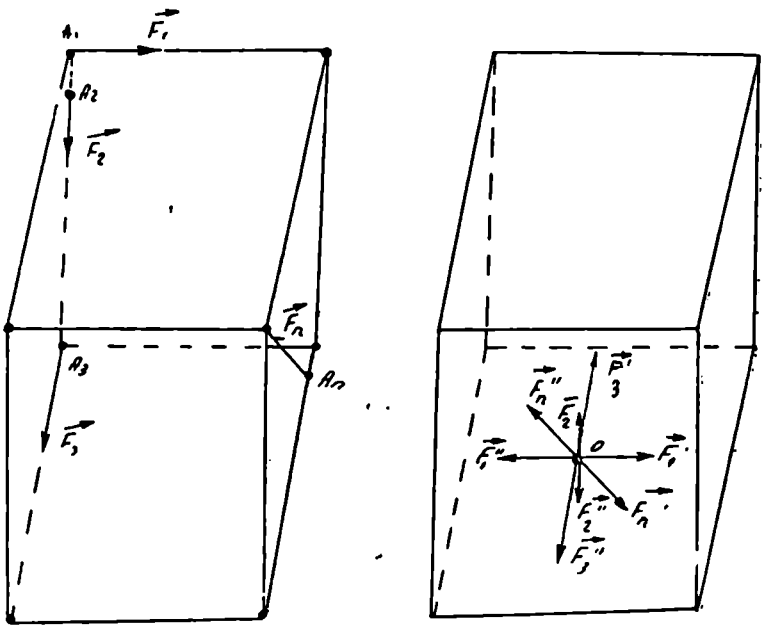
ვთქვათ, მყარი სხეულის $A_1$, $A_2$, $A_3$, ..., $A_n$ წერტილებზე სათანადოდ მოდებულია ძალები $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, ... , $\overline{F}_n$ (ნახ. 128).

შევარჩიოთ დაყვანის ნებისმიერი $O$ წერტილი და მოცემული ძალები გადავიტანოთ $O$ წერტილში, რის შედეგადაც მოცემული ძალთა სისტემა $O$ წერტილზე მოდებულ $\overline{F}'_1$, $\overline{F}'_2$, $\overline{F}'_3$, ..., $\overline{F}'_n$ ძალებზე და

$(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$, $(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$, $(\vec{F}_3, \vec{F}_3')$, ..., $(\vec{F}_n, \vec{F}_n')$ ძალთა წყვილებზე დაიყვანება.

მთავარი ვექტორი იყოს $\vec{R}$. ივი $O$ წერტილზეა მოდებული, ხოლო მიღებული ძალთა წყვილების ტოლქმედი ძალთა წყვილის მომენტი იყოს $\vec{M}_0$; მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

[თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ ზოგადი ძალაა $\vec{F}_i$ (სადაც $i = 1, 2, 3, \ldots, n$)]:




ნახ. 128

$$\vec{R} = \vec{F}_1' + \vec{F}_2' + \vec{F}_3' + \ldots + \vec{F}_n' = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i; \qquad (1)$$

$$\vec{M}_0 = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \vec{m}_3 + \ldots + \vec{m}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_i. \qquad (2)$$

ამრიგად, სივრცეში ნებისმიერად განლაგებული ძალთა სისტემა დაიყვანება $\vec{R}$ მთავარ ვექტორზე, რომელიც მოცემულ ძალთა გეომეტ-

რიულ ჯამს უდრის, და $\overline{M}_0$ მთავარ მომენტზე, რომელიც მოცემულ ძალთა მომენტების გეომეტრიულ ჯამს უდრის დაყვანის ცენტრის მიმართ.

ვექტორული (1) ჯამის კოორდინატთა ღერძებზე დაგეგმილებით მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} X &= X_1+X_2+X_3+\ldots+X_n=\sum_{i=1}^{n} X_i;\\ Y &= Y_1+Y_2+Y_3+\ldots+Y_n=\sum_{i=1}^{n} Y_i;\\ Z &= Z_1+Z_2+Z_3+\ldots+Z_n=\sum_{i=1}^{n} Z_i. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

მთავარი ვექტორის მოდული

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}. \qquad (4)$$

$\overline{R}$ ვექტორის მიმართულება განისაზღვრება ფორმულებით:

$$\left.\begin{aligned} \cos(\overline{R}\,\hat{}\,x) &= \frac{X}{R};\\ \cos(\overline{R}\,\hat{}\,y) &= \frac{Y}{R};\\ \cos(\overline{R}\,\hat{}\,z) &= \frac{Z}{R}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ვექტორულ მომენტთა (2) ჯამის კოორდინატთა ღერძებზე დაგეგმილებით (ნახ. 129) მივიღებთ:

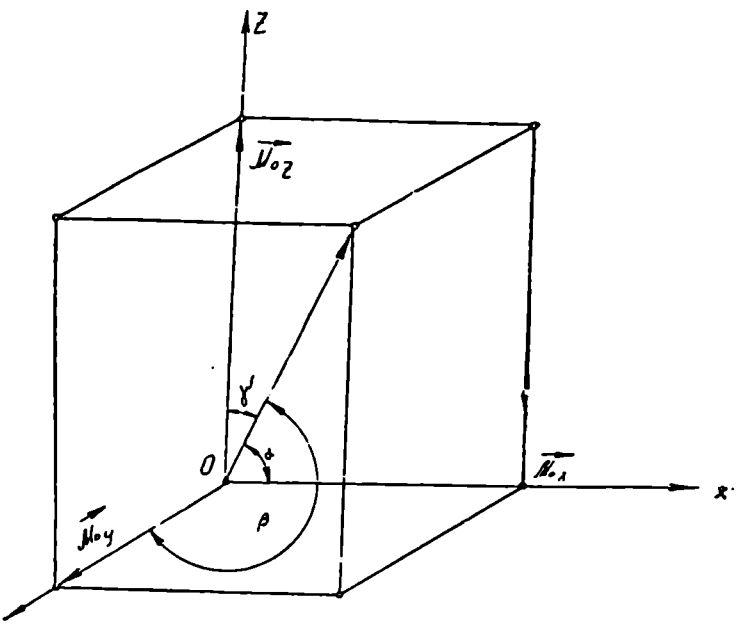
$$\left.\begin{aligned} M_{0x} &= m_{1x}+m_{2x}+m_{3x}+\ldots+m_{nx};\\ M_{0y} &= m_{1y}+m_{2y}+m_{3y}+\ldots+m_{ny};\\ M_{0z} &= m_{1z}+m_{2z}+m_{3z}+\ldots+m_{nz}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

მთავარი მომენტის მოდული

$$M_0=\sqrt{M_{0x}^2+M_{0y}^2+M_{0z}^2}. \qquad (7)$$

$\overrightarrow{M}_0$ მთავარი ვექტორული მომენტის მიმართულება სივრცეში განისაზღვრება ფორმულებით:

$$\left.\begin{aligned} \cos(\hat{\overrightarrow{M}_0, x}) &= \frac{M_{0x}}{M_0}; \\ \cos(\hat{\overrightarrow{M}_0, y}) &= \frac{M_{0y}}{M_0}; \\ \cos(\hat{\overrightarrow{M}_0, z}) &= \frac{M_{0z}}{M_0}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$




ნახ. 129

## § 6. სივრცეში ნებისმიერად განლაგებული ძალთა სისტემის წონასწორობის პირობები

როგორც ზემოთ ვნახეთ, სივრცეში ნებისმიერად განლაგებული ძალთა სისტემა მთავარი $\overrightarrow{R}$ ვექტორის ტოლ ძალაზე და მთავარი $\overrightarrow{M}_0$ მომენტის ტოლ ძალთა წყვილის მომენტზე დაიყვანება (მომენტი დაყვანის ცენტრის მიმართ აიღება). დაყვანის შედეგად შეიძლება შეგვხვდეს შემდეგი ოთხი შემთხვევა:

ა) თუ $\vec{R}\neq 0$ და $\vec{M}_0\neq 0$, მაშინ ძალები დაიყვანება ტოლქმედზე, რომლის მოქმედების წრფე დაყვანის ცენტრზე გაივლის;

ბ) თუ $\vec{R}\neq 0$ და $\vec{M}_0 \neq 0$, მაშინ ძალები დაიყვანება ძალთა წყვილზე;

გ) თუ $\vec{R}\neq 0$ და $\vec{M}_0\neq 0$, მაშინ ძალები დაიყვანება ტოლქმედზე, რომელიც არ გადის დაყვანის ცენტრზე;

დ) თუ $\vec{R}=0$ და $\vec{M}_0=0$, მაშინ სივრცეში ნებისმიერად განლაგებული ძალები ურთიერწონასწორდებიან. ამრიგად, ძალთა სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ სისტემის მთავარი ვექტორი და მთავარი მომენტი ნებისმიერად არჩეული დაყვანის ცენტრის მიმართ ულრდეს ნულს. ამ შემთხვევაში გვექნება:

$$R=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}Z_i\right)^2}=0;$$

$$M_0=\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}m_x(\vec{F}_i)\right]^2+\left[\sum_{i=1}^{n}m_y(\vec{F}_i)\right]^2+\left[\sum_{i=1}^{n}m_z(\vec{F}_i)\right]^2}=$$

$$=0,$$

ანუ

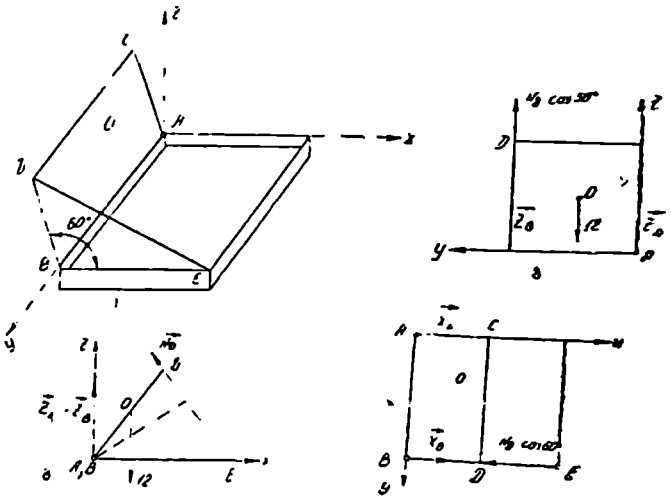
$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}X_i=0;\quad \sum_{i=1}^{n}Y_i=0;\quad \sum_{i=1}^{n}Z_i=0;\\&\sum_{i=1}^{n}m_x(\vec{F}_i)=0;\quad \sum_{i=1}^{n}m_y(\vec{F}_i)=0;\quad \sum_{i=1}^{n}m_z(\vec{F}_i)=0.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

ამრიგად, მყარ სხეულზე მოდებული ნებისმიერი სივრცითი ძალთა სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ კოორდინატთა ღერძებზე ამ ძალთა გეგმილებისა და მომენტების ალგებრული ჯამები ამ ღერძების მიმართ ნულის ტოლი იყოს.

განტოლებათა (1) სისტემის პირველი სამი პირობა გამოსახავს იმის აუცილებლობას, რომ სხეული არ გადაადგილდეს კოორდინატთა ღერძების გასწვრივ, უკანასკნელი სამი განტოლება კი იმას გამოსახავს, რომ სხეული არ ბრუნავდეს სიბრტყეებში.

## მაგალითები

1. მართკუთხა უუთის $ABCD$ სახურავი (ნახ. 130) ერთი მხრივ ებჯინება $DE$ ჯოხს. სახურავის წონაა 120 ნიუტონი, სიგრძე $AB=90$ სმ; სიგანე $BD=BE=60$ სმ; $\measuredangle DBE=60°$. განსაზღვრეთ $A$ და $B$ ანჯამების რეაქცია, აგრეთვე ჯოხის $\bar{S}$ რეაქციის სიდიდე, თუ ჯოხის წონა უგულებელყოფილია.



ნახ. 130

## ამოხსნა

სახურავის წონასწორობის განხილვით ვრწმუნდებით, რომ მისთვის ბმებია $A$ და $B$ ანჯამები და $DE$ ჯოხი.

მოდებული ძალა მხოლოდ სახურავის 120 ნიუტონი წონაა.

ჯოხის რეაქცია მიმართულია მისი ღერძის გასწვრივ და, მაშასადამე, $Ay$ ღერძის მართობული იქნება. წონის ძალის მიმართულებაც $Ay$ ღერძის მართობულია. ასეთ შემთხვევაში $A$ და $B$ ანჯამების რეაქციებიც $Ay$ ღერძის მართობული უნდა იყოს.

თვითეული მათგანი $Ax$ და $Az$ ღერძებზე დაშლილი ორი მდგენელის სახით წარმოვიდგინოთ; მივიღებთ

$$X_A \text{ და } Z_A;\quad X_B \text{ და } Z_B.$$

ახლა შევადგინოთ წონასწორობის პირველი სამი განტოლება:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} X_i = X_A + X_B - N_D \cdot \cos 60^\circ = 0;\\
&\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0;\\
&\sum_{i=1}^{n} Z_i = Z_A + Z_B - 120 + N_D \cdot \cos 30^\circ = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (ა)$$

თუ წონასწორობის მეოთხე განტოლების შესადგენად ყველა ძალას $Ax$ ღერძის თანამართობ სიბრტყეზე დავაგეგმილებთ, მაშინ 130, ბ-ნახ-ზე ნაჩვენებ გეგმილთ სქემას მივიღებთ. ამ სქემაზე $Ax$ ღერძის $yAz$ სიბრტყესთან თანკვეთის წერტილი $A$ წერტილი იქნება. ამის შემდეგ ამ სქემაზე ნაჩვენებ ძალთა მომენტების ჯამს შეგადგენთ $A$ წერტილის მიმართ, მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{n} m_x(\overline{F}_i) = Z_B \cdot AB + N_D \cdot \cos 30^\circ \cdot AB - 120 \cdot \frac{AB}{2} = 0,$$

საიდანაც

$$2Z_B + 2N_D \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 120. \qquad (ბ)$$

ახლა $\sum_{i=1}^{n} m_y(\overline{F}_i)$-ს შესადგენად ძალებს ვაგეგმილებთ $xAz$ სიბრტყეზე, რომელიც $Ay$ ღერძის მართობულია, და ნახ. 130, გ-ზე ნაჩვენებ სქემას მივიღებთ. ამ სქემაზე გამოსახული ძალების მომენტთა ჯამს თუ შევადგენთ $A$ წერტილის მიმართ, მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{n} m_y(\overline{F}_i) = 120 \cdot \frac{AD}{2} \cdot \cos 60^\circ - N_D \cdot AD \cdot \sin 60^\circ = 0,$$

საიდანაც

$$60 - N_D \cdot \sqrt{3} = 0. \qquad (გ)$$

$\sum_{i=1}^{n} m_z(\overline{F}_i)$-ის განსაზღვრისათვის ყველა ძალას ვაგეგმილებთ $Az$ ღერძის მართობულ $xAy$ სიბრტყეზე და ნახ. 130, დ-ზე ნაჩვენებ სქემას

მივიღებთ. ამის შემდეგ შევადგენთ ძალთა მომენტების განტოლებას $A$ წერტილის მიმართ, მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{n} m_z(\bar{F}_i) = N_D \cdot \cos 60^\circ \cdot AB - X_B \cdot AB = 0,$$

საიდანაც

$$N_D \cdot \frac{1}{2} - X_B = 0. \qquad (დ)$$

(გ) განტოლებიდან ვპოულობთ

$$N_D = \frac{60}{\sqrt{3}} = \frac{60\sqrt{3}}{3} = 20 \cdot \sqrt{3} = 20 \cdot 1{,}73 = 34{,}6 \text{ ნ}.$$

ამ მნიშვნელობის (დ) განტოლებაში შეტანით მივიღებთ

$$X_B = \frac{34{,}6}{2} = 17{,}3 \text{ ნ}.$$

$N_D$-ს მნიშვნელობის (ბ) განტოლებაში შეტანით მივიღებთ

$$2Z_B + 2 \cdot 20\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 120,$$

აქედან

$$Z_B = \frac{120 - 60}{2} = 30 \text{ ნიუტონს}.$$

მიღებული მნიშვნელობების (ა) სისტემის პირველ და მესამე განტოლებაში შეტანით ვიპოვით

$$X_A + 17{,}3 - 34{,}6 \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

საიდანაც

$$X_A = 0;$$

$$Z_A + 30 - 120 + 20 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,$$

საიდანაც

$$Z_A = 60 \text{ ნიუტონს}.$$

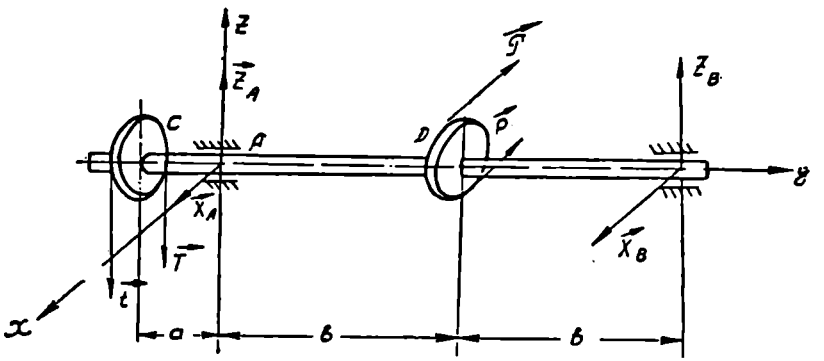
2. ჰორიზონტალურ ლილვზე დაცმულია ღვედური გადაცემის ორი $C$ და $D$ ბორბალი (ნახ. 131). ლილვი ბრუნავს $A$ და $B$ საკისრებში. ბორბლების რადიუსებია

$$r_C = 50 \text{ სმ} \quad \text{და} \quad r_D = 20 \text{ სმ};$$

$C$ ბორბლიდან $A$ საკისრამდე მანძილი $a = 20$ სმ, ხოლო $D$ ბორბლიდან $B$ საკისრამდე მანძილი $b = 50$ სმ.

$C$ ბორბალზე გადადებული ღვედის ვერტიკალური ტოტების დაჭიმულობაა $T=100$ ნიუტონს და $t=50$ ნიუტონს; $D$ ბორბალზე გადადებული ღვედის ჰორიზონტალური ტოტების დაჭიმულობებია $\overline{P}$ და $\overline{p}$, მასთან $P=2p$.

განსაზღვრეთ $\overline{P}$ და $\overline{p}$ დაჭიმულობათა სიდიდეები წონასწორობის პირობებში და ღვედების დაჭიმულობით გამოწვეული საკისრების რეაქციები.




ნახ. 131

ამოხსნა

კოორდინატთა დასაწყისად ავიღოთ $A$ წერტილი. $Ay$ ღერძი ლილვის ბრუნვის ღერძს გავაყოლოთ, $Az$ ღერძი შვეულად ზემოთ მივმართოთ, $Ax$ ღერძი კი ამ ორი ღერძის მართობულად გავატაროთ.

განვიხილოთ $C$ და $D$ ბორბლებიანი $AB$ ლილვის წონასწორობა. მოცემული $\overline{T}$ და $\overline{t}$ ძალები ღვედის შტოების დაჭიმულობებია. ბმებია $A$ და $B$ საკისრები, რომლებიც არ აფერხებენ ლილვის გადაადგილებას $Ay$ ღერძის გასწვრივ, ამის გამო ამ საკისრების $\overline{R}_A$ და $\overline{R}_B$ რეაქციები $Ay$ ღერძის მართობულებია, ე. ი. თითოეული რეაქცია $Ay$ ღერძის მართობულ სიბრტყეში ძევს. რადგან $\overline{R}_A$ და $\overline{R}_B$ რეაქციების მიმართულება უცნობია, ამიტომ თითოეული მათგანი $Ax$ და $Az$ ღერძების პარალელურ ორ მდგენელად დავშალოთ, ე. ი.

$$\overline{R}_A=\overline{X}_A+\overline{Z}_A;$$

$$\overline{R}_B=\overline{X}_B+\overline{Z}_B.$$

უცნობი ძალები აგრეთვე $D$ ბორბალზე დაგებული ღვედის ტოტების $\overline{P}$ და $\overline{p}$ დაჭიმულობებია.

ამრიგად, მოცემულ ამოცანაში ჩვენ გვაქვს ხუთი უცნობი: $\overline{X}_A$, $\overline{Z}_A$, $\overline{X}_B$, $\overline{Z}_B$ რეაქციები და ღვედების $\overline{P}$ და $\overline{p}$ დაჭიმულობები, რომლებიც დაკავშირებულია ტოლობით $P=2p$.

ლილვზე მოდებული ძალთა სისტემა წონასწორობაშია, რადგან ძალები $Ay$ ღერძის მართობულებია; ამიტომ თითოეული მათგანის გეგმილი ამ ღერძზე ნულის ტოლია; მაშასადამე, გეგმილთ ჯამის განტოლება $Ay$ ღერძზე $0\equiv 0$ იგივეობად იქცევა. ამრიგად, მოცემულ ამოცანაში შეგვიძლია შევადგინოთ წონასწორობის მხოლოდ ხუთი განტოლება, საიდანაც ხუთივე უცნობის პოვნა შეიძლება.

ჩვენ უშუალოდ ნახაზიდან ვიპოვით ყველა ძალის გეგმილს კოორდინატთა ღერძებზე, აგრეთვე ძალთა მომენტებს თითოეული კოორდინატთა ღერძის მიმართ. ეს მნიშვნელობები შევიტანოთ ცხრილში:

| ძალა | გეგმილები $Ax$ ღერძზე | გეგმილები $Az$ ღერძზე | მომენტები $Ax$ ღერძის მიმართ | მომენტები $Ay$ ღერძის მიმართ | მომენტები $Az$ ღერძის მიმართ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{T}$ | 0 | $-T$ | $-T\cdot a$ | $T\cdot r_C$ | 0 |
| $t$ | 0 | $-t$ | $-t\cdot a$ | $-t\cdot r_C$ | 0 |
| $\overline{X}_A$ | $X_A$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\overline{X}_B$ | $X_B$ | 0 | 0 | 0 | $X_B\cdot 2b$ |
| $\overline{Z}_A$ | 0 | $Z_A$ | 0 | 0 | 0 |
| $\overline{Z}_B$ | 0 | $Z_B$ | $-Z_B\cdot 2b$ | 0 | 0 |
| $\overline{P}$ | $-P$ | 0 | 0 | $-P\cdot r_D$ | $-P\cdot b$ |
| $\overline{p}$ | $-p$ | 0 | 0 | $p\cdot r_D$ | $-p\cdot b$ |

ახლა შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები. ამისათვის საკმარისია ნულს გავუტოლოთ ძალთა გეგმილების ჯამი კოორდინატთა ღერძებზე და ძალთა მომენტების ჯამი ამ ღერძების მიმართ:

ა) $$\sum_{i=1}^{n} X_i = X_A + X_B - P - p = 0;$$

ბ) $$\sum_{i=1}^{n} Y_i = Z_A + Z_B - T - t = 0;$$

გ) $\sum_{i=1}^{n} m_x(\vec{F}_i) = -T \cdot a - t \cdot a - Z_B \cdot 2b = 0;$

დ) $\sum_{i=1}^{n} m_y(\vec{F}_i) = T \cdot r_C - t \cdot r_C - P \cdot r_D + p \cdot r_D = 0;$

ე) $\sum_{i=1}^{n} m_z(\vec{F}_i) = X_B \cdot 2b - P \cdot b - p \cdot b = 0,$

(დ) განტოლებიდან ვპოულობთ

$$(T-t) \cdot r_C = (P-p) \cdot r_D,$$

აქედან

$$P-p = \frac{(T-t) \cdot r_C}{r_D} = \frac{(100-50) \cdot 50}{20} = 125 \text{ ნ}.$$

(ე) განტოლებიდან გვაქვს

$$X_B = \frac{P+p}{2} = \frac{250+125}{2} = 187{,}5 \text{ ნ}.$$

(ა) განტოლებიდან

$$X_A = P + p - X_B = 375 - 187{,}5 = 187{,}5 \text{ ნ}.$$

(გ) განტოლებიდან

$$Z_B = -30 \text{ ნ}.$$

(ბ) განტოლებიდან

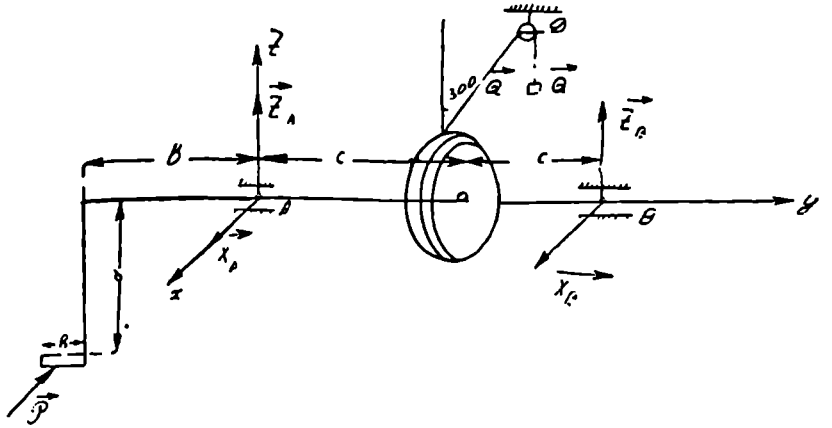
$$Z_A = 180 \text{ ნ}.$$

$Z_B$-თვის მიღებული „მინუს“ ნიშანი მიგვითითებს იმაზე, რომ ამ ძალის მიმართულება ნახაზზე აღნიშნული მიმართულების შებრუნებულია.

**3**. ოწინარის ლილვი და სახელურის ერთ შვეულ სიბრტყეში მდებარეობენ (ნახ. 132). $Q = 100$ ნ წონის ტვირთი თანაბრად ააქვთ ზემოთ ოწინარის დოლზე დახვეული და $D$ ბლოკზე გადადებული თოკის საშუალებით.

დოლის რადიუსი $R = 10$ სმ; სახელურის სიგრძე $a = 40$ სმ: $h = 20$ სმ; $c = 50$ სმ; $b = 10$ სმ. თოკი დოლიდან ჩამოდის შვეულთან $30^\circ$ კუთხით დახრილ მხებზე.

ბლოკში ხახუნის უგულებელყოფით განსაზღვრეთ ჰორიზონტალური $\vec{P}$ ძალა, რომელსაც წონასწორობაში აქვს შეკავებული $\vec{Q}$ ტვირთი. აგრეთვე განსაზღვრეთ რეაქციები საკისრებში, თუ $\vec{P}$ ძალა სახელურის შუა წერტილში სახელურის მართობულად არის მოდებული.




ნახ. 132

## ამოხსნა

კოორდინატთა საწყისად $A$ წერტილი ავიღოთ; $Ay$ ღერძი ლილვის ღერძის გასწვრივ მივმართოთ, $Az$ ღერძი კი—შვეულად ზემოთ. განვიხილოთ $AB$ ლილვის წონასწორობა. მოცემული ძალა $E$ დოლზე დახვეული თოკის $\vec{Q}$ დაჭიმულობაა. ბმები $A$ და $B$ საკისრებია. საკისრების რეაქციები შევცვალოთ მდგენელებით, რომლებიც $Ax$ და $Az$ ღერძების გასწვრივაა მიმართული; ისინი $\vec{X}_A$, $\vec{Z}_A$ და $\vec{X}_B$, $\vec{Z}_B$-თი აღვნიშნოთ. უცნობია აგრეთვე $\vec{P}$ ძალაც, რომელიც სახელურის შუა წერტილზეა მოდებული. სულ გვაქვს ხუთი უცნობი სიდიდე. ვიპოვოთ ძალთა გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე, ძალების მომენტები ამ ღერძების მიმართ და შევიტანოთ მნიშვნელობები ცხრილში:

| ძალები | გეგმილი $Ax$ ღერძზე | გეგმილი $Az$ ღერძზე | ძალის მომენტი $Ax$ ღერძის მიმართ | ძალის მომენტი $Ay$ ღერძის მიმართ | ძალის მომენტი $Az$ ღერძის მიმართ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\vec{X}_A$ | $X_A$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\vec{X}_B$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $X_B \cdot 2c$ |
| $\vec{Z}_A$ | 0 | $Z_A$ | 0 | 0 | 0 |
| $\vec{Z}_B$ | 0 | $Z_B$ | $-Z_B \cdot 2c$ | 0 | 0 |
| $\vec{Q}$ | $-Q \cdot \cos 60°$ | $Q \cdot \cos 30°$ | $Q \cdot c \cdot \cos 30°$ | $Q \cdot R$ | $-Q \cdot c \cos 60°$ |
| $\vec{P}$ | $-P$ | 0 | 0 | $-P \cdot a$ | $P\left(\frac{h}{2}+b\right)$ |

ამ შემთხვევაში წონასწორობის განტოლებები იქნება:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = X_A + X_B - Q\cdot\cos 60^\circ - P = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = Z_A + Z_B + Q\cdot\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_x(\vec{F}_i) = -Z_B\cdot 2c - Q\cdot c\cdot\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_y(\vec{F}_i) = Q\cdot R - P\cdot a = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_z(\vec{F}_i) = X_B\cdot 2c - Q\cdot\cos 60^\circ\cdot c +$$

$$+ P\left(\frac{h}{2} + b\right) = 0.$$

მნიშვნელობების შეტანით მივიღებთ:

$$X_A + X_B - 50 - P = 0; \qquad (ა)$$

$$Z_A + Z_B + 50\sqrt{3} = 0; \qquad (ბ)$$

$$-Z_B\cdot 100 - 5000\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0; \qquad (გ)$$

$$100\cdot 10 - P\cdot 40 = 0; \qquad (დ)$$

$$X_B\cdot 100 - 50\cdot 50 + P\cdot 20 = 0. \qquad (ე)$$

(დ) განტოლებიდან გვაქვს

$$P = \frac{100\cdot 10}{40} = 25 \text{ ნიუტონს;}$$

(გ) განტოლებიდან

$$Z_B = -\frac{5000\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 100} = -25\sqrt{3} \text{ ნიუტონს;}$$

(ბ) განტოლებიდან

$$Z_A = -50\sqrt{3} + 25\sqrt{3} = -25\sqrt{3} \text{ ნიუტონს;}$$

(ე) განტოლებიდან

$$X_B = \frac{50 \cdot 50 - 25 \cdot 30}{100} = 20 \text{ ნიუტონს.}$$

დაბოლოს, (ა) განტოლებიდან

$$X_A = P - X_B + 50 = 55 \text{ ნ.}$$

## § 7. სხეულის წონასწორობა სივრცეში, რომლის მასზე მოქმედებს პარალელური ძალები

პარალელური ძალები შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც სივრცეში ნებისმიერად განლაგებული ძალთა სისტემის კერძო შემთხვევა. ღერძთა სისტემას შევარჩევთ ისე, რომ $xOy$ სიბრტყე მართობული იყოს მოცემულ ძალთა ფუძეების, $Oz$ ღერძი კი მათი პარალელური იყოს; მაშინ წონასწორობის პირობებიდან ზოგიერთი იგივეობად იქცევა; ასე, მაგალითად, ძალთა გეგმილების ჯამი $Ox$ და $Oy$ ღერძებზე და აგრეთვე ძალთა მომენტების ჯამი $Oz$ ღერძის მიმართ $0 \equiv 0$ იგივეობად იქცევა.

ამრიგად, სივრცეში პარალელურ ძალთა წონასწორობის შემთხვევაში გვრჩება შემდეგი სამი პირობა:

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0; \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_x(\overline{F}_i) = 0; \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_y(\overline{F}_i) = 0, \tag{3}$$

ე. ი. პარალელურ ძალთა სივრცითი სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ ძალების გეგმილთ ჯამი ძალების პარალელურ ღერძზე ნულის ტოლი იყოს და ამ ძალთა მომენტების ალგებრული ჯამი ძალებს მართობულ კოორდინატთა ღერძების მიმართ უდრიდეს ნულს.

### მაგალითი

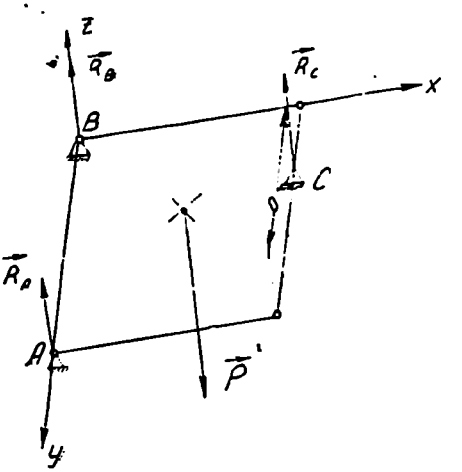
$\overline{P}$ წონის ერთგვაროვანი კვადრატული ფორმის ფიცარი (ნახ. 133) ჰორიზონტალურ მდგომარეობაშია შეკავებული სამი $A$, B და $C$ საყრდენით, რომელთაგანაც $A$ და B საყრდენები კვადრატის ორ მეზობელ

წვეროშია მოთავსებული, $C$ საყრდენი კი—მის მოპირდაპირე მხარეს. იპოვეთ $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$, და $\vec{R}_C$ რეაქციები, თუ კვადრატის გვერდის სიგრძეა $a$; დანარჩენი ზომები ნახაზზეა ნაჩვენები.

## ამოხსნა

განვიხილოთ ფიცრის წონასწორობა. აქ $A$, $B$ და $C$ საყრდენები ბმებს წარმოადგენენ.

კოორდინატთა საწყისად $B$ წერტილი ავიღოთ; $Bz$ ღერძი ვერტიკალურად ზემოთ მივმართოთ, $Bx$ და $By$ ღერძები კი კვადრატის გვერდებს გავაყოლოთ.




ნახ. 133

ფიცარზე მოდებულია $\vec{P}$ წონის ძალა და საყრდენთა $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$ და $\vec{R}_C$ რეაქციები.

ნახაზიდან ჩანს, რომ სხეულზე პარალელური ძალები მოქმედებენ. შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = R_A + R_B + R_C - P = 0; \qquad (ა)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_x(\vec{F}_i) = R_A \cdot a - P \cdot \frac{a}{2} + R_C \frac{a}{3} = 0; \qquad (ბ)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_y(\vec{F}_i) = P \cdot \frac{a}{2} - R_C \cdot a = 0. \qquad (გ)$$

ამ განტოლებათა ამოხსნით მივიღებთ

$$R_C = \frac{P}{2}; \qquad R_A = \frac{P}{3}; \qquad R_B = \frac{P}{6}.$$

## § 8. ვარინიონის თეორემა სივრცეში ნებისმიერად განლაგებულ ძალთა სისტემისათვის

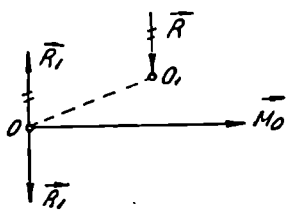
განვიხილოთ ძალთა სისტემის დაყვანის ის შემთხვევა, როდესაც არც მთავარი ვექტორი და არც მთავარი მომენტი არ უდრის ნულს:

$$\vec{R}\neq 0 \quad \text{და} \quad \vec{M}_0\neq 0.$$

ძალთა ბრტყელი სისტემის თანაგვარად სივრცით სისტემაშიაც ძალები ამ შემთხვევაში ერთ ტოლქმედზე დაიყვანება.

ვთქვათ, $\vec{R}$ მთავარი ვექტორი $\vec{M}_0$ მთავარი მომენტის მართობულია (ნახ. 134).

$\vec{M}_0$ მომენტი წარმოვიდგინოთ ძალთა წყვილის სახით, რომლის ძალებია $\vec{R}_1$ და $-\vec{R}_1$; ისინი მოდებულით $\vec{R}$ ტოლქმედის ტოლებია, $O$ წერტილზე არიან მოდებული და ურთიერთ წონასწორდებიან; გვრჩება ერთი $\vec{R}$ ტოლქმედი, რომელიც დაყვანის $O$ ცენტრიდან $\frac{M_0}{R}$ მანძილითაა დაშორებული.



ნახ. 134

ამ ტოლქმედის მომენტი დაყვანის $O$ ცენტრის მიმართ $\vec{m}_0(\vec{R})$-ის ტოლია და, თავის მხრივ, მთავარი მომენტის ტოლიც

$$\vec{M}_0=\vec{m}_1+\vec{m}_2+\vec{m}_3+\ldots+\vec{m}_n;$$

მაშასადამე,

$$\boxed{\vec{m}_0(\vec{R})=\vec{m}_1+\vec{m}_2+\vec{m}_3+\ldots+\vec{m}_n=\sum_{i=1}^{n}\vec{m}_0(\vec{F}_i).} \qquad (1)$$

ტოლქმედის მომენტი ნებისმიერი წერტილის მიმართ მდგენელი ძალების მომენტების ჯამს უდრის იმავე წერტილის მიმართ.

(1) ტოლობის დაგეგმილებით ნებისმიერ ღერძზე, მაგალითად, $Oz$ ღერძზე, მივიღებთ

$$\boxed{m_{0z}(\vec{R})=\sum_{i=1}^{n}m_{0z}(\vec{F}_i),} \qquad (2)$$

ე. ი. ტოლქმედის მომენტი რაიმე ღერძის მიმართ მდგენელი ძალების მომენტების ალგებრულ ჯამს უდრის იმავე ღერძის მიმართ.

(1) და (2) ტოლობები ვარინიონის თეორემას გამოსახავენ სივრცეში ნებისმიერად განლაგებული ძალებისათვის.

VIII თავი

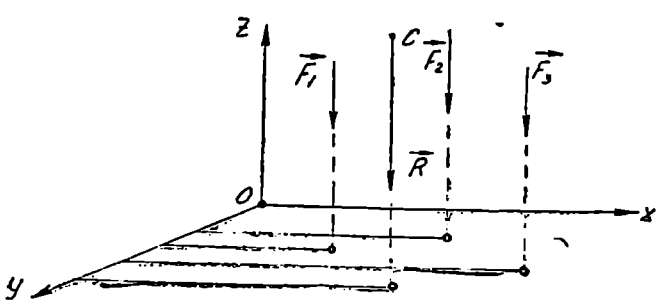
# პარალელურ ძალთა ცენტრი და ცენტრის კოორდინატები. სხეულის სიმძიმის ცენტრი

## § 1. პარალელურ ძალთა ცენტრი და ცენტრის კოორდინატები

სიბრტყის სტატიკაში პარალელურ ძალთა ცენტრი განსაზღვრული იყო როგორც ამ ძალთა ტოლქმედი, რომელიც არ იცვლის თავის მდებარეობას პარალელური ძალების ერთი და იმავე კუთხით მობრუნებით.

ახლა ვიპოვოთ პარალელურ ძალთა ცენტრის განმსაზღვრელი ფორმულები.

ვთქვათ, სხეულზე მოქმედებს $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, ... , $\overline{F}_n$ პარალელური ძალები (ნახ. 135).




ნახ. 135

ამ ძალთა მოდების წერტილების კოორდინატები სათანადოდ იყოს: $(x_1, y_1, z_1)$; $(x_2, y_2, z_2)$; $(x_3, y_3, z_3)$; ...; $(x_n, y_n, z_n)$.

პარალელურ ძალთა ტოლქმედი იყოს $\overline{R}$ ძალა, რომლის მოდების წერტილის კოორდინატებია $x_c$, $y_c$, $z_c$; ეს წერტილი პარალელურ ძალთა ცენტრია.

მოდებული ძალები მოვაბრუნოთ ისე, რომ ისინი $Oz$ ღერძის პარალელური გახდნენ.

ზემოთ დავამტკიცეთ თეორემა ძალთა ბრტყელი სისტემის ტოლქმედის მომენტის შესახებ წერტილის მიმართ. პარალელური ძალები და მათი ტოლქმედი $Ox$ ღერძის მართობულ $zOy$ სიბრტყეზე რომ დავაგეგმილოთ, დავრწმუნდებით, რომ ისინი ნატურალური სიდიდით გეგმილდებიან. ტოლქმედის მომენტის თეორემის გამოყენებით მივიღებთ

$$R\cdot y_c=F_1y_1+F_2y_2+F_3y_3+\ldots+F_ny_n=\sum_{i=1}^{n}(F_i\cdot y_i);$$

გარდა ამისა, ცნობილია, რომ ძალა

$$R=\sum_{i=1}^{n}F_i,$$

ამიტომ ჩასმით მივიღებთ

$$y_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}(F_iy_i)}{\sum_{i=1}^{n}F_i}. \tag{1}$$

ძალების $xOy$ სიბრტყეზე დაგეგმილებით, ანალოგიურად, მივიღებთ

$$x_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}(F_ix_i)}{\sum_{i=1}^{n}F_i}. \tag{2}$$

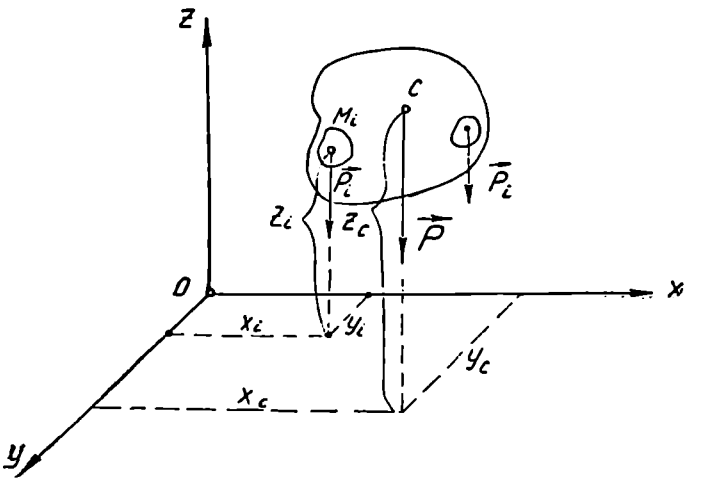
ახლა პარალელურ ძალებს თუ მოვაბრუნებთ ისე, რომ ისინი $Ox$ ღერძის პარალელური გახდნენ და იმავე თეორემას გამოვიყენებთ, ვიპოვით

$$z_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}(F_iz_i)}{\sum_{i=1}^{n}F_i}. \tag{3}$$

(1), (2), (3) ფორმულებით განისაზღვრება პარალელური ძალების ცენტრის მდებარეობა.

## § 2. სხეულის სიმძიმის ცენტრი. სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები

სხეულის წონა ძალაა, რომლითაც დედამიწისაკენ მიიზიდება სხეული. მაგრამ ამავე დროს, ცხადია, რომ დედამიწა თავისაკენ იზიდავს ამ სხეულის ყოველ ნაწილაკს ძალით, რომელსაც სიმძიმის ძალა ეწოდება. ყველა ეს სიმძიმის ძალა შეუღლად ქვეშოთ იქნება მიმართული. რადგანაც სხეულის ზომები უმნიშვნელოდ მცირეა დედამიწის ზომებთან შედარებით, მაშინ სიმძიმის ძალებს ურთიერთპარალელურად მიიჩნევენ.




ნახ. 136

ვთქვათ, მოცემულია დედამიწის ზედაპირის მახლობლად მდებარე ნივთიერი სხეული. ამ სხეულში განვიხილოთ ელემენტარული ნაწილაკები. ამ ნაწილაკების დედამიწისაკენ მიზიდულობის ძალები (სიმძიმის ძალები) იყოს $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, ... , $\vec{P}_n$. ეს ძალები ურთიერთპარალელურია (ნახ. 136).

ამ პარალელური ძალების ტოლქმედი მათ ჯამს უდრის და სხეულის წონა ეწოდება; ამ პარალელურ ძალთა სისტემის ცენტრს სხეულის სიმძიმის ცენტრი ეწოდება.

რადგან სხეულის სიმძიმის ცენტრი სხეულის ელემენტარული ნაწილაკების წონების—პარალელური ძალების ცენტრია, ამიტომ სიმძიმის ცენტრის კოორდინატების გამოთვლისათვის შეგვიძლია ვისარგებ-

ლოთ წინა პარაგრაფის (1), (2) და (3) ფორმულებით. სიმძიმის $C$ ცენტრის კოორდინატები $Ox$, $Oy$ და $Oz$ ღერძების მიმართ სათანადოდ იყოს $x_c$, $y_c$ და $z_c$, ხოლო მყარი სხეულის ნებისმიერი $M_i$ ნაწილაკის კოორდინატები $x_i$, $y_i$ და $z_i$, მივიღებთ (ნახ. 136):

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{P}; \\ y_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i y_i}{P}; \\ z_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i z_i}{P}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

სადაც $\bar{p}_i$ მყარი სხეულის ცალკეულ ნაწილაკებზე მოდებული სიმძიმის ძალებია;

$P$—სხეულის წონა; მასთან

$$P = \sum_{i=1}^{n} p_i. \qquad (2)$$

ახლა განვსაზღვროთ ერთგვაროვანი სხეულის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა. ვთქვათ, ერთგვაროვანი სხეულის ერთეული მოცულობის წონაა $\gamma$, ხოლო მთელი სხეულის მოცულობა—$V$; მაშინ სხეულის წონა

$$P = \gamma \cdot V.$$

ასეთი სხეულის ყოველი ნაწილაკის წონა

$$p_i = \gamma \cdot v_i,$$

სადაც $v_i$ სხეულის ელემენტარული $M_i$ ნაწილაკის მოცულობაა.

(1) გამოსახულებებში $p_i = \gamma v_i$ მნიშვნელობის ჩასმით, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \gamma v_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma v_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i x_i}{V}; \\ y_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \gamma v_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma v_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i y_i}{V}; \\ z_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \gamma v_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \gamma v_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i z_i}{V}; \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

სადაც მთელი სხეულის მოცულობა

$$V = \sum_{i=1}^{n} v_i.$$

როგორც ჩანს, მოცემული კოორდინატები დამოკიდებული არ არის $\gamma$ მუდმივაზე, რომელიც ახასიათებს მოცემულ ერთგვაროვან სხეულს, არამედ დამოკიდებულია მხოლოდ სხეულის მიერ დაკავებულ $V$ მოცულობაზე. ამის საფუძველზე, ერთგვაროვანი სხეულის სიმძიმის ცენტრს ერთგვაროვანი მოცულობის სიმძიმის ცენტრი ეწოდება.

ამრიგად, ერთგვაროვანი მოცულობის სიმძიმის ცენტრი ამ მოცულობის შემავსებელი ერთგვაროვანი სხეულის სიმძიმის ცენტრია.

ხშირად გვხვდება ისეთი სხეულები, რომლებსაც ერთი განზომილება მეორეზე ბევრი აქვთ; მაგალითად, ძალზე თხელი ფირფიტა, რომ-

ლის სისქეა $\delta$, თან ეს სისქე უცვლელად ჩავთვალოთ, მაშინ ამ ფირფიტის ფართობს $s_i$-ით თუ აღვნიშნავთ, მისი მოცულობა იქნება

$$v_i = s_i \cdot \delta.$$

ჩავსვათ $v_i$-ის მნიშვნელობა (3) ფორმულებში. მასთან მრიცხველი და მნიშვნელი $\delta$-ზე შევკვეცოთ, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i x_i}{S}; \\ y_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i y_i}{S}, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

სადაც მთელი ნაკვთის ფართობი

$$S = \sum_{i=1}^{n} s_i.$$

ეს ერთგვაროვანი ფირფიტა $xOy$ სიბრტყეში ძევს, ამიტომ $z_c = 0$.

ამ შემთხვევაშიაც სიმძიმის $C$ ცენტრის კოორდინატები დამოკიდებული არ არის $\delta$ მუდმივაზე. ამის საფუძველზე დავასკვნით, რომ ერთგვაროვანი ფიგურის ფართობის სიმძიმის ცენტრი ეწოდება მუდმივი სისქის ერთგვაროვანი ფირფიტის სიმძიმის ცენტრს.

მე-4 ფორმულების მრიცხველები

$$\sum_{i=1}^{n} s_i x_i \quad \text{და} \quad \sum_{i=1}^{n} s_i y_i$$

ბრტყელი ნაკვთის თითოეული ელემენტის ფართობის ღერძამდე დაშორების მანძილზე ნამრავლთა ჯამს წარმოადგენს და მას ფართობის სტატიკური მომენტი ეწოდება სათანადო ღერძის მიმართ. ამ სტატიკურ მომენტებს სათანადოდ $S'_y$ და $S'_x$-ით თუ აღვნიშნავთ, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} S'_x &= \sum_{i=1}^{n} s_i y_i; \\ S'_y &= \sum_{i=1}^{n} s_i x_i. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

(4) ფორმულებში ჩასმით მივიღებთ ბრტყელი ნაკვთის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებს:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{S'_y}{S}; \\ y_c &= \frac{S'_x}{S}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

ამ ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ სიმძიმის ცენტრის $x_c$ ან $y_c$ კოორდინატი ნულის ტოლია (ე. ი., თუ რაიმე ღერძი გადის ნაკვთის ფართობის სიმძიმის ცენტრზე), მაშინ, სათანადოდ, სტატიკური მომენტიც ნულია, ე. ი. $S'_y=0$, ან $S'_x=0$ (რადგან $S\neq 0$).

ამრიგად, ნაკვთის მთელი ფართობის სტატიკური მომენტი ნულის ტოლია ნაკვთის სიმძიმის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ.

დაბოლოს, შეიძლება სხეულის ორი განზომილება მეტად მცირე იყოს მესამე განზომილებასთან შედარებით. ასეთია მეტად წვრილი მავთული. ამ შემთხვევაში განივკვეთის ელემენტარულ ფართობს თუ აღვნიშნავთ $\Delta s$-ით და სიგრძეს $l_i$-ით, მთელი მოცულობა იქნება

$$\sum_{i=1}^{n} l_i(\Delta s) = L\cdot(\Delta s),$$

სადაც $L$ მავთულის მთლიანი სიგრძეა.

(4) ფორმულებში ჩასმით და $\Delta s$-ზე შეკვეცით მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i x_i}{L}; \\ y_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i y_i}{L}; \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i z_i}{L}. \qquad (7)$$

სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები დამოკიდებული არ არის $\Delta s$ მუდმივაზე. ამის საფუძველზე დავასკვნით, რომ ერთგვაროვანი მავთულის სიმძიმის ცენტრი შეიძლება მივიღოთ ერთგვაროვანი $L$ სიგრძის წირის სიმძიმის ცენტრად.

ამრიგად, **ერთგვაროვანი წირის სიმძიმის ცენტრი მუდმივი კვეთის ფართობის მქონე მეტად წვრილი მავთულის სიმძიმის ცენტრია. ამ მავთულის ღერძი მოცემულ წირს ემთხვევა.**

სხეულის სიმძიმის ცენტრის პოვნა მარტივდება, როდესაც ერთგვაროვან სხეულს აქვს სიმეტრიის ღერძი, სიმეტრიის სიბრტყე. ან სიმეტრიის ცენტრი. პირველ შემთხვევაში სიმძიმის ცენტრი სიმეტრიის ღერძზე ძევს, მეორე შემთხვევაში სიმეტრიის სიბრტყეში და მესამე შემთხვევაში — სიმეტრიის ცენტრში. ამის საფუძველზე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ნივთიერი წრფის მონაკვეთის სიმძიმის ცენტრი მის შუა წერტილშია; პარალელოგრამის ფართობის სიმძიმის ცენტრი მისი დიაგონალების გადაკვეთის წერტილშია (რომელიც პარალელოგრამის სიმეტრიის ცენტრია); წესიერი მრავალკუთხედის, წრისა და ელიფსის ფართობთა სიმძიმის ცენტრები, აგრეთვე სფეროს მოცულობის სიმძიმის ცენტრი მათ გეომეტრიულ ცენტრშია.

ახლა გადავიდეთ უმარტივესი ელემენტარული სხეულების სიმძიმის ცენტრის განსაზღვრაზე.

### ა. სამკუთხედის ფართობის სიმძიმის ცენტრი

ავიღოთ $ABC$ სამკუთხედი (ნახ. 137, ა) და $AC$ ფუძის პარალელური წრფეებით ფართობი ელემენტარულ ზოლებად დავყოთ. ამ ელემენტარული ზოლების სიმძიმის ცენტრები სამკუთხედის $BD$ მედიანაზე მდებარეობენ. სწორედ ასევე, სამკუთხედი დანარჩენი გვერდების პარალელურ ზოლებად რომ დავყოთ, ვნახავთ, რომ საძიებელი სიმძიმის ცენტრი დანარჩენ მედიანებზე ძევს; აქედან დასკვნა, რომ სამკუთხედის სამივე მედიანა იკვეთება სამკუთხედის სიმძიმის $O$ ცენტრში. წრფის მონაკვეთით შევაერთოთ $D$ და $E$ წერტილები; $ABC$ და $DEC$ სამკუთხედები მსგავსნი არიან; მსგავსებიდან ვპოულობთ

$$\frac{AC}{DC} = \frac{AB}{DE} = \frac{2}{1}.$$

$ABO$ და $DOE$ სამკუთხედებიც მსგავსნი არიან, ამიტომ

$$\frac{OD}{OB} = \frac{DE}{AB} = \frac{1}{2}$$

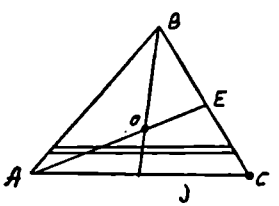
ანუ

$$2 \cdot DO = OB,$$

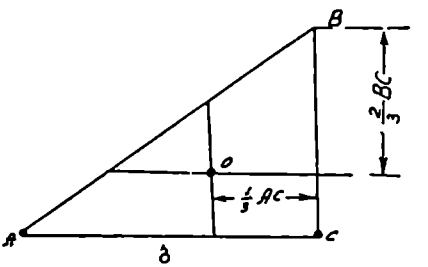
მაშასადამე,

$$\boxed{DO = \frac{1}{3} DB.} \qquad (ა)$$

ნებისმიერი სამკუთხედის სიმძიმის ცენტრი მისი მედიანების გადაკვეთის წერტილშია, მასთან სამკუთხედის სათანადო ფუძიდან მედიანის $\frac{1}{3}$ მანძილითაა დაშორებული.




ა




ბ

ნახ. 137

ამ განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ მართკუთხა სამკუთხედის (ნახ. 137, ბ) სიმძიმის ცენტრი კათეტების პარალელური იმ მონაკვეთების გადაკვეთის წერტილშია, რომლებიც მართი კუთხის წვეროდან თითოეული კათეტის $\frac{1}{3}$ სიგრძეზეა გატარებული.

### ბ. წრეწირის რკალის სიმძიმის ცენტრი

ვთქვათ, მოცემულია $r$ რადიუსის წრეწირის $AB$ რკალი (ნახ. 138). გავატაროთ ამ რკალის $AB$ ქორდა, შემდეგ $O$ ცენტრიდან ქორდაზე დავუშვათ $OQ$ მართობი, რომელიც რკალს შუაზე ჰყოფს.

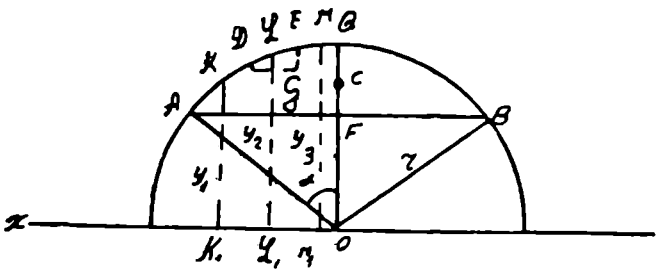
რადგან რკალის შუა წერტილზე გამავალი $OQ$ რადიუსი $AB$ რკალის სიმეტრიის ღერძია, ამიტომ საძიებელი სიმძიმის $C$ ცენტრი ამ რადიუსზე ძევს.

გამოვიანგარიშოთ $OC$ მანძილი.

წრეწირის რკალი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც წესიერი მრავალკუთხედის პერიმეტრის ნაწილის ზღვარი მრავალკუთხედის გვერდების უსაზღვროდ გაორკეცების დროს.

$AB$ რკალი დავყოთ $\Delta l_1$, $\Delta l_2$, $\Delta l_3$ და ა. შ. სიგრძის უსასრულოდ მცირე $AD$, $DE$, $EQ$ და ა. შ. რკალებად. შემდეგ $O$ ცენტრზე $AB$ ქორდის პარალელური $Ox$ ღერძი გავატაროთ და $AD$, $DE$, $EQ$ რკალებს შუა $K$, $L$ და $M$ წერტილებიდან $KK_1$, $LL_1$, $MM_1$ მართობები დაეუშვათ; მათი სიგრძეები $y_1$, $y_2$ და $y_3$-ით აღვნიშნოთ:

$$KK_1=y_1, \quad LL_1=y_2, \quad MM_1=y_3.$$




ნახ. 138

შემოვიღოთ აღნიშვნა $OC=y_c$, მივიღებთ

$$y_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i y_i}{L}, \tag{ა}$$

სადაც $L$ არის $AB$ რკალის სიგრძე, ხოლო შეჯამება ყველა $\Delta l_i$ ელემენტზეა გავრცელებული.

ამ გამოსახულების მრიცხველი შემდეგნაირად გამოვიანგარიშოთ. $\overset{\smile}{AD}$, $\overset{\smile}{DE}$, $\overset{\smile}{EQ}$ და ა. შ. რკალების უსასრულოდ მცირე სიდიდეების გამო შეიძლება მათი წრფივ მონაკვეთებად ჩათვლა. მაშინ $DG \| AB$ და $EG \| LL_1$ თუ გავატარებთ და $L$ და $O$ წერტილებს წრფით შევაერთებთ, მივიღებთ ორ მსგავს $DGE$ და $LOL_1$ სამკუთხედს (ამ სამკუთხედების გვერდები ურთიერთმართობულია). ამ სამკუთხედების მსგავსებიდან გვაქვს:

$$LL_1 : LO = DG : DE,$$

ანუ

$$y_2 : r = DG : \Delta l_2;$$

აქედან

$$y_2 \cdot \Delta l_2 = r \cdot DG,$$

სადაც

$$DG = \Delta x_2;$$

ამიტომ

$$y_2 \cdot \Delta l_2 = r \cdot \Delta x_2.$$

ანალოგიურ შედეგებს მივიღებთ თითოეული ელემენტარული რკალისათვის.

მთელი $\overset{\frown}{AB}$ რკალისათვის გვაქვს

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta l_i y_i = \Delta l_1 \cdot y_1 + \Delta l_2 \cdot y_2 + \Delta l_3 \cdot y_3 + \ldots =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} r \cdot \Delta x_i = r \cdot \overline{AB} \quad \text{(ქორდაზე)},$$

რადგან $\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{DE}$, $\overset{\frown}{EQ}$ და ა. შ. რკალების $\overline{AB}$ ქორდაზე გეგმილთ ჯამი ამ ქორდის სიგრძეა. (ა) ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta l_i y_i}{L} = \frac{r \cdot \overline{AB}}{L}. \qquad (ბ)$$

განვიხილოთ $\angle AOQ = \alpha$.

$\alpha$ კუთხეს რადიანებით თუ გამოვსახავთ, მაშინ $L = r \cdot 2\alpha$; $AF$ ქორდის ნახევარს განვსაზღვრავთ $OFA$ მართკუთხა სამკუთხედიდან

$$AF = OA \cdot \sin \alpha = r \cdot \sin \alpha,$$

ან

$$\overline{AB} = 2r \cdot \sin \alpha;$$

მაშინ (ბ) ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ

$$y_c = \frac{r \cdot 2r \cdot \sin \alpha}{L},$$

ანუ

$$y_c = \frac{r \cdot \sin \alpha}{\alpha} = r \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \qquad (8)$$

სადაც $\alpha$-იმ ცენტრალური კუთხის ნახევარია, რომელიც რკალს ეყრდნობა.

## მაგალითები

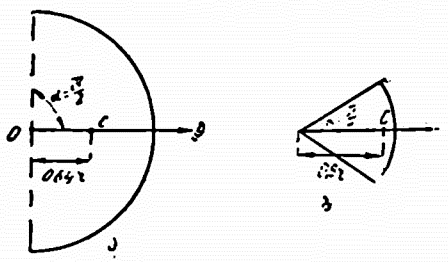
**1.** განსაზღვრეთ წრეწირის ნახევრის სიმძიმის $C$ ცენტრის მდებარეობა (ნახ. 139, ა).

### ამოხსნა

ამ შემთხვევაში

$$\measuredangle \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

ამ მნიშვნელობის (8) ფორმულაში შეტანით მივიღებთ:




ნახ. 139

$$y_c = r \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{r \cdot 1}{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{2r}{\pi} = 0{,}64\, r.$$

**2.** განსაზღვრეთ წრეწირის მეოთხედის სიმძიმის $C$ ცენტრის მდებარეობა (ნახ. 139, ბ).

### ამოხსნა

ამ შემთხვევაში $\measuredangle \alpha = \frac{\pi}{4}$, ამიტომ (8) ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ

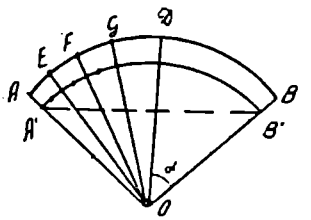
$$y_c = r \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} = r \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2r\sqrt{2}}{\pi} \cong 0{,}9\, r.$$

### გ. წრიული სექტორის სიმძიმის ცენტრი

$OAB$ სექტორის მომჭიმველი $\overset{\frown}{AB}$ რკალი უსასრულოდ მცირე $AE$, $EF$ და $GD$ ნაწილებად რომ დავყოთ (ნახ. 140) და დაყოფის წერტილები $O$ ცენტრს შევუერთოთ, მაშინ $OAB$ სექტორის ფართობი დაიყოფა უსასრულოდ მცირე $AEO$, $EFO$ და ა. შ. სექტორებად, რომელთაგანაც თითოეული სამკუთხედად შეგვიძლია ჩავთვალოთ; მაშინ სამკუთხედის სიმძიმის ცენტრი $O$ ცენტრიდან დაშორებული იქნება მანძილით

$$\rho = \frac{2}{3} r,$$

ხოლო სიმძიმის ცენტრთა გეომეტრიული ადგილი $\rho = \frac{2}{3} r$ რადიუსიან $\overset{\frown}{A'B'}$ რკალს წარმოქმნის. ამ რკალში შეყურსულია $OAB$ სექტორის მთელი ფართობის წონა; ამიტომ სექტორის ფართობის სიმძიმის ცენტრი ძევს იმ წერტილში, სადაც $\overset{\frown}{A'B'}$ რკალის სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს.



ნახ. 140

რკალის სიმძიმის ცენტრი რკალის ქორდის მართობულ რადიუსზე ძევს; მისი მდებარეობა (8) ფორმულით განისაზღვრება. ჩვენს შემთხვევაში

$$y_c = \rho \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha};$$

რადგან $\rho = \frac{2}{3} r$, ამიტომ

$$\boxed{y_c = \frac{2}{3} r \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}.} \tag{9}$$

მაგალითად, ნახევარწრის ფართობისათვის $\alpha = \frac{\pi}{2}$, გვექნება

$$\boxed{y_c = \frac{4r}{3\pi} = 0{,}424\ r.} \tag{10}$$

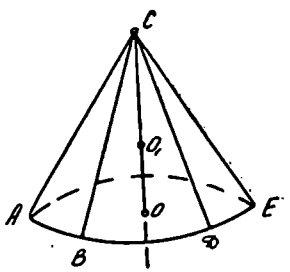
თუ ზედაპირს აქვს სიმეტრიის ღერძი, მაშინ სიმძიმის ცენტრი ამ ღერძზე ძევს. მაგალითად:

1) წესიერი პრიზმის სრული და გვერდითი ზედაპირის სიმძიმის ცენტრი პრიზმის სიმაღლის შუა წერტილშია;

2) ცილინდრის სრული და გვერდითი ზედაპირის სიმძიმის ცენტრი ცილინდრის სიმაღლის შუა წერტილშია;

3) წესიერი პირამიდისა და კონუსის გვერდითი ზედაპირის სიმძიმის ცენტრი ძევს სიმაღლეზე და ფუძიდან სიმაღლის 1/3-ით არის დაშორებული.

მაგალითისათვის ავიღოთ კონუსი (ნახ. 141); კონუსის ფუძის წერწირი უსასრულოდ მცირე $\breve{AB}$, $\breve{BD}$, $\breve{DE}$ და ა. შ. რკალებად დავყოთ; დაყოფის წერტილები კონუსის წვეროს შევუერთოთ, ამით მთელ რიგ $ACB$, $BCD$, $DCE$ და ა. შ. სამკუთხედებს მივიღებთ ($\breve{AB}$, $\breve{BD}$, $\breve{DE}$ და ა. შ. რკალები, როგორც უსასრულოდ მცირენი, შეგვიძლია ჩავთვალოთ წრფის მონაკვეთებად).



ნახ. 141

თითოეული სამკუთხედის სიმძიმის ცენტრი კონუსის მსახველზე მდებარეობს და ფუძიდან მსახველის სიგრძის $\frac{1}{3}$-ზე ძევს. ამ სამკუთხედების სიმძიმის ცენტრები წარმოქმნიან წრეწირს, რომელიც კონუსის გვერდითი ზედაპირზეა გატარებული და ფუძიდანგისი სიმაღლის 1/3-ზე მდებარეობს. მაშასადამე, კონუსის გვერდითი ზედაპირის სიმძიმის ცენტრი ამ წრეწირის სიმძიმის ცენტრია და ფუძიდან სიმაღლის 1/3-ზე ძევს: $OO_1 = \frac{1}{3} OC$.

### დ. პირამიდის სიმძიმის ცენტრი

ვთქვათ, მოცემულია სამწახნაგა $SABC$ პირამიდა (ნახ. 142). გავატაროთ პირამიდის რომელიმე წახნაგის, მაგალითად, $ABC$-ს პარალელური მთელი რიგი სიბრტყეები. თუ ეს პარალელური სიბრტყეები ერთმანეთისაგან უსასრულოდ ახლო მანძილზე მდებარეობენ, მაშინ პირამიდა მთელ რიგ თხელ სამკუთხა ფირფიტებად დაიყოფა. თითოეული ფირფიტის სიმძიმის ცენტრი მისი მედიანების გადაკვეთის წერტილშია, თან ეს ცენტრები $S$ წვეროსა და $ABC$ წახნაგის $O_1$ სიმძიმის ცენტრთან შემაერთებელ $SO_1$ წრფეს ქმნიან. ამ წრფეზე ძევს პირამიდის სიმძიმის ცენტრი.

ანალოგიურად $ASC$ წახნაგის პარალელურ სიბრტყეებს თუ გავატარებთ, მაშინ პირამიდის სიმძიმის ცენტრი მოხვდება $BO_2$ წრფეზე, რომელიც $B$ წვეროს $ASC$ წახნაგის $O_2$ სიმძიმის ცენტრთან აერთებს.

მაშასადამე, პირამიდის სიმძიმის ცენტრი $SO_1$ და $BO_2$ წრფეთა გადაკვეთის $O$ წერტილში ძევს.

$SO_1$ და $BO_2$ წრფეები უთუოდ გადაიკვეთებიან, რადგან იმ სიბრტყეში მდებარეობენ, რომელიც $SAC$ და $ABC$ სამკუთხედების თანამკვეთი $SD$ და $BD$ მედიანებით განისაზღვრება. რადგან

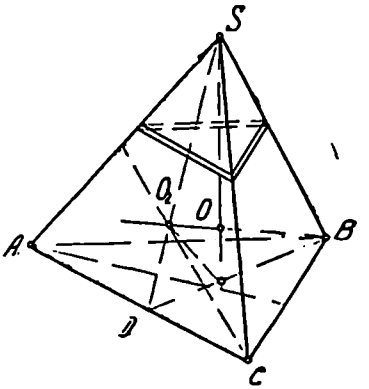
$$\frac{SO_2}{O_2D}=2 \quad \text{და} \quad \frac{BO_1}{O_1D}=2,$$

ამიტომ

$$\frac{SO_2}{O_2D}=\frac{BO_1}{O_1D};$$

მაშასადამე, $O_1O_2 \parallel BS$ და $\triangle O_1DO_2 \sim \triangle BDS$, რომელთა მსგავსებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{BS}{O_1O_2}=\frac{SD}{O_2D}=3.$$



ნახ. 142

$BOS$ და $OO_1O_2$ სამკუთხედებიც მსგავსნია, მაშასადამე,

$$\frac{SO}{OO_1}=\frac{BS}{O_1O_2}=3.$$

ამრიგად, პირამიდის სიმძიმის ცენტრი იმ წრფეზე მდებარეობს, რომელიც პირამიდის წვეროს ფუძის სიმძიმის ცენტრთან აერთებს და ფუძიდან ამ წრფის 1/4 მანძილით არის დაშორებული.

ეს წესი გამოდგება მრავალწახნაგა პირამიდისთვისაც.

### § 3. რთული ფიგურების სიმძიმის ცენტრის განსაზღვრა

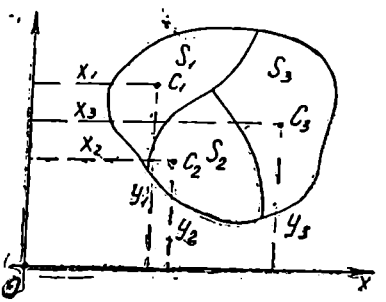
ახლა განვმარტოთ ის ზოგადი ხერხები, რომლებიც უფრო რთული ნაკეთების სიმძიმის ცენტრის პოვნის საშუალებას გვაძლევს.

ვთქვათ, საჭიროა მოცემული ერთგვაროვანი ნაკეთის $S$ ფართობის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობის განსაზღვრა (ნახ. 143). ეს ფართობი სამ $S_1$, $S_2$ და $S_3$ ნაწილად დავყოთ და ვთქვათ, რომ ამ ნაწილების სიმძიმის ცენტრებია $C_1$, $C_2$ და $C_3$.

დავუშვათ, რომ $S$ ფართობის $C$ სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებია $x_c$ და $y_c$. გავატაროთ კოორდინატთა $Ox$ და $Oy$ ღერძები; მაშინ $S$ ფართობის $S_1$, $S_2$ და $S_3$ ნაწილების სიმძიმის ცენტრების კოორდინატები სათანადოდ იქნება $x_1$ და $y_1$; $x_2$ და $y_2$; $x_3$ და $y_3$.

$$x_c=\frac{\sum_{i=1}^{n} s_i x_i}{S} \quad \text{და} \quad y_c=\frac{\sum_{i=1}^{n} s_i y_i}{S}$$

ფორმულების გამოყენებით ვიპოვით მთელი ნაკვთის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებს:




ნახ. 143

$$x_c=\frac{S_1x_1+S_2x_2+S_3x_3}{S}; \quad \text{(ა)}$$

$$y_c=\frac{S_1y_1+S_2y_2+S_3y_3}{S}. \quad \text{(ბ)}$$

**მაგალითები**

1. იპოვეთ ერთვაროვანი ფირფიტის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა (ნახ. 144), თუ $AC=6$ სმ; $DE=5$ სმ; $CD=KH=1$ სმ; $AB=5$ სმ და $HB=3$ სმ.

ამოხსნა

კოორდინატთა საწყისად ავიღოთ $A$ წერტილი, $Ax$ ღერძი მივმართოთ $AB$ წრფეზე, $Ay$ ღერძი კი $AC$ წრფეზე.

მოცემული ნაკვთი დავყოთ სამ ნაწილად; მათი ფართობები იყოს $S_1$, $S_2$ და $S_3$.

გამოვთვალოთ თითოეული ნაკვთის ფართობის სიმძიმის ცენტრი:

$$S_1=AC\cdot Cd=6\cdot 1=6 \text{ სმ}^2; \quad x_1=\frac{CD}{2}=0{,}5 \text{ სმ}; \quad y_1=\frac{AC}{2}=3 \text{ სმ}.$$

$$S_2=EL\cdot(CA-DE)=3(6-5)=3\cdot 1=3 \text{ სმ}^2;$$

$$x_2=\frac{EL}{2}+CD=1{,}5+1=2{,}5 \text{ სმ};$$

$$y_2=\frac{AC-ED}{2}=\frac{6-5}{2}=0{,}5 \text{ სმ};$$

$$S_3=KH\cdot HB=1\cdot 3=3 \text{ სმ}^2;$$

$$x_3=AB-\frac{KH}{2}=5-0{,}5=4{,}5 \text{ სმ};$$

$$y_3=\frac{HB}{2}=1{,}5 \text{ სმ};$$

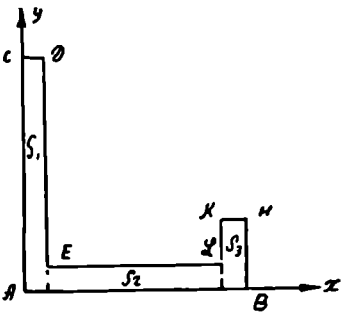
ნაპოვნი მნიშვნელობების (ა) და (ბ) ფორმულებში ჩასმით ვიპოვით მთელი ნაკეთის ფართობის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებს:

$$x_c = \frac{S_1x_1 + S_2x_2 + S_3x_3}{S_1 + S_2 + S_3} =$$

$$= \frac{6 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 2{,}5 + 3 \cdot 4{,}5}{6+3+3} = 2 \text{ სმ};$$

$$y_c = \frac{S_1y_1 + S_2y_2 + S_3y_3}{S_1 + S_2 + S_3} =$$

$$= \frac{6 \cdot 3 + 3 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 1{,}5}{6+3+3} = 2 \text{ სმ}.$$

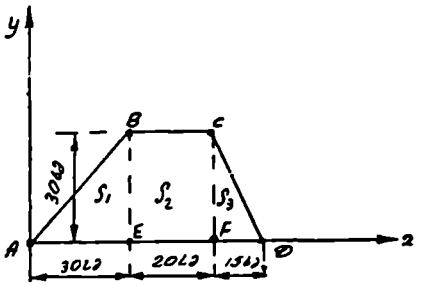



ნახ. 144

2. ტრაპეციის ფართობის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები იპოვეთ (ნახ. 145) ნაჩვენები ზომების მიხედვით.

## ამოხსნა

ტრაპეციის ფართობი დავყოთ სამ ნაწილად:
ფარ. $\Delta ABE = S_1$;
ფარ. მართკუთხედი $BCFE = S_2$;
ფარ. $\Delta CDF = S_3$.
კოორდინატთა საწყისად $A$ წერტილი მივიჩნიოთ.




ნახ. 145.

$Ax$ ღერძი მივმართოთ $AD$ წრფის გასწვრივ, ხოლო $Ay$ ღერძი—მის მართობულად.

გამოვთვალოთ თითოეული ნაწილის ფართობი და სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები:

$$S_1 = \frac{1}{2}\, AE \cdot BE = \frac{1}{2} \times$$

$$\times 30 \cdot 30 = 450 \text{ სმ}^2;$$

$$x_1 = \frac{2}{3} AE = \frac{2}{3} \cdot 30 = 20 \text{ სმ};$$

$$y_1 = \frac{1}{3} BE = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10 \text{ სმ};$$

$$S_2 = BE \cdot EF = 30 \cdot 20 = 600 \text{ სმ}^2;$$

$$x_2 = AE + \frac{EF}{2} = 30 + 10 = 40 \text{ სმ};$$

$$y_2 = \frac{BE}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ სმ};$$

$$S_3 = \frac{FD \cdot FC}{2} = \frac{15 \cdot 30}{2} = 225 \text{ სმ}^2;$$

$$x_3 = AF + \frac{FD}{2} = 55 \text{ სმ};$$

$$y_3 = \frac{CF}{3} = 10 \text{ სმ}.$$

ამ მნიშვნელობათა (ა) და (ბ) ფორმულებში შეტანით ვიპოვით მთელი ნაკვთის ფართობის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებს:

$$x_c = \frac{S_1x_1 + S_2x_2 + S_3x_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{450 \cdot 20 + 600 \cdot 40 + 225 \cdot 55}{450 + 600 + 225} = 35{,}6 \text{ სმ};$$

$$y_c = \frac{S_1y_1 + S_2y_2 + S_3y_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{450 \cdot 10 + 600 \cdot 15 + 225 \cdot 10}{450 + 600 + 225} = 12{,}35 \text{ სმ}.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ზოგჯერ მოცემულ სხეულში არის ნახვრეტები (ამოჭრილი ნაწილები), მაშინ ასეთი სხეულის სიმძიმის ცენტრის განსაზღვრისათვის იყენებენ იმავე ხერხებსა და ფორმულებს, როგორც წინა მაგალითებში, მაგრამ მოშორებული ნაწილების ფართობები ან მოცულობები უარყოფითად უნდა ჩავთვალოთ. ასეთ შემთხვევას უარყოფითი ფართობების ან მოცულობების შემთხვევა ეწოდება. ნათქვამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

3. იპოვეთ 146-ე ნახ-ზე გამოსახული წახაზული ნაკვთის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, თუ $AB = 45$ სმ; $AC = 60$ სმ; $ADE$ არის $AO = 20$ სმ რადიუსიანი ნახევარწრე.

ა მ ო ხ ს ნ ა

ვთქვათ, $ABC$ სამკუთხედის ფართობია $S_1$, ხოლო წრის ფართობი — $S_2$, მაშინ წახაზული ნაკვთის ფართობი

$$S = S_1 - S_2.$$

კოორდინატთა საწყისად ავიღოთ $A$ წერტილი. $Ax$ ღერძი $AC$ წრფეზე მივმართოთ, $Ay$ ღერძი კი — $AB$ წრფეზე.

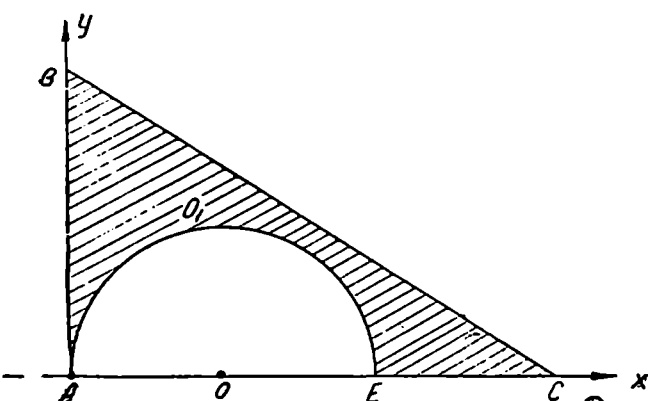
გამოვთვალოთ თითოეული ნაკვთის ფართობი და სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები

$$S_1=\frac{AC\cdot AB}{2}=\frac{60\cdot 45}{2}=1350\ \text{სმ}^2;$$

$$x_1=\frac{AC}{3}=20\ \text{სმ};\qquad y_1=\frac{AB}{3}=15\ \text{სმ};$$

$$S_2=\frac{\pi\cdot AO^2}{2}=\frac{3{,}14\cdot 20^2}{2}=628\ \text{სმ}^2;$$

$$x_2=AO=20\ \text{სმ};\quad y_2=0{,}424\cdot OA=8{,}5\ \text{სმ}$$




ნახ. 146

(იხ. წრიული სექტორის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობის განსაზღვრა). წახაზული ნაწილის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები:

$$x_c=\frac{S_1x_1-S_2x_2}{S_1-S_2}=\frac{1350\cdot 20-628\cdot 20}{1350-628}=20\ \text{სმ};$$

$$y_c=\frac{S_1y_1-S_2y_2}{S_1-S_2}=\frac{1350\cdot 15-628\cdot 8{,}5}{1350-628}=20{,}65\ \text{სმ}.$$

# წონასწორობის მდგრადობა

## § 1. ცნება სხეულთა მდგრადობის შესახებ

ვთქვათ, არათავისუფალი სხეული წონასწორობაშია მასზე მოდებული ძალების ზემოქმედებით. იმის გამოსარკვევად, ამ სხეულის წონასწორობა მდგრადია თუ არა, სხეული უმნიშვნელოდ უნდა გადავხაროთ გვერდით, რაც გამოიწვევს მასზე მოდებული ძალების წონასწორობის დარღვევას; ამისათვის საკმარისია ხანმოკლედ ვუბიძგოთ სხეულს. წონასწორობის დარღვევის შემდეგ დავუკვირდეთ მის მიერ შესრულებულ მოძრაობას.

სხეულზე მოქმედი ძალები თუ შეეცდებიან დააბრუნონ სხეული თავდაპირველ მდგომარეობაში, ე. ი. აღუდგინონ მას წონასწორობის მდგომარეობა, მაშინ წონასწორობის განხილული მდებარეობა მდგრადია, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი—არამდგრადი.

ამრიგად, გვაქვს:

ა) სხეულის მდგრადი წონასწორობა მყარდება მაშინ, როდესაც წონასწორობის საწყისი მდგომარეობიდან გამოსული სხეული უბრუნდება ამ მდგომარეობას;

ბ) არამდგრადი წონასწორობა მყარდება მაშინ, როდესაც წონასწორობის საწყისი მდგომარეობიდან გამოსული სხეული ამ მდგომარეობას აღარ უბრუნდება.

ავიღოთ თხელი ფირფიტა (ნახ. 147, ა).

ამ ფირფიტას აქვს $A$ წერტილზე გამავალი ბრუნვის უძრავი ღერძი.

ფირფიტა წონასწორობაშია სიმძიმის $\vec{P}$ ძალის ზემოქმედებით. ფირფიტის სიმძიმის ცენტრი $C$ წერტილში იყოს.

ვთქვათ, დაკიდვის $A$ წერტილი და სიმძიმის $C$ ცენტრი ერთ შვეულზე მდებარეობენ.

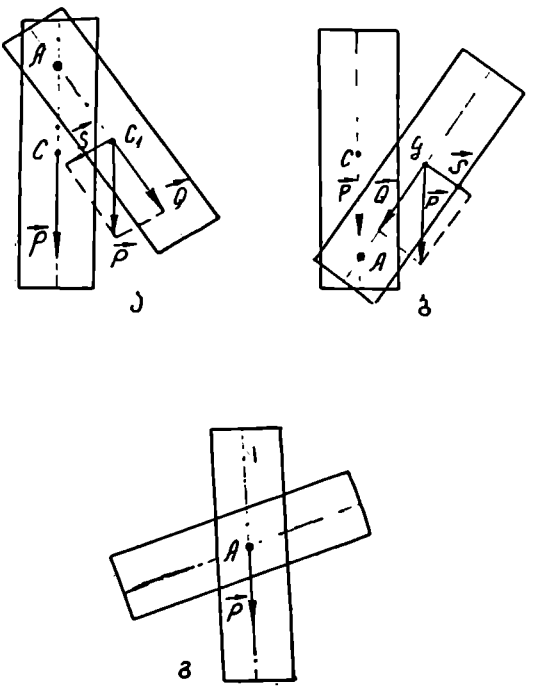
როდესაც დაკიდვის $A$ წერტილი სიმძიმის $C$ ცენტრის ზემოთაა (ნახ. 147, ა), გვექნება მდგრადი წონასწორობა, რადგან წონასწორობის მდგომარეობიდან გამოსული სხეული ახალ მდებარეობას დაიკავებს, $C$ ცენტრი $C_1$ წერტილში გადაინაცვლებს, სიმძიმის $\vec{P}$ ძალა ორ მდგენელად დაიშლება: $\vec{Q}$ მდგენელი $AC_1$ ღრფეს მიჰყვება, $\vec{S}$ მდგენელი კი $AC_1$-ის მართობულია. $\vec{Q}$ ძალას აწონასწორებს $A$ საყრდენის წინააღ-

მდეგობა, $\vec{S}$ ძალა კი ცდილობს სხეული დააბრუნოს თავდაპირველ მდებარეობაში.

ნახ. 147, ბ-ზე ნაჩვენებია არამდგრადი წონასწორობა; აქ ბრუნვის $A$ ღერძი $C$ ცენტრის ქვემოთაა; $\vec{S}$ ძალა ცდილობს მოაბრუნოს სხეული $A$ საყრდენი წერტილის გარშემო და წამოაქციოს იგი.

დაბოლოს, ნახ. 147, გ-ზე ნაჩვენებია სხეულის წონასწორობა ნებისმიერ მდებარეობაში, მიუხედავად სხეულის გადახრისა; ასეთ წონასწორობას ა ნ ე ი უ რ ჩ ე ვ ე ლ ი წ ო ნ ა ს წ ო რ ო ბ ა ეწოდება. ამ მოვლენას მაშინ აქვს ადგილი, როდესაც სიმძიმის $C$ ცენტრი და $A$ საყრდენი წერტილი ერთ წერტილშია.

ხშირად საჭიროა ისეთი სხეულის მდგომარეობის განსაზღვრა, რომელიც სიბრტყეს ეყრდნობა (საბჯენი კედელი, კაშხალი და სხვ.).

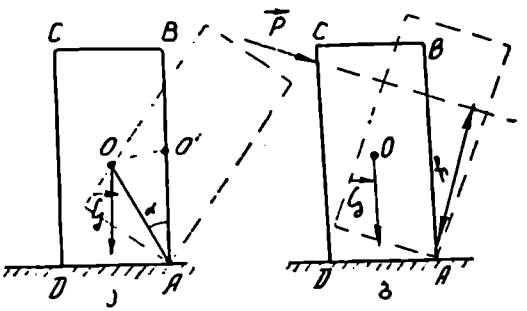



ნახ. 147

ვთქვათ, $ABCD$ სხეული (ნახ. 148, ა) მდგრად წონასწორობაშია $\vec{G}$ საკუთარი წონის გავლენით. სხეულის სიმძიმის ცენტრი $O$ წერტილში იყოს.

ამ სხეულის $A$ წიბოს გარშემო მობრუნებისას სიმძიმის $O$ ცენტრი $AO$ რადიუსის წრეწირის $O\breve{O}'$ რკალზე გადაადგილდება. სანამ სიმძიმის ცენტრი $O\breve{O}'$ რკალის ფარგლებში დარჩება, სხეულის წონასწორობა არ დაირღვევა და მდგრადი წონასწორობა გვექნება, რადგან ამ ფარგლებში ნებისმიერი მდებარეობისათვის (ჯერჯერობით გამორიცხუ-

ლია $O'$ მდებარეობა) $\overline{G}$ სიმძიმის ძალის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ სხეულს დააბრუნებს წონასწორობის წინა მდებარეობაში. $O'$ მდებარეობაში $\overline{G}$ სიმძიმის ძალა იმ წრფეზე აღმოჩნდება, რომელიც კვეთს საყრდენის ღერძს; ასეთი ძალის მომენტი კი ნულის ტოლია და სხეულს შეუძლია ან დაუბრუნდეს თავდაპირველ მდებარეობას, ანდა წაიქცეს და დაყირავდეს მარჯვნივ. ამ მდგომარეობას არამდგრადი წონასწორობის მდგომარეობა ეწოდება. მისი გამოწვევა ძალის უმნიშვნელო მოქმედებითაც შეიძლება. $\alpha$ კუთხეს, რომელზედაც მობრუნდება სხეული მდგრადი მდებარეობიდან არამდგრად მდებარეობაში, მდგრადობის ანუ მედეგობის კუთხე ეწოდება.



ნახ. 148

უმჯობესია რაც შეიძლება დიდი $\alpha$ კუთხე გვქონდეს, რისი მიღწევაც შეიძლება სხეულის ფუძის გადიდებით და სიმძიმის ცენტრის მდებარეობის ქვემოთ დაწევით.

## § 2. მდგრადობის ორი სახე. მდგრადობის საზომი

მანქანები და საინჟინრო ნაგებობანი მოდებული ძალების მოქმედებით უნდა იყოს მდგრად წონასწორობაში, რაც უზრუნველყოფილია განსაზღვრული თანაფარდობებით სხეულზე მოდებული ძალების სიდიდეებსა, სხეულის საკონსტრუქციო ზომებსა და დანიშნულებას შორის.

დანიშნულების მიხედვით ასხვავებენ ორგვარ კონსტრუქციას: ერთისათვის (მაგალითად: კედლების, საყრდენების, სვეტების, ფაბრიკის მილებისა და ა. შ.) საჭიროა სტატიკური წონასწორობა, ხოლო მეორისათვის (როგორიცაა, მაგალითად, მდინარისა და საზღვაო გემები, თვითმფრინავები, დაკიდებული ხიდები და სხვადასხვა დაკიდებული საგნები)—დინამიკური წონასწორობა.

სხეულის სტატიკური მდგრადობა ეწოდება მის უნარს წინააღმდეგობა გაუწიოს წონასწორობის ყოველგვარ დარღვევას. სხეულის დინამიკური მდგრადობა ეწოდება მის უნარს სხეულის თავდა-

პირველი წონასწორობის მდგომარეობის დამრღვევი ძალების მოქმედების შეწყვეტის შემდეგ ხელახლა დაუბრუნდეს თავდაპირველ მდგომარეობას.

სხეულის სტატიკური და დინამიკური წონასწორობები სხვადასხვანაირია. ამიტომ მათი შედარებისათვის ორი სხვადასხვა საზომი არსებობს.

სტატიკაში გვაინტერესებს სხეულის მხოლოდ სტატიკური მდგრადობა.

ვთქვათ, $G$ წონის აბსოლუტურად მყარი მძიმე სხეული ჰორიზონტალურ სიბრტყეს ეყრდნობა და $ABCD$ ნაკვთი ამ სხეულის ვერტიკალური სიბრტყით კვეთას წარმოადგენს; ეს სიბრტყე სხეულის სიმძიმის $O$ ცენტრზე გადის. ამავე სიბრტყეში სხეულზე მოდებულია $\vec{P}$ ძალა (ნახ. 148, ბ). დავუშვათ, რომ სხეულის სრიალი საყრდენ ზედაპირზე შეუძლებელია. ამ შემთხვევაში $\vec{P}$ ძალა შეეცდება სხეულის მობრუნებას $A$ წიბოს გარშემო.

$\vec{P}$ ძალის მხარს $h$-ით თუ აღვნიშნავთ, მაშინ $\vec{P}$ ძალის მომენტი $A$ წერტილის ($A$ წიბოს) მიმართ იქნება $P\cdot h$. მეორე მხრივ, $\vec{G}$ სიმძიმის ძალის მომენტი იგივე $A$ წერტილის მიმართ იქნება $G\cdot a$.

$P\cdot h$ მომენტს წამქცევი ანუ დამყირავებელი მომენტი ეწოდება, $G\cdot a$ მომენტს კი—მდგრადობის მომენტი.

როდესაც $P\cdot h>G\cdot a$, მაშინ სხეული დაყირავდება; თუკი $P\cdot h\leqslant G\cdot a$, მაშინ სხეული მდგრად მდგომარეობაში იქნება სიბრტყეზე.

მაშასადამე, სხეულის სტატიკური მდგომარეობისათვის დაცული უნდა იქნეს პირობა, რომ $m_{\text{დამყ}}=P\cdot h$ დამყირავებელი მომენტი $m_{\text{მდგრ}}=G\cdot a$ მდგრადობის მომენტზე მცირე იყოს, ე. ი.

$$\boxed{P\cdot h<G\cdot a} \tag{1}$$

სტატიკური მდგრადობის პირობას წარმოადგენს, სადაც

$$m_{\text{მდგრ}}=G\cdot a. \tag{2}$$

მდგრადობის მომენტის დაყირავების მომენტთან ფარდობას მდგრადობის კოეფიციენტი ეწოდება

$$\boxed{k=\frac{m_{\text{მდგრ}}}{m_{\text{დამყ}}}=\frac{G\cdot a}{P\cdot h}.} \tag{3}$$

$k$ მუდამ მეტი უნდა იყოს 1-ზე.

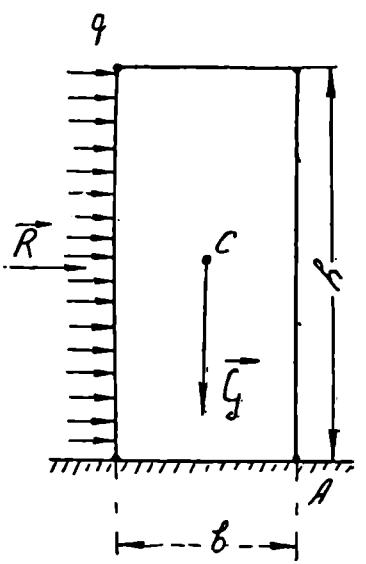
ჩვეულებრივ, მდგრადობის $k$ კოეფიციენტი აიღება 1,5-დან 2-მდე ზღვრებში.

### მაგალითები

**1.** $h=5$ მ სიმაღლის, $b=1$ მ სივანისა და $l=10$ მ სიგრძის კედელი აგებულია მასალისაგან, რომლის ხვედრითი წონაა $25\cdot10^5\ \frac{ნ}{მ^3}$. განსაზღვრეთ კედლის მდგრადობის კოეფიციენტი, თუ მან უნდა გაუძლოს ქარის წნევას $q=1250\ \frac{ნ}{მ^2}$.

### ამოხსნა

149-ე ნახ-ზე ნაჩვენებია კედლის სიმძიმის ცენტრზე გამავალი კვეთა ვერტიკალური სიბრტყით. ამავე ნახაზზე ნაჩვენებია კედლის სიმაღლის შუა წერტილში მოდებული ქარის წნევის ტოლქმედი



ნახ. 149

$$R=q\cdot S=1250\cdot5\cdot10=$$
$$=62500\ \text{ნიუტონს}.$$

გარდა ამისა, ნაჩვენებია $\vec{G}$ ძალა, რომელიც კედლის წონას წარმოადგენს და კვეთის სიმძიმის ცენტრზეა მოდებული

$$G=\gamma\cdot V=\gamma\cdot b\cdot h\cdot l=25\cdot10^5\times$$
$$\times1,0\cdot5\cdot10=125\cdot10^4\ \text{ნიუტონს},$$

სადაც კედლის მოცულობა

$$V=b\cdot h\cdot l.$$

$\vec{R}$ ძალა ცდილობს კედლის მარჯვნივ წაქცევას და მომენტს წარმოქმნის $A$ წიბოს მიმართ. ამ ძალის მიერ წარმოქმნილი დამყირავებელი მომენტი

$$m_A(\vec{R})=R\cdot\frac{h}{2}=62500\cdot2,5=15625\ \text{(ნ.მ)}.$$

$\vec{G}$ ძალა იმავე $A$ წიბოს მიმართ წარმოქმნის მდგრადობის მომენტს.

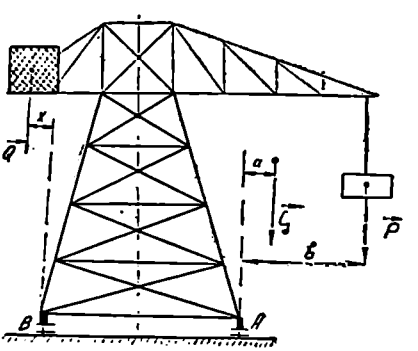
$$m_A(\vec{G}) = G \cdot \frac{b}{2} = 125 \cdot 10^4 \cdot 0{,}5 = 625000 \text{ (ნ.მ)}.$$

აქედან, კედლის მდგრადობის კოეფიციენტი

$$k = \frac{m_A(\vec{G})}{m_A(\vec{R})} = \frac{625000}{156250} = 4.$$

**2.** საპირწონეს გარეშე სატვირთო ამწის წონაა $G = 5 \cdot 10^5$ (ნ), იგი მარჯვენა $A$ რელსიდან $a = 1{,}4$ მ მანძილზეა მოდებული (ნახ. 150). ამწის ურიკას ამწევი ძალა $P = 2 \cdot 10^5$ (ნ), ისრის შვერილი $b = 10$ მ (იგი იზომება მარჯვენა $A$ რელსის ვერტიკალიდან).

განსაზღვრეთ საპირწონეს უმცირესი $\vec{Q}$ წონის სიდიდე და საპირწონეს სიმძიმის ცენტრიდან მარცხენა $B$ რელსის ვერტიკალამდე დაშორების უდიდესი $x$ მანძილი იმ პირობის დაცვით, რომ ამწე არ დაყირავდეს ურიკას ყოველგვარი მდებარეობის დროს (დატვირთული იქნება იგი, თუ ცარიელი). ურიკას საკუთარ წონას მხედველობაში არ ვიღებთ. რელსებს შორის მანძილი $l = 2{,}5$ მ.




ნახ. 150

ამოხსნა

ვთქვათ, ურიკა დატვირთულია. ამწე $A$ რელსის გარშემო რომ არ წამოიქცეს, დაცული უნდა იყოს პირობა

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\vec{F}_i) \geqslant 0. \tag{4}$$

ახლა დავუშვათ, რომ ზღვრულ მდებარეობაში ამწე მხოლოდ $A$ რელსს ეყრდნობა; $B$ რელსს კი—მხოლოდ ეხება, თუმცა დატვირთვას არ გადასცემს. ამრიგად, ამწეზე მოდებულია საპირწონეს $\vec{Q}$ წონის ძალა, ამწის $\vec{G}$ წონა, ტვირთის $\vec{P}$ წონა და $A$ რელსის $\vec{R}_A$ რეაქცია.

წონასწორობის განტოლება იქნება

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\vec{F}_i) = -Q\cdot(x+2{,}5)+G\cdot 1{,}4+P\cdot 10=0. \qquad (ა)$$

ახლა დავუშვათ, რომ ურიკა დაუტვირთავია. ამწე რომ არ წამოიქცეს $B$ რელსის გარშემო, დაცული უნდა იყოს პირობა

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} m_B(\vec{F}_i)\leqslant 0.} \qquad (5)$$

ვთქვათ, ამწე მხოლოდ $B$ რელსს ეყრდნობა; $A$ რელსს კი ეხება და არავითარ წნევას არ გადასცემს მას. ამრიგად, ამწეზე მოდებულია ძალები: საპირწონეს $\vec{Q}$ წონის ძალა, ამწის $\vec{G}$ წონა, $B$ რელსის $\vec{R}_B$ რეაქცია.

წონასწორობის განტოლება იქნება

$$\sum_{i=1}^{n} m_B(\vec{F}_i) = -Q\cdot x+G\cdot(2{,}5+1{,}4)=0. \qquad (ბ)$$

(ა) განტოლებიდან (ბ) განტოლებას თუ გამოვაკლებთ, მივიღებთ

$$-2{,}5\cdot Q+1{,}4G+10P-G\,(2{,}5+1{,}4)=0,$$

საიდანაც

$$Q=3\cdot 10^5 \text{ (ნ)}.$$

(ბ) განტოლებიდან განვსაზღვრავთ $x$ მანძილს

$$x=\frac{G(2{,}5+1{,}4)}{Q}=6{,}5 \text{ მ}.$$

# კ ი ნ ე მ ა ტ ი კ ა

## I თ ა ვ ი

## წერტილის წრფივი მოძრაობა

### § 1. წინასწარი ცნობები

როგორც აღვნიშნეთ, კინემატიკა თეორიული მექანიკის ის ნაწილია, რომელიც შეისწავლის სხეულთა მოძრაობას ამ მოძრაობის განმსაზღვრელი ძალების გარეშე. მოძრაობის გეომეტრიული თვისებების შესწავლა გეომეტრიის აქსიომებსა და დებულებებზეა დამყარებული (გეომეტრიაში გვხვდება ნაკვთის გადატანა ერთი მდებარეობიდან მეორეში, ზედაპირის წარმოქმნა წირის მოძრაობით და ა. შ.), მაგრამ, გეომეტრიისაგან განსხვავებით, კინემატიკაში იმ სივრცის გარდა, რომელშიაც მოძრაობს სხეული, ის დროც განიხილება, რომლის განმავლობაშიაც სრულდება მოძრაობა. ამის გამო კინემატიკას ზოგჯერ ოთხი განზომილების გეომეტრია ეწოდება, მასთან, მეოთხე განზომილების როლს დრო ასრულებს.

სხეულის მოძრაობის შესწავლა ნიშნავს დროის ნებისმიერ მომენტში სხეულის მდებარეობის განსაზღვრას რაიმე სისტემის მიმართ, რომელსაც პირობით უძრავად ვღებულობთ და რომელსაც ა თ ვ ლ ი ს  ს ი ს ტ ე მ ა ეწოდება.

ათვლის სისტემად მექანიკაში მიღებულია დეკარტეს კოორდინატთა სისტემა, რომელიც უცვლელადაა დაკავშირებული დედამიწასთან. ამ სისტემის მიმართ სხეულთა გადაადგილებას პირობით ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ  გ ა დ ა ა დ გ ი ლ ე ბ ა დ თვლიან. სხეულთა გადაადგილებას ათვლის ყოველი სხვა სისტემის მიმართ, რომელიც დაკავშირებული არ არის აღნიშნულ სისტემასთან, ფ ა რ დ ო ბ ი თ ი  გ ა დ ა ა დ გ ი ლ ე ბ ა ეწოდება. ათვლის სისტემის მიმართ დროის განმავლობაში უცვლელად მდებარე სხეული ამ სისტემის მიმართ უძრაობაში ითვლება.

ამრიგად, მექანიკაში უძრავი ანუ მოსვენებული მდგომარეობა ფარდობითი ცნებაა იმ შინაარსით, რომ იგი მხოლოდ ათვლის მოცემული სისტემის მიმართ განიხილება. მაგალითად, ლიფტის კაბინით ზეაღმა-

ვალი მგზავრი ლიფტის კაბინასთან დაკავშირებული ათვლის სისტემის მიმართ მოსვენებულ მდგომარეობაშია, ხოლო დედამიწასთან დაკავშირებული ათვლის სისტემის მიმართ ლიფტის სიჩქარის ტოლი სიჩქარით მოძრაობს. საზოგადოდ, დედამიწის მიმართ მოსვენებულ მდგომარეობაში მყოფი ნებისმიერი სხეული მოძრაობს მზის მიმართ.

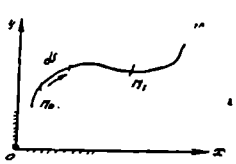
*სხეულის მოძრაობა ცნობილია მაშინ, როდესაც შეიძლება მისი მდებარეობის განსაზღვრა შერჩეული ათვლის სისტემის მიმართ დროის ყოველ მომენტში.* ამავე დროს უნდა აღინიშნოს, რომ კლასიკურ მექანიკაში დრო ათვლის ყველა სისტემაში ერთნაირი იყო, მას ამ სისტემის ფარდობით მოძრაობაზე დამოუკიდებლად თვლიდნენ და იგი, როგორც განუწყვეტლივ ცვლადი სიდიდე, აღინიშნება $t$ ასოთი.

დროის ერთეულად მიღებულია 1 წამი.

1 წუთი = 60 წამს; 1 საათი = 60 წუთს;

1 საათი = 3600 წამს; 1 დღეღამე = 24 საათს = 86400 წამს.

თუ რაიმე მყარი სხეულის მოძრაობას დავუკვირდებით, შევამჩნევთ, რომ ერთი და იმავე სხეულის სხვადასხვა წერტილი სხვადასხვა მოძრაობას ასრულებს. ამიტომ სხეულის მოძრაობის შესწავლის დაწყება მოგვიხდება ცალკეული წერტილის მოძრაობის შესწავლით, ე. ი. ვიწყებთ წერტილის კინემატიკის შესწავლას. წერტილი მოძრაობს, თუ იგი დროის მიხედვით იცვლის თავის მდებარეობას შერჩეული ათვლის სისტემის მიმართ. იმის გამო, რომ მოძრაობა თავისი არსით უწყვეტია, $M$ წერტილი $M_0$ მდებარეობიდან $M_1$ მდებარეობაში გადაადგილდება რაღაც მრუდზე (ნახ. 151), მასთან ამ მრუდის ყველა გეომეტრიულ წერტილზე გაივლის $M_0$ და $M_1$ წერტილებს შორის; ამავე დროს დროის უსასრულოდ მცირე $dt$ შუალედს წერტილის უსასრულოდ მცირე $ds$ გადაადგილება შეესაბამება.



ნახ. 151

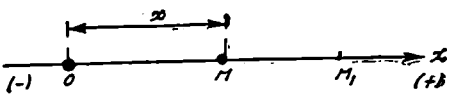
მოძრავი წერტილის მდებარეობათა გეომეტრიული ადგილი შერჩეული ათვლის სისტემის მიმართ უწყვეტი მრუდია და მას მოძრავი წერტილის *ტრაექტორია* ეწოდება.

ტრაექტორიის სახეობის მიხედვით განასხვავებენ წრფივ, წრიულ, ელიფსურ, პარაბოლურ ან მრუდწრიულ მოძრაობებს. უნდა გვახსოვდეს, რომ ტრაექტორიის სახეობა მჭიდროდ არის დაკავშირებული შერ-

ჩეულ ათვლის სისტემასთან, რომელზედაც მოძრავი წერტილის თანამიმდევრობით მდებარეობებს აღვნიშნავთ; ათვლის სისტემის ცვლილებაზე დამოკიდებულებით თვით ტრაექტორიის სახე იცვლება.

## § 2. წრფივი მოძრაობა. წრფივი მოძრაობის კანონი

ვთქვათ, $M$ წერტილი მოძრაობს რაიმე წრფეზე. ამ წრფეზე შევარჩიოთ უძრავი $O$ წერტილი, რომელსაც ათვლის საწყისი წერტილი ვუწოდოთ (ნახ. 152) და ამ წრფის გასწვრივ $Ox$ კოორდინატთა ღერძი მივმართოთ; მაშინ წერტილის მდებარეობა დროის მოცემულ მომენტში განისაზღვრება მანძილით ათვლის საწყისიდან და გადათვლის სათანადო ნიშანი მიეცემა. მანძილი დადებითად ჩავთვალოთ, თუ მოძრავი წერტილი წრფეზე $O$ წერტილის მარჯვნივ იმყოფება, და უარყოფითად, თუ მოძრავი წერტილი $O$-ს მარცხნივ აღმოჩნდება.



ნახ. 152

მოძრაობის დროს $M$ წერტილი თანამიმდევრობით $M_1$, $M_2$, $M_3$ და ა. შ. მდებარეობებს დაიკავებს; ამრიგად, $M$ წერტილის $x$ კოორდინატი $Ox$ ღერძზე მუდამ იცვლება; ამიტომ, ცნობილი რომ გახდეს $M$ წერტილის მდებარეობა $Ox$ ღერძზე დროის ნებისმიერ მომენტში, ცნობილი უნდა იყოს დამოკიდებულება $M$ წერტილის $x$ კოორდინატსა და $t$ დროს შორის

$$\boxed{x = f(t).} \tag{1}$$

ამ განტოლებას $M$ წერტილის $Ox$ ღერძზე მ ო ძ რ ა ო ბ ი ს კ ა ნ ო ნ ი ან მ ო ძ რ ა ო ბ ი ს გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ეწოდება.

როდესაც ცნობილია მოძრაობის კანონი, ე. ი. $x = f(t)$, მაშინ დროის ყოველ ნებისმიერ მომენტში შეგვიძლია ვიპოვოთ $x$-ის შესაბამისი მნიშვნელობა და, მაშასადამე, დროის ყოველ მომენტში შეგვიძლია გავიგოთ მოძრავი $M$ წერტილის მდებარეობა მის ტრაექტორიაზე.

შევნიშნოთ, რომ $x=f(t)$ განტოლებაში $x$ სიდიდე განსაზღვრავს მოძრავი წერტილის მდებარეობას და არა წერტილის მიერ გავლილ გზას. მაგალითად, $O$ საწყისიდან მოძრავი წერტილი $M_1$ მდებარეობაში თუ იმყოფება და შემდეგ შებრუნებული მიმართულებით ისევ $M$ მდებარეობაში ბრუნდება, ამ მომენტში მისი აბსცისა $x=OM$, ხოლო ამ ხნის განმავლობაში გავლილი გზაა

$$OM_1+M_1M,$$

რაც $x$-ის ტოლი არ არის.

შეიძლება (1) განტოლების გრაფიკული წარმოდგენა, რისთვისაც აბსცისთა ღერძზე უნდა გადავზომოთ $t$ დროის მნიშვნელობები, ორდინატთა ღერძზე კი $x$-ის სათანადო მნიშვნელობები. ამრიგად მიღებულ მრუდს ეწოდება გზის გრაფიკი დროის მიხედვით.

### მაგალითები

1. წერტილის მოძრაობის კანონი გამოისახება განტოლებით:

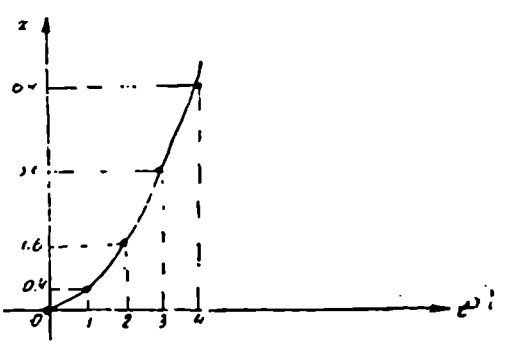
$$x = 0{,}4\,t^2.$$

ავაგოთ $x=f(t)$ გრაფიკი.

### ამოხსნა

ავიღოთ განტოლება $x=0{,}4\,t^2$.

როცა $t=0$, მაშინ $x=0{,}4\cdot 0=0$;
როცა $t=1$, მაშინ $x=0{,}4\cdot 1=0{,}4$;
როცა $t=2$, მაშინ $x=0{,}4\cdot 4=1{,}6$;
როცა $t=3$, მაშინ $x=0{,}4\cdot 9=3{,}6$;
როცა $t=4$, მაშინ $x=0{,}4\cdot 16=6{,}4$.




ნახ. 153

ამ მნიშვნელობებზე აიგება მრუდი (ნახ. 153), რომელიც პარაბოლას წარმოადგენს.

2. მოძრაობა მოცემულია განტოლებით

$$x=5\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right),$$

სადაც $x$ აიღება სმ-ობით, ხოლო $t$—წამობით.

ავაგოთ $x=f(t)$ გრაფიკი.

### ამოხსნა

განვსაზღვროთ წერტილის მდებარეობა საწყის მომენტში (ნახ. 154, ა).

როცა $t=0$, მაშინ $x_0=5\cdot\sin 0^\circ=0$;

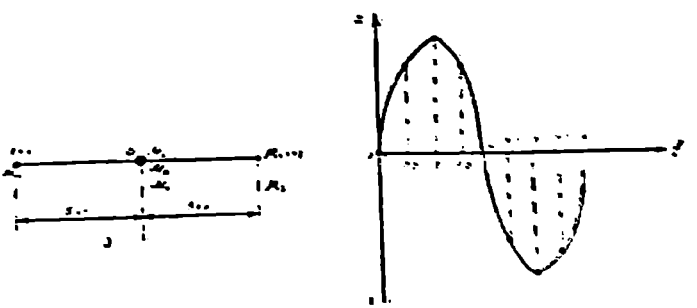
როცა $t=1$ წმ, მაშინ $x_1=5\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)=5$ სმ;

როცა $t=2$ წმ, მაშინ $x_2=5\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2\right)=0$;

როცა $t=3$ წმ, მაშინ $x_3=5\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 3\right)=-5$ სმ;

როცა $t=4$ წმ, მაშინ $x_4=5\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 4\right)=0$;

როცა $t=5$ წმ, მაშინ $x_5=5\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 5\right)=5$ სმ.



ნახ. 154

ახლა ტრაექტორიაზე აღვნიშნოთ $M$ წერტილის მდებარეობები დროის სხვადასხვა მომენტებში. ვნახავთ, რომ მოძრავი წერტილი ასრულებს რხევითს მოძრაობას, კოორდინატთა სათავეს შორდება 5 სმ-ით მარჯვნივ და 5 სმ-ით მარცხნივ. ასეთ მოძრაობას ჰარმონიული რხევა ეწოდება. ასეთია, მაგალითად, ზამბარაზე დაკიდებული ტვირთის მოძრაობა, ჰაერის წინაღობის უგულებელყოფით.

ავაგოთ ჰარმონიული რხევის გრაფიკი; ამისათვის ავიღოთ კოორდინატთა ბრტყელი სისტემა (ნახ. 154, ბ) და მის ღერძებზე მოვზომოთ: აბსცისთა ღერძზე—დროის მნიშვნელობები, ხოლო ორდინატთა ღერძზე $x$-ის მნიშვნელობები. $Ot$ ღერძზე გადავზომოთ რვა ტოლი მონაკვეთი—თითო 0,5 წამის სიდიდის; მაშინ, მოძრაობის განტოლების მიხედვით, მივიღებთ:

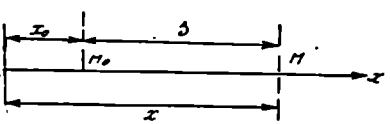
| $t$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 3,5 | 5 | 3,5 | 0 | —3,5 | —5 | —3,5 | 0 |

ამ ცხრა წერტილის შეერთებით მივიღებთ მრუდს, რომელსაც სინუსოიდი ეწოდება. ამრიგად, განხილული ჰარმონიული რხევის გრაფიკი სინუსოიდია.

## § 3. თანაბარი მოძრაობა

თანაბარი მოძრაობა ისეთ მოძრაობას ეწოდება, რომელსაც მოძრავი წერტილი ნებისმიერად აღებულ დროის ტოლ შუალედებში ერთნაირი სიგრძის გზას გაივლის.

ვთქვათ, საწყის მომენტში, როდესაც $t=0$, წერტილს $M_0$ მდებარეობა უკავია; შემდეგ დაიწყო მოძრაობა $Ox$ ღერძის გასწვრივ (ნახ. 155). საწყისი მანძილი იყოს $OM_0=x_0$, ცვალებადი აბსცისა $OM=x$; მაშინ $M_0M$ მანძილია წერტილის მიერ $t$ წამში გავლილი გზის სიგრძე $M_0M=s$, ე. ი.



ნახ. 155

$$s=x-x_0. \qquad (1)$$

თანაბარი მოძრაობის სიჩქარე კი იქნება გავლილი გზის ფარდობა დროსთან.

$$\boxed{v=\frac{s}{t}=\frac{x-x_0}{t}.} \qquad (2)$$

თანაბარი მოძრაობის სიჩქარე მუდმივი სიდიდეა $\left(\frac{s}{t}=\text{const.}\right)$.

(2) ფორმულაში დავუშვათ, რომ $s=1$ მ და $t=1$ წმ, მაშინ

$$\boxed{\text{სიჩქარის ერთეული}=\frac{1\text{ მ}}{1\text{ წმ}}=1\text{ მ/წმ}.} \qquad (3)$$

სიჩქარის ერთეულად მიღებულია ისეთი თანაბარი მოძრაობის სიჩქარე, რომლის დროსაც

1 წამის განმავლობაში სხეული 1 მეტრ გზას გაივლის.

სიჩქარის ერთეულის განზომილებაა

$$[v]=\frac{[s]}{[t]}=\frac{\text{მ}}{\text{წმ}}=\text{მ}\cdot\text{წმ}^{-1}. \tag{4}$$

(2) განტოლებას $x$-ის მიმართ თუ ამოვხსნით, მივიღებთ

$$\boxed{x=x_0+v\cdot t.} \tag{5}$$

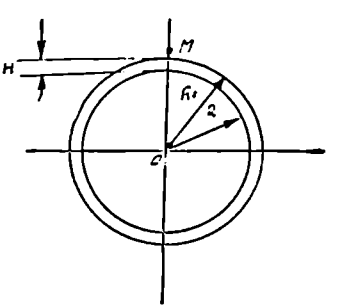
ათვლის საწყისად წერტილის მდებარეობას თუ ავიღებთ სათავეში ($x_0=0$), მაშინ

$$\boxed{x=v\cdot t,} \tag{6}$$

ე. ი. თანაბარი მოძრაობის დროს წერტილის მიერ გავლილი გზა უდრის სიჩქარის ნამრავლს იმ დროზე, რომლის განმავლობაშიაც გავლილი იყო ეს გზა.

### მაგალითი.

**1.** პირველი ხელოვნური თანამგზავრის სიჩქარე იყო 8 კმ/წმ და შემოვლის პერიოდი $T=1$ სთ 36 წთ $=5760$ წმ. განსაზღვრეთ თანამგზავრის ფრენის სიმაღლე დედამიწის ზედაპირიდან, თუ მის ორბიტას წრიულად ჩავთვლით. დედამიწის რადიუსი $R=6370$ კმ (ნახ. 156).



ნახ. 156

ამოხსნა

ორბიტაზე მოძრავი თანამგზავრი $M$ წერტილით აღვნიშნოთ; დედამიწის ცენტრიდან გატარებული თანამგზავრის ორბიტის რადიუსი იყოს $R_0$, ხოლო თანამგზავრის საძიებელი სიმაღლე დედამიწის ზედაპირიდან—$H$.

ვთქვათ, თანამგზავრის მიერ ბრუნვის ერთ პერიოდში გავლილი გზის სიგრძეა $s$, რომელიც უდრის ერთ ბრუნზე დახარჯული $T$ დროის

ნამრავლს თანამგზავრის მოძრაობის $v$ სიჩქარეზე. მეორე მხრივ, იმავე გზის სიგრძე $R_0$ რადიუსის წრეწირის სიგრძის ტოლია. ამრიგად, გვაქვს

$$s=v\cdot T \quad \text{და} \quad s=2\pi R_0;$$

ამიტომ

$$v\cdot T=2\pi R_0,$$

საიდანაც

$$R_0=\frac{v\cdot T}{2\pi}=\frac{8\cdot 5760}{2\cdot 3{,}14}=7340 \text{ კმ}.$$

ამის შემდეგ ადვილად ვიპოვით ფრენის სიმაღლეს

$$H=R_0-R=7340-6370=970 \text{ კმ}.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: თანაბარი მოძრაობის განტოლება

$$s=v\cdot t$$

გვაძლევს შემდეგი ამოცანების ამოხსნის საშუალებას:

ა) წერტილის მიერ გავლილი გზის განსაზღვრას, თუ ცნობილია სიჩქარე და დრო

$$s=v\cdot t;$$

ბ) სიჩქარის განსაზღვრას, თუ ცნობილია გზის სიგრძე და დრო

$$v=\frac{s}{t};$$

გ) დროის განსაზღვრას, როდესაც ცნობილია გზის სიგრძე და სიჩქარე

$$t=\frac{s}{v}.$$

## § 4. თანაბარი მოძრაობის სიჩქარისა და გზის გრაფიკები

რადგან თანაბარი მოძრაობის სიჩქარე მუდმივი სიდიდეა, ე. ი. $v=\frac{s}{t}=\text{const}$, ამიტომ სიჩქარის ცვლილების კანონი დროის მიხედვით გრაფიკულად დროის $Ot$ ღერძის პარალელური $AB_1$ წრფით შეგვიძლია გამოვსახოთ (ნახ. 157).

$Ov$ სიჩქარეთა ღერძზე გადავზომოთ $OA=v$ მონაკვეთი.

$Ot$ ღერძზე მოვზომოთ მონაკვეთები:

$$OC_1=C_1C_2=C_2C_3=C_3C_4=1 \text{ წმ}.$$

შემდეგ $Ot$ ღერძის $C_1$, $C_2$, $C_3$ და $C_4$ წერტილებიდან მოვზომოთ $C_1B_1=C_2B_2=C_3B_3=C_4B_4$ სიგრძის მონაკვეთები. ახლა $A$, $B_1$, $B_2$, $B_3$

და $B_4$ წერტილებს წრფით თუ შევაერთებთ, მივიღებთ $Ot$ დროის ღერძის პარალელურ $AB_4$ წრფეს.

თანაბარი მოძრაობისას გავლილი გზის გრაფიკის ასაგებად ავიღოთ $tOs$ კოორდინატთა სისტემა და განტოლება

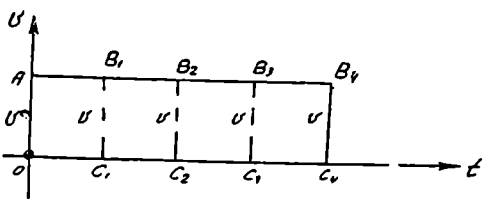
$$s = v \cdot t.$$

სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ $v = 1$ მ/წმ, მაშინ რიცხობრივად $s = t$.

როცა $t = 1$ წმ, მაშინ $s = 1$ მ;

როცა $t = 2$ წმ, მაშინ $s = 2$ მ;

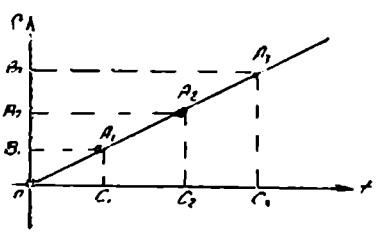
როცა $t = 3$ წმ, მაშინ $s = 3$ მ.




ნახ. 157

$t$ დროის მნიშვნელობები გადავზომოთ დროის $Ot$ ღერძზე (ნახ. 158); მივიღებთ $C_1$, $C_2$ და $C_3$ წერტილებს.

$Os$ ღერძზე გადავზომოთ $s$-ის მნიშვნელობები; მივიღებთ $B_1$, $B_2$ და $B_3$ წერტილებს. ამ წერტილებიდან აღვმართოთ $Ot$ და $Os$ ღერძების მართობები და მათი თანკვეთის $A_1$, $A_2$ და $A_3$ წერტილები კოორდინატთა $O$ სათავეს წრფით შევუერთოთ, ამით თანაბარი მოძრაობის დროს გავლილი გზის $OA_3$ გრაფიკს მივიღებთ.




ნახ. 158

## § 5. წერტილის სიჩქარე არათანაბარი მოძრაობის დროს

არათანაბარი მოძრაობა ეწოდება ისეთ მოძრაობას, როდესაც მოძრავი წერტილი დროის ტოლ შუალედებში გზის სხვადასხვა მონაკვეთებს გაივლის.

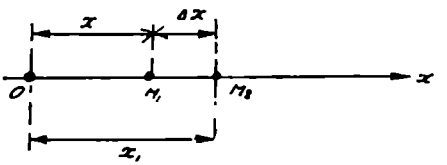
ვთქვათ, მოძრაობის დროს წერტილმა პირველ წამში გაიარა 4 მეტრი, მეორე წამში — 6 მ, ხოლო მესამე წამში — 8 მ. პირველ წამში სხეულის სიჩქარე იქნებოდა 4 მ/წმ, მეორე წამში—6 მ/წმ, ხოლო მესამეში — 8 მ/წმ; მაშინ საშუალო სიჩქარე

$$v_{საშ} = \frac{v_1+v_2+v_3}{3}, \qquad \text{ანუ} \quad v_{საშ} = \frac{4+6+8}{3} = 6\ \frac{მ}{წმ},$$

ან, რაც იგივეა,

$$v_{საშ} = \frac{s}{t} = \frac{s_1+s_2+s_3}{t_1+t_2+t_3} = \frac{4+6+8}{1+1+1} = 6\ \frac{მ}{წმ}.$$

ამრიგად, არათანაბარი ანუ ცვლადი მოძრაობის საშუალო სიჩქარე დროის მოცემულ შუალედში ეწოდება თანაბარი წრფივი მოძრაობის სიჩქარეს, როდესაც წერტილი დროის იმავე შუალედში იმავე მანძილს გაივლის, რასაც არათანაბარი მოძრაობის დროს.




ნახ. 159

აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ საშუალო სიჩქარე მოძრაობის სისწრაფის მხოლოდ ტლანქ განსაზღვრას იძლევა დროის ერთგვარ შუალედში, მაგრამ საშუალებას არ გვაძლევს ვიმსჯელოთ სიჩქარეზე ტრაექტორიის თითოეულ წერტილში ან ნებისმიერ დროის მომენტში, რადგან განსახილველი დროის შუალედში მოძრაობის სისწრაფე იცვლება. ამიტომ, გარდა საშუალო სიჩქარისა, გვიხდება ავრეთვე წერტილის სიჩქარის განსაზღვრა დროის მოცემულ მომენტში.

ვთქვათ, $M$ წერტილი მოძრაობს $Ox$ ღერძზე (ნახ. 159) და დროის მოცემულ $t$ მომენტში $M_1$ მდებარეობაშია.

შემდგომ საკმაოდ მცირე დროის $\Delta t$ შუალედის გავლის შემდეგ, ე. ი. $t+\Delta t$ მომენტში, წერტილი იკავებს ახალ $M_2$ მდგომარეობას. $OM_1$ მანძილი $x$-ით აღვნიშნოთ, $OM_2$ მანძილი კი $x_1$-ით, მასთან

$$x = f(t) \quad \text{და} \quad x_1 = f(t+\Delta t).$$

წერტილის მიერ $\Delta t$ დროის შუალედში გავლილი მანძილი იქნება $M_1M_2$ ანუ

$$M_1M_2 = x_1 - x = \Delta x = f(t+\Delta t) - f(t).$$

ფარდობა

$$\boxed{\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_{საშ}.} \qquad (1)$$

წერტილის მოძრაობის საშუალო სიჩქარეა დროის $\Delta t$ შუალედში.

$\frac{\Delta x}{\Delta t}$ საშუალო სიჩქარის ზღვარს, როდესაც დროის $\Delta t$ ნაზრდი მისწრაფვის ნულისაკენ, წერტილის სიჩქარე ეწოდება დროის მოცემულ მომენტში:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0} v_{\text{ს}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}= =f'(t)=\frac{dx}{dt}. \tag{2}$$

ამრიგად, წერტილის სიჩქარე დროის მოცემულ მომენტში უდრის წრფივი მოძრაობის დროს მოძრავი წერტილის გზის წარმოებულს დროის მიმართ.

როდესაც $\frac{dx}{dt}$ წარმოებული დადებითია, მაშინ წერტილი $Ox$ ღერძის დადებით მხარეს მოძრაობს; როდესაც $\frac{dx}{dt}$ წარმოებული უარყოფითია, მაშინ წერტილი $Ox$ ღერძის უარყოფით მხარეს მიძრაობს. ამრიგად, სიჩქარის ნიშანი განსაზღვრავს მოძრაობის მიმართულებას მოცემულ წრფივ ტრაექტორიაზე. ამ მიმართულების მისათითებლად წერტილის სიჩქარე გამოისახება ვექტორით, რომელიც წრფივი ტრაექტორიის გასწვრივ წერტილის მოძრაობის მხარეს არის მიმართული. ვექტორის სიგრძე აღებულ მასშტაბში სიჩქარის მოდულს (აბსოლუტურ სიდიდეს) გამოსახავს.

### მაგალითები

**1.** წერტილის წრფივი მოძრაობა მოცემულია განტოლებით $x=6+t-5t^2+t^3$. განსაზღვრეთ წერტილის მოძრაობის სიჩქარე მომენტებში:

$$t=0;\quad 1;\quad 2 \text{ და } 3 \text{ წმ}.$$

აქ $x$ გამოსახულია მეტრობით, $t$ კი—წამობით.

#### ამოხსნა

მოძრაობის განტოლების გაწარმოებით მივიღებთ

$$v=\frac{dx}{dt}=1-10t+3t^2.$$

როდესაც $t=0$, მაშინ $v_0=1$ მ/წმ;
როდესაც $t=1$ წმ, მაშინ $v_1=-6$ მ/წმ;

როდესაც $t=2$ წმ, მაშინ $v_2=-7$ მ/წმ;

როდესაც $t=3$ წმ, მაშინ $v_3=-2$ მ/წმ.

როგორც ვხედავთ, წერტილის სიჩქარე $t=0$ მომენტში დადებითია და ამის გამო ამ მომენტში მოძრაობა წარმოებს მარცხნიდან მარჯვნივ, ხოლო $t=1$; 2 და 3 წმ-ში უარყოფითია და ამის გამო ამ მომენტებში მოძრაობა წარმოებს მარჯვნიდან მარცხნივ.

2. წერტილის მოძრაობა მოცემულია განტოლებით $x=1-3t+2t^2$ (აქ $x$ გამოსახულია მეტრობით, ხოლო $t$—წამობით). განსაზღვრეთ წერტილის მოძრაობის სიჩქარე მომენტებში $t=0$; 1, 2 და 3 წმ; გარდა ამისა, განსაზღვრეთ დროის რომელ მომენტში იქნება წერტილის სიჩქარე ნულის ტოლი და ამ მომენტში ტრაექტორიის რომელ ადგილას იქნება წერტილი.

ამოხსნა

მოძრაობის განტოლების გაწარმოებით მივიღებთ

$$v=\frac{dx}{dt}=(-3+4t)\ \text{მ/წმ}. \qquad (ა)$$

როდესაც $t=0$, მაშინ $v_0=-3$ მ/წმ;

როდესაც $t=1$ წმ, მაშინ $v_1=1$ მ/წმ;

როდესაც $t=2$ წმ, მაშინ $v_2=5$ მ/წმ;

როდესაც $t=3$ წმ, მაშინ $v_3=9$ მ/წმ.

რადგან სიჩქარე განუწყვეტლივ იცვლება დროის მიხედვით, ამიტომ მოძრაობის მიმართულების შეცვლისას სიჩქარის მნიშვნელობა რაიმე მომენტში ნულის ტოლი აღმოჩნდება. ამ მომენტის საპოვნელად (ა) გამოსახულება ნულს გავუტოლოთ

$$-3+4t=0, \quad \text{საიდანაც} \quad t=\frac{3}{4}\ \text{წმ}.$$

$t$-ს მნიშვნელობის შეტანით მოძრაობის განტოლებაში ვიპოვით:

$$x=1-3t+2t^2=1-3\cdot\frac{3}{4}+2\cdot\frac{9}{16}=1-\frac{9}{4}+\frac{18}{16}=$$

$$=1-\frac{9}{4}+\frac{9}{8}=\frac{8-18+9}{8}=\frac{17-18}{8}=-\frac{1}{8}\ \text{მ};$$

ამ მომენტში წერტილი ათვლის დასაწყისის მარცხნივ იქნება 1/8 მანძილზე.

## § 6. წრფივად მოძრავი წერტილის აჩქარება

მოძრაობის წერტილის სიჩქარე შეიძლება შეიცვალოს. წერტილის სიჩქარის სიდიდის შეცვლას დროის ერთეულში წერტილის აჩქარება ეწოდება. თუ აჩქარება მუდმივია, მაშინ მოძრაობას თანაბრად ცვლადი მოძრაობა ეწოდება. თუ ასეთ მოძრაობაში სიჩქარე აბსოლუტური სიდიდით იზრდება, მოძრაობას თანაბრად აჩქარებული ეწოდება; თუკი სიჩქარის აბსოლუტური სიდიდე მცირდება, მოძრაობას თანაბრად შენელებული ეწოდება.

ვთქვათ, მოძრაობა გრძელდება $t$ წამის განმავლობაში; საწყის მომენტში წერტილის სიჩქარე იყოს $v_0$ (საწყისი სიჩქარე), მაშინ:

პირველი წამის დასასრულს წერტილის სიჩქარე

$$v_1 = v_0 + 1 \cdot w;$$

მეორე წამის დასასრულს წერტილის სიჩქარე

$$v_2 = v_1 + w = v_0 + w + w = v_0 + 2w;$$

მესამე წამის დასასრულს წერტილის სიჩქარე

$$v_3 = v_2 + w = v_0 + 2w + w = v_0 + 3w \quad \text{და ა. შ.}$$

$t$ წამის დასასრულს, წერტილის სიჩქარე

$$\boxed{v = v_0 + wt.} \tag{1}$$

(1) ფორმულა თანაბრად ცვლადი მოძრაობის სიჩქარის სიდიდეს გამოსახავს.

თუ საწყისი სიჩქარეა $v_0$ და საბოლოო—$v$, მაშინ $t$ დროის შუალედში საშუალო სიჩქარე

$$v_{\text{საშ}} = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{v_0 + v_0 + wt}{2} = v_0 + \frac{wt}{2}. \tag{2}$$

გავლილი მანძილი

$$s = v_{\text{საშ}} \cdot t = \left(v_0 + \frac{wt}{2}\right) \cdot t,$$

ანუ

$$\boxed{s = v_0 t + \frac{wt^2}{2}.} \tag{3}$$

წერტილის აჩქარების ფორმულის ამოსახსნელად ნებისმიერი ცვლადი მოძრაობისათვის ვიმსჯელოთ შემდეგნაირად.

ვთქვათ, $t_1$ მომენტში წერტილის სიჩქარეა $v_1$, ხოლო $t_2$ მომენტში—$v_2$, მაშინ

$$\boxed{w_{საშ.} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}} \tag{4}$$

სიდიდე საშუალო აჩქარების სიდიდეს გამოსახავს $\Delta t = t_2 - t_1$ დროის შუალედში.

ამრიგად, სიჩქარის ნაზრდის დროის ნაზრდთან ფარდობას წერტილის საშუალო აჩქარება ეწოდება.

(4) გამოსახულების ზღვარზე გადასვლით, როცა $\Delta t \to 0$, მივიღებთ წერტილის აჩქარებას დროის აღებულ მომენტში

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{5}$$

მაშასადამე, წერტილის წრფივი მოძრაობის დროს მისი აჩქარება დროის მოცემულ მომენტში სიჩქარის პირველი წარმოებულია დროით, ან მანძილის მეორე წარმოებულია დროით.

აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ მიღებული ფორმულა მხოლოდ წრფივი მოძრაობისთვისაა მართებული.

ისე როგორც სიჩქარე, აჩქარებაც ვექტორული სიდიდეა.

როდესაც $v$ სიჩქარესა და $w$ აჩქარებას ერთნაირი ნიშნები აქვთ, სიჩქარის აბსოლუტური სიდიდე იზრდება და წერტილი აჩქარებულად მოძრაობს; თუ $v$ სიჩქარესა და $w$ აჩქარებას სხვადასხვა ნიშნები აქვთ, მაშინ მოძრაობა შენელებული იქნება

(1) და (3) ფორმულების მიღება ასედაც შეიძლება: რადგან

$$w = \frac{dv}{dt},$$

ამიტომ

$$dv = w \cdot dt.$$

ამ გამოსახულების სათანადო ზღვრებში ინტეგრირებით მივიღებთ

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{0}^{t} w dt,$$

ანუ

$$v - v_0 = w \cdot t,$$

საიდანაც

$$v = v_0 + wt.$$

s მანძილისათვის გვაქვს

$$v = \frac{ds}{dt},$$

მაგრამ

$$v = v_0 + wt,$$

ამიტომ

$$v = v_0 + wt = \frac{ds}{dt};$$

აქედან

$$ds = (v_0 + wt)\, dt.$$

ხელახალი ინტეგრირებით ვპოულობთ

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_{0}^{t} (v_0 + wt)\, dt = \int_{0}^{t} v_0 dt + \int_{0}^{t} wt dt,$$

საიდანაც

$$s - s_0 = v_0 t + \frac{wt^2}{2},$$

ანუ

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{wt^2}{2};$$

აქ $s_0$ საწყისი მანძილია.

როდესაც მოძრაობა წარმოებს საწყისი $v_0$ სიჩქარის გარეშე, ე. ი. $v_0 = 0$, მაშინ

$$\boxed{v = wt; \quad s = \frac{wt^2}{2}.} \qquad (6)$$

პირველი ფორმულიდან $t$-ს მნიშვნელობა ჩავსვათ მეორეში და მივიღებთ

$$s=\frac{v^2}{2w},$$

საიდანაც $v^2=2ws$, აქედან კი

$$\boxed{v=\sqrt{2ws}.} \tag{7}$$

(7) ფორმულა აკავშირებს მანძილის, სიჩქარისა და აჩქარების სიდიდეებს.

ამრიგად, თანაბრად აჩქარებული მოძრაობა შეიძლება საწყისი სიჩქარით ან საწყისი სიჩქარის გარეშე, მაშინ როდესაც თანაბრად შენელებული მოძრაობა შეუძლებელია საწყისი სიჩქარის გარეშე.

თანაბრად შენელებული მოძრაობისათვის ვღებულობთ

$$\boxed{\begin{aligned} &v=v_0-w\cdot t;\\ &s=v_0\cdot t-\frac{wt^2}{2}. \end{aligned}} \tag{8}$$

აჩქარების ერთეულის განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ ფორმულა

$$w_{საშ}=\frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

როდესაც $\Delta v=1$ მ/წმ და $\Delta t=1$ წმ, მაშინ

$$\boxed{\text{აჩქარების ერთეული}=\frac{1\ \frac{\text{მ}}{\text{წმ}}}{1\ \text{წმ}}=1\ \frac{\text{მ}}{\text{წმ}^2}.} \tag{9}$$

ამრიგად, აჩქარების ერთეულად მიღებულია $1\ \frac{\text{მ}}{\text{წმ}^2}$.

აჩქარების ერთეულის საზომია:

$$[w]=\frac{[\Delta v]}{[\Delta t]}=\text{მ}\cdot\ \text{წმ}^{-2}. \tag{10}$$

**მ ა გ ა ლ ი თ ი**

მატარებელი დაიძრა $v_0=2$ მ/ წმ სიჩქარით და $t=60$ წმ შემდეგ სიჩქარის სიდიდემ მიაღწია $v=20\ \frac{\text{მ}}{\text{წმ}}$. მატარებელი მოძრაობდა თანაბრად აჩქარებულად. იპოვეთ 60 წამში გავლილი მანძილი.

საბოლოო სიჩქარე

$$v = v_0 + wt,$$

საიდანაც აჩქარება

$$w = \frac{v - v_0}{t} = \frac{20 - 2}{60} = \frac{18}{60} = \frac{3}{20} \text{ მ/წმ}^2.$$

გავლილი გზის სიგრძე

$$s = v_0 \cdot t + \frac{wt^2}{2} = 2 \cdot 60 + \frac{\frac{3}{20} \cdot 60^2}{2} = 120 + 270 = 390 \text{ მეტრს.}$$

## § 7. თანაბრად აჩქარებული მოძრაობის სიჩქარისა და მანძილის გრაფიკები

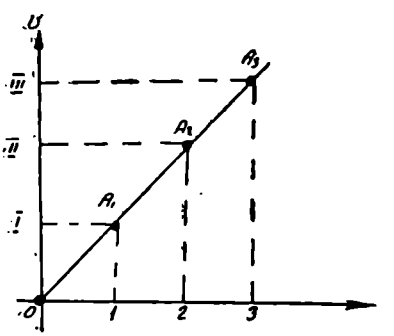
ავიღოთ სიჩქარის ფორმულა $v = w \cdot t$ და სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ $w = 1$ მ/წმ², მაშინ რიცხობრივად $v = t$.

როდესაც $t = 1$ წმ, მაშინ $v = 1$ მ/წმ;

როდესაც $t = 2$ წმ, მაშინ $v = 2$ მ/წმ;

როდესაც $t = 3$ წმ, მაშინ $v = 3$ მ/წმ და ა. შ.

ავიღოთ კოორდინატთა სისტემა $tOv$.




ნახ. 160

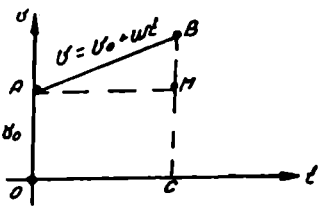
$Ot$ ღერძზე გადავზომოთ დროის მონაკვეთები: 1, 2, 3 და ა. შ. წამები, ხოლო $Ov$ ღერძზე სიჩქარის მნიშვნელობები — 1 მ/წმ, 2 მ/წმ, 3 მ/წმ და ა. შ.

სათანადო წერტილებიდან აღვმართოთ მართობები; მათი გადაკვეთის წერტილთა შეერთებით მივიღებთ $OA$ წრფეს, რომელიც (ნახ. 160) თანაბრად აჩქარებული მოძრაობის სიჩქარის გრაფიკს გამოსახავს იმ შემთხვევისათვის, როდესაც $v = w \cdot t$.

სიჩქარისათვის $v = v_0 + wt$ ფორმულა რომ აგვეღო, მაშინ გრაფიკი 161-ე ნახ-ზე ნაჩვენები $AB$ წრფით გამოისახებოდა.

მანძილის გრაფიკის ასაგებად ავიღოთ ფორმულა

$$s=\frac{wt^2}{2}.$$

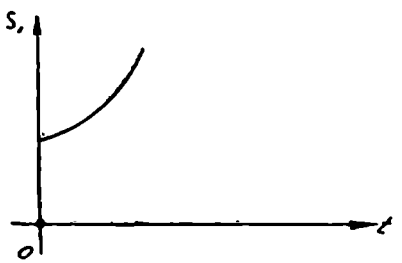



ნახ. 161




ნახ. 162

დავუშვათ, რომ $w=1$ მ/წმ², მაშინ რიცხობრივად $s=\frac{t^2}{2}$, რომლის გრაფიკი 162-ე ნახ-ზე გამოსახული პარაბოლის შტოა.




ნახ. 163

როცა $t=0$, $s=0$;

როცა $t=1$, $s=\frac{1}{2}$;

როცა $t=2$, $s=2$;

როცა $t=3$, $s=4,5$;

როცა $t=4$, $s=8$.

მანძილისათვის $s=v_0\cdot t+\frac{wt^2}{2}$ ფორმულას თუ ავიღებთ, მაშინ მოძრაობის გრაფიკი 163-ე ნახ-ზე გამოსახული პარაბოლის ნახევარი შტოთი გამოისახება.

## II თ ა ვ ი

# წერტილის მრუდწირული მოძრაობა

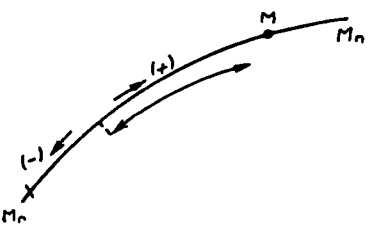
### § 1. წერტილის მოძრაობის განტოლებათა სახეები

წერტილის მოძრაობის დასახასიათებლად უნდა განისაზღვროს წერტილის მდებარეობა ათვლის სისტემის მიმართ დროის ნებისმიერ მომენტში.

წერტილის მოძრაობა შეიძლება განისაზღვროს ორნაირად: ა) ბუნებრივი სახით და ბ) საკოორდინატო სისტემაში.

როდესაც წერტილის მოძრაობის ტრაექტორია ცნობილია, განვიხილავთ წერტილის მოძრაობას ბუნებრივი სახით.

ვთქვათ, $M$ წერტილი მოძრაობს მოცემულ მრუდწირულ $M_0M_n$ ტრაექტორიაზე (ნახ. 164). ამ ტრაექტორიაზე შევარჩიოთ უძრავი $O$ წერტილი, რომელსაც ათვლის დასაწყისი ვუწოდოთ. ტრაექტორია მრუდწირულ საკოორდინატო ღერძად განვიხილოთ და მასზე ავირჩიოთ ორი მიმართულება: დადებითი და უარყოფითი, მაშინ მოძრავი $M$ წერტილის მდებარეობა $M_0M_n$ ტრაექტორიაზე განისაზღვრება მრუდწირული $s$ კოორდინატით, რომელიც ტრაექტორიის რკალის გასწვრივ გაზომილი $OM$ სიგრძის ტოლია.



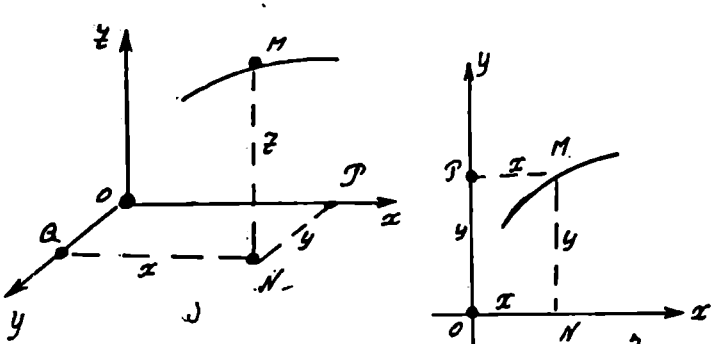
ნახ. 164

$M$ წერტილის უძრავი $O$ წერტილიდან დაშორების $s$ მანძილი იცვლება დროის მიხედვით, ამის გამო $s$ სიდიდე $t$ დროის ფუნქციაა, ე. ი.

$$s = f(t). \qquad (1)$$

ეს არის $M$ წერტილის მრუდწირული მოძრაობის განტოლება ბუნებრივი სახით.

ახლა განვიხილოთ წერტილის მოძრაობა სივრცეში და ათვლის სისტემად $xyz$ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა მივიღოთ (ნახ. 165, ა). $M$ წერტილის კოორდინატები იყოს $x$, $y$ და $z$.



ნახ. 165

როდესაც წერტილი მოძრაობს სივრცეში, მისი $x$, $y$ და $z$ კოორდინატები იცვლება. წერტილის მდებარეობა განსაზღვრული იქნება,

თუ გვეცოდინება $t$ დროის ყოველ მომენტში $x$, $y$ და $z$ კოორდინატები, ე. ი. გვეცოდინება დამოკიდებულებანი:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t) \quad \text{და} \quad z = f_3(t), \tag{2}$$

სადაც $f_1(t)$, $f_2(t)$ და $f_3(t)$ წარმოადგენენ $t$ დროის მოცემულ ფუნქციებს.

ამრიგად, (2) განტოლებები განსაზღვრავენ $M$ წერტილის მდებარეობას სივრცეში დროის ყოველ მომენტში, ამის გამო (2) განტოლებები წერტილის მოძრაობის განტოლებებია მართკუთხა სივრცით კოორდინატებში.

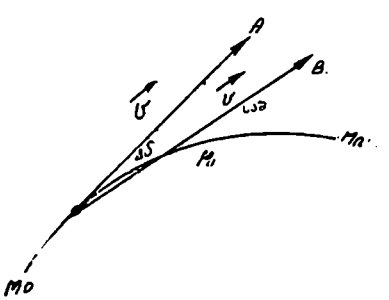
როდესაც წერტილი მოძრაობს სიბრტყეზე (ნახ. 165, ბ), მაშინ წერტილის მოძრაობის განტოლებები იქნება

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t). \tag{3}$$

ტრაექტორიის განტოლება რომ ვიპოვოთ, მოძრაობის განტოლებებიდან უნდა გამოვრიცხოთ $t$ დრო.

## § 2. მოძრავი წერტილის ვექტორული სიჩქარე

ვთქვათ, $M$ წერტილი მოძრაობს მრუდწირულ $M_0M_n$ ტრაექტორიაზე (ნახ. 166). დავუშვათ, რომ დროის $t$ მომენტში მოცემული მოძრავი წერტილი $M$ მდებარეობაშია, ხოლო $t+\Delta t$ მომენტში—$M_1$ მდებარეობაში. ამ დროის განმავლობაში $M$ წერტილის მიერ გავლილი მანძილი იქნება



ნახ. 166

$$\overset{\frown}{MM_1} = \Delta s.$$

გავატაროთ $\vec{MM_1}$ ვექტორი, რომლის საწყისი მოძრავი წერტილის საწყისი $M$ მდებარეობა, ხოლო ბოლო წერტილია $M_1$ მდებარეობა.

$\vec{MM_1}$ ვექტორს $M$ წერტილის ვექტორული გადაადგილება ეწოდება $\Delta t$ დროის განმავლობაში.

თუ დავუშვებთ, რომ მოცემული წერტილი $\overrightarrow{MM_1}$ რკალზე კი არ მოძრაობს, არამედ $MM_1$ წრფეზე, მაშინ საშუალო სიჩქარის რიცხვითი მნიშვნელობა იქნება $\frac{MM_1}{\Delta t}$.

$M$ წერტილიდან $MM_1$ მიმართულებაზე მოვზომოთ $\overrightarrow{MB}$ ვექტორი, რომელიც სიდიდით $\frac{MM_1}{\Delta t}$ ფარდობის ტოლია.

$\overrightarrow{MB}$ ვექტორს წერტილის საშუალო სიჩქარე დავარქვათ $\Delta t$ დროის განმავლობაში, ე. ი.

$$\vec{v}_{\text{საშ}}=\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}=\overrightarrow{MB}.$$

როდესაც $\Delta t$ მიისწრაფვის ნულისაკენ, მაშინ $M_1$ წერტილი უახლოვდება $M$ წერტილს. ზღვარში $\vec{v}_{\text{საშ}}$ ვექტორის მიმართულება ტრაექტორიის $M$ წერტილზე გატარებულ მხებს ემთხვევა, ხოლო მისი მოდული იქნება

$$\lim_{\Delta t\to 0}\ \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}\ .$$

$\overrightarrow{MB}$ ვექტორის ზღვარს, როცა $M_1\to M$, ეწოდება $M$ წერტილის ვექტორული სიჩქარე $t$ მომენტში და $\vec{v}$-თი აღინიშნება.

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM}}{\Delta t}=\lim_{M_1\to M}\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}.$$

მაშასადამე, $\vec{v}_{\text{საშ}}$ საშუალო სიჩქარის ზღვარს, როცა $\Delta t\to 0$, მოძრავი წერტილის ვექტორული სიჩქარე ეწოდება დროის $t$ მომენტში.

ამ ვექტორის სიდიდე

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{MM_1}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{MM_1}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{MM_1}{\Delta s}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (ა)$$

როგორც ცნობილია, უსასრულოდ მცირე რკალის შემჭიმველ ქორდასთან ფარდობის ზღვარი 1-ის ტოლია, ე. ი.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{MM_1}{\Delta s}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{MM_1}{\overrightarrow{MM_1}}=1;$$

.ამის გამო

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \qquad (8)$$

$\frac{ds}{dt}$ წარმოებულს შეიძლება ჰქონდეს დადებითი ან უარყოფითი მნიშვნელობა წერტილის ტრაექტორიაზე მოძრაობის მიმართულებაზე დამოკიდებულებით.

ამრიგად, სიჩქარე ვექტორია, რომლის მოდული წერტილის მოძრაობის რკალური კოორდინატის წარმოებულს უდრის დროის მიხედვით და რომელიც ტრაექტორიის მხარეზეა მიმართული წერტილის მოძრაობის მიმართულებით.

## § 3. მრუდწირული მოძრაობის დროს წერტილის აჩქარება

წერტილის წრფივი მოძრაობის დროს აჩქარების განსაზღვრისათვის ვიქცეოდით შემდეგნაირად: ა) ჯერ განვიხილავდით, თუ როგორ იცვლებოდა სიჩქარე მოცემული დროის $\Delta t$ შუალედში და სიჩქარის ცვლილებას $\Delta v$-თი აღვნიშნავდით; ბ) შემდეგ ვპოულობდით წერტილის საშუალო აჩქარებას დროის $\Delta t$ შუალედში $w_{საშ} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$; გ) დაბოლოს ვპოულობდით $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ფარდობის ზღვარს, როცა $\Delta t \to 0$ და ამით განვსაზღვრავდით აჩქარებას

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

ამ ხერხს იყენებენ იმ შემთხვევისთვისაც, როდესაც საჭიროა წერტილის აჩქარების განსაზღვრა მრუდწირული მოძრაობის დროს; ამასთან, საჭიროა ზოგიერთი განზოგადების შემოღება.

წრფივ მოძრაობაში სიჩქარე სკალარული სიდიდეა, მისი მიმართულება კი უცვლელი რჩება. ამიტომ სიჩქარის ნაზრდის

$$\Delta v = v_2 - v_1$$

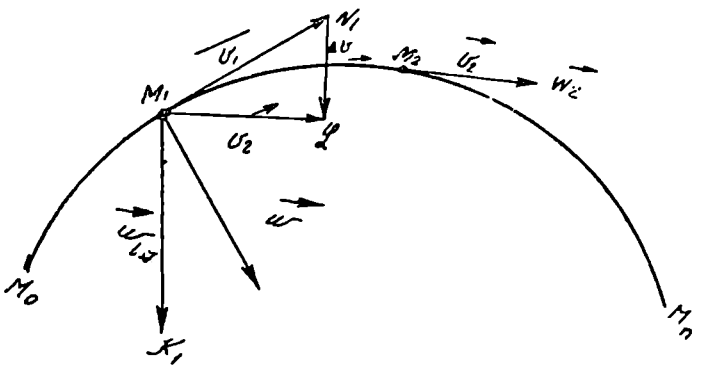
სიდიდე სავსებით ახასიათებს სიჩქარის ცვლილებას.

შეიძლება მოხდეს, რომ სიჩქარის მოდული უცვლელი დარჩეს, მაგრამ აჩქარებას მაინც ჰქონდეს ადგილი.

თანაბარი წრფივი მოძრაობის აჩქარების ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ, რომ $\Delta v = 0$, რადგან $v_1 = v_2$ და, მაშასადამე, აჩქარება ნულის

ტოლია. თანაბარი მრუდწირული მოძრაობის დროს აჩქარება არ უდრის ნულს, რადგან სიჩქარე ვექტორია, ხოლო ვექტორი ხასიათდება მოდულით და მიმართულებით, ამიტომ შეიძლება ვექტორის სიდიდე უცვლელი იყოს, მისი მიმართულება კი იცვლებოდეს ტრაექტორიის ყოველ წერტილში. ამის გამო თანაბარი მრუდწირული მოძრაობის აჩქარება ახასიათებს სიჩქარის მიმართულების ცვლილებას.

ვთქვათ, $M$ წერტილის ტრაექტორიაა $M_0M_n$ (ნახ. 167). დავუშვათ, რომ $M$ წერტილი ამ ტრაექტორიაზე მოძრაობს და $\Delta t$ დროში $M_1$ მდებარეობიდან $M_2$ მდებარეობაში გადადის.




ნახ. 167

მოძრავი $M$ წერტილის სიჩქარე $M_1$ წერტილში იყოს $\vec{v}_1$ (იგი ტრაექტორიის მხებს მიყვება $M_1$ წერტილში), ხოლო $M_2$ წერტილში— $\vec{v}_2$ (ეს ვექტორის ტრაექტორიის მხებს მიყვება $M_2$ წერტილში). ამის შემდეგ $M_1$ წერტილიდან $\vec{M_2N_2}$ ვექტორის გეომეტრიულად ტოლი $\vec{M_1L}$ ვექტორი გავატაროთ. $N_1$ და $L$ წერტილების შეერთებით მივიღებთ $\vec{N_1L}$ ვექტორს, რომელიც წარმოადგენს $\vec{v}_2$ და $\vec{v}_1$ ვექტორთა გეომეტრიულ სხვაობას

$$\vec{N_1L} = \vec{M_1L} - \vec{M_1N_1},$$

ანუ

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

ამრიგად, სიჩქარის სრული ცვლილება ეწოდება სიჩქარის გეომეტრიულ ნაზრდს.

$\vec{\Delta v}$ და $\Delta t$ სიდიდეთა ფარდობა საშუალო აჩქარებას გვაძლევს $\Delta t$ დროის შუალედში

$$\vec{w}_{საშ} = \frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t}.$$

ეს აჩქარება ნახაზზე გამოსახულია $M_1K_1$ ვექტორით. იგი $\overline{\Delta v}$ ვექტორის პარალელურია.

ახლა დავუშვათ, რომ $\Delta t$ განუწყვეტლივ მცირდება და უახლოვდება ნულს ($\Delta t \to 0$), მაშინ $\frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t}$ ფარდობის ზღვარს $M$ წერტილის $\vec{w}$ აჩქარება ეწოდება აღებულ $t$ მომენტში, ე. ი.

$$\vec{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{w}_{საშ} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{N_1L}}{\Delta t}. \qquad (1)$$

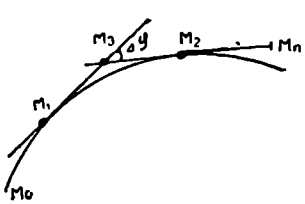
ამის შესაბამისად საშუალო აჩქარების ალმძვრელი $M_1K_1$ ვექტორი ზღვრისაკენ მისწრაფებისას იქცევა $\vec{w}$ ვექტორად, რომელიც $M_1$ წერტილზეა მოდებული. $\vec{w}$ ვექტორი $M$ წერტილის აჩქარებას დამოსახავს; იგი მუდამ ტრაექტორიის ჩაზნექილობის მხარესაა მიმართული.

ამრიგად, წერტილის ვექტორული აჩქარება სიჩქარის გეომეტრიული ნაზრდის დროის ნაზრდთან ფარდობის ზღვარია, როდესაც ეს უკანასკნელი მიისწრაფვის ნულისაკენ.

## § 4. წირის სიმრუდე და სიმრუდის რადიუსი

ბრტყელ $M_0M_n$ მრუდზე ავიღოთ ერთმანეთის მახლობლად მდებარე ორი $M_1$ და $M_2$ წერტილი (ნახ. 168). $M_1M_2$ რკალის სიგრძე იყოს $\Delta s$.

$M_1$ და $M_2$ წერტილებზე გავატაროთ მოცემული მრუდის მხებები მათ შორის $\Delta\varphi$ კუთხეს საზღვრის კუთხე ეწოდება.



ნახ. 168

$\Delta\varphi$ კუთხის ფარდობას სათანადო $\overset{\frown}{M_1M_2}$ რკალის $s$ სიგრძესთან $\overset{\frown}{M_1M_2}$ რკალის საშუალო ($k_{საშ}$) სიმრუდე ეწოდება

$$k_{საშ} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}. \qquad (ა)$$

საშუალო სიმრუდე რკალის სიმრუდის ხარისხს განსაზღვრავს, მაგრამ წარმოდგენას არ იძლევა სიმრუდის ხარისხზე რკალის ცალკეულ წერტილებში. ამიტომ საშუალო სიმრუდესთან ერთად არსებობს ცნება სიმრუდეზე წერტილში, რომელიც განისაზღვრება როგორც საშუალო სიმრუდის ზღვარი $M_1$ და $M_2$ წერტი-

ლების ურთიერთ მიახლოებისას, ე. ი. როდესაც რკალის სიგრძე მიისწრაფვის ნულისაკენ

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s}. \tag{1}$$

სიმრუდის უკუპროპორციულ სიდიდეს სიმრუდის $\rho$ (რო) რადიუსი ეწოდება

$$\rho = \frac{1}{k}. \tag{2}$$

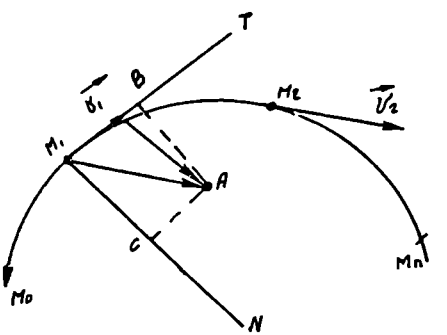
მაგალითად, წრეწირი მუდმივი სიმრუდის მრუდე წირია.

## § 5. წერტილის აჩქარების განსაზღვრა. მხები და ნორმალური აჩქარებები

ვთქვათ, $M$ წერტილი მოძრაობს საბრტყეზე აღებულ რაიმე წირზე. $M_0M_n$ იყოს (ნახ. 169) მოცემული ტრაექტორია.

განვიხილოთ მოძრავი $M$ წერტილის ორი მდებარეობა—$M_1$ და $M_2$. ტრაექტორიის $M_1$ წერტილზე გავატაროთ $M_1T$ მხები და მასზე $M$. წერტილის $\vec{v}_1$ სიჩქარე გადავზომოთ.

მას შემდეგ, რაც $M$ წერტილი $M_1$ მდებარეობიდან $M_2$ მდებარეობაში გადავიდა, მისი სიჩქარე იქნება $\vec{v}_2$; $M_1$ წერტილიდან გავატაროთ $\vec{v}_2$ ვექტორის პარალელური წრფე და მასზე $\vec{v}_2$ ვექტორის ტოლი $\overrightarrow{M_1A}$ ვექტორი გადავზომოთ. ამის შემდეგ ავაგოთ $\overrightarrow{\Delta v}$ ვექტორი, რომელიც $\vec{v}_2$ და $\vec{v}_1$ ვექტორთა გეომეტრიულ სხვაობას წარმოადგენს



ნახ. 169

$$\overrightarrow{\Delta v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

$\overrightarrow{\Delta v}$ ვექტორი $M_1T$ მხებზე დავაგეგმილოთ

$$\text{გეგ}_{M_1T}\overrightarrow{\Delta v} = \text{გეგ}_{M_1T}\vec{v}_2 - \text{გეგ}_{M_1T}\vec{v}_1.$$

ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$\text{გეგ}_{M_1T}\vec{v}_2 = v_2 \cdot \cos \Delta\varphi;$$

$$\text{გეგ}_{M_1T}\vec{v}_1 = v_1;$$

მაშასადამე,

$$\text{გეგ}_{M_1T}\Delta\vec{v} = v_2 \cdot \cos\Delta\varphi - v_1.$$

ამ უკანასკნელი ტოლობის ორივე მხარეს $\Delta t$-ზე თუ გავყოფთ, მივიღებთ

$$\text{გეგ}_{M_1T}\ \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{v_2 \cdot \cos\Delta\varphi - v_1}{\Delta t}.$$

ზღვარზე გადასვლისას, როცა $\Delta t \to 0$, მივიღებთ

$$\lim_{\Delta t\to 0} \text{გეგ}_{M_1T}\ \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{v_2 \cdot \cos\Delta\varphi - v_1}{\Delta t}.$$

მაგრამ $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \text{გეგ}_{M_1T}\ \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ წარმოადგენს სრული აჩქარების გეგმილს ტრაექტორიის მხებზე განსახილავ დროის მომენტში და მხები ანუ ტანგენსური $\vec{w}_t$ აჩქარების სახელწოდებას ატარებს

$$w_t = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{v_2 \cdot \cos\Delta\varphi - v_1}{\Delta t}. \qquad (1)$$

უნდა შევნიშნოთ, რომ როცა $\Delta t \to 0$, მაშინ $M_2$ წერტილი უსაზღვროდ უახლოვდება $M_1$ წერტილს და ერთდროულად $\Delta\varphi \to 0$; $\Delta s \to 0$; $v_2 \to v_1$, ამიტომ $\lim\limits_{\Delta t\to 0}(\cos\Delta\varphi) = 1$ და

$$\boxed{w_t = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.} \qquad (2)$$

წერტილის აჩქარების ვექტორის გეგმილი ტრაექტორიის მხებზე უდრის სიჩქარის მოდულის წარმოებულს დროის მიხედვით.

$w_t$ მხები აჩქარება წერტილის სიჩქარის ცვლილებას ახასიათებს მოდულის მიხედვით.

ახლა $\Delta\vec{v}$ ვექტორი $M_1N$ ნორმალზე დავაგეგმილოთ

$$\text{გეგ}_{M_1N}\Delta\vec{v} = v_2 \cdot \sin\Delta\varphi.$$

ამ ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ $\Delta t$-ზე

$$\text{გეგ}_{M_1N}\ \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{v_2 \cdot \sin\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

ზღვარზე გადასვლით, როცა $\Delta t \to 0$, მივიღებთ

$$\lim_{\Delta t\to 0} \text{გეგ}_{M_1N}\ \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} v_2 \cdot \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

მაგრამ $\lim_{\Delta t \to 0}$ გეგ$_{M_1N}$ $\frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t}$ წარმოადგენს სრული აჩქარების გეგმილს $M_1N$ ნორმალზე და $w_n$-ით აღინიშნება. მარჯვენა მხარის მრიცხველი და მნიშვნელი $\Delta\varphi \cdot \Delta s$-ზე გავამრავლოთ, მივიღებთ

$$w_n = \lim_{\Delta t \to 0} v_2 \cdot \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta s} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} \cdot v_2 \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} (v_2) \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s},$$

სადაც

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} = 1; \quad \lim_{\Delta t \to 0} v_2 = v_1 \quad \text{ან საზოგადოდ} = v;$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v;$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{\rho},$$

სადაც $\rho$ ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსია $M$ წერტილში; ამიტომ

$$w_n = 1 \cdot v \cdot v \cdot \frac{1}{\rho}$$

ანუ

$$\boxed{w_n = \frac{v^2}{\rho},} \tag{3}$$

ე. ი. წერტილის აჩქარების ვექტორის $w_n$ გეგმილი ნორმალზე წერტილის სიჩქარის კვადრატის ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსთან ფარდობის ტოლია.

$\overline{w}_n$ ნორმალური აჩქარება წერტილის სიჩქარის ვექტორის მიმართულების ცვლილებას ახასიათებს.

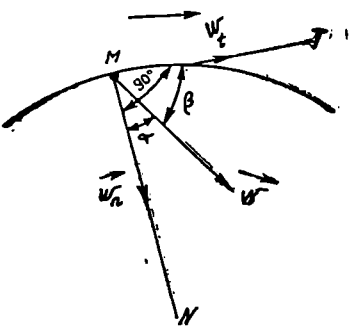
როდესაც ცნობილია სრული $\overline{w}$ აჩქარების გეგმილები ტრაექტორიის შეცემულ წერტილზე უატარებულ მხებ და ნორმალურ მიმართულებებზე, მაშინ ადვილი საპოვნელია თვით $\overline{w}$ სრული აჩქარების ვექტორის მოდული და მიმართულება.

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $MT$ და $MN$ ღერძებშორისი კუთხე 90°-ის ტოლია, პითაგორას თეორემის ძალით მივიღებთ (ნახ. 170)

$$w^2 = w_t^2 + w_n^2,$$

საიდანაც

$$w = \sqrt{w_t^2 + w_n^2}, \tag{4}$$




ნახ. 170

მაგრამ $w_t = \frac{dv}{dt}$ და $w_n = \frac{v^2}{\rho}$, ამიტომ აჩქარების მოდული

$$\boxed{w = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}.} \tag{5}$$

აჩქარების ვექტორის მიმართულების კუთხეთა კოსინუსებია:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{w_n}{w}; \\ \cos\beta &= \frac{w_t}{w}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

განვიხილოთ ზოგიერთი კერძო შემთხვევა:

I. ვთქვათ, წერტილი წრფივად და თანაბრად მოძრაობს. ამ დროს უცვლელი რჩება სიჩქარე (ნახ. 171, ა); მართლაც, ამ დროს

$$w_t = \frac{dv}{dt} = 0; \qquad w_n = \frac{v^2}{\rho} = 0.$$

მაშასადამე, (5) ფორმულით ვპოულობთ

$$w = 0.$$

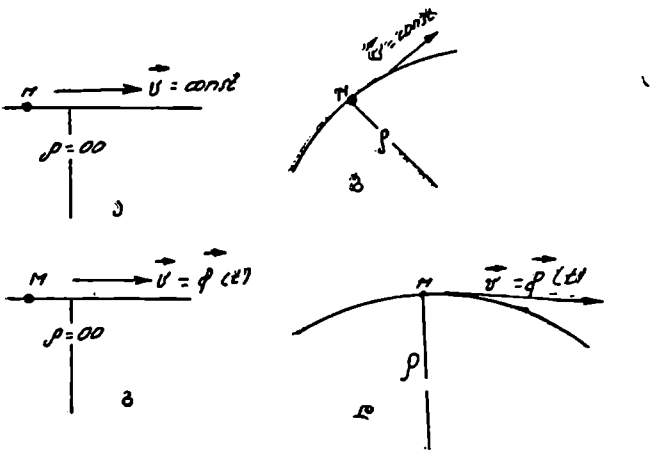
II. ვთქვათ, წერტილი თანაბრად მოძრაობს მრუდწირულ ტრაექტორიაზე, ე. ი. სიჩქარის აბსოლუტური სიდიდე $v = \text{const}$ (ნახ. 171, ბ).

აქ სიჩქარის მხოლოდ მიმართულება იცვლება და, მაშასადამე, არსებობს მხოლოდ ნორმალური აჩქარება:

$$w_t = \frac{dv}{dt} = 0,$$

ხოლო

$$w_n = \frac{v^2}{\rho}.$$



ნახ. 171

კერძოდ $R$-რადიუსიან წრეწირზე თანაბარი მოძრაობის დროს

$$w_t = 0 \quad \text{და} \quad w_n = \frac{v^2}{R}.$$

III. ვთქვათ, წერტილი წრფივად და არათანაბრად მოძრაობს. ამ შემთხვევაში ტრაექტორია წრფივია, ამიტომ $\rho = \infty$ და $w_n = 0$ (ნახ. 171, გ). ამ შემთხვევაში იცვლება სიჩქარის მოდული; ამის გამო არსებობს მხოლოდ მხები აჩქარება

$$w = w_t = \frac{dv}{dt}.$$

IV. ვთქვათ, წერტილი არათანაბრად მოძრაობს მრუდწირულ ტრაექტორიაზე (ნახ. 171, დ). ამ შემთხვევაში გვაქვს მხები და ნორმალური აჩქარებები:

$$w_t = \frac{dv}{dt} \quad \text{და} \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

სრული აჩქარების ვექტორი არათანაბარი და მრუდწირული მოძრაობის დროს

$$\vec{w} = \vec{w}_t + \vec{w}_n. \tag{7}$$

მაგალითი

სადგურიდან გასული მატარებელი თანაბრად აჩქარებულად მოძრაობს $R = 800$ მ რადიუსით მომრუდებულ გზაზე. განსაზღვრეთ მატარებლის მოძრაობის მხები, ნორმალური და სრული აჩქარება 2 წუთის შემდეგ, როცა უკვე გავლილი იქნება $s = 1000$ მ მანძილი.

ამოხსნა

თუ მანძილს მატარებლის დაძვრის ადგილიდან ავთვლით, მაშინ საწყისი $s_0$ მანძილი და მატარებლის საწყისი $v_0$ სიჩქარე ნულის ტოლი იქნება. რადგან მოძრაობა თანაბრად აჩქარებულია, ამიტომ

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{w_t t^2}{2} = \frac{w_t \cdot t^2}{2};$$

აქედან

$$w_t = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 1000}{(2 \cdot 60)^2} = \frac{2000}{14400} = \frac{20}{144} = \frac{5}{36} \text{ მ/წმ}^2.$$

სადგურიდან გასვლის მომენტიდან 2 წუთის (120 წამის) შემდეგ მატარებლის სიჩქარე

$$v = w_t \cdot t = \frac{5}{36} \cdot 120 = \frac{5 \cdot 20}{6} = \frac{5 \cdot 10}{3} = \frac{50}{3} \text{ მ/წმ}.$$

ნორმალური აჩქარება

$$w_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(\frac{50}{3}\right)^2}{800} = \frac{2500}{7200} = \frac{25}{72} \text{ მ/წმ}^2.$$

სრული აჩქარება

$$w = \sqrt{w_t^2 + w_n^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{36}\right)^2 + \left(\frac{25}{72}\right)^2} = \frac{5\sqrt{29}}{72} \ \frac{\text{მ}}{\text{წმ}^2}.$$

მაგალითები

1. წერტილის მოძრაობა მოცემულია განტოლებებით

$$x = 2t \quad \text{და} \quad y = t^2.$$

იპოვეთ ტრაექტორიის განტოლება და გამოხაზეთ ტრაექტორია. აღნიშნეთ წერტილის საწყისი მდებარეობა ტრაექტორიაზე. აღნიშნეთ წერტილის მოძრაობის მიმართულება ტრაექტორიაზე (ნახ. 172).

ამოხსნა

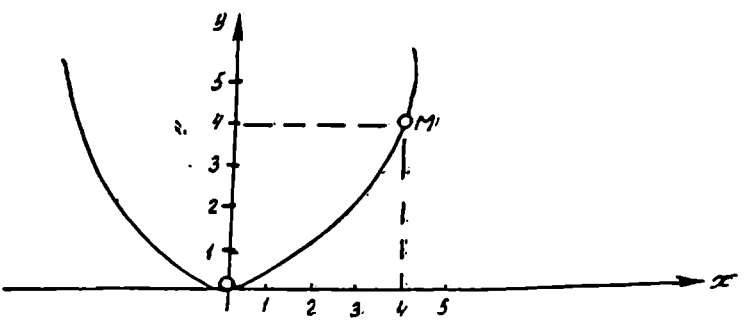
მოცემული $x=2t$ განტოლებიდან დრო

$$t=\frac{x}{2}.$$

$t$-ს მნიშვნელობა შევიტანოთ $y=t^2$ განტოლებაში:

$$y=\frac{x^2}{4}.$$

მიღებული განტოლება პარაბოლის განტოლებაა.




ნახ. 172

ავაგოთ პარაბოლა $y=\frac{x^2}{4}$ განტოლების საშუალებით (ნახ. 172).

როცა $x=0$, მაშინ $y=0$;
როცა $x=1$, მაშინ $y=0{,}25$;
როცა $x=-1$, მაშინ $y=0{,}25$;
როცა $x=2$, მაშინ $y=1$;
როცა $x=-2$, მაშინ $y=1$;
როცა $x=3$, მაშინ $y=2{,}25$;
როცა $x=-3$, მაშინ $y=2{,}25$;
როცა $x=4$, მაშინ $y=4$;
როცა $x=-4$, მაშინ $y=4$.

ამ მნიშვნელობების მიხედვით აიგება პარაბოლა. მოძრაობის ტრაექტორია მსხვილი ხაზით გამოხაზული პარაბოლის ნაწილია, რომელიც კოორდინატთა სათავეში იწყება და როცა $t \to \infty$, უსასრულეთში მიდის.

ტრაექტორიაზე წერტილის საწყისი მდებარეობის საპოვნელად მოძრაობის მოცემულ

$$x = 2t \quad \text{და} \quad y = t^2$$

განტოლებებში ჩავსვათ მნიშვნელობა $t = 0$, მაშინ მივიღებთ

$$x = 0 \quad \text{და} \quad y = 0;$$

მაშასადამე, საწყის მომენტში მოძრავი წერტილი კოორდინატთა დასაწყისშია.

ტრაექტორიაზე წერტილის მოძრაობის მიმართულებას ვიპოვით, თუ წერტილის მოძრაობის $x = 2t$ და $y = t^2$ განტოლებებში ჩავსვამთ $t$-ს რიგ მნიშვნელობებს

$$t = 0;\ 1;\ 2.$$

ჩვენ ვრწმუნდებით, რომ $t$-ს ზრდისას მოძრავი წერტილის კოორდინატებიც იზრდება და სულ მუდამ დადებითი რჩება, ამის გამო წერტილი ისრით ნაჩვენები მიმართულებით მოძრაობს.

2. წერტილის მოძრაობა მოცემულია განტოლებებით:

$$x = 5 \sin t \quad \text{და} \quad y = 5 \cos t,$$

სადაც $x$ და $y$ იზომება სმ-ობით, $t$ კი— წმ-ობით.

იპოვეთ წერტილის ტრაექტორიის განტოლება.

ამოხსნა

მოცემული განტოლებებიდან

$$\sin t = \frac{x}{5} \quad \text{და} \quad \cos t = \frac{y}{5}.$$

ეს გამოსახულებანი კვადრატებში ავამაღლოთ და წევრ-წევრად შევკრიბოთ

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{5^2} = \sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

ამით წერტილის ტრაექტორიის განტოლებას მივიღებთ

$$x^2 + y^2 = 5^2.$$

ეს კი 5 სმ რადიუსიანი წრეწირის განტოლებაა ცენტრით კოორდინატთა დასაწყისში.

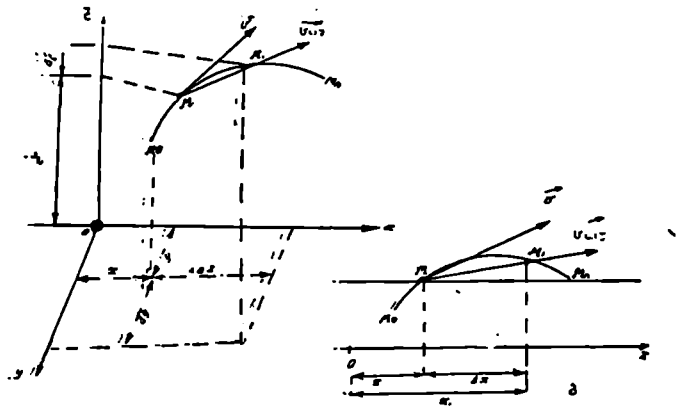
მოძრაობა იწყება $x=0$ და $y=5$ სმ წერტილიდან $x$ კოორდინატის ზრდის მიმართულებით.

## § 6. სიჩქარის განსაზღვრა წერტილის მოძრაობის განტოლებების მიხედვით დეკარტეს კოორდინატებში

როდესაც წერტილის მოძრაობა მოცემულია საკოორდინატო სისტემის მიმართ, მაშინ სიჩქარის მოდულისა და მიმართულების განსაზღვრისათვის იყენებენ ვექტორების კოორდინატთა ღერძებზე დაგეგმილების მეთოდს. ამ მეთოდის გამოსაყენებლად უნდა დადგინდეს, თუ წერტილის მოძრაობის განტოლებებით:

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t) \quad \text{და} \quad z=f_3(t)$$

როგორ გამოვთვალოთ სიჩქარის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე.



ნახ. 173

ვთქვათ, $M$ წერტილი მოძრაობს $M_0M_n$ ტრაექტორიაზე (ნახ. 173, ა).

ვთქვათ, მოძრავ წერტილს $M$ მდებარეობაში $t$ მომენტში აქვს $x$, $y$ და $z$ კოორდინატები, ხოლო $M_1$ მდებარეობაში, $(t+\Delta t)$ მომენტში — $x_1$, $y_1$ და $z_1$, შესაბამისად

$$x_1=x+\Delta x; \quad y_1=y+\Delta y; \quad z_1=z+\Delta z.$$

სიჩქარის ვექტორის გეგმილი ჯერ $Ox$ ღერძზე (ნახ. 173, ბ) გამოვთვალოთ.

რადგან დროის მოცემულ მომენტში $\vec{v}$ სიჩქარე $\vec{v}_{საშ}$ საშუალო სიჩქარის ზღვარია, როცა $\Delta t \to 0$, ამიტომ მისი გეგმილი შეგვიძლია განვსაზღვროთ, როგორც საშუალო სიჩქარის გეგმილის ზღვარი, როცა $\Delta t \to 0$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{MM_1}}{\Delta t}.$$

მაშასადამე,

$$v_x = \text{გეგ}_{ox}\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\text{გეგ}_{ox}\vec{MM_1}}{\Delta t}, \qquad (1)$$

$Ox$ ღერძზე დავაგეგმილოთ $\vec{MM_1}$ ქორდა. ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$\text{გეგ}_{ox}\vec{MM_1} = \overline{MM_1} = \Delta x.$$

ამ ტოლობის ორივე მხარეს ვყოფთ $\Delta t$-ზე

$$\text{გეგ}_{ox}\frac{\vec{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

ზღვარზე გადასვლით, როცა $\Delta t \to 0$, ვპოულობთ

$$\lim_{\Delta t \to 0} \text{გეგ}_{ox}\frac{\vec{MM_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}.$$

აქედან, (1) ტოლობის საფუძველზე, გვაქვს

$$v_x = \text{გეგ}_{ox}\vec{v} = \frac{dx}{dt}. \qquad (2)$$

ანალოგიური მსჯელობით გამოვთვლით $\vec{v}$ სიჩქარის გეგმილებს $Oy$ და $Oz$ ღერძებზე და საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= f_1'(t) = \frac{dx}{dt}; \\ v_y &= f_2'(t) = \frac{dy}{dt}; \\ v_z &= f_3'(t) = \frac{dz}{dt}. \end{aligned}} \qquad (3)$$

მაშასადამე, წერტილის სიჩქარის გეგმილები დეკარტის კოორდინატთა უძრავ ღერძებზე წერ-

ტილის სათანადო კოორდინატების პირველი წარმოებულის ტოლია დროით.

$\bar{v}$ სიჩქარის მოდულისათვის გვექნება

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \qquad (4)$$

$\bar{v}$ სიჩქარის მიმართულების კოსინუსები:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{v_x}{v};\\ \cos\beta &= \frac{v_y}{v};\\ \cos\gamma &= \frac{v_z}{v}.\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

მაგალითები

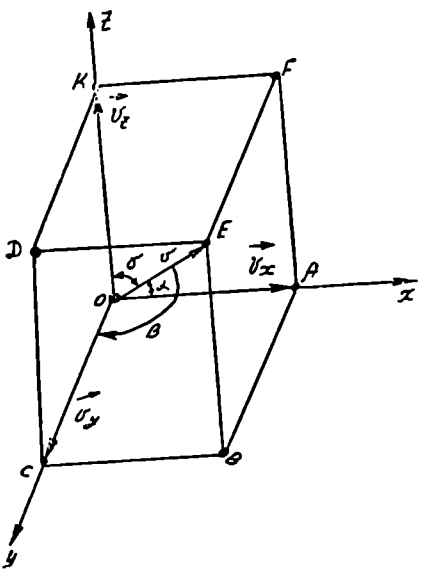
1. წერტილის მოძრაობა მოცემულია განტოლებებით:

$x=20t+5$;

$y=15t+3$,

სადაც $x$ და $y$ აღებულია სმ-ობით, ხოლო $t$—წმ-ობით.

იპოვეთ ტრაექტორიის განტოლება, სიჩქარის მოდული და მიმართულება (ნახ. 174).




ნახ. 174

ამოხსნა

წერტილის ტრაექტორიის განტოლების განსაზღვრისათვის მოძრაობის მოცემული განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ $t$ დრო. პირველი განტოლებიდან

$$t=\frac{x-5}{20}.$$

მეორე განტოლებიდან

$$t = \frac{y-3}{15}.$$

რადგან ამ ტოლობათა მარცხენა ნაწილები ტოლებია, მარჯვენა ნაწილებიც ტოლები იქნება

$$\frac{x-5}{20} = \frac{y-3}{15}.$$

ამრიგად, საძიებელი ტრაექტორია წრფეა.

მოცემული განტოლებების დროის მიხედვით გაწარმოებით ვიპოვით სიჩქარის გეგმილებს კოორდინატთა ღერძებზე:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 20 \text{ სმ/წმ};$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 15 \text{ სმ/წმ}.$$

სიჩქარის მოდული

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{400 + 225} = \sqrt{625} = 25 \text{ სმ/წმ}.$$

სიჩქარის მიმართულება განისაზღვრება ფორმულებით:

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{20}{25} = 0{,}8; \qquad \alpha = 36^\circ 50';$$

$$\cos\beta = \frac{v_y}{v} = \frac{15}{25} = 0{,}6; \qquad \beta = 53^\circ 10'.$$

2. წერტილის მოძრაობის კანონი მოცემულია განტოლებებით:

$$x = 8t^2 - 3; \qquad y = 5t;$$

სადაც $x$ და $y$ კოორდინატები მოცემულია სმ-ობით, $t$ დრო კი—წამობით. განსაზღვრეთ წერტილის მოძრაობის ტრაექტორია და სიჩქარე იმ მომენტში, როდესაც წერტილი ძევს $Ox$ და $Oy$ ღერძებზე.

ამოხსნა

წერტილის ტრაექტორიის განტოლების განსაზღვრის მიზნით მოცემული მოძრაობის განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ $t$ დრო. ჯერ ავიღოთ მეორე განტოლება $y = 5t$, საიდანაც $t = \frac{y}{5}$. ეს მნიშვნელობა შევიტანოთ პირველ $x = 8t^2 - 3$ განტოლებაში

$$x = \frac{8y^2}{25} - 3,$$

საიდანაც

$$8y^2 - 25x - 75 = 0.$$

ამრიგად, მივიღეთ პარაბოლის განტოლება, ე. ი. საძიებელი ტრაექტორია პარაბოლაა.

მოძრავი წერტილის საწყისი მდებარეობის საპოვნელად მოძრაობის განტოლებებში დავუშვათ, რომ დრო $t=0$; მაშინ მივიღებთ:

$$x_0 = -3 \quad \text{და} \quad y_0 = 0.$$

მაშასადამე, მოძრავი წერტილი საწყის მომენტში $Ox$ ღერძზე მდებარეობს.

$t$ ცვლადის ზრდასთან ერთად ორივე $x$ და $y$ კოორდინატი იზრდება და, მაშასადამე, წერტილი პარაბოლზე საათის მოძრაობის მიმართულებით მოძრაობს.

მოძრაობის მოცემულ განტოლებებს დროის მიხედვით თუ გავაწარმოებთ, ვიპოვით სიჩქარის გეგმილებს კოორდინატთა $Ox$ და $Oy$ ღერძებზე, ე. ი.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(8t^2 - 3) = 16t \text{ სმ/წმ};$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(5t) = 5 \text{ სმ/წმ}.$$

სიჩქარის მოდულისათვის გვაქვს

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{256t^2 + 25} \text{ სმ/წმ}.$$

ახლა განვსაზღვროთ, თუ დროის რომელ მომენტში მდებარეობდა წერტილი $Ox$ ღერძზე.

როდესაც მოძრავი წერტილი ძევს $Ox$ ღერძზე, მაშინ წერტილის ორდინატა $y=0$. ამრიგად, მოცემული მეორე $y = 5t$ განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ $t=0$.

სიჩქარის მნიშვნელობაში შევიტანოთ $t=0$ მნიშვნელობა და მივიღებთ

$$\lim_{t \to 0} v = \sqrt{25} = 5 \text{ სმ/წმ}.$$

ანალოგიური მსჯელობით განვსაზღვრავთ, თუ დროის რომელ მომენტში მდებარეობდა წერტილი $Oy$ ღერძზე. იმ მომენტში, როდესაც

წერტილი მდებარეობდა $Oy$ ღერძზე, წერტილის აბსცისა $x=0$, ამიტომ მოძრაობის მოცემული პირველი $x=8t^2-3$ განტოლებიდან გვაქვს

$$0=8t^2-3,$$

აქედან

$$t=\sqrt{\frac{3}{8}}\ \text{წმ}.$$

$t$-ს მიღებულ მნიშვნელობას სიჩქარის $v=\sqrt{256t^2+25}$ გამოსახულებაში თუ ჩავსვამთ, მივიღებთ

$$v=\sqrt{256\cdot\frac{3}{8}+25}=11\ \text{სმ/წმ}.$$

ამრიგად, როდესაც მოძრავი წერტილი $Ox$ ღერძზე მდებარეობდა, მისი სიჩქარის მოდული იყო 5 სმ/წმ, ხოლო როდესაც წერტილი მდებარეობდა $Oy$ ღერძზე, მისი სიჩქარის მოდული უდრიდა 11 სმ/წმ.

დასასრულს, განვსაზღვროთ წერტილის მოძრაობის სიჩქარე დროის $t=0$ და $t=\sqrt{\frac{3}{8}}$ წმ მომენტებში.

როგორც ცნობილია, სიჩქარის მიმართულება განისაზღვრება სიჩქარის ვექტორის მიერ სათანადო კოორდინატთა ღერძთან შედგენილი კუთხის კოსინუსით, ამიტომ

$$\cos\alpha=\frac{v_x}{v}.$$

როცა $t=0$, $v_x=0$, მაშასადამე, $\cos\alpha=0$, ე. ი. $\alpha=90°$; მაშასადამე, სიჩქარის $\vec{v}$ ვექტორი საწყის მომენტში ტრაექტორიას ეხება $Ox$ ღერძზე მდებარე წერტილში, თან $Oy$ ღერძის პარალელურად ზემოთ არის მიმართული.

როცა $t=\sqrt{\frac{3}{8}}$ წმ, მაშინ წერტილი კვეთს $Oy$ ღერძს, ე. ი.

$$v_x=\sqrt{16\,\frac{3}{8}}=9{,}87\ \text{სმ/წმ};$$

მაშ,

$$\cos\alpha_1=\frac{v_x}{v}=\frac{9{,}87}{11}=0{,}897,\ \text{ე. ი.}\quad \alpha=26°10',$$

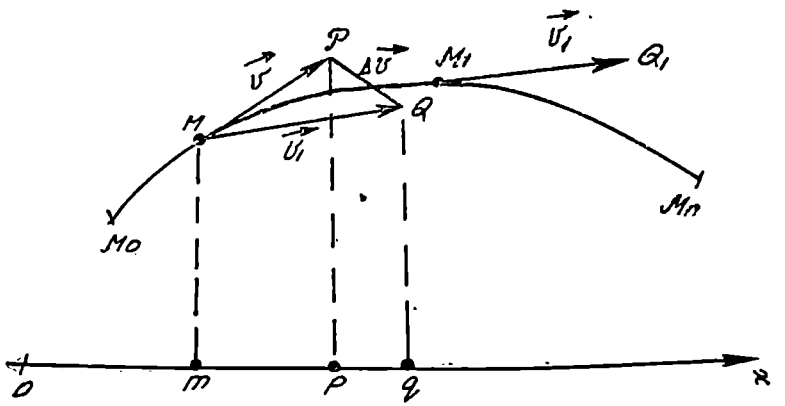
ე. ი. სიჩქარის ვექტორი დროის ამ მომენტში მიმართულია პარაბოლის მხებზე, როცა იგი კვეთს $Oy$ ღერძს.

## § 7. აჩქარების განსაზღვრა კოორდინატების მიხედვით

აჩქარების განსაზღვრამდე აჩქარების გეგმილები განვსაზღვროთ კოორდინატთა ღერძებზე. ვთქვათ, მოძრავი წერტილი განსაზღვრული დროის განმავლობაში $M_0M_n$ ტრაექტორიაზე გადაადგილდა $M$ მდებარეობიდან $M_1$ მდებარეობაში (ნახ. 175).

$M$ წერტილში მოძრავი წერტილის სიჩქარეა $\vec{MP}=\vec{v}$, ხოლო $M_1$ წერტილში—$\vec{M_1Q_1}=\vec{v}_1$.

$M$ წერტილზე $\vec{v}_1$ ვექტორის ტოლი და პარალელური $\vec{MQ}$ ვექტორი გავატაროთ, მაშინ $\vec{PQ}=\vec{\Delta v}$ ჩამკეტი ვექტორი $\vec{v}$ ვექტორის ნაზრდი იქნება $\Delta t$ დროის შუალედში.




ნახ. 175

$Ox$ ღერძზე დავაკეგმილოთ $M$, $P$ და $Q$ წერტილები, მივიღებთ $m$, $p$ და $q$ გეგმილებს, $mp$ და $mq$ მონაკვეთები, სათანადოდ, $\vec{v}$ და $\vec{v}_1$ სიჩქარეთა გეგმილებს გამოსახავენ $Ox$ ღერძზე:

$$mp=v_x \quad \text{და} \quad mq=v_{1x}.$$

$pq$ მონაკვეთი $\vec{\Delta v}=\vec{v}_1-\vec{v}$ სიჩქარის ცვლილების გეგმილი იქნება იმავე $Ox$ ღერძზე, ე. ი.

$$pq=\Delta v_x=\text{გეგ}_{ox}\vec{\Delta v}.$$

ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$pq=mq-mp,$$

ანუ

$$\Delta v_x=v_{1x}-v_x.$$

ამ ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ $\Delta t$-ზე, მივიღებთ

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{1x}-v_x}{\Delta t}.$$

$\frac{\Delta v_x}{\Delta t}$ ფარდობა მოძრავი წერტილის $Ox$ ღერძზე გეგმილის საშუალო აჩქარებაა. ზღვარზე გადასვლით, როცა $\Delta t \to 0$, მივიღებთ

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\right)=\left(\lim_{\Delta t\to 0}\right)\frac{v_{1x}-v_x}{\Delta t},$$

ან, რაც იგივეა,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left[\text{გეგ}_{ox}\frac{\bar{\Delta}\bar{v}}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{v_{1x}-v_x}{\Delta t}\right).$$

მიღებული ტოლობის მარცხენა ნაწილი $\bar{w}$ აჩქარების საძიებელ $w_x$ გეგმილს გვაძლევს $Ox$ ღერძზე, მარჯვენა ნაწილი კი

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{v_{1x}-v_x}{\Delta t}\right) = \frac{dv_x}{dt},$$

ამის გამო

$$w_x = \frac{dv_x}{dt}.$$

ანალოგიურად მივიღებთ სრული $w$ აჩქარების გეგმილებს $Oy$ და $Oz$ ღერძებზე:

$$w_y = \frac{dv_y}{dt} \quad \text{და} \quad w_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

რადგან

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

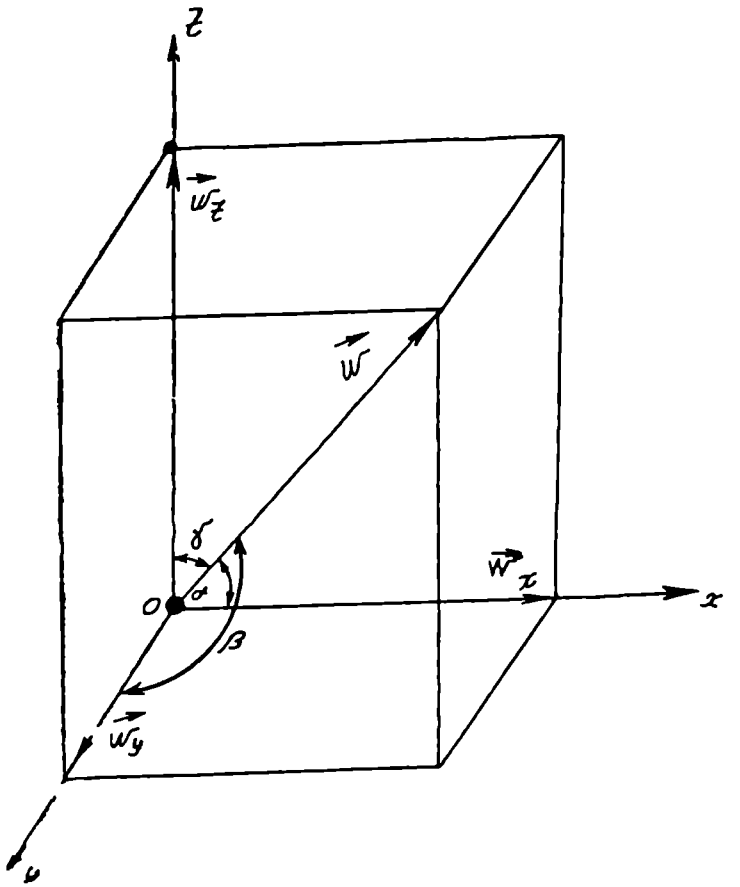
და

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2},$$

ამიტომ

$$\left.\begin{aligned} w_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2};\\ w_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2};\\ w_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ე. ი. წერტილის აჩქარების გეგმილი ღერძზე უდრის ამავე ღერძზე სიჩქარის გეგმილის წარმოებულს დროით, ან წერტილის სათანადო კოორდინატის მეორე წარმოებულს დროით.




ნახ. 176

$w_x$, $w_y$ და $w_z$ სიდიდენი $\vec{w}$ ვექტორის გეგმილებია კოორდინატთა ღერძებზე (ნახ. 176), ამიტომ, პარალელეპიპედის წესის გამოყენებით მივიღებთ

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}. \qquad (2)$$

აჩქარების $\vec{w}$ ვექტორის მიმართულება ვანისაზღვრება ფორმულებით:

$$\cos\alpha = \frac{w_x}{w}; \quad \cos\beta = \frac{w_y}{w}; \quad \cos\gamma = \frac{w_z}{w}. \qquad (3)$$

### მაგალითები

**1.** ჭურვის მოძრაობის განტოლებებია:

$$x = 250t; \quad y = 430t - 4{,}9t^2$$

(აქ $x$ და $y$ აღებულია მეტრობით, ხოლო $t$ — წამობით).

ვანისაზღვრეთ ჭურვის ფრენის დრო, ფრენის სიშორე, ტრაექტორია, სიჩქარისა და აჩქარების მოდულები და მიმართულებები ჭურვის ვარდნის მომენტში (ნახ. 177).

### ამოხსნა

მოძრაობის განტოლებებიდან დროის გამორიცხვით ტრაექტორიის განტოლებას მივიღებთ.

მართლაც, პირველი განტოლებიდან გვაქვს

$$t = \frac{x}{250}.$$

$t$-ს მნიშვნელობა შევიტანოთ მეორე განტოლებაში

$$y = 430\left(\frac{x}{250}\right) - 4{,}9\left(\frac{x}{250}\right)^2,$$

საიდანაც

$$y = 1{,}72x - 1{,}0000784\,x^2.$$

ეს კი პარაბოლის განტოლებაა. მაშასადამე, ჭურვის მოძრაობის ტრაექტორია პარაბოლაა.

ფრენის მაქსიმალური ($x_{max}$) სიშორის საპოვნელად ჯერ ვიპოვოთ ფრენის $T$ პერიოდი იმ პირობიდან, რომ ჭურვის დედამიწაზე ვარდნის მომენტში $y=0$, ე. ი. $430T - 4{,}9T^2 = 0$, საიდანაც

$$T_1 = 0 \quad \text{და} \quad T_2 = \frac{430}{4{,}9} = 87{,}75 \text{ წმ}.$$

ფრენის მაქსიმალური სიშორე

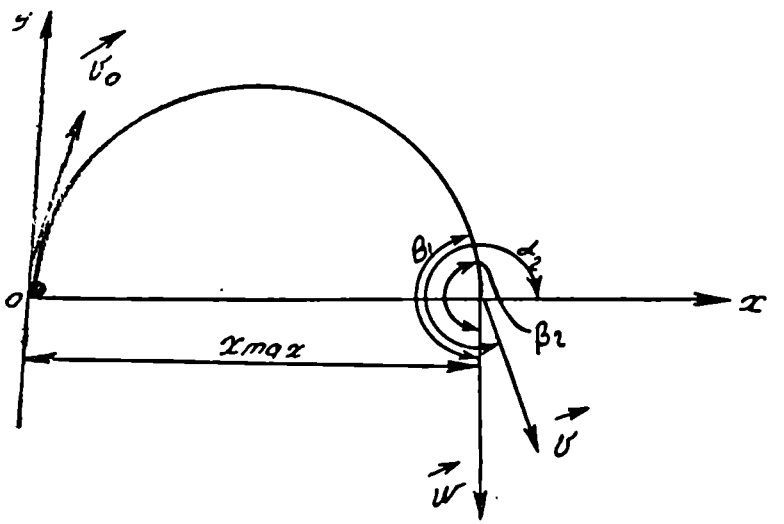
$$x_{max} = 250T = 250 \cdot 87{,}75 = 21940 \text{ მეტრს}.$$

ორღერძოვან კოორდინატთა სისტემაში სიჩქარის მოდული განისაზღვრება მისი გეგმილებით კოორდინატთა ღერძებზე:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\ (250\,t) = 250;$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\ (430\,t - 4{,}9t^2) = 430 - 9{,}8t;$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{250^2 + (430 - 9{,}8\,t)^2}\ \text{მ/წმ}.$$




ნახ. 177

როცა $t = T = 87{,}75$ წმ, მაშინ სიჩქარის მოდული დედამიწაზე ვურვის ვარდნის მომენტში

$$v = \sqrt{250^2 + (430 - 9{,}8 \cdot 87{,}75)^2} = 497\ \text{მ/წმ}.$$

სი ჩქარის ვექტორის მიმართულება განისაზღვრება ფორმულით

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{250}{497} = 0{,}503,$$

საიდანაც

$$\alpha_1 \cong 60^\circ \quad \text{და} \quad \alpha_2 \approx 300^\circ.$$

ორი მნიშვნელობიდან ჩვენთვის საჭირო კუთხე რომ შევარჩიოთ, ამისათვის ვიპოვოთ კუთხე სიჩქარის ვექტორსა და $Oy$ ღერძის დადებით მიმართულებას შორის:

$$\cos\beta = \frac{v_y}{v} = \frac{-430}{497} = -0{,}865;$$

$$\beta_1 \approx 150^\circ \quad \text{და} \quad \beta_2 \approx 210^\circ.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\beta$ კუთხე აითვლება $Oy$ ღერძის დადებითი მიმართულებიდან, ხოლო $\alpha$ კუთხე—$Ox$ ღერძის დადებითი მიმართულებიდან, დავადგენთ, რომ ორივე პირობას მხოლოდ $\alpha_2$ და $\beta_2$ კუთხეები აკმაყოფილებენ.

$$\alpha_2 - \beta_2 = 300^\circ - 210^\circ = 90^\circ,$$

რაც შეესაბამება კუთხეს $Ox$ და $Oy$ ღერძების დადებით მიმართულებებს შორის.

ახლა განვსაზღვროთ აჩქარების გეგმილები $Ox$ და $Oy$ ღერძებზე:

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \text{და} \quad w_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -9{,}8 \text{ მ/წმ}^2.$$

აჩქარების მოდული

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = 9{,}8 \text{ მ/წმ}^2.$$

აჩქარების $\overline{w}$ ვექტორის მიმართულება $Ox$ ღერძის მიმართ განისაზღვრება ფორმულით

$$\cos\alpha_1 = \frac{w_x}{w} = \frac{0}{9{,}8} = 0;$$

$$(\alpha_1)_1 = 90^\circ; \quad (\alpha_1)_2 = 270^\circ.$$

აჩქარების $\overline{w}$ ვექტორის მიმართულება $Oy$ ღერძის მიმართ განისაზღვრება ფორმულით

$$\cos\beta_1 = \frac{w_y}{w} = -\frac{9{,}8}{9{,}8} = -1; \qquad \beta_1 = 180^\circ,$$

ე. ი. $\overline{w}$ აჩქარების ვექტორი $Oy$ ღერძის პარალელურია და მიმართულია ქვემოთ.

2. წერტილის მოძრაობის განტოლებებია:

$$x = t \quad \text{და} \quad y = t - 1^2,$$

სადაც $x$ და $y$ აღებულია სმ-ობით, ხოლო $t$—წმ-ობით.

განსაზღვრეთ წერტილის მოძრაობის ტრაექტორიის განტოლება, აგრეთვე წერტილის სიჩქარე და აჩქარება $t_1 = 0$ და $t_2 = 2$ წმ დროს.

რადგან $x=t$, ამიტომ

$$y=x-x^2.$$

ეს არის ტრაექტორიის განტოლება.
მოცემული განტოლებების გაწარმოებით ვიპოვით:

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(t)=1;$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}(t-t^2)=(1-2t)\ \text{სმ/წმ}.$$

$\vec{v}$ სიჩქარის მოდული იქნება

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{1^2+(1-2t)^2}=\sqrt{1+1-4t+4t^2}=$$
$$=\sqrt{4t^2-4t+2}\ \text{სმ/წმ}.$$

როცა $t=t_1=0$, მაშინ $v=\sqrt{2}$ სმ/წმ;

როცა $t=t_2=2$ წმ, მაშინ $v=\sqrt{10}$ სმ/წმ

$\vec{w}$ აჩქარების გეგმილებია:

$$w_x=\frac{dv_x}{dt}=0;$$

$$w_y=\frac{dv_y}{dt}=-2\ \text{სმ/წმ}^2.$$

სრული აჩქარების მოდულია:

$$w=\sqrt{w_x^2+w_y^2}=2\ \text{სმ/წმ}^2.$$

## III თავი

## მყარი სხეულის უმარტივესი მოძრაობები

### § 1. მყარი სხეულის მოძრაობა ერთ წრფეზე არმდებარე მისი სამი წერტილის მოძრაობით განისაზღვრება

აქამდე ჩვენ ერთი ნივთიერი წერტილის მოძრაობას განვიხილავდით. ახლა გადავდივართ აბსოლუტურად მყარი სხეულის მოძრაობის განხილვაზე.

აბსოლუტურად მყარი სხეული ნივთიერ წერტილთა უწყვეტ სისტემას წარმოადგენს და იმით ხასიათდება, რომ მის ორ ნებისმიერ წერტილს შორის მანძილი უცვლელია.

მყარი სხეულის მოძრაობისას მისი ცალკეული წერტილები და ნებისმიერი ორი წერტილის მაერთებელი მონაკვეთები, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, სხვადასხვა მოძრაობას ასრულებენ. მაგრამ სხეულის მდებარეობის განსაზღვრისათვის სივრცეში დროის ნებისმიერ მომენტში აუცილებელი არ არის მისი ყოველი წერტილის მოძრაობის განსაზღვრა.




ნახ. 178

ვთქვათ, სივრცეში მოძრავი სხეული (I) მდებარეობიდან (II) მდებარეობაში გადაადგილდა (ნახ. 178). სხეულში ავიღოთ ნებისმიერი სამი წერტილი $A$, $B$ და $C$, რომლებიც ერთ წრფეზე არ მდებარეობენ. გადაადგილების დროს სხეულის ეს წერტილები $A_1$, $B_1$ და $C_1$ მდებარეობებს დაიკავებენ. ვაჩვენოთ, რომ თუ ცნობილია ამ წერტილთა მდებარეობა, სხეულის ნებისმიერი სხვა წერტილის მდებარეობის განსაზღვრაც შეიძლება. მართლაც, ავიღოთ ნებისმიერი $K$ წერტილი, რომლის $AK$, $BK$ და $CK$ დაშორების მანძილები $A$, $B$ და $C$ წერტილებიდან ცნობილია. ამ მანძილების მიხედვით ჩვენ შეგვიძლია $K$ წერტილის $K_1$ მდებარეობის მოძებნა ახალ (II) მდებარეობაში.

ამრიგად, თუ ცნობილია ერთ წრფეზე არმდებარე სხეულის სამი წერტილის მოძრაობა, ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ სხეულის სხვა ნებისმიერი წერტილის მოძრაობა და, მაშასადამე, მთელი სხეულის მოძრაობაც.

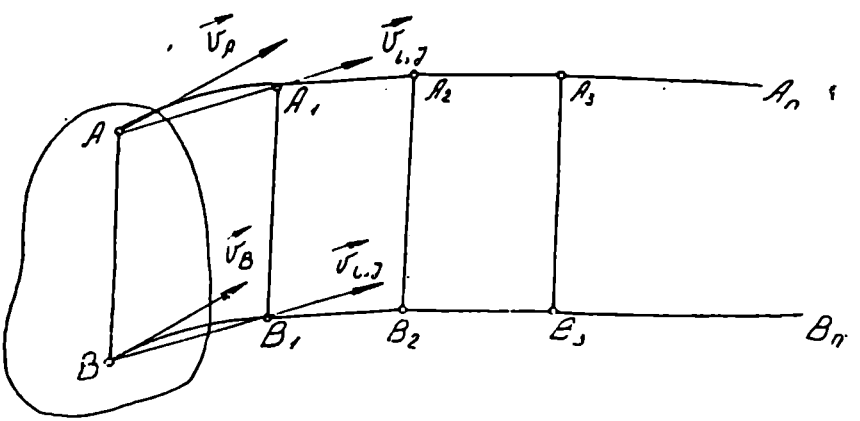
მაშასადამე, მყარი სხეულის მოძრაობა სავსებით განისაზღვრება მისი სამი ნებისმიერი წერტილის მოძრაობით.

## § 2. მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა

მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა სხეულის ისეთ მოძრაობას ეწოდება, რომლის დროსაც ამ სხეულის ნებისმიერ ორ წერტილზე გატარებული და სხეულთან უცვლელად დაკავშირებული წრფე თავისთავის პარალელურად მოძრაობს. ასეთი მოძრაობის მაგალითია დგუშის მოძრაობა ძრავას კორპუსის მიმართ.

სხეულის გადატანითი მოძრაობისას მისი წერტილთა ტრაექტორიები შეიძლება იყოს წრფეებიც და მრუდე წირებიც. ასე, მაგალითად, ველოსიპედის პედალი ჩარჩოს მიმართ გადატანითს მოძრაობას ასრულებს, თუმცა მისი წერტილები წრეწირზე მოძრაობენ.

დავამტკიცოთ, რომ სხეულის გადატანითი მოძრაობისას მისი ყველა წერტილი იგივურ და თანაპარალელურ ტრაექტორიებს აღწერს და დროის ნებისმიერ მომენტში ტოლი ვექტორული სიჩქარე და აჩქარება აქვთ.




ნახ. 179

ვთქვათ, მყარი სხეული გადატანითად მოძრაობს ისე, რომ ნებისმიერი ორი $A$ და $B$ წერტილის მაერთებელი $AB$ წრფე $t$ დროის განმავლობაში $AB$ მდებარეობიდან $A_nB_n$ მდებარეობაში გადაადგილდება (ნახ. 179) (სადაც $AB \parallel A_nB_n$).

დროის $t$ შუალედი ტოლ $\Delta t$ მცირე შუალედებად დავყოთ და $AB$ წრფის მომდევნო მდებარეობები $\Delta t$ დროის გავლის შემდეგ, სათანადოდ, აღვნიშნოთ $A_1B_1$, $A_2B_2$ და ა. შ.

მასთან, ცხადია, $AB = A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = \ldots = A_nB_n$.

რადგან სხეულის მოძრაობა გადატანითია, ამიტომ $AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2$ და ა. შ. ამრიგად, გამოვიდა, რომ

$$AB \neq A_1B_1 \neq A_2B_2 \text{ და ა. შ.}$$

$$AA_1 \neq BB_1; \quad A_1A_2 \neq B_1B_2 \text{ და ა. შ.}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ნაკვთები: $AA_1\,B_1B$, $A_1A_2\,B_2B_1$ და ა. შ. პარალელოგრამებია; ამის გამო ტოლი და პარალელური ტეხილები $AA_1A_2\ldots$ და $BB_1B_2\ldots$ ერთმანეთს უთავსდებიან.

როცა დროის შუალედი $\Delta t \to 0$, მაშინ ზღვარში $AA_1A_2\ldots$ და $BB_1B_2\ldots$ ტეხილები $A$ და $B$ წერტილთა ტრაექტორიებად იქცევა. ამ დროს $A$ წერტილი $AA_1A_2\ldots A_n$ და $B$ წერტილი $BB_1B_2\ldots B_n$ მრუდწირულ ტრაექტორიებს აღწერენ. რადგან ტეხილები პარალელურებია და დამთხვევის დროს ერთმანეთს უთავსდებიან, ამიტომ მათი ზღვრები (მრუდები) ურთიერთპარალელურებია და დამთხვევის დროს ერთმანეთს უთავსდებიან. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ ეს ორი ტრაექტორია ორი იგივური მრუდია.

$A$ წერტილის სიჩქარე იყოს $\vec{v}_A$, ხოლო $B$ წერტილისა — $\vec{v}_B$. ამ სიჩქარეთა ტოლობის დასადგენად დროის ნებისმიერ მომენტში ვიგულისხმოთ, რომ $A$ წერტილი $AA_1$ ქორდაზე მოძრაობს, ხოლო $B$ წერტილი — $BB_1$ ქორდაზე. მაშინ $A$ მდებარეობიდან $A_1$ მდებარეობაში $\Delta t$ დროის შუალედში წერტილის გადასვლისას $A$ წერტილის საშუალო სიჩქარე იქნება

$$(\vec{v}_A)_{\text{საშ}} = \frac{\vec{AA_1}}{\Delta t}.$$

ამ ვექტორს წერტილის გადაადგილების $\vec{AA_1}$ ვექტორის მიმართულება აქვს და მოდულით $AA_1$ ქორდის სიგრძის დროის $\Delta t$ შუალედთან ფარდობის ტოლია.

ანალოგიურად, $B$ წერტილის საშუალო სიჩქარე იქნება

$$(\vec{v}_B)_{\text{საშ}} = \frac{\vec{BB_1}}{\Delta t}.$$

ამ ვექტორს $\vec{BB_1}$ ვექტორის მიმართულება აქვს და მოდულით $BB_1$ ქორდის სიგრძის დროის $\Delta t$ შუალედთან ფარდობის ტოლია.

$AA_1$ და $BB_1$ ქორდები (მონაკვეთები) ტოლი და პარალელურებია, ამიტომ

$$(\vec{v}_A)_{\text{საშ}} = (\vec{v}_B)_{\text{საშ}}.$$

როცა $\Delta t \to 0$, მაშინ ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ:

$$\lim_{\Delta t \to 0} (\vec{v}_A)_{\text{ს ვ}} = \lim_{\Delta t \to 0} (\vec{v}_B)_{\text{ს ვ}}.$$

რადგან წერტილის სიჩქარე დროის მოცემულ მომენტში მისი საშუალო სიჩქარის ზღვრის ტოლია, ამიტომ

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B, \tag{1}$$

ე. ი. $A$ და $B$ წერტილთა სიჩქარეები გეომეტრიულად ტოლებია.

(1) გამოსახულების დროის მიხედვით გაწარმოებით მივიღებთ

$$\vec{w}_A = \vec{w}_B, \tag{2}$$

ე. ი. $A$ და $B$ წერტილთა აჩქარებები გეომეტრიულად ტოლია.

რადგან $A$ და $B$ წერტილები ნებისმიერად იყო შერჩეული, ამიტომ მოყვანილი დასკვნები მყარი სხეულის ნებისმიერ წერტილებზე ვრცელდება. ამრიგად, გადატანითად მოძრავი მყარი სხეულის ყველა წერტილი ერთნაირად მოძრაობს და ნებისმიერი წერტილის მოძრაობა ახასიათებს თვით მთელი მყარი სხეულის მოძრაობას; ასე რომ, ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე და აჩქარება ერთდროულად მთელი სხეულის სიჩქარესა და აჩქარებას წარმოადგენს.

## § 3. მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობა. კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება

ბრუნვითი ისეთ მოძრაობას ეწოდება, როდესაც მყარი სხეულის ორი წერტილი, ან მასთან დაკავშირებული ორი წერტილი სხეულის მოძრაობის განმავლობაში უძრავი რჩება (ნახ. 180, ა).

უძრავ $O$ და $C$ წერტილებზე გამავალ $zz$ წრფეს ბრუნვის ღერძი ეწოდება. თავისთავად ცხადია, რომ $zz$ ღერძზე მდებარე ყველა წერტილი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის დროს უძრავი რჩება, მაშინ როდესაც სხეულის დანარჩენი წერტილები ბრუნვის ღერძის თანამართობულ სიბრტყეებში მდებარე წრეწირებს აღწერენ.

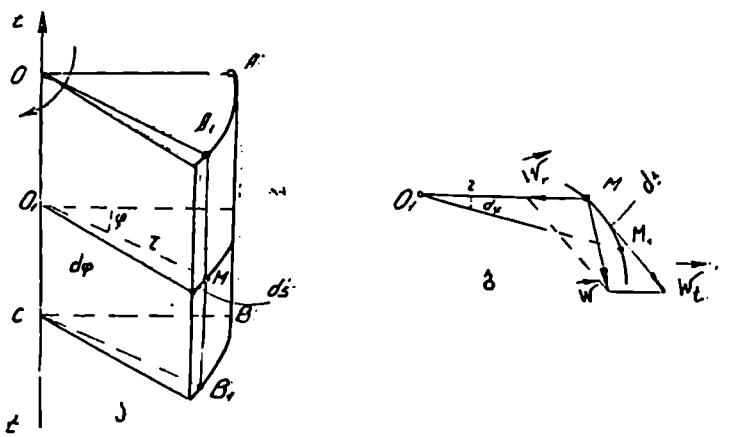
სხეულის ბრუნვის $zz$ ღერძზე გავატაროთ $OABC$ უძრავი სიბრტყე (ნახ. 180, ბ). ამავე ღერძსა და რაიმე $M$ წერტილზე $OA_1B_1C$ მოძრავი სიბრტყე გავატაროთ. კუთხის ათვლა საათის ისრის ბრუნვის მიმართულებით დავიწყოთ უძრავი სიბრტყიდან, მაშინ უძრავსა და მოძრავ სიბრტყეებს შორის $\varphi$ კუთხეს სხეულის მობრუნების კუთხე ანუ სხეულის კუთხური გადაადგილება ეწოდება.

ამ φ კუთხით მთლიანად განისაზღვრება მოძრავი $OA_1B_1C$ სიბრტყისა, და მასთან ერთად ბრუნვითი სხეულის მდებარეობაც.

zz ღერძის გარშემო სხეულის ბრუნვისას მობრუნების კუთხე დროის მიხედვით იცვლება; ამრიგად, φ კუთხე $t$ დროის ფუნქციაა

$$\varphi = f(t). \qquad (1)$$

ამ განტოლებას მყარი სხეულის უძრავი ღერძის გარშემო მოძრაობის კანონი ანუ ბრუნვის განტოლება ეწოდება.




ნახ. 180

მობრუნების φ კუთხეს ჩვეულებრივად რადიანებით ზომავენ. ცნობილია, რომ წრეწირი $2\pi$ რადიანს შეიცავს, ხოლო ერთი რადიანი შეადგენს

$$\frac{360^\circ}{2\pi} = 57^\circ 17' 44{,}8''.$$

ზოგჯერ მობრუნების (ბრუნვის) კუთხეს ბრუნთა $n$ რიცხვით გამოსახავენ.

φ კუთხე რადიანებში $N$ ბრუნვას შეესაბამება

$$\varphi = 2\pi N. \qquad (2)$$

ვთქვათ, დროის $t$ მომენტში სხეულის მდებარეობა განისაზღვრება φ ბრუნვის კუთხით, ხოლო $t+\Delta t$ მომენტში $\varphi+\Delta\varphi$ ბრუნვის კუთხით, მაშინ საშუალო კუთხური სიჩქარე იქნება

$$\omega_{საშ} = \frac{(\varphi + \Delta\varphi) - \varphi}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \tag{3}$$

ე. ი. ბრუნვის კუთხის $\Delta\varphi$ ნაზრდის ფარდობას დროის $\Delta t$ შუალედთან მყარი სხეულის **საშუალო კუთხური სიჩქარე** ეწოდება $\Delta t$ დროის შუალედში.

როდესაც $\Delta t \to 0$, მაშინ ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ მყარი სხეულის კუთხურ სიჩქარეს

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_{საშ} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}, \tag{4}$$

ე. ი. **მყარი სხეულის კუთხური სიჩქარე დროის $t$ მომენტში ბრუნვის კუთხის პირველი წარმოებულია დროით.**

კუთხური სიჩქარე დადებითად ჩავთვალოთ, როდესაც მყარი სხეული ღერძის გარშემო ბრუნავს საათის ისრის მიმართულებით და უარყოფითად, — საწინააღმდეგო ბრუნვის დროს.

$\omega$ (ომეგა) კუთხური სიჩქარის ერთეულის განსაზღვრისათვის იყენებენ ფორმულას

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

სადაც $\Delta\varphi$ ცენტრალური კუთხეა, რომელსაც წრეწირზე თანაბრად მოძრავი წერტილის რადიუს-ვექტორი აღწერს $\Delta t$ დროის განმავლობაში.

ვთქვათ, $\Delta\varphi = 1$ რადიანს, $\Delta t = 1$ წმ, მაშინ კუთხური სიჩქარის ერთეული იქნება

$$1 \frac{\text{რად}}{\text{წმ}} \text{ (რადიანი წამში).}$$

კუთხური სიჩქარის განზომილებაა $\text{წმ}^{-1}$.

პრაქტიკაში კუთხურ სიჩქარეს გამოსახავენ $n$ ბრუნთა რიცხვით წუთში.

რადგან ერთი ბრუნი $360^\circ$ კუთხით შემობრუნებას (ან $2\pi$ რადიანს) შეესაბამება, ამიტომ წუთში $n$ ბრუნთა რიცხვის დროს კუთხური სიჩქარე

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \frac{1}{\text{წმ}} = \frac{\pi n}{30} \text{ წმ}^{-1}. \tag{5}$$

კუთხური სიჩქარის ცვლილების სისწრაფე დროის მიხედვით კუთხური აჩქარებით ხასიათდება. ვთქვათ, საწყისი დროის მომენტში სხეულის კუთხური სიჩქარეა $\omega$, ხოლო $(t+\Delta t)$ მომენტში $\omega+\Delta\omega$.

$\Delta t=t+\Delta t-t$ დროის შუალედში კუთხური სიჩქარის ნაზრდი

$$\Delta\omega=(\omega+\Delta\omega)-\omega.$$

საშუალო კუთხური აჩქარება

$$\varepsilon_{საშ}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \tag{6}$$

ამ გამოსახულების ზღვარი, როცა $\Delta t\to 0$, კუთხური $\varepsilon$ (ეპსილონ) აჩქარებაა დროის $t$ მომენტში, ე. ი.

$$\varepsilon=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\varphi}{dt^2}, \tag{7}$$

მაშასადამე, მყარი სხეულის კუთხური აჩქარება დროის მოცემულ მომენტში კუთხური სიჩქარის პირველ წარმოებულს უდრის დროით, ან ბრუნვის კუთხის მეორე წარმოებულს დროით.

კუთხური აჩქარების საზომი ერთეულის დასაწესებლად გამოვიყენოთ ფორმულა

$$\varepsilon=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

როდესაც $\Delta\omega=\frac{1\text{ რად}}{1\text{ წმ}}$ და $\Delta t=1$ წმ, მაშინ კუთხური აჩქარების ერთეულია

$$\frac{1\ \frac{\text{რად}}{\text{წმ}}}{1\text{ წმ}}=1\ \frac{\text{რად}}{\text{წმ}^2}. \tag{8}$$

კუთხური აჩქარების საზომია $\text{წმ}^{-2}$.

მყარი სხეულის აჩქარებული ბრუნვის დროს მისი კუთხური სიჩქარის $\Delta\omega$ ნაზრდი და, მაშასადამე, $\varepsilon$ კუთხური აჩქარებაც მუდამ მყარი სხეულის ბრუნვის მხარესაა მიმართული, შენელებული ბრუნვის დროს კი—მოპირდაპირე მხარეს.

ამრიგად, თუ $\omega$ და $\varepsilon$ ერთნაირი ნიშნები აქვთ, მაშინ სხეული აჩქარებულად ბრუნავს: თუკი $\omega$ და $\varepsilon$ სხვადასხვა ნიშნები აქვთ, სხეული შენელებულად ბრუნავს.

თანაბარი ბრუნვის შემთხვევაში, რომლის დროსაც დროის ტოლ შუალედებში სხეული ერთნაირი კუთხეებით მობრუნდება, კუთხური სიჩქარე მუდმივია

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t} = \text{const}, \tag{9}$$

ანუ

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \tag{10}$$

სადაც $\varphi_0$ კუთხის მნიშვნელობაა $t=0$ მომენტში; იგი სხეულის მდებარეობას განსაზღვრავს მოძრაობის დასაწყისში.

(10) ფორმულა გამოიყენება თანაბარი ბრუნვის შემთხვევაში.

ახლა განვიხილოთ თანაბრადცვლადი ბრუნვის შემთხვევა.

თანაბრადცვლადი ბრუნვის დროს კუთხური აჩქარება მუდმივია. თანაბრადცვლადი ბრუნვის კუთხური სიჩქარისა და აღწერილი კუთხისათვის გვაქვს:

$$\boxed{\begin{aligned} &\omega = \omega_0 + \varepsilon t; \\ &\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \end{aligned}} \tag{11}$$

ამ ფორმულების მიღება შეიძლება ასე: ჩვენ ზემოთ ვნახეთ, რომ

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$d\omega = \varepsilon \cdot dt. \tag{ა}$$

(ა) გამოსახულების ინტეგრირებით (მხედველობაში მივიღოთ, რომ $\varepsilon = \text{const}$) მივიღებთ

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt,$$

საიდანაც

$$\omega - \omega_0 = \varepsilon \cdot t;$$

აქედან

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

სადაც $\omega_0$ საწყისი კუთხური სიჩქარეა $t=0$ მომენტში.

რადგან

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

ამიტომ

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t;$$

აქედან

$$d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon t dt.$$

ამ განტოლების ინტეგრირებით მივიღებთ:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega_0 \int_0^t dt + \varepsilon \int_0^t t dt,$$

ანუ

$$\varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

საიდანაც

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

როდესაც საწყისი ბრუნვის კუთხე $\varphi_0 = 0$, მაშინ

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \qquad (12)$$

ავიღოთ ფორმულა

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

აქედან კუთხური აჩქარებისათვის გვაქვს

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t},} \qquad (13)$$

ე. ი. თანაბრად ცვლადი ბრუნვის კუთხური აჩქარება გარკვეულ დროში უდრის კუთხური სიჩქარის ნაზრდის ფარდობას დროის იმავე შუალედთან.

კუთხური გადაადგილების, კუთხური სიჩქარისა და კუთხური აჩქარების განსაზღვრა მხოლოდ მყარი სხეულის ბრუნვასთან არის დაკავშირებული.

ავიღოთ ფორმულა

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t;$$

ამ ფორმულიდან დრო

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon}.$$

$t$-ს მნიშვნელობა შევიტანოთ ფორმულაში

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{\omega_0 - \omega}{2} \cdot t,$$

მივიღებთ

$$\varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}. \tag{14}$$

როდესაც სხეული ბრუნვას იწყებს $t=0$ დროის მომენტში და საწყისი კუთხური სიჩქარე $\omega_0=0$, მაშინ (11) და (14) ფორმულები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \varepsilon \cdot t; \\ \varphi &= \frac{\varepsilon t^2}{2}; \\ \varphi &= \frac{\omega^2}{2\varepsilon}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

თუ $t$ მომენტში სხეულის ბრუნვა შეწყდა, მაშინ $\omega=0$ და ფორმულები

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

და

$$\varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}$$

მიიღებენ ასეთ სახეს

$$\omega_0 + \varepsilon t = 0$$

და

$$\varphi = -\frac{\omega_0^2}{2\varepsilon}.$$

დაბოლოს, თუ ბრუნვითი მოძრაობა თანაბრად შენელებულია, მაშინ კუთხური სიჩქარისა და ბრუნვის კუთხისათვის გვექნება:

$$\boxed{\begin{aligned} \omega &= \omega_0 - \varepsilon t; \\ \varphi &= \varphi_0 + \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}. \end{aligned}} \tag{16}$$

## § 4. მბრუნავი სხეულის ცალკეული წერტილების მოძრაობა

როდესაც ცნობილია მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის კანონი

$$\varphi = f(t),$$

ადვილად განესაზღვრაეთ ამ სხეულის რაიმე $M$ წერტილის სიჩქარესა და აჩქარებას (ნახ. 180, ბ).

ვთქვათ, $M$ წერტილის დაშორება ბრუნვის ღერძიდან არის $O_1M=r$. უსასრულოდ მცირე $dt$ დროში წერტილი $M$ მდებარეობიდან $M_1$ მდებარეობაში გადავიდა, ამავე დროს $\overset{\frown}{MM_1}=ds$ სივრძის რკალზე გადაადგილდა.

რადგან წრეწირის რკალის სიგრძე $r$ რადიუსისა და $ds$ რკალის შესაბამისი ცენტრალური $d\varphi$ კუთხის ნამრავლის ტოლია, ვწერთ

$$ds=r\cdot d\varphi.$$

ამ ტოლობის ორივე მხარე $dt$-ზე გავყოთ და მივიღებთ

$$\frac{ds}{dt}=r\cdot\frac{d\varphi}{dt},$$

ანუ

$$\boxed{v=r\cdot\omega,} \tag{1}$$

ე. ი. მბრუნავი სხეულის სკალარული სიჩქარე რადიუსისა და კუთხური სიჩქარის ნამრავლის ტოლია.

მყარი სხეულის $M$ წერტილის აჩქარებას მისი $\vec{w}_t$ მხები და $\vec{w}_n$ ნორმალური მდგენელების მიხედვით განვსაზღვრავთ.

$\vec{w}_t$ მხები აჩქარება წრეწირის მხებზეა მიმართული, ხოლო $\vec{w}_n$ ნორმალური აჩქარება ცენტრისაკენ მიემართება. მბრუნავი სხეულის წერტილთა $\vec{w}_t$ მხებ და $\vec{w}_n$ ნორმალურ აჩქარებებს ამ შემთხვევაში სათანადოდ ბრუნვითი და ცენტრისკენული აჩქარებები ეწოდება.

$M$ წერტილის ტრაექტორიის—წრეწირის $r$ რადიუსი ცნობილია, ამიტომ

$$\boxed{\begin{aligned} w_t&=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(r\omega)=r\frac{d\omega}{dt}=r\cdot\varepsilon;\\ w_n&=\frac{v^2}{r}=\frac{r^2\omega^2}{r}=r\omega^2. \end{aligned}} \tag{2}$$

სრული $\vec{w}$ აჩქარების მოდული $\vec{w}_t$ და $\vec{w}_n$ აჩქარებებზე აგებული მართკუთხედის დიაგონალით გამოისახება და უდრის

$$\boxed{w=\sqrt{w_t^2+w_n^2}=\sqrt{r^2\varepsilon^2+r^2\omega^4}=r\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}.} \tag{3}$$

## მაგალითები

**1.** ელექტრომოტორის ბორბლის ბრუნვა გაშვების პერიოდში განისაზღვრება განტოლებით $\varphi = \pi t^3$ (სადაც $t$ წამებშია მოცემული). განსაზღვრეთ ბორბლის კუთხური სიჩქარე და აჩქარება ჩამრაზის ჩართვიდან 3 წამის შემდეგ.

### ამოხსნა

კუთხური სიჩქარე

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi t^3) = 3\pi t^2 \frac{1}{\text{წმ}}. \qquad (ა)$$

როცა $t = 3$ წმ, მაშინ კუთხური სიჩქარე

$$\omega = 27\pi \frac{1}{\text{წმ}}.$$

რადგან ამავე დროს

$$\omega = \frac{\pi n}{30},$$

ამიტომ

$$n = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 27\pi}{\pi} = 810 \text{ ბრ/წთ}.$$

(ა) გამოსახულების გაწარმოებით $t$ დროის მიხედვით ვიპოვით კუთხურ აჩქარებას

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(3\pi t^2) = 6\pi t \frac{1}{\text{წმ}^2}.$$

როცა $t = 3$ წმ, მაშინ

$$\varepsilon = 6\pi \cdot 3 = 18\pi \frac{1}{\text{წმ}^2}.$$

**2.** მქნევარა ბორბალი მოსვენებული მდგომარეობიდან იწყებს ბრუნვას თანაბრად აჩქარებულად. მოძრაობის დაწყებიდან 5 წთ გავლის შემდეგ ბორბალს აქვს კუთხური სიჩქარე 120 ბრ/წთ. რამდენი ბრუნი შეასრულა მქნევარა ბორბალმა ამ 5 წუთის განმავლობაში?

### ამოხსნა

კუთხური სიჩქარე

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 120}{30} = 4\pi \frac{1}{\text{წმ}}.$$

კუთხური აჩქარება

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t},$$

მაგრამ $\omega_0 = 0$, ამიტომ

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{4\pi}{5 \cdot 60} = \frac{\pi}{75} \frac{1}{წმ^2}.$$

ახლა განვსაზღვროთ, თუ როგორ ბრუნვის კუთხეს აღწერს ბორბალი 5 წთ (300 წმ) განმავლობაში:

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{\pi \cdot 300^2}{2 \cdot 75} = 600\pi \text{ რადიანს},$$

რაც შეესაბამება ბრუნთა რიცხვს

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{600 \cdot \pi}{2\pi} = 300.$$

3. ელექტრომოტორის ლილვი თანაბრად ბრუნავს და ასრულებს $n = 1200$ ბრ/წთ. ჩამრაზის ჩართვის შემდეგ ლილვი თვითნებით ბრუნავდა და საკისრებში ხახუნის შედეგად გაჩერდა, მასთან შეასრულა $N = 100$ ბრუნი. განსაზღვრეთ ლილვის კუთხური აჩქარება, თუ იგი მუდმივადაა მიჩნეული.

ამოხსნა

განვსაზღვროთ ლილვის მობრუნების კუთხე რადიანებში:

$$\varphi = 2\pi N = 2\pi \cdot 100 = 200\,\pi \text{ რადიანს}.$$

ლილვის საწყისი კუთხური სიჩქარე

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 1200}{30} = 40\,\pi \frac{1}{წმ}.$$

ლილვის საბოლოო კუთხური სიჩქარე

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t = 0. \qquad (ა)$$

მობრუნების კუთხე

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \qquad (ბ)$$

(ა) განტოლებიდან

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t}. \qquad (გ)$$

ε-ის მნიშვნელობა შევიტანოთ (ბ) ფორმულაში და მივიღებთ

$$200\pi = \omega_0 t - \frac{\omega_0 \cdot t^2}{2t} = \frac{\omega_0 t}{2},$$

საიდანაც

$$t = \frac{400\pi}{40\pi} = 10 \text{ წმ};$$

მაშინ

$$\varepsilon = -\frac{40\pi}{10} = -4\pi \frac{1}{\text{წმ}^2}.$$

მივიღეთ კუთხური ε აჩქარების უარყოფითი მნიშვნელობა და კუთხური $\omega_0$ სიჩქარის დადებითი მნიშვნელობა; ეს კი იმის მაჩვენებელია, რომ ბრუნვა თანაბრად შენელებულია.

4. 0,75 მეტრი რადიუსის მქნევარა ბორბალი თანაბრად ბრუნავს თავისი ღერძის გარშემო. ბორბლის ფერსაზე მდებარე წერტილთა სიჩქარეა 1,5 მ/წმ. რამდენ ბრუნს ასრულებს ბორბალი წუთში?

ამოხსნა

ω კუთხური სიჩქარის სიდიდე განისაზღვრება ფორმულიდან $v = r \cdot \omega$, საიდანაც

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{1,5}{0,75} = 2 \frac{1}{\text{წმ}}.$$

ამავე დროს

$$\omega = \frac{\pi n}{30},$$

ამიტომ

$$n = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 2}{3,14} = 19,1 \text{ ბრ/წთ}.$$

5. ელექტრომოტორის ლილვზე დაცმული ბორბალი წუთში ასრულებს 1200 ბრუნს. ბორბლის დიამეტრია 200 მმ. იპოვეთ ბორბლის ფერსაზე მდებარე წერტილთა სიჩქარე და აჩქარება.

ამოხსნა

გამოვიანგარიშოთ ბორბლის კუთხური სიჩქარე

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 1200}{30} = 40\pi \frac{1}{\text{წმ}}.$$

ხაზოვანი სიჩქარე

$$\left( r=\frac{d}{2} = \frac{200\ \text{მმ}}{2}=100\ \text{მმ}=0{,}1\ \text{მ} \right);$$

$$v=r\cdot\omega=40\pi\cdot 0{,}1=4\pi\ \text{მ/წმ}.$$

კუთხური აჩქარება

$$\varepsilon=\frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(40\pi)=0.$$

რადგან კუთხური აჩქარება $\varepsilon=0$, ამიტომ $\bar{w}_t$ მხები აჩქარების მოდული უდრის

$$w_t=r\cdot\varepsilon=0.$$

წერტილის ცენტრისკენული აჩქარება

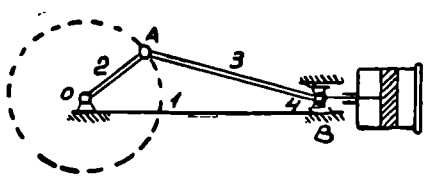
$$w_n=r\cdot\omega^2=0{,}1\cdot(40\pi)^2=160\pi^2\ \text{მ/წმ}^2.$$

## IV თავი

# მყარი სხეულის მოძრაობის უმარტივეს მოძრაობაზე დაყვანა

### § 1. ზოგადი ნაწილი

მყარი სხეულის უმარტივეს მოძრაობათა გარდაქმნად იგულისხმება: 1) ბრუნვითი მოძრაობის გადატანითი მოძრაობად შეცვლა და, პირიქით; 2) ერთი უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვის მეორე უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვად შეცვლა.




ნახ. 181

მოძრაობის ამგვარ გარდაქმნას ხშირად სხვადასხვა უმარტივესი მექანიზმებით ახორციელებენ; რადგან მექანიზმებს დაწვრილებით შეისწავლის „მექანიზმებისა და მანქანების კურსი“, ამიტომ აქ დავკმაყოფილდებით ცალკეული მექანიზმის კინემატიკის მოკლე განმარტებით.

საზოგადოდ, მექანიზმი ეწოდება ერთმანეთთან ხელოვნურად შეერთებულ მატერიალურ სხეულთა (რგოლთა) სისტემას, რომელიც სავსებით განსაზღვრული მიზანდასახული მოძრაობის განხორციელებისათვისაა განკუთვნილი.

ყოველი მექანიზმი ცალკეული რგოლებისაგან შედგება; ერთ-ერთ რგოლს იყენებენ მოძრავი რგოლების მასზე დასამაგრებლად და მასთან იგი უძრავი უნდა იყოს.

მოძრავი რგოლები ურთიერთ დაკავშირებული არიან და გარკვეულ მოძრაობას გადასცემენ ერთმანეთს. ურთიერთისადმი ფარდობითი მოძრაობის მქონე ორი რგოლის შეერთება კინემატიკურ წყვილს წარმოქმნის.

კინემატიკურ წყვილებში შემავალი რგოლთა შეკრული სისტემა კინემატიკურ წრედს შეადგენს. ასე, მაგალითად, მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმში (ნახ. 181) *OA* მრუდმხარა უძრავ *O* საკისართან ერთად კინემატიკურ წყვილს წარმოქმნის.

*AB* ბარბაცა *OA* მრუდმხარასთან ერთად მეორე კინემატიკურ წყვილს წარმოქმნის, დგუში და ბარბაცა—მესამეს და ა. შ.; ეს კინემატიკური წყვილები კი ერთად ე. წ. კინემატიკურ წრედს (ჯაჭვს) შეადგენენ.

ამრიგად, მექანიზმი ხელოვნური კინემატიკური წრედია (ჯაჭვია) ერთი უძრავი რგოლით; მასთან, მექანიზმი სავსებით განსაზღვრული მიზანდასახული მოძრაობის შესასრულებლადაა განკუთვნილი.

ქვემოთ განვიხილოთ მრუდმხარა-ბარბაცა და მუშტა მექანიზმები.

## I. მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმი

181-ე ნახ-ზე წარმოდგენილი მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმი სამი (2, 3 და 4) მოძრავი რგოლისა და ერთი (1) უძრავი რგოლისაგან შედგება.

უძრავ (1) რგოლს სადგარი დავარქვათ.

*AB* ბარბაცასთან (რომელიც მე-3 რგოლს წარმოადგენს) მბრუნავ წყვილში შემავალი მე-4 რგოლი (1) სადგართან ერთად გადატანით წყვილს ადგენს და ცოცია ეწოდება.

*OA* (2) რგოლს შეუძლია სრული ბრუნვა ღერძის გარშემო და მრუდმხარა ეწოდება.

მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის ძირითადი დანიშნულებაა დგუშისა და მასთან ხისტად შეერთებული ცოციას უკუმოქცევ-გადატანითი მოძრაობის გარდაქმნა მრუდმხარას ბრუნვით მოძრაობად ან მრუდმხარა ლილვის ბრუნვითი მოძრაობის გარდაქმნა დგუშის უკუქცევ-გადატანით მოძრაობად.

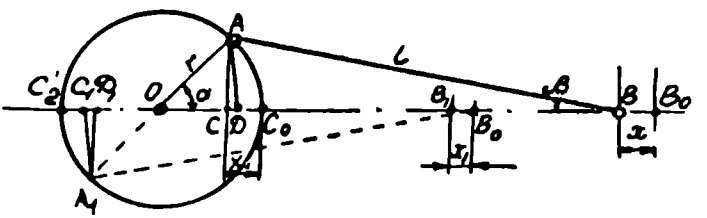
მოძრაობის აღნიშნულ გარდაქმნას ბარბაცას საშუალებით აღწევენ. ბარბაცას ერთი ბოლო სახსრულად შეერთებულიაა დგუშთან, მეორე ბოლო კი—მრუდმხარას სატაცთან.

დგუშის მოძრაობა ცოციას მოძრაობასთანაა გაიგივებული.

### ა. მექანიზმის მოძრაობის ანალიზური გამოკვლევა

ანალიზურად განვსაზღვროთ მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის $B$ ცოციას სატაცის მოძრაობის გზა (ნახ. 182), როდესაც მრუდმხარა თანაბრად ბრუნავს.

ვთქვათ, ცოციას კიდურა მარჯვენა მდებარეობა $B_0$ წერტილშია. ნახაზზე წარმოდგენილ მდებარეობაში ცოციამ კიდურა მარჯვენა მდებარეობიდან გაიარა მანძილი $x=B_0B$.




ნახ. 182

$x$ მანძილის გამოსაზღვრისათვის $B$ წერტილიდან $BA=l$ რადიუსით $AC$ რკალი შემოვხაზოთ. ეს რკალი ჰორიზონტალს $C$ წერტილში ჭრის. შემდეგ $A$ წერტილიდან ამ ჰორიზონტალზე $AD$ მართობი დავუშვათ, მაშინ

$$x=BB_0=CB_0-CB=CB_0-C_0B_0=CC_0=C_0D+DC.$$

მაგრამ

$$C_0D=OC_0-OD=r-r\cdot\cos\alpha=r(1-\cos\alpha)$$

და

$$DC=BC-BD=l-l\cos\beta=l(1-\cos\beta),$$

ამიტომ

$$x=r(1-\cos\alpha)+l(1-\cos\beta). \qquad (ა)$$

$B$ ცოციას უკუსვლისათვის ანალოგიურად ვპოულობთ

$$x_1=B_0'B_1=C_1B_0'-C_2B_1'=C_2B_0'-C_1B_0'=C_2C_1=C_2D_1-C_1D_1.$$

მაგრამ

$$C_2D_2=r-r\cdot\cos\alpha=r(1-\cos\alpha);$$

$$C_1D_1=l-l\cdot\cos\beta=l\,(1-\cos\beta),$$

საიდანაც

$$x_1 = r(1-\cos\alpha) - l(1-\cos\beta).$$

ამრიგად

$$x = r(1-\cos\alpha) \pm l(1-\cos\beta). \qquad (ბ)$$

$OAB$ სამკუთხედიდან გვაქვს

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{r}{l},$$

აქედან

$$\sin\beta = \frac{r}{l}\cdot\sin\alpha.$$

რადგან

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta},$$

ამიტომ

$$\cos\beta = \sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\alpha}\ .$$

(ბ) გამოსახულებაში ჩასმით გვექნება

$$x = r(1-\cos\alpha) \pm l\left[1-\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\cdot\sin^2\alpha}\right].$$

გამოსახულება

$$\cos\beta = \sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\alpha} := \left[1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\alpha\right]^{1/2}$$

ნიუტონის ბინომით დავშალოთ და გამარტივებული მიახლოებით დავკმაყოფილდეთ

$$\cos\beta \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{l^2}\sin^2\alpha - \frac{1}{8}\frac{r^4}{l^4}\sin^4\alpha.$$

მეტად ხშირად უშვებენ, რომ $\frac{l}{r} = 4$, მაშინ

$$\cos\beta = 1 - \frac{1}{32}\sin^2\alpha - \frac{1}{2048}\sin^4\alpha.$$

დაშლის მესამე წევრი მეტად მცირეა და მას უგულებელვყოფთ, მაშინ დაგვრჩება

$$\cos\beta = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{r^2}{l}\sin^2\alpha,$$

მაშასადამე,

$$x = r\,(1-\cos\alpha) \pm \frac{r^2}{2l}\cdot\sin^2\alpha. \qquad (გ)$$

ამ გამოსახულებით განისაზღვრება ცოცის გადაადგილების სიდიდე, როგორც $OA$ მრუდმხარას მობრუნების $\alpha$ კუთხის ფუნქცია.

(გ) გამოსახულების მარჯვენა ნაწილის მეორე წევრი $\frac{r^2}{2l}\sin^2\alpha$ აიღება (+) ნიშნით, მაშინ როდესაც დგუში მოძრაობს მარჯვნიდან მარცხნივ, და (—) ნიშნით, როდესაც დგუში მოძრაობს მარცხნიდან მარჯვნივ.

ცოცის სიჩქარის განსაზღვრისათვის გავაწარმოოთ (გ) გამოსახულება $t$ დროის მიხედვით

$$v_B = \frac{dx}{dt} = r\left(\sin\alpha\,\frac{d\alpha}{dt} \pm \frac{r}{2l}\,\sin 2\alpha\,\frac{d\alpha}{dt}\right),$$

მაგრამ $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$, ამიტომ

$$v_B = r\omega\left(\sin\alpha \pm \frac{r}{2l}\,\sin 2\alpha\right).$$

როცა $\alpha = 0^\circ$, მაშინ

$$v_B = r\omega\left(\sin 0^\circ \pm \frac{r}{2l}\sin 0^\circ\right) = 0.$$

როცა $\alpha = 90^\circ$, მაშინ

$$v_B = r\omega\left(\sin 90^\circ \pm \frac{r}{2l}\sin 180^\circ\right) = r\omega = v_A.$$

### ბ. დგუშის მოძრაობის გრაფიკული გამოკვლევა

დგუშის მოძრაობის გრაფიკის აგება

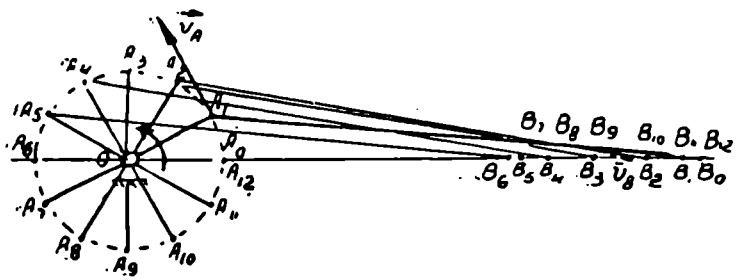
ვთქვათ, $OA$ მრუდმხარას ნამდვილი სიდიდეა 0,24 მეტრი, ხოლო კინემატიკურ სქემაზე ეს რგოლი (ნახ. 183) 12 მმ-ის ტოლად არის აღებული, მაშინ მექანიზმის გეგმის ხაზობრივი მასშტაბი იქნება

$$m_l = \frac{l_{OA}}{OA} = \frac{0{,}24}{12} = 0{,}02\,\frac{\text{მ}}{\text{მმ}}.$$

ავაგოთ ცოცის $B$ წერტილის გადაადგილების დიაგრამა.

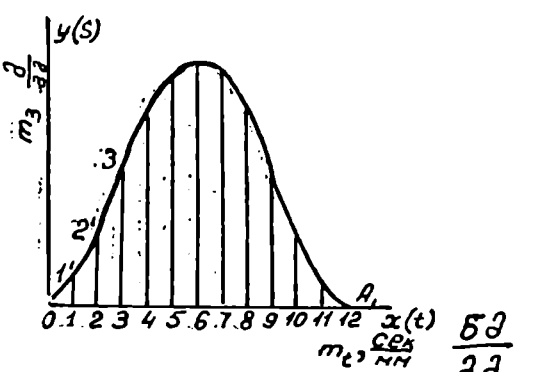
განვიხილოთ მრუდმხარას თითის $A$ წერტილის თანაბარი მოძრაობა. ვთქვათ, მრუდმხარას კუთხური სიჩქარეა $n = 120$ ბრ/წთ. მაშასადა-

შე, დროის თანატოლ შუალედებში $A$ წერტილი გზის ერთნაირ უბნებს გაივლის. წერტილის მიერ აღწერილი წრეწირი 12 ტოლ ნაწილად დავყოთ და $A$ წერტილის სხვადასხვა მდებარეობა მრუდმხარას ბრუნვის მიმართულებით (ამ შემთხვევაში საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით) ციფრებით აღვნიშნოთ. ასეთივე ციფრებით აღვნიშ-




ნახ. 183

ნოთ $B$ წერტილის სათანადო მდებარეობები მიმმართველზე. აღნიშნული $B_0$, $B_1$, $B_2$ და ა. შ. წერტილები ცოციას ცენტრის მდებარეობას განსაზღვრავენ, ხოლო $B_0B_1$, $B_0B_2$, $B_0B_3$ და ა. შ. მონაკვეთები მექანიზმის გეგმის $m_l$ მასშტაბში ცოციას გადაადგილებას გამოსახავენ.




ნახ. 184

შევარჩიოთ კოორდინატთა სათავე (ნახ. 184) და $Ox$ და $Oy$ ღერძები გავატაროთ. აბსცისთა $Ox$ ღერძზე მრუდმხარას ერთი ბრუნის $t$ დროის შესაბამისი $OA$ მონაკვეთი გადავზომოთ, ორდინატთა $Oy$ ღერძზე კი ცოციას გამოსაკვლევი წერტილის $s$ გადაადგილება გადავზომოთ. $OA$ მონაკვეთი დავყოთ იმდენ ტოლ ნაწილად, რამდენ ნაწილადაც დაყოფილი იყო მრუდმხარას $A$ წერტილის მიერ აღწერილი წრეწირი (ნახ. 184).

ვთქვათ, დიაგრამის $OA$ მონაკვეთის სიგრძეა 40 მმ, მაშინ ერთი ბრუნის ხანგრძლივობა იქნება

$$t = \frac{60}{120} = 0{,}5 \text{ წმ.}$$

დროის მასშტაბი

$$m_t = \frac{t}{OA} = \frac{0{,}5}{40} = \frac{1}{80} \text{ წმ/მმ.}$$

აბსცისთა ღერძის დაყოფის ყოველი წერტილიდან ორდინატთა $Oy$ ღერძის პარალელური ხაზები გავატაროთ და მათზე $B$ წერტილის გადაადგილებათა პროპორციული მონაკვეთები მოვზომოთ.

მაგალითად, 1 წერტილიდან მოვზომოთ (ნახ. 184) $KB_0B_1$-ის ტოლი $1-1'$ მონაკვეთი; 2 წერტილიდან—$KB_0B_2$-ის ტოლი $2-2'$ მონაკვეთი და ა. შ., სადაც $1-1'$, $2-2'$ და ა. შ. მონაკვეთები გადაადგილებათა დიაგრამის ორდინატებია.

$B_0B_1$, $B_0A_2$, $B_0B_3$ და ა. შ. გადაადგილებებია, ისინი აღებულია მექანიზმის გეგმიდან; $K$—პროპორციულობის კოეფიციენტია. $K$-ს მნიშვნელობის განსაზღვრა ადვილად შეიძლება, თუ 183-ე ნახაზზე გავზომავთ $B$ წერტილის ნებისმიერ გადაადგილებას, ხოლო 184-ზე—ამ გადაადგილების შესაბამის ორდინატას; ასე, მაგალითად,

$$B_0B_3 = 14{,}25 \text{ მმ, ხოლო } 3-3' = 19 \text{ მმ,}$$

მაშინ

$$k = \frac{3-3'}{B_0B_3} = \frac{19}{14{,}25} = 1{,}33.$$

მექანიზმის გეგმის მასშტაბსა და გადაადგილებათა დიაგრამის $m_s$ მასშტაბს შორის არსებობს შემდეგი კავშირი

$$m_s = \frac{m_l}{k}.$$

ჩვენს მაგალითში

$$m_s = \frac{0{,}02}{1{,}33} = 0{,}15 \frac{\text{მ}}{\text{მმ}}.$$

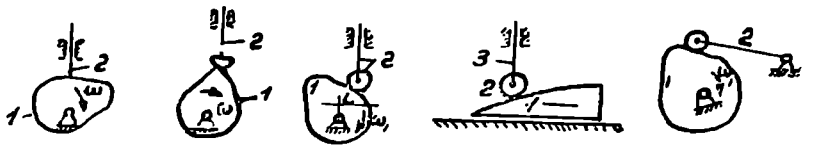
მიღებული 0, $1'$, $2'$ და ა. შ. წერტილების მდოვრული მრუდით შეერთებით მივიღებთ $B$ ცოცის გადაადგილების დიაგრამას, რომელზეც შეიძლება ცოცის მდებარეობის განსაზღვრა დროის ნებისმიერ მომენტში.

## II. მუშტა მექანიზმები

მუშტა მექანიზმს, ჩვეულებრივ, იყენებენ (1) მუშტას ბრუნვითი მოძრაობის გარდასაქმნელად (2) მბიძგავის მოძრაობად (ნახ. 185), თუმცა შეიძლება სხვა გარდაქმნებიც.

მუშტა მექანიზმების საშუალებით ნაირსახა ამოცანების ამოხსნა შეიძლება მოძრაობის ერთი სახიდან მეორეზე გარდაქმნით.

მუშტა მექანიზმებში მუშტა წამყვანი რგოლია, მბიძგავი კი—ამყოლი.




ნახ. 185

მუშტა მექანიზმები მრავალგვარია და მათი გამოყენების სფერო დიდია.

185 ა-ბ-გ ნახაზებზე ნაჩვენებია მუშტა მექანიზმები მბრუნავი (1) მუშტათი და მიმმართველებში გადატანითად მოძრავი (2) მბიძგავით.

185, დ ნახ-ზე გამოსახულია მუშტა მექანიზმი, რომლის (1) მუშტა გადატანითად მოძრაობს და (2) გორგოლაჭით მოქმედებს ამყოლ რგოლზე, ე. ი. (3) მბიძგავზე, რომელიც, თავის მხრივ, გადატანითად მოძრაობს მიმმართველებში (აქ ერთი სახის გადატანითი მოძრაობა მეორე სახის გადატანით მოძრაობად გარდაიქმნება).

185, ე ნახ-ზე მოცემულია სქემა მუშტა მექანიზმისა, რომლის საშუალებითაც (1) მუშტას ბრუნვითი მოძრაობა (2) მბიძგავის ბრუნვით მოძრაობად გარდაიქმნება.

აქ განხილული მუშტა მექანიზმები ბრტყელი მექანიზმებია და მათი რგოლების ყველა წერტილი ურთიერთპარალელურ სიბრტყეებში მოძრაობენ.

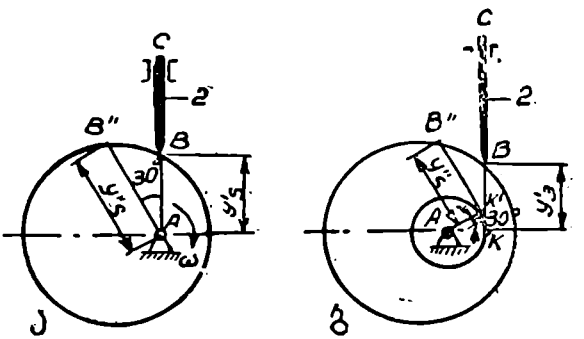
### მუშტა მექანიზმის კინემატიკური გამოკვლევა

მუშტა მექანიზმის კინემატიკური გამოკვლევის დროს მუშტას მოცემული მოძრაობის კანონით განსაზღვრავენ მბიძგავის მოძრაობის კანონს. ამოცანა განსაკუთრებით მარტივი ხდება მაშინ, როდესაც მუშტას კუთხური სიჩქარე მუდმივია. ამის გამო, სრულ ციკლში მბიძგავის გადანაცვლების განსაზღვრით მექანიზმის რამდენიმე მდებარეობისათვის,

ადვილად აიგება მბიძგავის გადაადგილებათა ან მობრუნების კუთხეთა დიაგრამა დროის მიხედვით, შემდეგ კი—სიჩქარეთა და აჩქარებათა დიაგრამებიც.

186, ა ნახ-ზე წარმოდგენილია წრფივ-გადატანითად მოძრავი მახვილმბიძგავიანი მუშტა მექანიზმის სქემა.

მბიძგავის $B$ წერტილის გადაადგილების დიაგრამის ასაგებად $A$ წერტილი ათვლის ცენტრად მივიღოთ, ხოლო მექანიზმის მდებარეობა ამ სქემაზე საწყის მდებარეობად ჩავთვალოთ; მაშინ მექანიზმის სქემის $m_l$ მასშტაბში $AB=y$ მონაკვეთი საძიებელ მანძილს გამოსახავს მბიძგავის $B$ წერტილიდან მუშტას ბრუნვის ცენტრამდე მექანიზმის საწყის მდებარეობაში. მდებარეობათა რაოდენობად 12 მდებარეობა დავსახოთ და $AB$ მონაკვეთისადმი 30° კუთხით გავატაროთ $AB''$ სხივი, მაშინ ამ



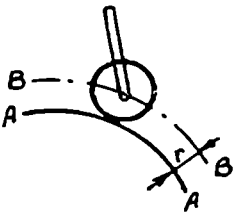

ნახ. 186

სხივის მუშტის პროფილის გადაკვეთის წერტილიდან $A$ წერტილამდე დაშორების $y''_s$ მანძილი განსაზღვრავს მბიძგავის $B$ წერტილის მდებარეობას მექანიზმის შემდგომ მდებარეობაში, რადგან მუშტას 30° კუთხის მობრუნებისას საათის ისრის მიმართულებით $B''$ წერტილი მბიძგავის $B$ წერტილის ტრაექტორიაზე აღმოჩნდება. დანარჩენი წერტილებისათვის აგების განგრძობით $B$ წერტილის მანძილთა ცვლილების კანონს მივიღებთ.

წანაცვლებულ მბიძგავთან მუშტა მექანიზმში მიზანშეწონილია ათვლის ცენტრად $K$ წერტილის მიჩნევა. $K$ წერტილი $A$ წერტილიდან მბიძგავის $B$ წერტილის ტრაექტორიაზე დაშვებული მართობის ფუძეზე ძევს. ასეთი მექანიზმის მბიძგავის $B$ წერტილის $y''_s$ მანძილი დამხმარე წრეწირის მხების $K'B''$ მონაკვეთით განისაზღვრება (წრეწირის რადიუსი მბიძგავის წანაცვლების სიდიდის ტოლია).

ჩვენ აქ განვიხილეთ შემთხვევა, როდესაც მბიძგავი უშუალოდ ეხება მუშტას პროფილს.

უნდა აღინიშნოს, რომ გორგოლაჭიანი მბიძგავების დროს (ნახ. 187) კინემატიკური გამოკვლევის მეთოდები იგივე რჩება, თუ მუშტას ნამდვილ $AA$ პროფილს შევცვლით „თეორიული პროფილით", ე. ი. ეკვიდისტანციური $BB$ მრუდით, რომელიც ნამდვილი პროფილისაგან გორგოლაჭის $r$ რადიუსის ტოლი მანძილითაა დაშორებული, მასთან გორგოლაჭის ცენტრი მახვილი მბიძგავის ბოლო ნაწილად უნდა იქნეს მიღებული.



ნახ. 187

**მუშტას პროფილის აგება მბიძგავის მოძრაობის კანონის მიხედვით**

ვთქვათ, მბიძგავის მოძრაობა წარმოებს შემდეგი კანონით: მუშტას $\varphi_1 = 90°$ კუთხით მობრუნებისას მბიძგავი სრული სვლის $s_{max}$ სიდიდით აიწევა. მუშტას $\varphi_2 = 45°$ კუთხით მობრუნებით მბიძგავი უძრავად რჩება ზეაწეულ მდგომარეობაში. $\varphi_3 = 90°$ კუთხით მობრუნებისას მბიძგავი სრული $s_{max}$ სიდიდით დაიწევს ქვემოთ. დაბოლოს, მუშტას მობრუნებით დანარჩენ $\varphi_4 = 135°$ კუთხეზე მბიძგავი ისევ უძრავად რჩება ქვედა მდებარეობაში.

მუშტას პროფილის ასაგებად მეტად მოხერხებულია მბიძგავის გადაადგილებათა მრუდის წინასწარი აგება. რადგან მუშტა თანაბრად ბრუნავს, ამიტომ არგუმენტად (დამოუკიდებელ ცვლადად) $t$ დროის ნაცვლად შეიძლება მუშტას მობრუნების $\varphi$ კუთხის აღება, მაშინ მივიღებთ ფორმულას

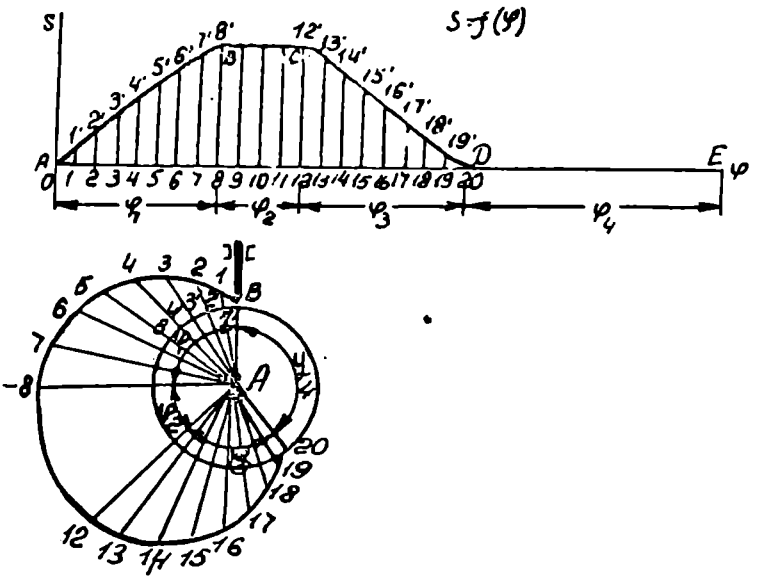
$$s = f(\varphi). \qquad (ა)$$

188, ა ნახაზზე გარკვეულ მასშტაბში მბიძგავის გადაადგილებათა დიაგრამაა აგებული. მართკუთხა $\varphi Os$ კოორდინატთა სისტემაში აბსცისთა ღერძზე $m_\varphi$ მასშტაბში გადაზომილია მუშტას მობრუნების კუთხეები (ა) კანონის თანახმად. ორდინატთა ღერძზე $m_s$ მასშტაბში მბიძგავის სათანადო გადაადგილებებია მოზომილი. $s = f(\varphi)$ დიაგრამიდან ჩანს, რომ $\varphi_1$ აბსცისას 8—8′ ორდინატა შეესაბამება. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მუშტას $\varphi_1 = 90°$ კუთხით მობრუნებისას მბიძგავი სრული $s_{max}$ სვლის სიდიდით უნდა აიგოს. ცხადია, რომ $AB$ მრუდი იმ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს წარმოადგენს, რომლებიც ახასიათებენ მბიძგავის გადაად-

გილებას მუშტას მიმართ საწყისი მდებარეობიდან უმაღლეს მდებარეობამდე.

დიაგრამის $BC$ წრფე აბსცისთა ღერძის პარალელურია, რაც იმას ნიშნავს, რომ მუშტას $\varphi_2 = 45^\circ$ კუთხით მობრუნებისას მბიძგავი $s_{max}$ სიმაღლეზე ზეაწეულ მდგომარეობაში რჩება. შემდეგ მბიძგავის დაშვება იწყება საწყის მდებარეობამდე.

დიაგრამის $CD$ მრუდი მბიძგავის გადაადგილებას ახასიათებს მისი $\varphi_3 = 90^\circ$ კუთხით მობრუნებისას.




ნახ. 188

აბსცისის $DE$ მონაკვეთი გვიჩვენებს, რომ მუშტას შემდგომი მობრუნებისას $\varphi_4 = 135^\circ$ კუთხით მბიძგავის გადაადგილება ნულს უდრის, ე. ი. მბიძგავი უძრავია.

ახლა, დიაგრამის მონაცემების საფუძველზე გამოვხაზოთ მუშტას თეორიული პროფილი.

განსახილველ შემთხვევაში მბიძგავი წვეტით მთავრდება. მუშტას ბრუნვის ცენტრი ერთ ღერძზე ძევს მბიძგავთან ერთად და მბიძგავის წვეტიდან $AB$-ს ტოლი მინიმალური მანძილითაა დაშორებული (ნახ. 188, ბ).

$A$ წერტილიდან $AB$ რადიუსით ძირითად წრეწირს შემოვხაზავთ და მას $B$ წერტილიდან დაწყებული მუშტას ბრუნვის მოპირდაპირე მიმართულებით რკალებად დავყოფთ. ეს რკალები $\varphi_1 = 90°$, $\varphi_2 = 45°$, $\varphi_3 = 90°$ და $\varphi_4 = 135°$ კუთხეებს შეესაბამებიან. $\varphi_1$ და $\varphi_2$ კუთხეებს დიაგრამაზე სვლის მონიშვნის შესაბამისად რვა-რვა ტოლ კუთხეებად ვყოფთ. ამ დანაყოფებიდან $AB$ რადიუსის წრეხაზზე $2'—2$, $3'—3$ და ა. შ. მონაკვეთებს მოვზომავთ. მიღებულ წერტილებს მდორული მრუდით თუ შევაერთებთ, მბიძგავის ამწევი მუშტას თეორიულ პროფილს მივიღებთ.

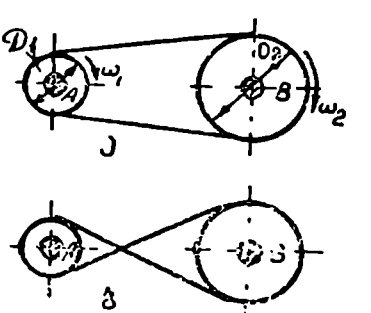
მბიძგავს გორგოლაჭი თუ ექნება, მაშინ გორგოლაჭის რადიუსის აღებით თეორიულ პროფილზე ნამდვილ ანუ ეკვიდისტანციურ პროფილს ავაგებთ.

## § 2. ერთი შძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვის მეორე შძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვად გარდაძმნა

განვიხილოთ ცალკეულ მექანიზმთა კინემატიკა, რომელთა საშუალებითაც ბრუნვითი მოძრაობის გადაცემა ხორციელდება.

### I. ღვედური გადაცემა

ვთქვათ, მოცემულია ორი ლილვი; პირველზე დაცემულია $A$ ბორბალი, მეორეზე—$B$ ბორბალი (ნახ. 189, ა). მასთან $A$ წამყვანი ბორბალია და $B$—ამყოლი. ამ ბორბლებზე წინასწარ დაჭიმული უსასრულო ღვედია გადადებული. ბორბალსა და ღვედს შორის, დაჭიმულობის ვამო, წარმოიქმნება ხახუნის ძალა.



ნახ. 189

წამყვანი ბორბლის ბრუნვისას ღვედი ამოძრავდება და ამყოლი ბორბლის ბრუნვას გამოიწვევს. მიახლოებით კინემატიკურ გაანგარიშებებში პირობით მიღებულია, რომ გადაცემისას ღვედი არ სრიალებს ბორბალზე, ე. ი. ბორბალზე შემოვლებულ ღვედს ბორბლის წრიული სიჩქარის ტოლი სიჩქარე აქვს.

ვთქვათ, წამყვანი ბორბლის წრიული სიჩქარეა $v_1$, ღვედის სიჩქარე $v$ და ამყოლი ბორბლის სიჩქარე $v_2$, მაშინ უსრიალოდ მოძრაობისას უნდა გვქონდეს

$$v_1 = v_2 = v.$$

წამყვანი ბორბლის დიამეტრი იყოს $D_1$, ხოლო კუთხური სიჩქარე —$\omega_1$; ამყოლი ბორბლის დიამეტრი იყოს $D_2$, ხოლო კუთხური სიჩქარე—$\omega_2$, მაშინ

$$v_1 = \omega_1 \cdot \frac{D_1}{2} = \frac{\pi n_1}{30} \cdot \frac{D_1}{2};$$

$$v_2 = \omega_2 \cdot \frac{D_2}{2} = \frac{\pi n_2}{30} \cdot \frac{D_2}{2}.$$

მაგრამ $v_1 = v_2 = v$, ამიტომ

$$\frac{\pi n_1}{30} \cdot \frac{D_1}{2} = \frac{\pi n_2}{30} \cdot \frac{D_2}{2},$$

საიდანაც

$$D_1 n_1 = D_2 n_2, \tag{1}$$

ანუ

$$\boxed{\frac{n_1}{n_2} = \frac{D_2}{D_1}}. \tag{2}$$

ანალოგიურად შეგვიძლია მივიღოთ

$$\boxed{\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{D_2}{D_1}}, \tag{3}$$

ე. ი. ბორბლების კუთხური სიჩქარეები დიამეტრების უკუპროპორციულია.

(3) ფარდობას გადაცემის ფარდობა ეწოდება და აღინიშნება $i$ ასოთი, სათანადო ორმაგი ინდექსით, მასთან პირველი ინდექსი $i$ ასოს მარჯვნივ ქვემოთ დაწერილი იმ რგოლს აღნიშნავს, რომლის კუთხური სიჩქარე წილადის მრიცხველშია; მეორე ინდექსი კი იმ რგოლს აღნიშნავს, რომლის კუთხური სიჩქარე მნიშვნელშია მოთავსებული; ასე, მაგალითად

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = i_{1,2}; \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = i_{2,1}. \tag{4}$$

წამყვანი რგოლის $\omega_1$ კუთხური სიჩქარის ფარდობას ამყოლი რგოლის $\omega_2$ კუთხურ სიჩქარესთან გადაცემის რიცხვი ეწოდება და უინდექსო $i$ ასოთი აღინიშნება

$$\boxed{i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}}. \tag{5}$$

189, ა ნახ-ზე გამოსახულია ღია ღვედური გადაცემა, რომელშიაც ორივე ბორბალი ერთ მხარეს ბრუნავს, ხოლო 189, ბ-ზე—ჯვარედინი ღვედური გადაცემა, რომელშიაც ბორბლები თანაწინააღმდეგი მიმართულებებით ბრუნავენ. ამ შემთხვევაში გადაცემის ფარდობას უარყოფითი ნიშანი აქვს

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{D_2}{D_1}.$$

მაგალითი

*A* ბორბლიანი დინამომანქანა მოძრაობაში მოდის ძრავას *B* ბორბალზე გადადებული უსასრულო ღვედით; ბორბლების რადიუსებია: $r_1 = 30$ სმ და $r_2 = 75$ სმ (ნახ. 189, ა). ძრავას გაშვების შემდეგ *B* ბორბლის კუთხური აჩქარება უდრის $0{,}4\,\pi \frac{1}{წმ^2}$. ბორბლებზე ღვედის სრიალის უგულებელყოფით განსაზღვრეთ, თუ რა დროის შემდეგ შეასრულებს დინამომანქანა 300 ბრ/წთ-ში.

ამოხსნა

ვამოვიყენოთ ფორმულა

$$D_1 n_1 = D_2 n_2,$$

საიდანაც

$$n_2 = \frac{D_1 n_1}{D_2},$$

ანუ

$$n_2 = \frac{60 \cdot 300}{150} = 120 \text{ ბრ/წთ},$$

რაც შეესაბამება შემდეგ კუთხურ სიჩქარეს

$$\omega_2 = \frac{\pi n_2}{30} = \frac{\pi \cdot 120}{30} = 4\pi \frac{1}{წმ};$$

მაგრამ

$$\omega_2 = \omega_0 + \varepsilon t,$$

სადაც $\omega_0 = 0$. რადგან დინამომანქანა მოძრაობაში მოდის მოსვენებული მდგომარეობიდან, ამიტომ

$$\omega_2 = \varepsilon t;$$

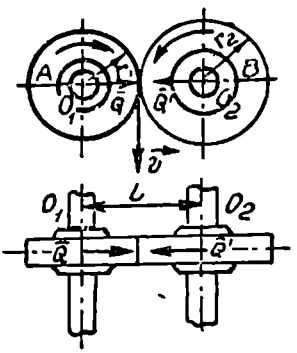
აქედან დრო

$$t = \frac{\omega_2}{\varepsilon} = \frac{4\pi}{0{,}4\,\pi} = 10 \text{ წმ}.$$

## II. ფრიქციული გადაცემა. კბილანა გადაცემა

განვიხილოთ ფრიქციული გადაცემა (ნახ. 190) $O_1$ და $O_2$ პარალელურ ღერძებს შორის, რომელიც ერთმანეთზე ერთგვარი $\vec{Q} = \vec{Q'}$ ძალით მიჭერილი ცილინდრული საგორავებით ხორციელდება.

წამყვანი $A$ ბორბლის ბრუნვისას ბორბლების წრეწირზე $F = fQ$ ხახუნის ძალის განვითარების გამო ამყოლი $B$ ბორბალიც იწყებს ბრუნვას. ასეთ გადაცემას ფრიქციული გადაცემა ეწოდება, ხოლო $A$ და $B$ ბორბლებს—ხახუნის ბორბლები.



ნახ. 190

ბორბლების საკმარისი დაწნევისას მოძრაობა უსრიალოდ წარმოებს და მათი წრიული სიჩქარეები ტოლია

$$v_1 = v_2 = v;$$

მაშინ

$$v_1 = r_1\omega_1 \quad \text{და} \quad v_2 = r_2\omega_2,$$

ამიტომ

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{D_2}{D_1},$$

ე. ი. ცილინდრული ფრიქციული გადაცემის ლილვების კუთხური სიჩქარეები მათი დიამეტრების უკუპროპორციულია და მოპირდაპირე მხარეს არიან მიმართული.

ბორბლების წმინდა გორვის დროს ფრიქციული გადაცემისათვის მართებულია ფორმულა

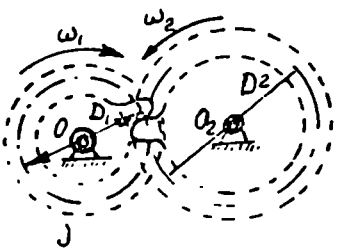
$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = -\frac{r_2}{r_1} = \text{const}.$$

მაგრამ ამ დროს ბრუნვას ხახუნის $fQ$ ძალა გადასცემს; ამიტომ გამორიცხული არ არის შემთხვევა, როდესაც ბორბლები გაცურდება ერთმანეთზე და დაირღვევა $i$ გადაცემის რიცხვის მუდმივობა, რაც ფრიქციული გადაცემის ნაკლად ითვლება.

ფრიქციული გადაცემის მუშაობის იმედნეულობა მთლიანად დამოკიდებულია ორივე საგორავის მკუმშავ ძალაზე, რითაც თავიდან იქნება აშორებული საგორავებს შორის სრიალი.

ახლა გადავიდეთ კბილანა გადაცემაზე.

მრგვალი ცილინდრის გვერდით ზედაპირზე ერთიმეორისაგან ტოლ მანძილზე ღარები რომ გავჭრათ, ამით ცილინდრულ კბილა თვალს მივიღებთ. ორ კბილა თვალს ერთნაირი შვერილი და ღრმულები თუ ექნება, თან ისეთი ფორმისა, რომ ერთი ბორბლის კბილები (შვერილები) შედიოდეს მეორე ბორბლის ღრმულებში, თან ეს კბილა თვლები დამაგრებული იქნეს მოძრავ საკისრებში მბრუნავ $O_1$ და $O_2$ ლილვებზე (ნახ. 191), მაშინ წამყვანი ბორბალი, რომელიც ბრუნვითს მოძრაობას გარედან იღებს, ბრუნვითს მოძრაობას მეორე—ამყოლ ბორბალს მიანიჭებს.

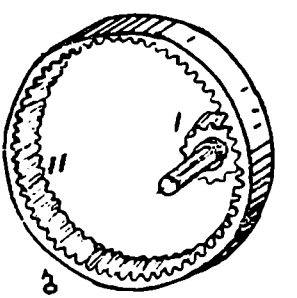



ა

ყველაზე მარტივი კბილათვლიანი გადაცემა მრგვალი ცილინდრული თვლებიანი გადაცემაა. მცირე კბილა თვალს ჩვეულებრივად კბილანა ეწოდება, დიდს კი—კბილა თვალი.

191, ა ნახაზზე კბილები გარე ცილინდრულ ზედაპირებზეა განლაგებული, ამიტომ ასეთ კბილათვლიან მოდებას გარე მოდება ეწოდება.

191, ბ ნახაზზე ნაჩვენებია შიგა მოდება, რომლის დროსაც I კბილა თვლის კბილები II კბილა თვლის კბილებთანაა მოდებული, მაგრამ ამ მეორე კბილა თვლის კბილები შიგა ცილინდრულ ზედაპირზეა განლაგებული.




ბ

ნახ. 191

ორი კბილა თვლის ბრუნვისას შეიძლება ერთიმეორესთან შემხები $D_1$ და $D_2$ დიამეტრიანი წრეწირების დასახვა, რომლებიც ბორბლების ბრუნვისას ერთიმეორეზე უსასრულოდ გორავენ. ამ წრეწირებს კბილა თვლების **საწყისი წრეწირები** ეწოდება.

192-ე ნახ-ზე ასეთი აღნიშვნებია:

$t$ არის მოდების ბიჯი ანუ ორი მეზობელი კბილის ერთსახელა წერტილებს შორის მანძილი; იგი საწყისი წრეწირის რკალზე იზომება;

$h$ —კბილის სიმაღლე;

$h'$ —კბილის თავის სიმაღლე;

$h''$—კბილის ფუძის (ფეხის) სიმაღლე;

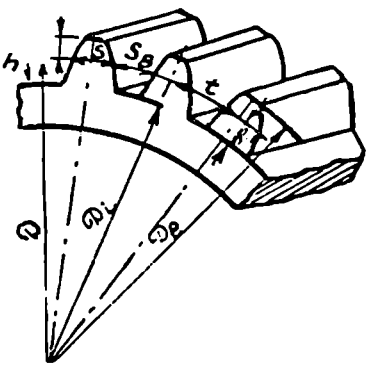
$D_e$—შვერილების წრეწირის დიამეტრი;

$D_i$—ღრმულების წრეწირის დიამეტრი;

$s_b$—ღრმულის სიგანე;

$s$—კბილის სისქე, მას საწყის წრეწირზე ზომავენ.

რადგან ორი მოდებული კბილა თვლის $t$ ბიჯი ერთნაირი უნდა იყოს ორივე კბილისათვის (წინააღმდეგ შემთხვევაში მათი წესიერი მოდება შეუძლებელია), ამიტომ




ნახ. 192

$$\pi D_1 = z_1 t \quad \text{და} \quad \pi D_2 = z_2 t,$$

სადაც $z_1$ და $z_2$ კბილია რიცხვია წამყვან და ამყოლ კბილა თვლებზე.

მეორე განტოლება წევრ-წევრად გავყოთ პირველზე და მივიღებთ

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

ზოგადი $\pi D = zt$ ფორმულიდან გვაქვს

$$D = z \cdot \frac{t}{\pi} = z \cdot m, \qquad (ა)$$

სადაც $m = \frac{t}{\pi}$ სიდიდეს მოდების მოდული ეწოდება და მმ-ით იზომება.

წამყვანი კბილა თვლის კუთხურ სიჩქარეს $\omega_1$-ით თუ აღვნიშნავთ, ამყოლი ბორბლისა კი $\omega_2$-ით, მაშინ ამ წრეწირების შეხების $P$ წერტილის სიჩქარე (ნახ. 191, ა) იქნება

$$v = r_1\omega_1 = r_2\omega_2,$$

საიდანაც

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2},$$

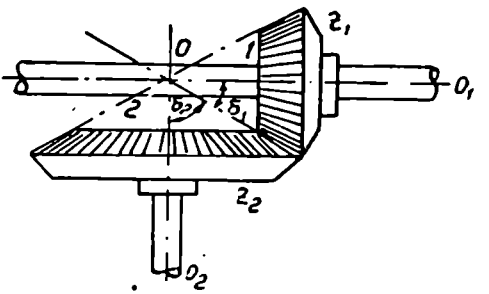
მაშასადამე

$$\boxed{\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2}.} \qquad (6)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ განხილული გარე კბილანა მოდების კბილა თვლები სხვადასხვა მხარეს ბრუნავენ (ნახ. 191, ა), მივიღებთ შემდეგ გადაცემის ფარდობას

$$i_{2,1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{z_1}{z_2}.$$

როდესაც გადაცემა შიგა მოდებითაა (ნახ. 191, ბ), როგორც წამყვანი, ისე ამყოლი კბილა თვლები ერთმხრივ ბრუნავენ და მათს გადაცემის ფარდობას დადებითი მნიშვნელობა აქვს




ნახ. 193

$$i_{2,1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2}.$$

კონუსური კბილა თვლების შემთხვევაში (ნახ. 193), ისე როგორც ცილინდრული კბილა თვლების შემთხვევაში, გადაცემის ფარდობა ორივე თვლის კუთხურ სიჩქარეთა უკუფარდობის ტოლია

$$i_{2,1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2}.$$

## V თავი

# წერტილის მოძრაობათა შეკრება

### § 1. წერტილის აბსოლუტური, ფარდობითი და ნარჩატანი მოძრაობანი

აქამდე ჩვენ წერტილის მოძრაობას განვიხილავდით უძრავ კოორდინატთა სისტემის მიმართ. წერტილის მოძრაობის გამოკვლევა რთულდება, როდესაც კოორდინატთა სისტემაც მოძრაობაშია.

განვიხილოთ წერტილის (სხეულის) ისეთი გადაადგილება, რომლის დროსაც წერტილი (სხეული) ერთდროულად მონაწილეობას იღებს ორ ან მეტ მოძრაობაში. ასეთ მოძრაობას შ ე დ გ ე ნ ი ლ ი მოძრაობა ეწოდება. ასე, მაგალითად, შედგენილ მოძრაობას ასრულებს მეზღვაური, რომელიც გადაადგილდება მოძრავი გემის გემბანზე; ადამიანი, რომელიც გადაადგილდება თბილისის მეტროპოლიტენის მოძრავ კიბეზე: ორთ-

ქლმავლის ბორბლის ფერსოს ნებისმიერი წერტილი და ა. შ. ყველა ასეთ შემთხვევაში ჩვენ გვიხდება წერტილის მოძრაობის განხილვა რომელიმე ათვლის სისტემის მიმართ, რომელიც თვით მოძრაობს უძრავად მიღებული მეორე სისტემის მიმართ. მართლაც, მეტროპოლიტენის მოძრავ კიბეზე მგზავრის მოძრაობა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც წერტილის მოძრაობა ათვლის მოძრავი სისტემისა (მოძრავი კიბის) და ათვლის უძრავი სისტემის მიმართ, რომელიც დაკავშირებულია დედამიწასთან (მაგალითად, მეტროპოლიტენის ბილეთების სალაროსთან).

განხილულ მაგალითში, მეტროპოლიტენის მოძრავი კიბის მიმართ მგზავრის მოძრაობა ფ ა რ დ ო ბ ი თ ი მ ო ძ რ ა ო ბ ა ა; თვით მეტროპოლიტენის კიბის მოძრაობა — წ ა რ მ ტ ა ნ ი მ ო ძ რ ა ო ბ ა, ხოლო ადამიანის მოძრაობა ბილეთების სალაროს მიმართ— ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ი მ ო ძ რ ა ო ბ ა.

ცხადია, რომ წერტილის ყოველი აბსოლუტური მოძრაობა განიხილება ორი ერთდროული მოძრაობის შედეგად. ეს მოძრაობებია: წერტილის ფარდობითი მოძრაობა მოძრავ გარემოში და თვით გარემოს წარმტანი მოძრაობა. არსებითად საგულისხმოა, რომ წარმტანი მოძრაობა გარემოს მოძრაობაა და არა წერტილის.

ამასთან დაკავშირებით განასხვავებენ წერტილის $\vec{v}_a$ აბსოლუტურ სიჩქარეს, $\vec{v}_r$ ფარდობით სიჩქარეს, $\vec{v}_e$ წარმტან სიჩქარეს და, აგრეთვე, $\vec{w}_a$ აბსოლუტურ აჩქარებას, $\vec{w}_r$ ფარდობით აჩქარებასა და $\vec{w}_e$ წარმტან აჩქარებას.

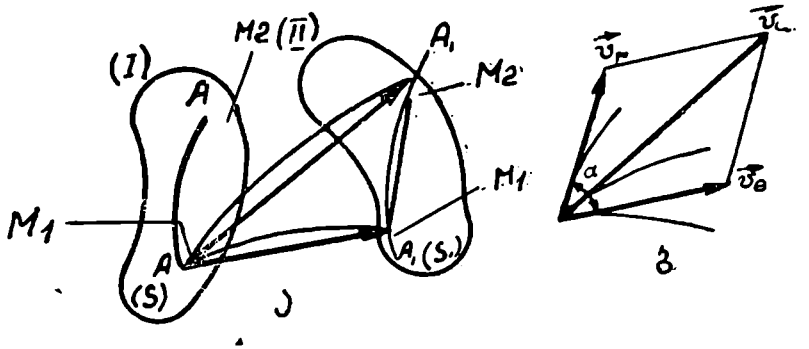
## § 2. სიჩქარეთა შეკრების კანონი

ვთქვათ, $M$ წერტილი $(S)$ სისტემის $AB$ ტრაექტორიაზე მოძრაობს (ნახ. 194, ა).

თავის მხრივ $(S)$ სისტემა მოძრაობს და საწყის $t$ მომენტში I მდებარეობა უკავია, ხოლო $t+\Delta t$ მომენტში—II მდებარეობა. ამ შემთხვევაში $M$ წერტილის მოძრაობა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც მოძრაობა მოძრავი ათვლის სისტემის $[(S)$-ის$]$ მიმართ, ხოლო $AB$ ტრაექტორია მოცემული $M$ წერტილის ფარდობითი მოძრაობის ტრაექტორია იქნება.

ვთქვათ, $M$ მოძრავ წერტილს $t$ მომენტში $M_1$ მდებარეობა უკავია $(S)$ სისტემაში. $\Delta t$ დროის შუალედში $(S)$ სისტემის იგივე წერტილი $M_1'$ მდებარეობას იკავებს $(S_1)$ სისტემაში, მასთან $\widetilde{M_1M_1'}$ რკალს აღწერს. მაშასადამე, $\widetilde{M_1M_1'}$ რკალის სიგრძე წერტილის მიერ წარმტან მოძრაობაში გავლილი გზაა. თვით მოძრავი წერტილი დროის იმავე შუალედში თავის $AB$ ფარდობით ტრაექტორიაზე გადაადგილდება $(S)$ სისტემაში

და $M_2$ მდებარეობაში გადადის, მასთან $\widetilde{M_1M_2}$ რკალს გაივლის. რადგან $(S)$ სისტემაც მოძრაობს და I მდებარეობიდან II მდებარეობაში გადადის, ამიტომ $AB$ ტრაექტორია $(S_1)$ სისტემაში $A_1B_1$ მდებარეობას დაიკავებს, მოძრავი წერტილი კი საბოლოოდ $M_2'$ წერტილში ხვდება, თან $\widetilde{M_1M_2'}$ რკალს აღწერს, რომლის სიგრძე წერტილის მიერ $\Delta t$ დროს შუალედში აბსოლუტური მოძრაობისას გავლილ გზას გამოსახავს.




ნახ. 194

ცალ-ცალკე განვიხილოთ $M$ წერტილის აბსოლუტური, ფარდობითი და წარმტანი სიჩქარეები. გავიხსენოთ, რომ რაიმე წერტილის სიჩქარის პოვნამდე დროის მოცემულ მომენტში, ჯერ წერტილის საშუალო სიჩქარის ვექტორი უნდა ვიპოვოთ და მხოლოდ ამის შემდეგ გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\Delta t \to 0$. მაგრამ საშუალო სიჩქარის ვექტორი წარმოადგენს რაიმე მოძრაობაში წერტილის გადაადგილების ვექტორის ფარდობას დროის სათანადო შუალედთან, ამიტომ

$$(\vec{v}_r)_{\text{საშ}} = \frac{\vec{M_1'M_2'}}{\Delta t};$$

$$(\vec{v}_e)_{\text{საშ}} = \frac{\vec{M_1M_1'}}{\Delta t};$$

$$(\vec{v}_a)_{\text{საშ}} = \frac{\vec{M_1M_2'}}{\Delta t}.$$

$\vec{M_1'M_2'}$, $\vec{M_1M_1'}$ და $\vec{M_1M_2'}$ ვექტორები ვექტორულ სამკუთხედს ქმნიან, რომელშიაც $\vec{M_1M_2'}$ ვექტორი ჩამკეტი ვექტორია, ამიტომ

$$\vec{M_1M_2'} = \vec{M_1'M_2'} + \vec{M_1M_1'}.$$

ამ ვექტორული ტოლობის $\Delta t$ დროზე გაყოფით და ზღვარზე გადასვლით, როცა $\Delta t \to 0$, მივიღებთ

$$\boxed{\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e.} \tag{1}$$

ამრიგად, მივიღეთ სიჩქარეთა შეკრების კანონი:

წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე ამ წერტილის ფარდობითი და წარმტანი სიჩქარეების გეომეტრიულ ჯამს უდრის.

რადგან $v_a$ აბსოლუტური სიჩქარე $v_r$ ფარდობითი და $v_e$ წარმტან სიჩქარეებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალით გამოისახება, ამიტომ $\vec{v}_a$ აბსოლუტური სიჩქარის მოდული გამოიანგარიშება ფორმულით

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r \cdot v_e \cdot \cos\alpha}, \tag{2}$$

სადაც $\alpha$ კუთხეა $\vec{v}_r$ ფარდობითი სიჩქარის ვექტორსა და $\vec{v}_e$ წარმტანი სიჩქარის ვექტორს შორის (ნახ. 194, ბ)

$$\cos\alpha = \cos(\vec{v}_r, \hat{\vec{v}_e}).$$

როდესაც $\vec{v}_r \perp \vec{v}_e$, მაშინ $\cos\alpha = \cos 90^\circ = 0$, ამიტომ

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2}. \tag{3}$$

როდესაც $\vec{v}_r$ ფარდობითი სიჩქარისა და $\vec{v}_e$ წარმტანი სიჩქარის ვექტორები ერთმხრივაა მიმართული, მაშინ

$$\cos\alpha = \cos 0^\circ = 1$$

და

$$v_a = v_r + v_e. \tag{4}$$

როდესაც $\vec{v}_r$ ფარდობითი სიჩქარის ვექტორი და $\vec{v}_e$ წარმტანი სიჩქარის ვექტორი თანაწინააღმდეგად არიან მიმართული და ერთ წრფეზე მდებარეობენ, მაშინ

$$\cos\alpha = \cos 180^\circ = -1$$

და

$$v_a = v_r - v_e. \tag{5}$$

ამ შემთხვევაში $\vec{v}_a$ აბსოლუტური სიჩქარის ვექტორი $\vec{v}_r$ და $\vec{v}_e$ ვექტორების სიდიდეებიდან უდიდესის მხარესაა მიმართული.

წერტილის შედგენილ მოძრაობაზე ამოცანების ამოხსნისას წინასწარ უნდა დაწესდეს, თუ რომელია მოძრავი და უძრავი ათვლის სისტემები და გამოირკვეს წარმტანი მოძრაობის ხასიათი, ე. ი. იმ სხეულის მოძრაობის ხასიათი, რომელთანაც უცვლელად დაკავშირებულია

შერჩეულ მოძრავ ღერძთა სისტემა. ამის შემდეგ უნდა დაწესდეს, თუ განსახილველი წერტილის რომელი მოძრაობაა აბსოლუტური და რომელი—ფარდობითი.

წერტილის მოძრაობის შესწავლით ათვლის მოძრავი სისტემის მიმართ შეიძლება იმ ამოცანების ამოხსნა, რომლებშიაც:

ა) ცნობილია წერტილის $\vec{v}_r$ და $\vec{v}_e$ სიჩქარეები და საჭიროა $\vec{v}_a$ სიჩქარის პოვნა;

ბ) ცნობილია წერტილის აბსოლუტური $\vec{v}_a$ სიჩქარე და ამავე წერტილის ფარდობითი და წარმტანი სიჩქარეების მიმართულებები;

გ) ცნობილია წერტილის $\vec{v}_a$ და $\vec{v}_e$ (ან $\vec{v}_a$ და $\vec{v}_r$) სიჩქარეები და საჭიროა ფარდობითი (ან წარმტანი) სიჩქარის მოდულისა და მიმართულების პოვნა;

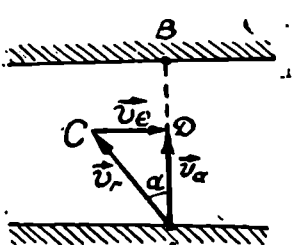
დ) ცნობილია $\vec{v}_e$ (ან $\vec{v}_r$) სიჩქარის ვექტორი და $\vec{v}_a$ და $\vec{v}_r$ (ან $\vec{v}_a$ და $\vec{v}_e$) სიჩქარეთა მიმართულებები და საჭიროა $\vec{v}_a$ და $\vec{v}_r$ (ან $\vec{v}_a$ და $\vec{v}_e$) სიჩქარეთა მოდულების პოვნა.

აღნიშნული ტიპის ამოცანების ამოხსნა დაიყვანება სიჩქარეთა პარალელოგრამის აგებაზე მისი ორი $\vec{v}_r$ და $\vec{v}_e$ გვერდის მიხედვით (ტიპი „ა“); მოცემული დიაგონალით და პარალელოგრამის ორი მოსაზღვრე გვერდის მიხედვით (ტიპი „ბ“ და „დ“); მოცემული დიაგონალის, პარალელოგრამის ერთ-ერთი გვერდისა და დიაგონალის და ამ გვერდს შორის კუთხის მიხედვით (ტიპი „გ“).

### მაგალითები

**1.** მოტორიანმა ნავმა მდინარის ერთი ნაპირიდან მეორემდე უმოკლესი $AB = l = 250$ მანძილი უნდა გადაცუროს (ნახ. 195).

განსაზღვრეთ, როგორი $\alpha$ კუთხით ($AB$ წრფისადმი) უნდა მიცურავდეს ნავი და რამდენი ხანი უნდა გრძელდებოდეს ცურვა, თუ მდინარის დინების სიჩქარეა $v_r = 10$ მ/წთ და ნავის სიჩქარე მდინარის მიმართ $v_r = 20$ მ/წთ.




ნახ. 195

ამოხსნა

უმოკლესი $AB$ მანძილით ნავის ცურვისას ნავის აბსოლუტური $\vec{v}_a$ სიჩქარის ვექტორი ნაპირების მიმართ $A$ წერტილიდან $B$ წერტილისაკენ უნდა იყოს მიმართული, მეორე მხრივ, $\vec{v}_a$ სიჩქარე

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

მაგრამ ასეთი ტოლობის მიღება შეიძლება იმ შემთხვევაში, როცა ნავი $AB$ წრფესთან $\alpha$ კუთხეს ადგენს.

სიჩქარეთა $ACD$ ვექტორულ სამკუთხედს თუ ავაგებთ, ვიპოვით

$$\sin\alpha = \frac{CD}{AC} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2},$$

ანუ

$$\alpha = 30^\circ.$$

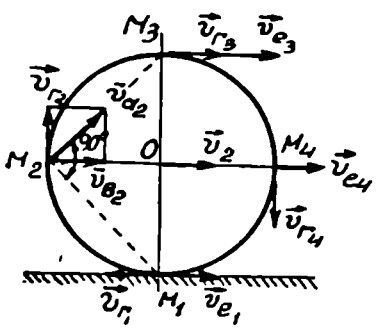
ამ შემთხვევაში $\vec{v}_a$ აბსოლუტური სიჩქარის მოდული

$$v_a = \sqrt{v_r^2 - v_e^2} = \sqrt{20^2 - 10^2} = 17{,}3 \text{ მ/წთ},$$

ხოლო მოძრაობის ხანგრძლივობა

$$t = \frac{AB}{v_a} = \frac{250}{17{,}3} = 14{,}5 \text{ წთ}.$$

**2.** ელმავლის $R = 0{,}5$ მ რადიუსიანი ბორბალი უსასრულოდ მიგორავს წრფივი გზის უბანზე; ბორბლის ცენტრის სიჩქარე მუდმივია და უდრის $v_c = 10$ მ/წმ (ნახ. 196). იპოვეთ ბორბლის $M_1$, $M_2$, $M_3$ და $M_4$ წერტილთა სიჩქარეები.



ნახ. 196

ამოხსნა

ბორბლის მოძრაობა შედგენილი მოძრაობაა. წარმტან მოძრაობად ელმავლის კორპუსის გადატანითი მოძრაობა მივიღოთ, მაშინ ბორბლის წერტილის ფარდობით მოძრაობად მისი ბრუნვითი მოძრაობა იქნება $O$ წერტილზე გამავალი ღერძის გარშემო. $M_1$, $M_2$, $M_3$ და $M_4$ წერტილთა ფარდობითი სიჩქარეები $\vec{v}_{r1}$, $\vec{v}_{r2}$, $\vec{v}_{r3}$ და $\vec{v}_{r4}$ ბორბლის ფერსოს $M_1$, $M_2$, $M_3$ და $M_4$ წერტილებზე გატარებულ მხებებს გაჰყვება. ეს სიჩქარეები მოდულებით ტოლია.

მეორე მხრივ, $M_1$, $M_2$, $M_3$ და $M_4$ წერტილებს სიჩქარეები ექნებათ წარმტან მოძრაობაში, რომლებიც მოდულით ცენტრის $v_c = 10$ მ/წმ სიჩქარის ტოლია და $\vec{v}_a$ სიჩქარის მიმართულების მხარესაა მიმართული.

$M_1$ წერტილი უძრავ სიბრტყეს ეხება. შეხების მომენტში მისი აბსოლუტური სიჩქარე უძრავი სიბრტყის სიჩქარის ტოლია, ე. ი. ნულია, რადგან ბორბალი, პირობის თანახმად, უსრიალოდ გორავს.

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $M_1$ წერტილის სიჩქარეებს ფარდობით და წარმტან მოძრაობებში პირდაპირ თანაწინააღმდეგი მიმართულებები აქვთ, გვექნება

$$v_1 = v_{e1} - v_{r1} = 0,$$

საიდანაც

$$v_{r1} = v_{e1} = 10 \text{ მ/წმ};$$

მაშასადამე,

$$v_{r1} = v_{r2} = v_{r3} = v_{r4} = 10 \text{ მ/წმ}.$$

რადგან წერტილთა სიჩქარეები ფარდობით მოძრაობაში მოდულით ტოლია, მაგრამ სხვადასხვა მიმართულებისაა, ამიტომ $M_2$ და $M_4$ წერტილებისათვის სიჩქარეთა პარალელოგრამის აგების შემდეგ მივიღებთ:

$M_1$ წერტილისათვის

$$v_1 = v_{e1} - v_{r1} = 0;$$

$M_2$ წერტილისათვის

$$v_2 = \sqrt{v_{r2}^2 + v_{e2}^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \text{ მ/წმ};$$

$M_3$ წერტილისათვის

$$v_3 = v_{r3} + v_{e3} = 10 + 10 = 20 \text{ მ/წმ};$$

$M_4$ წერტილისათვის

$$v_4 = \sqrt{v_{r4}^2 + v_{e4}^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \text{ მ/წმ}.$$

3. დედამიწის ხელოვნური თანამგზავრის გაშვებისას მას დედამიწის ზედაპირის მახლობლად უნდა მიანიჭონ ჰორიზონტალური სიჩქარე 8 კმ/წმ. განსაზღვრეთ უმცირესი და უდიდესი ფარდობითი ჰორიზონტალური სიჩქარე, რომელიც უნდა მიანიჭონ ხელოვნურ თანამგზავრს, თუ გაშვება წარმოებს ეკვატორიდან.

ამოხსნა

ხელოვნური თანამგზავრი დედამიწაზე ყოფნის დროს დედამიწასთან ერთად ბრუნავს როგორც ერთი სხეული. ამ დროს თანამგზავრის სიჩქარე წარმტანი სიჩქარე იქნება და იგი დედამიწის ეკვატორის სიჩქარეს უდრის

$$v_e = R \cdot \omega_e,$$

სადაც $\omega_e = \frac{\pi n}{30}$ დედამიწის კუთხური სიჩქარის სიდიდეა, ხოლო დედამიწის რადიუსი $R = 6400$ კმ, მაშასადამე,

$$v_e = 6400 \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{2\pi}{3600} = 0{,}465 \text{ კმ/წმ}.$$

დედამიწის თანამგზავრი ეკვატორზე შეიძლება გაიშვას ან დასავლეთიდან აღმოსავლეთისაკენ, ანდა, პირიქით, აღმოსავლეთიდან დასავლეთისაკენ.

როდესაც მოძრაობაა დასავლეთიდან აღმოსავლეთისაკენ, მაშინ წარმტანი და ფარდობითი (ჰორიზონტალური) სიჩქარეები მიმართულებით თანხვდებიან და

$$v = v_e + v_r = 0{,}465 + v_{r1} = 8,$$

საიდანაც

$$v_{r1} = 8 - 0{,}465 = 7{,}535 \text{ კმ/წმ}.$$

როდესაც თანამგზავრი მოძრაობს აღმოსავლეთიდან დასავლეთისაკენ, მაშინ წარმტანი სიჩქარის მიმართულება ფარდობითი სიჩქარის შებრუნებული იქნება და

$$v = v_r - v_e = v_{r2} - 0{,}465 = 8,$$

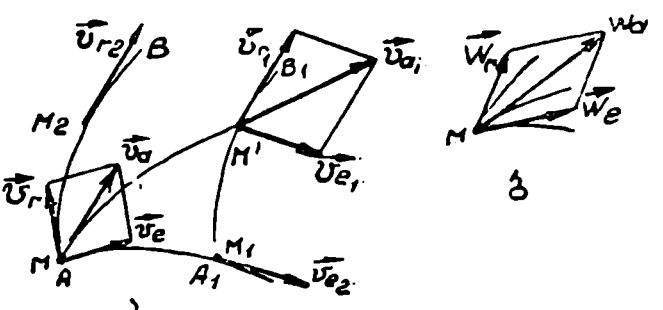
აქედან

$$v_{r2} = 8 + 0{,}465 = 8{,}465 \text{ კმ/წმ}.$$

## § 3. აჩქარებათა შეკრების კანონი

### 1. გადატანითი-წარმტანი მოძრაობის შემთხვევა

ვთქვათ, წერტილი მოძრაობს ერთგვარ $AB$ მრუდზე (ნახ. 197, ა), და ეს მრუდი ერთდროულად მოძრაობს ათვლის უძრავი სისტემის მიმართ.




ნახ. 197

ახლა, თუ გავაწარმოებთ $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ გეომეტრიულ ტოლობას დროით, მივიღებთ

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \frac{d\vec{v}_e}{dt},$$

მაგრამ $\frac{d\vec{v}_a}{dt} = \vec{w}_a$ არის წერტილის აბსოლუტური აჩქარება; $\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{w}_r$ წერტილის ფარდობითი აჩქარებაა და, ბოლოს, $\frac{d\vec{v}_e}{Dt} = \vec{w}_e$ — წერტილის წარმტანი აჩქარება.

მაშასადამე, მივიღეთ

$$\boxed{\vec{w}_a = \vec{w}_r + \vec{w}_e,}$$

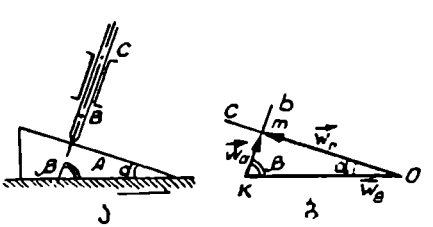
ე. ი. **გადატანითი მოძრაობის დროს წერტილის აბსოლუტური აჩქარება დროის რაიმე მომენტში უდრის წერტილის ფარდობით და წარმტან აჩქარებათა გეომეტრიულ ჯამს დროის იმავე მომენტში.**

ამ შემთხვევაში წერტილის აბსოლუტური აჩქარება (ნახ. 197, ბ) ფარდობით და წარმტან აჩქარებებზე (როგორც გვერდებზე) აგებული პარალელოგრამის დიაგონალით გამოისახება და მისი მოდული იანგარიშება ფორმულით

$$w_a = \sqrt{w_r^2 + w_e^2 + 2w_r \cdot w_e \cos(\vec{w}_r, \vec{w}_e)}.$$

**მაგალითი**

$\alpha = 30^\circ$ წვეტიანი $A$ სოლი ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე მოძრაობს $w_r = 2$ მ/წმ² აჩქარებით და თან ასწევს მიმმართველებში მოძრავ $B$ ცოცას. მიმმართველების ღერძი ჰორიზონტთან ქმნის $\beta = 60^\circ$ კუთხეს. განსაზღვრეთ ცოცას $\vec{w}_r$ ფარდობითი და $\vec{w}_a$ აბსოლუტური აჩქარებები (ნახ. 198, ა).




ნახ. 198

**ამოხსნა**

$B$ ცოცას მოძრაობა უძრავი სიბრტყის მიმართ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ორი მოძრაობისაგან შედგენილი მოძრაობა: ფარდობითი მოძრაობისა $A$ სოლის მიმართ და წარმტანი მოძრაობისაგან, რომელიც სოლის მოძრაობასთანაა დაკავშირებული უძრავი სიბრტყის მიმართ. ამ მოძრაობაში ჩვენთვის ცნობილია

წარმტანი $\vec{w}_e$ აჩქარების სიდიდე და მიმართულება, ფარდობითი $\vec{w}_r$ აჩქარების მიმართულება (დახრილი სიბრტყის გასწვრივ) და აბსოლუტური $\vec{w}_a$ აჩქარების მიმართულება ($BC$-ს გასწვრივ).

ავიღოთ $O$ წერტილი და ავაგოთ წარმტანი $\vec{w}_e$ აჩქარების გამომსახველი $\vec{KO}$ ვექტორი; შემდეგ ამ ვექტორის $O$ და $K$ წერტილებიდან გავატაროთ $Kb$ და $Oc$ წრფეები, რომლებიც $\vec{w}_a$ აბსოლუტური და $\vec{w}_r$ ფარდობითი აჩქარებების პარალელურები იქნება (ნახ. 198, ბ). ამ წრფეთა გადაკვეთის $m$ წერტილი ფარდობითი და აბსოლუტური აჩქარებების ამსახველ $\vec{Om}=\vec{w}_r$ და $\vec{Km}=\vec{w}_a$ ვექტორებს წარმოადგენენ.

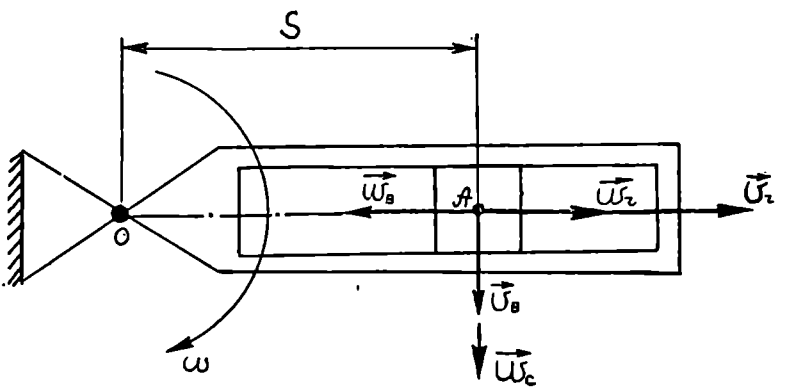
$OmK$ სამკუთხედიდან მივიღებთ:

$$w_a=\frac{1}{2}\,w_e=1\ \text{მ/წმ}^2;$$

$$w_r=w_e\cdot\cos 30^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}=1{,}73\ \text{მ/წმ}^2.$$

### 2. ბრუნვით-წარმტანი მოძრაობის შემთხვევა

ვთქვათ, მოცემულია: ა) კულისური მექანიზმის ნაწილი, რომელიც $O$ ღერძის გარშემო ბრუნავს, და ბ) $A$ ცოცია, რომელსაც კულისის მიმმართველებში შეუძლია მოძრაობა (ნახ. 199).




ნახ. 199

კულისა $\omega=2\ \frac{1}{\text{წმ}}$ კუთხური სიჩქარით ბრუნავს.

ცოცია კულისაზე $s=OA=2+3t^2$ კანონით მოძრაობს ($s$ იზომება სმ-ით).

განსაზღვრეთ ცოციას აბსოლუტური აჩქარება $t=1$ წმ დროს.

ცოციას მოძრაობა მბრუნავი კულისის გასწვრივ ფარდობითი მოძრაობაა; კულისის ბრუნვითი მოძრაობა წარმტანი მოძრაობაა.

ბრუნვით-წარმტანი მოძრაობის დროს $A$ წერტილის აბსოლუტური $\vec{w}_a$ აჩქარება $\vec{w}_r$ ფარდობით, $\vec{w}_e$ წარმტან და $\vec{w}_c$ ბრუნვით აჩქარებებს ადგენს

$$\boxed{\vec{w}_a=\vec{w}_r+\vec{w}_e+\vec{w}_c.} \qquad (ა)$$

$\vec{w}_c$ აჩქარებას დამატებითი აჩქარება ანუ კორიოლისის აჩქარება ეწოდება (ეს წესი მტკიცდება თეორიული მექანიკის სრულ კურსში).

განვსაზღვროთ ამ აჩქარებათა სიდიდეები $t=1$ წმ დროს.

დროის ყოველ მომენტში ცოციას ფარდობითი სიჩქარე $OA$ წრფის გასწვრივაა მიმართული და $t=1$ წმ შემთხვევაში

$$v_r=\frac{ds}{dt}=6t=6\cdot 1=6\ \frac{\text{სმ}}{\text{წმ}}.$$

ცოციას ფარდობითი აჩქარება

$$w_r=\frac{d^2s}{dt^2}=6\ \frac{\text{სმ}}{\text{წმ}^2}.$$

განვსაზღვროთ ცოციას წარმტანი სიჩქარე, როცა $t=1$ წმ.

$$v_e=\omega_e\cdot OA=\omega_e\cdot s=\omega_e(2+3t^2)=\omega_e(2+3)=$$

$$=5\omega_e=5\cdot 2=10\ \text{სმ/წმ}.$$

წარმტანი აჩქარება

$$w=r\omega_e^2=5\cdot 2^2=20\ \text{სმ/წმ}^2.$$

ეს ნორმალური აჩქარება კულისის ბრუნვის $O$ ცენტრისკენაა მიმართული. როცა $w_e=\text{const}$, მაშინ მხები აჩქარება ნულის ტოლია.

დაგვრჩა $\vec{w}_c$ ბრუნვის (კორიოლისის) აჩქარების განსაზღვრა. იგი ფარდობითი სიჩქარის ცვლილებას ახასიათებს წარმტან მოძრაობაში და წარმტანი სიჩქარის ცვლილებას—ფარდობით მოძრაობაში.

კორიოლისის აჩქარების მოდული

$$\boxed{w_c=2\,\omega_e\cdot v_r\cdot\sin\alpha,} \qquad (ბ)$$

სადაც $\omega_e$ წარმტანი მოძრაობის კუთხური სიჩქარეა, ხოლო $\alpha$ კუთხეა $\vec{\omega}_e$ და $\vec{v}_r$ ვექტორებს შორის.

ჩვენს მაგალითში $\alpha=90^\circ$, ამიტომ $\sin\alpha=\sin 90^\circ=1$, მაშინ

$$w_c=2\omega_e\cdot v_r=2\cdot 2\cdot 6=24\ \text{სმ/წმ}^2.$$

დამატებითი (კორიოლისის) აჩქარების მიმართულება განვსაზღვროთ ნ. ე. ჟუკოვსკის წესით.

ფარდობითი სიჩქარის $\bar{v}_r$ ვექტორი 90° კუთხით მოვაბრუნოთ კუთხური (წარმტანი) $\bar{\omega}_e$ სიჩქარის მხარეს.

მობრუნებული $\bar{v}_r$ ვექტორის მიმართულება $\bar{w}_c$ აჩქარების მიმართულებაზე მიგვითითებს.

ყველა აჩქარების მიმართულებების გათვალისწინებით ვიპოვით (ნახ. 199) აბსოლუტური $\bar{w}_a$ აჩქარების მოდულს $t=1$ წმ-თვის:

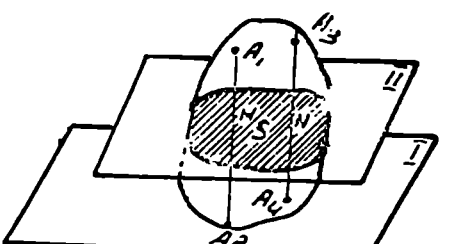
$$w_a = \sqrt{(w_e - w_r)^2 + w_c^2} = \sqrt{(20-6)^2 + 24^2} = 27{,}78 \text{ სმ/წმ}^2.$$

## VI თავი

# მყარი სხეულის ბრტყელ-პარალელური მოძრაობა

### § 1. ცნება მყარი სხეულის ბრტყელ-პარალელური მოძრაობის შესახებ

მყარი სხეულის ბრტყელ-პარალელური მოძრაობა ისეთ მოძრაობას ეწოდება, რომლის დროსაც სხეულის ყოველი წერტილი რომელიღაც უძრავი I სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეში მოძრაობს (ნახ. 200). ბრტყელ მოძრაობას მექანიზმებისა და მანქანების მრავალი ნაწილი ასრულებს, მაგალითად: ბარბაცა — მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმში წრფივ გზაზე მგორავი ბორბალი და სხვა.

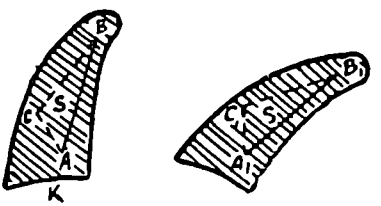


ნახ. 200

მოძრავი სხეული უძრავი (I) სიბრტყის პარალელური (II) სიბრტყით რომ გავკვეთოთ, კვეთში მივიღებთ ბრტყელ ნაკვთს, რომელიც სხეულში რჩება, მაგრამ სხეულთან ერთად გადაადგილდება. ასეთ შემთხვევაში ნაკვთის $S$ სიბრტყისადმი მართობულ $MA_1$ წრფეზე მდებარე სხეულის ყველა წერტილი მოძრაობს ისე, როგორც ამ ნაკვთის $M$ წერტილი.

$NA_2$ მართობზე მდებარე ყველა წერტილი მოძრაობს ისე, როგორც $S$ ნაკვთის $N$ წერტილი და ა. შ.

შემდეგში (II) სიბრტყეს ნახაზის სიბრტყეს შევუთავსებთ და მთელი მყარი სხეულის ნაცვლად მხოლოდ მის კვეთს გამოვსახავთ, ხოლო $S$ კვეთის მდებარეობას მისი ნებისმიერი ორი წერტილის მდებარეობით ან ამ კვეთიდან უცვლელად დაკავშირებული რაიმე წრფივი მონაკვეთის მდებარეობით განვსაზღვრავთ.



ნახ. 201

ვთქვათ, $S$ კვეთი ($K$) მდებარეობიდან. ($L$) მდებარეობაში გადაადგილდა, ხოლო $S$ კვეთთან უცვლელად დაკავშირებულმა $AB$ მონაკვეთმა $A_1B_1$ მდებარეობა დაიკავა (ნახ. 201). ($K$) მდებარეობაში დავსახოთ $C$ წერტილი, რომლის $A$ და $B$ წერტილებიდან $CA$ და $CB$ დაშორებები უცვლელია, მაშინ ვიპოვით ამ წერტილის ახალ $C_1$ მდებარეობას. ამისათვის საჭიროა ($L$) მდებარეობაში $A_1B_1C_1$ სამკუთხედის აგება, რომელიც ($K$) მდებარეობის $ABC$ სამკუთხედის ტოლია.

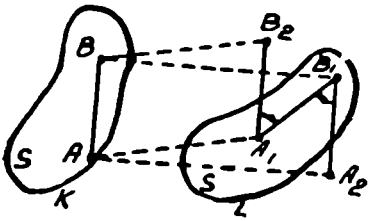
## § 2. ბრტყელი მოძრაობის დაშლა გადატანით და ბრუნვით მოძრაობებად

ვთქვათ, $S$ ბრტყელი ნაკვთი და მასთან უცვლელად დაკავშირებული ნებისმიერი $AB$ წრფე სიბრტყეზე ($K$) მდებარეობიდან ($L$) მდებარეობაში გადაადგილდა (ნახ. 202).

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ნაკვთის გადაადგილება თავისივე სიბრტყეში შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს როგორც ორი მოძრაობის—გადატანითისა და ბრუნვითის ერთობლიობა. ავიღოთ $S$ ნაკვთის ერთი და იგივე მონაკვეთის ორი $AB$ და $A_1B_1$ მდებარეობა. ნაკვთი ჯერ გადავაადგილოთ გადატანითად, ე. ი. ისე, რომ თავის ტრაექტორიაზე მოძრავი $A$ წერტილი მოხვდეს $A_1$ მდებარეობაში, $B$ წერტილმა კი $A$ წერტილის იგივური ტრაექტორია აღწეროს და $B_2$ მდებარეობა დაიკავოს. შემდეგ ნაკვთი $B_2A_1B_1$ კუთხით მოვაბრუნოთ $A_1$ წერტილის გარშემო; ამით $A_1B_2$ მონაკვეთი $A_1B_1$ მდებარეობაში გადავა.

$S$ ნაკვთის გადაადგილება სხვანაირადაც შეიძლება. $AB$ მონაკვეთი თავისთავის პარალელურად გადავაადგილოთ $A_2B_1$ მდებარეობაში, შემდეგ იგი $B_1$ წერტილის გარშემო $A_2B_1A_1$ კუთხით მოვაბრუნოთ. წერ-

ტილს, რომელთან ერთად ნაკვთი თავდაპირველად გადატანითად მოძრაობს, ხოლო შემდეგ მის გარშემო შემობრუნდება, პოლუსი ეწოდება. პირველ შემთხვევაში პოლუსი $A$ წერტილი იყო, მეორეში კი—$B$ წერტილი. რადგან გადაადგილებები შეიძლება იმდენი იყოს, რამდენი წერტილიც აქვს ბრტყელ ნაკვთს, ე. ი. უამრავი, ამიტომ პოლუსად, საზოგადოდ, ნაკვთის ნებისმიერი წერტილის აღება შეიძლება.



ნახ. 202

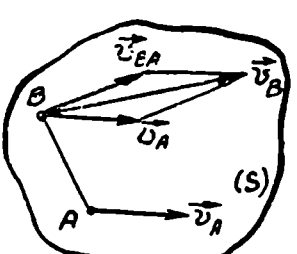
როგორც ჩანს, ბრტყელი ნაკვთის გადატანითი გადაადგილება სხვადასხვანაირია სხვადასხვა პოლუსისათვის, ხოლო მობრუნების მიმართულება ერთნაირია ნებისმიერი პოლუსისათვის, ე. ი.

$$\angle B_2A_1B_1 = \angle A_2B_1A_1.$$

ამრიგად, ბრტყელი ნაკვთის ყოველი მოძრაობა თავისსავე სიბრტყეში შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ორი ბრტყელი ნაკვთის გადატანითი მოძრაობა პოლუსთან ერთად და ბრუნვა ამ პოლუსის გარშემო.

## § 3. ბრტყელი ნაკვთის სხვადასხვა წერტილის სიჩქარეთა შორის დამოკიდებულება

ვთქვათ, $S$ ნაკვთი ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას (ნახ. 203). ნებისმიერი $A$ წერტილი მივიღოთ პოლუსად, მაშინ, აღნიშნულის ძალით, ამ ნაკვთის სხვა ნებისმიერი $B$ წერტილი ერთდროულად მონაწილეობას იღებს ორ მოძრაობაში: წარმტანში (გადატანითში $A$ პოლუსთან ერთად) და ფარდობითში (პოლუსის გარშემო ბრუნვაში).



ნახ. 203

სიჩქარეთა შეკრების კანონის თანახმად, $B$ წერტილის აბსოლუტური სიჩქარისათვის გვექნება

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA},$$

სადაც $\vec{v}_{BA} = \omega \cdot AB.$

აქ $\vec{v}_{BA}$ ვექტორი არის $B$ წერტილის $A$ პოლუსის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობის სიჩქარე:

$\omega$ —ბრტყელი ნაკვთის კუთხური სიჩქარე;

$AB$ —ბრუნვის რადიუსი.

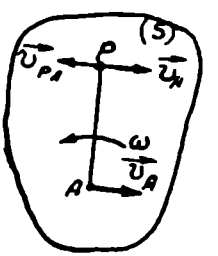
ამრიგად, ბრტყელი ნაკვთის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე დროის ყოველ მოცემულ მომენტში პოლუსის სიჩქარისა და ამ პოლუსის გარშემო წერტილის ბრუნვის სიჩქარის გეომეტრიული ჯამის ტოლია.

## §. 4. სიჩქარეთა მყისა ცენტრი

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ დროის ყოველ მომენტში არსებობს წერტილი, რომელიც უცვლელად დაკავშირებულია ბრტყელ ნაკვთთან და რომლის სიჩქარე ამ მომენტში ნულის ტოლია. ამ წერტილს სიჩქარეთა მყისა ცენტრი ეწოდება.

ვთქვათ, ჩვენთვის ცნობილია ბრტყელი $S$ ნაკვთის რომელიღაც $A$ წერტილის $\bar{v}_A$ სიჩქარე და ნაკვთის $\omega$ კუთხური სიჩქარე, რომლის მიმართულება აღნიშნულია 204-ე ნახ-ზე.

$A$ წერტილი პოლუსად მივიჩნიოთ, მაშინ ნაკვთის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე პოლუსის $\bar{v}_A$ სიჩქარისა და ამ პოლუსის გარშემო წერტილის ბრუნვის სიჩქარის გეომეტრიული ჯამის ტოლია.




ნახ. 204

$A$ წერტილიდან $\bar{v}_A$ სიჩქარის მიმართულებისადმი აღვმართოთ მარცხობი და მასზე ბრტყელი ნაკვთის ბრუნვის მიმართულებით შევზომოთ $AP$ მონაკვეთი. $AP$ მონაკვეთი პოლუსის $\bar{v}_A$ სიჩქარის რიცხვითი მნიშვნელობის $\omega$ კუთხურ სიჩქარესთან ფარდობის ტოლია.

$$AP=\frac{v_A}{\omega}.$$

მაშინ $P$ წერტილს ექნება ორი სიჩქარე: პოლუსის $\bar{v}_A$ სიჩქარე და $A$ პოლუსის გარშემო ბრუნვის $\bar{v}_{PA}$ სიჩქარე. თუ მხედველობაში მივიღებთ ბრტყელი ნაკვთის ბრუნვის მიმართულებას, ვიპოვით, რომ ეს სიჩქარეები ერთ წრფეზე მდებარეობენ და თანაწინააღმდეგი მიმართულებები აქვთ; გარდა ამისა, ამ სიჩქარეებს ტოლი მოდულები აქვთ, რადგან

$$v_{PA}=\omega\cdot AP=\omega\cdot\frac{v_A}{\omega}=v_A.$$

ამრიგად, $P$ წერტილის სიჩქარე

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA} = 0.$$

მაშასადამე, $P$ წერტილი აღებულ მომენტში სიჩქარეთა მყისა ცენტრია.

$P$ წერტილს პოლუსად თუ მივიღებთ (ნახ. 205), მაშინ ნებისმიერი $B$ წერტილის სიჩქარე განისაზღვრება ფორმულით

$$\vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{v}_{BP}.$$

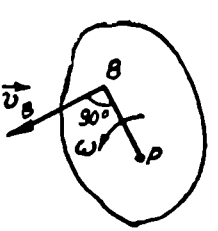
მაგრამ $\vec{v}_P = 0$, ამიტომ

$$v_B = v_{BP} = PB \cdot \omega,$$

ე. ი. ბრტყელი ნაკვთის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე მოდულით უდრის ბრტყელი ნაკვთის კუთხური სიჩქარის ნამრავლს იმ მონაკვეთის სიგრძეზე, რომელიც წერტილს აერთებს სიჩქარეთა მყისა ცენტრთან; სიჩქარის ვექტორი ამ მონაკვეთის მართობულია და ბრტყელი ნაკვთის ბრუნვის მხარესაა მიმართული.

შენიშვნა. სიტყვა „მყისა“ მიუთითებს იმაზე, რომ წერტილი სიჩქარეთა ცენტრია მხოლოდ მოცემულ მომენტში, შემდეგ კი პოლუსად უკვე სხვა წერტილი იქნება.

ამრიგად, თუ წინათ ბრტყელი მოძრაობა დაყვანილი იყო გადატანითსა და ბრუნვითს მოძრაობაზე, ახლა სიჩქარეთა მყისა ცენტრის ცნების შემოღებით დავასკვნით, რომ ყოველი არაგადატანითი გადაადგილების განხორციელება სიჩქარეთა მყისა ცენტრის (მობრუნების ცენტრის) გარშემო ერთი შემობრუნებით შეიძლება.



ნახ. 205

მყისა ცენტრის გარშემო შემობრუნების კუთხურ სიჩქარეს მყისა კუთხური სიჩქარე ეწოდება.

ახლა გამოვიანგარიშოთ ბრტყელი ნაკვთის რაიმე წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე. ვთქვათ, მოცემულ მომენტში ცნობილია ბრტყელი ნაკვთის $A$ წერტილის $\vec{v}_A$ სიჩქარე და (ნახ. 206) ამ წერტილის მყისა $P$ ცენტრიდან დაშორების $PA$ მანძილი.

ნაკვთის მყისა კუთხურ სიჩქარეს განვსაზღვრავთ ფორმულით

$$\omega = \frac{v_A}{PA},$$

სადაც

$$\bar{v}_A \perp PA.$$

როდესაც ცნობილია $\omega$ კუთხური სიჩქარე, მაშინ ადვილად განვსაზღვრავთ ნებისმიერი $B$ წერტილის სიჩქარის მოდულსა და მიმართულებას; მართლაც, მოდული

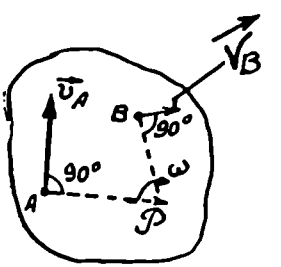
$$v_B = PB \cdot \omega = \frac{v_A}{PA} \cdot PB,$$

საიდანაც

$$\boxed{\frac{v_B}{v_A} = \frac{PB}{PA}.} \qquad (ა)$$

ამრიგად, დროის აღებულ მომენტში ნაკვთის სხვადასხვა წერტილის სიჩქარეთა მოდულების ფარდობა ამ წერტილებიდან ნაკვთის სიჩქარეთა მყისა ცენტრამდე შესაბამისი მანძილების ფარდობის ტოლია.

გარდა ამისა, $\bar{v}_A \perp PA$ და $\bar{v}_B \perp PB$.



ნახ. 206

განსახილველი წერტილების სიჩქარეთა მიმართულებები ნაკვთის მიმართულებას ემთხვევა.

განვიხილოთ ასეთი მაგალითი: ვთქვათ, $OA$ მრუდმხარა თანაბრად ბრუნავს $\omega$ კუთხური სიჩქარით (ნახ. 207, ა). საჭიროა $B$ ცოციას სიჩქარის განსაზღვრა. გაანგარიშების ჩასატარებლად საჭირო ზომები მოცემულია.

ვპოულობთ $AB$ ბარბაცას სიჩქარეთა მყისა ცენტრს.

მრუდმხარას $A$ წერტილის $\bar{v}_A$ სიჩქარე $OA$ რადიუსის მართობულია და მოდულით $(OA \cdot \omega)$ ნამრავლის ტოლია.

$B$ წერტილის სიჩქარე $BO$ წრფის გასწვრივაა მიმართული.

$A$ და $B$ წერტილებიდან ამ წერტილების სიჩქარეებისადმი აღმართული მართობების გადაკვეთის $P$ წერტილი ბარბაცას სიჩქარეთა მყისა ცენტრის მდებარეობას განსაზღვრავს.

$AB$ ბარბაცას მყისა კუთხური სიჩქარე

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{PA} = \frac{\omega \cdot OA}{PA}.$$

$B$ ცოციას სიჩქარე

$$v_B = \omega_{AB} \cdot PB = \frac{\omega \cdot OA}{PA} \cdot PB = v_A \cdot \frac{PB}{PA},$$

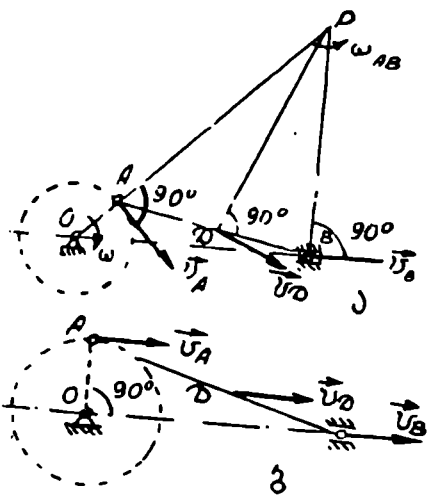
ანუ

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{PB}{PA}.$$

დაგვრჩა $PA$ და $PB$ მანძილთა განსაზღვრა, რომელთა გამოთვლაზე არ შევჩერდებით.

ბარბაცას ნებისმიერი $D$ წერტილის სიჩქარის განსაზღვრისათვის $P$ და $D$ წერტილები $PD$ მონაკვეთით შევაერთოთ და $D$ წერტილის სიჩქარე $PD$ მონაკვეთის მართობულად მივმართოთ. ამ სიჩქარის მოდული

$$v_D = PD \cdot v_{AB} = v_A \cdot \frac{PD}{PA}.$$




ნახ. 207

განვმარტოთ ზოგიერთი თავისებურება, რომელიც შეიძლება შეგვხვდეს სიჩქარეთა მყისა ცენტრის პოვნის დროს:

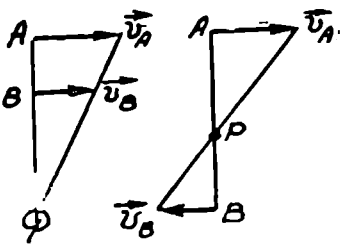
ა) ორი წერტილის სიჩქარეთა მართობები თანაპარალელურებია. ამ შემთხვევას ვხვდებით მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმში, როდესაც იგი ნახ. 207, ბ სახით არის წარმოდგენილი (კუთხე $AOB = 90°$). ამ შემთხვევაში სიჩქარეთა მყისა ცენტრი უსასრულობაშია; ნაკვთი გადაადგილდება ისე, თითქოს მოძრაობა გადატანითი იყოს. მაშასადამე, ამ მომენტში ყველა წერტილის სიჩქარე თანატოლია და სიჩქარეთა ვექტორები თანაპარალელურია. ბარბაცას ნებისმიერი წერტილის სიჩქარის განსაზღვრისათვის საკმარისია რაიმე ერთი წერტილის სიჩქარის ცოდნა.

ბ) ორი $A$ და $B$ წერტილის სიჩქარეთა ვექტორებისადმი აღმართული მართობები ერთ წრფედ თავსდება (ნახ. 208). ამ შემთხვევაში სიჩქარეთა $P$ მყისა ცენტრი ამ წრფისა და სიჩქარეთა ვექტორების ბო-

ლო წერტილების მაერთებელი წრფის თანკვეთის წერტილშია. მართლაც, ასეთი აგების დროს სამკუთხედთა მსგავსებიდან გვაქვს

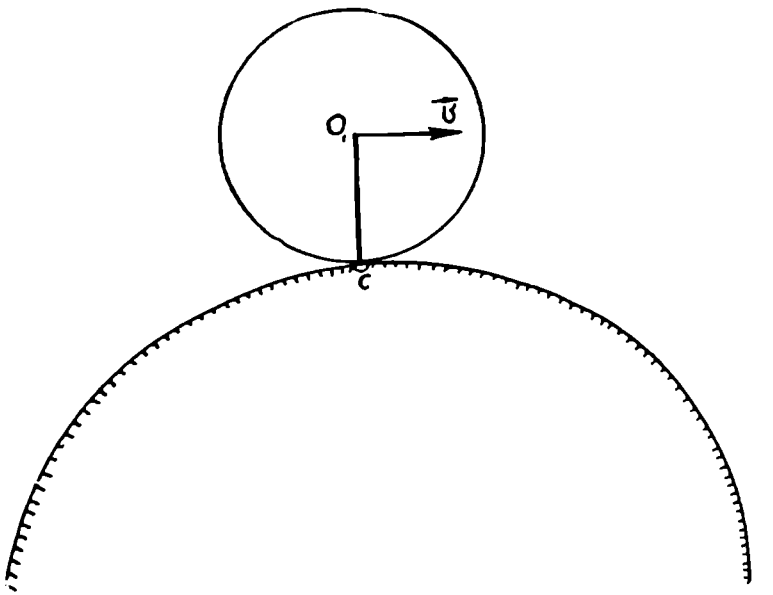
$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{PA}{PB},$$

ე. ი. $A$ და $B$ წერტილთა სიჩქარეები ამ წერტილების სიჩქარეთა მყისა-ცენტრიდან დაშორების მანძილის პროპორციულია.




ნახ. 208.

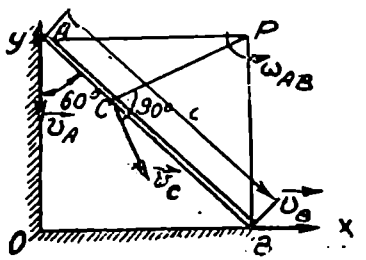
გ) ზოგჯერ სიჩქარეთა მყისა ცენტრის მოძებნისას სარგებლობენ იმით, რომ მყისა ცენტრის სიჩქარე ნულს უდრის. ამის გამო ეძებენ ნაკვთის ისეთ წერტილს, რომლის სიჩქარე აღებულ მომენტში ნულის ტოლია. ასე, მაგალითად, გზაზე მოძრავი ბორბლის (ნახ. 209) $M$ წერტილი სიჩქარეთა მყისა ცენტრი იქნება, რადგან მისი სიჩქარე ნულის ტოლია.




ნახ. 209

## მაგალითები

1. $l=2$ მ სიგრძის $AB$ ღერო (ნახ. 210) ბოლოებით მუდამ ეყრდნობა ორ თანამართობ $Ox$ და $Oy$ წრფეს და განაგრძობს მოძრაობას ამ წრფეებზე. იპოვეთ სიჩქარეთა მყისა ცენტრის მდებარეობა იმ მომენტში, როდესაც კუთხე $AOB=60°$. განსაზღვრეთ აგრეთვე $A$ და $C$ წერტილთა სიჩქარეები, თუ $AC=0{,}5$ მ და განსახილველ მომენტში $B$ წერტილის სიჩქარე უდრის 2 მ/წმ.



ნახ. 210

### ამოხსნა

$AB$ ღერო ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას, მისი ბოლოები წრფივ ტრაექტორიებზე მოძრაობენ, მაშასადამე, $A$ და $B$ წერტილთა სიჩქარეები ამ წრფეების გასწვრივ არიან მიმართული.

თუ სიჩქარე $B$ წერტილში ისე იქნება მიმართული, როგორც ეს 210 ნახაზზეა აღნიშნული, მაშინ სიჩქარე $A$ წერტილში $AO$ წრფეზე შეუღლად ქვემოთ იქნება მიმართული.

$AB$ ღეროს სიჩქარეთა მყისა ცენტრის საპოვნელად $A$ და $B$ წერტილებიდან $\bar{v}_A$ და $\bar{v}_B$ სიჩქარეებისადმი მართობები აღვმართოთ; ისინი $P$ წერტილში გადაიკვეთებიან, რომელიც ღეროს სიჩქარეთა მყისა ცენტრი იქნება.

ახლა ვიპოვოთ ღეროს მყისა კუთხური $\omega_{AB}$ სიჩქარის სიდიდე

$$\omega_{AB}=\frac{v_B}{PB}.$$

$ABP$ მართკუთხა სამკუთხედიდან გვაქვს:

$$PB=AB\cdot\cos 60°=2\cdot\frac{1}{2}=1 \text{ მ};$$

$$PA=AB\cdot\cos 30°=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3} \text{ მ};$$

$$\omega_{AB}=\frac{v_B}{PB}=\frac{2}{1}=2\ \frac{1}{\text{წმ}}.$$

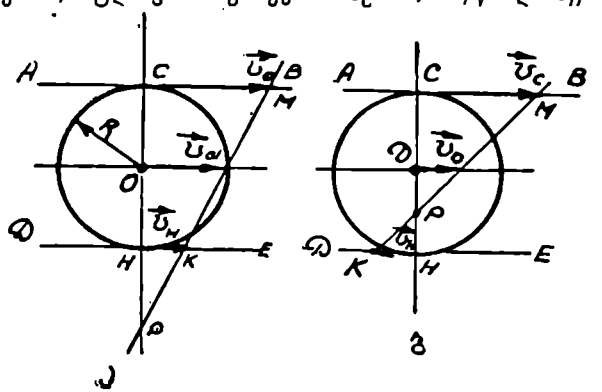
$A$ წერტილის სიჩქარე

$$v_A=\omega_{AB}\cdot PA=2\sqrt{3} \text{ მ/წმ}.$$

$C$ წერტილის სიჩქარის საპოვნელად $B$ და $C$ წერტილები $BC$ მონაკვეთით შევაერთოთ და $PC$-დმი მართობული სიჩქარის ვექტორი გავატაროთ, მაშინ

$$v_C = \omega_{AB} \cdot PC.$$

**2.** ორი პარალელურკბილებიანი $AB$ და $DE$ ლარტყა (ნახ. 211, ა) მოდებაშია $R = 0{,}4$ მ რადიუსის კბილა თვალთან და მოძრაობს ერთი მიმართულებით, მუდმივი სიჩქარეებით $v_C = 0{,}6$ მ/წმ და $v_H = 0{,}2$ მ/წმ.




ნახ. 211

განსაზღვრეთ კბილა თვლის $\omega$ კუთხური სიჩქარე, კბილა თვლის $O$ ცენტრის სიჩქარე და სიჩქარეთა $P$ მყისა ცენტრის მდებარეობა. როგორ შეიცვლება ეს სიდიდეები, თუ $AB$ ლარტყა იმოძრავებს ერთ მხარეს, ხოლო $DE$ ლარტყა—მეორე მხარეს იმავე სიჩქარით.

ამოხსნა

რადგან ლარტყები მოდებულ მდგომარეობაშია კბილა თვალთან, ამიტომ კბილა თვლის შეხების $C$ და $H$ წერტილების სიჩქარეები შესაბამისად ლარტყის $\vec{v}_C$ და $\vec{v}_H$ სიჩქარეების ტოლი იქნება (აქ სრიალს ადგილი არა აქვს). $C$ და $H$ წერტილებიდან აღვმართოთ მართობები მათი სიჩქარეებისადმი და დავრწმუნდებით, რომ ეს მართობები თანხვედნილია (ე. ი. ერთ წრფეზე მდებარეობენ); ასეთ შემთხვევაში მყისა ცენტრი $CH$ წრფის გაგრძელებისა და მოცემული ორი სიჩქარის ბოლოების მაერთებელ წრფესთან გადაკვეთის წერტილში მოხვდება. მყისა ცენტრის მდებარეობა ($P$ წერტილი) განისაზღვრება $PCM$ და $PHK$ სამკუთხედთა მსგავსებიდან

$$\frac{v_C}{v_H} = \frac{PC}{PH};$$

სიჩქარეთა მნიშვნელობების ჩასმის შემდეგ მივიღებთ

$$\frac{0,6}{0,2}=\frac{PC}{PH}=\frac{2R+PH}{PH}=\frac{0,8+PH}{PH},$$

ანუ

$$3PH=0,8+PH;$$

აქედან

$$PH=0,4 \text{ მ} \qquad \text{და} \qquad PC=1,2 \text{ მ}.$$

მყისა კუთხური სიჩქარე

$$\omega_P=\frac{v_A}{PC}=\frac{0,6}{1,2}=0,5\frac{1}{\text{წმ}}.$$

დისკოს ცენტრის სიჩქარე

$$v_0=PO\cdot\omega_P=0,8\cdot 0,5=0,4 \text{ მ/წმ}.$$

211, ბ ნახაზზე წარმოდგენილი შემთხვევისათვის $FCM$ და $PHK$ ამკუთხედთა მსგავსებიდან მივიღებთ

$$\frac{v_C}{v_H}=\frac{0,6}{0,2}=\frac{PC}{PH}=\frac{0,4+OP}{0,4-OP}=3,$$

საიდანაც

$$1,2-3\cdot OP=0,4+OP,$$

ანუ

$$OP=0,2 \text{ მ},$$

ხოლო

$$\omega_P=\frac{v_A}{OP+OC}=\frac{0,6}{0,6}=1\frac{1}{\text{წმ}};$$

$$v_0=PO\cdot\omega_P=0,2\cdot 1=0,2 \text{ მ/წმ}.$$

8. $R=20$ სმ რადიუსის უძრავი კბილანას $O$ ღერძის გარშემო $\omega=4\frac{1}{\text{წმ}}$ კუთხური სიჩქარით მბრუნავ $OA$ მრუდმხარას (ნახ. 212) ბრუნვით მოძრაობაში მოჰყავს მის $A$ ბოლოზე დასმული $r=10$ სმ რადიუსის კბილანა. განსაზღვრეთ მოძრავი კბილანას $A$, $B$, $C$ და $D$ წერტილთა სიჩქარეების სიდიდე და მიმართულება, თუ $CE\perp BD$.

ამოხსნა

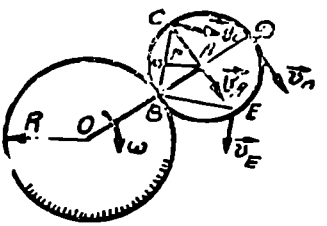
$R$ რადიუსის კბილანა უძრავია, ხოლო $r$ რადიუსის კბილანა მასზე უსასრულოდ გორავს. $v_B=0$, ამიტომ მცირე კბილანას სიჩქარეთა მყისა ცენტრი $B$ წერტილში იქნება.

მყისა კუთხური სიჩქარის სიდიდე რომ ვიპოვოთ, უნდა ვიპოვოთ $A$ წერტილის სიჩქარე. $A$ წერტილი $OA$ მრუდმხარას ეკუთვნის და ერთდროულად ის წერტილია, რომელზედაც $r$ რადიუსის მოძრავი მცირე კბილანას ღერძი გადის, ე. ი.

$$v_A=\omega\cdot OA=4\,(R+r)=4\cdot 30=120\ \frac{\text{სმ}}{\text{წმ}}.$$

როცა ცნობილია $A$ წერტილის სიჩქარე, მაშინ ადვილი საპოვნელია მცირე კბილანას მყისა კუთხური სიჩქარის სიდიდე; მართლაც

$$\omega_B=\frac{v_A}{r}=\frac{120}{10}=12\ \frac{1}{\text{წმ}}.$$



ნახ. 212

$C$, $D$ და $E$ წერტილთა სიჩქარეების საპოვნელად ეს წერტილები $BC$, $BD$ და $BE$ წრფეებით სიჩქარეთა მყისა $B$ ცენტრთან შევაერთოთ და გავატაროთ სიჩქარეთა ვექტორები, რომლებიც ამ წრფეთა თანამართობულად იქნებიან მიმართული, მაშინ

$$v_C=\omega_B\cdot CB=12\cdot 10\sqrt{2}=120\sqrt{2}\ \text{სმ/წმ};$$
$$v_D=\omega_B\cdot BD=12\cdot 20=140\ \text{სმ/წმ};$$
$$v_E=v_C.$$

## VII თავი

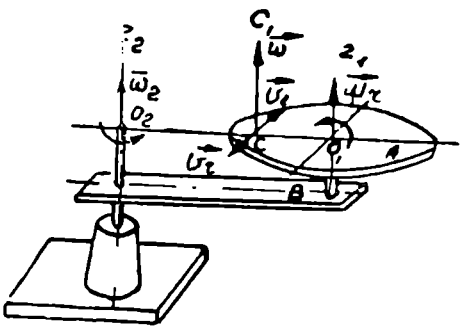
# მყარი სხეულის მოძრაობათა შეკრება (ანუ მყარი სხეულის შედგენილი მოძრაობა)

### § 1. პარალელური ღერძების გარშემო ორი ბრუნვითი მოძრაობის შეკრება

ვთქვათ, $A$ დისკო (ნახ. 213) $\overline{\omega}_1$ კუთხური სიჩქარით ბრუნავს ვერტიკალური ღერძის გარშემო. ვთქვათ, დისკოს ბრუნვის ღერძი $B$ ფირფიტაში გადის, ხოლო $B$ ფირფიტა, თავის მხრივ, $\overline{\omega}_2$ კუთხური სიჩქარით ბრუნავს უძრავი ვერტიკალური ღერძის გარშემო.

ამრიგად, $A$ დისკო მონაწილეობას იღებს რთულ ბრუნვაში: ერთი მხრივ იგი $\vec{\omega}_1$ კუთხური სიჩქარით ფარდობითს ბრუნვას ასრულებს ფირფიტის მიმართ, მეორე მხრივ კი—წარმტან ბრუნვას ფირფიტასთან ერთად $\vec{\omega}_2$ კუთხური სიჩქარით.

დისკოს ფარდობითი და წარმტანი ბრუნვა შეიძლება სრულდებოდეს ერთ ან სხვადასხვა მხარეს (ნახ. 213-ზე ბრუნვა ერთ მხარეს წარმოებს). ცხადია, ამ ორი ბრუნვის ერთობლიობით სხეულის წერტილების დაშორება ბრუნვის ღერძებისადმი მართობულ სიბრტყემდე არ შეიცვლება; ამიტომ რთული მოძრაობა ამ სიბრტყის პარალელურად იწარმოებს, ე. ი. ადგილი ექნება ბრტყელ - პარალელურ მოძრაობას.



ნახ. 213

ბრუნვის $O_1$ და $O_2$ ცენტრები $O_1O_2$ წრფით შევაერთოთ და დავამტკიცოთ, რომ ამ წრფეზე არსებობს $C$ წერტილი, რომლის სიჩქარე ნულის ტოლია.

მართლაც, $C$ წერტილს ერთდროულად ექნება ორი სიჩქარე:

1) ფარდობითი ბრუნვის მხარეს მიმართული $(\vec{v}_r)_C$ სიჩქარე, რომლის მოდული

$$(v_r)_C = \omega_1 \cdot O_1C \qquad \text{და}$$

2) წარმტანი ბრუნვის მხარეს მიმართული $(\vec{v}_e)_C$ სიჩქარე, რომლის მოდული

$$(v_e)_C = \omega_2 \cdot O_2C.$$

ამ შემთხვევაში აბსოლუტური სიჩქარის მოდული ამ ორი სიჩქარის მოდულების სხვაობას უდრის

$$(v_a)_C = (v_r)_C - (v_e)_C = \omega_1 \cdot O_1C - \omega_2 \cdot O_2C.$$

მაგრამ $C$ წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე უნდა იყოს ნულის ტოლი, ამიტომ

$$\omega_1 \cdot O_1C = \omega_2 \cdot O_2C. \qquad (ა)$$

ცხადია, რომ $C$ წერტილზე გამავალი და $O_1z_1$ და $O_2z_2$ ღერძების პარალელური $CC_1$ წრფის ყველა წერტილს ნულის ტოლი სიჩქარეები

ექნება, რადგან ეს წერტილები იმავე პირობებშია, როგორც თვით $C$ წერტილი.

ამრიგად, დისკო (ბრტყელი ნაკვთი) შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც $CC_1$ ღერძის გარშემო მყისად მბრუნავი ნაკვთი.

$CC_1$ ცრფეს (წირს) ბრუნვის მყისა ღერძი ეწოდება.

მაშასადამე, მყარი სხეულის ბრუნვის მყისა ღერძი ეწოდება სხეულის უძრავ წერტილში გამავალ წრფეს, რომლის წერტილთა სიჩქარეები ამ მომენტში ნულის ტოლია.

(ა) გამოსახულებიდან გვაქვს

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2C}{O_1C}. \qquad (ბ)$$

(ბ) გამოსახულებით განისაზღვრება $C$ წერტილის ადგილი და ამით ბრუნვის მყისა ღერძის მდებარეობაც.

(ბ) გამოსახულებიდან ჩანს, რომ $CC_1$ ღერძი $O_1z_1$ და $O_2z_2$ ღერძებს შორის მანძილს მათი კუთხური სიჩქარეების უკუპროპორციულ ნაწილებად ყოფს.

ახლა $A$ სხეულის მყისა $CC_1$ ღერძის გარშემო აბსოლუტური მოძრაობის ბრუნვის მყისა კუთხური $\omega$ სიჩქარის სიდიდის განსაზღვრაზე გადავიდეთ. ამისათვის განვიხილოთ $O_1z_1$ ბრუნვის ღერძზე მდებარე $O_1$ წერტილის მოძრაობა.

$O_2z_2$ ღერძის გარშემო ბრუნვისას $O_1$ წერტილის ხაზობრივი სიჩქარე

$$v_{O1} = \omega_2 \cdot O_1O_2.$$

$O_1$ წერტილის სიჩქარე ფარდობით მოძრაობაში ($O_1z_1$ ღერძის გარშემო) ნულის ტოლია, რადგან $O_1$ წერტილი $O_1z_1$ ბრუნვის ღერძზე ძევს. ამავე დროს ბრუნვა მყისა $CC_1$ ღერძის გარშემო $\omega$ კუთხური სიჩქარით წარმოებს, მაშასადამე,

$$\omega = \frac{v_{O1}}{CO_1} = \frac{\omega_2 \cdot O_1O_2}{CO_1}.$$

რადგან მონაკვეთი $O_2O_1 = O_2C - CO_1$, ამიტომ

$$\omega = \omega_2 \cdot \frac{O_2C + CO_1}{CO_1} = \omega_2 \left( \frac{O_2C}{CO_1} + 1 \right);$$

მაგრამ, (ა) ტოლობის ძალით,

$$\omega_2 \cdot \frac{O_2C}{CO_1} = \omega_1,$$

ამიტომ

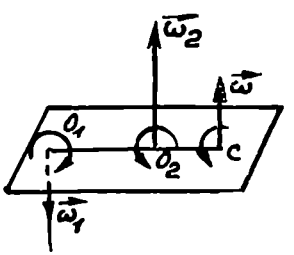
$$\omega = \omega_1 + \omega_2. \qquad (1)$$

მაშასადამე, როდესაც სხეული მონაწილეობას იღებს პარალელური ღერძების გარშემო ორ ბრუნვითს მოძრაობაში, თან ამ მოძრაობებს ერთ მხრივ მიმართული კუთხური სიჩქარეები აქვთ, ვღებულობთ იმავე მიმართულების მყისა ბრუნვას, ნაკრები კუთხური სიჩქარე კი მოცემული კუთხური სიჩქარეების ჯამის ტოლი იქნება. გარდა ამისა, მყისა ღერძი მოცემული ბრუნვის ღერძებს შორის მანძილს კუთხური სიჩქარეების უკუპროპორციულ ნაწილებად ყოფს.

თუ აბსოლუტური, ფარდობითი და წარმტანი ბრუნვების კუთხურ სიჩქარეებს $\vec{\omega}$, $\vec{\omega}_1$ და $\vec{\omega}_2$ ვექტორებით გამოვსახავთ, შევნიშნავთ, რომ კუთხური სიჩქარეები იკრიბება ისე, როგორც პარალელური ძალები სტატიკაში; მასთან, ფარდობითი და წარმტანი კუთხური სიჩქარეების ვექტორები მდგენელებად განიხილება, ხოლო აბსოლუტური კუთხური სიჩქარის ვექტორი—ტოლქმედად.

ამ ანალოგიის გამოყენებით, ანტიპარალელური ღერძების გარშემო ბრუნვისას კუთხური სიჩქარეების შეკრებისას (ნახ. 214), ვიპოვით

$$\omega = \omega_2 - \omega_1. \qquad (2)$$




ნახ. 214

ზემოთ მოყვანილი ბრუნვათა შეკრების მაგალითებიდან დავასკვნით, რომ სამი ცენტრი $O_1$, $O_2$ და $C$ მუდამ ერთ წრფეზე ძევს.

როდესაც $\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_2$, მაშინ

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 = 0,$$

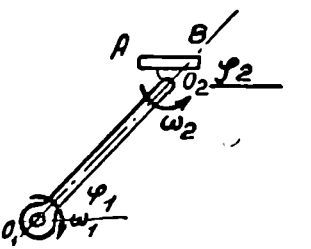
ე. ი. მხოლოდ გადატანითი მოძრაობა გვექნება.

ამრიგად, ყოველი გადატანითი მოძრაობა ორი ბრუნვითი მოძრაობით შეიძლება შეიცვალოს. ბრუნვათა ასეთ ერთობლიობას ბრუნვათა წყვილი ეწოდება.

ბრუნვათა წყვილის მაგალითს ველოსიპედის $AB$ პედალის მოძრაობა წარმოადგენს (ნახ. 215).

ჩვენთვის ცნობილია, რომ ჰორიზონტალურ მდგომარეობაში ფეხით შეკავებული პედალი წრიულ გადატანით მოძრაობას ასრულებს. ეს

მოძრაობა შეიძლება განვიხილოთ როგორც ორი ბრუნვის ერთობლიობა პარალელური ღერძების გარშემო: პედალის ფარდობითი ბრუნვისა $O_2$ ცენტრის გარშემო $\omega_2$ კუთხური სიჩქარით, და მისი წარმტანი ბრუნვისა მრუდმხარასთან ერთად $O_1$ ცენტრის გარშემო $\omega_1$ კუთხური სიჩქარით; მასთან, $\omega_1$ და $\omega_2$-ს ურთიერთშებრუნებული ბრუნვის მიმართულება აქვთ.

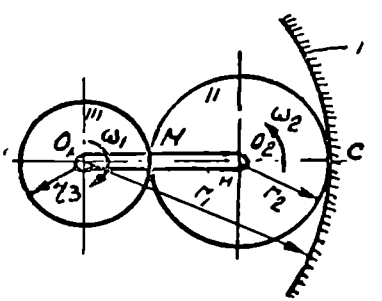


ნახ. 215

იმის გამო, რომ დროის ერთსა და იმავე შუალედში $O_2$ ცენტრის გარშემო პედალის მობრუნების $\varphi_2$ კუთხე $O_1$ ცენტრის გარშემო მრუდმხარას მობრუნების $\varphi_1$ კუთხის ტოლია, $\vec{\omega}_1$ და $\vec{\omega}_2$ კუთხური სიჩქარეები მოდულებით ტოლია.

## მაგალითი

216 ნახ-ზე წარმოდგენილ მექანიზმში $O_1$ ღერძის გარშემო მბრუნავი $O_1O_2$ მრუდმხარა წუთში 120 ბრუნს ასრულებს. მრუდმხარას $O_2$ თითზე თავისუფლად დაცმული II კბილა თვალი მასთან მოდებული უძრავი I ბორბლის შიგა წრეწირზე გორავს და ბრუნვით მოძრაობაში მოჰყავს მასთან მოდებული და $O_1$ უძრავ ღერძზე თავისუფლად დაცმული III კბილა თვალი. კბილა თვლების რადიუსები: $r_1=50$ სმ, $r_2=20$ სმ და $r_3=10$ სმ.



ნახ. 216

იპოვეთ III კბილა თვლის კუთხური სიჩქარე.

## ამოხსნა

II კბილა თვალი რთულ მოძრაობას ასრულებს; ფარდობითი მოძრაობაა $O_2$ ღერძის გარშემო ბრუნვა მრუდმხარას მიმართ; წარმტანი მოძრაობა კი—მრუდმხარასთან ერთად ბრუნვა $O_1$ ღერძის გარშემო.

მრუდმხარას კუთხური სიჩქარე ანუ წარმტანი კუთხური სიჩქარე

$$\omega_1=\frac{\pi n}{30}=\frac{\pi\cdot 120}{30}=4\pi\ \frac{1}{\text{წმ}}.$$

II კბილა თვლის აბსოლუტური ბრუნვის მყისა ცენტრი $C$ წერტილშია (რადგან ეს წერტილი უძრავია); ამ წერტილში II კბილა თვალი მოდებულია I კბილა თვალზე; მაშასადამე, II კბილა თვლის ფარდობითი ბრუნვა $O_2$ ღერძის გარშემო მრუდმხარას ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით წარმოებს. $O_1O_2$ მრუდმხარას მიმართ კბილა თვლის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე იყოს $\omega_2$. რადგან $C$ წერტილის სიჩქარე ნულია

$$\omega_2 r_2 - \omega_1(r_1+2r_2)=0,$$

ანუ

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1+2r_2}{r_2} = \frac{10+40}{20} = \frac{5}{2},$$

საიდანაც

$$\omega_2=\omega_1\frac{5}{2} = \frac{4\pi\cdot 5}{2} = 10\,\pi\,\frac{1}{\text{წმ}}.$$

II კბილა თვლის აბსოლუტური კუთხური სიჩქარე განისაზღვრება (2) ფორმულით

$$\omega=\omega_2-\omega_1=10\pi-4\pi=6\pi\ \frac{1}{\text{წმ}}.$$

III კბილა თვლის საძიებელი $\omega_3$ კუთხური სიჩქარე რომ ვიპოვოთ, წინასწარ II და III კბილა თვლების შეხების $M$ წერტილის სიჩქარე უნდა განვსაზღვროთ

$$v_M=\omega\cdot CM=6\,\pi\cdot 2r_3=240\,\pi\ \text{სმ/წმ}.$$

მაშასადამე,

$$\omega_3=\frac{v_M}{r_3} = \frac{240\pi}{10} = 24\,\pi\,\frac{1}{\text{წმ}}.$$

216-ე ნახაზზე ისეთი მექანიზმის სქემაა მოყვანილი, რომელშიაც I კბილა თვალი უძრავია, ხოლო II—სატართან ერთად III კბილა თვლის $O_1$ ღერძის გარშემო ბრუნავს; გარდა ამისა, იგი ბრუნავს საკუთარი $O_2$ გეომეტრიული ღერძის გარშემოც.

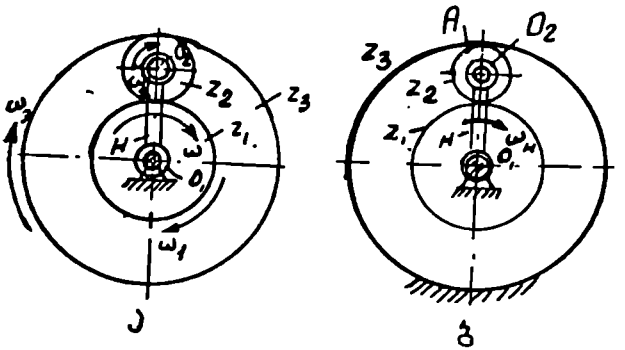
216-ე ნახ-ზე გამოსახულ მექანიზმს უძრავი I კბილა თვლის შემთხვევაში პლანეტარული მექანიზმი ეწოდება, I კბილა თვალს მზიური კბილა თვალი ჰქვია, ხოლო II კბილა თვალს—პლანეტარული ანუ სატელიტური (თანამგზავრი) კბილა თვალი.

გადაცემას, რომელსაც უძრავი (მზიური) კბილა თვალი არა აქვს (ნახ. 217, ა), დიფერენციალური გადაცემა (ან უბრალოდ, დიფერენციალი) ეწოდება.

217 ა, ნახაზზე წარმოდგენილი გადაცემა უძრავი $O_1$ ღერძის გარშემო $\omega_1$ და $\omega_2$ კუთხური სიჩქარეებით მბრუნავი ცენტრალური $z_1$ და

$z_2$ კბილა თვლებისა და $\omega_2$ აბსოლუტური კუთხურსიჩქარიანი $z_3$ სატელიტისაგან შედგება. $H$ სატარის კუთხური სიჩქარე იყოს $\omega_H$.

ჩამოვაყალიბოთ $z_1$, $z_2$ და $H$ რგოლების $\omega_1$, $\omega_2$ და $\omega_H$ კუთხური სიჩქარეების დამაკავშირებელი ფორმულა.




ნახ. 217

რგოლების ფარდობითი მოძრაობა არ შეიცვლება, თუ მთელ მექანიზმს დამატებითს ბრუნვას მივანიჭებთ $O_1$ ღერძის გარშემო $\omega_H$ კუთხური სიჩქარით (ე. ი. $H$ რგოლის კუთხური სიჩქარის მოდულის ტოლი, მაგრამ შებრუნებული მიმართულების კუთხური სიჩქარით). მაშინ მექანიზმის ცალკეულ რგოლებს ექნება შემდეგი კუთხური სიჩქარეები

მას შემდეგ, რაც მექანიზმს მივანიჭებთ დამატებით ბრუნვას $\omega_H$ კუთხური სიჩქარით, $H$ რგოლი უძრავი გახდება და დიფერენციალი ჩვეულებრივ კბილებიან მექანიზმად იქცევა უძრავი $O_1$ და $O_2$ ღერძებით. ასეთი მექანიზმის გადაცემის ფარდობაა:

| რგოლი | აბსოლუტური კუთხური სიჩქარე | რგოლების კუთხური სიჩქარე სატარის მიმართ |
|---|---|---|
| $z_1$ | $\omega_1$ | $\omega_1-\omega_H$ |
| $z_2$ | $\omega_2$ | $\omega_2-\omega_H$ |
| $z_3$ | $\omega_3$ | $\omega_3-\omega_H$ |
| $H$ სატარი | $\omega_H$ | $\omega_H-\omega_H=0$ |

$$i_{1,2}=\frac{\omega_1-\omega_H}{\omega_2-\omega_H}=-\frac{z_2}{z_1};$$

$$i_{2,3}=\frac{\omega_2-\omega_H}{\omega_3-\omega_H}=\frac{z_3}{z_2};$$

$$\boxed{i_{1,3}=i_{1,2}\cdot i_{2,3}=\frac{\omega_1-\omega_H}{\omega_3-\omega_H}=-\frac{z_3}{z_1}.} \qquad (ა)$$

$z_2$ კბილა თვლის კუთხური სიჩქარე $H$ სატარის მიმართ (ა) ფორმულაში არ შედის, რადგან $z_2$ კბილა თვალი პარაზიტულია. ფორმულის მარცხენა ნაწილში კბილებიანი მექანიზმის გადაცემის ფარდობა აღებულია იმ ვარაუდით, რომ $H$ რგოლი უძრავია.

ერთ-ერთი კბილა თვალი, მაგალითად, $z_3$ (ნახ. 217, ბ), ხისტად რომ დავამაგროთ, მაშინ $\omega_3$ კუთხური სიჩქარე ნულის ტოლი გახდება და (ა) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$i_{1,3}=\frac{\omega_1-\omega_H}{0-\omega_H}=-\frac{\omega_1}{\omega_H}+1=1-i_{1,H},$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\boxed{i_{1,H}=1-i_{1,3},} \qquad (\text{ბ})$$

სადაც $i_{1,H}$ მექანიზმის გადაცემის ფარდობაა, აქვს უძრავი კბილა თვალი ($z_3$), რომელიც გადათვლილია $z_1$ ბორბლიდან $H$ რგოლისაკენ;

$i_{1,3}$—იგივე $z_1$, $z_2$ და $z_3$ კბილა თვლებისაგან შედგენილი მარტივი მექანიზმის გადაცემის ფარდობა; მექანიზმს აქვს $O_1$ და $O_2$ უძრავი ღერძები, თან გადათვლილია $z_1$ კბილა თვლიდან $z_3$-კენ.

### მ ა გ ა ლ ი თ ი

218-ე ნახ-ზე გამოსახულია პლანეტარული მექანიზმი, რომელსაც აქვს შემდეგი კბილთარიცხვიანი კბილა თვლები:

$$z_1=101,\quad z_2=100,\quad z_2'=99 \quad \text{და} \quad z_3=100.$$

იპოვეთ მექანიზმის გადაცემის რიცხვი $z_1$ კბილა თვლიდან $H$ სატელიტისაკენ.

$z_3$ კბილა თვალი უძრავია.

### ა მ ო ხ ს ნ ა

მარტივი კბილებიანი გადაცემისათვის გადაცემის ფარდობაა

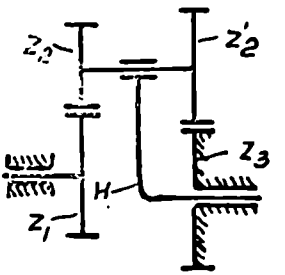
$$i_{1,3}=\frac{z_1}{z_2}\cdot\frac{z_2'}{z_3}=\frac{101}{100}\cdot\frac{99}{100}=\frac{9999}{10000}.$$

პლანეტარული გადაცემისათვის გადაცემის რიცხვია

$$i_{1,H}=1-\frac{9999}{10000}=\frac{1}{10000},$$

ე. ი. უძრავად დამაგრებული $z_3$ კბილა თვლის შემთხვევაში წამყვანი რგოლი—$H$სატარი—ასრულებს 10000 ბრუნს, ამყოლი $z_1$ თვალი კი ამ ხნის განმავლობაში სულ ერთ ბრუნს ასრულებს. აქედან ნათელია პლა-

ნეტარული მექანიზმის მნიშვნელობა—დიდი გადაცემის რიცხვის მიღება კბილა თვლების მცირე რაოდენობის დროს. აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ 218-ე ნახ-ზე განხილულ მექანიზმს პრაქტიკაში არ იყენებენ, რადგან მას მეტად დაბალი მქკ აქვს.

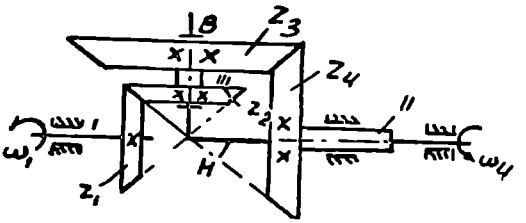


ნახ. 218

219-ე ნახ-ზე კონუსური დიფერენციალური მექანიზმია გამოსახული. I ლილვზე დამაგრებულია $z_1$ კბილა თვალი, რომელიც მოდებულია $z_2$ კბილა თვალთან; ეს უკანასკნელი კი $z_3$ კბილა თვლის საკრთო სოგმანზეა დაცმული.

$z_2$ და $z_3$ კბილა თვლები III მილისაზეა დაცმული. ეს მილისა თავისუფლად დაგებულია მოხრილ $H$ სატარაზე. სატარის მეორე ბოლო თავისუფლად გადის II მილისაში და უძრავ სკისარში ბრუნავს. II მილისაზე $z_4$ კბილა თვალია დამაგრებული.

კონუსური დიფერენციალისათვის საესებით გამოსადეგია ბრტყელი დიფერენციალური მექანიზმებისათვის ზემოთ ამოხსნილი თანაფარდობანი.



ნახ. 219

მექანიზმის მოცემული სქემისათვის (ა) ფორმულას თუ გამოვიყენებთ, მივიღებთ:

$$i_{1,2}=\frac{\omega_1-\omega_H}{\omega_2-\omega_H}=\frac{z_2}{z_1};$$

$$i_{3,4}=\frac{\omega_3-\omega_H}{\omega_4-\omega_H}=-\frac{z_4}{z_3},$$

მაშასადამე,

$$i_{1,4}=\frac{\omega_1-\omega_H}{\omega_2-\omega_H}\cdot\frac{\omega_1-\omega_H}{\omega_4-\omega_H}=-\frac{z_2z_4}{z_1z_3}.$$

„მინუს“ ნიშანს ვიღებთ იმის გამო, რომ უძრავი $H$ სატარის დროს $z_4$ კბილა თვალი $z_1$ კბილა თვლის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით ბრუნავს.

საბოლოოდ გვაქვს:

$$i_{1,4}=\frac{\omega_1-\omega_H}{\omega_4-\omega_H}=-\frac{z_2z_4}{z_1z_3}.$$

### მაგალითი

განსაზღვრეთ 219-ე ნახ-ზე გამოსახული მექანიზმისათვის II მილისას ბრუნთა რიცხვი, თუ I ლილვის კუთხური სიჩქარეა $n=100$ ბრ/წთ, $H$ სატარიც ღმავე მიმართულებით ბრუნავს, კუთხური სიჩქარით $n_H=60$ ბრ/წთ. კბილა თვლების კბილთა რაოდენობაა: $z_1=24$, $z_2=36$, $z_3=45$ და $z_4=40$.

ამოხსნა

რადგან $\omega$ პროპორციულია $n$-სა, ამიტომ

$$i_{1,4}=\frac{n_1-n_H}{n_4-n_H}=-\frac{z_2z_4}{z_1z_3}=-\frac{36\cdot 40}{24\cdot 45}=-\frac{4}{5},$$

ანუ

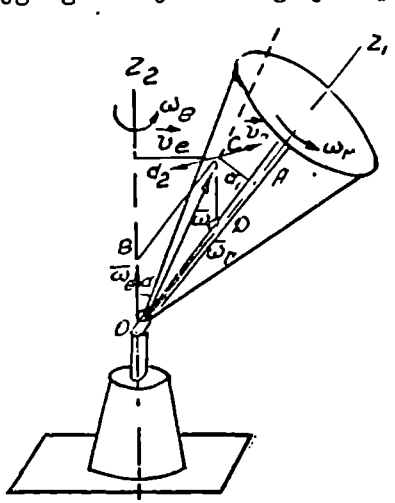
$$i_{1,4}=\frac{100-60}{n_4-60}=-\frac{4}{5},$$

საიდანაც

$$n_4=30 \text{ ბრ/წთ}.$$

## § 2. თანმკვეთი ღერძების გარშემო ოჩი ბრუნვითი მოძრაობის შეკრება

ვთქვათ, კონუსი ($A$ მყარი სხეული, ნახ. 220) $\vec{\omega}_r$ ფარდობითი კუთხური სიჩქარით ბრუნავს $Oz_1$ ღერძის გარშემო; $Oz_1$ ღერძი კი, თავის მხრივ, წარმტანი კუთხური სიჩქარით ($\vec{\omega}_e$) ბრუნავს.



ნახ 220

$\vec{\omega}_r$ და $\vec{\omega}_e$ კუთხური სიჩქარეები ვექტორებად გამოვსახოთ და მათზე ვექტორული $OBCD$ პარალელოგრამი ავაგოთ. $C$ წერტილი წარმოდგენით $A$ სხეულს შევუერთოთ და განვსაზღვროთ ამ წერტილის სიჩქარე. ამ წერტილს, $Oz_1$ და $Oz_2$ ღერძების გარშემო ბრუნვის გამო, $OBCD$ პარალელოგრამის სიბრტყისადმი მართობული $\vec{v}_r$ ფარდობითი და $\vec{v}_e$ წარმტანი სიჩქარეები ექნება. ამ სიჩქარეთა სიდიდეებია:

$$v_r=\omega_r\cdot a_1=2 \text{ ფარ } \triangle OCD;$$

$$v_e=\omega_e\cdot a_2=2 \text{ ფარ } \triangle OBC.$$

მაგრამ $\triangle OCD = \triangle OBC$, ამიტომ

$$v_r = v_e,$$

ე. ი. განსახილველ მომენტში $C$ წერტილი უძრავია. $C$ წერტილს გარდა არსებობს უძრავი $O$ წერტილიც, ამის გამო მოცემულ მომენტში უძრავი იქნება მთელი $OC$ წრფე.

ამრიგად, თანმკვეთი ღერძების გარშემო ორი ბრუნვა ერთ ბრუნვად იკრიბება მყისა ღერძის გარშემო, რომელიც $\vec{\omega}_r$ ფარდობითი და $\vec{\omega}_e$ წარმტანი კუთხური სიჩქარეების ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალს ემთხვევა.

ადვილი საჩვენებელია, რომ მყისა ბრუნვის აბსოლუტური კუთხური $\vec{\omega}_a$ სიჩქარე უდრის $\vec{\omega}_r$ ფარდობითი და $\vec{\omega}_e$ წარმტანი კუთხური სიჩქარეების გეომეტრიულ ჯამს

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e. \qquad (ა)$$

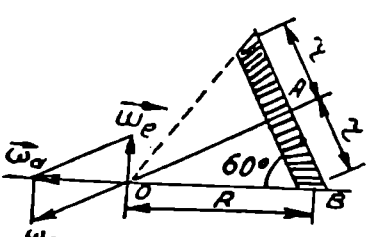
$\vec{\omega}_a$ სიჩქარის მოდული

$$\omega_a = \sqrt{\omega_r^2 + \omega_e^2 + 2\omega_r \cdot \omega_e \cdot \cos\alpha}\ . \qquad (ბ)$$

### მაგალითი

$r$ რადიუსის კონუსური ბორბალი $R$ რადიუსის წრეწირს წუთში 10-ჯერ შემოირბენს (ნახ. 221).

გამოიანგარიშეთ $OA$ ღერძის გარშემო ბორბლის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე და მყისა ღერძის გარშემო ბრუნვის $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარე.



ნახ. 221

#### ამოხსნა

ბორბლის ბრუნვა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ვერტიკალური ღერძის გარშემო ბრუნვა $\omega_e = 10$ ბრ/წთ $= \frac{\pi}{3}\ \frac{1}{\text{წმ}}$ წარმტანი კუ-

თხური სიჩქარით და ერთდროულად $OA$ ღერძის გარშემო ბრუნვა უცნობი ფარდობითი $\vec{\omega}_r$ კუთხური სიჩქარით. ორივე ბრუნვის შეცვლა შეიძლება ერთი ბრუნვით—მყისა $OB$ ღერძის გარშემო ბრუნვით $\vec{\omega}_e$ კუთხური სიჩქარით.

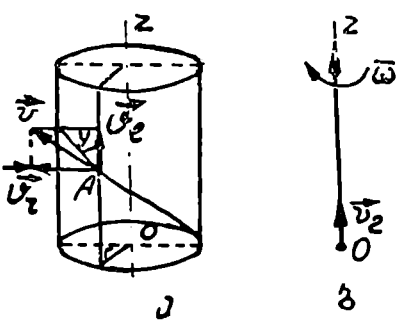
კუთხური სიჩქარეების ვექტორთა პარალელოგრამის აგებით ვპოულობთ

$$\omega_r = \frac{\omega_e}{\cos 60^\circ} = 2\omega_e = \frac{2}{3}\,\pi\,\frac{1}{წმ};$$

$$\omega = \omega_r \cdot \cos 30^\circ = \frac{2}{3}\,\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}\,\sqrt{3}\,\frac{1}{წმ}.$$

## § 3. ხრახნული მოძრაობა

ახლა დავუშვათ, რომ მყარი სხეულის რთული მოძრაობა შედგება უძრავი $Oz$ ღერძის გარშემო $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით მოძრაობისა




ნახ. 222

და $\vec{v}$ სიჩქარიანი ვადატანითი მოძრაობისაგან ამაეე ღერძის გასწვრივ (ნახ. 222, ა).

ამ შემთხვევაში სხეულის აბსოლუტურ მოძრაობას **ხრახნული მოძრაობა** ეწოდება, ხოლო $Oz$ ღერძს—**ხრახნღერძი**.

სხეულის ყველა წერტილი ხრახნწირზე მოძრაობს; გამონაკლისს ის წერტილები შეადგენენ, რომლებიც ხრახნის ღერძზე მდებარეობენ.

როდესაც $\vec{v}$ და $\vec{\omega}$ ვექტორები ერთმხრივ არიან მიმართული, ხრახნს მარჯვენა სვლის ხრახნი ეწოდება; როდესაც $\vec{v}$ და $\vec{\omega}$ სიჩქარეებს სხვადასხვა მიმართულება აქვთ, მაშინ ხრახნს მარცხენა სვლის ხრახნი ეწოდება.

ხრახნის ღერძზე მდებარე ნებისმიერი წერტილის მიერ ერთი ბრუნის დროს გავლილ მანძილს ხრახნის $h$ **ბიჯი** ეწოდება.

როდესაც $\vec{v}_e$ და $\vec{\omega}$ სიდიდეები მუდმივია, მაშინ ხრახნის ბიჯიც მუდმივია; ამ შემთხვევაში გვექნება

$$h = v_e \cdot t,$$

სადაც $t$ ერთი ბრუნის დროა, მასთან

$$t = \frac{2\pi}{\omega};$$

აქ $2\pi$ სხეულის მიერ ერთი ბრუნის დროს აღწერილი ბრუნვის კუთხეა, ამიტომ

$$h = 2\pi \cdot \frac{v_e}{\omega}. \qquad (ა)$$

მუდმივბიჯიანი ხრახნის ნებისმიერი $A$ წერტილი ხრახნწირს აღწერს (ნახ. 222 ა). ხრახნის ღერძიდან $r$ მანძილით დაშორებული $A$ წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე იკრიბება $\vec{v}_e$ გადატანითი სიჩქარისა და ბრუნვითი მოძრაობის დროს $\vec{v}_e$-დმი მართობული $\omega \cdot r$ სიჩქარისაგან ($v_r = \omega \cdot r$).

მაშასადამე,

$$v = \sqrt{v_\varepsilon^2 + \omega^2 r^2}. \qquad (8)$$

$\bar{v}$ სიჩქარე ხრახნწირისადმი მხებზეა მიმართული.

აბსოლუტური სიჩქარის მიერ ღერძთან ან ცილინდრის მსახველთან შედგენილი კუთხე განისაზღვრება ფორმულით

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{r \cdot \omega}{v_v}.$$

# დინამიკა

## I თავი

## შესავალი

### § 1. ძირითადი კანონები

როგორც განმარტებული იყო, დინამიკა მექანიკის ის ნაწილია, რომელიც შეისწავლის მატერიალურ სხეულთა მოძრაობის კანონებს მასზე მოქმედ ძალებზე დამოკიდებულებით.

დინამიკაში ძირითადად დასმულია ორი ამოცანა: ა) მყარი სხეულის მოცემული მოძრაობის მიხედვით მოქმედი ძალების პოვნა და ბ) სხეულზე მოქმედი ძალების მიხედვით სხეულის მოძრაობის განსაზღვრა.

დინამიკის შესწავლას ნივთიერი წერტილის მოძრაობის შესწავლით დავიწყებთ. დინამიკაში ნივთიერი წერტილის მოძრაობის შესწავლის გარდა მექანიკური სისტემის მოძრაობაც შეისწავლება. მექანიკური სისტემა ეწოდება ნივთიერ წერტილთა ერთობლიობას, რომლებიც ერთმანეთთან დაკავშირებული არიან ისე, რომ მათ ერთმანეთზე დამოუკიდებლად მოძრაობა არ შეუძლიათ. კერძოდ, მექანიკური სისტემის დინამიკაში აბსოლუტურად მყარი სხეულის მოძრაობაც განიხილება.

დინამიკას საფუძვლად უდევს ცნობილი ინგლისელი მეცნიერის ისაკ ნიუტონის მიერ ჩამოყალიბებული კანონები, რომლებსაც ნიუტონმა ნივთიერი წერტილის მოძრაობის კანონები ანუ აქსიომები უწოდა.

**I კანონი (ინერციის კანონი):** *ყოველი ნივთიერი წერტილი ცდილობს დარჩეს მოსვენებულ მდგომარეობაში, ან იმოძრაოს წრფივად და თანაბრად მანამ, სანამ მასზე მოქმედი ძალები არ გამოიყვანენ მას ამ მდგომარეობიდან.*

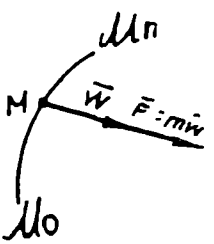
ამრიგად, თუ ნივთიერი წერტილი მოსვენებულ მდგომარეობაშია, იგი მოსვენებულ მდგომარეობაში უნდა დარჩეს; თუკი იგი წრფივად

და თანაბრად მოძრაობს, წრფივი და თანაბარი მოძრაობა უნდა განაგრძოს. ცხადია, ასეთი წერტილი განმხოლოებული (იზოლირებული) უნდა იყოს გარემო სხეულთა ზემოქმედებისაგან, ამის გამო იგი ვერ შეიცვლის სიჩქარეს, თავის თავს ვერ მიანიჭებს აჩქარებას, რისთვისაც მას გარე ზემოქმედება ესაჭიროება.

ნივთიერი წერტილის თვისებას — უცვლელად შეინარჩუნოს თავისი სიჩქარის მოდული და მიმართულება, ან დარჩეს მოსვენებულ მდგომარეობაში, — ი ნ ე რ ც ი ა ეწოდება. ინერციის საზომი სხეულის მასაა. რაც მეტია მასა, მით მეტია ინერცია.

ინერციის თვისება ადრე აღმოაჩინა გალილეო გალილეიმ 1638 წელს.

**II კანონი:** მ ყ ა რ ი სხ ე უ ლ ი ს მ ა ს ი ს ნ ა მ რ ა ვ ლ ი ი მ აჩ ქ ა რ ე ბ ა ზ ე, რ ო მ ე ლ ს ა ც სხ ე უ ლ ს ა ნ ი ჭ ე ბ ს მ ო ც ე ქ უ ლ ი ძ ა ლ ა, ა მ ძ ა ლ ი ს მ ო დ უ ლ ი ს ტ ო ლ ი ა და ძ ა ლ ი ს მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ი ს მ ხ ა რ ე ს ა ა მ ო გ ე ზ უ ლ ი.



ნახ. 223

ვთქვათ, ნივთიერი $M$ წერტილი ერთგვარ $M_0M_n$ ტრაექტორიაზე მოძრაობს (ნახ. 223).

ამ ნივთიერი წერტილის მასა იყოს $m$, ხოლო აჩქარება—$\bar{w}$; მაშინ, II კანონის ძალით, ამ წერტილზე მოქმედი $\bar{F}$ ძალის სიდიდე

$$\boxed{\bar{F}=m\cdot\bar{w}.} \qquad (1)$$

$\bar{F}$ ძალის $F$ მოდულსა და $\bar{w}$ აჩქარების $w$ მოდულს შორისაც არსებობს თანაგვარი დამოკიდებულება, სახელდობრ

$$\boxed{F=m\cdot w.} \qquad (2)$$

$\bar{F}$ ძალას, $m$ მასასა და $\bar{w}$ აჩქარებას შორის კავშირის დამამყარებელი (1) ვექტორული განტოლება ნივთიერი წერტილის დანამიკის ძირითადი განტოლებაა.

(1) განტოლებიდან $\bar{w}$ აჩქარებისთვის გვაქვს

$$\bar{w}=\frac{\bar{F}}{m}, \qquad (3)$$

ე. ი. მ ო ც ე მ უ ლ ი $\bar{F}$ ძ ა ლ ი ს მ ი ე რ ნ ი ვ თ ი ე რ ი წ ე რ ტ ი ლ ი ს ა თ ვ ი ს მ ი ნ ი ჭ ე ბ უ ლ ი $\bar{w}$ ა ჩ ქ ა რ ე ბ ა ა მ ძ ა ლ ი ს პ ი რ დ ა პ ი რ პ რ ო პ ო რ ც ი უ ლ ი ა.

(2) განტოლებიდან $m$ მასისათვის გვაქვს

$$m=\frac{F}{w}, \tag{4}$$

ე. ი. ნივთიერი წერტილის მასა ძალის მოდულის აჩქარების მოდულთან ფარდობის ტოლია.

დინამიკის განვითარებას საფუძვლად დაედო გალილეის ცდები სხეულთა თავისუფალ ვარდნაზე. გალილეიმ თავის კანონი შემდეგნაირად ჩამოაყალიბა: დედამიწის აღებულ ადგილზე თუ არ არსებობს ჰაერის წინააღმდეგობა, მაშინ ყველა სხეული ერთნაირი აჩქარებით ვარდება.

სხეულის წონა $G$ ასოთი აღვნიშნოთ, ხოლო სიმძიმის ძალის აჩქარება $g$ ასოთი, რომელიც დაახლოებით 9,81 $\frac{მ}{წმ^2}$ ტოლია, მაშინ (2) ფორმულის მიხედვით გვექნება

$$\boxed{G=m\cdot g,} \tag{5}$$

ე. ი. სხეულის წონა მისი მასისა და სიმძიმის ძალის აჩქარების ნამრავლის ტოლია.

შენიშვნა. $g$ აჩქარება დედამიწის ზედაპირის გარკვეული ადგილისათვის უნდა იქნეს აღებული; ეს იმიტომ არის საჭირო, რომ, როგორც ცდებიდან ჩანს, სხეულის წონა და სიმძიმის ძალის აჩქარება სხვადასხვაა დედამიწის სხვადასხვა ადგილას, მაშინ როდესაც სხეულის მასა უცვლელია.

**III კანონი:** ყოველი ქმედება იწვევს მის ტოლსა და საწინააღმდეგო უკუქმედებას.

ეს კანონი კავშირს ამყარებს ორ ნივთიერ წერტილს შორის და მიუთითებს იმაზე, რომ ძალები თავისთავად არ წარმოიქმნებიან, მათი წარმოქმნის მიზეზი მატერიაა: გარდა ამისა, ძალები მუდამ წყვილ-წყვილად წარმოიქმნებიან (ტოლი და შებრუნებული); ამრიგად, ბუნებაში არ გვხვდება მხოლოდ ერთმხრივ მოდებული ძალები. მაშასადამე, $m_1$ მასაზე $m_2$ მასიდან $F_2$ ძალა თუ მოქმედებს, მაშინ $m_1$ მასიდან $m_2$ მასაზე $F_1$ ძალა იმოქმედებს, მასთან

$$\vec{F}_1=-\vec{F}_2.$$

დინამიკის II კანონის მიხედვით

$$F_1 = m_1 w_1 \quad \text{და} \quad F_2 = m_2 w_2$$

და რადგან ძალთა მოდულები ტოლია, ე. ი. $F_1 = F_2$, ამიტომ

$$m_1 w_1 = m_2 w_2,$$

საიდანაც

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{m_2}{m_1}, \qquad (6)$$

ე. ი. ორი ნივთიერი წერტილის მიერ ერთმანეთისადმი მინიჭებული აჩქარებები ამ წერტილთა მასების უკუპროპორციულია. ეს აჩქარებები (ისე, როგორც ძალები) მიმართულია ერთი წრფის გასწვრივ თანასაწინააღმდეგო მიმართულებით.

**IV კანონი** (ძალთა მოქმედების დამოუკიდებლობის კანონი). თუ ნივთიერ წერტილზე მოქმედებს რამდენიმე ძალა, ისინი წერტილს ანიჭებენ აჩქარებას, რომელიც მოცემულ ძალთა აჩქარებების გეომეტრიული ჯამის ტოლია.

ვთქვათ, $m$ მასის ნივთიერ წერტილზე ცალ-ცალკე მოქმედებს ძალები: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_n$ და წერტილს ანიჭებენ აჩქარებებს $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{w}_3, \ldots, \vec{w}_n$.

წერტილის საერთო აჩქარება იყოს $\vec{w}$, ხოლო $m$ მასაზე მოქმედი და $\vec{w}$ აჩქარების გამომწვევი ძალა $\vec{F}$, ე. ი.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{w}. \qquad (ა)$$

IV კანონის მიხედვით ვწერთ

$$m\vec{w} = m\vec{w}_1 + m\vec{w}_2 + \ldots + m\vec{w}_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n, \qquad (ბ)$$

მაგრამ $m\vec{w} = \vec{F}$, ამიტომ

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n.} \qquad (7)$$

(7) ტოლობა გამოსახავს სტატიკის ცნობილ კანონს: მოცემულ წერტილზე მოდებული რამდენიმე ძალის ტოლმედიამძალთა გეომეტრიული ჯამის ტოლია.

## § 2. ერთეულთა სისტემა

1963 წლის 1 იანვრიდან, სახელმწიფო სტანდარტით 9867-61, საბჭოთა კავშირში შემოღებულია ერთეულთა საერთაშორისო სისტემა „სი“ (*SI*), რომელიც ექვს ძირითად ერთეულს შეიცავს და რამდენიმე დამოუკიდებელ სისტემად იყოფა (იხ. დამატება).

თეორიულ მექანიკაში ფიზიკური სიდიდეების საზომად სარგებლობენ სისტემით *M K S* [მეტრ-კილოგრამმასა-სეკუნდი (წამი),] რომელშიაც სიგრძის საზომ ერთეულად აღებულია მეტრი, მასის საზომად კილოგრამმასა, ხოლო დროის საზომად — სეკუნდი ანუ წამი.

მასის საზომი ერთეული კგ-მასა წარმოადგენს ერთი კუბიკური დეციმეტრი წმინდა წყლის მასას + 4° ცელსიუსის დროს (ამ დროს წყალს აქვს უმცირესი მოცულობა და უდიდესი სიმკვრივე). ამ სისტემაში ძალის ერთეულის მისაღებად ვსარგებლობთ დინამიკის ძირითადი კანონით

$$F = m \cdot w.$$

ამ ფორმულაში, დავუშვათ, რომ $m = 1$ კგ, $w = 1$ მ/წმ², მაშინ ძალის ერთეული = 1 კგ. 1 მ/წმ² = 1 $\frac{\text{კგ. მ}}{\text{წმ}^2}$; ამ ერთეულს ნიუტონი ეწოდება.

$$\boxed{1 \text{ ნიუტონი (ნ)} = 1 \frac{\text{კგ. მ}}{\text{წმ}^2},} \qquad (1)$$

ე. ი. ნიუტონი (ნ) ის ძალაა, რომელიც 1 კგ მასის მქონე სხეულს ანიჭებს აჩქარებას 1 მ/წმ².

ძალის ერთეულის განზომილებაა:

$$\text{კგ} \cdot \text{მ} \cdot \text{წმ}^{-2} = \text{მ} \cdot \text{კგ} \cdot \text{წმ}^{-2}.$$

1 ნიუტონი = 10 დეცინიუტონს (დნ) = 100 სანტინიუტონს (სნ) = = 1000 მილინიუტონს (მნ).

1 კილონიუტონი (კნ) = 10 ჰექტანიუტონს (ჰნ) = 100 დეკანიუტონს (დან) = 1000 ნიუტონს (ნ).

წინათ ფიზიკაში ხმარებაში იყო სისტემა *C G S* (სანტიმეტრ-გრამმასა = სეკუნდი), რომელშიაც

სიგრძის ერთეულად იღებდნენ — 1 სმ;

მასის ერთეულად — 1 გ;

დროის ერთეულად — 1 სეკნ(წმ).

ამ სისტემაში ძალის ერთეული იყო დინი.

$$1 \text{ დინი} = 1 \text{ გ. } 1 \text{ სმ/წმ}^2 = 1 \frac{\text{გ. სმ}}{\text{წმ}^2},$$

ანუ დინი ის ძალაა, რომელიც 1 გრამი მასის მქონე სხეულს ანიჭებს აჩქარებას 1 სმ/წმ².

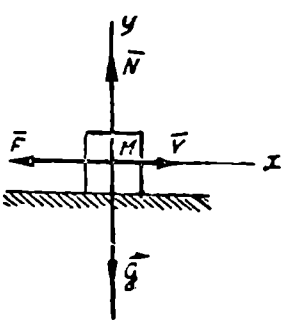
ტექნიკურ სისტემაში (მეტრ-კგ. ძალა-სეკუნდი) მასის ერთეული იყო ტემ, ე. ი. მასა, რომელსაც 1 კგ. ძალა 1 მ/წმ აჩქარებას ანიჭებს.

### მაგალითები

1. ნ. $10^6$ ნიუტონი წონის მატარებელი 15 მ/წმ სიჩქარით მიდის ჰორიზონტალურ გზაზე. ერთ-ერთ მომენტში დაიწყო დამუხრუჭება, რის გამო მატარებელი გაჩერდა 60 წმ შემდეგ. განსაზღვრეთ მატარებლის მოძრაობისადმი წინაღობის ძალა დროის ამ შუალედში, თუ მას მუდმივად ჩავთვლით.

ამოხსნა

მატარებელი ნივთიერ წერტილად განვიხილოთ და ვიგულისხმოთ, რომ მატარებლის მასა სიმძიმის ცენტრშია თავმოყრილი (ნახ. 224).



ნახ. 224

დამუხრუჭების დროს მატარებელზე მოქმედებს: სიმძიმის $\vec{G}$ ძალა, რელსის $\vec{N}$ რეაქციის ძალა და დამუხრუჭების $\vec{F}$ ძალა; ვთქვათ, ეს სამი ძალა $M$ წერტილზეა მოდებული.

$\vec{G}$ ძალა წონასწორდება ტოლი და პირდაპირშებრუნებულად მიმართული რეაქციის $\vec{N}$ ძალით. ამრიგად, მატარებლის მოძრაობას ერთადერთი $\vec{F}$ ძალა ეწინააღმდეგება.

რადგან წინაღობის ძალა (პირობის თანახმად) მოდულით მუდმივია და მოძრაობის საწინააღმდეგო მხარესაა მიმართული, ამიტომ $\vec{F}$ ძალით მინიჭებული აჩქარებაც მუდმივია და მატარებელი თანაბრად შენელებულად მოძრაობს.

თანაბრად ცვლადი მოძრაობის სიჩქარე

$$v = v_0 + wt,$$

საიდანაც აჩქარება

$$w=\frac{v-v_0}{t}.$$

გაჩერების მომენტში $v=0$, ამიტომ

$$w=-\frac{v_0}{t}=-\frac{15}{60}=-0{,}25 \text{ მ/წმ}^2.$$

მატარებლის მოძრაობისადმი წინაღობის ძალა განისაზღვრება ფორმულით

$$F=m\cdot w=\frac{G}{g}\cdot w,$$

სადაც

$$m=\frac{G}{g}=\frac{6\cdot 10^6}{9{,}81}=6{,}12\cdot 10^5 \text{ კგ};$$

მაშასადამე, წინაღობის ძალა

$$F=6{,}12\cdot 10^5\cdot 0{,}25=-1{,}53\cdot 10^6 \text{ ნ}.$$

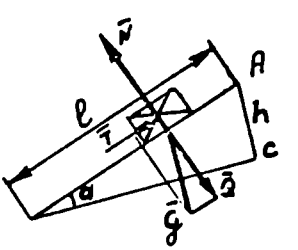
2. $G$ წონის სხეული (ნახ. 225) მისრიალებს $l$ სიგრძის აბსოლუტურად გლუვ დახრილ სიბრტყეზე, რომელიც $\alpha$ კუთხეს ქმნის ჰორიზონტთან. მოძრაობა იწყება $A$ წერტილიდან ნულოვანი საწყისი სიჩქარით. იპოვეთ: 1) დრო, რომლის განმავლობაშიც სხეული გაივლის დახრილ სიბრტყეს, და 2) სიჩქარე—დახრილ სიბრტყეზე მოძრაობის დასასრულს.

ამოხსნა

$\vec{G}$ ძალა პარალელოგრამის წესით დავშალოთ ორ მდგენელად. ერთი მათგანი $\vec{T}$ დახრილი სიბრტყის პარალელურია, მეორე $\vec{Q}$ მდგენელი კი—ამ სიბრტყის მართობული.

მეორე $\vec{Q}$ მდგენელი წონასწორდება ტოლი და პირდაპირშებრუნებული სიბრტყის რეაქციის $\vec{N}$ ძალით.

ამრიგად, სხეული იმოძრავებს მხოლოდ ერთი $\vec{T}$ მდგენელი ძალის ზემოქმედებით.



ნახ. 225

შევნიშნოთ, რომ ხახუნი ამ შემთხვევაში (სიბრტყე გლუვია) უგულებელყოფილია, მაშასადამე, სხეული მოძრაობს არა $\vec{G}$ ძალის, არამედ მისი $\vec{T}$ მდგენელის ზემოქმედებით, რომელიც დახრილი სიბრტყის პარალელურია.

რადგან სხეულის მასა

$$m=\frac{G}{g}$$

და მდგენელები

$$T=G\cdot\sin\alpha\,;\quad Q=N=G\cdot\cos\alpha,$$

ამიტომ აჩქარების $w=\frac{F}{m}$ ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ

$$w=\frac{T}{m}=\frac{G\cdot\sin\alpha}{\frac{G}{g}}=g\cdot\sin\alpha=\text{const.}$$

ამ მაგალითში გზის ფორმულა იქნება

$$l=\frac{wt^2}{2}=\frac{(g\cdot\sin\alpha)\cdot t^2}{2}\,, \qquad (ა)$$

საიდანაც დრო

$$t=\sqrt{\frac{2l}{g\cdot\sin\alpha}}\,. \qquad (ბ)$$

რადგან სიჩქარე $v=w\cdot t$, ამიტომ

$$v=g\cdot\sin\alpha\sqrt{\frac{2l}{g\cdot\sin\alpha}}\,. \qquad (გ)$$

**8.** 392,4 ნიუტონი წონის ნივთიერი წერტილი წრფივად მოძრაობს $x=7+2t+7t^2$ განტოლების მიხედვით (აქ $x$ აღებულია მ-ობით; $t$ კი— წმ-ობით).

იპოვეთ სხეულზე მოქმედი $\overline{F}$ ძალის მოდული დროის ნებისმიერ მომენტში.

ა მ ო ხ ს ნ ა

გავაწარმოოთ მოძრაობის განტოლება დროის მიხედვით, მივიღებთ სიჩქარეს

$$v=\frac{dx}{dt}=2+14t.$$

ამ გამოსახულების გაწარმოებით მივიღებთ აჩქარებას

$$w=14\ \text{მ/წმ}^2.$$

ნივთიერი წერტილის მასა

$$m=\frac{G}{g}=\frac{392,4}{9,81}=40 \text{ კგ};$$

საძიებელი ძალა

$$F=m\cdot w=40\cdot 14=560 \text{ ნიუტონს.}$$

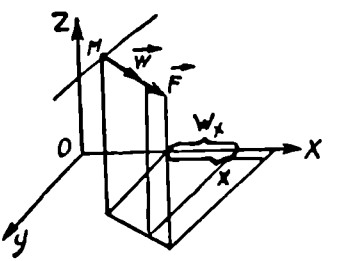
## II თ ა ვ ი

# თავისუფალი ნივთიერი წერტილის მოძრაობა

### § 1. მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები

ვთქვათ, $m$ მასის თავისუფალი ნივთიერი $M$ წერტილი (ნახ. 226) მოძრაობს სივრცეში და ერთგვარ მრუდწირულ ტრაექტორიას აღწერს. $\overline{F}$ ძალა $M$ წერტილს ანიჭებს $\overline{w}$ აჩქარებას, მაშინ, დინამიკის II კანონის მიხედვით, ძალა

$$\overrightarrow{F}=m\cdot\overrightarrow{w}. \qquad (ა)$$



ნახ. 226

ვთქვათ, $\overrightarrow{F}$ ძალის გეგმილები $Ox$, $Oy$ და $Oz$ კოორდინატთა ღერძებზე სათანადოდ არის $X$, $Y$ და $Z$, ხოლო $\overrightarrow{w}$ აჩქარების გეგმილები იმავე ღერძებზე არის $w_x$, $w_y$ და $w_z$.

ვექტორული (ა) გამოსახულების დაგეგმილებით კოორდინატთა ღერძებზე მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} X&=m\cdot w_x;\\ Y&=m\cdot w_y;\\ Z&=m\cdot w_z. \end{aligned}\right\} \qquad (ბ)$$

როგორც კინემატიკიდან ცნობილია, აჩქარების გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე გამოისახება ფორმულებით:

$$w_x=\frac{d^2x}{dt^2};\quad w_y=\frac{d^2y}{dt^2};\quad w_z=\frac{d^2z}{dt^2}. \qquad (გ)$$

(გ)-ს მნიშვნელობების ჩასმით (ბ) გამოსახულებებში მივიღებთ:

$$\left|\begin{array}{l} X = m\dfrac{d^2x}{dt^2}; \\ Y = m\dfrac{d^2y}{dt^2}; \\ Z = m\dfrac{d^2Z}{dt^2}. \end{array}\right| \qquad (1)$$

ამ განტოლებებს ეწოდება ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები. ეს განტოლებები კოორდინატული ფორმით გამოსახავენ წერტილის მოძრაობის ძირითად კანონს.

როდესაც წერტილი რამდენიმე ძალის ზემოქმედებით მოძრაობს, მაშინ $\bar{F}$ ძალა მათ ტოლქმედად უნდა მივიჩნიოთ.

## § 2. დინამიკის ორი ძირითადი ამოცანა

**პირველი ამოცანა:** ცნობილია მოცემული მასის ნივთიერი წერტილის მოძრაობის კანონი, ვიპოვოთ დროის ყოველ მომენტში წერტილზე მოქმედი ძალა.

ამ ამოცანის ამოხსნა წერტილის აჩქარების განსაზღვრაზე დაიყვანება. როდესაც მოცემულია მოძრაობა, მაშინ კინემატიკის წესებით ადვილია აჩქარების განსაზღვრა.

მოძრავი წერტილის ტრაექტორიის მიხედვით შეიძლება შეგვხვდეს წრფივი ან მრუდწირული მოძრაობა.

როდესაც წერტილის მოძრაობა დეკარტის კოორდინატებშია მოცემული, მაშინ ამოცანა შემდეგნაირად ამოიხსნება:

ა) ვპოულობთ წერტილის სიჩქარის გეგმილებს კოორდინატთა ღერძებზე;

ბ) ვპოულობთ წერტილის აჩქარების გეგმილებს იმავე კოორდინატთა ღერძებზე;

გ) აჩქარების გეგმილების წერტილის მასაზე გამრავლებით ვპოულობთ ძალის გეგმილებს კოორდინატთა ღერძებზე;

დ) ვპოულობთ ძალის მოდულს და ძალის მიმართულების კოსინუსებს.

წერტილის ბრტყელი მოძრაობის დროს გვაქვს ორი დიფერენციალური განტოლება:

$$\boxed{\begin{aligned} X &= m\frac{d^2x}{dt^2}; \\ Y &= m\frac{d^2y}{dt^2}. \end{aligned}} \qquad (2)$$

წერტილის წრფივი მოძრაობის დროს კი გვაქვს მხოლოდ ერთი დიფერენციალური განტოლება:

$$\boxed{X = m\frac{d^2x}{dt^2}.} \qquad (3)$$

**მაგალითი**

196.2 ნიუტონი წონის სხეული გადატანითად მოძრაობს შემდეგი კანონით:

$$x = 3t^2 \text{ და } y = 4t^2,$$

სადაც $x$ და $y$ აღებულია მ-ობით, ხოლო $t$ დრო—წმ-ობით.

განსაზღვრეთ სხეულზე მოქმედი $\bar{F}$ ძალის მოდული და მიმართულება.

ამოხსნა

ამოცანის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ სხეული გადატანითად მოძრაობს; მაშასადამე, საკმარისია სხეულის ერთი წერტილის მოძრაობის განხილვა, რომელშიაც თავმოყრილია მთელი სხეულის მასა, ე. ი. მასა

$$m = \frac{G}{g} = \frac{196{,}2}{9{,}81} = 20 \text{ კგ}.$$

სიჩქარისა და აჩქარების გეგმილები:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2) = 6t \text{ მ/წმ};$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(4t^2) = 8t \text{ მ/წმ};$$

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(6t) = 6 \text{ მ/წმ}^2;$$

$$w_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(8t) = 8 \text{ მ/წმ}^2.$$

$\overline{F}$ ძალის გეგმილებისათვის გვაქვს:

$X = m \cdot w_x = 20 \cdot 6 = 120$ ნიუტონს,

$Y = m \cdot w_y = 20 \cdot 8 = 160$ ნიუტონს.

ძალის მოდული

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{120^2 + 160^2} = 200 \text{ ნიუტონს.}$$

მიმართულების კოსინუსებია [აქ $\alpha = \measuredangle (\overline{F}, x)$; $\beta = \measuredangle (\overline{F}, y)$].

$$\cos \alpha = \frac{120}{200} = 0{,}6, \text{ ამიტომ კუთხე } \alpha = 53^\circ 10'.$$

$$\cos \beta = \frac{160}{200} = 0{,}8, \text{ ამიტომ კუთხე } \beta = 36^\circ 50'.$$

**შებრუნებული ანუ მეორე ამოცანა: ცნობილია მოცემული** $m$ **მასის წერტილზე მოქმედი** $\overline{F}$ **ძალა. საჭიროა ამ წერტილის მოძრაობის პოვნა, ე. ი. წერტილის მოძრაობის კანონის გამოსახვა წერტილის კოორდინატების საშუალებით.**

ეს კოორდინატები დროის ფუნქციის სახით უნდა გამოისახოს.

ამ ამოცანის ამოხსნისას საჭიროა:

ა) ნივთიერ წერტილზე მოქმედი ძალების ცოდნა და მათი გეგმილების პოვნა კოორდინატთა ღერძებზე;

ბ) წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებების შედგენა;

გ) ამ განტოლებათა ინტეგრირება;

დ) ნებისმიერი მუდმივების განსაზღვრა მოძრაობის საწყისი პირობების მიხედვით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: ხშირად, მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრირება (განსაკუთრებით მაშინ, როდესაც წერტილზე მოქმედებს ცვლადი ძალა) გარკვეულ სიძნელეებთან არის დაკავშირებული, ამიტომ ჩვენ მხოლოდ ორ ამოცანას განვიხილავთ, რომლებიც წერტილის წრფივ მრუდწირულ მოძრაობებს შეეხება.

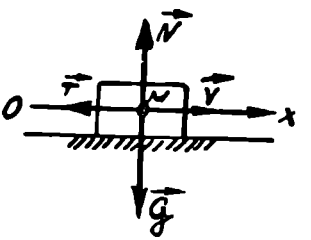
### მაგალითები

1. წრფივ რკინიგზის ლიანდაგზე 18 კმ/სთ მუდმივი სიჩქარით მოძრაობს რკინიგზის ვაგონი. რა დროის შემდეგ და რა მანძილზე შეიძლე-

ბა ვაგონის მუხრუჭით გაჩერება, თუ ხელის მუხრუჭით განვითარებული მოძრაობისადმი წინაღობა დატვირთული ვაგონის წონის 0,1 ნაწილს შეადგენს?

ამოხსნა

რკინიგზის ვაგონი ნივთიერ წერტილად განვიხილოთ (ნახ. 227), მასთან ვაგონის მთელი მასა სიმძიმის $M$ ცენტრში შევყურსოთ; ათვლის დასაწყისად ავიღოთ ის მდებარეობა, რომელშიაც იმყოფება $M$ წერტილი დამუხრუჭების დასაწყისში.



ნახ. 227

დამუხრუჭების დროს ვაგონზე მოქმედებს სამი ძალა: საკუთარი $\overline{G}$ წონა, რელსების $\overline{N}$ რეაქცია და დამუხრუჭების $\overline{T}$ წინაღობის ძალა. ამ ძალებს $M$ წერტილზე მოდებულად ვთვლით.

შევადგინოთ $M$ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება.

რადგან $M$ წერტილი წრფივად მოძრაობს $Ox$ ღერძის გასწვრივ, მოძრაობის განტოლება იქნება

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-T,$$

სადაც $m$ დატვირთული ვაგონის მასაა.

ამოცანის პირობის თანახმად

$$T=0{,}1G=0{,}1\ mg,$$

ამიტომ

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-0{,}1\ mg,\ \text{ანუ}\ \frac{d^2x}{dt^2}=-0{,}1\ g. \qquad (ა)$$

(ა) განტოლების ინტეგრირებით მივიღებთ

$$v=\frac{dx}{dt}=-0{,}1\ gt+C_1, \qquad (ბ)$$

სადაც $C_1$ ინტეგრირების მუდმივაა.

(ბ) განტოლების ინტეგრირებით გვაქვს:

$$x=-0{,}1\frac{gt^2}{2}+C_1t+C_2, \qquad (გ)$$

სადაც $C_2$ ინტეგრირების მეორე მუდმივაა.

ადვილი შესამჩნევია, რომ (გ) გამოსახულება ორ ($C_1$ და $C_2$) ნებისმიერ მუდმივას შეიცავს.

განვსაზღვროთ ეს მუდმივები, თან გავიხსენოთ, რომ, როცა $t=0$, მაშინ

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{1800}{3600}=5 \text{ მ/წმ}.$$

ამიტომ (ბ) განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ:

$$5=-0{,}1\ g\cdot 0+C_1,$$

საიდანაც $C_1=5$.

რადგან ათვლის დასაწყისად წერტილის ის მდებარეობა მივიღეთ, რომელშიაც იმყოფებოდა $M$ წერტილი დამუხრუჭების მომენტში, ამიტომ, როცა $t=0$, $x=0$ და (გ) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$0=-0{,}1\cdot\frac{g}{2}\cdot 0+5\cdot 0+C_2,$$

საიდანაც

$$C_2=0.$$

$C_1=5$ და $C_2=0$ მნიშვნელობების შეტანით (ბ) და (გ) განტოლებებში მივიღებთ

$$v=\frac{dx}{dt}=-0{,}1\ gt+5; \qquad (დ)$$

$$x=-0{,}1\ \frac{gt^2}{2}+5t. \qquad (ე)$$

(დ) განტოლებიდან განვსაზღვრავთ დამუხრუჭების $t$ დროს; თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ მოძრაობის დასასრულს ვაგონის სიჩქარე $v=0$, მივიღებთ

$$0=-0{,}1\ gt+5,$$

საიდანაც

$$t=5{,}1 \text{ წმ}.$$

ვაგონის დამუხრუჭების შემდეგ 5,1 წამში გავლილი გზა იქნება:

$$-0{,}1g\ \frac{t^2}{2}+5t=-0{,}1\cdot\frac{9{,}81\cdot(5{,}1)^2}{2}+5\cdot(5{,}1)=12{,}75 \text{ მ}.$$

ეს არის საძიებელი მანძილი.

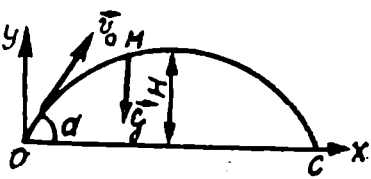
**2.** $G$ წონის სხეული $\alpha$ კუთხით არის გატყორცნილი ჰორიზონტთან $\bar{v}_0$ საწყისი სიჩქარით. ეს სხეული $m$ მასის ნივთიერ წერტილად წარმოვიდგინოთ; ჰაერის წინაღობას მხედველობაში არ ვღებულობთ.

განსაზღვრეთ: ა) წერტილის მოძრაობის განტოლებები;
ბ) წერტილის მოძრაობის ტრაექტორია;
გ) ჰორიზონტალური სიშორე;
დ) ტრაექტორიის სიმაღლე და
ე) სხეულის მოძრაობის ხანგრძლივობა.

ამოხსნა

ა) ვთქვათ, ნივთიერი წერტილის საწყისი მდებარეობა კოორდინატთა $O$ სათავეს ემთხვევა.

$Oy$ ღერძი შვეულად ზემოთ მივმართოთ, $Ox$ ღერძი კი ჰორიზონტალურად ისე, რომ წერტილის საწყისი სიჩქარის $\bar{v}_0$ ვექტორი $xOy$ სიბრტყეში მდებარეობდეს (ნახ. 228)



ნახ. 228

კოორდინატთა ღერძების ასეთი განლაგებისას წერტილი ბრტყელ მოძრაობას შეასრულებს, მით უმეტეს, რომ მასზე მხოლოდ სიმძიმის $\bar{G}$ ძალა იმოქმედებს.

სურათზე აღვნიშნავთ $M$ წერტილს, რომელზედაც $G$ ძალაა მოდებული.

$\bar{G}$ ძალის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე იქნება:

$$X=0;\ Y=-G=-mg.$$

მაშინ მოძრაობის განტოლებები იქნება:

$$m\frac{dv_x}{dt}=0;\quad m\frac{dv_y}{dt}=-mg.$$

$m$-ზე შეკვეცის შემდეგ გვექნება:

$$\frac{dv_x}{dt}=0;\qquad \frac{dv_y}{dt}=-g,$$

საიდანაც

$$dv_x=0;\quad dv_y=-gdt;$$

$$v_x=C_1;\quad v_y=-gt+C_2. \tag{ა}$$

რადგან $v_x=\frac{dx}{dt}$, ამიტომ $dx=v_xdt=C_1dt$.

როცა $t=0$, $v=v_0$ და $v_x=v_0\cdot\cos\alpha$, მივიღებთ $C_1=v_0\cos x$, ამიტომ

$$dx=v_0\cos\alpha\,dt.$$

ინტეგრირებით მივიღებთ:

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_0 \cos\alpha\, dt; \quad x = v_0 t \cos\alpha. \tag{ბ}$$

(ა) სისტემის მეორე განტოლებაა

$$v_y = -gt + C_2.$$

როცა $t=0$, $v=v_0$ და $v_y = v_0 \sin\alpha$, მაშინ $C_2 = v_0 \cdot \sin\alpha$, ამიტომ

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha,$$

ანუ

$$dy = -gtdt + v_0 \sin\alpha\, dt.$$

ინტეგრირებით მივიღებთ

$$\int_0^y dy = \int_0^t v_0 \sin\alpha\, dt - \int_0^t gtdt,$$

ანუ

$$y = v_0 t \cdot \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \tag{გ}$$

ამრიგად, (ბ) და (გ) განტოლებები პირველი კითხვის პასუხებია.

ბ) (ბ) და (გ) განტოლებებიდან $t$ დროის გამორიცხვით წერტილის ტრაექტორიის განტოლებას მივიღებთ; მართლაც,

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \quad \text{და} \quad y = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2,$$

ანუ

$$y = x \cdot \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}; \tag{დ}$$

ეს კი $Oy$ ღერძის პარალელურღერძიანი პარაბოლის განტოლებაა.

ამრიგად, ჰორიზონტთან $\alpha$ კუთხით გატყორცნილი მძიმე სხეული უჰაერო სივრცეში პარაბოლზე მოძრაობს.

გ) ახლა განვსაზღვროთ ფრენის ჰორიზონტალური სიშორე, ე. ი. $x_{max}$.

ავიღოთ ტრაექტორიის (დ) განტოლება და შიგ ჩავსვათ მნიშვნელობა $y=0$ (ე. ი. ტრაექტორიის $Oy$ ღერძთან გადაკვეთის წერტილი), მაშინ

$$x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} = 0,$$

აქედან

$$x\left(\operatorname{tg}\alpha-\frac{gx}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right)=0.$$

ამოხსნა გვაძლევს:

$$\text{ან}\quad x_1=0;$$

$$\text{ან}\quad x_2=\frac{2v_0^2\cos^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{g}.$$

პირველი ამოხსნა გვაძლევს 0, მეორე კი $K$ წერტილს. მაშასადამე,

$$x_{\max}=\frac{2v_0^2\cos^2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{g}=\frac{2v_0^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\alpha}{g\cdot\cos\alpha}=\frac{v_0^2}{g}\cdot\sin 2\alpha,$$

ანუ

$$x_{\max}=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha. \qquad (ე)$$

ამ გამოსახულებიდან გამომდინარეობს, რომ მოცემული $v_0$ საწყისი სიჩქარის დროს უჰაერო სივრცეში უდიდესი ჰორიზონტალური ფრენის სიშორე მიიღება მაშინ, როდესაც $\sin 2\alpha=1$, ანუ $2\alpha=90°$, საიდანაც $\alpha=45°$.

დ) ტრაექტორიის მაქსიმალური სიმაღლე $y_{\max}=H$ შემდეგნაირად განისაზღვრება: უმაღლეს წერტილზე სიჩქარის გეგმილი $Oy$ ღერძზე უდრის ნულს, ამიტომ

$$v_y=-gt+v_0\cdot\sin\alpha=0,$$

აქედან დრო

$$t=\frac{v_0\cdot\sin\alpha}{g}.$$

$t$ მნიშვნელობის შეტანით განტოლებაში

$$y=v_0t\cdot\sin\alpha-\frac{gt^2}{2},$$

მივიღებთ

$$y_{\max}=v_0\sin\alpha\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)-\frac{g}{2}\left(\frac{v_0\cdot\sin\alpha}{g}\right)^2=\frac{v_0^2\cdot\sin^2\alpha}{2g}.$$

ე) ფრენის $T$ დროს ადვილად განვსაზღვრავთ განტოლებიდან

$$y=v_0t\cdot\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}.$$

როცა $y=0$, მაშინ

$$0=v_0t\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}=t\left(v_0\sin\alpha-\frac{gt}{2}\right),$$

საიდანაც

ან $t_1 = 0$,

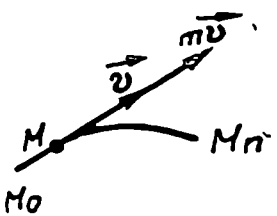
ან $t_2 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = T$.

## III თავი

# წერტილის დინამიკის ზოგადი თეორემები

## § 1. მოძრაობის რაოდენობა და ძალის იმპულსი

$m\bar{v}$ ვექტორულ სიდიდეს მოძრაობის რაოდენობა ეწოდება. მას აქვს სიჩქარის მიმართულება და მოდულით წერტილის $m$ მასისა და მისი მოძრაობის $v$ სიჩქარის ნამრავლს უდრის (ნახ. 229).




ნახ. 229

მოძრაობის რაოდენობა მექანიკური მოძრაობის საზომია და დამოკიდებულია წერტილის მასასა და სიჩქარეზე.

ვთქვათ, $m = 1$ კგ და $v = 1$ მ/წმ, მაშინ მოძრაობის რაოდენობის ერთეული $= 1$ კგ $\cdot 1$ მ/წმ $= 1 \frac{\text{კგ} \cdot \text{მ}}{\text{წმ}}$.

*MKS* სისტემაში მოძრაობის რაოდენობის ერთეულად მიღებულია 1 კგ მასის სხეულის მოძრაობის რაოდენობა, როდესაც სხეული თანაბრად მოძრაობს და მისი სიჩქარეა 1 მ/წმ.

მოძრაობის რაოდენობის ერთეულის განზომილება *Si* (სი) სისტემაში

$$[m] \cdot [v] = 1 \text{ კგ} \cdot \frac{\text{მ}}{\text{წმ}} = 1 \text{ კგ} \cdot \text{მ} \cdot \text{წმ}^{-1} = 1 \text{ მ} \cdot \text{კგ} \cdot \text{წმ}^{-1}.$$

*CGS* (სანტიმეტრ-გრამ-სეკუნდი) სისტემაში:

$$1 \text{ გ} \cdot 1 \frac{\text{სმ}}{\text{წმ}} = 1 \frac{\text{გ} \cdot \text{სმ}}{\text{წმ}} = \text{სმ} \cdot \text{წმ}^{-1};$$

*MKS* (მეტრ-კგ წამი) სისტემაში:

$$1 \text{ კგ} \cdot \frac{\text{წმ}^2}{\text{მ}} \cdot 1 \frac{\text{მ}}{\text{წმ}} = 1 \text{ კგ} \cdot \text{წმ} \text{ (კგ წმ)}.$$

მოძრაობის რაოდენობის $m\bar{v}$ ვექტორს კოორდინატთა ღერძებზე თუ დავაგეგმილებთ, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} mw_x &= m\frac{dx}{dt}; \\ mw_y &= m\frac{dy}{dt}; \\ mv_z &= m\frac{dz}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ახლა გადავიდეთ ძალის იმპულსის განმარტებაზე.

$\vec{F}\cdot dt$ ვექტორულ ნამრავლს ძალის იმპულსი ეწოდება უსასრულოდ მცირე $dt$ დროის განმავლობაში (მას ელემენტარული იმპულსიც ჰქვია).

ამრიგად, ძალის იმპულსი ახასიათებს ძალის მოქმედების ზომას დროის მოცემულ მომენტში.

$d\vec{S}$ სიმბოლოთი თუ აღვნიშნავთ ელემენტარულ იმპულსს, მივიღებთ

$$d\vec{S} = \vec{F}\,dt.$$

ძალის ელემენტარული იმპულსი ძალის ფუძის გასწვრივ მივმართოთ. თუ ცვლადი $\vec{F}$ ძალის მოქმედებას განვიხილავთ დროის სასრულ $t$ მომენტში, მაშინ $t$ დრო უსასრულოდ მცირე $dt$ შუალედთა დიდ რაოდენობად უნდა დავყოთ, $\vec{F}\cdot dt$ იმპულსები ყოველი $dt$ შუალედისათვის განვსაზღვროთ და შემდეგ შევაჯამოთ. ასეთ ჯამს ინტეგრალი ეწოდება და შემდეგნაირად აღინიშნება

$$\vec{S} = \int_0^t \vec{F}\,dt. \qquad (2)$$

$\vec{S}$ ვექტორული სიდიდე $\vec{F}$ ძალის იმპულსია $t$ დროის შუალედში.

მაშასადამე, ძალის იმპულსი დროის ნებისმიერ $t$ შუალედში ელემენტარული იმპულსის ინტეგრალს უდრის ნულიდან $t$-მდე.

აღსანიშნავია, რომ (2) ინტეგრალურ ჯამში შესაკრები ვექტორებია. კერძოდ, თუ $\vec{F}$ ძალა მოდულით და მიმართულებით მუდმივია ($\vec{F}=\text{const}$), მივიღებთ

$$\vec{S} = \vec{F}\cdot t;$$

მასთან, ამ შემთხვევაში, მოდულითაც

$$S = F\cdot t. \qquad (3)$$

(3) ფორმულიდან განვსაზღვრავთ ძალის იმპულსის ერთეულს. ვთქვათ, $F=1$ ნიუტონს, $t=1$ წმ, მაშინ

| ძალის იმპულსის ერთეული = 1 ნ · 1 წმ = 1 ნ. წმ. |
|---|

*MKS* სისტემაში ძალის იმპულსის ერთეულად მიღებულია იმპულსი, რომელიც წარმოიქმნება 1 ნიუტონი ძალის მოქმედებით 1 წმ განმავლობაში.

*Si* სისტემაში ძალის იმპულსის განზომილებაა

$$[S]=[F]\cdot[t]=1\ \text{მ}\cdot\text{კგ}\cdot\text{წმ}^{-2}\ \text{წმ}=1\ \text{მ}\cdot\text{კგ}\cdot\text{წმ}^{-1}.$$

*CGS* სისტემაში:

$$1\ \text{დინი წმ}\left(1\ \text{გ}\cdot\frac{\text{სმ}}{\text{წმ}}\right).$$

მეტრ-კგ ძალა-წამი სისტემაში

$$1\ \text{კგ}\cdot\text{წმ}\ (\text{კგ}\cdot\text{წმ}).$$

ცვლადი $\overline{F}$ ძალის იმპულსის გამოანგარიშება შეიძლება ვექტორის კოორდინატთა ღერძებზე დაგეგმილების მეთოდის გამოყენებით.

(2) ტოლობის საფუძველზე $\overline{S}$ ვექტორის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე ასე გამოისახება:

$$\left.\begin{aligned} S_x &= \int_0^t X\,dt; \\ S_y &= \int_0^t Y\,dt; \\ S_z &= \int_0^t Z\,dt, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

სადაც $S_x$, $S_y$ და $S_z$ ძალის $\overline{S}$ იმპულსის გეგმილებია კოორდინატთა ღერძებზე; $X$, $Y$ და $Z$ კი $\overline{F}$ ძალის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე.

## § 2. ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილება

დინამიკის ძირითადი კანონია:

$$m\overline{w}=\overline{F}.$$

ამ კანონის გადაწერა ასეც შეიძლება:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F},$$

ანუ

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v})=\vec{F},$$

საიდანაც

$$\boxed{d(m\vec{v})=\vec{F}\,dt,} \tag{1}$$

ე. ი. ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის დიფერენციალი ამ წერტილზე მოქმედი ძალის ელემენტარული იმპულსის ტოლია.

ამ განტოლების ორივე მხარის ინტეგრირებით მივიღებთ:

$$\int_{v_0}^{v} d(m\vec{v})=\int_0^t \vec{F}\,dt,$$

ანუ

$$m(\vec{v}-\vec{v}_0)=\int_0^t \vec{F}\,dt;$$

რადგან

$$\int_0^t \vec{F}\,dt=\vec{S},$$

ამიტომ

$$\boxed{m\vec{v}-m\vec{v}_0=\vec{S}.} \tag{2}$$

(2) ტოლობა გამოსახავს წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემას: ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილება დროის გარკვეულ შუალედში ამ წერტილზე მოქმედი ძალის იმპულსის ტოლია დროის იმავე შუალედში.

(2) განტოლების ორივე ნაწილის კოორდინატთა ღერძებზე დაგეგმილებით მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} mv_x - mv_{0x} = S_x = \int_0^t X dt; \\ mv_y - mv_{0y} = S_y = \int_0^t Y dt; \\ mv_z - mv_{0z} = S_z = \int_0^t Z dt, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

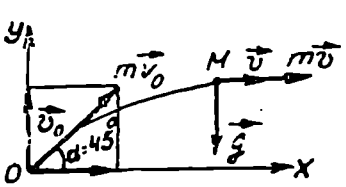
ე. ი. მოძრაობის რაოდენობის გეგმილის ცვლილება რაიმე ღერძზე მოქმედი ძალის იმპულსის გეგმილს უდრის იმავე ღერძზე.

### მაგალითი

სხეული გატყორცნილია ჰორიზონტისადმი $\alpha = 45^\circ$ კუთხით, $v_0 = 10$ მ/წმ საწყისი სიჩქარით. განსაზღვრეთ უმაღლეს მდებარეობამდე ასვლის ხანგრძლივობა, თუ ჰაერის წინაღობა უგულებელყოფილია (ნახ. 230).

### ამოხსნა

სხეული იმყოფება $\vec{G}$ სიმძიმის ძალის ზემოქმედების ქვეშ. სხეულის საწყისი მდებარეობის შესაბამისი $\vec{v}_0$ სიჩქარე ტრაექტორიის მხებს მიჰყვება და $\alpha = 45^\circ$ კუთხეს ადგენს ჰორიზონტთან. ასვლის უმაღლეს $M$ წერტილში $\vec{v}$ ჰორიზონტალურადაა მიმართული. გავატაროთ $Ox$ და $Oy$ კოორდინატთა ღერძები და სხეულის მოძრაობა ნივთიერი წერტილის მოძრაობად განვიხილოთ. ამ შემთხვევაში მოძრაობის რაოდენობის გეგმილის ცვლილების ფორმულები იქნება:



ნახ. 230

$$mv_x - mv_{0x} = \int_0^t X dt;$$

$$mv_y - mv_{0y} = \int_0^t I dt.$$

ნახაზის მიხედვით:

$$mv_{0x} = mv_0 \cdot \cos\alpha;$$

$$mv_{0y} = mv_0 \cdot \sin\alpha.$$

რადგან $Ox$ ღერძის მიმართულებით წერტილზე ძალები არ მოქმედებენ, ამიტომ ამ მიმართულებით წერტილის სიჩქარე მუდმივი რჩება, ამის გამო

$$mv_{0x} = mv_x.$$

$M$ მდებარეობის შესაბამისი მოძრაობის რაოდენობის გეგმილი $Oy$ ღერძზე ნულის ტოლია, ე. ი.

$$mv_y = 0.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\vec{G}$ ძალა მუდმივია და $Oy$ ღერძზე უარყოფითი სიდიდით გეგმილდება, მივიღებთ

$$-mv_0 \sin\alpha = -G \int_0^t dt,$$

ანუ

$$-mv_0 \sin\alpha = -mgt,$$

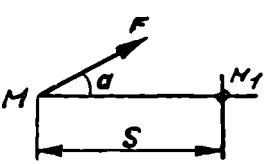
საიდანაც

$$t = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g} = \frac{10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{9{,}81} = 0{,}725 \text{ წმ}.$$

## § 3. ძალის მუშაობა და სიმძლავრე

### ა. მუდმივი ძალის მუშაობა წრფივი გადაადგილების დროს

ვთქვათ, წერტილზე მოდებული და მიმართულებით მუდმივი ძალაა მოდებული და ნივთიერი წერტილი გადაჰყავს $M_0$ მდებარეობიდან $M_1$ მდებარეობაში (ნახ. 231).



ნახ. 231

$\vec{F}$ ძალა წერტილის გადაადგილების მიმართულებასთან $\alpha$ კუთხეს ადგენს.

$\vec{F}$ ძალით ნივთიერი წერტილი გაივლის $s$ გზას.

მოდულით და მიმართულებით მუდმივი ძალის მუშაობა ნივთიერი წერტილის წრფივი გადაადგილების დროს ამ ძალის მოდულის, გზის სიგრძისა და მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსის ნამრავლის ტოლია

$$\boxed{A = F \cdot s \cdot \cos\alpha.} \tag{1}$$

ამ გამოსახულებაში $F \cdot \cos\alpha$ მოცემული $\overline{F}$ ძალის გეგმილია გადაადგილების მიმართულებაზე.

როცა ძალა გადაადგილების მიმართულების მართობულია, მუშაობა არ სრულდება. მართლაც, თუ $\alpha = 90°$, მაშინ

$$\cos 90° = 0 \text{ და}$$

$$A = F \cdot s \cdot 0 = 0.$$

როცა ძალა გადაადგილების მიმართულებას მიჰყვება, $\alpha = 0°$, $\cos 0° = 1$ და მუშაობა

$$A = F \cdot s \cdot 1 = Fs.$$

დაბოლოს, ძალა მოძრაობის საწინააღმდეგო მხარეს თუ იქნება მიმართული, მაშინ $\alpha = 180°$, $\cos 180° = -1$ და მუშაობა

$$A = F \cdot s \cdot (-1) = -F \cdot s.$$

უარყოფითი მუშაობის მაგალითია ხახუნის ძალის მუშაობა.

მაგალითად, თუ $\overline{Q}$ წონის სხეული წრფივად მოძრაობს არაგლუვ ჰორიზონტალურ გზაზე, $s$ გზაზე ხახუნის ძალის მუშაობა იქნება

$$A = -f \cdot Q \cdot s,$$

სადაც $f$ ხახუნის კოეფიციენტია.

*MKS* სისტემაში $A$ მუშაობის ერთეულს (1) ფორმულით განვსაზღვრავთ, რისთვისაც დაეუშვათ, რომ ძალა $F = 1$ ნიუტონს, გზა $s = 1$ მ და კუთხე $\alpha = 0°$, მაშინ

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{მუშაობის ერთეული} = 1 \text{ ნიუტონი} \cdot 1 \text{ მეტრი} = \\ = 1 \text{ ნიუტონმეტრი} = 1 \text{ ჯოულს.}\end{array}} \tag{2}$$

ამრიგად, ჯოული (ჯ) ის მუშაობაა, რომელსაც 1 ნიუტონი მუდმივი ძალა ასრულებს 1 მეტრ გზაზე.

მუშაობის განზომილება *Si* სისტემაში:

$$[A] = [F] \cdot [s] = \text{მ} \cdot \text{კგ} \cdot \text{წმ}^{-2} \cdot \text{მ} = \text{მ}^2 \cdot \text{კგ} \cdot \text{წმ}^{-2}.$$

*CGS* სისტემაში მუშაობის ერთეულია 1 ერგი.

1 ერგი ის მუშაობაა, რომელსაც 1 დინი ძალა ასრულებს 1 სმ გზაზე.

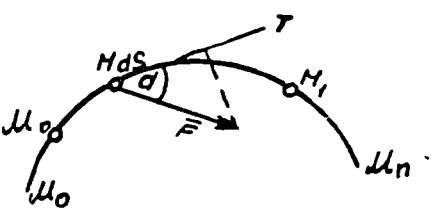
მეტრ-კგძალა-სეკუნდი სისტემაში მუშაობის ერთეულია 1 კგ. მ (კგძალა. მ) ანუ 1 კგ ძალის მუშაობა 1 მ გზაზე.

1 ჯოული $= 10^7$ ერგი $= 0{,}102$ კგ. მ.

1 კგ·მ $= 9{,}81$ ჯოულს.

### ბ. ელემენტარული მუშაობა. ძალის მუშაობა მოცემულ გადაადგილებაზე

მუშაობის გამოანგარიშების გრაფიკული ხერხი. ვთქვათ, $\vec{F}$ ძალის მოდების $M$ წერტილი მრუდწირულ $M_0M_n$ ტრაექტორიაზე გადაადგილდება (ნახ. 232).



ნახ. 232.

რომ განვსაზღვროთ $\vec{F}$ ძალის მუშაობა $M_0M_n = s$ გზაზე, ეს გზა დავყოთ ელემენტარულ $ds$ უბნებად, რომლებიც ისეთი მცირენი არიან, რომ შეიძლება მათი წრფის მონაკვეთებად მიჩნევა. ამავე მიზეზით უსასრულოდ მცირე $ds$ მონაკვეთზე ელემენტარული გადაადგილების დროს $\vec{F}$ ძალას მოდულით და მიმართულებით მუდმივ ძალად ვთვლით.

$\vec{F}$ ძალის მიერ მოძრაობის $MT$ მიმართულებასთან (რომელიც $M_0M_n$ მრუდის მხებია $M$ წერტილში) შედგენილი კუთხე იყოს $\alpha$, მაშინ $ds$ ელემენტარულ გადაადგილებაზე $\vec{F}$ ძალის ელემენტარული $\delta A$ მუშაობა იქნება

$$\delta A = F \cdot ds \cdot \cos\alpha, \tag{3}$$

ე. ი. ძალის ელემენტარული მუშაობა უდრის ძალის სიდიდის ნამრავლს ელემენტარულ $ds$ გადაადგილებასა და ძალის მიმართულებასა და გადაადგილების მიმართულებას შორის $\alpha$ კუთხის კოსინუსზე.

ელემენტარული მუშაობა $dA$-თი კი არ აღინიშნება, არამედ $\delta A$-თი, რადგან ზოგად შემთხვევაში იგი არ წარმოადგენს ფუნქციის დიფერენციალს.

(3) გამოსახულებაში მუშაობის ნიშანი $\cos\alpha$ ნიშნით ვანისაზღვრება.

ძალის მუშაობა სასრულ $M_0M_n = s$ გზაზე უსასრულოდ მცირე $ds$ უბნებზე ელემენტარულ მუშაობათა ჯამის სახით განისაზღვრება

$$A = \int_0^s (F \cdot \cos\alpha)\, ds. \tag{4}$$

(4) ფორმულის ინტეგრირება $M_0M_n$ მრუდის უსასრულოდ მცირე რკალების მიხედვით წარმოებს. ამის გამო ამ ინტეგრალს მ რ უ დ წ ი რ უ ლ ი ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი ეწოდება.

კინემატიკიდან ცნობილია, რომ

$$ds = vdt,$$

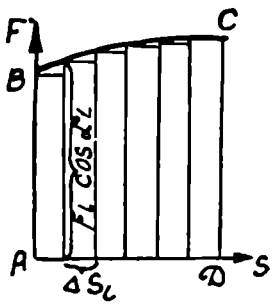
სადაც $ds$ მოძრავი წერტილის ელემენტარული გადაადგილებაა $dt$ დროის განმავლობაში, ამიტომ

$$(F \cdot \cos\alpha)\, ds = (Fv \cdot \cos\alpha)\, dt,$$

მაშინ

$$A = \int_0^t (F \cdot v \cdot \cos\alpha)\, dt. \qquad (5)$$

ამ ფორმულით სარგებლობა შეიძლება, როდესაც ძალის მოდების წერტილის სიჩქარე, ძალის სიდიდე და მოდული ცნობილია დროის ნებისმიერი $t$ მომენტისათვის. ინტეგრალქვეშა გამოსახულება $\overline{F}$ ძალის ელემენტარული მუშაობაა $dt$ დროის განმავლობაში.



ნახ. 233

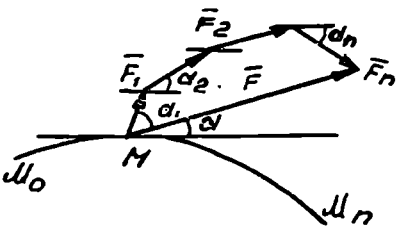
ზოგჯერ ძნელია მუშაობის გამოთვლა (5) ფორმულით, ამიტომ იგი ტექნიკაში ხშირად გამოყენებული ცვლადი ძალის მუშაობის გამოსაანგარიშებელი უფრო მარტივი გრაფიკული ხერხით განვმარტოთ.

ავიღოთ $sAF$ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა (ნახ. 233) და შერჩეული მასშტაბით აბსცისთა ღერძზე გადავზომოთ მეტად მცირე გზის $\Delta s_i$ მონაკვეთები, ორდინატთა ღერძზე კი—ძალის გეგმილის სათანადო სიდიდეები ძალის მოდების $M$ წერტილის სიჩქარის მიმართულებაზე, ე. ი.

$$F_1 \cdot \cos\alpha_1, \quad F_2 \cdot \cos\alpha_2 \text{ და ა. შ.}$$

მაშინ $F_i \cdot \cos\alpha_i$ ძალის ელემენტარული მუშაობა $\Delta s_i$ უბანზე ნახაზზე ელემენტარული მართკუთხედის ფართობით გამოისახება, ელემენტარულ მუშაობათა ჯამი კი—ასეთი მართკუთხედების ფართობთა ჯამით. ამ ფართობთა ჯამის ზღვარი $ABCDA$ მრუდწირული ნაკვთის ფართობს უდრის; ეს ფართობი შემოსაზღვრულია აბსცისთა ღერძით, $BC$ რკალით და ორი $AB$ და $CD$ ორდინატით.

ვთქვათ, $M_0M_n$ მრუდწირულ ტრაექტორიაზე მოძრავ ნივთიერ $M$ წერტილზე (ნახ. 234) მოდებულია $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, ..., $\overline{F}_n$ ძალები.




ნახ. 234

ამ ძალთა ტოლქმედის საპოვნელად ვაგებთ ძალთა მრავალკუთხედს, რომლის ჩამკეტი გვერდი მოცემული სისტემის $\overline{F}$ ტოლქმედი იქნება

$$\overline{F}=\overline{F}_1+\overline{F}_2+\overline{F}_3+\ldots+\overline{F}_n. \quad (1)$$

ვთქვათ, მოცემული ძალები რაიმე ღერძის მიმართულებასთან სათანადოდ ადგენენ $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, ... , $\alpha_n$ კუთხეებს, $\overline{F}$ ტოლქმედი კი იმავე ღერძთან ადგენს $\alpha$ კუთხეს, მაშინ ამ ღერძზე (1) ტოლობის დაგეგმილებით მივიღებთ

$$F\cdot\cos\alpha=F_1\cdot\cos\alpha_1+F_2\cdot\cos\alpha_2+F_3\cdot\cos\alpha_3+\ldots+F_n\cdot\cos\alpha_n.$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილს თუ გავამრავლებთ ელემენტარულ $ds$ გზაზე, მივიღებთ, რომ ტოლქმედი ძალის ელემენტარული მუშაობა უდრის მდგენელი ძალების ელემენტარულ მუშაობათა ჯამს

$$(F\cdot\cos\alpha)\,ds=(F_1\cdot\cos\alpha_1)\,ds+(F_2\cdot\cos\alpha_2)\,ds+\ldots+(F_n\cos\alpha_n)\,ds.$$

ამ გამოსახულების ინტეგრირებით ნულიდან $s$-მდე ($M_0M_n$ ტრაექტორია), მივიღებთ

$$\int_0^s (F\cdot\cos\alpha)\,ds=\int_0^s (F_1\cdot\cos\alpha_1)\,ds+\int_0^s (F_2\cdot\cos\alpha_2)\,ds+$$

$$+\ldots+\int_0^s (F_n\cdot\cos\alpha_n)\,ds,$$

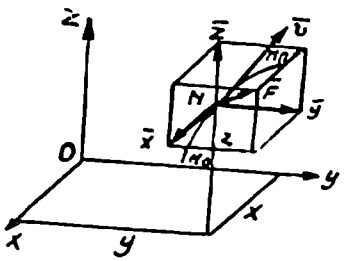
ანუ

$$A_F=A_{F_1}+A_{F_2}+A_{F_3}+\ldots+A_{F_n}.$$

**ამრიგად, ტოლქმედი ძალის მუშაობა მოცემულ გადაადგილებაზე მდგენელ ძალთა მუშაობის ჯამს უდრის იმავე გადაადგილებაზე.**

ვთქვათ, $\overline{F}$ ძალის მოდების $M$ წერტილი მრუდწირულ ტრაექტორიაზე მოძრაობს (ნახ. 235).

ავიღოთ სამღერძიანი მართკუთხა $xyz$ კოორდინატთა სისტემა. $\overline{F}$ ძალის გეგმილები სათანადო ღერძებზე იყოს $X$, $Y$ და $Z$, ხოლო ამ ძალის მიმართულების კოსინუსები იყოს $\cos\alpha$, $\cos\beta$ და $\cos\gamma$; მაშინ $\overline{F}$ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა კოორდინატთა ღერძების გასწვრივ იქნება:




ნახ. 235

$$\delta A_x = X \cdot ds \cdot \cos\alpha;$$

$$\delta Ay = Y \cdot ds \cos\beta;$$

$$\delta A_z = Z\, ds \cdot \cos\gamma.$$

აქვე შევნიშნოთ, რომ $(ds \cdot \cos\alpha)$ ელემენტარული $ds$ გადაადგილების გეგმილია $Ox$ ღერძზე და თან $dx$-ის ტოლია, ამიტომ

$$ds \cdot \cos\alpha = dx.$$

ანალოგიურად,

$$ds \cdot \cos\beta = dy \quad \text{და} \quad ds \cdot \cos\gamma = dz.$$

ამის შემდეგ ელემენტარული მუშაობა კოორდინატთა ღერძების გასწვრივ გამოისახება ასე:

$$\left.\begin{aligned} \delta A_x &= X \cdot dx; \\ \delta A_y &= Y \cdot dy; \\ \delta A_z &= Z \cdot dz. \end{aligned}\right\} \qquad (ა)$$

მაშასადამე, საბოლოოდ ძალის ელემენტარული მუშაობისათვის მივიღებთ ფორმულას

$$\boxed{\delta A = X dx + Y dy + Z dz.} \qquad (5)$$

**დ. სიმძლავრე**

ძალის მუშაობის სიდიდის გარდა საგულისხმოა ვიცოდეთ დრო, რომლის განმავლობაშიაც სრულდება ეს მუშაობა. ასე, მაგალითად, ნებისმიერი მანქანის მუშაობაში ჩვენ გვაინტერესებს მანქანის მწარმოებლურობა, ე. ი. მის მიერ დროის ერთეულში (წამში) შესრულებული მუშაობა.

დროის ერთეულში შესრულებულ მუშაობას ძალის სიმძლავრე ეწოდება.

თუ $dt$ დროის შუალედში $\vec{F}$ ძალამ $\delta A$ მუშაობა შეასრულა, მაშინ ძალის სიმძლავრე

$$N=\frac{\delta A}{dt}. \tag{6}$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც დროის ტოლ შუალედებში ერთნაირი მუშაობა სრულდება, ძალის სიმძლავრე

$$N=\frac{A}{t}. \tag{7}$$

(6) ფორმულაში $\delta A=F\cdot ds\cdot\cos\alpha$ მნიშვნელობა რომ შევიტანოთ, მივიღებთ

$$N=\frac{\delta A}{dt}=\frac{E\cdot ds\cdot\cos\alpha}{dt}=F\cdot v\cdot\cos\alpha, \tag{8}$$

ე. ი. ძალის სიმძლავრე დროის ნებისმიერ მომენტში ძალის მოდულის, სიჩქარის მოდულისა და ძალის ვექტორსა და სიჩქარის ვექტორს შორის კუთხის კოსინუსის ნამრავლის ტოლია.

როდესაც $\alpha=0^\circ$, მაშინ $\cos\alpha=\cos 0^\circ=1$, ე. ი. ძალის მიმართულება სიჩქარის მიმართულებას ემთხვევა, მაშინ ძალის სიმძლავრე

$$N=F\cdot v. \tag{9}$$

ავიღოთ სიმძლავრის (7) ფორმულა $N=\frac{A}{t}$ და, ვთქვათ, მუშაობა $A=1$ ჯოულს, ხოლო დრო $t=1$ წმ, მაშინ $Si$ სისტემაში სიმძლავრის ერთეული იქნება

$$\boxed{\frac{1\text{ ჯოული}}{1\text{ წმ}}=1\frac{\text{ჯოული}}{\text{წამი}}=1\text{ ვატი},} \tag{10}$$

ე. ი. 1 ვატი იმ ძალის სიმძლავრეა, რომელიც 1 ჯოულ მუშაობას ასრულებს 1 წამში.

$Si$ სისტემაში ძალის სიმძლავრის განზომილებაა:

$$[N]=\frac{[A]}{[t]}=\frac{\text{მ}^2\cdot\text{კგ}\cdot\text{წმ}^{-2}}{\text{წმ}}=\text{მ}^2\cdot\text{კგ}\cdot\text{წმ}^{-3}.$$

$CGS$ სისტემაში სიმძლავრის ერთეულია 1 $\frac{\text{ერგი}}{\text{წმ}}$.

მეტრ-კგძალა-წამი სისტემაში სიმძლავრის ერთეულია 1 კგ $\frac{მ}{წმ}$.

ამას გარდა, იყენებენ სიმძლავრის შემდეგ ერთეულებს:

1 ცხენის ძალა (ცხ. ძ) $= 75\frac{კგ \cdot მ}{წმ} = 0{,}736$ კილოვატი $= 736$ ვატს.

1 კილოვატი (კვტ) $= 1000$ ვატს $= 102\ \frac{კგ \cdot მ}{წმ} = 1{,}36$ ცხ. ძ.

ტექნიკაში მუშაობის ერთეულად ხშირად იღებენ 1 კილოვატ საათს, ე. ი. მუშაობას, რომელსაც საათში ასრულებს იმ მანქანის მოძრავი ძალა, რომლის სიმძლავრეა 1 კილოვატი.

### ე. მარგი ქმედების მექანიკური კოეფიციენტი

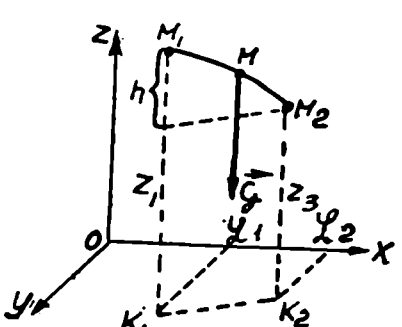
ნებისმიერი მანქანის მუშაობის დროს მისი სიმძლავრის ნაწილი სასარგებლოდ არ იხარჯება, არამედ მანქანის მავნე წინაღობათა დაძლევაზე მიდის (მოძრავ ნაწილებს შორის ხახუნზე, ჰაერის მიერ მოძრაობისადმი წინაღობის დაძლევაზე და სხვა).

მანქანის სასარგებლო მუშაობის სიმძლავრის ფარდობას მანქანის მთელ სიმძლავრეზე მარგი ქმედების მექანიკური კოეფიციენტი ეწოდება.

თუ მანქანის მთელ სიმძლავრეს $N$-ით აღვნიშნავთ, ხოლო სასარგებლო სიმძლავრეს—$N_1$-ით, მაშინ მარგი ქმედების კოეფიციენტი (მქკ)

$$\eta = \frac{N_1}{N} < 1. \qquad (11)$$

მქკ მანქანის მექანიკური ეფექტურობის ერთ-ერთი საგულისხმო მაჩვენებელია.



ნახ. 236

### § 4. სიმძიმის ძალის მუშაობა

ვთქვათ, $\bar{G}$ წონის $M$ წერტილი $M_1$ მდებარეობიდან $M_2$ მდებარეობაში გადაადგილდება $M_1M_2$ ტრაექტორიაზე (ნახ. 236), მაშინ $\bar{G}$ ძალის გეგმილები $Ox$ და $Oy$ ღერძებზე იქნება $X=0$ და $Y=0$, ხოლო $OZ$ ღერძზე

$$Z = -G = -mg. \qquad (1)$$

ამ შემთხვევაში სიმძიმის ძალის ელემენტარული მუშაობა შემდეგნაირად გამოისახება

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz = -Gdz. \tag{2}$$

$M_1$ მდებარეობიდან $M_2$ მდებარეობაში გადასვლისას მუშაობა

$$A = -\int_{z_1}^{z_2} Gdz = -G(z_2 - z_1) = G(z_1 - z_2). \tag{3}$$

აქ $z_1$ და $z_2$ სათანადოდ $M_1$ და $M_2$ წერტილთა ვერტიკალური კოორდინატებია.

(3) ფორმულაში მივიღოთ

$$z_1 - z_2 = \pm h;$$

აქ (+) ნიშანი $z_1 > z_2$ შემთხვევას შეესაბამება, ხოლო (—) ნიშანი— $z_1 < z_2$ შემთხვევას, მაშინ

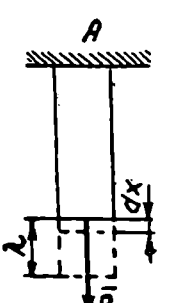
$$\boxed{A = \pm G \cdot h,} \tag{4}$$

ე. ი. ნივთიერ წერტილზე მოქმედი სიმძიმის ძალის მუშაობა დამოკიდებული არ არის გზის სიგრძესა და წერტილის მოძრაობის ტრაექტორიაზე, არამედ დამოკიდებულია წერტილის მდებარეობის სიმაღლეთა სხვაობაზე საწყის და საბოლოო მდგომარეობაში.

ამ სიმაღლეების ათვლას ნებისმიერად შერჩეული ჰორიზონტალური სიბრტყიდან აწარმოებენ.

## § 5. დრეკადის ძალის მუშაობა

გამოვიანგარიშოთ დრეკადობის ძალის მუშაობა ღეროს გაჭიმვის დროს. ვთქვათ, $A$ ბოლოთი დამაგრებული ღერო არადეფორმადი მდგომარეობიდან ნელა იჭიმება თანდათან ზრდადი $\overline{P}$ ძალის მოქმედებით (ნახ. 237).



ნახ. 237

ეს ძალა ღეროს დრეკადი $F = cx$ წინაღობით წონასწორდება (აქ $x$ ღეროს დეფორმაციაა; $c$—მუდმივი კოეფიციენტი, რომელიც ღეროს სიხისტეს ახასიათებს და ღეროს ერთეულ სიგრძეზე დეფორმაციის გამომწვევ ძალას წარმოადგენს).

ღეროს $dx$ სიგრძეზე გაჭიმვისათვის საჭირო $\overline{P}$ ძალის ელემენტარული მუშაობაა

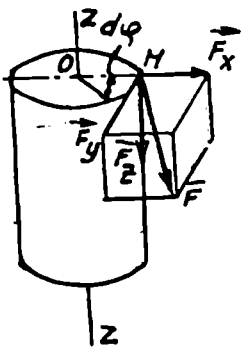
$$dA = cxdx.$$

$\overline{P}$ ძალის ტოლი და შებრუნებული $\overline{F}$ ძალის $A$ მუშაობა $\lambda$ გადაადგილებაზე $x=0$-დან $x=\lambda$-მდე ზღვრებში ინტეგრალით გამოისახება

$$A=-\int_0^{\lambda} cx\,dx=-\frac{c\lambda^2}{2}. \qquad (1)$$

## § 6. მბრუნავ მყარ სხეულზე მოდებული ძალის მუშაობა და სიმძლავრე

უძრავი $zz$ ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის $M$ წერტილზე მოდებულით მუდმივი $\overline{F}$ ძალაა მოდებული (ნახ. 238). ეს ძალა დავშალოთ მდგენელებად, რომელთაგან $\overline{F}_z$ მდგენელი $zz$ ბრუნვის ღერძის პარალელურია, მეორე $\overline{F}_x$ მდგენელი—ამ ღერძის მართობული და თან კვეთს მას, მესამე $\overline{F}_y$ მდგენელი $\overline{F}_z$ და $\overline{F}_x$ მდგენელებისადმი მართობულია.



ნახ. 238

განვსაზღვროთ $\overline{F}$ ძალის $\delta A$ ელემენტარული მუშაობა უსასრულოდ მცირე $ds$ გადაადგილებაზე, რომელსაც $M$ წერტილი სხეულის უსასრულოდ მცირე $d\varphi$ კუთხეზე მობრუნებით ღებულობს.

რადგან $\overline{F}_y$ ძალა $M$ წერტილის გადაადგილებისადმი მართობულად არის მიმართული, მისი მუშაობა ნულის ტოლია; სწორედ ასევე, ნულის ტოლია $\overline{F}_x$ ძალის მუშაობაც.

ამრიგად, $\overline{F}$ ძალის $\delta A$ ელემენტარული მუშაობა $\overline{F}_y$ ძალის მუშაობის ტოლია.

რადგან $\overline{F}_y$ ძალის მიმართულება მოძრაობის განმავლობაში მისი მოდების $M$ წერტილის სიჩქარის ვექტორის მიმართულებას ემთხვევა, ამიტომ

$$\delta A=F_y\cdot ds,$$

ანუ

$$\delta A=F_y\cdot OM\cdot d\varphi,$$

სადაც $OM=R$ სიდიდე $M$ წერტილის მიერ $zz$ ღერძის გარშემო აღწერილი წრეწირის რადიუსია ($ds$ რკალის სიგრძე $R\cdot d\varphi$ ნამრავლის ტოლია).

როგორც სტატიკიდანაა ცნობილი, $\overline{F}_y$ ძალის ნამრავლი $R$ მხარზე $F$ ძალის მომენტია $zz$ ღერძის მიმართ, ამის გამო

$$\delta A=M_{zz}\cdot d\varphi,$$

სადაც $M_{ბრ}$ არის $\overline{F}$ ძალის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ და მას ბრუნვის მომენტი ეწოდება.

სხეულის სასრულ φ კუთხეზე მობრუნებისას ძალის მუშაობა

$$A = \int_0^{\varphi} M_{ბრ}\, d\varphi.$$

როდესაც $M_{ბრ} = \text{const}$, მაშინ

$$A = M_{ბრ} \int_0^{\varphi} d\varphi = M_{ბრ} \cdot \varphi. \qquad (1)$$

მუდმივი $M_{ბრ}$ ბრუნვის მომენტის მუშაობა ამ მომენტისა და სხეულის მობრუნების φ კუთხეზე ნამრავლის ტოლია.

ბრუნვითი მოძრაობის დროს

$$\delta A = M_{ბრ} \cdot d\varphi.$$

ამ გამოსახულების ორივე ნაწილის $dt$-ზე გაყოფით მივიღებთ

$$\frac{\delta A}{dt} = M_{ბრ} \frac{d\varphi}{dt},$$

მაგრამ $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, მაშასადამე, სიმძლავრე

$$\boxed{N = M_{ბრ}\omega.} \qquad (2)$$

ამრიგად, მბრუნავ სხეულზე მოდებული ძალის სიმძლავრე ამ ძალის ბრუნვის მომენტისა და სხეულის კუთხური სიჩქარის ნამრავლის ტოლია.

### ვარჯიშები

**1.** მუშა 100 ნიუტონი ძალით თანაბრად აბრუნებს ოწინარის სახელურს. ძალა ბრუნვის რადიუსის მართობულადაა მოდებული. იპოვეთ 1 წთ დახარჯული მუშაობა, თუ სახელურის რადიუსია $R = 0{,}4$ მ, კუთხური სიჩქარე უდრის 1.0 ბრ/წთ.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

სახელურის კუთხური სიჩქარე

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 10}{30} = \frac{\pi}{3}\ \frac{1}{წმ}.$$

ბრუნვის კუთხე 1 წუთში იქნება

$$\varphi = \omega t = \frac{\pi}{3} \cdot 60 = 20\pi \text{ რად.}$$

მუშის ძალით წარმოქმნილი ბრუნვის მომენტი

$$M_{ბრ} = P \cdot R = 100 \cdot 0{,}4 = 40 \text{ ნიუტონ-მეტრს.}$$

საძიებელი მუშაობა

$$A = M_{ბრ} \cdot \varphi = 40 \cdot 20\,\pi = 800\,\pi = 800 \cdot 3{,}14 = 2\,512 \text{ ჯ.}$$

2. რა სიდიდის იქნება ორთქლის ტუმბოს სიმძლავრე, თუ ტუმბოს 36 მ სიღრმის შახტიდან 1 წუთში 8 კუბ. მეტრი წყალი ამოაქვს?

ა მ ო ხ ს ნ ა

1 მ³ წყლის წონაა $98 \cdot 10^2$ ნიუტონი. ყოველ წუთში 36 მ სიმაღლეზე ააქვთ $784 \cdot 10^2$ ნიუტონი წონის ტვირთი, ამიტომ სიმძლავრე

$$N = \frac{G \cdot s}{t} = \frac{784 \cdot 10^2 \cdot 36}{60} = 47\,040 \text{ ვატი} = 47{,}04 \text{ კილოვატს.}$$

3. 120 მმ დიამეტრის ელექტრომოტორის ბორბალი წუთში 1200 ბრუნს ასრულებს და 4414 ვატ სიმძლავრეს გადასცემს. განსაზღვრეთ ბრუნვის მომენტი და წრიული ძალვა.

ა მ ო ხ ს ნ ა

წრიული სიჩქარე ბორბლის ფერსოზე

$$v = r \cdot w = \frac{\pi r n}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}06 \cdot 1200}{30} = 7{,}5 \text{ მ/წმ.}$$

$N = P \cdot v$ ფორმულიდან წრიული ძალვა

$$P = \frac{N}{v} = \frac{4\,414}{7{,}5} = 590 \text{ ნიუტონს.}$$

ბრუნვის მომენტი

$$M = P \cdot r = 590 \cdot 0{,}06 = 35{,}4 \text{ ნიუტონ-მეტრს.}$$

## § 7. ენერგია. კინეტიკური და პოტენციური ენერგია

საზოგადოდ, მუშაობის შესრულების ხარისხს ანუ უნარს ენერგია ეწოდება.

ყოველ მოძრავ სხეულს შეუძლია მუშაობის შესრულება; ასე, მაგალითად, ტყვია ამსხვრევს ფანჯრის მინას, რომელსაც ივი ხვდება, კუტი ხიმინჯს ასობს მიწაში, წნეხი წურავს ყურძენს და ა. შ. მოძრავი სხეულის მუშაობის წარმოების ამ უნარს კინეტიკური ენერგია ეწოდება.

ამრიგად, სხეულის მექანიკური მოძრაობის უნარს კინეტიკური ენერგია ეწოდება.

კინეტიკური ენერგია მით მეტი იქნება, რაც უფრო დიდი მასისა და სწრაფად მოძრავი სხეული გვექნება.

მექანიკაში მოძრავი სხეულის კინეტიკურ ენერგიასთან ერთად განიხილავენ კიდევ ისეთ ენერგიას, რომელიც მხოლოდ სხეულთა ურთიერთმდებარეობაზე ან ერთი და იმავე სხეულის ნაწილთა ურთიერთმდებარეობაზეა დამოკიდებული. ამ ენერგიას პოტენციური ენერგია ეწოდება.

სხეულის პოტენციურ ენერგიას კიდევ მდებარეობის ენერგია ეწოდება. ასე, მაგალითად, შეკუმშულ ზამბარას, ტყვიას გატენილ თოფში, გარკვეულ სიმაღლეზე სადგამზე მდებარე წონად სხეულს პოტენციური ენერგია აქვთ და ამ სხეულებს გარკვეულ პირობებში მუშაობის შესრულება შეუძლიათ.

## § 8. თეორემა ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების შესახებ

ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგია განისაზღვრება ფორმულით

$$\boxed{W_კ = \frac{mv^2}{2},} \tag{1}$$

ე. ი. ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგია ამ წერტილის მასისა და სიჩქარის კვადრატის ნახევრის ნამრავლის ტოლია.

მართლაც

$$W_კ = A = F \cdot s = mw \cdot s,$$

მაგრამ $v = wt$ და $s = \frac{wt^2}{2}$ ფორმულებიდან $t$-ს გამორიცხვით მივიღებთ

$$s = \frac{v^2}{2w},$$

მაშინ

$$W_კ = mw \cdot \frac{v^2}{2w} = \frac{mv^2}{2},$$

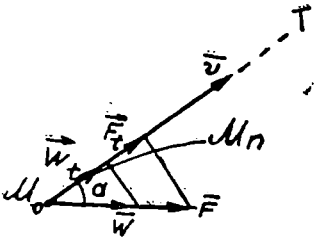
აქვე აღვნიშნოთ, რომ პოტენციური ენერგია რიცხობრივად უდრის სხეულის $G=mg$ წონის ნამრავლს ატანის $h$ სიმაღლეზე:

$$W_პ = G \cdot h = mgh.$$

როგორც კინეტიკური, ისე პოტენციური ენერგია $MKS$ სისტემაში მუშაობის საზომი ერთეულით—ჯოულით იზომება. ამის გამო $Si$ სისტემაში კინეტიკური ენერგიის განზომილება იქნება

$$[W_კ] = მ^2 \cdot კგ \cdot წმ^{-2}.$$

განვიხილოთ თეორემა ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების შესახებ.



ნახ. 239

ვთქვათ, $m$ მასის $M$ წერტილი მრუდწირულ $M_0M_n$ ტრაექტორიაზე მოძრაობს (ნახ. 239) $\vec{F}$ ძალის მოქმედებით.

დინამიკის მეორე კანონის ძალით

$$m\vec{w} = \vec{F}.$$

ამ ვექტორულ ტოლობას $M_0M_n$ ტრაექტორიის $M$ წერტილზე გატარებულ $MT$ მხებზე თუ დავაგეგვმილებთ (მხები $M$ წერტილის მოძრაობის მხარესაა მიმართული), მივიღებთ

$$mw \cdot \cos\alpha = F \cdot \cos\alpha.$$

აქ $w \cdot \cos\alpha$ ნამრავლი სრული $\vec{w}$ აჩქარების $w_t = \frac{dv}{dt}$ მხები მდგენელია $MT$ მხებზე, ამიტომ $w \cdot \cos\alpha = \frac{dv}{dt}$ და გვექნება

$$m\frac{dv}{dt} = F \cdot \cos\alpha.$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილი $M$ წერტილის უსასრულოდ მცირე $ds$ გადაადგილებაზე გავამრავლოთ:

$$m\frac{dv}{dt}\,ds = F \cdot \cos\alpha \cdot ds.$$

ამ გამოსახულების მარცხენა ნაწილი

$$m\frac{dv}{dt}ds = mdv\frac{ds}{dt} = mvdv,$$

ამიტომ

$$mvdv = F\cdot\cos\alpha\cdot ds.$$

მარცხენა მხარის ინტეგრირების ზღვრებად ავიღოთ $v_0$ და $v$, მარჯვენა მხარისა კი — 0 და $s$, მაშინ

$$m\int_{v_0}^{v} vdv = F\cdot\cos\alpha\int_{0}^{s} ds,$$

სადაც $v_0$ მოძრავი ნივთიერი $M$ წერტილის საწყისი სიჩქარის მოდულია, როცა $s=0$;

$v$ — წერტილის საბოლოო სიჩქარე.

ინტეგრირების შემდეგ მივიღებთ

$$\boxed{\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = F\cdot s\cdot\cos\alpha = A,} \qquad (2)$$

ე. ი. მოცემული გადაადგილების დროს ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილება ამ წერტილზე მოქმედი ძალის მუშაობის ტოლია.

როდესაც წერტილზე მოდებული ძალა დადებით მუშაობას აწარმოებს, მაშინ ნივთიერი წერტილი კინეტიკური ენერგიის ნაზრდს იღებს; თუკი ძალა უარყოფით მუშაობას აწარმოებს, მაშინ ნივთიერი წერტილი თავისი კინეტიკური ენერგიის ნაწილს კარგავს.

კინეტიკური ენერგიის კანონის თანახმად, ორივე შემთხვევაში ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ნაზრდი ან დანაკარგი დადებით ან უარყოფით წარმოებულ მუშაობას უდრის.

როდესაც მოძრავ ნივთიერ წერტილზე რამდენიმე ძალა მოქმედებს, მაშინ $A$ მუშაობა წერტილზე მოდებულ ძალთა მუშაობის ალგებრულ ჯამს უდრის.

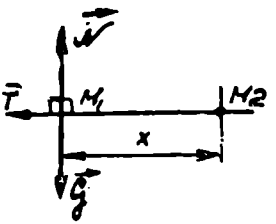
### მაგალითები

**1.** მატარებელი $v_0=20$ მ/წმ სიჩქარით მოძრაობს ჰორიზონტალურ გზაზე. რა მანძილზე უნდა გააჩერონ მატარებელი, თუ დამუხრუჭებისას

ვითარდება მოძრაობისადმი წინაღობის ძალა, რომლის სიდიდე მატარებლის წონის 0,1 ნაწილს უდრის.

ა მ ო ხ ს ნ ა

1. მატარებელი ნივთიერ წერტილად წარმოვიდგინოთ. დამუხრუჭების დაწყებისას $M$ წერტილს $M_1$ მდებარეობა უკავია, ხოლო გაჩერებისას $M_2$ მდებარეობა (ნახ. 240). დამუხრუჭების დროს გავლილი მანძილი



ნახ. 240

$$x = M_1M_2.$$

$M$ წერტილზე მოდებულია ძალები: მატარებლის $\vec{G}$ წონა, რელსის $\vec{N}$ ნორმალური რეაქცია და წინაღობის ძალა $\vec{Q}=0{,}1\ \vec{G}$.

პირველი ორი ძალის მუშაობა $x$ გზაზე ნულის ტოლია, რადგან ისინი გადაადგილებისადმი მართობულებია, წინაღობის ძალის მუშაობა კი

$$-Q\cdot x = -0{,}1\ G\cdot x.$$

კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემის საფუძველზე გვაქვს

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -Q\cdot x = -0{,}1\ G\cdot x.$$

რადგან საბოლოო სიჩქარე, მატარებლის გაჩერების დროს, ნულის ტოლია, ამიტომ

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -0{,}1\ G\cdot x,$$

საიდანაც, როცა $m=\frac{G}{g}$ და $v_0=20$ მ/წმ, გვექნება

$$\frac{G\cdot 20^2}{2g} = 0{,}1\ G\cdot x,$$

აქედან

$$x = \frac{20^2}{0{,}2\cdot 9{,}81} = 200 \text{ მ}.$$

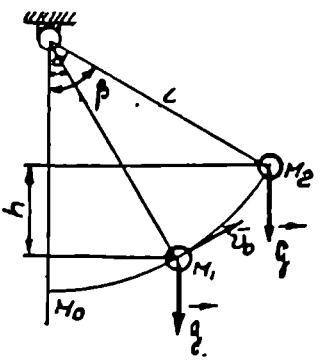
2. $l=1$ მ სიგრძისა და $\vec{G}$ წონის მათემატიკური საქანი (ნახ. 241) წონასწორობის მდებარეობიდან $\alpha=30°$ კუთხით გადახარეს და მიანიჭეს $\vec{v}_0$ საწყისი სიჩქარე, რომელიც ძაფის მართობულად ზემოთ არის მიმარ-

თული. განსაზღვრეთ $\vec{v}_0$ საწყისი სიჩქარის მოდული, თუ წონასწორობის მდგომარეობიდან უდიდესი გადახრის კუთხე $\beta = 60°$.

ამოხსნა

ქანქარას $\vec{v}_0$ საწყისი სიჩქარის საპოვნელად გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ფორმულა

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A.$$



ნახ. 241

ნივთიერი წერტილის მოძრაობა $M_1$ მდებარეობიდან $M_2$ მდებარეობაში სიმძიმის ძალის ზემოქმედებით წარმოებს. ამ ძალის მუშაობა

$$A = G \cdot h = -G(l \cdot \cos 30° - l \cdot \cos 60°) =$$

$$= -G \cdot l\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} G \cdot l \cdot 0{,}73.$$

წერტილის საბოლოო სიჩქარე $v = 0$, ამიტომ

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -\frac{1}{2} G \cdot l \cdot 0{,}73 = -\frac{1}{2} mgl \cdot 0{,}73,$$

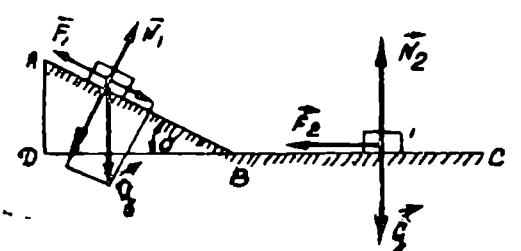
ანუ

$$v_0^2 = gl \cdot 0{,}73,$$

აქედან

$$v_0 = \sqrt{0{,}73 \cdot 9{,}81 \cdot 1} = 2{,}675 \text{ მ/წმ}.$$

3. $\vec{G}$ წონის სხეული საწყისი სიჩქარის გარეშე სრიალებს ჯერ დახრილ, ხოლო შემდეგ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე (ნახ. 242). $C$ წერტილში იგი ჩერდება. იპოვეთ ხახუნის $f$ კოეფიციენტი, თუ $AB = l_1$; $BC = l_2$; $\sphericalangle ABD = \alpha$.



ნახ. 242

ამოხსნა

სხეული ჩავთვალოთ ნივთიერ წერტილად, რომელზედაც მოდებულია $\vec{G}$ სიმძიმის ძალა, $\vec{N}$ ნორმალური რეაქცია და $\vec{F}$ ხახუნის ძალა. 242-ე ნახ-ზე ეს ძალები წარმოდგენილია ასე:

$AB$ უბანზე $\vec{G}$, $\vec{N_1}$, $\vec{F_1}$ და

$BC$ უბანზე $\vec{G}$, $\vec{N_2}$, $\vec{F_2}$.

ხახუნის კოეფიციენტის განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ კინეტიკური ენერგიის განტოლება

$$A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

რადგან სხეულის სიჩქარე საწყის $A$ მდებარეობაში და საბოლოო $C$ მდებარეობაში ნულის ტოლია, ე. ი. $v_0 = 0$ და $v = 0$, ამიტომ სხეულის კინეტიკური ენერგია $A$ და $C$ წერტილებში ნულის ტოლია; ამის გამო $ABC$ გზაზე სხეულზე მოქმედი ძალების მუშაობათა ჯამი ნულის ტოლი იქნება.

მუშაობა $AB$ გზაზე შედგება $A_1 = G \cdot (\sin \alpha) l_1$ სიმძიმის ძალის მუშაობისა და $A_2 = -F_1 l_1$ ხახუნის ძალის მუშაობისაგან. მაგრამ

$$F_1 = N_1 f = G \cdot f \cdot \cos \alpha,$$

მაშასადამე,

$$A_2 = -G \cdot f \cdot l_1 \cdot \cos \alpha.$$

$BC$ უბანზე მუშაობს მხოლოდ $\vec{F_2}$ ხახუნის ძალა

$$A_3 = -G \cdot f \cdot l_2.$$

რადგან ჰორიზონტალური საბრტყის $\vec{N_2}$ ნორმალური რეაქცია სხეულის $\vec{G}$ წონის ტოლია, ამიტომ

$$F_2 = f \cdot G.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $A = 0$, გვექნება

$$G \cdot l_1 \cdot \sin \alpha - G \cdot f \cdot l_1 \cdot \cos \alpha - f \cdot G \cdot l_2 = 0,$$

საიდანაც

$$f = \frac{l_1 \cdot \sin \alpha}{l_1 \cos \alpha + l_2}.$$

## IV თავი

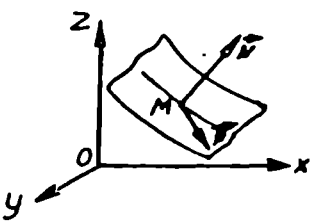
# არათავისუფალი ნივთიერი წერტილის მოძრაობა

### § 1. არათავისუფალი ნივთიერი წერტილი

არათავისუფალი ნივთიერი წერტილი ისეთ წერტილს ეწოდება, რომლის გადაადგილება შეზღუდულია ბმებით.

თუ ბმებს მოვაშორებთ და მათ მოქმედებას ნივთიერ წერტილზე ბმის რეაქციის ძალით შევცვლით, მაშინ არათავისუფალი ნივთიერი წერტილი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ თავისუფალ ნივთიერ წერტილად.

ვთქვათ, $m$ მასის ნივთიერი $M$ წერტილი უძრავ ზედაპირზე მოძრაობს $\overline{F}$ ძალის ზემოქმედებით (ნახ. 243). ეს ზედაპირი ბმის როლს ასრულებს. აქ მხედველობაში უნდა მივიღოთ უძრავი ზედაპირის მექანიკური ზემოქმედება ნივთიერ წერტილზე, ე. ი. ამ ზედაპირის რეაქცია. ცნობილია, რომ როდესაც არ არსებობს ხახუნი, მაშინ ასეთი ზედაპირის რეაქცია მიმართულია ზედაპირის ნორმალზე ($\overline{N}$ ძალა). მაშინ დინამიკის ძირითადი კანონი ვექტორული ფორმით ასეთნაირად გამოისახება



ნახ. 243

$$m\overline{w} = \overline{F} + \overline{N}.$$

მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს ასეთი სახე

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + N_x; \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + N_y; \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + N_z. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ამრიგად, ეს განტოლებები თავისუფალი წერტილის დიფერენციალური განტოლებებისაგან განსხვავდება იმით, რომ მათში $\overline{F}$ ძალის გეგმილებს გარდა შედის $\overline{N}$ ნორმალური რეაქციის გეგმილებიც. მაშასადამე, არათავისუფალი წერტილის მოძრაობა ყველა მოცემული ძალისა და ბმების რეაქციების ზემოქმედებით წარმოებს.

## § 2. ინერციის ძალა

განვიხილოთ ორი $M_1$ და $M_2$ ნივთიერი წერტილის ურთიერთმოქმედება. $M_1$ წერტილზე $\overline{F}_1$ ძალა თუ მოქმედებს, მაშინ უთუოდ უნდა არსებობდეს მეორე $M_2$ წერტილი, რომელიც ამ $\overline{F}_1$ ძალის მოქმედების წყარო იქნება.

თავის მხრივ $M_2$ წერტილზე მოქმედებს $\vec{F}_2$ ძალა, რომლის მოქმედების წყაროა $M_1$ წერტილია.

ეს ორი ძალა $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ მოდულებით ტოლებია და მიმართულებით მოწინააღმდეგენი არიან.

რადგან

$$\vec{F}_1 = m\vec{w},$$

ამიტომ

$$\vec{F}_2 = -m\vec{w}.$$

$\vec{F}_2$ ძალას $M_1$ წერტილის ინერციის ძალა ეწოდება და $\vec{Q}_n$-თ აღინიშნება; ამიტომ

$$\vec{Q}_n = -m\vec{w}, \qquad (1)$$

ე. ი. ნივთიერი წერტილის ინერციის ძალა მოდულით ამ წერტილის მასისა და მისი აჩქარების მოდულზე ნამრავლის ტოლია, აჩქარების ვექტორის პირდაპირ შებრუნებულად არის მიმართული და მოძრავ $M_1$ წერტილზე კი არ არის მოდებული, არამედ $M_2$ წერტილზე, რომელთანაც ურთიერთმოქმედებაში $M_1$ წერტილს $\vec{w}$ აჩქარება ენიჭება.

ნათქვამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი. ვთქვათ, მუშა უბიძგებს $m$ მასის ურიკას და მას $\vec{w}$ აჩქარებას ანიჭებს; ამრიგად, ურიკაზე მოდებულია ძალა

$$\vec{F} = m\vec{w},$$

რომელიც ურიკის მოძრაობის მიმართულებითაა მოგეზული.

ნიუტონის III კანონის მიხედვით, მუშა განიცდის ურიკის წინააღმდეგობას, რომელიც მით მეტი იქნება, რაც მეტია ურიკის მასა და $\vec{w}$ აჩქარება. აი ეს არის ურიკის ინერციის ძალა, რომელიც სინამდვილეში ურიკაზე კი არა, არამედ მუშის ხელზეა მოდებული.

## § 3. დალამბერის პრინციპი

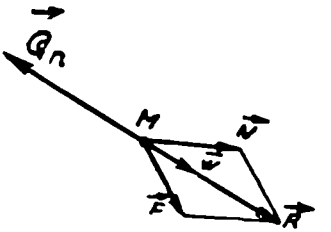
ვთქვათ, მოცემულია $m$ მასის არათავისუფალი ნივთიერი $M$ წერტილი, რომელზედაც მოქმედებს $\vec{F}$ ძალა და ბმის $\vec{N}$ რეაქციის ძალა (ნახ. 244).

$\vec{F}$ და $\vec{N}$ ძალთა ტოლქმედია $\vec{R}$ ძალა.

დინამიკის II კანონის ძალით, $\overline{R}$ ძალას $M$ წერტილის $\overline{w}$ აჩქარების მიმართულება აქვს და $m\overline{w}$ ტოლია.

$M$ წერტილზე მოვდოთ $\overline{R}$ ძალის ტოლი და შებრუნებული ინერციის $\overline{Q}_n$ ძალა

$$\overline{Q}_n = -m\overline{w} = -\overline{R}. \qquad (1)$$



ნახ. 244

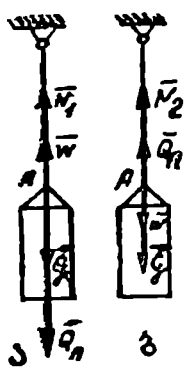
ცხადია, როგორც ტოლი და შებრუნებული ძალები $\overline{R}$ და $\overline{Q}_n$ წონასწორდებიან, მაგრამ

$$\overline{R} = \overline{N} + \overline{F},$$

ამიტომ

$$\overline{|\ \overline{F} + \overline{N} + \overline{Q}_n = 0,\ |} \qquad (2)$$

ე. ი. წერტილის მოძრაობის განტოლებას წერტილის წონასწორობის სახე შეგვიძლია მივანიჭოთ, თუ წერტილზე მოქმედ ძალებს პირობით ინერციის ძალას დავუმატებთ; ამაში მდგომარეობს დალამბერის პრინციპი.



ნახ. 245

### მაგალითები

**1.** ბაგირის ბოლოზე მობმულია ამწევი ძარა (ნახ. 245), რომლის წონაა $G = 3920$ ნიუტონი. იპოვეთ ბაგირის დაჭიმულობა ძარას ასვლის ან ჩამოსვლის დროს, თუ მოძრაობის აჩქარება $w = 3$ მ/წმ².

ამოხსნა

ძარას ბმას ბაგირი წარმოადგენს. განვთავისუფლდეთ ბმისაგან და მისი მოქმედება $\overline{N}$ რეაქციით შევცვალოთ. გარდა ამისა, ძარაზე $\overline{G}$ სიმძიმის ძალაც მოქმედებს.

გამოვიყენოთ დალამბერის პრინციპი. ამისათვის $\overline{w}$ აჩქარების საწინააღმდეგო მიმართულებით ინერციის $\overline{Q}_n$ ძალა მოვდოთ.

რადგან ძალები ერთ წრფეზე მოქმედებენ, შეიძლება მათი ალგებრული შეკრება (ნახ. 245, ა).

აღმა სვლის დროს

$$N_1 - G - Q_n = 0,$$

ანუ

$$N_1 - G - \frac{G}{g}w = 0,$$

საიდანაც

$$N_1 = G + \frac{G}{g} \cdot w = 3920 + \frac{3920}{9{,}81} \cdot 3 = 5\,120 \text{ ნ.}$$

ძარას დაღმა სვლისას

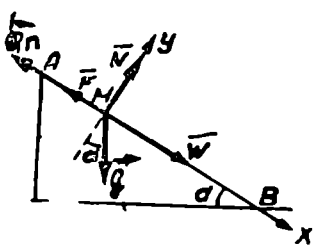
$$N_2 + Q_n - G = 0,$$

საიდანაც

$$N_2 = G - Q_n = 3920 - 1200 = 2720 \text{ ნ.}$$

როდესაც ძარა მოსვენებულ მდგომარეობაშია, მაშინ ბაგირის $\overline{N}$ დაჭიმულობა ძარას $\overline{G}$ წონის ტოლი იქნება.

2. $m$ მასის ნივთიერი $M$ წერტილი სიმძიმის ძალის მოქმედებით სრიალებს არაგლუვ $AB$ დახრილ სიბრტყეზე, რომელიც $\alpha$ კუთხეს ქმნის ჰორიზონტთან (ნახ. 246); ხახუნის კოეფიციენტია $f$. იპოვეთ ნივთიერი წერტილის აჩქარება, თუ მისი წონაა $\overline{G}$.




ნახ. 246

ა მ ო ხ ს ნ ა

$M$ წერტილზე ინერციის ძალას თუ მოვდებთ, რომელიც $\overline{w}$ აჩქარების პირდაპირ შებრუნებულად არის მიმართული, მაშინ, დალამბერის პრინციპის თანახმად, მივიღებთ შემდეგ ძალთა გაწონასწორებულ სისტემას: $\overline{G}$ წონისა, $\overline{F}$ ხახუნის ძალისა, სიბრტყის ნორმალური $\overline{N}$ რეაქციისა და $\overline{Q_n}$ ინერციის ძალისა; მასთან

$$G = mg; \quad F = f \cdot N; \quad Q_n = mw.$$

აღნიშნული ძალების შერჩეულ კოორდინატთა ღერძებზე დაგეგმილებით მივიღებთ:

$$mg \cdot \sin\alpha - f \cdot N - mw = 0;$$

$$N - mg \cdot \cos\alpha = 0.$$

მეორე განტოლებიდან გვაქვს

$$N = mg \cdot \cos\alpha.$$

$N$-ის მნიშვნელობის პირველ განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

$$w = g(\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha).$$

# სისტემის დინამიკის ელემენტები

## § 1. მექანიკური სისტემა. გარე და შიგა ძალები

ნივთიერ წერტილთა ან სხეულთა მექანიკური სისტემა ეწოდება მათ ისეთ ერთობლიობას, რომელშიაც თითოეული წერტილის ან სხეულის მდებარეობა ყველა დანარჩენი წერტილის მდებარეობასა და მოძრაობაზეა დამოკიდებული. ასეთი სისტემის მაგალითია მზის სისტემა, რომელშიაც მზე და პლანეტები ურთიერთმიზიდულობის ძალებით არიან დაკავშირებული.

მექანიკური სისტემის მაგალითია ნებისმიერი მანქანა ან მექანიზმი, რომელშიაც ყველა რგოლი შეერთებულია სახსრებით, ღეროებით, ღვედებით და ა. შ., ე. ი. სხვადასხვა გეომეტრიული ბმით. ამ შემთხვევაში სისტემის ცალკეულ რგოლებზე (სხეულზე) მოქმედებს ბმებისაგან გადაცემული ურთიერთ წნევა ან დაჭიმულობა.

სისტემის წერტილებზე ან სხეულებზე მოქმედი ძალები შეგვიძლია დავყოთ გარე და შიგა ძალებად.

შ ი გ ა ძ ა ლ ე ბ ი ის ძალებია, რომლებიც მოცემული სისტემის შემადგენლობაში შემავალ ნივთიერ წერტილებს შორის წარმოიქმნება.

გ ა რ ე ძ ა ლ ე ბ ი ის ძალებია, რომლებიც ნივთიერი სისტემის წერტილებზე მოქმედებენ ამ სისტემის შემადგენლობაში შეუვალი ნივთიერი სხეულებიდან. ასე, მაგალითად, თუ განვიხილავთ დედამიწისა და მთვარისაგან შემდგარ სისტემას, მაშინ მათი ურთიერთქმედების ძალები ამ სისტემისათვის გარე ძალები იქნება.

შიგა ძალების მაგალითია ფიზიკური სხეულის ნაწილაკებს შორის წარმოქმნილი ძალები, როდესაც ამ სხეულზე აგრეთვე გარე ძალებიც მოქმედებენ.

ქმედება-უკუქმედების კანონით შიგა ძალები სულ მუდამ წყვილ-წყვილად ტოლი და პირდაპირშებრუნებულია; ამის გამო შ ი გ ა ძ ა ლ თ ა მ თ ა ვ ა რ ი ვ ე ქ ტ ო რ ი და მ თ ა ვ ა რ ი მ ო მ ე ნ ტ ი მ უ დ ა მ ნ უ ლ ი ს ტ ო ლ ი ა.

## § 2. დალამბერის პრინციპი სისტემისათვის

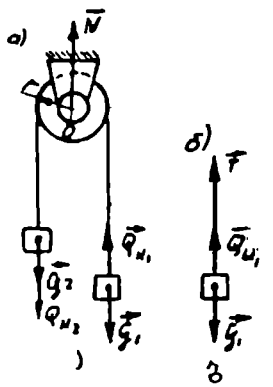
ჩვენ უკვე განვმარტეთ დალამბერის პრინციპი ერთი ნივთიერი წერტილისათვის. ამ პრინციპის გავრცელება სისტემაზეც შეიძლება. მართლაც, მოცემული სისტემის რაიმე $M_i$ წერტილი განვიხილოთ. ამ წერტილზე მოქმედებს მოცემული $\vec{F}_i$ ძალა და ბმების $\vec{R}_i$ რეაქციები; ამ

$M_i$ წერტილზე კიდევ ინერციის $(\vec{Q}_n)_i$ ძალაც რომ მოვდოთ, მაშინ $\vec{F}_i$, $\vec{R}_i$ და $(\vec{Q}_n)_i$ ძალები ურთიერთგაწონასწორდებიან. იმავეს თქმა შეიძლება სისტემის დანარჩენი წერტილებისთვისაც, ე. ი.

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + (\vec{Q}_n)_i = 0$$

(სადაც $i = 1, 2, 3, \ldots, n$).

ამრიგად, დროის ნებისმიერ მომენტში მოცემული სისტემის თითოეულ ნივთიერ წერტილზე პირობით ინერციის ძალა რომ მოვდოთ, ეს ინერციის ძალები სისტემაზე მოქმედ აქტიურ ძალებსა და ბმების რეაქციების ძალებს გააწონასწორებენ.




ნახ. 247

**მაგალითი**

ბლოკზე გადაკიდებულია მოქნილი უჭიმავი ძაფი, რომლის ბოლოებზე მიმაგრებულია ტვირთები $\vec{G}_1$ და $\vec{G}_2$ (ნახ. 247). განსაზღვრეთ: 1) აჩქარება, რომლითაც იმოძრავებს ეს ტვირთები, 2) ძაფის $\vec{T}$ დაჭიმულება და ბლოკის $\vec{N}$ წნევა ღერძზე. ბლოკისა და ძაფის მასებს უგულებელვყოფთ.

ა მ ო ხ ს ნ ა

$\vec{N}$-ით აღვნიშნოთ ბლოკის წნევა ღერძზე და დავუშვათ, რომ $G_1 > G_2$, მაშინ $G_1$ ტვირთი ერთგვარი $\vec{w}$ აჩქარებით დაიწყებს მოძრაობას ქვემოთ. ტვირთების მოქმედება $\vec{G}_1$ და $\vec{G}_2$ ძალებით შევცვალოთ და მოძრავ მასებზე მოვდოთ ინერციის ძალები:

ზემოთ მიმართული

$$(Q_n)_1 = \frac{G_1}{g} \cdot w;$$

ქვემოთ მიმართული

$$(Q_n)_2 = \frac{G_2}{g} \cdot w.$$

დავწეროთ სისტემის წონასწორობის განტოლება. ამისათვის ძალთა მომენტები ავიღოთ O წერტილზე გამავალი ბრუნვის ღერძის მიმართ

$$G_1 \cdot r - (Q_n)_1 \cdot r - (Q_n)_2 \cdot r - G_2 \cdot r = 0,$$

საიდანაც

$$G_1 - (Q_n)_1 - (Q_n)_2 - G_2 = 0$$

ანუ

$$G_1 - \frac{G_1}{g} w - \frac{G_2}{g} w - G_2 = 0;$$

აქედან

$$w = \frac{G_1 - G_2}{G_1 + G_2} \cdot g.$$

რადგან სისტემას წონასწორობის მდგომარეობაში განვიხილავთ, ამიტომ ძალთა გეგმილების ჯამი ვერტიკალურ ღერძზე ნულის ტოლი უნდა იყოს, ე. ი.

$$-G_1 - G_2 + (Q_n)_1 - (Q_n)_2 + N = 0,$$

საიდანაც

$$N = G_1 + G_2 - \frac{G_1}{g} w + \frac{G_2}{g} w = G_1 + G_2 - \frac{w}{g} (G_1 - G_2) =$$

$$= (G_1 + G_2) - (G_1 - G_2) \left( \frac{G_1 - G_2}{G_1 + G_2} \right) = \frac{4G_1 G_2}{G_1 + G_2}.$$

განსახილველ სისტემაში ძაფის $\vec{T}$ დაჭიმულობა შიგა ძალაა; მისი განსაზღვრისათვის გავჭრათ ძაფი და $G_1$ ტვირთი (ნახ. 247, ბ) $\vec{G}_1$ და $\vec{T}$ ძალების ზემოქმედების ქვეშ განვიხილოთ, მასთან მათ ინერციის $(\vec{Q}_n)_1$ ძალაც დავუმატოთ.

თუ $G_1$ ტვირთზე მოდებულ ყველა ძალას ვერტიკალურ ღერძზე დავაგეგმილებთ, მივიღებთ

$$-G_2 + \frac{G_1}{g} \left( \frac{G_1 - G_2}{G_1 + G_2} \right) g + T = 0,$$

საიდანაც

$$T = \frac{2G_1 G_2}{G_1 + G_2}.$$

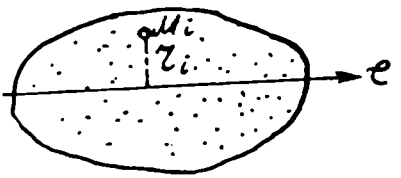
## § 3. ინერციის მომენტი

მყარი სხეულების ბრუნვითი მოძრაობის განსაზღვრაში ინერციის მომენტი ისეთსავე როლს ასრულებს, როგორსაც მასა ნივთიერი წერტილის მოძრაობასა და მყარი სხეულის გადატანითს მოძრაობაში.

ისე როგორც მასა წარმოადგენს სხეულის ინერციის საზომს გადატანითი მოძრაობის დროს, ინერციის მომენტი ახასიათებს სხეულის ინერციულობას ბრუნვითს მოძრაობაში.

ბრუნვითი მოძრაობისათვის საგულისხმოა არა მბრუნავი სხეულის მასა, ისევისთავად, არამედ ის, თუ როგორ ნაწილდება მასა ბრუნვის ღერძის მიმართ. სწორედ ამ განაწილების დამახასიათებელია ინერციის მომენტი ღერძის მიმართ. ამიტომ, სანამ სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის შესწავლას შევუდგებოდეთ, გავეცნოთ ინერციის მომენტებს.

ავიღოთ რაიმე $l$ ღერძი და ნივთიერ წერტილთა სისტემა (ნახ. 248). $r_i$-თ აღვნიშნოთ $M_i$ წერტილის დაშორება ამ ღერძამდე. აქ $i$ აღნიშნავს წერტილის ნომერს [$i=1, 2, 3,\ldots, (n-1), n$].



ნახ. 248

$M_i$ წერტილის მასა იყოს $m_i$. შევადგინოთ $m_i r_i^2$ ნამრავლი (წერტილის მასის ნამრავლი ამ წერტილიდან ღერძამდე დაშორების მანძილის კვადრატზე). ასეთი ნამრავლები შევადგინოთ სისტემის ყველა წერტილისათვის და შემდეგ ისინი შევკრიბოთ, გვექნება

$$J_l = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2. \qquad (1)$$

ამრიგად, ნივთიერ წერტილთა სისტემის ინერციის მომენტი მოცემული ღერძის მიმართ წარმოადგენს თითოეული წერტილის მასისა და მისი ღერძამდე დაშორების მანძილის კვადრატის ნამრავლთა ჯამს.

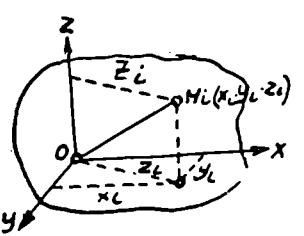
$Si$ სისტემაში ინერციის მომენტის ერთეულია

$$1 \text{ კგ} \cdot 1 \text{ მ}^2 = 1 \text{ კგ.მ}^2.$$

ინერციის მომენტის განზომილება $CGS$ სისტემაში არის: გრამი.სმ$^2$.

ნივთიერ წერტილთა სისტემის $M_i$ წერტილის კოორდინატები დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში იყოს

$$x_i,\ y_i,\ z_i.$$



ნახ. 249

ვიპოვოთ ინერციის $J_z$ მომენტი $Oz$ ღერძის მიმართ. ვთქვათ, $M_i$ წერტილი $Oz$ ღერძიდან დაშორებულია $r_i$ მანძილით (ნახ. 249).

სხეულის ინერციის მომენტი $Oz$ ღერძის მიმართ

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2. \tag{2}$$

როგორც 249-ე ნახაზიდან ჩანს, $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$. მაშასადამე,

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2). \tag{3}$$

ანალოგიურად მივიღებთ დანარჩენი ღერძების მიმართ:

$$J_x = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + z_i^2) \tag{4}$$

და

$$J_y = \sum_{i=1}^{n} m_i (z_i^2 + x_i^2). \tag{5}$$

## § 4. პოლარული ინერციის მომენტი

ნივთიერ წერტილთა სისტემის ინერციის მომენტი რაიმე O წერტილის მიმართ ეწოდება გამოსახულებას

$$J_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2, \tag{1}$$

სადაც $d_i$ წერტილის დაშორებაა O წერტილამდე.

$J_0$ ინერციის მომენტს პოლარული ინერციის მომენტი ეწოდება.

## § 5. ინერციის მომენტი კოორდინატთა სათავის მიმართ

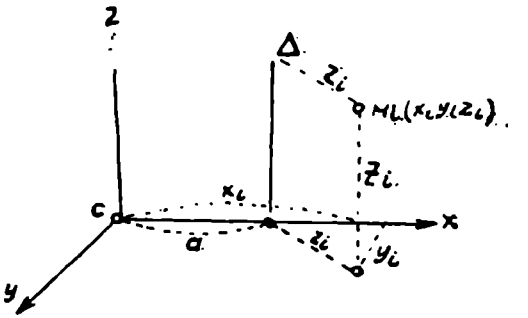
ნივთიერ წერტილთა სისტემის ინერციის მომენტი კოორდინატთა O სათავის მიმართ გამოისახება (ნახ. 250) ფორმულით,

$$J_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2).$$

ჩვენ მიერ მიღებული გამოსახულებებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$J_0 = \frac{1}{2}(J_x + J_y + J_z). \qquad (1)$$

ამრიგად, ინერციის მომენტი კოორდინატთა სათავის მიმართ უდრის კოორდინატთა ღერძე-




ნახ. 250

ბის მიმართ ინერციის მომენტების ნახევარჯამს.

დაბოლოს, შემოვიღოთ ცნება ცენტრიდანული ინერციის მომენტის შესახებ. აქ შეჯამებულია მასების ნამრავლი კოორდინატთა ორ სიბრტყემდე დაშორების მანძილებზე, ე. ი.

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i; \quad J_{xz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i; \quad J_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i. \qquad (2)$$

## § 6. ინერციის მომენტი პარალელური ღერძების მიმართ

ვთქვათ, Δ არის რაიმე ღერძი და $z$ მისი პარალელური ღერძი, რომელიც გადის სისტემის სიმძიმის ცენტრზე.

კოორდინატთა ღერძები შევარჩიოთ ისე, როგორც 250-ე ნახაზზეა ნაჩვენები და შევნიშნოთ, რომ იმ შემთხვევაში, როდესაც კოორდინატთა საწყისი ემთხვევა სისტემის ცენტრს, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = 0, \qquad (1)$$

ამიტომ გვექნება

$$J_{\Delta}=\sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2=\sum_{i=1}^{n} m_i\left[(x_i-a)^2+y_i^2\right]=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i^2+y_i^2\right)-$$

$$-2a\sum_{i=1}^{n} m_i x_i+a^2\sum_{i=1}^{n} m_i; \qquad (2)$$

რადგან

$$J_z=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i^2+y_i^2\right), \qquad (3)$$

ხოლო (1) გამოსახულების თანახმად

$$2a\sum_{i=1}^{n} m_i x_i=0; \qquad (4)$$

ღაბოლოს

$$a^2\sum_{i=1}^{n} m_i=a^2M, \qquad (5)$$

საღაც $M$ სისტემის სრული მასაა; ამიტომ (3), (4) და (5)-ის [მნიშვნელობათა ჩასმით მიეიღებთ

$$\boxed{J_{\Delta}=J_z+a^2M.} \qquad (6)$$

ამრიგად, ნივთიერ წერტილთა სისტემის ინერციის მომენტი ნებისმიერი ღერძის მიმართ უდრის ამ ღერძის პარალელური და სისტემის სიმძიმის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ ინერციის მომენტს პლუს სისტემის სრული მასის ნამრავლი ღერძებს შორის მანძილის კვადრატზე.

მაშასადამე, პარალელური ღერძების მიმართ ინერციის მომენტებიდან ყველაზე მცირეა ინერციის მომენტი იმ ღერძის მიმართ, რომელიც გაივლის სისტემის სიმძიმის ცენტრზე.

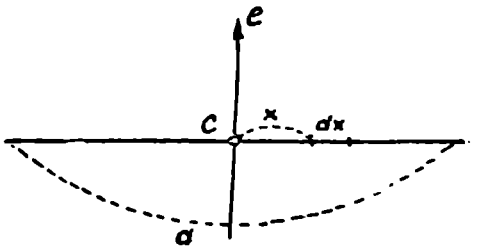
### მაგალითები

ყველა ზემოთ ჩამოყალიბებული თეორემა ეხება ნივთიერ წერტილთა ყოველგვარ სისტემას, მაგრამ განსაკუთრებულ ინტერესს იწ-

ვევს მათი გამოყენება უცვლელი სისტემების ანუ მყარი სხეულებისადმი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: ასეთ შემთხვევაში ზემოთ განხილული ჯამების ნაცვლად სამჯერადი ინტეგრალები გვექნება სამგანზომილებიანი სხეულების შემთხვევაში და ორჯერადი ინტეგრალები—ბრტყელი ფირფიტების შემთხვევაში.

შემდგომ მაგალითებში $\rho$ ასოთი აღვნიშნავთ განსახილველი სხეულის სიმკვრივეს, $M$ ასოთი—მთელი სხეულის მასას. სხეულები ერთგვაროვნად არის ნაგულისხმევი, ამიტომ $\rho$ მუდმივი სიდიდე იქნება.



ნახ. 251

I. **ერთგვაროვანი წვრილი ღერაკის** (ნახ. 251) **ინერციის მომენტი** $l$ ღერძის მიმართ არის,

$$\Sigma x^2 \rho\, dx.$$

ეს ჯამი წარმოადგენს განსაზღვრულ ინტეგრალს

$$J_l = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2 \rho\, dx = \rho \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} = \rho\, \frac{a^3}{12},$$

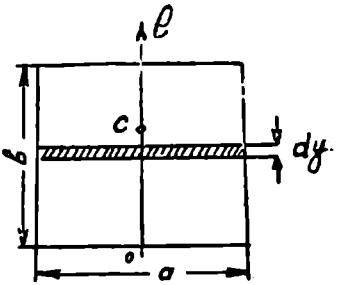
მაგრამ $\rho a = M$ მთელი ღეროს მასაა, ამიტომ

$$J_l = M\, \frac{a^2}{12}. \qquad (1)$$

II. **ერთგვაროვანი თხელი მართკუთხა ფირფიტის ინერციის მომენტი.**

$dy$ სისქის ელემენტარული ზოლის ინერციის მომენტი სიმძიმის ცენტრზე გამავალი $l$ ღერძის მიმართ არის (ნახ. 252)

$$\rho \cdot \frac{a^3}{12} dy.$$



ნახ. 252

მთელი ფირფიტის ინერციის მომენტი

$$J_l = \rho \frac{a^3 b}{12} = \rho \cdot ab \cdot \frac{a^2}{12}.$$

მაგრამ $\rho ab = M$ ფირფიტის მასაა, ამიტომ

$$J_l = M \cdot \frac{a^2}{12}.$$

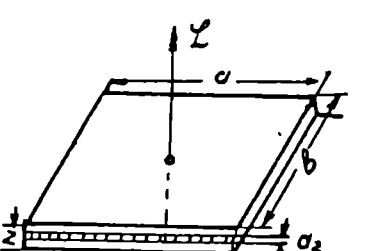
სრულიად ასევე, თუ $q$ არის სიმძიმის ცენტრზე გამავალი ღერძის მართობი ღერძი, მაშინ მთელი ფირფიტის ინერციის მომენტი $q$ ღერძის მიმართ

$$J_q = M \cdot \frac{b^2}{12}.$$

სიმძიმის $C$ ცენტრის მიმართ ფირფიტის ინერციის მომენტი ამ ორი $J_l$ და $J_q$ ინერციის მომენტის ჯამის ტოლია, ე. ი.

$$J_c = M \frac{a^2 + b^2}{12}.$$

ცხადია, უკანასკნელი წარმოადგენს აგრეთვე ფირფიტის ინერციის მომენტს სიმძიმის ცენტრზე გამავალი ფირფიტის სიბრტყის მართობული ღერძის მიმართ.



ნახ. 253

III. **მართკუთხა პარალელეპიპედი** (ნახ. 253).

$dz$ სისქის ფენის ინერციის მომენტი სიმძიმის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ არის

$$\rho \cdot ab \cdot \frac{a^2 + b^2}{12} dz.$$

მთელი პარალელეპიპედის ინერციის მომენტი იქნება

$$J_l = \rho \cdot abc \frac{a^2 + b^2}{12}.$$

მაგრამ მთელი სხეულის მასა $M = \rho abc$, ამიტომ

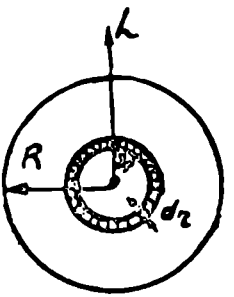
$$J_l = M \frac{a^2 + b^2}{12}.$$

IV. **ერთგვაროვანი მრგვალი ფირფიტის** (ნახ. 254) **ინერციის მომენტი.**

$r$-რადიუსიანი $dr$ სისქის რგოლის ინერციის მომენტი არის

$$\rho \cdot 2\pi \cdot r dr \cdot r^2 = 2\pi\rho \cdot r^3 dr,$$

ამიტომ მრგვალი ფირფიტის ინერციის მომენტი ცენტრის მიმართ იქნება




ნახ. 254

$$J_0 = \int_0^R 2\pi\rho\, r^3 dr = \pi\rho\, R^2 \cdot \frac{R^2}{2},$$

მაგრამ ფირფიტის მასა არის

$$M = \rho\pi R^2,$$

ამიტომ

$$J_0 = M \cdot \frac{R^2}{2}.$$

ახლა განვიხილოთ მრგვალი ფირფიტის ინერციის მომენტები $Ox$ და $Oy$ ღერძების მიმართ (ნახ. 255).

პოლარული ინერციის მომენტი ეკვატორულთან დაკავშირებულია ფორმულით

$$J_0 = J_x + J_y;$$

ჩვენს შემთხვევაში, სიმეტრიულობის გამო

$$J_x = J_y,$$

ამიტომ

$$J_0 = 2J_y = 2J_x,$$

საიდანაც

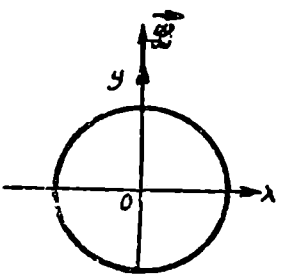
$$J_x = J_y = \frac{J_0}{2};$$

მაგრამ

$$J_0 = M\frac{R^2}{2},$$

მაშასადამე,

$$J_x = J_y = \frac{1}{4}MR^2.$$




ნახ. 255

V. **ერთგვაროვანი ცილინდრის ინერციის მომენტი.**

$dz$ სისქის ფენის (ნახ. 256) ინერციის მომენტი სიმძიმის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ არის

$$\rho\,\frac{\pi R^4}{2}\,dz.$$

ამიტომ მთელი ცილინდრის ინერციის მომენტი იქნება

$$J_l = \rho\pi R^2 \cdot \frac{R^2}{2} \cdot H.$$

რადგან ცილინდრის მასა არის

$$M=\rho\pi R^2H,$$

ამიტომ

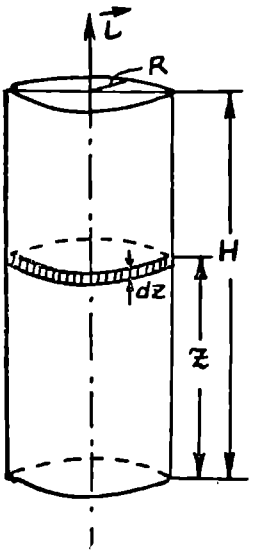
$$J_l = M\,\frac{R^2}{2}.$$

VI. **ერთგვაროვანი მთლიანი სფეროს** (ნახ. 257) **ინერციის მომენტი.** $r$-რადიუსიანი $dr$ სისქის სფერული ფენის ინერციის მომენტი არის

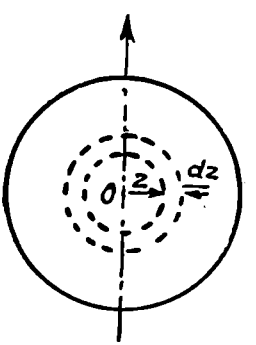
$$\rho\cdot 4\pi r^2\cdot r^2dr=4\pi\rho r^4dr.$$

ამიტომ მთელი სფეროს ინერციის მომენტი ცენტრის მიმართ იქნება

$$J_l=\int_0^R 4\pi\rho r^4dr=\rho\cdot\frac{4}{5}\pi R^5,$$




ნახ. 256




ნახ. 257

მაგრამ, რადგან სხეულის მასა არის

$$M=\rho\cdot\frac{2}{5}\pi R^3,$$

ამიტომ

$$J_l=\frac{2}{5}MR^2.$$

VII. **ინერციის რადიუსი.**

მყარი სხეულის ინერციის $J$ მომენტი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც სხეულის $M$ მასის ნამრავლი გარკვეულ $\rho$ სიგრძის კვადრატზე

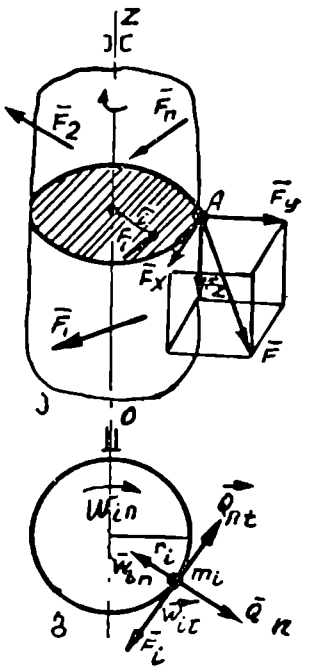
$$J=M\cdot\rho^2.$$

$\rho$ სიდიდეს ეწოდება ინერციის რადიუსი და მისი მნიშვნელობაა

$$\rho = \sqrt{\frac{J}{M}}.$$

## § 7. დინამიკის ძირითადი განტოლება მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის შემთხვევაში

ვთქვათ, $Oz$ ღერძის გარშემო მბრუნავი მყარი სხეულის $M$ წერტილზე $\bar{F}$ ძალაა მოდებული (ნახ. 258, ა). ამ ძალის $F_x$, $F_y$ და $F_z$ მდგენელებიდან მხოლოდ ერთი $F_x$ მდგენელი მიანიჭებს სხეულს ბრუნვას $Oz$ ღერძის გარშემო. ეს $F_x$ ძალა ბრუნვის ღერძისადმი მართობულ სიბრტყეში ძევს და $Oz$ ღერძზე არ ვადის.




ნახ. 258

დავუშვათ, რომ სხეულზე რამდენიმე აქტიური $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n$ ძალაა მოდებული. ამ ძალებს მდგენელებად თუ დავშლით, ძალთა ისეთ სისტემას მივიღებთ, რომელიც გამოიწვევს სხეულის $Oz$ ღერძის გარშემო ბრუნვას. ამ ძალების მომენტი $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \ldots, \bar{F}_n$ ძალთა მომენტების ალგებრულ ჯამს უდრის $Oz$ ღერძის მიმართ. როდესაც ამ მომენტთა ჯამი ნულის ტოლი არ არის, მაშინ სხეული $Oz$ ღერძის გარშემო გარკვეული $\bar{\varepsilon}$ აჩქარებით ბრუნავს; ამ $\bar{\varepsilon}$ აჩქარების მიმართულება სხეულზე მოდებული ძალების ბრუნვის მომენტის მიმართულებას ემთხვევა.

გამოვიყენოთ დალამბერის პრინციპი, რომლის მიხედვითაც თუ სხეულზე ფაქტიურად მოდებულ აქტიურ ძალებსა და ბმების რეაქციებს ინერციის ძალებს დავუმატებთ, წონასწორობის განტოლებას მივიღებთ. ამ შემთხვევაში წონასწორობის განტოლება ნულის ტოლად უნდა ხდიდეს ყველა აქტიური ძალისა და ინერციის ძალების მომენტთა ალგებრულ ჯამს ბრუნვის ღერძის მიმართ.

სხეულის ბრუნვის $Oz$ ღერძის მიმართ გარე ძალთა მომენტების ჯამს $M_{\text{გარ}}$ ბრუნვის მომენტი დავარქვათ, მაშინ

$$M_{\text{გარ}} = m_z(\vec{F}_1) + m_z(\vec{F}_2) + m_z(\vec{F}_3) + \cdots + m_z(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} m_z(\vec{F}_i).$$

ინერციის ძალების განსაზღვრისათვის განსახილველ სხეულში ავიღოთ ნებისმიერი $m_i$ ნაწილაკი. მას $(\vec{w}_n)_i$ და $(\vec{w}_n)_n$ მხები და ნორმალური აჩქარებები აქვს. 258, ბ ნახაზზე მოცემული ნაწილაკის ინერციის ძალის მდგენელებია:

ა) ცენტრალური მდგენელი

$$(Q_n)_n = -\frac{m_i v_i^2}{r_i} = m_i \cdot \omega^2 r_i,$$

სადაც $r_i$ უმოკლესი მანძილია ამ ნაწილაკიდან ბრუნვის ღერძამდე;

ბ) მხები მდგენელი

$$(Q_n)_t = m_i \frac{dv_i}{dt} = m_i \frac{d}{dt}(\omega \cdot r_i) = m_i r_i \varepsilon,$$

სადაც $\varepsilon$ სხეულის კუთხური აჩქარებაა, ხოლო $\omega$—სხეულის კუთხური სიჩქარე.

რადგან ცენტრიდანული ძალები რადიუსის გასწვრივ მოქმედებენ და ბრუნვის ღერძიდან პერიფერიისკენ არიან მიმართული, ამიტომ მათი მომენტები ბრუნვის ღერძის მიმართ ნულის ტოლია. ამრიგად, წონასწორობის განტოლებებში მხოლოდ გარე ძალთა მომენტები და მხებ ძალთა მომენტები შევა.

სხეულის ელემენტარული ნაწილაკების ინერციის მხები ძალების მომენტთა ჯამი იქნება

$$\sum_{i=1}^{n} m_z(\vec{Q}_n)_t = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \varepsilon = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2,$$

სადაც სხეულის კუთხური $\varepsilon$ აჩქარება ჯამის ნიშნის წინაა გატანილი საერთო მამრავლის სახით.

რადგან $\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ სხეულის ინერციის $J_z$ მომენტია ბრუნვის ღერძის მიმართ, ამიტომ

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{Q}_n)_t = \varepsilon \cdot J_z. \qquad (ა)$$

(ა) გამოსახულების მნიშვნელობას სხეულზე მოდებული აქტიური ძალების მომენტთა ჯამს თუ დავუმატებთ, მივიღებთ წონასწორობის განტოლებას

$$\sum_{i=1}^{n} m_z(\bar{F}_i) + \sum_{i=1}^{n} m_z(\bar{Q}_i)_I = 0. \qquad (ბ)$$

$M_{ბრ}$ ბრუნვის მომენტისა და ინერციის მხები ძალების მომენტთა ჯამის ნიშნები მუდამ თანაწინააღმდეგი იქნება; ჩვენს შემთხვევაში

$$M_{ბრ} - J_z \cdot \varepsilon = 0;$$

აქედან

$$\boxed{J_z \cdot \varepsilon = M_{ბრ},} \qquad (1)$$

ანუ

$$\boxed{J_z \frac{d\omega}{dt} = M_{ბრ},} \qquad (2)$$

ე. ი. ბრუნვის ღერძის მიმართ სხეულის ინერციის მომენტის ნამრავლი სხეულის კუთხურ აჩქარებაზე გარეძალთა მომენტების ალგებრულ ჯამს უდრის იმავე ღერძის მიმართ.

(1) განტოლებას ბრუნვითი მოძრაობის დინამიკის ძირითადი განტოლება ეწოდება.

შენიშვნა: ინერციის მომენტი შეგვიძლია განვიხილოთ რომელიც მყარი სხეულის ინერციის საზომი მოცემული ღერძის გარშემო ბრუნვის დროს, ისე როგორც სხეულის მასა სხეულის ინერციის საზომია გადატანითი მოძრაობის დროს.

## § 8. მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა

სისტემის კინეტიკური ენერგია სისტემის ნივთიერ წერტილთა კინეტიკურ ენერგიათა ჯამს ეწოდება. სისტემის კინეტიკურ ენერგიას $T$ ასოთი თუ აღვნიშნავთ, გვექნება

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}. \qquad (1)$$

მაშასადამე, სისტემის კინეტიკური ენერგია რომ ვიპოვოთ რაიმე მომენტში, ამისათვის უნდა ვიპოვოთ თითოეული წერტილის კინეტიკური ენერგია და შემდეგ მიღებული შევკრიბოთ.

ვთქვათ, სისტემა $n$ ნივთიერი წერტილისაგან შედგება. რაიმე წერტილის მასა იყოს $m$, საწყისი სიჩქარე $v_0$ და საბოლოო $v$. ნივთიერ წერტილებზე მოქმედი ძალები დავყოთ მოდებულ ძალებად და ბმების რეაქციებად.

სისტემის განსახილველ წერტილზე მოდებული გარე და შიგა ძალთა ტოლქმედის მუშაობა იყოს $A_F$; ამ წერტილზე მოდებული ბმების რეაქციების ტოლქმედის მუშაობა კი— $A_N$, მაშინ სისტემის ერთი ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის თეორემის ძალით გვექნება

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_F + A_N.$$

მთელი სისტემისათვის კი

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_{0i}^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} A_{F_i} + \sum_{i=1}^{n} A_{N_i}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = T \quad \text{და} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_{i0}^2}{2} = T_0,$$

მაშინ

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A_{F_i} + \sum_{i=1}^{n} A_{N_i}, \tag{2}$$

ე. ი. უხახუნო ბმების დროს (რომლებიც დამოკიდებული არ არიან დროზე) მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილება გარკვეული გადაადგილებისას მოცემულ გარე და შიგა ძალთა მუშაობების ჯამს უდრის.

აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ თუ ბმები უხახუნოა, მაშინ ბმების რეაქციების მუშაობათა ჯამი სისტემის ყოველგვარი გადაადგილების დროს ნულის ტოლია, ამიტომ $\sum_{i=1}^{n} A_{N_i} = 0$ და

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A_{F_i}, \tag{3}$$

ე. ი. უხახუნო ბმების დროს (რომლებიც დამოკიდებული არ არიან დროზე) სისტემის კინეტიკური ენერგიის ნაზრდი სისტემაზე მოქმედი მოცემული გარე ძალების მუშაობათა ჯამს უდრის.

თუკი ბმები იდეალური არ არის, ე. ი. ხახუნის უგულებელყოფა შეუძლებელია, მაშინ (2) ფორმულით უნდა ვისარგებლოთ.

## § 9. კინეტიკური ენერგია მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობის დროს

ცნობილია, რომ გადატანითი მოძრაობის დროს სხეულის ყველა წერტილის სიჩქარე ერთნაირია, ამიტომ

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{Mv^2}{2}, \qquad (1)$$

სადაც მოცემული სხეულის მასა $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

მაშასადამე, გადატანითად მოძრავი მყარი სხეულის კინეტიკური ენერგია სხეულის მასისა და სიჩქარის კვადრატის ნახევრის ნამრავლის ტოლია.

## § 10. $\omega$ კუთხური სიჩქარით უძრავი $Oz$ ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის კინეტიკური ენერგია

უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის ნებისმიერ წერტილს $v$ სიჩქარე აქვს, რომლის მოდული $v = r \cdot \omega$ (აქ $r$ — წერტილიდან ბრუნვის $Oz$ ღერძამდე დაშორების მანძილია); მაშინ სხეულის კინეტიკური ენერგია იქნება

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2,$$

სადაც სხეულის ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2,$$

ამის გამო

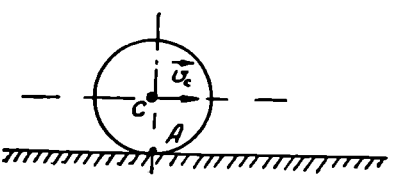
$$T = J_z \cdot \frac{\omega^2}{2}, \qquad (1)$$

ე. ი. უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი მყარი სხეულის კინეტიკური ენერგია ამ ბრუნვის ღერძის მიმართ სხეულის ინერციის მომენტისა და კუთხური სიჩქარის კვადრატის ნამრავლის ნახევარს უდრის.

## § 11. მყარი სხეულის კინეტიკური ენერგია ბრტყელ-პარალელური მოძრაობის დროს

როგორც კინემატიკიდან ვიცით, ბრტყელ-პარალელური მოძრაობის დროს სხეულის ყველა წერტილის სიჩქარე განაწილდება ისე, როგორც სიჩქარეთა მყისა ცენტრის ვარშემო ბრუნვითი მოძრაობის დროს.

სხეულის სიმძიმის ცენტრი იყოს $C$ (ნახ. 259), ბრუნვის კუთხური სიჩქარე კი — $\omega$, მაშინ სხეულის კინეტიკური ენერგია იქნება




ნახ. 259

$$T = \frac{1}{2} J_A \cdot \omega^2, \qquad (1)$$

სადაც $J_A$ სხეულის ინერციის მომენტია მოძრაობის სიბრტყისადმი მართობული და სიჩქარეთა მყისა $A$ ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ

$$J_A = J_c + M \cdot (AC)^2. \qquad (2)$$

(1) გამოსახულებაში ჩასმით მივიღებთ

$$T = \frac{1}{2} J_c \cdot \omega^2 + \frac{M \cdot (AC)^2 \omega^2}{2}.$$

რადგან

$$\omega^2 \cdot (AC)^2 = v_c^2,$$

სადაც $v_c$ სხეულის $C$ სიმძიმის ცენტრის სიჩქარეა, ამიტომ

$$\boxed{T = J_c \cdot \frac{\omega^2}{2} + M \cdot \frac{v_c^2}{2},} \qquad (3)$$

ე. ი. ბრტყელ-პარალელური მოძრაობის დროს მყარი სხეულის კინეტიკური ენერგია უდრის მი-

სი სისტემის კინეტიკურ ენერგიას, როდესაც იგი ფარდობითად მოძრაობს სიმძიმის ცენტრის მიმართ, პლუს სხეულის სიმძიმის ცენტრის კინეტიკური ენერგია.

**მაგალითები**

1. როგორი ბრუნვის მომენტი უნდა მოვდოთ 2500 ნიუტონი წონისა და $D=1{,}2$ მ დიამეტრის უძრავ მქნევარა ბორბალს, რომ 10 წამის განმავლობაში მან შეიძინოს კუთხური სიჩქარე 120 ბრ/წთ?

შენიშვნა: მქნევარა ბორბლის მასა თანაბრად განაწილებულად ჩავთვალოთ ფერსოზე, ხახუნი კი უგულებელვყოთ.

ამოხსნა

მქნევარა ბორბალი მბრუნავი მყარი სხეულია.

გამოვიყენოთ ბრუნვითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება

$$M_{ბრ}=J_z\cdot\varepsilon \text{ ანუ } M_{ბრ}=J_z\frac{d\omega}{dt},$$

აქედან

$$M_{ბრ}\,dt=J_z\,d\omega.$$

ინტეგრირებით მივიღებთ

$$M_{ბრ}\int_0^{10}dt=J_z\int_0^{4\pi}d\omega.$$

როცა $n=120$ ბრ/წთ, მაშინ

$$\omega=\frac{\pi n}{30}=4\pi\ \frac{1}{წმ}$$

და

$$M_{ბრ}=\frac{J_z\cdot 4\pi}{10}.$$

რადგან

$$J_z=MR^2=\frac{G}{g}\,R^2=\frac{2500}{9{,}81}\cdot 0{,}6^2=91{,}7\ \text{კგ}\cdot\text{მ}^2,$$

ამიტომ

$$M_{ბრ}=\frac{91{,}7\cdot 4\pi}{10}=115\ \text{(ნ. მ)}.$$

2. $D=1$ მ დიამეტრისა და $b=200$ მმ სისქის მრგვალ თუჯის დისკოზე დახვეულია თამასა, რომლის თავისუფალ ბოლოზე დაკიდებულიი

ტვირთი $P=500$ ნიუტონი. განსაზღვრეთ, თუ რა კუთხური სიჩქარე ექნებოდა დისკოს მოძრაობის დაწყებიდან 10 წამის შემდეგ, ადგილი რომ არ ჰქონდეს მოძრაობისადმი წინაღობას. თუჯის ხვ. წონა $\gamma = 71 \cdot 10^3 \frac{\text{ნ}}{\text{მ}^3}$. თასმის წონა უგულებელყოფილია.

ამოხსნა

განსახილველი სისტემა თუჯის დისკოა, ე. ი. მბრუნავი მყარი სხეულია. თასმის ბოლოზე მოდებულია ქვემოთ მიმართული $\overline{P}$ ძალა. გარდა ამისა, ზემოთ მიმართული $\overline{Q}_n$ ინერციის ძალაცაა მოდებული.

გამოვიყენოთ ბრუნვითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება

$$M_{ხარ} = J_z \varepsilon$$

ანუ

$$\left(P - \frac{P}{g} w\right) R = J_z \varepsilon,$$

სადაც $R$ დისკოს რადიუსია; $w$—ტვირთის წრფივი აჩქარება; რადგან $w = R\varepsilon$, ამიტომ $P \cdot R - \frac{P}{g} \cdot R^2 \varepsilon = J_z \cdot \varepsilon$, საიდანაც

$$\varepsilon = \frac{P \cdot R}{\frac{P}{g} R^2 + J_z} \quad \frac{1}{\text{წმ}^2}, \tag{5}$$

სადაც

$$J_z = \frac{R^2 m}{2} = \frac{R^2}{2} \frac{\pi D^2}{4g} b \cdot \gamma = \frac{0{,}5^2}{2} \cdot \frac{3{,}14 \cdot 1^2}{4 \cdot 9{,}81} \cdot 0{,}2 \cdot 71 \cdot 10^3 = 142 \text{კგ} \cdot \text{მ}^2.$$

(ა) გამოსახულებაში ჩასმით მივიღებთ

$$\varepsilon = \frac{500 \cdot 0{,}5}{\frac{500}{9{,}81} \cdot 0{,}5^2 + 142} = \frac{250}{155} \approx 1{,}6 \frac{1}{\text{წ}^2},$$

მაგრამ

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt},$$

ანუ

$$\varepsilon \, dt = d\omega;$$

$$\varepsilon \int_0^{10} dt = \int_0^{10} d\omega,$$

საიდანაც

$$\omega = 10\varepsilon = 10 \cdot 1{,}6 = 16 \frac{1}{\text{წმ}}.$$

3. გამოვთვალოთ 196 ნიუტონი წონისა და $l = 2$ მ სიგრძის ღეროს კინეტიკური ენერგია, თუ ღერო მის ბოლოზე მართობულად გამავალი ღერძის გარშემო ბრუნავს $\omega = 5 \frac{1}{\text{წმ}}$ კუთხური სიჩქარით. როგორ შეიცვლება ღეროს კინეტიკური ენერგია, თუ ბრუნვა ღეროს ცენტრზე გამავალი პარალელური ღერძის გარშემო სრულდება იმავე კუთხური სიჩქარით.

ამოხსნა

$Oz$ ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის კინეტიკური ენერგია

$$T = J_z \frac{\omega^2}{2}.$$

ღეროს ინერციის მომენტი მის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ არის

$$J_A = \frac{1}{3} Ml^2.$$

რადგან $M = \frac{G}{g}$, ამიტომ $J_A = \frac{1}{3} \frac{G}{g} l^2$ და

$$T = \frac{1}{3} \frac{G}{g} l^2 \cdot \frac{\omega^2}{2} = \frac{1 \cdot 196 \cdot 2^2 \cdot 5^2}{3 \cdot 9{,}81 \cdot 2} = 333 \text{ (ნ მ)}.$$

სიმძიმის ცენტრზე გამავალი ღერძის გარშემო ღეროს ბრუნვის დროს ინერციის მომენტი

$$\tau_c = \frac{Ml^2}{12},$$

ამიტომ კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{Ml^2}{12} \cdot \frac{\omega^2}{2} = \frac{G \cdot l^2 \cdot \omega^2}{g \cdot 24} = \frac{196 \cdot 4 \cdot 25}{9{,}81 \cdot 24} = 83 \text{ (ნ მ)}.$$

4. გამოიანგარიშეთ ხიდური ამწის ურიკის კინეტიკური ენერგია, თუ ურიკა წრფივად მოძრაობს $v$ სიჩქარით, ურიკის ბაქნის წონაა (უბორბლებოდ) $g$, თითო ბორბლის წონაა $Q$. ბორბლები მთლიან დისკოებად ჩათვალეთ.

ამოხსნა

მოცემული სისტემა შედგება გადატანითად მოძრავი ბაქნისა და

ოთხი ერთნაირი ბორბლისაგან, რომლებიც ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას ასრულებენ.

ნივთიერი სისტემის კინეტიკური ენერგია უდრის ბაქნისა და ოთხი ბორბლის კინეტიკურ ენერგიათა ჯამს

$$T = T_1 + 4T_2, \qquad (ა)$$

სადაც $T_1$ ურიკის ბაქნის კინეტიკური ენერგიაა;

$T_2$—ერთი ბორბლის კინეტიკური ენერგია.

ვიპოვოთ ბაქნის კინეტიკური ენერგია

$$T_1 = \frac{Mv^2}{2} = \frac{Gv^2}{2g}.$$

ბორბლის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ბრტყელ მოძრაობას ასრულებს

$$T_2 = J_c \cdot \frac{\omega^2}{2} + M_1 \cdot \frac{v^2}{2},$$

სადაც $J_c$ ბორბლის ინერციის მომენტია ბორბლის სიბრტყის მართობული და სიმძიმის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ. ამ შემთხვევაში

$$J_c = \frac{M_1 \cdot r^2}{2} = \frac{Qr^2}{2g}.$$

საბოლოოდ

$$T_2 = \frac{Qr^2}{2g} \cdot \frac{\omega^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{g} v^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{Q}{g} v^2,$$

სადაც $\omega^2 r^2 = v^2$.

(ა) გამოსახულებაში $T_1$ და $T_2$ მნიშვნელობების ჩასმით მივიღებთ

$$T = \frac{Gv^2}{2g} + 4\left(\frac{3}{4}\frac{Qv^2}{G}\right) = \frac{v^2}{2g}(G + 6Q).$$

## § 12. თეორემა მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების შესახებ

მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობა ეწოდება ვექტორს, რომელიც ამ სისტემის ყველა ნივთიერი წერტილის მოძრაობათა რაოდენობის გეომეტრიული ჯამის ტოლია.

ვთქვათ, სისტემის ცალკეულ წერტილებს აქვთ $m_i$ მასები (სადაც $i = 1, 2, 3, \ldots, n$) და სიჩქარეები $\vec{v}_i$ (სადაც $i = 1, 2, 3, \ldots, n$), მაშინ

სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ვექტორი გამოისახება შემდეგნაირად

$$\vec{Q}=\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i. \tag{1}$$

ჩვენთვის ცნობილია ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების კანონი, მისი განზოგადება შეიძლება ნივთიერ წერტილთა მექანიკურ სისტემაზე.

განვიხილოთ სისტემის რაიმე ნივთიერი წერტილი. ვთქვათ, ამ წერტილის მასაა $m_i$. წერტილზე მოდებული გარე ძალთა ტოლქმედი იყოს $\vec{F}_i$, ხოლო შიგა ძალთა ტოლქმედი—$\vec{P}_i$. დავუშვათ შერჩეული ნივთიერი წერტილის საწყისი სიჩქარეა $\vec{v}_{0i}$, ხოლო საბოლოო სიჩქარე—$\vec{v}_i$, მაშინ წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ვექტორული ფორმა იქნება

$$m_i\vec{v}_i-m_i\vec{v}_{0i}=\vec{S}_i^F+\vec{S}_i^P, \tag{2}$$

სადაც $\vec{S}_i^F$ და $\vec{S}_i^P$, სათანადოდ, გარე და შიგა ძალთა იმპულსებია განსახილველ დროის შუალედში.

დანარჩენი წერტილებისათვის ასეთივე განტოლებების დაწერით და მათი წევრ-წევრად შეკრებით მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i-\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_{0i}=\sum_{i=1}^{n}\vec{S}_i^F+\sum_{i=1}^{n}\vec{S}_i^P.$$

უკანასკნელი $\sum_{i=1}^{n}\vec{S}_i^P$ ჯამი შიგა ძალთა თვისებით ნულის ტოლი უნდა იყოს, ამიტომ

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i-\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_{0i}=\sum_{i=1}^{n}\vec{S}_i^F, \tag{3}$$

ანუ

$$\boxed{\vec{Q}-\vec{Q}_0=\Sigma\vec{S}.} \tag{4}$$

(4) განტოლება მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების გამომსახველია: დროის გარკვეულ შუალედში მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილება იმავე დროის განმავლობაში სისტემაზე მოდებული გარე ძალების იმპულსთა ჯამის ტოლია.

ვექტორული (3) ტოლობის კოორდინატთა ღერძებზე დაგეგმილებით მივიღებთ:

$$\boxed{\begin{aligned} Q_x - Q_{0x} &= \sum_{i=1}^{n} S_x; \\ Q_y - Q_{0y} &= \sum_{i=1}^{n} S_y; \\ Q_z - Q_{0z} &= \sum_{i=1}^{n} S_z. \end{aligned}} \qquad (5)$$

(5) განტოლებები გვიჩვენებს, რომ მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის გეგმილის ცვლილება ნებისმიერ ღერძზე სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების იმპულსთა ჯამის გეგმილს უდრის იმავე ღერძზე.

ახლა, დავუშვათ, რომ სისტემაზე მოქმედი გარე ძალთა ჯამი უდრის ნულს, მაშინ ნულის ტოლი იქნება $\sum_{i=1}^{n} \vec{S}_i$ იმპულსთა ჯამიც და (3) და (4) ფორმულები მიიღებენ შემდეგ სახეს

$$\sum_{i=1}^{n} m\vec{v} - \sum_{i=1}^{n} m\vec{v}_0 = 0,$$

ანუ

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = 0;$$

აქედან

$$\sum_{i=1}^{n} m\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} m\vec{v}_0 = \text{const}, \qquad (6)$$

ანუ

$$\vec{Q} = \vec{Q}_0 = \text{const}. \qquad (7)$$

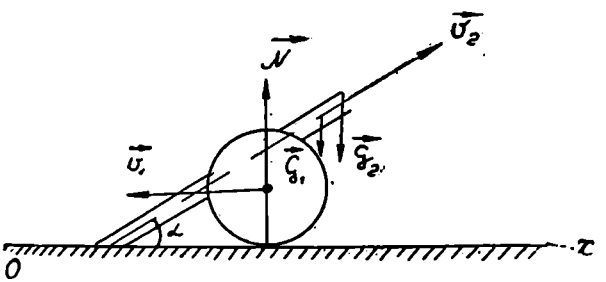
ე. ი. თუ სისტემაზე მოქმედი გარე ძალთა ჯამური მომენტი ცენტრის ტოლია, მაშინ სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ვექტორი მოდულით და მიმართულებით უცვლელია.

### მაგალითი

ქვემეხის ლულა (ნახ. 260) ჰორიზონტთან ადგენს $\alpha = 45°$ კუთხეს და 120000 ნიუტონს იწონის. ჭურვის წონაა 1200 ნიუტონი. სიჩქარე ლულის ბოლოში $v = 1200$ მ/წმ. განსაზღვრეთ ქვემეხის, თავისუფალი უკუდარტყმის სვლის სიგრძე ჭურვის გამოვარდნის მომენტში.

### ამოხსნა

ქვემეხისა და ჭურვის წონათა მოქმედება $\vec{G}_1$ და $\vec{G}_2$ ძალებით შევცვალოთ. სისტემა გავათავისუფლოთ ბმისაგან და ბმა რეაქციის $\vec{N}$ ძალით შევცვალოთ.




ნახ. 260

$\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ და $\vec{N}$ ძალები $Ox$ ღერძის მართობულია, ამიტომ ამ ძალთა გეგმილების ჯამი $Ox$ ღერძზე ნულის ტოლია. შიგა ძალები (დენთის აირების წნევა ლულის შიგნით) მოძრაობის რაოდენობის ჯამობრივ სიდიდეს ვერ შეცვლის, ამიტომ

$$\sum_{i=1}^{n} mv_x = \sum_{i=1}^{n} mv_{ox} = \text{const}.$$

გასროლამდე (საწყის მომენტში) სისტემის წერტილთა სიჩქარეები ნულის ტოლია, ე. ი.

$$\sum_{i=1}^{n} mv_{ox} = 0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ გასროლის შემდეგ სისტემის მოძრაობის რაოდენობის გეგმილი $Ox$ ჰორიზონტალურ ღერძზე ნულს უდრის

$$\sum_{i=1}^{n} mv_x = \frac{G_1}{g} v_1 + \frac{G_2}{g} v_2 \cos 45° = 0,$$

სადაც $\bar{v}_1$ ქვემეხის უკუგორვის (დარტყმის) სიჩქარეა; $\bar{v}_2$ — ჭურვის სიჩქარე.

მნიშვნელობების ჩასმის შემდეგ გვექნება

$$\frac{120000}{9{,}81} v_1 + \frac{1200}{9{,}81} \cdot 1200 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

საიდანაც

$$v_1 = -6\sqrt{2} \text{ მ/წმ}.$$

„მინუს“ ნიშანი გვიჩვენებს, რომ ქვემეხის უკუდარტყმის $\bar{v}_1$ სიჩქარე ჭურვის მოძრაობის $\bar{v}_2$ სიჩქარის მიმართულების შებრუნებულია.

## VI თავი

# დარტყმის თეორია

იმპულსური ანუ დარტყმითი ძალა ისეთ ძალას ეწოდება, რომელიც ნივთიერ წერტილზე მოქმედებს მცირე დროის განმავლობაში, მაგრამ ამ ხანში მეტად დიდ სიდიდეს აღწევს, ასე რომ მის იმპულსს აქვს სასრული სიდიდე.

### § 1. სხეულთა დარტყმა

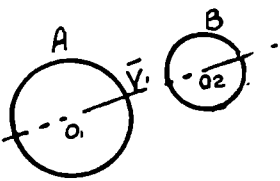
ვთქვათ, ორი სფერო $A$ და $B$, რომელთა მასებია $m_1$ და $m_2$ (ნახ. 261), ერთი და იმავე მიმართულებით მოძრაობს $\bar{v}_1$ და $\bar{v}_2$ სიჩქარეებით წრფეზე, რომელიც აერთებს სფეროთა სიმძიმის ცენტრებს; თუ $v_1 > v_2$, დადგება მომენტი, როცა $A$ სფერო დაეწევა $B$ სფეროს და მოხდება დარტყმა. ასეთ დარტყმას პირდაპირი ანუ ცენტრალური დარტყმა ეწოდება.

თუ სფეროები მოძრაობენ ორ სხვადასხვა წრფეზე, მაშინ სფეროთა შეხვედრისას წარმოშობილ დარტყმას ირიბი დარტყმა ეწოდება.

ამას გარდა, განასხვავებენ ორ ძირითად შემთხვევას:

1) როდესაც სფეროები *არადრეკადია*, ე. ი. როდესაც მათი თავდაპირველი ფორმა აღარ აღიდგინება ძალთა მოქმედების შეწყვეტის შემდეგ, ე. ი. დეფორმაცია არ ისპობა, და

2) როდესაც სფეროები *დრეკადია*, ე. ი. როდესაც სფეროების შეცვლილი ფორმა ძალის მოქმედების შეწყვეტის შემდეგ მთლიანად აღდგება, ე. ი. დეფორმაცია ისპობა.

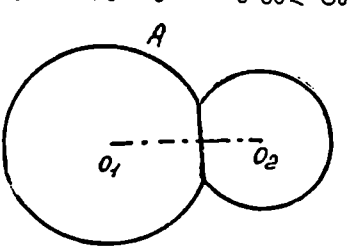


ნახ. 261

**არადრეკადი სფეროების პირდაპირი დარტყმა** (ნახ. 261 და 262).

სფეროთა სიჩქარეები შეხების მომენტში (დარტყმის დასაწყისში) სათანადოდ იყოს $\vec{v}_1$ და $\vec{v}_2$ (მასთან $\vec{v}_1 > \vec{v}_2$).

შეხების მომენტიდან მეტსიჩქარიანი $A$ სფერო აწარმოებს წნევას $B$ სფეროზე და ქმედება-უკუქმედების ტოლობის კანონით $B$ სფეროც ასეთივე ძალით აწარმოებს წნევას $A$ სფეროზე. აღნიშნული წნევის გამო $B$ სფეროს სიჩქარე იწყებს ზრდას, $A$ სფეროსი კი—შემცირებას; ამ წნევის შედეგად შეიცვლება სფეროთა ფორმები—სფეროები შეიჭყლიტება შეხების ადგილებში (ნახ. 262). რადგან $B$ სფეროს სიჩქარე დარტყმის შემდეგ იზრდება, ხოლო $A$ სფეროს სიჩქარე მცირდება, ამიტომ დადგება მომენტი, როდესაც სიჩქარეები გათანაბრდება; ვთქვათ, საერთო სიჩქარეა $\vec{v}$; ამ მომენტში შეწყდება $A$ სფეროს დაწნევა $B$ სფეროზე და $B$ სფეროს უკუწნევა $A$ სფეროზე; შეწყდება დეფორმაციაც. გამოვიყენოთ მოძრაობის რაოდენობის მუდმივობის კანონი.



ნახ. 262

დარტყმამდე მოძრაობის რაოდენობა იყო $m_1v_1+m_2v_2$.

დარტყმის შემდეგ მოძრაობის რაოდენობა კი იქნება $m_1v+m_2v=(m_1+m_2)v$, ამიტომ $m_1v_1+m_2v_2=(m_1+m_2)v$, საიდანაც

$$v=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}, \qquad (1)$$

ე. ი. სხეულთა საერთო სიჩქარე დარტყმის შემდეგ უდრის მათი საწყისი მოძრაობის რაოდენობათა ჯამის ფარდობას მასების ჯამთან.

$B$ სხეულის სიჩქარის გადიდება დარტყმის გამო იქნება

$$v-v_2=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}-v_2=\frac{m_1}{m_1+m_2}(v_1-v_2). \tag{2}$$

$A$ სხეულის სიჩქარის შემცირება კი

$$v_1-v=v_1-\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}=\frac{m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2). \tag{3}$$

როდესაც სფეროები მოძრაობენ ერთიმეორის შესახვედრად, მაშინ (1) ფორმულაში $v_2$ უნდა ავიღოთ უარყოფითი ნიშნით, და გვექნება

$$v=\frac{m_1v_1-m_2v_2}{m_1+m_2}. \tag{4}$$

**კერძო შემთხვევები**

1) ორივე სხეულის მასები თანატოლია.

ამ შემთხვევაში (1) ფორმულა ასე დაიწერება

$$v=\frac{m(v_1+v_2)}{2m},\quad \text{ე. ი.}\quad v=\frac{v_1+v_2}{2}, \tag{5}$$

ე. ი. სხეულთა საერთო სიჩქარე დარტყმის შემდეგ თავდაპირველ სიჩქარეთა საშუალო არითმეტიკულს უდრის.

განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

ა) თუ $B$ სფერო (ნახ. 261) დარტყმამდე მოსვენებულ მდგომარეობაში იყო, მაშინ $v_2=0$ და

$$v=\frac{v_1}{2}. \tag{6}$$

მაშასადამე, ორივე სხეული დარტყმის შემდეგ იმოძრავებს დამრტყმელი სხეულის სიჩქარის ნახევრით.

ბ) სხეულები ერთიმეორის შესახვედრად მოძრაობს.

(5) ფორმულაში $v_2$ უნდა ავიღოთ უარყოფითი ნიშნით, გვექნება

$$v=\frac{v_1-v_2}{2}, \tag{7}$$

ე. ი. საერთო სიჩქარე სხეულთა სიჩქარეების სხვაობის ნახევარს უდრის.

თუ სხეულთა სიჩქარეები ტოლია— $v_1=v_2$, მაშინ

$$v=0, \tag{8}$$

ე. ი. დარტყმის შემდეგ სხეულები გაჩერდება.

2) სხეულთა მასები ტოლი არ არის.

განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

ა) თუ სხეულთა სიჩქარეები ტოლია და მიმართულებით ურთიერთშებრუნებული, მაშინ ($v_1=v_2=c$)

$$v=\frac{m_1c-m_2c}{m_1+m_2}=c\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}. \tag{9}$$

ბ) თუ მოძრავი სხეული ეჯახება უძრავ დიდ $M$ მასას (ე. ი. $m_2=M$ და $v_2=0$), მაშინ

$$v=\frac{m_1v_1}{m_1+M}. \tag{10}$$

როცა სხეულის $M$ მასა მეტად დიდია დამრტყმელი სხეულის $m_1$ მასასთან შედარებით, მაშინ $v=0$, ე. ი. დამრტყმელი სხეული დაკარგავს მთელ თავის სიჩქარეს.

## § 2. არადრეკად სხეულთა დარტყმის მუშაობა

რადგან არადრეკადი სხეულების შემთხვევაში ენერგიის ნაწილი იხარჯება დეფორმაციაზე, ამიტომ არადრეკად სხეულთა ცოცხალი ძალა დარტყმის შემდეგ უფრო მცირეა, ვიდრე ცოცხალი ძალა დარტყმამდე.

ცოცხალი ძალა დარტყმამდე

$$T_1=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}. \tag{1}$$

ცოცხალი ძალა დარტყმის შემდეგ

$$T_2=(m_1+m_2)\frac{v^2}{2}. \tag{2}$$

ამ ფორმულაში $v$-ს ნაცვლად თუ ჩავსვამთ მის მნიშვნელობას

$$v=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2},$$

მივიღებთ

$$T_2=(m_1+m_2)\frac{(m_1v_1+m_2v_2)^2}{2(m_1+m_2)^2}=\frac{(m_1v_1+m_2v_2)^2}{2(m_1+m_2)}. \tag{3}$$

(1) განტოლებას თუ გამოვაკლებთ (2) განტოლებას, მივიღებთ ცოცხალი ძალის დანაკარგს არადრეკად სხეულთა დარტყმის შემდეგ, რაც წარმოადგენს დარტყმის მუშაობას

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2}. \qquad (4)$$

დაკარგული ცოცხალი ძალა უფრო მარტივი სახითაც შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ; მართლაც

$$T = T_1 - T_2 = \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)},$$

ე. ი.

$$T = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2. \qquad (5)$$

ამრიგად, ცოცხალი ძალის დანაკარგი პროპორციულია სხეულების სიჩქარეთა სხვაობის კვადრატისა და, მაშასადამე, დადებითი სიდიდეა.

ახლა, თუ სხეულები ერთიმეორის შესახვედრად მოძრაობენ, მაშინ $v_2$ სიჩქარე უარყოფითი ნიშნით უნდა ავიღოთ და გვექნება

$$T = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 + v_2)^2. \qquad (6)$$

როდესაც $m_1 = m_2 = m$ და $v_1 = v_2 = v_0$, ე. ი. სხეულების მასები და სიჩქარეებიც ტოლია, მაშინ

$$T = \frac{1}{2} \frac{m^2}{2m} (v_0 + v_0)^2, \quad \text{ე. ი.}$$

$$T = m v_0^2, \qquad (7)$$

ე. ი. სხეულები დაკარგავენ მთელ ცოცხალ ძალას

$$\frac{1}{2} (m v_0^2 + m v_0^2).$$

როდესაც ის სხეული, რომელიც ღებს დარტყმას, მოსვენებულ მდგომარეობაშია, ე. ი. $v_2 = 0$, მაშინ (3) და (4) ფორმულები ასეთ სახეს მიიღებენ

$$T_2 = \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 v_1^2}{2\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}. \qquad (8)$$

(8) ფორმულიდან გაჰმოდინარეობს, რომ ცოცხალი ძალა დარტყმის შემდეგ დამოკიდებულია სხეულის $m_1$ მასაზე და $\frac{m_2}{m_1}$ ფარდობაზე. რაც უფრო მცირეა $\frac{m_2}{m_1}$ ფარდობა, მით მეტია $T_2$ ცოცხალი ძალა

$$T_2=\frac{m_1m_2v_1^2}{2(m_1+m_2)}=\frac{m_1v_1^2}{2\left(\frac{m_1}{m_2}+1\right)}. \tag{9}$$

(9) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ ცოცხალი ძალის დანაკარგი პირდაპირპროპორციულია დამრტყმელი სხეულის $m_1$ მასისა, მისი (ამ სხეულის) სიჩქარის კვადრატისა და დამოკიდებულია $\frac{m_1}{m_2}$ ფარდობაზე.

## § 3. დრეკად სხეულთა დარტყმა

დრეკად სხეულთა დარტყმისას განიხილება (ნახ. 261) ორი პერიოდი.

პირველ პერიოდში, ისე როგორც არადრეკად სხეულთა დარტყმისას, ადგილი აქვს ფორმის ცვლას (დეფორმაციას). ეს პერიოდი იწყება სფეროთა პირველი შეხებიდან და გრძელდება სფეროთა უდიდეს შეკუმშვამდე, ე. ი. იმ მომენტამდე, როდესაც მათი სიჩქარეები გათანაბრდება. ამ მომენტიდან იწყება მეორე პერიოდი, რომელშიაც დრეკადი სფეროები (სხეულები) აღიდგენენ შეცვლილ ფორმას.

მეორე პერიოდი გრძელდება უდიდესი დეფორმაციის (ფორმის ცვლის) მომენტიდან ძველი ფორმის აღდგენამდე, ე. ი. მანამდე, სანამ სფეროთა ზედაპირები ერთიმეორეს შეეხება ერთ წერტილში.

დავუშვათ, რომ ორივე სფეროს საერთო სიჩქარე პირველი პერიოდის დასასრულს არის $\vec{v}$ (ნახ. 261), მაშინ $A$ სფეროს სიჩქარის შემცირებაა

$$v_1-v, \tag{10}$$

ხოლო $B$ სფეროს სიჩქარის მატება

$$v_2-v. \tag{11}$$

მეორე პერიოდის განმავლობაში ადგილი ექნება სიჩქარეთა შეცვლას, ამიტომ დარტყმის დასასრულს $A$ სფეროს სიჩქარე იქნება

$$v_1'=v_1-2(v_1-v)=2v-v_1, \tag{12}$$

ხოლო $B$ სფეროსი

$$v_2' = v_2 + 2(v - v_2) = 2v - v_2. \tag{13}$$

პირველი პერიოდის დასასრულს საერთო $v$ სიჩქარე უკვე განსაზღვრეთ შემდეგი ფორმულით

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

(12) და (13) ფორმულებში $v$-ს მნიშვნელობის ჩასმით მივიღებთ

$$v_1' = \frac{2(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} - v_1$$

ანუ

$$v_1' = \frac{2m_2 v_2 + v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}. \tag{14}$$

$$v_2' = \frac{2(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} - v_2$$

ანუ

$$v_2' = \frac{2m_1 v_1 - v_2(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}. \tag{15}$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც სფეროები მოძრაობენ ერთიმეორის შესახვედრად, (14) და (15) ფორმულებში $v_2$ სიჩქარე უნდა ავიღოთ უარყოფითი ნიშნით.

## § 4. დრეკად სხეულთა დარტყმის კერძო შემთხვევები

ვთქვათ, $m_1 = m_2 = m$, ე. ი. სხეულთა მასები თანატოლებია.

(14) და (15) ფორმულებში $m_1 = m_2 = m$ მნიშვნელობის ჩასმით მივიღებთ

$$v_1' = v_2 \quad \text{და} \quad v_2' = v_1. \tag{16}$$

ამრიგად, ამ შემთხვევაში ორივე სხეული დარტყმის შემდეგ შეინაცვლებს სიჩქარეებს.

თუ დარტყმამდე სხეულები მოძრაობენ ერთიმეორის შესახვედრად, მაშინ

$$v_1' = -v_2 \quad \text{და} \quad v_2' = -v_1, \tag{17}$$

ე. ი. დარტყმის შემდეგ სხეულები შეინაცვლებენ სიჩქარეებს და უკუიქცევიან.

თუ სფეროთა სიჩქარეები თანატოლები იქნება, მაშინ დარტყმის შემდეგ სფეროები იმოძრავებენ ურთიერთშებრუნებული მიმართულებით იმავე სიჩქარეებით.

თუ $m_1=m_2=m$ და ერთ-ერთი სფერო, მაგალითად, $B$, მოსვენებულ მდგომარეობაშია ($B$ იღებს დარტყმას; მისი $v_1$ სიჩქარე დარტყმამდე ნულს უდრის), ამ შემთხვევაში $v_1'=0$ და $v_2'=v_1$, ე. ი. დამრტყმელი სხეული დარტყმის შემდეგ გაჩერდება, ხოლო მოსვენებაში მყოფი სხეული, რომელმაც მიიღო დარტყმა, იმოძრავებს დამრტყმელი სხეულის სიჩქარით.

### მაგალითები

1. 10 კგ წონის არადრეკადი სფერო მოძრაობს $v_1=5$ მ/წმ სიჩქარით და ხვდება მეორე 5 კგ წონის სფეროს, რომელიც იმავე მიმართულებით მოძრაობს $v_2=2$ მ/წმ სიჩქარით.

განსაზღვრეთ ამ სფეროთა საერთო სიჩქარე.

#### ამოხსნა

გამოვიყენოთ ფორმულა

$$v=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2},$$

გვექნება

$$v=\frac{10\cdot5+5\cdot2}{10+5}=4 \text{ მ/წმ}.$$

ამრიგად, დარტყმის შემდეგ ორივე სფეროს საერთო სიჩქარე იქნება 4 მ/წამში.

2. განსაზღვრეთ დრეკად სფეროთა საერთო სიჩქარე წინა ამოცანის მონაცემების მიხედვით.

#### ამოხსნა

დამრტყმელი სხეულის სიჩქარე

$$v_1'=\frac{2m_2v_2+v_1(m_1-m_2)}{m_1+m_2}=\frac{2\cdot5\cdot2+5(10-5)}{10+5}=3 \text{ მ/წმ}.$$

იმ სხეულის სიჩქარე, რომელიც იღებს დარტყმას

$$v_2'=\frac{2m_1v_1-v_2(m_1-m_2)}{m_1+m_2}=\frac{2\cdot10\cdot5-2(10-5)}{10+5}=6 \text{ მ/წმ}.$$

3. 100 კგ წონის სხეული, რომლის სიჩქარეა $v_1=0{,}8$ მ/წმ, იღებს დარტყმას 50 კგ წონის სხეულისაგან. განსაზღვრეთ დამრტყმელი სხეულის $v$ სიჩქარე, თუ იმ სხეულის სიჩქარე, რომელიც იღებს დარტყმას, შეადგენს $v_2=1{,}8$ მ/წამში, ორივე სხეული არადრეკადად არის მიჩნეული.

ამოხსნა

ვიყენებთ ფორმულას

$$v=\frac{-m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}=\frac{m_2v_2-m_1v_1}{m_1+m_2}=$$

$$=\frac{50\cdot 1,8-100\cdot 0,8}{50+100}=\frac{1}{15}\ \text{მ/წმ}.$$

**4.** ორი დრეკადი $A$ და $B$ სფერო (ნახ. 261) ერთიმეორის შესახვედრად მოძრაობს; განსაზღვრეთ მათი სიჩქარეები დარტყმის შემდეგ, თუ 8 კგ წონის $A$ სფერო დარტყმამდე მოძრაობს სიჩქარით $v_1=4$ მ/წამში, ხოლო 5 კგ წონის $B$ სფერო სიჩქარით $v_2=2$ მ/წამში.

ამოხსნა

ფორმულებში:

$$v_1'-v_1=2(v_2-v_1)\frac{m_2}{m_1+m_2}\quad\text{და}\quad v_2'-v_2=-2(v_2-v_1)\frac{m_1}{m_1+m_2},$$

$v_2$-ის ნიშანი (—) შევცვალოთ (+) ნიშნით, მაშინ

$$v_1'=\frac{2\cdot 5\cdot 2+4(8-5)}{8+5}=2,46\ \text{მ/წმ}.$$

მსუბუქი სფეროს სიჩქარე

$$v_2'=\frac{2\cdot 8\cdot 4+2(5-8)}{8+5}=5,38\ \text{მ/წმ}.$$

## დამატება

### ერთეულთა საერთაშორისო სისტემა

1960 წელს ქ. პარიზში შედგა ზომა-წონის XI გენერალური კონფერენცია, რომელმაც მიიღო ერთეულთა საერთაშორისო სისტემა. ეს სისტემა სსრ კავშირში მოქმედებაში. შევიდა 1963 წლის 1 იანვრიდან გოსტ 9867-61-ით.

ერთეულთა საერთაშორისო სისტემა აგებულია ექვს ძირითად ერთეულზე (მეტრი, კილოგრამი, წამი, ამპერი, კელვინის გრადუსი, სანთელი) და ორ დამატებით კუთხურ ერთეულზე (რადიანი, სტერადიანი).

ერთეულთა საერთაშორისო სისტემა ლათინური ასოებით აღინიშნება Si (Sisteme international —ინტერნაციონალური სისტემა), რუსულად СИ და ქართულად სი.

Si სისტემის ძირითადი ერთეულები მოყვანილია 1-ლ ცხრილში.

ცხრილი 1

Si-ს ძირითადი ერთეულები

| სიდიდე | საზომი ერთეული | შემოკლებული აღნიშვნები | | |
|---|---|---|---|---|
| | | ლათინური | რუსული | ქართული |
| სიგრძე | მეტრი | *m* | м | მ |
| მასა | კილოგრამი | *kg* | кг | კგ |
| დრო | წამი (სეკუნდი) | *s* | сек | წმ |
| დენის ძალა | ამპერი | *A* | а | ა |
| თერმოდინამიკური ტემპერატურა | კელვინის გრადუსი | $^{\circ}K$ | °К | კელ |
| სინათლის ძალა | სანთელი | *cd* | св | სნთ |

**გოსტ 9867-61-ით მოცემულია ძირითადი ერთეულების შემდეგი განსაზღვრა:**

მ ე ტ რ ი სიგრძეა, რომელიც კრიპტონ 86-ის ატომის $2d_{10}$ და $5d_5$ დონეებს შორის გადასვლის სათანადო გამოსხივების ვაკუუმში ტალღების 1650763,73 სიგრძეს უდრის.

კ ი ლ ო გ რ ა მ ი მასის ერთეულია და კილოგრამის საერთაშორისო პროტოტიპის მასითაა წარმოდგენილი.

წ ა მ ი (სეკუნდი) ეფემერიდული დროის 1900 წლის 1 იანვრის 12 საათის ტროპიკული წლის $\frac{1}{31556925,9747}$ ნაწილს შეადგენს.

ა მ პ ე რ ი უცვლელი დენის ძალაა, რომელიც უსასრულო სიგრძისა და უმნიშვნელოდ მცირე მრგვალი კვეთის პარალელურ და წრფივ ორ სადენში გავლისას (სადენები ერთმანეთისაგან დაშორებულია 1 მეტრით) ამ სადენებს შორის სიგრძის ყოველ მეტრზე საერთაშორისო სისტემის $2.10^{-7}$ ძალის ერთეულის ტოლ ძალას წარმოქმნის ვაკუუმში.

კ ე ლ ვ ი ნ ი ს გ რ ა დ უ ს ი ტემპერატურის საზომი ერთეულია თერმოდინამიკური ტემპერატურული სკალის მიხედვით, რომელშიაც წყლის სამმაგი წერტილის ტემპერატურისათვის დაწესებულია ზუსტი მნიშვნელობა $273,16^{\circ}K$.

ს ა ნ თ ე ლ ი სინათლის ძალის ერთეულია, რომლის მნიშვნელობა ისეთია, რომ სრული გამოსხივების სიკაშკაშე პლატინის გამყარების ტემპერატურის დროს 60 სანთლის ტოლი იყოს 1 სმ²-ზე.

Si-ს დამატებითი ერთეულებია კუთხური ერთეულები—რადიანი და სტერადიანი, რომელთა შემოკლებული აღნიშვნები მე-2 ცხრილშია მოყვანილი.

დამატებითი ერთეულები

| სიდიდე | საზომი ერთეული | შემოკლებული აღნიშვნები | | |
|---|---|---|---|---|
| | | ლათინური | რუსული | ქართული |
| ბრტყელი კუთხე | რადიანი | *rad* | рад | რად |
| სხეულოვანი კუთხე | სტერადიანი | *sr* | стер | სტერ |

გოსტ 9867-61-ით მოცემულია დამატებითი ერთეულების შემდეგი განსაზღვრა:

რადიანი წრის ორ რადიუსს შორის კუთხეა, რომელიც წრეწირზე რადიუსის ტოლი სიგრძის რკალს ამოკვეთს.

სტერადიანი სხეულოვანი კუთხეა, რომლის წვერი სფეროს ცენტრში ძევს და რომელიც სფეროს ზედაპირზე ამოჭრის სფეროს რადიუსის ტოლგვერდიან კვადრატის ფართობს.

## *Si*-ს წარმოებული ერთეულები

გაზომვის დარგის მიხედვით *Si*-ს წარმოებული ერთეულები იყოფა შემდეგ ჯგუფებად:

ა) სივრცისა და დროის ერთეულები;

ბ) მექანიკური ერთეულები;

გ) ელექტრული და მაგნიტური ერთეულები;

დ) სითბოსაზომი ერთეულები;

ე) აკუსტიკური ერთეულები;

ვ) სინათლის ერთეულები და ენერგეტიკული ფოტომეტრიის ერთეულები;

ზ) მაიონიზებელი გამოსხივების ერთეულები.

ქვემოთ მოგვყავს მხოლოდ სივრცისა და დროის წარმოებული ერთეულები და მექანიკური ერთეულები.



სივრცისა და დროის წარმოებული ერთეულები

| სიდიდე | საზომი ერთეული | შემოკლებული აღნიშვნები | | | ერთეულის განზომილება |
|---|---|---|---|---|---|
| | | ლათინური | რუსული | ქართული | |
| ფართობი | კვადრატული მეტრი | $m^2$ | $м^2$ | მ² | (1 მ)·(1 მ) |
| მოცულობა | კუბური მეტრი | $m^3$ | $м^3$ | მ³ | (1 მ)·(1 მ)·(1 მ) |
| ტევადობა | კუბური მეტრი | $m^3$ | $м^3$ | მ³ | (1 მ)·(1 მ)·(1 მ) |
| სიხშირე | ჰერცი | *Hz* | гц | ჰც | 1:(1 წმ) |
| ხაზოვანი სიჩქარე | მეტრი წამში | *m/s* | м/сек | მ/წმ | (1 მ):(1 წმ) |
| ხაზოვანი აჩქარება | მეტრი წამ. კვადრ. | $m/s^2$ | $м/сек^2$ | მ/წმ² | (1 მ/წმ):(1 წმ) |
| კუთხური სიჩქარე | რადიანი წამში | *rad/s* | рад/сек | რად/წმ | (1 რად):(1 წმ) |
| კუთხური აჩქარება | რადიანი წამ. კვადრ. | $rad/s^2$ | $рад/сек^2$ | რად/წმ² | (1 რად):(1 წმ²) |

ცხრილი 4

მექანიკური ერთეულები

| სიდიდე | საზომი ერთეული | შემოკლებული აღნიშვნები | | | ერთეულის განზომილება |
|---|---|---|---|---|---|
| | | ლათინური | რუსული | ქართული | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| სიმკვრივე (მოცულობითი მასა) | კილოგრამი კუბურ მეტრზე | $kg/m^3$ | кг/м³ | კგ/მ³ | (1 კგ):(1 მ³) |
| მოძრაობის რაოდენობა | კილოგრამმეტრი წამში | $kg \cdot m/s$ | кг·м/сек | კგ·მ/წმ | (1 კგ)·(1 მ/წმ) |
| მოძრაობის რაოდენობის მომენტი | კილოგრამი-კვადრატული მეტრი წამში | $kg \cdot m^2/s$ | кг·м²/сек | კგ·მ²/წმ | (1 კგ)·(1 მ/წმ)·(1 მ) |
| ინერციის მომენტი | კილოგრამი-კვადრატული მეტრი | $kg \cdot m^2$ | кг·м² | კგ·მ² | (1 კგ)·(1 მ²) |
| | | $m^4$ | м⁴ | მ⁴ | (1 მ²)·(1 მ²) |
| ბრტყელი ნაკვთის ინერციის მომენტი (ღერძული ან პოლარული | მეტრი მეოთხე ხარისხში | | | | |
| ძალა, ძალის მომენტი, ძალთა წყვილის მომენტი, სტატიკური მომენტი | ნიუტონი | $N$ | Н | ნ | (1 კგ)·(1 მ/წმ²) |
| წნევა, ძაბვა | ნიუტონმეტრი | $N \cdot m$ | Н·м | ნ. მ | (1 ნ)·(1 მ) |
| | ნიუტონი კვადრატულ მეტრზე | $N/m^2$ | Н/м² | ნ/მ² | (1 ნ):(1 მ²) |
| დრეკადობის მოდული, ძერის მოდული მოცულობითი კუმშვის მოდული | ნიუტონი კვადრატულ მეტრზე | $N/m^2$ | Н/м² | ნ/მ² | (1 ნ):(1 მ²) |
| ზედაპირული დაჭიმულობა | ნიუტონი მეტრზე | $N/m$ | Н/м | ნ/მ | (1 ნ):(1 მ) |
| ხვედრითი წონა | ნიუტონი კუბურ მეტრზე | $N/m^3$ | Н/м³ | ნ/მ³ | (1 ნ):(1 მ³) |
| დინამიკური სიბლანტე | ნიუტონწამი კვადრატულ მეტრზე | $N \cdot s/m^2$ | Н·сек/м² | ნ·წმ/მ² | [(1 ნ):(1 მ²)]·[(1 მ):(1 მ/წმ)] |
| კინემატიკური სიბლანტე | კვადრატული მეტრი წამზე | $m^2/s$ | м²/сек | მ²/წმ | (1 ნ·წმ/მ²):(1 კგ/მ³) |
| მუშაობა, ენერგია | ჯოული | $J$ | дж | ჯ | (1 ნ)·(1 მ) |
| სიმძლავრე | ვატი | W | вт | ვატი | (1 ჯ):(1 წმ) |

ცხრილი

გადასაყვანი მამრავლები სიგრძის ერთეულებისათვის

ასოითი აღნიშვნები:
$L_1$ *l*—სიგრძე; $H_1$ *h*—სიმაღლე; *D*, *d*—დიამეტრი; *s*—რკალის სიგრძე.

| საზომი ერთეული | შემოკლებული აღნიშვნები | | | გადამყვანი მამრავლი |
|---|---|---|---|---|
| | ლათინური | რუსული | ქართული | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| მეტრი | *m* | м | მ | 1 |
| მილიმეტრი | *mm* | мм | მმ | 1 მმ=$10^{-3}$ მ |
| მიკრომეტრი (მიკრონი) | *μm* | мкм | მიკრ. მ. | 1 მიკრ. მ=$10^{-6}$ მ |
| ნანომეტრი | *nm* | нм | ნმ | 1 ნმ=$10^{-9}$ მ |
| ანგსტრემი | *A°* | — | *A°* | 1 *A*=$10^{-10}$ მ |
| იქს-ერთეული | *X* | — | *X* | 1 *X*=1,00206·$10^{-13}$ მ |
| იარდი (*yard*) | *yd* | — | იარდი | 1 იარდი=0,9144 მ |
| ფუტი (*foot*) | *ft* | — | ფუტი | 1 ფუტი=0,3048 მ |
| დუიმი (*inch*) | *in* | — | დუიმი | 1 დუიმი=0,0254 მ |
| როდი, პოლი ან პერჩი (*rod, pole or nepch*) | — | — | — | 1 როდი, პოლი ან პერჩი=5,0292 მ |
| საზომი ჯაჭვი (*chain*) | — | — | — | 1 საზომი ჯაჭვი=20,1168 მ |
| მილი (*mile*) | *mil* | — | მილი | 1 მილი=1609,344 მ |
| საზღვაო მილი (*naulical mil*) | — | — | — | 1 საზღვაო მილი=1852 მ |
| წლიური წელი | 1. *y.* | св. год | წლ. წელი | 1 წლ. წელი= =9,4605·$10^{15}$ მ |

ცხრილი

გადასაყვანი მამრავლები დროის ერთეულებისათვის

| საზომი ერთეული | შემოკლებული აღნიშვნები | | | გადამყვანი მამრავლი |
|---|---|---|---|---|
| | ლათინური | რუსული | ქართული | |
| წამი (სეკუნდი) | *s* | сек | წმ | 1 |
| წუთი (მინუტი) | *min* | мин | წთ | 1 წთ=60 წმ. |
| საათი | *h* | ч | სთ | 1 სთ=3600 წმ. |
| დღე-ღამე | *d* | — | დღე-ღამე | 1 დღე-ღამე=86400 წმ. |
| წელი | *a* | — | წელი | 1 წელი=31556925, 9747 წამი (1900 წლისათვის; ასი წლის განმავლობაში 1 წელი 0,5305 წამით მცირდება). |

ცხრილი 7

ერთეულთა გადასაყვანი მამრავლები ბრტყელი კუთხისათვის
ასოითი აღნიშვნები: $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ და ა. შ.

| საზომი ერთეული | შემოკლებული აღნიშვნები | | | გადამყვანი მამრავლი |
|---|---|---|---|---|
| | ლათინური | რუსული | ქართული | |
| რადიანი | *rad* | рад | რად | 1 |
| ბრუნი (სრული კუთხე) | — | об | ბრ | 1 ბრ = $2\pi$ რად = 6,283185 რად |
| მართი კუთხე | $\angle$ | $\angle$ | $\angle$ | $1^{\angle} = \frac{\pi}{2}$ რად = 1,570796 რად |
| გრადუსი | 0 | 0 | 0 | $1^{\circ} = \left(\frac{1}{90}\right)^{\angle}$ = 0,01745329 რად |
| წუთი (მინუტი) | ′ | ′ | ′ | $1^{1} = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$ = $2{,}908882 \cdot 10^{-4}$ რად |
| წამი (სეკუნდი) | ″ | ″ | ″ | $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' =$ $= 4{,}848137 \cdot 10^{-6}$ რად |
| გრადი | *g* | — | *g* | 1 გრადი = $0{,}01^{\angle}$ = 0,01570796 რად |

ცხრილი 8

გადამყვანი მამრავლები ფართობის ერთეულებისათვის
ასოითი აღნიშვნა: $S$

| საზომი ერთეული | შემოკლებული აღნიშვნები | | | გადამყვანი მამრავლი |
|---|---|---|---|---|
| | ლათინური | რუსული | ქართული | |
| კვადრატული მეტრი | $m^2$ | м$^2$ | მ$^2$ | |
| არი | *a* | а | არი | 1 არი = 100 მ$^2$ |
| ჰექტარი | *ha* | га | ჰა | 1 ჰა = $10^4$ მ$^2$ |
| აკრი (*acre*) | — | — | — | 1 აკრი = 4046,86 მ$^2$ |
| კვადრატული დუიმი | $in^2$ | — | — | 1 კვ. დუიმი = $6{,}4516 \cdot 10^{-4}$ მ$^2$ |
| კვადრატული მილი | *sq. mile* | — | კვ. მილი | 1 კვ. მილი = 640 აკრი = $= 2{,}58999 \cdot 10^6$ მ$^2$ |

ცხრილი 9

გადამყვანი მამრავლები მოცულობის ერთეულებისათვის
ასოითი აღნიშვნა: $V$

| საზომი ერთეული | შემოკლებული აღნიშვნები | | | გადამყვანი მამრავლი |
|---|---|---|---|---|
| | ინგლისური | რუსული | ქართული | |
| კუბური მეტრი | $m^3$ | м$^3$ | მ$^3$ | 1 |
| ლიტრი | *l* | л | ლ | 1 ლ = $1{,}000028 \cdot 10^{-3}$ მ$^3$ |
| კუბური დუიმი | $in^3$ | — | დუიმი$^3$ | 1 დუიმი$^3$ = $16{,}3871 \cdot 10^{-6}$ მ$^3$ |
| კუბური ფუტი | $ft^3$ | — | ფუტი$^3$ | 1 ფუტი$^3$ = 0,0283168 მ$^3$ |
| ბუშელი (ინგლისური) | — | — | — | 1 ბუშელი = $38{,}3687 \cdot 10^{-3}$ მ$^3$ |
| ბარელი (აშშ) (ნავთისათვის) | — | — | — | 1 ბარელი = $158{,}988 \cdot 10^{-3}$ მ$^3$ |
| მშრალი ბარელი (აშშ) | — | — | — | 1 მშრალი ბარელი = 0,115628 მ$^3$ |

ცხრილი 10

**გადამყვანი მამრავლები წირითი სიჩქარის ერთეულებისათვის**

ასოითი აღნიშვნები: $v$, $c$

| საზომი ერთეული | შემოკლებული აღნიშვნები | | | გადამყვანი მამრავლი |
|---|---|---|---|---|
| | ინგლისური | რუსული | ქართული | |
| მეტრი წამში | *m/s* | м/сек | მ/წმ | 1 |
| კილომეტრი საათში | *km/h* | км/ч | კმ/სთ | 1 კმ/სთ $= \frac{1}{3,6}$ მ/წმ=0,2777 მ/წმ |
| ფუტი წამში | *ft/s* | — | ფუტი/წმ | 1 ფუტი/წამში=0.3048 მ/წმ |
| მილი საათში | *mile/h* | — | მილი/სთ | 1 მილი/საათში=0,44704 მ/წმ |
| კვანძი (*knot*) | *kn* | — | კვანძი | 1 კვანძი=0,514444 მ/წმ |

ცხრილი 11

**გადამყვანი მამრავლები კუთხური სიჩქარის ერთეულებისათვის**

ასოითი აღნიშვნა: $\omega$

| საზომი ერთეული | შემოკლებული აღნიშვნები | | | გადამყვანი მამრავლი |
|---|---|---|---|---|
| | ინგლისური | რუსული | ქართული | |
| რადიანი წამში | *rad/s* | рад/сек | რად/წმ | 1 |
| ბრუნი წამში | — | об/сек | ბრ/წმ | 1 ბრ/წმ $= 2\pi$ რად/წმ |
| ბრუნი წუთში | — | об/мин | ბრ/წთ | 1 ბრ/წთ $= \frac{\pi}{30}$ რად/წმ |
| გრადუსი წამში | *o/s* | о/сек | °/წმ | 1 °/წმ=0,0174533 რად/წმ |

ცხრილი 12

**გადამყვანი მამრავლები წაზრდვანი აჩქარების ერთეულებისათვის**

ასოითი აღნიშვნები: *a*, *w*

| საზომი ერთეული | შემოკლებული აღნიშვნები | | | გადამყვანი მამრავლი |
|---|---|---|---|---|
| | ინგლისური | რუსული | ქართული | |
| მეტრი წამკვადრატში | $m/s^2$ | м/сек² | მ/წმ² | 1 |
| გალი | *Gal* | — | გალი | 1 გალი=0,01 მ/წმ² |
| ფუტი წამკვადრატში | $ft/s^2$ | — | ფუტი/წმ | 1 ფუტი/წმ²=0,3048 მ/წმ² |

ცხრილი 13

**გადამყვანი მამრავლები მასის ერთეულებისათვის**

ასოითი აღნიშვნა: *m*

| საზომი ერთეული | შემოკლებული აღნიშვნები | | | გადამყვანი მამრავლი |
|---|---|---|---|---|
| | ინგლისური | რუსული | ქართული | |
| კილოგრამი | *kg* | кг | კგ | 1 |
| ტონა | *t* | *т* | ტ | 1 ტ=1000 კგ |
| მასის ტექნიკური ერთეული | $kgf \cdot s^2/m$ | кгс сек²/м | კგ ძალა $\frac{\text{წმ}^2}{\text{მ}}$ | 1 კგ ძალა $\frac{\text{წმ}^2}{\text{მ}}$ = = 9,80665 კგ |
| გირვანქა | *lb* | — | გირვანქა | 1 გირვანქა= =0,45359237 კგ |

ცხრილი 14

**გადამყვანი მამრავლები სიმკვრივის ერთეულებისათვის**

ასოითი აღნიშვნა: ρ

| საზომი ერთეული | შემოკლებული აღნიშვნები | | | გადამყვანი მამრავლი |
|---|---|---|---|---|
| | ინგლისური | რუსული | ქართული | |
| კილოგრამი კუბურ მეტრზე | $kg/m^3$ | кг/м³ | კგ/მ³ | 1 |
| გრამი კუბურ სანტიმეტრზე | $g/cm^3$ | г/см³ | გ/სმ³ | 1 გ/სმ³=10³ კგ/მ³ |
| გრამი მილილიტრზე | $g/ml$ | г/мл | გ/მილლ | 1 გ/მილლ=999,972 კგ/მ³ |

ცხრილი 15

გადამყვანი მამრავლები ძალის ერთეულებისათვის

ასოითი აღნიშვნა: $F$, $P$, $Q$, $R$

| საზომი ერთეულები | შემოკლებული აღნიშვნები | | | გადამყვანი მამრავლი |
|---|---|---|---|---|
| | ინგლისური | რუსული | ქართული | |
| ნიუტონი | *N* | Н | ნ | 1 |
| დინი | *dyn* | дин | დინი | 1 დინი=$10^{-5}$ ნ |
| სტენი | *sn* | — | სტენი | 1 სტენი=$10^{3}$ ნ |
| კილოგრამ-ძალა | *kgf* | кгс, кГ | კგძ, კგ ტძ | 1 კგ=9,80665 ნ |
| ტონა-ძალა | — | *mc* | | 1 ტძ=9,80665·$10^{3}$ ნ |
| პაუნდალი (*paundal*) | *pal* | — | — | 1 პაუნდალი=0,138255 ნ |
| გირვანქა-ძალა (*paund—ferce*) | *lbf* | — | — | 1 გირვანქა-ძალა= =4,44822 ნ |

ცხრილი 16

გადამყვანი მამრავლები ძალის მომენტისა და ძალთა წყვილის მომენტის ერთეულებისათვის

ასოითი აღნიშვნა: $M$

| საზომი ერთეული | შემოკლებული აღნიშვნები | | | გადამყვანი მამრავლი |
|---|---|---|---|---|
| | ინგლისური | რუსული | ქართული | |
| ნიუტონ-მეტრი | $N \cdot m$ | Н·м | ნ·მ. | 1 |
| დინა-სანტიმეტრი | $dyn \cdot cm$ | дин·см | დინა-სმ | 1 დინა-სმ=$10^{-7}$ ნ. მ. |
| კილოგრამ-ძალა. მეტრი | $kgf \cdot m$ | кгс·см | კგძ·მ | 1 კგძ. მ=9,80665 ნ. მ |

ცხრილი 17

გადამყვანი მამრავლები წნევის ერთეულებისათვის

ასოითი აღნიშვნა: $p$

| საზომი ერთეული | შემოკლებული აღნიშვნები | | | გადამყვანი მამრავლი |
|---|---|---|---|---|
| | ინგლისური | რუსული | ქართული | |
| ნიუტონი კვადრატულ მეტრზე | $N/m^2$ | Н/м$^2$ | ნ/მ$^2$ | ∠ |
| პიეზა | *pz* | — | პიეზა | 1 პიეზა=$10^{3}$ $\frac{ნ}{მ^2}$ |
| ბარი | *bar* | бар | ბარი | 1 ბარი=$10^{5}$ $\frac{ნ}{მ^2}$ |
| კილოგრამ-ძალა კვადრატულ მეტრზე | $kgf/m^2$ | кгс/м$^2$ | კგძ/მ$^2$ | 1 კგძ/მ$^2$=წყლის სვეტის 1 მმ=9,80665 $\frac{ნ}{მ^2}$ |
| წყლის სვეტის მილიმეტრი | $mmH_2O$ | ммвод. | წყლის სვეტის მმ | |
| ტექნიკური ატმოსფერო | *at* | ат | ატ | 1 კგძ/სმ$^2$=1 ატ= =98066,5 $\frac{ნ}{მ^2}$ |
| ფიზიკური ატმოსფერო | *atm* | атм | ატმ. | 1 ატმ=1,01325·$10^{6}$ $\frac{ნ}{მ^2}$ |

ცხრილი 18

გადამყვანი მამრავლები ხვედრითი წონის ერთეულებისათვის

ასოითი აღნიშვნა: γ

| საზომი ერთეული | შემოკლებული აღნიშვნები | | | გადამყვანი მამრავლები |
|---|---|---|---|---|
| | ინგლისური | რუსული | ქართული | |
| ნიუტონი კუბურ მეტრზე | $N/m^3$ | Н/м³ | ნ/მ³ | 1 |
| კილოგრამ-ძალა კუბურ მეტრზე | $kgf/m^3$ | кгс/м³ | კგძ/მ³ | 1 კგძ/მ³=9,80665 $\frac{ნ}{მ^3}$ |
| გირვანქა-ძალა კუბურ ფუტზე | $lbf/ft^3$ | — | — | 1 გირვანქა-ძალა კუბურ ფუტზე= =157,087 $\frac{ნ}{მ^3}$ |

# შინაარსი


პირველი განყოფილება 3

შესავალი . . . . . 3

1. თეორიული მექანიკის საგანი და მისი მნიშვნელობა თანამედროვე ტექნიკასა და ბუნებისმეტყველებაში . . . . . 3
2. სიდიდის ცნება. ცვლადი და მუდმივი სიდიდეები . . 4
3. ზოგიერთი ცნება ვექტორული ალგებრიდან . . . . 4
   ა. სკალარული და ვექტორული სიდიდეები . . 4
   ბ. ვექტორის გეგმილი ღერძზე . . . 7
   გ. ვექტორის გეგმილი სიბრტყეზე (ნახ. 9). 8
   დ. ვექტორთა შეკრება და გამოკლება . . 9
   ე. ვექტორების დაშლა . . . . 11
   ვ. ვექტორთა ჯამის გეგმილი ღერძსა და სიბრტყეზე 13
4. მექანიკის განვითარების მოკლე ისტორიული მიმოხილვა 15

მეორე განყოფილება . 20

სტატიკა . . . . . 20

I თავი. ძირითადი ცნებანი, განსაზღვრები და მყარი სხეულის სტატიკის აქსიომები . . . . . 20

§ 1. ძირითადი ცნებანი და განსაზღვრები . . 20

§ 2. სტატიკის აქსიომები . . . . . 23

II თავი. თავმოყრილ ძალთა ბრტყელი სისტემა . . . . 30

§ 1. მყარი სხეულის ერთ წერტილზე მოდებული და ერთი წრფის გასწვრივ მოქმედი ძალების შეკრება . . . . . 30

§ 2. მყარი სხეულის ერთ წერტილზე კუთხით მოდებული ორი ძალის შეკრება . . . . . 31

§ 3. ძალის დაშლა ორ მდგენელ ძალად . . . . . 32
   მაგალითები . . . . . 35

§ 4. თავმოყრილ ძალთა სისტემა. წონასწორობის პირობა . 39
   მაგალითები . . . . . 41

§ 5. ძალის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე . . . . 45

§ 6. თავმოყრილ ძალთა ბრტყელი სისტემის ტოლქმედის პოვნა ანალიზურად . . . . . 47

§ 7. თავმოყრილ ძალთა ბრტყელი სისტემის წონასწორობის ანალიზური პირობა . . . . . 48
   მაგალითები . . . . 49

§ 8. თეორემა ერთ სიბრტყეში მდებარე სამი არაპარალელური ძალის წონასწორობის შესახებ . . . . . 53
მაგალითები . . . . . 54
III თ ა ვ ი. ძალის სკალარული მომენტი წერტილის მიმართ. ერთ სიბრტყეზე მდებარე პარალელური ძალები. ძალთა წყვილის თეორია . . . . . 57
§ 1. ძალის სკალარული მომენტი წერტილის მიმართ . . 57
§ 2. ერთმხრივ მიმართული ორი პარალელური ძალის შეკრება . 61
მაგალითები . . . . . 65
§ 3. სხვადასხვა მოდულის ორი ანტიპარალელური ძალის შეკრება . . 67
§ 4. ერთ სიბრტყეში მდებარე მრავალი პარალელური ძალის შეკრება. პარალელურ ძალთა ცენტრი . . . . . 69
მაგალითები . . . . . 70
§ 5. ძალთა წყვილი . . . . . 73
§ 6. ძალთა წყვილების ძირითადი თვისებები . . . . . 75
§ 7. ერთ სიბრტყეზე მდებარე ძალთა წყვილების შეკრება. ძალთა წყვილების წონასწორობა . . . . . 77
მაგალითები . . . . . 78
§ 8. ვარინიონის თეორემა . . . . . 80
§ 9. ბერკეტის თეორია . . . . . 81
მაგალითები . . . . . 82
IV თ ა ვ ი. ნებისმიერად განლაგებულ ძალთა ბრტყელი სისტემა 85
§ 1. ძალის დაყვანა მოცემულ წერტილზე . . . . . 85
§ 2. სიბრტყეზე ნებისმიერად განლაგებულ ძალთა სისტემის დაყვანა მოცემულ წერტილზე . . . . . 86
§ 3. დაყვანის კერძო შემთხვევები . . . 90
მაგალითები . . . . . 92
§ 4. წონასწორობის პირობები . . . 94
მაგალითები . . . . . 99
§ 5. პარალელურ ძალთა ბრტყელი სისტემის წონასწორობა 107
მაგალითები . . . . . 108
§ 6. ცნება სტატიკურად ურკვევ ამოცანებზე 112
V თ ა ვ ი. ხახუნი . 114
§ 1. სრიალის ხახუნი 114
მაგალითები . . 117
§ 2. გორვის ხახუნი . . 120
მაგალითები . . . . . 122
§ 3. სხეულის დახრილ სიბრტყეზე მოძრაობისას წარმოქმნილი ხახუნი 124
მაგალითები . . . . . 126
VI თ ა ვ ი. გრაფიკული სტატიკის საფუძვლები. ფერმები 127
§ 1. თოკის მრავალკუთხედი . . 127
მაგალითები . . . . . 130
§ 2. წონასწორობის პირობები და საყრდენთა რეაქციების განსაზღვრა 131
§ 3. ფერმის განსაზღვრა . . 134

§ 4. ძალების განსაზღვრა ფერმის ღეროებში 137
მაგალითი . . . . . 139
§ 5. ფერმის ღეროებში ძალების განსაზღვრის გრაფიკულ-ანალიზური მეთოდი . . . . . 142
VII თ ა ვ ი. სტატიკა სივრცეში . . . . . 144
§ 1. ძალთა პარალელეპიპედის წესი . . . . . 144
§ 2. სივრცის ერთ წერტილზე მოდებული ძალების შეკრება, მათი წონასწორობის პირობა . . . . . 147
მაგალითები . . . . . 149
§ 3. ძალის ეექტორული მომენტი წერტილის მიმართ, ძალის მომენტი ღერძის მიმართ . . . . . 154
§ 4. ძალთა წყვილის მომენტი. ძალთა წყვილის თეორია სივრცეში . 158
მაგალითი . . . . . 160
§ 5. სივრცითი ძალთა სისტემის დაყვანა ძალასა და ძალთა წყვილზე . 161
§ 6. სივრცეში ნებისმიერად განლაგებულ ძალთა სისტემის წონასწორობის პირობები . . . . . 164
მაგალითები . . . . . 166
§ 7. სხეულის წონასწორობა სივრცეში, როცა მასზე მოქმედებს პარალელური ძალები . . . . . 174
§ 8. ვარინიონის თეორემა სივრცეში ნებისმიერად განლაგებულ ძალთა სისტემისათვის . . . . . 176
VIII თ ა ვ ი. პარალელურ ძალთა ცენტრი და ცენტრის კოორდინატები. სხეულის სიმძიმის ცენტრი . . . . . 177
§ 1. პარალელურ ძალთა ცენტრი და ცენტრის კოორდინატები . . 177
§ 2. სხეულის სიმძიმის ცენტრი. სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები 170
მაგალითები . . . . . 188
§ 3. რთული ნაკეთების ფართობთა სიმძიმის ცენტრის განსაზღვრა 191
IX თ ა ვ ი. წონასწორობის მდგრადობა . 196
§ 1. ცნება სხეულთა მდგრადობის შესახებ . 196
§ 2. მდგრადობის ორი სახე. მდგრადობის საზომი 198
მაგალითები . . . . . 200
მ ე ს ა მ ე გ ა ნ ყ ო ფ ი ლ ე ბ ა
კინემატიკა . . . . . 203
I თ ა ვ ი. წერტილის წრფივი მოძრაობა 203
§ 1. წინასწარი ცნობები . . . . . 203
§ 2. წრფივი მოძრაობის კანონი. მოძრაობის კანონი . 205
მაგალითები . . . . . 206
§ 3. თანაბარი მოძრაობა . . . . . 208
§ 4. თანაბარი მოძრაობის სიჩქარისა და გზის გრაფიკები . 210
§ 5. წერტილის სიჩქარე არათანაბარი მოძრაობის დროს . 211
მაგალითები . . . . . 213
§ 6. წრფივად მოძრავი წერტილის აჩქარება . . . . . 215
§ 7. თანაბრად აჩქარებული მოძრაობის სიჩქარისა და მანძილის. გრაფიკები . 219
II თ ა ვ ი. წერტილის მრუდწირული მოძრაობა . . . . . 220

§ 1. წერტილის მოძრაობის განტოლებათა სახეები . . . 220
§ 2. მოძრავი წერტილის ვექტორული სიჩქარე . . . 222
§ 3. მრუდწირული მოძრაობის დროს წერტილის აჩქარება . . 224
§ 4. წრის სიმრუდე და სიმრუდის რადიუსი . . . . . 226
§ 5. წერტილის აჩქარების განსაზღვრა. მხები და ნორმალური აჩქარებები . 227
§ 6. სიჩქარის განსაზღვრა წერტილის მოძრაობის განტოლებების მიხედვით დეკარტეს კოორდინატებში . . . . . 235
მაგალითები . . . . . 235
§ 7. აჩქარების განსაზღვრა კოორდინატების მიხედვით . . . . 241
მაგალითები . . . . . 244
III თ ა ვ ი. მყარი სხეულის უმარტივესი მოძრაობანი . . . . 247
§ 1. მყარი სხეულის მოძრაობა ერთ წრფეზე არმდებარე მისი სამი წერტილის მოძრაობით განისაზღვრება . . . . . 247
§ 2. მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა . . . . . 249
§ 3. მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობა. კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება . . . . . 251
§ 4. მბრუნავი სხეულის ცალკეული წერტილების მოძრაობა . . . 257
მაგალითები . . . . . 259
IV თ ა ვ ი. მყარი სხეულის მოძრაობის უმარტივეს მოძრაობაზე დაყვანა 262
§ 1. ზოგადი ნაწილი . . . . . 262
I. მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმი . . . . 263
II. მუშტა მექანიზმები . . . . . 269
§ 2. ერთი უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვის მეორე უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვად გარდაქმნა . . . . . 273
I. ღეჟდური გადაცემა . . . . . 273
II. ფრიქციული გადაცემა. კბილანა გადაცემა . 276
V თ ა ვ ი. წერტილის მოძრაობათა შეკრება . . . . . 279
§ 1. წერტილის აბსოლუტური, ფარდობითი და წარმტანი მოძრაობანი 279
§ 2. სიჩქარეთა შეკრების კანონი . . . . . 280
მაგალითები . . . . . 283
§ 3. აჩქარებათა შეკრების კანონი . . . . . 286
VI თ ა ვ ი. მყარი სხეულის ბრტყელ-პარალელური მოძრაობა . 290
§ 1. ცნება მყარი სხეულის ბრტყელ-პარალელური მოძრაობის შესახებ . 290
§ 2. ბრტყელი მოძრაობის დაშლა გადატანით და ბრუნვით მოძრაობებად 291
§ 3. ბრტყელი ნაკეთის სხვადასხვა წერტილის სიჩქარეთა შორის დამოკიდებულება . . . . . 292
§ 4. სიჩქარეთა მყისა ცენტრი . . . . . 293
მაგალითები . . . . . 298
VII თ ა ვ ი. მყარი სხეულის მოძრაობათა შეკრება (ანუ მყარი სხეულის შედგენილი მოძრაობა) . . . . . 301
§ 1. პარალელური ღერძების გარშემო ორი ბრუნვითი მოძრაობის შეკრება 301
§ 2. თანამკვეთი ღერძების გარშემო ორი ბრუნვითი მოძრაობის შეკრება 310
§ 3. ბრახნელი მოძრაობა 312

შ ე ო თ ხ ე ბ ა ნ ჯ ო ფ ი ლ ე ბ ა . . . . . 315
დინამიკა . . . . . 315
I თ ა ვ ი. დინამიკის შესავალი . . . . . 315
§ 1. ძირითადი კანონები . . . . . 315
§ 2. ერთეულთა სისტემა . . . . . 315
მაგალითები . . . . . 320
II თ ა ვ ი. თავისუფალი ნივთიერი წერტილის მოძრაობა . . . 323
§ 1. მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები . . . . 323
§ 2. დინამიკის ორი ძირითადი ამოცანა . . . . . 324
მაგალითები . . . . . 326
III თ ა ვ ი. წერტილის დინამიკის ზოგადი თეორემები . . . 332
§ 1. მოძრაობის რაოდენობა და ძალის იმპულსი . . . . . 332
§ 2. ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილება . . 334
§ 3. ძალის მუშაობა და სიმძლავრე . . . . . 337
§ 4. სიმძიმის ძალის მუშაობა . . . . . 344
§ 5. დრეკადობის ძალის მუშაობა . . . . . 345
§ 6. მბრუნავ მყარ სხეულზე მოდებული ძალის მუშაობა და სიმძლავრე 346
მაგალითები . . . . . 347
§ 7. ენერგია, კინეტიკური და პოტენციური ენერგია . . . . 349
§ 8. თეორემა ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილებების შესახებ . . . . . 349
მაგალითები . . . . . 351
IV თ ა ვ ი. არათავისუფალი ნივთიერი წერტილის მოძრაობა 354
§ 1. არათავისუფალი ნივთიერი წერტილი . . . . . 354
§ 2. ინერციის ძალა . . . . . 355
§ 3. დალამბერის პრინციპი . . . . . 356
V თ ა ვ ი. სისტემის დინამიკის ელემენტები . . . . 359
§ 1. მექანიკური სისტემა. გარე და შიგა ძალები . . . . . 359
§ 2. დალამბერის პრინციპი სისტემისათვის . . . . . 359
§ 3. ინერციის მომენტი . . . . . 361
§ 4. პოლარული ინერციის მომენტი . . . . . 363
§ 5. ინერციის მომენტი კოორდინატთა დასაწყისის მიმართ . . . 363
§ 6. ინერციის მომენტი პარალელური ღერძების მიმართ . . . . 364
მაგალითები . . . . . 365
§ 7. დინამიკის ძირითადი განტოლება მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის შემთხვევაში . . . . . 370
§ 8. მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა . 372
§ 9. კინეტიკური ენერგია მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობის დროს 374
§ 10. ი კუთხური სიჩქარით უძრავი $O_z$ ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის კინეტიკური ენერგია . . . . . 374
§ 11. მყარი სხეულის კინეტიკური ენერგია ბრტყელ-პარალელური მოძრაობის დროს . . . . . 375
მაგალითები . . . . . 375
§ 12. თეორემა მექანიკური სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების შესახებ . . . . . 379

VI თავი. დარტყმის თეორია . . . 383
§ 1. სხეულთა დარტყმა . . . . . 383
§ 2. არადრეკად სხეულთა დარტყმის მუშაობა . 386
§ 3. დრეკად სხეულთა დარტყმა . . . . 388
§ 4. დრეკად სხეულთა დარტყმის კერძო შემთხვევები 389
მაგალითები . . . . . 390
დამატება. ერთეულთა საერთაშორისო სისტემა 391

რეცენზენტები:
ტექნიკურ მეცნიერებათა კანდიდატი, დოც. ვ. გოთოშია
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, დოც. გრ. ჩხიკვაძე

ნაშრომი რეკომენდებულია თბილისის მანქანათმშენებლობის ტექნიკუმის მიერ

რედაქტორი ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფ. პ. ზ ე რ ა გ ი ა
გამომცემლობის რედაქტორი ჩ. გ უ რ გ ე ნ ი ძ ე
მხატვრული რედაქტორი ს. ბ ო ტ კ ო ე ვ ი
ტექრედაქტორი ა. დ ო გ რ ა შ ვ ი ლ ი
კორექტორი ვ. გ ო გ ს ა ძ ე

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 31/VIII-71; ქაღალდის ზომა 60×90¹/₁₆;
ნაბეჭდი თაბახი 25,5; საღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 20,2;
შეკვეთა № 761; უე 01369 ტირაჟი 1000

ფასი 11 კაპ.

გამომცემლობა „განათლება“. თბილისი, კამოს ქ. № 18
Издательство «Ганатлеба», Тбилиси, ул. Камо № 18.
1971

საქ. სსრ მეცნ. აკადემიის სტამბა, თბილისი, 380060, კუტუზოვის ქ., 19
Типография АН ГССР, Тбилиси, 380060, Кутузова, 19